Stoll, F. X. (1874): Neue Beiträge zum Problem des Apollonius, In: Programm des Großherzoglichen Gymnasiums zu Bensheim für das Schuljahr 1873—1874, Darmstadt.

Neue Beiträge zum Problem des Apollonius.

Eine Kugel, welche vier gegebene Kugeln zugleich berührt, hat bekanntlich Gergonne in eleganter Weise zu construiren gelehrt; nicht weniger elegant ist die Construction, welche A. Miquel im 11. Bande des Journal de mathématiques par Liouville 1846 pag. 75 von der Kugel gegeben hat, welche vier gegebene Kugeln, jede unter einem gegebenen Winkel, schneidet. Beide Geometer bedienen sich der synthetischen Methode. Obschon nun bei Anwendung der auf diesem Wege von ihnen gefundenen Constructionen in jedem einzelnen Falle sofort die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Lösung der Aufgabe sichtbar wird, so kann man doch nicht erkennen, inwiefern die Möglichkeit und Modalität der Lösung von der Lage und Grösse der gegebenen Kugeln überhaupt abhängig sei. Ich habe im Band VI. der Mathematischen Annalen pag. 613—632 versucht, diese Lücke für die entsprechende Aufgabe in der Ebene auszufüllen; dasselbe für vier Kugeln im Raum zu leisten, ist das Ziel der folgenden Untersuchung. Ich werde mich dabei darauf beschränken, die Aufgabe in folgender Form zu lösen und zu discutiren:

Es soll eine Kugel gefunden werden, welche jede von vier gegebenen Kugeln k_1, k_2, k_3, k_4 unter demselben Winkel ω schneidet. Dabei verstehen wir unter dem Schnittwinkel ω den Winkel, welchen die ungleich gerichteten Normalen auf zwei in einem Punkte des Schnittkreises zweier Kugeln an dieselben gelegten Tangentialebenen mit einander bilden. Wenn man den Mittelpunkt von k_1 zum Anfangspunkte rechtwinkliger Coordinaten macht, die Mittelpunktscoordinaten von k_2, k_3, k_4 bezüglich mit α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3, α_4, β_4, γ_4 und die Radien der vier Kugeln nach einander mit r_1, r_2, r_3, r_4 bezeichnet, so sind die Gleichungen der vier Kugeln:

$$1)\ x^2 + y^2 + z^2 = r_1^{\,2},$$
$$2)\ (x - \alpha_2)^2 + (y - \beta_2)^2 + (z - \gamma_2)^2 = r_2^{\,2},$$
$$3)\ (x - \alpha_3)^2 + (y - \beta_3)^2 + (z - \gamma_3)^3 = r_3^{\,2},$$
$$4)\ (x - \alpha_4)^2 + (y - \beta_4)^2 + (z - \gamma_4)^2 = r_4^{\,2},$$

und die Gleichung der gesuchten Schnittkugel mit dem Radius r und den Mittelcoordinaten α, β, γ;

$$5)\quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$$

Die Gleichungen der Tangentialebenen, welche man in einem Punkte x', y', z', des Kreisschnitts der beiden Kugeln 2 und 5 an dieselben gelegt hat, heissen

$$(x'-\alpha_2)(x-\alpha_2)+(y'-\beta_2)(y-\beta_2)+(z'-\gamma_2)(z-\gamma_2)=r_2^{\,2},$$
$$(x'-\alpha)(x-\alpha)+(y'-\beta)(y-\beta)+(z'-\gamma)(z-\gamma)=r^2,$$

während zugleich noch die Gleichungen 2 und 5 gelten, wenn man in ihnen x, y, z durch x', y', z' ersetzt. Der Winkel, welchen die beiden Tangentialebenen, bezüglich der Winkel, welchen die in ihrem gemeinschaftlichen Berührungspunkte auf ihnen errichteten Senkrechten mit einander bilden, wird bestimmt durch die Gleichung

$$\cos\omega=\pm\frac{(x'-\alpha_2)(x'-\alpha)+(y'-\beta_2)(y'-\beta)+(z'-\gamma_2)(z'-\gamma)}{\sqrt{[(x'-\alpha_2)^2+(y'-\beta_2)^2+(z'-\gamma_2)^2]\cdot[(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2-(z'-\gamma)^2]}}.$$

Der Nenner des Bruchs auf der rechten Seite ist vermöge der Gleichungen 2 und 5 gleich $r\,r_2$; addirt man die eben genannten Gleichungen und vergleicht dss Resultat mit dem Zähler, so reducirt sich derselbe in der Art, dass man erhält:

$$\cos\omega=\pm\frac{r^2+r_2^{\,2}-[(\alpha-\alpha_2)^2+(\beta-\beta_2)^2+(\gamma-\gamma_2)^2]}{2\,r\,r_2}.$$

Das erhaltene Resultat ist insofern unbestimmt, als je nach der Wahl des positiven oder negativen Zeichens diese Gleichung entweder die Bedingung ausdrückt, welche erfüllt sein muss, damit sich die beiden Kugeln unter dem Winkel ω schneiden, oder die Bedingung, dass sie sich unter dem Supplementwinkel von ω schneiden; hiernach lauten die Bedingungen dafür, dass die Kugeln 1—4 von der Kugel 5 entweder alle unter dem Winkel ω oder alle unter dem Supplementwinkel von ω geschnitten werden:

$$6)\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=r^2+r_1^{\,2}\pm 2\,r\,r_1\cos\omega$$
$$7)\quad (\alpha-\alpha_2)^2+(\beta-\beta_2)^2+(\gamma-\gamma_2)^2=r^2+r_2^{\,2}\pm 2\,r\,r_2\cos\omega$$
$$8)\quad (\alpha-\alpha_3)^2+(\beta-\beta_3)^2+(\gamma-\gamma_3)^2=r^2+r_3^{\,2}\pm 2\,r\,r_3\cos\omega$$
$$9)\quad (\alpha-\alpha_4)^2+(\beta-\beta_4)^2+(\gamma-\gamma_4)^2=r^2+r_4^{\,2}\pm 2\,r\,r_4\cos\omega.$$

Macht man in diesen Gleichungen $\omega=0$, also $\cos\omega=1$, so stellen sie die Bedingungen dar, unter welchen die vier Kugeln 1—4 von der Kugel 5 a u s s c h l i e s s e n d oder e i n s c h l i e s s e n d berührt werden und zwar gilt das obere positive Zeichen auf der rechten Seite für die ausschliessende, das untere negative für die einschliessende Berührung.

Um aus diesen Gleichungen α, β, γ und r zu bestimmen, ziehe man 7, 8, 9 nacheinander von 6 ab, wodurch man erhält:

$$2\,\alpha\,\alpha_2+2\,\beta\,\beta_2+2\,\gamma\,\gamma_1=\alpha_2^{\,2}+\beta_2^{\,2}+\gamma_2^{\,2}+r_1^{\,2}-r_2^{\,2}\pm 2\,r\,(r_1-r_2)\cos\omega=$$
$$\alpha_2^{\,2}+\beta_2^{\,2}+\gamma_2^{\,2}-(r_1-r_2)^2\pm 2\,(r_1-r_2)\,(r\cos\omega\pm r_1),$$

$$2\alpha\alpha_3 + 2\beta\beta_3 + 2\gamma\gamma_3 = \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 + r_1^2 - r_3^2 \pm 2r(r_1 - r_3)\cos\omega =$$
$$\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 - (r_1 - r_3)^2 \pm 2(r_1 - r_3)(r\cos\omega \pm r_1),$$
$$2\alpha\alpha_4 + 2\beta\beta_4 + 2\gamma\gamma_4 = \alpha_4^2 + \beta_4^2 + \gamma_4^2 + r_1^2 - r_4^2 \pm 2r(r_1 - r_4)\cos\omega =$$
$$\alpha_4^2 + \beta_4^2 + \gamma_4^2 - (r_1 - r_4)^2 \pm 2(r_1 - r_4)(r\cos\omega \pm r_1).$$

Die Abkürzungen

$$10)\quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 - (r_1 - r_2)^2 = d_{12},$$
$$11)\quad \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 - (r_1 - r_3)^2 = d_{13},$$
$$12)\quad \alpha_4^2 + \beta_4^2 + \gamma_4^2 - (r_1 - r_4)^2 = d_{14},$$
$$13)\quad r\cos\omega + r_1 = Y,$$
$$14)\quad r\cos\omega - r_1 = Z,$$

führen diese Gleichungen in folgende über:

$$15)\quad 2\alpha\alpha_2 + 2\beta\beta_2 + 2\gamma\gamma_2 = d_{12} + 2(r_1 - r_2)\,Y \text{ oder } d_{12} - 2(r_1 - r_2)\,Z,$$
$$16)\quad 2\alpha\alpha_3 + 2\beta\beta_3 + 2\gamma\gamma_3 = d_{13} + 2(r_1 - r_3)\,Y \text{ oder } d_{13} - 2(r_1 - r_3)\,Z,$$
$$17)\quad 2\alpha\alpha_4 + 2\beta\beta_4 + 2\gamma\gamma_4 = d_{14} + 2(r_1 - r_4)\,Y \text{ oder } d_{14} - 2(r_1 - r_4)\,Z.$$

Setzt man wiederum zur Abkürzung

$$18)\quad \left\{\begin{array}{l}
\begin{vmatrix} d_{12} & \beta_2 & \gamma_2 \\ d_{13} & \beta_3 & \gamma_3 \\ d_{14} & \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix} = A,\quad
\begin{vmatrix} \alpha_2 & d_{12} & \gamma_2 \\ \alpha_3 & d_{13} & \gamma_3 \\ \alpha_4 & d_{14} & \gamma_4 \end{vmatrix} = B,\quad
\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & d_{12} \\ \alpha_3 & \beta_3 & d_{13} \\ \alpha_4 & \beta_4 & d_{14} \end{vmatrix} = C, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix} = D, \\
\begin{vmatrix} r_1 - r_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ r_1 - r_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ r_1 - r_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix} = A',\quad
\begin{vmatrix} \alpha_2 & r_1 - r_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & r_1 - r_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & r_1 - r_4 & \gamma_4 \end{vmatrix} = B',\quad
\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & r_1 - r_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & r_1 - r_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & r_1 - r_4 \end{vmatrix} = C';
\end{array}\right.$$

so erhält man aus diesen 3, bezüglich 6 Gleichungen für den Schnitt unter dem Winkel ω:

$$19)\quad 2\alpha = \frac{A + 2A'Y}{D},\quad 2\beta = \frac{B + 2B'Y}{D},\quad 2\gamma = \frac{C + 2C'Y}{D},$$

und für den Schnitt unter dem Supplementwinkel von ω:

$$20)\quad 2\alpha = \frac{A - 2A'Z}{D},\quad 2\beta = \frac{B - 2B'Z}{D},\quad 2\gamma = \frac{C - 2C'Z}{D}.$$

Nun kann man der Gleichung 6 die Form geben:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = Y^2 + (Y - r_1)^2 \operatorname{tg}^2\omega;$$

die Substitution der eben gefundenen Werthe in diese Gleichung gibt für den Schnittwinkel ω, wenn man

$$21)\quad A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 - D^2 = \lambda,\quad A^2 + B^2 + C^2 = \mu,\quad AA' + BB' + CC' = \nu$$

setzt:

$$22)\quad 4\lambda Y^2 + 4\nu Y + \mu - 4D^2(Y - r_1)^2 \operatorname{tg}^2\omega = 0,$$

oder geordnet:

$$4Y^2(\lambda - D^2\operatorname{tg}^2\omega) + 4Y(\nu + 2r_1 D^2\operatorname{tg}^2\omega) + \mu - 4r_1^2 D^2\operatorname{tg}^2\omega = 0.$$

Ebenso findet man für den Schnittwinkel $180 - \omega$:

$$23)\quad 4\lambda Z^2 - 4\nu Z + \mu - 4D^2(Z + r_1)^2 \operatorname{tg}^2\omega = 0,$$

oder geordnet:

$$4Z^2(\lambda - D^2 \operatorname{tg}^2\omega) - 4Z(\nu + 2r_1 D \operatorname{tg}^2\omega) + \mu - 4r_1^{\,2} D^2 \operatorname{tg}^2\omega = 0.$$

Damit ist die Aufgabe gelöst; denn die letzten Gleichungen liefern Y und Z d. h. $r\cos\omega + r_1$ und $r\cos\omega - r_1$, also auch r durch lauter bekannte Grössen ausgedrückt und die Gleichungen 19 und 20 die zugehörigen α, β und γ. Die Gleichungen 19 und 20 lehren überdies, dass die α, β, γ reell sind, sobald reelle Werthe für Y und Z gefunden werden, aber complex, wenn Y und Z complex sind. Y und Z sind ferner immer zu gleicher Zeit reell oder complex; denn die Gleichungen 22 und 23 haben dieselbe Discriminante. Endlich sind Y und Z immer von demselben absoluten Werth, aber von entgegengesetztem Zeichen, wie ein Blick auf die Gleichungen 22 und 23 lehrt; desswegen sind aber auch die aus diesen Gleichungen hervorgehenden Werthe von r entgegengesetzt gleich. Gibt also die Gleichung 22, unter der Voraussetzung reeller Wurzeln, zwei positive Werthe für r, so gibt die Gleichung 23 zwei negative von derselben absoluten Grösse; gibt die erste ein positives und ein negatives r, so gibt die zweite ein negatives und ein positives r von bezüglich derselben Grösse, und gibt endlich die erste Gleichung zwei negative r, so liefert die zweite zwei positive r. Nun muss r, als geometrische Grösse betrachtet, im Allgemeinen einen positiven Werth haben, und nur, wo entgegengesetzte Lagenverhältnisse in Betracht kommen, hat ein negativer Werth desselben einen geometrisch deutbaren Sinn. Desshalb gibt es unter der Voraussetzung, die Wurzeln der Gleichungen 22 und 23 seien reell, entweder zwei Schnittkugeln, welche die gegebenen Kugeln unter dem Winkel ω schneiden, oder eine Schnittkugel, die sie unter dem Winkel ω, und eine andere, die sie unter dem Winkel $180^\circ - \omega$, oder zwei Schnittkugeln, die sie unter dem Winkel $180^\circ - \omega$ schneiden. Schnittkugeln, die entweder beide aus einer der Gleichungen 22 und 23, oder die eine aus dieser, die andere aus jener Gleichung bestimmt werden, nennt man conjugirte Schnittkugeln.

