

刑 法 解 讀

金 濤 編 著

民 國 三 十 一 年 六 月

# 剛 構 解 法

## 自 序

剛構建築，今雖盛行於歐美，然在西歷一九二零年以前，猶為不可多觀，即使有之，而其設計，全出於工師個人之任意裁斷，尚無一定學理，可作依據，蓋由於當時學者之所知，祇能計算靜定結構各桿件中之應力，其於不靜定結構，則殊無切實可據之學理，藉以推求任何指定點之應力，以故一般工師，視為畏途，不敢輕易嘗試，慮或發生意外也，自威爾遜教授發見撓角撓度法以來，任何不靜定結構之受有任何荷重者，皆可依據此法，確切推算各桿端之撓率，更由此諸撓率，而推求各該端之應力，其易猶如反掌，如是而各種不靜定結構，乃可以科學方法為之解算，惟是此法雖稱精密合理，其於解算多數聯立方程，仍嫌繁複費時，故實際施用之時，不免諸多困難，迨克羅思教授創用分配撓率法，計算工作，簡賅易行，而所得結果之精密，竟與撓角撓度法相等，自是而剛構建築乃大行於世，舉凡都市之崇樓巨廈，工場之廠屋宿舍，以及公路鐵路之橋梁，港灣之埠頭，航空站之飛機庫等等，無不爭用剛構，良以剛構建築，既省工料，復增美觀，固自有其採用之價值，然推其所以盛行之原因，則不得不謂其由於計算方法之簡當而合理，威爾遜克羅思兩教授研究之所得，其影響於現代物質文明之進步者，頗不大哉，歐風東漸，吾國在在受其影響，各種剛構建築，今正在發揚猛晉之中，但解算剛構之書，以吾國文字講述者，似尚不多見，見亦不甚備，濤今不揣譎陋，稍加探討，參考各種書報，草成斯冊，首四編分述最小働法，撓角撓度法，圖解法，分配撓率法，依照其演進之時代，循序說明，並舉例演算，以示其應用，末編復摭取最新著作中之有關於剛構者，摘要略述，以見其日新月異之大概，此書內容，雖什九取材於東西各書報，間亦稍賈一得之愚，如第九十一節之施用修正撓率，如第二十四章之推算副撓率等等皆是，所舉各例題，大都由濤自行一再解算，藉供讀者參考，國人鑽研科學，向不後人，深願海內學者，瀏覽茲篇，於剛構之利溥川宏，益為闡發，則濤之纂述斯書，或亦不無小補也歟，是為序。

中華民國三十一年五月浙紹金濤。

# 剛 構 解 法

## 目 錄

### 第 一 章 緒 言

節	頁
1. 靜定結構	1
2. 不靜定結構	2
3. 解法概論	4

### 第 一 編 最 小 働 法

### 第 二 章 基 本 公 式

4. 因彈性變形而生之內働	6
5. Castigliano 氏定理	10
6. 最小働之原理	11
7. 應用於不靜定結構之公式	11

### 第 三 章 樞 足 架 構 之 解 法

8. 雙樞拱之一般的解法	13
9. 樞足矩形架構受有垂直荷重	15
10. 樞足矩形架構受有橫平荷重	19
11. 尖頂樞足架構受有垂直荷重	25
12. 雙樞拱	27

### 第 四 章 定 足 架 構 及 閉 合 架 構 之 解 法

13. 通用公式	29
14. 定足矩形架構受有任何荷重	35
15. 定足矩形架構受有垂直荷重	37
16. 定足矩形架構受有橫平荷重	41
17. 矩形樞構之一般的解法	49
18. 矩形樞構受有垂直荷重	51

( 1 )

466134

# 剛 構 解 法

節	頁
19. 矩形樞構受有橫平荷重	54
20. 矩形樞構受有橫平及垂直荷重	58
21. 尖頂閉合架構(即尖頂樞構)	60
22. 弧頂閉合架構(即弧頂樞構)	62
23. 弧頂定足架構	65

## 第二編 撓角撓度法

### 第五章 基本公式

24. 主要原則	69
25. 通用之正負號	69
26. 桿件兩端受約束,而其間不受荷重	70
27. 桿件兩端受約束,其間並受任何荷重	72
28. 承受特種荷重時, C 及 H 之數值	75

### 第六章 剛構解法之通則

29. 假定各項及不靜定未知量之決定	81
--------------------	----

### 第七章 樞足架構之解法

30. 樞足異高矩形架構受有垂直荷重	85
31. 樞足異高矩形架構受有橫平荷重	88
32. 二層三徑間樞足矩形架構受有垂直荷重	91

### 第八章 定足架構及閉合架構之解法

33. 定足矩形架構受有垂直荷重	95
34. 定足矩形架構受有橫平荷重	99
35. 三層三徑間對稱架構受有橫平荷重	104
36. 矩形閉合架構(即車橋)受有垂直及橫平荷重	111

### 第九章 任何桿件中之剪截力

37. 剪截力公式	113
-----------	-----

# 剛 構 解 法

## 第十章 連續梁之解法

節	頁
38. 雙徑間連續梁	115
39. 三徑間連續梁	117
40. 四徑間以上之連續梁	120
41. 各支點處之反力	120
42. 固定點	126
43. 決定活動荷重位置之通則	128
44. 支點下陷之影響	129
45. Clapeyron 氏三彎矩定理	131

## 第十一章 聯立一次方程式解法

46. 機械的作表法	133
47. 迭求約值法	137

## 第三編 圖解法

### 第十二章 特性點

48. 緒言	144
49. 特性點之定義及條件	144
50. 所用符號及定理	146
51. 特性點定理之一般的證明	150
52. 在特殊情形下之特性點	155
53. 圖解法	157

### 第十三章 固定點

54. 緒言	166
55. 圖解法	166
56. 上述作圖法之證明	170

# 剛 構 解 法

## 第十四章 配 對 點

節	頁
57. 緒 言	175
58. 定 義 及 符 號	175
59. 簡 化 的 三 彎 矩 定 理	178
60. 配 對 點	178
61. 用 圖 解 法 求 配 對 點	180
62. 配 對 點 圖 解 法 之 應 用	184
63. 首 尾 端 受 有 約 束 之 梁	186
64. 不 對 稱 的 荷 重	187
65. 各 徑 間 之 惰 性 率 不 相 等	188
66. 改 換 徑 間 法	189
67. 不 靜 定 架 構	189
68. 雙 徑 間 連 續 梁	195
69. 連 續 梁 任 何 徑 間 中 之 惰 性 率 為 變 數	196
70. 剪 截 力 及 反 力 之 推 求	200
71. 影 響 線 圖 之 繪 製	201
72. 支 點 下 陷	205
73. 用 圖 解 法 求 副 應 力	208

## 第十五章 加 腰 梁 之 解 法

74. 緒 言	214
75. 符 號 及 定 義	214
76. 加 腰 梁 之 形 式	215
77. 附 表 之 用 途	217
78. 表 中 數 字 之 精 密 程 度	220
79. 解 法 舉 例	220

# 剛 構 解 法

## 第 四 編 分 配 彎 率 法

### 第 十 六 章 直 接 分 配 法

節	頁
80. 緒 言	239
81. 名 詞 定 義	239
82. 結 點 旋 轉 之 影 響	241
83. 分 配 彎 率 法 之 概 要	242
84. 彎 率 之 正 負 號	242
85. 桿 件 一 端 得 以 旋 轉 自 如 者	245
86. 演 算 舉 例	246
87. 分 配 彎 率 後 之 校 核	251
88. 縮 短 計 算 法	252

### 第 十 七 章 間 接 分 配 法

89. 緒 言	253
90. 側 欹	254
91. 處 用 修 正 彎 率	257

### 第 十 八 章 桿 端 旋 轉 常 數

92. 桿 端 旋 轉 常 數 之 意 義	264
93. 用 桿 端 旋 轉 常 數 以 分 配 彎 率	267
94. 分 配 彎 率 後 之 校 核	267
95. 利 用 $\frac{1}{C}$ 之 計 算 舉 例	268
96. 縮 短 的 精 密 計 算 法	273

### 第 十 九 章 壓 柱 比 擬 法

97. 緒 言	276
98. 壓 柱 比 擬 法 之 原 理	276
99. 不 對 稱 的 截 面	281

## 剛 構 解 法

節	頁
109. 不靜定外力 $P$ 之推求	282
101. 核 心	284
102. 壓柱比擬法所用彎矩之正負號	287
103. 應用壓柱比擬法時之列表計算	287
104. 應用壓柱比擬法所用彎矩曲線圖之選擇	290
105. 樑結點	291
106. 解算舉例	291

## 第 二 十 章 鋼 筋 混 凝 土 拱 之 解 法

### 甲. 單 拱

107. 緒 言	300
108. 解算概要	300
109. 對稱拱中因荷重而生之彎矩	302
110. 對稱拱中因荷重而生之反力	304
111. 對稱拱中因溫度變更等等而生之彎矩及反力	304
112. 應行計算之數量	305
113. 不對稱拱之彎矩及反力	306
114. 計算舉例	308
115. 死荷重之壓力線	314
116. 壓力線定理	314
117. 活荷重分界點	315
118. 設題解算	316
119. 解算拱橋之近似的公式	327

### 乙. 彈 性 橋 墩 上 之 連 續 拱

120. 連續拱之解算	334
121. 計算手續	335
122. 分配常數	339
123. 設題演算	340
124. 彎矩影響線圖	349
125. 連續拱中之不對稱拱	352

# 剛 構 解 法

## 丙. 梁與拱之合用

節	頁
126. 緒言 .....	353
127. 舉例說明 .....	353
128. 拱及矩形架構之合用 .....	356

## 第五編 新著摘述

### 第二十一章 連續梁之直接設計

129. 緒言 .....	357
130. 直接設計 .....	357
131. 計算須知 .....	358
132. 設計舉例 .....	359
133. 徑間中部所需之截面係數 .....	362
134. 經濟截面之選取 .....	362
135. 選定腰部以應付剪截力 .....	363
136. 支點下陷 .....	363

### 第二十二章 半剛結點

137. 緒言 .....	365
138. 半剛結點 .....	366
139. 結點常數 .....	367
140. 擬用設計方法 .....	369
141. 實際設計步驟 .....	373

### 第二十三章 層樓受有風力之解法

142. 各種解法之概述 .....	377
--------------------	-----

## 甲. 分配轉率簡法

143. 原則 .....	379
144. 簡法之概要 .....	380
145. 固定端轉率之計算 .....	381
146. 有規則的結構之解法 .....	381

## 剛 構 解 法

節	頁
147. 應用修正彎率	384
148. 預估側傾量(即撓度)	387
149. 立柱變形之影響	392

### 乙. 剛率百分法

150. 原則	392
151. 剛率百分法之概要	393
152. 演算舉例	395
153. 免除立柱變形所生之副彎率	400

### 丙. 中斷層面樓房之解法

154. 用分配彎率法以解算中斷層面	401
--------------------	-----

## 第二十四章 軸 向 變 形

155. 緒言	403
156. 演算公式	408
157. 演算例題	409
158. 垂直荷重	409
159. 橫平荷重	415
160. 溫度變更所生之彎率	420

## 第二十五章 爬 行

161. 彈柱係數 $\beta$ 並非常數	424
162. 爬行與應力間之新定律	424
163. 不靜定應力之推算	424
164. 實用應力	425

## 第二十六章 結 論

165. 各種解法之比較	427
--------------	-----

# 剛 構 解 法

## ANALYSES OF RIGID FRAME STRUCTURES.

### 第一章 緒 言 INTRODUCTION

1. 靜定結構. 任何結構所受之外力 External Forces, 可分為二類. (1) 其所負之荷重 Loads 包含該結構之自身重量在內, 此為已知量. (2) 該結構各支點處之反力, Reactions, 此為未知量, 如該結構並不移動或旋轉, 則此二類外力, 必互相抵銷, 而該結構處於平衡狀態 In equilibrium.

凡一個物體或結構, 若處於平衡狀態, 按照尋常靜力學所述, 必須滿足下列三個基本條件, 即

$$\sum X=0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\sum Y=0 \dots\dots\dots(2)$$

$$\sum M=0 \dots\dots\dots(3)$$

是也, X 為任何外力之橫平的分力 Horizontal Component, Y 為該外力之垂直的分力, Vertical Component, M 為該外力對於任一點之力率 Moment,  $\sum$  號表示相似各項之總和. 若假定某一項, (例如 X) 對於某一方向為正, (例如向右者為正), 則他項之具有相反方向者必為負, (例如向左者為負) 故相似各項相加等於零.

如有一結構, 可由上開三條件, 求得各個反力之大小 Magnitude 方向 Direction 及位置 Position, 則組成該結構各桿件中之應力, 皆不難計算得矣. 如是則該結構為一個靜定結構 Statically Determinate Structure.

就大體言之，每一支點之反力，可有三個未知量，即  $X, Y, M$  是也，若所有各支點之未知量總數，不過於三，即可由上述三個方程式，而求得此諸未知量。如是則該結構即為靜定結構，例如尋常所用之簡梁，Simple Beam (圖 1)，因兩支點並無抵抗橫平力及旋轉力率之能力，故

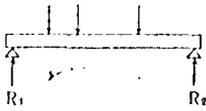


圖 1

兩個反力之  $X$  及  $M$  皆等於零，而惟有其兩個  $Y$  (即圖中之  $R_1$  及  $R_2$ ) 為未知量，如是即可利用 (2) 式及 (3) 式，求得此兩個未知量。

2. 不靜定結構。任何結構之各反力，不能以靜力學之三個基本方程式算得者，謂之不靜定結構 Statically Indeterminate Structure，例如雙樞拱 Two-hinged Arch (圖 2)，單樞拱 One-hinged Arch (圖 3)，無樞拱 No-hinged Arch (圖 4)，連續梁 Continuous Beam (圖 5)，約束梁 Restrained Beam (圖 6)，樞足架構 Frame with Hinged Legs (圖 7)，定足架構 Frame with Fixed Legs (圖 8)，矩形框構 Rectangular Frame (圖 9) 等皆是。

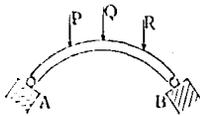


圖 2

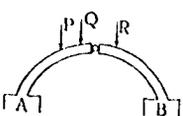


圖 3

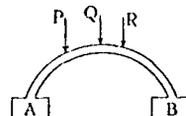


圖 4

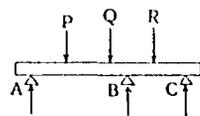


圖 5

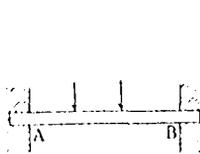


圖 6

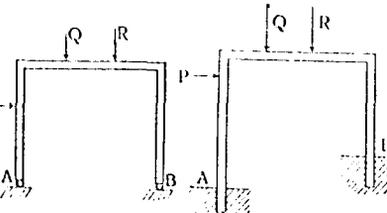


圖 7

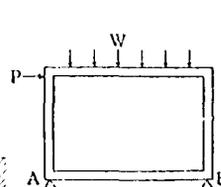


圖 9

凡一桿件與另一桿件或與支點聯結之處，可假想有三個繫桿，(1) 以抵抗橫平的移動，(2) 以抵抗垂直的移動，(3) 以抵抗該兩桿件之相對的旋轉。

如一桿件之端，對於另一桿件或支點為完全固定者 Fixed End，(圖 10)，則上述三個繫桿具備，如該端係以一個樞 Pin or Hinge 與另一桿件或支點相聯結 Hinged End (圖 11)，則縱橫移動，皆不可能，但可作相對的旋轉，故三個繫桿祇備其二。又如該端係以輓軸 Rollers，為另一桿件或支點所承托 Simply Supported End (圖 12)，則橫平移動及相對的旋轉，皆屬可能，惟不能作垂直的移動，故三個繫桿祇備其一。



圖 10

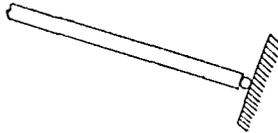


圖 11



圖 12

凡一桿件與另一桿件或支點相聯結之處，謂之結點 Joint。結點處各桿件之相對的位置，完全不能移動者，謂之剛結點 Rigid Joint，其以樞相聯結者，謂之樞結點 Hinged Joint or Pinned Joint。其以輓軸相承托，或一桿件端得在另一桿件或支點之上，順延某一方向任意滑動者，謂之簡承結點 Simply Supported Joint。

按照上文所述，兩桿件之互相剛結者，應有三個假想的繫桿，三桿件之互相剛結者，應有六個假想的繫桿，故若有  $n$  個桿件，互相剛結，應備有  $3(n-1)$  個假想的繫桿（首桿件之一端，與末桿件之彼端，並不相聯結）。若不問支點數之多寡，而假想聯絡所有各支點之巨大承托物（例如地面之全體），亦為一個桿件，則桿件之數，適等於結點之數，設  $m$  為假想的繫桿數， $n$  為實有桿件數，(連同聯絡

各支點之巨大承托物在內)，該結構若係一個靜定結構，必須滿足下列條件，即

$$m - 3(n - 1) = 0$$

若  $m - 3(n - 1)$  不等於零，而等於  $r$ ，則即有  $r$  個未知量，非靜力學所能推算者，此項結構，即為不靜定結構，茲以下列圖表，說明上述之概念。

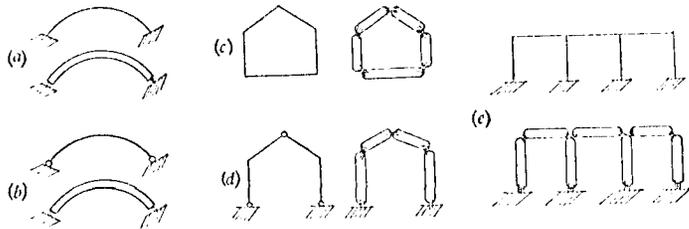


圖 13

圖中之小圓，表示樞結點，各結點處之短線，表示假想的繫桿數，  
(d) 即三樞拱，係靜定結構，故未知量數 = 0。

表 1

圖	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
$m - 3(n - 1)$	$6 - 3(2 - 1)$	$4 - 3(2 - 1)$	$15 - 3(5 - 1)$	$12 - 3(5 - 1)$	$30 - 3(8 - 1)$
未知量	3	1	3	0	9

本書所論各種不靜定結構，大都為架構 [圖 7, 圖 8, 圖 13 (d), 圖 13 (e)], 框構 [圖 9, 圖 13 (c)], 拱 [圖 13 (a), 圖 13 (b)], 連續梁 [圖 5] 等等，總稱為剛構 Rigid Frame Structures.

3. 解法概論。靜定結構之解法，詳見力學及尋常結構工程學各教科書，茲不贅述，本書所述者，限於不靜定結構之各種解法。

據編者所知，不靜定結構解法之較爲通行者，蓋有四種，計(1)爲最小働法 Method of Least Work, (2)爲撓角撓度法 Slope-Deflection Method, (3)爲用配對點圖解法 Graphic Method by Conjugate Points, (4)爲分配彎率法 Moment-Distribution Method, 茲於下文各章中，分別詳述之。

最小働法，係以 Castigliano 氏定理爲根據，早經採用於各種拱 Arches 之設計，(三樞拱除外)，故此法爲最早通行者。

撓角撓度法，以 Mohr 氏之推算結構物中副應力 Secondary Stresses 法爲根據，嗣經德國之 W. Gehler 氏，美國之 W. M. Wilson 氏，荷蘭之 Bendixen 氏等，分別研究，演成此法，此法最稱精密，且可推算任何不靜定結構，惟算法甚形繁複，實際應用頗多困難。

用配對點圖解法，與英國 Fidler 氏之特性點 Characteristic Points 法，及瑞士 W. Ritter 及德國 Ernst Suter 兩氏之固定點 Fixed Points 法，頗相彷彿，此法爲美國 L. H. Nishkian 及 D. B. Steinman 二氏研究所得，最適用於推算各種約束梁及連續梁中之彎率 Bending Moment。

分配彎率法，爲美國 Hardy Cross 氏所首先發明，迄今尙在逐漸改善之中，此法最爲簡捷易用，尤適用於連續梁及約束梁之推算。

此外尙有壓柱比擬法 Method of Column Analogy，亦爲 Hardy Cross 氏所發明，與分配彎率法頗有聯帶關係，本書亦略加闡述，附於分配彎率法之後。

## 第一編 最小働法

### METHOD OF LEAST WORK.

## 第二章 基本公式 FUNDAMENTAL FORMULAS.

4. 因彈性變形而生之內働。凡彈性體受有外力而發生外働 External work done by external forces 之時，該彈性體爲之變形，因而發生內部應力，Internal Stresses due to Strains。若在彈性限 Elastic Limit 之內，此項應力與變形率成正比例，（遵照 Hooke 氏定律），若將外力撤去，則變形因而消滅，該彈性體立即回復原狀，而其內部應力亦即等於零。但若外力所生之外働，超過其彈性限，則變形率漸趨增大，不復與應力成正比例，終至毀壞而後已。其在未毀壞之前，雖將外力撤去，該物體亦未能完全恢復原狀，而仍有一部份變形，永久存在，蓋在超過彈性限之後，該項質料已具有可塑性 Plasticity 矣。本書此後所論及者，皆限於彈性限內之變形，其因抵抗外働而起之內部應力之働，謂之內働 Internal Work。

彈性體之一部份，因受外力而變形，設其伸縮率 Elongation or Shortening 爲  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ ；剪截變形率 Shearing Strains 爲  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ ；內部應力 Internal Stresses 爲  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ；剪截應力 Shearing Stresses 爲  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ ；則單位體積之彈性變形所生之內働，等於

$$\frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}),$$

故極微體積  $dx, dy, dz$  之內働，等於

$$dW = \frac{1}{2} dx, dy, dz (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})$$

而彈性體全體之內働，爲

$$W = \frac{1}{2} \int \int \int dx \cdot dy \cdot dz (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})$$

但內働可按照應力之種類，而分爲軸向應力內働 Internal Work due to Axial Stresses, 彎屈應力內働 Internal Work due to Bending Stresses, 剪截應力內働 Internal Work due to Shearing Stresses 三種，茲分述如下。

(a) 軸向應力內働。設有一直梁，受有軸向壓力或拉力，設令此項外力爲  $N$ ，該梁截面面積爲  $A$ ，其對於應力之彈性係數 Modulus of Elasticity 爲  $E$ ，其長爲  $l$ ，則在彈性限內， $N$  所致之變形爲

$$\epsilon = \frac{N}{EA}$$

又因  $N$  而生之應力，爲

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

由是而知單位體積之彈性變形內働，爲

$$dW = \frac{1}{2} \sigma \epsilon = \frac{N^2}{2E A^2}$$

故直梁全體之內働，爲

$$W = \frac{1}{2} \sigma \epsilon A l = \frac{N^2 l}{2EA}$$

若該直梁之截面，隨處互異，並不一致，則

$$W = \int_0^l \frac{N^2}{2EA} \cdot dl \dots \dots \dots (4)$$

(b) 彎曲應力內働。設  $M$  為直梁任一點之彎率 Bending Moment, 則在該截面中任何點之正交應力, 為  $\sigma_x = \frac{M}{I} \cdot y$ . (圖 14).

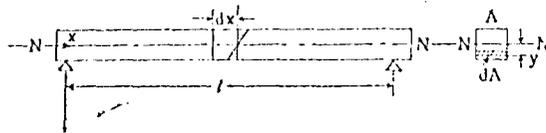


圖 14

此式中之  $I$ , 為該截面對於中立軸之慣性率 Moment of Inertia about the neutral axis.

又伸縮率為  $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ , 故在該點之單位體積內働, 為

$$dW = \frac{1}{2} \epsilon \sigma = \frac{\sigma_x^2}{2E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{EI^2} y^2.$$

而該梁全體之內働, 為

$$W = \int \int \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{EI^2} \cdot y^2 \cdot dA \cdot dx.$$

但  $\int y^2 \cdot dA = I$ , 故

$$W = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} \cdot dx \dots \dots \dots (5)$$

(c) 剪截應力內働.

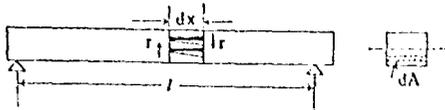


圖 18

剪截應力  $\tau$  與剪截變形  $\gamma$  之間, 有下開之關係

$$\tau = G \cdot \gamma.$$

上式中之  $G$ , 為剛性係數 Coefficient of Rigidity, 或剪截彈性

係數 Shearing Modulus of Elasticity, 此係數對於剪截應力之關係, 與尋常彈性係數 E 對於軸向應力及彎屈應力之關係頗相似。

由是而知單位體積之內働, 爲

$$\frac{1}{2} \tau' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau^2}{G}.$$

而極微體積  $dA \cdot dx$  之內働, 爲

$$dW = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau^2}{G} \cdot dA \cdot dx.$$

即該梁全體之內働, 爲

$$W = \int \int \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau^2}{G} \cdot dA \cdot dx.$$

但  $\int \tau \cdot dA$  即係全截面之剪力 S, 故

$$W = \int_0^l \alpha \cdot \frac{S^2}{2GA} \cdot dx \dots \dots \dots (6)$$

上式中之  $\alpha = \frac{A}{S^2} \int \tau^2 \cdot dA$ , 謂之分配係數 Distribution Coefficient,

因 S 在全截面 A 之中, 並不平均分配, 故以  $\alpha$  表示其如何分配, 此係數隨該截面之大小及形狀而異, 在常見各問題中, 矩形截面之  $\alpha$ , 可作爲  $\frac{6}{5}$ , 圓形截面之  $\alpha$ , 可作爲  $\frac{16}{15}$ , 其在工字梁 I-beams 及鉚接

鉸梁 Riveted Plate Girders,  $\alpha$  可作爲等於  $\frac{A_r}{A_w}$  即  $\frac{\text{截面之總面積}}{\text{腰部之面積}}$

5. Castigliano 氏定理.

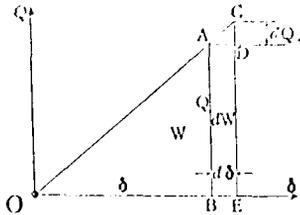


圖 16

設有彈性體受外力  $Q$  而發生彈性變形，其働點之變位 Displacement of the point of application 為  $\delta$ ，其彈性變形之內働為  $W$ ，若  $\delta$  有極微之增加  $d\delta$ ，則  $W$  亦必隨而有相當之變化  $dW$ ，(或增或減)，試觀圖 16,  $\triangle ADC$  比之四邊形  $ABEC$  為極微量，故  $dW = Q \cdot d\delta$ .  $\therefore \frac{dW}{d\delta} = Q$ .

但  $\triangle OAB$  及  $\triangle ACD$  為相似形，故  $\frac{d\delta}{dQ} = \frac{\delta}{Q}$ .

即 
$$\frac{dW}{dQ} = \delta \dots \dots \dots (7)$$

易言之，內働對於外力之微分率 Derivative of internal work with respect to external force, 等於該力働點之變位，若有若干外力  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$  作用於該彈性體，而使  $Q_n$  增大  $dQ_n$ ，則內働為

$$W + \frac{\delta W}{\delta Q_n} \cdot dQ_n$$

但內働之增加，與外力施展之先後無關，今設先施以  $dQ_n$ ，然後再施以  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ ，則內働應為

$$W + dQ_n \cdot \delta_n \quad [\text{按照上文之 (7) 式}]$$

此式中之  $W$  為  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$  所發生之內働，( $dQ_n$  所發生者不在內)，而  $dQ_n \cdot \delta_n$  則為最初施用  $dQ_n$  時所發生之內働，嗣後施用  $Q_n$  之時，其働點之變位為  $\delta_n$ ，當施用  $dQ_n$  之時，自必因增加變位 ( $=d\delta_n$ ) 而內働亦為之微增，假定  $d\delta_n$  比之  $\delta_n$  為極微量，則

$$W + \frac{\delta W}{\delta Q_n} \cdot dQ_n = W + dQ_n \cdot \delta_n$$

即 
$$\frac{\delta W}{\delta Q_n} = \delta_n$$

易言之，凡彈性體因受有多數外力而發生變形，其內働對於任一外力之偏微分率，等於該外力働點之變位，此即 Castigliano 氏第一定理。

6. 最小働之原理。按照上述定理，若外力  $Q_n$  之働點，並不變位，則

$$\frac{\delta W}{\delta Q_n} = 0.$$

設有一結構，其不靜定反力及不靜定應力為  $X_1, X_2, X_3, \dots$ ，若各働點皆不動（即皆不變位），則

$$\frac{\delta W}{\delta X_1} = 0, \quad \frac{\delta W}{\delta X_2} = 0, \quad \frac{\delta W}{\delta X_3} = 0, \dots \text{等等}, \dots \dots \dots (8)$$

因由每一未知量，可得上列各方程式之一，故方程式之數，適等於未知量之數，如將此諸方程式，聯立解之，即可求得諸未知量之值，此項原理，大都可應用於不靜定結構之解法，此即 Castigliano 氏第二定理。

按照此定理，凡彈性體因受多數外力而生之働，常為最小量之働，此外更無他働，故一個結構，常自行調整其內部應力，以適應所受之外力，俾其內働之總和，得為最小量，此即最小働之原理也。

7. 應用於不靜定結構之公式。一彈性體因受有外力，而同時發生軸向應力內働，彎屈應力內働，剪截應力內働，則其內働通式為

$$W = \int \frac{M^2}{2EI} \cdot dx + \int \frac{N^2}{2EA} \cdot dx + \int \frac{\alpha S^2}{2GA} \cdot dx \dots \dots \dots (9)$$

故一個結構，若有不靜定力存在，而其働點並不變位，即祇有內働之時，設令此諸不靜定未知量為  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ ，則得內働對於  $X_1, X_2, X_3, \dots$  之偏微分率 Partial Derivatives 如下。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\delta W}{\delta X_1} &= \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\delta M}{\delta X_1} \cdot dx + \int \frac{N}{EA} \cdot \frac{\delta N}{\delta X_1} \cdot dx + \int \frac{\alpha S}{GA} \cdot \frac{\delta S}{\delta X_1} \cdot dx = 0 \\
 \frac{\delta W}{\delta X_2} &= \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\delta M}{\delta X_2} \cdot dx + \int \frac{N}{EA} \cdot \frac{\delta N}{\delta X_2} \cdot dx + \int \frac{\alpha S}{GA} \cdot \frac{\delta S}{\delta X_2} \cdot dx = 0 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 \frac{\delta W}{\delta X_n} &= \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\delta M}{\delta X_n} \cdot dx + \int \frac{N}{EA} \cdot \frac{\delta N}{\delta X_n} \cdot dx + \int \frac{\alpha S}{GA} \cdot \frac{\delta S}{\delta X_n} \cdot dx = 0
 \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

若第三項所得剪截應力之影響，比之軸向應力及彎屈應力之影響為甚微，可以忽略者，則

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\delta W}{\delta X_1} &= \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\delta M}{\delta X_1} \cdot dx + \int \frac{N}{EA} \cdot \frac{\delta N}{\delta X_1} \cdot dx = 0 \\
 \frac{\delta W}{\delta X_2} &= \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\delta M}{\delta X_2} \cdot dx + \int \frac{N}{EA} \cdot \frac{\delta N}{\delta X_2} \cdot dx = 0 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 \frac{\delta W}{\delta X_n} &= \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\delta M}{\delta X_n} \cdot dx + \int \frac{N}{EA} \cdot \frac{\delta N}{\delta X_n} \cdot dx = 0
 \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

又若軸向應力之影響，比之彎屈應力之影響為甚微，可以忽略者，則

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\delta W}{\delta X_1} &= \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\delta M}{\delta X_1} \cdot dx = 0 \\
 \frac{\delta W}{\delta X_2} &= \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\delta M}{\delta X_2} \cdot dx = 0 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 \frac{\delta W}{\delta X_n} &= \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\delta M}{\delta X_n} \cdot dx = 0
 \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

## 第三章 樞足架構之解法

## ANALYSIS OF FRAMES WITH HINGED LEGS.

8. 雙樞拱之一般的解法. 圖 17 所示者, 為一個雙樞拱, Two-Hinged Arch, 按照第 2 節所述, 其未知量數為  $4-3(2-1)$ , 即共有一個不靜定未知量也, 此未知量, 自必為兩樞之橫平反力 Horizontal Reactions, 且此兩個橫平反力,  $H$ , 必相等, 其方向必相反,  $[\sum X=0]$  設  $M_0$  為橫平反力不發生效力時  $m$  點之彎率,  $M'$  為橫平反力  $H$  發生效力時  $m$  點之彎率,

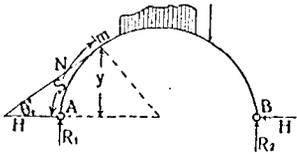


圖 17

則在受有任何荷重之時,  $m$  點之彎率為  $M=M_0+M'$ ,

但  $M'=-Hy$  [凡彎率以能使該拱上部受壓, 下部受拉者為正, 否則為負.]

故  $M=M_0-Hy$ .

又設  $N_0$  為橫平反力不發生效力時  $m$  點之軸向力 Axial Stress,

$N'$  為橫平反力  $H$  發生效力時  $m$  點之軸向力,

則  $m$  點之軸向力為,  $N=N_0+N'$ . 試由  $m$  點作一切線, 與  $AB$  成  $\theta$  角則得  $N'=-H \cdot \cos \theta$  [凡軸向力以拉力為正, 壓力為負.]

$$\therefore N=N_0-H \cos \theta.$$

由 (9) 式 (忽略剪截應力內働) 而得下式,

$$W = \int \frac{M^2}{2EI} \cdot dx + \int \frac{N^2}{2EA} \cdot dx = \int \frac{(M_0 - Hy)^2}{2EI} \cdot dx + \int \frac{(N_0 - H \cos \theta)^2}{2EA} \cdot dx$$

$$\text{故 } \frac{\delta W}{\delta H} = \int_0^s \frac{-(M_0 - Hy) y}{EI} ds + \int_0^s \frac{(N_0 - H \cos \theta) \cos \theta}{EA} ds = 0$$

$$\text{即 } - \int_0^s \frac{M_0 y}{EI} ds + H \int_0^s \frac{y^2}{EI} ds - \int_0^s \frac{N_0 \cos \theta}{EA} ds + H \int_0^s \frac{\cos^2 \theta}{EA} ds = 0$$

$$\therefore H = \frac{\int_0^s \frac{M_0 y}{EI} ds + \int_0^s \frac{N_0 \cos \theta}{EA} ds}{\int_0^s \frac{y^2}{EI} ds + \int_0^s \frac{\cos^2 \theta}{EA} ds} \dots \dots \dots (13)$$

上述之(13)式，為雙樞拱之一般的公式。

若軸向應力之影響，比之彎屈應力之影響為甚微，則

$$H = \frac{\int_0^s \frac{M_0 y}{EI} ds}{\int_0^s \frac{y^2}{EI} ds} \dots \dots \dots (14)$$

又若該拱全身之資料及截面，皆屬通體一致，則E及I皆可銷去，而得

$$H = \frac{\int_0^s M_0 y ds}{\int_0^s y^2 ds} \dots \dots \dots (15)$$

尋常所最易遇見者，資料一致，而截面並不一致，如是則

$$H = \frac{\int_0^s \frac{M_0 y}{I} ds}{\int_0^s \frac{y^2}{I} ds} \dots \dots \dots (16)$$

為便利實際計算起見，可選取各I值之最大者，名之曰I，而以w代

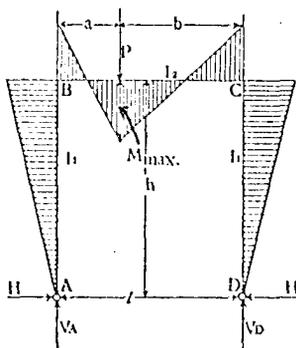
表  $\frac{I_c}{I}$ 。如是則(13)式中之  $\frac{1}{EI} = \frac{1}{EI_c} \cdot \frac{I_c}{I} = \frac{1}{EI_c} \cdot w$  I<sub>c</sub> 為一常數。

故若質料一致，則一般的樞足架構之橫平反力，為

$$H = \frac{\int M_o wy. ds}{\int y^2 w. ds} \dots \dots \dots (17)$$

(17) 式中之分子，隨荷重之情狀而異，其分母則隨該架構之情狀及大小而異，與荷重並無關係，故若已知架構（或拱）之尺寸及形狀，即可先行算得分母之數值，然後按照荷重之情狀，而計算分子之數值，由是而求得橫平反力 H 之值。

9. 樞足矩形架構受有垂直荷重。（圖18）設令橫梁 BC 之惰性率 Moment of Inertia 為  $I_2$ ，兩柱之惰性率，各為  $I_1$ ，則得



$$\begin{aligned} \int y^2 w. ds &= 2 \int_0^h y^2 \frac{I_c}{I_1} dy + \int_0^l h^2 \frac{I_c}{I_2} dx \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{I_c}{I_1} \cdot h^3 + \frac{h^2 l I_c}{I_2} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{I_c}{I_2} \cdot \frac{I_2}{I_1} \cdot h^3 + \frac{I_c}{I_2} \cdot h^2 l \\ &= \frac{I_c}{I_2} \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{h I_2}{I_1} \cdot h^2 l + h^2 l \right) = w \left( \frac{2}{3} K + 1 \right) h^2 l. \end{aligned}$$

圖 18

上式中之  $K = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l}$        $w = \frac{I_c}{I_2}$

今在距 B 點等於 a 之處，施以單一荷重 P，則橫梁 BC 若作為一個簡梁，其中之彎率如下。

BP 之間，  $M_x = \frac{P(l-a)}{l} \cdot x$ ;      PC 之間，  $M_x = \frac{Pa}{l} \cdot x$

故 
$$M_o = \int_0^a \frac{P(l-a)}{l} x dx + \int_0^l \frac{Pa}{l} \cdot x \cdot dx = \frac{Pa^2(l-a)}{2l} + \frac{Pa(l-a)^2}{2l}$$

$$= \frac{Pa(l-a)}{2}$$

故  $\int M_o w \cdot y \cdot ds = \frac{Pa(l-a)}{2} \cdot h \cdot \frac{I_2}{I_1}$  [因  $y$  爲一常數, 等於  $h$ ]

$$= w \cdot \frac{Pa(l-a)}{2} \cdot h.$$

$$\therefore \Pi = \frac{\int M_o w y ds}{\int y^2 w ds} = \frac{w Pa(l-a)h}{2w(1+\frac{2}{3}K)h^2l} = \frac{Pa(l-a)}{2hl(1+\frac{2}{3}K)} \dots \dots \dots (18)$$

若橫梁 BC 受有  $m$  個集中荷重  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_m$ , 其與 B 點之距離, 分別爲  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ , (圖19), 則

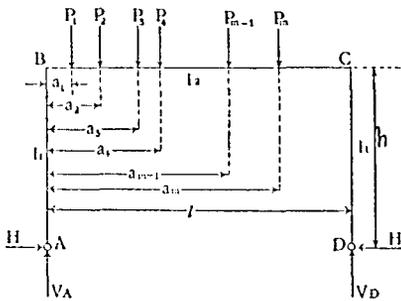


圖 19

$$H = \frac{\sum_{r=1}^m P_r a_r (l-a_r)}{2hl(1+\frac{2}{3}K)} \dots \dots \dots (19)$$

若荷重爲垂直分佈荷重 (圖20), 可令  $P=y \cdot dx$ ,  $a=x$ , 而得

$$H = \frac{\int yx(l-x) dx}{2hl(1+\frac{2}{3}K)} \dots \dots \dots (20)$$

上式中之  $\int yx \cdot (l-x) \cdot dx$ ,

可以 F 代之。

如荷重分佈於全徑間 The entire span, 則積分之兩限, 爲 0 及  $l$ , 如始於  $a_1$ , 終於  $a_2$ , 則積分之兩限, 即爲  $a_1$  及  $a_2$ 。

若係等佈荷重 Uniformly distributed load, 設  $p$  爲每長一單位所負之荷重, 則

$$\int_0^l px(l-x) \cdot dx = \left[ \frac{px^2l}{2} - \frac{px^3}{3} \right]_0^l = \frac{pl^3}{6}$$

故  $\Pi = \frac{pl^2}{12h(1+\frac{2}{3}K)} = \frac{pl^2}{4h(3+2K)} \dots (21)$

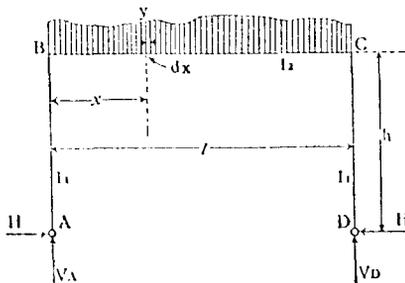
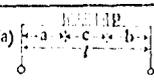
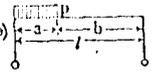
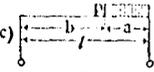
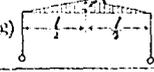


圖 20

茲列表如下 (表 2)

表 2

架 構	F	H
(a) 	$\rho \int_a^{a+c} x(l-x)dx = \frac{\rho c}{6}(6ab + 3cl - 2c^2)$	$\frac{\rho c(6ab + 3cl - 2c^2)}{4hl(3 + 2K)}$
(b) 	$\rho \int_0^a x(l-x)dx = \frac{\rho a^2}{6}(3l - 2a)$	$\frac{\rho a^2(3l - 2a)}{4hl(3 + 2K)}$
(c) 	$\rho \int_b^l x(l-x)dx = \frac{\rho a^2}{6}(3l - 2a)$	$\frac{\rho a^2(3l - 2a)}{4hl(3 + 2K)}$
(d) 	$\rho \int_0^l x(l-x)dx = \frac{\rho l^3}{6}$	$\frac{\rho l^2}{4hl(3 + 2K)}$
(e) 	$\frac{\rho}{l} \int_0^l x^2(l-x)dx = \frac{\rho l^3}{12}$	$\frac{\rho l^2}{8hl(3 + 2K)}$
(f) 	$\frac{\rho}{l} \int_0^l [l + (n-1)x]x(l-x)dx = \frac{\rho l^3(1+n)}{12}$	$\frac{\rho l^2(1+n)}{8hl(3 + 2K)}$
(g) 	$\frac{4\rho}{l} \int_{l/2}^l x^2(l-x)dx = \frac{5\rho l^3}{48}$	$\frac{5\rho l^2}{32hl(3 + 2K)}$

按照上述公式，求得 H 以後，即可計算 B, C 兩點之轉率，如下

$$M_B = M_C = -H \cdot h = -\frac{F}{2l(1 + \frac{2}{3}K)} \dots \dots \dots (22)$$

如係單一荷重，則

$$M_B = M_C = -\frac{Pa(l-a)}{2l(1 + \frac{2}{3}K)} \dots \dots \dots (23)$$

橫梁 BC 中任何點之轉率如下

$$\left. \begin{aligned} \text{B 點與荷重點之間, } M_x &= \frac{P(l-a)}{l} \cdot x + M_B \\ \text{荷重點與 C 點之間, } M_x &= \frac{Pa}{l} \cdot x + M_C \end{aligned} \right\} \text{轉率圖見圖 18.}$$

如係等佈荷重，則

$$M_B = M_C = -H \cdot h = -\frac{\rho l^2}{4(2K+3)} \dots \dots \dots (24)$$

其任何點 (BC 梁中) 之彎率，為

$$M_x = \frac{\rho l x}{2} - \frac{\rho x^2}{2} - \frac{\rho l^2}{4(2K+3)}$$

而橫梁 BC 中央之最大彎率，為

$$M_{\max} = \frac{\rho l^2}{8} - \frac{\rho l^2}{4(2K+3)}$$

例題一. 單一荷重  $P = 5^t$ ,  $a = 700\text{cm}$ ,  $l = 1000\text{cm}$ ,  $h = 600\text{cm}$ .

$$I_2 = 750\text{cm}^4, \quad I_1 = 600\text{cm}^4. \quad \text{故 } K = \frac{I_2}{I_1} \times \frac{h}{l} = 0.75$$

$$\text{則 } H = \frac{Pa(l-a)}{2h(1 + \frac{2}{3}K)} = \frac{5 \times 700 \times 300}{2 \times 600 \times 1000(1 + \frac{2}{3} \times 0.75)} = \frac{7}{12}^t.$$

$$M_B = M_C = -H \cdot h = -\frac{7}{12} \times 600 = -350 \text{ t. cm.}$$

$$\text{荷重點下之彎率} = \frac{P(l-a)a}{l} + M_B = \frac{5 \times 300 \times 700}{1000} - 350 = +700 \text{ t. cm.}$$

例題二. 等佈荷重  $\rho = \frac{1}{200}^t/\text{cm}$ , 餘同例題一.

$$\text{則 } H = \frac{\rho l^2}{4h(3+2K)} = \frac{\frac{1}{200} \times (1000)^2}{4 \times 600(3+2 \times 0.75)} = 0.463^t.$$

$$M_B = M_C = -H \cdot h = -0.463 \times 600 = -277.8 \text{ t. cm.}$$

$$M_{\max}(\text{BC之中央}) = \frac{\rho l^2}{8} - \frac{\rho l^2}{4(2K+3)} = 625 - 277.8 = +347.2 \text{ t. cm.}$$

上文所述，於垂直反力， $V_A$  及  $V_D$ ，均未提及，蓋此兩個反力，可按照靜力學之  $\Sigma Y=0$ ，及  $\Sigma M=0$ ，分別求得，故無須贅言也。

10. 樞是矩形架構受有橫平荷重，(圖 21)，此項架構，與第 9 節相同，故  $\int y^2 w \cdot ds = w(1 + \frac{2}{3}K)h^2 l$  亦與前同，祇須求得  $\int M_o w y ds$

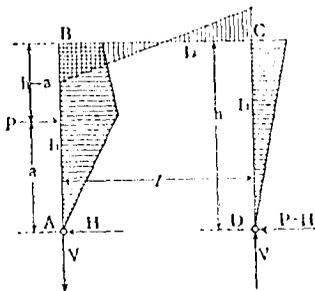


圖 21

以代入 (17) 式，即可得  $\Pi$  之值。

在荷重點與 A 之間， $M_o = 0$ 。

在荷重點與 B 之間， $M_o = P(x-a)$

若  $x=a$ ，則  $M_o = 0$

若  $x=l$ ，則  $M_o = P(h-a)$

橫梁 BC 中任何點之  $M_o$ ，為

$$M_o = V_A x + P(h-a).$$

但  $V_A = \frac{Pa}{l}$

以此值代入上式，則得 
$$M_o = \frac{Pa}{l} x + P(h-a)$$

若  $x=0$ ，則  $M_o = P(h-a)$

若  $x=l$ ，則  $M_o = Pa + P(h-a) = Ph$ 。

又垂直柱 CD 中之任何點之  $M_o$  為  $M_o = Px$ 。

若  $x=h$ ，則  $M_o = Ph$ ，若  $x=0$ ，則  $M_o = 0$ 。

以上云云，閱圖 22 可自明 [此時假定 H 未發生作用]

$$\text{故 } \int M_0 w y ds = \int_a^h \frac{I_c}{I_1} P(x-a)x dx + \int_0^l \frac{I_c}{I_2} \left[ \frac{Pa}{l} x + P(h-a) \right] h dx + \int_0^h \frac{I_c}{I_1} P x^2 dx.$$

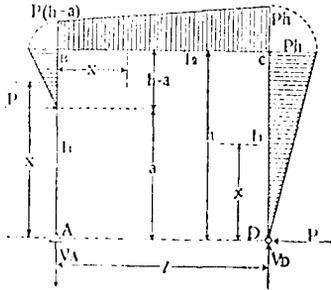


圖 22

上式中之第一項，爲

$$\begin{aligned} \int_a^h \frac{I_c}{I_1} P(x-a)x dx &= \frac{I_c}{I_1} P \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right]_a^h \\ &= \frac{I_c}{I_1} P \left[ \left( \frac{h^3}{3} - \frac{ah^2}{2} \right) - \left( \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} \right) \right] \\ &= \frac{I_c}{I_1} P \left[ \frac{1}{3}(h^3 - a^3) - \frac{a}{2}(h^2 - a^2) \right] \\ &= \frac{I_c}{I_1} \frac{P}{6} (2h^3 - 3ah^2 + a^3). \end{aligned}$$

上式中之第二項，爲

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{I_c}{I_2} \left[ \frac{Pa}{l} x + P(h-a) \right] h dx &= \frac{I_c}{I_2} h \left[ \frac{Pa x^2}{2l} + P(h-a)x \right]_0^l \\ &= \frac{I_c}{I_2} \left[ \frac{Pal}{2} + P(h-a)hl \right] = \frac{I_c}{I_2} \frac{Phl}{2} (2h-a) \end{aligned}$$

上式中之第三項，爲  $\int_0^h \frac{I_c}{I_1} P x^2 dx = \frac{I_c}{I_1} \frac{Ph^3}{3}$ .

$$\begin{aligned} \text{故 } \int M_0 w y ds &= \frac{I_c}{I_1} \frac{P}{6} (2h^3 - 3ah^2 + a^3) + \frac{I_c}{I_2} \frac{Phl}{2} (2h-a) + \frac{I_c}{I_1} \frac{Ph^3}{3} \\ &= \frac{I_c}{I_2} \frac{I_2}{I_1} \frac{P(4h^3 - 3ah^2 + a^3)}{6} + \frac{I_c}{I_2} \frac{Phl}{2} (2h-a). \end{aligned}$$

$$\text{由是而得 } \Pi = \frac{\int M_0 w y ds}{\int y^2 w ds} = \frac{P \left[ \frac{I_2}{I_1} (4h^3 - 3ah^2 + a^3) + 3hl(2h-a) \right] w}{6w(1 + \frac{2}{3}K)h^2 l}$$

即 
$$\Pi = P \frac{K(a^3 - 3ah^2 + 4h^3) + 3h^2(2h - a)}{6(1 + \frac{2}{3}K)h^3} \dots\dots\dots (25)$$

上式中之  $K = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l}$ .

