













2  
A22  
KONINKLIJKE AKADEMIE  
VAN WETENSCHAPPEN  
-- TE AMSTERDAM --

88094

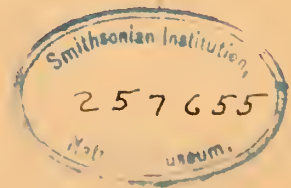
*Smith*

VERSLAG VAN DE GEWONE  
VERGADERINGEN DER WIS- EN  
NATUURKUNDIGE AFDEELING

VAN 29 DECEMBER 1917  
- TOT 26 APRIL 1918 -

*59*

DEEL XXVI  
(2<sup>DE</sup> GEDEELTE)



JOHANNES MÜLLER :—: AMSTERDAM  
: : : JULI 1918 : :





KONINKLIJKE AKADEMIE  
VAN WETENSCHAPPEN  
-:- TE AMSTERDAM -:-

VERSLAG VAN DE GEWONE  
VERGADERINGEN DER WIS- EN  
NATUURKUNDIGE AFDEELING

VAN 29 DECEMBER 1917  
- TOT 26 APRIL 1918 -

---

D E E L XXVI  
(2<sup>DE</sup> GEDEELTE)

---

JOHANNES MÜLLER :—: AMSTERDAM  
: ——— : JULI 1918 : ——— :



# INHOUD.



Verslag Vergadering	29 December	1917 N <sup>o</sup> . 6	. . . . .	<sup>Blz.</sup> 979
„	„	26 Januari	1918 N <sup>o</sup> . 7	. . . . . 1137
„	„	23 Februari	„ N <sup>o</sup> . 8	. . . . . 1237
„	„	23 Maart	„ N <sup>o</sup> . 9	. . . . . 1357
„	„	26 April	„ N <sup>o</sup> . 10	. . . . . 1455





# KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

## VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING VAN ZATERDAG 29 DECEMBER 1917.

DEEL XXVI.

N<sup>o</sup>. 6.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.

Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

### INHOUD.

- Ingekomen stukken, p. 980.
- H. A. LORENTZ: „Het verband tusschen hoeveelheid van beweging en energiestroom. Opmerkingen over den bouw van electronen en atomen“. I, p. 981.
- C. B. BIEZENO: „Graphische bepaling der overgangsmomenten van een elastisch ondersteunden, statisch onbepaalden balk“. II. (Aangeboden door de Heeren J. CARDINAAL en JAN DE VRIES), p. 996.
- L. S. ORNSTEIN: „Over de BROWN'sche beweging“. (Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en W. H. JULIUS), p. 1005.
- H. C. DELSMAN: „Korte geschiedenis van den kop der gewervelde dieren“. (Aangeboden door de Heeren J. BOEKE en J. F. VAN BEMMELEN), p. 1018 (Met één plaat).
- J. J. L. DE NEVE: „Het gedrag der megakaryocyten in de milt van de jonge kat“. (Aangeboden door de Heeren J. BOEKE en H. ZWAARDEMAKER), p. 1034.
- P. NIEUWENHUYSE: „Bijdrage tot de pathologische histologie van dwarsgestreept spierweefsel“. (Aangeboden door de Heeren C. A. PEKELHARING en C. H. H. SPRONCK), p. 1047.
- H. C. BURGER: „Over de verdamping van een cirkelvormig vloeistoffoppervlak“. (Aangeboden door de Heeren W. H. JULIUS en J. P. VAN DER STOK), p. 1057.
- ARNAUD DENJOY: „Sur une propriété des fonctions de variable complexe“. (Aangeboden door de Heeren W. KAPTEYN en L. E. J. BROUWER), p. 1063.
- L. HAMBURGER: „Over licht-emissie door gassen en mengels van gassen bij electriche ontladingen.“ (Aangeboden door de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en H. A. LORENTZ), p. 1069. (Met één plaat.)
- ERNST COHEN: „De Allotropie van Kadmium“. VI, p. 1075.
- ERNST COHEN en H. R. KRUYT: „Het warmte-effect bij de vorming van mengkristallen“, p. 1084.
- G. DE BRUIN: „Over de vervangbaarheid, in amidon, van een gealkyleerde anilino-groep door de anilino-groep door verhitting met zoutzuuraniline“. (Voorloopige mededeeling). (Aangeboden door de Heeren P. VAN ROMBURGH en ERNST COHEN), p. 1085.
- Mevr. T. EHRENFEST—AFANASSJEW: „De bepaaldheid van makroskopische processen en de kinetische theorie“. (Aangeboden door de Heeren J. P. KUENEN en W. H. JULIUS), p. 1088.
- G. NORDSTRÖM: „Iets over de massa van een stoffelijk stelsel volgens de gravitatie-theorie van EINSTEIN“. (Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en H. KAMERLINGH ONNES), p. 1093.
- W. J. DE HAAS: „Over het diffractieverschijnsel, voortgebracht door een groot aantal onregelmatig verspreide openingen of ondoorschijnende lichaampjes“. (Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en H. KAMERLINGH ONNES), p. 1109.
- H. A. LORENTZ: „Over de wisselingen der intensiteit in het buigingsbeeld van een groot aantal onregelmatig verspreide openingen of lichaampjes“, p. 1120.
- De Heer C. E. A. WICHMANN biedt ter uitgave in de werken der Akademie aan het manuscript van zijn verhandeling „Die Erdbeben des Indischen Archipels bis zum Jahre 1857“, p. 1136.
- De heer C. A. PEKELHARING biedt, namens Mej. M. A. VAN HERWERDEN, ter uitgave in de werken der Akademie aan het manuscript harer verhandeling: „Untersuchungen über die parthenogenetische und geschlechtliche Fortpflanzung von *Daphnia pulex*“, p. 1136.
- Aanbieding van boekgeschenken, p. 1136.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn :

1. Bericht van de Heeren H. HAGA, F. M. JAEGER en H. KAMERLINGH ONNES, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2. Uitnoodiging van het Bestuur der „Naturforschende Gesellschaft“ te Dantzig tot bijwoning van eene feestelijke zitting, welke dit Genootschap op den 2<sup>en</sup> Januari 1918 voornemens is te houden ter herdenking van het feit, dat het op dien datum 175 jaren zal hebben bestaan.

Geantwoord werd dat de Akademie niet in de gelegenheid is vertegenwoordigers te zenden, doch dat zij met erkentelijkheid de uitnoodiging heeft ontvangen en haren gelukwensch aanbiedt bij de herdenking van dit feit.

**Natuurkunde.** — De Heer LORENTZ doet eene mededeeling: „*Het verband tusschen hoeveelheid van beweging en energiestroom. Opmerkingen over den bouw van electronen en atomen.*” I.

§ 1. Zooals men weet wordt eene op de z-as betrekking hebbende relativiteitstransformatie voorgesteld door de vergelijkingen

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = az - bct, \quad t' = at - \frac{b}{c}z, \quad \dots \quad (1)$$

wàarin  $c$  de lichtsnelheid is, terwijl  $a$  en  $b$  constanten zijn, tusschen welke de betrekking

$$a^2 - b^2 = 1 \quad \dots \quad (2)$$

bestaat, en van welke de eerste positief moge zijn. Bij die vergelijkingen behooren de volgende transformatieformules <sup>1)</sup> voor de spanningen  $X_x, X_y,$  enz., de componenten  $g_x, g_y, g_z$  van de per volume eenheid bestaande hoeveelheid van beweging, de componenten  $s_x, s_y, s_z$  van den energiestroom en de energie  $\epsilon$  per volume-eenheid: <sup>2)</sup>

$$X'_x = X_x, \quad Y'_y = Y_y, \quad X'_y = X_y, \quad Y'_x = Y_x, \quad \dots \quad (3)$$

$$X'_z = aX_z + bcg_x, \quad Y'_z = aY_z + bcg_y, \quad \dots \quad (4)$$

$$Z'_x = aZ_x + \frac{b}{c}s_x, \quad Z'_y = aZ_y + \frac{b}{c}s_y, \quad \dots \quad (5)$$

$$Z'_z = a^2Z_z + \frac{ab}{c}s_z - abcg_z - b^2\epsilon, \quad \dots \quad (6)$$

$$g'_x = ag_x + \frac{b}{c}X_z, \quad g'_y = ag_y + \frac{b}{c}Y_z, \quad \dots \quad (7)$$

$$g'_z = a^2g_z + \frac{ab}{c}Z_z - \frac{ab}{c}\epsilon + \frac{b^2}{c^2}s_z, \quad \dots \quad (8)$$

$$s'_x = as_x + bcZ_x, \quad s'_y = as_y + bcZ_y, \quad \dots \quad (9)$$

$$s'_z = a^2s_z + abcZ_z - abc\epsilon + b^2c^2g_z, \quad \dots \quad (10)$$

$$\epsilon' = a^2\epsilon - abcg_z - \frac{ab}{c}s_z - b^2Z_z \quad \dots \quad (11)$$

<sup>1)</sup> Men komt tot deze formules het gemakkelijkst als men van de transformatie-vergelijkingen der algemeene relativiteitstheorie (van welke overigens in deze mededeeling geen sprake is) uitgaat.

<sup>2)</sup> Voor de hoeveelheid van beweging en de energie van een stelsel of een lichaam zullen wij  $G$  en  $E$  schrijven.

Volgens de relativiteitstheorie bestaan tusschen de spannings-energie-componenten de betrekkingen

$$\begin{aligned} X_y = Y_x, \quad Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z, \\ s_x = c^2 g_x, \quad s_y = c^2 g_y, \quad s_z = c^2 g_z, \quad \dots \quad (12) \end{aligned}$$

en wel in *elk* coördinatenstelsel; de transformatieformules brengen mede dat zij in het stelsel  $x', y', z', t'$  gelden als er in het stelsel  $x, y, z, t$  aan voldaan is.

Van deze betrekkingen zijn de eerste drie van ouds bekend. Daarentegen is het door (12) uitgedrukte verband tusschen de hoeveelheid van beweging en den energiestroom (in vectorschrijfwijze  $s = c^2 g$ ) welk verband men het eerst in het geval van het electromagnetisch veld heeft leeren kennen, karakteristiek voor de relativiteitstheorie. Op het standpunt der vroegere natuurkunde moet men het zelfs bevreemdend vinden, daar men in menig geval bij eerste overweging in het geheel niet aan een samenhang tusschen de genoemde grootheden zou denken. Misschien zal het goed zijn, voor wij van de in herinnering gebrachte betrekkingen gebruik maken bij eenige beschouwingen over de structuur van electronen en atomen (§ 6), de vergelijkingen (12) met een paar voorbeelden toe te lichten.

§ 2. Wij beschouwen vooreerst een gasmassa waarvan de molekulen als stoffelijke punten kunnen worden behandeld. Wij verdeelen de deeltjes in groepen, elk door een bepaalde snelheid gekenmerkt, en schrijven  $N$  voor het aantal deeltjes van een groep per volume-eenheid,  $m$  voor de massa van een molekuul<sup>1)</sup>,  $v_x, v_y, v_z$  voor de componenten der snelheid  $v$ . Een sommatie over de verschillende groepen duiden wij door het teeken  $\Sigma$  aan. Daar de component der hoeveelheid van beweging van een molekuul in de richting der  $z$ -as

$$\frac{m v_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

is, heeft men

$$g_z = \Sigma \frac{m N v_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \dots \dots \dots (13)$$

Het aantal tot een bepaalde groep behorende deeltjes die door een vlakke-element loodrecht op de  $z$ -as gaan, bedraagt per vlakke-eenheid en tijdseenheid  $Nv_z$ , en daar elk deeltje een energie

<sup>1)</sup> Met „massa” wordt steeds de „Minkowski'sche” massa bedoeld, die voor elk lichaam of deeltje een constante waarde heeft, onafhankelijk van de keus van het coördinatenstelsel. Zij kan als maat voor de „hoeveelheid materie” worden aangezien.



$$\frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \dots \dots \dots (14)$$

bezit, heeft men

$$s_z = \sum \frac{m N c^2 v_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

wat inderdaad gelijk aan  $c^2 g_z$  is.

Men merke op dat deze uitkomst bepaaldelijk hieraan te danken is, dat aan een deeltje, zelfs als het in het geheel geen snelheid bezit, toch nog een zekere energie, ten bedrage van  $mc^2$ , wordt toegeschreven. Dientengevolge zal, ook wanneer deeltjes met een uiterst kleine snelheid  $v$  door het beschouwde vlak gaan, daaraan een transport van energie gelijk aan  $c^2$  maal de hoeveelheid van beweging per volume-eenheid beantwoorden, terwijl volgens de oude physica nauwelijks een energiestroom bestaan zou. Immers, hij zou evenredig met  $v^2 v_z$  zijn.

In andere gevallen zou men naar de vroegere opvattingen wel aan een energiestroom, maar niet aan eene hoeveelheid van beweging denken. Als b.v. de uiteinden van een cilindervormige gasmassa op verschillende standvastige temperaturen worden gehouden, ontstaat een stationaire toestand met een energiestroom, nl. de warmtegeleiding, maar op het eerste gezicht zonder hoeveelheid van beweging, daar er geen strooming in het gas plaats heeft. Inderdaad brengt de stationaire toestand mede, dat door een doorsnede van de kolom, waarvan wij ons de lengte volgens de  $z$ -as gericht denken, evenveel molekulen naar den eenen als naar den anderen kant gaan, en dit vereischt dat  $\sum N v_z = 0$  en dus ook  $\sum N m v_z = 0$  is, wat volgens de oude mechanica wil zeggen dat de resulterende hoeveelheid van beweging nul is. In de relativiteitsmechanica blijven deze vergelijkingen gelden, maar niettemin kan nu zeer goed de door (13) bepaalde hoeveelheid van beweging van 0 verschillend zijn. Dit geval zal zich juist bij het onderstelde temperatuurverschil voordoen. Immers, wanneer de temperatuur het hoogst is aan de zijde der negatieve  $z$ , zoodat de energiestroom de positieve richting heeft, dan zullen de deeltjes die naar den positieven kant gaan, over het geheel grooter snelheid hebben dan die, welke zich naar de negatieve zijde bewegen. Met positieve waarden van

$v_z$  zullen kleinere waarden van  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  gepaard gaan dan met

negatieve waarden van  $v_z$ ; zoo kan (13) een positieve waarde hebben, al is  $\sum Nm v_z$  nul.

§ 3. In de tweede plaats verbeelden wij ons een lange en dunne veerkrachtige staaf, die in het coördinatenstelsel  $x, y, z$  in rust is, met de lengte volgens de  $z$ -as en die door krachten in de richting der lengte op de uiteinden werkende wordt uitgerekt. Wij stellen ons voor dat deze krachten  $K$ , steeds gelijk aan elkaar zijnde, zeer langzaam van 0 af tot een waarde  $K_1$ , die zij dan verder behouden, aangroeien; de staaf in zijn geheel genomen, krijgt daarbij geen snelheid. Is de lengte oorspronkelijk  $l$  en op eenig oogenblik gedurende de uitrekking  $l(1 + \sigma)$ , dan zal tusschen de dilatatie  $\sigma$  en de kracht  $K$  een bepaald, van den aard van het materiaal afhankelijk verband bestaan <sup>1)</sup>, stel

$$K = f(\sigma) \dots \dots \dots (15)$$

en men heeft, als aan  $K_1$  de waarde  $\sigma_1$  beantwoordt, voor den door de krachten bij het uitrekken verrichten arbeid

$$l \int_0^{\sigma_1} K d\sigma.$$

Zij verder  $\rho_0$  de massa per lengte-eenheid voor de ongerekte staaf. Dan is het aanvankelijke arbeidsvermogen (verg. (14))  $l\rho_0 c^2$  en dus na de uitrekking de energie per lengte-eenheid, als

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \sigma_1} \dots \dots \dots (16)$$

de dichtheid in den gerekten toestand is,

$$\varepsilon = \rho c^2 + \frac{1}{1 + \sigma_1} \int_0^{\sigma_1} K d\sigma \dots \dots \dots (17)$$

De beteekenis die  $\varepsilon$  hier heeft, wijkt in zooverre van de vroegere (§ 1) af, dat nu de energie per lengte-eenheid en niet per volume-eenheid, bedoeld is. Wij zullen, overeenkomstig daarmede, onder  $g_z$  de hoeveelheid van beweging per lengte-eenheid verstaan, onder  $Z_z$  de spanning over de geheele doorsnede, en onder  $s_z$  den energiestroom door de volle doorsnede.

Wij zullen nu den toestand van de staaf beschrijven in het stelsel  $x', y', z', t'$ , waartoe wij door de transformatie (1) overgaan. Daarbij verandert de doorsnede niet en wij kunnen dus bij de nieuwe

---

<sup>1)</sup> Het is niet noodig in de volgende beschouwingen de grootheid  $\sigma$  oneindig klein te onderstellen.

beteekenis die wij aan  $Z_z, g_z, s_z, \varepsilon$  en, in overeenstemming daarmede aan  $Z'_z, g'_z, s'_z, \varepsilon'$  geven, nog steeds van de formules (6), (8), (10) en (11) gebruik maken.

In het nieuwe stelsel heeft de staaf een snelheid

$$v' = -\frac{bc}{a} \dots \dots \dots (18)$$

in de richting der  $z'$ -as en een lengte

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}$$

Substitueeren wij nu voor  $\varepsilon, Z_z, g_z$  en  $s_z$  de waarden (17),  $K, 0$  en  $0$ , voeren wij de nieuwe massa per lengte-eenheid

$$\varrho' = \frac{\varrho}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \dots \dots \dots (19)$$

in en laten wij ten slotte de accenten en den index 1 weg, dan komt er

$$Z_z = K - v^2 Q, \quad g_z = v Q, \quad s_z = c^2 v Q, \dots \dots (20)$$

$$\varepsilon = K + c^2 Q, \dots \dots \dots (21)$$

waarbij ter bekorting

$$Q = \frac{\varrho}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{1}{c^2 - v^2} \left( -K + \frac{1}{1 + \sigma} \int_0^\sigma K d\sigma \right) \dots (22)$$

gesteld is.

Wij merken hierbij op dat  $\sigma$  uit de massa  $\varrho$  per lengte-eenheid en de waarde  $\varrho_0$  die deze in de stilstaande en niet gerekte staaf heeft, kan worden gevonden door de uit (16) en (19) volgende formule

$$\sigma = \frac{\varrho_0}{\varrho \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \dots \dots \dots (23)$$

Met behulp van (15) kunnen dan ook  $K$  en  $\int_0^\sigma K d\sigma$  worden berekend. Derhalve worden door (20), (21) en (22) de spanning, de hoeveelheid van beweging, de energiestroom en de energie in de zich bewegende en gerekte staaf als functiën van de snelheid en de dichtheid voorgesteld.

Daarbij hebben, zooals uit de transformatieformules voor krachten

blijkt <sup>1)</sup>, de op de uiteinden werkende krachten nog altijd de grootte  $K$ .

Dat de spanning  $Z_z$  daarvan verschilt, ligt hieraan dat die grootte op een *stilstaand* vlak, loodrecht op de  $z$ -as, betrekking heeft, en dat in de grootte ervan niet alleen de kracht  $K$  begrepen is, die het aan de positieve zijde van dat vlak liggende deel der staaf op het deel aan de negatieve zijde uitoefent, maar bovendien de hoeveelheid van beweging, van het geschikte teeken voorzien, die bij de verschuiving der staaf door het vlak heen gaat. Men vindt voor die hoeveelheid van beweging  $-vg_z$  en werkelijk levert de tweede der uitdrukkingen (20), met  $-v$  vermenigvuldigd en bij  $K$  opgeteld, de waarde (20) van  $Z_z$  op.

Op een dergelijke wijze kan men van den energiestroom  $s_z$  reenschap geven. Daarin zijn n.l. begrepen de arbeid  $-vK$  die het aan de negatieve zijde liggende deel van de staaf op het deel aan de positieve zijde per tijdseenheid uitoefent, en de bij de beweging der staaf door het vlak heen per tijdseenheid getransporteerde energie, waarvan het bedrag  $v\varepsilon$  is.

Men kan overigens de vergelijkingen (20) en (21) ook verkrijgen door, terwijl men zich van het stelsel  $x', y', z', t'$  bedient, het uitrekken der staaf in het oog te vatten. Daartoe heeft men slechts de mathematische beschrijving van de in het begin dezer § aangegeven bewerking getrouw in het stelsel  $x', y', z', t'$  over te brengen, en dan in dat stelsel uit de krachten en hun arbeid de verandering van de hoeveelheid van beweging en de energie af te leiden.

§ 4. De betrekkingen (20) en (21) kunnen dienen om de bewegingsvergelijkingen op te stellen voor een staaf bij welke  $q$  en  $v$  langzaam van punt tot punt veranderen, zoo langzaam n.l. dat de afstand over welken een merkbare verandering plaats heeft, zeer groot is in vergelijking met de afmetingen der doorsnede. Men kan dan twee op den oneindig kleinen afstand  $dz$  van elkaar liggende vaste platte vlakken  $P_1$  en  $P_2$  loodrecht op de  $z$ -as beschouwen, en uitdrukken dat de verandering der tusschen die vlakken liggende hoeveelheid materie bepaald wordt door de hoeveelheden die door

<sup>1)</sup> Deze formules hebben n.l. den vorm

$$\frac{F'_x}{\sqrt{c^2 - v'^2}} = \frac{F_x}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \quad \frac{F'_y}{\sqrt{c^2 - v'^2}} = \frac{F_y}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

$$\frac{F'_z}{\sqrt{c^2 - v'^2}} = a \frac{F_z}{\sqrt{c^2 - v^2}} - \frac{b}{c \sqrt{c^2 - v^2}} (v_x F_x + v_y F_y + v_z F_z).$$

Stelt men in de laatste vergelijking  $v = 0$ ,  $F_x = F_y = 0$ ,  $F_z = K$  en voor  $v'$  de waarde (18), dan vindt men  $F'_z = K$ .

$P_1$  en  $P_2$  heengaan, en dat evenzoo de verandering der hoeveelheid van beweging tusschen  $P_1$  en  $P_2$  door de waarden van de spanning aan die vlakken, en de verandering der energie door de waarden van den energiestroom bepaald wordt. Men komt daardoor tot drie vergelijkingen, nl.

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial (\varrho v)}{\partial z} = 0, \quad . . . . . (24)$$

en

$$\frac{\partial g_z}{\partial t} = \frac{\partial Z_z}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = - \frac{\partial s_z}{\partial z},$$

of wel

$$\frac{\partial (v Q)}{\partial t} + \frac{\partial (v^2 Q - K)}{\partial z} = 0, \quad . . . . . (25)$$

$$\frac{\partial (c^2 Q + K)}{\partial t} + \frac{\partial (c^2 v Q)}{\partial z} = 0 \quad . . . . . (26)$$

Hieraan moet nog het door (15) en (23) uitgedrukte verband tusschen  $K$ ,  $\varrho$  en  $v$ , alsmede de voorwaarden aan de uiteinden, b.v. dat daar de kracht  $K$  of de snelheid  $v$  een voorgeschreven waarde heeft, worden toegevoegd. Met elkander bepalen de vergelijkingen hoe zich longitudinale golven over de staaf kunnen voortplanten; zij kunnen ook dienen om in bijzonderheden na te gaan hoe de staaf door een kracht die eenigen tijd, b.v. op een der uiteinden werkt, in beweging wordt gebracht, en hoe daarbij door een tijdelijk verschil in de snelheden der eindpunten de door den factor  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  bepaalde contractie tot stand komt.

Daar de toestand der staaf in elk punt door de twee grootheden  $\varrho$  en  $v$  bepaald is, kunnen er slechts twee van elkaar onafhankelijke differentiaalvergelijkingen zijn. Inderdaad kan men een van de vergelijkingen (24), (25) en (26) uit de beide andere afleiden.

§ 5. In sommige gevallen is het moeilijk, zich door eenvoudige beschouwingen van de geldigheid der betrekkingen (12) te overtuigen. Als b.v. een veerkrachtige bol met zekere snelheid tegen een daaraan gelijken, eerst stilstaanden bol botst en aan dezen zijn geheele beweging afstaat, is er zeker een energiestroom door het vaste vlak, dat op het oogenblik der botsing beide bollen raakt, maar men ziet niet aanstonds hoe daaraan een hoeveelheid van beweging beantwoordt. Een dergelijke moeilijkheid doet zich voor als men de warmtegeleiding wil interpreteren, niet voor een zeer verdund gas

zoals in § 2 beschouwd werd, maar in gevallen waarin de overdracht van energie bij de botsingen een merkbaar deel van het verschijnsel uitmaakt. Men zal in zulke gevallen, in welke de onderlinge werkingen der molekulen in het spel komen, moeten aannemen dat de betrekkingen (12) in elk punt der moleculaire krachtvelden, ook wanneer deze misschien niet van electromagnetischen aard zijn, gelden; is dit het geval, dan zullen zij ook doorgaan als men, met de analyse minder diep gaande, zoowel bij  $g$  als bij  $s$  aan gemiddelden denkt over uitgestrektheden die groot zijn in vergelijking met de moleculaire afmetingen.

In verband met deze opmerkingen moge erop gewezen worden, dat de relativiteitsmechanica ons ertoe dwingt, alle energie te *localiseeren*; het is b.v. geheel uitgesloten, dat wij de potentieele energie van twee elkaar aantrekkende lichamen beschouwen als een mathematische grootheid die geen andere beteekenis heeft dan dat zij met de kinetische energie een standvastige som oplevert. Evenals aan de energie wordt ook aan de hoeveelheid van beweging een bepaalde plaats in de ruimte aangewezen. Zoo leiden de opvattingen van EINSTEIN er toe, diep in het mechanisme der verschijnselen door te dringen.

Kenmerkend voor die opvattingen is ook, dat in de uitdrukking voor de energie nooit een onbepaalde additieve constante voorkomt. Kent men alle bijzonderheden van een stelsel, dan is er in de hoeveelheid van beweging niets onbepaalds. Hetzelfde moet dan ook, wegens den besproken samenhang, van den energiestroom kunnen gezegd worden, en dit sluit een onbepaalde constante in de waarde van de energie uit. Immers, een dergelijke constante zou zich ook doen gevoelen in den energiestroom waarmede men te doen heeft als een stelsel, in translatiebeweging verkeerende, zijn energie medeneemt.

§ 6. Beproeft men, gebruik makende van de begrippen der mechanica, zich in bijzonderheden een voorstelling te maken van de structuur van een electron, dan moet men, behalve de electromagnetische krachten, nog krachten van anderen aard invoeren; bestonden die niet, dan zou het electron door de aan zijn oppervlak werkende, naar buiten gerichte electromagnetische spanningen, of, wat op hetzelfde neerkomt, door de onderlinge afstooting zijner gelijknamig geladen deelen, uiteengerukt worden. Op de vraag naar richting en grootte der bedoelde „supplementaire” krachten, zooals men ze kan noemen, wordt een bepaald antwoord gegeven door een bekende hypothese van POINCARÉ. Volgens deze zou de lading gedragen worden

door een gesloten vlies dat uit zich zelf geenerlei weerstand biedt aan een vorm- of grootteverandering, en zouden de spanningen van het omringende electromagnetische veld in evenwicht gehouden worden door een normale trekspanning aan de binnenzijde van het vlies (waar geen electromagnetisch veld is), en wel zou die spanning per vlakke-eenheid steeds dezelfde grootte  $T$  hebben, ook dan als het electron zich beweegt en daarbij tot een ellipsoïde wordt afgeplat.

Is  $e$  de lading van het deeltje en heeft het in den toestand van rust de gedaante van een bol met den straal  $R$ , dan is

$$T = \frac{e^2}{32 \pi^2 R^4}, \dots \dots \dots (27)$$

waarvoor men kan schrijven

$$T = \frac{3 mc^2}{16 \pi R^3}, \dots \dots \dots (28)$$

als men de massa

$$m = \frac{e^2}{6 \pi c^2 R}, \dots \dots \dots (29)$$

invoert. Met deze laatste grootte hangt ook de energie

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \dots \dots \dots (30)$$

en de hoeveelheid van beweging

$$G = \frac{m v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \dots \dots \dots (31)$$

samen.

Het electromagnetische veld van het electron, zich met de snelheid  $v$  bewegende en tot een ellipsoïde met de halve assen  $R$ ,  $R$

en  $R \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  vervormd, kan gemakkelijk worden bepaald, zoo-

dat men ook de hoeveelheid van beweging in dat veld kan berekenen. Daarbij vindt men juist de waarde (31), en men kan dus besluiten dat de hoeveelheid van beweging geheel van electromagnetischen aard is. Daarentegen vindt men voor de electromagnetische energie niet de waarde (30), maar

$$\frac{1}{4} m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

minder, men moet zich dus voorstellen dat er tot dit bedrag een

energie van niet electromagnetischen aard bestaat. Daar men nu wegens (28) voor onze laatste uitdrukking kan schrijven

$$T V,$$

als  $V$  het volume  $\frac{4}{3} \pi R^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  is, ligt het voor de hand, zich deze „supplementaire” energie als uniform over de inwendige ruimte van het electron verdeeld voor te stellen, en haar in verband te brengen met de spanning  $T$  van POINCARÉ. Inderdaad, als binnen het vlies een *potentiele* energie bestaat, en  $T$  bij vorm- of volumeveranderingen constant blijft, zal bij variatie van  $V$  een arbeid  $- T dV$  op het vlies gedaan worden, waaruit men mag besluiten dat er een spanning  $T$  werkt.

§ 7<sup>1)</sup>. Het verdient in het bijzonder de aandacht dat aan de spanning van POINCARÉ geen hoeveelheid van beweging, en dus ook geen energiestroom moet beantwoorden. Terwijl de electromagnetische energie die buiten het electron ligt, in de translatiebeweging daarvan deelt, moet men zich voorstellen dat de supplementaire energie in het binnenste op haar plaats blijft. Dit is in overeenstemming met het feit dat, zoo lang een stilstaand ruimte-element  $dS$  binnen het electron ligt, het steeds dezelfde energie  $T dS$  bevat, en ook hiermede, dat, zoodra het oppervlak van het electron door het element heen gaat, de daarin aanwezige energie overgaat van de waarde  $T dS$  tot de waarde  $\epsilon dS$  ( $\epsilon$  de electromagnetische energie zijnde), die zij buiten het electron heeft, of omgekeerd.

Om dit laatste toe te lichten stellen wij ons voor dat het electron met de snelheid  $v$  in de richting der positieve  $z$ -as voortgaat en vatten een oppervlakte-element  $d\sigma$  aan de voorzijde in het oog. Wij duiden met  $\alpha, \beta, \gamma$  de hoeken aan, die de naar buiten getrokken normaal met de coördinaatassen maakt, verder met  $d\sigma_1$  en  $d\sigma_2$  de stilstaande vlakke-elementen waarmede  $d\sigma$  aan het begin en het einde van een tijdselement  $dt$  samenvalt. Het tusschen  $d\sigma_1$  en  $d\sigma_2$  begrepen, door  $d\sigma$  doorloopen ruimte-element heeft de grootte  $v \cos \gamma d\sigma dt$  en de daarin bevatte energie verandert met

$$(T - \epsilon) v \cos \gamma d\sigma dt.$$

Daar volgens het gezegde door  $d\sigma_1$  geen energiestroom plaats heeft, en men mag afzien van den stroom door het cilindrische oppervlak dat met  $d\sigma_1$  en  $d\sigma_2$  het volume-element begrenst (daar

<sup>1)</sup> Beschouwingen welke met die van deze § tot op zekere hoogte overeenkomen, vindt men bij J. D. VAN DER WAALS JR., Over de energie en den straal van het electron, dit Zittingsverslag 25 (1917), p. 1109.



dit oppervlak evenredig met  $dt$  en dus de daardoor gaande energie evenredig met  $(dt)^2$  is, moet men hebben

$$(T - \epsilon) v \cos \gamma + s_x \cos \alpha + s_y \cos \beta + s_z \cos \gamma = 0, \quad . \quad . \quad (32)$$

waar  $s_x, s_y, s_z$  op een uitwendig punt in de onmiddellijke nabijheid van het oppervlak betrekking hebben.

Om nu deze vergelijking, die, zooals men gemakkelijk inziet, ook aan de achterzijde moet gelden, op de proef te stellen, zullen wij  $\epsilon, s_x, s_y, s_z$  door middel van de transformatieformules afleiden uit de overeenkomstige grootheden voor het stilstaande electron, welke grootheden wij door accenten zullen onderscheiden. <sup>1)</sup> Daar  $g'_z = 0, s'_z = 0$  is, vindt men

$$\epsilon = a^2 \epsilon' - b^2 Z'_z,$$

$$s_x = -b c Z'_x, \quad s_y = -b c Z'_y, \quad s_z = -a b c Z'_z + a b c \epsilon',$$

terwijl, aangezien het electron in het stelsel  $x', y', z', t'$  stilstaat, de snelheid in het stelsel  $x, y, z, t$ , bepaald wordt door

$$v = \frac{b c}{a}.$$

Laat nu het beschouwde punt van het oppervlak in het eene stelsel de coördinaten  $x, y, z$ , en in het andere de coördinaten  $x', y', z$  hebben, telkens ten opzichte van het middelpunt. Uit de vergelijking der ellipsoïde

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = R^2$$

volgt dat in (32)  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  door  $x, y, \frac{z}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  d. w. z. door

$x', y', \frac{z'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  vervangen mogen worden. Substitueeren wij tevens

voor  $\epsilon, s_x, s_y, s_z$  en  $v$  de aangegeven waarden, dan komt er na eenige herleiding

$$z' T = x' Z'_x + y' Z'_y + z' Z'_z,$$

aan welke vergelijking inderdaad voldaan is. Deelt men nl. door  $R$ , dan krijgt men in het tweede lid de component  $Z'_n$  van de aan

<sup>1)</sup> Wij gebruiken hierbij de formules die men uit (1) en (3) — (11) kan afleiden als men uit die vergelijkingen de niet door accenten onderscheiden grootheden oplost, en die men ook onmiddellijk kan neerschrijven als men in (1) en 3 — (11) de overeenkomstige grootheden met en zonder accenten met elkaar verwisselt en tevens  $b$  door  $-b$  vervangt.

de buitenzijde van het stilstaande electron werkende electromagnetische spanning. Daar die spanning volgens de normaal gericht is en dezelfde grootte als  $T$  heeft, is  $Z'_n = \frac{z'}{R} T$ .

§ 8. Wij zullen nu nagaan wat wij, het model van POINCARÉ generaliseerende, nit de aangenomen grondstellingen omtrent de structuur van het electron kunnen afleiden, als wij aan de onderstelling vasthouden dat, welk coördinatenstelsel men ook kieze, aan de supplementaire krachten geen hoeveelheid van beweging, en dus ook geen energiestroom beantwoordt.

Vooreerst kan men, nog onafhankelijk van deze onderstelling, opmerken dat de *totale* spannings-energie-componenten aan de transformatieformules (3) — (11) onderworpen zijn, en dat dit ook van de *electromagnetische* grootheden, op zich zelf beschouwd, geldt. Wij kunnen dus ook van die formules gebruik maken wanneer wij, zooals wij nu zullen doen, onder  $X_x$ ,  $X_y$ , enz. de *supplementaire* spannings-energie-componenten verstaan. Zal nu zoowel in het stelsel  $x, y, z, t$ , als in  $x', y', z', t'$  de energiestroom nul zijn, dan moet men volgens (9) en (10) hebben.

$$Z_x = 0 \quad , \quad Z_y = 0 \quad , \quad Z_z = \epsilon,$$

waardoor dan ook blijktens (5) en (6)

$$Z'_x = 0 \quad , \quad Z'_y = 0 \quad , \quad Z'_z = \epsilon$$

wordt.

Men kan echter een dergelijke redeneering toepassen als men van een relativiteitstransformatie met betrekking tot de  $x$ - of de  $y$ -as gebruik maakt; men komt dan tot het besluit dat in het stelsel  $x, y, z, t$  ook de overige tangentieele spanningen 0 zijn, en dat, evenals  $Z_z$ , ook  $X_x$  en  $Y_y$  de waarde  $\epsilon$  hebben. Hetzelfde geldt dan blijktens (3) en (4) in het stelsel  $x', y', z', t'$ , terwijl bovendien de vergelijking (11) ons leert dat  $\epsilon' = \epsilon$  is.

Derhalve bestaat in ieder punt van het electron een in alle richtingen even groote normale spanning  $T$ , waarvan de grootte door hetzelfde getal wordt voorgesteld als de energie per volume-eenheid; bovendien is dat getal onafhankelijk van de keus van het coördinatenstelsel. Deze conclusies gelden hoe het electron zich moge bewegen, en hoe het daarbij, en door de werking van uitwendige electromagnetische krachten moge gedeformeerd worden.

§ 9. Wij zullen ons voorstellen dat de lading van het electron met eindige ruimtedichtheid  $\rho$  verdeeld is en vatten een bepaald

punt dier lading in het oog. Zulk een punt, dat aan de beweging van het electron deelneemt, kunnen wij een „substantieel” punt noemen en in denzelfden zin kunnen wij van een substantieel volume-element spreken. Wij zullen aantoonen dat in een bepaald substantieel punt  $T$  voortdurend dezelfde waarde heeft.

Zij nl.  $F_e$  de electromagnetische en  $F_s$  de supplementaire kracht, op een substantieel volume-element werkende, en zij  $dS$  een vaststaand ruimte-element waarmede dat substantieele volume-element op het beschouwde oogenblik samenvalt. Wij verstaan onder  $A_e$  den arbeid per tijdseenheid van  $F_e$ , onder  $A_s$  dien van  $F_s$ , onder  $E_e$  en  $E_s$  de in het element  $dS$  liggende electromagnetische en supplementaire energie, en eindelijk onder  $e$  de door het oppervlak van  $dS$  naar binnen stroomende electromagnetische energie. Dan is, daar er geen supplementaire energiestroom is

$$A_e + A_s + \frac{\partial E_e}{\partial t} + \frac{\partial E_s}{\partial t} = e,$$

en daar volgens een bekende stelling

$$A_e + \frac{\partial E_e}{\partial t} = e$$

is,

$$A_s = - \frac{\partial E_s}{\partial t},$$

wat niet anders wil zeggen dan dat de arbeid der in zeker ruimte-element  $dS$  werkende supplementaire kracht verricht wordt ten koste van de in dat element bevatte supplementaire energie.

Daar nu, als  $v_x, v_y, v_z$  de snelheidscomponenten zijn,

$$A_s = \left( v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) dS$$

en

$$E_s = T dS$$

is, vindt men

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$

waarmede het gestelde bewezen is.

Om nu eens voor al de waarde van  $T$  in elk substantieel punt te kennen, is het voldoende de berekening te doen voor het geval dat het electron in rust is en onttrokken aan alle nitwendige krachten. Stel dat dan, binnen een bol met den straal  $R$ , de lading symmetrisch rondom het middelpunt verdeeld is, zoodat  $q$  een functie

is van den afstand  $r$  tot het middelpunt. Dan is de elektrische potentiaal

$$\varphi = \frac{1}{r} \int_0^r r^2 \rho \, dr + \int_r^R r \rho \, dr$$

en uit de evenwichtsvoorwaarde

$$-\rho \frac{d\varphi}{dr} + \frac{dT}{dr} = 0$$

volgt

$$T = \int_R^r \rho \frac{d\varphi}{dr} \, dr = \int_r^R \frac{\rho}{r^2} \, dr \int_r^r r^2 \rho \, dr, \dots \dots \dots (33)$$

daar wij mogen aannemen dat  $T$  aan het oppervlak verdwijnt.

Voor het arbeidsvermogen  $E$ , de som van de elektrische energie  $\frac{1}{2} \int \rho \varphi \, dS$  en de supplementaire energie  $\int T \, dS$  vindt men na eenige herleiding

$$E = \frac{16}{3} \pi \int_0^R r^2 \rho \, dr \int_r^R r \rho \, dr. \dots \dots \dots (34)$$

Het behoeft nauwelijks gezegd te worden dat de voorstellingswijze van POINCARÉ als een bijzonder geval in de hier uiteengezette begrepen is. Trekt zich de lading  $e$  meer en meer in een dunne schil aan het oppervlak van den bol samen, waarover zij gelijkmatig verdeeld is, dan nadert (34) tot de waarde  $\frac{e^2}{6 \pi R}$ , die men ook uit (30) en (29) vindt, terwijl uit (33) volgt dat overal binnen de schil een spanning van de door (27) bepaalde grootte bestaat.

§ 10. Gebruik makende, hetzij van de voorstellingswijze van POINCARÉ, hetzij van de meer algemeene die in de laatste twee §§ besproken is, zou men nu met inachtneming van de supplementaire krachten in bijzonderheden kunnen nagaan hoe een electron in verschillende gevallen in beweging gebracht en gedefformeerd wordt, als niet het groote bezwaar bestond, dat de toestand dien wij beschouwd hebben, labiel is. Wat het model van POINCARÉ betreft, is dit reeds lang geleden door ABRAHAM opgemerkt, en in het algemeen blijkt het op de volgende wijze.

Daar men bij een stilstaand electron zoowel het elektrische als het

supplementaire arbeidsvermogen als potentieele energie kan beschouwen, zal de in de vorige § beschouwde evenwichtstoestand alleen dan stabiel zijn, als de door  $E$  voorgestelde som een minimum is.

Stel nu dat het bolvormige electron door homogene dilataties of contracties volgens drie onderling loodrechte middellijnen, overgaat in een ellipsoïde met de halve assen  $(1+\lambda)R$ ,  $(1+\mu)R$  en  $(1+\nu)R$ ; daarbij is de bedoeling dat  $\lambda$  en  $\mu$  kleine grootheden zijn, waarvan wij de tweede machten en het product zullen behouden, en dat elk substantieel volume-element zijn lading behoudt. Men kan dan de verandering van het electriche arbeidsvermogen met behulp van bekende regels berekenen en die van het supplementaire arbeidsvermogen hieruit afleiden, dat in elk substantieel volume-element  $T$  hetzelfde blijft. Daaruit volgt dat de supplementaire energie van een dergelijk element evenredig met de grootte daarvan verandert, dus in reden van 1 tot  $(1+\lambda)(1+\mu)^2$ . Voert men de berekeningen uit, dan vindt men dat de geheele energie  $E$  in reden van 1 tot

$$1 + \frac{1}{10} \lambda^2 + \frac{4}{5} \lambda \mu + \frac{3}{5} \mu^2$$

verandert. Daar nu de som der laatste drie termen negatief is als  $\lambda$  ligt tusschen  $-(4 + \sqrt{10})\mu$  en  $-(4 - \sqrt{10})\mu$ , was het evenwicht niet tegenover alle vorinveranderingen stabiel.

Het ligt voor de hand te denken dat men, om deze moeilijkheid te ontgaan, het bestaan ook van een supplementaire hoeveelheid van beweging zal moeten aannemen. Uit een vervolg op deze mededeeling zal blijken dat daar niets tegen is en men zal er te minder bezwaar tegen kunnen hebben, nu toch reeds met de supplementaire spanning  $T$  en de daaraan beantwoordende energie grootheden zijn ingevoerd, die niet van electromagnetischen aard zijn.

**Wiskunde.** — De Heer CARDINAAL biedt eene mededeeling aan van den Heer C. B. BIEZENO: „*Graphische bepaling der overgangsmomenten van een elastisch ondersteunden, statisch onbepaalden balk.*” II.

(Mede aangeboden door den Heer JAN DE VRIES).

12. Geheel op dezelfde wijze als in nr. 8 getracht is een overgang voor te bereiden van het geval van drie steunpunten op dat van vier, zou nu gestreefd kunnen worden de zoo juist gevonden constructie dienstbaar te maken aan de behandeling van den balk op vijf steunpunten, door dezen boven zijn voorlaatste steunpunt door te snijden en ter plaatse achtereenvolgens door een moment van 0, 1, 2, . . . meterton te belasten. Men stuit echter op twee moeilijkheden. Ten eerste wordt het te verrichten teekwerk dermate omvangrijk, dat het maken van vergissingen niet meer te vermijden is. Ten tweede doet zich echter een bezwaar voor, dat bij den balk op drie of vier steunpunten nog niet tot uiting is kunnen komen.

Wanneer nl. de balk boven het vierde steunpunt is doorgesneden, moet o.a. voor het linkergedeelte op vier steunpunten, onder invoering van een overgangsmoment van één meterton boven het laatste steunpunt, een stangenveelhoek geconstrueerd worden.

Bij de constructie van dezen stangenveelhoek wordt echter de balk op vier steunpunten weer doorgesneden boven het derde steunpunt. Dit derde steunpunt wordt dan, behalve door de gegeven op  $ABC$  werkende krachten nog door een naar boven gerichte, van het ingevoerde eenheidskoppel  $M_D$  afkomstige kracht van  $\frac{1}{L}$  ton belast.

Een dergelijk verschijnsel deed zich uiteraard bij den balk op vier steunpunten boven het tweede steunpunt voor. Dáár kende men echter de rijzing  $\frac{\mu}{L}$ , die het tweede steunpunt ten gevolge van de optredende extra kracht onderging, omdat het overschietende linkerdeel van den balk slechts op twee punten was opgelegd. Hier kent men de rijzing van het derde steunpunt niet, daar het intact gebleven linkergedeelte van den balk zelf nog statisch onbepaald is.

En hoewel het natuurlijk met behulp van nr. 3—7 mogelijk zou zijn de inzakking te bepalen, die het rechter uiteinde van den in drie punten opgelegden balk  $ABC$  tengevolge van een kracht in dit

niteinde aangrijpend zou ondergaan, zou de uitvoering der daartoe strekkende constructie het in den aanvang van dit nr. genoemde eerste bezwaar slechts vergrooten.

Toch zijn alle hulpmiddelen, die tot een doeltreffende constructie van den elastischen stangenveelhoek van een balk op vijf of meer steunpunten kunnen voeren, zooals uit het volgende blijken zal, verschaft.

### 13. *Balk op meer dan vier steunpunten.*

Zij gegeven de balk op  $n$  steunpunten  $A, B, C, \dots U, V, W$ , en voorloopig de vraag gesteld doorzakking en hellingshoek in het laatste steunpunt  $W$  te bepalen, wanneer de balk in  $W$  achtereenvolgens door een eenheidskracht en een eenheidsmoment belast wordt. Dan geven de in de voorgaande nrs. opgedane ervaringen aanleiding tot de verwachting, dat de gezochte grootheden uitsluitend afhankelijk zijn van de overeenkomstige voor balk  $A, B, C, \dots U, V$ , d.w.z. van de doorbuiging en den hellingshoek, die in het laatste steunpunt van balk  $A, B, C, \dots U, V$  zullen optreden, wanneer in  $V$  een eenheidskracht, resp. een eenheidsmoment aangrijpt.

Het ligt dus voor de hand deze laatste grootheden, die met  $y_{n-2}, \varphi_{n-2}, \bar{y}_{n-2}, \bar{\varphi}_{n-2}$  aangeduid mogen worden, voor een oogenblik bekend te veronderstellen en te trachten de gevraagde  $y_{n-1}, \varphi_{n-1}, \bar{y}_{n-1}, \bar{\varphi}_{n-1}$  eruit af te leiden. Bij de bepaling van elk dezer grootheden zou opnieuw gebruik gemaakt kunnen worden van de invoering van verschillende overgangsmomenten  $M_V$  boven  $V$ .

Bij ieder overgangsmoment  $M_V$  zou dan op twee manieren de ligging van het punt  $W$  bepaald moeten worden:

1°. met behulp van de evenwichtsvergelijkingen van het vrij gedachte rechterveld  $VW$ , waardoor een punt  $W$  gevonden wordt;

2°. met behulp van een bij balk  $A, B, C, \dots U, V, W$  behoorenden elastischen stangenveelhoek, die een punt  $\bar{W}$  levert.

Zouden de puntreksen  $\bar{W}$  en  $W$  dan gelijkvormig blijken te wezen, zoo zou hun dubbelpunt, d. w. z. het eindpunt van den de gezochte grootheden bepalenden stangenveelhoek, te construeeren zijn.

Wanneer de omschreven handelwijze werkelijk  $y_{n-1}, \varphi_{n-1}, \bar{y}_{n-1}, \bar{\varphi}_{n-1}$  doet vinden, moet dus getracht worden de overeenkomstige grootheden van den balk  $ABC \dots UV$  op  $(n-1)$  steunpunten te bepalen.

Maar dit zou kunnen gebeuren, wanneer onder dezelfde belastingsvoorwaarden voor balk  $ABC \dots U$  op  $(n-2)$  steunpunten hellingshoek en doorbuiging in het niteinde bekend waren.

Op deze wijze verder redeneerende wordt men naar den balk  $AB$

op twee steunpunten teruggedreven en het is dus zaak eerst voor dezen balk de gezochte grootheden op te sporen.

14a. Beschouwt men te dien einde den vrij opgelegden balk  $AB$ , in zijn rechteruiteinde belast door een kracht van 1 ton (fig. 3a).

Fig 3a.

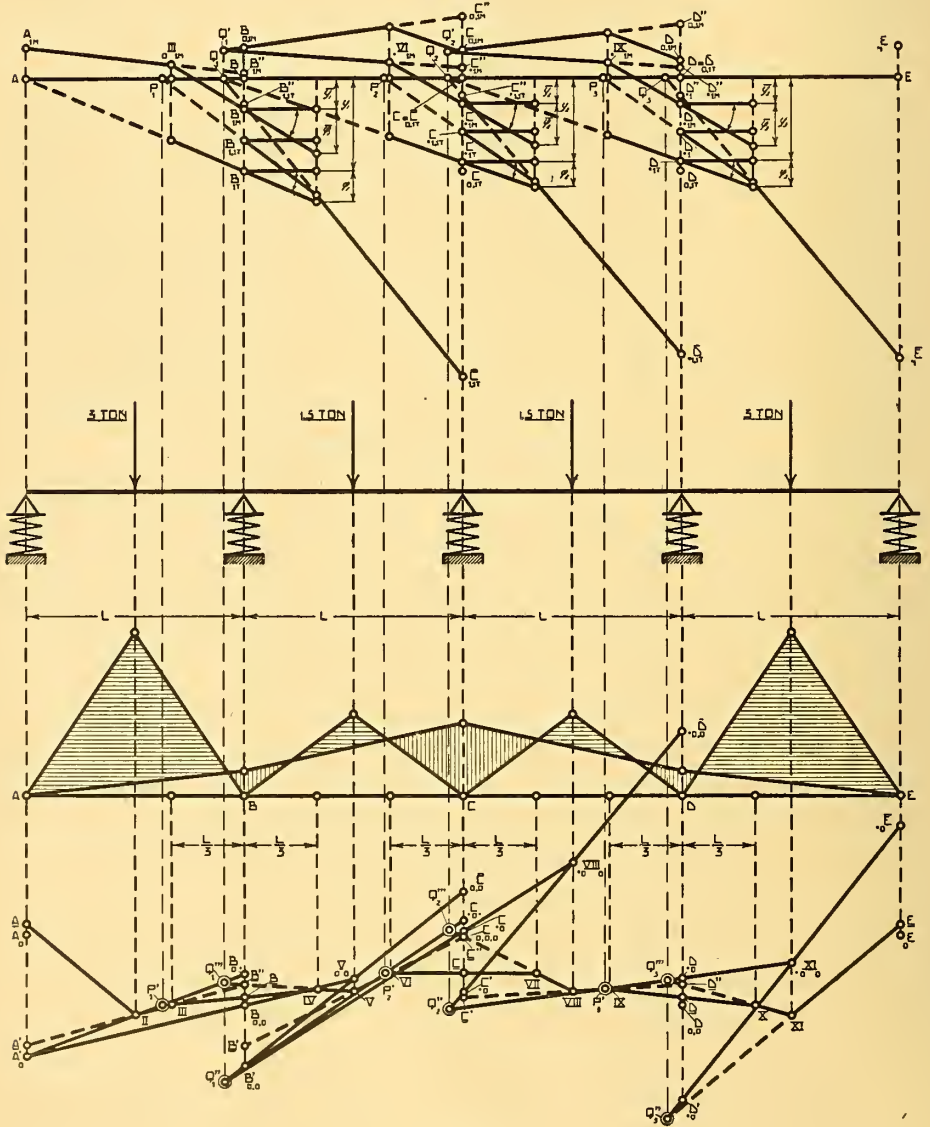


Fig. 3b.

Zowel de doorzakking  $BB^1) = \gamma_1$  als de hellingshoek  $\varphi_1$  is onmid-  
<sub>1T</sub>

1) Ter onderscheiding van een overgangsmoment wordt een in een steunpunt  $B, C \dots$  optredende eenheidsbelasting, al naarmate zij een kracht of een koppel voorstelt, aangeduid door de onder de letters  $B, C \dots$  geplaatste indices  $1T$  of  $1M$ .



dellijk bekend, daar het punt  $A$  op zijn plaats en  $AB$  recht blijft.<sup>1)</sup>

14b. Wordt het uiteinde  $B$  belast door een moment van 1 meter-ton, dan rijst het punt  $A$  een bedrag  $AA_{1M}$ , terwijl het punt  $B$  een bedrag  $BB_{1M}$  daalt. Daar stang  $A_{1M}B_{1M}$  met stang  $3_{1M}B_{1M}$  van  $l_B$  een stuk van bekende lengte moet afsnijden, is de eerste en daarmee dus ook de tweede stang bekend.

Hellingshoek ( $\bar{\varphi}_1$ ) en doorbuiging ( $\bar{y}_1$ ) in  $B$  zijn mitsdien ook voor dit belastingsgeval op zeer eenvoudige wijze te vinden.

15a. Nu kan tot de behandeling van balk  $ABC$ , in zijn uiteinde  $C$  door 1 ton belast, worden overgegaan.

Wordt de balk boven  $B$  doorgesneden, dan zakt het punt  $C$  een bedrag  $C_{01T} = \mu$ . De balk  $AB$  blijft onbelast. De constructie van den elastischen stangenveelhoek levert dus de rechte  $ABC$ ; het punt  $\bar{C}_{01T}$  valt met  $C$  samen.

Wordt hierna in  $B$  een overgangsmoment van 1 meterton aangebracht, dan rijst het punt  $C$  een bedrag  $C_{0,1T}$   $C_{1,1T} = \frac{\mu}{L}$ , zoodat  $C_{1,1T}$  bekend is.

De constructie van  $\bar{C}_{1,1T}$  met behulp van den elastischen stangenveelhoek levert evenmin moeilijkheden op. Door de invoering van het moment van 1 meterton boven  $B$  zal het steunpunt  $B$  een bedrag  $B_{11T} = \bar{y}_1 + \frac{1}{L} y_1$  zakken, terwijl stang  $III_1 B_{11T}$  onder een hellingshoek  $\bar{\varphi}_1 + \frac{1}{L} \varphi_1$  komt te staan.

De stang  $III_1 B_{11T} IV_{1T}$  (in figuur 3<sub>a</sub> aangegeven door de lijn  $P_1 B_{1,1T}$ ) is dus te teekenen en daarmee ook stang  $IV_{1T} \bar{C}_{1,1T}$ , die immers met  $III_1 IV_{1T}$  van  $l_B$  een segment van bekende lengte moet afsnijden.

Het is duidelijk, dat de stangen  $III_x x IV_{1T}$ , die bij verschillende overgangsmomenten  $M_B = x$  meterton behooren, door één op  $AB$  gelegen vast punt  $P_1$  gaan, daar zoowel de zakking van het punt  $B$  als de hellingshoek van de stang  $III_x x IV_{1T}$  evenredig met  $x_{x1T}$  toenemen. Daar bovendien de puntreeksen  $B''$  en  $x IV_{1T}$  gelijkvormig  $x_{1T}$

<sup>1)</sup> De hellingshoeken  $\varphi$  worden op de gebruikelijke wijze vervangen door hun tangenten. Deze tangenten worden in fig. 3<sub>a</sub> afgelezen op loodlijnen welke op den eenheidsafstand rechts van de verschillende steunpunten getrokken zijn.

zijn, gaan ook de verbindingslijnen  $B'' \text{ }_x\text{IV}_{1T} \text{ }_x\bar{C}$  van overeenkomstige punten dezer reeksen door een, evenzeer op de lijn  $ABC$  gelegen, vast punt  $Q_1$ .

De puntreeksen  $\bar{C}$  en  $C$  zijn dus gelijkvormig.

Hun in het eindige gelegen dubbelpunt levert het gezochte punt  $C$ , terwijl de lijn  $C \text{ }_1\text{IV}_{1T}$  den gevraagden hellingshoek bepaalt.

15b. Ook bij de belasting van 1 meterton in  $C$  wordt de balk boven  $B$  doorgesneden. In dat geval wordt echter de veerende ondersteuning van  $B$  met een kracht van  $\frac{1}{L}$  ton belast. Dientengevolge rijst het punt  $B$  een bedrag  $\frac{1}{L} y_1$ , en neemt de balk  $AB$  in  $B$  een hellingshoek aan van  $\frac{1}{L} \cdot \varphi_1$ . Wordt in de veronderstelling  $M_B = 0$  meterton voor  $ABC$  een stangenveelhoek geteekend, dan is stang  $\text{III}_0 \text{ }_0\text{IV}_{1M} \text{ }_0\text{VI}_{1M}$  (in de figuur door  $B \text{ }_0\text{,1M} \text{ }_0\text{,1M} C''$  aangegeven) en daarmede ook stang  $\text{ }_0\text{VI}_{1M} \text{ }_0\text{,1M} \bar{C}$  vastgelegd.

Het punt  $C$ , dat aan  $\bar{C}$  is toegevoegd ligt  $\frac{1}{L}$  onder  $C$ .

Nu zoude een tweede constructie moeten worden uitgevoerd voor een overgangsmoment  $M_B$  van 1 meterton, ten doel hebbende bij het zoo juist gevonden puntenpaar  $C$ ,  $\bar{C}$  een tweede te construeeren, dat de bepaling van het dubbelpunt der reeksen  $C$  en  $\bar{C}$  mogelijk maakt. De ligging van dit dubbelpunt hangt echter uitsluitend af

van de verhouding  $\frac{\bar{C} \text{ }_1\text{IV}_{1M} \text{ }_1\text{VI}_{1M}}{C \text{ }_1\text{IV}_{1M} \text{ }_1\text{VI}_{1M}}$ , die op haar beurt alleen afhankelijk

is van de ligging der draaipunten, die voor de stangen  $\text{III}_x \text{ }_x\text{IV}_{1M}$  en  $\text{ }_x\text{IV}_{1M} \text{ }_x\text{VI}_{1M}$  blijken te bestaan, en waarvan in de teekening alleen dat der stangen  $\text{ }_x\text{IV}_{1M} \text{ }_x\text{VI}_{1M}$  als  $Q_1$  is aangegeven.

Deze punten moeten echter krachtens het in nr. 7 betoogde loodrecht boven de punten  $P_1$  en  $Q_1$  liggen.

De gezochte verhouding is dus reeds (fig. 3a) gevonden in de

verhouding  $\frac{\bar{C} \text{ }_1\text{IV}_{1T} \text{ }_1\text{VI}_{1T}}{C \text{ }_1\text{IV}_{1T} \text{ }_1\text{VI}_{1T}}$ . Het dubbelpunt  $C$ , is dus nadat  $\bar{C}$  en  $C$  een-

maal bekend zijn, zonder meer te bepalen, evenals het bijbehorend punt  $C''$

Langs de verbindinglijn van dit punt met  $Q_1$  moet de stang  $.IV_{1M}.VI_{1M}$  vallen, zoodat het punt  $.VI_{1M}$  te construeeren is. Daarna kan  $.VI_{1M}C$  getrokken worden, waardoor  $\overline{y_2}$  en  $\overline{\varphi_2}$  gevonden zijn.

16. Op geheel dezelfde wijze als  $\overline{y_2}, \overline{\varphi_2}$  uit  $\overline{y_1}, \overline{\varphi_1}$ , bepaald zijn, kunnen nu ook  $\overline{y_3}, \overline{\varphi_3}$  uit  $\overline{y_2}, \overline{\varphi_2}$  en in het algemeen  $\overline{y_n}, \overline{\varphi_n}$  uit  $\overline{y_{n-1}}, \overline{\varphi_{n-1}}$  gevonden worden.

Ieder nieuw, bij een volgend steunpunt behoorend, viertal onbekenden eischt het volgens vast recept teekenen van slechts zes lijnen.

Hoewel volledigheidshalve de constructie van het punt  $C$  besproken is, zal zij in werkelijkheid niet uitgevoerd behoeven te worden.

De stelling van MAXWELL immers leert, dat  $\overline{y_2} = \overline{\varphi_2}$ , waardoor  $C$  rechtevreeks bepaald is.

17. Met behulp van de volgens nrs. 14 en 15 te vinden grootheden  $y, \varphi, \overline{y}$  en  $\overline{\varphi}$  kan nu de constructie van den elastischen stangenveelhoek van den willekeurig belaste balk uitgevoerd worden op de wijze, als in fig. 3b voor een balk op 5 steunpunten is aangegeven.

De belasting is weder in het midden der velden aangebracht en bedraagt voor de opeenvolgende velden respectievelijk 3,  $1\frac{1}{2}$ ,  $1\frac{1}{2}$ , en 3 ton.

Het eerst worden de zakkingsen  $AA, BB, CC \dots$  der steunpunten bepaald, die optreden wanneer de balk boven alle steunpunten doorgesneden is.

Daarna wordt het punt  $C$  bepaald waarover de balk  $ABC$ , als één geheel gedacht, zal moeten loopen.

Deze bepaling geschiedt uitsluitend met behulp van den stangenveelhoek  $A', \overline{C}$ , die het punt  $\overline{C}$  aan het punt  $C$  toevoegt. Van de constructie van den stangenveelhoek  $A' \dots B \dots \overline{C}$  kan n.l. worden afgezien, daar deze immers alleen dient om twee punten  $\overline{C}$  en  $C$  te bepalen, welke ligging de verhouding der stukken levert, waarin de afstand  $\overline{C}C$  door het gezochte punt  $C$  wordt verdeeld. Deze

verhouding is echter reeds in fig. 3a om een meer vermelde reden door

$$\frac{\overline{C} \quad \overline{C}}{\begin{smallmatrix} 01T & 11T \\ C & C \end{smallmatrix}} \text{ vastgelegd.}$$

Op analoge wijze wordt met behulp van den stangenveelhoek  $A \dots C$  VIII  $\overline{D}$  voor den als één geheel beschouwd en balk  $ABCD$  het eindpunt  $D$  bepaald. Van dezen, bij het overgangsmoment  $M_C = 0$  meterton behoorenden veelhoek is stang  $Q''_1 C$  VIII en daarmee het verdere beloop VIII  $\overline{D}$  bepaald. De ligging van het dubbelpunt  $D$  der puntreeksen  $\overline{D}$  en  $D$ , die bij invoering van verschillende overgangsmomenten  $M_C$  ontstaan, en waarvan alleen de punten  $\overline{D}$  en  $D$  bekend zijn, wordt wederom met de reeds in fig. 3a

$$\text{opgetreden verhouding } \frac{\overline{D} \quad \overline{D}}{\begin{smallmatrix} 01T & 11T \\ D & D \end{smallmatrix}} \text{ gevonden.}$$

Ten slotte wordt  $\overline{E}$  bepaald met behulp van den stangenveelhoek  $Q''_2 D$  XI,  $\overline{E}$ , welks eindpunt  $\overline{E}$  met  $E$  samen een puntenpaar der puntenreeksen  $\overline{E}$  en  $E$  vormt. De verhouding, waarin de afstand  $\overline{E} E$  door het gezochte punt  $\underline{E}$  moet worden verdeeld, is ook reeds in fig. 3a door invoering van een moment van 1 meterton boven  $D$  door de verhouding  $\frac{E, \cdot 1 \overline{E}}{E, \cdot 1 E}$  bepaald.

Het eindpunt  $\underline{E}$  van den gezochten stangenveelhoek is dus vastgelegd, zoodat alleen nog de veelhoek zelf behoeft te worden teruggeconstrueerd.

In de eerste plaats kan stang  $\underline{E}$ , XI, door  $Q''_2$ , getrokken worden daarna XI, X,  $\underline{D}''$  door  $Q''_3$ , X IX door  $P'_2$  en IX VIII door  $D''$ . Deze laatste stang snijdt met VIII VII van  $l_B$  een stuk van bekende lengte af; VIII VII is dus eveneens te teekenen. Deze stang snijdt op  $l_{Q''_2}$  een punt  $Q''_3$  in, dat de bepaling van het punt  $P'_2$ , waardoorheen stang VII VI getrokken zal moeten worden, mogelijk maakt.

Zoolang de veronderstelling gemaakt werd dat in  $D$  geen overgangsmoment aanwezig was, gold, dat de stangen VI VII en VII VIII bij invoering van verschillende overgangsmomenten  $M_C$  moesten

draaien om vaste punten  $P$  en  $Q$ , die als snijpunt der lijnen  $l_{P_2}$  en  $l_{Q_2}$  met  $Q_1''$   $C$  bepaald werden. Het in  $D$  aanwezige overgangsmoment laat echter zijn invloed gelden op de ligging van het punt  $C$ . Volgens het in N<sup>o</sup>. 15 behandelde rijst dit punt een bedrag  $C C = \frac{M_D}{L} y_2$ , hetgeen tengevolge heeft, dat de lijn  $Q_1''$  VIII, die bij afwezigheid van  $M_D$  de draaipunten der stangen VI VII en VII VIII bevatte, vervangen moet worden door de lijn  $Q_1''$   $C$ . Nu is echter het punt  $Q_2'''$  dezer lijn als snijpunt van  $l_{Q_2}''$  met stang VIII VII reeds bepaald, zoodat  $P_2'$ , waardoorheen VII VI moet, als snijpunt van  $Q_1''$   $Q_2'''$  met  $l_{P_2}$  gevonden kan worden.

Na VII VI kan VI V door  $C''$  getrokken worden, terwijl V IV weer bepaald is door het bekende stuk, dat VI V en V IV van  $l_B$  moeten afsnijden.

Door V IV wordt dan wederom op  $l_{Q_1}''$  een punt  $Q_1'''$  bepaald, waardoorheen de lijn  $A'$   $Q_1'''$  getrokken kan worden, die op  $l_{P_1}$  het punt  $P_1'$  van stang IV III insnijdt. De verdere voltooiing van den stangenveelhoek levert geen moeilijkheden.

18. Uit de voorgaande beschouwingen blijkt, dat met den balk op vijf steunpunten, zooals overigens reeds in nr. 2 werd opgemerkt, het in den titel dezer verhandeling genoemde onderwerp algemeen behandeld is, behoudens dan de gemaakte beperkingen, waarbij zoowel de veldlengten van den balk, als de stijfheidsfactoren der elastische ondersteuningën onderling gelijk zijn gesteld.

Deze beperkingen tasten echter de algemeene geldigheid der geleverde constructie niet aan.

Bij ongelijke veldlengten  $AB$  en  $BC$  b.v. (Fig. 1) zouden de stangen II III en IV V elkaar weliswaar niet meer op  $l_B$ , maar dan toch op een loodlijn snijden, die den afstand  $h_{III}$   $h_{IV}$  verdeelt in stukken, die omgekeerd evenredig zijn aan de veldlengten  $AB$  en  $BC$ .

Evenzoo is de eventueele ongelijkheid der stijfheidsfactoren der veeren niet van principieele beteekenis. Zijn b.v. voor balk  $ABC$ , met de veldlengten  $AB = L_1$  en  $BC = L_2$ , de stijfheidsfactoren der veeren  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , dan zullen de extra veerzakingen, die na doorsnijding van den balk boven  $B$  tengevolge van de invoering van een overgangsmoment van 1 meterton optreden, inplaats van  $-\frac{\mu}{L}$   $2\frac{\mu}{L}$ ,  $-\frac{\mu}{L}$  zijn  $-\frac{\alpha}{L_1}$ ,  $\frac{\beta}{L_1} + \frac{\beta}{L_2}$ ,  $-\frac{\gamma}{L_2}$ . Dit brengt wel verande-

ring in de waarden van de segmenten  $A_0' A_1'$ ,  $B_0 B_1$ ,  $C_0 C_1$ , maar geen wijziging in het wezen der geleverde constructie.

Wanneer de balk niet prismatisch is, zooals in n<sup>o</sup>. 1 werd verondersteld, maar een veranderlijke dwarsdoorsnede heeft met van richting vaste hoofdtraagheidsassen voor het zwaartepunt, kunnen alle momentenvlakken op de reeds door MOHR aangegeven wijze gereduceerd worden.

### 19. Invloedslijnen.

Met behulp van de in de voorgaande nrs. gegeven constructie kunnen nu ook graphisch de invloedslijnen voor de overgangsmomenten van een statisch onbepaalden, veerend ondersteunden balk geconstrueerd worden. Om b.v. voor het overgangsmoment boven het  $p$ -de steunpunt de invloedslijn te bepalen, heeft men slechts de elastische lijn te construeeren, volgens welke de balk gaat staan, wanneer hij boven het  $p$ -de steunpunt doorgesneden en in de gemaakte doorsnede door een overgangsmoment van 1 meter-ton belast wordt. Voor ieder der stukken, waarin de balk verdeeld is, kunnen op de beschreven wijze de overgangsmomenten — en dus de totale momentenvlakken — bepaald worden, waarna de elastische lijn op de bekende wijze geteekend kan worden.

---

**Natuurkunde.** — De Heer H. A. LORENTZ biedt een mededeeling aan namens den Heer L. S. ORNSTEIN: „*Over de Brown'sche beweging*”.

(Mede aangeboden door den Heer W. H. JULIUS).

VON SMOLUCHOWSKI <sup>1)</sup> heeft opgemerkt, dat de functie die de waarschijnlijkheid geeft, dat bij de Brown'sche beweging een deeltje in een gegeven tijd een bepaalden weg aflegt, een oplossing is van de diffusie vergelijking. Voor gevallen waarin op de deeltjes ook een uitwendige kracht werkt, heeft hij langs fenomenologischen weg een differentiaalvergelijking voor de genoemde waarschijnlijkheidsfunctie afgeleid. Later heeft de Heer H. C. BURGER <sup>2)</sup> deze differentiaalvergelijking afgeleid volgens een methode, die meer op het wezen der waarschijnlijkheidsfunctie ingaat. Beide afleidingen staan niet in direct verband met het mechanisme der Brown'sche beweging; ik wil nu in deze mededeeling doen zien, dat men uitgaande van een betrekking die Mevrouw DE HAAS—LORENTZ in haar dissertatie gebruikt heeft, om het gemiddelde kwadraat der afgelegde wegen te bepalen, de waarschijnlijkheidsfunctie der Brown'sche beweging kan bepalen. Het verdient opmerking, dat uit de door Mevrouw DE HAAS—LORENTZ <sup>3)</sup> verkregen resultaten door iets voorzigtiger grensovergang dan voor het door haar gestelde doel (n.l. het bepalen van den stationairen toestand), noodig was de wijze waarop verschillende gemiddelden van den tijd afhangen, is te berekenen. Ik wil eerst deze gemiddelden langs een nieuwen weg bepalen. Daarbij zal dan tevens gelegenheid zijn aan te toonen, dat de meening, waarvan Mej. Dr. A. SNETHLAGE <sup>4)</sup> in haar theorie van de Brown'sche beweging uitgaat, dat de theorie van EINSTEIN in strijd met de statistische mechanica is, onjuist is.

Behalve de waarschijnlijkheidsfunctie voor den weg, zal ik ook die

---

<sup>1)</sup> Vergelijk bijv. M. v. SMOLUCHOWSKI. Drei Vorträge über Diffusion, Brown'sche Bewegung etc. Phys. Zeitschr. XVII p. 557 1916.

<sup>2)</sup> H. C. BURGER, Over de theorie der BROWN'sche beweging. Deze Versl. XXV p. 1482, 1917.

<sup>3)</sup> Mevr. Dr. G. L. DE HAAS—LORENTZ. Over de theorie der BROWN'sche beweging, Dis. Leiden 1912.

<sup>4)</sup> Mej. Dr. A. SNETHLAGE, Moleculair-kinetische verschijnselen in gassen etc. Diss. Amst. 1917.

voor de snelheid afleiden. De daarbij gebruikte gedachtengang ver-  
toont groote overeenkomst met de beschouwingen die RAYLEIGH <sup>1)</sup>  
reeds jaren geleden ontwikkeld heeft. Verwaante beschouwingen op  
den stationairen toestand betrekking hebbend, vindt men ook bij Dr.  
FOKKER <sup>2)</sup> en M. PLANCK. <sup>3)</sup>

§ 1. In haar proefschrift gaat MEVROUW DE HAAS—LORENTZ uit  
van de bewegingsvergelijking voor een Brownsch deeltje, die zij in  
den vorm

$$m \frac{du}{dt} = -wu + mF \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

brengt. Daarbij is  $u$  de snelheid van het deeltje,  $w = 6 \pi \mu a$  de  
weerstand die volgens de formule van STOKES het bolvormige deeltje  
(straal  $a$ ) in een vloeistof met inwendigen wrijvingscoëf.  $\mu$  zou onder-  
viinden. De kracht die door de botsingen van de molekulen wordt  
uitgeoeffend, wordt in twee stukken gesplitst, waarvan een dat  
volgens STOKES, het tweede geheel onregelmatig is, zoodat  $\bar{F} = 0$  is.  
Het middelen is zoo te verstaan dat gemiddeld wordt op een be-  
paald oogenblik voor deeltjes die alle de snelheid  $u$  bezeten hebben.

We kunnen de vergelijking (1) nu integreeren, voeren we in  
 $\frac{w}{m} = \beta$  dan heeft men

$$u = u_0 e^{-\beta t} + e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta t} F(t) dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

hierin is  $u_0$  de snelheid op den tijd  $t = 0$ .

Middelen we deze vergelijking nu op de aangegeven wijze dan  
komt er

$$\bar{u} = u_0 e^{-\beta t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

of in woorden wanneer men van een groot aantal deeltjes met een  
gegeven snelheid uitgaat, wordt de gemiddelde snelheid gedempt op  
dezelfde wijze als bij groote bollen waarbij de dempingscoëfficiënt  
uit straal en wrijvingscoëfficiënt eveneens op dezelfde wijze wordt  
afgeleid. Laat ons thans ook het gemiddelde van het kwadraat van  
de snelheid berekenen. We vinden hiervoor

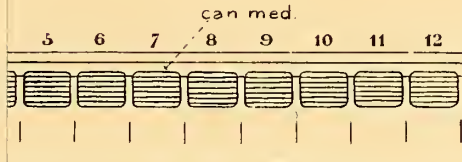
<sup>1)</sup> Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. XXXII, p. 424. 1894. Papers III. Dynamical  
problems in illustration of the theory of gases.

<sup>2)</sup> Dr. A. FOKKER, Over de BROWN'sche beweging in het stralingsveld. Dis.  
Leiden, pg. 523, 1913.

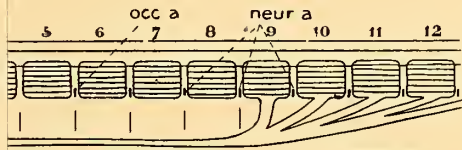
<sup>3)</sup> M. PLANCK, Ueber einen Satz der Statistischen Dynamik u.s.w. Berl. Ber.  
p. 324. 1917.



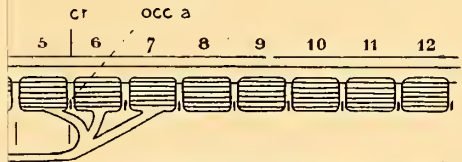
an den kop van de hoofdgroepen der



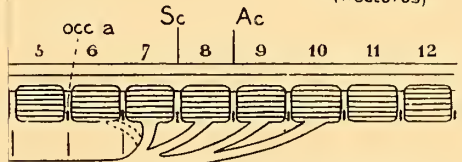
Amphioxus.



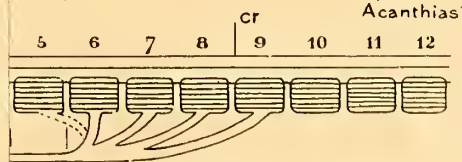
Petromyzon.



Amphibien  
(Necturus)



Selachii  
(Scyllium  
Acanthias)

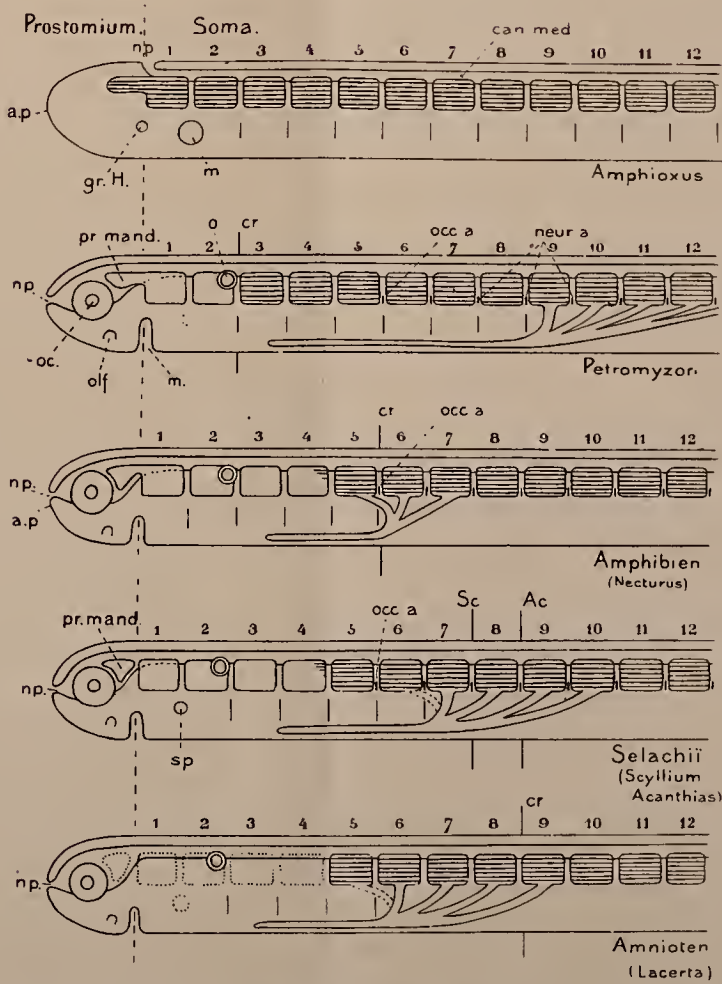


Amnioten  
(Lacerta)

, die myotomen voortbrengen, de witte zulke, wortels stemmen over het geheel overeen met hiale musculatuur ontstaat (verg. de tekst).  
dullairbuis, *cr.* grens van den schedel (*Sc.* bij *l.* groeve van HATSCHER, *m.* mond, *neur. a.* orblaasje, *oc.* oog, *occ. a.* occipitaalboog, *ol.* somiet", *sp.* spuitgat.



Schematische voorstelling van den kop van de hoofdgroepen der gewervelde dieren.



De gearceerde vakjes zijn somieten, die myotomen voortbrengen, de witte zulke, die dat niet doen. De hypoglossuswortels stemmen over het geheel overeen met de myotomen, waaruit de hypobranchiale musculatuur ontstaat (verg. de tekst).

*a. p.* animale pool, *can. med.* medullairbuis, *cr.* grens van den schedel (*Sc.* bij *Scyllium*, *Ac.* bij *Acanthias*), *gr. H.* groef van HATSCHKEK, *m.* mond, *neur. a.* neuraalbogen, *np.* neuroporus, *o.* oorblaasje, *oc.* oog, *occ. a.* occipitaalboog, *olf.* neusgat, *pr. mand.* „praemandibulair somiet”, *sp.* spuitgat.



$$\overline{u^2} = u_0^2 e^{2\beta t} + e^{-2\beta t} \left\{ \int_0^t e^{\beta t} F(t) dt \right\}^2 \dots \dots \dots (4)$$

Om de integraal in het tweede lid te bepalen gaan wij nu als volgt te werk. Wij schrijven er voor

$$\int_0^t \int_0^t \overline{F(\xi) F(\eta)} e^{\beta(\xi+\eta)} d\eta d\xi.$$

Nu is  $\overline{F(\xi) F(\eta)}$  alleen van nul verschillend indien  $\eta$  en  $\xi$  zeer weinig verschillen d.w.z. er is voor korte tijden een correlatie der krachten  $F$ . Voeren wij in  $\eta = \xi + \psi$  dan kunnen we in de exponentieele  $\eta$  door  $\xi$  vervangen en de integraal splitsen in een product van integralen naar  $\xi$  en  $\psi$  waarbij naar  $\psi$  zonder bezwaar van  $-\infty$  tot  $+\infty$  geïntegreerd mag worden. Stellen wij nu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F(\xi) F(\xi + \psi)} d\psi = \mathfrak{D} \dots \dots \dots (4a)$$

hetgeen een voor het probleem karakteristieke constante is en voeren wij de integratie naar  $\xi$  uit dan gaat na substitutie (4) over in

$$\overline{u^2} = u_0^2 e^{-2\beta t} + \frac{(1 - e^{-2\beta t}) \mathfrak{D}}{2\beta} \dots \dots \dots (5)$$

Passen wij nu deze vergelijking toe voor  $t = \infty$  dan is  $\overline{u^2} = \frac{kT}{m}$  en wordt dus

$$\mathfrak{D} = \frac{kT}{m} 2\beta$$

Wij kunnen nu op dezelfde wijze het gemiddelde kwadraat van den afgelegden weg bepalen. Uit (2) of door directe integratie van (1) heeft men n.l.

$$u - u_0 = -\beta s + \frac{\int_0^t F dt}{\beta}$$

$$\beta^2 \overline{s^2} = \overline{(u - u_0)^2} + \left\{ \int_0^t F dt \right\}^2 \dots \dots \dots (6)$$

Voor de laatste integraal vindt men op geheel analoge wijze

$$\mathfrak{D} t$$

Berekenen we het eerste gemiddelde met behulp van (3) en (5)

dan verkrijgen wij

$$\beta^2 \overline{s^2} = u_0^2 (1 - 2e^{-\beta t} + e^{-2\beta t}) + \frac{\mathfrak{D}}{2\beta} (-3 - e^{-2\beta t} + 4e^{-\beta t}) + \mathfrak{D} t \quad (7)$$

Voor zeer lange tijden geldt dus

$$\overline{s^2} = \frac{2kT\mathfrak{D}}{\beta} = \frac{kT}{3\pi a\mu} t \quad \dots \quad (8)$$

hetgeen de bekende formule voor den middelbaren weg bij de Brownsche beweging is.

Middelt men (7) naar alle mogelijke aanvangssnelheden en bedenkt men dat  $\overline{u_0^2} = \frac{\mathfrak{D}}{2\beta}$ , dan vindt men voor het gemiddelde kwadraat van den afgelegden weg bij willekeurige aanvangssnelheid

$$\beta^2 \overline{s^2} = \frac{\mathfrak{D}}{\beta} (t\beta - 1 + e^{-\beta t}) \quad \dots \quad (7a)$$

Zoolang  $\beta t$  groot is t. o. z. van  $1 - e^{-\beta t}$  geldt dus de formule van EINSTEIN. Voor gevallen zooals die bij experimenten beschouwd zijn is de hierdoor te verkrijgen laagste grens voor  $t$  van de orde van 0.01 seconde.

§ 2. Door Prof. J. D. v. D. WAALS JR. en Mej. A. SNETHLAGE<sup>1)</sup> zijn op grond van de statistische mechanica bezwaren geopperd tegen de toepassing van de splitsing die op voorbeeld van EINSTEIN en HOFF bij een ander probleem op dit geval is toegepast.

Uitgaande van de onderstelling dat in een ensemble

$$\overline{Ku} = 0$$

waarbij  $K$  de werkende kracht is ontwikkelen zij een andere grondformule n.l. (met kleine verandering der notatie)

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\varrho^2 u + w \quad \dots \quad (9)$$

waarbij dan nu  $\overline{w} = 0$  te nemen is. Wij kunnen deze vergelijking weder integreren, en verkrijgen dan

$$u = u_0 \cos \varrho t + \frac{\dot{u}_0}{\varrho} \sin \varrho t + \frac{1}{\varrho} \int_0^t w(\xi) \sin \varrho (t - \xi) d\xi \quad \dots \quad (10)$$

Nemen wij nu het gemiddelde dan komt er

$$\overline{u} = u_0 \cos \varrho t + \frac{\dot{u}_0}{\varrho} \sin \varrho t$$

De gemiddelde snelheid zou dus een bepaalde periode bezitten. Maken wij echter  $\overline{u^2}$  op dan komen wij tot een tegenstrijdigheid.

<sup>1)</sup> Verg. Deze Verslagen XXIV 1916 p. 1272.

Voor  $u^2$  toch hebben wij:

$$\overline{u^2} = \left( u_0 \cos \varrho t + \frac{u_0'}{\varrho} \sin \varrho t \right)^2 + \frac{1}{\varrho^2} \left\{ \int_0^t w(\xi) \sin \varrho (t - \xi) d\xi \right\}^2. \quad (11)$$

Voor de integraal kunnen wij als wij er weder een dubbel integraal van maken en wij de constante  $\theta$

$$\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\xi) w(\xi + \psi) d\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

invoeren schrijven

$$\frac{\theta}{\varrho^2} \int_0^t \sin^2 \varrho (t - \xi) d\xi = \frac{\theta t}{2\varrho^2} + \text{periodiek stuk.}$$

Wij vinden dus

$$\overline{u^2} = \frac{\theta t}{2\varrho^2} + \text{periodiek stuk.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Deze formule doet zien dat  $\overline{u^2}$  onbepaald met den tijd toeneemt, evident is echter volgens de statistische mechanica, dat  $\overline{u^2}$  tot  $\frac{kT}{m}$  moet naderen.

Indien men dus de vergelijking (9) als een differentiaal vergelijking behandelt komt men tot verkeerde resultaten <sup>1)</sup>.

§ 3. Mej. Dr. SNETHLAGE en Prof. Dr. J. v. D. WAALS JR. hebben opgemerkt, dat de theorie der Brownsche beweging in overeenstemming moet zijn met een algemeene stelling der statistische mechanica. Voor het geval dat wij een deeltje beschouwen, dat onder invloed van de botsingen der vloeistofmoleculen een beweging uitvoert hangt de kracht die de molekulen uitoefenen niet van de snelheid doch alleen van de coördinaten af. Dientengevolge moet het product van kracht en snelheid gemiddeld nul zijn, zoowel in een kanonisch als in een microcanonisch als in een tijd ensemble. Zij meenen nu dat de formule van EINSTEIN hiermede in strijd is. Ik zal nu aantoonen dat dit slechts tot zekere hoogte het geval is.

Denken wij ons in een kanonisch (of micro-canonisch ensemble) alle systemen uitgezocht waarin de snelheid van ons deeltje op een

<sup>1)</sup> Een analoge kwestie is behandeld door M. PLANCK (Ann. der Phys. 1912. Bd. 37, p. 642, waar blijkt dat de energie van een resonator onderworpen aan het onregelmatige veld der zwarte straling evenredig met den tijd toeneemt, de  $f$  van PLANCK komt dan overeen met de  $u$  bij v. d. WAALS (Noot bij de correctie).

tijdstip 0 gelijk aan  $u_0$  is en volgen wij nu deze groep deeltjes, dan kunnen wij van elke willekeurige grootheid een gemiddelde opmaken voor de groep der systemen die na een tijd  $t$  uit de aanvankelijk beschouwde groep is ontstaan. De waarde van de beschouwde grootheid verschilt voor de verschillende systemen van onze groep (deel ensemble) omdat de systemen waarin op  $t=0$  de snelheid van het deeltje  $u_0$  is, nog belangrijke verschillen vertoonen kunnen, zoodat bijv. de impulsen die het deeltje krijgt zeer verschillend zullen zijn. Ik zal dit gemiddelde het geval-gemiddelde bij gegeven aanvangssnelheid noemen. Vervolgens kan men de snelheid  $u_0$  varieeren en wederom het geval gemiddelde opmaken, en door  $u_0$  alle mogelijke waarden te laten doorloopen neemt men bij het middelen op den tijd  $t$  alle systemen in aanmerking. Is nu het geval-gemiddelde van een grootheid  $g(u)$  voor  $u_0$   $g(u_0)$  en is het aantal systemen van de groep  $N(u_0)$  dan is, als  $N$  het totale aantal systemen in het ensemble voorstelt, de grootheid

$$\frac{\sum N(u) g(u)}{N}$$

het geval-gemiddelde voor het geheele ensemble.

Doch daar het ensemble stationair is is het geval gemiddelde voor een grootheid gelijk aan het gemiddelde van de overeenkomstige grootheid in het ensemble. Is in het bijzonder  $g(u)$  voor elke  $u$  gelijk aan nul dan is ook het gemiddelde in het ensemble nul. Ik zal nu aantoonen dat zoo men van de formule van EINSTEIN uitgaat het geval gemiddelde van  $Ku$  voor elke beginsnelheid  $u_0$  nul is, hieruit volgt dan onmiddellijk dat de formule van EINSTEIN *niet in strijd* is met de theorie der ensembles, met name dat  $\overline{ku^e} = 0$ , ( $-e$  beteekent middelen over een ensemble, terwijl  $-$  hier overal voor het geval-gemiddelde gebruikt wordt).

De vergelijking van EINSTEIN is als we op  $t=0$  een groep deeltjes met een gegeven snelheid  $u_0$  uit het ensemble uitzoeken in strijd met de theorie der ensembles. Immers middelen

wij de vergelijking dan levert zij  $m \frac{du}{dt} = K = -wu_0$ , nu is echter

volgens de theorie der ensembles  $\overline{K}$  onafhankelijk van de snelheid. Laten wij de uitgekozen groep echter aan zich zelf over en passen wij op haar beweging de voor het éérste oogenblik onjuiste vergelijking van EINSTEIN toe, dan blijkt dat op den duur de groep op zoodanige wijze beweegt dat op den duur de vergelijking van EINSTEIN voor haar geldt. Men kan trouwens uit de groep met deeltjes met gegeven snelheid  $u_0$ , die systemen uitzoeken



waarvoor (1) geldt. Uit het volgende blijkt dan dat voor deze groep op den duur de gewone betrekkingen omtrent de gemiddelden in een kanonisch ensemble gaan gelden.

In plaats van  $\overline{Ku} = 0$  kan men ook schrijven  $m \overline{\frac{du}{dt}} u = 0$  of  $\overline{u \frac{du}{dt}} = 0$ . Vermenigvuldig nu de vergelijking van EINSTEIN-HOPF met  $u$  en maak het geval gemiddelde op, dan krijgen wij

$$\overline{u \frac{du}{dt}} = -\beta \overline{u^2} + u \overline{F}$$

Wij zullen nu aantoonen dat voor voldoende lange tijden het tweede lid identiek nul is.

Volgens (5) toch hebben wij dan voor den eersten term  $-\frac{\mathfrak{P}}{2\beta} \beta$  of dus  $-\frac{\mathfrak{P}}{2}$ . Wij zullen nu het tweede gemiddelde bepalen. Daartoe vermenigvuldigen wij (2) met  $F$  en maken het gemiddelde op, er komt dan

$$\overline{uF} = \overline{u_0 e^{-\beta t} F} + e^{-\beta t} F \int_0^t e^{\beta t} F(t) dt$$

Hierin is nu het eerste gemiddelde in het tweede lid nul. Om het tweede gemiddelde te bepalen moet men bedenken dat  $F$  voor de integraal op een bepaalden tijd  $t$  betrekking heeft. Bijdragen tot het gemiddelde geven dus slechts die stukken van de integraal waarin het argument weinig van  $t$  verschilt. In de exponent kan men weder het argument gelijk aan  $t$  nemen, zoodat voor den tweeden term geschreven kan worden

$$\int_{t-\eta}^t \overline{F(t) F(t-\eta)} d\eta \quad \text{of} \quad \int_{-\infty}^0 \overline{F(\xi) F(\xi-\eta)} d\eta$$

Deze integraal is nu juist de helft van de integraal van (4a), daar zij het halve integratiegebied beslaat, terwijl de integrand uiteraard symmetrisch om  $\xi$  is.

Wij vinden dus tenslotte voor het tweede lid identiek nul daar de twee gemiddelden elkaar juist opheffen. Wanneer wij (5) nu voor kortere tijden in aanmerking nemen wordt het tweede lid

$$u_0^2 e^{-2\beta t} - \frac{\mathfrak{P}}{2\beta} e^{-2\beta t}$$

Deze uitkomst krijgt men ook door (4) naar den tijd te differencieren.

Het geval gemiddelde van  $u \frac{du}{dt}$  voor eindige tijden niet groot t.o. van  $\frac{1}{\beta}$  is dus niet streng nul. Wij kunnen nu echter gaan middelen naar de aanvangssnelheid  $u_0$  en zoo dus het ensemble gemiddelde van  $u \frac{du}{dt}$  opmaken. Dan krijgen wij

$$\overline{u \frac{du}{dt}}^e = \left( \overline{u_0^2}^e - \frac{\mathfrak{D}}{2\beta} \right) e^{-2\beta t} = 0$$

daar toch  $\overline{u_0^2}^e$  de aequipartitie waarde bezit. Het blijkt dus dat ook voor kleine tijden de gemiddelde waarde van het geval gemiddelde met de statistische mechanica niet in tegenspraak is.

§ 4. Ik wil thans er toe overgaan de frequentiewet voor snelheidsverdeeling af te leiden. Integreeren wij de vergelijking (1) voor een korten tijd  $\tau$  dan kunnen wij er voor schrijven

$$u - u_0 = -\beta u_0 \tau + x \quad \text{of} \quad u = u_0 (1 - \beta\tau) + x \quad . \quad . \quad (14)$$

waarbij  $x = \int_0^\tau F(t) dt$  is en  $\overline{x^2} = \mathfrak{D}\tau$ .

Nu geldt voor  $x$  een frequentiewet  $\varphi(x)$  zoodanig dat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1 \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(x) dx = 0 \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x) dx = \mathfrak{D}\tau \quad . \quad (15)$$

Laat nu een deeltje met een gegeven snelheid  $u_0$  vertrekken dan kan het aantal deeltjes waarvoor op den tijd  $t$  de snelheid tusschen  $u$  en  $u + du$  ligt worden voorgesteld door

$$f(u_0, u, t) du$$

of kortweg

$$f(u, t) du$$

Beschouwen wij nu de snelheidsverdeeling op den tijd  $t + \tau$  en vestigen wij onze aandacht weder op de deeltjes wier snelheid tusschen  $u$  en  $u + du$  ligt. Deze deeltjes hebben op  $t$  een snelheid  $u'$  gehad zoodanig dat

$$u' (1 - \beta\tau) = u - x$$

of

$$u' = u (1 + \beta\tau) - x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

terwijl aan het interval  $du$  een interval  $du' = (1 + \beta\tau) du$  beant-

woordt. Het aantal deeltjes dat op  $t$  in  $du'$  is en op  $t + \tau$  in  $du$  bedraagt dus

$$f(u', t) \varphi(x) dx du'$$

en dientengevolge geldt

$$f(u, t + \tau) du = (1 + \beta\tau) du \int f(u', t) \varphi(x) dx \dots (17)$$

Ontwikkelen wij nu en behouden we de termen tot de 1e orde in  $\tau$  en nemen we (15) in aanmerking en laten we na deeling door  $\tau$ ,  $\tau$  tot nul naderen zoo vinden wij:

$$\frac{df(u, t)}{\partial t} = \beta \frac{\partial}{\partial u} (u \cdot f) + \frac{\mathfrak{D}}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \dots (18)$$

Voor de frequentie functie voor de snelheid geldt dus de uitgebreide diffusie-vergelijking waarbij  $\mathfrak{D}$  de rol van diffusie-coëfficiënt speelt. De vergelijking is geheel van den vorm van die voor de BROWN'sche beweging onder invloed eener quasi-elastische kracht ( $-u$  of  $-s$ ). (verg. ook § 4). Wanneer men (18) toepast om den stationairen toestand te bepalen heeft men

$$0 = \beta \frac{\partial}{\partial u} (u f) + \frac{\mathfrak{D}}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

waaruit volgt

$$f = C_1 e^{-\frac{\beta}{\mathfrak{D}} u^2} + C_2 e^{-\frac{\beta}{\mathfrak{D}} u^2} \int_0^u e^{\frac{\beta}{\mathfrak{D}} u^2} du.$$

De laatste term wordt oneindig voor  $u = \infty$ , dientengevolge moet de integratie constante  $c_2 = 0$  genomen worden.

Voor de verdeelingswet wordt dus volkomen onafhankelijk van den aanvangstoestand de MAXWELL'sche snelheidsverdeling gevonden. RAYLEIGH heeft deze kwestie voor zijn bijzondere voorbeeld overigens zeer uitvoerig onderzocht. Hij heeft voor een deeltje in een zeer verdund gas een soortgelijke vergelijking afgeleid, waarbij alleen de constanten  $\beta$  en  $\frac{\mathfrak{D}}{2}$  een andere beteekenis hebben (con. loc. cit.). Het spreekt van zelf dat men zoo men van de vergelijking van v. d. WAALS-SNETHLAGE uitgaat tot de nitkomst geraakt dat de verdeling na lange tijden *niet* de MAXWELL'sche is, dat er zelfs geen stationaire snelheidsverdeling bestaat. Ook op dit punt komen dus deze onderzoekers met de statistische mechanica van GIBBS, die het uitgangspunt hunner beschouwingen is, in strijd.

Opgemerkt mag nog worden dat voor een deeltje dat met snelheid nul begint, zoolang  $u$  nog klein is t.o.v. van de snelheid der

deeltjes die er mee botsen, gelijk RAYLEIGH heeft aangetoond, geldt

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}.$$

Voor de snelheidsverandering geldt dan bij elke botsing volgens RAYLEIGH

$$u' = u \pm 2q v$$

waarbij  $q$  de verhouding der massa's van deeltje en molekulen,  $v$  de snelheid der molekulen is. Nu is het door RAYLEIGH op deze wijze behandelde probleem direct op de theorie van de waarschijnlijkheidsfunctie voor den weg bij de Brownsche beweging terug te brengen. Denkt men toch de snelheid als vector uitgezet, dan wordt het eindpunt na elke botsing  $\pm qv$  verplaatst. Het eindpunt van den vector voert dus een BROWN'sche beweging uit, althans naar het schema wat er vaak (verg. bijv. het proefschrift van MEYER DE HAAS-LORENTZ) van gegeven wordt. Het is wel merkwaardig hoe LORD RAYLEIGH reeds zoo lang deze resultaten had afgeleid, die eerst door het baanbrekende werk van SMOLUCHOWSKI op den voorgrond traden.

Het is misschien goed, nu gebleken is, dat de formule van EINSTEIN juist is, nog iets nader in te gaan op het kinetische mechanisme. Lat men eerst op een enkele botsing van een deeltje van groote massa met een deeltje van kleine. Zij de snelheid van het eerste voor de botsing  $u'$  na de botsing  $u$ , de snelheid van het kleine deeltje  $v$  en de verhouding der massa's  $q$ , waarbij  $q \ll 1$  is. Dan geldt voor elke botsing

$$u = u' (1 - q) \pm q v.$$

Denken wij ons nu dat telkens na een tijdje  $\tau$  een botsing plaats heeft dan heeft men

$$\frac{u - u'}{\tau} = -\frac{q}{\tau} u' \pm \frac{q}{\tau} v$$

voor elke botsing. Maakt men van deze differentievergelijking een differentiaalvergelijking door  $\tau$  oneindig klein te nemen, dan kan dit alleen wanneer  $q$  van dezelfde orde oneindig klein is en men krijgt dan

$$\frac{du}{dt} = -\beta u \pm \beta v$$

waarbij voor  $\beta v$   $F$  geschreven kan worden. Men ziet dus hier door een (zeer onstrengen) grensovergang de vergelijking van EINSTEIN als het ware ontstaan. Voert men dezen grensovergang nu niet uit doch bedient men zich van de volgende grafische voorstelling dan

kan men hare beteekenis nog nader inzien. Op een as zetten wij de tijd uit (en nemen voor het gemak weder gelijke intervallen  $\tau$  tusschen de botsingen) op de andere de snelheid. Tusschen twee botsingen is dan de snelheid constant, bij een botsing springt de snelheid plotseling op een andere waarde en deze sprong bestaat in elk geval uit twee stukken; één stuk evenredig met de snelheid van het deeltje voor de botsing waarmede de snelheid vermindert en een stuk dat positief of negatief kan zijn (en in het algemeen allerlei waarden bezitten kan afhankelijk van de condities van botsing, dat in het eenvoudige geval dat RAYLEIGH onderzocht heeft  $\pm qv$  is). De snelheid-tijd-kromme is dus een discontinue kromme. Is de snelheid groot geworden dan heeft zij tengevolge van het eerste stuk de neiging door botsingen kleiner te worden, terwijl het tweede stuk geen systematischen invloed in tegengestelden zin nitoeft. Denkt men zich nu van een gegeven snelheid uitgaande een schaar krommen geteekend, dan zal de vergelijking van EINSTEIN voor elk dier discontinue krommen de differentiaalvergelijking voorstellen. Tevens zal als men de lijn  $u = u_0 e^{-\beta t}$  in het schema aanbrengt deze lijn op alle tijden een gemiddelde van de discontinue snelheid-tijd-krommen in het diagram zijn.

§ 4. Ik wil ten slotte nog de waarschijnlijkheidsfunctie afleiden voor de BROWN'sche beweging onder invloed van een uitwendige kracht. Wij stellen deze kracht  $km$ , waarbij  $k$  van de plaats ( $s$ ) af hangt.

De bewegingsvergelijking voor ons deeltje luidt dan :

$$\frac{du}{dt} = -\beta u + F + k \dots \dots \dots (19)$$

Laat nu een deeltje op den tijd  $t = 0$  een snelheid  $u_0$  bezitten, laat op een tijd  $t = \tau$  de snelheid geworden zijn  $u'$  en afgelegd zijn een weg  $t'$  en laat  $u$  en  $s$  deze grootheden op een tijd  $t$  voorstellen, Wij hebben dan

$$u - u' = -\beta (s - s') + \int_{t-\tau}^t F dt + \int_{t-\tau}^t k dt.$$

Wij beschouwen nu den tijd zoo klein dat de weg afgelegd in dien tijd klein genoeg is om in de laatste integraal  $K$  die van  $s$  afhangt als een constante te behandelen. Wij hebben dan

$$u - u' = -\beta (s - s') + \int_{t-\tau}^t F dt + k\tau \dots \dots \dots (20)$$

Wij hebben nu noodig  $\overline{\Delta s} = \overline{s - s'}$  en  $\overline{\Delta s^2}$ . Om deze te bepalen passen wij (3) toe, dit levert

$$\overline{u - u'} = u_0 e^{-\beta t} (1 - e^{+\beta \tau})^{-1}$$

voor voldoende langen tijd  $t$  kan dit nul gesteld worden en wij vinden dus

$$\beta \overline{\Delta s} = k\tau \quad . . . . . (21)$$

en op dezelfde wijze

$$\overline{\Delta s^2} = \mathfrak{D} \tau . . . . . (22)$$

Om nu tot de differentiaal-vergelijking voor de frequentie-functie te komen redeneeren wij weder op dezelfde wijze als voren. Laat  $f(s_0, st) ds$  de kans voorstellen dat een deeltje dat op den tijd 0 de coördinaat  $s_0$  heeft op den tijd  $t$  de coördinaat  $s$  (met speelruimte  $ds$ ) bezit (waarbij naar de beginsnelheid gemiddeld is). Wij volgen nu de beweging een korten tijd  $\tau$  en bouwen de frequentie-functie op den tijd  $t + \tau$  op uit die op den tijd  $t$ . Indien  $\Delta s$  weder de verschuiving gedurende den tijd  $\tau$  voorstelt, en  $\varphi(\Delta s)$  de frequentie-functie, voor deze verschuiving dan weten wij dat

$$\int \varphi(\Delta s) d\Delta s = 1, \quad \int \Delta s \varphi(\Delta s) d\Delta s = k\tau \quad \text{en} \quad \int (\Delta s)^2 \varphi(\Delta s) d\Delta s = \mathfrak{D} \tau \quad (22a)$$

Wij krijgen dus

$$f(s, s_0, t + \tau) ds = \int ds' f(s', s_0, t) \varphi(\Delta s) d\Delta s \quad . . . (23)$$

waarin  $s' = s - \Delta s$ .

Neemt men nu (20) in aanmerking dan vindt men voor het verband van  $ds'$  en  $ds$

$$ds' = \left( 1 - \frac{1}{\beta} \frac{\partial k}{\partial s} \tau \right) ds.$$

Ontwikkelt men vervolgens (23) en gaat men daarbij tot de eerste orde naar  $\tau$  dan vinden wij

$$\frac{\partial f'}{\partial t} = - \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial s} (k, f) + \frac{\mathfrak{D}}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \quad . . . . . (24a)$$

Voeren we voor  $\mathfrak{D}$  en  $\beta$  de waarde in dan komt er

$$\frac{\partial f'}{\partial t} = - \frac{m}{6\pi \mu a} \frac{\partial}{\partial s} (k, f) + \frac{m}{6\pi \mu a} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \quad . . . . . (24)$$

Deze vergelijking stemt met die van SMOLUCHOWSKI overeen als

1) Middelen wij nog naar de beginsnelheid  $u_0$  dan is voor alle tijden  $t$  de gebruikte stelling streng juist. Voor de afleiding van de frequentiewet van  $s$  moet dit middelen uitgevoerd daar toch naar de frequentiewet, onverschillig welke de beginsnelheid is, gevraagd kan worden.

men  $D$  (diffusie-coëfficiënt der BROWN'sche beweging  $\frac{kT}{6\pi\mu a}$ ) stelt. De factor  $\frac{1}{6\pi\mu a}$  is de  $\psi$  van SMOLUCHOWSKI d. w. z. de factor waarmee de kracht  $mk$  vermenigvuldigd moet worden om de snelheid te berekenen die in stationairen toestand door deze kracht veroorzaakt werd.

Door DEBYE en zijn leerling Dr. TUMMERS<sup>1)</sup> is voor het geval van molekulen (deeltjes) die in een vloeistof draaien, waarop dan werkt een uitwendig koppel en een koppel door de molekulaire botsingen een differentiaalvergelijking voor de frequentie functie der assen afgeleid. De afleiding van de daar verkregen resultaten volgt onmiddellijk uit onze formules. Wij hebben daartoe slechts het koppel door de molekulaire beweging uitgeoefend te splitsen in twee stukken het eene —  $q\dot{\alpha}$  ( $\dot{\alpha}$  zij de hoeksnelheid van het deeltje)  $q = 8\pi\mu a^3$  ( $a$  straal van het deeltje) en in een tweede stuk waarvan de gemiddelde waarde (geval gemiddelde) nul is. Voor de beweging van de as krijgen wij dan

$$P\ddot{\alpha} = -q\dot{\alpha} + X$$

waarin  $P$  het traagheidsmoment van het deeltje is.

Stelt men  $\dot{\alpha} = u$ ,  $\frac{q}{P} = \beta$ ,  $\frac{x}{q} = F$  dan verkrijgt men voor  $u$  de vergelijking (1) terug, waaruit dan blijkt dat de frequentie-functie uit een differentiaalvergelijking van den vorm (24a) is af te leiden.

Ten slotte moge nog worden opgemerkt dat het niet moeilijk is onze beschouwingen uit te breiden tot de „BROWN'sche beweging” van coördinaten in stelsels met een willekeurig aantal graden van vrijheid.

Utrecht 8 Dec. 1917      *Instituut voor Theoretische Natuurkunde.*

<sup>1)</sup> DEBYE, Zur Theorie der anomalen Dispersion. Verh. Deutsch Phys. Ges. X, p. 790.

J. TUMMERS, Over elektrische dubbelbreking, Diss. Utr. 1914.

**Anatomie.** — De Heer BOEKE biedt eene mededeeling aan van den Heer H. C. DELSMAN: „*Korte geschiedenis van den kop der gewervelde dieren*”.

(Mede aangeboden door den Heer VAN BEMMELEN).

Bij een hernieuwde bewerking mijner theorie omtrent den oorsprong der gewervelde dieren vond ik aanleiding mij nogmaals in een aantal vraagstukken betreffende hun bouw en ontwikkeling te verdiepen. Op deze de beginselen mijner theorie toepassend kwam ik wederom tot verschillende nieuwe gezichtspunten. Daar de voltooiing van het uitvoeriger stuk nog wel eenigen tijd op zich zal laten wachten, wil ik hier reeds een kort overzicht geven van de opvattingen, waartoe ik betreffende den bouw van den kop der Chordaten kwam, zonder echter thans daaraan een volledige uiteenzetting te verbinden omtrent de redenen, die mij ertoe brachten bepaalde opvattingen te huldigen, andere te verwerpen. Het komt mij toch voor, dat wij met de ons thans ter beschikking staande gegevens tot de oplossing van dit vraagstuk aanzienlijk dichter genaderd zijn, dan men uit een eerste kennismaking met den chaos van niteenwijkende en tegenstrijdige meeningen van oudere en vooral ook van nieuwere onderzoekers geneigd zou zijn te besluiten.

De geschiedenis van den kop der gewervelde dieren is ten nauwste verbonden met die van de animale pool van het ei en van de blastula in het dierenrijk. Reeds bij *Volvox* vinden wij een tegenstelling tusschen twee tegenoverliggende polen der kolonie, uitgedrukt in de sterkere ontwikkeling der voor Flagellaten kenmerkende roode stigmata aan de eene, van de voor het voedseltransport dienende plasmodesmen tusschen de cellen aan de andere pool. Ook in de ontwikkeling, die aanvangt met een aan het spiraalsgewijze type herinnerende eiklieving, komt de tegenstelling tusschen beide polen tot uiting. De kolonie zwemt met de animale pool naar voren, draaiend om de hoofdas (voor literatuur zie JANET, 1912). Hetzelfde geldt voor de vrijzwemmende blastula — “the animal *Volvox*”, gelijk HUXLEY (1877, p. 678) haar noemde — van verschillende marine diergroepen, de plannula der Coelenteraten, en andere pelagische larven. De animale helft der blastula ontwikkelt zich gewoonlijk tot een zintuig- en zenuwcentrum, de z.g. topplaat van larven als de



trochophora, die uit de vier animale cellen van het achtcellig stadium (1e kwartet van ectomeren) ontstaat. Bij vrijlevende dieren blijft de animale pool en de uit de topplaat ontstaande koplap, praeorale lob of prostomium gewoonlijk het vooreinde van het lichaam aanduiden — Anneliden, Mollusken, Arthropoden, Chordaten, Enteropneusten — gelijk dit reeds bij *Volvox* en de planula-larve het geval is.

Vastzittende vormen zetten er zich echter vaak meest vast — Coelenteraten, Echinodermen, Ascidien (WILLEY, 1894) — dan verliest de koplap zijn beteekenis als zintuig- en zenuwcentrum. Dit is ook vaak het geval bij gravende dieren, gelijk de regenwormen en *Amphioxus*, en bij *Balanoglossus*.

Uit de vier vegetatieve cellen van het achtcellig stadium daarentegen, uit de vegetatieve helft van de blastula dus, ontstaat bij polychaete Anneliden het geheele gelede soma, ecto-, ento- en mesoderm. Prostomium en soma vinden wij bij de Chordaten weer. Evenals bij Anneliden en bij Arthropoden zich één of enkele der voorste soma-segmenten met het prostomium tot den kop vereenigen, geschiedt dit ook bij de Vertebraten.

Bij *Amphioxus*<sup>1)</sup> is hiervan nog niet of nauwelijks sprake. Het stomodaeum is achterwaarts nitgegroeid tot de medullairbuis (DELSMAN, 1913 t. a. p. 649). Den mond, die bij Anneliden ventraal vlak achter de grens van prostomium en eerste segment ligt, vinden wij bij *Amphioxus* als neuroporus op de overeenkomstige plaats terug (DELSMAN, 1913 b), n. m. dorsaal, op de grens van prostomium en soma, vlak voor het eerste soma-segment, zijnde het mandibulairsegment van VAN WIJHE (1893, p. 157), de „collar-cavity” van MAC BRIDE (1898, p. 599). Recht onder den neuroporus ligt aanvankelijk de voerpunt van de chorda, die eveneens de grens van prostomium en soma aanwijst. Zintuigen en ganglien zijn bij *Amphioxus* verloren gegaan of onduidelijk geworden. Het hersenblaasje komt overeen met het deuterencephalon (KUPFFER, 1905) der Cranioten. De somieten ontwikkelen van het eerste tot het laatste gelijkvormige myotomen, die tezamen de willekeurige overlangsche lichaamsmuskulatuur vormen. Het eerste paar zendt elk een uitsteeksel (Kopffortsatz, rostral prolongation) in het prostomium, waarin aanvankelijk ook spiervezels gevormd worden, die later verloren gaan.

Bij de larve alterneeren de kieuwspleten regelmatig met de myotomen (WILLEY's afbeeldingen, 1891, HATSCHKE, 1892, p. 145), er is dus eumetamerie. Eerst later, na de „critical stage” (WILLEY, 1891, p. 202) gaat deze verloren. De linker kieuwspleet tusschen

<sup>1)</sup> Men vergelijkte thans voortdurend de hierbij gevoegde plaat.

het eerste en tweede somiet wordt tot den larvalen mond, zijn antimeer is de knotsvormige klier (VAN WIJHE, 1893, p. 153, verg. ook HIS, 1887, p. 429). Zij vormen het tweede paar kieuwspleten. Het eerste paar kieuwzakken, op de grens van prostomium en eerste segment, wordt vertegenwoordigd door de beide bilateraal symmetrisch optredende „vorste entodermzakjes” (HATSCHKE, 1892, p. 144), waarvan alleen het linksche nog naar buiten doorbreekt, als groeve van HATSCHKE, het rechtsche niet meer, doch tot 't z.g. praeorale coeloom wordt.

Bij elk somiet behoort een dorsale zenuw, tot het voorste echter twee, vlak bij elkaar ontspringend en door HATSCHKE (1892) vergeleken met de beide deelen van den trigeminus der Cranioten, die gewoonlijk als een dubbele, door mij echter met BALFOUR (1878, p. 214) als een soms secundair gesplitste enkelvoudige zenuw (verg. facialis en acusticus) beschouwd wordt, behoorende bij het eerste of mandibulaire segment (zie onder). Ditzelfde geldt ook voor de beide eerste dorsale zenuwen van *Amphioxus*, die ik dus te zamen nr. 1 noem. Tusschen kop- en rompzenuwen is nog weinig of geen verschil, dorsale en ventrale wortels blijven in het geheele lichaam gescheiden. Reeds hier echter munt de 4<sup>e</sup> zenuw, (HATSCHKE's 5<sup>e</sup>, 1892, p. 143) de latere vagus, door sterke ontwikkeling uit en staat deze voornamelijk met de overlansche plexus, die de kieuwen verzorgt (ramus branchio-intestinalis vagi der Cranioten) in verbinding (verg. evenwel VAN WIJHE, 1893, p. 162). De vier eerste soma-segmenten beantwoorden dus blijkbaar aan het trigeminus-, acustico-facialis-, glossopharyngeus- en vagus-segment der Cranioten (zie onder).

Het prostomium bevat geen eigen mesoderm, krijgt dit eerst secundair van het eerste mesodermsegment, gelijk ook bij de Anneliden algemeen voorkomt (verg. bijv. MEYER, 1890, p. 299). Het eigen, ectodermale, z.g. primaire (CONKLIN, 1897, p. 151) of larvale mesenchym van het prostomium der Anneliden, een laatste rest van het mesenchym der platwormen (MEYER, 1890), is bij de Vertebraten blijkbaar verdwenen, tezamen met de z.g. kopnier der trochophora, een laatste rest van de protonephridien der platwormen, die echter bij verschillende Anneliden en bij *Amphioxus* (GOODRICH, 1902) nog zijn blijven voortbestaan.

De asymmetrische oorsprong van den mond van *Amphioxus* levert ons den sleutel tot de verklaring der larvale asymmetrie.

*Petromyzon* onderscheidt zich van *Amphioxus* door het bezit van praeochondale hersenen, het palaeocranium van KUPFFER, tezamen met de geïnverteerde oogen ontstaan uit de dorsale

helft van de oppervlakte van het prostomium, zoodat de neuroporus, ook bij de overige Cranioten, niet meer dorsaal en boven de punt van de chorda, doch terminaal, ver voor de punt van de chorda en vlak bij de animale pool ligt (DELSMAN, 1916, 1917). Met *Amphioxus* stemt *Petromyzon* echter overeen in de volledige segmentatie van het mesoderm (HATSCHKE, 1910) en het gescheiden blijven van de dorsale en ventrale wortels der spinaalzenuwen. De reeks somieten loopt goed ontwikkeld door tot het prostomium. Evenals bij het meerendeel der Anneliden, die ze bezitten (FAUVEL, 1907, p. 110) liggen de gehoorblaasjes in het tweede soma-segment, zijnde het hyoid- of facialis-acusticus-segment, doch meer in de achterste helft hiervan. Wij kunnen dan ook bij *Petromyzon*, en bij alle Cranioten, twee pro-otische segmenten, het mandibulair- of trigeminus-segment en het hyoid- of acustico-facialis-segment onderscheiden. Na de gehoorblaasjes volgen dan het segment van den glossopharyngeus, van den primairen vagus, van de eerste spinaalzenuw, die bij Gnathostomen met het vagusganglion versmelt („spinalartiger Vagusanhang”, HATSCHKE, 1892, p. 156), en van de volgende spinaalzenuwen. Het eerste paar somieten zendt weer elk een uitsteeksel in het prostomium, het z.g. praemandibulaire somiet (HATSCHKE, 1910, p. 481), te vergelijken met den „Kopffortsatz” bij *Amphioxus*, dus niet als een zelfstandig somiet op te vatten. De beide pro-otische somieten nemen niet meer deel aan de vorming der overlangsche lichaamsmuskulatuur, zij leveren te zamen met het z.g. praemandibulairesomiet de oogspieren. De post-otische somieten leveren alle normale myotomen, die deel uitmaken van de rompmuskulatuur. Dit geldt dus ook, in tegenstelling tot andere Cranioten, voor het glossopharyngeus- en het primaire vagussomiet, al uit zich bij deze een begin van reductie hierin, dat de inwendige, diepere deelen dezer myotomen tijdens de ontwikkeling te gronde gaan (KOLTZOFF, 1901, p. 329), blijkbaar onder invloed van de sterke ontwikkeling van de gehoorcapsel, die naar achteren in het eerste en tweede post-otische segment doordringt, zoodat de myocommata tusschen eerste en tweede en tusschen tweede en derde myotoom zich aan de gehoorcapsel hechten en de eerste vrije neuraalboog eerst tusschen het derde en vierde myotoom ligt (verg. o. a. GOODRICH, 1909, p. 40). Aan de oppervlakte stemmen eerste en tweede somiet echter met de volgende overeen.

Evenals bij *Amphioxus* beantwoorden branchiomerie en mesomerie aan elkaar, de acht kieuwzakken, waarvan de eerste, aan het spuitgat beantwoordend, niet doorbreekt, liggen afwisselend met het 1<sup>e</sup>—9<sup>e</sup> somiet (NEAL, 1897, p. 447, KOLTZOFF, 1901, p. 432). Voor

het eerste somiet ligt een mediane mond. Dat de mond der Cranioten aan twee versmolten kieuwspleten beantwoordt, is een aanname (DOHRN, 1875), die, hoewel door de embryologie niet volkomen overtuigend gesteund, toch reeds waarschijnlijk gemaakt wordt door een vergelijking met *Amphioxus*. De mond der Cranioten is in ieder geval een andere dan die van *Amphioxus*, welke aan het linker spuitgat beantwoordt (VAN WIJHE, 1907, „er frisst mit dem linken Ohre" <sup>1)</sup>), terwijl die der Ascidiën-larven, die doorbreekt op de plaats van den neuroporus zelf, zoodat zelfs het voorste deel van de medullairbuis, het oude stomodaem, tevens deelneemt aan de vorming van den nieuwen darmingang (HUNTSMAN, 1913), andermaal een andere is. Hieruit blijkt wel zeer duidelijk de secundaire natuur van den chordatenmond.

Terwijl bij *Amphioxus* het endostyl als ventrale darmuitzakking in het eerste soma-segment, dus vóór den mond ontstaat, treedt dat van *Ammonoetes*, resp. de aanleg van de schildklier bij de Cranioten, in hetzelfde segment, dus vlak achter den mond op (VAN WIJHE, 1907, p. 75).

Van uit de voorste post-branchiale myotomen (NEAL, 1897, p. 444, KOLTZOFF, 1902, p. 304) groeien ventrale spierknoppen uit, gelijk aan die, welke bij Gnathostomen de musculatuur der extremiteiten leveren. Achter de laatste kieuwspleet omlaag en daarna naar voren groeiend leveren zij de hypobranchiale musculatuur, die geïnnerveerd wordt door de ventrale wortels van dezelfde post-branchiale myotomen (7<sup>e</sup>—12<sup>e</sup> post-otische somiet volgens NEAL), die de spieren geleverd hebben, gelijk dit bijv. ook voor de musculatuur der extremiteiten geldt. De aanvankelijke eumetamerie van kieuwspleten en somieten gaat later, ook bij de andere Cranioten, verloren door een achterwaartsche uitbreiding van den kieuwdarm, waardoor de kieuwspleten uitschuiven en de oorspronkelijk post-branchiale myotomen 7—12 thans epibranchiaal komen te liggen. De ventrale wortels dezer somieten blijven achter de laatste kieuwspleet omloopen op hun weg naar de hypobranchiale spieren en tijdens het uitschuiven der kieuwspleten vereenigen zij zich één voor één met elkaar tot een gezamenlijken horizontalen stam, die, uit zeven wortels ontstaande, achter de laatste kieuwspleet omlaag buigt. Dezen kunnen wij den hypoglossus of plexus cervicalis noemen (fig. 1).

De daarvóór gelegen ventrale wortels innerveeren de epibranchiale musculatuur, gevormd door de eerste zes post-otische somieten.

<sup>1)</sup> Betreffende den mond van *Amphioxus* komen wij thans dus tot een eenigszins andere conclusie dan vroeger (1913, b). Een van die van VAN WIJHE (1882) afwijkende opvatting der praemandibulaire holte der Cranioten voert ons tot een bevestiging van VAN WIJHE's conclusies in andere richting.

Den vagus denkt zich HATSCHEK (1892, p. 152) als een primair enkelvoudige zenuw, die dus tot het 2<sup>e</sup> post-otische somiet behoort, die echter in zijn ramus lateralis de laterale dorsale takken van

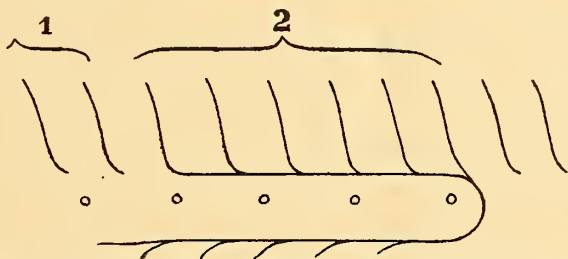


Fig. 1. <sup>¶</sup> Hypoglossus van *Petromyzon*, naar NEAL (1897).

1 primair epibranchiale ventrale wortels.

2 secundair „ „ „ „ (hypoglossus).

alle volgende spinaalzenuwen heeft gecollecteerd en evenzoo in zijn ramus branchio-intestinalis, met de rami post- en praetrematici, de overeenkomstige ventrale takken van evenveel op hem volgende zenuwen als hij meer dan één kieuwspleet innerveert (partieele polymerie van den vagus). De ramus branchio-intestinalis, af te leiden van den epibranchialen plexus van *Amphioxus*, dankt zijn ontstaan, evenals deze laatste, ongetwijfeld mede aan het niteenschuiven der kieuwspleten.

Voor het eerst vinden wij bij *Petromyzon* een begin van een kraakbeenigen schedel, vergelijkbaar met het kopkraakbeen der Cephalopoden, en evenals het laatste in aansluiting aan het centrale deel van het zenuwstelsel en van de hoofdzintuigen ontstaand. Het bevat, behalve het prostomium (dat HATSCHEK niet van het eerste segment onderscheidt, doch daarmee samenvat als acromeriet, 1910), slechts twee segmenten (HATSCHEK, 1892, p. 159), daar de schedel met de gehoorcapsel eindigt. Het dak blijft grootendeels vliezig en door vliezige wanden is het ook met den eersten neuraalboog, tusschen derde en vierde post-otische somiet gelegen, verbonden. Door dezen vliezigen wand treden glossopharyngeus en vagus uit.

Opmerking verdient, dat dus de hypoglossus ver achter den schedel ligt en ook ver achter den vagus. Dat onder invloed van den laatsten de op den vagus volgende spinaalgangliën zwakker ontwikkeld zijn dan die welke meer naar achteren liggen, gelijk bij Gnathostomen geregeld valt op te merken, blijkt uit geen der publicaties hieromtrent.

Bij de Cyclostomen sluiten zich in menig opzicht de Amphibiën nauwer aan dan de Selachiers, die weliswaar in menig opzicht primitief genoemd mogen worden, in andere echter weer meer overeenstemming met de Annioten vertoonen dan de Amphibiën. Dit geldt bijv. voor de vroegste ontwikkelingsstadiën van het ei, die

voor *Petromyzon* en Urodelen bijna identiek zijn, voor het ontstaan der hypophyse vóór de mondinstulping (bij Selachiers en Amnioten van het dak der laatste), voor den bouw der hersenen, waar een ontwikkeld metencephalon bij *Petromyzon* en Amphibiën nog ontbreekt, en voor het bezit van een mond met hoorntandjes (bij Amphibiën althans larvaal). Zoo ook voor de achterwaartsche uitbreiding van den schedel. Hierin zijn thans de eerste drie post-otische segmenten opgenomen, tezamen met den eersten vrijen neuraalboog van *Petromyzon*, die in de ontogenie als de z.g. occipitaalboog optreedt, welke van achteren het foramen vagi begrenst (STÖHR, 1879, 1881). De regio occipitalis der Amphibiën bevat dus slechts één wervelaanleg (SEWERTZOFF, 1897, p. 262). Tusschen den occipitaalboog en de gehoorkapsel worden embryonaal nog drie somieten aangelegd (Miss PLATT, 1897, p. 448 voor *Necturus*, SEWERTZOFF, 1897, p. 260 voor *Pelobates*), waarvan het laatste boven de ruimte tusschen de 4<sup>de</sup> en 5<sup>de</sup> kieuwspleet ligt (Miss PLATT, 1897, MARCUS voor Gymnophionen, 1910). Deze drie somieten zijn die van den glossopharyngeus, den primairen vagus en het met den laatsten versmeltende eerste spinaalganglion („spinalartiger Vagusanhäng“, HATSCHKE, 1892, p. 158). Van deze versmelting werden ook in de ontogenie aanduidingen waargenomen door Miss PLATT (1897, p. 448) en MARCUS (1910, p. 378). Bij het laatste kopsegment werd in jonge stadiën eenige malen een ventrale wortel, een z.g. occipitale zenuw (FÜRBRINGER, 1897, p. 353) waargenomen (FÜRBRINGER, 1897, p. 486, OSAWA, 1902, PETER, 1898, p. 42, DRÜNER, 1901, 1904, MARCUS, 1910, p. 376), die echter bij volwassen dieren wel steeds ontbreekt. Van de drie post-otische kopsomieten brengt alleen het laatste nog bij Urodelen en Gymnophionen een regelmatig myotoom voort, dat het voorste segment van de overlansche lichaamsmuskulatuur levert en, evenals het 3<sup>de</sup> postotische myotoom van *Petromyzon*, zich aan de gehoorkapsel insereert. De beide voorste post-otische somieten, waarvan de diepere deelen reeds bij *Petromyzon* reductie vertoonden, zijn, blijkbaar door de uitbreiding van de gehoorkapsel, onderdrukt, alleen het tweede kan nog eenige spiervezels voortbrengen (Miss PLATT, 1897, p. 447, (MARCUS, 1910, p. 430). Bij phaneroglosse Anuren verdwijnen echter ook het 3<sup>de</sup> en 4<sup>de</sup> post-otische myotoom (SEWERTZOFF, 1895, p. 269) tezamen met den ventralen wortel ook van dit laatste, zijnde die van de eerste vrije spinaalzenuw.

De kieuwspleten, vijf in getal bij *Necturus*, waarvan de eerste aan het spuitgat beantwoordt, wisselen weer regelmatig af met de 6 voorste somieten (PLATT, 1894, 1897). De vijf kopsomieten zijn dus alle epibranchiaal, de occipitaalboog ligt recht boven de laatste

kieuwspleet (PLATT, 1897, p. 452). Door de geringe achterwaartsche uitbreiding van het cranium reikt de invloedssfeer van den vagus, die het verloren gaan der volgende spinaalganglien bewerkt, tot voorbij de achtergrens van den schedel, bij Amphibiën ontbreekt dan ook steeds het eerste vrije spinaalganglion. Daar bij phanerglosse Anuren ook de ventrale wortel verloren gaat (zie boven) ontbreekt hier de eerste spinaalzeuw geheel. De vagus innerveert niet meer dan drie kieuwspletten, zijnde die van den primairen vagus, van den „spinalartigen Vagusanhang” en van de eerste vrije spinaalzeuw, die of geen dorsalen wortel heeft of geheel ontbreekt.

De hypobranchiale musculatuur wordt bij Urodelen door ventrale knoppen van de beide eerste postbranchiale (4<sup>e</sup> en 5<sup>e</sup> post-otische somiet) en het laatste epibranchiale myotoom (3<sup>e</sup> post-otische somiet) geleverd (Miss PLATT, 1897, p. 452) en geinnerveerd door de ventrale wortels van de beide eerstgenoemde somieten, zijnde de beide eerste vrije spinaalzewen, die bij Urodelen tezamen den geheel post-cranialen hypoglossus leveren. Deze ligt thans ten deele binnen de invloedssfeer van den vagus, zoodat de voorste wortel geen dorsaal ganglion heeft. De ventrale wortel van het laatste epibranchiale myotoom gaat, gelijk vermeld, verloren.

Epibranchiale muskulatuur ontbreekt.

Bij Selachiï zoowel als Amnioten heeft de enorme dooierrijkdom van het ei op overeenkomstige wijze het verloop der vroegste ontwikkeling beïnvloed, bij beide heeft het metencephalon zich ontwikkeld en ontstaat de hypophyse niet langer vóór, doch vanuit de mondbocht. Bij beide heeft de schedel een aantal wervelementen geannexeerd, die de regio occipitalis helpen vormen. Bij *Acanthias* valt hier de aanleg (of althans de aanduiding, SEWERTZOFF, 1899), van vier wervels op te merken (HOFFMANN, 1894, p. 638), waarvan de voorste aan den occipitaalboog van Amphibien beantwoordt (SEWERTZOFF, 1895, p. 260) en evenals de laatste door drie somieten van de gehoorcapsel gescheiden is. Er zijn dus drie segmenten bij den schedel gekomen; bij *Scyllium* en *Pristiurus*, waar de schedel een segment korter is (HOFFMANN, 1894, p. 638, SEWERTZOFF, 1899, p. 302) dan bij *Acanthias*, slechts twee. Bij de laatste vormen bevat de schedel behalve het prostomium dus 7 segmenten (= het aantal visceraalbogen <sup>1)</sup>), waarvan één post-branchiaal, bij *Acanthias* 8, waarvan twee post-branchiaal, bij *Hexanchus* en *Heptanchus* waarschijnlijk nog eenige meer (zie onder). Mesomerie en branchiomerie stemmen weer overeen (VAN WIJHE, 1882, ZIEGLER, 1908, 1915). Evenals bij

<sup>1)</sup> Twee minder dus dan het bekende getal van VAN WIJHE (1882), die de praemandibulaire holte als eerste somiet beschouwde en het hyoid-segment voor 2 telde.

de Amphibiën ontwikkelen de beide voorste post-otische somieten geen myotomen meer, alleen het tweede nog wel een rudimentair. De overige occipitale somieten echter wel.

Hieruit ontstaat de epibranchiale musculatuur (DOHRN, 1885, p. 446, HOFFMANN, 1898, p. 265), die bij alle overige Gnathostomen, en ook reeds bij de roggen, ontbreekt, en nog het sterkst ontwikkeld is bij de primitieve Notidaniden (FÜRBRINGER, 1897, p. 416). De hypobranchiale musculatuur (Musculi coraco-arcuales) ontstaat uit de ventrale knoppen van het laatste epibranchiale en de vier voorste post-branchiale myotomen, zijnde het 4<sup>de</sup>—8<sup>te</sup> post-otische somiet, volgens NEAL (1897, p. 450), en alleen van de laatste vier, alle post-branchiaal, volgens HOFFMANN (1898, p. 263). Geïnnerveerd wordt zij door de ventrale wortels van deze laatste vier myotomen, die ten deele binnen het bereik van den schedel, ten deele er achter liggen, tezamen den plexus cervicalis vormend. Doordat ook hier de kieuwspleten later uit elkander schuiven komt deze plexus cervicalis weer in een boog achterom de laatste kieuwspleet te loopen, ja, zelfs wordt hij door het sterke ineenschuiven der kieuwspleten met den plexus brachialis tot een gemeenschappelijken stam vereenigd, den plexus cervico-brachialis, die zich eerst op het eind in een tak naar de hypobranchiale musculatuur en een naar de borstvin splitst (Fig. 2). Dezen gemeenschappelijken plexus zag HOFFMANN (1901, p. 39) op geheel dezelfde wijze ontstaan als door NEAL voor den hypoglossus van *Petromyzon* beschreven wordt. Daar de schedel bij *Acanthias* 8 segmenten bevat, dus 6 post-otische, zullen van de vier wortels van den hypoglossus of plexus cervicalis, die zich volgens HOFFMANN verwachten laten,

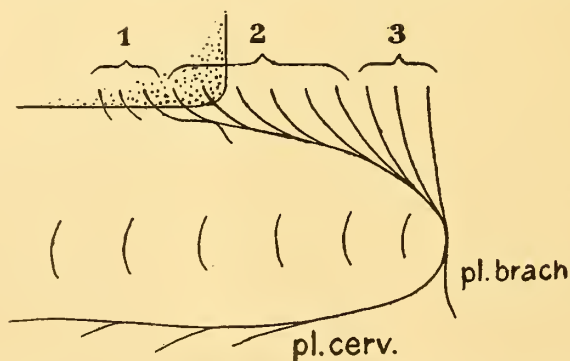


Fig. 2. Plexus cervico-brachialis van *Heptanchus*, naar FÜRBRINGER.

1. primair epibranchiale ventrale wortels.
2. plexus cervicalis. 3. plexus brachialis.

de beide eerste (5<sup>de</sup> en 6<sup>de</sup> post-otische somiet) uit den schedel komen. Dit is inderdaad het geval (FÜRBRINGER, 1897, p. 362). Bij geen enkelen



Selachier bedraagt het aantal met zekerheid geconstateerde intracraniale (occipitale) hypoglossuswortels meer dan 2 (FÜRBRINGER, l.c. p. 404), vaak 1 of 0. Hiernit laat zich ongeveer het aantal in den schedel opgenomen post-branchiale segmenten bepalen. Voorloopig moet gezegd worden ongeveer, daar wij omtrent het al of niet deelnemen van het laatste epibranchiale myotoom geen voldoende zekerheid hebben. NEAL (1897, p. 461), onderstelt, dat een tijdelijk voorwaarts ineenschuiven van de kieuwspleten, waardoor de laatste onder, en niet achter het laatste epibranchiale myotoom komt te liggen, gelijk door hemzelf bij *Acanthias* en door Miss PLATT (1897, p. 458) bij *Necturus* werd waargenomen, dit myotoom, dat daartoe anders geen gelegenheid zou hebben, somtijds in staat stelt ventraal uit te groeien. Vóór de occipitale hypoglossus-wortels ( $y, z$ , volgens FÜRBRINGER) liggen somtijds nog eenige ventrale occipitale zenuwen, die óf vrij blijven (*Hexanchus*, *Heptanchus*) óf wel zich aanvankelijk bij den plexus kunnen aansluiten, doch die alleen epibranchiale musculatuur innerveeren ( $x, w, v$ , volgens FÜRBRINGER) en dus te vergelijken zijn met de ventrale wortels van de eerste zes post-otische myotomen van *Petromyzon*, voor wie hetzelfde geldt. Van de occipitale myotomen zijn dus de voorste primair epibranchiaal, de één of twee achterste van post-branchialen oorsprong, en slechts door het niteenschuiven der kieuwspleten epibranchiaal geworden.

Bij *Hexanchus* en *Heptanchus*, waar het aantal kieuwspleten groter, doch het aantal occipitale hypoglossuswortels niet geringer is dan bij pentanche haaien, bevat de schedel waarschijnlijk dus minstens nog een of twee segmenten meer dan bij de laatste. Dit wordt ook door het volgende bevestigd. De invloedssfeer van den vagus op de hem volgende dorsale wortels, reikt bij *Scyllium* etc. tot even voorbij de cranio-vertebraalgrens, eerst het tweede vrije spinaalganglion is weer eenigszins normaal, terwijl het eerste gewoonlijk ontbreekt (FÜRBRINGER, p. 392). Bij *Acanthias* wordt nog in het laatste kopsegment een ontwikkeld spinaalganglion gevormd, dat niettemin geen dorsalen wortel meer voortbrengt. Bij *Hexanchus* en *Heptanchus* echter is de laatste occipitaalzenuw van een ontwikkelden dorsalen wortel met ganglion voorzien, hier reikt dus de invloed van den vagus niet meer tot het einde van den schedel, die hier min of meer geleidelijk in de wervelkolom overgaat. Nog meer geldt dit voor de Chondrostei, waar bij vele soorten een groot aantal dorsale en ventrale wortels den schedel verlaten (FÜRBRINGER, 1897, p. 450) en zelfs de geheele brachiale plexus daarin opgenomen kan worden (ibid., p. 457). Voor de aanname, dat bij *Hexanchus* en *Heptanchus*

de langste schedel onder de Selachii gevonden wordt, pleit ook de goede ontwikkeling der primair epibranchiale zenuwen (*v*, *w*, *x* volgens FÜRBRINGER): bij pentanche haaien gaan als gevolg van de afname van het aantal kieuwspleten de achterste dezer zenuwen in postbranchiale, dus hypoglossuswortels over.

Daarentegen schijnt bij roggen het cranium korter te zijn, het aantal occipitale hypoglossus-wortels is meest 0, hoogstens 1 (FÜRBRINGER, 1897, p. 404), en de invloed van den vagus strekt zich tot een eindweegs voorbij den achterkant van het cranium uit: de beide voorste spinaalganglien ontbreken (FÜRBRINGER, p. 392). Dit alles wijst eer op een phylogenetische afname dan op een toename van de lengte van den schedel bij de Selachiers.

Bij Selachiers hebben wij dus gewoonlijk een gedeeltelijk intracranialen, gedeeltelijk post-cranialen hypoglossus, waarvan de voorste wortels gewoonlijk binnen de invloedssfeer van den vagus liggen en daardoor hun dorsale ganglien verliezen. „Ventrale vaguswortels” werden de occipitale zenuwen door GEGENBAUR (1871, p. 521) genoemd, wat juist is, als wij den vagus als een partieel polymere zenuw beschouwen en bovendien bedenken, dat bij de Selachiers beter van een vago-accessorius gesproken kan worden. Met het reeds tweewaardige vagus-ganglion versmelt nog het rudimentaire ganglion van het 6e segment (NEAL, 1898, p. 238), zoodat het vagusganglion nu drie-waardig is, versmolten uit één normaal en twee rudimentaire ganglien.

Bij Amnioten stemt het aantal occipitale myotomen, dat embryonaal wordt waargenomen ongeveer met dat der Selachiers overeen. Het aantal intracraniale (occipitale) hypoglossuswortels wordt algemeen als drie aangegeven, één meer dus dan bij *Acanthias*, doch daar het aantal kieuwspleten één minder is (5), wijst dit erop, dat de grens van den schedel ongeveer met die van de Selachiers overeenstemt en de schedel dus ook een achttal segmenten omvat. Bij Selachii en Amnioten beide wordt het eerste pronephros-trechtertje in den regel in het 3<sup>e</sup> somiet na de craniovertebraalgrens gevonden (FRORIEP, 1905, p. 119). De betrekking tusschen myotomen en kieuwspleten laat zich hier niet met zoo groote zekerheid bepalen als bij lagere Chordaten. Nemen wij echter als voorbeeld de instructieve afbeelding van VAN BEMMELEN (1889, p. 254) voor *Lacerta*, dan meen ik als meest waarschijnlijke opvatting hieruit af te mogen lezen, dat het voorste afgebeelde occipitale myotoom beantwoordt aan het eerste somiet na dat van den primair vagus, dus het 3<sup>e</sup> post-otische is (evenals bij Amphibien en Selachii) en het laatste epibranchiale. Dit is het eerste van de 5 myotomen, die volgens VAN BEMMELEN de hypobranchiale of tongmuskulatuur leveren, terwijl CORNING (1895, p. 165) de mede-

werking van dit eerste ontkent, zoodat uit zijn opgave volgt, dat slechts de voorste vier post-branchiale myotomen er aan deelnemen. Hiervan behooren drie tot den kop, terwijl het vierde aan den atlas beantwoordt. Inderdaad wordt de tongmusculatuur geïnnerveerd door een hypoglossus met drie occipitale wortels, die zich met den eersten vrijen ventralen wortel vereenigen (FÜRBRINGER, 1897, p. 506) tot een plexus cervicalis, die zich in dit geval echter niet met den plexus brachialis verbindt, welke bij Amnioten vaak ver naar achteren schuift.

De hypobranchiale resp. tongmuskulatuur der Vertebraten stemt dus in haar ontstaan en innervatie geheel met die der extremiteiten overeen. Wellicht heeft zij met de laatste eenmaal de gedaante van een continue serie ventrale spierknoppen gehad, die de musculatuur der beide overlangsche ventrale plooiën leverde, waarvan BALFOUR de extremiteiten der Vertebraten afleidde, en waarmede wellicht de metapleurae van *Amphioxus* met de daarin uitgroeiende myotomen nog vergeleken mogen worden. Op de hypobranchiale musculatuur is ook de regel, door FÜRBRINGER (1879, p. 389) voor die der extremiteiten opgesteld, van toepassing, dat de opbouw en innervatie niet gebonden is aan bepaald genummerde segmenten, doch dat plaats en aantal van de laatste bepaald wordt door de ligging van het „segmentale niveau”, waarin het orgaan ontstaat en de meerdere of mindere ontwikkeling daarvan. Verschuiving naar voren en naar achteren, uitbreiding en inkrimping is mogelijk, zonder dat echter de myotomen zelf verschuiven, zich deelen of versmelten, of wel nieuwe myotomen geïntercalculeerd worden of oude verdwijnen. De voorgrens van het hypoglossus-gebied wordt steeds bepaald door de ligging van de achterste kieuwspleet, dus door het aantal kieuwspletten. Wellicht kan soms ook het laatste epibranchiale myotoom er aan deelnemen, hoewel onder de boven geresumeerde waarnemingen slechts één hieromtrent is (Miss PLATT, 1897), die tot heden niet weersproken werd, terwijl bovendien het niet deelnemen van den corresponderenden ventralen wortel aan de innervatie ook hier allen twijfel niet geheel uitsluit.

Van het aantal kieuwspletten hangt ook af, of de voorste hypoglossuswortels binnen het bereik van de invloedssfeer van den vagus komen, dus met eenig recht als ventrale wortels van den partieel polymeren vagus (vago-accessorius) kunnen beschouwd worden (GEGENBAUR) of niet. Dit laatste is bijv. bij *Petromyzon* het geval.

Van het aantal kieuwspletten én van de achterwaartsche uitbreiding van den schedel hangt af, of de voorste hypoglossus-wortels in den schedel worden opgenomen als occipitale zenuwen. Bij *Petromyzon* is de schedel kort en het aantal kieuwspletten groot: de hypoglossus

ligt dan ook ver achter den schedel. Direct achter den schedel liggen de hypoglossus-wortels bij Amphibiën en de meeste roggen, voor een kleiner deel in den schedel, een grooter deel er buiten bij de haaien, voor het grootste deel in den schedel bij Amnioten, geheel in den schedel bij Ganoïden, waar soms bovendien nog de plexus brachialis erin opgenomen is, gelijk bij *Acipenser* (FÜRBRINGER, 1897, p. 457).

Uit het boven behandelde volgen zonder meer de volgende conclusies:

1°. FRORIEP's (1882—1887) indeeling van den kop der Vertebraten in een primair ongesegmenteerd „cerebraal deel”, omvattende behalve oog en neus ook de gehoorblaasjes en de kieuwspleten, en een gesegmenteerd „spinaal deel” (regio occipitalis) is onjuist. GEGENBAUR's indeeling van den schedel in een praechordaal „evertebraal” en een chordaal „vertebraal” deel is de juiste, al heeft het voorste deel van dit laatste, tot den occipitaalboog, zich niet uit wervels gevormd, doch is het tegelijk met deze ontstaan (verg. *Petromyzon*, zie GEGENBAUR, 1887, p. 77, VAN WIJHE, 1889). Branchiomerie en mesomerie correspondeeren met elkaar.

Een primair ongesegmenteerd kopmesoderm (FRORIEP, 1887, „Urmesoderm” van DE LANGE, 1913, p. 250), waarin slechts van branchiomerie sprake zou zijn, bestaat niet; het prostomium bevat geen eigen mesoderm meer (verg. *Amphioxus* en het „proamnion” der Amnioten).

2°. FRORIEP's (1882 e. v.) opvatting van een secundaire invasie van rompsegmenten in den primair ongesegmenteerden, „cerebralen” kop, en FÜRBRINGER's (1897, p. 440) meening omtrent een „stetiges Vorrücken” en tegronde gaan van deze myotomen met hunne ventrale wortels in de occipitaalstreek zijn onjuist. FRORIEP's argument, dat rudimentaire dorsale wortels, door hem bij deze myotomen gevonden, erop zouden wijzen, dat zij niet tot den vagus kunnen behooren en van post-branchialen oorsprong moeten zijn, vervalt door de opvatting van den vagus als een partieel polymere zenuw, die dergelijke rudimentaire dorsale wortels juist verwachten doet. Aan FÜRBRINGER's argument, dat de occipitale zenuwen der haaien zich met de voorste vrije spinaalzenuwen vereenigen tot den plexus cervicalis, wordt de waarde door de bovenstaande beschouwingen geheel ontnomen. FRORIEP en FÜRBRINGER verzuimden bij de Selachii onderscheid te maken tusschen primair en secundair epibranchiale myotomen, gelijk zich dat ook bij *Petromyzon* zoo duidelijk laat doen, en kwamen, ze alle voor secundair epibranchiaal en van post-branchialen oorsprong houdend, tot verkeerde opvattingen. Geen

„heiszer Kampf der Theile” (FRORIEP, 1901, p. 372) in dit gebied: rust en vrede heerschen in de regio occipitalis.

3°. FÜRBRINGER's (1897) opvatting van den metameren bouw van het Amphibiencranium en als gevolg daarvan ook die omtrent den schedel der Amnioten is onjuist <sup>1)</sup>. De amphibienschedel bevat niet, gelijk FÜRBRINGER (l.c. p. 485) a priori aanneemt, evenveel segmenten als die der Selachiers, doch minder (SEWERTZOFF, 1897, p. 410). De enkele occipitale zenuw, bij Amphibien soms embryonaal waargenomen, werd boven verklaard, en is niet op te vatten als een laatste rest van meerdere occipitale zenuwen ( $x, y, z$ ), gelijk bij Selachiers aangetroffen worden, is dan ook niet  $z$ , doch  $x$ .

De bij de Amnioten aanwezige occipitale hypoglossus-wortels zijn niet te verklaren uit een tweede annexatie van vrije segmenten, doch stemmen overeen met die der Selachiers. De oudste opvatting (GEGENBAUR, 1871, p. 532) blijkt hier weer eens de juiste. „Occipito-spinale” zenuwen ( $a, b, c$  etc. volgens FÜRBRINGER) bestaan niet, althans niet bij Amnioten. Slechts als men met FÜRBRINGER (l.c. p. 362) de laatste occipitale zenuw van *Acanthias* als  $a$  aanduidt, zou men dit ook waarschijnlijk bij Amnioten moeten doen. Het „ganglion hypoglossi”, door FRORIEP (1882) in het laatste kopsegment bij het schaap gevonden, stemt toch overeen met het ganglion van het laatste kopsegment van *Acanthias* (zie boven). De scherpe onderscheiding tusschen proto- en auximetameer neocranium moet vervallen, in geen geval hebben de Amnioten een auximetameer of de Amphibien een protometameer neocranium in FÜRBRINGER's zin. Slechts bij Notidaniden en Chondrostei zou men van een auximetameer neocranium en van occipito-spinale zenuwen kunnen spreken.

Zeer zeker heeft de hypoglossus aanvankelijk met den vagus niets te maken, gelijk *Petromyzon* leert; dat hij er later met zijn wortels zoo dicht achter komt te liggen, dat men ze ten deele met GEGENBAUR als ventrale vaguswortels (d.w.z. van den partieel polymeren vago-accessorius, nog juister ware het te zeggen van den accessorius, die in nauwste aansluiting aan de voorste, rudimentaire ganglien achter den vagus ontstaat en zich bij Selachii met den laatsten vereenigt) kan aanduiden, is niet te verklaren uit een voorwaarts schuiven van de betreffende myotomen zelf, doch wel door een verschuiving van het „segmentale hypoglossus-niveau” naar voren in verband met de afname van het aantal kienwspeten (verkorting van het kienwspeteniveau), in overeenstemming met het door FÜRBRINGER zelf vroeger opgestelde beginsel. Dit beginsel, tezamen met FÜRBRINGER's bewonderenswaardige onderzoek-

<sup>1)</sup> FRORIEP (1905) aarzelde dan ook, hierin met hem mee te gaan.

kingen op anatomisch, en die van anderen op embryologisch gebied, opeut thans het uitzicht op beter begrip van den bouw van den kop der Chordaten.

De twijfel, of ooit een juist inzicht in den bouw en de geschiedenis van den Vertebratenkop verkregen zal worden, mag, naar mij voorkomt, plaats maken voor hoop. „The recent rehabilitation of *Amphioxus* as an ancestral type by DELSMAN ('13)”, schreef NEAL (1914, p. 138) eenige jaren geleden, „seems to justify the hope that the ancestral history of the head may yet be known and general agreement among morphologists be attained.” Moge deze verwachting verwerkelijkt worden en verdere onderzoekingen de resultaten van deze eerste poging aanvullen en verbeteren.

#### L I T E R A T U U R.

- BALFOUR, F., 1878, A monograph on the development of Elasmobranch Fishes.  
 BEMMELEN, J. VAN, 1889, Ueber die Herkunft der Extremitäten- und Zungenmuskulatur bei Eidechsen. Anat. Anz., Bd. 4.  
 CONKLIN, E. G., 1897, The embryology of *Crepidula*. Proc. Acad. Nat. Sc. Philad.  
 CORNING, H. K., 1895, Ueber die Entwicklung der Zungenmuskulatur bei Reptilien, Verh. anat. Ges., Bd. 10.  
 DELSMAN, H. C., 1913, *a*. Der Ursprung der Vertebraten, Mitth. Neapel, Bd. 20.  
 —, 1913, *b*, Ist das Hirnbläschen des *Amphioxus* dem Gehirn der Kranioten homolog? Anat. Anz., Bd. 44.  
 —, 1916, De verhouding der eerste drie klievingsvlakken tot de hoofdassen van het embryo bij *Rana fusca* Roesel. Versl. Kon. Acad., Deel 25.  
 —, 1917, De gastrulatie van *Rana esculenta* en van *Rana fusca*, *ibid*.  
 DOHRN, A., 1875, Der Ursprung der Wirbelthiere und das Princip des Funktionswechsels.  
 —, 1885, Studien zur Urgeschichte des Wirbelthierkörpers, X, Mitth. Neapel, Bd. 6.  
 DRÜNER, L., 1901. 1904, Studien zur Anatomie der Zungenbein-, Kiemenbogen- und Kehlkopfmuskeln der Urodelen. Zool. Jahrb. Abt. Anat. Ont. Bd. 15, 19.  
 FAUVEL, P., 1907, Recherches sur les Otcocytes des Annelides polychètes. Ann. Sc. Nat. (9) T. 6.  
 FRORIEP, A. 1882, Ueber ein Ganglion des Hypoglossus und Wirbelanlagen in der Occipitalregion Arch. Anat. Phys. Abth. Anat., 1882.  
 —, 1887, Bemerkungen zur Frage nach der Wirbeltheorie des Kopfskelettes, Anat. Anz. Bd. 2.  
 —, 1901, Ueber die Ganglienleisten des Kopfes und des Rumpfes und ihre Kreuzung in der Occipitalregion. Arch. Anat. Phys. Abt. Anat.  
 —, 1905, Die occipitalen Urwirbel der Amnioten im Vergleich mit denen der Selachier. Verh. anat. Ges. 19. Vers.  
 FÜRBRINGER, M. 1879, Zur Lehre von den Umbildungen der Nervenplexus. Morph. Jahrb., Bd. 5.  
 —, 1897, Ueber die spino-occipitalen Nerven der Selachier und Holocephalen und ihre vergleichende Morphologie. Festschr. Gegenbaur, Bd. 3.  
 GEGENBAUR, C., 1871, Ueber die Kopfnerven von *Hexanchus*, enz. Jen. Zeitschr., Bd. 6.  
 —, 1887, Die Metamerie des Kopfes und die Wirbeltheorie des Kopfskeletes. Morph. Jahrb., Bd. 13.  
 GOODRICH, E. S., 1902, On the Structure of the Excretory Organs of *Amphioxus*, Quart. Journ., Vol. 37.  
 —, 1907, Vertebrata Craniata, Treatise of Zoology, Part 9.  
 HATSCHKE, B., 1892, Die Metamerie des *Amphioxus* und des *Ammocoetes*. Verh. Anat. Ges. 6. Vers.

- HATSCHKE, B., 1910, Ueber das Akromerit und über echte Ursegmente bei Petromyzon. Morph. Jahrb., Bd. 40.
- HIS, W., 1887, Die morphologische Betrachtung der Kopfnerven. Arch. Anat. Phys. Abth. Anat., 1887.
- HOFFMANN, C. K., 1894, Zur Entwicklungsgeschichte des Selachierkopfes. Anat. Anz. Bd. 9.
- , 1896—1899, Beiträge zur Entwicklungsgeschichte der Selachii. Morph. Jahrb., Bd. 24, 25, 27.
- , 1901, Zur Entwicklungsgeschichte des Sympathicus, I. *Acanthias vulgaris*. Verh. Kon. Acad. Wet., Deel 7.
- HUNTSMAN, A. G., 1913, On the Origin of the Ascidian Mouth. Proc. Roy. Soc. B, Vol. 86.
- HUXLEY, 1877, The Anatomy of Invertebrated Animals.
- JANET, CH., 1912, Le Volvox, Limoges.
- KOLTZOFF, N. K., 1901, Entwicklungsgeschichte des Kopfes von Petromyzon Planeri. Bull. Soc. Imp. Nat. Moscou, Bd. 15.
- KUPFFER, K. VON, 1905, Die Morphogenie des Centralnervensystems. Hertwig's Handbuch Entw. Vert., Bd. 2.
- LANGE, D. DE, 1913, Mitteilungen zur Entwicklungsgeschichte des japanischen Riesen salamanders, 2. Anat. Anz., Bd. 43
- MAC BRIDE, E. W., 1898, The early Development of Amphioxus. Quart. Journ. Micr. Sc., Vol. 40.
- MARCUS, H., 1910, Beiträge zur Kenntniss der Gymnophionen.  
I. Morph. Jahrb., Bd. 40.  
II. Festschr. Rich. Hertwig
- MEYER, E., 1890, Die Abstammung der Anneliden. Biol. Centralbl., Bd. 10.
- NEAL, H. V., 1897, The Development of the Hypoglossus Musculature in Petromyzon and Squalus. Anat. Anz., Bd. 13.
- , 1898, The Segmentation of the Nervous System in Squalus Acanthias. Bull. Mus. Comp. Zool., Vol. 31.
- , 1914, The Morphology of the eye-muscle Nerves. Journ. Morph., Vol. 25.
- OSAWA, G., 1902, Beiträge zur Anatomie des Riesensalamanders Mitt. med. Fak. K. Jap. Univ. Tokio. Bd. 5.
- PETER, K., 1898, Die Entwicklung und funktionelle Gestaltung des Schädels von *Ichthyophis glutinosus*. Morph. Jahrb., Bd. 25.
- PLATT, J. B., 1894, Ontogenetische Differenzierung des Ectoderms in *Necturus*. Arch. mikr. Anat., Bd. 43.
- , 1897, The development of the cartilaginous skull etc. in *Necturus*. Morph. Jahrb., Bd. 25.
- SEWERTZOFF, A., 1895, Die Entwicklung der Occipitalregion der niederen Vertebraten. Bull. soc. imp. Nat. Moscou, T. 9.
- , 1897, Beitrag zur Entwicklungsgeschichte des Wirbeltierschädels. Anat. Anz. Bd. 13.
- , 1899, Die Entwicklung des Selachierschädels. Festschr. Carl. v. Kupffer.
- STÖHR, P., 1879, Zur Entwicklungsgeschichte des Urodelenschädels. Zeitschr. wiss. Zool., Bd. 33
- , 1881, Zur Entwicklungsgeschichte des Anurenschädels, *ibid.*, Bd. 36.
- WIJHE, J. W. VAN, 1882, Ueber die Mesodermsegmente und die Entwicklung der Nerven des Selachierkopfes. Naturk. Verh. K. A. W., Dl. 22
- , 1889, Ueber die Kopfregion der Cranioten beim Amphioxus etc. Anat. Anz. Bd. 4.
- , 1893, Ueber Amphioxus. Anat. Anz. Bd. 8.
- , 1907, Die Homologisierung des Mundes des Amphioxus etc. Petrus Camper. Dl. 4
- WILLEY, A., 1891, The later larval Development of Amphioxus. Quart. Journ., Vol. 32.
- , 1894, On the Evolution of the Praeoral Lobe. Anat. Anz. Bd. 9.
- ZIEGLER, E. H., 1908, Die phylogenetische Entstehung des Kopfes der Wirbelthiere. Jen. Zeitschr., Bd. 43.
- , 1915, Das Kopfproblem. Anat. Anz. Bd. 48.

**Physiologie.** — De Heer BOEKE biedt eene mededeeling aan van den Heer J. J. I. DE NEVE: „*Het gedrag der megakaryocyten in de milt van de jonge kat*”.

(Mede aangeboden door den Heer ZWAARDEMAKER).

### I. *Inleiding.*

Het is een bekend feit, hoewel lang niet algemeen in de literatuur doorgedrongen, dat in de normale zoogdiermilt de reuzencellen (mega- of megalokaryocyten van HOWELL 1890) uit het embryonale leven, na de geboorte nog eenigen tijd blijven bestaan. Ja, zelfs is aan verschillende Fransche onderzoekers, o. a. JOLLY en ROSELLO (1909) maar vooral DE KERVILY (1912), gebleken dat bij de meeste zoogdieren in de normale volwassen milt reuzencellen kunnen worden aangetoond.

Het aantal reuzencellen evenwel dat men vindt in de embryonale milt is veel grooter dan in de volwassen milt. Er moet dus een wijze bestaan waarop die cellen in aantal verminderen, en dit na te gaan was het doel van mijn onderzoek. De eigenlijke gestelde vraag was deze: hoe en wanneer verdwijnen de megakaryocyten uit de milt van de kat? En op deze vraag meen ik het antwoord gevonden te hebben.

### II. *Literatuurbespreking.*

Meer nog dan in de embryonale milt vindt men de reuzencellen beschreven in lever en navelblaas. Dit komt omdat de meeste onderzoekers die over dit onderwerp publiceeren getracht hebben de jongste stadia der bloedsvorming na te gaan. En de milt wordt betrekkelijk zoo laat aangelegd, in een stadium waarop de bloedsverhoudingen reeds zoo gecompliceerd zijn dat dit voor de haematologen een onoverkomenlijke hinderpaal zou zijn. Bovendien zijn in de milt op zichzelf de structuur- en weefselverhoudingen al spoedig zoo ingewikkeld dat ook dit een belangrijk bezwaar oplevert. Voor ons behoeft dit geen bezwaar te zijn omdat we toch slechts op één bepaalde celsoort letten.

Wanneer wij aannemen dat de reuzencellen een functie bezitten, dan moet eenige samenhang van het verdwijnen van die cellen met



die funktie zijn te verwachten. Daarom is het van belang na te gaan welke meeningen men daaromtrent voornamelijk gehad heeft.

Een der eersten die zich over dit punt uitlaat is VAN DER STRICHT (1888 en '91) die aan de reuzencellen verschillende funkties toekende, waarvan de voornaamste wel een phagocytaire was. Positiever in zijn meening is FLEMMING, die namelijk beweert dat de reuzencellen, waar zij ook voorkomen, pathologische producten zijn, die geen funktie hebben, maar te gronde gaan. VON KOSTANECKI (1892) zegt gezien te hebben dat de reuzencellen uiteenvallen in kleinere cellen, en tevens neemt hij een phagocytaire funktie aan, zulks, zegt hij, in tegenstelling met de opvatting van RANVIER en KUBORN, die meenden dat de reuzencellen „cellules vasoformatives” waren. Later bleek die „vaatvormende funktie” dan ook slechts een ontaardingsproces te zijn. Ook komt VON KOSTANECKI op tegen de meening van VAN DER STRICHT dat de kernen der gephagocyteerde cellen zonder meer zouden bijdragen tot vergrooting van de kern van de reuzencel. Ten onrechte heeft men dan ook, volgens hem, besloten, dat de reuzencellen zouden ontstaan uit de samenvoeging van verschillende kleinere cellen. En ten slotte zegt hij omtrent de funktie: „Meinen Erfahrungen nach muss ich aufs entschiedenste die Ansicht vertreten, dass die Riesenzellen der embryonalen Leber — für andere blutbildende Organe der Säugetiere wird die Ansicht auch von manchen Autoren verfochten —, so auffällig und so interessant sie in ihrer Form und in ihren Lebenserscheinungen auch sein mögen, bezüglich ihrer Funktion und ihres Verhältnisses zum Vorgang der Blutbildung völlig nebensächlich und bedeutungslos sind”.

Veel uitvoeriger over dit onderwerp is SAXER (1896) die zegt dat sommige beelden hem deden denken dat de reuzencellen kleinere cellen konden opnemen, zoowel als zich in andere cellen oplossen. Tevens komt hij op tegen de meening van FLEMMING als zouden de reuzencellen slechts een „abgeartete und ausgeartete” celvorm zijn. SAXER meent een bepaalde samenhang met de bloedsvorming te moeten aannemen, welke laat hij in het midden. Hij zegt ten slotte: „Sodass es in der That unmöglich erscheint aus den verschiedenen Erscheinungsphasen einen einheitlichen Vorgang zu konstruieren.”

MAXIMOW (1908) meent dat reuzencellen overal optreden waar erythropoëse en granulopoëse plaats vinden, maar hij zag nooit splitsing in kleinere eenkernige cellen.

SOPHIE LIFSCHITZ (1901) had reeds in haar dissertatie gewezen op een parallelisme tusschen erythropoëse en het aantal megakaryocyten in de milt van menschenfoetus.

Dikwijls zien we dus de aanname van een samenhang met de vorming van witte of roode bloedlichaampjes, maar de allernieuwste opvatting is die van J. H. WRIGHT (1906) en OGATA (1912) namelijk dat de reuzencellen thrombocyten of bloedplaatjes vormen en afsplitsen.

We hebben dus minstens vier opvattingen over het lot der megakaryocyten: 1e. degeneratie, 2e. samenhang met de erythropoëse, 3e. vorming van éénkernige, witte bloedlichaampjes, 4e. vorming van thrombocyten.

### III. *Materiaal en methoden.*

Waar reuzencellen voorkomen zijn deze, indien het materiaal goed is, met iedere goede kleurmethode aan te toonen. Om bijzonderheden duidelijk te maken is het gewenscht de coupedikte niet te groot te nemen, omdat de megakaryocyten zulke groote lichamen zijn (tot wel  $40\mu$  en meer). Daarom kennen sommigen slechts aan coupes van hoogstens  $3\mu$  eenige waarde toe. De één krijgt de prachtigste resultaten met paraffine-coupes, maar MAXIMOW bijvoorbeeld beweert dat alleen celloïdinemateriaal, en dan nog wel op zijn gecompliceerde manier behandeld eenige beteekenis heeft. Ook de meest verschillende fixatievloeistoffen en kleurstoffen worden aanbevolen.

Langzamerhand is in de opgegeven chaos van fixatievloeistoffen wat meer eenheid gekomen en de meesten gebruiken ZENKER's vloeistof, hetzij volgens het oorspronkelijk recept, hetzij met de een of andere variatie.

Als algemeene kleurmethode is wel de meest gebruikelijke de kleuring met haematoxyline (EHRlich)-eosine, en als meer speciale ijzerhaematoxyline (HEIDENHAIN)-eosine en de verschillende ROMANOWSKY-varianties.

Al deze kwesties in aanmerking genomen hebbende leek het het beste de verschillende methoden te beproeven, teneinde zelf na te gaan welke methode voor mijn doel de beste resultaten gaf.

### IV. *Eigen onderzoek.*

Diersoort. Als proefdieren heb ik genomen kattenembryonen, jonge katten en volwassen exemplaren. En, gezien de gestelde vraag en de bekende feiten, dus voornamelijk jonge katten.

Weefsel. Van die katten, welke met chloroform werden gedood en onmiddellijk (nog warm) geopend, werden genomen milt, lever en beenmerg van het femur en gebracht in verschillende fixatievloeistoffen.

Fixatie. Het best voldeed voor de kat ZENKER's vloeistof van  $\pm 37^{\circ}$  C. Hiermee krijgt men prachtig gefixeerde praeparaten en de minste schrompeling.

Inbedding. De inbedding geschiedde oorspronkelijk in paraffine zoowel als in celloidine, maar toen de laatste methode geen voordeelen bleek op te leveren, werd deze verlaten en alleen paraffine inbedding toegepast.

Coupedikte. Eenigszins willekeurig werd de coupedikte  $7\mu$  gekozen, en deze bleek ruim voldoende, hoewel ik ook coupes van  $3\mu$  heb gemaakt die echter geen enkel nieuw gezichtspunt opleverden.

Kleuring. Na verschillende kleuringen na verschillende fixaties te hebben beproefd verkreeg ik de fraaiste resultaten na ZENKER-fixatie met de ijzerhaematoxyline (HEIDENHAIN)-eosine kleuring. Volledigheidshalve vermeld ik hier in 't kort de geheele kleuring:

1<sup>e</sup> xylol, 2<sup>e</sup> alcohol 100 %, 3<sup>e</sup> alcohol 96 %, 4<sup>e</sup> alcohol 70 %, 5<sup>e</sup> water, 6<sup>e</sup> beitsen 6 uur lang in  $2\frac{1}{2}$  % ijzeraluin, 7<sup>e</sup> spoelen in water, 8<sup>e</sup> een nacht over laten kleuren in ijzerhaematoxyline volgens HEIDENHAIN, 9<sup>e</sup> spoelen in water, 10<sup>e</sup> differentieeren in ijzeraluin, 11<sup>e</sup> in water spoelen en onder 't microscoop bekijken. 10 en 11 herhalen tot de differentiatie voldoende is, daarna 12<sup>e</sup> 1 uur spoelen



Fig. 1. Milt kat 2 weken. ZENKER. IJzerhaematoxyline-eosine, vergr.  $\pm 250\times$ .  
*a.* megakaryocyte degenererend in een vena, met weinig te kleuren protoplasmalus.  
*b.* vervallende protoplasmaslierten. *c.* pyknotische kern van een megakaryocyte met nog eenig omgevend protoplasma. *d.* megakaryocyte uittreddende in de vena.  
*e.* normale megakaryocyte tegen den vaatwand liggend. *f.* vaatwand.

in leidingwater. Vervolgens de gewone nakleuring met eosine, na de alcoholen weer te hebben doorlopen.

Om nu een goede serie proefdieren te hebben, doodde ik van een nest jonge katten één op den eersten levensdag, de volgende na 8 dagen, 14 dagen, 3 en 4 weken. Meer katjes waren er niet in dit nest. Maar als aanvulling van deze serie had ik een katje van 46 dagen uit een ander. Later natuurlijk ook contrôle-dieren.

Bij beschouwing van een praeparaat van een 1 dag oude kat ziet men in de milt talrijke reuzencellen, veelal in groepjes van 2, 3 of 4 gelegen, en dikwijls vlak bij de trabekels, dat is dus tevens vlak bij de groote vaten, die in de milt de trabekels volgen. Nog sterker valt deze eigenaardige rangschikking op in een preparaat van een 8 dagen oude kat. Tevens zien we eenige verandering in het beeld optreden. Schenen op den 1<sup>en</sup> dag de reuzencellen betrekkelijk in rust, en de samengestelde kernen fraaie ringen en hoefijzers vormend, thans maakt het geheel een meer onrustigen indruk. Het aantal reuzencellen is wel ongeveer even groot als vroeger, maar de kernen vertoonen minder ring- en hoefijzervormen en kleuren zich ook wat donkerder ten opzichte van de omgeving. Dit in 't algemeen en niet voor iedere cel afzonderlijk gesproken. Ook het cytoplasma kleurt zich dikwijls wat sterker met eosine. Ook treft één enkele



Fig. 2. Milt kat 1 week. ZENKER-IJzerhaematoxyline-eosine, vergrooting 950  $\times$ .

*a.* megakaryocyte in een mitotisch stadium. *b.* venawand.

mitose (fig. 2). Hier is het cellichaam meer basophiel gekleurd en korrelig. In een dergelijk preparaat van een 2 weken oude kat trof mij bij oppervlakkige beschouwing de ligging van een reuzencel in een groote vena. En deze waarneming gaf den sleutel tot de herkenning van het geheele proces. Van zoodanig gelegen cellen

bleken er namelijk verschillende voor te komen, ja bijna in iedere groote vena. Ook de manier, waarop zij daar kwamen, werd spoedig duidelijk, toen ik cellen aantrof, welke juist dwars door den vaatwand heengingen (fig. 3 *a* en *b*). Bij nadere beschouwing kan men het volgende proces uit de verschillende beelden opbouwen. Een reuzencel die steeds sterk amoëboïed bewegelijk is (SCHRIDDE 1905), zendt, wanneer zij van plan is te verdwijnen, naar alle kanten pseudo-podiën uit, en tevens gaat dit proces gepaard met alle gewone kenteekenen van degeneratie. De kern wordt kleiner, rondt zich af, vertoont geen duidelijke teekening meer, wordt veel donkerder, in één woord: pyknotisch. Het protoplasma van dit cellichaam kleurt zich aanvankelijk eenigszins donkerder met eosine, meer bruinachtig, maar in een verder gevorderd stadium is het cytoplasma zelfs niet meer te kleuren, en ziet men nog slechts den schimmigen omtrek (fig. 4 *c* en *d*). Het cytoplasma der cel gaat nu, hetzij actief, hetzij passief door den vaatwand heen en ook de kern gaat mee. Men ziet wanneer men het proces nauwkeurig beschouwt, teekenen dat het meer passief dan actief gebeurt.

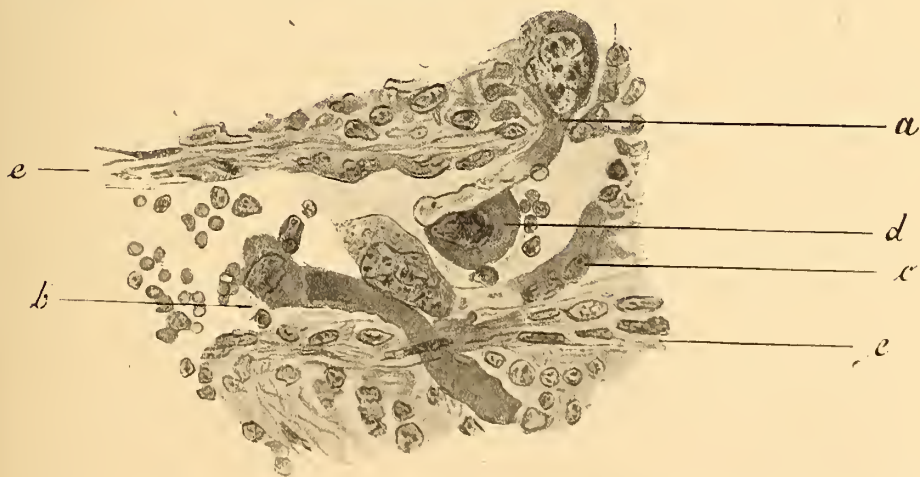


Fig. 3. Milt kat 2 weken. ZENKER IJzerhaematoxyline-eosine, vergr.  $\pm 580 \times$ .  
*a*. megakaryocyte met een lange protoplasmasliert in het lumen van de vena aan het einde niet meer kleurbaar. Kern pyknotisch nog in de miltpulpa liggend.  
*b* als *a*, maar de geschrompelde kern hier juist in het vaatlumen liggend. *c*. degenererende megakaryocyte geheel in de vena gelegen. *d* megakaryocyte met nog goed te kleuren cytoplasma, zonder uitloopers, maar met sterk pyknotische kern.  
*e*. venawand.

De protoplasmaslierten, we mogen dan wel niet meer van pseudopodiën spreken, wijzen in hetzelfde vat steeds dezelfde richting uit (fig. 3 *a* en *b*). Dit duidt op een meegevoerd worden door den

bloedstroom, wanneer het protoplasma eenmaal binnen het vaatlumen is gekomen. Nu bestaat er nog altijd een twistpunt over de vraag of de venawand in de milt gesloten is, dan wel of er openingen in voorkomen. Neemt men dit laatste aan dan zouden de slappe futlooze degenererende reuzencellen die vlak bij den vaatwand zijn gelegen, bij de contracties van de milt door de openingen in den vaatwand worden geperst. Dit komt heel goed overeen met de beelden die de megakaryocyten opleveren in deze praeparaten.

Immers wanneer het een actieve diapedese was dan zou een pseudo-podium wanneer het eenmaal door den vaatwand heen was, zich aan de andere zijde vastzetten tegen dien vaatwand, en dit beeld nu zien we nergens. Integendeel, we zien hoe een protoplasmasliert meer en meer wordt uitgetrokken in het vaatlumen en oplost. Ziet men soms een geheele cel die in het vaatlumen ligt, dan vormen zich daar allerlei onregelmatige protoplasma-figuren (fig. 1a en b). En de losse pyknotische kernen vindt men af en toe geheel ontbloot van alle cytoplasma in het vaatlumen liggen. Ik meen dus hier onmiskenbaar met een degeneratie te maken te hebben.

Bij nader onderzoek bleken ook reeds in de 1<sup>e</sup> week dergelijke degeneraties te vinden te zijn. En ook hier en daar in de miltpulpa vindt men groepen die geheel de teekening vertoonen zooals de degenererende reuzencellen in het vaatlumen of in den vaatwand die opleveren. Het proces is dus niet geheel afhankelijk van het intreden in de vaten. En dit is dus alweer een reden te meer om in dit laatste een passief en niet een actief proces te zien.

Geen enkele maal zag ik een normale reuzencel met fraaie hoefijzervormige kern in een vaatlumen liggen, en ook dit pleit voor de opvatting van het geheel.

Bezien we nu de preparaten van een 3 weken oude kat, dan vinden we het aantal reuzencellen aanmerkelijk verminderd. Dit verwondert natuurlijk allerminst, in aanmerking genomen het uitgebreide verval. In de 4<sup>e</sup> week vindt men nog slechts enkele, meest normaal uitzijende reuzencellen. Het aantal is nu gewoonlijk niet veel grooter dan DE KERVILY (1912) opgeeft voor de milt van de normale volwassen kat. Hij noemt hiervoor de getallen 2 per c.m<sup>2</sup> tot 20 mm<sup>2</sup>. Dus dit schijnt nog al wisselend.

Geheel hetzelfde ziet men in de milt van het katje van 46 dagen. Misschien is hier het aantal reuzencellen nog iets minder. Maar het beeld vertoont hier in ieder geval geen verschil met dat van een volwassen kattenmilt. Geheel verdwijnen doen de reuzencellen dus niet. TROUWENS DE KERVILY kon reuzencellen in de milt van de meeste volwassen zoogdieren aantoonen. In het Leidsche laborato-

riummateriaal is het mij ook bij allerlei zoogdieren gelukt reuzencellen te vinden, behalve bij den mensch.



Fig. 4. Idem als 3. Vergrooting 570  $\times$ .

*a.* megakaryocyte met pyknotische kern nog slechts met een smalle punt door de venawand. *b* en *c* vervallende megakaryocyten, vooral *c* slecht gekleurd. *d.* degenererende megakaryocyte. *e.* venawand.

De oorspronkelijke vraag was dus beantwoord. De reuzencellen verdwijnen uit de kattenmilt door degeneratie en verval en wel voornamelijk in de 2<sup>e</sup> week na de geboorte en in de groote venae.

Hiermede nu kom ik in tegenspraak met J. H. WRIGHT (1906). Deze heeft namelijk reeds vòòr mij een nittredingsproces beschreven, ook in de milt van de jonge kat, maar dit proces verklaart hij als te zijn: thrombocytenvorming. Het door mij beschreven proces is stellig geen thrombocytenvorming, maar een degeneratie. Kan WRIGHT nu hetzelfde hebben gezien als ik, maar het anders hebben nitgelegd? Voor het door mij beschreven proces is geen andere nitleg mogelijk.

WRIGHT nu beschrijft in hoofdzaak het volgende.

De megakaryocyten vormen pseudopodiën die zij in de kleine capillairen boren. Deze pseudopodiën zijn aan de randen minder gekleurd en vertoonen een korreling.

Nu worden stukjes afgesnoerd en deze stukjes zijn thrombocyten. Dit alles bij een jonge kat, van welken leeftijd zegt hij niet. WRIGHT geeft dan van dit proces een 14-tal microfoto's, die alles behalve duidelijk zijn, maar toch te sterk op wat ik waarnam gelijken, om tot het besluit te kunnen komen, dat ik een geheel ander verschijnsel waarnam dan WRIGHT. Hij verkrijgt deze beelden met een bepaalde kleurmethode, en dan ook alleen daarmee. De eenige histologische bevestiging van WRIGHT's opvatting die ik heb kunnen vinden was die van OGATA (1912), die zegt volkomen dezelfde meening te zijn toegedaan als WRIGHT. Zulks nadat het SCHRIDDE (1907) mislukt was bij den mensch ook een zoodanig proces aan te toonen. Maar dit kwam, zegt OGATA, omdat SCHRIDDE met lijkenmateriaal had moeten werken, terwijl WRIGHT en hijzelf „lebenswarm fixierte Präparate" hadden kunnen bewerken. Nu die laatste voorwaarde ontbrak ook bij mij niet. Maar nu is het al merkwaardig dat OGATA zegt met WRIGHT's methode geen goede preparaten te kunnen krijgen, en wel met de SCHRIDDEAZUR II-eosinemethode. En verder blijkt uit de teekeningen dat het door OGATA in het beenmerg geziene proces feitelijk niets lijkt op dat van WRIGHT. Ook verder vindt men vele tegenstrijdigheden in hun beweringen. Maar laten we afzien van het door OGATA beschreven proces, die zich tot beenmerg bepaalde en ons meer in 't bijzonder bezighouden met de publicatie van WRIGHT.

In de coupes die ik heb doorzocht, en dat zijn er vele, heb ik nooit een proces gevonden, dat ik in overeenstemming kon brengen met WRIGHT's opvatting. Is het misschien mogelijk dat WRIGHT zich vergist heeft? En heeft hij misschien op een oppervlakkige gelijkenis een verstrekkende conclusie getrokken? Het lijkt mij niet onwaarschijnlijk. Het door mij beschreven proces is zoo duidelijk, dat ieder die de milt der 2 weken oude kat onderzoekt dit moet zien. Dus houd ik het voor waarschijnlijk dat hij wel hetzelfde proces heeft gezien, hetwelk door mij is beschreven, maar dan is het zeker geen thrombocytenvorming en wel op de volgende gronden:

In de eerste plaats is het proces met iedere goede fixatie- en kleurmethode aan te toonen, ook met die methoden waarbij elders in het preparaat nergens thrombocyten zijn te vinden. Wel ziet men dan duidelijk de schimmen van de protoplasmashierten, zoowel als de nog gekleurde. Ook de coupedikte van  $3\mu$  welke WRIGHT aangeeft, is evenmin noodig als de door hem aangegeven kleurmethode. Zooals gezegd heb ik ten overvloede nog coupes van  $3\mu$  gemaakt die niets aan mijn opvatting konden veranderen. Ook de doorsnede van de protoplasmadraden is meestal vele malen grooter dan die



van een thrombocyt. En heeft WRIGHT dan de uittreding van geheele gedegeneerde reuzencellen, juist in de groote venae (en niet in de capillairen) over het hoofd gezien? En hoe verklaart WRIGHT de thrombocytenvorming wanneer mocht blijken dat ook bij de zoogdieren de thrombocytén cellen zijn met een kern? Deze meening is namelijk nog lang niet afgedaan en bijv. H. G. LANGEMEYER (1916) komt opnieuw tot deze conclusie. Dan zou het duikt mij toch onmogelijk zijn dat de thrombocyten, die OGATA trouwens nog alleen uit de randzône (HEIDENHAIN 1907) laat ontstaan, karyoplasma zonden kunnen bevatten. En zouden de reuzencellen steeds die thrombocyten blijven vormen? Hoe verklaart WRIGHT dan die losse pyknotische kernen die men dikwijls genoeg aantreft om ze niet als toevalligheden te beschouwen. Deze liggen zoowel in de vaten als in de miltpulpa.

In den laatsten tijd heeft WRIGHT wel enkele klinische bevestigingen ontvangen, o.a. van HAL DOWNEY, BUNTING (1909), SELLING (1910) en vooral van E. FRANK (1915). Maar deze bevestigingen zijn niet histologisch voldoende gegrondvest, en bovendien voor vrij scherpe kritiek vatbaar. Het is hier niet de plaats hierop nader in te gaan.

En hoe staat het nu bijvoorbeeld met de reuzencellen in de lever van de kat. Deze zijn volkomen gelijk aan die in de milt, maar veel minder in aantal, d.w.z. bij de geboorte. Ze verdwijnen dan langzamerhand en zijn in de 4<sup>e</sup> week nog slechts zeer sporadisch aan te toonen. Evenwel heb ik nooit een degeneratie, in den zin zooals die in de milt wordt gevonden, aangetroffen.

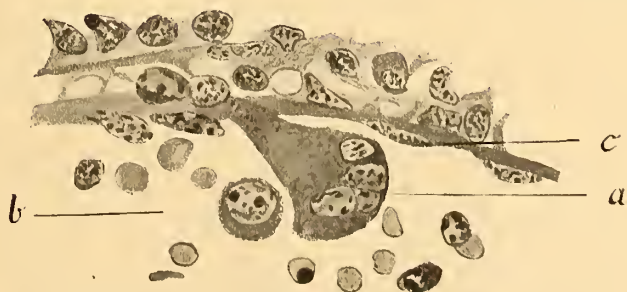


Fig. 5. *Cavia* embryo 9 cM. lang, milt bijna 1000  $\times$   
*a.* megakaryocyte in het vaatlumen liggend met uitlooper in den wand.  
*b.* vaatlumen. *c.* vaatwand.

Ten einde mij niet uitsluitend tot één diersoort te beperken, heb ook ik bij de *cavia* een onderzoek verricht, geheel analoog aan dat bij de kat, met bijna overeenkomstig resultaat. Hier ligt het kritieke

tijdstip niet na, maar voor de geboorte. Dit is waarschijnlijk wel daarmede in verband dat de cavia voor de geboorte reeds op een hoogte van lichamelijke ontwikkeling komt, welke de kat pas geruimen tijd later (relatief gesproken) bereikt. Het duidelijkste vond ik tot nu de uittredingen in de venae bij een cavia-embryo van 9 c.M. kopstuitlengte (fig. 5a), Toch lijkt het mij gewenscht jongere stadia te onderzoeken, maar voorloopig was het mij onmogelijk geschikte caviae te bekomen. Het maximale aantal reuzencellen der milt is bij de cavia kleiner dan bij de kat. Zoo typisch als bij de kat heb ik de degeneratie die met de uittredingen gepaard zou moeten gaan niet kunnen zien, maar dit ligt misschien daaraan dat ik tot nu toe niet het juiste stadium heb gevonden. Bij een 17 dagen oude cavia is het aantal reuzencellen al gedaald tot een getal niet grooter dan de KERVILY opgeeft voor de volwassen cavia, namelijk 3 per 25 m.M<sup>2</sup>.

### SAMENVATTING.

1°. In de milt van de kat is, het duidelijkst in de 2° week na de geboorte een proces aan te toonen waarbij de megakaryocyten in de groote venae komen en degenererend uiteenvallen.

2°. Dit proces is geen thrombocytenvorming.

3°. Een dergelijk proces speelt zich bij de cavia kort voor de geboorte af.

Ik grijp hier gaarne de gelegenheid aan Dr. A. B. DROOGLEEVER FORTUYN mijn hartelijken dank te betuigen voor de belangstelling die hij mij betoond, zoowel als voor de hulp en raad die hij mij bij dit onderzoek verleend heeft.

*Leiden.*

*Histologische Afdeling  
van het Anatomisch Kabinet.*

### LITERATUURLIJST.

1. BUNTING, C. H. Bloodplatelet reactions in the rabbit. The journal for experimental medicine. Vol. II. 1909.
2. CARNEGIE—DICKSON. Bone-marrow. Longmans. London. 1908.
3. DEETJEN. Untersuchungen über die Blutplättchen. Virchows Archiv. Bd. 164. 1906).
4. DEKHUYZEN. Anatomischer Anzeiger. Bd. 19. 1901.
5. EMDEN, J. E. G. v. Bijdrage tot de kennis van het bloed. Dissertatie Leiden 1896.
6. FLEMING, W. Ueber Theilung und Kernformen bei Leukocyten und über deren Attraktionsphären. Archiv. f. microsc. Anat. Bd. 37.

7. FLEMMING, W. Neue Beiträge zur Kenntnis der Zelle II. Theil. *Archiv. f. microsc. Anat.* Bd. 37.
8. FRANK, E. Die essentielle Thrombopenie. *Berliner klinische Wochenschrift* 1915.
9. HAL DOWNEY. *Folia haematologica* (Archiv.) Bd. 15.
10. HEIDENHAIN, M. *Plasma und Zelle.* 1907.
11. ——— Ueber die Mikrocentren mehrkerniger Riesenzellen sowie über die Centalkörperfrage im Allgemeinen. *Morphologische Arbeiten.* Schwalbe. Bd. VII. H. I.
12. HOWELL, W. H. *Journ. Morph.* 1890.
13. JOLLY J. et ROSELLO H. Sur quelques points de l'histogénèse de la rate. *Comptes rendus S.B.* V. 66. N. 11. 1909.
14. KERVILY, M. DE. Sur la présence de mégacaryocytes dans la rate de plusieurs mammifères adultes normaux. *Comptes rendus des séances S.B.* 1912 II. p. 34—35.
15. ———. Sur les mégalocaryocytes de la rate du chien adulte, etc. *Compt. rendus S.B.* 1912. p. 90—93.
16. KOSTANECKI, K. v. Die embryonale Leber und ihrer Beziehung zur Blutbildung. *Anat. Hefte.* Bd. I. H. 3. 1892.
17. ———. Ueber Kernteilung bei Riesenzellen nach Beobachtungen an der embryonalen Säugetierleber. *Anat. Hefte* Bd. I. H. 3.
18. LANGEMEYER, H. G. De bloedplaatjes van den mensch. *Dissertatie Utrecht,* 1916.
19. LIFSCHITZ, S. Ueber die Entwicklung der embryonalen Milz. *Diss. med.* Zürich 1901.
20. MAXIMOW, A. Experimentelle Untersuchungen zur postfötalen Histogenese des myeloiden Gewebes. *Beiträge z. path. Anat.* Bd. 41. H. 1. 1907.
21. ———. Untersuchungen über Blut und Bindegewebe I. *Archiv. f. mikrosk. Anat.* Bd. 73. 1908.
22. MORIÉL (Ch.) et SOULIÉ (A). Sur la présence d'éléments myeloides dans la rate des insectivores. *C.r. de l'association des Anatomistes.* 6e Session. Toulouse 1904.
23. OGATA. Untersuchungen über die Herkunft der Blutplättchen. *Beiträge z. path. Anat.* Bd. 25. 1912.
24. PETIT, A. *Archives internat. de Pharmacodynamic et de Therapie* 1911 et *Presse médicale* 18 Mai 1912.
25. SAXER, Fr. Ueber die Entwicklung und den Bau der normalen Lymphdrüsen und die Entstehung der roten und weissen Blutkörperchen. *Anat. Hefte* H. 19. (Bd. 6 H. 3).
26. ———. Die blutbildende Funktion der embryonalen Leber und Nabelblase, sowie die Beziehungen der roten und weissen Blutkörperchen zu inander und zu den Riesenzellen. *Anat. Hefte* 1896.
27. SCHÄFER, E. A. *Textbook of microscopic anatomy* 1912.
28. SELLING L. *Bulletin of the John Hopkin's hospital.* February 1910.
29. SCHRIDDE, H. Untersuchungen über die Morphologie der Knochenmarksriesenzellen. *Sitz. ber. d. Gesellsch. z. Beförderung der ges. Naturwissenschaften Marburg.* Dez. 1905.

30. ——. Die Knochenmarksriesenzellen des Menschen. Anat. Hefte Bd. 33. 1905.
31. ——. Die Entstehung der ersten embryonalen Blutzellen des Menschen. Verhandl. der deutsch. path. Gesellschaft. 11 Tag. Dresden 15—19 Sept. 1907. Jena 1908.
32. STRICHT, O. v. D. Recherches sur la structure de la foie embryonnaire. Anal. d. Gand. 1888.
33. ——. Le développement du sang dans la foie embryonnaire. Archives de Biologie T. II, 1891.
34. WRIGHT, J. H. Die Entstehung der Blutplättchen. Virchows. Archiv. Bd. 186. 1906.
35. ——. The histogenesis of the bloodplatelets. Publications of the Massachusetts General Hospital Boston Vol. III N<sup>o</sup>. 1 1910.
-

**Physiologie.** — De Heer PEKELHARING biedt een mededeeling aan van den Heer P. NIEUWENHUIJSE: „*Bijdrage tot de pathologische histologie van dwarsgestreept spierweefsel*”.

(Mede aangeboden door den Heer SPRONCK).

Gedurende mijn verblijf als tijdelijk officier van gezondheid op Urk vond ik in de rugspieren van een schol een vrij grooten vasten witten knobbel, die uit dwarsgestreept spierweefsel was opgebouwd en op het eerste gezicht geheel den indruk maakte van een gezwel.

Bij het mikroskopisch onderzoek werd men getroffen door vreemdsoortige veranderingen van de spiervezels, die mij geheel onbekend waren en welke ik aanvankelijk als wellicht specifiek voor vischspieren beschouwde.

Toen mij echter later bleek, dat soortgelijke veranderingen ook bij menselijke spieren kunnen voorkomen, was het duidelijk, dat we hier te doen hebben met afwijkingen van meer algemeene beteekenis.

Het proces, dat aan deze veranderingen ten grondslag ligt, schijnt dus een rol te kunnen spelen in de pathologie van dwarsgestreept spierweefsel in het algemeen.

*Makroskopisch onderzoek:* Een in de Noordzee gevangen schol (*Pleuronectus platessa*), van 31 cM. lengte, vertoonde aan de rechter-bovenzijde van het lichaam een onregelmatigen, bijna kindervuistgrooten vasten knobbel, die onder de gave huid promineerde. Op doorsnede bleek deze knobbel uit een spiermassa te bestaan, tamelijk vast van consistentie, bleek van kleur met hier en daar gele vlekken en vrij scherp begrensd tegenover het omgevende spierweefsel. Deze spiermassa was op enkele plaatsen zelfs uit de omgeving los te pellen, zoodat men in vele opzichten herinnerd werd aan een fibromyoom in de spieren van den uterus en aldus geheel den indruk kreeg van een gezwel.

De knobbel bestond in hoofdzaak uit twee, door een bindweefselschot van elkaar gescheiden gedeelten, die proximaalwaarts divergeerden en daardoor op sommige doorsneden den indruk gaven van twee afzonderlijke knobbels (Fig. 1).

De schol was overigens normaal van bouw en verkeerde in goeden voedings-toestand; in de overige spieren waren geen veranderingen te zien; ook de inwendige organen vertoonden niets afwijkends.

*Mikroskopisch onderzoek:* De stukjes werden in 10% formaline gefixeerd, in paraffine of celloïdine ingesloten en op verschillende wijzen gekleurd. Eenige stukjes werden voor het insluiten nog in MÜLLER's vloeistof gehard; verder werd een aantal



Fig. 1. Doorsneden van den visch, waarin men den spierknobbel kan zien; de twee deelen waaruit de knobbel in hoofdzaak is opgebouwd, divergeeren proximaalwaarts en geven daardoor in de onderste doorsnede den indruk, dat er twee knobbels bestaan.

ijscoupes gemaakt en ten slotte werd in pluispraeparaten getracht eenige vezels zoover mogelijk te isoleren.

In de praeparaten ziet men, dat de knobbel overal opgebouwd is uit dwarsgestreept spierweefsel, waarvan de vezels zeer ongelijk van grootte zijn en veelvuldig ontaardingsverschijnselen vertoonen.

Het bindweefsel tusschen de spiervezels is toegenomen; de rangschikking van de groote bindweefselchotten komt vrijwel met normale verhoudingen overeen, maar de fijnere bindweefselbundels rondom de afzonderlijke spiervezels zijn op vele plaatsen belangrijk en onregelmatig verdikt.

In het bindweefsel vindt men op enkele plaatsen een opeenhooping van kleine cellen met ronde, onregelmatig gekleurde kernen en weinig protoplasma.

In enkele praeparaten vindt men veel vetweefsel, waartusschen de resten van gedegeneerde spiervezels aantoonbaar zijn.

Van bloeditstoringen of bloedpigment is niets te zien.

Bij de studie van de structuur der spiervezels deed zich allereerst de vraag voor, hoe de normale rugspieren van *Pleuronectus* gebouwd zijn. Het is bekend, dat men normaliter bij visschen eigenaardige groepeerings van de fibrillenbundels aantreft en wel zóódanig, dat de vezels uit één bepaalde spiergroep bij één bepaalde vischsoort in dit opzicht meestal een karakteristieken bouw hebben.

LANSIMAKI<sup>1)</sup>, die hiervan een uitvoerige studie maakte, vond nu in de rugspieren van *Pleuronectus*, dat elke vezel aan haar peripherie met een dunne laag van lintvormige radiaal gegroepede fibrillenbundels bekleed was, terwijl het midden met cilindrische bundels was opgevuld. In eigen praeparaten van een normale schol kon ik me van de juistheid dezer bevinding overtuigen (Fig. 2).

In de praeparaten van den spierknobbel vindt men over het algemeen een grovere fibrillaire structuur dan normaal; de dwarse strepen daarentegen hebben normale afmetingen en zijn bij alle niet gedegeneerde vezels duidelijk zichtbaar.

De typische normale vorm en groepering van de fibrillenbundels is bij verschillende kleinere vezels duidelijk waar te nemen; bij groote vezels daarentegen is er van lintvormige bundels aan de peripherie vaak niet veel te zien. Enkele zeer kleine vezels bezitten uitsluitend lintvormige bundels, die op dwarse doorsnede een stervormige figuur te zien geven.

<sup>1)</sup> T. A. LANSIMAKI (Helsingfors): Ueber die Anordnung der Fibrillenbündel in den quergestreiften Muskeln einiger Fische. Anat. Hefte. Heft 126, S. 254.

Op overlansche doorsnede zlet men, dat er zich van de vezels hier en daar grootere en kleine takjes afsplitsen.

Het myoplasma is op enkele plaatsen wel wat toegenomen, maar toch niet in belangrijke mate.

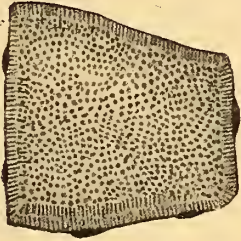


Fig. 2. Dwarse doorsnede van een normale spiervezel van een schol: men ziet in het midden de dwars doorgesneden cilindervormige fibrillenbundels en aan den rand een dunnen zoöm van lintvormige bundels (ZENKER'S vloeistof, IJzerhaematoxyline, vergr. 600 maal).

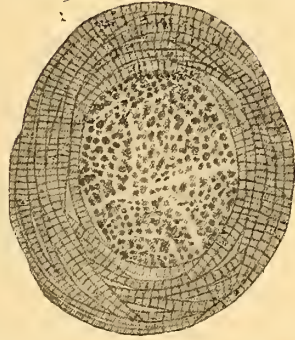


Fig. 3. Dwarse doorsnede van een vezel uit den spierknobbel. Men ziet twee concentrische gedeelten: een binnenste deel met overlans loopende vezels, die dwars getroffen zijn en een buitenste deel met circulair loopende dwarsgestreepte vezels (Formaline, IJzerhaematoxyline, vergr. 500 maal).

De spierkernen zijn zoowel bij de kleinere als bij de grootere vezels niet talrijker dan normaal; zij liggen meestal aan de peripherie, maar ook wel tusschen de bundels in; de kernen zijn wat gezwollen, kerndeelingen werden niet gezien.

Onder de grootte niet gedegeneerde vezels trekken verscheidene de aandacht,



Fig. 4. Fotografische afbeelding van een dwarse doorsnede, waarin talrijke vezels als in fig. 3 bedoeld, zichtbaar zijn.

doordat ze zeer zonderling gebouwd zijn. Op dwarse doorsneden krijgt men den indruk, dat zij uit twee concentrische deelen bestaan; in het midden ziet men de dwarsdoorgesneden overlangs loopende fibrillen, terwijl aan de peripherie een dikke ring van circulair loopende, eveneens dwarsgestreepte fibrillen zichtbaar is. Tusschen de centrale en de periphere fibrillenmassa vindt men een spleetvormige ruimte (Fig. 3 en Fig. 4).

Op overlangsche doorsneden blijkt, dat deze circulaire fibrillen meestal niet over de geheele lengte van de vezel voorkomen, maar slechts tot één of meer plaatsen beperkt blijven, terwijl de spiervezel op die plaatsen in omvang toegenomen is (Fig 5).

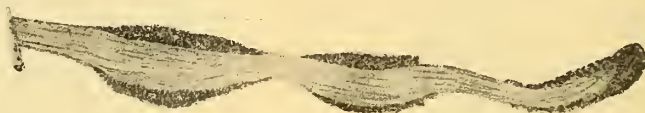


Fig. 5. Overlangsche doorsnede van een vezel als in fig. 3 bedoeld. Men ziet dat de circulaire fibrillen slechts op enkele plaatsen van de vezel voorkomen (vergr. 60 maal).

Verder blijkt de spleetvormige ruimte tusschen de centrale en de periphere fibrillenmassa niet overal aanwezig te zijn; men ziet nl. dat op sommige plaatsen overlangs loopende fibrillenbundels ombuigen en zich voegen bij de circulaire fibrillen (Fig. 6).

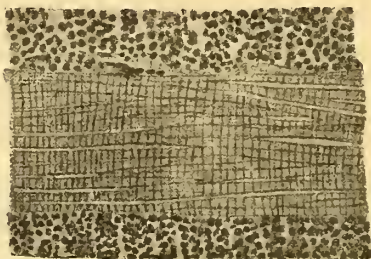


Fig. 6. Overlangsche doorsnede van een vezel als in fig. 3 bedoeld bij sterker vergrooting dan de voorgaande. Men ziet dat enkele dwarsgestreepte overlangsloopende fibrillen overgaan in de circulaire fibrillenmassa. (Formaline, IJzerhaematoxyline, vergr. 500 maal).

In pluispraeparaten kon men verder waarnemen, dat vele periphere fibrillen zich niet zuiver circulair, maar in spiraaltoeren rondom de vezel slingerden.

De beschreven vezels zijn meestal grooter dan normaal; ze vertakken zich soms evenals de andere vezels; verder ziet men in hunne onmiddellijke nabijheid af en toe dunne spierelementen, die soms in direct verband staan met de periphere fibrillenmassa.

Vaak kan men ontaardingsverschijnselen aan deze vezels waarnemen, waarover later.

De kernen zijn sterk gezwollen; het zijn ovale blaasjes geworden met een donker gekleurde stip in het midden; men denkt soms met protozoën te doen te hebben, maar dit is stellig niet het geval. Hun aantal is niet of maar weinig toegenomen;



zij liggen soms aan de peripherie, soms in het midden en soms tusschen de periphere en centrale fibrillenmassa. Kerndeelingsfiguren werden niet gevonden. (In de figuren 3, 5 en 6 zijn de kernen der spiervezels niet geteekend, omdat zij bij het ontkleuren spoediger verbleekten dan de fibrillen en daardoor niet goed te zien waren).

Zooals reeds vermeld is, vertoonen de meeste spiervezels sterke ontaardingsverschijnselen: allereerst een uitgebreide vette degeneratie; verder ziet men veelvuldig een verandering, die geheel overeenkomt met de bekende wasachtige degeneratie. Deze verandering vertoont zich slechts hier en daar en breidt zich meestal niet over de geheele vezel uit. Men ziet daarbij, dat de overlangsche en dwarse strepen onzichtbaar worden, zoodat er een homogene massa ontstaat, die in stukken en soms in grove korrels uiteenvalt. Tusschen de homogene klompen komen bij vergevorderde stadiën vele ronde celkernen te voorschijn. Van sommige vezels gaat de inhoud vervloeien, zoodat de wanden van de vezel tegen elkaar aan komen te liggen.

De boven beschreven spiervezels, waarvan de periphere fibrillen een circulaire loop nemen, schijnen maar zelden in wasachtige degeneratie over te gaan: de ontaardingsverschijnselen, die men bij deze vezels veelvuldig vindt, zijn van geheel anderen aard; men ziet hierbij, dat de fibrillen dunner worden, hun dwarse strepen verliezen en in fijne draadjes en korrels uiteenvallen; deze detritus wordt geresorbeerd, zoodat men tenslotte een vrijwel homogene massa overhoudt, welke haast niet te kleuren is en zich duidelijk van de homogene klompen bij de wasachtige degeneratie laat onderscheiden.

Deze ontaarding komt het meest voor aan de periphere fibrillen, die vaak reeds geheel in draadjes en korrels uiteen gevallen zijn. terwijl de centrale fibrillen zich alsnog vrijwel normaal voordoen.

In vele vezels wordt het beeld nog ingewikkelder, doordat men tusschen de circulaire fibrillen bundels van overlangs loopende fibrillen aantreft. Dit verschijnsel komt soms op een zoo uitgebreide schaal voor den dag, dat er een waar vlechtwerk van fibrillen ontstaat; dit vlechtwerk is meestal alleen te zien in de periphere fibrillenmassa, maar komt een enkele maal ook bij de centrale fibrillen voor den dag.

De fibrillen, die een zoo ingewikkelden loop hebben, vertoonen steeds teekenen van degeneratie en in het algemeen kan men zeggen: hoe ingewikkelder hun loop, des te verder is de degeneratie voortgeschreden.

Deze veranderingen gaan zoo goed als altijd gepaard met een toeneming in volume van de spiervezel; die soms een geweldigen omvang krijgt, zoodat afmetingen van  $250 \times 250 \mu$  op dwarse doorsnede niet zeldzaam zijn.

Bij dit geheele proces vindt men niet veel activiteit van den kant der spierkernen; ze zijn op sommige plaatsen wel in aantal toegenomen, maar kernopcehooping, zooals men die bij de wasachtige degeneratie soms aantreft, komen hier niet voor.

Ofschoon de spierknobbel makroskopisch scherp begrensd leek, ziet men bij mikroskopisch onderzoek in het omgeevende spierweefsel nog verscheidene gedege-  
nereerde vezels en ook vezels met een mantel van circulair loopende periphere fibrillen.

Met uitzondering van bovengenoemde ophooping van cellen in het bindweefsel, werden geen verschijnselen van ontsteking gevonden; deze cellen staan evenwel vermoedelijk in verband met het opruimen van resten van ontaarde spiervezels, zoodat we hieruit natuurlijk niet mogen afleiden, dat we met een ontstekingsproces te doen hebben.

Uitvoerig werd gezocht naar de aanwezigheid van bacteriën, protozoën en andere parasieten, maar zonder resultaat<sup>1)</sup>.

Het makroskopisch onderzoek van de hersenen, het ruggemerg en enkele periphere zenuwen leverde niets bijzonders op. Eenige inwendige organen werden nog onderzocht, maar ook daarbij was niets afwijkends te vinden.

Onder de gevonden afwijkingen wordt onze aandacht wel het meest getrokken door de zeer talrijke eigenaardige spiervezels, die op dwarse doorsnede uit twee concentrische gedeelten schijnen te bestaan en waarbij de fibrillen in het buitenste gedeelte circulair- of spiraalgewijs loopen. Hoe moeten wij dit beeld opvatten?

Daar ik deze vreemdsoortige afwijking aanvankelijk nergens beschreven vond en ook in de literatuur geen aanknoopingspunt kon vinden om ze te verklaren, dacht ik, dat zij mogelijkerwijze in verband zouden kunnen staan met den eigenaardigen bouw van de spiervezels van visschen, die immers reeds normaliter in haar peripherie anders gebouwd zijn dan in het centrum.

Toch was dit een gewrongen verklaring, want het verschil tusschen centrum en peripherie bij een spiervezel van *Pleuronectus* is niet zoozeer een verschil in bouw als wel in groepeeringswijze van de fibrillen, terwijl alle fibrillen onderling in hun bouw en functie voor zoover dit althans bekend is, identiek zijn.

Het bleek mij dan ook eindelijk, dat deze veranderingen reeds bij menschelijke spieren beschreven waren en wel bij een geval van acromegalie, dat in 1902 door C. MARTINOTTI<sup>2)</sup> werd medegedeeld.

Ik kon de oorspronkelijke publicatie tot mijn spijt niet in handen krijgen en ontleen daarom het volgende aan een referaat uit de *Ergebnisse der allgemeinen Pathologie und pathologischen Anatomie XIIe Jahrg. S. 317*; van praeparaten uit den *musculus biceps* wordt het volgende vermeld: „Es bestand Hypertrophie der Muskelfasern mit beträchtlicher Vermehrung der Muskelkerne. An einigen Muskelfasern sah man Bündel von querverlaufenden Fibrillen, die die längs verlaufenden umfassten oder durchkreuzten. Die querverlaufenden Fibrillen waren nicht überall, sondern nur an einzelnen Stellen der Muskelfasern zu sehen und konnten nicht auf weite Strecken verfolgt werden. Verf. glaubt dass die Fibrillen mit abnormem Verlaufe neugebildet seien und dass sie einer Form von pathol.

<sup>1)</sup> Aan den Heer J. H. SCHUURMANS STEKHOVEN Jr., waarnemend zoöloog aan het laboratorium voor Tropische Hygiene te Amsterdam zeg ik hierbij dank voor zijn vriendelijke hulp bij dit gedeelte van mijn onderzoek.

<sup>2)</sup> C. MARTINOTTI: Su alcune particolarità di struttura della fibra muscolare striata in rapporto con la diagnosi di acromegalia. *Annali di freniatria e scienze affini del R. Manicomio di Torino* Vol. XII, p. 76.

Muskelhypertrophie entsprechen, die vielleicht mit den akromegal. Prozesse in Zusammenhang steht”.

Ofschoon de spierkernen in dat geval meer actief zijn dan in onze praeparaten, is de overeenkomst tusschen deze afwijkingen overigens zoo treffend, dat we ze wel als identiek mogen beschouwen.

In de menschelijke spierpathologie zijn nog een paar gevallen vermeld, waarbij de afwijkingen eenigszins op dit proces geleken:

ERB <sup>1)</sup> beschreef in 1891 bij een geval van dystrophia muscularis progressiva „ineinandergeschachelte Muskelfasern”, waarvan hij zegt S. 184 „Stellenweise sieht man auch sehr sonderbare Spaltungs- und Theilungsfiguren, wie wenn sich im Centrum der Faser eine neue Faser entwickelt oder abgespalten hätte”.

DURANTE <sup>2)</sup> beschreef in 1900 bij een geval van spierhypertrophie van de armspieren soortgelijke beelden, welke hij als het resultaat van concentrische deelingen opvat, hij zegt (p. 275) „C'est ainsi que cette division peut être concentrique et au lieu de donner naissance à deux fibres accolées, peut séparer deux éléments, l'un entourant l'autre comme les parois d'un tube entourent le mandrin qu'on y introduit”.

Het is jammer, dat deze schrijvers noch in den tekst, noch in hun afbeeldingen eenige aanduiding geven omtrent den loop der fibrillen, zoodat het nu niet mogelijk is de afwijkingen met die van ons geval nader te vergelijken.

Hun opvattingen maken ons ook het ontstaan van deze beelden niet zeer begrijpelijk: het is lastig, zich in te denken hoe in het centrum van een vezel zich een nieuwe vezel zou kunnen ontwikkelen en nog moeilijker wordt het, zich voor te stellen hoe een spiervezel zich concentrisch zou kunnen deelen; beide voorstellingen zijn weinig in analogie met andere beter bekende processen.

ERB beschreef bij de dystrophia muscularis progressiva nog een tweede afwijking, die in dit opzicht van belang is: hij zag dat de dwarse doorsneden van verschillende spiervezels omslingerd werden door zeer smalle en bredere spier-elementen, welke hij een eindweegs in het omgevende bindweefsel kon volgen; zij schenen zich daar te vertakken en geleken in hun loop op capillairen. Zij worden door ERB opgevat als fijne vertakkingen van spiervezels en in verband gebracht met de zoogenaamde „Muskelknospen” van NEUMANN.

<sup>1)</sup> W. ERB: Dystrophia muscularis progressiva. Deutsche Zeitschr. f. Nervenheilk. Bd. I S. 173.

<sup>2)</sup> G. DURANTE: Hypertrophie musculaire volumétrique vraie du membre supérieur par augmentation de volume des fibres musculaires. Comptes Rendus de la Soc. Anat. Paris Mars 1900.

Ofschoon deze beelden oppervlakkig beschouwd met de onze niets te maken hebben, lijkt me toch ook deze waarneming voor ons van waarde.

Hoe belangrijk bovenstaande gegevens uit de literatuur ook zijn, het ontstaan van de vreemdsoortige veranderingen wordt er ons niet begrijpelijker door gemaakt.

Wanneer wij nu trachten aan de hand van de praeparaten de zonderlinge beelden nader te ontleden, dan moeten wij ons allereerst afvragen, waar de circulaire fibrillen vandaan komen.

Op dwarse doorsneden ziet men ze bijna altijd door een spleetvormige ruimte van de centrale fibrillenmassa gescheiden; op overlangsche doorsneden evenwel konden we hier en daar duidelijk aantonen, dat ze inderdaad op enkele plaatsen met de centrale fibrillen samenhangen: we zagen verschillende centrale fibrillen ombuigen en in den peripheren mantel verdwijnen. Pluispraeparaten leerden ons verder, dat de periphere fibrillen meestal niet zuiver circulair maar spiraalvormig rondom de vezel loopen.

Wij mogen dus zeggen, dat op enkele plaatsen van een spiervezel zich fibrillen afsplitsen, ombuigen en vervolgens in spiraaltoeren en kringtoeren rondom de vezel gaan loopen. De vezel wordt aldus over een zekere lengte met een dikken mantel van deze fibrillen omhuld, zoodat wij op dwarse doorsnede twee concentrische gedeelten zien, die hier evenwel niet ontstaan zijn door een concentrische deeling van de vezel, maar door abnormale vertakkingen.

Bedenken wij verder, dat wij te doen hebben met vezels, die in woekering zijn, getuige de hypertrophie, de overlangsche deelingen en de talrijke jonge vezels, dan ligt het voor de hand, dat wij dit proces in verband brengen met de bekende laterale uitbottingen van spiervezels, de zoogenaamde „Muskelknospen” van NEUMANN; vooral waar de bovenvermelde tweede waarneming van ERB ons reeds met groote waarschijnlijkheid leerde, dat een spiervezel in sommige gevallen inderdaad ontwikkeld kan worden door elementen, die uit deze „Muskelknospen” ontstaan.

Ik zou den peripheren mantel der spiervezels dus willen opvatten als gebrekkig ontwikkelde en abnormaal gegroeide laterale vertakkingen, waarbij de fibrillen zich niet, in afgeronde takjes vereenigd van de vezel verwijderen, maar haar met spiraaltoeren en kringtoeren omwikkelen.

Met deze opvatting wordt het begrijpelijk, dat de circulaire fibrillen dikwijls slechts op één of meer plaatsen van de vezel voorkomen en soms groote gedeelten vrij laten; het is ook duidelijk, dat wij op dwarse doorsnede meestal een smalle spleetvormige ruimte zien

tusschen de centrale en periphere fibrillenmassa; verder is het verklaarbaar, dat we uit deze vezels enkele malen zeer dunne spierelementen zien ontspringen, die in het omgevende bindweefsel te volgen zijn, terwijl het eindelijk ook begrijpelijk wordt, dat de periphere fibrillen, abnormaal van oorsprong als ze zijn, meestal spoediger in ontaarding overgaan, dan de centrale fibrillen, die de eigenlijke spiervezel vormen.

Deze opvatting laat natuurlijk nog vele feiten onverklaard; het is vooreerst niet duidelijk waarom deze vezels op zoo groote schaal dergelijke abnormale takjes vormen, waarom vervolgens de kernen zoo eigenaardig blaasvormig gezwollen zijn, terwijl dat met de omgevende vezels lang niet in die mate het geval is. Het is verder nog onverklaard, waarom deze vezels zich zoo eigenaardig gedragen ten opzichte van de ontaardingsprocessen: terwijl de omgevende vezels grootendeels in wasachtige degeneratie overgaan, zien we dit hier zelden en bijna constant daarentegen het bovenbeschreven eigenaardige uiteenvallen der fibrillen.

Dit alles kan geen toeval zijn, daarvoor komen deze verschijnselen met te groote regelmaat voor den dag; het was mij echter niet mogelijk voor deze bijzonderheden een bevredigende verklaring te vinden.

Wij komen nu tot de vraag hoe wij dit abnormaal gewoekerde spierweefsel moeten opvatten; mogen wij dit tot de tumoren rekenen of niet?

Makroskopisch maakt het weliswaar geheel den indruk van een gezwel, maar bij mikroskopisch onderzoek kan deze diagnose m. i. toch niet worden volgehouden; vooreerst vindt men n.l. bij rhabdomyomen steeds zeer kleine spiervezels (op dwarse doorsnede meestal kleiner dan 20  $\mu$ , alleen RIBBERT vond enkele grootere vezels tot 80  $\mu$ ); hier daarentegen zijn de vezels over het algemeen vergroot, enkele bereiken zelfs een diameter van 300  $\mu$ .

Bij rhabdomyomen ziet men verder dat de kleine spiervezels zeer gebrekkig gevormd zijn; vaak kan men ze nauwelijks als zoodanig herkennen; ook bij een door FIEBIGER<sup>1)</sup> gepubliceerd rhabdomyoom van een visch waren slechts niterst kleine en bijna niet te herkennen spiervezels voorhanden. In het bovenbeschreven geval echter zijn de kleine spiervezels veelal normaal gebouwd, terwijl de veranderingen juist aan de groote vezels voorkomen.

Vervolgens ziet men, dat de algemeene rangschikking van de

<sup>1)</sup> J. FIEBIGER: Ein Rhabdomyom bei einem Kabljau. Zeitschr. f. Krebsforschung Bd. 7. S. 382.

bindweefselvellen in den spierknobbel grootendeels met normale verhoudingen overeenkomt; men krijgt hier geen willekeurige groepeerings van de spiervezels te zien, zooals men dat bij een tumor zou verwachten en eindelijk vindt men dat ook in het omgevende normale spierweefsel hier en daar hypertrophische vezels voorkomen.

Uit dit alles meen ik te mogen besluiten, dat we hier niet te doen hebben met nieuwgevormd weefsel, dat tot op zekere hoogte een zelfstandig bestaan voert, maar met een weefselmassa, die in hoofdzaak ontstaan is door hypertrophie en woekering van spiervezels, die reeds ter plaatse aanwezig waren.

Een dergelijke locale woekering van dwarsgestreepte spieren, die den indruk maakt van een tumor, is uiterst zeldzaam.

In de literatuur kon ik slechts één soortgelijk geval vinden. LORENZ<sup>1)</sup> beschreef een „geschwulstartige Hypertrophie” in den musculus gluteus maximus van een 52-jarigen man, ontstaan na „Überanstrengung”. Hij vond hierbij zeer groote spiervezels, zelfs 100  $\mu$  bij 200  $\mu$  op dwarse doorsnede. De fibrillen waren dikker dan normaal, de dwarse strepen waren minder duidelijk. Op overlangsche doorsneden zag hij vele deelingen van spiervezels, verschillende vezels waren gedegeneerd (wasachtige degeneratie en „fibrillaire Zerklüftung”). De sarcolemnakernen waren niet toegenomen; verschijnselen van ontsteking waren niet te zien.

Het geval van LORENZ gelijkt dus in grove trekken eenigszins op het onze; omtrent de aetiologie leert het ons niets.

Ook in ons geval kon ik de oorzaak van deze abnormale woekering niet op het spoor komen; bacteriën, protozoën en andere parasieten werden niet gevonden; duidelijke verschijnselen van ontsteking zag men evenmin; verder waren de periphere zenuwen, het ruggemerg en de hersenen zonder afwijkingen, terwijl in verband met de mededeeling van MARTINOTTI ten overvloede nog op de hypophysis werd gelet, maar ook deze vertoonde niets afwijkends.

Men zou nog kunnen denken aan een overmatige regeneratie van het spierweefsel na een trauma, maar daarvoor hebben we geen positieve gegevens.

Ofschoon we hier dus te doen hebben met een plaatselijke, op een gezwel gelijkende, woekering van spierweefsel, waarvoor geen enkele oorzaak te vinden is en die voor het lichaam in geen enkel opzicht van nut kan zijn, zou ik toch niet van een tumor durven spreken, want juist bij vreemdsoortige weefselwoekeringen van koudbloedige dieren is het m. i. van groot belang om vooral niet te kwistig te zijn met het woord tumor.

<sup>1)</sup> Handb. der spec. Pathol. u. Therapie (NOTHNAGEL) Bd. XI. S. 415. 1904.

**Natuurkunde.** — De Heer JULIUS biedt eene mededeeling aan van den Heer H. C. BURGER: „*Over de verdamping van een cirkelvormig vloeistoppervlak*”.

(Mede aangeboden door den Heer VAN DER STOK).

In een onlangs verschenen mededeeling publiceeren Miss N. THOMAS en Dr. A. FERGUSON<sup>1)</sup> waarnemingen betreffende de verdamping van cirkelvormige wateroppervlakken. Deze zijn gedaan onder verschillende omstandigheden, nl. in een donkere, zeer rustige, kamer, in een verlichte kamer en in de open lucht. Het bleek, dat in ieder geval de per tijdseenheid verdampte hoeveelheid water kon worden voorgesteld door:

$$E = K r^n,$$

waarin  $r$  de straal van het wateroppervlak is en  $E$  en  $n$  constanten, die behalve van de uitwendige omstandigheden ook nog afhankelijk bleken te zijn van den afstand van het oppervlak der vloeistof tot den rand van den bak waarin zich deze bevond. Terwijl men nu, zooals de schrijvers opmerken, gewoonlijk in de literatuur de meening vindt, dat de verdamping evenredig is met het oppervlak, d. w. z. dat  $n = 2$ , bleek uit hun experimenten, dat deze exponent steeds tusschen 1 en 2 lag. Nu is door STEFAN<sup>2)</sup> de verdamping van een cirkelvormig vloeistoppervlak theoretisch behandeld in de onderstelling, dat de damp diffundeert in de ruimte boven het vlak, waarin het vloeistofniveau ligt, terwijl aan de vloeistof de concentratie van den damp constant is.

Het resultaat der rekening is, dat de verdampingssnelheid evenredig is met den straal van het oppervlak. Blijkbaar zijn dus bij de experimenten van THOMAS en FERGUSON de conditie's, die STEFAN bij zijn behandeling van het probleem onderstelt, niet vervuld.

Daar ik mij nu reeds sedert eenigen tijd bezig houd met de theoretische en experimenteele behandeling van de diffusie in een stroomende vloeistof<sup>3)</sup>, was het van belang na te gaan of mijn

1) Phil. Mag. XXXIV p. 308, 1917.

2) Wied. Ann. XVII p. 550, 1882.

3) Hierbij is mijn hoofddoel na te gaan of de oplossing aan de grens van een kristal verzadigd is of dat misschien bij voldoende snelle oplossing een onderverzadiging ontstaat.

resultaten in overeenstemming waren met de bovengenoemde onderzoeken. Hiertoe moeten we de waarden van den exponent  $n$  extrapolereen voor het geval dat het vloeistofoppervlak gelijk is met den rand van den bak. Is dit niet het geval dan schijnt het probleem nauwelijks meer vatbaar voor mathematische analyse.

Deze geëxtrapoleerde exponent is nu voor de drie gevallen resp. 1.4, 1.5 à 1.6 en 1.65. In het laatste geval nu, waarin we het meest zeker zijn, dat de lucht boven de vloeistof in voortdurende strooming is, blijkt  $n$  zeer voldoende overeen te stemmen met de theoretisch af te leiden waarde, nl.  $\frac{5}{3} = 1.67$ , zoodat we dus in dit geval er wel zeker van kunnen zijn, dat de stroomingen der lucht de verdamping bewerken. In de gevallen waarbij in rustiger lucht gewerkt is, naderen de waarden van  $n$  ook meer de door STEFAN gevonden waarde  $n = 1$ .

We zullen nu in het volgende een theoretische behandeling geven van de diffusie in een stroomend gas. Daar de verdamping van een willekeurig gevormd oppervlak gemakkelijk is af te leiden uit dat van een rechthoekig, kiezen we eerst dezen laatsten vorm. We denken ons de ruimte boven het vlak  $z = 0$  gevuld met stroomend gas, terwijl het vlak  $z = 0$  zelf een vasten wand vormt, waarvan een gedeelte bestaat uit een vloeistofoppervlak. Laat dit gedeelte den vorm hebben van een rechthoek met zijden evenwijdig aan  $x$  en  $y$ -as, gelegen bij positieve  $y$  en begrensd door de  $x$ -as. Verder zullen we de snelheid van het gas evenwijdig aan de  $y$ -as kiezen en evenredig met  $z$ , dus  $v_y = az$ . Daar nl. aan het vlak  $z = 0$  het gas door uitwendige wrijving een snelheid nul moet hebben, kunnen we stellen:

$$v_{ij} = az + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

en van deze reeks zullen we de tweede en volgende termen mogen verwaarloozen wanneer, zooals gewoonlijk wel het geval zal zijn, de damp zich slechts in een dunne laag boven het vlak  $z = 0$  bevindt.

Noemen we  $c$  de concentratie van den damp en  $D$  den diffusie-coëfficiënt, dan voldoet  $c$ , zooals men zal inzien, aan de gewijzigde diffusie-vergelijking:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c - \text{div} (v c) \quad (I)$$

1) De laatste term in het tweede lid wordt aldus verklaard: In het volume-element  $dx dy dz$  stroomt door het oppervlakte element  $dy dz$  een hoeveelheid damp in:  $cv_x dy dz$  en er uit  $\left\{ cv_x + \frac{\partial}{\partial x} (cv_x) \right\} dy dz$ . Door deze bedragen ook voor de  $y$ - en  $z$ -as op te maken krijgen we voor de totaal uitgestroomde hoeveelheid  $\text{div} (v c) dx dy dz$  als  $v$  de snelheid is, als vector beschouwd.



We onderstellen hierbij dat  $c$  aan het vloeistofoppervlak voldoet aan de grensconditie:

$$c = C^1)$$

waarin  $C$  de concentratie is van den verzadigden damp.

We zullen nu aannemen dat de toestand stationair is d. w. z.

