

$$\begin{aligned} \therefore V &= 2\pi \left[a^2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a \\ &= \frac{4}{3}\pi a^3 \end{aligned}$$

例 2. 底ノ面積 A, 高サ h ナル錐ノ體積。

頂點 O ヨリ底ニ垂線 OH ヲ下シ O ヨリ x ナル距離ニ於テ OH
ニ垂直ナル平面ヲ作レバ, 錐ト此平面トノ截リ口ノ面積 $f(x)$ ハ x^2
ニ比例スベシ。即チ

$$\frac{f(x)}{A} = \frac{x^2}{h^2}$$

$$\therefore f(x) = \frac{A}{h^2}x^2$$

依テ錐ノ體積ハ

$$V = \int_0^h \frac{A}{h^2}x^2 dx$$

$$= \frac{A}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{hA}{3}$$

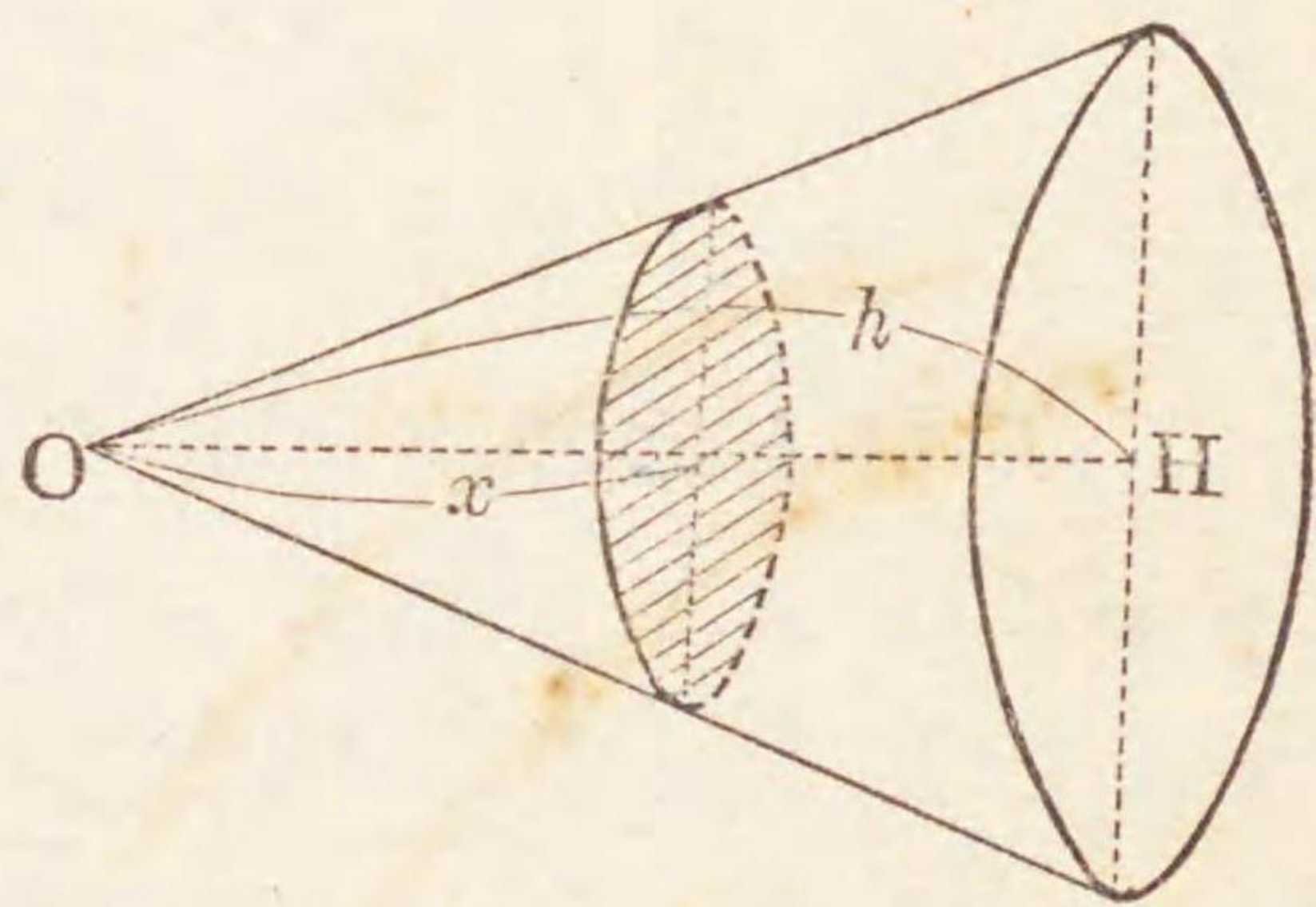
即チ錐ノ體積ハ高サト底ノ面積トノ積ノ三分ノ一ニ等シ。

問題 32. 底ノ面積 A, 高サ h ナル平行六面體ノ體積ハ hA ナ
ルコトヲ證セヨ。

問題 33. 半徑 a ナル四分圓ト其兩端ニ於ケル切線トニヨリ
圍マル、平面圖形ヲ其一端ニ於ケル切線ノマハリニ回轉シテ生
ズル立體ノ體積ヲ求ム。

問題 34. 橢圓ヲ其長軸ノマハリニ回轉シテ生ズル立體ノ體
積如何。

第百三十七圖



第七章

順列, 組合及ビ確率

〔一〕 數學的歸納法

1. 歸納法ハ數學ノ諸分科ニ亘リテ廣ク用ヒラル、
一種ノ證明法ナリ。下ニ其例ヲ示ス。

例 1. $1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1) \dots\dots\dots (1)$

ヲ證明セヨ。

證明ヲ二段ニ分ツ。

1°. 先ヅ n ノ特別ノ値ニ對シテ上記ノ關係成立スルコトヲ
驗ス。

$n=1$ ノ場合 左邊=1, 右邊= $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$

$n=2$ ノ場合 左邊=1+2=3

右邊= $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$

$\therefore n=1, 2$ ナル特別ノ場合ニ對シテハ (1) ノ關係成立ス。

2°. 次ニ n ガ或特別ノ値 r ニ等シキトキ (1) ノ關係成立スル
コトヲ假定シ, 其レヨリ尙 1 ダケ大ナル値即チ $r+1$ ニ等シキトキ
モ又成立スルコトヲ證明ス。

$n=r$, トキ成立スト假定セバ其 r ニ對シテハ

$$1+2+3+\dots+r = \frac{1}{2}r(r+1)$$

兩邊ニ $r+1$ ヲ加フレバ

$$\begin{aligned} 1+2+2+\dots+r+(r+1) &= \frac{1}{2}r(r+1) + (r+1) \\ &= \frac{1}{2}(r+1)(r+2) \end{aligned}$$

是レ(1)ノ關係ガ $n=r+1$ ノトキモ又成立スルコトヲ示スモノナリ。

1°, 2° ヨリ次ノ如キ推論ヲ得。

1° = ヨリ $n=1, 2$ ノトキ成立ス。 $n=2$ ノトキ成立スルナラバ、
2° = ヨリ $n=3$ ノトキ又成立ス。 $n=3$ ノトキ成立スルナラバ 2°
= ヨリ $n=4$ ノトキモ成立ス。順次斯クノ如クニシテ n ノ任意ノ
正整數値ニ對シテ(1)ノ關係成立スルヲ知ル。

注意 以上ニ於テハ $n=1$ 及ビ $n=2$ ナルトキ(1)ノ關係成立スルコトヲ驗證シタレドモ、 $n=1$ ノトキ(1)ノ關係成立スルコトヲ驗證シテ直ニ第二段ノ證明ニ入りテ可ナリ。

例 2. 連続二整數ノ一ツハ偶數ナルヲ以テ此二整數ノ積ハ 2ニテ整除セラル。之ヲ用ヒテ連續三整數ノ積ハ 6ニテ整除セラル、コトヲ證セヨ。

連續三整數中ノ最小ナルモノヲ n トセバ、他ノ二數ハ $n+1, n+2$ トナル。

$$\text{倍 } n=1 \text{ ノトキハ } n(n+1)(n+2)=6$$

故ニ明カニ 6ニテ整除セラル。

次ニ $n=r$ ノトキニ本問題成立スルモノト假定セバ $r(r+1)(r+2)$ ハ 6ニテ整除セラル。而シテ

$$(r+1)(r+2)(r+3) = r(r+1)(r+2) + 3(r+1)(r+2)$$

ニシテ $3(r+1)(r+2)$ ハ 3×2 即チ 6ニテ整除セラル、ガ故ニ $r(r+1)(r+2)$ ガ 6ニテ整除セラル、ナラバ $(r+1)(r+2)(r+3)$ モ又 6ニテ整除セラレザル可ラズ。

依テ前問ニ於ケル如ク n ノ總テノ正整數値ニ對シテ $n(n+1)(n+2)$ ハ 6ニテ整除セラルルヲ知ル。

此種ノ證明法ヲ數學的歸納法又ハ略シテ單ニ歸納法ト云フ。

問題 次ノ關係ヲ歸納法ニヨリテ證明セヨ。

$$1. \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$2. \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$3. \quad 1.2.3 \dots m + 2.3.4 \dots (m+1) + 3.4.5 \dots (m+2) \\ + \dots + n(n+1)(n+2) \dots (n+m-1) \\ = \frac{1}{m+1}n(n+1)(n+2) \dots (n+m).$$

4. 連續四整數ノ積ハ 24ニテ整除セラル。

連續五整數ノ積ハ 120ニテ整除セラル。

Permutation and Combination

〔二〕 順列及ビ組合

2. 與ヘラレタル n 個ノ物ノ中ヨリ r 個ノ物ヲ取リ出シテ或順序ニ排列シタルモノヲ n 個ノ物ノ中ヨリ r 個ヅ、取リタル順列又ハ n 個ノ物ノ r 順列ト云フ。例ヘバ相異ナル三ツノ物 a, b, c 中ヨリ二ツハツ取リテ作レル順列ハ、

$$ab, ac, ba, bc, ca, cb.$$

與ヘラレタル n 個ノ物ノ中ヨリ取リタル r 個ノ物ノ組ヲ n 個ノ物ノ中ヨリ r 個ヅ、取リタル組合又ハ n 個ノ物ノ r 組合ト云フ。例ヘバ相異ナル三ツノ物 a, b, c 中ヨリ二ツハツ取リテ作レル組合ハ

$$ab, ac, bc.$$

吾人ノ目的ハ順列及ビ組合ノ數ヲ求ムルニアリ。

以下物ヲ表ハスニ a, b, c 等ノ文字又ハ $1, 2, 3$ 等ノ數字ヲ以テシ、特ニ斷リナキトキハ悉クノ物ハ皆相異ナルモノト規約ス。

3. 順列組合ノ數ヲ求ムルニ當リ屢々用ヒラル、基礎ノ定理ヲ下ニ掲グ。

定理 第一ノ事柄 A ガ m 個ノ方法ニテ起リ次ニ第二ノ事柄 B ガ n 個ノ方法ニテ起ルトキハ A ト B トガ結合シテ起リ得ベキ總テノ方法ノ數ハ mn ナリ。