Ausser der bisher betrachteten Lage der zwei conjugirten Schnittkugeln gibt es noch 7 verschiedene Lagen derselben. Entweder nämlich schneidet die Schnittkugel drei der gegebenen Kugeln unter dem Winkel ω und eine Kugel unter dem Winkel $180^\circ - \omega$, oder sie schneidet drei unter dem Winkel $180^\circ - \omega$ und eine unter dem Winkel ω; dies gibt 4 Fälle, welche man analytisch dadurch characterisiren kann, dass man in unseren Formeln nacheinander r_1, r_2, r_3, r_4 mit dem negativen Zeichen versieht. Die Schnittkugel kann endlich zwei der gegebenen Kugeln unter dem Winkel ω, die andern unter dem Winkel $180^\circ - \omega$ schneiden, was die übrigen 3 Fälle liefert, für welche man r_1, r_2 oder r_1, r_3 oder r_2, r_3 negativ setzen muss. In allen diesen Fällen erhält man nach Durchführung der Rechnung in einer der oben gegebenen analogen Weise zum Schluss zwei Gleichungen von derselben Form wie die Gleichungen 22 und 23, auf welche man die nämlichen Schlüsse wie auf diese anwenden kann. Wir werden desshalb im Folgenden immer das erste Paar conjugirter Kugeln der Betrachtung zu Grunde legen, weil für die übrigen 7 Paare sich Alles analog gestaltet.

Ein specieller Fall ist hier vor andern zu betrachten, für welchen sich der Radius der Schnittkugel in einem einfachen Ausdrucke geben lässt. Ist nämlich $\omega = 90^0$, so fallen die beiden conjugirten Schnittkugeln in eine zusammen, die sich selbst conjugirt ist; es ist die sogenannte Orthogonalkugel. Die Gleichungen 19 gehen für diesen Fall über in:

$$2\,\alpha = \frac{A + 2\,r_1\,A'}{D},\quad 2\,\beta = \frac{B + 2\,r_1\,B'}{D},\quad 2\,\gamma = \frac{C + 2\,r_1\,C'}{D}.$$

Nun schneiden sich bekanntlich die 6 Potenzebenen der 4 Kugeln in einem Punkte, dem Potenzpunkte; die Gleichungen der 3 ersten derselben, welche man erhält, indem man von 1 nacheinander 2, 3, 4 abzieht, heissen:

$$\begin{aligned}
2\,\alpha_2\,x + 2\,\beta_2\,y + 2\,\gamma_2\,z &= d_{12} + 2\,r_1\,(r_1 - r_2),\\
2\,\alpha_3\,x + 2\,\beta_3\,y + 2\,\gamma_3\,z &= d_{13} + 2\,r_1\,(r_1 - r_3),\\
2\,\alpha_4\,x + 2\,\beta_4\,y + 2\,\gamma_4\,z &= d_{14} + 2\,r_1\,(r_1 - r_4);
\end{aligned}$$

und man findet leicht, dass sie durch die oben gegebenen Mittelpunktscoordinaten befriedigt werden; daher fällt der Mittelpunkt der Orthogonalkugel mit dem Potenzpunkt zusammen. Substituirt man ferner diese Coordinaten in die Gleichung 6, welche jetzt die Form hat

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = r^2 + r_1^{\,2},$$

so erhält man nach leichter Rechnung, wenn man jetzt den Radius der Orthogonalkugel mit ϱ bezeichnet:

$$\begin{aligned}
24)\quad 4\,D^2\,\varrho^2 = 4\,r_1^{\,2}\,(A'^2 + B'^2 + C'^2 - D^2) + 4\,r_1\,(AA' + BB' + CC') + A^2 + B^2 + C^2 =\\
= 4\,r_1^{\,2}\,\lambda + 4\,r_1\,\nu + \mu.
\end{aligned}$$

Dem Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung kann man die Form einer Determinante geben. Mit Rücksicht auf die oben gegebenen Bedeutungen der darin vorkommenden Buchstaben nämlich, und wenn wir ferner zur Abkürzung setzen:

$$25)\ \left\{\begin{array}{ll}
\alpha_2^{\,2} + \beta_2^{\,2} + \gamma_2^{\,2} = k, & \alpha_2\,\alpha_3 + \beta_2\,\beta_3 + \gamma_2\,\gamma_3 = l,\\
\alpha_3^{\,2} + \beta_3^{\,2} + \gamma_3^{\,2} = k', & \alpha_2\,\alpha_4 + \beta_2\,\beta_4 + \gamma_2\,\gamma_4 = m,\\
\alpha_4^{\,2} + \beta_4^{\,2} + \gamma_4^{\,2} = k'', & \alpha_3\,\alpha_4 + \beta_3\,\beta_4 + \gamma_3\,\gamma_4 = n
\end{array}\right.$$

erhält man nach Baltzer Det. §. 5, 2.:

$$A^2+B^2+C^2+D^2 = \begin{vmatrix}
k+d_{12}^{\,2} & l+d_{12}d_{13} & m+d_{12}d_{14}\\
l+d_{12}d_{13} & k'+d_{13}^{\,2} & n+d_{13}d_{14}\\
m+d_{12}d_{14} & n+d_{13}d_{14} & k''+d_{14}^{\,2}
\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0\\
d_{12} & k+d_{12}^{\,2} & l+d_{12}d_{13} & m+d_{12}d_{14}\\
d_{13} & l+d_{12}d_{13} & k'+d_{13}^{\,2} & n+d_{13}d_{14}\\
d_{14} & m+d_{12}d_{14} & n+d_{13}d_{14} & k''+d_{14}^{\,2}
\end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man in der letzten Determinante die erste Vertikalreihe nacheinander mit d_{12}, d_{13}, d_{14} und zieht sie in derselben Ordnung von der zweiten, dritten und vierten Vertikalreihe ab, so kommt:

$$A^2+B^2+C^2+D^2=\begin{vmatrix} 1 & -d_{12} & -d_{13} & -d_{14} \\ d_{12} & k & l & m \\ d_{13} & l & k' & n \\ d_{14} & m & n & k'' \end{vmatrix}, \text{ und weil } D^2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d_{12} & k & l & m \\ d_{13} & l & k' & n \\ d_{14} & m & n & k'' \end{vmatrix}$$

ist, so hat man:

$$26)\quad A^2+B^2+C^2=\mu=-\begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{12} & k & l & m \\ d_{13} & l & k' & n \\ d_{14} & m & n & k'' \end{vmatrix}.$$

Ganz in derselben Weise erhält man

$$A'^2+B'^2+C'^2=-\begin{vmatrix} 0 & r_1-r_2 & r_1-r_3 & r_1-r_4 \\ r_1-r_2 & k & l & m \\ r_1-r_3 & l & k' & n \\ r_1-r_4 & m & n & k'' \end{vmatrix},$$

daher $$27)\quad A'^2+B'^2+C'^2-D^2=\lambda=-\begin{vmatrix} 1 & r_1-r_2 & r_1-r_3 & r_1-r_4 \\ r_1-r_2 & k & l & m \\ r_1-r_3 & l & k' & n \\ r_1-r_4 & m & n & k'' \end{vmatrix}$$

und endlich $$28)\quad AA'+BB'+CC'=\nu=-\begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ r_1-r_2 & k & l & m \\ r_1-r_3 & l & k' & n \\ r_1-r_4 & m & n & k'' \end{vmatrix}.$$

Mit diesen Werthen geht obige Gleichung für den Radius der Orthogonalkugel über in:

$$4D^2\varrho^2=-4r_1^2\begin{vmatrix} 1 & r_1-r_2 & r_1-r_3 & r_1-r_4 \\ r_1-r_2 & k & l & m \\ r_1-r_3 & l & k' & n \\ r_1-r_4 & m & n & k'' \end{vmatrix}-4r_1\begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ r_1-r_2 & k & l & m \\ r_1-r_3 & l & k' & n \\ r_1-r^4 & m & n & k'' \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{12} & k & l & m \\ d_{13} & l & k' & n \\ d_{14} & m & n & k'' \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 4r_1^2 & 2r_1(r_1-r_2) & 2r_1(r_1-r_3) & 2r_1(r_1-r_4) \\ 2r_1(r_1-r_2) & k & l & m \\ 2r_1(r_1-r_2) & l & k' & n \\ 2r_1(r_1-r_4) & m & n & k'' \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 2r_1(r_1-r_2) & k & l & m \\ 2r_1(r_1-r_3) & l & k' & n \\ 2r_1(r_1-r_4) & m & n & k'' \end{vmatrix}-$$

$$-\begin{vmatrix} 0 & 2r_1(r_1-r_2) & 2r_1(r_1-r_3) & 2r_1(r_1-r_4) \\ d_{12} & k & l & m \\ d_{13} & l & k' & n \\ d_{14} & m & n & k'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{12} & k & l & m \\ d_{13} & l & k' & n \\ d_{14} & m & n & k'' \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 4r_1^2 & d_{12}+2r_1(r_1-r_2) & d_{13}+2r_1(r_1-r_3) & d_{14}+2r_1(r_1-r_4) \\ 2r_1(r_1-r_2) & k & l & m \\ 2r_1(r_1-r_3) & l & k' & n \\ 2r_1(r_1-r_4) & m & n & k'' \end{vmatrix} -$$

$$-\begin{vmatrix} 0 & d_{12}+2r_1(r_1-r_2) & d_{13}+2r_1(r_1-r_3) & d_{14}+2r_1(r_1-r_4) \\ d_{12} & k & l & m \\ d_{13} & l & k' & n \\ d_{14} & m & n & k'' \end{vmatrix},$$

$$= -\begin{vmatrix} 4r_1^2 & d_{12}+2r_1(r_1-r_2) & d_{13}+2r_1(r_1-r_3) & d_{14}+2r_1(r_1-r_4) \\ d_{12}+2r_1(r_1-r_2) & k & l & m \\ d_{13}+2r_1(r_1-r_3) & l & k' & n \\ d_{14}+2r_1(r_1-r_4) & m & n & k'' \end{vmatrix}. \quad (29)$$

Die Grössen $d_{12}+2r_1(r_1-r_2)$, $d_{13}+2r_1(r_1-r_3)$, $d_{14}+2r_1(r_1-r_4)$, welche in dieser Determinante vorkommen, lassen sich auch schreiben: $k+r_1^2-r_2^2$, $k'+r_1-r_3^2$, $k''+r_1^2-r_4^2$, woraus hervorgeht, dass in dem Ausdruck für den Radius der Orthogonalkugel bloss die Mittelpunktscoordinaten der vier gegebenen Kugeln und die Quadrate ihrer Radien vorkommen. Derselbe bleibt deshalb unverändert, welches Zeichen man auch diesen Radien geben mag; es lässt sich leicht zeigen, dass auch die Mittelpunktscoordinaten unverändert bleiben, wenn man in den A, B, C, A', B', C' die nämlichen Zeichenänderungen vornimmt. Daraus folgt aber, dass es im Falle eines orthogonalen Schnittes statt der 8 Paare conjugirter Schnittkugeln nur eine einzige sich selbst conjugirte, nämlich eben die Orthogonalkugel, gibt.

Indem wir jetzt zum allgemeinen Falle zurückkehren, wollen wir zuerst die Gleichungen der conjugirten Schnittkugeln entwickeln. Die Gleichung einer Schnittkugel des ersten Paars heisst nach Ausweis der Gleichungen 19:

$$\left(x-\frac{A+2A'Y}{2D}\right)^2+\left(y-\frac{B+2B'Y}{2D}\right)^2+\left(z-\frac{C+2C'Y}{2D}\right)^2=(Y-r_1)^2\,(1+\operatorname{tg}^2\omega),$$

oder entwickelt:

$$4D^2(x^2+y^2+z^2)-4D(Ax+By+Cz+r_1^2D)-8D(A'x+B'y+C'z+r_1D)+$$
$$+\mu+4\nu Y+4\lambda Y^2-4D^2(Y-r_1)^2\operatorname{tg}^2\omega=0.$$

Die vier letzten Glieder sind nach Gleichung 22 gleich Null, und man hat daher:

$$Y = \frac{D(x^2+y^2+z^2)-(Ax+By+Cz+r_1{}^2 D)}{2(A'x+B'y+C'z-r_1 D)}.$$

Aus Gleichung 22 ergibt sich aber:

$$Y = \frac{-(\nu+2\lambda r_1) \pm \sqrt{\nu^2-\lambda\mu+4D^4\varrho^2 \operatorname{tg}^2\omega}}{2(\lambda - D^2 \operatorname{tg}^2 \omega)} + r_1.$$

Daher sind die Gleichungen der beiden conjugirten Schnittkugeln:

$$\frac{-(\nu+2\lambda r_1) \pm \sqrt{\nu^2-\lambda\mu+4D^4\varrho^2 \operatorname{tg}^2\omega}}{2(\lambda - D^2 \operatorname{tg}^2 \omega)} =$$
$$= \frac{D(x^2+y^2+z^2)-(Ax+By+Cz+r_1{}^2 D)}{2(A'x+B'y+C'z-r_1 D)} - r_1,$$

welche sich auch in folgende Form bringen lassen:

$$30)\quad \frac{-(\nu+2\lambda r_1) \pm \sqrt{\nu^2-\lambda\mu+4D^4\varrho^2 \operatorname{tg}^2\omega}}{(\lambda - D^2 \operatorname{tg}^2 \omega)D}(A'x+B'y+C'z-r_1 D) =$$
$$= \left(x - \frac{A+2r_1 A'}{2D}\right)^2 + \left(y - \frac{B+2r_1 B'}{2D}\right)^2 + \left(z - \frac{C+2r_1 C'}{2D}\right)^2 - \varrho^2.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite, gleich Null gesetzt, ist die Gleichung der Orthogonalkugel, und der Ausdruck $A'x+B'y+C'z-r_1 D$, gleich Null gesetzt, die Gleichung derjenigen Aehnlichkeitsebene der 4 Kugeln, auf welcher die 6 äusseren Aehnlichkeitspunkte liegen, wie man leicht erkennt, wenn man aus den Coordinaten dreier der 6 Aehnlichkeitspunkte:

$$x_{12} = \frac{r_1 \alpha_2}{r_1 - r_2},\quad y_{12} = \frac{r_1 \beta_2}{r_1 - r_2},\quad z_{12} = \frac{r_1 \gamma_2}{r_1 - r_2}$$
$$x_{13} = \frac{r_1 \alpha_3}{r_1 - r_3},\quad y_{13} = \frac{r_1 \beta_3}{r_1 - r_3},\quad z_{13} = \frac{r_1 \gamma_3}{r_1 - r_3}$$
$$x_{14} = \frac{r_1 \alpha_4}{r_1 - r_4},\quad y_{14} = \frac{r_1 \beta_4}{r_1 - r_4},\quad z_{14} = \frac{r_1 \gamma_4}{r_1 - r_4}$$

die Bedingung bildet, dass sie auf einer Ebene liegen, nämlich:

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z & r_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & r_1 - r_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & r_1 - r_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & r_1 - r_4 \end{vmatrix} = A'x+B'y+C'z-r_1 D.$$

Die beiden conjugirten Kugeln haben also mit der Orthogonalkugel diese äussere Aehnlichkeitsebene zur gemeinschaftlichen Potenzebene und ihre Mittelpunkte liegen auf der Senkrechten, welche man vom Mittelpunkte dieser letzteren Kugel, d. h. vom Potenzpunkt, auf diese Ebene gefällt hat. Die Schnittpunkte dieser

Kugeln mit dieser Senkrechten bestimmen auf derselben ein Punktsystem, dessen Mittelpunkt der Fusspunkt dieser Senkrechten und dessen Potenz gleich $E^2 - \varrho^2$ ist, wo unter E die Entfernung des Potenzpunktes von der Aehnlichkeitsebene zu verstehen ist, welche man aus den Coordinaten dieses Punktes und der Gleichung der letzteren findet zu:

$$31) \quad E = \frac{\nu + 2 r_1 \lambda}{2 D \sqrt{\lambda + D^2}}.$$

Aber auch die Mittelpunkte der Paare conjugirter Kugeln bilden ein Punktsystem, dessen einer Doppelpunkt der Potenzpunkt und dessen anderer der Pol der Aehnlichkeitsebene in Bezug auf die Orthogonalkugel ist. Die Entfernung des Mittelpunkts einer der conjugirten Schnittkugeln von der Aehnlichkeitsebene findet sich nämlich aus Gleichung 30:

$$\frac{\nu + 2 r_1 \lambda}{2 D \sqrt{\lambda + D^2}} + \sqrt{\frac{\lambda + D^2}{D^2}} \cdot \frac{-(\nu + 2 \lambda r_1) \pm \sqrt{\nu^2 - \lambda \mu + 4 D^4 \varrho^2 \operatorname{tg}^2 \omega}}{2 (\lambda - D^2 \operatorname{tg}^2 \omega)}$$

oder nach 22 und 31:

$$E + \sqrt{\frac{\lambda + D^2}{D^2}}\, r' \cos \omega \quad \text{und} \quad E + \sqrt{\frac{\lambda + D^2}{D^2}}\, r'' \cos \omega,$$

wo r' und r'' die Radien der beiden conjugirten Schnittkugeln bedeuten. Die Entfernungen der bezüglichen Mittelpunkte vom Potenzpunkt verhalten sich also wie die Radien r' und r'', welche mit ihren andern Endpunkten in einem Punkte der Aehnlichkeitsebene zusammenstossen. Legt man deshalb eine Ebene durch den Potenzpunkt senkrecht auf die Aehnlichkeitsebene, so entwerfen auf ihr die Radien aller conjugirten Kugeln ein gleichseitiges hyperbolisches Büschel, dessen Strahlen mit dem Radius der Orthogonalkugel gleiche Winkel bilden. Wenn die Orthogonalkugel die Aehnlichkeitsebene nicht schneidet, oder wenn ihr Radius imaginär wird, so sind auch die Strahlen dieses Büschels imaginär, während die Involution der Mittelpunkte reell bleibt. Dass der andere auf dem ersten senkrecht stehende Doppelstrahl die Verbindungslinie der Mittelpunkte in dem Pol der Aehnlichkeitsebene in Bezug auf die Orthogonalkugel treffen muss, ergibt sich leicht.

Es ist ferner leicht zu zeigen, dass die übrigen sieben Paare conjugirter Kugeln mit der Orthogonalkugel je eine der sieben Aehnlichkeitsebenen zur gemeinschaftlichen Potenzebene haben, und zwar gehört, wenn man den äusseren Aehnlichkeitspunkt zweier Kugeln k_m, k_n durch A_{mn} und den inneren durch J_{mn} bezeichnet,

zum 2ten Paare die Aehnlichkeitsebene, auf welcher	$A_{23}, A_{24}, A_{34}, J_{12}, J_{13}, J_{14}$	liegen.
„ 3ten „ „ „ „ „	$A_{13}, A_{14}, A_{34}, J_{21}, J_{23}, J_{24}$	„
„ 4ten „ „ „ „ „	$A_{12}, A_{14}, A_{24}, J_{31}, J_{32}, J_{34}$	„
„ 5ten „ „ „ „ „	$A_{12}, A_{13}, A_{23}, J_{41}, J_{42}, J_{43}$	„
„ 6ten „ „ „ „ „	$A_{12}, A_{34}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}$	„

zum 7ten Paare die Aehnlichkeitsebene, auf welcher A_{13}, A_{24}, J_{12}, J_{14}, J_{32}, J_{34} liegen.
„ 8ten „ „ „ „ „ A_{14}, A_{23}, J_{12}, J_{13}, J_{42}, J_{43} „ .

Wir gehen jetzt an die Lösung die Lösung der Hauptfrage, die wir uns gestellt haben, unter welchen Umständen und Bedingungen die conjugirten Schnittkugeln reell sind. Zu diesem Behufe müssen wir die gemeinschaftliche Discriminante der Gleichungen 22 und 23 suchen; ist dieselbe positiv, dann existirt ein solches Kugelpaar, ist sie negativ, nicht. Diese Discriminante aber heisst, wie auch aus Gleichung 30 hervorgeht:

$$\nu^2 - \lambda\mu + D^4 \varrho^2 \operatorname{tg}^2 \omega .$$

Der letzte Term derselben ändert sich nicht, welches der 8 Paare conjugirter Kugeln man auch betrachten mag; die zwei ersten Terme dagegen ändern sich von einem Paare conjugirter Kugeln zum andern. Bezeichnen wir dieselben für das erste Paar mit $\varDelta_1$, so ist:

$$\begin{aligned}\varDelta_1 &= (AA' + BB' + CC')^2 - (A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2 - D^2) \\ &= D^2(A^2 + B^2 + C^2) - (AB' - A'B)^2 - (CA' - C'A)^2 - (BC' - B'C)^2.\end{aligned}$$

Wir entwickeln zuerst den Werth von $AB' - A'B$. Ist

$$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix} \text{ die zu } \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix} \text{ adjungirte Determinante, so ist:}$$

$$\begin{aligned}AB' - A'B = {} & [d_{12} A_2 + d_{13} A_3 + d_{14} A_4]\,[(r_1 - r_2) B_2 + (r_1 - r_3) B_3 + (r_1 - r_4) B_4] - \\ & - [d_{12} B_2 + d_{13} B_3 + d_{24} B_4]\,[(r_1 - r_2) A_2 + (r_1 - r_3) A_3 + (r_1 - r_4) A_4],\end{aligned}$$

oder nach ausgeführter Multiplication und Reduction:

$$\begin{aligned}= {} & (A_2 B_3 - A_3 B_2)[d_{12}(r_1 - r_3) - d_{13}(r_1 - r_2)] - (A_4 B_2 - A_2 B_4)[d_{12}(r_1 - r_4) - d_{14}(r_1 - r_2)] + \\ & + (A_3 B_4 - A_4 B_3)[d_{13}(r_1 - r_4) - d_{14}(r_1 - r_3)].\end{aligned}$$

Nun ist nach Baltzer Det. §, 6, 2:

$A_2 B_3 - A_3 B_2 = D\gamma_4$, $A_4 B_2 - A_2 B_4 = D\gamma_3$, $A_3 B_4 - A_4 B_3 = D\gamma_2$, also ist:

$$AB' - A'B = D. \begin{vmatrix} \gamma_2 & d_{12} & r_1 - r_2 \\ \gamma_3 & d_{13} & r_1 - r_3 \\ \gamma_4 & d_{14} & r_1 - r_4 \end{vmatrix}.$$

Ebenso hat man:

$$CA' - C'A = D. \begin{vmatrix} \beta_2 & d_{12} & r_1 - r_2 \\ \beta_3 & d_{13} & r_1 - r_3 \\ \beta_4 & d_{14} & r_1 - r_4 \end{vmatrix} \text{ und } BC' - B'C = D. \begin{vmatrix} \alpha_2 & d_{12} & r_1 - r_2 \\ \alpha_3 & d_{13} & r_1 - r_3 \\ \alpha_4 & d_{14} & r_1 - r_4 \end{vmatrix}.$$

Dieses Resultat führt uns dazu, $\varDelta_1$ gleichzusetzen:

$$D^2 [2(A^2 + B^2 + C^2) + (A'^2 + B'^2 + C'^2 + D^2) - S],$$

wo S die Summe der 10 Determinantenquadrate:

$$A^2 + B^2 + C^2 + A'^2 + B'^2 + C'^2 + D^2 + \frac{(AB' - A'B)^2}{D^2} + \frac{(CA' - C'A)^2}{D^2} + \frac{(AB' - A'B)^2}{D^2}$$

bedeutet; diese lässt sich nämlich nach Baltzer Det. §. 5, 2 in eine einzige Determinante verwandeln, welche heisst:

$$\begin{vmatrix} k+d_{12}^2+(r_1-r_2)^2 & l+d_{12}d_{13}+(r_1-r_2)(r_1-r_3) & m+d_{12}d_{14}+(r_1-r_2)(r_1-r_4) \\ l+d_{12}d_{13}+(r_1-r_3)^2 & k'+d_{13}^2+(r_1-r_3)^2 & n+d_{13}d_{14}+(r_1-r_3)(r_1-r_4) \\ m+d_{12}d_{14}+(r_1-r_4)^2 & n+d_{13}d_{14}+(r_1-r_3)(r_1-r_4) & k''+d_{14}^2+(r_2-r_4)^2 \end{vmatrix}.$$

Indem man diese Determinante nacheinander auf den 4^{ten} und 5^{ten} Grad bringt und sie in ähnlicher Weise umformt, wie wir dies oben bei $A^2+B^2+C^2+D^2$ gesehen haben, erhält man:

$$S = \begin{vmatrix} -1 & 0 & r_1-r_2 & r_1-r_3 & r_1-r_4 \\ 0 & -1 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ r_1-r_2 & d_{12} & k & l & m \\ r_1-r_3 & d_{13} & l & k' & n \\ r_1-r_4 & d_{14} & m & n & k'' \end{vmatrix}.$$

Nun kann man der Grösse $A'^2+B'^2+C'^2+D^2$ die Gestalt geben:

$$-\begin{vmatrix} -1 & 0 & r_2-r_2 & r_1-r_3 & r_1-r_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ r_1-r_2 & d_{12} & k & l & m \\ r_1-r_3 & d_{13} & l & k' & n \\ r_1-r_4 & d_{14} & m & n & k'' \end{vmatrix};$$

zieht man davon S ab, so erhält man:

$$-\begin{vmatrix} -1 & 0 & r_1-r_2 & r_1-r_3 & r_1-r_4 \\ 0 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ r_1-r_2 & d_{12} & k & l & m \\ r_1-r_3 & d_{13} & l & k' & n \\ r_1-r_4 & d_{14} & m & n & k'' \end{vmatrix}.$$

Durch Addition von:

$$2(A^2+B^2+C^2) = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ r_1-r_2 & d_{12} & k & l & m \\ r_1-r_3 & d_{13} & l & k' & n \\ r_1-r_4 & d_{14} & m & n & k'' \end{vmatrix}$$

wird endlich:

$$32)\quad \Delta_1 = -D^2. \begin{vmatrix} 1 & 0 & r_1-r_2 & r_1-r_3 & r_1-r_4 \\ 0 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ r_1-r_2 & d_{12} & k & l & m \\ r_1-r_3 & d_{13} & l & k' & n \\ r_1-r_4 & d_{14} & m & n & k'' \end{vmatrix}.$$

Eine Probe für dieses Resultat kann man sich in folgender Weise verschaffen. Denkt man sich zu der zuletzt erhaltenen Determinante die adjungirte Determinante gebildet und die Elemente derselben durch den Buchstaben α mit doppelten Indices bezeichnet, so ist:

$$\varDelta_1 = \nu^2 - \lambda\mu = \alpha_{12}\,\alpha_{21} - \alpha_{11}\,\alpha_{22}\,;$$

diese Partialdeterminante ist aber nach Baltzer Det. §. 6, 2 gleich dem negativen Product aus der zuletzt erhaltenen Determinante und der Determinante:

$$\begin{vmatrix} k & l & m \\ l & k' & n \\ m & n & k'' \end{vmatrix},$$

welche gleich D^2 ist.

Der in Gleichung 32 gefundene Werth von $\varDelta_1$ kann noch weiter umgeformt werden, so dass seine geometrische Bedeutung deutlicher zu Tage tritt. Zu diesem Zwecke führe man die Abkürzungen ein:

$$33)\quad \begin{cases} (\alpha_2-\alpha_3)^2+(\beta_2-\beta_3)^2+(\gamma_2-\gamma_3)^2-(r_2-r_3)^2=d_{23}, \\ (\alpha_2-\alpha_4)^2+(\beta_2-\beta_4)^2+(\gamma_2-\gamma_4)^2-(r_2-r_4)^2=d_{24}, \\ (\alpha_3-\alpha_4)^2+(\beta_3-\beta_4)^2+(\gamma_3-\gamma_4)^2-(r_3-r_4)^2=d_{34}, \end{cases}$$

dann wird mit Zuhülfenahme von 10, 11, 12 und 25:

$$34)\quad \begin{cases} 2(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3)=2l\;\;=d_{12}+d_{13}-d_{23}+2(r_1-r_2)(r_1-r_3) \\ 2(\alpha_2\alpha_4+\beta_2\beta_4+\gamma_2\gamma_4)=2m=d_{12}+d_{14}-d_{24}+2(r_1-r_2)(r_1-r_4) \\ 2(\alpha_3\alpha_4+\beta_3\beta_4+\gamma_3\gamma_4)=2n\;=d_{13}+d_{14}-d_{34}+2(r_1-r_3)(r_1-r_4). \end{cases}$$