$\frac{\partial c}{\partial t} = 0$ . Dan voldoet  $c$  aan de vergelijking:

$$D \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) = az \frac{\partial c}{\partial y} \quad \dots \quad (II)$$

daar  $v_x = v_z = 0$  en  $v_y = az$ . Verder zullen we in deze vergelijking  $\frac{\partial c}{\partial x^2} = 0$  nemen. Dit is natuurlijk slechts bij benadering juist voor

de waarden van  $x$ , die betrekking hebben op punten binnen den rechthoek. Voor punten naast den rechthoek zal  $c$  slechts uiterst

klein zijn als  $\sqrt{\frac{D}{a}}$  klein is t. o. v. de afmetingen van den rechthoek,

wat we steeds zullen onderstellen. We behandelen dus het probleem als een tweedimensionaal d. w. z. alsof de rechthoek in de  $X$ -richting

een oneindige breedte had<sup>2)</sup>. We zullen dus  $\frac{\partial c^2}{\partial x^2}$  verwaarloozen.

Eindelijk merken we op, dat het groot zijn van  $\frac{a}{D}$  met zich

brengt dat  $D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$  zal mogen verwaarloosd worden t. o. v.  $az \frac{\partial c}{\partial y}$ . Men

zou hiertegen bezwaar kunnen hebben als  $z = 0$  of zeer klein is, maar dan is  $c = C$  of althans is  $c$  dan ongeveer constant, dus zijn dan alle termen der differentiaal-vergelijking nul of zeer klein en

zal dus ook dan het weglaten van  $\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$  toelaatbaar zijn. Dat  $D \frac{\partial c^2}{\partial z^2}$

niet verwaarloosd mag worden, niettegenstaande den kleinen factor  $D$ , heeft zijn grond in het feit dat de verdampde stof slechts in een dunne laag geconcentreerd is en dus  $c$  snel met  $z$  verandert;

$\frac{\partial c}{\partial z}$  en  $\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$  zijn dus groot.

De differentiaal-vergelijking voor  $c$  wordt, na deze vereenvoudigingen:

1) Wanneer door de snelle verdamping een onderverzadiging ontstaat, zal deze waarschijnlijk met de verdampingssnelheid evenredig zijn.

2) Waarnemingen met kristallen die oplossen in een stroomende vloeistof hebben deze onderstelling bevestigd.

$$\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = \frac{a}{D} z \frac{\partial c}{\partial y} \dots \dots \dots (III)$$

Daar nu, tengevolge van een voldoende snellen stroom een diffusie stroomop onmogelijk is, nemen we, met het oog op het feit dat het aankomende gas vrij van damp is, aan dat voor  $y = 0$   $c = 0$  is. Verder kunnen we om dezelfde reden het vloeistofoppervlak zich laten uitstrekken van  $y = 0$  tot  $y = \infty$  daar voor willekeurige  $y$  de concentratie niet zal beïnvloed worden door de aanwezigheid van vloeistof, aan de grens  $z = 0$ , bij grooter waarden van  $y$ . Zooals gezegd nemen we voor  $z = 0$  de randvoorwaarde  $c = C$ , terwijl natuurlijk voor  $z = \infty$   $c = 0$  moet zijn.

Problemen van dit type zijn op algemeene wijze op te lossen door het gebied waarin de  $z$  varieeren kan eindig te maken, dan een oplossing te construeeren met behulp van een reeks van eigen functie's en eindelijk tot de limiet over te gaan waarbij we het gebied oneindig laten worden. Deze methode hoop ik nitvoerig in mijn proefschrift uiteen te zetten; hier echter kunnen we volstaan met een veel eenvoudiger beschouwingwijze, daar slechts het doel is te vinden hoe de per tijdseenheid verdampte vloeistof afhangt van de lengte van den rechthoek d. i. van  $y$ .

Voeren we in (III) als nieuwe veranderlijke in :

$$\xi = z \sqrt{\frac{a}{D}},$$

dan neemt deze vergelijking den vorm aan :

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} = \xi \frac{\partial c}{\partial y} \dots \dots \dots (IIIa)$$

De grensvoorwaarden van  $c$  zijn hierbij :

$$c = 0 \quad \text{voor} \quad y = 0$$

$$c = C \quad \text{,,} \quad \xi = 0$$

$$c = 0 \quad \text{,,} \quad \xi = \infty$$

De oplossing der getransformeerde vergelijking zal geen  $a$  of  $D$  bevatten, daar deze grootheden noch in de differentiaalvergelijking, noch in de randvoorwaarden voorkomen.

Dus is :

$$c = \varphi(\xi, y) = \varphi\left(z \sqrt{\frac{a}{D}}, y\right).$$

De vloeistof, die per tijdseenheid verdampt van dat deel van het oppervlak dat tusschen  $y = 0$  en  $y$  ligt vinden we door te berekenen hoeveel stof stroomt door een vlak loodrecht op de  $y$ -as. Daar

de snelheid van het gas  $az$  is, stroomt per tijdseenheid door een vlakke-eenheid loodrecht op de  $y$ -as een hoeveelheid damp  $azc$ , dus de totale wegvloeiende dampmassa per eenheid van breedte in de richting der  $X$ -as is:

$$E = \int_0^{\infty} azc \, dz = a \int_0^{\infty} z \varphi \left( z \sqrt{\frac{a}{D}}, y \right) dz.$$

Voeren we nu weer  $\zeta = z \sqrt{\frac{a}{D}}$  in, dan wordt deze hoeveelheid:

$$E = a \cdot \left( \sqrt{\frac{D}{a}} \right)^2 \int_0^{\infty} \zeta \varphi(\zeta, y) \, d\zeta = a^{1/2} D^{2/3} \psi(y) \quad (IVa)$$

We kunnen nu (III) transformeeren door te stellen:

$$\eta = y \cdot \frac{D}{a}.$$

We krijgen dan de vergelijking:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = z \frac{\partial c}{\partial \eta} \quad (IIIb)$$

Hierbij behooren de randconditie's:

$$\begin{aligned} c &= 0 & \text{voor } \eta &= 0 \\ c &= C & \text{,, } z &= 0 \\ c &= 0 & \text{,, } z &= \infty \end{aligned}$$

Ook hier zal de oplossing van  $a$  en  $D$  onafhankelijk zijn, nl.:

$$c = f(z, \eta) = f\left(z, y \frac{D}{a}\right)$$

Hieruit vinden we:

$$E = \int_0^{\infty} a z c \, dz = a \int_0^{\infty} z f\left(z, y \frac{D}{a}\right) dz = aF\left(y \frac{D}{a}\right) \quad (IVb)$$

Vergelijken we nu de gevonden waarden van  $E$ , dan blijkt (IVb) alleen dan in overeenstemming met (IVa) te zijn wanneer:

$$F(p) = A \cdot p^{2/3},$$

waarin  $A$  een constante is. Dan wordt dus:

$$E = a \cdot A \frac{y^{2/3} D^{2/3}}{a^{2/3}} = A a^{1/3} D^{2/3} y^{2/3} \quad (IVc)$$

Van dit resultaat interesseert ons hier in de eerste plaats het feit, dat  $E$  evenredig blijkt te zijn met  $y^{2/3}$ .

Om nu uit de verkregen nitkomst af te leiden wat  $E$  wordt voor

een vloeistofoppervlak van willekeurigen vorm, denken we dit oppervlak verdeeld in smalle strooken met de lange zijden evenwijdig aan de  $y$ -as, d. w. z. aan den stroom. Daar de breedte van deze strooken niet te klein mag worden gekozen, wanneer wij er de verkregen resultaten op willen toepassen, maar aan den anderen kant ook niet te breed, willen ze nog als rechthoek beschouwd mogen worden, blijkt dat de omtrek van het vloeistofoppervlak niet te grillig mag zijn en bovendien de lineaire afmetingen van dit oppervlak niet te klein t. o. v.  $\sqrt{\frac{D}{a}}$ .

Dan echter is voor ieder van die rechthoeken  $E$  evenredig met de breedte en met de  $\frac{2}{3}$ <sup>e</sup> macht der lengte. De totale waarde van  $E$  vinden we dus door integratie over het geheele oppervlak, en men ziet gemakkelijk in, dat deze grootheid voor gelijkvormige figuren evenredig wordt met de  $\frac{5}{3}$ <sup>e</sup> macht der afmetingen, waarbij van deze exponent a. h. w.  $\frac{2}{3}$  op de lengte en 1 op de breedte betrekking heeft.

Daar nu alle cirkels gelijkvormig zijn, is hiermee aangetoond dat de verdamping van een cirkelvormig vloeistofoppervlak evenredig is met de  $\frac{5}{3}$ <sup>e</sup> macht van de straal, zooals ook is gevonden door Miss THOMAS en Dr. FERGUSON, wanneer de omstandigheden in overeenstemming waren met die, welke bij de hier gegeven theoretische beschouwing zijn gebruikt.

De hier gegeven theorie heb ik ook bevestigd gevonden bij waarnemingen betreffende het oplossen van kristallen in een stroomende vloeistof, waarmede zich mijn dissertatie zal bezighouden. De opgeloste hoeveelheid stof bleek evenredig te zijn met de  $\frac{1}{3}$ <sup>e</sup> macht van de stroomsnelheid, met de breedte van den rechthoek en met de  $\frac{2}{3}$ <sup>e</sup> macht van de lengte.

*Instituut voor theoretische Natuurkunde.*

*Utrecht, December 1917.*

**Analyse mathématique.** — „Sur une propriété des fonctions de variable complexe”. Note de M. ARNAUD DENJOY. (Présenté par Mrs. W. KAPTEYN et L. E. J. BROUWER).

Je me propose de démontrer le théorème suivant:

Si une fonction analytique  $F(x)$  et sa dérivée  $F'(x)$  sont régulières et non nulles en tout point d'un contour simple  $C$ , à l'intérieur duquel  $F(x)$  peut se mettre sous la forme:

$$F(x) = (x-a_1)^{z_1} \dots (x-a_n)^{z_n} G(x), \quad (1)$$

les  $a_j$  étant intérieurs à  $C$ ,  $G$  étant régulière et non nulle dans  $C$ , et les  $a_j$ ,  $z_j$  étant indépendants de  $x$ , si l'argument de  $F(x)$  varie dans un sens constant quand  $x$  décrit le contour  $C$ , 1°.  $F'(x)$  possède à l'intérieur de  $C$ ,  $(n-1)$  zéros distincts ou confondus différents des  $a_j$  2°. toute courbe d'équation  $\text{Arg } F(x) = \text{cte}$  pénétrant dans  $C$ , aboutit en l'un des points  $a_j$  ou passe en l'un des zéros propres à  $F'$ .

En effet, soit  $\Gamma(x)$  une détermination de  $\log G(x)$ .  $\Gamma(x)$  est par hypothèse holomorphe dans  $C$  et sur  $C$ .

On a:

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{\alpha_1}{x-a_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{x-a_n} + \Gamma'(x) = \frac{V(x)}{(x-a_1) \dots (x-a_n)}.$$

D'après son expression,  $V$  est holomorphe dans et sur  $C$ , et  $V$  ne s'annule en aucun point  $a_j$ . En outre, par hypothèse,  $V$  ne s'annule pas non plus sur  $C$ . A l'intérieur de  $C$ , les zéros de  $F'(x)$  distincts des  $a_j$  coïncident donc avec les zéros de  $V$ . Nous voulons montrer que  $V$  possède à l'intérieur de  $C$ ,  $(n-1)$  zéros distincts ou confondus. Or,

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{d}{dx} \cdot \log F(x).$$

$F$  et  $F'$  étant réguliers et différents de zéro sur  $C$ , le second membre est, en tout point de  $C$ , une fonction continue de  $x$ , de même que les logarithmes et *a fortiori* les arguments de  $F$  et de  $F'$ .

Supposons que  $C$  ait, en chacun de ses points, une tangente bilatérale unique, variant continûment. Soit  $\alpha$  l'angle avec  $Ox$  de cette tangente dirigée dans le sens positif de parcours de  $C$ . Soit  $s$  l'arc de  $C$  compris entre une origine choisie sur  $C$ , et le point variable  $x$ . On a:

$$e^{i\alpha} \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{d \log |F|}{ds} + i \frac{d \operatorname{Arg} F}{ds}.$$

Donc, la partie imaginaire de  $e^{i\alpha} \frac{F'}{F}$  garde un signe constant dans le mouvement de  $x$  sur  $C$ . Donc la variation totale de  $\operatorname{Arg}. e^{i\alpha} \frac{F'}{F}$  est nulle. Or,  $C$  étant un contour simple, parcouru dans le sens direct,  $\alpha$  augmente de  $2\pi$ . Donc,  $\operatorname{Arg}. \frac{V}{(x-a_1) \dots (x-a_n)}$  diminue de  $2\pi$ . Les  $a_j$  étant intérieurs à  $C$ ,  $\operatorname{Arg}. V$  augmente donc de  $2(n-1)\pi$ . Donc,  $V$  a  $(n-1)$  zéros distincts ou confondus à l'intérieur de  $C$ .

Supposons maintenant que  $C$  ne possède pas en chaque point une tangente déterminée. Soit  $2\sigma_1$  la plus courte distance à  $C$  des points  $\zeta$  qui sont, soit des zéros, soit des singularités de  $F$  ou de  $F'$ .  $\sigma_1$  est positif puisque aucun de ces points n'est sur  $C$ . Soit  $2\sigma_2$  la distance minimum de deux points de  $C$  entre lesquels la variation de  $\operatorname{Arg}. F(x)$  est égale en valeur absolue à un multiple entier de  $2\pi$ . Soit  $\sigma$  le plus petit des deux nombres  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . En un point quelconque  $x_1$  de  $C$ , menons l'arc de courbe  $g(x_1)$  d'équation :

$$\operatorname{Arg}. F(x) = \operatorname{Arg}. F(x_1),$$

limité de part et d'autre de  $x_1$  à la longueur  $\sigma$ . Puisque  $F$  est régulier et non nul sur  $C$ , pour chaque point de  $C$ , l'arc  $g(x_1)$  est déterminé. Comme  $F'$  ne s'annule pas sur ce même arc, celui-ci ne possède que des points simples.

Deux arcs  $g(x_1)$ ,  $g(x_2)$  sont entièrement distincts. En effet, les deux arcs  $g(x_1)$ ,  $g(x_2)$  correspondent à des arguments de  $F$  différents, puisque  $\operatorname{Arg}. F$  varie dans un sens constant sur  $C$ . Cela étant, ou

bien  $\frac{1}{2\pi} \operatorname{Arg}. \frac{F(x_2)}{F(x_1)} = \theta_2 - \theta_1$  n'est pas un nombre entier, et alors,

les deux arcs ne pourraient se rencontrer qu'en un point où  $F$  est irrégulier ou nul, circonstance impossible, puisque, leur demi-longueur étant  $\sigma \leq \sigma_1$ , aucun ne contient de points de cette sorte. Ou bien  $\theta_2 - \theta_1$  est un entier non nul, et les deux arcs  $g(x_1)$  et  $g(x_2)$  n'ont pas de points communs, d'après  $\sigma \leq \sigma_2$ . Si  $e_1, e_2$  sont les extrémités de  $g(x_1)$  respectivement intérieure et extérieure à  $C$ ,  $e_1$  et  $e_2$  décrivent chacun une courbe sans point multiple, l'une  $\Gamma_1$  intérieure à  $C$ , l'autre  $\Gamma_2$  contenant  $C$  à son intérieur. Entre  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , on peut déformer indifféremment  $C$  sans rencontrer de point  $\zeta$ .

Or la condition que  $\operatorname{Arg}. F(x)$  varie dans un sens constant équivaut à celle-ci, que  $C$  coupe une fois et une seule chacun des arcs  $g(x_1)$ . Donc, si le contour  $C$  présente des irrégularités, il est possible de

substituer à chaque point  $x_1$  de  $C$  un point  $x'_1$  de l'arc correspondant  $g(x_1)$  de façon que la courbe  $C'$  des points  $x'_1$ , qui coupe une fois et une seule chaque arc  $g(x_1)$ , soit continue et admette en tout point une tangente unique variant continûment.  $C'$  contient à son intérieur les mêmes points  $\zeta$  que  $C$ . Or, la première partie du théorème est vraie pour  $C'$ . Donc elle l'est aussi pour  $C$ . Elle est donc générale.

Conservant toutes les autres hypothèses de l'énoncé, supposons simplement que  $\text{Arg } F(x)$  ne possède pas sur  $C$  les deux sens de variation. Sur certains arcs  $\omega$  de  $C$ ,  $\text{Arg } F(x)$  pourra être constant. Sur un tel arc  $\omega$ ,  $\log |F|$  est continu et varie dans un sens constant, puisque ni  $F$  ni  $F'$  ne s'annulent sur  $\omega$ . Quand  $x$  décrit  $\omega$ , le point figuratif de  $u = e^{\frac{ia F'}{F}}$  parcourt sur l'axe réel un segment dont les deux extrémités sont d'un même côté de l'origine. Si la tangente à  $C$  varie continûment, comme le point  $u$  n'a pas de positions de part et d'autre de l'axe réel, la variation de  $\text{Arg } u$  sur le contour décrit par  $x$  est encore nulle. La première partie du théorème subsiste.

Si, en dehors ou aux extrémités des arcs  $\omega$ ,  $C$  était, en certains points, dépourvu de tangente, on introduirait les arcs  $g(x_1)$  relatifs à tous les points de  $C$ , sauf aux points intérieurs aux arcs  $\omega$ . L'ensemble des  $g(x_1)$  formerait des régions auxquelles toutes les parties de  $C$  étrangères aux arcs  $\omega$  seraient intérieures, et où l'on pourrait déformer  $C$  sans lui faire traverser de zéros ni de singularités de  $F$  ni de  $F'$ , de façon à lui donner une tangente continue en conservant les conditions du théorème. Celui-ci, vrai pour le nouveau contour, l'est aussi pour  $C$ .

La première partie du théorème et cette dernière extension étant établies en toute généralité, démontrons la seconde partie.

Si une courbe  $g$  d'équation  $\text{Arg } F(x) = \text{cte}$  avait dans  $C$  un certain point  $\gamma$ , et si, prolongée dans les deux sens à partir de  $\gamma$ , elle ne rencontrait pas de point  $\zeta$ , elle aboutirait des deux parts à  $C$ , en des points respectifs  $\alpha$  et  $\beta$ . Les deux arcs de  $C$  séparés par  $\alpha$  et  $\beta$ , augmentés de l'arc de  $g$  intérieur à  $C$ , formeraient deux contours simples ne contenant pas de point  $\zeta$  et sur aucun desquels  $\text{Arg } F$  ne posséderait les deux sens de variation. Alors  $F$  possédant  $q$  points  $a_j$  à l'intérieur de l'un de ces contours, et  $(n-q)$  à l'intérieur de l'autre,  $F'$  aurait à l'intérieur de ces mêmes contours respectivement  $(q-1)$  et  $(n-q-1)$  zéros (comptés chacun avec son ordre de multiplicité), donc en tout  $(n-2)$  zéros et non pas  $(n-1)$ . Le théorème est donc entièrement démontré.

La première partie appelle diverses observations.

D'abord, la démonstration reposant simplement sur ceci que le point  $e^{iz} \frac{F'}{F}$  ne tourne pas autour de l'origine, il suffirait pour l'exactitude de la première partie du théorème, que le sens de variation de  $\text{Arg } F$  sur  $C$  fût le même, simplement chaque fois que le module de  $F$  passe par un maximum ou par un minimum.

Considérons le cas où  $C$  contient un zéro régulier et simple de  $F'$ . On suppose toujours  $F(\xi) \neq 0$ , de façon que l'argument de  $F$  ne soit indéterminé en aucun point de  $C$ . Pour préciser le sens de la première partie du théorème, il convient de savoir si  $\xi$  doit ou non être considéré comme intérieur à  $C$ . Nous examinerons pour cela comment il convient de modifier un arc de  $C$  contenant  $\xi$  et indifféremment petit, de façon que le sens de variation de  $\text{Arg } F$  sur le nouvel arc ne soit ni double, ni différent de celui de  $C$ . La ligne  $\text{Arg } F = \text{Arg } F(\xi)$  possède en  $\xi$  un point double à tangentes rectangulaires. Les deux branches  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  de cette courbe délimitent quatre angles curvilignes de sommet  $\xi$ . Une ligne  $\text{Arg } F = \text{Arg } F(\xi) + \varepsilon$  se compose, si  $\varepsilon$  est assez petit, de deux arcs distincts, intérieurs respectivement à deux angles, opposés par le sommet, formés par  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  et disposés relativement à  $\gamma_1$  et à  $\gamma_2$  comme le sont par rapport à leurs asymptotes les deux branches d'une hyperbole équilatère. Suivant le signe de  $\varepsilon$ , les arcs sont dans l'un ou dans l'autre des deux couples d'angles ainsi placés. Numérotons par exemple 1 et 3 ceux qui correspondent à  $\varepsilon > 0$ , 2 et 4 les deux autres. Supposons que  $\gamma_1$  désigne la branche séparant les angles 1 et 2 d'une part, 3 et 4 d'autre part.  $\gamma_2$  sépare d'une part 1 et 4, d'autre part 2 et 3.  $\text{Arg } F$  croît, quand on traverse soit  $\gamma_1$  en passant de 2 à 1 ou de 4 à 3, soit  $\gamma_2$  en passant de 4 à 1 ou de 2 à 3.

$C$  ne peut pas pénétrer dans deux angles opposés.  $C$  traverse une des deux branches  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , et une seule. Si donc  $C$  ne contient pas un arc de l'autre branche, il est entièrement situé (sauf en  $\xi$ ) d'un même côté de cette dernière. On peut, aux abords de  $\xi$ , déplacer  $C$  de ce même côté sans changer le sens de variation de  $\text{Arg } F$ .  $\xi$  doit donc être considéré comme situé du même côté de  $C$  que la branche  $\gamma_1$  ou  $\gamma_2$  non traversée.

Si  $C$  n'est pas tangent à la branche non traversée, il ne peut pas présenter une tangente unique en  $\xi$ . Donc, si  $C$  possède un point anguleux en  $\xi$ ,  $\xi$  doit être regardé comme situé du côté de  $C$  opposé à l'intérieur de l'angle (ouvert de moins de  $\pi$ ) formé par les deux arcs de  $C$  séparés par  $\xi$ .

Si  $C$ , traversant  $\gamma_1$ , contient un arc  $\gamma'_2$  compris dans  $\gamma_2$ ,  $C$  quitte



$\gamma_2$ , suffisamment prolongé, du même côté aux deux extrémités de  $\gamma'_2$ . Je dis que  $\xi$  doit être considéré comme situé du côté de  $C$ , où se trouvent les parties de  $\gamma_2$  étrangères à  $\gamma'_2$ .

En effet, si par exemple  $\text{Arg } F(x)$  est non décroissant sur  $C$ ,  $C$  doit atteindre  $\gamma_1$  par l'angle 2 et le quitter par l'angle 1, ou atteindre  $\gamma_2$  par l'angle 4 et le quitter par l'angle 3. Plaçons-nous dans la première hypothèse.

Traçons un trait  $\alpha'_1 \beta'_1$  aussi court et voisin de  $\xi$  qu'on le voudra, et normal à  $\gamma_1$ ,  $\alpha'_1$  étant dans l'angle 2 et  $\beta'_1$  dans l'angle 1. Sur le trait  $\alpha'_1 \beta'_1$ ,  $\text{Arg } F$  croît. L'arc de courbe:  $\text{Arg } F = \text{Arg } F(\alpha'_1)$  situé dans l'angle 2, et suivi à partir de  $\alpha'_1$  en s'éloignant de  $\gamma_1$  vers la partie quasi-asymptote à  $\gamma_2$ , coupe  $C$  en un point  $\alpha_1$  très voisin de l'extrémité initiale de  $\gamma'_2$ . De même l'arc de la courbe  $\text{Arg } F = \text{Arg } F(\beta'_1)$ , situé dans l'angle 1 et suivi à partir de  $\beta'_1$  dans le sens quasi-asymptote à  $\gamma_2$ , coupe  $C$  en  $\beta_1$ , très voisin de l'extrémité terminale de  $\gamma'_2$ . Soit  $C'$  le contour obtenu en modifiant  $C$  entre  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  par la substitution du premier parcours au second. Sur le parcours  $\alpha_1 \alpha'_1 \beta'_1 \beta_1$ ,  $\text{Arg } F$  ne décroît jamais, tout comme sur  $C$  entre  $\alpha_1$  et  $\beta_1$ , en passant par l'arc  $\gamma'_2$ . Si  $\alpha'_1$  et  $\beta'_1$  sont assez voisins de  $\xi$ , les deux contours  $C$  et  $C'$  ne comprennent entre eux aucun point  $\zeta$ . A leur intérieur, le nombre des  $a_i$  est le même, et il doit donc en être ainsi du nombre des zéros de  $F'$ , si le premier de ces deux nombres détermine le second. Il faut donc considérer  $\xi$  comme situé relativement à  $C$  ainsi qu'il l'est par rapport à  $C'$ , c'est-à-dire du côté de l'arc  $\gamma'_2$  opposé à celui où  $C$  quitte  $\gamma'_2$ .

Si l'arc  $\gamma'_2$  où  $\text{Arg } F$  est constant, contient plusieurs zéros simples de  $F'$ , dont aucun n'est un point anguleux pour  $\gamma'_2$ , tous ces zéros doivent être regardés comme placés, relativement à cet arc, du côté opposé à celui où, initialement et finalement,  $C$  se sépare de  $\gamma_2$ . Des considérations analogues aux précédentes justifient cette conclusion et permettent d'en éclairer le sens dans tous les cas.

Si le point  $\xi$  de  $C$  est un zéro de  $F'$  multiple d'ordre  $p$ , la courbe  $\text{Arg } F = \text{Arg } F(\xi)$  possède  $(p + 1)$  branches simples se croisant en  $\xi$  et séparant  $2(p + 1)$  angles curvilignes  $\theta$  de même ouverture. Dans ces divers angles, au voisinage de  $\xi$ ,  $\text{Arg } F$  est alternativement supérieur et inférieur à  $\text{Arg } F(\xi)$ . Pour que  $\text{Arg } F$  varie sur  $C$  dans un sens constant, il faut que les deux arcs de  $C$  séparés par  $\xi$  soient dans deux angles  $\theta$  adjacents ou séparés par un nombre pair d'angles  $\theta$ . Si ces deux angles sont adjacents,  $C$  possède (on pourra être déformé de façon à posséder) un point anguleux en  $\xi$ . On considère  $\xi$  comme situé, par rapport à  $C$ , du côté opposé à l'intérieur de l'angle formé par les deux branches de  $C$ .

Si ces deux angles ne sont pas adjacents,  $q$  couples d'angles  $\theta$  sont du côté intérieur de  $C$ ,  $p - q$  du côté opposé.  $F'$  doit être considérée dans l'application du théorème comme possédant  $q$  zéros intérieurs à  $C$  et confondus avec  $\xi$ . On le montre en adjoignant à  $C$  les arcs  $\text{Arg. } F = \text{Arg. } F'(\xi)$  issus de  $\xi$  et intérieurs à  $C$ .

*Application.* Si une fonction  $F(x)$  a son module constant sur un contour simple  $C$  où elle est régulière et où sa dérivée  $F'$  ne s'annule pas, si de plus  $F$  est, à l'intérieur de  $C$ , de la forme (1),  $F'$  s'annule  $(n - 1)$  fois à l'intérieur de  $C$  en des points distincts des zéros ou infinis de  $F'$ .

Car le sens de variation de  $\text{Arg. } F$  sur  $C$  est constant, sinon, en un point où il se modifierait,  $F'$  s'annulerait, puisque  $\frac{d \log |F|}{dx}$  est toujours nul quand  $x$  décrit  $C$ .

Si  $C$  passe en un zéro simple  $\xi$  de  $F'$ , les considérations antérieures permettent de définir les conventions sous lesquelles le théorème subsiste. La ligne  $|F(x)| = |F(\xi)|$  possède deux branches  $\beta_1$  et  $\beta_2$ , se croisant en  $\xi$ .  $\text{Arg. } F$  possède en  $\xi$  un maximum sur l'une des branches, un minimum sur l'autre. Donc, pour que, sur le contour  $C$ ,  $\text{Arg. } F(x)$  varie en sens constant, il faut qu'à la demi-branche  $\beta_1$  ou  $\beta_2$ , par où  $C$  arrive en  $\xi$ , succèdent l'une ou l'autre des deux demi-branches  $\beta_2$  ou  $\beta_1$ , orthogonales à la première.  $\xi$  devra être regardé comme extérieur à l'angle droit dont il est le sommet et dont les deux demi-branches considérées forment les côtés.

On peut aussi arrondir  $C$  au voisinage de  $\xi$  par une modification infiniment petite, de façon que la tangente tourne dans un sens constant d'environ  $\pm \frac{\pi}{2}$ .  $\xi$  reste en-dehors de la convexité de cet arc. La variation de  $\text{Arg. } F$  sur le contour  $C$  ainsi tracé, possède un sens constant.  $C$  est un contour simple, auquel le théorème fondamental s'applique.

Si  $\xi$  est un zéro multiple d'ordre  $p$  de  $F'$ , les deux arcs de  $C$  aboutissant en  $\xi$  font un angle géométrique  $K \frac{\pi}{p + 1}$ ,  $K$  étant entier et au plus égal à  $p + 1$ . Pour que  $\text{Arg. } F$  varie en sens constant sur  $C$ , il faut que  $K$  soit impair. Si  $K = 2K' + 1$ ,  $\left(K' \leq \frac{p}{2}\right)$ , le théorème est vrai, à la condition de considérer  $F'$  comme possédant en  $\xi$ ,  $K'$  zéros intérieurs à l'angle curviligne formé par les deux arcs de  $C$  se réunissant en  $\xi$ . On s'en assurera encore en ajoutant à  $C$  toutes les branches de la courbe  $|F| = |F(\xi)|$  issues de  $\xi$  et intérieures à ce même angle.

**Natuurkunde.** — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt eene mededeeling aan van den Heer L. HAMBURGER: „*Over licht-emissie door gassen en mengels van gassen bij electriche ontladingen.*”

(Mede aangeboden door den Heer LORENTZ).

§ 1. *Methode van onderzoek.*

Bij onderzoekingen omtrent den invloed van verschillende factoren op de licht-emissie van gassen bij electriche ontladingen, doen zich verschijnselen van zeer veelzijdigen aard voor, zoodat zich de eisch naar *systematische onderzoekings-methoden* doet gelden, terwijl tevens de wenschelijkheid, om *objectieve meet-methoden*, welke vrij zijn van de onvolkomenheden van het menschelijk oog, ter beschikking te krijgen, op den voorgrond treedt.

Waar de spectroscopie en de daarmede samenhangende intensiteitsmetingen groote moeilijkheden met zich mede brengen, zou men echter wel buitengewoon lang op resultaten moeten wachten, wanneer men bij de onderscheiden gassen en mengels, en dan nog onder verschillende omstandigheden, de intensiteiten voor elke geëmitteerde golflengte (spectraallijn of band) afzonderlijk wilde meten. Aangezien bovendien bij de omvangrijkheid van dit moeilijke en groote gebied, deze arbeid nog slechts een eerste contact zoeken met het aangegeven veld van onderzoek kon zijn, was zeker een methode wenschelijk, welke een snelle kijk veroorlooft, op wat zich onder uiteenloopende condities voordoet. Hieraan beantwoordt een fotografische methode, welke ook voor het ultraviolette deel van het spectrum bruikbaar is en welke men in een vroegere publicatie van G. HOLST en L. HAMBURGER<sup>1)</sup> beschreven vindt.

In de twee volgende paragrafen van deze beknopte mededeeling wordt een overzicht gegeven van de voornaamste resultaten van een op zulk een wijze verricht onderzoek omtrent den invloed van verschillende factoren op de licht-emissie van gassen en mengels van gassen bij electriche ontladingen. Daarbij werd voor de lichtopwekking in de gassen gebruik gemaakt van een gelijkstroom-ontladingstoestel, dat in principe beantwoordde aan de door H. KONEX

<sup>1)</sup> Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. XXVI, 497 (1917).

en W. JUNGJOHANN<sup>1)</sup> vastgestelde richtlijnen en waarbij (vergel. J. SCHWEDES<sup>2)</sup>) met stroomende gassen gewerkt werd. De aanwending van groote stroomdichtheden had tevens de waarneming ten gevolge van verschillende verschijnselen, welke vroeger niet of niet scherp zijn opgemerkt.

De in de publicatie van G. HOLST en L. HAMBURGER beschreven sectormethode stelt niet zonder meer in staat, de intensiteit der stralingen van verschillende golflengten met elkander te vergelijken. Wanneer men echter de selectieve werking der optische inrichting en der fotografische plaat vaststelt, zoo kan ook dit gelukken.

In verband hiermede bleek het in bepaalde gevallen wenschelijk te zijn, om, onder gebruikmaking van den draaienden sector, er toe over te gaan de gevoelige plaat te belichten met op bekende, zeer hooge temperatuur functioneerende temperatuurstralers, waarvan de energie-verdeeling bekend was. De na het ontwikkelen zich toonende gevoeligheids-kromme (fig. 1, plaat I) werd dan vergeleken met de energiekromme welke uit de bekende stralingswetten volgt, en aldus kon de verandering der gevoeligheid der fotografische plaat met de golflengte worden bepaald.

Wie van een en ander meer weten wil, moet ik naar mijn dissertatie<sup>3)</sup> verwijzen, waarin men bovendien een verzameling van objectief afgebeelde emissie spectra van een tamelijk aantal gassen en hun mengsels zal vinden, welke zich zoo voordoen, dat zij den beschouwer met een oogopslag een indruk geven van de althans op de photographische plaat uitgedrukte intensiteits-verdeeling. Een dergelijke verzameling ontbrak tot nu in de literatuur omtrent de licht-emissie door gassen.

## § 2. *Intensiteitsmetingen aan zuivere gassen.*<sup>4)</sup>

Onderzocht werden de gassen: stikstof, waterstof, argon, neon, helium. Wij zullen eerst de bij stikstof gevonden resultaten, bij wijze van voorbeeld, iets gedetailleerder mededeelen. Vooraf willen wij echter op de in fig. 2 plaat I weergegeven spectrogrammen wijzen, waarvan het bovenste verkregen is door inwerking van door stikstof uitgezonden licht, wanneer voor de spleet der spectograaph een

<sup>1)</sup> Verh. d. D. phys. Ges. (12) 3, 128—144 (1910).

<sup>2)</sup> Zeitschr. f. wiss. Phot. 11, 199 (1913).

<sup>3)</sup> L. HAMBURGER. Diss. Delft. 1917. Daarin is ook een hoofdstuk gewijd aan door mij verrichte onderzoekingen aangaande verschijnselen, die zich bij *Tesla*-ontladingen in gassen voordoen.

<sup>4)</sup> Voor de toetsing aan de in de literatuur bekende metingen moet ik naar mijn diss. verwijzen.

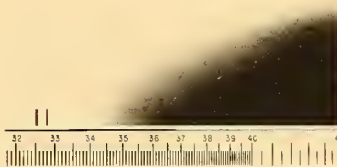


Fig. 1.

Spectrum van gloeiend wolfram, met behulp van  
op Wratten en Wainright's panchromatische

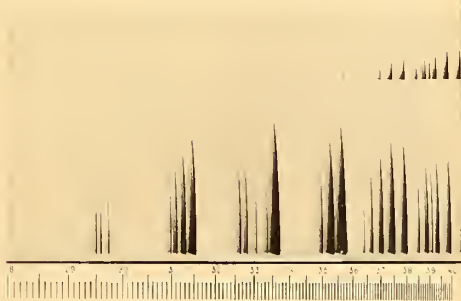


Fig. 2.

Vergelijking van opnamen van  
stikstof met sector en met

<sup>\*)</sup> In fig. 2 komen in het zichtbare deel van het spectrum van  
welke in de sector-opname ontbreken. Bij deze laatste was echter de belichtingst



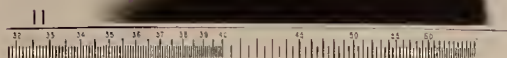


Fig. 1.

Spectrum van gloeiend wolfram, met behulp van den draaienden sector enz., opgenomen op Wratten en Wainright's panchromatische plaat (kopervergelijkings-spectrum).

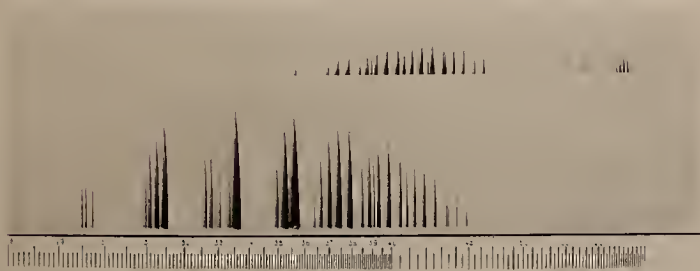


Fig. 2.

Vergelijking van opnamen van het spectrum van stikstof met sector en met rookglaswig.\*)

\*) In fig. 2 komen in het zichtbare deel van het spectrum van het rookglaswig-spectrogram (bovenste opname) enkele banden voor, welke in de sector-opname ontbreken. Bij deze laatste was echter de belichtingstijd veel korter.





rookglaswig geplaatst is, terwijl de onderste met behulp van den draaienden sector is opgenomen. Deze reproductie illustreert wel zeer sterk de krachtig selectieve werking van de rookglaswig.

### A. *Stikstof.*

Conclusies uit de waarnemingen, verricht aan de naar rood gekeerde scherpe kanten der stikstofbanden der tweede positieve stikstofgroep:

1. De metingen zijn reproduceerbaar. 2. De invloed van den belichtingstijd op de lengte der kanten der banden stemt overeen met de berekening. 3. Het emissie-vermogen van stikstof is evenredig met de toegevoerde energie. 4. Omtrent den gasdruk worden de volgende gevolgtrekkingen uit de metingen gehaald:

a. Bij constante stroomdichtheid vermindert de licht-intensiteit bij vermindering van druk voor het onderzochte drukgebied.

b. Het maximum der uitgestraalde energie verschuift daarbij naar de kortere golflengten.

c. De tot de negatieve pool behoorende banden toonen een kenmerkend verschil in gedrag met de hen in het spectrum omringende banden der tweede positieve stikstofgroep bij verandering van den gasdruk.

d. De potentiaal-gradient in de positieve zuil neemt af bij drukvermindering en ook bij verhooging der stroomsterkte.

e. Aan de kathode-zijde treedt bij stroomdoorgang een drukverlaging op, welke bij groote waarde der stroomdichtheid relatief belangrijk is; de grootte van dit druk-effect blijkt (ongeveer) evenredig met de stroomsterkte te zijn. Dit effect is tegengesteld aan de, overigens uiterst geringe drukverhooging, welke A. WEHNELT en J. FRANK <sup>1)</sup> onder bijzondere condities vonden; het is voor het eerst hier in een spectraalbuis waargenomen en geeft — vooral indien men speciaal de dimensies van het toestel daarop zou inrichten — een middel, om iets meer te weten te komen van de eigenschappen (massa) der stroomgeleidende gasdeeltjes. Aangetoond wordt dat men hier met een fysisch effect te maken heeft en reeds direct kan de conclusie getrokken worden, dat de negatieve ionen niet electronen, doch met relatief groote massa beladen electriche deeltjes moeten zijn. Nadere waarnemingen leeren, dat aan het verschijnsel bij de kathode een drukverhooging aan de anode beantwoordt. Het druk-effect is bij gasen met gering moleculair gewicht geringer. Een en ander wordt met het verschil in massa, aantal, snelheid der nega-

<sup>1)</sup> Verh. d. D. phys. Ges. **12**, 444 (1910). Zie ook J. STARK, BOLTZMANN Festschr. 399 (1904).

tieve en positieve ionen in verband gebracht (massa-transport door den elektrischen stroom).

### B. Waterstof, neon, helium.

De aan deze gaspen verrichte waarnemingen stemmen in zooverre met die van Stikstof overeen, dat hier als algemeene conclusie kan gesteld worden, dat de intensiteit der spectraallijnen of -banden van alle onderzochte gaspen binnen de waarnemingsfouten (en in het onderzochte gebied) evenredig is met de toegevoerde energie en dat met afnemenden druk het maximum der energie zich naar het ultraviolet verplaatst.

Bovendien leeren de waarnemingen, dat de hier gevolgde methode een zeer geschikt middel vormt, om lijnen of banden, welke tot verschillende „dragers” behooren van elkander te onderscheiden.

### C. Argon.

De spectrale eigenschappen van dit gas wijken sterk van die der voorgaande elementen af. Zooals bekend is onderscheidt men bij Argon een rood en een blauw spectrum. De representanten van het roode en het blauwe spectrum gedragen zich totaal verschillend, tegenover de toegevoerde energie, gelijk duidelijk uit nevenstaande graphische voorstelling volgt (fig. 3)<sup>1)</sup>.

Graphische voorstelling van het verband tusschen licht-intensiteit en stroomsterkte voor het roode en het blauwe argon spectrum.

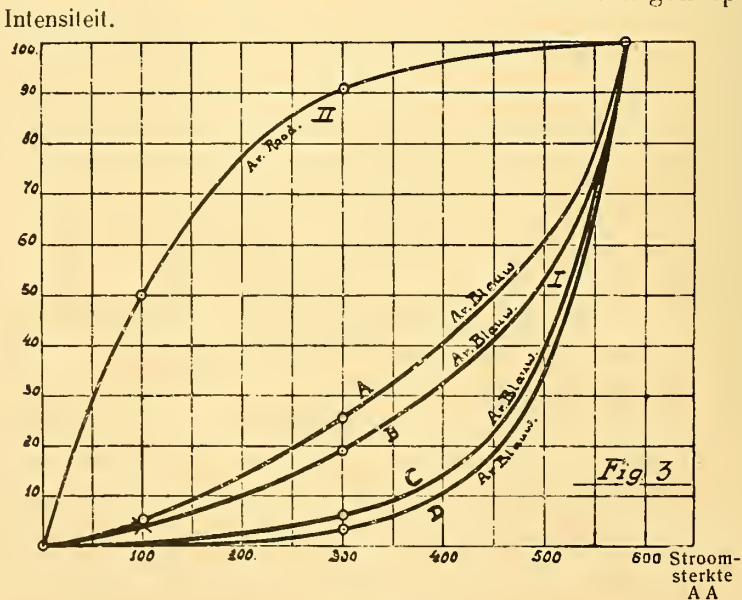


Fig. 3.

<sup>1)</sup> Deze figuur vormt een fraaie bevestiging van de visueele waarnemingen van P. G. NUTTING en O. TUGMAN (Bull. Bur. of Stand 7, 62 (1911)).

Ook bij wijziging van andere variabelen vindt men dit verschil in gedrag terug.

### § 3. *Metingen aan binaire mengsels.*

Bij de waarnemingen aan mengsels van gassen treedt een duidelijk verschil aan den dag tusschen die gasmengsels, waarvan de componenten *niet* met elkander kunnen reageeren en die, waarbij wederzijdsche inwerking *wel* mogelijk is.

#### A. *Mengsels van gassen, die niet met elkander reageeren.*

Onderzoekingen werden verricht aan de binaire stelsels Argon-Stikstof, Neon-Stikstof, Argon-Waterstof, Neon-Helium en Argon-Kwik.

Terwijl visueele metingen, door vroegere onderzoekers verricht, de meening hadden ingang doen vinden, dat bij gasmengsels het spectrale gedrag in geen deele de som is van dat der componenten, werd het door het voorliggende onderzoek wenschelijk, die opvatting eenigszins te wijzigen. Stellen wij echter voorop, dat in de zienswijze, welke uit de bedoelde, niet objectieve onderzoekingen voortvloeide, zeker een grond van waarheid is gelegen, vooral daar, waar de ionisatie-spanningen der componenten in hooge mate verschillen<sup>1)</sup> resp. sterk electronegatieve gassen optreden. In het laatste geval doen zich echter vaak complicaties, door het optreden van chemische werkingen voor.

Onze onderzoekingen hebben geleerd, dat men zich bij de opvatting, dat van gasmengsels het spectraal gedrag in geen deele de som is van dat der componenten, voor overdrijving moet hoeden. De menging van gassen heeft, bij bepaalden totaaldruk, een lagere (partiaal) druk der componenten ten gevolge. En als algemeen verschijnsel blijkt te gelden, dat bij druk-verlaging de licht-emissie naar het ultra-violet verschuift. M. a. w. bij menging van gassen zal het vooral bij visueele waarnemingen *lijken*, of het spectrum van een der beide gassen in hooge mate verdwijnt vooral wanneer de intensiteiten der emissie der componenten zeer verschillen.

#### B. *Mengsels van gassen, die met elkander kunnen reageeren.*

Hier werden de stelsels stikstof-zuurstof, stikstof-waterstof, en stikstof-kooloxyde nagegaan. In elk dezer drie gevallen had reactie bij de elektrische ontlading plaats. Steeds bleek deze chemische werking ook in het spectrum door het optreden van nieuwe banden

<sup>1)</sup> Vergel. J. FRANCK en G. HERTZ, Verh. d. D. phys. Ges. 18, 213 (1916).

tot uiting te komen. Daar dit voor het stelsel  $N_2-H_2$  nimmer in een spectraalbuis scherp vastgesteld was<sup>1)</sup>, hadden hierover nadere onderzoekingen plaats, welke tevens steun gaven aan de opvatting, dat aan de „electrische ammoniak-synthese” de splitsing van de reageerende moleculen in atomen voorafgaat. Voorts bleken condities aan te geven te zijn, waarbij het ammoniak-rendement per KWh. vele malen grooter is dan vroeger ooit gevonden werd.

Opnamen van ontladingen door stroomend ammoniak-gas bevestigden het spectrale deel van het onderzoek van dit stelsel.

Voor een nadere discussie der verkregen resultaten in aansluiting aan de welbekende theoretische beschouwingen van J. FRANCK en G. HERTZ en J. STARK moeten wij den lezer naar ons proefschrift verwijzen. Schrijver dezes hoopt echter later nog op enkele punten, zoowel op fotografisch als spectraal gebied terug te komen.

Het is den schrijver een groot genoegen, ook op deze plaats zijn warmen dank uit te kunnen spreken jegens Dr. G. L. F. PHILIPS, w. i., die hem tot dit onderzoek in staat heeft gesteld, alsook van zijn groote erkentelijkheid blijkt te geven jegens Prof. Dr. W. REINDERS en Prof. Dr. L. H. SIERTSEMA voor de belangstelling en steun, welke zij hem wel hebben willen verleenen bij de bewerking van het proefschrift, waaraan deze korte mededeeling ontleend is.

*Eindhoven, Laboratoria der N. V.  
Philips' Gloeilampenfabrieken.*

---

<sup>1)</sup> Wel werd reeds in 1891 door J. M. EDER melding gemaakt van het optreden van nieuwe banden in de buurt van  $\lambda = 3359 \overset{\circ}{\text{Å}}$ . E. bij het spectrum van de ammoniak-zuurstofvlam. (Anzeiger der k. Ak. d. Wiss. Wien 1891. Zie ook Denkschr. d. kais. Ak. d. Wiss. Wien 60 5 (1893).

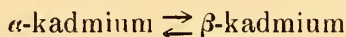
---

**Scheikunde.** — De Heer ERNST COHEN biedt eene mededeeling aan:  
„*De Allotropie van Kadmium.*” VI.

1. In eene verhandeling, enkele maanden geleden verschenen<sup>1)</sup>, beschrijft FREDERICK H. GETMAN de onderzoekingen over de allotropie van kadmium, die hij heeft uitgevoerd in aansluiting aan de studies, door mij in samenwerking met Dr. HELDERMAN over dit onderwerp gepubliceerd.

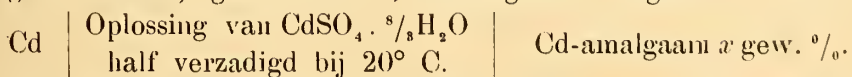
In de vóóronderstellingen zoowel als in de gevolgtrekkingen van GETMAN zijn nu eenige belangrijke vergissingen ingeslopen. Worden die uit den weg geruimd, dan blijkt, dat de door hem verkregen resultaten geheel met die van ERNST COHEN en HELDERMAN overeenstemmen, zoodat ten slotte GETMAN's metingen een zeer gewenschte controle en bevestiging van het vroeger door ons vastgestelde feitenmateriaal vormen.

2. Nadat wij langs dilatometrischen weg hadden gevonden, dat er (op zijn minst) drie verschillende modifikaties van kadmium kunnen optreden, aan welke de namen  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$ -kadmium werden gegeven, hebben wij tevens vastgesteld, dat de overgangstemperatuur der omzetting



bij ongeveer 60° C. ligt. Tengevolge van het optreden van den  $\gamma$ -vorm kan die temperatuur (voorloopig althans) langs dilatometrischen weg niet scherp worden vastgelegd.

3. Evenals wij, heeft GETMAN in de eerste plaats een aantal cellen (volgens HULETT) gekonstrueerd, samengesteld volgens het schema:



Tervijl  $x$  bij onze elementen meestal 12.5 bedroeg, koos GETMAN daarvoor de waarde 8.

De kadmiumpool werd verkregen door mit een oplossing van kadmiumsulfaat een zeker aantal milligrammen kadmium op een platinaspiraal langs elektrolytischen weg neer te slaan.

Laat men die cellen bij 20° aan zichzelf over, dan bereiken zij

<sup>1)</sup> Journal of the Americ. chem. Soc. 39, 1806 (1917).

na zekeren tijd een konstante potentiaal. Evenals wij, vond GETMAN, dat er aldus drie soorten cellen ontstaan, die (bij gegeven temperatuur) in E.K. van elkaar verschillen. Van den geheelen voorraad van GETMAN vertoonen:

10%	bij	25°	een	E.K.	van	rond	50	millivolt	( $\gamma$ -cellen	volgens	C.	en	H.)
70%	„	„	„	„	„	„	48	„	( $\beta$ -	„	„	„	„
20%	„	„	„	„	„	„	47	„	( $\alpha$ -	„	„	„	„

4. Nader onderzoek van de temperatuurkrommen dezer verschillende soorten cellen tusschen 0° en 40° C. leverde GETMAN de volgende temperatuurformules:

Voor de  $\alpha$ -cellen:

$$E_{\alpha} = 0.04742 - 0.000200 (t-25) \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

d. i. geheel dezelfde uitdrukking, als COHEN en HELDERMAN daarvoor hadden gevonden <sup>1)</sup>.

Voor de  $\beta$ -cellen:

$$E_{\beta} = 0.04862 - 0.000201 (t-25) \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

(deze cellen waren door COHEN en HELDERMAN niet nader onderzocht in deze richting), en eindelijk voor de  $\gamma$ -cellen, wederom in overeenstemming met hetgeen HULETT zoowel als COHEN en HELDERMAN hadden gevonden <sup>2)</sup>,

$$E_{\gamma} = 0.05047 - 0.0002437 (t-25) \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

5. Omtrent het gedrag zijner elementen boven 40° C. deelt GETMAN het volgende mede, dat ik, om elk misverstand buiten te sluiten, in zijn eigen woorden weergeef:

„On raising the temperature of the cells above 40°, the temperature coefficients were found to undergo a reversal of sign. The values of the e. m. f. given by the different cells when maintained for a short time at a temperature above 40° were found to be quite divergent. On prolonged standing at this temperature, however, the divergence in e. m. f. was found to disappear and final equilibrium values agreeing within the limits of experimental error were obtained.

It was found that stabilization between 40° and 80° could be brought about more quickly by maintaining the cells at a temperature of 95° for several days. From the data obtained with five cells which had been stabilized in this manner an interpolation formula

$$E = 0.04280 + 0.000170 (t-25) \quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

<sup>1)</sup> Deze Verslagen 23, 1015 (1915).

<sup>2)</sup> Deze Verslagen 23, 1015 (1915).

was derived<sup>1)</sup> by the method of least squares. On applying this formula to the data obtained with other cells, satisfactory agreement between the observed and calculated values of e.m.f. was secured".

Terwijl dus, naar hij zegt, de cellen, die *Cd-α* als negatieve pool bevatten, beneden 40° C. de temperatuur-formule *A* volgen, volgen zij formule *D*, wanneer zij gedurende eenigen tijd op 95° C. zijn gehouden.

6. Nadat GETMAN er terecht op heeft gewezen, dat de discontinuïteit in den temperatuurcoëfficiënt der E. K. niet kan worden toegeschreven aan eenige plotselinge verandering in de eigenschappen der half verzadigde oplossing van het kadmiumsulfaat, zegt hij:<sup>2)</sup>

„That the discontinuity cannot be ascribed to any change in the amalgam has been proven by the investigations of BIJL, in which the e. m. f. of a cell formed by connecting an 8% cadmium amalgam with a standard electrode was found to decrease regularly as the temperature was raised from 25° to 75°.”

Hij schrijft daarom de waargenomen diskontinuiteit van den temperatuurcoëfficiënt der E. K. toe aan het optreden van een overgang van *Cd-α* in een andere modifikatie. De overgangstemperatuur *t* zelve berekent hij door gelijkstelling der waarden van  $E_z$  en  $E$  in de vergelijkingen (*A*) en (*D*), dus:

$$0.04742 - 0.000200(t - 25) = 0.04280 + 0.000170(t - 25),$$

waaruit volgt

$$t = 37°.49.$$

M. a. w.: Terwijl COHEN en HELDERMAN gevonden hadden, dat *Cd-α* bij ongeveer 60° C. in een anderen vorm (*Cd-β*) overgaat, geeft GETMAN voor die temperatuur 37°.49.

7. Allereerst worde thans gewezen op de vergissing in het (door mij) gekursiveerde deel van GETMAN's betoog. Juist het tegendeel van hetgeen daarin wordt vermeld, is door BIJL<sup>3)</sup> quantitatief bewezen. Men beschouwe slechts dat gedeelte van het door dezen gegeven diagram, (hier in fig. 1 afgedrukt), dat het gedrag van het 8 gew. proc. kadmiumamalgaam beschrijft, hetwelk door GETMAN in zijne cellen werd gebruikt. Dit amalgaam bevat 13.4 atoomprocenten kadmium en uit de figuur zien wij, dat het bij 40° C. overgaat van het *heterogene* gebied naar het *homogeen vloeibare*. Elementen met onveranderlijke, negatieve pool, die beneden 40° C. het *heterogene* S

<sup>1)</sup> Journal of the Amer. Chem. Soc. 39, noot op pag. 1811 (1917).

<sup>2)</sup> Kursivering van mij (COHEN).

<sup>3)</sup> Zeitschr. f. physik. Chemie 41, 641 (1902)

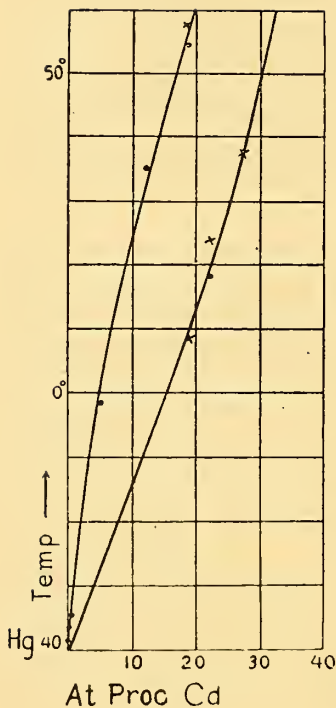


Fig. 1.

$\beta$ -kadmium daarin was ontstaan door  $\alpha$ - (of  $\gamma$ -)kadmium gedurende eenige dagen bij  $95^\circ$  C. in aanraking te laten met eene kadmium-sulfaatoplossing.

Deze cellen volgen boven  $40^\circ$  C., naar GETMAN's metingen, de temperatuurformule *D*.

Terwijl nu de beneden  $40^\circ$  C. onderzochte elementen het *heterogene* amalgaam tot positieve pool hebben, bevatten die, welke boven  $40^\circ$  C. zijn bestudeerd, hetzelfde amalgaam in *homogeen vloeibare* phase.

De temperatuur, bij welke die twee soorten cellen dezelfde E. K. krijgen, is nu niets anders dan de temperatuur, bij welke de heterogene phase homogeen vloeibaar wordt. Indien de elektrische metingen van GETMAN juist zijn, moet het snijpunt  $S_2$  (zie Fig. 2) der krommen *B* en *D* bij de door BUIJ gevonden temperatuur ( $40^\circ$  C.) liggen.

Uit GETMAN's vergelijking :

$$0.04862 - 0.000201(t - 25) = 0.04280 + 0.000170(t - 25)$$

<sup>1)</sup> Zie ook ERNST COHEN en H. R. KRUYT, *Zeitschr. f. physik. Chemie* **72**, 84 (1910).

gew. proc. amalgaam bevatten, zullen dus bij die temperatuur eene plotselinge verandering van hunnen temperatuurcoëfficiënt moeten vertoonen<sup>1)</sup>. Dit is door GETMAN over het hoofd gezien en aanstonds zal dan ook blijken, dat de betekenis der door hem gevonden temperatuur  $37^\circ.49$  C. een geheel andere is, dan de overgangstemperatuur van Cd- $\alpha$  in Cd- $\beta$ .

8. Om dit aan te toonen, worde er allereerst op gewezen, dat GETMAN  $\beta$ -cellen tusschen  $0^\circ$  en  $35^\circ$  C. heeft onderzocht, welker  $\beta$ -kadmium was ontstaan door het galvanisch neergeslagen kadmium in de cel van HULETT bij  $20^\circ$  C. aan zich zelf over te laten. Die  $\beta$ -cellen volgen volgens GETMAN's metingen (zie boven § 4) tusschen  $0^\circ$  en  $35^\circ$  C. de temperatuurformule *B*. Boven  $40^\circ$  C. zijn dergelijke cellen eveneens door GETMAN onderzocht, maar het

$\beta$ -kadmium daarin was ontstaan door  $\alpha$ - (of  $\gamma$ -)kadmium gedurende eenige dagen bij  $95^\circ$  C. in aanraking te laten met eene kadmium-sulfaatoplossing.

Deze cellen volgen boven  $40^\circ$  C., naar GETMAN's metingen, de temperatuurformule *D*.

Terwijl nu de beneden  $40^\circ$  C. onderzochte elementen het *heterogene* amalgaam tot positieve pool hebben, bevatten die, welke boven  $40^\circ$  C. zijn bestudeerd, hetzelfde amalgaam in *homogeen vloeibare* phase.

De temperatuur, bij welke die twee soorten cellen dezelfde E. K. krijgen, is nu niets anders dan de temperatuur, bij welke de heterogene phase homogeen vloeibaar wordt. Indien de elektrische metingen van GETMAN juist zijn, moet het snijpunt  $S_2$  (zie Fig. 2) der krommen *B* en *D* bij de door BUIJ gevonden temperatuur ( $40^\circ$  C.) liggen.

Uit GETMAN's vergelijking :

$$0.04862 - 0.000201(t - 25) = 0.04280 + 0.000170(t - 25)$$

<sup>1)</sup> Zie ook ERNST COHEN en H. R. KRUYT, *Zeitschr. f. physik. Chemie* **72**, 84 (1910).



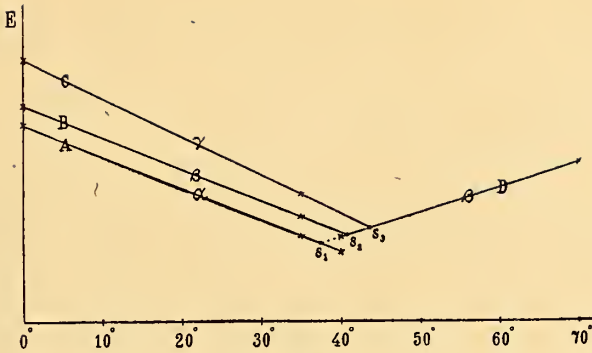


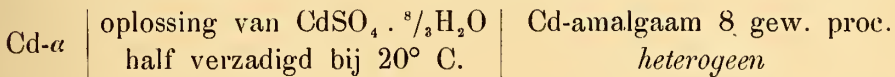
Fig. 2.

vindt men, in goede overeenstemming met de resultaten van BIJL'S onderzoek

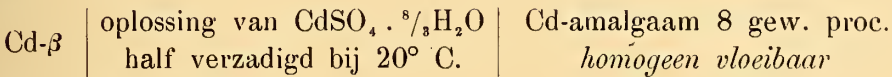
$$t = 40^{\circ}.7.$$

9. Welke is nu de beteekenis der door GETMAN gevonden temperatuur  $37^{\circ}.49$  C., die hij als de overgangstemperatuur der omzetting  $\text{Cd-}\alpha \rightleftharpoons \text{Cd-}\beta$  beschouwt?

Zij is de temperatuur, bij welke de lijnen *A* en *D* elkaar snijden, d.w.z. de temperatuur, bij welke de cellen:



en



dezelfde E.K. hebben.

Die temperatuur moet lager liggen dan die, bij welke het heterogene amalgaam homogeen vloeibaar wordt ( $40^{\circ}.7$  C.). Inderdaad ligt zij volgens GETMAN'S metingen, zooals ook uit de figuur blijkt, ruim drie graden lager. Met het overgangspunt van  $\text{Cd-}\alpha$  in  $\text{Cd-}\beta$  correspondeert zij natuurlijk geenszins,

Dit is evenmin het geval met het snijpunt  $S_3$  der lijnen *C* en *D*, dat bij hooger temperatuur dan  $40^{\circ}.7$  C. moet liggen en inderdaad volgens GETMAN'S metingen ook  $\pm 3$  graden hooger ligt, nl. bij  $43^{\circ}.5$  C.

10. Nadat GETMAN als temperatuur van het snijpunt der lijnen *A* en *D*  $37^{\circ}.49$  C. heeft gevonden, waaraan hij, zooals zoeven is aangetoond, ten onrechte de beteekenis van het gezochte overgangspunt van  $\alpha$ - in  $\beta$ -kadmium toekent, brengt hij een bezwaar te berde, dat der door COHEN en HELDERMAN gevolgde dilatometrische methode zou aankleven. Hij merkt op: „It must be borne in mind, however,

that in each of these dilatometric measurements never less than 300 g. of cadmium were used, and it is a well established fact that when so large a mass of metal undergoes molecular transformation the true transition temperature may be far removed from that at which the transformation actually takes place." <sup>1)</sup>

Ook hier is bij GETMAN wederom eene vergissing in het spel. Ceteris paribus wordt bij dilatometrisch onderzoek volgens de door ons toegepaste methode de nauwkeurigheid grooter, naarmate de hoeveelheid gebruikt materiaal grooter is, daar de waargenomen verandering van den stand der meetvloeistof bij konstante temperatuur met die hoeveelheid toeneemt. Buitendien bewijst het feit, dat bij 0°,5 temperatuurverandering de richting, in welke de vloeistofkolom zich beweegt, van teeken wisselt [zie Tabel I en II in de tweede mededeeling, deze Verslagen **22**, 1294 (1914)], dat vertraging in de omzetting (na vóórbehandeling met eene elektrolytoplossing, gelijk die steeds aan de dilatometerbepalingen voorafging) niet plaats heeft. Noch mijne eigen ervaring op dit gebied, noch die van anderen, in de literatuur vermeld, strookt dan ook met de uiting van GETMAN, welke ik boven heb gekursiveerd.

11. Wij moeten thans de aandacht vestigen op een ander gedeelte van GETMAN's mededeeling. Ook de proeven van COHEN en HELDERMAN, die ten doel hadden de realiteit van het bestaan der  $\beta$ -modifikatie nog eens op andere wijze aan te toonen, zijn door hem herhaald.

Nopens onze proeven hebben wij indertijd <sup>2)</sup> gezegd:

Onderzoekt men de E.K. der  $\alpha$ -cellen en  $\beta$ -cellen bij een temperatuur *boven* het overgangspunt  $\text{Cd-}\alpha \rightleftharpoons \text{Cd-}\beta$ , dan moet bij zulk eene temperatuur de E.K. der  $\alpha$ -cellen, die beneden de overgangstemperatuur *kleiner* was dan die der  $\beta$ -cellen, nu *grooter* dan die der  $\beta$ -cellen geworden zijn. Bij afkoeling beneden de overgangstemperatuur moet het omgekeerde verschijnsel intreden.

Deze proeven werden toen als volgt uitgevoerd: Wij formeerden op de vroeger beschreven wijze <sup>3)</sup> een groot aantal elementen volgens HULETT. De E.K. van een dier cellen, welke oorspronkelijk bij 25°.0 C. 0.050 Volt bedroeg, was, nadat zij gedurende 4 weken op 47°.5 C. was gehouden, op 0.047 Volt gedaald en bleef daarna konstant. Deze cel (N°. 7) werd met eene (N°. 22), die bij 25°.0 C. eene E.K.

<sup>1)</sup> Kursivering van mij (COHEN).

<sup>2)</sup> Deze Verslagen **23**, 542 (1914).

<sup>3)</sup> Deze Verslagen **23**, 60 (1914).

van 0.048 Volt aanwees, op de volgende wijze in onderzoek genomen (zie fig. 3).

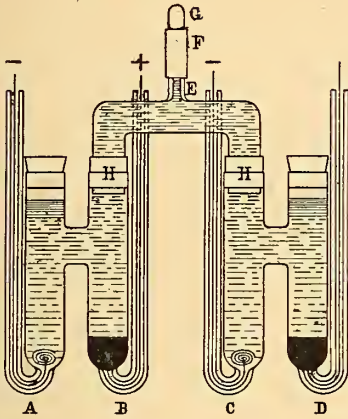


Fig. 3.

De beide elementjes  $AB$  (N<sup>o</sup>. 7) en  $CD$  (N<sup>o</sup>. 22) werden verbonden door een hevel  $H$ , die *dezelfde* kadmiumsulfaatoplossing bevatte, als in de elementen aanwezig was. Het zijbuisje  $E$  van den hevel werd afgesloten met behulp van een gummi-buisje  $F$ , waarin zich een glazen stangetje  $G$  bevond; het geheel werd in een thermostaat gebracht, die naar willekeur op  $25^{\circ}.0$  of  $64^{\circ}.5$  C. kon worden gehouden.

Gemeten werd de E.K. tusschen het kadmium, dat zich op de platinaspiralen  $A$  resp.  $C$  bevond en de *gemeenschappelijke* amalgaamelektrode  $B$ . Het meten tegen een *gemeenschappelijke* elektrode is noodzakelijk, omdat het gebruikte kadmiumamalgaam van 12.5 gew. % bij  $64^{\circ}.5$  C. een heterogeen systeem niet meer vormt en dus zijne E.K. van liet kadmiumgehalte afhankelijk is. Zoude men de *beide* amalgaampolen  $B$  en  $D$  bij die temperatuur ter meting gebruiken, dan zou zulks tot grove fouten aanleiding kunnen geven. Immers, de potentiaal dier elektroden tegen de kadmiumsulfaatoplossing, welke potentiaal voor beide elektroden bij  $25^{\circ}.0$  C. *dezelfde* is (want dan vormen die elektroden een *heterogeen* systeem, welks E.K. *onafhankelijk* is van zijne samenstelling), kan een geheel verschillende zijn, indien er slechts een gering verschil in samenstelling tusschen de amalgaamelektroden bestaat. De *absolute* E.K. der amalgaamelektrode tegen het kadmium in  $A$  en  $C$  speelt dus bij onze verdere metingen niet meer een rol.

Aldus werd gevonden :

	E.K. bij $25^{\circ}.0$	E.K. bij $64^{\circ}.5$	E.K. bij $25^{\circ}.0$
Cel 7	0.04741	0.04029	0.04741
Cel 22	0.04815	0.03979	0.04806

Bij herhaling met de cellen :

Cel 8	0.04757	0.04737	0.04776
Cel 4	0.04839	0.04633	0.04789.

Bij herhaling dezer proeven heeft nu GETMAN *hetzelfde* resultaat gevonden, nl. dat er poolwissel intreedt, wanneer men de beschre-

ven cellen <sup>1)</sup> bij 25°.0 en 64°.5 C. onderzoekt. Dit blijkt uit de volgende metingen, door GETMAN uitgevoerd :

	E.K. bij 25°.0	E.K. bij 64°.5	E.K. bij 25°.0
Cel B-1	0.04729	0.04734	0.04772
Cel A-1	0.04823	0.04652	0.04822

Naar aanleiding van de resultaten, bij deze proeven verkregen, zegt GETMAN: „It will be observed that at 64°.5, the e.m.f. of cells 7, 8 and B-1 was greater than that of cells 22, 4 and A-1, whereas at 25°, the e.m.f. of the latter group of cells was greater than that of the former. From this inversion of poles COHEN concluded that an actual transformation of Cd<sub>2</sub> into Cd<sub>β</sub> occurs in the neighborhood of 60°”. Hier is wederom eene vergissing bij GETMAN ingeslopen.

Uit den hier gevonden poolwissel mag natuurlijk geenszins tot een overgangspunt in de nabijheid van 60° C. worden besloten: daarvoor is het aantal temperaturen, bij welke de E.K. tusschen 0° en 64°.5 C. is bepaald, niet voldoende. Wel is door ons op grond der beschreven metingen besloten, dat de waarde der E.K. onzer β-cellen, 48 millivolt bij 25° C., realiteit bezit en (in verband met onze pyknometrische en dilatometrische bepalingen) aan de aanwezigheid van β-kadmium moet worden toegeschreven <sup>2)</sup>.

12. Op de woorden „from this inversion of poles COHEN concluded that an actual transformation of Cd<sub>2</sub> into Cd<sub>β</sub> occurs in the neighborhood of 60°”, in § 11 vermeld, doet GETMAN volgen:

„The author's data for cells A-1 and B-1 appears to confirm this conclusion, but when the e.m.f. of these cells was determined at close intervals of temperature from 0° to 70° no evidence of a transition temperature in the vicinity of 60° was obtained. On the other hand, distinct discontinuities in the e.m.f.-temperature curves were obtained at 39° with A-1 and at 36°.8 with B-1. Since the agreement between COHEN's cells and the author's at 25° and 64°.5 is satisfactory, it is highly probable that equally close agreement would have been obtained at other temperatures and that had COHEN measured his cells over a wider range of temperatures and

<sup>1)</sup> Dat GETMAN met cellen heeft gewerkt, die een 8 gew. % amalgaam bevatten, terwijl de elementen, die wij voor deze proeven hebben gebruikt, een 12.5 gew. % amalgaam als positieve pool hadden, doet hier niet ter zake, daar beide amalgamen bij 25° heterogeen, bij 64°.5 C. homogeen vloeibaar zijn.

<sup>2)</sup> Deze Verslagen 23, 545 (1914).

plotted the values of e.m.f. against the temperatures he would have obtained no evidence of a transition point at  $60^\circ$ ."

Ook hier is bij GETMAN een vergissing in het spel.

Immers, zoowel de proeven van COHEN en HELDERMAN als die van GETMAN, welke in § 11 zijn beschreven, zijn uitgevoerd in de onderstelling, en de resultaten der metingen bewijzen de juistheid daarvan, dat  $Cd_\alpha$ , zooals het zich in de elementen bevindt, boven zijn overgangstemperatuur kan worden verhit, zonder in  $Cd_\beta$  over te gaan, ja, die proeven zouden niet kunnen zijn genomen, indien er niet een sterke vertraging hadde plaats gevonden. Dat GETMAN dus bij een onderzoek zijner B-1 cel (die  $Cd_\alpha$  bevatte) een overgangspunt bij  $60^\circ$  niet zou vinden, ligt voor de hand. En de A-1 cel, die bij alle temperaturen tusschen  $0^\circ$  en  $70^\circ$  C.  $\beta$ -kadmium bevatte, kon dus ook een diskontinuiteit in den temperatuurcoëfficiënt der E.K. bij  $60^\circ$  C. niet vertoonen.

13. Ten slotte moet ik nog op eene vergissing wijzen, die bij GETMAN heeft plaats gehad, waar hij de vraag behandelt, of tusschen  $0^\circ$  en  $100^\circ$  C. *méer* dan twee vormen van kadmium bestaan.

COHEN en HELDERMAN hadden uit de vergelijking A en C, die zij (evenals GETMAN) voor hunne  $\alpha$ - resp.  $\gamma$ -cellen hadden gevonden, afgeleid, dat het *metastabiele* overgangspunt tusschen  $\alpha$ -kadmium en  $\gamma$ -kadmium bij  $94^\circ.8$  C. ligt. Al weten wij nu, dat het overgangspunt  $\alpha$ -kadmium  $\rightleftharpoons$   $\beta$ -kadmium tusschen  $0^\circ$  en  $100^\circ$  C. ligt, dan mogen wij toch niet besluiten, dat er tusschen die temperaturen meer dan twee *stabiele* modificaties kunnen optreden. Wij hebben dan ook gezien, dat de  $\gamma$ -vorm in het bedoelde gebied steeds *metastabiel* is en GETMAN, die dien vorm in zijne  $\gamma$ -cellen in handen heeft gehad, toen hij de E.K. dier elementen onderzocht, is het daarmede blijkbaar geheel eens. Maar daarmede verliezen zijne woorden: „the results of the present investigation, however, seem to render the existence of more than two allotropic modifications of cadmium between  $0^\circ$  and  $100^\circ$  extremely doubtful” geheel hunne beteekenis. Er *kunnen* drie vormen tusschen  $0^\circ$  en  $100^\circ$  C. optreden, maar één daarvan (de  $\gamma$ -vorm) is in dit temperatuurinterval *steeds* metastabiel.

## S A M E N V A T T I N G.

1. Aangetoond werd, dat in de vóóronderstellingen, die GETMAN in zijne studie over de allotropie van kadmium heeft gemaakt, een aantal vergissingen zijn ingeslopen, die de gevolgtrekkingen, welke

hij uit zijne overigens nauwkeurige elektrische metingen afleidt, onjuist doen zijn.

2. Worden die vergissingen uit den weg geruimd, dan blijkt, dat de door hem verkregen resultaten geheel met die van COHEN en HELDERMAN overeenstemmen, zoodat zij ten slotte een zeer gewenschte controle op die onderzoekingen vormen.

Utrecht, December 1917.

VAN 'T HOFF-Laboratorium.

**Scheikunde.** — De Heer ERNST COHEN biedt, mede namens den Heer H. R. KRUYT, eene mededeeling aan: „*Het warmte-effekt bij de vorming van mengkristallen*”.

(Zal in het volgende Zittings-verslag worden opgenomen).

**Scheikunde.** — De Heer v. ROMBURGH biedt een mededeeling aan van den Heer G. DE BRUIN, Chem. Docts.: „*Over de vervangbaarheid, in amidén, van een gealkyleerde anilino-groep door de anilino-groep door verhitting met zoutzuuraniline*”. (Voorloopige mededeeling.)

(Mede aangeboden door den Heer COHEN.)

Voor de bereiding van eenige andere ureumderivaten, waarover ik te zijner tijd hoop te berichten, moest ik beschikken over een hoeveelheid methylcarbanilide,  $(\text{CH}_3)(\text{C}_6\text{H}_5)\text{N} \cdot \text{CO} \cdot \text{NH} \cdot \text{C}_6\text{H}_5$ . GEBHARDT <sup>1)</sup> verkreeg deze verbinding het eerst uit methylaniline en phenylisocyaanaat. Waar wij echter reeds beschikten over een hoeveelheid methylphenylcarbaminezuurchloride,  $(\text{CH}_3)(\text{C}_6\text{H}_5)\text{N} \cdot \text{CO} \cdot \text{Cl}$ , werd getracht hiermede de gewenschte stof te bereiden. Daartoe werd één grammolecuul van het chloride opgelost in aether en daaraan toegevoegd 2 grammoleculen aniline. Bij verwarming aan een omgekeerden koeler sloeg reeds dadelijk zoutzuuraniline neer. Daar dit neerslag een heftig stooten der vloeistof veroorzaakte, bleek het gewenscht een weinig water toe te voegen, waarin het zoutzuuraniline oplost. Om de reactie ten einde toe te doen verlopen was het noodig ongeveer 30 uur te koken. Na scheiding der twee lagen, werd de aether afgedampt en de verkregen kristal massa in een mortier afgewreven met verdund zoutzuur om de resten aniline te verwijderen. Na eenmaal omkristalliseeren uit alcohol werd een zuiver product van Smpt.  $104^\circ \text{C}$ . verkregen in nagenoeg theoretische opbrengst.

Waar deze reactie zoo gemakkelijk verliep, werd getracht hetzelfde resultaat spoediger te bereiken door verhitting van aniline met het chloride zonder verdunning met aether en bij hooger temperatuur. Twee moleculen aniline werden met één molecuul methylphenylcarbaminezuurchloride op een zandbad gesmolten en verhit tot  $\pm 190^\circ$ . Er ontweken veel zoutzuurdampen en de vloeistof riekte sterk naar methylaniline. Na twee uur verwarmen werd de massa in koud water uitgegoten en daarna zoutzuur toegevoegd tot de vloeistof zuur reageerde. De kristallen werden afgezogen en tweemaal omgekristalliseerd uit alcohol. Het product smolt bij  $236^\circ \text{C}$ . en was

<sup>1)</sup> B. B. 17. 2093 (1884).

dus niet het methylcarbanilide. Een volledige analyse gaf als resultaat :

$$C = 73.21 \% \quad H = 5.62 \% \quad N = 13.11 \%$$

Deze cijfers komen vrijwel overeen met de berekende voor het s. diphenylureum, dat bij 235° smelt.

$$C = 73.58 \% \quad H = 5.66 \% \quad N = 13.21 \%$$

Een smeltpuntsbepaling van een mengsel van de verkregen stof met het symm. diphenylureum gaf geen verlaging, zoodat vastgesteld was, dat hier werkelijk deze laatste verbinding was ontstaan. Als tusschenproduct zal bij deze reactie waarschijnlijk het methylcarbanilide gevormd zijn, dat daarna met het eveneens gevormde zoutzuuraniline het diphenylureum heeft doen ontstaan onder afsplitsing van methylaniline. Daarom werd nagegaan of bij verhitting van het methylcarbanilide met zoutzuuraniline het symm. diphenylureum gevormd werd. Dit bleek ook werkelijk het geval te zijn. Het ontstane product werd als zoodanig geïdentificeerd.

Nu heeft GEBHARDT<sup>1)</sup>, die bij arylthiourea analoge omzettingen vond, reeds aangetoond, dat het methylcarbanilide bij distillatie uiteenvalt in methylaniline en phenylisocyanaat.

Men zou dus kunnen aannemen, dat in dit geval primair phenylisocyanaat gevormd zou zijn en deze stof zich daarna verbonden heeft met het aniline tot diphenylureum. Tegen deze opvatting pleit echter, dat methylphenylthiourem, hetwelk met aniline gekookt, eveneens diphenylthiourem vormt<sup>2)</sup>, reeds door verhitten met alcoholische ammoniak op 100° phenylthiourem en methylaniline geeft. Trouwens de omzetting door mij vermeld herinnert aan het door v. ROMBURGH<sup>3)</sup> en Mej. WENSINK beschreven verdringen van de dimethylamino-rest door NH<sub>3</sub> of NHCH<sub>3</sub> in 2.4 dinitro 1.3 phenyleendiamine-derivaten met behulp van ammoniak of methylamine, waarbij eene splitsing van het oorspronkelijke product wel is uitgesloten.

Enkele andere voorbeelden van deze reactie werden nog onderzocht.

Dimethylcarbanilide CO [N(CH<sub>3</sub>)(C<sub>6</sub>H<sub>5</sub>)<sub>2</sub>], bereid volgens MICHLER<sup>4)</sup>, verhit met 2 moleculen zoutzuuraniline deed wederom symm. diphenylureum ontstaan.

Diaethylcarbanilide CO [N(C<sub>2</sub>H<sub>5</sub>)(C<sub>6</sub>H<sub>5</sub>)<sub>2</sub>], bereid volgens MICHLER<sup>5)</sup>

<sup>1)</sup> B. B. 17. 3036. (1884).

<sup>2)</sup> loc. cit. pag. 3034.

<sup>3)</sup> Deze Verslagen XXIII, 966 (1914). In het org. chem. Lab. te Utrecht zijn met aliphatische aminen meer analoge gevallen aangetoond, welke systematisch zullen worden onderzocht.

<sup>4)</sup> B. B. 12 1166 (1879).

<sup>5)</sup> B. B. 9. 712 (1876).



verhit met 2 moleculen zoutzuuraniline gaf hetzelfde reactieproduct.

Dat de omzetting zich echter niet beperkt tot ureum-derivaten bewijst het volgende geval.

Dimethyloxanilide  $C_2O_2[N(CH_3)(C_6H_5)]_2$  werd verhit met zoutzuuraniline. Op dezelfde wijze als boven behandeld ontstond een product, dat bij  $245^\circ C$ . smolt. Dit smeltpunt komt overeen met dat van het oxanilide  $C_2O_2(NH.C_6H_5)_2$ . De stof gaf met deze laatste verbinding geen smeltpuntsverlaging, zoodat we hier wederom een geval hebben dat de groep  $—CO.N(CH_3)(C_6H_5)$  vervangen is door de groep  $—CO.NH.C_6H_5$ .

De onderzoekingen in deze richting worden met andere aromatische aminen voortgezet.

*Ouderkerk a/d Amstel, December 1917.*

**Natuurkunde.** — De Heer KUENEN biedt een mededeeling aan van MEVROUW T. EHRENFEST—AFANASSJEWА over: "*De bepaaldheid van makroskopische processen en de kinetische theorie*".<sup>1)</sup>

(Mede aangeboden door den Heer JULIUS).

§ 1. Nemen wij aan, dat eene bepaalde hoeveelheid gas een stelsel is, dat een zeer groot maar eindig aantal  $N$  molekulen bevat, die aan bepaalde konservatieve bewegingswetten gehoorzamen. Dan is het geheele verloop der toestanden van het stelsel voor alle tijden volkomen bepaald door  $6 N$  „mikroskopische koördinaten”, b.v. de  $3 N$  ruimtekoördinaten en de  $3 N$  snelheidskomponenten van alle molekulen op een bepaald maar willekeurig gekozen tijdstip  $t_0$ .

Deze waarden zijn echter niet voor directe waarneming vatbaar. Veeleer neemt men steeds slechts zekere statistische gemiddelden waar van deze grootheden: de „makroskopische koördinaten”, die op een bepaald tijdstip veel te weinig bepalende grootheden opleveren, zoodat men uit hun samenstel niet in het minst de mikroskopische koördinaten kan vaststellen.

Ofschoon dus de mikroskopische toestand van het gas op één tijdstip volkomen het verloop bepaalt der mikro- en tegelijkertijd der makroskopische toestanden, kan de makroskopische toestand op één tijdstip *niet* het verloop bepalen van den mikroskopischen toestand, en daardoor evenmin van den makroskopischen toestand.

Zoo komt men tot deze slotsom: hoewel de kinetische gastheorie in den grond volkomen bepaaldheid van de processen in een gas insluit, leert zij ons tevens dat men practisch niets van deze bepaaldheid te weten komt en dat men tegenover het verloop der makroskopische toestanden van een gas staat als tegenover eene loterij: na een bepaalden gegeven toestand kan men alle mogelijke verschillende toestanden verwachten en men heeft slechts zekere waarschijnlijkheidsoverwegingen tot zijne beschikking om zijne verwachtingen eenigermate te beperken.

Hetzelfde geldt, wanneer men de kinetische opvattingen wil uitbreiden over de geheele wereld.

Toch gedraagt practisch echter elk natuurkundige zich — bij het

<sup>1)</sup> De hier gegeven beschouwingen vonden hunne aanleiding in gesprekken met de Heeren Prof. PH. KOHNSTAMM en Prof. J. D. VAN DER WAALS JR. in aansluiting aan hunne publicaties.



Men behoeft, principieel, dus geen mikroskopische koördinaten te kunnen meten en behoeft ook den vorm der vergelijkingen  $A$  niet te bepalen, doch alleen de vergelijkingen  $B$ , die enkel makroskopische veranderlijken en makroskopische oogenblikkelijke waarden bevatten.

De vergelijkingen, die men in de natuurkunde heeft op te stellen, kunnen dan als eliminatieresultaten der vergelijkingen  $B$  beschouwd worden, of *juister* als *benaderingen* daarvan.

§ 3. Is dus in principe de tegenspraak tusschen de kinetisch-mikroskopische en de physisch-makroskopische opvatting daardoor uit den weg geruimd, dat men alle waarnemingen, noodig voor de volledige bepaling der makroskopische processen in het makroskopische overgebracht heeft, dan is men daardoor nog niet zeker dat de tot nog toe in de natuurkunde uitgewerkte natuurwetten niet aan dezelfde tegenwerpingen blootstaan als vóór onze beschouwing het geval was.

Inderdaad: men heeft toch niet bij benadering zoovele waarnemingen gedaan, als het aantal molekulen, waaruit de wereld bestaat, eischt.

Het moge mij veroorloofd zijn, op deze tegenwerping met eene analogie te antwoorden. Laat ons een stuk van eene algebraïsche kromme van buitengewoon hoogen graad geteekend zijn met de vraag een zekere eindige verlenging der kromme ongeveer te bepalen. Ware het ons mogelijk voor een voldoende aantal punten van het stuk der kromme de koördinaten te bepalen, dan waren wij in staat zelfs het geheele verdere verloop der kromme aan te geven. Dit zij echter — wegens den te hoogen graad der kromme — praktisch uitgesloten; wij moeten ons met een veel kleiner aantal precies bepaalde koördinaten tevreden stellen. Moeten wij het dan geheel opgeven het probleem op te lossen? Nu, ten eerste zullen ook die relatief weinig talrijke punten er toe dienen om de menigvuldigheid der mogelijke krommen waaronder wij moeten zoeken eenigermate te beperken. Maar wij komen nog veel verder als wij gebruik maken van datgene, wat wij aan het geheele geteekende stuk *zien*: dat levert ons eene massa *kwalitatieve* gegevens, die ons helpen om een veel grooter aantal krommen *uit te sluiten* dan door de precies bepaalde punten kon gebeuren, en dit kan het ons mogelijk maken eene heel goede extrapolatie der kromme — tenminste voor een zeker eindig stuk — aan te geven.

Het zou mogelijk zijn, dat op dezelfde wijze ook bij het opstellen der natuurkundige wetten de beteekenis der *kwalitatieve* waarnemingen niet onderschat moet worden. Misschien zal, als men deze gedachte

verder volgt, de dagelijksche bevestiging der „intuïtief” opgestelde natuurkundige wetten niet meer als een verbluffend toeval naast de kinetische grondslagen lijken.

§ 4. Nog een tegenwerping moet in acht genomen worden: wat over de extrapolatie der kromme is gezegd kan misstchien heel goed voor eene niet zeer slingerende kromme gelden. Het verliest zijne kracht geheel als wij met eene zigzagkromme te doen hebben. En de kinetische opvatting veronderstelt juist in het algemeen zulk een zigzag verloop der verschillende makroskopische grootheden — dit verloop wordt immers steeds vergeleken met een, dat tengevolge van een *loterijtrekking* zou zijn verkregen.

Door deze tegenwerping wordt een trek der kinetische theorie op den voorgrond gebracht, welke niet tot hare grondslagen behoort, maar veeleer tot de wanhopige hulpmiddelen bij de berekeningen. De grondslagen leeren ons, dat het verloop der processen volgens mechanische wetten plaats heeft. Om eenige uitkomsten daarvan te kunnen berekenen wordt echter verondersteld, dat eenige elementen der berekening door zekere, aan de waarschijnlijkheidsrekening ontleende formules kunnen worden vervangen. Welke formules dat moeten zijn dringt zich in verschillende gevallen door de verschillende intuïtieve beelden aan ons op. En er kan dadelijk bij gevoegd worden dat deze formules even gelijkmatige natuurwetten geven als de langs anderen weg gewonnen natuurwetten zijn — zoodat de *praktische* kinetische theorie tot nu toe geen afwijkingen vertoont van de overige natuurkunde.

Nu wordt echter bij *theoretische* besprekingen de toepasselijkheid der waarschijnlijkheidstheorie zoo uitgebreid, dat men verlangt, dat de verschijnselen alles zullen opleveren wat gebeuren zou als de waarden der bovengenoemde  $6N$  mikroskopische grootheden op elk oogenblik door een ideale loterij bepaald waren.

Nu kan men dadelijk voorbeelden aanhalen, die onvereinigbaar zijn met dezen eisch.

Een gesloten vat zij door een tusschenschot in tweeën verdeeld. De eene helft moge een gas bevatten in de verdelingstoestand van MAXWELL, de andere helft zij leeg. Op een bepaald oogenblik make men een redelijk groote opening in het tusschenschot. Dan is het *uitgesloten*, dat de tweede helft in den daaropvolgenden tijd voortdurend leeg blijft.

Het is ook uitgesloten, dat de daarin binnengedrongen molekulen op een willekeurig, *door de loterij* bepaald tijdstip weer alle door de opening zijn teruggekropen: de *mechanische* wetten verlangen,

dat er een door de snelheden dezer molekulen en de richtingen daarvan en door den vorm en de grootte van de ruimte bepaalde benedenste grens bestaat voor den tijd, gedurende welke zij tot aan de wanden van het vat zijn voortgegaan en tot aan de opening teruggekeerd zijn.

Onze intuïtie dringt ons nog veel verder gaande uitspraken op over de verdere verdeeling van het gas over de beide helften van het vat. Aan den anderen kant heeft echter geen mensch uitgerekend in hoeverre het mechanisch mogelijk is, dat b.v. op een gelijkmatige verdeeling, die volgens de bovengenoemde aanvangsvoorwaarden moge zijn ingetreden, zulk een plotselinge omkeering der snelheden kan plaats grijpen, dat het gas zich spoedig daarna in een bepaalden hoek van het vat heeft verzameld — een geval, waarin onze fantasie zich niet goed vermag in te denken.

Zoolang dergelijke vragen onopgelost blijven, kan ook niet beslist worden, of de laatstgenoemde tegenwerping onze beschouwingwijze al of niet kan omverwerpen.

§ 5. Mocht ons standpunt voor doorvoering vatbaar blijken, dan zouden de tegenwoordig aangenomen natuurwetten in elk geval slechts benaderingen blijken, die in den loop der tijd hunne plaats zouden moeten inruimen voor andere wetten — die wederom slechts voor beperkten tijdsduur goede benaderingen zouden blijken te zijn: dit verlangt de stelling van POINCARÉ, volgens welke het verloop van mechanische processen bij een eindig stelsel kwasi-periodiek moet zijn.

---

**Natuurkunde.** — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer G. NORDSTRÖM: „*lets over de massa van een stoffelijk stelsel volgens de gravitatietheorie van EINSTEIN.*”

(Mede aangeboden door den Heer H. KAMERLINGH ONNES.)

§ 1. In dit opstel wil ik eenige formules afleiden voor de massa van een stoffelijk stelsel op grond van de gravitatietheorie van EINSTEIN. Deze formules hebben hoofdzakelijk ten doel om de massa uit te drukken ten eerste door een ruimte-integraal over het stoffelijk stelsel en ten tweede door een oppervlakintegraal, over een oppervlak, dat het stelsel omsluit.

Vooreerst wil ik in deze § de algemeene formules aangeven, welke verderop aangewend worden. Ik zal mij hoofdzakelijk steunen op het artikel van EINSTEIN: „Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie”<sup>1)</sup> (verder aangehaald als: EINSTEIN, Hamiltonsches Prinzip). Ook zal ik stellingen aanhalen uit zijn artikel: „Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie”<sup>2)</sup> (verder genoemd als EINSTEIN, Grundlage.)

In het eerstgenoemde artikel wijst EINSTEIN erop, dat de formules in zijn gravitatietheorie kunnen worden afgeleid uit een variatie-principe van dezen vorm:

$$\sigma \iiint (\mathfrak{G}^* + \kappa \mathfrak{M}) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 0, \dots \dots (1)$$

waarin het eerste deel  $\mathfrak{G}^*$  van de integrand betrekking heeft op het zwaartekrachtsveld en het tweede deel  $\kappa \mathfrak{M}$  op de materie (inclusief het elektromagnetische veld).  $\kappa$  is de gravitatieconstante, die in het artikel van EINSTEIN 1 gesteld is.  $\mathfrak{G}^*$  is een functie van  $g^{\mu\nu}$  en

$$g_{\alpha}^{\mu\nu} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}}.$$

$\mathfrak{M}$  is een functie van  $g^{\mu\nu}$  en van verschillende veranderlijken, die den toestand der materie bepalen.

Voor de componenten  $\mathfrak{Z}_{\sigma}^{\nu}$  van de spanningsenergietensor voor de materie geldt de volgende uitdrukking (formule (19) EINSTEIN, Hamiltonsches Princip):

<sup>1)</sup> A. EINSTEIN, Berl. Ber. 1916, p. 1111.

<sup>2)</sup> A. EINSTEIN, Ann. d. Phys. 49, p. 769, 1916.

$$\mathfrak{E}_\sigma^\nu = - \sum_\mu \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu} . . . . . (2)$$

Volgens zijn gedrag bij transformaties is  $\mathfrak{E}$  een gemengde volumetensor,  $\mathfrak{M}$  een volumeskalaar.  $\mathfrak{G}^*$  is geen volumeskalaar, maar deze grootheid is gevormd uit de volumeskalaar  $-\sqrt{-g} G$  (waarin  $G$  de totale kromming van het vierdimensionale continuüm is) doordat de tweede afgeleiden  $\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$  worden weggewerkt door partieele integratie. Men heeft <sup>1)</sup>

$$-\mathfrak{G}^* = \sqrt{-g} G - \sum_\tau \frac{\partial \mathfrak{U}_\tau}{\partial x_\tau} , . . . . . (3)$$

waarin  $\mathfrak{U}$  een viertallige vektor is, in die beteekenis, welke de speciale relativiteitstheorie van EINSTEIN-MINKOWSKI daaraan hecht.  $\mathfrak{U}$  is dus kovariant voor LORENTZ transformaties. Het teeken voor  $\mathfrak{G}^*$  en voor  $\mathfrak{M}$  is zoo gekozen dat uitdrukking (2) de energiedichtheid van de materie met het goede teeken geeft. Voor  $-\mathfrak{G}^*$  en  $\mathfrak{U}_\tau$  gelden de uitdrukkingen:

$$\left. \begin{aligned} -\mathfrak{G}^* &= \sqrt{-g} \sum_{\substack{\alpha\beta\mu \\ \nu\sigma\tau}} g^{\mu\nu} g^{\sigma\alpha} g^{\tau\beta} \left( \begin{bmatrix} \mu\tau \\ \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu\sigma \\ \beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma\tau \\ \beta \end{bmatrix} \right) - \\ &- \sum_{\mu\nu\sigma\tau} g^{\sigma\nu} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\tau} (\sqrt{-g} g^{\mu\tau}) - \sum_{\mu\nu\sigma\tau} g^{\sigma\tau} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\tau} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}), \end{aligned} \right\} . (4)$$

$$\mathfrak{U}_\tau = \sqrt{-g} \sum_{\mu\nu\sigma} (g^{\mu\tau} g^{\nu\sigma} - g^{\sigma\tau} g^{\mu\nu}) \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{bmatrix} , . . . . . (5)$$

waarin de symbolen van CHRISTOFFEL gebruikt zijn:

$$\begin{bmatrix} \alpha\beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} \right) . . . . . (6)$$

Daar men deze betrekkingen heeft: <sup>2)</sup>

$$\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} , . . . . . (7)$$

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} = - \sum_{\sigma\tau} g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} \frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x_\alpha} , . . . . . (8)$$

<sup>1)</sup> Op grond van vergelijking (3) en daar aan de grenzen van het integratiegebied alle variaties gelijk nul genomen worden, is het variatieprincipe (1) hetzelfde als het in de volgende vergelijking aangegeven variatieprincipe:

$$\delta \iiint \iiint (-\sqrt{-g} \cdot G + \kappa \mathfrak{M}) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 0 , . . . (1a)$$

waarvan EINSTEIN oorspronkelijk uitgaat.

<sup>2)</sup> EINSTEIN, Grundlage, vergg. (29) en (32).



vindt men dat  $\mathfrak{G}^*$  een homogene kwadratische funktie van de grootheden  $g_{\alpha^{\mu\nu}}$  is, zoodat men heeft:

$$\sum_{\mu\nu\alpha} \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_{\alpha^{\mu\nu}}} = 2 \mathfrak{G}^* \dots \dots \dots (9)$$

De door EINSTEIN ingevoerde spanningsenergie-komponenten van het zwaartekrachtsveld  $t_{\sigma^{\nu}}$  hangen samen met  $\mathfrak{G}^*$  op grond van betrekking <sup>1)</sup>

$$\kappa t_{\sigma^{\nu}} = \frac{1}{2} \left( \mathfrak{G}^* \delta_{\sigma^{\nu}} - \sum_{\mu\tau} \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_{\nu^{\mu\tau}}} g_{\sigma^{\mu\tau}} \right), \dots \dots \dots (10)$$

waarin  $\delta_{\sigma^{\nu}} = 1$ ,  $\delta_{\sigma^{\nu}} = 0$  voor  $\sigma \neq \nu$ . Voor de diagonaalsom vindt men op grond van (9)

$$\kappa \sum_{\nu} t_{\sigma^{\nu}} = \mathfrak{G}^* \dots \dots \dots (11)$$

Voor de diagonaalsom voor de materiele spanningsenergie-tensor geldt weer <sup>2)</sup>

$$\kappa \sum_{\nu} \xi_{\nu^{\nu}} = \sqrt{-g} G \dots \dots \dots (12)$$

Door optelling krijgt men met inachtneming van (3)

$$\kappa \sum_{\nu} (\xi_{\nu^{\nu}} + t_{\sigma^{\nu}}) = \sum_{\tau} \frac{\partial \mathfrak{A}_{\tau}}{\partial x_{\tau}} \dots \dots \dots (13)$$

Eene vergelijking van volkomen denzelfden vorm krijgt men uit de volgende formule van EINSTEIN <sup>3)</sup>

$$\kappa (\xi_{\sigma^{\nu}} + t_{\sigma^{\nu}}) = - \sum_{\mu\tau} \frac{\partial}{\partial x_{\tau}} \left( \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_{\tau^{\mu\sigma}}} g^{\mu\nu} \right) \dots \dots \dots (14)$$

Men vindt dus, dat de viertallige vektor  $\mathfrak{A}$  en de viertallige vektor, waarvan de componenten zijn  $-\sum_{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_{\tau^{\mu\nu}}} g^{\mu\nu}$  dezelfde divergentie hebben; de benamingen „viertallige vektor” en „divergentie” moeten hier opgevat worden in die beteekenis, welke zij in de speciale relativiteits-theorie hebben. Uit eene schriftelijke mededeeling van EINSTEIN ervoer ik dat hij heeft aangetoond, dat deze beide vektoren inderdaad identiek hetzelfde zijn, tenminste in geval men het koördinaten-systeem zoo kiest, dat  $\sqrt{-g} = 1$ .

Nu zijn al de algemeene formules aangehaald, welke voor het volgende noodig zijn. Wij merken nog op, dat er nog niets is gezegd omtrent de eenheden, waarin de grootheden zijn uitgedrukt.

<sup>1)</sup> EINSTEIN, Hamiltonsches Prinzip, verg. (20).  
<sup>2)</sup> Zie bijv. J. DROSTE, Het zwaartekrachtsveld van een of meer lichamen volgens de theorie van EINSTEIN (Diss. Leiden 1916) p. 8 en 12.  
<sup>3)</sup> EINSTEIN, Hamiltonsches Prinzip, verg. (18).

Om de spanning en energiedichtheid in de gewenschte eenheden nitgedrukt te krijgen kan het daarom noodig zijn om in de uitdrukkingen (2) en (10) een van het maatstelsel afhankelijken konstanten factor toe te voegen (vgl. volgende § verg. (15)).

## § 2. *Energie van een stationair stelsel.*

Wij zullen nu een stoffelijk stelsel van eindige uitgebreidheid beschouwen, en wel een zoodanig, dat er (tenminste) *één* *koördinatenstelsel bestaat waarin het zwaartekrachtsveld stationair is.* Wij vragen ons allereerst af wat men verstaat onder de massa van het stelsel. Daar het stoffelijk stelsel een eindige uitgebreidheid heeft, geldt blijkbaar dat, hoe verder men zich van het stelsel verwijderd, met des te grooter nauwkeurigheid men het zwaartekrachtsveld ervan mag beschouwen als veroorzaakt door een stoffelijk punt, waarvan de massa een bepaalde beteekenis heeft. Het meest juiste is wel om de massa van het stelsel te definiëren op grond van de eigenschappen van het verwekte gravitatieveld in ver verwijderde punten. Volgens de relativiteitstheorie is intusschen de massa van het stelsel gelijk aan zijn totale energie bij rust gedeeld door het kwadraat van de universeele konstante  $c$ , die de snelheid van het licht in natuurlijke maat aangeeft. Als wij ons op grond van onze aanname bedienen van een koördinatenstelsel, waarin het zwaartekrachtsveld stationair is, vindt men dat de energie bij rust wordt aangegeven door deze integraal:

$$\iiint (\mathfrak{t}_4^4 + \mathfrak{t}_4^4) dx_1 dx_2 dx_3$$

uitgestrekt over de heele driedimensionale ruimte. Een universeel konstante factor kan er bij komen, opdat wij de energie uitgedrukt zullen krijgen in de gewenschte eenheid (vgl. slot van § 1). Wij zien gemakkelijk in hoe het hiermede staat. Allereerst kiezen wij de tijdkoordinaat zoo, dat  $g_{44}$  in het oneindige de waarde  $c^2$  krijgt. De waarde van de universeele konstante  $c$  is natuurlijk op hare beurt afhankelijk van het maatstelsel, dat ook zoo vastgesteld kan worden dat  $c = 1$ . Verder merken wij op, dat met eene verandering van de eenheid der tijdkoordinaat de getalwaarde van  $\sqrt{-g}$  tegelijk met alle  $\mathfrak{t}_\mu^\nu$  veranderen evenredig met de getalwaarde van  $c$ . Terwijl de energie de dimensies  $M L^2 T^{-6}$  heeft, zien wij nu gemakkelijk in, dat aan onze integraaluitdrukking de factor  $c$  toegevoegd moet worden, opdat deze onafhankelijk van de keuze der tijdeenheid de energie zal kunnen aangeven in de overeenkomstige eenheid. Wij hebben dus voor de energie bij rust  $E$ :

$$E = c \iiint (\xi_4^4 + t_4^4) dx_1 dx_2 dx_3, \dots \dots \dots (15)$$

geïntegreerd over de geheele driedimensionale ruimte.

Die uitdrukking geeft de totale energie bij rust voor een bepaald stoffelijk stelsel, als dit het eenige is dat voorkomt binnen het integratiegebied. Deelen wij door  $c^2$  dan krijgen wij de massa van het stelsel, en wij zullen in § 4 vinden, dat deze massa overeenkomt met die, welke men verkrijgt, door het zwaartekrachtsveld te beschouwen in ver verwijderde punten.

De integraal in (15) moest, zooals reeds gezegd is, uitgestrekt worden over de geheele oneindige ruimte. Het is echter wenschelijk de massa van een stoffelijk stelsel uit te drukken door een integraal die zich alleen uitstrekt over het stoffelijk stelsel zelf, en wij zullen nu aantonen, hoe dat kan gebeuren. Volgens eene stelling van VON LAUE heeft men voor de energie  $E$  ook deze uitdrukking:

$$E = c \iiint \sum_{\nu} (\xi_{\nu}^{\nu} + t_{\nu}^{\nu}) dx_1 dx_2 dx_3, \dots \dots \dots (16)$$

geïntegreerd over de geheele driedimensionale ruimte. Deze vergelijking trekken wij af van de met 2 verminderde vergelijking (15). Daar in een stationair veld  $g_4^{\mu\tau} = 0$ , heeft men op grond van (10) en (11)

$$\kappa t_4^4 = \frac{1}{2} \mathfrak{G}^* = \frac{1}{2} \kappa \sum_{\nu} t_{\nu}^{\nu}, \dots \dots \dots (17)$$

en wij krijgen

$$E = c \iiint (\xi_4^4 - \xi_1^1 - \xi_2^2 - \xi_3^3) dx_1 dx_2 dx_3 \dots \dots \dots (18)$$

Daar de integrand nul is in elk punt buiten het stoffelijk stelsel, behoeft de integratie hier alleen uitgestrekt te worden over het stoffelijk stelsel zelf.

Door middel van formule (18) hebben wij de massa van een stoffelijk systeem uitgedrukt door een ruimte-integraal uitgestrekt over het stoffelijke stelsel. Deze ruimte-integraal kunnen wij weer veranderen in een oppervlakintegraal uitgestrekt over een oppervlak, dat het stoffelijk stelsel omsluit. Dat zien wij op de volgende wijze in.

Formule (14) toont aan, dat  $\kappa(\xi_4^4 + t_4^4)$  kan worden uitgedrukt als de divergentie van een driedimensionale kvasivector  $\mathfrak{B}$ :

$$\kappa(\xi_4^4 + t_4^4) = \sum_{\tau} \frac{\partial \mathfrak{B}_{\tau}}{\partial x_{\tau}}, \dots \dots \dots (19)$$

waarin

$$\mathfrak{B}_{\tau} = - \sum_{\mu} \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_{\tau}^{\mu 4}} g^{\mu 4}, \dots \dots \dots (19a)$$

Als men vergelijking (19) met 2 vermenigvuldigt, hiervan (13) aftrekt en ook rekening houdt met (17), krijgt men

$$\alpha (\mathfrak{E}_4^4 - \mathfrak{E}_1^4 - \mathfrak{E}_2^4 - \mathfrak{E}_3^4) = \sum_{\tau} \frac{\partial}{\partial x_{\tau}} (2 \mathfrak{E}_{\tau} - \mathfrak{H}_{\tau}) = \sum_{\tau} \frac{\partial \mathfrak{E}_{\tau}}{\partial x_{\tau}}. \quad (20)$$

Op grond hiervan krijgt men uit vergelijking (18), als men de wet van GAUSS toepast,

$$E = \frac{c}{\alpha} \int \mathfrak{E}_n df, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

geïntegreerd over een oppervlak  $f$ , dat het stoffelijk stelsel omsluit. Bijgevolg is ook de massa van het stelsel uitgedrukt door een oppervlakintegraal over een oppervlak dat het stelsel omsluit. Jammer genoeg is de kwasivektor  $\mathfrak{E}$ , welks normaalkomponent  $\mathfrak{E}_n$  in de integraaluitdrukking voorkomt, niet kovariant, zelfs niet tegenover LORENTZ-transformaties.

### § 3. Toepassing op een veld met bolsymmetrie.

Bij de beschouwing van een stelsel met bolsymmetrie zullen wij hoofdzakelijk dezelfde notatie invoeren als J. DROSTE in zijn werk: „Het zwaartekrachtsveld van een of meer lichamen volgens de theorie van EINSTEIN” (verderop aangehaald als: DROSTE, Het zwaartekrachtsveld) hoofdstuk II § 1. In tegenstelling met DROSTE zullen wij intusschen ook het veld binnen een stoffelijk lichaam beschouwen. Wanneer wij als ruimtekördinaten de poolkördinaten  $r, \vartheta, \varphi$  invoeren, kunnen wij in elk geval voor het lijnelement  $ds$  dezelfde uitdrukking schrijven als DROSTE, namelijk:

$$ds^2 = w^2 dt^2 - u^2 dr^2 - v^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad . \quad . \quad (22)$$

waarin  $u v w$  alleen funkties van  $r$  zijn. Hierbij is de tijdkördinaat  $x_4 = t$  zoo gekozen dat overal

$$g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0,$$

wat altijd mogelijk is in een stationair stelsel met bolsymmetrie.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Op grond van de bolsymmetrie moeten  $g_{34}$  en  $g_{r4}$  nul zijn. Daarentegen kan het kördinatenstelsel zoo gekozen zijn dat  $g_{r4}$  niet nul is. Dan heeft men

$$ds^2 = w^2 dt^2 + 2g_{r4} dt dr - u^2 dr^2 - v^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (22a)$$

Als men echter de tijdkördinaat als volgt transformeert maar  $r$  onveranderd laat:

$$dt = d\bar{t} + \psi(r) dr,$$

dan krijgt men

$$ds^2 = w^2 d\bar{t}^2 + 2(g_{r4} + \psi w^2) d\bar{t} dr - (u^2 - \psi^2 w^2 - 2\psi g_{r4}) dr^2 - v^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

Bepaalt men nu de funktie  $\psi(r)$  zoodat

$$g_{r4} + \psi w^2 = 0,$$

dan is in het nieuwe kördinatenstelsel  $g_{r4} = 0$ .

Wij zullen nu in plaats van de poolcoördinaten  $r, \vartheta, \varphi$  als ruimtecoördinaten de daaraan beantwoordende rechthoekige coördinaten invoeren :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r \cos \vartheta \cos \varphi, \\ x_2 &= r \cos \vartheta \sin \varphi, \\ x_3 &= r \sin \vartheta, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

terwijl wij dezelfde tijdcoördinaat  $x_4 = t$  houden als DROSTE. Wij hebben dan voor de componenten van de fundamenteele tensor, als wij nog stellen

$$v = r p, \dots \dots \dots (24)$$

de volgende uitdrukkingen :

$$\left. \begin{aligned} g_{\mu\nu} &= -\frac{x_\mu x_\nu}{r^2} (u^2 - p^2) \quad \text{voor } \mu \neq \nu, \\ g_{\mu\mu} &= -p^2 - \frac{x_\mu^2}{r^2} (u^2 - p^2), \quad g_{\mu 4} = 0, \quad g_{44} = w^2, \end{aligned} \right\} \dots \dots (25)$$

waarin  $\mu, \nu = 1, 2, 3$ .

Voor de componenten van den kontravarianten fundamenteelen tensor hebben wij

$$\left. \begin{aligned} g^{\mu\nu} &= -\frac{x_\mu x_\nu}{r^2} \left( \frac{1}{u^2} - \frac{1}{p^2} \right) \quad \text{voor } \mu \neq \nu, \\ g^{\mu\mu} &= -\frac{1}{p^2} - \frac{x_\mu^2}{r^2} \left( \frac{1}{u^2} - \frac{1}{p^2} \right), \quad g^{\mu 4} = 0 \quad g^{44} = \frac{1}{w^2}. \end{aligned} \right\} \dots \dots (26)$$

Daar wij ook het veld binnen in de materie beschouwen, komt nu ook de materiele spanningsenergietensor  $\mathfrak{E}_\mu^\nu$  in onze formules voor. Op grond van de bolsymmetrie kunnen wij voor de componenten hiervan schrijven :

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_\mu^\nu &= \frac{x_\mu x_\nu}{r^2} (\mathfrak{E}_{r^r} - \mathfrak{E}_p^p) \quad \text{voor } \mu \neq \nu, \\ \mathfrak{E}_\mu^\mu &= \mathfrak{E}_p^p + \frac{x_\mu^2}{r^2} (\mathfrak{E}_{r^r} - \mathfrak{E}_p^p), \quad \mathfrak{E}_\mu^4 = \mathfrak{E}_4^\mu = 0, \\ \mu, \nu &= 1, 2, 3. \end{aligned} \right\} \dots \dots (27)$$

Dat hier  $\mathfrak{E}_\mu^4 = \mathfrak{E}_4^\mu = 0$  berust daarop, dat wij aannemen dat de energie van het stelsel konstant blijft. Dan kan geen radiale energiestroom optreden.

Wij zullen nu formules voor het zwaartekrachtsveld afleiden mit het variatieprincipe van den vorm (1a) (zie de noot op p. 1094). Wij kiezen dezen vorm voor het variatieprincipe ten einde eene betere aansluiting met het werk van DROSTE te verkrijgen.

Als wij de integratiegrenzen geschikt kiezen, luidt vergelijking (1a) als volgt:

$$4 \pi \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{r_1}^{r_2} (-\sqrt{-g} G + \kappa \mathfrak{M}) r^2 dr = 0$$

of, als wij deelen door  $4 \pi (t_2 - t_1)$ ,

$$\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{-g} G r^2 dr = \kappa \int_{r_1}^{r_2} \mathfrak{M} r^2 dr \dots \dots \dots (28)$$

De linker integraal, die immers met  $4 \pi$  vermenigvuldigd de ruimte-integraal  $\int \sqrt{-g} G dV$  over een holle bolvormige ruimte  $V$  oplevert, is door DROSTE berekend. Hij gebruikt weliswaar pool-coördinaten, maar daar de integraal met  $4 \pi (t_2 - t_1)$  vermenigvuldigd een skalaar geeft, is het resultaat onafhankelijk van de keuze der ruimteteoördinaten. DROSTE krijgt in het begin voor  $G$ , die immers eveneens een skalaar is, (zie DROSTE, Het zwaartekrachtsveld p. 16)

$$G = \frac{2}{v^2} - \frac{2v'^2}{u^2v^2} - \frac{4v'w'}{u^2vw} - \frac{4v''}{u^2v} + \frac{4u'v'}{u^3v} - \frac{2w''}{u^2w} + \frac{2u'w'}{u^3w}, \dots (29)$$

waarin  $u' v' w'$  afgeleiden naar  $r$  zijn. Verder vindt DROSTE

$$\int \sqrt{-g} G r^2 dr = 2 \int \left\{ -\frac{d}{dr} \left( \frac{v^2 w' + 2v w v'}{u} \right) + \frac{w v'^2 + 2v v' w'}{u} + u w \right\} dr. \dots (30)$$

Daar aan de grenzen  $r = r_1$  en  $r = r_2$  alle variaties nul worden genomen heeft men

$$\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{-g} G r^2 dr = 2 \int_{r_1}^{r_2} \left\{ \frac{w v'^2 + 2v v' w'}{u} + u w \right\} dr. \dots (31)$$

Deze uitdrukking hebben wij nu voor het linkerlid van vergelijking (28). Wij moeten nu het rechterlid van laatstgenoemde vergelijking beschouwen en wij zullen allereerst bewijzen dat men de volgende betrekkingen heeft -

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\nu}} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial u} &= \frac{2}{u} \mathfrak{E}_r^r, \\ \sum_{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\nu}} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial v} &= \frac{4}{v} \mathfrak{E}_\mu^\mu, \\ \sum_{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\nu}} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial w} &= \frac{2}{w} \mathfrak{E}_4^4, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (32)$$

waarin  $\mathfrak{z}_{,r}$  en  $\mathfrak{z}_{,p}$  met de tensor  $\mathfrak{z}$  samenhangen op de wijze, die de vergelijkingen (27) aangeven. Om de juistheid van de vergelijkingen (32) aan te toonen merken wij ten eerste op dat dank zij de bolsymmetrie zoowel het linker- als het rechterlid alleen van  $r$  afhangt. Toonen wij aan dat de vergelijkingen geldig zijn voor een willekeurig punt op de  $X_1$ -as ( $x_1 = r$ ,  $x_2 = x_3 = 0$ ) dan gelden de vergelijkingen algemeen.

Voor punten op de  $X_1$ -as heeft men wegens (26) en (27)

$$g^{11} = -\frac{1}{u^2}, \quad g^{22} = g^{33} = -\frac{1}{v^2} = -\frac{r^2}{v^2}, \quad g^{44} = \frac{1}{w^2}, \quad (33)$$

$$\mathfrak{z}_1^1 = \mathfrak{z}_{,r}, \quad \mathfrak{z}_2^2 = \mathfrak{z}_3^3 = \mathfrak{z}_{,p} \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Alle grootheden  $g^{\mu\nu}$  en  $\mathfrak{z}_{,\nu}$ , waarvoor  $\mu \neq \nu$ , zijn gelijk nul.

Wij hebben bijgevolg voor punten op de  $X_1$ -as

$$\frac{\partial g^{11}}{\partial u} = \frac{2}{u^3}, \quad \frac{\partial g^{22}}{\partial v} = \frac{\partial g^{33}}{\partial v} = \frac{2r^2}{v^3}, \quad \frac{\partial g^{44}}{\partial w} = -\frac{2}{w^3}; \quad (35)$$

de overige afgeleiden van  $g^{\mu\nu}$  naar  $u, v, w$  zijn nul. Op grond der formules (33) geeft (2) ons

$$\mathfrak{z}_1^1 = -\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{11}} g^{11} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{11}} \frac{1}{u^2}, \quad \mathfrak{z}_2^2 = -\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{22}} g^{22} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{22}} \frac{r^2}{v^2} (= \mathfrak{z}_{,p}),$$

en verder is op grond van (35)

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\nu}} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial u} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{11}} \frac{2}{u^3}, \quad \sum_{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\nu}} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial v} = \left( \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{22}} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{33}} \right) \frac{2r^2}{v^3}.$$

Al deze vergelijkingen gelden voor punten op de  $X_1$ -as en krachtens deze ziet men dat voor die punten de twee eerste vergelijkingen (32) gelden. De algemeene geldigheid der vergelijkingen volgt uit het vroeger gezegde. Het bewijs voor de derde formule (32) wordt op dezelfde wijze verkregen; dat geldt onmiddellijk voor punten buiten de  $X_1$ -as daar overal  $g^{14} = g^{24} = g^{34} = 0$ .

Op grond van de vergelijkingen (32) kan het rechterlid van (28) in dezen vorm gebracht worden:

$$\kappa \int_{r_1}^{r_2} \mathfrak{M} r^2 dr = 2\kappa \int_{r_1}^{r_2} \left( \mathfrak{z}_{,r} \frac{du}{u} + 2 \mathfrak{z}_{,p} \frac{dv}{v} + \mathfrak{z}_{,4} \frac{dw}{w} \right) r^2 dr. \quad (36)$$

Als wij de uitdrukkingen (31) en (36) voor de beide leden van vergelijking (28) invoeren en door 2 deelen, komt het variatieprincipe voor een veld met bolsymmetrie ten slotte te luiden:

$$\delta \int_{r_1}^{r_2} \left\{ \frac{w v'^2 + v v' w'}{u} + u w \right\} dr = \kappa \int_{r_1}^{r_2} \left( \mathfrak{z}_{,r} \frac{du}{u} + 2 \mathfrak{z}_{,p} \frac{dv}{v} + \mathfrak{z}_{,4} \frac{dw}{w} \right) r^2 dr. \quad (37)$$

Daar de variaties  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  onderling onafhankelijk zijn, en daar  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $v'$ ,  $w'$  aan de grenzen  $r_1$  en  $r_2$  niet gevarieerd worden volgt hieruit (vgl. DROSTE Het zwaartekrachtsveld, vergelijkingen (24), die voor het veld buiten de materie gelden)

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{wv'^2 + 2vv'w'}{u^2} + w = \frac{r^2}{u} \times \mathfrak{E}_{r,r}, \\ & -\frac{wv'' + v'w' + vv''}{u} + (vw' + wv') \frac{u'}{u^2} = \frac{r^2}{v} \times \mathfrak{E}_p^p, \\ & -\frac{2vv'' + v'^2}{u} + u + 2vv' \frac{u'}{u^2} = \frac{r^2}{w} \times \mathfrak{E}_4^4 \end{aligned} \right\} \dots (38)$$

Deze vergelijkingen zijn de grondformules voor een zwaartekrachtsveld met bolsymmetrie. Men kan er gemakkelijk de volgende vergelijking uit afleiden.

$$r^2 \left( \frac{u'}{u} \mathfrak{E}_{r,r} + 2 \frac{v'}{v} \mathfrak{E}_p^p + \frac{w'}{w} \mathfrak{E}_4^4 \right) = \frac{d}{dr} (r^2 \mathfrak{E}_{r,r}), \quad \dots (39)$$

die men ook dadelijk krijgt, door formule (22) van EINSTEIN (Hamiltonsches Prinzip) op ons geval toe te passen. Formule (39) drukt uit, dat het sferisch symmetrische stoffelijke stelsel, als men rekening houdt met de zwaartekracht, in evenwicht is<sup>1)</sup>.

Wij zullen nu een formule afleiden voor de energie en de massa van het stelsel, op grond van vergelijking (18). Wij stellen

$$\Psi = \mathfrak{E}_4^4 - \mathfrak{E}_1^1 - \mathfrak{E}_2^2 - \mathfrak{E}_3^3 = \mathfrak{E}_4^4 - \mathfrak{E}_{r,r} - 2 \mathfrak{E}_p^p \dots (40)$$

en berekenen  $r^2 \times \Psi$ . Als wij voor  $r^2 \times \mathfrak{E}_4^4$ ,  $r^2 \times \mathfrak{E}_{r,r}$ ,  $r^2 \times \mathfrak{E}_p^p$  de uitdrukkingen invoeren, die men krijgt uit (38), vinden wij dat de meeste termen elkaar opheffen en wij krijgen

$$\begin{aligned} r^2 \times \Psi &= 4 \frac{vv'w'}{u} + 2 \frac{v^2 w''}{u} - \frac{2v^2 w' u'}{u^2}, \\ r^2 \times \Psi &= 2 \frac{d}{dr} \left( \frac{v^2 w'}{u} \right) = 2 \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2 p^2 w'}{u} \right) \dots (41) \end{aligned}$$

Buiten het stoffelijk stelsel is  $\Psi = 0$  en men heeft dus voor  $r$  grooter dan de straal van het lichaam  $R$

<sup>1)</sup> Als men stelt

$$u = w = 1, \quad v = r,$$

d. w. z. de zwaartekracht verwaarloost, gaat (39) over in

$$2r \mathfrak{E}_p^p = \frac{d}{dr} (r^2 \mathfrak{E}_{r,r}),$$

welke vergelijking het evenwicht tusschen de ponderomotorische krachten, gegeven door de spanningstensor  $\mathfrak{E}$ , uitdrukt voor het geval er geen zwaartekracht werkt.



$$2r^2 \frac{p^2 w'}{u} = \text{konstant} \quad (r > R) \quad \dots \quad (42)$$

De beteekenis der konstante zullen wij later onderzoeken.

Vergelijking (41) doet een samenhang vermoeden met onze vroegere vergelijking (20) en wij zullen zoo dadelijk ons vermoeden bevestigd vinden.

Als wij het theoretisch denkbaar geval uitsluiten, dat  $\frac{p^2 w'}{u}$  in het middelpunt van het stelsel  $\infty$  is, krijgen wij door integratie van (41) vanaf  $r = 0$  tot een willekeurige bovenste grens  $r$ :

$$\int_0^r r^2 \kappa \Psi dr = 2 r^2 \frac{p^2 w'}{u}.$$

Voor de ruimte-integraal  $\int \kappa \Psi dV$  over een bolvormige ruimte met straal  $r$  krijgen wij

$$4 \pi \kappa \int_0^r r^2 \Psi dr = 4 \pi r^2 \frac{2 p^2 w'}{u}.$$

Formule (20) geeft weer, als men integreert over denzelfden bol en de wet van GAUSS toepast,

$$4 \pi \kappa \int_0^r r^2 \Psi dr = 4 \pi r^2 \mathfrak{E}_r,$$

waarin  $\mathfrak{E}_r$  de radiale buitenwaarts gerichte komponent van den kwasivektor  $\mathfrak{E}$  is. Een loodrecht op den straal gericht komponent van  $\mathfrak{E}$  heeft men op grond van de bolsymmetrie niet. Wij hebben dus

$$\mathfrak{E}_r = \frac{2 p^2 w'}{u} \dots \dots \dots (43)$$

In ons rechthoekig koördinatenstelsel hebben wij als komponent in de richting der  $X_\tau$ -as

$$\mathfrak{E}_\tau = \frac{x_\tau}{r} \frac{2 p^2 w'}{u} \quad \tau = 1, 2, 3 \quad \dots \dots (44)$$

Onze laatste formules, gekombineerd met onze vroegere formule (18) of met (21) geeft ook eene uitdrukking voor de totale energie bij rust en massa van het stelsel. Men krijgt als men  $r$  grooter neemt dan den straal  $R$  van het stoffelijk lichaam

$$\begin{aligned} \kappa E &= 4 \pi \kappa c \int_0^r r^2 \Psi dr = 4 \pi c r^2 \mathfrak{E}_r = 4 \pi c r^2 \frac{2 p^2 w'}{u}, \\ E &= \frac{4 \pi c r^2 2 p^2 w'}{\kappa u} \quad (r > R) \quad . \quad . \quad . \quad (45) \end{aligned}$$

Deze formule drukt de massa van het lichaam uit door middel van het zwaartekrachtsveld buiten het lichaam. Hiermede is meteen de beteekenis der konstante in het rechterlid van verg. (42) voor den dag gebracht.

Onze beschouwingen in deze § veronderstelden dat het veld een zoodanig is, dat er tenminste één koördinatenstelsel bestaat, waarin het veld stationair is en bolsymmetrie heeft; en onze formules gelden voor een dusdanig koördinatenstelsel, dat de oorsprong heeft in het symmetriecentrum van het stoffelijk stelsel en waarvan de tijdkoordinaat zoo gekozen is, dat  $g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0$ . Als er een koördinatenstelsel bestaat, waarin het veld het beschreven karakter draagt, bestaan er intusschen oneindig vele zulke koördinatenstelsels en onze formules gelden voor al deze stelsels. Behalve dat men de richtingen der  $X_1$ -,  $X_2$ -,  $X_3$ -assen op  $\infty$  vele wijzen kan kiezen, is men nog vrij in welke maat men de lengte van den radiusvektor in de ruimte wil meten. Men kan dus, zonder dat de geldigheid onzer formules te niet gaat, overgaan van een koördinatenstelsel  $x_1, x_2, x_3, x_4$  op een ander  $x'_1, x'_2, x'_3, x_4$  met dezelfde tijdkoordinaat  $x_4$ , maar waarvoor

$$\frac{x'_1}{x_1} = \frac{x'_2}{x_2} = \frac{x'_3}{x_3} = \frac{r'}{r},$$

waarin  $r' = \sqrt{x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3}$  eene funktie van  $r$  is (verg. DROSTE, Het zwaartekrachtsveld pag. 16). Bij een zoodanige koördinaten-transformatie veranderen natuurlijk  $u, p, w$ . Als het geldt werkelijk  $u, p, w$  te berekenen (die op grond van (25) alle  $g_{\mu\nu}$  bepalen) moet men daarom eerst het koördinatenstelsel vaststellen. Men kan dat bijvoorbeeld zoo kiezen, dat men overal  $p = 1$  heeft (bij DROSTE beantwoordend aan  $v = r$ ). Kiest men dan nog de tijdseenheid zoo, dat de universeele konstante  $c$  de waarde 1 krijgt (zie p. 1093) dan is het koördinatenstelsel vasigesteld op de richtingen der drie assen in de ruimte na, die bij bolsymmetrie toch geen rol spelen. Voor het aldus vastgestelde speciale koördinatenstelsel heeft men buiten het lichaam (zie DROSTE, Het zwaartekrachtsveld, pag. 18)

$$w^2 = \frac{1}{u^2} = 1 - \frac{\alpha}{r} \quad , \quad p = 1 \quad (r > R), \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

waarin  $\alpha$  eene konstante is.

De juistheid van deze formules kan gemakkelijk nagegaan worden met behulp der formules (38); zij komen ook direkt te voorschijn uit algemeenere formules, die wij in een volgend artikel zullen afleiden. De konstante  $\alpha$  moet natuurlijk samenhangen met de massa van het lichaam. Formule (45) geeft voor dit verband, daar  $c = 1$ ,

$$m = E = \frac{4\pi \alpha}{\kappa} \dots \dots \dots (46a)$$

In dit speciale koördinatenstelsel is, zooals uit de formules (25) volgt, buiten het lichaam<sup>1)</sup>

$$\sqrt{-g} = 1 \dots \dots \dots (46b)$$

Binnen het lichaam behoeft echter deze waarde voor  $\sqrt{-g}$  niet te gelden. Legt men het koördinatenstelsel vast door de voorwaarde dat overal:  $\sqrt{-g} = 1$ , dan is in het algemeen in het lichaam  $p \neq 1$ .

§ 4. *Uitbreiding van het gevonden resultaat.*

Wij hebben in de vorige § de tijdkoördinaat zoo gekozen, dat overal  $g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0$ . Wij zullen nu aantoonen hoe men de formules (41) — (45) algemeener kan maken, zoodat zij ook gelden als deze voorwaarde niet vervuld is. Op grond van de bolsymmetrie kunnen wij schrijven

$$g_{\mu 4} = \frac{x_\mu}{r} g_{r4}, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots \dots \dots (47)$$

waarin  $g_{r4}$  dezelfde beteekenis heeft als in formule (22a) in de noot op p. 1098. Om onze formules uit te breiden voor geval  $g_{r4} \neq 0$  moeten wij blijkbaar den tijdkoördinaat omgekeerd transformeeren als in de noot op p. 1098 is aangegeven. De grootheden, die betrekking hebben op het oorspronkelijke vierdimensionale koördinatenstelsel, waarin  $g_{r4} = 0$ , zullen wij nu aanduiden met letters, met een streep erboven. De uitdrukking van het lijnelement in poolkoördinaten, waarvan wij uitgaan, luidt dan:

$$\overline{ds}^2 = \overline{w}^2 \overline{dt}^2 - \overline{u}^2 \overline{dr}^2 - \overline{p}^2 \overline{r}^2 (d\overline{\vartheta}^2 + \sin^2 \overline{\vartheta} d\overline{\varphi}^2).$$

Wij transformeeren de tijdkoördinaat door bij onveranderde  $\overline{r} = r$ ,  $\overline{\vartheta} = \vartheta$  en  $\overline{\varphi} = \varphi$  te stellen

$$\overline{dt} = dt - \psi(r) dr.$$

Daar  $ds^2$  invariant is, krijgen wij door substitutie

$$ds^2 = \overline{w} dt^2 - 2\psi \overline{w}^2 dt dr - (\overline{u}^2 - \psi^2 \overline{w}^2) dr^2 - \overline{p}^2 \overline{r}^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

<sup>1)</sup> Men ziet dit het gemakke'lijkst in door een punt op een der koördinaatassen te beschouwen. Men krijgt dan eerst  $\sqrt{-g} = u w p^2$ .

De componenten van den fundamenteelen tensor worden dan getransformeerd volgens de formules

$$w^2 = \bar{w}^2, \quad g_{r4} = -\psi \bar{w}^2, \quad u^2 = \bar{u}^2 - \psi^2 \bar{w}^2, \quad p^2 = \bar{p}^2.$$

Deze formules geven allereerst

$$\bar{u}^2 \bar{w}^2 \bar{p}^4 = (u^2 w^2 + g_{r4}^2) p^4.$$

Deze vergelijking toont aan dat de determinant  $g$  van de componenten  $g_{\mu\nu}$  niet veranderd wordt door onze transformatie van den tijdcoördinaat. Men heeft nl.

$$\bar{u}^2 \bar{w}^2 \bar{p}^4 = -\bar{g}, \quad (u^2 w^2 + g_{r4}^2) p^4 = -g, \quad . . . \quad (48)$$

waarin  $\bar{g}$  en  $g$  genoemden determinant voor het *rechthoekige* coördinatenstelsel aangeven (dat door middel van de formules (23) samenhangt met het poolcoördinatenstelsel) voor en na de transformatie van den tijdcoördinaat. Dat de beide leden de genoemde beteekenis hebben, ziet men het eenvoudigste in door beschouwing van een punt op een der coördinaatassen.

Wij zullen nu de formules (41) transformeeren. In het oorspronkelijke vierdimensionale coördinatenstelsel luidt deze na een eenvoudige omzetting

$$\bar{r}^2 \times \bar{\Psi} = 2 \frac{d}{dr} \frac{\bar{r}^2 \bar{p}^4 \bar{w} \bar{w}'}{\sqrt{-\bar{g}}}.$$

Wij zullen bewijzen, dat het linkerlid invariant blijft bij het transformeeren van den tijdcoördinaat. Daar ook het rechterlid invariant blijft, geldt de formule in dezen vorm ook in het nieuwe vierdimensionale coördinatenstelsel. Volgens (40) heeft men voor elk coördinatenstelsel

$$\Psi = 2 \varepsilon_4^4 - \Sigma \varepsilon_{\mu}^{\mu}.$$

Daar  $\varepsilon$  een gemengde volumetensor is, wordt  $\varepsilon_4^4$  getransformeerd volgens deze formule:

$$\bar{\varepsilon}_4^4 = \frac{\sqrt{-\bar{g}}}{\sqrt{-g}} \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x_4}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x_4} \bar{\varepsilon}_{\alpha}^{\beta} . . . . . \quad (49)$$

Beschouwen wij een punt op de  $X_1$ -as, dan is  $dx_1 = dr$ . Bij onze transformatie van den tijdcoördinaat is dan van alle  $\frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial x_4}$  alleen

$$\frac{\partial \bar{x}_4}{\partial x_4} = 1 \quad \text{niet nul, van alle } \frac{\partial x_4}{\partial x_{\beta}} \text{ zijn alleen } \frac{\partial x_4}{\partial x_4} = 1 \text{ en } \frac{\partial x_4}{\partial x_1} = \psi$$

niet nul. Daar verder  $g = \bar{g}$  krijgen wij dus

$$\bar{\varepsilon}_4^4 = \varepsilon_4^4 + \psi \varepsilon_4^1.$$

Als  $\bar{x}_4^1$  niet nul was, zou dit beteekenen dat een radiale energie-  
 strooming plaats had en de energie van het stelsel zou dan onaf-  
 gebroken veranderen. Daar wij hebben aangenomen, dat het veld  
 stationair is, hebben wij  $\bar{x}_4^1 = 0$  en dus  $x_4^1 = x_4^1$ . Omdat  $\sum_{\mu} x_{\mu}^{\mu}$  een  
 volumeskalaar is en de determinant  $g$  bij de transformatie niet  
 verandert, ondergaat ook  $\sum_{\mu} x_{\mu}^{\mu}$  geen verandering bij de transformatie.  
 Bijgevolg blijft  $\Psi$  bij de transformatie invariant :

$$\bar{\Psi} = \Psi.$$

Daar  $r, p, w$  ook onveranderd blijven, krijgen wij dus voor het  
 nieuwe 4 dimensionale koördinatenstelsel evenzeer :

$$r^2 x \Psi = \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2 p^4}{\sqrt{-g}} \frac{dw^2}{dr} \right) \dots \dots \dots (41a)$$

Hiermede hebben wij eene uitbreiding verkregen voor formule (41)  
 zoodat die nu ook geldt als  $g_{r4} \neq 0$ . Op te merken valt nog dat  
 $g_{r4}$  voorkomt in de uitdrukking voor  $\sqrt{-g}$  (zie de laatste formule (48)).

De meer algemeene formules voor (43), (45) krijgen wij gemak-  
 kelijk op dezelfde wijze als te voren.

$$\mathfrak{E}_r = \frac{p^4}{\sqrt{-g}} \frac{dw^2}{dr} \dots \dots \dots (43a)$$

$$E = \frac{4\pi cr^2}{x} \frac{p^4}{\sqrt{-g}} \frac{dw^2}{dr} \quad (r > R) \dots \dots \dots (45a)$$

Wij hebben in deze en in de voorgaande § onze beschouwingen  
 beperkt tot lichamen met bolsymmetrie. Hebben wij een lichaam  
 van eindige uitbreiding, dat geen bolsymmetrie bezit, dan is natuurlijk  
 het opgewekte zwaartekrachtsveld een ander dan het veld, opgewekt  
 door een lichaam met dezelfde massa, maar met bolsymmetrie. Wij  
 zien intusschen, dat hoe verder men zich naar het oneindige ver-  
 wijdert, des te nauwkeuriger beide velden met elkaar moeten over-  
 eenstemmen. Op grond hiervan kunnen wij de massa  $m$  van een  
 eindig stoffelijk stelsel van willekeurige gedaante *definieren* door  
 de formule

$$m = \frac{4\pi}{cx} \lim_{r=\infty} \left( \frac{r^2 p^4}{\sqrt{-g}} \frac{dw^2}{dr} \right) = \frac{4\pi}{cx} \lim_{r=\infty} \left( \frac{r^2 g_{pp}^2}{\sqrt{-g}} \frac{dg_{44}}{dr} \right) \dots (50)$$

In de laatste uitdrukking hebben wij ingevoerd  $-p^2 = g_{pp}$  in  
 overeenstemming met de notatie in formule (27). Opdat de formule (50)  
 eene bepaalde beteekenis zal hebben, moet natuurlijk de limiet in  
 het rechterlid dezelfde waarde hebben, in welke richting men zich  
 ook naar het oneindige verwijdert. Formule (50) veronderstelt daarom

dat het koördinatenstelsel zoo gekozen wordt dat het veld in het oneindige bolsymmetrie heeft.

Voor het geval, dat wij nu beschouwen, geeft formule (43a)

$$\lim_{r=\infty} r^2 \mathfrak{E}_r = \lim_{r=\infty} \left( \frac{r^2 p^4}{\sqrt{-g}} \frac{dw^3}{dr} \right), \dots \dots \dots (51)$$

en daar formule (21) in § 2 ook geldt voor een stationair veld, dat geen bolsymmetrie heeft, geeft deze te zamen met (50)

$$E = c^2 m, \dots \dots \dots (52)$$

zooals de relativiteitstheorie eischt. Hiermede hebben wij aangetoond, dat de berekening der massa van een stationair stelsel met behulp van formule (50) uit het veld in verwijderde punten en de berekening der massa met behulp van formule (52) uit de totale energie bij rust hetzelfde resultaat geven ook voor lichamen die geen bolsymmetrie bezitten. Uit onze beschouwingen volgt ook, dat  $Ec^2$  dezelfde waarde heeft in elk willekeurig koördinatenstelsel waarin het veld stationair is en in het eindige bolsymmetrie bezit. De massa  $m$  is dus een skalaar.

In een volgende mededeeling zal ik het zwaartekrachtsveld voor een elektrisch geladen centrum berekenen met toepassing van het in dit artikel voor een veld met bolsymmetrie gevonden resultaat op dat geval.

Verder zal ik aantonen dat, wanneer men het koördinatenstelsel zoo kiest, dat  $\sqrt{-g} = 1$  (of konstant), de energiedichtheid van het zwaartekrachtsveld  $\tau_4^4$  overal buiten het lichaam nul is.

**Natuurkunde.** — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling <sup>1)</sup> aan van den Heer W. J. DE HAAS: „*Over het diffractieverschijnsel, voortgebracht door een groot aantal onregelmatig verspreide openingen of ondoorschijnende lichaampjes*”. (Mededeeling uit het Natuurkundig Laboratorium van TEYLER's stichting).

(Mede aangeboden door den Heer H. KAMERLINGH ONNES).

1. Wanneer voor het objectief van een kijker die op een verwijderd lichtpunt is ingesteld, een scherm wordt gehouden, dat een groot aantal onregelmatig verspreide gelijke cirkelvormige openingen bevat, neemt men een bekend buigingsverschijnsel waar, en, zooals men weet, ziet men hetzelfde als de proef wordt genomen met een doorschijnend scherm, bedekt met ondoorschijnende lichaampjes, die aan de openingen van zoeven beantwoorden, een glasplaat b.v. die met lycopodiumkorrels bestrooid is. Het buigingsbeeld bestaat uit de lichte centrale vlek en de ringen daaromheen, waartoe één opening aanleiding zou geven, maar men merkt er wisselingen in intensiteit in op, die men het best als een vezelige radiale structuur kan beschrijven. VON LAUE <sup>2)</sup> heeft dit verschijnsel onderzocht en is tot het besluit gekomen, dat de klassieke optica niet in staat zou zijn het te verklaren. Ik wensch in deze mededeeling de gronden aan te geven, die mij aan de juistheid dezer gevolgtrekking doen twifelen, waarbij ik echter op den voorgrond stel dat ik tegen de theoretische beschonwingen van VON LAUE over het diffractieverschijnsel bij enkelvoudig licht geen enkel bezwaar heb <sup>3)</sup>).

2. Ik zal niet lang stilstaan bij al de door mij genomen proeven. Ik heb mij bepaald tot visueele waarneming. De buigingsverschijnselen zijn op twee wijzen bestudeerd. In de eerste plaats gebruikte ik koperen gedraaide ringen met dun in Oost-Indische inkt gedrenkt

<sup>1)</sup> De hoofdinhoud werd mondeling medegedeeld in de Vergadering van 29 Sept. 1917.

<sup>2)</sup> M. v. LAUE, Die Beugungserscheinungen an vielen unregelmässig verteilten Teilchen, Sitzungsber. Akad. Berlin 1914, p. 1144; Mathematische Betrachtungen über die Beugungserscheinungen an vielen unregelmässig verstreuten Teilchen, Mitteilungen Phys. Gesellsch. Zürich, 1916, p. 90; Ein Versagen der klassischen Optik Berichte deutsch. physik. Gesellschaft, 18 Jahrg. 1917, p. 19.

<sup>3)</sup> Zie hieromtrent de volgende mededeeling van H. A. LORENTZ.

en nat opgespannen papier. Na droging gaf dit een goed ondoorzichtig strak gespannen scherm. In dit scherm werden met een fijne naald openingen geprikt, waarvan de grootte gevarieerd kon worden. Hiertoe was de naald in een ronden houder bevestigd en deze houder kon in een passend cilindrisch buisje heen en weer glijden en in een bepaalden stand vastgezet worden.

Hierin had men een middel om alle openingen even groot te maken en tevens om de grootte ervan te veranderen (door nl. een grooter of kleiner stuk van de punt van de naald uit het cilindertje te laten steken).

Bij de tweede methode werkte ik met glasplaten met lycopodium-poeder bedekt of wel met glasplaten met kwikbolletjes die door verdamping op het glas neergeslagen waren. Het kwik kan men gemakkelijk in bolletjes van  $\frac{1}{200}$  mm. of kleiner neerslaan. Hun grootte is echter ongelijk. Ik had drie zulke platen.

De eerste methode levert veel voordeelen op. Men kan het verschijnsel bij toenemend aantal openingen stap voor stap volgen, terwijl bij even sterk afgebogen licht het direct invallende licht van de booglamp niet verblindend werkt zooals in de andere gevallen. Visueel kan men zoo de bijzonderheden van het verschijnsel veel sneller, nauwkeuriger en met grooter gemak waarnemen dan door fotografie mogelijk is, terwijl het optreden van kleurverschijnselen niet aan het oog ontsnapte.

De lichtbron was een booglamp op ongeveer 5 M. afstand van het objectief van den kijker geplaatst. De lamp was zoo volkomen mogelijk afgeschermd, terwijl de openingen in een draaibaar looden scherm de „lichtpunten" leverden. Om de proeven te kunnen variëren waren de openingen ter grootte van 0.5, 0.4, 0.3, 0.25, 0.15 mm. aangebracht.

Wat mij trof was dat men, met een klein aantal openingen in het zwart papieren scherm beginnende en allengs tot een grooter aantal overgaande, het verschijnsel der vezelige structuur als het ware geleidelijk ziet ontstaan uit het diffractiebeeld bij weinig openingen, welk laatste geheel aan de gewone theorie beantwoordt.

Bij twee openingen ziet men, met wit licht werkende, een klein aantal diffractiestrepen, waarvan de middelste ongekleurd is en door het punt 0 gaat, waar het beeld van het beschouwde lichtpunt gevormd wordt. Dit punt zullen wij het middelpunt noemen. Aan weerskanten van de middelste en meest intensieve streep ziet men een klein aantal afwisselend lichte en donkere de spectraalkleuren vertoonende strepen, die naar buiten toe steeds flauwer worden en weldra overgaan in een gelijkmatig verlichte grond. Laten wij het



streepsysteem in het midden met  $A$  aanduiden, het gelijkmatig verlichte veld aan weerskanten ervan met  $B$ .

Dit moet zoo worden opgevat (verg. § 3) dat dit alles gesuperponeerd is op de diffractiefiguur (vlek en ring) van één opening.

Bij drie openingen waarvan de verbindingslijnen een willekeurigen driehoek vormen, neemt men drie streepsystemen  $A$  waar, resp. loodrecht op de zijden van dezen driehoek. Zij doorkruisen elkaar in de omgeving van het middelpunt  $O$ .

Bij vier of meer openingen heeft men iets dergelijks, en zoo voort.

Het geeft den indruk, dat steeds streepsystemen, elk loodrecht op een verbindingslijn van twee openingen, van welke streepsystemen het aantal steeds toeneemt met het aantal openingen, elkaar in het midden kruisen. Daardoor ziet men in het midden geen geprononceerde strepen; hier ontstaat wat men een „zonnebloemstructuur” zou kunnen noemen. Maar naar buiten toe moeten de streepsystemen uiteenloopen. Ik werd zoo tot de voorstelling gebracht, dat *dit* de vezels bij het verschijnsel van LAUE zijn. Werkt men met 50 openingen, dan ziet het verschijnsel er reeds geheel uit, zooals bij een met lycopodium bestrooide glasplaat; het eenige verschil is dat in het eerste geval de structuur grover vezelig is dan in het laatste geval. Alleen kan het bij een betrekkelijk klein aantal openingen, al heeft men ze op „toevallige” wijze aangebracht, licht gebeuren, dat onder al de verbindingslijnen enkele richtingen in bijzondere mate vertegenwoordigd zijn.

**3.** De opvatting, waartoe ik op deze wijze kwam, kan met een eenvoudige wiskundige beschouwing worden opgehelderd:

Voor het objectief van een kijker, die op een oneindig ver verwijderd lichtpunt is ingesteld, is een scherm geplaatst, waarin een groot aantal  $n$  gelijke cirkelvormige openingen verstrooid zijn. Het scherm staat loodrecht op de as van den kijker;  $F$  zij het hoofdbrandpunt van het objectief en wij beschouwen de lichtverdeling in het door  $F$  gaande focale vlak  $V$ . Volgens een bekende stelling der diffractietheorie kan de intensiteit in een punt  $P$  van dit vlak worden voorgesteld als het product van twee factoren, waarvan de eerste de intensiteit is, waartoe één der openingen op zich zelf aanleiding zou geven, terwijl de tweede de intensiteit  $i$  is, die men zou hebben, indien wij, in plaats van de gegeven openingen, in de middelpunten daarvan  $n$  onderling gelijke kleinere openingen hadden en wel zoo klein dat zij als punten beschouwd mochten worden. Beide factoren zijn functiën van de ligging van  $P$  in  $V$ . De eerste bepaalt de lichtverdeling in het buigingsbeeld  $B$  van één enkele

opening, een verdeeling waarbij de intensiteit betrekkelijk langzaam van punt tot punt verandert. In dit buigingsbeeld  $B$  worden nu door den factor  $i$  onregelmatige fluctuaties, waarbij de intensiteit van punt tot punt sneller wisselt, gebracht. Men kan zeggen dat men deze fluctuaties op den door het beeld  $B$  gegeven achtergrond ziet. Kon er sprake zijn van radiaal gerichte lichte en donkere vezels, dan zouden die in de wisselingen van den tweeden factor  $i$  hun oorsprong moeten vinden. Wij kunnen ons er daarom toe bepalen het buigingsbeeld te beschouwen, waartoe  $n$  puntvormige openingen aanleiding geven.

4. Zij  $P$  een punt van het focale vlak en laat de trillingen (enkelvoudig licht) die de verschillende openingen daar teweeg brengen worden voorgesteld door

$$\cos (vt + \varphi_1), \quad \cos (vt + \varphi_2) \quad . \quad . \quad . \quad \cos (vt + \varphi_n),$$

waarin  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  de fasen voorstellen en waarin de amplitudo ter vereenvoudiging gelijk 1 gesteld is. Zooals bekend is, kan men voor de resulterende intensiteit schrijven

$$i = n + \sum 2 \cos (\varphi_a - \varphi_b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarvoor ook geschreven kan worden

$$i = n + \sum i_{ab} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

De som moet genomen worden over alle combinatie's van twee openingen.

Het blijkt dus dat de lichtsterkte kan verkregen worden door vele velden te superponeeren, en wel eenvoudig door optelling hunner intensiteiten.

Het eerste veld is gelijkmatig:  $n$ .

Daarop  $\frac{1}{2} n(n-1)$  andere, die elk bij een paar openingen behooren.

De intensiteit in één daarvan

$$i_{ab} = 2 \cos (\varphi_a - \varphi_b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wisselt tusschen  $+2$  en  $-2$ .

De negatieve intensiteiten in elk der  $\frac{1}{2} n(n-1)$  „elementaire velden” zijn geen bezwaar. Immers de intensiteit  $n$  van het gelijkmatige veld is groot genoeg om tegen de negatieve  $i_{ab}$ 's, zelfs tegen vele, op te wegen. Dit volgt hieruit, dat de uitdrukking (1), ontstaan uit

$$(\sum \cos \varphi_a)^2 + (\sum \sin \varphi_a)^2$$

nooit negatief is.

In elk elementair veld (3) heeft men een streepsysteem, zooals in § 2 is besproken. Men toont namelijk gemakkelijk aan, dat langs

elke lijn die loodrecht staat op de verbindingslijn der openingen  $a$  en  $b$  (3) een constante waarde heeft. Van de eene lijn in de genoemde richting tot de andere wisselt  $i_{ab}$ . Op de lijn die door het middelpunt  $O$  gaat is  $\varphi_a = \varphi_b$ ,  $i_{ab} = +2$ . Men heeft aequidistante maximum- en minimumlijnen,  $i_{ab} = +2$ ,  $i_{ab} = -2$ .

5. Het is van belang het volgende op te merken: bij het gebruik van homogeen licht strekken zich de maximum- en minimumlijnen over het *geheele* gezichtsveld uit. Het is te verwachten dat een groot aantal dergelijke strepenstelsels elkaar in alle mogelijke richtingen doorkruisend een „korrelige” structuur geven. Dit zou de korrelige structuur zijn, die volgens de theoretische beschouwingen van v. LAUE bij het werken met homogeen licht bestaan moet.

De vraag waarom het te doen is, of n.l. de klassieke theorie de waarnemingen van v. LAUE kan verklaren, zou onmiddellijk beantwoord kunnen worden als men de proef met werkelijk homogeen licht kon nemen. Dit kan men, wat de centrale vlek betreft, doen, doch het levert, wegens de groote lichtzwakte, voor den eersten ring moeilijkheden op. Uit de verschillende proeven die gedaan zijn, kiezen wij de volgende.

1°. Eerst werd met behulp van filters van WRATTEN het licht min of meer gemonochromatiseerd. Evenals bij de volgende proeven werden de drie verschillende schermen gebruikt, dat met de openingen, de glasplaat met lycopodium en die met kwik. De vezelige structuur in het midden van de centrale buigingsvlek verdween en ging over in een granulaire. Verder van het midden af bleven de vezels in de centrale vlek bestaan. Het is van belang op te merken dat de lengte der afzonderlijke vezels niet evenredig met den straal toeneemt. De vezels naar den rand toe zijn naar evenredigheid veel langer dan die meer naar het midden der vlek.

Daarna werd met een natrium lichtbron gewerkt. Nu werd de centrale vlek geheel en zeer fraai granulair, ook aan den rand. Van den eersten ring was een zeer flauwe schaduw te zien. Het is moeilijk te zeggen of hier iets radiaals in zit. Bij opflikkeren van de lichtbron ziet men nu en dan eventjes duidelijk enkele *stippen* ook in den ring te voorschijn treden. De natriumvlam was die van een Bunsenbrander, waarin een lepel met natriummetaal gebracht werd. Opzettelijk is sterk licht en een hooge temperatuur van de vlam vermeden, hoewel men daarmee een zeer intensief natriumlicht kan krijgen, zooals b.v. du Bois <sup>1)</sup> beschreven heeft. Dit geschiedde ter verkrijging van grootere monochromasie. Daar derhalve de lichtbron zwak was, werd niet met een kijker waargenomen, maar met

<sup>1)</sup> Du Bois. Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1892, s. 165.

het ongewapende oog. De glasplaat was opgesteld vlak voor het oog, dat zich vanzelf op de lichtopening accomodeerde.

De proeven werden genomen in een absoluut donker vertrek. De vlam was geplaatst in een volkomen afsluitende plaatijzeren kist met een afvoerpijp naar de buitenlucht, terwijl de lepel met natrium langs een vaste voering in de vlam gebracht kon worden, zonder dat, zooals anders licht het geval zou zijn geweest, daarbij licht, anders dan door één fijne opening naar buiten drong.

6. Bij *wit licht* zijn de verschijnselen geheel anders dan bij homogeen licht. In plaats van (2) moet men dan nemen een som van dergelijke uitdrukkingen voor de verschillende lichtsoorten, zoodat wij in plaats van  $i_{ab}$  kunnen schrijven

$$S_{i_{ab}}$$

Het somteeken  $S$  slaat op de verschillende lichtsoorten. De lichtverdeeling  $S_{i_{ab}}$  is nu een strepenstelsel met een beperkt aantal strepen een lichte streep in het midden, aan weerskanten lichte en donkere. Op eenigen afstand is  $S_{i_{ab}} = 0$ , omdat waar de eene lichtsoort een positieve waarde van  $\cos(\varphi_a - \varphi_b)$  geeft, een naburige lichtsoort (die denzelfden indruk op ons oog maakt) een negatieve waarde geeft.

Bij wit licht heeft men dus de superpositie van een uniformveld en van *smalle* streepsystemen die elkaar in het midden doorkruisen.

Men mag hieruit besluiten: *indien* de klassieke theorie de door v. LAUE onderzochte verschijnselen verklaren kan, dan zijn *deze* streepsystemen de door hem waargenomen vezels. Maar of de theorie de verklaring kan geven blijft vooralsnog eenigszins onzeker.

Men moet namelijk bedenken dat in elk elementair streepsysteem  $a, b$  de intensiteit wisselt tusschen  $-2$  en  $+2$ , terwijl zij in het gelijkmatig veld de veel grooter waarde  $n$  heeft. Zijn er bijv. 10000 korrels, dan zullen bij de superpositie van het gelijkmatige veld met één streepsysteem wisselingen van 10002 tot 9998 voorkomen, wat natuurlijk onmerkbaar zou zijn.

Eén enkel streepsysteem is dus niet te zien. Maar de verbindingslijnen der openingen twee aan twee, en dus ook de loodrecht op die lijnen staande streepsystemen, hebben op door toeval bepaalde wijze alle mogelijke richtingen. Strepen die op den achtergrond  $n$  zichtbaar zijn, kunnen ontstaan wanneer een aantal streepsystemen toevallig zoo weinig in richting verschillen, dat op niet te grooten afstand van het middelpunt vrijwel de maxima ( $+2$ ) van het eene met die van het andere samenvallen. De vraag of de oude theorie het verschijnsel verklaren kan komt dus hierop neer:

I. Is een dergelijke toevallige opeenhooping van verschillende strepenstelsels in bepaalde richting naar de regels der waarschijnlijkheidsrekening in *voldoende* mate te verwachten?

Met de theoretische behandeling dezer vraag zal ik mij niet bezig houden.

Wel kan het volgende worden opgemerkt: In werkelijkheid zullen vele strepenstelsels wegvallen. Men werkt nl. niet met een lichtpunt maar met een lichtbron van zekere afmeting (opening in scherm). Elk punt daarvan geeft een eigen diffractie-beeld en wel alle dezelfde maar ten opzichte van elkaar verschoven. Daardoor worden de fijne strepenstelsels uitgewischt en wel verdwijnen zij *geheel* omdat de middelwaarde van  $\cos(\varphi_a - \varphi_b)$  nul is. Daar nu de afstand der strepen  $a, b$  omgekeerd evenredig is met den afstand  $\alpha, \beta$ , zal elk strepenstelsel verdwijnen, dat beantwoordt aan twee openingen of korrels die wat ver uiteenliggen. Het blijft intusschen de vraag of dit verdwijnen van een aantal strepenstelsels wel aan de zichtbaarheid der andere ten goede komt.

7. Men kan de verschijnselen ook op andere wijze opvatten (ofschoon natuurlijk equivalent met de vorige). Wij kunnen namelijk eerst voor één lichtsoort de geheele resulterende lichtverdeling  $i$  opmaken en dan al de verdeelingen voor de verschillende lichtsoorten superponeeren ( $S_i$ ). Hierbij moet bedacht worden dat dezelfde intensiteit die bij een bepaalde golflengte  $\lambda$  in een zeker punt  $P$  gevonden wordt, bij andere  $\lambda'$  voorkomt in het punt  $P'$  dat met  $O$  en  $P$  op een rechte lijn ligt, zóó dat  $OP : OP' = \lambda : \lambda'$ .

Nu is volgens de klassieke theorie de lichtverdeling  $i$  voor een bepaalde  $\lambda$  „korrelig”. Gaat men tot een andere golflengte  $\lambda'$  over, dan worden de lichte en donkere vlekken in radiale richting verschoven. Wij zullen dit „spectrale verschuiving” noemen.

Natuurlijk zullen nu hierdoor, als men van homogeen licht tot samengesteld licht overgaat, uit de korrels vezels ontstaan. EXNER<sup>1)</sup> meende dat de waargenomen vezels zóó geheel verklaard kunnen worden. VON LAUE betwijfelde dit. Hij vestigt de aandacht er op, dat in een door hem genomen fotografie van de buigingsfiguur eener met lycopodium bestrooide plaat, de vezels in den eersten buigingsring langer zijn dan met de spectrale verschuiving zou overeenkomen.

(Zie ook slot van § 5).

8. M. i. heeft v. LAUE hierbij over het hoofd gezien, dat door ineenvloeiing der lichte vlekken en evenzoo der donkere, strepen

<sup>1)</sup> Sitzungsber. Akad. Wien 76 (1877), p. 522; Ann. d. Phys. 9 (1880), p. 239.

kunnen ontstaan, waarvan de lengte grooter is dan de lengte  $l$  tot welke elke vlek wordt uitgerekt.

Laat ons de aandacht vestigen op verschillende van  $O$  uitgaande lijnen. Wegens de toevallige verdeeling der lichte en donkere vlekken (een gevolg van de toevallige verdeeling der lycopodiumkorrels) zullen op den eenen straal de donkere vlekken op wat kleiner afstand van elkaar kunnen liggen dan op den anderen. Dus zal men op een bepaalden afstand van het middelpunt langs één straal eerder een eenigszins donkere lijn krijgen dan langs den anderen. Dit zouden de vezels zijn. De vraag is:

II. Is deze toevallige praedispositie tot ineenvloeien, die men langs sommige lijnen volgens de wetten der waarschijnlijkheidsrekening mag verwachten (en die naar de gewone regels der optica enkel uit de onregelmatige verstrooiing der buigende deeltjes voortvloeit) voldoende om tot vezels van de waargenomen lengte aanleiding te geven? Het is duidelijk dat de vragen I en II in den grond der zaak op hetzelfde neerkomen.

Alleen als men deze vragen ontkennend zou moeten beantwoorden, zou men tot het besluit moeten komen dat de klassieke optica niet voldoende is om van de waarnemingen rekenschap te geven. Men zou dan moeten aannemen dat reeds in homogeen licht radiale vezels bestaan, iets dat zooals werd opgemerkt moeilijk rechtstreeks kan worden uitgemaakt, doch waar zeker de met natriumlicht gedane proeven niet op wijzen, of althans dat langs sommige stralen behalve de bovengenoemde toevallige praedispositie nog een *andere* bestond. Zoowel het een als het ander zou ons noodzaken tot wijziging in de grondslagen der diffractietheorie.

Wat het ineenvloeien der door de spectrale verschuiving ontstane vezels betreft, is het duidelijk dat dit des te eer zal gebeuren naarmate zij langer zijn. Nu hebben de vezels die de spectrale verschuiving teweeg brengt, een lengte die evenredig is met den afstand tot het middelpunt  $O$ ; het ineenvloeien zal dus op eenigen afstand van  $O$  meer plaats hebben dan dicht daarbij. Hiermede is in overeenstemming dat, zooals wij in § 5 zagen, de lengte der waargenomen vezels naar den rand toe *meer* toeneemt dan aan de evenredigheid met den afstand tot het middelpunt zou beantwoorden.

8. Ten slotte wil ik nog een paar proeven beschrijven, die (nevens de proef met het natriumlicht) mijne opvatting van het verschijnsel steunen.

Het is bij het buigingsverschijnsel van een scherm met een vijftigtal openingen mogelijk op zeer directe wijze aan te toonen dat de buigingsfiguur inderdaad uit interferentiestrepen is opgebouwd. Om

dit proefondervindelijk te bewijzen was het oculair van den kijker op een wagentje bevestigd, dat snel op een paar rails heen en weer geschoven kon worden. Het is duidelijk dat bij eene beweging van het wagentje alle structuur in het focale vlak van het objectief gevormde buigingsbeeld uitgewischt wordt in eene richting loodrecht op de beweging. Als, daarentegen, in de richting der beweging een interferentiebundel ligt, zoo zal deze ongeschonden bewaard blijven.

Inderdaad, wanneer men het oculair op de aangegeven wijze snel heen en weer beweegt, ziet men 1° de vezelige structuur van het buigingsbeeld overgaan in een homogene witte vlek, waarop 2° in de richting der beweging zeer fraai een interferentiebundel te voorschijn komt.

Beweegt men het oculair op willekeurige wijze, doch zoo dat het steeds scherp op het lichtpunt van het looden scherm ingesteld blijft, dan ziet men op een homogeen lichtvlak, stralen interferentiebundels rondwentelen.

Deze proef gelukt niet meer met een scherm met een zeer groot aantal openingen. Dit is waarschijnlijk hier aan te wijten dat bij een zeer groot aantal openingen het aantal interferentiebundels dat in dezelfde richting ligt zeer groot wordt. De afstand der lichtmaxima in deze bundels is in 't algemeen zeer verschillend. Men zal derhalve bij deze superpositie alleen de centrale streep overhouden en een geheele bundel interferentiestrepen in de bewegingsrichting zal niet in 't oog vallen.

De tweede proef die ik zal beschrijven is afkomstig van Prof. H. A. LORENTZ.

De gedachtengang die er toe geleid heeft, is de volgende: wanneer de ongelijke verdeling van het licht bij gebruikmaking van zuiver monochromatisch licht granulair is, dan zal het vezelige karakter van het buigingsbeeld ontstaan door de spectrale verschuiving der korrels van violet naar rood toe. Doch indien nu in die spectrale verschuiving, die in den aard van het verschijnsel ligt, de eenige oorzaak voor het ontstaan der vezels te zoeken is, dan is het duidelijk dat eene tweede kunstmatig aangebrachte spectrale verschuiving der korrels tengevolge moet hebben, dat de vezels niet radiaal gericht zijn. Inderdaad gelukt het de vezels ook in andere dan de radiale richting te voorschijn te brengen. Plaastst men voor het objectief van den kijker, tusschen deze lens en de diffracteerende plaat een prisma <sup>1)</sup>, dan zullen alle buigingsbeelden van violet tot rood toe in eene bepaalde richting verschoven worden, en wel het roode

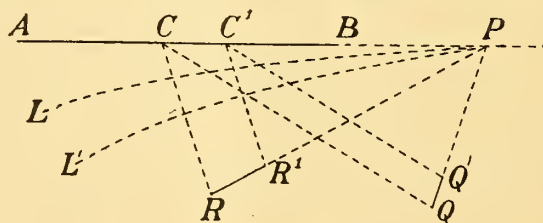
<sup>1)</sup> Men kan ook een klein prisma tusschen het oculair en het oog houden.

beeld het verste. Inplaats van het lichtpunt in het midden der ronde buigingsfiguur, dat het beeld van de opening in het looden scherm is, ontstaat een lichtstreep  $AB$  aan het eene einde  $A$  rood en aan het andere einde  $B$  violet gekleurd. Beschouwt men de ontstane vervormde buigingsfiguur en wel op het verlengde van  $AB$ , aan de zijde van  $B$ , dan zal men aan een punt  $P$  komen, waar de oorspronkelijke spectrale verschuiving, welke aan de buigingsfiguur eigen is, opgeheven wordt door de gesuperponeerde spectrale verschuiving, door het prisma teweeggebracht. In de nabijheid van dit punt moet de structuur granulair zijn, terwijl de nieuw gevormde vezels verder van dit punt af, daar naar toe moeten gericht zijn. En nu gelukt het inderdaad gemakkelijk deze verschijnselen waar te nemen.

Ook deze proef brengt derhalve een bewijs dat de vezels aan spectrale verschuiving het aanschijn danken.

Men ziet ze het best, als men voor het oog een geschikt WRATTEN-filter plaatst; met zulk een glasplaatje, dat van het lijnvormige spectrum  $AB$ , slechts een gedeelte in het groen, ter lengte van ongeveer  $\frac{1}{8} AB$ , doorliet, werd in de onmiddellijke nabijheid van het punt  $P$  een korrelige structuur waargenomen, geheel van denzelfden aard als die, welke onder gewone omstandigheden bij het punt  $O$  gezien werd. Verder van  $P$  af zag men streepjes langs lijnen die naar  $P$  toegericht waren; de lengte dezer streepjes was des te grooter naarmate men verder van  $P$  kwam.

Onderstaande figuur kan de zaak verder ophelderden. Laat  $CC'$



het door het filter doorgelaten deel van het lineaire spectrum  $AB$  zijn, en laten wij de aandacht vestigen op de twee niterste doorgelaten lichtsoorten, voor welke het beeld van het lichtpunt in  $C$  en  $C'$  komt, welke lichtsoorten wij met  $C$  en  $C'$  kunnen aanduiden. Laat  $\lambda$  en  $\lambda'$  hunne golflengten zijn, zoodat, daar  $A$  het roode uiteinde van  $AB$  is,  $\lambda > \lambda'$  is.

Stel dat men, met de lichtsoort  $C$  alleen werkende, een lichten korrel in het punt  $Q$  ziet. Dan zou men klaarblijkelijk, als men alleen met het licht  $C'$  te doen had, de overeenkomstige vlek zien in een punt  $Q'$ , dat men vindt door  $C'Q'$  evenwijdig aan  $CQ$  te



trekken en de lengte van  $C'Q'$  te bepalen door de evenredigheid

$$CQ : C'Q' = \lambda : \lambda'.$$

Voor tusschengelegen lichtsoorten komen de lichtvlekken tusschen  $Q$  en  $Q'$ , en wel, zooals men gemakkelijk ziet, als de lengte  $CC'$  betrekkelijk klein is, op het rechte lijntje  $QQ'$ . Het verlengde daarvan snijdt het verlengde van  $AB$  in het punt  $P$ , waarvan de ligging bepaald wordt door de evenredigheid

$$CP : C'P' = \lambda : \lambda', \dots \dots \dots (4)$$

en dat dus steeds hetzelfde is, onverschillig met *welk* lichtstreepje  $QQ'$  men te doen heeft. Het blijkt verder dat, als  $RR'$  een tweede lichtstreepje is, de lengten  $QQ'$  en  $RR'$  tot elkaar staan als de afstanden  $Q'P$  en  $R'P$ .

Dicht bij  $P$  waren de lijntjes zoo kort, dat men ze niet van „korrels” kon onderscheiden, en gaf de lichtsoort  $C$  juist in  $P$  een lichtvlekje, dan zou het overeenkomstige lichtvlekje in de lichtsoort  $C'$  daarmede samenvallen, zooals uit (4) blijkt. Natuurlijk *volgt* uit het voorkomen van een lichtvlek in  $P$ , dat men in het overeenkomstige punt van het beeld, als het prisma er niet was, een radiaal gericht lijntje van de lengte  $CC'$  zou zien.

In het bijzonder moge er de aandacht op gevestigd worden, dat de afwezigheid van vezels in de onmiddellijke nabijheid van  $P$  *bewijst* dat er bij homogeen licht geen vezels zullen gezien worden en dat die, welke men bij niet-homogeen licht waarneemt, alleen aan de in § 7 genoemde spectrale verschuiving te wijten zijn. Het is nl. duidelijk dat, als men reeds in enkelvoudig licht bij  $P$  een langs  $CP$  gericht lijntje had, dit nooit door het prisma tot een punt zou kunnen worden gemaakt.

Ten slotte moet het volgende worden opgemerkt. Dat, bij de proef met het prisma, de vezels „radiaal” loopen, met  $P$  als middelpunt, geldt alleen als men niet te ver van  $P$  komt. In werkelijkheid loopen de lijnen langs welke de vezels vallen ongeveer zooals in de figuur door  $L, L'$  wordt aangegeven. Om dit te verklaren zou men in verdere bijzonderheden moeten treden.

**Natuurkunde.** — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan:  
*„Over de wisselingen der intensiteit in het buigingsbeeld van een groot aantal onregelmatig verspreide openingen of lichaampjes”.*

§ 1. Voor het objectief van een kijker die op een verwijderd lichtpunt is ingesteld, zij een scherm met een groot aantal onderling gelijke, onregelmatig verstrooide cirkelvormige openingen geplaatst. In het vlak  $V$ , loodrecht op de as door het reële beeld van het lichtpunt gebracht, ontstaat dan een bekend buigingsverschijnsel. De lichtsterkte daarvan kan voor elk punt  $P$  worden voorgesteld als het product van twee factoren, waarvan de eerste de intensiteit is, die één opening zou teweegbrengen, terwijl de tweede factor, dien wij  $i$  zullen noemen, op een constanten coëfficiënt na de intensiteit is, waarmede men zou te doen hebben, als het scherm voorzien was van onderling gelijke, uiterst kleine openingen („puntvormige openingen” of „diffracteerende punten”) gelegen op de plaatsen van de middelpunten der openingen die in werkelijkheid bestaan.

In de volgende beschouwingen zal steeds van den factor  $i$  sprake zijn, en in het bijzonder van zijne grillige en snelle veranderingen van punt tot punt. VON LAUE<sup>1)</sup> heeft deze wisselingen uitvoerig theoretisch onderzocht, met het oog op de vraag<sup>2)</sup> of de klassieke optica rekenschap zou kunnen geven van de structuur met radiaal gerichte lichte en donkere „vezels”, die men in het buigingsbeeld opmerkt. Hij komt tot het besluit dat, voor het geval van homogeen licht, in datgene wat de theorie ons over de verdeeling der intensiteit  $i$  leert, niets is, dat ons zulk een structuur zou doen verwachten.

Daar het vraagstuk van fundamenteel belang is, is het misschien niet ondienstig te doen zien hoe betrekkelijk eenvoudige berekeningen, al gaan zij minder diep dan die van VON LAUE, zijne uitkomst bevestigen.

§ 2. Wij stellen ons voor dat diffracteerende punten, ten getale van  $n$ , naar volgorde van hunne rangnummers, elk naar het toeval, op een cirkelvlak voor het objectief, met den straal  $R$  en het middelpunt op de as van den kijker, geplaatst worden en dat voor de zoo

<sup>1)</sup> Sitzungsber. Akad. Berlin, 1914, p. 1144; Mitteilungen d. Phys. Gesellsch. Zürich, 1916, p. 90; Berichte d. deutschen physik. Gesellsch., 1917, p. 19.

<sup>2)</sup> Zie, wat die vraag betreft, de voorafgaande mededeeling van W. J. DE HAAS.

verkregen verdeeling der punten over het scherm, het buigingsbeeld beschouwd wordt. Wij kunnen deze proef een groot aantal malen, stel  $N$  malen, nemen en voor deze of gene grootte die telkens een bepaalde waarde heeft, het gemiddelde nemen van de waarden die zij in de  $N$  gevallen aanneemt. Zulke middelwaarden zullen wij door strepen boven de letters aanduiden.

Wij kiezen als eenheid der intensiteit die, welke een enkel diffracterend punt zou teweegbrengen, welke intensiteit, zooals men weet, onafhankelijk van de ligging van dat punt is en geacht kan worden, over de geheele uitgestrektheid van het beeldvlak even groot te zijn. Stellen wij dan

$$i = n + i', \dots \dots \dots (1)$$

dan zal het blijken dat voor het grootste deel van het vlak

$$\bar{i}' = 0$$

kan gesteld worden. Daaruit volgt

$$\bar{i} = n, \dots \dots \dots (2)$$

zoodat de laatste term in (1) de afwijking der intensiteit  $i$  van de middelwaarde  $\bar{i}$  voorstelt. Om een oordeel over de grootte der afwijkingen te krijgen, kan men

$$\bar{i}'^2$$

bepalen.

Zij verder  $q$  de afstand van het beschouwde punt  $P$  tot het middelpunt der buigingsfiguur, het punt  $F$  nl., waar het beeld van het lichtpunt gevormd wordt, en  $h$  een richting loodrecht op  $FP$ . Door, zooals VON LAUE gedaan heeft, de waarden

$$\left(\frac{\partial i'}{\partial q}\right)^2 \text{ en } \left(\frac{\partial i'}{\partial h}\right)^2 \dots \dots \dots (3)$$

te berekenen, kan men eenigszins beoordeelen, of er al dan niet radiale maxima of minima van eenige lengte zijn; immers, zoo die bestaan, mag men verwachten dat van de uitdrukkingen (3) de eerste kleiner zal uitvallen dan de tweede.

Een ander criterium, eveneens door VON LAUE gebezigd, berust op de volgende overweging. De lichte en donkere vlekken in de intensiteitsverdeeling  $i$ , of, zooals wij ook kunnen zeggen, de positieve en negatieve vlekken in de verdeeling van  $i'$ , zullen in elk geval zekere uitgebreidheid hebben. Liggen dus twee punten zeer dicht bij elkaar, dan zullen de waarden van  $i'$  in die punten bij de meerderheid der  $N$  proeven hetzelfde teeken hebben, terwijl een dergelijke samenhang niet te verwachten is, als de punten verder uiteenliggen. Een aanwijzing van het eerste zullen wij hierin vinden,

dat het gemiddelde van het product der twee waarden van  $i'$  positief, van de orde van grootte van  $\overline{i'^2}$  is, een aanwijzing van het tweede in een aanmerkelijk kleinere middelwaarde van dat product.

Wij zullen onder  $P_1$  een punt verstaan, dat op het verlengde van  $FP$  ligt, onder  $P_2$  een tweede punt van den om het middelpunt  $F$  beschreven, door  $P$  gaanden cirkel. De in de drie punten  $P, P_1, P_2$  bestaande afwijkingen van de gemiddelde intensiteit noemen wij  $i', i_1', i_2'$  en wij berekenen

$$\overline{i' i_1'} \text{ en } \overline{i' i_2'}$$

Eindelijk zullen wij nog de integraal

$$j = \int_{\rho}^{\rho'} i' d\varrho, \dots \dots \dots (4)$$

uitgestrekt langs zeker deel van een uit  $F$  getrokken rechte lijn, beschouwen; daarbij zijn  $\varrho$  en  $\varrho'$  ( $\varrho' > \varrho$ ) de afstanden waarop het beginpunt  $P$  en het eindpunt  $P'$  van dat deel van  $F$  verwijderd zijn. Ook de waarde van

$$\overline{j^2}$$

kan ons iets over de verdeling der afwijkingen  $i'$  over het vlak  $V$  leeren.

§ 3. Wij voeren een coördinatenstelsel in, met  $F$  tot oorsprong, de assen  $FX$  en  $FY$  in het beeldvlak  $V$ , en  $FZ$  langs de as, naar de zijde van de lens. Laat  $\xi$  en  $\eta$  de coördinaten van het beschouwde punt  $P$  zijn,  $x_a$  en  $y_a$  die van het diffracteerende punt met het rangnummer  $a, f$  de afstand van de lens tot het beeldpunt  $F$ , en  $\lambda$  de golflengte. Wordt dan de trilling die een diffracteerd punt op de as gelegen, in  $P$  zou geven, door  $\cos rt$  voorgesteld, dan vindt men gemakkelijk voor die, welke het diffracteerende punt  $a$  teweegbrengt

$$\cos [rt + k (\xi x_a + \eta y_a)],$$

waarin

$$k = \frac{2\pi}{\lambda f}$$

is.

Ter vereenvoudiging is voor de amplituden 1 gesteld.

De resulterende trilling is

$$\Sigma (a) \cos [vt + k (\xi x_a + \eta y_a)], \dots \dots \dots (5)$$

als wij in de som aan het rangnummer  $a$  alle waarden van 1 tot  $n$  geven. Wij zullen spoedig dergelijke uitdrukkingen aantreffen, in welke naar twee of drie rangnummers gesommeerd moet worden; de bedoeling is dan dat die alle van 1 tot  $n$  gaan, behoudens zekere nader te geven aanwijzingen.

Uit (5) volgt, voor de intensiteit

$$i = [\sum (a) \cos k (\xi x_a + \eta y_a)]^2 + [\sum (a) \sin k (\xi x_a + \eta y_a)]^2,$$

of wel, als wij de  $x$ -as door het beschouwde punt  $P$  laten gaan, zoodat  $\xi = \varrho, \eta = 0$  wordt,

$$i = [\sum (a) \cos k \varrho x_a]^2 + [\sum (a) \sin k \varrho x_a]^2.$$

Hiervoor kunnen wij schrijven

$$i = \sum (a b) \cos k \varrho (x_a - x_b), \dots \dots \dots (6)$$

en dus is blijkens (1)

$$i' = \sum (a \neq b) \cos k \varrho (x_a - x_b), \dots \dots \dots (7)$$

daar men juist de waarde  $n$  krijgt als men in de som (6) aan  $a$  de waarden  $1, \dots, n$  geeft, en telkens  $b = a$  neemt.

Uit (7) volgt verder

$$\frac{\partial i'}{\partial \varrho} = -k \sum (a \neq b) (x_a - x_b) \sin k \varrho (x_a - x_b), \dots \dots (8)$$

terwijl men ook gemakkelijk zal vinden

$$\frac{\partial i'}{\partial h} = k \sum (a \neq b) (y_a - y_b) \sin k \varrho (x_a - x_b) \dots \dots \dots (9)$$

Voor de in de vorige § ingevoerde grootheden  $i_1'$  en  $i_2'$  kan men overeenkomstig (7) schrijven

$$i_1' = \sum (a \neq b) \cos k \varrho' (x_a - x_b), \dots \dots \dots (10)$$

als  $FP_1 = \varrho'$  is, en

$$i_2' = \sum (a \neq b) \cos k \varrho (x_a' - x_b'), \dots \dots \dots (11)$$

in welke laatste uitdrukking de grootheden met accenten de coördinaten der diffracteerende punten zijn, ten opzichte van assen  $FX$  en  $FY'$ , die uit  $FX$  en  $FY$  door een wenteling in het vlak  $V$  ontstaan en waarvan de eerste door  $P_2$  gaat.

Eindelijk is, blijkens (4) en (7)

$$j = \sum (a \neq b) \left\{ \frac{\sin k \varrho' (x_a - x_b)}{k (x_a - x_b)} - \frac{\sin k \varrho (x_a - x_b)}{k (x_a - x_b)} \right\} \dots \dots (12)$$

De berekening der in § 2 genoemde middelwaarden komt nu steeds neer op de bepaling der middelwaarde van uitdrukkingen van een der vormen

$$P = \sum (a \neq b) \varphi (a, b), \dots \dots \dots (13)$$

$$Q = \sum (a \neq b, c \neq d) \varphi (a, b) \psi (c, d), \dots \dots \dots (14)$$

waarin  $\varphi (a, b)$  en  $\psi (a, b)$  functiën van de coördinatenverschillen  $x_a - x_b, y_a - y_b$  zijn, en wel functiën die dezelfde grootte en hetzelfde teeken behouden als men de algebraïsche teekens dier verschillen omkeert.

Neemt men voor  $\psi$  dezelfde functie als voor  $\varphi$ , dan gaat  $Q$  in  $P^2$  over.

§ 4. Als het somteeken  $S$  op de  $N$  verschillende proeven betrekking heeft, kan men schrijven

$$\bar{P} = \frac{1}{N} S P = \frac{1}{N} S \Sigma (a \neq b) \varphi (a, b) = \frac{1}{N} \Sigma (a \neq b) S \varphi (a, b).$$

Nu is klaarblijkelijk  $S \varphi (a, b)$  steeds hetzelfde, onverschillig welke getallen voor  $a$  en  $b$  worden genomen. Daaruit volgt, daar elke waarde van  $a$  met  $n-1$  waarden van  $b$  gecombineerd kan worden,

$$\bar{P} = \frac{n(n-1)}{N} S \varphi (1, 2).$$

Verdeel nu den cirkel met den straal  $R$ , waarvan wij het oppervlak, door  $A$  zullen voorstellen, in elementen  $d\sigma$  en vat twee bepaalde elementen  $d\sigma_1$  en  $d\sigma_2$  in het oog.

Onder de  $N$  proeven zijn er

$$\frac{N}{A} d\sigma_1$$

bij welke het eerste diffracteerende punt in  $d\sigma_1$  valt, en onder deze zijn er

$$\frac{N}{A^2} d\sigma_1 d\sigma_2$$

bij welke tevens het tweede punt in  $d\sigma_2$  komt te liggen. Daaruit blijkt dat

$$\bar{P} = \frac{n(n-1)}{A^2} \iint \varphi (1, 2) d\sigma_1 d\sigma_2 \dots \dots \dots (15)$$

is, waar wij zoowel bij de integratie naar  $d\sigma_1$  als bij die naar  $d\sigma_2$  het geheele cirkelvlak  $A$  moeten doorloopen.

De berekening van  $\bar{Q}$  is ingewikkelder. Men moet n.l. hier onderscheiden het geval dat één der getallen  $c$  en  $d$  met  $a$  en tevens het andere met  $b$  samenvalt, het geval dat slechts één der getallen  $c$  en  $d$  met een der getallen  $a$  en  $b$  samenvalt, en eindelijk het geval dat de getallen  $a, b, c, d$  alle verschillend van elkaar zijn. Dit brengt er toe te stellen

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3,$$

waarbij

$$\begin{aligned} Q_1 &= 2 \Sigma (a \neq b) \varphi (a, b) \psi (a, b), \\ Q_2 &= 4 \Sigma (a b c =) \varphi (a, b) \psi (a, c), \\ Q_3 &= \Sigma (a b c d \neq) \varphi (a, b) \psi (c, d) \end{aligned}$$

is. In de laatste formules beteekent  $=$  dat bij het opmaken der som nooit aan twee indices dezelfde waarde wordt gegeven.

Men heeft nu

$$\bar{Q} = \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + \bar{Q}_3$$

en kan de laatste drie middelwaarden op dergelijke wijze berekenen als zoo even  $\bar{P}$ . Men vindt daarbij

$$\bar{Q}_1 = \frac{2n(n-1)}{A^2} \iint \varphi (1, 2) \psi (1, 2) d\sigma_1 d\sigma_2, \dots \dots (16)$$

$$\overline{Q_2} = \frac{4n(n-1)(n-2)}{A^3} \iiint \varphi(1, 2) \psi(1, 3) d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3,$$

$$\overline{Q_3} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{A^4} \iint \varphi(1, 2) d\sigma_1 d\sigma_2 \cdot \iint \psi(1, 2) d\sigma_1 d\sigma_2.$$

Daar het aantal der diffracteerende punten zeer groot ondersteld wordt, zullen wij bij de toepassing dezer formules de factoren  $n-1$ ,  $n-2$ ,  $n-3$  veelal door  $n$  vervangen.

Voor het geval  $Q = P^2$  geven bovenstaande vergelijkingen dan

$$\overline{P^2} = U_1 + U_2 + (\overline{P})^2, \quad \dots \dots \dots (17)$$

waarin

$$U_1 = \frac{2n^2}{A^2} \iint [\varphi(1, 2)]^2 d\sigma_1 d\sigma_2, \quad \dots \dots \dots (18)$$

$$U_2 = \frac{4n^3}{A^3} \iiint \varphi(1, 2) \varphi(1, 3) d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 \dots \dots \dots (19)$$

is.

§ 5. Om nu  $\overline{i'}$ , d.w.z. de gemiddelde waarde van den laatsten term in (1) te vinden, stellen wij met het oog op (7) en (13)

$$\varphi(1, 2) = \cos k \varrho (x_1 - x_2)$$

en passen (15) toe. Er komt dan

$$\overline{i'} = \frac{n(n-1)}{A^2} \iint \cos k \varrho (x_1 - x_2) \cdot d\sigma_1 d\sigma_2 = \frac{n(n-1)}{A^2} \left[ \int \cos k \varrho x \cdot d\sigma \right]^2 \quad (20)$$

Uitgestrekt over den cirkel  $A$  met den straal  $R$  is

$$\int \cos k \varrho x \cdot d\sigma = \frac{2\pi R}{k \varrho} J_1(k \varrho R), \quad \dots \dots \dots (21)$$

waarin de laatste factor de BESSELSche functie  $J_1$  is. Derhalve:

$$\overline{i'} = 4n(n-1) \left[ \frac{J_1(k \varrho R)}{k \varrho R} \right]^2 \dots \dots \dots (22)$$

Wij merken hierbij op dat, op een constanten coëfficiënt na, de laatste factor de intensiteit  $i_0$  voorstelt, die men in het beschouwde punt zou hebben als de cirkel  $A$  zelf als buigende opening diende, zoodat wij kunnen schrijven

$$\overline{i'} = 4n(n-1) i_0.$$

Strikt genomen is dus  $\overline{i'}$  niet nul. Zelfs wordt (daar voor kleine waarden van  $x$ ,  $J_1(x) = \frac{1}{2} x$  is), in het beeldpunt  $F(\varrho = 0)$

$$\overline{i'} = n(n-1)$$

en volgens (1)

$$\overline{i} = n + \overline{i'} = n^2,$$

zooals te verwachten was.

Wij mogen aannemen dat bij de omstandigheden waaronder de proef genomen wordt, het buigingsbeeld der cirkelvormige opening  $A$  slechts een uiterst klein deel van het gezichtsveld, in de onmiddellijke omgeving van het punt  $F$  beslaat. Als maat voor zijne afmetingen kunnen wij den straal  $q$  van den eersten donkeren ring nemen, welke straal bepaald wordt door

$$q = \frac{3,83}{kR}, \dots \dots \dots (23)$$

daar 3,83 de eerste wortel der vergelijking  $J_1(x) = 0$  is,

Zoodra nu de afstand  $\varrho$  van het beschouwde punt  $P$  tot  $F$  een aanmerkelijk veelvoud van  $q$  is, is  $i_0$  zeer klein, zoodat  $\overline{i'} = 0$  en  $\overline{i} = n$  kan worden gesteld.

Om dit nader toe te lichten maken wij gebruik van de stelling dat voor groote waarden van  $x$  bij benadering

$$J_1(x) = - \frac{2 \sin(\frac{1}{4} \pi - x)}{\sqrt{2 \pi x}} \dots \dots \dots (24)$$

is. Op een afstand

$$\varrho = \omega q \dots \dots \dots (25)$$

van  $F$ , waarbij  $\omega$  een niet te klein getal is, is dus  $\overline{i'}$  van de orde van grootte

$$0,045 \frac{n^2}{\omega^3};$$

bij de berekening hiervan heb ik in (22)  $n(n-1)$  door  $n^2$  en in (24)  $\sin(\frac{1}{4} \pi - x)$  door 1 vervangen.

Klaarblijkelijk (verg. (1)) zullen wij slechts dan  $\overline{i'} = 0$  mogen stellen, als de waarde ervan aanmerkelijk kleiner dan  $n$  is. Daartoe is noodig dat

$$\omega^3 \gg 0,045 n \dots \dots \dots (26)$$

is. Wij zullen aantonen dat hieraan zeer goed voldaan kan zijn, zelfs op een afstand van  $F$ , die gelijk is aan het tiende van den straal van den eersten donkeren ring, dien men in het buigingsbeeld van een der gebezigde openingen (§ 1) en dus ook in dat van het geheele stelsel openingen waarneemt. Stelt men den straal van dien ring door  $q'$  en den straal van een opening door  $r$  voor, dan is

$$q' = \frac{R}{r} q,$$

en wordt voor  $\varrho = \frac{1}{10} q'$ ,

$$\omega = \frac{1}{10} \frac{R}{r}.$$



Voor (26) kan men dus schrijven

$$\frac{R^3}{r^3} \gg 45n.$$

Daar

$$n < \frac{R^2}{r^2}$$

is, is aan deze ongelijkheid voldaan zodra

$$R \gg 45 r$$

is, wat zeer goed het geval kan zijn.

Op een afstand  $\frac{1}{3} q'$  van  $F$  zou aan (26) reeds voldaan zijn, als

$$R \gg 1,2 r$$

was.

§ 6. Bij de berekening van de overige in § 2 genoemde middelwaarden komen wij tot eenige integralen, die wij  $a_1 \dots a_5$  zullen noemen, en die wij in de eerste plaats zullen beschouwen.

De eerste daarvan is

$$a_1 = \int x^2 d\sigma = \int y^2 d\sigma = \frac{A^2}{4\pi},$$

als weer  $A$  het oppervlak van den cirkel met den straal  $R$  voorstelt.

De tweede integraal is de reeds in (21) aangegevene. Als wij kortheidshalve

$$k \varrho = m \dots \dots \dots (27)$$

stellen, is zij

$$a_2 = \int \cos mx \cdot d\sigma = \frac{2\pi R}{m} J_1(mR).$$

De volgende integralen zijn

$$a_3 = \int x \sin mx \cdot d\sigma = \frac{4\pi R}{m^2} J_1(mR) - \frac{2\pi R^2}{m} J_0(mR),$$

$$a_4 = \int x^2 \cos mx \cdot d\sigma = \frac{6\pi R^3}{m^2} J_0(mR) + \left( \frac{2\pi R^3}{m} - \frac{12\pi R}{m^3} \right) J_1(mR),$$

$$a_5 = \int y^2 \cos mx \cdot d\sigma = -\frac{2\pi R^2}{m^2} J_0(mR) + \frac{4\pi R}{m^3} J_1(mR).$$

Ook zullen de integralen  $a_2', a_3', a_4'$  en  $a_5'$  voorkomen, die uit  $a_2, \dots a_5$  ontstaan, als men  $m$  door  $2m$  vervangt. <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> De integralen  $a_3, \dots a_5$  kunnen op de volgende wijze worden gevonden.

1. Men heeft

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(u \sin \vartheta) d\vartheta = \frac{1}{2} \pi J_0(u),$$

Wij zullen nu aanstonds de vereenvoudigingen invoeren, die kunnen worden toegelaten als  $mR$  een groot getal is (verg. § 5).

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(u \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2} \pi J_1(u),$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(u \sin \vartheta) \cos^2 \vartheta d\vartheta = \frac{\pi}{2u} J_1(u),$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(u \sin \vartheta) \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta = -\frac{\pi}{2u} J_0(u) + \frac{\pi}{u^2} J_1(u),$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(u \sin \vartheta) \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta = \frac{3\pi}{2u^2} J_0(u) + \left(\frac{\pi}{2u} - \frac{3\pi}{u^2}\right) J_1(u),$$

van welke formules de eerste en de tweede uit de theorie der BESSELSche functiën bekend zijn, terwijl de volgende achtereenvolgens door partieele integratie daaruit en uit elkander worden afgeleid.

2. Elk der integralen  $a_2, a_3, a_4$  heeft den vorm

$$\int f(x) d\sigma,$$

waarvoor men, daar  $f(x)$  telkens een even functie is, kan schrijven

$$4 \int_0^R f(x) \sqrt{R^2 - x^2} dx,$$

of, als men  $x = R \sin \vartheta$  stelt

$$4 R^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(R \sin \vartheta) \cos^2 \vartheta d\vartheta.$$

Zij worden hierdoor teruggebracht tot de zoo even onder 1 beschouwde integralen, met  $u = mR$ .

3. Wordt de integratie over een cirkel met den straal  $r$  uitgestrekt, dan is

$$\int \cos mx \cdot d\sigma = \frac{2\pi r}{m} J_1(mr).$$

Hieruit volgt voor de bijdrage die de ring tusschen de cirkels om den oorsprong met de stralen  $r$  en  $r + dr$  beschreven, tot de integraal levert

$$\frac{2\pi}{m} \frac{d}{dr} [r J_1(mr)] dr$$

en verder, over den cirkel met den straal  $R$ ,

$$\int r^2 \cos mx \cdot d\sigma = \frac{2\pi}{m} \int_0^R r^2 \frac{d}{dr} [r J_1(mr)] dr = \frac{2\pi}{m^4} \int_0^{mR} u^2 \frac{d}{du} [u J_1(u)] du.$$

Dan geldt formule (24) en de daarmee overeenkomstige

$$J_0(u) = \frac{2 \cos\left(\frac{1}{4}\pi - u\right)}{\sqrt{2\pi u}}.$$

$J_0(mR)$  en  $J_1(mR)$  zijn dus beide van de orde  $(mR)^{-1/2}$  en men behoeft in de voor  $a_3, a_4, a_5$  gevonden uitdrukkingen telkens slechts den term met de hoogste macht van  $R$  te behouden. Uit (26) kan men, bedenkende dat wegens (27), (25) en (23)

$$mR = k \varrho R = k \omega q R = 3,83 \omega$$

is, de volgende ongelijkheden afleiden:

$$a_2 \ll \frac{A}{\sqrt{n}}, \quad a_3 \ll R \frac{A}{\sqrt{n}}, \quad a_4 \ll k^2 \frac{A}{\sqrt{n}}, \quad a_5 \ll R^2 \frac{A}{\sqrt{n^6}}.$$

Dezelfde uitkomsten gelden resp. voor  $a_2', a_3', a_4'$  en  $a_5'$ .

Wij zullen ons van deze ongelijkheden bedienen om in de middelwaarden die wij thans te berekenen hebben, telkens den hoofdterm aan te wijzen, dien wij in eerste benadering alleen behoeven te behouden.

§ 7. Om  $\overline{i'^2}$  te bepalen, stellen wij in (13), (18) en (19)

$$\varphi(a, b) = \cos k \varrho (x_a - x_b).$$

Wij hebben dan vooreerst (verg. (20))

$$\overline{P} = \overline{i'} = \frac{n^2}{A^2} a_2'^2, \quad (\overline{P})^2 = \frac{n^4}{A^4} a_2'^4,$$

en vinden verder, met behulp van voor de hand liggende herleidingen

$$U_1 = \frac{n^2}{A^2} \iint \left\{ 1 + \cos 2k\varrho(x_1 - x_2) \right\} d\sigma_1 d\sigma_2 = n^2 + \frac{n^2}{A^2} a_2'^2, \quad (28)$$

De onbepaalde integraal is

$$2u^2 J_0(u) + (u^3 - 4u) J_1(u),$$

zooals uit de differentiaalvergelijking voor  $J_0$ :

$$\frac{d^2 J_0}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{dJ_0}{du} + J_0 = 0,$$

in verband met

$$\frac{dJ_0(u)}{du} = -J_1(u)$$

volgt.

Derhalve:

$$\int r^2 \cos mx \cdot d\sigma = \frac{4\pi R^2}{m^2} J_0(mR) + \left( \frac{2\pi R^3}{m} - \frac{8\pi R}{m^3} \right) J_1(mR).$$

Trekt men hiervan  $a_4$  af, dan vindt men  $a_5$ .

$$U_2 = \frac{4n^3}{A^3} \iiint \cos k \varrho (x_1 - x_2) \cos k \varrho (x_1 - x_3) \cdot d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 = \frac{2n^3}{A^3} (A + a_2') a_2'^2.$$

De hoofdterm in deze laatste twee uitdrukkingen en  $(\bar{I}')^2$  is  $n^2$ , zoodat blijktens (17)

$$\overline{i'^2} = n^2$$

wordt. Dit bewijst dat de fluctuaties der intensiteit van dezelfde orde van grootte zijn als de gemiddelde intensiteit zelf.

§ 8. Voor de bepaling van

$$\overline{\left(\frac{\partial i'}{\partial \varrho}\right)^2}$$

stellen wij (verg. (8)) in (15), (18) en (19)

$$\varphi(a, b) = -k(x_a - x_b) \sin k \varrho (x_a - x_b).$$

Dit geeft

$$\bar{P} = -\frac{2kn^2}{A^2} a_2 a_3, \quad (\bar{P})^2 = \frac{4k^2 n^4}{A^4} a_2'^2 a_3'^2,$$

$$U_1 = \frac{k^2 n^2}{A^2} (2a_1 A - 2a_2' a_4' + 2a_2'^2),$$

$$U_2 = \frac{2k^2 n^3}{A^3} \{a_2'^2 (a_1 - a_4') + 2a_2 a_3 a_4' + a_3'^2 (A + a_2')\}.$$

De term

$$\frac{k^2 n^2}{A^2} \cdot 2a_1 A = \frac{1}{2} n^2 k^2 R^2$$

in  $U_1$  overtreft alle andere in de laatste twee uitdrukkingen en  $(\bar{P})^2$  en wij vinden dus uit (17)

$$\overline{\left(\frac{\partial i'}{\partial \varrho}\right)^2} = \frac{1}{2} n^2 k^2 R^2 \dots \dots \dots (29)$$

Men vindt de middelwaarde van het vierkant van  $\frac{\partial i'}{\partial h}$  op een dergelijke wijze; alleen moet men nu met het oog op (9)

$$\varphi(a, b) = k(y_a - y_b) \sin k \varrho (x_a - x_b)$$

stellen. Daardoor wordt

$$\bar{P} = 0, \quad U_1 = \frac{2k^2 n^2}{A^2} (a_1 A - a_2' a_5'), \quad U_2 = \frac{2k^2 n^3}{A^3} a_2'^2 (a_1 - a_5').$$

Ook hier is de eerste term van  $U_1$  de hoofdterm, en daar hij dezelfde waarde heeft als in het vorige geval, komt men tot dezelfde uitkomst, nl.

$$\overline{\left(\frac{\partial i'}{\partial h}\right)^2} = \frac{1}{2} n^2 k^2 R^2 \dots \dots \dots (30)$$

De gelijkheid van (29) en (30) wijst op een korrelige, en niet op een vezelige structuur van het buigingsbeeld. Men vindt trouwens ook dezelfde uitkomst voor het gemiddelde kwadraat van het intensiteitsverval in een willekeurige richting.

§ 9. Wij kunnen nu ook aangeven van welke orde de afmetingen der lichte en donkere vlekken zijn. Blijkens (23) kan men nl. voor (29) en (30) schrijven

$$7,33 \frac{n^2}{q^2}$$

en het intensiteitsverval per eenheid van lengte blijkt dus van de orde van grootte  $2,7 \frac{n}{q}$  te zijn.

Daar nu de veranderingen der intensiteit van de orde  $2n$  kunnen zijn, besluiten wij dat de afstand op welchen de onregelmatig verspreide maxima en minima van elkaar liggen, van de orde  $q$  is, d. w. z. van dezelfde orde als de afmetingen van het buigingsbeeld eener cirkelvormige opening met den straal  $R$ . De granulatie wordt des te fijner naarmate  $R$  grooter is, d. w. z., indien de geheele opening van het objectief door de genoemde cirkelvormige opening bedekt wordt, naarmate het oplossend vermogen van den kijker grooter is.

Het behoeft hierbij nauwelijks opgemerkt te worden, dat men in menig geval een grovere korreling zal zien dan aan het zoeven gezegde beantwoordt; elke oorzaak die aan het optische beeld in  $F'$  eenige uitgebreidheid geeft, dus elk gebrek van den kijker en eveneens een zekere uitgebreidheid van de opening die als lichtbron dient, zal dit gevolg hebben. Zij zal de oorspronkelijke fijne granulatie meer en meer uitwischen, zoodat nog slechts grootere lichte en donkere vlekken, met kleiner geworden intensiteitsverschillen te zien zijn.

§ 10. Wij zullen nu de middelwaarden  $\overline{i' i_1'}$  en  $\overline{i' i_2'}$  (§ 2) beschouwen, maar daarbij ter bekorting alleen de termen neerschrijven, die alle andere ver overtreffen; deze termen moeten wij dan vergelijken met den term  $n^2$ , die in  $\overline{i'^2}$  overbleef.

Voor de berekening van  $\overline{i' i_1'}$  (verg. (7) en (10)) moeten wij in  $\overline{Q}$  (§ 4) substitueeren

$$\varphi(a, b) = \cos k \varrho (x_a - x_b), \quad \psi(a, b) = \cos k \varrho' (x_a - x_b).$$

Bij nader onderzoek blijkt het dat men alleen op  $\overline{Q_1}$  te letten heeft, en men vindt daarvoor uit (16)

$$\overline{Q_1} = \frac{n^2}{A^2} \iint \{ \cos k (\varrho' - \varrho) (x_1 - x_2) + \cos k (\varrho' + \varrho) (x_1 - x_2) \} d\sigma_1 d\sigma_2.$$

Deze integraal valt in twee deelen uiteen, waarvan het tweede evenmin in aanmerking komt als het overeenkomstige deel van de integraal in (28). Terwijl wij echter in deze laatste integraal den term  $n^2$  vonden, is nu de uitkomst

$$\overline{i' i'_1} = \frac{n^2}{A^2} \iint \cos k (\varrho' - \varrho) (x_1 - x_2) d\sigma_1 d\sigma_2 = 4n^2 \left[ \frac{J_1(k[\varrho' - \varrho]R)}{k(\varrho' - \varrho)R} \right]^2. \quad (31)$$

Om verder  $\overline{i' i'_2}$  te leeren kennen, moeten wij, met het oog op (7) en (11) in  $\overline{Q}$  stellen

$$\varphi(a, b) = \cos k \varrho (x_a - x_b), \quad \psi(a, b) = \cos k \varrho (x'_a - x'_b),$$

waarin  $x'_a$  en  $x'_b$  de in § 3 aangewezen beteekenis hebben. Ook nu weer komt het alleen aan op de grootheid  $\overline{Q}_1$ , waarvoor men vindt

$$\begin{aligned} \overline{Q}_1 = \frac{n^2}{A^2} \iint \{ \cos k \varrho [(x_1 - x'_1) - (x_2 - x'_2)] + \\ + \cos k \varrho [(x_1 + x'_1) - (x_2 + x'_2)] \} d\sigma_1 d\sigma_2 \dots \dots \dots (32) \end{aligned}$$

Stel nu dat de assen waarop de coördinaten  $x'_a, y'_a$  betrekking hebben, uit de oorspronkelijke assen  $FX, FY$  door een wenteling  $2 \vartheta$  ontstaan, zoodat

$$2 \vartheta = \angle PFP_2,$$

is, en laat  $x_a, y_a$  de coördinaten van het diffracteerende punt  $a$  zijn ten opzichte van de assen waarin  $FX$  en  $FY$  door een half zoo groote wenteling overgaan. Dan is

$$x_a - x'_a = -2 y_a \sin \vartheta, \quad x_a + x'_a = 2 x_a \cos \vartheta$$

en wij vinden uit (32)

$$\overline{i' i'_2} = 4n^2 \left\{ \left[ \frac{J_1(2k\varrho R \sin \vartheta)}{2k\varrho R \sin \vartheta} \right]^2 + \left[ \frac{J_1(2k\varrho R \cos \vartheta)}{2k\varrho R \cos \vartheta} \right]^2 \right\}, \quad (33)$$

waarin de laatste term kan worden weggelaten, omdat de punten  $P$  en  $P_2$  dicht bij elkander liggen en dus  $\cos \vartheta$  weinig van 1 verschilt, terwijl  $2k\varrho R$  een groot getal is.

Schrijft men  $\Delta$  voor den afstand der twee beschouwde punten  $P$  en  $P_1$ , of  $P$  en  $P_2$ , zoodat in het eerste geval  $\Delta = \varrho' - \varrho$  en in het tweede  $\Delta = 2\varrho \sin \vartheta$  is, dan nemen de uitdrukkingen (31) en (33) beide den vorm

$$4n^2 \left[ \frac{J_1(k\Delta R)}{k\Delta R} \right]^2 \dots \dots \dots (34)$$

aan. Deze overeenstemming wijst weer op een korrelige, en niet op een vezelige structuur van het buigingsbeeld.

Bij voortdurende afneming van den afstand  $\Delta$  nadert (34) tot  $n^2$ ; de middelwaarden  $\overline{i' i'_1}$  en  $\overline{i' i'_2}$  vallen daarbij met  $\overline{i'^2}$  samen, zooals het geval moest zijn. De middelwaarden (31) en (33) blijven verder

met  $\bar{i}''^2$  vergelijkbaar, zoolang  $kR\Delta$  niet te dicht bij 3,83 en dus  $\Delta$  (verg. (23)) niet te dicht bij  $q$  komt. Wordt echter  $\Delta$  tamelijk groot in vergelijking met  $q$ , dan worden  $\bar{i}'i_1'$  en  $\bar{i}'i_2'$  veel kleiner dan  $\bar{i}''^2$ ; men kan dan zeggen dat de intensiteiten in  $P_1$  en  $P_2$  onafhankelijk van die in  $P$  zijn. Deze gevolgtrekkingen zijn in goede overeenstemming met het in § 9 over de afmetingen der granulaties gevondene.

§ 11. Er blijft ons nu nog over, de waarde van  $\bar{j}^2$  (§ 3) te bepalen. Daar wij onderstellen dat de afstanden  $\varrho$  en  $\varrho'$  waarop de uiteinden van het beschouwde lijntje  $PP'$  van  $F$  verwijderd zijn, zeer groot zijn in vergelijking met  $q$ , d.w.z. met de afmetingen van het buigingsbeeld der opening  $A$ , is overal langs de lijn  $\bar{v} = 0$ . Dus is ook  $\bar{j} = 0$ , zoodat wij bij de berekening van  $\bar{j}^2$  ons alleen met  $U_1$  en  $U_2$  (§ 4) behoeven bezig te houden. Wegens (12) stellen wij nu

$$\varphi(a, b) = f_{II}(x_a - x_b) - f_I(x_a - x_b),$$

waar

$$f_I(x) = \frac{\sin k \varrho x}{k x}, \quad f_{II}(x) = \frac{\sin k \varrho' x}{k x} \dots \dots (35)$$

is.

Laat de coördinaat  $x$  in de elementen  $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3$  van den cirkel  $A$  de waarden  $x_1, x_2, x_3$  hebben. Dan kan men  $U_1$  schrijven in den vorm van een integraal naar  $x_1$  en  $x_2$ , en evenzoo  $U_2$  als een integraal naar  $x_1, x_2$  en  $x_3$ . Door verder in  $U_1$  de grootheden  $x_1$  en  $x_2' = x_2 - x_1$  als integratieveranderlijken in te voeren, en evenzoo in  $U_2$  de grootheden  $x_1, x_2'$  en  $x_3' = x_3 - x_1$ , vindt men

$$U_1 = \frac{16 n^2}{A^2} \int_0^{2R} \int_{-R}^{R-x_2} [f_I(x'_2) - f_{II}(x'_2)]^2 \sqrt{(R^2 - x_1^2)[R^2 - (x_1 + x'_2)^2]} dx'_2 dx_1 (36)$$

$$U_2 = \frac{64 n^3}{A^3} \int [f_I(x'_2) - f_{II}(x'_2)] [f_I(x'_3) - f_{II}(x'_3)] M dx'_3 dx'_2 dx_1, \dots (37)$$

in welke laatste uitdrukking het integraalteeken de volgende beteekenis heeft:

$$\int \dots dx'_3 dx'_2 dx_1 = \int_0^{2R} \left\{ \int_0^{x'_3} \int_{-R}^{R-x'_3} + \int_{x'_3}^{2R} \int_{-R}^{R-x'_2} + \int_{-2R+x'_3}^0 \int_{-R-x'_2}^{R-x'_3} \right\} \dots dx'_3 dx'_2 dx_1$$

terwijl

$$M = \sqrt{(R^2 - x_1^2)[R^2 - (x_1 + x'_2)^2][R^2 - (x_1 + x'_3)^2]}$$

is.

Om uit deze ingewikkelde uitkomsten een besluit te trekken,

zullen wij onderstellen dat niet alleen  $\varrho$  en  $\varrho'$  veel grooter dan  $q$  zijn, maar dat dit ook geldt van hun verschil, d.w.z. van de lengte van het beschouwde lijntje  $PP'$ . Wij kunnen dan een lengte  $l$  invoeren, zeer groot ten opzichte van  $\frac{1}{k(\varrho' - \varrho)}$  en tevens zeer klein ten opzichte van den straal  $R$  van den cirkel  $A$ . Immers, men heeft volgens (23)  $R = \frac{3,83}{kq}$  en dit is veel grooter dan  $\frac{1}{k(\varrho' - \varrho)}$  omdat  $\varrho' - \varrho$  veel grooter dan  $q$  is.

De functiën  $f_I(x_2') - f_{II}(x_2')$  en  $f_I(x_3') - f_{II}(x_3')$  hebben nu alleen in het interval  $-l, +l$ , dat zeer klein is in vergelijking met de door  $R$  bepaalde afmetingen van het integratiegebied in (36) en (37) merkbare waarden. Voor  $x_2' = 0$  of  $x_3' = 0$  is hunne waarde nl.  $\varrho - \varrho'$ , maar voor  $x_2' = l$  of  $x_3' = l$  zijn zoowel  $f_I$  als  $f_{II}$  van de orde van grootte  $\frac{1}{kl}$ , wat volgens het boven gezegde zeer klein is ten opzichte van  $\varrho' - \varrho$ .

Daar nu al wat verder in (36) en (37) voorkomt in een interval, zoo klein als het zoeven genoemde, niet merkbaar verandert, zal het geoorloofd zijn, in die vergelijkingen overal buiten de factoren  $f_I(x_2') - f_{II}(x_2')$  en  $f_I(x_3') - f_{II}(x_3')$  de grootheden  $x_2'$  en  $x_3'$  door 0 te vervangen; bovendien zullen wij de grenzen  $-2R$  en  $+2R$  bij de integraties naar  $x_2'$  en  $x_3'$  vervangen door  $-\infty$  en  $+\infty$ . In het oog houdende dat  $f_I$  en  $f_{II}$  even functiën zijn, vindt men op deze wijze

$$U_1 = \frac{64n^2 R^3}{3A^2} \int_0^{\infty} [f_I(x) - f_{II}(x)]^2 dx, \dots \quad (38)$$

$$U_2 = \frac{48 n^2 R^2}{A^2} \left\{ \int_0^{\infty} [f_I(x) - f_{II}(x)] dx \right\}^2.$$

Vooreerst volgt nu uit (35)

$$\int_0^{\infty} f_I(x) dx = \int_0^{\infty} f_{II}(x) dx = \frac{\pi}{2k},$$

en dus

$$U_2 = 0.$$

Verder vindt men voor de integraal in (38), als men  $kx = u$  stelt

$$\frac{1}{k} \int_0^{\infty} \frac{(\sin \varrho u - \sin \varrho' u)^2}{u^3} du,$$



of, na partieele integratie

$$\frac{1}{k} \left\{ \varrho \int_0^{\infty} \frac{\sin 2 \varrho u}{u} du + \varrho' \int_0^{\infty} \frac{\sin 2 \varrho' u}{u} du - (\varrho' + \varrho) \int_0^{\infty} \frac{\sin (\varrho' + \varrho) u}{u} du + \right. \\ \left. + (\varrho' - \varrho) \int_0^{\infty} \frac{\sin (\varrho' - \varrho) u}{u} du \right\}.$$

Elk der hier voorkomende integralen heeft de waarde  $\frac{1}{2} \pi$ , en ten slotte wordt, als wij de lengte  $\varrho' - \varrho$  der beschouwde lijn  $PP'$  door  $s$  voorstellen,

$$\bar{j}^2 = \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{\pi k R} n^2 s = 0,89 n^2 q s \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Bij de laatste herleiding is van (23) gebruik gemaakt.

§ 12. In de omstandigheid dat het gemiddelde van de *tweede* macht der „intensiteitsafwijking langs de lijn  $PP''$ ”, zooals wij  $j$  kunnen noemen, evenredig is met de *eerste* macht van hare lengte  $s$ , kunnen wij een aanwijzing van een korrelige structuur van het buigingsbeeld, in tegenstelling met een vezelige structuur zien. Ook is de coëfficiënt van  $s$  in (39) in overeenstemming met de in § 9 aangaande de afmetingen der granulatie gevonden uitkomst. Om dit in te zien zal de volgende ruwe beschouwing voldoende zijn.

Wij zagen dat de afwijkingen van de gemiddelde intensiteit  $n$  van dezelfde orde van grootte zijn als die intensiteit zelf en dat de afmetingen der granulaties van de orde  $q$  zijn. Stel nu wij ons in aansluiting hieraan voor dat de lijn  $s$  in een groot aantal stukken, elk van de grootte  $q$ , verdeeld wordt, en dat nu, naar het toeval, op deze stukken, telkens over hun volle lengte, de intensiteit  $2n$  of  $0$  is, de afwijking  $i'$  dus  $+n$  of  $-n$ . Het aantal stukken is

$$v = \frac{s}{q}$$

en als er hiervan  $\frac{1}{2} v + v'$  in het eerste en  $\frac{1}{2} v - v'$  in het tweede geval verkeeren, is de „intensiteitsafwijking langs de lijn”, de waarde van de integraal (4)

$$2 n q v'.$$

Het gemiddelde van de tweede macht hiervan wordt, in goede overeenstemming met (39)

$$4 n^2 q^2 \overline{v'^2} = n^2 q^2 v = n^2 q s,$$

daar volgens een bekende stelling  $\overline{v'^2} = \frac{1}{4} v$  is.

Ter uitgave in de werken der Akademie wordt aangeboden :

1. door den Heer C. E. A. WICHMANN het manuscript van zijne verhandeling „*Die Erdbeben des Indischen Archipels bis zum Jahre 1857*”.

2. door den Heer C. A. PEKELHARING, namens Mejuffrouw M. A. VAN HERWERDEN, het manuscript van hare verhandeling „*Untersuchungen über die parthenogenetische und geschlechtliche Fortpflanzung von Daphnia pulex*”.

De Voorzitter stelt dit manuscript ter beoordeeling in handen van de Heeren C. A. PEKELHARING en J. F. VAN BEMMELEN met verzoek in de volgende vergadering rapport uit te brengen.

Voor de boekerij der Akademie wordt ten geschenke aangeboden :

a. door den Heer F. M. JAEGER een exemplaar van zijn werk „*Lectures on the principle of symmetry and its applications in all natural sciences*.”

b. door den Heer L. E. J. BROUWER een exemplaar van de dissertatie van den Heer B. P. HAALMEIJER: „*Bijdragen tot de theorie der elementairoppervlakken*.”

c. door den Heer I. K. A. WERTHEIM SALOMONSON een exemplaar der dissertatie van Mejuffrouw ANNA SCHOONDERMARK „*Over gevoelsstoornissen bij een aantal klinische gevallen van periphere zenuwlaesies*.”

De vergadering wordt gesloten.

# KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

---

## VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING VAN ZATERDAG 26 JANUARI 1918.

DEEL XXVI.

N<sup>o</sup>. 7.

---

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.

Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

---

### INHOUD.

---

Ingekomen stukken, p. 1138.

Verwelkoming van het corresponderend lid, den Heer K. F. WENCKEBACH te Weenen, p. 1138.

Verslag van de Heeren C. A. PEKELHARING en J. F. VAN BEMMELEN over de ter uitgave in de Werken der Akademie aangeboden verhandeling van Mej. M. A. VAN HERWERDEN: „Untersuchungen über die parthenogenetische und geschlechtliche Fortpflanzung von *Daphnia pulex*”, p. 1138.

JAN DE VRIES: „Nulstelsels in het vlak”, p. 1142.

W. J. A. SCHOUTEN: „Over de Parallax van eenige Sterrenhoopen.” (Eerste mededeeling). (Aangeboden door de Heeren J. C. KAPTEYN en E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN), p. 1147.

A. W. K. DE JONG: „Het dubbelzuur van normaal- en allokaeelzuur”. (Aangeboden door den Heer P. VAN ROMBURGH), p. 1158.

Mej. L. KAISER: „Over het refractaire Stadium bij den Kikkergastrocnemius”. (Aangeboden door de Heeren G. VAN RIJNBEEK en I. K. A. WERTHEIM SALOMONSON), p. 1162.

D. J. HULSHOFF POL: „Cerebellair ataxie als stoornis der evenwicht-sensibiliteit”. (Aangeboden door de Heeren C. WINKLER en G. VAN RIJNBEEK), p. 1178.

A. H. W. ATEN: „De passiviteit van chroom”. (2e mededeeling). (Aangeboden door de Heeren A. F. HOLLEMAN en F. M. JAEGER), p. 1185.

J. M. BURGERS: „Opmerkingen over de theorie der dispersie”. (Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en H. KAMERLINGH ONNES), p. 1200.

G. NORDSTRÖM: „Een en ander over de energie van het zwaartekrachtsveld volgens de theorie van EINSTEIN”. (Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en H. KAMERLINGH ONNES), p. 1201.

J. J. VAN LAAR: „Over het verloop der waarden van  $a$  en  $b$  bij waterstof bij verschillende temperaturen en volumina”. II. (Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en F. A. H. SCHREINEMAKERS), p. 1209.

L. S. ORNSTEIN en F. ZERNIKE: „De Theorie der BROWN'sche beweging en de statistische mechanica”. (Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en W. H. JULIUS), p. 1227.

De Heer ERNST COHEN geeft het bestuur der Akademie in overweging om stappen te doen tot de stichting van een Ned. Rijkslaboratorium van onderzoek, in den trant van het Bureau of Standards te Washington e. d., p. 1234.

Gelukwensch door den Heer J. W. VAN WIJHE, namens de vergadering, aan den Heer H. A. LORENTZ met de herdenking van diens 40-jarig professoraat op 25 Januari 1918. p. 1234.

Errata, p. 1235.

---

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn :

1. Eene missive van Zijne Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 23 Januari 1918 No. 91 Afd. K. W. met verzoek om bericht en raad over een aanvraag van den Heer Dr. H. NORT te Gouda om eene subsidie van Regeeringswege voor zijne astronomische onderzoekingen.

De Voorzitter zou de Heeren J. C. KAPTEYN en E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN willen verzoeken om in de volgende vergadering de Afdeeling van advies te dienen over het antwoord, dat den Minister hierop te geven zal zijn. Aan beide heeren, niet ter vergadering aanwezig, zal dit verzoek schriftelijk worden overgebracht.

Aldus wordt besloten.

2. Eene kennisgeving namens het bestuur van de „*Imperial Academy*” te Tokyo, dat zij Baron Dr. NOBUSHIGE HOZUMI gekozen heeft tot haren President in de plaats van den onlangs overleden Baron Dr. DAIROKU KIKUCHI.

Aangenomen voor kennisgeving.

De Voorzitter spreekt een woord van welkom tot het corresponderend lid der Afdeeling, den Heer K. F. WENCKEBACH te Weenen, die ter vergadering aanwezig is.

**Physiologie.** De heer C. A. PEKELHARING brengt, mede namens den Heer J. F. VAN BEMMELEN, het volgende verslag uit over een verhandeling van Mejuffrouw M. A. VAN HERWERDEN, getiteld : „*Untersuchungen über die parthenogenetische und geschlechtliche Fortpflanzung von Daphnia pulex*”.

Het in deze verhandeling beschreven onderzoek heeft voornamelijk betrekking op de vraag, of bij *Daphnia* de overgang van de parthenogenetische tot de geslachtelijke voortplanting al dan niet door nitwendige omstandigheden wordt beheerscht.

WEISMANN heeft, in overeenstemming met zijn opvatting omtrent de onafhankelijkheid van het kiemplasma van invloeden van bñiten, de meening verdedigd, dat bij *Daphnia*, en bij *Cladocera* in het algemeen, de vorming van mannelijke geslachtscellen en van voor bevruchting geschikte eieren in bepaalde perioden van het leven, nitsluitend van erfelijke eigenschappen van het organisme zoude

afhangen. Anderen daarentegen zijn van meening, dat het periodiek voorkomen van geslachtelijke voortplanting bij deze organismen geheel door uitwendige omstandigheden wordt beheerscht. Nog weer anderen zijn tot het besluit gekomen, dat bij dit verschijnsel erfelijke eigenschappen wel een belangrijke rol spelen, maar dat toch invloeden van buiten daarbij in aanmerking komen. Overeenstemming is hieromtrent nog niet verkregen.

Mej. VAN HERWERDEN beschrijft nu de uitkomsten van een gedurende acht jaren voortgezet onderzoek aangaande dit vraagstuk.

Nadat zij had gevonden, dat in een sloot bij Utrecht, waarin de watervloo in grooten getale voorkwam, de voortplanting van het voorjaar af tot aan het eind van October toe, steeds langs parthenogenetischen weg plaats vond, terwijl daarna mannelijke exemplaren te voorschijn kwamen en vrouwelijke met voor bevruchting geschikte, zg. ephippiale, eieren, die, door een kapsel beschut, in staat zijn buiten het lichaam der moeder te overwinteren, is zij in het begin van November 1909 begonnen deze *Daphnia pulex*, waarvan nu, naast zich parthenogenetisch voortplantende wijfjes, ook ephippiale eieren aanwezig waren, in het laboratorium te kweken. Van de zoo verkregen cultuur werden, in het begin van Januari 1910, parthenogenetische wijfjes en bovendien eenige nog niet uitgekomen ephippiale eieren, elk afzonderlijk, verder gekweekt in gefiltreerd water uit de sloot waarnit de *Daphnia* afkomstig was. Als voedsel werden daaraan eencellige algen (meercellige bleken voor de diertjes schadelijk te zijn), uit dezelfde sloot afkomstig, toegevoegd. Van de nu uitkomende *Daphniae*, die uitsluitend parthenogenesis vertoonden, werden telkens eenige, elk afzonderlijk, in nieuw water overgebracht. Zoo kon, bij het steeds afzonderlijk voortkweken van pasgeboren individuen, van elk exemplaar nauwkenrig worden gezegd, tot welke generatie het behoorde. Eén stam, van een uit de cultuur van November 1909 afkomstig vrouwelijk exemplaar werd nog in December 1917, tijdens de beschrijving van het onderzoek, onafgebroken op deze wijze voortgekweekt. Een andere stam, eveneens uit een vrouwelijk exemplaar voortgekomen, bleef tot April 1911 in leven, terwijl een derde, uit een geïsoleerd ephippiaal ei gekweekt, tot in September 1915 behouden bleef. Deze beide stammen gingen niet door ontarding, maar tengevolge van ongunstige uitwendige omstandigheden te gronde.

Op deze wijze werd een materiaal verkregen, waaraan de invloed van uitwendige omstandigheden kon worden nagegaan. Telkens werden exemplaren van dezelfde generatie, elk afzonderlijk, gekweekt, vooreerst in den kelder, bij een temperatuur van 6° a 10° C.,

ten tweede bij, in den loop van het jaar sterk afwisselende kamertemperatuur en ten derde bovenop een op 20° C. verwarmde broedstoof, zoodat het water steeds ongeveer een temperatuur had van 16° C. Bij de zoo gekweekte dieren bleef de vorming van mannelijke organismen en van ephippiale eieren in het eerste jaar nit, maar daarna kwam, op een enkele uitzondering na, de gamogenese weer te voorschijn, en wel, onverschillig tot welke generatie de dieren behoorden en bij welke temperatuur zij leefden, in den herfst, om in het voorjaar weer voor parthenogenese plaats te maken.

In één geval ging de parthenogenese van 1910 tot 1916, in ongeveer 100 generaties, onafgebroken voort, zonder dat zich in dezen tijd ook slechts een enkel ephippiaal ei ontwikkelde. Toch was ook hier in den herfst een verandering in de geslachtscellen te vinden.

Het bleek namelijk mogelijk bij parthenogenetisch zich voortplantende *Daphniae* geslachtelijke voortplanting teweeg te brengen. Terwijl de temperatuur der omgeving daarop geen invloed had zolang zij schommelde binnen de grenzen waarbij het leven dezer diertjes ongestoord voort kan gaan, kon door kortstondige sterke afkoeling geslachtelijke ontwikkeling worden opgewekt, door namelijk de cultuur gedurende 24 uren in de ijskast te plaatsen. Dit gelukte echter nitsluitend in dien tijd, waarin gamogenese reeds werd voorbereid, in het einde van den zomer en in den winter, in den tijd dus waarin de geslachtscellen als in een labielen toestand verkeerend mochten worden aangemerkt. Van het eind van April af tot het midden van Augustus echter had deze kortstondige sterke afkoeling niet den geringsten invloed op de wijze van voortplanting. Verder bleek de generatie waartoe de dieren behoorden van geen invloed hoegenaamd te zijn op den uitslag dezer proeven.

Nu leverde de cultuur van *Daphniae* die zich 6 jaren achtereenvolgens onafgebroken langs parthenogenetischen weg hadden vermenigvuldigd, juist dezelfde uitkomst op. Ook hier kon alleen in den herfst en in den winter, ofschoon de dieren steeds bij dezelfde temperatuur leefden, door afkoeling gamogenese worden opgewekt. Ook hier bestond dus in dien tijd een labiele periode, al kwam die, zonder de afkoeling, niet te voorschijn.

Aan den anderen kant was het mogelijk, bij zich geslachtelijk voortplantende *Daphniae* de vorming van ephippiale eieren te onderdrukken, door het water waarin de diertjes leefden gedurende 24 uren op 25° a 29° C. te verwarmen.

Van eenigen invloed van het voedsel op de geslachtscellen viel

niets te bespeuren. Ook werd de werking van verscheidene aan het water toegevoegde stoffen onderzocht. Hieromtrent zij slechts vermeld, dat cyankalium, in uiterst geringe concentratie, voor het leven der diertjes niet alleen niet hinderlijk was, maar zelfs een stellig gunstigen invloed had op de vermenigvuldiging. Voor het opwekken van gamogenese was geen der onderzochte stoffen van duidelijke beteekenis.