例ヘバ一ツノ骰子ヲ投グルトキハ骰子ノ目ノ顯ハレ方 6 通りアリ。二ツノ骰子ヲ投グルトキハ一方ノ骰子ノ各々ノ目ニ對シテ他方ノ骰子ノ目ノ顯ハレ方 6 通り、アルヲ以テ、結局全體ニテ 6×6 通りノ目ノ顯ハレ方ヲ生ズルガ如シ。(勿論甲ノ 1 ノ目ト乙ノ 2 ノ目ノ出デタル場合ト甲ノ 2 ノ目ト乙ノ 1 ノ目ノ出デタル場合トハ相異ナルモノトシテ計算ス)。

此例ニ於ケル證明ト同様ニシテ本定理ヲ證明スルコトヲ得。

又此定理ハ二個以上ノ事柄ノ結合ニ對シテモ成立スルヲ見ルコト容易ナリ。例ヘバ

第一ノ事柄 A ガ m 個ノ方法ニテ起リ、次ニ第二ノ事柄 B ガ n 個ノ方法ニテ起リ、又其次ニ第三ノ事柄 C ガ p 個ノ方法ニテ起ルトキハ A, B, C ガ結合シテ起リ得ベキ總

テノ方法ノ數ハ mnp ナリ。

例 相異ナル有效數字ヲ用ヒテ三位ノ數何程ヲ作り得ルカ。(有效數字トハ $1, 2, 3, \dots, 9$ 中ノ數字ヲ云フ)。

$1, 2, 3, \dots, 9$ 中ヨリ任意ノ三ツヲ取り出シテ之ヲ一列ニ並ブレバ相異ナル有效數字ヨリナル三位ノ數ヲ生ズ。サテ第一位ノ數字トシテハ 9 個ノ數字中ノ何レヲモ取ルコトヲ得ベク(其方法ノ數ハ 9) 次ニ第二位ノ數字トシテハ第一位ノ數字トシテ取ラレタル數字以外ノ 8 個ノ數字中ノ何レヲモ取ルコトヲ得ベク(其方法ノ數ハ 8), 更ニ第三位ノ數字トシテハ第一位第二位ノ數字トシテ取ラレタル二個ノ數字以外ノ 7 個ノ數字中ノ何レヲモ取ルコトヲ得ベシ(其方法ノ數ハ 7)。故ニ基礎定理ニヨリ求ムル三位ノ數ハ $9 \cdot 8 \cdot 7$ 即チ 504 ナリ。

4. n 個ノ物ノ r 順列ノ數ヲ求ムルコト。

之ヲ表ハスニ ${}_n P_r$ ナル記號ヲ用フ。

前條ノ例題ヲ解キタルト全然同様ニシテ次ノ結果ニ到達ス。

$${}_n P_r = n(n-1)(n-2)\dots(r \text{ 個ノ因數ノ積})$$

$$\text{即チ } {}_n P_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)\dots\dots\dots (1)$$

特ニ $r=n$ ナル場合ニハ

$${}_n P_n = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 = n! \dots\dots\dots (2)$$

例 1. $abcde$ ノ五文字ノ悉クヲ用ヒテ作り得ル順列ノ數如何。又其中最初ト最後トニ子音ヲ有スルモノノ數如何。

此等ノ五文字ノ悉クヲ用ヒテ作り得ル總テノ順列ノ數ハ

$${}_5 P_5 = 5! = 120.$$

次ニ子音ハ三ツアルヲ以テ最初ト最後トニ子音ヲ配置スルモノトセバ、其方法ノ數ハ ${}_3 P_2$ ニシテ此中ノ一組ニ對シテ残りノ三

文字ガ内部ニテ位置ヲ換ヘ得可キ方法ノ數ハ ${}_3P_3$ トナル。故ニ前條ノ定理ニヨリテ所要ノ數ハ、

$${}_3P_2 \times {}_3P_3 = 3 \cdot 2 \times 3! = 36.$$

例 2. 生徒 10 人教師 4 人アリ。教師 4 人ヲ隣接セシメテ生徒ト教師トヲ一列ニ竝ブル方法幾通リアリヤ。

先ヅ教師 4 人ヲ除キ置ケバ生徒 10 人ガ一列ニ竝ビ得ル方法ノ數ハ ${}_{10}P_{10}$ ナリ。此排列ノ各々ニ於テ隣レル二人ノ間又ハ兩端ノ何レカニ教師 4 人擧リテ入レバ教師 4 人ガ隣接セル竝ビ方ヲ得可シ。斯ク 4 人ガ一團トナリテ入り得ベキ場所ノ數ハ 11 アリ。而シテ教師 4 人ガ 4 人同志間ニテ位置ヲ換ヘ得ベキ方法ノ數ハ ${}_4P_4$ ナルヲ以テ所要ノ數ハ、

$${}_{10}P_{10} \times 11 \times {}_4P_4 = 11! \times 4!$$

問題 5. 20 個ノ停車場ヲ有スル鐵道會社ハ幾種ノ乗車切符ヲ必要トスルカ。

問題 6. 相異ナル數字ヲ以テ作り得ル五位ノ數ハ何程アルカ。但シ數字中ニハ零アルモノ可ナルモノトス。

問題 7. figures ノ悉クノ文字ヲ用ヒテ作り得ル順列中 i, u, e ノ順序ガ一定ナルモノノ數如何。

問題 8. figures ノ悉クノ文字ヲ用ヒテ作り得ル順列中奇數番目ニ母音ヲ有スルモノノ數如何。又其中母音ガ一定ノ順序ヲ有スルモノノ數如何。

問題 9. 歸納法ヲ用ヒテ公式(2)ヲ證明セヨ。

5. n 個ノ物ノ r 組合ノ數ヲ求ムルコト。

此數ヲ表ハスニ ${}_nC_r$ ナル記號ヲ用フ。

n 個ノ物ノ中ヨリ r 個ヅ、取リテ作レル組合ノ一ツニ於テ其中ノ r 個ノ物ヲ種々ノ順序ニ排列スルトキハ

$r!$ 個ノ順列ヲ得ベシ。 n 個ノ物ノ r 組合ノ總テヲ取リテ其中ノ r 個ノ物ヲ種々ノ順序ニ排列スルトキハ n 個ノ物ノ r 順列ノ總テヲ一度、而カモ只一度生ズベシ。依テ次ノ關係式ヲ得。

$$r! \times {}_nC_r = {}_nP_r$$

$$\text{之ヨリ } {}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}$$

$$\text{又ハ } {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}_nC_{n-r}$$

ヲ得。

$$\text{例 1. } {}_{15}C_{13} = {}_{15}C_2 = \frac{15 \cdot 14}{2!} = 105$$

例 2. $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ ノ九文字中 2 個ノ母音ト 5 個ノ子音トヲ用ヒテ作り得ル語ノ數如何。

母音 3 個中ヨリ 2 個ヲ取り出ス方法ハ ${}_3C_2$ 通り、子音 6 個中ヨリ 5 個ヲ取り出ス方法ハ ${}_6C_5$ 通リアリ。故ニ與ヘラレタル九文字中ヨリ母音 2 個ト子音 5 個トヲ選ビ出ス方法ノ數ハ ${}_3C_2 \times {}_6C_5$ ナリ。而シテ此各々ノ組合ヨリ ${}_7P_7$ 個ノ語ヲ生ズベキヲ以テ所要ノ語數ハ

$${}_3C_2 \times {}_6C_5 \times {}_7P_7 = 3 \times 6 \times 7! = 90720.$$

$$\text{例 3. } {}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$$

ヲ證明セヨ。

${}_nC_r$ ノ公式ヲ用ヒテ兩邊ノ相等シキコトヲ知り得ベシト雖又次ノ如クニシテ之ヲ證スルコトヲ得。

n 個ノ文字ノ r 組合全體ヲ二群ニ分ツ。

第一群。特別ノ一文字ヲ含メルモノ。

第二群。特別ノ一文字ヲ含マザルモノ。

特別ノ一文字ヲ含メルモノハ其中ヨリ其特別ノ文字ヲ取り去

レバ、與ヘラレタル n 個ノ文字中ヨリ其文字ヲ取り去リタル残りノ $n-1$ 個ノ文字ヲ基本トシ、夫ヨリ $r-1$ 個取リテ作レル組合ヲ得。而シテ斯克ノ如キ組合ノ數ハ ${}_{n-1}C_{r-1}$

∴ 第一群 = 屬スル組合ノ數モ又 ${}_{n-1}C_{r-1}$ ナリ。

第二群 = 屬スル組合ハ、與ヘラレタル n 個ノ文字中ヨリ特別ノ文字ヲ取り去リタル残りノ $n-1$ 個ノ文字ヲ基本トシ夫ヨリ r 個ヅ、取リテ作レル組合 = 外ナラズ。故 = 此群 = 屬スル組合ノ數ハ ${}_{n-1}C_r$ 。

第一群、第二群ノ組合ノ數ノ和ハ ${}_nC_r$ ナラザルベカラズ故 = 所要ノ結果ヲ得。

問題 10. n 個ノ點アリ、何レノ三ツモ同一直線上 = アラズトス。是等ノ點ヲ頂點トスル三角形ノ數如何。又 n 個ノ點中 m 個ダケ同一直線上 = アルモノトセバ如何。

問題 11. 十三冊ノ英書ト八冊ノ獨書中ヨリ五冊ノ英書ト三冊ノ獨書トヲ取り出シテ書棚 = 並ベントス、並ベ方幾通リアリヤ。

問題 12. 十個ノ平行線ガ他ノ七個ノ平行線ノ組ト出會ヒテ生ズル平行四邊形ノ全數ヲ求ム。

問題 13. 組合ノ數ヲ表ハス記號 ${}_nC_r$ ヲ用フルトキハ二項定理ヲ次ノ如ク = 書クコトヲ得 (第三章 第 20 條)。

$$(1+x)^n = 1 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \dots + {}_nC_r x^r + \dots + x^n$$

之ヲ歸納法 = ヨリテ證明セヨ。

6. 悉クハ相異ナラザル n 個ノ物ノ中ヨリ全體取リタル順列ノ數ヲ求ムルコト。

1, 1, 1, 2, 3, 4 ヲ以テ作り得ル 6 位ノ數ハ何程アルカ。

今此等ノ數字 = テ作ラレタル 6 位ノ數ノ一ツ = 於テ 1, 1, 1 ノアル所へ 2, 3, 4 ト異ナル三數例ヘバ 5, 6, 7 ヲ代入スルトキハ, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ナル六數字ヨリナル 6 位ノ數 $3!$ ヲ得ベン。最初ノ六

ツノ數 = テ作ラレタル 6 位ノ數ノ悉ク = 同様ノ事ヲナストキハ 2, 3, 4, 5, 6, 7 ヲヨリ成ル 6 位ノ數ノ悉クヲ一度而カモ只一度ヅ、生ズベシ。依テ最初ノ數 = テ作ラル、6 位ノ數ノ全數ヲ x = テ表ハセバ、

$$3! \times x = 6!$$

$$\therefore x = \frac{6!}{3!} = 120.$$

同様ノ推理 = ヨリ次ノ結論ヲ得。

a, b, c, \dots ヲ相異ナル文字トシ、 n 個ノ文字中 p 個ハ a ト同ジク、 q 個ハ b ト同ジク、 r 個ハ c ト同ジク順次斯克ノ如キトキハ此等ノ文字ノ全體 = テ作ラル、順列ノ數ハ

$$\frac{n!}{p!q!r!\dots\dots\dots}$$

問題 14. 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4 ヲ用ヒテ作り得ル 7 位ノ數ハ何程アルカ。又之 = 0 ヲ附加シテ 8 位ノ數ヲ作ルトセバ其總數何程。

