Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 10

Übungsaufgaben

Aufgabe 10.1. Ersetze in den folgenden aussagenlogischen Tautologien

$$p_1 \text{ durch } \beta_1 := \exists xRxy,\ p_2 \text{ durch } \beta_2 := \forall u(fu = c \rightarrow Pc),\ p_3 \text{ durch } \beta_3 := \exists y\forall xgxz = y,\ p_4 \text{ durch } \beta_4 := Rcu \rightarrow c = u.$$

(1) $p_1 \wedge p_2 \rightarrow p_1$,
(2) $(p_1 \wedge p_4 \rightarrow \neg p_2) \wedge (p_1 \wedge p_4 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1)) \rightarrow (p_1 \wedge p_4 \rightarrow \neg p_2 \wedge (p_2 \rightarrow p_1))$,
(3) $p_3 \wedge \neg p_3 \rightarrow p_4$,
(4) $(p_1 \wedge p_4 \rightarrow p_3) \wedge (\neg(p_1 \wedge p_4) \rightarrow p_3) \rightarrow p_3$.

Aufgabe 10.2. Unterscheide zwischen den verschiedenen Bedeutungen von Gleichheit.

(1) Gleichheit von Elementen in einer Menge.
(2) Gleichheit von Zeichenketten.
(3) Das Gleichheitssymbol in einer erststufigen Sprache.

Aufgabe 10.3. Es sei S ein Symbolalphabet einer Sprache erster Stufe. Es seien S-Terme s, t mit

$$\vdash s = t$$

gegeben. Zeige, dass es sich bei s und t um eine identische Zeichenreihe handelt.

Aufgabe 10.4. Es sei S ein Symbolalphabet und $t_1, \ldots, t_n$ seien S-Terme. Zeige die Ableitbarkeit

$$\vdash t_1 = t_2 \wedge t_2 = t_3 \wedge \ldots \wedge t_{n-1} = t_n \rightarrow t_1 = t_n\,.$$

Aufgabe 10.5.*

Es seien $s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$ Terme und f ein n-stelliges Funktionssymbol. Zeige, dass die Ableitbarkeit

$$\vdash s_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge s_n = t_n \rightarrow fs_1 \ldots s_n = ft_1 \ldots t_n$$

gilt.

Aufgabe 10.6. Zeige direkt (ohne die Verwendung der Ableitungsbeziehung), dass die folgenden Ausdrücke allgemeingültig sind (dabei seien

$$r, s, t, s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$$

Terme, f ein n-stelliges Funktionssymbol und R ein n-stelliges Relationssymbol).

(1)
$$\vDash s = t \to t = s\,.$$

(2)
$$\vDash r = s \wedge s = t \to r = t\,.$$

(3)
$$\vDash s_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge s_n = t_n \to f s_1 \ldots s_n = f t_1 \ldots t_n\,.$$

(4)
$$\vDash s_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge s_n = t_n \wedge R s_1 \ldots s_n \to R t_1 \ldots t_n\,.$$

Aufgabe 10.7.*

Es seien $x_1, \ldots, x_n$ Variablen, $s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$ Terme und α ein Ausdruck in einer prädikatenlogischen Sprache L^S. Zeige, dass

$$s_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge s_n = t_n \to \left(\alpha \frac{s_1, \ldots, s_n}{x_1, \ldots, x_n} \to \alpha \frac{t_1, \ldots, t_n}{x_1, \ldots, x_n} \right)$$

allgemeingültig ist.

Aufgabe 10.8. Es seien r_1, r_2, s, t Terme einer prädikatenlogischen Sprache L^S und sei x eine Variable. Zeige durch ein Beispiel, dass

$$s = t \to r_1 \frac{s}{x} = r_2 \frac{t}{x}$$

nicht ableitbar sein muss.[1]

Aufgabe 10.9.*

Zeige durch ein Beispiel, dass für Terme r_1, r_2, s und eine Variable x einer prädikatenlogischen Sprache L^S der Ausdruck

$$r_1 = r_2 \to r_1 \frac{s}{x} = r_2 \frac{s}{x}$$

nicht ableitbar sein muss.

Aufgabe 10.10. Gehört in einem Ausdruck der Form $(x = y)\frac{t}{x}$ die Symbolfolge $\frac{t}{x}$ zur prädikatenlogischen Sprache? Gehört $(x = y)\frac{t}{x}$ dazu?