De periodieke afwisseling van parthenogenetische en geslachtelijke voortplanting kan dus bij Daphniae, door de diertjes onder gunstige omstandigheden te kweken, wel eenigen tijd, in een enkel geval zelfs zeer lang, worden onderdrukt, maar niettemin bleek de neiging tot verandering in diezelfde perioden te blijven bestaan. De schrijfster komt dus tot het besluit, dat de oorzaak dier neiging waarschijnlijk in erfelijke eigenschappen der geslachtscellen zal moeten worden gezocht. Noch de temperatuur der omgeving, noch de aard van het voedsel, geven een verklaring van het verschijnsel dat de overgang tot gamogenese of de neiging daartoe juist in den herfst wordt aangetroffen.

In de verhandeling worden nog een aantal wetenswaardigheden vermeld die het onderzoek heeft opgeleverd. Wij meenen echter met het medegedeelde te kunnen volstaan, om den indruk te geven, dat Mej. VAN HERWERDEN een hoogst belangrijk vraagstuk met ruimen blik en veel scherpzinnigheid, zeer zorgvuldig heeft onderzocht en dat er dus alleszins reden is om deze verhandeling in de Werken der Akademie op te nemen.

(get.) C. A. PEKELHARING.

(,,) J. F. VAN BEMMELN.

De vergadering hecht hare goedkeuring aan de conclusie van het verslag. Aan Mej. VAN HERWERDEN zal hiervan mededeeling gedaan worden.

---

**Wiskunde.** — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan over: „Nulstelsels in het vlak”.

1. In een nulstelsel  $\mathfrak{N}(\alpha, \beta)$  is aan een punt  $N$  een groep van  $\alpha$  rechten  $n$ , door  $N$ , toegevoegd, aan een rechte  $n$  een groep van  $\beta$  op  $n$  gelegen punten  $N$ . Een punt heet *singulier*, wanneer het nulpunt is van  $\infty$  nulstralen; een rechte wordt *singulier* genoemd, als ze  $\infty$  nulpunten heeft.

De nulstelsels, waarvoor  $\alpha$  of  $\beta$  gelijk is aan 1 (*lineaire nulstelsels*) zijn daardoor gekenmerkt, dat ze steeds singuliere nulpunten hebben als  $\alpha = 1$ , steeds singuliere nulstralen vertoonen als  $\beta = 1$  is. Beschouwingen aangaande het geval  $\alpha = 1$  vindt men in mijne mededeelingen „*Vlakke lineaire nulstelsels*” (Verslagen deel XXI, bl. 1070) en „*Lineaire ebene Nullverwandschaften*” (Bull. de l’Acad. des Sciences du Sud de Zagreb, Juli 1917, Auszug aus der im Rad, Bd. 215, S. 122 veröffentlichten Abhandlung).

† Dat een niet-lineair nulstelsel niet noodzakelijk singuliere elementen bezit, blijkt o.a. uit de beschouwing van het nulstelsel  $\mathfrak{N}(3, 3n-6)$  gevormd door de buigpunten en hun raaklijnen voorkomend in een algemeen net van krommen van den  $n^{\text{en}}$  graad<sup>1)</sup>. Alleen voor  $n = 3$  heeft men in het algemeen een groep van 21 singuliere nulstralen, nl. de rechte bestanddeelen der binodale figuren.

2. Wij zullen onderstellen, dat een  $\mathfrak{N}(\alpha, \beta)$  in het bezit is van  $\sigma$  singuliere punten  $S$ , welke enkelvoudige nulpunten zijn op elken door hen getrokken, straal, en  $\sigma_*$  singuliere punten  $S_*$ , die twee nulpunten op elken straal vervangen<sup>2)</sup>. Verder nemen wij aan, dat er  $\bar{\sigma}$  singuliere stralen  $s$  zijn en  $\bar{\sigma}_*$  singuliere stralen  $s_*$  de laatste zijn daardoor gekenmerkt, dat ze voor elk van hun punten twee samengevallen nulstralen vertegenwoordigen.

Laat men de rechte  $n$  om het punt  $P$  wentelen, dan beschrijven de  $\beta$  nulpunten  $N$  een kromme ( $P$ ) van den graad  $(\alpha + \beta)$ , die in  $P$  een  $\alpha$ -voudig punt heeft.

1) Zie mijn mededeeling „*Twee nulstelsels, die door een net van kubische krommen worden bepaald*” (Versl. deel XXV, bl. 954—960).

2) In het lineaire nulstelsel gevormd door de raaklijnen en raakpunten van een bundel ( $c^n$ ) zijn de basispunten singuliere punten  $S_*$ , de dubbelpunten singuliere punten  $S$ .



Analoog omhullen de nulstralen  $n$ , die een nulpunt  $N$  op de rechte  $p$  hebben, een kromme  $(p)$  van de klasse  $(\alpha + \beta)$ , waarvan  $p$  een  $\beta$ -voudige raaklijn is.

Door een punt  $S$  gaan  $(\alpha + \beta)$  raaklijnen van  $(p)$ ; hieruit blijkt, dat de nulpunten op de stralen van den waaier  $S$  een kromme  $(S)^{\alpha + \beta}$  vormen. Nu is  $S$  steeds een van de  $\beta$  nulpunten, zoodat een willekeurige straal van den waaier buiten  $S$  slechts  $(\beta - 1)$  punten  $N$  draagt. Bijgevolg heeft  $(S)^{\alpha + \beta}$  in  $S$  een  $(\alpha + 1)$ -voudig punt.

Analoog vindt men, dat  $(S_*)^{\alpha + \beta}$  in  $S_*$  een  $(\alpha + 2)$ -voudig punt bezit.

Verder vindt men, dat  $(s)_{\alpha + \beta}$  de rechte  $s$  tot  $(\beta + 1)$ -voudige raaklijn heeft, terwijl een rechte  $s_*$  een  $(\beta + 2)$ -voudige raaklijn van de kromme  $(s_*)_{\alpha + \beta}$  is.

3. De kromme  $(P)^{\alpha + \beta}$  is van de klasse  $(\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 1) - \alpha(\alpha - 1)$ . Door  $P$  gaan dus nog  $(2\alpha + \beta)(\beta - 1)$  raaklijnen, die haar elders aanraken. Hiertoe behooren blijkbaar de rechten  $PS_*$ , omdat  $S_*$  twee samengevallen nulpunten vertegenwoordigt. *Bijgevolg omhullen de nulstralen, die een dubbel nulpunt dragen, een kromme van de klasse  $(2\alpha + \beta)(\beta - 1) - \sigma_*$ .*

De volledige omhullingsfiguur omvat bovendien de  $\sigma_*$  klassepunten  $S_*$ .

De mogelijkheid bestaat natuurlijk, dat de omhulde kromme uiteenvalt. Dit geschiedt b.v. bij het nulstelsel, dat ontstaat als men aan elke raaklijn van een bundel  $(c^n)$  de  $(n - 2)$  punten toevoegt, waarin ze de  $c^n$  nog snijdt (satellietpunten van het raakpunt).

Men heeft dan te onderscheiden tusschen de omhulde der stationaire raaklijnen, die ieder *een* dubbel nulpunt dragen, en de omhulde der dubbelraaklijnen, die ieder *twee* dubbele nulpunten bevatten. De kromme  $(P)$  is thans de z.g. *satellietkromme*<sup>1)</sup>.

Op overeenkomstige wijs vindt men: *De meetkundige plaats der punten  $N$ , waarvoor twee der nulstralen  $n$  zijn samengevallen, is een kromme van den graad  $(\alpha + 2\beta)(\alpha - 1) - \bar{\sigma}_*$ .*

4. De krommen  $(p)_{\alpha + \beta}$  en  $(q)_{\alpha + \beta}$  hebben de  $\alpha$  nulstralen van het punt  $pq$  gemeen. Tot de overige gemeenschappelijke raaklijnen behooren blijkbaar de singuliere stralen  $s$  en  $s_*$ <sup>2)</sup>. Er zijn dus

<sup>1)</sup> Zie mijn mededeeling „*Over lineaire stelsels van algebraïsche vlakke krommen*” (Verslagen, deel XIII, bl. 749) of „*Faisceaux de courbes planes*” (Archives Teyler, série II, t. XI, p. 101).

<sup>2)</sup> Als  $\beta = 1$  is, hebben  $(p)$  en  $(q)$  behalve de  $\alpha$  nulstralen van  $pq$  slechts singuliere stralen gemeen; dan is dus  $\bar{\sigma} + \bar{\sigma}_* = \alpha^2 + \alpha + 1$ . De raaklijnen en raakpunten van een schaar leveren hiervoor een voorbeeld.

$(\alpha + \beta)^2 - \alpha - \sigma - \bar{\sigma}_*$  stralen  $n$ , waarvan een nulpunt  $N$  op  $p$ , een ander nulpunt  $N'$  op  $q$  ligt.

Dit getal heeft nog een andere beteekenis. Als  $N$  de rechte  $p$  doorloopt, zullen de overige nulpunten  $N'$  van de door  $N$  gedragen nulstralen  $n$  een kromme  $(N')_p$  beschrijven. Haar graad is blijkbaar gelijk aan het aantal stralen  $n$ , die een nulpunt op  $p$ , een ander op  $q$  hebben.

Beschouwen wij nu de punten, welke  $(N')_p$  met  $p$  gemeen heeft.

Elk der  $\beta$  nulpunten van  $p$  behoort als punt  $N'$  bij elk der overige  $(\beta - 1)$  nulpunten, is dus een  $(\beta - 1)$ -voudig punt der kromme  $(N')$ . De overige op  $p$  gelegen punten  $N'$  zijn blijkbaar dubbele nulpunten op een der door hen bepaalde nulstralen. Hieruit volgt dus:

*De meetkundige plaats der dubbele nulpunten is een kromme  $(N_1)$  van den graad  $\alpha^2 + 2\alpha\beta - \alpha + \beta - \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_*$ .*

Analoog levert de beschouwing der krommen  $(P)$  en  $(Q)$  ten slotte: *De dubbele nulstralen omhullen een kromme  $(u_1)$  van de klasse  $\beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha - \beta - \sigma - \sigma_*$ .*

5. Met behulp van een willekeurige kegelsnede  $\varphi^2$  kan men als volgt uit een gegeven nulstelsel een ander afleiden. Zij  $N$  een der nulpunten van den straal  $n$ ,  $N^*$  het snijpunt van  $n$  met de poollijn van  $N$  t. o. v.  $\varphi^2$ . Nu ontstaat een nieuw nulstelsel als men op elke rechte  $n$  de nulpunten  $N$  vervangt door de overeenkomstige punten  $N^*$  <sup>1)</sup>. Het getal  $\beta$  blijft behouden. Om te vinden waarin  $\alpha$  overgaat, merken wij op, dat de nulstralen  $n$  van het nieuwe nulpunt  $N^*$  een van hun oude nulpunten  $N$  moeten hebben op de poollijn  $p$  van  $N^*$  t. o. v.  $\varphi^2$ . Nu omhullen de nulstralen  $n$  der punten van  $p$  de kromme  $(p)_{\alpha + \beta}$ . Op elk van de  $(\alpha + \beta)$  raaklijnen, welke zij door  $N^*$  zendt, is  $N^*$  een der nieuwe nulpunten.

*Door de harmonische transformatie wordt  $\mathfrak{N}(\alpha, \beta)$  dus omgezet in een  $\mathfrak{N}^*(\alpha + \beta, \beta)$ .*

Als  $N$  op  $\varphi^2$  ligt, terwijl een van zijn nulstralen aan  $\varphi^2$  raakt, dan wordt  $N^*$  een willekeurig punt van  $n$ , en  $n$  een singuliere rechte van  $\alpha^*$ .

Om het aantal dezer singuliere stralen te bepalen, voegen wij aan elke raaklijn  $n$  van  $\varphi^2$  de  $\beta$  raaklijnen  $p$  toe, welke  $n$  in haar  $\beta$  nulpunten  $N$  ontmoeten.

De door  $p$  bepaalde omhulde  $(p)_{\alpha + \beta}$  heeft met  $\varphi^2$  blijkbaar  $2(\alpha + \beta)$  raaklijnen gemeen. Behalve de rechte  $p$ , die, als  $\beta$ -voudige

<sup>1)</sup> De dual hiermee overeenkomende „harmonische” transformatie heb ik vroeger op een  $\mathfrak{N}(1, p)$  toegepast. („*Vlakke lineaire nulstelsels*”, t. a. p.).

raaklijn der omhulde ( $p$ ),  $\beta$  gemeenschappelijke raaklijnen vervangt, zijn dus aan  $p$  toegevoegd  $(2\alpha + \beta)$  stralen  $n$ . De verwantschap tusschen  $p$  en  $n$  heeft  $2(\alpha + \beta)$  coïncidenties; op  $q^2$  liggen dus  $2(\alpha + \beta)$  punten  $N$ , waarvan een der stralen  $n$  aan  $q^2$  raakt. Anders gezegd  $\mathfrak{R}^*(\alpha + \beta, \beta)$  heeft  $2(\alpha + \beta)$  singuliere stralen meer dan  $\mathfrak{R}(\alpha, \beta)$ .

Bij de duale transformatie gaat  $\mathfrak{R}(\alpha, \beta)$  over in een  $\mathfrak{R}^*(\alpha, \alpha + \beta)$ , welke  $2(\alpha + \beta)$  singuliere punten meer dan  $\mathfrak{R}$  bezit.

6. De harmonische transformatie kan als volgt door een meer algemeene vervorming worden vervangen.

De poolkromme  $\pi$  van een punt  $N$  t. o. v. een gegeven kromme  $\Phi^{m+1}$  snijdt den nulstraal  $n$  in  $m$  punten  $N^*$ , die wij als nieuwe nulpunten van  $n$  zullen beschouwen. In het nieuwe nulstelsel  $\mathfrak{R}^*$  heeft elke rechte dan  $m\beta$  nulpunten  $N^*$ .

Daar  $N^*$  op de poolkromme  $\pi^m$  van  $N$  ligt, behoort  $N$  tot de poolrechte  $p$  van  $N^*$  t. o. v.  $\Phi^{m+1}$ . Nu gaan  $(\alpha + \beta)$  raaklijnen der kromme ( $p$ ) door  $N^*$ ; zij zijn de nulstralen van  $N^*$  voor  $\mathfrak{R}^*$ . D. w. z.  $\mathfrak{R}(\alpha, \beta)$  wordt door de nieuwe transformatie omgezet in een  $\mathfrak{R}^*(\alpha + \beta, m\beta)$ .

In tegenstelling met de harmonische transformatie levert deze vervorming *geen* nieuwe singuliere rechten.

7. Stelt men  $\alpha = 1, \beta = 1, m = 2$ , dan vindt uit een bilineair nulstelsel een  $\mathfrak{R}^*(2, 2)$  waarvoor de drie singuliere rechten van  $\mathfrak{R}(1, 1)$  eveneens singulier zijn.

Wij kunnen het bilineaire nulstelsel aanwijzen door

$$y_1 : \xi_2 \xi_3 = y_2 : \xi_1 \xi_3 = y_3 : -2 \xi_1 \xi_2$$

en de kromme  $\Phi^3$  door

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1x_2x_3 = 0.$$

De poolkromme van ( $y$ ) is dan voorgesteld door

$$y_1(x_1^2 + x_2x_3) + y_2(x_2^2 + x_1x_3) + y_3(x_3^2 + x_1x_2) = 0.$$

Voor het nulstelsel  $\mathfrak{R}(2, 2)$  is dus

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 \xi_3 (x_1^2 + x_2 x_3) + \xi_1 \xi_3 (x_2^2 + x_1 x_3) - 2 \xi_1 \xi_2 (x_3^2 + x_1 x_2) &= 0 \\ \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

Om de vergelijking der kromme ( $P$ )<sup>4</sup> te vinden hebben wij deze twee vergelijkingen te combineeren met

$$p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3 = 0.$$

Eliminatie van  $\xi_k$  levert dan voor ( $P$ )<sup>4</sup>

$$(p_1 x_3 - p_3 x_1)(p_2 x_1 - p_1 x_2)(x_1^2 + x_2 x_3) + (p_3 x_2 - p_2 x_3)(p_2 x_1 - p_1 x_2)(x_2^2 + x_1 x_3) - 2(p_3 x_2 - p_2 x_3)(p_1 x_3 - p_3 x_1)(x_3^2 + x_1 x_2) = 0.$$

De vergelijkingen (1) bepalen de beide nulpunten der rechte ( $\xi$ ) als snijpunten van ( $\xi$ ) met een kegelsnede. Als voorwaarde voor het samenvallen der beide nulpunten vindt men, na eenige herleiding, de vergelijking

$$\xi_1 \xi_2 \xi_3^4 - (\xi_1^3 + \xi_2^3) \xi_3^3 - 3 \xi_1^2 \xi_2^2 \xi_3^2 - 2 \xi_1 \xi_2 \xi_3 (\xi_1^3 + \xi_2^3) - 4 \xi_1^3 \xi_2^3 = 0.$$

Zij laat zien, dat de stralen, welke twee samengevallen nulpunten dragen, een kromme van de 6<sup>e</sup> klasse omhullen.

Hieruit blijkt dan, dat de kromme ( $P$ )<sup>4</sup> geen andere singulariteiten heeft buiten het dubbelpunt  $P$ .

Combinatie van (1) met de vergelijking

$$\pi_1 x_1 + \pi_2 x_2 + \pi_3 x_3 = 0$$

levert, door eliminatie van  $x_k$ , voor de kromme ( $p$ )<sub>4</sub>

$$\begin{aligned} & [(\pi_3 \xi_2 - \pi_2 \xi_3)^2 + (\pi_1 \xi_3 - \pi_3 \xi_1)(\pi_2 \xi_1 - \pi_1 \xi_2)] \xi_2 \xi_3 + \\ & [(\pi_1 \xi_3 - \pi_3 \xi_1)^2 + (\pi_3 \xi_2 - \pi_2 \xi_3)(\pi_2 \xi_1 - \pi_1 \xi_2)] \xi_1 \xi_3 = \\ & 2 [(\pi_3 \xi_2 - \pi_2 \xi_3)(\pi_1 \xi_3 - \pi_3 \xi_1) + (\pi_2 \xi_1 - \pi_1 \xi_2)^2] \xi_1 \xi_2. \end{aligned}$$

Hieraan wordt steeds voldaan door  $\xi_k = 0$ ,  $\xi_l = 0$ . Dit was te verwachten, omdat de rechten  $O_1 O_2$ ,  $O_2 O_3$ ,  $O_3 O_1$  singuliere stralen moeten wezen.

**Sterrenkunde.** — De heer J. C. KAPTEIJN biedt eene mededeeling aan van den heer W. J. A. SCHOUTEN: „*Over de Parallax van eenige Sterrenhoopen*”. (Eerste mededeeling).

(Mede aangeboden door den heer E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN).

Bij de meeste sterrenhoopen is directe meting der parallax of bepaling van den afstand uit de eigenbewegingen der sterren uitgesloten. We moeten dan tot andere middelen de toevlucht nemen. Door Prof. KAPTEYN is in Contrib. Mt. Wilson Observ. N°. 82 aangetoond, hoe men de parallax van sterrenhoopen kan bepalen uit de schijnbare magnitude, indien men aanneemt, dat de lichtkrachtkromme bekend en overal in de ruimte dezelfde is.

Indien men van een groep sterren, die practisch denzelfden afstand tot de zon hebben, de gemiddelde schijnbare magnitude  $\bar{m}$  bepaalt van alle leden, helderder dan  $m_0$ , dan heeft men, indien de lichtkrachtkromme den vorm  $\varphi(M) dM = \frac{h}{\sqrt{3,41}} e^{-h^2(M-K)^2} dM$  heeft,

$$\bar{m} = \frac{\int_{-\infty}^{m_0} m e^{-h^2(m+5-K+5 \log \pi)^2} dm}{\int_{-\infty}^{m_0} e^{-h^2(m+5-K+5 \log \pi)^2} dm}$$

of, na herleiding:

$$\bar{m} = K - 5 - 5 \log \pi - \frac{1}{2h} \frac{e^{-P^2}}{\int_{-\infty}^P e^{-z^2} dz},$$

waarin  $P = h(m_0 - K + 5 + 5 \log \pi)$ .

Indien  $h$  en  $K$  bekend zijn, is uit deze formule terstond  $\pi$  te bepalen.

Het is onze bedoeling na te gaan, in hoeverre deze manier van afstands-bepaling bruikbaar is en welke uitkomsten men verkrijgt bij eenige van de meest bekende sterrenhoopen. Om de praktische toepassing te vergemakkelijken hebben we bij ons onderzoek de methode in eenigszins anderen vorm gebruikt.

In het geciteerde artikel van Prof. KAPTEYN werd als voorbeeld een voorloopige waarde voor de parallax van de Kleine Magellaense Wolk bepaald en werd een nadere bepaling met behulp van een fotografie, die zich te Groningen op het Astronomisch

Laboratorium bevindt, in uitzicht gesteld. Prof. KAPTEYN was zoo vriendelijk dit aan mij op te dragen. Hiervoor en voor menigen nuttigen wenk, ook bij dit onderzoek, betuig ik hem gaarne mijn hartelijken dank.

Om te bepalen, hoeveel sterren van iedere magnitude de sterrenhoop bevat, verminderen we het aantal, dat de catalogus opgeeft, met het normaal aantal voor de beschouwde oppervlakte. Dit laatse wordt berekend met Publ. Gron. No. 27, Table IV, welke tabel we door de welwillendheid van Dr. VAN RHIJN reeds vóór het verschijnen konden raadplegen <sup>1)</sup>.

We nemen als eenheid den afstand, die overeenkomt met  $\pi = 0'' 1$ , dan wordt het verband tusschen absolute en schijnbare magnitude uitgedrukt door de formule  $M = m + 5 + 5 \log \tau$ . Daar alle sterren van den sterrenhoop zich op denzelfden afstand bevinden, is de verdeling der absolute magnitudes gelijk aan die van de schijnbare.

We bepalen nu de getallen  $\frac{A_{m+1}}{A_m}$ , waarbij  $A_m$  het aantal sterren van de magnitude  $m$  voorstelt en zien uit de lichtkrachtkromme met welke verhouding  $\frac{A_{M+1}}{A_M}$  deze getallen overeenstemmen. We weten dan met welke  $M$  iedere  $m$  overeenkomt en kunnen  $\pi$  bepalen.

Als lichtkrachtkromme gebruiken we de kromme, die door KAPTEYN is gegeven in Publ. Gron. No. 11, Table 6, V. Daar we steeds alle magnitudes in de visueele Harvardschaal zullen uitdrukken, wordt ook de lichtkrachtkromme op deze schaal gereduceerd. We vinden, als we een correctie Potsdam-Harvard = + 0<sup>m</sup>.17 aanbrengeu :

$M$	$\log A_M$	$A_{M+1}/A_M$	$M$	$\log A_M$	$A_{M+1}/A_M$
— 6.5	4.725	4.09	+ 1.5	9.507	2.56
— 5.5	5.337	5.45	+ 2.5	9.916	2.17
— 4.5	6.073	4.47	+ 3.5	0.253	1.86
— 3.5	6.723	4.17	+ 4.5	0.522	1.56
— 2.5	7.343	3.94	+ 5.5	0.714	1.46
— 1.5	7.939	3.63	+ 6.5	0.878	1.46
— 0.5	8.499	3.40	+ 7.5	1.042	
+ 0.5	9.030	3.00			

<sup>1)</sup> Daar we visueele magnitudes gebruiken, was het beter geweest de bereke-

We maken de onderstelling, dat de lichtkrachtkromme van KAPTEYN de frequenties der verschillende absolute magnitudes in de beschouwde sterrenhoopen aangeeft. Indien de waarden, die uit de opeenvolgende magnitudes voor de parallax gevonden worden, overeenstemmen, mogen we aannemen, dat deze werkhypothese juist is.

De meeste berekeningen, die voor ons onderzoek noodig zijn, waren reeds verricht, toen SHAPLEY zijn interessante *Studies based on the Colors and Magnitudes in Stellar Clusters*<sup>1)</sup> begon te publiceren. Hij vond daarin o.a. merkwaardige resultaten over het verband tusschen kleur en magnitude. Indien uit zijn onderzoekingen zou volgen, dat de kleurverdeeling in sterrenhoopen verschilt van die in het overige deel der ruimte, is het zeer onwaarschijnlijk, dat we er dezelfde lichtkrachtkromme zouden vinden. Om na te gaan, in hoeverre dit uit SHAPLEY's resultaten volgt, moeten we de door hem gevonden kleurverdeeling vergelijken met die onder de sterren van dezelfde absolute magnitude in een bepaald deel der ruimte. Deze laatste is echter slechts onnauwkeurig bekend. Aan onderzoekingen bij sterren met gemeten parallax kan men met het oog op de keuze van parallaxsterren geen groote waarde toekennen. Een der belangrijkste bijdragen tot oplossing van het probleem werd door SCHWARZSCHILD gegeven in zijn *Ueber die Häufigkeit und Leuchtkraft der Sterne von verschiedenem Spektraltypus.*<sup>2)</sup> Hij maakte gebruik van de component, loodrecht op de richting naar het apex van de eigenbewegingen in Boss' Preliminary General Catalogue. Indien we de tabel, die op pag. 510 van zijn studie voorkomt, door interpolatie uitbreiden en de aantallen uitdrukken in procenten van het aantal sterren van een bepaalde absolute magnitude, vinden we het volgende: (Zie tabel volgende pagina):

In deze tabel zijn ook opgegeven de gemiddelde kleurindices, die men voor iedere absolute magnitude vindt, indien men voor ieder type de door SHAPLEY aangenomen kleurindices gebruikt. Hoewel de verdeeling der spectra sterk verandert, is de gemiddelde kleur voor de verschillende absolute magnitudes nagenoeg dezelfde. Hiernit volgt reeds, wat ook a priori is in te zien, dat men de verdeeling

---

ningen te maken met Table V van genoemd werk. Deze tabel was destijds nog niet beschikbaar. We hebben er ons van overtuigd, dat deze onnauwkeurigheid nergens invloed kan hebben op de resultaten.

<sup>1)</sup> Contrib. Mt Wilson Observatory Nos. 115, 116, 117 en 126; Proc. Nat. Acad. of Sciences, Vol. I pag. 483; Vol. II, pag. 525; Vol. III, pag. 25, 267, 276 en 479.

<sup>2)</sup> Sitzungsberichte Akademie Berlin 1914, pag. 489—510.

Type \ M	+ 5.0	+ 4.0	+ 3.0	+ 2.0	+ 1.0	0.0	- 1.0
B	0	1	2	3	7	12	23
A	5	7	25	32	41	37	29
F	53	48	29	19	9	4	2
G	25	21	11	8	5	5	5
K	17	23	30	33	29	31	30
M	0	0	3	5	9	11	11
Gemidd. kleurindex	+ 0.81	+ 0.84	+ 0.81	+ 0.80	+ 0.74	+ 0.75	+ 0.70

der spectra moeilijk kan beoordeelen uit den gemiddelden kleurindex.

SHAPLEY'S resultaten zijn telkens als dit mogelijk was met bovenstaande tabel vergeleken. In groote trekken werd overeenstemming gevonden. Nauwkeurige vergelijking heeft echter geen zin, omdat:

- 1°. SCHWARZSCHILD'S resultaat slechts een voorloopig karakter draagt;
- 2°. SHAPLEY in verschillende gevallen niet voor alle sterren van een bepaalde magnitude kleurindices heeft bepaald en we geen waarborg hebben, dat de gebruikte sterren representatief zijn;
- 3°. we niet kunnen uitmaken, welke sterren wel en welke niet tot den sterrenhoop behooren;
- 4°. SHAPLEY'S hypothetische kleurklassen niet identiek zijn of behoeven te zijn met de gewone spectraaltypen;
- 5°. onze parallaxbepalingen de absolute grootten steeds een paar magnitudes onzeker laten.

We kunnen langs dezen weg niet met zekerheid vaststellen, of uit SHAPLEY'S waarnemingen moet worden afgeleid, dat de kleurverdeling in sterrenhoopen verschilt van die in ons sterrenstelsel. Door Prof. KAPTEYN is echter langs een anderen weg dit vraagstuk opgelost in een nog niet verschenen artikel. Z. Hooggeleerde was zoo vriendelijk mij hierover het volgende mede te deelen:

SHAPLEY vond, dat de absoluut heldere sterren in *Messier 13* rooder zijn dan de zwakkere. Nu is het bekend, dat in ons stelsel de witte sterren gemiddeld absoluut helderder zijn dan de roode sterren. Op het eerste gezicht schijnen deze feiten met elkaar in tegenspraak. De tegenstrijdigheid verdwijnt echter, als we het volgende in aanmerking nemen:

We bepalen ons tot een vergelijking van de lichtkrachtkrommen van *K* en *B* sterren. Het blijkt dat de gemiddelde absolute helder-



heid der  $K$  sterren wel veel geringer is dan die der  $B$  sterren, m.a.w. dat de lichtkrachtkromme der  $K$  sterren is gespreid om een veel zwakkere absolute helderheid dan die der  $B$  sterren; maar ook, dat de spreiding bij de  $K$  sterren veel grooter is dan bij de  $B$  sterren. Daardoor is er een betrekkelijk groot aantal absoluut heldere  $K$  sterren en zoo is het mogelijk, dat voor een bepaalde heldere  $M$  het aantal  $K$  sterren dat der  $B$  sterren overtreft. Voor zulk een absolute helderheid zal de gemiddelde kleurindex groot zijn en zelfs kan deze nog grooter zijn dan voor een zwakkere absolute magnitude.

Om dit denkbeeld nader uit te werken heeft Prof. KAPTEYN uit Contrib. Mt Wilson Observ. No. 82, Publ. Gron, N<sup>o</sup>. 11 en een nog ongepubliceerd artikel van KOHLSCHÜTTER over de lichtkrachtkromme der  $K$  sterren afgeleid het aantal sterren per volume-eenheid dicht bij de zon van elk spectraaltype tusschen de abs. magn.  $-0.5$  en  $+0.5$ .

Wanneer we aannemen, dat de lichtkrachtkromme den vorm heeft

$$\varphi(M) dM = \frac{h}{\sqrt{3.14}} e^{-h^2(M-K)^2} dM,$$

vond Prof. KAPTEYN, dat de krommen van elk type bepaald zijn door de volgende waarden der constanten  $K$  en  $h$ .

<i>Spectrum</i>	$K$	$h$
$B_0-B_5$	+ 0.5	0.442
$B_8-A_9$	+ 3.2	0.800
$F$	+ 6.7	0.520
$G$	+ 10.3	0.235
$K$	+ 14.2	0.191

We nemen als eerste benadering aan, dat er alleen  $A$  en  $K$  sterren zijn en onderstellen in overeenstemming met SEARES, dat hun gemiddelde kleurindex resp.  $+0.2$  en  $+1.3$  bedraagt.<sup>1)</sup> Met de bovengenoemde gegevens gaan we nu de relatieve frequenties van elk spectrum (in casu  $A$  en  $K$ ) berekenen voor elke absolute magnitude en hieruit leiden we voor iedere  $M$  den gemiddelden kleurindex af in het mengsel  $A$  en  $K$  sterren.

<sup>1)</sup> Volgens het bovengenoemde onderzoek van SCHWARZSCHILD vormen bij  $M = 0.0$  de  $A$  sterren 37%, en de  $K$  sterren 31% van het totale aantal.

Deze berekeningen zijn door Prof. KAPTEYN uitgevoerd en de uitkomsten zijn vergeleken met SHAPLEY's resultaten voor *Messier* 13. Om dit te kunnen doen werd aangenomen, dat de parallax van dezen sterrenhoop  $\pi = 0''.000159$  is<sup>1)</sup>. We kunnen nu voor iedere schijnbare magnitude de corresponderende absolute magnitude vinden, daar  $M = m - 14.0$  is.

We kunnen nu ook in de onderstelling, dat de lichtkrachtkrommen in *Messier* 13 dezelfde zijn als in ons systeem voor iedere absolute magnitude den gemiddelden kleurindex berekenen. Deze berekende kleurindices zijn in de volgende tabel in kolom 3 opgegeven. De vierde kolom bevat de door SHAPLEY waargenomen kleurindices.

		Gemiddelde kleurindex.		
m	M	Berekend	Waargenomen	W-R
12.2	- 1.8	+ 1.30	+ 1.28	- 0.02
12.9	- 1.1	+ 1.28	+ 0.86	+ 0.42
13.5	- 0.5	+ 1.12	+ 0.96	- 0.16
14.1	+ 0.1	+ 0.85	+ 0.73	- 0.12
14.7	+ 0.7	+ 0.59	+ 0.65	+ 0.06
15.3	+ 1.3	+ 0.34	+ 0.39	+ 0.05

De overeenstemming tusschen de derde en vierde kolom is voldoende. Op deze wijze is door Prof. KAPTEYN niet slechts bewezen, dat uit SHAPLEY's resultaten niet mag worden afgeleid, dat de kleurverdeling in sterrenhoopen verschilt van die in ons systeem; maar ook, dat zijn waarnemingen steunbieden aan de onderstelling, dat in sterrenhoopen dezelfde frequentie van absolute magnitudes bestaat, die wij hebben waargenomen onder de sterren in de nabijheid der zon.

Door HERTZSPRUNG is een methode aangegeven om de parallax te bepalen van sterrenhoopen, die  $\delta$  Cephei-variabels bevatten, wier periode bekend is<sup>2)</sup>. Miss LEAVITT had in *Periods of 25 variable*

<sup>1)</sup> Deze parallax verschilt van de waarde  $\pi = 0''.00040$ , die we uit de catalogi van LUDENDORFF en SHAPLEY hebben gevonden; doch is, de nauwkeurigheid in aanmerking genomen, er niet mee in strijd.

<sup>2)</sup> E. HERTZSPRUNG, Ueber die räumliche Verteilung der Veränderlichen vom Cephei Typus, A.N. 4692, Bd. 196, 201, 1913.

*stars in the small magellanic clouds*, Harvard Circular 173, aange-  
toond, dat bij deze sterren, wier periode tusschen  $1^d.25$  en  $127^d.0$   
ligt, een lineaire betrekking bestaat tusschen de logaritme van de  
periode en de helderheid.

De log. der periode neemt n.l. met ongeveer 0.48 per magnitude  
toe. HERTZSPRUNG berekende voor 13  $\delta$  Cephei variabels, die in Boss'  
catalogus voorkomen de gemiddelde periode en de theoretische  
parallax, dus ook de absolute magnitude. Bij een periode van  $6^d.6$   
werd  $M = -2.3$  (visuele magn.) gevonden. Met deze gegevens is  
voor iedere  $\delta$  Cephei veranderlijke de parallax te vinden als de  
periode en de magnitude bekend zijn.

In een viertal gevallen, waarin dergelijke variabels in den sterren-  
hoop bekend zijn, hebben we aangegeven, welke uitkomst volgens  
deze manier voor de parallax gevonden wordt.

Van HERTZSPRUNG's methode, hoe geniaal ook bedacht, kan men  
geen heel groote nauwkenrigheid verwachten. De magnitudeschaal,  
waarop Miss LEAVITT's onderzoekingen berusten, is blijkbaar niet  
nader gecontroleerd. HERTZSPRUNG's bepaling van de gemiddelde  
absolute magnitude van  $\delta$  Cephei variabels berust op de parallactische  
beweging van slechts 13 sterren. Daarom stelde SHAPLEY<sup>1)</sup> voor  
zich te beperken tot de clustervariabels met korte periode. Het is  
n.l. opvallend, dat alle variabels in Messier 3 en Messier 5 dezelfde  
periode hebben. SHAPLEY neemt aan, dat alle clustervariabels overal  
dezelfde  $M$  hebben. Bij een periode van  $0^d.54$  is volgens HERTZSPRUNG,  
in verband met de wet, die Miss LEAVITT vond,  $M = +1^m.5$  (photogr.).  
SHAPLEY neemt voorloopig aan, dat  $M$  tusschen  $-0.5$  en  $+1.5$   
(photogr.) ligt. We kunnen dan de parallax bepalen uit de gemid-  
delde magnitude der veranderlijke sterren.

Volkomen overeenkomst met onze resultaten wordt bereikt, indien  
we voor de absolute grootte der variabels aannemen,

bij Messier 3:  $M = +4.2$  (photogr. magn.)

„ Messier 5:  $= +4.0$

„ Messier 13:  $= +3.2$

bij de Kleine Magelh. Wolk:  $= +3.9$

Er is dus overeenstemming tusschen de parallaxbepalingen uit  
veranderlijke sterren en die met behulp der lichtkrachtkromme,  
wanneer de gemiddelde grootte der clustervariabels een paar magni-  
tudes zwakker is dan HERTZSPRUNG en SHAPLEY aannemen.

<sup>1)</sup> H. SHAPLEY, A Method for the Determination of the relative Distances of  
globular Clusters, Proc. Nat. Acad. Vol. III, 479, July 1917.

Als voorbeeld zullen we op de bovengeschetste manier de parallax van een tweetal sterrenhoopen bepalen. Voor toepassing van deze methode op andere sterrenhoopen wordt naar een volgende mededeeling verwezen.

### Messier 3.

*N. G. C.* 5272;  $\alpha_{1900} = 13^h 37^m 35^s$ ,  $\delta_{1900} = +28^\circ 52',9$ ,  $b = +77^\circ$ ,  $l = 8^\circ$ ; klasse: *C3*<sup>1)</sup>.

H. VON ZEIPEL. Catalogue de 1571 étoiles contenues dans l'amas globulaire Messier 3 (*N. G. C.* 5272). Annales de l'Observ. de Paris, Vol XXV, 1906.

De 3 gebruikte platen zijn te Parijs met het instrument van de Carte du Ciel genomen en de magnitudeschaal is bepaald op de manier, die in Parijs voor de Carte du Ciel gebruikelijk is; nl. door de diameters van beelden met verschillende expositietijden te vergelijken. Het nulpunt werd bepaald door aansluiting aan de Harvard Photometric Revision.

S. I. BAILEY, Variable Stars in the Cluster Messier 3, Annals Harvard Observ., Vol 78, part. I, 1913.

Deze verhandeling bevat o.a. de magnitudes van 22 vergelijkingssterren, gevonden met den meridiaanphotometer en door vergelijking met de North Polar Sequence. De 137 variabels zijn gemeten op 90 platen. Voor 110 werd de periode en de lichtkrachtkromme bepaald.

Van de 22 standaardmagnitudes van BAILEY komen er 20 in VON ZEIPEL voor. Met behulp van deze sterren gaan we na, in hoeverre VON ZEIPEL's magnitudeschaal juist is<sup>2)</sup>. Daartoe vergelijken we V. Z.'s magnitudes met de photometrische in BAILEY, Table I, colom 15. Het blijkt, dat V. Z.'s magnitudes constant  $1^m,4$  te helder zijn.

Indien we VON ZEIPEL's catalogus aftellen en aan de magnitudes een constante correctie  $+1^m,4$  aanbrengen, vinden we de volgende getallen:

$$\frac{A_{11.9}}{A_{10.9}} = 3.37. \quad \text{Dit geeft } -0.42 = 10.9 + 5 + 5 \log \pi$$

$$\log \pi = 0.74 - 4 \qquad \pi = 0''.0005^5$$

<sup>1)</sup> Positie en klassenindeeling is ontleend aan Annals Harvard Observ. Vol. 60, N<sup>o</sup>. 8.

<sup>2)</sup> De verbetering der magnitudes van BAILEY door SHAPLEY (Proc. Nat. Acad., Vol. III, pag. 480) heeft slechts betrekking op zwakkere sterren dan de door ons gebruikte.

Eenzoo:  $\frac{A_{12.4}}{A_{11.4}} = 3.44$  geeft  $\pi = 0''.0004$ .

$$\frac{A_{12.9}}{A_{11.9}} = 3.09 \quad \pi = 0''.0005$$

$$\frac{A_{13.4}}{A_{12.4}} = 2.72 \quad \pi = 0''.0006$$

$$\frac{A_{13.9}}{A_{12.9}} = 2.55 \quad \pi = 0''.0005$$

$$\frac{A_{14.4}}{A_{13.4}} = 2.16 \quad \pi = 0''.0007$$

Uit 6 bepalingen vinden we als gemiddelde :

$$\pi = 0''.00055 \pm 0.00003 \text{ (w. f.)}$$

Volgens SHAPLEY is de gemiddelde fotogr magnitnde der variabels 15.5 en 5  $\log r = -16.3$ , zoodat we voor de gemiddelde absolute magnitnde voor deze sterren vinden  $M = 15^m .5 - 11^m .3 = 4^m .2$ .

De gemiddelde periode is 0 .54, zoodat volgens HERTZSPRUNG de absolute grootte  $M = 0^m .0$  (visneel) is. Wanneer we, in navolging van HERTZSPRUNG voor den kleurindex der clustervariabels  $+ 1^m .5$  aannemen, vinden we langsdezen weg voor de parallax  $\pi = 0''.00015$ .

### *h en $\chi$ Persei.*

*h* Persei, *N. G. C.* 869,  $a_{1900} = 2^h 12^m .0$ ,  $d_{1900} = + 56^\circ 41'$ ,  
 $b = -3^\circ$ ,  $l = -103^\circ$ ; klasse: *D* 2.

$\chi$  Persei, *N. G. C.* 884,  $a_{1900} = 2^h 15^m .4$ ,  $d_{1900} = + 56^\circ 39'$ ,  
 $b = -3^\circ$ ,  $l = 103^\circ$ ; klasse: *D* 2.

O. A. L. PIHL. The stellar cluster  $\chi$  Persei micrometrically surveyed, Christiania, 1891.

Deze catalogus bevat de plaatsen en magnitudes van 236 sterren. De magnitudes zijn nauwkeurig visueel bepaald in aansluiting aan VOGEL's waarnemingen met een Zöllner'schen Photometer.

K. SCHWARZSCHILD. Beiträge zur photographischen Photometrie der Gestirne, Publ. der V. Kuffner'schen Sternwarte in Wien, Bd. V, C 1—138, 1900.

Bevat o.a. de photographische magnitudes van 111 sterren in  $\chi$  Persei en 91 sterren in *h* Persei. Zij zijn gevonden uit extrafocale opnamen in aansluiting aan Plejadenwaarnemingen.

A. VAN MAANEN. The Proper Motions of 1418 stars in and near the clusters *h* and  $\chi$  Persei, Diss. Utrecht 1911, Recherches astronomiques de l'observatoire d'Utrecht V.

Gemeten zijn 4 platen van KOSTINSKY en 2 van DONNER. Van 1410

sterren is de diameter gemeten. Om standaardmagnitudes te vinden werd voor heldere sterren de *B.D.* magnitude, gecorrigeerd volgens *Annals Harvard Observ.* Vol. 54, gebruikt; voor zwakke sterren werd de grootte bepaald uit tellingen, met behulp van *Publ. Gron.* N°. 18 en uit schattingen van NIJLAND.

B. MESSOW. Die beiden Sternhaufen im Perseus N. G. C 869 und 884, *Astron. Abhandl. der Hamburger Sternwarte in Bergedorf*, Bd. II, N° 2, 1913.

Plaatsen en magnitudes werden bepaald van 649 sterren door uitmeting van twee fotografische platen, door EBERHARD en LUDENDORFF in Potsdam genomen. Uit de diameters werd graphisch de magnitude bepaald met behulp van de standaardmagnitudes uit SCHWARZSCHILD. Zij zijn dus photographisch en uitgedrukt in de *P.D.* schaal,

De catalogi van KRÜGER, OERTEL, VOGEL, SCHUR, BRONSKY et STEBNITZKY, LINDEMANN, BALL and RAMBAUT werden hetzij wegens onvolledigheid, hetzij wegens onnauwkeurige magnitudes voor ons doel ongeschikt bevonden.

We tellen VAN MAANEN'S catalogus af en bepalen het aantal sterren van den sterrenhoop voor iedere schrijnbare grootte. Het magnitude-interval is voldoende om 7 parallaxbepalingen te doen. Indien we ze rangschikken naar afnemende magnitude der gebruikte sterren, vinden we

I	$\pi = 0''.004$
II	3
III	3
IV	5
V	7
VI	6
VII	8

Gemiddeld  $\pi = 0''.005 \pm 0''.0005$ .

De uitkomsten toonen een systematischen gang met afnemende magnitude. De oorzaak hiervan kan een fout in de magnitudeschaal zijn, of het feit, dat de catalogus voor de gebruikte zwakkere magnitudes niet compleet is.

We maken nu dezelfde berekeningen voor MESSOW'S catalogus. Aan de uitkomst, die we dan vinden, is minder gewicht toe te kennen, omdat MESSOW'S magnitudes berusten op SCHWARZSCHILD'S photographische schaal en KAPTEYN'S lichtkrachtkromme voor visueele magnitudes geldt.

We vinden uit 7 bepalingen:

$$\pi = 0'',003 \pm 0'',0003.$$

Om na te gaan of het verschil in uitkomst bij VAN MAANEN en MESSOW uit de gebruikte magnitudeschaal is te verklaren, reduceeren we VAN MAANEN's magnitudes op SCHWARZCHILD's standaards. Daartoe worden de schijnbare grootten van 197 sterren in VAN MAANEN's catalogus en SCHWARZCHILD's verhandeling met elkaar vergeleken. De identificeering werd vergemakkelijkt door PIHL of OERTEL en BRONSKY et STEBNITZKY te gebruiken. Het blijkt dat voor zwakke magnitudes SCHWARZCHILD's schaal enger is dan die van VAN MAANEN. Voor de gecorrigeerde magnitudes worden dan de getallen  $A_m$  bepaald.

Daarna vinden we uit 4 bepalingen:

$$\pi = 0'',0035 \pm 0,0007.$$

Het resultaat is nu in overeenkomst met wat we uit MESSOW's catalogus vonden. De eerste uitkomst, die op VAN MAANEN's visueele magnitudes berust, is waarschijnlijk meer betrouwbaar.

We maken nu nog de berekeningen voor den catalogus van PIHL. Dan vinden we uit 4 bepalingen:

$$\pi = 0'',004 \pm 0'',0005.$$

Wanneer we alle bepalingen in aanmerking nemen, mogen we daaruit als waarschijnlijkste waarde voor de parallax afleiden:

$$\pi = 0'',004.$$

*Amsterdam*, December 1917.

---

**Scheikunde.** — De Heer v. ROMBURGH biedt eene mededeeling aan van den correspondent A. W. K. DE JONG over „*Het dubbelzuur van normaal- en allokaneeelzuur*”.

Dit dubbelzuur laat zich op de bekende wijzen bereiden door bijv. een aan beide zuren bij gewone temperatuur verzadigde oplossing langzaam te laten kristalliseeren, of wel door in die oplossing bij verwarming gelijke hoeveelheden van de zuren op te lossen, waarbij het dubbelzuur zich dan bij het afkoelen afzet.

Uit normaal kaneelzuur kan het gemakkelijk op de volgende wijze bereid worden. Een verdunde waterige oplossing van natriumcinnamaat (10 gr. kaneelzuur per Liter) wordt gedurende voldoende tijd (in Buitenzorg zijn ongeveer 3 maanden bij alleen 's morgens belichten voldoende voor bakken van  $\pm 12$  L. inhoud en  $\pm 500$  cm<sup>2</sup> oppervlakte) in open bakken belicht. Hierna wordt de oplossing tot droog uitgedampt; met sterk HCl maakt men de zuren vrij en scheidt deze door verhitten met autobenzine van het keukenzout. De benzine-oplossing geeft dikwijls bij afkoelen kristallen van  $\beta$ -kaneelzuur, dat bij staan in den  $\alpha$ -vorm overgaat. Na het afkoelen wordt de oplossing in een schaal aan de lucht geplaatst. Meestal begint zij reeds spoedig te kristalliseeren en er ontstaan goed gevormde, dikwijls ruitvormige kristallen van het dubbelzuur. Bij het verder van zelf uitdampen van de oplossing zetten zich of kristallen van allokaneeelzuur af of wel komt dit zuur als olie er uit.

Waar van het normaal kaneelzuur 2 vormen bestaan en van het allozuur er 3 bekend zijn, zou het zeer goed mogelijk kunnen wezen, dat er meerdere verschillende dubbelzuren bestonden.

Nu is het niet moeilijk aan beide zuren verzadigde oplossingen te maken, die tevens in evenwicht zijn met een van de 3 verschillende vormen van allokaneeelzuur.

Hiertoe bereidt men een warm geconcentreerde oplossing van de twee zuren en zorgt er voor deze ongeveer  $\frac{1}{4}$  uur te koken. Men sluit de kolf met een wattenprop, om infectie tegen te gaan, en laat haar afkoelen, waardoor het dubbelzuur zich afzet en daarnaast het allozuur in gesmolten toestand (de temperatuur hier is  $\pm 25-30^\circ$ ). Deze oplossing is in evenwicht met allokaneeelzuur van  $42^\circ$  smeltpunt. Wordt deze oplossing geënt met allokaneeelzuur van  $58^\circ$  of  $68^\circ$  smeltpunt, dan kristalliseert zij reeds spoedig uit en krijgt men op-



lossingen, die met deze 2 modificaties in evenwicht zijn. Laat men nu deze oplossingen aan de lucht kristalliseeren, dan zet zich het dubbelzuur naast de modificatie van het allokaneelzuur af.

De benzine-oplossing, waarover hiervoor werd gesproken, kan ook door enten met de gewenschte vormen oplossingen geven, die aan het doel beantwoorden.

Op deze wijze is het gemakkelijk het dubbelzuur naast groote kristallen van allokaneelzuur van 58° of 68° smeltpunt te laten kristalliseeren.

Door een warm geconcentreerde benzine-oplossing van de twee zuren  $\frac{1}{4}$  uur te koken, kan men bij afkoeling het dubbelzuur krijgen, dat zich naast gesmolten 42°-zuur afzet.

De op deze wijze verkregen dubbelzuren werden geanalyseerd op de in het Rec. 31, 259 medegedeelde methode, waarbij bleek, dat alle uit gelijke hoeveelheden van de zuren gevormd waren, zooals uit de volgende opgaven kan blijken. Uit een voorproef met 0.0545 gr. allo- en 0.0510 gr. normaal kaneelzuur bleek dat de 20 cM<sup>3</sup> van de gebruikte benzine 2.25 cM<sup>3</sup>  $\frac{1}{10}$  N. allokaneelzuur als anilinezout oplosten.

Dubbelzuur	Gebruikte hoeveelheid gr.	Titratie		Terug gewogen opgelost kaneelzuur gr.	Normaal kaneelzuur gevonden.	
		15 cM.	20 cM.		gr.	%
naast 42° alle	0.1040	3.35	4.5	0.0185	0.0520	50
" 58° "	0.1005	3.1	4.1	0.0245	0.0511	52
" 68° "	0.1015	3.05	4.1	0.0215	0.0496	49

De verschillende dubbelzuren vertoonen dezelfde smelttrajecten; zij beginnen bij ongeveer 56° vochtig te worden en zijn bij ongeveer 90° geheel gesmolten. <sup>1)</sup>

Om nu na te gaan of deze soorten van dubbelzuren ontstaan naast kristallen van 58° en 68° smeltend allokaneelzuur en in een oplossing, die met 42°-zuur in evenwicht was, gelijk waren, werd een waterige oplossing gemaakt, die aan beide zuren bij gewone temperatuur verzadigd was en in evenwicht met 42° smeltend zuur verkeerde

<sup>1)</sup> Wellicht is het trikline allokaneelzuur van ERLNMEIJER JUN., met smeltpunt 80° het dubbelzuur van normaal en allokaneelzuur. Ber. 39, 1571 (1906); 40, 662, 663 (1907). Kristallographische metingen hebben wegens afwezigheid van de noodige instrumenten niet plaats gehad.

(ook hier kreeg men, bij 25—30° werkend, naast de dubbelzuurkristallen het allozuur in gesmolten toestand).

Aan deelen van deze oplossing werden kristallen van de dubbelzuren toegevoegd, die, om infectie van sporen van allokaneelzuur tegen te gaan, een paar maal met een weinig alcohol gewassen en daarna tusschen filtreerpapier gedroogd waren. Waren de dubbelzuren verschillend, dan zouden degene, die ontstaan waren naast bij 58° en 68° smeltend zuur in een oplossing, die met bij 42° smeltend zuur in evenwicht was, kristallisatie van bij 58°, respectievelijk bij 68° smeltend allokaneelzuur en hun dubbelzuren tengevolge moeten hebben. De proef heeft echter aangetoond, dat dit niet het geval is; de dubbelzuren vertoonden in het geheel geen werking op de oplossing, waarnit blijkt, dat ze identiek zijn.

Overeenkomstige proeven werden met een benzineoplossing genomen, die bereid was door een oplossing waaruit dubbelzuur en allokaneelzuur van 68° waren uitgekristalliseerd met een flinke hoeveelheid allokaneelzuur en dubbelzuur gedurende  $\frac{1}{4}$  uur te koken. De oplossing was den volgenden dag niet gekristalliseerd; even schudden deed haar kristalliseeren. Nadat zij hierna nog enkele uren gestaan had onder af en toe schudden werd de proef met de dubbelzuren genomen, waarbij ook in 't geheel geen werking te bespeuren was. De oplossing zelf bleek bij enten met allokaneelzuur van 58° en 68°-zuur dadelijk en in zeer sterke mate, veel sterker dan de waterige oplossing, te kristalliseeren. Het zal wel onnoodig zijn er bij te vermelden, dat het nemen van voorzorgen tegen infecties bij deze proeven noodzakelijk is.

Na de bekende opzien verwekkende verhandeling van BILMANN, waarin voor het eerst de gemakkelijke overgang van de allokaneelzuren in elkander werd medegedeeld en de oorzaak hiervan aan trimorphie werd geweten, zijn er verschillende mededeelingen van tegenstanders en voorstanders van deze voorstelling verschenen.<sup>1)</sup> De tegenstanders wenschen de zuren als chemische isomeren te beschouwen en zoo schrijven STOBBE en SCHÖNBURG<sup>2)</sup> als resultaat van hun uitvoerig onderzoek de conclusie neer „dass die Allo-und Isozimtsäuren drei chemisch verschiedene Individuen sind.”

Deze conclusie kan echter niet juist zijn in verband met het resultaat van mijn onderzoek, dat de dubbelzuren van normaal- en allokaneelzuur ontstaan naast de allozuren van 58° en 68° smeltpunt en in een oplossing, die in evenwicht was met het zuur van 42°

<sup>1)</sup> Zie literatuuropgaven Ann. 402, 187 (1913).

<sup>2)</sup> Ann. 402, 258 (1913).

smeltpunt, gelijk zijn. Waren de allokaneelzuren toch chemisch verschillend, dan zouden er ook 3 verschillende dubbelzuren met normaal kaneelzuur moeten bestaan. Neemt men echter de voorstelling van BIILMANN aan, dan is het optreden van éénzelfde dubbelzuur naast de 3 allokaneelzuurvormen te begrijpen, daar het de meest stabiele plaatsing der moleculen zou weergeven en andere plaatsingen sterk metastabiël of onbestaanbaar kunnen zijn.

Binnenkort hoop ik enkele proeven, welke genomen werden om deze tegenstrijdigheid op te lossen, mede te deelen.

*Buitenzorg, 11 October 1917.*

---

**Physiologie.** — De Heer VAN RIJNBEEK biedt eene mededeeling aan van Mej. L. KAISER: „*Over het refractaire Stadium bij den Kikkergastrocnemius*”. Naar onderzoekingen verricht in het physiologisch laboratorium der Universiteit van Amsterdam.

(Mede aangeboden door den Heer WERTHEIM SALOMONSON).

Omtrent den duur van het refractaire stadium, den korten tijd, volgend op een ultramaximalen prikkel, gedurende welken een nieuwe prikkel geen uitwerking heeft, verschillen de opgaven aanmerkelijk.

Gewoonlijk stelt men den duur van het refractaire stadium gelijk aan dien van de latente periode, voor welke TIGERSTEDT <sup>1)</sup> door een zeer groot aantal proeven een gemiddelde vond van 0.005". TIGERSTEDT vond tevens, dat deze waarde veranderde door veranderingen, welke betroffen: de temperatuur, den aard van den prikkel, de sterkte van den prikkel, de spanning of de te bewegen massa. Volgens WALLER <sup>2)</sup> wordt door vermoeienis de latente periode verlengd.

Den duur van het refractaire stadium zelf bepalend vond HELMHOLTZ <sup>3)</sup> hiervoor  $\frac{1}{600}$ " (dus ongeveer 0.0016"), vonden KRONECKER en STANLEY HALL <sup>4)</sup>  $\frac{1}{143}$ " (dus ongeveer 0.007") en soms  $\frac{1}{300}$ " (dus ongeveer 0.0032"), vond SAMJLOFF <sup>5)</sup> 0.002".

Betreffende den invloed van verschillende omstandigheden op den duur van het refractaire stadium vond ik geen opgaven. Wel zag SCHENCK <sup>6)</sup>, dat vermoeienis en ISHIHARA <sup>7)</sup>, dat afkoeling ongunstig waren voor de summatie, die natuurlijk des te sterker is, naarmate de tweede prikkel de spier treft, op een oogenblik, dat deze in staat is dit geprikkeld-zijn duidelijk te uiten.

Om na te gaan of de duur van het refractaire stadium door verschillende omstandigheden verandert, en zoo ja, in welke richting en in welke mate, werden de volgende proeven gedaan.

---

1) Archiv. f. Physiologie 1885 Supplement.

2) LUCIANI. Physiologie des Menschen III.

3) Verhandl. der Kön. Preuss. Akademie 1854.

4) Archiv. f. Physiologie 1879 Supplement.

5) Pfl. Archiv. Bd. 143.

6) Pfl. Archiv. Bd. 96.

7) Pfl. Archiv. Bd. 111.

*Vermoeienis.*

De gastrocnemius van een kikker, die met curarine was vergiftigd, werd op de gewone wijze geprepareerd en aan een hefboom bevestigd, met als tegengewicht 5 Gram; in het geheel maakte de spier evenwicht met 10 Gram. De elektroden waren aan het femur en aan de pees bevestigd. De kurven werden geschreven op het beroete papier van een valrotatorium. Voor de onvermoeide spier werd de minimumafstand gezocht, waarbij twee prikkels nog een summatie van de contracties gaven; vervolgens werd na vermoeienis door een aantal inductieslagen (100 in 1') met ditzelfde interval geprikkeld. Werde het refractaire stadium door vermoeienis van de spier langer, zooals men eenige reden had te verwachten, dan zou dit op eenvoudige en afdoende wijze blijken uit het feit, dat een prikkelinterval, dat vóór de vermoeienis nog juist aanleiding gaf tot summatie, bij bestaande vermoeienis geen summatie deed optreden, terwijl men door het interval zooveel te verlengen, dat juist weer summatie optrad, den nieuwen duur van het refractaire stadium zou kunnen vinden. Het gelukte echter slechts zelden vlug het prikkelinterval te vinden, dat zóó weinig verschilde met het refractaire stadium, dat een vergrooting van dit laatste aanleiding moest zijn tot geheel verdwijnen van de summatie. In de meeste gevallen heb ik mij tevreden moeten stellen met de veranderingen na te gaan, die de graad van summatie, d. i. het verschil van de contractiehoogten ten gevolge van één- en van tweemaal prikkelen, nitgedrukt in de contractiehoogte na één prikkel, onderging.

Als voorbeeld van een opname ten eerste No. 4.

Bij een interval van 0.002" treedt summatie op ter waarde van 0.1; vermoeienis, door middel van 400 openingslagen, doet de summatie 0 worden. Verlenging van het prikkelinterval tot 0.005" doet nauwelijks summatie terugkeeren, deze wordt n.l. 0.043; bij een prikkelfstand van 0.015" is de graad van summatie 0.12 geworden.

In opname No. 64 doet vermoeienis met een groot aantal openings- en sluitingslagen den graad van summatie van 0.066 achtereenvolgens 0.069, 0.08, 0.07, 0.07, 0.109, 0.14, 0.13, 0.08 en 0.09 worden. Het prikkelinterval is steeds 0.0053".

Het volgende is opname No. 20.

Na 95 openings- en sluitingslagen is de graad van summatie, die eerst 0.14 was, 0 geworden. Verlenging van het prikkelinterval van 0.0025" tot 0.004" doet haar weer 0.04 worden. Na 125 slagen is de summatie weer verdwenen, terwijl eene verlenging van den prikkelfstand tot 0.0063" nog eene summatie geeft van 0.12.

30 opnamen gaven de volgende resultaten:

Nummer van de proef	Temperatuur	Ondergane prikkels	Prikkel-interval	Contractiehoogte na één prikkel	Graad van summatie
1	?	0	0.005''	15.3 mM.	0.11
		—	"	8.5	0.179
2	10°	0	0.0075''	20.5	0.073
		400 O.S.	"	24.5	0
3	14°	0	0.0033''	14	0.14
		300 O.S.	"	7	0.214
		450 "	"	2	0.5
4	10°	0	0.002''	20	0.1
		400 O.S.	"	22.5	0
		"	0.005''	23	0.043
		"	0.015''	25	0.12
5	11°	0	0.002''	24.5	0.06
		400 O.S.	"	22	0.02
6	13°	0	0.0034''	27	0.08
		300 O.S.	"	29	0.04
		900 "	"	19.5	0.13
		900 + 1/2 u. rust	"	21.5	0.07
		1300 O.S.	"	11.5	0.39
		1700 "	"	6	1
7	13°	0	"	25	0.16
		300 O.S.	"	29	0.031
		600 "	"	22.5	0.02
		900 "	"	15.3	0.11
9	13°	0	0.004''	23	0.19
		250 O.S.	"	11	0.09
		450 "	0.008''	5	0
10	?	0	0.0068''	29	0.21
		300 O.S.	"	25	0.08
		600 "	"	10	0.2
		700 "	"	7.5	0.06
		800 "	"	4.5	0.11

Nummer van de proef	Temperatuur	Ondergane prikkels	Prikkel-interval	Contractiehoogte na één prikkel	Graad van summatie
11	22°	0	0.0036''	14.5 mM.	0.1
		50 O.S.	"	10.6	0.03
		125 "	"	6.75	0.03
		175 "	"	4	0.25
12	22°	0	0.005''	60	0.06
		400 O.S.	"	18	0.02
13	22°	0	0.0045''	63	0.05
		250 O.S.	"	15.5	0.18
14	21°	0	0.0054''	59.5	0.06
		25 O.S.	"	40	0.32
		65 "	"	29	0.005
		215 "	"	13	0.077
15	22°	0	0.0042''	12.6	0.19
		100 O.- en S.S.	"	8	0.125
		200 "	"	5.5	0.09
16	22°	0	0.0036''	36	0.028
		50 O.- en S.S.	"	31.5	0.03
		300 "	"	17	0.09
17	21°	0	0.0039''	46.3	0.028
		100 O.- en S.S.	"	47.5 ?	0.055 ?
		200 "	"	42	0.07
		300 "	"	35	0.09
		400 "	"	25.5	0.04
		600 "	"	7	0.28
18	21°	0	0.003''	40.5	0.11
		75 O.- en S.S.	"	40.5	0.03
		125 "	"	30	0.01
		125 "	0.005''	23	0.22
		175 "	0.003''	7	0.07

Nummer van de proef	Temperatuur	Ondergane prikkels	Prikkel-interval	Contractiehoogte na één prikkel	Graad van summatie
19	22°	0	0.003"	42.5 mM.	0.07
		10 O.- en S.S.	"	41	0.1
		20 "	"	42	0.06
		30 "	"	42	0.08
		40 "	"	41.6	0.08
		80 "	"	39.5	0.05
		130 "	"	39	0.05
		130 "	"	36	0.05
		155 "	"	35.5	0.04
		175 "	"	33	0.03
		225 "	"	30.5	0.08
		225 "	"	27.5	0.07
		255 "	"	20	0.3
		255 "	"	24	0.04
20	22°	0	0.0025"	54.5	0.14
		15 O.- en S.S.	"	56.5	0.02
		30 "	"	55	0.037
		45 "	"	55.25	0.03
		75 "	"	49.5	0
		75 "	"	54 ?	0 ?
		85 "	"	54	0.04
		95 "	"	53	0
		95 "	0.004"	53	0.04
		105 "	"	51	0.06
		115 "	"	49	0.02
		125 "	"	49	0
		125 "	0.0063"	46	0.12
		225 "	"	43.5	0.1
		325 "	"	35.5	0.07



Nummer van de proef	Temperatuur	Ondergane prikkel	Prikkel-interval	Contractiehoogte na één prikkel	Graad van summatie
21	22°	0	0.004''	65 mM.	0.16
		10 O.- en S.S.	"	67.5	0.07
		20 "	"	67	0.08
		40 "	"	70	0.05
		60 "	"	65	0
		60 "	0.005''	65	0.04
		80 "	"	62	-0.005
22	23°	0	0.003''	45.5	0.08
		15 O.- en S.S.	"	46	0
		15 "	0.0046''	46	0.11
		30 "	"	53	0.086
		50 "	"	42.7	0.14
		80 "	"	41.7	0.11
		130 "	"	39.5	0.11
		130 "	0.003''	41	0.01
23	23°	0	0.003''	52	0.11
		20 O.- en S.S.	"	45.5	0
		20 "	0.0056''	38	0.19
		45 "	"	37	0.14
		70 "	"	34.5	0.1
		95 "	"	30	0.13
		115 "	"	28	0.14
		165 "	"	25	0.02
		205 "	"	16.5	0
		24	25°	0	0.003''
10 O.- en S.S.	"			49	0.06
30 "	"			48	0.07
50 "	"			47	0.09
70 "	"			41	0.03
90 "	"			22.5	0.07
110 "	"			16.5	0.09
130 "	"			7	0

Nummer van de proef	Temperatuur	Ondergane prikkel	Prikkel-interval	Contractiehoogte na één prikkel	Graad van summatie
25	25°	0	0.0033''	—	—
		10 O.- en S.S.	"	73 mM.	0.04
		30 "	"	69	0.05
		45 "	"	67.7	0.03
		60 "	"	69	0.0007
		75 "	"	59.5	0.03
		90 "	"	57	0.09
		120 "	"	47.5	0.17
		170 "	"	38	0.21
		220 "	"	30.5	0.25
		220 "	"	19	0
		230 "	"	11	0.18
		240 "	"	7.5	0.13
		250 "	"	3.5	0
		250 "	0.0066''	3.5	0.43
26	25°	0	0.0033''	—	—
		10 O.- en S.S.	"	66	0.023
		20 "	"	70	0.007
		30 "	"	69	0
		45 "	"	56.5	0.035
		60 "	"	47	0.032
		70 "	"	38	0
27	26°	0	0.0036''	58	0.10
		10 O.- en S.S.	"	56 ?	0.044 ?
		20 "	"	37	0.04
		30 "	"	26.5	0.113
		40 "	"	13	0.115
32	?	0	0.0036''	38.5	0.3
		10 O.- en S.S.	"	43	0.18
		20 "	"	43	0.16

Nummer van de proef	Temperatuur	Ondergane prikkels	Prikkel-interval	Contractiehoogte na één prikkel	Graad van summatie
32	?	40 O.- en S.S.	0.0036''	43.5 mM.	0.11
		140 "	"	41	0.09
		260 "	"	35	0.09
		340 "	"	30	0.09
		340 "	"	29.5	0.02
		385 "	"	27	0.09
		435 "	"	24.5	0.05
		465 "	"	23	0.011
64	12°	0	0.0053''	38	0.066
		250 O.- en S.S.	"	44.5	0.069
		500 "	"	43	0.08
		800 "	"	35.5	0.07
		800 "	"	28	0.07
		820 "	"	25.25	0.109
		870 "	"	25	0.13
		1020 "	"	25	0.08
65	9°	0	0.0053''	44	0.03
		200 O.- en S.S.	"	59	0.07
		400 "	"	50	0.09
		600 "	"	39	0.13
66	11°	0	0.0058''	44.5	0.13
		200 O.- en S.S.	"	59.5	0.075
		400 "	"	53	0.04
		600 "	"	45.5	—
		800 "	"	32	0.22

Uit bovenstaande getallen blijkt, dat het prikkelinterval, waarbij vóór dat vermoeienis is ingetreden nog juist duidelijk summatie optrad, varieerde van 0.002'' tot 0.0075'' en meestal een waarde had van 0.003'' tot 0.005''. De graad van summatie was dan onge-

veer 0.1. Na de eerste tien, vijftien of twintig contracties was deze waarde in de meeste gevallen sterk gedaald (Proef 20, 21, 22, 23, 26, 27, 28, 32 en 66) n.l. tot ongeveer de helft en in sommige gevallen (Proef 22, 23, 26) zelfs tot 0. Behoudens talrijke onregelmatigheden, daalt de graad van summatie ook bij verdere prikkeling, maar langzamer dan in het begin; zoo werd ze na voortgezette prikkeling 0 in de proeven 2, 4, 9, 20, 21, 24, 25. Dat vergrooting van den prikkelafstand weer summatie kon doen optreden bleek in 7 gevallen. Het interval werd verlengd

in N <sup>o</sup> .	4	van	0.002"	tot	0.015"
„ „	9	„	0.004"	„	0.008"
„ „	20	„	0.0025"	„	0.0063"
„ „	21	„	0.004"	„	0.005"
„ „	23	„	0.003"	„	0.0056"
„ „	25	„	0.0033"	„	0.0066"
„ „	26	„	0.0033"	„	0.0054"

Hiertegenover staan echter een eveneens vrij groot aantal proeven (N<sup>o</sup>. 1, 3, 13, 14, 17, 19, 64, 65) waarin, meestal alleen in het begin, na prikkeling de graad van summatie grooter werd. Evenwel waren deze veranderingen in het algemeen aanzienlijk kleiner dan de bovengenoemde, terwijl pogingen om met een korteren prikkelafstand summatie te behouden niet gelukten.

Waaraan de onstandvastigheid van de gevolgen van de vermoeienis is toe te schrijven is niet gebleken. Die curvenreeksen, waarin de afname van de contractiehoogte, het inwerken van de vermoeienis dus, het regelmatig is, (Proef 19, 20, 21, 23) vertoonen een eveneens vrij regelmatig afnemen van den graad van summatie. Onregelmatigheden in het veranderen van de contractiehoogte treffen meestal samen met onregelmatigheden van den graad van summatie. Het duidelijkst is de afname van de summatie in die proeven, waarin bij vermoeienis de contractieduur sterk verlengd werd, terwijl de contractiehoogte ongeveer dezelfde bleef (Proef 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10); deze werden alle in Maart, bij vrij lage temperatuur genomen.

De invloed, die vermoeienis op den duur van het refractaire stadium kan hebben, is dus een verlengende.

#### *Temperatuur.*

De spier werd bij de volgende proeven in een glazen vat geplaatst, dat in de opnamen 29 tot 33 gevuld was met 0.7% NaCl-oplossing, terwijl het in opnamen 34, 60, 61, 62, 63 dienst deed als vochtige kamer. De spier werd aan den onderkant van den korten arm van den hefboom vastgemaakt en maakte evenwicht met een gewicht

van ongeveer 5 gram. Overigens was de opstelling geheel dezelfde als bij de andere opnamen.

Het volgende geeft proef N<sup>o</sup>. 62 weer.

Bij 10<sup>2</sup> was de graad van summatie 0.04, terwijl het prikkel-

Nummer van de Proef	Temperatuur	Prikkel-interval	Contractiehoogte na één prikkel	Graad van Summatie
29	20°	0.0027"	78 m.M.	0.21 ?
	10 <sup>2</sup>	"	54,7	0.021
	10°	0.0075"	50	0.07
	5°	"	49.5	0.037
	5°	0.013"	49.5	0.05
30	18°	0.0045"	57	0.14 ?
	13°	"	34.5	0
	8°	0.0117"	34	0.007
31	20°	0.0054"	39	0.18
	17°	"	27	0.18
33	21°	0.0018"	20	0.5
	10°	0.0063"	9,5	0.3
	10°	0.0018"	4.5	0.1
34	20°	0.0018"	27	0.43
	10°	"	20	0
60	20°	0.0022"	45	—
	20°	0.0042"	42	0.15
	10 <sup>2</sup>	"	38	—
	10°	0.0063"	38	—
	10°	0.0095"	38	0.13
62	10°	0.0047"	49	0.04
	5°	"	46	0
	5°	0.0115"	46	0.05
	2°	0.0115"	53	0
	2°	0.021"	53	0.037

interval 0.0047" was. Na afkoeling tot 5° trad bij dit interval geen summatie op, evenmin bij een interval van 0.0063", terwijl verlen-  
ging tot 0.0115" den graad van summatie 0.05 maakte. Nadat de  
spier tot 2° afgekoeld was, was de summatie 0 bij een prikkelafstand  
van 0.0115" en 0.0157", terwijl zij bij 0.021" interval 0.037 werd.

De andere opnamen gaven dergelijke resultaten n.l. (Zie pag. 1171).

Afkoeling doet het refractaire stadium dus langer worden.

Daar de temperatuur, waarvan uitgegaan werd, een willekeurige  
was, werd ook de invloed van verwarming nagegaan.

Uit de volgende getallen:

Nummer van de Proef	Temperatuur	Prikkel- interval	Contractiehoogte na één prikkel	Graad van Summatie
60	9°	0.005"	39 m.M.	0.05
	20°	"	47.5	0.5
	20°	0.0022"	47.5	0.03
61	9°	0.0053"	35.25	0.12
	26°	0.001"	77	0.117
63	8°	0.0078"	42	0.098
	22°	0.00105"	60	0.25
67	12°	0.0042"	42.75	0.05
	30°	0.0021"	83	0.096

bleek, dat verwarming het refractaire stadium korter doet worden.

#### *Koolzuur.*

In het vochtige kamertje, dat bij de vorige proeven gebruikt werd,  
werd koolzuur geleid; de opstelling was verder dezelfde. Hoewel  
inwerking van het koolzuurgas, van buitenaf, op de spier slechts  
zeer langzaam zal plaats hebben, mag men aannemen dat het toch,  
door het bij functie in de spier gevormde koolzuur te verhinderen  
deze te verlaten, binnen niet te langen tijd een merkbaaren invloed  
op den toestand van de spier oefent.

Het volgende vertoont opname 59.

Met een prikkelinterval van 0.0042" geeft de spier oorspronkelijk  
eene summatie van 0.06. Na 15' door koolzuurgas omgeven te zijn  
geweest, geeft ze voor dit interval geen summatie meer, terwijl deze

bij verlenging van den prikkelafstand tot 0.0068' weer 0.06 wordt. In het koolzuur blijvend geeft de spier na telkens 10', achtereenvolgens een summatie van 0.046, 0.036, 0.035 en 0. Vijf minuten later met een prikkelafstand van 0.0089" is de graad van summatie 0.009. Na 65' met een interval van 0.0115" bedraagt de summatie 0.019; tien minuten later is ze voor dezen afstand 0, voor een interval van 0.0136" 0.015, voor een van 0.0168" 0.03. 40 minuten later, na 115', wordt ook voor dezen afstand de graad van summatie 0.

De getallen, die de andere opnamen gaven, zijn de volgende:

Nummer van de Proef	Temperatuur	Verblijf in CO <sub>2</sub>	Prikkel-interval	Contractiehoogte na één prikkel	Graad van Summatie
43	13°	0	0.002"	28 m.M.	0.035
		10'	"	27.5	0.035
		20'	"	—	—
44	?	0	0.002"	29	0.55
		?	"	—	—
45	14°	0	0.002"	56.5	0.009
		10'	"	35.25	0.02
		10'	0.003"	35.25	0.02
		20'	0.002"	37	0
		20'	0.003"	32.5	0
		30'	0.002"	27.5	—
		30'	0.003'	20.5	0.1
46	14°	5'	0.0035"	62	0.024
		15	"	60	0.05
		25	"	57	0.026
47	17°	0	0.0033"	37.5	0.04
		10'	0.0066"	15	0.1
		10'	0.011"	15	0.17
48	11°	0	0.0055"	18	0.11
		5'	"	13	0.115
		10'	"	14.5	0
		15'	0.008"	13	0.08

Nummer van de Proef	Temperatuur	Verblijf in CO <sub>2</sub>	Prikkel-interval	Contractiehoogte na één prikkel	Graad van Summatie
49	?	0	0.003''	50 m.M.	0.04
		10'	"	45	0.04
		20'	"	40	0.025
50	?	0	0.0022''	41.5	0.08
		0	"	45	0.08
		10'	"	50.5	0.05
		20'	"	53	0.038
		30'	"	53	0.075
		30'	"	56	0.027
		40'	"	54	0.027
		50'	"	50.5	0.03
		60'	"	52	0.03
51	12°	0	0.0018''	37	0
		0	0.0054''	33	0.035
		5'	"	49.5	0.01
		25'	"	48.5	0.01
		35'	"	46	0.022
		50'	"	45	0
		52	16°	0	0.002''
15'	"			64.5	0.05
25'	"			54.5	0.12
35'	"			54	0.13
53	13°	0	0.0063''	46.5	0.15
		30'	"	43.5	0.103
		45'	0.0063''	46.5	0
		45'	0.0084''	46.5	0.02
		45'	0.0157''	46.5	0.054
54	13°	0	0.0048''	54	0.074
		20'	"	55.5	0.117



Nummer van de proef	Temperatuur	Verblijf in CO <sub>2</sub>	Prikkel-interval	Contractiehoogte na één prikkel	Graad van summatie
54	13°	30'	0.0048''	56 mM.	0.107
		50'	"	57.5	0.05
		60'	"	55	0.046
55	14°	0	0.00525''	34	0.03
		15'	"	23.5	0.04
		20'	"	19	0
		30'	"	—	0
56	6°	0	0.0054''	43	0
		?	"	23	0
		?	0.0072''	23	0
		?	0.0054''	20.5	0
57	12°	0	0.005''	40	0.04
		10'	"	35	0.03
		20'	"	33	0.03
		30'	"	32	0.03
		40'	"	32	0
		50'	—	—	?
58	8°	0	0.0066''	20.5	0.07
		10'	0.011''	26	0.019
		20'	0.014''	15	0.033
		30'	"	13.5	0.07
		40'	"	9	0.1
		40'	0.0088''	9	0
59	10°—13°	0	0.0042''	42	0.06
		15'	"	34	0
		15'	0.0068''	34	0.06
		25'	"	33	0.046
		35'	"	27.5	0.036
		45'	"	28	0.035

Nummer van de proef	Temperatuur	Verblijf in CO <sub>2</sub>	Prikkel-interval	Contractiehoogte na één prikkel	Graad van summatie
59	10°—13°	55'	0.0068"	27.5 mM.	0
		60'	0.0089"	25.5	0.009
		65'	0.0115"	26	0.019
		75'	"	33	0
		75'	0.0136"	33	0.015
		75'	0.0168"	33	0.03
		90'	"	35	0.013
		100'	"	35.5	0.056
		115'	"	31.5	0

Hieruit blijkt, dat wanneer de spier eenigen tijd door koolzuur omgeven was, de graad van summatie gewoonlijk aanmerkelijk kleiner werd en in ongeveer de helft van de gevallen zelfs tot 0 daalde (proef 45, 48, 51, 53, 55, 57, 58 en 59). Verlenging van het prikkelinterval deed dikwijls summatie terugkeeren, zooals in proef 48, 53, 58, 59. In sommige gevallen werd na eenigen tijd koolzuurtoevoer de graad van summatie grooter n.l. in proef 46, 47, 52, 54 en 55; meestal volgde dan echter toch een kleiner worden. Ook in deze reeks proeven kwam geringer worden van de summatie, eventueel met de noodzakelijkheid het prikkelinterval te verlengen, het duidelijkst tot uiting, wanneer de contractieduur veel langer en de contractiehoogte niet veel kleiner werd.

Uit het bovenstaande blijkt dat het refractaire stadium van den kikkergastrocnemius langer wordt door afkoeling, door koolzuur en door vermoeienis en wel vooral in die gevallen, waarin onder invloed hiervan, de contractie lang gerekt wordt. In verband hiermede doet afkoeling deze verlenging het regelmatigst optreden, terwijl bij vermoeienis het resultaat het meest onstandvastig is. De verlenging treedt op in verschillende mate; meestal was het prikkelinterval tenslotte twee- tot vijfmaal zoo lang als het oorspronkelijk was, zoodat men mag aannemen, dat ook het refractaire stadium ongeveer in die mate was veranderd.

Wat betreft den gemiddelden duur van het refractaire stadium, de waarden van de gebruikte intervallen zijn natuurlijk iets grooter dan deze, omdat de grens van het optreden van de summatie meestal

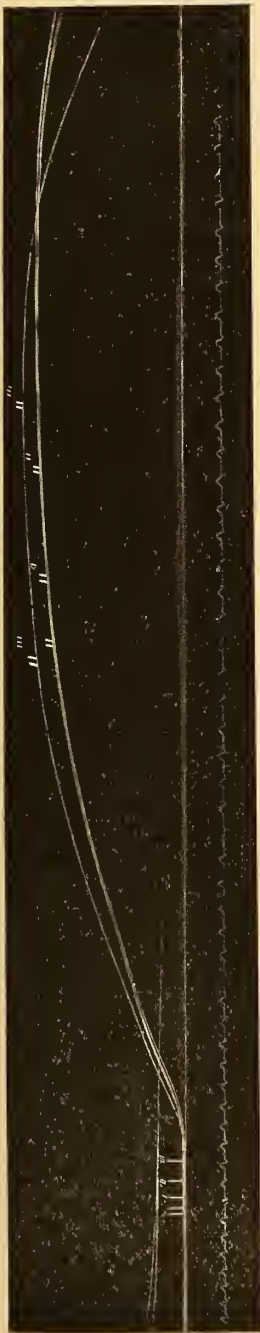
niet precies bereikt was. Het gemiddelde van de prikkelintervallen was voor:

9°	0.006"
10°	0.0047"
11°	0.0039"
12°	0.0047"
13°	0.0034"
14°	0.0033"
18°	0.0045"
20°	0.003"
21°	0.0029"
22°	0.0036"
23°	0.003"
25°	0.0032"
26°	0.0036"

waarin, hoewel wat onregelmatig door het betrekkelijk kleine aantal waarnemingen, duidelijk te zien is, dat dit, dus ook het refractaire stadium, grooter is bij lage temperatuur. Na afkoelen of verwarmen tot een bepaalde temperatuur was de gevonden waarde grooter, resp. kleiner dan bovenstaande.

Het gemiddelde van de getallen is iets kleiner dan 0.004", zoodat de gemiddelde waarde van het refractaire stadium van den kikergastrocnemius ook iets minder dan 0.004" moet zijn, hetgeen 0.001" kleiner is dan de waarde die TIGERSTEDT vond voor de latente periode.

De figuur geeft de contractiekrommen van een spier weer, nadat deze was afgekoeld van 14° tot 4°. Bij 14° werd als prikkelafstand, waarbij nog summatie optrad, 0.003" gevonden. Bij 4° geeft prikkeling met ditzelfde interval geen summatie: de contractiekromme na twee prikkels (II) valt samen met de contractiekromme ten gevolge van één prikkel (I). Het interval werd verlengd tot 0.0075", daarna tot 0.017", zonder dat summatie volgde (de lijnen II' en II''). Verlenging tot 0.028" geeft de kromme II''', waarin de summatie duidelijk is.



volge van één prikkel (I). Het interval werd verlengd tot 0.0075", daarna tot 0.017", zonder dat summatie volgde (de lijnen II' en II''). Verlenging tot 0.028" geeft de kromme II''', waarin de summatie duidelijk is.

**Physiologie.** — De Heer WINKLER biedt eene mededeeling aan van den Heer D. J. HULSHOFF POL: „*Cerebellair ataxie als stoornis der evenwicht-sensibiliteit*”.

(Mede aangeboden door den Heer VAN RIJNBEEK).

In een vorige verhandeling <sup>1)</sup> zette ik uiteen, dat de ataxie welke een tabeslijder bij het loopen vertoont, zoo goed als geheel opgeheven wordt wanneer hij door middel van zijn handen gevoel-contact heeft met een zoowel rechts als links van hem loopenden persoon.

De oorzaak van dezen verbeterden loop moet daarin worden gezocht, dat zoolang de aandoening in het lagere gedeelte van het ruggemerg zetelt, het hem mogelijk is de evenwicht-sensibiliteit der bovenste extremiteiten in gebruik te stellen (afferent-proprioceptieve prikkels) en op die wijze zich beter in de ruimte kan oriënteeren. Is dit laatste geschied, dan zullen al de voor de regelmatige bewegingen noodige efferente impulsen, langs de motorische banen, naar den romp en de onderste extremiteiten kunnen afvloeien waardoor de ataxie opgeheven, respectievelijk verbeterd wordt.

Ik drukte het aldus uit, dat waar een gewoon mensch loopt op de oogen en de evenwicht-sensibiliteit van vestibulair apparaat, den romp en de onderste ledematen, een tabeslijder het doet op de evenwicht-sensibiliteit van vestibulair apparaat, en de *resten* van die welke nog in den romp en onderste ledematen beschikbaar zijn. Heeft zoo iemand nu gevoel-contact met naast hem loopende personen, dan loopt hij *bovendien* nog op de evenwicht-sensibiliteit der bovenste ledematen.

Heeft men nu voor het onderzoek niet een tabes-, doch een vestibulair lijder, dan zal, zooals ik schreef, zulk een patiënt loopen op zijn oogen, de evenwicht-sensibiliteit van romp en beenen en de *resten* van de evenwicht-impulsen welke hem van uit het vestibulair apparaat worden toegevoegd. Geeft men nu ook zulk een patiënt gevoel-aanraking met naast hem gaande personen, dan blijkt dat het ook hem mogelijk wordt weer normaal of althans bijna normaal te loopen.

Waar de ataxie die deze twee soorten van patienten vertoonen, beide zoo goed als geheel opgeheven worden, door denzelfden

<sup>1)</sup> Iets over ons evenwicht-zintuig. Kon. Akad. 1917.

invloed, n.l. gevoel-aanraking door middel der bovenste extremiteiten, meende ik te moeten aannemen dat de daarbij betrokken afferent-proprioceptieve impulsen als van één soort zijn te beschouwen. Het vestibulair apparaat zal dan, *voor wat betreft onze loop-functie*, moeten worden beselionwd als een gemodificeerd en hoger ontwikkeld orgaan voor het evenwicht-gevoel van het hoofd.

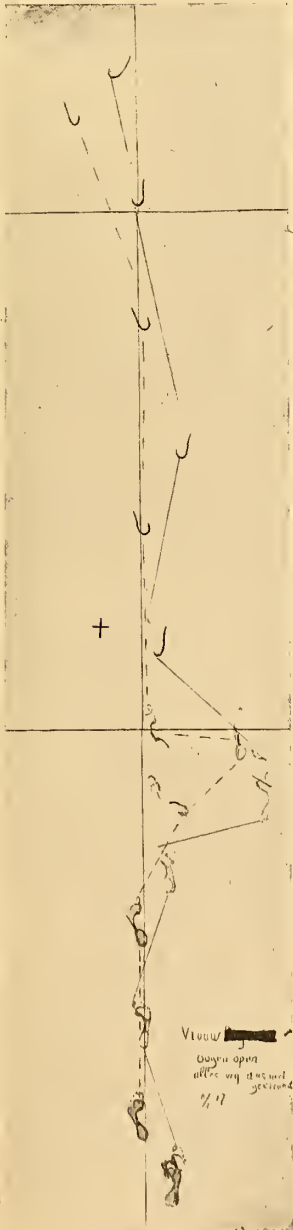


Fig. 1.

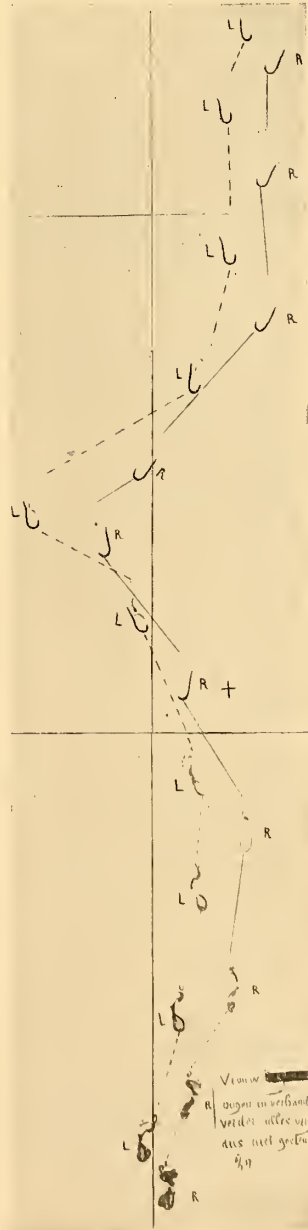


Fig. 2.

Het zou mij te ver voeren, in deze verhandeling, uitvoeriger op die hypothese in te gaan; ik verwijs den belangstellenden lezer daarvoor naar de oorsponkelijke mededeeling. Het eenige waarop ik de aandacht wil vestigen, is dat volgens deze opvatting, wat betreft ons evenwicht, er geen principieel onderscheid gemaakt moet worden tusschen de afferent-proprioceptieve prikkels welke van uit de kleinherzen zijstreng banen en die welke van uit het vestibulair apparaat naar het cerebellum worden gevoerd. Al deze prikkels hebben betrekking op het evenwicht-gevoel en regelen als dusdanig ons loopen. Deze verschillende afferente banen vormen dus één geheel, ze zijn te beschouwen als onderdeel van het zelfde evenwicht-systeem.

Van belang is het nu na te gaan, óf en zoo ja, welke veranderingen deze afferente prikkels ondergaan wanneer zij zich in het cerebellum oplossen.

Laat men, om dit na te gaan, patienten lijdende aan b.v. cerebellaire tumoren, dezelfde loopproeven verrichten als door mij bij tabes en vestibulair lijdens gedaan werd, dan blijkt dat de resultaten *geheel dezelfde* zijn.

Als voorbeeld wil ik mededeeling doen van het volgend geval waarbij tijdens het leven de diagnose gesteld werd op een tumor welke zich aan de linkerzijde bevond en aldaar drukte èn op het cerebellum èn op den nervus octavus. Zoowel tijdens de operatie als postmortem kon de diagnose bevestigd worden.

Liet men deze patiente geheel vrij loopen met open oogen, dan kreeg men het loopspoor als weergegeven in fig. 1. De ataxie is duidelijk zichtbaar. Sloot men bij haar de oogen dan ontstond het loopspoor in fig. 2. Na vergelijking blijkt dat de ataxie belangrijk is toegenomen. Dit is begrijpelijk daar in het laatste geval de afferent-exteroceptieve prikkels van uit de oogen ontbreken. Het verschil tusschen deze twee loopsporen geeft het resultaat van den invloed der oogen op de uitgevoerde bewegingen.

Van belang is het er de aandacht nogmaals op te vestigen (zie de vorige verhandeling) dat wanneer bij afwijkingen van het statisch zintuig, een tweede zintuig te hulp komt dit de gebreken van het eerste, wanneer deze althans van eenigszins ernstigen aard zijn, slechts ten deele kan vervangen. Uit fig. 1 blijkt dit ook duidelijk, daar niettegenstaande de oogen helpen, de ataxie toch bij lange na nog niet verdwenen is.

Laat men nu zulk een patiente met open oogen geheel vrij rondloopen, doch geeft haar gevoel-contact met naast haar gaande personen, dan ontstaat *niettegenstaande ook de hals-evenwicht impulsen*

door een verband grootendeels zijn *uitgeschakeld*, het loopspoor in fig. 3, en blijkt daaruit dat de ataxie geheel verdwenen is. De evenwicht-sensibiliteit toegevoerd van uit de armen is dus in staat het ontbrekende te compenseeren. Wat de oogen niet kunnen doen, deden de afferent-proprioceptieve prikkels van uit de bovenste extremiteiten. Ze compenseerden, dus hieven de ataxie op.

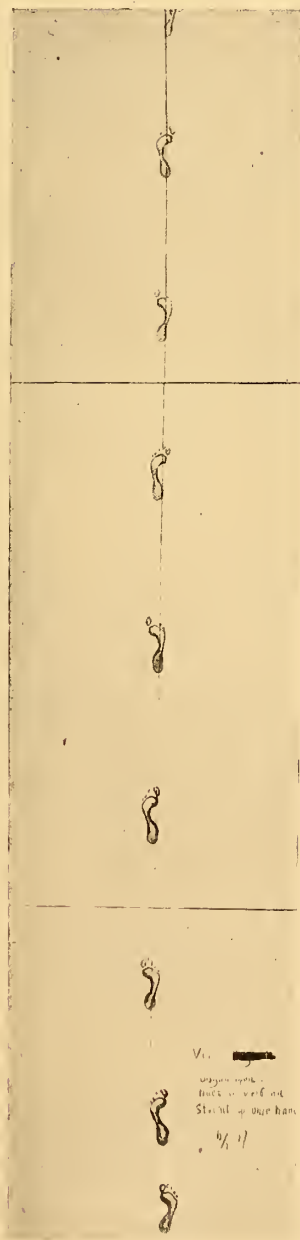


Fig. 3.

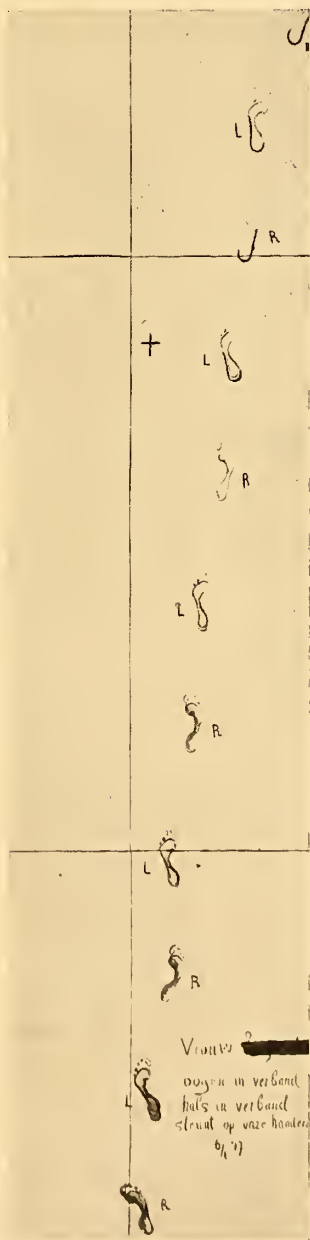


Fig. 4.

Daar men zou kunnen tegenwerpen dat deze belangrijke verbetering wellicht voor een groot gedeelte toch nog zou moeten worden toegeschreven aan de hulp der oogen, werd de proef op geheel dezelfde wijze herhaald, doch werden de oogen gesloten. Het daarna ontstane loopspoor vindt men in fig. 4. Ook nu wordt van ataxie niets bespeurd. De eenige afwijking is dat de patiente in stede van rechttuit te loopen naar rechts gaat. Waar deze afwijking geleidelijk plaats heeft en de looplijn recht blijft, dus manège gang nitgesloten is, komt het mij voor dat hier van een afwijking naar rechts niet gesproken kan worden. Het meest waarschijnlijke is het, dat patiente niet recht doch eenigszins schuin voor de streep gestaan heeft en daardoor ook in schuinsche richting heeft geloopt.

Uit het 4e fig. blijkt dus dat al mist de zieke de afferent-exteroceptieve impulsen van uit de oogen, het gevoel-contact langs de armen toch nog in staat is de ataxie te doen verdwijnen.

Men heeft hier dus weer geheel hetzelfde verschijnsel als bij de ataxie bij tabes en vestibulair afwijkingen.

Het ligt dus voor de hand aan te nemen, *dat sensibele cerebellair ataxie ontstaat wanneer in de kleine hersenen de evenwicht-banen onderbroken worden, welke van uit het ruggemerg en den nervus octavus daarheen voeren.*

Dit zou dus een bevestiging zijn van wat JELGERSMA<sup>1)</sup> vermoedde (bl. 217). „De onderstelling dat het cerebellum een centrale inner-,vatieplaats is voor deze beide zintuigen,<sup>2)</sup> is dus waarschijnlijk.”

Mocht mijn opvatting de juiste zijn, dan zal de sensibele cerebellair ataxie optreden wanneer het ziekte-proces zetelt in die gedeelten der kleine hersenen waar de evenwicht-banen doorheen loopen.

In verband met het medegedeelde rijzen enkele vragen.

De *eerste* is, of uitsluitend het cerebellum het evenwicht beheerscht.

Deze vraag is door tal van onderzoekers in ontkennenden zin beantwoord daar o.a. de dier-experimenten geleerd hebben dat experimenteel ontstane cerebellair ataxie na eenigen tijd geheel verdwijnen kan, wat er voor pleit dat de afferente evenwicht-impulsen ook langs andere banen het cerebrum bereiken kunnen.

De *tweede* vraag is, of de cerebellair ataxie steeds hetzelfde beeld vertoont.

Wanneer ik mij wat de dier-experimenten betreft, gemakshalve bepaal tot de zoo bekende onderzoekingen van LUCIANI,<sup>3)</sup> dan maakte ook hij onderscheid tusschen de gewone atactische bewegingen en

<sup>1)</sup> JELGERSMA. G. De functie der kleine hersenen. Psych. Neur. bl. 1915.

<sup>2)</sup> Bedoeld worden tonus- en evenwichtsorgaan en de diepe sensibiliteit.

<sup>3)</sup> LUCIANI. L. Das Kleinhirn. Georg Thieme. Leipzig 1893.



die welke door hem zijn aangeduid met den naam „dysmetrie”. Wil men deze verschillen in beeld duidelijk voor oogen hebben, dan verwijs ik naar de fotografieën in mijn verhandeling over „cerebellair ataxie”. Plaat VIII, en X tot en met XIV. <sup>1)</sup>

Bij den mensch, waarbij de aandoening niet zoo zuiver gelocaliseerd kan worden als bij het dier-experiment, is een conclusie moeilijker te trekken. Toch wil ik van enkele schrijvers aanbalingen doen, waaruit blijkt dat de afwijkingen bij het loopen niet steeds hetzelfde beeld geven.

Zoo schrijft JELGERSMA (l. c. bl. 227) dat de cerebellair ataxie te beschouwen is als ontstaan doordat de romp over de beenen heen slingert „een gang, die veel lijkt op het loopen van dronken menschen.” Hij geeft dus slechts een type van loop-afwijkingen op. OPPENHEIM echter maakt in zijn leerboek der zenuwziekten 1905, 1<sup>e</sup> dl. bl. 51, onderscheid tusschen twee vormen van kleinhersens-ataxie en wel 1<sup>e</sup> eene „auf (Schwindel und) Gleichgewichtsstörung „beruhende, die grosse Aehnlichkeit mit der Gangweise des Betrunkenen zeigt,” en 2<sup>e</sup> „eine auf Bewegungsataxie beruhende. Patient „geht breitbeinig und stampfend, aber ohne dass ein übermässiges „Schleudern eintritt. . . . Eine scharfe Unterscheidung dieser Gehstörung „von der spinalataktischen ist wohl nur möglich, wenn sich die unter „1<sup>e</sup> beschriebene Abart mit ihr verbindet.” OPPENHEIM beziet dus de cerebellair ataxie o.a. van den spinalen kant.

DÉGÉRINE daarentegen schrijft in zijn werk „Traité de Pathologie générale” 1901, op bl. 643 „b. Ataxie labyrinthique. Les affections „de l'oreille interne produisent quelquefois des troubles de la marche „et de l'équilibre, qui ressemblent jusqu'à un certain point aux „disordres de l'ataxie cerebelleuse.” DÉGÉRINE vestigt hier dus de aandacht op de cerebellair ataxie in verband met de verschijnselen welke men vindt bij vestibulair afwijkingen.

De vraag is nu, hoe dat verschil in het atactisch beeld te verklaren. In mijn vorige verhandeling zette ik uiteen, dat, al mogen de evenwichts-impulsen uitgaande van het vestibulair apparaat beschouwd worden als te behooren tot dezelfde als die welke van het ruggemerg komen, er toch een groot verschil bestaat in de nitingen ervan, berustende op de hoogere ontwikkeling van dat apparaat.

Het gevolg hiervan is, dat al naar mate in de kleine hersenen de eene afferente evenwicht-baan meer is aangedaan dan de andere, het atactisch symptomcomplex ook anders nit zal vallen.

Zijn het de spinale banen die het meest geleden hebben, dan zal

<sup>1)</sup> Psych. Neural. bl. 1909 No. 4.

in hoofdzaak het type vertoond worden als door OPPENHEIM beschreven onder zijn tweeden vorm van cerebellair ataxie. Raakt de vestibulairbaan in verdrukking, dan komt de beschrijving van DÉGÉRINE meer tot haar recht. Heeft men een onderbreking van beide banen of grijpt de aandoening de banen van rechts en van links meer of minder gelijktijdig aan, dan zal wellicht de dronkenmansgang meer tot uiting komen.

Wanneer nu de resultaten der dier-experimenten worden samengevoegd met de bij den mensch opgedane ondervinding, dan kan gezegd worden, dat de cerebellair ataxie lang niet altijd hetzelfde beeld vertoont, en dat dit verklaard kan worden uit het feit, dat men in de kleine hersenen meer dan één afferente baan heeft, wier onderbreking stoornis in den loop veroorzaakt en dat al naarmate de eene of de andere, dan wel meerdere banen zijn aangedaan, ook het beeld wisselen zal.

De *derde* vraag is, hoe te verklaren dat bij cerebellair lijden het evenwicht-gevoel der bovenste extremiteiten zoo volkomen de ataxie compenseeren kan, daar toch aangenomen mag worden dat de evenwicht-banen hiervan, evenals die der onderste extremiteiten, naar het cerebellum gaan en dus ook wel door het ziekteproces zullen worden onderbroken.

Ik wil erkennen, dat een verklaring van dit feit mij op dit oogenblik niet goed mogelijk is, tenzij de mogelijkheid bestaat, dat aangenomen mag worden, dat de evenwicht-innervatie van uit de armen, een betere verbinding heeft (buiten het cerebellum om) met de groote hersenen, dan dit met de beenen het geval is. Nadere onderzoekingen zullen hieromtrent uitsluitsel moeten geven.

#### CONCLUSIE.

1. Bij onderbreking, in de kleine hersenen, der afferente banen afkomstig uit het vestibulair apparaat en de kleinhersenzijstrengbanen, ontstaat ataxie.

2. Al naar mate deze banen, hetzij elk voor zich, hetzij te zamen, meer of minder worden aangetast, zal het beeld der cerebellair ataxie een ander aanzien vertoonen.



**Scheikunde.** De Heer HOLLEMAN biedt een mededeeling aan van den Heer A. H. W. ATEN over: „*De passiviteit van chroom*” (Tweede mededeeling).

(Mede aangeboden door den Heer JAEGER).

In de eerste mededeeling over dit onderwerp <sup>1)</sup> werden de potentialen besproken, die verschillende chroomsoorten vertoonen, wanneer ze in stroomloozen toestand met een elektrolyt in aanraking zijn. Deze tweede verhandeling geeft de resultaten van bepalingen van den potentiaal, dien chroom bij anodische en kathodische polarisatie vertoont.

1. *Anodische polarisatie van elektrolytisch chroom in oplossingen van chromosulfaat.*

De verschijnselen, die zich voordoen bij anodische polarisatie van elektrolytisch chroom, zijn afhankelijk van den aard van het grondmetaal, waarop het chroom is neergeslagen. De hieronder medegedeelde resultaten hebben betrekking op chroom, dat uit een oplossing van chroomchloride op koper neergeslagen is. De metingen geschieden volgens de methode van LE BLANC <sup>2)</sup>. De hierbij gebruikte commutator was zoo ingericht, dat de elektrode gedurende een zekeren tijd gepolariseerd werd, dan ongeveer een even langen tijd stroomloos was, dan met het compensatie-apparaat verbonden was, en ten slotte weer stroomloos was.

De potentiaal als functie van de stroomsterkte had daarbij het volgende beloop. In stroomloozen toestand was de potentiaal  $-0.55$ . Bij een zeer zwakken stroom steeg de potentiaal tot  $+0.1$ , en nam bij versterking van den stroom slechts weinig toe.

Boven een zekere grenswaarde van de stroomsterkte steeg de potentiaal dan weer snel tot  $+0.7$  V, en nam bij verdere versterking van den stroom slechts weinig toe. Dit beloop wordt door lijn *I* in figuur 1 weergegeven. Uit den vorm van de lijn blijkt, dat van *A* tot *B* een langzaam verloopende reactie aan de anode plaats vindt, van *B* tot *C* een snelverloopende reactie. Tusschen *C* en *D* is de grensstroom voor deze reactie bereikt. Bij *D* begint weer een andere

<sup>1)</sup> Versl. K. Akad. Wet. 26, 800 (1917).

<sup>2)</sup> Zeitschr. für physik. Chemie. 5, 469 (1890).

reaktie te verlopen. Men vindt lijn *I* in fig. 1, wanneer men de stroomsterkte na iedere aflezing onmiddellijk verhoogt, zonder te wachten, tot de potentiaal een konstante waarde bereikt. Wanneer men nu, nadat een potentiaal van ongeveer  $+0.8$  V bereikt is, de stroomsterkte snel laat dalen, dan vindt men lijn *II* in fig. 1. Hier zijn de potentialen bij gelijke stroomsterkte veel negatiever, dan wanneer men werkt bij stijgende stroomsterkte. Ook in stroomloozen toestand is nu de elektrode veel negatiever dan voor de polarisatie nl.  $-0.8$  V tegen  $-0.55$  V.

Wanneer men nu niet de stroomsterkte snel verhoogt, maar na iedere verhoging van de stroomsterkte wacht, totdat de potentiaal konstant geworden is, dan verkrijgt men een lijn, die tusschen de eerstgenoemden in ligt. In fig. 2 geeft *I* de lijn bij snelle verhoging van de stroomsterkte, *II* die bij snelle verlaging, *III* de lijn bij langzame verhoging van de stroomsterkte. Ook als men de stroomsterkte langzaam laat dalen, vindt men lijn *III*.

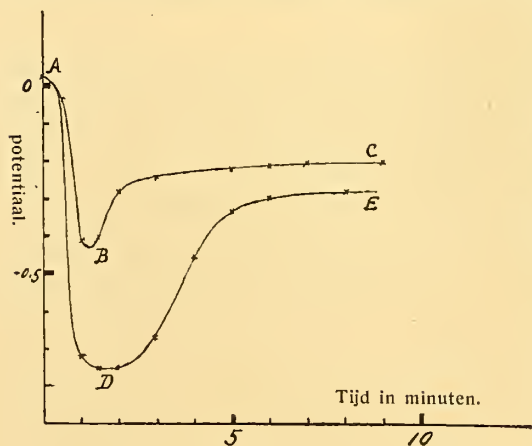


Fig. 3.

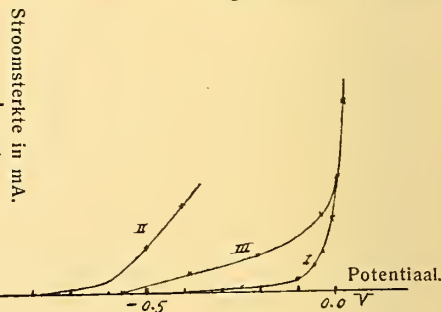


Fig. 2.

Bij deze laatste wijze van werken komt men van een punt van lijn *I* op een punt van lijn *II*, en daarna stijgt de potentiaal langzaam tot een punt van lijn *III*. Tengevolge hiervan vertoont de potentiaal als functie van den tijd een eigenaardig beloop, dat in figuur 3 weergegeven is. De bovenste lijn werd gevonden, toen de stroom snel van 5 mA op 1 mA gebracht werd. De potentiaal was bij

5 mA *A*, daalde bij overgang op 1 mA tot *B*, en steeg daarna langzaam tot *C*. De onderste lijn werd gevonden, toen de stroom snel van 5 mA op 0.1 mA gebracht werd. Deze lijn vertoont hetzelfde beloop, maar sterker uitgesproken. Het beloop van de lijnen in figuur 3 kan verklaard worden door aan te nemen, dat de anodische polarisatie tweëerlei invloed op den potentiaal heeft. Ten eerste is *gedurende* de anodische polarisatie de potentiaal veel positiever dan de eindpotentiaal; ten tweede is *na* anodische polarisatie de potentiaal negatiever dan de eindpotentiaal. Er is dus een passiverende werking, die zich gedurende de polarisatie nit, er is tevens een aktiveerende werking, die na de polarisatie te voorschijn komt. Beide werkingen zijn — zooals nog nader zal worden aangetoond — des te sterker, naarmate de sterkte van den polariseerenden stroom grooter is.

Wanneer men na anodische polarisatie den stroom verbreekt, daalt de potentiaal tot ongeveer  $-0.8$  V, daarna vindt weer een *langzame* stijging plaats tot  $-0.55$  V.

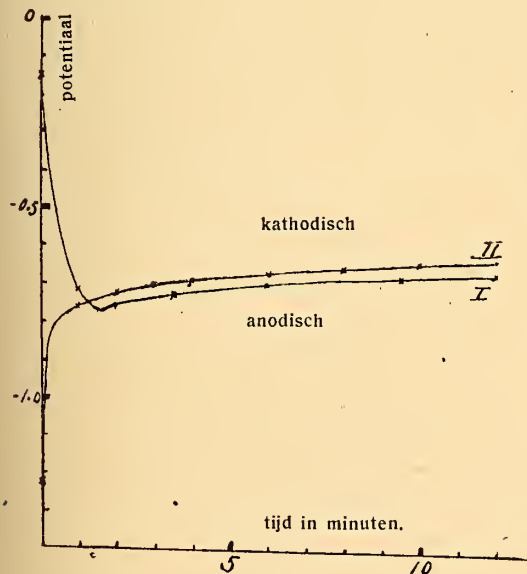


Fig. 4.

Dit beloop vertoont lijn I in figuur 4. Hier werd de stroom van 5 mA op 0 gebracht.

In dezelfde figuur geeft lijn II het beloop van den potentiaal na kathodische polarisatie met 5 mA. Hier is de potentiaal aanvankelijk zeer sterk negatief, na een of twee minuten is de potentiaal reeds gestegen tot  $-0.75$  V, en van hier af valt de lijn voor kathodische polarisatie nagenoeg samen met die voor anodische polarisatie. D. w. z. door ano-

dische polarisatie is de potentiaal aanvankelijk te positief, door kathodische polarisatie te negatief, na enkele minuten echter is de toestand na anodische en kathodische polarisatie dezelfde geworden.

Uit lijn I in figuur 1 volgt, zooals reeds is opgemerkt, dat er bij de anodische polarisatie van chroom twee verschillende reacties verlopen. Een bij ongeveer  $+0.1$  V, een andere bij ongeveer  $+0.7$  V. Deze laatste is ongetwijfeld de anodische vorming van chromaat.

Welke reactie bij  $+0.1$  V plaats vindt, moet nog onderzocht worden. Hier bestaan drie mogelijkheden. 1°. kan het chroom hier als chromo-ion (misschien ook als chromi-ion) in oplossing gaan. 2°. kan er oxydatie in de oplossing plaats vinden van  $\text{Cr}^{II}$  tot  $\text{Cr}^{III}$ , 3°. kan het koper, waarop het chroom is neergeslagen, in oplossing gaan. Deze laatste mogelijkheid moet overwogen worden, daar het chroom niet zeer vast op het koper hecht. Het zou dus kunnen zijn, dat het chroom scheuren vertoonde, en dat daardoor het koper in oplossing ging.

Dat de reactie bij  $+0.1$  V niet is een oxydatie van chromo- tot chromi-ion blijkt hieruit, dat vrijwel hetzelfde beloop voor de stroomspanningslijn gevonden werd, wanneer als elektrolyt een oplossing van KCl gebruikt werd. Alleen lag hier de potentiaal, waarbij een sterke stijging van de stroomsterkte intrad, iets lager, nl. bij  $-0.1$  tot  $0.0$  V.

Hetzelfde blijkt uit de volgende proef: Een blanke, en een geplatineerde platina-elektrode werden anodisch gepolariseerd in een oplossing van chromosulfaat. Er was geen stijging bij  $+0.1$  V merkbaar. De stroomsterkte steeg al dadelijk bij een potentiaal van  $-0.5$  V en hier vindt dus blijkbaar oxydatie van  $\text{Cr}^{II}$  tot  $\text{Cr}^{III}$  plaats. De grensstroom was echter reeds bij  $2$  mA. bereikt, en een verdere stijging van de stroomsterkte trad eerst bij  $+1.0$  V in (zuurstof ontwikkeling) Ter vergelijking werd de anodische oxydatie van  $\text{FeSO}_4$  onderzocht. Hier werd eerst bij  $90$  mA de grensstroom bereikt.

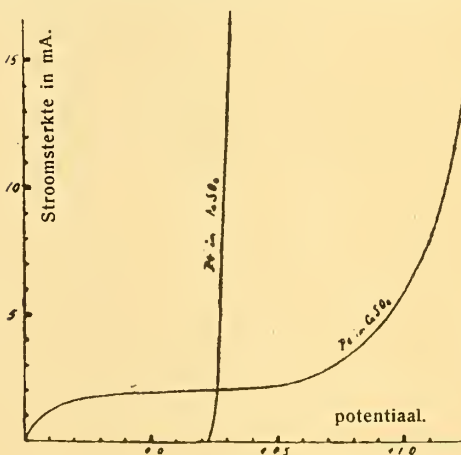


Fig. 5.

In figuur 5 zijn de stroomspanningslijnen van platina in chromosulfaat en ferrosulfaat geteekend.

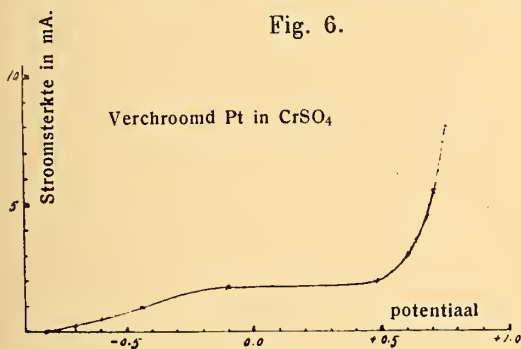
Wanneer een elektrode van koper in een oplossing van KCl anodisch gepolariseerd wordt, vindt men een stroomspanningslijn, die vrijwel overeenkomt met de lijn *BC* voor op koper neergeslagen chroom. Het is dus niet onmogelijk, dat het eerste verticale stuk in de stroomspanningslijn veroorzaakt wordt

door het in oplossing gaan van koper.

Dat het grondmetaal, waarop het chroom elektrolytisch neergeslagen is, bij de anodische polarisatie een rol speelt, blijkt uit de volgende waarnemingen. Chroom, dat op zilver neergeslagen is, vertoont ongeveer dezelfde stroomspanningslijn als chroom op koper. Alleen

ligt het eerste verticale stuk bij een positieveren potentiaal, nl. bij  $+0.4$  V.

Bij chroom op platina of op goud is het beloop van de stroomspanningslijn anders. Figuur 6 geeft het gedrag van chroom op



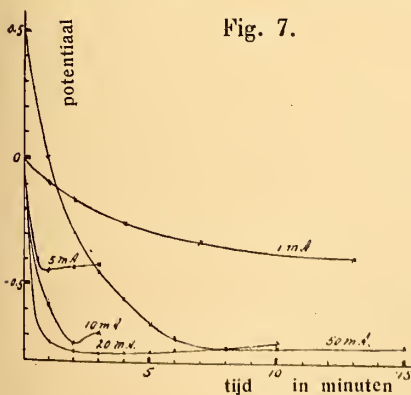
platina, als men de stroomsterkte snel verhoogt. Hier vindt van  $-0.8$  V af, een langzame stijging van de stroomsterkte plaats, tot een potentiaal van ongeveer  $-0.1$  V bereikt is. Dan verloopt de lijn zeer vlak, totdat bij  $+0.7$  V de chromaatvorming begint.

Wanneer men nu de stroomsterkte langzaam verhoogt, en telkens wacht, totdat de potentiaal konstant geworden is, vindt men een lijn, die veel vlakker verloopt, waarbij reeds bij  $0.1$  mA de potentiaal tot  $+0.7$  V stijgt. Hieruit blijkt, dat elektrolytisch chroom op den duur niet in staat is, bij een potentiaal, die in de buurt van den evenwichtspotentiaal ligt, in oplossing te gaan. Het kan zijn, dat de stijging, die de lijn in figuur 6 bij  $-0.8$  V vertoont, niet overeenkomt met het oplossen van chroom, maar met het oplossen van waterstof, die in het elektrolytische chroom aanwezig is.

Onmiddellijk na stroomverbreking is het chroom op platina of goud niet geactiveerd, maar vertoont een potentiaal van  $+0.7$  V. Onder 2 wordt dit verschijnsel uitvoeriger behandeld.

## 2. De aktiveering van chroom door anodische polarisatie in oplossingen van chromosulfaat.

Chroom, dat elektrolytisch op zilver neergeslagen is, vertoont,

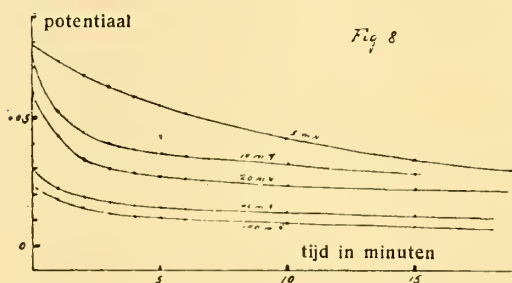


evenals chroom op koper, na anodische polarisatie een aktieven potentiaal. Onmiddellijk na de anodische polarisatie is de potentiaal tamelijk positief. Hij daalt echter in enkele minuten tot een vrij sterk negatieve waarde. In figuur 7 is het beloop van den potentiaal als functie van den tijd geteekend, wanneer de stroom van 1, 5, 10, 20 en 50 mA opeens verbroken

wordt. Het algemeen beloop van deze lijnen is het volgende: Bij stroomverbreking is het chroom nog eenigszins passief, de potentiaal gaat echter snel naar negatievere waarden, en nadert ten slotte tot een waarde van ongeveer  $-0.5$  V.

De wijze, waarop deze waarde van  $-0.5$  V bereikt wordt, is echter voor verschillende stroomsterkten verschillend. Bij zwakke anodische polarisatie, 1 mA, daalt de potentiaal geleidelijk van 0.0 V af. Bij 5 mA wordt een flauw minimum bereikt, waarna de lijn weer langzaam stijgt. Bij 10 mA ligt dit minimum lager, bij 20 en 50 mA nog iets lager ( $-0.75$  V). Bij deze laatste twee lijnen gaat de stijging, die op het minimum volgt, veel langzamer, dan bij de anderen. Hieruit blijkt dus, dat de *aktivering van chroom op zilver des te sterker en langduriger is, naarmate de stroomsterkte, waarmede anodisch gepolariseerd wordt, grooter is.*

Hetzelfde verschijnsel wordt waargenomen bij chroom, dat op goud neergeslagen is, maar de potentialen zijn hier veel positiever. In figuur 8 zijn deze lijnen geteekend, die het beloop van den



potentiaal met den tijd aangeven, wanneer de stroom plotseling verbroken wordt. Ook hier ligt de potentiaal, die bereikt wordt, bij des te negatievere waarden, naarmate de polariserende stroom sterker is geweest. Het blijkt dus, dat bij chroom, dat neer-

geslagen is op koper, zilver of goud, na anodische polarisatie aktivering optreedt.

De potentialen, die daarbij bereikt worden, zijn het meest negatief voor het minst edele grondmetaal <sup>1)</sup>.

Bij deze proeven werd opgemerkt, dat chroom op goud of op platina na anodische polarisatie minder aktief wordt, wanneer het kort van te voren kathodisch gepolariseerd is. De lijnen 1 en 2 in fig. 9 geven den potentiaal na stroomverbreking, wanneer de elektrode niet van te voren kathodisch gepolariseerd was, de lijnen 3 en 4, wanneer dit wel geschied was.

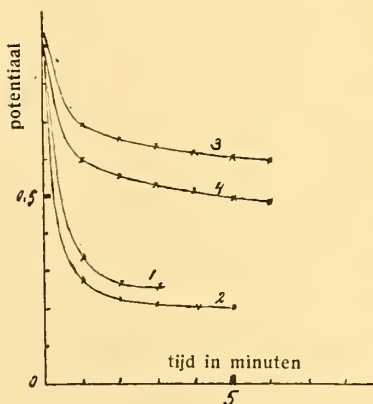


Fig. 9.

<sup>1)</sup> RATHERT. Zeitschr. f. physik. Chemie **86**, 567 (1914) konstateerde ditzelfde verschijnsel bij Cr dat op Cu en op Pt neergeslagen was.



Deze aktiveerende werking van de anodische polarisatie uit zich nog op een zeer eigenaardige wijze hierdoor, dat men bij chroom op goud een stroomspanningslijn vindt, die een teruglopend gedeelte bezit. Hier daalt, bij toenemende stroomsterkte, de potentiaal.

In figuur 10 is een dergelijke stroomspanningslijn geteekend. Bij 5 mA is de potentiaal  $+0.94$ ; deze *daalt*, bij vergrooting van de stroomsterkte tot 100 mA, tot  $+0.82$  V. De verklaring van dit eigenaardige beloop is op grond van het voorgaande gemakkelijk te geven.

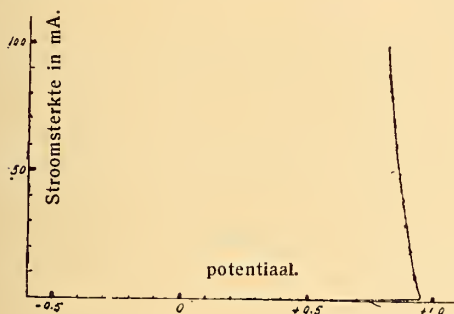


Fig. 10.

De elektrode wordt telkens bij de stroomverbrekingen van den commutator geactiveerd, en wel des te sterker, naarmate de stroomsterkte grooter is.

Bij een groote stroomsterkte wordt dus de potentiaal in het tijdsverloop, dat de elektrode stroomloos is, meer negatief, dan bij een kleine stroomsterkte. Nu

meet men bij deze wijze van werken den potentiaal niet gedurende den stroomdoorgang, maar korten tijd (ongeveer  $\frac{1}{100}$  sec.) daarna.

Dat men de stroomspanningslijn teruglopend vindt, is dus ook weer een gevolg van de aktiveering *na* anodische polarisatie. Wanneer deze beschouwingen juist zijn, zal men deze teruglopende lijn alleen vinden, wanneer men werkt met een commutator, niet wanneer men met een hevel den potentiaal *gedurende* de polarisatie meet. Dit bleek ook het geval te zijn. Bij chroom van GOLDSCHMIDT, dat in oplossingen van KCl, H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> en HCl eveneens een teruglopende stroomspanningslijn geeft, wanneer men volgens LE BLANC werkt, werd een normale lijn gevonden, wanneer men den potentiaal met een hevel bepaalde.

In figuur 11 zijn twee lijnen geteekend voor metingen met commutator en met hevel in HCl. De aktiveering door anodische polarisatie blijkt hier zeer duidelijk.

Bij 100 mA daalt de potentiaal in  $\frac{1}{100}$  sec. van  $+1.22$  V tot  $+0.83$  V,

dus 0.39 V, bij 5 mA daalt hij slechts 0.1 V, n.l. van  $+1.03$  tot

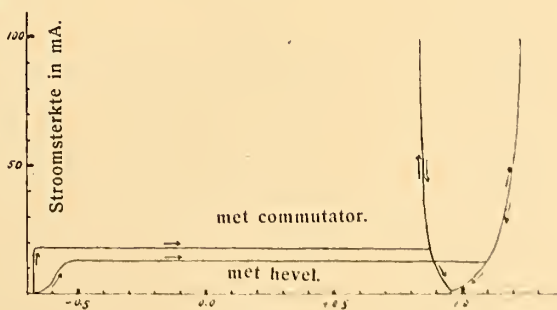


Fig. 11.

+ 0.93 V. Bij deze potentialen vindt chromaatvorming plaats. Maar ook wanneer het chroom als chromo-ion in oplossing gaat, is de aktiveering na stroomverbreking zeer duidelijk merkbaar. Hier is bijv. bij 10 mA de potentiaal, die men volgens LE BLANC vindt, ongeveer 0.1 V negatiever dan bij meting met een hevel. In het eerste geval heeft de stroomspanningslijn tot 18 mA toe het beloop van een normale lijn, in het tweede geval bewijst de stroomspanningslijn, dat ook het anodisch oplossen in zoutzuur als chromo-ion een langzaam verlopende reactie is.

Op grond van het hier gevonden verschil tusschen de stroomspanningslijn die bepaald wordt met een commutator en die, bepaald met een hevel, zou men kunnen meenen, dat de boven beschreven aktiveering door anodische polarisatie alleen plaats vindt gedurende de oogenblikken, dat de stroom verbroken is, dus alleen na, niet gedurende de polarisatie. Dat er echter ook *gedurende* de anodische polarisatie aktiveering plaats vindt, blijkt uit de hieronder beschreven proeven met chroom van GOLDSCHMIDT.

### 3. Anodische polarisatie van chroom van GOLDSCHMIDT.

De passivering en aktiveering van chroom van GOLDSCHMIDT is uitvoerig door HITTORF onderzocht, voornamelijk wat betreft de verschillende factoren die passiverend of aktiveerend werken. Daarbij bleek, zooals reeds in de inleiding van de vorige verhandeling gezegd is, dat oxydatiemiddelen ( $\text{HNO}_3$ , broomwater) evenals anodische polarisatie, chroom passiveren. Daarentegen maakt kathodische polarisatie het chroom actief. Evenzoo is de waterstof-ontwikkeling, die chroom in aktieven toestand in verdunde zuren (vooral  $\text{HCl}$ ) geeft, in staat den aktieven toestand te bestendigen. Ook door chroom te brengen in gesmolten chloriden, ( $\text{ZnCl}_2$ ,  $\text{KCl} + \text{NaCl}$ ) maakt men het actief. Chloorionen bezitten een specifieke aktiveerende werking, vandaar dat in zoutzuur chroom sterker actief is dan in zwavelzuur van gelijke concentratie.

In de eerste plaats werd nu een kwantitatieve vergelijking gemaakt tusschen de aktiveerende werking van zoutzuur en zwavelzuur, door bepaling van de stroomsterkte, die noodig is om het metaal in deze oplossingen passief te maken. Daarbij bleek, dat de passiveringsstroomsterkte nagenoeg evenredig is met de concentratie van het zuur, zooals figuur 12 laat zien. De waarden die men voor de passiveringsstroomsterkte vindt, zijn tamelijk wisselend; dit maakt dat de punten in figuur 12 eenigszins verspreid liggen.

Uit de gevonden lijnen blijkt duidelijk, dat zoutzuur sterker aktiveerend werkt dan zwavelzuur, bij gelijke concentratie ongeveer

driemaal zoo sterk. Behalve de waterstofionen werken dus ook de chloorionen aktiveerend. Dit volgt ook hieruit, dat de passiverings-

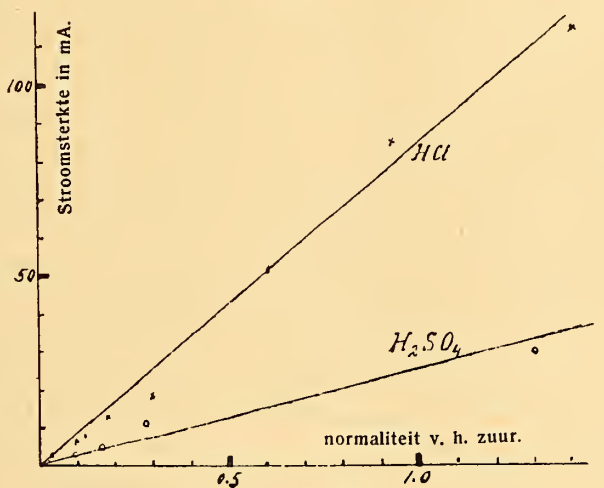


Fig. 12.

stroomsterkte in zoutzuur, waaraan kaliumchloride is toegevoegd, grooter is dan in zoutzuur alleen. Deze bedroeg bij twee proeven in 0.1 n HCl + n KCl 14.5 en 16.5 mA, in 0.1 n HCl 5 en 7 mA. Door de concentratie van de chloorionen tien maal grooter te maken, verhoogt men de aktiveerende werking twee en een half maal.

De chloorionen werken hier echter niet onafhankelijk van de waterstofionen, want in 1 n KCl, zonder zoutzuur, wordt chroom onder gewone omstandigheden reeds bij de kleinste stroomsterkte passief.

In de tweede plaats werd het anodisch gedrag onderzocht van chroom, dat geactiveerd was door het in gesmolten zouten te brengen. De aktiveerende werking van gesmolten NaCl + KCl kan uit de volgende proef blijken.

Een stuk chroom van GOLDSCHMIDT gaf in een verzadigde oplossing van KCl een potentiaal van  $-0.47$  V, en werd reeds bij 0.1 mA passief<sup>1)</sup>. Nadat deze elektrode een half uur in gesmolten NaCl + KCl gelegen had, was de potentiaal  $-0.64$ . Nu verdroeg de elektrode bij langzame verhooging van de stroomsterkte een stroom van 8 mA zonder passief te worden.

Na stroomverbreking was de potentiaal aktiever dan vóór de

<sup>1)</sup> Deze en volgende proeven werden niet verricht met een commutator, maar de polarisatiespanning werd gemeten door middel van een hevel, dus *gedurende* de polarisatie.

polarisatie, nl.  $-0.667$ . Hierin uit zich dus weer de aktiveerende werking van de anodische polarisatie na stroomverbreking. Toen hierna de stroom weer opeens op 8 mA gebracht werd, werd de elektrode passief. Terwijl dus bij langzame opvoering van de stroomsterkte, de elektrode 8 mA. verdroeg, kon bij snelle instelling op 8 mA deze stroomsterkte niet verdragen worden, ofschoon toch de elektrode in stroomloozen toestand zeer actief was. Dit is in overeenstemming met het vroeger reeds beschreven verschijnsel, dat een elektrode bij snelle versterking van den stroom aanvankelijk een te positieve waarde vertoont, die naderhand minder positief wordt. Door snelle versterking van den stroom kan nu de potentiaal zoo positief worden, dat de elektrode passief wordt. Had men den stroom langzaam versterkt, zoodat de potentiaal telkens gelegenheid vond naar minder positieve waarden terug te gaan, dan zou geen passiviteit zijn ingetreden.

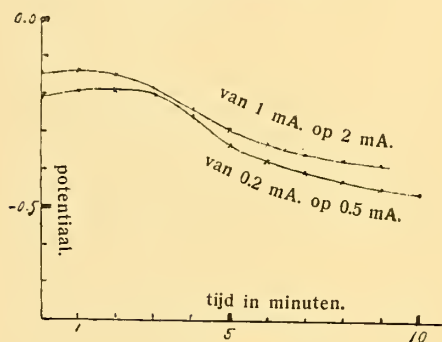


Fig. 13.

Dit terugloopen van den potentiaal is grafisch voorgesteld in figuur 13, voor chroom, dat geactiveerd was in gesmolten  $KCl + NaCl$ . De onderste lijn geeft den potentiaal als functie van den tijd, wanneer de stroom van 0.2 op 0.5 mA verhoogd wordt, de bovenste, als de stroom van 1.0 op 2.0 mA gebracht wordt.

Nog duidelijker bleek de invloed van het langzaam opvoeren van de stroomsterkte bij een stuk chroom, dat in  $ZnCl_2$  geactiveerd was. Dit verdroeg een stroomsterkte van 14 mA, wanneer de stroom elke drie minuten met 1 mA. versterkt werd. Na stroomverbreking was deze elektrode aktiever dan voor de polarisatie. Toen nu hierna de stroom dadelijk op 5 mA. gebracht werd, werd de elektrode passief. <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Zeer eigenaardig blijkt de invloed van een verbreking of verzwakking van den polariseerenden stroom uit de volgende proef. Een stuk chroom, dat in  $KCl$ -oplossing anodisch gepolariseerd werd met 7 mA., werd in aanraking gebracht met een stuk zink. De potentiaal daalde daardoor van  $-0.538$  tot  $-0.750$ . De stroom ging nu in hoofdzaak door het zink in de oplossing over, waardoor de stroomdichtheid, waarmee het chroom gepolariseerd werd, kleiner werd. Toen daarna het zink verwijderd werd, steeg de potentiaal snel tot  $-0.30$  V, om daarna, in drie minuten, weer tot zijn oorspronkelijke waarde  $-0.54$  te dalen.

De verzwakking van den anodisch polariseerenden stroom had hier dus een zeer sterke *stijging* van den potentiaal veroorzaakt.

Een andere elektrode werd eveneens in gesmolten  $\text{ZnCl}_2$  geactiveerd. De potentiaal was in verzadigd  $\text{KCl}$   $-0.542$ . De elektrode werd anodisch gepolariseerd, en de stroomsterkte langzaam opgevoerd tot  $2 \text{ mA.}$ , waarbij de potentiaal  $-0.405$  volt bedroeg. Bij doorblazen van lucht langs de elektrode veranderde de potentiaal niet meer dan  $10 \text{ mV.}$ , evenzoo bij roeren in de vloeistof, waaruit volgt, dat de aktiviteit van het chroom hier niet veroorzaakt wordt door een verandering in samenstelling van de vloeistof, die in aanraking is met het metaal. Nadat de stroom 's nachts was doorgegaan, was de stroomsterkte gestegen tot  $3.28 \text{ mA.}$ , en de potentiaal gedaald tot  $-0.513$ . De elektrode was nu dus zeer actief. De aanwezige oplossing van  $\text{KCl}$  werd nu afgeheveld, en door verse oplossing vervangen. De elektrode bleef actief, ofschoon de potentiaal een weinig steeg, n.l. van  $-0.513$  tot  $-0.472$ . Ook hier blijkt, dat de aktiviteit van het chroom niet het gevolg was van een verandering in samenstelling van de vloeistof. Het chroom ontwikkelde kleine belletjes waterstof. Ook als het metaal in aanraking gebracht werd met een platinadraad, bleef het actief. Daarbij bleef dan ook de waterstof zich aan het chroom ontwikkelen. Bij stroomverbreking was de potentiaal  $-0.613$ , en daalde in 15 minuten tot  $-0.642$ .

De elektrode kon nu  $1 \text{ mA}$  verdragen, zonder passief te worden, en de stroom kon vrij snel versterkt worden, in 20 minuten van  $1 \text{ mA.}$  op  $3,6 \text{ mA.}$ , zonder dat de aktiviteit verloren ging.

Bij deze elektrode kon dus de anodische stroom 15 minuten verbroken blijven, terwijl de aktiviteit behouden bleef.

Nu werd ze, nadat de anodische stroom eerst weer tot  $3.6 \text{ mA.}$  opgevoerd was, waarbij de potentiaal  $-0.421 \text{ V.}$  bedroeg, gedurende 15 minuten kathodisch gepolariseerd met  $50 \text{ mA.}$  Dit geschiedde in een andere oplossing van  $\text{KCl}$ . De anode bevond zich in een poreuzen pot, zoodat het vrijkomende chloor niet met de chroom-elektrode in aanraking kwam. Toen de elektrode weer in de oorspronkelijke oplossing van  $\text{KCl}$  gebracht werd, was de potentiaal tengevolge van de waterstofbelading sterk negatief,  $-1.09 \text{ V.}$  Nu werd deze elektrode anodisch gepolariseerd met  $0.5 \text{ mA.}$  De potentiaal steeg hierbij in een uur tot  $+0.512 \text{ V.}$  Terwijl dus zonder voorafgaande kathodische polarisatie de elektrode anodisch  $1 \text{ mA.}$  kon verdragen, zonder passief te worden, werd ze, na kathodische polarisatie, reeds met  $0.5 \text{ mA.}$  passief. Na stroomverbreking verkreeg deze elektrode weer een aktieven potentiaal, n.l.  $-0.614 \text{ V.}$

Evenals HITTORF gevonden heeft, bleek ook bij deze proeven, dat chroom door gesmolten zinkchloride sterker geactiveerd wordt, dan door gesmolten  $\text{KCl} + \text{NaCl}$ .

In gesmolten  $K_2Cr_2O_7$ , en ook aan de lucht gegloeid, wordt chroom zeer weinig geactiveerd, maar het is toch eenigszins aktiever dan chroom, dat niet verwarmd is geworden. In gesmolten KCN wordt het metaal merkbaar, hoewel zwak, geactiveerd, het verdroeg 1.5 mA. zonder passief te worden.

Eigenaardig is het, dat niet steeds de elektrode, die in stroomloozen toestand den meest negatieven potentiaal heeft, het moeilijkst gepassiveerd wordt. Zoo vertoonde chroom, dat in gesmolten KCN gedompeld was geweest, voor polarisatie een potentiaal van  $-0.44$  V., daarna van  $-0.58$  V. Toch was dit chroom moeilijker te passiveren dan chroom uit gesmolten  $K_2Cr_2O_7$ , dat voor polarisatie  $-0.56$ , na polarisatie  $-0.64$  V. vertoonde.

Alle elektroden, die met gesmolten zouten behandeld waren, waren bedekt met een laagje groen of zwart oxyd. Uit gesmolten  $ZnCl_2$  en  $KCl + NaCl$  ontwikkelde het metaal waterstof. Het chroom, dat aan de lucht gegloeid was, vertoonde blauwe aanloopkleuren.

De behandeling, die de chroomelektrode van te voren heeft ondergaan is dus van grooten invloed op de passiverbaarheid.

Hetzelfde is het geval met de samenstelling van de oplossing, waarin het chroom wordt onderzocht.

In een oplossing van  $Na_2SO_4$  is het metaal zeer gemakkelijk te passiveren, in een oplossing van  $KCl$  moeilijker.

Hierbij is de passiverings stroomsterkte des te grooter, naarmate het

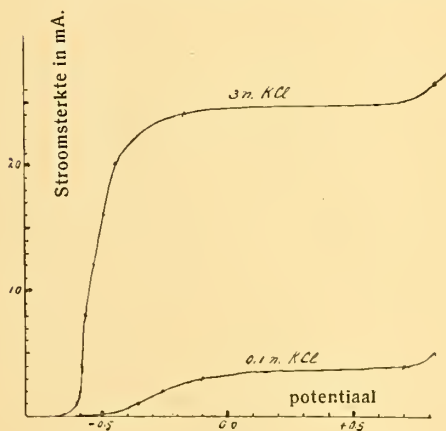


Fig. 14.

$KCl$ -gehalte van de oplossing grooter is. Figuur 14 geeft de passiveringslijn voor een zelfde chroomelektrode in een verzadigde oplossing van kalium chloride, en in een 0.1 n oplossing.

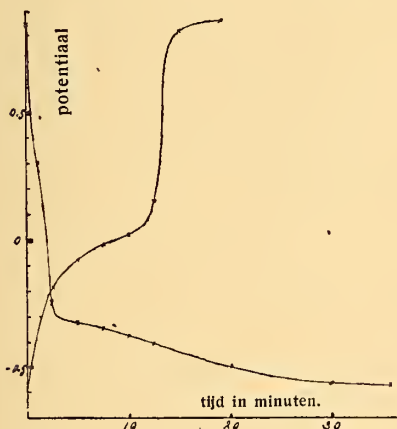
Wanneer men een elektrode, die in gesmolten  $ZnCl_2$  geactiveerd is, anodisch polariseert met een voldoende stroomdichtheid, wordt zij passief, en vertoont daarbij potentialen, die dezelfde zijn als voor een elek-

trode, die van te voren langen tijd in salpeterzuur gelegen heeft, en daardoor passief geworden is. Na stroomverbreking wordt de elektrode uit  $ZnCl_2$  weer na korten tijd aktief, die uit  $HNO_3$  blijft passief. Ook een elektrode, die eerst door  $ZnCl_2$  geactiveerd is, wordt door  $HNO_3$  passief.

De potentiaal steeg bij de proef van  $-0.65$  tot  $+ 0.1$ .

Na krachtige anodische polarisatie was de elektrode weer actief geworden, en vertoonde een potentiaal van  $-0.49$ .

Door een stuk chroom in zoutzuur te brengen wordt het actief, en ontwikkelt waterstof. De aktiviteit blijft na afspoelen en overbrengen in verzadigde KCl-oplossing behouden, maar is lang niet zoo sterk als die, welke in gesmolten  $ZnCl_2$  verkregen wordt, zoodat de elektrode bijv. reeds bij 1 mA. passief wordt. Wanneer men echter den stroom zeer langzaam opvoert, blijft de aktiviteit behouden. Zoo kon in tien dagen een stroomsterkte van 12 mA. bereikt worden, bij een potentiaal van  $- 0.35$  V. Ook hier werd steeds waargenomen, dat bij verhooging van de stroomsterkte de potentiaal eerst sterk toenam, later weer daalde. De elektrode ontwikkelde voortdurend waterstof, soms met een knetterend geluid; de vloeistof bevatte een groote hoeveelheid chroomhydroxyd, en was



alkalisch geworden, tengevolge van de kathodische vorming van NaOH. Na stroomverbreking was de elektrode actief,  $- 0.66$  V. Toen na 8 minuten de stroom dadelijk op 3 mA. gebracht werd werd de elektrode passief. Na stroomverbreking, kwam de aktiviteit weer terug. In Fig. 15 is de passivering met 3 mA. en de aktiveering na stroomverbreking als functie van den tijd voorgesteld.

Wanneer chroom van GOLDSCHMIDT, dat van te voren niet geactiveerd is, in een verzadigde oplossing van KCl anodisch gepolariseerd wordt met een stroomsterkte van 1 mA, wordt het passief. Gaat men verwarmen, dan treedt bij een zekere temperatuur aktiveering op. Bij een stroomsterkte van 1 mA geschiedde dit bij ongeveer  $60^\circ$ . De potentiaal daalde daarbij tot  $- 0.55$  V. Wanneer men nu afkoelt, terwijl de stroom doorgaat, blijft de elektrode actief, waarbij de potentiaal stijgt tot  $- 0.4$  V. Bij hogere stroomsterkte vindt men hetzelfde gedrag; hier ligt de temperatuur, waarbij aktiveering optreedt, hooger, bij 25 mA bijv. bij  $75^\circ$ . Bij afkoeling blijft nu ook de elektrode actief; de potentialen, die men daarbij waarneemt, zijn des te positiever, naarmate de stroomsterkte grooter is. Is deze al te groot, bijv. 50 mA, dan wordt de elektrode bij afkoeling passief.

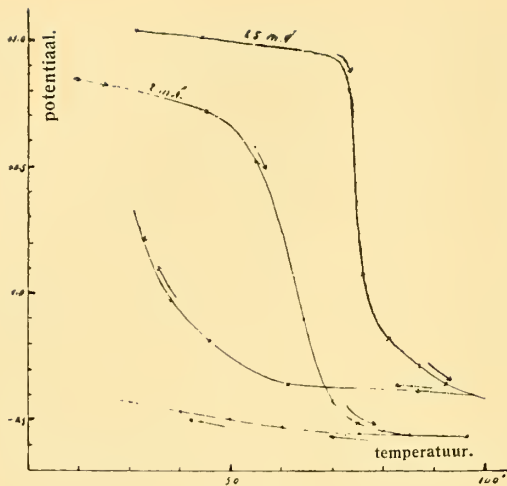


Fig. 16.

gebleven is, en men verbreekt den stroom, dan vindt men een zeer aktieven potentiaal. Sluit men na korten tijd, bijv. na 20 sec. den stroom weer, dan kan de elektrode dezen stroom niet verdragen, maar wordt passief. In overeenstemming hiermede is het verschijnsel, dat een chroomelektrode, die door verwarming in een oplossing van KCl, bij anodische polarisatie, aktief geworden is, en vervolgens, nadat de stroom verbroken is, afgekoeld wordt, wel een aktieven potentiaal behoudt, maar slechts een zeer zwakken anodischen stroom kan verdragen, zonder passief te worden.

Tenslotte werd nog de invloed van molekulare waterstof en van kathodisch ontwikkelde waterstof op de passieverbaarheid van chroom nagegaan. Molekulare waterstof heeft hier, zooals reeds uit vroegere onderzoekingen bekend was, geen invloed. Brengt men een chroomelektrode in een atmosfeer van waterstof in een verzadigde KCl-oplossing, dan verkrijgt het chroom een potentiaal van ongeveer  $-0.5$  V, terwijl een platina-elektrode onder dezelfde omstandigheden  $-0.68$  V vertoonde. Hét chroom is dus niet in staat den waterstof-potentiaal aan te nemen. Wanneer het chroom kathodisch gepolariseerd wordt, zoodat zich krachtig waterstof ontwikkelt, vertoont het metaal aanvankelijk een sterk negatieven potentiaal, die het gevolg is van de verkregen waterstof-belading. Het chroom verliest deze waterstof-belading vrij spoedig, waarbij de potentiaal geleidelijk tot  $-0.5$  V stijgt. Deze elektrode werd, zoowel vóór als na de kathodische polarisatie, reeds bij anodische polarisatie met  $0.2$  mA passief. De kathodische polarisatie was dus niet in staat geweest de elektrode merkbaar te aktiveeren. Door deze elektrode in sterk zoutzuur te brengen werd zij wel aktief. De potentiaal bedroeg nu

Figuur 16 geeft het beloop van den potentiaal als funktie van de temperatuur bij verwarming en afkoeling van een chroomelektrode, wanneer deze met  $1$  mA en  $25$  mA anodisch gepolariseerd wordt.

Na stroomverbreking was de potentiaal zeer aktief, bij  $1$  mA —  $0.60$  V, bij  $50$  mA —  $0.66$  V.

Wanneer nu de elektrode na afkoeling gedurende de anodische polarisatie aktief



in verzadigde KCl-oplossing — 0.7 V, en bij anodische polarisatie met 1.2 mA vond geen passivering plaats. Hieruit blijkt dus, dat kathodische polarisatie het chroom minder sterk aktiveert dan behandeling met zoutzuur. Uit verdere proeven bleek, dat kathodische polarisatie de aktiviteit *vermindert*.<sup>1)</sup> Zoo vertoonde een elektrode, die twee dagen in een oplossing van KCl gelegen had, en daarin actief gebleven was, een potentiaal van — 0.57 V. Bij anodische polarisatie met 0.3 mA bleef het chroom actief, bij een potentiaal van — 0.46 V. Deze elektrode werd nu kathodisch gepolariseerd met 50 mA gedurende  $1\frac{1}{2}$  uur. De potentiaal was na stroomverbreking — 0.79 V, en steeg in  $1\frac{1}{4}$  uur tot — 0.192. De aktiviteit was dus *na* kathodische polarisatie sterk verminderd, wat ook hieruit bleek, dat de elektrode nu reeds bij anodische polarisatie met 0.01 mA passief werd.

Andere elektroden verkregen bij sterke kathodische polarisatie een veel negatiever potentiaal, tot — 1.22 V toe. Ofschoon dus een dergelijke elektrode, wat de waarden van den potentiaal betreft, sterk actief was, verdroeg ze geen anodische polarisatie met 0.1 mA zonder passief te worden. Na aktiveering in sterk zoutzuur verdroeg de elektrode gemakkelijk 0.4 mA, waarbij de potentiaal — 0.55 was.

#### 4. *Overzicht der resultaten.*

1. Elektrolytisch chroom wordt in chromosulfaat bij anodische polarisatie met voldoende stroomsterkte passief. Na stroomverbreking is de potentiaal van de elektrode negatiever dan vóór de polarisatie.

2. Bij versterking van den polariseerenden stroom neemt de potentiaal eerst een te positieve waarde aan, die langzaam tot een negatievere waarde daalt. Bij verzwakking van den stroom vindt hetzelfde, in omgekeerde volgorde, plaats.

3. De aktiveering, die chroom door anodische polarisatie ondergaat, is des te sterker, naarmate de elektrode krachtiger gepolariseerd is.

4. Chroom van GOLDSCHMIDT, dat geactiveerd is door behandeling met gesmolten  $ZnCl_2$  of  $KCl + NaCl$  kan in een oplossing van KCl anodisch gepolariseerd worden, zonder dat het passief wordt. De stroomsterkte, die het chroom daarbij kan verdragen, is grooter, wanneer de stroom geleidelijk versterkt wordt, dan wanneer de stroomsterkte snel verhoogd wordt.

5. Door voorafgaande kathodische polarisatie wordt de anodische

<sup>1)</sup> Dit bleek reeds uit de op blz. 1195 beschreven proef.

stroomsterkte, die dit chroom verdragen kan, zonder passief te worden, kleiner.

6. De vermeerdering van de aktiviteit bij voortgezette anodische polarisatie wordt veroorzaakt door een verandering in het metaaloppervlak.

7. Chroom van GOLDSCHIMDT, dat door anodische polarisatie in een oplossing van KCl passief geworden is, wordt bij verwarming van de oplossing, ook terwijl de stroom doorgaat, actief. Bij afkoeling blijft de aktiviteit — bij niet te groote stroomsterkte — behouden.

Wanneer het chroom in de oplossing afkoelt, zonder dat het anodisch gepolariseerd wordt, is de aktiviteit, die het na afkoeling behoudt, geringer dan wanneer de stroom bij afkoeling doorgaat.

Van de hier gekonstateerde aktiveering door de anodische polarisatie zijn in de literatuur enkele andere voorbeelden te vinden. Zoo zegt FLADE <sup>1)</sup>, dat een nikkelelektrode, als negatieve pool van een element, waarvan platina in chroomzuur de positieve pool was, een sterkeren stroom gaf (dus negatiever was) wanneer het eerst krachtig *anodisch* gepolariseerd was.

Hetzelfde vond RATHERT. <sup>2)</sup> Een nikkelelektrode, die in NiSO<sub>4</sub> een potentiaal vertoonde van + 0.237 V, had na anodische polarisatie een potentiaal van -- 0.125 V, na kathodische polarisatie van + 0.64 V. Hij schrijft dit verschijnsel toe aan concentratie veranderingen in de vloeistof. Dat bij chroom een dergelijke verklaring niet toepasselijk is, is boven reeds aangetoond.

In de volgende mededeeling zal getracht worden een verklaring van de hier boven beschreven verschijnselen te geven.

*Scheikundig Laboratorium van de Universiteit.*

*Amsterdam, Januari 1918.*

<sup>1)</sup> Zeitschr. f. physik. Chemie **76**, 513, (1911).

<sup>2)</sup> Zeitschr. f. physik. Chemie **86**, 567, (1914).

**Wiskunde.** — De Heer H. A. LORENTZ biedt een mededeeling aan van den Heer J. M. BURGERS: „*Opmerkingen over de theorie der dispersie*”.

(Mede aangeboden door den Heer H. KAMERLINGH ONNES.)

(Deze mededeeling zal in het volgende Verslag worden opgenomen).

**Natuurkunde.** — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer GUNNAR NORDSTRÖM: „*Een en ander over de energie van het zwaartekrachtsveld volgens de theorie van EINSTEIN.*”

(Mede aangeboden door den Heer H. KAMERLINGH ONNES).

In een voorafgaand opstel heb ik eenige algemeene stellingen afgeleid voor de gravitatie-theorie van EINSTEIN en in het bijzonder een veld met bolsymmetrie beschouwd<sup>1)</sup>. In direkte aansluiting aan dit opstel, dat in het volgende met het Romeinsche cijfer I zal worden aangeduid, zal ik nu de energie van het zwaartekrachtsveld berekenen zooals deze wordt opgevat door EINSTEIN, d. w. z. gekarakteriseerd door de in formule (10) I ingevoerde grootheid  $t_4^4$ .<sup>2)</sup> Om een resultaat te krijgen, dat ook voor een elektrisch veld geldt, zal ik eerst het zwaartekrachtsveld van een elektrisch centrum berekenen.

§ 1. *Het veld van een electrisch centrum.*

Het zwaartekrachtsveld van een elektrisch lichaam kan berekend worden met behulp van het variatieprincipe in den vorm (1) I of (1a) I, als men slechts opmerkt, dat het elektromagnetische veld een additieve bijdrage voor de funktie  $\mathfrak{M}$  van HAMILTON levert.

Wij stellen

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{(e)} + \mathfrak{M}^{(m)}, \quad . . . . . (1)$$

waarin  $\mathfrak{M}^{(e)}$  betrekking heeft op het elektromagnetische veld,  $\mathfrak{M}^{(m)}$  op de materie in beperkte beteekenis. Voor  $\mathfrak{M}^{(e)}$  heeft men<sup>3)</sup>

$$\mathfrak{M}^{(e)} = \frac{1}{8\pi} \sqrt{-g} \sum_{\alpha\beta\mu\nu} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \left( \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\beta} \right) \left( \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_\nu} \right) + 2 \sum_\sigma \varphi_\sigma w^\sigma, \quad (2)$$

waarin  $\varphi_\sigma$  de komponenten van den 4 dimensionalen potentiaal beteekenen,  $w_\sigma$  de komponenten van den 4 dimensionalen elektrischen stroom.

1) G. NORDSTRÖM, Iets over de massa van een stoffelijk stelsel, volgens de gravitatie-theorie van EINSTEIN Deze Verslagen, XXVI, 1917, p. 1093.

2) Eene andere opvatting van de gravitatie-theorie is, naar men weet, door LORENTZ uitgesproken.

3) J. TRESLING, Deze Verslagen XXV, 1917, p. 844; A. D. FOKKER, Deze Verslagen XXV, 1917, p. 1067.

Als het veld stationair is en alle elektrische ladingen in rust zijn, heeft men

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0, \quad w^1 = w^2 = w^3 = 0.$$

Wij stellen

$$\varphi_4 = \varphi, \quad w^4 = \varrho.$$

$\varphi$  geeft dan den elektrostatischen potentiaal aan,  $\varrho$  de dichtheid van elektriciteit. Wij nemen verder aan, dat het veld bolsymmetrie bezit en kiezen de tijdcoördinaat zoodat  $g_{r4} = 0$ . Wij hebben dan  $\sqrt{-g} = uw p^2$  en krijgen voor  $\mathfrak{M}^{(e)}$  de volgende uitdrukking, waarvan men de geldigheid het eenvoudigst inziet voor een punt op een der coördinaatassen, maar die algemeen gelden moet omdat  $\mathfrak{M}^{(e)}$  alleen van  $r$  afhangt en niet van de richting vanaf het centrum,

$$\mathfrak{M}^{(e)} = -\frac{p^2}{4\pi uw} \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + 2\varphi\varrho \dots \dots \dots (3)$$

Voor de integraal van  $\mathfrak{M}^{(e)}$  over een 4 dimensionaal gebied van geschikt gekozen vorm krijgen wij:

$$\iiint\int \mathfrak{M}^{(e)} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 4\pi (t_2 - t_1) \int_{r_1}^{r_2} \mathfrak{M}^{(e)} r^2 dr, \dots \dots (4)$$

waarin

$$4\pi \int_{r_1}^{r_2} \mathfrak{M}^{(e)} r^2 dr = \int_{r_1}^{r_2} \left\{ \frac{-r^2 p^2}{uw} \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + 8\pi\varphi\varrho r^2 \right\} dr. \dots (4a)$$

De wetten voor het elektrisch veld krijgt men door variatie van  $\varphi$  met konstanthouding van  $u, w, p, \varrho$ . Daar de uitdrukkingen voor  $\mathfrak{G}^*$  en  $\mathfrak{M}^{(u)}$   $\varphi$  niet bevatten, krijgt men door genoemde variatie

$$2 \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2 p^2}{uw} \frac{d\varphi}{dr} \right) + 8\pi\varphi\varrho r^2 = 0.$$

Door integratie krijgen wij:

$$\frac{-r^2 p^2}{uw} \frac{d\varphi}{dr} = e(r), \quad \frac{d\varphi}{dr} = -\frac{uw e(r)}{p^2 r^2}, \dots \dots (5)$$

waarin  $e(r)$  de totale lading in een bol met straal  $r$  aangeeft. Buiten het lichaam is  $e(r)$  konstant en gelijk aan de totale lading van het lichaam.

Daar  $w$  in het oneindige de waarde  $c$  heeft (zie I pag. 1096), zien wij gemakkelijk in dat  $e$  en  $\varrho$  de lading en de dichtheid daarvan in *elektromagnetische maat* beteekenen,  $\varphi$  daarentegen de potentiaal in *elektrostatische maat*.

Wij zullen nu het zwaartekrachtsveld berekenen. Deze berekening kan men uitvoeren met behulp der formules (38) I. Men moet dan

eerst den spanningsenergietensor berekenen voor het elektromagnetische veld door in formule (2) I  $\mathfrak{M}$  door  $\mathfrak{M}^{(e)}$  te vervangen en uitdrukking (2) in te voeren. Wij zullen intusschen de berekening korter uitvoeren door toepassing van het variatieprincipe in den vorm (28) I. Wij hebben bij deze variatie  $g$  en  $\zeta$  konstant te houden en  $u$ ,  $w$  en  $v = rp$  te varieeren. In het rechterlid van (28) I moeten wij natuurlijk  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{(e)} + \mathfrak{M}^{(m)}$  invoeren, zoodat dit lid niteenvalt in twee deelen, die wij afzonderlijk zullen beschouwen. Het eerst beschouwen wij het deel, dat  $\mathfrak{M}^{(e)}$  bevat, en krijgen dan gebruikmakend van (4a) en (5)

$$4\pi \delta \int_{r_1}^{r_2} \mathfrak{M}^{(e)} r^2 dr = \int_{r_1}^{r_2} \left\{ - \left( \frac{d\varphi}{dr} \right)^2 \delta \left( \frac{v^2}{uw} \right) \right\} dr = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{u^2 w^2 e^2}{v^4} \delta \left( \frac{v^2}{uw} \right) dr,$$

$$\delta \int_{r_1}^{r_2} \mathfrak{M}^{(e)} r^2 dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{uw e^2}{4\pi v^2} \left( \frac{\delta u}{u} - 2 \frac{\delta v}{v} + \frac{\delta w}{w} \right) dr. \quad \dots \quad (6)$$

Wat het deel betreft, dat  $\mathfrak{M}^{(m)}$  bevat, daarvoor kunnen wij onze vroegere formule (36) I behouden, wanneer wij slechts opmerken, dat wanneer wij daarin  $\mathfrak{M}$  door  $\mathfrak{M}^{(m)}$  vervangen,  $\mathfrak{E}$  de beteekenis krijgt van spanningsenergietensor voor de materie, als men het elektrische veld *niet* tot de materie rekent. In deze § zal  $\mathfrak{E}$  deze gewijzigde beteekenis behouden.

Als wij de vergelijkingen (31) I en (6) beschouwen te zamen met (36) I, met  $\mathfrak{M}^{(m)}$  daarin ingevoerd inplaats van  $\mathfrak{M}$ , dan wordt de variatieformule

$$2 \delta \int_{r_1}^{r_2} \left\{ \frac{w v'^2 + 2 v v' w'}{u} + uw \right\} dr = \kappa \int_{r_1}^{r_2} \left\{ \left( \frac{uw e^2}{4\pi v^2} + 2r^2 \mathfrak{E}_r^r \right) \frac{\delta u}{u} + \right. \\ \left. + 2 \left( - \frac{uw e^2}{4\pi v^2} + 2r^2 \mathfrak{E}_p^p \right) \frac{\delta v}{v} + \left( \frac{uw e^2}{4\pi v^2} + 2r^2 \mathfrak{E}_4^4 \right) \frac{\delta w}{w} \right\} dr. \quad (7)$$

Door uitvoering der variaties krijgen wij het volgende stelsel van vergelijkingen, dat in de plaats treedt voor het stelsel (38) I,

$$\left. \begin{aligned} - \frac{w v'^2 + 2 v v' w'}{u^2} + w &= \frac{\kappa}{u} \left( \frac{uw e^2}{8\pi v^2} + r^2 \mathfrak{E}_r^r \right), \\ - \frac{w v'' + v' w' + v w''}{u} + (v w' + w v') \frac{u'}{u^2} &= \frac{\kappa}{v} \left( - \frac{uw e^2}{8\pi v^2} + r^2 \mathfrak{E}_p^p \right), \\ - \frac{2v v'' + v'^2}{u} + u + 2v v' \frac{u'}{u^2} &= \frac{\kappa}{w} \left( \frac{uw e^2}{8\pi v^2} + r^2 \mathfrak{E}_4^4 \right). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Deze vergelijkingen bepalen het zwaartekrachtsveld, als de tensor  $\mathfrak{E}$  voor de materie zelve en de verdeling der electriciteit gegeven

zijn <sup>1)</sup>. Wij zullen *het veld buiten het elektrische lichaam* berekenen, waar men heeft

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_r^r &= \mathfrak{E}_p^p = \mathfrak{E}_4^4 = 0, \\ e &= \text{konstant.}\end{aligned}$$

Om de berekening van het veld te kunnen uitvoeren, moeten wij het koördinatenstelsel vaststellen en dat doen wij door als voorwaarde te stellen

$$p = 1 \quad \text{d. w. z.} \quad v = r. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Als men dit in (8) invoert, geeft de laatste vergelijking gedeeld door  $-u$

$$\begin{aligned}\frac{1}{u^2} - 2r \frac{u'}{u^3} &= 1 - \frac{\kappa e^2}{8\pi r^2}, \\ \frac{d}{dr} \left( \frac{r}{u^2} \right) &= 1 - \frac{\kappa e^2}{8\pi r^2}.\end{aligned}$$

Door integratie krijgen wij

$$\frac{r}{u^2} = r - a + \frac{\kappa e^2}{8\pi r},$$

waarin  $a$  een integratiekonstante is. Om de formules te vereenvoudigen, stellen wij

$$\frac{\kappa e^2}{8\pi} = \varepsilon^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

en krijgen dan

$$\frac{1}{u^2} = 1 - \frac{a}{r} + \frac{\varepsilon^2}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Deze formule drukt  $u$  uit als functie van  $r$ . Een uitdrukking voor  $w$  geeft ons de eerste formule (8). Als wij daarin de voor  $\frac{1}{u^2}$  gevonden uitdrukking invoeren en het teeken omkeeren, krijgen wij

$$(w + 2r w') \left( 1 - \frac{a}{r} + \frac{\varepsilon^2}{r^2} \right) = w - w \frac{\varepsilon^2}{r^2}.$$

Een eenvoudige rekening geeft

<sup>1)</sup> Men ziet uit de rechterleden van (8), als men dit stel vergelijkingen met (38) vergelijkt, hoe de componenten van den spanningsenergetensor voor het elektromagnetische veld kunnen worden uitgedrukt door  $e, u, w, p$  en de koördinaten.

Men vindt dat in het elektromagnetische veld  $+\frac{uw}{8\pi p^2} \frac{e^2}{r^4}$  beantwoordt aan  $\mathfrak{E}_r^r$  en

$\mathfrak{E}_4^4 - \frac{uw}{8\pi p^2} \frac{e^2}{r^4}$  aan  $\mathfrak{E}_p^p$ . Voor de diagonaalsom der componenten krijgt men identiek nul.

$$2 \frac{w'}{w} = \frac{\frac{\alpha}{r^2} - 2 \frac{\varepsilon^2}{r^3}}{1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\varepsilon^2}{r^2}}$$

In het rechterlid is de teller juist de afgeleide van den noemer. Op grond hiervan krijgen wij door integratie, als wij de integratiekonstante zoo kiezen dat  $w^2$  in het oneindige de waarde  $c^2$  krijgt,

$$w^2 = c^2 \left( 1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\varepsilon^2}{r^2} \right) \dots \dots \dots (12)$$

Hiermede hebben wij het zwaartekrachtsveld berekend. Vergelijking van formule (11) met (12) geeft

$$u w = c \dots \dots \dots (13)$$

en verder vindt men (verg. I de noot op pag. 1105)

$$\sqrt{-g} = c \dots \dots \dots (14)$$

De konstante  $\varepsilon$  bepaalt op grond van (10) de elektrische lading van het lichaam. De konstante  $\alpha$  bepaalt de massa van het lichaam. Formule (50) I geeft namelijk

$$m = \frac{4\pi \alpha}{\kappa} \dots \dots \dots (15)$$

Dezelfde uitdrukking voor  $m$  is in I pag. 1105 afgeleid voor geval  $c = 1$ . Wij zien nu, dat deze uitdrukking voor  $m$  ook geldt als de tijdseenheid anders gekozen wordt.

Wij hebben betrekking (15) verkregen door toepassing van formule (50) I, bij welker afleiding wij hebben aangenomen, dat de materie slechts eindige uitgebreidheid heeft. Als men het elektromagnetische veld tot de materie rekeut, wat de beschouwingen in I veronderstellen, dan heeft de materie, streng genomen oneindige uitgebreidheid. Dat heeft echter geen invloed op de geldigheid van formule (50) I in het geval dat wij beschouwen, want de grootheden van het elektrische veld naderen sterk genoeg tot nul, als men zich van het centrum verwijderd.

Men kan zich de vraag stellen onder welke voorwaarden  $g_{44} = w^2$  nul en negatief kan worden. Op grond van (13) wordt dan ook  $u^2$  oneindig groot resp. negatief. Uitdrukking (12) toont aan dat buiten het lichaam

$$w^2 = 0 \quad \text{voor} \quad r = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \varepsilon^2}$$

Voor kleinere waarden van  $r$  is  $w^2$  negatief.

Alleen als

$$\frac{\alpha^2}{4} > \varepsilon^2$$

wordt dus  $w^2$  nul en negatief voor reële waarden van  $r$ . Is daarentegen  $\varepsilon^2 > \frac{\alpha^2}{4}$ , dan zijn  $w^2$  en  $u^2$  overal eindig en positief en dan kan men de massa en lading heel goed aannemen als te zijn gekoncentreerd in een mathematisch punt.

§ 2. *De energie van het zwaartekrachtsveld.*

In deze § zullen wij de energieverdeeling berekenen in een zwaartekrachtsveld met bolsymmetrie, d.w.z. wij zullen de grootte  $\tau_4^4$  in een zoodanig veld berekenen. Het lichaam, dat het veld opwekt, mag ook elektrisch zijn. Wij zullen aan onze berekening ten grondslag leggen de formules (17) I en (13) I die geven

$$\kappa \tau_4^4 = -\frac{1}{2} \kappa \sum_{\alpha} \xi_{\alpha}^{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\tau} \frac{\partial \mathfrak{A}_{\tau}}{\partial x_{\tau}} \dots \dots \dots (16)$$

Wij denken ons  $\sum_{\alpha} \xi_{\alpha}^{\alpha}$  gegeven als functie van  $r$ . In geval wij den vektor  $\mathfrak{A}$  kunnen berekenen, krijgen wij op grond van deze formule ook  $\tau_4^4$ . Wij zullen eene uitdrukking voor  $\mathfrak{A}_1$  afleiden die geldt in een punt der  $X_1$  as ( $x_2 = x_3 = 0$ ). Volgens (5) I hebben wij

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \sum_{\mu\nu\sigma} (g^{\nu 1} g^{\sigma \nu} - g^{\sigma 1} g^{\mu\nu}) \left( \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} \right).$$

De tijdcoördinaat zullen wij zooals in I § 3 zoo kiezen, dat  $g_{r4} = 0$ . In punten op de  $X_1$  as heeft men op grond van (33) I en (25) I.

$$\left. \begin{aligned} g^{11} &= -\frac{1}{u^2}, & g^{22} &= g^{33} = -\frac{1}{p^2}, & g^{12} &= g^{13} = g^{23} = 0, \\ \frac{\partial g_{12}}{\partial x_3} &= \frac{\partial g_{13}}{\partial x_2} = -\frac{1}{r} (u^2 - p^2), & \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} &= \frac{\partial g_{33}}{\partial x_1} = -2 p p'. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

Bij het berekenen van  $\mathfrak{A}_1$  merken wij vooreerst op dat de te sommeeren termen waarvoor  $\sigma = \mu$  eene bijdrage nul leveren. Opdat een term een van nul verschillende bijdrage levert, moet verder óf  $\sigma$ , óf  $\mu$  1 zijn en de beide overige der drie indices  $\sigma, \mu, \nu$  moeten gelijk zijn.

$\mu = 1, \sigma = \nu \neq 1$  geeft voor  $\mathfrak{A}_1$  de bijdrage:

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g} \cdot g^{11} \left( g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} + g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial x_1} + g^{44} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} \right),$$

$\sigma = 1, \mu = \nu \neq 1$  geeft als bijdrage:



$$-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{11} \left\{ g^{22} \left( 2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right) + g^{33} \left( 2 \frac{\partial g_{13}}{\partial x_3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x_1} \right) - g^{44} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} \right\}.$$

Deze twee bijdragen geven tezamen  $\mathfrak{A}_1$ . Voert men de uitdrukkingen (17) in, dan krijgt men voor  $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_r$

$$\mathfrak{A}_r = -4 \frac{w p p'}{u} + \frac{2}{r} u w \left( 1 - \frac{p^2}{u^2} \right) - 2 \frac{p^2 w'}{u} \quad (18)$$

Voor een punt op de  $X_1$  as is het rechterlid gelijk aan  $\mathfrak{A}_1$ . Beschouwt men een punt buiten de  $X_1$  as, dan geldt dank zij de bolsymmetrie dezelfde uitdrukking voor de radiale komponent  $\mathfrak{A}_r$ .

Formule (18) geldt voor elk coördinatenstelsel, dat rekening houdt met de bolsymmetrie, als de tijdcoördinaat maar zoo gekozen wordt, dat  $g_{r4} = 0$ . Specialiseeren wij het coördinatenstelsel door te stellen  $p = 1$ , dan gelden buiten het lichaam de uitdrukkingen (11) en (12) voor  $u$  en  $w$  en wij krijgen

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_r &= \frac{2c}{r} \left( \frac{\alpha}{r} - \frac{\varepsilon^2}{r^2} \right) - c \left( \frac{\alpha}{r^2} - 2 \frac{\varepsilon^2}{r^3} \right), \\ \mathfrak{A}_r &= \frac{c\alpha}{r^2} \quad (19) \end{aligned}$$

Voor de componenten van  $\mathfrak{A}$  in de richtingen der coördinaatassen in de ruimte heeft men natuurlijk wegens de bolsymmetrie

$$\mathfrak{A}_\tau = \frac{v_\tau}{r} \frac{c\alpha}{r^2}, \quad \tau = 1, 2, 3. \quad (19a)$$

Vormt men de divergentie, dan krijgt men

$$\sum_\tau \frac{\partial \mathfrak{A}_\tau}{\partial x_\tau} = 0, \quad (20)$$

en formule (16) geeft

$$t_4^4 = -\frac{1}{2} \sum_\alpha \mathfrak{F}_\alpha^\alpha.$$

Buiten het lichaam is het rechterlid nul en dus ook

$$t_4^4 = 0 \quad (r > R) \quad (21)$$

Kiest men het coördinatenstelsel zoo, dat  $p = 1$  <sup>1)</sup>, dan heeft het zwaartekrachtsveld overal buiten het lichaam de energiedichtheid nul. Dit geldt ook in geval het lichaam elektrisch geladen is, want voor het elektromagnetische veld is de som der diagonaalkomponenten van den spanningsenergietensor nul (zie de noot op pag. 1204).

Nu doet de vraag zich voor, of de overige spanningsenergiecomponenten  $t_{\mu\nu}$  voor het zwaartekrachtsveld ook gelijk nul zijn. Het vermoeden, dat dit het geval zal zijn ligt voor de hand, op grond daarvan, dat formule (17) 1) geeft:

1) Dan is ook, zooals in § 1 bewezen is,  $\sqrt{-g} = c$ .

$$\sum_{\alpha} t_{\alpha}^{\alpha} = 0.$$

Dat alle  $t_{\mu}$  werkelijk nul zijn in een koördinatenstelsel waarvoor  $p = 1$  toont men gemakkelijk aan met behulp van formule (52) van EINSTEIN, Grundlage. Wij zullen hier de bijzonderheden der berekening laten rusten.<sup>1)</sup>

Kiest men een koördinatenstelsel, waarvoor  $p \neq 1$ , dan wordt zoowel  $t_4^4$  als de overige  $t_{\mu}^{\nu}$  ongelijk nul. EINSTEIN heeft benaderde uitdrukkingen afgeleid voor de  $t_{\mu}^{\nu}$  in een koördinatenstelsel waarin de snelheid van het licht onafhankelijk is van de voortplantingsrichting<sup>2)</sup>, en deze uitdrukkingen toonen aan, dat de  $t_{\mu}^{\nu}$  niet nul zijn.  $t_4^4$  kan ook in dat geval berekend worden door middel van de formules (16) en (18). Voor dat koördinatenstelsel, waarin de snelheid van het licht onafhankelijk is van de voortplantingsrichting, heeft men volgens DROSTE<sup>3)</sup> voor  $u, p, w$  buiten het lichaam

$$u = p = \left(1 + \frac{\alpha}{4r}\right)^2, \quad w^2 = 1 - \frac{\alpha}{r \left(1 + \frac{\alpha}{4r}\right)^2} \quad . \quad . \quad (22)$$

Deze uitdrukkingen kan men invoeren in (18). De verdere berekening zullen wij hier niet geven.

De eigenschap der componenten  $t_{\mu}^{\nu}$ , dat men ze door een koördinatentransformatie kan doen verdwijnen als het veld bolsymmetrie bezit, hangt blijkbaar samen met de omstandigheid, dat deze grootheden zich niet bij elke koördinatentransformatie als tensorkomponenten gedragen. Opmerkenswaardig is het, dat de wijziging van het koördinatenstelsel, noodig om de componenten  $t_{\mu}^{\nu}$  te doen verdwijnen, bij de werkelijk voorkomende zwaartekrachtsvelden onwaarneembaar klein is.

Deze omstandigheid maakt de opvatting van de grootheden  $t_{\mu}^{\nu}$  als spanningsenergiecomponenten eenigszins minder sympathiek en geeft een zekeren steun aan de door LORENTZ uitgesproken opvatting der zwaartekrachtsenergie. Hoe men hierover ook moge denken, men heeft toch geen reden de grootheden  $t_{\mu}^{\nu}$  uit de gravitatie-theorie van EINSTEIN te verbannen. Meerdere algemeene stellingen kunnen, zooals uit onze beschouwingen in I § 2 blijkt, met behulp van deze grootheden op eenvoudige wijze afgeleid worden.

<sup>1)</sup> Voor een niet elektrisch centrum heeft ondertusschen ook E. SCHRÖDINGER dit bewezen: E. SCHRÖDINGER, Die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes. Phys. Zeitschr. 19, 1918 p. 4. (Opmerking bij de drukproef.)

<sup>2)</sup> A. EINSTEIN, Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation, Berl. Ber. 1916, p. 688.

<sup>3)</sup> DROSTE, Het zwaartekrachtsveld, pag. 20, verg. (31).

**Natuurkunde.** — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer J. J. VAN LAAR: „*Over het verloop der waarden van  $a$  en  $b$  bij waterstof bij verschillende temperaturen en volumina*”. II.

(Mede aangeboden door den Heer F. A. H. SCHREINEMAKERS)

### IX. Invloed van het krachtsveld volgens Boltzmann.

Substitueeren wij in de algemeene Viriaalformule

$$pv = RT - \frac{1}{3} \sum r f(r) = RT - \frac{1}{6} N \int dN r \frac{dP_r}{dr}$$

voor  $dN$ , het aantal moleculen in de bolschaal tusschen  $r$  en  $r + dr$  rondom het beschouwde molecuul, de waarde

$$dN = 4\pi r^2 dr \times e^{-\theta P_r} \times \tau \times n,$$

dan wordt

$$pv = RT - \frac{2}{3} \pi N n \int_s^{r_a} \tau r^3 \frac{dP_r}{dr} e^{-\theta P_r} dr.$$

Hierin stelt dus  $P_r$  de *krachtsfunctie* voor in de punten, op een afstand  $r$  van het middelpunt van het beschouwde (bolvormig gedachte) molecuul, zoodat  $f(r) = dP_r : dr$  is. De integratie strekt zich uit van  $r = s$  (de afstand der middelpunten van twee — onsamendrukbaar onderstelde — moleculen bij de botsing, zoodat  $s$  de middellijn van het molecuul voorstelt) tot zoover het krachtsveld zich buiten het molecuul uitstrekt ( $r = r_a$ ).

De factor  $e^{-\theta P_r}$  is de bekende BOLTZMANN'SCHE *temperatuur-, distributiefactor* onder den invloed van het krachtsveld. De parameter  $\theta$  is  $= N : RT$ , waarin  $N$  het totale aantal moleculen in het volume  $v$  voorstelt, zoodat  $N = nv$  is, wanneer  $n$  het aantal moleculen in de volumeenheid voorstelt.

De andere factor  $\tau$  is de *volume-distributie factor*. Bij  $r = s$  (bij botsing) zal  $\tau_s = \frac{b}{b_g} \frac{v}{v-b}$  zijn (zie verder onder), hetgeen bij  $v = \infty$  tot 1 zal naderen, aangezien die fictieve grootheid  $b$  dan ook  $= b_g$  wordt. Bij  $r = \infty$  is  $\tau = 1$  bij alle waarden van  $v$ . Maar reeds op korten afstand van het beschouwde molecuul zal  $\tau = 1$  kunnen worden gesteld.

Beschouwen wij voorloopig slechts den niterst verdunden gastoe-stand — d.w.z. den „planetarischen” toestand der materie — dan is dus overal  $\tau = 1$ , zoodat wij kunnen schrijven: <sup>1)</sup>

$$pv = RT - \frac{2}{3} \pi N n s^3 \int_{s-\delta}^s \frac{dP_r}{dr} e^{-\theta P_r} dr - \frac{2}{3} \pi N n r_1^3 \int_s^{r_a} \frac{dP_r}{dr} e^{-\theta P_r} dr, \quad (a)$$

waarbij wij aannemen dat bij de *botsing* de afstand der moleculen  $= s$  blijft (geen merkbare indrukking) en dat ook de *aantrekking* zich tot een slechts geringen afstand van  $s$  uitstrekt, zoodat een middelwaarde  $r_1^3$  als konstante factor voor het integratieteeken kan worden gebracht.

Hierbij is in elk geval  $r_a$  *groter* dan  $s$  te onderstellen. Immers ware dit niet zoo, en werkte de aantrekking alleen op uiterst korten afstand  $s + \delta$  vlak vóór de botsing, zooals nog wel eens wordt aangenomen, dan zou bij kleinere volumina ook het aantrekkingsviriaal aan *denzelfden* volum-distributiefactor  $\tau_s$  onderworpen zijn als het botsingsviriaal — met het gevolg dat de toestandsvergelijking niet *twee* onderscheiden konstanten  $a$  en  $b$ , maar slechts *ééne* zou bevatten, en den vorm  $p(v - \beta) = RT$  zou aannemen.

*Kritische verschijnselen* — welke theoretisch juist kunnen verklaard worden door het verschillend gedrag der beide afzonderlijke viriaal-gedeelten, in dier voege dat de factor  $\tau$  op het attractieviriaal geen of nagenoeg geen invloed zal hebben bij kleinere volumina (daar de middelwaarde  $\tau_1$  dan steeds dicht bij 1 zal kunnen worden aangenomen), terwijl zij op het botsingsviriaal een grooten invloed zal uitoefenen (bij  $v = v_k$ , waar  $v = 3$  à 2 keer  $b$  is, zal  $\tau_s$  reeds een waarde hebben tusschen 1,5 en 2) — deze verschijnselen zouden *geheel uitblijven*. Immers er is dan geen scheiding mogelijk tusschen de beide konstanten  $a$  en  $b$ , waardoor de toestandsvergelijking in den bekenden vorm  $(p + \frac{a}{v^2})(v - b) = RT$  kan worden gebracht. (zie ook verder onder).

Het is dus wel zoo goed als *volkomen uitgesloten*, dat de aantrekking eerst zou plaats hebben bij onmiddellijke (of nagenoeg onmiddellijke) aanraking der moleculen. Bij *zeer kleine* volumina (kleiner dan het kritisch volumen), waar de molecuulmiddelpunten b.v. een gemiddeld kleineren afstand ( $l$ ) dan  $r_a$  bezitten, kan verwacht worden dat ook het aantrekkingsviriaal eenigermate door den factor  $\tau$  zal worden beïnvloed, zoodat  $a$  van  $v$  afhankelijk zou worden. Maar dan zijn wij het kritische punt — waar  $l = s \sqrt{4} = 1,6 s$  is —

<sup>1)</sup> Zie ook mijn Artikel in de Arch. Teyler (2) T VII, Troisième partie, van 1901; voorn. Hoofdst. X, p. 28–34.

reeds gepasseerd. ( $r_a$  zal blijken niet veel grooter te zijn dan ongeveer 1,6  $s$ ). De grootheid  $a$  zou derhalve alsdan met afnemende  $v$  kunnen toenemen, doch aan den anderen kant zal tengevolge van „schermwerking” de waarde van  $a$  ook kunnen afnemen, wanneer  $v$  kleiner wordt.

**X. Het aantrekkingsviriaal.**

Bepalen wij het eerst de waarde van het aantrekkingsviriaal.

Bij  $r = s$  zal  $P_r$  blijkbaar  $= -M$  zijn, de (negatieve) maximumwaarde der krachtsfunctie. Immers  $f(r)$  is in de Viriaalformule zóó gerekend, dat aantrekking *positief* wordt. Is b.v.  $P_r = -c : r^q$ , dan wordt  $f(r) = dP_r : dr = qc : r^{q+1}$ , derhalve behoorlijk positief. Verder is bij  $r = r_a$ , waar de aantrekking ophoudt of onmerkbaar wordt,  $P_r = 0$ , zoodat de tweede integraal oplevert:

$$\left( -\frac{e^{-\theta P_r}}{\theta} \right)_{-M}^0 = \frac{e^{\theta M} - 1}{\theta} = \frac{RT}{N} \left( e^{\frac{MN}{RT}} - 1 \right).$$

En daar  $N \times \frac{2}{3}\pi s^3$  blijkbaar  $= N \times 4m = (b_g)_\infty$  is ( $m =$  volume molecuul; de index  $g$  heeft betrekking op oneindig groot volume; de index  $\infty$  op oneindig hooge temperatuur), zoo kan voor  $N \times \frac{2}{3}\pi r_1^3$  geschreven worden  $(b_g)_\infty \times \left(\frac{r_1}{s}\right)^3 = r(b_g)_\infty$ , en wordt de waarde van het aantrekkingsviriaal, daar  $n : N = 1 : v$  is:

$$V_a = -\frac{v(b_g)_\infty}{v} RT \left( e^{\frac{MN}{RT}} - 1 \right).$$

Stellen wij nu

$$r(b_g)_\infty RT \left( e^{\frac{MN}{RT}} - 1 \right) = a, \dots \dots \dots (\alpha)$$

dan is bij  $T = \infty$ :

$$a_\infty = r(b_g)_\infty RT \left( \frac{MN}{RT} + \frac{1}{2} \left( \frac{MN}{RT} \right)^2 + \dots \right) = r(b_g)_\infty \cdot MN \dots (\beta)$$

Derhalve wordt, wanneer wij  $MN = a$  stellen:

$$a = a_\infty \times \frac{e^{a/RT} - 1}{a/RT} = a_\infty \times f(a), \dots \dots \dots (1)$$

en

$$V_a = -\frac{a}{v} \dots \dots \dots (2)$$

De grootheid  $a$  is alzoo bepaald door

$$a = MN = \frac{\alpha_\infty}{r(b_g)_\infty} \dots \dots \dots (3)$$

Wij zullen terstond de temperatuurfunctie  $f'(a)$  bij de grootheid  $a$  nader beschouwen.

Alleen zij hier reeds opgemerkt, dat wanneer wij algemeen de arbeidsintegraal

$$\int_s^{r_a} \frac{d(NP_r)}{dr} e^{-\theta P_r} dr = RT (e^{\alpha/RT} - 1) = \Sigma \dots \dots \dots (7)$$

stellen,  $f'(a)$  kan worden voorgesteld door

$$f'(a) = \frac{\Sigma}{a} \dots \dots \dots (4)$$

Het is gemakkelijk in te zien, dat (4) algemeen zal gelden, welke ook de vorm van den distributiefactor is, mits deze slechts een zoodanige functie zij van  $\theta P_r$ , dat zij = 1 wordt voor  $P_r = 0$ .  $\alpha_\infty$  zal dan nl. steeds =  $r(b_g)_\infty a$  zijn. In het bijzondere geval dat de factor *konstant* = 1 mocht zijn, wordt  $\Sigma$  eenvoudig =  $(NP_r)_s^{r_a} = 0 - (N \times -M) = MN = a$ .  $f'(a)$  wordt dan ook = 1, zoodat de grootheid  $a$  onafhankelijk van de temperatuur wordt.

**XI. Het botsingsviriaal.**

Hier zal — wanneer het molecuul tenminste onsamedrukbaar wordt ondersteld —  $P_r$  bij  $r = s - \delta$  de waarde  $+\infty$  aannemen, terwijl  $P_r$  bij  $r = s$  blijkbaar weer de waarde  $-M$  zal hebben. Daardoor wordt de in de uitdrukking (a) voor  $pv$  aangeduide eerste integraal:

$$\left( -\frac{e^{-\theta P_r}}{\theta} \right)_\infty^{-M} = -\frac{e^{\theta M}}{\theta} = -\frac{RT}{N} e^{\alpha/RT},$$

en vindt men voor het afstootingsviriaal ( $n : N$  is weer  $v$ ):

$$V_b = \frac{(b_g)_\infty}{v} RT e^{\alpha/RT}.$$

Stellen wij dan

$$(b_g)_\infty e^{\alpha/RT} = b_g, \dots \dots \dots (8)$$

dan wordt

$$b_g = (b_g)_\infty \times e^{\alpha/RT} = (b_g)_\infty \times f'(b), \dots \dots \dots (5)$$

en

$$V_b = RT \frac{b_g}{v} \dots \dots \dots (6)$$

De temperatuurfunctie  $f(b)$  kan blijkbaar algemeen worden voorgesteld door de betrekking

$$f(b) = 1 + \frac{\Sigma}{RT} \dots \dots \dots (7)$$

Wij verkrijgen alsnu in plaats van (a), in verband met (2) en (6):

$$pv = RT + RT \frac{b_g}{v} - \frac{a}{v} = RT + \frac{RT b_g - a}{v} = RT + \frac{B}{v}, \dots (8)$$

waarin  $b_g$  en  $a$  door (5) en (1) gegeven zijn als functies van de temperatuur.  $B$  stelt de z.g. „tweede” Viriaalcoëfficiënt voor, wanneer — zooals wij hebben ondersteld —  $v = \infty$  (zeer groot) is. Anders is  $B$  (door den volnumdistributiefactor  $\tau$ ) nog een functie van  $v$  en kan in plaats van  $B:v$  geschreven worden  $(B:v) + (C:v^2) + \text{etc.}$ , waarin  $B$ ,  $C$ , etc. dan alleen nog slechts temperatuurfuncties zijn.

Verwaarloozen wij den mogelijken invloed van  $v$  op de grootheid  $a$  — nemen wij het volume dus niet al te klein — zoo blijft alleen de invloed van den factor  $\tau_s$  bij de botsing over. Schrijft men hiervoor (zie ook § 9)

$$\tau_s = \frac{b}{b_g} \frac{v}{v-b}, \dots \dots \dots (9)$$

dan wordt  $b_g$  in (8) thans  $b_g \times \tau_s$ , en men kan schrijven:

$$pv = RT \left( 1 + \frac{b}{v-b} \right) - \frac{a}{v} = RT \frac{v}{v-b} - \frac{a}{v},$$

d.w.z.

$$p + \frac{a}{v^2} = \frac{RT}{v-b}, \dots \dots \dots (10)$$

waardoor de bekende v. D. WAALS'sche scheiding der beide konstanten  $a$  en  $b$  is tot stand gebracht. Dit was dus, wij herhalen het nog eens, alleen daardoor mogelijk, dat alleen bij  $b_g$  een volnum-distributiefactor met  $v:v-b$  optreedt, en niet bij  $a$ , waarna de factor  $RT$  in het botsingsviriaal met den hoofdterm  $RT$  kan worden vereenigd.

Wij moeten echter nooit vergeten, dat de aldus bij  $v-b$  ingevoerde grootheid  $b$  een geheel fictieve  $b$  is, en in geenerlei direct verband staat met de eigenlijke grootheid  $b_g = (b_g)_\infty \times f(b)$ . Immers uit (9) volgt voor  $b$ :

$$b = b_g \times \frac{\tau_s}{1 + \tau_s \frac{b_g}{v}}, \dots \dots \dots (9a)$$

zoodat  $b$  alleen dan in  $b_g$  kan worden uitgedrukt, zoodra  $\tau_s$  op *andere, onafhankelijke* wijze als functie van  $v$  bekend is, hetgeen tot nog toe niet is gelukt. Bij  $v = \infty$  is echter  $\tau_s$  steeds  $= 1$ , en wordt  $b = b_g$ , terwijl bij  $v = b$ , waar  $\tau_s = \infty$  is,  $b = v = v_0$  wordt. De fictieve grootheid  $b$  zal dus inliggen tusschen  $b_g$  en  $v_0$ , d.w.z. tusschen  $(b_g)_\infty \times f(b) = N \times 4m \times f(b)$  bij  $v = \infty$ , en ongeveer  $N \times \frac{6}{\pi} m$  (bij kubische distributie) bij  $v = v_0$ . Alleen bij hooge temperatuur is  $f(b) = 1$  te stellen, en wordt de bovenste grens  $= N \times 4m$ . ( $m =$  volume van één molecuul).<sup>1)</sup>

Dat  $\tau_s$  bij  $v = v_0$  oneindig groot wordt, is duidelijk, wanneer men bedenkt dat alsdan de moleculen (kubisch gedistribueerd) vlak tegen elkaar aan zullen liggen, zoodat er telkens een *eindig* aantal molecuulmiddelpunten binnen een *oneindig dunne* bolschaal zullen liggen, waardoor het aantal moleculen per volumeenheid op die plaatsen niet de gewone middelwaarde  $n$  heeft, maar  $= n \times \tau_s = \infty$  zal wezen. De middelwaarde  $n$  wordt dan gevormd door de afwisselende waarden 0 (tusschen twee middelpunten) en  $\infty$  (op de plaats der middelpunten).

## XII. Andere afleiding van het botsingsviriaal.

Mocht men bezwaar hebben tegen de wijze, waarop de distributiefactor  $e^{-\theta P_r}$  ook bij het botsingsviriaal is ingevoerd, met het oog op de omstandigheid dat verwacht kan worden dat de dichtheid der moleculen na doorgang door de aantrekkingszone zich niet verder zal wijzigen, zoodat het aannemen van  $P_r = +\infty$  bij de botsing (waardoor de genoemde factor  $= 0$  zou worden) ongemotiveerd schijnt (trouwens  $P_r$  zal nooit  $\infty$  kunnen worden, daar er juist zóóveel arbeid wordt verricht door de quasi-elastische krachten, tot de normale (relatieve) snelheid van het botsende molecuul is uitgeput) — dan kan men ook op de volgende wijze, waartegen dit bezwaar niet kan ingebracht worden, tot het resultaat van (5) en (6) geraken.

In de voorgaande verhandeling vonden wij voor het botsingsviriaal de uitdrukking

<sup>1)</sup> Wij maken er nog opmerkzaam op, dat terwijl van  $v = \infty$  tot  $v = v_0$  de *ware* grootheid  $b_g = (b_g)_\infty \times f(b) \times \tau_s$  toeneemt van  $b_g$  tot  $\infty$  (tengevolge van  $\tau_s$ ), de *fictieve* grootheid  $b$  in  $v - b$  zal *afnemen* van  $b_g$  tot  $b_0 =$  ongeveer  $6/\pi \times Nm$ .



$$V_b = \frac{RT' (b_g)_\infty}{v} \left[ 1 - \alpha \sqrt{T'} + \frac{2}{3} (\alpha \sqrt{T'})^2 - \frac{2}{5} (\alpha \sqrt{T'})^3 \right],$$

waarin  $\alpha$  een coëfficiënt voorstelt, welke met de atoomkrachten binnen het molecuul in verband staat, en de mate van indrukking daarvan bepaalt. Stelt men hierin  $\alpha = 0$  (volkomen harde, onsamendrukbare bollen), dan wordt verkregen:

$$V_b = \frac{RT' (b_g)_\infty}{v},$$

hetgeen men in dit geval ook onmiddellijk zou hebben verkregen, door onder het integraalteeken (zie de eerste Verhandeling)  $Q$  konstant te onderstellen. Immers dan ware de integraal geworden (de indices 0 en  $b$  hebben op het botsingsinterval betrekking; in Verhandeling I werd  $Q_a$  in pl. v.  $Q_b$  geschreven):

$$2 \varepsilon n (b_g)_\infty \int_{r_b}^{r_0} (Q - Q_0) dQ = - \varepsilon n (b_g)_\infty (Q_0 - Q_b)^2,$$

en daar  $\varepsilon (r_0 - r_b)^2 = \varepsilon (Q_0 - Q_b)^2 = RT' : N$  is, zoo wordt  $V_b$  als boven.

Wij schreven  $RT'$  en niet  $RT$ . Dit komt daar vandaan dat de gemiddelde relatieve normale snelheid  $u_n$ , waarmede een molecuul tegen een ander aanbotst, tengevolge van het passeeren der aantrekkingszone met een zeker bedrag is *vergroot*, en wel zóó, dat

$$\frac{1}{2} u u_n'^2 - \frac{1}{2} u u_n^2 = \int \frac{dP_r}{dr} e^{-\theta P_r} dr = \Sigma : N$$

wordt, waarin  $\Sigma$  door ( $\gamma$ ) in § 9 gegeven is. Maar  $\frac{1}{2} u u_n^2 = RT : N$  zijnde, zoo is ook

$$RT' - RT = \Sigma, \quad . . . . . (11)$$

zoodat wij verkrijgen:

$$\frac{RT'}{RT} = 1 + \frac{\Sigma}{RT} = e^{\alpha/RT},$$

en derhalve

$$V_b = RT \frac{(b_g)_\infty}{v} \times e^{\alpha/RT},$$

waardoor  $f(b) = e^{\alpha/RT}$  wordt, in overeenstemming met (5).

### XIII. Bezwaren tegen de functie $e^{-\theta P_r}$ . Een andere distributiefactor.

Wij vinden dus voor  $f(a)$  en  $f(b)$  respect. de uitdrukkingen

$$\left. \begin{aligned} f(a) &= (e^{a/RT} - 1) : a/RT = 1 + \frac{1}{2} \frac{a}{RT} + \frac{1}{6} \left( \frac{a}{RT} \right)^2 + \dots \\ f(b) &= e^{a/RT} = 1 + \frac{a}{RT} + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{RT} \right)^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

En nu zijn deze beide temperatuurfuncties *niet* aan elkaar gelijk, zooals de experimenteele uitkomsten (zie de voorgaande Verhandeling) hebben geleerd. Het verschil is van dien aard, dat zelfs een zeer belangrijke fout in deze uitkomsten een dergelijk verschil niet zou kunnen opleveren. Immers, bij de kritische temperatuur is  $1 : RT = 8,2306$ , zoodat met  $a = 0,06426$  (zie voorgaande Verhandeling, 2<sup>e</sup> tabel) de waarde van  $f(a) = 1,3180$  wordt, terwijl bij het BOYLEPUNT, waar  $1 : RT = 2,545$  is, de waarde dezer functie  $= 1,0864$  is. Die der temperatuurfunctie  $f(b)$  wordt echter in beide gevallen resp. 1,6971 en 1,1777, zoodat  $b_g : a$  in het eerste geval  $= (b_g)_x : a_\infty \times (1,697 : 1,318) = 1,288 (b_g) : a_\infty$  zou worden, in het tweede geval daarentegen  $= id \times 1,178 : 1,086 = 1,084 (b_g)_\infty : a_\infty$ .

Experimenteel is voor beide verhoudingen *dezelfde* waarde (n.l. 2,545) gevonden. Met den BOLTMANN'schen distributiefactor zouden ze *niet* gelijk zijn, doch zich verhouden als 1,288 : 1,084, d. w. z.  $b_g : a$  zou bij de kritische temperatuur 1,19 maal grooter moeten zijn dan bij het BOYLEPUNT, hetgeen bij een van beide waarnemingen een fout van bijna 20 % zou vereischen. En dit is wel zeer onwaarschijnlijk — tenzij de verhouding van  $b_g : b_k$ , waarvoor wij 1,044 aannamen (zie voorgaande Verhandeling, § 2), ongeveer 1,24 zou moeten zijn. Maar aangezien de waarde van de fictieve  $b$  in  $v-b$  bij het kritische punt zeker geen 20 %, kleiner zal zijn dan de grenswaarde bij groot volume, zoo is deze onderstelling ook al niet bijzonder waarschijnlijk <sup>1)</sup>.

Hetzelfde geldt natuurlijk in nog sterker mate t. o. der door REINGANUM en KEESOM <sup>2)</sup> berekende  $f(a)$  en  $f(b)$ , waarbij van denzelfden distributiefactor werd uitgegaan, maar waar  $r$  bij het aantrekkingsviriaal niet nagenoeg konstant  $= r_1$  (zie § 9), doch varieerend tusschen  $s$  en  $\infty$  werd aangenomen. Voor  $P_r$  werd dan — ten einde de integratie mogelijk te maken — een bepaalde vorm, n.l.  $-c : r^q$ ,

<sup>1)</sup> Hiertoe zou men moeten aannemen, dat de waarde van  $\tau_s$  in (9<sup>a</sup>) bij een volume, overeenkomende met  $vk$ , veel grooter ware bij lagere temp. dan bij hoogere temp., waar de verhouding 1,044 is bepaald. Wellicht is ook de waarde van  $a$  op den kritischen isotherm bij groot volume *geringer* dan bij kleinere volumina, aangezien dan ook in de aantrekkingszone de factor  $\tau_1$  een rol zou kunnen spelen. (Zie ook het slot van § 9, en de noot in § 11).

<sup>2)</sup> Suppl. Comm. Leiden No. 24, 25 en 26.

gebruikt ( $q > 3$ ). Alsdan wordt  $\frac{dP_r}{dr} = \frac{qc}{r^{q+1}}$ , en dus  $r^3 \frac{dP_r}{dr} = \frac{qc}{r^{q-2}}$ . Ware  $q =$  of  $< 3$ , dan zou de integraal oneindig groot worden (bij  $q = 3$  logarithmisch oneindig). Voor  $q =$  of  $> 4$  vervalt dit bezwaar.

Uit de algemeene formule (42) op p. 32 van Suppl. 24, kan voor de grootheid  $a$  worden afgeleid (na aftrekking van  $b_g = (b_g)_\infty \left( 1 + \frac{\alpha}{RT} + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{RT} \right)^2 + \dots \right)$ , en vermenigvuldiging met  $RT$ , daar  $B$  bij KEESOM  $= b_g - (a : RT)$  voorstelt):

$$a = \frac{q}{q-3} (b_g)_\infty a \left[ 1 + \frac{q-3}{2q-3} \frac{\alpha}{RT} + \frac{1}{2} \frac{q-3}{3q-3} \left( \frac{\alpha}{RT} \right)^2 + \frac{1}{6} \frac{q-3}{4q-3} \left( \frac{\alpha}{RT} \right)^3 + \dots \right],$$

wanneer  $N \times \frac{2}{3} \pi s^3 = N \times 4 m = (b_g)_\infty$  wordt gezet. (KEESOM schrijft  $n$ , waar wij  $N$  hebben gezet), terwijl voor  $\frac{R}{k} v (=$  onze

$N \times M$ ) wordt geschreven  $a$  ( $h\nu$  is n.l.  $= \frac{v}{kT} = \frac{R}{k} v : RT$ ).

Bij  $q = \infty$  wordt dit  $a = (b_g)_\infty a \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{RT} + \frac{1}{6} \left( \frac{\alpha}{RT} \right)^2 + \dots \right)$ , in overeenstemming met wat wij in § 10 vonden, daar bij  $q = \infty$  de aantrekkingszone oneindig dun wordt, zoodat  $r_a = r_1 = s$  wordt, en dus  $v = 1$ .

Neemt men met KEESOM  $q = 4$ , dan worden de temperatuurfuncties dus: <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} f(a) &= 1 + \frac{\alpha}{RT} + \frac{1}{18} \left( \frac{\alpha}{RT} \right)^2 + \dots \\ f(b) &= 1 + \frac{\alpha}{RT} + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{RT} \right)^2 + \dots \end{aligned} \quad (12a)$$

dus  $f(a)$  nog minder sterk dan de onze met de coëfficiënten  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{6}$ , etc., zoodat het verschil tusschen de beide temperatuurfuncties  $f(b)$  en  $f(a)$  nog grooter zou worden dan bij ons, en de langzame afname

<sup>1)</sup> Met  $q = 4$  zou de voorfactor  $4(b_g)_\infty z$  worden, dus  $r = 4$ , hetgeen overeenkomt met een middelwaarde  $r_1 = 1,6 s$  (zie § 9).

Terloops zij nog opgemerkt, dat bij de berekeningen van KEESOM een fout is ingeslopen. In Suppl. N<sup>o</sup>. 26, p. 6, staat n.l. dat uit de data in de Noot op p. 5 wordt berekend  $v = 1,46 \cdot 10^{-14}$ . Dit moet wellicht  $3r$  zijn, zoodat  $v = 0,49 \cdot 10^{-14}$  zou worden. Uit  $\log h\nu = 9,551$  ( $-10$ ) volgt n.l. voor  $h\nu = r : kT$  de waarde 0,356, zoodat met  $k = 1,39 \cdot 10^{-16}$ ,  $T = 107,4$ , dus  $kT = 1,49 \cdot 10^{-14}$  voor  $v$  gevonden wordt 0,53 en niet  $1,46 \cdot 10^{-14}$ .

der aantrekking volgens de wet  $q = 4$  over een grooter gebied dus tot nòg *ongunstiger* resultaten t.o. der experimenteel gevonden *gelijkheid* der beide temperatuurfuncties (tenminste bij  $T_k$  en  $T_B$ ) zou voeren dan onze aannamen.

De eenige distributiefactor, welke voor beide temperatuurfuncties *gelijke* uitdrukkingen zou opleveren, is

$$(1 + \theta P_r)^{-2}$$

in pl. v.  $e^{-\theta P_r}$ . Want dan wordt de arbeidsintegraal  $\Sigma$ :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \int_s^{r_a} \frac{d(NP_r)}{dr} (1 + \theta P_r)^{-2} dr = \left( -\frac{N}{\theta} \frac{1}{1 + \theta P_r} \right)_{-M}^0 = \\ &= RT \left( \frac{1}{1 - \theta M} - 1 \right) = \frac{\alpha}{1 - \alpha/RT}, \end{aligned}$$

daar  $\theta = N:RT$  en  $MN = \alpha$  is. Voor  $a_\infty = r(b_g)_\infty \times \Sigma_\infty$  (zie § 10) bij  $T = \infty$  ( $\theta = 0$ ) vindt men dus weer  $r(b_g)_\infty \times \alpha$ , en verder voor  $f(a) = \Sigma : \alpha$ , en  $f(b) = 1 + \frac{\Sigma}{RT}$  (Zie (4) en (7)): <sup>1)</sup>

$$f(a) = f(b) = \frac{1}{1 - \alpha/RT} = 1 + \left( \frac{\alpha}{RT} \right)^2 + \dots \quad (12b)$$

Deze temperatuurfunctie  $f(a)$  is dus *de sterkste* van alle. Zij geeft behoorlijk  $f(b) = f(a)$ . Dan volgt de onze, n.l. (12), uit de BOLTZMANN'sche distributiefunctie  $e^{-\theta P_r}$  afgeleid, onder aanname van snel afnemende aantrekking, slechts tusschen  $s$  en  $r_a$ . Zij is *zwakker* en geeft  $f(b) > f(a)$ . Eindelijk komt die van REINGANUM en KEESOM, eveneens uit  $e^{-\theta P_r}$  afgeleid, maar met attractie van  $r = s$  tot  $r = \infty$ , en  $q = 4$ . Deze is de *zwakste* van alle en geeft nòg sterker verschil tusschen  $f(b)$  en  $f(a)$ , hetgeen in haar nadeel pleit.

Het is de vraag of de voorgestelde distributiefactor theoretisch te rechtvaardigen is. Maar zij heeft het groote nadeel dat de noemer reeds voor  $RT = \alpha$  *oneindig* wordt, en daarna voor kleinere waarden van  $T$  *negatief* zou worden, hetgeen natuurlijk onmogelijk is.

Wat de aansluiting betreft aan de experimenteel uit de *gevonden* waarden van  $B$  berekende waarden van  $\alpha$  (door n.l.  $B$  te deelen

<sup>1)</sup> Het is alweer opmerkelijk dat  $f(b)$  ook kan verkregen worden door de integratie

$$\int_{s-\hat{c}}^s \frac{dP_r}{dr} (1 + \theta P_r)^{-2} dr \text{ uit te voeren tusschen de grenzen } \infty \text{ en } -M \text{ voor } P_r.$$

Er komt dan n.l.  $\left( -\frac{1}{\theta} \frac{1}{1 + \theta P_r} \right)_\infty^{-M} = -\frac{RT}{N} \cdot \frac{1}{1 - \theta M}$ , zoodat wederom (zie ook § 11)  $f(b) = (1 - \theta M)^{-1} = (1 - \alpha/RT)^{-1}$  wordt.

door  $(T: T_B) - 1$ , zie de voorgaande Verhandeling), zoo is deze nagenoeg dezelfde als bij de functie  $(e^{a/RT} - 1) : a/RT$ , welke wij destijds niet alleen voor  $a$ , maar ook voor  $b$  hebben laten gelden.

In onderstaande tabel is  $a$  berekend uit  $a = a_\infty : (1 - a/RT)$ . De waarden van  $a_\infty$  en  $a$  zijn ditmaal bepaald uit de bij  $-252^\circ$  en  $20^\circ$  C. gevonden waarden van  $a$ . Bij  $-252^\circ$  C. is n.l.  $a = -475 \cdot 10^{-6}$ ;  $-0,808 = 588 \cdot 10^{-6}$ , en bij  $20^\circ$  C. was  $a = 380 \cdot 10^{-6}$ , zoodat gevonden wordt  $a_\infty = 370,0 \cdot 10^{-6}$  en  $a = 0,02797$ .

$t$	$T$	$1 - a/RT$	$a \cdot 10^6$ ber.	$a \cdot 10^6$ gev.
$-257,10^\circ$	15,99	0,5220	709	740
$-255,32$	17,77	0,5699	649	(599)
$-252,47$	20,62	0,6293	588	588
$T_k = -239,91$	33,18	0,7698	481	486
$-204,62$	68,47	0,8884	417	472
$-103,54$	169,55	0,9549	388	414
$+ 20$	293,09	0,9739	380	380
$+ 100$	373,09	0,9795	378	376

Zooals men ziet, is de aansluiting tamelijk voldoende; alleen zijn weer de waarden tusschen  $20^\circ$  C. en de kritische temperatuur alle te laag.

Alle tot nu toe beschouwde temperatuurfuncties naderen bij  $T=0$  of in de nabijheid van  $T=0$  tot  $\infty$ , en worden dus bij lage temperatuur zeer groot. D.w.z. in de vergelijking (8), n.l.

$$pv = RT - \frac{a - RT b_g}{v},$$

zou  $p$  bij zeer lage temperaturen reeds bij betrekkelijk groote waarden van  $v$  negatief worden. Dit is echter geen praktisch bezwaar, want het beteekent alleen dat de *grenslijn*, waar de verzadigde damp niet langer bestaan kan en tot vloeistof condenseert, meer naar rechts (d.w.z. naar de zijde der nog grootere volumina) wordt verschoven. De negatieve waarden van  $p$  vallen dan als te voren in het metastabiele gebied binnen de grenslijn.

Men zou het zeer groot worden van  $a$  ook aldus kunnen interpreteren. Bij zeer lage temperatuur, waar de moleculen met niterst geringe snelheid de aantrekkingszone passeeren, zal de samenhooping

rondom een molecuul zeer groot worden; deze zullen dus tenslotte alle op elkaar vallen, wat alweer condensatie tot vloeistof zou beteekenen.

En wat het oneindig groot worden van  $b_g$  betreft, dit zou tengevolge hebben dat de fictieve grootheid  $b$  in  $v-b$  sneller tot  $v$  zou naderen dan anders het geval zou wezen. Immers in (9<sup>a</sup>), n.l.  $b = \tau_s b_g : (1 + (\tau_s b_g : v))$  heeft thans het groot worden van  $b_g$  tengevolge der lage temperatuur *dezelfde* uitwerking als anders het groot worden van  $\tau_s$  tengevolge van het kleine volume. D.w.z. dat bij een volume  $v$ , waar anders (bij hooge temperaturen) de fictieve grootheid  $b$  nog dicht bij  $(b_g)_\infty$  zou zijn, en ver van  $v$  verwijderd, deze *thans* (n.l. bij lage temperaturen) reeds veel dichtter tot  $v$  zal zijn genaderd. Een praktisch bezwaar is dit alweder niet, al is de waarschijnlijkheid van een dergelijk gedrag dan ook niet groot.

De geheele theorie van den distributiefactor  $e^{-\theta P_r}$  (of  $(1 + \theta P_r)^{-2}$ , etc. etc.) berust dan ook m. i. op een misverstand, en de theorie van het aantrekkings- en botsingsviriaal dient *op geheel andere gronden* opnieuw te worden opgebouwd.

#### XIV. Nauwkeuriger theorie van het aantrekkings- en botsingsviriaal.

De tot nog toe gevolgde methode van berekening (REINGANUM, VAN LAAR, KEESOM) zou men in zekeren zin de "statische" kunnen noemen. Men neemt hierbij aan, dat de moleculen volgens een zekere wet rondom het beschouwde molecuul zijn gedistribueerd, waarbij hunne beweging, resp. snelheidsgrootte en richting, volkomen is geëlimineerd. (de gemiddelde eindsnelheid bij de botsing buiten rekening gelaten). In de plaats daarvan treedt dan de BOLTZMANN'sche distributiefactor  $e^{-\theta P_r}$ , die alles van zelf in orde moet brengen. Maar de beschouwingswijze van BOLTZMANN gaat m. i. niet meer op voor afzonderlijke *micro-komplexen*, als moleculen bij botsing, en onmiddellijk vóór de botsing, of op geringen afstand elkaar in de aantrekkingszone passeerend.

Men ziet gemakkelijk in dat het effect der aantrekking *dit* zal zijn, dat de oorspronkelijk rechtlijnige baan (bij groot volume althans) onder den invloed der aantrekking in de aantrekkingszone meer of minder naar het molecuul toe *gekromd* zal worden, en dat dus moleculen die anders verder af van het beschouwde molecuul zouden blijven, thans in sferen zullen komen, waar de aantrekking *groter* is. En hoe geringer de snelheid is, waarmede de moleculen zullen passeeren, des te sterker deze vergrootende invloed zal wezen. Is de temperatuur uiterst laag, dan zullen *alle* moleculen, die de

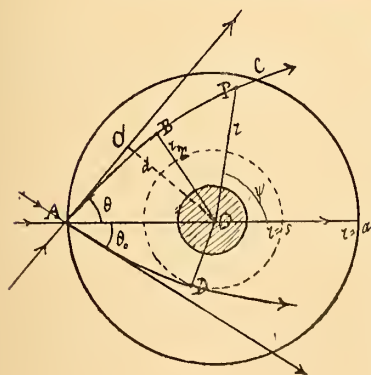
rand der aantrekkingszone ( $r = r_a$ ) met hun middelpunt passeeren, tegen het beschouwde molecuul aanbotsen, waardoor voor alle de maximumwaarde  $M$  voor  $-P_r$  verkregen wordt, en er dus een *maximale* waarde voor  $a$  — maar *geen exponentieel oneindig groote*, zooals bij den BOLTZMANN'schen distributiefactor — zal worden gevonden.

Hetzelfde geldt ten aanzien van  $b$ . Moleculen die anders *niet* zouden botsen, zullen thans onder den invloed der afbuigende aantrekking, *wel* botsen, en het aantal botsende moleculen zal dus worden vergroot — in meerdere of mindere mate, naarmate de temperatuur lager of hooger zal wezen. En het is gemakkelijk in te zien dat ook hier bij  $T = 0$  de waarde van  $b_j$  tot een *maximum* zal naderen (aangezien de straal der aantrekkingszone  $r_a$  eindig blijft), en *niet* tot oneindig. Ook de dwaasheid der oneindig groote waarde voor  $P_r$  bij het einde der botsing vervalt nu geheel. De distributie blijft natuurlijk *eindig*, en *gedurende* de botsing komt daarin geenerlei verandering. (Bij aanname van  $e^{-\theta P_r}$  zou de dichtheid gedurende het oneindig klein gedachte botsingsinterval afnemen van  $n \times e^{\theta M}$  tot  $n \times 0$ , hetgeen onzin is, aangezien wanneer een molecuul éénmaal tot botsing is gekomen, het aantal daarvan, zooals gezegd, gedurende de botsing niet meer verandert).

Wij komen zoo van zelf tot een nieuwe methode van berekening, welke men — in tegenstelling van de gebruikelijke, de statische — de *dynamische* zou kunnen noemen. De lotgevallen der elkaar passeerende en botsende moleculen zullen *afzonderlijk* moeten worden beschouwd — al kan ook in deze beschouwingswijze veel worden vereenvoudigd en onder een samenvattend gezichtspunt worden gebracht.

En zoo zijn wij met de beschouwing der afzonderlijke banen of baangroepen weer van BOLTZMANN tot MAXWELL teruggekeerd.

## XV. De fundamenteele baan-vergelijkingen.



Zooals men uit nevensgaande figuur kan zien, komt de gekromde baan thans (in het punt  $B$ , met den minimumafstand  $r_m$ ) dichter bij  $O$  dan de rechte baan ( $n = \infty$ , d. w. z.  $T = \infty$ ) in het punt  $O'$  met den minimalen afstand  $OO' = d = a \sin \theta$ . De hoek waaronder de baan van het middelpunt van het beschouwde bewegende molecuul ( $O$  is het stilstaande middelpunt) ten opzichte der verbindingslijn  $AO$  bij  $A$

binnen de aantrekkingszone komt, is nl. door  $\theta$  aangeduid. Alle deze hoeken liggen op den omtrek van een kegelmantel met  $A$  tot top. Aangezien bij  $A$  de baan nog ongestoord is, zoo is de frequentie van den hoek  $\theta$  als gewoonlijk  $= \sin \theta d\theta$ . Wij zullen dan later hebben te integreeren voor alle mogelijke hoeken  $\theta$ . Komen de molecuulmiddelpunten op den omtrek van den bol  $r = s$ , dan botsen ze. De grenshoek  $\theta_0$  is die, waarbij de baan den cirkel  $r = s$  (in  $D$ ) juist aanraakt. Alle banen die onder kleineren hoek t.o.v.  $AO$  invallen, geven tot *botsing* aanleiding.

Het spreekt vanzelf dat die grenshoek  $\theta_0$  in het grensgeval  $T = \infty$  (rechtlijnige banen) gegeven is door  $\sin \theta = s : a$ , aangezien  $AD$  dan de rechte raaklijn wordt. ( $a$  is de straal van den rand der aantrekkingszone; buiten  $a$  is er geen aantrekking meer).

Is nu de aantrekkende kracht in de baan  $= -f(r)$  (dus steeds naar het centrum  $O$  gericht), dan volgt uit  $\mu \frac{d^2x}{dt^2} = -f(r) \cos \psi$  en  $\mu \frac{d^2y}{dt^2} = -f(r) \sin \psi$  met  $x = r \cos \psi$ ,  $y = r \sin \psi$  ( $r$  is de voerstraal,  $\psi$  de amplitudo) de betrekking

$$y \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \text{ of } \frac{d}{dt} \left( y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) = 0, \text{ of } y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = \text{konst.}$$

Maar uit  $\frac{dx}{dt} = \cos \psi \frac{dr}{dt} - r \sin \psi \frac{d\psi}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt} = \sin \psi \frac{dr}{dt} + r \cos \psi \frac{d\psi}{dt}$  volgt onmiddellijk  $y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = -r^2 \frac{d\psi}{dt}$  (hetgeen ook dadelijk is in te zien), derhalve

$$r^2 \frac{d\psi}{dt} = -c, \quad . . . . . (1)$$

waarin  $c$  een (nader te bepalen) konstante is. Dit is 'de bekende wet der perken.

Het snelheidskwadraat  $u^2 = \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2$ , in poolcoördinaten uitgedrukt, wordt blijkbaar  $= \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2$ . Maar ook is

$$\frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dy}{dt} = -\frac{f(r)}{\mu} \left[ \cos \psi \frac{dx}{dt} + \sin \psi \frac{dy}{dt} \right],$$

d.w.z., daar de uitdrukking tusschen [ ] in het tweede lid, op grond van  $r^2 = x^2 + y^2$ , ook  $= \frac{dr}{dt}$  is:



$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right] = - \frac{f(r)}{\mu} \frac{dr}{dt},$$

derhalve

$$\frac{1}{2} d(u^2) = - \frac{f(r)}{\mu} dr = - \frac{1}{\mu} \frac{dP_r}{dr} dr,$$

wanneer  $P_r$  de krachtsfunctie voorstelt, en  $\mu$  de massa van een molecuul. Geïntegreerd tusschen de grenzen  $A$  en  $P$ , geeft dit dus (in  $A$  is  $P_r = 0$ , en  $u = u_0$ ):

$$\frac{1}{2} \mu (u^2 - u_0^2) = 0 - P_r,$$

of

$$u^2 = u_0^2 - 2 \frac{P_r}{\mu}, \dots \dots \dots (2)$$

de bekende wet van de levende kracht. Substitueert men nu voor  $u^2$  de boven gevonden waarde in poolcoördinaten, dan wordt

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{c^2}{r^2} = u_0^2 - 2 \frac{P_r}{\mu}, \dots \dots \dots (3)$$

daar  $r^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2$  volgens (1)  $= c^2 : r^2$  is. Deze vergelijking (3) is voor onze berekeningen van groot gewicht. Voor de *baanvergelijking* volgt hieruit nl., in verbinding met  $\frac{d\psi}{dt} = - \frac{c}{r^2}$ :

$$\frac{d\psi}{dr} = \pm \frac{c}{r^2 \sqrt{u_0^2 - 2 \frac{P_r}{\mu} - \frac{c^2}{r^2}}} \dots \dots \dots (4)$$

Het bovenste teeken geldt blijkbaar voor  $r = a$  tot  $r = r_m$  ( $A$  tot  $B$ ), het benedenste teeken voor alle punten voorbij  $B$ .<sup>1)</sup>

Wij moeten nu eerst de konstante  $c$  bepalen. Op twee verschillende manieren kan dit geschieden. Het eenvoudigste is wel den toestand in het punt  $A$  na te gaan, waar de baan coincideert met de raaklijn  $AO'$ . Ligt het beschouwde punt  $P$  dan in de onmiddellijke nabijheid van  $A$ , dan is in  $\Delta OAP$  klaarblijkelijk  $\sin(\psi - \theta) = a \sin \theta : r$ . Differentieering t.o.v.  $r$  geeft  $\cos(\psi - \theta) \frac{d\psi}{dr} = - \frac{a \sin \theta}{r^2}$ , dus omdat  $\psi$  dan  $= 180^\circ$  is, en  $r = a$ :

$$\left( \frac{d\psi}{dr} \right)_A = \frac{tg \theta}{a}$$

<sup>1)</sup> Wij merken nog op, dat door differentiatie van (3) volgt  $\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{c^2}{r^3} = - \frac{f(r)}{\mu}$ .

Maar uit (4) volgt ook, daar in  $A$   $P_r = 0$  is, en het positieve teeken geldt:

$$\left(\frac{d\psi}{dr}\right)_A = \frac{c}{a^2 \sqrt{u_0^2 - \frac{c^2}{a^2}}}$$

Uit beide uitdrukkingen volgt terstond:

$$c = u_0 \times a \sin \theta.$$

Hierdoor gaat (3) over in

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = u_0^2 \left(1 - \frac{a^2 \sin^2 \theta}{r^2}\right) - 2 \frac{P_r}{\mu}, \dots \dots \dots (3a)$$

en vinden wij derhalve voor het punt  $B$ , waar de voerstraal  $r$  de minimumwaarden  $r_m$  verkrijgt, en waar dus  $dr : dt = 0$  is:

$$\frac{a^2}{r_m^2} \sin^2 \theta = 1 + \frac{-P_{r_m}}{1/2 \mu u_0^2} \dots \dots \dots (5)$$

Voor den grenshoek  $\theta_0$  vinden wij alzoo, daar in  $D$   $r_m = s$  wordt en  $-P_{r_m} = M$ :

$$\frac{a^2}{s^2} \sin^2 \theta_0 = 1 + \frac{M}{1/2 \mu u_0^2} \dots \dots \dots (6)$$

## XVI. Berekening van het aantrekkingsviriaal.

De berekening van het aantrekkingsviriaal kan thans op de volgende wijze worden uitgevoerd.

Daar de *som* der stralen bij intrede van een molecuul met straal  $1/2 s$  binnen de attractiesfeer  $a$  juist  $= a$  is (immers het middelpunt van het intredende molecuul bevindt zich dan juist op den *omtrek* van die sfeer), zoo zal het aantal intreden per *seconde* gegeven zijn door de bekende betrekking

$$N = \pi n a^2 \times u_0 = \omega u_0.$$

Het aantal intreden voor de richting  $\theta$  is dus  $N_\theta = \omega u_0 \times \sin \theta d\theta$ , zoodat het aantal moleculen dat zich op een element  $ds$  van het baanstuk  $AB$  zal bevinden, gegeven is door

$$\omega u_0 \sin \theta d\theta \times \frac{ds}{u} = \omega u_0 \sin \theta d\theta \times dt,$$

wanneer  $u = \frac{ds}{dt}$  de snelheid is in het bedoelde baanelement. Maar  $dt$  is gegeven door (3<sup>a</sup>), waardoor wij voor het genoemde aantal verkrijgen:

$$\omega u_0 \sin \theta d\theta \times \frac{dr}{-u_0 \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \theta - \frac{2P_r}{\mu u_0^2}}}$$

Daar n.l. op  $AB$   $dr:dt$  negatief is, zoo is bij de worteltrekking het negatieve teeken genomen. Schrijven wij nu:

$$-\frac{2P_r}{\mu u_0^2} = \frac{-P_r}{\frac{1}{2}\mu u_0^2} = \frac{-P_r}{M} \times \frac{M}{\frac{1}{2}\mu u_0^2} = F(r) \times \varphi,$$

waarin dus  $\varphi$  door  $\frac{1}{2}\mu u_0^2$  met de *temperatuur* in verband staat. ( $M$  stelt weder de maximumwaarde van  $-P_r$  bij  $r=s$  voor).

Voor het totale *aantrekkingsviriaal* van het beschouwde molecuul heeft men alsdan:

$$\frac{1}{3} N \times M \omega \left[ \int_{\theta_0}^{90^\circ} \int_{r_m}^a \frac{r(-F'(r)) dr \times \sin \theta d\theta}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \theta + \varphi \cdot F(r)}} + \int_0^{\theta_0} \int_s^a \frac{r(-F'(r)) dr \times \sin \theta d\theta}{id.} \right], (7)$$

waarbij de eerste (dubbel)integratie betrekking heeft op alle intredende moleculen, welke *niet* tegen het beschouwde molecuul aanbotsen, en waar dus een *minimumwaarde* van  $r$  in  $B$  doorloopen wordt (welk minimum in het grensgeval  $\theta = \theta_0$  juist op den omtrek van den bol  $r=s$  komt te liggen), terwijl de tweede integratie betrekking heeft op alle *botsende* moleculen. Verder is voor de aantrekkende kracht  $\frac{dP_r}{dr} = -\frac{d(-P_r)}{dr}$  volgens de aanname  $-P_r: M = F(r)$  geschreven  $-MF'(r)$ . Tengevolge van het negatieve voor teeken van den wortel zijn de integratiegrenzen t. o. v.  $r$  omgekeerd.

Hierbij hebben wij in de bovenstaande uitdrukking nog vermenigvuldigd met 2, aangezien blijkbaar het tweede baanstuk van  $B$  tot  $C$ , of van de botsing tot terug naar den omtrek van de attractiesfeer, volmaakt dezelfde integraalwaarde zal opleveren. Alles heeft dan n.l. in omgekeerde volgorde plaats, terwijl de grenzen der integralen geheel dezelfde blijven. Ook is de sommatie uitgebreid over *alle* moleculen  $N$ , hetgeen met den viriaalfactor  $\frac{1}{3}$  dus in het geheel nog een voorfactor  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} N \times 2 = \frac{1}{3} N$  oplevert. (Het totale aantal moleculen  $N$  is door 2 gedeeld, omdat anders alle molecuulparen dubbel zouden zijn gerekend).