Multiplicirt man jetzt in der Determinante auf der rechten Seite von 32 die zweite Vertikalreihe nacheinander mit r_1-r_2, r_1-r_3, r_1-r_4, und zieht die Produkte in derselben Ordnung von der dritten, vierten und fünften Vertikalreihe ab, berücksichtigt ferner die eben gefundenen Relationen und 10, 11, 12, so ist:

$$\varDelta_1 = -D^2.\begin{vmatrix} 0 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ d_{12} & r_1-r_2 & d_{12} & \tfrac{1}{2}(d_{12}+d_{13}-d_{23}) & \tfrac{1}{2}(d_{12}+d_{13}-d_{23}) \\ d_{13} & r_1-r_3 & \tfrac{1}{2}(d_{12}+d_{13}-d_{23}) & d_{13} & \tfrac{1}{2}(d_{13}+d_{14}-d_{34}) \\ d_{14} & r_1-r_4 & \tfrac{1}{2}(d_{12}+d_{14}-d_{24}) & \tfrac{1}{2}(d_{13}+d_{14}-d_{34}) & d_{14} \end{vmatrix}$$

$$= -\tfrac{1}{4}D^2.\begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{12} & 2d_{12} & d_{12}+d_{13}-d_{23} & d_{12}+d_{14}-d_{24} \\ d_{13} & d_{12}+d_{13}-d_{23} & 2d_{13} & d_{13}+d_{14}-d_{34} \\ d_{14} & d_{12}+d_{14}-d_{24} & d_{13}+d_{14}-d_{34} & 2d_{14} \end{vmatrix}.$$

Man ziehe nun die erste Vertikalreihe dieser Determinante nach einander von der zweiten, dritten und vierten Vertikalreihe ab; dadurch erhält man:

$$\varDelta_1 = -\tfrac{1}{4} D^2 . \begin{vmatrix} 0_{12} & d & d_{13} & d_{14} \\ d_{12} & d_{12} & d_{13}-d_{23} & d_{14}-d_{24} \\ d_{13} & d_{12}-d_{23} & d_{13} & d_{14}-d_{34} \\ d_{14} & d_{12}-d_{24} & d_{13}-d_{34} & d_{14} \end{vmatrix} .$$

Zieht man ebenso die erste Horizontalreihe von der zweiten, dritten und vierten Horizontalreihe ab, so ist:

$$35)\quad \varDelta_1 = -\tfrac{1}{4} D^2 . \begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{12} & 0 & -d_{23} & -d_{24} \\ d_{13} & -d_{23} & 0 & -d_{34} \\ d_{14} & -d_{24} & -d_{34} & 0 \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{4} D^2 . \begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} .$$

Betrachten wir nun die geometrische Bedeutung der Grössen d_{12}, d_{13}, d_{14}, d_{23}, d_{24}, d_{34}. Aus den Relationen 10, 11, 12 und 33 wird es klar, dass d_{12}, d_{13}, d_{23} die Quadrate der geradlinigen Strecken zwischen den Berührungspunkten einer an die Kugeln k_1, k_2, k_3 gelegten gemeinschaftlichen äusseren Tangentialebene sind; d_{13}, d_{14}, d_{34} bedeuten das Nämliche für eine Tangentialebene an die Kugeln k_1, k_3, k_4 etc. Construirt man aus diesen Verbindungsstrecken als Kanten ein Tetraeder, und nennt dessen sechsfaches Volum V_1 und den Radius der ihm umschriebenen Kugel R_1, so ist nach Baltzer Det. §. 16, 8:

$$36)\quad \varDelta_1 = 4\, D^2\, V_1^{\,2}\, R_1^{\,2}.$$

Die Grösse D ist gleich dem sechsfachen Volum des Mittelpunktstetraeders der gegebenen Kugeln, und da dieses vorausgesetztermassen immer reell ist, so ist auch D^2 immer positiv oder im äussersten Fall gleich Null, wo dann die Mittelpunkte aller vier Kugeln in einer Ebene liegen, ein Fall, den wir weiter unten speciell betrachten werden. *Das Zeichen von $\varDelta_1$ hängt also bloss von den Zeichen der Grössen V_1 und R_1 ab, und zwar ist $\varDelta_1$ positiv, wenn V_1 und R_1 entweder beide zugleich reell oder beide zugleich imaginär sind, dagegen negativ, wenn eine dieser Grössen reell, die andere aber imaginär ist.* Die ganze Discriminante des ersten Paares conjugirter Schnittkugeln hat zum Ausdruck $4\, D^2 [\, V_1^{\,2} R_1^{\,2} + D^2 \varrho^2 \operatorname{tg}^2 \omega]$.

Ein specieller Fall, in welchem $\varDelta_1$, also auch die ganze Discriminante, positiv wird, ist der, wenn die Radien der vier gegebenen Kugeln gleich sind; denn alsdann gehen die Grössen d_{12}, d_{13}, d_{14} etc. in die Quadrate der Mittelpunktsentfernungen der 4 Kugeln, folglich V_1 in D über und man hat $\varDelta_1 = 4\, D^4 R_1^{\,2}$. Da nun in diesem Falle R_1 zum Radius der dem Mittelpunktstetraeder umschriebenen Kugel geworden ist, dieses aber der Voraussetzung gemäss immer reell ist, so ist $\varDelta_1$ positiv; die Lösungen sind also unbedingt möglich. Das nämliche gilt, wenn die 4 Kugeln in Punkte degeneriren. Hier verschwindet $\varDelta_1$ nicht, wie man etwa hätte erwarten können, weil es nur eine Schnittbezüglich Berührungskugel gibt, die Kugel nämlich, welche durch jene 4 Punkte bestimmt wird. Wohl aber verschwinden in diesem und dem allgemeineren Falle, wenn alle Kugeln gleich sind, A', B', C' und die Gleichung wird desshalb zu:

$$-4\,D^2\,Y^2 + \mu - 4\,D^2\,(Y - r_1)^2\,\mathrm{tg}^2\,\omega = 0, \text{ woraus}$$

$$Y = r\cos\omega + r_1 = r_1\sin^2\omega \pm \cos\omega\,.\,\frac{\sqrt{\mu - 4\,r_1{}^2\,D^2\sin^2\omega}}{2\,D}$$

folgt, während 23 gibt:

$$Z = r\cos\omega - r_1 = -r_1\sin^2\omega \mp \cos\omega\,.\,\frac{\sqrt{\mu - 4\,r_1{}^2\,D^2\sin^2\omega}}{2\,D}.$$

Bei der Annahme, dass alle Radien $= 0$ seien, ist auch $r_1 = 0$ und man erhält für r aus 22 dieselben Werthe wie aus 23, und da man nur die mit dem positiven Zeichen versehenen brauchen kann, diese aber gleich sind, so erklärt sich daraus das scheinbare Paradoxon, dass 2 Lösungen in eine zusammenfallen, ohne dass die Discriminante Null wird.

Dies führt uns darauf, die Fälle auszuscheiden, in denen Δ_1 verschwindet. Dies geschieht immer, wenn D zu Null wird, was wir einer besonderen Untersuchung vorbehalten, während wir hier voraussetzen, dass es positiv sei. Aus der Gleichung 35, welche entwickelt lautet:

$$37)\quad \Delta_1 = \tfrac{1}{4}\,D^2.\,[d_{12}\,d_{34}\,d_{13}\,d_{24} - (d_{12}\,d_{34} + d_{13}\,d_{24} - d_{14}\,d_{23})^2],$$

folgt unter dieser Voraussetzung, dass erstens Δ_1 verschwindet, wenn drei von einem Endpunkte des Tetraeders V_1 ausgehende Kanten oder drei eine Fläche desselben einschliessende Kanten Null werden, d. h. wenn entweder eine Kugel die 3 andern einschliessend berührt oder wenn 3 Kugeln in einem Punkte sich einschliessend berühren, die vierte aber eine beliebige Lage hat. In diesen Fällen existirt eine aber auch nur eine sich selbst conjugirte Berührungskugel, welche in dem ersten mit derjenigen der gegebenen Kugeln zusammen fällt, welche die drei übrigen einschliessend berührt; wird ausserdem noch eine vierte Kante Null, so ändert dies an der Sache nichts. Ferner wird Δ_1 gleich Null, wenn 5 oder 6 Kanten verschwinden, d. h. wenn entweder 3 Kugeln sich untereinander in einem Punkte einschliessend berühren und eine davon die vierte einschliessend berührt, oder wenn alle vier Kugeln sich in einem Punkte einschliessend berühren; der erste dieser beiden Fälle führt auf den zweiten der beiden vorhergehenden Fälle zurück, der zweite bedingt auch $D = 0$ und wird desshalb besonders untersucht werden. Δ_1 kann aber noch in einem weiteren Falle gleich Null werden, für welchen dann gleichfalls eine sich selbst conjugirte Berührungskugel existirt, wenn nämlich eins der 6 Kantenquadrate z. B. d_{12} oder die Quadrate zweier gegenüberliegenden Kanten z. B. d_{12} und d_{34} vesschwinden und ausserdem $d_{13}\,d_{24} = d_{14}\,d_{23}$ ist. Diese Gleichung ist aber die Bedingung dafür, dass eine Kugel, welche die zwei ersten gegebenen sich berührenden Kugeln in ihrem Berührungspunkt und die dritte gleichartig berührt, auch die vierte in derselben Art berühren muss. In der That fügen wir zu den Gleichungen 15, 16 und 17, welche die Berührung der 4 gegebenen Kugeln durch die gesuchte ausdrücken, noch die Gleichungen:

$$\alpha\beta_2 - \beta\alpha_2 = 0, \quad \alpha\gamma_2 - \gamma\alpha_2 = 0,$$

hinzu, welche bedeuten, dass der Mittelpunkt der Berührungskugel mit den Mittelpunkten der zwei ersten gegebenen Kugeln in gerader Linie liege, so erhält man als Bedingung dafür, dass diese 5 Gleichungen zusammenbestehen, die Identität:

$$0 \equiv \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & r_1 - r_2 & d_{12} \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & r_1 - r_3 & d_{13} \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & r_1 - r_4 & d_{14} \\ \beta_2 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_2 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & (r_1 - r_2)^2 & d_{12} \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & (r_1 - r_2)(r_1 - r_3) & d_{13} \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & (r_1 - r_2)(r_1 - r_4) & d_{14} \\ \beta_2 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_2 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

und mit Berücksichtigung der Gleichungen 10 und 34, wenn man die erste Vertikalreihe mit α_2, die zweite mit β_2, die dritte mit γ_2 multiplicirt und die Summe von der vierten abzieht:

$$0 \equiv \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & -d_{12} & d_{12} \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & -d_{12} - d_{13} + d_{23} & d_{13} \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & -d_{12} - d_{14} + d_{24} & d_{14} \\ \beta_2 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_2 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

oder, wenn man jetzt $d_{12} = 0$ setzt und die letzte Vertikalreihe zur vorletzten addirt:

$$0 \equiv \frac{1}{r_1 - r_2} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & d_{23} & d_{13} \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & d_{24} & d_{14} \\ \beta_2 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_2 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r_1 - r_2} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_2 & -\alpha_2 & 0 \\ \gamma_2 & 0 & -\alpha_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_{23} & d_{13} \\ d_{24} & d_{14} \end{vmatrix},$$

woraus $d_{13} \,.\, d_{24} = d_{23}\, d_{14}$ folgt.

Je nach den Massverhältnissen der Kanten gibt es auch noch andere Fälle, in denen $\varDelta_1$ Null werden kann, die sich aber nicht speciell characterisiren lassen. Dagegen lässt sich eine ziemliche Anzahl von Fällen bestimmen, in denen $\varDelta_1$ negativ werden muss, die Aufgabe also unlösbar ist. Diese Forderung wird erfüllt, sobald eins oder zwei der Kantenquadrate d_{12}, d_{13}, d_{14} etc. verschwinden, d. h. sobald eine der gegebenen Kugeln zwei andere der gegebenen Kugeln, oder wenn die erste die zweite und die dritte die vierte einschliessend berühren; ebenso, wenn drei Kanten verschwinden, von denen zwei einander gegenüberliegen, d. h. wenn die erste Kugel die zweite, diese die dritte und endlich diese die vierte einschliessend berührt; ebenso wenn 4 Kanten verschwinden, von denen je zwei einander gegenüberliegen, d. h. wenn sowohl die erste als die vierte Kugel die zweite und die dritte einschliessend berühren.

$\varDelta_1$ **wird ferner negativ**, wenn in 37 die Grössen d_{12} positiv, d_{34}, d_{13}, d_{24} positiv, und d_{14}, d_{23} beliebig positiv oder negativ angenommen werden; ebenso, wenn man d_{12}, d_{34}, d_{13} negativ, d_{24} positiv, und d_{14}, d_{23} beliebig positiv oder negativ macht. Die Aufgabe wird also dann unmöglich, wenn in dem Tetraeder V_1 entweder bloss eine Kante, oder wenn 2 Kanten, die sich nicht gegenüberliegen, oder wenn 3 Kanten, von denen 2 sich gegenüberliegen, oder wenn 4 Kanten, von denen 2 sich gegenüberliegen, die andern nicht, oder wenn 5 Kanten imaginär genommen werden. In allen übrigen Fällen ist sie im Allgemeinen möglich, es sei denn, dass die Massverhältnisse der Kanten so beschaffen sind, dass die Differenz auf der rechten Seite obiger Gleichung negativ wird. Wenn aber irgend eine Kante des Tetraeders V_1 imaginär ist, so heisst dies, geometrisch interpretirt, nichts anderes, als dass die zwei Kugeln, denen die Kante als Verbindungsstrecke der Berührungspunkte ihrer gemeinschaftlichen äusseren Tangentialebene angehört, einander einschliessen. Hiernach ist die Aufgabe unmöglich in folgenden Fällen:

1) wenn eine Kugel von einer andern eingeschlossen wird, die 2 andern aber weder sich noch jene einschliessen oder von ihnen eingeschlossen werden;
2) wenn eine Kugel zwei andere sich nicht einschliessende einschliesst, die dritte aber nicht;
3) wenn zwei Kugeln zugleich eine dritte einschliessen, nicht aber die vierte;
4) wenn zwei Kugeln zugleich eine dritte einschliessen und die eine von ihnen die vierte;
5) wenn eine Kugel die drei übrigen einschliesst, von diesen aber eine Kugel eine andere einschliesst, die dritte nicht;
6) wenn eine Kugel die drei übrigen einschliesst, von diesen aber zwei zugleich die dritte einschliessen;
7) wenn zwei Kugeln zugleich die zwei übrigen einschliessen, von diesen aber eine die andere.