若有  $m$  個集中荷重  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_m$ , 其與樞點  $A$  之距離, 分別為  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ . 則

$$\Pi = \frac{\sum_{r=1}^m P_r [K(a_r^3 - 3a_r h^2 + 4h^3) + 3h^2(2h - a_r)]}{6h^3(1 + \frac{2}{3}K)} \dots\dots\dots (26)$$

若荷重為橫平分佈荷重, 可令  $P = y \cdot dx$ ,  $a = x$ , 而得

$$\Pi = \frac{\int y [Kx^3 - 3x(1 + K)h^2 + h^3(6 + 4K)] dx}{6h^3(1 + \frac{2}{3}K)} \dots\dots\dots (27)$$

設令  $\int y [Kx^3 - 3x(1 + K)h^2 + h^3(6 + 4K)] dx = F$

則得 
$$\Pi = \frac{F}{6h^3(1 + \frac{2}{3}K)} \dots\dots\dots (28)$$

若係等佈荷重, 設  $p =$  每長一單位所負之荷重, 則  $y = p$ .

而  $F = p \cdot \int_0^h [Kx^3 - 3x(1 + K)h^2 + h^3(6 + 4K)] dx = \frac{ph^4}{4} (18 + 11K)$

以此代入 (28) 式, 而得

$$\Pi = \frac{ph(18 + 11K)}{8(3 + 2K)} \dots\dots\dots (29)$$

又若荷重在底部為  $p$ , 在  $B$  點為零, 即其分佈為三角形形式, 則令

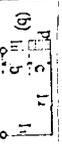
$$y = \frac{p(h-x)}{h}$$

$$\text{求得 } F = \rho \int_0^h (h-x)[Kx^2 - 3x(1+K)h^2 + h^2(6+4K)]dx = \frac{5}{2} \rho h^4 \left(1 + \frac{31}{50} K\right)$$

$$\text{故 } H = \frac{5}{12} \rho h \frac{\left(1 + \frac{31}{50} K\right)}{\left(1 + \frac{3}{8} K\right)} = \frac{\rho h(50 + 31K)}{40(2K + 3)} \dots\dots\dots (30)$$

既得 H, 則 B, C 兩點之彎率, 極易求得, 今列表如下。

(表 3)

荷 重	F	H
(a) 	$\frac{\rho c}{4} \left[ K \left\{ (a^2 + b^2)(a+b) - 6h^2(a+b) + 16h^2 \right\} - 6h^2(a+b) + 24h^2 \right]$	$\frac{\rho c}{8h} \cdot \frac{K(a^2 + b^2)(a+b) - 6h^2(a+b) + 16h^2}{3 + 2K}$
(b) 	$\frac{\rho c}{4} [K(Sb^2 + 4hc^2 - c^2) + 6h^2(2h + c)]$	$\frac{\rho c}{8h} \cdot \frac{K(Sb^2 + 4hc^2 - c^2) + 6h^2(2h + c)}{3 + 2K}$
(c) 	$\frac{\rho h^4}{4} (18 + 11K)$	$\frac{\rho h}{8} \cdot \frac{18 + 11K}{3 + 2K}$
(d) 	$\frac{\rho h^4}{20} (50 + 31K)$	$\frac{\rho h}{40} \cdot \frac{50 + 31K}{3 + 2K}$
(e) 	$\frac{\rho(h-1)h^4}{20} (50 + 31K) + \frac{\rho h^4}{4} (13 + 11K)$	$\frac{\rho h}{40} \cdot \frac{n(50 + 31K) + 8(5 - 3K)}{3 + 2K}$

架樑之左方負有荷重 (其總重量 = W), 則左樞足之橫平反力為 H, 而右樞足之橫平反力則為 H' = W - H (因 ΣX = 0 故)。

若架樑之右方, 同時亦有總荷重 W', 則右樞足之橫平反力, 可按照上法算得。設令此反力 = H'', 則右樞足之實得橫平反力, 應為 H'' - H, (因 H'' 與 H 之方向相反), 即 H'' + H - W 而左樞足之實得橫平反力, 應為 H - (W' - H'), 即 H' + H' - W'。試舉例以明之。

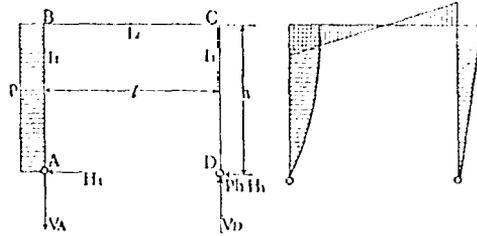


圖 23

圖 23  $V_A = V_D = \frac{ph^2}{2l}$ ,

$$H_A = \frac{ph}{8} \cdot \frac{11K + 18}{2K + 3} \quad \left[ K = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l} \right]$$

$$M_B = \frac{3ph^2(K + 2)}{8(2K + 3)}, \quad M_C = -\frac{ph^2(5K + 6)}{8(2K + 3)}$$

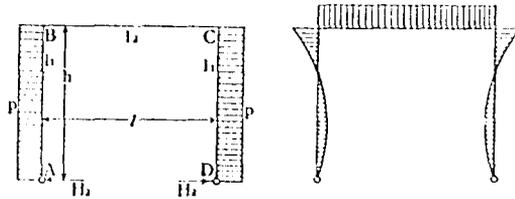


圖 24

(圖 24) 如左右兩方之  $p$  相同，即兩方之荷重為對稱的

Symmetrical, 則左右兩樞是之橫平反力，各等於  $\frac{3ph}{4} \cdot \frac{K + 2}{2K + 3}, \dots (31)$

而  $M_B = M_C = -\frac{ph^2}{4} \cdot \frac{K}{2K + 3}, \quad V_A = V_D = 0.$

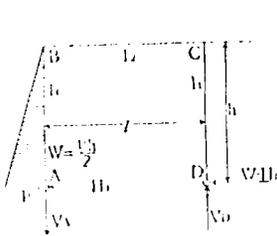


圖 25

$$(圖 25), \quad V_A = V_D = \frac{ph^2}{6l},$$

$$H_1 = \frac{ph}{40} \cdot \frac{31K + 50}{2K + 3}$$

$$M_1 = \frac{ph^2}{12l} \cdot \frac{13K + 30}{2K + 3}$$

$$M_C = -\frac{ph^2}{40} \cdot \frac{9K + 10}{2K + 3}$$

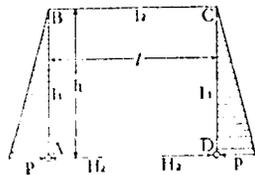


圖 26

$$(圖 26), \quad V_A = V_D = 0.$$

$$H_2 = \frac{ph}{20} \cdot \frac{11K + 20}{2K + 3}$$

$$M_B = M_C = -\frac{ph^2}{60} \cdot \frac{7K}{2K + 3}$$

例題一. (圖 21) 設  $P = 5^t$ ,  $K = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l} = 1.5$ ,  $a = 300^{\text{cm}}$

$h = 700^{\text{cm}}$ .

$$\text{由(25)式, } H = 5 \cdot \frac{1.5(300^3 - 3 \times 300 \times 700^2 + 4 \times 700^3) + 3 \times 700^2(2 \times 700 - 300)}{6(1 + \frac{3}{8} \times 1.5) \times 700^3}$$

$$= 3.71^t$$

$$M_B = Hh - P(h - a) = 3.71 \times 700 - 5 \times 400 = 2597 - 2000 = +597 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$M_C = -(P - H) \times h = -(5.00 - 3.71) \times 700 = -1.29 \times 700 = -903 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

例題二. 架構同前, 左方受等佈荷重.  $p = 10 \text{ kg/cm}$ .

$$\text{由(29)式, } H = \frac{ph(18 + 11K)}{8(3 + 2K)} = \frac{0.01 \times 700(18 + 11 \times 1.5)}{8(3 + 2 \times 1.5)} = 5.03^t$$

$$M_B = H \cdot h - \frac{ph^2}{2} = 5.03 \times 700 - \frac{0.01 \times 700^2}{2} = 3521 - 2450 = +1,071 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$M_C = -(ph - H) \times h = -(0.01 \times 700 - 5.03) \times 700 = -1.97 \times 700 = -1,379 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

例題三 架構同前，左右兩方同時受等佈荷重， $P$  各等於  $10^3\text{kg/cm}$ 。

由(31)式 兩樞之橫平反力，各為  $\Pi = \frac{3ph(K+2)}{4(2K+3)}$

$$= \frac{3 \times 0.01 \times 700(1.5+2)}{4(2 \times 1.5+3)} = 3.0625t$$

$$M_B = M_C = -\frac{ph^2}{4} \cdot \frac{K}{2K+3} = -\frac{0.01 \times 700^2}{4} \times \frac{1.5}{2 \times 1.5+3} = -306.25t \cdot \text{cm}$$

11. 尖頂樞是架構受有垂直荷重。 (圖 27),  $x : y_1 = \frac{l}{2} : f$ 。

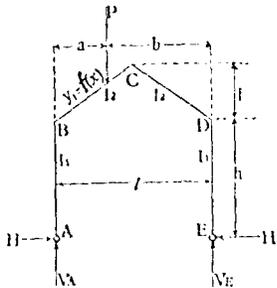


圖 27

故  $y_1 = \frac{2f}{l} \cdot x$ 。

$$\int y^2 w \cdot ds = \int (h + y_1)^2 w ds = \int h^2 w \cdot ds + \int 2hy_1 w \cdot ds + \int y_1^2 w \cdot ds$$

但  $\int h^2 w \cdot ds = wh^2(1 + \frac{2}{3}K)$

$$2h \int y_1 w \cdot ds = 2h \int_0^{\frac{l}{2}} 2y_1 w \cdot dx$$

$$= 4h \int_0^{\frac{l}{2}} w \cdot \frac{2f}{l} x \cdot dx = fhlw$$

$$\int y_1^2 w \cdot ds = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} y_1^2 w \cdot dx = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{w}{2} \cdot \frac{4f^2}{l^2} \cdot x^2 \cdot dx = \frac{f^2 l}{3} \cdot w$$

$$\text{又 } \int M_o y w ds = \int M_o (h + y_1) w \cdot ds = \int M_o h w \cdot ds + \int M_o y_1 w \cdot ds$$

如荷重為單一垂直荷重  $P$ 。則

$$\int M_o h w . d s = \frac{P a (l-a)}{2} . h w .$$

$$\begin{aligned} \int M_{o y} . w . d s &= \frac{2 f}{l} \int_0^l M_{o x} w . d x \\ &= \frac{2 f}{l} \left[ \int_0^a \frac{P(l-a)}{l} x^2 . d x + \int_0^{l-a} \frac{P a}{l} x^2 . d x \right] w \\ &= \frac{P a f}{12 l} (3 l^2 - 4 a^2) w . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } H &= \frac{w \left[ \frac{P a b}{2} h + \frac{P a f}{12 l} (3 l^2 - 4 a^2) \right]}{w \left[ \left( 1 + \frac{2}{3} K \right) h^2 l + f h l + \frac{f^2 l}{3} \right]} \\ &= \frac{P a}{4 l^2} \cdot \frac{6 b h l + f (3 l^2 - 4 a^2)}{3 h^2 \left( 1 + \frac{2}{3} K \right) + f (3 h + f)} \dots \dots \dots (32) \end{aligned}$$

如係分佈荷重，可令  $P = y . dx$ ， $a = x$ ，則得

$$H = \frac{\int y x [6 h l (l - x) + f (3 l^2 - 4 x^2)] d x}{4 l^2 [3 h^2 (1 + \frac{2}{3} K) + f (3 h + f)]} \dots \dots \dots (33)$$

若 BC 間受有等佈荷重  $p$ ，則

$$p \int_0^{\frac{l}{2}} [6 h l (l - x) + f (3 l^2 - 4 x^2)] d x = \frac{p}{16} (8 h + 5 f) l^2$$

$$\text{故 } H = \frac{p l^2}{64} \cdot \frac{8 h + 5 f}{3 h^2 (1 + \frac{2}{3} K) + f (3 h + f)} \dots \dots \dots (34)$$

若 CD 間同時受有同一等佈荷重  $p$ ，則  $H$  之值，適為(34)式之一倍，

$$\text{即 } H = \frac{p l^2}{32} \cdot \frac{8 h + 5 f}{3 h^2 (1 + \frac{2}{3} K) + f (3 h + f)} \dots \dots \dots (35)$$

若係平頂架構，即  $f=0$ ，則 (32) 式即變為 (18) 式。而 (35) 式亦即變為 (21) 式。

12. 雙樞拱。

(圖 28)，若拱身頗平，(即  $f$  較之  $l$  為甚小)，則  $N_0$  之值較小，且  $N$  約等於  $-H$ ，(即  $\theta$  約等於零)，故 (13) 式可化為

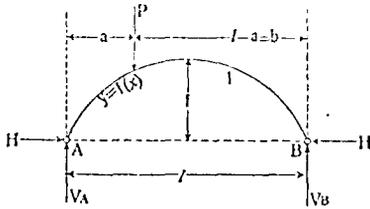


圖 28

$$H = \frac{\int \frac{M_0 y ds}{EI}}{\int \frac{y^2 ds}{EI} + \frac{l}{EA}} \dots \dots \dots (36)$$

若拱身質料及截面，為通體一致者，則  $E$  及  $I$  皆為常數，可得

$$H = \frac{\int M_0 y ds}{\int y^2 ds + \frac{l}{A}} \dots \dots \dots (37)$$

上式中之  $\frac{l}{A}$ ，等於旋轉半徑 Radius of Gyration 之平方。

設令拱弧之方程式，為一個拋物線，  $y = \frac{4f}{l^2}(lx - x^2)$ ，

拱身受有單一荷重  $P$  之時。

$$\begin{aligned} \int_0^l M_0 y dx &= \frac{4f}{l^2} \int_0^l M_0 (lx - x^2) dx \\ &= \frac{4f}{l^2} \left[ \int_0^a \frac{Pb}{l} x (lx - x^2) dx + \int_0^b \frac{Pa}{l} x (lx - x^2) dx \right] \\ &= \frac{Pabf}{3l^2} (l^2 + al - a^2) \end{aligned}$$

$$\int_0^l y^2 dx = \left( \frac{4f}{l^2} \right)^2 \int_0^l (lx - x^2)^2 dx = \frac{8}{15} f^2 l$$

故

$$\Pi = \frac{\frac{Pabf}{3l^2} (l^2 + al - a^2)}{\frac{8}{15} f^2 l + \frac{l}{\Lambda}} \dots \dots \dots (38)$$

若軸向應力之影響，可以忽視不計，則

$$\Pi = \frac{5 Pab (l^2 + al - a^2)}{8 f l^3} \dots \dots \dots (39)$$

拱身受有分佈荷重之時，

$$\Pi = \frac{5 \int yx(l-x)(l+xl-x^2)dx}{8 f l^3} \dots \dots \dots (40)$$

若受有等佈荷重，則

$$\Pi = \frac{5 \int_0^l px(l-x)(l^2 + xl - x^2) dx}{8 f l^3}$$

而  $\int_0^l px(l-x)(l^2 + xl - x^2) dx = \frac{pl^3}{5}$ ,

故

$$\Pi = \frac{pl^2}{8 f} \dots \dots \dots (41)$$

此外尚有種種樞足架構，皆可按照上述之法（第9節至第12節），求得  $\Pi$  之值， $\Pi$  既得之後，即可按照靜力學，求得垂直反力及該架構中任何點之彎率，茲不贅述。

第 四 章 定 足 架 構 及 閉 合 架 構 之 解 法  
 ANALYSES OF FRAMES WITH FIXED LEGS  
 AND OF CLOSED FRAMES.

13. 通用公式. 凡定足架構之具有  $n-1$  個桿件者, (連同聯絡其兩支點之巨大承托物, 共計有  $n$  個桿件) 以及閉合架構 (即閉合框構) 之具有  $n$  個桿件者, 若各桿件之聯接處, 皆為剛結點, 則按照第 2 節所述, 共有  $3n-3$  ( $n-1$ ) 個未知量, 即共有三個未知量, 非靜力學所能推算, 茲擬於本章中, 略述其解法, 至若閉合結構之含有三個以上之未知量者, 非最小働法所能輕易推算, 最好用撓角撓度法, 分配彎率法或壓柱比擬法以解決之.

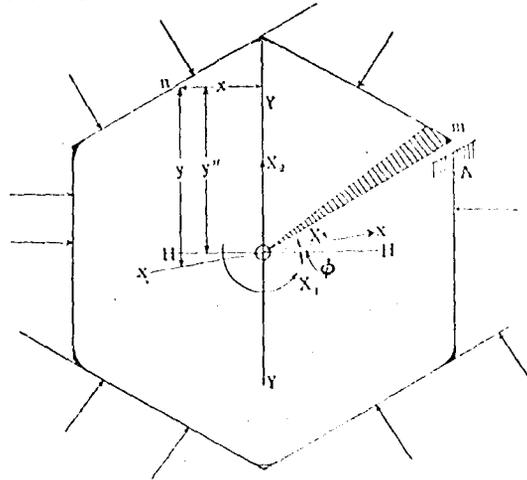


圖 29

如圖 29, 試假想此結構, 在  $m$  點處切斷, 令  $A$  點固定不動, 並令由  $m$  點處, 伸展一臂至臂端  $O$ , 此臂在  $m$  點, 與原有結構, 以剛結點相聯結, 更假想在  $O$  點處有兩力  $X_2$  及  $X_3$  及旋轉力率  $X_1$ , 其作用之結果, 與未切斷前,  $m$  點之各反力及旋轉力率適相等, 如能求得  $X_1, X_2, X_3$ , 則原結構中任何點之彎率, 即可分別算得.

設令結構中任一點  $n$  之彎率, 剪截力, 及軸向力, 分別為  $M, S,$  及  $N$ . 又設令  $X_1, X_2, X_3,$  不發生作用時該結構受有各外力, 而在  $m$  點發生彎率, 剪截力, 及軸向力, 分別為  $M_0, S_0,$  及  $N_0$  (此時  $m$  點處作為已切斷). 又令因  $X_1, X_2, X_3,$  發生作用時, 在  $n$  點之彎率, 剪截力及軸向力, 分別為  $M'', S'',$  及  $N''$ . 則

$$\left. \begin{aligned} M &= M'' + M_0 \\ S &= S'' + S_0 \\ N &= N'' + N_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (a)$$

但在閉合架構之中, 軸向應力及剪截應力之影響, 比之彎屈應力之影響為甚微, 可以省略不計, 如是則祇須求得  $M$  而已足矣, 由(12)式而得下列之 (b) 式.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta W}{\delta X_1} &= \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\delta M}{\delta X_1} \cdot dx = 0 \\ \frac{\delta W}{\delta X_2} &= \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\delta M}{\delta X_2} \cdot dx = 0 \\ \frac{\delta W}{\delta X_3} &= \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\delta M}{\delta X_3} \cdot dx = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (b)$$

經過臂端  $O$  點, 作一垂直軸  $Y-Y,$  及一橫軸  $X-X,$  此橫軸即與所假想之  $X_3$  力向吻合, (不必即為橫平軸 Horizontal Axis). 更作一橫平軸, 亦經過  $O$  點, (圖 29 之  $H-H$  線), 設  $X-X$  與  $H-H$  兩軸, 成一  $\phi$  角, 又設順沿橫平方向, 量度其橫距  $x,$  以由  $Y-Y$  軸向右者為正, 反之為負, 並設順沿垂直方向, 量度其縱距  $y,$  以由  $X-X$  軸向上者為正, 反之為負, 又設凡彎率之能使各桿件之外部纖維 Outer Fibres 發生受壓應力者為正, 反之為負, 如是則  $n$  點之彎率為

$$M = X_1 + X_2 x + X_3 y \cos \phi - M_0$$

仿照前述樞足架構解法，令

$$\frac{1}{EI} = \frac{1}{EI_c} \cdot \frac{I_c}{I} = \frac{1}{EI_c} \cdot w.$$

即可由下列之 (c) 式，求得諸未知量。

$$\left. \begin{aligned} \int M w \cdot \frac{\delta M}{\delta X_1} \cdot dx &= 0 \\ \int M w \cdot \frac{\delta M}{\delta X_2} \cdot dx &= 0 \\ \int M w \cdot \frac{\delta M}{\delta X_3} \cdot dx &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (c)$$

因  $\frac{\delta M}{\delta X_1} = 1$ ,  $\frac{\delta M}{\delta X_2} = x$ ,  $\frac{\delta M}{\delta X_3} = y \cdot \cos\phi$  故若以此諸值，代入 (c) 式，即得

$$\left. \begin{aligned} \int (X_1 + X_2 \cdot x + X_3 \cdot y \cos\phi - M_0) w \cdot ds &= 0 \\ \int (X_1 + X_2 \cdot x + X_3 \cdot y \cos\phi - M_0) w x \cdot ds &= 0 \\ \int (X_1 + X_2 \cdot x + X_3 \cdot y \cos\phi - M_0) w y \cdot ds &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(d)$$

[ $\cos\phi$  為公因子，且係一常數，可以省略]

$$\left. \begin{aligned} \text{或即 } X_1 \int w \cdot ds + X_2 \int w x \cdot ds + X_3 \cos\phi \int w y \cdot ds &= \int M_0 w \cdot ds \\ X_1 \int w x \cdot ds + X_2 \int w x^2 \cdot ds + X_3 \cos\phi \int w x y \cdot ds &= \int M_0 w x \cdot ds \\ X_1 \int w y \cdot ds + X_2 \int w x y \cdot ds + X_3 \cos\phi \int w y^2 \cdot ds &= \int M_0 w y \cdot ds \end{aligned} \right\} \dots\dots(e)$$

試假想上式中之各個  $w \cdot ds$ ，皆為荷重量，(名曰彈性荷重 Elastic Weights)，此諸荷重，必有其重心，(名曰彈性重心 Elastic Centre)。設令上述之臂端 0 點，適居於此項重心，易言之，即令縱橫距之原點 Origin，居於此重心點，則

$$\int wx \cdot ds = \int (w \cdot ds)x = 0$$

$$\int wy \cdot ds = \int (w \cdot ds)y = 0.$$

又設令  $n$  點對於  $\Pi-\Pi$  軸之縱距爲  $y''$ ，則由圖 29，可見

$$y = y'' - x \cdot \tan \phi$$

$$\int w \cdot xy \cdot ds = \int wxy'' \cdot ds - \int wx^2 \tan \phi \cdot ds.$$

故若令  $\tan \phi = \frac{\int w \cdot xy'' \cdot ds}{\int wx^2 \cdot ds}$ ，或  $\phi = \tan^{-1} \frac{\int w \cdot xy'' \cdot ds}{\int wx^2 \cdot ds}$ ，

則  $\int wxy \cdot ds$  即等於零。

易言之，若使所假想之  $X_1$  力之方向，與橫平線所成之角，

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\int wxy'' \cdot ds}{\int wx^2 \cdot ds}$$

，則  $\int w \cdot xy \cdot ds = 0$ 。〔凡  $X-X$  軸與  $Y-Y$  軸相互成

角，使  $\int w \cdot xy \cdot ds = 0$ 。則此兩軸，謂之相互配對，Conjugate Axes

若該閉合架構對於經過彈性重心之縱軸，爲對稱形 Symmetrical Figure，則  $\int wxy'' \cdot ds$  必等於零，即  $\phi = 0$ ，易言之，縱橫兩軸必互相正交。〕

故若所取之  $X-X$  及  $Y-Y$  兩軸，經過彈性重心，並互相配對，則

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{\int M_0 w \cdot ds}{\int w \cdot ds} \\ X_2 &= \frac{\int M_0 wx \cdot ds}{\int wx^2 \cdot ds} \\ X_3 &= \frac{\int M_0 wy \cdot ds}{\cos \theta \cdot \int wy^2 \cdot ds} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\dots\dots\dots (42) \\ X_2 \text{ 之方向，爲垂直的。} \\ X_3 \text{ 之方向，與 } X-X \text{ 軸脗合} \\ &\text{(不必爲橫平的)} \end{aligned}$$

易言之，臂端（居於彈性重心）之彎率，垂直反力，橫平反力（假定該架構對於 Y-Y 軸為對稱形）可由下式求得之，[在此假定之下， $\cos\phi=1$ ]

$$\left. \begin{aligned}
 \text{彎率} \quad M' &= \frac{\int M_o w \cdot ds}{\int w \cdot ds} \\
 \text{垂直反力} \quad V' &= \frac{\int M_o wx \cdot ds}{\int wx^2 \cdot ds} \\
 \text{橫反平力} \quad H' &= \frac{\int M_o wy \cdot ds}{\int wy^2 \cdot ds}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(43)$$

讀者注意，H' 式僅適用於架構之對於 Y-Y 軸為對稱形者。

上列之 M', V', H' 係作用於彈性重心處之臂端。若該架構有一個垂直的對稱軸，且受有對稱的荷重，則 M<sub>o</sub> 圖（即彎率圖 Moment-Diagram）為對稱形，而其經過原點順沿 x 方向之靜力率之和等於零。

故 
$$\int M_o wx \cdot ds = 0.$$

即 
$$X_2 = 0.$$

若該架構更有一個橫平的對稱軸，且受有對稱荷重，則

$$\int M_o wy \cdot ds = 0$$

即 
$$X_3 = 0.$$

若所求得之 M', V', H' 為負數，則其方向必與原假定者相反。

茲將各種架樑之重心高度  $\eta$  列表如下 (表 4)

編號	架 樑	$\eta$ 之 值	摘 要	編號	架 樑	$\eta$ 之 值	摘 要	
(a)		$\frac{K_1 h + K_2 (h + d) + 2h + d}{2 + 2K_1 + K_2 + K_s}$	$\frac{I_1 h}{I_s} = \frac{I_1 l_1}{I_s}$ $K_2 = \frac{I_2 l_2}{I_s}$ $K_s = \frac{I_s l_1}{I_s}$	(a)之公式中 $\frac{K_1 h + K_2 (h + d) + 2h + d}{2 + 2K_1 + K_2}$	(f)		$\frac{1 + K_2}{2 + K_2} \cdot d$	$h = 0$ $I = \infty$
(b)		$\frac{K_1 h + K_2 (h + d) + 2h + d}{2 + 2K_1 + K_2}$	$I = \infty$	(b)		$\frac{1 + K}{1 + 2K + m} \cdot h$	$K = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l}$ $m = \frac{I_2}{l}$ $I_1 = I_2$ $I_1 + 2s = l$	
(c)		$\frac{K_1 h + 2h + d}{2 + 2K_1 + K_s}$	$I_1 = 0$	(h)		$\frac{1 + K}{1 + 2K} \cdot h$	$I = \infty$ $d = 0$ $I_2 = I_1$ $I_1 + 2s = l$	
(d)		$\frac{K_1 h + 2h + d}{2(K_1 + 1)}$	$I_1 = 0$ $I = \infty$	(i)		$\frac{d}{2 + K_s}$	$I_1 = 0$ $h = 0$ $I = \infty$	
(e)		$\frac{1 + K_2}{2 + K_2 + K_s} \cdot d$	$h = 0$	(j)		$\frac{d}{2}$		

上表所列各架構，均有一個垂直的對稱軸，故彈性重心之橫的位置，必居於該軸之中，而其縱的位置，可由表中  $\eta$  之值以定之，若架構中有一個或若干個曲桿件，(例如各種拱)，或桿件雖皆直，而並無對稱軸，則可就所有各個彈性荷重，用尋常靜力圖算法 Graphic Statics 以求得彈性重心之縱橫位置。

14. 定是矩形架構受有任何荷重，圖 30 所示，為單層一徑間定是矩形架構，按照 (43) 式

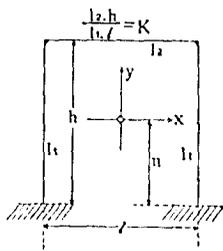


圖 30

$$M^1 = \frac{\int M_0 w ds}{\int w ds}$$

$$V^1 = \frac{\int M_0 w x ds}{\int w x^2 ds}$$

$$H^1 = \frac{\int M_0 w y ds}{\int w y^2 ds}$$

此諸方程式中之分母，與架構之形狀有關，而與荷重則無關，其分子則隨荷重而異，設令

$$G = \int w ds$$

$$H = \int w x^2 ds$$

$$J = \int w y^2 ds$$

則得

$$G = \int w ds = 2 \int_0^h \frac{l_1}{l_1} ds + \int_0^l \frac{l_2}{l_2} ds = 2 \frac{l_1}{l_1} h + \frac{l_2}{l_2} l$$

$$= \left[ \left( \frac{l_2}{l_2} + 2 \frac{l_1}{l_1} \right) \frac{l_2}{l_2} \frac{h}{l} \right] = \frac{l_2}{l_2} \left( 1 + 2K \right) l \quad \left[ K = \frac{l_2}{l_1} \frac{h}{l} \right]$$

$$\frac{l_2}{l_2} \left( 1 + 2 \frac{l_1}{l_1} \frac{h}{l} \right) l$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int wx^2 \cdot ds = 2 \int_0^h \frac{I_c}{I_1} \left( \frac{l}{2} \right)^2 dx + 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{I_c}{I_2} x^2 dx \\
 &= \frac{h I_c}{2 I_1} \cdot l^2 + \frac{l^3}{12} \cdot \frac{I_c}{I_2} = \frac{I_c}{12 I_2} \cdot l \left( 1 + \frac{6 I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l} \right) \\
 &= \frac{I_c l^3}{12 I_2} (1 + 6K)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J &= \int wy^2 ds = 2 \int_0^{\eta} \frac{I_c}{I_1} y^2 dy + 2 \int_0^{h-\eta} \frac{I_c}{I_1} y^2 dy + \int_0^l \frac{I_c}{I_2} (h-\eta)^2 dx \\
 &= 2 \left[ \frac{I_c}{I_1} \frac{\eta^3}{3} \right] + 2 \left[ \frac{I_c}{I_1} \frac{(h-\eta)^3}{3} \right] + \frac{I_c}{I_2} l (h-\eta)^2 \\
 &= 2 \left[ \frac{I_c}{I_1} \frac{\eta^3}{3} \right] + 2 \left[ \frac{I_c}{I_1} \frac{(h-\eta)^3}{3} \right] + \frac{I_c}{I_2} l (h-\eta)^2 \\
 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{I_c}{I_1} \cdot \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l} (h^2 - 3h\eta + 3\eta^2) l + \frac{I_c}{I_2} (h^2 - 2h\eta + \eta^2) l \\
 &= \frac{l}{3} \cdot \frac{I_c}{I_2} \left[ 2K(h^2 - 3h\eta + 3\eta^2) + (3h^2 - 6h\eta + 3\eta^2) \right] \\
 &= \frac{l}{3} \cdot \frac{I_c}{I_2} \left[ h^2(2K+3) - 6h\eta(1+K) + 3\eta^2(1+2K) \right]
 \end{aligned}$$

由表 4, 查得

$$\eta = \frac{1+K}{1+2K} \cdot h$$

以此代入上式, 而得

$$J = \frac{l I_c}{3 I_2} \left[ h^2(2K+3) - 6 \frac{(1+K)^2}{1+2K} h^2 + 3 \frac{(2K+1)(1+K)^2}{(1+2K)^2} \cdot h^2 \right]$$

故

$$J = \frac{I_c h^2 l (2+K) K}{3 I_2 (1+2K)}$$

若該架構受有任何荷重，則  $M^i, V^i, H^i$ ，可由下式求得之。

$$\left. \begin{aligned} M^i &= \frac{I_2 \int M_o w ds}{I_c (1 + 2K) l} \\ V^i &= \frac{12 I_2 \int M_o w x ds}{I_c l^3 (1 + 6K)} \\ H^i &= \frac{3 I_2 (1 + 2K) \int M_o w y ds}{I_c h^2 l (2 + K) K} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (44)$$

15. 定是矩形架構受有垂直荷重，如圖 31。  $M_o$  如左圖頂部所示。

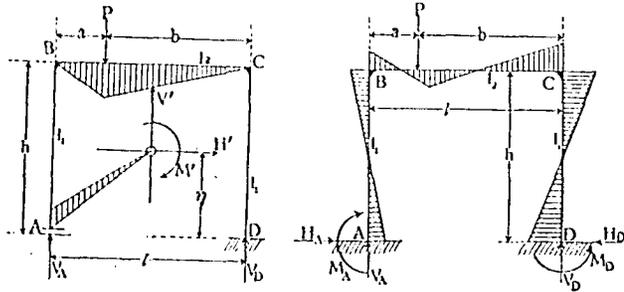


圖 31

$$\begin{aligned} \int M_o w ds &= - \int_0^a \frac{I_c}{I_2} \cdot \frac{Pb}{l} \cdot x dx - \int_0^b \frac{I_c}{I_2} \cdot \frac{Pa}{l} \cdot x dx \\ &= - \frac{I_c}{I_2} \left( \frac{Pa^2 b}{2l} + \frac{Pab^2}{2l} \right) = - \frac{I_c}{I_2} \cdot \frac{Pab}{2} \end{aligned}$$

上式之中，第一積分式之  $x$  係負數，第二積分式中之  $dx$ ，亦係負數

$$\int M_o w x ds = \int_0^a \frac{I_c}{I_2} \cdot \frac{Pb}{l} \cdot x \left( \frac{l}{2} - x \right) dx - \int_0^b \frac{I_c}{I_2} \cdot \frac{Pa}{l} \cdot x \left( \frac{l}{2} - x \right) dx$$

第一積分式中  $x$  與  $\frac{l}{2} - x$  均為負數,  $dx$  為正數, 故式前之號為正,  
 第二積分式中,  $x$  與  $\frac{l}{2} - x$  均為正數,  $dx$  為負數, 故式前之號為負

$$\begin{aligned} &= \int_0^a \frac{I_c}{I_2} \cdot \frac{Pb}{2} \cdot x dx - \int_0^a \frac{I_c}{I_2} \cdot \frac{Pb}{l} \cdot x^2 dx - \int_0^b \frac{I_c}{I_2} \cdot \frac{Pa}{2} \cdot x dx \\ &\quad + \int_0^b \frac{I_c}{I_2} \cdot \frac{Pa}{l} \cdot x^2 dx \\ &= \frac{I_c}{I_2} \cdot \frac{Pba^2}{4} - \frac{I_c}{I_2} \cdot \frac{Pba^3}{3l} - \frac{I_c}{I_2} \cdot \frac{Pab^2}{4} + \frac{I_c}{I_2} \cdot \frac{Pab^3}{3l} \\ &= \frac{I_c}{I_2} \left[ \frac{Pab}{4} (a-b) - \frac{Pab}{3l} (a^2 - b^2) \right] = \frac{Pab (l - 2a) I_c}{12 I_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int M_o wy ds &= \int_0^a \frac{I_c}{I_2} \cdot \frac{Pb}{l} \cdot x (h - \eta) dx + \int_0^b \frac{I_c}{I_2} \cdot \frac{Pa}{l} \cdot x \cdot (h - \eta) dx \\ &\quad \text{(因 } h - \eta \text{ 為負數)} \\ &= \frac{I_c}{I_2} \left[ \frac{Pa^2 b}{2l} + \frac{Pab^2}{2l} \right] (h - \eta) = \frac{I_c}{I_2} \cdot \frac{Pab (h - \eta)}{2} \end{aligned}$$

由表 4, 查得  $\eta$  之值為  $\frac{1 + K}{1 + 2K} \cdot b$ , 以此代入上式, 而得

$$\int M_o wy ds = \left( \frac{I_c}{I_2} \cdot \frac{Pab}{2} \left( h - \frac{1 + K}{1 + 2K} \cdot b \right) \right) = \frac{PabhK}{2(1 + 2K)} \cdot \frac{I_c}{I_2}$$

以此諸值代入 (44) 式, 則得

$$\left. \begin{aligned} M^I &= -\frac{Pab}{2l(1 + 2K)} \\ V^I &= \frac{Pab (l - 2a)}{l^2(1 + 6K)} \\ H^I &= \frac{3 Pab}{2hl(2 + K)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

由此可得定是處之彎率, 橫平反力, 垂直反力如下

$$M_A = M^I + H^I \eta - V^I \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pab}{2l} \cdot \frac{5K - 1 + 2\delta(2 + K)}{(2 + K)(1 + 6K)} \cdot \left[ \text{此式中之 } \delta = \frac{a}{l} \right]$$

$$H_A = H'_A = \frac{3Pab}{2h(2+K)}$$

$$V_A = V'_A + \frac{Pb}{l} = \frac{Pb}{l} \cdot \frac{1+6K+\delta-2\delta^2}{1+6K}$$

$$M_D = \frac{Pab}{2l} \cdot \frac{3+7K-4\delta-2K\delta}{(2+K)(1+6K)}$$

$$H_D = \frac{3Pab}{2h(2+K)}$$

$$V_D = P - V_A = \frac{Pa}{l} \cdot \frac{6K+3\delta-2\delta^2}{1+6K}$$

由此可求得  $M_B$  及  $M_C$  如下

$$M_B = M_A - H_A \cdot h$$

$$M_C = M_D - H_D \cdot h$$

若所受荷重，為任何分佈荷重，可令  $P = y \cdot dx$ ， $\delta = \frac{a}{l} = \frac{x}{l}$ ， $a = x$ ， $b = l - x$ 。

即得

$$\left. \begin{aligned} M_A &= \frac{\int yx(l-x) \left[ 5K - 1 + 2(2+K) \frac{x}{l} \right] dx}{2l(2+K)(1+6K)} \\ H_A = H_D &= \frac{3 \int yx(l-x) dx}{2h(2+K)} \\ V_A &= \frac{\int y(l-x) \left( 1 + 6K + \frac{x}{l} - 2\frac{x^2}{l^2} \right) dx}{l(1+6K)} \\ M_D &= \frac{\int yx(l-x) \left( 3 + 7K - 4 \cdot \frac{x}{l} - \frac{2K}{l} \cdot x \right) dx}{2l(2+K)(1+6K)} \\ V_D &= \frac{\int yx \left( 6K + 3 \cdot \frac{x}{l} - 2\frac{x^2}{l^2} \right) dx}{l(1+6K)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(46)$$

若所受者為等佈荷重  $p$ , 可令  $y=p$ , 求得 (46) 式中各分子之值如下.

$$p \int_0^l x(l-x) \left[ 5K - 1 + 2(2+K) \frac{x}{l} \right] dx = \frac{pl^3(1+6K)}{6}.$$

$$3p \int_0^l x(l-x) dx = \frac{pl^3}{2}.$$

$$p \int_0^l (l-x) \left( 1 + 6K + \frac{x}{l} - \frac{2x^2}{l^2} \right) dx = \frac{pl^2(1+6K)}{2}.$$

$$p \int_0^l x(l-x) \left( 3 + 7K - 4 \frac{x}{l} - 2K \frac{x}{l} \right) dx = \frac{pl^3(1+6K)}{6}.$$

$$p \int_0^l x \left( 6K + 3 - \frac{x}{l} - 2 \frac{x^2}{l^2} \right) dx = \frac{pl^2(1+6K)}{2}.$$

以此諸值, 代入 (46) 式, 則得

$$M_A = M_D = \frac{pl^2}{12(2+K)}.$$

$$H_A = H_D = \frac{pl^2}{4h(2+K)}.$$

$$V_A = V_D = \frac{pl}{2}.$$

$$M_B = M_C = M_A - H_A \cdot h = -\frac{pl^2}{6(2+K)}.$$

.....(47)

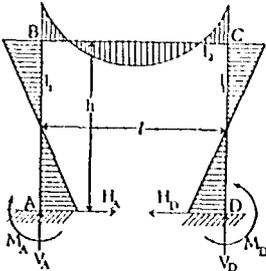


圖 32

圖 32 所示, 即為該架構橫梁 BC 受有等佈垂直荷重時, 各桿件之彎率圖 Moment—Diagram.