Wij moeten nu voor  $F(r)$  een geschikte uitdrukking kiezen. Daar de juiste wet aangaande de aantrekking onbekend is, zal het ter bepaling der temperatuur-afhankelijkheid (in de grootheid  $\varphi$  gelegen) niet veel verschil geven, welke interpolatiefunctie men gebruikt, mits  $F(r)$  slechts  $= 0$  wordt voor  $r=a$ , en  $= 1$  voor  $r=s$ . Te meer

wanneer — zooals waarschijnlijk wel altijd het geval zal zijn —  $a$  en  $s$  niet *veel* verschillen. Wij kunnen dus een functie kiezen, waarbij de bovenstaande integraties *mogelijk* worden. Volledig is dit niet te bereiken, zooals wij dadelijk zullen zien, maar wij kunnen toch door de aanname

$$F(r) = \frac{-P_r}{M} = \frac{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{a^2}} \dots \dots \dots (8)$$

een heel eind komen. Hierdoor wordt

$$-F'(r) = \frac{2}{r^3} : \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{a^2} \right), \dots \dots \dots (8a)$$

en dit is wel niet = 0 bij  $r = a$ , maar daartegen kan geen principieel bezwaar worden ingebracht. Men kan toch altijd onderstellen dat de moleculen bij de intrede binnen de attractiesfeer *plotseling* een aantrekkende kracht (evenredig met  $1:r^3$ ) zullen ondervinden. Indien slechts  $-P_r$  zelf = 0 wordt voor  $r = a$ , wat in onze bovenstaande aanname het geval is.

*Fontanivent*, najaar 1917.

(*Wordt vervolgd*).

**Natuurkunde.** — De Heer LORENTZ biedt een mededeeling aan van de Heeren L. S. ORNSTEIN en F. ZERNIKE: „*De Theorie der Brownsche beweging en de statistische mechanica*”.

(Mede aangeboden door den Heer JULIUS).

Prof. Dr. J. D. v. D. WAALS JR. en Mej. Dr. A. SNETHLAGE hebben tegen de gebruikelijke afleidingen van de formule van EINSTEIN voor de Brownsche beweging bezwaren geopperd aan de statistische mechanica ontleend. Deze bezwaren zijn als volgt te formuleeren:

*Ten eerste:* Het is onjuist een weerstandskracht op een emulsiedeeltje in te voeren, die evenredig is met de snelheid van dat deeltje, aangezien volgens een bekende uitspraak van de statistische mechanica snelheden en krachten onafhankelijk van elkaar zijn, zooals blijkt uit:

$$\overline{vK} = 0 \quad . . . . . (1)$$

Duidelijker nog ziet men die onafhankelijkheid, wanneer men bedenkt, dat bovenstaande vergelijking niet alleen geldt voor het gemiddelde over een kanonisch ensemble, maar zelfs ook voor elke groep systemen uit dat ensemble voor welke het beschouwde deeltje een bepaalde snelheid  $v$  heeft, zoodat voor zoo'n groep  $\overline{K} = 0$  is.

*Ten tweede:* Het is onjuist voor die weerstandskracht de formule van STOKES te gebruiken, aangezien deze onderstelt, dat de vloeistof rondom het deeltje een beweging heeft die van de snelheid van het deeltje afhangt. Dit is in strijd met de statistische mechanica, die immers leert, dat

$$\overline{v v_1} = 0 \quad . . . . . (2)$$

waarin men bijv. voor  $v$  de snelheid van het deeltje, voor  $v_1$  die van een molekuul (beide bijv. in de  $x$ -richting) in de nabijheid daarvan nemen kan. Mej. SNETHLAGE heeft dan ook voor het berekenen van de persistentie van een deeltje bij de Brownsche beweging consequent aangenomen, dat de omringende moleculen de gewone Maxwell'sche snelheidsverdeeling hebben.

De genoemde schrijvers hebben getracht een theorie van de Brownsche beweging te geven die aan deze bezwaren ontkomt, door van (1) nit te gaan. In het volgende willen wij laten zien, dat de vergelijkingen (1) en (2) veel minder verstrekkend zijn, dan

men geneigd, is aan te nemen, zoodat de bezwaren tegen de gebruikelijke afleiding geacht kunnen worden te vervallen, en daartegenover de door hen gegeven beschouwing onjuist is.

Om de differentiaalvergelijking af te leiden die zij voor de vergelijking van LANGEVIN-EINSTEIN in de plaats wil stellen, differentieert Mej. SNETHLAGE vergelijking (1) naar  $t$ . Dit levert

$$v \frac{d\bar{K}}{dt} = -K \frac{dv}{dt} = -\frac{\bar{K}^2}{M} \dots \dots \dots (3)$$

Waaruit zij terecht de gevolgtrekking maakt dat  $\frac{dK}{dt}$  niet onafhankelijk van  $v$  is. De aard van deze afhankelijkheid zal bekend zijn, wanneer men voor elke waarde van  $v$  het gemiddelde  $\frac{dK}{dt}$  kent. Dan zal men voor één systeem kunnen schrijven

$$\frac{dK}{dt} = F(v) + w \dots \dots \dots (4)$$

waarin  $w$  van het toeval afhangt en gemiddeld nul is ( $\overline{w} = 0$ ).

Wil men  $F(v)$  bepalen, dan is het blijkbaar noodig de groepen van systemen met bepaalde waarde van  $v$  afzonderlijk te beschouwen. Wij zullen verder een gemiddelde in zulk een „ $v$ -groep” evenals hierboven door  $-v$  aanduiden, d.w.z. het gemiddelde over de stelsels waarin op één bepaald oogenblik  $v$  een voorgeschreven waarde heeft, terwijl het teeken — het gemiddelde voor het geheele ensemble zal aanwijzen. Blijkens de volgende berekening geldt vergelijking (3) niet zooals (4) en (2) ook voor elke  $v$ -groep afzonderlijk; daarmede is door Mej. SNETHLAGE geen rekening gehouden.

Laat  $K$  de kracht in de  $x$ -richting op het Brownsche deeltje werkende voorstellen,  $v$  de snelheid van dat deeltje in die richting. Vergelijking (1) wordt dan voor het kanonisch ensemble gevonden wanneer  $K$  niet van de snelheden afhangt, dus een functie uitsluitend van de coördinaten  $q_1 \dots q_n$  is.

Laat  $q_1$  de  $x$  coördinaat van het deeltje zijn, zoodat  $\dot{q}_1 = v$ . Men heeft dan

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\partial K}{\partial q_1} v + \frac{\partial K}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots \frac{\partial K}{\partial q_n} \dot{q}_n$$

en voor het gemiddelde bij bepaalde  $v$

$$\frac{d\bar{K}^v}{dt} = \frac{\partial \bar{K}^v}{\partial q_1} v + \frac{\partial \bar{K}^v}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \text{enz.}$$

Bij de herleiding van den laatsten term is gebruik gemaakt van de bekende onafhankelijkheid van snelheids- en configuratie-uitgebreidheid. Deze termen vallen weg omdat  $\overline{\dot{q}_2}^v = 0$  enz. Dezelfde onafhankelijkheid heeft tengevolge dat

$$\frac{\partial \overline{K}^v}{\partial q_1} = \frac{\partial \overline{K}}{\partial q_1}.$$

Het laatste gemiddelde is uit de formules van GIBBS gemakkelijk te berekenen:

$$\frac{\partial \overline{K}}{\partial q_1} = \frac{\int \frac{\partial K}{\partial q_1} e^{-\frac{\epsilon_q}{\Theta}} dq_1 \dots dq_n}{\int e^{-\frac{\epsilon_q}{\Theta}} dq_1 \dots dq_n}$$

Door partieel integreeren levert de teller

$$\frac{1}{\Theta} \int K \frac{\partial \epsilon}{\partial q_1} e^{-\frac{\epsilon_q}{\Theta}} dq_1 \dots dq_n$$

aangezien het geïntegreerde deel weg valt ( $\epsilon = \infty$  aan de grenzen).

Nu is

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial q_1} = -K \quad \text{dus} \quad \frac{\partial \overline{K}}{\partial q_1} = -\frac{1}{\Theta} \overline{K^2}$$

Bedenkt men nu dat  $\Theta = M \overline{v^2}$  is, dan verkrijgt men

$$\frac{d\overline{K}^v}{dt} = -\frac{v}{M \overline{v^2}} \overline{K^2} \dots \dots \dots (5)$$

Hiermede is dus  $F(v)$  gevonden, vergelijking (4) wordt

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{\overline{K^2}}{M \overline{v^2}} v + w \dots \dots \dots (5a)$$

dus juist de vorm die door v. d. WAALS en Mej. SNETHLAGE aan deze vergelijking zonder nader bewijs gegeven werd. (Diss. SNETHLAGE verg. 24, zie echter de noot deze Versl. 24, 1278 waar een berekening in de verte analoog aan de onze voorkomt, zonder dat er echter onze conclusies nit getrokken worden).

Het feit dat  $\frac{d\overline{v}^v}{dt} = 0$  en  $\frac{d\overline{K}^v}{dt} = -\frac{v}{M \overline{v^2}} \overline{K^2}$  of  $\frac{d^2 \overline{v}^v}{dt^2} = -\frac{\overline{K^2}}{M^2 \overline{v^2}} v$  heeft voor het inzicht in de kanonische ensembles groote beteekenis. Kiest men op een gegeven oogenblik een groep stelsels nit waarin het

gesuspenderde deeltje een bepaalde snelheidscomponent  $v$  heeft, dan gelden voor die groep de gevonden formules. Nu bedenke men, dat, zoo men deze systemen volgt in den tijd, de snelheid der deeltjes niet voor alle gelijk blijft, doch dat verschillende snelheden gaan optreden. Daarbij geven onze formules aan dat, als men een zeer kort tijdtje  $\tau$  na het uitkiezen der groep de gemiddelde snelheid opmaakt, deze kleiner dan  $v$  geworden is. Door substitutie van bovenstaande uitkomsten in een reeks van TAYLOR vindt men n.l.:

$$\frac{\overline{v}}{v_t} = v \left( 1 - \frac{\overline{K^2}}{2 M^2 v^2} \tau^2 \dots \right)$$

Merkwaardig is nu ook dat, zoo men de systemen terug in den tijd vervolgt, d. w. z. het gemiddelde voor een tijdstip  $-\tau$  bepaalt voor een groep waarin op  $t=0$  de snelheid van het gesuspenderde deeltje  $v$  is, volkomen dezelfde formule geldt. Zoodat men een omkeerbaar verloop krijgt en kwesties die analoog zijn aan het door EHRENFEST opgeloste vraagpunt van de toppen der  $H$  kromme. Onze beschouwingen geven dus ook in beginsel aan hoe men de bezwaren zal kunnen weerleggen, die ZERMELO tegen de statistische mechanica van GIBBS (evengoed als tegen de moleculaire beschouwingen van BOLTZMANN omtrent het  $H$  theorema) heeft geopperd<sup>1)</sup>.

Het verkregen resultaat kan kort aldus geformuleerd worden: de eigenschappen van een groep systemen, zoo gekozen dat in alle het suspensie-deeltje een snelheid  $v$  bezit een „ $v$ -groep”, zijn afhankelijk van den tijd sedert het uitkiezen verlopen. Wij kunnen nu ook vragen naar de verandering van  $\frac{\overline{v}}{vK}$  met den tijd voor de op het tijdstip  $t=0$  uitgekozen  $v$ -groep. Blijkens de voorgaande berekening is

$$\frac{d}{dt} \frac{\overline{v}}{vK} = \frac{\overline{dv}}{dt} K + v \frac{\overline{dK}}{dt} = \frac{\overline{K^2}}{M} \left( 1 - \frac{v^2}{v^2} \right) \dots \dots \dots (6)$$

waaruit blijkt dat de betrekking

$$\frac{\overline{v}}{vK} = 0 \dots \dots \dots (7)$$

die geldt voor het oogenblik waarop de groep in het ensemble is uitgezocht, *niet* blijft gelden wanneer men deze groep verder vervolgt.

<sup>1)</sup> Men dient goed in het oog te houden, dat de hier gegeven reeksontwikkeling slechts voor een korten tijd na het kiezen der  $v$ -groep uit het ensemble geldt. Volgt men de groep gedurende langen tijd dan zullen de systemen waaruit zij bestaat zich over de geheele phase-uitgebreidheid hebben verdeeld met de dichtheid zooals die bij een kanonisch ensemble past.

Voor de beteekenis van de formule van EINSTEIN-LANGEVIN voor dit proces vergelijkte men de mededeeling van een onzer, deze Verslagen December 1917.



Wel is het gemiddelde van het laatste lid van (6) voor het ensemble blijkbaar gelijk nul, zooals dit wegens het stationaire karakter van het geheele ensemble noodzakelijk is en dan ook bij de afleiding van (3) reeds werd gebruikt.

Men moet dus bij het verwisselen van differentieeren en middelen zeer voorzichtig zijn. Zoo zal vergelijking (5) ook alleen op het eerste oogenblik gelden (juist als (7)), en daardoor ook (5<sup>a</sup>), die dus *niet als differentiaal-vergelijking opgevat moet worden*. Of ook: laat men (5<sup>a</sup>) toch voor latere oogenblikken gelden, dan is daarvoor niet  $\overline{v} = 0$ , zooals dat door Mej. SNETHLAGE gebruikt wordt <sup>1)</sup>.

Het tweede bezwaar, n.l. dat de statistische meehanica geen meebewegen zou toelaten, kunnen we op analoge wijze weerleggen. Daartoe zullen wij de afgeleiden van

$$\overline{v v'} = 0$$

berekenen, waarin  $v'$  de  $x$ -snelheid van een willekeurig in de nabijheid van het deeltje gelegen molekuul is.

Men heeft

$$\frac{d}{dt} \overline{v v'} = \overline{\frac{dv}{dt} v'} + v \overline{\frac{dv'}{dt}} = \frac{\overline{K}}{M} \overline{v'} + v \frac{\overline{K'}}{M'} = 0$$

daar zoowel  $\overline{v}$  als  $\overline{K'}$  nul zijn. Verder is

$$\frac{d^2}{dt^2} \overline{v v'} = \frac{d^2 v}{dt^2} \overline{v'} + 2 \frac{dv}{dt} \overline{\frac{dv'}{dt}} + v \frac{d^2 v'}{dt^2} = \frac{1}{M} \frac{dK}{dt} \overline{v'} + 2 \frac{KK'}{MM'} + \frac{v}{M'} \frac{dK'}{dt}$$

Het gemiddelde van den eersten term geeft

$$\frac{1}{M} \left\{ \frac{\partial K}{\partial q} \overline{v v'} + \frac{\partial K}{\partial q'} \overline{v'^2} + \dots \right\} = \frac{1}{M} \frac{\partial K}{\partial q'} \overline{v'^2} = - \frac{KK'}{M\Theta} \overline{v'^2} = - \frac{KK'}{MM'}$$

en van den derden term

$$\frac{v}{M'} \left\{ \frac{\partial K'}{\partial q} \overline{v} + \frac{\partial K'}{\partial q'} \overline{v'} + \dots \right\} = \frac{v^2}{M'} \frac{\partial K'}{\partial q} = - \frac{v^2}{M'} \frac{KK'}{\Theta} = - \frac{v^2}{v^2} \frac{KK'}{MM'}$$

zoodat

$$\frac{d^2}{dt^2} \overline{v v'} = \frac{KK'}{MM'} \left( 1 - \frac{v^2}{v^2} \right) \dots \dots \dots (8)$$

Voor de verandering van  $v'$  heeft men volgens het vorige

<sup>1)</sup> Dat men tot onmogelijke resultaten komt, wanneer men de vergelijking toch zoo gebruikt, is door een onzer in een vroegere mededeeling aangetoond. Vergl. L. S. ORNSTEIN. Over de theorie der Browusche beweging. Deze versl. Dec. 1917.

$$\overline{\frac{dv'}{dt}} = 0$$

$$\overline{\frac{d^2v'}{dt^2}} = -\frac{\overline{KK'}}{MM'v^2}v$$

Nu is  $K$  de som van de krachten in de  $x$ -richting, die alle andere deeltjes op het eerste nitoeffenen,  $K'$  de overeenkomstige som voor het tweede deeltje.

Ontwikkelt men het product van die sommen, dan zal het gemiddelde van het product van actie en reactie voorkomen, dat geacht kan worden te overwegen, zoodat men mag verwachten dat  $\overline{KK'}$  negatief is. De tweede afgeleide van  $\overline{v'}$  heeft dus hetzelfde teeken als  $v$ , d. w. z. het meebewegen van de omringende stof, dat op het oogenblik van het uitzoeken niet bestaat, ontstaat na korten tijd. Blijkens (8) is er gemiddeld in een ensemble van meebewegen geen sprake, zooals te verwachten is.

Wanneer men de eigenschappen van een stationair stelsel van molekulen statistisch wil onderzoeken, kan men gebruik maken van een statistisch stationair ensemble en de waargenomen eigenschappen identificeeren met de eigenschappen van het meest voorkomende stelsel in dit ensemble of met de overeenkomstige gemiddelden.

Het stelsel dat men bij het onderzoek der Brown'sche beweging beschouwt — een vloeistof met een daarin gesuspendeerd deeltje — is wel niet stationair, maar toch slechts langzaam veranderlijk: het zich bewegende deeltje verandert zijn snelheid slechts *weinig* door een *groot aantal* botsingen. Om dus ensembles te gebruiken voor de studie der Brown'sche beweging zal men een „quasi-stationair” ensemble moeten opstellen en de eigenschappen der werkelijke Brown'sche beweging moeten afleiden uit het gedrag van het meest voorkomende systeem in zulk een ensemble.

De gegeven berekeningen toonen aan, dat de groepen met bepaalde  $v$  uit een kanonisch ensemble *geen* dergelijke quasi-stationaire ensembles vormen. Het lijkt ons echter waarschijnlijk dat zulk een groep, waanneer men haar korten tijd vervolgd, wel aan de vereischten zal gaan voldoen, al zal het moeilijk zijn dit door direkte berekening aan te toonen. De op een later oogenblik quasi-stationair geworden  $v$ -groep, zou dan overeenkomen met het ensemble dat men uit het kanonisch ensemble nitzoekt, door die stelsels te kiezen waarin het deeltje de snelheid  $v$  reeds gedurende korten tijd heeft. Omtrent den daarbij vereischten tijdsduur is laugs een anderen weg

een aanwijzing gevonden door een onzer in een vroegere mededeeling <sup>1)</sup>.

De bovenaangehaalde statistisch-mechanische bezwaren tegen het toepassen van de wet van STOKES gelden dus waarschijnlijk niet voor een werkelijk systeem, maar alleen voor het eerste oogenblik van een  $v$ -groep, waarop deze juist nog niet te gebruiken is om het gedrag van een werkelijk stelsel weer te geven.

*Groningen.*

*Utrecht, Instituut voor Theoretische Natuurkunde.*

---

<sup>1)</sup> L. S. ORNSTEIN. l. c. — Deze tijd moet namelijk van de orde zijn van den tijd gedurende welken er tusschen de onregelmatige impulsen correlatie bestaat, d.w.z.

$F(\xi)F(\xi + \tau)$  van nul verschilt.

---

Bij de rondvraag zegt de Heer ERNST COHEN: In de laatste jaren is meer dan ooit gebleken, hoe noodig het is te geraken tot een Nederlandsch Rijks-Laboratorium van Onderzoek in den trant van het Bureau of Standards te Washington, het National Physical Laboratory te Teddington, de Physikalische Technische Reichsanstalt te Charlottenburg—Berlin. Wie den gang van zaken in Frankrijk heeft gevolgd, weet, dat ook aldaar onder de auspiciën der Académie des Sciences tot stichting van een dergelijke inrichting is besloten.

Nog steeds ontbreekt hier te lande een instituut, waar thermometers, manometers, elektrische en chemische meetinstrumenten enz. kunnen worden onderzocht. Naar spreker door een onzer grootste industrieelen werd verzekerd, bestaat ook in de kringen der techniek de allergrootste behoefte aan een dergelijk Rijks-laboratorium. Meer dan eens heeft hij de wenschelijkheid betoogd om tot oprichting daarvan over te gaan. In de jongste aflevering der Economisch-statistische Berichten wordt dit plan ter sprake gebracht, waarbij de schrijver, die allerlei denkbeelden, die met deze zaak niets uitstaande hebben, met elkaar verward, hem de twijfelachtige eer aandoet gebruik te maken van hetgeen hij daaromtrent elders heeft geschreven. Het lijkt spreker gewenscht, dat al eer deze zaak in verkeerde handen geraakt, het Bestuur der Akademie overweegt, wat er door de Akademie in dezen behoort te worden gedaan.

De Heer HOOGWERFF merkt hierbij op dat de oprichting van een Rijksstation meermalen aan de orde is geweest. Er is een paar malen advies over deze zaak uitgebracht, o. a. in 1904 door eene Commissie waarin de tegenwoordige leden der Afdeeling HAGA en DU Bois, en verscheidene hoogleeraren der toenmalige Polytechnische school zitting hadden. Het schijnt echter dat de betrokken Minister geen gelden beschikbaar had om zulk een laboratorium op te richten.

De Voorzitter zegt toe dat het Bestuur de zaak zal onderzoeken.

Tenslotte maakt de Heer J. W. VAN WIJHE zich tot tolk der vergadering door den Voorzitter, den Heer H. A. LORENTZ, toe te spreken en hem geluk te wenschen met de herdenking van zijn 40-jarig professoraat op 25 Januari j.l. en met de hem door den Senaat der Technische Hoogeschool te Delft in het doctoraat *honoris causa* in de technische wetenschap verleende onderscheiding. De Voorzitter beantwoordt den Heer VAN WIJHE met een woord van dank.

De vergadering wordt gesloten.

## ERRATA.

In het Verslag van de Wis- en Natuurkundige Afdeeling, Dl. XXVI, van 29 September 1917, moet het volgende verbeterd worden:

Blz. 723 regel 14, 7 en 5 v.o. voor *L* lees *P*.

„ 724 „ 12 v.b., 10 v.o. voor *L* „ *P*.

„ 724 „ 21 v.b. voor  $33 \times 6 + 5$  lees  $33 \times 6 + 5 \times 5$ .

---



# KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

---

## VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING VAN ZATERDAG 23 FEBRUARI 1918.

DEEL XXVI.

N<sup>o</sup>. 8.

---

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.

Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

---

### INHOUD.

---

Ingekomen stukken, p. 1238.

Benoeming van een commissie van voorbereiding tot het stichten in Nederland van een Rijkslaboratorium in den geest van het „Bureau of Standards” te Washington en soortgelijke inrichtingen”, p. 1238.

Jaarverslag der Geologische Commissie over 1917, p. 1239.

Jaarverslag der Commissie van uitvoering voor het Zoologisch Insulinde Fonds over 1917, p. 1240.

ERNST COHEN en A. L. TH. MOESVELD: „De Invloed van Druk op de Oplosbaarheid van Stoffen.” III. De onderzoekingen van HERBERT F. SILL, p. 1241.

H. ZWAARDEMAKER en ZEEHUIZEN: „Het laadvermogen van de nevels der Antipyretica”, p. 1250.

JAN DE VRIES: „Kubische involuties van de eerste klasse”, p. 1256.

J. BÖESEKEN en CHR. VAN LOON: „Over hydrindeen-1.2-diolen”. (Voorloopige mededeeling), p. 1268.

B. P. HAALMEIJER: „Over elementairopervlakken der derde orde”. (4e mededeeling). (Aangeboden door de Heeren L. E. J. BROUWER en HENDRIK DE VRIES), p. 1274.

G. C. HERINGA: „Het sensible periphere Zenuwstelsel”. (Aangeboden door de Heeren J. BOEKE en C. WINKLER), 1282.

W. J. H. MOLL en L. S. ORNSTEIN: „Bijdragen tot de studie der vloeibare kristallen. IV. Een thermisch effect van het magneetveld”. (Aangeboden door de Heeren W. H. JULIUS en J. P. VAN DER STOK), p. 1292.

W. J. A. SCHOUTEN: „Over de parallax van eenige sterrenhoopen”. (Tweede mededeeling). (Aangeboden door de Heeren J. C. KAPTEYN en E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN), p. 1293.

H. A. LORENTZ: „Opmerkingen over den bouw van electronen en atomen”. (Vervolg), p. 1304.

J. J. VAN LAAR: „Over het verloop der waarden van *a* en *b* bij waterstof bij verschillende temperaturen en volumina”. III. (Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en F. A. H. SCHREINEMAKERS), p. 1305.

J. D. VAN DER WAALS Jr.: „Over de theorie der Brownsche beweging”. (Aangeboden door de Heeren J. D. VAN DER WAALS en H. A. LORENTZ), p. 1319.

S. WEBER: „Het warmtegeleidingsvermogen van neon”. (Aangeboden door de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en J. P. KUENEN), p. 1338.

Vaststelling der Maartvergadering op 23 Maart, p. 1353.

Erratum, p. 1353.

---

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Bericht van den Heer L. BOLK dat hij verhinderd is de vergadering bij te wonen.

2°. Van de Commissie van uitvoering voor het Zoölogisch Insulinde Fonds het verslag der werkzaamheden gedurende 1917.

3°. Van de Commissie van beheer van het onlangs gestichte HOOGWERFF-Fonds een exemplaar der Statuten.

Het exemplaar wordt bestemd voor het archief der Akademie.

De Voorzitter spreekt de beste wenschen uit voor het doel van dit fonds, dat beoogt steun te verleen en aan wetenschappelijk onderzoek van chemisch-technischen aard.

4°. Van den Vice-President van de „Società di scienze naturali ed economiche di Palermo” eene kennisgeving van het overlijden op 3 Januari l.l. van den President van dit Genootschap, Prof. GIOVANNI DI STEFANO.

Deze kennisgeving is met een brief van rouwbeklag beantwoord.

5°. Van den Minister van Binnenlandsche Zaken eene missive d.d. 22 Februari j.l. N°. 415<sup>1</sup> Afd. K. W. met verzoek om advies aangaande het bijgevoegde request van Prof. Dr. G. JELGERSMA te Leiden om eene Rijkssubsidie voor de uitgave van een fotografischen atlas van de menschelijke hersenen en van de hersenen van waterzoogdieren.

De Voorzitter stelt deze stukken in handen van de Heeren J. W. VAN WIJHE, C. WINKLER en L. BOLK, met verzoek daaromtrent in de volgende vergadering te prae-adviseeren. De eerste twee heeren aanvaardén de opdracht. Aan den Heer BOLK, niet ter vergadering aanwezig, zal van de benoeming kennis gegeven worden.

Naar aanleiding van de vraag, in de Januari-vergadering gedaan door den Heer ERNST COHEN, of het wenschelijk is dat het bestuur der Akademie stappen zal doen om te komen tot het stichten in Nederland van een Rijkslaboratorium in den geest van het „*Bureau of Standards*” te Washington en soortgelijke inrichtingen in het buitenland, wenscht de Voorzitter eene Commissie te benoemen om die zaak te overwegen. Hij verzoekt de Heeren H. KAMERLINGH ONNES, H. HAGA, ERNST COHEN, J. BÖESEKEN en A. C. C. G. VAN HEMERT in die Commissie zitting te willen nemen. De Heeren HAGA, COHEN en BÖESEKEN verklaren zich daartoe bereid. Aan de Heeren KAMERLINGH ONNES en VAN HEMERT, die niet aanwezig zijn, zal van de benoeming kennis gegeven worden.



**Geologie.** — De heer G. A. F. MOLENGRAAFF brengt, namens de Geologische Commissie, het volgende jaarverslag dier Commissie over het jaar 1917 uit.

Gedurende het jaar 1917 werd in de verhandelingen der Akademie, als N°. 40 der mededeelingen omtrent de geologie van Nederland (Deel XIX N°. 2), een opstel gepubliceerd van Dr. J. F. STEENHUIS, getiteld: „Beschouwingen over en in verband met de daling van den bodem van Nederland”.

Bij de begrooting van Waterstaat voor 1918 is een voorstel gedaan tot vervaardiging van een geologische kaart van Nederland, welk voorstel reeds door de Tweede Kamer der Staten Generaal is aangenomen.

De gelden, vroeger aan onze Commissie toegestaan, zijn nog niet geheel verbruikt, zoodat het nog niet noodig is opnieuw gelden aan te vragen.

(get.) C. LELY.

( „ ) K. MARTIN.

( „ ) G. A. F. MOLENGRAAFF.

De Afdeeling hecht hare goedkeuring aan dit Verslag, waarvan een afschrift met een begeleidend schrijven namens de Afdeeling aan den Minister van Waterstaat zal gezonden worden.

**Zoologie.** — Jaarverslag van de Commissie van Uitvoering voor het  
Zoologisch Insulinde Fonds over 1917.

*Aan het Bestuur der Koninklijke Akademie van Wetenschappen,*

Gevolg gevende aan de bepaling van artikel 8 van de Statuten van het „Zoologisch Insulinde Fonds”, hebben wij de eer verslag uit te brengen over de werkzaamheden der Commissie van uitvoering van genoemd fonds gedurende het jaar 1917.

In tegenstelling met vorige jaren moet zich, tot ons leedwezen, dit verslag vergenoegen met de opmerking, dat geenerlei aanvragen om subsidie tot ons gekomen zijn.

Onze Commissie kwam gedurende het verslagjaar tweemaal bij elkaar; zij vond evenwel geen aanleiding om van haar zijde een voorstel te doen om gebruik te maken van de beschikbare rente van het Insulidefonds. De tijdsomstandigheden lokten allerminst daartoe uit. Gezien den bescheiden omvang der jaarlijksche rente van het fonds kan het niet anders dan nuttig zijn haar slechts voor wetenschappelijk gevoelde behoefte uit te geven.

*De Commissie van uitvoering voor het  
Zoologisch Insulinde Fonds.*

(get.) MAX WEBER,

*Voorzitter.*

( „ ) C. PH. SLUITER,

*Secretaris.*

---

**Scheikunde.** — De Heer ERNST COHEN biedt, mede namens den Heer A. L. TH. MOESVELD, een mededeeling aan over: „*De Invloed van Druk op de Oplosbaarheid van Stoffen*”. III. *De onderzoekingen van HERBERT F. SILL.*

1. In onze tweede mededeeling <sup>1)</sup> hebben wij er de aandacht op gevestigd, dat de uitdrukking <sup>2)</sup>:

$$\frac{dC}{d\pi} : \frac{dC}{dT} = - \frac{T\Delta V}{\Delta Q} \cdot \dots \dots \dots (1)$$

in verband met de groote experimenteele moeilijkheden, die zich voordoen, wanneer men de grootheden, die daarin voorkomen, wil bepalen, tot het tijdstip, waarop wij ons onderzoek aanvingen, nog niet was getoetst.

Terwijl wij in een volgende mededeeling die toetsing, zooals zij door ons is uitgevoerd, nader zullen beschrijven, wenschen wij thans de aandacht te vestigen op een onderzoek, door HERBERT F. SILL <sup>3)</sup> beschreven, toen onze studies in deze richting reeds aanmerkelijk waren gevorderd.

SILL heeft eene poging gedaan om de juistheid van verg. (1), de wet van BRAUN, door de proef te kontroleeren. Bij oppervlakkige lezing zijner verhandeling wordt allicht de indruk gewekt, dat die poging is gelukt. Uit hetgeen volgt, moge blijken, dat niets minder het geval is, daar een aantal vergissingen in de berekeningen zijn ingeslopen, die op zich zelf reeds voldoende zouden zijn om de gevonden overeenstemming tusschen experiment en berekening geheel illusoir te maken. Verder zal echter uit hetgeen volgt blijken, tot welke geheel waardelooze resultaten men komt, indien men zich bij een dergelijke studie niet rekenschap geeft van de nauwkeurigheid, die bij het bepalen der verschillende grootheden is bereikt. Als objekt ter toetsing der wet van BRAUN heeft SILL bariumhydroxyde [Ba(OH)<sub>2</sub>.8H<sub>2</sub>O] gekozen.

Wij zullen thans de onderdeelen van genoemd onderzoek achtereenvolgens de revue doen passeeren.

<sup>1)</sup> Deze Verslagen 26, 864 (1917).

<sup>2)</sup> Omtrent de beteekenis der verschillende letters zie men onze tweede meded.

<sup>3)</sup> Journ. Americ. Chem. Soc. 38, 3632 (1916).

A. *Bepaling van den drukcoëfficiënt der oplosbaarheid.*

2. Dit gedeelte vormt bij SILL het belangrijkste; het is ook verreweg het beste. Hij controleert een nieuwe, door hem uitgewerkte, methode ter bepaling van den invloed van druk op de oplosbaarheid, door zijne, langs dien weg verkregen, resultaten (bij NaCl) te vergelijken met die van ERNST COHEN, KATSUJI INOUE en EUWEN <sup>1)</sup>, waarbij goede overeenstemming wordt gevonden. Hij beschrijft ook uitvoerig de wijze, waarop de druk wordt gemeten, den manometer, de temperatuurregeling enz. en past na deze welgeslaagde controle zijne werkwijze toe op  $\text{Ba}(\text{OH})_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$ . Nopens het gebruikte preparaat zegt hij: „The material used was pure crystallized octohydrate and was not analyzed further”. De concentratie der oplossingen werd bepaald door titreeren met een 0.04 N. zoutzuuroplossing, gesteld op watervrij natriumkarbonaat; de gebruikte buretten waren uitgewogen.

Eigenaardig is echter, dat hij bij de voorproeven met NaCl twee bepalingen verricht bij 250 Kg/cm<sup>2</sup> en 500. Kg/cm<sup>2</sup>, bovendien nog eene bij 750 Kg/cm<sup>2</sup>, terwijl hij zich bij de definitieve bepalingen met  $\text{Ba}(\text{OH})_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$  tevreden stelt met slechts twee metingen bij 250 Kg/cm<sup>2</sup> en eene enkele bij 500 Kg/cm<sup>2</sup>.

Ten slotte berekent hij den drukcoëfficiënt uitsluitend met behulp van twee bepalingen bij gewonen druk en de twee proeven bij 250 Kg/cm<sup>2</sup>, *niettegenstaande uit de meting bij 500 Kg/cm<sup>2</sup> blijkt, dat de invloed van den druk op de oplosbaarheid niet lineair is.*

Immers, hij geeft in zijne Tabel V:

Bij den druk	1 (uitgedrukt in megabaren)	is de oplosbaarheid	8.304 resp. 8.295
„ „ „	245 ( „ „ „ ) „ „ „	„ „ „	8.779 „ 8.802
„ „ „	490 ( „ „ „ ) „ „ „	„ „ „	9.366

alles uitgedrukt in gr.  $\text{Ba}(\text{OH})_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$  op 100 gr. oplossing.

3. Extrapoleert men uit de bepalingen bij 1 en 245 megabaren lineair, dan vindt men bij 490 megabaren: 9.283 %, terwijl de proef de waarde 9.366 % levert. Het verschil schijnt niet groot, maar het gaat hier niet om de waarde der oplosbaarheid zelve, maar om die

van het differentiaalquotiënt  $\frac{dC}{d\pi}$  voor  $\pi = 1$  megabar.

SILL neemt hiervoor aan  $\frac{0.491}{244} = 1.966 \times 10^{-3}$ , terwijl eene quadratische vergelijking, die de metingen bij 1, 245 en 490 megabaren

<sup>1)</sup> Zeitschr. f. physik. Chemie 75, 257 (1910).

juist weergeeft, voor  $\left(\frac{dC}{d\pi}\right)_{x=1}$  de waarde  $1.845 \times 10^{-3}$  levert.

Hadde hij dus van alle bepalingen, door hemzelf verricht, gebruik gemaakt, dan zoude hij eene waarde voor den drukcoëfficiënt hebben gevonden, die niet minder dan 7% van het door hemzelf aangenomen cijfer afwijkt.

### B. Bepalingen van de fiktieve Volumeverandering.

4. Hoewel SILL bij de keuze van zijn systeem zich ook gedeeltelijk heeft doen leiden door de overweging, dat het specifiek volume van  $\text{Ba(OH)}_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$  in den vasten toestand bekend is, en hij terzelfder plaatse wijst op het ontbreken van cijfers nopens het specifiek volume van oplossingen dezer stof in water, heeft hij ter bepaling der fiktieve volume-verandering *niet* de door ons (zie onze tweede mededeeling) uitvoerig beschreven methode gevolgd, bij welke de kennis dezer specifieke volumina wordt vereischt, maar heeft hij zich er mede tevreden gesteld, de volumeverandering te meten, die het nitkristalliseeren eener bekende hoeveelheid vaste stof uit eene oververzadigde oplossing begeleidt.

Dat deze methode juiste resultaten *niet* zal geven (behalve in zeer bijzondere gevallen), hebben wij in onze tweede mededeeling uiteengezet en experimenteel toegelicht. Hadde SILL eene tweede bepaling uitgevoerd, daarbij gebruik makend van eene oververzadigde oplossing van andere concentratie, dan ware hij vermoedelijk wel op het spoor gekomen van de onnauwkeurigheid zijner methode; hij heeft dit echter nagelaten. Toch is het mogelijk, dat de afwijking om bovengenoemde reden niet zeer groot is, daar de oplossing, van welke hij nitging, niet zoo sterk oververzadigd is geweest.

5. Tegen de wijze van uitvoering der bepaling zelf kunnen ernstige bezwaren worden ingebracht. Dit moge blijken uit hetgeen volgt. Als dilatometer gebruikte hij een kolf van 4 L. inhoud, afgesloten door een doorboorde kurk, door welke een kapillair ging (5 mm. diameter), in  $\frac{1}{10}$  cc. verdeeld. Hij schatte den stand der vloeistof in de kapillair tot op 0.01 cc., hetgeen, in verband met de waargenomen volumeverandering (1.28 cc.), de nauwkeurigheid beperkte tot op zijn hoogst 1%.

In de kolf bevond zich, behalve de oververzadigde oplossing (3540 gr.) 50 cc. kwik, teneinde in de oplossing te kunnen roeren, door heen en weer bewegen van de kolf.

De concentratie der oplossing was door titreeren vastgesteld, en hiervoor was gevonden 9.199% [gr.  $\text{Ba(OH)}_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$  per 100 gr.

oplossing]. Ter bepaling van het volume der oververzadigde oplossing plaatste hij den dilatometer in een thermostaat en controleerde den stand van den meniskus in de kapillair gedurende twee uur, nadat de toestel te voren een halven dag in den thermostaat had doorgebracht. Gedurende die twee uren schudde hij de kolf meermalen om.

De oplossing werd tot kristalliseeren gebracht, door een klein kristalletje, dat men door de kapillair in de kolf deed vallen. Spoedig trad het kristalliseeren in en na zes uren bedroeg de toename van volume 1.28 cc. Een verdere stijging kon een half uur later niet worden waargenomen.

SILL konkludeert nu: „... Since the stirring had been only for a few seconds at intervals of from three to six minutes instead of being continuous as in the pressure-bomb experiments, it was not to be supposed that complete equilibrium had been established. The fact that no measurable increase in volume had occurred during half an hour indicated, however, that a sample of the solution could be safely removed for analysis”.

6. Met deze konklusie kunnen wij niet meegaan.

Immers, de oplossing is in evenwicht met de vaste stof op den bodem, dus verzadigd, of zij is het niet. In het eerste geval treedt, hoe lang ook wordt gewacht, een verandering van den stand van den meniskus *niet* meer in en een analyse van de oplossing moet het cijfer leveren, dat voor de verzadigde oplossing geldt.

In het tweede geval moet, indien *voldoend* lang wordt gewacht, *wel* eene verandering in den stand van den meniskus intreden. SILL heeft die evenwel niet waargenomen.

De mogelijkheid, dat de oplossing oververzadigd blijft in aanraking met vaste stof, moet worden uitgesloten, temeer, omdat hij bij de bepalingen onder druk bij één der duplikaat-bepalingen steeds uitgaat van een oververzadigde oplossing, slechts twee uren schudt, en toch goede overeenstemming vindt met het resultaat der bepaling, bij welke hij is uitgegaan van de onverzadigde oplossing.

Rest dus slechts de gevolgtrekking, dat het roeren van het kwik op den bodem der 4L.-kolf niet in staat is geweest de hoogere, nog oververzadigde, lagen der oplossing te vervangen door de lagere, die haar overmaat vaste stof hebben afgezet.

De diffusie, door welke ten slotte de geheele oplossing homogeen zal worden, verloopt blijkbaar zóó langzaam, dat de daarmee gepaard gaande verandering in den stand van den meniskus ten gevolge van het uitkristalliseeren der overmaat vaste stof niet kon worden waargenomen binnen den tijd, gedurende welchen SILL heeft gewerkt. Eene bepaling van de concentratie der oplossing, uit de 4 L. kolf

genomen met eene 10 cc. pipet, nadat de kurk en de kapillair waren verwijderd, dus van oplossing, vermoedelijk afkomstig uit de hoogere lagen der vloeistof, gaf als resultaat 8.487 gr.  $\text{Ba}(\text{OH})_2 \cdot 8 \text{H}_2\text{O}$  per 100 gr. oplossing. De verzadigde oplossing bij de temperatuur der proef ( $25^\circ.0 \text{ C.}$ ) bevat echter 8.300 gr. in 100 gr. oplossing.

*Hadde SILL niet één, maar twee monsters uit de kolf gepipetteerd, afkomstig van verschillende diepten, dan zou hij zich een oordeel hebben kunnen vormen over de homogeniteit der oplossing.*

Hij neemt nu aan, dat deze gevonden concentratie geldig is voor de geheele oplossing, en berekent met behulp daarvan de fiktieve volumeverandering.

Honden wij in het oog, dat hij voor begin- en eindconcentratie de waarden 0.09199 en 0.08487 aanneemt, terwijl de laatste, indien de geheele hoeveelheid oplossing verzadigd ware geweest, 0.08300 zou hebben bedragen, dan is een fout van 20 % alleen reeds om deze reden niet ondenkbaar. Hierbij komt nog, dat het verschil tusschen de volumeverandering, die hij wilde meten en de fiktieve eveneens aanzienlijk kan zijn.

### C. *Bepalingen van de Oploswarmte.*

7. SILL heeft hierbij gebruik gemaakt van een adiabatiscen calorimeter, met behulp van welken hij de korrektie voor straling kon vermijden, door er voor te zorgen, dat tijdens de proef de temperatuur van den calorimeter nooit meer dan  $0^\circ.01$  van die der omhullende ruimte verschilde.

Ook voor deze metingen stonden dus de noodige hulpmiddelen, tot zijne beschikking.

Het bariunhydroxyde, dat in oplossing werd gebracht, bereidde hij door het te laten kristalliseeren uit eene bij  $60^\circ \text{ C.}$  verzadigde oplossing. Men zoog het preparaat af in kroezen volgens GOOCH en centrifugeerde, totdat vloeistof zich niet meer afscheidde. Daarna droogde hij het nog verder, door het tusschen filtreerpapier te persen. Karbonaatvorming had hierbij slechts in zeer geringe mate plaats "as is shown by the fact that a sample of the product dissolved in previously boiled water, left but a scarcely perceptible turbidity." Een ernstig bezwaar is echter, dat het preparaat water ingesloten hield; blijkens SILL's analyse bevatte het 6 % (bij  $25^\circ \text{ C.}$ ) verzadigde oplossing. Weliswaar brengt hij een korrektie aan voor het gewicht der vaste stof in die verzadigde oplossing, maar hij houdt daarbij niet rekening met het feit, dat deze (6 %) verzadigde oplossing een zekere verdunnings-warmte levert, hetgeen volgt uit

zijn eigen waarneming, dat de oploswarmte in vrij sterke mate van de concentratie afhangt.

Hij voert nu eene proef uit, bij welke de concentratie stijgt van 54 % van de verzadigingsconcentratie tot 64 % en vindt een temperatuurverandering van  $-0^{\circ}.381$ .

Ter berekening der oploswarmte moet hij nu o.a. nog de waterwaarde van zijne oplossing kennen. Nopens deze merkt hij op: „... The heat capacity of the solutions may vary from that of water by 1 — 2 %, but in the absence of any data no account could be taken of this possible difference.” Ten opzichte van zoo gekoncentreerde oplossingen, als SILL heeft gebruikt, zouden wij dit niet gaarne onderschrijven, terwijl het laatste gedeelte van den aangehaalden zin toont, dat hij zich bij zijn onderzoek op een geheel verkeerd standpunt heeft geplaatst. Immers, door vaststelling dier waterwaarde ware deze onzekerheid vermeden en zou hij met het bedoeld verschil wèl rekening hebben kunnen houden. Door gebruik te maken van deze (ongeoorloofde) vereenvoudiging, door de soortelijke warmte der oplossing dus gelijk één te stellen, vindt hij voor de oploswarmte in bovengenoemde proef per gram vaste stof  $-48.3$  gramkalorieën.

Een soortgelijke bepaling, bij welke de concentratie steeg van 64 % tot 74 % van de verzadigingsconcentratie, leverde per gram vaste stof  $-49.1$  gramkalorieën. (De temperatuurdaling bedroeg  $0^{\circ}.437$ ). Uit deze twee waarden extrapoleert SILL rechtlijnig tot die, welke voor de verzadigingsconcentratie zou gelden; de extrapolatie loopt dus over een concentratie-interval  $2\frac{1}{2}$  maal zoo groot, als het gemetene. Daarbij komt, dat eene onzekerheid van slechts een enkel duizendsten graad in beide bepalingen zeer zeker mag worden aangenomen, want de meting der temperatuur geschiedde met eenen thermometer, welks aanwijzigingen hij opgeeft in  $\frac{1}{1000}$  graden. Dit is dus naar alle waarschijnlijkheid een gewone thermometer volgens BECKMANN geweest.

Ook hier zouden duplikaatbepalingen wel eens verrassende uitkomsten hebben kunnen geven.

De door SILL voor de verzadigde oplossing geëxtrapoleerde waarde der oploswarmte bedraagt  $-51.2$  gramkalorieën per gram vaste stof.

Nemen wij bij elke der gemeten temperatuurdalingen een fout aan van  $\frac{1}{1000}^{\circ}$  naar verschillenden kant, dus b.v. voor de waarde der oploswarmte resp.  $-48.4$  en  $-49.0$ , dan zou de geëxtrapoleerde waarde  $-50.6$  gramkalorieën hebben bedragen. Tengevolge der grootte, bovendien nog lineaire, extrapolatie, wordt de onzekerheid in het eindcijfer zeer aanzienlijk.

Uit het voorafgaande blijkt dus duidelijk, dat aan de door SILL vastgestelde fiktieve oploswarmte waarde niet kan worden gehecht.



D. *Bepaling van den Temperatuurcoëfficiënt der Oplosbaarheid.*

8. SILL heeft hier gebruik gemaakt van de cijfers, door ROSENSTIEHL en RÜHLMANN <sup>1)</sup> in het jaar 1870 bij gelegenheid van een *technisch* onderzoek bepaald en door hem ontleend aan de tabellen van LANDOLT-BÖRNSTEIN <sup>2)</sup>. In deze laatste zijn echter niet de oorspronkelijke cijfers van ROSENSTIEHL en RÜHLMANN opgenomen, maar waarden, omgerekend op 10°, 20°, 30° enz.

Bij deze omgerekende cijfers treden evenwel decimalen op, die niet in de origineele verhandeling voorkomen en welke SILL vermoedelijk het bestaan eener nauwkeurigheid hebben voorgespiegeld, die zij niet bezitten en ook niet konden bezitten, in verband met den stand der experimenteele techniek in den tijd, waarin zij werden bepaald.

Dank zij der welwillendheid van Prof. BREDIG te Karlsruhe, hebben wij die oorspronkelijke verhandeling, uit de Bibliotheek aldaar afkomstig, in handen kunnen krijgen. De methodiek hunner oplosbaarheidsbepalingen beschrijven ROSENSTIEHL en RÜHLMANN aldus:

„Le vase contenant l'eau et les cristaux de baryte, a été maintenu à une température constante, par son immersion dans une chaudière remplie d'eau à une température connue. Afin d'éviter les erreurs qui pouvaient avoir leur cause dans la sursaturation de la dissolution, on a eu soin d'opérer toujours en présence d'un excès de cristaux; le contact du liquide dissolvant et de la baryte a été maintenu pendant un temps qui a varié de 2 à 10 heures. *Pour avoir une bonne moyenne, on a fait pour chaque point de la courbe, trois expériences à des températures aussi rapprochées que possible* <sup>3)</sup>. Pour déterminer la quantité de baryte dissoute, on a décanté la dissolution dans un matras taré avec son bouchon, on a pesé et on a titré avec une solution normale d'acide oxalique”.

In de tabel, in welke ROSENSTIEHL en RÜHLMANN hunne resultaten vermelden, wordt de temperatuur gegeven, afgerond in graden, bij uitzondering in halve graden, de concentratie uitgedrukt in grammen BaO per 100 gr. water, tot op 0.1 gr. In het interval, dat voor SILL van belang is, worden de volgende cijfers gegeven:

Bij t° (C.)	12	15.5	16	21	22	30	36	41
concentratie	2.4	2.9	3	3.6	3.7	5	6.4	7.6

in grammen per 100 gr. water.

De tabellen van LANDOLT en BÖRNSTEIN geven de waarden van 10° tot 10°, echter nitgedrukt in gr. BaO per 100 gr. *oplossing*.

Zoo bv. voor 30° het cijfer 4.75, in overeenstemming met  $\frac{5}{1.05} = 4.76$ .

<sup>1)</sup> Bulletin de la Soc. industrielle de Mulhouse 40, 152 (1870).

<sup>2)</sup> Berlin 1912, p. 459.

<sup>3)</sup> Kursiveering van ons. (G. en M.).

SILL heeft evenwel de overige resultaten van zijn onderzoek uitgedrukt in grammen  $\text{Ba}(\text{OH})_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$  per 100 gr. *oplossing*. Hij berekent dus ook hier de waarde der concentratie, uitgedrukt in die eenheid, uit de cijfers van de genoemde tabellen, *maar heeft zich bij die berekening vergist*; hij vermenigvuldigt nl. het gewicht van het BaO met de verhouding der molekulairgewichten  $\frac{\text{Ba}(\text{OH})_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O}}{\text{BaO}}$

en vindt dan bij  $30^\circ \text{C}$ . voor de oplosbaarheid 9.77. Dit zou juist zijn, indien zowel de concentratie van het BaO als die van het  $\text{Ba}(\text{OH})_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$  moest worden uitgedrukt in grammen per 100 gr. *oplosmiddel*, niet echter, nu de eerstgenoemde concentratie gegeven is in grammen BaO per 100 gr. *oplossing*, en gezocht wordt de concentratie van  $\text{Ba}(\text{OH})_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$  *in diezelfde eenheid uitgedrukt*.

Op de juiste wijze rekenend, vinden wij bij  $30^\circ \text{C}$ . de waarde 9.33 %. Berekenen wij voor  $21^\circ \text{C}$ . uit het cijfer van ROSENSTIEHL en RÜHLMANN evenzoo de concentratie, in diezelfde eenheid uitgedrukt, dan vinden wij hiervoor 6.89 %.

De temperatuurcoëfficiënt der oplosbaarheid, berekend op dezelfde wijze, als dit door SILL is verricht, wordt dan:

$$\frac{9.33 - 6.89}{9} = 0.27,$$

terwijl hij daarvoor heeft gevonden 0.288. De beschreven vergissing geeft dus op zichzelf reeds aanleiding tot een fout van 7 %.

Maar, gelijk boven, bij de behandeling van den drukcoëfficiënt, reeds werd aangetoond, leidt deze, door SILL gevolgde wijze van berekenen [overeenkomende met het trekken eener snijlijn (van), inplaats van een raaklijn aan, de oplosbaarheidskromme] tot eene geheel foutieve waarde van den temperatuurcoëfficiënt der oplosbaarheid.

Zoo is het door hemzelf bij  $25^\circ \text{C}$ . gevonden cijfer voor de oplosbaarheid van  $\text{Ba}(\text{OH})_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$ , uitgedrukt in grammen per 100 gr. oplossing, in strijd met dat van ROSENSTIEHL en RÜHLMANN, hoewel hij zelf eene zeer fraaie overeenstemming meent te vinden, die op wonderbaarlijke wijze voor den dag komt<sup>1)</sup>, doordien hij hunne cijfers verkeerd omrekent.

Bij een juiste berekening geven de cijfers van ROSENSTIEHL en RÜHLMANN bij  $25^\circ \text{C}$ . (tusschen  $21^\circ$  en  $30^\circ$  geïnterpoleerd) 8.0 %; SILL vindt zelf 8.30 % en berekent (foutief) uit de cijfers van  $20^\circ \text{C}$ . resp.  $30^\circ \text{C}$ ., afkomstig van bovengenoemde onderzoekers, de waarde 6.91 % resp. 9.77 %, dus bij lineaire interpolatie voor  $25^\circ \text{C}$ . het cijfer

<sup>1)</sup> Tenzij hij de resultaten zijner eigen titraties op dezelfde (foutieve) wijze heeft omgerekend.

8.36% (foutief), alle waarden uitgedrukt in grammen  $\text{Ba}(\text{OH})_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$  per 100 gr. oplossing.<sup>1)</sup>

SILL voert ten slotte de toetsing der vergelijking van BRAUN uit, door in deze de door hemzelf verkregen numerische resultaten te substitueeren, en vindt overeenstemming tusschen de met behulp der betrekking berekende en de experimenteel gevonden waarde der fiktieve oploswarmte tot op 1 procent.

Deze overeenstemming, van welke hij zegt: „... The agreement is seen to be excellent”, moet, blijkens onze bovenstaande uiteenzettingen, worden toegeschreven aan toevallige compensaties van tal van fouten.

*Utrecht*, Februari 1918.

VAN 'T HOFF-*Laboratorium*.

---

<sup>1)</sup> De oplosbaarheidsbepalingen van HERZ en KNOCH [Zeitschr. f. anorg. Chemie 41, 313 (1904)], HERZ [Zeitschr. f. anorg. Chemie 67, 365 (1910)], PARSONS en PERKINS [Journ. Americ. Chem. Soc. 32, 1387 (1910)], zoomede die van SCHREINEMAKERS [Arch. Néerl. (2) 15, 91 (1911)] hebben allen waarden geleverd, die onderling en van de boven genoemde afwijken.

**Physiologie.** -- De heer ZWAARDEMAKER doet, mede namens den heer ZEEHUIZEN, een mededeeling over: „*Het laadvermogen van de nevels der Antipyretica*”.

Twee jaar geleden <sup>1)</sup> heeft een onzer de opmerkzaamheid gevestigd op het feit, dat, door toevoeging van een reukstof aan onder 2 atmosfeeren overdruk verstoven water, aan den op die wijze verkregen nevel een zeer aanzienlijke elektrische lading toekomt. Sedert zijn nog eenige verdere publicaties over dit onderwerp verschenen <sup>2)</sup>. Reeds van den aanvang aan was echter bij een vluchtig voorloopig onderzoek gebleken, dat niet enkel reukstoffen deze merkwaardige eigenschap bezitten, maar dat ook nog een menigte andere, physiologisch werkzame, zuivere, chemische stoffen hetzelfde ladingsverschijnsel teweeg brengen, zij het ook gewoonlijk in eenigszins zwakkere mate <sup>3)</sup>.

Nevelelectriciteit roepen te voorschijn: renkstoffen, saponinen (waaronder zoowel riekende als niet riekende), glycosiden (meestal iets riekend), alcaloiden (riekende zoowel als niet riekende), antipyretica (riekende en niet riekende) en nog een paar rubrieken van andere physiologisch werkzame stoffen, waarover later verslag zal worden uitgebracht. De voorwaarden, waaraan voldaan moet worden, zal een stof, aan water toegevoegd en daarmee verstoven, het ladingsverschijnsel teweegbrengen, schijnen te zijn:

1°. oplosbaarheid, zij het ook in geringe mate, in water;

2°. een veroorzaken van verlaging der oppervlaktespanning (van water);

3°. vluchtigheid, zij het ook in geringe mate, zoodra een groote verdampingsvlakte beschikbaar is.

Niet ladend zijn (in geen enkele concentratie): anorganische zouten en zuren, glycerine, snikers (mits zuiver), dextrine, lecithine, albumine, enz.

<sup>1)</sup> Zitt. versl. K. Akad. v. Wetensch. Amsterdam. Deel 24. p. 1630.

<sup>2)</sup> Ibidem. Deel 25. p. 3 en 512. Archives Neerlandaises de Physiologie t. 1. p. 347; E. L. BACKMAN. Zitt. versl. K. Ak. v. Wetensch. Amst. Deel 25. p. 971, PFLÜGER's Archiv Bd. 168 p. 351; C. HUYER, de olfactologie van aniline en homologen. Diss. Utrecht 1917.

<sup>3)</sup> Zitt. Versl. K. Akad. v. Wetensch. Amst. Deel 25. p. 30. H. ZEEHUIZEN, 3e Physiologendag, Dec. 1917. (Verslag nog niet in druk verschenen, zie het Ned. Tijdschr. v. Geneesk. 1918).

In de nu aangeboden mededeeling willen wij het ladingsverschijnsel der antipyretica nader bespreken. Tot dit doel verdeelen wij deze stoffen in:

- a. antipyretische alcaloiden,
- b. salicylzuur en derivaten,
- c. de overige temperatuur- en pijnverminderende middelen.

*Groep a.* De antipyretische alcaloiden zijn in het algemeen zeer weinig oplosbaar, hoogstens kan men het tot  $\frac{1}{1000}$  normaal brengen. Duidelijk verlagen de oppervlaktespanning: chinine, chinidine, cinchonine; niet aantoonbaar: cinchonidine, chinamine, conchinamine. Vluchtigheid bezitten stellig cinchonine (krachtens sublimeringsproef) en chinamine (krachtens verlies van laadvermogen na luchtdoorzuiging). De verzadigde oplossing in water, onder een overdruk van 2 atmosfeeren verstoven, geeft een duidelijke lading aan een op ongeveer 25 cM. afstand in den nevel opgesteld scherm. Deze lading is positief van teeken (gelijk bij de reukstoffen), en de lucht in den omtrek en op grooteren afstand is negatief geladen. Het verschijnsel, hoewel duidelijk, blijft intusschen bij dat der reukstoffen ten achter.

*Groep b.* Het salicylzuur en zijne derivaten vormt een groep van in het algemeen kristallijne stoffen, wier oplosbaarheid zeer sterk uiteenloopt. Er zijn twee geheel onoplosbare onder, nl. salol en benzylsalicylaat, die dan ook niet of ter nauwernood laadvermogen bezitten. Van de overige is alleen salicylas chinini minder dan tot  $\frac{1}{1000}$  normaal, de rest minstens tot 2.5 millinormaal oplosbaar, sommige van de zouten van salicylzuur zelfs zeer oplosbaar in water. De verlaging der oppervlaktespanning is in het algemeen gering, in het geval van de zouten (volgens de druppelmethode) zelfs ontbrekend; alleen bij de vloeibare stoffen dezer groep en bij aspirine is de verlaging ongemeen duidelijk. Vluchtigheid bestaat bij salicylzuur, want het sublimeert (in den nevel dus ook bij de zouten, want zij zijn in de hoogst verdunde oplossingen, waarom het gaat, gedissocieerd) en voorts stellig bij de vloeibare representanten der groep (naar het kookpunt te oordeelen).

De sterkte van het ladingsverschijnsel, dat zij teweeg brengen, loopt zeer uiteen. Bij de onoplosbare is, gelijk gezegd, de lading nul of nagenoeg nul, bij de salicylzuren en benzoëzuren zouten matig, minstens 4 schaaldeelen van onzen electroscop, bij de overige sterker, vaak zelfs maximaal, gelijk bij de typische reukstoffen (campher, alcohol, enz.).

De salicylzuren zouten danken hun laadvermogen aan het anion. Het begeleidende kation vermindert zelfs de nevellading, misschien

wel, omdat het afbreuk doet aan de oppervlakteactiviteit der vloeistof. Het gevolg is dan ook, dat salicylzuur en een salicylzuurzout op geheel overeenkomstige wijze het laadvermogen van den nevel bepalen, alleen met quantitatief verschil in dien zin, dat het zout een minder hooge lading voortbrengt dan het zuur.

Vergelijkt men de verschillende concentraties van het zuur onderling, hetgeen het best graphisch geschiedt, dan blijkt het optimum laadvermogen van het salicylzuur bij ongeveer 1 millinormaal aangetroffen te worden; hier boven en beneden is de lading van den nevel geringer. Zulk een optimum wordt door de gelijktijdige aanwezigheid van een kation niet enkel gedrukt, maar ook verschoven, zoodat het over salicylas natriicus b.v. onder dezelfde omstandigheden bij de 6 pro mille-concentratie komt te vallen.

Wij hebben getracht de univalente kationen onderling, niet alleen wat de door hen teweeggebrachte verschuiving van het optimum, maar ook in hun de lading neerdrukkende eigenschap te vergelijken. Laten wij dit geschieden voor een 1 millinormaal-oplossing van het salicylzuur, dan zullen de uitslagen van den electroscop door kationen-toevoeging in een bepaalde reden kleiner worden. De factoren, waardoor de electroscop-uitslag, door het salicylzuur alleen teweeggebracht, gedeeld moet worden om den electroscop-uitslag te vinden, dien een bepaald zout, aan het salicylzuur toegevoegd, laat ontstaan, vinden wij als volgt:

Factor, waarmee de uitslag van den electroscop verkleind wordt, wanneer in plaats van enkel 0,001 n. salicylzuur, 0,001 n. salicylzuur onder toevoeging van het chloride van onderstaande alkalimetalen verstoven is.

Conc. v. de toegevoegde zoutoplossing.	Li.	Na.	K.	Rb.	Cs.	NH <sup>4</sup> .
0.01 n	∞	∞	∞			
0.005 n	9.6	10.1	∞	∞		
0.002 n	2.57	2.86	2.69	4.00		∞
0.001 n	1.68	2.27	1.95	2.36	2.90	4.3
0.0005 n	1.35	1.40	1.49	1.67	1.77	2.20
0.00025 n	1.05	1.14	1.30	1.40	1.42	1.50
0.000125 n		1.07		1.20		

Gelijk men bespeurt wordt de lading van den nevel van links

naar rechts meer en meer omlaag gedrukt. De factor, waarmee verkleind moet worden, groeit van Lithium tot Ammonium.



waarin men de bekende lyotrope reeks van zure colloïdale oplossingen zal herkennen. Onze nevel is ook een colloïdaal systeem, maar bestaande uit de phase vloeibaar (dispers) en gas (dispersiemiddel). Op het grensvlak der drupjes heerscht een elektrische potentiaal, op de *grootte* drupjes, waarmee wij, de lading op het scherm metend, te doen hebben, van *negatief* teeken. Van de overige salicylzuren zouten stonden ons nog het strontium- en het bismuthzout ten dienste. Ook aan hen komt een matig laadvermogen toe. Evenzoo natriumbenzoaat.

De beschikbare esters van salicylzuur: aspirine, novaspirine, diaspirine, het methylsalicylaat en het spirosal, gaven alle krachtige ladingen.

*Groep c.* De derde groep omvat drie rubrieken:  $\alpha$ . de chinoline-derivaten,  $\beta$ . de pyrazolen,  $\gamma$ . de paramidophenolen. Er komt slechts één onoplosbare stof onder voor, alle overige zijn oplosbaar en daarenboven kristallijn.

De verlaging der oppervlaktespanning kon niet worden aangetoond voor citrophen. Bij de meeste stoffen was de oppervlakteactiviteit trouwens gering. Alleen voor euphorine, acetopyrine en kairine kan de verlaging duidelijk worden genoemd. Vluchtigheid schijnt in het algemeen eenigermate aanwezig, tenminste bij een groote verdampingsvlakte.

Wat de intensiteit van het ladingsverschijnsel betreft, zij opmerkt, dat de volmaakt onoplosbare representant van groep *c*, in overeenstemming hiermee geen lading verschaft, dat het verschijnsel zich in matige sterkte voordoet bij pyramidon, phenacetine en citrophen, in iets grooter sterkte bij kairine, doch ongemeen duidelijk bij antipyryne, salipyryne, acetopyryne, tussol, antifibrine en euphorine.

Onze algemeene bevinding was derhalve, dat alle antipyretica, uitgezonderd de volstrekt onoplosbare, het ladingsverschijnsel der physiologisch actieve stoffen geven.

Gelijk in de vroegere publicaties is uiteengezet, wordt de elektrische lading van een nevel nitsluitend door de er in voorkomende drupjes gedragen. Onder een overdruk van 2 atmosfeeren verstoven, komt de vloeistof uit de spits van den versproeier in drupvorm te voorschijn. Van deze drupjes worden de kleine weggeblazen en wijd en zijd verspreid. Zij zijn negatief geladen. De groote druppels, die

positief geladen zijn, vliegen vooruit, in rechte, zich spreidende banen. Vangt men ze op een geschikten afstand (voor de antipyretica 25 cM. van den versproeier) op een geïsoleerd scherm op, dan wordt dit positief geladen in vrij aanzienlijke mate, zij het ook bij antipyretica nooit zoo sterk als bij reukstoffen (oplossing in water vooropgesteld).

Om gelijkmatige uitkomsten te verkrijgen is het noodzakelijk den versproeier te aarden. Op de hoeveelheid positieve lading, die ter plaatse van het opvangscherm aanwezig is, kan nu groote invloed worden uitgeoefend door in de te verstuiven oplossing rietsuiker of keukenzout te mengen.

Door de toevoeging van rietsuiker wordt de lading op het scherm steeds verhoogd; nimmer heeft bij de antipyretica uitdooving plaats. Indifferent is suikertoevoeging voor de oplossingen van mesotan, tussol en antifibrine. Het is intusschen duidelijk, dat men bij zulke proeven angstvallig er voor moet waken, dat de suiker volkomen zuiver is. Een oude suikeroplossing werkt n.l. opzichzelf ladend.

Men kan haar slechts van de onder zulke omstandigheden klaarblijkelijk ontstaande stoffen bevrijden door filtratie over dierlijke kool (minder gemakkelijk door extractie met absoluten alcohol en latere zorgvuldige verdamping van dezen uit de na filtratie overgehouden, gezuiverde suiker).

Een geheel anderen invloed oefent de toevoeging van keukenzout. De concentratie, waarin dit plaats heeft, oefent grooten invloed, zooals blijkt uit de nu volgende tabel:

Factor van de vermindering der lading van salicylzuur en salicylas natricus door verschillende NaCl-concentraties.

NaCl opl. (concentr.)	Salicylas Na. 0.00125n.	Salicylzuur 0.00125n
0.01 n.	∞	∞
0.005 n.	∞	10.1
0.0025 n.	4.2	4.6
0.00125 n.	2.1	2.4
0.000625 n.	1.8	1.8
0.0003125 n.	1.6	1.6

Daar, gelijk men ziet, reeds sporen keukenzout de lading wijzigen, is het van groot belang zich vooraf van de deugdelijkheid van het



water, dat men ter oplossing bezigt, te vergewissen. Gedistilleerd water te nemen is in het algemeen niet raadzaam, daar dit na een paar dagen in een goed gereinigde flesch te zijn bewaard, spontaan laadvermogen aanneemt (analogon van de oude suikeroplossing). Ook dit water kan men van het ontstane, lading gevende bijmengsel bevrijden, door het lang met zuivere dierlijke kool te schudden en daarna te filtreeren. Het bijmengsel is vluchtig, want doorzuigen van lucht neemt het, althans gedeeltelijk weg.

Daar het Utrechtsche leidingwater zeer zoutarm is, hebben wij dit in geheel verschen toestand gebruikt (oud leidingwater neemt ook een laadvermogen aan). In steden met zoutrijk leidingwater zal men met de straks beschreven complicatie rekening hebben te houden.

Physiologisch belangrijk is het gedrag der oplossingen bij vermenging met keukenzout, tot een concentratie van dat laatste van 0.9 %.

Het blijkt dan dat van

*Groep a.* 4 worden versterkt in laadvermogen, 2 niet (het laatste geldt voor chinamine en conchinamine).

*Groep b.* Sommige versterkt, andere verzwakt worden (chinine — antipyrine — en vloeibare derivaten versterkt).

*Groep c.* De antipyrines en chinolines versterkt, de urethanen verzwakt worden en de phenetidines ongewijzigd blijven.

De oorzaak van het chloornatrium-effect ligt nog in het duister. De ervaring bij de salicylzuren zouten opgedaan, wijst er op, dat we voornamelijk met een ionen-effect te doen hebben. Ter verklaring zou men weder de wijziging der oppervlaktenspanning in de drupjes te hulp kunnen roepen. Zeker is het, dat de grootte der drupjes zeer sterk door den aard van het kation wordt beheerscht. De drupjes van verstoven salmiakoplossing zijn zeer veel grooter dan die van verstoven chloornatriumoplossing (ultra-microscopisch vastgesteld). Voor het overige zal men bij de ontleding van de gewoonlijk zeer samengestelde moleculen allerlei addities van laadvermogen kunnen verwachten.

**Wiskunde.** — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan over: „Kubische involuties van de eerste klasse”.

1. Onder *klasse* van een involutie in het platte vlak worde verstaan het aantal paren van punten op een willekenrig aangenomen rechte. In een mededeeling, opgenomen in deel XXII <sup>1)</sup> heb ik aangetoond, dat de *kubische involuties van de eerste klasse* tot zes hoofdsorten zijn terug te brengen, mits ondersteld wordt, dat er geen collineaire drietallen zijn.

Thans wil ik aantonen, dat deze involuties, met een enkele uitzondering, door *netten van kubische krommen* kunnen worden bepaald.

Zij gegeven een net  $[c^3]$  met zes basispunten  $C_k$ . Alle  $c^3$ , die nog door een punt  $X$  gaan, vormen een bundel ( $c^3$ ), hebben dus nog twee punten,  $X'$  en  $X''$ , gemeen, welke met  $X$  een groep van een involutie  $I_3$  vormen. Op een willekeurige rechte bepaalt  $[c^3]$  een kubische involutie  $I_3^2$ , van den tweeden rang; het neutrale paar bestaat uit twee basispunten  $X, X'$ ; dus is  $I_3$  een involutie van de *eerste klasse* <sup>2)</sup>.

Tot  $[c^3]$  behoort de  $\gamma^3_k$ , welke in  $C_k$  een dubbelpunt heeft. Kiest men  $X$  op deze nodale  $\gamma^3_k$ , dan komt een der punten  $X', X''$  in  $C_k$ ; dus is  $C_k$  *een singulier punt*, dat groepen der  $I_3$  vormt met de paren van een  $I_2$ , gelegen op de singuliere kromme  $\gamma^3_k$ . Elk der beide in  $C_k$  gelegen punten van  $\gamma^3_k$  behoort tot een paar der  $I_2$ ; hieruit volgt, dat de paren dezer  $I_2$  gelegen zijn op de raaklijnen van een kegelsnede (*involutiekromme* der  $I_2$ ).

Tot  $[c^3]$  behoort ook de figuur gevormd door de kegelsnede  $\gamma^2_6$ , welke de punten  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  bevat, en een zekere rechte  $c_6$ , waarop  $C_6$  ligt. Daar  $[c^3]$  op  $c_6$  de paren  $X, X'$  van een  $I_2$  bepaalt, is  $c_6$  *een singuliere rechte*.

*De involutie  $I_3$  heeft dus zes singuliere punten en zes singuliere rechten.*

De punten  $X''$ , welke de paren der op  $c_6$  gelegen  $I_2$  tot drietallen der  $I_3$  aanvullen, liggen blijkbaar op  $\gamma^2_6$ . Zij  $Y''$  de projectie van  $X''$  op  $c_6$ , uit een vast punt van  $\gamma^2_6$ ; tusschen  $Y''$  en  $X$  bestaat

<sup>1)</sup> „Kubische involuties in het vlak”, Verslagen XXII, 872—884.

<sup>2)</sup> Voegt men aan elk punt  $X$  de stralen  $XX', XX''$  toe, dan ontstaat een nulstelsel  $\Re$  (2,2).

een verwantschap (2,1), zoodat  $Y''$  driemaal met  $X$  samenvalt. Hieruit volgt, dat de stralen  $XX''$  een kromme van de derde klasse omhullen, welke blijkbaar  $c_6$  tot dubbelraaklijn heeft.

De rechten  $x = X'X''$ , welke door de drietallen der  $I_3$  zijn aangewezen, vormen de drietallen van een stralenvolutie  $i_3$ . Ook voor deze involutie is  $c_k$  singulier, omdat zij tot  $\infty^1$  groepen behoort; de rechten  $x', x''$  vormen een  $i_3$ , waarvoor  $\gamma^3_k$  de involutiekromme is.

**2.** Als een punt  $X$  de rechte  $p$  doorloopt, omhullen de stralen  $x', x''$ , welke  $X$  met  $X'', X'$  verbinden, een kromme  $(p)_4$  van de vierde klasse, welke  $p$  tot dubbelraaklijn heeft. De krommen  $(p)_4$  en  $(q)_4$  hebben 16 raaklijnen gemeen; daartoe behooren de stralen  $x', x''$ , die van  $X = pq$  nitgaan, en de zes singuliere rechten  $c_k$ . Er zijn dus 8 rechten  $x''$ , waarvoor  $X$  op  $p$  en  $X'$  op  $q$  ligt. Anders gezegd, als  $X$  de rechte  $p$  beschrijft, doorloopen  $X'$  en  $X''$  een kromme  $p^8$ . Deze snijdt  $p$  vooreerst in het op  $p$  gelegen paar der  $I_3$ , en verder in zes punten  $X$ , die elk met een punt  $X'$  zijn samengevallen, dus coincidenties der  $I_3$  zijn. *De coincidenties der  $I_3$  vormen dus een kromme van den zesden graad,  $\gamma^6$ .*

Wanneer twee basispunten van een bundel in een punt  $B$  samenvallen, is er een kromme, welke in  $B$  een dubbelpunt heeft. Dus is  $\gamma_6$  tevens de kromme van JACOBI voor het net  $[c^3]$ , heeft dus dubbelpunten in de zes basispunten  $C_k$ . In elk dezer punten heeft ze de raaklijnen gemeen met de nodale kromme  $\gamma^3_k$ . Buiten de punten  $C$  hebben  $\gamma^6$  en  $\gamma^3_k$  nog slechts twee punten gemeen: deze zijn de coincidenties der op  $\gamma^3_k$  gelegen involutie  $(X, X')$ .

De kromme  $(p)_4$  is van den graad 10, wordt dus door  $p$  in 6 punten gesneden. Voor elk dezer snijpunten  $X$  valt  $x''$  met  $x'$  samen, dus  $X'$  met  $X''$ . De meetkundige plaats der „vertakkingspunten”, de „complementaire kromme”, is dus ook een kromme van den zesden graad,  $x^6$ . Zij heeft dubbelpunten in de singuliere punten  $C_k$ , omdat  $\gamma_k^3$  twee coincidenties draagt. De krommen  $\gamma^6$  en  $x^6$  hebben buiten de 6 punten  $C$  nog 12 punten gemeen; deze zijn twee aan twee vereenigd tot drievoudige punten der  $I_3$ . Er zijn dus in de  $I_3$  zes groepen, waarin de drie punten in een punt vereenigd liggen.

De boven genoemde kromme  $p^8$  bezit een drievoudig punt in  $C_k$ , omdat  $\gamma_k^3$  met  $p$  drie punten  $X$  gemeen heeft, waarvoor telkens  $X''$  in  $C_k$  ligt.

De paren der  $I_3$ , welke collineair zijn met een willekeurig punt  $P$ , liggen op een kromme  $(P)^4$ , die tweemaal door  $P$  gaat en de singuliere punten  $C$  bevat.<sup>1)</sup> Dus hebben  $p^8$  en  $(P)^4$  in  $C_k$  18 punten

<sup>1)</sup> Voor  $C_k$  bestaat deze kromme uit  $\gamma_k^3$  en de rechte  $c_k$ .

gemeen; de snijpunten  $X$  van  $p$  met  $(P)^4$  leveren verder 4 gemeenschappelijke punten  $X'$ . De overige 10 punten, welke zij nog gemeen hebben, vormen 5 paren  $X', X''$ , waarvan telkens de verbindingslijn  $x$  door  $P$  gaat. Anders gezegd, als  $X$  een rechte beschrijft, omhult  $x$  een rationale kromme van de vijfde klasse.

3. Beschouwen wij thans het geval, dat drie basispunten  $B_1, B_2, B_3$  van een  $[c^3]$  op een rechte  $a$  liggen, terwijl de overige drie,  $C_1, C_2, C_3$ , willekeurig zijn aangenomen.

Tot het net behoort een bundel, waarvan elk exemplaar bestaat uit de rechte  $a$  en een kegelsnede, welke door  $C_1, C_2, C_3$  en een zeker punt  $A$  gaat. Deze kegelsneden bepalen op  $a$  een  $I_3$ , waarvan de paren door  $A$  tot groepen der  $I_3$  worden aangevuld. Dus is  $A$  een *singulier punt*,  $a$  een *singuliere rechte*.

Aan de *singuliere punten*  $C_1, C_2, C_3$  zijn weer, als voorheen, de nodale krommen  $\gamma_k^3$  toegevoegd; bij de *singuliere punten*  $B_1, B_2, B_3$  behooren thans kegelsneden  $\beta_k^2$ , welke door de punten  $C$  en  $A$  gaan. Elke  $\beta_k^2$  vormt immers met  $a$  de netkromme, die in  $B_k$  een dubbelpunt heeft.

Op het lijnenpaar  $AC_1, C_2C_3$  bepaalt  $[c^3]$  een stelsel van groepen der  $I_3$ , waarvan telkens een punt op  $C_1, C_3$  ligt, zoodat  $AC_1$  een  $I_2$  van paren  $X, X'$  bevat. De drie rechten  $c_k \equiv AC_k$  zijn dus *singulier*; met de singuliere rechte  $a$  vormen zij de kromme  $(P)^4$  van het punt  $A$  (zie § 2).

Voor  $C_k$  bestaat  $(P)^4$  uit  $\gamma_k^3$  en  $ck$ , voor  $B_k$  uit  $\beta_k^2$ ,  $a$  en een singuliere rechte  $b_k$ . Er zijn dus *zeven singuliere punten* ( $A, B_k, C_k$ ) en *zeven singuliere rechten* ( $a, b_k, ck$ ).

De rechte  $a$  is bestanddeel van de *Jacobiana*; de *coïncidentiekromme* is nu een  $\gamma^5$ , die door de drie punten  $B$  gaat en dubbelpunten heeft in de drie punten  $C$ .

De krommen  $(p)_4$  en  $(q)_4$  hebben nu slechts 7 raaklijnen  $x'$  gemeen, die een punt  $X$  van  $p$  met een punt  $X'$  van  $q$  verbinden. In verband hiermede wordt  $p^8$  nu door een  $p^7$  vervangen, welke driemaal door  $C_k$ , tweemaal door  $B_k$  gaat.

Tusschen de punten  $X$  van  $p$  en de punten  $X^*$ , welke telkens door  $x$  op  $p$  worden ingesneden, bestaat een verwantschap, waarvan elke coïncidentie tevens een coïncidentie der  $I_3$  is; bijgevolg omhult  $x$  een kromme van de vierde klasse, wanneer  $X$  een rechte doorloopt.

4. Nemen wij thans aan, dat een der zes basispunten van  $[c^3]$  collineair ligt met de basispunten  $B_1, B_2^*$  en met de basispunten

$B_3, B_3^*$ ; dit basispunt worde door  $A_1$  aangeduid, terwijl het zesde basispunt door  $C$  zal worden aangewezen.

Nu bevat  $[c^3]$  een *driezijde*, gevormd door  $a_2 \equiv A_1 B_2 B_2^*$ ,  $a_3 \equiv A_1 B_3 B_3^*$  en een rechte  $a_1$ , die  $C$  bevat en met  $\gamma^3$  de kromme  $(P)^4$  van  $C$  vormt. De *singuliere rechte*  $a_1$  draagt een  $I_2$ , waarvan de paren door  $A_1$  tot groepen der  $I_3$  worden aangevuld.

Bij  $a_2$  behoort weer (als in § 3) een bundel kegelsneden, waarvan de exemplaren door  $a_2$  tot figuren  $c^3$  worden aangevuld. Deze  $(c^2)$  heeft tot basispunten  $B_3, B_3^*, C$  en een punt  $A_2$ , dat *singulier* is, omdat het groepen van  $I_3$  vormt met de paren der  $I_2$ , welke  $(c^2)$  op  $a_2$  insnijdt. Analoog is er een *singulier punt*  $A_3$ , waarbij een op  $a_3$  geplaatste  $I_3$  behoort.

Tot den bundel  $(c^2)$ , die aan  $a_2$  is toegevoegd, behoort de figuur gevormd door  $a_3 \equiv B_3 B_3^*$  en de rechte  $CA_2$ ; deze is dus identiek met de derde rechte  $a_1$  der bovengenoemde driezijde. Analoog vormen  $a_1$  en  $a_2$  een der kegelsneden, die aan  $a_3$  zijn toegevoegd. Wij besluiten hieruit, dat de *singuliere punten*  $C, A_2$  en  $A_3$  collineair zijn en op de *singuliere rechte*  $a_1$  liggen.

Tot den aan  $a_3$  toegevoegden bundel behoort ook het lijnenpaar  $CB_3, A_2 B_3^*$ ; op de tweede dezer rechten bepaalt het net een  $I_2$  van paren  $(X, X')$ , welke ieder door een punt van  $CB_3$  tot drietallen worden aangevuld. Dus zijn de rechten  $A_2 B_3^*, A_3 B_3, A_3 B_2^*$  en  $A_3 B_2$  *singulier*; we kunnen ze door  $b_3^*, b_3, b_2^*, b_2$  aanduiden.

Ten slotte is er nog een *singuliere rechte*  $c$ , die door  $C$  gaat en met de driezijde  $a_1, a_2, a_3$  de kromme  $(P)^4$  van  $C$  vormt. Zij bevat een  $I_2$  van paren  $X, X'$ , die telkens basispunten van bundels uit  $[c^3]$  zijn. Neemt men nu twee willekeurige vaste punten  $M$  en  $M'$  aan, en voegt de beide  $c^3$  aan elkaar toe, welke elk der bedoelde bundels door  $M$  en  $M'$  zendt, dan worden daardoor twee  $(c^3)$  projectief gemaakt. Daar elke twee homologe  $c^3$  elkaar in drie punten van  $c$  snijden, en de beide bundels een kromme  $c_0^3$  gemeen hebben, bestaat de door hen voortgebrachte figuur uit  $c_0^3$ , de rechte  $c$  en een kegelsnede  $\gamma^2$ ; deze is dus de meetkundige plaats van het punt  $X''$ .

Samenvattend vinden wij, dat deze  $I_3$  acht *singuliere punten* en acht *singuliere rechten* heeft.

Haar *coïncidenties* liggen op een  $\gamma^4$ , welke door de punten  $B$  en tweemaal door  $C$  gaat.

Op analoge wijs als in § 3 blijkt, dat  $x$  een kromme van de derde klasse omhult, wanneer  $X$  een rechte beschrijft.

5. Onderstellen wij thans dat de basispunten  $B_1, B_2, B_3$  achter-

eenvolgens gelegen zijn op de zijden  $A_2 A_3, A_3 A_1, A_1 A_2$  van den driehoek, welke de basispunten  $A_k$  tot hoekpunten heeft.

Op overeenkomstige wijs als bij de vorige  $I_3$ , behoort bij de rechte  $a_1^* \equiv A_2 A_3 B_1$  een  $(c^2)$ , waarvan de basis bestaat uit  $A_1, B_2, B_3$  en een zeker punt  $A_1^*$ , dat weer *singulier* is en bij een op  $a_1^*$  gelegen  $I_2$  behoort. Analooq zijn er nog twee andere *singuliere punten*,  $A_2^*$  en  $A_3^*$ , die in betrekking staan tot involuties  $I_2$  op  $a_1^*$  en  $a_3^*$ . En nu blijkt uit de beschouwing van de *driezijde*, gevormd door  $a_1^*, a_2^*$  en door de singuliere rechte  $a_3$ , welke van  $B_3$  moet uitgaan, dat  $a_3$  de punten  $A_1^*$  en  $A_2^*$  bevat (zie § 4).

Blijkbaar behooren de *singuliere rechten*  $a_1, a_2, a_3$  achtereenvolgens bij de singuliere punten  $A_1, A_2, A_3$ .

De *negen singuliere punten* zijn nu zoo geplaatst, dat elk punt  $B_k$  de doorsnede is van de rechten  $a_k$  en  $a_k^*$ ; de driehoeken  $A_1 A_2 A_3$  en  $A_1^* A_2^* A_3^*$  zijn dus beiden om de punten  $B_1, B_2, B_3$  beschreven.

Behalve de reeds genoemde zes singuliere rechten  $a_k, a_k^*$  zijn er nog *drie singuliere rechten*  $b_k \equiv A_k A_k^*$ . Immers, op het lijnenpaar  $A_1 A_1^*, B_2 B_3$  bepaalt  $[c^3]$  groepen der  $I_3$ , waarvan telkens een punt op  $B_2 B_3$  ligt, terwijl de andere twee een paar op  $b_1$  vormen.

De *coïncidentiekromme* is thans een  $\gamma^3$ , die door de punten  $B$  gaat. Aan een rechte  $p$  is een  $p^5$  toegevoegd, terwijl de rechte  $x$  een kromme van de *tweede klasse* omhult, wanneer  $X$  de rechte  $p$  beschrijft.

Voor  $B_1$  bestaat  $(P)^4$  uit een  $\beta_1^2 (A_1 B_1 B_2 B_3 A_1^*)$  en de rechten  $a_1, a_1^*$ ; voor elk der overige singuliere punten bestaat ze uit vier gemakkelijk aan te wijzen rechten.

Verdere bijzonderheden zijn te vinden in mijn boven aangehaalde mededeeling.

6. Thans beschouwen wij een net  $[c^8]$ , dat de hoekpunten  $A_{kl}$  van een vierzijde, met zijden  $a_k$ , tot basispunten heeft. Aan de rechte  $a_1$  is een  $(c^2)$  toegevoegd, welke tot basispunten heeft  $A_{2,2}, A_{2,3}, A_{3,4}$  en een zeker punt  $A_1$ ; elke dezer  $c^2$  vormt met  $a_1$  een figuur van het net. Tot deze figuren behoort de *driezijde* die uit  $a_1, a_2$  en een derde rechte  $a_{1,2}$  is samengesteld, welke door  $A_{3,4}$  moet gaan, maar dan ook het *singuliere punt*  $A_1$  moet bevatten. Maar die driezijde kan tevens worden beschouwd als samenstel van de rechte  $a_2$  met een lijnenpaar van den  $(c^2)$ , die  $A_{1,3}, A_{1,4}, A_{3,4}$  en een zeker punt  $A_2$  tot basispunten heeft; dientengevolge gaat de derde rechte  $a_{1,2}$  door  $A_{3,4}$  en  $A_2$ . De *singuliere rechte*  $a_{1,2}$  bevat dus de drie *singuliere punten*  $A_1, A_2, A_{3,4}$ .

Behalve de *zes singuliere punten*  $A_{kl}$ , die elk een rechte  $a_{kl}$  tot overeenkomstige singuliere rechte hebben, bezit de  $I_3$ , blijkens het

bovenstaande, nog vier andere singuliere punten  $A_m$ , die twee aan twee collineair zijn met de punten  $A_{kl}$ , en wel in dier voege, dat  $A_m$  en  $A_n$  met  $A_{kl}$  door de singuliere rechte  $a_{kl}$  worden verbonden. Anders gezegd, er zijn tien singuliere punten en tien singuliere rechten, welke een vierzijde en een volledigen vierhoek vormen, waarbij de eerste zoodanig in den laatsten is beschreven, dat er een configuratie  $10_3$  van DESARGUES is ontstaan <sup>1)</sup>.

De coincidentiekromme is nu een kegelsnede, daar de vier rechten  $a_k$  deel uitmaken van de Jacobiana. Dit kan men trouwens ook weer bevestigen door te letten op de gemeenschappelijke raaklijnen der krommen  $(p)_4$  en  $(q)_4$ ; deze hebben toch, behalve de beide door het punt  $pq$  aangewezen rechten  $x$  en de 10 singuliere rechten, nog 4 rechten  $x$  gemeen, die elk een punt  $X$  van  $p$  met een punt  $X'$  van  $q$  verbinden. Met  $p$  als meetkundige plaats van  $X$  komt dus een kromme  $p^4$  als meetkundige plaats der paren  $X', X''$  overeen, en deze snijdt  $p$  in twee coincidenties. Men vindt nu gemakkelijk, dat de rechte  $x \equiv X'X''$  thans een waaier beschrijft.

De hier beschreven  $I_3$  is het langst bekend; men kan haar gevegelijk de involutie van REYE noemen.

7. Hiermee zijn nu vijf van de in bovengenoemde mededeeling gevonden involuties  $I_3$  uit netten van kubische krommen afgeleid. De zesde  $I_3$  wordt verkregen als men elke  $c^2$  door de punten  $E, F_1, F_2, F_3$  tot doorsnijding brengt met elke  $c^2$  door de punten  $E, G_1, G_2, G_3$ . Deze  $I_3$  is uitvoerig besproken in mijn mededeeling „Een quadrupelinvolutie in het platte vlak”. (Verslagen XIX, 52—62).

Wanneer van een  $[c^3]$  de basispunten  $B_1, B_2, B_3$  op een rechte  $b_{123}$  en de basispunten  $B_4, B_5, B_6$  op een rechte  $b_{456}$  liggen, dan bevat dit net een bundel, waarvan elk exemplaar is samengesteld uit de beide genoemde rechten en een straal  $s$  van een waaier, waarvan de top door  $A$  worde aangeduid.

Op elken straal  $s$  bepaalt  $[c^3]$  een  $I_3$ ; men heeft hier dus een kubische involutie in het vlak, welke slechts collineaire drietallen bevat, en daardoor van het boven aangehaalde onderzoek was uitgesloten. Zij is ook niet van de eerste klasse, want op een willekeurige rechte ligt geen enkel paar.

De Jacobiana van dit net bestaat uit de rechten  $b_{123}, b_{456}$  en een kromme  $\gamma^1$ , welke de coincidenties der op de stralen gelegen kubische involuties bevat.

<sup>1)</sup> Op meer symmetrische wijs kunnen de punten en rechten der  $10_3$  worden aangewezen door de teekens  $kl$  en  $klm$ , waarbij dan de punten  $kl, km, lm$  op de rechte  $klm$  liggen ( $k, l, m$  door 1, 2, 3, 4, 5 te vervangen).

Tot analoge uitkomsten geraakt men door het net te beschouwen, waarvan de zes basispunten op een kegelsnede liggen.

8. Zij nu een *net van nodale kubische krommen* gegeven, welke alle door de basispunten  $B_1, B_2$  gaan en in  $D$  hun dubbelpunt hebben.

Bij  $b_1 \equiv B_1 D$  behoort één bundel kegelsneden door  $D, B_2$  en twee andere punten  $A_1$  en  $A_1^*$ . Analogoog bij  $b_2 \equiv B_2 D$  een ( $c^2$ ) met basis  $D, B_1, A_2, A_2^*$ . De beide hierdoor aangewezen bundels ( $c^3$ ) hebben de *drietzijde* gemeen, welke uit  $b_1, b_2$  en een derde rechte  $d$  bestaat. Hieruit volgt, dat  $d$  de punten  $A_1, A_1^*, A_2$  en  $A_2^*$  moet bevatten.

Op de *singuliere rechte*  $d$  bepaalt [ $c^3$ ] een  $I_3$ ; ook hier hebben wij dus een tripelinvolutie, die bij het boven genoemd onderzoek was uitgesloten, omdat zij collineaire drietallen vertoont.

Op het lijnenpaar  $DA_1, B_2 A_1^*$  bepaalt [ $c^3$ ] groepen der  $I_3$ , die elk een punt op  $DA_1$  en een puntenpaar op  $B_2 A_1^*$  hebben. De laatste rechte is dus *singulier*, en hetzelfde geldt dan voor de rechten  $B_2 A_1, B_1 A_2$  en  $B_1 A_2^*$ .

In aanmerking nemend, dat de *coïncidentiekromme* een  $\gamma^4$ , met *drievoudig punt*  $D$ , is, kan men nu uit de combinatie van twee krommen  $(p)_4$  afleiden, dat er buiten de genoemde *vijf singuliere rechten* geen andere kunnen zijn. Immers,  $(p)_4$  heeft  $d$  tot *dubbelraaklijn*, zoodat  $d$  vier gemeenschappelijke raaklijnen van  $(p)_4$  en  $(q)_4$  vertegenwoordigt. En daar aan  $p$ , wegens  $\gamma^4$ , een kromme  $p^6$  is toegevoegd, als meetkundige plaats van  $X'$ , kunnen  $(p)_4$  en  $(q)_4$  nog slechts door vier singuliere rechten worden aangeraakt.

Daar geen der singuliere rechten door  $D$  gaat, zal de kromme  $(P)^4$  voor  $P \equiv D$  een *drievoudig punt* hebben. Op deze  $\sigma^4$ , die door  $B_1, B_2$  en de punten  $A$  gaat, ligt een  $I_2$  van punten  $X, X'$ , waarvoor  $X''$  in  $D$  is gelegen; de rechte  $XX'$  omhult een kromme van de 3e klasse.

Voor  $B_1$  bestaat  $(P)^4$  uit een kegelsnede  $\beta_1^2$  (die een  $I_1$  bevat) en de rechte  $B_1 A_2, B_1 A_2^*$ .

De *singuliere punten*  $A_1, A_1^*$  vormen tripels met elk der punten van  $b_1$ ; aan hen is dus geen singuliere rechte toegevoegd. Voor  $A_1$  bestaat  $(P)^4$  uit de rechten  $A_1 B_2$  en  $b_1$  benevens de dubbel te tellen rechte  $d$ .

De kromme  $(p)_4$  is blijkbaar van den graad 8 (twee dubbelraaklijnen), wordt dus door  $p$  gesneden in 4 punten. Dus is de *complementaire kromme* van den vierden graad. Daar zij dubbelpunten heeft in  $D, B_1, B_2$ , kan ze met  $\gamma^4$  buiten deze punten, nog slechts



16—2×3—2×2 of 6 punten gemeen hebben. In deze  $I_3$  komen dus slechts drie groepen voor, waarvan telkens de drie punten zijn samengevallen.

Zij bezit zeven *singuliere punten* en vijf *singuliere rechten*.

9. In § 7 werd gewezen op een tripelinvolutie, die slechts collineaire groepen heeft. Een andere  $I_3$  met enkel collineaire drietallen wordt bepaald door de projectieve netten

$$ka_x^3 + lb_x^3 + mc_x^3 = 0, \quad kA_x + lB_x + mC_x = 0.$$

Elk drietal bestaat uit basispunten van een bundel ( $c^4$ ) behoorende tot het net [ $c^4$ ] aangewezen door

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a_x^3 & b_x^3 & c_x^3 \\ A_x & B_x & C_x \end{vmatrix} = 0,$$

dat dertien vaste basispunten  $S_k$  heeft. Immers de krommen  $a_x^3 B_x = b_x^3 A_x$  en  $a_x^3 C_x = c_x^3 A_x$  hebben de drie door  $a_x^3 = 0$ ,  $A_x = 0$  aangewezen punten gemeen en deze liggen niet op de netkromme  $b_x^3 C_x = c_x^3 B_x$ . De krommen van [ $c^4$ ] gaan dus door 13 vaste punten.

Elke rechte bevat drie basispunten van een bundel ( $c^4$ ). Stelt men haar, wat steeds mogelijk is, door  $kA_x + lB_x + mC_x = 0$  voor, dan vindt men den bedoelden bundel door in

$$\begin{vmatrix} ka + l\beta + m\gamma & \beta & \gamma \\ ka_x^3 + lb_x^3 + mc_x^3 & b_x^3 & c_x^3 \\ kA_x + lB_x + mC_x & B_x & C_x \end{vmatrix} = 0$$

te stellen

$$ka + l\beta + m\gamma = 0.$$

Men vindt dan den bundel

$$\beta \begin{vmatrix} \sum_3 ka_x^3 & c_x^3 \\ \sum_3 kA_x & C_x \end{vmatrix} = \gamma \begin{vmatrix} \sum_3 ka_x^3 & b_x^3 \\ \sum_3 kA_x & B_x \end{vmatrix}$$

en deze heeft tot basispunten de snijpunten van

$$\sum ka_x^3 = 0 \quad \text{met} \quad \sum kA_x = 0. \quad ^1)$$

De dertien punten  $S_k$  zijn *singulier*; immers elk punt  $S$  vormt een drietal met elk der paren, welke door den waaier met top  $S_k$

<sup>1)</sup> Een willekeurig net [ $c^4$ ] heeft hoogstens 12 basispunten en snijdt een rechte in de groepen van een involutie  $I_4^2$  (van den tweeden rang), welke drie neutrale paren bezit. Hier zijn drie paren vervangen door een neutraal drietal.

wordt ingesneden op de nodale kromme  $\sigma_k^4$ , die  $S_k$  tot dubbelpunt heeft en tot  $[c^4]$  behoort.

De groepen der  $I_3$ , welke collineair zijn met het punt  $P$ , liggen op een kromme  $(P)^4$ , die door de punten  $S$  gaat, dus ook tot  $[c^4]$  behoort.

Elke netkromme bevat een punt  $P$ , waarvoor zij als kromme  $(P)^4$  dienst doet. Immers, de *Jacobiana*  $\gamma^9$ , tevens *coïncidentiekromme* der  $I_3$ , heeft dubbelpunten in  $S_k$ , snijdt een  $c^4$  van het net dus nog in 10 punten  $R$ , die coïncidenties der  $I_3$  moeten wezen. Zij  $R_1$  een dier punten; de raaklijn in  $R_1$  aan  $c^4$  heeft nog twee punten met die kromme gemeen; een daarvan vormt met  $R_1$  een drietal van  $I_3$ ; zij  $P$  het tweede dier punten. Nu heeft de bij  $P$  behoorende  $(P)^4$  met  $c^4$  de 13 punten  $S$ , het punt  $P$  en het door  $R_1$  bepaalde drietal der  $I_3$  gemeen; maar dan zijn de beide krommen identiek en komen de raaklijnen aan  $c^4$  in de 10 punten  $R$  in  $P$  samen.

Hieruit volgt tevens, dat de *draggers*  $t$  der *coïncidenties* van  $I_3$  een kromme  $\tau$  van de *tiende klasse* omhullen.

**10.** In  $S_k$  komen zes raaklijnen van  $\sigma_k^4$  samen; elke der raaklijnen in  $S_k$  vervangt twee rechten  $t$ , zoodat  $\tau$  een dubbelpunt heeft in  $S_k$ .

Als  $(P)^4$  een dubbelpunt  $D$  heeft, vervangt  $PD$  twee rechten  $t$ , en  $P$  is een punt van  $\tau$ .

Heeft  $(P)^4$  twee dubbelpunten  $D_1$  en  $D_2$ , dan is  $P$  dubbelpunt van  $\tau$  en  $PD_1$ ,  $PD_2$  zijn de raaklijnen in  $P$ .

Analoog heeft  $\tau$  een keerpunt in  $P$ , als  $(P)^4$  een cuspidale  $c^4$  is.

Dus heeft  $\tau$ , behalve de 13 dubbelpunten  $S_k$ , nog 225 dubbelpunten en 72 keerpunten.<sup>1)</sup>

Hieruit volgt dan verder, dat  $\tau$  een *kromme van den graad 27* is, en van het *geslacht 15*.

Zij moet in geslacht overeenkomen met de *coïncidentiekromme*  $\gamma^9$ ; inderdaad is ook deze van het geslacht 15, omdat zij 13 dubbelpunten heeft.

Daar  $\sigma_k^4$ , buiten  $S_k$ , zes coincidenties bevat, heeft de *complementaire kromme*  $x$  in  $S_k$  een *zesvoudig punt*. Op elke  $(P)^4$  liggen 10 punten van  $x$ , en wel op de rechten  $t$ , welke in  $P$  samenkomen. Dus hebben  $(P)^4$  en  $x$   $10 + 13 \times 6$  punten gemeen;  $x$  is bijgevolg een kromme van den graad 22.

De krommen  $\gamma^9$  en  $x^{22}$  kunnen elkaar buiten de punten  $S$  slechts

<sup>1)</sup> Een net  $[c_n]$  zonder veelvoudige basispunten heeft  $\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11)$  binodale en  $12(n-1)(n-2)$  cuspidale krommen. (Zie b.v. mijn mededeeling in deel XIII, bl. 708).

aanraken; in elk dier raakpunten hebben de krommen van een bundel ( $c^4$ ) een osculatie. Uit  $9 \times 22 - 13 \times 2 \times 6 = 42$  blijkt dus, dat  $I_8$  21 groepen bezit, waarvan de drie punten zijn samengevallen.

11. Beschouwen wij nu het geval, dat de in § 9 door  $a^3_x = 0$ ,  $b^3_x = 0$ ,  $c^3_x = 0$  aangewezen krommen in  $S_0$  een dubbelpunt hebben. Het net [ $c^4$ ] kan nu worden voorgesteld door

$$\begin{vmatrix} \alpha & a_x^2 x_3 + a_x^3 & x_1 \\ \beta & b_x^2 x_3 + b_x^3 & x_2 \\ \gamma & c_x^2 x_3 + c_x^3 & x_3 \end{vmatrix} = 0$$

waarin  $a_x^2$  enz. functies van  $x_1$  en  $x_2$  zijn. Alle  $c^4$  hebben in  $S_0$  een dubbelpunt.

De groepen der  $I_8$  op de stralen door  $S_0$  bestaan uit het dubbel te tellen punt  $S_0$  en een punt der kromme  $\sigma^4$ , aangewezen door

$$\begin{vmatrix} a_x^2 x_3 + a_x^3 & x_1 \\ b_x^2 x_3 + b_x^3 & x_2 \end{vmatrix} = 0,$$

welke in  $S_0$  een *drievoudig punt* heeft.

Daar  $(P)^4$  in het singuliere punt  $S_0$  een dubbelpunt bezit, draagt  $P$  acht rechten  $t$ , zoodat  $\tau$  nu van de klasse 8 is. De coincidentiekromme  $\gamma^9$  snijdt  $(P)^4$  in de raakpunten der 8 rechten  $t$  en tweemaal in elk der 9 *singuliere punten*  $S_k$  (enkelvoudige basispunten van [ $c^4$ ]); hieruit volgt, dat  $\gamma^9$  *vijfmaal* door  $S_0$  gaat.

Wij beschouwen nu twee willekeurige bundels uit het net [ $c^4$ ] en voegen aan elke  $c^4$  van een bundel de krommen van den anderen toe, die haar op  $\gamma^9$  snijden. Het voortbrengsel der daardoor in een (8, 8) verkeerende bundels bestaat uit de dubbel getelde kromme  $\gamma^9$ , achtmaal de  $c^4$ , welke de bundels gemeen hebben, en de *complementaire kromme*  $x$ . Uit  $64 - 2 \times 9 - 8 \times 4 = 14$  blijkt nu, dat  $x$  een kromme van den graad 14 is.

De bij  $S_k$  behorende kromme  $\sigma^4_k$  heeft dubbelpunten in  $S_k$  en  $S_0$ ; dus is  $S_k$  *viervoudig punt* van  $x$ . Combinatie van  $(P)^4$  met  $x^{14}$  leidt nu tot de slotsom, dat  $x^{14}$  in  $S_0$  een *zesvoudig punt* bezit.

En nu vindt men door combinatie van  $\gamma^9$  en  $x^{14}$ , dat  $I_8$  thaus 12 groepen bevat, waarin de drie punten zijn samengevallen.

De kenmerkende getallen van  $\tau$  zijn gemakkelijk te vinden, omdat deze kromme in geslacht overeenkomt met  $\gamma^9$ , en de 12 raakpunten van  $\gamma$  en  $x$  tot buigpunten heeft. Zij blijkt van den graad 20 te zijn.

12. Stellen in

$$\begin{vmatrix} \alpha & a_x^3 & x_1 \\ \beta & b_x^3 & x_2 \\ \gamma & c_x^3 & x_3 \end{vmatrix} = 0$$

$a_x^3$  enz. weer functies van  $x_1$  en  $x_2$  voor, dan hebben alle krommen van  $[c^4]$  in  $O_3 = S_0$  een *drievoudig punt*. De groepen der  $I_3$  worden nu bepaald door

$$ka_x^3 + lb_x^3 + mc_x^3 = 0 \quad \text{en} \quad kx_1 + lx_2 + mx_3 = 0.$$

De eerste van deze vergelijkingen doet zien, dat de stralen door  $S_0$  gerangschikt zijn in de drietallen van een involutie van den tweeden rang.

Als twee stralen van een groep samenvallen, heeft men <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} ka_1 + lb_1 + mc_1 &= 0 \\ ka_2 + lb_2 + mc_2 &= 0. \end{aligned}$$

Voor de *coincidentiekromme* vindt men dus

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0,$$

d. i. een  $\gamma^5$  met *viervoudig punt*  $S_0$ .

Deze uitkomst was te voorzien; immers, het net  $[c^4]$  heeft nog 4 enkelvoudige basispunten  $S_k$ ; de JACOBIANA heeft dus 4 dubbelpunten  $S_k$  en een achtevoudig punt  $S_0$ , valt derhalve uiteen in de vier stralen  $S_0 S_k$  en een  $\gamma^5$ .

Als de drie stralen van een groep der involutie  $I_2$  samenvallen, heeft men

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} & c_{11} \\ a_{12} & b_{12} & c_{12} \\ a_{22} & b_{22} & c_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Er zijn dus drie groepen der  $I_3$ , waarin de drie punten samenvallen; hun dragers  $t$  zijn stationaire raaklijnen der kromme  $\tau$ .

Daar  $(P)^4$  thans in  $S_0$  een *drievoudig punt* heeft, draagt  $P$  slechts vier rechten  $t$ . De kromme  $\tau$  is dus van de klasse 4; daar zij van het geslacht nul moet wezen en 3 stationaire raaklijnen bezit, is zij een kromme van den derden graad.

De  $I_3$  heeft een neutraal paar; deze twee rechten vormen een  $c^4$  met de kegelsnede, die door de vijf singuliere punten gaat.

### 13. Het net, bepaald door

$$\begin{vmatrix} a & a_x^2 & A_x^2 \\ \beta & b_x^2 & B_x^2 \\ \gamma & c_x^2 & C_x^2 \end{vmatrix} = 0,$$

<sup>1)</sup> Met  $a_k$  wordt bedoeld  $\frac{\partial a}{\partial x_k}$  met  $a_{kl}$  de vorm  $\frac{\partial^2 a}{\partial x_k \partial x_l}$ .

heeft 12 basispunten, levert dus een  $I_4$ . Gaan evenwel de 6 kegelsneden, die met de 6 quadratische functies overeenkomen, alle door een punt  $S_0$ , dan hebben de krommen van  $[c^4]$  een dubbelpunt in  $S_0$  en gaan verder nog door 9 vaste punten  $S_k$ . De veranderlijke basispunten der bundels ( $c^4$ ) vormen nu een  $I_3$ . Deze *tripelinvolutie van de derde klasse* heb ik uitvoerig onderzocht in een mededeeling, opgenomen in deel XXIII, blz. 84, der „Verslagen”. In een mededeeling voorkomende in deel XXII blz. 1379, vindt men een *tripelinvolutie van de tweede klasse*; haar groepen worden verkregen door elke kegelsnede van een bundel te snijden met elke kromme van een bundel ( $c^3$ ); de beide bundels hebben n.l. drie basispunten gemeen.

---

**Scheikunde.** — De Heer BÖESEKEN biedt, mede namens den Heer ir. CHR. VAN LOON, eene voorloopige mededeeling aan: „*Over hydrindeen-1.2-diolen*”.

A. SPILKER<sup>1)</sup> bereidde door behandeling van 1. oxy-hydrindeen-2. amine met salpeterigzuur hydrindeen-glycol, dat in water zeer oplosbaar was en, na omkristalliseeren uit benzol „bei etwa 120°” smolt.

FR. HEUSLER en H. SCHIEFFER<sup>2)</sup> verkregen door oxydatie van indeenrijke teerfracties met kaliumpermanganaat een stof, welke uit benzol in bij 98°—99° smeltende naalden kristalliseerde en met SPILKER's glycol identiek zou zijn; zij schreven de afwijkende smeltpuntsopgave aan een vergissing toe.

R. WEISZGERBER<sup>3)</sup> zette chloor-oxy-hydrindeen, dat hij bereidde door additie van onderchlorigzuur aan indeen, door koken met kaliumacetaat en ijsazijn om in een (niet zuiver verkregen) diacetaat, hetwelk door heete kaliloog verzeept werd tot hydrindeen-glycol. Dit kristalliseerde uit water in naalden, welke scherp bij 158° smolten. Directe behandeling van chloor-oxy-hydrindeen met heete kaliloog leverde WEISZGERBER een versmeerd product, waaruit hij hydrindeen-glycol met hetzelfde smeltpunt wist te winnen. De veel lagere smeltpunten van bovengenoemde praeparaten weet WEISZGERBER daaraan, dat zij bereid waren uit onzuiver, cumaronhoudend indeen, terwijl hijzelf zuiver indeen (uit indeennatrium<sup>4)</sup>) gebruikt had.

Blijkbaar heeft men dus over 't hoofd gezien, dat zich hier cis-trans-isomerie zal kunnen voordoen; de hydroxyl-groepen kunnen zich namelijk of aan dezelfde zijde of aan weerszijden van het vlak van den vijftring bevinden (zie teekening op volgende pag.).

Wij hadden ons ten doel gesteld deze isomeren (welke beide weer in optische antipoden splitsbaar moeten zijn) te bereiden en tevens, door middel van de door één onzer uitgewerkte boorzuurmethode<sup>5)</sup>, de configuratie van elk te bepalen.

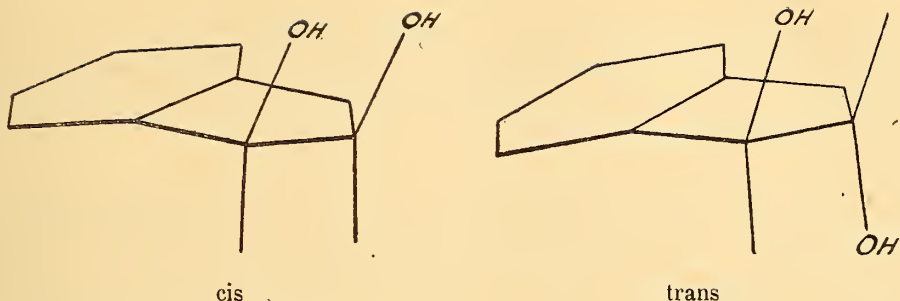
1) A. SPILKER, Ber. d. D. chem. Ges. **26**, 1538—45 (1893).

2) FR. HEUSLER en H. SCHIEFFER. Ibid. **32**, 28—34 (1899).

3) R. WEISZGERBER, Ibid. **44**, 1436—48 (1911).

4) R. WEISZGERBER, Ibid. **42**, 569—72 (1909).

5) J. BÖESEKEN en leerlingen, Recueil **30**, 392; **31**, 80 en 86, deze Versl. **26**, 3.



### *Cis-hydrindeen-1.2.diol.*

Allereerst hebben wij de oxydatie van indeen met kaliumperman-ganaat in verdunde waterige emulsie volgens HEUSLER en SCHIEFFER (l. c.) herhaald. Ook wij kregen met zeer onbevredigend rendement (minder dan 13 %) hydrindeen-glycol, dat echter na eenmaal omkristalliseeren uit benzol, bij 105°—106° smolt na sterk sinteren vanaf 95°. Door de oxydatie uit te voeren in oplossing van waterige aceton of methylalcohol, en bij —40°, kon het rendement slechts weinig opgevoerd worden, bijv. tot 18,5 % (sm. 103,5°—104,5°). Door voortgezet omkristalliseeren uit benzol krijgt men tenslotte sterk vervilte naaldjes, die na sinteren bij 105,5° smelten bij 107,5°—108°<sup>1)</sup>; de stof bleek in vacuum sublimeerbaar te zijn, het sm. veranderde daarbij niet.

Op grond eener voorloopige bepaling van den invloed van dit, en van onderstaand diol op de geleidbaarheid van boorzuur<sup>2)</sup>, kennen wij — onder voorbehoud — aan het diol sm. 107,5°—108° de cis-configuratie toe.

### *Trans-hydrindeen-1.2.diol.*

Daar het diol van WEISZGERBER (l. c.) de sterkst afwijkende eigen-schappen heeft, vermoeden wij daarin het andere isomeer. Wij hebben het echter langs gebruikelijker weg bereid: door indeendibromide<sup>3)</sup> met kaliumacetaat in ijszijn-oplossing te koken verkrijgt men een fractie  $k\rho_{19}$  169°—174° (rend. 52 tot 66 %), waaruit wij een zuiver *hydrindeen-1.2.diol-diacetaat* door fractionneeren konden isoleeren:

$k\rho_{19}$  169°—169,5°,  $d_4^{20,4}$  1,1771,  $n_D^{20}$  1,5170, gev.  $M_D$  60,15, ber.  $M_D$  59,74.

Door verzeepen der fractie  $k\rho_{19}$  169°—174° met heete kaliloog (s.g. 1,3) ontstond het diol, dat reeds door WEISZGERBER verkregen

<sup>1)</sup> Alle sm. werden met Anschütz-thermometers bepaald en zijn zoo noodig gecorrigeerd.

<sup>2)</sup> J. BÖESEKEN vermeldde dit reeds in deze Versl., 26, 6.

<sup>3)</sup> A. SPILKER en A. DOMBROWSKY, Ber. d. D. Chem. Ges. 42, 572—3 (1909).

was, echter in beter rendement (58 % i. p. v. 30 %, ber. op het diacetaat). Door vacuum-sublimatie en herhaald omkristalliseeren uit toluol verkregen wij het trans-diol in den vorm van hagelwitte, sterk glanzende blaadjes sm. 159,8°—160°.

Hoewel nu onze elementair-analyses en moleculair-gewichtsbepalingen in phenol<sup>1)</sup> erop wezen, dat de verkregen stoffen de gezochte hydrindeen-diolen waren, bestond nog de mogelijkheid dat één ervan een aequimoleculaire verbinding van cis- met trans-hydrindeendiol was. Immers LEROUX<sup>2)</sup> isoleerde bij de cis-trans-isomere naphtaan-2-3-diolen en naphtaantriëen-2-3-diolen dergelijke verbindingen, welke bij herhaald omkristalliseeren uit verschillende oplosmiddelen constant smeltpunt vertoonden, doch in waterige oplossing — blijkens de vriespuntsdaling — in hun componenten gedissocieerd waren. De isoleering van cis en trans uit zoo een (cis + trans)-verbinding kon slechts worden bewerkstelligd door acetyleren; daarbij ontstaat een mengsel van cis- en trans-diacetaat, dat door kristalliseeren te scheiden is.

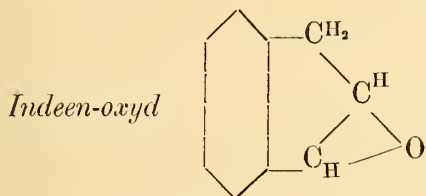
Wanneer men het intreden van omlegging van cis in trans, of omgekeerd, buitensluit, dan is het duidelijk dat men, bij de overvoering van een aequimoleculaire (cis + trans)-verbinding in derivaten, nooit het cis- of trans-derivaat zal verkrijgen in een rendement, dat 50 % overschrijdt. Doordat wij onze hydrindeen-diolen sm. 107,5°—108° en sm. 159,8°—160° met rendementen, grooter dan 50 %, in de *cis-* en *trans-hydrindeen-1.2.diol-dibenzoaten* (sm. resp. 109,5°—110,5° en 76,5°—77,5°) en in de overeenkomstige *di-phenylurethanen* (sm. onder sterke ontleding resp. 205° en 206,5°) konden omzetten, hebben wij dus de éénvormigheid onzer diolen bewezen. Bij alcalische verzeeping gaven de trans-derivaten direct het trans-diol terug, terwijl de cis-derivaten meestal praeparaten leverden, die wel het niterlijk van het diol sm. 107,5°—108° bezaten, doch bij 100,5°—101,5°, ook na omkristalliseeren en sublimeren, reeds smolten! Dit nieuwe diol sm. 100,5°—101,5° is een *polymorfe modificatie* van het cis-diol, zooals blijkt uit het volgende: Een mengsel van beide modificaties vertoont van 100°—105,5° nauwelijks verandering, doch smelt evenals het hoogstmeltende diol bij 107,5°—108°; gesmolten geweest zijnde proefjes smelten nu eens bij 100,5°—101,5°, dan weer bij 107,5°—108°; enkele malen hebben wij zelfs de labiele modificatie na smelten

<sup>1)</sup> Deze analyse-cijfers en die van de andere stoffen zullen bij de uitvoerige publicatie medegedeeld worden.

<sup>2)</sup> H. LEROUX, Ann. de Ch. et de Phys. [8] 21, 536—47 (1910).

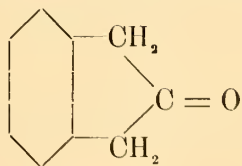


bij 100,5°—101,5° bij langzame verdere verhitting geheel zien vastworden, om bij 106,5°—108,5° opnieuw te smelten.



Door behandeling van indeen in vochtig-aetherische oplossing met geel kwikoxyd en jodium, en van de zoo gevormde indeen-joodhydrine-oplossing met gepoederde kali, verkregen wij het oxyd als donkerbruine vloeistof. Deze ontleedde bij onze eerste poging spontaan, een tweede maal bij het distilleeren onder verminderden drnk. Wij schreven deze ontleding toe aan de onzuiverheid onzer joodhydrine-oplossing en behandelden toen indeenbroomhydrine, dat volgens het voorschrift van W. J. POPE en J. READ <sup>1)</sup> gemakkelijk zuiver verkrijgbaar is, in aether met gepoederde kali. Werkelijk verkregen wij nu na vacuum-distillatie in bijna theoretische opbrengst indeenoxyd als een kleurlooze, in water weinig oplosbare vloeistof met naphthalineachtige geur,  $kp_{19.5}$  113°,  $d_{4}^{23.6}$  1,1258,  $n_{D}^{23.1}$  1,5627, gev.  $M_D$  38,05, ber.  $M_D$  37,40. Het oxyd kristalliseert spontaan in groote ruitvormige platen, sm. 31°—31,5°. Na enkele dagen beginnen de kristallen week te worden, hetgeen vermoedelijk aan polymerisatie toegeschreven moet worden. Het indeenoxyd zal een belangrijk doorgangsproduct kunnen worden voor de bereiding van 1-of 2- en 1.2-derivaten van hydrindeen.

*Omlegging in 2-keto-hydrindeen ( $\beta$ -hydrindon)*



HEUSLER en SCHIEFFER (l.c.) hebben hnn glycol door koken met verdund zwavelzhuur omgezet in  $\beta$ -hydrindon sm. 58°; WEISZGERBER (l.c.) zag in het slagen dezer reactie bij zijn praeparaat ten onrechte een identiteitsbewijs. Wij hebben, door onze cis- en trans-diolen en ook het oxyd op dezelfde wijze te behandelen, telkens  $\beta$ -hydrindon verkregen, dat in alle drie gevallen bij 57°—58° smolt (ook meng-sm. was 57°—58°); de identiteit bleek bovendien uit het overeenkomende sm. 153°—154° der drie oximmen. Van de mogelijke vorming van  $\alpha$ -hydrindon hebben wij geen aanwijzing gekregen.

<sup>1)</sup> POPE en READ, Journ. Chem. Soc. Trans. 101, 758—90 (1912).

De isomerisatie van indeenoxyd tot  $\beta$ -hydrindon verloopt ook bij afwezigheid van water, bijv. in droge aetherische oplossing door een weinig watervrij zinkchloride; wij zijn daarom niet geneigd bij de omlegging van het oxyd in waterige oplossing een der diolen als tusschenproduct te aanvaarden.

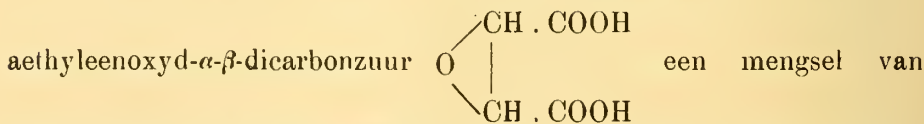
Het  $\beta$ -hydrindon bezit een aangename, aan anthranilzure methylester herinnerende geur, waardoor wij konden waarnemen dat dit keton bij vele reacties, vooral in zuur, maar ook in alcalisch medium, als nevenproduct ontstaat.

### *Hydratacie van indeenoxyd.*

Wanneer men het oxyd tracht te hydrateeren, treedt bijna steeds de  $\beta$ -hydrindon-geur dnidelijk op en wij konden dan ook dit keton dikwijls door overstoomen isoleeren. Daarnaast ontstaat altijd een moeilijk oplosbaar condensatie product, dat wij houden voor anhydrobis- $\beta$ -hydrindon; dit lichaam werd n.l. door HEUSLER en SCHIEFFER uit  $\beta$ -hydrindon zoowel door verdund zuur als door natronloog gewonnen.

Men kan de hydratacie echter zóó leiden (bijv. in zeer verdunde waterige oplossing), dat de omlegging tot keton ondergeschikt blijft; daarnaast bleek nu *niet alleen cis-*, maar ook steeds een belangrijke hoeveelheid *trans-hydrindeendiol* te ontstaan, waarby dus configuratieverandering ingetreden moet zijn. Door dit resultaat wordt op losse schroeven gezet het configuratiebewijs voor de cis- en trans-cyclohexaan-1.2. diolen <sup>1)</sup>, naphtaan-2.3. diolen <sup>2)</sup>, naphtaantriëen-2.3. diolen <sup>3)</sup>, en cyclopentaaan-1.2. diolen <sup>4)</sup>; immers dat bewijs berust op de aanname, dat het diol, dat door aanlegging van water aan het oxyd ontstaat, de cis-configuratie bezit.

(Het bleek ons, dat reeds W. LOSSEN, NIEHRENHEIM en DUECK <sup>5)</sup> uit



druivenzuur en antiwijnsteen zuur meenen verkregen te hebben; echter blijft mogelijk, dat hun oxido-zuur een mengsel van cis- en trans-verbinding was).

De door ons waargenomen configuratieverandering schaart zich bij de omkeeringen, die men zoo dikwijls constateert, wanneer men

<sup>1)</sup> L. BRUNEL, Ann. de Chim. et de Phys. [8], 6, 280 (1905).

<sup>2)</sup> H. LEROUX, ibid. [8] 21, 496 en 500 (1910).

<sup>3)</sup> H. LEROUX, ibid. [8] 21, 511 (1910).

<sup>4)</sup> M. GODCHOT en F. TABOURY, Bull. Soc. Chim. [4] 13, 535 (1913).

<sup>5)</sup> W. LOSSEN, c.s., Lieb. Ann. 348, 305 (1906).

tornt aan de bindingen van een atoom, dat drager is eener stereo-isomerie. Zij onderscheidt zich echter in zooverre van de reeds bekende gevallen, dat men, na definitieve bevestiging der configuratiebepaling door boorzuur, zal weten wèlk diol onder configuratieverandering ontstaan is.

Uit het bij de hydratatie verkregen mengsel der twee hydrindeendiolen, kan men het hoogstsmeltende gemakkelijk zuiver verkrijgen, doordat het veel minder oplosbaar is. Door omkristalliseeren uit toluol of water wonnen wij het transdiol met sm.  $159,5^{\circ}$ — $160,5^{\circ}$  (mengsm. met diol uit het diacetaat vertoonde geen depressie). Echter leveren de moederloogen het laagstsmeltende diol vermengd met een weinig van het isomeer, welke mengsels reeds beginnen te smelten vanaf  $92^{\circ}$ — $93^{\circ}$  (bij deze temperatuur schijnt het eutecticum te liggen).

Pas toen ons, na veel vergeefsche moeite, bleek dat het cis-dibenzozaat minder oplosbaar is dan het trans-dibenzozaat, gelukte het langs dien weg het cis-dibenzozaat, met sm.  $108,5^{\circ}$ — $111^{\circ}$  uit het mengsel te isoleeren, en door verzeepen in het zuivere cis-diol om te zetten; sm. na sinteren bij  $106^{\circ}$ ,  $107^{\circ}$ — $108,5^{\circ}$ , mengsm. onveranderd.

Bij het onderzoek, waarvan hier een gedeeltelijke en voorloopige mededeeling is uitgebracht, is o.a. steeds het verband met de omlegging van WALDEN in het oog gehouden. Na afsluiting hoopt een onzer de resultaten neer te leggen in een proefschrift.

*Laboratorium voor Organische Chemie  
der Technische Hoogeschool.*

*Delft, 19 Februari 1918.*

**Wiskunde.** — De Heer BROUWER biedt een mededeeling aan van den Heer Dr. B. P. HAALMEIJER: „*Over elementairopervlakken der derde orde*”. (Vierde mededeeling).

(Mede aangeboden door den Heer HENDRIK DE VRIES).

Er is bewezen dat  $F^3$  niet kan bestaan, wanneer geen enkele vlakke doorsnede degenereert in drie rechten. We gaan nu aantonen dat  $F^3$  niet kan bestaan, wanneer dat oppervlak niet 3, 7, 15, 27 of oneindig veel rechten bevat.

Het volgende is gesplitst in twee paragrafen; in de eerste worden eenige hulpstellingen bewezen, terwijl in de tweede zal blijken dat er, behalve de genoemde, geen andere aantallen rechten op  $F^3$  mogelijk zijn.

§ 1. *Stelling 1: Bestaat een vlakke doorsnede van  $F^3$  uit drie rechten, welke een driehoek vormen, dan kan door geen der hoekpunten een verdere rechte van  $F^3$  gaan.*

*Bewijs:* Stellen we het vlak voor door  $a$ , de lijnen door  $a_1, a_2, a_3$  en de snijpunten door  $A_1, A_2$  en  $A_3$  ( $A_1$  zij het snijpunt van  $a_2$  en  $a_3$  enz.). Kieszen we op  $a_1$  een willekeurig punt  $B_1$  (verschillend van  $A_2$  of  $A_3$ ).  $B_1$  moet grenspunt zijn zoowel van puntreeksen van  $F^3$  die boven als van puntreeksen die beneden  $a$  liggen. Stel n.l.  $B_1$  was slechts grenspunt van puntreeksen van  $F^3$  beneden  $a$ . Nemen we dan een vlak  $\beta$  door  $B_1$ , dat niet lijn  $a_1$  bevat en niet door  $A_1$  gaat. Laat  $\beta$  lijn  $a_2$  snijden in  $B_2$  en  $a_3$  in  $B_3$ . De snijlijn van  $a$  en  $\beta$  noemen we  $b$  ( $b$  draagt de punten  $B_1, B_2$  en  $B_3$ ). Laten we nu in  $\beta$  een rechte van boven evenwijdig tot  $b$  convergeeren. Het punt  $B_1$  op de limietlijn is volgens het onderstelde geen grenspunt van punten van  $F^3$  op de naderende lijnen en zal dus dubbel tellen als snijpunt van  $b$  met de doorsnede in  $\beta$ . Bovendien draagt  $b$  echter nog de punten  $B_1$  en  $B_2$ : een onmogelijkheid.

Uit het bovenstaande volgt dat in elk segment van een der lijnen  $a_1, a_2$  en  $a_3$ , dat geen der snijpunten bevat, de beide sectoren van  $F^3$  van verschillende zijden van  $a$  samenkomen.

In  $a$  komen in  $A_1$  vier takken samen,  $A_3, A_1$  en  $CA_1$  op  $a_2$  en  $A_2, A_1$  en  $BA_1$  op  $a_3$  (fig. 1). Op grond van het voorgaande, in verband met den eisch dat  $F^3$  een tweedimensionaal continuum is, mogen we besluiten dat elke tak met de twee omliggende samenhangt en wel beurtelings boven en beneden  $a$ . Zij  $A_3, A_1$  beneden

$\alpha$  door I verbonden met  $BA_1$ ,  $BA_1$  boven  $\alpha$  door II met  $CA_1$ ,  $CA_1$

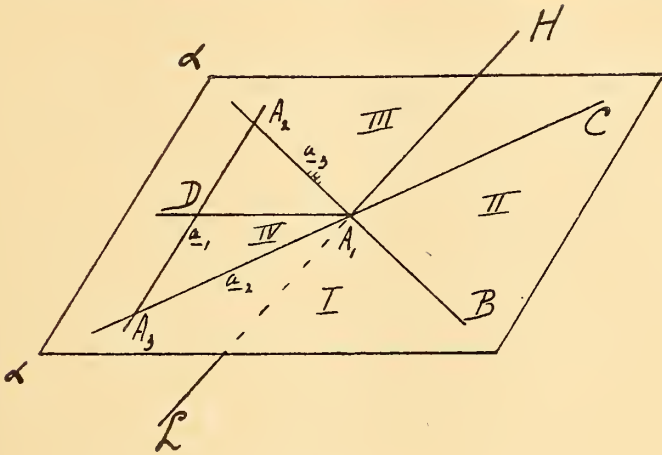


Fig. 1.

beneden  $\alpha$  door III met  $A_2 A_1$  en ten slotte  $A_2 A_1$  boven  $\alpha$  door IV met  $A_3 A_1$ .

Stel nu dat door  $A_1$  nog een derde rechte  $LH$  van  $F^3$  ging, welke natuurlijk in geen geval in  $\alpha$  kan liggen. Laat de halflijn  $A_1 H$  op II en  $A_1 L$  op I vertrekken. Beschouwen we het vlak  $\beta$  door  $A_1 H$  en  $A_1 D$ . Hierin ligt, behalve de lijn  $LH$ , nog een ovaal dat in de eerste plaats door  $D$  gaat, maar ook door  $A_1$  moet gaan, aangezien in  $\beta$  zeker nog een tak vanuit  $A_1$  moet vertrekken op IV. Laten we  $\beta$  een weinig om  $LH$  draaien, dan behoudt het deze eigenschap en door het punt  $A_1$  der rechte  $LH$  zouden dus in oneindig veel vlakken door  $LH$  ovaalen moeten gaan. Dit is echter in strijd met de resultaten der derde mededeeling (pag. 762, laatste alinea vóór stelling 2). De eenige manier om aan een onmiddellijke contradictie te ontkomen, is de aanname dat in elk der vlakken  $\beta$  het ovaal gedegeneerd is. Dit echter zou beteekenen dat  $F^3$  oneindig veel rechten bevat, wat we bij het opsporen der mogelijke eindige aantallen steeds uitsluiten.

*Stelling 2: Bevat  $F^3$  een eindig aantal rechten, dan is dit aantal steeds gelijk aan 3 plus een geheel aantal malen 4. Deze indeeling is zóó te maken dat de lijnen der groep van 3 in één vlak liggen terwijl elke groep van 4 één lijn der eerste groep snijdt. Bovendien valt zulk een groep van 4 uiteen in twee groepen van 2 die elk (met één der eerste 3 dus) in één vlak liggen.*

Alvorens tot het eigenlijke bewijs over te gaan bewijzen we een paar hulpstellingen.

Zij  $a$  een rechte van  $F^3$ . Steeds wordt stilzwijgend ondersteld dat  $F^3$  geen oneindig aantal rechten bevat. In de derde mededeeling

bleek, dat aan elk punt  $A$  van  $a$  een punt  $B$  dezer lijn kan worden toegevoegd met hetzelfde raakvlak. Bewegen  $A$  en  $B$  zich bij draaiing van het raakvlak in tegengestelde richting, dan zijn er twee ontmoetingspunten  $P$  en  $Q$ . Het bleek, dat  $F^8$  niet bestaanbaar is, wanneer in geen enkel raakvlak door  $a$  de restkromme degenerereert. Het zou nu mogelijk zijn, dat de degeneratie juist plaats vindt in het raakvlak van een der ontmoetingspunten b.v. van  $P$ . De restkromme zou dan bestaan uit twee verschillende rechten door  $P$  (ook elk verschillend van  $a$ <sup>1)</sup>), of uit twee samenvallende rechten door  $P$ .

We laten in de eerste plaats zien, dat dit laatste geval niet kan voorkomen. Zij  $a$  het raakvlak in  $P$ . De doorsnede hierin bestaat uit de rechte  $a$  en een dubbeltellende rechte  $b$ . Laten we raakvlakken door  $a$  tot  $a$  convergeeren, dan naderen de toegevoegde raakpunten van weerszijden tot  $P$  en de raakvlakovalen convergeeren tot  $b$ . Hieruit volgt, dat in elk der beide halflijnen waarin  $P$  de lijn  $b$  verdeelt, de sectoren van  $F^8$  van dezelfde zijde van  $a$  samenkomen, maar van verschillende zijden voor verschillende halflijnen.

Beginnen we onze redeneering echter met lijn  $b$ , dan blijkt op dezelfde wijze dat  $P$  op  $b$  eveneens ontmoetingspunt is van toegevoegde raakpunten en de lijn  $a$  speelt de rol die  $b$  zoo juist vervulde. In elk der halflijnen van  $a$  komen de sectoren dus weer van dezelfde zijde van  $a$  samen, maar van verschillende zijden voor verschillende halflijnen. Dit alles samengevat blijkt niet in overeenstemming te brengen met den samenhang der vier takken die in  $a$  van  $P$  uitgaan, daar we te doen hebben met een tweedimensionaal continuüm.

Men zou nog de mogelijkheid kunnen opperen, dat  $b$  in elk vlak dubbel telt. De restkromme zou dan echter steeds uit een rechte bestaan en  $F^8$  zou dus oneindig veel rechten bevatten.

Beschouwen we nu het geval dat de restkromme uit twee verschillende lijnen door  $P$  bestaat. De doorsnede in  $a$  bestaat dan dus uit drie verschillende rechten  $a$ ,  $b$  en  $c$  door  $P$ . Laten de raakvlakken  $a_1, a_2, \dots$  door  $a$  tot  $a$  convergeeren. Dan convergeeren de raakpunten  $P_1, P_2, \dots$  van de eene zijde, en  $P'_1, P'_2, \dots$  van de andere zijde tot  $P$ .

De raakvlakovalen gaan op den duur door het oneindige en worden dan door de oneindig verre lijn gesplitst in twee takken.

<sup>1)</sup> De mogelijkheid dat het restovaal degenerereert in de lijn  $a$  en een tweede van  $a$  verschillende rechte, is vroeger buiten beschouwing gelaten, daar we toen steeds aannamen dat geen tweede rechte van  $F^8$  de lijn  $a$  snijdt. Hier echter moet dit geval onder de oogen worden gezien. Het blijkt dan vrij gemakkelijk, dat, althans bij een oppervlak van de derde orde met een eindig aantal rechten, dit geval zich niet kan voordoen.

Nu bestaan a priori twee mogelijkheden n.l. dat  $P_n$  en  $P'_n$  op den duur tot verschillende takken behooren, die dan hun convexe zijden naar elkaar keeren, of dat  $P_n$  en  $P'_n$  op den duur op denzelfden tak liggen. We laten zien dat deze laatste mogelijkheid uitgesloten is. Daartoe is het karakter in  $a_n$  aangegeven door de gestippelde kromme in fig. 2. Deze krommen hebben tot limietverzameling de lijnen  $b$  en  $c$  in  $a$ . De onderste tak heeft tot limiet uitsluitend de onderste helflijnen van  $b$  en  $c$  dus de bovenste tak moet zorgen voor de bovenste helflijnen. Kiezen we nu door de lijn  $PR$  een vlak, b.v.  $\perp a$ , dan blijkt dat in dit vlak het punt  $P$  snavelkeerpunt moet zijn, wat bij een kromme van de derde orde onmogelijk is.

We gaan nu over tot het eigenlijke bewijs van stelling 2. Laat een vlak  $\alpha$  het oppervlak  $F^3$  snijden in drie lijnen welke een driehoek

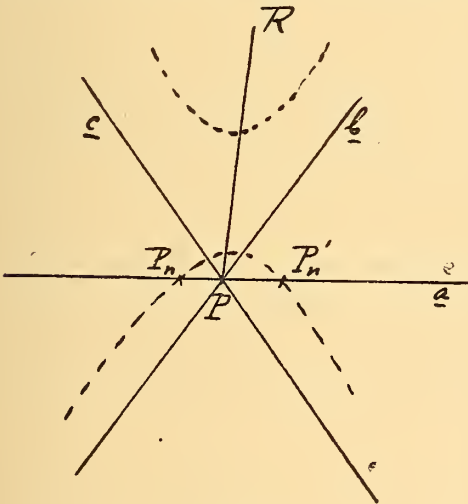


Fig. 2.

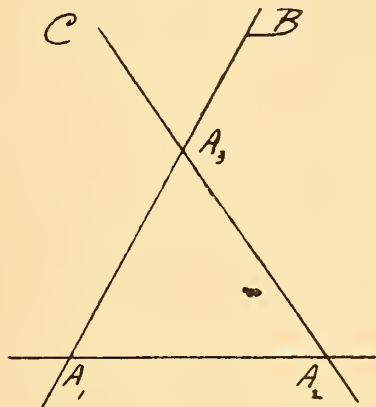


Fig. 3.

$A_1 A_2 A_3$  vormen (fig. 3). In het voorgaande bleek, dat in de buurt van  $A_3$  de samenhang b.v. als volgt is:  $A_3 B$  haugt met  $A_3 A_2$  en  $A_3 A_1$  met  $A_3 C$  boven  $\alpha$  samen en  $A_3 B$  met  $A_3 C$  en  $A_3 A_2$  met  $A_3 A_1$  beneden  $\alpha$ . Convergeert dus een vlak door  $A_1 A_2$  in de omgeving van  $A_3$  van boven tot  $\alpha$ , dan moet het ovaal door de oneindig verre lijn gesplitst zijn in twee takken die respectievelijk tot limiet hebben de helflijnen  $A_3 B + A_3 A_2$  en de helflijnen  $A_3 C + A_3 A_1$ . Convergeert het vlak echter in de omgeving van  $A_3$  van beneden tot  $\alpha$ , dan worden deze limieten  $A_3 B + A_3 C$  en  $A_3 A_2 + A_3 A_1$ .

Op grond hiervan trekken we de volgende conclusie: Draait een vlak om een rechte van  $F^3$  en passeert dit vlak een stand waarin de restkromme degenerceert (in 3 lijnen die niet door één punt gaan),

dan zullen de takken door toegevoegde raakpunten die eerst hun convexe zijden naar elkaar toekeeren, na het passeeren van den genoemden stand hun concave zijden naar elkaar keeren en omgekeerd.

Laat  $F^3$  nu bevatten 3 rechten in één vlak:  $a_1$ ,  $a_2$  en  $a_3$ . Is er nog een vierde  $b_1$ , dan kan deze niet in dit vlak liggen maar moet wel een der drie eerste, b.v.  $a_1$ , snijden.

In het vlak door  $a_1$  en  $b_1$  bestaat de doorsnede dan weer uit 3 rechten, dus weer een nieuwe lijn  $b_2$  moet  $a_1$  snijden. Indertijd concludeerden we dat  $F^3$  niet bestaanbaar is zonder drie lijnen in één vlak te vertoonen, daar anders het verloop van convexiteit en concaviteit der takken door toegevoegde raakpunten op een eerst aanwezige rechte, niet sluitend was te maken. Op grond van het zoo juist bewezene blijkt nu, dat voor de rechte  $a_1$  het verloop, dat door de eerste degeneratie mogelijk was gemaakt, door de tweede weer verstoord is en er is een derde degeneratie noodig om het weer in orde te maken.

Stelling 2 is hiermee aangetoond (we herinneren nog even aan het boven gevonden resultaat, dat degeneratie in 3 rechten door één punt slechts mogelijk is wanneer de takken in de naderende vlakken hun convexe zijden naar elkaar toekeeren).

§ 2. Bevat  $F^3$  meer dan 3 rechten, dan is hun aantal volgens stelling 2 minstens 7, waarvan er zeker 6 eenzelfde rechte snijden. Nu kunnen op deze laatste rechte hoogstens twee ontmoetingspunten van toegevoegde raakpunten voorkomen en hieruit volgt, dat er minstens één vlak is, waarin de doorsnede bestaat uit 3 rechten die een driehoek vormen.

Zij dit vlak  $\alpha$ , de rechten  $a$ ,  $b$  en  $c$  en hun snijpunten  $A$ ,  $B$  en  $C$  ( $A$  stelt het snijpunt voor van  $b$  en  $c$  enz.). Bevat  $F^3$  7 rechten, dan wordt een der rechten in  $\alpha$ , b.v.  $a$  nog door 4 andere gesneden. Er zal nu worden bewezen, dat indien het aantal rechten grooter is dan 7, het minstens 15 is.

Bevat  $F^3$  meer dan 7 rechten, dan worden of minstens twee der rechten in  $\alpha$  elk door nog 4 niet in  $\alpha$  gelegen rechten gesneden, of één van hen heeft nog minstens 8 niet in  $\alpha$  gelegen snijlijnen. Beschouwen we de eerste mogelijkheid:  $a$  en  $b$  hebben elk nog minstens 4 tot  $F^3$  behorende en niet in  $\alpha$  gelegen snijlijnen, m.a.w. door elk dezer beide lijnen gaan minstens 2 van  $\alpha$  verschillende vlakken, waarin het ovaal gedegeneerd is.

Zij  $a_1$  een niet in  $\alpha$  gelegen snijlijn van  $a$  en  $A_1$  het snijpunt van  $a_1$  en  $a$ . Volgens stelling 1 kan  $A_1$  niet met  $B$  of  $C$  samenvallen. Zij  $\beta$  een vlak door  $b$  waarin het ovaal gedegeneerd



is. De lijn  $a_1$  snijdt dit vlak in een niet in  $\alpha$  gelegen punt. Dit punt moet liggen op een der beide lijnen waarin het ovaal in  $\beta$  is gedegenereerd. Deze lijn  $b_1$  snijdt  $b$  in een punt  $B_1$  dat weer verschillend is van  $A$  en  $C$ . Beschouwen we nu het vlak door  $a_1$  en  $b_1$ . De doorsnede hierin bevat  $a_1$  en  $b_1$  en bestaat dus uit 3 rechten welke geen van alle in  $\alpha$  kunnen liggen daar de lijn  $A_1 B_1$  met geen der rechten in  $\alpha$  samenvalt. Het vlak door  $a_1$  en  $b_1$  heeft echter ook een punt gemeen met lijn  $c$  waaruit volgt dat ook  $c$  één (en dus minstens 4) niet in  $\alpha$  gelegen snijlijn heeft. Elk der 3 lijnen in  $\alpha$  wordt dus nog door minstens 4, niet in  $\alpha$  gelegen, rechten gesneden en het totale aantal is dus minstens 15.

Tot het tweede geval komende onderstellen we dat rechte  $a$  nog minstens 8, niet in  $\alpha$  gelegen, snijlijnen heeft, m.a.w. in minstens 4 van  $\alpha$  verschillende vlakken door  $a$  degenereert het ovaal. Kiezen we hieruit 3 elkaar kruisende snijlijnen  $a_1, a_2$  en  $a_3$  van  $a$ . Deze bepalen een tweedegraads regelschaar. Deze regelschaar heeft minstens met één der beide rechten  $b$  en  $c$  twee verschillende punten gemeen, aangezien het vlak  $\alpha$  niet raakvlak kan zijn zoowel in  $B$  als in  $C$ . De regelschaar heeft dus b.v. met  $b$  een punt  $B_1$  gemeen, verschillend van  $C$ . Dit beteekent echter dat door  $B_1$  een transversaal gaat van de 3 rechten  $a_1, a_2$  en  $a_3$  en daar  $B_1$  zelf ook tot  $F^3$  behoort, ligt deze transversaal geheel op  $F^3$ . De lijn  $b$  heeft dus minstens één (en dus minstens 4) niet in  $\alpha$  gelegen snijlijn. De redeneering gebruikt voor de eerste mogelijkheid laat dan verder zien dat er ook door  $c$  nog minstens 4 rechten gaan die tot  $F^3$  behooren en niet in  $\alpha$  liggen. Het totale aantal is dus reeds minstens 19.

Er zal nu worden bewezen, dat indien het aantal rechten grooter is dan 15, het minstens 27 is. Zijn er meer dan 15 dan moeten er, op grond van het voorgaande, door een der rechten van  $a$ , b.v.  $a$  minstens 8, en door elk der beide andere minstens 4, tot  $F^3$  behorende en niet in  $\alpha$  gelegen, rechten gaan.

We kiezen een niet in  $\alpha$  gelegen snijlijn  $b_1$  van  $b$ . Zij  $b_1'$  de derde rechte van de doorsnede in het vlak door  $b$  en  $b_1$ . De lijn  $b_1$  snijdt 4 elkaar kruisende snijlijnen van  $a$ . Door  $b_1$  en elk dezer 4 brengen we een vlak. Deze vlakken snijden  $a$  volgens verschillende lijnen door het snijpunt van  $b$  en  $b_1$  en snijden lijn  $c$  dus in verschillende punten. Door elk dezer 4 punten van  $c$  gaat een rechte van  $F^3$  die niet in  $\alpha$  ligt. De lijn  $b_1'$  snijdt eveneens 4 kruisende transversalen van  $a$  en op dezelfde wijze krijgen we weer 4 punten van  $c$  waardoor rechten van  $F^3$  gaan. Nu kan geen dezer laatste 4 punten met een der eerste 4 samenvallen, want in dat geval zou een rechte van  $F^3$  moeten gaan door dat punt en door

het snijpunt van  $b_1$  en  $b'_1$ , wat volgens stelling 1 onmogelijk is.

De lijn  $c$  heeft dus minstens 8 niet in  $a$  gelegen snijlijnen en hetzelfde kan voor  $b$  worden aangetoond. Derhalve bevat  $F^3$  in totaal minstens 27 rechten.

Er blijft nog over te bewijzen dat het aantal rechten op  $F^3$ , oneindig groot is, indien er meer dan 27 zijn.

*Hulpstelling: 4 kruisende rechten op  $F^3$  welke een transversaal hebben, hebben steeds twee verschillende transversalen.*

Laten de rechten zijn  $a_1, a_2, a_3$  en  $a_4$  en zij  $a$  een eerste transversaal, die natuurlijk eveneens tot  $F^3$  behoort. De derde rechten in de vlakken door  $a$  en elk der eerste vier noemen we respectievelijk  $a'_1, a'_2, a'_3$  en  $a'_4$ .

De restkromme moet nog in een vijfde vlak  $a$  door  $a$  degenerereeren. De rechten hierin noemen we  $b$  en  $c$ . Op grond van het voorgaande heeft elk der beide rechten  $b$  en  $c$  nog minstens 8, niet in  $a$  gelegen, snijlijnen. <sup>1)</sup> Vatten we deze 16 rechten in het oog:  $p_1, p_2, \dots, p_{16}$ . Elk dezer lijnen snijdt 4 kruisende van het stel:  $a_1, a_2, a_3, a_4, a'_1, a'_2, a'_3, a'_4$ .

Het is niet mogelijk dat 2 der lijnen  $p$  b.v.  $p_n$  en  $p_m$  dezelfde 4 lijnen  $a_n$  snijden, want deze 4 zouden dan 3 verschillende transversalen hebben ( $p_n, p_m$  en  $a$ ) en dus oneindig veel, m. a. w.  $F^3$  zou oneindig veel rechten bevatten.

Uit de lijnen  $a_1 \dots a_4, a'_1 \dots a'_4$  kan men op 16 wijzen 4 kruisende lijnen halen (ze liggen 2 aan 2 in één vlak) en daar er 16 lijnen  $p$  zijn heeft elke groep van 4 kruisende rechten  $a_n$  een tweede van  $a$  verschillende transversaal. Dit geldt dus ook voor het stel  $a_1, a_2, a_3, a_4$  wat we wenschten aan te toonen.

Nu we over deze hulpstelling naast stelling 1 van § 1 beschikken, kan het betoog van JUEL dat  $F^3$ , indien meer dan 27 oneindig veel rechten bevat, zonder meer worden overgenomen (Math. Ann. 76, p. 561 en 562).

Het onderzoek van de aantallen rechten welke noodig zijn om  $F^3$  bestaanbaar te maken is hiermee afgelopen.

We besluiten met een eenigszins op zichzelf staand resultaat, dat toevalligerwijze voor den dag kwam.

*$F^3$  zou slechts dan 7 (en niet meer) rechten kunnen bevatten wanneer op de gemeenschappelijke transversaal (die hier steeds bestaat), de bewegingsrichtingen van toegevoegde raakpunten tegengesteld zijn.*

<sup>1)</sup> Men kan aanvoeren dat het snijpunt van  $b$  en  $c$  op  $a$  zou kunnen vallen. Aan dit bezwaar is echter als volgt tegemoet te komen: Men kiest twee lijnen  $a_n$  en  $a'_n$  die met  $a$  een driehoek vormen. De voorgaande resultaten laten dan zien dat  $a_n$  en  $a'_n$  elk nog 8 snijlijnen hebben. Deze 16 rechten, die alle  $a$  kruisen, kunnen dan dienst doen als de, in den tekst ingevoerde, rechten  $p_1, p_2 \dots p_{16}$ .

*Bewijs:* Laat de doorsnede in een vlak  $\alpha$  bestaan uit de rechten  $a$ ,  $b$  en  $c$ , die een driehoek  $ABC$  vormen (fig. 4). Stel nu door  $a$  gaan nog 4, niet in  $\alpha$  gelegen, rechten van  $F^3$  en laten op  $a$  de toegevoegde raakpunten in dezelfde richting bewegen. Stel  $e$  en  $d$  zijn twee der lijnen die  $a$  snijden en in hetzelfde vlak liggen. Hun snijpunten met  $a$  noemen we  $E$  en  $D$ . Omdat toegevoegde raakpunten

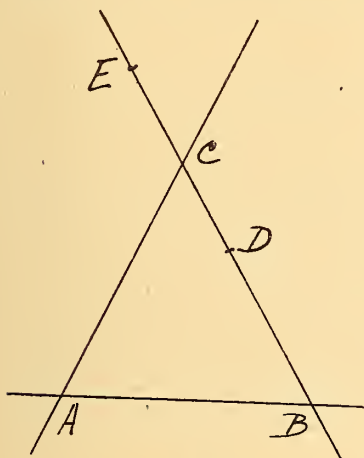


Fig. 4.

op  $a$  dezelfde bewegingsrichting hebben, zijn  $BC$  en  $DE$  scheidende puntenparen.

Laat het snijpunt  $P$  van  $e$  en  $d$  boven vlak  $\alpha$  liggen (het geval dat  $P$  in het oneindige ligt laten we even buiten beschouwing). We wentelen vlak  $\alpha$  nu om  $AB$  zoodanig, dat de helft welke de driehoek bevat naar boven gaat. De rechten  $a$  en  $b$  gaan dan over in een ovaal, dat aanvankelijk door de oneindig verre rechte in twee takken wordt gesplitst.

De snijpunten der rechten  $e$  en  $d$  met dit wentelende vlak liggen aanvankelijk op verschillende takken van het ovaal.

In het snijpunt  $P$  komen zij echter samen, dus moeten de punten vóór, of in, dezen stand van het vlak weer op één tak zijn overgegaan. Dit nu is alleen mogelijk óf wanneer een der takken zich naar het oneindige heeft teruggetrokken (wat hier is uitgesloten daar steeds een der lijnsegmenten  $EP$  of  $DP$  moet worden gesneden), óf via een degeneratie.

Dit geval kan zich dus niet voordoen tenzij de lijnen  $b$  en  $c$  ook weer door nieuwe lijnen van  $F^3$  worden gesneden. Het is ook niet noodig andere redeneeringen te houden voor het geval  $P$  in het oneindige ligt en het geval dat  $C$  en  $E$  (fig. 4) door het oneindig verre punt der lijn worden gescheiden, daar alles bestand is tegen projectieve transformatie.

Door een redeneering welke groote analogie vertoont met bovenstaande kan nog worden bewezen de stelling: *Het geval van 3 rechten op  $F^3$  kan zich niet voordoen, wanneer op elk dezer 3 rechten toegevoegde raakpunten tegengestelde bewegingsrichting hebben.*

#### ERRATA.

In de derde mededeeling over dit onderwerp, Verslagen XXVI.

Pag. 758, r. 6 v. b. staat: rechte van  $h^3$  ontmoeten; lees: rechte van  $F^3$  door  $A$  ontmoeten.

Pag. 758, voetnoot r. 1 staat: hoofdstelling; lees: hulpstelling.

**Physiologie.** — De Heer BOEKE biedt eene mededeeling aan van den Heer G. C. HERINGA over: „*Het sensibele periphere Zenuwstelsel*”.

(Mede aangeboden door den Heer WINKLER).

Wanneer men tracht een overzicht te krijgen van den stand van onze kennis over het periphere sensibele zenuwstelsel, dan is het resultaat van een tijdroovend zoeken in de literatuur, over een wanhopig groot aantal tijdschriften verdeeld, dat men sterk den indruk krijgt, dat een bepaalde richting daarin duidelijk begint te overheerschen. Verscholen achter een menigte controversen van meer of minder gewicht, zijn er een aantal feiten te vinden, die zonder aanzien des persoons naast elkaar gezet, per slot een aardig geheel blijken te vormen.

In de neurologische kliniek is de neuronentheorie nog haast onbepaald heer en meester, maar in de neurologisch-anatomische literatuur is het zeker heel anders gesteld. Daar dringen, door geen neuronentheorie te stuiten, de waarnemingen voor den dag, die wijzen op een zeer uitgebreiden netvormigen samenhang van sensibele zenuwen aan de peripherie. Door APATHY voor avertebraten wel haast onaangevochten op den voorgrond gesteld, wordt het meer en meer duidelijk dat ook bij de vertebraten, dicht onder het lichaamsoppervlak, een rafijn echt zenuwnet bestaat van anastomoseerende zenuwvezels.

Het is vooral aan de school van RUFFINI, die hier op zijn theorie van de „*circuito chiuso delle neurofibrille*”, bouwde, dat we vele gegevens over het rete amielinica subpapillare, te danken hebben. Volgens beschrijvingen van RUFFINI zelf vereenigen zich daarin vezels van een viervoudige oorsprong.

- 1°. eindtakken van gewone merghondende vezels;
- 2°. ultraterminalen van eindorganen;
- 3°. sympathische vezels en
- 4°. ultraterminalen van vezels behoorende tot het TIMOFEEW systeem.

Zoo zeer komen van allerlei zijden (BOTEZAT, LEONTOWITCH, PRENTISS, SFAMENI, DOGIEL), opgaven die in dezelfde richting wijzen, dat wij, wat de hoofdtrekken betreft, aan de juistheid daarvan wel niet meer kunnen twijfelen, ook al loopen meer in bijzonderheden over de

componenten van het net, de meeningen nog uiteen, en al moge men skeptisch blijven tegenover alle consequenties van RUFFINI's „teoria unitaria.”

Belangrijk lijken mij nu een paar nieuwe mededeelingen uit de Italiaansche school. De eerste is van SHEPHANELLI<sup>1)</sup>. Deze beschrijft hoe hij in de huid van reptiliën een uitgebreid zenuwnet heeft gevonden. Dit net, uit merglooze vezels opgebouwd, is wel te onderscheiden van den reeds lang bekenden subepithelialeu *plexus*, die dieper ligt, waarin alleen doorvlechting van zenuwvezels, grootendeels nog merghoudend, plaats heeft, en ten opzichte waarvan hij de relaties van het myelinlooze net nauwkeurig aangeeft. In dit laatste, dat zich dus als een echt zenuwnet diffuus in de huid uitbreidt, ziet hij, naast de spaarzaam voorkomende andere eindigingen, een „organo di senso in stato diffuso”, een opvatting die aan waarschijnlijkheid wint, doordat het net direct samenhangt met een intrapapillaire uitbreiding van dezelfde aard.

Hierin nu ligt de trait-d'union naar de andere van de beide publicatie van de beide, waarop ik doelde, die van VITALI<sup>2)</sup>. Deze onderzoekt, eveneens met de goudchloride methode van RUFFINI de huid van het nagelbed. Zijne resultaten sluiten volkomen aan bij die van RUFFINI e.a. over dergelijke onderwerpen. Achtereenvolgens beschrijft hij de aanwezigheid van de vele vrije eindigingen, die haast alleen met hun melodieuze Italiaansche namen te onderscheiden zijn, gomitoli, alberelli, espansioni ad anse avviticiati, fiocchetti papillari, grappoli en ook de lich. van RUFFINI, die van MEISSNER en van VATER-PACINI. En waar het nu ten slotte op aankomt is, dat hij den nadruk legt op het voorkomen van anastomosen tusschen de eindigingen onderling en hun gezamenlijken samenhang met het rete amienlinica subpapillare, daarmede dan nog eens onderstrepend de beteekenis, die RUFFINI sedert lang aan de ultraterninalen heeft toegékend en neergelegd in zijn bovengenoemde teoria unitaria. VITALI komt dan tot de conclusie, dat al die eindigingen samen met het rete subpapillare een samenhangend myelinloos net vormen en volgen wij nog een oogenblik verder de Italiaansche school en hare voorstellingen, dan komt vanzelf dat groote samenhangende geheel op één lijn te staan met het diffuse net van SHEPHANELLI. Dan zijn de eindorganen der

<sup>1)</sup> AUGUSTO SHEPHANELLI, Nuovo contributo alla cognoscenza della espansioni sensitivi dei Rettili e considerazioni sulla tessitura del sistema nervoso periferico Intern. Monatschrift. f. Anat. u. Phys. XXXII 1916. — Sui dispositivi microscopici della sensibilita cutanea a nella mucosa orale dei Rettili. ibid. XXXII 1916.

<sup>2)</sup> G. VITALI. Contributo allo studio istologico dell unghia. Le espansioni nervose del derma sotto ungueale dell' uomo. ibid. XXXII 1915.

hogere vertebraten in al hun verscheidenheid spoedig herkend als differentiatiepunten, te midden van een minder ontwikkeld milieu. „E che cos'altra sono”, vraagt Simonelli rhetorisch „quello che noi denomigniano espansioni, se non il condensarsi in punti limitati di un simile reticolo diffuso periferico: in altri termini se non punti nodosi a maglie piu serrati di una rete generale, che intimamente involge e compenetra i tessuti, per meglio localizzare e precusare gli stimoli periferici?”

Zoo moet volgens deze opvatting langs de talrijke soorten van vrije eindigingen een heele onafgebroken reeks van overgangen te vervolgen zijn van het rete amielinica aan de eene zijde, tot de tastlichaampjes ingevoegd in een rete intrapapillare aan den anderen kant.

Het zou nu misschien voorbarig wezen deze overigens vruchtbare hypothese reeds geheel bewezen te achten, zeker is het evenzeer waar, dat, voor wie in de literatuur speuren wil, verschillende teekenen ook van andere zijde onmiskenbaar in deze richting wijzen. Het is duidelijk genoeg, dat de grenzen, die de verschillende vormen van eindorganen, in onderscheiden groepen ondergebracht, tegen elkaar afgrenzen, geenszins absoluut zijn. De pogingen om een phylogenetischen stamboom te geven van de verschillende eindorganen, waarbij de meer samengestelden tot eenvoudige grondvormen worden herleid, zijn bijkans even oud als de studie der eindorganen zelf. (MERKEL, KRAUSE e.a.). En zeker is het dat hoe meer vormen het moderne onderzoek aan den dag brengt, des te meer de grenzen tusschen de verschillende groepen vervagen.

Direct is dat al de indruk, die zich opdringt aan den beschouwer van de illustraties aan de verschillende verhandelingen toegevoegd (zie b.v. CECCHERELLI<sup>1)</sup> v. D. VELDE<sup>2)</sup>). De voornaamste moderne auteurs (BOTEZAT DOGIEL, SFAMENI, en volgelingen van RUFFINI) beïjveren zich overgangen tusschen de verschillende eindigingsvormen aan te toonen. DOGIEL<sup>3)</sup> zegt in zijn artikel over de zenuweindigingen in de nitwendige genitaliën: „Wenn wir die Beschreibung der Nervenendigungen in den verschiedenen Nervenapparaten, den Genitalkörperchen, den Endkolben und den Meissnerschen Körperchen, welche in der Haut der äusseren Genitalorgane gelegen sind, vergleichen, und zugleich die beigegebenen Zeichnungen betrachten, so müssen wir zu dem Schlus kommen, dasz zwischen ihnen kein wesentlicher Unterschied besteht”.

<sup>1)</sup> Intern. Monatschr. XXV 1908.

<sup>2)</sup> Intern. Mon. XXVI 1909.

<sup>3)</sup> Arch. Micr. Anat. XXI.

SFAMENI<sup>1)</sup> beschrijft evenzeer de verwantschap van de genitaallichaampjes eenerzijds met de kolven van KRAUSE, de lichaampjes van GOLGI-MAZZONI en de lichaampjes van VATER-PACINI, anderzijds met de lichaampjes van RUFFINI.

BOTEZAT<sup>2)</sup> wijdt een groot samenvattend artikel aan het systeem en de onderlinge verwantschap van de zenuweindorganen.

Maar belangrijker dan dit alles en bepaaldelijk wijzend in de richting van de school van RUFFINI schijnt mij te zijn, dat ook de afscheiding van de lichaampjes tegenover de „vrije” eindigingen hoe langer hoe meer begint te vervagen. Hier is het eenige differentiaal diagnosticum gegeven in het al of niet aanwezig zijn van een kapsel. Dezelfde characteristic van zenuwverloop en „steunapparaat”, „tastcellen” of hoe men de cellen van de eindigingen anders noemen wil, komen beide groepen van eindorganen gelijkelijk toe. Dat is allerwege uit de afbeeldingen en beschrijvingen af te lezen. BOTEZAT wijst daar uitdrukkelijk op, en voegt er bij, dat het optreden van een kapsel om een zenuweindiging noch functioneel, noch morphologisch daarvoor een zaak van principieele beteekenis is. Integendeel vindt BOTEZAT veelal naast een onkapselde eindiging, haar gelijke of dubbelgangster van een kapsel verstoken. Zoo staan de vrije „Knäuel” naast „ingekapselde Knäuel” en kolven van KRAUSE; naast MERKEL-cellen, lichaampjes van GRANDRY en MEISSNER, enz.. En ten overvloede signaleert BOTEZAT tusschen de vrije en ingekapselde eindigingen allerhande geleidelijke overgangen.

Bij andere auteurs vinden we weer hetzelfde terug. De lichaampjes van RUFFINI zijn volgens VITALI<sup>3)</sup> niet anders dan omkapselde „alberelli”.

DOGIEL<sup>4)</sup> heeft het eveneens over kapsellooze lichaampjes van RUFFINI. Naar SFAMENI<sup>5)</sup> meldt, komen van dezelfde genitaallichaampjes, die zooals wij zagen aan allerlei andere tastlichaampjes verwant zijn, ook ongekapselde variëteiten voor. De lichaampjes van MEISSNER schijnen buitengewoon rijk te zijn aan eenvoudige modificaties.

SFAMENI beschrijft tusschenvormen tusschen lichaampjes van MEISSNER en „fiochetti papillari”, vrije eindigingen dus. DOGIEL's gewijzigde lichaampjes van MEISSNER (lichaampjes van DOGIEL volgens de terminologie van RUFFINI) zijn aan huu bovenpool kapselloos en laten

<sup>1)</sup> Arch. di fisiol. I 1904.

<sup>2)</sup> Zeitsch. Wiss. Zool. LXXXIV. 1906,

<sup>3)</sup> Int. Mon. XXXI. 1915.

<sup>4)</sup> Arch. f. Micr. Anat 1903.

<sup>5)</sup> l.c.

de ascylinders ontwijken tot het vormen van vrije eindigingen. Zij vormen voorbeelden van de „*espansioni misti*” van RUFFINI. Weer andere vormen van MEISSNER-lichaampjes (DOGIEL, v. D. VELDE) onderscheiden zich door over het geheel zwak ontwikkeld zijn van de kapsel en vereenvoudigd zenuwverloop. DOGIEL's „*eingekapselte Knäuel*”, door hem in 1903 als modificaties van MEISSNER lichaampjes beschreven, moeten, indien al niet identiek daarmee, dan wel nauw aan de vrije eindigingen verwant zijn. (Zie boven). De MEISSNER lichaampjes schijnen dus wel meer nog dan vele andere vormen tot vrije zenuweindigingen in nauwe relatie te staan. Gaan wij dan nu de gegevens over den kapsel van deze lichaampjes nog eens afzonderlijk na, dan vinden we dat LANGERHANS<sup>1)</sup> het bestaan van een kapsel absoluut ontkent. Hij zegt: „*Es besitzt der Zellhaufen*<sup>2)</sup> den man Tastkörper nennt, nicht einmal eine eigene umschliessende Membran. Ueberal stossen die peripheren Zellen direct an das umgebende Bindegewebe, und nur nach längerer Einwirkung eines Reagenzes kann es vorkommen, dasz das starre Aussehen der Bindegewebsschichten eine eigene Membran vortäuscht”. Ook ROUGET, TAFANI, IZQUIERDO, HOGGAN, LEONTOWITCH ontkennen het voorkomen van een kapsel geheel en al. MEISSNER, RENAUT, KRAUSE, WOLFF, KOLLMAN en LEFEBURE beschrijven haar als een enkele endotheliale membraan. LEFEBURE<sup>3)</sup>: *une simple lame conjoncture doublée sur un face profonde par un feuillet endothelial*. Of de op het oogenblik door DOGIEL, RUFFINI, vroeger door THOMSA en KOLLIKER verdedigde opvatting, volgens welke de lichaampjes een echte lamellenkapsel bezitten, de juiste is, schijnt dus op zijn minst onzeker. Juist de vele overgangen tusschen de lichaampjes van MEISSNER en de vrije eindigingen maken a priori de meening van LANGERHANS, die ook overigens de organen in kwestie blijkbaar goed heeft geobserveerd, zeker waarschijnlijker, en begrijpelijk het standpunt van BOTEZAT, die de MEISSNER-lichaampjes direct naast de samengestelde (kapsellooze) lichaampjes van MERKEL plaatst. Op grond van mijn eigen onderzoek moet ik, zooals nog nader blijken zal, mij aan LANGERHANS' zijde scharen.

Ten slotte geven wij nu nog even onze aandacht aan de vraag over den gemeenschappelijken samenhang van de vrije eindigingen en gevoelslichaampjes met het subpapillaire net.

Beperken we ons tot het noemen van nieuwere auteurs dan zijn

<sup>1)</sup> Arch. f. Micr. Anat. IX 1873.

<sup>2)</sup> Ik cursiveer.

<sup>3)</sup> Revue gen. d'histol. 1909.



BETHE, PRETISS, BOTEZAT, LEONTOWITCH, SFAMENI en DOGIEL<sup>1)</sup> te noemen, die allen het subepitheliale netwerk en zijn verbindingen met zenuweindorganen min of meer uitvoerig bespreken.

BOTEZAT staat in zoover apart dat hij het net beschouwt als een op zichzelf staanden eindigingsvorm, maar deelt overigens eigenlijk al geheel het standpunt van de Italiaansche school, dat ons uitgangspunt was, als hij van bepaalde vrije eindigingen zegt, dat ze door anastomosen een algemeen verbreid eindapparaat vormen „welcher in der Form eines im allgemeinen weitmaschigen varikösen Netzes von weithin ausgebreiter Ausdehnung erscheint” en zich tot in de papillen voortzet. Hij acht het identisch met het subpapillair myelinloos net van SFAMENI en CECCHERELLI en ziet het aan voor een „für sich bestehender sensibeler Apparat der Lederhaut”. Hij vindt het terug bij visschen en amphibiën, en zoo is er geen twijfel mogelijk, of hij spreekt inderdaad over hetzelfde net, waaraan STEPHANELLI's publicatie is gewijd. Het eenige verschil, dat mij onvoldoende gefundeerd schijnt, zou daarin liggen dat BOTEZAT alleen vezels van de z.g. 2<sup>de</sup> soort<sup>2)</sup> daaraan laat deelnemen.

DOGIEL, op het gebied der eindorganen autoriteit, stemt met RUFFINI in, dat zijtakken van de vrije papillaire eindigingen in de vorming van het rete amiclinica opgaan: „Wie aus dem mitgetheilten hervorgeht, so hat das aus Marklosen Aestchen und Fäden zusammengesetzte subpapillaire Nervengeflecht, die uneingekapselte Nervenknäuel sowie die Schleifenförmig gebogene Bündel und das intrapapillaire Fädennetz einen und denselben Ursprung”. Ook de Timofeew-vezels van de MEISSNER-lichaampjes, die DOGIEL tot het gewone sensibele systeem rekent, doen volgens hem door hun ultraterminalen aan de vorming van het intrapapillaire zenuwcomplex mee.

SFAMENI, ofschoon overigens volstrekt geen unitarist geeft van den subepitheliale plexus en zijn samenhang met tastlichaampjes en vrije eindigingen een beschrijving, die bevredigend met die van RUFFINI overeenkomt.

Ook de publicaties van PRETISS en LEONTOWITCH, die van den

<sup>1)</sup> BETHE. Allgemeine Anat. und Phys. des Nervensystems. Leipzig 1903

PRETISS. Journ. of Comp. neur. XIV 1904.

BOTEZAT l.c.

LEONTOWITCH Int. Mon. XVIII 1901.

SFAMENI, DOGIEL l.c.

<sup>2)</sup> Oorspronkelijk merghoudende vezels die reeds in de zenuwstammen hun merg verliezen. Het schijnt twijfelachtig of de handhaving van deze vezels als afzonderlijke groep, gerechtigd is.

eersten betrekking hebbend op Rana, die van de laatste, voor de huid van homo, zijn in hun voornaamste strekking daarmee niet in tegenspraak.

Zeker, het gaat niet aan, de oogen te sluiten voor de vele verschillen, die de diverse auteurs nog van elkaar scheiden, verschillen in theoretische opvatting, in appreciatie en interpretatie hunner beelden. Tegenover DOGIEL, die nog meent, dat het bij het net alleen om doorvlechting van vezels gaat, staan eenparig BOTEZAT, BETHE, RUFFINI, LEONTOWITCH, SFAMENI met hun overtuiging van versmelting der vezels. PRENTISS twijfelt. Zeker is ook wel, dat sensibele vezels het net opbouwen. Alleen over de vraag of ook sympatische elementen er in opgaan zijn de debatten nog niet gesloten. Deels hangt dit ook al samen met den dubieusen aard van de Timofeew vezels. En ten slotte, moge er over de herkomst van de sensible vezels nog eenige onzekerheid bestaan, ook hier wordt steeds meer overeenstemming verkregen. Voor BOTEZAT is zooals we zagen nog het heele net door vrij eindigende, anastomoseerende vezels opgebouwd. Ook DOGIEL schrijft aan dergelijke vezels het leeuvenaandeel toe, evenwel laat hij ook ultraterminalen van het Timofeew systeem van de tastlichaampjes zich ermede vereenigen. SFAMENI ziet *bovendien* samenhang met de genitaallichaampjes. LEONTOWITCH, BETHE en PRENTISS achten evenzeer het netwerk zoowel met vrije eindigingen als met lichaampjes direct in verband. Al deze auteurs, hoever zij ook in theoretisch opzicht afstaan van RUFFINI'S neurogenetische ideeën, zij hebben te samen een aantal feiten bijeengebracht, die bevredigend kloppen met die welke door de Italiaansche school met zooveel nadruk naar voren zijn gebracht.

Kortweg gezegd is er in de literatuur een duidelijke drang om te komen tot de erkenning van een algemeene eenheid en samenhang in het periphere sensibele zenuwstelsel.

Het zijn deze feiten uit de literatuur gepnt, die mij dieper perspectief schijnen te geven aan, en zelf wederkeerig meer naar voren schijnen te komen door eenige waarnemingen, die ik zelve den laatsten tijd met de Bielschowsky methode op het gebied der sensibele zenuweindigingen deed.

De Bielschowsky methode is uit den aard der zaak er op aangewezen de quaesties van een andere zijde tot den onderzoeker te brengen dan de methyleenblauw- en de gondchloride methode. Zij geeft niet die overzichtelijke beelden, die met betrekkelijk zwakke vergrootingen uit relatief dikke coupes onderzocht, zoo'n mooi overzicht van de verhoudingen bieden. Háár kracht ligt daarin dat zij, vooral in met haem. eosine nagekleurde preparaten met de sterkste

vergrooting bekeken, de verhoudingen van de fibrillen tot hun omgeving met nauwkeurigheid aan den dag brengt.

Zoo kwam ik langs geheel anderen weg tot conclusies die naar ik hoop, ook van hun kant zullen helpen een brug te slaan tusschen vrije eindigingen aan den eene, lich. van MEISSNER aan den anderen kant.

In een voordracht op het laatste Nat. en Geneesk. Congres te Den Haag (1917), (zie ook: meded. K. A. W. 27 April, 1917), maakte ik melding van eenige tot dusver onbekende morphologische data, betreffende den bouw van den ascylander. Ik heb toen beschreven, hoe, als men een gewone zenuwvezel van centraal naar perifeer vervolgt, men successievelijk op dwarsdoorsnede de volgende veranderingen in den bouw kan constateeren. Oorspronkelijk ligt binnen de mergscheede het axoplasma dat (op dw. doorsnede) vacuolair gebouwd blijkt te zijn en in de protoplasmatische tusschenschotten tusschen de vacuolen de neurofibrillen herbergt. Buiten de mergscheede ligt, zooals bekend, de protoplasmatische scheede van SCHWANN met haar kern. Verder perifeerwaarts splitst zich de mergscheede in meerdere buizen. De steeds vacuolaire axoplasma-substantie met haar fibrillen verdeelt zich over de dochter mergscheeden. Samen blijven deze ingebed in één protoplasma massa welke niet anders dan als voortzetting der SCHWANN-scheede kan worden geïnterpreteerd. Nog verder naar het einde der zenuwbaan, verdwijnen de mergscheeden uit de doorsnede, en liggen dus de neurofibrillen vrij in het protoplasmatische milieu, dat, nu evenzeer vacuolair gebouwd als de oorspronkelijke ascylander, gelijk moet gesteld worden aan scheede van SCHWANN met axoplasma samengesmolten. Steeds ijler en wijdmaziger worden deze vormingen in de coupe aange troffen, al naar men het einde van de zenuw nadert. Het is waarschijnlijk dat zij in laatste instantie overgaan in of samenhangen met de bindweefselplasmodermen, waarin wij de neurofibrillen op het laatst van hun verloop aantreffen <sup>1)</sup>.

Oorspronkelijk nu meende ik, dat de beschreven vacuolaire oplossing van den ascylander karakteristiek was voor de z.g. vrij eindigende zenuwen, omdat ik in de lichaampjes van MEISSNER de merghoudende zenuwen ongewijzigd zag binnen dringen.

Ik kan nu een stap verder gaan en op grond van een nauwkeurig onderzoek van de lichaampjes van MEISSNER de bewering handhaven, dat de ascylanders binnen deze lichaampjes precies dezelfde

<sup>1)</sup> Verg. J. BOEKE. Studien zur Nervenregeneration I, Verh. Kon. Ak. v. Wet. A'dam 2e Sectie Deel, XVIII n<sup>o</sup>. 6.

desintegratie verschijnselen doormaken, die ik voor de z.g. vrij eindigende zenuwen de vorige maal heb beschreven, en die ik zoo juist als vaculaire oplossing aanduidde.

Wordt tegenwoordig veelal aangegeven, dat de ascylander zijn mergscheede verliest vóór zijn intrede in de lichaampjes, mij scharend aan de zijde van ENGELMANN<sup>1)</sup>, LANGERHANS, FISCHER<sup>2)</sup>, KEY—RETZIUS<sup>3)</sup> en LEFEBURE<sup>4)</sup> kon ik aan met Osmiumzuur behandelde praeparaten met zekerheid vaststellen, dat de mergscheede evenals de Schwannscheede op het intracorpussculair verloop van de zenuwen mee overgaat. En dat niet alleen, maar ook, dat die mergscheeden zich splitsten binnen de Schwannscheede precies als boven aangegeven, was duidelijk uit mijn praeparaten af te lezen.

Met LEFEBURE acht ik het waarschijnlijk, dat het in onbruik raken van de Osmium-methode ten bate van de moderne fibrilleuringsmethoden, schuld is aan de fontieve opvattingen, die over het al of niet voorkomen van mergscheeden, in de neurologische literatuur zijn ingeslopen.

Wat de Schwannscheede betreft, het spreekt nu wel van zelf, dat ik bestrijden moet, dat de Schwannscheede (die ik immers niet als aparte scheede van de lemnoblastenbaan scheiden kan) in de vorming van de kapsel zou overgaan (DOGIEL, RUFFIN e.a.<sup>5)</sup>). Verder nog kan ik in mijn praeparaten, die een buitengewoon mooie impraegnatie paren aan een goede fixatie, de lotgevallen van de ascylanders binnen het MEISSNER-lich. vervolgen. Want te midden van de cellen, die de binnenkolf van de lich. v. MEISSNER vullen, liggen talrijk verspreid, weer diezelfde vaculaire zenuwdoorsneden die wij reeds kennen, mergloos met de fibrillen over het spongiense protoplasma verdeeld.

En nog maar één stap was 't nu vast te stellen in gunstig getroffen objecten, dat die vacuolair gebouwde ascylanders zich voortzetten in de cellen van de binnenkolf zelve. Met absolute zekerheid was in tangentiaal coupes waar te nemen, dat vanuit de ascylander de fibrillen overgaan in het protoplasma van die cellen, waar zij een regelmatig netwerk van fijne fibrillen kunnen helpen vormen, en waar als voortzetting van den op dwarse doorsnede vacuulair bouw van den ascylander, een mazig geteekend protoplasma den neuro-

<sup>1)</sup> Zeitschr. Wiss. Zool. XII 1863.

<sup>2)</sup> Arch. f. Mikr. Anat. XII.

<sup>3)</sup> Arch. f. Mikr. Anat. IX 1873.

<sup>4)</sup> Revue génér. d'histologie 1909.

<sup>5)</sup> Meer terecht beweren LANGERHAUS KRAUSE e.a. dat de Schwannscheede in de „binnenkapsel” van de lichaampjes overgaat.

fibrillen tot substraat dient. Al net eender als ik het indertijd bij de lich. v. GRANDRY zag, vond ik nu hier een dergelijke diffuse uitbreiding van het net over het celprotoplasma, en ook hier de mechanische tractieverschijnselen tusschen protoplasma eenerzijds en fibrilsysteem anderzijds, zoodat aan de juistheid van de hier gegeven interpretatie wel geen twijfel kan overblijven. Het is wel niet anders mogelijk, of inderdaad zijn de binnenkolfcellen niet anders dan deelen van de zenuwbaan zelve en het past in mijn zienswijze<sup>1)</sup> ze met de andere zenuwbaanvormers, als lemmoblasten te betitelen.

Geenszins zijn de beschreven fibrilnetten terminaal. Als regel ziet men de fibrillen zich weer vereenigen en als een hernieuwde ascylinder hun weg voortzetten. Dit is een argument te meer, die cellen onder de opbouwende elementen van de zenuwbaan zelve te rangschikken. Zoodoende kwam ik tot de conclusie, dat het *geheele lich. v. MEISSNER is opgebouwd uit sterk gewonden lemmoblastbanen, welke principieel in hun bouw volkomen met de vrij eindigende zenuwen overeenkomen*. Het schijnt me nu, dat deze conclusie van groot belang is, temeer indien men haar in verband brengt met de bovenvermelde gegevens over den samenhang van de tastlichaampjes met de vrije eindigen uit de literatuur.

Ten slotte wil ik nog het volgende naar voren brengen. Van een kapsel vond ik bij de MEISSNER lichaampjes weinig, zeker geen straf fibrillair weefsel, nog minder een lamellen systeem. Veel eer is het omgevende bindweefsel normaal los-spongieus van bouw. Ik vond er zoowel vacuolaire zenuwdoorsneden in, als in de plasmodermen ingesloten „vrije” fibrillen. Dikwijls vond ik, dat lichaampjes van MEISSNER contoureeel slecht omschreven zijn. Speciaal in de tastballen van de kat vond ik typische lichaampjes van MEISSNER eigenlijk slechts bij uitzondering; frequent daarentegen in het papillaire bindweefsel grootere of kleinere losse groepen van zenuwdoorsneden van de bekende configuratie. Tezamen gaven die dan precies hetzelfde beeld als een dwarsdoorsnede van een lichaampje van MEISSNER. Alleen door aansluitende coupes uit de serie te hulp te nemen, kan men in zoo'n geval uitnaken, dat men met een lichaampje van MEISSNER en niet met eenige losse ascylinders van vrije eindigen te maken heeft. Dergelijke vormen, die zeker onder de gemodificeerde lichaampjes van MEISSNER te rangschikken zijn, zijn voor mij even zoo vele bewijzen voor het nauwe verband, dat inderdaad tusschen tastlichaampjes en vrije eindigen bestaat.

<sup>1)</sup> Verg. G. C. HERINGA. Le développement des corpuscules de GRANDRY et de HERBST (Arch. néerl. des Sc. Exactes et nat. Serie III B. tome III 1917).

Ik kom dus tot de conclusie:

1°. Dat de cellen, die door alle onderzoekers <sup>1)</sup> behalve DOGIEL in de lichaampjes van MEISSNER werden aangetroffen noch steuncellen zijn van bindweefselnaatuur (LANGERHANS, RANVIER, KRAUSE, RUFFINI, LEFEBURE, VAN DE VELDE) noch van epitheliale herkomst (BOTEZAT). Evenmin zijn het gangliën of zenuwcellen (MERKEL, SFAMENI). Het zijn elementen van de zenuwbaan zelve, lemmoblasten, evenals ik dat voor de Grandrylichaampjes getracht heb aan te toonen;

2°. dat de zenuwen in de MEISSNER-lichaampjes in bouw en ge-  
dragingen volkomen overeenkomen met die der z.g. vrije eindigingen;

3°. zoodat het waarschijnlijk is, dat de eindtakken van de zenuwen der MEISSNER lichaampjes (ultraterminalen) zich met de vrije papillaire eindigingen tot een samenhangend geheel vereenigen.

---

<sup>1)</sup> THOMSA, LANGERHANS, RANVIER, MERKEL, KRAUSE, LEONTOWITCH, SFAMENI, RUFFINE, LEFÉBURE, VAN DE VELDE e.a.

**Natuurkunde.** — De Heer W. H. JULIUS biedt een mededeeling aan namens de Heeren W. J. H. MOLL en L. S. ORNSTEIN: „*Bijdragen tot de studie der vloeibare kristallen. IV. Een thermisch effect van het magneetveld*”.

(Deze mededeeling zal in het volgende verslag worden opgenomen.)

**Sterrenkunde.** — De Heer J. C. KAPTEYN biedt eene mededeeling aan van den Heer W. J. A. SCHOUTEN: „*Over de parallax van eenige sterrenhoopen*”. (Tweede mededeeling).

(Mede aangeboden door den Heer E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN).

In een vorige mededeeling werd aangetoond, hoe men met behulp der lichtkrachtkromme van KAPTEYN uit de aantallen sterren van bepaalde magnitude in sterrenhoopen hun parallax kan bepalen. Voor *Messier 3* en *h en  $\chi$  Persei* werd daar de berekening uitgevoerd. Thans wordt dezelfde methode gebruikt om de parallax van eenige andere sterrenhoopen te bepalen.

#### *De Kleine Magelhaensche Wolk.*

H. S. LEAVITT. 1777 Variables in the Magellanic Clouds. *Annals Harvard Observ.* Vol. 60, N<sup>o</sup>. 4.

Een voorloopige catalogus van 992 sterren in de Kleine en 885 in de Grootte Magelhaensche Wolk. De plaatsen van 28 catalogussterren in de buurt der Kleine Wolk zijn ook opgegeven.

We verrichten tellingen en diameterschattingen op een fotografische plaat, die genomen is op het Harvard Observatory.

Voor orientatie gebruiken we de catalogussterren, wier positie Miss LEAVITT opgeeft.

Om de geschatte diameters te herleiden tot magnitudes, hebben we :

1<sup>o</sup>. een oppervlakte van 1000  $\square'$  buiten de Wolk afgeteld en uit de aantallen sterren van iederen diameter met behulp van *Publ. Gron.* N<sup>o</sup>. 27, Table IV de met iederen diameter corresponderende magnitude afgeleid ;

2<sup>o</sup>. hebben we van 142 variablen, wier magnitudes in LEAVITT'S catalogus voorkomen en die gelijkmatig over de Wolk verdeeld zijn, de diameters geschat en deze vergeleken met de gemiddelde magnitude, d.i. het gemiddelde van maximum en minimum, die Miss LEAVITT opgeeft ;

3<sup>o</sup>. werden voor de bovengenoemde catalogussterren de diameters geschat en vergeleken met de magnitudes in de *Cape Photographic Durchmusterung* en de *Argentine General Catalogue*.

Uit al deze gegevens werd ten slotte door grafische vereffening

bepaald, welke magnitude met iederen diameter correspondeert.

We tellen in de Wolk een oppervlakte van  $240 \square'$ . De resultaten zijn opgegeven in onderstaande tabel. Daarin stelt  $N_m$  voor het aantal sterren van de helderste af tot de beschouwde magnitude.

Diameter	Magn.	$N_m$	Magn.	$N_m$	$A_m$	Normaal	Sterren- hoop
25	10.1	1	10.0	1	1	1	—
22	10.4	2					
20	10.7	4	10.5	4	3	—	3
17	11.2	5	11.0	5	4	1	—
16	11.3	6					
15	11.5	13	11.5	16	11	1	10
14	11.7	19					
13	12.0	26	12.0	33	17	1	16
12	12.2	39					
11	12.5	55	12.5	60	27	3	24
10	12.8	87					
9	13.1	122	13.0	122	62	4	58
8	13.4	172					
7	13.7	220	13.5	202	80	5	75
6	14.0	282	14.0	305	103	8	95
5	14.3	358					
4	14.6	467	14.5	438	133	11	122
3	14.9	568					
2	15.2	810	15.0	655	217	16	201
1	15.6	1104	15.5	1064	409	22	387
0	16.0						

Het normaal aantal sterren is berekend voor de galactische breedte  $b = 10^\circ$ . Daar we de lichtkrachtkromme steeds gebruiken voor geheele waarden van het argument  $m$  en we hier naar halve magnitudes hebben afgeteld, kunnen we uit bovenstaande tabel twee tafeltjes afleiden. We vinden dan :



$m$	$A_m$	$A_{m+1} / A_m$	$m$	$A_m$	$A_{m+1} / A_m$
12.0	33	3.24	11.5	18	3.39
13.0	107	1.81	12.5	61	2.48
14.0	194	2.35	13.5	151	1.79
15.0	455		14.5	270	

Het onregelmatig verloop der quotiënten  $\frac{A_{m+1}}{A_m}$  is ten deele hier-  
uit te verklaren, dat slechts een klein gedeelte van den sterrenhoop  
werd afgeteld.

Deze getallen leveren de volgende waarden voor de parallax :

I	$\pi = 0''.0004$
II	4
III	7
IV	13
V	11
VI	4
Gemiddeld	$\pi = 0''.0007 \pm 0''.0002$

Uit 142 clustervariabels, die gelijkmatig over den sterrenhoop zijn  
verdeeld en in Miss LEAVITTS catalogus voorkomen, vinden we voor  
de gemiddelde schijnbare grootte van deze sterren  $\bar{m} = 14.67$  en  
 $5 \log \pi = -15.77$ , zoodat volgens onze parallaxbepaling de ge-  
middelde absolute magnitude van deze  $\delta$  Cephei variabels met korte  
periode  $\bar{M} = 3.9$  is.

HERTZSPRUNG vond uit eenige  $\delta$  Cephei veranderlijke sterren met  
lange periode voor de parallax van de Kleine Magelhaense Wolk  
 $\pi = 0'',0001$ .

#### *Praesepe.*

$$\alpha_{1900} = 8^h 34^m 39^s, \delta_{1900} = + 20^\circ 1', b = + 33^\circ, l = 169^\circ.$$

Dr. P. J. VAN RIJN. The proper motions of the stars in and near  
the Praesepe cluster, Publ. Groningen, N<sup>o</sup>. 26, 1916.

Uitmeting van 2 stel platen, die te Potsdam zijn genomen. De  
catalogus bevat 531 sterren. De diameters werden in photographische  
magnitudes omgezet met behulp van standaardmagnitudes, die door  
HERTZSPRUNG waren bepaald. De *w. f.* van een magnitude is  $\pm 0^m.12$ .

We hebben uit de photographische magnitudes de visueele afgeleid op dezelfde wijze als VAN RHIJN dit doet op pagina 10 van zijn publicatie. De correctie werd bepaald uit de waarde van den kleurindex voor iedere *schijnbare* magnitude, zooals die volgt uit onderzoekingen van PARKHURST en SEARES. Hiertegen kan bezwaar worden gemaakt, daar we bij de clustersterren met *absolute* magnitudes te doen hebben. Daar echter het verband tusschen kleurindex en lichtkracht nog slechts onnauwkeurig bekend is en het bovendien niet is uit te maken, of een bepaalde ster al dan niet tot den sterrenhoop behoort, is VAN RHIJN's methode de eenig mogelijke. VAN RHIJN vond, dat aan de photographische magnitudes (internationale schaal) tusschen  $m = 7.5$  en  $m = 14.5$  een constante correctie  $-0^m.5$  moest worden aangebracht als reductie op de visueele Potsdam schaal. Zij zijn dus door een correctie van  $-0^m.7$  op de Harvard schaal te herleiden.

Het aantal clustersterren van iedere magnitude vinden we door de getelde aantallen te verminderen met het normaal aantal, dat bij dezen sterrenhoop werd afgeleid uit Table V van Publ. Gron. N°. 27.

Het blijkt terstond, dat de Praesepe sterren van zwakke lichtkracht zijn. De hellingen, die wij bij de frequentiekromme der magnitudes waarnemen, zijn voor een deel kleiner dan de kleinste helling, die bij KAPTEYN's lichtkrachtkromme optreedt. Daardoor kunnen we, niettegenstaande het groote magnitude-interval slechts een viertal parallaxbepalingen doen. Deze geven

$$\pi = 0''.024 \pm 0''.004.$$

Deze parallax is aanmerkelijk grooter dan die we bij andere sterrenhoopen vinden.

#### Messier 52.

N. G. C. 7654;  $\alpha_{1900} = 23^h 19^m.8$ ,  $\delta_{1900} = +61^\circ 3'$ ,  $b = +1^\circ$ ,  $l = 81^\circ$ ; klasse: D 3.

F. PINGSDORF. Der Sternhaufen in der Cassiopeia. Diss. Bonn 1909. Uitmetingen van 3 platen, genomen door KÜSTNER. De catalogus bevat 132 sterren tot  $15^m.0$ . Standaardmagnitudes zijn bepaald door visueele waarnemingen met gaasschermen van 25 sterren door ZÜRHELLEN.

We vinden uit 4 bepalingen:  $\pi = 0''.002 \pm 0''.0003$ .

#### Messier 46.

N. G. C. 2437;  $\alpha_{1900} = 7^h 37^m.2$ ,  $\delta_{1900} = -14^\circ 35'$ ,  $b = +6^\circ$ ,  $l = 200^\circ$ ; klasse: D 1

W. ZURHELLEN. Der Sternhaufen Messier 46. Veröffentl. Kgl. Sternwarte zu Bonn, N<sup>o</sup>. 11, 1909.

Uitmeting van 3 platen, genomen door KÜSTNER. De catalogus bevat 529 sterren. Als standaardmagnitudes werden 47 sterren gebruikt, waarvan de helderheid door KÜSTNER is geschat of door ZURHELLEN met gaasschermen bepaald.

We vinden uit 4 bepalingen:  $\pi = 0''.002 \pm 0''.0001$ .

#### Messier 37.

N. G. C. 2099;  $\alpha_{1900} = 5^h 45^m.8$ ,  $\delta_{1900} = + 32^\circ 31'$ ,  $b = + 4^\circ$ ,  $l = 145^\circ$ ; klasse: D 1.

J. O. NORDLUND. Photographische Ausmessung des Sternhaufens Messier 37. Inaug. Diss. Upsala 1909, Arkiv för Matematik, Astronomie och Fysik, Band 5, N<sup>o</sup> 17.

Dr. H. GIEBELER. Der Sternhaufen Messier 37. Veröffentl. Kgl. Sternwarte zu Bonn, N<sup>o</sup>. 12, 1914.

NORDLUND meet 4 platen en geeft de plaatsen en magnitudes van 842 sterren. De magnitudes zijn volgens de formule van CHARLIER uit de diameters afgeleid met behulp van 214 standaardmagnitudes, die door VON ZEPEL photometrisch zijn bepaald. Onder de heldere sterren van den sterrenhoop zijn veel roode (kleurindex  $> 0^m.7$ ); van de 10<sup>e</sup> magn. b.v. 50 tot 70 %.

GIEBELER discussieert 2 platen, die door KÜSTNER genomen en door STROELE uitgemeten zijn. De catalogus bevat 1231 objecten. De magnitudes zijn door vergelijking van 450 sterren aangesloten aan NORDLUND's schaal. Ook van de roode sterren is de photographische magnitude opgegeven.

Het is voor ons doel een nadeel, dat van de roode sterren de photographische magnitude is opgegeven. De helderste sterren, waaronder veel roode voorkomen, zijn dan ook onbruikbaar. Met uitsluiting van deze vinden we uit 4 bepalingen:

$$\pi = 0''.0025 \pm 0''.0004.$$

#### Messier 36.

N. G. C. 1960;  $\alpha_{1900} = 5^h 29^m.5$ ,  $\delta_{1900} = + 34^\circ 4'$ ,  $b = + 2^\circ$ ,  $l = 142^\circ$ ; klasse: D 2.

Dr. S. OPPENHEIM. Ausmessung des Sternhaufens G. C. N<sup>o</sup>. 1166. Publ. der v. Kuffner'schen Sternwarte in Wien, Bd. III, p. 271-307, 1894.

Uitmeting van 3 photographische platen. De catalogus bevat 200 sterren. De magnitudes werden uit de gemeten diameters afgeleid

in verband met visueele schattingen, die Dr. PALISA voor het meerendeel der sterren verrichtte.

Het magnitude-interval is klein. We vinden uit 3 bepalingen:

$$\pi = 0''.005 \pm 0''.001.$$

### 20 *Vulpeculae*.

N. G. C. 6885;  $\alpha_{1900} = 20^h 7^m 6$ ,  $\delta_{1900} = 26^\circ 10'$ ,  $b = -5^\circ$ ,  $l = 31^\circ$ .

H. SCHULTZ. Micrometrisk bestämning af 104 stjernor inom teleskopiska stjerngrupper 20 *Vulpeculae*. Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar, Bandet 11, N<sup>o</sup>. 3, 1873.

De magnitudes zijn met een photometer bepaald in aansluiting aan de schaal van ARGELANDER.

A. DONNER und O. BACKLUND. Positionen von 140 Sternen des Sternhaufens 20 *Vulpeculae* nach Ausmessungen photographischer Plattën. Bulletin de l'Acad. Imp. des Sciences de St. Pétersbourg, série V, volume II, pag. 77-92, 1895.

Uitmeting van 2 platen, door DONNER te Helsingfors genomen. De magnitudes zijn aan SHILOW ontleend.

M. SHILOW. Grössenbestimmung der Sterne im Sternhaufen 20 *Vulpeculae*. Bulletin etc. als boven, pag. 243-251.

Van de 140 sterren, wier positie door DONNER en BACKLUND bepaald zijn, wordt de magnitude bepaald door uitmeting der diameters. Als standaards worden gebruikt de 100 magnitudes, die SCHULTZ reeds had bepaald. SHILOW gebruikt CHARLIERS formule  $m = x - y \log D - zD$ . De *w. f.* van een verschil  $m - m_{\text{SCHULTZ}}$  is  $\pm 0^m.25$ .

We hebben de magnitudes, die op ARGELANDERS schaal berusten, niet op de HARVARD schaal herleid, omdat SHILOWS magnitudes aanmerkelijk verschillen van die van SCHULTZ.

We vinden voor de parallax uit 7 bepalingen:

$$\pi = 0''.005 \pm 0''.001.$$

### *Messier* 5.

N. G. C. 5904;  $\alpha_{1900} = 15^h 13^m.5$ ,  $\delta_{1900} = +2^\circ 27'$ ,  $b = 45^\circ$ ,  $l = 333^\circ$ ; klasse: C3.

M. SHILOW. Positionen von 1041 Sternen des Sternhaufens 5 *Messier*, aus photographischen Aufnahmen abgeleitet. Bulletin de l'Acad. Imp. des Sciences de St. Pétersbourg, Série V, Vol. VIII, pag. 253—312, 1898.

Uitmeting van 2 platen, resp. door BELOPOLSKY en KOSTINSKY genomen. De magnitudes zijn zeer onnauwkeurig bepaald, n.l. door

de diameters te vergelijken met beelden van sterren uit 20 Vulpeculae, wier magnitudes bekend zijn.

S. I. BAILEY, Variable stars in the cluster Messier 5, Annals Harvard Observ., vol. 78, part II, 1917.

Behandelt 92 variabele sterren. Van 72 is de periode opgegeven. Hieronder zijn er 3 met lange perioden. Verder is voor 25 vergelijkingssterren de magnitude opgegeven.

In SHILOWS catalogus is voor 1006 sterren de magnitude opgegeven. Het magnitude-interval is klein en de magnitudes zijn onnauwkeurig. Ook is het ons niet gelukt ze op een nauwkeuiger schaal te herleiden met behulp van BAILEY'S magnitudes. We vinden de 2 bepalingen  $\pi = 0''.0002$  en  $\pi = 0''.0009$ ; dus gemiddeld:

$$\pi = 0''.0005^5 \pm 0''.0002.$$

Volgens SHAPLEY is de gemiddelde fotogr. magnitude der variabls  $15^m.25$  en we vonden  $5 \log \pi = -16.3$ ; dus  $M = 15^m.25 - 11^m.3 = 4^m.0$ . Er bestaat alzoo overeenkomst met onze uitkomst als we aannemen, dat de gemiddelde absolute magnitude van de clustervariabls 4.0 is.

Wanneer we uit de veranderlijke sterren met bekende periode de parallax bepalen, gebruik makend van HERTZSPRUNGS getallen, vinden we:

$$\pi = 0''.0002.$$

### Messier 13.

N. G. C. 6205;  $\alpha_{1900} = 16^h 38^m.1$ ,  $\delta_{1900} = 36^\circ 39'$ ,  $b = +40^\circ$ ,  $l = 26^\circ$ ; klasse: C3.

J. SCHEINER. Der grosze Sternhaufen im Hercules Messier 13, Abh. Kgl. Akad. Berlin 1892.

De catalogus bevat 823 sterren. De magnitudes zijn onzeker.

H. LUDENDORFF. Der grosze Sternhaufen im Herkules Messier 13. Publ. Astroph. Observ. Potsdam, Bd. XV, N°. 50, 1905.

Deze catalogus bevat 1118 sterren. De helderheid is niet in magnitudes uitgedrukt; maar de diameters zijn geschat in 16 Helligkeitsstufen.

H. SHAPLEY. Studies etc. Second Paper: Thirteen hundred stars in the Hercules cluster (Messier 13). Contrib. Mt. Wilson Observ. N°. 116, 1915.

Voor 1300 sterren zijn fotogr. en photovis. magnitudes bepaald; doch slechts voor 650 gepubliceerd. Voor statistisch onderzoek worden 1049 magnitudes en kleurindices gebruikt.

We gebruiken LUDENDORFF'S catalogus en maken van SHAPLEY'S werk gebruik om de Helligkeitsstufen in magnitudes uit te drukken.

Eerst kunnen we met behulp van een tabel in SHAPLEY (pag. 25, Table VIII) de Stufen in photographische magnitudes uitdrukken en deze zijn met behulp van Table XIV en XVI te herleiden tot photovisueele. We behoeven geen correctie aan te brengen voor het schaalverschil HARVARD-MT. WILSON, want de visueele Harvardschaal gaat slechts tot 12.0 en is daar in overeenstemming met de MOUNT WILSON-schaal. We bepalen nu de getallen  $A_m$ . Dan vinden we voor de helderste magnitudes een helling, die de grootste helling bij KAPTEYN's kromme ver overtreft. Deze onwaarschijnlijk groote waarde is misschien te verklaren uit de manier, waarop de diameters in magnitudes zijn omgezet. Daar nitsluiting van deze waarden a priori ongewenscht en met het oog op het klein magnitude-interval niet mogelijk is, hebben we de waargenomen aantallen door een continue kromme afgerond. Daarna vinden we uit 4 bepalingen:

$$\pi = 0''.00075 \pm 0''.00006.$$

Uit SHAPLEY (l.c. pag. 79) leiden we af voor de gemiddelde photographische magnitude der clustervariabels, die waarschijnlijk  $\sigma$  Cephei veranderlijke sterren zijn,  $m = 15.2$  en we vonden  $5 \log \pi = -15.4$ , zoodat volgens onze parallaxbepaling hun gemiddelde absolute magnitude  $= 4.8$ <sup>1)</sup> is.

Uit 2 veranderlijke sterren met bekende periode vond SHAPLEY (l.c. pag 82) voor de parallax de waarde:

$$\pi = 0''.00008.$$

### Messier 67.

N. G. C. 2682;  $\alpha_{1900} = 8^h 45^m .8$ ,  $\delta_{1900} = +12^\circ 11'$ ,  $b = +34^\circ$ ,  $l = 183^\circ$ ; klasse: D 2.

E. FAGERHOLM. Ueber den Sternhaufen Messier 67. Inaug. Diss. Upsala, 1906.

De catalogus bevat 295 sterren. De magnitudes werden uit de diameters met CHARLIERS interpolatieformule afgeleid, nadat voor 15 sterren photometrisch de visueele magnitude bepaald was.

H. SHAPLEY. Studies etc. III. A catalogue of 311 stars in Messier 67, Contrib. Mt. Wilson Observ. N°. 117, 1916.

Voor alle sterren is de photogr. magnitude bepaald en voor alle sterren binnen 12' van het centrum ook de photovisueele. Zoo werden 232 kleurindices gevonden. SHAPLEY vindt een veel grooter aantal back-ground stars dan men zou verwachten.

<sup>1)</sup> De hier opgegeven waarden voor parallax en gemiddelde absolute magnitude zijn te verkiesen boven de voorloopige uitkomsten, die in de eerste mededeeling gepubliceerd zijn.

OLSSONS catalogus is door de onnauwkeurigheid der magnitudes niet bruikbaar.

We gebruiken eerst den catalogus van FAGERHOLM. De magnitudes, die in de *P. D.* schaal zijn uitgedrukt, worden op de Harvardschaal herleid door een correctie van  $-0^m.2$  aan te brengen.

We vinden nu uit 2 bepalingen — het magnitude-interval is slechts  $2^m$  —

$$\pi = 0''.001 \pm 0''0007.$$

Volgens SHAPLEY (l. c. pag. 10) is constant FAG.-MT. W.  $= +0^m.24$  en daar HARV.  $=$  MT. WILSON photovis. is, dus FAG.-HARV.  $= +0^m.24$ . We hebben genomen FAG.-HARV.  $= +0^m.2$ , zoodat de gebruikte magnitudes juist zouden zijn. Bij nader onderzoek blijkt echter het verschil FAG.-SHAPLEY niet constant te zijn, maar te varieeren met de magnitude. We hebben door de magnitudes van 156 sterren te vergelijken de fonten van FAGERHOLMS schaal bepaald en voor de gecorrigeerde magnitudes de aantallen  $A_m$  bepaald. We vinden nu uit slechts één bruikbare bepaling voor de parallax

$$\pi = 0''.002.$$

Aftelling van den catalogus van SHAPLEY doet ons voor de parallax de waarden  $\pi = 0''.001$  en  $\pi = 0''.002$  vinden. Alles samengenomen mogen we voor de parallax van dezen sterrenhoop aannemen:

$$\pi = 0''.002.$$

Bij deze cluster heeft SHAPLEY voor *alle* op de plaat zichtbare sterren binnen een cirkel met een straal van  $12'$  den kleurindex bepaald. Toch is ook hier geen groote waarde te hechten aan een vergelijking der kleurverdeeling, die SHAPLEY voor iedere *M* vond, met SCHWARZSCHILDS tabel. Het is n.l. niet zeker, dat alle sterren tot 13.0 op de plaat zichtbaar zijn en juist hier levert het scheiden van

Type	<i>M</i>	
	+ 4.0	+ 3.0
<i>B</i>	0	0
<i>A</i>	0	15
<i>F</i>	38	30
<i>G</i>	51	20
<i>K</i>	11	30
<i>M</i>	0	5

cluster stars en background stars groote moeilijkheden op. Volgens SHAPLEY is de kleurverdeeling, uitgedrukt in percenten van het aantal sterren van bepaalde absolute grootte: (zie tabel p. 1301).

*Messier 11.*

N. G. C. 6705;  $\alpha_{1900} = 18^h 45^m .7$ ,  $\delta_{1900} = -6^\circ 23'$ ,  $b = -4^\circ$ ,  $l = 355^\circ$ ; klasse  $C3^1$ ).

W. STRATONOFF. Amas stellaire de l'écu de Sobieski (Messier 11), Publ. de l'Observ. de Tachkent N°. 1, 1899.

De catalogus bevat 861 sterren. Uit de diameterschattingen en -metingen is de magn. afgeleid met behulp van de Zuidelijke B. D.

SHAPLEY, Studies etc. IV. The galactic cluster Messier 11, Contrib. Mt. Wilson Observ. N°. 126, 1916 (A. P. J. vol. 45, 1917).

Voor 458 sterren is de fotogr. en photovis. magnitude bepaald. Voor statistisch onderzoek waren 364 sterren beschikbaar, nadat uitgesloten waren de onzekere magnitudes en de sterren, waarbij het Eberhard-effect van invloed kan zijn.

We tellen STRATONOFFS catalogus af en bepalen de quotienten  $\frac{A_m + 1}{A_m}$ .

Het blijkt dan, dat de magnitudes te onnauwkeurig en onbruikbaar zijn.

We gaan nu de magnitudes van STRATONOFF reduceeren op de schaal van SHAPLEY. Daartoe worden 293 sterren vergeleken. Onderstaande tabel bevat de resultaten.

$m_{\text{SHAPLEY}}$	Sh—Strat.	aantal vgl. sterren
10.0	+ 1.53	30
5	1.94	44
11.0	1.68	38
5	1.39	26
12.0	1.45	11
5	1.21	14
13.0	0.91	50
5	0.80	27
14.0	0.70	53

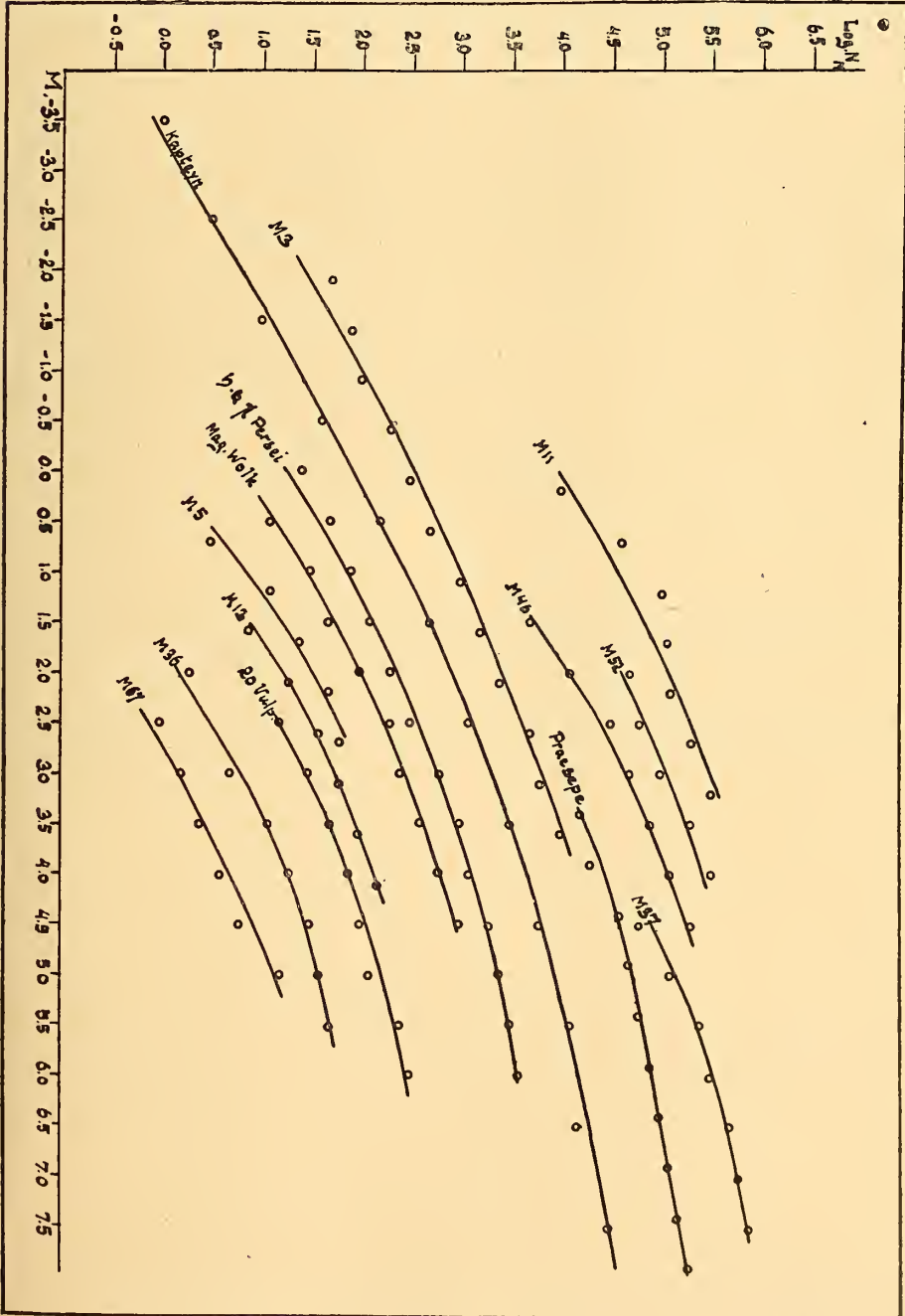
<sup>1)</sup> SHAPLEY rekent Messier 11 tot de open clusters.



Daarna worden door interpolatie  $A_m$  bepaald voor de gecorrigeerde magnitudes. We vinden dan uit 2 bepalingen voor de parallax:

$$\pi = 0''.00055 \pm 0''.00003$$

De gemiddelde parallax is voor de bolvormige sterrenhoopen



0".0006 en voor de open clusters is (met uitsluiting van Praesepe)  
 $\bar{\pi} = 0".003$ .

Het aantal thans bepaalde parallaxen is nog te gering om er conclusies uit af te leiden over de verdeeling der sterrenhoopen in de ruimte. Misschien zal dit mogelijk zijn, wanneer we ons onderzoek tot meerdere sterrenhoopen hebben uitgedrukt. Dan zal ook onderzocht kunnen worden, in hoeverre onze resultaten steun bieden aan de bekende theorie der reuzen- en dwergsterren.

Uit de voorgaande teekening blijkt, dat de lichtkrachtkromme der verschillende sterrenhoopen groote overeenkomst vertoont met die, welke door Prof. KAPTEYN werd bepaald voor de sterren in de naaste omgeving der zon. En daarmee is deze door Prof. KAPTEYN voorgestelde methode van parallaxbepaling gerechtvaardigd.

Bij de graphische voorstelling is onder  $N_M$  te verstaan het aantal sterren vanaf de helderste tot de beschouwde magnitude. Daar het er slechts om te doen is de relatieve frequenties der verschillende absolute magnitudes te vergelijken, hebben we voor iedere kromme  $\log N_M$  met een constant bedrag vermeerderd.

*Amsterdam, December 1917.*

**Natuurkunde.** — De Heer H. A. LORENTZ biedt een mededeeling aan:  
 „*Opmerkingen over den bouw van electronen en atomen.*”

(Deze verhandeling zal in een volgend verslag worden opgenomen.)

---

**Natuurkunde.** — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer J. J. VAN LAAR: „Over het verloop der waarden van  $a$  en  $b$  bij waterstof bij verschillende temperaturen en volumina”. III.

(Mede aangeboden door den Heer F. A. H. SCHREINEMAKERS).

### Vervolg van § XVI.

De voorfactor der dubbelintegralen (7) wordt alsnu, met  $n = N : v$ :

$$\frac{1}{3} \pi n a^2 \times MN = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \pi N s^3 \times MN \times \frac{a^2}{s^3} \times \frac{1}{v},$$

d.w.z., daar  $\frac{2}{3} \pi N s^3 = 4m = (b_g)_\infty$ ,  $MN = \alpha$  is:

$$\frac{1}{2} \times (b_g)_\infty \times \alpha \times \frac{a^2}{s^3} \times \frac{1}{v} = \omega \times \frac{a^2}{s^3} \times \frac{1}{v}.$$

Met weglating van  $1 : v$  verkrijgen wij dus voor de attractie-konstante  $a$ :

$$a = \omega \times \frac{2a^4}{s(a^2 - s^2)} \left[ \int_{\theta_0}^{90} \int_{r_m}^a \frac{dr \times \sin \theta d\theta}{r^2 \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \theta + \varphi \left( \frac{a^2}{r^2} - 1 \right) : \left( \frac{a^2}{s^2} - 1 \right)}} + \int_0^{\theta_0} \int_s^a \text{ibid.} \right],$$

wanneer ook voor  $F(r)$  en  $-F'(r)$  hunne waarden volgen (8) en (8<sup>a</sup>) worden gesubstitueerd. Schrijven wij ter bekorting  $k^2$  voor  $s^2 : (a^2 - s^2)$ , zoo wordt het bovenstaande:

$$a = \omega \times \frac{2a^4}{s(a^2 - s^2)} \left[ \int_{\theta_0}^{90} \int_{r_m}^a \frac{dr \times \sin \theta d\theta}{r \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \theta + k^2 \varphi(a^2 - r^2)}} + \int_0^{\theta_0} \int_s^a \text{ibid.} \right], \dots (7^a)$$

waarin dus  $\omega = \frac{1}{2} \times (b_g)_\infty \times \alpha$  is.

Behandelen wij eerst de eerste integraal, betrekking hebbende op alle moleculen, welke het stilstaand gedachte molecuul passeeren zonder tot botsing te komen. Wij kunnen ervoor schrijven:

$$I_1 = \int_{\theta_0}^{90} \int_{r_m}^a \frac{dr \times \sin \theta d\theta}{r \sqrt{a^2 \cos^2 \theta - (a^2 - r^2)(1 - k^2 \varphi)}}.$$

Zoals reeds is opgemerkt, gelden bovenstaande berekeningen slechts voor temperaturen *boven* een zekere *grenstemperatuur*  $T_0$ , bepaald

door  $\theta_0 = 90^\circ$ ,  $\sin \theta_0 = 1$ . Dit is nl. de laagste temperatuur, waarbij er nog een waarde voor  $\theta_0$  mogelijk is. Immers uit (6) volgt  $\sin^2 \theta_0 = \frac{s^2}{a^2}(1 + \varphi)$ , zoodat  $\frac{s^2}{a^2}(1 + \varphi)$  nooit grooter dan 1 kan worden, en dus  $\varphi$  nooit grooter dan  $(a^2 - s^2) : s^2 = 1 : k^2$ .

Stellen wij deze grenswaarde van  $\varphi = M : \frac{1}{2} \mu u_0^2$  door  $\varphi_0$  voor, dan is dus

$$\varphi_0 = \frac{1}{k^2} = \frac{1 - n^2}{n^2}, \quad \dots \quad (9)$$

wanneer wij de verhouding  $s : a = n$  stellen. In bovenstaande integraal blijft nu ook, zoolang  $\varphi < \varphi_0$  ( $T > T_0$ ) blijft, de grootheid  $1 - k^2 \varphi$  steeds  $> 0$ .

In het grensgeval  $\varphi = \varphi_0$  is  $\theta_0 = 90^\circ$ ; dan botsen derhalve *alle* intredende moleculen, ook die nog welke onder een hoek  $\theta = 90^\circ$  invallen, welke dan juist den rand van den bol  $r = s$  bereiken en daar nog voor het laatst een minimumwaarde voor  $r$  zullen opleveren.

Maar zoodra de temperatuur nóg lager wordt, en  $\varphi$  dus  $> \varphi_0$  wordt, botsen alle intredende moleculen, zonder voorafgaand minimum, d.w.z. zij botsen alle onder hoeken  $< 90^\circ$  met de normaal. Voor *deze* waarden van  $\varphi$  zullen wij dus later een *afzonderlijke* integratie hebben uit te voeren, d.w.z. voor alle waarden van  $\varphi > \varphi_0$  tot  $\varphi = \infty$  ( $T = 0$ ).

De integratie t.o.v.  $r$  geeft nu:

$$\int_{r_m}^a \frac{dr}{r \sqrt{p^2 r^2 - a^2 (p^2 - \cos^2 \theta)}} = \frac{1}{a \sqrt{p^2 - \cos^2 \theta}} \left( Bg \operatorname{tg} \sqrt{\frac{p^2 r^2 - a^2 (p^2 - \cos^2 \theta)}{a^2 (p^2 - \cos^2 \theta)}} \right)_{r_m}^a,$$

wanneer wij  $\underline{1 - k^2 \varphi = p^2}$  stellen. Daar  $\sin^2 \theta_0 = \frac{s^2}{a^2}(1 + \varphi)$  is, zoo

is dus  $\cos^2 \theta_0 = 1 - \frac{s^2}{a^2}(1 + \varphi) = \frac{a^2 - s^2}{a^2} \left( 1 - \frac{s^2}{a^2 - s^2} \varphi \right) = \frac{a^2 - s^2}{a^2} p^2$ . De

grootheid  $p^2$  is dus ook  $= \frac{a^2}{a^2 - s^2} \cos^2 \theta_0$ , zoodat  $p^2 - \cos^2 \theta$  steeds positief blijft. Immers  $\cos^2 \theta$  is bij  $I_1$  hoogstens  $= \cos^2 \theta_0$ .

Nu is aan de grens  $r_m$  de grootheid onder het wortelteeken, n.l.  $p^2 r^2 - a^2 (p^2 - \cos^2 \theta)$ , altijd  $= 0$ , omdat dan  $dr : dt = 0$  is (verg. (3<sup>a</sup>)). Wij hebben derhalve na invoering der grenzen:

$$I_1 = \frac{1}{a} \int_{\theta_0}^{90} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{p^2 - \cos^2 \theta}} Bg \operatorname{tg} \frac{\cos \theta}{\sqrt{p^2 - \cos^2 \theta}} = \frac{1}{a} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{p^2 - x^2}} Bg \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{p^2 - x^2}},$$

wanneer wij voor  $\sin \theta d\theta$  schrijven  $-d\cos \theta$ , en  $x$  voor  $\cos \theta$ , zoodat

$\cos\theta_0$  door  $x_0$  wordt voorgesteld. Nu is  $dBytg = dx: \sqrt{p^2 - x^2}$ , zoodat wij vinden:

$$I_1 = \frac{1}{2a} Bg^2 tg \frac{x_0}{\sqrt{p^2 - x_0^2}} = \frac{1}{2a} Bg^2 tg \frac{1}{k},$$

daar  $p^2 = \frac{a^2}{a^2 - s^2} x_0^2$  is (zie boven), en dus  $p^2 - x_0^2 = \frac{s^2}{a^2 - s^2} x_0^2 = k^2 x_0^2$ .

Met den voorfactor  $\omega \times \frac{2a^4}{s(a^2 - s^2)}$  hebben wij alzoo voor het eerste stuk van a:

$$a_1 = \omega \times \frac{a^8}{s(a^2 - s^2)} Bg^2 tg \frac{1}{k} = \omega \times \frac{1}{n(1 - n^2)} Bg^2 tg \frac{\sqrt{1 - n^2}}{n}. \quad (10)$$

Wij vinden hiervoor dus een waarde, welke  $\varphi$  (en dus  $T$ ) niet meer bevat, zoodat het gedeelte van de attractieconstante, hetwelk betrekking heeft op de *passerende* moleculen, *onafhankelijk van de temperatuur* blijkt te zijn. Dit lijkt eenigszins vreemd, aangezien dicht bij de grenstemperatuur, gegeven door  $\varphi_0$ ,  $\theta_0$  dicht bij  $90^\circ$  komt, zoodat alsdan de grenzen van  $I_1$  t. o. v.  $\theta$  hoe langer hoe dichter bij elkaar komen, om bij  $\theta_0 = 90^\circ$  ( $\varphi = \varphi_0$ ) samen te vallen. Men zou dus verwachten dat  $a_1$  hoe langer hoe kleiner zou worden, naarmate  $T$  afneemt, om bij de grenstemperatuur te verdwijnen. Toch is dit volgens (10) niet het geval. Men kan dit verklaren door de molecuulbanen na te gaan, waardoor men ziet dat deze bij het geringer worden der snelheid  $u_0$  een *steeds grooter baanstuk* binnen de attractiesfeer in beslag nemen, waarbij zich ook nog de omstandigheid voegt dat juist in de nabijheid van  $\theta = 90^\circ$  de frequentie voor den hoek, welke evenredig is met  $\sin\theta$ , haar *maximum* bereikt.

Is  $n$  dicht bij 1, d. w. z.  $a$  dicht bij  $s$  (zeer dunne attractiesfeer), dan nadert  $Bg^2tg$  tot  $\frac{1 - n^2}{n^2}$ , zoodat  $a_1$  alsdan tot  $\omega : n^3 = \omega$  nadert.

Daar  $\sin^2\theta_0 = \frac{s^2}{a^2}(1 + \varphi)$  is, zoo is  $\cos^2\theta_0 = x_0^2 = 1 - \frac{s^2}{a^2}(1 + \varphi)$ ,

zoodat  $x_0^2$  zal inliggen tusschen  $\frac{a^2 - s^2}{a^2} = 1 - n^2 = \pm 0$  bij hooge tem-

peraturen ( $\varphi = 0$ ), en (0) bij lagere temperaturen ( $\varphi = \varphi_0$ ).  $\theta_0$  ligt derhalve in beide gevallen in de nabijheid van  $90^\circ$ , derhalve zullen de integratiegrenzen van  $I_1$  bijna samenvallen, nl.  $\theta$  tusschen  $\pm 90^\circ$  en  $90^\circ$  bij hooge, resp. ( $90^\circ$ ) en  $90^\circ$  bij lagere temperaturen. Wat de grenswaarde  $\varphi_0 = (1 - n^2) : n^2$  betreft, deze zal in het geval  $n - 1$  dicht bij 0 komen te liggen, d. w. z.  $T_0$  dicht bij  $\infty$ , zoodat het geldige temperatuurinterval uiterst gering is.

Is daarentegen  $n$  dicht bij 0, d. w. z.  $a$  zeer veel grooter dan  $s$  (zeer groote attractiesfeer), dan nadert  $Bg^2tg$  tot  $1) \frac{1}{4}n^2 - \pi n$ , derhalve  $a_1$  tot  $\omega \times \frac{1}{n} \times \frac{1}{4}\pi^2 = \infty$ . Thans ligt  $x_0^2$  in tusschen  $1 - n^2 = \pm 1$

bij hooge temperaturen en (0) bij lage temperaturen, zoodat  $\theta$  bij hooge temperaturen zal inliggen tusschen  $\pm 0^\circ$  en  $90^\circ$ , en bij lage temperaturen tusschen  $(90^\circ)$  en  $90^\circ$ . Thans is de grenswaarde van  $\varphi_0$  dicht bij  $\infty$ , d. w. z.  $T_0$  dicht bij 0, zoodat het geldige temperatuurinterval in dit geval zeer groot is. Dat  $a_1$  thans *oneindig* wordt, behoeft ons niet te verwonderen, want ter verkrijging van een *eindige* waarde dient  $F(r)$  veel sterker af te nemen met  $r$  dan met onze aanname (8) — nl. omgekeerd evenredig met  $r^2$  — het geval is. Deze aanname geldt trouwens slechts voor niet te groote waarden van  $a$ :  $s$ .