7. 同一物ヲ繰リ返シテ取ルコトヲ許ス場合ノ順列及ビ組合ノ數。

1°. n 個ノ物ノ中ヨリ、繰リ返シテ取ルコトヲ許ス場合ノ、一度 = r 個ヅ、取リタル順列ノ數ヲ ${}_n\Pi_r$ = テ表ハス。

例 有效數字ノミ = テ作り得ル三位ノ數何程。

1, 2, 3, ..., 9 中ヨリ任意ノ三ツヲ取り出シテ(但シ同一數字ヲ何回トナク取ルモ可ナリ)之ヲ一列 = 並ブレバ有效數字ノミヨリ成ル三位ノ數ヲ得。サテ第一位ノ數字トシテハ 9 個ノ數字中ノ何レヲモ取ルコトヲ得ベク、第二位ノ數字トシテモ同ジク 9 個ノ數字中ノ何レヲモ取ルコトヲ得ベク、第三位ノ數字 = ツキテモ同様ナリ。故 = 所要ノ數ハ 9^3

此例ハ ${}_9\Pi_3 = 9^3$

ナルコトヲ示スモノナリ。此例ニ於ケルガ如クニシテ一般ニ

$${}_nH_r = n^r$$

ナルコトヲ證明シ得。

2°. n 個ノ物ノ中ヨリ, 繰リ返シテ取ルコトヲ許ス場合ノ, 一度ニ r 個ヅ、取リタル組合ノ數ヲ ${}_nH_r$ ニテ表ハス。

例 1, 2, 3, 4 ノ四數字中ヨリ, 同ジ數字ヲ何回モ取ルコトヲ許シテ, 一度ニ三ツヅ、取リテ作レル組合ノ數ヲ求ム。

此組合中ニハ 112, 222, 234, ノ如キモノアリ。

今此等ノ組合ノ各々ヲ, 大ナル數字ハ小ナル數字ノ右ニ來ル様ニ, 一列ニ書キ並べ (211 トセズシテ 112 ト書クガ如シ), 而シテ左端ノ數 = 0, 中央ノ數 = 1, 右端ノ數 = 2 ヲ加フルトキハ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ナル六數字中ヨリ, 繰リ返シナシニ, 一度ニ三ツヅ、取リタル組合ヲ得ベシ (例ヘバ 112 ヨリハ 124, 222 ヨリハ 234, 234 ヨリハ 246 ヲ得ルガ如シ)。

1, 2, 3, 4 ノ四數字中ヨリ, 繰リ返シテ許シテ, 一度ニ三ツヅ、取リテ作レル組合ノ總テニ同様ノ事ヲ行フトキハ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ナル六數字中ヨリ, 繰リ返シナシニ, 一度ニ三ツヅ、取リテ作レル組合ノ全部ヲ一度而カモ只一度生ズベシ。

$$\therefore {}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$$

同様ノ推理ニヨリ一般ニ次ノ結果ヲ得。

$${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{r!}$$

問題 15. 15 人ノ選舉者ガ五人ノ候補者ヲ投票スル方法幾通リアリヤ。但 選舉者ハ只一人ヲ投票シ得ルモノトス。

問題 16. 三ツノ骰子ヲ同時ニ投グルトキ相異ナル種類ノ目ノ顯ハレ方幾通リアリヤ。

(三) 確 率 蓋然率 公算

Probability

8. 確率ノ第一ノ定義 今一ツノ骰子ヲ投グルトキハ 1 ノ目乃至 6 ノ目ノ何レカ一ツヲ現ハスベシ。而シテ 1 ノ目乃至 6 ノ目ノ何レガ顯ハル、カハ全ク豫想スルコトヲ得ズ。換言セバ何レノ目ノ顯ハル、コトモ一ナリト考ヘラル。斯クノ如キ場合ニ於テハ 1 ノ目ノ顯ハル、確率ハ $\frac{1}{6}$ ナリト云フ。一般ニ

Equally likely

總テノ場合ノ數 n 個ノ中或事象ガ a 個ノ場合ニ於テ起ルトキハ其事象ノ起ル確率或ハ其事象ノ確率ハ $\frac{a}{n}$ ナリト云フ。但シ n 個ノ場合ハ皆齊一ニ起リ得ルモノト假定ス。

günstige Fälle favorable case

此時 a 個ノ場合ヲ其事象ノ起ルニ都合ヨキ場合、殘リノ $n-a$ 個ノ場合ヲ其事象ノ起ルニ都合悪シキ場合ト云フ。

一ツノ骰子ヲ投グルトキ 1 ノ目ノ顯ハル、ト云フ事象ニ對シテハ $a=1$ ニシテ $n=6$ ナリ。故ニ其確率ハ $\frac{1}{6}$ トナル。

Keynes.

以上ノ定義ヨリ次ノ結論ヲ得。

1°. 一ツノ事象ガ必ズ起ルトキハ其確率ハ 1 ナリ (何トナレバ $a=n$)。事象ガ必ズ起ラザルトキハ其確率ハ零ナリ (何トナレバ $a=0$)。

例へバ白球ヲ入レタル袋ヨリ一ツノ白球ヲ取り出ダス確率ハ1ニシテ黒球ヲ取り出ダス確率ハ零ナリ。

2°. 一ツノ事象ノ起ル確率ガ p ナルトキハ其事象ノ起ラザル確率ハ $1-p$ ナリ。

何トナレバ一ツノ事象ノ起ルニ都合ヨキ場合ノ數ヲ a , 總テノ場合ノ數ヲ n トセバ,

$$p = \frac{a}{n} \quad 0 \leq p \leq 1$$

而シテ其事象ノ起ルニ都合悪シキ場合ノ數, 從ツテ其事象ノ起ラザルニ都合ヨキ場合ノ數ハ $n-a$ ナルヲ以テ此事象ノ起ラザル確率ハ

$$\frac{n-a}{n} \quad \text{即チ} \quad 1-p$$

トナル可レバナリ。

例 1. 袋中ニ n 個ノ球アリ。形ハ同ジクシテ 1, 2, 3, …… n ナル番號ヲ附セルモノトス。

此中一ツヲ取り出シテ其番號ガ1ナル確率ハ $\frac{1}{n}$, 其レガ1又ハ2ナル確率ハ $\frac{2}{n}$.

二ツヲ取り出シテ其番號ガ1及ビ2ナル確率ハ

$$\frac{1}{n} \quad \text{即チ} \quad \frac{2}{n(n-1)}$$

何トナレバ袋中ヨリ二球ヲ取り出ス總テノ方法ノ數ハ ${}_n C_2$ ニシテ其中二球ガ1及ビ2ナル場合ハ只一回ノミ生ズルヲ以テナリ。

三ツヲ取り出シテ其中ニ1, 2ノ番號ノ球ガ入り居ル確率ハ,

$$\frac{n-2}{n} \quad \text{即チ} \quad \frac{6}{n(n-1)},$$

何トナレバ總テノ場合ノ數ハ ${}_n C_3$ ニシテ三球中二ツガ1, 2ノ番號ヲ有スル場合ノ數ハ $n-2$ ナルヲ以テナリ。

例 2. 袋中ニ三個ノ白球, 四個ノ黒球, 五個ノ赤球アリトス。此中一ツヲ取り出シテ其レガ白ナル確率ハ $\frac{3}{12}$.

二ツヲ取り出シテ二ツ共白ナル確率ハ $\frac{{}_3 C_2}{{}_{12} C_2}$ 即チ $\frac{1}{12}$.

三ツヲ取り出シ一白一黒一赤ナル確率ハ $\frac{3 \times 4 \times 5}{{}_{12} C_3}$ 即チ $\frac{3}{11}$.

例 3. 二ツノ骰子ヲ投ゲ, 目ノ和ガ8ナル確率。

二ツノ骰子ヲ同時ニ投グルトキハ目ノ顯ハレ方 6^2 通りアリ。而シテ此等ノ 6^2 通りノ目ノ顯ハレ方ハ總テ齊一ナリ。此中日ノ和ガ8ナル場合ハ次ノ表ノ示ス如ク5通りアリ。

第一ノ骰子	2	3	4	5	6
第二ノ骰子	6	5	4	3	2

故ニ目ノ和ガ8ナル確率ハ $\frac{5}{6^2}$ 即チ $\frac{5}{36}$ ナリ。

問題 17. factor 及ビ banter ナル語ノ各々ヨリ字母ヲ一ツマ、取り出ストキ同ジ字母ノ出ヅル確率如何。

問題 18. 袋中ニ 1, 2, 3, …… 9 ナル番號ヲ有スル九球アリ。此中ヨリ五個ヲ取り出シ其中ニ,

1°. 1, 2, 3ノ番號ノ球ノ入り居ル確率

2°. 1, 2, 3ノ中ノ只一ツダケガ入り居ル確率

ヲ求メヨ。

問題 19. 八人ガ圓形ノ卓ヲ圍ミテ着座スルトキ特別ノ二人ガ相隣ル確率如何。

9. 確率ノ第二ノ定義 一ツノ骰子ヲ非常ニ多クノ回数投グルトキハ正シキ骰子ナラバ, 1ノ目ハ殆ンド全回数ノ $\frac{1}{6}$ 回顯ハル、ヲ見ル。不正ノ骰子ニテハ必ズシ

モ然ラザレドモ非常ニ多クノ回数之ヲ投グレバ1ノ目ノ出ヅル回数ト全回数トノ比ハ略々一定ノ値ヲ有ス。

即チ n_1, n_2, \dots ヲ非常ニ大ナル數トシ n_1, n_2, \dots 回同一骰子ヲ投ゲ1ノ目ノ出デタル回数ヲ夫々 r_1, r_2, \dots トスレバ、

$$\frac{r_1}{n_1}, \frac{r_2}{n_2}, \frac{r_3}{n_3}, \dots$$

ナル分數ハ殆ンド相等シキナリ(第15條參照)。

斯クノ如キ事實アルガ故ニ n ヲ非常ニ大ナル數トシ n 回ノ試行中1ノ目ガ r 回顯レタル場合ニハ此次ギノ一回ノ試行ニ於テ1ノ目ノ顯ハル、ナラント云フ信用ノ度ハ $\frac{r}{n}$ ナル分數ニヨツテ表ハスコトヲ得ベシ。此分數ヲ1ノ目ノ顯ハル、確率ト云フ。

是レ確率ノ第二ノ定義ニシテ正シキ骰子ナルト否トニ拘ラズ1ノ目ノ顯ハル、確率ヲ定ム。

死亡生殘表ニヨレバ20歳ノ人93268人中30歳マデ生殘セシモノ86292人ナルヲ知ル。此事實ヲ基礎トシテ20歳ノ人ガ今後10年間生存スル確率ハ $\frac{86292}{93268}$ ナリト云フガ如キモ確率ノ第二ノ定義ニヨレルモノナリ。