16. 定足矩形架構受有橫平荷重 設所受荷重為單一橫平荷重  $W$ ,

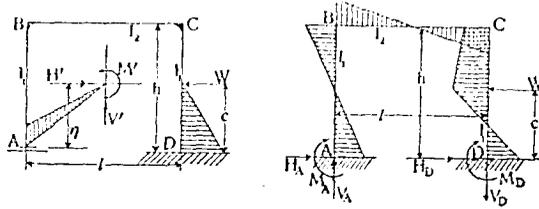


圖 33

$$\delta = \frac{c}{h}, \quad K = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l}. \quad (\text{圖 } 33).$$

假想 DC 為一個懸臂梁, Cantilever Beam, 而求得  $M_0$ .

$$\text{則 } \int M_0 w ds = \frac{I_c}{I_1} \cdot \frac{Wc^2}{2}$$

$$\int M_0 wx ds = \frac{I_c}{I_1} \cdot \frac{Wlc^2}{4}$$

$$\int M_0 wy ds = \frac{I_c}{I_1} \cdot \frac{hc^2 W [3(1+K) - \delta(1+2K)]}{6(1+2K)}$$

以此諸值代入 (44) 式, 可得

$$M^1 = \frac{K \delta c W}{2(1+2K)} \quad [\text{因已假定 } M_0 \text{ 之號為負, 故 } M^1 \text{ 之號應為正.}]$$

$$V^1 = \frac{3 K \delta c W}{l(1+6K)}$$

$$H^1 = \frac{\delta^3 W}{2(2+K)} [3(1+K) - \delta(1+2K)]$$

由此諸值，可求得下列諸未知量。

$$\begin{aligned}
 M_A &= M^I + H^I \eta - V^I \cdot \frac{l}{2} \\
 &= \frac{Wc\delta}{2} \left[ \frac{3+2K-\delta(1+K)}{2+K} - \frac{3K}{1+6K} \right] \\
 H_A &= H^I = \frac{\delta^2 W}{2(2+K)} \left[ 3(1+K) - \delta(1+2K) \right] \\
 V_A &= V^I = \frac{3K\delta c W}{l(1+6K)} \\
 M_D &= M_A + V_A l - W \cdot c \\
 &= -\frac{Wc\delta}{2} \left[ \frac{2}{\delta} - \frac{3+2K-\delta(1+K)}{2+K} - \frac{3K}{1+6K} \right] \\
 H_D &= W - H_A \\
 V_D &= -V_A \\
 M_B &= M_A - H_A \cdot h \\
 M_C &= M_D + H_D \cdot h - W \cdot (h-c)
 \end{aligned}
 \tag{48}$$

若受有任何分佈荷重，可於(48)式中，令  $W=y \cdot dx$ ， $\delta=\frac{x}{h}$ ，而得

$$\begin{aligned}
 M_A &= \frac{1}{2h} \int yx^2 \left[ \frac{h(3+2K)-x(1+K)}{h(2+K)} - \frac{3K}{1+6K} \right] dx \\
 H_A &= \frac{1}{2h^2(2+K)} \cdot \int yx^2 \left[ 3h(1+K) - x(1+2K) \right] dx \\
 V_A &= \frac{3K}{7h(1+6K)} \int yx^2 \cdot dx \\
 M_D &= M_A + V_A \cdot l - \int yx \cdot dx \\
 H_D &= \int y \cdot dx - H_A \\
 V_D &= -V_A
 \end{aligned}
 \tag{49}$$

若 CD 立柱受有等佈荷重  $p$ , 可令  $y^2 = p$ , 而得

$$\left. \begin{aligned}
 M_A &= \frac{p}{2h} \int_0^h x^2 \left[ \frac{h(3+2K) - x(1+K)}{h(2+K)} - \frac{3K}{1+6K} \right] dx \\
 &= \frac{ph^2}{24} \left[ \frac{9+5K}{2+K} - \frac{12K}{1+6K} \right] \\
 H_A &= \frac{p}{2h^2(2+K)} \cdot \int_0^h x^2 [3h(1+K) - x(1+2K)] dx \\
 &= \frac{ph}{8} \cdot \frac{3+2K}{2+K} \\
 V_A &= \frac{3Kp}{7h(1+6K)} \int_0^h x^2 dx = \frac{pKh^2}{7(1+6K)} \\
 M_D &= M_A + \frac{V_A}{2} l - p \int_0^h x \cdot dx \\
 &= \frac{ph^2}{24} \left( 12 - \frac{9+5K}{2+K} - \frac{12K}{1+6K} \right) \\
 H_D &= \frac{ph}{8} \cdot \frac{13+6K}{2+K} \\
 V_D &= -V_A
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(50)$$

由是而得

$$M_B = M_A - H_A \cdot h$$

$$M_C = M_D + H_D \cdot h - \frac{ph^2}{2}$$

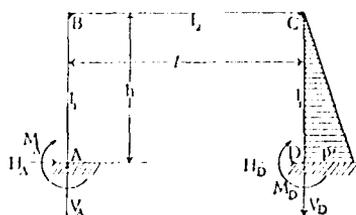


圖 31

若所受者為三角形荷重，其底部為  $p'$ ，其頂部為零。如圖 34，則可令  $y = \frac{p'}{h}(h-x)$ ，

以此代入 (49) 式，而得

$$\left. \begin{aligned}
 M_A &= \frac{p'h^2}{120} \left[ \frac{12+7K}{2+K} - \frac{15K}{1+6K} \right] \\
 H_A &= \frac{p'h}{40} \cdot \frac{4+3K}{2+K} \\
 V_A &= \frac{p'Kh^2}{4l(1+6K)} \\
 M_D &= -\frac{p'h^2}{120} \left[ 20 - \frac{12+7K}{2+K} - \frac{15K}{1+6K} \right] \\
 H_D &= \frac{p'h}{40} \cdot \frac{36+17K}{2+K} \\
 V_D &= -V_A \\
 M_B &= M_A - H_A \cdot h \\
 M_C &= M_D + H_D \cdot h - \frac{p'h^2}{3}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51)$$

若所受者為梯形荷重，底部為  $p'$ ，頂部為  $p$ ，則可將 (50) 式及 (51) 式所算得者，分別相加，即可求得各未知量。

若架構左右兩側，同時受有橫平荷重，亦可做照第 10 節所述之法，以求得各未知量。

例題一。圖 31，設  $P=5^t$ ， $a=700\text{cm}$ ， $l=1000\text{cm}$ ， $h=600\text{cm}$ 。

$$I_2=750\text{cm}^4, \quad I_1=600\text{cm}^4, \quad K=\frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l} = \frac{750}{600} \times \frac{600}{1000} = 0.75$$

## [參閱第 9 節例題一]

$$\text{由 (45) 式, } M^I = -\frac{Pab}{2l(1+2K)} = -\frac{5 \times 700 \times 300}{2 \times 1000 \times (1+2 \times 0.75)} = -210 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$V^I = \frac{Pab(l-2a)}{l^3 \times (1+6K)} = \frac{5 \times 700 \times 300(1000-2 \times 700)}{1000^3 \times (1+6 \times 0.75)} = -0.0764 \text{ t}$$

$$H^I = \frac{3Pab}{2hl(2+K)} = \frac{3 \times 5 \times 700 \times 300}{2 \times 600 \times 1000(2+0.75)} = 0.9545 \text{ t}$$

$$M_A = \frac{Pab}{2l} \cdot \frac{5K-1+2\frac{a}{l}(2+K)}{(2+K)(1+6K)}$$

$$= \frac{5 \times 700 \times 300[5 \times 0.75-1+2 \times 0.7(2.75)]}{2 \times 1000 \times 2.75 \times 5.5}$$

$$= +229.09 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$H_A = H^I = 0.9545 \text{ t}$$

$$V_A = \frac{Pb}{l} \cdot \frac{1+6K+\frac{a}{l}-2\frac{a^2}{l^2}}{1+6K} = \frac{5 \times 300}{1000} \cdot \frac{1+6 \times 0.75+0.7-2(0.7)^2}{1+6 \times 0.75}$$

$$= 1.4236 \text{ t}$$

$$M_D = \frac{Pab}{2l} \cdot \frac{3+7K-4\frac{a}{l}-2K \cdot \frac{a}{l}}{(2+K)(1+6K)}$$

$$= \frac{5 \times 700 \times 300[3+7 \times 0.75-2.8-1.5(0.7)]}{2 \times 1000 \times 2.75 \times 5.5} = +152.73 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$H_D = H_A = 0.9545 \text{ t}$$

$$V_D = P - V_A = 5 - 1.4236 = 3.5764 \text{ t}$$

$$M_B = M_A - H_A \cdot h = +229.09 - 0.9545 \times 600 = -343.61 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$M_C = M_D - H_D \cdot h = +152.73 - 0.9545 \times 600 = -420.00 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

例題二. 設令例題一之架構, 於橫梁上受有等佈荷重  $p = \frac{1}{200} \frac{\text{t}}{\text{cm}}$ .

[參閱第 9 節例題二]

$$\text{由 (47) 式, } M_A = M_D = \frac{pl^2}{12(2+K)} = \frac{\frac{1}{200} \times 1000^2}{12 \times 2.75} = +151.52 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$H_A = H_D = \frac{pl}{4h(2+K)} = \frac{\frac{1}{200} \times 1000}{4 \times 600 \times 2.75} = +0.7576 \text{ t}$$

$$V_A = V_D = \frac{pl}{2} = \frac{\frac{1}{200} \times 1000}{2} = +2.5 \text{ t}$$

$$M_B = M_C = M_A - H_A \cdot h = +151.52 - 0.7576 \times 600 = -303.04 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

例題三. 圖 33,  $W = 5 \text{ t}$ ,  $c = 300 \text{ cm}$ ,  $h = 700 \text{ cm}$ ,  $l = 500 \text{ cm}$ ,  $K = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l} = 1.5$

[參閱第 10 節例題一]

$$\begin{aligned} \text{由 (48) 式, } M_A &= \frac{Wc \left( \frac{c}{h} \right)}{2} \left[ \frac{3 + 2K - \frac{c}{h}(1+K)}{2+K} - \frac{3K}{1+6K} \right] \\ &= \frac{5 \times 300 \times 3}{2 \times 7} \left[ \frac{3 + 2 \times 1.5 - \frac{3}{7}(1+1.5)}{2+1.5} - \frac{3 \times 1.5}{1+6 \times 1.5} \right] \\ &= +308.00 \text{ t}\cdot\text{cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_A &= \frac{\left( \frac{c}{h} \right)^2 \times W}{2(2+K)} \left[ 3(1+K) - \frac{c}{h}(1+2K) \right] \\ &= \frac{\left( \frac{3}{7} \right)^2 \times 5}{2(2+1.5)} \left[ 3(1+1.5) - \frac{3}{7}(1+2 \times 1.5) \right] = +0.7591 \text{ t} \end{aligned}$$

$$V_A = \frac{3K \left(\frac{c}{h}\right) c \cdot W}{l(1+6K)} = \frac{3 \times 1.5 \left(\frac{3}{7}\right) \times 300 \times 5}{500(1+6 \times 1.5)} = +0.5786^t$$

$$M_D = -\frac{Wc \left(\frac{c}{h}\right)}{2} \left[ \frac{2h}{c} - \frac{3+2K-\frac{c}{h}(1+K)}{2+K} - \frac{3K}{1+6K} \right]$$

$$= -\frac{5 \times 300 \times 3}{2 \times 7} \left[ \frac{2 \times 7}{3} - \frac{3+2 \times 1.5-\frac{3}{7}(1+1.5)}{2+1.5} - \frac{3 \times 1.5}{1+6 \times 1.5} \right]$$

$$= -902.73^t \cdot \text{cm}$$

$$H_D = W - H_A = 5 - 0.7591 = +4.2409^t$$

$$V_D = -V_A = -0.5786^t$$

$$M_B = M_A - H_A \cdot h = +308.00 - 0.7591 \times 700 = -223.37^t \cdot \text{cm}$$

$$M_C = +M_D + H_D \cdot h - \sqrt{W}(h-c) = -902.73 + 4.2409 \times 700 - 5 \times 400$$

$$= +65.90^t \cdot \text{cm}$$

$$M_C = M_B + V_A \cdot l = -223.37 + 0.5786 \times 500 = +65.93^t \cdot \text{cm}$$

例題四. 仍如例題三, 惟該架構之右方, 受有等佈荷重  $= 10 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$ .

[參閱第 10 節 例題二]

$$\text{由 (50) 式, } M_A = \frac{\rho h^2}{24} \left[ \frac{9+5K}{2+K} - \frac{12K}{1+6K} \right] = \frac{0.01 \times (700)^2}{24} \left[ \frac{9+5 \times 1.5}{2+1.5} - \frac{12 \times 1.5}{1+6 \times 1.5} \right] = +595.00^t \cdot \text{cm}$$

$$H_A = \frac{\rho h}{8} \cdot \frac{3+2K}{2+K} = \frac{0.01 \times 700}{8} \cdot \frac{3+2 \times 1.5}{2+1.5} = 1.5^t$$

$$V_A = \frac{\rho K h^2}{l(1+6K)} = \frac{0.01 \times 1.5 \times (700)^2}{500(1+6 \times 1.5)} = 1.47^t$$

$$M_D = -\frac{\rho h^2}{24} \left[ 12 - \frac{9 + 5K}{2 + K} - \frac{12K}{1 + 6K} \right] = -\frac{0.01 \times (700)^2}{24}$$

$$\left[ 12 - \frac{9 + 5 \times 1.5}{2 + 1.5} - \frac{12 \times 1.5}{1 + 6 \times 1.5} \right] = -1120 \text{ t}\cdot\text{cm}.$$

$$H_D = -\frac{\rho h}{8} \cdot \frac{13 + 6K}{2 + K} = \frac{0.01 \times 700}{8} \cdot \frac{13 + 6 \times 1.5}{2 + 1.5} = 5.5 \text{ t}.$$

$$V_D = -V_A = -1.47 \text{ t}$$

$$M_B = M_A - H_A \cdot h = +595.00 - 1.5 \times 700 = -455.00 \text{ t}\cdot\text{cm}.$$

$$M_C = M_D + H_D \cdot h - \frac{\rho h^2}{2} = -1120 + 5.5 \times 700 - \frac{0.01(700)^2}{2}$$

$$= +280 \text{ t}\cdot\text{cm}.$$

又  $M_C = M_B + V_A \cdot l = -455 + 1.47 \times 500 = +280 \text{ t}\cdot\text{cm}.$

例題五. 仍由例題三, 惟該架構之右方, 受有三角形分佈荷重, 頂部爲零, 底部爲  $10 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$ . 圖 34.

由 (51) 式,  $M_A = \frac{\rho^1 h^2}{120} \left[ \frac{12 + 7K}{2 + K} - \frac{15K}{1 + 6K} \right] = \frac{.01 \times (700)^2}{120} \left[ \frac{12 + 7 \times 1.5}{2 + 1.5} - \frac{15 \times 1.5}{1 + 6 \times 1.5} \right] = +170.63 \text{ t}\cdot\text{cm}.$

$$H_A = \frac{\rho^1 h}{40} \cdot \frac{4 + 3K}{2 + K} = \frac{0.01 \times 700}{40} \cdot \frac{4 + 3 \times 1.5}{2 + 1.5} = 0.425 \text{ t}.$$

$$V_A = \frac{\rho^1 K h^2}{4(1 + 6K)} = \frac{0.01 \times 1.5 \times (700)^2}{4 \times 500(1 + 6 \times 1.5)} = 0.3675 \text{ t}.$$

$$M_D = -\frac{\rho^1 h^2}{120} \left[ 20 - \frac{12 + 7K}{2 + K} - \frac{15K}{1 + 6K} \right] = -\frac{0.01(700)^2}{120}$$

$$\left[ 20 - \frac{12 + 7 \times 1.5}{2 + 1.5} - \frac{15 \times 1.5}{1 + 6 \times 1.5} \right] = -462.29 \text{ t}\cdot\text{cm}.$$

$$H_D = \frac{\rho' h}{40} \cdot \frac{36 + 17K}{2 + K} = \frac{0.01 \times 700}{40} \cdot \frac{36 + 17 \times 1.5}{2 + 1.5} = 3.075 \text{ t.}$$

$$V_D = -V_A = -0.3675 \text{ t.}$$

$$M_B = M_A - H_A \cdot h = +170.63 - 0.425 \times 700 = -126.87 \text{ t}\cdot\text{cm.}$$

$$\begin{aligned} M_C &= M_D + H_D \cdot h - \frac{\rho' h^2}{3} = -462.29 + 3.075 \times 700 - \frac{0.01(700)^2}{3} \\ &= +56.88 \text{ t}\cdot\text{cm.} \end{aligned}$$

又  $M_C = M_B + V_A \cdot l = -126.87 + 0.3675 \times 500 = +56.88 \text{ t}\cdot\text{cm.}$

17. 矩形框構之一般的解法. 圖35.

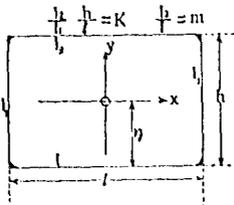


圖 35

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\int wy ds}{\int w ds} = \frac{2 \frac{I_c}{I_1} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{I_c}{I_2} \cdot hl}{\frac{I_c}{I_2} \cdot l + \frac{I_c}{I_1} \cdot l + \frac{2I_c}{I_1} \cdot h} \\ &= \frac{1 + K}{1 + m + 2K} \cdot h \end{aligned}$$

[上式中之  $m = \frac{l_2}{I_1}$ ,  $K = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l}$ . 參閱表4(g)]

$$\begin{aligned} G &= \int w ds = \int_0^l \frac{I_c}{I_2} \cdot ds + \int_0^l \frac{I_c}{I_1} \cdot ds + 2 \int_0^h \frac{I_c}{I_1} \cdot ds \\ &= \frac{I_c}{I_2} (1 + m + 2K) \cdot l \end{aligned}$$

$$H = \int wx^2 \cdot ds = 2 \int_0^h \frac{I_c}{I_1} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 dx + 2 \int_0^l \frac{I_c}{I_2} \cdot x^2 \cdot dx + 2 \int_0^l \frac{I_c}{I_1} \cdot x^2 \cdot dx.$$

$$= \frac{I_c}{I_1} \cdot \frac{l^3}{2} \cdot h + \frac{l^3}{12} \cdot \frac{I_c}{I_2} + \frac{l^3}{12} \cdot \frac{I_c}{I_1} = \frac{I_c l^3}{12 I_2} (1 + m + 6K)$$

$$J = \int wy^2 \cdot ds = 2 \int_0^h \frac{I_c}{I_1} \cdot y^2 \cdot dy + 2 \int_0^l \frac{I_c}{I_1} \cdot y^2 \cdot dy + \int_0^l \frac{I_c}{I_1} \eta^2 \cdot dx + \int_0^l \frac{I_c}{I_2} (h - \eta)^2 \cdot dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2I_c \eta^3}{3I_1} + \frac{2I_c (h-\eta)^3}{3I_1} + \frac{I_c}{I} \cdot \eta^2 \cdot l + \frac{I_c}{I_2} \cdot (h-\eta)^2 \cdot l \\
 &= \frac{I_c l}{3I_2} \left[ h^2(2K+3) - 6h\eta(K+1) + 3\eta^2(1+m+2K) \right]
 \end{aligned}$$

以  $\eta = \frac{1+K}{1+m+2K} \cdot h$ , 代入上式, 而得

$$J = \frac{I_c h^3 \cdot l}{3I_2} \left[ \frac{K(2+K) + m(2K+3)}{1+m+2K} \right]$$

由是而得彈性重心處之  $M'$ ,  $V'$ , 及  $H'$  如下.

$$\left. \begin{aligned}
 M' &= \frac{I_2 \int M_o w \cdot ds}{I_c (1+m+2K) l} \\
 V' &= \frac{12I_2 \int M_o w x \cdot ds}{I_c \cdot l^3 (1+m+6K)} \\
 H' &= \frac{3I_2 (1+m+2K) \int M_o w y \cdot ds}{I_c h^2 l [(2+K)K + (2K+3)m]}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

若  $I_2=1$ , 則可令上式中之  $m=1$ .

又若為尋常定足架構, 則連絡兩支點之巨大承托物之  $I=\infty$ , 如是則

$m = \frac{I_2}{I} = 0$ , 而 (52) 式亦即變為 (44) 式. [見第 14 節].

18. 矩形框構受有垂直荷重. 圖 36. 設框構之上下桿件, 各受有單一垂直荷重  $P$ .

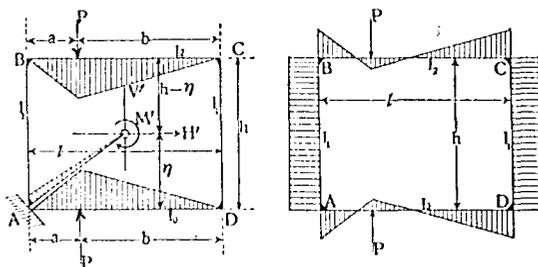


圖 36

$$\int M_o w. ds = -\frac{PabI_c}{2I_2} - \frac{Pabl_c}{2I_o} = -\frac{PabI_c}{2I_2} \cdot (1+m).$$

$$\int M_o wx ds = \frac{Pab(l-2a)I_c}{12I_2} + \frac{Pab(l-2a)I_c}{12I_o} = \frac{Pab(l-2a)I_c}{12I_2} (1+m).$$

$$\begin{aligned} \int M_o wy. ds &= \frac{Pab}{2} \cdot \frac{I_c}{I_2} (h-\eta) - \frac{Pab}{2} \cdot \frac{I_c}{I_o} \eta \\ &= \frac{Pab}{2} \cdot \frac{I_c}{I_2} \left[ \frac{h(m+K)}{1+m+2K} \right] - \frac{Pab}{2} \cdot \frac{I_c}{I_o} \left[ \frac{h(1+K)}{1+m+2K} \right] \\ &= \frac{Pab}{2} \cdot \frac{I_c}{I_2} \cdot \frac{Kh(1-m)}{1+m+2K}. \end{aligned}$$

以此諸值, 代入 (52) 式, 而得

$$\left. \begin{aligned} M' &= -\frac{Pab(1+m)}{2l(1+m+2K)} \\ V' &= \frac{Pab(l-2a)(1+m)}{l(1+m+6K)} \\ H' &= \frac{3Pab(1-m)K}{2hl[(2+K)K + (2K+3)m]} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (53)$$

上式中之  $m$  若等於零 (即  $I_0 = \infty$ ), 則此式即變為 (45) 式 [第15節], 又由 (53) 式, 可得

$$\left. \begin{aligned} M_A &= M' + H'\eta - V' \cdot \frac{l}{2} \\ M_B &= M' - H'(h-\eta) - V' \cdot \frac{l}{2} \\ M_C &= M' - H'(h-\eta) + V' \cdot \frac{l}{2} \\ M_D &= M' + H'\eta + V' \cdot \frac{l}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (54)$$

若  $m=1$  [即  $I_2=I_0$ ], 則由 (53) 式而知  $H'=0$ , 故

$$\left. \begin{aligned} M_A &= M' - V' \cdot \frac{l}{2} = M_B \\ M_C &= M' + V' \cdot \frac{l}{2} = M_D \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (a)$$

$$\text{而 } \eta = \frac{1+K}{2(1+K)} \cdot h = \frac{h}{2} \dots\dots\dots (b)$$

此即該框構具有縱橫兩對稱軸也, 如是則

$$\int M_0 \omega y \cdot ds = 0$$

若荷重適在上下兩橫梁之中間, 則  $a = \frac{l}{2}$ , 由 (53) 式而知  $V'=0$ , 故

$$M_A = M_B = M_C = M_D = M' \dots\dots\dots (c)$$

若框構之上下橫梁, 各受有對稱的垂直分佈荷重, 則於(53)式中, 令

$$P=y \cdot dx, \quad a=x, \quad \text{即得}$$

$$\left. \begin{aligned} M' &= -\frac{\int yx(l-x)(1+m)dx}{2l(1+m+2K)} \\ V' &= -\frac{\int yx(l-x)(l-2x)(1+m)dx}{l^2(1+m+6K)} \\ H' &= -\frac{3 \int yx(l-x)(1-m)K \cdot dx}{2hl[(2+K)K+(2K+3)m]} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (55)$$

若上下兩梁, 各受有等佈荷重  $p$ , 則於(55)式中, 令  $y=p$ , 而得

$$\begin{aligned} M_A &= -\frac{p \int_0^l x(l-x)(1+m)dx}{2l(1+m+2K)} + \frac{3p \int_0^l x(l-x)(1-m)(1+K)K \cdot dx}{2l[(2+K)K+(2K+3)m](1+m+2K)} \\ &= -\frac{p \int_0^l x(l-x)(l-2x)(1+m)dx}{2l^2(1+m+6K)} = M_D \\ M_B &= -\frac{p \int_0^l x(l-x)(1+m)dx}{2l(1+m+2K)} - \frac{3p \int_0^l x(l-x)(1-m)(m+K)K \cdot dx}{2l[(2+K)K+(2K+3)m](1+m+2K)} \\ &= -\frac{p \int_0^l x(l-x)(l-2x)(1+m)dx}{2l^2(1+m+6K)} = M_C \end{aligned}$$

但此二式中之最末項, 均等於零, 故

$$\left. \begin{aligned} M_A &= -\frac{pl^2(1+m)}{12(1+m+2K)} + \frac{pl^2(1-m)(1+K)K}{4[(2+K)K+(2K+3)m](1+m+2K)} = M_1 \\ M_B &= -\frac{pl^2(1+m)}{12(1+m+2K)} - \frac{pl^2(1-m)(m+K)K}{4[(2+K)K+(2K+3)m](1+m+2K)} = M_2 \end{aligned} \right\} \dots (56)$$

若  $I_2=I_0$  [即  $m=1$ ]，則

$$M_A=M_B=M_C=M_D=-\frac{Pl^2}{12(1+K)} \dots\dots\dots (57)$$

若  $K$  亦等於一，則

$$M_A=M_B=M_C=M_D=-\frac{Pl^2}{24} \dots\dots\dots (58)$$

若  $I_0=\infty$  [即該框構變為定足架構]，則  $m=0$ ，以此代入(53)式，而得

$$\left. \begin{aligned} M^I &= -\frac{Pab}{2l(1+2K)} \\ V^I &= \frac{Pab(l-2a)}{l^2(1+6K)} \\ H^I &= \frac{3Pab}{2hl(2+K)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (59)$$

此即第 15 節中之(45)式，

又若於(56)式中，令  $m=0$ ，即可得第 15 節中之(47)式，

19. 矩形框構受有橫平荷重。 圖 37.

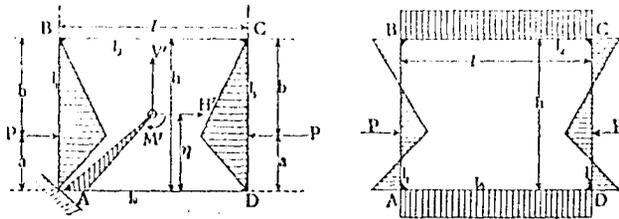


圖 37.

$$\int M_0 w. ds = -\frac{Pab. I_2}{I_1} \dots\dots\dots (a)$$

$$\int M_0 w. x. ds = 0 \left[ \text{因框構及荷重，均為對稱的} \right] \dots\dots\dots (b)$$

又試取左半(或右半)框構，而得

$$\frac{1}{2} \int M_0 w. y. ds = -\int_0^a \frac{I_c}{I_1} \cdot \frac{Pb}{h} \cdot x(\eta-x) dx + \int_0^b \frac{I_c}{I_1} \cdot \frac{Pa}{h} \cdot x[(h-\eta)-x] dx$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_0^a \frac{I_c}{I_1} \cdot \frac{Pb}{h} \eta x dx + \int_0^a \frac{I_c}{I_1} \cdot \frac{Pb}{h} x^2 dx \\
 &\quad + \int_0^b \frac{I_c}{I_1} \cdot \frac{Pa}{h} (h-\eta)x dx - \int_0^b \frac{I_c}{I_1} \cdot \frac{Pa}{h} x^2 dx \\
 &= - \frac{Pab}{2h} [a\eta - b(h-\eta)] + \frac{Pab}{3h} (a^2 - b^2) \\
 &= - \frac{Pab [3(\eta - b) + 2(h - 2a)] I_c}{6 I_1}
 \end{aligned}$$

故  $\int M_o wy ds = - \frac{Pab [3(\eta - b) + 2(h - 2a)] I_c}{3 I_1}$

以  $\eta = \frac{1+K}{1+m+2K} \cdot h$  及  $b = h - a$  代入之, 而得

$$\begin{aligned}
 \int M_o wy ds &= - \frac{I_c \cdot 3 Pab [(1+K)h + (a-h)(1+m+2K)] + 2Pab(h-2a)(1+m+2K)}{3(1+m+2K)I_1} \\
 &= - \frac{I_c Pab [3(1+K)h - (a+h)(1+m+2K)]}{3(1+m+2K)I_1} \\
 &= - \frac{Pab [h(2+K-m) - a(1+m+2K)] I_c}{3(1+m+2K)I_1} \dots\dots\dots (c)
 \end{aligned}$$

以 (a), (b), (c) 等式, 代入 (52) 式, 而得

$$\left. \begin{aligned}
 M' &= - \frac{Pab K}{h(1+m+2K)} \\
 V' &= 0 \\
 H' &= - \frac{Pab [h(2+K-m) - a(1+m+2K)] K}{h^3 [(2+K)K + (2K+3)m]}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (60)$$

$\left[ K = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l} \right]$

以 (60) 式, 代入 (54) 式, 即得各剛結點之彎率如下.

$$\left. \begin{aligned} M_A &= -\frac{PabK}{h(1+m+2k)} - \frac{Pab[h(2+K-m) - a(1+m+2K)](1+K)K}{h^2[(2+K)K + (2K+3)m](1+m+2K)} = M_D \\ M_B &= -\frac{PabK}{h(1+m+2k)} + \frac{Pab[h(2+K-m) - a(1+m+2K)](m+K)K}{h^2[(2+K)K + (2K+3)m](1+m+2K)} = M_C \end{aligned} \right\} \dots (61)$$

若  $I_2 = I_0$ , [即  $m=1$ ], 則

$$\left. \begin{aligned} M_A &= -\frac{PabK}{2h(1+K)} - \frac{Pab(1+K)(h-2a)K}{2h^2[(2+K)K + 2K+3]} = M_D \\ M_B &= -\frac{PabK}{2h(1+K)} + \frac{Pab(1+K)(h-2a)K}{2h^2[(2+K)K + 2K+3]} = M_C \end{aligned} \right\} \dots (62)$$

又若  $m=1$ ,  $a = \frac{h}{2}$ , 則

$$\left. \begin{aligned} M_A &= -\frac{PhK}{8(1+K)} = M_D \\ M_B &= -\frac{PhK}{8(1+K)} = M_C \end{aligned} \right\} \dots (63)$$

若所受者, 爲對稱的橫不分佈荷重, 則可於(61)式中, 令  $P = y \cdot dx$ ,  $a = x$ , 而得

$$\left. \begin{aligned} M_A &= -\frac{\int yx(h-x)K \cdot dx}{h(1+m+2k)} \\ &\quad - \frac{\int yx(h-x)[h(2+K-m) - x(1+m+2K)](1+K)K \cdot dx}{h^2[(2+K)K + (2K+3)m](1+m+2K)} = M_D \\ M_B &= -\frac{\int yx(h-x)K \cdot dx}{h(1+m+2k)} \\ &\quad + \frac{\int yx(h-x)[h(2+K-m) - x(1+m+2K)](m+K)K \cdot dx}{h^2[(2+K)K + (2K+3)m](1+m+2K)} = M_C \end{aligned} \right\} \dots (64)$$

若係等佈荷重  $\rho$ , 則令  $y = \rho$ , 而得

$$\left. \begin{aligned} M_A &= -\frac{\rho h^2 K}{6(1+m+2K)} - \frac{\rho h^2(1-m)(1+K)K}{4[(2+K)K+(2K+3)m](1+m+2K)} = M_D \\ M_B &= -\frac{\rho h^2 K}{6(1+m+2K)} + \frac{\rho h^2(1-m)(m+K)K}{4[(2+K)K+(2K+3)m](1+m+2K)} = M_C \end{aligned} \right\} \dots (65)$$

若  $I_2 = I_0$ , [即  $m=1$ ], 則

$$M_A = M_B = M_C = M_D = -\frac{\rho h^2 K}{12(1+K)} \dots \dots \dots (66)$$

若所受者, 為對稱的三角形橫不分佈荷重, 頂部為零, 底部為  $\rho$ , 則於

(64) 式中, 令  $y = \frac{\rho}{h}(h-x)$ , 而得

$$\left. \begin{aligned} M_A &= -\frac{\rho h^2 K}{12(\tau+m+2K)} - \frac{\rho h^2[5(2+K-m)-2(\tau+m+2K)](\tau+K)K}{60[(2+K)K+(2K+3)m](\tau+m+2K)} = M_D \\ M_B &= -\frac{\rho h^2 K}{12(\tau+m+2K)} + \frac{\rho h^2[5(2+K-m)-2(\tau+m+2K)](m+K)K}{60[(2+K)K+(2K+3)m](\tau+m+2K)} = M_C \end{aligned} \right\} \dots \dots (67)$$

若  $I_2 = I_0$ , 則以  $m=1$  代入上式, 可得

$$\left. \begin{aligned} M_A &= -\frac{\rho h^2 K(8+3K)}{60(1+K)(3+K)} = M_D \\ M_B &= -\frac{\rho h^2 K(7+2K)}{60(1+K)(3+K)} = M_C \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (68)$$

又若  $I_0 = \infty$ , 即  $m=0$ , 亦即該框構變為定足架構之時, 則 (67) 式變為,

$$\left. \begin{aligned}
 M_A &= -\frac{\rho h^2(8+3K)}{60(2+K)} = M_D \\
 M_B &= -\frac{\rho h^2 K}{30(2+K)} = M_C \\
 H_A &= \frac{M_B - M_A}{h} + \frac{\rho h}{3} = \frac{\rho h(16+7K)}{20(2+K)} = H_D
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (69)$$

20. 矩形框構受有橫平及垂直荷重，框構之受有單一荷重者，頗不多見。茲略而不論，試考慮其同時受有等佈垂直荷重及梯形橫平荷重者，如圖 38 所示。

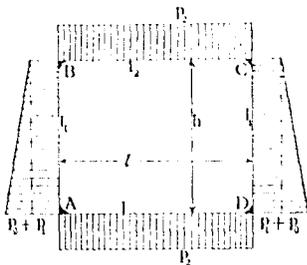


圖 38

將(56)式，(65)式，及(67)式合併，即可得

$$\left. \begin{aligned}
 M_A &= -\frac{p_2 l^2(1+m)}{12(1+m+2K)} \\
 &+ \frac{p_2 l^2(1-m)(1+K)K}{4[(2+K)K + (2K+3)m](1+m+2K)} \\
 &- \frac{p_1 h^2 K}{6(1+m+2K)} \\
 &- \frac{p_1 h^2(1-m)(1+K)K}{4[(2+K)K + (2K+3)m](1+m+2K)} \\
 &- \frac{p_0 h^2 K}{12(1+m+2K)} \\
 &- \frac{p_0 h^2[5(2+K-m) - 2(1+m+2K)](1+K)K}{60[(2+K)K + (2K+3)m](1+m+2K)} \\
 &= M_D \\
 M_B &= -\frac{p_2 l^2(1+m)}{12(1+m+2K)} - \frac{p_2 l^2(1-m)(m+K)K}{4[(2+K)K + (2K+3)m](1+m+2K)} - \frac{p_1 h^2 K}{6(1+m+2K)}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (70)$$

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{p_1 h^2 (1-m)(m+K)K}{4[(2+K)K + (2K+3)m](1+m+2K)} - \frac{p_0 h^2 K}{12(1+m+2K)} \\ & + \frac{p_0 h^2 [5(2+K-m) - 2(1+m+2K)](m+K)K}{60[(2+K)K + (2K+3)m](1+m+2K)} = M_C \end{aligned} \right\}$$

若  $I_2 = I_0$ , 即  $m=1$ , 則

$$\left. \begin{aligned} M_A &= - \left[ \frac{p_2 l^2}{12(1+K)} + \frac{p_1 h^2 K}{12(1+K)} + \frac{p_0 h^2 (8+3K)K}{60(1+K)(3+K)} \right] = M_D \\ M_B &= - \left[ \frac{p_2 l^2}{12(1+K)} + \frac{p_1 h^2 K}{12(1+K)} + \frac{p_0 h^2 (7+2K)K}{60(1+K)(3+K)} \right] = M_C \end{aligned} \right\} \dots\dots (71)$$

若於 (71) 式中, 令  $p_0=0$ , 則得

$$M_A = M_B = M_C = M_D = - \left[ \frac{p_2 l^2 + p_1 h^2 K}{12(1+K)} \right] \dots\dots\dots (72)$$

若更令  $p_2=p_1$ ,  $l=h$ , 則  $K$  不發生關係, 而得

$$M_A = M_B = M_C = M_D = - \frac{p l^2}{12} \dots\dots\dots (73)$$

又若  $p_1=p_2$ ,  $K=1$ , 則

$$M_A = M_B = M_C = M_D = - \frac{p(l^2 + h^2)}{24} \dots\dots\dots (74)$$

例題 設如圖 38, 框構上下兩橫梁, 各受等佈荷重  $p_2=10 \text{ kg/cm}$ , 其左右兩立柱, 各受梯形荷重, 頂部所受者, 爲  $p_1=10 \text{ kg/cm}$ , 底部所受者爲  $p_0=15 \text{ kg/cm}$ ,  $I_2=600 \text{ cm}^4$ ,  $I=750 \text{ cm}^4$ ,  $I_1=1000 \text{ cm}^4$ ,  $h=400 \text{ cm}$ ,  $l=600 \text{ cm}$

$$\text{則 } K = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l} = \frac{600}{1000} \times \frac{400}{600} = 0.4 \quad m = \frac{I_2}{I} = \frac{600}{750} = 0.8$$

由 (70) 式, 可得

$$\begin{aligned}
 M_A = M_{E'} &= \frac{0.01 \times 600^2 \times 1.8}{12 \times (1.8 + 2 \times 0.4)} - \frac{0.01 \times 600^2 \times (1-0.8)(1.4) \times 0.4}{4[2.4 \times 0.4 + (0.8+3) \times 0.8](1.8+2 \times 0.4)} \\
 &= \frac{0.01 \times 400^2 \times 0.4}{6(1.8+2 \times 0.4)} - \frac{0.01 \times 400^2(1-0.8)(1.4) \times 0.4}{4[2.4 \times 0.4 + (0.8+3)0.8](1.8+2 \times 0.4)} \\
 &= \frac{0.015 \times 400^2 \times 0.4}{12(1.8+2 \times 0.4)} - \frac{0.015(400)^2[5(2.4-0.8) - 2(1.8+2 \times 0.4)] \times 1.4 \times 0.4}{60[2.4 \times 0.4 + (2 \times 0.4+3) \times 0.8](1.8+2 \times 0.4)} \\
 &= -207.7 + 9.7 - 41.0 - 4.3 - 30.8 - 6.0 = -280.1 \text{ t-cm}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{B'} = M_{C'} &= \frac{0.01 \times 600^2 \times 1.8}{12 \times (1.8 + 2 \times 0.4)} - \frac{0.01 \times 600^2(1-0.8)(0.8+0.4) \times 0.4}{4[2.4 \times 0.4 + 3.8 \times 0.8](1.8+0.8)} \\
 &= \frac{0.01 \times 400^2 \times 0.4}{6(1.8+0.8)} + \frac{0.01 \times 400^2(1-0.8)(0.8+0.4) \times 0.4}{4[2.4 \times 0.4 + 3.8 \times 0.8](1.8+0.8)} \\
 &= \frac{0.015 \times 400^2 \times 0.4}{12(1.8+0.8)} + \frac{0.015 \times 400^2[5(2.4-0.8) - 2(1.8+0.8)] \times (0.8+0.4) \times 0.4}{60[2.4 \times 0.4 + 3.8 \times 0.8](1.8+0.8)} \\
 &= -207.7 - 8.3 - 41.0 + 3.7 - 30.8 + 5.2 = -278.9 \text{ t-cm}
 \end{aligned}$$

21. 尖頂閉合架構 (即尖頂框構) 設所受荷重, 為垂直的及橫平的分佈荷重, 可做照第 11 節及第 17, 18, 19

等節之法, 求得各剛結點之變率, 如下.

$$\left[ \eta = \frac{K_1 h + 2h + d}{2 + 2K_1 + K_3} \cdot \text{垂直等佈荷重} = P \right.$$

$$\left. \text{橫平等佈荷重} = P_1 \right]$$

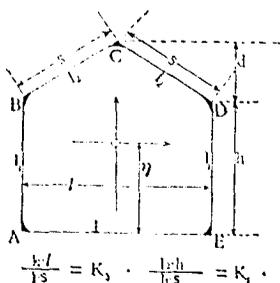


圖 39

## 解法

$$\begin{aligned}
 M_A &= -\frac{pE(2+K_2)}{12(2+2K_1+K_2)} + \frac{pE[4K_1h(2-K_2)+d(2+10K_1+K_2)](K_1h+2h+d)}{16[h^2(K_1^2+2K_1K_2+4K_1+6K_2)+6hd(K_1+K_2)+d^2(4K_1+2K_2+1)](2+2K_1+K_2)} \\
 &\quad + \frac{p_1h^2(2K_1+3K_2)}{0(2+2K_1+K_2)} - \frac{p_1h^2}{4[h^2(K_1^2+2K_1K_2+4K_1+6K_2)+6hd(K_1+K_2)+d^2(4K_1+2K_2+1)](2+2K_1+K_2)} - M_E \\
 &\quad + \frac{p_1h^2[K_1h(2K_1+5K_2-2)+(4h+2d)(2K_1+3K_2)](K_1h+2h+d)}{4[h^2(K_1^2+2K_1K_2+4K_1+6K_2)+6hd(K_1+K_2)+d^2(4K_1+2K_2+1)](2+2K_1+K_2)} - M_D \\
 M_B &= -\frac{pE(2+K_2)}{12(2+2K_1+K_2)} - \frac{pE[4K_1h(2-K_2)+d(2+10K_1+K_2)](K_1h+K_2h-d)}{16[h^2(K_1^2+2K_1K_2+4K_1+6K_2)+6hd(K_1+K_2)+d^2(4K_1+2K_2+1)](2+2K_1+K_2)} \\
 &\quad + \frac{p_1h^2(2K_1+3K_2)}{0(2+2K_1+K_2)} - \frac{p_1h^2[K_1h(2K_1+5K_2-2)+(4h+2d)(2K_1+3K_2)](K_1h-d)}{4[h^2(K_1^2+2K_1K_2+4K_1+6K_2)+6hd(K_1+K_2)+d^2(4K_1+2K_2+1)](2+2K_1+K_2)} - M_D \\
 M_C &= -\frac{pE(2+K_2)}{12(2+2K_1+K_2)} - \frac{pE[4K_1h(2-K_2)+d(2+10K_1+K_2)](h(K_1+K_2)+d(1+K_2+2K_1))}{16[h^2(K_1^2+2K_1K_2+4K_1+6K_2)+6hd(K_1+K_2)+d^2(4K_1+2K_2+1)](2+2K_1+K_2)} \\
 &\quad + \frac{pE}{8} + \frac{p_1h^2(2K_1+3K_2)}{0(2+2K_1+K_2)} - \frac{p_1h^2[K_1h(2K_1+5K_2-2)+(4h+2d)(2K_1+3K_2)](h(K_1+K_2)+d(1+K_2+2K_1))}{4[h^2(K_1^2+2K_1K_2+4K_1+6K_2)+6hd(K_1+K_2)+d^2(4K_1+2K_2+1)](2+2K_1+K_2)}
 \end{aligned}$$

若於 (75) 式中, 令  $p=0$ , 即得祇受垂直荷重時各剛結點之彎率。

又若於該式中, 令  $p=0$ , 即得祇受橫平荷重時各剛結點之彎率。

若令  $I=\infty$ , 即  $K_2=0$ , 則此框樑即變為尖頂定足架樑。如是而得

$$\begin{aligned}
 M_A = & -\frac{p l^2}{12(1+K_1)} + \frac{p l^2(4K_1 h + 5K_1 d + d)(K_1 h + 2h + d)}{16(1+K_1)[K_1^2 h^2 + 2K_1(2h^2 + 3hd + 2d^2) + d^2]} - \frac{p_1 h^2(3 + 2K_1)}{6(1+K_1)} \\
 & + \frac{p_1 h^2 K_1 (K_1 h + 3h + 2d)(K_1 h + 2h + d)}{4(1+K_1)[K_1^2 h^2 + 2K_1(2h^2 + 3hd + 2d^2) + d^2]} = M_B \\
 M_B = & -\frac{p l^2}{12(1+K_1)} - \frac{p l^2(4K_1 h + 5K_1 d + d)(K_1 h - d)}{16(1+K_1)[K_1^2 h^2 + 2K_1(2h^2 + 3hd + 2d^2) + d^2]} + \frac{p_1 h^2 K_1}{6(1+K_1)} \\
 & - \frac{p_1 h^2 K_1 (K_1 h + 3h + 2d)(K_1 h - d)}{4(1+K_1)[K_1^2 h^2 + 2K_1(2h^2 + 3hd + 2d^2) + d^2]} = M_D \\
 M_C = & + \frac{p l^2(1 + 3K_1)}{24(1+K_1)} - \frac{p l^2(4K_1 h + 5K_1 d + d)(K_1 h + 2K_1 d + d)}{16(1+K_1)[K_1^2 h^2 + 2K_1(2h^2 + 3hd + 2d^2) + d^2]} + \frac{p_1 h^2 K_1}{6(1+K_1)} \\
 & - \frac{p_1 h^2 K_1 (K_1 h + 3h + 2d)(K_1 h + 2K_1 d + d)}{4(1+K_1)[K_1^2 h^2 + 2K_1(2h^2 + 3hd + 2d^2) + d^2]}
 \end{aligned} \quad \dots (76)$$

若於(76)式中, 令  $d=0$ , 則此架構, 即變為定足矩形架構, 若更令  $p_1=0$ , 則即為矩形架構之受有垂直的等佈荷重者, 如是則

$$\left. \begin{aligned}
 M_A = & + \frac{p l^2}{6(4+K_1)} = M_D \\
 M_B = & - \frac{p l^2}{3(4+K_1)} = M_C
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (77)$$

讀者應注意, 本節中之  $K_1 = \frac{I_2 h}{I_1 s}$ , 若  $d=0$ , 則  $s = \frac{l}{2}$ , 故  $K_1 = \frac{2I_2 h}{I_1 l}$ .

易言之,  $K_1 = 2 \times$  (第 15 節中之  $K$ ), 故 (77) 式與 (47) 式, 實相同.