Merkwürdig ist, dass unter den aufgezählten Fällen manche **nicht** vorkommen, in denen unzweifelhaft keine Lösung existirt. Schliesst z. B. die erste Kugel die zweite und die dritte die vierte ein, d. h. sind d_{12} und d_{34} negativ, während die übrigen Kantenquadrate positiv genommen werden, so bleibt obiger Ausdruck für $\varDelta_1$ unverändert, woraus jedoch freilich noch nicht hervorgeht, dass er auch positiv sei; denn das hängt von den Massverhältnissen der Kanten ab. In unserem Falle sind aber diese Massverhältnisse derart, dass $\varDelta_1$ negativ werden muss. Um dies zu beweisen, betrachten wir die zwei möglichen Grenzlagen der gegebenen Kugeln. Die erste Grenzlage findet statt, wenn die erste die zweite und die vierte die dritte einschliessend berührt; dann ist sowohl d_{12} als auch d_{34} gleich Null und $\varDelta_1 = -\frac{1}{4} D^2 . (d_{13} d_{24} - d_{14} d_{23})^2$, also negativ. In der That ist eine Berührungskugel nur dann möglich, wenn die Normale in dem Berührungspunkt von k_1 und k_2 die Normale in dem Berührungspunkt von k_3 und k_4 schneidet, wozu erforderlich ist, dass die Mittelpunkte der vier Kugeln in einer Ebene liegen, also $D=0$ wird; dies ist aber der schon mehrfach erwähnte Ausnahmefall. Im zweiten Grenzfalle sind die Kugeln k_1 und k_2 concentrisch und ebenso die Kugeln k_3 und k_4, d. h. die Mittelpunktsentfernungen c_{12} und c_{34} sind Null und ausserdem ist $c_{13}=c_{14}=c_{23}=c_{24}$. Nennt man nun das Quadrat dieser Mittelpunktsentfernung C und setzt $r_1-r_2=a$, $r_1-r_3=b$, $r_1-r_4=c$, so ist $r_2-r_3=-(a-b)$, $r_2-r_4=-(a-c)$, $r_3-r_4=-(b-c)$ und man hat:

$$\Delta_1=-\tfrac{1}{4}D^2.\begin{vmatrix} 0 & -a^2 & C-b^2 & C-c^2 \\ -a^2 & 0 & C-(a-b)^2 & C-(a-c)^2 \\ C-b^2 & C-(a-b)^2 & 0 & -(b-c)^2 \\ C-c^2 & C-(a-c)^2 & -(b-c)^2 & 0 \end{vmatrix}=-\tfrac{1}{4}a^2(b-c)^2(-a+b+c)^2CD^2,$$

also negativ. In beiden Grenzfällen ist demnach Δ_1 negativ; sollte es bei stetiger Aenderung von d_{12} und d_{34} einen positiven Werth erhalten, so müsste es wenigstens **zweimal** durch Null gehen, d. h. es müsste für zwei Paare zusammengehöriger Werthe von d_{12} und d_{34}

$$4\,d_{12}\,d_{34}\,d_{13}\,d_{24}=(d_{12}\,d_{34}+d_{13}\,d_{24}-d_{14}\,d_{23})^2$$

sein. Nun kann aber V_1 nicht gleich Null werden, ohne dass wenigstens eins der Kantenquadrate d_{12}, d_{13}, d_{14} etc. gleich Null wird, und R_1 wird nur Null, wenn alle Kanten gleich Null sind. Damit daher obige Gleichung stattfinden könnte, müsste entweder:

$$d_{12}\,d_{34}=0 \text{ und } d_{13}\,d_{24}=d_{14}\,d_{23},$$
$$\text{oder } d_{13}\,d_{24}=0 \text{ und } d_{12}\,d_{34}=d_{14}\,d_{24},$$
$$\text{oder } d_{14}\,d_{23}=0 \text{ und } d_{12}\,d_{34}=d_{13}\,d_{24}$$

sein. Da aber vorausgesetzt ist, dass d_{12} und d_{34} beide negativ seien und weder d_{13}, noch d_{24}, noch d_{14}, noch d_{23} den Werth Null haben, so kann innerhalb der erwähnten Grenzfälle Δ_1 nicht Null werden und ist desshalb **negativ**.

In ähnlicher Weise behandelt man die Fälle, wenn alle 6 Kantenquadrate negativ sind, d. h. wenn alle 4 Kugeln eine in die andere eingeschachtelt sind, oder wenn 3 Kanten, welche eine Fläche des Tetraeders begrenzen, z. B. d_{12}, d_{13}, d_{23} imaginär sind, d. h. wenn die dritte Kugel von der zweiten, die zweite von der ersten eingeschlossen wird, die vierte die übrigen aber weder einschliesst noch von ihnen eingeschlossen wird.

Wenn nämlich alle Kugeln ineinandergeschachtelt sind, so hat man wiederum zwei Grenzfälle, den einen, wo sich alle vier Kugeln in einem Punkte einschliessend berühren, d. h. alle Kanten des Tetraeders V_1 gleich Null sind, den anderen, wo diese Kugeln concentrisch, d. h. alle c gleich Null sind. In beiden Fällen hat man Δ_1 gleich Null; im ersten Falle ist jede der vier gegebenen Kugeln eine sich selbst conjugirte Berührungskugel an sich selbst und die drei anderen; im zweiten Falle, wo $\Delta_1=0$ ist, weil nicht bloss D sondern auch die mit D multiplicirte Determinante verschwindet, ist jede beliebige mit den vier gegebenen concentrische Kugel eine sich selbst conjugirte Berührungskugel, welche jene längs eines imaginären Kreises im Unendlichen berührt. Denkt man sich nun im ersten Falle, dass die erste Kugel die zweite, die zweite die dritte, die dritte die vierte einschliesst und lässt die zweite Kugel sich im Innern der ersten vom gemeinschaftlichen Berührungspunkte wegbewegen, während die Lage der dritten und vierten unter sich und zur zweiten unverändert bleibt, d. h. lässt man d_{12}, d_{13}, d_{14} negativ werden, während d_{34}, d_{24}, d_{23} Null bleiben, so ist immer noch $\varDelta_1$ gleich Null; in der That existirt dann eine sich selbst conjugirte Berührungskugel, welche von k_1 eingeschlossen wird und k_2, k_3, k_4 in ihrem gemeinschaftlichen Berührungspunkte einschliessend berührt. Lässt man nun auch k_3 sammt k_4, ohne dass diese aufhören, sich zu berühren, im Innern von k_2 von dem gemeinschaftlichen Berührungspunkte sich wegbewegen, d. h. werden alle Kantenquadrate negativ bis auf d_{12}, welches Null bleibt, so ist $\varDelta_1 = -\frac{1}{4} D^2 (d_{13} d_{24} - d_{14} d_{23})^2$, also negativ, und dieses negative Zeichen wird fortwährend bestehen bleiben, welche Lage die drei ersten Kugeln unter sich auch haben mögen, wenn sie sich nur der Voraussetzung gemäss einander einschliessen, also auch dann, wenn sie concentrisch sind. Bewegt man endlich die vierte Kugel im Innern der dritten vom Berührungspunkte weg, so kann dieses Zeichen nur dann positiv werden, wenn $\varDelta_1$ zwischen der zuletzt erwähnten Lage und derjenigen, wo alle Kugeln concentrisch sind, wenigstens einmal durch Null geht; dies ist aber unmöglich, weil unter der Voraussetzung, dass alle Kanten negativ seien, V_1 und also auch $\varDelta_1$ nie Null werden kann; denn dazu gehört das Nullwerden von wenigstens einer Kante.

Wenn d_{12}, d_{13} und d_{23} negativ sind, so hat man ebenfalls zwei Grenzfälle: entweder nämlich sind k_1, k_2, k_3 concentrisch, d. h. $c_{12} = c_{13} = c_{23} = 0$ und $c_{14} = c_{24} = c_{34} = \sqrt{C}$, oder k_1, k_2, k_3 berühren sich in einem Punkte einschliessend, d. h. d_{12}, d_{13}, d_{23} sind Null. Im letzteren Falle ist $\varDelta_1$ gleich Null; lässt man d_{12} negativ werden, so ist $\varDelta_1 = -\frac{1}{4} D^2 d_{14}{}^2 d_{23}{}^2$; wird auch d_{23} negativ, so ist $\varDelta_1 = -\frac{1}{4} D^2 (d_{13} d_{24} - d_{14} d_{23})^2$, also auch negativ. Werden endlich k_1, k_2, k_3 concentrisch, wo natürlich d_{12}, d_{13} und d_{23} negativ bleiben, so wird auch hier wieder $\varDelta_1$ negativ; denn man hat jetzt:

$$\varDelta_1 = -\frac{1}{4} D^2. \begin{vmatrix} 0 & -a^2 & -b^2 & C-c^2 \\ -a^2 & 0 & -(a-b)^2 & C-(a-c)^2 \\ -b^2 & -(a-b)^2 & 0 & C-(b-c)^2 \\ C-c^2 & C-(a-c) & C^2-(b-c)^2 & 0 \end{vmatrix} = -a^2 b^2 (a-b)^2 C D^2,$$

also negativ. Zwischen dieser Grenzlage und der zuletzt erwähnten Lage müsste also $\varDelta_1$ wenigstens zweimal durch Null gehen, wenn es innerhalb dieser Grenzen einen positiven Werth haben sollte. Dies ist aber unmöglich, weil nach der Voraussetzung innerhalb dieser Grenzen d_{12}, d_{13}, d_{23} negativ, d_{34}, d_{24}, d_{14} positiv sind und wenigstens eins dieser Kantenquadrate Null werden müsste, wenn V_1, also auch D_1 verschwinden sollte.

Die Gleichungen 19 werden illusorisch, sobald $D=0$ wird, weil sie dann unendlich grosse Werthe für α, β, γ liefern; man muss desshalb diesen Ausnahmsfall speciell untersuchen. Zu diesem Behufe nimmt man an, die xy Ebene sei die Ebene, in welcher die Mittelpunkte aller 4 Kugeln liegen, und setzt demnach γ_2, γ_3, γ_4 in den Gleichungen 15—17 gleich Null; man erhält dann:

$$2\alpha\alpha_2 + 2\beta\beta_2 - 2(r_1 - r_2)\,Y = d_{12},$$
$$2\alpha\alpha_3 + 2\beta\beta_3 - 2(r_1 - r_3)\,Y = d_{13},$$
$$2\alpha\alpha_4 + 2\beta\beta_4 - 2(r_1 - r_4)\,Y = d_{14},$$

wo man jetzt natürlich $d_{12} = \alpha_2^2 + \beta_2^2 - (r_1 - r_2)^2$, $d_{13} = \alpha_3^2 + \beta_3^2 - (r_1 - r_3)^2$, $d_{14} = \alpha_4^2 + \beta_4^2 - (r_1 - r_4)^2$ zu setzen hat. Ist nun:

$$38)\quad \begin{vmatrix} \alpha_2 & d_{12} & r_1 - r_2 \\ \alpha_3 & d_{13} & r_1 - r_3 \\ \alpha_4 & d_{14} & r_1 - r_4 \end{vmatrix} = R,\ \begin{vmatrix} \beta_2 & d_{12} & r_1 - r_2 \\ \beta_3 & d_{13} & r_1 - r_3 \\ \beta_4 & d_{14} & r_1 - r_4 \end{vmatrix} = R',\ \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & d_{12} \\ \alpha_3 & \beta_3 & d_{13} \\ \alpha_4 & \beta_4 & d_{14} \end{vmatrix} = R'',\ \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & r_1 - r_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & r_1 - r_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & r_1 - r_4 \end{vmatrix} = Q,$$

so hat man:

$$39)\quad 2\alpha = -\frac{R'}{Q},\quad 2\beta = \frac{R}{Q},\quad 2\,Y = -\frac{R''}{Q}.$$

Diese Werthe sind also eindeutig bestimmt; insbesondere merke man, dass Y und in Folge dessen r nur einen Werth besitzt, was davon herrührt dass die Gleichung 22 für $D=0$ zwei gleiche Wurzeln hat. Es bleibt nur noch γ zu bestimmen. Die Gleichung 6 gibt aber:

$$\frac{R^2 + R'^2}{Q^2} + 4\gamma^2 = \frac{R''^2}{Q^2} + 4\left[\frac{R''}{2\,Q} + r_1\right]^2 \operatorname{tg}^2\omega \text{ oder:}$$

$$40)\quad 4\gamma^2 = \frac{R''^2 - (R^2 + R'^2) + (R'' + 2r_1\,Q)^2 \operatorname{tg}^2\omega}{Q^2},$$

so dass die gesuchten Schnitt- bezüglich Berührungskugeln nicht nur gleichen Radius haben, sondern auch symmetrisch oberhalb und unterhalb der xy Ebene liegen, wie zu erwarten war. Die Discriminante ist für diesen Fall:

$$R''^2 - (R^2 + R'^2) + (R'' + 2r_1\,Q)^2 \operatorname{tg}^2\omega.$$

Der letzte Term derselben ist gleich $\operatorname{tg}^2\omega$, multiplicirt mit dem Quadrat der Determinante:

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & d_{12} + 2r_1(r_1 - r_2) \\ \alpha_3 & \beta_3 & d_{13} + 2r_1(r_1 - r_3) \\ \alpha_4 & \beta_4 & d_{14} + 2r_1(r_1 - r_4) \end{vmatrix};$$

und da man statt $d_{12} + 2r_1(r_1 - r_2)$, $d_{13} + 2r_1(r_1 - r_3)$, $d_{14} + 2r_1(r_1 - r_4)$ wiederum bezüglich setzen kann $k + r_1^2 - r_2^2$, $k' + r_1^2 - r_3^2$, $k'' + r_1^2 - r_4^2$, so ist derselbe von dem Zeichen der r unabhängig, bleibt also derselbe für alle Paare conjugirter Schnittkugeln. Um seine geometrische Bedeutung kennen zu lernen, überlege man, dass die vier Kugeln von der Ebene der xy in grössten Kreisen geschnitten werden und dass die Potenzlinien des ersten und zweiten, des ersten und dritten, des ersten und vierten dieser Kreisschnitte bezüglich zu Gleichungen haben:

$$2\alpha_2 x + 2\beta_2 y = d_{12} + 2r_1(r_1 - r_2),$$
$$2\alpha_3 x + 2\beta_3 y = d_{13} + 2r_1(r_1 - r_3),$$
$$2\alpha_4 x + 2\beta_4 y = d_{14} + 2r_1(r_1 - r_4).$$