斯クノ如ク第二ノ定義ハ第一ノ定義ニヨリテ定ムルコトヲ得ザル場合ニ於テモ尙確率ノ意義ヲ定ムルモノナリ。

Exclusive events

10. 排反事象ノ確率 二ツ或ハ二ツ以上ノ事象ア

リテ此中ノ一ツガ起ルトキ他ノモノハ決シテ起ラズト云フ場合ニハ此等ノ事象ハ互ニ排反スト云フ。

例ヘバ一ツノ骰子ヲ投グルトキ1ノ目ノ顯ハル、コトト2ノ目ノ顯ハル、コトトハ互ニ排反ス。然レドモ二ツノ骰子ヲ投グルトキ第一ノ骰子ガ1ノ目ヲ現ハスコト、第二ノ骰子ガ2ノ目ヲ現ハスコト、ハ排反ナラズ。

定理 E_1, E_2, \dots, E_m ヲ互ニ排反スル事象トシ、此等ノ事象ノ確率ヲ夫々 p_1, p_2, \dots, p_m トス、然ルトキハ此等ノ事象ノ何レカガ起ル確率ハ $p_1 + p_2 + \dots + p_m$ ナリ。

例ヘバ一ツノ骰子ヲ投グルトキ1ノ目、3ノ目、5ノ目ノ出ヅル確率ハ總テ $\frac{1}{6}$ ナリ。而シテ此三ツノ事象ハ互ニ排反ス。故ニ奇數ノ目ノ出ヅル確率ハ $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ 即チ $\frac{1}{2}$ ナリト云フガ如シ。

定理ノ證明下ノ如シ。

全體ノ場合ノ數ヲ n トセバ E_1 ハ np_1 個ノ場合ニ於テ起リ、 E_2 ハ np_2 個ノ場合ニ於テ起リ、以下同様ナリ。而シテ此等ノ事象ハ二ツ以上同時ニ起ルコトナキヲ以テ、此等ノ事象ノ何レカハ $np_1 + np_2 + \dots + np_m$ 個ノ場合ニ於テ起ル可シ。故ニ其確率ハ

$$\frac{np_1 + np_2 + \dots + np_m}{n} = p_1 + p_2 + \dots + p_m$$

Independent events, Dependent events

11. 獨立事象及ビ從屬事象ノ確率 二ツ或ハ二ツ

以上ノ事象アリテ此中或モノノ起ルト否トガ他ノモノノ起ル確率ニ關係ヲ有セザルトキハ、此等ノ事象ハ互ニ獨立ナリト云ヒ、然ラザル場合ニハ互ニ從屬ナリト云フ。

一ツノ骰子ヲ二回投グルトキハ第一回ニ1ノ目ノ顯ハル、コト、第二回ニ1ノ目ノ顯ハル、コト、ハ互ニ獨立ナリ。一ツノ袋中ニ三個ノ白球四個ノ黒球アリテ此中ヨリ二回續キテ一個ヅ、ノ球ヲ取り出スモノトセバ、第一回ニ白ノ出ヅルコト、第二回ニ白ノ出ヅルコトトハ互ニ從屬ナリ。何トナレバ第一回ニ白ガ出デタリトセバ第二回ニ白ノ出ヅル確率ハ $\frac{2}{6}$ ニシテ、若シ第一回ニ白ガ出デズトセバ第二回ニ白ノ出ヅル確率ハ $\frac{3}{6}$ トナルヲ以テナリ。

Compound events.

獨立事象及ビ從屬事象ヲ一絡ニシテ複事象ト云フコトアリ。

獨立事象及ビ從屬事象ニ關スル定理次ノ如シ。

定理 I. E_1, E_2, \dots, E_m ヲ獨立事象トシ、其確率ヲ夫々 p_1, p_2, \dots, p_m トス。然ルトキハ此等ノ事象ノ悉クガ起ル確率ハ $p_1 p_2 \dots p_m$ ナリ。

例ヘバーツノ骰子ヲ二回投グルトキ二回トモ1ノ目ノ顯ハル、確率ハ $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ 即チ $\frac{1}{36}$ ナリ。

定理 II. E_1, E_2, \dots, E_m ヲ從屬事象トシ、 E_1 ノ確率ヲ p_1 、 E_1 ガ起リタルモノト假定セルトキノ E_2 ノ確率ヲ p_2 、 F_1 、

E_2 ガ起リタルモノト假定セルトキノ E_3 ノ確率ヲ p_3 、順次斯クノ如クスルトキハ E_1, E_2, \dots, E_m ガ順次ニ起ル確率ハ $p_1 p_2 \dots p_m$ ナリ。

例ヘバ袋中ニ三個ノ白球ト四個ノ黒球トアリテ此中ヨリ一ツ、二回球ヲ取り出スモノトセバ、二回トモ白ノ出ヅル確率ハ $\frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$ ナリ。

以上二箇ノ定理ノ證明ハ全然同様ナリ。下ニ $n=2$ ナル場合ノ證明ヲ掲グ。

E_1, E_2 ヲ二箇ノ獨立又ハ從屬事象トシ、

E_1, E_2 ガ共ニ起ル場合ノ數ヲ α 、

E_1 ガ起リ、 E_2 ガ起ラザル場合ノ數ヲ β 、

E_1 ガ起ラズ、 E_2 ガ起ル場合ノ數ヲ γ 、

E_1, E_2 ガ共ニ起ラザル場合ノ數ヲ δ

トス。但シ此等ノ場合ハ齊一ニ起ルモノト假定ス。

然ルトキハ總テノ場合ノ數ハ $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ ニシテ E_1, E_2 ガ兩方共ニ起ル場合ノ數ハ α ナルヲ以テ其確率 p ハ

$$p = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

又 E_1 ノ起ル總テノ場合ヲ考フルニ、續イテ E_2 ノ起ル場合ノ數ハ α ニシテ、續イテ E_2 ノ起ラザル場合ノ數ハ β ナルヲ以テ、兎ニ角 E_1 ノ起ル確率即チ p_1 ハ

$$p_1 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

トナル。而シテ E_1 ガ起レリトセバ E_2 ハ $\alpha + \beta$ 箇ノ場合

ノ中 α 箇ノ場合ニ於テ起ルガ故ニ其確率 p_2 ハ

$$p_2 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

依テ

$$p = p_1 p_2$$

12. 下ニ一二ノ例題ヲ掲ゲン。

例 1. A, B ナル二袋アリ。A ハ白球 3, 黒球 5 ヲ含ミ B ハ白球 4, 黒球 6 ヲ含ム。今何レカーツノ袋ニ手ヲ入レ二球ヲ抜キ出スモノトセバ其二球ガ共ニ白ナル確率如何。

先ヅ A カ B カ何レカニ手ヲ入ル、ヲ以テ之ガ確率ノ問題ニ入ル。

A = 手ヲ入ル、確率 = $\frac{1}{2}$

A = 手ヲ入レタリトシテ倍二ツノ白球ヲ取り出ス確率ハ

$$\frac{{}_3C_2}{{}_8C_2}$$

∴ A = 手ヲ入レテ二ツノ白球ヲ取り出ス確率ハ

$$\frac{1}{2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_8C_2} = \frac{3}{56} \quad [\text{前條定理 II}]$$

同様ニ B = 手ヲ入レテ二ツノ白球ヲ取り出ス確率ハ

$$\frac{1}{2} \times \frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{1}{15}$$

而シテ A = 手ヲ入ルルコトト B = 手ヲ入ル、コトトハ互ニ排斥スルヲ以テ、

$$\text{所要ノ確率} = \frac{3}{56} + \frac{1}{15}$$

例 2. 甲ガ問題ヲ解ク力ハ $\frac{1}{4}$ ニシテ乙ガ問題ヲ解ク力ハ $\frac{2}{3}$ ナリ。二人ガ共ニ一問題ヲ解カバ之ヲ解キ得ル確率如何。

甲ガ問題ヲ解ク確率 = $\frac{1}{4}$

乙ガ問題ヲ解ク確率 = $\frac{2}{3}$

∴ 甲ガ問題ヲ解キ得ザル確率 = $\frac{3}{4}$

乙ガ問題ヲ解キ得ザル確率 = $\frac{1}{3}$

依テ 甲乙二人共ニ解キ得ル確率 = $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$

甲ハ解キ乙ハ解キ得ザル確率 = $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$

乙ハ解キ甲ハ解キ得ザル確率 = $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$

此等ノ三ツノ場合ハ互ニ排斥スルヲ以テ、甲乙二人ノ中少クトモ一人ガ解キ得ル確率ハ以上ノ三ツノ確率ノ和

$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \quad \text{即チ} \quad \frac{3}{4}$$

ナリ。

此問題ハ又次ノ如クニシテ解クコトヲ得。

甲ガ問題ヲ解キ得ザル確率 = $\frac{3}{4}$

乙ガ問題ヲ解キ得ザル確率 = $\frac{1}{3}$

故ニ甲乙二人ガ共ニ解キ得ザル確率ハ

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \quad \text{即チ} \quad \frac{1}{4}$$

依テ甲乙二人中少クモ一人ガ解キ得ル確率ハ

$$1 - \frac{1}{4} \quad \text{即チ} \quad \frac{3}{4}$$

注意 二ツノ排斥事象 A, B アリテ A カ B カノ中一ツハ必ズ起ルト云フ場合ニハ此二ツノ事象ハ互ニ他ノ餘事象ナリト云フ。

餘事象ノ確率ノ和ハ 1 ナリ。

例 2 = 於ケル第二ノ解法ハ此性質ヲ利用セルモノナリ。即チ甲乙二人中少クモ一人ガ解キ得ルト云フ事象ト、甲乙二人ガ何レモ解キ得ズト云フ事象トハ互ニ餘事

象ヲナシ, 甲乙兩人ガ共ニ解キ得ザル確率ヲ1ヨリ減ジタルモノガ甲乙兩人中少クモ一人ガ解キ得ル確率トナリタルナリ。

問題 20. 白球5個黒球10個ヲ入レタル袋中ヨリ順次一ツ、取り出ストキ九回マデ白黒白黒ノ順序ニテ出ヅル確率如何。

問題 21. A, B 二人アリ。白球2個黒球3個ヲ入レタル袋中ヨリ A, B ノ順ニテ順次一ツ、球ヲ取り出シ最初ニ白ヲ得タルモノヲ勝トス。A ノ勝ツ確率如何。

問題 22. 甲ノ袋中ニハ白球1個黒球4個, 乙ノ袋中ニハ黒球3個アリ。甲ヨリ3個ヲ取り出シ乙ニ入レ然ル後又乙ヨリ3個ヲ取り出シ甲ニ入ル、トキ甲ノ袋中ニ白球ノ在存スル確率如何。

