

## Analysis II

### Vorlesung 44

#### Partielle Ableitungen

Sei  $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$  eine durch

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$$

gegebene Abbildung. Betrachtet man für einen fixierten Index  $i$  die übrigen Variablen  $x_j$ ,  $j \neq i$ , als Konstanten, so erhält man eine Abbildung  $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ , die nur von  $x_i$  abhängt (entsprechend betrachtet man die übrigen Variablen als Parameter). Falls diese Funktion, als Funktion in der einen Variablen  $x_i$ , differenzierbar ist, so sagen wir, dass  $f$  *partiell differenzierbar* bezüglich  $x_i$  ist und bezeichnen diese Ableitung mit  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ . Der Vorteil der partiellen Ableitungen liegt darin, dass man diese einfach berechnen kann. Jedoch hängen sie von der Wahl einer Basis ab. Die partiellen Ableitungen sind selbst Abbildungen von  $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ .

DEFINITION 44.1. Sei  $G \subseteq \mathbb{K}^n$  offen und sei eine Abbildung  $f: G \rightarrow \mathbb{K}^m$  durch

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

gegeben. Es sei  $P = (a_1, \dots, a_n) \in G$  ein Punkt. Für fixierte Indizes  $i$  und  $j$  betrachten wir die Abbildung

$$I \rightarrow \mathbb{K}, x_i \mapsto f_j(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

(wobei  $I$  ein reeller Intervall (bzw. eine offene Kreisscheibe) mit  $a_i \in I$  derart sei, dass  $\{(a_1, \dots, a_{i-1})\} \times I \times \{(a_{i+1}, \dots, a_n)\} \subseteq G$  gilt) als Funktion in einer Variablen, wobei die übrigen Variablen  $a_k$ ,  $k \neq i$ , fixiert seien. Ist diese Funktion in  $P$  differenzierbar, so heißt  $f_j$  *partiell differenzierbar* in  $P$  bezüglich der Koordinate  $x_i$ . Man bezeichnet diese Ableitung (welche ein Element in  $\mathbb{K}$  ist) mit

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P)$$

und nennt sie die  $i$ -te *partielle Ableitung* von  $f_j$  in  $P$ .

Die Abbildung  $f$  heißt *partiell differenzierbar* im Punkt  $P$ , falls für alle  $i$  und  $j$  die partiellen Ableitungen in  $P$  existieren. Die  $i$ -te partielle Ableitung von  $f$  in  $P$  wird mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) := \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(P), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(P) \right)$$

bezeichnet.

Diese Definition führt insbesondere die  $i$ -te partielle Ableitung einer Funktion  $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$  auf den Ableitungsbegriff in einer Variablen zurück, indem die anderen Variablen „festgehalten“ und als Parameter betrachtet werden. Daher bedeutet die Existenz der  $i$ -ten partiellen Ableitung von  $f$  im Punkt  $(a_1, \dots, a_n)$  einfach die Existenz des Limes

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + s, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{s}.$$

Die partiellen Ableitungen sind im Wesentlichen die Richtungsableitungen in Richtung der Standardvektoren. Insbesondere ergeben partielle Ableitungen nur dann Sinn, wenn eine Basis im Vektorraum, der den Definitionsbereich einer Abbildung darstellt, gewählt worden ist, bzw. wenn eben von vornherein ein  $\mathbb{K}^n$  betrachtet wird.

LEMMA 44.2. Sei  $G \subseteq \mathbb{K}^n$  offen,  $P \in G$  ein Punkt und sei

$$f: G \longrightarrow \mathbb{K}^m, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \varphi(x_1, \dots, x_n) \\ = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),$$

eine Abbildung. Dann ist  $\varphi$  in  $P$  genau dann partiell differenzierbar, wenn die Richtungsableitungen von sämtlichen Komponentenfunktionen  $f_j$  in  $P$  in Richtung eines jeden Standardvektors existieren. In diesem Fall stimmt die  $i$ -te partielle Ableitung  $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(P)$  von  $f$  in  $P$  mit der Richtungsableitung von  $f_j$  in  $P$  in Richtung des  $i$ -ten Standardvektors  $e_i$  überein, und  $f$  ist in  $P$  genau dann partiell differenzierbar, wenn die Richtungsableitungen in  $P$  in Richtung eines jeden Standardvektors existieren.

