

Algebraische Zahlentheorie

Arbeitsblatt 25

Aufgaben

AUFGABE 25.1.*

Es sei R ein Zahlbereich ohne reelle Einbettung. Zeige, dass die Norm eines jeden Elementes $x \in R$, $x \neq 0$, positiv ist.

AUFGABE 25.2. Bestimme die Anzahl der reellen und der komplexen Einbettungen von

$$K = \mathbb{Q}[X]/(X^3 + 2X - 1).$$

AUFGABE 25.3. Es sei $P \in \mathbb{Z}[X]$ ein normiertes irreduzibles Polynom vom Grad d und $K = \mathbb{Q}[X]/(P)$. Woran erkennt man am Graphen von P die Anzahl der reellen Einbettungen und die Anzahl der Paare von komplexen Einbettungen von K ?

AUFGABE 25.4. Bestimme für \mathbb{Z} für die Ganzheitsbasis 1 (und die Ganzheitsbasis -1) die komplexe Ganzheitsmatrix und die reelle Ganzheitsmatrix.

AUFGABE 25.5. Bestimme für die Ganzheitsbasis $1, i$ von $\mathbb{Z}[i]$ die komplexe Ganzheitsmatrix und die reelle Ganzheitsmatrix. Bestimme den Flächeninhalt der Grundmasche des zugehörigen Gitters.

AUFGABE 25.6.*

Bestimme die reelle Ganzheitsmatrix zur Ganzheitsbasis $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ des kubischen Zahlbereiches $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$.

AUFGABE 25.7.*

Bestimme die reelle Ganzheitsmatrix zur Ganzheitsbasis $\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$ des fünften Kreisteilungsrings, wobei $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}} = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ die primitive fünfte Einheitswurzel ist.

AUFGABE 25.8. Bestimme die reelle Ganzheitsmatrix zur Ganzheitsbasis $1, X, X^2, X^3$ des achten Kreisteilungsrings

$$R_8 = \mathbb{Z}[X]/(X^4 + 1).$$

Verwende, dass die komplexen Einbettungen dadurch gegeben sind, dass X auf eine primitive achte Einheitswurzel abgebildet wird, und dass diese die Gestalt $\zeta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$ besitzen.

AUFGABE 25.9. Es sei $\mathbb{Q} \subseteq K$ eine Galoiserweiterung vom Grad n . Zeige, dass für die Anzahl r der reellen Einbettungen $r = 0$ oder $r = n$ gilt.

AUFGABE 25.10. Bestimme sämtliche quadratischen Zahlbereiche R mit der Eigenschaft, dass der Flächeninhalt der Grundmasche des zugehörigen Gitters Γ_R gleich 1 ist.

AUFGABE 25.11. Studiere den Beweis zu Satz 25.6 am Beispiel von $\mathbb{Z}[i]$

AUFGABE 25.12.*

Überprüfe Satz 25.6 am Beispiel des kubischen Zahlbereiches $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$ (siehe Lemma 16.5 zur Berechnung der Diskriminante und Aufgabe 25.6 zur Bestimmung der reellen Ganzheitsmatrix).

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 3
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 3