22. 弧頂閉合架構 (即弧頂樞構) 如圖 40, 弧之半徑頗大, 故

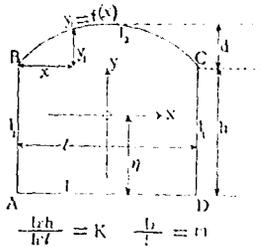


圖 40

$ds$  約等於  $dx$ , 令  $m = \frac{I_2}{I_1}$ ,  $K = \frac{I_2 h}{I_1 l}$ .

$$G = \int w \cdot ds = \frac{I_2}{I_1} (1 + m + 2K) \cdot l$$

$$H = \int w x^2 \cdot ds = \frac{I_2 l^3}{12 I_1} (1 + m + 6K)$$

$$\begin{aligned}
J &= \int wy^2 \cdot ds = 2 \int_0^{\eta} \frac{I_c}{I_1} \cdot y^2 \cdot dy + 2 \int_0^{h-\eta} \frac{I_c}{I_1} \cdot y^2 \cdot dy + \int_0^l \frac{I_c}{I_1} \eta^2 dx \\
&\quad + \int_0^l \frac{I_c}{I_2} (h-\eta+y_1)^2 dx \\
&= \frac{2I_c}{3I_1} \eta^3 + \frac{2I_c}{3I_1} (h-\eta)^3 + \frac{I_c}{I_1} \eta^2 \cdot l + \frac{I_c}{I_2} (h-\eta)^2 \cdot l \\
&\quad + \frac{2(h-\eta)I_c}{I_2} \int_0^l y_1 \cdot dx + \frac{I_c}{I_2} \int_0^l y_1^2 dx.
\end{aligned}$$

設令該弧之方程式，為一個拋物線， $y_1 = \frac{4d}{l^2}(lx-x^2)$ ，則

$$\frac{2(h-\eta)I_c}{I_2} \int_0^l y_1 dx = \frac{8d(h-\eta)I_c}{I_2 l^2} \int_0^l (lx-x^2) dx = \frac{4I_c l \cdot d}{3I_2} (h-\eta)$$

$$\text{又 } \int_0^l y_1^2 dx = \frac{16d^2}{l^4} \int_0^l (lx-x^2)^2 dx = \frac{8}{15} d^2 l.$$

$$\text{故 } J = \int wy^2 \cdot ds = \frac{I_c l}{3I_2} \left[ h^2(2K+3) + 3\eta^2(1+m+2K) - 6h\eta(1+K) + 4d(h-\eta) + \frac{8}{5}d^2 \right]$$

$$\text{但 } \eta = \frac{\int wy \cdot ds}{\int wds} = \frac{2 \frac{I_c}{I_1} \cdot \frac{h^2}{2} + \int_0^l \frac{I_c}{I_2} (h+y_1) \cdot dx}{\frac{I_c}{I_2} \cdot l + \frac{I_c}{I_1} \cdot l + 2 \frac{I_c}{I_1} \cdot h} = \frac{3h + 3Kh + 2d}{3(1+m+2K)}$$

以此代入上式，而得

$$J = \frac{I_c l [15h^2 \{ (2+K)K + (2K+3)m \} + 6ohd(m+K) + 4d^2(1+6m+12K)]}{45 I_2 (1+m+2K)}$$

$$\left. \begin{aligned}
\text{故 } M' &= \frac{I_2 \int M_o w \cdot ds}{I_c (1+m+2K) l} \\
V' &= \frac{12I_2 \int M_o w x \cdot ds}{I_c l^2 (1+m+6K)} \\
H' &= \frac{45I_2 (1+m+2K) \int M_o w y \cdot ds}{I_c l [15h^2 \{ (2+K)K + (2K+3)m \} + 6ohd(m+K) + 4d^2(1+6m+12K)]}
\end{aligned} \right\} \dots (78)$$

設所受荷重，兼有垂直及橫平，（上下左右皆對稱）垂直者為等佈荷重  $P_0$ ，橫平者為梯形荷重，頂部為  $P_1$ ，底部為  $P_1 + P_0$ 。則可做照前述之法，求得

$$\begin{aligned}
 M_A = M_B = & -\frac{P_0 l^2(1+m)}{12(1+m+2K)} + \frac{P_1 h^2(2K+3m)}{6(1+m+2K)} + \frac{P_0 h^2(K+2m)}{12(1+m+2K)} - \left[ \frac{P_1 h^2}{2} + \frac{P_0 h^2}{6} \right] \\
 & + \frac{P_0 l^2[15Kh(1-m) + 2d(1+m+12K)](3h+3Kh+2d)}{12[15h^2\{(2+K)K+(2K+3)m\} + 6ohd(m+K) + 4d^2(1+6m+12K)](1+m+2K)} \\
 & + \frac{5P_1 h^2[3Kh(3+2K) + 3mh(6+5K) + 4d(2K+3m)](3h+3Kh+2d)}{12[15h^2\{(2+K)K+(2K+3)m\} + 6ohd(m+K) + 4d^2(1+6m+12K)](1+m+2K)} \\
 & + \frac{P_0 h^2[3Kh(3K+4) + 3mh(9K+10) + 10d(K+2m)](3h+3Kh+2d)}{12[15h^2\{(2+K)K+(2K+3)m\} + 6ohd(m+K) + 4d^2(1+6m+12K)](1+m+2K)} \\
 M_B = M_C = & -\frac{P_0 l^2(1+m)}{12(1+m+2K)} + \frac{P_1 h^2(2K+3m)}{6(1+m+2K)} + \frac{P_0 h^2(K+2m)}{12(1+m+2K)} \\
 & + \frac{P_0 l^2[15Kh(1-m) + 2d(1+m+12K)](3mh+3Kh-2d)}{12[15h^2\{(2+K)K+(2K+3)m\} + 6ohd(m+K) + 4d^2(1+6m+12K)](1+m+2K)} \\
 & + \frac{5P_1 h^2[3Kh(3+2K) + 3mh(6+5K) + 4d(2K+3m)](3mh+3Kh-2d)}{12[15h^2\{(2+K)K+(2K+3)m\} + 6ohd(m+K) + 4d^2(1+6m+12K)](1+m+2K)} \\
 & + \frac{P_0 h^2[3Kh(3K+4) + 3mh(9K+10) + 10d(K+2m)](3mh+3Kh-2d)}{12[15h^2\{(2+K)K+(2K+3)m\} + 6ohd(m+K) + 4d^2(1+6m+12K)](1+m+2K)}
 \end{aligned}
 \tag{79}$$

(79) 式爲一般的公式。若於此式中，令  $m$  及  $n$  皆等於零，即得祇受垂直荷重時各剛結點之轉率，若令  $n$  等於零，即得祇受橫平梯形荷重時各剛結點之轉率，若令  $m$  及  $n$  皆等於零，即得祇受三角形橫平荷重時各剛結點之轉率，惟各種荷重皆爲對稱的荷重耳。

又若令  $d$  等於零，則即得矩形框構兼受橫平垂直荷重時各剛結點轉率，此時所得之式，應與 (70) 式相同 (第 20 節)。

又若令  $I = \infty$ ，即  $m = 0$ ，則 (79) 式即爲定足架構兼受橫平垂直荷重時各結點之轉率。

23. 弧頂定足架構。圖 41。如弧頂定足架構，受有不對稱的荷重，可先於 (78) 式中，令  $m = 0$  [即  $I = \infty$ ]

如是則

$$\left. \begin{aligned} M' &= \frac{I_2 \int M_o w \cdot ds}{I_c (1 + 2K) l} \\ V' &= \frac{12 I_2 \int M_o w x \cdot ds}{I_c l^2 (1 + 6K)} \\ H' &= \frac{45 I_2 (1 + 2K) \int M_o w y \cdot ds}{I_c [15h^2(2 + K)K + 6ohdK + 4d^2(1 + 12K)]} \end{aligned} \right\} \dots (80)$$

圖 41

如所受荷重，爲單一垂直荷重  $P$  (如圖 41)，則

$$\int M_o w \cdot ds = - \frac{Pab I_c}{2 I_2}$$

$$\int M_o w x \cdot ds = - \frac{Pab(l - 2a)I_c}{12 I_2}$$

$$\int M_o w y \cdot ds = \frac{I_c}{I_2} \left[ \frac{Pab}{2} (h - \eta) + \frac{Pabd}{3l^2} (l^2 + al - a^2) \right]$$

$$= \frac{Pab[(3Kh - 2d)l^2 + 2d(l^2 + al - a^2)(1 + 2K)] \cdot I_c}{6(1 + 2K)l^2 I_2}$$

故得

$$\left. \begin{aligned} M' &= -\frac{Pab}{2(1+2K)l} \\ V' &= \frac{Pab(l-2a)}{l^2(1+6K)} \\ H' &= \frac{15 Pab [(3Kh-2d)l^2 + 2d(l^2 + al - a^2)(1+2K)]}{2l^3 [15h^2(2+K)K + 60hdK + 4d^2(1+12K)]} \end{aligned} \right\} \dots\dots (81)$$

如係任何垂直分佈荷重，則可於 (81) 式中，令  $P = y \cdot dx$ ,  $a = x$ ,  $b = l - x$ ，而得

$$\left. \begin{aligned} M' &= -\frac{\int yx(l-x)dx}{2(1+2K)l} \\ V' &= \frac{\int yx(l-x)(l-2x)dx}{l^2(1+6K)} \\ H' &= \frac{15 \int yx(l-x)[(3Kh-2d)l^2 + 2d(l^2 + xl - x^2)(1+2K)]dx}{2l^3 [15h^2(2+K)K + 60hdK + 4d^2(1+12K)]} \end{aligned} \right\} \dots\dots (82)$$

如係垂直等佈荷重，則可令  $p = y$ ，而得

$$\left. \begin{aligned} M' &= -\frac{pl^2}{12(1+2K)} \\ V' &= 0 \\ H' &= \frac{pl^2 [12d(1+2K) + 5(3Kh-2d)]}{4[15h^2(2+K)K + 60hdK + 4d^2(1+12K)]} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (83)$$

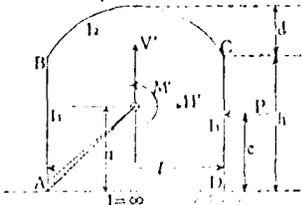


圖 42

若所受荷重為橫平單一荷重  $P$  (如圖 42) 則

$$\int M_o w_o ds = \frac{l_1 P c^2}{2I_1}$$

$$\int M_o w_x ds = \frac{l_1 P l c^2}{4I_1}$$

$$\int M_o w_y ds = \frac{P c^2 [3h(1+h) - c(1+2K) + 2d] l c}{6(1+2K)I_1}$$

故得

$$M' = \frac{PKc^2}{2h(1+2K)}$$

$$V' = \frac{3PKc^2}{h(1+6K)l}$$

$$H' = \frac{15PKc^2[3h(1+K) - c(1+2K) + 2d]}{2h[15h^2(2+K)K + 60hdK + 4d^2(1+12K)]}$$

} ..... (84)

如係任何分佈橫平荷重, 則令  $P = y \cdot dx$ ,  $c = x$ . 而得

$$M' = \frac{\int yKx^2 \cdot dx}{2h(1+2K)}$$

$$V' = \frac{3 \int yKx^2 \cdot dx}{h(1+6K)l}$$

$$H' = \frac{15 \int yKx^2 [3h(1+K) - x(1+2K) + 2d] dx}{2h[15h^2(2+K)K + 60hdK + 4d^2(1+12K)]}$$

} ..... (85)

如係橫平等佈荷重，則令  $\rho=y$ ，而得

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{\rho h^2 K}{6(1+2K)} \\ V &= \frac{\rho h^2 K}{7(1+6K)} \\ H &= \frac{5\rho h^2 K [3(3+2K)h + 8d]}{8[15h^2(2+K)K + 60hdK + 4d^2(1+12K)]} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (86)$$

本編所述，僅就常見各種剛構，用最小働法，以求各個結點（或任何點）之變率，或支點處之縱橫反力，藉以略見此法用途之一斑，此外尚有種種結構，均可利用此法，以求得各個公式，茲以限於篇幅，姑予從略，讀者如欲查閱此諸公式，可參攷日本山海堂出版部發行之「土木工學ポケットブック」（土木工學 Pocket Book）上編第217頁至第240頁（昭和十一年出版）

又本編所述各節，大率取材於日本瀨戶政章氏所著之「ラーメンの解法」（按ラーメン即德文 Rahmen，英譯為 Rigid Frame）此書為東京市修教社書院於昭和十四年八月間四版發行，其中各公式，雖多經編者加以覆核，然尚有若干式過於繁複，編者未及盡校，但照原書抄錄，原書排印，頗不免有錯誤，本編各式，容有沿襲其謬誤之處，倘承讀者覆核指示，實深感荷。

## 第二編 撓角撓度法

## SLOPE-DEFLECTION METHOD.

## 第五章 基本公式 FUNDAMENTAL FORMULAS.

24. 主要原則. 撓角撓度法所用之基本公式, 係以下列二原則為根據, 此等原則, 通常稱為彎率面積法 Moment-area Method 之原則, 凡較為完善之力學教科書中, 大抵皆加以證明, 茲但列述如下.

(1) 凡桿件因受外力作用而撓曲, 其在任何兩點間之彈性曲線 Elastic Curve 之傾度差 Difference in Slope (即撓角差) 必等於該兩點間此一部份桿件之  $\frac{M}{EI}$  圖之面積,  $M$  為彎率,  $E$  為彈性係數 Modulus of Elasticity,  $I$  為桿件截面對於中立軸之慣性率 Moment of Inertia about the Neutral Axis.

(2). 凡桿件因受外力作用而撓曲, 其彈性曲線上任何點  $Q$ , 與該曲線上其他任何點  $P$  處所作切線之距離 (此項距離之量度與該桿件原居之位置相正交), 必等於此兩點間  $\frac{M}{EI}$  圖全面積, 對於  $Q$  點所生之靜力率 Statical Moment of the Area of the  $\frac{M}{EI}$  diagram between the two points, about the point  $Q$ .

25. 通用之正負號. 本編各公式中各個數量之正負號, 以下開之通用規則決定之, (讀者應注意, 本編所用之彎率正負號意義, 與第一編所用者不相同.)

若某一桿件的彈性曲線之切線, 由其原居之位置, 順鐘針方向而旋轉, 則其傾度變更 Change in Slope, [即角的變形 Angular Deformation] 為正, 反之則為負.

若一桿件兩端之聯絡線, 發生旋轉, 該桿件一端對於他一端之變位 (此項變位之量度, 與該桿件原居之位置相正交) 謂之撓度 Deflec-

tion, 本編所稱之撓度, 皆包涵此義, 若此項旋轉, 係自該桿件原居位置起, 順鐘針方向而旋轉, 則其撓度為正, 反之則為負。

一截面中之內部應力, 在中立軸之一方者為拉力, 在其又一方者為壓力 此兩種力, 大小相等而方向相反, 謂之偶力 Couple, 若此偶力之作用 能使該桿件之某一部份, 順鐘針方向而旋轉, 則此項抵抗力率 Resisting Moment [即該內部應力之撓率 Moment of the Internal Stresses.] 為正, 反之則為負, 按照此項規則, 凡言及此等撓率, 必須同時說明其桿件之何部份, 而於  $M$  字 ( $M$  代表撓率 Moment) 之右下角, 附綴兩個字母, 以表示此撓率係對於某一部份之桿件而言, 其兩字母之首一字母, 表示此撓率之在該端, 例如一桿件之兩端為  $A$  及  $B$ , 而  $C$  為兩端間之一點, 則  $M_{CA} = -M_{CB}$ .

若一個外力, 能使某截面順鐘針方向而旋轉, 則該力之力量 Moment 為正, 反之則為負。

26. 桿件兩端受約束, 而其間不受荷重. 圖 43 (a) 中之  $AB$  線表示

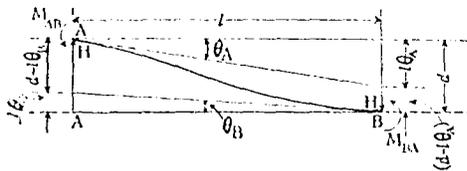


圖 43 (a)

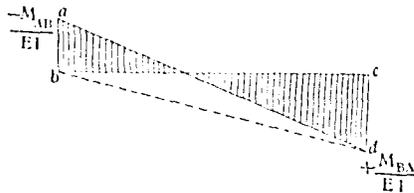


圖 43 (b)

圖 43 (a) 中左下角之  $A$ , 應改為  $A'$ .

一桿件之彈性曲線, 此桿件僅於兩端, 受外力之約束, 而於兩端之間, 並不受到任何外力之作用,  $A$  端之抵抗力率, 以  $M_{AB}$  表示之,  $B$  端之抵抗力率, 以  $M_{BA}$  表示之,  $A$  端彈性曲線之切線, 自原居之位置, 而改變其傾度, 此項傾度變更, 以  $\theta_A$  表示之, 而  $B$  端切線之傾度變更, 則以  $\theta_B$  表示之,  $A$  點原居之位置為  $A'$ , 此時所發生之撓度  $AA'$ , 以  $d$  表示之,  $B$  點與  $A$  端切線之距離, 等於  $(d - l\theta_A)$ .

按照第24節中之第二原則,  $(d-\theta_A)$  可作為等於 AB 桿件之  $\frac{M}{EI}$  圖對於 B 端之靜力率 此處所用之 E 及 I, 在 AB 全長之中, 皆作為常數, 若以 M 代表一截面左方之桿件一部份之抵抗力率, 則 A 端之 M, 等於  $-M_{AB}$ , 而 B 端之 M, 等於  $+M_{BA}$ . 圖 43 (b) 所示之  $\frac{M}{EI}$  圖, 可作為兩個三角形 bad 及 bcd 之代數的相 Algebraic Sum. 如是則  $\frac{M}{EI}$  圖對於 B 點之靜力率, 等於下列兩合數之相. 此兩合數, 一為三角形 bad 面積, 乘其重心之距離 [即  $\frac{3}{8}l$ ], 一為三角形 bcd 面積, 乘其重心之距離 [即  $\frac{3}{8}l$ ], 故得

$$d-\theta_A = -\frac{M_{AB} \cdot l^2}{3EI} + \frac{M_{BA} \cdot l^2}{6EI} \dots\dots\dots (87)$$

又由第 24 節中之第一原則, 而知  $\theta_B - \theta_A$  等於 AB 桿件之  $\frac{M}{EI}$  圖之面積, 即等於 bad 及 bcd 兩面積之代數的相, 故得

$$\theta_B - \theta_A = -\frac{M_{AB} \cdot l}{2EI} + \frac{M_{BA} \cdot l}{2EI} \dots\dots\dots (88)$$

合併 (87) 及 (88) 兩式, 而消去  $M_{BA}$ , 並令  $\frac{l}{7} = K$ ,  $\frac{d}{l} = R$ , 即得

$$M_{AB} = 2EK(2\theta_A + \theta_B - 3R) \dots\dots\dots (89)$$

又若合併(87)及(88)兩式, 而消去  $M_{AB}$ , 即得

$$M_{BA} = 2EK(2\theta_B + \theta_A - 3R) \dots\dots\dots (90)$$

(89) 及 (90) 兩式中各數量之正負號, 與各該數量自身之方向無關 故此兩式實係通用於一般之公式, 無論  $\theta_A$ ,  $\theta_B$ , R 之方向如何, 祇須按照上述通用方法定其正負號, 即可由 (89) 及 (90) 兩式, 求得此二變率之方向及大小,  $M_{AB}$  係 AB 桿件在 A 端作用之抵抗力率, 其如上述, 但 AB 對於 A 處支點所施之變率 (或力率), 則與  $M_{AB}$  大小相等而方

向相反, AB 兩點不必為該桿件之支點, 而可為其全長中之任何兩點, 但此兩點之間, 該桿件必須不受任何荷重耳。

(89) 及 (90) 兩式, 係基本的方程式, 並可以文字表示之如下, 凡任何桿件之不受荷重者, 其任一端之轉率, 必等於以  $2EK$  乘下開之數量, 此數量為此端傾度變更之倍數, 加以彼端傾度變更數, 再減去撓度對於長度比率之三倍。  $E$  為該資料之彈性係數,  $K$  為惰性率對於桿長之比率。

27. 桿件兩端受約束, 其間並受任何荷重, 圖 44 (a) 之 AB 線, 表示



圖 44 (a)

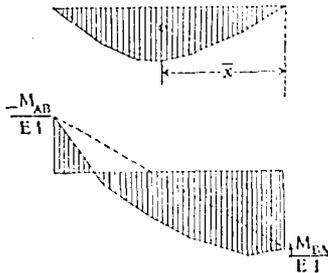


圖 44 (b) (F)

圖 44 (c) (F)

圖 44 (a) 中左下角之  $A$ , 應改為  $A'$ 。

該桿件之彈性曲線, 與圖 43 (a) 同, 但受有若干荷重之作用, A, B 兩端之轉率, 傾度, 撓度, 皆與圖 43 (a) 相似, 但其  $\frac{M}{EI}$  圖, 則因受有荷重而與之不同,  $E$  及  $I$  仍作為常數, 按照久經習知之力學原則, 欲得圖 44 (c) 之  $\frac{M}{EI}$  圖, 可將簡梁 Simple Beam 受有同一荷重者之  $\frac{M}{EI}$  圖 [如圖 44 (b) 所示] 疊置於圖 43 (b) 之  $\frac{M}{EI}$  圖之上, 此即將任何截面之轉率, 作代數的相加也, 設以  $F$  代表簡梁  $\frac{M}{EI}$  圖 [即圖 44 (b)] 之面積, 以  $\bar{x}$  代表此圖重心與 B 點之橫平距離, 仍按照上法, 利用第 24 節中之兩原則, 而得下列二式。

$$d - l\theta_A = -\frac{M_{AB}l^2}{3EI} + \frac{M_{BA}l^2}{6EI} - \frac{F \cdot \bar{x}}{EI} \dots\dots\dots (91)$$

$$\theta_B - \theta_A = -\frac{M_{AB}l}{2EI} + \frac{M_{BA}l}{2EI} - \frac{F}{EI} \dots\dots\dots (92)$$

合併(91)及(92)式, 並消去  $M_{BA}$ , 且仍令  $\frac{l}{l} = K$ ,  $\frac{d}{l} = R$ , 則得

$$M_{AB} = 2EK(2\theta_A + \theta_B - 3R) - \frac{2F}{l^2}(3\bar{x} - l) \dots\dots\dots (93)$$

若合併(91)及(92)兩式, 而消去  $M_{AB}$ , 則得

$$M_{BA} = 2EK(2\theta_B + \theta_A - 3R) + \frac{2F}{l^2}(2l - 3\bar{x}) \dots\dots\dots (94)$$

(93)及(94)兩式, 較之(89)及(90)兩式, 完全相同, 惟右方多一項耳, 此等添加之項, 與該桿件之撓角(即傾度)及撓度, 並無關係, 惟隨該桿件所受之荷重而異, 如將該桿件視作一固定梁 Fixed Beam, 其兩端支點居於同一高度, 則該兩端之撓角撓度皆等於零[即  $\theta_A = \theta_B = R = 0$ ], 如是則此等添加之末項, 即係該固定梁兩端之抵抗力率, 故就一般而言, 桿件兩端之間, 若受有任何荷重, 其在任一端之抵抗力率, 可以下列兩者之代數的和表示之, 此兩者, 一為該桿件兩端間不受荷重時該端之抵抗力率, 如(89)及(90)兩式所示, 其又一為同一徑間(一稱跨度 Span)之固定梁, 於承受同一荷重時, 該端之抵抗力率。

若以  $C$  代表固定梁端[其兩支點居於同一高度]之抵抗力率, 並於右下角, 附綴兩個字母, 與彎率  $M$  之所附綴者相似, 則(93)及(94)兩式, 可改書如下列之通用式。

$$M_{AB} = 2EK(2\theta_A + \theta_B - 3R) - C_{AB} \dots\dots\dots (95)$$

$$M_{BA} = 2EK(2\theta_B + \theta_A - 3R) + C_{BA} \dots\dots\dots (96)$$

此係一般的撓角撓度方程式，適用於任何荷重，並適用於桿端之受有任何約束。

常數  $C$  之正負號，可按下法決定之，凡在一固定梁中，梁端抵抗力率之號，與外力力率之號適相反，例如圖 44，外力對於  $A$  端之力率，係順鐘針方向而旋轉，則抵抗力率， $C_{AB}$ ，逆鐘針方向而旋轉，即必為負號，又如外力對於  $B$  端之力率，係逆鐘針方向而旋轉，則  $C_{BA}$  順鐘針方向而旋轉，即必為正號。若所受之荷重，不向下而向上，則  $C_{AB}$  及  $C_{BA}$  之號，適與上述者相反，正負號既定，則  $C$  僅為一個數字而已。



圖 45

上文已云，(95) 及 (96) 兩式，適用於桿端之受有任何約束，圖 45 所示者，為桿件之一端  $A$ ，受有約束，其另一端  $B$  則為樞結點，此即  $B$  端之撓率等於零也，如是則 (95) 及 (96) 兩式成爲

$$M_{AB} = 2EK(2\theta_A + \theta_B - 3R) - C_{AB}$$

$$0 = 2EK(2\theta_B + \theta_A - 3R) + C_{BA}$$

合併此兩式，而消去  $\theta_B$ ，則得

$$M_{AB} = EK(3\theta_A - 3R) - \left( C_{AB} + \frac{C_{BA}}{2} \right) \dots\dots\dots (97)$$

若有一梁， $A$  端固定， $B$  端樞結，而  $A, B$  兩支點居於同一高度，則 (97) 式中之  $\theta_A$  及  $R$ ，皆等於零，而  $-\left( C_{AB} + \frac{C_{BA}}{2} \right)$  一項，即代表  $A$  端之抵抗力率，不問其所受荷重如何，皆可易於算得之。

按照同法，若桿件  $AB$  之一端  $B$  固定，而其另一端  $A$  為樞結者，可得

$$M_{BA} = EK(3\theta_B - 3R) + \left(C_{BA} + \frac{C_{AB}}{2}\right) \dots \dots \dots (98)$$

爲稱述便利起見，可以  $H_{AB}$  代表  $\left(C_{AB} + \frac{C_{BA}}{2}\right)$ ，以  $H_{BA}$  代表  $\left(C_{BA} + \frac{C_{AB}}{2}\right)$ ，如是則 (97) 及 (98) 兩式，可改書如下列之通用式。

$$M_{AB} = EK(3\theta_A - 3R) - H_{AB} \dots \dots \dots (99)$$

$$M_{BA} = EK(3\theta_B - 3R) + H_{BA} \dots \dots \dots (100)$$

H 項代表一梁固定端之抵抗力率，其又一端以一樞與支點相聯結，而兩端支點居於同一高度，H 號之決定，與決定 (95) 及 (96) 兩式中之 C 號相同，此即 H 之號，必與外力對於固定端之力率之號相反，若外力之作用，係向上而不向下，則 (99) 及 (100) 兩式中，H 之號，適與上述者相反。

28. 承受特種荷重時，C 及 H 之數值。圖 46 所示者，爲兩端

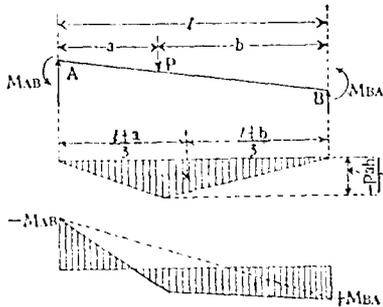


圖 46

受有約束之桿件，兩端之間，承受一個集中荷重 P，距 A 端爲 a，距 B 端爲 b，其簡梁之力率圖中之最大縱距爲  $\frac{-Pab}{l}$ ，其面積爲  $F = \frac{-Pab}{2}$ ，該面積重心與 B 端之距離，爲  $\bar{x} = \frac{l+b}{3}$ 。以此諸值，代入 (93) 及 (94) 兩式之末項，即得

$$-\frac{2F}{l^2}(3\bar{x}-l) = \frac{-Pab^2}{l^2} = -C_{AB} \dots \dots \dots (101)$$

$$\frac{2F}{l^2}(2l-3\bar{x}) = \frac{+Pa^2b}{l^2} = +C_{BA} \dots \dots \dots (102)$$

若該桿件之 B 端，為樞結者而非受約束者，則  $H_{AB}$  之值，可由 (97) 式求得之如下。

$$-\left(C_{AB} + \frac{C_{BA}}{2}\right) = \frac{-Pab}{2l^2}(l+b) = -H_{AB} \dots \dots \dots (103)$$

若該桿件之 A 端，為樞結者而非受約束者，則  $H_{BA}$  之值，亦可由 (98) 式求得之如下。

$$+\left(C_{BA} + \frac{C_{AB}}{2}\right) = \frac{Pab(l+a)}{2l^2} = H_{BA} \dots \dots \dots (104)$$

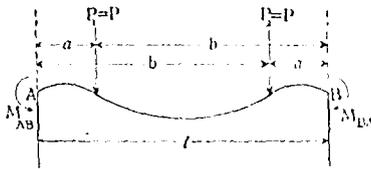


圖 47

又設有一桿件，其中心之左右，受有對稱的荷重，如圖 47 所示，如是則簡梁力率圖之重心，自必即在該桿件中心之下，易言之， $\bar{x} = \frac{l}{2}$ ，以此代入 (93) 及 (94) 兩式，即得

$$-\frac{2F}{l^2}(3\bar{x}-l) = -\frac{F}{l} = -C_{AB} \dots \dots \dots (105)$$

$$+\frac{2F}{l^2}(2l-3\bar{x}) = +\frac{F}{l} = +C_{BA} \dots \dots \dots (106)$$

若 B 端為樞結者，則由 (97) 式而得

$$-\left(C_{AB} + \frac{C_{BA}}{2}\right) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{F}{l} = -H_{AB} \dots \dots \dots (107)$$

若 A 端爲樞結者，則由 (98) 式而得

$$+ \left( C_{BA} + \frac{C_{AY}}{2} \right) = + \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{l} = + H_{BA}, \dots \dots \dots (108)$$

上式中之  $\frac{F}{l}$ ，即簡梁力率圖中之平均縱距，Average Ordinate.

由上述諸例觀之，C 及 H 之值，可由 (93)，(94)，(97)，(98) 等式求得之。

凡桿件之承受一個集中荷重者，(圖 46)， $C_{AB} = \frac{Pab^2}{l^2}$ ，而  $C_{BA} = \frac{Pa^2b}{l^2}$ ，  
 其如 (101) 及 (102) 兩式所示，若承受若干個集中荷重，則  $C_{AB}$  自必爲  $\Sigma \frac{Pab^2}{l^2}$ ，而  $C_{BA}$  自必爲  $\Sigma \frac{Pa^2b}{l^2}$ 。

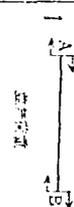
若桿件所承受者，爲分佈荷重，亦可適用上法，但須求其積分耳。

設  $w$  爲每長一單位之荷重，則  $C_{AB} = \int \frac{wx(l-x)^2 dx}{l^2}$ ，又  
 $C_{BA} = \int \frac{wx^2(l-x) dx}{l^2}$ ，此兩個積分之上下限，隨所受分佈荷重之起訖點而決定之。

若  $w$  爲變數而非常數，祇須知悉  $w$  如何隨  $x$  而變更，[即  $w = f(x)$ ]，以此代入上式，仍可求得  $C_{AB}$  及  $C_{BA}$  之值。

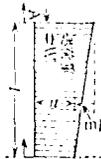
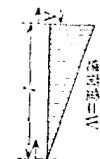
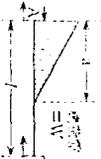
茲將由各種荷重而求得之 C 及 H 之值，列入表 5 及表 6 如下，以便實際之應用，[若有特殊桿件，或尋常桿件，受有特殊荷重，不能用常法以求得其  $C_{AB}$  及  $C_{BA}$  之值，可用壓柱比擬法以求得之，參閱本書第十九章。]

表 5

細 部 符 號	荷重情形	$C_{AB}$	$C_{BA}$	$H_{AB}$	$H_{BA}$
1		0	0	0	0
2		$\frac{Pab^2}{l^2}$	$\frac{Pa^2b}{l^2}$	$\frac{Pab}{2l^2}(l+b)$	$\frac{Pab}{2l^2}(l+a)$
3		$\frac{1}{l^2} \sum Pab^2$	$\frac{1}{l^2} \sum Pa^2b$	$\frac{1}{2l^2} \sum Pab(l+b)$	$\frac{1}{2l^2} \sum Pab(l+a)$
4		$\frac{1}{l^2} \int_b^d yx^2(l-x)dx$	$\frac{1}{l^2} \int_b^d yx(l-x)^2dx$	$\frac{1}{2l^2} \int_b^d yx(l^2-x^2)dx$	$\frac{1}{2l^2} \int_b^d yx(l-x)(2l-x)dx$
5		$\frac{W}{12l^2} \times$ $[d^2(4l-3d)-b^2(4l-3b)]$	$\frac{W}{12l^2} \times$ $[a^2(4l-3a)-c^2(4l-3c)]$	$\frac{W}{8l^2} (d^2-b^2) \times$ $(2l^2-b^2-d^2)$	$\frac{W}{8l^2} (a^2-c^2) \times$ $(2l^2-a^2-c^2)$

(此表未完, 續見下頁)

表 5 (續)

 $\frac{W^2 a}{12 l^2} (3a^2 - 8al + 6l^2)$	$\frac{W^2 a^2}{12 l^2} (4l - 3a)$	$\frac{W^2 a}{8 l^2} (2l - a)^2$	$\frac{W^2 a}{8 l^2} (2l^2 - a^2)$
 $\frac{l^2}{60} (5u + 3ml)$	$\frac{l^2}{60} (5u + 2ml)$	$\frac{l^2}{120} (15u + 8ml)$	$\frac{l^2}{120} (15u + 7ml)$
 $\frac{W^2 l}{10}$	$\frac{W^2 l}{15}$	$\frac{2}{15} W^2 l$	$\frac{7}{60} W^2 l$
 $\frac{W^2 a}{30 l^2} (3a^2 - 10al + 10l^2)$	$\frac{W^2 a^2}{30 l^2} (5l - 3a)$	$\frac{W^2 a}{60 l^2} (3a^2 - 15al + 20l^2)$	$\frac{W^2 a}{60 l^2} (10l^2 - 3a^2)$
 $\frac{F^2 a}{l}$	$\frac{F}{l}$	$\frac{3}{2} \frac{F}{l}$	$\frac{3}{2} \frac{F}{l}$

\*  $\frac{F}{l}$  之值，可由表 6 中求得之

編號	荷重情形	變率圖	$C_{AB} = C_{BA} = \frac{F}{7}$	$H_{AB} = H_{BA} = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{l}$
1			$\frac{1}{8} \cdot Pl$	$\frac{3}{16} \cdot Pl$
2			$\frac{Pa}{l} (l-a)$	$\frac{3}{2} \cdot \frac{Pa}{l} (l-a)$
3			$\frac{2}{9} Pl$	$\frac{1}{3} \cdot Pl$
4			$\frac{5}{16} \cdot Pl$	$\frac{15}{32} \cdot Pl$
5			$\frac{1}{12} Wl$	$\frac{1}{8} \cdot Wl$
6			$\frac{Wa}{12l} (3l-2a)$	$\frac{Wa}{8l} (3l-2a)$
7			$\frac{W}{12l} (l^2 + 2al - 2a^2)$	$\frac{W}{8l} (l^2 + 2al - 2a^2)$
8			$\frac{5}{48} \cdot Wl$	$\frac{5}{32} \cdot Wl$
9			$\frac{1}{16} Wl$	$\frac{3}{32} \cdot Wl$
10			$\frac{1}{10} \cdot Wl$	$\frac{3}{20} \cdot Wl$

## 第六章 剛構解法之通則

## GENERAL PROCEDURE IN THE ANALYSIS OF RIGID STRUCTURES.

29. 假定各項及不靜定未知量之決定。凡利用撓角撓度法以推算剛構，應先承認下列各假定。

(a) 桿件與桿件相聯結之處，完全為剛結點。[例如 AB 與 BC 兩桿件，在 B 點相聯結，B 點若因外力作用而旋轉，則 AB 桿在 B 點之撓角  $\theta_B$ ，必等於 BC 桿在 B 點之撓角  $\theta_B$ ，不獨大小相等，且其旋轉方向，亦必相同，如有兩個以上之桿件，同在一個結點相遇，各桿件在該結點之撓角，亦必相等，且其方向亦相同。]

(b) 各桿件因受軸向力而生之長度變更等於零。

(c) 各桿件因受剪截力而生之變形等於零。

(d) 各徑間因受撓屈作用而生之長度變更等於零。

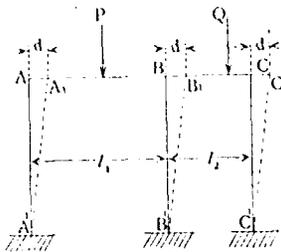


圖 48

設如圖48， $A'$ ， $B'$ ， $C'$ ，均係固定點，故  $\theta_{A'}$ ， $\theta_{B'}$ ， $\theta_{C'}$ ，必皆等於零，而  $\theta_A$ ， $\theta_B$ ， $\theta_C$  皆為未知量，又此架構本身既不對稱，所受荷重亦非對稱，故 A, B, C, 各結點，必向側面偏欹。此三結點之側欹量 Side Sway 必相等，設令此項側欹量為  $d$ ，如是則共有四個未知量，

即  $\theta_A$ ， $\theta_B$ ， $\theta_C$ ，及  $d$  是也，如能求得四個獨立方程式，式中含有此四個未知量，則即可用聯立解法，以算得此四個未知量之值。

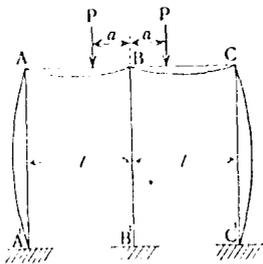


圖 49

又設如圖 49, 架構及荷重, 皆為對稱的, 則不應發生任何側歛, 即  $d=0$ ,  $\theta_B$  亦必等於零, 而 A 點之撓角  $\theta_A$ , 必與 C 點之撓角  $\theta_C$ , 大小相等而方向相反, 即  $\theta_A = -\theta_C$ , 如是則祇有一個未知量  $\theta_A$ , 如能求得一個方程式, 式中含有  $\theta_A$  (或  $\theta_C$ ), 則即可算得此未知量之值。

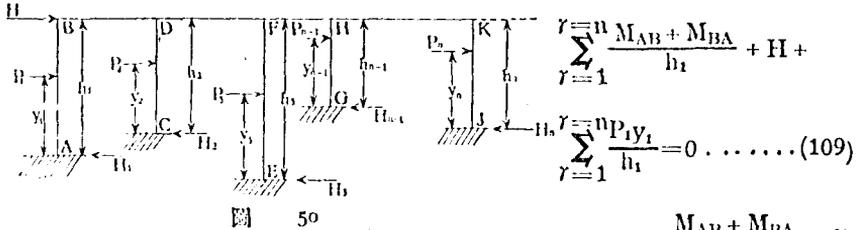
又若圖 48 之架構, 不止一層, 而共有  $p$  層, 則必有  $p$  個不相等的側歛量,  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_p$ , 即每層各有一個側歛量, (皆係未知量)。

今設有一結構, 共有  $m$  個桿件,  $n$  個結點 (連同各支點在內, 支點不必限於兩個, 而可為任何個, 且各結點亦不必盡為剛結點, 其中可有若干個為樞結點, 或簡承結點,) 且共有  $p$  層, 如是則可利用 (95), (96), (99), (100) 等式, 得各桿件兩端撓率之值, 其中皆含有  $\theta$  及  $d$  等未知量。因  $R = \frac{d}{l}$  故, 今共有  $m$  個桿件, 故可得  $2m$  個撓率 (即  $M$ ) 之值。又因每一結點各有其撓角  $\theta$ , 故共有  $n$  個  $\theta$ , 皆為未知量, 又因此結構共為  $p$  層, 故更有  $p$  個  $d$ , 即  $p$  個  $R$ , 亦皆為未知量, 如能求得此諸未知量, 則各個撓率之值, 即可由是而算得, 為推算此  $(n+p)$  個未知量起見, 必須作成  $(n+p)$  個方程式, 然後用聯立解法, 分別求得各個  $\theta$  及  $R$  之數值, 欲作成此  $(n+p)$  個方程式, 必須利用下列兩個主要條件。

(甲) 結點平衡條件: 在任一結點處, 假設有  $q$  個桿件, 同遇於該點, 因該結點於旋轉  $\theta$  角之後, 不再旋轉, 故各個桿件在該結點之撓率之代數的和, 必等於零。〔此諸撓率, 或正或負, 故相加等於零〕。如是則每一結點, 可作成一個方程式, 今共有  $n$  個結點, 故可作成  $n$  個獨立方程式。

(乙) 層平衡條件.

如圖50, 因  $\sum X=0$ , 故



$$\sum_{r=1}^n \frac{M_{AB} + M_{BA}}{h_r} + H + \sum_{r=1}^n \frac{P_r y_r}{h_r} = 0 \dots \dots (109)$$

上式中之  $\frac{M_{AB} + M_{BA}}{h_r}$  及其相似之項, 為 AB 等柱

中之剪截力 (參閱第九章) 亦即等於  $H_1, H_2, \dots, H_n$ .  $H$  為該層以上各層所受橫平外力之代數的和, 傳達於該層之頂部者.

若各立柱之高相同, 則  $h_1=h_2=h_3=\dots=h_n=h$ , 如是而得

$$\sum(M_{AB} + M_{BA}) + H.h + \sum P y = 0. \dots \dots (110)$$

若中間並無  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  等荷重, 則

$$\sum(M_{AB} + M_{BA}) + H.h = 0 \dots \dots (111)$$

又若並無橫平剪力  $H$ , 則

$$\sum(M_{AB} + M_{BA}) = 0 \dots \dots (112).$$

由此平衡條件, 而知每一層皆可作成一個方程式, 今共有  $p$  層, 故共可作成  $p$  個獨立方程式.

合(甲)(乙)兩條件, 共可作成  $(n+p)$  個方程式, 由此諸式, 用聯立解法, 必可求得  $n$  個  $\theta$  及  $p$  個  $R$  之數值, 以此數值代入原有各彎率式, 即可算得各彎率之數值.

於實施上述通法之時, 有須注意者若干點, 茲述如下.

- 
- (a) 若桿件對於其巨大承托物，為完全固定者，則各該支點處之  $\theta=0$ .
- (b) 在樞結點或簡承結點處，各該桿件端之變率，必等於零.
- (c) 若架構及荷重，均為對稱的，而其徑間 Spans 之數為偶數，則居於對稱軸上各桿件兩端之撓角  $\theta$ ，必等於零.
- (d) 若架構及荷重，均為對稱的，則凡在對稱軸左右，居於對稱位置之兩結點之撓角，大小相同，而正負異號.

第七章 樞足架構之解法。

ANALYSIS OF FRAMES WITH HINGED LEGS.