Fällt man nun vom Coordinatenanfang Senkrechte auf diese Linien und schneidet auf ihnen oder auf ihrer Verlängerung von ihrem Fusspunkte aus entweder jedesmal nach dem Coordinatenanfang zu oder in entgegengesetzter Richtung eine Strecke g ab, die so bemessen ist, dass die durch den jedesmaligen Endpunkt der zugehörigen Potenzlinie parallel gezogenen Graden sich in einem Punkte schneiden, so müssen zu gleicher Zeit die Gleichungen bestehen:

$$2\alpha_2 x + 2\beta_2 y + 2g\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} = d_{12} + 2r_1(r_1 - r_2),$$
$$2\alpha_3 x + 2\beta_3 y + 2g\sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2} = d_{13} + 2r_1(r_1 - r_3),$$
$$2\alpha_4 x + 2\beta_4 y + 2g\sqrt{\alpha_4^2 + \beta_4^2} = d_{14} + 2r_1(r_1 - r_4);$$

denn die x und y gehören jetzt ein und demselben Punkte an, nämlich dem Mittelpunkte desjenigen der vier Berührungskreise des von den Potenzlinien gebildeten Dreiecks, dessen Mittelpunkt auf derselben Seite einer jeden der drei Potenzlinien liegt, wie der Anfangspunkt der Coordinaten; und g ist der Radius dieses Kreises. Man findet aber aus diesen 3 Gleichungen:

$$2g \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \\ \alpha_3 & \beta_3 & \sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2} \\ \alpha_4 & \beta_4 & \sqrt{\alpha_4^2 + \beta_4^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & d_{12} + 2r_1(r_1 - r_2) \\ \alpha_3 & \beta_3 & d_{13} + 2r_1(r_1 - r_3) \\ \alpha_4 & \beta_4 & d_{14} + 2r_1(r_1 - r_4) \end{vmatrix}.$$

Der Werth der Determinante auf der rechten Seite ist also gleich dem vierfachen Radius des eben bestimmten Berührungskreises des von den Potenzlinien gebildeten Dreiecks, muliplicirt mit der Summe der Produkte, welche entstehen, indem man nacheinander die Entfernung des Mittelpunktes des zweiten, dritten und vierten Kreisschnitts vom Anfangspunkt der Coordinaten mit den Flächeninhalten der Dreiecke 134, 124, 123 multiplicirt. Nennt man diese Mittelpunktsentfernungen und Flächeninhalte nach einander c_{12}, c_{13}, c_{14}, f_{134}, f_{124}, f_{123}, so ist der letzte Term der Discriminante gleich:

$$16g^2 [c_{12} f_{134} + c_{13} f_{124} + c_{14} f_{123}]^2 \operatorname{tg}^2 \omega.$$

Schneiden sich die Potenzlinien von 1 und 2, 1 und 3, 1 und 4, in einem Punkte, dann gehen die Potenzlinien von 2 und 3, 2 und 4, 3 und 4 durch denselben Punkt und g wird Null; in diesem Falle verschwindet also der letzte Term der Discriminante und dieselbe wird unabhängig vom Schnittwinkel ω. Die Bedingung, unter der dies geschieht, kann man auch in anderer Form aussprechen, nämlich, wenn der Orthogonalkreis an drei der durch die vier Kugeln in der xy Ebene erzeugten Kreisschnitte auch den vierten orthogonal schneidet. Unter dieser Voraussetzung schneiden sich aber alle 4 Kugeln in zwei Punkten. Denn setzt man in den Gleichungen 1—4 $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$ und sieht die x, y, z als demselben Punkte angehörig an, so folgen durch Subtraction die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2\,\alpha_2 x + 2\,\beta_2 y &= d_{12} + 2\,r_1 (r_1 - r_2), \\ 2\,\alpha_3 x + 2\,\beta_3 y &= d_{13} + 2\,r_1 (r_1 - r_3), \\ 2\,\alpha_4 x + 2\,\beta_4 y &= d_{14} + 2\,r_1 (r_1 - r_4), \end{aligned}$$

woraus sich obige Voraussetzung ergibt. Um die Coordinaten der Schnittpunkte zu finden, beachte man, dass aus diesen Gleichungen sowohl:

$$2\,x \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{12} + 2\,r_1 (r_1 - r_2) & \beta_2 \\ d_{13} + 2\,r_1 (r_1 - r_3) & \beta_3 \end{vmatrix},$$

als auch $$2\,x \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{12} + 2\,r_1 (r_1 - r_2) & \beta_2 \\ d_{14} + 2\,r_1 (r_1 - r_4) & \beta_4 \end{vmatrix},$$

als auch $$2\,x \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{13} + 2\,r_1 (r_1 - r_3) & \beta_3 \\ d_{14} + 2\,r_1 (r_1 - r_4) & \beta_4 \end{vmatrix}$$ folgt.

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $r_1 - r_2$, die zweite mit $-(r_1 - r_2)$, die dritte mit $-(r_1 - r_4)$ und addirt, so erhält man:

$$2\,x \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & r_1 - r_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & r_1 - r_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & r_1 - r_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{12} + 2\,r_1 (r_1 - r_2) & \beta_2 & r_1 - r_2 \\ d_{13} + 2\,r_1 (r_1 - r_3) & \beta_3 & r_1 - r_3 \\ d_{14} + 2\,r_1 (r_1 - r_4) & \beta_4 & r_1 - r_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{12} & \beta_2 & r_1 - r_2 \\ d_{13} & \beta_3 & r_1 - r_3 \\ d_{14} & \beta_4 & r_1 - r_4 \end{vmatrix}$$

oder $2\,Qx = -R'$; ebenso erhält man $2\,Qy = +R$. Aus der Gleichung 1 folgt dann $z = \pm\sqrt{r_1^{\,2} - \frac{R^2 + R'^2}{4\,Q^2}}$, oder da $R'' + 2\,r_1 Q = 0$ ist, $z = \pm\sqrt{\frac{R''^2 - (R^2 + R'^2)}{4\,Q^2}}$; man hat also in der That zwei Schnittpunkte, welche symmetrisch oberhalb und unterhalb der xy Ebene liegen. Vergleicht man die eben gefundenen Coordinaten dieser Schnittpunkte mit den oben in Gleichung 39 und 40 gegebenen Werthen der Coordinaten der Mittelpunkte der Schnittkugeln, so sieht man, dass sie identisch sind. Aber auch die Schnittkugeln selbst degeneriren in diesem Falle in eben jene zwei Schnittpunkte der gegebenen Kugeln. Denn da die Gleichung der Schnittkugeln $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2$ heisst und oben gefunden wurde $2\,Y = 2\,r \cos\omega + 2\,r_1 = -\frac{R''}{Q}$, so erhält man nach Einsetzung der Werthe von α, β, γ und unter Berücksichtigung der Relation $R'' + 2\,r_1\,Q = 0$:

$$\left(x - \frac{R'}{2\,Q}\right)^2 + \left(y - \frac{R}{2\,Q}\right)^2 + \left[z \pm \frac{\sqrt{R''^2 - (R^2 + R'^2)}}{2\,Q}\right]^2 = 0,$$

d. h. die oben gefundenen zwei Punkte.

Wir wenden uns jetzt zu dem ersten Theile unserer Discriminante, welcher die Möglichkeit der Berührungskugeln bestimmt. Bezeichnet man denselben, wie früher, mit Δ_1, so ist:

$$\Delta_1 = 2\,R''^2 + Q^2 - (R^2 + R'^2 + R''^2 + Q^2).$$

Die Entwickelung von R''^2 gibt, wenn man analog der früher angewendeten Bezeichnungsweise $\alpha_2{}^2 + \beta_2{}^2 = k,\ \ \alpha_2\,\alpha_3 + \beta_2\,\beta_3 = l,\ \ \alpha_2\,\alpha_4 + \beta_2\,\beta_4 = m$ etc. setzt:

$$2\,R''^2 = 2\,.\begin{vmatrix} k + d_{12}{}^2 & l + d_{12}\,d_{13} & m + d_{13}\,d_{14} \\ l + d_{12}\,d_{13} & k' + d_{13}{}^2 & n + d_{13}\,d_{14} \\ m + d_{12}\,d_{14} & n + d_{13}\,d_{14} & k'' + d_{14}{}^2 \end{vmatrix} = -\,2\begin{vmatrix} -1 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{12} & k & l & m \\ d_{13} & l & k' & n \\ d_{14} & m & n & k'' \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ r_1 - r_2 & d_{12} & k & l & m \\ r_1 - r_3 & d_{13} & l & k & n \\ r_1 - r_4 & d_{14} & m & n & k'' \end{vmatrix}.$$

Ebenso ist:

$$Q^2 = -\begin{vmatrix} -1 & r_1 - r_2 & r_1 - r_3 & r_1 - r_4 \\ r_1 - r_2 & k & l & m \\ r_1 - r_3 & l & k' & n \\ r_1 - r_4 & m & n & k'' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & r_1 - r_2 & r_1 - r_3 & r_1 - r_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ r_1 - r_2 & d_{12} & k & l & m \\ r_1 - r_3 & d_{13} & l & k' & n \\ r_1 - r_4 & d_{14} & m & n & k'' \end{vmatrix}.$$

Ferner ist die Summe $R^2 + R'^2 + R''^2 + Q^2$ nach Baltzer Det. §. 5, 2 gleich:

$$\begin{vmatrix} k + d_{12}{}^2 + (r_1 - r_2)^2 & l + d_{12}\,d_{13} + (r_1 - r_2)(r_1 - r_3) & m + d_{12}\,d_{14} + (r_1 - r_2)(r_1 - r_4) \\ l + d_{12}\,d_{13} + (r_1 - r_2)(r_1 - r_3) & k' + d_{13}{}^2 + (r_1 - r_3)^2 & n + d_{13}\,d_{14} + (r_1 - r_3)(r_1 - r_4) \\ m + d_{12}\,d_{14} + (r_1 - r_2)(r_1 - r_4) & n + d_{13}\,d_{14} + (r_1 - r_3)(r_1 - r_4) & k'' + d_{14}{}^2 + (r_1 - r_4)^2 \end{vmatrix},$$

eine Determinante, welche sich ähnlich, wie die ihr in der äusseren Form ganz gleiche, welche wir oben behandelt haben, umformen lässt in:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & r_1 - r_2 & r_1 - r_3 & r_1 - r_4 \\ 0 & -1 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ r_1 - r_2 & d_{12} & k & l & m \\ r_1 - r_3 & d_{13} & l & k' & n \\ r_1 - r_4 & d_{14} & m & n & k'' \end{vmatrix}.$$

Indem man dieselbe vorerst von $2\,R''^2$ abzieht, entsteht:

$$-\begin{vmatrix} 1 & 0 & r_1 - r_2 & r_1 - r_3 & r_1 - r_4 \\ 0 & -1 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ r_1 - r_2 & d_{12} & k & l & m \\ r_1 - r_3 & d_{13} & l & k' & n \\ r_1 - r_4 & d_{14} & m & n & k'' \end{vmatrix}.$$

Wenn man bemerkt, dass nach Baltzer Det. §. 5, 1 die Identität besteht:

$$\begin{vmatrix} k & l & m \\ l & k' & n \\ m & n & k'' \end{vmatrix} = 0,$$

so kann man die letzterhaltene Determinante, ohne ihren Werth zu ändern, so schreiben:

$$-\begin{vmatrix} 1 & 0 & r_1-r_2 & r_1-r_3 & r_1-r_4 \\ 0 & 1 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ r_1-r_2 & d_{12} & k & l & m \\ r_1-r_3 & d_{13} & l & k' & n \\ r_1-r_4 & d_{14} & m & n & k'' \end{vmatrix}$$

und da man aus dem nämlichen Grunde

$$Q^2 = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & r_1-r_2 & r_1-r_3 & r_1-r_4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ r_1-r_2 & d_{12} & k & l & m \\ r_1-r_3 & d_{13} & l & k' & n \\ r_1-r_4 & d_{14} & m & n & k'' \end{vmatrix}$$

setzen kann, so folgt durch Addition:

$$\varDelta_1 = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & r_1-r_2 & r_1-r_3 & r_1-r_4 \\ 0 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ r_1-r_2 & d_{12} & k & l & m \\ r_1-r_3 & d_{13} & l & k' & n \\ r_1-r_4 & d_{14} & m & n & k'' \end{vmatrix},$$

also derselbe Werth, den wir auch im allgemeinen Fall oben für $\varDelta_1$ erhalten haben, abgesehen vom Factor D^2, der hier fehlt; man hat also auch hier wiederum mutatis mutandis:

$$\varDelta_1 = -\tfrac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} = 4\,V_1^{\,2} R_1^{\,2}.$$

und man kann daraus dieselben Folgerungen ziehen, wie oben.

Der einzige Fall, wo die eben gegebenen Entwickelungen illusorisch werden, findet statt, wenn $Q = 0$ ist; denn alsdann liefern die Gleichungen 39 α, β und Y unendlich gross. Die Gleichung $Q = 0$ oder entwickelt

$$(r_1-r_2)(\alpha_3\beta_4-\alpha_4\beta_3)+(r_1-r_3)(\alpha_4\beta_2-\alpha_2\beta_4)+(r_1-r_4)(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)=0,$$

ist aber die Bedingung dafür, dass eine den Kugeln k_1, k_2, k_3 gemeinschaftliche äussere Tangentialebene auch die Kugel k_4 berührt. Dies soll jetzt bewiesen werden. Weiter unten werden wir die Gleichung einer gemeinschaftlichen äusseren Tangentialebene an 3 Kugeln entwickeln; setzt man dort $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$, so ist die Gleichung der Tangentialebene

$$\text{an } k_1,\ k_3,\ k_4:\ x\,[-\beta_3(r_1-r_4)+\beta_4(r_1-r_3)] + y\,[\alpha_3(r_1-r_4)-\alpha_4(r_1-r_3)] + \\ + 2z\,.\,F_{134} - \frac{4 f_{134}^{\,2}}{C_2}\, r_1 = 0,$$

$$\text{an } k_1,\ k_2,\ k_4:\ x\,[-\beta_2(r_1-r_4)+\beta_4(r_1-r_2)] + y\,[\alpha_2(r_1-r_4)-\alpha_4(r_1-r_3)] + \\ + 2z\,.\,F_{124} - \frac{4 f_{124}^{\,2}}{C_3}\, r_1 = 0,$$

$$\text{an } k_1,\ k_2,\ k_3:\ x\,[-\beta_2(r_1-r_3)+\beta_3(r_1-r_2)] + y\,[\alpha_2(r_1-r_3)-\alpha_3(r_1-r_4)] + \\ + 2z\,.\,F_{123} - \frac{4 f_{123}^{\,2}}{C_4}\, r_1 = 0.$$

Hier bezeichnet F_{134} den Flächeninhalt des Dreiecks, welches von den Verbindungsstrecken der Berührungspunkte von k_1, k_2, k_3 gebildet wird; analoge Bedeutung haben F_{124} und F_{123}. Ferner ist f_{134} der Flächeninhalt des Dreiecks der Mittelpunkte 1, 3, 4 und endlich ist:

$$C_2 = \alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3,\quad C_3 = \alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2,\quad C_4 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2.$$