問題 23. A, B 二人アリ。A, B ノ順ニテ順次ニ骰子ヲ投ゲ最初ニ6ノ目ヲ投ゲタル人ヲ勝トス。A, B 二人ノ勝ツ確率各々如何。

問題 24. 50本ノ福引中ニ當リ籤2本アリ最初ニ引ク人ト二番目ニ引ク人トノ損益如何。

13. 定理 一回ノ試行ニ於テ或事象ノ起ル確率ヲ p , 其事象ノ起ラザル確率ヲ $q=1-p$ トセバ n 回ノ試行ニ於テ丁度 r 回ダケ其事象ノ起ル確率ハ

$${}_n C_r p^r q^{n-r}$$

ナリ。

例ヘバ一ツノ骰子ヲ投グルトキ1ノ目ノ出ヅル確率ハ $\frac{1}{6}$ ニシテ, 出デザル確率ハ $\frac{5}{6}$ ナリ。然ラバ一ツノ骰子ヲ10回投ゲテ丁度三回ダケ1ノ目ノ出ヅル確率ハ

$${}_{10} C_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7$$

ナリト云フガ如シ。

吾人ハ此例ニツキ定理ヲ證明スベシ。

10回骰子ヲ投ゲテ第三回マデ續イテ1ガ出デ第四回以後1ノ目ノ出デザル確率ハ $p = \frac{1}{6}, q = \frac{5}{6}$ トセバ

$$p^3 q^7$$

ナリ。

一般ニ10回骰子ヲ投ゲテ特別ノ三回ダケハ1ノ目ガ出デ他ノ七回ハ全ク1ノ目ノ出デザル確率ガ同ジク $p^3 q^7$ ナリ。

而シテ三回ダケハ1ノ目ガ出デ他ノ七回ハ全ク1ノ目ノ出デザル場合ノ數ハ ${}_{10} C_3$ ナリ。

此等ノ場合ハ互ニ排反スルヲ以テ求ムル確率ハ

$${}_{10} C_3 p^3 q^7.$$

此定理ニヨリ $(p+q)^n$ ヲ二項定理ニヨリテ展開スレバ其各項ハ n 回ノ試行中其事象ガ丁度 n 回, $n-1$ 回, …… 起ル確率ヲ表ハスヲ知ル。

又 n 回ノ試行中少クトモ r 回其事象ノ起ル確率ハ

$$p^n + {}_n C_{n-1} p^{n-1} q + \dots + {}_n C_r p^r q^{n-r}$$

或ハ

$$(p+q)^n = 1$$

ナルコトニ留意スレバ

$$1 - \{q^n + {}_n C_1 q^{n-1} p + \dots + {}_n C_{r-1} q^{n-r+1} p^{r-1}\}$$

ニテ表ハサル。

例へば一ツノ骰子ヲ10回投ゲテ1ノ目ガ少クトモ三回出ヅル確率ハ

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{10} + {}_{10}C_9\left(\frac{1}{6}\right)^9\left(\frac{5}{6}\right) + \dots + {}_{10}C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7$$

$$\text{或ハ } 1 - \left\{ \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + {}_{10}C_1\left(\frac{5}{6}\right)^9\left(\frac{1}{6}\right) + {}_{10}C_2\left(\frac{5}{6}\right)^8\left(\frac{1}{6}\right)^2 \right\}$$

問題 25. n 個ノ銅貨ヲ投グルトキ只一個ダケ表ヲ出ダス確率。

問題 26. ニツノ骰子ヲ六回投ゲテ少クトモ四回1, 1ノ目ヲ出ダス確率。

問題 27. 五題中平均三題ヲ解キ得ル學生アリ。或試験ニ於テ八題ヲ課セラレ其中五題ヲ解キ得バ及第ナリト云フ。此學生ノ及第スル確率如何。

14. *Expectation* 期望金額 或事象ノ起ル確率ヲ p トシ、其事象ガ起レバ a 圓ヲ受取ルコトヲ約束セラレタル人アリトス。此場合ニ此人ノ期望金額ハ ap 圓ナリト云フ。

尙一般ニ互ニ排斥スル事象 E_1, E_2, \dots アリテ其起ル確率ヲ夫々 p_1, p_2, \dots トシ、 E_1 ガ起レバ a_1 圓、 E_2 ガ起レバ a_2 圓……ヲ受取ルコトヲ約束セラレタル人ノ期望金額ハ $(a_1p_1 + a_2p_2 + \dots)$ 圓ナリト云フ。

例へば一ツノ骰子ヲ投ゲテ1ノ目ガ出ヅレバ60圓ヲ受取ルコトヲ約束セラレタル人ノ期望金額ハ

$$60 \times \frac{1}{6} \text{ 圓 即チ } 10 \text{ 圓}$$

又一ツノ骰子ヲ投ゲテ出デタル目ガ1ナラバ1圓、2

ナラバ2圓、……、6ナラバ6圓ヲ受取ルコトヲ約束セラレタル人ノ期望金額ハ

$$\left(1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6}\right) \text{ 圓} = \frac{7}{2} \text{ 圓}$$

問題 28. 袋中ニ50錢銀貨5個、20錢銀貨3個、10錢銀貨4個ヲ入ル、アリ。此中ヨリ一個ヲ取り出シ夫ヲ貰フコトヲ約束セラレタル人ノ期望金額如何。但シ此等ノ銀貨ハ總テ同形同大トス。

問題 29. 袋中ニ1ノ番號ノ札一枚、2ノ番號ノ札二枚、3ノ番號ノ札三枚、……、 n ノ番號ノ札 n 枚ヲ入ルルアリ。此中ヨリ一枚ヲ抜キ出シ其番號 r ナラバ r 圓ヲ貰フコトヲ約束セラレタル人アリトス。此人ノ期望金額如何。

15. 大數ノ法則。

r ヲ含メル式 F_r ニ於テ $r=0, 1, 2, \dots, n$ ト置キタルトキノ値ノ和即チ

$$F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_n$$

ヲバ $\sum_{r=0}^n F_r$ ナル記號ニテ表ハスコトアリ。以下吾人モ此種ノ記號ヲ用フベシ。

サテ一回ノ試行ニ於テ或事象ノ起ル確率ヲ p トセバ、 n 回ノ試行中其事象ガ丁度 r 回起ル確率ハ

$${}_nC_r p^r q^{n-r}, \quad (q=1-p)$$

ナリ[第13條定理]。之ヲ P_r ニテ表ハセバ

$$\sum_{r=0}^n P_r = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_n = (p+q)^n = 1$$

$$\sum_{r=0}^n P_r x^r = P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + \dots + P_n x^n = (px+q)^n \dots \dots (A)$$

ヲ得。(A)ノ兩邊ヲ x = 關シテ微分スレバ

$$\sum_{r=1}^n r P_r x^{r-1} = np(px+q)^{n-1} \dots\dots\dots (B)$$

此關係ニ於テ $x=1$ ト置ケバ

$$\sum_{r=1}^n r P_r = np \dots\dots\dots (C)$$

尙 (B)ノ兩邊ヲ x = 關シテ微分シ $x=1$ ト置ケバ

$$\sum_{r=2}^n r(r-1)P_r = n(n-1)p^2 \dots\dots\dots (D)$$

(C)ト(D)トヨリ邊々相加ヘテ

$$\sum_{r=1}^n r^2 P_r = np(np+q) \dots\dots\dots (E)$$

ヲ得。依テ

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^n (r-np)^2 P_r &= \sum_{r=0}^n (r^2 - 2npr + n^2 p^2) P_r \\ &= \sum_{r=0}^n r^2 P_r - 2np \sum_{r=0}^n r P_r + n^2 p^2 \sum_{r=0}^n P_r \\ &= np(np+q) - 2nnp + n^2 p^2 \\ &= npq \end{aligned}$$

依テ兩邊ヲ n^2 ニテ除シテ

$$\sum_{r=0}^n \left(\frac{r}{n} - p\right)^2 P_r = \frac{pq}{n} \dots\dots\dots (F)$$

ナル關係ヲ得。

今任意ニ小ナル正ノ數 δ ヲ與ヘ (δ ハ如何ニ小ナルモ可ナリ)

$$\left|\frac{r}{n} - p\right| < \delta \tag{1}$$

ヲ満足スル r ノ値ニ對スル和ヲ Σ' ニテ表ハシ

(1) $|x|$ ハ x ノ絶對値ヲ表ハス記號ナリ。

$$\left|\frac{r}{n} - p\right| \geq \delta$$

ヲ満足スル r ノ値ニ對スル和ヲ Σ'' ニテ表ハセバ

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^n \left(\frac{r}{n} - p\right)^2 P_r &= \Sigma' \left(\frac{r}{n} - p\right)^2 P_r + \Sigma'' \left(\frac{r}{n} - p\right)^2 P_r \\ &> \Sigma'' \left(\frac{r}{n} - p\right)^2 P_r \\ &> \delta^2 \Sigma'' P_r \end{aligned}$$

故ニ (F)ノ關係ヲ用ヒテ

$$\frac{pq}{n} > \delta^2 \Sigma'' P_r \dots\dots\dots (G)$$

ヲ得。然ルニ又

$$\Sigma' P_r + \Sigma'' P_r = \sum_{r=0}^n P_r = 1$$

即チ

$$\Sigma'' P_r = 1 - \Sigma' P_r$$

ナルヲ以テ (G)ノ關係ヨリ

$$\frac{pq}{n\delta^2} > 1 - \Sigma' P_r$$

或ハ

$$\Sigma' P_r > 1 - \frac{pq}{n\delta^2} \dots\dots\dots (H)$$

ヲ得。之ヲ言葉ニテ云ヒ表ハセバ次ノ如シ

一回ノ試行ニ於テ或事象ノ起ル確率ヲ p トシ n 回ノ試行中其事象ノ起ル回數ヲ r トセバ r ガ

$$\left|\frac{r}{n} - p\right| < \delta$$

ナル關係ヲ満足スベキ確率ハ $1 - \frac{pq}{n\delta^2}$ ヨリ大ナリ。但シ $q=1-p$ ニシテ δ ハ任意ノ正數 (如何ニ小ナルモ可ナル)

トス。

之ヲ Tchebycheff ノ定理ト云フ。

例ヘ パーツノ骰子ヲ 6 萬回投ゲテ一ノ目ノ顯ハル、
回數 r ガ

$$\left| \frac{r}{60000} - \frac{1}{6} \right| < \frac{1}{100}$$

ヲ満足スベキ確率即チ一ノ目ノ顯ハル、回數ガ 9400 ト
10600 トノ間ニアル確率ハ

$$1 - \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{60000 \times \left(\frac{1}{100}\right)^2} \quad \text{即チ大略 } 0.976$$

ヨリモ大ナリ。[此場合ハ

$$p = \frac{1}{6}, \quad q = \frac{5}{6}, \quad n = 60000, \quad \delta = \frac{1}{100}$$

ニ相當ス]。

サテ又 (H) ノ關係ニ於テ右邊ハ n ヲ大ニ取ルコトニ
ヨリテ何程ニテモ 1 ニ接近スルヲ得ベシ。故ニ次ノ結
論ヲ得。

一回ノ試行ニ於テ或事象ノ起ル確率ヲ p トシ n 回ノ
試行中其事象ノ起ル回數ヲ r トセバ任意ニ與ヘラレタ
ル正數 δ ニ對シニ

$$\left| \frac{r}{n} - p \right| < \delta$$

ナル關係ヲ満足ス可キ確率ハ n ヲ大ニ取ルコトニヨリ

テ何程ニテモ 1 ニ接近スルヲ得ベシ。

尙之ヲ通俗的ニ述ブレバ次ノ如シ。

n ガ非常ニ大ナルトキハ $\frac{r}{n}$ ガ大略 p ニ等シキコトハ
殆ンド確實ナリ。

之ヲ大數ノ法則ト稱ス。確率論ノ應用上極メテ重要ナ
ルモノナリ。

問題 30. 一ツノ銀貨ヲ 100 回投ゲテ表^{オモテ}ノ顯ハル、回數ガ 40
ト 60 トノ間ニアル確率ハ 0.75 ヨリ大ナリ。又之ヲ 1000 回投ゲテ
表ノ顯ハル、回數ガ 400 ト 600 トノ間ニアル確率ハ 0.975 ヨリ大
ナリ。之ヲ證セヨ。