Aufgaben zum Abgeben

[1]Die Nicht-Ableitbarkeit wird durch die Angabe eines Modells gezeigt; dies verwendet die Korrektheit des Ableitungskalküls, den wir noch nicht vollständig behandelt haben.

Aufgabe 10.11. (2 Punkte)

Es seien c, d Konstanten, es sei f ein zweistelliges Funktionssysmbol und es R ein dreistelliges Relationssymbol. Man erläutere, wie man die prädikatenlogische Tautologie

$$(Rxcfyd \vee z = x) \wedge \neg(Rxcfyd \vee z = x) \rightarrow (\exists x fxc = d)$$

aus einer aussagenlogischen Tautologie im Sinne von Lemma 10.2 erhält.

Aufgabe 10.12. (4 Punkte)

Es seien $r, s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$ Terme einer prädikatenlogischen Sprache L^S und seien $x_1, \ldots, x_n$ verschiedene Variablen. Zeige durch Induktion über den Aufbau des Termes r die Ableitbarkeit

$$\vdash s_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge s_n = t_n \rightarrow \left(r\frac{s_1, \ldots, s_n}{x_1, \ldots, x_n} = r\frac{t_1, \ldots, t_n}{x_1, \ldots, x_n} \right).$$

Aufgabe 10.13. (4 Punkte)

Es seien $s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$ Terme einer prädikatenlogischen Sprache L^S und seien $x_1, \ldots, x_n$ verschiedene Variablen.

(1) Es sei R ein k-stelliges Relationssymbol und $r_1, \ldots, r_k$ seien Terme. Zeige die Ableitbarkeit

$$\vdash s_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge s_n = t_n \rightarrow \left((Rr_1 \ldots r_k)\frac{s_1, \ldots, s_n}{x_1, \ldots, x_n} \rightarrow (Rr_1 \ldots r_k)\frac{t_1, \ldots, t_n}{x_1, \ldots, x_n} \right).$$

(2) Es seien r_1 und r_2 Terme. Zeige die Ableitbarkeit

$$\vdash s_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge s_n = t_n \rightarrow$$
$$\left(r_1\frac{s_1, \ldots, s_n}{x_1, \ldots, x_n} = r_2\frac{s_1, \ldots, s_n}{x_1, \ldots, x_n} \rightarrow r_1\frac{t_1, \ldots, t_n}{x_1, \ldots, x_n} = r_2\frac{t_1, \ldots, t_n}{x_1, \ldots, x_n} \right).$$

Tipp: Verwende Aufgabe 10.12

Aufgabe 10.14. (4 Punkte)

Es sei S ein Symbolalphabet, $s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$ seien S-Terme, $x_1, \ldots, x_n$ verschiedene Variablen und α sei ein S-Ausdruck. Zeige die Allgemeingültigkeit

$$\vDash s_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge s_n = t_n \rightarrow \left(\alpha\frac{s_1, \ldots, s_n}{x_1, \ldots, x_n} \rightarrow \alpha\frac{t_1, \ldots, t_n}{x_1, \ldots, x_n} \right).$$

Aufgabe 10.15. (4 Punkte)

Zeige durch ein Beispiel, dass bei einem ableitbaren Ausdruck der Form

$$\vdash s = t \rightarrow \left((\exists z\beta)\frac{s}{x} \rightarrow (\exists z\beta)\frac{t}{x} \right)$$

die durch die Existenzquantoren gebundenen Variablen (nach der durchgeführten Substitution) nicht übereinstimmen müssen.

Die Aufgabe zum Aufgeben

Lösungen zu der folgenden Aufgabe direkt an den Dozenten. Bis Ende Mai.

Aufgabe 10.16. Wir betrachten eine Variante des Ableitungskalkül (geschrieben $\vdash_V$) der Aussagenlogik, bei dem die Grundtautologien aus Axiom 3.8 unverändert übernommen werden, bei der aber der Modus ponens durch die Schlussregel

Wenn $\vdash_V \alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)$, dann ist $\vdash_V \beta$

ersetzt wird. Stimmen $\vdash$, $\vdash_V$ überein?

Abbildungsverzeichnis