Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Algebraische Zahlentheorie

Arbeitsblatt 25

Aufgaben

Aufgabe 25.1.*

Es sei R ein Zahlbereich ohne reelle Einbettung. Zeige, dass die Norm eines jeden Elementes $x \in R$, $x \neq 0$, positiv ist.

Aufgabe 25.2. Bestimme die Anzahl der reellen und der komplexen Einbettungen von

$$K = \mathbb{Q}[X]/\big(X^3 + 2X - 1\big).$$

Aufgabe 25.3. Es sei $P \in \mathbb{Z}[X]$ ein normiertes irreduzibles Polynom vom Grad d und $K = \mathbb{Q}[X]/(P)$. Woran erkennt man am Graphen von P die Anzahl der reellen Einbettungen und die Anzahl der Paare von komplexen Einbettungen von K?

Aufgabe 25.4. Bestimme für $\mathbb{Z}$ für die Ganzheitsbasis 1 (und die Ganzheitsbasis -1) die komplexe Ganzheitsmatrix und die reelle Ganzheitsmatrix.

Aufgabe 25.5. Bestimme für die Ganzheitsbasis $1, \mathrm{i}$ von $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ die komplexe Ganzheitsmatrix und die reelle Ganzheitsmatrix. Bestimme den Flächeninhalt der Grundmasche des zugehörigen Gitters.

Aufgabe 25.6.*

Bestimme die reelle Ganzheitsmatrix zur Ganzheitsbasis $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ des kubischen Zahlbereiches $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$.

Aufgabe 25.7.*

Bestimme die reelle Ganzheitsmatrix zur Ganzheitsbasis $\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$ des fünften Kreisteilungsringes, wobei $\zeta = e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{5}} = \cos \frac{2\pi}{5} + \mathrm{i} \sin \frac{2\pi}{5}$ die primitive fünfte Einheitswurzel ist.

Aufgabe 25.8. Bestimme die reelle Ganzheitsmatrix zur Ganzheitsbasis $1, X, X^2, X^3$ des achten Kreisteilungsringes

$$R_8 = \mathbb{Z}[X]/\big(X^4 + 1\big).$$

Verwende, dass die komplexen Einbettungen dadurch gegeben sind, dass X auf eine primitive achte Einheitswurzel abgebildet wird, und dass diese die Gestalt $\zeta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$ besitzen.

Aufgabe 25.9. Es sei $\mathbb{Q} \subseteq K$ eine Galoiserweiterung vom Grad n. Zeige, dass für die Anzahl r der reellen Einbettungen $r = 0$ oder $r = n$ gilt.

Aufgabe 25.10. Bestimme sämtliche quadratischen Zahlbereiche R mit der Eigenschaft, dass der Flächeninhalt der Grundmasche des zugehörigen Gitters Γ_R gleich 1 ist.

Aufgabe 25.11. Studiere den Beweis zu Satz 25.6 am Beispiel von $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$

Aufgabe 25.12.*

Überprüfe Satz 25.6 am Beispiel des kubischen Zahlbereiches $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$ (siehe Lemma 16.5 zur Berechnung der Diskriminante und Aufgabe 25.6 zur Bestimmung der reellen Ganzheitsmatrix).

Abbildungsverzeichnis