數學諸論大要(本文)終

附 錄

第一 問 題 答

第二 和英獨對照術語表

第三 索 引

附 録 第 一

問 題 ノ 答

第 一 章

3. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$. 4. $-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$. 7. $2x + y = 0$,
 方向係數 = -2. 8. $-\frac{1}{2}$. 9. $2x + y = 6$. 10. $3x + 2y = 7$,
 $3x + 2y = 3a + 2b$. 11. $m = -\frac{1}{2}$. 17. 1, 2; -1, -2.
 21. 焦點ノ坐標 $\pm 1, 0$; 準線ノ方程式 $x = \pm 2$. 22. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

第 三 章

1. $4x^3$. 2. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 3. $-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$. 4. $-\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.
 5. $3x^2 + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. 6. $\frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$. 7. $\frac{b+2cx}{3(a+bx+cx^2)^{\frac{3}{2}}}$.
 8. $\frac{2a^2-3r^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$. 9. $-\frac{3x+1}{2(x+1)^2x^{\frac{3}{2}}}$. 10. $\frac{x\sqrt{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x^4-1}}$.
 11. $-\frac{na+mb+(n+m)x}{(a+x)^{m+1}(b+x)^{n+1}}$. 12. $\frac{nx^{n-1}}{\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})^n}$.
 15. $x < 1$ 又ハ $x > 5$ ナレバ $f(x)$ ハ増加, $1 < x < 5$ ナレバ $f(x)$ ハ減
 小。從テ $x=1$ ノトキ極大, $x=5$ ノトキ極小トナル。 16. $x < 4$ 又
 ハ $x > 16$ ナレバ $f(x)$ ハ増加, $4 < x < 10$ 又ハ $10 < x < 16$ ナレバ $f(x)$ ハ
 減小。從テ $x=4$ ノトキ極大, $x=16$ ノトキ極小。 17. $x < 2$ ナレ
 バ $f(x)$ ハ減小, $x > 2$ ナレバ $f(x)$ ハ増加, 從テ $x=2$ ノトキ極小。
 18. OA, OB ヲ坐標軸ニ取り P 點ノ坐標ヲ a, b トセバ 1° $4ab$.
 2° $(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$. 19. 海岸ノ最近點ヨリ 4 哩ノ地點。 20. 最大面
 積ノ矩形ノ二邊ノ比ハ橢圓ノ兩軸ノ比ニ等シ。 21. $x < 3$ ナレバ
 下方ニ凹, $x > 3$ ナレバ上方ニ凹, 從ツテ $x=3$ ニ對シテ彎曲點アリ。

22. $x < -1$ ナルカ又ハ $x > 1$ ナレバ上方=凹, $-1 < x < 1$ ナレバ下方=凹. 從ッテ $x = -1, 1$ = 對シテ彎曲點アリ。 23. 原點及ビ $x = \pm a\sqrt{3}$ ナルトキ。 24. $1^\circ 1 - 7x + 21x^2 - 35x^3 + 35x^4 - 21x^5 + 7x^6 - x^7$.
 $2^\circ x^5 - 12x^4 + 60x^3 - 160 + \frac{240}{x^2} - \frac{192}{x^4} + \frac{64}{x^6}$. 25. $\frac{4480}{27}$.

第四章

3. $1^\circ \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}$. $2^\circ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. 7. $1^\circ \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}$. $2^\circ -1, -1$.
 9. $1^\circ n\pi - (-1)^n \frac{\pi}{6}$. $2^\circ n\pi + \frac{\pi}{3}$. 13. $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$. 17.
 $x + \sqrt{3}y = 4$. 19. $r \cos(\theta - \frac{\pi}{3}) = 2$. 26. $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$,
 $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$. 28. $1^\circ \frac{\sin x}{\cos^2 x}$, $2^\circ -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$, $3^\circ \tan x \left\{ \tan x + 2x \frac{1}{\cos^2 x} \right\}$.
 29. $x = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$ ナルトキ極大, $x = 2n\pi - \frac{\pi}{3}$ ナルトキ極小。 32. 1°
 $\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $2^\circ \frac{2}{1+x^2}$, $3^\circ \frac{n}{\cos^2 x + n^2 \sin^2 x}$, 4. $\frac{\mp \sqrt{a^2 - b^2}}{a + b \cos x}$.

第五章

3. $x = 2$. 4. $x = 10$ 又ハ $\frac{1}{\sqrt{10}}$. 5. 十五位ノ數. 6. 3243.
 7. $x = 31^\circ 33'$. 8. $1^\circ 3.647$. $2^\circ 8.964$. 9. $e^{(a+x)^2} \{ 2(a+x)\sin x + \cos x \}$.
 10. $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. 11. $\frac{1}{\log(a+bx^n)} \cdot \frac{nbx^{n-1}}{a+bx^n}$. 12. $\frac{e^x(1-x)-1}{(e^x-1)^2}$.
 13. $x^2(\log x + 1)$. 14. $x^{\arcsin x} \left(\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x} \right)$. 18. $t = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ノ
 トキ速度=0, $t = \frac{n\pi}{2}$ ノトキ加速度=0.

第六章

1. $-\log \cos x$. 2. $-\sqrt{1-x^2}$. 3. $2 \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$.

4. $\frac{1}{\cos x}$. 5. $\frac{1}{4} \log(x^4 + \sqrt{x^8-1})$. 6. $\frac{1}{7} \log \frac{x-3}{x+4}$.
 7. $\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. 8. $\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5}$. 9. $-\log \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$.
 10. $\arctan e^x$. 11. $\frac{x^{n+1}}{(n+1)} \left(\log x - \frac{1}{n+1} \right)$. 12. $x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$.
 13. $\frac{e^{2x}}{3} \left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9} \right)$. 14. $x \tan x + \log \cos x - \frac{x^2}{2}$. 15. $\frac{a^2}{2} \left(e^{\frac{a}{x}} - e^{-\frac{a}{x}} \right)$.
 16. 1. 17. $\frac{\pi}{4a}$. 18. $\frac{1}{2} \log 2$. 19. $\frac{8}{15}$. 20. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 21. $\frac{1}{2}$.
 22. $\frac{1^5}{105}$. 23. $\frac{1}{3}$. 24. πa . 25. $\frac{1}{2}$. 26. πab .
 27. $\frac{a}{2} \left(e^{\frac{x_1}{a}} - e^{-\frac{x_1}{a}} \right)$. 28. $\frac{1}{2} [x_1 \sqrt{1+x_1^2} + \log(x_1 + \sqrt{1+x_1^2})]$.
 29. $2\pi rh$. 30. $\pi(\pi-2)a^2$. 31. $\frac{8\pi}{3} \sqrt{p} \left\{ (x_1+p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}} \right\}$.
 33. $\frac{\pi}{6} (10-3\pi)a^2$. 34. $\frac{4}{3} \pi ab^2$.

第七章

5. 380. 6. 27216. 7. 840. 8. 576, 96.
 10. $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$, $\frac{n(n-1)(n-2) - m(m-1)(m-2)}{6}$. 11. $\frac{13!}{5!3!} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$.
 12. 945. 14. 420, 2940. 15. 5^{15} . 16. 56. 17. $\frac{1}{12}$.
 18. $1^\circ \frac{5}{42}$, $2^\circ \frac{5}{14}$. 19. $\frac{2}{7}$. 20. $\frac{1}{3003}$. 21. $\frac{3}{5}$. 22. $\frac{7}{10}$.
 23. $\frac{6}{11}$. 24. 損益ナシ. 25. $\frac{n}{2^n}$. 26. $\left(\frac{1}{36} \right)^6 + 6 \cdot \frac{35}{36^5} + 15 \cdot \frac{35^2}{36^4}$.
 27. $\left(\frac{3}{5} \right)^8 + 8 \left(\frac{3}{5} \right)^7 \left(\frac{2}{5} \right) + 28 \left(\frac{3}{5} \right)^6 \left(\frac{2}{5} \right)^2 + 56 \left(\frac{3}{5} \right)^5 \left(\frac{2}{5} \right)^3$. 28. $\frac{175}{6}$ 錢.
 29. $\frac{2n+1}{3}$ 圓.

附錄第二
和英獨對照術語表

第一章

直線	Straight line	Gerade, Gerade linie
坐標	Coordinates	Koordinaten
原點	Origin	Anfangspunkt, Ursprung
x 坐標, 橫坐標	Abscissa	Abszisse
y 坐標, 縱坐標	Ordinate	Ordinate
x 軸, 橫軸	x -axis, Axis of abscissa	x -Achse, Abszissenachse
y 軸, 縱軸	y -axis, Axis of ordinate	y -Achse, Ordinatenachse
坐標軸	Coordinate axes	Koordinatenachsen
正ノ方向	Positive direction	Positive Richtung
直角坐標	Rectangular coordinates	Rechtwinklige Koordinaten
直交軸	Rectangular axes	Rechtwinklige Achsen
軌跡	Locus	Ort
距離	Distance	Abstand, Entfernung
方程式ノ表ハス曲線	Curve represented by the equation	Die durch die Gleichung dargestellte Kurve
曲線ノ方程式	Equation of a curve	Gleichung der Kurve
方向係數, 角係數	Angular coefficient	Richtungskoeffizient
向上率	Gradient	Gradient
截片	Intercept	Abschnitt
圓	Circle	Kreis
虛圓	Imaginary circle	Imaginärer Kreis
圓錐曲線	Conic, Conic section	Kegelschnitt
焦點	Focus	Brennpunkt
準線	Directrix	Direktrix, Leitlinie
離心率, 外心率	Eccentricity	Exzentrizität
拋物線	Parabola	Parabel
頂點	Vertex	Scheitel

橢圓	Ellipse	Elipse
中心	Center	Mittelpunkt
長軸	Major axis	Grosse Achse
短軸	Minor axis	Kleine Achse
雙曲線	Hyperbola	Hyperbel
主軸, 貫軸	Transverse axis	Hauptachse
副軸, 共軛軸	Conjugate axis	Nebenachse
直角雙曲線	Rectangular hyperbola	Rechtwinklige Hyperbel
等邊雙曲線	Equilateral hyperbola	Gleichseitige Hyperbel
定理	Theorem	Lehrsatz

第二章

平面	Plane	Ebene
相交	to intersect	Sich schneiden
平行	Parallel	Parallel
系	Corollary	Zusatz
垂直	Perpendicular	Senkrecht
垂線	Perpendicular	Perpendikel
足	Foot	Fusspunkt
三垂線ノ定理	Théorème des trois perpendiculaires (佛)	
角	Angle	Winkel
傾角	Inclination	Neigungswinkel
立體	Solid	Körper
多面體	Polyhedron	Polyeder
面	Face	Fläche
稜	Edge	Kante
四面體	Tetrahedron	Tetraeder
五面體	Pentahedron	Pentaeder
六面體	Hexahedron	Hexaeder
凸多面體	Convex polyhedron	Konvexes Polyeder
對角線	Diagonal	Diagonale
角錐	Prism	Prisma
底	base	Grundfläche
側面	Lateral face	Seitenfläche
側稜	Lateral edge	Seitenkante
高	Height	Höhe