30. 樞足異高矩形架構受有垂直荷重。如圖 51, 由 (95),

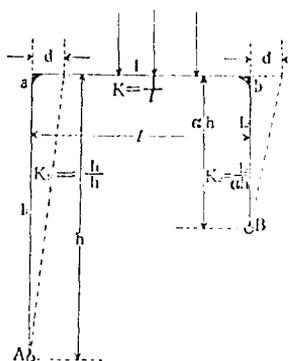


圖 51

(96), (99), (100) 等式, 可得下列諸式 [因 aA 桿及 bB 桿, 並不荷重, 故  $M_{aA}$  及  $M_{bB}$  式中無 C 或 H 項, 又因 A 及 B 皆為樞結點, 故  $M_{AA}$  及  $M_{BB}$  皆等於零.]

$$M_{aA} = 2EK_1(1.5\theta_a - 1.5R)$$

$$M_{ab} = 2EK(2\theta_a + \theta_b) - C_{ab}$$

$$M_{ba} = 2EK(2\theta_b + \theta_a) + C_{ba}$$

$$M_{bB} = 2EK_2(1.5\theta_b - 1.5R')$$

因 a 及 b 兩點之側移, 皆等於 d, 故

$$R = \frac{d}{h}, \quad R' = \frac{d}{\alpha h}, \quad \text{即 } R' = \frac{R}{\alpha}$$

$$\text{又 設令 } \frac{K}{K_1} = n, \quad \frac{K}{K_2} = m.$$

則上列四式, 可改書如下,

$$M_{ab} = 2EK(2\theta_a + \theta_b) - C_{ab} \dots \dots \dots (a)$$

$$n.M_{ab} = -n.M_{aA} = -2EK(1.5\theta_a - 1.5R) \dots \dots (b) \quad [\text{a 點平衡條件}]$$

$$M_{bB} = -M_{ba} = -2EK(2\theta_b + \theta_a) - C_{ba} \dots \dots (c) \quad [\text{b 點平衡條件}]$$

$$m.M_{bB} = 2EK(1.5\theta_b - 1.5\frac{R}{\alpha}) \dots \dots \dots (d)$$

又由層平衡條件，而得

$$\frac{M_{aA}}{h} + \frac{M_{bB}}{ah} = 0, \quad \text{即} \quad \frac{M_{bB}}{a} - M_{ab} = 0 \dots\dots\dots (e)$$

此諸方程式中，共有三個未知量，即  $\theta_a$ ,  $\theta_b$  及  $R$  是也。

由 (b), (c), (d) 三式中，消去  $\theta_a$  及  $\theta_b$ ，而得

$$2n.M_{ab} - M_{bB} (3 + 4m) = 3 C_{ba} + \frac{6EKR}{a} (2 + a) \dots\dots\dots (f)$$

又由 (a), (b), (d) 三式中，消去  $\theta_a$  及  $\theta_b$ ，而得

$$M_{ab} (3 + 4n) - 2m M_{bB} = -3 C_{ab} + \frac{6EKR}{a} (1 + 2a) \dots\dots\dots (g)$$

又由 (f), (g) 兩式中，消去  $R$  而得

$$\left. \begin{aligned} M_{aA} = -M_{ab} = -\frac{M_{bB}}{a} = \frac{H_{ab} + a H_{ba}}{1 + n + a + a^2 + a^2 m} \\ M_{bB} = -\frac{a(H_{ab} + a H_{ba})}{1 + n + a + a^2 + a^2 m} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (113)$$

若  $a=1$ ，[即該架構之兩足同高]，則

$$\left. \begin{aligned} M_{aA} = \frac{3(C_{ab} + C_{ba})}{2(3 + m + n)} \\ M_{bB} = -\frac{3(C_{ab} + C_{ba})}{2(3 + m + n)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (114)$$

又若立柱 aA 及立柱 bB 之剛率 Stiffness Ratio 相等，即  $m=n$ ，則

$$\left. \begin{aligned} M_{aA} = \frac{H_{ab} + a H_{ba}}{1 + a + a^2 + n(1 + a^2)} \\ M_{bB} = -\frac{a(H_{ab} + a H_{ba})}{1 + a + a^2 + n(1 + a^2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (115)$$

若荷重為對稱的，則由表 6 而得

$$\Pi_{ab} = \Pi_{ba} = \frac{3F^2}{2l}$$

以此代入(113)式，而得

$$\left. \begin{aligned} M_{aA} &= \frac{3F(1+a)}{2l(1+n+a+\alpha^2+a^2m)} \\ M_{bB} &= -\frac{3F a(1+a)}{2l(1+n+a+\alpha^2+a^2m)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (116)$$

若  $\alpha=1$ ,  $m=n$ , 則

$$\left. \begin{aligned} M_{aA} &= \frac{3(C_{ab} + C_{ba})}{2(3+2n)} \\ M_{bB} &= -\frac{3(C_{ab} + C_{ba})}{2(3+2n)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (117)$$

又若  $\alpha=1$ ,  $m=n=1$ , 則

$$\left. \begin{aligned} M_{aA} &= \frac{3}{10}(C_{ab} + C_{ba}) \\ M_{bB} &= -\frac{3}{10}(C_{ab} + C_{ba}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (118)$$

又若  $\alpha=1$ , 而荷重為對稱的，則

$$\left. \begin{aligned} M_{aA} &= \frac{3F}{(3+2n)l} \\ M_{bB} &= -\frac{3F}{(3+2n)l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (119)$$

例題一. 與第9節之例題一同,  $[a=1, m=n]$   $[n=0.75]$

$$\text{由 (117) 式而知 } M_{aA} = -M_{bB} = \frac{3(C_{ab} + C_{ba})}{2(3 + 2 \times 0.75)},$$

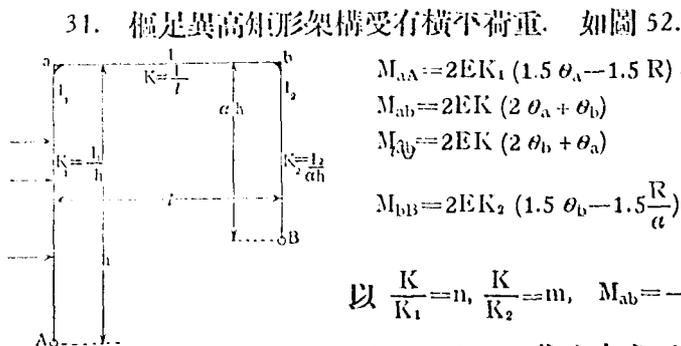
$$\text{由表 5 查得 } C_{ab} = \frac{Pab^2}{l^2}, \quad C_{ba} = \frac{Pa^2b}{l^2} \quad [a=700\text{cm}, b=300\text{cm}, l=1000\text{cm}, \\ P=5\text{t}]$$

$$\text{故得 } M_{aA} = -M_{bB} = \frac{3 \left[ \frac{5 \times 700 \times 300^2}{1000^2} + \frac{5 \times 700^2 \times 300}{1000^2} \right]}{2(3 + 2 \times 0.75)} = +350\text{t}\cdot\text{cm}$$

例題二. 與第9節之例題二同.  $[a=1, \text{荷重爲對稱的}]$

$$\text{由表 6 之第 5 號 } H_{ab} = H_{ba} = \frac{1}{8} \cdot Wl^2 = \frac{3F}{2l} \quad \text{故 } \frac{3F}{l} = \frac{1}{4} Wl^2$$

$$\text{由 (119) 式 而得 } M_{aA} = -M_{bB} = \frac{3F}{l} \times \frac{1}{3 + 2n} = \frac{1}{4} Wl^2 \times \frac{1}{3 + 2 \times 0.75} \\ = \frac{1}{4} \times \frac{1}{200} \times \frac{1000^2}{1} \times \frac{1}{4.5} = +277.8 \text{ t}\cdot\text{cm}$$



$$M_{aA} = 2EK_1 (1.5 \theta_A - 1.5 R) + H_{aA}$$

$$M_{ab} = 2EK (2 \theta_A + \theta_b)$$

$$M_{ba} = 2EK (2 \theta_b + \theta_A)$$

$$M_{bB} = 2EK_2 (1.5 \theta_b - 1.5 \frac{R}{a})$$

$$\text{以 } \frac{K}{K_1} = n, \quad \frac{K}{K_2} = m, \quad M_{ab} = -M_{aA},$$

$$M_{ba} = -M_{bB}, \quad \text{代入上式, 而得}$$

圖 52

$$n M_{aA} = 2EK (1.5 \theta_a - 1.5 R) + n H_{aA} \dots\dots\dots (a)$$

$$M_{aA} = -2EK (2 \theta_a + \theta_b) \dots\dots\dots (b)$$

$$M_{bB} = -2EK (2 \theta_b + \theta_a) \dots\dots\dots (c)$$

$$m M_{bB} = 2EK (1.5 \theta_b - 1.5 \frac{R}{\alpha}) \dots\dots\dots (d)$$

設以  $M_A$  代表各個橫平荷重 (即各外力) 對於 A 點之力率總和。

則由層平衡條件而得  $M_{aA} + \frac{M_{bB}}{\alpha} + M_A = 0 \dots\dots\dots (e)$

故  $-2(a) - 3(c) - 4(d)$ , 可得

$$2n M_{aA} + (3 + 4m) M_{bB} = 2n H_{aA} - \frac{6EK R}{\alpha} (2 + \alpha) \dots\dots\dots (f)$$

又  $-4(a) - 3(b) - 2(d)$ , 可得

$$(3 + 4n) M_{aA} + 2m M_{bB} = 4n H_{aA} - \frac{6EK R}{\alpha} (1 + 2\alpha) \dots\dots\dots (g)$$

由 (f), (g) 兩式中, 消去 R, 而得

$$\left. \begin{aligned} M_{aA} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2n H_{aA} - \alpha(1 + 2\alpha + 2\alpha m) M_A}{1 + n + \alpha + \alpha^2 + \alpha^2 m} \\ M_{bB} &= -\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{2n H_{aA} + (2 + 2n + \alpha) M_A}{1 + n + \alpha + \alpha^2 + \alpha^2 m} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (120)$$

若  $m=n$ , 則

$$\left. \begin{aligned} M_{aA} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2n H_{aA} - \alpha(1 + 2\alpha + 2\alpha n) M_A}{1 + n + \alpha + \alpha^2 + \alpha^2 n} \\ M_{bB} &= -\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{2n H_{aA} + (2 + 2n + \alpha) M_A}{1 + n + \alpha + \alpha^2 + \alpha^2 n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (121)$$

若  $m=n=1$

$$\left. \begin{aligned} M_{aA} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2H_{aA} - a(1+4a)M_A}{2+a+2a^2} \\ M_{bB} &= -\frac{a}{2} \cdot \frac{2H_{aA} + (4+a)M_A}{2+a+2a^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(122)$$

若中間並無荷重，惟頂部有單一橫平荷重  $P$ ，則

$$H_{aA}=0, \quad \text{而} \quad M_A=Ph, \quad \text{故得}$$

$$\left. \begin{aligned} M_{aA} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{a(1+2a+2am) \cdot P \cdot h}{1+n+a+a^2+a^2m} \\ M_{bB} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{a(2+2n+a) \cdot P \cdot h}{1+n+a+a^2+a^2m} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(123)$$

若該架構之兩足同高，則祇須以  $a=1$ ，代入上列諸式之中，而得較簡之式。

例題一 與第 10 節之例題一同。 [ $a=1$ ， $m=n=1.5$ ， $M_A=5 \times 300=1500 \text{ t}\cdot\text{cm}$ ，]

$$\text{由 (121) 式，而得 } M_{aA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n \cdot H_{aA} - (3+2n) \cdot M_A}{3+2n} \quad [3+2n=6]$$

$$\text{由表 5 之第 2 號，查得 } H_{aA} = \frac{5 \times 400 \times 300}{2 \times 700^2} (700+300) = 612.24 \text{ t}\cdot\text{cm}.$$

$$\text{故 } M_{aA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \times 1.5 \times 612.24 - 6 \times 1500}{6} = -596.94 \text{ t}\cdot\text{cm}.$$

$$\begin{aligned} M_{bB} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2n \cdot H_{aA} + (3+2n) \cdot M_A}{3+2n} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2 \times 1.5 \times 612.24 + 6 \times 1500}{6} \\ &= -903.06 \text{ t}\cdot\text{cm}. \end{aligned}$$

例題二 與第 10 節之例題二同.  $[M_A = \frac{0.01 \times 700^2}{2} = 2450 \text{ t}\cdot\text{cm}^2]$

由表 6 之第 5 號, 查得.  $H_{AA} = \frac{1}{8} \times 0.01 \times 700^2 = 612.5 \text{ t}\cdot\text{cm}.$

由(121)式, 而得  $M_{AA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \times 1.5 \times 612.5 - 6 \times 2450}{6} = -1,071.9 \text{ t}\cdot\text{cm}.$

$$M_{BB} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2 \times 1.5 \times 612.5 + 6 \times 2450}{6} = -1,378.1 \text{ t}\cdot\text{cm}.$$

例題三 與第 10 節之例題三同.

設先令左方受等佈荷重, 則  $M_{AA} = -1,071.9 \text{ t}\cdot\text{cm}.$   $M_{BB} = -1,378.1 \text{ t}\cdot\text{cm}.$

見上例題二,

設再令右方受等佈荷重, 則  $M_{AA} = +1,378.1 \text{ t}\cdot\text{cm}.$   $M_{BB} = +1,071.9 \text{ t}\cdot\text{cm}.$

故左右兩方同時荷重, 則.  $M_{AA} = -1,071.9 + 1,378.1 = +306.2 \text{ t}\cdot\text{cm}.$

$$M_{BB} = -1,378.1 + 1,071.9 = -306.2 \text{ t}\cdot\text{cm}.$$

32. 二層三徑間樞足矩形架構受有垂直荷重. 如圖 53.

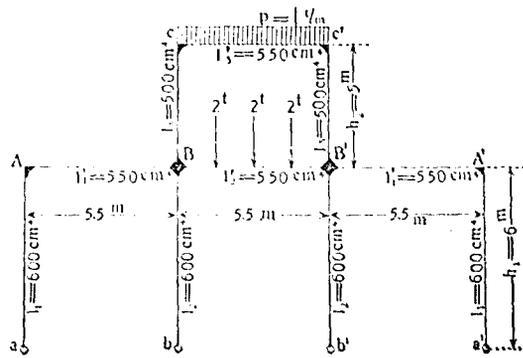


圖 53

$$\frac{I_1}{h_1} = \frac{I_2}{h_1} = \frac{I_3}{h_2} = K_1 = K_2 = K_3 = 1 \text{ cm}^3$$

$$\frac{I_1'}{l} = \frac{I_2'}{l} = \frac{I_3'}{l} = K_1' = K_2' = K_3' = 1 \text{ cm}^3.$$

因架構及荷重，均為對稱的，故祇有三個未知量  $\theta_A$ ， $\theta_B$ ，及  $\theta_C$ ，

$$\text{且 } \theta_A = -\theta_{A'}, \quad \theta_B = -\theta_{B'}, \quad \theta_C = -\theta_{C'}$$

$$\text{就 A 點言之，} \quad M_{AA} = 2EK_1(1.5\theta_A)$$

$$M_{AB} = 2EK_1'(2\theta_A + \theta_{B'})$$

$$\text{因 } \sum M_A = 0, \quad \text{故 } \theta_A(2K_1' + 1.5K_1) + K_1'\theta_{B'} = 0$$

$$\text{設令 } P_A' = 2K_1' + 1.5K_1, \quad \text{則 } P_A'\theta_A + K_1'\theta_{B'} = 0 \dots\dots\dots(a)$$

就 B 點言之，

$$M_{BA} = 2EK_1'(2\theta_B + \theta_A)$$

$$M_{BB} = 2EK_2(1.5\theta_B)$$

$$M_{BB'} = 2EK_2'(\theta_{B'}) - C_{BB'}$$

$$M_{BC} = 2EK_3(2\theta_B + \theta_C)$$

$$\text{因 } \sum M_B = 0, \quad \text{故 } \theta_B(2K_1' + 2K_3 + K_2' + 1.5K_2) + K_1'\theta_A + K_3\theta_C = \frac{C_{BB'}}{2E}.$$

$$\text{設令 } P_B' = 2K_1' + 2K_3 + K_2' + 1.5K_2, \quad P_{BB'} = \frac{C_{BB'}}{2E},$$

$$\text{則 } P_B'\theta_B + K_1'\theta_A + K_3\theta_C = P_{BB'} \dots\dots\dots(b)$$

就 C 點言之，

$$M_{CB} = 2EK_3(2\theta_C + \theta_B)$$

$$M_{CC'} = 2EK_3'(\theta_C) - C_{CC'}$$

$$\text{因 } \sum M_C = 0, \quad \text{故 } \theta_C(2K_3 + K_3') + K_3\theta_B = \frac{C_{CC'}}{2E}$$

設令  $P'_C = 2K_3 + K_3'$ ,  $P_{CC}' = \frac{C_{CC}'}{2E}$ .

則  $P_C \theta_C + K_3 \theta_B = P_{CC}' \dots\dots\dots (c)$

由圖 53 而得

$P_A' = 2K_1' + 1.5K = 3.5 \text{ cm}^3$

$P_B' = 2(K_1' + K_3 + K_2 + K_2') - K_2' - 0.5K_2 = 6.5 \text{ cm}^3$

$P_C' = 2K_3 + K_3' = 3 \text{ cm}^3$ .

又由表 6. 而得  $P_{BB}' = \frac{C_{BB}'}{2E} = \frac{5Pl}{16 \cdot 2E} = \frac{5Pl}{32E} = \frac{5 \times 2 \times 5.5}{32E} \times 100 = 172 E^{-1} \text{ t} \cdot \text{cm}.$

$P_{CC}' = \frac{C_{CC}'}{2E} = \frac{Wl}{24E} = \frac{1 \times (5.5)^2 \times 100}{24E} = 126 E^{-1} \text{ t} \cdot \text{cm}.$

以此諸值. 代入 (a), (b) (c) 三式, 即得

$3.5 \theta_A + \theta_B = 0 \dots\dots\dots (d)$

$\theta_C + \theta_A + 6.5 \theta_B = 172 E^{-1} \dots\dots\dots (e)$

$3 \theta_C + \theta_B = 126 E^{-1} \dots\dots\dots (f)$

按聯立法, 解此三式, 而得

$\theta_A = -6.32 E^{-1}$

$\theta_B = +22.1 E^{-1}$

$\theta_C = +34.64 E^{-1}$

以此諸  $\theta$  之值, 代入前列之撓角撓度方程式, 而得

$M_{AA} = 2 \times 1(-1.5 \times 6.32) = -18.96 \text{ t} \cdot \text{cm}.$

$M_{AB} = 2 \times 1(-2 \times 6.32 + 22.1) = +18.92 \text{ t} \cdot \text{cm}.$

$M_{BA} = 2 \times 1(2 \times 22.1 - 6.32) = +75.76 \text{ t} \cdot \text{cm}.$

$M_{BB} = 2 \times 1(1.5 \times 22.1) = +66.30 \text{ t} \cdot \text{cm}.$

$M_{BB}' = 2 \times 1(22.1) - 2 \times 172 = -299.8 \text{ t} \cdot \text{cm}.$

$M_{BC} = 2 \times 1(2 \times 22.1 + 34.64) = +157.7 \text{ t} \cdot \text{cm}.$

}  $\Sigma M_A$  約等於零.

}  $\Sigma M_B$  約等於零.

$$\begin{aligned}
 M_{CB} &= 2 \times 1(2 \times 34.64 + 22.1) = +182.76 \text{ t}\cdot\text{cm} \\
 M_{CC'} &= 2 \times 1(34.64) - 2 \times 126 = -182.72 \text{ t}\cdot\text{cm} \\
 M_{aA} &= M_{bB} = 0
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} M_{CB} \\ M_{CC'} \\ M_{aA} \end{aligned}} \right\} \Sigma M_C \text{ 約等於零.}$$

本節所舉之例題，足以標示撓角撓度解法之一斑，其他實際問題，如多層多徑間樞足矩形架構之受有不對稱的橫平及垂直荷重者，皆可做照本節所述之法，以求得各桿件在各結點處之撓率，讀者舉一反三可也。

第八章 定足架構及閉合架構之解法  
 ANALYSES OF FRAMES WITH FIXED LEGS AND  
 OF CLOSED FRAMES.

33. 定足矩形架構受有垂直荷重。如圖 54。

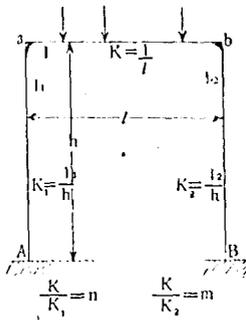


圖 54

$$\begin{aligned}
 M_{ab} &= 2EK(2\theta_a + \theta_b) - C_{ab}, \\
 M_{aA} &= 2EK_1(2\theta_a - 3R) \\
 M_{Aa} &= 2EK_1(\theta_a - 3R) \\
 M_{bB} &= 2EK(2\theta_b + \theta_a) + C_{ba} \\
 M_{bB} &= 2EK_2(2\theta_b - 3R) \\
 M_{Bb} &= 2EK_2(\theta_b - 3R)
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \text{因 } \theta_A = 0 \\ \text{又因荷重及架構爲不對} \\ \text{稱的, 故 } R \neq 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{以 } M_{ab} = -M_{aA}, \quad M_{bB} = -M_{Bb}, \quad \frac{K}{K_1} = n, \quad \frac{K}{K_2} = m$$

代入上列諸式, 即得

$$n \cdot M_{ab} = -2EK(2\theta_a - 3R) \dots \dots \dots (a)$$

$$M_{ab} = 2EK(2\theta_a + \theta_b) - C_{ab} \dots \dots \dots (b)$$

$$M_{bB} = -2EK(2\theta_b + \theta_a) - C_{ba} \dots \dots \dots (c)$$

$$m \cdot M_{bB} = 2EK(2\theta_b - 3R) \dots \dots \dots (d)$$

$$m \cdot M_{Bb} = 2EK(\theta_b - 3R) \dots \dots \dots (e)$$

$$n \cdot M_{Aa} = 2EK(\theta_a - 3R) \dots \dots \dots (f)$$

又由層平衡條件  $\Sigma(M_{aA} + M_{Bb}) = 0$ , 及  $M_{aA} = -M_{ab}$ , 而得

$$M_{Aa} - M_{ab} + M_{bB} + M_{Bb} = 0 \dots \dots \dots (g)$$

爲消去 R,  $\theta_a$ , 及  $\theta_b$  起見,

(a) + (d) + 2(f) - 2(c), 而得

$$n \cdot M_{ab} + m \cdot M_{bB} + 2n \cdot M_{Aa} - 2m \cdot M_{Bb} = 0 \dots \dots \dots (h)$$

(a) + (b) + (c) + (d) - (e) + (f), 而得

$$(1+n)M_{ab} + (1+m)M_{bB} + nM_{Aa} - mM_{Bb} = -(C_{ab} + C_{ba}) \dots\dots\dots (i)$$

-(a) + (c) + 2(d) - 2(e) - (f), 而得

$$-nM_{ab} + (1+2m)M_{bB} - nM_{Aa} - 2mM_{Bb} = -C_{ba} \dots\dots\dots (j)$$

聯立解 (g), (h), (i), (j) 等四式, 得諸彎率如下.

$$\left. \begin{aligned} M_{ab} &= -\frac{1}{T} \left[ C_{ab}(2m+2n+2m^2+11mn) + C_{ba}(m^2+10mn) \right] \\ M_{bB} &= -\frac{1}{T} \left[ C_{ab}(n^2+10mn) + C_{ba}(2m+2n+2n^2+11mn) \right] \\ M_{Aa} &= \frac{1}{T} \left[ C_{ab}(n-2m-2m^2+7mn) + C_{ba}(3m-n^2+8mn) \right] \\ M_{Bb} &= -\frac{1}{T} \left[ C_{ab}(3n-n^2+8mn) + C_{ba}(m-2n-2n^2+7mn) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (124)$$

上式中之  $T=2(m+n+m^2+n^2+3mn^2+3m^2n+11m.n)$

若係對稱的荷重, 則  $C_{ab}=C_{ba}=\frac{F}{l}$ , 如是則

$$\left. \begin{aligned} M_{ab} &= -\frac{F}{Tl} (2m+2n+3m^2+21mn) \\ M_{bB} &= -\frac{F}{Tl} (2m+2n+3n^2+21mn) \\ M_{Aa} &= \frac{F}{Tl} (m+n-3m^2+15mn) \\ M_{Bb} &= -\frac{F}{Tl} (m+n-3n^2+15mn) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (125)$$

又若荷重不對稱，而架構為對稱的，則  $m=n$ ，而  $T=2n(2+13n+6n^2)$ ，

設令  $\eta = \frac{1}{2+n}$ ，  $\xi = \frac{1}{1+6n}$ ， 則

$$\left. \begin{aligned} M_{ab} &= -\frac{1}{2}[C_{ab}(2\eta + \xi) + C_{ba}(2\eta - \xi)] \\ M_{ba} &= -\frac{1}{2}[C_{ab}(2\eta - \xi) + C_{ba}(2\eta + \xi)] \\ M_{Aa} &= -\frac{1}{2}[C_{ab}(\eta - \xi) + C_{ba}(\eta + \xi)] \\ M_{Bb} &= -\frac{1}{2}[C_{ab}(\eta + \xi) + C_{ba}(\eta - \xi)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (126)$$

若架構及荷重，均為對稱的，則  $C_{ab}=C_{ba}=\frac{F}{l}$ ，  $m=n$

$$\left. \begin{aligned} \text{故 } M_{ab} &= M_{ba} = -\frac{2F}{(2+n)l} \\ M_{Aa} &= -M_{Bb} = -\frac{F}{(2+n)l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (127)$$

若係等佈荷重  $p$  而  $m=n$ ，則由表 6 而得  $\frac{3F}{2l} = \frac{Wl}{8} = \frac{pl^2}{8}$ ，故

$F = \frac{pl^2}{12}$ ，由是而得

$$\left. \begin{aligned} M_{ab} &= M_{ba} = -\frac{pl^2}{6(2+n)} \\ M_{Aa} &= -M_{Bb} = -\frac{pl^2}{12(2+n)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (128)$$

讀者於此，可參閱第 15 節之 (47) 式，蓋此與 (128) 式，實相雷同。  
例題一，與第 16 節之例題一同。

$$m=n=0.75 \quad \eta = \frac{1}{2+0.75} = \frac{4}{11} \quad \xi = \frac{1}{1+6n} = \frac{1}{1+6 \times 0.75} = \frac{2}{11}$$

由表 5 查得  $C_{ab} = \frac{P \cdot ab^2}{l^2} = \frac{5 \times 700 \times (300)^2}{(1000)^2} = 315 \text{ t} \cdot \text{cm}^2$ ,

$$C_{ba} = \frac{P a^2 b}{l^2} = \frac{5 \times (700)^2 \times 300}{(1000)^2} = 735 \text{ t} \cdot \text{cm}^2$$

由 (126) 式而得

$$M_{ab} = -\frac{1}{2} \left[ 315 \left( 2 \times \frac{4}{11} + \frac{2}{11} \right) + 735 \left( 2 \times \frac{4}{11} - \frac{2}{11} \right) \right] = -343.63 \text{ t} \cdot \text{cm}$$

$$M_{bb} = -\frac{1}{2} \left[ 315 \left( 2 \times \frac{4}{11} - \frac{2}{11} \right) + 735 \left( 2 \times \frac{4}{11} + \frac{2}{11} \right) \right] = -420.9 \text{ t} \cdot \text{cm}$$

$$M_{Aa} = \frac{1}{2} \left[ 315 \left( \frac{4}{11} - \frac{2}{11} \right) + 735 \left( \frac{4}{11} + \frac{2}{11} \right) \right] = +229.1 \text{ t} \cdot \text{cm}$$

$$M_{Bb} = -\frac{1}{2} \left[ 315 \left( \frac{4}{11} + \frac{2}{11} \right) + 735 \left( \frac{4}{11} - \frac{2}{11} \right) \right] = -152.73 \text{ t} \cdot \text{cm}$$

例題二. 與第 16 節之例題二同

由 (128) 式而得

$$M_{ab} = M_{bb} = -\frac{\frac{1}{200} \times (1000)^2}{6 \times 2.75} = -303.03 \text{ t} \cdot \text{cm}$$

$$M_{Aa} = -M_{Bb} = \frac{\frac{1}{200} \times (1000)^2}{12 \times 2.75} = +151.52 \text{ t} \cdot \text{cm}$$

24. 定是矩形架構受有橫平荷重. 如圖 55. 設所受者為若干任

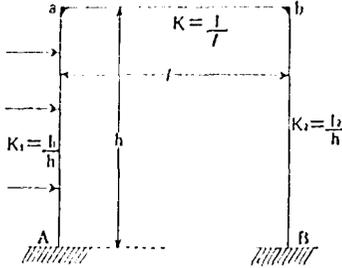


圖 55

何荷重.

$$M_{ab} = 2EK(2\theta_a + \theta_b) \dots\dots\dots (a)$$

$$n \cdot M_{aA} = 2EK(2\theta_a - 3R) + n \cdot C_{aA} \dots\dots\dots (b)$$

$$n \cdot M_{Aa} = 2EK(\theta_a - 3R) - n \cdot C_{Aa} \dots\dots\dots (c)$$

$$M_{ba} = 2EK(2\theta_b + \theta_a) \dots\dots\dots (d)$$

$$m \cdot M_{bB} = 2EK(2\theta_b - 3R) \dots\dots\dots (e)$$

$$m \cdot M_{Bb} = 2EK(\theta_b - 3R) \dots\dots\dots (f)$$

$$\text{又 } -M_{ab} + M_{Aa} + M_{ba} + M_{Bb} + M_A = 0 \dots\dots\dots (g)$$

[  $M_A$  代表各外力對於 A 點之旋轉力率總和 ]

(a) - (b) + (c) - (d) + (e) - (f), 而得

$$(1 + n)M_{ab} + n \cdot M_{Aa} + (1 + m)M_{bB} - m \cdot M_{Bb} = -n(C_{aA} + C_{Aa}) \dots\dots\dots (h)$$

(b) - (c) - (d) + 2(e) - 2(f), 而得

$$-nM_{ab} - nM_{Aa} + (1 + 2m)M_{bB} - 2mM_{Bb} = n(C_{aA} + C_{Aa}) \dots\dots\dots (i)$$

-(b) + 2(c) + (e) - 2(f), 而得

$$nM_{ab} + 2nM_{Aa} + mM_{bB} - 2mM_{Bb} = -n(C_{aA} + C_{Aa}) \dots\dots\dots (j)$$

聯立解 (g), (h), (i), (j) 等四式, 得各結點之彎率如下.

$$\left. \begin{aligned} M_{ab} &= \frac{n}{T} \left[ 3m(2 + m)(M_A - C_{Aa}) - C_{aA}(5m + 2n + 3m^2 + 6mn) \right] \\ M_{bB} &= -\frac{n}{T} \left[ 3m(2 + n)(M_A - C_{Aa}) - C_{aA}(n + 4m - 3mn) \right] \\ M_{Aa} &= -\frac{1}{T} \left[ m(3mn + 2m + 5n + 2)(M_A - C_{Aa}) + n \cdot C_{aA}(3m^2 + 12m + 1) \right] - C_{Aa} \\ M_{Bb} &= -\frac{n}{T} \left[ (3mn + 2n + 5m + 2)(M_A - C_{Aa}) + C_{aA}(3mn + 3n - 3m - 1) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots (129)$$

上式中之  $T=2(m+n+m^2+n^2+3mn^2+3m^2n+11mn)$

若  $m=n$ , 則

$$\left. \begin{aligned} M_{ab} &= \frac{n[3(2+n)(M_A - C_{Aa}) - C_{aA}(7+9n)]}{2(2+n)(1+6n)} \\ M_{bB} &= -\frac{n[3(2+n)(M_A - C_{Aa}) - C_{aA}(5-3n)]}{2(2+n)(1+6n)} \\ M_{Aa} &= -\frac{(3n^2+7n+2)(M_A - C_{Aa}) + (3n^2+12n+1)C_{aA}}{2(2+n)(1+6n)} - C_{Aa} \\ M_{Bb} &= -\frac{(3n^2+7n+2)(M_A - C_{Aa}) + (3n^2-1)C_{aA}}{2(2+n)(1+6n)} \end{aligned} \right\} \dots\dots(130)$$

若更令  $m=n=1$ , 則

$$\left. \begin{aligned} M_{ab} &= \frac{1}{42}[9(M_A - C_{Aa}) - 16 C_{aA}] \\ M_{bB} &= -\frac{1}{42}[9(M_A - C_{Aa}) - 2C_{aA}] \\ M_{Aa} &= -\frac{1}{21}[6M_A + 15C_{Aa} + 8C_{aA}] \\ M_{Bb} &= -\frac{1}{21}[6(M_A - C_{Aa}) + C_{aA}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(131)$$

若左右兩方之荷重，為對稱的，而架構亦為對稱的，則可由 (130) 式，而得

$$\left. \begin{aligned} M_{ab} &= M_{bB} = -\frac{nC_{aA}}{2+n} \\ M_{Aa} &= -M_{Bb} = -\left[ \frac{C_{aA}}{2+n} + C_{Aa} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(132)$$

若  $\Delta a$  立柱兩端，並無荷重，惟頂部有單一橫平荷重  $P$ ，則

$$C_{aA} = C_{\Delta a} = 0, \quad M_A = Ph.$$

以此代入 (129) 至 (132) 等式，即可得各該變率。

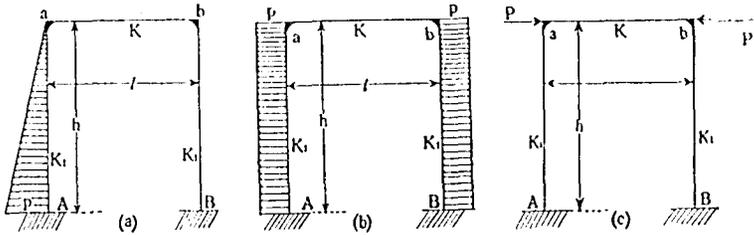


圖 56

設如圖 56 (a). 由表 5 之第 8 號，查得

$$C_{aA} = \frac{Wh}{15} = \frac{ph^2}{30}. \quad \left[ \text{因 } W = \frac{ph}{2} \right]$$

$$C_{\Delta a} = \frac{Wh}{10} = \frac{ph^2}{20}$$

而  $M_A = \frac{Wh}{3} = \frac{ph^2}{6}.$

以此諸值，代入 (130) 式，即得第 16 節之 (51) 式。

又設如圖 56(b)，則  $C_{\Delta a} = C_{aA} = \frac{ph^2}{12}$ ，以此代入 (132) 式而得

$$\left. \begin{aligned} M_{ab} = M_{bB} &= -\frac{ph^2n}{12(2+n)} \\ M_{\Delta a} = -M_{Bb} &= -\frac{ph^2(3+n)}{12(2+n)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(133)$$

如欲求兩定足處之橫平反力，則因荷重及架構均為對稱的，故知  $H_A = H_B$ ，(但方向相反) 又層平衡條件 [ (109) 式 ] 及結點平衡

條件  $[\sum M_A = 0]$  而得

$$H_A = \frac{M_{ab} - M_{ba}}{h} + \frac{ph}{2} = + \frac{ph}{4(2+n)} + \frac{ph}{2} = \frac{ph(5+2n)}{4(2+n)} = H_B$$

又設如圖 56 (c),  $P$  在一端作用之時, 則於(130)式中, 以  $C_{aA} = C_{bA} = 0$ , 及  $M_A = Ph$  代入之, 而得

$$\left. \begin{aligned} M_{ab} &= \frac{3n}{2(1+6n)} \cdot Ph \\ M_{bB} &= -\frac{3n}{2(1+6n)} \cdot Ph \\ M_{aA} &= -\frac{1+3n}{2(1+6n)} \cdot Ph = M_{bB} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (134)$$

此即第 16 節之第 (48) 式, 令  $\delta = \frac{c}{h} = 1$  所得之結果.

若左右兩頂角, 均有  $P$  作用, 但方向相反, 則  $M_A = 0$ , 如是則各結點處, 均無彎率, 惟  $ab$  桿件中, 有軸向壓力  $= P$  而已.

例題一. 與第 16 節之例題三同. 如圖 57.  $m = n = 1.5$ .

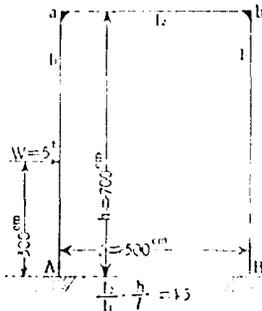


圖 57

$$M_A = 5 \times 300 = 1500 \text{ t}\cdot\text{cm.}$$

$$C_{aA} = \frac{5 \times (300)^2 \times 400}{(700)^2} = 489.80 \text{ t}\cdot\text{cm.}$$

$$C_{bA} = \frac{5 \times 300 \times (400)^2}{(700)^2} = 367.35 \text{ t}\cdot\text{cm.}$$

由 (130) 式而得

$$M_{ab} = \frac{1.5[3(2+1.5)(1500-489.80)-367.35(7+9 \times 1.5)]}{2(2+1.5)(1+6 \times 1.5)} = +65.92 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$M_{bb} = \frac{1.5[3(2+1.5)(1500-489.80)-367.35(5-3 \times 1.5)]}{2(2+1.5)(1+6 \times 1.5)} = -223.36 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$M_{Aa} = \frac{[3(1.5)^2+7 \times 1.5+2](1500-489.80)+[3(1.5)^2+12 \times 1.5+1] \times 367.35}{2 \times (2+1.5)(1+6 \times 1.5)} - 489.80$$

$$= -902.74 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$M_{Bb} = \frac{[3(1.5)^2+7 \times 1.5+2](1500-489.80)+[3(1.5)^2-1] \times 367.35}{2 \times (2+1.5)(1+6 \times 1.5)}$$

$$= -307.98 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

例題二. 與第 16 節之例題四同.

$$M_A = \frac{.010(700)^2}{2} = 2,450 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$C_{Aa} = C_{aA} = \frac{1}{12} \times 0.01 \times (700)^2 = 408.33 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

由 (130) 式而得

$$M_{ab} = + \frac{1.5[3(2+1.5)(2450-408.33)-408.33(7+9 \times 1.5)]}{2(2+1.5)(1+6 \times 1.5)} = +280.00 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

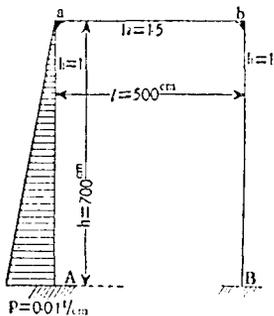
$$M_{bb} = - \frac{1.5[3(2+1.5)(2450-408.33)-408.33(5-3 \times 1.5)]}{2(2+1.5)(1+6 \times 1.5)} = -455.00 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$M_{Aa} = - \frac{[3(1.5)^2+7 \times 1.5+2](2450-408.33)+[3(1.5)^2+12 \times 1.5+1] \times 408.33}{2(2+1.5)(1+6 \times 1.5)}$$

$$- 408.33 = -1,120.00 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$M_{Bb} = - \frac{[3(1.5)^2+7 \times 1.5+2](2450-408.33)+[3(1.5)^2-1] \times 408.33}{2(2+1.5)(1+6 \times 1.5)} = -595.00 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

例題三. 與第 16 節之例題五同. 如圖 58.



$$C_{aA} = \frac{ph^2}{30} = \frac{0.01(700)^2}{30} = 163.33 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$C_{Aa} = \frac{ph^2}{20} = \frac{0.01(700)^2}{20} = 245.00 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$M_A = \frac{ph^2}{6} = \frac{0.01(700)^2}{6} = 816.67 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$n = 1.5$$

由 (130) 式而得

$$M_{ab} = \frac{1.5[3(2+1.5)(816.67-245.00)-163.33(7+9 \times 1.5)]}{2(2+1.5)(1+6 \times 1.5)} = +56.88 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$M_{bB} = \frac{1.5[3(2+1.5)(816.67-245.00)-163.33(5-3 \times 1.5)]}{2(2+1.5)(1+6 \times 1.5)} = -126.87 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$M_{Aa} = \frac{[3(1.5)^2+7 \times 1.5+2](816.67-245.00)+[3(1.5)^2+12 \times 1.5+1] \times 163.33}{2(2+1.5)(1+6 \times 1.5)} - 245.00 = -462.29 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$M_{Bb} = -\frac{[3(1.5)^2+7 \times 1.5+2](816.67-245.00)+[3(1.5)^2-1] \times 163.33}{2(2+1.5)(1+6 \times 1.5)} = -170.63 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

35. 三層三徑間對稱架構受有橫平荷重. 如圖 59 A.

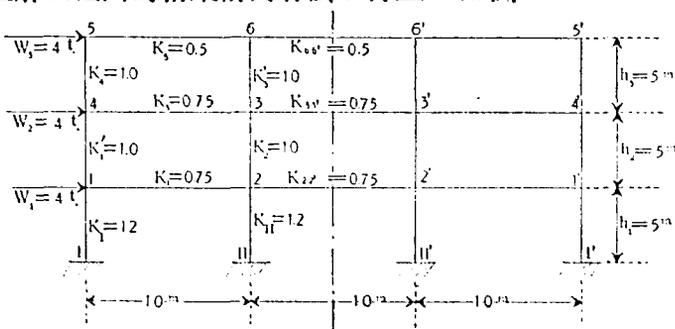


圖 59 A

此問題共有 9 個未知量，即 6 個  $\theta$  ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$  及  $\theta_6$ ) 及三個  $\mu$  ( $\mu$  代表  $-3R$ ，每層各有一個  $\mu$ ，計共有  $\mu_1, \mu_2$  及  $\mu_3$  凡三個) 是也。如是則必作成 9 個聯立方程式，以推算此 9 個未知量。

$$\begin{aligned} \text{就 1 點言之. } M_{1,2} &= 2EK_1(2\theta_1 + \theta_2) \\ M_{1,4} &= 2EK_1'(2\theta_1 + \theta_4 + \mu_1) \\ M_{1,1} &= 2EK_1(2\theta_1 + \mu_1) \end{aligned}$$

因  $\Sigma M_1 = 0$ ，故  $p_1\theta_1 + K_1\theta_2 + K_1'\theta_4 + K_1\mu_1 + K_1'\mu_2 = 0 \dots [p_1 = 2(K_1 + K_1' + K_1)] \dots (1')$

$$\begin{aligned} \text{就 2 點言之. } M_{2,1} &= 2EK_1(2\theta_2 + \theta_1) \\ M_{2,3} &= 2EK_2(2\theta_2 + \theta_3 + \mu_2) \\ M_{2,2}' &= 2EK_{2,2}'(2\theta_2 + \theta_2) \\ M_{2,11} &= 2EK_{11}(2\theta_2 + \mu_1) \end{aligned}$$

因  $\Sigma M_2 = 0$ ，故  $K_1\theta_1 + p_2'\theta_3 + K_2\theta_3 + K_{11}\mu_1 + K_2'\mu_2 = 0 \dots [p_2' = 2(K_1 + K_2 + K_{11} + K_{2,2}' + K_{2,2}')] \dots (2')$

$$\begin{aligned} \text{就 3 點言之. } M_{3,2} &= 2EK_2(2\theta_3 + \theta_2 + \mu_2) \\ M_{3,3}' &= 2EK_{3,3}'(2\theta_3 + \theta_3) \\ M_{3,4} &= 2EK_3(2\theta_3 + \theta_4) \\ M_{3,6} &= 2EK_3'(2\theta_3 + \theta_6 + \mu_3) \end{aligned}$$

因  $\Sigma M_3 = 0$ ，故  $K_2\theta_2 + p_3'\theta_3 + K_3\theta_3 + K_3'\theta_6 + K_2'\mu_2 + K_3'\mu_3 = 0 \dots [p_3' = 2(K_2 + K_3 + K_3' + K_{3,3}') + K_{3,3}'] \dots (3')$

$$\begin{aligned} \text{就 4 點言之. } M_{4,3} &= 2EK_3(2\theta_4 + \theta_3) \\ M_{4,1} &= 2EK_1'(2\theta_4 + \theta_1 + \mu_1) \\ M_{4,5} &= 2EK_4(2\theta_4 + \theta_5 + \mu_3) \end{aligned}$$

因  $\Sigma M_4 = 0$ ，故  $K_1'\theta_1 + K_3\theta_3 + p_4\theta_4 + K_4\theta_5 + K_1'\mu_2 + K_4'\mu_3 = 0 \dots [p_4 = 2(K_3 + K_4 + K_1')] \dots (4')$

就 5 點言之.  $M_{5,4} = 2EK_4(2\theta_5 + \theta_4 + \mu_4)$

$$M_{5,3} = 2EK_5(2\theta_5 + \theta_3)$$

因  $\Sigma M_5 = 0$ , 故  $K_4\theta_4 + \rho_5\theta_3 + K_5\theta_5 + K_4'\mu_4 = 0 \dots \dots [\rho_5 = 2(K_4 + K_5)] \dots \dots (5')$

就 6 點言之.  $M_{6,5} = 2EK_5(2\theta_6 + \theta_5)$

$$M_{6,6} = 2EK_{6,6}(2\theta_6 + \theta_6)$$

$$M_{6,3} = 2EK_3'(2\theta_6 + \theta_3 + \mu_3)$$

因  $\Sigma M_6 = 0$ , 故  $K_5\theta_5 + \rho_6'\theta_6 + K_3'\theta_3 + K_3'\mu_3 = 0 \dots [\rho_6' = 2(K_5 + K_3' + K_{3-3}) + K_{3-3}] \dots (6')$

又就第一層平衡條件言之.  $2(M_{1-1} + M_{1-1} + M_{2-11} + M_{11-2}) + (W_1 + W_2 + W_3)h_1 = 0$ .

但  $M_{1-1} = 2EK_1(2\theta_1 + \mu_1)$

$$M_{1-1} = 2EK_1(\theta_1 + \mu_1)$$

$$M_{2-11} = 2EK_{11}(2\theta_2 + \mu_1)$$

$$M_{11-2} = 2EK_{11}(\theta_2 + \mu_1)$$

故  $K_1\theta_1 + K_{11}\theta_2 + \frac{N_1}{2}\mu_1 = \frac{q_1}{2} \dots \dots \dots (7')$

上式中之  $N_1 = \frac{4}{3}(K_1 + K_{11})$ ,  $q_1 = -\frac{(W_1 + W_2 + W_3)h_1}{6E}$

又就第二層平衡條件言之.  $2(M_{1-1} + M_{1-1} + M_{3-2} + M_{2-3}) + (W_2 + W_3)h_2 = 0$

但  $2(M_{1-1} + M_{1-1}) = 4EK_1'(3\theta_1 + 3\theta_4 + 2\mu_2)$

$$2(M_{3-2} + M_{2-3}) = 4EK_2(3\theta_2 + 3\theta_3 + 2\mu_2)$$

故  $K_1'\theta_1 + K_2\theta_2 + K_2\theta_3 + K_1'\theta_4 + \frac{N_2}{2}\mu_2 = \frac{q_2}{2} \dots \dots \dots (8')$

上式中之  $N_2 = \frac{4}{3}(K_1' + K_2)$ ,  $q_2 = -\frac{(W_2 + W_3)h_2}{6E}$

又就第三層平衡條件言之,  $2(M_{1,5} + M_{5,1} + M_{6,3} + M_{3,6}) + W_3 h_3 = 0$

但  $2(M_{1,5} + M_{5,1}) = 4EI K_1 (3\theta_1 + 3\theta_5 + 2\nu_5)$

$2(M_{6,3} + M_{3,6}) = 4EI K_3' (3\theta_3 + 3\theta_6 + 2\nu_3)$

故  $K_3' \theta_3 + K_1 \theta_1 + K_1 \theta_5 + K_3' \theta_6 + \frac{X_3}{2} \nu_3 = \frac{q_3}{2} \dots \dots \dots (9')$

上式中之  $X_3 = \frac{4}{3}(K_3' + K_1), \quad q_3 = -\frac{W_3 h_3}{6E}$ .