### § XVII. Berekening van $(a_1)_1$ .

Thans moeten wij de tweede integratie in (7<sup>a</sup>) uitvoeren. Deze heeft dus betrekking op alle moleculen welke tot *botsing* komen, daar  $\theta$  nu kleiner dan de grenshoek  $\theta_0$  blijft. Zij moet in *twee* tempo's worden uitgevoerd, nl. van  $x (= \cos \theta) = p$  tot  $x = x_0$ , en van  $x = 1 (\theta = 0)$  tot  $x = p$ . Immers in de algemeene integraal t.o.v.  $r$  (zie § XVI), nl.

$$\int_s^a \frac{dr}{r \sqrt{p^2 r^2 - a^2 (p^2 - \cos^2 \theta)}}$$

zal in het eerste geval  $p^2 - \cos^2 \theta = p^2 - x^2$  *positief* zijn, in het tweede geval daarentegen *negatief*. Het eerste tempo geeft dus aanleiding tot een *Bgtg.*, het tweede tot een *log*. Het eerste tempo levert, geïntegreerd t. o. v.  $r$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a \sqrt{p^2 - x^2}} \left( Bg \, tg \sqrt{\frac{p^2 r^2 - a^2 (p^2 - x^2)}{a^2 (p^2 - x^2)}} \right)_s^a &= \\ &= \frac{1}{a \sqrt{p^2 - x^2}} \left[ Bg \, tg \frac{x}{\sqrt{p^2 - x^2}} - Bg \, tg \frac{\sqrt{x^2 - x_0^2}}{\sqrt{p^2 - x^2}} \right], \end{aligned}$$

wijl  $p^2 \left( 1 - \frac{s^2}{a^2} \right) = x_0^2$  is (zie § XVI). Wij hebben derhalve:

1) Immers  $Bgtg \frac{\sqrt{1-n^2}}{n} = Bgtg \frac{1}{n} = Bg \cot n = \frac{1}{2} \pi - n$ , derhalve  $Bg^2tg = \frac{1}{4} \pi^2 - \pi n$ .

$$(I_2)_1 = \frac{1}{a} \left[ \int_{x_0}^p \frac{dx}{\sqrt{p^2-x^2}} Bg \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{p^2-x^2}} - \int_{x_0}^p \frac{dx}{\sqrt{p^2-x^2}} Bg \operatorname{tg} \frac{\sqrt{x^2-x_0^2}}{\sqrt{p^2-x^2}} \right].$$

De eerste integraal levert  $\frac{1}{2} \left( Bg^2 \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{p^2-x^2}} \right)_{x_0}^p = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} \pi^2 - Bg^2 \operatorname{tg} \frac{1}{k} \right]$ ,

daar  $d Bg \operatorname{tg} = \frac{dx}{\sqrt{p^2-x^2}}$  is.

Maar de tweede integraal laat zich niet zoo gemakkelijk integreeren.

Daar  $d Bg \operatorname{tg}$  alsdan  $= \frac{x}{\sqrt{x^2-x_0^2}} \frac{dx}{\sqrt{p^2-x^2}}$  is, zoo wordt genoemde integraal:

$$\int_{x_0}^p \frac{\sqrt{x^2-x_0^2}}{x} Bg \operatorname{tg} \times d Bg \operatorname{tg} = \int_0^{\infty} \frac{y \sqrt{p^2-x_0^2}}{\sqrt{p^2 y^2 + x_0^2}} Bg \operatorname{tg} y \times d Bg \operatorname{tg} y,$$

wanneer wij  $(x^2-x_0^2):(p^2-x^2) = y^2$  stellen, waardoor  $x^2$  in  $(p^2 y^2 + x_0^2):(1+y^2)$ , en  $x^2-x_0^2$  in  $y^2(p^2-x_0^2):(1+y^2)$  overgaat. Met  $Bg \operatorname{tg} y = \psi$  gaat de laatste integraal over in

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{p^2-x_0^2}}{p} \int_0^{1/2\pi} \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \psi + (x_0^2:p^2)}} \psi d\psi &= \frac{s}{a} \int_0^{1/2\pi} \frac{\sin \psi}{\sqrt{\sin^2 \psi + \frac{a^2-s^2}{a^2} \cos^2 \psi}} = \\ &= k \int_0^{1/2\pi} \frac{\sin \psi}{\sqrt{1+k^2 \sin^2 \psi}} \psi d\psi, \end{aligned}$$

daar  $\sqrt{p^2-x_0^2}:p$  tengevolge van  $p^2 = \frac{a^2}{a^2-s^2} x_0^2$ , derhalve  $p^2-x_0^2 = \frac{s^2}{a^2-s^2} x_0^2$ , door  $\frac{s}{a}$  kan worden vervangen, en  $x_0^2:p^2$  door  $(a^2-s^2):a^2$ , terwijl verder

$$\sin^2 \psi + \frac{a^2-s^2}{a^2} \cos^2 \psi = \frac{a^2-s^2}{a^2} + \frac{s^2}{a^2} \sin^2 \psi = \frac{a^2-s^2}{a^2} \left( 1 + \frac{s^2}{a^2-s^2} \sin^2 \psi \right)$$

en  $s^2:(a^2-s^2) = k^2$  is. De laatste transcendente, quasi-elliptische integraal kan nu gemakkelijk (zie Aanhangsel) in een reeks ontwikkeld, en daarna worden benaderd. Vooraf zij opgemerkt dat  $x_0$  en dus  $\varphi$  (en derhalve ook  $T$ ) daarin niet meer voorkomen, zoodat het resultaat — evenals dat van het eerste stuk van  $(I_2)_1$  — niet van de temperatuur afhankelijk zal zijn, evenmin als dit het geval

was met  $L_1$  (zie § XVI). Verder is gemakkelijk in te zien, dat genoemde integraal in het grensgeval  $n = 1$  ( $a = s$ ), dus  $k = \infty$ , tot

$$\int_0^{1/2\pi} \frac{k \sin \psi}{\sqrt{k^2 \sin^2 \psi}} \psi d\psi = \left(\frac{1}{2} \psi^2\right)_0^{1/2\pi} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \pi^2 \text{ nadert; en in het tegenover-}$$

gestelde grensgeval  $n = s$  ( $a : s = \infty$ ), dus  $k = 0$ , tot  $k \int_0^{1/2\pi} \sin \psi \times \psi d\psi =$

$$= k \left( -\psi \cos \psi + \int \cos \psi d\psi \right) = k(-\psi \cos \psi + \sin \psi), \text{ hetgeen tusschen}$$

0 en  $1/2\pi$  de waarde  $k$  oplevert.

De bedoelde integraal ligt dus tusschen  $1/8\pi^2$  en  $k = s : \sqrt{a^2 - s^2} = s : a = n$  (daar in het laatste geval  $s$  oneindig klein is t. o. v.  $a$ ), zoodat wij haar kunnen voorstellen door

$$\varepsilon n \times 1/8\pi^2,$$

waarbij  $\varepsilon$  zal inliggen tusschen 1 (als  $n = 1$  is) en 8 :  $\pi^2 = 0,811$  (wanneer  $n = 0$  is). De factor  $\varepsilon$  is alzoo weinig veranderlijk. Uit de reeksontwikkeling (zie Aanhangsel A) blijkt, dat  $\varepsilon = 0,845$  wordt voor  $n = 0,6$  (d. w. z.  $s = 0,6a$ ).

Wij hebben alsnu :

$$(I_2)_1 = \frac{1}{2a} \left[ \left( \frac{1}{4} \pi^2 - Bg^2 \operatorname{tg} \frac{1}{k} \right) - \varepsilon n \times \frac{1}{4} \pi^2 \right],$$

zoodat met den voorfactor  $\omega \times (2a^4 : s(a^2 - s^2))$  gevonden wordt :

$$(a_2)_1 = \omega \times \frac{1}{n(1-n^2)} \left[ \frac{1}{4} \pi^2 (1 - \varepsilon n) - Bg^2 \operatorname{tg} \frac{\sqrt{1-n^2}}{n} \right] \quad \dots (11)$$

Is  $n$  dicht bij 1 ( $a - s$ ), dan nadert dit tot  $\omega \times \frac{1}{1-n^2} [\frac{1}{4}\pi^2(1-n) - (1-n^2)] =$

$\omega \times (\frac{1}{8}\pi^2 - 1) = 0,234 \omega$ . De integratie-grenzen  $p$  en  $x_0$  worden

bepaald door  $x_0^2 = 1 - \frac{s^2}{a^2} (1 + \varphi) = \frac{a^2 - s^2}{a^2} = 1 - n^2 = \pm 0$  bij hooge

temperaturen ( $\varphi = 0$ ), resp. (0) bij lagere temperaturen ( $\varphi = \varphi_0$ ), en

$p^2 = \frac{a^2}{a^2 - s^2} x_0^2 = (1)$ , resp. (0); zoodat  $\theta$  zal inliggen tusschen ( $0^\circ$ ) en

$\pm 90^\circ$  bij hooge temp., en ( $90^\circ$ ) en ( $90^\circ$ ) bij lagere temperaturen.

En is  $n$  dicht bij 0 ( $a$  groot t. o. v.  $s$ ), zoo nadert  $(a_2)_1$  tot  $\omega \times \frac{1}{n} \times [(\frac{1}{4}\pi^2 - 2n) - (\frac{1}{4}\pi^2 - \pi n)] = \omega \times (\pi - 2) = 1,14 \omega$ . Voor de integratie-grenzen gelden dan  $\pm 1$  voor  $x_0$  ( $\varphi = 0$ ), resp. (0) bij



$\varphi = \varphi_0$ ; en (1), resp. (0) voor  $p$ , zoodat  $\theta$  inligt tusschen  $(0^\circ)$  en  $\pm 90^\circ$  bij hooge temp. en  $(90^\circ)$  en  $(90^\circ)$  bij lage temp.

Voegt men  $(a_2)_1$  bij  $a_1$ , zoo vindt men voor het van de temperatuur onafhankelijke deel van de attractieconstante  $a$  (komende van de passeerende moleculen en van de (niet-centrale) botsende moleculen):

$$\underline{a_\infty = a_1 + (a_2)_1 = \omega \times \frac{1-\varepsilon n}{n(1-n^2)} \frac{1}{4} \pi^2} \quad \dots \quad (12)$$

Volgens het bovenstaande omvat dit gedeelte de *bijna totaliteit* der invalshoeken, vanaf  $90^\circ$  tot dicht bij  $0^\circ$ , bij *hooge* temp.; en slechts een *zeer klein gedeelte*, van af  $90^\circ$  tot dicht bij  $90^\circ$ , bij *lage* temp.; d. w. z. in de grensgevallen  $n = 1$  en  $n = 0$ . Maar ook in intermediaire gevallen blijft dit gelden, omdat bij hooge temp.  $p^2$  steeds in de nabijheid van  $\frac{a^2}{a^2-s^2} \times \frac{a^2-s^2}{a^2} = 1$  ligt, en bij lage temp.

steeds in die van  $\frac{a^2}{a^2-s^2} \times 0 = 0$ .

Er blijft derhalve voor het van de temperatuur *afhankelijke* deel van  $a$  een des te grooter gebied over, naarmate de temperatuur lager wordt.

De grootheid  $a_\infty$  in (12) ligt alsnu tusschen  $\omega \times \frac{1-n}{n(1-n^2)} \frac{1}{4} \pi^2 =$   
 $= \omega \times \frac{1}{n(1+n)} \frac{1}{4} \pi^2 = \underline{\omega \times \frac{1}{8} \pi^2}$  bij  $n = 1$ , en  $\omega \times \frac{1}{n} \times \frac{1}{4} \pi^2 = \infty$  bij  
 $n = 0$ .

### § XVIII. Berekening van $(a_2)_2$ .

Tenslotte komen wij aan de berekening van het van de temperatuur afhankelijke gedeelte, corresponderende met de meer *centrale* botsingen van het *tweede* tempo van  $I_2$ . Voor de integratie t. o. v.  $r$  hebben wij thans (zie § XVII):

$$\int_s^a \frac{dr}{r \sqrt{p^2 r^2 + a^2 (\cos^2 \theta - p^2)}},$$

waarin dus nu  $\cos^2 \theta - p^2$  tusschen de grenzen  $\theta = 0^\circ$  en  $\theta = Bg \cos p$  *positief* blijft. De integraal geeft:

$$\frac{1}{a \sqrt{x^2 - p^2}} \left( \log \frac{\sqrt{p^2 r^2 + a^2 (x^2 - p^2)} - a \sqrt{x^2 - p^2}}{r} \right)_s^a =$$

$$= \frac{1}{a \sqrt{x^2 - p^2}} \left[ \log (x - \sqrt{x^2 - p^2}) - \log \frac{a}{s} (\sqrt{x^2 - x_0^2} - \sqrt{x^2 - p^2}) \right],$$

wanneer  $\cos \theta$  wederom  $= x$ , en  $\cos \theta_0 = x_0$  wordt gesteld, terwijl  $x_0^2 = p^2 \left(1 - \frac{s^2}{a^2}\right)$  is. (Zie § XVI). Wij hebben alzoo:

$$(I_2)_7 = \frac{1}{a} \left[ \int_p^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - p^2}} \log \frac{x - \sqrt{x^2 - p^2}}{p} - \int_p^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - p^2}} \log \frac{\sqrt{x^2 - x_0^2} - \sqrt{x^2 - p^2}}{s/a p} \right].$$

Voor  $\sin \theta d\theta = -dx$  is geschreven  $-dx$ . Het minusteecken is weer verwijderd door de integratiegrenzen om te keeren. Verder is — ter wille van de homogeniteit — onder beide  $\log$  nog een factor  $p$  ingevoerd. Voor  $s/a p$  kan ook  $\sqrt{p^2 - x_0^2}$  worden geschreven.

De eerste integraal laat zich wederom gemakkelijk integreren.

Immers  $d \log = -\frac{dx}{\sqrt{x^2 - p^2}}$ , zoodat men daarvoor vindt:

$$\frac{1}{2} \log^2 \left( \frac{x - \sqrt{x^2 - p^2}}{p} \right)_1^p = -\frac{1}{2} \log^2 \frac{1 - \sqrt{1 - p^2}}{p} = -\frac{1}{2} \log^2 \frac{p}{1 + \sqrt{1 - p^2}},$$

waarvoor men ook met het oog op  $\log^2$  kan schrijven  $-\frac{1}{2} \log^2 \frac{1 + \sqrt{1 - p^2}}{p}$ .

De tweede levert weer dezelfde moeilijkheden als de overeenkomstige met *Bgtg* in § XVII. Deze wordt nl., daar  $d \log$  thans

$$= -\frac{x}{\sqrt{x^2 - x_0^2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - p^2}} \text{ is:}$$

$$-\int_p^1 \frac{\sqrt{x^2 - x_0^2}}{x} \log \times d \log = \int_1^p \frac{\sqrt{p^2 - x_0^2}}{\sqrt{p^2 - y^2} x_0^2} \log \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} \times d \log,$$

aangezien

$$\log \frac{\sqrt{x^2 - x_0^2} - \sqrt{x^2 - p^2}}{\sqrt{p^2 - x_0^2}} = \log \sqrt{\left(1 - \sqrt{\frac{x^2 - p^2}{x^2 - x_0^2}}\right) : \left(1 + \sqrt{\frac{x^2 - p^2}{x^2 - x_0^2}}\right)}$$

is, terwijl uit  $(x^2 - p^2) : (x^2 - x_0^2) = y^2$  volgt  $x^2 = (p^2 - y^2 x_0^2) : (1 - y^2)$

en  $x^2 - x_0^2 = (p^2 - x_0^2) : (1 - y^2)$ . Nu is  $\log \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} = -Bgtg \text{ hyp } y$ ,

zoodat met  $Bgtg \text{ h } y = \psi$  gevonden wordt:

$$\frac{\sqrt{p^2 - x_0^2}}{p} \int_1^p \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{p^2} t g^2 h \psi}} \psi d\psi = k \int_{t g \theta_0: k}^1 \frac{\cos h \psi}{\sqrt{1 + k^2 \cos^2 h \psi}} \psi d\psi,$$

daar  $\cos^2 h \psi - \frac{a^2 - s^2}{a^2} \sin^2 h \psi$ , met  $\sin^2 h \psi = \cos^2 h \psi - 1$ , kan vervangen

worden door  $\frac{a^2 - s^2}{a^2} + \frac{s^2}{a^2} \cos^2 h \psi$ ; terwijl  $s^2 : (a^2 - s^2) = k^2$  is (zie § XVII).

Voor  $x_0^2 : p^2$  kan nl. geschreven worden  $(a^2 - s^2) : a^2$ , terwijl  $(p^2 - x_0^2) : p^2 = s^2 : a^2$  is. De grenzen voor  $x$  zijn 1 en  $p$ , derhalve  $\sqrt{\frac{1-p^2}{1-x_0^2}}$  en 0 voor  $y$ , d. w. z. voor  $tg h \psi$ . Voor  $\cosh \psi = 1 : \sqrt{1 - tg^2 h \psi}$  alzo  $\sqrt{\frac{1-x_0^2}{p^2-x_0^2}}$  en 1, of  $tg \theta_0 : k$  en 1; daar  $p^2 - x_0^2 = k^2 x_0^2$  is, en  $x_0^2 = \cos^2 \theta_0$ . De grenzen voor  $\psi$  zijn klaarblijkelijk  $\log \frac{\sqrt{1-x_0^2} + \sqrt{1-p^2}}{\sqrt{p^2-x_0^2}} = \log \left( \frac{tg \theta_0}{k} + \sqrt{\frac{tg^2 \theta_0}{k^2} - 1} \right)$  en 0, aangezien

$$Bg \, tg h \psi = \log \frac{\sqrt{x^2 - x_0^2} - \sqrt{x^2 - p^2}}{\sqrt{p^2 - x_0^2}} = \log \frac{\sqrt{x^2 - x_0^2} + \sqrt{x^2 - p^2}}{\sqrt{p^2 - x_0^2}}$$

is. Hierin is  $tg \theta_0 : k > 1$ , daar thans  $p < 1$  is.

Wij verkrijgen alzo een integraal van geheel denzelfden vorm als die van § XVII; alleen staat er nu hyperbolische cosinus inplaats van den vroegeren sinus. Ontwikkelen wij wederom in een reeks (zie Aanhangsel B), dan blijkt dat zoowel bij *hooge* temperatuur ( $\varphi = 0$ ) als bij *lage* temperatuur ( $\varphi = \varphi_0 = 1 : k^2$ ) alle termen met hoogere machten van  $\log$  ten opzichte van den eersten term verdwijnen, zoodat met groote benadering kan worden geschreven:

$$- \frac{1}{2} n \sqrt{1 + \varphi} \log^2 \frac{\sqrt{1 + \varphi} + \sqrt{(1 + k^2) \varphi}}{\sqrt{1 - k^2 \varphi}},$$

waarin  $\varphi$  bepaald is door de betrekking  $\frac{a^2}{s^2} \sin^2 \theta_0 = 1 + \varphi$  (zie vergel. (6) der voorgaande Verhandeling), waardoor  $tg^2 \theta_0 : k^2 = (1 + \varphi) : (1 - k^2 \varphi)$  wordt. (Voor  $s : a = k : \sqrt{1 + k^2}$  is wederom  $n$  geschreven).

Voegen wij nu den gevonden integraal bij den eersten, nl.  $-\frac{1}{2} \log^2 \frac{1 + \sqrt{1 - p^2}}{p}$ , zoo wordt — daar  $p^2 = \frac{a^2}{a^2 - s^2} x_0^2 = (1 + k^2) x_0^2$  is, en  $x_0^2 = 1 - \sin^2 \theta_0 = 1 - \frac{k^2}{1 + k^2} (1 + \varphi)$ , waardoor  $p^2 = 1 - k^2 \varphi$  wordt:

$$(I_2)_2 = \frac{1}{2a} \left[ - \log^2 \frac{1 + k \sqrt{\varphi}}{\sqrt{1 - k^2 \varphi}} + n \sqrt{1 + \varphi} \log^2 \frac{\sqrt{1 + \varphi} + \sqrt{(1 + k^2) \varphi}}{\sqrt{1 - k^2 \varphi}} \right],$$

zoodat met den voorfactor  $\omega \times (2 a^4 : s(a^2 - s^2))$  gevonden wordt:

$$(a_2)_2 = \omega \times \frac{1}{n(1-n^2)} \left[ n \sqrt{1+\varphi} \log^2 \frac{\sqrt{1+\varphi} + \sqrt{(1+k^2)\varphi}}{\sqrt{1-k^2}\varphi} - \log^2 \frac{1+k\sqrt{\varphi}}{\sqrt{1-k^2}\varphi} \right] \dots (13)$$

Daar  $\log \frac{\sqrt{1+\varphi} + \sqrt{(1+k^2)\varphi}}{\sqrt{1-k^2}\varphi} =$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sqrt{\frac{(1+k^2)\varphi}{1+\varphi}}}{1 - \sqrt{\frac{(1+k^2)\varphi}{1+\varphi}}} = \sqrt{\frac{(1+k^2)\varphi}{1+\varphi}} + \frac{1}{3} ( )^3 + \text{etc.}$$

$$\log \frac{1+k\sqrt{\varphi}}{\sqrt{1-k^2}\varphi} = \frac{1}{2} \log \frac{1+k\sqrt{\varphi}}{1-k\sqrt{\varphi}} = k\sqrt{\varphi} + \frac{1}{3} ( )^3 + \text{etc.}$$

is, zoo zal bij *hooge* temp. ( $\varphi$  dicht bij 0)  $(a_2)_2$  blijkbaar tot

$$(a_2)_2 = \omega \times \frac{1}{n(1-n^2)} \left[ n \sqrt{1+\varphi} \frac{(1+k^2)\varphi}{1+\varphi} - k^2\varphi \right],$$

d.w.z. met  $k^2 = n^2 : (1-n^2)$  tot

$$(a_2)_2 = \omega \times \frac{1}{n(1-n^2)} \left[ \frac{n}{1-n^2} \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi}} - \frac{n^2}{1-n^2} \varphi \right],$$

of  $(a_2)_2 = \omega \times \frac{1}{n(1-n^2)} \times \frac{n}{1+n} \varphi \quad (\underline{\varphi = 0}) \dots \dots \dots (13a)$

naderen, wanneer voor  $\varphi: \sqrt{1+\varphi}$  eenvoudig  $\varphi$  geschreven wordt. Bij  $T = \infty$  wordt dit dus behoorlijk = 0. De grenzen van den oorspronkelijken integraal  $(I_2)_2$ , nl.  $p$  en 1, zijn dan aan elkaar gelijk en wel = 1, waardoor de grenzen van den invalshoek  $\theta$  tusschen  $(0^\circ)$  en  $0^\circ$  (zie ook het slot van § XVII) komen te liggen.

Bij *lage* temperaturen ( $\varphi$  dicht bij  $\varphi_0 = 1 : k^2$ ) zal men hebben:

$$(a_2)_2 = \omega \times \frac{1}{n(1-n^2)} \left[ \log^2 \left( \frac{1}{n} \frac{2}{\sqrt{1-k^2}\varphi} \right) - \log^2 \frac{2}{\sqrt{1-k^2}\varphi} \right],$$

aangezien  $n\sqrt{1+\varphi}$  alsdan = 1 is, en  $\sqrt{(1+k^2)\varphi} = \sqrt{1+\varphi} = 1 : n$ . En daar  $\log \left( \frac{1}{n} \frac{2}{\sqrt{\varphi}} \right) = \log \frac{1}{n} + \log \frac{2}{\sqrt{\varphi}}$  is, zoo zal ten slotte kunnen worden geschreven, met weglating van  $\log^2 \frac{1}{n}$  tegenover de oneindig groote termen:

$$(a_2)_2 = \omega \times \frac{1}{n(1-n^2)} \times \log \frac{1}{n^2} \times \log \frac{2}{\sqrt{1-k^2} \varphi} \quad (\varphi = \varphi_0 = 1:k^2) \quad (13b)$$

Dit nadert dus tot *logarithmisch oneindig*. Thans zijn de grenzen  $p$  en  $1$  klaarlijkkelijk  $= 0$  en  $1$ , zoodat  $\theta$  tusschen  $(90^\circ)$  en  $0^\circ$  inligt, alzoo het gansche gebied omvat.

Wanneer  $n \rightarrow 1$  is ( $a \rightarrow s$ ), dan wordt in  $13^a$   $(a_2)_2$  niet  $= \infty$ . Immers daar  $\varphi$  nooit grooter kan worden dan  $1:k^2 = (1-n^2):n^2$ , zoo blijft  $(a_2)_2$  alsdan blijkbaar kleiner dan  $\omega \times \frac{1}{n^2(1+n)}$ , d. w. z.  $< \omega \times \frac{1}{2}$ . In  $(13^b)$  wordt alsdan ( $n = 1-\delta$ )  $\log(1:n^2) = 2(1-n)$ , zoodat  $(a_2)_2$  tot  $\omega \times \log \frac{2}{\sqrt{1-k^2} \varphi}$  zal naderen.

Is daarentegen  $n \rightarrow 0$  ( $a$  groot t.o.v.  $s$ ), dan nadert  $(a_2)_2$  in  $(13^a)$  tot  $\omega \times \varphi$ , terwijl deze grootheid in  $(13^b)$  tot *oneindig*  $\times$  (*log oneindig*)<sup>2</sup> zal naderen, d.w.z. zeer sterk zal toenemen, wanneer de temperatuur lager wordt.

### § XIX. Berekening van $a$ .

Voegen wij ten slotte het van de temperatuur *onafhankelijke* gedeelte van  $a$ , nl.  $a_\infty = a_1 + (a_2)_1$  volgens  $(12)$ , bij het van de temperatuur *afhankelijke* gedeelte volgens  $(13^a)$ , dan wordt dus bij *hooge* temperatuur, met inachtneming van  $\omega = \frac{1}{2} \times (b_g)_\infty \times \alpha$  (zie § XVI):

$$a = \frac{\omega}{n(1-n^2)} \left[ (1-\varepsilon n) \frac{1}{4} \pi^2 + \frac{n}{1+n} \varphi \right] = \frac{1}{2n(1-n^2)} (b_g)_\infty \alpha \left[ (1-\varepsilon n) \frac{1}{4} \pi^2 + \frac{n}{1+n} \varphi \right],$$

of ook

$$(\varphi \rightarrow 0) \quad a = a_\infty \left[ 1 + \frac{n}{(1-\varepsilon n)(1+n)^{1/4} \pi^2} \varphi \right] = \frac{a_\infty (1 + \gamma \varphi)}{1}, \quad (14a)$$

waarin dus  $a_\infty = \frac{1/4 \pi^2 (1-\varepsilon n)}{2n(1-n^2)} (b_g)_\infty \alpha$  is, en  $\gamma = \frac{n}{(1-\varepsilon n)(1+n)^{1/4} \pi^2}$ .

Wij herinneren er aan, dat de coëfficiënt  $\varepsilon$  (zie § XVII) bij  $n = 1$  de waarde  $1$  heeft, bij  $n = 0$  de waarde  $8:\pi^2 = 0,811$ , en bij  $n = 0,6$  de waarde  $0,845$ . Verder is  $\alpha = MN$ , waarin  $M$  de maximumwaarde der krachtsfunctie  $f(r)$  bij aauraking der moleculen, en  $N$  het totale aantal moleculen in het volume  $v$  is.

Bij *lage* temperaturen ( $\varphi = \varphi_0 = 1:k^2$ ) wordt volgens  $(13^b)$ :

$$\underline{(\varphi - \varphi_0)} \quad a = a_\infty \left[ 1 + \frac{\log 1/n^2}{1/4 \pi^2 (1 - \varepsilon n)} \log \frac{2}{\sqrt{1 - k^2} \varphi} \right] \dots \dots (14b)$$

Dat bij  $\varphi = \varphi_0$  de waarde van  $a$  *logarithmisch* oneindig wordt, en niet tot *exponentieel* oneindig nadert, zooals bij aanname van dan BOLTZMANN'schen temperatuur-distributiefactor het geval is (immers

$f(a) = (e^{z/RT} - 1) : z/RT$  wordt bij  $T = 0$  van de orde  $e^\infty$ ), is reeds een voordeel te achten. Maar het boven gevonden logarithmisch oneindig zal tot een gewoon *eindig maximum* voeren, wanneer wij bedenken dat alleen de *zeer bepaalde snelheid*  $u_0$ , welke  $\varphi = M : \frac{1}{2} \mu u_0^2 = 1 : k^2$  maakt, tot dit  $\log \infty$  leidt. Nemen wij de MAXWELL'sche *snelheidsverdeelingswet* in acht, dan zullen de nabijgelegen snelheden niet tot  $\log \infty$  voeren, en dit zal dus in een *eindig maximum* overgaan. Wij komen hierop nog terug.

Wij wijzen er echter hier reeds op, dat het optreden van het logarithmische oneindig bij  $\varphi = \varphi_0$  *niet* gebonden is aan onze bijzondere aanname (8) aangaande  $F(r)$ . Wij zullen zien, dat deze *log.* oneindige waarde van  $a$  bij  $\varphi = \varphi_0$  bij *elke* onderstelling aangaande  $F(r)$  wordt teruggevonden.

Maar de gevallenwaarden der grootheden  $a_\infty$  en  $\gamma$  in (14<sup>a</sup>) bv. zullen natuurlijk wel van genoemde onderstelling afhangen. Een soort contrôle bezitten wij voor het geval  $\varphi = 0$ ,  $n = 1$ . Volgens (14<sup>a</sup>) wordt dan  $a_\infty = 1/16 \pi^2 \times (b_g)_\infty \alpha$ , daar  $1 - \varepsilon n$  alsdan  $= 1 - n$  wordt, derhalve  $(1 - \varepsilon n) : n(1 - n^2) = 1 : n(1 + n) = 1/2$ . Doch volgens de gewone (statische) theorie moet het aantrekkend viriaal (zie § IX)

$$= 2/3 \pi N n \int_s^a r^3 \frac{dP_r}{dr} dr \text{ zijn. Is nu } a = s, \text{ dan kan } r^3 = s^3 \text{ vóór het}$$

integraalteekken worden gebracht, en heeft men dus  $2/3 \pi N n s^3 (P_r)_s^a = = 2/3 \pi N n s^3 (0 - (-M)) = 2/3 \pi N s^3 \times MN : v$  (daar  $n = N : v$  is). Met  $MN = \alpha$  vindt men derhalve voor  $a$  de waarde  $(b_g)_\infty \times \alpha$ , zoodat de voorfactor  $= 1$  zou moeten zijn, en niet  $= 1/16 \pi^2 = 0,617$ , zooals wij hebben gevonden. M. i. is hiernit slechts deze conclusie te trekken, dat zelfs in het grensgeval  $T = \infty$  ( $\varphi = 0$ ) de distributiefactor aan het molecuuloppervlak (de aantrekkingsfeer is bij de aanname  $a = s$  oneindig dun) niet  $= 1$  is, zooals wij boven aannamen bij de toepassing der statische methode, maar iets geringer tengevolge van den zelfs bij  $n = 1$  niet verdwijnenden invloed der *passerende* moleculen, door welke niet de volle maximumwaarde  $M$  der krachtsfunctie wordt bereikt. En het verschil zal van den aard der gebruikte krachtsfunctie afhangen.

Voor  $n = 0,6$  zal de voorfactor van  $(b_g)_\infty \alpha$  de waarde  $\frac{2,467 \times 0,483}{1,2 \times 0,64} = \frac{1,192}{0,768} = 1,55$  verkrijgen, hetgeen hierop neerkomt dat men zich de aantrekking geconcentreerd zou kunnen denken op een afstand  $s \sqrt{1,55} = 1,16s$  van het middelpunt van het beschouwde molecuul (de attractiesfeer strekt zich bij  $n = 0,6$  tusschen  $s$  en  $1,67s$  uit).

Wij zagen reeds dat  $\varphi$  de grootheid  $M : \frac{1}{2} \mu u_0^2$  voorstelt. Hierin stelt  $u_0$  de gemiddelde relatieve snelheid voor, waarmede de moleculen de attractiesfeer binnendringen. Maar deze snelheid wordt binnen de attractiesfeer met een zeker bedrag vermeerderd, zoodat  $u_0$  niet in *onmiddellijk* verband met de temperatuur zal staan. Bij *zeer groote volumina* kunnen wij echter deze geringe wijziging in de snelheid tegenover het veel grootere baangedeelte, hetwelk met de snelheid  $u_0$  doorloopen wordt, geheel verwaarloozen. Eerst bij kleine volumina zal dit niet meer mogen geschieden, en zullen er dientengevolge nieuwe complicaties optreden.

Wij kunnen nu schrijven:

$$\varphi = \frac{M}{\frac{1}{2} \mu u_0^2} = \frac{MN}{\frac{1}{2} \mu N u_0^2} = \frac{\alpha}{2 \times \frac{3}{2} RT} = \frac{1/3 \alpha}{RT},$$

aangezien het gemiddelde kwadraat van de *relatieve* snelheid 2-keer dat van het snelheidskwadraat  $U_0^2$  zelf is, en voor  $\frac{1}{2} \mu N U_0^2$  kan geschreven worden  $\frac{3}{2} RT$ . Volgens al het boven ontwikkelde zal dus voor  $a$  volgens (14<sup>a</sup>) geschreven kunnen worden — althans bij niet al te lage temperaturen, en wanneer ook hogere machten van  $\varphi$  worden in aanmerking genomen:

$$a = a_\infty \left( 1 + \gamma_1 \frac{1/3 \alpha}{RT} + \gamma_2 \left( \frac{1/3 \alpha}{RT} \right)^2 + \dots \right), \quad \dots \quad (15a)$$

terwijl bij *lage* temperaturen ( $\varphi$  dicht bij  $\varphi_0 = 1 : k^2$ ) volgens (14<sup>b</sup>) een uitdrukking van den vorm

$$a = a_\infty \left( 1 - \lambda \log \frac{1}{3} \sqrt{1 - \frac{x}{RT}} \right) \dots \dots \dots (15b)$$

beter aan het doel zal beantwoorden. Hierin is  $x = k^2 \times \frac{1}{3} \alpha = \frac{n^2}{1-n^2} \times \frac{1}{3} \alpha$ , terwijl er op gelet moet worden dat de *log* thans negatief is, zoodat het — teeken voor  $\lambda$  weer positief wordt.

Wij hebben er reeds vroeger op gewezen dat de onderstelling van een *uiterst* dunne attractiesfeer, zooals nog wel eens wordt aangenomen, om verschillende redenen <sup>1)</sup> geheel moet worden buitenge-

<sup>1)</sup> Zie onze eerste Verhandeling.

sloten. Hierbij sluit zich nog de omstandigheid aan, dat bij  $n = 1$  de grenstemperatuur  $T_0$ , waarbij  $a$  logarithmisch oneindig (of althans maximum) zal worden, gegeven is door  $\varphi_0 = 1 : k^2 = (1 - n^2) : n^2$ , wat bij  $n = 1$  voor  $\varphi_0$  de waarde 0 zou geven, d.w.z.  $T = \infty$ . En daar experimenteel is gevonden, dat het genoemde maximum bij zeer lage temperaturen ligt (immers  $a$  blijft bij  $H_2$  b.v. toenemen tot minstens  $1/2 T_k$  toe), zoo moet de aanname  $n = 1$  geheel terzijde worden gesteld.

Daar voor  $1/3 a$  bij  $H_2$  de waarde 0,08 (ongeveer) wordt gevonden, zoo zou met  $n = 0,6$  (d.w.z.  $s = 3/5 a$  of  $a = 1 2/3 s$ ) de waarde van  $RT_0 = 1/3 a : \varphi_0$  worden:  $\frac{0,36}{0,64} \times 0,08 = 0,045$ , d. w. z.  $T_0$  ongeveer 12°,3 absoluut. Dit is zeer goed mogelijk, daar wij gezien hebben, dat bij  $H_2$  de waarde van  $a$  tot 16° abs. nog toenemende is (van  $a_\infty = 370 \times 10^{-6}$  tot  $a_{16^\circ} = 740 \times 10^{-6}$  ongeveer). Zeer opmerkelijk is het feit, dat de grenstemperatuur zoo dicht bij het *tripelpunt* van  $H_2$  (nl. 14° abs.) schijnt te liggen.

Fontanivent, Januari 1918.

(Wordt vervolgd).



**Natuurkunde.** — De Heer VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan van den Heer J. D. VAN DER WAALS JR. : „*Over de theorie der Brownsche beweging*”.

(Mede aangeboden door den Heer H. A. LORENTZ).

Vrij talrijk zijn de methoden volgens welke men getracht heeft den te verwachten middelbaren weg van een in een vloeistof of gas gesuspendeerd „Browsch” deeltje te berekenen. De meeste berekeningswijzen gaan uit van de onderstelling, dat zulk een deeltje bij zijn beweging een wrijving zal ondervinden. Dat wil zeggen, dat men aanneemt, dat uit de kracht, die op het deeltje werkt, een term is af te zonderen tegengesteld aan en evenredig met zijn snelheid en dat het dan overblijvende deel der kracht onafhankelijk van de snelheid zal zijn. Beide krachten zijn een gevolg van de botsing der omringende moleculen van het suspensiemiddel tegen het Brownsche deeltje. De hierop gebaseerde berekeningswijzen komen alle tot het, het eerst door EINSTEIN meegedeelde resultaat, dat :

$$\overline{\Delta^2} = \frac{RT}{N} \frac{1}{3\pi\zeta a} t. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

- Hierin is  $R$  = de absolute gasconstante
- $N$  = het aantal moleculen per gram-molecuul.
- $\zeta$  = de wrijvingscoëfficiënt van het medium.
- $a$  = de straal van het deeltje.
- $t$  = de tijd.

$\Delta$  = de in den tijd  $t$  verkregen nitwijking in een bepaalde richting b.v. in de richting der  $X$ -as. Ik zal  $\Delta$  in het vervolg kortweg de nitwijking noemen. Ook zal ik van de kracht spreken, wanneer ik de  $X$ -component der kracht bedoel. De streep boven  $\Delta^2$  beteekent, dat de gemiddelde waarde voor *alle* (een groot aantal) gesuspendeerde deeltjes is genomen.

Bij de afleiding van deze formule is aangenomen, dat de wrijvingskracht kan worden voorgesteld door de daarvoor door STOKES aangegeven formule :

$$K = 6 \pi \zeta a \dot{x}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Gaan wij na de wijze, waarop b.v. LANGEVIN tot de formule voor  $\overline{\Delta^2}$  komt. Hij gaat uit van:

$$m \ddot{x} = -6 \pi \zeta a \dot{x} + X \dots \dots \dots (3)$$

waarin  $X$  de onregelmatige kracht zal zijn, die niet van de snelheid afhangt. Door vermenigvuldigen met  $x$  krijgen wij:

$$\frac{m}{2} \frac{d^2 x^2}{dt^2} - m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = -3 \pi \zeta a \frac{dx^2}{dt} + X x.$$

Vervolgens nemen wij middelwaarden waarbij  $Xx$  wegvalt; tevens stellen wij  $\frac{dx^2}{dt} = z$  en  $m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{RT}{N}$ , wat de differentiaal-vergelijking:

$$\frac{m}{2} \frac{dz}{dt} + 3 \pi \zeta a z = \frac{RT'}{N}$$

oplevert, door welke integratie LANGEVIN tot vergelijking (1) komt. Nu is het duidelijk, dat hierin een inconsequentie ligt opgesloten. Wanneer men vergelijking (3) met  $\dot{x}$  vermenigvuldigt en vervolgens over alle deeltjes middelt, verkrijgt men:

$$\overline{m \dot{x} \ddot{x}} = -6 \pi \zeta a \overline{\dot{x}^2}.$$

Het linkerlid is  $\frac{m}{2} \frac{d \overline{\dot{x}^2}}{dt}$  welke grootheid dus kleiner dan nul is.

$\overline{\dot{x}^2}$  kan dus niet constant blijven, maar het moet exponentieel tot nul dalen d. w. z. dat de Brownsche beweging niet steeds door zou gaan, maar dat de deeltjes door de wrijvingskracht weldra tot rust zouden worden gebracht. Toch stelt LANGEVIN  $\overline{m \dot{x}^2} = \frac{RT}{N}$ . En het is alleen aan deze inconsequentie te danken, dat hij voor  $\overline{\Delta^2}$  de waarde van (1a) vindt.

Niet tegen elke afleiding van (1a), die op de onderstelling van een wrijving tegen de thermische beweging <sup>1)</sup> der Brown'sche deeltjes

<sup>1)</sup> Onder *thermische* of *ware* snelheid van een deeltje zal ik verstaan de snelheid die een deeltje op een bepaald oogenblik heeft en waarvoor dus geldt  $m \dot{x}^2 = \frac{RT}{N}$ . Daar tegenover zal ik stellen de *meetbare* snelheid. Deze zal gedefinieerd worden door  $\frac{\Delta}{t}$ , waarin  $\Delta$  de in een meetbaren tijd  $t$  verkregen uitwijking is.  $t$  zal van de orde van 1 sec. zijn. De middelbare waarde der meetbare snelheid zal natuurlijk onafhankelijk zijn van het oogenblik, waarop men met het meten aanvangt. Zij zal echter afhankelijk zijn van de lengte van het interval  $t$ , daar de middelbare waarde van  $\Delta$  slechts evenredig aan  $\sqrt{t}$  toeneemt. Vergelijk verder Aanmerking IV aan het eind van dit opstel.



$$\frac{d\bar{x}}{dt} = -p^2 \bar{x} + q \dots \dots \dots (C)^1)$$

waarin  $q$  een herhaaldelijk van teeken wisselende functie van  $t$  zal zijn, waarvan de waarde *statistisch onafhankelijk* van  $\bar{x}$  is. Uit deze formule leidden wij met behulp van kinetische beschouwingen een formule voor  $\overline{\Delta^2}$  af welke de gedaante had:

$$\overline{\Delta^2} = \frac{C}{\alpha^2} t \dots \dots \dots (1b)$$

$C$  stelt een constante voor, waarvan wij de waarde op het oogeblik in het midden kunnen laten. Vergelijken wij deze waarde, met EINSTEIN's waarde (vergelijking (1a)) dan zien wij, dat zij beide zijn voor te stellen door:

$$\Delta^2 = b t \dots \dots \dots (1)$$

met  $b = \text{constant}$ . D. w. z. dat de middelbare uitwijking evenredig is aan  $\sqrt{t}$ . Dit is niets anders dan het bekende resultaat van de kansrekening voor de som van een groot aantal termen, wanneer de mathematische verwachting voor die som 0 is. Ik zal in het vervolg aannemen, dat  $\Delta^2$  zeker door een vergelijking van de gedaante (1) zal worden voorgesteld<sup>2)</sup>. De vraag zal dan nog slechts zijn  $b$  te berekenen. Het verschil tusschen (1a) en (1b) is, dat deze grootheid volgens (1a) omgekeerd evenredig met  $\alpha$ , volgens (1b) met  $\alpha^2$  is. De proeven, die door Mej. SNETHLAGE<sup>3)</sup> zijn verricht, hebben aangetoond, dat vergelijking (1b) zeker niet juist kan zijn, wat des te merkwaardiger is, omdat ook andere kinetische afleidingen van  $A^2$  vergelijkingen van dezen vorm hadden opgeleverd<sup>4)</sup>.

Zoo waren wij voor de moeilijkheid geplaatst, dat het experiment uitspraak deed vóór vergelijking (1a), terwijl de afleiding van (1b), hoewel niet steeds boven bedenking verheven, mij toch veel minder aanvechtbaar voorkwam, dan het invoeren van een wrijvingskracht tegen de thermische beweging, zooals die aan (1a) ten grondslag lag. Ik heb de gelegenheid gehad over de afleiding van beide for-

1) Zie voor de rechtvaardiging van deze vergelijking de uiteenzetting in Aanmerking I aan het eind van deze medeeling.

2) Een nader bewijs van deze onderstelling vindt men in Aanmerking II aan het einde van dit opstel.

3) A. SNETHLAGE. Moleculair-kinetische verschijnselen in gassen, inzonderheid de Brownsche Beweging. Academisch Proefschrift. Amsterdam 1917. B. Experimenteel gedeelte.

4) VON SMOLUCHOWSKI. Ann. d. Phys. 21 p. 769. Ann. 1906.  
A. SNETHLAGE. l. c. Hoofdstuk II.

mules te spreken met verschillende physici, als LORENTZ, EINSTEIN, EHRENFEST, ORNSTEIN en ZERNIKE en het is gedeeltelijk aan hun opmerkingen te danken, dat ik thans meen in staat te zijn een berekeningswijze van  $\overline{\Delta^2}$  te geven, die, zonder van de onderstelling van een wrijving tegen de thermische snelheid uit te gaan, althans wat de afhankelijkheid van  $\alpha$  aangaat tot het juiste resultaat (1a) voert.

Ik zal daartoe uitgaan van de eenvoudige formule:

$$\ddot{x} = w(t)$$

welke geïntegreerd oplevert:

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t + \int_0^t w(\theta) \cdot (t-\theta) d\theta. \quad \dots \quad (4)^1$$

De in den tijd  $t$  afgelegde weg is  $x - x_0 = \Delta$ . Vermenigvuldigt men deze vergelijking met  $w(t)$  en neemt middelwaarden voor alle deeltjes, dan wordt  $\overline{\dot{x}_0 w(t)} = 0$ , dus

$$\overline{\Delta \cdot w(t)} = w(t) \int_0^t w(\theta) \cdot (t-\theta) d\theta \quad \dots \quad (5)$$

Het rechterlid is negatief en wel een constante welke ik door  $Q$  zal voorstellen, d. w. z. het is onafhankelijk van de waarde van  $t$  mits deze niet te klein wordt genomen. Het bewijs hiervan zal ik geven in aanmerking III aan het einde van dit opstel. Deelen wij deze vergelijking door  $t$ , dan blijkt, dat ook

$$\frac{\Delta}{t} \cdot w(t) < 0 \quad \dots \quad (5a)$$

op grond hiervan kunnen wij stellen

$$w(t) = -r^2 \frac{\Delta}{t} + s \quad \dots \quad (6)^2$$

waarin

$$s\Delta = 0 \quad \dots \quad (7)$$

Vermenigvuldigt men deze vergelijking met  $\Delta$  en middelt men, dan verkrijgt men:

$$\overline{\Delta \cdot w(t)} = -r^2 \frac{\overline{\Delta^2}}{t} = -Q \quad \text{of} \quad r^2 = \frac{Q}{b} \quad \dots \quad (8)$$

Men zou vergelijking (6) als volgt onder woorden kunnen brengen: Men kan de kracht, die op een gegeven oogenblik op een deeltje werkt, scheiden in een *wrijvingskracht tegen de meetbare beweging*

<sup>1)</sup> Vergelijk Aanmerking II aan het eind van dit opstel.

<sup>2)</sup> Vergelijk Aanmerking I aan het eind van dit opstel.

en een term, die onafhankelijk van de meetbare snelheid is. De scheiding in wrijvingskracht en onregelmatige kracht is dus wel geoorloofd, *mits men aanneemt, dat de meetbare, niet de thermische snelheid door zulk een kracht gedempt wordt.* Konden wij  $v^2$  nu langs kinetischen weg berekenen, dan zouden wij tot een volledige afleiding van EINSTEIN'S formule voor  $\overline{\Delta^2}$  kunnen komen. De berekening van  $v^2$  zal echter wel met groote moeilijkheden gepaard gaan. Het komt mij echter niet zeer gewaagd voor er de waarde  $6\pi\zeta a$  uit de formule van STOKES voor aan te nemen; eventueel de door CUNNINGHAM gecorrigeerde waarde. Op het eerste gezicht lijkt dit willekeurig, maar het komt mij voor, dat men het minder willekeurig zal vinden, wanneer men zich goed rekenschap geeft, van wat de door de formule van STOKES gegeven wrijving eigenlijk is.

Denkt men een in een gas gesuspendeerd deeltje, dat men onder invloed van de zwaartekracht laat vallen om er op de gebruikelijke wijze den straal van te bepalen. Ook hier is een meetbare beweging (hier de valbeweging) en een thermische beweging. Men krijgt nu een juiste formule voor de meetbare beweging door aan te nemen, dat zich een wrijvingskracht  $-6\pi\zeta a \dot{z}$  tegen *deze* beweging verzet. En nu wij aantoonde, dat ook bij de Brownsche beweging zich een kracht: een constante  $\times$  de meetbare snelheid tegen de meetbare beweging verzet, ligt het wel zeer voor de hand aan die constante de waarde  $-6\pi\zeta a$  toe te kennen. Dit wordt nog plausibeler wanneer wij ons vergelijking (C) herinneren:

$$\frac{d\mathfrak{K}}{dt} = -p^2 \dot{x} + q.$$

Zij houdt in dat, indien er een snelheid  $\dot{x}$  is, deze trachten zal een kracht in tegengestelden zin in het leven te roepen en dus te veroorzaken, dat het product kracht  $\times$  snelheid negatief wordt. Zij wordt daarbij tegengewerkt, doordat de kracht tracht een snelheid in haar eigen zin te ontwikkelen en dus het bedoelde product positief te maken. Is  $\dot{x}$  de thermische snelheid dan heffen beide tendenties elkaar op: het product blijft gemiddeld nul. De thermische snelheid wisselt herhaaldelijk van teeken. Is er echter gedurende langer tijd een snelheid in denzelfden zin, dan blijft  $\frac{d\mathfrak{K}}{dt}$  ook al dien tijd hetzelfde teeken behouden, en er zal zich een kracht tegengesteld aan die snelheid ontwikkelen. En dat wel onverschillig of die langduriger snelheid aan de zwaartekracht te danken is, of dat zij een meetbare snelheid bij de Brownsche beweging representeert.

Schrijven wij deze waarde aan  $v^2$  toe, dan levert (7):

$$\overline{\Delta^2} = Q \frac{1}{6\pi\zeta a} t$$

$Q$  is door vergelijking (5) gedefinieerd. Het zou echter niet mogelijk zijn haar waarde hieruit te bepalen, zonder nadere, misschien vrij onzekere, hypothesen in te voeren. Men kan gelukkig echter op andere wijze een waarde voor  $\overline{\Delta^2}$  vinden, n.l. door vergelijking (6) met  $\Delta$  te vermenigvuldigen en in het oog te houden dat  $\frac{d\Delta}{dt} = \dot{x}$  en  $\frac{1}{m} w(t) = \frac{d^2\Delta}{dt^2}$ .

Dan vindt men:

$$\Delta \frac{d^2\Delta}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2\Delta^2}{dt^2} - \left(\frac{d\Delta}{dt}\right)^2 = -\frac{1}{m} \cdot 6\pi\zeta a \frac{\Delta^2}{t} + s \cdot \Delta \quad (9)$$

stelt men nu nog, wegens  $\overline{\Delta^2} = bt$ , dat  $\frac{d^2\overline{\Delta^2}}{dt^2} = 0$  en verder

$\left(\frac{d\Delta}{dt}\right)^2 = \overline{x^2} = \frac{RT}{mN}$  dan vindt men als men weer over alle deeltjes middelt:

$$\overline{\Delta^2} = \frac{RT}{N} \frac{1}{6\pi\zeta a} t \quad (1c)$$

Deze uitkomst is half zoo groot als die van vergelijking (1a). De goede uitkomst, die Mej. SNETHLAGE vond bij de berekening van  $N$  uit haar waarnemingen met behulp van (1a), toont wel aan, dat deze vergelijking boven (1c) te verkiezen is. Ofschoon zij dus niet tot het juiste resultaat voert, hoop ik dat bovenstaande afleiding ertoe zal kunnen bijdragen ons inzicht in de theorie der Brownsche beweging te verhelderen.

Wil men niet van de onderstelling  $\overline{\Delta^2} = bt$  uitgaan, dan kan men vergelijking (9) ook oplossen na middelwaarden genomen te hebben op een wijze, die veel aan die van LANGEVIN herinnert. Stelt men  $\overline{\Delta^2} = \xi$ , terwijl  $\left(\frac{d\Delta}{dt}\right)^2 = \frac{RT}{mN}$  genomen wordt, dan vindt men voor  $\xi$  de differentiaalbetrekking <sup>1)</sup>

$$\frac{1}{2} \frac{d^2\xi}{dt^2} + r^2 \frac{\xi}{t} = \frac{RT}{Nm} \quad (10)$$

Neemt men eerst deze vergelijking zonder tweede lid, en substitueert men  $\xi = \eta\sqrt{t}$ , dan komt:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{2r^2}{t} - \frac{1}{4t^2}\right) \eta = 0.$$

<sup>1)</sup> De hier volgende oplossing van deze vergelijking ben ik verschuldigd aan een vriendelijke schriftelijke mededeeling van Prof. W. KAPTEYN uit Utrecht, aan wien ik hiervoor gaarne mijn dank betuig.

Stelt men nu nog  $t = \frac{\tau^2}{8\rho^2}$ , dan vindt men:

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\eta}{d\tau} + \left(1 - \frac{1}{\tau^2}\right)\eta = 0.$$

Dit is de Besselsche differentiaalvergelijking voor  $n = 1$ , waarvan de oplossing in de gebruikelijke notatie luidt:

$$\eta = A I_1(\tau) + B Y_1(\tau).$$

Dus:

$$\overline{\Delta^2} = \sqrt{t} [A I_1(2r\sqrt{2t}) + B Y_1(2r\sqrt{2t})]$$

zou de oplossing zijn van de vergelijking zonder tweede lid. Voor de vergelijking met tweede lid komt erbij de term:

$$\overline{\Delta^2} = \frac{RT}{N} \frac{1}{6\pi\zeta a} t.$$

Schrijft men voor  $r^2$  weer  $\frac{6\pi\zeta a}{m}$ , dan blijkt, voor  $t$  van de orde 1 sec., het argument van  $I_1$  en  $Y_1$  van de orde  $10^4$  te worden. Voor dergelijke groote argumenten mogen de termen met de Besselsche functies verwaarloosd worden, zoodat men vergelijking (1 c) overhoudt.

Aanmerking I. De vergelijking (C) van pag. 1322  $\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = -p^2 \dot{x} + q$  is door Mej. SNETHLAGE en mij uit vergelijking (A)

$$\overline{\mathfrak{X}} \ddot{x} = 0$$

afgeleid en gebruikt ter berekening van  $\overline{\Delta^2}$ . Tegen deze vergelijking en het gebruik, dat wij ervan maakten, zijn bezwaren ingebracht door ORNSTEIN en ZERNIKE. Naar het mij voorkomt ten onrechte. Maar het feit, dat zij er bezwaar tegen inbrengen toont aan, dat de juistheid van deze en soortgelijke vergelijkingen nadere toelichting vereischt. Op zich zelf is vergelijking (C) natuurlijk niet onjuist, maar er is ook niets uit af te leiden. Zij krijgt pas inhoud door de beteekenis, die men aan  $p^2$  en  $q$  toekent.

Vermenigvuldigen wij (C) met  $m \dot{x}$ , dan komt <sup>1)</sup>

$$m \dot{x} \frac{d\mathfrak{X}}{dt} = -m p^2 \dot{x}^2 + m q \dot{x}.$$

Middelt men vervolgens over alle deeltjes en neemt men vergelijking (B) in aanmerking, dan vindt men:

$$-\overline{\mathfrak{X}^2} = -m p^2 \overline{\dot{x}^2} + \overline{m q \dot{x}}.$$

<sup>1)</sup> Deze afleidingswijze dank ik aan een mondelinge mededeeling van den heer ZERNIKE.



Tot hiertoe lieten wij  $p^2$  en  $q$  geheel onbepaald. Kiezen wij nu echter

$$p^2 = \frac{\overline{\mathfrak{K}^2}}{m\overline{x^2}} \dots \dots \dots (D)$$

dan blijkt

$$\overline{q\dot{x}} = 0 \dots \dots \dots (E)$$

Voor een in stationairen toestand verkeerende zwerm gesuspendeerde deeltjes is  $p^2 = \text{constant}$ . De vergelijking (C) wil dus niets anders zeggen, dan dat ik voor een bepaald deeltje de  $\frac{dR}{dt}$  scheidt

in twee termen. Als eerste term kies ik  $-p^2\dot{x}$  met  $p^2 = \frac{\overline{\mathfrak{K}^2}}{m\overline{x^2}}$ .

De functie van  $t$ , die dan overblijft, noem ik  $q$ ; zij heeft de eigenschap dat  $\overline{q\dot{x}} = 0$  mits ik middel over alle deeltjes. Schrijf ik

nu  $\frac{d\overline{\mathfrak{K}}}{dt} = m \frac{d^2\overline{x}}{dt^2}$  dan wordt (C) een differentiaal-vergelijking, die men

kan integreeren. En vervolgens kan men middelwaarden nemen over de verschillende deeltjes. Wat ORNSTEIN en ZERNIKE tegen deze wijze van doen hebben is niet duidelijk. Geheel onbegrijpelijk is, waarom zij beweren, dat (C) geen differentiaalvergelijking zou zijn. Duidelijker is hun verklaring, dat (C) niet voor ieder oogenblik zou gelden. Maar zij is niet juist. (A), (B), (C), (D) en (E) gelden natuurlijk voor ieder oogenblik, daar bij een stationaire beweging de verschillende oogenblikken gelijkwaardig zijn. Eigenlijk bedoelen ORNSTEIN en ZERNIKE ook niet, dat deze vergelijkingen niet steeds zonden gelden, maar verklaren zij dit van andere vergelijkingen die men verkrijgt wanneer men alle gemiddelden niet neemt over alle deeltjes maar over een  $v$ -groep. Daaronder verstaan zij een groep omvattende alle deeltjes, die op het oogenblik  $t_0$  dezelfde snelheid  $\dot{x}_0$  bezaten. Middelt men nu over die groep, dan geldt vergelijking (B) zelfs niet op het oogenblik  $t_0$  terwijl (A) en (E) wél op het oogenblik  $t_0$  maar niet op een ander oogenblik gelden<sup>1)</sup>. Schrijven wij de vergelijkingen met dergelijke groep-gemiddelden:

$$\overline{\mathfrak{K}^v \dot{x}^v} = 0 \quad (A \text{ bis}) \text{ enz.}$$

<sup>1)</sup> De schrijvers berekenen dit uitvoeriger. Qualitatief is het echter gemakkelijk in te zien. Voor zulk een groep is  $\overline{\dot{x}^2}$  niet constant. Op  $t_0$  heeft men nl.  $\dot{x}^2 = \dot{x}_0^2$  en na niet te korten tijd  $\overline{\dot{x}^2} = \frac{RT}{Nm}$ .

dan hebben ORNSTEIN en ZERNIKE ongetwijfeld gelijk in hun bewering dat (*A bis*) . . . (*E bis*) niet steeds gelden. Maar even zeker hebben zij ongelijk wanneer zij beweren, dat de geldigheid dezer vergelijkingen door Mej. SNETHLAGE of mij is aangenomen of in onze herleidingen is gebruikt. Wij hebben ons steeds met gemiddelden over alle deeltjes, nooit met dergelijke *v*-groep gemiddelden bezig gehouden.

Wanneer men dus van bijkomstige misverstanden afziet, komt het mij voor, dat men het bezwaar van ORNSTEIN en ZERNIKE zoo zou kunnen omschrijven, dat zij meenen, dat wij van *v*-groep gemiddelden hadden moeten gebruik maken en dat wij dat ten onrechte niet deden. In verband hiermee herinner ik eraan, dat vergelijking

(*C*) met de waarde  $p^2 = \frac{\overline{\delta^2}}{m\bar{x}^2}$  voor ieder deeltje afzonderlijk geldig

is en van geen enkel gemiddelde afhankelijk is. Zij kan zonder bedenken geïntegreerd worden, waarbij dan nog, desgewenscht, later vergelijking (*E*) in aanmerking genomen kan worden. Wil men  $\overline{\Delta^2}$  berekenen dan neemt men steeds het algemeen-gemiddelde. Hoe en waarom men ter berekening van deze grootheid een *v*-groep-gemiddelde zou kunnen te pas brengen is mij niet duidelijk en is ook door ORNSTEIN en ZERNIKE niet aangetoond <sup>1)</sup>.

Het komt mij dus voor, dat ORNSTEIN en ZERNIKE er niet in geslaagd zijn een onjuistheid in onze afleiding aan te wijzen. Toch twijfel ik er niet aan of deze moet bestaan. Ik meen boven in vergelijking (6) de fout te hebben aangewezen. Wij hadden vroeger steeds gemeend, dat  $\Delta$  de som was van een aantal termen, die statistisch van elkaar onafhankelijk waren. Vergelijking (6) toont aan, dat de na een oogenblik *t* optredende aangroeiingen afhankelijk zijn, van de op dat oogenblik reeds verkregen uitwijking. En dat wij door deze correlatie buiten beschouwing te laten niet het juiste bedrag voor de middelbare waarde der uitwijkingen zullen vinden, ligt voor de hand.

Men zou nu kunnen meenen, dat deze opmerking meebracht, dat ook de uitkomst  $\overline{\Delta^2} = bt$  in twijfel getrokken moest worden. Immers de daarvoor aangehaalde stelling der waarschijnlijkheidsrekening is alleen geldig als de verschillende termen der som onafhankelijk van elkander zijn, wat hier niet het geval is. Op p. 1325 en 1326 is aangetoond,

<sup>1)</sup> De door schrijvers afgeleide formules voor *v*-groep gemiddelden zouden misschien van waarde kunnen zijn voor een andere vraag, n.l. deze: hoe vindt de verspreiding van deeltjes die aanvankelijk dezelfde snelheid hebben over de verschillende snelheden plaats?

dat er toch geen twijfel aangaande de geldigheid van deze formule behoeft te bestaan en dat zij zelfs uit vergelijking (6) kan worden afgeleid.

Ik heb boven vergelijking (C) uit (B) afgeleid. Ik heb dat gedaan omdat een dergelijke afleiding ook voor andere analoge gevallen geldig is, b.v. voor vergelijking (6) op p. 1323. Wanneer het ons slechts om vergelijking (C) te doen is kunnen wij die ook anders afleiden, zooals door Mej. SNETHLAGE en mij <sup>1)</sup> geschied is. Deze afleiding brengt ons zelfs nog verder dan de boven gegevene. Zij geeft ons recht tot de uitspraak, dat de grootheid  $\overline{q}$  statistisch geheel onafhankelijk van  $\dot{x}$  is. Deze uitspraak involveert  $\overline{q\dot{x}} = 0$ , maar zij omvat meer. Uit haar volgt b.v.  $\overline{q^2 \dot{x}} = 0$  onafhankelijk van de waarde van  $\dot{x}$  waarvoor de  $\dot{x}$ -groep <sup>2)</sup> is genomen, wat uit het eenvoudige feit, dat  $\overline{q\dot{x}} = 0$  niet is af te leiden.

De hier gegeven afleiding rechtvaardigt tevens de afleiding van de boven gegeven vergelijking (6) en (7) uit (5a). Toch geven deze vergelijkingen aanleiding tot de volgende opmerkingen. In de eerste plaats moet de constantheid  $r^2$  aangetoond worden. Deze volgt direct uit (8). Wij hadden ook van (5) n.l.  $\overline{\Delta \cdot w(t)} < 0$  kunnen uitgaan zonder eerst door  $t$  te deelen.

Dan hadden wij kunnen stellen:

$$w(t) = -r'^2 \Delta + s' \dots \dots \dots (6a)$$

Vermenigvuldiging met  $\Delta$  en vervolgens middelen zou dan geleverd hebben:

$$\overline{\Delta \cdot w(t)} = -r'^2 \overline{\Delta^2} = -Q$$

zoodat  $r'^2$  niet constant was uitgevallen. Daarom heb ik er de voorkeur aan gegeven (5) eerst door  $t$  te deelen en te stellen

$$w(t) = -r^2 \frac{\Delta}{t} + s$$

met  $r^2 = \text{constant}$ . Bovendien is nu aan  $\frac{\Delta}{t}$  het begrip van „meetbare

<sup>1)</sup> De Heeren ORNSTEIN en ZERNIKE verklaren i.e. dat wij formule (C) zonder bewijs meedeelen en geven dan een bewijs dat echter niet van het onze afwijkt behalve in dit detail dat wij *direct* over alle deeltjes middelen en zij trapsgewijs eerst over de deeltjes van een  $v$ -groep en dan over de verschillende  $v$ -groepen. De uitkomst is natuurlijk identiek.

<sup>2)</sup> Onder een  $\dot{x}$ -groep wordt hier eenvoudig verstaan de groep der deeltjes die een bepaalde  $\dot{x}$  hebben. Het is dus iets anders als een „ $v$ -groep van ORNSTEIN en ZERNIKE”, waaronder verstaan wordt de groep der deeltjes die op het oogenblik  $t_0$  de bepaalde snelheid  $v$  hadden, maar op het oogenblik, waarop wij de groep beschouwen, zeer verschillende snelheden.

snelheid" te verbinden, wat aanleiding kan geven tot de toepassing van de formule van STOKES.

Een tweede opmerking naar aanleiding van formule (6) is de volgende. Gaat men de uitwijkingen  $\Delta$ ,  $\Delta'$ ,  $\Delta''$  enz. na, verkregen in de tijden  $t$ ,  $t'$ ,  $t''$ , enz. die zoo gekozen zijn, dat zij alle eindigen op het oogenblik  $t_2$  en dus beginnen op verschillende tijdstippen  $t_1$ ,  $t_1'$ ,  $t_1''$  enz., dan zijn de grootheden  $w(t_2)$  natuurlijk hetzelfde: de versnellingen der deeltjes op het oogenblik  $t_2$ . Zij worden echter op verschillende wijze in twee termen verdeeld. Stellen wij weer

$r^2 = \frac{Q}{b}$  dan kunnen wij schrijven

$$w(t_2) = -r^2 \frac{\Delta}{t} + s \text{ met } \overline{s \Delta} = 0$$

maar ook 
$$w(t_2) = -r^2 \frac{\Delta'}{t} + s' \text{ met } \overline{s' \Delta'} = 0$$

of 
$$w(t_2) = -r^2 \frac{\Delta''}{t} + s'' \text{ met } \overline{s'' \Delta''} = 0 \text{ enz.}$$

Dezelfde deeltjes, die tezamen een groep vormen met dezelfde  $\Delta$ , zullen niet alle dezelfde  $\Delta'$  hebben. Deze omstandigheid doet geen afbreuk aan de geldigheid van (6) en (7) en het daarvan gemaakte gebruik.

Aanmerking II. Oppervlakkig beschouwd ziet vergelijking (4)

$$\Delta = \dot{x}_0 t + \int_0^t w(\theta) (t-\theta) d\theta$$

er vreemd uit. Zij schijnt geheel in strijd met  $\Delta^2 = bt$ . Immers quadrateert men en neemt men gemiddelden, dan treedt een term  $\dot{x}_0^2 t^2$  op, die geenszins klein is vergeleken bij de andere termen. Kiest men echter de groep deeltjes, die op het oogenblik  $t=0$  een bepaalde snelheid  $\dot{x}_0$  hebben, dan kan men voor die groep schrijven, dat:

$$\overline{\int_0^t w(\theta) d\theta} = -\dot{x}_0$$

Immers op het oogenblik  $t$  zullen zij over alle snelheidsgroepen zijn verdeeld en zullen zij een gemiddelde snelheid nul hebben. Tenminste dit zal zoo zijn indien  $t$  niet te klein genomen wordt. Is  $t$  van de orde van 1 sec. dan is dat ruimschoots voldoende. In de uitdrukking voor  $\overline{\Delta^2 \dot{x}}$  zullen dus de termen

$$\left\{ \dot{x}_0^2 + \left( \int_0^t w(\theta) d\theta \right)^2 + 2 \cdot \dot{x}_0 \cdot \int_0^t w(\theta) d\theta \right\} t^2$$

tegen elkaar wegvallen. Een directe discussie van de wijze, waarop de overblijvende termen van  $t$  afhangen zou zeer lastig zijn. Maar althans ziet men zoo in, dat het opvallend optreden van termen met  $t^2$  slechts schijn is. De gedaante van (4) is dus min of meer misleidend, wat echter geen bezwaar is tegen het gebruik, dat wij er boven van maakten. Dat (4) inderdaad met  $\overline{\Delta^2} = bt$  verenigbaar is, volgt uit de herleiding via vergelijkingen (5) tot (10).

Aanmerking III. Op pag. 1323 hebben wij aangenomen, dat

$$\overline{w \Delta} < 0$$

Dit is op verschillende wijzen aan te toonen. In de eerste plaats zouden wij kunnen uitgaan van de op pag. 1322 bewezen betrekking  $\overline{\Delta^2} = bt$ , welke na twee maal differentieeren levert:

$$\overline{\mathfrak{R} \Delta} = -m \left( \frac{d\Delta}{dt} \right)^2$$

Stelt men nu weer  $\mathfrak{R} = -6 \pi \zeta a \frac{\Delta}{t} + s$  met  $\overline{s \Delta} = 0$ , dan vindt men onmiddellijk:

$$6 \pi \zeta a \frac{\overline{\Delta^2}}{t} = -m \left( \frac{d\Delta}{dt} \right)^2 = \frac{RT}{N}$$

Men kan echter ook den in de tekst pag. 1323 aangegeven weg volgen en aantoonen, of althans hoogst plausibel maken, dat:

$$w(t_2) \int_{t_1}^{t_2} w(\theta) (t - \theta) d\theta < 0 \dots \dots \dots (5a)$$

Hiertoe merken wij op, dat de beweging omkeerbaar is. De omgekeerde beweging (waarbij natuurlijk *alle* snelheden, zoowel die der deeltjes als die der moleculen van het suspensiemiddel moeten worden omgekeerd) zal ik denken te verlopen tusschen de tijden  $t_3$  en  $t_4$ . Natuurlijk is dan  $t_4 - t_3 = t_2 - t_1$ . Verder heeft men  $w(t_4) = w(t_1)$  en  $w(t_3) = w(t_2)$ , want de krachten, die bij de rechtstreeksche beweging aan het begin van het interval voorkomen, bestaan bij de omgekeerde beweging aan het eind en omgekeerd. Ten slotte wordt bij de omgekeerde beweging de weg  $\Delta' = -\Delta$  afgelegd. Bij de omgekeerde beweging wordt de aan (5a) analoge uitdrukking:

$$\overline{w(t_4) \cdot \Delta} = w(t_4) \int_{t_3}^{t_4} w(\theta) \cdot (t_4 - \theta) d\theta < 0 . . . . (5b)$$

Dit wordt voor de rechtstreeksche

$$-\overline{w(t_1) \Delta} = w(t_1) \int_{t_1}^{t_2} w(\theta) (\theta - t_1) d\theta < 0 , . . . . (5c)$$

want wat bij de omgekeerde beweging  $t_4 - \theta$  heet, wordt bij de rechtstreeksche  $\theta - t_1$ .

Hebben wij dus de juistheid van (5c) bewezen, dan hebben wij voor de omgekeerde beweging (5b) aangetoond. Wegens de gelijkwaardigheid van rechtstreeksche en omgekeerde beweging mogen wij dan tevens (5a) voor de rechtstreeksche beweging bewezen achten. Dit beroep op de omgekeerde beweging is niet noodzakelijk. Men zou de juistheid van (5a) op dezelfde wijze kunnen aantoonen als hier met (5c) is geschied. Voor de voorstelling en uitdrukkingswijze leek het mij iets eenvoudiger van vergelijking (5c) uit te gaan.

Oppervlakkig beschouwd zou men het teeken van deze uitdrukking juist andersom verwachten. Immers kiest men een groep deeltjes, die op  $t_1$  alle dezelfde  $w(t_1)$  hebben en neemt men voor die deeltjes de  $w(\theta)$  op een later oogenblik, en vervolgens het gemiddelde van  $w(\theta)$  over de groep, welke grootheid ik door  $\overline{w(\theta)^{w(t_1)}}$  zal voorstellen, dan zal men vinden, dat de deeltjes allerlei waarden van  $w$  hebben aangenomen, zóó, dat  $\overline{w(\theta)^{w(t_1)}} = 0$ . Tenminste dit zal zoo zijn als  $(\theta - t_1)$  niet zeer klein is; slechts voor zéér kleine waarden van  $(\theta - t_1)$  bestaat er correlatie tusschen de waarden van  $w(\theta)$  en  $w(t_1)$  en dan zal het product  $w(\theta) w(t_1)$  gemiddeld positief zijn.

Dit zou inderdaad juist zijn en tot het omgekeerde teeken voor (5c) leiden, wanneer  $\overline{w(\theta)^{w(t_1)}}$  aperiodisch tot nul naderde. Dat is echter niet het geval. Om dit in te zien, merken wij op, dat wegens de onafhankelijkheid van configuratie en snelheidsverdeeling wij in gemakkelijk begrijpbare notatie kunnen schrijven:

$$\overline{x_{t_1}^{w(t_1)}} = 0$$

Neemt men nu:

$$\int_{t_1}^t w(\theta) d\theta = \dot{x} - \dot{x}_{t_1}$$

en middelt men weer voor de  $w(t_1)$ -groep, waarbij men mag aannemen, dat bij voldoende lange  $t - t_1$  de begin  $w(t_1)$  geen invloed

meer heeft op de eindsnelheid, zoodat  $\overline{x(t)}^{w(t_1)} = 0$ , dan vindt men:

$$\overline{\int_{t_1}^t w(\theta) d\theta}^{w(t_1)} = 0 \dots \dots \dots (11)$$

Denkt men  $w(t_1)$  positief, dan zal bij zéér kleine waarden van  $\theta$  ook  $\overline{w(\theta)}^{w(t_1)} > 0$ . Het nul zijn van de integraal wil dus zeggen, dat op het positieve interval een negatief interval volgt, vóór dat de waarde van  $\overline{w(\theta)}^{w(t_1)}$  merkbaar tot nul daalt <sup>1)</sup>. Vermenigvuldigt men onder het integraalteeken met  $\theta - t_1$ , dan wordt deze factor voor het negatieve interval grooter dan voor het positieve, zoodat

$$\int_{t_1}^t w(\theta) (\theta - t_1) d\theta < 0 \quad \text{wanneer} \quad w(t_1) > 0$$

Op dezelfde wijze blijkt natuurlijk

$$\int_{t_1}^t w(\theta) (\theta - t_1) d\theta > 0 \quad \text{wanneer} \quad w(t_1) < 0$$

Het is waar, dat het verloop van  $\overline{w(\theta)}^{w(t_1)}$  ingewikkelder kan zijn, dan ik hier heb aangenomen. In plaats van één kunnen er meer omkeeringen in het teeken plaats vinden. Niet onwaarschijnlijk wordt  $\overline{w(\theta)}^{w(t_1)}$  door een gedempt periodieke functie voorgesteld of heeft althans een daarop veel gelijkend verloop. Maar in ieder geval moet voor niet te kleine waarden van  $t$  vergelijking (11) gelden, en zullen daarin ongetwijfeld de waarden van  $\overline{w(\theta)}^{w(t_1)}$ , die met  $w(t_1)$  in teeken overeenstemmen, kleiner abscis hebben dan die ervan in teeken verschillen, waardoor de juistheid van (5c) gewaarborgd is.

Aanmerking IV. Op pag. 1325 wees ik erop, dat de verkregen uitkomst voor  $\overline{\Delta^2}$  waarschijnlijk slechts de helft of ongeveer de helft van de ware waarde bedraagt. Het ligt voor de hand te trachten hierin verbetering te brengen, door een andere waarde

<sup>1)</sup> Men kan dit ook uitdrukken door te zeggen, dat  $\overline{w(\theta) w(\theta + \delta)}$  voor zéér kleine waarden van  $\delta$  positief is; voor iets grootere negatief, terwijl het voor groote waarden tot nul daalt. Deze teekenwissel van het product is door ORNSTEIN (deze Verslagen XXVI, p. 1008, § 2) over het hoofd gezien. Tengevolge hiervan komt hij tot de merkwaardige conclusie, dat het niet geoorloofd is aan te nemen, dat  $\frac{d}{dt} \overline{u^2} = 0$ . Want hieruit volgt volgens zijn berekening dat  $\overline{u^2}$  niet constant is doch de som van een lineaire en een periodieke functie van  $t$ !

voor de meetbare snelheid aan te nemen. Wij definieerden de grootheid  $\frac{\Delta}{t}$  als „meetbare snelheid”. Maar de vraag is, of dit nu inderdaad de grootheid is, die men met  $6 \pi \zeta a$  moet vermenigvuldigen om de Stokes'sche wrijvingskracht te vinden. Men zou  $\frac{\Delta}{t}$  natuurlijk kunnen definieeren als het tijd-gemiddelde van de meetbare snelheid van een deeltje, dat in den tijd  $t$  een weg  $\Delta$  aflegt. En wanneer tegen deze verplaatsing zich een wrijvingskracht verzet, is het de vraag of deze kracht wel evenredig aan het tijd-gemiddelde mag genomen worden. Het is te verwachten, dat de meetbare beweging niet eenparig is. Verdeelen wij het interval  $t$  in sub-intervallen, dan is te verwachten, dat de in de eerste dezer sub-intervallen verkregen verplaatsingen minder invloed zullen hebben op de wrijvingskracht, die aan het eind van het interval  $t$  heerscht, dan de verplaatsingen verkregen in de latere sub-intervallen. En die wrijvingskracht aan het eind van het interval was de grootheid, waar het in onze berekening om te doen was.

Bedenkt men verder dat  $\Delta_m = \sqrt{bt}$  en  $v_m = \sqrt{\frac{b}{t}}$  wanneer  $\Delta_m$  de middelbare verplaatsing en  $v_m$  de middelbare waarde van het tijdgemiddelde der meetbare snelheid voorstelt, dan ziet men, dat  $v_m$  met toename van  $t$  afneemt. Het ligt dus voor de hand te onderstellen, dat men een meetbare snelheid zal kunnen invoeren, die met den tijd afneemt, zoodat zij in de latere sub-intervallen kleiner is dan in de eerste. Mocht men op grond hiervan de wrijvingskracht aan het eind van  $t$  nu ook kleiner stellen dan wij deden, en wel half zoo groot <sup>1)</sup>, dan zouden wij voor  $\overline{\Delta^2}$  juist de waarde van de formule van EINSTEIN vinden.

Een eenvoudige berekening leert echter, dat op grond van deze overwegingen de gewenschte correcte niet te verkrijgen is. Daartoe merken wij op, dat de kans, dat een deeltje in een tijd  $t$  een uitwijking  $\Delta$  verkrijgt, wordt voorgesteld door:

$$C e^{-\frac{\Delta^2}{m^2}} d\Delta \quad \text{waarin} \quad m^2 = \frac{2}{3} \overline{\Delta^2}$$

Kiest men nu de groep deeltjes, die alle dezelfde  $\Delta$  hebben, en verdeelt men  $t$  in twee sub-intervallen  $t_1$  en  $t_2$ , dan zullen de verschillende deeltjes der  $\Delta$ -groep in den tijd  $t_1$  verschillende wegen

<sup>1)</sup> Die factor  $\frac{1}{2}$  zou men juist verkrijgen, als men  $v_m$  niet afleidde, door  $\Delta_m$  door  $t$  te deelen, maar door  $\Delta_m$  naar  $t$  te differentieeren.



$\Delta_1$  afleggen, en in den tijd  $t_2$  verschillende wegen  $\Delta_2$ , waarbij natuurlijk  $\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta = \text{constant}$  voor de groep.

Gaat men nu voor de groep de middelwaarde van  $\Delta_1$  na, dan leert een eenvoudige berekening:

$$\overline{\Delta_1} = \Delta \frac{t_1}{t}$$

zoodat eveneens

$$\overline{\Delta_2} = \Delta \frac{t_2}{t}$$

Hierbij is aangenomen, dat de waarden van  $\Delta_1$  en  $\Delta_2$  statistisch onafhankelijk van elkaar zijn, wanneer men niet een  $\Delta$ -groep maar de verzameling van alle deeltjes beschouwt. Zooals bekend is mag men dit aannemen zoolang  $t_1$  en  $t_2$  niet al te klein zijn, d. w. z.  $t_1$  en  $t_2$  moeten voldoende groot zijn, dat de invloed van de initiaal-snelheid en van de initiaal-kracht mogen verwaarloosd worden.

Het blijkt hieruit, dat wij de snelheid der deeltjes gedurende het interval  $t$  mogen scheiden in twee deelen; een *eenparige* snelheid  $\frac{\Delta}{t}$  en een onregelmatige term, die, onafhankelijk van de waarde van  $\Delta$  voor het beschouwde deeltje, even waarschijnlijk positief als negatief is. Het is dus wel zeer waarschijnlijk, dat wij ook de wrijvingskracht kunnen scheiden in een term  $-6\pi\zeta a \frac{\Delta}{t}$  en een onregelmatigen term  $k$ . Daar nu  $\overline{k \cdot \Delta} = 0$  zullen wij  $k$  in  $s$  kunnen opnemen, zoodat wij kunnen schrijven:

$$w(t) = -6\pi\zeta a \frac{\Delta}{t} + s \quad \text{met } s \Delta = 0$$

zooals wij op p. 1323 deden.

Aanmerking V. Ten slotte wil ik nog een opmerking maken naar aanleiding van een door ORNSTEIN<sup>1)</sup> gegeven afleiding van de formule  $\mathfrak{K} \dot{x} = 0$ . Hij gaat daarbij uit van vergelijking (3), die hij schrijft:

$$\frac{du}{dt} = -\beta u + F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

en hij bewijst nu, dat wanneer  $F$  een functie van  $t$  is, die zonder rekening met  $u$  te houden is voorgeschreven en verder aan zekere

<sup>1)</sup> L. S. ORNSTEIN, Deze Verslagen l.c. p. 1011 en volgende

voorwaarden voldoet <sup>1)</sup>, dat dan de oplossing van de differentiaalvergelijkingen (3a) een zoodanige waarde voor  $u$  oplevert dat  $\overline{Fu} = \overline{\beta u^2}$ , zoodat  $u \frac{du}{dt} = 0$ .

Deze uitkomst is geheel in overeenstemming met de door Mej. SNETHLAGE en mij uitgesproken stelling, dat  $\overline{\mathfrak{K}u} = 0$  en in strijd met de stelling waarvan EINSTEIN en HOPF, LANGEVIN e. a. uitgaan dat n.l.  $\overline{Fu} = 0$ .

Merkwaardig is de conclusie, die ORNSTEIN hieruit trekt. Deze luidt n.l. dat er dus geen bezwaar tegen is om vergelijking (3a) met  $\overline{Fu} = 0$  aan te nemen. Het is verwonderlijk, dat ORNSTEIN deze tegenstrijdigheid niet heeft opgemerkt. In waarheid voert hij nergens de onderstelling  $\overline{Fu} = 0$  in zijn berekening in. Hij integreert eenvoudig vergelijking (3a) en toont dan aan, dat  $\overline{Fu}$  niet nul is, maar gelijk aan  $\overline{\beta u^2}$ .

Uit  $\overline{Fu} = \overline{\beta u^2}$  volgt dat wij  $F$  kunnen voorstellen door:

$$F = \beta u + F' \quad \text{waarin} \quad \overline{F'u} = 0,$$

zoodat  $\mathfrak{K} = -\beta u + F = -\beta u + \beta u + F' = F'$  met  $\overline{F'u} = 0$ .

In zooverre leert deze afleiding niets nieuws. Toch is zij interessant omdat zij zeer geschikt is ons te helpen bij het vormen van een juiste voorstelling aangaande de bij de Brownsche beweging optredende krachten. Denken wij een bol van eindige afmeting die in een visqueuse vloeistof is ondergedompeld, en aan een koord is bevestigd. Met behulp van dit koord kan de bol in de  $x$ -richting zoowel in positieven als in negatieven zin worden bewogen. Denkt men nu, dat een kracht  $F(t)$  wordt aangebracht waarvan de waarde wordt vastgesteld zonder rekening te houden met de snelheden die de bol verkrijgt. Wij kunnen b.v. denken, dat de waarde van  $F$  voor verschillende oogenblikken door een of ander loterijspel wordt bepaald, en dat  $F$  verder aan de op de vorige bladzijde genoemde voorwaarden voldoet.

De bewegingsvergelijking van den bol zal nu zijn:

$$m \frac{du}{dt} = -\beta u + F.$$

<sup>1)</sup>  $F$  is een continue doch herhaaldelijk van teeken wisselende functie, die voor ieder deeltje een andere waarde heeft.  $\overline{F^2}$  genomen over alle deeltjes en ook de middelbare quadraten van de eerste en hoogere tijd-afgeleiden van  $F$  zijn constant in den tijd. Ook is de middelwaarde van  $F^2$  voor één enkel deeltje genomen over een voldoende langen tijd constant in den tijd en constant voor de verschillende deeltjes.

ORNSTEIN integreert deze vergelijking en toont dan aan, dat  $\overline{F'u} = \overline{\beta u^2}$ .

Al is de waarde van  $F'$  ook onafhankelijk van  $u$  vastgesteld, toch zijn  $F'$  en  $u$  statistisch niet onafhankelijk van elkaar. En dit komt, omdat de snelheid  $u$  niet onafhankelijk is van de kracht  $F'$ , waardoor zij wordt teweeggebracht.

Gaan wij nu weer tot de Brownsche beweging over dan zal de kracht  $F'$  niet meer door trekken aan een koord, maar door botsingen van moleculen worden uitgeoefend. Maar overigens blijft alles hetzelfde. Men mag wel een wrijving aannemen, ook tegen de oogenblikkelijke snelheid. En misschien is daartoe wel reden, evenals het geval was bij den grooteren aan een koord verbonden bol. Maar de beweegkracht  $F'$  voldoet dan niet aan de voorwaarde  $F'u = 0$  zooals meestal wordt aangenomen, maar wij mogen stellen

$$F' = +\beta u + F'' \quad \text{met} \quad \overline{F''u} = 0$$

zoodat de wrijvingskracht  $-\beta u$  niet mag ingevoerd worden, zonder dat tevens een kracht  $+\beta u$  wordt ingevoerd, die haar weer vernietigt. De eenige overblijvende kracht  $F''$  is dan onafhankelijk van  $u$ .

---

**Natuurkunde.** — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan eene mededeeling van den Heer SOPHUS WEBER: „*Het warmtegeleidingsvermogen van neon*”. (Supplement N°. 42b bij de Mededeelingen uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden).

(Mede aangeboden door den Heer KUENEN.)

§ 1. *Inleiding.* In een mededeeling van Prof. KAMERLINGH ONNES en mij <sup>1)</sup> is de aandacht gevestigd op de belangrijke afwijking van de wet van de overeenstemmende toestanden, welke zich bij de vergelijking van de wrijving van argon en helium voordoet. Dit maakte het van belang de wrijving van neon tot de laagste daarmee te bereiken temperaturen na te gaan. Tevens zou dan ook de warmtegeleiding dezer gassen bij de laagste temperaturen tot welke men de metingen kan uitsprekken, worden onderzocht. Tusschen wrijving en warmtegeleiding toch bestaat volgens de kinetische theorie een zeer nauw verband. Beide verschillen slechts door een factor (specifieke warmte  $\times$  een getalwaarde) en bij de eenatomige gassen, waar de theorie, wat de wrijving betreft, in vele opzichten bevestigd wordt, is deze factor van de temperatuur onafhankelijk. Men zal dus, volgens de theorie van de warmtegeleiding en de wrijving, dezelfde wet van afhankelijkheid van de temperatuur bij deze gassen vinden en het doet er niet toe welke der beide grootheden men daartoe aan het onderzoek onderwerpt. Verricht men beide onderzoekingen zoo leveren de uitkomsten een middel tot onderlinge contrôle op.

Persoonlijke omstandigheden maakten, dat ik, voor wij tot het hier geschetste onderzoek te Leiden kwamen, in het natuurkundig laboratorium der N.V. PHILIPS Gloeilampenfabrieken reeds het onderzoek van de warmtegeleiding der gassen ter hand kon nemen. Daar werd dan ook het in deze mededeeling vervatte onderzoek verricht. Alleen dat deel van het onderzoek, hetwelk op de laagste temperaturen betrekking heeft, zal nu nog te Leiden worden uitgevoerd.

Het voor het onderzoek benodigde neon werd mij voor dit doel door Prof. KAMERLINGH ONNES, die het uit een grooten voorraad neonrijk gasresidu hem door den Heer G. CLAUDE geschonken <sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Leiden Comm N°. 134c, April 1913.

<sup>2)</sup> Leiden Comm. N°. 147c, p. 38.

bereid had, ter beschikking gesteld, waarvoor ik hem hier mijn hartelijken dank betuig. Het gas bevatte volgens mededeeling van Prof. KAMERLINGH ONNES (waarschijnlijk nog een spoor stikstof. Ik heb het derhalve nog volgens de methode van GEHLHOFF<sup>1)</sup> gezuiverd.

Welke van de bekende experimenteele methodes<sup>2)</sup> men ook voor het onderzoek van het warmtegeleidingsvermogen der gassen kiest, men zal steeds in het bijzonder op twee bronnen van fouten hebben te letten: de temperatuursprong aan het oppervlak en de convectie. Bij vermindering van den druk van het gas wordt de invloed van de convectie kleiner; die van den temperatuursprong grooter. De laatste toch hangt, zooals ook de analoge grootheid in de inwendige wrijving, de glijding<sup>3)</sup>, van de verhouding van de gemiddelde vrije weglengte tot de dimensies van het toestel af.

Terwijl men er niet in geslaagd is den invloed van de convectie<sup>4)</sup> op de warmtegeleiding te berekenen, hebben MARTIN KNUDSEN<sup>5)</sup> en M. VON SMOLUCHOWSKI<sup>6)</sup> het theoretisch onderzoek over den temperatuursprong tot een goed einde weten te brengen.

In overeenstemming met KUNDT en WARBURG<sup>7)</sup> wordt de temperatuursprong,  $\Delta\Theta$ , aan het vaste lichaam, op volgende wijze gedefinieerd:

$$\Delta\Theta = -\gamma \cdot \frac{d\Theta}{dn}$$

waar  $n$  de richting van de normaal aangeeft en  $\Theta$  de temperatuur beteekent. KUNDT en WARBURG stelden door hun proeven vast, dat  $\gamma$  evenredig is met de gemiddelde vrije weglengte,  $\lambda$ .

M. VON SMOLUCHOWSKI legde aan zijn eerste onderzoek de kinetische gastheorie van CLAUSIUS ten grondslag en werd tot de volgende benaderde formule geleid, waarin ik den accommodatie-coëfficiënt  $a$ , gelijk deze door M. KNUDSEN<sup>8)</sup> gedefinieerd wordt, heb ingevoerd:

$$\gamma/\lambda_1 = 0,70 + \frac{4(1-a)}{3a} \dots \dots \dots (1)$$

Later heeft M. VON SMOLUCHOWSKI de  $\gamma$  opnieuw berekend daarbij

1) GEHLHOFF, Verh. d. D. Phys. Ges. 13. (1911) p. 271.

2) Vergel. A. WINCKELMANN, Handbuch der Physik III, 1906 p. 525.

3) H. KAMERLINGH ONNES, C. DORSMAN en S. WEBER. Deze Verslagen 1913, p. 1377.

4) A. OBERBECK. W. A. VII, 1879, p. 291 en L. LORENZ, W. A. XIII, 1881, p. 582.

5) MARTIN KNUDSEN. Ann. d. Ph. 34, 1911, p. 655.

6) M. VON SMOLUCHOWSKI, R. v. SMOLAN. Sitz. Ber. d. K. A. d. W. in Wien Bd. CVII, IIa, 1898, p. 304; Idem Bd. CVIII, IIa, 1899 p. 5.

7) A. KUNDT en E. WARBURG. Pogg. Ann. 156, 1875, p. 177.

8) M. KNUDSEN. loc. cit. p. 608.

echter uitgaande van de hypothese van MAXWELL<sup>1)</sup>: dat de moleculen kunnen worden beschouwd als krachtcentra, die elkaar afstooten met een kracht evenredig met  $r^{-5}$ . Hierdoor vond hij:

$$\gamma/\lambda_1 = \frac{15}{2\tau} \cdot \frac{2-a}{2a} \cdot \dots \dots \dots (II)$$

In deze formules beteekent  $\lambda_1$  de gemiddelde vrije weglengte zooals deze in de theorie van CLAUSIUS bepaald wordt, dus:

$$\lambda_1 = \frac{\pi V \sqrt{2\pi}}{4} \cdot \frac{\eta}{\sqrt{p \cdot \rho}}$$

Wordt de gemiddelde vrije weglengte, zooals deze volgens de berekening van O. E. MEYER<sup>2)</sup> gevonden wordt

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{0,30967} \cdot \frac{\eta}{\sqrt{p \cdot \rho}}} \cdot \dots \dots \dots (III)$$

in de formule (II) ingevoerd, dan krijgt men:

$$\gamma/\lambda = 2,32 \cdot \frac{2-a}{2a}$$

§ 2. In een verhandeling<sup>3)</sup> welke in de *Annalen der Physik* verschijnt en naar welke ik hier verwijs, heb ik voor verscheidene zuivere gassen, de absolute waarde van het warmtegeleidingsvermogen bij 0° C.,  $K_0$ , onderzocht. Bij de experimenteele bepalingen heb ik gebruik gemaakt van de methode van SCHLEIERMACHER,<sup>4)</sup> die ik op zoo'n wijze veranderde dat het gelukte den invloed van de convection op de warmtegeleiding te elimineeren. Gelijkzeitig bepaalde ik ook voor dezelfde gassen de grootte van den temperatuursprong bij 0° C. en vond ik eene uitstekende overeenstemming, tusschen de experimenteel bepaalde, en de door formule (II) berekende waarden, wanneer ik voor  $a$  de door MARTIN KNUDSEN<sup>5)</sup> verkregen uitkomsten, gebruikte. Onder de onderzochte gassen was ook hetzelfde gedistilleerde neon, waarmede deze proeven genomen zijn.

Het resultaat van de metingen voor neon was:

$$K_0 = 0,00010890 \text{ gr. cal./grad. sec. cm.} \quad \text{en} \quad \gamma/\lambda = 2,391.$$

Voor zuiver neon en blinkend platina vond M. KNUDSEN  $a=0,653$ , dus:

<sup>1)</sup> J. CL. MAXWELL. *Scientific papers* Vol. II, p. 23.

<sup>2)</sup> O. E. MEYER. *Kinet. Theorie der Gase* p. 111.

Het is onverschillig of hier de berekening van MEYER of eene andere gevolgd wordt, aangezien de factor die in de verschillende uitkomsten eene verschillende waarde heeft door het invoeren van den druk,  $p$ , uit het eindresultaat wegvalt.

<sup>3)</sup> SOPHUS WEBER. *Ann. d. Ph.* 54, 1917 p. 342.

<sup>4)</sup> A. SCHLEIERMACHER. *W. A.* 34, 1888, p. 623.

<sup>5)</sup> MARTIN KNUDSEN. *Ann. d. Ph.*, 46, 1915 p. 641.

$$\gamma/\lambda = 2,32 \cdot \frac{2-a}{2a}$$

De waarde van  $K_0$  is zeker nauwkeurig op 2<sup>o</sup>/<sub>100</sub> en stemt goed overeen met de bepaling van E. BANNAWITZ,<sup>1)</sup> verricht met neon, hetwelk Prof. KAMERLINGH ONNES voor hem had afgetapt uit hetzelfde reservoir waaruit hij ook mij het gebruikte gas verstrekke.

§ 3. Bij de bepaling van den temperatuur-coëfficiënt voor het warmtegeleidingsvermogen van neon, kon ik niet hetzelfde toestel gebruiken als voor de absolute bepaling en besloot daarom de methode van R. GOLDSCHMIDT<sup>2)</sup> toe te passen. Deze methode brengt ook een belangrijke verbetering in die van SCHLEIERMACHER. Zij elimineert het warmteverlies aan de einden van den draad op eenvoudige wijze door dat men de proeven verricht, de eene maal met een langen de andere maal met een korten draad, die denzelfden diameter hebben en terwijl men den draad in beide gevallen met denzelfden electrischen stroom verwarmt. Het verschil tusschen de hoeveelheid energie, die in den korten draad, en die, welke in den langen draad ontwikkeld wordt, levert dan de energie verloren in radiale richting voor een draad van dezelfde doorsnede, welks lengte gelijk is aan het verschil in lengte der beide proefdraden.

Het eerste toestel, dat ik bij het op de proef stellen van de methode van GOLDSCHMIDT gebruikte is in de figuur aangegeven, terwijl de constanten en de afmetingen in tabel I samengevat zijn.<sup>3)</sup> Uit de teekening ziet men, dat de dunne platinadraden met behulp van platina-veeren in de as van de glazen buizen gespannen zijn.

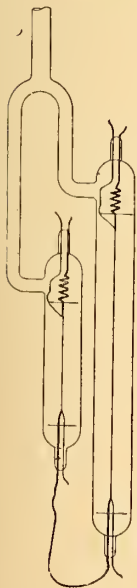
Bij de metingen schakelt men de twee toestellen en een normaal-weerstand van 1  $\Omega$  in serie. Als de toestand stationair is, meet men het spanningsverschil tusschen de einden van den langen en korten draad,  $E_l$  en  $E_k$ , en het spanningsverschil tusschen de einden van den normaalweerstand,  $I$ . De spanningsverschillen werden gemeten met een van thermokrachten vrij compensatietoestel van WOLFF, waarbij mogelijke thermokrachten buiten het compensatietoestel door commuteren geelimineerd werden.

Uit den electrischen weerstand berekent men de gemid-

<sup>1)</sup> E. BANNAWITZ. Ann. d. Ph. 48, 1915, p. 577.

<sup>2)</sup> R. GOLDSCHMIDT. Phys. ZS. 1911, p. 418.

<sup>3)</sup> De hier aangegeven waarde voor  $2r_0$  is gevonden door weging. Deze waarde wordt toch alleen bij de correctie voor den temperatuursprong gebruikt en niet in de ijking zelve omdat deze met atm. lucht geschiedt (vergel. later).



TABEL 1.

	App. a	App. b
Diameter van den platinadraad	$2r_0 = 0,005246 \text{ cm}$	$2r_0 = 0,005246 \text{ cm}$
Lengte " " "	$l = 11,843 \text{ "}$	$k = 3,138 \text{ "}$
Electrische weerstand bij $0^\circ \text{ C}$ van den <i>Pt</i> -draad	$W_0 = 5,4187 \ \Omega$	$W_0 = 1,4481 \ \Omega$
Temperatuurcoëfficiënt van $W_0$ , $\alpha_{0-100}$	$\alpha_{0-100} = 0,003888$	$\alpha_{0-100} = 0,003888$
Warmtegeleidingsvermogen van den <i>Pt</i> -draad	$\kappa = 0,1649$	$\kappa = 0,1649$
Diameter van de glazen buis	$2R = 1,449 \text{ cm}$	$2R = 1,449 \text{ cm}$
$4 \frac{A^x}{l}$ , als $A =$ doorsnede van den <i>Pt</i> -draad	$4 \frac{A^x}{l} = 1,2039 \cdot 10^{-6}$	$4 \frac{A^x}{k} = 4,5437 \cdot 10^{-6}$

delde temperaturen van de platinadraden,  $t_l$  en  $t_k$ . Uit deze getallen kan men nu de volgende uitdrukkingen voor  $L$  en  $S$  berekenen:

$$L = 0,2388 \cdot E_l \cdot I \cdot \frac{1}{l \cdot t_l} \quad \text{en} \quad S = 0,2388 \cdot E_k \cdot I \cdot \frac{1}{k \cdot t_k}$$

Kon men het warmteverlies aan de einden verwaarloozen, zoo zouden  $L$  en  $S$  resp. het warmteverlies per graad en cm. beteekenen van den langen en van den korten draad (bij eene omgeving van  $0^\circ \text{ C}$ ). In dit geval moesten  $L$ ,  $S$  en de in het volgende gedefiniëerde grootheid  $D$ , alle gelijk zijn.

Beschouwen wij nu het lengteverschil van de twee platinadraden, dan kunnen wij, volgens R. GOLDSCHMIDT, aannemen, dat de warmteafgifte van dit stuk door de warmteafleiding der draadeinden niet beïnvloed is. Wij krijgen dan, wanneer  $D$  de warmteafgifte per eenheid van lengte van een draad van gelijke doorsnede in een oneindigen cylinder van denzelfden vorm bij een temperatuurverschil van één graad met de omgeving van  $0^\circ \text{ C}$ . aanduidt, terwijl de afgifte aan het temperatuurverschil evenredig gesteld mag worden en  $t_\Delta$  het temperatuurverschil van het gelijkmatig verwarmde stuk van den draad met de omgeving is:

$$t_\Delta = \frac{W-w-(W_0-w_0)}{\alpha(W_0-w_0)} \quad \text{en} \quad D = 0,2388 (E_l - E_k) \cdot I \cdot \frac{1}{(l-k) \cdot t_\Delta}$$

Uit de waarde van  $D$  berekent men het gemiddelde warmtegeleidingsvermogen  $K$  op den weg, dien de warmte bij hare voortleiding volgt, door <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> M. VON SMOLUCHOWSKI. W. A. 64, 1898 p. 101.



$$D = \frac{2\pi K}{\ln \frac{R}{r_0} + \gamma \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{R} \right)} \dots \dots \dots (IV)$$

waarin  $\gamma$  de coëfficiënt van den temperatuursprong is.

Met dit toestel heb ik eenige proeven genomen om de theorie van R. GOLDSCHMIDT te toetsen.

In een serie metingen, waarin het toestel met droog zuiver koolzuur gevuld was, en de temperatuur van het bad 0° C., werden o.a. de volgende getallen voor  $t_l, t_k, L, S, t_\Delta$  en  $D$  gevonden :

$p=21,61$ cm	$t_l = 5,409$	$t_k = 4,630$	$t_\Delta = 5,693$
	$L = 413,0 \cdot 10^{-7}$	$S = 485,2 \cdot 10^{-7}$	$D = 391,6 \cdot 10^{-7}$
	$L_{corr.} = 391,9 \cdot 10^{-7}$	$S_{corr.} = 391,9 \cdot 10^{-7}$	
$p=6,28$ cm	$t_l = 5,453$	$t_k = 4,669$	$t_\Delta = 5,739$
	$L = 409,7 \cdot 10^{-7}$	$S = 481,1 \cdot 10^{-7}$	$D = 388,5 \cdot 10^{-7}$
	$L_{corr.} = 388,7 \cdot 10^{-7}$	$S_{corr.} = 388,2 \cdot 10^{-7}$	

Het blijkt duidelijk uit deze metingen dat men, als de warmteafleiding door de draadeinden verwaarloosd wordt, geheel fontieve waarden voor  $K$  verkrijgen kan.

Met behulp van een eenvoudige berekening is het nu gemakkelijk aan te toonen dat de gevonden waarde voor  $S$  en  $L$ , als deze voor de afvoer aan de einden verbeterd wordt, met de waarde voor  $D$  overeenkomt. Bepaalt men nl. de warmtehoeveelheden,  $Q_1$  en  $Q_2$ , die in den stationairen toestand door het oppervlak en de einden van een electrisch verwarmden draad (app.a) weggeleid worden, dan vindt men <sup>1)</sup>:

$$\frac{Q_1}{t-t_0} = c(x^2 + m^2), \quad \frac{Q_2}{t-t_0} = c \frac{x T_{gx}}{1 - \frac{1}{x} T_{gx}} \quad \text{en} \quad \frac{Q}{t-t_0} = c \left( m^2 + \frac{x^2}{1 - \frac{1}{x} T_{gx}} \right)$$

waarin  $c = \frac{4A \cdot \alpha}{l}$  en  $m^2 = \frac{0,2388}{c} \cdot W_0 \cdot I^2$  en  $x$  een hulpgrootheid is die door de derde vergelijking bepaald wordt.

In deze formules is  $Q$  de geheele in den draad ontwikkelde hoeveelheid warmte, (app.a,  $Q = L \cdot l \cdot t_l$ )  $t$  de gemiddelde temperatuur van den draad,  $t_0$  de temperatuur van den glaswand,  $l$  de stroomsterkte en  $W_0, A, \alpha$  en  $l$  resp. weerstand bij  $t_0$ , doorsnede, warmtegeleidingsvermogen en lengte van den verwarmden draad.  $T_{gx}$  beteekent de hyperbolische tangens van  $x$ .

Wordt de gevonden waarde voor  $L \cdot l$  en  $S \cdot k$  op deze wijze ver-

<sup>1)</sup> SOPHUS WEBER. Ann. d. Ph. 54, 1917, p. 169.

beterd, dan krijgt men de getallen  $L_{corr}$  en  $S_{corr}$ ; deze komen met  $D$  goed overeen. Het is dus op deze manier aangetoond, dat het gebruik van de methode van R. GOLDSCHMIDT veroorloofd is, wanneer de afmetingen van het toestel goed gekozen worden.

§ 4. Bij de bepalingen voor neon heb ik een toestel gebruikt, waarvan de afmetingen in tabel 2 samengevat zijn.

Om het toestel bij de temperaturen van vloeibare lucht te kunnen gebruiken, is het echter noodzakelijk, den weerstand van het toestel met den weerstand van een bekenden platinathermometer te vergelijken. Is de bekende platinathermometer dan geijkt, zoodat men uit den weerstand de absolute temperatuur in de Kelvinschaal berekenen kan, dan is het mogelijk uit den weerstand van het warmtegeleidings-toestel, de bijhoorende absolute temperatuur te bepalen. Als bekenden thermometer heb ik  $Pt_1$ , den standaard-thermometer in het cryogene Laboratorium te Leiden, gekozen. Voor dezen thermometer bestaat een tabel<sup>1)</sup>, die den samenhang tusschen  $W$  of beter  $\frac{W}{W_0}$  en de absolute temperatuur weergeeft.

TABEL 2.	
App. 1.	App. 2.
$2r_0 = 0,005240$ cm	$2r_0 = 0,005240$ cm
$l = 9,992$ „	$k = 3,373$ „
$2R = 1,526$ „	$2R = 1,526$ „
$W_0 = 4,5762$ $\Omega$	$w_0 = 1,5416$ $\Omega$
$\alpha_{0-100} = 0,003891$	$\alpha_{0-100} = 0,003891$

De vergelijking heb ik op de volgende wijze uitgevoerd: In een gesloten cryostaat, voorzien van een roerinrichting, en gevuld met zuivere vloeibare zuurstof, wordt het dubbele toestel en een zuurstof-thermometer (thermometer van Stock)<sup>2)</sup> geplaatst. Toen de toestand stationair werd, heb ik den weerstand van het toestel  $w' = W - w$  gemeten en gelijktijdig de dampspanning op den zuurstof-thermometer afgelezen. Hierdoor vond ik de volgende bij elkaar behoorende waarden:

<sup>1)</sup> G. HOLST. Deze Verslagen 1915 p. 604.

<sup>2)</sup> A. STOCK en C. NIELSEN. Ber. d. D. Chem. Ges. 39 (11), 1906, p. 2066.

Zuurstof-dampspanning  $p = 742,35 \text{ mm}$  en  $w' = 0.75828 \Omega$ .

Uit  $p$  wordt, volgens KAMERLINGH ONNES en BRAAK<sup>1)</sup>, de absolute temperatuur,  $T$ , van het zuurstofbad door de volgende formule, die tusschen  $83$  en  $91^\circ \text{ K}$  geldig is, berekend:

$$T = \frac{369,83}{6,98460 - \log p}.$$

Hieruit vindt men  $T = 89.896^\circ \text{ K}$ .

Uit de tabel voor  $Pt_I'$  vindt men de volgende bij elkaar behoorende waarden:

$T$	$\frac{w'}{w_0'}$	$\left(\frac{W}{W_0}\right)Pt_I'$
89,896	0,24988	0,25079.

De twee thermometers kunnen nu met voor dit doel voldoende nauwkeurigheid<sup>2)</sup> met behulp van de formule van NERNST:

$$\left(\frac{W}{W_0}\right)Pt_I' - \frac{w_0'}{w_0} = \alpha \left(1 - \frac{W}{W_0}\right)Pt_I'$$

bij elke temperatuur vergeleken worden. Voeren wij nl. de bovenstaande waarden in de formule in, dan vindt men  $\alpha = 0,001221$ . Met behulp van deze waarde voor  $\alpha$  is het nu mogelijk de waarde van  $\left(\frac{W}{W_0}\right)Pt_I'$  behorende bij elke gevonden waarde van  $\frac{w'}{w_0}$ , te berekenen, en hieruit door de tabel voor  $Pt_I'$  de temperatuur in de Kelvinschaal te bepalen.

Hierua wordt het toestel in een bad van fijn gemalen ijs en gedistilleerd water gedompeld, en bepaalt men met droge koolzuurvrijelucht en zuiver neon den noemer in formule IV,  $\ln \frac{R}{r_0} + \gamma \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{R}\right)$ , waarna

$\frac{R}{r_0}$  volgt, terwijl  $R$  door calibreeren van de buis met kwik gevonden is. Zijn deze metingen afgeloopen, dan wordt het toestel in een bad van vast koolzuur en benzine geplaatst en de metingen met neon herhaald; dit keer echter voert men de metingen in de volgende orde uit: eerst wordt de weerstand,  $W-w$ , zonder verwarming van den draad gemeten, waardoor de temperatuur van het bad bepaald is; dan worden de warmtegeleidingsmetingen, eerst bij grooteren druk, dan bij lagere druk en dan weer bij grooteren druk

<sup>1)</sup> H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK. Leiden Comm. N<sup>o</sup>. 107a, vergel. HOLST loc. cit.

<sup>2)</sup> Zie G. HOLST (Comm. N<sup>o</sup>. 148) en P. G. CATH, H. KAMERLINGH ONNES en J. M. BURGERS (Comm. N<sup>o</sup>. 152c).

gedaan (dit blijkt ook uit de tabel) en ten slotte wordt de weerstand van den draad zonder verwarming opnieuw bepaald.

Het bleek hieruit dat de temperatuur van het bad onder de metingen niet veranderd was.

De correctie voor de straling wordt uit de afmetingen van het toestel en uit de formule voor de totaalstraling van het platina berekend <sup>1)</sup>. De gebruikte correcties waren:  $R_{100} = 1,70 \cdot 10^{-6}$ ,  $R_0 = 0,48 \cdot 10^{-6}$ ,  $R_{-78} = 0,13 \cdot 10^{-6}$  en  $R_{-183} = 0,005 \cdot 10^{-6}$  waar  $R$  de straling per graad is.

De metingen zijn in de volgende tabellen verzameld.

Atm. lucht bij 0° C.				
$p_{cm}$	$\Delta t$	$D$	$D'_{\Delta t=17,50}$	$D'_{corr.}$
28.355	17.428	0.0004358	0.0004353	0.0004367
13.069	17.495	4342	4337	4367
3.010	17.860	4258	4251	4378

Neon bij 0° C.				
$p_{cm}$	$\Delta t$	$D$	$D'_{\Delta t=9.20}$	$D'_{corr.}$
33.791	9.029	0.0008165	0.0008162	0.0008222
20.182	9.077	8122	8118	8219
10.181	9.192	8023	8018	8215
5.729	9.367	7878	7872	8215
1.894	10.252	7220	7206	8160
0.709	12.726	5868	5840	7900
0.217	23.109	3349	3292	7078

<sup>1)</sup> In de boven aangehaalde verhandeling (Ann. der Ph. 54, 1917, p. 330) waarin ik de totaalstraling voor platina en wolframium bij 0° en 100° C. onderzocht, heb ik er op gewezen dat de correctie voor de straling niet door een afzonderlijke proef in vacuo bepaald kan worden. Dit komt doordat de temperatuurverdeling langs den verwarmden draad in vacuo geheel anders wordt dan in een gas.

Neon bij 99.81° C.				
$p_{cm}$	$\Delta t$	$D$	$D'_{\Delta t=12.00}$	$D'_{corr.}$
37.454	9.945	0.0009965	0.0009971	0.00010077
20.225	10.044	9867	9872	10067
7.473	10.389	9547	9547	10057
4.290	13.795	9241	9205	10064
1.718	15.772	8123	8072	9952
0.673	21.362	6081	6000	9570
9.329	13.136	9690	9661	10075
21.262	12.830	9914	9888	10074
38.973	12.721	9998	9973	10072

Neon bij 194.72° K. (Vast koolzuur in benzine).				
$p_{cm}$	$\Delta t$	$D$	$D'_{\Delta t=8.02}$	$D'_{corr.}$
39.915	7.934	0.0006584	0.0006583	0.0006608
21.649	7.966	6557	6556	6603
13.453	8.000	6530	6529	6606
6.844	8.102	6451	6450	6597
5.046	8.169	6398	6397	6597
40.167	7.944	6576	6575	6600

Neon bij 99.0° K. (Vloeibare zuurstof).				
$p_{cm}$	$\Delta t$	$D$	$D'_{\Delta t=3.54}$	$D'_{corr.}$
32.342	3.481	0.0003740	0.0003740	0.0003746
20.543	3.480	3741	3741	3751
10.309	3.510	3710	3710	3718
5.127	3.514	3706	3706	3746
2.642	3.558	3663	3663	3739
0.826	3.728	3506	3505	3739
32.165	3.490	3730	3730	3737

In deze tabellen bevindt zich in kolom I de druk  $p_{cm}$  in cm *Hg*;  $p_{cm}$  is gereduceerd tot 0° C. en 45° breedte; in kolom II  $\Delta t$ , het temperatuurverschil tusschen het middengedeelte van den langen draad en het bad; in kolom III  $D = \frac{Q}{(l-k) \cdot \Delta t}$ , waar  $Q$  is het verschil van de door de beide draden afgegeven hoeveelheden warmte in gr.cal./sec.; in kolom IV  $D' = D - R$ , waar  $R$  de straling is ( $D - R$  is, omdat  $\Delta t$  niet geheel constant is, tot hetzelfde temperatuurverschil omgerekend) en in kolom V  $D'_{corr.}$ , die ontstaat, doordat  $D'$  voor den temperatuursprong gecorrigeerd wordt. Deze correctie gebeurt volgens de formule (vergel. formule IV p. 1343):

$$D'_{corr.} = D' \left( 1 + \frac{\gamma_1}{p_{cm}} \right), \text{ waar } \gamma_1 = \frac{\frac{1}{R} + \frac{1}{r_0}}{\ln \frac{R}{r_0}} \cdot \gamma p_{cm}.$$

Men mag bij de gebruikte temperatuurverschillen met voldoende benadering aannemen, dat  $K$  bij de temperatuur  $t_0 + \frac{\Delta t}{2}$  behoort; hieruit volgt:

Atm. lucht: $T = 273.1 + 8.75$	$D'_{corr.} = 0.0004371$
neon: „ $= 273.1 + 4.60$	„ $= 0.0008218$
„ „ $= 273.1 + 99.81 + 6.00$	„ $= 0.0010071$
„ $= 194.72 + 4.01$	„ $= 0.0006602$
„ $= 89.90 + 1.77$	„ $= 0.0003740$

Hieruit krijgt men, wanneer men gebruik maakt van den temperatuurcoëfficiënt voor de warmtegeleiding van lucht, 0,0033, de onderstaande uitkomsten:

Atm. lucht: $T = 273.1$	$D'_{corr.} = 0.0004248$
neon: $T = „$	„ $= 0.0008135$

Voor het warmtegeleidingsvermogen bij 0° C.<sup>1)</sup> van droge koolzuurvrije atm. lucht heb ik  $K_0 = 0,00005680$  gevonden; wordt deze waarde gebruikt, dan vinden wij  $K_0$  voor neon:

$$K'_0 = \frac{8135}{4248} \cdot 0,00005680 = 0,0001087 \text{ gr.cal./sec.grad.cm.}$$

in goede overeenstemming met mijn vroegere bepaling,  $K'_0 = 1089 \cdot 10^{-7}$ .

Hieruit blijkt dat de twee ijkingen van het toestel goed met elkaar overeenkomen; wij krijgen dan de volgende resultaten voor neon:

<sup>1)</sup> SOPHUS WEBER. Ann. d. Phys. 54, 1917, p. 352.

$T$	$K'$	$K'_{ber. (S)}$	$K'_{ber. (\beta=5)}$
273.09 + 105.81	0.0001344	0.0001344	0.0001364
273.09	1087	1087	1087
273.09 - 74.37	0879	0869	0869
273.09 - 181.43	0499	0468	0505

In kolom I staat de absolute temp.  $T$ ; in kolom II het gevonden warmtegeleidingsvermogen  $K'$ ; in kolom III de door de formule van SUTHERLAND berekende waarden. De waarde van  $C$  in de formule van SUTHERLAND, 57,5 voor neon, is uit de twee eerste bepalingen gevonden <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Het is in samenhang met de waarde van  $C$  en de groote inwendige wrijving,  $\eta_0 = 2981 \cdot 10^{-7}$ , niet zonder belang den diameter,  $\sigma$ , van het neonmolekuul te berekenen. Gebruiken wij de formule van S. CHAPMAN (Phil. Transac Vol. 216, 1916, p. 279)

$$\eta = 0,491 (1 + \epsilon_a) \cdot \frac{\bar{c} \cdot \rho}{\sqrt{2} \cdot \pi \sigma^2 \cdot n \left(1 + \frac{C}{T}\right)},$$

waarin de kleine correctie,  $\epsilon_a$ , door  $C$  bepaald wordt, dan vinden wij met  $n = 2,77 \cdot 10^{19}$ ,  $\sigma = 2,32 \cdot 10^{-8}$ .

Een schatting van  $\sigma$  kan men ook met behulp van de kritische grootheden verkrijgen. Uit de formules van VAN DER WAALS leidt men, zoo men de notatie van H. KAMERLINGH ONNES und W. H. KEESOM: Die Zustandsgleichung, Comm. Supplem. N<sup>o</sup>. 23, Fussn. 284 volgt, met

$$p_k = K_2 \cdot \frac{a_{wf}}{b_{wf}^2} \quad \text{en} \quad R_{wf} \cdot T_k = K_1 \cdot \frac{a_{wf}}{b_{wf}}$$

$$\text{af:} \quad b_{wf} = \frac{K_2}{K_1} \cdot R_{wf} \cdot \frac{T_k}{p_k}$$

Volgens VAN DER WAALS, zie Fussn. 459 l.c., is  $\frac{K_2}{K_1}$  bij benadering gelijk aan de theoretische waarde,  $\frac{1}{8}$ , dus:

$$b_{wf} = \frac{R}{8} \cdot \frac{T_k}{p_k} = \frac{2}{3} \pi \cdot N \cdot \sigma^3$$

Met  $N = 62 \cdot 10^{22}$  en met behulp van de kritische grootheden,  $p_k = 26,86$  (intern. atm.) en  $T_k = 44^\circ,75$  K. (H. KAMERLINGH ONNES, C. A. CROMMELIN en P. G. CATH: Comm. N<sup>o</sup>. 151b) vindt men  $\sigma = 2,36 \cdot 10^{-8}$ .

Maakt men gebruik van de isothermen van neon bij  $0^\circ$  en  $20^\circ$  C. (H. KAMERLINGH ONNES and C. A. CROMMELIN Comm. N<sup>o</sup>. 147d) en veronderstelt men, dat

Het blijkt dus hieruit, dat de formule van SUTHERLAND het temperatuurverloop van de warmtegeleiding bij neon voor lagere temperaturen niet weergeven kan. Dat de formule van SUTHERLAND bij lage temperaturen gebrekkig is, is vroeger bewezen door de onderzoeken over de inwendige wrijving van helium en waterstof (zie H. KAMERLINGH ONNES and SOPHUS WEBER: Comm. N<sup>o</sup>. 134). Ik heb daarom ook hier onderzocht of het niet gelijk in Comm. N<sup>o</sup>. 134 bleek, beter is een formule van den vorm  $\frac{K}{K_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\beta}$  toe te passen.  $\beta = 5$  geeft, zooals uit kolom IV blijkt, een heel goede overeenstemming. Volgens de theorie <sup>1)</sup> van MAXWELL in meer uitgebreiden vorm, waarin de krachten tusschen de moleculen evenredig met  $r^{-n}$  aangenomen worden, zou voor neon  $2\beta + 1 = n$  gelijk aan 11 moeten zijn.

Uit de metingen vindt men den temperatuurcoëfficiënt tusschen 0° en 100° C.,  $\beta_{0-100}$ , gelijk aan 0,00226; dit komt vrij goed overeen met den temperatuurcoëfficiënt van de inwendige wrijving; hiervoor vond immers RANKINE <sup>2)</sup> 0,00225.

§ 5. Uit de experimenteel gevonden getallen voor  $D'$  en de bijbehorende drukken,  $p$ , kunnen volgens de formule:  $D'_{corr} = D' \left(1 + \frac{\gamma_1}{p}\right)$  de waarden voor  $D'_{corr}$  en  $\gamma_1$  bepaald worden. Voor  $\gamma_1$  heb ik de volgende uitkomsten gekregen:

$T$	$\gamma_1$	$\gamma_{1ber.}$	$\gamma_{1ber.}$
384.90	0.400	0.363	0.408
282.29	0.250	0.250	0.250
202.7	0.157	0.168	0.154
93.4	0.055	0.0676	0.055

$a$  in de toestandsvergelijking van VAN DER WAALS onafhankelijk van de temperatuur is, dan vindt men (vergel. H. KAMERLINGH ONNES, Comm. N<sup>o</sup>. 102a p. 5)

$$b_w = \frac{B_{20} - B_0}{20 R} = 0.001398.$$

Uit de waarde van den viriaalcoëfficiënt  $C_A$  bij 0° C. krijgt men:

$$b_w = \sqrt[3]{\frac{C_A}{RT}} = 0.00136$$

Gebruiken wij de eerste van deze twee waarden, zoo is  $\sigma = 2,90 \cdot 10^{-8}$ .

<sup>1)</sup> S. CHAPMAN. Phil. Trans. A. Vol. 211, 1912, p. 433 en Vol. 216, 1916, p. 279.

<sup>2)</sup> A. O. RANKINE. Phys. Z. 11, p. 497 en 745, 1910.



De gevonden waarden voor  $D'_{corr}$  staan in de 5<sup>e</sup> kolom in de tabellen op pp. 1346 en 1347. In de tabellen bij 0° en 100° C. ziet men echter, dat  $D'_{corr}$  beneden ca.  $p = 4$  cm. te klein is, en dit is ook te begrijpen, wanneer men bedenkt, dat de theorie van den temperatuursprong afgeleid is, onder de voorwaarden dat de gemiddelde vrije weglengte,  $\lambda$ , klein is tegenover de afmetingen van het toestel.

Bij 0° C en  $p = 4$  cm is voor neon  $\lambda = 0,000375$  cm terwijl  $2r_0$ , de diameter van den gebruikten draad, gelijk is aan 0,0005240 cm., dus  $\frac{\lambda}{2r_0} = 1,4$ . Men ziet dus hieruit dat de door KUNDT, WARBURG en SMOLUCHOWSKI afgeleide theorie voor den temperatuursprong, geldig is voor een grooter gebied dan men volgens de kinetische gastheorie verwachten zou.

$$\text{Uit de formule } \gamma \cdot p = \frac{\ln \frac{R}{r_0}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{r_0}} \cdot \gamma_1 \text{ vindt men bij } 9^\circ.2\text{C.}, \gamma \cdot p = \frac{0.250}{68.44};$$

wordt de druk  $p$  in dyne/cm<sup>2</sup> en  $\lambda$  in cm. gemeten, dan vindt men volgens O. E. MEYER (zie p. 1340) uit de inwendige wrijving  $p\lambda = 18.93 \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1,2}$ . Hierdoor vindt men bij de temperatuur van den draad,  $t = 9^\circ.2$  C.

$$\gamma/\lambda = 2,46$$

Met  $a = 0.653$  is dan

$$\gamma/\lambda = 2,38 \cdot \frac{2-a}{2a}.$$

De overeenstemming is niet zoo bijzonder mooi als met de vroeger gevonden waarde, maar de afwijking is niet grooter, dan men door toevallige fouten verklaren kan.

Uit de tabel blijkt dat  $\gamma_1$  met de temperatuur verandert; dit moest men ook verwachten omdat  $\lambda$  op de volgende wijze,  $\lambda = \lambda_0 \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1,2}$ , van de temperatuur afhangt. Berekenen wij hiernit de waarden voor  $\gamma_1$  die bij de verschillende temperaturen te verwachten zijn, dan krijgt men de in kolom 3 staande uitkomsten. Bij vergelijking met de gevonden getallen blijkt dat deze sterker met de temperatuur veranderen. Dit kan daardoor verklaard worden, dat  $a$ , de accommodatie-coëfficiënt, niet van de temperatuur onafhankelijk is. Deze veronderstelling wordt ook door de bepalingen voor waterstof aan nemelijk gemaakt. M. KNUDSEN <sup>1)</sup> vond nl. dat  $a$  voor waterstof een

<sup>1)</sup> M. KNUDSEN. Ann. d. Ph. 34, 1911 p. 632.

negatieven temperatuurcoëfficiënt van  $-0,001$  had. Nemen wij aan, dat de temperatuurcoëfficiënt van  $\alpha$  voor neon gelijk aan  $-0,00076$  is, dan vinden wij de getallen voor  $\gamma_1$ , die in kolom 4 onder  $\gamma_{1\text{ber}}$  staan. Deze komen goed met de uit de waarnemingen volgende getallen overeen.

§ 6. Door het mechanische gelijkvormigheidsprincipe van H. KAMERLINGH ONNES<sup>1)</sup> is het eenvoudig, het warmtegeleidingsvermogen van de verschillende stoffen, bij welke men van de warmtegeleiding door de moleculen zelve mag afzien, te vergelijken. Bij dezelfde gereduceerde temperatuur vindt men, dat:

$$\frac{K_1}{M_1^{-\frac{1}{2}} \cdot P_{k,1}^{\frac{2}{3}} \cdot T_{k,1}^{-\frac{1}{6}}} = \frac{K_2}{M_2^{-\frac{1}{2}} \cdot P_{k,2}^{\frac{2}{3}} \cdot T_{k,2}^{-\frac{1}{6}}} = \dots$$

waar  $P_k$  en  $T_k$  de kritische grootheden zijn.

Vergelijkt men nu met behulp van de bestaande metingen het warmtegeleidingsvermogen van helium en argon met neon<sup>2)</sup>, dan ziet het er voorloopig uit, alsof de gereduceerde warmtegeleiding van neon, op andere wijze dan argon en helium met de gereduceerde temperatuur verandert, en wordt het, om dit goed uit te maken, ook met het oog op de theorie van J. J. THOMSON (dat neon uit twee isotope elementen met de resp. moleculaire gewichten van 20 en 22 bestaan zon), van verhoogd belang, de warmtegeleiding van neon bij gereduceerde zuurstof- en neontemperaturen en de warmtegeleiding van helium bij gereduceerde waterstoftemperaturen, te bepalen, gelijk — zooals in den aanhef vermeld is — in het cryogene Laboratorium te Leiden beoogd wordt.

Het is mij aan het slot van deze verhandeling een aangename plicht den Heer Dr. Ir. G. L. F. PHILIPS mijn hartelijken dank nit te spreken voor zijn welwillendheid, die mij in staat stelde dit onderzoek te verrichten.

Den Heer H. J. MICHIELSEN, die mij met de metingen en berekeningen uitstekend geholpen heeft, betuig ik ook mijn besten dank.

*Natuurkundig Laboratorium  
der N. V. Philips Gloeilampenfabrieken.*

<sup>1)</sup> H. KAMERLINGH ONNES. Verh. Kon. Akad., 21, p. 22, 1881.

<sup>2)</sup> SOPHUS WEBER. Ann. d. Ph. 54, 1917, p. 460.

De volgende vergadering, welke volgens het reglement is vastgesteld op 30 Maart a.s., den Zaterdag vóór Paschen, wordt, op voorstel van den Voorzitter, een week vervroegd en zal dus gehouden worden op **Zaterdag 23 Maart a.s.**

De vergadering wordt gesloten.

#### ERRATUM.

In de mededeeling van L. E. J. BROUWER, „*Addenda en corrigenda over de grondslagen der wiskunde*”, deze Verslagen XXV, p. 1418—1423

p. 1422 r. 8—9 staat: alsmede het boven onder 3. opgemerkte. lees: en lette op de nit het boven onder 3. opgemerkte voor de oplossing der eerste l.c. aangegeven preciseering voortvloeiende restrictie.

p. 1422 r. 14 staat: puntverzameling  
lees: niet-aftelbare puntverzameling

p. 1422 r. 18—22 staat: van alle oneindige takken beginsegmenten bevat, terwijl elke fundamenteaalreeks van elkaar bevattende en achtereenvolgens tot  $i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \dots$  ( $\alpha_v$  onbepaald toenemend) behorende eindige takken tot een enkel punt moet convergeeren.

lees: van alle oneindige *eindtakken* beginsegmenten bevat.

p. 1423 r. 6—14 worde als volgt gelezen:

13. Aan de p. 158—159 besproken stelling, dat  $F$  (de verzameling der functies eener reële variabele) een grootere machtigheid bezit, dan  $C$  (de verzameling der punten van het continuum) wordt ook wel de volgende wiskundige beteekenis toegekend: „Met alle punten van het continuum kan men verschillende functies eener reële variabele in correspondentie brengen, doch naast elk oneindig vertakkingsagglomeraat van zoodanige functies kan men een functie aangeven, die er niet toe behoort” (vgl. „*Intuitionisme en Formalisme*”, p. 25). Doch ook deze interpretatie blijkt bij nader onderzoek onhoudbaar, en wel op grond van de omstandigheid, dat een in het Cartesische  $XY$ -vlak gedefinieerde niet-continue functie van  $x$  en  $y$  niet noodzakelijk op de lijn  $x = y$  een functie van  $x$  bepaalt.



# KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

## VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING VAN ZATERDAG 23 MAART 1918.

DEEL XXVI.

N<sup>o</sup>. 9.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.  
Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

### INHOUD.

- Ingekomen stukken, p. 1357.  
In memoriam Dr. E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN, p. 1358.  
De Voorzitter wenscht den Heer C. LELY geluk met de aanneming door de Tweede Kamer der Staten-Generaal van het door hem als Minister van Waterstaat ingediende wetsontwerp tot afsluiting en droogmaking der Zuiderzee, p. 1362.  
Advies van de Heeren C. WINKLER, J. W. VAN WIJHE en L. BOLK omtrent het verzoek van den Minister van Binnenlandsche Zaken om bericht en raad aangaande een request van Prof. G. JELGERSMA te Leiden tot finantieelen steun voor de uitgave van een fotografischen atlas van de menschelijke hersenen en van de hersenen van waterzoogdieren, p. 1362.  
S. DE BOER: „Over den invloed der verhooging van den osmotischen druk der lichaamsvochten op verschillende celsubstraten”. (Aangeboden door de Heeren G. VAN RIJNBK en I. K. A. WERTHEIM SALOMONSON), p. 1363.  
L. BOLK: „De topographische verhoudingen der orbitae in jonge en volwassen schedels van den mensch en der menschen”. p. 1364.  
W. DE SITTER: „Schets eener nieuwe theorie der satellieten van Jupiter,” p. 1374.  
A. H. W. ATEN: „De Passiviteit van Chroom.” (3e mededeeling). (Aangeboden door de Heeren A. F. HOLLEMAN en F. M. JAEGER), p. 1385.  
A. SMITS: „Over het electrochemisch gedrag der metalen”. (Aangeboden door de Heeren P. ZEEMAN en S. HOOGWERFF), p. 1398.  
V. WILLEM: „Over de ademhalingsbewegingen bij den kikker”. (Aangeboden door de Heeren G. VAN RIJNBK en MAX WEBER), p. 1412.  
EUGÈNE DUBOIS: „De betrekking der hoeveelheden van de hersenen, het neuron en zijn deelen tot de lichaamsgröote.” (Aangeboden door de Heeren H. ZWAARDEMAKER en C. WINKLER), p. 1416.  
D. J. HULSHOFF POL: „Experimenteele cerebellair-atactische verschijnselen bij aandoeningen buiten het cerebellum”. (Aangeboden door de Heeren C. WINKLER en G. VAN RIJNBK), p. 1426.  
Mevr. T. EHRENFEST—AFANASSJEW: „Eene onbepaaldheid bij de interpretatie van de entropie als  $\log W$ ”. (Aangeboden door de Heeren J. P. KUENEN en H. HAGA), p. 1437.  
W. J. H. MOLL en L. S. ORNSTEIN: „Bijdragen tot de studie der vloeibare kristallen. IV. Een thermisch effect van het magneetveld”. (Aangeboden door de Heeren W. H. JULIUS en J. P. VAN DER STOK), p. 1442.  
J. J. VAN LAAR: „Over het verloop der waarden van  $a$  en  $b$  bij waterstof bij verschillende temperaturen en volumina”. IV. (Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en F. A. H. SCHREINEMAKERS), p. 1445.  
Vaststelling der Aprilvergadering op Vrijdag 26 April, p. 1454.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1<sup>o</sup>. Bericht van het overlijden op 3 Maart j.l. van het rustend lid der Akademie, den Heer E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.

Dit bericht is met een brief van rouwbeklag beantwoord.

2<sup>o</sup>. Dankbetuigingen van de Heeren Dr. F. GOUDRIAAN te Dordrecht en Dr. LEOPOLD RUZICKA te Zürich voor de hun toegekende subsidies uit het VAN 'T HOFF-fonds.

Aangenomen voor kennisgeving.

De Voorzitter zegt, naar aanleiding van het ingekomen bericht van overlijden van den heer E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN, het volgende:

In ERNST FREDERIK VAN DE SANDE BAKHUYZEN hebben wij een door ons allen zeer gewaardeerd medelid verloren, een man die zijn geheele leven aan de beoefening der wetenschap en de vervulling zijner plichten heeft gegeven.

Hij werd den 8<sup>sten</sup> Januari 1848 te 's Gravenhage geboren en ontving daar zijne eerste opleiding, eerst aan het Gymnasium en, na het doorloopen van eenige klassen daarvan, aan de Hoogere Burgerschool. Na in 1866 het eindexamen van deze laatste te hebben afgelegd, begon hij aan de Polytechnische School te Delft de studie van werktuigkundig ingenieur. Langzamerhand gevoelde hij echter dat de zuivere wetenschap hem meer bevrediging zou schenken en zoodoorging hij van Delft naar Leiden, waar hij reeds in 1865 het toelatingsexamen gedaan had.

Hij kwam thans onder den bezielenden en steeds dankbaar door hem herdachten invloed van KAISER, die hem in 1870, een jaar nog voor hij, te Utrecht, het candidaats-examen aflegde, tot observator koos. Van dat tijdstip af heeft hij de Leidsche Sterrenwacht nooit anders dan voor korten tijd — het langst toen hij in 1874 aan eene expeditie naar Réunion deelnam — verlaten; onafgebroken heeft hij zich met hart en ziel aan haren bloei en hare belangen gewijd. Daarbij aanvaardde hij, evenals zijn broeder, KAISER's opvolger, met volle instemming voor zijn deel de taak die KAISER van het begin af aan de nieuwe sterrenwacht gesteld had, de nauwkeurige plaatsbepaling der hemellichamen.

Men behoeft slechts weinig inzicht te hebben in de moeilijkheden die uit de gebreken der instrumenten, nit de

persoonlijke fouten der waarnemers en uit den door de refractie gestoorden loop der lichtstralen voortvloeien, om te beseffen hoe hooge eischen de vervulling dezer taak aan den sterrenkundige stelt, hoe zij niet alleen bekwaamheid, geduld en volharding van hem vraagt, maar veelal ook een op den achtergrond stellen van persoonlijke voorliefde en van al wat naar persoonlijke eerzucht zweemt. Nauwgezet en onzelfzuchtig als hij was, bezat BAKHUYZEN in hooge mate de eigenschappen die noodig zijn voor eene werkzaamheid waarbij slechts zelden van spoedig te oogsten vruchten van eigen inspanning sprake is.

Ook heeft hij de gedane kens nooit betreurd. Toen hij vele jaren later, in 1909, het buitengewoon hoogleeraarsambt aanvaardde, nadat hem kort te voren het bestuur der sterrenwacht was opgedragen, toonde hij in zijne intreërede wel de beteekenis der nieuwe methoden van onderzoek, waaraan men in het begin zijner loopbaan nog niet kon denken, ten volle te waardeeren, maar zette hij tevens op overtuigende wijze uiteen dat ook thans nog de plaatsbepalingen, zooals zij met den meridiaancirkel gedaan worden, voor onze kennis van den hemel en van de beweging der sterren van het hoogste gewicht zijn.

Groot is zijn aandeel geweest in de uitgebreide reeksen van waarnemingen die in den loop der jaren te Leiden verricht zijn, en als, bij vergelijking met het werk van andere sterrenwachten, bevoegde beoordeelaars tot het besluit komen, dat de Leidsche waarnemingen tot de beste en meest betrouwbare behooren, dan komt de eer daarvan voor een belangrijk deel aan hem toe.

Niet minder toonde hij zijn meesterschap als het er om te doen was, de onmiddellijke uitkomsten der waarnemingen zooveel mogelijk van alle fouten te bevrijden en tot een voor verdere gevolgtrekkingen geschikt materiaal te verwerken. Hoeveel moeite hij zich in dit opzicht getroost heeft, blijkt misschien het best uit het in 1890 verschenen zesde deel van de Annalen der Sterrenwacht, waarin de herleiding is opgenomen van duizenden en duizenden bepalingen van zenithsafstanden van eenige honderden sterren.

De metingen waren uit de eerste jaren der sterrenwacht afkomstig en hadden betrekking, deels op de fundamentaalsterren, welker plaatsbepaling boven aan op KAISER's werkplan stond, deels op de zoogenaamde graadmeterssterren en op eenige circumpolairsterren. Eerst na KAISER's dood kon het omvangrijke werk der reductie, dat vele jaren kostte, worden ter hand genomen; het is voor verreweg het grootste deel door E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN, of onder zijne leiding verricht.

Evenals door deze publicatie het werk van waarnemers die de sterrenwacht reeds lang verlaten hadden, in een bruikbaren vorm algemeen toegankelijk werd gemaakt, zal ook veel van wat hij zelf gedaan heeft eerst tot zijn recht komen als het gelukt zal zijn, thans nog niet herleide waarnemingsreeksen op dezelfde wijze te bewerken.

Intusschen kan ik U aan een aantal onderzoekingen herinneren, die tot definitieve uitkomsten geleid hebben. In de eerste plaats aan zijn akademisch proefschrift van 1879, waarin hij uit de te Leiden in de jaren 1864—1868 waargenomen declinaties der zon de helling der ecliptica heeft afgeleid. Men kan de uitkomst vergelijken met die waartoe NEWCOMB later gekomen is en die thans algemeen in de astronomische jaarboeken wordt aangenomen. Bij twee verschillende onderstellingen omtrent de refractie vindt BAKHUYZEN voor de middelbare helling op het gekozen tijdstip (1870) getallen die  $0'',31$  en  $0'',05$  kleiner zijn dan dat van NEWCOMB. Bij de beoordeeling hiervan moet in het oog worden gehouden dat het materiaal van BAKHUYZEN veel minder uitgebreid was dan dat van NEWCOMB en dat de middelbare fout in de uitkomst van dezen laatsten  $0'',15$  bedraagt.

Voorts noemt ik de in samenwerking met zijn broeder uitgevoerde bepaling van het lengteverschil Leiden-Greenwich en, met voorbijgang van menige andere verhandeling, het uitvoerige en grondige onderzoek over de beweging der aardpool, dat veel heeft bijgedragen tot onze kennis van dit verschijnsel met zijne jaarlijksche en zijne 14-maandelijksche periode.



Een werk van grooten omvang was ook de herleiding der declinatiewaarnemingen van BESSEL, die hij op aansporing van AUWERS ondernam, maar niet geheel voltooid heeft.

Bij verschillende gelegenheden heeft BAKHUYZEN deelgenomen aan astronomische onderzoekingen of ondernemingen die buiten het werk der sterrenwacht vielen. De reeds genoemde reis naar Réunion in 1874, die hij met J. A. C. OUDEMANS en P. J. KAISER ondernam, had ten doel, den overgang van Venus over de zon waar te nemen; het initiatief tot deze expeditie was van onze Akademie uitgegaan. Hij werkte mede bij de waarneming in Zuid-Limburg van de ringvormige zoneclips van 1912 en behoorde tot de gedelegeerden onzer Regeering op de beide conferenties te Parijs, die tot het invoeren der radio-telegraphische tijdseinen van den Eiffeltoren geleid hebben.

Zoo heeft hij in vele richtingen tot den vooruitgang der sterrenkundige wetenschap bijgedragen; hij had het voorrecht, dat tot zijn laatsten dag, den 3<sup>den</sup> dezer maand, te kunnen blijven doen. Bij zijne teraardebestelling konden wij hooren wat hij geweest is voor zijne medewerkers aan de sterrenwacht en voor zijne leerlingen, die hij met onbegrensde hulpvaardigheid ter zijde stond en die hij tot degelijk zelfstandig onderzoek wist op te wekken. Onder de leden der Akademie, waarin hij in 1899 gekozen werd, had hij vele vrienden, die hem om zijn edel karakter, zijne trouwhartigheid en onzelfzuchtigheid een warme genegenheid toedroegen.

Wij zullen hem in onzen kring zeer missen en deelen van ganscher harte in de smart zijner broeders, in het bijzonder van onzen ond-voorzitter, met wien hij zoo vele jaren eendrachtig heeft samengewerkt.

---

De Voorzitter richt nu het woord tot den Heer C. LELY, dien hij namens de Afdeeling geluk wenscht met de aanneming door de Tweede Kamer der Staten-Generaal van het door den Heer LELY als Minister van Waterstaat ingediende wetsontwerp tot afsluiting en droogmaking der Zuiderzee, een plan, waaraan de Heer LELY het beste deel van zijn leven gewijd en al zijn krachten en geestesgaven dienstbaar gemaakt heeft.

**Anatomie.** — De Heer WINKLER brengt, mede namens de Heeren L. BOLK en J. W. VAN WIJHE, het volgende advies uit:

In handen van de ondergeteekenden is een missive gesteld van het Departement van Binnenlandsche Zaken, dd. 22 Febr. l.l. N<sup>o</sup>. 415<sup>A</sup> afdeeling K. W.

Hierin wordt verzocht het advies dezer afdeeling der K. Ak. v. Wet., naar aanleiding van een, als bijlage aan deze missive toegevoegd, schrijven van Prof. Dr. G. JELGERSMA, hoogleeraar in de psychiatrie aan de Rijksuniversiteit te Leiden.

Bovengenoemde hoogleeraar vraagt een jaarlijksche subsidie van f 2000 gedurende 5 achtereenvolgende jaren ten einde de uitgave mogelijk te maken van een photographischen atlas der menschenhersenen en van een soortgelijken atlas der hersenen van waterzoogdieren.

Prof. JELGERSMA wijst er op, dat deze plaatwerken de vruchten zijn van het grootste deel van zijn levensarbeid. Hem was vroeger voor de uitgave van het eerste plaatwerk een subsidie van f 5000 in uitzicht gesteld, maar deze is later ingetrokken.

Het komt den ondergeteekenden voor, dat het advies dezer afdeeling aan het Dep. v. B. Z. moet luiden om een gunstige beschikking op deze subsidie-aanvraag te nemen.

Immers het is aan vakgenooten van Prof. JELGERSMA wel bekend, dat deze onderzoeker zich gedurende een groot aantal jaren van zijn leven heeft bezig gehouden met het onderzoek van hersenen van menschen en van waterzoogdieren. De mikrophotographische platen, die in zijn bezit zijn over deze onderwerpen zijn dan ook bijzonder mooi en het lijkt geen twijfel of zoölogen, anatomen en

klinici zullen de uitgave van deze beide plaatwerken op grooten prijs stellen.

De ondergeteekenden zullen het dan ook een verblijvend verschijnsel achten, indien de regeering hare geneigdheid te kennen zal geven om de uitgave van kostbare plaatwerken op wetenschappelijk gebied geldelijk te steunen.

(Get.) L. BOLK.  
C. WINKLER.  
J. W. VAN WIJHE.

De vergadering vereenigt zich met de conclusie van dit advies, waarvan een afschrift met een begeleidend schrijven namens de Afdeeling aan den Minister zal gezonden worden.

**Physiologie.** — De Heer VAN RIJNBERK biedt eene mededeeling aan van den Heer S. DE BOER: „*Over den invloed der verhooging van osmotischen druk der lichaamsvochten op verschillende celsubstraten*”.

Deze mededeeling wordt in het volgende Zittingsverslag opgenomen.

---

**Anatomie.** — De Heer BOLK biedt eene mededeeling aan: „*De topographische verhoudingen der orbitae in jonge en volwassen schedels van den mensch en der menschen.*”

In de zittingsverslagen dezer Akademie over het jaar 1909 komen een tweetal mededeelingen van mij voor over de ligging en verschuiving, en over de helling van het Foramen magnum bij de Primaten. In deze mededeelingen werd aangetoond, dat de topographische verhoudingen van dit Foramen bij de infantiele schedels der Primaten en in 't bijzonder bij de Anthropomorphen slechts geringe afwijkingen vertoonen van die in den menschelijken schedel. Bij den verderen groei treedt dan een verschil op tusschen den ontwikkelingsgang bij den mensch en dien bij de Primaten. Dit verschil komt in hoofdzaak hierop neer, dat bij den mensch de oorspronkelijke topographische verhoudingen zooals deze aan den kinderschedel bestaan, bestendig blijven, de schedel behoudt infantiele kenmerken; bij de overige Primaten daarentegen, en in 't bijzonder bij de Anthroïden maken deze jeugdtoestanden plaats voor andere. Terwijl, — om het voornaamste verschijnsel hier kortelijks in herinnering te brengen — het Foramen magnum bij de jonge schedels van den mensch en de menschen in het midden van de schedelbasis ligt, verschuift het gedurende den groei meer of minder ver achterwaarts in de richting van den occipitalen pool van den schedel, terwijl het bij den mensch in de voorste helft der schedelbasis blijft liggen. Dit resultaat mijner onderzoekingen is moeilijk in overeenstemming te brengen met de voorstelling die men veelvuldig in de literatuur aantreft, volgens welke de meer occipitale ligging, zooals men deze bij de apen aantreft, de oorspronkelijke zijn zoude, zoodat bij den mensch eene verschuiving naar voren zou hebben plaats gehad. Van zulk eene, op theoretische gronden onderstelde verschuiving naar voren blijkt bij den mensch gedurende de individueele ontwikkeling niets. Integendeel. Beginnend ongeveer met het achtste jaar, dus in aansluiting aan 't begin der tandwisseling, kan men ook bij den mensch een geringe verschuiving in achterwaartsche richting konstateeren, die echter van slechts geringe beteekenis is. Het kenmerkend verschil tusschen de schedels van mensch en Anthroïden is dus dit, dat bij den eerstgenoemde infantiele, — om niet te zeggen, foetale — kenmerken behouden

blijven. Terwijl dus de jeugdige schedels van mensch en menschen in dit opzicht een groote gelijkvormigheid vertoonen, worden de volwassen schedels ongelijk aan elkaar, niet omdat de menschen-schedel, doch omdat de Anthropeïden-schedels hun oorspronkelijke gestalte hoe langer zoo meer verliezen.

De hier volgende mededeeling heeft ten doel de aandacht te vestigen op een overeenkomstig verschijnsel in een geheel ander gebied van den schedel, n.l. in de regio orbitalis, en betreft meer in 't bijzonder de beantwoording der vraag: welke zijn de topographische verhoudingen der oogkassen in de schedels van Primaten bij jeugdige en bij oude individuen. De beantwoording dezer vraag voert tot een inzicht in de groeiverschijnselen die in dit grensgebied tusschen hersen- en aangezichtsschedel plaats grijpen, welke wel in

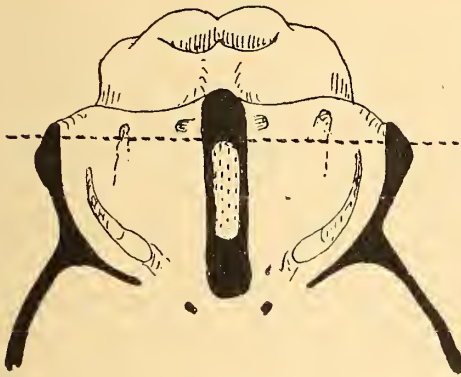


Fig. 1.

tusschen de topographische verbindingen bij den jongen en bij den

staat zijn onze opvatting omtrent de morphogenetische betrekking tusschen den schedel van den mensch en dien der menschen een bepaald karakter te geven. Het is met deze mededeeling slechts mijn doel de hoofdpunten vast te leggen, de uitvoerige publicatie zal elders geschieden. En ter bereiking van dit doel kan ik het best uitgaan van een vorm waarin de verschillen

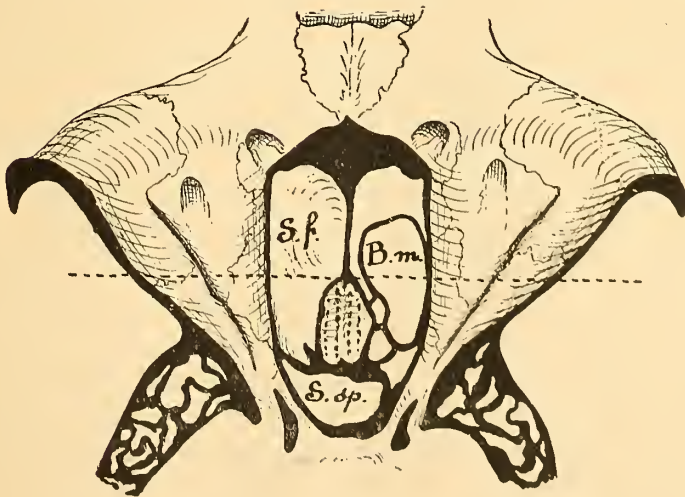


Fig. 2.

volwassen schedel zoo groot mogelijk zijn, en waarin dus het karakter dier verschillen zeer duidelijk is. Ik kies daartoe den Gorillaschedel.

Wij zullen in hoofdzaak rekenschap geven van de topographische verhouding der oogkassen ten opzichte der schedelholte. Een overzicht daarvan verkrijgt men het gemakkelijkst door middel van horizontale doorsneden, gaande door het midden der orbitae. In fig. 1 is zulk een doorsnede geschetst, door den schedel van een jeugdig Gorillakind, in fig. 2 door dien van een volwassen mannelijk individu.

Beschouwt men den lateralen wand van de orbita bij den jeugdigen schedel dan zijn hieraan twee gedeelten te onderscheiden, een voorste gedeelte grenst de orbita naar buiten af, vormt den vrijen buitenwand der oogkas, een achterste gedeelte vormt een afscheiding tusschen de oogkas en de Fossa media van den schedel. Tusschen deze beide deelen in, verbindt zich de zijwand van den hersenschedel met den zijwand van de orbita. Uit deze verhouding volgt dus, dat de schedelholte zich ten deele zijdelings van de oogkas uitstrekt, met andere woorden dat de oogkas ten deele in het Cavum cranii ingeschoven ligt, zoodat een gemeenschappelijke scheidingswand bestaat tusschen het Cavum orbitae en het Cavum cranii. Deze scheidingswand tusschen beide holten wordt naar boven toe in de richting van het dak der orbita grooter, doordat de schedelwand zich hoe langer zoo meer naar voren met den orbitaalwand verbindt. De vrije buitenwand wordt dus kleiner, en is bij het dak van de orbita aan den jeugdigen Gorillaschedel geheel afwezig, daar de schedelwand zich langs den voorrand van het orbitaaldak vasthecht. Het geheele dak der orbita is dus scheidingswand geworden tusschen deze holte en het Cavum cranii. Dit wil met andere woorden zeggen dat de oogkas bij den jeugdigen Gorilla geheel onder de schedelholte ligt.

Hoe is nu de toestand aan den volwassen schedel?

Zooals uit fig. 2 blijkt, kan men thans aan den zijwand der orbita de beide zoeven beschreven deelen niet meer onderscheiden, het achterste intracranieele gedeelte is verdwenen, doordat de zijwand van den schedel zich thans zoo ver mogelijk naar achter aan den zijwand der orbita vasthecht. De geheele zijwand is buitenwand geworden. Uit een topographisch oogpunt beteekent dit dus, dat de orbita niet meer in de schedelholte ingeschoven ligt, doch er voor is komen te liggen. En deze conclusie wordt bevestigd bij een nadere beschouwing van het dak der orbita. Bij den jeugdigen schedel hecht zich de voorhoofswand der schedelholte langs den voorrand aan het orbitaaldak vast, dat wil zeggen dat het geheele dak der orbita een scheidingswand tusschen schedel- en orbitaalholte vormt, een vrijen

buitenwand vormt het dak niet. Bij het volwassen individu daarentegen hecht zich het schedeldak zeer ver naar achter aan het orbitaaldak vast, zooals uit fig. 3 blijkt, waarin een sagittale doorsnede door de orbita van een volwassen Gorilla is weergegeven. Het dak der orbita is hier voor het grootste deel een vrije buitenwand geworden.

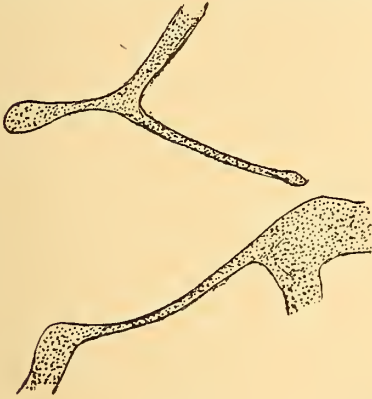


Fig. 3.

Uit deze korte vergelijking blijkt reeds, dat de topographische verhoudingen der orbita ten opzichte van de schedelholte bij den jongen en den volwassen Gorilla zeer verschillend zijn. En dit verschil is in 't kort volgende wijze samen te vatten: bij het jeugdige individu ligt de orbita grotendeels in het Cavum cranii ingeschoven, bij het volwassen individu ligt de oogkas vóór de schedelholte. Er heeft dus gedurende den groei een verschuiving naar voren plaats. Deze verschuiving komt tot stand doordat de orbita gedurende den groei zich uitsluitend naar voren verlengt. Dit is met behulp van fig. 1 en 2 niet moeilijk aan te toonen, wanneer men daarbij meer in 't bijzonder op het Septum orbitale let. De doorsnede in beide figuren gaat juist nog boven de Lamina cribrosa, dat wil dus zeggen door het voorste uiterste gedeelte der schedelholte.

Aan het septum orbitale van den jeugdigen schedel zijn drie gedeelten te onderscheiden, een middelste, gevormd door de Lamina cribrosa, een voorste en een achterste. Aan den volwassen schedel zijn deze drie gedeelten eveneens, niettegenstaande de pneumatisering te zien. Een vergelijking leert nu dat de verlenging van het septum bijkans uitsluitend tot stand kwam door lengtetoeneming van het vóór de lamina cribrosa gelegen deel er van. Men vergelijke daartoe slechts de gestippelde lijn in beide figuren, die het frontale vlak aangeeft door den voorrand der Lamina cribrosa. Deze lijnen zijn tevens dienstig om een inzicht te verkrijgen in de verschuiving naar voren die een gevolg is dezer groeiwijze. Bij het jonge schedeltje ligt bijkans de geheele orbitaalholte achter deze lijn, bij den volwassen schedel alleen het achterste toegespitste gedeelte.

De groei van den schedel van Gorilla is dus van zeer merkbaaren invloed op de ligging der oogkassen ten opzichte der schedelholte. Dat hiermede ook een aanzienlijke verandering in den vorm der schedelholte gepaard gaat, vloeit eveneens uit eene vergelijking van Figuur 1 en 2 voort. Bij den volwassen schedel is het achterste deel der orbita, trechter- tot kanaalvormig uitgetrokken.

De wijzigingen in de ligging der orbita tengevolge van den groei, zijn op een eenvoudige wijze in beeld te brengen door middel van projectie der begrenzing dezer holte op het mediaanvlak, hetgeen met behulp van den bekenden Martinschen pantograaph zeer gemakkelijk is. In Figuur 4 is zulk eene projectie gegeven vervaardigd naar den schedel van een Gorillakiind waarvan de tandwisseling juist begonnen was (de mediale incisivi zijn gewisseld). Figuur 5 geeft



Fig. 4.

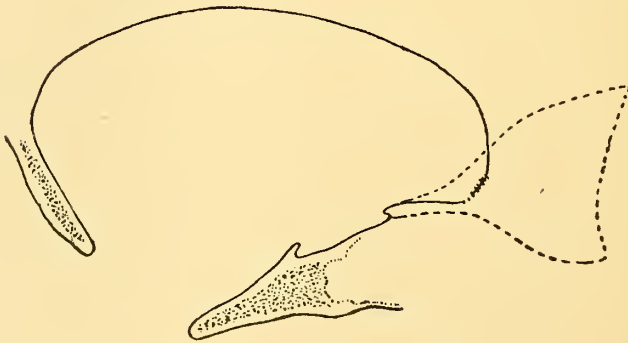


Fig 5.

een desbetreffende projectie van een volwassen manlijken schedel <sup>1)</sup>. De schedelbasis is ten deele, de omtrek der schedelholte geheel aangegeven. Ligging en richting der lamina cribrosa zijn eveneens aangeduid. Op de vervorming der schedelholte gedurende den groei, voornamelijk zich uitend in een afplatting, zij in 't voorbijgaan de aandacht gevestigd. Deze figuren vereischen weinig toelichting, een enkele blik is voldoende voor een inzicht in de verandering der topographische verhouding der orbitae ten opzichte der schedelholte. Alleen moge er nog op worden gewezen, dat de verschuiving der orbitae tot geheel voor de schedelholte als de directe aanleiding moet worden beschouwd voor het ontstaan van den buitengewoon krach-

<sup>1)</sup> De verkleining is in figuur 5 sterker dan in figuur 4.



tigen beenkam die het voorste deel van den hersenschedel van Gorilla kenmerkt. Deze beenkam is — zooals ook uit figuur 3 blijkt, niet anders dan de noodzakelijke afsluiting naar boven toe van de orbitaalholte, het nieuw uitgegroeide dak dezer holte. Zonder dezen beenkam zou de orbita naar boven een beenige afsluiting missen.

Alvorens tot de beschrijving van den menschelijken toestand over te gaan, zij aan de hand van eenige projectiefiguren die bij de beide andere Anthropoiden kort geschetst. De figuren 6 en 7 hebben betrekking op een jongen Orang nog in 't bezit van zijn volledig

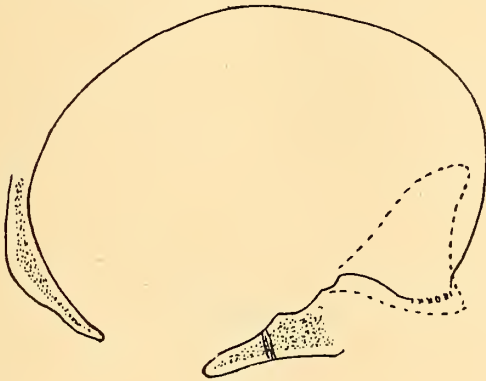


Fig. 6.

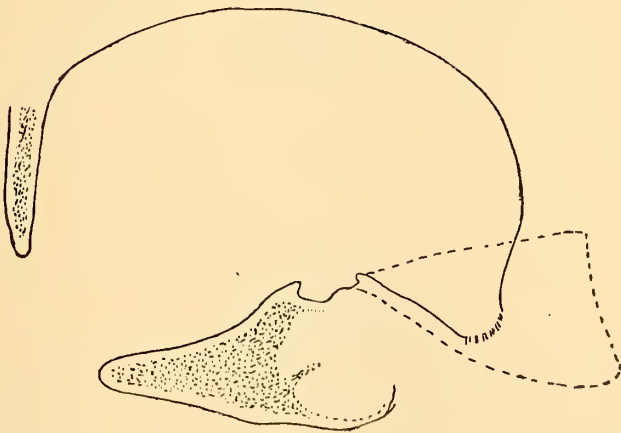


Fig. 7.

melkgebit, en op een volwassen individu van dit geslacht. Nog sterker dan dit bij Gorilla het geval was treedt het liggingsverschil der orbitae ten opzichte der schedelholte bij deze beide individuen te voorschijn. Dit is wel voornamelijk het gevolg van het feit dat het schedeltje van het Orangkind zooveel jonger was dan dat van het Gorillakind. De orbita ligt bij dezen zeer jeugdigen Orang nog geheel en al in de schedelholte ingesloten, het geheele dak van de

orbita is hier nog bodem van de voorste schedelgroeve. Bij den volwassen Orang ligt de orbita veel verder naar voren. Ook hier heeft dus een aanmerkelijke verschuiving plaats gehad naar voren. Dit ging bij Orang niet gepaard met de kamvorming als bij Gorilla, ten eerste niet omdat de orbitae en in 't bijzonder het dakgedeelte ervan niet zoo ver vóór de schedelholte kwamen te liggen, en ten tweede omdat de voorste schedelwand bij Orang zich gelijkmatig verdikte.

De verandering in de topographische verhoudingen bij Chimpanzee is uit eene vergelijking der figuren 8 en 9 zichtbaar. Bij dit geslacht

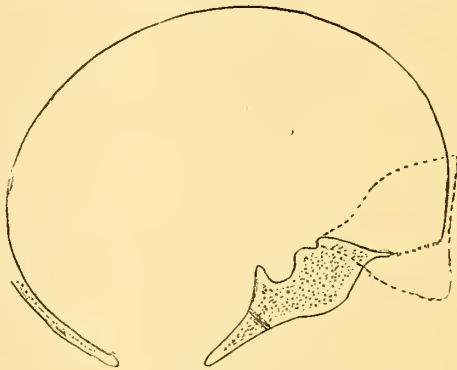


Fig. 8.

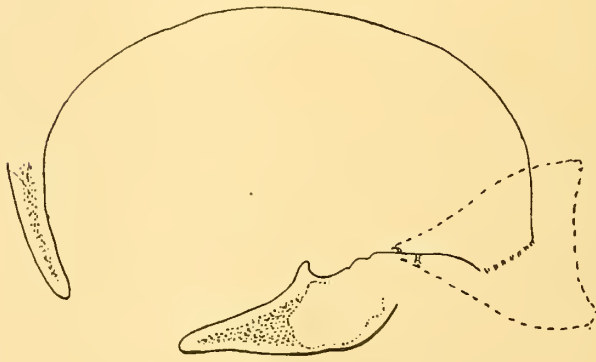


Fig. 9.

is de verschuiving naar voren weer geringer dan bij Orang, hoewel zij toch nog een aanzienlijken graad bereikt. De projectie in figuur 8 is vervaardigd naar een schedeltje met volledig melkgebit, die in figuur 9 naar een volwassen schedel.

Uit dit korte overzicht blijkt dus dat de drie anthropoïden hierin overeenstemmen dat tengevolge van bepaalde groeiverschijnselen de topographische verhouding der oogkassen ten opzichte der schedelholte verandering ondergaat. Deze verandering koimt in hoofdzaak hierop neer, dat de orbitae bij den jeugdigen menschaap onder de schedelholte gelegen zijn, en bij het volwassen individu meer vóór deze

ruimte komen te liggen. Het sterkst is dat bij Gorilla het geval, waar bijkans de geheele oogkas voor de schedelholte ligt. De sagittale doorsneden door de orbita in fig. 10 (Chimpanzee) en fig. 11

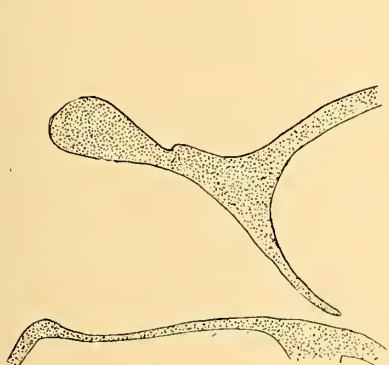


Fig. 10.

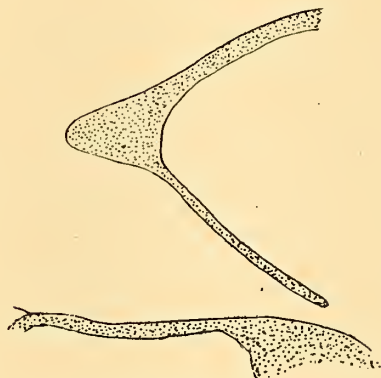


Fig. 11.

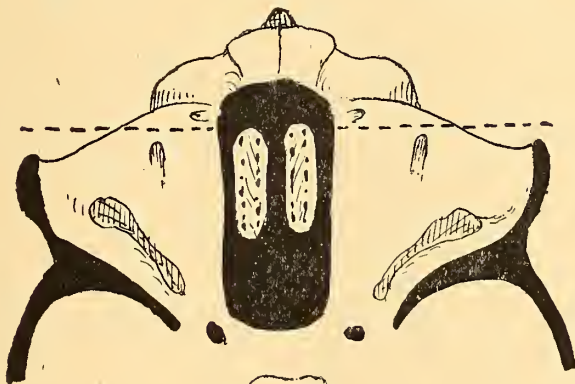


Fig. 12.

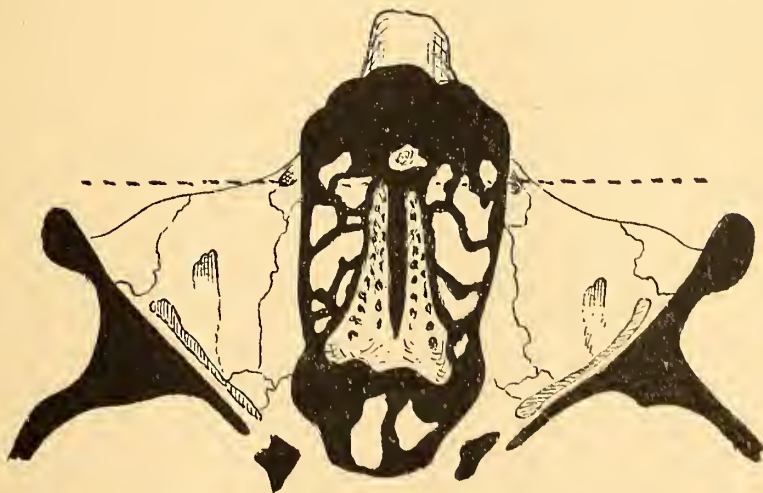


Fig. 13.

(Orang) geven in vergelijking met de in figuur 3 (Gorilla) geschetste, een duidelijken indruk van de verschillende mate van verschuiving bij de drie Anthropoïden.

Hoe is nu de toestand bij den mensch? Daartoe zij in de eerste plaats verwezen naar de figuren 12 en 13. In de eerstgenoemde figuur is een horizontale doorsnede geschetst door de orbitae van een pasgeborene, in figuur 13 zulk eene door de orbitae van een volwassen individu. In beide figuren is weder door een gestippelde lijn het frontale vlak aangegeven dat door den voorrand der lamina cribrosa, dat is door de voorgrens der schedelholte gaat. Zoekt men dus een antwoord op de vraag of, en zoo ja in welke mate de orbitae ook bij den mensch gedurende den groei zich verschuiven, dan vergelijke men slechts de ligging der oogkassen in beide figuren ten opzichte der aangegeven lijn. Het blijkt dan, dat van zulk eene verschuiving geen aanwijzing is. Want zoowel bij den infantieelen schedel als bij den adulten ligt ongeveer de geheele orbita achter deze lijn. Wat de topographie der orbita ten opzichte der schedelholte betreft, treedt bij den mensch gedurende den groei geene verandering in zooals dit bij de Anthropoïden het geval is. Tot dat besluit kan men ook komen wanneer men de anatomie van den zijwand van de orbita in beide figuren vergelijkt. Bij de bespreking der Gorillaschedels kon er op worden gewezen dat bij den infantieelen schedel twee gedeelten aan dezen wand konden worden onderscheiden, een intracranieel gedeelte, dat orbitaalholte en schedelholte van elkander afgrensde, en een voorste deel, dat de orbita naar buiten begrenste. Tusschen beide deelen hecht zich de schedelwand aan den orbitaalwand. Bij den volwassen Gorilla is het intracranieele deel verdwenen, de schedelwand hecht zich aan het achterste deel van den orbitaalwand vast.

Bij den mensch blijkt van deze veranderde anatomische verhouding niets. Zoowel bij den jongen als bij den volwassen schedel komt het intracranieele deel voor, dat wil dus zeggen, evenals bij den jongen schedel zoo is ook bij den volwassenen het achterste deel van den zijwand der orbita een scheidingswand tusschen deze holte en de schedelholte gebleven. Bij den mensch blijft de orbitaalholte in de schedelholte ingeschoven, hetgeen ten overvloede bewezen wordt door het feit, dat de voorhoofds wand der schedelholte zich langs den voorrand van het dak der orbitaalholte vasthecht, zoowel bij den jeugdigen als bij den volwassen schedel.

Voor wat de groeiverschijnselen in het orbitale gebied van den schedel betreft bestaat er dus een zeer merkbaar verschil tusschen den mensch eenerzijds en de Anthropoïden anderzijds. Dit verschil

komt in 't komt hierop neer dat bij den mensch infantiele topografische verhoudingen bestendig worden. In hun jeugd stadium zijn deze verhoudingen bij den mensch overeenstemmend met die bij de menschen. Terwijl zij echter bij deze laatste door andere vervangen worden, en de volwassen schedel daardoor zeer ongelijk wordt aan den infantielen, blijft de menschenschedel zijn infantiele schedelkenmerken bewaren. En zooals in 't begin dezer mededeeling kon worden herinnerd, hebben wij ditzelfde feit ook met betrekking tot het Foramen magnum kunnen vaststellen. Hieruit vloeit voort dat bij een vergelijking van den menschenschedel met den Anthropoïden-schedel, met het doel den ontwikkelingsgang van den eersten te leeren kennen, men de volwassen schedels der menschen niet als primitieve vormen mag beschouwen, waarvan de menschenschedel afgeleid moet worden.

---

**Storrekunde.** — De Heer DE SITTER biedt eene mededeeling aan:  
 „Schets eener nieuwe theorie der satellieten van Jupiter.”

1. *Grondgedachte der theorie.*

De groote moeilijkheid van de theorie der vier oude satellieten van Jupiter is het gevolg van de onderlinge meetbaarheid der middelbare bewegingen van de drie binnenste. De vierde satelliet deelt hierin niet, en voorzover de periodieke ongelijkheden betreft, levert zijne theorie geen bijzondere moeilijkheden op, en is zij in vele opzichten analoog aan die van onze maan, alleen veel eenvoudiger, daar de verhouding tusschen de lengte van de maand en het jaar, die bij onze maan  $\frac{1}{13}$  is, voor de vierde satelliet ongeveer  $\frac{1}{260}$  bedraagt. De seculaire storingen der middelpuntsvergelijkingen van de vier satellieten zijn echter zoo innig met elkaar verbonden, dat de theorie der vier satellieten als één geheel moet behandeld worden, en het niet mogelijk is de vierde afzonderlijk te houden.

Ik duid de satellieten aan door de suffixen 1 tot 4, en ik noem:

- $a_i$  de halve groote as,
- $n_i$  de middelbare beweging,
- $w_i$  de ware lengte in de baan,
- $\lambda_i$  de middelbare lengte,
- $l_i$  de middelbare anomalie,
- $f_i$  de ware anomalie,
- $r_i$  den radius-vector,
- $e_i$  de excentriciteit,
- $\pi_i$  de lengte van het perijovium.

Stelt men verder <sup>1)</sup>

$$(n_2 - n_3) t = \tau,$$

dan is, als men een geschikt nulpunt van telling voor de lengte en den tijd kiest:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (4 - \alpha) \tau, \\ \lambda_2 &= (2 - \alpha) \tau + 180^\circ, \\ \lambda_3 &= (1 - \alpha) \tau, \end{aligned}$$

waar  $\alpha$  eene kleine grootheid is, n.l. ongeveer

$$\alpha = \frac{1}{69}.$$

<sup>1)</sup> Deze  $\tau$  verschilt  $180^\circ$  van den vroeger zoo door mij genoemden hoek. Zie deze Verslagen Feb. en Mrt. 1908: „Over de massa's en baanelementen der Satellieten van Jupiter en de massa van het Systeem.” (Deel XVI. blz. 579 en 709).







$$u_i - e_i \sin u_i = l_i$$

$$\tan \frac{1}{2} f_i = \sqrt{\frac{1+e_i}{1-e_i}} \tan \frac{1}{2} u_i \quad \dots \quad (4)$$

$$r_i = \frac{a_i(1-e_i^2)}{1+e_i \cos f_i}$$

en de ware lengte in de baan is dan

$$w_i = f_i + \pi_i \quad \dots \quad (5)$$

Deze intermediaire baan valt ook voor de drie binnenste satellieten niet samen met de volledige periodieke solutie, maar bevat alleen den hoofdterm hiervan. Om deze intermediaire baan te krijgen moet 1°. de storingsfunctie tot een bepaald gedeelte (het „seculaire” en het „kritische” deel) beperkt worden, en 2° de beginwaarden, of integratie-constanten aan bepaalde voorwaarden voldoen. De volledige oplossing wordt dan verkregen door aan deze intermediaire baan toe te voegen:

1°. storingen, die ontstaan door de eerst verwaarloosde gedeelten van de storingsfunctie, en

2°. variaties, die ontstaan door dat de werkelijke integratie-constanten niet volkomen aan de boven vermelde condities voldoen.

Van deze zijn de variaties de belangrijkste. Om deze te krijgen moet men de variatie-vergelijkingen opstellen. Deze leiden tot een stel vergelijkingen dat geheel analoog is aan die welke optreden bij de behandeling der seculaire storingen volgens de methode van LAGRANGE. De determinant, die hieruit wordt afgeleid, heeft 5 wortels  $\beta_1 \dots \beta_5$ , respectievelijk behoorende bij de vier eigen perijovia  $\varpi_i$  en het argument van de libratie. De ongelijkheden in lengte en voerstraal worden dan voorgesteld door formules van den vorm (als men zich tot de eerste orde beperkt):

$$\left. \begin{aligned} \delta w_i &= \sum_j W_{ij} \varepsilon_j \sin(\lambda_i - \varpi_j) + \sum_j W'_{ij} \varepsilon_j \sin \varphi_j, \\ \delta r_i &= \sum_j R_{ij} \varepsilon_j \cos(\lambda_i - \varpi_j), \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (6)$$

waar

$$\varphi_i = \beta_i \tau + \varphi_{i0} = \alpha \tau + \varpi_i$$

evenals boven, en waar  $j$  loopt van 1 tot 5. Deze formules omvatten niet alleen de vrije middelpuntsvergelijkingen Ia, maar ook de ongelijkheden van groep II (argumenten  $\varphi_1 - \varphi_4$ ) en de libratie III (argument  $\varphi_5$ ).

Wat de storingen betreft: door het invoeren der  $c_i$  inplaats van de  $n_i$  is bereikt dat geen kleine divisoren meer voorkomen. In de gewone theorie zijn het juist de ongelijkheden Ib, II en III, die

kleine divisoren hebben. Van deze is hier *Ib* reeds in de intermediaire baan opgenomen, terwijl *II* en *III* als variaties optreden, die volgens de methode van LAGRANGE behandeld worden, tezamen met *Ia*, die ook in de oude theorie reeds als zoodanig verscheen. Men kan zeggen dat alle kleine divisoren zijn geconcentreerd in de conditie-vergelijking voor de integratie-constanten van de intermediaire baan. Is deze vergelijking eenmaal opgelost, dan zijn de kleine divisoren verdreven, en kunnen ook in de volgende approximaties niet meer te voorschijn komen.

## 2. Opstelling der differentiaalvergelijkingen.

Wij nemen een willekeurig assenstelsel door het middelpunt van Jupiter, en wij noemen:

$f$  de constante van GAUSS,

$m_0$  de massa van Jupiter,

$m_i$  de massa van het lichaam met rangnummer  $i$ , uitgedrukt in  $m_0$  als eenheid,

$s_i$  de breedte van het lichaam  $i$  boven den equator van Jupiter,

$r_i$  den afstand van het lichaam  $i$  tot Jupiter,

$\Delta_{ij}$  de afstand tusschen de twee lichamen  $i$  en  $j$ ,

$V_{ij}$  den hoek tusschen de voerstralen  $r_i$  en  $r_j$ ,

$180^\circ - \psi$  den klimmenden knoop van den equator van Jupiter op het  $(xy)$  vlak,

$\pi$  de helling van dien equator op datzelfde vlak,

$J, K$  twee constanten die samenhangen met de afplatting van Jupiter,

$b$  den straal van den equator van Jupiter,

en wij stellen verder

$$\alpha = \sin \pi \sin \psi,$$

$$\beta = \sin \pi \cos \psi,$$

$$\gamma = \cos \pi.$$

Dan zijn de bewegingsvergelijkingen:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_i}, \quad \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial y_i}, \quad \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial z_i},$$

waar

$$\begin{aligned} \Omega_i = & f m_0 (1 + m_i) \left\{ \frac{1}{r_i} + \frac{1}{3} \frac{J b^2}{r_i^3} (1 - 3 \sin^2 s_i) + \frac{1}{10} \frac{K b^4}{r_i^5} (1 - 10 \sin^2 s_i + \frac{3}{5} \sin^4 s_i) + \dots \right\} \\ & + f m_0 \sum_j m_j \left\{ \frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{r_i}{r_j^2} \cos V_{ij} \left[ 1 + \frac{J b^2}{r_j^2} (1 - 5 \sin^2 s_j) + \frac{K b^4}{r_j^4} (\frac{1}{2} - 7 \sin^2 s_j + \frac{2}{5} \sin^4 s_j) + \dots \right] \right. \\ & \left. + 2 \frac{\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i}{r_j^2} \sin s_j \left[ \frac{J b^2}{r_j^2} + \frac{K b^4}{r_j^4} (1 - \frac{7}{3} \sin^2 s_j) + \dots \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

De som strekt zich uit over de waarden 1, 2, 3, 4 van  $j$ , met uitzondering van  $j = i$ , en bovendien over de indices  $j$  die betrekking hebben op de zon, Saturnus, etc.

Kiest men het  $(xy)$  vlak nabij de middelbare positie van den equator, dan worden  $\alpha$  en  $\beta$  zeer klein, en  $\gamma$  wordt zeer nabij gelijk aan de eenheid. De breedtes  $s_i$  zijn zeer klein (de grootste blijft kleiner dan  $0^\circ.7$ ) terwijl ook voor lichamen buiten het Jupiterstelsel  $s_j$  klein blijft (voor de zon b.v. kleiner dan  $3^\circ.1$ ).

Bij deze functie  $\Omega_i$  valt nog op te merken dat de met  $J$  en  $K$  vermenigvuldigde termen van het complementaire deel der storingsfunctie (in den tweeden regel van de formule) hier voor het eerst worden gegeven. LAPLACE verwaarloost deze termen, en alle volgende onderzoekers nemen de storingsfunctie van LAPLACE zonder kritiek over. VOOR LAPLACE was dit volkomen correct, daar deze termen buiten de grenzen van nauwkenrigheid vallen, die hij zich stelde. SOUILLART echter neemt andere termen van dezelfde, en hoogere, orde wel mee, en had dus deze ook niet mogen verwaarloozen.

Stelt men nu

$$x_i' = \frac{dx_i}{dt}, \quad y_i' = \frac{dy_i}{dt}, \quad z_i' = \frac{dz_i}{dt},$$

$$T_i = \frac{1}{2} (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2),$$

$$F_i = T_i - \Omega_i,$$

dan worden de vergelijkingen

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F_i}{\partial x_i'}, \quad \frac{dx_i'}{dt} = -\frac{\partial F_i}{\partial x_i},$$

en evenzoo voor  $y_i$  en  $z_i$ .

Men kan nu kanonieke elementen invoeren, b.v. die van DELANNAY

$$l_i, \quad g_i, \quad \vartheta_i, \quad L_i, \quad G_i, \quad \Theta_i,$$

waar

$$L_i = \beta_i \sqrt{a_i}, \quad G_i = L_i \sqrt{1 - e_i^2}, \quad \Theta_i = G_i \cos i_i,$$

of daaruit afgeleide andere kanonieke stellen.

Ik stel nu <sup>1)</sup>

$$S_i' = \Omega_i - \frac{\beta_i^2}{r_i} \dots \dots \dots \quad (8)$$

Dan wordt

$$F_i = -\frac{\beta_i^4}{2L_i^3} - S_i'$$

<sup>1)</sup> Vgl. *Over Canonieke elementen*, deze Verslagen Sept. 1913, Deel XXII, blz. 349 en 351.

en de vergelijkingen zijn

$$\frac{dl_i}{dt} = \frac{\beta_i^4}{2L_i^2} - \frac{\partial S_i'}{\partial L_i},$$

$$\frac{dg_i}{dt} = -\frac{\partial S_i'}{\partial G_i}, \text{ etc.}$$

Gewoonlijk wordt genomen  $\beta_i^2 = fm_0(1 + m_i)$ . Door echter  $\beta_i$  voorloopig onbepaald te laten, houd ik de beschikking over een constante die later zóó bepaald kan worden dat de intermediaire baan den gewenschten vorm krijgt.

Ik voer nu eerst in plaats van  $l_i, g_i, \vartheta_i, L_i, G_i, \Theta_i$  het eveneens kanonieke stel elementen

$$\lambda_i = l_i + g_i + \vartheta_i, \quad l_i, \quad \psi_i = -\vartheta_i,$$

$$G_i, \quad H_i = L_i - G_i, \quad \Psi_i = G_i - \Theta_i$$

in. Men heeft dan

$$\frac{\partial S_i'}{\partial G_i} = \left( \frac{\partial S_i'}{\partial G_i} \right) - \frac{1}{2} \frac{\gamma_i}{G_i} \frac{\partial S_i'}{\partial \gamma_i},$$

waar

$$\gamma_i = 2 \sin \frac{1}{2} i = \sqrt{\frac{2\Psi_i}{G_i}}.$$

De tweede term is van den tweeden graad in  $\gamma_i$ , en dus zeer klein. Stelt men nu

$$\lambda_i = \lambda_i' + \sigma_i,$$

en bepaalt men  $\sigma_i$  uit

$$\frac{d\sigma_i}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\gamma_i}{G_i} \frac{\partial S_i'}{\partial \gamma_i}, \dots \dots \dots (9)$$

dan is

$$\frac{d\lambda_i'}{dt} = \frac{\beta_i^4}{L_i^2} - \left( \frac{\partial S_i'}{\partial G_i} \right),$$

waar de haken om het differentiaalquotient aanduiden dat *niet* naar  $G_i$  gedifferentieerd moet worden voor zoover  $S_i'$  van  $G_i$  afhangt door middel van de hellingen  $\gamma_i$ . Is dit eenmaal vastgesteld, dan kan men eenvoudigheidshalve het accent van  $\lambda_i'$  en de haken van  $\left( \frac{\partial S_i'}{\partial G_i} \right)$  weer weglaten, mits dan aan de zoo bepaalde  $\lambda_i$  later de correctie

$$\delta\lambda_i = \sigma_i \dots \dots \dots (10)$$

worde toegevoegd, waar  $\sigma_i$  bepaald wordt door (9).

In de theorie der hellingen geeft de benaderde onderlinge meetbaarheid der middelbare bewegingen geen aanleiding tot bijzondere

moeilijkheden. Het voornaamste voor deze theorie is het  $(x, y)$  vlak zoodanig te kiezen dat de hellingen zoowel van de satellieten als van den equator steeds klein blijven. Op dit probleem zal ik hier niet ingaan. Ik bepaal mij nu verder uitsluitend tot de vier elementen.

$$\lambda_i, l_i, G_i, H_i.$$

Men kan een zoodanige tijdseenheid kiezen, dat  $t = \tau$  wordt. Deze tijdseenheid is ongeveer 9/8 dag.

Men heeft dan

$$\frac{dl_i}{d\tau} = \frac{\beta_i^4}{L_i^3} - \frac{\partial S_i'}{\partial H_i}, \quad \frac{d\lambda_i}{d\tau} = \frac{\beta_i^4}{L_i^3} - \frac{\partial S_i'}{\partial G_i}.$$

Ik stel algemeen door  $[X]$  voor het niet-periodieke gedeelte van eene functie  $X$ . Men moet dus hebben

$$\left[ \frac{dl_i}{d\tau} \right] = c_i, \quad \left[ \frac{d\lambda_i}{dt} \right] = c_i - \alpha.$$

Dit is te bereiken op twee manieren. Men kan nemen

$$\left[ \frac{\beta_i^4}{L_i^3} \right] = c_i, \quad \left[ \frac{\partial S_i'}{\partial H_i} \right] = 0, \quad \left[ \frac{\partial S_i'}{\partial G_i} \right] = \alpha. \quad (A)$$

of

$$\left[ \frac{\beta_i^4}{L_i^3} \right] = c_i - \alpha, \quad \left[ \frac{\partial S_i'}{\partial H_i} \right] = -\alpha, \quad \left[ \frac{\partial S_i'}{\partial G_i} \right] = 0. \quad (B)$$

Nu is de storingsfunctie gegeven (b.v. door de ontwikkeling volgens NEWCOMB) als functie van  $\lambda_i, l_i, a_i$  en  $e_i$ , terwijl

$$\frac{\partial S_i'}{\partial H_i} = \frac{2}{\beta \sqrt{a_i}} a_i \frac{\partial S_i'}{\partial a_i} + \frac{\cos^2 \varphi_i}{\beta \sqrt{a_i}} \frac{1}{e_i} \frac{\partial S_i'}{\partial e_i},$$

$$\frac{\partial S_i'}{\partial G_i} = \frac{2}{\beta \sqrt{a_i}} a_i \frac{\partial S_i'}{\partial a_i} - \frac{\cos \varphi_i \tan \frac{1}{2} \varphi_i}{\beta \sqrt{a_i}} \frac{\partial S_i'}{\partial e_i},$$

waar  $\sin \varphi_i = e_i$  gesteld is.

In het geval (A) wordt dus  $a_i \frac{\partial S_i'}{\partial a_i}$  van de orde van  $\alpha$ , in het geval (B) echter van de orde van  $\alpha \cdot e_i^2$ , terwijl  $\frac{\partial S_i'}{\partial e_i}$  in beide gevallen van de orde van  $\alpha \cdot e_i$  wordt.

De methode (B) is dus te verkiezen.

In plaats van  $H_i = 2 L_i \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_i$  voer ik in als onbekende

$$\eta_i = 2 \sin \frac{1}{2} \varphi_i.$$

Men heeft

$$\frac{da_i}{a_i} = \frac{2}{\beta_i \sqrt{a_i}} (dH_i + dG_i),$$

$$d\eta_i = \frac{1}{\beta_i \sqrt{a_i}} \left( \frac{\cos \varphi}{\eta_i} dH_i - \frac{1}{2} \eta_i dG_i \right).$$

Daar overal de noemer  $\beta_i \sqrt{a_i}$  optreedt, ligt het voor de hand een vereenvoudiging in te voeren door te stellen

$$R_i = \frac{S_i'}{\beta_i \sqrt{a_i}},$$

waar  $a_i$  een constante is, die bepaald wordt, in overeenstemming met (B), door

$$\left[ \frac{\beta_i^4}{L_i^3} \right] = \frac{\beta_i}{a_i^{3/2}} = c_i - \alpha.$$

Ik stel verder

$$\frac{\beta_i^4}{L_i^3} = (c_i - \alpha) (1 + r_i),$$

zoodat dus  $r_i$  zuiver periodiek is, en

$$a_i^{3/2} = a_i^{3/2} (1 + r_i).$$

Derhalve

$$dr_i = -\frac{3}{2} (1 + r_i) \frac{da_i}{a_i}$$

Voert men verder in, evenals boven

$$\pi_i = \lambda_i - l_i,$$

waarbij moet opgemerkt worden dat  $\pi_i$  dezelfde correctie

$$d\pi_i = \sigma_i$$

behoeft als  $\lambda_i$ , en denkt men zich dan de storingsfunctie  $R_i$  uitgedrukt in de variabelen  $\lambda_i$ ,  $\pi_i$ ,  $a_i$  en  $\eta_i$ , dan worden de vergelijkingen ten slotte

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\lambda_i}{d\tau} &= (c_i - \alpha) (1 + r_i) - 2(1 + r_i)^{\frac{1}{3}} a_i \frac{\partial R_i}{\partial a_i} + \frac{1}{2} (1 + r_i)^{\frac{1}{3}} \eta_i \frac{\partial R_i}{\partial \eta_i}, \\ \frac{dl_i}{d\tau} &= (c_i - \alpha) (1 + r_i) - 2(1 + r_i)^{\frac{1}{3}} a_i \frac{\partial R_i}{\partial a_i} - (1 + r_i)^{\frac{1}{3}} \frac{\cos \varphi_i}{\eta_i} \frac{\partial R_i}{\partial \eta_i}, \\ \frac{d\pi_i}{d\tau} &= (1 + r_i)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\eta_i} \frac{\partial R_i}{\partial \eta_i}, \\ \frac{dr_i}{d\tau} &= -3(1 + r_i)^{\frac{4}{3}} \frac{\partial R_i}{\partial \lambda_i}, \\ \frac{d\eta_i}{d\tau} &= -(1 + r_i)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\eta_i} \frac{\partial R_i}{\partial \pi_i} - \frac{1}{2} (1 + r_i)^{\frac{1}{3}} \eta_i \frac{\partial R_i}{\partial \lambda_i}. \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

Van de eerste drie dezer vergelijkingen kan men twee naar wil-

lekeur uitkiezen om in de berekeningen te gebruiken. De formules worden het eenvoudigst als men  $\lambda_i$  en  $\pi_i$  gebruikt.

In plaats van  $\beta_i$  ( $a_i$ ) voer ik nog de constante  $\mu_i$  in, die bepaald wordt door

$$\mu_i = 1 - \frac{fm_0(1+m_i)}{a_i^3(c_i-\kappa)^2} \dots \dots \dots (13)$$

Als men dan ook stelt

$$\varrho_i = \frac{r_i}{a_i} = (1+r_i)^{-\frac{2}{3}} \frac{r_i}{a_i} \dots \dots \dots (14)$$

dan wordt de storingsfunctie  $R_i$ , als men alléén die termen opschrijft, die onafhankelijk zijn van de breedtes:

$$R_i = -\frac{(c_i-\kappa)\mu_i}{\varrho_i} + (c_i-\kappa)(1-\mu_i) \left[ \frac{1}{3} \frac{J_i}{\varrho_i^2} + \frac{1}{10} \frac{K_i}{\varrho_i^4} \right] + \left. \begin{aligned} &+ \frac{(c_i-\kappa)(1-\mu_i)}{1+m_i} \sum_j m_j \left\{ \frac{a_i}{\Delta_{ij}} - \frac{a_i^2}{a_j^2} \frac{\varrho_i}{\varrho_j^2} \cos V_{ij} \left[ 1 + \frac{J_j}{\varrho_j^2} + \frac{1}{2} \frac{K_j}{\varrho_j^4} \right] \right\} \right\} \dots (15)$$

waar ter afkorting gesteld is

$$J_i = \frac{Jb^2}{a_i^2}, \quad K_i = \frac{Kb^4}{a_i^4}.$$

**3. De intermediaire baan.**

De storingsfunctie  $R_i$  bestaat uit een reeks termen van den vorm

$$K \cos D,$$

$$D = p\lambda_j - p\lambda_i + q\lambda_i + q'\lambda_j$$

Om de intermediaire baan te krijgen, nemen wij

$$R_i = [R_i],$$

zoodat het argument  $D$  moet voldoen aan de voorwaarde

$$(p+q)c_j + (q-p)c_i = 0.$$

De functie  $[R_i]$  bestaat dus uit het „seculaire deel” der storingsfunctie, waarvoor  $q = p$ ,  $q' = -p$ , en uit het „kritieke” deel, dat niet-periodiek wordt door de onderlinge meetbaarheid van  $c_i$  en  $c_j$ .

Daar  $\frac{\partial R_i}{\partial \lambda_i}$  en  $\frac{\partial R_i}{\partial \pi_i}$  alleen sinussen bevatten, heeft men

$$\frac{dr_i}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\eta_i}{d\tau} = 0$$

mits

$$\lambda_{j_0} - \lambda_{i_0} = k \times 180^\circ$$

of

$$\pi_{i_0} = k \times 180^\circ, \dots \dots \dots (16)$$

waar  $k$  een geheel getal is.

Als men de lengtes en den tijd telt van af een oppositie van II en III, dan is

$$\pi_{1_0} = 0 \quad , \quad \pi_{2_0} = 180^\circ \quad , \quad \pi_{3_0} = 0.$$

Wat den vierden satelliet betreft, is de conditie  $\lambda_{4_0} = 0$  of  $180^\circ$  over het algemeen niet voldaan, daar tusschen de lengte van den vierden satelliet en die der andere geen betrekking bestaat, zooals dat bij de drie binnenste het geval is. Het is echter gemakkelijk een oppositie van II en III als uitgangspunt te kiezen, waarbij deze conditie zéér benaderend voldaan is<sup>1)</sup>.

Dan zijn voor alle satellieten in de intermediaire baan  $\mu_i$  en  $v_i$  constant. Ik neem

$$v_i = 0, \quad \text{dus} \quad a_i = a_i \quad ; \quad \eta_i = \bar{\eta}_i \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Dan worden ook  $a_i \frac{\partial [R_i]}{\partial a_i}$  en  $\frac{\partial [R_i]}{\partial \eta_i}$  constanten. Worden deze zóó bepaald dat

$$\frac{\partial [R_i]}{\partial \eta_i} = -\alpha \bar{\eta}_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

$$a_i \frac{\partial [R_i]}{\partial a_i} = -\frac{1}{4} \alpha \bar{\eta}_i^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

dan wordt dus

$$l_i = c_i \tau \quad , \quad u_i = -\alpha \tau + \pi_{i_0} \quad , \quad \lambda_i = (c_i - \alpha) \tau + \pi_{i_0} \quad . \quad (20)$$

Daar nu de voerstraal  $r_i$  en de ware lengte in de baan  $w_i$  bepaald worden door de vergelijkingen (4 en (5), is inderdaad de intermediaire baan een Keplersche ellips met de halve groote as  $a_i$ , de excentriciteit  $e_i = \sin \bar{\varphi}_i$ , gegeven door  $2 \sin \frac{1}{2} \bar{\varphi}_i = \bar{\eta}_i$ , en de middelbare anomalie  $l_i = c_i \tau$ , terwijl deze ellipsen met de aan alle satellieten gemeenschappelijke hoeksnelheid  $-\alpha$  in hun vlak ronddraaien.

De voorwaarden (18) en (19) dienen ter bepaling van de beide beschikbare parameters  $\mu_i$  en  $\bar{\eta}_i$  en zijn daarvoor juist voldoende. Voor de binnenste satellieten is deze intermediaire baan, zooals reeds opgemerkt werd, een zeer veel betere benadering dan de stilstaande Keplersche ellips. Voor IV is de uit (18) bepaalde excentriciteit zeer klein; de intermediaire baan zal dus slechts zeer weinig afwijken van een cirkel, die met de uniforme hoeksnelheid  $c_i - \alpha$  zou doorloopen worden.

(Wordt vervolgd).

1) Zoo zijn b.v. op 1899 Juni 28, 11<sup>u</sup> 47<sup>m</sup> 35<sup>s</sup> midd. tijd van Greenwich de lengtes, gerekend van af het punt Aries:

$$\lambda_1 = 193^\circ.64 \quad , \quad \lambda_2 = 13^\circ.64 \quad , \quad \lambda_3 = 193.64 \quad , \quad \lambda_4 = 192^\circ.75.$$



**Scheikunde.** — De Heer HOLLEMAN biedt een mededeeling aan namens den Heer A. H. W. ATEN, over: „*De Passiviteit van Chroom.*” (Derde mededeeling).

(Mede aangeboden door den Heer JAEGER.)

Wanneer men wil beproeven de in de vorige mededeelingen<sup>1)</sup> medegedeelde resultaten te verklaren, dan dient in de eerste plaats rekening gehouden te worden met de mogelijkheid, dat de in het oppervlaktelaagje van het metaal aanwezige waterstof, (of zuurstof) een zekeren invloed op de verschijnselen heeft.

De verschijnselen, die het waarschijnlijk maken, dat de in het oppervlaktelaagje van het metaal aanwezige waterstof de aktiviteit bevordert, zijn o.a. de volgende:

Wanneer een stuk chroom van GOLDSCHMIDT, dat weinig waterstof bevat, in een zwak zuur, of in zeer verdund zwavelzuur wordt gebracht, gaat het niet vrijwillig in oplossing onder waterstofontwikkeling. Wordt het chroom echter kathodisch gepolariseerd, zoodat tengevolge hiervan waterstof ontwikkeld wordt, dan gaat het chroom tevens als chromoion in oplossing. Verbreekt men den stroom, dan houdt, wanneer het zuur verdund genoeg is, ook het oplossen als chromoion op. In geconcentreerdere zuren, vooral in zoutzuur, en ook bij hooger temperatuur in verdunde zuren, begint het oplossen onder waterstofontwikkeling na korten tijd vrijwillig.

Uit het feit, dat de kathodische polarisatie het in oplossing gaan van het chroom veroorzaakt, kan men besluiten, dat de waterstofbelading, die het metaal daarbij verkrijgt, de oorzaak is van de aktiviteit. Er volgt dan tevens uit, dat een waterstofbelading, die overeenkomt met gasvormige waterstof van één atmosfeer, niet voldoende is, om het chroom te aktiveeren, want in dat geval zou de aktiviteit moeten blijven bestaan, wanneer men den stroom verbrak. Op dat oogenblik, en ook nog eenigen tijd daarna, heeft n.l. het metaal een waterstofbelading, die minstens gelijk is aan één atmosfeer, terwijl toch het in oplossing gaan vanzelf ophoudt. Zelfs verdwijnt de aktiviteit reeds, wanneer de kathodisch polariseerende stroom niet verbroken, maar voldoende verzwakt wordt<sup>2)</sup>. FLADÉ<sup>3)</sup> bestrijdt

<sup>1)</sup> Deze Verslagen Oct. 1917. Jan. 1918.

<sup>2)</sup> RATHERT. Zeitschr. f. physik. Chemie 86. 567, (1914).

<sup>3)</sup> ibid. 88 569 (1914).

deze mededeeling van RATHERT, maar beschrijft een proef, die ongeveer hetzelfde bewijst. Hij vond n.l., dat een passieve elektrode in verdund zwavelzuur kathodisch gepolariseerd kon worden tot zwakke waterstofontwikkeling, zonder dat ze actief werd.

Het gedrag van chroom in zuren kan afgeleid worden uit figuur 1.

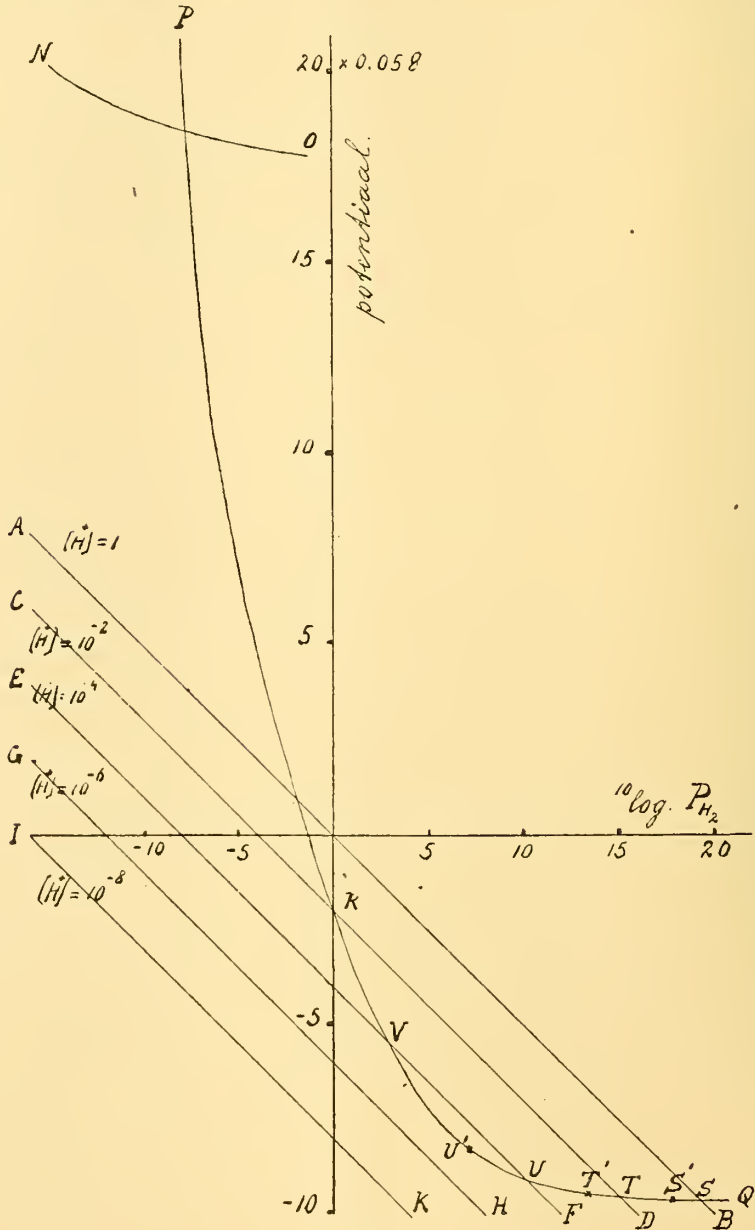


Fig. 1.

Hier is op de abscis uitgezet de 10 log. van den waterstofdruk, op de

ordinaat den potentiaal. De lijn  $AB$  geeft nu de waterstofbelading, die een elektrode bij verschillende potentialen krijgt, wanneer de concentratie van de waterstofionen in de oplossing 1 is.

Hetzelfde geeft de lijn  $CD$  voor een waterstofionenconcentratie 0.01, enz. Deze lijnen zijn niets anders, dan de graphische voorstelling van den potentiaal van de waterstofelektrode.

Nemen we nu aan, dat de potentiaal van een chroomelektrode in een oplossing van een gegeven chroomconcentratie bepaald wordt door de grootte van de waterstofbelading, en voorgesteld kan worden door de lijn  $PQ$  in figuur 1. Over het beloop van deze lijn is weinig te zeggen, alleen moet deze lijn bij toenemende waterstofbelading naderen tot een limietwaarde, die den werkelijken evenwichtspotentiaal van chroom voorstelt.

Deze laatste vooronderstelling, dat de elektrode een chroompotentiaal vertoont, die c.p. alleen afhankelijk is van de grootte van de waterstofbelading, gaat iets verder dan de gebruikelijke waterstofhypothese, volgens welke de waterstof alleen de instelling van het evenwicht zou versnellen. Volgens onze opvatting behoort bij een gegeven waterstofbelading een bepaalde chroompotentiaal. Deze vooronderstelling mag op zich zelf beschouwd onwaarschijnlijk lijken, zonder deze is m. i. een verklaring met behulp van de waterstofhypothese niet mogelijk. Op welke wijze de chroompotentiaal hier tot stand komt, moet in het midden gelaten worden.

Nemen we nu een chroomelektrode met een gasbelading 1, dan is, volgens figuur 1, de potentiaal hiervan  $R$ . Wordt deze elektrode gebracht in een oplossing, die 0.01 n. is aan zuur, dan kan deze daaruit juist waterstof van één atmosfeer ontwikkelen. Tengevolge van de overspanning zal er geen waterstof ontwikkeld worden, maar het chroom zal zijn gasbelading ook niet verliezen. De potentiaal blijft dus onveranderd. Brengt men hetzelfde chroom in een zuur, waarin de concentratie van de waterstofionen  $= 1$  is, dan kan het chroom bij den potentiaal  $R$  in dit zuur waterstof ontwikkelen tot een druk van  $10^1$  atm. Door de vergrooting van de waterstofbelading daalt nu de potentiaal beneden  $R$ , daardoor neemt de waterstofbelading toe, en zoo zal de potentiaal blijven dalen. De laagste waarde die bereikt kan worden is  $S$ . Deze waarde *behoeft* echter niet bereikt te worden. Deze kan alleen bestaan bij een waterstofbelading van  $10^{20}$  atm., en dit is alleen mogelijk, als er een zeer groote overspanning voor waterstofontwikkeling aan chroom bestaat.

Hieruit blijkt dus, dat chroom met een waterstofbelading 1 zich vrijwillig zal aktiveeren, als het gebracht wordt in een zuur, dat

sterker is dan 0.01 n. Is het zuur zwakker, dan wordt het chroom niet vrijwillig actief. In  $10^{-4}$  n. zuur behoort bij een potentiaal  $R$  een waterstofbelading van  $10^{-4}$  atm., en de waterstofbelading van het chroom wordt dus niet van zelf sterker. Wanneer men nu echter dit chroom in  $10^{-4}$  n. zuur kathodisch gaat polariseeren, dan neemt de waterstofbelading toe, de chroompotentiaal daalt. Komt deze beneden  $V$ , dan zal het chroom zich van zelf verder kunnen aktiveeren, tot dat de potentiaal  $U$  geworden is. Door krachtiger kathodisch te polariseeren, kan de potentiaal lager dan  $U$  worden, bij stroomverbreking zal de potentiaal echter weer moeten stijgen tot  $U$ . De potentiaal zal zelfs niet bij  $U$  blijven staan, maar hoger worden. Is de waterstofontwikkeling krachtig genoeg, om een voldoende gasbelading op het chroom te onderhouden, dan kan de potentiaal tusschen  $V$  en  $U$  blijven. Het chroom blijft dan actief. Wanneer de gasbelading kleiner wordt dan overeenkomt met  $V$ , stijgt de potentiaal boven  $V$ , en de aktiviteit verdwijnt. Niet alleen kan bij stroomverbreking de potentiaal boven  $V$  stijgen, het is ook mogelijk, dat dit reeds bij verzwakking van den polariseerenden stroom geschiedt. Wanneer bijv. bij krachtige kathodische polarisatie de gasbelading grooter wordt dan  $V$ , kan bij de verzwakking van de waterstofontwikkeling de gasbelading kleiner worden dan  $V$ , en de aktiviteit verdwijnen. Dit is het boven beschreven verschijnsel van RATHERT. Evenzoo is het mogelijk, dat bij zeer zwakke kathodische polarisatie de waterstofbelading niet groot genoeg wordt, om den potentiaal beneden  $V$  te brengen. Het metaal blijft dan, ondanks de kathodische polarisatie, passief (FLADE). De meest negatieve potentialen, die het chroom in 1 n. 0.01 n. en 0.0001 n. zuur vrijwillig kan aannemen zijn dus  $S$ ,  $T$  en  $U$ . Deze zullen echter niet bereikt worden, daar hiervoor een zeer groote overspanning noodig is. In werkelijkheid zal men bijv. de potentialen  $S'$ ,  $T'$  en  $U'$  waarnemen.

De hierboven gegeven beschouwingen verklaren dus de vrijwillige aktiveering van chroom in zuren en de aktiveering door kathodische polarisatie voldoende, ook in verband met de sterkte van het zuur.

Daar chroom in zoutzuur gemakkelijker actief wordt dan in zwavelzuur of in andere zuren, moet er een specifieke aktiveerende werking van de chloorionen bestaan. Dit komt hierop neer, dat in zoutzuur een geringere gasbelading noodig is voor de aktiveering, en dat de lijn  $PQ$  dus voor zoutzuur meer naar links geteekend moet worden. Hetzelfde geldt voor hogere temperaturen.

Uit Figuur 1 blijkt tevens, dat chroom alleen sterk actief zal kunnen blijven in een vloeistof, waarin het waterstof ontwikkelt en dus zelf zijn gasbelading in stand houdt. Brengt men nu een versche

elektrode van elektrolytisch chroom, dat een groote hoeveelheid waterstof bevat, in een oplossing van chromosulfaat, zooals in de eerste mededeeling beschreven is, dan zal dit aanvankelijk een sterk negatieven potentiaal vertoonen, tengevolge van de groote waterstofbelading. Laat men het chroom in aanraking met de oplossing, dan verliest het aan het oppervlak zijn waterstof. De potentiaal verschuift langs de lijn  $QR$  in de richting van  $R$ . De potentiaal stijgt daarbij tot  $E_h = -0,27 V$ , zooals in de eerste verhandeling is medegedeeld.

Dit is dus waarschijnlijk de *chromopotential*, dien het metaal bij een waterstofbelading 1 vertoont, daar het chroom zolang waterstof aan de oplossing zal afstaan, tot haar druk 1 atmosfeer geworden is.

Wanneer een dergelijke elektrode nu in chromosulfaat kathodisch gepolariseerd wordt, ontwikkelt er zich waterstof. Het chroom herkrijgt zijn waterstofbelading, en daarmee zijn aktieven potentiaal.

De verschijnselen bij kathodische polarisatie zijn dus op eenvoudige wijze aan de hand van figuur 1 te verklaren. Ook de aktiveerende werking van de anodische polarisatie bij elektrolytisch chroom is met behulp van deze beschouwingen te verklaren, wanneer men rekening houdt met de diffusie van de waterstof in het metaal.

Wanneer het chroom elektrolytisch afgescheiden is, heeft het een hoog waterstofgehalte waarvan wij aannemen, dat het over de geheele dikte van de laag hetzelfde is. Wanneer in figuur 2  $DF$  deze dikte voorstelt, en men zet loodrecht daarop de concentratie van de water-

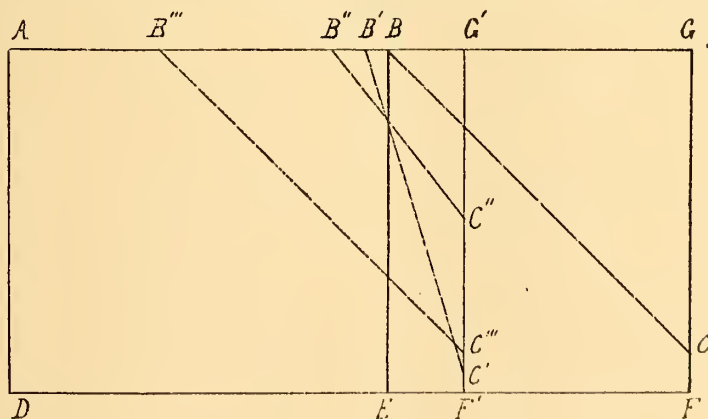


Fig. 2.

stof nit, dan wordt deze voorgesteld door een horizontale rechte  $AG$ . De lijn  $GF$  stelt het aanrakingsvlak van het chroom met de vloeistof voor. Het chroom zal, wegens het hoge waterstofgehalte in

het grensvlak, een zeer aktieven potentiaal bezitten. Laat men nu het chroom in aanraking met de vloeistof, dan zal de waterstof, die in het grensvlak  $GF$  aanwezig is, grootendeels in de oplossing overgaan, of gasvormig ontwijken. Daardoor daalt de concentratie van de waterstof aan het grensvlak.

Tengevolge daarvan diffundeert de waterstof binnen uit het metaal naar het grensvlak, en de concentratie van de waterstof in het chroom zal na een zekeren tijd worden voorgesteld door de lijn  $ABC$ . In het deel  $AB$  is de concentratie onveranderd gebleven, in  $BC$  is de concentratie door diffusie veranderd. We zullen het laagje  $EF$ , waarin de diffusie merkbaar is, het diffusielaagje noemen. Het chroom vertoont nu een potentiaal, die bepaald wordt door de grootte van  $FC$ .

Wanneer men nu anodisch gaat polariseeren, zal het eerste gevolg zijn, dat de waterstofconcentratie aan het grensvlak,  $FC$ , kleiner wordt. Dit zal althans het geval zijn, wanneer de gebruikte oplossing zoo weinig zuur is, dat de waterstofpotentiaal, die bij een gegeven waterstofbelading behoort, negatiever is dan de chroompotentiaal van eenzelfde waterstofbelading. Dit geldt dus voor die gedeelten van de waterstoflijnen ( $AB$ ,  $CD$ , enz.) die liggen onder de chroomlijn  $PQ$  in fig. 1. Want hier zal, by anodische polarisatie, de potentiaal van het metaal verder boven den evenwichtspotentiaal van de waterstof liggen, dan boven dien van het chroom, zoodat de waterstof sterker zal oplossen.

Tevens gaat chroom in oplossing. De grenslaag  $GF$  verschuift dus naar links, en komt bijv. op de plaats  $G'F'$ . De dikte van het diffusielaagje is nu kleiner geworden, en de concentratie van de waterstof in dit laagje wordt voorgesteld door  $B'C'$ . De waterstofbelading aan het grensvlak is nu  $F'C'$ , dus kleiner dan vóór de anodische polarisatie. Houdt men de stroomsterkte konstant, dan zal er een stationnaire toestand intreden, waarbij  $F'C'$  konstant is, en ook het concentratieverval in het diffusielaagje.

Vergroot men de stroomsterkte, dan zal deze stationnaire toestand een andere zijn, en wel zóó, dat  $F'C'$  kleiner is, en het concentratieverval van de waterstof in het diffusielaagje grooter, dan bij kleinere stroomsterkte, omdat het diffusielaagje dunner is.

Nu zal gedurende de anodische polarisatie de potentiaal positiever zijn dan daarvoor, omdat de waterstofconcentratie aan het grensvlak kleiner is. Verbreekt men den stroom, dan zal de waterstof, door het groote concentratieverval in het dunne diffusielaagje, snel naar het grensvlak diffundeeren. De waterstofbelading aan het grensvlak stijgt daardoor, bijv. tot  $F'C''$ . Tevens wordt het diffusielaagje nu weer dikker, doordat het metaal niet meer oplost; het punt  $B'$

komt dus in  $B''$ .  $C''$  moet hooger liggen dan  $C$ , daar bij  $C''$ , door de geringe dikte van het diffusielaagje, meer waterstof naar het grensvlak diffundeert dan bij  $C$ . Deze waterstof moet dus ook sneller in de vloeistof overgaan, wat alleen mogelijk is, wanneer  $F' C''$  grooter is dan  $F C$ .

Is de waarde  $C''$  bereikt, dan zal de waterstofbelading aan het grensvlak weer gaan dalen, doordat er voortdurend waterstof in de vloeistof overgaat, en de aanvoer van waterstof nit het metaal, door het dikker worden van het diffusielaagje, langzamer gaat. Tenslotte wordt weer een stationnaire toestand bereikt, die gelijk is aan den toestand vóór de polarisatie, en waar de waterstofbelading aan het grensvlak  $F' C'''$  is, de concentratie van de waterstof in het diffusielaagje  $B''' C'''$ .

Hoe grooter de stroomdichtheid is, des te kleiner zal  $F' C'$  zijn, des te dunner is het diffusielaagje, en des te hooger ligt dus  $C''$ .

Bij den potentiaal van elektrolytisch chroom zal men dus het volgende waarnemen. Wordt elektrolytisch chroom met een versch oppervlak in een elektrolyt gebracht, dan is de waterstofbelading aan het grensvlak groot,  $F G$ , en de potentiaal sterk negatief. Laat men dit chroom langen tijd in aanraking met de vloeistof, dan verliest het grensvlak van het metaal een deel van zijn waterstof, de waterstofbelading daalt tot  $F C$ , en de potentiaal wordt positiever. Gaat men anodisch polariseeren, dan daalt de waterstofbelading tot  $F' C'$ , de potentiaal wordt dus nog positiever. Verbreekt men nu den stroom, dan stijgt de waterstofbelading tot  $F' C''$ , de potentiaal wordt veel negatiever, maar langzamerhand daalt de waterstofbelading weer tot  $F' C'''$ , en de potentiaal stijgt tot de waarde, die hij vóór de polarisatie vertoonde.

Dit beloop is geheel in overeenstemming met het in fig. 7 van de tweede mededeeling geteekende.

De potentiaal bereikt dus een minimum, dat des te dieper is, naarmate  $C''$  hooger ligt, dus de stroomsterkte grooter en bijgevolg het diffusielaagje dunner is.

Is de stroomsterkte zeer klein en het diffusielaagje dik, dan kan het voorkomen, dat  $C''$  niet boven  $C'''$  komt te liggen, en dat de potentiaal geen minimum doorloopt, zooals het geval is bij de lijn voor  $1mA$  in figur 7 van de tweede verhandeling.

Het is duidelijk, dat de verschijnselen bij anodische polarisatie dus in hoofdzaak bepaald zullen worden door het waterstofgehalte van het metaal.

Daar deze verschijnselen bij chroom op koper, op zilver en op goud verschillend zijn, en wel zoo, dat de potentialen bij chroom

op koper het meest negatief zijn, moet men aannemen, dat chroom op koper neergeslagen meer waterstof bevat dan chroom op zilver, en dit meer dan chroom op goud.

Op dezelfde wijze kan men het bestaan van een teruglopende stroomspanningslijn verklaren, zooals in figuur 11 van de tweede verhandeling geteekend is. Deze lijnen hebben betrekking op de chromaatvorming, en men zal dus moeten aannemen, dat ook de potentiaal van chromaatvorming afhankelijk is van het waterstofgehalte. Deze afhankelijkheid wordt bijv. gegeven door de lijn *NO* in figuur 1.

Ook hier zal bij anodische polarisatie de concentratie van de waterstof aan de grenslaag klein zijn, de potentiaal dus hoog. Het diffusielaagje wordt bij toenemende stroomdichtheid dunner, zoodat bij de stroomonderbrekingen door den commutator de waterstofbelading aan het grensvlak *na* stroomverbreking des te grooter zal zijn, naarmate de stroomdichtheid grooter was.

Vandaar dat bij grootere stroomdichtheid de potentiaal *na* stroomverbreking negatiever is, dan bij kleine stroomdichtheid. Ook is het duidelijk, dat men de teruglopende stroomspanningslijn alleen kan vinden; als men met een commutator werkt. Meet men den potentiaal, terwijl de stroom voortdurend doorgaat, dan is de potentiaal des te positiever, naarmate de stroomdichtheid grooter is, omdat men dan alleen te doen heeft met de waterstofbelading aan het grensvlak, zooals die is *gedurende* de polarisatie.

De aktiveering *na* anodische polarisatie is dus met de waterstoftheorie voldoende te verklaren.

Er blijft echter nog te verklaren het verschijnsel, dat bij anodische polarisatie van elektrolytisch chroom en van geactiveerd chroom van GOLDSCHMIDT, ook gedurende den stroomdoorgang de potentiaal negatiever wordt.

Tot een verklaring hiervan kan men komen, als men er rekening mee houdt, dat niet onmiddellijk na het verbreken of het aanzetten van den stroom de toestand in het diffusielaagje stationnair is.

Wanneer in figuur 3 *BC* de concentratie voorstelt van de waterstof in het diffusielaagje van een stuk chroom, dat langen tijd in aanraking geweest is met een elektrolyt, dan heeft de waterstof aan het grensvlak de concentratie *FC*. Gaat men nu deze elektrode anodisch polariseeren, dan zal daardoor de concentratie van de waterstof dalen tot *F' C'*. De concentratie van de waterstof in het diffusielaagje zal nu het beloop *B' C'* hebben. Zoo zal de toestand zijn, wanneer de stroom juist aangezet is, en dus het grensvlak nog maar weinig naar binnen verschoven is. Duurt de stroomdoorgang



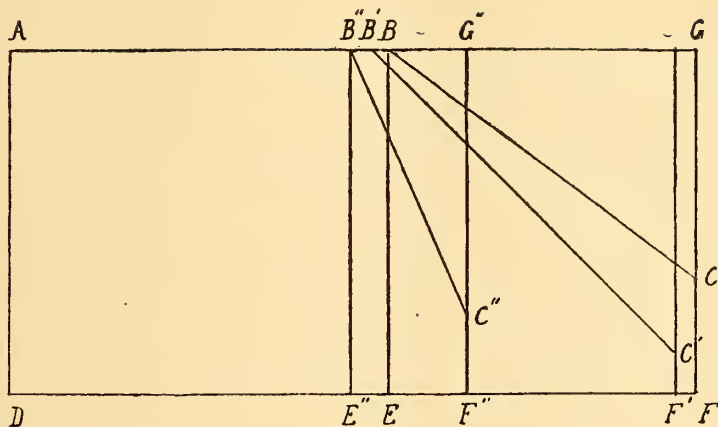


Fig. 3.

langer, dan verschuift het grensvlak meer naar binnen, en als het in  $F''G''$  gekomen is, zal een stationnaire toestand bereikt zijn, waarbij de dikte van het diffusielaagje en het concentratieverval van de waterstof stationnair zijn. De eerste is kleiner en het laatste is grooter, dan toen de stroom juist aangezet was; tengevolge daarvan zal ook de waterstofbelading aan het grensvlak  $F''C''$  nu grooter zijn dan eerst. Het beloop van den potentiaal als functie van den tijd zal dus het volgende zijn. Vóór de polarisatie is de elektrode tamelijk actief, overeenkomende met de waterstofbelading  $F'C$ . Bij het aanzetten van den stroom stijgt de potentiaal, doordat de waterstofbelading afneemt. Bij langeren stroomdoorgang daalt de potentiaal weer, omdat de waterstofbelading, tengevolge van het dunner worden van het diffusielaagje, weer grooter wordt.

Dit is wat waargenomen werd bij de anodische polarisatie van elektrolytisch chroom, en ook van chroom van GOLDSCHMIDT, dat geactiveerd is in gesmolten  $ZnCl_2$  of  $KCl + NaCl$ . Ook bij chroom van GOLDSCHMIDT, dat in sterk  $HCl$  geactiveerd is, doet zich hetzelfde verschijnsel voor. Toch bestaat er kwantitatief een groot verschil tusschen deze chroomsoorten. Bij electrolytisch chroom gaat de activeering gedurende den stroomdoorgang veel sneller dan bij chroom van GOLDSCHMIDT, dat in  $ZnCl_2$  geactiveerd is, en bij dit weer sneller, dan bij chroom van GOLDSCHMIDT, dat in zoutzuur geactiveerd is. Bij dit laatste bleef de potentiaal urenlang negatiever worden bij konstante stroomsterkte. Bij electrolytisch chroom duurde dit slechts enkele minuten. Men kan het verschil in den duur van het verschijnsel toeschrijven aan een verschil in het waterstofgehalte van electrolytisch chroom en chroom van GOLDSCHMIDT. Het eerste kan reeds bij het begin van de anodische polarisatie een veel sterker stroom verdragen dan het tweede. Tengevolge daarvan gaat de verschuiving van het

grensvlak  $GF$  naar  $G''F''$  bij electrolytisch chroom sneller dan bij chroom van GOLDSCHMIDT, en dus verloopt ook de aktiveering bij anodische polarisatie sneller bij electrolytisch chroom.

Zooals in de tweede verhandeling werd beschreven, kan een stuk chroom van GOLDSCHMIDT, dat door anodische polarisatie actief geworden is, dezelfde stroomsterkte niet meer verdragen, wanneer de stroom eenigen tijd verbroken geweest is, ofschoon de potentiaal daarbij veel negatiever is, dan onmiddellijk na polarisatie. Ook dit is door de diffusie van de waterstof in het metaal te verklaren. Voor de polarisatie wordt de concentratie van de waterstof in het diffusie-laagje voorgesteld door  $BC$  in figuur 4. Wanneer de elektrode anodisch

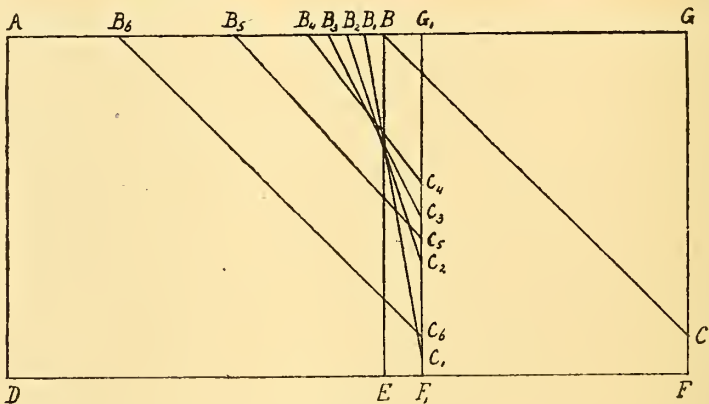


Fig. 4.

gepolarisiert wird, und die Stromstärke langsam aufgeführt wird, zal na eenigen tijd een stationnaire toestand bereikt worden, waarbij de concentratie van de waterstof in het diffusie-laagje, dat nu veel dunner geworden is, wordt voorgesteld door  $B_1C_1$ . Verbreekt men den stroom, dan stijgt, tengevolge van het groote concentratieverval, de waterstofconcentratie aan het grensvlak. Bovendien neemt de dikte van het diffusie-laagje toe, dat zich naar binnen in het metaal uitbreidt, en van buitenaf niet meer wordt opgelost. Het beloop van de concentratie van de waterstof in het diffusie-laagje wordt nu achtereenvolgens voorgesteld door  $B_1C_1$ ,  $B_2C_2$ ,  $B_3C_3$ ,  $B_4C_4$ ,  $B_5C_5$  en  $B_6C_6$ . Bij  $B_4C_4$  is de concentratie van de waterstof aan het grensvlak het grootst, de potentiaal dus het meest negatief. Gaat men nu anodisch polariseren met dezelfde stroomsterkte, als toen de waterstofconcentratie voorgesteld werd door  $B_1C_1$ , dan zal nu de waterstofbelading aan het grensvlak dalen beneden  $C_1$ , daar de dikte van het diffusie-laagje nu zooveel grooter is, dan onmiddellijk na polarisatie, en de diffusie van de waterstof dus zooveel langzamer gaat. Tengevolge hiervan krijgt het chroom een positievern potentiaal. Op deze wijze is het dus

verklaarbaar dat het chroom een sterkeren stroom kan verdragen, wanneer deze onmiddellijk na verbreking weer wordt aangezet, dan wanneer de stroom eenigen tijd verbroken geweest is, ofschoon in 't laatste geval de potentiaal in stroomloozen toestand negatiever is. Het blijkt nu ook, dat er geen onmiddellijk verband bestaat tusschen den potentiaal van een chroomelektrode in stroomloozen toestand, en haar passiveerbaarheid. De eerste wordt n.l. bepaald door de grootte van de waterstofbelading aan het grensvlak, terwijl de passiveerbaarheid afhangt van het concentratieverval in het diffusielaagje. Hiermede is in overeenstemming het vroeger reeds beschreven verschijnsel, dat niet steeds de meest negatieve elektrode het moeilijkst passiveerbaar is.