三角嚮	Triangular prism	Dreieitiges Prisma
四角嚮	Quadrangular prism	Vierseitiges Prisma
五角嚮	Pentagonal prism	Fünfeitiges Prisma
直角嚮	Right prism	Gerades Prisma
斜角嚮	Oblique prism	Schiefes Prisma
正角嚮	Regular prism	Reguläres Prisma
平行六面體	Parallelepiped	Parallelepipedon
直六面體	Rectangular parallelepiped	Rechtwinkliges Parallelepipedon
立方	Cube	Kubus, Würfel
角錐	Pyramid	Pyramide
三角錐	Triangular pyramid	Dreieitige Pyramide
四角錐	Quadrangular pyramid	Vierseitige Pyramide
直角錐	Right pyramid	Gerade Pyramide
斜角錐	Oblique pyramid	Schiefe Pyramide
正角錐	Regular pyramid	Reguläre Pyramide
角錐臺	Truncated pyramid	Abgekürzte Pyramide
側高	Lateral height	Seitenhöhe
嚮面	Cylindrical surface	Zylinderfläche
導線	Directrix	Leitkurve
母線	Generating line	Erzeugende
嚮	Cylinder	Zylinder
直嚮	Right cylinder	Gerader Zylinder
直圓嚮	Right circular cylinder	Gerader Kreiszyylinder
半徑	Radius	Halbmesser
錐面	Conical surface	Kegefläche
錐	Cone	Kegel
直錐	Right cone	Gerader Kegel
直圓錐	Right circular cone	Gerader Kreiskegel
錐臺	Truncated cone	Abgekürzter Kegel
球面	Spherical surface	Kugelfläche
球	Sphere	Kugel
直徑	Diameter	Durchmesser
切平面	Tangent plane	Tangentialebene
切線	Tangent	Tangente
內切スル	to touch internally	berühren einschliessend

外切スル | to touch externally | berühren ausschliessend

第三章

定數	Constant	Unveränderliche
變數	Variable	Veränderliche
函數	Function	Funktion
自變數	Independent variable	Unabhängige Veränderliche
從屬變數	Dependent variable	Abhängige Veränderliche
一值函數	One-valued function	Eindeutige Funktion
多值函數	Many-valued function	Mehrdeutige Funktion
逆函數	Inverse function	Umgekehrte Funktion
グラフ	Graph	Graph
偶函數	Even function	Gerade Funktion
奇函數	Odd function	Ungerade Funktion
極限值	Limiting value	Grenzwert
無限大	Infinitely large	Unendlich gross
正無限大	Plus infinity	Plus Unendliche
負無限大	Minus infinity	Minus Unendliche
連續	Continuous	Stetig
區域	Interval	Intervall
增分	Increment	Zunahme
微係數	Differential coefficient	Differentialkoeffizient
導函數	Derivative	Ableitung
和	Sum	Summe
積	Product	Produkt
商	Quotient	Quotient
流坐標	Current coordinates	Laufende Koordinaten
微分スル	to differentiate	Differenzieren
合成函數	Composite function	Zusammengesetzte Funktion
有心圓錐曲線	Central conic section	Zentralkegelschnitt
增加ノ状態	Increasing stage	Zuwachsend
減少ノ状態	Decreasing stage	Abnehmend
極大	Maximum	Maximum
極小	Minimum	Minimum
極大値	Maximum value	Maximalwert
	Minimum value	Minimalwert

第 n 次導函數	n th. derivative	n te. Ableitung
上方 = 凹	Concave upwards	Concav nach oben
下方 = 凹	Concave downwards	Concav nach unten
彎曲點	Point of inflexion	Wendepunkt
二項定理	Binomial theorem	Binomischer Lehrsatz
展開式	Expansion	Entwicklung
階乘 r	Factorial r	Fakultät r
質點	Particle	Massenpunkt
運動	Motion	Bewegung
速度	Velocity	Geschwindigkeit
加速度	Acceleration	Beschleunigung

第 四 章

弧度	Circular measure	Bogenmass
正角	Positive angle	Positiver Winkel
負角	Negative angle	Negativer Winkel
正 / 方向	Positive direction	Positive Richtung
負 / 方向	Negative direction	Negative Richtung
首線	Initial line	Anfangslinie
終線	Terminal line	Endlinie
首邊	Initial side	Anfangsseite
終邊	Terminal side	Endseite
正弦	Sine	Sinus
餘弦	Cosine	Cosinus
單位圓	Unit circle	Einheitskreis
週期	Period	Periode
週期函數	Periodic function	Periodische Funktion
象限	Quadrant	Quadrant
補角	Supplement	Supplementwinkel
餘角	Complement	Complementwinkel
正切	Tangent	Tangente, Tangens
餘切	Cotangent	Cotangente, Cotangens
三角函數	Trigonometrical functions	Trigonometrische Funktionen
圓函數	Circular functions	Kreisfunktionen
正割	Secant	Secante, Secans
餘割	Cosecant	Cosecante, Cosecans

三角形	Triangle	Dreieck
直角三角形	Right-angled triangle	Rechtwinkliges Dreieck
斜角三角形	Oblique-angled triangle	Schiefwinkliges Dreieck
正弦則	Law of sine	Sinussatz
餘弦公式		Cosinusformeln
餘弦則	Law of cosine	Cosinussatz
極坐標	Polar coordinates	Polarkoordinaten
首線	Initial line	Polarachse
動徑	Radius vector	Radiusvector
偏角	Vectorial angle	Abweichung, Anomalie
極方程式	Polar equation	Polargleichung
加法定理	Additions theorem	Additionstheorem
逆三角函數	Inverse trigonometrical functions	Umgekehrte trigonometrische Funktionen
主值	Principal value	Hauptwert

第 五 章

指數函數	Exponential function	Exponentialfunktion
底	Base	Basis
對數函數	Logarithmic function	Logarithmische Funktion
常用對數	Common logarithm	Dekadischer Logarithmus
指標	Characteristics	Kennziffer
假數	Mantissa	Mantisse
補間法	Interpolation	Interpolation
對數表	Table of logarithms	Tabelle der Logarithmen
自然對數	Natural logarithm	Natürlicher Logarithmus
Napier / 對數	Napierean logarithm	Napierscher Logarithmus
對數微分	Logarithmic differentiation	Logarithmische Differentiation

第 六 章

基函數	Primitive function	Primitive Funktion
基礎公式	Fundamental formulae	Fundamentale Formeln
積分	Integral	Integral
積分スル	to integrate	Integrieren
置換積分法	Integration by substitution	Integration durch Substitution
部分積分法	Integration by parts	Teilweise Integration

面積	Area	Flächeninhalt
定積分	Definite integral	Bestimmtes Integral
下限	Lower limit	Untere Grenze
上限	Upper limit	Obere Grenze
限界	Limits	Grenze
弧ノ長サ	Length of arc	Bogenlänge
側面積	Lateral area	Seitenflächeninhalt
回轉曲面	Surface of revolution	Rotationsfläche
表面積	Surface area	Oberflächeninhalt
體積	Volume	Rauminhalt

第七章

數學的歸納法	Mathematical induction	Vollständige Induktion
順列	Permutation	Variation
n 個ノ物ノ r 順列	r -permutation of n things	Variation r -ter Klasse aus n Dingen
組合	Combination	Combination
n 個ノ物ノ r 組合	r -combination of n things	Combination r -ter Klasse aus n Dingen
確率	Probability	Wahrscheinlichkeit
事象	Event	Ereignis
都合ヨキ場合	Favorable cases	Günstige Fälle
都合悪シキ場合	Unfavorable cases	Ungünstige Fälle
齊一	Equally likely	Gleichwahrscheinlich
排反事象	Exclusive events	Sich ausschliessende Ereignisse
獨立事象	Independent events	Unabhängige Ereignisse
從屬事象	Dependent events	Abhängige Ereignisse
複事象	Compound events	Zusammengesetzte Ereignisse
餘事象	Complementary events	Entgegengesetzte Ereignisse
期望金額	Expectation	Erwartung, Hoffnung
大數ノ法則	Law of large numbers	Gesetz der grossen Zahlen

附錄第三

索引

ア行

有心圓錐曲線, 82.
圓, 23, 174.
圓函數, 112.
圓錐曲線, 25, 63, 82.
凹,
上方 = —, 下方 = —, 91.

カ行

階乘, 93.
回轉曲面, 178.
角,
二直線間ノ—, 42. 二平面間ノ—
43. 正—, 負—, 98. 傾—, 43.
角係數, 13.
角嚮, 52.
正—, 斜—, 52. 直—, 52.
角錐, 53.
正—, 斜—, 54. 直—, 54.
角錐台, 54.
確率, 197, 199.
加速度, 95.
假數, 145.
下限, 170.
函數, 63.
一值—, 多值—, 65. 偶—, 奇—,
66, 104. 週期—, 102, 103. 導—, 69.

90. 合成—, 78. 三角又ハ圓—, 112.
逆三角—, 133. 指數—, 139. 對數
—, 141. 基—, 157.
貫軸, 29.
外心率, 25.
球面, 57, 180.
球, 57, 185.
基函數, 157.
基礎公式, 160.
歸納法, 189.
期望金額, 208.
距離,
二點間ノ—, 5. 點ト平面トノ—,
39. 直線ト平面トノ—, 47. 二平行
4面間ノ—, 49. 二直線間ノ—, 51.
虛圓, 24.
共軛軸, 29.
曲線,
—ノ方程式, 7. 方程式ノ表ハス
—, 7.
極大, 極小 87.
極, 122.
—坐標, 122. —方程式, 123.
組合, 189.
「グラフ」, 65.
原點, 2, 3.
減少ノ狀態, 85.

限界, 170.
弧度, 97.
弧ノ長サ, 174.
向上率, 13.
合成冪數, 78.

サ 行

三角形ノ性質, 117.
三角函數, 112.
三垂線ノ定理, 39.
坐標, 1, 2, 3, 5, 20.
x又ハ横——, 3. y又ハ縱——, 3. 直
角——, 4. 流——, 74. 極——, 122.
坐標軸, 3, 101.
指數函數, 139.
指標, 145.
自然對數, 155.
質點, 95.
主軸, 29.
主值, 136.
首線, 首邊, 100.
終線, 終邊, 100.
焦點,
圓錐曲線ノ——, 25. 拋物線ノ——,
26. 橢圓ノ——, 27, 30. 雙曲線ノ——,
29, 32.
象限, 102.
準線,
圓錐曲線ノ——, 25. 拋物線ノ——,
26. 橢圓ノ——, 27. 雙曲線ノ——, 29.
自變數, 64.
從屬變數, 64.
順列, 189.
享象,

排反——, 200. 獨立——, 從屬——, 201,
複——, 202. 餘——, 205.
條件,
二直線平行ノ——, 18. 二直線垂直
ノ——, 19.
常用對數, 144.
垂直,
二直線ノ——, 19, 42. 直線ト平面ト
ノ——, 37. 二平面ノ——, 43.
垂線, 垂線ノ足, 38.
錐面, 55, 60.
錐, 55, 186.
錐臺, 56.
截片, 14, 16.
正角, 98.
正ノ方向, 3, 99.
正弦, 101.
正切, 108.
正割, 115.
積分, 157, 160.
切スル,
平面ト球面ト——, 58. 直線ト球面
ト——, 58. 二球ガ——, 59. 球ト直圓
錐面ト——, 60.
切線,
圓ノ——, 24. 圓錐曲線ノ——, 82. 球
ノ——, 59.
切平面, 58.
漸近線, 11.
雙曲線, 28, 32, 63, 82.
直角又ハ等邊——, 29
側面,
角檣ノ——, 52. 角錐ノ——, 53. 檣ノ
——, 55. 錐ノ——, 56.