由圖 59 A 中所示各數值, 而得

$\rho_1 = 2(K_1 + K_1 + K_1') = 5.9 \text{ cm}^3$

$\rho_2' = 2(K_1 + K_2 + K_{11} + K_{2,2'}) + K_{2,2'} = 8.15 \text{ cm}^3$

$\rho_3' = 2(K_2 + K_3 + K_3' + K_{3,3'}) + K_{3,3'} = 7.75 \text{ cm}^3$

$\rho_4 = 2(K_3 + K_4 + K_4') = 5.5 \text{ cm}^3$

$\rho_5 = 2(K_4 + K_5) = 3 \text{ cm}^3$

$\rho_3' = 2(K_5 + K_5' + K_{5,5'}) + K_{5,5'} = 4.5 \text{ cm}^3$

$X_1 = \frac{4}{3}(K_1 + K_{11}) = 3.2 \text{ cm}^3$

$X_2 = \frac{4}{3}(K_1' + K_2) = 2.66 \text{ cm}^3$

$X_3 = \frac{4}{3}(K_3' + K_4) = 2.66 \text{ cm}^3$

$q_1 = -\frac{(W_1 + W_2 + W_3)h_1}{6E} = -\frac{12 \times 500}{6E} = -1000 E^{-1} \text{ t.cm.}$

$q_2 = -\frac{(W_2 + W_3)h_2}{6E} = -\frac{8 \times 500}{6E} = -666.6 E^{-1} \text{ t.cm.}$

$q_3 = -\frac{W_3 h_3}{6E} = -\frac{4 \times 500}{6E} = -333.3 E^{-1} \text{ t.cm.}$

以此諸值，代入上列之(1')至(9')等式，而得

$$5.9\theta_1 + 0.75\theta_2 + \theta_4 + 1.2\mu_1 + \mu_2 = 0 \dots\dots\dots(1'')$$

$$0.75\theta_1 + 8.15\theta_2 + \theta_5 + 1.2\mu_1 + \mu_2 = 0 \dots\dots\dots(2'')$$

$$\theta_2 + 7.75\theta_3 + 0.75\theta_4 + \theta_6 + \mu_2 + \mu_3 = 0 \dots\dots\dots(3'')$$

$$\theta_1 + 0.75\theta_3 + 5.5\theta_4 + \theta_5 + \mu_2 + \mu_3 = 0 \dots\dots\dots(4'')$$

$$\theta_4 + 3\theta_5 + 0.5\theta_6 + \mu_3 = 0 \dots\dots\dots(5'')$$

$$\theta_3 + 0.5\theta_5 + 4.5\theta_6 + \mu_3 = 0 \dots\dots\dots(6'')$$

$$1.2\theta_1 + 1.2\theta_2 + 1.6\mu_1 = -500 \dots\dots\dots(7'')$$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + 1.33\mu_2 = -333.3 \dots\dots\dots(8'')$$

$$\theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + 1.33\mu_3 = -166.6 \dots\dots\dots(9'')$$

按照第 46 節所述之法，解此諸方程式，而得

$$\theta_1 = +185.15 \quad E^{-1}$$

$$\theta_2 = +136.1 \quad E^{-1}$$

$$\theta_3 = +100.0 \quad E^{-1}$$

$$\theta_4 = +132.4 \quad E^{-1}$$

$$\theta_5 = +80.7 \quad E^{-1}$$

$$\theta_6 = +58.7 \quad E^{-1}$$

$$\mu_1 = -553.5 \quad E^{-1}$$

$$\mu_2 = -665.3 \quad E^{-1}$$

$$\mu_3 = -403.9 \quad E^{-1}$$

以此諸值，代入上列各彎率式，而得

$$\left. \begin{array}{l} M_{1,2} = +759.6 \text{ t}\cdot\text{cm} \\ M_{1,4} = -325.2 \text{ t}\cdot\text{cm} \\ M_{1,1} = -439.7 \text{ t}\cdot\text{cm} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Sigma M_1 = 0 \\ (= -5.3) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} M_{4,3} = +547.2 \text{ t}\cdot\text{cm} \\ M_{4,1} = -430.6 \text{ t}\cdot\text{cm} \\ M_{4,5} = -116.8 \text{ t}\cdot\text{cm} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Sigma M_4 = 0 \\ (= -0.2) \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 M_{2-1} = +686.0 \text{ t}\cdot\text{cm} \\
 M_{2-3} = -586.2 \text{ t}\cdot\text{cm} \\
 M_{2-2'} = +612.4 \text{ t}\cdot\text{cm} \\
 M_{2-11} = -675.1 \text{ t}\cdot\text{cm}
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \right\}
 \begin{array}{l}
 \Sigma M_2 = 0 \\
 (= +37.1)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 M_{5-4} = -220.2 \text{ t}\cdot\text{cm} \\
 M_{5-6} = +220.1 \text{ t}\cdot\text{cm} \\
 M_{6-5} = +198.1 \text{ t}\cdot\text{cm} \\
 M_{6-6'} = +176.1 \text{ t}\cdot\text{cm} \\
 M_{6-3} = -373.0 \text{ t}\cdot\text{cm}
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \right\}
 \begin{array}{l}
 \Sigma M_5 = 0 \\
 (= -0.1) \\
 \\
 \Sigma M_6 = 0 \\
 (= +1.2)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 M_{3-2} = -658.4 \text{ t}\cdot\text{cm} \\
 M_{3-3'} = +450.0 \text{ t}\cdot\text{cm} \\
 M_{3-4} = +498.6 \text{ t}\cdot\text{cm} \\
 M_{3-8} = -290.4 \text{ t}\cdot\text{cm}
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \right\}
 \begin{array}{l}
 \Sigma M_3 = 0 \\
 (= -0.2)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 M_{1-1} = -884.0 \text{ t}\cdot\text{cm} \\
 M_{11-2} = -1001.8 \text{ t}\cdot\text{cm}
 \end{array}$$

$$2(M_{1-1} + M_{1-1} + M_{2-11} + M_{11-2}) = 2(-439.7 - 884.0 - 675.1 - 1001.8) = -6001.2 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$(W_1 + W_2 + W_3)h_1 = 12 \times 500 = 6000 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

故第一層平衡條件，可稱滿足。

$$\text{又 } 2(M_{1-1} + M_{1-4} + M_{2-3} + M_{3-2}) = 2(-430.6 - 325.2 - 586.2 - 658.4) = -4000.8 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$(W_2 + W_3)h_2 = 8 \times 500 = 4,000 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

故第二層平衡條件，可稱滿足。

$$\text{又 } 2(M_{5-4} + M_{4-5} + M_{6-3} + M_{3-6}) = 2(-220.2 - 116.8 - 373.0 - 290.4) = -2000.8 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$W_3h_3 = 4 \times 500 = 2,000 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

故第三層平衡條件，亦可稱滿足。

上述解法，假定該架構右半部各桿件之撓角及變率，均與其左半部相當桿件之撓角及變率，分別相等，讀者對於此層，或不免有懷疑者，即編者初亦如是。要知若於該架構右方 5'，4'，及 1' 各結點，各加施一個橫平力 = 4t，各該力均向左作用，則全架構各結點處之變率，皆必等於零，各桿件中之剪截力，亦必皆等於零，各個垂直桿件

中之軸向力，亦必皆等於零，惟各橫平桿件中之軸向壓力，必各等於 4t，故知本節解法之上開假定，必無謬誤，（惟此假定，祇適用於各橫平外力之作用於對稱架構各結點者）

茲按照第 47 節所得各彎率之數值，（因該節所得之結果，較本節更爲精密之故），利用第 37 節求剪截力之法，求得各桿件中之剪截力，並利用靜力學之  $\sum X=0$ ，及  $\sum Y=0$ ，求得各桿件中之軸向力，如圖 59B 之所示，此圖並表示各定足支點處之橫平及垂直反力。

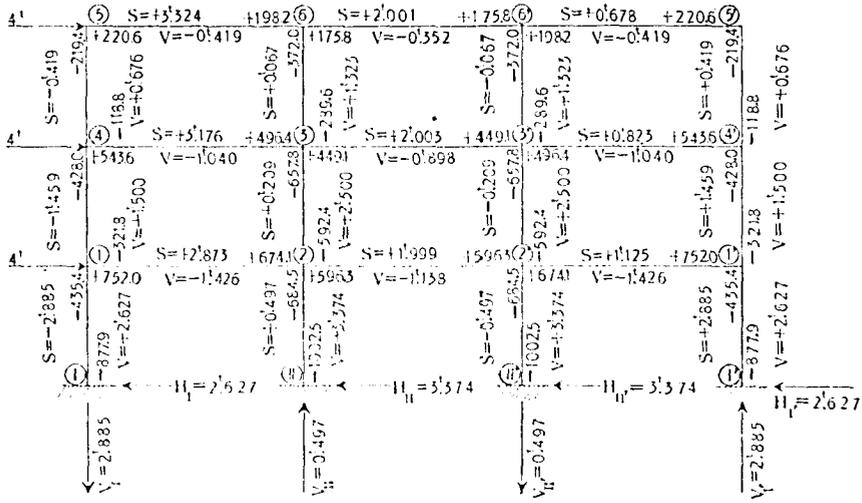


圖 59 B

上圖中之 S，代表軸向力，以正號表示壓力，負號表示拉力。

V 代表剪截力，其正負號之意義，如第 37 節之規定。

以上所述解法，足以標示撓角撓度法推算定足架構中各結點彎率之大概，讀者若果詳加研究，明白了解，則其他各架構，不問其層數若干，徑間數若干，荷重爲垂直的或橫平的，架構及荷重，爲對稱

的或不對稱的，皆可做照本節所述之法，逐一求得各結點處之變率，但若係不對稱的架構，或受有不對稱的荷重，則未知量加多約至一倍，計算工作甚為煩重而費時耳。

36. 矩形閉合架構（即框構）受有垂直及橫平荷重，如圖 60。按照上述之法，可求得

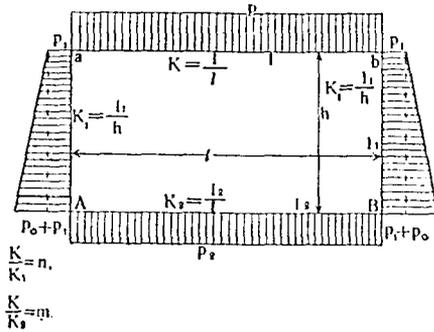


圖 60

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{C_{AB}(3+2n)m - nC_{ab}}{(2+n)n + (3+2n)m} + \frac{C_{Aa}(2+n)n + nC_{aA}}{(2+n)n + (3+2n)m} = -M_{Aa} \\ M_{ab} &= \frac{mnC_{AB} - C_{ab}(3m+2n)}{(2+n)n + (3+2n)m} - \frac{C_{aA}(2m+n) + mnC_{Aa}}{(2+n)n + (3+2n)m} = -M_{aA} \end{aligned} \right\} \dots(135)$$

由表 5 及表 6，查得

$$C_{AB} = \frac{p_1 l^2}{12}$$

$$C_{ab} = \frac{pl^2}{12}$$

$$C_{Aa} = \frac{p_1 h^2}{12} + \frac{p_0 h^2}{20}$$

$$C_{aA} = \frac{p_1 h^2}{12} + \frac{p_0 h^2}{30}$$

以此代入 (135) 式, 而得

$$\begin{aligned}
 M_{AB} &= \frac{p_2 l^2 (3+2n)m - np l^2}{12[(2+n)n + (3+2n)m]} + \frac{p_1 h^2 (3+n)n}{12[(2+n)n + (3+2n)m]} \\
 &\quad + \frac{p_0 h^2 (8+3n)n}{60[(2+n)n + (3+2n)m]} = -M_{Aa} \\
 M_{ab} &= \frac{mn \cdot p_2 l^2 - p l^2 (3m+2n)}{12[(2+n)n + (3+2n)m]} - \frac{p_1 h^2 (3m+n)n}{12[(2+n)n + (3+2n)m]} \\
 &\quad - \frac{p_0 h^2 (7m+2n)n}{60[(2+n)n + (3+2n)m]} = -M_{aA}
 \end{aligned} \quad \dots (136)$$

若  $I=I_2$ , [即  $m=1$ ], 又設  $p_2=p$ , 則由 (136) 式, 而得

$$\begin{aligned}
 M_{AB} &= \frac{p l^2}{12(1+n)} + \frac{p_1 h^2 n}{12(1+n)} + \frac{p_0 h^2 (8+3n)n}{60(1+n)(3+n)} = -M_{Aa} \\
 M_{ab} &= -\frac{p l^2}{12(1+n)} - \frac{p_1 h^2 n}{12(1+n)} - \frac{p_0 h^2 (7+2n)n}{60(1+n)(3+n)} = -M_{aA}
 \end{aligned} \quad \dots (137)$$

此即第 20 節中之 (71) 式也。

例題 設如圖 60,  $h=l=4m$ ,  $K=K_1=K_2=1 \text{ cm}^3$ ,  $m=n=1$

$$p=p_2=0.03 \text{ t/cm} \quad p_0=p_1=0.02 \text{ t/cm}$$

由 (137) 式, 而得

$$M_{AB} = -M_{Aa} = \frac{0.03(400)^2}{12 \times 2} + \frac{0.02(400)^2}{12 \times 2} + \frac{0.02(400)^2(8+3)}{60 \times 2 \times 4} = +406.7 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$M_{ab} = -M_{aA} = -\frac{0.03(400)^2}{12 \times 2} - \frac{0.02(400)^2}{12 \times 2} - \frac{0.02(400)^2(7+2)}{60 \times 2 \times 4} = -393.3 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

第九章 任何桿件中之剪截力

SHEAR IN ANY MEMBER

37. 剪截力公式.

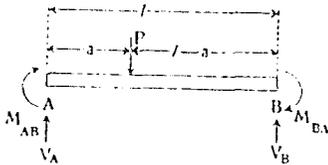


圖 61

如圖 61, 設 AB 爲任何桿件, 其兩端均受約束, 設令 A 端之彎率爲  $M_{AB}$ , B 端之彎率爲  $M_{BA}$ , 今欲求兩端之剪截力  $V_A$  及  $V_B$ , 由圖可見

$$V_A = \frac{P(l-a)}{l} - \frac{M_{BA} + M_{AB}}{l}$$

$$V_B = -\frac{Pa}{l} - \frac{M_{AB} + M_{BA}}{l}$$

凡剪截力, 以使  
截面兩方順鐘針  
方向而移動者爲  
正, 否則爲負.

但  $\frac{P(l-a)}{l} = AB$  簡梁在 A 點之反力  $= R_A$

而  $-\frac{Pa}{l} = AB$  簡梁在 B 點之反力  $= R_B$

$$\left. \begin{aligned} \text{故 } V_A &= R_A - \frac{M_{BA} + M_{AB}}{l} \\ V_B &= -R_B - \frac{M_{AB} + M_{BA}}{l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(138)$$

若 AB 之間, 並不受有荷重, 則

$$V_A = V_B = -\frac{M_{BA} + M_{AB}}{l} \dots\dots\dots(139)$$

例題一 設如第 34 節之例題一，求  $\Lambda a$  立柱在  $\Lambda$  點處之剪截力。

$$R_A = \frac{5 \times 4}{7} = 2.8571 \text{ t}$$

$$M_{\Lambda a} = -902.74 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$M_{a\Lambda} = -M_{ab} = -65.92$$

$$\frac{M_{\Lambda a} + M_{a\Lambda}}{h} = -\frac{902.74 + 65.92}{700} = -1.3838 \text{ t}$$

故  $V_A = 2.8571 - (-1.3838) = 4.2409 \text{ t} = \Lambda$  點處之橫平反力。

[參閱第 16 節之例題三所得之  $H_D$ ]

例題二 設如第 32 節中之架構，求  $AB$  桿件在其兩端處之剪截力  
因其本身不受荷重，故  $R_A = R_B = 0$ 。

$$V_A = V_B = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{l} = -\frac{18.92 + 75.76}{550} = -0.0172 \text{ t}$$

此即謂  $a$  點處之垂直反力為向下的，且等於  $0.0172 \text{ t}$ 。

例題三 又設如第 32 節中之架構，求  $BB'$  桿件在其兩端處之剪截力。因所受者為對稱的荷重，故  $R_B = -R_{B'} = 3 \text{ t}$ 。

$$M_{BB'} = -299.8 \text{ t}\cdot\text{cm} = -M_{B'B} \text{ 故 } M_{BB'} + M_{B'B} = 0, \text{ 由是而得}$$

$$V_B = -V_{B'} = 3 \text{ t}$$

例題四 設欲求第 35 節之架構中 5-4 及 6-3 桿件中之剪截力。

$$M_{5-4} = -220.2 \text{ t}\cdot\text{cm}, \quad M_{4-5} = -116.8 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$\text{故 } 5-4 \text{ 中之剪截力} = -\frac{-220.2 - 116.8}{500} = +0.674 \text{ t}$$

$$\text{又 } M_{6-5} = -373.0 \text{ t}\cdot\text{cm}, \quad M_{5-6} = -290.4 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$\text{故 } 6-3 \text{ 中之剪截力} = -\frac{-373.0 - 290.4}{500} = +1.327 \text{ t}$$

(參閱該節之圖 59 B)

第十章 連續梁之解法

ANALYSIS OF CONTINUOUS BEAMS.

38. 雙徑間連續梁.

(a) 兩端為簡承者. 如圖 62. 設 AB 及 BC 兩徑間之上, 各受

有任何荷重. 又設令  $n = \frac{I_1 \cdot I_0}{I_1 \cdot I_0}$  即  $\frac{K_1}{K_0} = n$

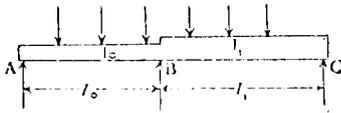


圖 62

$$M_{BA} = 2EK_0(2\theta_B + \theta_A) + C_{BA}$$

$$M_{BC} = 2EK_1(2\theta_B + \theta_C) - C_{BC}$$

$$M_{AB} = 2EK_0(2\theta_A + \theta_B) - C_{AB} = 0$$

$$M_{CB} = 2EK_1(2\theta_C + \theta_B) + C_{CB} = 0$$

因  $M_{BA} = -M_{BC}$ , 乃由此四式, 消去  $\theta_A$ ,  $\theta_B$ , 及  $\theta_C$ , 而得

$$M_{BA} = -M_{BC} = \frac{1}{n+1}(nH_{BA} + H_{BC}) \dots \dots \dots (140)$$

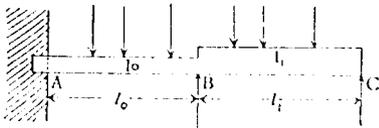


圖 63

若兩徑間之剛率相同, 即  $n = 1$ ,

則  $M_{BA} = -M_{BC} = \frac{1}{2}(H_{BA} + H_{BC}) \dots (141)$

(b) 一端簡承, 又一端固定. 如圖 63, 設 A 端固定, 而 C 端簡承, 如是則  $\theta_A = 0$ . 故得

$$M_{AB} = 2EK_0(\theta_B) - C_{AB}$$

$$M_{BA} = 2EK_0(2\theta_B) + C_{BA}$$

$$M_{BC} = 2EnK_0(2\theta_B + \theta_C) - C_{BC}$$

$$M_{CB} = 2EnK_0(2\theta_C + \theta_B) + C_{CB} = 0$$

由  $M_{BA} = -M_{BC}$ , 並消去  $\theta_B$  及  $\theta_C$ , 而得

$$\left. \begin{aligned} M_{BA} = -M_{BC} &= \frac{3n C_{BA} + 4 H_{BC}}{3n + 4} \\ M_{AB} &= \frac{2 H_{BC} - 4 H_{AB} - 3n C_{AB}}{3n + 4} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(142)$$

若  $n=1$ , 則

$$\left. \begin{aligned} M_{BA} = -M_{BC} &= \frac{1}{7}(3 C_{BA} + 4 H_{BC}) \\ M_{AB} &= \frac{1}{7}(2 H_{BC} - 4 H_{AB} - 3 C_{AB}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(143)$$

又設 C 端固定, 而 A 端簡承, 用同法可得

$$\left. \begin{aligned} M_{BA} = -M_{BC} &= \frac{3 C_{BC} + 4n H_{BA}}{4n + 3} \\ M_{CB} &= \frac{4n H_{CB} - 2n H_{BA} + 3 C_{CB}}{4n + 3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(144)$$

若  $n=1$ , 則

$$\left. \begin{aligned} M_{BA} = -M_{BC} &= \frac{1}{7}(3 C_{BC} + 4 H_{BA}) \\ M_{CB} &= \frac{1}{7}(4 H_{CB} - 2 H_{BA} + 3 C_{CB}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(145)$$

(c) 兩端為固定者. 如圖 64.  $\theta_A = \theta_C = 0$

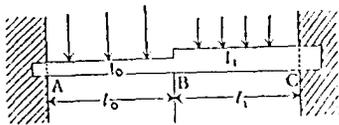


圖 64

$$\begin{aligned} M_{AB} &= 2EK_0(\theta_B) - C_{AB} \\ M_{BA} &= 2EK_0(2\theta_B) + C_{BA} \\ M_{BC} &= 2EnK_0(2\theta_B) - C_{BC} \\ M_{CB} &= 2EnK_0(\theta_B) + C_{CB} \end{aligned}$$

由  $M_{BA} = -M_{BC}$ , 並消去  $\theta_B$ , 而得

$$\left. \begin{aligned} M_{BC} = -M_{BA} &= -\frac{1}{n+1}(n C_{BA} + C_{BC}) \\ M_{AB} &= -\frac{M_{BC}}{2} - H_{AB} \\ M_{CB} &= \frac{M_{BC}}{2} + H_{CB} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (146)$$

若  $n=1$ , 則

$$\left. \begin{aligned} M_{BC} = -M_{BA} &= -\frac{1}{2}(C_{BA} + C_{BC}) \\ M_{AB} &= -\frac{M_{BC}}{2} - H_{AB} \\ M_{CB} &= \frac{M_{BC}}{2} + H_{CB} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (147)$$

39. 三徑間連續梁.

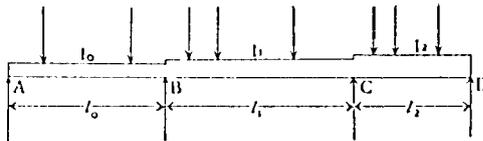


圖 65

(a) 兩端為簡承者. 如圖 65.

設  $n_o = \frac{K_o}{K_o} = \frac{I_1 l_o}{I_o l_1}$ ,

$n_1 = \frac{K_2}{K_1} = \frac{I_2 l_1}{I_1 l_2}$ .

按照上法, 可求得

$$\left. \begin{aligned} M_{BC} = -M_{BA} &= -\frac{4(n_1+1)(n_o H_{BA} + H_{BC}) - 2(n_1 H_{CB} + H_{CD})}{4(n_o+1)(n_1+1) - n_1} \\ M_{CD} = -M_{CB} &= -\frac{4(n_o+1)(n_1 H_{CB} + H_{CD}) - 2n_1(n_o H_{BA} + H_{BC})}{4(n_o+1)(n_1+1) - n_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (148)$$

若  $n_0 = n_1 = 1$ , 則

$$\left. \begin{aligned} M_{BC} &= -M_{BA} = -\frac{2}{15} [4(H_{BA} + H_{BC}) - (H_{CB} + H_{CD})] \\ M_{CD} &= -M_{CB} = -\frac{2}{15} [4(H_{CB} + H_{CD}) - (H_{BA} + H_{BC})] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (149)$$



圖 66

(b) 一端簡承, 又一端固定.

如圖 66, 設 A 端固定, D 端簡承, 即  $\theta_A = 0$ , 按照上法, 求得

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{-H_{CD} + \frac{1}{2}(3n_1 + 4)(C_{BC} - C_{BA}) + C_{CB}}{3n_0n_1 + 3n_0 + 3n_1 + 4} - C_{AB} \\ M_{BA} &= -M_{BC} = \frac{-2H_{CD} + 4H_{BC} + 3n_1C_{BC} + 3n_0(n_1 + 1)C_{BA}}{3n_0n_1 + 3n_0 + 3n_1 + 4} \\ M_{CB} &= -M_{CD} = \frac{(3n_0 + 4)H_{CD} - \frac{3}{2}n_0n_1C_{BA} + 3n_0n_1H_{CB} + 3n_1C_{CB}}{3n_0n_1 + 3n_0 + 3n_1 + 4} \end{aligned} \right\} \dots(150)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{若 } n_0 = n_1 = 1, \text{ 則 } M_{AB} &= \frac{1}{26} [7(C_{BC} - C_{BA}) + 2C_{CB} - 2H_{CD} - 26C_{AB}] \\ M_{BA} &= -M_{BC} = \frac{1}{13} [4H_{BC} - 2H_{CD} + 3C_{BC} + 6C_{BA}] \\ M_{CB} &= -M_{CD} = \frac{1}{26} [14H_{CD} - 3C_{BA} + 6H_{CB} + 6C_{CB}] \end{aligned} \right\} \dots(151)$$

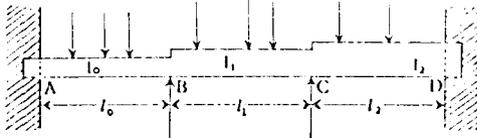
又設 D 端固定, A 端簡承, 即  $\theta_D=0$ , 亦可求得

$$\left. \begin{aligned} M_{DC} &= \frac{2n_0n_1H_{BA}-n_1(3+4n_0)(C_{CB}-C_{CD})-2n_0n_1C_{DC}}{2(3+3n_0+3n_1+4n_0n_1)} + C_{DC} \\ -M_{CD} &= M_{CB} = \frac{-2n_0n_1H_{BA}+4n_0n_1H_{CB}+3n_1C_{CB}+3(n_0+1)C_{CD}}{3+3n_0+3n_1+4n_0n_1} \\ -M_{BC} &= M_{BA} = \frac{n_0(3+4n_1)H_{BA}-\frac{3}{2}C_{CD}+3H_{BC}+3n_1C_{BC}}{3+3n_0+3n_1+4n_0n_1} \end{aligned} \right\} \dots (152)$$

若  $n_0=n_1=1$ , 則

$$\left. \begin{aligned} M_{DC} &= \frac{1}{26}[-7(C_{CB}-C_{CD})-2C_{DC}+2H_{BA}+26C_{DC}] \\ -M_{CD} &= M_{CB} = \frac{1}{13}[4H_{CB}-2H_{BA}+3C_{CB}+6C_{CD}] \\ -M_{BC} &= M_{BA} = \frac{1}{26}[14H_{BA}-3C_{CD}+6H_{BC}+6C_{BC}] \end{aligned} \right\} \dots (153)$$

(C) 兩端為固定者. 如圖 67.  $n_0 = \frac{K_1}{K_0}$   $n_1 = \frac{K_2}{K_1}$  可按照上



法, 求得各支點處之彎率如下.

圖 67

$$\left. \begin{aligned} M_{BC} &= -M_{BA} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{(4n_1+3)(2n_0H_{BA}-n_0H_{AB}+2H_{BC})+2(H_{DC}-2H_{CD}-2n_1H_{CB})}{4(n_0+1)(n_1+1)-n_0} \\ M_{CD} &= -M_{CB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(3n_0+4)(H_{DC}-2H_{CD}-2n_1H_{CB})+2n_1(2n_0H_{BA}-n_0H_{AB}+2H_{BC})}{4(n_0+1)(n_1+1)-n_0} \\ M_{AB} &= -\frac{M_{BC}}{2} - H_{AB} \\ M_{DC} &= \frac{M_{CD}}{2} + H_{DC} \end{aligned} \right\} (154)$$

若  $n_0 = n_1 = 1$ , 則

$$\left. \begin{aligned} M_{BC} = -M_{BA} &= -\frac{2}{45}[7(2H_{BA} - H_{AB} + 2H_{BC}) + 2(H_{DC} - 2H_{CD} - 2H_{CB})] \\ M_{CD} = -M_{CB} &= +\frac{2}{45}[7(H_{DC} - 2H_{CD} - 2H_{CB}) + 2(2H_{BA} - H_{AB} + 2H_{BC})] \\ M_{AB} &= -\frac{M_{BC}}{2} - H_{AB} \\ M_{DC} &= \frac{M_{CD}}{2} + H_{DC} \end{aligned} \right\} \dots\dots(155)$$

40. 四徑間以上之連續梁。連續梁之具有四徑間，或四徑間以上者，自可按照上法，在逐一支點處，求得其彎率，但其式過於繁複，茲姑從略，且以實際應用言之，連續梁之徑間數，大抵不過於四，過則並不經濟，而各徑間之剛率，亦未必互異，大抵不出於下列兩辦法之一，即

(甲) 中兩徑間之剛率相同，而首尾兩徑間之剛率亦相同。

(乙) 四徑間之剛率皆相同。

又四徑間連續梁之兩端，或全為簡承，或全為固定，其一端固定，一端簡承者，頗不多遇，如是則各彎率公式，自可為之簡化，讀者如感興味，可自求之。

又本章各公式，均假定各徑間皆於同時受有種種荷重，若有一個或一個以上之徑間，並無荷重，則各該徑間之  $H$  或  $C$ ，自必等於零，而其式亦必為之簡化。

41. 各支點處之反力，各支點處之彎率，既可由上列各式求得之，則各該處之反力，自可用第 37 節求剪截力之法，以推算之，但

除首尾兩支點外，其中間各支點處，可由其左右兩徑間而求得兩個反力，此兩個反力之和，即為該支點之反力。

例題一。設有雙徑間連續梁，其左右兩徑間之剛率相等，左徑間受有一個集中荷重三噸，在該徑間之中心，右徑間受有等佈荷重，每公尺凡半噸，左右兩徑間之長，各為五公尺，求各支點處之反力。

(甲) 設兩端為簡承者。

按照(141)式，中間支點處之彎率為  $M_{BA} = -\frac{1}{2}(H_{BA} + H_{BC})$ 。

$$H_{BA} = \frac{3}{16}Pl \quad [\text{見表6}] = \frac{3}{16} \times 3 \times 500 = 281.25 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$H_{BC} = \frac{1}{8}Wl \quad [\text{表6}] = \frac{1}{8} \times 0.5 \times 5 \times 500 = 156.25 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

$$\text{故 } M_{BA} = -M_{BC} = -\frac{1}{2}(281.25) + \frac{1}{2}(156.25) = +218.75 \text{ t}\cdot\text{cm}$$

就左徑間而言，

$$V_A = R_A - \frac{M_{BA} + M_{AB}}{l} \quad [(138) \text{ 式}]$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{218.75 + 0}{500} = +1.0625 \text{ t} \quad [\text{即 A 點反力為向上的，且等於 } 1.0625 \text{ t}]$$

$$V_B = -R_B - \frac{M_{AB} + M_{BA}}{l} \quad [(138) \text{ 式}]$$

$$= -\frac{3}{2} - \frac{0 + 218.75}{500} = -1.9375 \text{ t} \quad [\text{即 B 點反力為向上的，且等於 } 1.9375 \text{ t}]$$

又就右徑間而言，

$$V_B = \frac{0.5 \times 5}{2} - \frac{0 - 218.75}{500} = +1.6875 \text{ t} \quad [\text{即 B 點反力為向上的，且等於 } 1.6875 \text{ t}]$$

$$V_C = \frac{0.5 \times 5}{2} - \frac{0.21875}{500} = -0.8125 \text{ t.} \quad \text{[即 C 點反力爲向上的, 且等於 } 0.8125 \text{ t]}]$$

故 B 點反力, 爲  $1.9375 + 1.6875$ , 即  $3.625 \text{ t.}$

(乙) 設兩端爲固定者.

按照 (147) 式,  $M_{BC} = -M_{BA} = -\frac{1}{2}(C_{BA} + C_{BC})$

$$\text{由表 6. 得} \quad C_{BA} = \frac{1}{8} P l = \frac{1}{8} \times 3 \times 500 = 187.5 \text{ t}\cdot\text{cm.}$$

$$C_{BC} = \frac{1}{12} W l = \frac{1}{12} \times 0.5 \times 5 \times 500 = 104.17 \text{ t}\cdot\text{cm.}$$

$$\text{故} \quad M_{BC} = M_{BA} = -\frac{1}{2}(187.5 + 104.17) = -145.83 \text{ t}\cdot\text{cm.}$$

又由 (147) 式,  $M_{AB} = -\frac{M_B}{2} - H_{AB}$

$$\text{由表 6. 得} \quad H_{AB} = \frac{3}{16} \times 3 \times 500 = 281.25 \text{ t}\cdot\text{cm.}$$

$$\text{故} \quad M_{AB} = -\left(\frac{-145.83}{2}\right) - 281.25 = -208.33 \text{ t}\cdot\text{cm.}$$

又由 (147) 式,  $M_{CB} = \frac{M_{BC}}{2} + H_{CB}$

$$\text{由表 6. 得} \quad H_{CB} = \frac{1}{8} W l = \frac{1}{8} \times 0.5 \times 5 \times 500 = 156.25 \text{ t}\cdot\text{cm.}$$

$$\text{故} \quad M_{CB} = \frac{-145.83}{2} + 156.25 = +83.33 \text{ t}\cdot\text{cm.}$$

就左徑間而言,

$$V_A = \frac{3}{2} \left[ \frac{+145.83 + (-208.33)}{500} \right] = +1.625 \text{ t.} \quad \text{[即 A 點反力爲向上的, 且等於 } 1.625 \text{ t]}]$$

$$V_B = -\frac{3}{2} \left[ \frac{+145.83 - 208.33}{500} \right] = -1.375t \quad [\text{即 B 點反力爲向上的, 且等於 } 1.375t]$$

就右徑間而言,

$$V_B = \frac{0.5 \times 5}{2} \left[ \frac{-145.83 + 83.33}{500} \right] = +1.375t \quad [\text{即 B 點反力爲向上的, 且等於 } 1.375t]$$

故 B 點反力, 爲  $1.375 + 1.375 = 2.75t$

$$V_C = -\frac{0.5 \times 5}{2} \left[ \frac{-145.83 + 83.33}{500} \right] = -1.125t \quad [\text{即 C 點反力爲向上的, 且等於 } 1.125t]$$

例題二. 設有三徑間連續梁 其首尾兩徑間之剛率相等, 而中徑間之剛率, 等於 1.5 乘其鄰徑間之剛率, [即  $n_0 = 1.5$ ,  $n_1 = \frac{1}{1.5} = 0.67$ ]

三個徑間之長, 各等於五公尺, 若有活動等佈荷重, 每公尺凡半噸, 假定(甲)右徑間完全受有荷重, (乙)除左徑間外, 餘二徑間完全受有荷重, (丙)三個徑間完全受有荷重, 求各支點處之反力, 假定首尾兩端爲簡承者 [用 (148) 式]

$$(甲) \quad H_{BA} = H_{BC} = H_{CB} = 0$$

$$H_{CD} = \frac{1}{8} W \cdot l = \frac{1}{8} \times 0.5 \times 5 \times 500 = 156.25 t \cdot \text{cm}$$

$$M_{BC} = -M_{BA} = -\frac{-2 \times 156.25}{4 \times 2.5 \times 1.67 - 0.67} = +19.53 t \cdot \text{cm}$$

$$M_{CD} = -M_{CB} = -\frac{4 \times 2.5 \times 156.25}{4 \times 2.5 \times 1.67 - 0.67} = -97.66 t \cdot \text{cm}$$

就左徑間而言,

$$V_A = -\frac{0 - 19.53}{500} = +0.0391t \quad [A \text{ 點反力向上}]$$

$$V_B = -\frac{0 - 19.53}{500} = +0.0391 \text{ t.} \quad [\text{B 點反力向下}]$$

就中徑間而言.

$$V_B = -\frac{19.53 + 97.66}{500} = -0.2344 \text{ t.} \quad [\text{B 點反力向下}]$$

故 B 點反力, 共爲  $0.0391 + 0.2344 = 0.2735 \text{ t.}$  [向下的].

$$V_C = -\frac{19.53 + 97.66}{500} = -0.2344 \text{ t.} \quad [\text{C 點反力向上}]$$

就右徑間而言.

$$V_C = \frac{0.5 \times 5}{2} - \frac{-97.66 + 0}{500} = +1.4453 \text{ t.} \quad [\text{C 點反力向上}]$$

故 C 點反力, 共爲  $0.2344 + 1.4453 = 1.6797 \text{ t.}$  [向上的]

$$V_D = -\frac{0.5 \times 5}{2} - \frac{-97.66 + 0}{500} = -1.0547 \text{ t.} \quad [\text{D 點反力向上, 等於 } 1.0547 \text{ t.}]$$

$$(\text{乙}) \quad H_{BA} = 0, \quad H_{BC} = H_{CB} = 156.25 \text{ t}\cdot\text{cm}, \quad H_{CD} = 156.25 \text{ t}\cdot\text{cm},$$

$$M_{DC} = -M_{BA} = -\frac{4 \times 1.67 \times 156.25 - 2(0.67 \times 156.25 + 156.25)}{4 \times 2.5 \times 1.67 - 0.67} = -32.55 \text{ t}\cdot\text{cm}.$$

$$M_{CD} = -M_{CB} = -\frac{4 \times 2.5(0.67 \times 156.25 + 156.25) - 2 \times 0.67 \times 156.25}{4 \times 2.5 \times 1.67 - 0.67} = -149.74 \text{ t}\cdot\text{cm}.$$

就左徑間而言.

$$V_A = -\frac{0 + 32.55}{500} = -0.0651 \text{ t.} \quad [\text{A 點反力向下}]$$

$$V_B = -\frac{0 + 32.55}{500} = -0.0651 \text{ t.} \quad [\text{B 點反力向上}]$$

就中徑間而言，

$$V_B = \frac{0.5 \times 5}{2} - \left[ \frac{-32.55 + 149.74}{500} \right] = +1.0157 \text{ t} \quad [\text{B 點反力向上}]$$

故 B 點反力，共為  $0.0651 + 1.0157 = 1.0808 \text{ t}$ 。 [B 點反力向上]

$$V_C = -\frac{0.5 \times 5}{2} - \left[ \frac{-32.55 + 149.74}{500} \right] = -1.4843 \text{ t} \quad [\text{C 點反力向上}]$$

就右徑間而言，

$$V_C = \frac{0.5 \times 5}{2} - \left[ \frac{-149.74 + 0}{500} \right] = +1.5495 \text{ t} \quad [\text{C 點反力向上}]$$

故 C 點反力，共為  $1.4843 + 1.5495 = 3.0338 \text{ t}$ 。 [C 點反力向上]

$$V_D = -\frac{0.5 \times 5}{2} - \left[ \frac{-149.74 + 0}{500} \right] = -0.9505 \text{ t} \quad \begin{array}{l} [\text{D 點反力向上，且等於} \\ 0.9505 \text{ t}] \end{array}$$

(丙) 將(甲)(乙)所得之結果相加，即可得各彎率及反力。

故 A 點反力  $= 1.0547 - 0.0651 = 0.9896 \text{ t}$  [向上]

B 點反力  $= 1.0808 + 1.6797 = 2.7605 \text{ t}$  [向上]

C 點反力  $= 3.0338 + (-0.2735) = 2.7605 \text{ t}$  [向上]

D 點反力  $= 0.9505 + 0.0391 = 0.9896 \text{ t}$  [向上]

因連續梁及荷重，均為對稱的，故 A 點反力 = D 點反力，而 B 點反力 = C 點反力。

上述兩例之解法，足以標示推算之大概，其他各問題，皆可依照處理，茲不贅述。

42. 固定點 Fixed Points.

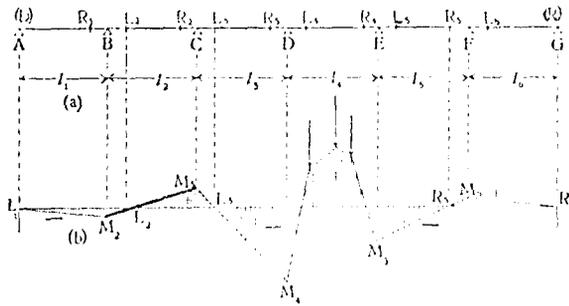


圖 68

凡在任何連續梁，其中有若干點，於圖解之時，甚為有用，且可用以決定活動荷重之位置。藉以計算梁中最大應力。若該梁之兩端為簡承者，如圖 68，則首尾兩徑間之中，各有一點。[圖 68 (a) 之 \$R\_1\$ 及 \$I\_3\$] 而

其他各徑間之中，各有兩點。[圖 68 (a) 之 \$I\_2, R\_2, I\_4, R\_4, I\_6, R\_6, I\_5, R\_5\$ 等點]。此諸點與所受荷重無關。其在任何指定之連續梁中之位置，為固定的，故名曰固定點。[如該梁兩端，為固定的，而非簡承的，則首尾兩徑間，亦各有兩個固定點]

凡雙徑間連續梁之徑間長及截面皆同者，其固定點之位置，距離中間支點，等於 \$0.2l\$ (\$l\$ 為徑間之長)。若係三徑間連續梁，其徑間長皆相等者，則兩端徑間之固定點 (\$R\_1\$ 或 \$R\_3\$)，距中間支點等於 \$0.21 l\$，而中徑間之固定點，(\$I\_2\$ 及 \$R\_2\$) 距中間支點等於 \$0.2 l\$。

凡在三個對稱的徑間 (其慣性率 \$I\$ 皆相同)，中徑間之固定點 (\$I\_2\$ 及 \$R\_2\$) 與其最近支點之距離，為

$$f = \frac{n}{2 + 3n} \cdot n l \dots \dots \dots (156)$$

而兩端徑間之固定點 (\$R\_1\$ 及 \$I\_3\$) 與其最近支點之距離，為

$$f = \frac{2n + 2}{n + 2n + 2} \cdot l \dots \dots \dots (157)$$

上兩式中之  $n = \frac{\text{中徑間之長}}{\text{端徑間之長}}$ ，而  $m = (2 + n)(2 + 3n)$ 。

以一般言之（徑間數為任何數，各徑間之長，亦為任何數，惟惰性率則全梁一致），固定點可用圖解法決定其位置，〔如本書第三編所述〕或用下法推算得之，亦可。

第一固定點，為第二徑間之  $I_2$  點，此點分該徑間為  $CI_2$  及  $BI_2$  兩段〔圖 68 (a)〕，其比率如下

$$\frac{CI_2}{BI_2} = r_2 = \frac{2(l_1 + l_2)}{l_2} \dots\dots\dots (158)$$

其次徑間中之  $I_3$ ，則以下開比率定之。

$$\frac{DI_3}{CI_3} = r_3 = \frac{l_2}{l_3 r_2} + \frac{2(l_2 + l_3)}{l_3} \dots\dots\dots (159)$$

如用此式繼續推算，則每個  $r$  之值，皆可由其前一個之值算得，直至所有各  $I$  點皆已算得而後止，如更按照上法，自右端開始，逐次向左推算，則所有各  $R$  點，亦可求得。

如各徑間之長皆相等，則按照 (158)、(159) 兩式求得各個  $r$  之值，必為 4, 3.75, 3.733, 3.732, 3.732.....，故各徑間（除兩端徑間外）之  $l$  均等於  $0.21 l$ ，而兩端徑間之  $l$  則等於  $0.2 l$ 。

兩端支點，亦可作為固定點，〔此指兩端簡承者而言〕故可謂每徑間各有兩固定點。

若以  $L$  代表每徑間之左固定點，以  $R$  代表其右固定點，則下開原則，甚為有用〔圖 68 (b)〕。

凡任何一個徑間，受有任何荷重，其由此而得之彎率圖，必經過該徑間左方各徑間之  $L$  點，及該徑間右方各徑間之  $R$  點，故各該固定

點，實係不受荷重各徑間中，變率等於零之點，亦即彎曲反向點。  
Points of Contraflexure.

不受荷重各徑間之變率圖。既為經過一個固定點之直線，則由每個比率  $r$ ，即可決定相鄰兩支點處變率相比之數。故若已知一個變率之值，則其他各變率之值，皆不難算得之。

以上關於固定點者，不過略述一斑，餘詳第三編。

43. 決定活動荷重位置之通則。欲求活動荷重之位置，俾發生最大應力，可採用下述之通則。

(a). 凡居於任何徑間中兩固定點間之任何截面，如欲使之發生最大的正變率〔此處所謂之正變率，蓋指該截面之上部纖維受有壓力，下部纖維受有拉力而言，反之則為負變率，其意義與第一編同，而與本編其他各節異〕應使該徑間及其他每隔一個徑間者，皆受完全荷重。如欲求最大的負變率，則適與之相反，即應使該徑間及其他每隔一個徑間者，絕不受任何荷重。

(b). 凡居於任何徑間中兩固定點以外之任何截面，如欲使之發生最大的正變率，該徑間之一段，包括該截面在內，應使受有荷重，而該徑間之餘一段，與該截面相鄰之徑間，以及其他每隔一個徑間者，應使絕不受何荷重，如欲求最大的負變率，則荷重適相反。

(c). 如欲求任何中間支點處之最大的負變率，應使其相鄰兩徑間及其他每隔一個徑間者，均受完全荷重。此項荷重，並可使該支點處發生最大的正反力〔即向上的反力〕。

(d). 凡任何徑間之任何截面，如欲求其最大的正剪截力〔此處所謂之正負剪截力，其意義與第 37 節所規定者同〕應使居於截面右方之一部份徑間以及右方其他每隔一個徑間者，皆受完全荷重，並

使左鄰徑間，以及左方其他每隔一個徑間者，皆受完全荷重，如欲求最大的負剪截力，則荷重適相反。

44. 支點下陷之影響。如有雙徑間連續梁，其徑間之長，及截面，皆相同，若中間支點下陷量，等於  $D$ ，則該支點處之彎率，必為之減少，其所減少者，為

$$M_2 = \frac{3EI}{l^2} \cdot D \dots \dots \dots (160)$$

而中間支點反力之所減少者，為

$$-V_2 = 2 \frac{M_2}{l} \dots \dots \dots (161)$$

其兩端反力，則因而增多，其所增多者，為

$$V_1 = V_3 = \frac{M_2}{l} \dots \dots \dots (162)$$

若兩端支點，各下陷至  $D$ ，或任一端支點，下陷至  $2D$ ，其所發生之影響，與 (160)，(161)，(162) 等式所得者相等，惟正負號適相反耳。

若徑間之長不相等，或兩徑間之惰性率不相等，可假想將該支點撤去，即於該點，施一個單位荷重，而計算其所能發生於該點之撓度  $d$  (Deflection)，如是若該支點下陷至  $D$ ，則其反力之增多量，必為

$$V_2 = -\frac{D}{d} \dots \dots \dots (163)$$

此原則，並可適用於連續梁之具有兩個以上徑間者。

若有對稱的三徑間連續梁，其兩端徑間之長，各等於  $l$ ，而中徑

間之長，等於  $nl$ 。設三個徑間之惰性率，皆相同，又設左端支點下陷至達  $D_1$ ，則中間兩支點處彎率之變化如下。〔兩端為簡承者〕

$$\left. \begin{aligned} M_2 &= -\frac{12EI(1+n)}{ml^2} \cdot D_1 \\ M_3 &= +\frac{6EI n}{ml^2} \cdot D_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(163)$$

上式中之  $m=4+8n+3n^2$

由此兩個彎率值，以推算四個反力之變化，自甚易易。若三徑間之長皆相等，則四個反力之變化如下。

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= -\frac{24}{15} \cdot \frac{EID_1}{l^3}, \\ V_2 &= +\frac{54}{15} \cdot \frac{EID_1}{l^3}, \\ V_3 &= -\frac{36}{15} \cdot \frac{EID_1}{l^3}, \\ V_4 &= +\frac{6}{15} \cdot \frac{EID_1}{l^3}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(164)$$

若左方第二支點陷至達  $D_2$ ，則四個反力之變化如下（仍假定三徑間之長皆相等）。

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= +\frac{54}{15} \cdot \frac{EID_2}{l^3}, \\ V_2 &= -\frac{144}{15} \cdot \frac{EID_2}{l^3}, \\ V_3 &= +\frac{126}{15} \cdot \frac{EID_2}{l^3}, \\ V_4 &= -\frac{36}{15} \cdot \frac{EID_2}{l^3}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(165)$$

(164) 式中之  $V_2$ , 等於 (165) 式中之  $V_1$ , 此即著名之 Maxwell 氏 [相互變位原則] 也. 此原則謂 [若 A 點受力 = P, 能使 B 點發生變位  $\delta$ , 則 B 點受力 = P 之時, A 點發生之變位, 亦必等於  $\delta$ , 此 A, B, 兩點, 係假定在同一結構之中.]

由上述者觀之, 若於建築之時, 故意令中間支點, 較低於兩端支點, 且令此項相差量, 等於預定之微小量, 則可使各支點彎率, 約略相等, 而全梁之撓性率, 亦可期其一致, 此實頗為有利之舉, 從前於採用連續梁設計之時, 恒慮其支點下陷, 以致應力發生重大變化, 故頗躊躇不敢採用, 其實若祇中間支點下陷, 且為量較微, 則不特無害, 而反為有利也.

45. Clapeyron 氏三彎率定理.

此為久已著名之定理, 凡稍稱完善之力學及結構工程學教科書, 大抵皆載有此定理, 並加以證明, 茲將其公式錄示如下, 讀者如欲知其證法, 可參閱

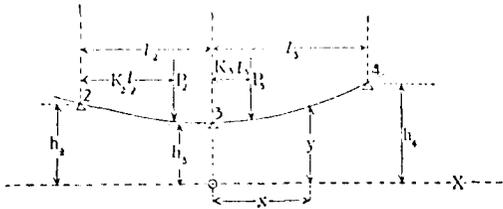


圖 69

Merriman & Jacoby 兩氏所著之 *Roofs and Bridges, Part IV, Higher Structures* 第一章第四節 (1909 年版), 如圖 69.

$$M_2 l_2 + 2M_3(l_2 + l_3) + M_4 l_3 = -P_2 l_2^2 (k_2 - k_2^3) - P_3 l_3^2 (2k_3 - 3k_3^2 + k_3^3) - 6EI \left( \frac{h_2 - h_3}{l_2} + \frac{h_3 - h_4}{l_3} \right) \dots \dots \dots (166)$$

若各支點, 居於同一高度, 則上式右方之末項, 等於零.