Tot zoover zijn de verschijnselen dus met behulp van de waterstoftheorie te verklaren. Dat de verschijnselen hun oorzaak hebben in een bizonderen toestand van het metaaloppervlak, en niet van de vloeistof, blijkt hieruit, dat ze kwalitatief dezelfde blijven, wanneer in de vloeistof krachtig geroerd wordt, en ook, wanneer de vloeistof in haar geheel ververscht wordt. Alleen wordt de potentiaal van de elektrode door roeren iets positiever. Dit komt waarschijnlijk daardoor, dat tengevolge van de roering de oplossing meer zuurstof bevat, en de waterstof uit het chroomoppervlak sneller verwijderd wordt. Zet men den roerder stil, dan daalt de potentiaal weer.

Bij deze proeven was de chroomanode geplaatst in een verzadigde oplossing van KCl, de kathode in eenzelfde oplossing in een poreuzen pot. Deze laatste vloeistof werd bij stroomdoorgang alkalisch. De oplossing om de anode werd daarentegen *zuur*. Ter bepaling van den zuurgraad werd in deze oplossing een waterstof-elektrode gebracht. Deze vertoonde een potentiaal  $-0.58 V$  t.o.v. de n. kalomel-elektrode, overeenkomende met een waterstof-ionen concentratie van  $10^{-5}$ . Door deze oplossing was gedurende 20 uur een stroom van 4 mA gegaan.

Het zuur worden van de oplossing kan verklaard worden door een hydrolytische splitsing van het gevormde  $CrCl_3$ , of door dat de in het chroom aanwezige waterstof anodisch als H in oplossing gaat.

Daar het volume van de oplossing ongeveer 300 cm<sup>3</sup> bedroeg, en de waterstof-ionen concentratie  $10^{-5}$  was, is er gevormd 0.003 mgr. aeq. waterstof-ionen, terwijl er 3 mF door de oplossing gegaan zijn. Het chroom zou dus, om aan de oplossing bovengenoemden zuurgraad te geven, 0.1 % waterstof moeten te bevatten. In werkelijkheid moet dit iets meer zijn, daar een deel van de OH-ionen uit de kathoderuimte zich naar de anoderuimte heeft bewogen, en dus het gevormde zuur gedeeltelijk genutraliseerd heeft.

Bij deze proeven bleek tevens, dat de potentiaal dien de chroom-

elektrode vertoont; werkelijk een chroompotentiaal is, of althans geen waterstofpotentiaal. In de zure oplossing was de potentiaal n.l.  $-0.59$  V. Toen de oplossing daarna zwak alkalisch gemaakt werd, steeg de potentiaal tot  $-0.58$  V, terwijl een waterstofelektrode in dezelfde vloeistoffen een daling zou moeten vertoonen van ongeveer  $0.2$  V. Bij deze en andere proeven ontwikkelde het chroom waterstof. Dit kan geen waterstof zijn, die het chroom vrijwillig uit de vloeistof ontwikkelde, want daarvoor zou de potentiaal van de chroomelektrode negatiever moeten zijn dan die van een waterstofelektrode in dezelfde vloeistof. Dit was hier niet het geval; de potentiaal van de waterstofelektrode was  $-0.58$ , die van de chroomelektrode  $-0.52$ . Ook vond de waterstofontwikkeling evengoed plaats in een zwak alkalische als in een zwak zure oplossing, terwijl de potentiaal van de chroomelektrode dikwijls vrij wat positiever was dan  $-0.52$  V. Het is mogelijk, dat het chroom meer waterstof bevat, dan er anodisch oplost, en dat een deel daarvan gasvormig ontwikkelt.

Men moet dus aannemen, dat het onderzochte chroom steeds waterstof bevatte. Bij het elektrolytisch chroom is deze tegelijk met het chroom in aanzienlijke hoeveelheid afgescheiden, terwijl het chroom van GOLDSCHMIDT een geringe hoeveelheid waterstof bevat. Door behandeling met gesmolten  $KCl + NaCl$  of  $ZnCl_2$  kan het chroom meer waterstof opnemen, doordat het daarin aanwezige water door het chroom ontleed wordt. Bij de inwerking van chroom op deze gesmolten zouten werd dan ook steeds ontwikkeling van een brandbaar gas en vorming van chroomoxyd gekonstateerd. Dat  $ZnCl_2$  sterker aktiveert dan  $KCl + NaCl$  is nu hierdoor te verklaren, dat het hygroskopische  $ZnCl_2$  meer water bevat, en dus meer waterstof kan leveren. De aktiviteit, die het chroom verkrijgt door behandeling met zoutzuur en door temperatuursverhoging moet echter in hoofdzaak, of uitsluitend, worden toegeschreven aan de waterstof, die van nature in het metaal aanwezig is.

Wat de waterstofontwikkeling aan chroom gedurende de anodische polarisatie betreft, dient nog opgemerkt te worden, dat deze ophoudt nadat de polariseerende stroom eenigen tijd verbroken is, en over 't algemeen des te zwakker is, naarmate de stroomsterkte kleiner is. Deze waterstofontwikkeling houdt echter geen verband met de overige verschijnselen bij de anodische polarisatie, daar bij een aantal proeven de waterstofontwikkeling achterwege bleef, terwijl het anodisch gedrag overigens hetzelfde was.

Een moeilijkheid levert de verklaring van de verschijnselen bij kathodische polarisatie, n.l. dat door de kathodisch afgescheiden

waterstof het metaal in een oplossing van KCl niet geactiveerd wordt. Wel krijgt het metaal een sterk negatieven potentiaal, maar de stroomsterkte, die het chroom anodisch kan verdragen, is niet grooter dan van de kathodische polarisatie. Men zou, om dit te verklaren, moeten aannemen, dat de kathodisch afgescheiden waterstof alleen aan het metaaloppervlak blijft zitten, en niet, of slechts zeer weinig, in het metaal diffundeert.

*Amsterdam, Maart 1918.*

*Scheikundig Laboratorium  
van de Universiteit.*

**Scheikunde.** — De Heer ZEEMAN biedt namens den Heer A. SMITS een mededeeling aan. „*Over het electrochemisch gedrag der metalen*”.

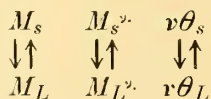
(Mede aangeboden door den Heer HOOGEWERFF).

### 1. *Inleiding.*

Door toepassing der beschouwingen die aan de theorie der allotropie ten grondslag liggen op den innerlijken toestand der metalen en op hun chemisch zoowel als electromotorisch gedrag, worden wij in staat gesteld alle metalen, ook die welke als zoogenaamde onaan-tastbare electroden dienst doen, van uit hetzelfde gezichtspunt te beschouwen.

Deze beschouwingen zijn gebaseerd op de meer dan waarschijnlijke aanname, dat elk metaal, metaalatomen, een of meer soorten metaalionen en electronen bevat, die onder bepaalde omstandigheden met elkaar in evenwicht kunnen zijn. Wordt nu een metaal in een electrolyt gedompeld, dan zal in aansluiting met de opvattingen van NERNST omtrent het oplossingsverschijnsel, het heterogene evenwicht tusschen het metaal en de grenslaag zich met zoo'n groote snelheid instellen, dat men kan zeggen, dat dit evenwicht altijd bestaat.

Bepalen wij ons dus tot het eenvoudige geval, dat het metaal bestaat uit metaalatomen,  $r$ -waardige ionen en electronen, dan kunnen wij dus zeggen, dat wanneer dit metaal wordt gedompeld in een electrolyt zich onmiddellijk de volgende heterogene evenwichten zullen instellen.



Of nu ook in de twee koëxisterende phasen het homogene evenwicht zal bestaan tusschen de metaalatomen, metaalionen en de electronen, dat hangt van verschillende omstandigheden af. Terwijl een metaal in volkomen drogen toestand zich in den regel eerst bij betrekkelijk hooge temperatuur in innerlijk evenwicht schijnt te kunnen stellen, geschiedt dit in contact met een electrolyt, dikwijls zéér snel, doch het komt ook voor, dat het metaal zich ook onder deze omstandigheden bij de gewone temperatuur langzaam, of in het geheel niet in innerlijk evenwicht stelt.

De snelheid waarmede een metaal zich onder bepaalde omstandigheden in innerlijk evenwicht stelt is dan ook stellig een der meest karakteristieke eigenschappen van het metaal.

2. *De potentiaalsprong metaal-electrolyt bij het aantasten van het metaal.*

Wanneer een metaal in contact met een electrolyt zich oppervlakkig met zéér groote snelheid in innerlijk evenwicht stelt, dan blijft, hoe men het metaal ook aantast, de innerlijke toestand in het metaal-oppervlak onveranderd.

Stel wij dompelen zink in een waterige oplossing van zoutzuur, dan treedt er waterstofontwikkeling op, omdat de electronen-concentratie van het metaalevenwicht:

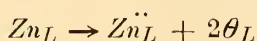


in de oplossing grooter is dan de electronen-concentratie van het waterstofevenwicht



De electronen van het evenwicht (1) worden dus weggenomen en hierdoor wordt dit evenwicht verstoord. Het is nu de vraag hoe deze verstoring weer zal kunnen worden opgeheven.

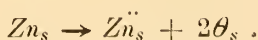
De concentratie van de zinkatomen in de vloeistof is zóó klein, dat al was de reactieconstante van de omzetting



zéér groot, per secunde toch slechts uiterst weinig zinkionen en electronen op deze wijze zouden worden afgesplitst.

De eenige manier waarop de hier genoemde verstoring weer kan worden opgeheven is dan ook deze, dat het metaal electronen in oplossing zendt, waarmede natuurlijk gepaard gaat, het in oplossing gaan van zinkionen, daar de zinkionen en electronen, op een zéér klein bedrag na, steeds in dezelfde concentratie aanwezig zijn.

Door dit proces wordt nu het innerlijke evenwicht in het metaal-oppervlak verstoord, hetgeen zich weer zal kunnen instellen, door de reactie:



Daar het heterogene evenwicht in de grenslaag zich met zéér groote snelheid instelt, komt dus de vraag, of het metaal zink bij oplossen in een zuur zal worden verstoord, hier op neer; of het innerlijke evenwicht in het oppervlak van het metaal zich met zoo'n

groote snelheid instelt, dat de samenstelling practisch onveranderd blijft.

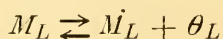
Dit is bij zink onder bepaalde omstandigheden inderdaad het geval. De Heer HÜFFER S.J. Chemisch candidaat, die op mijn verzoek eenige metalen onderzocht vond o.a. dat wanneer men onder sterk roeren den potentiaalsprong tusschen zink en een oplossing van zinkchloride meet, en vervolgens dien tusschen zink en een met zoutzuur aangezuurde zinkchloride-oplossing van dezelfde concentratie, *de potentiaalsprong dezelfde waarde behoudt, niettegenstaande in het laatste geval een sterke waterstof-ontwikkeling plaats grijpt.*

Door oplossen in zoutzuur wordt het metaal zink dus niet verstoord en dit resultaat sluit zich volkomen aan bij hetgeen men vindt, wanneer zink in een zinkchloride-oplossing anodisch tot oplossing wordt gebracht. Bij dit proces, dat eveneens berust op het onttrekken van electronen aan het metaal, verandert de potentiaalsprong, zink-electrolyt, ook bij betrekkelijk groote stoomdichtheden niet noemenswaard, zoodat onze onderzoekingen omtrent den potentiaalsprong *tijdens* het oplossen van zink in een zoutzuur oplossing, zoowel als de metingen van den potentiaalsprong van hetzelfde metaal bij anodisch oplossen in een oplossing van zinkchloride tot het resultaat voeren, dat het metaal zink in contact met den hier bovengenoemden electrolyt zich instelt met een snelheid die zéér groot is t. o. v. de snelheid waarmede electronen en ionen aan het metaal worden onttrokken.

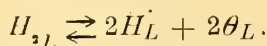
### 3. *Algemeene beschouwing.*

Beschouwen wij het verschijnsel thans algemeen, dan kunnen wij de volgende gevallen onderscheiden.

Bij dompeling van een metaal in een zuur heeft men in het eenvoudigste geval in den electrolyt o.a. de twee volgende evenwichten:



en



*De electronen-concentraties van deze twee evenwichten zijn in het algemeen verschillend* en een gevolg hiervan is, dat of de electronen van het metaal-evenwicht, in de vloeistof, zich vereenigen met de waterstofionen van het waterstofevenwicht, waardoor electronen + ionen uit het metaal in oplossing gaan, of dat de electronen van het waterstofevenwicht, met de metaalionen van het metaalevenwicht uit den electrolyt in het metaal overgaan.

Onderstellen wij eerst het limiet geval n.l. dit, dat het metaal



oppervlak zich met groote snelheid in innerlijk evenwicht stelt, zoodat deze snelheid zeer groot is t. o. v. de snelheid waarmede electronen + ionen aan het metaal worden onttrokken of aan het metaal worden toegevoerd, dan zal, onverschillig of het eene of het andere geval zich afspeelt, het metaal-oppervlak niet veranderen en de potentiaalsprong metaal-electrolyt zal gelijk blijven aan den potentiaalsprong van het unaire metaal.

In de tweede plaats zal zich het geval kunnen voordoen, dat het metaal-oppervlak zich niet zoo snel in innerlijk evenwicht stelt als hierboven is ondersteld en dan zal het mogelijk zijn het metaal-oppervak zoowel in de eene of in de andere richting te verstoren d.w.z. het zal zoowel edeler als onedeler kunnen worden, en de potentiaalsprong zal derhalve in edele of onedele richting van die van het unaire metaal kunnen afwijken.

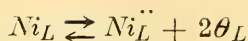
Een derde geval, dat evenals het eerste een limiet geval representeert, is dit, dat het metaal zoo traag is, dat de snelheid waarmede het zich in innerlijk evenwicht stelt zéér klein is t. o. v. de snelheid, waarmede de electronen en ionen aan het metaal worden onttrokken of toegevoerd.

In het eerste limietgeval wordt de potentiaalsprong geheel beheerscht door den innerlijken evenwichtstoestand van het metaal en in het laatste geval wordt de potentiaalsprong beheerscht door de electronen-concentratie van het waterstof-evenwicht in den electrolyt.

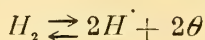
#### 4. *Nikkel als voorbeeld van een traag metaal, waarvan de traagheid onder den invloed van de opgeloste waterstof toeneemt.*

Een voorbeeld voor dit laatste geval, maar met dien verstande, dat de zooeven genoemde groote traagheid eerst langzaam wordt bereikt, omdat het metaal door den negatief katalytischen invloed van de oplossende waterstof na eenigen tijd in dezen toestand wordt gebracht, levert het metaal nikkel. Zooals in een vorige mededeeling werd aangetoond, doet zich hier namelijk het geval voor, dat wanneer men dit metaal dompelt in een zoodanige zure oplossing, dat waterstofontwikkeling zou moeten plaats vinden, dit verschijnsel niet merkbaar optreedt, en het metaal na eenigen tijd zoover in edele richting verstoord blijkt te zijn, dat zijn potentiaalsprong gelijk geworden is aan dien van de waterstof-electrode.

Wij hebben bij die gelegenheid reeds een verklaring van dit verschijnsel gegeven en er op gewezen, dat, omdat nikkel zoo traag is, de electronen-concentratie van het nikkelevenwicht in den electrolyt



gelijk wordt aan de electronen-concentratie van het waterstof-evenwicht



zoodat ten slotte

$$(\theta_{Ni})_L = (\theta_{H_2})_L.$$

Dit werd op de volgende wijze aangetoond. Wij wezen er n.l. op, dat men bij toepassing van de electronen-vergelijking voor den potentiaalsprong, metaal-electrolyt, ter afleiding van de betrekking voor de electromotorische kracht van een keten bestaande uit twee metalen in de overeenkomstige zout-oplossingen gedompeld, komt tot de volgende vergelijking

$$\Delta_1 - \Delta_2 = \frac{\mu_{\theta_{s_1}} - \mu_{\theta_{s_2}}}{F} - \frac{RT}{F} \ln \frac{(\theta_{L_1})}{(\theta_{L_2})}.$$

zoodat, in aanmerking nemende dat de eerste term van het tweede lid het Volta-effect van de twee metalen beteekent, hetgeen een zéér kleine grootheid is, de electromotorische kracht  $\Delta_1 - \Delta_2$ , bij eerste benadering nul zal zijn, wanneer  $(\theta_{L_1}) = (\theta_{L_2})$ .

In het hier besproken geval zijn de metalen 1 en 2 nikkel en waterstof, en het experiment leerde, dat  $\Delta_{Ni} - \Delta_{H_2}$ , inderdaad practisch nul was, waaruit dus volgde  $(\theta_{Ni})_L = (\theta_{H_2})_L$ .

Door de traagheid van het metaal nikkel, welke traagheid nog werd vergroot door de in het metaal opgeloste waterstof die, zooals reeds werd opgemerkt, hier een negatieve katalysator is, kon dus het metaal nikkel zoover verstoord worden, dat de electronen-concentratie van het nikkelevenwicht in den electrolyt gelijk geworden was aan de electronen-concentratie van de waterstof.

Wij kunnen ons ook nog anders uitdrukken en zeggen, dat het nikkel door het zuur was gepassiveerd. De nikkelphase en de waterstofphase vertoonen ten slotte denzelfden potentiaalsprong, derhalve zullen deze fasen, die met denzelfden electrolyt in contact zijn, met elkaar kunnen coëxistieren. Daar het nikkel in het hier besproken geval natuurlijk met een laagje waterstof bedekt zal zijn, heeft de gevonden potentiaalsprong betrekking op het drie-fasenevenwicht  $Ni + H_2 + \text{electrolyt}$ .

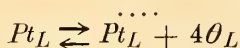
### 5. *Onaantastbare electroden.*

Zooals uit de hier aangehaalde mededeeling volgt, wordt deze verstorning bij nikkel betrekkelijk langzaam bereikt. Er zijn echter

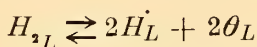
metalen waarbij dit veel sneller gaat, en dit zijn de metalen waaruit de zoogenaamde *onaantastbare* electroden bestaan, zooals de platina metalen.

Deze metalen behooren tot de groep der allertraagste metalen die wij kennen. Zelfs in contact met een electrolyt stellen deze metalen zich niet in innerlijk evenwicht, maar verkeeren bijna altijd in passieven toestand, zoodat de potentiaalsprong van het unaire metaal ons zelfs niet bekend is.

Wanneer zoo'n metaal in een oplossing van HCl of H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> wordt gedompeld, terwijl waterstof wordt doorgeleid, is bijna onmiddellijk de electronen-concentratie van het platina-evenwicht in den electrolyt



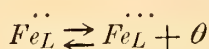
gelijk geworden aan de electronen-concentratie van het waterstof-evenwicht,



overeenkomstig den druk van de doorgeleide waterstof, zoodat bijv. de platina-electrode bijna onmiddellijk electromotorisch gelijk geworden is aan de waterstof-electrode.

Bij deze metalen, die zich *ideaal traag* gedragen, wordt dus de potentiaalsprong beheerscht door de bestaande electronen-concentratie in den electrolyt. Dit is ook de reden waarom deze uiterst trage metalen kunnen dienst doen, niet alleen als gaselectroden, maar ook ter bepaling van de zoogenaamde oxydatie resp. reductie potentialen.

Dompelt men b.v. platina in een oplossing waarin het evenwicht:



heerscht, dan is bijna onmiddellijk de electronen-concentratie van het platina-evenwicht in de oplossing gelijk geworden aan de electronen-concentratie van bovenstaand ferro-ferri-evenwicht, zoodat men in de electronen verg. voor den potentiaalsprong van het platina

$$\Delta = \frac{RT}{F} \ln \frac{K_\theta}{(\theta_L)}$$

in plaats van  $(\theta_L)$  kan schrijven de electronen-concentratie van het ferro-ferri-evenwicht, waardoor men dan krijgt:

$$\Delta = \frac{RT}{F} \ln \frac{K_\theta}{K} \frac{(Fe^{\dots\dots})}{(Fe^{\dots\dots})}$$

zooals reeds vroeger is medegedeeld.

*Het eigenaardige van deze platina metalen is dus gelegen in hun buitengewone traagheid, waardoor zij zich in de meeste electrolyten ideaal passief gedragen.*

6. *Beschouwingen in het licht van de phasenleer.*

Het is duidelijk, dat voor de verklaring van de hier besproken verschijnselen, beschouwingen, als door ons in den laatsten tijd ingevoerd, noodzakelijk zijn.

Phasen-theoretische overwegingen zijn hier onvoldoende, maar dit neemt niet weg, dat het toch zijn voordeel heeft de verkregen resultaten door middel van  $\Delta, x$ -figuren grafisch voor te stellen.

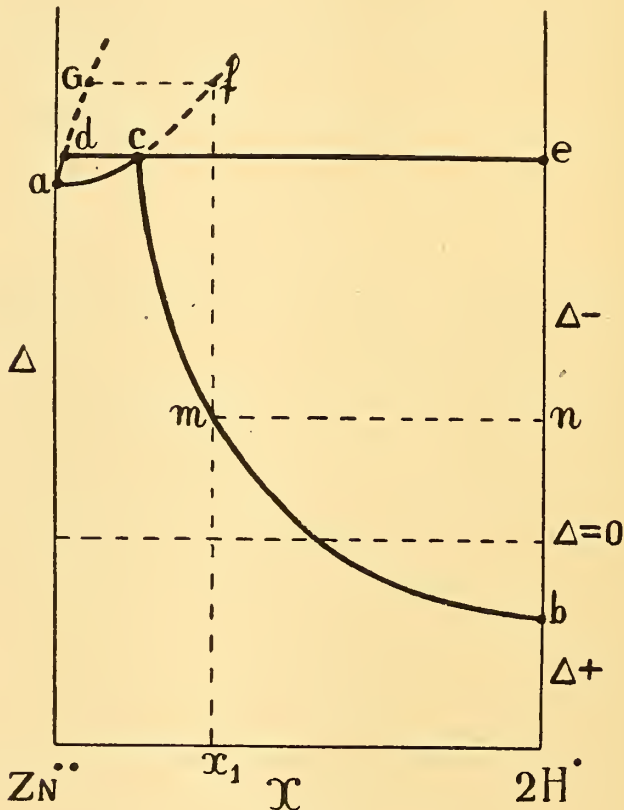


Fig. 1.

Zink.

Beschouwen wij dan eerst het geval dat het metaal zink gedompeld is in een zoutzure oplossing van  $\text{ZnCl}_2$ , dan is het de  $\Delta, x$ -figuur van het stelsel  $\text{Zn}-\text{H}_2$ , die voor de grafische verduidelijking van het gevonden resultaat dienst kan doen.

Een  $\Delta, X$ -fig. geldt voor const.  $T$ ,  $P$  en een constante totaal ionen-concentratie; voor  $T$  kiezen wij hier de gewone temp. en voor  $P$  den druk van 1 atm., terwijl de totaalionen-concentratie op 2 norm. wordt gesteld.

De ligging van het punt  $c$ , dat den electrolyt voorstelt, die met de zinkphase en de waterstofphase van den druk van 1 atm. coëxisteert wordt gevonden uit de betrekking

$$\frac{RT}{2F} \ln \frac{K_{Zn}}{(Zn_L)} = \frac{RT}{F} \ln \frac{K_H}{(H_L)}$$

waaruit volgt

$$\frac{K_{Zn}}{K_H} = \frac{(Zn_L)}{(H_L)^2}$$

of ook uit de vergelijkingen voor het oplosbaarheidsproduct van zink en waterstof

$$L_{Zn} = (Zn)^2 (\theta)^2$$

en

$$L_{H_2} = (H)^2 (\theta)^2$$

door  $(\theta)_{Zn} = (\theta)_{H_2}$  te stellen, waardoor ontstaat

$$\frac{L_{Zn}}{L_{H_2}} = \frac{(Zn_L)}{(H_L)^2}$$

of

$$\frac{(Zn_L)}{(H_L)^2} = \frac{10^{2 \times -35}}{10^{2 \times -48}} = 10^{26}$$

Stellen wij een oogenblik  $(Zn_L) = 1$ , dan is dus

$$(H_L) = 10^{-13}$$

Wij zien dus, dat het punt  $C$  zoo eenzijdig ligt, dat het practisch met de zink-as samenvalt. Vandaar dan ook, dat de lijn  $d c e$ , of de lijn voor het driphasenevenwicht zink-waterstof-electrolyt practisch evenhoog ligt als het punt  $a$ , zoodat de gemeten potentiaalsprong van het zink, dat een weinig waterstof opgelost bevat, en buitendien met een laagje waterstof is bedekt, stellig practisch gelijk is aan den potentiaalsprong van het zuivere waterstofvrije zink, waarvan de meting hier onmogelijk is.

Stel nu dat wij zink dompelen in een electrolyt, waarin de samenstelling wat betreft de zink- en waterstof-ionen  $x_1$  is, dan zien wij dat zink met deze vloeistof *niet* in stabiel electromotorisch evenwicht kan verkeerden, maar wel waterstof.

Indien de waterstof echter niet als een nieuwe phase optrad, maar alleen in het zink oploste, zou wel een metastabiel electromotorisch evenwicht mogelijk zijn, n.l.  $g f'$ , maar dan zou de potentiaalsprong sterker negatief zijn dan die van het driefasenevenwicht, voorgesteld door de lijn  $d, c, e$ .

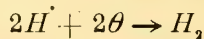
Dit metastabiele electromotorische evenwicht treedt echter niet op, integendeel, wij nemen een waterstofontwikkeling waar, en wij

willen er hier met een enkel woord op wijzen, hoe het experimenteele feit moet worden verklaard, dat onder deze omstandigheden de potentiaalsprong, zink-electrolyt gelijk is aan dien welke overeenkomt met  $d$ ,  $c$ ,  $e$ , of wat practisch hetzelfde is, met  $a$ .

De verklaring is deze; wanneer zink wordt gedompeld in den electrolyt van de samenstelling  $x_1$ , krijgt men in de grenslaag onmiddellijk de instelling van het driefasen-evenwicht tusschen de zinkphase, de electrolyten en de waterstofphase.

In de grenslaag heerscht dus de samenstelling  $c$  terwijl de totale samenstelling van den electrolyt  $x_1$  is.

Nu diffundeeren de waterstofionen in de grenslaag, waar ter handhaving van de samenstelling  $c$  de reactie plaats grijpt



tengevolge waarvan, zooals wij reeds gezien hebben, electronen en zinkionen uit de metaalphase in oplossing gaan. De zinkphase stelt zich met groote snelheid in innerlijk evenwicht en ten gevolge daarvan blijft zij tijdens de waterstofontwikkeling onveranderd, en de gemeten potentiaalsprong is die van het driefasenevenwicht  $d$ ,  $c$ ,  $e$ , die practisch met die van zuiver zink,  $a$ , overeenkomt.

Plaatst men in den zelfden electrolyt een platina-electrode, dan geeft deze de waterstof-potentiaal aan, die overeenkomt met de lijn  $mn$ . De zinkelectrode en de waterstofelectrode vertoonen dus in denzelfden electrolyt geheel verschillende potentiaalsprongen.

Dit is de grafische toelichting voor onze conclusie, dat de potentiaalsprong van zink t.o.v. een met zoutzuur aangezuurde oplossing van  $ZnCl_2$ , beheerscht wordt door den innerlijken evenwichtstoestand van het zink.

### Nikkel.

Gaan wij nu over tot het geval dat men in de plaats van zink het metaal nikkel neemt, dan valt er in de eerste plaats op te merken, dat dan onder dezelfde omstandigheden voor de samenstelling van den electrolyt  $c$  gevonden wordt

$$\frac{K_{Ni^{++}}}{K_{H^+}} = \frac{L_{Ni}}{L_{H_2}} = \frac{(Ni_L^{++})}{(H^+)^2} = \frac{10^{2 \times -45}}{10^{2 \times -48}} = 10^6$$

stellen wij nu  $(Ni_L^{++}) = 1$ , dan krijgen wij  $(H^+)^2 = 10^{-6}$  of  $(H^+) = 10^{-3}$ .

Ook hier ligt de electrolyt  $c$  dus nog eenzijdig. Stel dat de nevenstaande figur 2 weer geldt voor  $18^\circ$  en een druk van 1 atm. bij een totaal-ionen-concentratie van 2-norm; dan neemt men bij

dompeling van een nikkel-electrode in den electrolyt van de samenstelling  $x_1$ , een geheel ander verschijnsel waar als bij het zoo even besproken geval met *zink*, omdat bij het in oplossing gaan van electronen en nikkelonien, het innerlijk evenwicht in het metaaloppervlak zich niet kan handhaven.

Het metaal wordt steeds sterker verstoord in edele richting en het slot is, zooals wij reeds aantoonen, dat de electronen-concentratie van het nikkelevenwicht in de oplossing gelijk is geworden aan de electronen-concentratie van het waterstof-evenwicht in den electrolyt, waarbij de potentiaalsprong van de nikkelelectrode gelijk geworden is aan dien der waterstof-electrode. Dit kunnen wij grafisch aangeven op de wijze, zooals dit in fig. 2 is gedaan

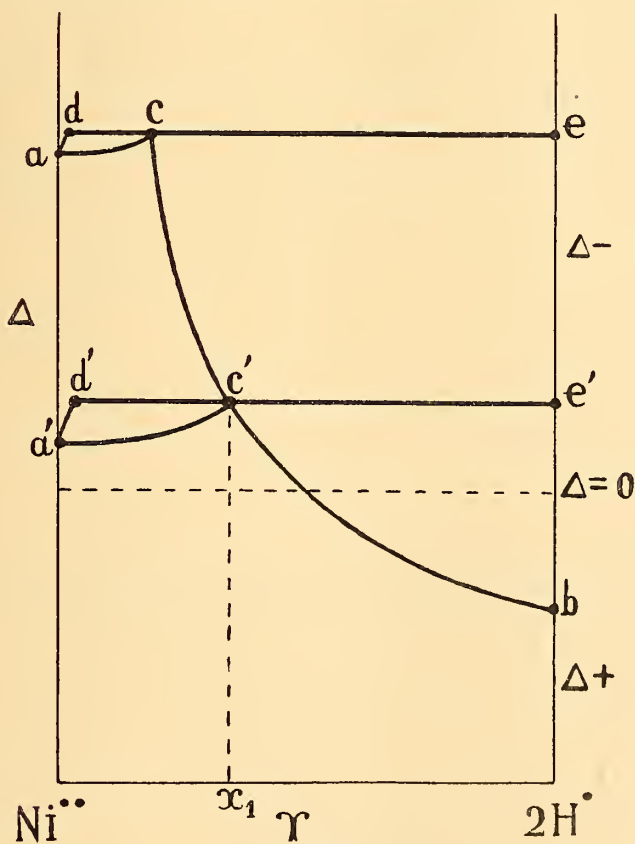


Fig. 2.

Het punt  $d$  is door de verstoring gekomen in  $d'$  en stelt dus voor de veredelde nikkelphase die met  $c'$  en de waterstofphase  $e'$  koëxisteert.

Uit onze beschouwingen kon worden afgeleid wat men doen moet, wanneer men den potentiaal van het uaire nikkel of m. a. w. den

evenwichts-potentiaal wil te weten komen. Men moet dan het nikkel brengen in een oplossing met een waterstof-ionen-concentratie, kleiner dan die in den electrolyt  $c$ . Onze  $\Delta, X$ -figuur 3 laat dan zien, dat

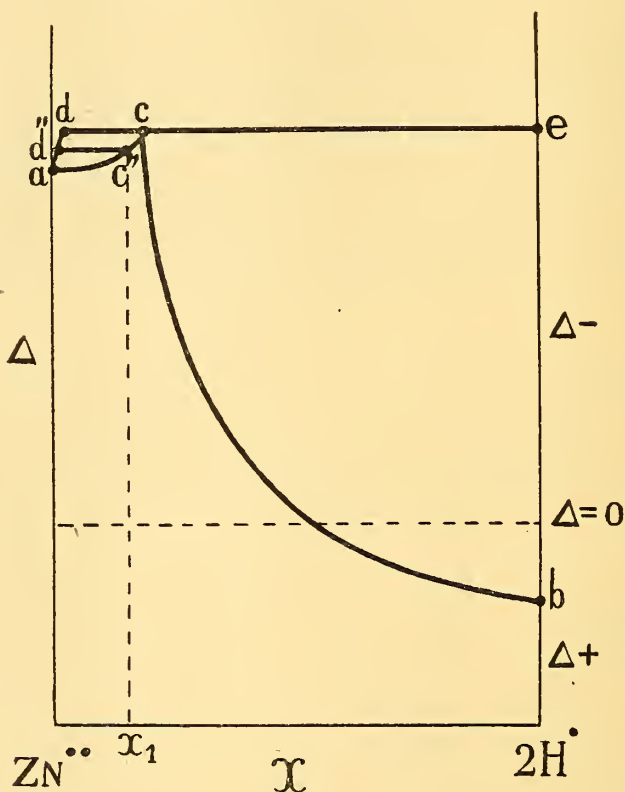


Fig. 3.

zich onder deze omstandigheden b.v. het electromotorische evenwicht tusschen de nikkelphase  $d''$  en den electrolyt  $c''$  zal instellen, waarvan de potentiaalsprong practisch samenvalt met dien van het volkomen waterstofvrije unaire metaal, aangegeven door  $a$ .

Het is noodig er op te wijzen, dat wanneer een metaal in electromotorisch evenwicht is met een koëxisterenden electrolyt, de electronen-concentratie van het metaal-evenwicht altijd gelijk moet zijn, aan de electronen-concentratie, die tengevolge van de andere heerschende evenwichten in de vloeistof bestaat.

Men kan in dit geval zeggen, dat het metaal met den electrolyt inderdaad in evenwicht is. Lost het metaal in een zuur op of slaat een metaal neer, dan heerscht de zooeven genoemde gelijkheid van electronen-concentratie slechts in de grenslaag tusschen metaal en electrolyt en er grijpt voortdurend diffusie in de grenslaag plaats.

De zooeven genoemde gelijkheid van de aangegeven electronen-



concentraties moet dus ook bestaan, wanneer in het zooeven genoemde geval het metaal nikkel zich met den electrolyt in evenwicht heeft gesteld. Hiervoor zijn natuurlijk altijd eenige transformaties noodig, doch deze zijn spoedig afgelopen en zullen dus niet tot een blijvende verstoring aanleiding kunnen geven, indien de oplossing althans door uitkoken, in vacuum, zooveel mogelijk van lucht en waterstof is bevrijd.

Volgens dit principe is te werk gegaan en daarbij werd, zooals in de vorige mededeeling van den Heer LOBRY DE BRUIN en mij is vermeld, de evenwichts-potentiaal gevonden van nikkel, dat slechts een spoortje waterstof bevatte, zoodat de gevonden potentiaal-sprong zeer zeker practisch zal overeenkomen met dien van het zuivere unaire metaal.

Nu is hier ondersteld dat de potentiaalsprong tusschen nikkel en de nikkelzoutoplossing met de uiterst geringe waterstofionen-concentratie wordt gemeten, nadat de electrolyt met de nikkel-electrode in het luchtledige verwarmd, het geheele toestel daarop met den electrolyt gevuld, en door middel van een hevel en een tusschen-

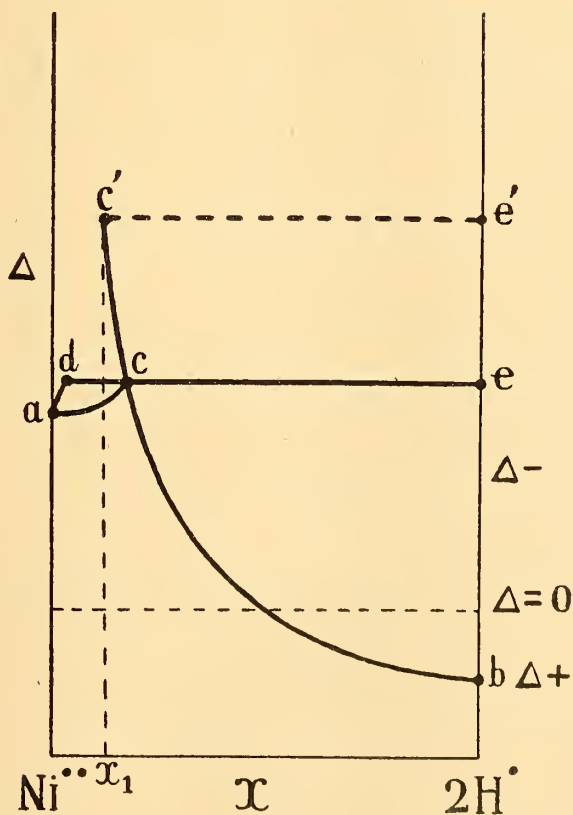


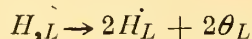
Fig. 4.

geschakelde vloeistofketen met de 1N. Calomelelectrode is verbonden, zoodat de druk waaronder de electrolyt staat, ook in dit geval 1 atm. bedraagt.

Een geheel ander resultaat krijgt men wanneer de vorige meting niet geschiedt in het luchtledige, maar in een waterstofstroom.

In dit geval wordt de nikkel-electrode verstoord, maar de verstoring grijpt nu niet plaats in edele, doch in onedele richting en ten slotte is, zooals wij reeds aantoonen, de potentiaalsprong van het nikkel weer gelijk geworden aan dien van de waterstof-electrode. Dit resultaat kunnen wij weer op uiterst eenvoudige wijze door middel van een  $\Delta, X$ -fig. 4 tot uitdrukking brengen.

Leiden wij waterstof door den electrolyt, waarvan de samenstelling  $x_1$  links van het punt  $c$  ligt, dan wordt de potentiaal van de waterstof-electrode aangegeven door de lijn  $c'e'$ . De nikkel-electrode komt bij deze wijze van proefneming in contact met gasvormige waterstof, en er zal zich in de grenslaag, die gelijktijdig met nikkel en waterstof in contact is, de electrolyt  $c$  vormen, doordat de reactie



verloopt, terwijl electronen en nikkeliolen (en een weinig waterstof-ionen) op het metaal neerslaan. Hierdoor wordt het metaal oppervlakkig onedeler en zoowel het driefasen-evenwicht  $dce$  als het punt  $a$  stijgt.

Deze verstoring in onedele richting gaat nu voort totdat de samenstelling van den electrolyt gelijk geworden is aan die in de grenslaag.

Dit is het geval, wanneer zich een driefasen-evenwicht heeft gevormd, waarvan de electrolyt de samenstelling  $x_1$  bezit, dus daar waar de kromme  $bc$ , de verticale lijn, die met deze samenstelling overeenkomt, snijdt. Dit gebeurt zooals fig. 5 laat zien in het punt  $c'$ . en het driefasen-evenwicht, dat zich dus tenslotte instelt, wordt hier aangegeven door de punten  $d'c'e'$ . Ook in dit geval wordt dus de potentiaalsprong van de nikkelelectrode gelijk aan dien van de waterstof-electrode.

Beschouwen wij nu de metalen, waaruit de zoogenaamde onaan-tastbare electroden bestaan, dan behoeven wij slechts op te merken, dat, daar zooals zooveel reeds werd aangetoond, deze metalen ideaal traag zijn, de potentiaalsprong metaal-electrolyt in bijna alle gevallen uitsluitend wordt beheerscht door de electronen-concentratie in den electrolyt. Van daar, dat, wanneer men b.v. een platina-electrode dompelt in een electrolyt, waardoor waterstof wordt geleid, het platina bijna onmiddellijk den waterstofpotentiaal vertoont, hetgeen

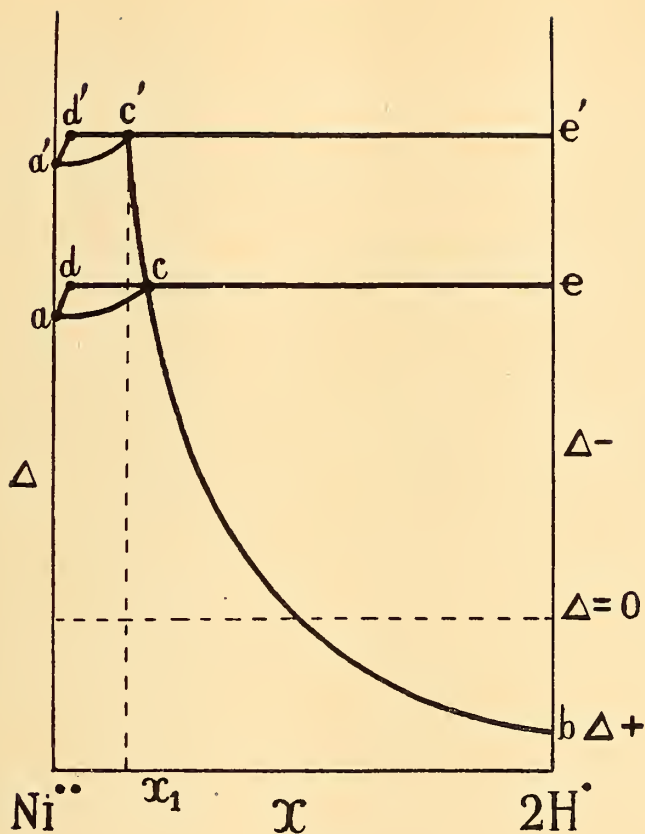


Fig. 5.

bij nikkel eerst na verloop van eenigen tijd het geval was. Willen wij dit grafisch in een  $\Delta, X$ -fig. verduidelijken, dan krijgt men natuurlijk volkomen dezelfde voorstelling als voor het geval nikkel-waterstof.

Dat wij in waterige oplossingen de evenwichts-potentiaal van platina niet kunnen bepalen, terwijl dit bij nikkel nog wel mogelijk was, ligt hieraan, dat de electrolyt  $c$  bij platina-waterstof zoo eenzijdig ligt, dat een waterige oplossing van een platina-zout altijd, wat de platina- en waterstof-ionen betreft een samenstelling bezit rechts van het punt  $c$ , zoodat altijd verstoring moet optreden.

In een volgende mededeeling hoop ik het verschijnsel van de „overspanning”, dat, zonder het te noemen reeds hier en daar bij deze beschouwingen is te pas gekomen, nader te bespreken.

Amsterdam, Maart 1918. *Algemeen en anorg. chemisch Labor.  
der Universiteit.*

**Physiologie.** — De Heer VAN RIJNBEEK biedt eene mededeeling aan van den Heer V. WILLEM: „*Over de ademhalingsbewegingen bij den kikker.*”

(Mede aangeboden door den Heer MAX WEBER).

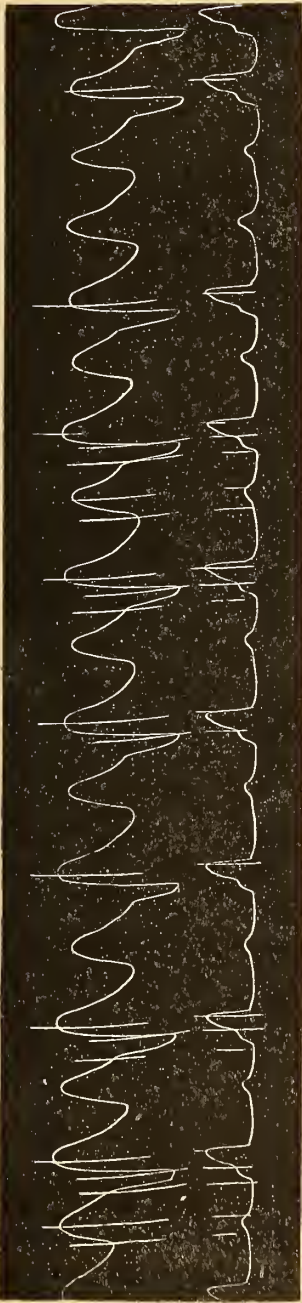
Bij de voorbereiding der practische oefeningen aan studenten in de biologie, in het Physiologisch Laboratorium van Amsterdam gegeven, bleek het mij dat de talrijke verhandelingen, die de literatuur over de ademhalingsbewegingen bij den kikker telt, nog menig punt in het duister laten, en dat de door ons uitgewerkte techniek een over eenige bijzonderheden nauwkeuriger inzicht leverde.

Ik heb namelijk betere curven van den druk in de mondholte opgeschreven, dan die welke tot heden verkregen werden. De manometer was in verbinding gebracht met deze holte door den ductus Eustachii, na de doorboring van het trommelvlies; somtijds werd de proef uitgevoerd met kikkers, waarvan de tong te voren afgeknipt was. Bij andere proeven, was de cannule langs den slokdarm in de bucco-pharyngeale holte gebracht.

De druk in de longen werd volgens de methode van GRAHAM BROWN aangeteekend. Tegelijkertijd werden de keelbewegingen opgeschreven, vijfmaal vergroot. Bij deze experimenten lag de kikker op den rug, en het hefboompje was opgesteld, als voor de suspensiecurven van het hart naar ENGELMANN; of wel het dier zat in de normale hokkende houding, en het opteekenen werd door middel van een bijzonder toestelletje uitgevoerd, dat ik later zal beschrijven.

Als voorbeeld deel ik hiernevens een graphiek mede, welke de verhoudingen tusschen de bewegingen van den mondbodem en de veranderingen van den druk in de bucco-pharyngeale holte aanschouwlijk maakt. Door middel van een aantal van dergelijke graphieken heb ik het volgende diagram van het synchronisme in de verschijnselen der gewone ademhalingsventilatië samengesteld; in een uitvoeriger verhandeling zal ik de experimenteele gegevens uiteenzetten, uit welke dit schema is opgesteld.

1. Gedurende de tijdsruimte 1-2, daalt de druk in de longen (*P*) eerst snel, dan langzamer; tegelijkertijd stijgt de druk in de mondholte, die om en nabij 0 (atmospherische druk) was (*B*), tot op hetzelfde niveau (ongeveer 1 centimeter water). Dit bewijst dat het oogenblik



Graphiek 1. Boven. Bewegingen van den mondbodem.  
Beneden. Druk in de bucco-pharyngeale holte.

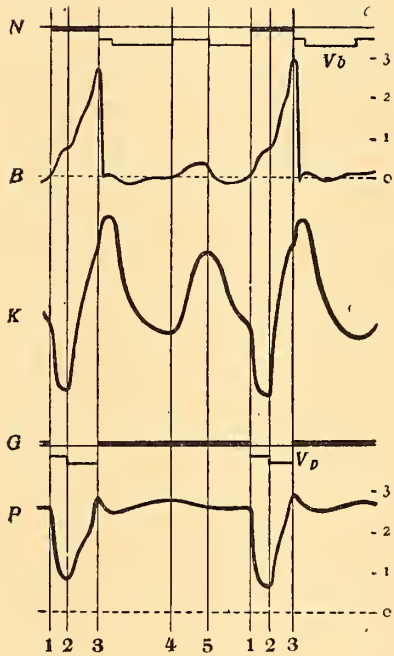


Diagram van de ademhalingsbewegingen bij den kikker.

- N.* Opening en sluiting van de neusgaten.
- V<sub>b</sub>*. Bucco-pharyngeale ventilatie.
- B.* Druk in de bucco-pharyngeale holte (ter rechterzijde, schaal in cm. water).
- K.* Opschrijving van de keelbewegingen.
- G.* Opening en sluiting van de glottis.
- V<sub>p</sub>*. Pulmonaire ventilatie.
- P.* Druk in de longen (schaal in cm. water).

van de opening der glottis, die de longen in verbinding brengt met de bucco-pharyngeale holte, op de ordinaat 1 moet geplaatst worden. Het tijdsverloop 1-2 is dus de duur van de longuitademing.

Deze stijging van den druk in de mondholte drukt den mondbodem naar omlaag (*K* 1-2); deze verplaatsing is dus enkel passief.

2. Vanaf het tijdstip 2, verheft zich de mondbodem; terzelfdertijd (van 2 tot 3) stijgt de bucco-pharyngeale druk ( $B$ ), die een oogenblik stationair gebleven was, tot ongeveer 3 centimeter water. De druk in de longen ondervindt een gelijke stijging: het blijkt dus dat de glottis nog open staat. Het tijdverloop 2-3 geeft dus de longinademing weer.

De vergelijking van de drie curven toont aan, dat dit verschijnsel te wijten is aan een actieve samentrekking der mondbodemspieren. Overigens heeft de drukcurve een diphasisch verloop, dat niet verbeeld wordt door de curve der verplaatsing van het vooreinde van het tongbeen: dit verschil geeft aan, dat de samenpersing der lucht het gevolg is van een meer ingewikkelde beweging dan die van het opgenomen punt. Immers de stijging van den mondbodem geschiedt in twee tempo's en het tongbeen wipt gedurende zijne verplaatsingen op en neer.

3. In den stand 3 daalt de bucco-pharyngeale druk ( $B$ ) plotseling tot 0: daar heeft dus de opening der neusgaten plaats.

Soms merkt men in dien stand op de curve  $K$  een hak; men kan den oorsprong van dit inflexiepunt als volgt verklaren: de lucht in den mond, die gedurende het vorige tijdperk meer en meer samengedrukt was, bood aan de spiercontractie een stijgenden tegenstand, die plotseling met de opening der holte ophoudt; dan gaat de opwaartsche beweging weer door met een grootere snelheid. Deze hak komt vooral voor, zooals men gemakkelijk begrijpt, in die gevallen waar de spiercontractie niet zeer krachtig is.

Dit laatste deel van de opwaartsche beweging van den mondbodem (voorbij ordinaat 3) gaat gepaard met een geringe stijging van den druk in de bucco-pharyngeale holte, die onmiddellijk den val van den hefboom volgt ( $K$ ): dit is, in dit geval, een zeer korte uitademingsphase in de bucco-pharyngeale ventilatie ( $Vb$ ).

Van af het oogenblik 3 toont zich de longcurve ( $P$ ) onafhankelijk van den druk in de mondholte: de glottis heeft zich dus gesloten op het oogenblik dat de neusgaten open gingen.

4. Het volgende deel van de graphiek  $K$ , tusschen 3 en 1, geeft het verloop van de bucco-pharyngeale ventilatie weer. Het bestaat hier uit drie deelen: een eerste dalend gedeelte, van veel langer duur dan de stijging 2-3; een opwaartsche beweging, waarvan de top lager staat dan de vorige; en eindelijk een tweede dalend gedeelte, dat met een longenexpiratie eindigt. Men weet overigens, dat het aantal van dergelijke schommelingen zeer veranderlijk is: hier heeft men er eenvoudigheidshalve maar één voorgesteld.

Deze schommelingen van den mondbodem gaan gepaard met ver-

anderingen van den druk in den mond, die beurteling boven en onder het nulpunt is, en hoogstens een paar millimeter water bedraagt. Deze bewegingen worden dus veroorzaakt door actieve spierbewegingen, en zijn de factoren der bucco-pharyngeale ventilatie.

Tegelijkertijd toont de graphiek van den druk in de longen kleine schommelingen, die tegenovergestelde richtingen hebben van die der graphiek K. Sinds GRAHAM BROWN beschouwt men ze, terecht, als ontstaan door de samendrukking resp. uitrekking der longen door de verplaatsing van den larynx.

Later zal ik de variaties van dit typeerend bewegings-complex mededeelen.

**Anatomie.** — De Heer ZWAARDEMAKER biedt een mededeeling aan van den Heer EUG. DUBOIS: „*De betrekking der hoeveelheden van de hersenen, het neuron en zijn deelen tot de lichaams-grootte* <sup>1)</sup>.”

(Mede aangeboden door den Heer WINKLER).

In een vroegere mededeeling <sup>2)</sup> werd aangetoond hoe de massa van het hersenapparaat, in alle klassen der gewervelde dieren, grooter wordt met de lichaams-grootte. Van soort tot soort en ook van de eene tot de andere sekse neemt die massa toe naar de macht 0.55... van het lichaamsgewicht; van individu tot individu, bij gelijke soort, daarentegen naar een slechts half zoo groote macht, berekend als waarschijnlijk 0.22...

Dat de samenstelling van het hersenapparaat in de vijf klassen van gewervelde dieren geheel verschillend is en zelfs anders bij de verschillende genera kan met de gevonden regelmatige verhoudingen wel in overeenstemming gedacht worden. Deze verhoudingen gelden immers slechts voor morfologisch en physiologisch als gelijkwaardig beschouwde, alleen in grootte verschillende dieren. In het meest samengesteld orgaan zal dan ook de intiemste morfologische en functioneele overeenkomst moeten bestaan.

Met de regelmatige *vergrooting* van het apparaat in zijn geheel ziet men evenwel onevenredigheid in de *samenstelling*, ook bij die in vorm en verrichtingen gelijkstaande dieren, welke telkens vergeleken werden, gepaard gaan. Het meest opvallend is deze quantitative wijziging der samenstellende deelen tusschen hetgeen men als het meer actieve bestanddeel van het meer passieve pleegt te scheiden, tusschen de grijze stof, welke de allermeeeste gangliëncellen bevat, en de hoofdzakelijk uit zenuwvezels met mergscheede bestaande witte stof. Ook zijn in de grijze zelfstandigheid de cellichamen dichter geplaatst bij

---

<sup>1)</sup> Aangezien de soortelijke gewichten van het lichaam (zonder lucht) en de genoemde bestanddeelen vrij wel gelijk zijn en ongeveer even weinig boven 1 liggen (H. VIERORDT. Anatomische, physiologische und physische Daten und Tabellen. 3. Aufl. 1906, p. 55—60) worden in deze mededeeling wel volume, gewicht en massa voor elkander gebruikt.

<sup>2)</sup> Deze Verslagen. Deel XXII. (1913), p. 593—614.



kleine dan bij groote dieren, aldus zeer opvallend bij de muis in vergelijking met den olifant <sup>1)</sup>).

De totale massa der cellichamen is aldus bij groote soorten en individuen eener soort minder toegenomen dan die van de zenuwvezels en van de mergscheeden, welke men slechts als een bijkomstig, isoleerend omhulsel van den alleen essentielen, hoewel passieven ascilinder pleegt te beschouwen. Wel is deze beschouwing niet bevestigd, o.a. niet door het onderzoek van DONALDSON en HOKE <sup>2)</sup>, die aantoonde, dat het volume der mergscheede, bij alle gewervelde dieren, gemiddeld steeds gelijk is aan dat van den ingesloten ascilinder, een feit dat bepaald wijst op een minder onbeduidende rol van de mergscheede dan men daaraan pleegt toe te kennen. Intusschen wordt hiermede niet weggenomen het schijnbaar onverklaarbaar samengaan van eene regelmatige vergrooing van het volume van het hersenapparaat met de onevenredige vermeerdering van de als meer passief (vezelbestanddeelen) en zelfs als eenvoudige omhulling en steunsel (interstitium) gedachte bestanddeelen van de hersenen ten opzichte van de cellichamen daarin.

De onevenredige vermeerdering der witte stof met toenemende lichaams grootte heeft men getracht te verklaren, doordien de als even dik blijvend aangenomen zenuwvezels niet slechts, gelijk de (ook onvergroot gedachte) cellichamen, waarmede zij verbonden zijn, in *aantal* evenredig met het volume der hersenen, moeten toenemen, maar zich noodzakelijk ook nog moeten *verlengen*, in verhouding met de lineaire afmeting van het orgaan <sup>3)</sup>).

Bij deze verklaring is men genoodzaakt om aan te nemen, dat door de onderstelde, niet in den aard van het neuron liggende, doch door uiterlijke omstandigheden opgedrongen disproportie zijner deelen ook functioneele ongelijkheid wordt opgedrongen, zelfs als men aan de passieve rol van de zenuwvezel blijft vasthouden.

Voor het ruggemerg geldt nu iets dergelijks als voor de hersenen; ook daarin ziet men de witte stof in veel aanzienlijker mate toenemen dan de grijze stof <sup>4)</sup>).

<sup>1)</sup> H. OBERSTEINER, Die Kleinhirnrinde von Elephas und Balaenoptera. Arbeiten aus dem Neurologischen Institute der Wiener Universität, 1913, p. 153.

<sup>2)</sup> H. H. DONALDSON and G. W. HOKE, On the areas of the axis cylinder and medullary sheath as seen in cross sections of the spinal nerves of vertebrates. Journal of Comparative Neurology and Psychology. Vol. XV. (1905), p. 1—16.

<sup>3)</sup> ERNST DE VRIES, Das Corpus striatum der Säugetiere. Anatomischer Anzeiger. Bd. 39. Jena 1910, p. 387—388.

<sup>4)</sup> Bijzonder duidelijk is dit aangetoond door A. J. HOVY, Over de verhouding tusschen witte en grijze stof in het centraal zenuwstelsel. Deze Verslagen, Deel XXII, (1913/14), p. 324—330.

Ja, eenzelfde „wanverhouding” bestaat noodzakelijk tusschen de massa der perifere zenuwvezels, die zich ongeveer evenredig met de lichaamslengte moeten verlengen, en de in het centraal apparaat gelegen gangliëncellen, waarvan zij uitgaan.

Is het dan wel een wanverhouding, waarmede men hier te doen heeft? Zal niet met de verlenging van de zenuwvezel ook de centrale cel, waarvan zij uitgaat, ten minste eenigermate moeten groeien? Dan ware het uitgangspunt van de bovenstaande en andere soortgelijke verklaringen, die men van de opvallende disproportie in de samenstelling van het toch als functioneel gelijkwaardig aangenomen hersenapparaat, bij in grootte verschillende, doch overigens gelijkstaande dieren, gegeven heeft, onjuist en misschien een niet tot tegenstrijdigheid, ja ongerijmdheid leidende verklaring te vinden.

Bedoeld uitgangspunt, het onderstelde gelijk blijven van het volume der zenuwcel en van de dikte der zenuwvezel, eischt dus wel nader onderzoek. Daar het zenuwstelsel als een samenstel van specifieke cellen, de neuronen, moet beschouwd worden, is het wel van principieele beteekenis in welke betrekking de grootte van deze, zoo bijzonder gespecialiseerde cellen en die van haar onderdeelen staan tot de lichaamsgrootte.

Voor den langsten en zeer bijzonderen nitlooper van het neuron, den neuriet of de zenuwvezel, moet, wanneer deze de periferie van het lichaam bereikt, wel worden aangenomen, dat zijn volume met de lichaamslengte grooter wordt en aldus ook het neuron vergroot wordt. Aangaande het al of niet gelijk blijven der grootte van het celcentrum, de zenuwcel of gangliëncel, in het ruggemerg of de hersenen bestaat nog (onnoodig) verschil van meening. Velen beschouwen nog (ten onrechte) de waargenomen grootteverschillen als geheel onregelmatig en zoo gering, dat zij in de beschouwingen omtrent den bouw van het centraal zenuwstelsel kunnen verwaarloosd worden.

Evenwel blijkt, dat grootteverschillen van overeenkomstige (homologe) zenuwcellen standvastig voorkomen, in zekere verhouding tot de lichaamsgrootte; zij hebben aldus werkelijke beteekenis.

De grootteverschillen springen het meest in het oog waar men zeer ongelijk groote dieren, zooals den olifant en de muis, ten aanzien van homologe zenuwcellen, tegenover elkander stelt. De centrale deelen, „cellichamen”, en wel de grootste van de *columnae anteriores* der *intumescencia cervicalis* (6<sup>e</sup> cervicaal segment), van den Indischen olifant hebben ongeveer 3 maal zoo groote middellijn en ruim 29 maal zoo groot volume als de overeenkomstige cellichamen van de huismuis. Dit schijnt niterst weinig te zijn bij verhoudingen

der lengtematen van het lichaam als 60 tot 1 en der lichaams-gewichten als 180000 tot 1. Desniettemin kan een regelmatige verhouding bestaan, waardoor bij de albino-rat, die gemiddeld slechts  $12\frac{1}{2}$ , maal zoo zwaar is als de albino-huismuis en bijna  $2\frac{1}{2}$ , maal zoo lang, de middellijnen van homologe gangliëncellen evenredig zijn aan 5 en 4.

Om een voorloopig denkbeeld te geven van de orde der grootteverschillen van de gangliëncellen moge dienen, dat in het algemeen, bij nauw verwante soorten, met verdubbeling van de lengtematen van het lichaam de middellijn der bedoelde cellen slechts in de verhouding van 5 tot 6 toeneemt. Gegeven, bovendien, de zeer onregelmatige vorm van vele dezer cellichamen, is het wel begrijpelijk, dat aan die grootteverschillen door de meeste onderzoekers geen beteekenis werd toegekend.

Voornamelijk IRVING HARDESTY <sup>1)</sup>, GIUSEPPE LEVI <sup>2)</sup>, H. OBERSTEINER <sup>3)</sup> hebben intusschen afdoend aangetoond, dat de grootte der gangliëncellen in het algemeen met de lichaamsgrootte der diersoorten toeneemt. Uit de door hen geleverde gegevens zonder meer blijkt evenwel nog niet het bestaan eener bepaalde, regelmatige, verhouding. Integendeel, wel staan de groote soorten meestal ver van de kleine af, doch volstrekt niet altijd; de reeksen zijn ten deele zeer onregelmatig. Dit ligt bij bepaalde soorten van gangliëncellen aan hare vormen, welke geen nauwkeurige metingen toelaten, maar stellig nog veel meer aan de omstandigheid, dat meestal gangliëncellen uit verschillende deelen van het ruggemerg vergeleken werden, terwijl toch de grootte der cellichamen naar de plaats in dat centraal apparaat bij een zelfde dier zeer veranderlijk is <sup>4)</sup>, verder aan de omstandigheid, dat er naar de diersoort specifieke ongelijkheid in de grootte van overeenkomstige cellen kan bestaan en eindelijk, doch niet het minst daaraan, dat de

<sup>1)</sup> IRVING HARDESTY, Observations on the medulla spinalis of the elephant with some comparative studies of the intumescencia cervicalis and the neurones of the columna anterior. *Journal of Comparative Neurology*. Vol. 12. Philadelphia 1902, p. 125—182.

<sup>2)</sup> a. GIUSEPPE LEVI, Studi sulla grandezza delle cellule I Ricerche comparative sulla grandezza delle cellule dei mammiferi. *Archivio Italiano di Anatomia e di Embriologia*. Vol. V. Firenze 1906, p. 291—358. Voor alle klassen van Gewervelde Dieren: b. G. LEVI, I Gangli Cerebrospinali. Supplemento al Vol. 7 dell' *Archivio Italiano di Anatomia e di Embriologia*. Firenze 1908.

<sup>3)</sup> H. OBERSTEINER, Bemerkungen zur Bedeutung der wechselnden Grösse von Nervenzellen. (Del Volume Jubilaro in onore L. BIANCHI. Catania 1913), 8 pp.

<sup>4)</sup> Herinnerd zij hier, dat E. CAVAZZANI vond voor den mensch, den hond, de kat, het konijn en de rat, allen volwassen, steeds gemiddeld kleiner gemiddelde diameters der cellichamen in de ganglia spinalia tusschen de borstwervels dan tusschen de hals- en lendenwervels (*Sur les ganglions spinaux*. *Archives italiennes de Biologie*. T. 28 (1897) p. 52—53).

onderzochte individuen volstrekt niet altijd het type hunner soort voorstelden (lichaamsgewichten en andere gegevens ter beoordeeling daarvan ontbreken meestal).

Waar het nog slechts te doen was om aan te toonen, dat in het algemeen de grootte der gangliëncellen met die van het lichaam toeneemt, waren de vergelijkingen ook wel voldoende. Maar de bruikbaarheid der voorhanden gegevens voor het onderzoek naar een mogelijke regelmatige verhouding wordt aldus wel zeer beperkt.

Het best leenen zich voor metingen de spinale gangliëncellen, want deze zijn tamelijk rond en hebben weinig of geen boomvormige uitloopers<sup>1)</sup>. Doch op overeenkomstige plaatsen in het ruggemerg zijn ook de cellen uit de voorste hoorns met voldoende nauwkeurigheid te vergelijken, zooals vooral met de metingen van HARDESTY het geval is. Daarentegen kunnen de piramidencellen der grijze schors van het cerebrum en ook de PURKINJE-cellen van het cerebellum alleen bij nauw verwante dieren vergeleken worden, waarbij alleen men zeker kan zijn, gegeven ook de ten deele onbepaalde begrenzing dezer cellen, inderdaad homologe cellen, althans overeenkomstige afmetingen te vergelijken. G. LEVI<sup>2)</sup> toonde aan, dat alleen van de grootste cellen telkens de afmetingen duidelijk met de lichaams-grootte toenemen. Bij de kleine cellen — zoo meen ik met G. LEVI dit verschijnsel te mogen verklaren — bezit het cellichaam geen kenbare, althans geen meting toelatende grenzen; een groot deel van hare substantie (en wel bij groote dieren onevenredig meer dan bij kleine) onttrekt zich aan de waarneming en wat men daarbij als zoodanig meet is slechts een deel van het fungerend celcentrum.

Op gelijke wijze nu als voor de hersenhoeveelheid kan men, door vergelijking van een groot en een liefst nauw verwant klein dier, maar bij zeer groote lichaamsverschillen, voor zoover betreft ruggemergscellen en cellen van spinale ganglia, ook van dieren van mindere verwantschap, een relatie-exponent  $r$  berekenen tusschen het volume van de gangliëncel en dat van het lichaam. Men vindt dan  $r$  uit de formule  $\left(\frac{S}{s}\right)^r = \frac{G}{g}$ , waarin  $S$  en  $s$  en  $G$  en  $g$  de lichaams-gewichten en de volumina der gangliëncellen van het groote en het kleine dier voorstellen.

In de volgende tabel van de nauwkeurigste ter beschikking staande gegevens wijzen de achter de getallen in iedere kolom tusschen haakjes geplaatste letters aan van waar de gegevens afkomstig zijn<sup>3)</sup>.

1) Vergel. G. LEVI, l. c. (a), p. 342—343.

2) L. c. (a), p. 330, 333.

3) (Ha): HARDESTY, l. c. p. 159—162 en 171—173; (DH): DONALDSON en HOKE.

	Lichaams- gewicht (Grammen)	Gangliëncel Gem. middellijn (Micra)	Zenuwvezel Gem. middellijn my: met merg- scheede ax: alleen axon (Micra)	Zenuwvezel Lengte (Millimeter)
1. Homo sapiens	72000 (Ha)	58 (Ha)	8.4 ax (Ha)	800 (Ha)
2. Elephas indicus	3600000 (Ha)	84.4 (Ha)	11.76 ax (Ha)	2128 (Ha)
3. Equus caballus	562500 (Ha)	61.9 (Ha)	—	—
4. Lepus cuniculus dom.	2000	39.2 (Ha)	13.3 my (DH)	175 (D)
5. Mus norvegicus albinus	250	34.7 (Ha)	—	—
5a. Mus norvegicus albinus	250	16.5 Pu (Add)	—	—
6. Mus musculus albinus	20 (Ha)	27.4 (Ha)	4.2 ax (Ha)	35 (Ha)
6a. Mus musculus	20 (D)	13.0 Pu (O)	—	—
7. Felis domestica	3300 (D)	53.5 (Ha)	16 my (DH)	280 (D)
7a. Felis domestica	3300 (D)	69 Be (Br)	—	—
8. Felis leo	119500 (D)	96.5 Be (Br)	—	—
9. Canis familiaris	23000 (L)	80.8 Spi (L)	—	—
10. Canis familiaris	3750 (L)	67.5 Spi (L)	—	—

Alle waarden hebben betrekking op den volwassen staat; de maten in de tweede kolom op de grootste gangliëncellen uit den voorsten hoorn der intumescencia cervicalis, behalve die in de rijen 5a en 6a, welke de dwarse middellijnen van PURKINJE-cellen aangeven, in de rijen 7a en 8: de gemiddelde maximale diameters der corticale reuzenpiramiden van BETZ en de rijen 9 en 10, welke betrekking hebben op cellen van de ganglia spinalia IV en V. De zenuwvezels staan alle in direct of indirect verband met de intumescencia cervicalis<sup>1)</sup>.

l. c. p. 9—11; (L): LEVI, l. c. p. 331—332; (Add): W. H. F. ADDISON, The development of the Purkinje cells and of the cortical layers in the cerebellum of the albino rat. *Journal of Comparative Neurology*. Vol. 21 (1911), p. 469; (O): OBERSTEINER, Die Kleinhirnrinde, l. c. p. 153; (Br): K. BRODMANN, Vergleichende Lokalisationslehre der Grosshirnrinde in ihren Prinzipien dargestellt auf Grund des Zellenbaues. Leipzig 1909, p. 83 en W. BEVAN LEWIS, Researches on the comparative structure of the cortex cerebri. *Philos. Transact. Roy. Soc. London*, Vol. 171 (1880), Part. 1, p. 53; (D): DUBOIS (l. c. en latere bepalingen).

<sup>1)</sup> Voor *Mus norvegicus albinus* (bij HARDESTY en bij DONALDSON en HOKE nog *Mus rattus albus* genoemd) werd, naar verschillende opgaven, het gemiddeld lichaamsgewicht van de volwassen variëteit op 250 gram gesteld, voor *Lepus cuniculus domesticus* op 2000 gram.

In de aangehaalde verhandeling van HARDESTY is in de berekening van het celvolume der muis een fout geslopen. Dit bedraagt 10771, in plaats van 7974 kub. micra. De olifant heeft ook slechts ruim 29 maal en de mensch  $9\frac{1}{2}$  maal grooter celvolume dan de muis, in plaats van 39 en 13 maal.

De voor de berekening vergeleken soorten<sup>1)</sup> gaven de volgende waarden van  $r$ .

1.	1.	en	6.	Homo sapiens en Mus musculus albinus	0.2747
2.	2.	„	6.	Elephas indicus en Mus musculus albinus	0.2788
3.	5.	„	6.	Mus norvegicus albinus en Mus musculus albinus	0.2805
4.	5a.	„	6a.	Mus norvegicus albinus en Mus musculus (Pu)	0.2797
5.	8.	„	7a.	Felis leo en Felis domestica <sup>2)</sup> (Be)	0.2804
6.	9.	„	10.	Canis familiaris en Canis familiaris (Spi)	0.2975
Gemiddeld					0.2819

De gegevens van G. LEVI en die van H. OBERSTEINER zijn over het geheel voor deze berekeningen niet geschikt, daar zij óf trekking hebben op cellen uit verschillende deelen van het ruggemerg óf uit ganglia spinalia van verschillende plaats óf wel in het algemeen op metingen berusten die geen nauwkeurige resultaten konden opleveren<sup>3)</sup>. Wel geeft G. LEVI bijzonder nauwkeurige maten, als gemiddelden van metingen van telkens 100 cellen uit het 4<sup>de</sup> en uit het 5<sup>de</sup> ganglion spinale, zoowel van een hond van 23 Kg. als van 3.75 Kg. lichaamsgewicht, het spreekt van zelf, van verschillend ras en vermoedelijk ook van verschillende sekse (in ieder geval, wat de hersenverhoudingen aangaat, wel gelijk verschillende soorten te beschouwen). Voor de PURKINJE-cellen van de huismuis geeft OBERSTEINER de gemiddelde dwarse afmeting aan, gelijk ADDISON voor de albino-rat.

De gevonden gemiddelde waarde van  $r$  is nu vrij nauwkeurig de helft van den voor de hersenen gevonden relatie-exponent 0.56. Met andere woorden:

*De vergrooting van den herseninhoud is evenredig aan het kwadraat der vergrooting van den inhoud van homologe gangliëncellen.*

De gangliëncel, het celcentrum van het neuron is nu slechts een deel, zelfs een gering deel van de geheele cel, want de uitloopers en vooral de neuriet of zenuwvezel, vormen verreweg de meeste

<sup>1)</sup> Tusschen het paard en de muis vindt men den relatie-exponent 0.2387, daarentegen tusschen de kat en de muis 0.3931. De beteekenis dezer afwijkingen moge in een volgende mededeeling beschreven worden.

<sup>2)</sup> Vergelijking van Felis domestica met de slechts ongeveer viermaal zwaarder Felis pardalis, waarbij de gemiddelde diameters der grootste homologe reuzencellen van BETZ zijn 60 en 69 micra (B. LEWIS, l. c. p. 53 en 58), leidt tot minder scherpe bepaling van den exponent. Uitgaande van de genoemde verhouding der lichaamsgewichten 4:1 vindt men 0.3024, daarentegen 0.2830 bij een gewichtsverhouding van 4.4:1.

<sup>3)</sup> Vergel. OBERSTEINER, Bemerkungen zur Bedeutung der wechselnden Grösse von Nervenzellen, p. 3.

substantie van het neuron. DONALDSON berekende voor bepaalde neuronen van het ruggemerg van den mensch, dat alleen de ascilinder 187 maal grooter volume heeft dan de gangliëncel waarvan hij uitgaat<sup>1)</sup>; dit wordt 374 maal, indien de mergscheede, welke zoo al niet genetisch, dan toch physiologisch tot de zenuwvezel behoort, wordt medegerekend<sup>2)</sup>.

De vraag doet zich nu voor of er ook een regelmatige grootte-verhouding bestaat tusschen het volume van de gangliëncel en het geheele neuron.

De lengte van de zenuwvezel, die eene gangliëncel, in het ruggemerg bijvoorbeeld, verbindt met de periferie van het lichaam, moet begrijpelijkerwijze met de grootte der diersoorten toenemen, namelijk ongeveer evenredig met de lichaamslengte. Dat ook de dikte van de zenuwvezel eenigermate van de lichaamsgrootte *c. p.* afhankelijk is, werd herhaaldelijk aangetoond, het meest overtuigend wel door HARDESTY<sup>3)</sup>, door tal van metingen in dezelfde doorsneden van het ruggemerg, waarin de cellichamen gemeten werden, bij den olifant, den mensch en de muis. De doorsnede van de zenuwvezel blijkt *c. p.* ongeveer gelijk met die van de cel te groeien.

De onderstaande rij berust op berekeningen van den relatie-exponent voor den inhoud van de gangliëncel in verhouding tot dien van het geheele neuron *met inbegrip van de mergscheede*<sup>4)</sup>. Dit laatste op grond van hetgeen DONALDSON en HOKE hebben aangetoond en met het oog op de vergelijking met de hersenhoeveelheid. Overal is bedoeld het grootste neuron, met den langsten neuriet, van de hand.

1. Homo sapiens	0.2707
2. Elephas indicus	0.2513
3. Lepus cuniculus domesticus	0.3104
4. Mus norvegicus albinus <sup>5)</sup>	0.2665
5. Mus musculus albinus	0.2681
6. Felis domestica	0.2991
Gemiddeld	0.2777

<sup>1)</sup> H. H. DONALDSON, The Growth of the Brain. London 1895, p. 154.

<sup>2)</sup> Naar de uitkomst van het onderzoek van DONALDSON en HOKE l. c.

<sup>3)</sup> L. c. p. 171—172. Vergel. ook: G. LEVI, l. c. p. 338, die de dikste zenuwvezels van den nervus ischiadicus mat. Bij dieren, die niet zeer veel in grootte verschillen is de verandering (om later nog te bespreken redenen) volstrekt niet regelmatig.

<sup>4)</sup> Het cellichaam werd beschouwd als een bol met den aangegeven diameter: in de berekening van den inhoud van het geheele neuron werden collaterale takken en het grootste deel der dendriten verwaarloosd.

<sup>5)</sup> Het bij deze rat geplaatst getal berust op berekening naar gegevens van

Hier blijkt:

*De vergrooting van den inhoud van het neuron is evenredig aan het kwadraat der vergrooting van den inhoud van zijn centraal deel, de gangliëncel.*

Aldus komt men tot de voorstelling, dat de *geheele hersenmassa*, met inbegrip van al hetgeen men als tusschen- en steunsubstantie van de eigenlijk werkzame elementen pleegt te beschouwen, met name ook van de neuroglia, evenzoo een essentieel geheel vormt als het neuron met de mergscheede: de hersenen zijn *geheel* uit dergelijke neuronen of daarmede gelijkstaande, hoewel onder andere namen bekend staande, al of niet celachtige elementen opgebouwd als het ruggemerg met de periferie van het lichaam verbinden.

De verklaring van het feit, dat met toenemende lichaams grootte de hoeveelheid der hoofdzakelijk uit zenuwvezels bestaande witte stof, in het ruggemerg en de hersenen, onevenredig sterker toeneemt dan de grijze stof, die vooral de cellichamen bevat, is nu van zelf gegeven. Deze verklaring doet den imperatieve aard van het neuron als cel geen geweld aan, zooals wel andere verklaringen deden.

Bij de *individueele vergrooting* van het lichaam, binnen eene soort, neemt de hersenhoeveelheid slechts toe in verhouding van  $S^{0.22}$  of niet veel sterker, waarschijnlijk omdat het *aantal* der celementen hier niet, gelijk wel geschiedt bij de lichaamsvergrooting van soort tot soort, in verhouding van  $S^{0.33}$  of iets minder, d.i. van de lineaire afmeting van het lichaam, vermeerdert. Het spreekt vanzelf, dat aldus de onderlinge verhouding der witte en grijze stof in de centraalapparaten niet anders wordt dan bij *soortvergrooting*, daar ieder neuron zich in het eene en in het andere geval gelijk gedraagt.

De verklaring van den factor  $S^{0.277}$ , volgens welken het neuroncentrum, de gangliëncel, in verhouding van het lichaamsgewicht  $S$  toeneemt, is nu te vinden in de zeer bijzondere verhouding der grootte van het oog. Grote dieren hebben met betrekking tot hun lichaamsgewicht relatief kleine oogen; hier bestaat eene betrekking van diergelijken aard als ten aanzien van de hersengrootte, die eveneens bij dieren van hoog lichaamsgewicht relatief gering is.

Uit talrijke bepalingen van de grootte van het oog van hooger

---

SHINKISHI HATAI, Number and size of the spinal ganglion cells and dorsal root fibers in the White Rat at different ages. Journal of Comp. Neurology. Vol. 12 (1902), p. 121. Van twintig der grootste cellen in het 6e ganglion spinale en twintig der dikste zenuwvezels aldaar van een albino-rat van 167 gram lichaamsgewicht, bij welke ten aanzien der celgrootte de maturiteit bereikt was, waren de gemiddelde diameters resp. 52.7 en 13.9 micra. Voor de lengte van de langste zenuwvezel der rat van dat lichaamsgewicht vond ik 78 m.M.



en lager vertebraten door LAPICQUE en LAUGIER <sup>1)</sup> is af te leiden, dat de relatie-exponent voor het retina-vlak algemeen moet liggen bij 0.28.

Het ligt dus voor de hand, de oorzaak van de bestaande centrale zenuwcelvergrooting te zoeken in de vergrooting van het receptief vlak van het gezichtszintuig.

Deze betrekking en de verklaring van den oogfactor, welke, naar ik meen, te vinden is in de verhouding van de bewegende kracht en de bewogen massa bij groote en kleine dieren, stel ik mij voor in een volgende mededeeling te behandelen.

---

<sup>1)</sup> L. LAPICQUE, La grandeur relative de l'oeil et l'appréciation du poids encéphalique. Comptes rendus de l'Académie des Sciences. Paris 1908. (2). Tome 147, p. 209—212. — Relation du poids encéphalique à la surface rétinienne dans quelques ordres de Mammifères. Ibid. 1910. (2). Tome 151, p. 1393—1396. Ook: L. LAPICQUE et H. LAUGIER, Relation entre la grandeur des yeux et le poids de l'encéphale chez les Vertébrés inférieurs. Comptes rendus de la Société de Biologie. Paris 1908. Tome 64, p. 1108—1110; G. WATERLOT, Déterminations de poids encéphaliques et de grandeurs oculaires chez quelques Vertébrés du Dahomey. L. LAPICQUE, Remarques sur la série de pesées encéphaliques recueillies au Dahomey par M. WATERLOT. Bulletin du Muséum d'Histoire naturelle Paris 1912, p. 491—497.

Naar de aanvankelijke bepalingen viel de exponent iets lager uit; in bovenbedoelden zin werd hij 0.25.

---

**Anatomie.** — De Heer WINKLER biedt eene mededeeling aan van den Heer D. J. HULSHOFF POL: „*Experimenteele cerebellair-atactische verschijnselen bij aandoeningen buiten het cerebellum.*”

(Mede aangeboden door den Heer VAN RIJNBEEK).

In een vorige verhandeling<sup>1)</sup> zette ik uiteen, dat ons evenwicht-zintuig, waarover GOLTZ<sup>2)</sup> melding maakt, niet moet worden gezocht uitsluitend in het vestibulair orgaan, zooals hij dat wilde, doch dat dit zintuig zijn vertakkingen heeft door het geheele lichaam en dat het vestibulair apparaat slechts als een onderdeel daarvan is te beschouwen.

De evenwicht-banen, welke als Flechsigsche en Gowersche bundels centripetaalwaarts verlopen, zijn toch van geheel dezelfde functie, als die vezels uit het vestibulair apparaat, die eveneens voor ons evenwicht zorg dragen.

Nu leerden mij verdere onderzoekingen<sup>3)</sup>, dat sensibele cerebellair ataxie ontstaan moet, wanneer bovengenoemde afferente banen, in hun verloop door de kleine hersenen, worden gestoord.

Mocht deze opvatting juist zijn, dan kan daaruit worden afgeleid, dat cerebellair ataxie experimenteel moet kunnen worden te voorschijn geroepen, door onderbreking dezer afferente banen, voordat zij het cerebellum bereiken.

De opgave die ik mij daarom stelde, was, of het mogelijk zou zijn cerebellair ataxie te voorschijn te roepen, door *eerstens* de afferente banen die van uit het ruggemerg naar de kleine hersenen voeren, geheel dan wel gedeeltelijk te onderbreken voordat zij het corpus restiforme bereiken en ten *tweede* den nervus vestibularis meer of minder te kwetsen, voordat deze de schedelholte bereikt.

Wat het eerste betreft, zoo is doorsnijding distaal van het corpus restiforme noodig, aangezien zich daarin nog andere vezels bevinden, die echter niet van uit het ruggemerg afkomstig zijn. Wat het tweede betreft, zoo is vernietiging van de vestibulair vezels voordat deze in de schedelholte treden gewenscht, daar bij operatief ingrijpen

<sup>1)</sup> Iets over ons evenwicht-zintuig. Verh. Kon. Akad. v. Wetensch. 1917. Nov.

<sup>2)</sup> Zie H. ZWAARDEMAKER, Physiologie. 2e dl. blz. 286.

<sup>3)</sup> Cerebellair ataxie als stoornis der evenwichtssensibiliteit. Verh. Kon. Akad. v. Wetensch. 1918. Jan.

binnen die ruimte, zich wellicht minder gewenschte complicaties zouden voordoen.

Voordat met dit onderzoek begonnen werd, moest allereerst uitgemaakt worden, wat onder cerebellair verschijnselen wordt verstaan.

De dronkemansgang is, zooals ik dat in mijn vorige verhandeling<sup>1)</sup> deed uitkomen, wel een der meest op den voorgrond tredende afwijkingen bij cerebellair lijden. Toch meende OPPENHEIM nog een tweeden vorm van ataxie te moeten onderscheiden welke veel overeenkomst zou hebben met spinale ataxie, terwijl DÉGÉRINE onder enkele omstandigheden een vergelijk met labyrinthaire ataxie mogelijk acht. Hieruit volgt dus, dat bij den mensch geen scherp omschreven afwijkingen als cerebellaire symptomen zijn op te geven. Dit laat zich begrijpen, daar bij ziekelijke aandoeningen b.v. tumoren der kleine hersenen, behalve locale ook andere verschijnselen worden waargenomen. De druk van het gezwel zal zich ook nog op andere, verder afgelegene centra doen gevoelen, waardoor het symptomencomplex, afhankelijk van het locale lijden, niet scherp meer te omlijnen is.

Ik kwam dan ook al spoedig tot de slotsom, dat ik mij bij de verdere onderzoekingen niet te houden zou hebben aan de verschijnselen die het ziekbed geeft, doch aan de resultaten die bij dier-experimenten verkregen werden. Ook hierbij moest echter met omzichtigheid te werk worden gegaan aangezien met het oog op de talrijke verbindingen die het cerebellum heeft met de andere deelen van het centrale zenuwstelsel, slechts die onderzoekingen van dienst konden zijn, waarbij uitsluitend kleine, goed omschreven gedeelten der hersenoppervlakte verwijderd waren.

In verband met de leer van BOLK<sup>2)</sup> bepaalde ik mij daarom in hoofdzaak tot de onderzoekingen van v RIJNBEEK<sup>3)</sup> deze aanvullende met wat door anderen gevonden was.

De door v. RIJNBEEK verkregen resultaten kort samenvattend, krijgt men: 1°. ataxie (in het algemeen genomen). 2°. kop-ataxie, het „neen” schudden. 3°. hanetred, waarbij de pooten sterk in de knieën worden opgetrokken. 4°. parade pas, zooals men die ziet bij de Pruisische

<sup>1)</sup> Cerebellair ataxie als stoornis der evenwichtssensibiliteit. Verh. Kon. Akad. v. Wetensch. 1917.

<sup>2)</sup> BOLK, Hoofdlijnen der vergelijkende anatomie van het cerebellum der zoogdieren, voornamelijk in verband met den bouw der kleine hersenen van den mensch. Psych. en Neurol. bl. 1902.

BOLK, Over de physiologische beteekenis van het cerebellum. Haarlem, Erven Bohn. 1903.

<sup>3)</sup> G. v. RIJNBEEK, Over functioneele localisatie in het cerebellum. Verh. Bataafsch Gen. 1906.

regimenten, en waarbij het been dus gestrekt naar voren toe wordt opgetild. 5°. draaiing om de lengte-as van het lichaam. 6°. pleurotonus of verkromming van den romp naar rechts of links.

Wanneer ik hieraan, uit mijn eigen onderzoekingen<sup>1)</sup> nog een enkel verschijnsel toevoeg, dan is het 't volgende: 7°. uurslingerbeweging van het lichaam, met het bekken als steunpunt. Het dier zit dan op het achterdeel, terwijl het voorgedeelte, dat op de voorpooten rust, voortdurend naar rechts of links gaat, net als de slinger van een klok. Deze beweging is vermoedelijk dezelfde als die in sub 2 opgegeven, doch intensiever, aangezien zij bijna het geheele lichaam, en niet alleen het hoofd omvat.

Waar nu deze verschijnselen nooit allen bij éénzelfde proefdier werden gevonden, doch wisselden alnaarmate het eene dan wel het andere schorsgebied was uitgelept, iets wat dus geheel overeenkomt met de Bolksche leer, vermoedde ik, dat ook bij mijn onderzoekingen slechts enkele er van op den voorgrond zouden treden.

Het operatieplan<sup>2)</sup> was dus, slechts een gedeelte der afferente kleinherzenbanen intact te laten. Daarvoor zouden allereerst de verbindingsen tusschen ruggemerg en cerebellum worden doorgesneden om daarna, wanneer het dier de daardoor ontstane loopstoornissen zou hebben overwonnen en dus weer goed liep, het vestibulair apparaat *eenzijdig* te vernietigen. Hierdoor zouden nog enkele afferente banen het cerebellum bereiken, en op die wijze een gedeeltelijke schorslaesie nagebootst worden.

Wat het eerste operatief ingrijpen betreft, zoo weten wij, dat van de achterstrengen, door tusschenkomst der Goll. en Burdagsche kernen nog prikkels langs de *fibrae arcuatae ext. post. et anter.* naar het corpus restiforme en het cerebellum gaan. Het zou dus zaak zijn, niet alleen de kleinherzenzijstrengbanen, doch ook de achterstrengen te doorsnijden. De ideaal plaats voor dit ingrijpen zou gelegen zijn boven den 1<sup>en</sup> cervicaal wortel, daar men dan alle ruggemergvezels die naar het cerebellum toegaan, doorsnijden kan. De daartoe aangewende pogingen faalden echter, daar de katten allen tijdens de operatie bezweken. Ik besloot toen de doorsnijding iets lager te verrichten en wel tusschen  $c_2$  en  $c_3$ . Daartoe werd het dorsale gedeelte van den tweeden halswervelboog verwijderd, de dura

<sup>1)</sup> Cerebellair ataxie. Experimenteele onderzoekingen. Psych. Neurol. bl. 1909.

Cerebellaire functies in verband met hun localisatie. Psych. Neurol. bl. 1915.

<sup>2)</sup> Prof. B. MAGNUS en zijn tijdelijk vervanger Dr. W. STORM v. LEEUWEN, waren zoo welwillend mij toe te staan de operaties op het pharmacologisch laboratorium te verrichten, waarvoor ik hun hierbij gaarne mijn dank betuig.

geopend en tusschen  $c^2$  en  $c^3$ , eerst de beide achterstrengen door-gesneden, en daarna met een krom mesje de laterale rand van het ruggemerg ingesneden. Na microscopisch onderzoek (zie protocol) bleek, dat het niet mogelijk geweest was, de pyramide banen geheel te sparen, wat aan de dieren dan ook duidelijk te bemerken was. Gedurende de eerste dagen na de operatie ging het loopen zeer bezwaarlijk. Het beest was niet alleen atactisch, doch ook meer of minder verlamd en viel telkens om. Binnen de 10 à 14 dagen had het zich echter weer zoover hersteld, dat het in rechte richting door kon loopen. Was het eenmaal bijna hersteld, dan werd tot de tweede operatie overgegaan en door de rechter bulla ossea, volgens de methode DE KLEYN<sup>1)</sup>, het labyrinth en de nervus vestibularis vernietigd.

Bij vijf katten gelukte het operatief ingrijpen naar wensch. De door hen vertoonde verschijnselen waren in hoofdzaak de volgende:

a. Na doorsnijding, zoowel rechts als links der achterstrengen en kleinherzen-zijstreng-banen, ontstond, zooals boven reeds medegedeeld, ataxie en verlamming. Dat ataxie optreedt wanneer de Flechsische en Gowersche bundels doorgesneden worden, was ons reeds bekend uit de onderzoekingen van MARBURG en BING<sup>2)</sup>. De verlammingen waren het gevolg van een niet gewilde kwetsing der laterale pyramide vezels bij het doorsnijden der kleinherzen zijstreng banen. Na een 14 dagen gingen deze verschijnselen terug, konden de dieren weer vrij goed rechtuit loopen en werd tot de 2<sup>de</sup> operatie dus het vernietigen van het vestibulair orgaan en de daaruit ontspringende vezel overgegaan.

b. nadat het *rechter* labyrinth vernietigd was en de dieren uit de narcose ontwaakt waren, vertoonden zij in de meeste gevallen al de bekende verschijnselen welke na zulk ingrijpen gevonden worden. Steeds waren aanwezig oognystagmus naar de *gezonde* zijde, daarentegen voortrekken van het derde ooglid, nauwe pupil en nauwe oogspleet (sympatiens verlammingstrias, DE KLEYN en SOCIN<sup>3)</sup> aan de *zieke* zijde. Kopnystagmus werd door mij nooit waargenomen, wel echter kopdraaiing naar de *geopereerde* zijde. Nu eens was deze draaiing duidelijk, dan weer minder duidelijk zichtbaar.

c. Kort na de operatie vertoonden de dieren meer of minder

<sup>1)</sup> A. DE KLEYN, Zur Technik der Labyrinthextirpation und Labyrinthaus-schaltung bei Katzen. Archiv. f. die Ges. Phys. Bd. 145.

<sup>2)</sup> Zie EDINGER, Zeitschr. f. Nerv. Heelk. Bd. 45. 1912. bl. 303.

<sup>3)</sup> A. DE KLEYN u. CH. SOCIN, Zur näheren Kenntnis des Verlaufs der post-ganglionären Sympatiens-bahnen für Pupillenerweiterung, Lidspalt-eröffnung und Nickhautretraktion bei der Katze. Archiv f. d. Ges. Phys. Bd. 160. 1915.

sterke manège gang naar de *gezonde* zijde, dus naar *links*. Verschillende graden van deze afwijking werden waargenomen. In de meest uitgesproken gevallen, draaide het dier als het ware om zijn staart heen. Was de manège gang niet duidelijk uitgesproken dan liep het dier in een meer of minder grooten boog steeds naar de gezonde zijde. Bestond de afwijking slechts in geringen graad, dan vertoonde het dier niet veel meer dan afwijken naar den gezonden kant.

De oorzaak dezer verschillen vermeen ik te moeten zoeken in de onvolkomenheid der operaties. Gelukt deze naar wensch, dan zal de afwijking zeer duidelijk zijn. Is de operatie minder goed geslaagd, dan zal de manège gang ook niet zoo tot haar recht komen.

Evenals bij de meeste van dit soort experimenten, verminderde de afwijking al heel spoedig, trad dus vrij snel compensatie op. De duidelijk uitgesproken manège gang, ging over in een cirkelloop en eindigde in niet veel meer dan een afwijken naar de gezonde zijde. Dit laatste verschijnsel bleef gedurende langeren tijd bestaan.

Toch was het 't dier steeds mogelijk, ook al was de manège gang duidelijk uitgesproken, op een bepaald doel af te gaan. Daar het echter steeds neiging had om naar den gezonden kant af te wijken, was het dan verplicht daarbij op een bijzondere wijze te werk te gaan. Het duidelijkst blijkt dit uit nevensgaande teekening, naar een fotografie (fig. 1), van een loopspoor. Het dier staat bij *A* en wil naar *B* waar een stukje vleesch ligt. Daar het neiging heeft om naar *links*, de gezonde zijde, af te wijken en op die wijze natuurlijk nooit het doel-object bereiken zou, adduceert het 't *rechter* achterbeen sterk onder het lichaam en wanneer dan de *linker* achterpoot wordt opgetild, werpt het, door middel van den sterk geadduceerden *rechter* achterpoot, het geheele achterlichaam naar *links*, zoodat de kop meer naar *rechts*, dus naar het doel gericht wordt. Vlak boven het pijltje, dat de gewilde bewegingsrichting aangeeft, ziet men dat duidelijk. *I.*, geeft aan waar de *R* voorpoot is geplaatst. De *R* achterpoot wordt sterk onder het lichaam geadduceerd, tot naar *II.* Wanneer het dan met dien poot het geheele achterlichaam naar links werpt, wordt de lengte-as van het lichaam bepaald door een lijn te trekken tusschen de beide rechterpooten, dus *I.* en *II.*, zoodat het dier het doel object blijft aanstaren. Bij den volgenden pas, wordt de *R* voorpoot gebracht bij *I.*, en de *R* achterpoot weer sterk geadduceerd, tot bij *II.*. De lengteas loopt dan van *I.* tot *I.*, zoodat ook nu weer de kop gericht wordt naar *B*. Door op die wijze voort te gaan, dus steeds den rechterachterpoot sterk onder het lichaam te adduceeren, bereikt het dier ten slotte met een boog het doelobject. Een enkelen keer gebeurt het dat wanneer de kat

den rechterachterpoot te veel onder het lichaam adduceert, zij daar-

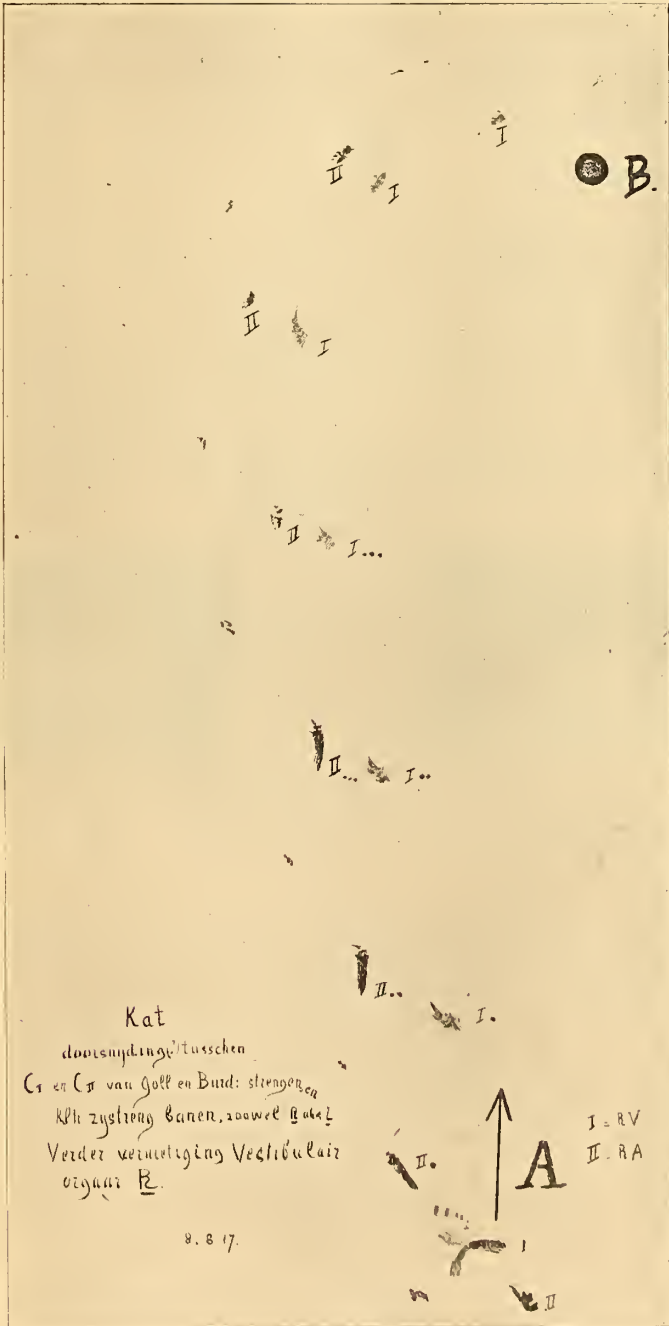


Fig. 1.

door haar evenwicht verliest en naar *rechts* omvalt, aangezien dan aan die zijde het achterlichaam allen steun mist.

Op te merken is verder, dat wanneer de kat doelloos in het vertrek rondloopt, het dier steeds den muur zoekt, daar de *gezonde* zijde tegen aanleunt, en daarlangs verder voortschuift. Deze wijze van handelen is begrijpelijk, daar het dier door *links* tegen den muur te steunen niet naar die zijde kan uitwijken waardoor het rechteit loopen, langs den muur, dan gemakkelijker wordt.

d. Wanneer men den loop dezer katten nauwkeurig beziet, valt dadelijk op, dat de voorpoot gestrekt en hoog wordt opgetild. Op nevensgaande afbeelding (fig. 2), een sterke vergrooting naar een film-opname, ziet men dat duidelijk. Zonder veel moeite herkent men den paradepas, zooals die o.a. door LUCIANI en v. RIJNBEEK in hun publicaties over het cerebellum opgegeven zijn. Uit mijn eigen onderzoekingen <sup>1)</sup> bij honden, waarvan een afbeelding (fig. 3) naast die van de kat is geplaatst, en welke van een fotografische opname afkomstig is, ziet men de overeenkomst zeer duidelijk.



Fig. 2.  
Kat. extra-cerebellair.



Fig. 3.  
Hond. intra-cerebellair.

Van belang is het nu, dat bij den hond de paradapas ontstond na operatief ingrijpen *in* het cerebellum (fig. 3), die bij de kat, na operatief ingrijpen *buiten* het cerebellum (fig. 2).

Andere voor deze verhandeling belangrijke afwijkingen zijn bij de geopereerden katten niet waargenomen. *Toch bevestigen de verkregen resultaten de veronderstelling, dat de sensible cerebellair ataxie ontstaat, doordat de affërente banen welke van uit het ruggemerg en het vestibulair orgaan naar het cerebellum gaan, gedurende hun verloop in dat orgaan, op de een of andere wijze verbroken worden.*

In verband met het bovenstaande zijn er nog enkele punten te bespreken:

De *eerste* is, hoe te verklaren dat door mij bij extra-cerebellair operatief ingrijpen, wel werd waargenomen de paradapas, niet echter

<sup>1)</sup> Cerebellair ataxie Psych. Neurol. bl. 1909.



de hanetred of het „neen” schudden enz., zooals die beschreven zijn o.a. door LUCIANI, v. RIJNBEEK en mij zelf.

Ik vermeen de oorzaak daarin te moeten zoeken, dat in al deze gevallen steeds dezelfde operatie werd verricht en wel doorsnijding van achterstrengen, ventrale en dorsale kleinhiersen-zijstrengbanen en het vestibulair orgaan aan de *R*-zijde. Bij een andere combinatie zouden wellicht andere kleinhiersen-symptomen meer op den voorgrond zijn getreden.

De *tweede* is, dat ik in mijn vorige verhandeling <sup>1)</sup> tot de slotsom kwam, dat, waar sensible cerebellair ataxie ontstaan moet bij onderbreking der afferente-, extero- en propioceptieve evenwichtbanen in de kleine hersenen, deze ataxie natuurlijk alleen optreden zal, wanneer *die* deelen van het cerebellum zijn aangedaan, waar deze vezels gevonden worden.

Hieruit volgt, dat waar de paraplas *extra*-cerebellair kan worden te voorschijn geroepen, in geval dit verschijnsel *intra*-cerebellair ontstaat, een schorsveld moet zijn vernietigd waarin die afferente vezels eindigen.

Nu is het bekend, dat de tractus spino-cerebellaris dorsalis (FLECHSIG), eindigt in de schors van den worm, dat de tractus spino-cerebellaris ventralis (GOWER) zijn einde vindt in den vermis superior en de nuclei tecti, terwijl de nervus vestibularis opgelost wordt in den nucleus dentatus en de nuclei tecti. Hieruit volgt dus, dat alle belangrijke afferente banen uit het ruggemerg en het vestibulair apparaat slechts in verband staan met den worm en de genoemde kernen.

Nu wezen de reeds vroeger door mij genomen proeven <sup>2)</sup> echter uit, dat parade pas optreedt bij verwijdering van schorsgedeelten uit den lob. paramedianus, welke terzijde van den worm gelegen is.

Deze twee feiten komen dus niet overeen, en de vraag doet zich voor, of hier een verklaring voor is te vinden.

Drie mogelijkheden dringen zich dadelijk aan ons op. De *eerste* is, dat mijn onderzoekingen niet juist zijn verricht. Hiertegen zou ik willen aanvoeren, dat bij tien honden, grootere of kleinere stukjes uit den lobulus paramedianus werden weggenomen en dat bij zeven dezer dieren paraplas werd gevonden, terwijl deze dismetrie in de beweging bij geen mijner andere proefdieren optrad. Het is dus waarschijnlijk dat de localisatie juist is opgegeven. De *tweede* is, dat de opvatting niet juist kan zijn, als zonden de genoemde affe-

<sup>1)</sup> Verhandel. Kon. Akad. v. Wet. 1918. Jan.

<sup>2)</sup> Psych. Neurol. bl. 1909.

rente banen alleen in den worm eindigen, wellicht dat zij ook in de meer lateraal gelegen schorsgedeelten opgelost worden. Hiertegen is weer aan te voeren, dat tal van onderzoekers bewezen, dat genoemde banen niet buiten den worm hun einde vinden. Ook dit feit mag dus als vaststaand worden aangenomen. De *derde* verklaring zou kunnen zijn, dat men in het cerebellum verhoudingen heeft, welke ook histologisch nog niet tot klaarheid zijn gebracht, en waardoor de afferente impulsen bij den worm aangekomen, naar andere gedeelten van het cerebellum geprojecteerd worden.

Ik wil in deze verhandeling op dit laatste, dat mij het meest waarschijnlijk voorkomt, niet nader ingaan, daar nadere onderzoekingen nog meerdere klaarheid zullen moeten brengen. Ik wil nu niet meer doen, dan wijzen op de tegenstrijdigheid door mij verkregen, welke aan de hand van de ons tot nu toe ten dienste staande gegevens niet opgehelderd kan worden.

### SAMENVATTING.

1°. Bij experimenteel ingrijpen buiten het cerebellum, n.l. doorsnijding der Goll'sche, Burdagsche, Flechsig'sche en Gowersche bundels en de vezels van het vestibulair orgaan, is het mogelijk cerebellair ataxie te voorschijn te roepen.

2°. De door mij in een vorige verhandeling, op grond van klinische experimenteele gegevens opgestelde hypothese, dat sensible cerebellair ataxie ontstaat door onderbreking, in de kleine hersenen, der sub 1 genoemde banen, wordt dus door het dier-experiment bevestigd.

### P R O T O C O L.

*Kat No. 1.* Doorsnijding der Goll- en Burdagsche strengen en der kleinherenszijstrengbanen, zoowel rechts als links. Nadat het dier zich geheel van deze operatie hersteld had, werd het vestibulair orgaan en de nervus vestibularis aan de *rechter*-zijde vernietigd.

Na ontwaken uit de aether-narcose, bleek dat de kop naar *rechts* beneden stond, er was dus kopdraaiing. Kop-nystagmus werd niet waargenomen. De sympaticus-verlammings-trias berustende op doorsnijding van de post-ganglionaire zenuwvezel in het midden-oor, n.l. vernauwing van oogspleet en pupil en het voortrekken van het derde ooglid, was *rechts* aanwezig. Verder oog-nystagmus naar de gezonde zijde, dus naar *links*. Alle verschijnselen welke men na vernietiging van het vestibulair apparaat en den n. vestibularis krijgt, waren dus op den kopnystagmus na, aanwezig.

Den dag na de operatie was er sterke manegegang naar *links*, dus naar de gezonde zijde. Deze was zoo sterk uitgesproken, dat wanneer men *rechts* naast de kat een stuk vleesch neerlegde, het naar *links* om den staart heendraaide teneinde op die wijze het eten te bemachtigen. Legde men het vleesch op eenigen afstand

recht voor de kat, dan kreeg men den booggang als in fig. 1 weergegeven. Lag de kat stil, dan werd het hoofd zoowel naar rechts als naar links gedraaid.

Na een paar dagen was de manegegang — naar links — al veel verminderd, om langzamerhand over te gaan in niet veel meer dan een duidelijke afwijking naar links, bij het loopen. Duidelijk was zichtbaar, dat wanneer het dier doelloos rondliep, het 't liefst met de linker, dus de gezonde, helft tegen den muur steunde en daar langs bleef voortloopen.

Ruim een week na de vestibulair operatie, werd het dier voor onderzoek gedood. Prof. WINKLER, die zoo welwillend was het centrale zenuwstelsel uit het lichaam te praepareeren en volgens MARCHI te behandelen, vond: *Distaal* aan het operatieveld dat gelegen is tusschen  $c^2$  en  $c^3$ , degeneratie van de pyramide zijstrengbaan, voornamelijk in het laterale gedeelte van en verder degeneratie in het ventrale witte veld, ter hoogte van dat randgedeelte, waar bij den mensch <sup>1)</sup> de tecto-spinale baan gevonden wordt. De distaal gelegen degeneratie is aan den linkerkant lang zoo sterk niet uitgesproken als rechts. *Proximaal* is er ontarding der achterstrengen, der kleinherzen-zijstrengbanen en de spino-thalamische baan. Ook deze opstijgende degeneratie is aan de rechterzijde veel meer uitgesproken dan links. Van de kleinherzen-zijstrengbanen is de dorsale duidelijk, de ventrale (GOWER) minder duidelijk aangetast. De n. vestibularis is rechts gedegeneerd.

*Kat No. 2.* Operatie als bij N<sup>o</sup>. 1. Nadat het dier uit de aether narcose was ontwaakt, vertoonde het geen verschijnselen welke er op wezen, dat het rechter vestibulair apparaat vernietigd was. De operatie werd den volgenden dag herhaald, toen met gunstig resultaat. Geconstateerd werden 1e. Oognystagmus naar *links*. 2e. Sympaticus verlammingstrias rechts. 3e. Geen kopnystagmus. 4e. Geen of uiterst geringe kopdraaiing.

Den dag na de operatie liep de kat vrij goed en had geen manegegang, doch alleen neiging om naar *links*, dus de gezonde zijde, af te wijken.

Ruim een week na de vestibulair operatie werd de kat voor onderzoek gedood. Ook dit onderzoek had Prof. Dr. C. WINKLER de welwillendheid op zich te nemen; door hem werd het volgende gevonden: Caudaal van het operatieveld dat tusschen  $c^2$  en  $c^3$  gelegen is, vindt men vrij sterke degeneratie van de pyramide zijstrengbanen, doch in tegenstelling met de kat N<sup>o</sup>. 1, in de tecto-spinale zone niet veel meer dan enkele zwarte korreltjes. Capitaal zijn de achterstrengen gedegeneerd en van de kleinherzen-zijstrengbanen hoofdzakelijk de Flechsigsche, dus dorsale, bundels. Verder ziet men een opstijgende degeneratie aan een groep vezels, welke hun oorsprong nemen in het dorsale gedeelte van de Flechsigsche kleinherzen zijstrengbaan. Zij begeven zich mediaan, doorbreken de zona intermedia, kruisen in de commissura alba ventralis en nemen de plaats in aan de sulco-marginale randzone. Dezen bundel naar boven toe vervolgend, legt hij zich boven de decussatio pyr. aan den ventralen rand, lateraal tegen de pyramidebanen aan. Nog hooger vindt men hem in den lemniscus ongeveer daar ter plaatse, waar de spino-thalamische baan gelegen is. Daar de coupes niet tot aan den thalamus reiken, kon niet worden nagegaan waar deze bundel eindigde. De verschillende boven opgenoemde afwijkingen, zijn alle rechts duidelijker uitgesproken dan links, natuurlijk met uitzondering van het gekruiste deel van laatstgenoemden bundel. De nervus vestibularis is rechts gedegeneerd.

*Kat No. 3.* Operatie als bij N<sup>o</sup>. 1.

Na ontwaken uit de aether-narcose bestond er 1e oognystagmus naar links, dus

<sup>1)</sup> C. WINKLER, Handboek der Neurologie bl. 259, Haarlem, Erven Bohm, 1917.

de gezonde zijde. 2e Sympaticus verlammingstrias rechts. 3e Kopdraaiing naar rechts. 4e Geen kopnystagmus. Den dag na de operatie was er manegegang naar links, dus naar de gezonde zijde, doch deze was lang zoo duidelijk niet uitgesproken als bij kat N<sup>o</sup>. 1. Evenals zulks bij de 1e kat het geval was, verminderde ook hier de manegegang al vrij spoedig, doch bleef het dier nog weken lang neiging vertoonen om naar links af te wijken. Ook het loopen in een hoog naar een doel object (fig. 1), bleef bestaan, al was het niet zoo duidelijk zichtbaar als in den beginne.

Uit een filmopname bleek, dat *paradepas* duidelijk aanwezig was.

Daar deze kat vroeger reeds voor een andere kleinherzen operatie gebezigd was, werd het zenuwstelsel niet onderzocht, daar de verkregen resultaten daardoor wellicht beïnvloed waren.

*Kat No. 4.* Insteede van dubbelzijdige doorsnijding der afferente ruggemergsbanen naar het cerebellum, werd bij deze kat slechts de *rechter* helft doorgesneden. Nadat het dier zich van deze operatie geheel had hersteld, werden, evenals bij de drie eerste katten, het vestibulair apparaat en de n. vestibularis *rechts* vernietigd.

Na ontwaken uit de narcose konden dezelfde verschijnselen worden waargenomen als bij de andere katten, dus 1e nystagmus naar *links*, 2e sympaticus verlammingstria *rechts*, 3e kopdraaiing naar *rechts*, 4e geen kopnystagmus.

Den dag na de operatie vertoonde het dier verder niet veel verschijnselen. Eerst den tweeden dag was er manegegang naar *links*. Den vierden dag was dit laatste nog aanwezig en werd een filmopname genomen. *Paradepas* bleek toen duidelijk aanwezig te zijn.

Den zesden dag trad er bij deze kat verandering op. Het dier viel voortdurend naar rechts om, kon niet meer loopen en miauwde erg. Den zevenden dag lag de kat dood in het hok, dus ruim 20 dagen na de operatie in het ruggemerg. Voor de sectie, zie kat N<sup>o</sup>. 5.

*Kat No. 5.* Operatie als bij N<sup>o</sup>. 4.

Na ontwaken uit de aether-narcose vertoonde ook deze kat geheel dezelfde verschijnselen als bij de vorige katten, alleen was de manegegang niet zoo duidelijk als bij kat N<sup>o</sup>. 4. Ook het verder verloop was ongeveer hetzelfde. Na filmopname bleek de *paradepas* duidelijk aanwezig te zijn (fig. 2). Evenals N<sup>o</sup> 4, werd ook deze kat, ongeveer gelijktijdig en ruim 3 weken na de ruggemergsoperatie, dood in het hok gevonden doch zonder de verschijnselen welke N<sup>o</sup>. 4 kort voor het sterven vertoond had.

De sectie werd door een vergissing alleen aan den kop verricht, daar deze bij den romp werd afgesneden en in formaline bewaard, terwijl het lichaam werd weggegooid. Na opening van de schedelholte, bleek dat de bloedvaten der hersenoppervlakte en van het ruggemerg tot aan de operatieplaats, sterk overvuld waren. De wond zelf was goed genezen, het caudaal gelegen stuk vertoonde geen afwijkingen. Na microscopisch onderzoek werd onder de pia een kleincellig infiltraat gevonden. Waar deze afwijking eerst optrad ongeveer drie weken na het operatief ingrijpen in de ruggemergsholte, beide katten in één hok verblijf hielden, en ongeveer gelijktijdig overleden, bestaat de waarschijnlijkheid, dat zij aan een algemeene infectie te gronde zijn gegaan.

**Natuurkunde.** — De Heer KUENEN biedt eene mededeeling aan van Mevrouw T. EHRENFEST-APANASSJEWА: „*Eene onbepaaldheid bij de interpretatie van de entropie als log W.*”

(Mede aangeboden door den Heer H. HAGA.)

§ 1. Van een gas moge een zeker quantum gegeven zijn; en wel zooveel, dat wij het kunnen verdeelen in een groot — voor ons aanstonds te bespreken doel passend groot — aantal deelen, zonder dat de gebruikelijke statistische beschouwingen voor die onderdeelen hare geldigheid verliezen.

Zich op een thermodynamisch standpunt plaatsende, neemt men aan:

1°. dat de entropie van elk systeem naar haar maximum streeft;

2°. dat de entropie van de totale gasmassa gelijk is aan de som der entropieën der deelen.

Vat men, overeenkomstig de kinetische opvatting, de entropie op als logaritme der waarschijnlijkheid van den toestand van het systeem, dan verkrijgt men de volgende stellingen als analoge der juist genoemde:

1°. de toestand van elk systeem tracht den waarschijnlijksten nabij te komen;

2°. de logaritme der waarschijnlijkheid van den toestand der totale gasmassa is gelijk aan de som der logarithmen van de waarschijnlijkheid der toestanden harer deelen; of wel: de waarschijnlijkheid van den toestand des geheels is gelijk aan het product uit de waarschijnlijkheid der toestanden zijner deelen.

Men kan intusschen gemakkelijk inzien, dat deze laatste stellingen slechts juist zijn, indien men de combinaties, met welke men rekent ter bepaling van de waarschijnlijkheid voor den toestand des geheels, onderwerpt aan bepaalde, en *uit een combinatorisch gezichtspunt* ongemotiveerde beperkingen.

§ 2. Ter verduidelijking willen wij een eenvoudiger voorbeeld geven, waar het zuiver op de combatierekening aankomt.

Men denke zich 27 tafeltjes, elk met drie uithollingen. In elke uitholling moet een roode of een zwarte bal komen te liggen. De kleur van den bal moge bepaald worden door eene loterijtrekking.

waarbij de kans om een rooden bal te trekken  $\frac{2}{3}$ , die om een zwarten te trekken  $\frac{1}{3}$  is.

Dan is voor elk tafeltje afzonderlijk — indien men nog tusschen de drie verschillende uithollingen onderscheidt<sup>1)</sup> — de waarschijnlijkste verdeling der ballen: twee roode en een zwarte. Voor deze is de waarschijnlijkheid<sup>2)</sup>  $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{3!}{2!} = \frac{12}{27}$ .

Welke is nu de waarschijnlijkste verdeling der combinaties over alle 27 tafeltjes? Wij kunnen hier nog tusschen de tafeltjes onderscheiden. Wij krijgen als waarschijnlijkste verdeling diegene, bij welke slechts op 12 tafeltjes twee roode en een zwarte bal liggen, op 8 van de andere echter drie roode, op 6 twee zwarte en een roode, en op de laatste drie zwarte ballen liggen. Voor deze verdeling wordt de waarschijnlijkheid uitgedrukt door

$$W_m = \left(\frac{12}{27}\right)^{12} \cdot \left(\frac{8}{27}\right)^8 \cdot \left(\frac{6}{27}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^1 \cdot \frac{27!}{6!8!12!}.$$

Daarentegen wordt de kans, dat er op elk van de 27 tafeltjes uniform twee roode en een zwarte bal zouden terechtkomen gegeven door

$$W_u = \left(\frac{12}{27}\right)^{27}.$$

De verhouding tusschen beide is

$$\frac{W_u}{W_m} = \frac{12^{27-12} \cdot 6!8!12!}{8^8 \cdot 6^6 \cdot 27!},$$

hetgeen ongemeen veel kleiner dan 1 is<sup>3)</sup>.

Laat ons nu het aantal der ballen, die op elk tafeltje kunnen komen, en ook het aantal tafeltjes grooter denken, dan stijgt het aantal der verschillende typische verdeelingsmogelijkheden op elk tafeltje afzonderlijk (wisselend van louter roode tot louter zwarte ballen), en eveneens het aantal manieren, waarop wij deze verdeelingsstypen over de gezamenlijke tafeltjes verspreid kunnen aantreffen.

De kans op de waarschijnlijkste verdeling voor een afzonderlijk

1) D. w. z. indien men bij een bepaalde combinatie (b.v. 1 rood, 2 zwart) als aparte mogelijkheden in rekening brengt de gevallen waarbij in een bepaalde uitholling verschillend gekleurde ballen liggen.

2) De kans op alle drie rood is  $\frac{8}{27}$ , op een roode en twee zwarte:  $\frac{6}{27}$ , op alle drie zwart:  $\frac{1}{27}$ .

3) Want  $\frac{6!}{6^6} \cdot \frac{8!}{8^8} \cdot \frac{12!}{27!} \cdot \frac{12^{27-12}}{27!} = \frac{6!}{6^6} \cdot \frac{8!}{8^8} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{12}{14} \cdot \dots \cdot \frac{12}{27}$ , waarin voorts  $\frac{6!}{6^6} < \frac{1}{64}$ ,  $\frac{8!}{8^8} < \frac{1}{400}$ ,  $\frac{12}{13} < 1$ ,  $\frac{12}{14} < 1$ ,  $\dots$ ,  $\frac{12}{27} < 1$ .

tafeltje wordt daarbij *kleiner*. De waarschijnlijkheid  $W_u$ , dat men juist deze verdeling uniform op alle tafeltjes herhaald zal vinden, wordt dus door een hooge macht van een zeer kleine breuk voorgesteld.

Daarentegen zal de kans  $W_m$  op de verwezenlijking van dat geval, waarbij men de verschillende typen onder de gezamenlijke tafeltjes vertegenwoordigd vindt naar evenredigheid hunner waarschijnlijkheid, een grooten permutatiefactor bevatten, en daardoor zal, — bij een voldoende groot aantal tafeltjes, — de verhouding  $W_u/W_m$  willekeurig klein kunnen worden. Het maakt dus een groot verschil, — trouwens niet alleen ter berekening van het maximum — of wij de tafeltjes gezamenlijk als een object van hooger orde voor de combinatierekening opvatten, of dat wij voor elk tafeltje afzonderlijk de waarschijnlijkheid bepalen en die van het geheel berekenen als product der afzonderlijke waarschijnlijkheden.

§ 3. Stel, dat ons nog niet het aantal tafeltjes en uithollingen per tafeltje, maar slechts het totale aantal der uithollingen op alle tafeltjes gezamenlijk gegeven was, en dat het aan onze willekeur stond, over hoeveel tafeltjes wij ze wilden verdeelen, dan zou een oordeel over hetgeen men voor de waarschijnlijkste verdeling had te houden, aan nog meer willekeur onderhevig zijn.

§ 4. Het is duidelijk, dat bovenstaande beschouwingen op het gas kunnen worden toegepast, met inachtneming, zoo noodig, van bijkomstige voorwaarden.

Voert men de beperking in, dat men slechts voor de onderdeelen op alle mogelijke permutaties let, om daarmee de waarschijnlijkste verdeling te definiëren, en dat men in het systeem als geheel geen verdere permutaties tusschen deze onderdeelen in aanmerking wil nemen, *eerst dan* komt de waarschijnlijkheid voor den toestand van het geheel voor den dag als produkt uit de waarschijnlijkheid der toestanden in de onderdeelen.

Beschouwt men daarentegen het totale systeem als een nieuw object voor combinaties, een object van een hoogere orde, dan is de waarschijnlijkheid der toestandsverdeling in het geheel niet gelijk aan het product der aan dien toestand beantwoordende waarschijnlijkheden van de onderdeelen. Dit laatste moet dan nog door een zekeren permutatiefactor gecorrigeerd worden, welks grootte afhankelijk is van het aantal der deelen, d. w. z. hetzij van de naar believen gekozen fijnheid der verdeling, hetzij — bij een eens voor al vastgestelde fijnheid — van de grootte van het totale systeem.

De vraag rijst: aan welken  $\log W$  moet de entropie gelijkgesteld worden?

Slechts bij verwaarloozing van dien permutatiefactor kan men zeggen dat het streven der onderdeelen naar het maximum hunner entropie een streven medebrengt naar een maximum der entropie van het geheel.

Aanvaardt men die verwaarloozing, d. w. z. zegt men, dat de  $\log W$  van een systeem *bijna gelijk* is aan de som der  $\log w$  zijner onderdeelen, dan wordt daardoor ten hoogste een teeken van ongelijkheid in een gelijkheidsteeken veranderd. Men is echter niet gerechtigd, om het teeken van ongelijkheid *om te keeren*. Maar dit juist is wat er geschiedt, indien men b.v. de gelijkmatige dichtheidsverdeeling in een gas als de waarschijnlijkste beschouwt, en om de waarschijnlijkheid te berekenen van elke weinig daarvan afwijkende verdeeling als grondslag neemt

$$\log W = \sum \log w,$$

want hierbij komt elke afwijkende verdeeling voor den dag als een minder waarschijnlijke <sup>1)</sup>.

§ 5. Bovenstaande analyse wil volstrekt niet de geldigheid betwisten van dergelijke berekeningen als in de vorige paragraaf werden aangeduid, want deze berusten op de stelling, dat de entropie des geheels gelijk is aan de som der entropiën der deelen, een stelling die wellicht natuurkundig beter gerechtvaardigd is dan de aangegeven combinatorische beschouwingen, althans bij de omstandigheden waaronder men ze toepast. Deze analyse bedoelt slechts in het licht te stellen, dat *het oordeel over de vraag, of de waarschijnlijkheid van den toestand van een systeem haar maximum bereikt heeft of niet, afhangt van het standpunt van den onderzoeker*, en dat de *door zuivere combinatierekening gevormde begrippen geen bevredigenden en afdoenden grondslag bieden om onder vele verschillende standpunten aan een bepaald de voorkeur te geven*; verder dat de keuze van het standpunt getroffen wordt op grond van verschillende natuurkundige intuïties, die *buiten het kader vallen der combinatierekening*.

Dit wil zeggen, dat de betrokken combinatie-beschouwingen tot geen hooger beginsel kunnen worden herleid, dat de natuur zou beheerschen.

§ 6. Wij kunnen dit aan het geval van een gas nader aanwijzen.

<sup>1)</sup> R. FÜRTH. *Ueber die Entropie eines realen Gases als Funktion der mittleren räumlichen Temperatur und Dichteverteilung*. Phys. Zschr. **18**, p. 395—400, 1917.



Laat ons twee kubieke centimeters gas van verschillende temperatuur met elkander in aanraking brengen. Indien het van het „waarschijnlijkheidsbeginsel” moest afhangen wat er nu gebeuren zal, zou het geheel onbepaald blijven, of er een temperatuurverevening zal komen of niet. Het zou namelijk afhangen van de vraag, wat voor de natuur belangrijker is: een kubieke centimeter of trillioenen van kubieke centimeters. In het laatste geval zouden immers onze beide kubieke centimeters juist die onderdeelen van ons trillioenenstelsel kunnen zijn, die een ongelijke temperatuur behooren te hebben opdat het geheel de waarschijnlijkste temperatuurverdeling over zijn deelen krijgt (trillioen tafeltjes, en op elk een millioen ballen). Wil men daartegen aanvoeren, dat een dergelijke ongelijkmatigheid niet aanhoudend bij precies dezelfde kubieke centimeters mag optreden, zoodat *onze* twee stukken gas hunne temperatuur toch kunnen verevenen, dan mag men niet vergeten, dat dit vereischt, dat tezelfdertijd een willekeurig ander paar kubieke centimeters juist in tegen-gestelde richting van temperatuur zouden moeten wisselen.

Men herinnere zich voorts, dat voor het geval, dat men de onderverdeling voortzet tot op de enkele moleculen, men inderdaad ook dit laatste standpunt inneemt: de momenteele kinetische energie die men elk molecuul afzonderlijk toerekent, is op zichzelf niet de waarschijnlijkste; over een voldoende groot aantal moleculen echter worden de snelheden zoo verdeeld, dat men eerst voor het geheel dezer moleculen kan spreken van de waarschijnlijkste verdeling: (een quadriljoen tafeltjes, met op elk één bal, of, zoo men wil, één tafeltje met quadriljoen ballen).

---

**Natuurkunde.** — De Heer W. H. JULIUS biedt een mededeeling aan namens de Heeren W. J. H. MOLL en L. S. ORNSTEIN: „*Bijdragen tot de studie der vloeibare kristallen. IV. Een thermisch effect van het magneetveld*”.

(Mede aangeboden door den Heer v. D. STOK.)

Het feit dat de deeltjes der vloeibaar kristallijne stoffen door een magneetveld gericht worden, wettigt de vraag of wellicht de arbeid, hierbij door het veld verricht, geheel of gedeeltelijk als warmte te voorschijn kan treden. We zullen in deze mededeeling de resultaten van een onderzoek dienaangaande uiteenzetten.

We gebruikten bij dit onderzoek een opstelling, die in hoofdzaak overeenkomt met die welke we in onze vorige mededeeling beschreven. Het p-azoxy-anisol bevond zich weer in een gouden bekertje dat opgehangen was binnen een electricch verwarmd oventje. Maar ons oventje had thans dienst te doen als thermostaat, en vooral was noodig, dat daarbinnen de temperatuur overal zoo goed mogelijk gelijk was, opdat een temperatuur gradiënt binnen de te onderzoeken stof zou zijn uitgesloten. In plaats van ons oorspronkelijk, zeer primitief oventje werd als zoodanig ingericht een 10 cm. lange en 2 cm. wijde koperen buis, over vrijwel de geheele lengte voorzien van een enkele winding dun manganindraad, afgesloten aan de onderzijde door een koperen plaat, aan de bovenzijde door een koperen schroefdop, waarin slechts een nauwe boring om het thermo-element doorgang te verleen. Om luchtstrooming langs den verwarmingsdraad te voorkomen, was deze omgeven door een wikkeling van chenille, en nauwsluitend daaromheen bevond zich een dubbele koperen mantel, waardoor water van kamertemperatuur circuleerde.

Dit geheel bevond zich (met de as van het oventje verticaal) tusschen de vlakke poolschoenen van een Dubois-magneet, en het (horizontale) veld daarvan mag ter plaatse van het bekertje als homogeen worden aangezien. De magneet kon om een verticale as worden gedraaid.

De electromotorische kracht van het thermo-element werd ten naasten bij gecompenseerd, de optredende veranderingen werden fotografisch geregistreerd.

Bij ons onderzoek of het aanzetten van het magneetveld een

thermisch effect heeft, kwamen we aanvankelijk tot resultaten, schijnbaar met elkaar in tegenspraak; tot we eindelijk met behulp van een thermoelement van bizonderen bouw de verschijnselen die het effect beheerschen, hebben leeren overzien.

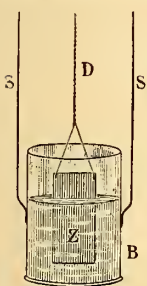


Fig. 1.

In fig. 1 is dit thermoelement weergegeven, zooals het binnen het gouden bekertje *B* is opgehangen. (Men denke zich den wand van het bekertje doorzichtig). *B* is met twee stiften *S* aan den schroefdop van het oventje is bevestigd; *D* zijn twee in elkaar gevlochten draden, koper en constantaan, die met hun uiteinden zijn gesoldeerd aan een plaatje zilverblik *Z* ( $5 \times 7$  mm., 0,02 mm. dik), dat voor ruim de helft in het p-azoxy-anisol is ondergedompeld.

We hebben met behulp van dit thermoelement inderdaad het thermisch effect kunnen constateeren, maar onderscheid leeren maken tusschen het effect van een transversaal veld (met de krachtlijnen  $\perp$  het blikje) en van een longitudinaal veld (met de krachtlijnen  $\parallel$  het blikje).

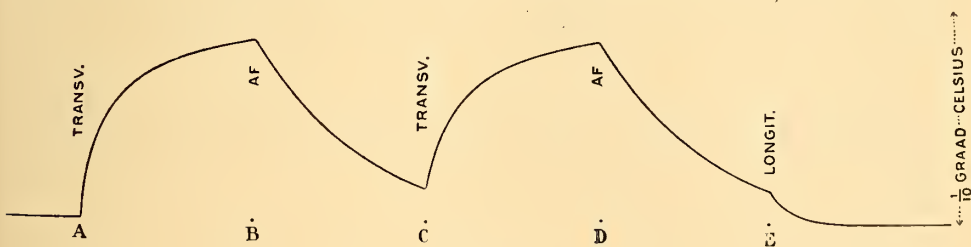


Fig. 2

Fig. 2 moge dit duidelijk maken; daarin is een stuk van een fotografisch opgenomen curve weergegeven. Bij *A* wordt een transversaal veld aangezet tengevolge waarvan de temperatuur van het zilverblikje langzaam stijgt; 15 sec. later, bij *B* wordt het veld afgezet en een nog langzamer afkoeling van het blikje is het gevolg; 15 sec. later, bij *C* (vóór de temperatuur nog de oorspronkelijke waarde terug heeft) wordt ten tweede male het transversale veld aangezet; 15 sec. later bij *D* weer afgezet; en ten slotte wordt 15 sec. later bij *E* een longitudinaal veld aangezet en dit veroorzaakt een sneller bereiken van de thermostaat temperatuur. Een wederaanzetten van het longitudinaal veld blijft zonder effect <sup>1)</sup>.

De voornaamste conclusie uit onze proeven is deze, dat het waargenomen effect zijn oorsprong moet hebben in de onmiddellijke

<sup>1)</sup> Het behoeft nauwelijks vermelding, dat in de isotrope phase het aan- en afzetten van het magneetveld geen thermisch effect levert.

nabijheid van den metaalwand, en dat binnen de vloeibaar kristallijne stof een magneetveld geen, of hoogstens een zeer zwak thermisch effect oplevert. Immers dààr zon het effect van een transversaal en een longitudinaal veld gelijk moeten zijn.

Waar de invloed van een magneetveld neerkomt op het richten van de meer of minder langgerekte deeltjes der vl. kr. stof komen we tot de gevolgtrekking dat bij dit richten slechts tegenstand van beteekenis is te overwinnen nabij den wand.

Nu hebben we ter verklaring van sommige extinctie verschijnselen een wandwerking aangenomen <sup>1)</sup>, en wel zoodanig dat de wand de deeltjes // aan zich zelf richt. De tegenstand dien juist een transversaal veld heeft te overwinnen past in deze voorstellingswijze volkomen.

Wat nu den aard van dezen tegenstand aangaat, we zouden ons kunnen voorstellen dat hij van elastischen oorsprong is; de deeltjes zouden dan bij de tegenwerking van veld tegen wand vervormd worden (verwarming) en bij verdwijnen van het veld weer elastisch in hun oorspronkelijken vorm terugkeeren (afkoeling), waarbij het aanzetten van een longitudinaal veld dien terugkeer verhaast.

#### *Samenvatting.*

Bij para-azoxy-anisol wordt het thermisch effect van een magneetveld onderzocht met behulp van een thermoelement van bizonderen bouw.

Het onderzoek wijst uit dat slechts een effect is te constateeren aan den wand van het thermoelement, welk effect waarschijnlijk zijn oorsprong heeft in elastische vervorming der vl. kr. deeltjes.

*Utrecht, Febr. 1918.*

*Natuurkundig Laboratorium, Instituut  
voor Theoretische Natuurkunde.*

---

<sup>1)</sup> Zie onze eerste en onze tweede mededeeling.

**Natuurkunde.** — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer J. J. VAN LAAR: „*Over het verloop der waarden van  $a$  en  $b$  bij waterstof bij verschillende temperaturen en volumina*”. IV.

(Mede aangeboden door den Heer F. A. H. SCHREINEMAKERS).

§ **XX.** De waarde van  $a$  beneden de grenstemperatuur.

In dit geval behoeven de integraties niet meer in verschillende tempo's te geschieden, daar niet meer met een minimumafstand  $r_m$ , welke van  $\theta$  afhankelijk is, behoeft gerekend te worden; zoodat ook eerst de integratie, t. o. v.  $\theta$  kan uitgevoerd worden, en daarna t. o. v.  $r$ . Alle intredende moleculen, van  $\theta = 0$  tot  $\theta = 90^\circ$ , zullen thans tot botsing komen; bij de grenstemperatuur  $T_0$  zullen de onder  $\theta = 90^\circ$  invallende moleculen juist nog den rand van het stilstaand gedachte molecuul passeeren. Wij hebben dus nu te integreeren (zie § XVI):

$$a = \frac{1}{2} \times (b_g)_\infty \alpha \times \frac{2a^4}{s(a^2 - s^2)} \int_s^a \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dr \times \sin \theta d\theta}{r \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + (a^2 - r^2)(k^2 \varphi - 1)}},$$

waarin alzoo  $k^2 \varphi$  steeds  $> 1$  is, en in het grensgeval  $\varphi = \varphi_0 = 1$ :  $k^2$  de waarde 1 aanneemt. Stellen wij  $(a^2 - r^2)(k^2 \varphi - 1) = q^2$ , zoo wordt dus

$$a = \frac{1}{2} \times (b_g)_\infty \alpha \times \frac{2a^3}{s(a^2 - s^2)} \int_s^a \frac{dr}{r} \int_{\frac{1}{2}\pi}^0 \frac{d(a \cos \theta)}{\sqrt{q^2 + a^2 \cos^2 \theta}},$$

waarin voor de tweede integraal kan geschreven worden:

$$\log(a \cos \theta + \sqrt{q^2 + a^2 \cos^2 \theta}) \Big|_{\frac{1}{2}\pi}^0 = \log \frac{a + \sqrt{q^2 + a^2}}{q},$$

zoodat nog te integreeren is:

$$a = \frac{1}{2} \times (b_g)_\infty \alpha \times \frac{2a^3}{s(a^2 - s^2)} \int_s^a \frac{dr}{r} \log \left( \frac{a}{q} + \sqrt{1 + \frac{a^2}{q^2}} \right). \quad (16)$$

Is nu, in de eerste plaats,  $\varphi$  dicht bij  $\varphi_0$ , zoo nadert  $q$  tot 0, en nadert de integraal tot

$$\int_s^a \frac{dr}{r} \log \frac{2a}{q} = \int_s^a \frac{dr}{r} \left[ \log \frac{2}{\sqrt{k^2 \varphi - 1}} - \log \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a} \right],$$

daar  $q = \sqrt{k^2 \varphi - 1} \times \sqrt{a^2 - r^2}$  is. Wij hebben derhalve voor de integraal:

$$\log \frac{2}{\sqrt{k^2 \varphi - 1}} \log \frac{a}{s} - \int_s^a \log \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a} \cdot \frac{dr}{r}.$$

Voor de laatste integraal hebben wij met  $r : a = x$ ,  $s : a = n$ :

$$- \frac{1}{2} \int_n^1 \log(1-x^2) \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{4} \left( \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{9} + \dots \right)_n^1 = \frac{1}{2^4} \pi^2 (1 - \varepsilon' n^2),$$

waarin  $\varepsilon' = 1$  is voor  $n = 1$ , en  $6 : \pi^2 = 0,608$  voor  $n = 0$ . Immers  $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{1}{6} \pi^2$ , en  $\frac{n^2}{1} + \frac{n^4}{4} + \frac{n^6}{9} + \dots = n^2 \left( 1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{9} + \dots \right) = \frac{1}{6} \pi^2$  bij  $n = 1$ , en  $= n^2$  bij  $n = 0$ . (Voor  $n = 0,6$  is  $\varepsilon' = 0,674$ ).

Wij verkrijgen alzoo tenslotte:

$$(\varphi \bar{>} \varphi_0) \quad a = \frac{1}{2n(1-n^2)} (b_g)_\infty \alpha \left[ \frac{1}{12} \pi^2 (1 - \varepsilon' n^2) + \log \frac{1}{n^2} \log \frac{2}{\sqrt{k^2 \varphi - 1}} \right]. \quad (17)$$

Vergelijken wij dit met (14<sup>b</sup>), waar gevonden werd bij waarden van  $\varphi$  in de nabijheid van  $\varphi_0$  (maar  $< \varphi_0$ , terwijl in (16)  $\varphi > \varphi_0$  blijft):

$$(\varphi \bar{<} \varphi_0) \quad a = \frac{1}{2n(1-n^2)} (b_g)_\infty \alpha \left[ \frac{1}{4} \pi^2 (1 - \varepsilon n) + \log^2 \frac{1}{n} + \log \frac{1}{n^2} \log \frac{2}{\sqrt{1-k^2 \varphi}} \right],$$

zoo constateeren wij, wat het van  $T$  onafhankelijke lid betreft, een bij  $\varphi = \varphi_0$  intredende discontinuïteit. [Wij hebben den in § 18 bij (13<sup>b</sup>) t.o.v. het oneindig groote logarithmische lid weggelaten term  $\log^2 \frac{1}{n}$  weer, ter vergelijking, bij den eersten (eindigen) term gevoegd].

Bij  $n = 1$  wordt (met den factor  $\frac{1}{1-n^2}$  uit den voorfactor) in het eerste geval gevonden  $\frac{1}{12} \pi^2 \frac{1-n^2}{1-n^2} = \frac{1}{12} \pi^2$ , in het tweede geval  $\frac{1}{4} \pi^2 \frac{1-n}{1-n^2} + \log^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{8} \pi^2$ . En bij  $n = 0$  vindt men  $\frac{1}{12} \pi^2$ , resp.

$\frac{1}{4} \pi^2 + \log^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{4} \pi^2 + \infty^2$ . Dit verschil kan ten deele verklaard worden door het plotseling verdwijnen bij  $\varphi = \varphi_0$  van de termen, welke op de *passerende* moleculen betrekking hebben, en die dus in (17) niet meer voorkomen. Maar in ieder geval is het verschil van geen belang, daar deze van  $\varphi$  onafhankelijke termen eindelijk blijven tegenover den van  $\varphi$  afhankelijken term, welke tot logarithmisch oneindig nadert. (In het geval  $n = 0$ , waar — bij oneindig groote attractiesferen — de geheele grootheid  $a$  oneindig zou worden, en dus onze afleiding niet meer geldig is, heeft het oneindig worden van  $\log^2 \frac{1}{n}$  in het geheel geen beteekenis).

Wij merken nog op, dat bij  $\varphi = \varphi_0$   $a$  niet alleen logarithmisch oneindig wordt bij den door ons aangenomen vorm van  $f(r)$ , maar bij iedere willekeurige aanname daaromtrent. Zie hiervoor Aanhangsel C.

In de tweede plaats onderstellen wij in (16)  $\varphi$  dicht bij  $\infty$  (d.w.z.  $T$  dicht bij 0):

Voor de integraal in (16) kunnen wij alsdan schrijven, daar  $q$  zeer groot wordt:

$$\int_s^a \frac{dr}{r} \log \left( \frac{a}{q} + 1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{q^2} \right) = \int_s^a \frac{dr}{r} \times \frac{a}{q} = \frac{a}{\sqrt{k^2 \varphi - 1}} \int_s^a \frac{dr}{\sqrt{a^2 - r^2}},$$

d. w. z.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{k^2 \varphi - 1}} \left( \log \frac{a - \sqrt{a^2 - r^2}}{r} \right)_s^a &= \frac{1}{\sqrt{k^2 \varphi - 1}} \left( \log 1 - \log \frac{a - \sqrt{a^2 - s^2}}{s} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{k^2 \varphi - 1}} \log \frac{a + \sqrt{a^2 - s^2}}{s}. \end{aligned}$$

Met inachtneming van den voorfactor wordt derhalve:

$$\left( \frac{\varphi \rightarrow \infty}{T \rightarrow 0} \right) a = \frac{1}{n(1-n^2)} \times (b_g)_\infty \alpha \times \frac{1}{\sqrt{k^2 \varphi - 1}} \log \frac{1 + \sqrt{1-n^2}}{n}. \quad (18)$$

Dit nadert dus tot 0, wanneer  $\varphi$  tot  $\infty$  ( $T$  tot 0) nadert. Voor  $k^2 \varphi - 1$  kan na substitutie der waarde voor  $q$  worden geschreven  $\frac{n^2}{1-n^2} \frac{1}{3} \alpha - 1 = \frac{n^2}{1-n^2} \frac{1}{3} \alpha$ , wanneer  $T$  dicht bij 0 is.

Na het *maximum* voor  $a$  bij  $\varphi = \varphi_0$  neemt de aantrekking derhalve gestadig af, om bij  $0^\circ$  abs. te verdwijnen. Dit resultaat was te voorzien. Immers bij  $0^\circ$  abs. wordt in de oorspronkelijke integraal van het aantrekkingsviriaal de wortelvorm in den noemer  $= \infty$ .

wanneer  $\varphi = \infty$  wordt. Deze wortelvorm drukt de relatieve snelheidsvermeerdering uit in de aantrekkingszone, en aangezien deze vermeerdering *eindig* blijft tegenover  $u_0 = 0$ , zoo zal de *relatieve* vermeerdering oneindig groot worden. En deze relatieve snelheidsvermeerdering beheerscht geheel de dichtheid in de aantrekkingszone, welke daaraan omgekeerd evenredig is.

Wij merken hier nogmaals op, dat de vroegere BOLTZMANN'sche theorie bij  $0^\circ$  abs. een *exponentieel oneindige* waarde voor  $a$  zou geven, terwijl deze inderdaad  $= 0$  is.

Voor  $n = 1$  ( $a = s$ ) zal de limietwaarde van  $\frac{1}{1-n^2} \log \frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n} = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}$  zijn. Met  $\sqrt{\frac{n^2}{1-n^2}}$  van  $\sqrt{k^2\varphi-1}$  (zie boven) wordt dit  $1:n$ , zoodat  $a$  alsdan tot  $(b_g)_\infty a \times \sqrt{\frac{RT}{\frac{1}{3}\alpha}}$  zal naderen.

Voor  $n = 0$  ( $a$  groot t.o.v.  $s$ ) valt het absolute nulpunt met de grenstemperatuur, gegeven door  $\varphi_0 = 1:k^2 = (1-n^2):n^2$ , samen. Immers dan is  $\varphi_0 = \infty$  ( $T_0 = 0$ ). In (18) wordt dan verder

$\lim \frac{1}{n} \log = \frac{1}{n} \log \frac{2}{n}$ , zoodat  $a$  alsdan tot  $(b_g)_\infty a \times \frac{1}{n} \log \frac{2}{n} \times \frac{1}{\sqrt{n^2 \frac{1}{3} \alpha - 1} \frac{RT}{}}$

zal naderen, hetgeen wederom  $= 0$  wordt voor  $T = 0$ , zoolang  $n$  niet absoluut  $= 0$  is, hetgeen natuurlijk praktisch onmogelijk zou zijn.

Resumeerende, kunnen wij dus naar aanleiding der boven ontwikkelde exacte theorie aangaande de grootheid  $a$  bij *zeer groot volume* konstateeren dat  $a$ , van af een grenswaarde bij  $T = \infty$ , gestadig toeneemt tot een *maximumwaarde* bij  $T = T_0$ , om daarna weer af te nemen, tot bij het absolute nulpunt  $a = 0$  is geworden. De genoemde grenstemperatuur  $T_0$  is daarbij bepaald door  $RT_0 = \frac{1}{3} a : \varphi_0$ , waarin  $\varphi_0 = (1-n^2):n^2$  is. ( $n = s:a$ , waarbij  $s$  de middellijn van een molecuul, en  $a$  de straal van de attractiesfeer voorstelt). Bij  $H_2$  is  $T_0$  ongeveer  $= \frac{1}{2} T_k$ , terwijl de waarden van  $a_\infty$ ,  $a_k$ , en  $a_0$  zich verhouden als  $1:1\frac{1}{3}:2$ .

In de volgende Verhandeling zullen wij nog kortelijk den invloed der MAXWELL'sche snelheidsverdeling nagaan, om daarna het verloop der grootheid  $b$  van  $T = \infty$  tot  $T = 0$  te bestudeeren, eveneens bij groot volume. Daarna zullen de waarden van  $a$  en  $b$  bij *kleine* volumina worden beschouwd, zoodat wij ook een volledig theoretisch inzicht zullen verkrijgen aangaande het *geheele* verloop van  $a$  en  $b$



langs de grenslijn, zoowel langs den dampvlak als langs den vloeistofvlak.

Fontanivent, Januari 1918.

(Wordt vervolgd).

## A A N H A N G S E L.

A. De integraal  $k \int_0^{1/2\pi} \frac{\sin \psi}{\sqrt{1+k^2 \sin^2 \psi}} \psi d\psi$ . (bij § XVII).

Ontwikkelen wij deze door herhaalde partieele integratie in een reeks, zoo verkrijgt men:

$$\int \frac{\sin \psi}{\sqrt{1+k^2 \sin^2 \psi}} \psi d\psi = \int P \cdot \psi d\psi = \frac{\psi^2}{2} P - \frac{\psi^3 dP}{6 d\psi} + \frac{\psi^4 d^2 P}{24 d\psi^2} - \frac{\psi^5 d^3 P}{120 d\psi^3} + \dots$$

waarin (door  $\psi$ ) alle termen bij de benedenste grens 0 verdwijnen. En voor de bovenste grens zullen alle *oneven* differentiaalquotienten van  $P$  verdwijnen, omdat daarin  $\cos \psi$  als factor optreedt. Inderdaad, wanneer wij  $1+k^2 \sin^2 \psi = \omega$  stellen, zoodat  $\frac{d\omega}{d\psi} = 2 k^2 \sin \psi \cos \psi$

wordt, zoo hebben wij:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\psi} &= -\frac{1}{2} \frac{\sin \psi}{\omega^{3/2}} (2k^2 \sin \psi \cos \psi) + \frac{\cos \psi}{\omega^{1/2}} = \cos \psi \left( \frac{-k^2 \sin^2 \psi}{\omega^{3/2}} + \frac{1}{\omega^{1/2}} \right) = \\ &= \cos \psi \left( \frac{1-\omega}{\omega^{3/2}} + \frac{1}{\omega^{1/2}} \right) = \frac{\cos \psi}{\omega^{3/2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P}{d\psi^2} &= -\frac{3}{2} \frac{\cos \psi}{\omega^{5/2}} (2k^2 \sin \psi \cos \psi) - \frac{\sin \psi}{\omega^{3/2}} = -\sin \psi \left( \frac{3k^2 \cos^2 \psi}{\omega^{5/2}} + \frac{1}{\omega^{3/2}} \right) = \\ &= -\sin \psi \left( \frac{3(1+k^2)}{\omega^{5/2}} - \frac{2}{\omega^{3/2}} \right), \end{aligned}$$

omdat  $k^2 \cos^2 \psi = k^2 - k^2 \sin^2 \psi = k^2 - (\omega - 1) = (1+k^2) - \omega$  is. Verder wordt:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 P}{d\psi^3} &= -\sin \psi \left( \frac{15(1+k^2)}{\omega^{7/2}} - \frac{6}{\omega^{5/2}} \right) (-k^2 \sin \psi \cos \psi) - \cos \psi \left( \frac{3(1+k^2)}{\omega^{5/2}} - \frac{2}{\omega^{3/2}} \right) \\ &= -\cos \psi \left[ \left( \frac{15(1+k^2)}{\omega^{7/2}} - \frac{6}{\omega^{5/2}} \right) (1-\omega) + \left( \frac{3(1+k^2)}{\omega^{5/2}} - \frac{2}{\omega^{3/2}} \right) \right] \\ &= -\cos \psi \left( \frac{15(1+k^2)}{\omega^{7/2}} - \frac{12(1+k^2)+6}{\omega^{5/2}} + \frac{4}{\omega^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

En voorts:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 P}{d\psi^4} &= -\cos \psi \left( \frac{105(1+k^2)}{\omega^9} - \frac{60(1+k^2)+30}{\omega^{7/2}} + \frac{12}{\omega^{5/2}} \right) (-k^2 \sin \psi \cos \psi) + \\ &+ \sin \psi \left( \frac{15(1+k^2)}{\omega^{7/2}} - \frac{12(1+k^2)+6}{\omega^{5/2}} + \frac{4}{\omega^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sin \psi \left[ \left( \frac{105(1+k^2)}{\omega^{9/2}} - \frac{60(1+k^2)+30}{\omega^{7/2}} + \frac{12}{\omega^{5/2}} \right) ((1+k^2) - \omega) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{15(1+k^2)}{\omega^{7/2}} - \frac{12(1+k^2)+6}{\omega^{5/2}} + \frac{4}{\omega^{3/2}} \right) \right] \\
&= \sin \psi \left[ \frac{105(1+k^2)^2}{\omega^{9/2}} - \frac{60(1+k^2)^2+120(1+k^2)}{\omega^{7/2}} + \frac{60(1+k^2)+24}{\omega^{5/2}} - \frac{8}{\omega^{3/2}} \right].
\end{aligned}$$

Etc. Etc. Zooals gezegd, vallen voor  $\psi = \frac{1}{2}\pi$  alle oneven differentiaalquotienten weg, en men behoudt — daar voor  $\psi = \frac{1}{2}\pi$   $\omega = 1 + k^2$  wordt:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{d^2 P}{d\psi^2} \right)_{\frac{1}{2}\pi} &= -\frac{1}{\omega^{3/2}} = -\frac{1}{(1+k^2)^{3/2}}; \\
\left( \frac{d^4 P}{d\psi^4} \right)_{\frac{1}{2}\pi} &= \frac{15}{\omega^{5/2}} - \frac{12}{\omega^{3/2}} - \frac{6}{\omega^{5/2}} + \frac{4}{\omega^{3/2}} = \frac{9}{(1+k^2)^{5/2}} - \frac{8}{(1+k^2)^{3/2}} = \frac{1-8k^2}{(1+k^2)^{5/2}}.
\end{aligned}$$

Ter bekorting hebben wij bij de laatste berekening van beide differentiaalquotienten slechts het gedeelte met  $\sin \psi$  in aanmerking genomen; dat met  $\cos \psi$  is nl. = 0. D. w. z. van  $\frac{d^2 P}{d\psi^2}$  slechts het stuk

—  $\frac{\sin \psi}{\omega^{3/2}}$ , en van  $\frac{d^4 P}{d\psi^4}$  slechts het stuk met  $\sin \psi$  in de eerste der drie

daarbij behoorende regels. De andere stukken zijn telkens noodig geweest ter bepaling van het naast hoogere differentiaalquotient. Voortgaande, zou men hebben gevonden:

$$\frac{d^6 P}{d\psi^6} = - \left( \frac{225}{(1+k^2)^{7/2}} - \frac{360}{(1+k^2)^{5/2}} + \frac{136}{(1+k^2)^{3/2}} \right) = - \frac{1-88k^2+136k^4}{(1+k^2)^{7/2}}.$$

De coëfficiënten van de hoogste machten van  $1+k^2$  zijn in al deze uitkomsten resp. =  $1^2$ ,  $(1 \times 3)^2$ ,  $(1 \times 3 \times 5)^2$ , enz. De som der coëfficiënten is steeds = 1. ( $9-8=1$ ;  $225-360+136=1$ ). Wij

verkrijgen dus nu, in acht nemende dat  $k : \sqrt{1+k^2} = \frac{s}{\sqrt{a^2-s^2}} : \frac{a}{\sqrt{a^2-s^2}} =$

$= \frac{s}{a} = n$  is, en  $(P)_{\frac{1}{2}\pi} = 1 : \sqrt{1+k^2}$ :

$$\begin{aligned}
k \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin \psi}{\sqrt{1+k^2 \sin^2 \psi}} \psi d\psi &= n \left[ \frac{(\frac{1}{2}\pi)^2}{2} - \frac{1}{1+k^2} \frac{(\frac{1}{2}\pi)^4}{24} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1-8k^2}{(1+k^2)^2} \frac{(\frac{1}{2}\pi)^6}{720} - \frac{1-88k^2+136k^4}{(1+k^2)^3} \frac{(\frac{1}{2}\pi)^8}{40320} + \text{etc.} \right],
\end{aligned}$$

waarin men voor  $1 : (1+k^2) = (a^2-s^2) : a^2$  ook  $1-n^2$  kan schrijven. De bovenstaande reeks is convergeerend, zooals men uit den bouw der factoren  $(1-8k^2) : (1+k^2)^{5/2} = 9 : 1+k^2)^{5/2} - 8(1+k^2)^{3/2}$ , etc. gemakkelijkelijk inzielt.

Voor *grote* waarden van  $k$  ( $\alpha = s$ , d.w.z.  $n = 1$ ) convergeert zij zeer sterk, en nadert zij snel tot den eersten term, d.w.z. tot  $n \times \frac{1}{8} \pi^2$ .

Maar voor *kleine* waarden van  $k$  (dicht bij 0, d. w. z.  $\alpha$  groot t.o.v  $s$ ,  $n = 0$ ) wordt de reeks:

$$n \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \pi \right)^2 - \frac{1}{24} \left( \frac{1}{2} \pi \right)^4 + \frac{1}{720} \left( \frac{1}{2} \pi \right)^6 - \text{etc.} \right] = n \left( 1 - \cos \frac{1}{2} \pi \right) = n.$$

Wij vinden dus voor de beide grensgevallen  $n = 1$  en  $n = 0$  dezelfde waarden terug als wij in den tekst van § 17 reeds door directe integratie hadden gevonden.

Is  $n = 0,6$ , zoo wordt  $1 - 8k^2 = 1 - 4,5 = -3,5$ ,  $1 - 88k^2 + 136k^4 = 1 - 49,5 + 43,0 = -5,5$ ,  $1 : (1 + k^2) = 0,64$ , zoodat men met  $\frac{1}{4} \pi^2 = 2,4674$ , wanneer men de integraal  $= \varepsilon n \times \frac{1}{8} \pi$  stelt (zie den tekst van § 17), uit

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{1+k^2} \frac{(\frac{1}{2}\pi)^2}{12} + \frac{1-8k^2}{(1+k^2)^2} \frac{(\frac{1}{2}\pi)^4}{360} - \frac{1-88k^2+136k^4}{(1+k^2)^3} \frac{(\frac{1}{2}\pi)^6}{20160} + \text{etc.}$$

voor  $\varepsilon$  vindt de waarde

$$1 - 0,1316 - 0,02425 + 0,00107 \dots = 0,8452 \dots = \underline{0,845}.$$

**B. De integraal**  $k \int_{\text{tg}\theta_0:k}^1 \frac{\cosh \psi}{\sqrt{1+k^2 \cos^2 h \psi}} \psi d\psi$ . (bij § XVIII).

Op geheel dezelfde wijze als bij de boven behandelde integraal vinden wij door herhaalde partieele integratie:

$$\begin{aligned} k \int_{\text{tg}\theta_0:k}^1 \frac{\cosh \psi}{\sqrt{1+k^2 \cos^2 h \psi}} \psi d\psi = & - \left[ \frac{\text{tg}\theta_0 \log^2}{\sec^3 \theta_0} - \frac{k \sqrt{\frac{\text{tg}^2 \theta_0}{k^2} - 1} \log^3}{\sec^3 \theta_0} + \right. \\ & \left. + \text{tg}\theta_0 \left( \frac{3(1+k^2)}{\sec^5 \theta_0} - \frac{2}{\sec^3 \theta_0} \right) \frac{\log^4}{24} - \right. \\ & \left. - k \sqrt{\frac{\text{tg}^2 \theta_0}{k^2} - 1} \left( \frac{15(1+k^2)}{\sec^7 \theta_0} - \frac{12(1+k^2)+6}{\sec^5 \theta_0} + \frac{4}{\sec^3 \theta_0} \right) \frac{\log^5}{120} + \text{etc.} \right], \end{aligned}$$

waarin  $\log$  voorstelt  $\log \left( \frac{\text{tg}\theta_0}{k} + \sqrt{\frac{\text{tg}^2 \theta_0}{k^2} - 1} \right)$ .

Hierbij is in acht genomen, dat  $d \cosh \psi = \sinh \psi$  en  $d \sinh \psi = \cosh \psi$  is, en dat voorts  $-k^2 \cos^2 h \psi$  weer kan vervangen worden door  $1 - \omega$  (wanneer nl.  $1 + k^2 \cos^2 h \psi = \omega$  wordt gesteld) en  $-k^2 \sin^2 h \psi$  door  $-k^2 \cos^2 h \psi + k^2 = (1 + k^2) - \omega$ . De termen met oneven machten van  $\psi$  vallen thans *niet* weg, omdat bij de benedenste grens de factor  $\sinh \psi$ , welke bij deze machten optreedt, niet

verdwijnt (zoals bij de boven behandelde integraal  $\cos \psi$  bij de bovenste grens), maar  $= \sqrt{\frac{tg^2 \theta_0}{k^2} - 1}$  wordt, aangezien  $\cosh \psi$  dan  $= tg \theta_0 : k$  is. Bij de bovenste grens valt alles weg, daar dan  $\psi = 0$  is. (Bovendien bevatten de termen met oneven machten van  $\psi$  nog den factor  $\sinh \psi$ , welke thans eveneens  $= 0$  wordt, aangezien  $\cosh \psi$  bij de bovenste grens  $= 1$  wordt. (Zie verder den tekst van § 18). Wij kunnen alzoo schrijven:

$$k \int = - \left[ \sin \theta_0 \left\{ \frac{\log^2}{2} + \left( \frac{3(1+k^2)}{(1+tg^2 \theta_0)^2} - \frac{2}{1+tg^2 \theta_0} \right) \frac{\log^4}{4} + \text{etc.} \right\} - \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{tg^2 \theta_0 - k^2}{1+tg^2 \theta_0}} \left\{ \frac{1}{1+tg^2 \theta_0} \frac{\log^3}{6} + \left( \frac{15(1+k^2)}{(1+tg^2 \theta_0)^3} - \frac{12(1+k^2)+6}{(1+tg^2 \theta_0)^2} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{4}{1+tg^2 \theta_0} \right) \frac{\log^5}{120} + \text{etc.} \right\} \right].$$

Voeren wij thans de grootheid  $\varphi$  in, bepaald door vergelijking (6) van de voor-voorgaande Verhandeling, nl.

$$\frac{a^2}{s^2} \sin^2 \theta_0 = 1 + \frac{M}{\frac{1}{2} u_0^2} = 1 + \varphi,$$

waarin dus  $\varphi$  met de *temperatuur* (bepaald door  $\frac{1}{2} u_0^2$ ) samenhangt. Voor  $1 + tg^2 \theta_0$  kan dan geschreven worden  $\frac{1+k^2}{1-k^2 \varphi}$ , omdat

$tg^2 \theta_0 = \frac{s^2}{a^2} (1+\varphi) : \left( 1 - \frac{s^2}{a^2} (1+\varphi) \right)$  met  $\frac{s^2}{a^2 - s^2} = k^2$  kan worden vervangen door  $k^2 (1+\varphi) : (1-k^2 \varphi)$ . Voor  $tg^2 \theta_0 - k^2$  vinden wij  $k^2(1+k^2)\varphi : (1-k^2 \varphi)$ , zoodat verkregen wordt:

$$k \int = - \left[ \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \sqrt{1+\varphi} \left\{ \frac{\log^2}{2} + \frac{(1-k^2 \varphi)(1-3k^2 \varphi) \log^4}{1+k^2} \frac{1}{24} + \text{etc.} \right\} - \right. \\ \left. - k \sqrt{\varphi} \left\{ \frac{1-k^2 \varphi}{1+k^2} \frac{\log^3}{6} + \left( \frac{(1-k^2 \varphi)^2 (9-15k^2 \varphi)}{(1+k^2)^2} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{(1-k^2 \varphi)(8-12k^2 \varphi)}{1+k^2} \right) \frac{\log^5}{120} + \text{etc.} \right\} \right].$$

Hierin is dus

$$\log = \log \left( \frac{tg \theta_0}{k} + \sqrt{\frac{tg^2 \theta_0}{k^2} - 1} \right) = \log \frac{\sqrt{1+\varphi} + \sqrt{(1+k^2)\varphi}}{\sqrt{1-k^2 \varphi}}.$$

Gaan wij nu eens na welke de grenswaarden zijn, waartoe de gevonden integraal bij hooge temperaturen, en bij lage ( $\varphi$  dicht bij  $\varphi_0 = 1 : k^2$ ) nadert.

Bij *hooge* temperaturen ( $\varphi = 0$ ) nadert  $\log$  tot  $\log 1 = 0$ , zoodat

alle termen met hogere machten van  $\log$  tegenover den eersten term verdwijnen, en bovendien het geheele gedeelte met  $k\sqrt{\varphi}$ . Dat in dit geval alleen de eerste term met  $\log^2$  overblijft, volgt ook hieruit, dat bij  $\varphi = 0$   $\operatorname{tg} \theta_0 = k^2(1+\varphi) : (1-k^2\varphi)$  tot  $k$  nadert, zoodat bij gelijkheid der grenzen van de oorspronkelijke integraal de factor  $k \cosh \psi : \sqrt{1+k^2 \cos^2 h \psi} = k : \sqrt{1+k^2}$  daartusschen (ten opzichte van den aan beide grenzen 0 wordenden  $\log$ ) niet verandert, en derhalve buiten het integraalteeken kan worden gebracht.

Bij lage temperaturen (doch hoger dan de grenstemperatuur  $T_0$ , bepaald door  $\varphi_0 = 1 : k^2$ ) zal tengevolge van den factor  $1-k^2\varphi$ , welke tot 0 nadert, wederom het geheele tweede stuk van  $k \int$  wegvallen, terwijl van het eerste gedeelte alweer alleen de eerste term met  $\log^2$  overblijft. In dit geval is bij de benedenste grens  $\cos h \psi = \operatorname{tg} \theta_0 : k = \infty$ , en kan de factor van  $\psi d\psi$  in de integraal bij deze — thans door het aldaar oneindig worden van den  $\log$  overheerschende — grens wederom buiten het integraalteeken worden gebracht. Aan de andere grens is de  $\log$  nl. = 0.

Met groote benadering zal men dus kunnen schrijven (voor  $k : \sqrt{1+k^2} = s : a$  is  $n$  geschreven) :

$$k \int = \div \frac{1}{2} n \sqrt{1+\varphi} \log^2 \frac{\sqrt{1+\varphi} + \sqrt{(1+k^2)\varphi}}{\sqrt{1-k^2\varphi}},$$

met verwaarloozing van alle termen met hogere machten van  $\log$ . Alleen bij intermediaire temperaturen zal het weggelaten gedeelte eenigen invloed kunnen hebben — maar het daardoor ontstane verschil zou door een eenigszins gewijzigde aanname aangaande  $f'(r)$  tusschen  $a$  en  $s$  (zie § XVI) wellicht geheel tot verdwijnen kunnen worden gebracht.

**C. De grootheid  $a$  bij  $\varphi = \varphi_0 = 1 : k^2$ . (bij § XX).**

De oorspronkelijke integraal was (zie § 16) :

$$a = \frac{1}{2} \times (b_0)_\infty a \times \frac{2a^4}{s(a^2-s^2)} \int_s^a \int_0^{1/2\pi} \frac{r(-f'(r)) dr \times \sin \theta d\theta}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \theta + \varphi f'(r)}}.$$

Voor de integraal kan ook geschreven worden :

$$\int_s^a \int_{1/2\pi}^0 \frac{r^2 (-f'(r)) dr d(a \cos \theta)}{\sqrt{r^2 \varphi f'(r) - (a^2 - r^2) + a^2 \cos^2 \theta}} = \frac{1}{a} \int_s^a r^2 (-f'(r)) dr \log \left( \frac{a}{q} + \sqrt{1 + \frac{a^2}{q^2}} \right),$$

wanneer  $r^2 \varphi f'(r) - (a^2 - r^2) = q^2$  wordt gesteld. Is nu  $f'(r)$  algemeen

$= \frac{s^t}{r^t}$ , zoodat dit behoorlijk  $= 1$  wordt bij  $r = s$ , dan is  $-f'(r) = \frac{ts^t}{r^{t+1}}$

en  $q^2 = \frac{\varphi s^t}{r^{t-2}} - (a^2 - r^2)$ . Wij hebben dus nu:

$$a = (b_g)_\infty a \times \frac{t a^3 s^{t-1}}{a^2 - s^2} \int_s^a \frac{dr}{r^{t-1}} \log \left( \frac{a}{q} + \sqrt{1 + \frac{a^2}{q^2}} \right),$$

waarin de grootheid  $q$  voor de onderste grens overgaat in  $\varphi s^2 - (a^2 - s^2)$ , hetgeen  $= 0$  wordt voor  $\varphi = \frac{a^2 - s^2}{s^3} = \frac{1 - n^2}{n^2} = \frac{1}{k^2}$  als voorheen. De waarde van  $a$  zal dus wederom bij  $\varphi = \varphi_0 = 1 : k^2$  tot *logarithmisch oneindig* naderen. Dit is alzoo geheel onafhankelijk van den exponent  $t$  in de aangenomen krachtswet  $f(r) \therefore r^{-t}$ .

#### CORRIGENDUM.

In de tweede Verhandeling (Verslag van 26 Jan. 1918) merkte ik ten onrechte in de Noot op p. 1217 op, dat door KEESOM eên rekenfout zou zijn gemaakt. De daar bedoelde getallenwaarde heeft nl., zooals mij later is gebleken, niet op Waterstof, maar op Argon betrekking. (Zie de Tabel op p. 7 van het geciteerde Suppl. N<sup>o</sup>. 26).

Daar op Zaterdag 27 April a.s. de beide Afdelingen der Akademie hare vereenigde vergadering zullen houden, wordt, op voorstel van den Voorzitter, vastgesteld dat de volgende vergadering dezer Afdeling zal zijn op **Vrijdag 26 April** a.s.

# KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

## VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING VAN VRIJDAG 26 APRIL 1918.

DEEL XXVI.

### N<sup>o</sup>. 10.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.

Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

## INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 1455.

M. W. BEIJERINCK: „De betekenis van de bakteriën der Papilionaceënknotjes voor de voedsterplant”, p. 1456.

C. EYKMAN en D. J. HULSHOFF POL: „Dierproeven met Regeerings-bruinbrood en wittebrood”, p. 1466.

W. DE SITTER: „Nadere opmerkingen omtrent de oplossingen der veldvergelijkingen van EINSTEIN'S gravitatie-theorie”, p. 1472.

W. DE SITTER: „Schets eener nieuwe theorie der Satellieten van Jupiter”. II. p. 1476.

JAN DE VRIES: „Lineaire nulstelsels in het platte vlak”, p. 1485.

JAN DE VRIES: „Nulstelsels, welke door twee lineaire stralencongruenties worden bepaald”, p. 1492.

E. D. WIERSMA: „De psychologie van verwardheidstoestanden”, p. 1495.

H. ZWAARDEMAKER en F. HOGEWIND: „Het spontaan colloïdaal worden van oplossingen van reukstoffen, uitermate versneld door bestraling met ultraviolet licht”, p. 1510.

J. W. VAN WIJHE: „Over den Nervus terminalis van den Mensch tot Amphioxus”, p. 1517. (Met één plaat.)

W. VAN BEMMELEN: „De atmosferische Circulatie boven Australazië volgens de loodsballon-waarnemingen te Batavia verricht”. (Aangeboden door den Heer J. P. VAN DER STOK), p. 1529. (Met één tabel).

J. F. VAN BEMMELEN: „Over het primaire karakter der Poptekening bij de vlinders”, p. 1543.

ERNST COHEN en A. L. TH. MOESVELD: „De Invloed van Druk op de Oplosbaarheid van Stoffen. IV. Toetsing der Wet van BRAUN”, p. 1553. (Met één tabel).

G. NORDSTRÖM: „Berekening voor eenige bijzondere gevallen volgens de gravitatie-theorie van EINSTEIN”. (Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en H. KAMERLINGH ONNES), p. 1577.

S. DE BOER: „over den invloed der verhooging van osmotischen druk der lichaamsvochten op verschillende celsubstraten”. (Aangeboden door de Heeren G. VAN RIJNBEEK en I. K. A. WERTHEIM SALOMONSON), p. 1590.

A. D. FOKKER: „Over hetgeen in niet-Euclidische ruimten beantwoordt aan een verplaatsing evenwijdig aan zichzelf en over de Riemanniaansche kromtemaat”. (Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en H. KAMERLINGH ONNES), p. 1596.

De Heer H. A. LORENTZ biedt aan ter uitgave in de Werken der Akademie, namens den Heer J. A. SCHOUTEN, het manuscript van diens verhandeling: „Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie”, p. 1596

Aanbieding van boekgeschenken, p. 1596.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1<sup>o</sup>. Bericht van den Heer H. du Bois, dat hij verhinderd is de vergadering bij te wonen.

2<sup>o</sup>. Missive van Zijne Exc. den Minister van Staat, Minister van Binnenlandsche Zaken, dd. 16 April 1918 met bericht dat de benoeming van den Heer H. A. LORENTZ tot Voorzitter en van den Heer D. J. KORTEWEG tot Onder-Voorzitter der Afdeling door H. M. de Koningin is bekrachtigd.

Aangenomen voor kennisgeving.

3<sup>o</sup>. Gedrukte dankbetuiging namens de „*Naturforschende Gesellschaft*” te Danzig voor den aan dit Genootschap gezonden gelukwensch bij de herdenking van zijn 175-jarig bestaan op 2 Januari 1918.

Aangenomen voor kennisgeving.

**Mikrobiologie.** — De Heer BEIJERINCK doet eene mededeeling over:  
„*De beteekenis van de bakteriën der Papilionaceëknolletjes voor de voedsterplant*”.

Daar er geen reden is om aan de juistheid van de proeven van HELLRIEGEL<sup>1)</sup> te twijfelen, schijnt het zeker, dat de bakteriën der knolletjes van de Papilionaceën onmisbaar zijn voor de binding van de vrije atmosferische stikstof<sup>2)</sup> door deze planten. Ik zal echter bewijzen, dat de tegenwoordig algemeen aangenomen theorie, volgens welke dit proces in de knolletjes alleen tot stand komt, onhoudbaar is.

Enkele algemeene opmerkingen over het voorkomen van de knolletjes en het opkweken van de bakteriën daaruit moge aan mijn eigenlijk onderwerp voorafgaan.

Bij sommige soorten zooals de serradella (*Ornithopus sativus*) en de gele lupine (*Lupinus luteus*) kan er niet aan worden getwijfeld, dat alleen de knoldragende exemplaren in stikstofarme gronden krachtig groeien en dus volgens de theorie de vrije stikstof binden. Het is dan ook gemakkelijk, in de velden op schralen heidegrond, kwijnende, niet doorgroeiende lupineplanten te vinden steeds vrij van knollen, te midden van de weelderig opschietende knoldragende exemplaren; nooit vond ik aldaar goed ontwikkelde lupine- of serradella-planten geheel vrij van knollen. Maar het aantal knollen, door een plant gedragen, is zonder beteekenis: blijkbaar is het voldoende, als er maar enkele knolletjes tot ontwikkeling komen. Bij tuinproeven op open zandbedden zonder stikstofbemesting, waarin echter onvermijdelijk meer stikstofverbindingen voorkomen dan in de heidegronden, groeien ook bij de erwt en de boon (*Vicia faba*) planten met knolletjes beter dan exemplaren zonder.

---

<sup>1)</sup> H. HELLRIEGEL und H. WILFARTH, Untersuchungen über die Stickstoffnahrung der Gramineën und Leguminosen, Zeitschrift für Rübenzuckerindustrie, Beilageheft November 1888. Voor verdere literatuur: PFEFFER Pflanzenphysiologie, 2te Aufl. Bd. 1, pag. 383, 1897 en het uitstekende overzicht van HILTNER, Bindung von freiem Stickstoff in höheren Pflanzen, in Handbuch der technischen Mykologie. Bd. 3, Jena, 1904—1906. Zie ook FRANK, Lehrbuch der Botanik, Bd. 1, pag. 583, 1892, die binding van vrije stikstof ook bij andere hoogere planten dan Leguminosen aanneemt.

<sup>2)</sup> Voor het objectieve bewijs, dat hierbij de vrije stikstof gebonden wordt, zie behalve HELLRIEGEL (l. c. Pag. 191) ook SCHLÖSING en LAURENT, Fixation de l'azote libre par les plantes, Ann. de l'Institut Pasteur T. 6, pag. 65, 1892.



In vruchtbaren tuingrond, zooals in den laboratoriumstuinte Delft, ontwikkelen gele lupine en serradella zich niet volkomen, vooral het wortelstelsel maakt den indruk van ziekelijk te zijn en knollen ontwikkelen zich daaraan niet, zelfs niet wanneer de grond met een rijke hoeveelheid der betrokken bakteriën bedeed is. Of de bakteriën in den grond afsterven, of door de wortels der plant niet aangelokt worden, is nog niet uitgemaakt. De meeste andere Papilionaceën, zooals klaver, wikke, erwt en *Vicia faba* dragen ook in vruchtbaren bodem veel knolletjes en het is niet gemakkelijk exemplaren te vinden, die daarvan geheel vrij zijn, tenzij men den grond vooraf heeft gesteriliseerd.

Bij *Genista anglica* en *Genista pilosa* op schralen heidegrond groeiende, kon ik zelf na langdurig zoeken slechts zeer enkele knolletjes vinden, niettegenstaande vooral eerstgenoemde soort vele peulen met goede zaden droeg. De knolletjes zijn echter nooit geheel afwezig. In mijn tuin te Delft gezaaid, of als plant daarin overgebracht, sterven deze soorten na weinige jaren van kwijnend leven af. *Genista tinctoria* daarentegen groeit te Delft even goed als langs den straatweg van Zutphen naar Vorden en draagt op beide standplaatsen enkele knolletjes.

Voor *Robinia pseudo-acacia* is de gunstige werking van *B. radicola* alleen ten opzichte van de jonge plant door NOBBE vastgesteld.<sup>1)</sup>

Bij volwassen exemplaren op schralen zandgrond te Gorssel, kon ik na lang spitten slechts enkele knolletjes vinden, terwijl op geringen afstand, maar in iets betere grond, de knolletjes gemakkelijker te vinden waren, maar toch in zoo gering aantal, dat niemand daaraan eenige direkte beteekenis voor zulk een grooten boom zou toekennen, wanneer niet de stikstofbinding in de knolletjes tot een ingekankerd geloof ware geworden. De bremstruik (*Sarothamnus vulgaris*) en de doornstruik (*Ulex europaeus*) verhouden zich juist zoo als de *Acacia*. Bij gewone bruine boonen (*Phaseolus vulgaris*) op zandgrond, vond ik slechts weinig knolletjes en alleen aan dunne zijwortels; zij waren steeds ingesloten door planten-overblijfselen; in het zand vond ik slechts enkele exemplaren. In tuingrond te Delft draagt *Phaseolus* geen knolletjes, maar wel in een aldaar aangelegd zandperk: *Lupinus luteus* en serradella verhouden zich evenzoo.

Vergelijkt men de verschillende genoemde plantensoorten, die alle in den landbouw beroemd zijn wegens de verbetering van de schrale gronden, waarop zij groeien, met elkander, dan komt men tot de gevolgtrekking, dat het aantal en het gewicht der knolletjes alleen bij de lupine en de serradella

<sup>1)</sup> HILTNER l.c. en BÜSGEN, Bau und Leben unserer Waldbäume, 2te Aufl., Pag. 246, 1917.

ten opzichte van het geheele gewicht der plant van eenige beteekenis zijn, maar dat dit aantal en gewicht bij de andere soorten zoo gering zijn, dat zelfs, wanneer in de knolletjes vrije stikstof gebonden werd, alleen bij een fabelachtige intensiteit van het proces aan eenige beteekenis daarvan voor de volwassen plant zou kunnen gedacht worden. Deze theorie, en het is tegenwoordig nog altijd de gangbare, vereischt derhalve herziening. Andere ervaringen maken deze herziening niet minder noodzakelijk. Maar vooraf nog eenige opmerkingen over het isoleeren der bakteriën uit de knolletjes en uit andere materialen, alsmede over het vraagstuk der specificiteit.

Een voor de isoleering zeer geschikten voedingsbodem heb ik reeds in 1888 beschreven, <sup>1)</sup> namelijk erwtenloof- of klaver-extrakt-gelatine met 2 % rietsuiker. Hierop groeit *B. radicolica* als witte weeke niet versmeltende koloniën, terwijl *B. ornithopodis* uit *Ornithopus perpusillus* en *O. sativus* of uit *Lupinus luteus* in den herfst of in Maart geïsoleerd de gelatine eenigszins vervloeien evenals *B. herbicola*. <sup>2)</sup>

Als stikstofarme vaste kultuurbodem is aan te bevelen een plaat van: Leidingwater 100, agar 2, rietsuiker 1, zetmeel 1, bikaliumfosfaat 0,05, waarin, tengevolge van het eiwitgehalte van de agar, genoeg gebonden stikstof voorkomt, om duidelijken groei van *B. radicolica* te geven. Later kan daarop lokaal een weinig salpeter of ammoniumsulfaat gebracht worden, waardoor de knolletjes-bakteriën evenals de andere saprophyten, eerst recht gaan groeien. Ziju op zulk een plaat toevallig kiemen van *Azotobacter* gekomen, die wel in staat is, de vrije stikstof te binden, dan groeien deze juist goed zoolang geen stikstofverbindingen worden toegevoegd. De stikstofarme platen dienen vooral om de sporendragende aardbakteriën te herkennen, die bijna altijd bij het isoleeren van *B. radicolica* voorkomen.

Papilionaceën-bakteriën noem ik alleen die bakteriën, die in duizende of honderdduizende onderling identieke koloniën uit de uitwendig goed gesteriliseerde en met de noodige voorzorgen fijn gewreven knolletjes tot ontwikkeling komen en meerendeels binnen uit de cellen afkomstig zijn; de bij de kultuurproeven verkregen afwijkende koloniën in geringer aantal aanwezig, beschouw ik als produkt van kiemen, die toevallig in de intercellulaire ruimten van de schors der knolletjes zijn binnengedrongen <sup>3)</sup>. Dat de volwassen bakteroiden op

<sup>1)</sup> Botan. Zeitung. 1888 Pag. 764.

<sup>2)</sup> Soms verkrijgt men uit de Papilionaceëknolletjes een menigte koloniën van *B. herbicola*; ieder die deze soort niet kent, kan bij de isoleering van *B. radicolica* fouten maken. Maar zelfs met die kennis is het isoleeren van serradella- en lupinebakteriën ook nu nog moeielijk. Goede beschrijvingen dezer vormen bestaan nog niet.

<sup>3)</sup> Behalve *B. radicolica* kan ook *B. herbicola* binnen in de levende cellen voorkomen.

de kultuurplaten niet tot ontwikkeling kunnen gebracht worden, is welbekend. Alleen dus uit knolletjes, die in een bepaald ontwikkelingsstadium verkeerden, kunnen bacteriën verwacht worden.

Belangrijk en tot nu toe niet voldoende onderzocht is de omstandigheid, dat bij dezelfde plant uit de knolletjes niet steeds dezelfde bacteriën verkregen worden. Zoo vond ik bij *Ornithopus perpusillus* de bacteriën, welke ik in Maart isoleerde, verschillende van die welke ik in October in kultuur had gebracht, terwijl de knolletjes afkomstig waren van naast elkander groeiende planten en in overeenkomstigen ontwikkelingsstoestand verkeerden. Bij de gele lupine en de serradella heb ik overeenkomstige ervaringen opgedaan. In de meeste andere gevallen, bijv. bij *Pisum*, *Lathyrus*, *Vicia* en *Trifolium* is echter de overeenkomst tusschen de verschillende, onafhankelijk van elkander geïsoleerde stammen zoo volkomen en het beeld van *B. radiculicola* zoo gemakkelijk vast te stellen, dat de genoemde waarneming, nader bevestiging vereischt, waarbij thans echter niet kan worden stilgestaan.

Tracht men uit andere materialen dan de knolletjes, bijvoorbeeld uit den grond en uit de oppervlakkige afstervende cellagen van den wortel, *B. radiculicola* te isoleeren, dan blijkt de herkenning dezer soort te midden van de vele gewone saprophyten zeer moeielijk, vooral, wanneer het om een kwantitative schatting van het aantal kiemen te doen is. *B. fluorescens liquefaciens* veroorzaakt hierbij door het versmelten van de kulturgelatine bijzonder veel last, en toch is men genoodzaakt van gelatineplaten gebruik te maken, omdat daarop de koloniën vrij van elkander liggen, terwijl zij op agar platen overwoekerd en onkenbaar worden door *B. fluorescens*, die zich sterk zijdelings uitbreidt. Betreffende de vraag naar het al of niet bestaan van verschillende soorten onder de Papilionaceënbacteriën het volgende.

Reeds in 1892 zijn daarover proeven gedaan door wijlen HELLRIEGEL<sup>1)</sup> zelve aan het proefstation te Bernburg met door mij te Delft vervaardigde reinkulturen. Van den uitslag dezer proeven heeft HELLRIEGEL mij twee rapporten gezonden. In het eerste dezer rapporten, gedateerd 24 Juli 1892, geeft hij als: „Augenblickliches Hauptresultat”: „Es gelingt mit den Reinkulturen von *Bac. radiculicola* var. *Pisi* oder von *Vic. Fab.* die Erbsen und Bohnen und mit denen des *Bac. radiculicola* var. *Lupin.* oder *Ornithopodis* Lupinen und Seradella erfolgreich zu infizieren und zum Wachstum resp. der Assimilation des freien Stickstoffs zu bringen, und das ist was unsere anfängliche Behauptung bestätigt”.

<sup>1)</sup> Hij is 24 September 1895 aan een maagkwaal overleden en was in 1892, toen ik hem te Bernburg bezocht, reeds lijdende.

In latere jaren zijn vooral door HILTNER in deze richting vele belangrijke proeven gedaan. Toch is de literatuur daarover onbevredigend, omdat gebleken is, dat het tot dusver niet mogelijk was in de zandkulturen <sup>1)</sup> Papilionaceën tot volledige ontwikkeling te brengen door infectie met *B. radiculicola* alleen en met uitsluiting van alle andere vreemde microben: steeds waren deze kulturen aan het eind der vegetatieperiode rijk aan allerlei andere soorten in het bijzonder *B. fluorescens liquefaciens* en de stikstof bindende sporenvormers *Granulobacter (Clostridium) pasteurianum* en *Helobacter cellulosa*. Deze opmerking geldt zoowel voor de eerste proeven, die ik zelf daarover gedaan heb als ten opzichte van die van andere onderzoekers en men moet dit feit bij het lezen der beschrijvingen van de infectieproeven met de zoogenaamde „reinkulturen” van *B. radiculicola* nooit uit het oog verliezen. Aan HELLRIEGEL was het niet ontgaan, maar hij hechtte er geen waarde aan (l. c. Pag. 169); men ziet het trouwens in alle foto's zijner bovengenoemde verhandeling aan het beslag der glaspotten, waarin hij (in sterk daglicht) zijn planten kultiveerde en welk beslag uit groenwieren en allerlei andere microben bestond. Ik zelf heb daarbij in stikstofvrij zand behalve de genoemde soorten ook *Chlorella* en *Cystococcus* en somtijds ook *Palmella cruenta* en vele Cyanophyceën opgemerkt. Vele later door mij genomen proeven om klaverplanten in groote met watten gesloten kolven op agarplaten met voedingszouten en met *B. radiculicola* var. *Trifolii* tot volledige ontwikkeling te brengen zijn niet gelukt, omdat de planten voor het bloeien ophielden te groeien.

*Buiten de voedsterplant binden de Papilionaceënbacteriën  
de vrije stikstof niet.*

Thans ga ik over tot de beschrijving van het hoofdfeit, waarop ik de aandacht wensch te vestigen, namelijk het onvermogen der Papilionaceënbacteriën om vrije stikstof te binden: zij doen dit evenmin, wanneer zij buiten de voedsterplant gekweekt worden, als in de knolletjes.

Wat het eerste punt betreft is de proefinrichting uiterst eenvoudig: men behoeft slechts de knolletjes fijn te wrijven en het daardoor verkregen materiaal in kleiner of grooter hoeveelheid in voor de binding van vrije stikstof gebruikte kultuurvloeistoffen te brengen en bij 20° a 30° C. te kultiveeren, of men gebruikt voor de infectie de reinkulturen. Een geschikte kultuurstof is: Leidingwater 100,

<sup>1)</sup> Welbekend is het feit, dat de Papilionaceën in voedingsstoffen gekultiveerd, de atmosferische stikstof niet binden, ook niet wanneer zij knolletjes dragen.

Glucose 2, Dikaliumfosfaat 0,005, Krijt 2, versche tuingrond 2. Natuurlijk moet deze vloeistof, waaraan de versche grond als katalysator was toegevoegd, vooraf gesteriliseerd worden om de kiemen van *Azotobacter* en *Granulobacter* en *Helobacter* te doden; de grond behoudt daarbij zijn katalytische kracht. Dikwijls kleven de laatstgenoemde bakteriën aan de knolletjes en dan toont het ontstaan van gistingverschijnselen, dat de proeven niet betrouwbaar zijn, daar *B. radicumicola* en verwanten geen gisting veroorzaken. Meestal kunnen zij echter door afwassen verwijderd worden. In den loop der jaren heb ik zulke proeven met allerlei Papilionaceëknolletjes gedaan en in de kultuurvloeistoffen zoowel de temperatuur als de koolstofbron op verschillende manieren gewijzigd. Bovendien heb ik, zooals gezegd, de zuiver gekultiveerde Papilionaceënbacteriën in de genoemde vloeistof tot groei trachten te brengen, en aanvankelijk meende ik daarbij ook een vrij belangrijke vermeerdering te hebben waargenomen. Die vermeerdering is echter gebleken slechts een uiterst geringe te zijn, zoo gering, dat van stikstofwinst uit de atmosfeer niets of bijna niets te bemerken is, terwijl de zeer duidelijke toeneming aan drooggewicht ten opzichte van het uitgezaaide bakteriën materiaal veroorzaakt wordt door het ontstaan van dikke slijmwanden, dus van stikstof-vrije celluloseachtige stoffen rondom de niet of nauwelijks vermeerderde oorspronkelijk uitgezaaide bakteriënlichamen.<sup>1)</sup>

Alleen bij het kultureeren der Papilionaceënbacteriën in planten-extrakten met rietsniker, waarin dus reeds stikstofverbindingen aanwezig waren, kon ik, zooals ik vroeger heb beschreven, een zeer geringe en volstrekt niet overtuigende vermeerdering van het totale stikstofgehalte der vloeistof ten gevolge van den groei van bakteriën waarnemen. Maar bij het nemen van die proeven was ik nog niet bekend met het feit, dat de laboratoriumslucht een voldoende hoeveelheid koolstof en stikstofverbindingen bevat, om door den groei van mikroben, die zich daarmee kunnen voeden bemerkbaar te worden gemaakt, hetgeen ik later in mijn onderzoek over *Bacillus (Actinobacillus) oligocarbophilus*, gezamenlijk met den heer A. VAN DELDEN heb aangetoond, waarbij binding van vrije stikstof echter volstrekt niet plaats heeft<sup>2)</sup>. Bovendien bestaat er een aërobe sporenvormende

<sup>1)</sup> De slijmvorming door de Papilionaceënbacteriën buiten de plant is belangrijk voor de verklaring van de „slijmdraden” (ten onrechte „infektiedraden” genoemd) in de knolletjes. Zie „Die Natur der Fäden der Papilionaceënkücheln.” Centrabl. für Bakteriologie. Bd. 15, pag. 928, 1894.

<sup>2)</sup> Ueber eine farblose Bakterie deren Kohlenstoffnahrung aus der atmosphärischen Luft herrührt. Centrabl. f. Bakteriologie 2te Abt. Bd. 10, pag. 33, 1903.

bakteriën-soort, die zeer moeilijk bij het steriliseeren der voedingsvloeistoffen gedood wordt, welke ik toen nog in het geheel niet kende en die wellicht bij mijn proeven aanwezig was even als bij die van andere onderzoekers, die meenen de binding van vrije stikstof door de Papilionaceënbakteriën buiten de plant te hebben waargenomen. <sup>1)</sup>

Bij voldoende voorzorgen is het resultaat van zulke proeven steeds het zelfde: de Papilionaceënbakteriën binden de vrije atmosferische stikstof in het geheel niet. Doet men de proeven niet met kultuurvloeistoffen maar met cultuurplaten, dus met een vasten voedingsbodem, dan is de uitslag juist de zelfde: stikstofbinding heeft ook dan niet plaats. <sup>2)</sup>

Wel is waar maken de plaatkulturen van sommige dezer bakteriën, bijv. de vormen uit *Pisum*, *Vicia* en *Trifolium*, op glukose-agar-kaliumfosfaat-platen, dus bij afwezigheid van opzettelijk toegevoegde stikstofbindingen, bij oppervlakkige beschouwing den indruk zich daarop zeer volkomen te kunnen ontwikkelen, maar ook hier is het slechts de vorming van veel wandstof en niet van stikstofrijk protoplasma, waardoor het groote volume der koloniën moet verklaard worden. <sup>3)</sup> Met andere slijmvormende bakteriën zooals *B. radiobacter* en *Aërobacter viscosum*, waarvan het volkomen vaststaat, dat zij niet van de atmosferische stikstof kunnen leven, kan men op den genoemden stikstofarmen bodem met geschikt koolstofvoedsel eveneens zeer groote koloniën verkrijgen. Zelfs kan men zulke koloniën, juist door een betere stikstofvoeding, tot sterke inkrumping brengen, omdat de wandstof dan als reservevoedsel dienst kan doen, onder sterke vermeerdering van het protoplasma der bakteriën, hetgeen tot zeer fraaie proeven aanleiding geeft. Eerst wanneer men met deze feiten door eigen aanschouwing bekend is, wordt het duidelijk, waarom in de literatuur zoovele opgaven over de stikstofbinding door de Papilionaceënbakteriën, die niet bestaat, kunnen voorkomen.

<sup>1)</sup> *Bacillus danicus*, T. WESTERMANN en F. LÖHNIS (Centralbl. f. Bakteriöl. 2te Abt. Bd. 22, pag. 250, 1909).

<sup>2)</sup> Bij de wonderlijke „proeven” van MAZÉ (Annales de l'Institut Pasteur T. 11, pag. 44, 1897, T. 12, pag. 1 en pag. 128, 1898), die zegt op vleeschbouillongelatine platen tegelijkertijd ammoniakontwikkeling en binding van vrije stikstof door *B. radicolata* te hebben waargenomen, behoeft niet te worden stilgestaan, hoezeer zij, zonder kritiek, in de leerboeken der Plantenphysiologie worden opgenomen.

<sup>3)</sup> Ook bij de gewone saprophytische bakteriën is de behoefte aan stikstofbindingen zeer verschillend, gering bijv. bij de grootcellige *Bacillus megatherium* groot bij de kleincellige *Bacterium fluorescens*.

*In de knolletjes wordt de vrije stikstof ook niet gebonden.*

Het voorgaande geeft als van zelf aanleiding tot de vraag, of het protoplasma van de voedsterplant in de knolletjes de aanleiding, de katalysator, zou kunnen wezen, waardoor de naar binnen gedrongen bakteriën in den bakteriëden-toestand in staat gesteld worden, de vrije stikstof te binden. Hoe onwaarschijnlijk deze tegen de wetten der erfelijkheid strijdende hypothese ook moge klinken moet daaraan toch aandacht worden gegeven, omdat het gehalte aan eiwitachtige stoffen in de knolletjes zoo buitengewoon hoog is. Ik zelf vond omstreeks 4 % stikstof, dat is dus omstreeks 25 % eiwit in de drooge stof van erwtenknolletjes. Anderen vonden 5 à 6 % stikstof. Het is opmerkelijk dat de bakteriënkoloniën op agarplaten buiten de plant gekweekt, slechts 1 à 2 % stikstof op de droogstof bevatten, die grootendeels uit koolhydraten bestaat. Het is dus zeker, dat de verandering van het bakteriënlichaam in de plantencel diep ingrijpend is, zoowel in morphologischen als in physiologischen zin. Beproefd werd daarom door direkte bepalingen gazometrisch stikstofabsorptie in de knolletjes vast te stellen. Als de hypothese juist is, dan moet het mogelijk zijn met een groote hoeveelheid der knolletjes in een afgesloten met lucht gevulde ruimte en onder overigens goede physiologische voorwaarden het verschijnsel gemakkelijk waar te nemen. Want daar het aantal knolletjes zooals wij zagen bijv. bij de houtige Papilionaceën zeer klein is, terwijl deze planten juist wegens hun stikstofbindend vermogen in den landbouw beroemd zijn, zou de intensiteit van de werking der knolletjes groot moeten wezen.

Om nu de stelling te toetsen, werd als volgt gehandeld. Eerst<sup>1)</sup> werden kleinere, later grootere hoeveelheden knolletjes van serradella en gele lupine in zeer wijde glasbuizen gebracht, die gemakkelijk met de gasbureten konden verbonden worden en die in thermostaten van omstreeks 25° C. werden geplaatst.

Daar de knolletjes bij deze proeven krachtig ademhaalden moest er op worden gerekend, dat de zuurstof spoedig zou verdwijnen en dus aanvulling daarvan noodig was. Verder was het dan alleen noodig, het stikstofvolume te bepalen, dat na aftrek van het koolzuur en de nog aanwezige zuurstof over bleef. De eenige moeielijkheid, die wij ondervonden bestond daarin, dat de knolletjes, die door hun stikstofrijkdom een buitengewoon goed bakteriëvoedsel zijn, gemakkelijk tot gistingen, bepaaldelijk door *Bacterium aërogenes*.

<sup>1)</sup> Bij vele dezer proeven heb ik steun gehad van den heer D. C. J. MINKMAN, vroeger assistent bij het Laboratorium voor Mikrobiologie.

aanleiding geven, wanneer zij elkander aanraken en nat worden. Hierbij ontstaat waterstof en veel koolzuur, en het is dan noodzakelijk ook deze waterstof te bepalen. Intusschen is deze gisting zeer wel te voorkomen, door het materiaal los in de meetbuis te brengen, zoodat er slechts weinig aanrakingspunten tusschen de knolletjes overblijven en de lucht overal kan toetreden. Voor de vorming van vrije stikstof bestaat onder zulke omstandigheden geen gevaar, daar dit alleen geschiedt door de werking van de denitrificeerende bakteriën op salpeter, welke stof hier echter ontbreekt.

Van de knolletjes der gele lupine hebben wij bij onze proeven hoeveelheden van 100 gr., 500 gr. en later zelfs van een Kg. gebruikt. Bij een deel onzer proeven hadden wij deze knolletjes van de wortels afgesneden, bij andere waren de wortels en lange stukken van den stengel der voedsterplant met de knollen in verbinding gebleven, om den afvoer van wellicht gevormde stikstofverbindingen daaruit mogelijk te maken. Al onze bepalingen hebben echter het resultaat gegeven, dat in geen enkel geval ook maar de geringste binding van vrije stikstof door de knolletjes waarneembaar was. Omdat wij aanvankelijk aan de juistheid dezer uitkomst, welke slechts met betrekkelijk weinig materiaal verkregen was twijfelden, werd later van de veel grootere, zooeven genoemde hoeveelheden gebruik gemaakt, maar het resultaat is daardoor niet veranderd. Behalve de twee genoemde soorten werden ook nog verscheidene malen 10 of 20 gr. knolletjes van *Vicia faba*, en een enkele maal omstreeks 15 gr. knolletjes van *Robinia pseudo-acacia* onderzocht; maar een andere uitkomst is ook daarmede niet gekregen.

Daar onze proeven niet langer dan 12 tot 20 dagen hebben geduurd, zou daartegen kunnen aangevoerd worden, dat wij de natuurlijke voorwaarden, waaronder de in het veld staande planten verkeerden niet voldoende hebben nagebootst. Ook was bij deze proeven de groei en de vermeerdering der knolletjes alsmede die van de geheele plant uitgesloten. Ofschoon deze tegenwerkingen in het voorafgaande niet weerlegd zijn, is het toch hoogst onwaarschijnlijk, dat wel met het groeien der knolletjes en niet met de vermeerdering der bakteriën daarbuiten stikstofbinding gepaard zou gaan. Hoofdzaak blijft echter het feit, dat indien in de knolletjes stikstofbinding zou plaats hebben, welke ons kon ontgaan zijn, de daarbij betrokken hoeveelheid zeker zeer gering zou moeten wezen. Wanneer men nu bedenkt, hoe moeilijk het is, om bijvoorbeeld van een *Acacia* enkele grammen knolletjes te verzamelen dan wordt het duidelijk, dat indien dit materiaal voor een zoo grooten boom van eenige beteekenis zijn zal, het stikstofbindende vermogen daarvan verbaasd groot zal moeten zijn. Daar



de proeven nu echter leeren, dat de knolletjes uit het genoemde oogpunt volkomen of bijna volkomen inactief zijn, kan aan een zoodanige beteekenis daarvan voor de stikstofvoeding niet gedacht worden, terwijl de stikstofbinding door dezen boom even zeker is als voor lupine en serradella. Op grond van het voorafgaande kan de stikstofvoeding dus niet anders dan in een zeer indirekt verband staan met de bakteriën der knolletjes. Het komt mij voor, dat dit verband alleen aantoonbaar is bij de kruidachtige soorten en bij de kiemplanten der heesters en boomen onder de Papilionaceën, maar dat het bij de volwassen boomen zooals *Robinia pseudo-acacia* in het geheel niet aanwezig is.

Ook bij struiken, zooals de bezemstruik (*Sarothamnus vulgaris*), *Spartium scoparium*, *Genista pilosa* en *Genista anglica* is in volwassen toestand het getal knolletjes zoo gering, hun volume zoo onbeduidend tegenover dat der geheele plant, dat zelfs indien de knolletjes in staat waren een weinig vrije stikstof te assimileeren, hun geringe activiteit daaraan alle beteekenis zou ontneemen.

Van het bijzondere gedrag der Papilionaceën kan de tegenwoordig algemeen aangenomen verklaring dus niet juist zijn. Nieuwe proeven vooral met *Phaseolus* zijn wenschelijk.

Uit het voorafgaande blijkt het volgende:

Bij vele *Papilionaceën*, die uitmunten door stikstofrijkdom, ook bij kultuur in mediën, die geen stikstofverbindingen bevatten, is aantal en volume der knolletjes zoo klein, dat binding van vrije stikstof daarin voor de plant alleen dan iets zou beteekenen, als de intensiteit van dit proces fabelachtig groot ware.

Het is echter niet gelukt gazometrisch iets van stikstofbinding in de knolletjes te bemerken.

De *Papilionaceën*bacteriën binden in kultuurvloeistoffen en in plaatkulturen de vrije stikstof ook niet. De tegenovergestelde opgaven in de leerboeken der plantenphysiologie zijn onjuist.

**Physiologie.** — De Heer ELJKMAN doet, mede namens Dr. D. J. HULSHOFF POL, een mededeeling over: „*Dierproeven met Regeerings-bruinbrood en wittebrood.*”

In den laatsten tijd is in verband met de voedselschaarschte allerwege de onde vraag weder naar voren gekomen, of het niet beter is, in stede van wittebrood, brood van ongebuild meel te bakken. Door het builen toch gaat, al naar den graad van uitmaling, 20—30 % van het graau voor directe menschelijke voeding verloren. Vooral door de nieuwere maaltechniek is men in staat een zeer volledige scheiding te maken tusschen de bloem, welke de bestanddeelen van het kiemwit bevat, en de zemelen, welke uit de schildeelen en de kiempjes van de graankorrel bestaan.

De onder leeken meest gangbare meening, dat het bruine brood voedzamer is dan het wittebrood, grondt zich hoofdzakelijk daarop, dat het eerste bij gelijke hoeveelheid een sterker en langer durend gevoel van verzadiging geeft. Hoewel deze eigenschap van het bruine brood niet mag onderschat worden, behoeft het toch geen betoog, dat zij geen maatstaf kan zijn voor de beoordeeling van het gehalte aan voedingsstoffen. De zemelen onderscheiden zich van de bloem door een geringer gehalte aan zetmeel en een hooger gehalte aan voedingszouten, vet en eiwit, maar ook aan voor den mensch zoo goed als onverteerbare cellulose. De laatste is tevens oorzaak dat de voedingsstoffen van de zemelen, als zijnde voor een groot deel binnen dikke celwanden opgesloten, door het spijsverterings-apparaat van den mensch slecht gëutiliseerd worden. Op dien grond beschouwen velen de zemelen als voor den mensch onnutte, ja schadelijke ballast en achten het beter dat alleen de bloem tot brood gebakken en de zemelen aan het vee gegeven worden, hetwelk de cellulose wel kan verteren en ons de voedingsstoffen van de zemelen in den vorm van vleesch en zuivelproducten teruglevert. Anderen hebben er daartegenover op gewezen dat die omweg, door het lichaam van de koe, ook met groot verlies gepaard gaat en dat, als men de rekening opmaakt, het blijkt dat de mensch uit dezelfde hoeveelheid tarwe in den vorm van bruinbrood, ondanks de mindere verteerbaarheid hiervan, meer voedsel haalt dan uit het wittebrood.

De geheele vraag is in een nieuw licht verschenen, sedert gebleken is dat in de zemelen, behalve de reeds genoemde voedingsstoffen,

eigenaardige stoffen voorkomen, welke in de bloem zoo goed als geheel ontbreken en voor de voeding van groote beteekenis zijn, ja daarin niet gemist kunnen worden, zal het dierlijk lichaam gezond blijven en gedijen (zgn. accessorische voedingsstoffen of vitaminen).

In dit verband moge verwezen worden naar een mededeeling, vóór ruim 20 jaar door mij hier gedaan, over een met ontarding der peripherische zenuwen en motiliteitsstoornissen gepaard gaande hoenderziekte (polyneuritis gallinarum), welke ontstond bij voeding met gepelde rijst en, tenzij de voeding werd veranderd, meestal in enkele dagen doodelijk afliep. Werd de rijst ongepeld gegeven of werden de zemelen weder bij de gepelde rijst gevoegd, dan kon de ziekte worden voorkomen en de reeds uitgebroken ziekte weder worden genezen. Het bleek dat in de rijst-zemelen stoffen aanwezig zijn, welke, aangezien zij diffusibel zijn, gemakkelijk daar met water kunnen worden uitgetrokken en waaraan dezelfde beschuttende en geneeskracht eigen is als aan de zemelen zelven.

Deze hoenderziekte, welke ook bij andere vogels (duiven, rijst-vogeltjes) op de beschreven wijze kan worden opgewekt, vertoont veel punten van overeenkomst met de beri-beri van den mensch en het is door de onderzoekingen van VORDERMAN en vele anderen na hem gebleken dat hetgeen de studie van de eerste heeft aan het licht gebracht, in menig opzicht ook op de laatste van toepassing is.

Inzonderheid dient er op te worden gewezen dat, wat met betrekking tot de rijst werd gezegd, ook voor de andere graansoorten geldt. Hoenders krijgen de ziekte bij voeding met gebuild meel, daarentegen niet of bij uitzondering bij voeding met de geheele korrel of ongebuild meel. In overeenstemming hiermede is dat beri-beri niet alleen optreedt, daar waar gepelde rijst de hoofdvoeding uitmaakt, maar ook is waargenomen onder een bevolking, die hoofdzakelijk van wittebrood leefde (LITTLE).

Dat ook in ons land beri-beri kan ontstaan, bewijzen de gevallen onlangs onder de inlandsche schepelingen van de Rotterdamse Lloyd voorgekomen, welke door KOOLEMANS BEYNEN zijn beschreven. Ook zij herinnert aan de zgn. scheepsberi-beri, een betrekkelijk lichten vorm der ziekte, welke met name op Noorsche zeeschepen van tijd tot tijd is voorgekomen en evenzoo op goede gronden aan een te eenzijdige, vitamine-arme voeding wordt toegeschreven. Niet onwaarschijnlijk ook zijn de hier en daar sporadisch voorkomende gevallen van polyneuritis bij den mensch, voor een deel althans, aan beri-beri verwant.

Gelukkig zijn de accessorische voedingsstoffen, welke hier een rol spelen, nog in tal van andere voedingsmiddelen voorhanden, zooals

in erwten en boonen, in aardappelen, in vleesch, in eidooier e. a. m. Men heeft dus, wanneer ten minste spijsen als tafelijst en wittebrood voor den mensch niet den hoofdschotel vormen, niet aanstonds voor het uitbreken van beri-beri te vreezen. Evenwel wanneer men bedenkt dat, zooals het medegedeelde over vleesch leert, de hier in aanmerking komende vitaminen een normaal bestanddeel van het dierlijk lichaam nitmaken, daarin echter niet gevormd worden, maar als zoodanig aan het voedsel moeten worden ontleend, is het toch waarschijnlijk te achten dat, vooral in tijden van voedselschaarschte, een voedsel, hetwelk arm daaraan is, schade moet doen aan de gezondheid, ook al komt het niet tot een duidelijk gedefinieerd ziek zijn.

Vergelijkende proeven met bruin- en wittebrood zijn herhaaldelijk genomen, ook reeds in een tijd, toen van vitaminen nog geen sprake was. Reeds drie kwart eeuw geleden zag MAGENDIE een hond, die uitsluitend met wittebrood gevoed werd, vermageren en verzwakken en na 40 dagen te gronde gaan; een andere hond, die zemelenbrood kreeg, bleef gezond. Soortgelijke uitkomsten zijn onlangs in HOFMEISTER's laboratorium met muizen verkregen. Tegen de bewijskracht van zoodanige proeven kan men aanvoeren, dat de proefdieren het wittebrood veel spoediger weigeren te eten dan het bruine brood en dus feitelijk verhongeren. Wie intusschen in deze aan het dierlijk instinct waarde hecht, zal ook aan dit verschijnsel niet alle betekenis ontzeggen.

Wij gaven de voorkeur aan proeven op hoenders, in de eerste plaats, omdat zij het duidelijkst op vitamine-arm voedsel reageeren met het typische ziektebeeld der polyneuritis en niet onder vage verschijnselen te gronde gaan, en in de tweede plaats, omdat zij, wanneer de eetlust gaat kwijnen, gemakkelijk kunstmatig kunnen worden gevoederd. Het zgn. stoppen is een methode, welke ook in de hoenderparken in practijk wordt gebracht. Belangrijke vermagering kan op die wijze bij overigens goede voeding worden voorkomen tot op het tijdstip, dat de eerste aanduiding der ziekte, atonie van den spierrok van den krop, zich openbaart. Deze heeft ten gevolge dat zich het genoemde orgaan slechts traag ontledigt, zoodat het gewone dagelijksche rantsoen niet kan worden verwerkt. De kenmerkende motiliteitsstoornissen aan de onderste extremiteiten, welke zoo levendig herinneren aan die bij de beri-beri, volgen gewoonlijk eerst eenige dagen, soms pas weken later. In verband hiermede mag nog worden opgemerkt, dat de hoenders evenmin in staat zijn om de cellulose der zemelen te verteren als de mensch. De dikke wanden van de cellen der z.g.n. aleuronlaag, waarin

voornamelijk het eiwit en vet besloten zijn, worden in hun spijsverteringskanaal niet aangetast. De vitaminen echter laten zich, zooals reeds gezegd, gemakkelijk aan de zemelen onttrekken.

Het meel, waaruit het regeeringsbrood gebakken was, bestond voor het wittebrood uit 60 % tarwe- en (of) roggebloem, 10 % Amerikaansch bloem en 30 % aardappelmeel en voor het bruine brood uit 70 % ongebuïld tarwe- en (of) roggemeel, 25 % aardappelmeel en 5 % gries en (of) grind. Het aardappelmeel is een te zuiver en daardoor zeer eenzijdig voedsel. De andere voedende bestanddeelen van den aardappel — eiwit, zouten en ook de vitaminen — zijn bij de bereiding te loor gegaan. Zij verpesten onze open wateren. Veel rationeeler zou het dan ook geweest zijn, in stede van aardappelmeel, poeder van gedroogde aardappelen als strekmiddel voor broodmeel te gebruiken. Aan den anderen kant geeft gist een verhooging van het vitaminegehalte; zij is ten opzichte van de polyneuritis een zeer goed voorbehoed- en geneesmiddel. Een gunstige omstandigheid is daarbij dat bij het bakken de inwendige temperatuur van het deeg niet of nauwelijks boven 100° C. stijgt. Zooals GRIJNS voor de rijst aantoonde en door mij ook voor andere granen bevestigd werd, worden eerst bij aanzienlijk hooger temperaturen de vitaminen door vochtige hitte vernietigd.

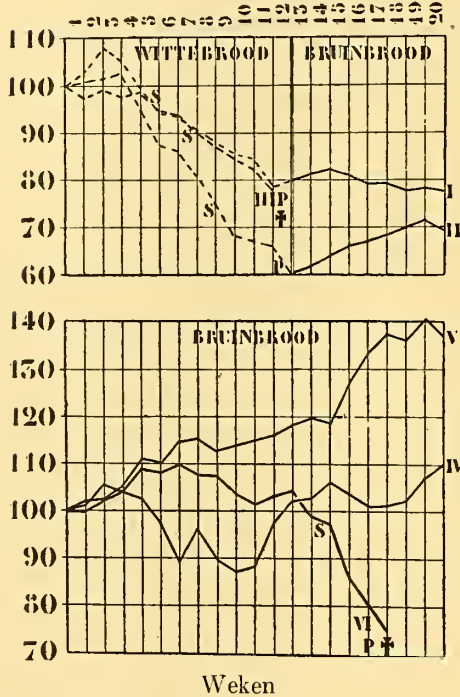
Aan de voederingsproeven met bruin- en wittebrood zijn door Dr. HULSHOFF POL in mijn laboratorium twee stel, ieder van drie hoenders, onderworpen, jonge, krachtige dieren, alle van ongeveer gelijken leeftijd (circa twee jaar) en gewicht. De best gevoede werden voor de wittebroodproef gekozen; hun lichaamsgewicht bedroeg gemiddeld 1550 gram, dat van de bruinbrood-hoenders 1400 gram. Het dagelijksch broodrantsoen woog circa 100 gram.

De uitkomsten der proeven zijn in de figuur weergegeven. Met *S* wordt aangeduid het tijdstip, dat met stoppen begonnen werd, met *P* het nitbreken van de typische verschijnselen der polyneuritis (gangstoornissen). Voor een juistere vergelijking zijn de veranderingen van het lichaamsgewicht niet in absolute maat, maar in procenten van het aanvankelijk gewicht nitgedrukt.

Beschouwt men eerst de proeven met wittebrood, dan blijkt dat het lichaamsgewicht al zeer spoedig, ondanks nog goeden eetlust, begon te dalen, wat zich voortzette, ook nadat tot stoppen was overgegaan. Einde van de 11e week werd de eerste kip (no. III) ziek aan polyneuritis en ging na enkele dagen te gronde. Een week later volgde no. II, die van nu af bruinbrood kreeg, evenals no. I, die wel vermagerd maar nog niet duidelijk ziek was.

Onder deze voeding genas het zieke dier en de daling van het lichaamsgewicht kwam bij beiden tot staan.

Verandering van het Lich. gew.  
in pCt. van het aanv. gew.



Terwijl bij voeding met gepelde rijst de hoenders meestal binnen 5 weken, niet zelden zelfs reeds tegen het einde der 3<sup>de</sup> week polyneuritis krijgen, duurde dit bij wittebroodvoeding aanzienlijk langer. Niet onwaarschijnlijk is dit aan een beschuttende werking van de bakkersgist te danken.

Aanmerkelijk gunstiger waren de uitkomsten van de bruinbroodproeven. No. IV en V bleven tot aan het einde der proef, welke 20 weken duurde, volmaakt gezond en frisch en namen, de laatste zelfs met een aanzienlijk bedrag, in gewicht toe, zoodat, hoewel de eetlust, gelijk bij elke eentonige voeding, wat verminderde, het niet noodig geacht werd, tot stoppen over te gaan.

Anders ging het met no. VI. Deze bleef gedurende de eerste 12 weken boven het aanvankelijk gewicht, maar nam daarop voortdurend in gewicht af, zonder dat stoppen daartegen mocht baten, werd bloedarm, vertoonde in de 17<sup>e</sup> week het typische ziektebeeld van polyneuritis en stierf enkele dagen daarna.

Dat bij dezelfde voeding het eene dier goed gedijt en het andere ziek wordt, is niet zonder analogie. Met individueele verschillen rekent ieder bioloog. Blijkbaar gelden zij ook ten aanzien van de behoeften aan vitaminen. GRIJNS zag zelfs de ziekte een enkele maal optreden na langdurige voeding met ongepelde rijst, hoewel men daarmee de reeds aangetaste dieren veelal kan genezen. Ook bijkomende omstandigheden, zooals intercurrente ziekten, verzwakkende invloeden kunnen daarbij een rol spelen, velen achten bij beri-beri een infectie als nevenoorzaak zelfs een *conditio sine qua non*.

Resumeerende, mag men het wel buiten twijfel achten dat het bruine brood betere uitkomsten geeft dan het witte brood. In verband met het in den aanhef gezegde meenen wij hetzelfde ook te mogen beweren met het oog op de voeding van den mensch. Het nadeel

van de gedeeltelijke onverteerbaarheid der zemelen mag niet overwegend geacht worden. De techniek kent trouwens al middelen om daarin verbetering te brengen, hetzij door fijne verdeeling der zemelen langs den drogen of den natten weg, of door verwijdering der grovere en minst voedzame, buitenste schildeelen van de graankorrel. Ook hier te lande behoort daarop, meer dan tot dusverre het geval was, het streven gericht te worden. De zemelen zijn het door de natuur als aangewezen streekmiddel voor de bloem; het is niet rationeel, ze daarvan te scheiden en door een eenzijdig voedingsmiddel als aardappelmeel te vervangen. Het laatste komt eerst in de tweede plaats voor bijmenging in aanmerking en dan liefst in den vorm van aardappelpoeder. Het gebruik van wittebrood dient zooveel mogelijk beperkt te worden.

Wat voor voedsel van den mensch geschikt, ja verkieselijk is, mag in tijden van voedselschaarschte niet aan het vee worden gegeven.

*Hygiënisch Instituut der Universiteit Utrecht.*

**Mechanica.** De Heer DE SITTER biedt eene mededeeling aan :

„*Nadere opmerkingen omtrent de oplossingen der veldvergelijkingen van Einstein's gravitatie-theorie*”.

1. EINSTEIN heeft onlangs <sup>1)</sup> den eisch mitgesproken, dat eene oplossing der veldvergelijkingen

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \kappa g_{\mu\nu} T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

om voor de werkelijke fysieke wereld aannemelijk te zijn, nergens „in het eindige” discontinuïteiten mag vertoonen, Speciaal moet de determinant  $g$  voor alle punten in het eindige van nul verschillen. Aan dezen eisch voldoet, zooals de Heer EINSTEIN terecht opmerkt, en zooals ook uit mijne mededeelingen duidelijk blijkt, mijne oplossing  $B$  niet. Nu is deze eisch, zooals zij door EINSTEIN wordt geformuleerd, een *philosophische*, of *metaphysische* eisch. Om hem tot een *physischen* te maken moeten de woorden: „alle punten in het eindige” vervangen worden door: „alle *physisch bereikbare* punten”. Aan den zoo gestelden eisch echter voldoet mijne solutie  $B$  wel. De discontinuïteit treedt namelijk op voor :

$$r = r_1 = \frac{1}{2} \pi R.$$

Dit is ruimtelijk in het eindige, doch *physisch* onbereikbaar, zooals ik reeds aangetoond heb <sup>2)</sup>. Immers de tijd, die een lichtsignaal, en a fortiori een bewegend materieel punt, behoeft om van een willekeurig punt  $r, \psi, \vartheta$  naar een punt  $r_1, \psi_1, \vartheta_1$  ( $\psi_1$  en  $\vartheta_1$  willekeurig) te komen, of omgekeerd, is oneindig groot. Omtrent de singulariteit bij  $r = r_1$  kan dus *physisch* nooit iets blijken, of, zooals ik het t. a. p. mitdrukte, de uit deze singulariteit voortvloeiende paradoxale verschijnselen, of liever afwezigheid van verschijnselen, kunnen alleen plaats hebben vóór het begin, of na het einde van de eenwigheid.

2. Een opmerking, die in den grond op hetzelfde neerkomt als die van EINSTEIN, is gemaakt door Prof. FELIX KLEIN, die mij schrijft (19 April 1918): „Denken Sie sich die ganze vierdimensionale Welt van Weltlinien durchfurcht. Nun scheint es doch bei allen Ansätzen

<sup>1)</sup> *Kritisches zu einer von Hrn DE SITTER gegebenen Lösung der Gravitationsgleichungen*, Sitzungsber. Berlin, 7 Maart 1918, blz. 270.

<sup>2)</sup> *On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences, third paper*, Monthly Notices of the R. A. S. Vol. LXXVIII, blz. 17—18.

*Over de kromming der ruimte*, deze Verslagen, Vol. XXVI, blz. 228.



im EINSTEIN'schen Sinne eine notwendige physikalische Voraussetzung zu sein, dass man diese Linien, so wie sie sich kontinuierlich an einander reihen, mit einem positiven Richtungssinn versehen kann (der von der „Vergangenheit“ zur „Zukunft“ führt). Dies ist nun im Falle *B* nicht möglich. Lege ich nämlich einer ersten Linie nach Belieben einen positiven Sinn bei und overtrage diesen unter Beachtung der Continuität auf die Nachbarlinien, so komme ich schliesslich, wegen der Zusammenhangsverhältnisse des Elliptischen Raumes, zur Ausgangsline mit umgekehrtem Sinn zurück. Es entspricht das dem Umstande, dass die Ebene der elliptischen (wie der projektivischen) Geometrie eine *einseitige* Fläche ist, bei der sich die Indicatrix  $\curvearrowright$ , die ich um irgend einen Punkt der Ebene herum legen mag, wenn ich sie längs einer durch den Punkt laufenden Geraden verschiebe, bei Rückkehr zum Ausgangspunkte umgekehrt<sup>o</sup> hat:  $\curvearrowleft$ . Meine Bemerkung in Math. Annalen 37, p. 557—58: dass die Uebertragung der Schering'schen Potentialtheorie auf den Fall der elliptischen Ebene unstatthaft ist, ruht genau auf demselben Umstande”.

De tegenwerping van Prof. KLEIN is ongetwijfeld juist: men zal in het beginpunt terugkeerende inderdaad de positieve richting omgekeerd vinden, echter alleen wanneer men zich bewogen heeft *langs een rechte lijn*, of tenminste langs een lijn, *die de poollijn van het beginpunt snijdt*. Deze „beweging” nu is weliswaar mathematisch denkbaar, doch, om dezelfde reden als boven, *physisch onuitvoerbaar*. Beweegt men zich langs een willekeurige gesloten kromme, die de poollijn van geen zijner punten snijdt, d.i. voert men een physisch uitvoerbaren kringloop uit, dan is na terugkeer in het uitgangspunt de positieve richting dezelfde gebleven.

In mijne vorige mededeeling <sup>1)</sup> wees ik er op dat, in de spherische ruimte, in het tegenpunt de potentiaal  $g_{44} - 1$  negatief oneindig wordt. Ik trok daaruit de gevolgtrekking dat voor de voorstelling der werkelijke physische wereld de elliptische ruimte de voorkeur verdient boven de spherische. Prof. KLEIN maakt in de aan het eind van zijn brief geciteerde verhandeling van 1890 reeds dezelfde opmerking. Hij wijst er echter op, dat in de elliptische ruimte het teeken van de potentiaal dubbelzinnig zou zijn. Dit zou inderdaad het geval zijn, als de bovenbedoelde kringbeweging mogelijk was. Nu zij dat niet is, hebben wij het recht uit de twee teekens er één te kiezen, zonder dat de mogelijkheid bestaat, dat ooit physisch uitvoerbare bewegingen of andere verschijnselen tot tegenspraak of dubbelzinnigheid zullen leiden.

<sup>1)</sup> *Over de kromming der ruimte*, deze Verslagen, deel XXVI, blz. 228.

Ik maak van deze gelegenheid gebruik, om er aan te herinneren dat Prof. KLEIN de eerste geweest is, die de aandacht heeft gevestigd op de elliptische ruimte, en haar verhouding tot en verschil met de spherische, en in het algemeen de verschillende mogelijkheden der niet-Euclidische meetkunde heeft doorzocht en tot klaarheid gebracht <sup>1)</sup>. Men behoeft in het Erlanger programma van 1872 slechts de woorden „Invariantentheorie met betrekking tot een bepaalde groep” te vervangen door „Relativiteitstheorie”, om in te zien dat KLEIN’s algemeene schema al de in de verschillende stadiën van ontwikkeling der moderne physische theorieën optredende meetkundige voorstellingen omvat.

3. Wanneer men uitgaat van de veronderstelling, dat het gravitatieveld zoo is, dat het mogelijk is zoodanige coördinaten in te voeren, dat de uitdrukking voor het lijn-element wordt

$$ds^2 = -a dr^2 - b (d\psi^2 + \sin^2 \psi d\vartheta^2) + f dt^2, \quad \dots \quad (2)$$

dan kan men  $r$  den „radius-vector” en  $t$  den „tijd” noemen. Stelt men nu nog de voorwaarde dat  $a$ ,  $b$ ,  $f$  functies moeten zijn van  $r$  alléén en niet van  $t$ ,  $\psi$  en  $\vartheta$ , dan zijn deze voorwaarden kort uit te drukken door te zeggen dat het gravitatieveld *statisch* en *isotroop* is. Dan is

$$d\sigma^2 = a dr^2 + b [d\psi^2 + \sin^2 \psi d\vartheta^2] \quad \dots \quad (3)$$

het ruimtelijke lijn-element, en men heeft dus

$$ds^2 = -d\sigma^2 + f dt^2 \quad \dots \quad (2')$$

Gaat men nu verder uit van de hypothese dat  $d\sigma^2$  het lijn-element is van een ruimte met constante kromming, dus

$$\left. \begin{aligned} r &= R \cdot \chi \\ d\sigma^2 &= R^2 \{ d\chi^2 + \sin^2 \chi [d\psi^2 + \sin^2 \psi d\vartheta^2] \}, \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (3')$$

dan reduceeren de veldvergelijkingen zich tot één vergelijking voor  $f$ , waarvan de oplossingen  $A$  en  $B$  zijn

$$f = c^2 \quad \dots \quad (4A)$$

$$f = c^2 \cos^2 \chi \quad \dots \quad (4B)$$

Laat men de conditie van de isotropie vallen, doch behoudt men de conditie, dat het veld *statisch* moet zijn, dan kan de  $f$  een functie van  $r$ ,  $\psi$  en  $\vartheta$  zijn. Nu heeft de Heer LEVI CIVITA voor dit geval de algemeene oplossing van de differentiaal-vergelijking voor

<sup>1)</sup> Ueber die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie, Math. Annalen, Band 4 en 6 (1871 en 1872).

Programm zum Eintritt in die philosophische Facultät, Erlangen 1872, weder afgedrukt Math. Annalen, Band 43, blz. 63.