*Beweis.* Sei  $P = (a_1, \dots, a_n)$ . Da partielle Ableitungen die Ableitungen von Funktionen in einer Variablen sind, ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{f_j(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + s, a_{i+1}, \dots, a_n) - f_j(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{f_j(P + se_i) - f_j(P)}{s} \\ &= (D_{e_i} f)(P). \end{aligned}$$

□

DEFINITION 44.3. Sei  $G \subseteq \mathbb{K}^n$  offen und sei eine Abbildung

$$f: G \longrightarrow \mathbb{K}^m, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n) \\ = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),$$

gegeben. Dann heißt  $f$  *partiell differenzierbar*, wenn  $f$  in jedem Punkt  $P \in G$  partiell differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Abbildung

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}: G \longrightarrow \mathbb{K}^m, P \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(P), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(P) \right),$$

die  $i$ -te partielle Ableitung von  $f$ .

BEISPIEL 44.4. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{xy^3}{x^2 + y^2}.$$

Um die partielle Ableitung nach  $x$  (in jedem Punkt) zu berechnen, betrachtet man  $y$  als eine Konstante, so dass eine nur von  $x$  abhängige Funktion dasteht. Diese wird gemäß den Ableitungsregeln für Funktionen in einer Variablen abgeleitet, so dass sich

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3(x^2 + y^2) - xy^3(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2y^3 + y^5}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$$

ergibt. Für die partielle Ableitung nach  $y$  betrachtet man  $x$  als eine Konstante und erhält

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3xy^2(x^2 + y^2) - xy^3(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{3x^3y^2 + xy^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}.$$

DEFINITION 44.5. Sei  $G \subseteq \mathbb{K}^n$  offen und sei eine Abbildung

$$f: G \longrightarrow \mathbb{K}^m, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n) \\ = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),$$

gegeben, die in  $P \in G$  partiell differenzierbar sei. Dann heißt die Matrix

$$\text{Jak}(f)_P := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix}$$

die *Jacobi-Matrix* zu  $f$  im Punkt  $P$ .

BEISPIEL 44.6. Wir betrachten die Abbildung  $f: \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^2$ , die durch

$$(x, y, z) \longmapsto (xy^2 - z^3, \sin(xy) + x^2 \cdot \exp z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z))$$

gegeben sei. Die partiellen Ableitungen von  $f_1$  sind

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = -3z^2,$$

und die partiellen Ableitungen von  $f_2$  sind

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = y \cos(xy) + 2x \cdot \exp z, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = x \cdot \cos(xy), \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = x^2 \cdot \exp(z).$$

Damit erhalten wir für einen beliebigen Punkt  $P = (x, y, z)$  die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} y^2 & 2xy & -3z^2 \\ y \cos(xy) + 2x \exp(z) & x \cos(xy) & x^2 \exp(z) \end{pmatrix}.$$

Für einen speziellen Punkt, z.B.  $P = (2, 1, 3)$ , setzt man einfach ein:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -27 \\ \cos(2) + 4 \exp(3) & 2 \cos(2) & 4 \exp(3) \end{pmatrix}.$$

## Höhere Richtungsableitungen

Seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume und  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge. Für eine Abbildung  $\varphi: G \rightarrow W$  und einen fixierten Vektor  $v \in V$  ist die Richtungsableitung in Richtung  $v$  (falls diese existiert) selbst eine Abbildung

$$D_v\varphi: G \longrightarrow W, P \longmapsto (D_v\varphi)(P).$$

Als solche ergibt es Sinn zu fragen, ob  $D_v\varphi$  in Richtung  $v \in V$  differenzierbar ist. Wir sprechen dann von *höheren Ableitungen*. Dies wird präzisiert durch die folgende induktive Definition.

DEFINITION 44.7. Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume,

$$f: G \longrightarrow W$$

eine Abbildung auf einer offenen Menge  $G \subseteq V$  und  $v_1, \dots, v_n$  Vektoren in  $V$ . Man sagt, dass die *höhere Richtungsableitung* von  $f$  in Richtung  $v_1, \dots, v_n$  existiert, wenn die höhere Richtungsableitung in Richtung  $v_1, \dots, v_{n-1}$  existiert und davon die Richtungsableitung in Richtung  $v_n$  existiert. Sie wird mit

$$D_{v_n}(\dots D_{v_2}(D_{v_1}f))$$

bezeichnet.

Mit partiellen Ableitungen schreibt man höhere Ableitungen als

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k}, \text{ etc.}$$

DEFINITION 44.8. Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume und

$$f: G \longrightarrow W$$

eine Abbildung auf einer offenen Menge. Man sagt, dass  $f$  *n-mal stetig differenzierbar* ist, wenn für jede Auswahl  $v_1, \dots, v_n$  von  $n$  Vektoren aus  $V$  die höhere Richtungsableitung

$$D_{v_n}(\dots D_{v_2}(D_{v_1}f))$$

in Richtung  $v_1, \dots, v_n$  existiert und stetig ist.