若各徑間所受之集中荷重，不止一個，則於各個含 P 項之前，加以  $\Sigma$  號如下。

$$M_2 l_2 + 2M_3(l_2 + l_3) + M_4 l_3 = -\Sigma P_2 l_2^2 (k_2 - k_2^3) - \Sigma P_3 l_3^2 (2k_3 - 3k_3^2 + k_3^3) \dots \dots (167)$$

若兩徑間所受者，為等佈荷重  $w_2$  及  $w_3$ ，則得

$$M_2 l_2 + 2M_3(l_2 + l_3) + M_4 l_3 = -\frac{1}{4} w_2 l_2^3 - \frac{1}{4} w_3 l_3^3 \dots \dots (168)$$

讀者注意，上列三式中右方各項，均與所受荷重有關，易言之，與本編所習用之 II 及 C，實有密切關聯。（參閱第三編用配對點圖解法。）

## 第十一章 聯立一次方程式解法

## METHODS OF SOLVING SIMULTANEOUS SIMPLE EQUATIONS.

46. 機械的作表法。用撓角撓度法，以解各種剛構，必須按照聯立法，以解若干一次方程式，若未知量之數甚多，則聯立方程式亦必甚多，解之之時，極為繁複，且極易發生錯誤，故必須採用某種有規律的或簡捷的方法，以省時間而免偶誤，下述之機械的作表法，及迭求約值法，據日本瀨戶政章氏謂為係乃師北海道帝大教授鷹部屋福平博士所創擬云，[見瀨戶氏所著ラーメンの解法]。

作表之前，應先注意下開各項。

(a) 各剛結點之編號，應迴環曲折，成 S 字形，如第 35 節中之圖 59A 所示，其與地盤相聯之各結點，則編為 I, II, III, …… 等號。

(b) 各桿件之剛率，( $K = \frac{I}{l}$ ) 亦應迴環曲折，分別編號，其餘各立柱之剛率  $K'$ ，亦按照此法編號，惟已有  $K$  之號數，則省去之，至最下層立柱之剛率，則編為  $K_1, K_2, K_3, \dots$  等號，其如圖 59A 所示。

(c) 以  $P_x$  代表  $x$  點四周各桿件剛率和之一倍。

以  $X_m$  代表第  $m$  層各立柱剛率和之  $\frac{2}{3}$  倍 [全層各立柱合計在內]

令  $P_{xx'} = \frac{C_{xx'}}{2E}$ ，其中  $C_{xx'}$  為  $xx'$  桿件之荷重項，由表 5 及表 6 查得之。

令  $q_m = -\frac{Q_m h_m}{6E}$ ，其中之  $Q_m$  為作用於第  $m$  層柱頂之橫平剪截力之總數，而  $h_m$  為第  $m$  層各柱之高。

令  $-3R_m = \mu_m$ ，其中之  $R_m = \frac{\text{第 } m \text{ 層之撓度}}{h_m}$ 。

今試就第 35 節之例題，以說明機械的作表法如下。

該節所得之 (1') 至 (9') 等式，可列表如次。

表 7

稱 號	方 程 式 之 左 方									方 程 式 之 右 方
	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	
1'	$\beta_1$	$K_1$		$K'_1$			$K_1$	$K'_1$		0
2'	$K_1$	$\beta_2'$	$K_2$				$K_{11}$	$K_2$		0
3'		$K_2$	$\beta_3'$	$K_1$		$K'_3$		$K_2$	$K'_3$	0
4'	$K_1'$		$K_3$	$\beta_4$	$K_4$			$K'_1$	$K_4$	0
5'				$K_4$	$\beta_5$	$K_5$			$K_4$	0
6'			$K'_3$		$K_5$	$\beta_6'$			$K'_3$	0
7'	$K_1$	$K_{11}$					$\frac{X_1}{2}$			$\frac{q_1}{2}$
8'	$K'_1$	$K_2$	$K_2$	$K'_1$				$\frac{X_2}{2}$		$\frac{q_2}{2}$
9'			$K'_1$	$K_1$	$K_1$	$K'_3$			$\frac{X_3}{2}$	$\frac{q_3}{2}$

細察上表，可見各式中，各未知量係數之排列，均為有規律的，就縱橫兩方向及兩個斜對角線方向觀之，各係數之位置，皆為對稱的，其中  $\beta_2, \beta_3, \beta_6'$  等係數，與  $\beta_1, \beta_5, \beta_4$  異，因 2, 3, 6 等結點，與 2', 3', 6' 等結點，為對稱的，且該架構之徑間數，奇而非偶，故須稍異。[ $\beta_2, \beta_3, \beta_6'$  之定義，具見第 35 節]。

將第 35 節所得  $\rho, X, q,$  等值, 代入表 7, 即得表 8 如下。

編 號	方 程 式 左 方									方 程 式 右 方 (E <sup>-1</sup> )
	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	
1'	5.9	0.75		1.0			1.2	1.0		0
2'	0.75	8.15	1.0				1.2	1.0		0
3'		1.0	7.75	0.75			1.0	1.0	1.0	0
4'	1.0		0.75	5.5	1.0			1.0	1.0	0
5'				1.0	3.0	0.5			1.0	0
6'			1.0		0.5	4.5			1.0	0
7'	1.2	1.2					1.6			-510.0
8'	1.0	1.0	1.0	1.0				1.33		-333.3
9'			1.0	1.0	1.0	1.0			1.33	-166.6

上列九個方程式之解法, 具如表 9 所示, 先求得  $\theta_1 = +185.15 \text{ E}^{-1}$   
 由 (27'') 式,  $\theta_2 = 692.5 - 3.0211 \times 185.15 = +136.1 \text{ E}^{-1}$   
 由 (26'') 式,  $\theta_3 = 80.6 + 0.1203 \times 185.15 - 0.0214 \times 136.1 = +100.0 \text{ E}^{-1}$   
 由 (25'') 式,  $\theta_4 = -647.0 - 1.1823 \times 185.15 + 0.3941 \times 136.1 + 9.447 \times 100.0$   
 $= +132.4 \text{ E}^{-1}$   
 由 (24'') 式,  $\theta_5 = 59.7 + 0.3284 \times 100.0 - 0.0896 \times 132.4 = +80.7 \text{ E}^{-1}$   
 由 (10'') 式,  $\theta_6 = -500 - 3 \times 100.0 + 132.4 + 9 \times 80.7 = +58.7 \text{ E}^{-1}$   
 由 (7'') 式,  $\mu_1 = \frac{1}{1.2} (-375 - 0.9 \times 185.15 - 0.9 \times 136.1) = -553.5 \text{ E}^{-1}$   
 由 (8'') 式,  $\mu_2 = -250 - 0.75(185.15 + 136.1 + 100.0 + 132.4) = -665.3 \text{ E}^{-1}$   
 由 (9'') 式,  $\mu_3 = -125 - 0.75(100.0 + 132.4 + 80.7 + 58.7) = -403.9 \text{ E}^{-1}$

然後再以此諸值, 代入各彎率式, 求得各個彎率之值, 並察視各結點平衡條件, 及各層平衡條件, 是否約略滿足, 具如第 35 節之所示, 如果約略滿足, 則此問題可稱業已解決矣, [讀者應注意, 表 9 之解法, 及上列求  $\theta_2, \theta_3, \dots, \mu_1, \mu_2, \mu_3,$  等所取之式, 力避以較大或較小之數作乘除, 藉免發生甚大之錯誤]

說 明	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	方程式右方( $E^{-1}$ )	編 號
$9' \div 1.33$			0.75	0.75	0.75	0.75			1.00	-125.0	9'
$9'' - 5'$			0.75	-0.25	-2.25	0.25				-125.0	10'
$10' \times 4$			3.00	-1.00	-9.00	1.00				-500.0	10'
$8' \div 1.33$	0.75	0.75	0.75	0.75				1.00		-250.0	8''
$8'' + 9''$	0.75	0.75	1.50	1.50	0.75	0.75		1.00	1.00	-375.0	11'
$11' - 3'$	0.75	-0.25	-6.25	0.75	0.75	-0.25				-375.0	12'
$12' \times 4$	3.00	-1.00	-25.00	3.00	3.00	-1.00				-1500.0	12'
$7' \times 0.75$	0.90	0.90					1.20			-375.0	7''
$7'' + 8''$	1.65	1.65	0.75	0.75			1.20	1.00		-625.0	13'
$1' - 13'$	4.25	-0.90	-0.75	0.25						625.0	14'
$14' \times 4$	17.00	-3.60	-3.00	1.00						2500.0	14''
$1' - 2'$	6.15	-7.40	-1.00	1.00						0	15'
$3' - 4'$	-1.00	1.00	7.00	-4.75	-1.00	1.00				0	16'
$6' - 5'$			1.00	-1.00	-2.50	4.00				0	17'
$17' \div 4$			0.25	-0.25	-0.6250	1.00				0	17''
$10'' + 12''$	3.00	-1.00	-22.00	2.00	-6.00					-2000.0	18'
$18' \div 6$	0.5000	-0.1667	-3.6667	0.3333	-1.0000					-333.3	18''
$16'' \div 17''$	-1.0000	1.0000	6.7500	-4.5000	-0.3750					0	19'
$19' \div 0.375$	-2.6667	2.6667	18.0000	-12.0000	-1.0000					0	19''
$19'' - 18''$	-3.1667	2.8333	21.6667	-12.3333						333.3	20'
$20' \div 12.3333$	-0.2568	0.2297	1.7568	-1.0000						27.0	20''
$15'' + 20''$	4.8932	-7.1703	0.7568							27.0	21'
$21' \div 0.7568$	6.4657	-9.4746	1.0000							35.7	21''
$14'' - 15''$	11.8500	3.8000	-2.0000							2500.0	22'
$22' \div 2$	5.9250	1.9000	-1.0000							1250.0	22''
$21'' + 22''$	12.3907	-7.5746								1285.7	23'
$23' \div 7.5746$	1.6367	-1.0000								169.7	23''
$10'' - 17''$			2.75	-0.75	-8.3750					-500.0	24'
$24' \div 8.375$			0.3284	-0.0896	-1.0000					-59.7	24''
$18'' - 24''$	0.5000	-0.1667	-3.9951	0.4229						-273.6	25'
$25' \div 0.4229$	1.1823	-0.3941	-9.4470	1.0000						-647.0	25''
$20'' + 25''$	0.9255	-0.1644	-7.6902							-620.0	26'
$26' \div 7.6902$	0.1203	-0.0214	-1.0000							-80.6	26''
$23'' - 26''$	5.8947	1.9214								1330.6	27'
$27' \div 1.9214$	3.0211	1.0000								692.5	27''
$27'' + 23''$	4.6578									862.4	28'
$28' \div 4.6578$	1.0000									185.15	28''

## 47. 迭求約值法 Method of Successive Approximations.

$$\text{由 (1') 式,} \quad 5.9 \theta_1 + 0.75 \theta_2 + \theta_3 + 1.2\mu_1 + \mu_2 = 0.$$

$$\text{令 } \theta_1 = \theta_2 = \theta_3, \quad \text{則} \quad \theta_1 = -\frac{1.2\mu_1 + \mu_2}{5.9 + 0.75 + 1.0} = -0.1569\mu_1 - 0.1307\mu_2 \dots (a)$$

$$\text{由 (2') 式,} \quad 0.75\theta_1 + 8.15\theta_2 + \theta_3 + 1.2\mu_1 + \mu_2 = 0.$$

$$\text{令 } \theta_1 = \theta_2 = \theta_3, \quad \text{則} \quad \theta_2 = -\frac{1.2\mu_1 + \mu_2}{0.75 + 8.15 + 1.0} = -0.1212\mu_1 - 0.1010\mu_2 \dots (b)$$

$$\text{由 (3') 式,} \quad \theta_2 + 7.75\theta_3 + 0.75\theta_4 + \theta_5 + \mu_2 + \mu_3 = 0$$

$$\text{令 } \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5, \quad \text{則} \quad \theta_3 = -\frac{\mu_2 + \mu_3}{1.0 + 7.75 + 0.75 + 1.0} = -0.0952\mu_2 - 0.0952\mu_3 (c)$$

$$\text{由 (4') 式,} \quad \theta_1 + 0.75\theta_3 + 5.5\theta_4 + \theta_5 + \mu_2 + \mu_3 = 0$$

$$\text{令 } \theta_1 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5, \quad \text{則} \quad \theta_4 = -\frac{\mu_2 + \mu_3}{1.0 + 0.75 + 5.5 + 1.0} = -0.1212\mu_2 - 0.1212\mu_3 (d)$$

$$\text{由 (5') 式,} \quad \theta_4 + 3\theta_5 + 0.5\theta_6 + \mu_3 = 0$$

$$\text{令 } \theta_4 = \theta_5 = \theta_6, \quad \text{則} \quad \theta_5 = -\frac{\mu_3}{1.0 + 3.0 + 0.5} = -0.2222\mu_3 \dots \dots \dots (e)$$

$$\text{由 (6') 式,} \quad \theta_3 + 0.5\theta_5 + 4.5\theta_6 + \mu_3 = 0$$

$$\text{令 } \theta_3 = \theta_5 = \theta_6, \quad \text{則} \quad \theta_6 = -\frac{\mu_3}{1.0 + 0.5 + 4.5} = -0.1667\mu_3 \dots \dots \dots (f)$$

以上列諸值, 代入 (7'), (8'), (9'), 等式, 如下

$$\text{由 (7') 式,} \quad 1.2\theta_1 + 1.2\theta_2 + 1.6\mu_1 = -500 \text{ E}^{-1}$$

$$\text{即} \quad 1.2663\mu_1 - 0.2780\mu_2 = -500 \text{ E}^{-1} \dots \dots \dots (g)$$

由 (8') 式,  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + 1.33\mu_2 = -333.3 E^{-1}$

即  $-0.2780\mu_1 + 0.8852\mu_2 - 0.2164\mu_3 = -333.3 E^{-1} \dots\dots\dots (h)$

由 (9') 式,  $\theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + 1.33\mu_3 = -166.6 E^{-1}$

即  $-0.2164\mu_2 + 0.7280\mu_3 = -166.6 E^{-1} \dots\dots\dots (i)$

用上述之機械的作表法, 由 (g), (h), (i), 三式, 求  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  之值  
如表 10 所示.

表 10

說 明	方 程 式 左 方			方 程 式 右 方	編 號
	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$E^{-1}$	
	+ 1.2664	- 0.2780		- 500.0	g
	- 0.2780	+ 0.8852	- 0.2164	- 333.3	h
		- 0.2164	+ 0.7280	- 166.6	i
$g \div 1.2663$	+ 1.0000	- 0.2195		- 394.8	g'
$h \div 0.2780$	- 1.0000	+ 3.1842	- 0.7784	- 1198.9	h'
$h' + g'$		+ 2.9647	- 0.7784	- 1593.7	j
$j \div 2.9647$		+ 1.0000	- 0.2626	- 537.6	j'
$i \div 0.2164$		- 1.0000	+ 3.3641	- 769.9	i'
$j' + i'$			+ 3.1015	- 1307.5	k
$k \div 3.1015$			+ 1.0000	- 421.6	k'

以此  $\mu_3$  之值, 代入 (j') 式, 而得

$$\mu_2 = -537.6 + 0.2626(-421.6) = -648.3 E^{-1}$$

再以所得  $\mu_2$  之值, 代入 (g') 式, 而得

$$\mu_1 = -394.8 + 0.2195(-648.3) = -537.1 E^{-1}$$

即以此等  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  之值, 代入 (a), (b), (c), …… (f) 等式, 而得

$$\theta_1 = -0.1569\mu_1 - 0.1307\mu_2 = +161.0 \text{ E}^{-1}$$

$$\theta_2 = -0.1212\mu_1 - 0.1010\mu_2 = +130.6 \text{ E}^{-1}$$

$$\theta_3 = -0.0952\mu_2 - 0.0952\mu_3 = +101.9 \text{ E}^{-1}$$

$$\theta_4 = -0.1212\mu_2 - 0.1212\mu_3 = +129.7 \text{ E}^{-1}$$

$$\theta_5 = -0.2222\mu_3 = +93.7 \text{ E}^{-1}$$

$$\theta_6 = -0.1667\mu_3 = +70.2 \text{ E}^{-1}$$

乃以上文所得諸假定值, 代入表 8 各式, 而得第一約值如下.

$$\theta_1 = \frac{1}{5.9}(-0.75 \times 130.6 - 129.7 + 1.2 \times 537.1 + 648.3) = +180.5 \text{ E}^{-1}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{8.15}(-0.75 \times 180.5 - 101.9 + 1.2 \times 537.1 + 648.3) = +129.5 \text{ E}^{-1}$$

$$\theta_3 = \frac{1}{7.75}(-129.5 - 0.75 \times 129.7 - 70.2 + 648.3 + 421.6) = +99.7 \text{ E}^{-1}$$

$$\theta_4 = \frac{1}{5.5}(-180.5 - 99.7 \times 0.75 - 93.7 + 648.3 + 421.6) = +131.1 \text{ E}^{-1}$$

$$\theta_5 = \frac{1}{3}(-131.1 - 0.5 \times 70.2 + 421.6) = +85.1 \text{ E}^{-1}$$

$$\theta_6 = \frac{1}{4.5}(-99.7 - 0.5 \times 85.1 + 421.6) = +62.1 \text{ E}^{-1}$$

$$\mu_1 = \frac{1}{1.6}(-500.0 - 1.2 \times 180.5 - 1.2 \times 129.5) = -545.0 \text{ E}^{-1}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{1.33}(-333.3 - 180.5 - 129.5 - 99.7 - 131.1) = -655.6 \text{ E}^{-1}$$

$$\mu_3 = \frac{1}{1.33}(-166.6 - 99.7 - 131.1 - 85.1 - 62.1) = -408.4 \text{ E}^{-1}$$

再以此諸值，求第二約值如下。

$$\theta_1 = \frac{1}{5.9}(-0.75 \times 129.5 - 131.1 + 1.2 \times 545.0 + 655.6) = +183.3 \text{ E}^{-1}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{8.15}(-0.75 \times 183.3 - 99.7 + 1.2 \times 545.0 + 655.6) = +131.6 \text{ E}^{-1}$$

$$\theta_3 = \frac{1}{7.75}(-131.6 - 0.75 \times 131.1 - 62.1 + 655.6 + 408.4) = +99.6 \text{ E}^{-1}$$

$$\theta_4 = \frac{1}{5.5}(-183.3 - 99.6 \times 0.75 - 85.1 + 655.6 + 408.4) = +131.1 \text{ E}^{-1}$$

$$\theta_5 = \frac{1}{3}(-131.1 - 0.5 \times 62.1 + 408.4) = +82.1 \text{ E}^{-1}$$

$$\theta_6 = \frac{1}{4.5}(-99.6 - 0.5 \times 82.1 + 408.4) = +59.5 \text{ E}^{-1}$$

$$\mu_1 = \frac{1}{1.6}(-500.0 - 1.2 \times 183.3 - 1.2 \times 131.6) = -548.7 \text{ E}^{-1}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{1.33}(-333.3 - 183.3 - 131.6 - 99.6 - 131.1) = -659.2 \text{ E}^{-1}$$

$$\mu_3 = \frac{1}{1.33}(-166.6 - 99.6 - 131.1 - 82.1 - 59.5) = -404.2 \text{ E}^{-1}$$

更求第三約值如下。

$$\theta_1 = \frac{1}{5.9}(-0.75 \times 131.6 - 131.1 + 1.2 \times 548.7 + 659.2) = +184.4 \text{ E}^{-1}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{8.15}(-0.75 \times 184.4 - 99.6 + 1.2 \times 548.7 + 659.2) = +132.5 \text{ E}^{-1}$$

$$\theta_3 = \frac{1}{7.75}(-132.5 - 0.75 \times 131.1 - 59.5 + 659.2 + 404.2) = +99.8 \text{ E}^{-1}$$

$$\theta_4 = \frac{1}{5.5}(-184.4 - 0.75 \times 99.8 - 82.1 + 659.2 + 404.2) = +131.3 \text{ E}^{-1}$$

$$\theta_5 = \frac{1}{3}(-131.3 - 0.5 \times 59.5 + 404.2) = +81.0 \text{ E}^{-1}$$

$$\theta_6 = \frac{1}{4.5}(-99.8 - 0.5 \times 81.0 + 404.2) = +58.6 \text{ E}^{-1}$$

$$\mu_1 = \frac{1}{1.6}(-500.0 - 1.2 \times 184.4 - 1.2 \times 132.5) = -550.2 \text{ E}^{-1}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{1.33}(-333.3 - 184.4 - 132.5 - 99.8 - 131.3) = -661.0 \text{ E}^{-1}$$

$$\mu_3 = \frac{1}{1.33}(-166.6 - 99.8 - 131.3 - 81.0 - 58.6) = -403.0 \text{ E}^{-1}$$

若以此項第三約值，代入第 35 節各彎率式，即得

$$\left. \begin{array}{l} M_{1,2} = +752.0 \text{ t}\cdot\text{cm}\cdot \\ M_{1,4} = -321.8 \text{ t}\cdot\text{cm}\cdot \\ M_{1,1} = -435.4 \text{ t}\cdot\text{cm}\cdot \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Sigma M_1 \stackrel{\cdot}{=} 0 \\ (= -5.2) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} M_{2,3} = +543.6 \text{ t}\cdot\text{cm}\cdot \\ M_{2,1} = -428.0 \text{ t}\cdot\text{cm}\cdot \\ M_{2,5} = -118.8 \text{ t}\cdot\text{cm}\cdot \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Sigma M_2 \stackrel{\cdot}{=} 0 \\ (= -3.2) \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 M_{2-1} = +674.1 \text{ t}\cdot\text{cm}\cdot \\
 M_{2-3} = -592.4 \text{ t}\cdot\text{cm}\cdot \\
 M_{2-2'} = +596.3 \text{ t}\cdot\text{cm}\cdot \\
 M_{2-11} = -684.5 \text{ t}\cdot\text{cm}\cdot
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \right\}
 \begin{array}{l}
 \Sigma M_2 \stackrel{\cdot}{=} 0 \\
 (= -6.5)
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 M_{5-4} = -219.4 \text{ t}\cdot\text{cm}\cdot \\
 M_{5-5} = +220.6 \text{ t}\cdot\text{cm}\cdot
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \end{array}
 \right\}
 \begin{array}{l}
 \Sigma M_5 \stackrel{\cdot}{=} 0 \\
 (= +1.2)
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{l}
 M_{3-2} = -657.8 \text{ t}\cdot\text{cm}\cdot \\
 M_{3-3'} = +449.1 \text{ t}\cdot\text{cm}\cdot \\
 M_{3-4} = +496.4 \text{ t}\cdot\text{cm}\cdot \\
 M_{3-6} = \sqrt{289.6} \text{ t}\cdot\text{cm}\cdot
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \right\}
 \begin{array}{l}
 \Sigma M_3 \stackrel{\cdot}{=} 0 \\
 (= -1.9)
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 M_{6-5} = +198.2 \text{ t}\cdot\text{cm}\cdot \\
 M_{6-5'} = +175.8 \text{ t}\cdot\text{cm}\cdot \\
 M_{6-3} = -372.0 \text{ t}\cdot\text{cm}\cdot
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \right\}
 \begin{array}{l}
 \Sigma M_6 \stackrel{\cdot}{=} 0 \\
 (= +2.0)
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{l}
 M_{1-1} + M_{1-1'} + M_{2-11} + M_{11-2} = 2(-435.4 - 877.9 - 684.5 - 1002.5) = -6000.6 \text{ t}\cdot\text{cm}\cdot \\
 (W_1 + W_2 + W_3)h_1 = 12 \times 500 = 6000 \text{ t}\cdot\text{cm}\cdot
 \end{array}$$

故第一層平衡條件，可稱滿足。

$$\begin{array}{l}
 \text{又 } 2(M_{4-1} + M_{1-1'} + M_{2-3} + M_{3-2}) = 2(-428.0 - 321.8 - 592.4 - 657.8) = -4000.0 \text{ t}\cdot\text{cm}\cdot \\
 (W_2 + W_5)h_2 = 8 \times 500 = 4000 \text{ t}\cdot\text{cm}\cdot
 \end{array}$$

故第二層平衡條件，適能滿足。

$$\begin{array}{l}
 \text{又 } 2(M_{5-4} + M_{4-5} + M_{6-3} + M_{3-6}) = 2(-219.4 - 118.8 - 372.0 - 289.6) = -1999.6 \text{ t}\cdot\text{cm}\cdot \\
 W_3h_3 = 4 \times 500 = 2000 \text{ t}\cdot\text{cm}\cdot
 \end{array}$$

故第三層平衡條件，可稱滿足。

試以上列結果，與第 35 節相較，可見各平衡條件之滿足，本節實較優於第 35 節，故知迭求約值法之演算，較為簡便，而推算三次之後，所得結果，比之代數數學所得者，反較為精密，此法之價值，於此可見一斑矣。

本編所述各節，大都取材於日本瀨戶政章氏所著之「ラーメンの解法」及美國 George A. Hool and W.S. Kinne 兩氏編輯之 Stresses in Framed Structures 兩書，惟編中各例題之解法，除第 32 節外，均由編者自行演算，他若 (142), (143), (144), (145), (150), (151), (152), (153), 等式，亦係由編者自行求得，如承讀者指示錯誤，殊深感荷。

又上開之 Stresses in Framed Structures 書末，列有各種較簡單的剛構之轉率公式表，共佔 116 頁之多，頗足供參考之用，本書以限於篇幅，未克完全錄附，讀者參閱該書可也。

## 第三編 圖解法

## GRAPHIC METHODS.

## 第十二章 特性點 CHARACTERISTIC POINTS.

48. 緒言. 本編所述圖解各法, 原為解算各種連續梁及約束梁而設, 嗣經推廣至於簡單架構, 及混凝土拱橋, 並用以推算副應力 Secondary Stresses 及支點下陷之影響, 然其主要用途, 仍在解算各種連續梁, 下文所述, 亦多注重於此.

特性點之理論, 係由英國 T. Claxton Fidler 氏發明, 見英國土木工師學會會報第 74 冊, Minutes of Proceedings, Institute of Civil Engineers Vol. 74, 1883, p. 196 及該氏所著之 A Practical Treatise on Bridge Construction, 嗣經丹麥國 A. Ostenfeld 教授利用此理, 以作圖解, 見該教授所著之 "Teknisk Statik," Vol. II, Second Edition, Copenhagen, 1913 茲據美國 S. M. Cotten 氏所述者, 節錄於下, 此君原文, 見美國土木工師學會 1927 年會報第 90 冊, Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 90, 1927, pp. 84-113.

49. 特性點之定義及條件. 凡在一個彎率圖中, 聯結各支點處彎率之線, 名曰彎率閉合線, Moment Closing Line, (此後簡稱為 M.C.L.) 所謂特性點者, 即該點與 M.C.L. 間之垂直距離, 與該梁在支點處之傾度 Slope 成正比例, 且可用以量度此項傾度, [此項傾度, (即撓角) 之意義, 與第 24 節所述者同.]

梁端若係完全固定, 則傾度等於零, 而其特性點即居於 M. C. L. 之中, 就一般言之, 兩端之傾度互異, 故每端必各有一個特性點, 若

該梁兩端，均係固定，則其兩個特性點，必皆居於 M. C. L. 之中，又若有同一之梁，受有同一荷重，惟一端固定而另一端簡承，則與固定端相當之特性點，必居於 M. C. L. 之中，夫梁端傾度之多寡，隨荷重及梁身之如何構成而異，而特性點之位置，復隨梁端傾度而異，故此項位置，亦必隨荷重及梁身之如何構成而異，若梁身及荷重，均無變化，設令甲端固定，乙端簡承，自必有一個特性點，與乙端相當，反之若甲端簡承，乙端固定，亦必有一個特性點，與甲端相當，而與其他端相當之固定點，必居於 M. C. L. 之中，故此項特性點，必居於各該 M.C.L. 之相交處，茲舉例說明如下。

設有一梁，其 EI 為常數，其兩端為固定者，其所受者為等佈荷重，如是則兩端彎率，各等於  $\frac{wL^2}{12}$ ，若一端固定，一端簡承，則固定端彎率，等於  $\frac{wL^2}{8}$ ，即等於上開彎率之一倍有半，此等負號彎率圖（本編所謂正負彎率之意義，與第一編同，而與第二編異），可疊置之，如圖 70 所示。

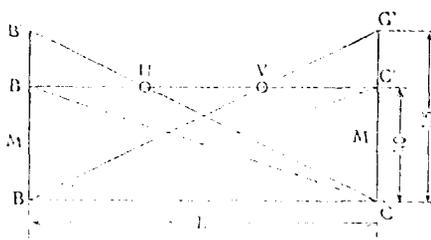


圖 70

本圖左方之上 B 字，應改為 B' 字  
M 字應改為 M' 字

該梁兩端皆固定之時，B' C' 線即為其 M. C. L.，設令  $M' = M'' = 1$ 。若一端固定，而一端簡承，則 B'' C 及 BC'' 兩線，分別為其相當之 M. C. L.，而 M' 或 M'' = 1.5。B' C' 線與 BC'' 線相交之點 V，與 C 點之橫平距離，必等於  $\frac{1}{3}L$ 。而 U 點與 B 點之橫平距離，亦必等於  $\frac{1}{3}L$ 。

又，U 及 V 兩點，必分別與兩個三角形彎率圖之重心，同在一個垂直

線之中，若  $EI$  為常數，則與兩端彎率圖相當之  $\frac{M}{EI}$  圖，亦必為三角形，而其重心，必分別與彎率圖（即  $M$  圖）重心，且與  $U$  及  $V$ ，同在一個垂直線之中。

上文所述者，為關於特性點之一般的條件，下文所欲證者，為 M.C.L. 中某一點垂直的居於梁端負號  $\frac{M}{EI}$  圖重心之上者，即能合乎該端特性點之定義。

50. 所用符號及定理，除另有聲明外，凡梁之各支點，均假定為居於同一高度，且該梁之位置，假定為橫平的，又凡彎率圖之繪畫，均作為以支點間之一個橫平線為基線。此線名曰彎率基線 Moment Reference Line (此後簡稱為 M. R. L.)，並假定各彎率之繪畫，不問其為正為負，均與此基線正交，且居於該線之上，(正者在 M. C. L. 之上，負者在 M. C. L. 之下)

令  $l$  = 梁之徑間 (或稱跨度)，即兩支點之中心距。

$U$  = 左特性點，或該點高出 M. R. L. 之距離 (參閱圖 72)

$V$  = 右特性點，或該點高出 M. R. L. 之距離 (參閱圖 72)

$U'$  及  $V'$  = M. C. L. 中之兩點，垂直的分別居於  $U$  及  $V$  之上或下。

(若 M. C. L. 係該梁兩端固定時之 M. C. L.，則  $U$  及  $V$  即係在此情狀下， $U'$  及  $V'$  之特殊數值。)

$d'$  = 由 M. C. L. 至左特性點之垂直距離， $= U - U'$ 。

$d''$  = 由 M. C. L. 至右特性點之垂直距離， $= V - V'$ 。

$M'$  = 左支點之約束彎率。

$M''$  = 右支點之約束彎率，(約束彎率亦或稱為負號彎率)。

$A^\circ$  = 與實受荷重相當之  $\frac{M}{EI}$  圖之面積，該梁於斯時，作為一個

簡梁，若  $EI$  為常數，則  $\Delta^{\circ} = \frac{A}{EI}$ ，式中之  $A$  為  $M$  圖之面積。

$\Delta'$  = 因左支點受有負彎率  $M=1$  而得之  $\frac{M}{EI}$  圖之面積，該梁於斯時，作為一個簡梁。

$\Delta''$  = 與  $\Delta'$  同，惟  $M=1$  之負彎率，施於右支點。

$x^{\circ}$  = 由左支點至  $\Delta^{\circ}$  重心之橫平距離。

$x'$  = 由左支點至  $\Delta'$  重心之橫平距離。

$x''$  = 由左支點至  $\Delta''$  重心之橫平距離。

$\varphi'$  = 該梁在左支點處之傾度，(亦即撓角)

$\varphi''$  = 該梁在右支點處之傾度。(  $\varphi'$  及  $\varphi''$  以半徑弧計，In Radians.)

$\theta$  = 在彈性曲線上任何兩點所作兩切線間之角。

$D$  = 彈性曲線任何點對於該梁未受力時此點原居位置之撓度，即受力後該點之垂直的變位。

$y'$  = 彈性曲線上任一點，與在該曲線上其他任一點所作切線間之垂直距離。

定理一，在彈性曲線上任何兩點所作兩切線間之角  $\theta$ ，等於該兩點間之  $\frac{M}{EI}$  圖之面積。

此即第 24 節中之第一原則，易言之， $\theta = \int \frac{M \cdot dx}{EI} = a$ 。

定理二，彈性曲線上任何點  $c$ ，對於在其他任何點  $b$  所作切線之垂直的變位， $y'$ ，等於該兩點間  $\frac{M}{EI}$  圖全面積對於  $c$  點之靜力率。

此即第 24 節中之第二原則，易言之， $y' = \int \frac{Mx \cdot dx}{EI} = az$

上兩式中之  $a$  為兩點間  $\frac{M}{EI}$  圖之面積，

$z$  為自  $c$  至  $a$  之重心之橫平距離。

定理三：彈性曲線在支點處與橫平線所成之角  $\varphi$ ，即係該梁作為簡梁，而承受  $\frac{M}{EI}$  圖之荷重時（易言之，此圖作為一種荷重，為該簡梁所負荷）在該支點處之反力，此即謂  $\varphi' = \frac{A^\circ(L-x^\circ)}{L}$ ，及  $\varphi'' = \frac{A^\circ x^\circ}{L}$ 。

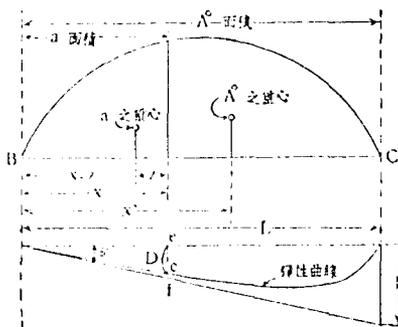


圖 71

證。（參閱圖 71），BC 梁受有荷重，B 點之撓角為  $\varphi'$ ，由定理二，而知 C 點之  $y'$ （對於 B 點所作切線而言）為  $A^\circ z = A^\circ(L-x^\circ)$

但由圖 71，可見  $y' = \varphi' L$ ，故  $\varphi' L = A^\circ(L-x^\circ)$ ，而  $\varphi' = \frac{A^\circ(L-x^\circ)}{L}$ 。

此即該梁負荷  $A^\circ$  面積時，在 B 點之反力也。

定理四：彈性曲線上任何點， $c$ ，之撓度  $D$ ，即係該梁作為簡梁，而承受  $\frac{M}{EI}$  圖之荷重時，在該點之撓率，易言之，若  $x$  為  $c$  點與左支點間之橫平距離，則  $D = \left[ \frac{A^\circ(L-x^\circ)}{L} \right] x - az = \varphi' x - az$ ，此式中之

a, 爲左支點與 c 點間之  $\frac{M}{EI}$  圖面積, 而 z 爲 c 點與 a 之重心間之水平距離.

證 (參閱圖 71). 由定理三而知 B 點之反力爲  $\phi'$ , 由該圖而知 c 點之撓度  $D=ce=ef-cf$ . 但  $ef:=\phi'x$ . 而由定理二, 可知  $cf=az$ , 又  $\phi'$  爲 B 點之反力, 故知此項撓度 D, 即係該梁負荷  $A^\circ$  面積時, 在 c 點之撓率.

定理五. BC 梁之右支點 C 受有某撓率 M 時, 其左支點處 B 之撓角  $\phi'$ , 等於 B 點受有同一撓率 M 時, 其右支點處 C 之撓角  $\phi''$ .

證. 試取  $\frac{M}{EI}$  圖  $A'$  而加以考慮, 因  $M=1$ . 而 x 係由左支點量起, 故任何點之撓率  $=\frac{L-x}{L}$ . 凡 x 爲任何數值之時, 惰性率 I 必有一個特殊數值, 與之相當, 故可將 I 作爲 x 之一種函數. A function of x, 而以  $f(x)$  表示之, 如是則

$$A' = \frac{1}{E} \int_B^C \frac{\frac{L-x}{L}}{f(x)} \cdot dx$$

由定理二. 而知 B 點之變位 (對於 C 點所作切線而言), 爲

$$y' = \frac{1}{E} \int_B^C \frac{L-x}{L \cdot f(x)} \cdot x \, dx$$

然 C 點之撓角爲

$$\phi'' = \frac{y'}{L} = \frac{1}{E} \int_B^C \frac{(L-x)x}{L^2 \cdot f(x)} \cdot dx \dots \dots \dots (A)$$

試更考慮  $\frac{M}{EI}$  圖  $A''$ ，在任何點之彎率為  $\frac{x}{L}$ ，而

$$A'' = \frac{1}{E} \int_C^B \frac{\frac{x}{L}}{f(x)} dx$$

C 點之變位 (對於 B 點所作切線而言)，為

$$y'' = \frac{1}{E} \int_C^B \frac{x}{L \cdot f(x)} (L-x) dx.$$

然 B 點之撓角為

$$\varphi'' = \frac{y'''}{L} = \frac{1}{E} \int_C^B \frac{x(L-x)}{L^2 \cdot f(x)} dx \dots \dots \dots (B)$$

取 (A) 式與 (B) 式較，除因其積分互易上下限，致正負號相反外，其數值適相吻合，故知若將  $M=1$  之彎率，更迭作用於 B, C 兩點，則  $\varphi'' = -\varphi'$ 。此亦第 44 節中所謂 Maxwell 氏相互變位原則之一種表現也。

51. 特性點定理之一般的證明。

如圖 72. 假定該梁之 EI, 並非通體一致, 而係隨處變易, 梁之兩端為彎率  $M'$  及  $M''$  所約束,  $A^0, A', A''$  可成為任何形, 隨該梁之如何構成及所受荷重而異, 其負號  $\frac{M}{EI}$  荷重之大小為  $A' M'$  及  $A'' M''$ , 此等面積重心之橫平的位置, 與  $A'$  及  $A''$  之重心相同, 此等負號面積, 可作為向上作用之荷重故繪於正號  $\frac{M}{EI}$  面積之下。

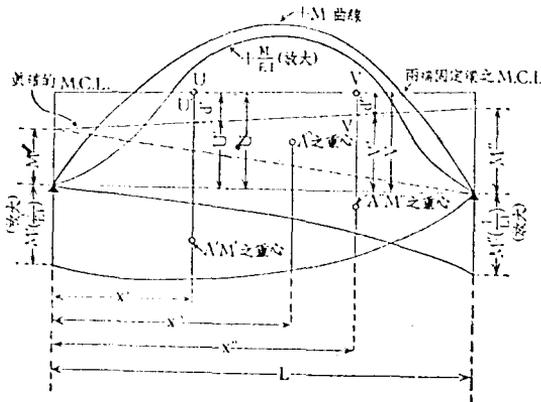


圖 72

由定理三，而得

$$\varphi' = \frac{A^0(L-x^0)}{L} - \frac{M'A'(L-x')}{L} - \frac{M''A''(L-x'')}{L} \dots\dots(C)$$

$$\varphi'' = \frac{A^0x^0}{L} - \frac{M'A'x'}{L} - \frac{M''A''x''}{L} \dots\dots(D)$$

由圖 72，可見

$$U'(\text{或 } U) = \frac{M'(L-x')}{L} + \frac{M''x''}{L} \dots\dots(E)$$

$$V'(\text{或 } V) = \frac{M'(L-x'')}{L} + \frac{M''x''}{L} \dots\dots(F)$$

此四式係基本方程式，下開證法以此為根據。

欲證明特性點定理之適用於一般的情形，應利用下開四個步驟。

(甲) 假定此定理，尚為一個假設 Hypothesis，關於此項特性點，祇有若干性質，如上文所述者，更假定此項假設，係屬真確，其在兩端完全固定之梁，此兩特性點即居於 M. C. L. 之中，且垂直的居於  $A'$  及  $A''$  兩面積的重心之上，亦如上文所述。

(乙) 先就一個特殊情形，求得每個特性點之高度，若此定理果為真確，則此等高度之數值，應為真確數值，蓋以某一梁身及某一荷重而言，每特性點祇能有一個高度也。

(丙) 由兩個特殊情形所得特性點高度之數值，可假定為真確，用以代入另一特殊情形之梁有上述兩個特殊情形者，由是而知外似不同之數量，實係完全相同，而其他數量之間，亦可獲得一個富有價值之比例的關係，此等結果之真確與否，全在乎原得特性點高度數值之真確與否。

(丁) 假定步驟(乙)所得者為真確，則可由步驟(丙)以代入原

有各方程式之各項，而使各該方程式之形式，與由步驟(乙)所得者相同。如將此等方程式，互相比較，即可證明特性點所需之條件，業已滿足，故取得此項結果前所作之假定，已為證實，而當初姑先承認之特性點各性質，實係真確而一般的性質。

設該梁左端固定，而右端簡承，因  $\omega'$  及  $M'$ ，皆等於零，故由(C)式而得

$$\frac{\Lambda^\circ(L-x^\circ)}{L} - \frac{M'A'(L-x')}{L} = 0 \dots\dots\dots(G)$$

由(E)式而得

$$U = \frac{M'(L-x')}{L} \dots\dots\dots(H)$$

由(G)式而得

$$\frac{M'(L-x')}{L} = \frac{\Lambda^\circ(L-x^\circ)}{L\Lambda'}$$

故得

$$U = \frac{\Lambda^\circ(L-x^\circ)}{L\Lambda'} \dots\dots\dots(I)$$

此式可姑先承認為真確，而暫不加以證實。

又設該梁右端固定，而左端簡承，因  $\omega''$  及  $M''$ ，皆等於零，

故由(D)式而得

$$\frac{\Lambda^\circ x^\circ}{L} - \frac{M''\Lambda''x''}{L} = 0 \dots\dots\dots(J)$$

由(F)式而得

$$V = \frac{M''x''}{L} \dots\dots\dots(K)$$

由 (J) 式而得

$$\frac{M'' x''}{L} = \frac{A^{\circ} x^{\circ}}{LA''}$$

故得

$$V = \frac{A^{\circ} x^{\circ}}{LA''} \dots\dots\dots (I)$$

此式亦姑先承認為真確。

欲證明 (I), (I) 兩式所得之 U 及 V 為真確, 必須證明此諸數值確能滿足所開之條件。

今試假定該梁兩端均為固定, 並假定 (I), (I) 兩式所得之 U 及 V, 亦能適用於此項情形, 因  $\varphi'' = \varphi' = 0$ , 由 (C) 式, 略加變化, 而得

$$\frac{M'(L-x')}{L} = \frac{A^{\circ}(L-x^{\circ})}{A'L} - \frac{M''A''(L-x'')}{A'L} \dots\dots\dots (M)$$

雙方各加以  $\frac{M''x'}{L}$ , 而得

$$\frac{M'(L-x')}{L} + \frac{M''x'}{L} = \frac{A^{\circ}(L-x^{\circ})}{A'L} - \frac{M''A''(L-x'')}{A'L} + \frac{M''x'}{L} \dots\dots\dots (N)$$

由 (E) 式而知上式之左方, 即等於 U, 而由 (I) 式, 知上式右方之首項, 亦等於 U, 故其右方末兩項之和, 必等於零, 故

$$\frac{M''A''(L-x'')}{L} = \frac{M''A'x'}{L} \dots\dots\dots (O)$$

以此代入 (C) 式, 則通用公式, 變為

$$\varphi' = \frac{A^{\circ}(L-x^{\circ})}{L} - \frac{M'A'(L-x')}{L} - \frac{M''A'x'}{L} \dots\dots\dots (P)$$

如圖 72,  $d' = U - U'$ , 故由 (D) 及 (E) 兩式, 而得

$$d' = \frac{A^{\circ}(L-x^{\circ})}{LA'} - \frac{M'(L-x')}{L} - \frac{M'x'}{L} \dots\dots\dots(Q)$$

因 (Q) 式, 即 (P) 式爲  $A'$  除後所得之式, 故知

$$d' = \frac{\varphi'}{A'}, \text{ 易言之, } \varphi' = d' \cdot A' \dots\dots\dots(R)$$

此即謂由假定特性點至 M.C.L. 之垂直距離, 爲其鄰近支點撓角之函數, 且與之成正比例, 如是則特性點之定義, 即爲之適合, 故關於該點所假定之各性質, 係其真確的性質, 而關於  $U$  點之定理, 業爲證實矣。

按照同法, 亦可證明

$$d'' = V - V' = \frac{\varphi''}{A''}, \text{ 易言之, } \varphi'' = d'' \cdot A'' \dots\dots\dots(S)$$

如是則特性點定理之適用於一般的情形, 可謂已全證實。

由 (O) 式, 而得

$$A''(L-x'') = A'x' \dots\dots\dots(T)$$

由 (T) 式, 可得一有用的原則, 此即  $A'$  及  $A''$  與各該重心距其鄰近支點之距離 成反比例是也。

茲將上文所得重要原則, 列述如下。

(甲). 不問該梁之如何構成, 及受有何種荷重, 特性點定理皆屬真確。

(乙). 此諸特性點, 皆垂直的居於  $A'$  及  $A''$  兩面積的重心之上。

(丙) 此諸點之高度，以下列二式定之。

$$U = \frac{A^\circ(L-x^\circ)}{LA'}, \quad \text{及} \quad V = \frac{A^\circ x^\circ}{LA'} \dots\dots\dots(169)$$

假定該梁兩端固定，則各該點適居於 M.C.L. 之中。

(丁) 若該梁兩端受有任何約束，則特性點與 M.C.L. 間之垂直距離如下式。

$$d' = \frac{\phi'}{A'}, \quad \text{及} \quad d'' = \frac{\phi''}{A''} \dots\dots\dots(170)$$

即此等距離，與該梁在鄰近支點處之撓角，成正比例，而與  $A'$  或  $A''$ ，成反比例。

(戊)  $A'x'$  等於  $A''(L-x'')$ ，即

$$A' : A'' = L - x'' : x' \dots\dots\dots(171)$$

$d'$  或  $d''$  之實在值，並無求得之必要，祇須求得其相對值，而已足矣，但按照下述之圖解法， $d'$  及  $d''$  之數值，自可求得也。

52. 在特殊情形下之特性點，若該梁之  $EI$ ，並非常數，但對於其中心，為對稱的，則  $x' = L - x''$ ，而  $A' = A''$ ，故兩個特性點，在該徑間中，必居於對稱的位置，若所受荷重，對於該徑間之中心，亦為對稱的，則  $L - x^\circ = x^\circ$ ，而  $U = V$ 。

若該梁之  $EI$  為常數，則  $\frac{M}{EI}$  圖為三角形，而  $A' = A'' = \frac{L}{2EI}$ 。

因特性點必居於  $A'$  及  $A''$  重心之上(垂直的)，故  $x' = \frac{L}{3}$ ，而  $x'' = \frac{2L}{3}$ 。

又若以  $A'$  及  $A''$  之數值，代入(169)式，即得

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{2\Delta(L-x^0)}{L^2} \\ V &= \frac{2\Delta x^0}{L^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (172)$$

若所受荷重，亦為對稱的，則

$$U=V=\frac{\Delta}{L} \dots\dots\dots (173)$$

若荷重為非對稱的，欲求得  $\Delta$  及  $x^0$  之數值，殊屬煩難而費時，但可利用下法以直接求得  $U$  及  $V$ 。

若該梁兩端固定，則  $U$  及  $V$  兩點，必居於 M.C.L. 之中，設令  $M^l$  = 左端之彎率， $M^r$  = 右端之彎率，（此時仍假定兩端固定），則得

$$U = M^l + \frac{1}{3}(M^r - M^l)$$

$$V = M^l + \frac{2}{3}(M^r - M^l)$$

上式中之  $M^l$  及  $M^r$ ，即第二編第 28 節中之  $C$ ，其值可由表 5 及表 6 查得之，[讀者注意，此法僅適用於  $EI$  為常數之時。]

又若利用表 5 及表 6 之  $H$ ，則

$$U = \frac{1}{3}H_{AB} \quad \text{而} \quad V = \frac{2}{3}H_{BA}$$

此二式，似覺更形便利。

53. 圖解法.