$f$  gegeven.<sup>1)</sup> Hij gaat daarbij niet uit van de vergelijkingen (1), doch van de oorspronkelijke vergelijkingen van EINSTEIN, waarin  $\lambda = 0$  was. Het is evenwel gemakkelijk, zijn bewijs uit te breiden tot het algemeene geval. De vergelijking (11') van LEVI CIVITA [l. c. blz. 530] komt dan in de plaats van (11) [blz. 526], d.i. men moet  $K + \kappa\rho$  vervangen door  $K + \kappa\rho - \lambda$ . De vergelijking (13) blijft onveranderd, doch men heeft nu  $K^* = K - \frac{1}{2}(3K + \kappa\rho - \lambda)$ , en men heeft weer  $K^* = K$ , zoodat in de plaats van (14) komt  $3K + \kappa\rho - \lambda = 0$ , maar de algemeene solutie van (13) blijft geheel dezelfde. Deze solutie, in mijn notatie uitgedrukt, is

$$\sqrt{f} = a_0 \cos \chi + a_1 \sin \chi \sin \beta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

waar  $\beta$  de „breedte” is boven een vlak, dat ten opzichte van het vlak  $\psi = 0$  de helling  $\varepsilon$  en den knoop  $\mathfrak{D}_0$  heeft, terwijl de constanten  $b_0 \dots b_3$  van LEVI CIVITA zijn.

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 R \sin \varepsilon \sin \mathfrak{D}_0, \\ b_0 &= -a_0, \quad b_2 = -a_1 R \sin \varepsilon \cos \mathfrak{D}_0, \\ b_3 &= a_1 R \cos \varepsilon. \end{aligned}$$

De conditie der isotropie is nu  $a_1 = 0$ . Voert men deze in, dan gaat (5) over in (4 B), en het blijkt dat mijn solutie  $B$  de *algemeene solutie* is voor het geval van een isotroop statisch gravitatieveld zonder materie.

---

<sup>1)</sup> *Realta fisica di alcuni spazi normali del Bianchi*, Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, Vol. XXVI, blz. 519 (Mei 1917).

**Sterrekunde.** — De Heer DE SITTER biedt eene mededeeling aan:  
 „Schets eener nieuwe theorie der Satellieten van Jupiter”. II.

4. *De variatie-vergelijkingen.*

De integratie-constanten in de intermediaire baan voldoen aan de voorwaarden (18) en (19) en aan de symmetrie-condities (16). Bovendien zijn de middelbare bewegingen  $c_i - \alpha$  gegeven. Evenwel zou men de numerieke waarden van  $n_2 - n_1 = \frac{d\tau}{dt}$ ,  $\alpha$  en  $c_1$  willekeurig kunnen variëren zonder aan de intermediaire baan iets essentiëls te veranderen.

In de werkelijkheid voldoen de integratie constanten niet volkomen aan deze voorwaarden. Stel dus in het algemeen, inplaats van (17) en (20):

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i &= (c_i - \alpha) \tau + \pi_{i0} + \omega_i, & r_i &= r_i, \\ \pi_i &= -\alpha \tau + \pi_{i0} + g_i, & \eta_i &= \bar{\eta}_i + \delta \eta_i \end{aligned} \right\} . \quad (21)$$

In plaats van  $g_i$  en  $\delta \eta_i$  voer ik in de grootheden  $h_i$  en  $k_i$ , die bepaald worden door

$$\left. \begin{aligned} \eta_i \cos g_i &= \bar{\eta}_i + h_i \\ \eta_i \sin g_i &= k_i \end{aligned} \right\} . . . . . \quad (22)$$

Men heeft dan de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \frac{dh_i}{d\tau} &= -\alpha k_i - (1 + r_i)^{\frac{1}{3}} \frac{\partial R_i}{\partial k_i} - \frac{1}{2} (1 + r_i)^{\frac{1}{3}} (\bar{\eta}_i + h_i) \frac{\partial R_i}{\partial \lambda_i}, \\ \frac{dk_i}{d\tau} &= \alpha (\bar{\eta}_i + h_i) + (1 + r_i)^{\frac{1}{3}} \frac{\partial R_i}{\partial h_i} - \frac{1}{2} (1 + r_i)^{\frac{1}{3}} k_i \frac{\partial R_i}{\partial \lambda_i}, \\ \frac{d\omega_i}{d\tau} &= (c_i - \alpha) r_i - 2 (1 + r_i)^{\frac{1}{3}} a_i \frac{\partial R_i}{\partial a_i} + \frac{1}{2} (1 + r_i)^{\frac{1}{3}} \eta_i \frac{\partial R_i}{\partial \eta_i}, \\ \frac{dr_i}{d\tau} &= -3 (1 + r_i)^{\frac{1}{3}} \frac{\partial R_i}{\partial \lambda_i}. \end{aligned}$$

Beperkt men zich nog steeds tot het niet-periodieke deel  $[R_i]$  van de storingsfunctie, en verwaarloost men de quadraten en producten van  $h_i, k_i, \omega_i, r_i$ , dan worden deze vergelijkingen van den vorm

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh_i}{d\tau} &= \sum_j a_{ij} k_j + \sum_j b_{ij} \omega_j, \\ \frac{dk_i}{d\tau} &= - \sum_j a'_{ij} h_j - \sum_j b'_{ij} v_j, \\ \frac{dr_i}{d\tau} &= \sum_j d_{ij} k_j + \sum_j e_{ij} \omega_j, \\ \frac{d\omega_i}{d\tau} &= - \sum_j d'_{ij} h_j - \sum_j e'_{ij} v_j. \end{aligned} \right\} \dots \dots (23)$$

De rechter leden hebben geen constanten term. Voor  $h_i$  en  $v_i$  volgt dit uit de symmetrie-voorwaarden (16), daar deze termen alleen sinussen bevatten. Voor  $k_i$  en  $\omega_i$  volgt het uit de condities (18) en (19).

Aan de vergelijkingen (23) wordt voldaan door

$$\left. \begin{aligned} h_i &= \sum_q c_{iq} \varepsilon_q \cos \varphi_q, & v_i &= \sum_q c'''_{iq} \varepsilon_q \cos \varphi_q, \\ k_i &= \sum_q c'_{iq} \varepsilon_q \sin \varphi_q, & \omega_i &= \sum_q c''_{iq} \varepsilon_q \sin \varphi_q. \end{aligned} \right\} \dots \dots (24)$$

$$\varphi_q = \beta_q \tau + \varpi_{q0}$$

Substitueert men (24) in (23) dan blijkt door gelijkstelling der coëfficiënten, dat  $c_{iq}$ ,  $c'_{iq}$ ,  $c''_{iq}$ ,  $c'''_{iq}$ ,  $\beta_q$  moeten voldoen aan de betrekkingen :

$$\left. \begin{aligned} c_{iq} \beta_q + \sum_j a_{ij} c'_{jq} + \sum_j b_{ij} c''_{jq} &= 0, \\ c'_{iq} \beta_q + \sum_j a'_{ij} c_{jq} + \sum_j b'_{ij} c'''_{jq} &= 0, \\ c''_{iq} \beta_q + \sum_j d'_{ij} c_{jq} + \sum_j e'_{ij} c'''_{jq} &= 0, \\ c'''_{iq} \beta_q + \sum_j d_{ij} c'_{jq} + \sum_j e_{ij} c''_{jq} &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots (25)$$

Zal het mogelijk zijn uit deze vergelijkingen  $c_{iq}$ ,  $c'_{iq} \dots$  te bepalen, dan moet hun determinant nul zijn. Dit geeft een vergelijking van den 16<sup>en</sup> graad in  $\beta_q$ . Bij elke wortel  $\beta_q$  behoort een stel  $c_{iq}, \dots$ . Evenwel zijn er niet 16 verschillende waarden van  $\beta_q$ . Ten eerste is het duidelijk dat als men  $\varphi_q$  in  $-\varphi_q$ , en dus  $\beta_q$  in  $-\beta_q$  verandert, en tegelijkertijd  $c'_{iq}$  en  $c''_{iq}$  door  $-c'_{iq}$  en  $-c''_{iq}$  vervangt, de vergelijkingen (25) voldaan blijven, terwijl er aan (24) niets verandert. Derhalve, als er een wortel  $\beta_q$  is, is er ook een wortel  $-\beta_q$ .

Ten tweede zijn er zes wortels  $\beta = 0$ . Elke term in de vergelijkingen (24), d. i. elke waarde van  $\beta$ , stelt een schommeling om de intermediaire baan voor, met de periode  $2\pi/\beta$ . Bij een kleine

verandering van de beginwaarden, d. i. een kleine deviatie van de intermediaire baan, zullen dus de posities der satellieten om die in de intermediaire baan schommelen. Is er een wortel  $\beta = 0$ , dan is de overeenkomstige term geen schommeling, maar een constante correctie tot de integratieconstanten, die het karakter der beweging niet verandert. Nu zijn er zes zulke deviaties, d. i. zes veranderingen van integratie-constanten, aan te geven, waardoor de beweging niet essentieel verandert. Deze zijn:

1°. Verandering van het nulpunt van telling van lengte en tijd. Dit verandert de beweging in het geheel niet, en daar het twee integratie-constanten betreft, correspondeert het met twee wortels  $\beta = 0$ .

2°. Verandering van  $n_3 - n_2 = \frac{d\tau}{dt}$  en  $\alpha$ . Dit verandert weliswaar de beweging der drie binnenste satellieten, doch alleen in dien zin dat een andere intermediaire baan, van geheel hetzelfde karakter, in de plaats komt van de eerste. Men kan ook zeggen dat de intermediaire baan niet verandert, maar met behulp van een andere eenheid van tijd en lineaire lengte (of massa) wordt beschreven.

3°. Verandering van  $c_4$ , b. v. in  $c_4 + \delta c_4$ . Men kan dan  $c_4 + \delta c_4$  weer  $c_4$  noemen zonder dat er iets essentieels veranderd is.

4°. Verandering van  $\omega_4$ . In de intermediaire baan is  $\omega_4 = 0$  aangenomen. Dit is echter kunstmatig: er wordt hierbij een kleine grootte verwaarloosd, en of deze verwaarloosde grootte iets gevarieerd wordt doet klaarblijkelijk aan het karakter van de beweging niets af. Dit openbaart zich ook daarin, dat alle coëfficiënten  $b_{i4}$  en  $e_{i4}$  nul zijn, zooals bij uitwerking blijkt.

Het moet derhalve mogelijk zijn de vergelijking van den 16<sup>en</sup> graad in  $\beta$  te transformeeren tot eene vergelijking van den 5<sup>en</sup> graad in  $\beta^2$ . Dit wordt aldus bereikt.

Differentiatie van de tweede en vierde vergelijking van (23) geeft

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 k_i}{d\tau^2} + \sum_j A_{ij} k_j + \sum_j B_{ij} \omega_j &= 0, \\ \frac{d^2 \omega_i}{d\tau^2} + \sum_j C_{ij} k_j + \sum_j D_{ij} \omega_j &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots (26)$$

Hieruit vindt men voor  $c'_{iq}$ ,  $c''_{iq}$  en  $\beta^2_q$  de condities

$$\left. \begin{aligned} c'_{iq} \beta^2_q - \sum_j A_{ij} c'_{jq} - \sum_j B_{ij} c''_{jq} &= 0, \\ c''_{iq} \beta^2_q - \sum_j C_{ij} c'_{jq} - \sum_j D_{ij} c''_{jq} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots (27)$$

De determinant van deze vergelijkingen is

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} - \beta^2 & A_{12} & \dots & A_{14} & B_{11} & \dots & B_{14} \\ A_{21} & A_{22} - \beta^2 & \dots & A_{24} & B_{21} & \dots & B_{24} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{41} & A_{42} & \dots & A_{44} - \beta^2 & B_{41} & \dots & B_{44} \\ C_{11} & C_{12} & \dots & C_{14} & D_{11} - \beta^2 & \dots & D_{14} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{41} & C_{42} & \dots & C_{44} & D_{41} & \dots & D_{44} - \beta^2 \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad (28)$$

Nu kan men aantonen dat

$$\left. \begin{aligned} \bar{\eta}_1 A_{i1} + \bar{\eta}_2 A_{i2} + \bar{\eta}_3 A_{i3} + \bar{\eta}_4 A_{i4} + B_{i1} + B_{i2} + B_{i3} + B_{i4} &= 0, \\ 4 B_{i1} + 2 B_{i2} + B_{i3} &= 0, \\ B_{i4} &= 0, \end{aligned} \right\} (29)$$

en hetzelfde blijft waar als  $A_{ij}$  door  $C_{ij}$  en  $B_{ij}$  door  $D_{ij}$  wordt vervangen. Hieruit volgt dat de vergelijking  $\Delta = 0$ , die van den 8<sup>en</sup> graad in  $\beta^2$  is, drie wortels  $\beta^2 = 0$  heeft, en dus tot een vergelijking van den 5<sup>en</sup> graad is terug te brengen. Om dit aan te toonen is het noodig den bouw van de coëfficiënten  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  ... na te gaan. Dit zou hier te ver voeren, en voor het bewijs van (29) moge verwezen worden naar de uitvoerige publicatie, die spoedig elders zal verschijnen.

Er zijn dus 5 verschillende waarden van  $\beta^2_q$ . Bij elk hiervan behoort een stel waarden van  $c'_{iq}$  en  $c''_{iq}$ , die uit (27) bepaald worden, en van  $c_{iq}$  en  $c'''_{iq}$  die dan uit de eerste en laatste van (25) volgen.

De vier eerste elementen van de diagonaal van den determinant  $\Delta$  zijn benaderd

$$A_{ii} = \alpha^2.$$

Alle andere elementen hebben, evenals  $A_{ii} - \alpha^2$ , minstens één der satellieten-massa's of de grootheid  $J$  tot factor. Derhalve zijn vier der  $\beta_q$  zeer nabij gelijk aan  $\alpha$ , terwijl de vijfde veel kleiner is. Verwaarloost men de massa's en de afplatting van de planeet, dan blijven alleen deze vier over, en deze worden dan rigoureuus  $= \alpha$ . De beweging  $-\alpha\tau$  der perijovia van de intermediaire baan wordt dan door de variaties juist weer opgeheven, en, daar dan ook  $\bar{\eta}_i = 0$  is, dus de intermediaire baan cirkelvormig is, vindt men als gevarieerde baan vier ellipsen met de excentriciteiten  $\varepsilon_i$  en de stilstaande perijovia  $\varpi_{i0}$ , zooals ook van zelf spreekt.

Beschouwt men de integratie-constanten  $\varepsilon_i$  als grootheden van de eerste orde, evenals de geïnduceerde excentriciteiten <sup>1)</sup>  $\bar{\eta}_i$ , en stelt men

$$\varphi_i = \beta_i \tau + \varpi_{i0} = \alpha \tau + \varpi_i,$$

<sup>1)</sup> Uit (18) volgt dat  $\alpha \cdot \bar{\eta}_i$  van de tweede orde is, dus  $\bar{\eta}_i$  van de eerste.

dan blijkt de invloed van de variaties op den radiusvector en de lengte in de baan, tot de eerste orde nauwkenrig, te zijn:

$$\left. \begin{aligned} \delta r_i &= -\frac{2}{3} a_i \sum_q c''_{iq} \varepsilon_q \cos \varphi_q - a_i \sum_q \left\{ \frac{1}{2} (c_{iq} + c'_{iq}) \varepsilon_q \cos (\lambda_i - \varpi_q) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (c_{iq} - c'_{iq}) \varepsilon_q \cos (c_i \tau + \varphi_q) \right\}, \\ \delta w_i &= \sum_q c''_{iq} \varepsilon_q \sin \varphi_q + \sum_q \left\{ (c_{iq} + c'_{iq}) \varepsilon_q \sin (\lambda_i - \varpi_q) + \right. \\ &\quad \left. + (c_{iq} - c'_{iq}) \varepsilon_q \sin (c_i \tau + \varphi_q) \right\}. \end{aligned} \right\} (29)$$

In eerste benadering is  $a_{ii} = -\kappa$ , terwijl  $a_{ij}$  en  $b_{ij}$  van de tweede orde zijn. Daar ook met deze zelfde benadering voor  $q = 1 \dots 4$ ,  $\beta_q = \kappa$  is, volgt uit de eerste van de vergelijkingen (25) dat benaderd  $c_{iq} = c'_{iq}$ . Derhalve is  $c_{iq} - c'_{iq}$  van hoogere orde, en de laatste termen van de beide vergelijkingen (29) kunnen weggelaten worden. Verder zijn ook  $d_{ij}$  en  $e_{ij}$  minstens van de tweede orde, zoodat volgens de laatste vergelijking (25) ook  $c'''_{iq}$  van hoogere orde is dan  $c''_{iq}$  en  $c'_{iq}$ . De eerste term van  $\delta r_i$  kan derhalve in eerste approximatie eveneens weggelaten worden. De vergelijkingen (29) hebben dan geheel den vorm (6). Tevens blijkt hoe het komt, dat de ongelijkheden van de groepen II en III in den radius-vector zooveel kleiner zijn dan in de lengte.

### 5. Storingen.

Wij moeten nu nog rekening houden met het deel der storingsfunctie

$$R_i - [R_i],$$

dat termen bevat wier argument  $D$  evenredig met den tijd varieeren, dus  $D = E\tau$ . Wij zullen de theorie slechts in zeer groote trekken aangeven, en verwijzen voor details naar de uitvoerige publicatie, die spoedig elders zal verschijnen. Wij stellen, ter bekorting

$$h_i = x_i, \quad k_i = y_i, \quad v_i = x_{i+4}, \quad \omega_i = y_{i+4}.$$

De differentiaal-vergelijkingen worden dan van den vorm

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{d\tau} &= \sum_E a_{i,E} \sin E\tau + \sum_j \sum_E f_{i,j,E} \sin E\tau x_j + \sum_j \sum_E g_{i,j,E} \cos E\tau y_j, \\ \frac{dy_i}{d\tau} &= -\sum_E a'_{i,E} \cos E\tau - \sum_j \sum_E f'_{i,j,E} \cos E\tau x_j - \sum_j \sum_E g'_{i,j,E} \sin E\tau y_j, \end{aligned} \right\} (30)$$

waar nu  $i$  en  $j$  van 1 tot 8 loopen. De argumenten zijn van den vorm

$$D = E\tau = k\tau + k'c_4\tau,$$

waar  $k$  en  $k'$  alle geheele positieve en negatieve getallen, en nul, kunnen voorstellen. Beperkt men de sommen tot  $k = k' = 0$ , dan



gaan de vergelijkingen (30) over in (23). Men heeft dus b.v.

$$f_{i,j,0} = 0, \quad g_{i,j,0} = a_{i,j}, \quad g_{i,j+4,0} = b_{i,j} \text{ etc.}$$

Aan de vergelijkingen (30) kan worden voldaan door te stellen

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \sum_E A_{i,E} \cos E\tau + \sum_j \sum_E M_{i,j,E} \varepsilon_j \cos (q_j + E\tau), \\ y_i &= \sum_E A'_{i,E} \sin E\tau + \sum_j \sum_E M'_{i,j,E} \varepsilon_j \sin (q_j + E\tau), \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

waar

$$q_i = \beta_i \tau + \varpi_{i0}.$$

Door deze in (30) te substitueeren, en de coëfficiënten der sinus- en cosinussen van gelijke argumenten gelijk te stellen, krijgt men weer vergelijkingen ter bepaling van  $\beta_q$  en  $M_{i,q,E}$  en  $M'_{i,q,E}$ . Deze vergelijkingen zijn oneindig in aantal. De vergelijking ter bepaling van  $\beta_q$  wordt dus een oneindige determinant.

Evenwel is het duidelijk, dat als

$$\beta = \beta_q$$

een wortel hiervan is, dan ook alle getallen van den vorm

$$\beta' = \pm \beta_q \pm k \pm k' e_4 \quad (k, k' = -\infty \dots +\infty)$$

wortels zijn. Immers vervanging van  $\beta$  door  $\beta'$  verandert niets aan  $x_i$  en  $y_i$ , behalve dat de coëfficiënten der verschillende termen door een eenigszins verschillende notatie worden voorgesteld.

Het is niet moeilijk een oneindigen determinant te krijgen, die  $\beta^2$  geeft in plaats van  $\beta$ . Stelt men

$$P_{i,j,E} = \frac{1}{2} (M_{i,j,E} + M_{i,j,-E}),$$

$$P'_{i,j,E} = \frac{1}{2} (M_{i,j,E} - M_{i,j,-E}),$$

$$Q_{i,j,E} = \frac{1}{2} (M_{i,j,E} + M'_{i,j,-E}),$$

$$Q'_{i,j,E} = \frac{1}{2} (M_{i,j,E} - M'_{i,j,-E}),$$

dan worden de vergelijkingen, als men ter vereenvoudiging overal den index  $q$  in  $\beta_q$  en  $P_{i,q,E}$ ,  $P'_{i,q,E}$  etc. weglaat:

$$\left. \begin{aligned} \beta P_{i,E} + EP_{i,E} + \frac{1}{2} \sum_j \sum_F \{ (g_{i,j,F-E} + g_{i,j,F+E}) Q'_{j,F} - \\ - (f_{i,j,F-E} + f_{i,j,F+E}) P'_{j,F} \} = 0, \\ \beta P'_{i,E} + EP'_{i,E} + \frac{1}{2} \sum_j \sum_F \{ (g_{i,j,F-E} - g_{i,j,F+E}) Q_{j,F} - \\ - (f_{i,j,F-E} - f_{i,j,F+E}) P_{j,F} \} = 0, \\ \beta Q_{i,E} + EQ_{i,E} + \frac{1}{2} \sum_j \sum_F \{ (g'_{i,j,F-E} + g'_{i,j,F+E}) Q_{j,F} + \\ + (f'_{i,j,F-E} + f'_{i,j,F+E}) P_{j,F} \} = 0, \\ \beta Q'_{i,E} + EQ'_{i,E} + \frac{1}{2} \sum_j \sum_F \{ (g'_{i,j,F-E} - g'_{i,j,F+E}) Q'_{j,F} + \\ + (f'_{i,j,F-E} - f'_{i,j,F+E}) P'_{j,F} \} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Men behoeft deze vergelijkingen alleen te beschouwen voor positieve

waarden van  $E$ . Echter loopen de sommen over *alle* waarden van  $F$ , waarbij rekening gehouden moet worden met de gelijkheden

$$\begin{aligned} P_{i,F} &= P_{i,-F}, & Q_{i,F} &= -Q_{i,-F}, \\ P'_{i,F} &= -P'_{i,-F}, & Q'_{i,F} &= Q'_{i,-F}. \end{aligned}$$

Door de tweede en derde vergelijking van (32) met  $\beta$  te vermenvuldigen, en dan  $\beta P_{iE}$  en  $\beta Q_{iE}$  uit de eerste en vierde er in te substitueeren, krijgt men vergelijkingen, die alle  $P'_{iE}$  en  $Q'_{iE}$  bevatten. Deze vergelijkingen worden van den vorm

$$\left. \begin{aligned} (\beta^2 - E^2) Q'_{i,E} + \sum_j \sum_F G_{i,j,E,F} Q'_{j,F} + \sum_j \sum_F H_{i,j,E,F} P'_{j,F} \\ (\beta^2 - E^2) P'_{i,E} + \sum_j \sum_F G'_{i,j,E,F} Q'_{j,F} + \sum_j \sum_F H'_{i,j,E,F} P'_{j,F} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

waarin de coëfficiënten  $G, H, G', H'$  alle minstens van de tweede orde zijn.

Men heeft

$$\begin{aligned} P_{i,0} &= c_i, & P_{i+4,0} &= c''_i, & Q'_{i,0} &= c'_i, & Q'_{i+4,0} &= c''_i \\ & & P'_{i,0} &= 0, & Q_{i,0} &= 0. \end{aligned}$$

De oneindige determinant, die men krijgt door uit de vergelijkingen (33) alle  $P'$  en  $Q'$  te elimineeren, heeft voor elke waarde van  $E$  16 rijen en kolommen, overeenkomende met de 16 onbekende  $P'_{i,E}$  en  $Q'_{i,E}$ . Voor  $E=0$  echter zijn er slechts 8 onbekenden  $Q'_{i,0}$  daar  $P'_{i,0}=0$  is, en ook slechts 8 rijen en kolommen, daar de tweede vergelijking (33) een identiteit wordt voor  $E=0$ . De determinant die gevormd wordt door de 64 elementen, die aan deze 8 rijen en kolommen gemeenschappelijk zijn, kunnen wij de kern van den oneindigen determinant noemen. Deze kern is niets anders dan de boven reeds behandelde determinant  $\Delta$ .

Nu zijn alle elementen van den determinant buiten de diagonaal minstens van de tweede orde. De elementen van de diagonaal hebben den vorm  $G + E^2 - \beta^2$ , waar  $G$  minstens van de tweede orde is. Van de termen van de kern is  $E=0$ , buiten de kern is  $E$  verschillend van nul, en dus  $G + E^2$  van de nulde orde. De wijze waarop de determinant tot zijn kern kan gereduceerd worden zal ik door een eenvoudig voorbeeld demonstreeren. Ik neem daarbij, in plaats van 16, voor elk argument  $E$  slechts 2 rijen en kolommen en van de rest van den determinant schrijf ik eveneens maar 2 rijen en kolommen op. Dit is voldoende om het principe te illustreeren. Men heeft dan de transformatie

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \beta^2 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \beta^2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + E^2 - \beta^2 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} + E^2 - \beta^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b_{11} - \beta^2 & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} - \beta^2 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a'_{33} + E^2 - \beta^2 & a'_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a'_{43} & a'_{44} + E^2 - \beta^2 \end{vmatrix},$$

waar

$$b_{11} = a_{11} - x_1 a_{31} - y_1 a_{41}, \quad b_{12} = a_{12} - x_1 a_{32} - y_1 a_{42},$$

$$b_{21} = a_{21} - x_2 a_{31} - y_2 a_{41}, \quad b_{22} = a_{22} - x_2 a_{32} - y_2 a_{42},$$

$$a'_{33} = a_{33} + x_1 a_{31} + x_2 a_{32}, \quad a'_{34} = a_{34} + y_1 a_{31} + y_2 a_{32},$$

$$a'_{43} = a_{43} + x_1 a_{41} + x_2 a_{42}, \quad a'_{44} = a_{44} + y_1 a_{41} + y_2 a_{42},$$

en waar  $x_1, x_2, y_1, y_2$ , bepaald worden nit de voorwaarden

$$\left. \begin{aligned} a_{13} + x_1 a_{11} + x_2 a_{12} - x_1 (a'_{33} + E^2) - y_1 a'_{43} &= 0 \\ a_{23} + x_1 a_{21} + x_2 a_{22} - x_2 (a'_{33} + E^2) - y_2 a'_{43} &= 0 \\ a_{14} + y_1 a_{11} + y_2 a_{12} - y_1 (a'_{44} + E^2) - x_1 a'_{34} &= 0 \\ a_{24} + y_1 a_{21} + y_2 a_{22} - y_2 (a'_{44} + E^2) - x_2 a'_{34} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

De determinant is dus herleid tot het product van twee determinanten. In het geval dat ons bezighoudt zal men niet twee, maar 16 rijen en kolommen aldus „afschillen”. Nu volgt uit de vergelijkingen (34) dat  $x_i$  en  $y_i$  minstens van de tweede orde zijn. Wenscht men de vierde orde in  $x_i$  en  $y_i$  te verwaarloozen — wat blijken zal veroorloofd te zijn —, dan kan men nemen

$$x_1 = \frac{a_{13}}{E^2}, \quad x_2 = \frac{a_{23}}{E^2}, \quad y_1 = \frac{a_{14}}{E^2}, \quad y_2 = \frac{a_{24}}{E^2}.$$

De correcties die aan de binnenste termen moeten angebracht worden zijn dan

$$b_{ij} - a_{ij} = - \frac{a_{i3} a_{3j} + a_{i4} a_{4j}}{E^2}, \quad \dots \quad (35)$$

en zijn dus van de vierde orde, terwijl de zesde orde verwaarloosd wordt. Gaat men nu over tot het verwijderen, van de rijen en kolommen behoorend bij een nieuw argument  $E$ , dan zal de invloed van de correcties (35) op de kern slechts van de zesde orde zijn. Komt men dus overeen dat grootheden van de zesde orde in  $\beta^2$ , dus, daar  $\beta$  zelf van de eerste orde is, grootheden van de vijfde orde (d. i. ten minste van de orde  $10^{-10}$ ) in  $\beta$  verwaarloosd mogen worden, dan kunnen de rijen en kolommen van elk argument *afzonderlijk* verwijderd worden, onafhankelijk van alle andere. De determinant valt dan tenslotte niteen in een product van determinanten, waarvan één, de kern, 8 rijen en kolommen heeft, terwijl alle andere er 16 hebben. Elk dezer determinanten vertegenwoordigt één argument  $E$ . In overeenstemming met de boven reeds ver-

melde omstandigheid, dat elke wortel  $\beta_q$  ook een wortel  $\beta_q + E$  en een wortel  $\beta_q - E$  meebrengt, is het alleen noodig de 8 wortels van de aldus gecorrigeerde kern te bepalen. Van deze acht zijn er natuurlijk weer 3 nul. Het is mij echter niet gelukt dit uit den bouw van de coëfficiënten aan te toonen.

Zijn eenmaal de vijf waarden van  $\beta^2$  bepaald, dan kunnen de bijbehorende  $Q, Q', P, P'$  door successieve benadering uit (32) worden bepaald.

Wat ten slotte de coëfficiënten  $A_{iE}$  en  $A'_{iE}$  betreft, men vindt hiervoor de vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} EA_{i,E} + \frac{1}{2} \sum_j \sum_F \{ f_{i,j,F} (A_{j,E-F} - A_{j,E+F}) + \\ + g_{i,j,F} (A'_{j,E-F} + A'_{j,E+F}) \} + a_{i,E} = 0, \\ EA'_{i,E} + \frac{1}{2} \sum_j \sum_F \{ f'_{i,j,F} (A_{j,E-F} + A_{j,E+F}) - \\ - g'_{i,j,F} (A'_{E-F} - A'_{E+F}) \} + a'_{i,E} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

waaruit de coëfficiënten door successieve benadering zijn op te lossen. Bijna altijd zal de eerste benadering:

$$A_{i,E} = -\frac{a_{i,E}}{E}, \quad A'_{i,E} = -\frac{a'_{i,E}}{E}$$

voldoende zijn.

**Wiskunde.** — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan over „*Lineaire nulstelsels in het platte vlak*”.

1. Een lineair nulstelsel  $\mathfrak{R}(1, m)$  kan worden bepaald door twee vergelijkingen van de gedaante

$$\begin{aligned}\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 &= 0 \\ \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2 + \xi_3 A_3 &= 0,\end{aligned}$$

waar  $A_k$  een functie van den graad  $m$ , in  $x_k$ , aanduidt.

Als de rechte  $n$  om het punt  $P(y_k)$  wentelt, beschrijven haar  $m$  nulpunten  $N$ , d. z. de snijpunten van  $\xi_x = 0$  met de kromme  $\Sigma \xi_k A_k = 0$ , een kromme van den graad  $(m + 1)$ . Daar nu  $\xi_y = 0$  is, heeft deze *nul*kromme  $(P)^{m+1}$  tot vergelijking

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = 0.$$

De krommen  $(P)^{m+1}$  vormen een net, dat door de punten  $P$  op het puntenveld is afgebeeld; immers elke netkromme behoort bij een bepaald punt  $P$ .

Het net heeft  $(m^2 + m + 1)$  *basispunten*. Schrijft men toch, ter bekorting, zijn vergelijking in den vorm

$$y_1 B_1 + y_2 B_2 + y_3 B_3 = 0,$$

dan blijkt, dat de krommen  $B_1 = 0$  en  $B_2 = 0$  vooreerst de door  $x_3 = 0$ ,  $A_3 = 0$  aangewezen punten gemeen hebben, welke evenwel niet op de kromme  $B_3 = 0$  liggen. Voor de  $(m^2 + m + 1)$  punten  $S_k$ , welke ze buitendien gemeen hebben, geldt de betrekking

$$A_1 : x_1 = A_2 : x_2 = A_3 : x_3.$$

Deze punten liggen dus tevens op  $B_3 = 0$ .

Elk der basispunten  $S_k$  draagt  $\infty^1$  nulstralen  $n$ , is dus een *singulier punt* van het nulstelsel.

Twee nul

krommen  $(P)^{m+1}$  en  $(Q)^{m+1}$  hebben vooreerst de  $m$  nulpunten der rechte  $PQ$  gemeen; de overige snijpunten moeten singulier zijn, omdat ze ieder minstens twee nulstralen dragen; zij zijn dus identiek met de  $(m^2 + m + 1)$  *singuliere punten*  $S$ .

Legt men het punt  $O_3$  in een der singuliere punten, dan heeft men te stellen  $A_k = a^{(k)} x_3^{m-1} + \dots$ , waar  $a^{(k)}$  een lineaire functie van  $x_1$  en  $x_2$  aanwijst.

Voor de nulkrumme van  $O_8$  vindt men dan

$$(x_1 a^{(2)} - x_2 a^{(1)}) x_3^{m-1} + \dots = 0,$$

waaruit blijkt, dat de nulkrumme  $\sigma_k^{m+1}$  van  $S_k$  in  $S_k$  een dubbelpunt heeft. Deze uitkomst was te voorzien, maar geldt natuurlijk slechts voor het geval, dat  $S$  voor een willekeurigen straal door  $S$  enkelvoudig nulpunt is.

2. Als een punt  $N$  de rechte  $p$  beschrijft, omhult zijn nulstraal  $n$  een kromme van de klasse  $(m+1)$ , die door het teeken  $(p)_{m+1}$  zal worden aangeduid. Iminers de nulkrumme van een willekeurig punt  $Q$  snijdt  $p$  in  $(m+1)$  punten  $N$ , waarvan de nulstralen door  $Q$  gaan. Blijkbaar is  $p$  een  $m$ -voudige raaklijn van  $(p)_{m+1}$ .

De nulkrummen  $(p)_{m+1}$  en  $(q)_{m+1}$  hebben in den nulstraal van het punt  $pq$  een gemeenschappelijke raaklijn. Elk der overige gemeenschappelijke raaklijnen is een rechte  $n$ , waarvan een der nulpunten  $N$  op  $p$ , een ander nulpunt  $N'$  op  $q$  ligt. Als  $N$  de rechte  $p$  doorloopt, beschrijven de overige nulpunten  $N'$  dus een kromme  $(N')$  van den graad  $(m^2 + 2m)$ .

Elk der nulpunten van  $p$  is  $(m-1)$ -maal als punt  $N'$  te beschouwen, zoodat  $(N')$  in die nulpunten  $m(m-1)$  punten met  $p$  gemeen heeft. In elk der overige  $3m$  snijpunten van  $p$  met  $(N')$  valt een punt  $N'$  met een punt  $N$  samen tot een *dubbel nulpunt*,  $N^{(2)}$ , der overeenkomstige rechte  $n$ .

In een dubbel nulpunt hebben de krommen  $(P)$  van een bundel een gemeenschappelijke raaklijn; een der bundelkrommen heeft daar dan een dubbelpunt. De meetkundige plaats der dubbele nulpunten (*coïncidentiekromme*) valt dus samen met de *Jacobiana* van het net der krommen  $(P)$ . Daar deze in het algemeen een kromme van den graad  $3m$  is, kan uit het bovenstaande de gevolgtrekking worden gemaakt, dat het nulstelsel in het algemeen *geen singuliere rechten* bezit. Immers, als een rechte elk van haar punten tot nulpunt heeft, is zij gemeenschappelijke raaklijn der nulkrummen  $(p)_{m+1}$  en  $(q)_{m+1}$ .

De *coïncidentiekromme*  $\gamma^{3m}$  heeft, als *Jacobiana*,  $(m^2 + m + 1)$  dubbelpunten  $S_k$ .

Dit kan als volgt worden bevestigd. Door  $P$  gaan  $(m^2 + m - 2)$  raaklijnen van  $(P)^{m+1}$ ; hun raakpunten zijn dubbele nulpunten, dus punten van  $\gamma^{3m}$ . De overige  $3m(m+1) - (m^2 + m - 2)$  snijpunten van  $(P)$  met  $\gamma$  moeten in de singuliere punten liggen; maar dan moet  $\gamma$  in elk punt  $S$  een *dubbelpunt* hebben.

3. Beschouwen wij thans de meetkundige plaats  $\alpha$  der groepen

van  $(m - 2)$  nulpunten, gelegen op de nulstralen  $t$ , die een dubbel nulpunt bezitten.

Door elk punt  $S$  gaan  $(m^2 + m - 6)$  raaklijnen naar de nul-kromme  $\sigma^{m+1}$  van  $S$ ; daar deze elk een dubbel nulpunt dragen, is  $S$  een  $(m^2 + m - 6)$ -voudig punt der *complementaire kromme*  $\alpha$ . Buiten de punten  $S$  heeft  $\alpha$  met  $(P)^{m+1}$  nog de groepen van  $(m-2)$  nulpunten gemeen, die op de  $(m^2 + m - 2)$  rechten  $t$  liggen, welke in  $P$  samenkomen. De beide krommen hebben dus gemeen  $(m^2 + m + 1)(m^2 + m - 6) + (m^2 + m - 2)(m - 2)$  punten. Voor den *graad* van  $\alpha$  vindt men hieruit  $(m^4 + 3m^3 - 5m^2 - 9m - 2) : (m + 1)$  d. i.  $m^3 + 2m^2 - 7m - 2$ , of  $(m - 2)(m^2 + 4m + 1)$ .

4. De rechten  $t$  omhullen een kromme  $\tau$  van de *klasse*  $(m + 2)$   $(m - 1)$ .

Heeft een kromme  $c^{m+1}$  van het net een dubbelpunt  $D$ , dan vervangt  $PD$  twee der in  $P$  samenkomende stralen  $t$ ; dan is  $P$  dus een punt van  $\tau$  en  $PD$  de raaklijn in  $P$  aan die kromme.

Ligt  $P$  op een *binodale*  $c^{m+1}$ , met dubbelpunten  $D$  en  $D'$ , dan vervangen  $PD$  en  $PD'$  ieder twee rechten  $t$  en zijn de raaklijnen in een dubbelpunt van  $\tau$ .

Heeft een  $c^{m+1}$  in  $K$  een *keerpunt*, dan vervangt  $PK$  drie rechten  $t$ , en  $P$  is een keerpunt van  $\tau$ .

Nu bevat het net  $[c^{m+1}]$ , volgens een bekende eigenschap  $\frac{3}{2}m(m-1)(3m^2 + 3m - 11)$  *binodale* en  $12m(m-1)$  *cuspidale krommen*.

Neemt men nog in aanmerking, dat ook de basispunten  $S$  dubbelpunten van  $\tau$  zijn, dan blijkt, dat  $\tau$  in het bezit is van  $\frac{1}{2}(9m^4 - 40m^3 + 35m + 2)$  *dubbelpunten* en van  $12m(m-1)$  *keerpunten*.

Wij kunnen nu de overige kenmerkende getallen van  $\tau$  bepalen.

Uit de formule  $r = n(n-1) - 2d - 3r$  volgt terstond dat de *graad* van  $\tau$  is  $3m^2$ .

Uit  $3n - r = 3r - \rho$  wordt dan voor het aantal *buigpunten* gevonden  $3(m-2)(2m+1)$ .

Het *geslacht* van  $\tau$  is gelijk aan dat van  $\gamma^{3m}$ , en wel gelijk aan  $\frac{1}{2}m(7m-11)$ .

En nu vindt men tenslotte nit

$$g = \frac{1}{2}(r-1)(r-2) - (d + \rho)$$

voor het aantal *dubbelraaklijnen*  $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)(m^2 + 7m + 4)$ .

Uit de verkregen nitkomsten blijkt, dat  $\mathfrak{R}(1, m)$  in het bezit is van  $3(m-2)(2m+1)$  *stralen met drievoudig nulpunt*  $N^{(3)}$  en van

$\frac{1}{2}(m-2)(m-3)(m^2+7m+4)$  stralen, die elk twee dubbele nulpunten hebben.

Met behulp van deze beide aantallen zou men opnieuw den graad der complementaire kromme kunnen bepalen. Immers de krommen  $\gamma$  en  $\varkappa$  zullen elkaar aanraken in de drievondige nulpunten en moeten elkaar snijden in de gekoppelde dubbele nulpunten; verder hebben zij in elk singulier punt  $2(m^2+m-6)$  punten gemeen. Hiermee rekening houdend vindt men inderdaad voor den graad van  $\varkappa$  het boven verkregen getal.

5. Wij hebben tot dusver ondersteld, dat de singuliere punten alle enkelvoudig en verschillend zijn, maar bovendien, dat elk punt  $S$  enkelvoudig nulpunt is op een willekeurig door  $S$  getrokken straal. Een voorbeeld van een  $\mathfrak{R}(1, m)$ , waarvan de singuliere punten ten deele dubbele nulpunten zijn, levert de beschouwing van een bundel van krommen  $c^r$ , wanneer men aan elke rechte haar raakpunten met krommen van den bundel als nulpunten toevoegt. Een straal door een basispunt van  $(c^r)$  wordt buiten dat punt door  $2(r-2)$  krommen geraakt, terwijl een willekeurige rechte  $2(r-1)$  nulpunten heeft; dus is elk basispunt als dubbel nulpunt te beschouwen. De overige singuliere punten van dit nulstelsel  $\mathfrak{R}(1, 2r-2)$  liggen in de dubbelpunten der nodale krommen  $c^r$ ; zij zijn blijkbaar enkelvoudige nulpunten op de door hen getrokken rechten.

Wij zullen nu onderstellen, dat  $\mathfrak{R}(1, m)$  in het bezit is van  $s_2$  singuliere punten  $S^{(2)}$ , die dubbele nulpunten van hun stralen zijn. Daar een straal door  $S^{(2)}$ , buiten dat punt,  $(m-2)$  nulpunten draagt, heeft de nul-kromme  $\sigma^{(2)}$  in  $S^{(2)}$  een drievoudig punt. De complementaire kromme bestaat thans uit de  $s_2$  nul-krommen  $\sigma^{(2)}$  en een kromme  $\varkappa^*$  van den graad  $(m-2)(m^2+4m+1) - (m+1)s_2$ , terwijl de kromme  $\tau$  is vervangen door een kromme  $\tau^*$  van de klasse  $(m+2)(m-1) - s_2$  en de  $s_2$  klassepunten  $S^{(2)}$ .

Neemt men in aanmerking, dat  $\sigma_k^{(2)}$  alle singuliere punten  $S^{(2)}$  en  $S_m$  bevat, dan vindt men, dat  $\varkappa^*$  met  $(m^2+m-6-s_2)$  takken door elk punt  $S$  en met  $(m^2+m-8-s_2)$  takken door elk punt  $S^{(2)}$  gaat.

6. Om tot een bepaling van het aantal drievondige nulpunten  $N^{(3)}$  te geraken, voegen wij aan elk punt  $N^{(2)}$  van een straal  $t$  de  $(m-2)$  nulpunten  $N'$  van  $t$  toe, en beschouwen de verwantschap, welke daardoor in een waaier met top  $T$  ontstaat. Daar de punten  $N^{(2)}$  op de kromme  $\gamma^{3n}$ , de punten  $N'$  op de kromme  $\varkappa'$  liggen, zijn de kenmerkende getallen dezer verwantschap blijkbaar  $3m(m-2)$



en  $(m-2)(m^2 + 4m + 1) - (m+1)s_2$ , terwijl elke straal  $t$  door  $T$  een  $(m-2)$ voudige coincidentie levert. Het aantal der overige coincidenties bedraagt

$$3m(m-2) + (m-2)(m^2 + 4m + 1) - (m+1)s_2 - (m^2 + m - 2 - s_2)(m-2) \text{ d.i. } (m-2)(6m+3) - 3s_2.$$

Er zijn dus  $3(m-2)(2m+1) - 3s_2$  nulstralen met een drievoudig nulpunt.

Om het aantal gekoppelde dubbele nulpunten  $N^{(2)}$  te vinden, voegen wij aan elk punt  $N'$  van een straal  $t$  elk der overige nulpunten  $N''$  van  $t$  toe. De involutorische verwantschap, die daardoor in den waaier  $T$  ontstaat, heeft tot kenmerkend getal  $[(m-2)(m^2 + 4m + 1) - (m+1)s_2](m-3)$ ; elke straal  $t$  door  $T$  vertegenwoordigt nu  $(m-2)(m-3)$  coincidenties. De overige coincidenties, ten getale van  $2(m-3)[(m-2)(m^2 + 4m + 1) - (m+1)s_2] - (m^2 + m - 2 - s_2)(m-2)(m-3)$ , vormen paren van dubbele nulpunten.

Er zijn dus  $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)(m^2 + 7m + 4) - \frac{1}{2}(m-3)(m+4)s_2$  stralen, die ieder twee dubbele nulpunten dragen.

Een nulstelsel  $\mathfrak{N}(1, m)$  met  $(m^2 + m + 1)$  enkelvoudige singuliere punten heeft dus  $3(m-2)(2m+1)$  nulstralen met een drievoudig nulpunt en  $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)(m^2 + 7m + 4)$  nulstralen met twee dubbele nulpunten.

Hiermee zijn de uitkomsten van § 4 bevestigd.

Voor het bovengenoemd nulstelsel  $\mathfrak{N}(1, 2r-2)$  is  $s_2 = r^2$ ; het aantal drievoudige nulpunten bedraagt dus  $3(7r^2 - 22r + 12)$ . Voor  $r=3$  vindt men hiernit 27. Nu is voor een bundel  $(c^3)$  elk basispunt buigpunt op drie krommen  $c^3$ ; het getal 27 ontstaat dus hierdoor, dat de 9 basispunten ieder op drie nulstralen als drievoudig nulpunt dienst doen. Daar deze opmerking voor elken bundel  $(c^r)$  geldt, zal het aantal punten  $N^{(3)}$  buiten de basispunten gelijk zijn aan  $3(6r^2 - 22r + 12)$ . In zulk een punt heeft een  $c^r$  vier samengevallen punten met haar raaklijn gemeen. In het algemeen heeft een bundel  $(c^r)$  dus  $6(r-3)(3r-2)$  krommen, die een *undulatiepunt* vertoonen<sup>1)</sup>.

7. Wanneer de krommen  $A_k = 0$  (§ 1) in  $O_3$  een  $r$ voudig punt hebben, is  $S_0 \equiv O_3$  op elk van zijn stralen een  $r$ voudig nulpunt. Buiten het singuliere nulpunt  $S_0$  zijn er dan nog  $(m^2 + m + 1) - r^2$  enkelvoudige singuliere nulpunten  $S$ .

De nulcurve van  $S_0$  heeft tot vergelijking  $A_1 x_2 - A_2 x_1 = 0$ ; zij heeft dus in  $S_0$  een  $(r+1)$ voudig punt.

<sup>1)</sup> Een andere afleiding van dit aantal heb ik gegeven in „Faisceaux de courbes planes” (Archives Teyler, sér. II, t. XI, p. 99).

De nulzkromme  $(P)^{m+1}$  heeft in  $S_0$  een  $r$ voudig punt, zendt dus door  $P$   $(u^2 + m - 2) - (r^2 - r)$  raaklijnen  $t$ , waarvan de raakpunten op de *coïncidentiekromme*  $\gamma$  liggen. Deze heeft dubbelpunten in de punten  $S$ ; van haar snijpunten met  $(P)^{m+1}$  liggen dus in  $S_0$   $3m(u + 1) - (m^2 + m - 2 - r^2 + r) - 2(u^2 + m + 1 - r^2) = (3r - 1)r$ .

Hieruit volgt, dat  $\gamma$  in  $S_0$  een  $(3r - 1)$ voudig punt bezit.

Om den graad der complementaire kromme te bepalen, beschouwen wij twee bundels van nulzkrommen  $(c_1^{m+1})$  en  $(c_2^{m+1})$ , en voegen aan elke  $c_1^{m+1}$  de  $(m^2 + m - 2 - r^2 + r)$  krommen  $c_2^{m+1}$  toe, welke zij op  $\gamma^{3m}$ , buiten de punten  $S$ , snijdt. Het voortbrengsel van de aldus gekoppelde bundels bestaat uit tweemaal de kromme  $\gamma$ , uit  $(m^2 + m - 2 - r^2 + r)$  maal de kromme  $c^{m+1}$ , die tot beide bundels behoort, en uit de *complementaire kromme*  $\alpha_0$ . Voor haar graad vindt men nu  $(m^2 + m - 2 - r^2 + r)(m + 1) - 6m$  d. i.  $(m - 2)(u^2 + 4u + 1) - (m + 1)r(r - 1)$ .

Met het oog op § 3 besluit men hieruit, dat de nulzkromme van  $S_0$   $r(r - 1)$  maal als bestanddeel van  $\alpha$  is te beschouwen.

De methode van § 6 opnieuw toepassende, vinden wij nu het aantal *drievoudige nulpunten* uit

$$3m(m - 2) + (m - 2)(m^2 + 4m + 1) - (m + 1)r(r - 1) - (m - 2)(m^2 + m - 2 - r^2 + r)$$

d. i.

$$(m - 2)(6m + 3) - 3r(r - 1).$$

Voor het aantal nulstralen met *twee dubbele nulpunten* vinden wij analoog

$$\frac{1}{2}(m - 2)(m - 3)(m^2 + 7m + 4) - \frac{1}{2}(m - 3)(m + 4)r(r - 1).$$

8. Een zeer bijzonder lineair nulstelsel verkrijgt men door te onderstellen, dat de functies  $A_k$  (§ 1) slechts  $x_1$  en  $x_2$  bevatten. In dat geval stelt

$$\xi_1 A_1 + \xi_2 A_2 + \xi_3 A_3 = 0$$

een stralenvolutie van den tweeden rang voor, waarvan de  $\infty^2$  groepen, elk van  $m$  stralen, projectief overeenkomen met de rechten van het vlak.

De nulzkrommen hebben thans in  $S_0 \equiv O_3$  een  $m$ -voudig punt, zijn dus rationaal; de nulzkromme van  $S_0$  is ontwaard in  $(m + 1)$  stralen, die elk een der enkelvoudige singuliere nulpunten  $S$  bevatten.

Duidt men de afgeleiden van  $A_k$  naar  $x_1$  en  $x_2$  door  $(A_k)_1$  en  $(A_k)_2$  aan, dan vindt men voor de *meetkundige plaats der dubbele nulpunten* de vergelijking

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ (A_1)_1 & (A_2)_1 & (A_3)_1 \\ (A_1)_2 & (A_2)_2 & (A_3)_2 \end{vmatrix} = 0$$

Deze kromme van den graad  $(2m - 1)$  heeft in  $S_0$  een  $(2m - 2)$ -voudig punt. Door de  $(m + 1)$  stralen  $S_0 S_k$  wordt zij aangevuld tot de Jacobiana van het net der nulkrummen.

De dragers  $t$  der dubbele nulpunten omhullen een kromme  $\tau$  van de klasse  $2(m - 1)$ ; immers  $(P)^{m+1}$  is thans van de klasse  $(m + 1)m - m(m - 1) = 2m$ .

De drievoudige stralen der bovengenoemde involutie worden aan gewezen door

$$\begin{vmatrix} (A_1)_{11} & (A_2)_{11} & (A_3)_{11} \\ (A_1)_{12} & (A_2)_{12} & (A_3)_{12} \\ (A_1)_{22} & (A_2)_{22} & (A_3)_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Hun aantal bedraagt dus  $3(m - 2)$ .

Er zijn dus  $3(m - 2)$  nulstralen met *drievoudig nulpunt*; zij zijn blijkbaar *stationaire raaklijnen* der door de nulstralen  $t$  omhulde kromme  $\tau$ .

Analoog worden de *dubbelraaklijnen* dier kromme in hun raakpunten gesneden door de paren van dubbelstralen, die in de groepen der involutie voorkomen. Hun aantal bedraagt, zooals bekend is,  $2(m - 2)(m - 3)$ .

Voor den graad van  $\tau$  vindt men nu  $m$ ; zij bezit geen keerpunten, maar  $\frac{1}{2}(m - 1)(m - 2)$  dubbelpunten. Zij is, evenals  $\gamma^{2m-1}$ , rationaal.

De involutie heeft  $\frac{1}{2}(m - 1)(m - 2)$  neutrale paren. Elk paar behoort tot  $\infty^1$  groepen en komt projectief overeen met een waaier van nulstralen. In verband hiermee bestaat de nulkrumme van den top van dien waaier uit het overeenkomstige neutrale stralenpaar en een kromme van den graad  $(m - 1)$ , die in  $S_0$  een  $(m - 2)$ -voudig punt heeft.

De nulkrumme van een singulier punt  $S_k$  bestaat uit den straal  $S_k S_0$  en een kromme van den graad  $m$  met  $(m - 1)$ -voudig punt  $S_0$ .

**Wiskunde.** — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan over: „Nulstelsels, welke door twee lineaire stralencongruenties worden bepaald”.

1. Een ruimtekromme  $\alpha^p$ , welke door een rechte  $a$  in  $(p-1)$  punten wordt gesneden, bepaalt een lineaire congruentie  $(1, p)$ , waarvan elke straal  $u$  op  $a$  en op  $\alpha^p$  rust. Analoog bepaalt een kromme  $\beta^q$ , die door de rechte  $b$  in  $(q-1)$  punten wordt gesneden, een congruentie  $(1, q)$ , waarvan de stralen  $v$  op  $b$  en  $\beta^q$  rusten.

Door een punt  $N$  gaat in het algemeen één straal  $u$  en één straal  $v$ . Voegt men het vlak  $v \equiv uv$  als nulvlak aan  $N$  toe, dan ontstaat een nulstelsel, waarin een vlak  $v$  in het algemeen  $p q$  nulpunten heeft, n.l. de snijpunten van de  $p$  stralen  $u$  met de  $q$  stralen  $v$ .

Als  $N$  een rechte  $l$  doorloopt, beschrijven de stralen  $u$  en  $v$  twee regelvlakken, die achtereenvolgens van den graad  $(p+1)$  en den graad  $(q+1)$  zijn, en elkaar doorsnijden volgens een kromme  $(l)$  van den graad  $(p q + p + q)$ . Een willekeurig vlak  $v$  door  $l$  heeft met  $(l)$  de  $p q$  nulpunten van  $v$  gemeen, en bovendien  $(p+q)$  op  $l$  gelegen punten, die elk als nulpunt behooren tot een bepaald vlak  $v$ . Anders gezegd, de rechte lijn  $l$  is  $(p+q)$  maal *nulstraal*. In de notatie van R. STURM heeft het nulstelsel dus de kenmerkende getallen  $\alpha = 1$ ,  $\beta = p q$ ,  $\gamma = p + q$ , kan bijgevolg door  $\mathfrak{R}(1, p q, p + q)$  worden aangeduid.

2. Als  $v$  met  $u$  samenvalt, heeft elk punt dier rechte elk vlak door die rechte tot nulvlak. Nu hebben de congruenties  $(1, p)$  en  $(1, q)$  in het algemeen  $(p q + 1)$  stralen gemeen. Er zijn dus  $(p q + 1)$  *singuliere rechten*  $s$ .

Ook de krommen  $\alpha^p$  en  $\beta^q$  zijn *meetkundige plaatsen van singuliere punten*. Door een punt  $A^*$  van  $\alpha^p$  gaat een straal  $v^*$  en een waaiër van stralen  $u$ . In elk vlak door  $v^*$  ligt één straal  $u$ ; dus is  $A^*$  nulpunt van elk vlak van een bundel, die  $v^*$  tot as heeft. De rechten  $v^*$  vormen een *regelvlak* van den graad  $p(q+1)$ ; immers een vlak door  $b$  bevat  $p$  stralen  $v^*$  en een punt van  $b$  draagt  $p q$  stralen  $v^*$ . Ten slotte zijn ook de punten van  $a$  en  $b$  *singuliere nulpunten*. Een punt  $A_*$  van  $a$  draagt één straal  $v_*$  en  $\infty^1$  stralen  $u$ , die een kegel van den graad  $p$ , niet  $(p-1)$ -voudige ribbe  $a$ , vormen. Elk vlak door  $v_*$  bevat  $p$  stralen  $u$ , zoodat  $A_*$  als  $p$ -voudig nulpunt is te

beschouwen. De stralen  $v_*$  vormen een *regelvlak* van den graad  $(q + 1)$ . Een rechte  $u$  (of  $v$ ) is nulstraal voor elk van haar punten; in verband hiermee onttaardt de kromme  $(l)$  voor  $l \equiv u$  of  $l \equiv v$ .

3. Als een vlak  $r$  door het punt  $P$  blijft gaan, beschrijven zijn nulpunten een oppervlak  $(P)$  van den graad  $(p + q + 1)$ . Immers, een rechte  $l$  door  $P$  draagt  $(p + q)$  punten  $N$ , die hun nulvlak door  $P$  zenden.

De rechten  $u$  en  $v$ , die elkaar in  $P$  snijden, liggen op  $(P)$ ; immers elk van hun punten zendt zijn nulvlak door  $P$ .

Op  $(P)$  liggen verder de  $(p + q + 1)$  singuliere stralen  $s$  en de singuliere krommen  $\alpha$ ,  $\beta$ , terwijl de singuliere rechte  $a$  blijkbaar  $p$ -voudige rechte, de singuliere rechte  $b$  een  $q$ -voudige lijn is. De oppervlakken  $(P)$  en  $(Q)$  hebben, in verband hiermee, de singuliere lijnen  $s$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$  en  $\beta$  gemeen, en doorsnijden elkaar verder langs de kromme  $(l)$ , die bij  $l \equiv PQ$  behoort.

4. Daar de rechte  $l$  het regelvlak  $(v^*)$  in  $p(q + 1)$  punten snijdt, bevat de kromme  $(l)$  blijkbaar  $p(q + 1)$  singuliere nulpunten  $A^*$ , en dan ook  $q(p + 1)$  singuliere nulpunten  $B^*$ .

Verder zijn er  $(q + 1)$  vlakken door  $l$ , die elk een  $p$ -voudig nulpunt  $A_*$  dragen, en dan ook  $(p + 1)$  vlakken ieder met een  $q$ -voudig nulpunt  $B_*$ .

Zij nu  $R$  een punt buiten de rechte  $l$ . Tot de snijpunten van het oppervlak  $(R)$  met de kromme  $(l)$  behooren vooreerst de  $pq$  nulpunten van het vlak  $lR$ . Verder de  $p(q + 1)$  punten  $A^*$  en de  $q(p + 1)$  punten  $B^*$ . De overige gemeenschappelijke punten, ten getale van  $(p + q + 1)(p + q + pq) - pq - p(q + 1) - q(p + 1)$  d.i.  $p^2(q + 1) + q^2(p + 1)$ , moeten gelegen zijn in de  $(q + 1)$  punten  $A_*$  en de  $(p + 1)$  punten  $B_*$ . Daar  $u$  op  $(R)$  een  $p$ -voudige lijn is, zal elk der  $(q + 1)$  punten  $A_*$  een  $p$ -voudig punt der kromme  $(l)$  moeten wezen. Analoog heeft  $(l)$  dan in elk der  $(p + 1)$  punten  $B_*$  een  $q$ -voudig punt. De kromme  $\alpha$  is rationaal, zendt dus  $2(p - 1)$  raakvlakken door  $l$ . In elk dier raakvlakken vallen twee stralen  $u$  samen; er zijn dus  $q$  dubbele nulpunten, zoodat het vlak  $q$ -voudig raakvlak van  $(l)$  is. Analoog zendt  $\beta$  door  $l$   $2(q - 1)$  raakvlakken, die  $p$ -voudige raakvlakken van de kromme  $(l)$  zijn. Daar  $l$  door  $(l)$  in  $(p + q)$  punten wordt gesneden, is de *rang* van  $(l)$  gelijk aan  $2(p - 1)q + 2(q - 1)p + 2(p + q)$ , d.i.  $4pq$ .

5. Gaan wij na, in hoever de verkregen uitkomsten worden gewijzigd, wanneer de stralencongruentie  $(1, q)$  wordt vervangen door

de congruentie  $(1,3)$  der bisecanten  $v$  van een kubische ruimte-kromme  $\beta^3$ .

Zij  $B^*$  een punt van  $\beta^3$ ,  $u^*$  de straal, welke de congruentie  $(1,p)$  door dat punt zendt. Elk vlak door  $u^*$  bevat twee rechten  $v$ , die elkaar in  $B^*$  snijden; dus is  $B^*$  dubbel nulpunt.

Het oppervlak  $(P)^{p+4}$  heeft dus  $\beta^3$  tot *dubbelkromme*; het bevat verder de kromme  $\omega$ , de  $(3p+1)$  singuliere rechten  $s$  en gaat  $p$ -maal door de singuliere rechte  $a$ .

Het regelvlak  $(v^*)$  is van den graad  $4p$ , het regelvlak  $(u^*)$  heeft den graad  $(3p+3)$ , terwijl de rechten  $v_*$ , als bisecanten van  $\beta^3$ , een regelvlak van den vierden graad vormen.

Wordt ook de congruentie  $(1,p)$  vervangen door de congruentie  $(1,3)$  der bisecanten van een kromme  $\alpha^3$ , dan ontstaat een nulstelsel  $\Re(1, 9, 6)$ . Het oppervlak  $(P)^7$  heeft  $\alpha^3$  en  $\beta^3$  tot dubbelkrommen en bevat 10 singuliere rechten  $s$ ;  $(P)^7$  en  $(Q)^7$  hebben nog een kromme  $(l)^{15}$  gemeen. De regelvlakken  $(u^*)$  en  $(v^*)$  zijn van den 12<sup>en</sup> graad.

**6.** Voor  $p=1$ ,  $q=1$  heeft men een bilineair nulstelsel  $\Re(1, 1, 2)$ , waarin de stralen  $u$  op twee rechten  $a, a'$ , de stralen  $v$  op twee rechten  $b, b'$  rusten.

De singuliere figuur bestaat dan uit de rechten  $a, a', b, b'$  en hun beide transversalen  $s, s'$ . Voor elk singulier punt vormen de nulvlakken een bundel; de assen dier bundels vormen vier quadratische regelscharen. Het oppervlak  $(P)^3$  heeft in het nulvlak van  $P$  een drievoudig raakvlak <sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> Zie mijn arbeid „Over bilineaire nulstelsels” (Versl. deel XXI, bl. 1065).

**Experimenteële Psychologie.** — De Heer E. D. WIERSMA biedt een mededeeling aan over: „*De psychologie van verwardheidstoestanden*”.

Onze bewustzijnsinhouden onderscheiden zich door hunne intensiteit. Zij hebben, wanneer de opmerkzaamheid daarop gericht is, een hoogen bewustzijnsgraad, andere daarentegen worden teruggedrongen en hebben een lagen bewustzijnsgraad. Is onze aandacht verdeeld over vele psychische inhouden, of is er een verslapping of inzinking van de opmerkzaamheid, dan spreken we van een algemeen lagen bewustzijnsgraad, waaronder wij te verstaan hebben een toestand, waarin indrukken van buiten of ook eigen gedachten niet of moeilijk den drempel van het bewustzijn kunnen overschrijden, waarbij associaties niet of zeer onvolkomen tot stand komen, waarbij de synthesevorming belemmerd is, m. a. w. een toestand, waarin de nauwkeurigheid, de duidelijkheid en de snelheid van opvatting der bewustzijnsinhouden verminderd is. Dergelijke bewustzijnsinzinkingen komen normaal en pathologisch onder velerlei vormen voor. De momentane opmerkzaamheidsverslappingsen geven normaal, zooals het onderzoek van HEYMANS heeft aangetoond, aanleiding tot de depersonalisatie- en de fausse reconnaissanceverschijnselen en pathologisch tot de epileptische toevallen, zooals de psychologie der epilepsie ons leerde. Langer durende inzinkingen komen normaal voor bij sufheid, vermoeidheid, slaperigheid en slaap en pathologisch bij de acute verwardheidstoestanden, zooals wij die aantreffen bij of na acute infectieziekten, bij sommige intoxicaties en soms bij meningitis. Onder zeer verschillende beelden kunnen deze processen zich vertoonen. Nu eens treedt de stupor meer op den voorgrond, dan weer de verwardheid met desorientatie, sterke geheugenstoornissen, hallucinaties, waandenkbeelden en motore onrust. Hoe nu de ziekte zich aan ons vertoont, altijd zijn de kenmerken van den verlaagden bewustzijnsgraad duidelijk te constateeren. Het constante aanwezig zijn van dit eene symptoom bij de groote wisseling van alle andere verschijnselen, maakt het waarschijnlijk, dat dit primair is ten opzichte van die andere symptomen. Deze meening wordt nog versterkt door het feit, dat alle symptomen der verwardheid voor een oogenblik verdwijnen, wanneer wij in staat zijn de opmerkzaamheidsinzinking op te heffen of in intensiteit te verminderen. Bij een ijelenden koortslijder, bij een patient met delirium tremens, met raemie of met meningitis kan men dikwijls door verhooging van het psychisch

niveau, door de aandacht op iets te concentreeren voor korten tijd alle symptomen doen verdwijnen. De patient is niet meer verward, hij geeft goede antwoorden, hij is georiënteerd en hallucineert niet meer. Bovendien bestaat er een zoo groote overeenkomst tusschen normale bewustzijnsinzinkingen als de slaap en de droom en de pathologische acute verwardheidstoestanden, dat men van oudsher gaarne een vergelijking tusschen deze toestanden heeft gemaakt.

Wanneer nu de lage bewustzijnsgraad of de inzinking van de opmerkzaamheid oorzaak is van de verschillende symptomen der acute verwardheidstoestanden, dan is te verwachten, dat ook in normale en pathologische omstandigheden, waar de bewustzijnsgraad gedaald is, soortgelijke symptomen voorkomen, zij het dan ook in rudimentairen vorm.

Om dit vast te stellen, heb ik een reeks van onderzoekingen ingesteld bij personen, waarvan kon worden aangenomen, dat de groepen, waaronder zij waren ingedeeld, groote verschillen in de opmerkzaamheid vertoonen. Hiertoe behooren patiënten met duidelijke intellectueele stoornissen, melancholici met sterke remming en depressie, hysterici met een vernauwd bewustzijn en normale personen. Nadat de bewustzijnsgraad door onderzoek der opmerkzaamheid was vastgesteld, werden eenige psychische functies, die bij de acute verwardheidstoestanden in meerdere of mindere mate gestoord zijn, nader onderzocht.

Bij een aantal andere proefpersonen heb ik dit onderzoek beperkt tot slechts enkele psychische functies n.l. tot de vernietiging van zwakke indrukken door navolgende sterke. De resultaten van dit laatste onderzoek zal ik onmiddellijk na de beschrijving van de proefinrichting vermelden, terwijl de uitkomsten van de eerste experimenten, waarbij dus achtereenvolgens verschillende onderzoekingsmethoden werden toegepast, zullen volgen, wanneer eerst een beschrijving van die methoden is gegeven, omdat op die wijze voor de vergelijking der resultaten beter overzicht wordt verkregen.

Het is bekend, dat er vele zeer goede methoden bestaan om de willekeurige opmerkzaamheid, die ons een voorstelling van den bewustzijnsgraad geeft, te meten. Van twee daarvan heb ik bij mijn onderzoek gebruik gemaakt n.l. van de esthesiometrie, welke het eerst door GRIESBACH<sup>1)</sup> voor de bepaling van vermoeidheid werd gebruikt en van de aanstreepmethode<sup>2)</sup>, zooals die bij de bepaling

<sup>1)</sup> GRIESBACH. Ueber Beziehungen zwischen geistiger Ermüdung und Empfindungsvermögen der Haut. Arch. f. Hygiene Bd. 24. 1895.

<sup>2)</sup> WIERSMA. Psychische Nachwirkungen. Zeitschr. für de ges. Neur. u. Psych. Bd. XXXV H 3.



van psychische nawerkingen van schoolkinderen is aangewend.

Over de waarde van de esthesiometrische methode loopen de meeningen zeer uiteen, maar daarover wil ik nu niet uitweiden. Ik heb de methode aangewend, zooals die door BINET<sup>1)</sup> is aangegeven en kortheidshalve verwijs ik naar de oorspronkelijke beschrijving. De proefpersonen werden op den rug van de hand met de stompe einden van twee naalden van een bepaalde dikte, die op verschillende afstanden van elkaar aan bordpapier bevestigd waren, aangeraakt. De afstand van de naalden was 0 (slechts een naald), 1, 1.5, 2, 2.5, 3 cM. De naalden moeten gelijktijdig en altijd met denzelfden druk op de huid worden geplaatst. Met een stel van die naalden op die afstanden werd de p.p. achtereenvolgens in onregelmatige volgorde, maar met gelijke tusschenpoozen en met elken afstand even vaak, nl. vijfmaal, aangeraakt. Deze proeven werden vijf achtereenvolgende dagen op denzelfden tijd herhaald. Daarna werd vastgesteld hoe groot het procentgetal dubbele en enkele aanrakingen voor elken afstand bedroeg. Voor de beoordeeling van de opmerkzaamheid heb ik gebruik gemaakt van het criterium, dat de aanraking met een naald altijd als een punt, de aanraking met twee naalden op afstanden van 2.5 en 3 cM. steeds als twee punten moet worden gevoeld. Door een langdurig onderzoek bij verschillende normale personen is dit altijd gebleken. Wanneer hierbij fouten worden gemaakt dan is dit in het algemeen als een opmerkzaamheidsstoornis op te vatten. De berekening van het gemiddelde aantal fouten geeft dan een oordeel over de opmerkzaamheid. Het bleek mij noodzakelijk niet slechts rekening te houden met de bepaling van de drempelwaarden, waarop nog twee punten kunnen worden onderscheiden, omdat bij sommige demente patienten en dikwijls ook bij melancholie altijd op alle afstanden met 2 of met 1 wordt geantwoord. Bij deze patienten zou men tot zeer misleidende resultaten komen. Aan den anderen kant is ook door het onderzoek van BINET aan het licht gekomen, dat het niet altijd aan onopmerkzaamheid moet worden geweten, wanneer bij de aanraking met één naald dubbel wordt gevoeld. Een groote mate van opmerkzaamheid zou soms daarvan de oorzaak kunnen zijn. Het is derhalve buiten twijfel, dat deze methode niet altijd betrouwbare resultaten oplevert, maar voor groote verschillen in de opmerkzaamheid, zooals die in de pathologie voorkomen is zij bruikbaar.

De tweede methode van onderzoek bestaat in de aanstrepingsproeven. Den proefpersoon wordt nauwkenrig mitgelegd, wat van

1) BINET. An. ps. XI. 1905.

hem geeischt wordt. Hij krijgt een groot blad papier voor zich, waarop 50 regels met groepjes van punten gedrukt zijn. Die groepjes, waarvan 25 op een regel voorkomen, bestaan uit drie, vier of vijf punten. De volgorde der verschillende groepjes, die ongeveer gelijk in aantal zijn, is zeer onregelmatig. De opdracht was nu, om zoo vlug mogelijk zonder fouten te maken de vierpuntengroepen verticaal en de driepuntengroepen horizontaal met een potlood aan te strepen. Het eind van elke minuut werd door den onderzoeker aangegeven en moest door een streep worden aangeduid. Na de derde minnut kwam een pauze van twee min., waarna weer gedurende drie min. dit werk werd hervat met dit verschil, dat nu in de derde min. een omgekeerde aanstreping, d. w. z. de vieren horizontaal en de drieën vertikaal, werd geeischt. Vijf achtereenvolgende dagen werd dit herhaald, evenwel zoo, dat op de even dagen de omgekeerde aanstrepingen in de derde min. voor de pauze werd verricht. Uit de resultaten van dit werk kon de mate van opmerkzaamheid op verschillende wijze worden vastgesteld:

1. Uit het aantal puntgroepen dat door den p.p. werd doorzocht bij de normale en omgekeerde aanstreping.

2. Uit het aantal fouten.

Nadat op die wijze de opmerkzaamheidsgraad was vastgesteld, heb ik nagegaan of bij deze p.p met de daling der bewustzijnsgraad de verschijnselen der verwardheid te vinden zijn.

Het geheugen werd met de volgende methode onderzocht:

1. *De zogenaamde Treffermethode van MÜLLER en PILZECKER.*

Deze bestond daarin, dat gedurende vijf dagen elken dag acht paar woorden, die twee aan twee op een blad papier waren getypt en waartusschen een associatief verband zooveel mogelijk was vermeden, den proefpersoon werden voorgelegd. Hier volgt een der lijsten:

Populier	lucht
Klok	Hans
Grijs	Wilg
Jacob	slaap
Lucifer	kastanjeboom
Violet	Karel
Letter	zolder
Aarde	bruin

Deze woorden worden paarsgewijze door den p.p. langzaam hardop gelezen en daarna aan zijne waarneming onttrokken. Door den onderzoeker wordt vervolgens het eerste woord genoemd, waarop door den p.p. het daarbij behoorende woord moet worden gezegd.

Uit de berekening van het procentgetal juiste, onjuiste en uitgebleven antwoorden kan men een voorstelling van het geheugen krijgen.

2. De genoemde paren woorden zijn zoo gekozen, dat op elke lijst driemaal drie begrippen voorkomen, die onder een algemeen begrip kunnen worden gebracht. In de bovengenoemde lijst komen voor drie boomen, drie voornamen en drie klenren. Op andere lijsten komen bijv. lichaamsdeelen, geldstukken, getallen, vogels, namen van steden enz. voor. Nadat de proef met de treffermethode was afgeloopen, werd na een kwartier, waarin andere proeven werden verricht, gevraagd, welke boomen, voornamen, klenren enz. op de lijsten voorkwamen. Ook hier werd het procentgetal juiste, onjuiste en uitgebleven antwoorden berekend.

Verdere onderzoekingen hebben ten doel om naast het inprentingsvermogen ook de recognitie en de vernietiging van pas waargenomen indrukken door navolgende sterke te bepalen.

*Inprenting en reproductie van getallen van twee cijfers.*

Een rij van vijf getallen, die zorgvuldig uitgekozen waren, zoodat bij elke proef getallen uit hetzelfde tiental, de samenstelling uit dezelfde cijfers en de volle tientallen mitgesloten waren, werden den p.p. voorgelegd. Nadat hij ze tweemaal langzaam hardop had gelezen, moest hij ze na een pauze van een minuut opzeggen. Daarna werd dezelfde proef met andere getallen herhaald met dit verschil, dat in de pauze zoo vlug mogelijk optellingen van twee cijfers moesten worden verricht. Gedurende vijf dagen werd dit herhaald en de uitkomsten zonder en met de navolgende belemmering werden daarna met elkaar vergeleken.

*Recognitie van getallen van twee cijfers.*

In gewijzigden vorm werd de beschreven proef daarna genomen. De waargenomen en voorgelezen getallen moesten niet worden genoemd, maar uit een drievoudige hoeveelheid worden uitgezocht.

Bij beide proeven werd het procentgetal der goede, verkeerde en nulpraestaties berekend. Een vergelijking tusschen reproductie door associatie en door recognitie, tusschen de vernietiging van navolgend werk bij deze beide psychische functies is hierbij mogelijk.

*Inprenting, reproductie en vernietiging van waarnemingen van eenvoudige figuurtjes.*

De p.p. wordt in een donkere kamer voor een kast geplaatst, waarin aan den voorkant een opening van 10 cM<sup>2</sup> is gemaakt. In de kast is een elektrische lamp geplaatst, die zijn licht werpt op de

opening. In die opening worden glazen plaatjes geschoven, waarop op wit papier, dat aan den achterkant is zwart gemaakt, geteekende figuurtjes zijn aangebracht. Voor de kast staat een lamp, die door middel van den tijdzinneter gedurende 1 sec. aan het gloeien wordt gebracht. Daar dit licht op de figuurtjes valt zijn deze dus gedurende 1 sec. aan den p.p. geëxposeerd. De p.p. heeft de opdracht de volgorde der vier figuurtjes te onthouden. Het aantal waarnemingen daarvoor noodig is een maat voor het inprentingsvermogen. Daarna wordt dezelfde proef nog eens genomen met een andere volgorde der figuurtjes en zoodanig gewijzigd, dat onmiddellijk na de beschrijving met het opvallend licht de lamp in de kast aan het gloeien wordt gebracht, zoodat dus na de waarneming van de figuurtjes het volle licht uit de kast den p.p. gedurende eenige sec. in de oogen valt. Door nu te bepalen, hoe vaak onder deze omstandigheden de waarneming der figuurtjes moet plaats vinden, om de juiste volgorde op te geven, kan men den teruggrijpenden vernietigenden invloed van den navolgenden sterken prikkel bepalen.

Met deze methode werden p.p. van verschillende leeftijden onderzocht. In de volgende tabel is het gemiddelde aantal waarnemingen van twee proeven noodig, om de volgorde der figuurtjes vast te stellen zonder en met het navolgend sterke licht uitgedrukt.

Leeftijd	Aantal	Zonder belemmering	Met navolgend licht
10—15 j.	19	2.3	4.2
16—40 j.	22	2.4	4.3
> 40 j.	12	2.6	5.2

De kinderen moeten dus 2.3 maal de figuurtjes zien. Bij elke waarneming onthouden zij dus  $\frac{1}{2.3}$  of 43.5 % en met navolgenden sterken prikkel  $\frac{1}{4.2}$  of 23.8 %. In procentgetallen krijgen wij dus volgend tabelletje.

Leeftijd	Aantal	Zonder navolgend licht	Met navolgend licht
10—15 j.	19	43.5	23.8
16—40 j.	22	41.7	23.3
> 40 j.	12	40	19.2

De maat van de belemmeringen verkrijgen wij nu door de verschillen in de procentgetallen van de inprentingsgetallen uit te drukken.

Leeftijd	Belemmering
10—15 j.	45 %
16—40 j.	44.1 %
> 40 j.	52 %

Uit deze tabellen blijkt dus, dat dit onderzoek aanwijst wat verwacht kan worden, dat de inprenting boven de 40 jaar het kleinst is en dat de vernietiging van opgenomen indrukken daar het grootst is.

Een wijziging in deze lichtproeven had ten doel dit onderzoek meer bruikbaar te maken voor de kliniek. Evenals bij de vorige proeven werd op vijf verschillende dagen geëxperimenteerd, nu niet in een donkere kamer, maar in vol daglicht. Vier ronde schijfjes gekleurd papier van  $\frac{1}{2}$  cM. doorsnede werden twee aan twee naast elkander op grijs bordpapier geplakt. Deze kleuren werden den proefpersoon gedurende 2 sec. vertoond. Daarna werd 15 sec. gewacht, waarop de kleuren in hun volgorde moesten worden genoemd. Was het antwoord niet goed, dan werden zij zoo vaak op deze zelfde wijze vertoond, dat tweemaal achtereen het goede antwoord was verkregen.

Daarna werden die proeven herhaald met dit verschil, dat na de waarneming der vier kleuren door de verwijdering van het stuk bordpapier, waarop zij geplakt zijn, het licht van een elektrische lamp, die in een kastje, waarvan dat bordpapier den voorwand vormde, brandde, den proefpersoon gedurende 15 sec. vlak in de oogen scheen. Door na te gaan hoe vaak deze proef moest worden genomen om tweemaal de juiste antwoorden te krijgen, was de invloed van het navolgende sterke licht te bepalen.

Deze proef werd achtereenvolgens precies op dezelfde wijze herhaald met vier figuurtjes bijv.  $\times$   $\circ$   $\triangle$   $\square$  die paarsgewijze naast elkaar op het bordpapier waren geteekend en daarna met drie kleuren en drie figuurtjes, die zoo waren geteekend, dat naast elke kleur een figuurtje stond.

Het resultaat van deze proeven was van dien aard, dat bij de normalen een zeer geringe vernietiging door den navolgenden prikkel tot stand kwam, maar dat die bij de dementen zeer belangrijk was. Deze proeven zijn op mijn verzoek in eenigszins gewijzigden vorm

herhaald en de resultaten daarvan zullen in een proefschrift verschijnen.

### *Geluidsproeven.*

In een stille kamer werd de tik van een elektrische bel door den afstand en door de bel in een kistje in watten in te wikkelen zoodanig afgestompt, dat de geluidssterkte daarvan even boven de drempelwaarde lag. De p.p., die geregeld den electrischen tik hoorde, had voor zich op de tafel, waaraan hij had plaats genomen, een lawaaimaker van BARANY liggen, die onmiddellijk na den tik door een electrisch contact automatisch in gang kon worden gezet. Door na den tik te laten waarnemen met en zonder opvolgend lawaai in onregelmatige volgorde is nauwkeurig vast te stellen hoe vaak door de teruggrijpende kracht van het sterke geluid de zwakke indruk verloren gaat.

Bij 13 normale personen en bij 3 dementen (2 dem. paral. en een dementia arteriosclerotica) werden gedurende vijf dagen elken dag 20 proeven bij elken p.p. genomen.

Gemiddeld aantal waarnemingen.

	Aantal	Zonder navolgend sterk geluid	Met navolgend sterk geluid
Normalen	13	97.1	88.9
Dementen	3	50	0

De groote stoornissen in het waarnemen en de enorm groote vernietiging bij de dementen springt dadelijk in het oog.

### *Gevoelsproeven.*

Het is gemakkelijk vast te stellen, dat de waarneming van een kleine oneffenheid, die men door het strijken met den vinger over een plat vlak voelt, verdwijnt, wanneer die waarneming door een sterken gevoelsprikkel wordt gevolgd. Daarbij is het niet noodig, dat de sterke navolgende prikkel dezelfde plaats van aanraking treft, maar de zwakke voorafgaande waarneming verdwijnt eveneens, wanneer de opvolgende sterke prikkel een ander deel van den vinger of zelfs wanneer hij de vingers van de andere hand treft. Proeven werden als volgt genomen. Op een gladde schijf was op de eene helft een papierlaag van 0.3 m.M. dikte geplakt. Wanneer die schijf met snelheid wordt rondgedraaid, voelt de op de schijf rustende

vinger duidelijk de oneffenheid. Door nu op een afstand van die oneffenheid een grootere verhevenheid zoo aan te brengen, dat bij het ronddraaien de vinger, nadat de kleine oneffenheid is gepasseerd, tegen die verhevenheid aanstoot, zal de eerste kleinere prikkel niet worden gevoeld, wanneer de sterke navolgende prikkel niet te ver daarvan verwijderd is. Door nu den afstand tusschen de beide prikkels te regelen, kan men den teruggrijpenden vernietigenden invloed van den sterken prikkel bepalen. Bij proeven genomen met de p.p. van verschillende leeftijd bleek het, dat er zeer groote individueele verschillen bestaan. Deze proeven zijn uitnemend geschikt om den teruggrijpenden invloed van sterke prikkels aan te toonen, maar er zijn hier zooveel bronnen van fouten, dat ik van de mededeeling der individueele verschillen afzie.

Een veel betere methode bestaat daarin dat de waarneming van een zwakken electrischen prikkel aan een hand, die geregeld gevoeld kan worden, verdwijnt, wanneer die gevolgd wordt door een sterken electrischen prikkel aan de andere hand.

Na de beschrijving der proeven en de mededeeling van enkele resultaten zal ik de resultaten mededeelen van het onderzoek der p.p., waarbij achtereenvolgens de verschillende onderzoekingsmethoden werden toegepast. Het aantal p.p. bedroeg 53, n.l. 14 normalen, 9 neurosen, 13 melancholici en 17 met intellectueele defecten. Deze voorloopige mededeeling zou te uitvoerig worden, wanneer een nadere beschrijving van alle p.p. werd gegeven. Alleen wil ik mededeelen, dat onder de groep neurosen 4 hystericae en 5 psychasthenici voorkwamen, welke laatsten evenwel ook hysterische stigmata vertoonden. De melancholici waren geremd en gedeprimeerd, waarvan sommigen nog kleinheidswaanenkeelden hadden, die bij anderen werden gemist. Onder de dementen kwamen voor patiënten met senile demencie, dem. paralytica, dem. praecox en dem. epileptica. De demencie was zeer verschillend sterk, maar nooit zoo, dat zij een bezwaar opleverde voor dit vrij langdurig onderzoek. Overeenkomstig de bedoeling van dit onderzoek, om den invloed van de bewustzijnsinzinking op verschillende psychische functies te leeren kennen, kan ik voorloopig volstaan met de mededeeling, welke veranderingen er optreden bij de verschillende groepen van p.p., waarbij het verschil in bewustzijnsgraad zeer groot is.

#### *Esthesiometer.*

De opmerkzaamheid van de melancholici en vooral van de dementen is belangrijker slechter dan die der normalen en der neurosen. De

	Aantal	Procentgetal juiste antwoorden
Normalen	14	96.9
Neurosen	9	98.1
Melancholici	13	87.9
Dementen	17	76.9

goede praestaties der neurosen bewijzen, dat het vernauwde bewustzijn der hysterie en de psychische stoornissen der psychasthenie geen bezwaren opleveren, om hun aandacht voor korten tijd te concentreren op werk, waarin zij belangstellen.

*Aanstreppingsproeven.*

	Normale aanstreping gemiddelde arbeid p. min.	Promille- getal fouten normale aanstreping	Omgekeerde aanstreping gemiddelde arbeid p. min.	Promille- getal fouten omgekeerde aanstreping
Normalen	86.0	4.7	71.1	17.4
Neurosen	74.6	5.5	59.9	23.8
Melancholici	66.8	7.1	52.9	91.0
Dementen	54.8	26.5	42.6	110.7

Zoowel uit het aantal normale als omgekeerde aanstreppingen en uit het aantal fouten blijkt het groote verschil in opmerkzaamheid. Met de afnemning van de opmerkzaamheid neemt de automatische nawerking, de perseveratie, sterk toe. Dit blijkt uit den sterkeren invloed van de normale aanstreping, zoowel op de quantiteit als de qualiteit der omgekeerde bij een inzinking van de opmerkzaamheid. De perseveratie, het blijven kleven van waarnemingen, voorstellingen of bewegingen, is een verschijnsel, dat in den droom en in de acute verwardheid zeer frequent is.

Tevens blijkt, dat in tegenstelling met de esthesiometrische proef de neurosen nu belangrijk minder praesteeren dan de normalen, waarschijnlijk tengevolge van de omstandigheid, dat hun aandacht bij deze laatste proef langer achtereen op den arbeid gevestigd moet blijven.

*Onderzoek: treffermethode.*

Met de daling van den bewustzijnsgraad neemt het aantal goede



## Procent getal antwoorden.

	Goede	Verkeerde	Geen
Normalen	43.2	24.2	32.6
Neurosen	35.3	31.2	33.6
Melancholici	24.5	30.5	45.1
Dementen	23.0	35.7	41.2

antwoorden af en het aantal verkeerde toe. De vermindering in het vastleggen der associaties moet worden beschouwd als een aanduiding van de zeer gebrekkige opvatting bij de acute verwardheid, waar het dikwijls een van de meest opvallende symptomen is, dat ondanks de moeite, die de patiënten doen het niet gelukt, om de indrukken van buiten te verwerken, te assimileeren. Het toenemende aantal verkeerde antwoorden wijst op een lossen worden der associatieve verbindingen, wat als een rudimentaire vorm van het gemis aan verband tusschen de voorstellingen, zooals dat bij de acute verwardheid voorkomt, moet worden opgevat. Dit uitvallen van associatief verband is bij deze ziekte zoo essentieel, dat zij daaraan den naam dankt.

De moeilijkheid in het vastleggen van indrukken heeft bij onze p.p. geheugenstoornissen, die met den graad der bewustzijnsinzinking overeenstemmen, tengevolge, zooals die bij de acute verwardheid in zeer sterke mate voorkomen.

*Bijzondere begrippen tot algemeen begrip terugbrengen.*

## Procentgetal antwoorden.

	Goede	Verkeerde	Geen
Normalen	67.3	4.4	28.3
Neurosen	63.9	5.2	30.9
Melancholici	53.2	8.3	37.8
Dementen	42.2	12.8	44.7

Terwijl in de vorige proef vooral de contiguiteits- of gelijktijdigheidsassociaties onderzocht werden, speelt bij dit laatste onderzoek — het onderbrengen van bijzondere tot algemeene begrippen — veel meer de associatie door overeenkomst een rol. Ook hier weer

blijkt, dat bij een betere opmerkzaamheid de indrukken sterker gefixeerd worden.

Het toenemende aantal verkeerde antwoorden met de sterkere daling van den bewustzijnsgraad wijst er op, dat de paramnesiën, die in veel sterkere mate bij de acute verwardheid optreden, zoodat zij daar soms tot confabulatie aanleiding geven; daarvan afhankelijk zijn.

*Inprenting en reproductie van getallen zonder en met navolgenden arbeid.*

	Zonder			Met		
	Goed	Verkeerd	Niets	Goed	Verkeerd	Niets
Normalen	68.3	28.9	2.9	54.3	33.1	12.6
Neurosen	66.2	26.7	7.1	52.9	27.6	19.6
Melancholici	60.9	31.7	7.4	38.8	41.2	20.0
Dementen	44.0	38.1	17.9	26.4	48.0	25.6

Allereerst blijkt uit deze proeven, dat zoowel met als zonder belemmering het aantal goede reproducties ook hier sterk afneemt met de meerdere daling van den bewustzijnsgraad en wel zoo, dat de zeer geringe vermindering van de opmerkzaamheid bij de neurosen met een geringe, de veel sterkere opmerkzaamheidsinzinking der dementen met een veel belangrijker geheugenstoornis gepaard gaat.

Wanneer wij de goede antwoorden zonder en met belemmering met elkaar vergelijken dan valt in het oog, dat door den navolgenden arbeid een vernietiging der herinneringen plaats vindt. Bezien wij die vermindering der praestaties in de procentgetallen der goede antwoorden zonder den navolgenden arbeid dan krijgen wij volgend tabelletje:

Vernietiging door navolgenden arbeid.

Normalen	20.5
Neurosen	20.1
Melancholici	36.3
Dementen	40

De teruggrijpende vernietiging door navolgend werk neemt dus sterk toe met de daling van den bewustzijnsgraad. Dit verschijnsel nu treedt in veel sterkere mate op bij de acute verwardheid, waar

dikwijls niets wordt onthouden. Pas opgenomen indrukken werden door navolgende psychische inhouden dadelijk weer vernietigd.

Nog een ander verschijnsel is de vermelding waard. De verkeerde antwoorden nemen toe met de daling van den bewustzijnsgraad. Ook uit voorgaande proeven is dat gebleken. De neurosen evenwel maken een uitzondering op dezen regel. Zij geven van alle p.p. het kleinste aantal verkeerde antwoorden. Dit verschijnsel wordt verklaarbaar door de karaktereigenschappen der psychasthenici, die door allerlei scrupules worden weerhouden, om een antwoord te geven, wanneer zij niet zeker zijn. De normalen daarentegen zullen, wanneer zij van het getal een cijfer onthouden hebben, naar dat getal gaan raden. Bij het nagaan van alle antwoorden afzonderlijk blijkt dit duidelijk. De grootere neiging der psychasthenici, om liever te zwijgen dan een verkeerd antwoord te geven, blijkt ook duidelijk, wanneer wij van alle *niet goede* antwoorden de procent-getallen verkeerde en nulantwoorden naast elkaar bezien.

Niet goede antwoorden.

	% getal verkeerde	% getal nulantwoorden
Normalen	90.9	9.1
Neurosen	79.0	21.0
Melancholici	81.1	18.9
Dementen	68.0	32.0

Het aantal verkeerde antwoorden is alleen bij de dementen kleiner dan bij de neurosen.

*Recognitie van getallen zonder en met navolgenden arbeid.*

	Zonder			Met		
	Goed	Verkeerd	Niets	Goed	Verkeerd	Niets
Normalen	80.6	19.4	0	78.0	21.7	0.3
Neurosen	82.2	13.3	4.4	72.9	20.0	7.1
Melancholici	69.5	25.2	5.2	62.8	30.5	6.8
Dementen	57.2	36.2	6.6	48.5	42.1	9.4

Ook hier weer is een belangrijke invloed van den bewustzijnsgraad merkbaar. De neurosen verschillen nagenoeg niet van de normalen. Het vermogen dus om door waarnemingen herinneringsbeelden op te wekken vermindert met de toeneming van de opmerkzaamheidsverslapping. Wanneer dit verschijnsel in zoo erge mate optreedt, dat de waarnemingen op zich zelf blijven staan en geen herinneringsbeelden daarmee in verband kunnen worden gebracht dan ontstaat desorientatie, een verschijnsel dat bij de acute verwardheid geregeld voorkomt.

De teruggrijpende invloed van navolgend werk is hier lang zoo groot niet als bij de vorige proef. Dit blijkt vooral uit navolgend tabelletje:

Vernietiging door navolgenden arbeid.

Normalen	3.2
Neurosen	11.3
Melancholici	9.6
Dementen	15.2

Bij normalen is de teruggrijpende invloed bijna afwezig, bij de dementen daarentegen zeer duidelijk.

Het gevoel van onzekerheid der psychasthenici blijkt uit deze proeven op dezelfde wijze als uit de vorige en komt weer duidelijk aan het licht, wanneer wij van alle *niet goede* antwoorden de procentgetallen verkeerde onderling en de procentgetallen nulantwoorden onderling vergelijken.

Niet goede antwoorden

	Zonder navolgende belemmering		Met navolgende belemmering	
	% getal verkeerd	% getal nul	% getal verkeerd	% getal nul
Normalen	100	0	98.6	1.4
Neurosen	74.7	25.3	73.8	26.2
Melancholici	82.6	17.4	82.0	18.0
Dementen	84.6	15.4	81.7	18.3

De verkeerde antwoorden zijn bij de neurosen het kleinst, de nulantwoorden het grootst in aantal.

*Inprenting, reproductie en vernietiging van waarneming van eenvoudige figuurtjes.*

Deze proeven werden niet met de 53 bovengenoemde p.p. verricht maar met 41. Zij werden gedurende vijf dagen voortgezet. Overigens komt de wijze van experimenteren en de berekening der resultaten overeen met die welke boven nader zijn beschreven.

	Aantal	Zonder na- volgend licht	Met na- volgend licht	Vernietiging
Normalen	12	81.1	38.4	52.7
Neurosen	3	66.7	31.2	53.2
Melancholici	6	58.9	25.5	56.7
Dementen	10	29.5	11.6	60.4

Opvallend is, dat de inprenting regelmatig afneemt met de vermeerderde opmerkzaamheidsinzinking en dat vooral de dementen belangrijk minder praesteeren. De vernietiging der pas opgenomen indrukken vermeedert met het lager worden van den bewustzijnsgraad.

Uit dit onderzoek blijkt, dat de verschijnselen der acute verwardheid in aanleg bij de normale en pathologische p.p. aanwezig zijn en dat zij toenemen met de daling van den bewustzijnsgraad.

**Physiologie.** — De Heer ZWAARDEMAKER doet, mede namens den Heer F. HOGEWIND een mededeeling over: „*Het spontaan colloïdaal worden van oplossingen van reukstoffen, uitermate versneld door bestraling met ultraviolet licht.*”

In de literatuur zijn een aantal gegevens voorhanden betreffende het spontaan colloïdaal worden van stoffen, die een eenigszins groot aantal atomen in het molecule herbergen (dit geldt voor kleurstoffen BILTZ <sup>1)</sup> of wel een aanzienlijk moleculair gewicht bezitten (dit geldt voor alcaloïden, J. TRAUBE <sup>2)</sup>). Daar een onzer het spontaan sterk colloïdaal worden van eugenol in glycerine, indien deze stoffen vluchtig door elkaar gemengd worden, had opgemerkt en daarvan terloops allerlei bijzonderheden had kunnen vaststellen, werd besloten een meer stelselmatig onderzoek naar het colloïdaal worden van oplossingen van reukstoffen in water, glycerine of paraffine in te stellen. De oplossingen werden na vluchtige vermenging wekenlang aan zichzelf overgelaten en dan op het Tyndallverschijnsel onderzocht en ultramicroscopisch <sup>3)</sup> beoordeeld.

Het bleek, dat de onderstaande oplossingen een sterk Tyndallverschijnsel geven:

<i>in water</i>	<i>in glycerine</i>	<i>in paraffine</i>
Eugenol	Eugenol	Aniline
Cressol	Safrol	Eugenol
Guajacol	Kreosoot	Cumidine
Cavaerol	Nitrobenzol	
Citral		
Cumidine	Cressol	
Thymol	Apiol	
Hypnon		

In de tabel zijn de reukstoffen zoodanig gerangschikt, dat die

<sup>1)</sup> Biltz in Gedenkboek, J. M. VAN BEMMELN, 1910, p. 110 (grenswaarde ligt tusschen 45 en 55 atomen).

<sup>2)</sup> J. TRAUBE, Int. Ztsch. f. physik. Chem. Biol. Bd. I. p. 35, 1914 (grenswaarde ligt tusschen 208 en 275 moleculair gewicht).

<sup>3)</sup> Het onderzoek had plaats, wat het TYNDALL verschijnsel betreft, in den lichtkegel van een kleine booglamp, met een Nicol de volledige uitdooving van het

J. W. VAN WIJHE: „Over den Nervus terminalis van den Mensch tot Amphioxus.

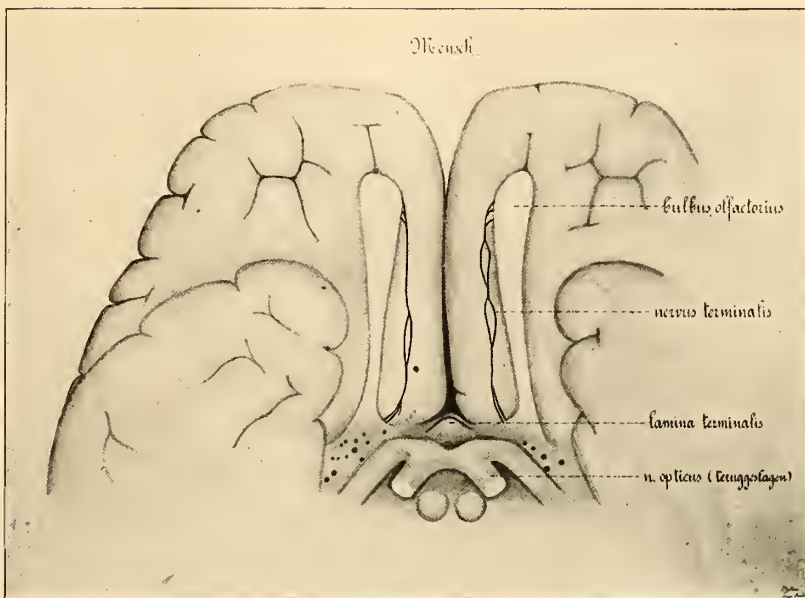


Fig. 1. Vertoont de ondervlakte van het voorste deel der hersenen van den mensch en het intracraniale deel van den n. terminalis. Naar eene figuur van BROOKOVER iets gemodificeerd.



Fig. 2. Vertoont bij het konijn de mediale vlakte van den rechter lobus olfactorius met die van het aangrenzend deel der hemisfeer en de daarvan op het septum uitstralende zenuwen naar eene combinatie van sagittale sneden. Naar eene figuur van HUBER en GULD iets gemodificeerd.





welke het sterkst colloïdaal geworden waren, het hoogst geplaatst zijn. Het zijdelings verstrooide licht hebben wij in een aantal gevallen volgens de methode van KAMERLINGH ONNES en KEESOM<sup>1)</sup> gemeten. De getallen der quantitative bepalingen verhouden zich in de reeks der waterige oplossingen als 43 : 39 : 37 : 20 : 20 : 15 : 15 : 10 in de reeks der paraffineuse 23 : 8 : gering.

Afgezien van bovenstaande, nader gemeten oplossingen, bleken bovendien de waterige oplossingen van apiol, creosol, paraxylenol, anysaldelyde nog een ongemeen duidelijk effect te geven. Vrij duidelijk is het Tyndall-verschijnsel in oude waterige oplossingen van xyloidine, orthotoluidine, chinoline, durol. Een matig effect vonden wij van oude waterige oplossingen van methyleinnaamylaat, paratoluidine, salicylaldelyde, naphthaline, cumarine, toluol, anthranilzure methylester, benzylbenzoaat. Een zeer gering effect vertoonden de waterige oplossingen van safrol, vanilline, anthraceen, nitrobenzol. Het Tyndall-effect bleek achterwege te blijven in oude waterige oplossingen van iron, heliotropine, muskus, isomuscon.<sup>2)</sup>

De vloeistoffen waren volledig verzadigd. Voor sterk tot colloïdaal worden neigende reukstoffen als eugenol, cressol, guajacol, carvacrol enz. is dit echter niet noodig.

In glycerineuse oplossingen komt het verschijnsel veel minder veelvuldig voor. Wij constateerden de afwezigheid van een Tyndall-verschijnsel in een aantal oude glycerineuse oplossingen van reukstoffen, die in water opgelost binnen eenige dagen colloïdaal werden. Ook in paraffineuse oplossing is het colloïdaal worden niet zoo veelvuldig.

Wanneer de oplosbaarheid zoo goed als ontbreekt, mag men ook op den duur bij reukstoffen geen Tyndallverschijnsel verwachten, maar ook, wanneer men b.v. door fluorescentie de zekerheid heeft, dat moleculen in oplossing zijn overgegaan, ontbreekt soms het colloïdaal worden bij langdurig rustig staan, ten eenenmale. Aldus bij heliotropine. Eugenol is de stof, die èn in water èn in glycerine het

---

zijdelings verstrooide licht nagaand, wat de ultramicroscopie aangaat in het groote toestel van ZSIGMONDY. De glycerineuse oplossingen konden evenwel niet in een gewone cuvette worden opgenomen, daar de kleefstof, waarmee de kwartsvenstertjes zijn vastgemaakt, in glycerine oplost. Voor die gevallen werd de paraboloid-condensor van ZEISS of een donkerveld-condensor-cuvette van LEITZ gebruikt.

1) KAMERLINGH ONNES en KEESOM *Acad. Amst.* 29 Febr. 1908.

2) Sedert heeft zich deze lijst van spontaan colloïdaal wordende reukstofoplossingen nog belangrijk uitgebreid. Ook de alcaloïden, die in waterige oplossingen op den duur den colloïdalen vorm aannemen zijn zeer talrijk. Merkwaardig hier-tegen over het kristalloïd blijven van zoo goed als alle oplossingen van antipyretica (niet-alcaloïden).

sterkst van alle onderzochte reukstoffen colloïdaal wordt. Ook in paraffine wordt eugenol colloïdaal, maar in dit oplosmiddel wordt b.v. aniline het nog meer.

In het algemeen hebben de sterk colloïdaal wordende reukstoffen een hooger moleculair gewicht dan die, welke het weinig of niet worden; voorts blijken de sterk colloïdaal wordende reukstoffen in het algemeen een sterker verlaging der oppervlaktespanning van water te weeg te brengen. Voor de op hun Tyndall-verschijnsel gemeten vloeistoffen nam het druppelgetal in een bepaalde volgorde af. Indien het druppelgetal voor zuiver water 49 is, bedraagt dat van eugenol 90, cressol 80, carvaerol 80, citral 72, thymol 72, guajacol 70, cumidine 65, hypnon 54. Dit is ongeveer dezelfde reeks als die, welke voor het Tyndall-effect geldt. In het algemeen daalt het vermogen, om daling der oppervlaktespanning lucht-water te geven en het vermogen om een colloïdalen toestand der verzadigde of half verzadigde oplossing te voorschijn te roepen, in dezelfde volgorde af.

Wanneer wij onze oplossingen, tijdens het dagen en wekenlang aan zich zelf overgelaten zijn, op verschillende tijdstippen ultra-microscopisch onderzochten, bleek allengs het aantal sub-micronen ten koste van de amicronen, welke den grond van den kegel vormden, toe te nemen.<sup>1)</sup> In sterk colloïde oplossingen, gelijk van het eugenol, ontstaat ten slotte een neerslag. Door toevoeging van  $\frac{1}{2}$ , normaal natriumcarbonaat-solutie heldert de sterk opalesceerende vloeistof terstond niet onaanzienlijk op, waarbij dan weer amicronen optreden, nu ten koste van de vroeger spontaan gevormde submicronen.

Voor en na het colloïdaal worden is de oppervlakte-spanning der oplossing ongeveer gelijk (bij een eugenoloplossing 1 : 1500 versch 67 en oud 67 druppels voor het stalagmeter-volume). Ook de genkracht is vóór en na ongeveer dezelfde. Op grond hiervan honden wij de colloïdaal geworden reukstofoplossingen voor suspensoiden. Op de gebruikelijke wijze in een U-buis aan de inwerking van een constanten stroom onderworpen, werden de deeltjes in deze suspensoiden alle naar de anode gevoerd. De deeltjes zelf moeten dus negatief geladen zijn. Het been, waarin zich de positieve pool bevond, werd meer opalescent, dat, waarin de negatieve pool, helderde op.

<sup>1)</sup> De vloeistoffen, zoowel de colloïdale als de versch bereide contrôle-vloeistoffen werden door een papieren filter onmiddellijk in de cuvette gefiltreerd. Dientengevolge waren in een gezichtsveld bij zuiver water hoogstens een halfdozijn submicronen te zien. Bij water ontbrak een grond van amicronen geheel, bij de versche contrôle-vloeistoffen eveneens, maar in de door staan tot suspensies geworden verzadigde of onverzadigde oplossingen vertoonden zich behalve een grond van amicronen zeer talrijke submicronen in levendige Brownsche beweging.

Omdraaiing van den stroom herstelt den ouden toestand. Evenzoo geeft vermenging van den inhoud der beide beenen de vroegere sterkte van het Tyndalleffect terug. Quantitatief nagegaan verhouden zich de lichtsterkten van het Tyndalleffect van de vroeger in tabel gebrachte oplossingen, na 1 uur stroom doorleiden, aldus:

## STERKTE VAN HET ZIJDELINGS VERSTROOIDE LICHT.

	Aanvankelijk	Aan - pool	Aan + pool
Eugenol.....	37	33	41
Guajacol.....	37	29	35
Cressol.....	24	19	23
Cavacrol.....	20	16	24
Citral.....	20	16	22
Cumidine.....	15	12	18
Thymol.....	15	10	16
Hypnon.....	10	gering	16

Na de verplaatsing der micellen in de suspensoiden door de werking van den stroom, blijkt de oppervlaktespanning in het been, dat de positieve pool draagt iets kleiner te zijn geworden dan in dat, hetwelk de negatieve pool bevat.

## DRUPPELGETAL, WANNEER WATER 49 GEEFT.

	Te voren	Aan - pool	Aan + pool
Eugenol.....	90	87	89
Cavacrol.....	84	79	80
Cressol.....	80	78	79
Citral.....	73	71	74
Thymol.....	72	70	71
Guajacol.....	70	70	71
Hypnon.....	55	54	56

Bij verwarming van een waterige engenoloplossing 1 : 1200 boven 40° wordt de opalescentie geringer om bij afkoeling langzaam terug te keeren en na eenige dagen sterker te zijn dan tevoren. Beneden 30° treedt geen wijziging op, ook niet, wanneer de vloeistof gedurende 24 uur op 30° wordt gehouden.

Geheel hiermee overeenkomend is het feit, dat een colloïdale glycerinense engenoloplossing op zeer warme zomerdagen veel minder opalesceerend bleek, dan op koele dagen, die voorafgingen of volgden.

Het geleidelijk colloïdaal worden van reukstofoplossingen, aangevuld met de vorming van amicronen, die aangroeien tot submicronen, blijkt zeer sterk onder den invloed te staan van het licht. In douker bewaard, ontwikkelt zich het proces in de waterige oplossingen slechts langzaam. Zelfs zijn er verscheidene stoffen, waarin het dan achterwege blijft, terwijl het in daglicht duidelijk uitkomt, chinoline, b.v. Veel sterker intusschen dan gewoon daglicht werkt ultraviolet licht.

Stelt men een engenoloplossing in een reageerbuisje van kwarts op  $\frac{1}{2}$  meter afstands aan het licht van een kwikkwartslamp bloot, dan is in een half uur de opalescentie <sup>1)</sup> bereikt, die anders eerst in 14 dagen wordt verkregen. Een elektrische booglamp werkt in denzelfden zin, maar zwakker. Dit versneld colloïdaal worden blijft achterwege, wanneer het kwartsbuisje in stanniolblad gewikkeld is. Ook bij alle andere oplossingen werd hetzelfde waargenomen. Zelfs een heliotropine-oplossing, te voren optisch leeg, vertoont na  $\frac{1}{2}$  uur bestralens, ultramicroscopisch talrijke micellen.

Het zijn echter niet alleen de gewone lichtgolven of in versterkte mate de ultraviolette stralen, die reukstoffen colloïdaal kunnen maken, maar ook de straling van in glas bewaard radium. Wij gingen dit na door 2 volkomen gelijke gegoten glazen cuvetten met parallelle wanden te nemen, beide met verzadigde reukstofoplossing gevuld. In een der cuvetten kwam een toegesmolten glazen buisje, waarin 200 mgr. van een mengsel van radium- en bariumbromide, dat 0,18 %  $\text{RaBr}^2$  bevatte. Werd de proef met een verzadigde heliotropine-oplossing gedaan, dan bleef de contrôle-vloeistof optisch leeg, terwijl de oplossing in aanraking met het radiumbuisje in 24 uur een amicrouengrond en 10 submicronen per gezichtsveld ging vertoonen. Ook met de andere reukstofoplossingen der tabel gebeurde in korten

<sup>1)</sup> Behalve opalescentie ontwikkelt zich ook fluorescentie. In hoeverre er eenig verband is tusschen lichtelectriciteit en het waargenomen uitermate versneld colloïdaal worden, wagen wij niet te beslissen. Literatuur over lichtelectriciteit bij HELLWACHS, in MARX's Hdb. d. Radiologie. Bd. III. S. 438.

tijd iets analoogs, zij het ook, dat men dalend in de reeks meer tijd noodig heeft om een verschil in dispersiteit tusschen de radium-cuvette en de contrôle-cuvette te verkrijgen.

Niet enkel de toegang verkrijgende electromagnetische golven van het zichtbaar licht, het ultraviolette licht en de  $\gamma$ -stralen van het radium, maar ook de mechanische energie is in staat aan een versch bereide, verzadigde grootmoleculaire reukstofoplossing de energie te verschaffen, die zij behoeft om de oppervlakte-energie beschikbaar te hebben, benoodigd voor de vorming van de tallooze amicronen en submicronen, welke men in het allengs ontstane suspensoid aantreft. Een krachtig schudden bevordert het colloïdaal worden zeer. Een heliotropine-oplossing b.v. die zelfs na maanden bewaren geheel vrij van submicronen is gebleven, verkrijgt ze onmiddellijk in niet onbelangrijk aantal, wanneer men de oude oplossing in de met een glazen plaatje gesloten cuvette eenigen tijd schudt. Hetzelfde komt uit bij de glycerineuse oplossingen. Eugenol zonder schudden in een scheitrechter op glycerine gegoten, maakt deze laatste in 5 dagen niet opalesceerend. Een vluchtig schudden echter laat een sterk opalesceerende, echt colloïdale vloeistof achter, die ook verder haar suspensoid karakter blijft behouden.

Dat bovendien chemische energie in het spel zou zijn, is a priori niet waarschijnlijk, want het proces komt ook tot stand in chemisch haast volkomen indifferente vloeistoffen als paraffine, hoewel aan den anderen kant zij opgemerkt, dat volkomen zuurstofvrij maken der paraffine het colloïdaal worden, ook in ultraviolet licht, belet. Er moet echter nog een andere onbekende energiebron zijn, afgezien van de lichtstraling en de mechanische energie, die casu quo aan de nieuw ontstane micellen al of niet met behulp van zuurstof oppervlakte-energie levert, want ook een in een looden kistje, volkomen in het duister weggezette eugenol-oplossing wordt in weinige dagen tot een ontwijfelbaar suspensoid. Een vereischte voor dit alles is echter, dat men met groote opgeloste moleculen te doen heeft. Dit

COLLOÏDAAL WORDEN VAN WATERIGE OPLOSSINGEN IN DE ANILINEREKES.

	Mol. gew.	Atomenaantal	Tyndalleffect
Aniline . . . . .	93	14	zeer weinig duidelijk
Toluidine . . . . .	107	17	vrij duidelijk
Xylidine . . . . .	121	20	vrij duidelijk
Cumidine . . . . .	135	23	duidelijk

## ID. IN DE BENZOLREEKS.

	Mol. gew.	Atomenaantal	Tyndalleffect
Benzol.....	78	12	zeer weinig duidelijk
Toluol.....	92	15	wenig duidelijk
Xylol.....	106	18	
Pseudocumol...	120	21	wenig duidelijk
Durol.....	134	24	vrij duidelijk

komt onmiskenbaar uit, zoodra men de termen van een homologe reeks onderling vergelijkt.

Reukstoffen hebben nimmer buitengewoon groote moleculen <sup>1)</sup>. Daarom zal de neiging tot de vorming van amicronen, later van submicronen, zoodra de toevoer van energie, welke in oppervlakte-energie kan overgaan, verzekerd is, nooit zoo bijzonder sterk zijn. Het is dus begrijpelijk, dat het proces tot dusver onopgemerkt bleef. Maar, wanneer men met veel omvangrijker moleculen te doen heeft, ligt het voor de hand te veronderstellen, dat het proces van colloïdaal worden bijzonder gemakkelijk zal tot stand komen en zich zeer sterk zal uiten, zoodra slechts electromagnetische golven, mechanische energie of de boven veronderstelde onbekende energievorm, voorhanden zijn, waaraan de te vormen deeltjes hun oppervlakte-energie ontleenen kunnen.

<sup>1)</sup> De door ons aan het onderzoek onderworpen reukstoffen hadden een moleculair gewicht tusschen 78 en 199; het aantal hunner atomen bedroeg van 14 tot 27, vooropgesteld, dat geen veelvoud van de chemische formule genomen moet worden.

**Anatomie.** — De Heer J. W. VAN WIJHE biedt eene mededeeling <sup>1)</sup> aan: „*Over den Nervus terminalis van den Mensch tot Amphioxus*”.

Het is een feit, waaraan menigeen van U moeilijk geloof zal slaan, dat ruim drie jaren geleden — in 1914 — bij den mensch eene nieuwe, uit de hersenen zelfstandig ontspringende zenuw ontdekt is.

Die zenuw is de *n. terminalis*. Met het bloote oog is zij natuurlijk niet te zien, maar wel met het vergrootglas, speciaal met het binoculair mikroskoop, waarmede haar ontdekker, de Amerikaan BROOKOVER (*Journal of comp. Neurology*, Vol. 24) haar gevonden heeft.

Zij loopt in de pia mater parallel met den tractus olfactorius en wel mediaal van dezen, dus niet ver van 't mediaanvlak en ongeveer over het midden van den gyrus rectus, zie fig. 1. Trekt men een rechthoekig stuk van de pia mater in deze streek af en legt men dit onder het mikroskoop, dan ziet men de fijne bundels dezer zenuw. Hier en daar wijken de bundels nit elkaar en komen daarna weer naar elkaar toe.

De zenuw is onafhankelijk van bulbus en tractus olfactorius en komt, naar BROOKOVER meent, eerst bij de mediale reukstreep in verbinding met de hersenen. Een aantal gangliencellen (B. schat hen op circa 50 stuks) liggen in de zenuw op haren loop langs den tractus olfactorius verspreid.

Niet alleen langs den tractus, maar ook wat verder distaalwaarts, langs den bulbus olfactorius kan de zenuw vervolgd worden. Zij loopt evenzeer mediaal van den bulbus als van den tractus, maar in de streek van den bulbus ligt zij niet meer in de pia mater, maar in de dura ingebed, ten deele heeft zij deze daar reeds doorboord en ligt zij op de lamina cribrosa.

In de streek van den bulbus is het aantal harer gangliencellen aanzienlijk grooter dan langs den tractus. Het werd door B. tusschen 100 en 200 cellen geschat. Ongetwijfeld treden hare takken door de mediële rij der gaten van de lamina cribrosa naar het slijmvlies van het neusseptum, maar zoover reikte het onderzoek niet.

---

<sup>1)</sup> Voordracht, gehouden in de vergadering der Ned. Dierkundige Vereeniging van 26 Januari 1918.

Bij den volwassen mensch is dus de loop der nieuwe zenuw enkel in den schedel bekend, daar buiten nog niet <sup>1)</sup>).

Zooals te verwachten was, werd de zenuw bij volwassen vormen uit de groep der zoogdieren niet het eerst bij den mensch gevonden. Hond en kat (Mc. COTTER, 1913) en konijn (HUBER & GUILD, 1913) gingen voor, maar wel is het merkwaardig, dat in embryonale stadiën van zoogdieren het menschenembryo het eerste was waarbij de zenuw — zij het dan ook onvolkomen — ontdekt werd. Dit geschiedde door onzen landgenoot ERNST DE VRIES, die haar ook waarnam bij embryo's van *Cavia*.

Hij beschreef zijn onderzoek (gepubliceerd in het „Verslag der Vergadering der Kon. Academie van Wetenschappen” van 22 April 1905) dat ook in het buitenland zeer de aandacht heeft getrokken, in een artikel van vier bladzijden, waaruit men zien kan, dat het niet noodig is — ook wel niet wenschelijk — veel woorden te gebruiken, wanneer men iets van beteekenis gevonden heeft.

Hij vond n.l. gangliencellen ingestrooid in de baan van de zenuw die naar het orgaan vomeronasale (orgaan van JACOBSON — beter: orgaan van RUYSCH) nabij de basis van het neusseptum voert. Bovendien vond hij, dat het zoogenaande ganglion olfactorium, door hem ganglion vomeronasale geheeten, niet behoort bij de fila olfactoria, die als de eigenlijke reukzenuw worden samengevat.

Naar zijne meening zou het behooren aan den n. vomeronasalis, die het orgaan van RUYSCH <sup>2)</sup> verzorgt, dat van binnen bekleed is met een afgesnoerd deel van het reukslimvlies.

Daar de n. vomeronasalis bovendien op eene andere plaats — de area vomeronasalis — in het centrale zenuwstelsel treedt als de fila olfactoria, kwam DE VRIES tot de opvatting dat de n. vomeronasalis niet een component van den n. olfactorius, waarvoor hij algemeen gehouden werd, maar eene zelfstandige zenuw zou zijn, homoloog met den n. terminalis der visschen.

Een ernstig bezwaar tegen deze opvatting is evenwel, dat de n. vomeronasalis volgens de afbeeldingen van DE VRIES uit den bulbus olfactorius te voorschijn komt, terwijl de n. terminalis der longvisschen en selachiërs niet uit dien bulbus, maar uit de eigenlijke hemisfeer treedt <sup>3)</sup>).

Dit bezwaar schijnt aan DE VRIES ontgaan te zijn. Op p. 1 toch van zijn artikel maakt hij terecht onderscheid tusschen lobus olfactorius

<sup>1)</sup> Zie echter het naschrift aan het slot dezer voordracht.

<sup>2)</sup> Over het orgaan van Ruysch, zie het „naschrift” aan het einde dezer voordracht.

<sup>3)</sup> Intreden en uittreden van eene zenuw worden in deze voordracht door elkaar gebruikt, onafhankelijk van de richting van den prikkel.



en hemispheer, die lateraal door de fissura rhinica en mediaal door de fissura prima van elkaar gescheiden worden. Op p. 3 en 4 zegt hij dat de area vomeronasalis — de intredingsplaats der zenuw van dien naam — bij de hemispheer behoort.

Naar hij zelf evenwel bericht en afbeeldt, ligt deze area aan den sulcus circularis bulbi, dat is aan de grens van bulbus en tractus olfactorius en derhalve *niet* op de hemispheer, maar op den lobus olfactorius. Bij jonge embryo's is de tractus dikker dan de bulbus; later wordt deze verhouding omgekeerd.

Meer licht omtrent de vraag, of de n. vomeronasalis als het homologon van den n. terminalis der visschen kan beschouwd worden, was dus zeer gewenscht. Het kwam in 1913 van Amerikaanse zijde en wel voornamelijk door twee publicatiën, de eene van JOHNSTON in het Journal of Comp. Neurology, Vol. 23, de ander van HUBER en GUILD in den Anatomical Record, Vol. 7<sup>1)</sup>.

JOHNSTON onderzocht embryo's van het varken, het schaap en den mensch. Behalve zoogdieren onderzocht hij ook nog embryo's van schildpadden en eene larve van Amblystoma.

De opheldering die JOHNSTON bracht, bestaat hierin dat, naar hij vond, het ganglion en de verspreide gangliencellen niet behooren bij den n. vomeronasalis maar bij eene andere zenuw, die de hersenen niet binnentreedt in den bulbus olfactorius maar in de eigenlijke hemispheer, nabij of in de lamina terminalis, evenals bij de selachiërs.

Wat DE VRIES voor ééne zenuw gehouden had, zijn in werkelijkheid twee verschillende zenuwen, die elkaar grootendeels bedekken: de eene is de eigenlijke n. vomeronasalis, de andere is de n. terminalis. De n. vomeronasalis bezit geen gangliencellen en ontstaat uit cellen van een afgesnoerd deel (organon vomeronasale) van het reukslijmvlies; in bouw en ontwikkeling is hij geheel gelijk aan de bundels van de n. olfactorius; ook treedt hij in de hersenen in den bulbus olfactorius evenals de fila olfactoria die gezamenlijk de reukzenuw vormen. Wel treedt hij in den bulbus op eene speciale plaats, aan diens mediale vlakke caudaalwaarts hoog opstijgend (vgl. fig. 2), maar hij is ook een *gespecialiseerde* bundel van den n. olfactorius. De periphere gangliencellen en het eigenlijke ganglion behooren bij den n. terminalis.

De vergissing van DE VRIES is gemakkelijk te begrijpen hij gebruikte geen speciale methoden om zenuwen zichtbaar te maken, kon hieraan zijn materiaal van menschenembryo's ook niet wagen en moest het dikke proximale einde van den n. vomeronasalis (vol-

<sup>1)</sup> Nadere opgaven omtrent de literatuur vindt men in deze publicatiën, naar welke ik verwijs.

gens hem in vier bundels gesplitst) wel houden voor den wortel van het ganglion terminale (ten onrechte door hem ganglion vomeronasale genoemd), dat er als het ware tegen aangeplakt zit, terwijl de werkelijke wortels van dit ganglion door hunne fijnheid op dwarse sneden aan de waarneming ontsnappen.

Dat men zich echter ook bij het gebruik van speciale methoden om zenuwen zichtbaar te maken, vergissen kan, bewijst het werk van DÖLLKEN (1909). Hij onderzocht embryo's van muizen, konijnen, cavia's en menschen. Het voetspoor van DE VRIES volgend, hield hij eveneens de wortels van den n. vomeronasalis voor die van den n. terminalis.

Omtrent de muis zegt hij: „Die sog. mediale Riechwurzel von der bereits CAJAL, KAPPERS u. A. behauptet haben, sie sei nicht als eigentliche Riechwurzel zu bezeichnen, ist eine Wurzel des N. terminalis“. Geen wonder dat hij hierop laat volgen: „Sie hat bedeutende Beziehungen zum Olfactorius“.

De tweede belangrijke opheldering verscheen, gelijk zoo even gezegd is, eveneens in 1913 in eene mededeeling door HUBER en GULD, tot dit thema gekomen naar aanleiding van het werk van JOHNSTON, dat hij ten deele in het laboratorium van HUBER had verricht.

Deze schrijvers onderzochten konijnen-embryo's met de pyridin-zilvermethode. Zij konden het resultaat van JOHNSTON, dat de n. terminalis en de n. vomeronasalis twee verschillende zenuwen zijn, volkomen bevestigen, ook dat het ganglion en de verspreide gangliencellen niet behooren tot den n. vomeronasalis, die blijkbaar een gedifferentieerde bundel van den n. olfactorius is, maar wel tot den n. terminalis.

Maar terwijl JOHNSTON nog meende, dat de periphere eindiging van den n. terminalis, althans in hoofdzaak, beperkt was tot het gebied van den n. vomeronasalis, ontdekten deze onderzoekers, dat die eindiging gevonden wordt in het geheele voorste deel van het neusseptum, caudaalwaarts reikend tot aan den achterrand van het organon vomeronasale (fig. 2). Het is inaar een klein deel der periphere vertakking dat dit orgaan bereikt en het eigenlijke reuk-slijmvlies, het gebied der fila olfactoria, was vrij van terminalistakken.

Door verschil in tint waren de takken van den n. terminalis goed te onderscheiden van die van den n. trigeminus (nasociliaris en nasopalatinus) welke ook in het slijmvlies van het neusseptum gevonden worden.

Dat de n. terminalis zich niet in het reukslijmvlies vertakt, schijnt mij bij het terugvervolgen van de zenuw tot Amphioxus van belang, zooals aanstonds zal blijken.

In 1912 en 1913 publiceerde Mc COTTER zijne onderzoekingen resp. over den n. vomeronasalis en den n. terminalis. Hij vond met behulp van het praepareermikroskoop — dus als het ware bij loupevergrooting — laatstgenoemde zenuw bij volwassen hond en kat, maar niet bij rat, konijn, schaap, *Cavia* en opossum. Dat hij ze niet vond, is wegens zijne methode niet vreemd. Begrijpelijk is ook zijne meening, dat de n. terminalis peripheer in of bij het vomeronasaal orgaan zoude eindigen, hier toch zijn de bundels dikker, daar de vezels van den n. terminalis door die van den vomeronasalis versterkt worden.

Dit wat de *zoogdieren* betreft, bij welke ik mij wat langer heb opgehouden, omdat bij hen de meeste en m. i. ook de nauwkeurigste onderzoekingen verricht zijn. Omtrent de vogels, reptiliën en amphiënen kan ik kort zijn.

Bij *vogels* schijnt niet veel van den n. terminalis bekend.

Bij den *kikker* werd hij in 1909 door C. JUDSON HERRICK gevonden, die voornamelijk zijne centrale eindiging beschreef; zijn periphere vertakking kon niet goed worden nagegaan. Evenmin was dit het geval bij de *urodelen* waar de zenuw waargenomen werd door Mc KIBBEN (1911) die er echter geen gangliencellen aan kon vinden. Weinig later gelukte dit aan JOHNSON (1913) die zegt: „In *Amblystoma* the nervus terminalis is ganglionated and supplies the vomeronasal organ as in reptiles and mammals”. Omtrent reptiliën zegt hij, dat de periphere eindiging geschiedt „in the turtle to a medial diverticulum of the nasal sac which presumably corresponds to the vomero-nasal organ or a part of it”.

Wij komen nu tot de *visschen* waarbij de zenuw het eerst ontdekt werd en wel — afgezien van eene geïsoleerde opmerking door G. FRITSCH omtrent een selachier — door PINKUS bij *Protopterus*. Zijne voorloopige mededeeling verscheen in 1894 in den „Anatomischen Anzeiger” en werd in 1895 gevolgd door zijne uitvoerige verhandeling: „Die Hirnnerven des *Protopterus annectens*” in de *Morphologische Arbeiten*, Bd. 4.

PINKUS vond, dat zijn nieuwe zenuw uit het vooreinde der hersenen ontspringt, zich rostraalwaarts tegen den meest medialen bundel van den n. olfactorius aanlegt, over het neusslijmvlies loopt en tot in het dak der voorste neusopening te vervolgen was. De zenuw bestaat uit merglooze vezels en vertoont in haren loop eene celrijke opzwellings, die ongetwijfeld het ganglion terminale der latere schrijvers representeert, hoewel PINKUS zich niet van den gangliësen aard dier cellen kon overtuigen.

SEWERTZOFF (1902) vond de zenuw bij embryo's van *Ceratodus*.

Hij vermeldt het voor de homologiseering belangrijke feit, dat de zenuw zich niet vertakt aan het reukslimvlies en aan de huid bij het uitwendig neusgat eindigt.

BING en BURCKHARDT beschreven den n. terminalis nu weldra (1904 en 1905) bij den volwassen *Ceratodus*.

Omtrent de *selachiërs* is de verhandeling Locy algemeen bekend, die hij na een paar kleinere publicaties (1899 en 1903) in 1905 in den „Anatomischen Anzeiger” liet verschijnen. In deze verhandeling, die vergezeld is van een groot aantal fraaie afbeeldingen, beschreef hij op serieën doorsneden den bouw en de ontwikkeling der zenuw bij *Acanthias* en haren loop zooals die met behulp van het praepaareermikroskoop te zien is bij 20 genera van haaien en roggen.

Aanvankelijk (1899) had hij de zenuw voor een deel van den n. olfactorius gehouden, maar later (1903) erkende hij hare homologie met de nieuwe zenuw van PINKUS en noemde haar n. terminalis, een zeer geschikte naam omdat zij in of bij de lamina terminalis in de hersenen treedt.

De afstand tusschen neuskapsel en bulbus olfactorius is bij *selachiërs* klein, de reukzenuw derhalve kort. Zij wordt, zoodra zij uit de neuskapsel te voorschijn gekomen is, in een lateraal en een mediaal bundel gescheiden door eene kleine spleet, waarin het distale einde van den n. terminalis treedt.

Alleen *Scoliodon terrae novae* heeft iets bijzonders. Hier zijn niet alleen beide bundels van den n. olfactorius volledig van elkaar gescheiden; maar de splitsing strekt zich ook uit op den bulbus olfactorius en zelfs op het distale (voorste) einde van den tractus, die bij *selachiërs* in het algemeen lang is.

Nadat de n. terminalis der *selachiërs* mit de hemisphèer te voorschijn is getreden, loopt hij langs den medialen rand van den tractus en vormt, bij den bulbus aangekomen, een ganglion. Bij sommige vormen werden twee gangliën in den loop der zenuw waargenomen.

Locy verzekert, dat de zenuw met hare distale vertakking in hoofdzaak beperkt is tot het reukslimvlies maar heeft dit mijns inziens niet bewezen. Zijne methode was daartoe niet voldoende en met het oog op hetgeen andere onderzoekers bij andere klassen van dieren gevonden hebben, behoeft deze verzekering bevestiging aan praeparaten, die met zilververbindingen behandeld zijn.

In de groep der *ganoiden* werd de n. terminalis het eerst gevonden en duidelijk afgebeeld door PHELPS ALLIS (1897, fig. 64) bij *Amia calva*. Hij kon haar caudaalwaarts vervolgen tot bij de voorhersen. Bij larven vond hij ook haar ganglion. In 1910 be-

schreef BROOKOVER hare ontwikkeling bij dezen visch. Zijn onderzoek bevat tal van nieuwe vondsten en interessante mededeelingen maar zijne conclusie dat de zenuw een tak zoude zijn van den n. olfactorius kan mijns inziens niet juist zijn.

Tot dezelfde conclusie kwam hij in 1914 bij zijn onderzoek naar de ontwikkeling der zenuw bij *Lepidosteus*.

In de groep der *teleostiers* vonden SHELDON en BROOKOVER (1909) het ganglion bij den karper en bij *Aminrus*. Zij laten de wortels van het ganglion in den bulbus olfactorius treden en dan ingesloten in den tractus de hemisfeer bereiken. Hier rijst echter de vraag of zij niet eene vergissing hebben begaan, analoog aan die van DE VRIES bij embryo's van den mensch want zóó is het niet bij longvisschen, niet bij selachiers, niet bij amphibiën, niet bij reptiliën en niet bij zoogdieren, ook niet bij den mensch volgens hetgeen BROOKOVER zelf (1914) bij dezen gevonden heeft.

Wat de longvisschen betreft, kan ik U hier twee fraaie modellen vertoonen van het vooreinde der hersenen met de daaruit ontspringende zenuwen bij *Ceratodus* en bij *Protopterus*, beiden vervaardigd door Dr. VAN DER HORST in het Instituut voor Hersenonderzoek van Dr. ARIËNS KAPPERS, die zoo vriendelijk was ze voor dezen avond af te staan. Men ziet den n. terminalis uit de hemisfeer ontspringen en geheel vrij van den lobus olfactorius rostraalwaarts loopen evenals dit volgens BROOKOVER (vgl. fig. 1) bij den mensch het geval is.

Ten slotte kom ik tot *Amphioxus*, over wiens zenuwen der kopstreek ik eene mededeeling publiceerde in de vergadering der Kon. Academie van 27 October 1894.

Zooals bekend is, vormt de n. trigeminus der cranioten een complex van twee dorsale segmentale zenuwen; de componenten zijn de n. ophthalmicus profundus (n. nasociliaris) en de rest van den n. trigeminus.

Ik vond deze beide componenten in de beide zenuwen, waarvan de eene vóór, de andere achter het eerste goed ontwikkelde myotoom (dat morphologisch als het tweede is te beschouwen) te voorschijn treden.

Vóór het homologon van den n. ophthalmicus profundus is bij *Amphioxus* echter nog eene zenuw aanwezig, die de uiterste punt van den snuit verzorgt. Hierom en omdat zij bij het morphologische vooreinde der hersenblaas ontspringt, noemde ik haar den n. *apicis*.

Aanvankelijk meende ik, dat de n. apicis bij de hoogere chordaten geaborteerd zou zijn, maar kort voor de publicatie van mijn artikel

verscheen de voorloopige mededeeling van PINKUS (Anat. Anz. 1894), waarin hij de ontdekking van een nieuwe zenuw bij Protopterus, later door LOCY n. terminalis genoemd, berichtte. Deze moest wegens loop, vertakking en oorsprong (niet uit het infundibulum, zooals ik uit de voorloopige mededeeling concludeerde, maar nabij de lamina terminalis, gelijk het volgend jaar bleek, toen de uitvoerige verhandeling verscheen) voor het homologon van den n. terminalis gehouden worden.

Ik moet erkennen, later wel eens getwijfeld te hebben, of deze homologiseering juist zoude zijn, toen ik de onderzoekingen las van LOCY bij selachiërs, van BROOKOVER en SHELDON bij ganoiden en teleostiërs, van ERNST DE VRIES en DÖLLKEN bij zoogdieren, omdat deze schrijvers allen beweren, dat de periphere einden van den n. terminalis geheel of in hoofdzaak beperkt zijn tot het reukslijmvlies (of bij zoogdieren tot het vomeronasaal orgaan, dat met een afgesnoerd gedeelte van het reukslijmvlies bekleed is). Bij Amphioxus daarentegen staat de n. apicis met de bekleeding der reukgroef in geene betrekking.

Na de lezing echter van het onderzoek van HUBER & GUILD (1913) was die twijfel opgeheven. Hunne afbeelding (vgl. fig. 2) vertoont den n. apicis van Amphioxus bij het konijn — ik zoude bijna zeggen — *in optima forma*, zelfs met de ingestrooide gangliencellen, die sedert lang in den n. apicis bekend zijn.

Daar de n. apicis een gewone huidzenuw <sup>1)</sup> is, moet de betrekking waarin de n. terminalis bij sommige hogere dieren tot het reukepithelium is getreden, van secundaire aard zijn. Het is zelfs mogelijk, dat de eindvertakking der zenuw in hoofdzaak tot het reukslijmvlies beperkt is geworden, zooals het geval schijnt te zijn bij vele visschen.

Zoo heeft de n. terminalis in 20 jaren (1894—1914) zijn tocht in de wetenschap beginnende bij de longvisschen — en ik mag er wel bijvoegen, ook bij Amphioxus — tot aan den mensch volbracht. Er kan wel niet meer aan getwijfeld worden, dat men te doen heeft met eene zelfstandige cerebrale zenuw en niet met een bundel van den n. olfactorius. Bij de meeste — of alle — cranioten loopen echter takken van beide zenuwen dicht naast elkaar en is het daarom moeilijk hare periphere uitbreiding uit elkaar te houden.

<sup>1)</sup> Het is algemeen bekend, dat niet alleen aan de eerste, maar ook aan de tweede huidzenuw (n. ophthalmicus prof.) van Amphioxus gangliencellen worden gevonden. Aan deze tweede werden zij reeds in 1845 door DE QUATREFAGES ontdekt, maar voor slijmcrysten „cryptes mucipares” gehouden. Ten onrechte meent men, dat periphere gangliencellen bij de overige zenuwen zouden ontbreken; ik vond hen in menigte aan de zenuwen, die onder het atriaalepithelium loopen dat darm en lever bedekt.

Van *Amphioxus* tot den mensch is de *n. terminalis* voorzien van verspreide gangliencellen, die zich ten deele tot een of meer ganglien kunnen ophoopen. De *n. olfactorius* (incl. zijn gespecialiseerde bundel: de *n. vomeronasalis* der amnioten) daarentegen is door volkomen afwezigheid van gangliencellen gekenmerkt.

Aan het einde van dit overzicht wensch ik hier mijn dank te betuigen aan Dr. ARIËNS KAPPERS, die zoo vriendelijk was, mij een twaalftal verhandelingen over den *n. terminalis*, bijna alle van Amerikaansche onderzoekers, ter lezing af te staan, welke de aanleiding tot deze voordracht geworden zijn.

#### N A S C H R I F T.

In het begin van Maart zond mij Dr. KAPPERS ter lezing de eenige dagen te voren door hem ontvangen afdruk van een nieuw werk van BROOKOVER: „The Peripheral Distribution of the Nervus Terminalis in an Infant”, *Journal of Comp. Neurology*. Vol. 28, N<sup>o</sup>. 2, Oct. 1917. BROOKOVER vond de vertakking van den *n. terminalis* aan het neusseptum bij het kind analoog aan die bij het konijn volgens HUBER en GUILD, maar nog veel sterker ontwikkeld.

Hij kon daaraan ongeveer 1500 gangliencellen, buiten die van het ganglion terminale tellen. Dit ganglion was een complex van 6 of 8 ganglien, verbonden door een netwerk van zenuwdraden.

Hij vermeldt niets omtrent een *n. vomeronasalis*, maar vond eene dikke zenuw zonder gangliencellen, die met een terminalistak door een der achterste gaten van de lamina cribrosa naar het neusseptum treedt en peripheer met den *n. nasopalatinus* anastomoseert. BROOKOVER meent in de zoeven genoemde dikke zenuw eene sympathische anastomose te zien tusschen het ganglion sphenopalatinum en het ganglion terminale.

Mijns inziens is deze zenuw de *n. vomeronasalis*, die dan niet, zooals men wel tot nog toe meende, bij de geboorte van den mensch geaborteerd zoude zijn. Indien dit juist is, moet hij achter uit den bulbus olfactorius ontspringen en het vomeronasaalorgaan verzorgen.

Dit orgaan komt bij de werveldieren hooger dan de vissen algemeen voor <sup>1)</sup> en schijnt een aanpassingsproduct aan het leven buiten het water te zijn. Het treedt het eerst op bij amphibiën en is bij de hogere vormen, die secundair weer tot het leven in het water zijn overgegaan (krokodillen, ten deele ook schildpadden, cetacea en pinnipedia) verloren gegaan of enkel nog in vroege

<sup>1)</sup> Vgl. R. WIEDERSHEIM, *Vergleichende Anatomie der Wirbeltiere*, Jena, 1909, p. 389—392.

ontwikkelingsstadiën aangelegd. Ook het vliegen schijnt ongunstig voor de ontwikkeling van het orgaan te zijn (vogels en sommige — niet alle — vleermuizen).

Het orgaan wordt gewoonlijk naar JACOBSON genoemd, die het zelfstandig bij een groot aantal zoogdieren heeft gevonden en ook den *n. vomeronasalis* ontdekte. Zijn onderzoek werd bekend door het rapport dat CUVIER <sup>1)</sup> daarover heeft uitgebracht.

Na den grooten lof dien CUVIER terecht toebrengt aan het ten deele in zijn laboratorium verrichte onderzoek, zoude men aan het slot van zijn rapport aan het „Institut” het advies verwachten de verhandeling van JACOBSON, „pensionnaire et chirurgien-major dans les armées du Roi de Danemark”, te laten drukken. Dit slot luidt echter :

„Nous croyons que le Mémoire de M. JACOBSON mérite l’approbation de la classe [de l’Institut] et que cet anatomiste doit être invité à continuer des recherches qui ont déjà fourni un résultat aussi curieux”.

Deze aansporing schijnt echter niet het gewenschte gevolg te hebben gehad. Het is ten minste niet bekend, dat JACOBSON zijne verhandeling — al of niet uitgebreid — heeft uitgegeven.

Overigens vergiste zich CUVIER in zijne meening, dat niemand te voren dit orgaan gezien had en dat het bij den mensch niet zoude voorkomen. Het is aan zijne opmerkzaamheid ontsnapt, dat RUSCH, die door hem geciteerd wordt (l.c. p. 414) naar aanleiding van den *meatus naso-palatinus* (hij schrijft RUSCH) de ontdekker ervan is en wel juist bij den mensch, bij wien het normaal voorkomt, zooals later bevestigd werd.

KÖLLIKER <sup>2)</sup> en HERZFELD <sup>3)</sup> vonden het regelmatig bij kinderen, terwijl het bij volwassenen slechts zelden ontbrak. Dit ontbreken was vermoedelijk toe te schrijven aan vroegere ziekteprocessen van het neusslijmvlies.

1) G. CUVIER, Rapport fait à l’Institut, sur un Mémoire de M. JACOBSON intitulé: Description anatomique d’un Organe observé dans les Mammifères. Annales du Muséum d’Histoire naturelle, Tome 18, 1811.

2) A. KÖLLIKER, Ueber die Jacobsonschen Organe des Menschen. Afdruk uit: Festschrift für RINECKER, Leipzig 1877.

3) P. HERZFELD, Ueber das Jacobsonsche Organ des Menschen und der Säugthiere, Zoologische Jahrbücher, Abth. für Anat. und Ontogenie der Thiere Bd. 3, 1889.

HERZFELD geeft een overzicht van de zoogdieren, bij welke het orgaan tot 1889 door hem en anderen gevonden werd, ook met betrekking tot den *meatus naso-palatinus*. Hij had er bij kunnen voegen, dat JACOBSON het ook reeds bij marsupialia (kangaroo) had waargenomen. Later werd het ook bij monotremata en edentata aangetroffen.



De beschrijving van RUYSCH <sup>1)</sup>, die eene duidelijke afbeelding geeft der uitmonding van het orgaan met eene ingebrachte sonde aan het neusseptum van een kind, luidt: „In anteriore et inferiore parte septi juxta palatum in utroque latere foramen apparet, seu osculum cujusdam ductus de cujus usu et existentia nil apud authores legi; inservire mucu excerneudo existimo”.

Ook JACOBSON, onbekend met het werk van RUYSCH, is geneigd het orgaan voor secretorisch te houden hoewel de krachtige innervatie voor eene sensorische functie pleit, maar (l. c. p. 422): „quel agent extérieur pourroit aller se faire percevoir dans un réceptacle si caché si profond, si peu accessible?”

CUVIER zelf meent nog — onder reserve — eene soort renkgewaardwording te moeten aannemen en ook de latere schrijvers doen dit. Men stelt zich gewoonlijk voor, dat het orgaan zoude dienen om voedsel dat reeds in den mond opgenomen is nog te ruiken; bij zoogdieren zoude de geur dan opstijgen door den meatus nasopalatinus. Dit kan echter niet het geval zijn bij paard en ezel (evenmin bij kameel en giraffe) omdat hier de meatus niet meer naar de mondholte geopend is, terwijl hun organon vomeronasale niet, zooals bij den mensch, voor rudimentair gehouden wordt.

De secretorische functie ligt voor de hand, wegens de talrijke klieren, die het orgaan met slijm vullen, dat door trilhaarbeweging (KÖLLIKER l. c. p. 11) uitstroomt, maar de moeilijkheden tegen het aanvaarden eener reukfunctie, reeds door JACOBSON aangeduid en door KÖLLIKER (l. c.) op eigenaardige wijze getracht te ontgaan, zijn nog niet uit den weg geruimd.

In dit opzicht schijnt mij eene opmerking van HERZFELD de aandacht te verdienen, naar aanleiding van den veneusen sinus met sterke ringlaag van gladde spiervezels, die zich in den wand van het orgaan bij de rat aan de binnenvlakte der beenige — bij de meeste zoogdieren kraakbeenige — kapsel bevindt. Hij stelt zich voor, dat er lucht in het orgaan zal gezogen worden bij samentrekking van den sinus en de daardoor veroorzaakte volumevermindering van den wand binnen de stijve kapsel.

Indien dit ook bij andere dieren juist mocht blijken — de gelegenheid tot onderzoek kan zich misschien aan eene hoogeschool voor veeartsenijkunde voordoen — dan zoude eene soort reukfunctie begrijpelijk worden. Ook werd het dan begrijpelijker, waarom de cetacea en

<sup>1)</sup> F. RUYSCH, Thesaurus anatomicus III, Amstelodami, 1724, p. 26, N<sup>o</sup>. LXI, 5. Afbeelding: Tab. IV, fig. 5.

KÖLLIKER (1877) citeert de in den tekst vermelde beschrijving naar eene uitgave van 1703, p. 49, dus meer dan 100 jaren vóór het rapport van CUVIER.

pinnipedia bijna de eenige <sup>1)</sup> zoogdieren zijn bij welke men te vergeefs gezocht heeft naar het orgaan <sup>2)</sup> van Ruysch.

Het is begrijpelijk dat de cetacea en pinnipedia het eigenlijke reukorgaan verloren: Bij vroegere vischvormige voorouders aangepast aan het ruiken in het water was het bij latere voorouders, die als zoogdieren op het land leefden, aangepast aan het ruiken in de lucht. Toen deze in een nog latere periode als protocetacea en protopinnipedia weer tot het leven in het water overgingen, kon het eigenlijke reukorgaan dezen overgang niet mede maken en werd rudimentair of ging geheel verloren.

Wanneer het orgaan van Ruysch ook bij landzoogdieren altijd met vloeistof (slijm) gevuld mocht zijn en zich daardoor niet behoefde aan te passen aan het ruiken in de lucht, dan bestond voor zijn verdwijnen bij de pinnipedia en cetacea wel niet dezelfde reden waardoor het eigenlijke reukorgaan der cetacea degenereerde.

---

<sup>1)</sup> Men zoude hierbij ook de sirenia vermoeden. Opmerkelijk is echter, dat *Manatus* volgens STANNIUS (Lehrbuch, 1846, p. 399) een bijzonder goed ontwikkeld organon vomeronasale bezit. Bij sommige vleermuizen en catarrhine apen is het orgaan wel door eene andere oorzaak verdwenen als bij de cetacea en pinnipedia.

<sup>2)</sup> De talrijke morphologische onderzoekingen over dit orgaan hebben ons omtrent zijn functie weinig geleerd. Op histologische gronden kan aan eene soort reukfunctie niet getwijfeld worden (vgl. o. a. M. VON LENHOSSEK, Die Nervenursprünge und Endigungen im Jacobsonschen Organ des Kaninchens. Anatom. Anzeiger, 1892). Omtrent de physiologie is dit ongeveer het eenige resultaat, dat men na meer dan 200 jaren kan toevoegen aan de woorden van den ontdekker: „Inservire muco excernendo existimo”.

---

**Meteorologie.** — De Heer VAN DER STOK biedt eene mededeeling aan van den Correspondent der Afdeeling, den Heer W. VAN BEMMELN te Batavia: „*De atmospherische Circulatie boven Australazië volgens de loodsballonwaarnemingen te Batavia verricht.*”

Talrijke bepalingen van richting en snelheid van den wind met behulp van loodsballon-viseeringen werden in de jaren 1909—'17 door het personeel van het Observatorium te Batavia uitgevoerd; in den aanvang om het algemeene regime der luchtstromingen boven West-Java te leeren kennen, later ook ter bereiking van meer bijzondere doeleinden. Tengevolge daarvan is de waarnemingsreeks geenszins homogeen; hierover zal hier slechts met een enkel woord, ter anderer plaatse echter uitvoerig bericht gegeven worden, terwijl thans de algemeene uitkomsten omtrent richting en snelheid op verschillende hoogten der hoofd-luchtstromingen behandeld zullen worden.

In de laatste jaren is reeds eenige malen meer of minder uitvoerig over de uitkomsten der loodsballonwaarnemingen te Batavia bericht geworden<sup>1)</sup>; ditmaal is het verkregen waarnemingsmateriaal aan een samenvattende bewerking onderworpen geworden, omdat deze waarnemingen door gebrek aan ballons gestaakt moesten worden en het onraadzaam werd geacht langer met zulk een' samenvatting te wachten.

Omtrent de homogeniteit der reeks mogen twee opmerkingen gemaakt worden; ten eerste dat voor de windbepalingen beneden 3 K.M. hoogte slechts waarnemingen tusschen 6<sup>u</sup> a en 9<sup>u</sup> a gebruikt zijn, teneinde den storenden invloed van land- en zeewind (die zich ongeveer tot die hoogte doet gelden) zooveel mogelijk te beperken, daar dit verschijnsel in die morgenuren zwak optreedt. Verder dat voor ieder niveau beneden 3 K.M. een correctie is toegepast, ontleend aan de uitkomsten omtrent de diurne en semidiurne variatie van den wind.<sup>2)</sup> Ten tweede dat van de waarnemingen buiten Batavia ver-

<sup>1)</sup> Zittingsverslag van 25 Juni 1910.

Observatorium, Batavia; Verhandelingen N<sup>o</sup>. 1.

Nature Vol. 87, 1911; Vol. 90, 1912; Vol. 91, 1914.

Luftfahrt und Wissenschaft, Berlin (J. STICKER) Heft 5, 1913.

Natuurkundig Tijdschrift, Dl. 73, 1913.

<sup>2)</sup> Zittingsverslag van 26 Mei 1917.

TABEL I. Aantallen der Windwaarnemingen.

Hoogte	J.	F.	M.	A.	M.	J.	J.	A.	S.	O.	N.	D.	Totaal.
0.1 Km.	29	21	14	14	16	44	37	61	67	57	41	34	435
1	31	23	31	23	27	52	43	66	79	61	43	42	521
2	29	21	30	24	27	47	41	53	70	57	36	38	473
3	27	22	28	26	39	77	74	108	131	100	56	38	726
4	23	17	25	26	36	66	70	100	121	91	52	34	661
5	23	15	23	26	31	62	61	92	106	82	48	29	598
6	21	13	23	24	29	52	50	87	94	72	40	24	529
7	18	13	21	22	26	38	41	78	77	69	34	22	459
8	13	13	19	21	21	30	30	65	65	54	26	22	379
9	8	11	17	19	20	25	27	50	46	43	20	21	307
10	8	10	15	19	19	23	25	40	35	36	16	16	263
11	8	9	13	17	15	18	23	31	29	27	13	14	217
12	2	7	10	15	15	13	19	22	21	23	9	11	167
13	3	5	7	12	13	12	15	18	17	17	5	9	143
14	3	5	7	11	13	10	13	15	13	9	4	5	108
15	3	3	6	10	11	8	13	12	11	7	3	5	92
16	3	3	5	9	9	8	11	8	9	7	2	5	79
17	3	2	5	9	7	8	10	5	8	4	2	5	68
18	2	2	4	7	5	5	5	5	6	2	2	4	49
19	2	2	4	6	1	5	5	4	5	2	2	4	42
20	1	2	2	6	1	1	2	3	4	2	1	4	29
21	1	1	2	6	1	—	1	3	3	2	1	4	25
22	1	1	2	5	1	—	1	3	3	1	—	3	21
23	1	1	2	5	—	—	1	1	3	—	—	2	16
24	—	1	2	4	—	—	1	1	3	—	—	1	13
25	—	—	1	4	—	—	—	1	3	—	—	1	10
26	—	—	1	1	—	—	—	—	3	—	—	1	6
27	—	—	1	1	—	—	—	—	2	—	—	1	5
28	—	—	1	—	—	—	—	—	1	—	—	—	2
29	—	—	1	—	—	—	—	—	1	—	—	—	2
30	—	—	1	—	—	—	—	—	1	—	—	—	2
31	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	1

richt (in October 1916 op de Duizend Eilanden 84 K.M. benoorden Batavia en in Juni/Juli 1917 te Bandoeng 119 K.M. S.W.) slechts enkele waarnemingen boven 10 K.M. gebruikt zijn.

In tabel I zijn opgenomen de aantallen der voor iedere maand gebruikte waarnemingen.

Indertijd (literat. opgaaft nos. (2) en (4)) zijn voor vijf speciaal voor dat doel gekozen seizoenen wind-grootheden door mij opgemaakt, die een overzicht gaven van richting, snelheid en frequentie en relatieve richtingssnelheden, evenzoo de resulterende richtingen en snelheden, waarvoor de componenten der waargenomen windvectoren eenvoudig gemiddeld waren geworden. Thans zijn die zelfde componenten-gemiddelden voor iedere maand opgemaakt.

De standvastigheid in richting der luchtstromingen boven Batavia veroorlooft het deze methode toe te passen, zelfs bij het gering aantal waarnemingen dat voor sommige maanden in hoogere lagen beschikbaar was. Boven 10 K.M. daalt echter dat aantal zoo sterk, dat getracht moest worden om door graphische vereffening plausibele waarden voor de gemiddelde componenten te verkrijgen.

Zowel voor de Oost- als voor de Noordcomponenten is tot dat doel een isophlethendiagram ontworpen, en daaraan zijn nieuwe maandwaarden voor de verschillende hoogteniveaus ontleend. Deze laatste zijn weer tot vectoren samengesteld en in tabel II vereenigd; zij kunnen geacht worden te geven de snelheid en richting der gemiddelde luchtstroming voor iedere maand en hoogte.

In deze tabel zijn omlijst en in verschillende kleuren gedrukt, resp. de Oostenwinden met Zuidcomponent, die met Noordcomponent en de Westelijke winden (met Noord- of Zuidcomponent). De tabel geeft daardoor een overzicht van de verticale uitbreiding der hoofd-luchtstromingen in de verschillende maanden van het jaar, dat als volgt beschreven kan worden.

*Passaat.* Bekend is dat over de Java omringende zeeën in den zuidelijken winter de Passaat als een oostenwind met zuidelijke componenten waait.

De bovenvermelde toepassing op de beneden 3 K.M. waargenomen windvectoren van een correctie voor de diurne en semidiurne variatie heeft echter voor de onderste laag noordelijke componenten geleverd. Dit is een gevolg daarvan, dat overdag de toezuiging van lucht uit zee (noordenwind) sterker is dan de afvloeijing (zuidenwind) 's nachts. De overmaat wordt door convection naar grootere hoogten gevoerd. In het daggemiddelde blijft daardoor een noordcomponent over, die van lokalen oorsprong is en niet bij den Passaat behoort. Deze afwijking wil ik hier verder buiten beschouwing laten.

De bovengrens van den Passaat ligt van Juni tot September tusschen 3 en 4 K.M., verheft zich daarna en bereikt in Februari 13 K.M.; vervolgens daalt ze tot 10 K.M. in Mei en valt dan snel tot 3 à 4 K.M. in Juni.

*Westmoesson.* Van November tot April schuift zich de Westmoesson als het ware onder den Passaat en licht hem op: De bovengrens van den Moesson stijgt tot 6 à 7 K.M. in Februari, terwijl in die maand de snelheid haar maximum bereikt (op 1 K.M. hoogte). Beneden heeft de Moesson noordelijke componenten, maar op geringe hoogte ( $\pm 1$  K.M.) gaan die in zuidelijke over. Deze noordelijke componenten behooren gedeeltelijk tot den Moesson zelf en zijn niet uitsluitend door het overheerschen der zeebries veroorzaakt, zooals de waarnemingen op zee bewijzen.

*Antipassaat.* Het optreden van Oostenwind met noordcomponent moet als dat van een Antipassaat-strooming opgevat worden, dus als het begin der afstroming van de aequatoriale zone, die bij voortzetting naar hoogere breedten meer en meer de rotatie-afwijking ondervindt en daardoor van een noordoostelijke een noordelijke en vervolgens noordwestelijke luchtstrooming wordt.

Tabel II laat zien, hoe de Antipassaat het geheele jaar door waait, dat hij in den zuidelijken winter tot 4 K.M. daalt en in den zuidelijken zomer (in Februari) eerst boven 13 K.M. aangetroffen wordt.

Een maximum-snelheid bereikt hij in Augustus op 14 K.M. hoogte en een secundair maximum op 15 K.M. in Februari. In de voorjaarskentering is de Antipassaat zwak, daarentegen in de najaarskentering vrij krachtig.

Volgens Tabel I waaien echter in November tusschen 8 en 11 K.M. zwakke westelijke winden, die ongetwijfeld als een uiting van kentering te beschouwen zijn.

*Bovenpassaat.* Boven den Antipassaat vindt opnieuw aequatorwaartsche toevloeiing plaats en in analogie met den Passaat noemde ik deze luchtstrooming Bovenpassaat. Haar ondergrens is in de najaarskentering het hoogst (October 21—22 K.M.) en daalt tot 18—19 K.M. in den zuidelijken zomer. Vervolgens daalt ze sterk en is het laagst in Juni, 12—13 K.M. De windsnelheid van den Bovenpassaat is betrekkelijk gering, in aanmerking genomen de groote hoogte waarop hij waait. Boven  $\pm 25$  K.M. echter neemt de snelheid toe en gaat de Bovenpassaat over in den

*Krakatau-wind*, zooals de op hoogten van  $\pm 30$  K.M. waiende aequatoriale Oostwind door mij gedoopt werd. Deze Oostenwind van ongeveer 40 m. p. sec., die na de uitbarsting van Krakatau op  $\pm 30$  K.M. hoogte is geconstateerd, werd door ballonwaarneming

te Batavia éénmaal in Maart en éénmaal in September teruggevonden.

Tusschen de lagen van den Bovenpassaat schuift zich in den zuidelijken winter als een wig een gebied van

*Hooge Westelijke winden.* De ondergrens dier W.-winden daalt in Juni het laagst en bereikt dan 16—17 K.M., terwijl de bovengrens door schaarschte aan waarnemingen onzeker is; vermoedelijk stijgt ze in Juni tot  $\pm$  25 K.M.

De snelheid dezer Westenwinden is niet groot voor het hooge niveau, waarop ze waaien, maar ze traden bij iedere ballonvlucht, die in hun seizoen hun gebied doorsneed, met groote standvastigheid en ononderbroken door Oostenwinden op. Voorts hebben ze overwegend een Zuidcomponent.

#### *Verklaring van het Windstelsel.*

Aan een afdoende verklaring van het bovenbeschreven stelsel van luchtstromingen is voorloopig niet te denken, daar de Bataviasche waarnemingen in het Australaziatische aequatoriale en subtropische gebied vrijwel alleen staan. De hier gegeven poging tot verklaring moet dus gedeeltelijk op onderstellingen gegrondvest worden.

Ten einde te trachten het verband tusschen het windstelsel en de in de vrije atmosfeer heerschende luchtdrukking en temperatuur na te gaan werden ten eerste, op grond van de met registreerballons verkregen uitkomsten (ingesloten die voor de vochtigheid)<sup>1)</sup>, maandwaarden der luchtdrukking voor alle kilometerniveau's van 1 tot 26 K.M. berekend.

Hierbij werd voor de hoogte en temperatuur van de basis der stratosfeer aangenomen:

Maand	Hoogte	Temperatuur	Maand	Hoogte	Temperatuur
Jan.	17.8 Km.	— 89.1 <sup>o</sup> C.	Juli	16.0 K.M	— 82.8 <sup>o</sup> C.
Febr.	17.6	— 88.1	Aug.	16.5	— 80.8
Maart	17.3	— 87.4	Sept.	17.0	— 80.5
April	17.0	— 86.9	Oct.	17.4	— 82.8
Mei	16.5	— 86.4	Nov.	17.6	— 86.6
Juni	16.2	— 85.1	Dec.	17.7	— 88.8

Voor de stratosfeer zelve werd een gelijkmatige temperatuur-toeneming met de hoogte voorondersteld en wel zoodanig dat op 26 K.M. een temperatuur van —57<sup>o</sup>.2 C. werd bereikt, zooals op den 4den December 1913 waargenomen werd.

<sup>1)</sup> Observat. Batavia, Verhandelingen N<sup>o</sup>. 4.

TABEL III. Gemiddelde luchtdrukking (in mm.) in de vrije atmosfeer  
 boven Batavia benevens maandelijksche afwijkingen.  
 (Breedtecorr. *niet* toegepast).

Hoogte	J.	F.	M.	A.	M.	J.	J.	A.	S.	O.	N.	D.	Jaar.
0.0 Km.	0.0	0.1	-0.1	-0.4	-0.4	-0.1	0.2	0.4	0.5	0.2	-0.1	-0.3	759.5 <sup>1)</sup>
0.5	-0.1	0.1	0.0	-0.5	-0.2	0.1	0.1	0.3	0.4	0.2	-0.1	-0.2	718.3
1	-0.2	0.0	0.0	-0.5	0.0	0.1	0.0	0.3	0.4	0.3	0.1	-0.2	678.3
1.5	-0.2	0.0	0.1	-0.5	0.1	0.1	-0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	-0.4	640.2
2	-0.2	0.1	0.1	-0.4	0.2	0.1	-0.2	0.1	0.1	0.2	0.3	-0.4	603.8
2.5	-0.4	0.0	0.1	-0.4	0.4	0.1	-0.3	0.0	0.0	0.2	0.2	-0.5	569.2
3	-0.4	0.1	0.1	-0.3	0.6	0.2	-0.3	0.0	-0.1	0.3	0.4	-0.7	536.2
3.5	-0.4	0.2	0.1	-0.2	0.7	0.2	-0.4	-0.1	-0.2	0.3	0.5	-0.7	504.8
4	-0.5	0.0	0.1	-0.1	0.8	0.3	-0.4	-0.2	-0.2	0.3	0.4	-0.7	475.0
4.5	-0.5	0.1	0.1	-0.1	0.9	0.2	-0.5	-0.3	0.3	0.3	0.4	-0.8	446.7
5	-0.4	0.2	0.1	0.1	1.1	0.3	-0.6	-0.3	-0.3	0.4	0.6	-0.9	419.7
6	-0.6	0.2	0.2	0.2	1.3	0.3	-0.7	-0.5	-0.5	0.5	0.7	-1.0	369.9
7	-0.6	0.2	0.2	0.4	1.6	0.2	-1.0	-0.6	-0.5	0.5	1.0	-1.0	325.1
8	-0.8	0.1	0.2	0.5	2.0	0.1	-1.2	-0.7	-0.6	0.5	1.1	-1.2	284.9
9	-1.0	0.0	0.2	0.6	2.4	0.0	-1.5	-1.0	-0.6	0.5	1.3	-1.3	248.8
10	-1.0	0.2	0.4	0.8	2.6	-0.1	-1.7	-1.2	-0.5	0.6	1.5	-1.4	216.3
11	-1.0	0.2	0.5	0.9	3.0	-0.1	-2.0	-1.6	-0.6	0.7	1.6	-1.6	187.2
12	-1.0	0.2	0.5	1.0	2.9	-0.1	-2.0	-1.9	-0.7	0.9	1.7	-1.4	161.1
13	-0.9	0.2	0.8	1.0	2.7	-0.2	-2.0	-2.0	-0.6	1.2	1.9	-1.4	137.8
14	-0.9	0.0	0.8	0.8	2.3	-0.3	-1.9	-2.0	-0.7	1.3	1.8	-1.7	117.3
15	-0.7	0.0	1.0	0.8	1.9	-0.3	-1.7	-1.8	-0.4	1.5	1.9	-1.8	99.1
16	-0.7	-0.1	0.8	0.4	1.3	-0.5	-1.7	-1.5	-0.1	1.5	1.8	-1.8	83.4
17	-0.6	-0.1	0.7	0.2	0.9	-0.5	-1.3	-1.1	0.2	1.5	1.6	-1.8	69.8
18	-0.8	-0.3	0.3	0.1	0.8	-0.3	-0.9	-0.6	0.4	1.3	1.2	-1.8	58.4
19	-0.9	-0.5	0.2	0.1	0.8	-0.2	-0.6	-0.3	0.6	1.3	1.0	-1.7	48.9
20	-1.3	-0.8	0.2	0.1	0.7	0.0	-0.2	0.0	0.7	1.2	0.8	-1.5	41.0
21	-1.3	-0.8	0.1	0.1	0.6	0.1	-0.2	0.1	0.6	1.0	0.6	-1.4	34.6
22	-1.1	-0.7	0.1	0.1	0.5	0.2	0.0	0.2	0.6	0.9	0.5	-1.2	29.2
23	-1.0	-0.6	0.1	0.1	0.5	0.2	0.1	0.2	0.5	0.9	0.4	-1.0	24.7
24	-0.8	-0.6	0.1	0.1	0.4	0.2	0.1	0.2	0.6	0.7	0.4	-0.9	21.0
25	-0.7	-0.5	0.1	0.1	0.4	0.1	0.1	0.2	0.5	0.6	0.3	-0.8	17.9
26	-0.6	-0.4	0.1	0.0	0.3	0.1	0.1	0.2	0.4	0.5	0.2	-0.7	15.3

<sup>1)</sup> Op zeenniveau herleid. Index corr. van den standaardbarometer (+ 0.05) mm. toegepast.



GEMIDDELDE E. EN N. COMPONENTEN.

OCTOBER	NOVEMBER	DECEMBER	
			KRAKATAU-WIND.
E 7 S	15	E 4 S	22 E
E 6 S	9	E 6 S	16 E 3 S
E	10	E 6 S	16 E 3 S
E 45 N	10	E	12 E 5 S
E 27 N	9	E 16 N	10 E
E 22 N	10	E 21 N	10 E 14 N
E 18 N	9	E 25 N	9 E 20 N
E 12 N	10	E 21 N	7 E 23 N
E 10 N	9	E 12 N	8 E 14 N
E 10 N	9	E 12 N	8 E 17 N
E 12 N	8	E 14 N	9 E 20 N
E 18 N	6	E 18 N	8 E 27 N
E 24 N	2	E 11 N	6 E 27 N
E 24 N	2	W 11 N	4 E 21 N
E 12 N	1.6	W 22 N	4.0 E 7 N
E 2 N	1.0	W 6 S	3.0 E 4 S
E 2 S	0.6	W 42 S	3.0 E 10 S
E 1 S	0.4	S	2.1 E 19 S
E 1 S	1.6	E 18 S	1.3 E 42 S
E 2 S	2.5	E 12 S	1.0 S
E 2 S	2.6	E 11 S	1.1 W 7 S
E 22 S	2.6	E 16 S	2.0 W 41 S
E 15 S	1.8	E 19 S	3.8 W 22 S
E 6 N	1.7	W 39 S	3.8 W 6 S
E 27 N	1.9	W 22 N	1.9 W 26 N
			BOVENPASSAAT.
			ANTIPASSAAT
			PASSAAT.
			WESTMOESSON.



T A B E L II.

WINDSNELHEID EN -RICHTING SAMENGESTELD UIT DE WAARDEN ONTLEEND AAN ISOPLETHENDIAGRAMMEN DER GEMIDDELDE E. EN N. COMPONENTEN.

	JANUARI	FEBRUARI	MAART	APRIL	MEI	JUNI	JULI	AUGUSTUS	SEPTEMBER	OCTOBER	NOVEMBER	DECEMBER	
30 K.M.													
29													KRAKATAU-WIND.
28													
27													
26													
25													
24	18 E	13 E	9 E	6 E	1 E	0 E	0 E	1 S	3 E 18 S	8 E 7 S	15 E 4 S	22 E	
23	15 E 4 S	10 E 6 S	6 E 9 S	2 E 27 S	1 E 90 S	1 W 45 S	2 W 27 S	1 W 27 S		5 E 6 S	9 E 6 S	16 E 3 S	
22	12 E 5 S	7 E 8 S	3 E 18 S	1 W 45 S	2 W 27 S	3 W 18 S	3 W 18 S	2 W	2 W 45 N	3 E	10 E 6 S	16 E 3 S	BOVENPASSAAT.
21	10 E 6 S	3 E 18 S	1 S	2 W 27 S	3 W 18 S	5 W 11 S	4 W 14 S	3 W 10 S	1 W 45 N	3 E 45 N	10 E	12 E 5 S	
20	5 E 6 S	1 E 45 S	1 W 45 S	3 W 18 S	4 W 14 S	1.0 W 6 S	5 W 11 S	3 W 10 S	1 W 27 S	4 E 27 N	9 E 16 N	10 E	
19	5 E	2 E	0 S	2 W 27 S	5 W 11 S	1.0 W 6 S	5 W 11 S	2 W 27 S	0 S	5 E 22 N	10 E 21 N	10 E 14 N	
18	6 E 9 N	4 E 14 N	1 E	0 S	3 W 18 S	1.0 W 6 S	3 W 18 S	1 E 45 S	5 E 11 S	6 E 18 N	9 E 25 N	9 E 20 N	
17	9 E 6 N	7 E 8 N	5 E 7 N	1 E	2 W 90 S	4 W 34 S	2 E 27 S	8 E 3 S	10 E	9 E 12 N	10 E 21 N	7 E 23 N	
16	11 E	11 E	5 E	2 E 27 N	2 E 90 S	2 E 63 S	10 E 6 N	14 E 8 N	13 E 11 N	11 E 10 N	9 E 12 N	8 E 14 N	
15	9.5 E 17 N	12 E 10 N	10 E 6 N	1 E 45 N	3 E 68 N	4 E 27 S	15 E 8 N	20 E 18 N	15 E 23 N	11 E 10 N	9 E 12 N	8 E 17 N	ANTIPASSAAT
14	9 E 13 N	11 E 5 N	9 E 6 N	4 E 20 N	6 E 45 N	5 E 22 S	17 E 17 N	22 E 14 N	14 E 25 N	9 E 12 N	8 E 14 N	9 E 20 N	
13	8 E 7 N	9 E 1 S	7 E	4 E 20 N	4 E 35 N	5 E 22 S	17 E 21 N	18 E 24 N	13 E 27 N	6 E 18 N	6 E 18 N	8 E 27 N	
12	6 E 5 N	7 E 8 S	5 E 6 S	4 E 7 N	3 E 27 N	5 E 22 N	15 E 16 N	7 E 56 N	12 E 27 N	5 E 24 N	2 E 11 N	6 E 27 N	
11	4.5 E	4 E 14 S	3 E 18 S	3 E 10 S	3 E 18 N	6 E 22 N	12 E 14 N	13 E 18 N	11 E 18 N	5 E 24 N	2 W 11 N	4 E 21 N	
10	3.5 E 8 S	3.6 E 16 S	3.2 E 20 S	2.2 E 27 S	3.0 E	5.6 E 12 N	10.1 E 8 N	12.2 E 10 N	10.2 E 11 N	4.8 E 12 N	1.6 W 22 N	4.0 E 7 N	
9	3.1 E 15 S	3.4 E 21 S	3.0 E 23 S	2.0 E 43 S	3.9 E 12 S	5.5 E 6 N	9.2 E 11 N	10.0 E 3 N	9.0 E 29 N	5.0 E 2 N	1.0 W 6 S	3.0 E 4 S	
8	2.9 E 20 S	3.2 E 18 S	2.7 E 22 S	1.6 E 52 S	4.3 E 18 S	5.5 E 2 N	8.1 E 9 N	8.5 E 4 N	7.5 E 15 N	5.5 E 2 S	0.6 W 42 S	3.0 E 10 S	
7	1.6 E 52 S	2.0 E 24 S	1.6 E 18 S	1.1 E 27 S	3.8 E 23 S	5.0 E 7 N	7.2 E 8 N	7.1 E 8 N	6.0 E 40 N	4.8 E 1 S	0.4 S	2.1 E 19 S	PASSAAT.
6	1.3 W 67 S	0.7 W 82 S		0.5 E 22 S	3.1 E 11 S	4.7 E 13 N	4.4 E 29 N	4.8 E 21 N	4.4 E 16 N	4.2 E 1 S	1.6 E 18 S	1.3 E 42 S	
5	2.3 W 29 S	2.0 W 11 S	1.0 W	0.5 W 64 N	3.0 E 2 N	3.7 E 44 N	3.4 E 5 N	2.6 E 18 N	2.5 E 37 N	3.5 E 2 S	2.5 E 12 S	1.0 S	
4	3.2 W 22 S	3.3 W 33 S	1.6 W	1.0 W 17 N	3.0 E 6 N	2.6 E 16 N	2.3 E 5 N	1.9 E 12 N	1.4 E 21 N	3.4 E 2 S	2.6 E 11 S	1.1 W 7 S	
3	4.5 W 29 S	5.4 W 15 S	2.4 W 19 S	1.0 W 11 S	3.3 E 12 S	2.0 E 11 S	1.8 E	1.2 E 24 S	2.2 E 27 S	4.6 E 22 S	2.6 E 16 S	2.0 W 41 S	
2	4.9 W 23 S	6.3 W 18 S	2.9 W 24 S	1.5 W 48 S	3.8 E 17 S	2.3 E 31 S	2.7 E 42 S	2.7 E 29 S	3.4 E 17 S	4.1 E 15 S	1.8 E 19 S	3.8 W 22 S	WESTMOESSON.
1	4.5 W 3 N	6.6 W 15 N	3.0 W 4 S	1.4 E 45 S	2.9 E 4 S	2.6 E 9 N	3.4 E 42 S	4.0 E	4.1 E 3 S	2.9 E 6 N	1.7 W 39 S	3.8 W 6 S	
0.1	2.5 W 37 N	2.6 W 23 N	1.4 W 45 N	0.9 W 6 N	0.6 N	1.3 E 42 N	1.5 E 22 N	1.3 E 33 N	1.5 E 48 N	2.5 E 27 N	1.9 W 22 N	1.9 W 26 N	



Na berekening dezer luchtdrukking-tabel werd een poging gewaagd om met behulp der temperatuur-nitkomsten op de meteorologische stations in Ned.-Indië en die van eenige stations in de omringende gebieden isothermenkaarten van den Archipel voor Jan.-Febr. en Juli-Aug.-Sept. te ontwerpen. Op grond van deze kaarten en de overeenkomstige isobaren-kaarten van Dr. BRAAK<sup>1)</sup> zijn, met behulp van de verticale luchtdrukking-gradienten volgens tabel III, de isobaren voor K.M.-niveau's tot 10 KM. berekend. Hierbij is in aanmerking genomen dat de atmosfeer benoorden en bezuiden den aequator in hetzelfde jaargetijde een tegenovergesteld karakter (nat en droog) heeft.

De onvermijdelijke onzekerheid in de ontworpen isothermen en de aangenomen verticale temperatuur-gradienten is echter gebleken zoo groot te zijn, dat de uitkomsten geheel onbevredigend waren.

Aan de aardoppervlakte loopen isothermen en isobaren eenigszins evenwijdig, maar hun horiz.gradient is tegenovergesteld. Gaan we nu voor een plaats de atmosfeer in naar boven, dan is de invloed van toeneming in een zekere richting der luchtdrukking beneden positief, op de luchtdrukking boven maar die van de temperatuur negatief. De nitkomst is, als zijnde het verschil, uiterst gevoelig voor kleine variaties in de aannamen der isothermen en isobaren en de juist in hen heerschende onzekerheid deed zich daardoor zóó bovenmatig gevoelen, dat de uitkomsten waardeloos werden.

*Westmoesson.* In den Westmoesson is de windrichting aan de oppervlakte in overeenstemming met isobaren en rotatie-invloed. Men ziet op BRAAK's isobaren-kaart den NO-passaat (volgens VAN DER STOK's nitkomsten ingetekend) in het noordelijk halfmond naar rechts afwijken, vervolgens bij den evenaar niet afwijken (dus loodrecht op de isobaar staan) en ten zuiden van den aequator naar links afwijken en noordwestelijk worden.

Boven Batavia draait de wind echter al op 2 KM. naar SW. en schijnt, volgens de voor die hoogte ontworpen isobarenkaart, vrijwel langs de isobaar te waaïen. Hij komt dan niet meer uit het noordelijk halfmond, maar uit het oceaangedeelte ten zuidwesten van Java.

De strooming der lucht langs de isobaar wijst op een stationnairen stroomingstoestand, die in de benedenste luchtlagen, blijkbaar door wrijvingsstoringsen, niet kan bestaan (cf. HANN's Lehrb. d. Met. 1915, pg. 487).

De luchtdrukking-gradienten die den Westmoesson onderhouden

<sup>1)</sup> Observations at Secondary Stations in N.-I. Vol. I.

zullen op zekere hoogte moeten omkeeren, daar de invloed van de (horiz.) temperatuur-gradienten die van de luchtdrukking bij die hoogte gaat overtreffen en tegenovergesteld van teeken is.

Inderdaad zien we ook op eenige kilometers hoogte den Westmoesson verdwijnen en daarboven oostelijke winden optreden.

Daar de boven aangevoerde isobarenkaarten, voor verschillende niveau's ontworpen, onbetrouwbaar bleken, geef ik hier enkel de barometerverschillen tot 9 KM. tusschen Batavia en Port-Darwin (Noord-Australië), alsmede tusschen Batavia en Koepang, ter berekening waarvan voor Port Darwin en Koepang dezelfde verticale gradienten, als te Batavia gevonden, aangewend zijn geworden.

Luchtdrukkingsverschil voor Jan.—Febr.

Hoogte	Batavia-Port Darwin	Batavia Koepang
0 Km.	2.8 mM.	1.9 mM.
1	1.8	1.5
2	1.0	1.2
3	0.4	0.9
4	-0.2	0.7
5	-0.5	0.6
6	-0.8	0.3
7	-1.1	0.2
8	-1.3	0.0
9	-1.5	-0.1

De hoogten van omkeering: 3—4 KM. en 8 KM. stemmen niet overeen, maar hun gemiddelde geeft juist de waargenomen hoogte van den Westmoesson n.l. 5—6 KM.

Verder vertoont de Westmoesson bij toenemende hoogte de schroefvormige afwijking van de windrichting, die ook elders opgemerkt is geworden (naar rechts in 't N.-halfmond, naar links in 't Z.-halfmond). Beneden is n.l. de wind W.N.W. en draait, naar boven schrijdend, door W, SW en S naar SE.

*Passaat en Antipassaat:* Afgezien van de noordelijke componenten onder 1 KM., die als locale storing zijn te beschouwen, heeft de oostenwind beneden het geheele jaar door zuidelijke componenten, waarom door mij deze luchtstrooming, als aequatorwaarts vloeiende, passaat wordt genoemd.

De ESE-lijke richting is in overeenstemming met BRAAK's isobaren voor Juli—Sept. Maakt men het drukverschil tusschen Batavia en Koepang voor die maanden op dezelfde wijze op, als boven voor Jan.—Febr., dan wordt gevonden:

Luchtdrukkingsverschil voor Juli—Sept.

Hoogte	Batavia-Koepang
0 Km.	1.4 Mm.
3	0.1
4	-0.2
5	-0.5

Tusschen 3 en 4 KM. verdwijnt dus het verschil en keert daarboven om, maar de ESE wind draait (in tegenstelling met den Westmoesson, die aan zijn bovengrens inderdaad een snelheid 0 krijgt) enkel met verzwakking door E en verder met aangroeiende snelheid naar ENE.

Er is daarom geen rechtstreeksch verband met een volgens de isothermen en isobaren aan de aardoppervlakte te ontwerpen isobarenkaart voor die hoogten te verkrijgen.

Voor den Passaat, die in den zuidelijken zomer boven den Westmoesson waait is wegens de groote hoogte een eenigszins betrouwbare gradient in het geheel niet te berekenen. Opmerkelijk is, dat ook hier bij toenemende hoogte de richting schroefvormig van ESE door E naar ENE draait.

Aannemelijk blijft de gebruikelijke verklaring voor Passaat en Antipassaat: in het zuidelijk halfrond wordt de aequatorwaarts stroomende lucht door de rotatie een ESE-strooming. De toevloeiende lucht stijgt op en moet afvloeien; door den rotatie-invloed wijkt zij meer en meer naar links af en draait van ESE door E naar ENE. Op hoogere breedte dan Batavia wordt de richting N en NW.

Opgemerkt zij, dat geringe opstijging voldoende is om snelle afvloeïing te veroorzaken, daar het horizontale vlak waardoor de opstijging plaats grijpt, zooveel grooter is dan het verticale, waardoor de lucht afvloeit. B.v. opstijging over 10 breedte graden (ruim 1000 Km.) en afvloeïing door een 10 Km. dikke laag, geeft een verhouding van meter-snelle afvloeïing tegen centimeter-langzame opstijging.

De aard van het convectie-verschijnsel maakt het begrijpelijk, dat er een hoogte met maximale afvloeïing is; zij ligt boven Batavia

zeer hoog, in Augustus op 14 KM. en in Februari op 15 KM. hoogte. In den zuidelijken zomer is de afvloeïng geringer, blijkbaar omdat dan de thermische aequator zuidelijker ligt en dus het opstijgingsgebied benoorden Batavia kleiner is dan in den zuid. winter. Daarmee overeenkomstig is ook de afwijking der windrichting naar links geringer.

Gewichtige aanwijzingen omtrent die afvloeïng verstrekt de Ci-drift, omdat de Ci-wolken in den Antipassaat drijven; te Batavia is hun hoogte in den zuidelijken zomer 13 KM. en 's winters 11 KM. Waargenomen zijn nu de volgende gemiddelde driftrichtingen:

	Batavia	Pontianak	Manila
Breedte	6° S	0°	15° N
Dec./Febr.	E 1° N	E 5° S	E 35°—84° S
Juli/Sept.	E 25 N	E 27 N	E 6°—27° N
Oct./Nov.	E 22 N	E 27 S	E 24°—43° S

In Dec.—Febr. ligt de warmte-aequator nabij de breedte van Batavia; in overeenstemming daarmee is de afwijking van de E-drift bijkans nul; noordelijk daarvan is te Pontianak al duidelijk afvloeïng naar het Noorden en te Manila is de rechtsche afwijking sterk geworden.

In Juli—Sept. vindt men omgekeerd te Batavia en Pontianak een sterke afvloeïng, maar die te Manila, hoewel inderdaad minder afwijking vertoonende, is wegens den Noordcomponent niet zonder meer verklaarbaar.

In Oct.—Nov. is de tegenstelling van Zuid- en Noordwaartsche afvloeïng voor Batavia en Manila zeer opvallend.

Hier zij er ook op gewezen, dat het nivean van grootste afvloeïng boven Batavia n.l. 14—15 KM., maar weinig ligt boven dat van grootste jaarlijksche schommeling in de luchtdrukking (11—13 KM.), waardoor het waarschijnlijk is, dat inderdaad op die hoogte de grootste horizontale drnkgradiënten voorkomen.

Daar verder de afvloeïng grootendeels als gevolg van de aequatoriale opstijging te beschouwen is, zal ze blijkbaar op de hoogte, waarop die opstijging eindigt, óf ook eindigen óf sterk afnemen.

De hoogte tot waartoe convectie plaats grijpt is de hoogte van de troposfeer of wel van de basis der stratosfeer; derhalve zal de hoogte der bovengrens van den Antipassaat nabij die van de stratosfeer-basis blijven.

Onderstaande maandwaarden doen dit verband inderdaad dnidelijk zien.



## Hoogte der

	Bovengrens Antipassaat	Vershil met 17.5 km.	Basis Stratosfeer	Vershil met 17.0 km.
Jan.	18—19 Km.	1 Km.	17.8 Km.	0.8 Km.
Febr.	18—19	1	17.6	0.6
Mrt.	18—19	1	17.3	0.3
Apr.	18	0.5	17.0	0.0
Mei	15 - 16	-2	16.5	-0.5
Juni	12—13	-5	16.2	-0.8
Juli	16—17	-1	16.0	-1.0
Aug.	16—17	-1	16.5	-0.8
Sept.	17—18	0	17.0	0.0
Oct.	21 - 22	4	17.4	0.4
Nov.	20—21	3	17.6	0.6
Dec.	19—20	2	17.7	0.7

In den zuidelijken zomer is de opstijging het sterkst en bereikt daardoor grootere hoogten; dientengevolge zal de antipassaat-afvloeiing zich tot grootere hoogten uitstrekken. De waargenomen hoogte-schommeling is daarmee in overeenstemming, maar volgens bovenaangevoerde cijfers veel grooter voor den Antipassaat; blijkbaar is het verband niet zoo eenvoudig als boven aangeduid werd.

*Bovenpassaat.* Boven den Antipassaat treedt weer aequatorwaartsche toevloeiing op en heerscht dus een „Bovenpassaat”, die waarschijnlijk het gevolg is van de omstandigheid, dat de lucht in de aequatoriale zone tot grootere hoogten dan in de subtropen een afkoeling ondervindt, zoodat ook de luchtdrukking daar lager wordt. Ik heb de voor Batavia voor hoogten boven 10 KM. gevonden luchtdrukkingen vergeleken met de waarden die PEPPLER<sup>1)</sup> voor den Noord-Atlantischen Oceaan en Europa heeft afgeleid, en daarbij de volgende druk verschillen (in mM.) gevonden.

Hoogte in KM.	10	11	12	13	14	15	19	20	25
30°N—6°S	-3.8	-3.6	-3.3	-2.3	-1.6	-0.4	3.9	4.2	2.7
45°N—30°N	-8.9	-7.9	-5.9	-5.6	-3.9	-2.7	-0.2	0.3	0.6

<sup>1)</sup> Beiträge z. Phys. d. fr. Atmosf. Bd. IV.

De omkeering van het drukverschil (waarmee dan de overgang van afvloeiing tot toevloeiing zal moeten samenhangen) vindt voor tropen en subtropen volgens bovenstaande getallen plaats tusschen 15 en 19 MK.

PEPPLER zelf vergelijkt zijn waarden voor  $30^\circ$  N. (eigenlijk voor  $22\frac{1}{2}^\circ$ — $37\frac{1}{2}^\circ$  N.) met die voor  $2\frac{1}{2}^\circ$  S.— $22\frac{1}{2}^\circ$  N. en vindt dan eerst bij 25 KM. een omkeering. Zijne voor de aequatoriale zone gevonden waarden zijn echter onzeker; daarentegen gelden ze voor de zelfde meridionale zone als die voor  $30^\circ$  N., terwijl Batavia een quadrant oostelijker ligt.

Het verband met de luchtdrukking-gradienten is dus voor Batavia nog niet met zekerheid te geven; opgemerkt kan echter worden, dat het diep dalen van den Bovenpassaat in Juni ongetwijfeld samenhangt met de snelle afneming der luchtdrukking boven Batavia in die maand, nadat in Mei een maximum heeft plaats gevonden (zie tabel III).

Waar blijft echter de toevloeiende lucht?

Afvloeiing in een Boven-antipassaat is niet waarschijnlijk; integendeel, hooger op gaat de Bovenpassaat over in een snelle westwaartsche luchtstreaming, den Krakatau-wind. Ook ontbreekt in de stratosfeer, de sfeer waarin de Bovenpassaat waait, de sterke verwarming door de zon, die in de troposfeer de krachtige opwaartsche convectie veroorzaakt. Het zou echter mogelijk kunnen zijn, dat langzame opstijging of daling over groote gebieden plaats greep, die zeer wel vereenigbaar zijn met de gelaagde structuur der stratosfeer.

Daling is niet onwaarschijnlijk daar de nit hoogere breedten toevloeiende lucht, in kondere streken komende, sterk zal afkoelen.

Het zou ook mogelijk kunnen zijn, dat de vertic. component der rotatie-kracht, die bij oostenwind neerwaarts gericht is en aan den aequator haar max.  $2 \omega r$  bereikt, die daling bevordert.

*Krakatau-wind.* Dezen wind, meen ik, dat men in de eerste plaats als een stationnaire luchtstreaming heeft te beschouwen. Bewijzen hiervoor zijn: de waarneming in 1883 dat de Krakatau-asch, zevenmalen met vrijwel standvastige snelheid van 40 m.p.s. rondom de aarde werd gevoerd, alsmede dat te Batavia op dezelfde hoogte van ongeveer 30 KM. twee malen (in Maart en in September) Oostenwind van ongeveer gelijke snelheid werd geconstateerd.

Wanneer de streaming stationnair is, zal zij evenwijdig aan de isobaren moeten loopen en deze zullen dus een meridionale gradient-richting bezitten. De groote van den gradient kan berekend worden volgens de formule

$$\Delta B = 0.157 \frac{b}{760} \frac{T_0}{T} v \sin \varphi^1).$$

Op 6° breedte,  $\frac{b}{760} = \frac{1}{100}$  aannemende en  $T_0 = 223^\circ$ , wordt hiermee gevonden bij  $v = 40$ ,  $\Delta B = 0.005$  mM.

Om de zelfde berekening voor de passaatstrooming beneden uit te voeren, kunnen we voor  $v$  nemen de gemidd. windsterkte in Juli—Sept. waargenomen op den vuurtoren van „den Bril” gelegen midden in Zee Z. van Celebes op de breedte van  $-6^\circ$  n.l.  $v = 10$  m. p. sec.

Hiermee wordt gevonden  $\Delta B = 0.17$  mM. terwijl Dr. BRAAK's isobarenkaart 0.20 geeft, derhalve een vrij goede overeenstemming. De toepassing der formule is hier echter beperkt, daar bij  $\varphi = 0^\circ$   $\Delta B$  ook nul zou worden, wat niet het geval is. De passaat stroomt dan ook bij den aequator niet evenwijdig aan de isobaren, maar loodrecht er op.

Bij den Krakatau-wind keert ongetwijfeld de gradient aan den aequator door nul gaande van teeken om. Dat de bovengenoemde drukverschillen hiermee niet in strijd zijn leert het volgende. Voor het drukverschil tusschen 6° en 30° breedte op 25 KM. hoogte werd boven 2.7 mM. gevonden, wat een gemiddelden gradiënt van 0.11 mM. geeft. Naar rato der luchtdrukking volgens boven voor 30 KM. gebruikte waarde van  $\frac{b}{750} = \frac{1}{100}$  herleid, wordt dat  $\frac{0.11}{2.2} = 0.05$ , een bedrag, dat, ondanks de aanklevende onzekerheid, vrij groot is tegenover den boven voor den Krakatau-wind gevonden gradient 0.005, maar waarmede de nadering tot nul aan den aequator in overeenstemming is.

*Hooge Westenwinden.* Uit tabel II blijkt dat de Hooge Westenwinden de overhand hebben in den Zuidelijken winter en des te sterker zijn naarmate de zons-declinatie noordelijker is. De gemiddelde ondergrens is in Mei—Juni het laagst (16—17 K.M.).

Uit de afzonderlijke waarnemingen blijkt, dat ook op kleinere hoogten W-winden optreden en wel opvallend meer in Maart en April, dan in Juli—Sept. Dit hangt samen met de kracht van den Antipassaat, die in Aug. een max. en in April een min. vertoont. Het maakt dus den indruk alsof de Antipassaat de W-winden wegdringt. BERSON, de ontdekker dezer winden, nam ze in Afrika op den aequator in Aug. en September waar en kwam ze, in tegenstelling met Batavia, ook in geringere hoogten tegen. Opmerkelijk is het nu

<sup>1)</sup> HANN, Lehrb. d. Met. 1915, pag. 488.

dat door hem aldaar geenszins het overheerschen van een krachtigen Antipassaat tot hoogten van 16 K.M. zooals boven Batavia het geval is, geconstateerd werd.

GOLD heeft er op gewezen <sup>1)</sup>, dat, volgens de theorie der algem. atmosph. circulatie ontwikkeld door OVERBECK <sup>2)</sup>, de W-winden der gematigde breedten in groote hoogten den aequator naderen. Door OVERBECK is de invloed van den schuinen stand der aardas niet in rekening gebracht; het is echter duidelijk dat die invloed dusdanig moet zijn, dat de W-winden in dát halfmond, hetwelk winter heeft, den aequator dichter zullen naderen dan in het andere halfmond. Hiermee zijn de waarnemingen in Batavia in overeenstemming; inderdaad is hier een veel sterker optreden der hooge W-winden in den zuidelijken winter dan in den zomer geconstateerd. OVERBECK berekende gescheiden de luchtstreamingen, die enkel door de temperatuurverdeeling ontstaan en die, welke een gevolg zijn van den rotatie-invloed. Deze laatste zijn echter ook afhankelijk van de temperatuur-verdeeling en het is nu juist voor de hoogere luchtlagen, dat OVERBECK een geheel onjuiste verdeeling heeft gebruikt. De ware verdeeling is eerst veel later door registreerballonwaarnemingen bekend geworden.

De overeenstemming van OVERBECK's nitkomsten met de waarneming mag dus niet zonder meer als een verklaring der hooge Westenwinden gegeven worden. Trouwens voor het opnieuw optreden van Oostenwinden boven de Westenwinden, zooals dat zoowel in Afrika als op Java is waargenomen, bestaat die overeenstemming geenszins.

De jaarlijksche verdeeling der Westenwinden boven Java maakt het waarschijnlijk, dat zij een aequatorwaartsche uitbreiding van den grooten Westwervel van het zuidelijk halfmond zijn. Die Westwervel zal op dat halfmond met zijn krachtige algemeene circulatie vooral in den zuidelijken winter zeer sterk zijn. HANN (Lehrb. pg. 487) berekent voor het noordelijk halfmond tusschen 10° en 50°.

<sup>1)</sup> Quarterly Journal 1910.

<sup>2)</sup> Sitz. Ber. Preuss. Ak. Berlin. 1888.

**Dierkunde.** — De Heer J. F. VAN BEMMELEN biedt een mededeeling aan: „*Over het primaire karakter der Popteekening bij de vlinders.*”

Op blz. 136 zijner verhandeling: Zur Zeichnung des Insekten-, in besonderen des Dipteren- und Lepidopterenflügels (Tijdschrift v. Entomologie vol. 59, 1916) komt DE MEYERE op tegen de vergelijking van het popstadium der Lepidoptera met het subimaginaalstadium der Agnatha, een vergelijking, die zoover ik weet het eerst door POULTON<sup>1)</sup> is uitgesproken, en waarmede ik mij in mijn opstel over de Popteekening bij Rhopalocera<sup>2)</sup> vereenigd heb. Hij zegt: „Bekanntlich wird von mehreren Forschern angenommen, dass die Puppe sich aus einer fliegenden, imago-ähnlichen Form herausgebildet hat, dass die Beschränkung der Flügel auf das letzte Stadium eben erst nachher erworben wurde. Mit meinem Kollegen” (sc. VAN BEMMELEN) „kann ich mich in diesen Auffassungen nicht einverstanden erklären. Wie man sich die prinzipielle Ausbildung des Puppenstadiums auch denken mag, sei es als ruhende Subimago, sei es als ruhende Larve (was mir wahrscheinlicher zu sein scheint), so glaube ich doch annehmen zu dürfen, dass sich die Trichopteren, Panorpaten, Dipteren, Lepidopteren aus Neuropteren differenzirten, nachdem diese die ihnen jetzt eigene Holometabolie erworben hatten. Die Neuropteren aber zeigen allgemein eine wenig gefärbte, in der Erde oder in Gespinnsten ein verborgenes Dasein fristende Puppe, meistens mit dünner Chitinhaut. So ist auch das Verhalten bei den Panorpaten, bei den Dipteren, auch bei einer Anzahl niedrig stehender Lepidopteren, bei Micropteryx, Limacodiden und vielen anderen. Wenn wir gerade bei den freilebenden Puppen der Tagfalter besondere Färbungen auftreten sehen, so möchte ich darin eine ganz sekundäre Erscheinung erblicken” ... etc. (Cursiveering van mij).

Naar aanleiding van deze nitspraak zij het mij vergund het volgende op te merken:

Tegen het gebruik van de uitdrukking „Subimago” op zichzelf

---

1) POULTON, The external morphology of the Lepidopterous Pupa, its relation to that of other stages and to the origin and history of metamorphosis; Transactions Linnean Society 1890 - 91.

2) J. F. VAN BEMMELEN, Die phylogenetische Bedeutung der Puppenzeichnung bei den Rhopaloceren und ihre Beziehungen zu derjenigen der Raupen und Imagines, Verh. d. Deutschen Zool. Ges. 23 Versamml. 1913.

voor het popstadium der Lepidoptera en andere Holometabola schijnt DE MEYERE geen principieel bezwaar te hebben, want hij verklaart zooals men ziet dat men de pop als een „rustende subimago” zou kunnen beschouwen, al geeft hij voor zich de voorkeur aan de aanduiding „rustende larve”. Deze voorkeur vermag ik niet te deelen. Voor het begrip larve is de aanwezigheid van provisorische organen en het intreden eener gedaanteverwisseling vereischt: het tijdstip der metamorfose bepaalt het eindpunt van 't larvenleven. Nu is het toch wel duidelijk, dat dit punt gelegen is op den overgang van rups in pop. Deze laatste is dus geen rustende larve, maar een rustende subimago, men zou zelfs kunnen beweren dat het een rustende imago was, want de provisorische larvenorganen zijn verdwenen, de imaginale organen daarentegen alle aanwezig, maar voorloopig nog buiten functie.

Maar het is bepaaldelijk tegen de meening, dat dit subimaginaalstadium bij de voorouders der Lepidoptera een zoodanige bewegelijkheid zou bezeten hebben, dat het op de wijze der het water verlatende Haften zou hebben rondgevlogen, tegen welke DE MEYERE bezwaar heeft. Volgens hem is het veel waarschijnlijker, dat in geen enkel tijdperk der phylogenetische ontwikkeling van de Lepidoptera en hunne verwanten: de Panorpaten, Trichopteren, Dipteren en Neuropteren, het insect heeft rondgevlogen vóór de allerlaatste vervelling, dus vóór het den naam imago ten volle verdiende.

Nu moet ik toegeven, dat deze onderstelling van een vliegend subimaginaalstadium bij de voorouders dezer groepen een hypothese is, waarvoor slechts waarschijnlijkheidsgronden zijn aan te voeren, en waartegen zeker ook gewichtige bezwaren kunnen opgeworpen worden. Ik wil zelf een dezer tegenwerpingen op den voorgrond brengen: men kan de Holometabola voorzeker met een groote mate van recht vergelijken met nog andere Hemimetabola dan juist de Agnatha, en verder ook met de Ametabola, en naar aanleiding daarvan de vraag stellen, of het popstadium niet het best gelijk te achten is aan op een na den laatsten instar dezer groepen, van insecten dus, bij welke de verschillende instars veel meer op elkaar gelijken dan bij de Holometabola, omdat zij alle veel minder verschillen van den imaginale toestand, of, wat hetzelfde beteekent, omdat zij alle veel minder afgeweken zijn van het oorspronkelijke insectentype.

Wij zien bij hen de vleugels al vroeg voor den dag komen als zijdelingsche uitgroeisels van den rugwand, en bij iedere vervelling in grootte toenemen, om echter pas na de laatste huidafstroeping als vliegwerktuigen dienst te gaan doen. Waarom zou nu deze gang der ontwikkeling minder oorspronkelijk zijn dan die der Haften?

Behoort het merkwaardige verschijnsel, dat de subimago der Eéndagsvliegen, na aan de oppervlakte van 't water een cuticula te hebben afgestroopt, gedurende een korten tijd rondvliegt, om vervolgens opnieuw te vervellen, en dan eerst tot paring over te gaan, niet veeleer te worden opgevat als een speciaal verschijnsel in 't Agnathenleven, waaraan geen diepere beteekenis is verbonden, en dat dus voor de verklaring der Holometabolie met haar rustend popstadium niet in aanmerking kan komen?

Ik durf hieromtrent geen vaststaande meening te uiten, maar zou er toch wel op willen wijzen, dat de beantwoording der bovengestelde vraag rekening moet houden met verschillende algemeene quaesties, in de eerste plaats met die der vleugelontwikkeling in haar geheel, n.l. het vraagstuk hoe de Insecten (of ten minste de Pterygogenea) eigenlijk aan hunne vleugels gekomen zijn. Daarvan toch hangt het af, of men moet aannemen dat de stamvaders der huidige Pterygote Hexapoden nimmer een tijdperk doorgemaakt hebben, waarin zij reeds vóór het bereiken van den geslachtsrijpen leeftijd zich vliegend voortbewogen, dan wel of men mag veronderstellen, dat het in gebruik nemen der (op de een of andere wijze verworven) vleugels meer en meer tot dat laatste tijdperk is opgeschoven geworden. Als men mocht aannemen, dat de oudste gevleugelde insecten reeds kort na hunne geboorte hunne vleugels begonnen te gebruiken, dan zouden de Agnatha ons nog een laatste spoor van dien vroegeren toestand kunnen bewaard hebben, en zou het oogenschijnlijk absurde feit, dat zij slechts eenige minuten in hun subimaginaal foudraal rondvliegen, kunnen verklaard worden door een steeds langer uitstellen der aanvaarding van het vliegende leven, onder den zich voortdurend uitbreidenden invloed der secundaire adaptatie aan het waterleven. Het verschil tusschen hen en de overige Heminetabola zou dan niet daarin steken, dat laatstgenoemde oorspronkelijker gebleven waren dan de Haften, maar dat zij op een andere wijze van den primitieven toestand waren afgeweken, n.l. door het volledig verschuiven van den aanvang van het daadwerkelijk vliegen tot den imaginaalen instar.

De onderstelling eener dergelijke vertraging in 't aanvaarden der vliegende levenswijze is dus juist het omgekeerde van 't geen men aanneemt ter verklaring van vele andere verschijnselen in de gedaanteverwisseling, te weten een terugschuiving van 't optreden van kenmerken naar steeds jongere instars. Ik meen, dat men tot de eerstgenoemde onderstelling evengoed het recht heeft als tot de laatste. Wanneer b.v. WEISMANN, m. i. terecht, aanneemt dat verschijnselen in de verandering der klenrentekening, die bij sommige

rupsen eerst bij hun laatste vervelling optreden, bij verwante soorten door ontwikkelingsvervroeging naar jongere instars zijn verplaatst, dan mag men daartegenover ook wel het omgekeerde denken, n.l. dat b.v. een kleurenpatroon der vleugels, 'twelk oorspronkelijk tegelijk met die vleugels zich ontwikkelde, thans eerst in een veel lateren instar op hen zichtbaar wordt, dan het tijdperk, waarin de beginselen dier vleugels zelf optreden. En wat voor 't kleurenpatroon geldt, mag men evenzeer op den aanleg der vleugels zelf toepassen.

Het ligt niet in mijn voornemen, hier verder op deze vraagstukken in te gaan; immers voor de oplossing der quaestie of de kleurentekening op de vleugelscheeden der Dagvlinders al of niet phylogenetische beteekenis bezit, is dit niet noodig. Integendeel komt het mij voor, dat men die vraag daardoor onnoodig ingewikkeld maakt en dientengevolge vertroebelt. De vlinderpop toch verschilt van den uit haar te voorschijn komenden imago, zoowel als van den voorlaatsten instar der Hemimetabola, slechts door hare geringe bewegelijkheid en de tijdelijke staking der voedselopname en uitscheiding. Het kan, dunkt mij, geen twijfel lijden, of zij heeft die vermogens verloren, en dat wel langzamerhand. Met recht worden „gebeeldhouwde” en zich verplaatsende poppen zooals die der Micropterygidae, voor oorspronkelijker aangezien dan „mummiepoppen” met een minimum van bewegelijkheid. Waarom zouden dan kleurloosheid en gemis aan teekening niet evenzeer berusten op achteruitgang dezer kenmerken?

Voor de Neuroptera geldt dit natuurlijk evengoed als voor de Lepidoptera: DE MEYERE zelf geeft toe dat de poppen der Netvleugeligen „meerendeels in den grond of in spinsels verborgen leven, en een dunne *weinig gekleurde* chitinehuid bezitten” (cursiveering van mij). De oorzaken, die alom in 't Dierenrijk, bij Insecten evengoed als bij andere groepen, achteruitgang van bestaande kleurentekeningen met zich meebrengen, n.l. duisternis en afwezigheid van met gezichtsvermogen begaafde vijanden, kunnen dus ook bij de Neuroptera hun invloed hebben uitgeoefend. Maar daarom behoeven nog niet de primitieve Neuroptera-achtige voorouders der huidige Lepidoptera reeds verborgen en onbewegelijke poppen te hebben bezeten. In allen gevalle hebben die voorouders een lange reeks van grondige veranderingen doorlopen, waarin vooral de jongste, larvale instars steeds meer van 't oorspronkelijke groepstype gingen afwijken, en daardoor van 't voorlaatste en laatste stadium gingen verschillen. Deze twee stadiën daarentegen bleven in hoofdzaken aan elkaar gelijk, maar in bijkomstige kenmerken grepen bij beide voortdurend veranderingen plaats. Voor de pop bestonden die voor-



namelijk in verlies der bewegelijkheid, met al de gevolgen van dien. Maar daarnegen behield zij de oude primitieve kenmerken onveranderd of in minder gewijzigden graad, en voor zoover ook deze onderhevig waren aan wijzigingen, droegen die meer het karakter van nitvalsverschijnselen, zooals gedeeltelijke of geheele uitwissching der kleurentekening, dan van progressieve veranderingen.

Het komt mij dus voor, dat er evenmin reden is om aan de kleurentekening der vlinderpop een secundair karakter toe te kennen, als men dit zou willen doen aan die der larven- en nympheninstars van Hemi- of Ametabola. Een sprinkhaan doorloopt in de reeks zijner vervellingen evengoed als een vlinder een aantal opvolgende stadiën van kleurentekening. Niemand zal op de gedachte komen, dat het voorlaatste stadium dezer reeks een ander karakter zou bezitten dan de daaraan voorafgaande of het daaropvolgende. Evenmin is deze onderstelling noodig of nuttig voor het begrijpen der vliindertekening. Secundair gewijzigd is deze voorzeker, en wel in alle stadiën, maar juist in het popstadium minder dan in den voorafgaanden larvalen instar of het daaropvolgende imaginale tijdperk, zooals SCHIERBEEK aantoonde bij de vergelijking der rupsenteekening met die van de pop.

Voor de teekening der pop gelden dezelfde overwegingen als voor zoovele andere harer eigenaardigheden. POULTON b.v. wees er op, dat aan de poppen van die dagvlinders, wier voorvleugels een gehakkelden buitenrand vertoonen, de vleugelscheeden zich voorbij die gebogen lijn, welke duidelijk zichtbaar is, nog een klein eind voortzetten en dan in een ongebroken rand eindigen, en hij verklaart dit terecht voor een aanduiding, dat de voorouders dier vlinders eenmaal gewone, afgeronde vleugels hebben bezeten. Zoo kon hij ook aantoonen, dat bij die nachtvlinders, wier wijfjes slechts vleugelstompjes bezitten, terwijl de vleugels der mannetjes goed ontwikkeld zijn, de vrouwelijke poppen zich van de mannelijke veel minder onderscheiden n.l. door vleugelscheeden, die slechts weinig korter zijn dan die der mannetjes. Evenzoo bleek het onderscheid tusschen de scheeden, waarin zich de draadvormige sprieten van vrouwelijke nachtvlinders ontwikkelen, met die waarin de kamvormige der mannetjes zich vormen, veel geringer dan dat tusschen de sprieten der imagines zelf. Zouden al deze verschijnselen niet berusten op een recapitulatie der phylogenie, op het behouden blijven, gedurende het subimaginale stadium, van vroegere toestanden, die hun beteekenis hebben verloren.

DE MEYERE zegt hieromtrent: „Es ist schwer sich das Vorhandensein dieser“ (Poulton'schen) „Linie, schon am jungen Puppenflügel, vorzustellen, wenn nicht durch Anticipation der Vererbung. Immerhin

liegen genügend Beispiele vor, in welchen Merkmale der verschiedenen Stadien in beiden Richtungen, von der Imago oder von der Larve auf die Puppe übergepflanzt werden. . . . Auf dergleichen verfrühter Activirung dürfte es auch zurückzuführen sein, dasz gewisse Zeichnungen des imaginalen Flügels schon bei den Puppen sichtbar sind, wie die submarginalen Fleckchen der Vanessen. Namentlich wenn, wie VAN BEMMELEN nachwies, bei der ontogenetischen Entwicklung der Vanessen-zeichnung die Imago zunächst noch Anklänge an ältere verallgemeinerte Formen zeigt, ist es verständlich, dasz die Flügelscheidenzeichnung gerade noch diese Stadien zur Anschau bringt, ohne dasz man anzunehmen braucht, dasz die Imago seine Färbung der Puppe entnommen hat, und diese ehemals mit einer solchen herumflog."

In verband met deze beschouwingen van DE MEYERE zou ik willen opmerken, dat ik in 't geheel niet aanneem, dat de imago hare kleurentekening aan die van de pop ontleend heeft, gelijk duidelijk blijkt uit mijne uitingen op blz. 358 mijner verhandeling: On the phylogenetic significance of the wing-markings of Rhopalocera (Transactions of the 2<sup>d</sup> Entomol. Congress 1912) waar ik er op wijs, dat ten eerste slechts de buitenkant der vleugelscheede, waarin zich de voorvleugel ontwikkelt, tekening vertoont, die van den daaronder verborgen achtervleugel niet, terwijl natuurlijk bij de imago zich op beide oppervlakken van alle twee de vleugelparen kleurenpatronen kunnen ontwikkelen, en ten tweede dat het passagère of primordiale patroon op die imaginale vleugels *noy* primitiever en dus phylogenetisch ouder is dan de kleurentekening op de popscheede, zoodat er evenmin reden is om te denken, dat deze laatste haar patroon ontleend zou hebben aan den jongen imagovleugel, die in haar verborgen zit, als het omgekeerde te onderstellen. „Overplanting van imaginale kenmerken op vroegere instars" komt ook mij waarschijnlijk voor, zooals uit het voorgaande genoegzaam blijkt. Als echter DE MEYERE deze overplanting „vervroegde activeering" noemt, kan hij niet anders bedoelen dan activeering van latente erfelijke factoren, en geeft hij dus toe, dat die kenmerken in den hereditairen aanleg der soort aanwezig waren. Zij moeten dus op vroegere tijdperken der phylogenetische ontwikkeling betrekking hebben, m. a. w. de vleugel-tekening der poppenscheeden moet eertijds de vleugels versierd hebben van een daarmee rondvliegend (of tenminste rondwandeland) insect. Of dit nu de imago dan wel de subimago was, vormt een quaestie op zichzelf, maar in allen gevalle zou uit DE MEYERE'S uitlating over vervroegde activeering volgen, dat ook hij de tekening der pop beschonwt als de recapitulatie van een phylogenetisch onder stadium. Als ik mij nu in zijn gedachtengang tracht te verplaatsen,

zou die dus ongeveer den volgenden loop genomen hebben: Aan het imaginale stadium der vlinders ging van oudsher een ongekleurd popstadium vooraf. Bij de voorouders der tegenwoordige dagvlinders ontstond de eigenaardigheid, dat hunne poppen niet meer in 't verborgen leefden, en dus behoefte aan beschermende of afschrikkende kleuren kregen. In deze behoefte werd voorzien door overplaatsing (ten gevolge van anticipeerende activeering) van het destijds bestaande (oudere) patroon der imagovoorvleugels op de uitwendige vleugelscheeden der pop, en deze behield het, ook nadat het patroon der imagovleugels zelf zich verder had gewijzigd tot het thans daarop zichtbare.

Ook wanneer deze voorstelling van den gang der phylogenetische ontwikkeling, die mij weinig waarschijnlijk voorkomt, juist mocht blijken, wordt daardoor geen afbreuk gedaan aan de phylogenetische beteekenis van dit poppatroon, en is er dus geen aanleiding om het als geheel secundair en derhalve van alle beteekenis voor de afstammingsleer der vlinders ontbloomd, te verklaren. Dit toch schijnt DE MEYERE te bedoelen met zijn in den aanvang van dit opstel gedeeltelijk vermelde uitspraak, die in haar geheel luidt:

„Wenn wir gerade bei den freilebenden Puppen der Tagfalter besondere Färbungen auftreten sehen, so möchte ich darin eine ganz sekundäre Erscheinung erblicken, bei welcher zunächst der Körper bestimmte Pigmentflecken bekam, denen sich nachher eine sympathische Färbung der Flügelscheiden anschloss. Dasz bei letzteren die Färbung eine gewisse Beziehung zum Geäder aufweist, kann bei der besonderen Bedeutung dieses Systems als Atmungs- und Blutbahn nicht Wunder nehmen“.

Hiertegenover nu wensch ik mijne opvatting volkomen te handhaven, dat nl. de teekening der dagvlinderpoppen — die op 't lichaam zoowel als die op de vleugelscheeden — moet beschonwd worden als een oorspronkelijk patroon, terwijl de eenkleurig witte, gele, bruine of zwarte poppen der meeste nachtvlinders hare eenkleurigheid danken aan verlies dezer primitieve teekening.

Wat met name die overeenstemming, zoowel in kleurentinten als in teekening, tusschen achterlijf en vleugels betreft, zij opgemerkt, dat dit een zeer algemeen voorkomend verschijnsel, niet slechts bij poppen maar in nog hooger mate bij imagines, is. Ongetwijfeld zal die overeenstemming dikwijls berusten op secundaire wijziging der kleuren en merken, zoowel van abdomen als van vleugels, en zal men daarbij mogen denken aan sympathische correlatie, maar dit behoeft volstrekt geen reden te zijn om niet te gelooven, dat aan beide teekeningen een primitief patroon ten grondslag ligt, en om niet op beide lichaamsstreken te zoeken naar de sporen daarvan.

Wat voor de imagines geldt, doet dit zeker in nog hooger mate voor de poppen: overblijfselen der oorspronkelijke teekening zijn daarop eerder en in vollediger staat te verwachten dan op de imagines, die door hunne veelzijdiger levenswijze (afwisselend vliegen en stilzitten, zich voeden en voortplanten) in nog hooger mate dan de rupsen aan verscheidenheid van levensvoorwaarden en invloeden der omgeving zijn blootgesteld, terwijl beide stadiën daarin de bijna onbewegelijke, lethargisch geworden poppen overtreffen.

Het moet zeker als een gevolg van zijn bovenvermelde opvatting worden beschouwd, dat DE MEYERE wél groot gewicht hecht aan de *verschillen*, die tusschen de vleugelscheeden-patronen der poppen van naverwante vormen, zooals *Euchloe cardamines*, *Pieris brassicae* en *Aporia crataegi* vallen op te merken, maar daarentegen heel weinig aandacht schenkt aan het door mij in 't licht gestelde feit, dat een groote mate van *overeenkomst* bestaat tusschen de teekeningen der poppen in meerdere families van Rhopalocera, t. w. bij Papilioniden, Pieriden en Nymphaliden, een overeenkomst, welke niet alleen veel grooter is dan die tusschen de vleugelpatronen der uit deze poppen te voorschijn komende imagines, maar welke ook berust op de hoogere overeenstemming van het poppatroon met de primordiale, ephemere teekening, die gedurende het popleven op de zich ontwikkelende vleugels zichtbaar wordt, om eerst in de laatste phase vóór het uitkomen der imago plaats te maken voor de definitieve teekening,

Die voorbijgaande vlekken op de in de vleugelscheeden verborgen beginselen der vleugels leveren ons tevens het bewijs, dat een oorspronkelijke teekening zeer wel in 't verborgen kan blijven voortbestaan, en dat dus begrippen als „sympathische kleuring” of „invloed van verlichting en omgeving” niet noodwendig te hulp behoeven geroepen te worden, om het optreden eener zoodanige teekening op zichtbare oppervlakken te verklaren.

Terwijl men volkomen het recht heeft, om het ontbreken van teekening in verband te brengen met levenswijze op verborgen plaatsen, en met afwezigheid van licht, gaat het toch niet aan, deze invloeden als de rechtstreeksche en onmisbare bewerkers van den achteruitgang van 't patroon te beschouwen. Immers het patroon blijkt ook onder de popscheede zich te kunnen handhaven, zij het ook, dat dit bij sommige vormen veel duidelijker en vollediger geschiedt dan bij andere, soms naverwante, zonder dat het ons mogelijk is, voor dit onderscheid een verklaring te vinden.

Wat voor de vleugels onder de popscheeden geldt, zal waarschijnlijk even goed waar zijn voor die scheeden zelf. Neeft men

de juistheid dezer bewering aan, dan zou men dus mogen verwachten, dat ook bij sommige van die vlindervormen, wier poppen op verborgen plaatsen schuil gaan, het oorspronkelijk kleurenpatroon, op lichaam zoowel als op vleugels dier poppen, meer of minder zou kunnen bewaard gebleven zijn.

Dit nu blijkt inderdaad het geval, zooals ik waarnam bij 't bestudeeren der poppen van de *Chaerocampinae* onder de Sphingidae en van vele genera der *Geometridae*. In tegenstelling toch met de meerderheid der tot deze families behorende geslachten, wier poppen gelijkmatig zwart, bruin, geel of wit zijn, vertoonen de bedoelde genera een duidelijke en regelmatige popteekening, bestaande uit donkere vlekken op een lichten grond. Toch leven zeker de meeste dezer poppen onder nagenoeg dezelfde omstandigheden als die hunner verwanten, n.l. verborgen in den grond, in spinsels of tusschen bladeren.

Wel is het opmerkelijk, dat juist de *Chaerocampinae* niet, zooals vele andere Sphingiden, ter verpopping in den grond kruipen, maar op de oppervlakte van den bodem blijven, en daar met een grof spinsel de aardkluutjes aaneen hechten. Evenzoo verpoppen vele *Geometridae* niet in, maar boven den grond, vaak in een zoo luchtig spinsel, dat men de pop er binnen kan waarnemen. Het komt mij voor, dat wellicht hierin de oorzaak mag gezocht worden van het behouden blijven der kleurentekening op de poppen dezer vormen, terwijl die bij hunne naaste verwanten verloren ging, onder den invloed van volslagen duisternis.

Ook in zooverre vertoonen de *Chaerocampa*-poppen wel degelijk de sporen van den invloed der verborgen ligging, als hunne teekeningen niet slechts in hooge mate variabel zijn, maar daarneven ook duidelijk tot obliteratie neigen. In dit laatste opzicht komen zij overeen met de primordiale teekening der vlindervleugels binnen de pepscheede, en ook met de vlekenteekening dier dagvlinderpoppen, bij welke de oorspronkelijke kleurschakeering voor een sympathische algemeene klenrentint plaats maakt, zooals bij de egaal groene poppen van *Pieris napi*, waarop toch dezelfde vlekken als bij *P. brassicae*, maar veel kleiner en onduidelijker dan bij deze, zijn weer te vinden (zie v. BEMMELÉN, *Phylogenetische Bedeutung der Puppen-Zeichnung*, en SCHIERBEEK: *De beteekenis van het setale patroon der rupsen voor de phylogenie*).

Niettegenstaande dus de teekening der *Chaerocampinen*-poppen diepgaande sporen van obliteratie vertoont, is het toch evenzeer duidelijk, dat zij berust op hetzelfde grondplan als die der dagvlinders. Voor deze heb ik in mijn daareven vermeld apstel een nomenclatuur

voorgeslagen (zie textfiguur 6 op blz. 115), volgens welke zeven hoofdrijen van vlekken te onderscheiden zijn, die ik met de namen: dorsale, dorsolaterale, epistigmale, stigmale, hypostigmale, ventro-laterale en ventrale vlekkenreeks heb aangeduid. Dr. SCHIERBEEK heeft in zijn proefschrift er op gewezen, dat de namen van W. MÜLLER en WEISMANN, die van supra- en infrastigmale vlekken spreken, de prioriteit hebben.

Deze rijen nu kan men alle op de poppen van verschillende *Chaërocampa*-soorten, evenals op die van *Deilephila*'s (bv. *euphorbiae* en *elpenor*) meer of minder duidelijk en volledig terug vinden.

Niet minder treffend dan de overeenkomst in klourenteekening tusschen Sphingiden- en Rhopaloceren-poppen is die tusschen de eerstgenoemde en hunne rupsen aan de eene-, hunne imagines aan de andere zijde, een overeenkomst, die onder het mij ter beschikking staande materiaal in hare algemeenheid het allerduidelijkst uitkwam bij *Deilephila celerio*, ofschoon zij voor enkele bepaalde kenmerken of lichaamsdeelen bij andere verwante vormen dikwijls nog oorspronkelijker, vollediger of sprekender was, gelijk ik in een volgende mededeeling in bijzonderheden hoop aan te toonen.

Hoezeer ik nog niet in de gelegenheid was, levende rupsen in hare verschillende instars te onderzoeken, en evenmin om de ontwikkeling der pophuid onder het laatste rupsenvel, of die van de imaginale epidermis binnen de pop na te gaan, twijfel ik niet of deze overgangsstadiën zullen mijne conclusie van de vergelijkbaarheid der larvale-, nymphale- en imaginale teekening bevestigen, n.l. dat alle slechts wijzigingen van hetzelfde grondplan zijn, welk plan het duidelijkst te zien is op de pop.

Groningen, Maart 1918.

---

**Scheikunde.** — De Heer ERNST COHEN doet, mede namens den Heer A. L. TH. MOESVELD, een mededeeling over: „*De Invloed van Druk op de Oplosbaarheid van Stoffen. IV. Toetsing der Wet van BRAUN*”.

1. Terwijl wij ons in onze eerste en tweede mededeeling <sup>1)</sup> onder bovenstaanden titel hebben beziggehouden met het bepalen der waarde

van  $\left(\frac{\partial C}{\partial \pi}\right)_T$  en  $\Delta V$  in de vergelijking:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial \pi}\right)_T : \left(\frac{\partial C}{\partial T}\right)_\pi = -T \frac{\Delta V}{Q} \quad (\text{Wet van BRAUN}),$$

zullen wij in de volgende regels de nog ontbrekende grootheden bespreken, ten einde tot eene toetsing van deze wet te kunnen geraken.

Alvorens hiertoe over te gaan, zullen wij de vergelijking in een vorm schrijven, in welken de concentraties niet in gewichtsprocenten ( $C$ ), gelijk tot dusverre in onze eerste en tweede mededeeling, maar in molekulairprocenten ( $x$ ) zijn uitgedrukt;  $x$  is hierin betrokken op 100 molen der *oplossing*.

De vergelijking neemt dan den vorm aan:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \pi}\right)_T : \left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_\pi = -T \frac{\Delta V}{Q} \quad . . . . . (1)$$

Hierin is  $\Delta V$  de fiktieve volumeverandering per mol stof,  $Q$  de fiktieve oploswarmte, eveneens op die hoeveelheid stof betrokken.

2. De vergelijking, gegeven in § 7 onzer eerste mededeeling, neemt dan den vorm aan:

$$x = 21.590 - 0.8678 \times 10^{-2} \pi + 0.02615 \times 10^{-4} \pi^2 \quad . . (2)$$

die volgens de methode der kleinste quadraten uit de experimenteel gevonden waarden (Tabel I, kolom 5) onzer eerste mededeeling is berekend.

Uit (2) vindt men:

$$\frac{dx}{d\pi} = -0.8678 \times 10^{-2} + 0.0523 \times 10^{-4} \pi,$$

waaruit voor den drukcoëfficiënt der oplosbaarheid bij 1 atm. volgt:

<sup>1)</sup> Deze Verslagen 26, 134, 864 (1917).

$$\left(\frac{dx}{d\pi}\right)_{\pi=1} = -0.00867 \frac{\text{mol. } \%/}{\text{atm.}}$$

Hoewel bij een zoo gering aantal vergelijkingen groote waarde aan een daarmede berekende waarschijnlijke fout niet kan worden toegekend, hebben wij toch de waarschijnlijke fouten in de koëfficiënten van  $\pi$  en  $\pi^2$  berekend en met behulp daarvan die in het gezochte differentiaalquotient.

Men vindt dan:

$$\left(\frac{dx}{d\pi}\right)_{\pi=1} = -0.00867 \pm 0.00003 \frac{\text{mol. } \%/}{\text{atm.}}$$

3. Drukken wij bij de berekening der fiktieve volumeverandering (§ 16, tweede mededeeling) de concentratie eveneens in molekulairprocenten nit, dan hebben wij in de vergelijking:

$$\Delta V = V_{x_1} + (1-x_1) \left(\frac{dV_x}{dx}\right)_{x=x_1} - V_s \dots \dots \dots (3)$$

de numerische waarden der drie termen rechts van het gelijkteeken in te voeren, zooals die nit de proeven worden berekend.

Hierin is  $\Delta V$  de fiktieve volumeverandering per mol stof,  $V_{x_1}$  het molekulairvolume der oplossing van *m*-dinitrobenzol in aethylacetaat bij de verzadigingsconcentratie  $x_1$  ( $= 0.2158$ , zie Tabel I onzer eerste mededeeling), en  $V_s$  het molekulairvolume der vaste stof.

Ter berekening van de numerische waarden der drie termen, rechts van het gelijkteeken in verg. (3), rekenen wij allereerst de concen-

TABEL I.

Bepaling van het mol. volume van oplossingen van *m*-dinitrobenzol in aethylacetaat bij 30°.00 C. (en 1 atm.).

Oplos- sing	Konden- traties in molen vaste stof per mol oplossing	Specifiek volume der op- lossing gevonden	Moleku- laarge- wicht der oplossing	Molekulairvolume der oplossing		ber. — gev. × 10 <sup>3</sup>
				gevonden	berekend	
A	0.2850 <sup>4</sup>	0.93168	110.88 <sup>6</sup>	103.310	103.312	2
B	0.2521 <sup>1</sup>	0.94923	108.25 <sup>2</sup>	102.756	102.754	—2
C	0.2142 <sup>2</sup>	0.97068	105.22 <sup>1</sup>	102.136	102.134 <sup>5</sup>	—15
D	0.1968 <sup>4</sup>	0.98101 <sup>5</sup>	103.83 <sup>1</sup>	101.859	101.858 <sup>5</sup>	—0 <sup>5</sup>
E	0.1868 <sup>7</sup>	1.00807	100.38 <sup>5</sup>	101.195	101.197	+2
F	0	1.12493	88.08 <sup>4</sup>	99.088	—	—



traties van Tabel II onzer tweede mededeeling om in molekulair-procenten, de spec. volumina der oplossingen in molekulair-volumina; de resultaten dier berekening zijn in de hier voorgaande Tabel I samengevat.