Sollen nun diese 3 Gleichungen eine und dieselbe Tangentialebene vorstellen, so muss, wenn man den Neigungswinkel derselben gegen die xy Ebene mit φ bezeichnet:

$$C_2 = 2F_{134}\cos\varphi = 2f_{134},\quad C_3 = 2F_{124}\cos\varphi = 2f_{124},\quad C_4 = 2F_{123}\cos\varphi = 2f_{123}$$

sein, weil dann alle F in eine Ebene fallen; ausserdem aber müssen diese Gleichungen, mit passenden Factoren multiplicirt und addirt, zur Summe Null geben. Substituirt man daher statt der F und f ihre angeführten Werthe, in C_2, C_3 und C_4 ausgedrückt, multiplicirt die erste Gleichung mit $-\alpha_2$, die zweite mit $+\alpha_3$, die dritte mit $-\alpha_4$ und addirt, so werden die Coefficienten von y, z und r_1 identisch gleich Null und es bleibt als Bedingung übrig, dass der Coefficient von x, nämlich:

$$(r_1-r_2)\,C_2 - (r_1-r_3)\,C_3 + (r_1-r_4)\,C_4$$

gleich Null sei; dies ist aber die oben angegebene Bedingungsgleichung $Q = 0$. Es entsteht nun die Frage, was in diesem Falle aus den Schnitt- bezüglich Berührungskugeln wird. Die Gleichung der Schnittkugel ist für den Fall $D = 0$ im Allgemeinen:

$$\left(x+\frac{R'}{2Q}\right)^2 + \left(y-\frac{R}{2Q}\right)^2 + \left[z \pm \frac{\sqrt{R''^2-(R^2+R'^2)+(R''+2r_1Q)^2\operatorname{tg}^2\omega}}{2Q}\right]^2 = \frac{(R''+2r_1Q)^2}{4Q^2\cos^2\omega}$$

oder, nachdem man entwickelt, reducirt und mit Q mnltiplicirt hat:

$$Q(x^2+y^2+z^2) + R'x - Ry \pm z\sqrt{R''^2-(R^2+R'^2)+(R''+2r_1Q)^2\operatorname{tg}^2\omega} = r_1R'' + r_1^{\,2}Q.$$

Setzt man jetzt $Q = 0$, so erhält man die Gleichungen zweier Ebenen, welche in diesem Falle die Schnittkugeln vertreten, nämlich:

$$R'x - Ry \pm z\,.\sqrt{R''^2-(R^2+R')^2+R''^2\operatorname{tg}^2\omega} = r_1R''.$$

oder in der Normalform:

$$\frac{R' \cos\omega}{R''}\, x - \frac{R \cos\omega}{R''}\, y \pm z \,.\, \frac{\sqrt{R''^2 - (R^2 + R'^2)\cos^2\omega}}{R''} = r_1 \cos\omega \,.$$

Die Entfernung dieser Ebenen vom Mittelpunkt 1 ist demnach $r_1 \cos\omega$ und da man jeden der drei anderen Mittelpunkte als Anfangspunkt der Coordinaten annehmen kann, so sind dieselben durch je drei ihrer vier Entfernungen $r_1 \cos\omega$, $r_2 \cos\omega$, $r_3 \cos\omega$, $r_4 \cos\omega$ von den vier Mittelpunkten vollständig bestimmt. Ist ω gleich Null, so werden diese Ebenen zu den äusseren Tangentialebenen an die vier Kugeln.

Die Determinante Q kann übrigens auch noch unter anderen Umständen Null werden, unter andern dadurch, dass man in ihr die Unterdeterminanten von $r_1 - r_2$, $r_1 - r_3$, $r_1 - r_4$ gleich Null setzt; man hat dann:

$$\frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3} = \frac{\alpha_4}{\beta_4}\,,$$

d. h. die Mittelpunkte der vier Kugeln liegen auf einer geraden Linie in der xy Ebene. Nimmt man an, die x Achse sei diese Linie, d. h. alle β seien Null, so hat man die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2\,\alpha\,\alpha_2 - 2\,(r_1 - r_2)\,Y - d_{12} &= 0, \\ 2\,\alpha\,\alpha_3 - 2\,(r_1 - r_3)\,Y - d_{13} &= 0, \\ 2\,\alpha\,\alpha_4 - 2\,(r_1 - r_4)\,Y - d_{14} &= 0. \end{aligned}$$

Sollen diese Gleichungen zu gleicher Zeit bestehen, so muss die Bedingungsgleichung erfüllt sein:

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & r_1 - r_2 & d_{12} \\ \alpha_3 & r_1 - r_3 & d_{13} \\ \alpha_4 & r_1 - r_4 & d_{14} \end{vmatrix} = R = 0\,.$$

Dieselbe bedeutet, dass eine Kugel, welche drei der gegebenen Kugeln in gleicher Weise berührt, auch die vierte in derselben Weise berühren muss. Denn als Ausdruck dieses Verhaltens gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (r + r_1)^2, \\ (\alpha - \alpha_2)^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (r + r_2)^2, \\ (\alpha - \alpha_3)^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (r + r_3)^2, \\ (\alpha - \alpha_4)^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (r + r_4)^2. \end{aligned}$$

Zieht man von der ersten dieser Gleichungen die folgenden ab, so erhält man nach kurzer Reduction mit Anwendung unserer früheren Bezeichnungsweise die obigen drei Gleichungen wieder. Da nach der Voraussetzung $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$, so ist auch $R' = R'' = 0$, und die Grössen $2\,\alpha$, $2\,\beta$, $2\,Y$ erscheinen unter der Form $\frac{0}{0}$; jedoch bleibt nur β unbestimmt, denn zur Bestimmung von α und Y besteht, wie aus den obigen drei Gleichungen hervorgeht, die Proportion:

$$\alpha : Y : 1 = \begin{vmatrix} r_1 - r_2 & d_{12} \\ r_1 - r_3 & d_{13} \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} \alpha_2 & d_{12} \\ \alpha_3 & d_{13} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_2 & r_1 - r_2 \\ \alpha_3 & r_1 - r_3 \end{vmatrix}.$$

Man hat demnach als Lösung unendlich viele Kugeln von demselben Radius, deren Mittelpunkte alle denselben Abstand von der xy Ebene haben. Auch diese Lösung kann noch einmal illusorisch werden, wenn die Unterdeterminante:

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & r_1 - r_2 \\ \alpha_3 & r_1 - r_3 \end{vmatrix}$$

verschwindet, was geschieht, sobald alle vier Kugeln einen und denselben Kegel in einem Fache desselben berühren.

Ein weiterer Fall, in welchem Q Null wird, ist der, wenn

$$r_1 - r_2 = r_1 - r_3 = r_1 - r_4 = 0$$

ist. Die Radien der vier gegebenen Kugeln sind dann gleich und die Bedingungsgleichung für die Möglichkeit dieses Falles ist:

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \alpha_2^2 + \beta_2^2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_3^2 + \beta_3^2 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \alpha_4^2 + \beta_4^2 \end{vmatrix} = 0,$$

deren geometrische Bedeutung folgende ist: Wenn man einen Kreis durch die Mittelpunkte 1, 2 und 3 legt, so geht derselbe auch durch den Mittelpunkt 4. Denn nennt man den Radius dieses Kreises R, so hat man unter dieser Voraussetzung die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha^2 \quad + \quad \beta^2 \quad &= R^2 \\ (\alpha - \alpha_2)^2 + (\beta - \beta_2)^2 &= R^2 \\ (\alpha - \alpha_3)^2 + (\beta - \beta_3)^2 &= R^2 \\ (\alpha - \alpha_4)^2 + (\beta - \beta_4)^2 &= R^2. \end{aligned}$$

Zieht man von der ersten dieser Gleichungen nacheinander die zweite, dritte und vierte ab, so erhält man die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2\,\alpha\,\alpha_2 + 2\,\beta\,\beta_2 - (\alpha_2^2 + \beta_2^2) &= 0, \\ 2\,\alpha\,\alpha_3 + 2\,\beta\,\beta_3 - (\alpha_3^2 + \beta_3^2) &= 0, \\ 2\,\alpha\,\alpha_4 + 2\,\beta\,\beta_4 - (\alpha_4^2 + \beta_4^2) &= 0, \end{aligned}$$

aus denen sich unmittelbar obige Bedingungsgleichung ergibt. Man hat ferner unter dieser Voraussetzung:

$$\alpha : \beta : 1 = \begin{vmatrix} \beta_2 & \alpha_2^2 + \beta_2^2 \\ \beta_3 & \alpha_3^2 + \beta_3^2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_2^2 + \beta_2^2 \\ \alpha_3 & \alpha_3^2 + \beta_3^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix},$$

während Y unbestimmt bleibt; d. h. man erhält unendlich viele Schnittbezüglich Berührungskugeln von verschiedenen Radien, deren Mittelpunkte alle auf einer geraden Linie liegen, die auf der xy Ebene senkrecht steht. Illusorisch wird auch dieser Fall, wenn die letzte Unterdeterminante Null ist, d. h. wenn:

$$\frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3} = \frac{\alpha_4}{\beta_4}$$

oder wenn die Mittelpunkte auf einer geraden Linie liegen, die bekanntlich als ein Kreis mit unendlich grossem Radius angesehen werden kann; dann gehört die Aufgabe zugleich dem vorigen Fall an und es lässt sich ein Cylinder um die vier Kugeln legen. Man hat dann als Lösung unendlich viele Ebenen, welche der Axe jenes Cylinders parallel sind.

Die ganze Untersuchung ändert sich nicht, wenn die übrigen sieben Paare conjugirter Schnitt- bezüglich Berührungskugeln ins Auge gefasst werden. So hat man für das zweite Paar in allen obigen Formeln r_1 negativ zu setzen; dadurch gehen:

$$d_{12} = \alpha_2{}^2 + \beta_2{}^2 + \gamma_2{}^2 - (r_1 - r_2)^2 \text{ über in } \delta_{12} = \alpha_2{}^2 + \beta_2{}^2 + \gamma_2{}^2 - (r_1 + r_2)^2,$$
$$d_{13} = \alpha_3{}^2 + \beta_3{}^2 + \gamma_3{}^2 - (r_1 - r_3)^2 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \delta_{13} = \alpha_3{}^2 + \beta_3{}^2 + \gamma_3{}^2 - (r_1 + r_3)^2,$$
$$d_{14} = \alpha_4{}^2 + \beta_4{}^2 + \gamma_4{}^2 - (r_2 - r_4)^2 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \delta_{14} = \alpha_4{}^2 + \beta_4{}^2 + \gamma_4{}^2 - (r_1 + r_4)^2,$$

während die übrigen Kantenquadrate unverändert bleiben; man hat daher:

$$41) \qquad \Delta_2 = -\tfrac{1}{4} D^2 . \begin{vmatrix} 0 & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} \\ \delta_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ \delta_{13} & d_{13} & 0 & d_{34} \\ \delta_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} = 4 D^2 R_2{}^2 V_2{}^2,$$

wenn man mit V_2 das Volumen des Tetraeders, dessen Kantenquadrate δ_{12}, δ_{13}, δ_{14}, d_{34}, d_{24}, d_{23} sind, und mit R_2 den Radius der diesem Tetraeder umschriebenen Kugel bezeichnet. Dabei ist zu bemerken, dass sich die betreffenden Kugeln schneiden oder einschliessen, sobald eines der Kantenquadrate δ_{12}, δ_{13}, δ_{14} negativ wird. Hiernach wird die Aufgabe unmöglich, wenn:

1) δ_{12} negativ, δ_{13}, δ_{14}, d_{34}, d_{24}, d_{23} positiv; oder δ_{13} negativ, δ_{12}, δ_{14}, d_{34}, d_{24}, d_{23} positiv; oder δ_{14} negativ, δ_{12}, δ_{13}, d_{34}, d_{24}, d_{23} positiv;

2) d_{34} negativ, δ_{12}, δ_{13}, δ_{14}, d_{24}, d_{23} positiv; oder d_{24} negativ, δ_{12}, δ_{13}, δ_{14}, d_{34}, d_{23} positiv; oder d_{23} negativ, δ_{12}, δ_{13}, δ_{14}, d_{34}, d_{24} positiv;

3) δ_{12}, δ_{13} negativ, δ_{14}, d_{34}, d_{24}, d_{23} positiv; oder δ_{13}, δ_{14} negativ, δ_{12}, d_{34}, d_{24}, d_{23} positiv; oder δ_{14}, δ_{12} negativ, δ_{13}, d_{34}, d_{24}, d_{23} positiv;

4) d_{34}, d_{24} negativ, d_{23}, δ_{12}, δ_{13}, δ_{14} positiv; oder d_{24}, d_{23} negativ, d_{34}, δ_{12}, δ_{13}, δ_{14} positiv; oder d_{23}, d_{34} negativ, d_{24}, δ_{12}, δ_{13}, δ_{14} positiv;

5) d_{34}, δ_{13} negativ, d_{24}, d_{23}, δ_{12}, δ_{14} positiv; oder d_{34}, δ_{14} negativ, d_{24}, d_{23}, δ_{12}, δ_{13} positiv; oder d_{24}, δ_{14} negativ, d_{34}, d_{23}, δ_{12}, δ_{13} positiv; oder d_{24}, δ_{12} negativ, d_{34}, d_{23}, δ_{12}, δ_{14} positiv; oder d_{23}, δ_{12} positiv. d_{34}, d_{24}, δ_{12}, δ_{14} positiv oder d_{23}, δ_{12} negativ. d_{34}, d_{23}, δ_{12}, δ_{14} positiv;

6) δ_{12}, δ_{13}, d_{34} negativ, δ_{14}, d_{24}, d_{23} negativ oder δ_{12}, δ_{13}, d_{24} negativ, δ_{14}, d_{34}, d_{23} positiv; oder δ_{12}, δ_{14}, d_{24} negativ, δ_{12}, d_{34}, d_{23} positiv; oder δ_{12}, δ_{14}, d_{23} negativ, δ_{12}, d_{34}, d_{24} positiv; oder δ_{14} δ_{12}, d_{23} negativ, δ_{13}, d_{34}, d_{24} positiv; oder δ_{14}, δ_{12}, d_{34} negativ, δ_{12}, d_{24}, d_{23} positiv;

7) was im vorigen Fall positiv ist, ist in diesem negativ und umgekehrt;

8) δ_{12}, δ_{13}, δ_{14}, d_{34} negativ, d_{24} d_{23} positiv; oder δ_{12}, δ_{13}, δ_{14}, d_{24} negativ, d_{34}, d_{23} positiv; oder δ_{12}, δ_{13}, δ_{14}, d_{23} negativ, d_{34}, d_{24} positiv;

9) d_{34}, d_{24}, d_{23}, δ_{12} negativ, δ_{13}, δ_{14} positiv; oder d_{34}, d_{24}, d_{23}, δ_{13} negativ, δ_{12}, δ_{14} positiv; oder d_{34}, d_{24}, d_{23}, δ_{14} negativ, δ_{12}, δ_{13} positiv;

10) δ_{12}, δ_{13}, d_{34}, d_{24}, d_{23} negativ, δ_{14} positiv; oder δ_{12}, δ_{14}, d_{34}, d_{24}, d_{23} negativ, δ_{13} positiv; oder δ_{13}, δ_{14}, d_{34}, d_{24}, d_{23} negativ, δ_{12} positiv;

11) d_{34}, d_{24}, δ_{12}, δ_{13}, δ_{14} negativ, d_{23} positiv; oder d_{34}, d_{23}, δ_{12}, δ_{13}, δ_{14} negativ, d_{24} positiv; oder d_{24}, d_{23}, δ_{12}, δ_{13}, δ_{14} negativ, d_{34} positiv.