Einmal stetig differenzierbar bedeutet also, dass die Richtungsableitung  $D_v\varphi$  in jede Richtung  $v \in V$  existiert und stetig ist.

## Der Satz von Schwarz

BEISPIEL 44.9. Für die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^4 y^7,$$

sind die partiellen Ableitungen gleich  $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y^7$  und  $\frac{\partial f}{\partial y} = 7x^4y^6$ . Die zweiten partiellen Ableitungen sind gleich

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = 12x^2y^7,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = 28x^3y^6,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = 42x^4y^5$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = 28x^3y^6.$$

Der folgende Satz heißt *Satz von Schwarz* (oder auch *Satz von Clairaut*).

**SATZ 44.10.** *Sei  $G \subseteq V$  offen und  $\varphi: G \rightarrow W$  eine Abbildung, so dass für  $u, v \in V$  die zweiten Richtungsableitungen  $D_v D_u \varphi$  und  $D_u D_v \varphi$  existieren und stetig sind. Dann gilt*

$$D_v D_u \varphi = D_u D_v \varphi.$$

*Beweis.* Durch Betrachten der einzelnen Komponenten von  $\varphi$  bezüglich einer Basis von  $W$  können wir annehmen, dass  $W = \mathbb{K}$  und  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ist. Wir wollen den eindimensionalen Mittelwertsatz anwenden. Sei  $P \in G$  ein fixierter Punkt. Wir betrachten die Abbildung  $(s, t) \mapsto \varphi(P + su + tv)$  und studieren diese für hinreichend kleine  $s$  und  $t$ . Wir fixieren diese (für den Moment) und betrachten die differenzierbare Abbildung

$$\sigma \mapsto \varphi(P + \sigma u + tv) - \varphi(P + \sigma u).$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein (von  $s$  und  $t$  abhängiges)  $s_1 \in ]0, s[$  mit

$$\begin{aligned} \varphi(P + su + tv) - \varphi(P + su) - \varphi(P + tv) + \varphi(P) \\ = s \cdot ((D_u \varphi)(P + s_1 u + tv) - (D_u \varphi)(P + s_1 u)). \end{aligned}$$

Nun wenden wir erneut den Mittelwertsatz auf die differenzierbare Abbildung

$$\tau \mapsto (D_u \varphi)(P + s_1 u + \tau v)$$

an, und erhalten die Existenz eines  $t_1 \in ]0, t[$  mit

$$(D_u \varphi)(P + s_1 u + tv) - (D_u \varphi)(P + s_1 u) = t \cdot (D_v D_u \varphi)(P + s_1 u + t_1 v).$$

Zusammen erhalten wir

$$\varphi(P + su + tv) - \varphi(P + su) - \varphi(P + tv) + \varphi(P) = st \cdot (D_v D_u \varphi)(P + s_1 u + t_1 v).$$

Wenden wir denselben Trick in umgekehrter Reihenfolge an, so erhalten wir  $s_2$  und  $t_2$ , so dass dieser Ausdruck auch gleich

$$st \cdot (D_u D_v \varphi)(P + s_2 u + t_2 v)$$

ist. Somit schliessen wir für (hinreichend kleine) gegebene  $s, t \neq 0$ , dass positive  $s_1, s_2 \leq s$  und  $t_1, t_2 \leq t$  existieren mit

$$(D_v D_u \varphi)(P + s_1 u + t_1 v) = (D_u D_v \varphi)(P + s_2 u + t_2 v).$$

Für  $s \rightarrow 0$  und  $t \rightarrow 0$  konvergieren auch  $s_1, s_2, t_1$  und  $t_2$  gegen 0. Die Stetigkeit der beiden zweiten Richtungsableitungen impliziert für  $s, t \rightarrow 0$  die Gleichheit

$$(D_v D_u \varphi)(P) = (D_u D_v \varphi)(P).$$

□

Ein Spezialfall des Satzes von Schwarz ist, dass für eine zweifach stetig differenzierbare Funktion

$$f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

die Gleichheit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

gilt.

**KOROLLAR 44.11.** *Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume,  $G \subseteq V$  offen und*

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

*eine  $n$ -mal stetig differenzierbare Abbildung. Es sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Auswahl von  $n$  Vektoren aus  $V$ . Dann gilt für jede Permutation  $\sigma \in S_n$  die Gleichheit*

$$D_{v_n}(\dots D_{v_2}(D_{v_1}\varphi)) = D_{v_{\sigma(n)}}(\dots D_{v_{\sigma(2)}}(D_{v_{\sigma(1)}}\varphi)).$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 44.12. □