De in kolom 6 vermelde, berekende waarden, zijn verkregen met behulp van de vergelijking:

$$V_x = 99\,088 + 12.416 x + 8.4237 x^2. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

die uit de resultaten der bepalingen met behulp der methode der kleinste quadraten is afgeleid.

Uit verg. (4) vinden wij voor  $V_{x_1}$  (door voor  $x$  de waarde 0.2158 te substitueeren):

$$V_{x_1} = 102.160.$$

Verder volgt uit (3):

$$\frac{dV_x}{dx} = 12.416 + 16.8474 x$$

zoodat

$$\left(\frac{dV_x}{dx}\right)_{x=x_1} = 16.052$$

terwijl

$$(1-x_1) \left(\frac{dV_x}{dx}\right)_{x=x_1} = 12.588.$$

Daar verder  $V_s = Mv_s$ , waarin  $M$  het molekulairgewicht van metadinitrobenzol (= 168.08) en  $v_s$  het spec. vol. der vaste stof bij 30°.00 C. is, en wij voor dit laatste (zie § 11 onzer tweede mededeeling) de waarde 0.63872 hebben gevonden, wordt:

$$V_s = 168.08 \times 0.63872 = 107.356.$$

Substitueeren wij nu de numerische waarden in (3), dan vinden wij:

$$\Delta V = 102\,160 + 12.588 - 107.356 = 7.392 \frac{cc.}{mol}.$$

Berekent men ook hierin de waarschijnlijke fout, dan vindt men ten slotte voor de fiktieve volumeverandering bij het oplossen:

$$\Delta V = 7.392 \pm 0.01^5 \frac{cc.}{mol}.$$

4. Wij zullen ons thans richten tot de

$$\text{Bepaling van } \left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_\pi.$$

De oplosbaarheidsbepalingen werden bij vijftien verschillende tem-

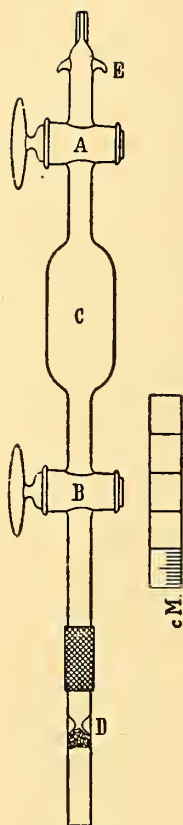


Fig. 1.

peraturen, telkens onder den dampdruk der verzadigde oplossing, uitgevoerd. Te dien einde werd de vaste stof (in overmaat) in kleine, niet geheel gevulde, ballonfleschjes met het oplosmiddel in een thermostaat geschud. De fleschjes waren met kurken gesloten. Het evenwicht werd van beide zijden af bereikt, terwijl de schudtijd een zeer verschillende was. De gebruikte thermometer was gecontroleerd met een standaardinstrument, geijkt door de Phys. Techn. Reichsanstalt te Charlottenburg-Berlin.

Na het schudden werd een deel der verzadigde oplossing opgezogen in een pipet van nevenstaanden vorm, (Fig. 1) nadat zij door het propje watten, dat zich beneden de insnoering bij *D* bevond, was gefiltreerd. Speciale proeven hadden geleerd, dat de hoeveelheid aethylacetaat, die bij het opzuigen in den vorm van damp aan de verzadigde oplossing wordt onttrokken, enkele tienden milligr. bedroeg, die in rekening werden gebracht.

Men weegt, na het sluiten der kranen *A* en *B*, de pipet met de verzadigde oplossing, nadat het gedeelte *D* is verwijderd en de buis onder *B* zorgvuldig met watten is gereinigd.

Alle wegingen werden op het ledig herleid. De gewichten waren gecontroleerd volgens de methode, door F. KOHL-RAUSCH<sup>1)</sup> beschreven.

Men opent de kranen *A* en *B* en doet de oplossing in een kolfje uitstroomen, spoelt de pipet met een weinig absoluten aether zorgvuldig uit en plaatst het kolfje onder een klok, in welke zich een bakje met sterk zwavelzuur bevindt. De lucht wordt zoover verwijderd, dat het verdampen zonder bepaald koken plaats vindt. Daar een speciaal onderzoek had geleerd, dat de laatste hoeveelheden aethylacetaat hardnekkig worden vastgehouden, wreef men na voorloopige droging (gedurende ongeveer 20 uren) de vaste stof fijn met behulp van een glazen staafje met afgeplat uiteinde, dat men in het kolfje liet staan. Men zet nu het drogen in een tweede klok voort, totdat konstant gewicht is bereikt. Nader onderzoek leerde, dat daarbij verlies van vaste stof geheel wordt voorkomen, door behalve zwavelzuur een schaal met de vaste stof zelf in deze tweede klok te plaatsen. Volgt men dezen weg, dan treedt zelfs na acht weken

<sup>1)</sup> Lehrbuch der praktischen Physik, Leipzig 1910, p. 62.

weegbare vermindering der vaste stof in het kolfje niet in, nadat de laatste sporen aethylacetaat zijn verdampt. De nauwkeurigheid der bepalingen bleek 0.03 % te bedragen. De aldus verkregen resultaten zijn in Tabel II samengevat.

5. Ter toelichting der Tabel diene het volgende: De aanduiding (+) achter het getal, dat den schudtijd in uren aangeeft, beteekent, dat men van eene oververzadigde oplossing is uitgegaan; (—) beteekent, dat het evenwicht van den kant der onverzadigde oplossing af is bereikt.

6. De gevonden waarden der oplosbaarheid als functie van de temperatuur kunnen worden voorgesteld door de uitdrukking:

$$\log x = 6.70820 + \frac{1966.18}{T} + 22.879 \log \frac{T}{1000} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Hierin stelt  $x$  het aantal molen vaste stof op 100 molen oplossing voor,  $T$  de absolute temperatuur, bij welke de bepalingen zijn uitgevoerd. In kolom 10 van Tabel II zijn de waarden van  $x$  opgenomen, volgens deze uitdrukking berekend, terwijl in kolom 11 de verschillen tusschen deze waarden en die, welke de proef heeft geleverd, zijn opgegeven. De overeenstemming is zeer bevredigend.

Voor verg. (5) kunnen wij ook schrijven:

$$l.x = 15.4461 + \frac{4527.3}{T} + 22.879 l. \frac{T}{1000} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

zoodat:

$$\frac{dl.x}{dT} = -\frac{4527.3}{T} + \frac{22.879}{T}$$

Voor  $t = 30^{\circ}.00$  C, dus  $T = 303.09$  vinden wij:

$$\frac{dl.x}{dT} = 0.026203.$$

Nu is bij  $30^{\circ}.00$  C. de concentratie (zie Tabel II, kolom 9) gelijk aan 21.59, dus:

$$\frac{dx}{dT} = \frac{xdl.x}{dT} = 21.59 \times 0.02620 = 0.5657 \frac{\text{mol. } \%}{\text{graad}}$$

7. Daar wij bij de afleiding van den drukcoëfficiënt der oplosbaarheid dezen hebben berekend met een vergelijking, in welke niet  $l.x$  maar  $x$  zelf was gegeven als functie van den druk, zullen wij in het volgende niet gebruik maken van de zooeven gevonden waarde van  $\frac{dx}{dT}$ , welke met behulp van eene vergelijking in  $l.x$  is berekend, maar, konsekvent blijvend, ook den temperatuurcoëfficiënt der oplosbaarheid afleiden met eene uitdrukking, in welke niet van

$l.x$  maar van  $x$  zelf is gebruik gemaakt. Daartoe voeren wij eerst de begrippen „middelbare” en „ware” temperatuurcoëfficiënt in. Wanneer wij de verzadigings-koncentratie bij de temperatuur  $t_1$ ,  $x_1$  en die bij  $t_2$ ,  $x_2$  noemen, dan is  $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$  de middelbare temperatuur-

coëfficiënt van de oplosbaarheid in het interval  $t_2 - t_1$ , terwijl  $\frac{dx}{dt}$  bij elke temperatuur  $t$  den waren temperatuurcoëfficiënt bepaalt.

Deze definitie is dus geheel in analogie met die voor de middelbare soortelijke warmte <sup>1)</sup> (resp. middelbare kompressibiliteit). Ook kan dan gemakkelijk een zelfde verband tusschen middelbaren en waren temperatuurcoëfficiënt worden afgeleid, zoodat, wanneer

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_{\text{midd.}} = a + bt + dt^2 \text{ gegeven is, hieruit}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\text{waar}} = a + 2bt + 3dt^2 \text{ wordt gevonden.}$$

Als temperatuur, van welke af wij den middelbaren temperatuurcoëfficiënt zullen bepalen, kunnen wij natuurlijk elke willekeurige kiezen. Op het eerste gezicht zou 30°.00 C. hier aangewezen schijnen, omdat in dat geval

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_{\text{midd.}} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\text{waar}}$$

voor 30°.00 C. zelf.

Bij toepassing van de methode der kleinste quadraten wordt echter de berekening veel eenvoudiger, wanneer men 17°.50 C. als punt kiest, van waaruit men den middelbaren temperatuurcoëfficiënt rekent, aangezien de temperaturen, bij welke  $x$  is gemeten, een rekenkundige reeks vormen met 17°.50 C. als middelsten term. Er moet echter wel rekening mede worden gehouden, dat, aannemende, dat de oplosbaarheidsbepalingen zelf alle even nauwkeurig zijn, de middelbare temperatuurcoëfficiënt een des te geringer fout zal vertoonen, naarmate het temperatuurinterval, waarop hij betrekking heeft, grooter is. Ter weerszijden van 17°.50 C. verhouden deze temperatuurverschillen zich als 1 : 2 : 3 . . . : 7, hetgeen dus ook de verhouding van de waarschijnlijke fouten der middelbare temperatuurcoëfficiënten is.

Er ontstaan dus, wanneer de middelbare temperatuurcoëfficiënt door een quadratische vergelijking in  $t$  wordt voorgesteld, veertien vergelijkingen van de gedaante:

<sup>1)</sup> Zie bv. O. SACKUR, Lehrbuch der Thermochemie und Thermodynamik, Berlin 1912, p. 17.

No. der proef	Temperatuur
1	2
2	2
3	2
4	2
8	2
5	1
6	1
7	1
9	2
10	2
11	2
12	2
13	3
14	3
15	3

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{30^{\circ},00} = 0.5653 \frac{\text{mol. } \%}{\text{grad}}.$$



TABEL II.  
Oplosbaarheid van *m*-dinitrobenzol in aethylacetaat tusschen 0° en 35° C.

No. der proef	Temp. graden Celsius	Schudduur (uren) + oververzadigd — onverzadigd	Gewicht in grammen			Koncentratie (gev.)			Konc. (ber.) molen vaste stof per 100 molen oplossing	ber. — gev.
			Oplossing	<i>m</i> -dinitrobenzol	Aethylacetaat	grammen vaste stof per 100 gr. oplosmiddel	grammen vaste stof per 100 gr. oplossing	molen vaste stof per 100 molen oplossing		
1	22.50	18 +	5.0640	1.4778	3.5862	41.20 <sup>3</sup>	29.18 <sup>2</sup>	17.76 <sup>0</sup>	17.77 <sup>3</sup>	+ 0.01 <sup>3</sup>
2	22.50	21 —	4.8475	1.4142	3.4333	41.19 <sup>1</sup>	29.17 <sup>4</sup>	17.75 <sup>5</sup>		+ 0.01 <sup>8</sup>
3	20.00	19 +	4.5565	1.2598	3.2967	38.21 <sup>5</sup>	27.64 <sup>8</sup>	16.68 <sup>5</sup>	16.67 <sup>6</sup>	— 0.00 <sup>9</sup>
4	20.00	24 —	4.8502	1.3398	3.5104	38.16 <sup>5</sup>	27.62 <sup>3</sup>	16.66 <sup>6</sup>		+ 0.01 <sup>0</sup>
8	20.00	16 —	4.7738	1.3201	3.4537	38.22 <sup>2</sup>	27.65 <sup>2</sup>	16.68 <sup>8</sup>		— 0.01 <sup>2</sup>
5	17.50	3 +	4.5359	1.1877	3.3482	35.47 <sup>5</sup>	26.18 <sup>6</sup>	15.67 <sup>6</sup>	15.65 <sup>7</sup>	— 0.01 <sup>9</sup>
6	17.50	24 —	4.5516	1.1909	3.3607	35.43 <sup>6</sup>	26.16 <sup>4</sup>	15.66 <sup>2</sup>		— 0.00 <sup>5</sup>
7	17.50	6 +	4.7197	1.2355	3.4842	35.46 <sup>0</sup>	26.17 <sup>8</sup>	15.67 <sup>0</sup>		— 0.01 <sup>3</sup>
9	25.00	3 —	5.1711	1.5957	3.5754	44.62 <sup>9</sup>	30.85 <sup>8</sup>	18.95 <sup>2</sup>	18.95 <sup>2</sup>	— 0.00 <sup>3</sup>
10	25.00	4 +	5.0515	1.5578	3.4937	44.58 <sup>7</sup>	30.83 <sup>8</sup>	18.94 <sup>1</sup>		+ 0.01 <sup>1</sup>
11	27.50	3 +	5.1452	1.6773	3.4679	48.36 <sup>5</sup>	32.59 <sup>9</sup>	20.22 <sup>0</sup>	20.22 <sup>0</sup>	0.00
12	27.50	5 —	5.4596	1.7807	3.6789	48.40 <sup>3</sup>	32.61 <sup>7</sup>	23.20 <sup>4</sup>		— 0.01 <sup>4</sup>
13	30.00	5 +	5.2259	1.8003	3.4256	52.55 <sup>4</sup>	34.44 <sup>9</sup>	21.59 <sup>4</sup>	21.58 <sup>1</sup>	— 0.01 <sup>0</sup>
14	30.00	18 —	5.0676	1.7449	3.3227	52.51 <sup>5</sup>	34.43 <sup>2</sup>	21.58 <sup>2</sup>		+ 0.00 <sup>2</sup>
15	32.50	4 +	5.1133	1.8615	3.2518	57.24 <sup>6</sup>	36.40 <sup>6</sup>	23.07 <sup>7</sup>	23.05 <sup>1</sup>	— 0.02 <sup>6</sup>
16	32.50	18 —	4.9959	1.8173	3.1786	57.17 <sup>3</sup>	36.37 <sup>6</sup>	23.05 <sup>5</sup>		— 0.00 <sup>4</sup>
19	32.50	3 —	4.2258	1.5382	2.6876	57.23 <sup>4</sup>	36.40 <sup>1</sup>	23.07 <sup>3</sup>		— 0.02 <sup>2</sup>
17	35.00	6 —	4.4916	1.7249	2.7667	62.34 <sup>6</sup>	38.40 <sup>4</sup>	24.62 <sup>7</sup>	24.62 <sup>8</sup>	+ 0.00 <sup>1</sup>
18	35.00	14 +	4.5965	1.7647	2.8318	62.31 <sup>4</sup>	38.39 <sup>1</sup>	24.61 <sup>7</sup>		+ 0.01 <sup>1</sup>
20	15.00	4½ +	4.5538	1.1282	3.4256	32.93 <sup>5</sup>	24.77 <sup>5</sup>	14.71 <sup>9</sup>	14.70 <sup>8</sup>	— 0.01 <sup>1</sup>
21	15.00	3 —	4.7135	1.1685	3.5450	32.96 <sup>2</sup>	24.79 <sup>0</sup>	14.73 <sup>0</sup>		— 0.02 <sup>2</sup>
26	15.00	18 —	3.9935	0.9902	3.0033	32.97 <sup>0</sup>	24.79 <sup>5</sup>	14.73 <sup>3</sup>		— 0.02 <sup>5</sup>
22	12.50	4 —	4.6488	1.0909	3.5579	30.66 <sup>2</sup>	23.46 <sup>7</sup>	13.84 <sup>4</sup>	13.82 <sup>6</sup>	— 0.01 <sup>8</sup>
23	12.50	4 +	4.4702	1.0490	3.4212	30.66 <sup>2</sup>	23.46 <sup>7</sup>	13.84 <sup>4</sup>		— 0.01 <sup>8</sup>
24	10.00	4 +	4.8383	1.0741	3.7642	28.53 <sup>3</sup>	22.19 <sup>9</sup>	13.00 <sup>8</sup>	13.00 <sup>6</sup>	— 0.00 <sup>2</sup>
25	10.00	4½ —	4.9559	1.1015	3.8544	28.57 <sup>9</sup>	22.22 <sup>6</sup>	13.02 <sup>5</sup>		— 0.01 <sup>9</sup>
27	7.50	5 —	4.2855	0.9012	3.3843	26.63 <sup>1</sup>	21.03 <sup>0</sup>	12.24 <sup>7</sup>	12.24 <sup>3</sup>	— 0.00 <sup>4</sup>
28	7.50	5 +	5.1510	1.0828	4.0682	26.61 <sup>6</sup>	21.02 <sup>1</sup>	12.24 <sup>1</sup>		+ 0.00 <sup>2</sup>
29	5.00	4 +	4.2829	0.8546	3.4283	24.93 <sup>0</sup>	19.95 <sup>5</sup>	11.55 <sup>5</sup>	11.53 <sup>3</sup>	— 0.02 <sup>2</sup>
30	5.00	4½ —	5.0110	0.9988	4.0122	24.89 <sup>3</sup>	19.93 <sup>1</sup>	11.54 <sup>0</sup>		— 0.00 <sup>7</sup>
31	2.48	3 +	5.0904	0.9637	4.1267	23.35 <sup>2</sup>	18.93 <sup>1</sup>	10.90 <sup>4</sup>	10.87 <sup>1</sup>	— 0.03 <sup>3</sup>
32	2.48	4½ —	5.1732	0.9795	4.1937	23.35 <sup>6</sup>	18.93 <sup>4</sup>	10.90 <sup>5</sup>		— 0.03 <sup>4</sup>
33	0.02	4 +	4.7425	0.8485	3.8940	21.79 <sup>0</sup>	17.89 <sup>2</sup>	10.24 <sup>9</sup>	10.26 <sup>3</sup>	+ 0.01 <sup>4</sup>
34	0.02	4½ +	5.5216	0.9885	4.5331	21.80 <sup>7</sup>	17.90 <sup>3</sup>	10.25 <sup>6</sup>		+ 0.00 <sup>7</sup>





$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_{\text{midd.}} = a + bt + dt^2$$

met regelmatig stijgend gewicht.

De bepalingen bij 2°.48 C. en bij 0°.02 C. zijn op 2°.50 C. en 0°.00 C. herleid, aler ze voor de berekening zijn gebruikt. Verder is voor de eenvoudigheid van de berekening het interval van 2°.50 C als eenheid genomen door te stellen:

$$t' = \frac{t}{2.5},$$

waaraan de vergelijking haar afwijkende gedaante heeft te danken.

De middelbare temperatuurcoëfficiënt, uitgedrukt in molekuulprocenten per graad, kan nu door de volgende vergelijking worden voorgesteld:

$$2.5 \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_{\text{midd.}} = 0.9787 + 0.03607 \left(\frac{t}{2.5}\right) + 0.0009843 \left(\frac{t}{2.5}\right)^2.$$

De waarden van den middelbaren temperatuurcoëfficiënt, met behulp van deze vergelijking berekend, en de daaruit afgeleide waarden der oplosbaarheid vindt men in Tabel III vereenigd.

Ook de op deze wijze *berekende* oplosbaarheden komen dus goed overeen met de *gevonden* waarden. Feitelijk komt deze methode hierop neer, dat voor de oplosbaarheid zelf een vergelijking is opgesteld van den derden graad naar de temperatuur, dus:

$$x = C + at + bt^2 + dt^3,$$

want dan is:

$$\frac{dx}{dt} = a + 2bt + 3dt^2,$$

en hieruit volgt:

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_{\text{midd.}} = a + bt + dt^2.$$

De integratiekonstante  $C$  wordt gevonden uit de gegeven oplosbaarheid bij een bekende temperatuur, dus bij de berekening hier, uit die bij 17°.50 C.

Uit de numerische vergelijking volgt nu voor den waren temperatuurcoëfficiënt:

$$2.5 \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\text{waar}} = 0.9787 + 0.07214 \left(\frac{t}{2.5}\right) + 0.002953 \left(\frac{t}{2.5}\right)^2$$

waaruit voor 30°.00 C. volgt:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{30^\circ.00} = 0.5653 \frac{\text{mol. } ^\circ/\text{g.}}{\text{graad}}.$$

Keut men allen vergelijkingen gelijk gewicht toe, dan wordt:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{30^{\circ}.00} = 0.5656,$$

en wanneer  $30^{\circ}.00$  C. als uitgangspunt wordt genomen:

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_{\text{midd.}} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\text{waar}} = 0.5669.$$

TABEL III.

Tempe- ratuur in C°.	Koncentratie <i>x</i> in molen vaste stof per 100 molen op- lossing	Middelbare temperatuur- koefficiënt tusschen 17°.50 C. en t°. C. ( $\times 2\frac{1}{2}$ )		Konc. <i>x</i> ber.	ber. — gev. in 1/100 %
		gev.	ber.		
35.00	24.622	+ 1.279	+ 1.279	24.625	+ 0.3
32.50	23.068	+ 1.233	+ 1.230	23.053	— 1.5
30.00	21.588	+ 1.184	+ 1.184	21.587	— 0.1
27.50	20.227	+ 1.139	+ 1.139	20.224	— 0.3
25.00	18.948	+ 1.093	+ 1.096	18.956	+ 0.8
22.50	17.757	+ 1.044	+ 1.055	17.778	+ 2.1
20.00	16.680	+ 1.011	+ 1.016	16.685	+ 0.5
17.50	15.669	—	—	—	—
15.00	14.727	— 0.942	— 0.944	14.725	— 0.2
12.50	13.844	— 0.912	— 0.910	13.848	+ 0.4
10.00	13.016	— 0.884	— 0.879	13.031	+ 1.5
7.50	12.244	— 0.856	— 0.850	12.265	+ 2.1
5.00	11.547	— 0.824	— 0.823	11.554	+ 0.7
2.50	10.909	— 0.793	— 0.798	10.883	— 2.6
0.00	10.248	— 0.774	— 0.774	10.248	+ 0.0

Wanneer deze waarschijnlijke fouten in de koefficiënten *a*, *b* en *d* uit de vergelijking  $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\text{waar}} = a + bt + dt^2$  worden berekend, is het ook mogelijk een indruk te krijgen van de nauwkeurigheid van het voor  $30^{\circ}.00$  C. afgeleide cijfer. Hiervoor wordt dan in het eerstvermelde geval gevonden  $\pm 0.0007$ , zoodat voor den temperatuurkoefficiënt bij  $30^{\circ}.00$  C. ten slotte is genomen:

$$0.5653 \pm 0.0007$$

uitgedrukt in molen vaste stof per 100 molen oplossing per graad.

Blijkbaar is het verschil tusschen den langs dezen weg gevonden temperatuurcoëfficiënt en den op blz. 1559 afgeleiden, uiterst gering.

### *Bepaling van $Q$ .*

8. Wij richten ons thans tot de bepaling der fiktieve oploswarnte  $Q$ , d. i. van het warmte-effekt, dat het oplossen van 1 mol (*m*-dinitrobenzol) in een onbegrensde hoeveelheid der bij de temperatuur  $T(303^{\circ}.09)$  verzadigde oplossing (van *m*-dinitrobenzol in aethylacetaat) begeleidt. Zooals uit de definitie blijkt, is het niet mogelijk deze grootheid langs experimenteelen weg direkt te bepalen, uitgezonderd in zeer bijzondere gevallen. Is nl. de verdunningswarmte eener oplossing voor elke concentratie nul, dan is de oploswarmte onafhankelijk van de concentratie der oplossing, waarin zij wordt bepaald en dus gelijk aan de fiktieve; ook voor het geval de vaste stof zeer weinig oplosbaar is, is praktisch de gemeten oploswarmte in zuiver oplosmiddel gelijk aan de fiktieve.

Wij kunnen daarentegen wel rechtstreeks de zg. *intermediaire* oploswarmte<sup>1)</sup> meten; d.i. het warmte-effekt, dat optreedt, wanneer een hoeveelheid vaste stof in een oplossing van willekeurige concentratie ( $x_n$ ), die tengevolge daarvan een hoogere concentratie bereikt ( $x_m$ ), oplost en wel, berekend per mol (gram) vaste stof.

In het geval, waarin wij met gemakkelijk oplosbare stoffen te maken hebben, moeten wij dus, ter bepaling van de fiktieve oploswarmte tot andere middelen onze toevlucht nemen. BAKHUIS ROOZEBOOM<sup>2)</sup> heeft het eerst den weg aangegeven, langs welken men tot de kennis dezer warmtehoeveelheid kan geraken, nl. door dit effect opgebouwd te denken uit twee andere, die afzonderlijk kunnen worden bepaald. Beide termen kunnen echter evenmin direkt uit eene meting worden gevonden, maar moeten uit verschillende oplosresp. verdunningswarmten worden berekend. In de theoretische

<sup>1)</sup> CH. M. VAN DEVENTER en H. J. VAN DE STADT, Zeitschr. f. physik. Chemie 9, 43 (1892), zie vooral p. 45. Zij wijzen erop, dat feitelijk in hunne definitie (en hierin wijkt onze definitie van de hunne af) intermediaire oploswarmten als differentiaalquotiënten zijn te beschouwen, dus differentieele oploswarmten zijn; m.a.w., dat men zich moet voorstellen, dat een mol vaste stof in een oneindig groote hoeveelheid der eigen oplossing van zekere concentratie in oplossing treedt.

Een speciaal geval van deze differentieele oploswarmten is de fiktieve, in welk geval de concentratie der oplossing de verzadigingsconcentratie is.

<sup>2)</sup> Rec. des Trav. Chim. des Pays-Bas 8, 1 (1889). Zie vooral p. 121 etc.

afleidingen<sup>1)</sup> heeft men dan ook steeds betrekkingen opgesteld tusschen de fiktieve oploswarmte en de intermediaire oplos- en verdunningswarmten. Om op deze wijze dus tot de kennis van de waarde eener fiktieve oploswarmte te geraken, is men of verplicht vele metingen van warmte-effekten zelf te verrichten, of, zooals meestal geschiedt, waarnemingen van anderen te hulp te roepen, waarbij die van THOMSEN EN BERTHELOT vooral dikwijls dienst moeten doen. Onderzoekingen van de laatste jaren hebben echter getoond, dat schijnbare tegenstrijdigheden, bij de toetsing van betrekkingen, veelal verdwijnen, wanneer de calorische cijfers, ontleend aan THOMSEN of andere oudere bronnen, door de resultaten van nieuwere met moderne hulpmiddelen uitgevoerde metingen, worden vervangen.

De moeilijkheid zit voornamelijk hierin, dat men oploswarmten van zouten gewoonlijk alleen kan bepalen in sterk verdunde oplossingen. Wanneer het mogelijk is, oploswarmten ook in vrij gekoncentreerde oplossingen te meten, wordt het probleem veel eenvoudiger, doordien de fiktieve oploswarmte dan door geringe extrapolatie van een reeks waarnemingen, die zich over een groot concentratie-interval uitstrekken, kan worden verkregen.

*Waar het in het door ons bestudeerde geval mogelijk is gebleken, oploswarmten in bijna verzadigde oplossingen te bepalen, zullen wij ons hier er toe beperken een geschikte interpolatieformule voor de oploswarmte af te leiden, waardoor het mogelijk zal zijn uit metingen van intermediaire oploswarmten, de fiktieve oploswarmte af te leiden.*

9. Om tot een zoodanige betrekking te geraken gaan wij als volgt te werk:

Wij stellen ons, hierin BAKHUIS ROOZEBOOM<sup>2)</sup> volgend, het warmte-effekt, dat het oplossen van een vaste stof ( $B$ ) in een oplosmiddel ( $A$ ) begeleidt, voor, gesplitst in twee deelen, en wel in de smeltwarmte, die bij de temperatuur van het experiment zou optreden, indien de vaste stof in haren vloeibaren, onderkoelden vorm werd overgevoerd, en in de mengwarmte van deze onderkoelde vloeistof met het oplosmiddel.

<sup>1)</sup> E. v. STACKELBERG, Zeitschr. f. physik. Chemie **26**, 533 (1898).

J. J. VAN LAAR, Lehrbuch der Math. Chemie, Leipzig, 1901, p. 86.

W. JAEGER, Die Normalelemente, Halle, 1902, p. 22.

R. WEGSCHEIDER, Sitzungsber. der Kaiserl. Akad. der Wissenschaften Wien; Math.-Naturw. Klasse **114**, Abt. IIb, Febr. 1905, p. 215 Monatshefte f. Chemie **26**, 647 (1905).

<sup>2)</sup> Archiv. Néerl. (2) **6**, 430 (1901).

In zeer bijzondere gevallen zal deze mengwarmte gelijk nul zijn voor elke mengverhouding, maar in den regel kan het verloop van hare waarde, als funktie van de concentratie, door een kurve worden voorgesteld, welker vorm geheel willekeurig is; voor  $x=0$ , zoomede voor  $x=1$ , dus voor zuiver  $A$  of  $B$ , vervalt natuurlijk het begrip „meng”warmte, zoodat de kromme in deze twee punten van de concentratie-as uitgaat.

Wij kunnen deze mengwarmte, bij de afleiding der vergelijking voor de fiktieve oploswarmte, algemeen voorstellen door:

$$Q_x = f(x),$$

maar dan moeten wij toch, teneinde de vergelijking op de experimentele resultaten te kunnen toepassen, deze funktie nader bepalen, en kunnen dit dus evengoed vóór de afleiding doen.

De eenvoudigste onderstelling, die wij aangaande deze funktie kunnen maken, is wel, dat zij een maximum vertoont voor de concentratie  $x = 1/2$  en verder tusschen  $x = 1/2$  en  $x = 1$  (resp.  $x = 0$ ) geleidelijk afneemt en ten slotte voor  $x = 1$  en  $x = 0$  de waarde nul aanneemt.

De vergelijking

$$Q_x = f(x) = Cx(1-x),$$

welke wordt gevonden uit de voorwaarden:

$$f(x) = 0 \text{ voor } x = 0 \text{ en voor } x = 1,$$

$$f(x) = \frac{C}{4} \text{ voor } x = 1/2, \text{ voldoet hieraan.}$$

Ook uit de theorie van VAN DER WAAALS voor binaire mengsels kan men een uitdrukking afleiden, die in het eenvoudigste geval de mengwarmte geeft in den vorm:

$$Q_x = \alpha x(1-x),$$

waarin  $\alpha$  een functie is van de konstanten van VAN DER WAAALS der beide componenten.

10. Wij moeten thans de vraag beantwoorden: hoe groot is de oploswarmte, per mol stof, wanneer door het oplossen de concentratie der oplossing van  $x_n$  tot  $x_m$  stijgt, de smeltwarmte (bij de temperatuur der proef) gelijk is aan  $Q_s$  en voor de mengwarmte der vloeibare componenten eene vergelijking geldt van de gedaante:

$$Q_x = Cx(1-x),$$

waarin  $Q_x$  de mengwarmte voorstelt per mol oplossing, gevormd door mengen van  $x$  mol onderkoeld  $B$  en  $(1-x)$  mol  $A$ .

Zien wij eerst af van de smeltwarmte (genomen bij de temperatuur van het experiment) van de hoeveelheid stof, die in oplossing gaat, dan kunnen wij het resterende warmte-effekt bij dit oplossen ook beschouwen als het verschil der warmte-effecten, die optreden, wanneer de begin- en de eindoplossing, elk voor zich, door menging der vloeibare componenten worden bereid.

Bij het mengen van  $x_n$  mol onderkoeld  $B$  en  $(1-x_n)$  mol  $A$  (waarbij 1 mol oplossing wordt gevormd) treedt een warmte-effekt op van de grootte:

$$Q_{x_n} = Cx_n(1-x_n) \dots \dots \dots (1)$$

Wordt deze oplossing, door opnemen van  $p$  mol  $B$ , op de concentratie  $x_m$  gebracht, dan kan de daarvoor noodige hoeveelheid  $B$  berekend worden uit:

$$x_m = \frac{x_n + p}{1 + p},$$

zoodat:

$$p = \frac{x_m - x_n}{1 - x_m} \text{ mol.}$$

De hoeveelheid van de eindoplossing, concentratie  $x_m$ , die aldus ontstaat, is gelijk aan:

$$1 + p = \frac{1 - x_n}{1 - x_m} \text{ mol.}$$

Bij direkte menging van  $A$  en onderkoeld  $B$  tot een oplossing van de concentratie  $x_m$ , verkrijgt men per mol:

$$Q_{x_m} = Cx_m(1-x_m),$$

dus voor  $(1+p)$  mol:

$$C \frac{1-x_n}{1-x_m} x_m(1-x_m) = Cx_m(1-x_n) \dots \dots \dots (2)$$

Het verschil van (2) en (1) is het gezochte warmte-effekt:

$$Cx_m(1-x_n) - Cx_n(1-x_n) = C(x_m - x_n)(1-x_n).$$

Hierbij komt nu nog de smeltwarmte voor  $p$  mol  $B$ :

$$\frac{x_m - x_n}{1 - x_m} Q_s,$$

zoodat het totale warmte-effekt, betrokken op  $p$  mol stof, bedraagt:

$$\frac{x_m - x_n}{1 - x_m} Q_s + C(x_m - x_n)(1-x_n).$$

Per mol stof wordt dit dus:

$$Q_i = Q_s + C(1-x_m)(1-x_n) \dots \dots \dots (3)$$

De gemeten intermediaire oploswarmten ( $Q_i$ ) zullen dus alle door een dergelijken vorm kunnen worden voorgesteld, en men zal derhalve omgekeerd uit die metingen de waarden van  $Q_s$  en  $C$  kunnen bepalen.

Gezocht wordt echter de fiktieve oploswarmte.

Door een redeneering, geheel overeenkomende met die, welke geleid heeft tot het opstellen van een betrekking voor de fiktieve volumeverandering, kunnen wij gemakkelijk de vergelijking:

$$Q_f = Q_s + Q_{x_1} + (1 - x_1) \left( \frac{dQ}{dx} \right)_{x=x_1},$$

afleiden, waarin  $Q_f$  de fiktieve oploswarmte, en  $x_1$  de verzadigings-koncentratie voorstelt.

Wordt nu  $Q_x$  weer voorgesteld door de betrekking:

$$Q_x = Cx(1 - x),$$

dan is

$$\frac{dQ}{dx} = C(1 - 2x),$$

en dus

$$Q_f = Q_s + Cx_1(1 - x_1) + C(1 - x_1)(1 - 2x_1)$$

of

$$Q_f = Q_s + C(1 - x_1)^2 \dots \dots \dots (4)$$

Wij hadden dit resultaat ook direkt uit de vergelijking (3) kunnen vinden, door voor  $x_n$  de verzadigingskoncentratie  $x_1$ , en voor  $x_m$  de waarde  $x_1 + dx_1$  in te voeren, in overeenstemming met de definitie van het begrip fiktieve oploswarmte.

Zijn dus nit een aantal experimenteele bepalingen der intermediaire oploswarmten de waarde van  $Q_s$  en  $C$  door berekening gevonden, dan kan de waarde der fiktieve oploswarmte met behulp van vergelijking (4) worden bepaald.

Bij de later te bespreken experimenteele meting is het verschil tusschen  $x_n$  en  $x_m$  (1 à 2%) zóó gering, dat voor (3) mag worden geschreven:

$$Q_i = Q_s + C \left( 1 - \frac{x_m + x_n}{2} \right)^2 \dots \dots \dots (5)$$

De afwijking tusschen:

$$\left( 1 - \frac{x_m + x_n}{2} \right)^2 \text{ en } (1 - x_m)(1 - x_n)$$

bedraagt bij de, in ons onderzoek voorkomende concentraties, ten hoogste  $1/2$  ‰.

11. Wat nu de experimenteele bepaling der intermediaire oplos-

warmten in oplossingen van verschillende concentratie betreft, hiëromtrent moge in het kort het volgende worden meegedeeld: De algemeene eischen, die aan de calorische metingen in verband met het gekozen systeem behoorden te worden gesteld, hebben ons geleid tot het nitwerken eener elektrische methode, die in beginsel hierop neerkomt, dat de (negatieve) oploswarmte door toevoeren eener nauwkeurig gemeten hoeveelheid elektrische energie tijdens het oplossingsproces wordt gekompenseerd. Ware die kompensatie ideaal, dan zou een in de oplossing gedompelde thermometer gedurende de proef zijn stand niet veranderen, begin- en eindtemperatuur zouden volkomen dezelfde en de korrekties voor straling zouden nul zijn, indien de calorimeter, in welken de oplossing zich bevindt, vóór de proef zijn temperatuurevenwicht met de omgeving hadde bereikt. Kennis van de waterwaarde van den calorimeter met inhoud zou overbodig zijn.

Intusschen blijkt, dat het bij de praktische uitvoering van dit beginsel eenvoudiger is, door regeling van de E. K., die den energietoevoer (bij gegeven weerstand van een metalen spiraal, welke zich in de oplossing bevindt) bepaalt, de temperatuurverandering tijdens het oplossen binnen zekere, zeer nauwe, grenzen te houden, en er alleen voor te zorgen, dat begin- en eindtemperatuur van den calorimeter ten naasten bij gelijk worden.

Aldus uitgevoerd, biedt deze methode de volgende, zeer belangrijke voordeelen:

1°. De oploswarmte wordt bepaald bij de temperatuur zelf, bij welke de kennis ervan wordt gezocht, niet over een temperatuurtrajekt.

2°. De waterwaarde van het geheel behoeft slechts bij benadering bekend te zijn; men moet haar kennen, teneinde bij niet volledige kompensatie der negatieve oploswarmte een korrektie voor het dan intredend temperatuurverschil te kunnen aanbrengen. Ook bij de berekening van de korrektie voor straling moet zij dienst doen.

3°. Ten gevolge van de geringe afwijking, die de temperatuur van den calorimeter, tijdens het oplossen der vaste stof, van de aanvangstemperatuur onderging, bij welke laatste de calorimeter in stralingsevenwicht met zijne omgeving was gekomen, was de aan te brengen stralings-korrektie zeer gering. Bovendien droegen wij er zorg voor, dat de temperatuur van den calorimeter gedurende het experiment zich ongeveer even lang en even veel onder als boven de aanvangstemperatuur bevond.

4°. De bepaling van de waterwaarde, welker kennis, gelijk reeds boven werd opgemerkt, bij deze methode een zeer ondergeschikte rol speelt, kan onmiddellijk op die van de oploswarmte volgen.



5°. Verandering van de soortelijke warmte der oplossing tijdens de proef, tengevolge van de verandering der concentratie door het oplossingsproces, was niet van invloed op het resultaat, aangezien warmtehoeveelheden rechtstreeks met elkaar worden vergeleken, en niet, zooals bij de gebruikelijke wijze van werken, nit een temperatuurverschil door vermenigvuldigen met een waterwaarde moesten worden berekend.

6°. Ten slotte is het, gebruik makende van deze methode, mogelijk, dichter bij de verzadigingsconcentratie nog eene bepaling uit te voeren, dan wanneer men eene wijze van werken volgt, bij welke een temperatuurverlaging bij het oplossen wordt toegelaten. In het laatstgenoemde geval toch, is bij die lagere temperatuur de verzadigingsconcentratie geringer dan bij 30° C., en zou de bij de proef bereikte eindconcentratie de verzadigingsconcentratie bij die lagere temperatuur dicht kunnen naderen, eventueel overschrijden, waardoor de proef te lang zou duren, e. q. geheel zou mislukken, aangezien de vaste stof niet meer in oplossing zou kunnen treden.

12. Nopens de inrichting van den gebruikten calorimeter (Plaat 3) worde hier in 't kort het volgende meegedeeld <sup>1)</sup>: Het roodkoperen calorimetervat *C* van  $\pm 600$  c.c. inhoud, staat in een dubbelwandigen, roodkoperen vakuuncylinder *GG*, op welks bodem een houten schijf *A* ligt. Met behulp van de glazen pootjes *P*<sub>1</sub> *P*<sub>1</sub>, die over tuben schuiven, welke aan den calorimeter zijn gesoldeerd, kan deze laatste onwrikbaar op de schijf worden opgesteld. De bodem wordt, op de plaats, waar het kolfje *M* staat, ondersteund door de vertikale glazen ruit *R*.

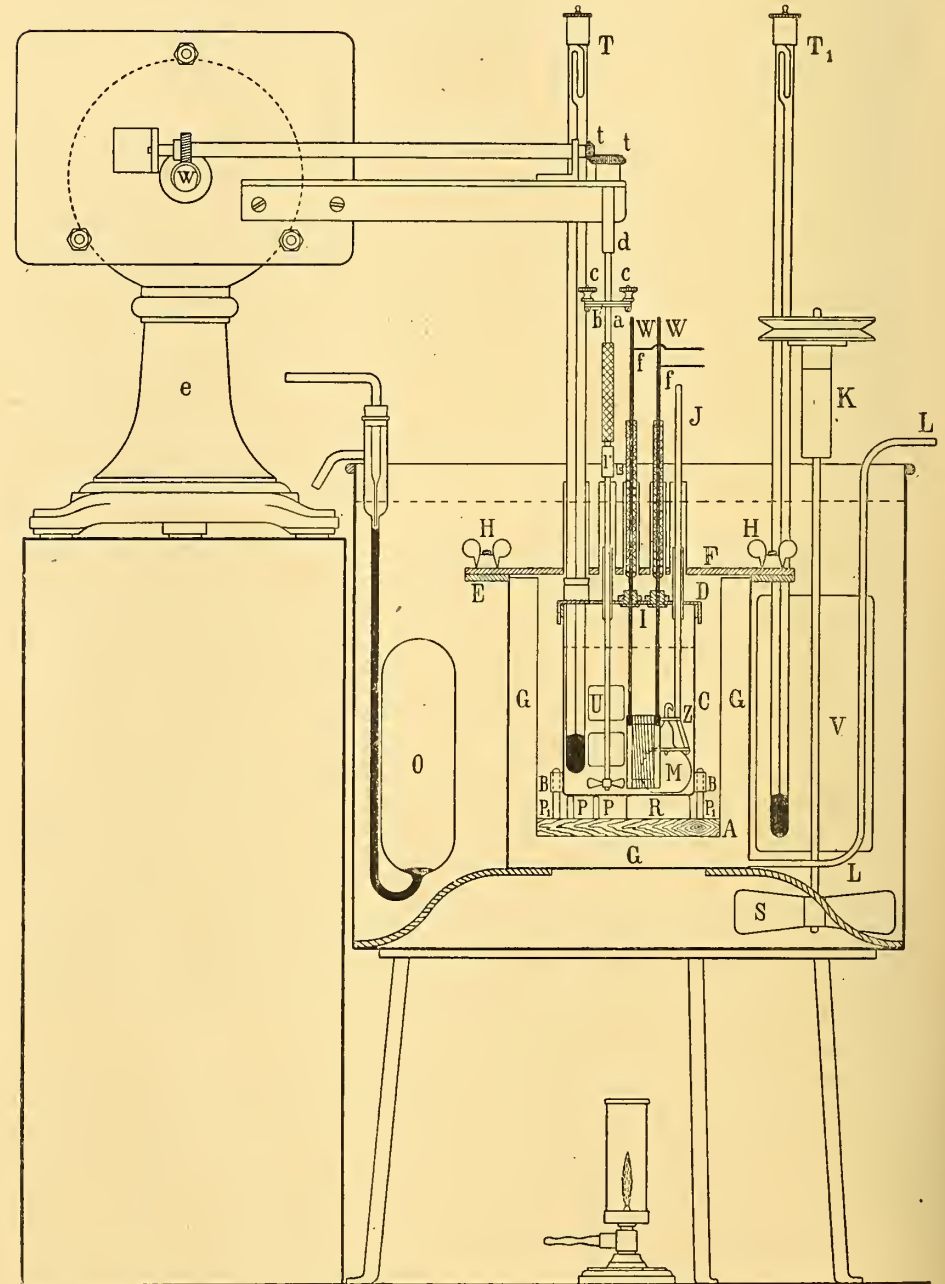
De deksel *D* van den calorimeter, die daarop met een bajonetsluiting kan worden bevestigd, bevat vijf doorboringen, die den thermometer *T* volgens BECKMANN (in  $\frac{1}{100}$  verdeeld), de draadleidingen *WW* en de koperen staaf *J* doorlaten. De draden *WW* loopen door een ivoren isolatie in den deksel naar de verwarmingsspiraal, een manganinedraad van 47.81  $\Omega$  weerstand, die op een beenen raampje is gewonden. *M* is een dunwandig, glazen kolfje, waarin zich de vaste stof bevindt, die in oplossing moet worden gebraecht. Het kolfje wordt na het vullen dichtgesmolten en hangt aan de staaf *J*, gesteund door twee ringen, waarvan er een eenige punten heeft, die het verbrijzelen van 't kolfje vergemakkelijken, wanneer men op de staaf *J* met een hamer een liechten tik geeft.

De vakuum-cylinder *GG* wordt afgesloten met een zinken plaat, die op een gummirand rust. Met behulp der moeren *H* wordt de zinken plaat stevig op den gummirand geperst, zoodat water uit den thermostaat, die *GG* omgeeft, niet kan binnendringen. Met behulp van een grooten toluol-regulator en de roerinrichting *KV* wordt de thermostaat op konstante temperatuur gehouden, hetgeen wordt vergemakkelijkt, door dezen met een plaat etherniet van boven af te dekken en met een wollen deken te omgeven. De temperatuur wordt met behulp van den thermometer *T*<sub>1</sub> volgens BECKMANN (in  $\frac{1}{100}$  verdeeld) gecontroleerd.

<sup>1)</sup> Zie voor de uitvoerige beschrijving: A. L. TH. MOESVELD, Toetsing der Wet van BRAUN, Dissertatie Utrecht 1918.

De roerinrichting *U* wordt in beweging gebracht door den elektromotor *e*, en heeft een roersnelheid ( $\pm 110$  toeren per minuut), die tijdens de geheele proef binnen 1 %

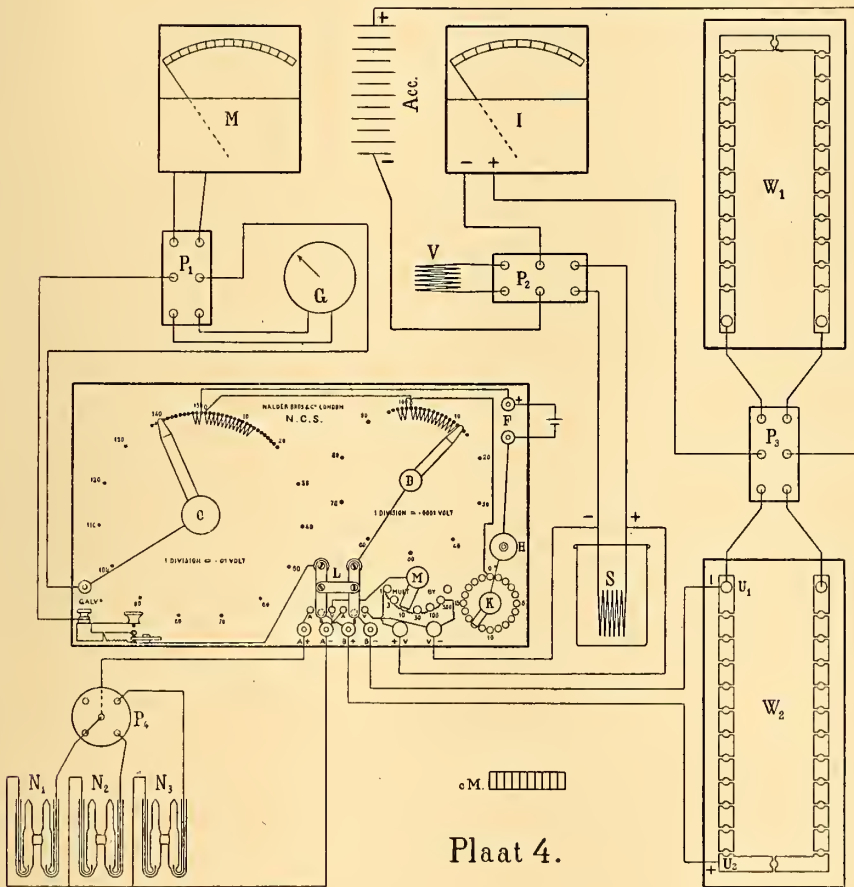
Plaat 3.



konstant was. De overbrenging der beweging van de as *d* op *U* geschiedde door tusschenschakeling van een dikwandige caoutchouc-buis. Ter bepaling van de hoeveelheid elektrische energie, die tijdens het oplossen der vaste stof, of ter

vaststelling van de waterwaarde van den calorimeter met inhoud werd toegevoegd, mat men telkens het potentiaalverschil, dat aan de knoppen  $f'$  (Plaat 3) heerschte, benevens voor en na elke proef den weerstand der spiraal in den calorimeter.

Plaat 4 geeft een beeld van de schakeling der daarbij gebruikte instrumenten. Is er een oplossing van bekende concentratie in den calorimeter gebracht, be-



Plaat 4.

nevens het kolfje  $M$  met een bekende hoeveelheid vaste stof, dan wacht men het temperatureevenwicht in den calorimeter af, en verbrijzelt het kolfje door een lichten tik op de stang  $J$ . De stroom van de accumulatorbatterij  $Acc.$  is te voren door omleggen der wip  $P_2$  door den manganedraad  $V$  geleid, welks weerstand gelijk is aan dien der spiraal  $S$  in den calorimeter. De stroom der batterij is daardoor konstant geworden, wanneer men hem later door  $S$  leidt.

Men legt nu  $P_2$  om, zoodat de stroom door  $S$  gaat, tengevolge waarvan de negatieve oploswarmte gedeeltelijk wordt gecompenseerd. De sterkte van den stroom regelt men te voren door trekken van geschikte weerstanden uit de weerstandsbank  $W_1$  (of  $W_2$ ), die door omleggen der wip  $P_3$  beurtelings in den stroom der accumulatorbatterij kunnen worden geschakeld. Terwijl die stroom gedurende een nauwkeurig bepaalden tijd (gemeten met behulp van een stopwatch, die  $\frac{1}{5}$  sekunden aangeeft) door den calorimeter gaat, bepaalt men zijne  $E. K.$  Dit geschiedt met

behulp eener „potentiometer-box” van NALDER Bros. te Londen, welke inrichting berust op de kompensatie-methode van POGGENDORFF. Zij was door ons gecontroleerd met behulp van weerstanden, die door de Phys. Techn. Reichsanstalt waren geijkt.

Bij  $F$  is een werkakkumulator ingeschakeld, welks E.K. van tijd tot tijd gemeten wordt met behulp van twee Weston-normaalementen  $N_1N_2$  met vaste fase, die in een thermostaat op  $25^{\circ}.0$  C. worden gehouden. De E.K. dezer elementen kan ook worden vergeleken met die van een CLARK-normaalement met vaste fase, dat zich in denzelfden thermostaat bevindt.  $G$  is de galvanometer (systeem DEPRED'ARSONVAL, trilvrij opgehangen volgens de methode van JULIUS) die als meet-instrument in de schakeling van POGGENDORFF dienst doet.

$M$  is een Weston-milliamperemeter, welke voor de grovere, voorloopige controle dienst doet, en met behulp der wip  $P_1$  in- (uit-)geschakeld wordt. De Ampèremeter  $I$  blijft permanent ingeschakeld in den stroomloop der akkumulatorenbatterij  $acc$ .

Door telkens geschikte weerstanden in de rheostaten  $W_1$  resp.  $W_2$  te brengen, en door beweging van de stang  $J$ , die de oplossnelheid der vaste stof regelt, zorgt men er voor, dat de temperatuur van den calorimeter tijdens de proef in de onmiddellijke nabijheid der aanvangs- (eind-) temperatuur blijft. Na elke verandering van den weerstand in  $W_1$  resp. in  $W_2$  wordt de E. K. aan de knoppen van de weerstandsspiraal  $S$  opnieuw bepaald, zoomede de tijd afgelezen, gedurende welken de nieuwe hoeveelheid elektrische energie aan den calorimeter werd toegevoerd.

Is het oplossingsproces afgelopen en de begintemperatuur van den calorimeter weder bereikt, dan voert men gedurende nauwkeurig gemeten tijd een zekere hoeveelheid elektrische energie aan den calorimeter toe en bepaalt de temperatuurstijging, die daarvan 't gevolg is, daarbij den nagang van den thermometer in rekening brengend. Op deze wijze wordt de waterwaarde van den calorimeter bekend.

Ter berekening van de stralingscorrectie werd gebruik gemaakt van de formule van REGNAULT—PFAUNDLER <sup>1)</sup>.

13. Tabel IV bevat de resultaten der proeven. Hierbij worde het volgende opgemerkt:

Na afloop van elke proef werd de eindconcentratie der oplossing bepaald met behulp der in § 4 beschreven analysemethode. Daar bekend was, hoeveel vaste stof tijdens de proef in oplossing was gegaan, kon de beginconcentratie worden berekend. Daarbij werd in aanmerking genomen, dat tijdens de proef en de voorbereiding daarvan een geringe hoeveelheid oplosmiddel (bv. 0.35 gr. in 48 uren) was verdampt.

De waarden in kolom 13 vermeld, zijn met behulp der interpolatie-vergelijking

$$Q_i = 22.32 - 2.102(1-x)^2$$

berekend, welke is afgeleid uit de gevonden waarden met behulp der methode der kleinste quadraten.

Kolom 14 bevat de afwijkingen van deze met de gevonden cijfers.

<sup>1)</sup> Pogg. Ann. 129, 113 (1866).

TABEL IV.  
 Intermediaire oploswarmte van *m*-dinitrobenzol in aethylacetaat bij 30°0 C.

No.	Temperatuur in C.	Gewicht in grammen.		Koncentratie				Waterwaarde	Toegevoerde elektr. energie in gr. kal.	Korrektie in gr. kal.	Oploswarmte in gr. calorieën				
		<i>m</i> -dini- troben- zol	3	begin- oplos- sing	4	gew. %	mol. %				gev.	ber.	ber. — gev.		
1	2	3	4	5	6	begin	7	eind	8	9	10	11	12	13	14
1	29.98	17.2171	496.77	3.04	6.29	1.62	3.40	276.2	349.92	— 0.83	20.27	20.32	+ 0.05		
2	30.03	15.9706	490.22	6.23	9.19	3.36	5.04	269.6	327.73	— 1.98	20.39	20.39	0.00		
3	30.04	16.6400	515.36	21.03	23.50	12.24	13.86	272.8	365.80	— 19.92	20.77 <sup>s</sup>	20.73	— 0.04 <sup>s</sup>		
4	29.95	14.3677	517.62	21.24	23.37	12.39	13.78	273.0	296.62	+ 1.25	20.73	20.73	0.00		
5	30.01	12.0223	514.41	27.19	28.86	16.37	17.53	267.1	251.48	— 0.30	20.89	20.87	— 0.02		
6	29.98	15.7898	510.93	26.22	28.44	15.70	17.24	257.2	327.43	+ 1.95	20.85	20.85	0.00		
7	30.02	11.2857	526.49	30.92	32.37	19.00	20.05	267.7	236.30	+ 0.27	20.95	20.96	+ 0.01		
8	29.99	11.5680	541.95	31.13	32.56	19.15	20.20	271.7	242.79	— 1.08	20.89	20.96 <sup>s</sup>	+ 0.07 <sup>s</sup>		
10	29.98	12.3776	542.20	32.23	33.74	19.95	21.06	275.2	259.84	— 0.13	20.97	20.99	+ 0.02		
11	29.92	11.3382	554.83	32.25	33.60	19.96	20.96	278.6	239.50	— 0.84	21.04	20.99	— 0.05		
12	29.96	17.8472	570.28	23.42	26.00	13.81	15.55	282.1	327.45	0.00	20.86	20.79	— 0.07		

Door substitutie van

$$x = 0.2158,$$

de waarde der verzadigingsconcentratie bij 30°.00 C. en 1 atmosfeer, uitgedrukt in molekulairprocenten, vinden wij:

$$Q_f = 21.03 \text{ gramkalorieën}$$

en na berekening van de waarschijnlijke fout:

$$Q_f = 21.03 \pm 0.03 \text{ gramkalorieën,}$$

geldende per gram stof; dus per mol:

$$Q_f = 3534 \pm 5 \text{ gramkalorieën.}$$

14. De aansluiting van de berekende aan de gevonden waarden laat niets te wenschen over; de grootste afwijking bedraagt 0.3%; bovendien verandert de intermediaire oploswarmte niet sterk met de concentratie, en nadert men bij twee bepalingen (N°. 10 en 11) de verzadigingsconcentratie zoo dicht, dat wij, aan het over zoo geringen afstand, geëxtrapoleerde cijfer groot vertrouwen mogen schenken. In proef N°. 10 bedragen begin- en eindconcentraties resp. 92.4% en 97.6% van de verzadigingsconcentratie. De geëxtrapoleerde waarde der fiktieve oploswarmte (21.02) ligt tusschen de waarden, voor de intermediaire oploswarmte gevonden bij de twee hoogste concentraties (20.97 en 21.04), zoodat wij hier van een direkte bepaling der fiktieve oploswarmte kunnen spreken.

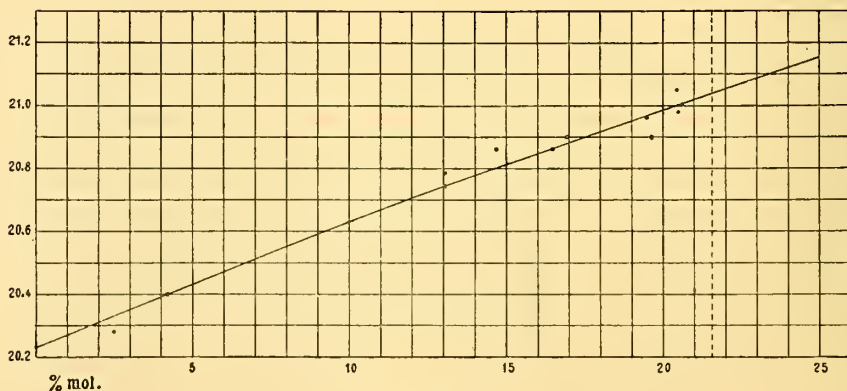


Fig. 4.

Figuur 4 geeft een beeld van het verloop der berekende afhankelijkheid der intermediaire oploswarmte van de concentratie (uitgedrukt in mol. %) en van de aansluiting dezer kromme aan de resultaten der proeven, aangegeven door stippen. De gestippelde ordinaat geldt voor de verzadigingsconcentratie. Het snijpunt van deze met de kurve geeft de waarde van de fiktieve oploswarmte aan.

*Toetsing van de Wet van BRAUN.*

15. Wij zullen thans, door substitutie der door ons in het voorafgaande bepaalde grootheden in de vergelijking van BRAUN, doen zien, in hoeverre deze door de ervaring wordt bevestigd.

Deze wet, hierboven (§ 1) in den vorm geschreven :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \pi}\right)_T : \left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_\pi = -\frac{T \Delta V}{Q},$$

bevat, behalve de vier, door ons bepaalde grootheden, de absolute temperatuur, en in geval de grootheden niet in dezelfde eenheden zijn uitgedrukt, ook nog een herleidingsfaktor.

Wij zullen dus eerst nog deze twee factoren nader moeten beschouwen.

Voor de temperatuur in deze vergelijking moet genomen worden de absolute temperatuur, die overeenkomt met 30°.00 C., welke laatste betrokken is op de waterstofschaal, in verband met de ijking door de P. T. R. der gebruikte thermometers. Deze temperatuur moet dus worden herleid tot de absolute, op de thermodynamische temperatuurschaal betrokken, welke overeenstemt met de temperatuur, gemeten op de schaal van een gasthermometer, die met een ideaal gas is gevuld.

Uit de reductietabel<sup>1)</sup>, welke de correcties geeft, die aan de aanwijzingen van den gasthermometer (voor N<sub>2</sub>, H<sub>2</sub> en He) moeten worden aangebracht teneinde deze tot de thermodynamische temperatuurschaal te herleiden, blijkt, dat de correctie in het geval van den waterstof-thermometer tusschen — 50° C. en + 150° C. slechts enkele duizendste graden bedraagt. Wij kunnen onze temperatuur dus zonder meer op de waterstofschaal betrekken.

Voor het nulpunt der Celsinsschaal<sup>2)</sup> nemen wij + 273°.09, zoodat in onze vergelijking  $T' = 303.09$ .

De herleidingsfaktor is afhankelijk van de eenheden, in welke de gemeten grootheden zijn uitgedrukt. Het feit, dat de *verhouding* van

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T'}\right)_\pi \text{ en } \left(\frac{\partial v}{\partial \pi}\right)_T$$

in de vergelijking van BRAUN optreedt, heeft ten gevolge, dat de gebruikte concentratie-eenheid, mits voor de afleiding van beide differentiaalquotienten dezelfde is gebruikt, in deze betrekking een rol niet speelt.

<sup>1)</sup> BURGESS, Physik. Zeitschr. **14**, 152 (1913).

<sup>2)</sup> D. BERTHELOT, Sur les thermomètres à gaz etc. Travaux et mémoires du Bur. Intern. des Poids et Mesures **13**, 113 (1907).

Verder hebben wij de temperatuur in graden Celsius, den druk in atmosferen (drukbalans) gemeten. De fiktieve volumeverandering is uitgedrukt in cc., terwijl de fiktieve oploswarmte gemeten is in joules.

Wij moeten dus den herleidingsfaktor (E):

$$1 \text{ cc.-atm.} = 0.1013 \text{ joule}$$

in de vergelijking invoeren.

Dit cijfer is ontstaan uit:

$$1 \text{ cc.-atm.} = 13.595 \times 76 \times 980.6 \text{ erg} = \frac{1.013 \times 10^6}{10^7} \text{ joule.}$$

De fout in dezen faktor is vele malen geringer, dan die, in een der door ons gemeten waarden, zoodat zij buiten beschouwing kan worden gelaten.

16. Wij zullen de toetsing zoo doorvoeren, dat wij, met behulp van de wet van BRAUN de fiktieve oploswarmte nit de andere, door ons bepaalde grootheden berekenen, en haar vergelijken met de direkt gevonden waarde.

Willen wij hier de fiktieve oploswarmte in gramkalorieën uitdrukken, dan moeten *beide* leden der vergelijking met 0.2389 worden vermenigvuldigd. De nauwkeurigheid van dezen herleidingsfaktor speelt dus een rol niet.

De wet van BRAUN geeft de fiktieve oploswarmte in den vorm:

$$Q = -ET \frac{\Delta V \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_{\pi}}{\left( \frac{\partial \pi}{\partial v} \right)_T},$$

en wij vragen ons thans eerst nog af, welke de waarschijnlijke fout in de berekende waarde van  $Q$  is, wanneer de waarschijnlijke fouten in:

$$\left( \frac{\partial v}{\partial \pi} \right)_T, \Delta V \text{ en } \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_{\pi}$$

zijn gegeven.

Noemen wij ter vereenvoudiging deze drie grootheden met hare waarschijnlijke fouten resp.  $A \pm a$ ,  $B \pm b$ ,  $C \pm c$ , dan wordt de waarschijnlijke fout van  $Q$ , die zelf gegeven is door de vergelijking:

$$Q = -ET \frac{BC}{A}$$

gegeven door:

$$q = \pm ET \frac{\sqrt{\left( \frac{BCa}{A} \right)^2 + (Cb)^2 + (Bc)^2}}{A}$$



17. Over de nauwkeurigheid, bij elk der gemeten grootheden bereikt, moge nog het volgende worden opgemerkt:

Wij hebben zoo goed mogelijk getracht, indachtig aan de juistheid van den regel, dat „no chain is stronger than its weakest link”, de precisie der meting van elke grootheid, welke direkt of indirekt bij onze toetsing een rol speelt, tot hetzelfde peil op te voeren. De nauwkeurigheid der vier factoren zelf, zooals deze is bepaald door hunne waarschijnlijke fouten, is niet zeer verschillend; de drukkoëfficiënt is wel de minst nauwkeurig bepaalde faktor, daarop volgt de fiktieve volume-verandering, en ten slotte de temperatuurkoëfficiënt en de fiktieve oploswarmte, die ongeveer met gelijke nauwkeurigheid konden worden vastgelegd. Procentueel is de waarschijnlijke fout van den drukkoëfficiënt nog niet drie maal zoo groot, als die in de laatstgenoemde grootheden.

Tevens mag ook wel de aandacht erop worden gevestigd, dat een onzekerheid bv. in de absolute waarde van den druk, bij welken is gewerkt, procentueel met haar volle bedrag in den drukkoëfficiënt zou zijn overgegaan en van dezen in het eindresultaat.

Het heeft natuurlijk niet zin, een der vier factoren te bepalen met eene nauwkeurigheid, verre uitstekend boven die van elk der andere. De grootere zorg aan zulk eene meting besteed, zou — voor het ons gestelde doel — nut niet afwerpen. Veel zou daarentegen worden bereikt, wanneer door het opdrijven der nauwkeurigheid van de meting der minst nauwkeurig bepaalde grootheid, deze meer op het peil van die der andere factoren zou worden gebracht.

18. Voeren wij de gevonden waarden der vier factoren in de vergelijking in:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_{\pi} = 0.5653 \pm 0.0007 \frac{\text{mol. } \%, \text{ som} = 100}{C^{\circ}}, \quad (\S 7)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \pi}\right)_{T} = -0.00867 \pm 0.00003 \frac{\text{mol. } \%, \text{ som} = 100}{\text{atm.}}, \quad (\S 2)$$

$$\Delta V_{\text{mol}} = +7392 \pm 0.01^6 \frac{\text{cc.}}{\text{mol}}, \quad (\S 3)$$

en

$$Q_{\text{mol}} = \frac{+3534 \pm 5 \text{ joule}}{0.2389 \text{ mol}}, \quad (\S 13)$$

dan vinden wij met behulp der betrekking van BRAUN:

$$Q = 3535 \pm 15 \frac{\text{gramkalorieën}}{\text{mol}},$$

terwijl langs *direkten* weg was gevonden :

$$Q = 3534 \pm 5 \frac{\text{gramkalorieën}}{\text{mol}}$$

Wij mogen dus met vol recht zeggen, dat *bij de experimenteele, quantitatieve toetsing van de wet van BRAUN deze betrekking juist is bevonden binnen de waarschijnlijke fouten der metingen*. Tevens verschafft dit resultaat een zeer gewenschte controle op de juistheid der toegepaste methoden ter bepaling van verschillende grootheden, bij welke ook tal van natuurkonstanten een rol hebben gespeeld.

*Utrecht*, Maart 1918.

VAN 'T HOFF-*Laboratorium*.

**Natuurkunde.** — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van G. NORDSTRÖM over: „*Berekening voor eenige bijzondere gevallen volgens de gravitatie-theorie van EINSTEIN*”.

(Mede aangeboden door den Heer H. KAMERLINGH ONNES.)

In deze mededeeling zal ik, met toepassing van de stellingen, welke ik in twee vorige opstellen afgeleid heb voor de gravitatie-theorie van EINSTEIN<sup>1)</sup>, het zwaartekrachtsveld en den spannings-toestand berekenen voor eenige bijzondere *stationaire stelsels met bolsymmetrie*.

Eerst zal ik den toestand in een diskontinuiteitsvlak onderzoeken.

### § 1. *Formules ter inleiding.*

Een diskontinuiteitsvlak in een veld met bolsymmetrie moet natuurlijk een boloppervlak zijn. Wij vatten het oppervlak op als grensgeval van eene laag met eindige dikte en ons interesseeren hier alleen zoodanige oppervlakken, waarin bij den grensovergang de eene of andere komponent van den materieelen spanningsenergie-tensor aangroeit tot boven elke willekeurige grens, zoodat de lijn-integraal dwars door de laag eindig blijft. In het algemeen werkt blijkbaar in zulk een diskontinuiteitsoppervlak eene oppervlakte-spanning  $P$ :

$$P = \lim_{r_1 - r_2 = 0} \int_{r_1}^{r_2} \mathfrak{E}_r^r dr, \dots \dots \dots (1)$$

waarin  $r_1$  de binnenste,  $r_2$  de buitenste straal der laag is. Daarentegen zullen wij aannemen, dat de radiale komponent van den spanningstensor  $\mathfrak{E}_r^r$  bij den grensovergang niet elke willekeurige grens overschrijdt; wij nemen dus aan dat:

$$\lim_{r_1 - r_2 = 0} \int_{r_1}^{r_2} \mathfrak{E}_r^r dr = 0 \dots \dots \dots (2)$$

---

<sup>1)</sup> G. NORDSTRÖM, iets over de massa van een stoffelijk stelsel volgens de gravitatie-theorie van EINSTEIN. Deze Verslagen XXVI, 1917, p. 1093 (verderop aangehaald als I) en: Een en ander over de energie van het zwaartekrachtsveld volgens de theorie van EINSTEIN. Deze Verslagen XXVI, 1918, p. 1201, (verderop genoemd als II).

Wij zullen eerst een algemeen diskontinuiteitsoppervlak beschouwen en pas later bijzondere aannamen invoeren. Wij gaan uit van de eerste en derde formule (38) I en van (39) I. (Uit deze drie formules kan ook de tweede formule (38) I afgeleid worden, welke wij echter niet noodig hebben). Wij stellen het koördinatenstelsel vast door te stellen :

$$v = r, \text{ d.w.z. } p = 1 \dots \dots \dots (3)$$

Als wij verder stellen :

$$\mathfrak{E} = \sqrt{-g} T = u w T, \dots \dots \dots (4)$$

kunnen de genoemde aanvangsformules na eene eenvoudige vorming geschreven worden :

$$-\frac{1}{u^2} \left( 1 + 2r \frac{w'}{w} \right) + 1 = r^2 \kappa T_r^r, \dots \dots \dots (5)$$

$$\frac{d}{dr} \left\{ r \left( 1 - \frac{1}{u^2} \right) \right\} = r^2 \kappa T_4^4, \dots \dots \dots (6)$$

$$\frac{2}{r} (T_p^p - T_r^r) + \frac{w'}{w} (T_4^4 - T_r^r) = \frac{dT_r^r}{dr} \dots \dots \dots (7)$$

Deze formules gelden voor elk stationair zwaartekrachtsveld met bolsymmetrie; slechts wordt het koördinatenstelsel vastgesteld door voorwaarde (3). De grootheden  $u$  en  $w$  bepalen (als  $p = 1$ ) alle componenten  $g_{\mu\nu}$  van den fundamenteelen tensor op grond der formules (25) I.

De vergelijking (6) bepaalt, als  $T_4^4$  gegeven is,  $u$  als funktie van  $r$ . Door integratie dwars door eene laag, welke daarna door een grensovergang veranderd wordt in een diskontinuiteitsoppervlak met een straal  $r_1 = r_2 = R$  krijgen wij na deeling door  $R$

$$\frac{1}{u_1^2} - \frac{1}{u_2^2} = R \kappa \lim_{r_2-r_1=0} \int_{r_1}^{r_2} T_4^4 dr. \dots \dots \dots (8)$$

Deze formule toont aan, dat  $u$  diskontinu verandert in een diskontinuiteitsoppervlak waarin

$$\lim_{r_2-r_1=0} \int_{r_1}^{r_2} T_r^r dr$$

niet nul is. Zulk een oppervlak, dat bovendien voorwaarde (2) bevredigt, zullen wij een *materieel oppervlak* noemen. Men kon het koördinatenstelsel wel zoo kiezen, dat  $u$  aan het oppervlak kontinu verandert, maar vindt, dat dan  $p$  diskontinu verandert. In het algemeen geldt, dat tenminste één van de ruimtekomponeenten van

den fundamenteelen tensor diskontinu verandert in een materieel oppervlak. Met behulp van formule (5) zullen wij nu aantoonen, dat  $w$  daarentegen kontinu verandert in ons materieele oppervlak, als slechts voorwaarde (2) vervuld is. Verg. (5) geeft

$$2 \frac{w'}{w} = \frac{u^2}{r} \left( 1 - r^2 \kappa T_r^r \right) - \frac{1}{r}, \quad . . . . . (9)$$

en door integratie dwars door de laag krijgen wij

$$\log w_2{}^2 - \log w_1{}^2 = \int_{r_1}^{r_2} \left\{ \frac{u^2}{r} (1 - r^2 \kappa T_r^r) - \frac{1}{r} \right\} dr . . . (10)$$

Wij beschouwen alleen zwaartekrachtsvelden waarin  $u$  overal eindig is en als wij den grensovergang tot eene oneindig dunne laag maken, wordt op grond van aanname (2) de grenswaarde van de integraal in het rechterlid nul. Het linkerlid bewijst dan dat  $w$  dezelfde waarde heeft aan weerszijden van het diskontinuiteitsoppervlak.

Wij zullen nu formule (7) toepassen en daarin uitdrukking (9) voor  $\frac{w'}{w}$  en uitdrukking (6) voor  $T_4^4$  invoeren. Als wij verder vermenigvuldigen met  $\frac{urdr}{2}$ , krijgen wij

$$u (T_\mu^\nu - T_r^r) dr + \frac{1}{4} \{ u^3 (1 - r^2 \kappa T_r^r) - u \} \left\{ \frac{1}{\kappa r^2} \frac{d}{dr} r \left( 1 - \frac{1}{u^2} \right) - T_r^r \right\} dr = \frac{ur}{2} \frac{dT_r^r}{dr} dr. (11)$$

Deze vergelijking moeten wij integreeren dwars door een laag en daarna den overgang maken tot oneindige dunheid. Om als eerste term links de door vergelijking (1) gedefinieerde oppervlaktespanning  $P$  te krijgen, moeten wij bovendien met  $w$  vermenigvuldigen. Wij zullen intusschen ons onderzoek niet in het algemeen voortzetten, maar twee meer bijzondere gevallen beschouwen.

## § 2. *Onderzoek naar den toestand in een materieel oppervlak.*

Eerst onderzoeken wij het geval, dat  $T_4^4$  wel elke grens overschrijdt bij den grensovergang, zoodat het rechterlid in (8) niet nul wordt, maar  $\frac{dT_r^r}{dr}$  bij den grensovergang eindig blijft, zoodat  $T_r^r$  ter weerszijden van het kontinuïteitsoppervlak dezelfde waarde krijgt.

Wij beschouwen in (11) eerst dat gedeelte van het linkerlid, dat geïntegreerd luidt:

$$I = \frac{1}{4} \int_{r_1}^{r_2} \left\{ u^3 (1 - r^2 \times T_r^r) - u \right\} \frac{1}{2r^2} \frac{d}{dr} r \left( 1 - \frac{1}{u^2} \right) dr =$$

$$= \frac{1}{4 \times} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} \left\{ u^3 (1 - r^2 \times T_r^r) - u \right\} d \left\{ r \left( 1 - \frac{1}{u^2} \right) \right\}.$$

Wij hebben de grenswaarde van deze uitdrukking te berekenen voor  $r_2 - r_1 = 0$ . In het grensgeval is  $r$  konstant  $= r_1 = r_2 = R$ , zoodat wij hebben

$$d \left\{ r \left( 1 - \frac{1}{u^2} \right) \right\} = 2 R \frac{du}{u^3}.$$

Wij krijgen dus

$$\lim_{r_2 - r_1 = 0} I = \frac{1 - R^2 \times T_r^r}{2 \times R} \int_{u_1}^{u_2} du - \frac{1}{2 \times R} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u^2} = \frac{u_2 - u_1}{2 \times R} \left( 1 - \frac{1}{u_1 u_2} - R^2 \times T_r^r \right).$$

Wij hebben nu een deel van het linkerlid in (11) behandeld door te integreeren en den grensovergang te maken. Van de overige deelen van genoemd linkerlid geven die, welke  $T_r^r$  bevatten, bij den grensovergang nul, op grond van onze aanname (2) en daar  $u$  eindig blijft. Daarentegen wordt dat deel, hetwelk  $T_p^r$  bevat, niet nul. Het rechterlid geeft de grenswaarde nul, daar wij hebben aangenomen dat  $T_r^r$  kontinn verandert in het diskontinuïteits oppervlak. Als wij onze vergelijking nog met  $w$  vermenigvuldigen, welke grootheid, zoo als wij hebben aangetoond, in het oppervlak kontinn verandert en dus bij den grensovergang als konstant beschouwd mag worden, krijgen wij:

$$P = - \frac{w}{2 \times R} (u_2 - u_1) \left( 1 - \frac{1}{u_1 u_2} - R^2 \times T_r^r \right) \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

De formule drukt te zamen met (8) de wetten uit voor een diskontinuïteitsoppervlak van het soort dat wij nu beschouwen. Wij zullen deze formules toepassen op het bijzondere geval, dat alle voorhanden zijnde materie zich in het materiele oppervlak bevindt. Omdat  $T_r^r$  kontinn is, hebben wij in dit geval  $T_r^r = 0$ . Verder hebben wij op grond van (6) binnen en buiten het vlak

$$r \left( 1 - \frac{1}{u^2} \right) = \text{konst.} \quad (r \neq R) \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Daar nu, als  $r = 0$ ,  $u$  niet nul kan zijn, moet de waarde der konstante binnen het oppervlak nul zijn, zoodat wij voor  $r < R$  hebben  $u = 1$  en dus ook

$$u_1 = 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Binnen het bolvormige materiele oppervlak heeft men dus een

euklidische ruimte. (Dit geldt natuurlijk binnen elken hollen bol, slechts de massa- en spanningsverdeeling erbuiten heeft bolsymmetrie). Buiten het materieele oppervlak heeft de konstante in verg. 13) niet de waarde nul maar eene waarde  $\alpha$ , evenredig met de massa van het stelsel, welke formule (15) II:

$$m = \frac{4\pi\alpha}{\kappa} \dots \dots \dots (15a)$$

geeft. Wij hebben dus voor  $u_2$ :

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{R}}} \dots \dots \dots (15)$$

Voor  $w$  hebben wij in ons oppervlak:

$$w = c \sqrt{1 - \frac{\alpha}{R}} = \frac{c}{u_2} \dots \dots \dots (16)$$

Dit wordt b.v. aangetoond door formule (12) II, die buiten ons oppervlak geldt, als wij  $\epsilon = 0$  stellen. Als wij ook  $r = R$  stellen, krijgen wij de waarde (16) in het oppervlak, en formule (9) toont daarna aan (daar binnen het oppervlak  $u = 1$  en  $T_r^r = 0$ ) dat deze konstante waarde voor  $w$  ook overal binnen het materieele oppervlak geldt.

Voor de oppervlaktespanning  $P$  krijgen wij, als wij de uitdrukkingen voor  $u_1$ ,  $u_2$  en  $w$  invoeren,

$$P = -\frac{c}{2\kappa R} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha}{R}}\right)^2 \dots \dots \dots (17)$$

Deze formule drukt het verband uit tusschen de oppervlaktespanning, de massa en den straal. Uitgedrukt in de gebruikelijke eenheden is de oppervlaktespanning  $cP$  (vgl. I p. 1096). De massakonstante  $\alpha$  hangt ook samen met het rechterlid van verg. (8). Deze vergelijking geeft, als men de waarden van  $u_1$  en  $u_2$  invoert,

$$\alpha = \kappa R^2 \lim_{r_2-r_1=0} \int_{r_1}^{r_2} T_4^4 dr \dots \dots \dots (18)$$

In de enklidische ruimte binnen het materieele oppervlak hebben wij niet dezelfde lichtsnelheid  $c$  als oneindig ver verwijderd van ons stelsel, maar een kleinere snelheid

$$c \sqrt{1 - \frac{\alpha}{R}}$$

Dus hebben wij hier een beeld bij de gedachte van EINSTEIN over den invloed van verafgelegen massa's op de lichtsnelheid in ons deel van het heelal.

Als wij de uitdrukking (17) voor  $P$  ontwikkelen naar machten van  $a/R$ , krijgen wij

$$P = -\frac{c}{2\kappa R} \left( \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2} + \frac{1}{8} \frac{a^3}{R^3} + \dots \right) \dots \dots \dots (17a)$$

De theorie van NEWTON geeft voor  $cP$ :

$$cP = -\frac{km^2}{16 \pi R^3}, \dots \dots \dots (17b)$$

waarin  $k$  de gravitatiekonstante van NEWTON is:

$$k = \frac{c^2 \kappa}{8\pi}.$$

Voert men in (17b) de uitdrukkingen voor  $k$  en  $m$  in, dan krijgt men voor  $P$  eene uitdrukking, die overeenkomt met den eersten term van (17a). Wat de termen der laagste orde betreft, komt dus de theorie van EINSTEIN met die van NEWTON overeen.

§ 3. *Tweede voorbeeld van een diskontinuiteitsoppervlak.*

Wij zullen nu tot een ander soort diskontinuiteitsoppervlak overgaan, namelijk zulk een waarin

$$\lim_{r_2 - r_1 = 0} \int_{r_1}^{r_2} T_4^4 dr = 0 \dots \dots \dots (19)$$

maar waarin  $T_r^r$  diskontinu verandert. Zulk een diskontinuiteitsoppervlak heeft men b.v. als eene elektrische lading over het vlak is uitgespreid.

Formule (8) toont aan, dat in dit geval, dat wij nu beschouwen,  $u$  aan het oppervlak kontinu verandert:

$$u_2 = u_1 \dots \dots \dots (20)$$

Dat ook  $w$  kontinu verandert is reeds vroeger algemeen aangetoond door formule (10).

Wij moeten ook nu formule (11) met  $w$  vermenigvuldigen, dwars door eene laag integreeren en den grensovergang maken tot oneindig kleine dikte. Daar in het laatste deel van het linkerlid alle grootheden bij den grensovergang eindig blijven, geeft dat deel de grenswaarde nul. Daar verder  $u$  en  $w$  kontinu veranderen, krijgen wij

$$P = \frac{R}{2} u w (T_{r_2}^r - T_{r_1}^r),$$

of, als wij de componenten van den volumetensor  $\mathfrak{T}$  invoeren,

$$P = \frac{R}{2} (\mathfrak{T}_{r_2}^r - \mathfrak{T}_{r_1}^r) \dots \dots \dots (21)$$



De inhoud van deze vergelijking is triviaal. Deze zegt dat er evenwicht is tusschen de oppervlaktespanning  $P$  in het boloppervlak en de loodrecht op het oppervlak staande normale kracht, waarvan de groote per eenheid van oppervlak  $\mathfrak{E}_{r_2}^r - \mathfrak{E}_{r_1}^r$ , is. De zwaartekracht oefent zooals wij zien hierbij geen invloed uit.

Hebben wij in het oppervlak eene elektrische lading  $e$  en binnen het oppervlak geen materie, dan is (II noot p. 1204)

$$\mathfrak{E}_{r_1}^r = 0, \quad \mathfrak{E}_{r_2}^r = \frac{u w e^2}{8\pi r^4} \dots \dots \dots (22)$$

Wij zullen nu aannemen, dat zich evenmin buiten het oppervlak andere materie bevindt dan het elektrische veld, en wij zullen de massa van den elektrischen bol berekenen. Wij hebben, zooals in II § 1 bewezen is, buiten den bol

$$u w = c \quad (r > R), \dots \dots \dots (23)$$

$$T_r^r = T_4^4 = \frac{e^2}{8\pi r^4} \quad (r > R) \dots \dots \dots (24)$$

Daar binnen den bol en aan het oppervlak ervan  $u = 1$ , geeft (6) bij integratie tot een bovenste grens  $r > R$

$$r \left( 1 - \frac{1}{u^2} \right) = \kappa \int_R^r r^2 T_4^4 dr = - \frac{\kappa e^2}{8\pi r} + \frac{\kappa e^2}{8\pi R} \quad (r > R),$$

$$\frac{1}{u^2} = 1 - \frac{\kappa e^2}{8\pi R r} + \frac{\kappa e^2}{8\pi r^2} \dots \dots \dots (25)$$

Vergelijking met verg. (11) II toont aan, dat wij moeten hebben

$$a = \frac{\kappa e^2}{8\pi R},$$

en (15a) geeft voor de massa  $m$

$$m = \frac{e^2}{2R} \dots \dots \dots (26)$$

Omdat  $e$  de lading in electromagnetische maat is (zie II p. 1202), is deze uitdrukking voor  $m$  gelijk aan de electrostatische energie gedeeld door  $c^2$ . Eene andere dan de electrostatische energie komt in ons stelsel dus niet voor. Dat er buiten het elektrische lichaam geen zwaartekrachtsenergie voorkomt, is in II § 2 reeds aangetoond. De laatst gevonden nitkomst zegt dus, dat evenmin in het elektrische oppervlak eenige zwaartekrachtsenergie opgehoopt is.

§ 4. *Een bol van onsamendrukbare vloeistof.*

Dit probleem is reeds behandeld door SCHWARZSCHILD<sup>1)</sup> doch daar

<sup>1)</sup> K. SCHWARZSCHILD, Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibeler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. Berl. Ber. 1916 p. 424.

de formules (5), (6) en (7) langs een' anderen weg dan den door hem gevolgd, snel tot het doel leiden, zij het mij toegestaan dit met de grootst mogelijke beknoptheid uiteen te zetten.

Dat het medium onsamendrukbaar is beteekent, dat bij rust

$$T_4^4 = \rho \dots \dots \dots (27)$$

eene voor het medium karakteristieke konstante is. Het vloeistofkarakter van het medium eischt verder dat er geen tangentele spanningen in kunnen optreden, waarom men heeft

$$T_r^r = T_p^p = -p, \dots \dots \dots (28)$$

waarin de drukskelaar  $p$  1) intusschen eene functie van de plaats is, d. w. z. van  $r$ . Tusschen  $\rho$ , den straal van den bol  $R$  en de massa  $m$  bestaat een verband, dat men krijgt door (6) te integreeren van  $r = 0$  tot  $r = R$ . Daar  $u$  voor  $r = 0$  niet nul is, en voor  $r = R$

de waarde  $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a}{R}}}$  heeft (zie II verg. (11)), krijgt men

$$a = \frac{2\rho}{3} R^3$$

en bijgevolg

$$m = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \dots \dots \dots (29)$$

Hieruit blijkt, dat  $\rho$  de rol van dichtheid speelt.

Geïntegreerd van  $r = 0$  tot eene willekeurige bovenste grens  $r < R$  geeft (6) verder  $u$  als functie van  $r$ . Men krijgt

$$r \left( 1 - \frac{1}{u^2} \right) = \frac{2\rho}{3} r^3, \\ u^2 = \frac{1}{1 - \frac{2\rho}{3} r^2} \dots \dots \dots (30)$$

Nu rest ons nog  $w$  en  $p$  te bepalen als functies van  $r$ . Tusschen  $w$  en  $p$  bestaat een verband, dat verg. (7) geeft. Men heeft op grond van genoemde vergelijking

$$\frac{w'}{w} (\rho + p) = - \frac{dp}{dr}, \dots \dots \dots (31)$$

dis

$$\frac{dw}{w} (\rho + p) = - dp.$$

1) Eene verwarring met de grootheid  $p$ , welke in § 1 gelijk 1 gesteld is, zal wel niet te vreezen zijn.

Dit hebben wij te integreeren. De integratiekonstante wordt daardoor bepaald, dat aan het boloppervlak  $p = 0$  en

$w = c \sqrt{1 - \frac{a}{R}} = c \sqrt{1 - \frac{\alpha Q}{3} R^2}$  (zie II verg. (12)). Wij krijgen aldus het gezochte verband tusschen  $w$  en  $p$ :

$$w (q + p) = q c \sqrt{1 - \frac{\alpha Q}{3} R^2} \dots \dots \dots (32)$$

Wij zullen nu  $p$  berekenen als funktie van  $r$ . Als wij in (5) uitdrukking (30) voor  $u$  invoeren en de vergelijking vereenvoudigen, krijgen wij:

$$2 \frac{w'}{w} \left(1 - \frac{\alpha Q}{3} r^2\right) = \frac{\alpha}{3} r (q + 3p) \dots \dots \dots (33)$$

Wij elimineeren  $\frac{w'}{w}$  tusschen deze vergelijking en (31) en vinden

$$\frac{2 dp}{(q + 3p)(q + p)} + \frac{\alpha}{3} \frac{r dr}{1 - \frac{\alpha Q}{3} r^2} = 0 \dots \dots \dots (34)$$

De integratie geeft

$$\log \frac{q + 3p}{q + p} - \log \sqrt{1 - \frac{\alpha Q}{3} r^2} = konst.$$

De integratiekonstante moet bepaald worden door middel van de voorwaarde dat  $p = 0$  voor  $r = R$ . Bijgevolg krijgen wij:

$$\frac{q + 3p}{q + p} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\alpha Q}{3} r^2}{1 - \frac{\alpha Q}{3} R^2}} \dots \dots \dots (35)$$

Hiermede is de drukskalaar  $p$  bepaald als funktie van  $r$ .

Als wij tusschen deze vergelijking en (32)  $p$  elimineeren, krijgen wij voor  $w$  als funktie van  $r$  deze uitdrukking:

$$w = \frac{c}{2} \left( 3 \sqrt{1 - \frac{\alpha Q}{3} R^2} - \sqrt{1 - \frac{\alpha Q}{3} r^2} \right) \dots \dots (36)$$

Hiermede hebben wij het zwaartekrachtsveld en de drukverdeling binnen onzen bol volkomen bepaald. De formules, welke wij verkregen hebben, gaan over in die van SCHWARZSCHILD, als men voor  $r$  substitueert

$$r = \sqrt{\frac{3}{\alpha Q}} \sin \chi.$$

§ 5. *Over het zwaartekrachtsveld, zooals men zich dat in het binnenste van een atoom kan denken.*

In de theorie der atoomstructuur volgens RUTHERFORD-BOHR heeft men te kampen met moeilijkheden, veroorzaakt door de aanname dat zich in een atoomkern van zeer geringe afmetingen elektrische eenheidsladingen bevinden, welke eenheidsladingen — tenminste wanneer ze in den vorm van elektronen vrijkomen — naar men aanneemt een doorsnede hebben grooter dan die van de atoomkern. Daar nu de zwaartekrachtstheorie van EINSTEIN verklaart, dat de natuurlijk gemeten ruimte in een zwaartekrachtsveld niet-euklidisch is, doet zich de vraag voor, of deze theorie de mogelijkheid openstelt om aan te nemen, dat de atoomkern eene grootere ruimte vult met eene nauwe „hals” of wel eene ruimte, welke zichzelf in een punt snijdt. Deze vraag zullen wij nu onderzoeken.

Wij beschouwen ook nu een stationair stelsel met bolsymmetrie. Den afstand  $r$  vanaf het symmetriecentrum kunnen wij, zooals vroeger, definiëeren door  $p = 1$  te stellen, d.w.z. door te eischen, dat de natuurlijk gemeten omtrek van een cirkel, die zijn middelpunt in het centrum van symmetrie heeft,  $2 \pi r$  is. Doen wij dit, dan is intusschen voor het geval, dat wij nu onderzoeken, de toestand in het veld niet eene eenduidige, maar, tenminste binnen een zeker interval, eene meerduidige funktie van  $r$ . Derhalve is het doelmatig eene nieuwe radiale ruimtekoördinaat in te voeren, waarvan de veldgrootheden eenduidige funkties zijn. Het naast voor de hand ligt het, voor zulk een koördinaat de natuurlijk gemeten afstand  $s$  van het symmetriecentrum te nemen. Wij kunnen, om onze beschouwingen te specialiseeren, een samenhang van den gewenschten aard vaststellen tusschen  $s$  en den door de voorwaarde  $p = 1$  gedefinieerden straal  $r$ , en dan onderzoeken of dit beantwoordt aan eene mogelijke verdeling der componenten  $T'_x$  van den spannings-energiensor.

Wij stellen om te probeeren

$$r = \pm s \left( \frac{s^2}{3 a^2} - 1 \right), \dots \dots \dots (37)$$

waarin  $a$  eene konstante is, en wij kiezen het teeken zoo, dat aan eene positieve waarde voor  $s$  eene positieve waarde voor  $r$  beantwoordt. Voor kleine waarden van  $s$  zijn  $r$  en  $s$  evenredig, en de driedimensionale ruimte verwijdt zich, als men zich van het centrum (d.w.z. van het punt  $s = 0$ ) verwijdert. Voor  $s = a$  bereikt  $r$  echter een maximum, en als  $s$  nog meer toeneemt, trekt de ruimte zich

samen en snijdt zichzelf in een punt bij  $s = \sqrt{3} a$ . Voor nog grootere waarden van  $s$  verwijdt zich de ruimte opnieuw.

Voor wij verder gaan, merken wij nog op, dat het teeken van  $r$  inderdaad geen rol speelt. Keeren wij het teeken van  $r$  in onze grondformules (5), (6) en (7) om, dan wisselen ook  $dr$  en  $w'$  van teeken, en de formules geven dezelfde waarden als vroeger voor alle overige grootheden. Op grond hiervan nemen wij in (37) overal het  $+$  teeken en rekenen  $r$  dus negatief in het interval  $0 < s < \sqrt{3} a$ .

Terwijl wij bij het volgende onderzoek steunen op de grondvergelijkingen (5), (6), (7), denken wij ons  $u, w, r, T_r^r, T_p^p, T_4^4$  als functies van  $s$ . Daar  $s$  de natuurlijk gemeten afstand van het symmetriecentrum is, krijgen wij, als wij ons de beteekenis der grootheid  $u$  herinneren (zie I § 3),

$$ds = u dr, \dots \dots \dots (38)$$

Daar (37) bij differentiatie geeft

$$dr = \left( \frac{s^2}{a^2} - 1 \right) ds, \dots \dots \dots (39)$$

krijgen wij voor  $u$

$$u = \frac{1}{\frac{s^2}{a^2} - 1} \dots \dots \dots (40)$$

Dat  $u$  voor  $s < a$  negatief is, veroorzaakt geen moeilijkheden, daar de fundamenteele tensor alleen afhangt van  $u^2$ .

Wij moeten nu in verg. (6) de uitdrukkingen (37) en (40) voor  $r$  en  $u$  invoeren. Als wij om te beginnen de uitdrukkingen alleen in het linkerlid invoeren en de differentiatie uitvoeren, krijgen wij

$$-\frac{s^2}{a^2} \left( \frac{7}{3} \frac{s^2}{a^2} - 6 \right) = r^2 \alpha T_4^4 \dots \dots \dots (41a)$$

Voeren wij de uitdrukkingen ook in het rechterlid in, dan krijgen wij voor  $T_4^4$  als functie van  $s$

$$\alpha T_4^4 = \frac{6 - \frac{7}{3} \frac{s^2}{a^2}}{a^2 \left( \frac{s^2}{3a^2} - 1 \right)^2} \dots \dots \dots (41)$$

De nu afgeleide formules gelden natuurlijk alleen binnen het stoffelijk stelsel, welks uiterste grens aangegeven worde door  $s = S$ . Opdat de ruimte welke het stelsel inneemt zich zelf in een punt zal snijden, moet men op grond van (37) hebben.

$$S > \sqrt{3} a.$$

In het grensvlak  $s = S$  is volgens (40)  $u < 1$ . Opdat  $u$  aan dat

vlak continu zal overgaan in de waarde ervan in het veld er buiten, moet  $u$  ook in het uitwendige veld kleiner dan 1 zijn voor  $s = S$ . Dit is volgens formule (11) II ook het geval, als het stelsel slechts een voldoende groote elektrische lading heeft. Overigens hindert het niets dat  $u$  diskontinu zou veranderen aan het grensvlak, als dat maar een materieel vlak is, zooals in § 2 behandeld is.

Formule (41) toont aan, dat  $T_4^4$  in het interval  $\sqrt{\frac{18}{7}} a < s < S$  negatief is, wat echter, hoewel bevreemdend, toch geenszins absurd is. Verder geeft formule (41) aan, dat  $T_4^4$  oneindig groot is voor  $s = \sqrt{3} a$ . Toch bevindt zich binnen een eindig gebied slechts een eindige massa stof, wat hieruit volgt, dat volgens (41a)  $r^2 T_4^4$  overal eindig is.

De gevonden uitdrukkingen (40) en (41) voor  $u$  en  $T_4^4$  maken te zamen met (37) dat aan grondvergelijking (6) voldaan wordt. Wij moeten nu  $w$ ,  $T_r^r$  en  $T_p^p$  nog bepalen als functies van  $s$ , zoodat ook de vergelijkingen (5) en (7) bevredigd worden. Daar (5), (6) en (7) dat volledige stelsel veldvergelijkingen voor een stationair zwaartekrachtsveld met bolsymmetrie uitmaken, kunnen wij voor een van de grootheden  $w$ ,  $T_r^r$  en  $T_p^p$  eene willekeurige eenduidige functie van  $s$  kiezen. De vergelijkingen (5) en (7) bepalen dan, als men ook de uitdrukkingen voor  $r$ ,  $u$  en  $T_4^4$  invoert, de beide overige grootheden. Al deze mogelijke stoffelijke stelsels geven — als de verdeling van  $T_4^4$  slechts dezelfde is — een driedimensionale ruimte van dezelfde kromming, want de ruimtekomponeenten van den fundamenteelen tensor worden (als  $p = 1$ ) volkomen bepaald door  $u$  door middel van de formules (25)'. De kromming van het vierdimensionale ruimte-tijd-kontinuum is daarentegen ook afhankelijk van de verdeling van  $T_r^r$ , welke grootheid volgens (5) invloed uitoefent op  $w$ . Eenvoudige aannamen, die men kon maken om een bepaald stelsel te krijgen, zijn b.v. de volgende drie naar keuze:  $w = \text{konstant}$ ,  $T_r^r = 0$  of  $T_r^r = T_p^p$  (normale druk in alle richtingen). Als men dan (15) en (7) integreert, moet men de integratiekonstanten zoo bepalen, dat  $w$  aan het grensvlak  $s = S$  die waarde krijgt, welke daar voor het uitwendige veld geldt, want, zooals in § 1 bewezen is, verandert  $w$  continu in een diskontinuitéitsoppervlak.

Wij zullen geen verdere berekeningen uitvoeren, want het doel van onze onderzoeking is reeds bereikt. Wij hebben aangetoond, dat de gravitatie-theorie van EINSTEIN werkelijk een zoodanige ver-

deeling van den spanningsenergietensor  $T$  toelaat, dat de (drie-dimensionale) ruimte zichzelf in een punt snijdt. Zonder bezwaar kan men ook aantonen, dat er systemen mogelijk zijn, zoodanig, dat de door de materie gevulde ruimte uitmondt in eene smallen hals.

Van eenig belang is het nu nog, de werking der elektrische krachten na te gaan binnen de zich eerst verwijdende en dan samen-trekkende ruimte. Men zou b.v. kunnen onderzoeken hoe de toestanden worden als, met onveranderde  $T^4_4$ ,  $T^r_r$ ,  $T^p_p$  voor de niet elektromagnetische materie, in het symmetriecentrum ( $s = 0$ ) eene elektrische puntlading geplaatst wordt. Het zwaartekrachtsveld verandert hierdoor natuurlijk. Behalve dit veld te berekenen heeft men de wetten voor het evenwicht en de beweging van andere elektrische (punt)-ladingen in het ontstaande elektrische veld te onderzoeken. Hierbij moet men zich de stof als volkomen doordringbaar denken. Het moge echter voldoende zijn deze aanduidingen te geven, die wel laten zien, dat de theorie van EINSTEIN genoeg ruime mogelijkheden opent om den toestand in het binnenste van een atoom te verklaren.

**Physiologie.** — De Heer VAN RIJNBEEK biedt eene mededeeling aan van den Heer S. DE BOER: „*Over den invloed der verhooging van osmotischen druk der lichaamsvochten op verschillende celsubstraten*”.

(Mede aangeboden door den Heer WERTHEIM SALOMOSON).

In het volgende onderzoek werd de invloed nagegaan van een verhooging van den osmotischen druk der lichaamsvochten op de levensverrichtingen bij kikkers. Het verhoogen van den osmotischen druk werd langs verschillende wegen bereikt, die ik hier achtereenvolgens zal aangeven en waarbij ik de waargenomen verschijnselen zal vermelden.

I. Kikkers werden in een hyperisotonische oplossing van RINGER gezet, die in plaats van 6,5 gr. NaCl per L 18 gr. NaCl bevatte. In het vat, waarin de kikkers werden overgebracht werd zooveel van deze vloeistof gestort, dat de kop en de rug er boven uitstaken.

Een groot gedeelte van de huidoppervlakte was dan in aanraking met de hyperisotonische RINGER. Wanneer de kikkers hierin ongeveer 20 uren vertoefd hadden vertoonden ze een reeks van verschijnselen als gevolg van de verhooging van den osmotischen druk der lichaamsvochten. Het eerste, wat men waarneemt is de comateuse toestand. De kikker zit stil in hokhouding met de bindvliesen voor de oogen en springt niet meer rond. Trekt men een achterpoot uit, dan wordt deze abnormale pootstand nog wel doch traag gecorrigeerd. Bij langer verblijf in de hyperisotonische omgeving blijft deze correctie uit. Huidprikkeis geven gering reflectorisch effect, dat

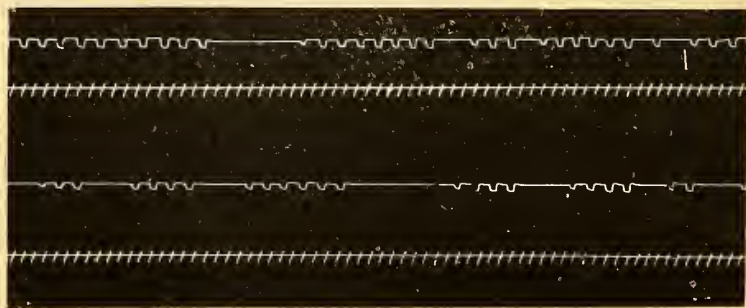


Fig. 1.

in een later stadium ook tot een minimum gereduceerd wordt. De spieren vertoonen een sterke neiging tot contracturen.



Hiernevens vertoonde de ademhaling een periodiciteit, die bekend staat onder de naam Cheyne-Stokes' ademen. Groepen van dyspnoe wisselen hierbij af met pauzen. In Fig. 1 ziet men hiervan curven, die geregistreerd werden door suspensie van de huid in een der flanken. Gedurende de flankbewegingen ging ook de pharyngeale ademhaling door en wel zoodanig dat op elke flankbeweging één beweging van den mondbodem was te zien. In de pauzen stonden beide bewegingen stil.

De curven van Fig. 2 werden bij een anderen kikker geregistreerd door een kurkecilindertje, waarin een stift was gestoken, op den rug

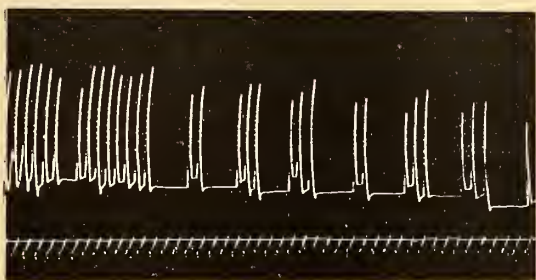


Fig. 2.

te zetten. De op en neergaande bewegingen hiervan werden, door een hefboomsysteem vergroot, op een beroete trommel overgebracht. Ook hierbij gingen met de flankbewegingen mondbodembewegingen gepaard, terwijl in de pauzen beide bewegingen ontbraken. In beide figuren ziet men in den aanvang van de groepen de opstijgende trap aangeduid. Na het periodische ademen volgde stilstand der ademhaling. Deze werd bereikt ongeveer na 24 à 25 uur vertoeven in de hyperisotonische RINGER.

Een constant voorkomende afwijking vond ik ook aan de ooglenzen. Het pupilvlak vertoonde het beeld van *katarakt*.

De hiervoor opgenoemde verschijnselen ontstonden door de verhooging van den osmotischen druk der lichaamsvochten. Hierover werden nog eenige contrôle-experimenten verricht.

Wanneer de periodische ademhaling nog bestond of ook wanneer hierop reeds stilstand der ademhaling was tot stand gekomen, dan werd de kikker in water gezet. Na een verblijf van 24 uur hierin waren alle hiervoor opgenoemde symptomen verdwenen. De kikker was dan weer geheel normaal, de passiviteit, reactieloosheid en coma waren geheel verdwenen. De ademhaling was dan weer normaal, het katarakt of geheel of nagenoeg verdwenen. (Na 2 dagen verblijf in water was van het katarakt geen spoor meer over). In geen enkel opzicht was dan dus de kikker van een normalen te onderscheiden.

Een tweede contrôleproef werd als volgt verricht.

De kikker werd gezet in de hyperisotonische oplossing van RINGER en tevens werd een canule in den dorsalen lymphzak gebonden. Door deze canule werd langzaam water in den lymphzak toegevoerd. Onder deze omstandigheden werden de lichaamsvochten niet hyperisotoniisch, daar het water, dat langs de huid aan den kikker werd onttrokken, weer werd aangevuld langs den lymphzak. Zoo konden de kikkers een week lang blijven leven zonder de hiervoor genoemde symptomen te vertoonen. Zonder de drainage van den lymphdorsaalzak sterft een kikker in de hyperisotonische RINGER binnen  $1\frac{1}{2}$  dag.

II. In plaats van de hyperisotonische RINGER werd een hyperisotonische oplossing van glucose gebruikt (1,38 % oplossing). Hierin vertoonden de kikkers precies hetzelfde beeld.

III. In een derde rij proefnemingen werd vocht aan de kikkers onttrokken door ze in een droge flesch te plaatsen en hierdoor door middel van een waterstraalzuigpomp lucht te zuigen, die tevoren door kalkbuisjes was gestreken. Na  $1\frac{1}{2}$  dag was zulk een kikker dan zoover ingedroogd, dat hij dezelfde symptomen vertoonde als een kikker, die in hyperisotonische vloeistof had gezeten. Ook hier trad volledig herstel in na het terugbrengen in water.

IV. Van uit de vena abdominalis werd in een vierde reeks proeven het bloed verdrongen door hyperisotonische RINGER (met 18 gr. NaCl per L.). Wanneer een kikker gedurende 15 à 20 min. hiermee was doorstroomd traden dezelfde verschijnselen van coma, passiviteit en reactieloosheid op. De ademhaling was dan periodisch (Cheyne-Stokes' ademen) of stond stil. In dit laatste geval was het Cheyne-Stokes' ademen weer terug te verkrijgen door den kikker een tijdje in water te zetten. Wanneer de drainage een 15 à 20 min. geduurd had was er reeds een begin van katarakt aanwezig. Zonder eenige verdere maatregel te nemen nam het katarakt na de drainage in den loop van 10 à 15 min sterk toe.

In deze reeks proeven verdwenen ook alle verschijnselen, wanneer de kikker in water werd overgebracht.

Hier moge een korte beschrijving van een proefneming volgen.

11  $\frac{1}{2}$  uur Kikker wordt van uit de vena abdominalis gedraineerd met hyperisotonische RINGER gedurende 25 minuten. Coma, passiviteit, stilstand van de ademhaling, op den rug gelegd blijft hij liggen, abnormale pootstand wordt niet gecorrigeerd. Katarakt van beide oogen <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Ter contrôle werden na afloop der proefneming de beide lenzen geëxstirpeerd en vergeleken met normale geëxstirpeerde lenzen. De laatste waren helder en doorzichtig, de eerste troebel en opalescent.

Om 1 uur in water geplaatst.

1  $\frac{1}{2}$ . uur Kikker vertoont af en toe één ademhaling.

2 uur Cheyne-Stokes' ademen.

Terwijl de kikker in de flesch met wat water op den rug blijft liggen wordt het aantal ademhalingen per groep en de duur der pauzen gedurende eenigen tijd opgenomen. Ziehier het resultaat:

9 ademhalingen	58 sec. pauze
1 minuut pauze	14 ademhalingen
9 ademhalingen	62 sec. pauze
$\frac{1}{2}$ minuut pauze	11 ademhalingen
5 ademhalingen	45 sec. pauze
40 sec. pauze	13 ademhalingen
11 ademhalingen	40 sec. pauze
70 sec. pauze	20 ademhalingen
11 ademhalingen	62 sec. pauze.

Deze observatie heeft dit voordeel boven de registratie, omdat door de suspensie de ademhaling van den kikker tijdelijk althans dikwijls verandert.

Daarna werden de ademhalingscurven geregistreerd door suspensie van den mondbodem, zooals LANGENDORFF dat voor 't eerst deed. De eerste 8 minuten na de suspensie stond de ademhaling geheel stil. Daarna kwamen de groepen weer te voorschijn. Fig. 3 geeft hiervan eenige weer. De onderste rij werd  $\frac{1}{2}$  uur, de bovenste rij 10 minuten na de suspensie geregistreerd.

Wanneer we de ademhalingscurven van deze groepen vergelijken met de curven der normale ademhaling, dan blijkt het, dat gedurende deze groepen op elke mondbodembeweging één flankenbeweging voorkomt.

Alleen de beide eerste groepen van de bovenste rij zetten in met een afzonderlijke exspiratiebeweging waarop geen mondbodembeweging volgt. Overigens beginnen alle groepen met een exspiratie, zooals blijkt uit de aan-

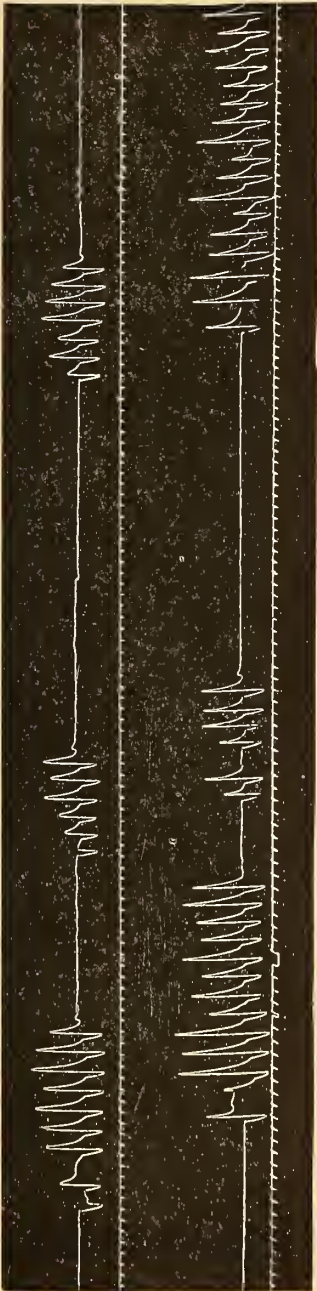


Fig. 3.

vankelijke daling van den hefboom. Gedurende de normale ademhaling vertoonen de kikkers op eenige mondbodembewegingen één flankenbeweging. Tijdens de groepen van het Cheyne-Stokes' ademen komt bijna steeds op elke mondbodembeweging één flankenbeweging voor. Zoo ademt de kikker ook wanneer hij dyspnoësch is.

Wanneer het bloed der kikkers in plaats van door hyperisotonische vloeistof van RINGER door normale isotonische RINGER werd verdrongen dan traden de geschetste verschijnselen niet op. De ademhaling bleef dan normaal, de lens werd niet troebel.

Een nadere bespreking van het katarakt en het Cheyne-Stokes' ademen moge hier nog volgen.

#### *Katarakt.*

Op welke wijze ook de lichaamsvochten der kikkers hyperisotonisch worden gemaakt, steeds treedt het katarakt op. *Het katarakt verdwijnt echter weer, wanneer de osmotische druk der lichaamsvochten weer normaal wordt gemaakt.*

Het ontstaan van het katarakt verloopt vrij langzaam. Wanneer na 15 à 20 min. doorstromen de ademhaling reeds stilstaat begint het pupilvlak nog maar een weinig wazig te worden. Wacht men daarna eenigen tijd, zonder het circulatie-apparaat verder te draineeren dan neemt de troebeling meer en meer toe. Ten slotte neemt men twee verticale evenwijdige witte streepen waar op de lens, waartusschen zich een smalle donkere streep bevindt. Het maakt den indruk dat men 2 witte wallen ziet, waartusschen zich een diepe donkere gracht bevindt. Meestal is de richting verticaal, soms nagenoeg verticaal. Deze verticale lijn zal overeenkomen met de voorste verticale lensnaad, zooals die in Ganpp (*Anatomie des Frosches*) beschreven staat. Van af deze verticale lijn ziet men dikwijls in radiaire richting verloopende witte dunne lijntjes, die overeenkomen met de z.g. spaken van het menschelijke katarakt. Het is duidelijk, dat het ontstaan van dit katarakt bepaald wordt door een gelvorming van de eiwitsolen tengevolge van een verhooging van de zoutconcentratie der lichaamsvochten. Zoodra nu de osmotische druk der lichaamsvochten weer daalt wordt het proces weer omgekeerd. Een andere verklaring van het verschijnsel lijkt mij niet mogelijk te zijn.

Het spreekt wel vanzelf, dat ook elke andere omstandigheid, waardoor gelvorming van eiwitten wordt veroorzaakt, lenskatarakt kan te voorschijn roepen. Het lijkt mij echter niet van belang ontbloot te hebben aangetoond, dat een verhooging van den osmotischen druk der lichaamsvochten alleen reeds katarakt tengevolge kan hebben.

*Cheyne-Stokes' ademen.*

Het periodische ademhalen werd in mijn proefnemingen veroorzaakt door een verhooging van den osmotischen druk der lichaamsvochten. Zoodra deze verhooging niet meer aanwezig was verdween ook het periodische ademhalen. Om nu het ontstaan van het Cheyne-Stokes' ademen verder te kunnen bestudeeren werd het uitdrogen der kikkers in een reeks proefnemingen zoover voortgezet, dat het Cheyne-Stokes' ademen nog niet te voorschijn was gekomen. Daarna werd de mondbodem gesuspendeerd en de kikker in een verwarmd vertrek aan verdere uitdroging bloot gesteld. Dan kwam meestal het Cheyne-Stokes' ademen in den loop van eenige uren langzaam te voorschijn. Gedurende deze proefnemingen werd het duidelijk, dat we naast een periodiciteit van de flankenadembaling een periodiciteit van de pharyngeale ademhaling moeten onderscheiden. In vergevorderde stadia vallen de beide periodiciteiten samen, zoodat dan gedurende de groepen zoowel flanken- als mondbodem-bewegingen voorkomen, terwijl dan in de pauzen de geheele ademhaling stilstaat. Als overgang naar dit volledige Cheyne-Stokes' ademen vinden we een stadium, waarin de groepen gelijk zijn aan die van het volledige Cheyne-Stokes' ademen, maar waarbij in de pauzen de mondbodem-bewegingen blijven voortbestaan. Het blijkt dus, dat de beide wijzen van ademhaling tot op zekere hoogte onafhankelijk van elkaar zijn, zooals troncens ook uit de normale ademhalingscurven blijkt.

Volgens de onderzoekingen van LANGENDORFF komt de flanken-beweging passief tot stand, zonder dat daarbij de borstspieren contraheeren. Indien dit juist is, dan wordt toch de flankenbeweging mogelijk gemaakt door een actief openen van de glottis. Bij het Cheyne-Stokes' ademen wordt dus de periodiciteit van de flanken-beweging bepaald door een periodiciteit van de glottisspieren. Bijna steeds volgt op een openen van de glottis een mondbodem-beweging. Ook dit is weer niet noodzakelijk. De eerste 2 groepen van Fig. 3 zetten in met een exspiratie, die tot stand komt door het openen van de glottis, zonder dat zich daaraan een mondbodem-beweging aansluit.

Nog een enkel woord omtrent de oorzaak van het Cheyne-Stokes' ademen in deze proefnemingen. Zooals ik reeds uiteenzette treedt dit verschijnsel hier op bij een hyperisotonie der lichaamsvochten. Deze hyperisotonie voert ten slotte tot een stilstand der ademhaling. Evenals het katarakt kan ook deze ademhalingsstilstand weer worden opgeheven door een verlaging van den osmotischen druk der lichaamsvochten.

Aan het optreden van den ademhalingsstilstand in hyperisotonische omgeving evenals aan het Cheyne-Stokes' ademen, dat daaraan vooraf gaat, liggen dus evenals aan het optreden van het katarakt veranderingen ten grondslag, die omkeerbaar zijn.

**Natuurkunde.** — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer A. D. FOKKER: „*Over hetgeen in niet-Euclidische ruimten beantwoordt aan een verplaatsing evenwijdig aan zich zelf en over de Riemanniaansche kromtemaat.*”

(Zal in het volgende verslag worden opgenomen.)

Ter uitgave in de Werken der Akademie biedt de Heer H. A. LORENTZ, namens den Heer J. A. SCHOUTEN, het manuscript aan van diens verhandeling: *Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie*”.

De Voorzitter stelt het manuscript in handen van den Heer J. CARDINAAL en zichzelf om daarover in een volgende vergadering rapport uit te brengen.

Voor de bibliotheek der Akademie biedt de Heer G. VAN RIJNBERK ten geschenke aan een exemplaar van:

1°. „*Bijdragen tot de biologie uit het physiologisch Laboratorium der Universiteit te Amsterdam*”. Deel VI (1916—1917).

2°. H. VAN TRIGT: „*De dermatomerie bij de hagedis (Lacerta viridis)*”. (Overdruk uit Nieuwe Verhandelingen van het Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke Wijsbegeerte, 2<sup>e</sup> reeks, Deel VII).

De vergadering wordt gesloten.







# REGISTER.

- AANTREKKING** (De beweging van een stelsel lichamen onder den invloed van hunne onderlinge) behandeld volgens de theorie van EINSTEIN. I 392. II 649.
- Aardkunde.** K. MARTIN: „Over de miocene fauna van het West-Progoegebergte op Java”. 139.
- K. MARTIN: „Over zoogenaamd oligocene versteeningen van Celebes”. 145.
  - L. RUTTEN: „Oude Andesieten” en „Breccies Mioceen” beoosten Buitenzorg.” 670.
  - L. RUTTEN: „Over denudatiesnelheid op Java”. 920.
  - C. E. A. WICHMANN. Aanbieding eener verhandeling: „Die Erdbeben des Indischen Archipels bis zum Jahre 1857”. 1136.
  - Jaarverslag der Geologische Commissie over 1917. 1239.
- Aardmagnetisme.** Mej. ANNIE VAN VLEUTEN: „Over de vraag, of het inwendig magnetisch veld, waaraan de dagelijksche variatie in het aardmagnetisme voor een gedeelte toegeschreven wordt, op geïnduceerde stroomen berust”. 293.
- Mej. ANNIE VAN VLEUTEN: „Bezitten de krachten, die de dagelijksche magnetische variatie veroorzaken, een potentiaal?” 297.
- ACETATEN** (Twee gekristalliseerde, isomere d-fructose-penta). 187.
- ADEMHALINGSBEWEGINGEN** (Over de) bij den kikker. 1412.
- AFMETINGEN** van de ruimte (Welke rol speelt de drietaligheid der) in de hoofdwetten der physica? 105.
- ALKALI** (De invloed van verschillende stoffen op de ontleding van monosen door) en op de inversie van rietsuiker door zoutzuur. II 237. III 526.
- ALKALIMETALEN** (De). 305.
- ALLOKANEELZUUR** (Het dubbelzuur van normaal- en). 1158.
- ALLOTROPIE** (De metastabiliteit onzer metaalwereld als gevolg van) en haar beteekenis voor Chemie, Physika en Techniek. V 581.
- (De) van Kadmium. VI 1075.
- AMIDEN**, (Over de vervangbaarheid, in) van een gealkyleerde anilino-groep door de anilino-groep door verhitting met zontznuraniline. 1085.
- AMPHIOXUS** (Over den Nervus terminalis van den mensch tot). 1517.
- AMYGDALINE** als voedsel voor Fusarium. 30.
- Anatomie.** J. P. VERGOUWEN JR.: „Over de variabiliteit van het aantal renzenpyramidecellen in de HESCHL-winding van den mensch”. 34.
- C. VAN NOORT: „De gehoors- en gezichtsschors bij Madoerëeshersenen”. 92.
  - G. P. FRETTS: „Mendelistische splitsingsverschijnselen bij de erfelijkheid van den hoofdvorm. 367. 946.
  - Aanbieding eener mededeeling door den Heer J. A. J. BARGE: „Probleme im Cranio Vertebraalgebiet”. 772. Verslag hierover 774.

- Anatomie.** H. C. DELSMAN: „Korte geschiedenis van den kop der gewervelde dieren”. 1018.
- L. BOLK: „De topographische verhoudingen der orbitae in jonge en volwassen schedels van den mensch en der menschen”. 1364.
- EUG. DUBOIS: „De betrekking der hoeveelheden van de hersenen, het neuron en zijn deelen tot de lichaamsgrootte”. 1416.
- D. J. HULSHOFF POL: „Experimenteele cerebellair-atactische verschijnselen bij aandoeningen buiten het cerebellum”. 1426.
- J. W. VAN WIJHE: „Over den Nervus terminalis van den mensch tot Amphioxus”. 1517.
- ANDESJETEN (Oude) en Breccies mioceen beoosten Buitenzorg. 670.
- ANILINOGROEP (Over de vervangbaarheid, in amidon, van een gealkyleerde) door de anilino-groep door verhitting met zoutzuuraniline. 1085.
- ANTIPYRETICA (Het laadvermogen van de nevels der). 1250.
- ARCTIDAE (De vleugelteekening der). 894.
- ARGON-STIKSTOFMENGSELS (Over de doorslagspanning van). 502.
- ASSOCIEERENDE STOF (De toestandsvergelijking van een). 404.
- ATAXIE (Cerebellair) als stoornis der evenwichts-sensibiliteit. 1178.
- ATEN (A. H. W.). Over de passiviteit van chroom. 800. II 1185. 3de mededeeling. 1385.
- Een derde zwavelmolekuulsoort. 5de mededeeling 813.
- ATMOSFEER (De halfdaagsche horizontale schommeling der vrije) tot 10 K.M. hoogte, volgens loodsbloodwaarnemingen te Batavia. 75.
- ATMOSFERISCHE CIRCULATIE (De) boven Australazië volgens de loodsbloodwaarnemingen te Batavia verricht. 1529.
- ATOMEN (Opmerkingen over den bouw van electronen en). I 981. 1304.
- AUSTRALAZIË (De atmosferische circulatie boven) volgens de loodsbloodwaarnemingen te Batavia verricht. 1529.
- Bacteriologie.** C. J. C. VAN HOOGENHUYZE: „Over de aetiologie van vlektyphus”. 338.
- BAKHUYZEN (E. F. VAN DE SANDE). Aanbieding eener mededeeling van den Heer C. DE JONG: „Onderzoekingen omtrent de praecessieconstante en de stelselmatige Eigenbewegingen der sterren”. 731.
- In memoriam. 1358.
- BAKTERIËN (De beteekenis van de) der Papilionaceëknolletjes voor de voedsterplant. 1456.
- BALK (Graphische bepaling der overgangsmomenten van een elastisch ondersteunden, statisch onbepaalden). I 908. II 996.
- BARGE (J. A. J.). Aanbieding eener verhandeling „Probleme in Cranio Vertebralgeliet”. 772. Verslag hierover. 774.
- BATAVIA (De halfdaagsche horizontale schommeling der vrije atmosfeer tot 10 K.M. hoogte, volgens loodsbloodwaarnemingen te). 75.
- (De atmosferische circulatie boven Australazië volgens de loodsbloodwaarnemingen te) verricht. 1529.
- BECK (R. TH.), G. MEIJER en A. SMITS. Over den zwarten fosfor. II 268.
- BEMMELLEN (J. F. VAN). Verslag over eene verhandeling van den Heer F. MEUNIER. 133.
- De vleugelteekening der Arctidae. 894.

- BEMMELEN (J. F. VAN)** Verslag over eene verhandeling van Mej. M. A. VAN HERWERDEN. 1138.
- Het primaire karakter der popteekening bij de vlinders. 1543.
- BEMMELEN (W. VAN)**. De atmosferische circulatie boven Australazië volgens de loodsballonwaarnemingen te Batavia verricht. 1529.
- en J. BOEREMA. De halfdaagsche horizontale schommeling der vrije atmosfeer tot 10 KM. hoogte, volgens loodsballonwaarnemingen te Batavia. 75.
- BERTHELOT** (Verklaring van de afwijkingen van de correcties van den waterstof-thermometer tot de absolute schaal van de vergelijking van) door de quanten-theorie. 445.
- BESTRALING** (Het spontaan colloïdaal worden van oplossingen van reukstoffen, uitermate versneld door) met ultraviolet licht. 1510.
- BEWEGING** (Over het verband tusschen hoeveelheid van) en energiestroom. Opmerkingen over den bouw van electronen en atomen. I 981.
- BEIJERINCK (M. W.)**. De beteekenis der bakteriën van de Papilionaceëknolletjes voor de voedsterplant. 1456.
- BIEZENO (C. B.)**. Graphische bepaling der overgangsmomenten van een elastisch ondersteunden, statisch onbepaalden balk. I 908. II 996.
- BINAIBE MENGSELS** (Isothermen van tweeatomige stoffen en hunne). XIX. Eene voorloopige bepaling omtrent het kritisch punt van waterstof. 124.
- (Isothermen van éénatomige stoffen en hunne). XIX. Dampspanning van neon tusschen het kookpunt en het kritische punt. 494.
- BINNENLANDSCHE Zaken** (Minister van). Zie MINISTER van Binnenlandsche Zaken.
- BLAAUW (A. H)** en Mej. H. J. FOLMER. Onderzoekingen over de radioactiviteit van het meertje te Rockanje. 614.
- BLOEDSDRUKVERHOOGING** (Over den invloed van lobeline op de) door nicotine. 560.
- BOEKE (J.)**. Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. P. VERGOUWEN JR.: „Over de variabiliteit van het aantal reuzenpyramidecellen in de HESCHL-winding van den mensch”. 34.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer C. VAN NOORT: „De gehoors- en gezichtsschors bij Madoereeshersenen”. 92.
- Verslag over eene verhandeling van den Heer J. A. J. BARGE. 774.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer H. C. DELSMAN: „Korte geschiedenis van den kop der gewervelde dieren”. 1018.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. J. L. DE NEVE: „Het gedrag der megakaryocyten in de milt van de jonge kat”. 1034.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer G. C. HERINGA: „Het sensibele periphere zenuwstelsel”. 1282.
- BOEGESCHENKEN** (Aanbieding van). 130. 445. 772. 978. 1136. 1596.
- BOER (S DE)**. De prikkelgeleiding door de kamer van kikkerharten. 422.
- Zijn contractiliteit en geleidingsvermogen twee gescheiden eigenschappen bij de skeletspieren en het hart?”. 535.
- Over het kamerelectrogram van het kikkerhart. 820.
- Over den invloed der verhooging van osmotischen druk der lichaamsvochten op verschillende celsubstraten. 1363. 1590.

- BOEREMA (J.)** en **W. VAN BEMMELEN**. De halfdaagsche horizontale schommeling der vrije atmosfeer tot 10 KM. hoogte, volgens loodsballonwaarnemingen te Batavia. 75.
- BÖESEKEN (J.)**. De beteekenis van complexe boorzuurverbindingen voor de bepaling van de configuratie van organische verbindingen. 3.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer **H. I. WATERMAN**: „Amygdaline als voedsel voor *Fusarium*.” 30.
  - Aanbieding eener mededeeling van den Heer **H. I. WATERMAN**: „De invloed van verschillende stoffen op de ontleding van monosen door alkali en op de inversie van rietsuiker door zoutzuur.” II 237, III 526.
  - Aanbieding eener mededeeling van den Heer **N. H. SIEWERTSZ VAN REESEMA**: „Het gebruik van de thermozuil van **Dr. W. M. MOLL** bij absolute metingen.” 519.
  - Aanbieding eener mededeeling van de Heeren **W. REINDERS** en **L. HAMBURGER**: „Ultramicroscopisch onderzoek van zeer dunne metaalneerslagen door verdamping in hoog vacuum verkregen.” II. 595.
- BÖESEKEN (J.)** en **H. W. HOFSTEDE**. Waarnemingen omtrent de hydreeering onder invloed van colloïdale katalysatoren en de verklaring van dit proces.” 211.
- BÖESEKEN (J.)** en **Chr. VAN LOON**. Over hydrindeen-1-2-diolen. 1268.
- BOIS (H. E. J. G. DU)**. Bekrchtiging zijner benoeming tot gewoon lid. 132.
- Dankzegging voor zijne benoeming. 132.
- BOLK (L.)**. Verslag over eene verhandeling van den Heer **J. A. J. BARGE**. 774.
- Verslag over een aanvraag om rijkssubsidie van **Prof. G. JELGERSMA**. 1362.
  - De topographische verhoudingen der orbitae in jonge en volwassen schedels van den mensch en der menschen. 1364.
- BOORZUURVERBINDINGEN** (De beteekenis van complexe) voor de bepaling van de configuratie van organische verbindingen. 3.
- BRAUN** (Toetsing der wet van). 1533.
- BRINKMAN (R.)** en **H. J. HAMBURGER**. Experimenteele onderzoekingen over de permeabiliteit der nieren voor glucose. 477.
- BROUWER (E.)** en **H. J. HAMBURGER**. Over den invloed van  $H_2O_2$  op de slingerbewegingen van den geïsoleerden darm. 791.
- BROUWER (L. E. J.)**. Aanbieding eener mededeeling van den Heer **B. P. HAALMEYER**: „Over elementairopervlakken der derde orde.” 58. 2de mededeeling 320. 3de mededeeling 755. 4de mededeeling 1274.
- Aanbieding eener verhandeling: „Die Elemente der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten begründet.” 978.
- BROWN'sche beweging** (Een paradox in de theorie der). 768.
- (Over de). 1005.
  - (De theorie der) en de statistische mechanica. 1227.
  - (Over de theorie der). 1319.
- BRUIN (G. DE)**. Over de vervangbaarheid, in amidien, van een gealkyleerde anilino-groep door de anilino-groep door verhitting met zoutzuuraniline. 1085.
- BRUINBROOD** en **wittebrood** (Dierproeven met regeerings-). 1466.

- BRUINS (H. R.)** en **ERNST COHEN**. De metastabiliteit onzer metaalwereld als gevolg van allotropie en haar beteekenis voor Chemie, Physika en Techniek. V 581.
- De thermodynamica der Normaalementen. X. Het kalomel-normaalement van **LIPSCOMB** en **HULETT**. III. 587.
- BRUYN (G. A. LOBRY DE)** en **A. SMITS**. Over het electrochemisch gedrag van nikkel. 270.
- BÜCHNER (E. H.)**. De kooklijn van het systeem: hexaan-nitrobenzol. 388.
- BUIGINGSBEELD** (Over de wisselingen der intensiteit in het) van een groot aantal onregelmatig verspreide openingen. 772.
- (Over de wisselingen der intensiteit in het) van een groot aantal onregelmatig verspreide openingen of lichaampjes. 1120.
- BUITENZORG** (Dankbetuiging van den Directeur van 's Lands Plantentuin te) voor de betoonde belangstelling op 18 Mei 1917. 2.
- „Oude Andesieten” en „Breccieus Mioceen” beoosten). 670.
- BURGER (H. C.)**. Over de verdamping van een cirkelvormig vloeistofoppervlak. 1057.
- BURGERS (J. M.)**. Het spektrum van een roterend molekuul volgens de theorie der quanta. 115.
- Gedwongen trillingen van mechanische systemen, wier bewegingen door quantenvoorwaarden zijn gebonden. 702.
- BURGERS (J. M.)** en **P. G. CATH**. Vergelijking van den platina- en den goudweerstandsthermometer met den heliumthermomèter. 445.
- CAESIUMION** en hartswerking. 776.
- CARDINAAL (J.)**. Aanbieding eener mededeeling van den Heer **W. A. WYTHOFF**: „Een betrekking tusschen de polytopen der  $C_{600}$ -familie.” 300.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer **J. A. SCHOUTEN**: „Over de direkte analyses der lineaire grootheden bij de rotationeele groep in drie en vier grondvariabelen”. 445. 566.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer **W. A. VERSLUYS**: „Over satellietpunten op krommen, gegeven door de vergelijkingen  $x = at^p$ ,  $y = bt^q$ .” 748.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer **C. B. BIEZENO**: „Graphische bepaling der overgangsmomenten van een elastisch ondersteunden, statisch onbepaalden balk.” I. 908. II. 996.
- CATH (P. G.)**. Verklaring van de afwijkingen van de correcties van den waterstofthermometer tot de absolute schaal van de vergelijking van **BERTHELOT** door de quantentheorie. 445.
- Dampspanningen van zuurstof en stikstof. 445.
- Dampspanningen van neon. 445.
- Vergelijking van den helium-, argon-, neon-, en stikstof-zuurstofthermometer met waterstofthermometer. Viriaalcoëfficiënten van deze gassen beneden.  $0^{\circ}C$  445.
- CATH (P. G.)** en **J. M. BURGERS**. Vergelijking van den platina- en den goudweerstandsthermometer met den heliumthermometer. 445.

- CATH (P. G.), C. A. CROMMELIN en H. KAMERLINGH ONNES. Isothermen van tweeatomige stoffen en hunne binaire mengsels. XIX 124.
- CATH (P. G.) en H. KAMERLINGH ONNES. Over het meten van lage temperaturen. XXVII. Dampspanningen van waterstof in de nabijheid van het kookpunt en tusschen het kookpunt en de kritische temperatuur. 437.
- Isothermen van éénatomige stoffen en hunne binaire mengsels. XIX. Dampspanning van neon tusschen het kookpunt en het kritische punt. 494.
- CATH (P. G.), H. KAMERLINGH ONNES en J. M. BURGERS. Over het meten van lage temperaturen. XXII. Vergelijking van den platina- en den goudweerstandsthermometer met den heliumthermometer. 588.
- CELEBES (Over zoogenaamd oligocene versteeningen van). 145.
- CELSUBSTRATEN (Over den invloed der verhooging van osmotischen druk der lichaamsvochten op verschillende). 1363. 1590.
- CENTRAAL ZENUWSTELSEI (Atlas voor het). Aanvraag van den Heer C. WINKLER om onder de auspiciën der Akademie te mogen uitgeven een gedeelte van den-. 978.
- CEREBELLAIR-ATACTISCHE verschijnselen (Experimenteele) bij aandoeningen buiten het cerebellum. 1426.
- CHAMP GRAVIQUE (Sur les équations différentielles du). 101.
- CHROOM (Over de passiviteit van). 1e mededeeling. 800. 2e mededeeling. 1185. 3e mededeeling. 1385.
- COHEN (ERNST). Aanbieding eener mededeeling van den Heer H. R. KRUYT en Mej. J. E. M. VAN DER MADE: „Bijdrage tot de kennis van het verfproces”. I 247.
- De allotropie van Kadmium. VI 1075.
- Voorstel om maatregelen te beramen voor het stichten van een Rijk's Laboratorium voor het onderzoek van meetinstrumenten. 1234.
- COHEN (ERNST) en H. R. BRUINS. De metastabiliteit onzer metaalwereld als gevolg van Allotropie en haar beteekenis voor Chemie, Physika en Techniek. V. 581.
- De thermodynamica der normaalelementen. X. Het kalomel-Normaalelement van LIPSCOMB en HULETT. III 587.
- COHEN (ERNST) en H. R. KRUYT: „Het warmte-effekt bij de vorming van mengkristallen”. 1084.
- COHEN (ERNST) en A. L. TH. MOESVELD. Invloed van druk op de oplosbaarheid van stoffen. 134. II 864. III 1241. IV 1553.
- COHEN (ERNST) en J. J. WOLTERS. De thermodynamica der normaalelementen. XI. De temperatuurformule van het WESTON-element en het minimum van oplosbaarheid van  $\text{Cd SO}_4 \cdot \frac{8}{3} \text{H}_2\text{O}$ . 795
- COHESION (The true value of  $a$  of VAN DER WAALS' equation and the nature of). 133. Verslag hierover. 449.
- CONTRACTILITEIT (Zijn) en geleidingsvermogen twee gescheiden eigenschappen bij de skeletspieren en het hart. 535.
- CORPUT (J. G. VAN DER). De primitieve deeler van  $x^k - 1$  661.
- CRANIO Vertebralgebied (Probleme in). 772. Verslag hierover 776.
- CROMMELIN (C. A.), P. G. CATH en H. KAMERLINGH ONNES. Isothermen van tweeatomige stoffen en hunne binaire mengsels. XIX 124.

CUMARINE (Inwerking van zonlicht op). 906.

DAMPSPANNING van neon tusschen het kookpunt en het kritische punt. 494.

DAMPSPANNINGEN van neon en stikstof. 445.

— van zuurstof en stikstof. 445.

— van waterstof in de nabijheid van het kookpunt en tusschen het kookpunt en de kritische temperatuur. 437. Vervolg 490.

DANZIG (Naturforschende Gesellschaft te). Uitnoodiging tot bijwoning der feestelijke zitting ter gelegenheid van het 175-jarig bestaan. 980.

DAPHNIA PALEX (Untersuchungen über die parthenogenetische und geschlechtliche Fortpflanzung von). 1136. Verslag hierover. 1138.

DARM (Over den invloed van  $H_2O_2$  op de slingerbewegingen van den geïsoleerden). 791.

DARMETRACTEN, (Over den aard van het bestanddeel van) dat een prikkelenden invloed op de maag-darmbewegingen uitoefent. 741.

DEELER VAN  $x^k$  — I. (De primitieve). 661.

DELSMAN (H. C) Korte geschiedenis van den kop der gewervelde dieren. 1018.

DENJOY (ARNAUD). Sur une propriété des fonctions de variable complexe. 1063.

DENUDATIFSNELHEID (Over) op Java. 920.

**Dierkunde.** Aanbieding eener verhandeling van den Heer FERN. MEUNIER: „Sur quelques insectes des lignites de l'Aquitanie de Rott, Sept. Montagnes (Prusse rhénane)” 2. Verslag. 133.

— C. J. VAN DER HORST: „De voorhersenen der Synbranchidae.” 17.

— J. F. VAN BEMMELEN: „De vleugelteekening der Aretiidae.” 894.

— Aanbieding eener verhandeling van Mej. M. A. VAN HERWERDEN: „Untersuchungen über die parthenogenetische und geschlechtliche Fortpflanzung von Daphnia palex” 1136.

— Jaarverslag van het Zoologisch-Insulindefonds. 1240.

— J. F. VAN BEMMELEN: „Het primaire karakter der poppteekening bij de vlinders.” 1543.

DIERPROEVEN met regeerings-bruinbrood en wittebrood. 1466.

DIFFRACTIEVERSCHIJNSEL (Over het) voortgebracht door een groot aantal onregelmatig verspreide openingen of ondoorschijnende lichaampjes.” 1109.

— (Over het) bij een groot aantal onregelmatig verstrooide openingen of lichaampjes. 772.

(DIAETHYLEEN DIAMINE-ZOUTEN (Over enkele isomere, complexe CIS- en TRANS-) van het kobalt en over het Triäthyleendiamine-zink-chloride. 199.

DISSYMMETRIE (Onderzoekingen over PASTEUR's beginsel omtrent het verband tusschen moleculaire en kristallonomische). III. 152. IV. 170.

DONDER (TH. DE). Sur les équations différentielles du champ gravifique. 101.

DOORSLAGSPANNING (Over de) van argon-stikstofmengsels. 502.

DRIETALLIGHEID (Welke rol speelt de) der afmetingen van de ruimte in de hoofdwetten der physica? 105.

DROSTE (J.) en H. A. LORENTZ De beweging van een stelsel lichamen onder den invloed van hunne onderlinge aantrekking, behandeld volgens de theorie van EINSTEIN. I. 392. II 649.

DRUK (Invloed van) op de oplosbaarheid van stoffen. 134. II. 864. III. 1241.

- DUBBELZUUR (Het) van normaal- en allokaneelzuur. 1158.
- DUBOIS (EUG.). De betrekking der hoeveelheden van de hersenen, het neuron en zijn deelen tot de lichaamsgrootte. 1416.
- EHRENFEST (P.). Een paradox in de theorie der BROWN'sche beweging. 768.
- EHRENFEST-AFANASSJEWA (T.). De bepaaldheid van makroskopische processen en de kinetische theorie. 1088.
- Eene onbepaaldheid bij de interpretatie van de entropie als log. W. 1437.
- EIGENBEWEGINGEN (Onderzoekingen omtrent de praecessieconstante en de stelselmatige der sterren. 731.
- EINSTEIN (De beweging van een stelsel lichamen onder den invloed van hunne onderlinge aantrekking, behandeld volgens de theorie van). I 392. II 649.
- (Iets over de massa van een stoffelijk stelsel volgens de gravitatie theorie van). 1093.
- (Een en ander over de energie van het zwaartekrachtsveld volgens de theorie van). 1201.
- (Berekening voor eenige bijzondere gevallen volgens de gravitatie theorie van). 1577.
- EINSTEIN's gravitatie theorie (Nadere opmerkingen omtrent de oplossingen der veldvergelijkingen van). 1472.
- ELECTRISCHE ontladingen (Over licht-emissie door gassen en mengsels van gassen bij). 1069.
- ELECTRISCHE PRIKKELING (Het gedrag van het uraanhart tegenover) volgens proeven van den Heer M. DEN BOER. 12.
- ELECTROCHEMISCH GEDRAG (Over het) der metalen. 1398.
- (Over het) van nikkel. 270.
- ELECTROMETER (Een nieuwe) in 't bijzonder ingericht voor radio-actieve onderzoekingen. 636.
- ELECTRONEN en atomen (Opmerkingen over den bouw van). I 981. 1304.
- ELEMENTAIROPPERVLAKKEN (Over) der derde orde. 1ste mededeeling. 58. 2de mededeeling. 320. 3de mededeeling. 755. 4de mededeeling. 1274.
- ELEMENTEN (Over de grondwaarden der grootheden  $b$  en  $V\alpha$  bij verschillende) in verband met het periodiek systeem. V De elementen van de Koolstof- en Titanium-groepen 45.
- ENERGIESTROOM (Over het verband tusschen hoeveelheid van beweging en). Opmerkingen over den bouw van electronen en atomen. I 981.
- ENTROPIE (Eene onbepaaldheid bij de interpretatie van de) als log W 1437.
- EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES (Sur les) du champ gravifique. 101.
- ERDBEBEN (Die) des Indischen Archipels bis zum Jahre 1857. 1136.
- ERFELIJKHEID van den hoofdvorm (Mendelistische splitsingsverschijnselen bij de). 367. 946.
- ERRATA. 1235. 1353.
- EUCLIDISCHE RUIMTEN (Over hetgeen in niet-) beantwoordt aan een verplaatsing evenwijdig aan zichzelf en over de Riemanniaansche kromtemaat. 1596.
- EVENWICHT-SENSIBILITEIT (Cerebellair ataxie als stoornis der). 1178.
- EVENWICHT-ZINTUIG (Ons). 966.
- EVENWICHTEN (In-, mono- en divariante). XVIII 782.
- EYKMAN (C.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer C. J. C. VAN HOOGENHUYZE: „Over de aetiologie van vlektyphus”. 338.



- EYKMAN (C.) en D. J. HULSHOFF POL. Dierproeven met Regeerings-bruinbrood en wittebrood. 1466.
- FAUNA (Over de miocene) van het West Progoergebte op Java. 139.
- FERRI-MALONZUUR (Komplexe zouten van het). 190.
- FLUORESCËINE (De verschuiving der radioactieve evenwichten onder den invloed van). 555.
- FOKKER (A. D.). Over hetgeen in niet-Euclidische ruimten beantwoordt aan een verplaatsing evenwijdig aan zichzelf en over de Riemanniaansche kromtemaat. 1596.
- FOLMER (MEJ. H. J.). Een nieuwe electrometer in 't bijzonder voor radio-actieve onderzoekingen. 636.
- FOLMER (MEJ. H. J.) en A. H. BLAAUW. Onderzoekingen over de radioactiviteit van het meertje te Rockanje. 614.
- FONCTIONS de variable complexe (Sur une propriété des). 1063.
- FOSFOR (Over den zwarten). II. 268.
- FRETS (G. P.). Mendelistische splitsingsverschijnselen bij de erfelijkheid van den hoofdvorm. 367. 946.
- FUSARIUM (Amygdaline als voedsel voor). 30.
- GASSEN (Viriaalcoëfficiënten van) beneden 0°C. 445.
- De inwendige wrijving van vloeibaar gemaakte). X. De wrijvingscoëfficiënt van vloeibare waterstof. 961.
- (Over licht-emissie door) en mengsels van gassen bij elektrische ontladingen 1069.
- GEHEUGEN (Vergelijkend onderzoek van eenige met behulp der natuurlijke en experimenteele leerwijze bij de studie van het) verkregen resultaten. 351.
- GEHOORSSCHORS (De gezichts- en) bij Madoereeshersenen. 92.
- GELEIDINGSVERMOGEN (De meting van het electrisch) van vloeistoffen bij hogere temperaturen. 16.
- (Zijn contractiliteit en) twee verschillende eigenschappen bij de skeletspieren en het hart?. 535.
- GEOLOGISCHE COMMISSIE (Jaarverslag der) over 1917. 1239.
- GEWERVELDE DIEREN (Korte geschiedenis van den kop der). 1018.
- GEZICHTS- en gehoorsschors (De) bij Madoereeshersenen. 92.
- GILLIS (J.) en A. SMITS. Over melksuiker. I. 280. II. 540.
- GLUCOSE (Experimenteele onderzoekingen over de permeabiliteit der nieren voor). 477.
- GOUDWEERSTANDSTHERMOMETER (Vergelijking van den platina- en den) met den heliumthermometer. 445. 688.
- GRAVITATIETHEORIE (Nadere opmerkingen omtrent de oplossingen der veldvergelijkingen van EINSTEIN's). 1472.
- van EINSTEIN (Iets over de massa van een stoffelijk stelsel volgens de). 1093.
- (Berekening voor eenige bijzondere gevallen volgens de). 1577.
- GROLL (J. TEMMINCK). De invloed van neutrale zouten op de werking van Urease). 710.
- GRONDVARIABLEN (Over de direkte analyses der lineaire grootheden bij de rotationeele groep in drie en vier). 445. 566.

- GROOTHEDEN *b* en  $\sqrt{a}$  (Over de grondwaarden der) bij verschillende elementen, in verband met het periodiek systeem. V. De elementen van de Koolstof- en Titaniumgroepen. 45. VI. De alkalimetalen. 305.
- H A A L M E I J E R (B. P.). Over elementairoppervlakken der derde orde. 1ste mededeeling. 58. 2de mededeeling. 320. 3de mededeeling. 755. 4de mededeeling. 1274.
- H A A S (W. J. D E). Over de diffractieverschijnselen bij een groot aantal onregelmatig verstrooide openingen of lichaampjes. 772. 1109.
- H A G A (H.). Aanbieding eener mededeeling van Mej. H. J. FOLMER en den Heer A. H. BLAAUW: „Onderzoekingen over de radioactiviteit van het meertje te Rockanje.” 614.  
— Aanbieding eener mededeeling van Mej. H. J. FOLMER: „Een nieuwe electrometer in 't bijzonder ingericht voor radio-actieve onderzoekingen.” 636.
- H A M B U R G E R (H. J.) en R. BRINKMAN. Experimenteële onderzoekingen over de permeabiliteit der nieren voor glucose. 477.
- H A M B U R G E R (H. J.) en E. BROUWER. Over den invloed van  $H_2O_2$  op de slingerbewegingen van den geïsoleerden darm. 791.
- H A M B U R G E R (L.). Over licht-emissie door gassen en mengsels van gassen bij electriche ontladingen. 1069.
- H A M B U R G E R (L.) en G. HOLST. Over een methode voor het bepalen van spectrale intensiteiten langs fotografischen weg. 497.
- H A R T (Zijn contractiliteit en geleidingsvermogen twee gescheiden eigenschappen bij de skeletspieren en het). 535.
- H A R T S W E R K I N G (Caesiumion en). 776.
- HELIUM, argon-, neon- en stikstof-zuurstofthermometer met den waterstofthermometer. Viriaalcoëfficiënten van deze gassen beneden 0°C. 445.
- HELIUMTHERMOMETER (Vergelijking van den platina- en den goudweerstandsthermometer met den). 445. 688.
- HELMERT (F. R.). Bericht van overlijden. 448.
- HERIDITAIRE AFWIJKINGEN (Een hypothese omtrent het onderling verband tusschen sommige gecombineerd voorkomende). 39.
- HERINGA (G. C.). Het sensibele periphere zenuwstelsel. 1232.
- HERSENEN (Verzoek om advies van Z. Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken over een subsidie-aanvraag van Prof. G. JELGERSMA voor de uitgave van een fotografischen atlas der menschelijke). 1238. Verslag hierover. 1362.  
— (De betrekking der hoeveelheden van de), het neuron en zijn deelen tot de lichaamsgrootte. 1416.
- HERWERDEN (M. A. VAN). Aanbieding eener verhandeling: „Untersuchungen über die parthenogenetische und geschlechtliche Fortpflanzung von *Daphnia palex*.” 1136. Verslag hierover. 1138.
- HESCHL-WINDING (Over de variabiliteit van het aantal reuzenpyramidecellen in de van den mensch. 34.

- HEUX (J. W. LE). Over den aard van het bestanddeel van darmextracten, dat een prikkelenden invloed op de maag-darmbewegingen uitoefent." 741.
- HEXAAN-nitrobenzol (De kooklijn van het systeem). 388.
- HOFSTEDDE (H. W.) en J. BÖESEKEN. Waarnemingen omtrent de hydreeing onder invloed van colloïdale katalysatoren en de verklaring van dit proces. 211.
- HOGEWIND (F.) en H. ZWAARDEMAKER. Het spontaan colloïdaal worden van oplossingen van reukstoffen, uitermate versneld door bestraling met ultraviolet licht. 1510.
- HOLLEMAN (A. F.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer E. H. BÜCHNER: „De kooklijn van het systeem: hexaan-nitrobenzol". 388.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. H. W. ATEN: „Over de passiviteit van Chrom". Iste mededeeling, 800. II. 1185. III. 1385.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. H. W. ATEN: „Een derde zwavelmolekuulsoort". 5de mededeeling. 813.
- HOLST (G.) en L. HAMBURGER. Over een methode voor het bepalen van spectrale intensiteiten langs fotografischen weg. 497.
- HOLST (G.) en A. N. KOOPMANS. Over de doorslagspanning van argon-stikstofmengsels. 502.
- HOLST (G.) en J. SCHARP DE VISSER. De lichtsterkte van het zwarte lichaam en het mechanisch equivalent van het licht. 513.
- HOND (Het huidschud- of huidrimpelreflex bij den). 875.
- HOOFDVORM (Mendelistische splitsingsverschijnselen bij de erfelijkheid van den). 367. 946.
- HOOGENHUYZE (C. J. C. VAN). Over de aetiologie van vlektyphus. 338.
- HOOGWERFF (S.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. P. TREUB: „Over de verzeeping van vetten". II. 253.
- Aanbieding eener mededeeling van de Heeren A. SMITS, G. MEYER en R. TH. BECK: „Over den zwarten fosfor". II. 268.
- Aanbieding eener mededeeling van de Heeren A. SMITS en C. A. LOBRY DE BRUYN: „Over het electro-chemisch gedrag van nikkel". 270.
- Aanbieding eener mededeeling van de Heeren A. SMITS en J. GILLIS: „Over melksuiker". I. 280. II. 540.
- HOOGWERFF-FONDS (Inzending der Statuten van het). 1238.
- HORST (C. J. VAN DER). De voorhersenen der Synbranchidae. 17
- HOZUMI (DR NOBUSHIGE) (Bericht van de Imperial Academy te Tokyo dat benoemd is tot Voorzitter van het Bestuur. 1138.
- HUIDSCHUD- (Het) of huidrimpelreflex bij den hond. 875.
- HULETT (Het kalomel normaalelement van LIPSCOMB en). III. 587.
- HULSHOFF POL (D. J.). Zie POL (D. J. HULSHOFF).
- HYDREEING (Waarnemingen omtrent de) onder invloed van colloïdale katalysatoren en de verklaring van dit proces. 211.
- HYDRINDEEN, 1, 2, diolen (Over). 1263.
- INTEGRALen (Over hyperelliptische) van het geslacht  $p = 2$ , die door eene substitutie van de orde  $r = 4$  herleid kunnen worden. 463.

- INTENSITEIT (Over de wisselingen der) in het buigingsbeeld van een groot aantal onregelmatig verspreide openingen. 772. 1120.
- INTENSITEITEN (Over een methode voor het bepalen van spectrale) langs fotografischen weg. 497.
- INVOLUTIES (Kubische) van de eerste klasse. 1256.
- ISOTHERMEN van tweeatomige stoffen en hunne binaire mengsels. XIX. Eene voorloopige bepaling van het kritische punt van waterstof. 124.  
— van éénatomige stoffen en hunne binaire mengsels. XIX. Dampspanning van neon tusschen het kookpunt en het kritische punt). 494.
- JAEGER (F. M.). Onderzoekingen over PASTEUR's beginsel omtrent het verband tusschen moleculaire en kristallonische dissymmetrie. III. 152. IV. 170.  
— Twee gekristalliseerde, isomere d-fructose-penta-acetaten. 187.
- JAEGER (F. M.) en B. KAPMA. De meting van het electricch geleidingsvermogen van vloeistoffen bij hogere temperaturen. 16.
- JAEGER (F. M.) en J. KAHN. Over enkele isomere, komplexe cis- en TRANS-Diaethyleendiaminezouten van het kobalt en over het Triaethyleen diamine-zinkchloride. 199.
- JAEGER (F. M.) en R. T. A. MEES. Komplexe zouten van het ferri-malonzuur. 190.
- JAVA (Over denudatiesnelheid op). 920.
- JELGERSMA (G.). Verzoek om advies van Z. Ex. den Minister van Binnenlandsche Zaken over een aanvraag om rijkssubsidie van den Heer (-) voor de uitgave van een fotografischen atlas der menschelijke hersenen. 1238. Verslag hierover 1362.
- JONG (A. W. K. DE). De structuur der truxillzuren. 548.  
— Inwerking van zonlicht op cumarine. 906.  
— Het dubbelzuur van normaal- en allokaneelzuur. 1153.
- JONG (C. DE). Onderzoekingen omtrent de praecessieconstante en de stelselmatige eigenbewegingen der sterren. 731.
- JULIUS (W. H.). Aanbieding eener mededeeling van de Heeren W. J. H. MOLL en L. S. ORNSTEIN: „Bijdrage tot de studie der vloeibare kristallen. III. Smelt- en stolverschijnselen van para azoxy-anisol”. 683. IV. 1442.  
— Aanbieding eener mededeeling van den Heer H. C. BURGER: „Over de verdamping van een cirkelvormig vloeistofoppervlak”. 1057.
- JUPITER (Schets eener nieuwe theorie der satellieten van). 1374. II. 1476.
- KADMIUM (De allotropie van) VI. 1075.
- KAHN (J) en F. M. JAEGER. Over enkele isomere, komplexe cis- en TRANS-Diaethyleendiamine-zouten van het kobalt en over het Triaethyleendiamine-zinkchloride. 199.
- KAISER (Mej. L.). Over het refractaire stadium bij den kikergastrocnemius. 1162.
- KALOMEL-Normaalelement (Het) van LIPSCOMB en HULETT. III. 587.
- KAMERELECTROGRAM (Over het) van het kikkerhart. 820.
- KAMERLINGH ONNES (H.). Zie ONNES (H. KAMERLINGH).
- KAPMA (B) en F. M. JAEGER. De meting van het electricch geleidingsvermogen van vloeistoffen bij hogere temperaturen. 16.

- KAPTEYN (J. C.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer W. J. A. SCHOUTEN: „Over de parallax van eenige sterrenhoopen”. 1147. 2de mededeeling. 1293.
- KAPTEYN (W.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer ARNAUD DENJOY: „Sur une propriété des fonctions de variable complexe”. 1063.
- KAT (Het gedrag der megakaryocyten in de milt van de jongs). 1034.
- KATALYSATOREN (Waarnemingen omtrent de hydreering onder invloed van colloïdale) en de verklaring van dit proces. 211
- KEESOM (W. H.) en H. KAMERLINGH ONNES. De soortelijke warmte bij lage temperaturen. IV. Metingen betreffende de soortelijke warmte van vloeibare waterstof en betreffende de smeltwarmte van waterstof. 956.
- KIKUCHI (Baron DAIROKU) — Bericht van overlijden van. — 863.
- KIKKER (Over de ademhalingsbewegingen bij den). 1412.
- KIKKERGASTROCNEMIUS (Over het refractaire stadium bij den). 1162.
- KIKKERHART (Over het kamerelectrogram van het). 820.
- KIKKERHARTEN (De prikkelgeleiding door de kamer van). 422.
- KINETISCHE THEORIE (De bepaaldheid van makroskopische processen en de). 1088.
- KLEYN (A. DE) en W. STORM VAN LEEUWEN. Over vestibulaire oogreflexen. I. Over de oorzaak van het ontstaan van den calorischen nystagmus. 381.
- KLUYVER (J. C.). Over hyperelliptische integralen van het geslacht  $p = 2$ , die door eene substitutie van de orde  $r = 4$  herleid kunnen worden. 463.  
— Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. G. VAN DER CORPUT: „De primitieve deeler van  $x^k - 1$ ”. 661.
- KOOKLIJN (De) van het systeem: hexaan-nitrobenzol. 388.
- KOOLSTOF- en Titaniumgroepen (De elementen van de). 45.
- KOOPMANS (A. N.) en G. HOLST. Over de doorslagspanning van argon-stikstofmengsels. 502.
- KOP der gewervelde dieren (Korte geschiedenis van den). 1018.
- KORTEWEG (D. J.). Bekrchtiging zijner benoeming tot Onder-Voorzitter der Afdeling. 1455.
- KRISTALLEN (De trage en de zware massa van) en radioactieve stoffen. 451.  
— (Bijdrage tot de studie der vloeibare). III. Smelt- en stolverschijnselen bij paraoxy-anisol. 683. IV. Een thermisch effect van het magneetveld. 1442.
- KRITISCHE PUNT (Eene voorloopige bepaling van het) van waterstof. 124.
- KROMMEN (Over satellietpunten op), gegeven door de vergelijkingen  $x = at^p$ ,  $y = bt^q$ . 748.
- KROMMING (Over de) der ruimte. 222.  
— der ruimte (De relativiteit der traagheid en de). 790.
- KROMTEMAAT (Over hetgeen in niet-Enclidische ruimten beantwoordt aan een verplaatsing evenwijdig aan zichzelf en over de Riemanniaansche). 1596.
- KRUYT (H. R.) en ERNST COHEN, Het warmte-effect bij de vorming van mengkristallen. 1084.
- KRUYT (H. R.) en Mej. J. E. M. VAN DER MADE. Bijdrage tot de kennis van het verfproces. I. 247.
- KUBISCHE involuties van de eerste klasse. 1256.
- KUENEN (J. P.). Verslag over eene verhandeling van Prof. A. P. MATHEWS. 449.

KUENEN (J. P.). Aanbieding eener mededeeling van Mevrouw T. EHRENFEST-AFANASSJEW: „De bepaaldheid van makroskopische processen en de kinetische theorie”. 1088.

— Aanbieding eener mededeeling van Mevr. T. EHRENFEST-AFANASSJEW: „Eene onbepaaldheid bij de interpretatie van de entropie als log W”. 1437.

LAADVERMOGEN (Het) van de nevels der Antipyretica. 1250.

LAAR (J. J. VAN). Over de grondwaarden der grootheden  $b$  en  $\sqrt{a}$  bij verschillende elementen, in verband met het periodiek systeem. V. De elementen van de koolstof- en Titaniumgroepen. 45. VI. De alkalimetalen. 305.

— Over het verloop der waarden van  $a$  en  $b$  bij waterstof bij verschillende temperaturen en volumina. 844. II. 1209. III. 1305. IV. 1445.

LEEUWEN (W. STORM VAN) en A. DE KLEYN. Over vestibulaire oogreflexen. I. Over de oorzaak van het ontstaan van den calorischen nystagmus. 381.

LEEUWEN (W. STORM VAN) en C. DE LIND VAN WIJNGAARDEN. Over den invloed van lobeline op de bloedsdrukverhooging door nicotine. 560.

LELY (C.) gelukgewenscht met de aanneming der wet tot drooglegging der Zuiderzee. 1362.

LICHAAMPJES (Over de diffractieverschijnselen bij een groot aantal onregelmatig verstrooide openingen of). 772.

— (Over het diffractieverschijnsel, voortgebracht door een groot aantal onregelmatig verspreide openingen of ondoorschijnende). 1109.

— (Over de wisselingen der intensiteit in het buigingsbeeld van een groot aantal onregelmatig verspreide openingen of). 1120.

LICHAAMSGROOTTE (De betrekking der hoeveelheden van de hersenen, het neuron en zijn deelen tot de). 1416.

LICHAAMSVUCHTEN (Over den invloed der verhooging van osmotischen druk der) op verschillende celsubstraten. 1363.

LICHAMEN (De beweging van een stelsel) onder den invloed van hunne onderlinge aantrekking, behandeld volgens de theorie van EINSTEIN I. 392. II. 649.

LICHT-EMISSIE (Over) door gassen en mengsels van gassen bij electriche ontladingen. 1069.

LICHTSTERKTE (De) van het zwarte lichaam en het mechanisch equivalent van het licht. 513.

LIND VAN WIJNGAARDEN (C. DE) en W. STORM VAN LEEUWEN. Over den invloed van lobeline op de bloedsdrukverhooging door nicotine. 560.

LINEAIRE GROOTHEDEN (Over de directe analyses der) bij de rotationeele groep in drie en vier grondvariabelen. 445. 566.

LIPSCOMB en HULETT (Het kalomel-normaalelement van). III. 587.

LOBELINE (Over den invloed van) op de bloedsdrukverhooging door nicotine. 560.

LOBRY DE BRUYN (C. A.). Zie BRUYN (C. A. LOBRY DE).

LOODSBALLONWAARNEMINGEN te Batavia (De halfdaagsche horizontale schommeling der vrije atmosfeer tot 10 KM. hoogte volgens). 75.

— (De atmospherische circulatie boven Australazië volgens de). 1529.

LOON (CHR. VAN) en J. BÖESEKEN. Over hydrindeen-1.2-diolen. 1268.

LORENTZ (H. A.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. J. VAN LAAR: „Over de grondwaarden der grootheden  $b$  en  $\sqrt{a}$  bij verschillende elementen, in verband met het periodiek systeem. V. 45. VI. 305.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer TH. DE DONDER: „Sur les équations différentielles du champ gravifique.” 101.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer P. EHRENFEST: „Welke rol speelt de drietaligheid der afmetingen van de ruimte in de hoofdwetten der physica?” 105.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. M. BURGERS: „Het spektrum van een roteerend molekuul volgens de theorie der quanta.” 115.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. M. BURGERS: „Gedwongen trillingen van mechanische systemen, wier bewegingen door quantenvoorwaarden zijn gebonden.” 702.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer P. EHRENFEST: „Een paradox in de theorie der Brownsche beweging.” 768.

— Over de wisselingen der intensiteit in het buigingsbeeld van een groot aantal onregelmatig verspreide openingen. 772.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer W. J. DE HAAS: „Over de diffractieverschijnselen bij een groot aantal onregelmatig verstrooide openingen of lichaampjes.” 772. 1109.

— Het verband tusschen hoeveelheid van beweging en energiestroom.

Opmerkingen over den bouw van electronen en atomen. I. 981. 1304.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer L. S. ORNSTEIN: „Over de Brownsche beweging”. 905.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer G. NORDSTRÖM: „Iets over de massa van een stoffelijk stelsel volgens de graviteitstheorie van EINSTEIN”. 1093.

— Gelukwensch bij gelegenheid van zijn 40-jarig professoraat. 1234.

— Bekrachtiging zijner benoeming tot Voorzitter der Afdeeling. 1455.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. J. VAN LAAR: „Over het verloop der waarden van  $a$  en  $b$  bij waterstof bij verschillende temperaturen en volumina.” 844 II. 1209. III 1305. IV. 1445.

— Over de wisselingen der intensiteit in het buigingsbeeld van een groot aantal onregelmatig verspreide openingen of lichaampjes. 1120.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer G. NORDSTRÖM: „Een en ander over de energie van het zwaartekrachtsveld volgens de theorie van EINSTEIN”. 1201.

— Aanbieding eener mededeeling van de Heeren L. S. ORNSTEIN en F. ZERNIKE: „De theorie der Brownsche beweging en de statistische mechanica”. 1227.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer G. NORDSTRÖM: „Berekening voor eenige bijzondere gevallen volgens de gravitatietheorie van EINSTEIN”. 1577.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. D. FOKKER: „Over hetgeen in niet-Euclidische ruimten beantwoordt aan een verplaatsing evenwijdig aan zichzelf en over de Riemanniaansche kromtemaat”. 1596.

LORENTZ (H. A.) en J. DROSTE. De beweging van een stelsel lichamen onder den invloed van hunne onderlinge aantrekking, behandeld volgens de theorie van EINSTEIN. I. 392. II 649.

- MAAG-DARMBEWEGINGEN (Over den aard van het bestanddeel van darmextracten, dat een prikkelenden invloed op de) uitoeft. 741.
- M A D E (Mej. J. E. M. V A N D E R) en H. R. KRUYT. Bijdrage tot de kennis van het verproces I. 247.
- MADOERESHENSENEN (De gehoors- en gezichtsschors bij). 92.
- MAGNETISCHE VARIATIE (Bezitten de krachten, die de dagelijksche) veroorzaken, een potentiaal? 297.
- MAGNEETVELD (Een thermisch effect van het). 1292. 1442.
- MAGNETISCH VELD, (Over de vraag of het inwendig) waaraan de dagelijksche variatie van het aardmagnetisme voor een gedeelte toegeschreven wordt, op geïnduceerde stroomen berust. 293.
- MAKROSKOPISCHE PROCESSEN (De bepaaldheid van) en de kinetische theorie. 1088.
- M A R T I N (K.). Over de miocene fauna van het West-Progoebergte op Java. 139.  
— Over zoogenaamd oligocene versteeningen van Celebes 145.
- M A T H E W S (A L B. P.). Aanbieding eener verhandeling: „The true value of  $a$  of VAN DER WAALS' equation and the nature of cohesion”. 133. Verslag hierover 449.
- Mechanica. W. DE SITTER: „De relativiteit der traagheid en de kromming der ruimte”. 790.  
— W. DE SITTER: „Nadere opmerkingen omtrent de oplossingen der veldvergelijkingen van EINSTEIN's gravitatietheorie”. 1472.
- MECHANICA (De theorie der BROWN'sche beweging en de statistische). 1227.
- MECHANISCH EQUIVALENT (De lichtsterkte van het zwarte lichaam en het) van het licht. 513.
- M E E S (R. T. A.). Komplexe zouten van het ferri-malonzuur. 190.
- MEETINSTRUMENTEN (Voorstel van den Heer E. COHEN om pogingen aan te wenden tot het stichten van een Rijks Laboratorium voor het onderzoek van). 1234. Benoeming eener Commissie voor advies. 1238.
- MEGAKARYOCYTEN (Het gedrag der) in de milt van de jonge kat. 1034.
- MELKSUIKER (Over). I. 280. II. 540.
- M E N D E L I S T I S C H E Splitsingsverschijnselen bij de erfelijkheid van den hoofdvorm. 367. 946.
- MENGENLEHRE (Die Elemente der) unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten begründet. 978.
- MENGRISTALLEN (Het warmte-effect bij de vorming van). 1084.
- MENSCH (Over de variabiliteit van het aantal reuzenpyramidecellen in de HESCHL-winding van den). 34.  
— De topografische verhoudingen der orbitae in jonge en volwassen schedels van den) en der menschen. 1364.  
— (Over den nervus terminalis van den) tot Amphioxus. 1517.
- METAALNEERSLAGEN (Ultramicroscopisch onderzoek van zeer dunne) door verdamping in hoog vacuum verkregen II. 595.
- METAALWERELD (De metastabiliteit onzer) als gevolg van allotropie en haar beteekenis voor Chemie, Physika en Techniek. V. 581.



- METALEN** (Over het electrochemisch gedrag der). 1398.
- METASTABILITEIT** (De) onzer metaalwereld als gevolg van allotropie en haar beteekenis voor Chemie, Physika en Techniek. V. 581.
- METEN** (Over het) van lage temperaturen. XXVII. Dampspanningen van waterstof in de nabijheid van het kookpunt en tusschen het kookpunt en de kritische temperatuur. 437. Vervolg. 490. XXII. Vergelijking van den platina- en den goudweerstandsthermometer met den heliumthermometer. 688.
- Meteorologie.** W. VAN BEMMELEN en J. BOEREMA: „De halfdaagsche horizontale schommeling der vrije atmosfeer tot 10 K.M. hoogte volgens loodsballonwaarnemingen te Batavia”. 75.
- W. VAN BEMMELEN: „De atmospherische circulatie boven Australazië volgens de loodsballonwaarnemingen te Batavia verricht”. 1529.
- METINGEN** (Het gebruik van de thermozuil van Dr. W. M. MOLL bij absolute). 519.
- betreffende de soortelijke warmte van vaste waterstof en betreffende de smeltwaarde van waterstof. 956.
- MEUNIER (FERN.)**. Aanbieding eener verhandeling: „Sur quelques insectes des lignites de l'Aquitaniën de Rott, Sept Montagnes (Prusse rhénaue)”. 2. Verslag hierover. 133.
- MEYER (G.)**, R. TH. BECK en A. SMITS. Over den zwarten fosfor. II. 268.
- Mikrobiologie.** M. W. BEIJERINCK: „De beteekenis van de bakterien der Papilionaceenknolletjes voor de voedsterplant”. 1456.
- MILT** (Het gedrag der megakaryocyten in de) van de jonge kat. 1034.
- MINISTER** van Binnenlandsche Zaken. Bericht dat de jaarlijksche rijkssubsidie is verhoogd met f 2500. 2.
- Bericht dat H. M. de Koningin de benoeming heeft bekrachtigd van den Heer H. E. J. G. DU BOIS tot gewoon lid. 132.
- Verzoek om bericht en raad omtrent een aanvraag om subsidie van de firma Martinus Nijhoff, voor de uitgave van het werk „Ornithologia Neerlandica”. 774.
- Verzoek om advies betreffende een verzoek om subsidie van Dr. H. NORT, ter ondersteuning zijner astronomische onderzoekingen. 1138.
- Verzoek om advies voor een aanvraag om rijkssubsidie van Prof. G. JELGERSMA voor de uitgave van een fotografischen atlas der menschelijke hersenen. 1238. Verslag hierover. 1362.
- Bericht dat H. M. de Koningin heeft bekrachtigd de benoeming van den Heer H. A. LORENTZ tot Voorzitter en van den Heer D. J. KORTEWEG tot Onder-Voorzitter der Afdeeling. 1455.
- MIOCEEN** (Breccies) (Oude Andesieten en) beoosten Buitenzorg. 670.
- MOESVELD (A. L. TH.)** en ERNST COHEN. Invloed van druk op de oplosbaarheid van stoffen. 134. II. 864. III. 1241. IV. 1553.
- MOLEKUU**L (Het spektrum van een roteerend) volgens de theorie der quanta. 115.
- MOLL (W. J. H.)** en L. S. ORNSTEIN. Bijdrage tot de studie der vloeibare kristallen. III. Smelt- en stolverschijnselen bij para-azoxy-anisol. 683. IV. Een thermisch effect van het magneetveld. 1292. 1442.
- MOLL (W. M.)** (Het gebruik van de thermozuil van) bij absolute metingen. 519.

- MONOSEN (De invloed van verschillende stoffen op de ontleding van) door alkali en op de inversie van rietsuiker door zoutzuur. II. 237. III. 526.
- Natuurkunde.** J. J. VAN LAAR: „Over de grondwaarden der grootheden  $\delta$  en  $\sqrt{a}$  bij verschillende elementen, in verband met het periodiek systeem. V. De elementen der Koolstof- en Titaniumgroepen”. 45. VI. De alkalimetalen. 305.
- TH DE DONDER: „Sur les équations différentielles du champ gravifique”. 101.
- P. EHRENFEST: „Welke rol speelt de drietaligheid der afmetingen van de ruimte in de hoofdwetten der physica?”. 105.
- J. M. BURGERS: „Het spektrum van een roterend molekuul volgens de theorie der quanta”. 115.
- H. KAMERLINGH ONNES, C. A. CROMMELIN en P. G. CATH: „Isothermen van tweeatomige stoffen en hunne binaire mengsels”. XIX. 124.
- Aanbieding eener verhandeling van den Heer ALB. P. MATHEWS: „The true value of  $a$  of VAN DER WAALS' equation and the nature of cohesion”. 133. Verslag hierover 449.
- H. A. LORENTZ en J. DROSTE: „De beweging van een stelsel lichamen onder den invloed van hunne onderlinge aantrekking, behandeld volgens de theorie van EINSTEIN”. I. 392. II. 649.
- J. E. VERSCHAFFELT: „De toestandsvergelijking van een associeerende stof”. 404.
- P. G. CATH en H. KAMERLINGH ONNES: „Over het meten van lage temperaturen. XXVII. Dampspanningen van waterstof in de nabijheid van het kookpunt en tusschen het kookpunt en de kritische temperatuur.” 437. Vervolg. 490.
- P. G. CATH: „Verklaring van de afwijkingen van de correcties van den waterstofthermometer tot de absolute schaal van de vergelijking van BERTHELOT door de quantentheorie”. 445.
- P. G. CATH: „Dampspanningen van zuurstof en stikstof”. 445.
- P. G. CATH: „Dampspanningen van neon”. 445.
- P. G. CATH: „Vergelijking van den helium-, argon-, neon- en stikstof-zuurstofthermometer met den waterstofthermometer. Viriaalcoëfficiënten van deze gassen beneden 0 °C”. 445.
- P. G. CATH en J. M. BURGERS: „Vergelijking van den platina- en den goudweerstandsthermometer met den heliumthermometer”. 445.
- P. ZEEMAN: „Enkele proeven over de zwaartekracht. De trage en de zware massa van kristallen en radioactieve stoffen.” 451.
- P. G. CATH en H. KAMERLINGH ONNES: „Isothermen van éénatomige stoffen en hunne binaire mengsels”. XIX. Dampspanningen van neon tusschen het kookpunt en het kritische punt”. 494.
- Mej. H. J. FOLMER en A. H. BLAAUW: „Onderzoekingen over de radioactiviteit van het meertje te Rockanje. 614.
- Mej. H. J. FOLMER: „Een nieuwe electrometer in 't bijzonder ingericht voor radio-actieve onderzoekingen”. 636.
- W. J. H. MOLL en L. S. ORNSTEIN: „Bijdrage tot de studie der vloeibare kristallen. III. Smelt- en stolverschijnselen bij para-azoxy-anisol”. 683. IV. Een thermisch effect van het magneetveld. 1292. 1442.

- Natuurkunde.** P. G. CATH, J. M. BURGERS en H. KAMERLINGH ONNES: „Over het meten van lage temperaturen. XXII. Vergelijking van den platina- en den goudweerstandsthermometer met den heliumthermometer”. 688.
- J. M. BURGERS: „Gedwongen trillingen van mechanische systemen, wier bewegingen door quantenvoorwaarden zijn gebonden. 702.
- P. EHRENFEST: „Een paradox in de theorie der BROWN'sche beweging”. 768.
- H. A. LORENTZ: „Over de wisselingen der intensiteit in het buigingsbeeld van een groot aantal onregelmatig verspreide openingen”. 772.
- W. J. DE HAAS: „Over de diffractieverschijnselen bij een groot aantal onregelmatig verstrooide openingen of lichaampjes”. 772.
- W. H. KEESOM en H. KAMERLINGH ONNES: „De soortelijke warmte bij lage temperaturen. IV. Metingen betreffende de soortelijke warmte van vloeibare waterstof.” 956.
- H. A. LORENTZ: „Het verband tusschen hoeveelheid van beweging en energiestroom. Opmerkingen over den bouw van electronen en atomen.” I. 981. 1304.
- L. S. ORNSTEIN: „Over de BROWN'sche beweging”. 1005.
- Mevr. T. EHRENFEST-AFANASSJEW: „De bepaaldheid van makroskopische processen en de kinetische theorie”. 1088.
- G. HOLST en L. HAMBURGER: „Over een methode voor het bepalen van spectrale intensiteiten langs fotografischen weg”. 497.
- G. HOLST en A. N. KOOPMANS: „Over de doorslagspanning van argon-stikstofmengsels”. 502.
- G. HOLST en J. SCHARP DE VISSER: „De lichtsterkte van het zwarte lichaam en het mechanisch equivalent van het licht”. 513.
- J. E. VERSCHAFFELT: „De inwendige wrijving van vloeibaar gemaakte gassen. X. De wrijvingscoëfficiënt van vloeibare waterstof. 961.
- H. C. BURGER: „Over de verdamping van een cirkelvormig vloeistofoppervlak”. 1057.
- L. HAMBURGER: „Over licht-emissie door gassen en mengsels van gassen bij elektrische ontladingen”. 1069.
- G. NORDSTRÖM: „Iets over de massa van een stoffelijk stelsel volgens de gravitatie-theorie van EINSTEIN”. 1093.
- W. J. DE HAAS: „Over het diffractieverschijnsel, voortgebracht door een groot aantal onregelmatig verspreide openingen of ondoorschijnende lichaampjes”. 1109.
- H. A. LORENTZ: „Over de wisselingen der intensiteit in het buigingsbeeld van een groot aantal onregelmatig verspreide openingen of lichaampjes”. 1120.
- G. NORDSTRÖM: „Een en ander over de energie van het zwaartekrachtsveld volgens de theorie van EINSTEIN”. 1201.
- J. J. VAN LAAR: „Over het verloop der waarden van  $a$  en  $b$  bij waterstof bij verschillende temperaturen en volumina”. I. 844. II. 1209. III. 1305. IV. 1445.
- L. S. ORNSTEIN en F. ZERNIKE: „De theorie der BROWN'sche beweging en de statistische mechanica”. 1227.
- J. D. VAN DER WAALS JR.: „Over de theorie der BROWN'sche beweging”. 1319.
- S. WEBER: „Het warmtegeleidingsvermogen van neon”. 1338.
- Mevr. T. EHRENFEST-AFANASSJEW: „Eene onbepaaldheid bij interpretatie van de entropie als  $\log W$ .” 1437.

- Natuurkunde.** G. NORDSTRÖM: „Berekening van eenige bijzondere gevallen volgens de gravitatie-theorie van EINSTEIN. 1577.
- A. D. FOKKER: „Over hetgeen in niet-Euclidische ruimten beantwoordt aan een verplaatsing evenwijdig aan zichzelf en over de Riemanniaansche kromtemaat”. 1596.
- NEON** (Dampspanningen van). 445.
- (Dampspanning van) tusschen het kookpunt en het kritische punt. 494.
  - (Het warmtegeleidingsvermogen van). 1338.
- NERVUS TERMINALIS** (Over den) van den mensch tot Amphioxus 1517.
- Neurobiologie.** N. VOORHOEVE: „Een hypothese omtrent het onderling verband tusschen sommige gecombineerd voorkomende hereditaire afwijkingen”. 39.
- NEURON** (De betrekking der hoeveelheden van de hersenen, het) en zijn deelen tot de lichaamsgrootte. 1416.
- NEVE** (J. J. L. DE). Het gedrag der megakaryocyten in de milt van de jonge kat. 1034.
- NEVELS** (Het laadvermogen van de) der Antipyretica. 1250.
- NICOTINE** (Over den invloed van lobeline op de bloedsdrukyerhooging door). 560.
- NIEREN** (Experimentele onderzoekingen over de permeabiliteit der) voor glucose. 477.
- NIEUWENHUYSE** (P.). Bijdrage tot de pathologische histologie van dwarsgestreept spierweefsel. 1047.
- NIKKEL** (Over het electro-chemisch gedrag van). 270.
- NITROBENZOL** (De kooklijn van het systeem: hexaan—). 388.
- NORDSTRÖM** (G.). Iets over de massa van een stoffelijk stelsel volgens de gravitatie-theorie van EINSTEIN. 1093.
- Een en ander over de energie van het zwaartekrachtsveld volgens de theorie van EINSTEIN. 1201.
  - Berekening voor eenige bijzondere gevallen volgens de gravitatie-theorie van EINSTEIN. 1577.
- NORMAAL- EN ALLOKANEELZUUR** (Het dubbelzuur van). 1158.
- NORMAALELEMENTEN** (De thermodynamica der). X. Het Kalomel-normaalement van LIPSCOMB en HULETT. III. 587.
- XI. De temperatuurformule van het WESTON-element en het minimum van oplosbaarheid van  $\text{CdSO}_4 \cdot \frac{8}{3} \text{H}_2\text{O}$ . 795.
- NOORT** (C. VAN). De gehoors- en gezichtsschors bij Madoereeshersenen. 92.
- NORT** (H.) — Verzoek om advies van Z. Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken over een subsidie-aanvraag van Dr. — voor zijne astronomische onderzoekingen. 1138.
- NULSTELSELS** in het vlak. 1142.
- welke door twee lineaire stralencongruenties worden bepaald. 1492.
  - (Lineaire) in het platte vlak. 1485.
- NIJHOFF** (MARTINUS) — Verzoek om advies van den Minister van Binnenlandsche Zaken over een aanvraag om subsidie van de firma — voor de uitgave van het werk „Ornithologia Neerlandica”. 774.
- NYSTAGMUS** (Over de oorzaak van het ontstaan van den calorischen). 381.
- ONNES** (H. KAMERLINGH). Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. E. VERSCHAFFELT: „De toestandsvergelijking van een associeerende stof”. 404.

- ONNES (H. KAMERLINGH). Aanbieding eener mededeeling van den Heer P. G. CATH: „Verklaring van de afwijkingen van de correcties van den waterstofthermometer tot de absolute schaal van de vergelijking van BERTHELOT door de quantentheorie”. 445.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer P. G. CATH: „Dampspanningen van zuurstof en stikstof”. 445.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer P. G. CATH: „Vergelijking van den helium-, argon-, neon- en stikstof-zuurstofthermometer met den waterstofthermometer. Viriaalcoëfficiënten van deze gassen beneden 0 °C.” 445.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer P. G. CATH: „Dampspanningen van neon”. 445.
- Aanbieding eener mededeeling van de Heeren P. G. CATH en J. M. BURGERS: „Vergelijking van den platina en den goudweerstandsthermometer met den heliumthermometer”. 445.
- Verslag over een verhandeling van Prof. A. P. MATHEWS. 449.
- Aanbieding eener mededeeling van de Heeren G. HOLST en I. HAMBURGER: „Over een methode voor het bepalen van spectrale intensiteiten langs fotografischen weg”. 497.
- Aanbieding eener mededeeling van de Heeren G. HOLST en A. N. KOOPMANS: „Over de doorslagspanning van argon-stikstofmengsels”. 502.
- Aanbieding eener mededeeling van de Heeren G. HOLST en J. SCHARP DE VISSER: „De lichtsterkte van het zwarte lichaam en het mechanisch equivalent van het licht”. 513.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. E. VERSCHAFFELT: „De inwendige wrijving van vloeibaar gemaakte gassen.” X. „De wrijvingscoëfficiënt van vloeibare waterstof”. 961.”
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer I. HAMBURGER: „Over licht-emissie door gassen en mengsels van gassen bij elektrische ontladingen”. 1069.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer S. WEBER: „Het warmtegeleidingsvermogen van neon”. 1338.
- ONNES (H. KAMERLINGH) en P. G. CATH. Over het meten van lage temperaturen. XXVII. Dampspanningen van waterstof in de nabijheid van het kookpunt en tusschen het kookpunt en de kritische temperatuur. 437. Vervolg 490.
- Isothermen van eenatomige stoffen en hunne binaire mengsels. XIX. Dampspanning van neon tusschen het kookpunt en het kritische punt. 494.
- ONNES (H. KAMERLINGH), P. G. CATH en J. M. BURGERS. Over het meten van lage temperaturen. XXII. Vergelijking van den platina- en den goudweerstandsthermometer met den heliumthermometer. 688.
- ONNES (H. KAMERLINGH), C. A. CROMMELIN en P. G. CATH. Isothermen van tweatomige stoffen en hunne binaire mengsels. XIX. 124.
- ONNES (H. KAMERLINGH) en W. H. KEESOM. De soortelijke warmte bij lage temperaturen. IV. Metingen betreffende de soortelijke warmte van vaste waterstof en betreffende de smeltwarmte van waterstof. 956.
- OOGREFLEXEN (Over vestibulaire). I. Over de oorzaak van het ontstaan van den calorischen nystagmus. 381.

- OPENINGEN (Over de wisselingen der intensiteit in het buigingsbeeld van een groot aantal onregelmatig verspreide). 772. 1120.
- (Over de diffractieverschijnselen bij een groot aantal onregelmatig verstrooide) of lichaampjes. 772.
- (Over het diffractieverschijnsel, voortgebracht door een groot aantal onregelmatig verspreide openingen of ondoorschijnende lichaampjes). 1109.
- OPLOSBAARHEID (Invloed van drnk op de) van stoffen. 134. II. 864. III. 1241. IV. 1553.
- (De temperatuurformule van het WESTON-element en het minimum van) van  $\text{Cd SO}_4 \cdot \frac{8}{3} \text{H}_2 \text{O}$ . 795.
- OPLOSSINGSPROCES (Bepaling der fiktieve volumeverandering bij het). 864.
- ORBITAE (De topographische verhoudingen der) in jonge en volwassen schedels van den mensch en der menschen. 1364.
- ORGANISCHE verbindingen (De beteekenis van complexe boorzuurverbindingen voor de bepaling van de configuratie van). 3.
- ORNITHOLOGIA NEERLANDICA (Verzoek om advies van den Minister van Binnenlandsche Zaken over een aanvraag om subsidie van de firma MARTINUS NIJHOFF voor de uitgave van). 774.
- ORNSTEIN (L. s.). Over de BROWN'sche beweging. 1005.
- ORNSTEIN (L. s.) en W. J. H. MOLL. Bijdrage tot de studie der vloeibare kristallen. III. Smelt- en stolverschijnselen bij para-azoxy-anisol. 683. IV. Een thermisch effect van het magneetveld. 1442.
- ORNSTEIN (L. s.) en F. ZERNIKE. De theorie der BROWN'sche beweging en de statistische mechanica. 1227.
- OSMOTISCHEN DRUK (Over den invloed der verhooging van) der lichaamsvochten op verschillende celsubstraten. 1363. 1590.
- OVERGANGSMOMENTEN (Graphische bepaling der) van een elastisch ondersteunden statisch onbepaalden balk. I. 908. II. 996.
- Palaeontologie.** Aanbieding eener verhandeling van den Heer F. MEUNIER: „Sur quelques insectes des lignites de l'Aquitaniën de Rott, Sept. Montagnes (Prusse rhénane)”. 2. Verslag hierover. 133.
- PANNEKOEK (A.). De oorsprong van de Saros. 717.
- PAPILIONACEËNKOLLETJES (De beteekenis van de bakteriën der) voor de voedsterplant. 1456.
- PARA-AZOXY-ANISOL (Smelt- en stolverschijnselen bij). 683.
- PARALLAX (Over de) van eenige sterrenhoopen. 1147. 2de mededeeling. 1293.
- PASSIVITEIT van chroom (De). 1ste mededeeling. 800. 2de mededeeling. 1185. 3de mededeeling. 1385.
- PASTEUR'S BEGINSEL (Onderzoekingen over) omtrent het verband tusschen moleculaire en kristallonomische dissymmetrie. III. 152. IV. 170.
- PEKELHARING (C. A.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. W. LE HEUX: „Over den aard van het bestanddeel van darmextracten, dat een prikkelenden invloed op de maag-darmbewegingen uitoefent”. 741.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer H. VAN TRIGT: „Bijdrage tot de physiologie der zoetwatersponzen (Spongillidae)”. 931.

- PEKELHARING (C. A.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer P. NIEUWENHUYSE: „Bijdrage tot de pathologische histologie van dwarsgestreept spierweefsel”. 1047.
- Verslag over eene verhandeling van Mej. M. A. VAN HERWERDEN. 1138.
- PERIODIEK SYSTEEM (Over de grondwaarden der grootheden  $b$  en  $\sqrt{a}$  bij verschillende elementen, in verband met het). V De elementen der Koolstof en Titaniumgroepen. 45. VI. De alkalimetalen. 305.
- PERMEABILITEIT (Experimenteele onderzoekingen over de) der nieren voor glucose. 477.
- Physiologie. W. STORM VAN LEEUWEN en C. DE LIND VAN WIJNGAARDEN: „Over den invloed van lobeliue op de bloedsdrukverhooging door nicotine”. 560.
- J. TEMMINCK GROLL: „De invloed van neutrale zouten op de werking van urease”. 710.
- H. ZWAARDEMAKER: „Caesiumion en hartswerking”. 776.
- J. J. L. DE NEVE: „Het gedrag der megakaryocyten in de milt van de jonge kat”. 1034.
- H. ZWAARDEMAKER: „Het gedrag van het uraanhart tegenover electriche prikkeling, volgens proeven van den Heer M. DEN BOER. 12.
- A. DE KLEYN en W. STORM VAN LEEUWEN: „Over vestibulaire oogreflexen. I. Over de oorzaak van het ontstaan van den calorischen nystagmus”. 381.
- S. DE BOER: „Over de prikkelgeleiding door de kamer van kikkerharten”. 422.
- H. J. HAMBURGER en R. BRINKMAN: „Experimenteele onderzoekingen over de permeabiliteit der nieren voor glucose”. 477.
- S. DE BOER: „Zijn contractiliteit en geleidingsvermogen twee gesecheiden eigenschappen bij de skeletspieren en het hart?”. 535.
- H. ZWAARDEMAKER: „De vershuiving der radioactieve evenwichten onder den invloed van fluoresceïne”. 555.
- J. W. LE HEUX: „Over den aard van het bestanddeel van darmextracten, dat een prikkelenden invloed op de maag-darmbewegingen uitoefent”. 741.
- H. J. HAMBURGER en E. BROUWER: „Over den invloed van  $H_2O_2$  op de slingerbewegingen van den geïsoleerden darm”. 791.
- S. DE BOER: „Over het kamereleetrogram van het kikkerhart”. 820.
- G. VAN RIJNBEEK: „Het huidsehud- of huidrimpelreflex bij den hond”. 875.
- H. VAN TRIGT: „Bijdrage tot de physiologie der zoetwatersponzen (Spongillidae)”. 931.
- D. J. HULSHOFF POL: „Ons evenwicht-zintuig”. 966.
- P. NIEUWENHUYSE: „Bijdrage tot de pathologische histologie van dwarsgestreept spierweefsel”. 1047.
- Mej. L. KAISER: „Over het refractaire stadium bij den kikkergastrocnemius”. 1162.
- D. J. HULSHOFF POL: „Cerebellair ataxie als stoornis der evenwicht-sensibiliteit”. 1178.
- H. ZWAARDEMAKER en ZEEHUIZEN: „Het laadvermogen van de nevels der Antipyretica”. 1250.
- G. C. HERINGA: „Het sensibele periphere zenuwstelsel”. 1282.
- S. DE BOER: „Over den invloed der verhooging van osmotischen druk der lichaamsvochten op verschillende celsubstraten”. 1363.
- V. WILLEM: „Over de ademhalingsbewegingen bij den kikker”. 1412.

- Physiologie. C. EYKMAN en D. J. HULSHOFF POL: „Dierproeven met Regeerings-bruinbrood en wittebrood”. 1466.
- H. ZWAARDEMAKER en F. HOGEWIND: „Het spontaan colloidaal worden van oplossingen van reukstoffen, uitermate versneld door bestraling met ultraviolet licht”. 1510.
- S. DE BOER: „Over den invloed der verhooging van osmotischen druk der lichaamsvochten op verschillende celsubstraten”. 1590.
- PLATINA- en den goudweerstandsthermometer (Vergelijking van den) met den heliumthermometer. 445. 688.
- POL (D. J. HULSHOFF). Ons evenwicht-zintuig. 966.
- Cerebellair ataxie als stoornis der evenwicht-sensibiliteit. 1178.
- Experimenteete cerebellair-atactische verschijnselen bij aandoeningen buiten het cerebellum. 1426.
- POL (D. J. HULSHOFF) en C. EYKMAN. Dierproeven met Regeerings-bruinbrood en wittebrood. 1466.
- POLYTOPEN (Een betrekking tusschen de) der  $C_{600}$ -familie. 300.
- POPTEEKENING (Het primaire karakter der) bij de vlinders. 1543.
- POTENTIAAL (Bezitten de krachten, die de dagelijksche magnetische variatie veroorzaken, een)? 297.
- PRAECESSIECONSTANTE (Onderzoekingen omtrent de) en de stelselmatige eigenbewegingen der sterren. 731.
- PRIKKELGELEIDING (Over de) door de kamer van kikkerharten. 422.
- PROGO-GEBERGTE (Over de miocene fauna van het West-) op Java 139.
- Psychologie (Experimenteete). F. ROELS: „Vergelijkend onderzoek van eenige met behulp der natuurlijke en experimenteete leerwijze bij de studie van het geheugen verkregen resultaten.” 351
- E. D. WIERSMA: „De psychologie van verwardheidstoestanden”. 1495.
- QUANTA (Het spectrum van een roteerend molekuul volgens de theorie der). 115.
- QUANTENTHEORIE (Verklaring van de afwijkingen van de correcties van den waterstofthermometer tot de absolute schaal van de vergelijking van BERTHELOT tot de). 445.
- QUANTENVOORWAARDEN (Gedwongen trillingen van mechanische systemen, wier bewegingen door) zijn gebonden. 702.
- RADIO-ACTIEVE evenwichten (De verschuiving der) onder den invloed van fluoresceïne. 555.
- onderzoekingen (Een nieuwe electrometer voor). 636.
- stoffen (De trage en de zware massa van kristallen en). 451.
- RADIO-ACTIVITEIT (Onderzoekingen over de) van het meertje te Rockanje. 614.
- REESEMA (N. H. SIEWERTSZ VAN). Het gebruik van de thermoziuil van Dr. W. M. MOLL bij absolute metingen. 519.
- REGENBOGEN (Mej. A.) en N. SCHOORL. Herziening der tabellen voor de sterkte van spiritus. 837.
- REINDERS (W.) en L. HAMBURGER. Ultramicroscopisch onderzoek van zeer dunne metaalneerslagen door verdamping in hoog vacuum verkregen. 595.



- RELATIVITÄTSTHEORIE (Die direkte Analysis zur neueren). 1596.
- REUKSTOFFEN (Het spontaan colloidaal worden van oplossingen van), uitermate versneld door bestraling met ultraviolet licht. 1510.
- REUZENPYRAMIDE-CELLEN (Over de variabiliteit van het aantal) in de HESCHL-winding van den mensch. 34.
- RIEMANNJAANSCH E kromtemaat (Over hetgeen in niet-Euclidische ruimten beantwoordt aan een verplaatsing evenwijdig aan zichzelf en over de). 1596.
- RIETSUIKER (De invloed van verschillende stoffen op de ontleding van monosen door alkali en op de inversie van) door zoutzuur. II. 237. III 526.
- ROCKANJE (Onderzoekingen over de radio-activiteit van het meertje te). 614.
- ROELS (F.). Vergelijkend onderzoek van eenige met behulp der natuurlijke en experimenteele leerwijze bij de studie van het geheugen verkregen resultaten. 351.
- ROMBURGH (P. VAN). Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. W. K. DE JONG: „De structuur der truxillzuren”. 548.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer N. SCHOORL en Mej. A. REGENBOGEN: „Herziening der tabellen voor de sterkte van spiritus”. 837.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. W. K. DE JONG: „Inwerking van zonlicht op Cumarine”. 906.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer G. DE BRUIN: „Over de vangbaarheid, in amidon, van een gealkyleerde anilino-groep door de alinogroep door verhitting met zoutzuuraniline”. 1085.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. W. K. DE JONG: „Het dubbelzuur van normaal- en allokaneelzuur”. 1158.
- ROTATIONEELE GROEP (Over de direkte analyses der lineaire grootheden bij de) in drie en vier grondvariabelen. 566.
- RUIMTE (De relativiteit der traagheid en de kromming der). 790.
- (Over de kromming der). 222.
- RUTTEN (L.). „Oude Andesieten” en „Breccies Mioceen” beoosten Buitenzorg. 670.
- Over denudatiesnelheid op Java. 920.
- RIJNBEEK (G. VAN). Aanbieding eener mededeeling van den Heer S. DE BOER: „Over de prikkelgeleiding door de kamer van kikkerharten”. 422.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer S. DE BOER: „Zijn contractiliteit en geleidingsvermogen twee gescheiden eigenschappen bij de skeletspieren en het hart”. 535.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. TEMMINCK GROLL: „De invloed van neutrale zouten op de werking van Urease”. 710.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer S. DE BOER: „Over het kamer-electrogram van het kikkerhart”. 820.
- G. VAN RIJNBEEK: „Het huidschud- of huidrimpelreflex bij den hond”. 875.
- Aanbieding eener mededeeling van Mej. L. KAISER: „Over het refractaire stadium bij den kikkergastrocnemius”. 1162.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer S. DE BOER: „Over den invloed der verhooging van osmotischen druk der lichaamsvochten op verschillende celsubstraten”. 1363.

- RIJNBERK (G. VAN). Aanbieding eener mededeeling van den Heer V. WILLEM: „Over de ademhalingsbewegingen bij den kikker”. 1412.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer S. DE BOER: „Over den invloed der verhooging van osmotischen druk der lichaamsvochten op verschillende cel-substraten”. 1590.
- SALOMONSON (I. K. A. WERTHEIM). Aanbieding eener mededeeling van den Heer N. VOORHOEVE: „Een hypothese omtrent het onderling verband tusschen sommige gecombineerd voorkomende hereditaire afwijkingen”. 39.
- SANDE BAKHUIJZEN (E. F. VAN DE). Zie BAKHUIJZEN (E. F. VAN DE SANDE).
- SAROS (De oorsprong van de). 717.
- SATELLIETEN van Jupiter (Schets eener nieuwe theorie der). 1374. II. 1476.
- SATELLIETPUNTEN (Over) op krommen, gegeven door de vergelijkingen  $x = at^p$ ,  $y = bt^q$ . 748.
- SCHARP DE VISSER (J.). Zie VISSER (J. SCHARP DE)
- SCHEDELS (De topographische verhoudingen der orbitae in jonge en volwassen) van den mensch en der menschen. 1364.
- Scheikunde.** J. BÖESEKEN: „De beteekenis van complexe boorzuurverbindingen voor de bepaling van de configuratie van organische verbindingen”. 3.
- F. M. JAEGER en B. КАРМА: „De meting van het electrisch geleidingsvermogen van vloeistoffen bij hoogere temperaturen”. 16.
- H. I. WATERMAN: „Amygdaline als voedsel voor Fusarium”. 30.
- ERNST COHEN en A. L. Th. MOESVELD: „Invloed van druk op de oplosbaarheid van stoffen.” 134 II. 864 III. 1241 IV. 1553.
- F. M. JAEGER: „Onderzoekingen over PASTEUR's beginsel omtrent het verband tusschen moleculaire en kristallonomische Dissymmetrie”. 111. 152. IV. 170.
- F. M. JAEGER: „Twee gekristalliseerde, isomere  $\alpha$ -fructose-penta-acetaten”. 187.
- F. M. JAEGER en R. T. A. MEES: „Komplexe-zouten van het ferrimalon-zuur”. 190.
- F. M. JAEGER en JUL. KAHN: „Over enkele isomere, complexe CIS- en TRANS-Diaethyleendiamine-zouten van het kobalt en over het Triaethyleendiamine-Zink-Chloride”. 199.
- J. BÖESEKEN en H. W. HOFSTEDE: „Waarnemingen omtrent de hydreeering onder invloed van colloïdale katalysatoren en de verklaring van dit proces. 211.
- H. I. WATERMAN: „De invloed van verschillende stoffen op de ontleding van monosen door alkali en op de inversie van rietsuiker door zoutzuur.” II 237.
- H. R. KRUYT en Mej. J. E. M. VAN DER MADE: „Bijdrage tot de kennis van het verfproces.” I. 247.
- J. P. TREUB: „Over de verzeeping van vetten.” II. 253.
- A. SMITS, G. MEIJER en R. Th. BECK: „Over den zwarten fosfor.” II. 268.
- A. SMITS en C. A. LOBRY DE BRUYN: „Over het electro-chemisch gedrag van nikkel.” 270.
- A. SMITS en J. GILLIS: „Over melksuiker.” I. 280. II. 540.
- E. H. BÜCHNER: „De kooklijn van het systeem: hexaan nitrobenzol.” 388.
- N. H. SIEWERTSZ VAN REESEMA: „Het gebruik van de thermozuil van Dr. MOLL bij absolute metingen.” 519.

- Scheikunde.** H. J. WATERMAN: „Over den invloed van verschillende stoffen op de ontleding van monosen door alkali en op de inversie van rietsuiker door zoutzuur”. III. 526.
- A. W. K. DE JONG: „De structuur der truxillzuren”. 548.
- ERNST COHEN en H. R. BRUINS: „De metastabiliteit onzer metaalwereld als gevolg van allotropie en haar beteekenis voor Chemie, Physika en Techniek”. 581.
- ERNST COHEN en H. R. BRUINS. „De thermodynamica der normaalelementen. X. Het kalomel-normaalelement van LIPSCOMB en HULETT”. III. 587.
- W. REINDERS en L. HAMBURGER: „Ultramicroscopisch onderzoek van zeer dunne metaalheerslagen door verdamping in hoog vacuum verkregen”. II. 595.
- F. A. H. SCHREINEMAKERS: „In-, mono- en divariante evenwichten”. XVIII. 782.
- ERNST COHEN en J. J. WOLTERS: „De thermodynamica der normaalelementen”. XI. De temperatuurformule van het WESTON-element en het minimum van oplosbaarheid van  $\text{CdSO}_4 \cdot \frac{8}{3} \text{H}_2\text{O}$ ”. 795.
- A. H. W. ATEN: „Over de passiviteit van chroom”. I. 800. II. 1185. III. 1385.
- A. H. W. ATEN: „Een derde zwavelmolekuulsoort”. 5de mededeeling. 813.
- N. SCHOORL en Mej. A. REGENBOGEN: „Herziening der tabellen voor de sterkte van spiritus”. 837.
- J. J. VAN LAAR: „Over het verloop der waarden van  $a$  en  $b$  bij waterstof bij verschillende temperaturen en volumina”. 844.
- A. W. K. DE JONG: „Inwerking van zonlicht op Cumarine”. 906.
- ERNST COHEN: „De allotropie van kadmium”. VI. 1075.
- ERNST COHEN en H. R. KRUIJT: „Het warmte-effekt bij de vorming van mengkristallen”. 1084.
- J. BÖESEKEN en CHR. VAN LOON: „Over hydrindeen-1.2-diolen.” 1268.
- G. DE BRUIN: „Over de vervangbaarheid, in amiden, van een gealkyleerde anilino-groep door de anilino-groep door verhitting met zoutzuuraniline.” 1085.
- A. W. K. DE JONG: „Het dubbelzuur van normaal- en allokaneelzuur.” 1158.
- A. SMITS: „Over het electrochemisch gedrag der metalen.” 1398.
- SCHOMMELING** (De halfdaagsche horizontale) der vrije atmosfeer tot 10 Km. hoogte volgens loodsballonwaarnemingen te Batavia. 75.
- SCHOORL** (N.) en Mej. A. REGENBOGEN. Herziening der tabellen voor de sterkte van spiritus. 837.
- SCHOUTEN** (J. A.). Over de directe analyses der lineaire grootheden bij de rotationeele groep in drie en vier grondvariabelen. 445. 566.
- Aanbieding eener verhandeling: „Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie.” 1596.
- SCHOUTEN** (W. J. A.). Over de parallax van eenige sterrenhoopen. 1147. 2de mededeeling 1293.
- SCHREINEMAKERS** (F. A. H.). In-, mono- en divariante evenwichten XVIII. 782.
- SIEWERTSZ VAN REESEMA** (N. H.). Zie REESEMA (N. H. SIEWERTSZ).
- SITTER** (W. DE). Over de kromming der ruimte. 222.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. PANNEKOEK: „De oorsprong van de Saros.” 717.
- De relativiteit der traagheid en de kromming der ruimte. 790.
- Schets eener nieuwe theorie der satellieten van Jupiter. 1374. II. 1476.

- SITTER (W. DE). Nadere opmerkingen omtrent de oplossingen der veldvergelijkingen van EINSTEIN's gravitatie-theorie. 1472.
- SKELETSPIEREN en het hart (Zijn contractiliteit en geleidingsvermogen twee gescheiden eigenschappen bij de)? 535.
- SLINGERBEWEGINGEN (Over den invloed van  $H_2O_2$  op de) van den geïsoleerden darm. 791.
- SLUITER (C. PH.). Jaarverslag van het Zoölogisch-Insulinde fonds over 1917. 1240.
- SMELT en stolverschijnselen bij para- azoxy-anisol. 683.
- SMELTWARMTE (Metingen betreffende de soortelijke warmte van vaste waterstof en betreffende de) van waterstof. 956.
- SMITS (A.). Over het electrochemisch gedrag der metalen. 1398.
- en J. GILLIS. Over melksuiker. I. 280, II. 540.
- en C. A. LOBRY DE BRUYN. Over het electrochemisch gedrag van nikkel. 270.
- G. MEIJER en R. TH. BECK. Over den zwarten fosfor, II. 268.
- SPEKTRUM (Het) van een roteerend molekuul volgens de theorie der quanta. 115.
- SPIERWEFSEL (Bijdrage tot de pathologische histologie van dwarsgestreept). 1047.
- SPIRITUS (Herziening der tabellen voor de sterkte van). 837.
- SPLITSINGSVERSCIJNSELEN (Mendelistische) bij de erfelijkheid van den hoofdvorm. 367, 946.
- SPONGILLIDAE (Bijdrage tot de physiologie der zoetwatersponzen). 931.
- STADIUM (Over het refractaire) bij den kikergastrocnemius. 1162.
- Sterrekunde.** W. DE SITTER: „Over de kromming der ruimte”. 222.
- A. PANNEKOEK: „De oorsprong van de Saros.” 717.
- C. DE JONG: „Onderzoekingen omtrent de praecessieconstante en de stelselmatige eigenbewegingen der sterren.” 731.
- Verzoek om advies van Z. Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken over een subsidieaanvraag van Dr. H. NORT, ter ondersteuning zijner astronomische onderzoekingen. 1138.
- W. J. A. SCHOUTEN: „Over de parallax van eenige sterrenhoopen”. 1147, 2de mededeeling, 1293.
- W. DE SITTER: „Schets eener nieuwe theorie der Satellieten van Jupiter.” 1374, II. 1476.
- STERREN (Onderzoekingen omtrent de praecessieconstante en de stelselmatige eigenbewegingen der). 731.
- STERRENHOOPEN (Over de parallax van eenige). 1147, 2de mededeeling, 1293.
- STIKSTOF (Dampspanningen van zuurstof en). 445.
- STOFFELIJK STELSEL (Iets over de massa van een) volgens de gravitatietheorie van EINSTEIN, 1093.
- STOFFEN (Invloed van druk op de oplosbaarheid van). 134; II, 864; III, 1241; IV, 1553.
- (Isothermen van éénatomige) en hunne binaire mengsels. XIX. Dampspanning van neon tusschen het kookpunt en het kritische punt. 494.
- STOK (J. P. VAN DER). Aanbieding eener mededeeling van Mej. ANNIE VAN VLEUTEN: „Over de vraag, of het inwendig magnetisch veld, waaraan de dagelijksche variatie in het aardmagnetisme voor een gedeelte toegeschreven wordt, op geïnduceerde stroomen berust. 293.

- STOK (J. P. VAN DER). Aanbieding eener mededeeling van Mej. ANNIE VAN VLEUTEN: „Bezitten de krachten, die de dagelijksche magnetische variatie veroorzaken, een potentiaal?” 297.
- STORM VAN LEEUWEN (W.). Zie LEEUWEN (W. STORM VAN).
- STRALENCONGRUENTIES (Nulstelsels, welke door twee lineaire) worden bepaald. 1492.
- SYNBRANCHIDÆ (De voorhersenen der). 17.
- TEMMINCK GROLL (J.). Zie GROLL (J. TEMMINCK).
- TEMPERATUREN (Over het meten van lage) XXVII. Dampspanningen van waterstof in de nabijheid van het kookpunt en tusschen het kookpunt en de kritische temperatuur. 437, Vervolg. 490 XXII. Vergelijking van den platina- en den goudweerstandsthermometer met den heliumthermometer.” 688.
- (De soortelijke warmte bij lage), IV Metingen betreffende de soortelijke warmte van vaste waterstof en betreffende de smeltwarmte van waterstof, 956.
- TEMPERATUURFORMULE (De) van het WESTON-element en het minimum van oplosbaarheid van  $\text{CdSO}_4 \cdot \frac{8}{3}\text{H}_2\text{O}$ . 795.
- THERMISCH EFFECT (Een) van het magneetveld. 1292, 1442.
- THERMODYNAMICA (De) der normaalelementen. X. Het kalomel-normaalelement van LIPSCOMB en HULEIT, III. 587, XI. „De temperatuurformule van het WESTON-element en het minimum van oplosbaarheid van  $\text{CdSO}_4 \cdot \frac{8}{3}\text{H}_2\text{O}$ .” 795.
- THERMOZUIL van Dr. W. M. MOL (Het gebruik van de) bij absolute metingen. 519.
- TITANIUMGROEPEN (De elementen der koolstof- en). 45.
- TOESTANDSVERGELIJKING (De) van een associeerende stof. 404.
- TREUB (J. P.). Over de verzeeping van vetten, II. 253.
- TRIAETHYLEENDIAMINE-zink-chloride (Over enkele isomere, complexe cis- en trans-diaethyleendiamine-zouten van het kobalt en over) 199.
- TRIGT (H VAN). Bijdrage tot de physiologie der zoetwatersponzen (Spongillidae). 931.
- TRILLINGEN (Gedwongen) van mechanische systemen, wier bewegingen door quanten-voorwaarden zijn gebonden. 702.
- TRUXILLZUREN (De structuur der). 548.
- ULTRAVIOLET LICHT (Het spontaan colloidaal worden van oplossing van reukstoffen, uitermate versneld door bestraling met). 1510.
- URAAANHART (Het gedrag van het) tegenover electriche prikkeling, volgens proeven van den Heer M. DEN BOER. 12.
- UREASE (De invloed van neutrale zouten op de werking van). 712.
- VARIATIE (Over de vraag, of het inwendig magnetisch veld, waaraan de dagelijksche) van het aardmagnetisme voor een gedeelte toegeschreven wordt, op geïnduceerde stroomen berust. 293.
- VELDVERGELIJKINGEN (Nadere opmerkingen omtrent de oplossingen der) van EINSTEIN'S gravitatie-theorie. 1472.
- VERDAMPING (Ultramicroscopisch onderzoek van zeer dunne metaalneerslagen door) in hoog vacuüm verkregen. II. 595.
- (Over de) van een cirkelvormig vloeistofoppervlak. 1057.
- VERPPROCES (Bijdrage tot de kennis van het), I. 247.
- VERGADERING (Vaststelling der December-). 978.
- (Vaststelling der Maart-). 1353.
- (Vaststelling der April-) 1454.

- VERGOUWEN JR. (J. P.). Over de variabiliteit van het aantal reuzenpyramidecellen in de HESCHL-winding van den mensch. 34.
- VERPLAATSING (Over hetgeen in niet-Euclidische ruimten beantwoordt aan een) evenwijdig aan zichzelf en over de Riemanniaansche kromtemaat. 1596.
- VERSCHAFFELT (J. E.). De toestandsvergelijking van een associeerende stof. 404.  
— De inwendige wrijving van vloeibaar gemaakte gassen. X. De wrijvingscoëfficiënt van vloeibare waterstof. 961
- VERSLUYS (W. A.). Over satellietpunten op krommen, gegeven door de vergelijkingen  $x = atp$ ,  $y = btq$ . 748.
- VERSTEENINGEN (Over zoogenaamd oligocene) van Celebes. 145.
- VERWARDHEIDSTOESTANDEN (De psychologie van). 1495.
- VERZEEPING (Over de) van vetten. II. 253.
- VETTEN (Over de verzeeping van). II. 253.
- VIRIAALCOEFFICIENTEN van gassen beneden 0° C. 445.
- VISSER (J. SCHARP DE) en G. HOLST. De lichtsterkte van het zwarte lichaam en het mechanisch equivalent van het licht 513.
- VLAK (Nulstelsels in het). 1142.
- VLEKTYPHUS (Over de aetiologie van). 338.
- VLEUGELTEKENING (De) der Arctiidae. 894.
- VLEUTEN (Mej. ANNIE VAN). Over de vraag, of het inwendig magnetisch veld, waaraan de dagelijksche variatie in het aardmagnetisme voor een gedeelte toegeschreven wordt, op geïnduceerde stroomen berust. 293.  
— Bezitten de krachten, die de dagelijksche magnetische variatie veroorzaken, een potentiaal? 297.
- VLINDERS (Het primaire karakter der popteekening bij de). 1543.
- VLOEISTOFFEN (De meting van het electrisch geleidingsvermogen van) bij hogere temperaturen. 16.
- VLOEISTOFOPPERVLAK (Over de verdamping van een cirkelvormig). 1057.
- VOEDSTERPLANT (De beteekenis van de bakteriën der Papilionaceënkolletjes voor de) 1456.
- VOLUME-VERANDERING (Bepaling der fiktieve) bij het oplossingsproces. 764.
- VOORHERSENEN (De) der Synbranchidae. 17.
- VOORHOEVE (N.). Een hypothese omtrent het onderling verband tusschen sommige gecombineerd voorkomende hereditaire afwijkingen. 39.
- VRIES (JAN DE). Nulstelsels in het vlak. 1142.  
— Kubische involuties van de eerste klasse. 1256.  
— Lineaire nulstelsels van het platte vlak. 1485.  
— Nulstelsels, welke door twee lineaire stalencongruenties worden bepaald. 1492.
- WAAALS' (VAN DER) (The true value of  $a$  of) equation and the nature of cohesion. 133. Verslag hierover. 449.
- WAAALS (J. D. VAN DER). Aanbieding eener mededeeling van den heer J. D. VAN DER WAAALS Jr.: „Over de theorie der Brownsche beweging.” 1319.
- WAAALS JR. (J. D. VAN DER). Over de theorie der Brownsche beweging. 1319.

- WAARDEN *a* en *b* (Over het verloop der) bij waterstof bij verschillende temperaturen en volumina. 844. II. 1209. III. 1305. IV. 1445.
- WARMTE (De soortelijke) bij lage temperaturen. IV. Metingen betreffende de soortelijke warmte van vaste waterstof en betreffende de smeltwarmte van waterstof. 956.
- WARMTE-EFFEKT (Het) bij de vorming van mengkristallen. 1084.
- WARMTEGELEIDINGSVERMOGEN (Het) van neon. 1338.
- WATERMAN (H. J.) Amygdaline als voedsel voor Fusarium. 30.
- De invloed van verschillende stoffen op de ontleding van monosen door alkali en op de inversie van rietsuiker door zoutzuur. II. 237. III. 526.
- WATERSTOF (Dampspanningen van) in de nabijheid van het kookpunt en tusschen het kookpunt en de kritische temperatuur. 437. Vervolg 490.
- (Eene voorloopige bepaling omtrent het kritische punt van). 124.
- (Over het verloop der waarden van *a* en *b* bij) bij verschillende temperaturen en volumina. 844. II. 1209. III. 1305. IV. 1445.
- (Metingen betreffende de soortelijke warmte van vaste) en betreffende de smeltwarmte van waterstof. 956.
- (De wrijvingscoëfficiënt van vloeibare). 961.
- WATERSTOTHERMOMETER (Vergelijking van den helium-, argon-, neon- en stikstof-zuurstofthermometer met den). Viriaalcoëfficiënten van deze gassen beneden 0°C. 445.
- (Verklaring van de afwijkingen van de correcties van den) tot de absolute schaal van de vergelijking van BERTHELOT door de quanten-theorie. 445.
- WEBER (s.). Het warmtegeleidingsvermogen van neon. 1338.
- WEBER (MAX.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer C. J. VAN DER HORST: „De voorhersenen der Synbranchidae”. 17.
- Jaarverslag van het Zoölogisch-Insulinde fonds over 1917. 1240.
- WERTHEIM SALOMONSON (I. K. A.). Zie SALOMONSON (I. K. A. WERTHEIM).
- WESTON-ELEMENT (De temperatuurformule van het) en het minimum van oplosbaarheid van  $\text{CdSO}_4 \cdot \frac{8}{3}\text{H}_2\text{O}$ . 795.
- WICHMANN (C. E. A.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer L. RUTTEN: „Oude Andesieten” en „Breccies Mioceen” beoosten Buitenzorg”. 670.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer L. RUTTEN: „Over demudatiesnelheid op Java”. 920.
- Aanbieding eener verhandeling: „Die Erdbeben des Indischen Archipels bis zum Jahre 1857”. 1136.
- WIERSMA (E. D.). De psychologie van verwardheidstoestanden. 1495
- WILLEM (v.). Over de ademhalingsbewegingen bij den kikker. 1412
- WINKLER (C.) Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. ROELS: „Vergelijkend onderzoek van eenige met behulp der natuurlijke en experimenteele leerwijze bij de studie van het geheugen verkregen resultaten”. 351.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer G. P. FRETZ: „Mendelistische splitsingsverschijnselen bij de erfelijkheid van den hoofdvorm”. 367. 946.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer D. J. HULSHOFF POL: „Ons evenwicht-zintuig.” 966.
- Aanvraag voor toestemming om een gedeelte van den atlas voor het Centraal zennwstelsel te mogen mitgeven onder de auspiciën der Akademie. 978.

- WINKLER (C.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer D. J. HULSHOFF POL : „Cerebellair ataxie als stoornis der evenwicht-sensibiliteit”. 1178.
- Verslag over een aanvraag om rijkssubsidie van Prof. G. JELGERSMA te Leiden. 1362.
  - Aanbieding eener mededeeling van den Heer D. J. HULSHOFF POL : „Experimenteele cerebellair-atactische verschijnselen bij aandoeeningen buiten het cerebellum”. 1426.
- Wiskunde B. P. HAALMEIJER: „Over elementairoppervlakken der derde orde”. 1ste mededeeling 58, 2de mededeeling 320, 3de mededeeling 755 4de mededeeling 1274.
- W. A. WIJTHOFF: „Een betrekking tusschen de polytopen der  $C_{600}$  familie”. 300.
  - J. A. SCHOUTEN: „Over de direkte analyses der lineaire grootheden bij de rotationeele groep in drie en vier grondvariabelen.” 445.
  - J. C. KLUYVER: „Over hyperelliptische integralen van het geslacht  $p = 2$ , die door eene substitutie van de orde  $r = 4$  herleid kunnen worden.” 463.
  - J. A. SCHOUTEN: „Over de direkte analyses der lineaire grootheden bij de rotationeele groep in drie en vier grondvariabeleu.” 566.
  - J. G. VAN DER CORPUT: „De primitieve deeler van  $x^k - 1$ . 661.”
  - W. A. VERSLUYS: „Over satellietpunten op krommen, gegeven door de verge lijkingen  $x = atp$ ,  $y = btq$ .” 748.
  - C. B. BIEZENO: „Graphische bepaling der overgangsmomenten van een elastisch ondersteunden, statisch onbepaalden balk.” I. 908. II. 996
  - Aanbieding eener verhandeling van den Heer L. E. J. BROUWER: „Die Elemente der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten begründet.” 978.
  - ARNAUD DENJOY: „Sur une propriété des fonctions de variable complexe.” 1063.
  - JAN DE VRIES: „Nulstelsels in het vlak.” 1142.
  - JAN DE VRIES: „Kubische involuties van de eerste klasse.” 1256.
  - JAN DE VRIES: „Lineaire nulstelsels in het platte vlak.” 1485.
  - JAN DE VRIES: „Nulstelsels, welke door twee lineaire stralencongruenties worden bepaald.” 1492.
  - Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. A. SCHOUTEN: „Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie.” 1596.
- WITTEBROOD (Dierproeven met Regeerings-bruinbrood en). 1466.
- WOLTERS (J. J.) en ERNST COHEN. De thermodynamica der normaalelementen. XI. De temperatuurformule van het WESTON-element en het minimum van oplosbaarheid van  $CdSO_4 \cdot \frac{8}{3}H_2O$ . 795.
- WRIJVING (De inwendige) van vloeibaar gemaakte gassen. X. De wrijvingscoëfficiënt van vloeibare waterstof. 961.
- WIJHE (J. W. VAN). Verslag van een aanvraag om Rijkssubsidie van Prof. G. JELGERSMA. 1362.
- Over den Nervus terminalis van den mensch tot Amphioxus. 1517.
- WIJTHOFF (W. A.). Een betrekking tusschen de polytopen der  $C_{600}$  familie. 300.
- ZEEHUIZEN (H.) en H. ZWAARDEMAKER. Het laadvermogen van de nevels der Antipyretica. 1250



- Z E E M A N (P.). Enkele proeven over de zwaartekracht. De trage en de zware massa van kristallen en radioactieve stoffen. 451.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. SMITS: „Over het electrochemisch gedrag der metalen.” 1398.
- Z E N U W S T E L S E L (Het sensibele periphère). 1282.
- Z E R N I K E (F.) en L. S. O R N S T E I N. De theorie der BROWN'sche beweging en de statistische mechanica. 1227.
- Z O E T W A T E R S P O N Z E N (Spongillidae) (Bijdrage tot de physiologie der). 931.
- Z O N L I C H T (Inwerking van) op Cumarine. 906.
- Z O Ö L O G I S C H I N S U L I N E F O N D S (Jaarverslag van het). 1238. 1240.
- Z O U T E N (Komplexe) van het ferri-malonzuur. 190.
- (De invloed van neutrale) op de werking van urease. 710.
- Z O U T Z U U R (De invloed van verschillende stoffen op de ontleding van monosen door alkali en op de inversie van rietsuiker door) II. 237. III 526.
- Z O U T Z U U R A N I L I N E (Over de vervangbaarheid, in amidën, van een gealkyleerde anilino-groep door de anilino-groep door verhitting met). 1085.
- Z U I D E R Z E E (De Heer C. L E L Y wordt gelukkigewensch met de aanneming der wet tot drooglegging van de). 1362.
- Z U U R S T O F en stikstof (Dampspanningen van). 445.
- Z W A A R D E M A K E R (H.). Het gedrag van het uraanhart tegenover elektrische prikkeling, volgens proeven van den Heer M. D E N B O E R. 12.
- Aanbieding eener mededeeling van de Heeren A. D E K L E Y N en W. S T O R M V A N L E E U W E N: „Over vestibulaire oogreflexen. I. Over de oorzaak van het ontstaan van den calorischen nystagmus.” 381.
- De verschuiving der radioactieve evenwichten onder den invloed van fluoresceïne.” 555.
- Aanbieding eener mededeeling van de Heeren W. S T O R M V A N L E E U W E N en C. D E L I N D V A N W I J N G A A R D E N: „Over den invloed van lobeline op de bloedsdrukverhooging door nicotine.” 560.
- Caesiumion en hartswerking. 776.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer EUG. DUBOIS: „De betrekking der hoeveelheden van de hersenen, het neuron en zijn deelen tot de lichaams-grootte.” 1416.
- Z W A A R D E M A K E R (H.) en F. H O G E W I N D. Het spontaan colloïdaal worden van oplossingen van reukstoffen, uitermate versneld door bestraling met ultraviolet licht. 1510.
- Z W A A R D E M A K E R (H.) en H. Z E E H U I Z E N. Het laadvermogen van de nevels der Antipyretica. 1250.
- Z W A A R T E K R A C H T (Enkele proeven over de). De trage en de zware massa van kristallen en radioactieve stoffen. 451.
- Z W A A R T E K R A C H T S V E L D (Een en ander over de energie van het) volgens de theorie van E I N S T E I N. 1201.
- Z W A R T E L I C H A A M (De lichtsterkte van het) en het mechanisch equivalent van het licht. 513.
- Z W A V E L M O L E K U U L S O O R T (Een derde). 5de mededeeling. 813.



















SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES



3 9088 01309 7431