Es ist leicht, diese Bedingungen in Worte zu übertragen; der erste Fall von Nro. 9 würde z. B. so heissen: k_1, k_2, k_3 sind ineinander geschachtelt, während k_1 von k_2 geschnitten oder eingeschlossen wird, nicht aber von k_3 und k_4. In ganz analoger Weise findet man für das dritte, vierte und fünfte Paar conjugirter Schnitt- bezüglich Berührungskugeln:

$$42)\quad \Delta_3 = -\tfrac{1}{4} D^2. \begin{vmatrix} 0 & \delta_{12} & d_{13} & d_{14} \\ \delta_{12} & 0 & \delta_{23} & \delta_{34} \\ d_{13} & \delta_{23} & 0 & d_{34} \\ d_{14} & \delta_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} = 4\, D^2\, V_3^{\,2}\, R_3^{\,2},$$

$$43)\quad \Delta_4 = -\tfrac{1}{4} D^2. \begin{vmatrix} 0 & d_{12} & \delta_{13} & d_{14} \\ d_{12} & 0 & \delta_{23} & d_{24} \\ \delta_{13} & \delta_{23} & 0 & \delta_{34} \\ d_{14} & d_{24} & \delta_{34} & 0 \end{vmatrix} = 4\, D^2\, V_4^{\,2}\, R_4^{\,2},$$

$$44)\quad \Delta_5 = -\tfrac{1}{4} D^2. \begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & \delta_{14} \\ d_{12} & 0 & d_{23} & \delta_{24} \\ d_{13} & d_{23} & 0 & \delta_{34} \\ \delta_{14} & \delta_{24} & \delta_{34} & 0 \end{vmatrix} = 4\, D^2\, V_5^{\,2}\, R_5^{\,2},$$

wo die δ_{23}, δ_{24}, δ_{34} analoge Bedeutung haben wie δ_{12}, δ_{13}, δ_{14}. Die Bedingungen, unter denen die Lösung unmöglich ist, sind aus den oben für für Δ_2 angegebenen, leicht zu finden, wenn man bedenkt, dass hier k_1 nacheinander durch k_2, k_3, k_4 vertreten wird; während alle übrigen Umstände unverändert bleiben. Bei diesen zuletzt betrachteten vier Paaren conjugirter Kugeln tritt übrigens wie beim ersten Paar der merkwürdige Fall ein, dass unter gewissen Umständen die Lösung unmöglich ist, obschon dies die Discriminante nicht direct anzeigt. So ändert z. B. Δ_2 nicht das Zeichen, wenn δ_{12} und d_{34} negativ werden, wenn δ_{13}, δ_{14}, d_{24}, d_{23} positiv bleiben, d. h. wenn k_1 und k_2 sich schneiden oder einschliessen und k_3, k_4 sich einschiessen und doch ist eine Lösung unmöglich. In der That lässt sich durch ähnliche Betrachtungen wie oben bei Δ_1 beweisen, dass Δ_2 unter diesen Umständen negativ ist.

Ganz nämlich so verhält es sich mit den noch übrigen drei Paaren conjugirter Berührungskugeln, für welche man hat:

$$43)\qquad \Delta_6 = -\tfrac{1}{4} D^2. \begin{vmatrix} 0 & d_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} \\ d_{12} & 0 & \delta_{23} & \delta_{24} \\ \delta_{13} & \delta_{23} & 0 & d_{34} \\ \delta_{14} & \delta_{23} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} = 4\, D^2\, V_6{}^2\, R_6{}^2,$$

$$46)\qquad \Delta_7 = -\tfrac{1}{4} D^2. \begin{vmatrix} 0 & \delta_{12} & d_{13} & d_{14} \\ \delta_{12} & 0 & \delta_{23} & d_{24} \\ d_{13} & \delta_{23} & 0 & \delta_{34} \\ \delta_{14} & d_{24} & \delta_{34} & 0 \end{vmatrix} = 4\, D^2\, V_7{}^2\, R_7{}^2,$$

$$47)\qquad \Delta_8 = -\tfrac{1}{4} D^2. \begin{vmatrix} 0 & \delta_{12} & \delta_{13} & d_{14} \\ \delta_{12} & 0 & d_{23} & \delta_{24} \\ \delta_{13} & d_{23} & 0 & \delta_{34} \\ d_{14} & \delta_{24} & \delta_{34} & 0 \end{vmatrix} = 4\, D^2\, V_8{}^2\, R_8{}^2.$$

Auch der Ausnahmefall $D = 0$ gestaltet sich bei diesen sieben Paaren conjugirter Kugeln wie bei Δ_1. Ist ferner auch hier $Q = 0$, so bedeutet dies für Δ_2, Δ_3, Δ_4, Δ_5, dass eine äussere Tangentialebene an zwei der gegebenen Kugeln eine innere für die andere sei, und für Δ_6, Δ_7, Δ_8, dass eine äussere Tagentialebene an zwei der gegebenen Kugeln eine innere für die zwei anderen sei. Liegen die Mittelpunkte aller vier Kugeln in einer geraden Linie auf der xy Ebene, so muss für das zweite, dritte und vierte Paar conjugirter Kugeln das erste Paar conjugirter Berührungskugeln an drei der gegebenen Kugeln auch die vierte und zwar in der entgegengesetzten Art wie die übrigen berühren; für das sechste, siebente und achte Paar dagegen muss bezüglich das zweite, dritte und vierte Paar conjugirter Berührungskugeln an drei der gegebenen Kugeln auch die vierte berühren und zwar so, dass von den vier Kugeln immer je zwei gleichartig berührt werden. Man hat dann als Lösung jedesmal unendlich viele Kugeln von demselben Radius. Die einhüllende Fläche kann auch hier degeneriren in einen Kegel, der entweder in seinem einen Fache drei Kugeln, in dem andern eine, oder in jedem Fache zwei Kugeln berührt. In ähnlicher Weise modificirt sich der Fall, wo die Radien aller Kugeln gleich sind und ihre Mittelpunkte auf der xy Ebene liegen; man hat auch hier wiederum unendlich viele Schnitt- bezüglich Berührungskugeln von verschiedenen Radien, deren Mittelpunkte alle auf einer geraden Linie liegen, die auf der xy Ebene senkrecht steht, und wenn ausserdem die Mittelpunkte der gegebenen Kugeln in gerader Linie liegen, d. h. wenn sich ein Cylinder um die vier Kugeln legen lässt, so hat man als Lösung unendlich viele Ebenen, welche der Axe jenes Cylinders parallel sind.

Die acht Werthe der V und Δ stehen unter sich in einem merkwürdigen Zusammenhang, welcher aus zwei der interessanten von Schubert, Zeitschr. für Math. und Phys., XIV, pag. 513, entdeckten Relationen zwischen den Radien der acht Paare conjugirter Berührungskugeln erkannt werden kann. Bezeichnet man nämlich mit ϱ_1 und ϱ_1' die Radien der beiden ersten conjugirten Berührungskugeln, mit ϱ_2 und ϱ_2' die Radien des zweiten, mit ϱ_3 und ϱ_3' die Radien des dritten Paares u. s. w., so haben die erwähnten Relationen folgende Gestalt:

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_1'}+\frac{1}{\varrho_6\varrho_6'}+\frac{1}{\varrho_7\varrho_7'}+\frac{1}{\varrho_8\varrho_8'}=\frac{1}{\varrho_2\varrho_2'}+\frac{1}{\varrho_3\varrho_3'}+\frac{1}{\varrho_4\varrho_4'}+\frac{1}{\varrho_5\varrho_5'},$$

$$\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_1'}\right)^2+\left(\frac{1}{\varrho_6}+\frac{1}{\varrho_6'}\right)^2+\left(\frac{1}{\varrho_7}+\frac{1}{\varrho_7'}\right)^2+\left(\frac{1}{\varrho_8}+\frac{1}{\varrho_8'}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_2'}\right)^2+\left(\frac{1}{\varrho_3}+\frac{1}{\varrho_3'}\right)^2+\left(\frac{1}{\varrho_4}+\frac{1}{\varrho_4'}\right)^2+\left(\frac{1}{\varrho_5}+\frac{1}{\varrho_5'}\right)^2.$$

Substituirt man nun in den Gleichungen 22 und 23 statt Y und Z ihre Werthe $r+r_1$ und $r-r_1$, nachdem man $\omega=0$ gemacht hat, so erhält man:

$$48)\qquad r^2\pm\frac{\nu+2r_1\lambda}{\lambda}r+\frac{4r_1^2\lambda+4r_1\nu+\mu}{4\lambda}=0.$$

Nach 27 ist:

$$\lambda=-\begin{vmatrix}1 & r_1-r_2 & r_1-r_3 & r_1-r_4\\ r_1-r_2 & k & l & m\\ r_1-r_3 & l & k' & n\\ r_1-r_4 & m & n & k''\end{vmatrix},$$

was sich dadurch, dass man die erste Horizontalreihe nacheinander mit r_1-r_2,

r_1-r_3, r_1-r_4 multiplicirt und in derselben Ordnung von der zweiten, dritten, vierten Horizontalreihe abzieht, umformen lässt in:

$$-\begin{vmatrix} 1 & r_1-r_2 & r_1-r_3 & r_1-r_4 \\ 0 & k-(r_1-r_2)^2 & l-(r_1-r_2)(r_1-r_3) & m-(r_1-r_2)(r_1-r_4) \\ 0 & l-(r_1-r_2)(r_1-r_3) & k'-(r_1-r_3)^2 & n-(r_1-r_3)(r_1-r_4) \\ 0 & m-(r_1-r_2)(r_1-r_4) & n-(r_1-r_3)(r_1-r_4) & k''-(r_1-r_4)^2 \end{vmatrix}$$

oder mit Hülfe der Gleichungen 34 in:

$$-\begin{vmatrix} d_{12} & \frac{1}{2}(d_{12}+d_{13}-d_{23}) & \frac{1}{2}(d_{12}+d_{14}-d_{24}) \\ \frac{1}{2}(d_{12}+d_{13}-d_{23}) & d_{13} & \frac{1}{2}(d_{13}+d_{14}-d_{34}) \\ \frac{1}{2}(d_{12}+d_{14}-d_{24}) & \frac{1}{2}(d_{13}+d_{14}-d_{34}) & d_{14} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2d_{12} & d_{12}+d_{13}-d_{23} & d_{12}+d_{14}-d_{24} \\ d_{12}+d_{13}-d_{23} & 2d_{13} & d_{13}+d_{14}-d_{24} \\ d_{12}+d_{14}-d_{24} & d_{13}+d_{14}-d_{34} & 2d_{14} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 0 & 2d_{12} & d_{12}+d_{13}-d_{23} & d_{12}+d_{14}-d_{24} \\ 0 & d_{12}+d_{13}-d_{23} & 2d_{13} & d_{13}+d_{14}-d_{34} \\ 0 & d_{12}+d_{14}-d_{24} & d_{13}+d_{14}-d_{34} & 2d_{14} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ -1 & d_{12} & d_{12}-d_{23} & d_{12}-d_{24} \\ -1 & d_{13}-d_{23} & d_{13} & d_{13}-d_{34} \\ -1 & d_{14}-d_{24} & d_{14}-d_{34} & d_{14} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ -d_{12} & -1 & 0 & -d_{23} & -d_{24} \\ -d_{13} & -1 & -d_{23} & 0 & -d_{34} \\ -d_{14} & -1 & -d_{24} & -d_{34} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix}.$$

Daher ist nach Baltzer Det. §. 16, 13:

$$49)\qquad \lambda = -V_1^2.$$

Berücksichtigt man nun noch, dass $\varDelta_1 = \nu^2 - \lambda\mu = 4D^2V_1^2R_1^2$ und $4r_1^2\lambda + 4r_1\nu + \mu = 4D^2\varrho^2$, so folgt $\nu + 2r_1\lambda = 2DV_1\sqrt{R_1^2-\varrho^2}$, wodurch 48 übergeht in:

$$50)\qquad r^2 \pm 2\,.\,\frac{D\sqrt{R_1^2-\varrho^2}}{V_1}\,r - \frac{D^2\varrho^2}{V_1^2} = 0.$$

Es ist also:

$$(\varrho_1 + \varrho_1')^2 = \frac{4\,D^2(R_1{}^2 - \varrho^2)}{V_1{}^2} \text{ und } \varrho_1\,\varrho_1' = -\frac{D^2\,\varrho^2}{V_1{}^2},$$

woraus:

$$\frac{1}{\varrho_1\,\varrho_1'} = -\frac{V_1{}^2}{D^2\,\varrho^2} \text{ und } \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_1'}\right)^2 = \frac{4\,D^2\,V_1{}^2\,R_1{}^2}{D^4\,\varrho^4} = \frac{\varDelta_1}{D^4\,\varrho^4}$$

folgt. Die erste der oben gegebenen Relationen von Schubert erhält dadurch die Form:

$$51)\qquad V_1{}^2 + V_6{}^2 + V_7{}^2 + V_8{}^2 = V_2{}^2 + V_3{}^2 + V_4{}^2 + V_5{}^2$$

und die zweite, wenn man bedenkt, dass:

$$\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_1'}\right)^2 - \frac{4}{\varrho_1\,\varrho_1'} = \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_1'}\right)^2.$$

mit Berücksichtigung von 51:

$$52)\qquad \varDelta_1 + \varDelta_6 + \varDelta_7 + \varDelta_8 = \varDelta_2 + \varDelta_3 + \varDelta_4 + \varDelta_5\,.$$

Aus der letzten Relation schliesst man, dass, wenn das 1te, 6te, 7te und 8te Paar conjugirter Kugeln reell, bezüglich imaginär sind, dann wenigstens eins der übrigen Paare reell bezüglich imaginär sein müsse; und ebenso umgekehrt, dass, wenn die Paare 2, 3, 4 und 5 reell bezüglich imaginär sind, dann wenigstens eines der übrigen Paare reell bezüglich imaginär sein müsse.

(Schluss folgt.)