側稜,
角檣ノ——, 52. 角錐ノ——, 53.
側高,
正角錐ノ——, 54. 直圓錐ノ——, 56.
直圓錐臺ノ——, 57.
速度, 95.
增加ノ狀態, 85.

タ 行

短軸, 28.
多面體, 51.
——ノ對角線, 52.
高サ,
角檣ノ——, 52. 角錐ノ——, 53. 角錐
臺ノ——, 54. 檣ノ——, 55. 錐ノ——, 56.
單位圓, 101.
對數,
常用——, 144. 自然又ハNapierノ——,
155.
對數表, 150—151.
對數微分, 156.
體積,
立體ノ——, 184. 球ノ——, 186. 錐ノ
——, 186.
大數ノ法則, 209.
橢圓, 26, 31, 61, 82.
中心,
橢圓ノ——, 28. 雙曲線ノ——, 29. 球
面又ハ球ノ——, 57.
置換積分法, 161.
長軸, 28.
頂點,
橢圓ノ——, 28. 雙曲線ノ——, 29. 拋
物線ノ——, 26. 多面體ノ——, 51. 角
錐ノ——, 53. 錐面ノ——, 55.

直徑,
球面又ハ球ノ——, 57.
直角坐標, 4.
直角雙曲線, 29.
直角檣, 52.
直角錐, 54.
直交軸, 4.
直六面體, 53.
直檣, 55, 184.
直錐, 56.
直圓檣, 55.
直圓錐, 56.
直圓錐臺, 56, 61,
——ノ側面積, 177.
Tchebycheff, 212.
軸,
x又ハ横——, 3. y又ハ縱——, 3. 坐
標——, 3. 直交——, 4. 拋物線ノ——,
26. 長, 短——, 28. 主, 副——, 29. 直
圓檣ノ——, 55. 直圓錐ノ——, 56.
底,
角檣ノ——, 52. 角錐ノ——, 53. 角錐
臺ノ——, 54. 檣ノ——, 55. 錐ノ——
56. 指數函數ノ—— 139. 對數函數
ノ——, 143.
定數, 63, 75.
定積分, 163.
——ノ下限, 上限, 限界, 170.
展開式又ハ展開, 93.
等邊雙曲線, 29.
凸多面體, 51.
檣面, 54.
檣, 55.
動徑, 122.

導線,
 橢圓ノ——, 54. 錐面ノ——, 55.
導函數, 69, 72, 75, 76, 77, 90, 94,
 130, 137, 154.

ナ 行

Napier, 155.
二項定理, 92.
二直線,
 ——ノ交點ノ坐標, 20. ——ノ方
 程式, 22. ——平行ノ條件, 18. ——垂直
 ノ條件, 19.

ハ 行

半徑,
 直圓錐ノ——, 55. 球又ハ球面ノ
 ——, 57.

表面積, 178, 180.

微係數, 71.

微分法, 75.

負角, 98.

負ノ方向, 99.

副軸, 29.

部分積分法, 164.

變數, 63, 64.

偏角, 122.

平面, 34.

平行,

 二直線ノ——, 18. 直線ト平面トノ
 ——, 34, 45. 二平面ノ——, 37, 48.

平行六面體, 52.

方程式,

 曲線ノ——, 12. 直線ノ——, 13, 14, 16,
 17, 18. 二直線ノ——, 22. 圓ノ——,
 23. 圓錐曲線ノ——, 25. 拋物線ノ
 ——, 26. 橢圓ノ——, 27. 雙曲線ノ

 ——, 28. 圓錐曲線ノ切線ノ——, 82.
方程式ノ表ハス曲線, 7.
方向係數, 13.
拋物線, 26, 32, 61, 83.
補助坐標軸, 101.
補角, 105.
補間法, 146.
母線,
 橢圓ノ——, 54. 錐面ノ——, 55.

マ 行

交ル,
 直線ト平面トガ——, 34. 二平面ト
 ——, 37.

増分, 70.

面, 51.

面積, 168, 174.

無限大, 67.

ヤ 行

餘弦, 101.

餘角, 106.

餘切, 108.

餘割, 115.

餘事象, 205.

ラ 行

Radian, 97.

流坐標, 74.

離心率, 25.

立體, 51, 184.

稜, 51.

連續, 70.

ワ 行

彎曲點, 91.

大正十年三月二十一日印刷
大正十年三月二十五日發行
大正十一年三月二十日訂正再版

數學諸論大要奥付

著作權所有



正價金二圓三十錢

著作者 渡邊孫一郎

東京市日本橋區十軒店町八番地

發行者 野口健吉

東京市淺草區黑船町廿八番地

印刷者 小久保金作

東京市淺草區黑船町廿八番地

印刷所 豊オフセット印刷株式社會

東京市日本橋區十軒店町八番地

發行所 振替口座東京 一〇七 蒙華房
電話 本局 一〇〇一

編其郎一武原栗士學文・潤田次士學文・廣盛巢鴻士學文

類書刊既「本教語國等高」

俳文俳句抄全二冊(四六判洋綴)正價一圓廿錢

◎本書は國文學の異彩たる俳文學の粹を一巻に蒐めたるものにて俳文、連句、俳句、川柳の四編より成り附録に歌仙式略表と俳人系統表を添ふ。◎俳文篇には清高幽玄なる芭蕉の文を始め蕉門の傑作及び輕妙洒落なる也有の作を收め連句篇には元祿及び天明期の佳篇を選り俳句篇には芭蕉時代以後蕪村太祇凡董等を経て大江九一茶等に至る迄二十九大家の名作を網羅す

萬葉集抄全二冊(四六判洋綴)正價一圓廿錢

源氏物語抄上卷(洋裝美本)正價一圓廿錢

隨筆日記抄上卷(洋裝美本)正價一圓廿錢

隨筆日記抄中卷(洋裝美本)正價九錢

小說抄中卷(洋裝美本)正價六錢

小(目次) 雨月物語、春雨物語、藤篋冊子等

以下(近刊)逐次刊行

古事記抄

古事記を主とし祝詞宣命風土記をも添ふ

源氏物語抄

下||須磨、明石、宇治十帖を中心とするもの

假名歴史抄

四鏡、榮華物語等より

戰記物語抄

上||保元物語、平治物語、平家物語、源平盛衰記、下||太平記、談曲を添ふ

隨筆日記抄

下||花月草紙、玉勝間駿臺雜話等

小說抄

上||竹取物語、伊勢物語、大和物語、落窪物語、下||本朝水滸傳、弓張月、八犬傳

八代集抄

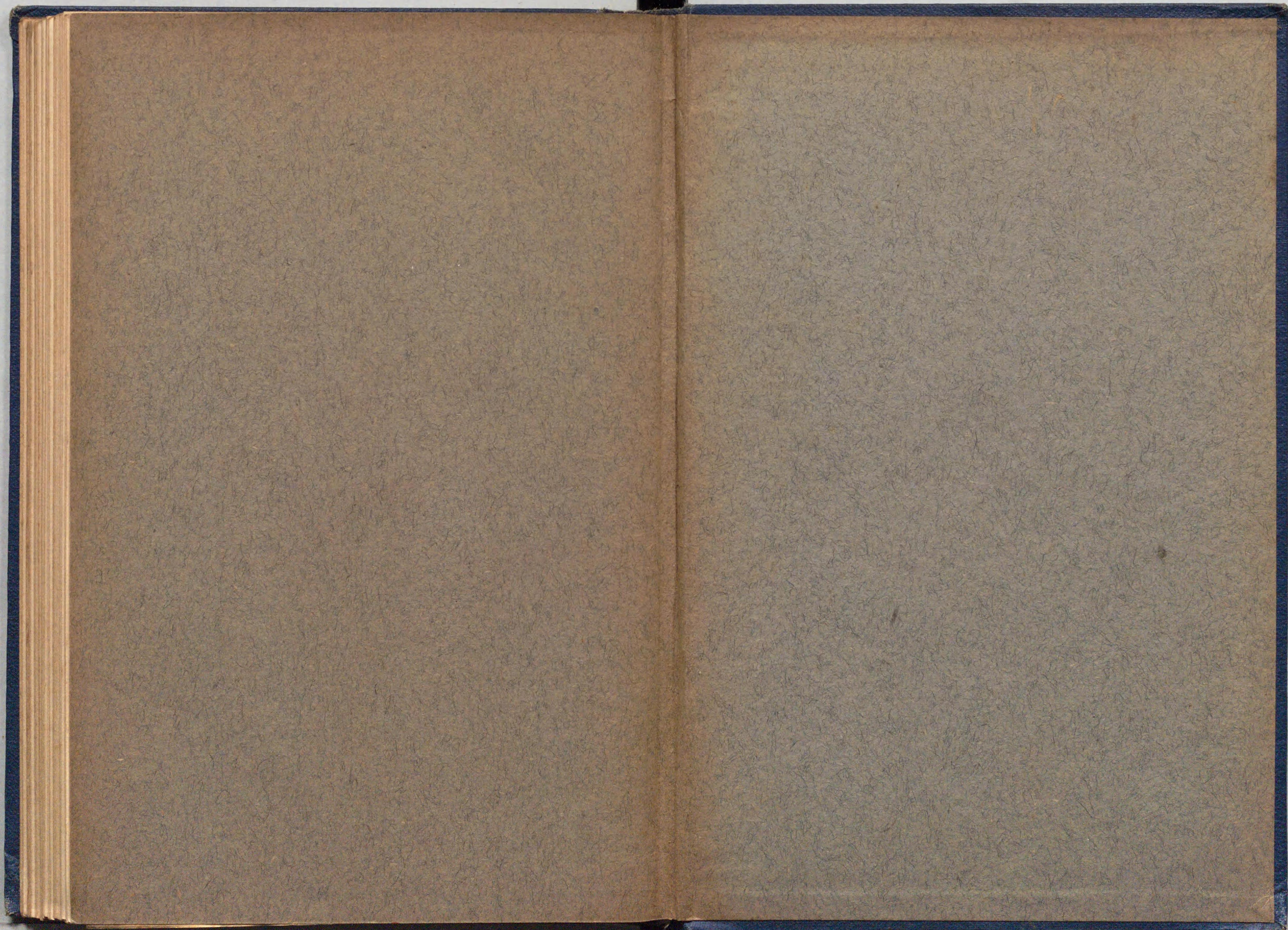
八代集を主とし、金槐集、山家集、新葉集も添ふ

近代和歌抄

徳川時代名家長短歌

現代文學抄

明治大正文學の各種等



Y994-J5390



1200800214616



Y