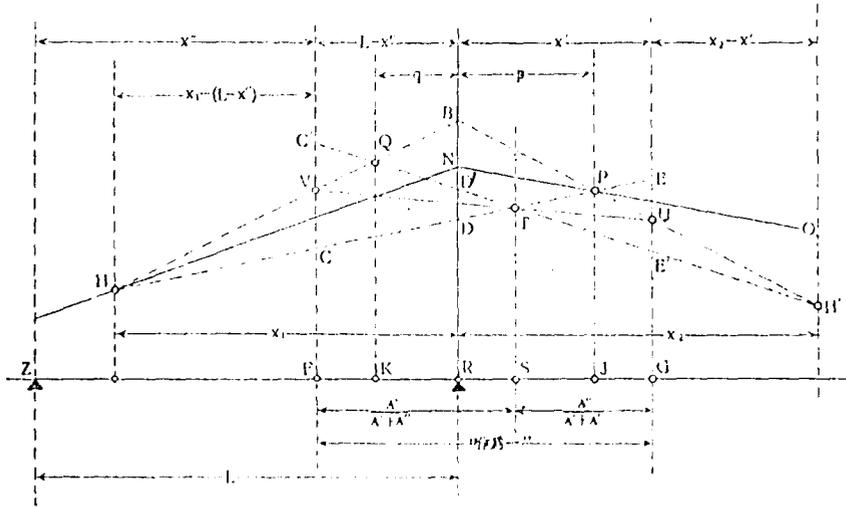


圖 73

如圖 73, 設  $V$  及  $U$  為一連續梁某支點左右兩方並鄰近該支點之兩個特性點, 設  $A''$ ,  $d''$ , 及  $\varphi''$  為左徑間之右方各數量,  $A'$ ,  $d'$ , 及  $\varphi'$  為右徑間之左方各數量, 其定義如上文所述.

該梁在支點左右之撓角必相同, 易言之  $\varphi'' = -\varphi'$ , 或  $\varphi' = -\varphi''$ . 由 (170) 式, 而知  $\varphi'' = d''A''$ , 及  $\varphi' = d'A'$ , 但  $\varphi'' = -\varphi'$ , 故  $d''A'' = -d'A'$ , 即  $d''A'' = -d'A'$ . 故知凡一支點左右鄰近兩特性點, 一居於 M.C.L. 之上, 而又一則居於 M.C.L. 之下, 其垂直距離, 則與  $A'$  及  $A''$  成反比例.

如圖 73, 設  $H$  為 M.C.L. 中之一個已知點, 作  $HVBUN$  線, 此線能滿足所需之條件, 因此線經過  $H$  點, 且  $d'' = d' = 0$ . [蓋若  $d'' = 0$ , 則  $d''A'' = 0$ , 即  $-d'A' = 0$ , 但  $A'$  不等於零, 故  $-d'$  必等於零.]

作 UV 線，茲所需要者，在 UV 線中，求得一點，俾任何線之經過此點者，能適合所需之  $\frac{d''}{d'}$  比率，前已證明  $d''$  與  $A'$  成正比， $d'$  與  $A''$  成正比，故 SF 與  $A'$  成正比，SG 與  $A''$  成正比，由此而得

$$SF: A' = FG: A' + A'',$$

設令  $FG=1$ ，則

$$SF = \frac{A'}{A' + A''}, \quad \text{而} \quad SG = \frac{A''}{A' + A''}.$$

由此而決定 S 點之位置，經過此點，作一垂直線，與 UV 線相交於 T 點，此即所求之點也。

作 HTE 線，與 BU 線相交於 P 點。

VC 與  $d''$  成正比，EU 與  $d'$  成正比，又 VC 及 EU，皆與 BD 成正比，就有關各三角形觀之，可見經過 P、H 兩點之任何線，例如 ONIL，必能維持  $\frac{d''}{d'}$  之比率，與 HTE 線相同，故 P 點即係 M.C.L. 中之一點，蓋任何線之經過此點者，能滿足上開之條件也。

經過 H、P 兩點而可能作之線極多，但其中祇有一線，能適合該梁其他各點之條件，此等條件，由其他各徑間之各個 P 點，決定之，（每徑間有一 P 點），若已知該連續梁首尾兩端之約束情狀，此諸 P 點，即可決定真確的 M.C.L. 之位置，此項首尾兩端之約束情狀，必須為已知者，或先予假定，然後可得此圖之起訖點。

設  $L_1$  為支點左方徑間之長， $L_2$  為支點右方徑間之長，若兩徑間之 EI 互異，但每徑間中之 EI，則通體一致，如是而得

$$A'' = \frac{I_1}{2E_1I_1}, \quad \text{及} \quad A' = \frac{I_2}{2E_2I_2},$$

若  $E_1 = E_2$  [尋常大抵如此]，則  $A''$  可作為  $\frac{I_1}{I_2}$ ，而  $A'$  可作為  $\frac{I_2}{I_2}$ ，因所需者，不過此兩個面積之相對值而已。

若該梁每一徑間中之  $EI$  通體一致，而為常數，則  $A'$  與  $I_2$  成正比，而  $A''$  與  $I_1$  成正比，故  $d''$  及  $d'$  與其所居徑間之長成反比，即  $SF: I_2 = SG: I_1$ ，由此而得  $SF: I_2 = FG: I_1 + I_2$ 。

但  $FG = \frac{I_1}{3} + \frac{I_2}{3}$  [參閱第 52 節]，故  $SF = \frac{I_2}{3}$ ，而  $SG = \frac{I_1}{3}$ 。

如圖 73，若 M.C.L. 中之已知點  $W$ ，在支點之右方，而不在其左方，亦可按照上法，求得  $Q$  點，如圖中所示，此亦係 M.C.L. 中之一點，但居於  $P$  點左鄰之徑間中耳。[此處所謂  $P, Q$  兩點，即第十四章中之配對點也。]

若鄰近徑間，並不受有荷重，則上述求  $P, Q$  點之法，不能適用。蓋若有一徑間，不受荷重，則  $U$  及  $V$  兩點，皆居於 M.R.L. 之中，則上法所欲得之交點，大都不能求得，故必需另用法。

前已證明  $VC$  與  $A'$  成正比， $UE$  與  $A''$  成正比，因此項圖解法所需者，不過各數量相比之關係，故可令  $VC = A'$ ，並令  $UE = A''$ ，如是則由圖 73 而得

$$BD = \frac{A'x_1}{x_1 + x_2 - L}$$

故,

$$p = \frac{\Lambda' x_1}{x_1 + x'' - L} = x' - p : \Lambda'',$$

由是而得

$$p = \frac{x'}{\frac{\Lambda''(x_1 + x'' - L)}{\Lambda' x_1} + 1}$$

按照類似之法, 亦可求得

$$q = \frac{L - x''}{\frac{\Lambda'(x_2 - x')}{\Lambda'' x_2} + 1}$$

此兩式, 頗嫌繁複, 不合實用, 但由此可見其中所含各項, 與荷重無關, 且可用此以決定 J 及 K 兩點之位置, 又可見 P, Q 兩點必係垂直的居於 J, K 兩點之上, 或竟與之脗合, 而 J, K 兩點之位置, 惟隨梁身之如何構成而異, 與該梁所受荷重無關, 若梁身並無荷重, 則 P, Q 兩點與 J, K 脗合, 如是則該脗合點即為一個彎曲反向點 Point of Inflection, or Point of Contraflexure [參閱第 42 節]. 因 M.C.L. 必在此點與簡梁彎率圖相交也, 凡不受荷重梁中, 若有彎曲反向點, 該點必在 K 點或 J 點. 此隨荷重徑間對於不荷重徑間之位置而定, 不荷重各徑間在一個荷重徑間之左方者, 其彎曲反向點必在 J 點, 若在其右方, 則其彎曲反向點, 必在 K 點. [此處所謂 J, K 兩點, 即第 42 節及第 13 章之固定點].

茲述求 J, K, 兩點之圖解法如下。

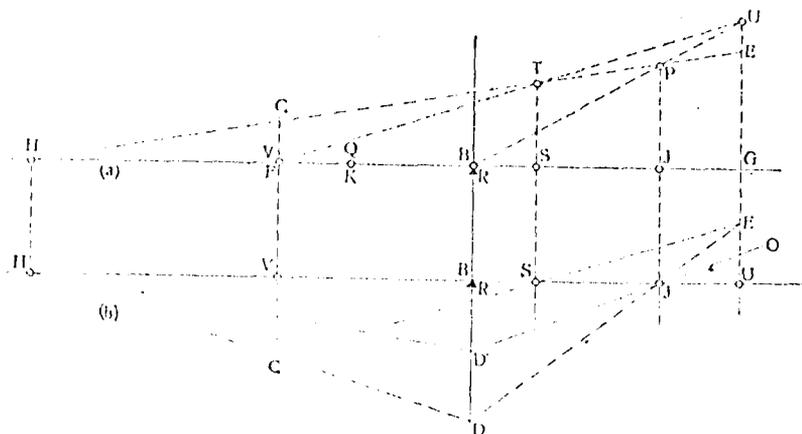


圖 74

設將圖 73 中之左徑間所受荷重撤去，則已知點 H，必即居於 M.R.L. (即 ZG 線) 之中，因該徑間中無荷重，故其兩特性點之高度，皆等於零，易言之，V 與 F 脗合，Q 與 K 脗合，B 與 R 脗合，如圖 74 (a) 所示，其他各點之位置，則用上述之法決定之。

設將右徑間所受荷重，一併撤去，[此時該徑間之更右方某徑間，仍受有荷重。] 如是則 T, P, U, 三點，分別與 S, J, G, 三點脗合，而兩徑間中各點，均在同一直線之中，如圖 74 (b) 所示，經過 V, U, 兩點，作兩垂直線，S 點之位置，係按照圖 73 之法決定之，經過此點之 CE 線，必在 V, U, 兩垂直線上，截取 CV 及 EU 兩段，其長之比率，合於所需之比率，因此處所需者，不過 CV 與 EU 之比率，故可即令  $CV=A'$ ，並令  $EU=A''$ ，作 HC 線，並延長之，使與經過支點之垂直線，相交於 D 點，作 DE 線，與 RU 線相交於 J 點，如是則

與  $VC$  成正比, 亦與  $EU$  成正比, 因  $VC=A'$ ,  $EU=A''$  故  $RD$  與  $A'$  及  $A''$  皆成正比, 由有關各三角形觀之, 經過  $J$  點之任何線, 例如  $OD'H$ , 必能維持同一之距離比率, 故  $J$  點必居於  $M.C.L.$  之中, 凡經過此點之線, 皆能合乎所需之  $\frac{d''}{d'}$  比率, 因此點亦居  $M.R.L.$  之中, 故即為該徑間之彎曲反向點。

為決定  $J$  點起見,  $S$  點並非為必要的, 因祇需令  $VC=A'$ ,  $EU=A''$ , 延長  $HC$  至  $D$ , 作  $DE$  線與  $BU$  相交於  $J$  點, 已可求得  $J$  也, 但因  $S$  點別有其他用途, 不妨先求得之, 而按照上述之法, 以得  $J$  點。

若已知點  $H$ , 係在右方而不在左方, 則利用與上相反而相類似之法, 可求得  $K$  點之位置。

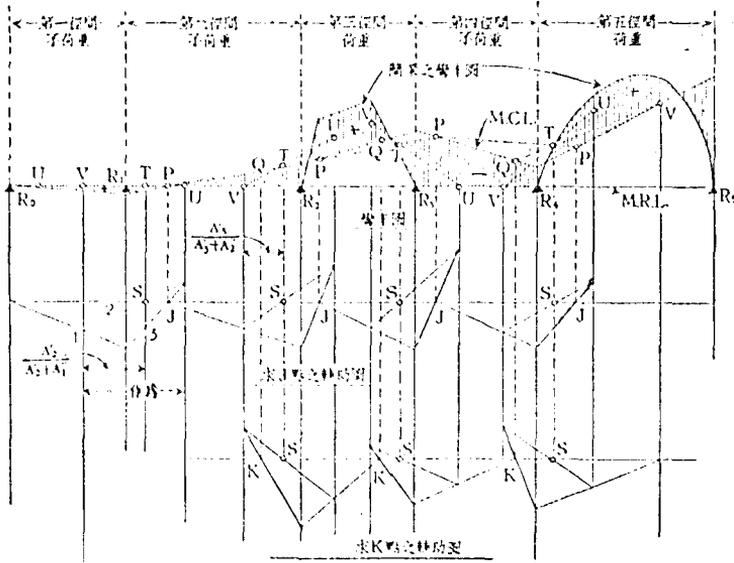


圖 75

圖 75 表示上述各法之如何應用於實際問題。

作此圖之步驟，茲說明如下。

- (1). 先繪 M.R.L. 及各支點垂直線，並決定各 U, V, 點之位置。
- (2). 作輔助圖之基線，與 M.R.L. 平行，並由各 U, V, R, 點投射垂直線。

(3). 在此輔助圖基線中，定各 S 點之位置。

(4). 由左方第一徑間 M.C.L. 已知點之投射於輔助圖基線之點入手，若梁端係簡承者，或左端支點處之彎率為已知者，例如該端之左方，更有一個懸臂 Cantilever，則此點即在支點之下。

若該端係固定的，則入手之點，即在鄰近該端之特性點之下。

若該端受有某種約束，則其約束達何程度，應由設計人妥慎估計，量予假定，而於該支點之上，決定一點，作為其假定的 M.C.L. 之一點。

入手之點，既經決定，即可如圖所示，將各徑間之 J 點，逐一決定之，前已證明各 J 點或居於 M.C.L. 之中，或垂直的居於 M.C.L. 中 P 點之下，故每一徑間之 J 點，可由其左鄰徑間之 J 點求得之。

(5). 於彎率圖中，作線聯絡各支點左右鄰之 U 及 V 點，此項聯絡線，與經過各 S 點之垂直線，相交於所欲得之 T 點。

(6). 由左方已知點 P，經過其右鄰 T 點（與該徑間相當者）作一直線，此線與經過相當 J 點之垂直線相交之處，又得一 P 點，復由此新得之點起，依法進行，至各徑間之中，逐一皆得一 P 點為度，惟第一徑間之 P 點，則必為已知者，或假定者，如（4）所述。

(7). 於右方最末徑間之中, P 點之位置, 及梁端之彎率, 或其所受約束程度, 皆為已知者, 此二者即可決定該徑間 M.C.L. 之位置. 此線與該徑間左支點垂直線之交點, 必為其左隣徑間 M.C.L. 之一點, 此點與左隣 P 點, 又可決定左隣徑間 M.C.L. 之位置, 如是繼續進行, 至各徑間之 M.C.L. 皆已繪入為度.

由上述者觀之, 若各 P 點皆已定, 即無須再定各 Q 點, 反之若各 Q 點皆已定, 則各 P 點亦無須再定, 就尋常應用而言, 凡兼定 P, Q, 各點之功用, 不過藉此以校核作圖之是否精密合度而已, 為說明作法起見, 圖 74 中兼示求 P, Q, 各點之法.

為研究活動荷重計, 或為繪入影響線 Influence Lines 計, [關於影響線, 讀者如尚不甚明瞭, 可參閱 Merriman & Jacoby 兩氏合著之 Roofs and Bridges, Part IV. Higher Structures, 第 37, 第 74, 第 87 等節, 1909 年版.] J 及 K 等點, 各有其價值, 最好皆加以決定.

(8). M.C.L. 既已繪入, 可於每一荷重徑間之上, 將各徑間作為簡梁, 而將其所受荷重在簡梁上所發生之正號彎率, 繪作彎率曲線, 此等圖與 M.C.L. 之各縱距 Ordinates, 居 M.R.L. 之同一邊, 並與各該縱距, 按照同一比例尺繪入.

(9). 荷重各徑間中之彎率, 可按照所用比例尺, 量度 M.C.L. 與正號彎率曲線間之縱距而得之, 其不荷重各徑間中之彎率, 可量度 M.C.L. 與 M.R.L. 間之縱距而得之, 如圖 75 中加線部份之所示.

以上係節錄 Cotten 氏所述 關於特性點之理論及作圖法, 此外 Cotten 氏並曾討論此法之如何適用於剛結不靜定架構, 及支點之下

陷，因其與第十四章所述者，約略相同，茲姑從略。

又美國 F.E. Richart 教授，對於 Fidler 氏特性點之性質，及 Ostenfeld 氏作圖法，亦有簡明之闡述，見 Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 90, 1927, pp. 50—56，讀者如有此項會報，可參閱之，茲不贅述。

## 第十三章 固 定 點

## FIXED POINTS.

54. 緒言. 固定點圖解法發端於瑞士之 W. Ritter 教授. 見其所著之 *Der Kontinuierliche Balken*, Zurich, 1900, 嗣經德國之 A. Strassner 及 Ernst Suter 兩氏先後加以改善. 見 *Neuere Methoden*, by A. Strassner, Second Edition, Berlin, 1921. 及 *Die Methode der Festpunkte*, by Dr. Ernst Suter, Berlin, 1923. 其法頗通行於歐陸. 茲據美國 R. McC. Beanfield 氏所述者, 節錄於本章. [Beanfield 氏原文, 見 *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 90, 1927, pp. 142--152.]

固定點之意義, 性質, 用途, 以及如何用圖解法及計算法, 推定其位置, 已於本書第 42 節及第 53 節中, 頗有陳述, 讀者可先加以參攷, 又第 60 節中之 (175) 式亦能決定固定點之位置.

55. 圖解法. 先作 R, U, V, T, 等垂直線, 如第 53 節之所述, 若 EI 為常數, 則 U, V, 兩垂直線, 必平分該徑間之長為三等分, 可名之曰三分線 Third Lines [參閱本書第 52 節], 而 T 線之位置, 必將

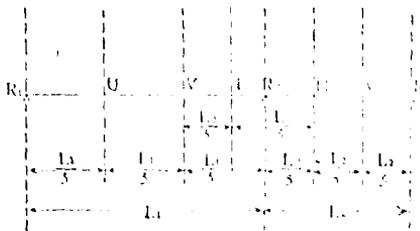
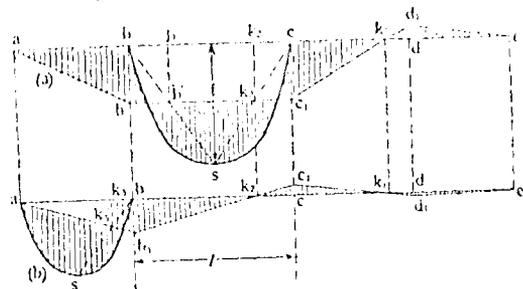


圖 76

兩鄰近徑間 V, U, 間橫平距離, 按照各該徑間長之三分之一, 交互劃分之, 如圖 76 所示, 此項 T 線, 可名之曰反三分線 Reversed Third Line, 或交換線 Transposition Line. [讀者注意, 此處假定 EI 為常數.]

按照第 53 節之法，作荷重各徑間之簡梁彎率曲線，並決定各徑間中 J, K, 點之位置。

今先述如何用圖解法，求得一徑間受有等佈荷重之彎率圖。作



該徑間之簡梁彎率圖，此係一個拋物線，如圖 77(a)，聯接拋物線頂點 S 至該徑間之左右兩支點，b 及 c，設此兩斜線 Sb 及 Sc，與固定點垂直線  $j_1'$  及  $k_1 k_1'$

圖 77

相交於  $j_1'$  及  $k_1'$ ，則聯絡  $j_1'$  及  $k_1'$  兩點之線，即為該徑間之 M.C.L. 將此線向左右延長，使遇左支點垂直線於  $b_1$ ，遇右支點垂直線於  $c_1$ ，作  $ab_1$  線，此即第一徑間之 M.C.L. (假定其左端為簡承者)，又作  $c_1 k_1$  線，( $k_1$  為 cd 徑間中之右固定點) 並延長之使遇右支點垂直線於  $d_1$ ，

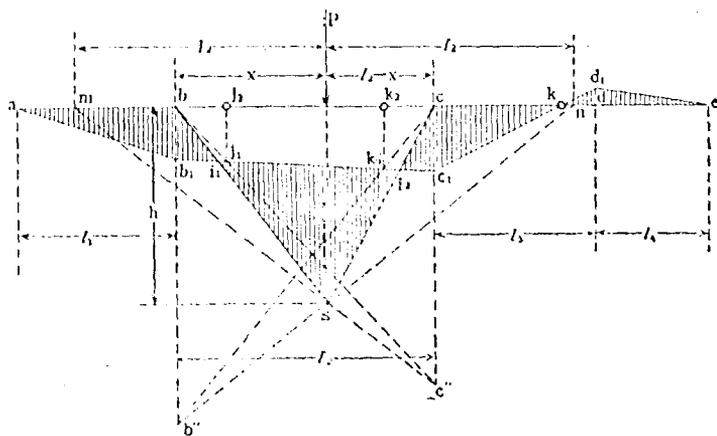


圖 78

則  $c_1d_1$  線，即該徑間之 M.C.L.，又作  $d_1e$  線，此即最右徑間之 M.C.L.（假定其右端亦為簡承者）。圖 77 (b) 所示者，為左方第一徑間受有等佈荷重時之彎率圖，其作法觀圖自明，其他各徑間若有等佈荷重，亦可做照作圖。

茲再述如何用圖解法，求得一徑間受有單一集中荷重之彎率圖。

如圖 78，於基線上，在荷重  $P$  之左右，各取一段，其長等於荷重徑間之長  $l$ ，而得  $m, n$  兩點，作簡梁彎率圖  $bSc$ ，聯接  $mS$ ，延長之使遇支點  $c$  之垂直線於  $c'$ ，聯接  $nS$ ，延長之使遇支點  $b$  之垂直線於  $b''$ ，聯接  $bc''$  及  $cb''$ 。設此兩線與固定點  $j_1$  及  $k_2$  之垂直線，相交於  $j_1'$  及  $k_2'$ ，則  $j_1'k_2'$  線，即為該徑間之 M.C.L. 延長此線，使遇左支點垂直線於  $b_1$ ，遇右支點垂直線於  $c_1$ ，然後作  $ab_1, c_1kd_1$ ，及  $d_1e$  等線，與上同。

圖 78 之  $i_1$  及  $i_2$  兩點，為彎率反向點， $i_1$  必在  $b_1j_2$  之間， $i_2$  必在  $k_2c$  之間，兩點皆不得在  $j_1k_2$  之間，若  $P$  向左移動，則兩點亦隨之而向左移動， $P$  向右移動，則亦隨而向右。

今試述一實際問題之解法，以見上述兩法之如何合併，而得所求之結果。

如圖 79(a)，三徑間連續梁受有四種荷重，其  $EI$  為常數，假定首尾兩端支點，為簡承的。

先求得各徑間之固定點  $J$  及  $K$ ，如圖 79(c) 所示，因首尾兩支點為簡承的，故  $J_1$  與  $R_1$  膾合， $K_3$  與  $R_3$  膾合。

然後按照上文所述之法，分別求得各種荷重在  $R_2$  及  $R_3$  所發生之彎率，如圖 79(b) 所示。此項彎率或正或負，正者所得之點，居基線之下，負者則居其上。

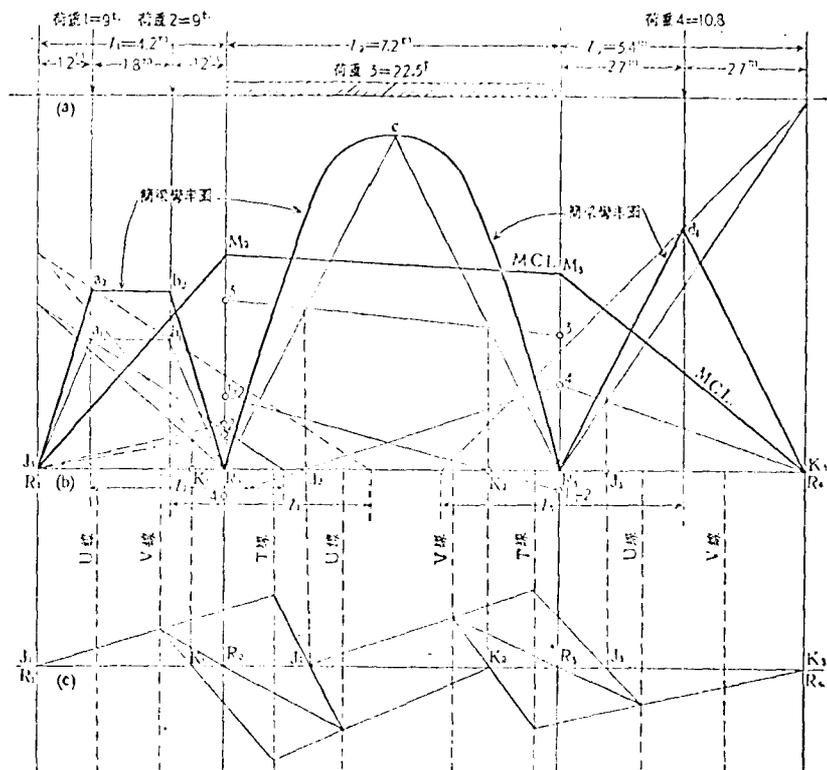


圖 79

最後將所得彎率之在同一支點者，求其代數的和，而得  $M_2$  及  $M_3$  兩點，作  $R_1 M_2 M_3 R_4$  線，此即 M.C.L. 也，此項 M.C.L. 與各徑間簡梁彎率圖間之縱距，即各該點之實得彎率，縱距居 M.C.L. 之上者，代表正號彎率，若居 M.C.L. 之下，則代表負號彎率。

若該梁首尾兩端，為固定的而非簡承的，其作圖之法，與上相同，惟首末兩固定點，不在梁端支點，而在與之緊鄰之 U 線或 V 線之中，其最後所作之 M.C.L. 亦應使首尾兩徑間之 M.C.L. 分別經過  $J_1$  點，及  $K_3$  點。

56. 上述作圖法之證明.

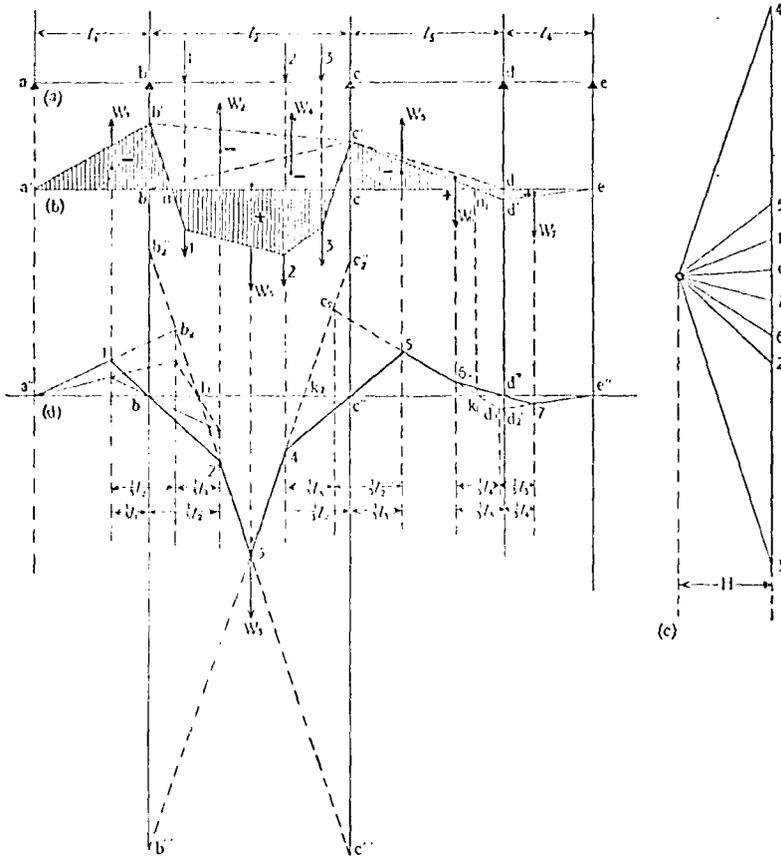


圖 80

設有一個連續梁，共有四徑間，其左方第二徑間，受有荷重 1, 2, 3, 如圖 80 (a) 所示，d 點之反力，為負號者，而在該點之彎率，則為正號者，各彎率圖面積如下。

第二徑間之真確的彎率圖面積，等於該徑間之簡梁彎率圖面積（正號的），減去梯形  $bb'cc'$  之面積，此梯形可用  $bc'$  線，分之為兩個三角形，第三徑間之彎率圖面積，等於三角形  $c'cd$  與三角形  $c'dd'$  之較。其首尾兩徑間之彎率圖，必各為一個三角形，（凡中間各徑間受有荷重時皆然）。

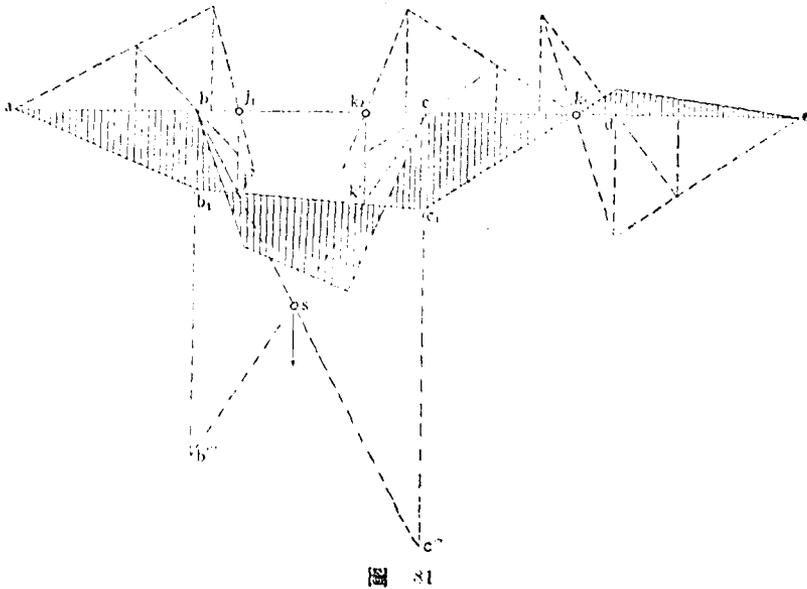
試假想有彈性外力  $W_1, W_2, W_3 \dots W_n$ ，（其中正負不一），作用於各個三角形之重心，如圖 80 (b) 所示，並繪入各該力之彈性線 Elastic Line，此項彈性線之繪畫，係將各個彎率圖面積，作為荷重，而按照靜力圖解法，Graphic Statics 繪入外力多邊形 Force Polygon 及平衡多邊形 Equilibrium Polygon 如圖 80 (c) 及 (d) 所示。[參閱 Merriman & Jacoby 兩氏合著之 Roofs and Bridges, Part II, Graphic Statics 第一章，1909 年版]。由此彈性線而知，凡不荷重各徑間中各個  $W$  之施力點，必居於三分線中 [參閱圖 80 (b)，即各三角形之重心] 而彈性線中與  $W_1$  及  $W_2$  相遇兩線之交點  $b_2$  必居於反三分線之中，其與  $W_4$  及  $W_5$  相遇兩線之交點  $c_2$  亦然 [觀圖 80 (d) 自明]，故該彈性線各轉角，除  $W_3$  外，均居於三分線之中，而  $b_2, c_2, d_2$  等點，必居於反三分線之中。

由圖 80 (d)，可見三角形  $1-2-b_2$  各頂點，皆居於固定的垂直線之中，而該三角形之兩邊，各經過一個固定之點，故其第三邊，亦必經過另一個固定之點，此語並可適用於其他各徑間，由此可以證明，凡連續梁之每一徑間中，必有兩個固定點，例如  $j_1$  及  $k_2$ ，此諸固定點之位置，惟隨各徑間之相互關係而變更，與各徑間所受之荷重無關。

就其右方各徑間而言，任何  $j$  點處之彎率等於零，就其左方各徑間而言，任何  $k$  點處之彎率等於零，故左端支點  $a'$ ，即為第一徑

間之  $j$  點 (即左固定點), 而右端支點  $e''$ , 即為最末徑間之  $k$  點 (即右固定點).

如圖 80 (d),  $b''_2 c''$  及  $c''_2 b''$  兩線相交於  $z$ , 即簡梁彎率圖之重心線, 此二線名曰交叉線 (Cross Lines), 各固定點之位置既經確定, 可先計算荷重徑間之簡梁彎率圖之面積, 及其重心所在, 此項面積, 若以其重心與左右支點之橫平距離乘之, 再以荷重徑間長度平方之六分之一除之, 其結果即分別等於  $b''_2 b''_2$  及  $c''_2 c''_2$  之長, 此等線, 於圖 81 中, 係由  $b, c$  兩點起繪, 而其交叉線則為  $bc''$  及  $cb''$ , 此等交叉線, 與經過兩固定點之垂直線, 相交於  $j'$  及  $k'$  兩點, 延長  $j'k'$  線, 使與支點垂直線相遇於  $b_1$  及  $c_1$  兩點, 將此等  $b_1, c_1$  點與其他徑間之固定點相聯接, 即可得該連續梁之整個彎率圖.



設第二徑間中，有單一集中荷重，或活動荷重  $P$ ，(如圖 78)，作簡梁彎率圖  $bSc$ ，此三角形  $bSc$  之面積，等於  $\frac{hl_2}{2}$ ，其重心與左支點之水平距離，為  $\frac{1}{3}(l_2 + x)$ ，此面積對於  $b$  點之靜力率，等於  $\frac{1}{6}l_2h(l_2 + x)$ ，以  $\frac{l_2^2}{6}$  除此靜力率，即得  $bb'' = \frac{h}{l_2}(l_2 + x)$ 。

所以用  $\frac{l_2^2}{6}$  之理由如下，設令某一徑間之彎率圖面積，作為一個標準，而令  $r$  為任何彎率圖面積與標準彎率圖面積之比率，又設令  $H$  為外力多邊形中所假定之極距 Pole Distance，在此外力多邊形中，各彎率圖面積，皆作為荷重，[參閱圖 80 (c)]。

假設  $r \cdot H = \frac{l_2^2}{6}$ ，由此假設而得圖 80 (d) 中之一個重要關係如下。

即荷重徑間中平衡多邊形兩斜線，2-3 及 3-4，與左右支點垂直線之交點，所截取之線段，按照彎率圖之比例尺量之，等於各該支點處之彎率。

由圖 80 (b)，而知荷重  $W_2$ ，即三角形  $b'bc'$  之面積，亦即等於  $\frac{b'b}{2} \times \frac{l_2}{r}$ ，此項荷重，對於左支點之力距 Lever Arm，為  $\frac{l_2}{3}$ ，故其靜力率  $= \frac{b'b}{6} \cdot \frac{l_2}{r} = M$ 。

又按照平行力之定理，而知此項靜力率， $M$ ，等於極距， $H$ ，與  $b''_2 b''$  相乘之積，[參閱圖 80 (d)]，即  $M = H \times b''_2 b''$ 。

兩個  $M$  之值必相等，故得

$$H \times b''_2 b'' = \frac{b'b}{6} \cdot \frac{l_2}{r}.$$

此即謂圖 80 (d) 中之  $b''_2 b''$  等於圖 80 (b) 中之  $b'b$ , 按照同法, 可知圖 80 (d) 中之  $c''_2 c''$  等於圖 80 (b) 中之  $c'c$ .

此項截取線段之長度, 用下開圖解法, 極易求得之, 其法於圖 78 之中, 在施力點右方, 量取  $l_2$  之長, 而得 n 點, 並作  $nb''$  線, 由相似三角形, 而得  $bb'' : h = l_2 + x : l_2$ . 其餘作圖之法, 具如前所述者.

以上所述, 係以 Beanfield 氏之討論文為根據, 其作圖法極為簡捷易明, 惟證法似頗晦澁, 此外尚有美國 Richard G. Doerfling 氏, 對於固定點圖解法, 申述頗詳, 其法與 Beanfield 氏所述者, 大致相同, 惟敘述較為詳盡, 原文見 Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 90, 1927, pp. 122-142, 讀者如有此項會報, 可參閱之.

## 第十四章 配對點

## CONJUGATE POINTS

57. 緒言. 本章所述, 係以美國 L.H. Nishkian 及 D.B. Steinman 兩氏之論文為藍本, 此文標題為 Moments in Restrained and Continuous Beams by the Method of Conjugate Points. 經登入 Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 90, 1927, pp. 1—49, 並經該學會若干會員詳加討論, 大都予以贊同, 但其中有二三會員, 主張採用特性點法或固定點法, [本書第十二章及第十三章所述者, 即係節錄此二三會員之討論文.] 編者竊謂特性點法與配對點法並無甚大之差別, 不過兩者在學理上之出發點不同而已, 若固定點法則自有其優良之處, 不妨與配對點法並存.

Nishkian 及 Steinman 兩氏之論文, 敘述詳盡, 條理分明, 讀者易於明瞭, 其所陳述, 似較前二章之所述者為優.

據該二氏謂, 此文所述之法, 對於計畫鋼質結構以及鋼筋混凝土結構, 皆有裨益, 而對於橋梁工師, 則以所擬計算副應力 Secondary Stresses 之捷法, 為特富興味云.

58. 定義及符號. 本章所用各符號之定義如下. [參閱圖 82].

$R_1, R_2, R_3, \dots$  為連續梁之各支點, 經過此等支點之垂直線, 名曰反力線 Reaction Lines, 或 R 線.

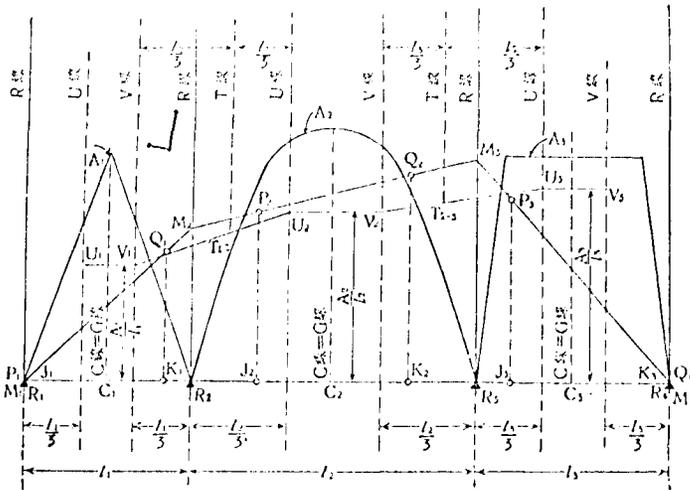


圖 82

$l_1, l_2, l_3, \dots$  分別為  $R_1, R_2, R_3, \dots$  右方徑間之長，經過各該徑間中心之垂直線，名曰 C 線，經過各該徑間三分之一點處之垂直線名曰 U 線及 V 線。(每徑間中之 U 線居左，V 線居右)。若將鄰近某一支點處 U 線及 V 線之三分之一徑間距離，互換交換，即可於該 R 線附近，得一新之垂直線，此線名曰交換線 Transposition Line，或 T 線。(如各徑間之惰性率互異，參閱圖 96，如某徑間中之惰性率，並非通體一致，參閱圖 105.)

$A_1, A_2, A_3, \dots$  分別為  $l_1, l_2, l_3, \dots$  等徑間所受荷重之簡梁轉率圖面積，經過各該轉率圖重心之垂直線，名曰 G 線，若任何徑間所受荷重，為對稱的，則 G 線與 C 線重合，如圖 82 所示。

$M_1, M_2, M_3, \dots$  分別為  $R_1, R_2, R_3, \dots$  等支點處之轉率，若將

此等彎率，分別按照相反之正負號，繪於各該 R 線之上，並於每徑間中，以一直線聯絡之，其結果為彎率閉合線 Moment Closing Line，或 M 線，由此線起量，至簡梁彎率曲線之縱距，即為所求各該處之正確彎率。

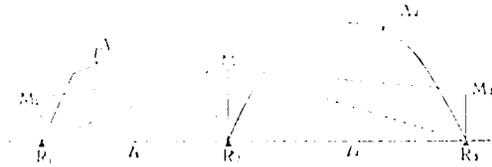
$U_1, V_1; U_2, V_2; U_3, V_3; \dots$  為分別居於各該徑間 U 線及 V 線中之點，若所受荷重為對稱的，則各該點之高度，分別等於  $\frac{\Delta_1}{l_1}, \frac{\Delta_2}{l_2}, \frac{\Delta_3}{l_3} \dots$  (如係不對稱的荷重，參閱圖 95，如某徑間中之惰性率，並非通體一致，參閱圖 105)。

$T_{1,2}, T_{2,3}, \dots$  分別為聯絡相鄰 U, V 點之線 ( $V_1-U_2, V_2-U_3$ , 等線) 與 T 線之交點。

$P_1, Q_1; P_2, Q_2; P_3, Q_3; \dots$  分別為各徑間 M 線中之點 (每徑間各有一個 P 點及一個 Q 點)，此諸點名曰配對點 Conjugate Points。各該徑間中之 P 點居左，Q 點居右，凡相鄰之 P 點，皆互相配對，若已得有一個 P 點，則其次之 P 點，即可用一簡單圖解法求得之，其相鄰之 Q 點亦然，由該連續梁之左端起，可依次求得各 P 點，而由該梁之右端起，亦可依次求得各 Q 點，將各徑間中之 P 點及 Q 點，以一直線聯絡，並延長之，使在 R 線，共同相交，即得所求之 M 線。

$J_1, K_1; J_2, K_2; J_3, K_3; \dots$  分別為各該配對點  $P_1, Q_1; P_2, Q_2; P_3, Q_3; \dots$  投射於基線之點，此諸點之位置，與所受荷重無關，故名曰各該徑間之固定點，每徑間各有兩個固定點，J 點居左，K 點居右，凡不受荷重之徑間，在某種情形之下，配對點 P 及 Q，分別與固定點 J 及 K，相吻合。

59. 簡化的三彎率定理。[參閱第 45 節] 圖 83 所示者，為一個連續梁之相鄰兩徑間， $A_1$  及  $A_2$  為各該荷重徑間之簡梁彎率圖。



$M_1, M_2, M_3$  為  $R_1, R_2, R_3$  各支點處之真確彎率。

今先假定每徑間所受荷重，為對稱的，並假定兩徑間中之惰性率，為通體一致，

(此後當再討論及荷重為不對稱的，並及乎惰性率為不一致的。)

按照彎率面積法原則，(見第 24 節) 任何徑間兩端之撓角，等於該徑間負荷其彎率圖面積時，各該端所發生之反力，以 EI 除之，[參閱第 50 節之定理三] 因該梁為連續的，故兩徑間在公共支點  $R_2$  處之撓角，必相等而相反，而兩徑間中之全部彎率圖面積，(設想為兩個荷重) 必在該中間支點，發生相等而相反之反力。

因圖中各  $M$  三角形之重心，皆在各該徑間之三分之一點，且各該簡梁彎率圖之重心，皆在各該徑間之中心 [荷重為對稱的]，故得

$$\frac{1}{EI} [ \frac{1}{3} (\frac{1}{2} M_1 l_1) + \frac{1}{3} (\frac{1}{2} M_2 l_2) + \frac{1}{2} A_1 ] = - \frac{1}{EI} [ \frac{1}{3} (\frac{1}{2} M_3 l_2) + \frac{1}{3} (\frac{1}{2} M_2 l_2) + \frac{1}{2} A_2 ]$$

此式可改書如下：

$$(M_1 + 2M_2)l_1 + (M_3 + 2M_2)l_2 = -3(A_1 + A_2) \dots \dots \dots (174)$$

[讀者可將此式，與第 45 節之 (168) 式，加以比較，而知此即三彎率定理也。]

60. 配對點。簡梁變率圖既已繪入，必須設法繪入  $M$  線 (即前兩章中所謂 M.C.L.)，此項  $M$  線，自必須適合 (174) 式，但能適合此

式之線，多不勝計，縱使已知有某一點  $P_1$ ，為  $M$  線所必經，然經過  $P_1$  點，且同時能適合 (174) 式之線，仍屬為數無窮，如採用下開之法，則此問題即可解決。

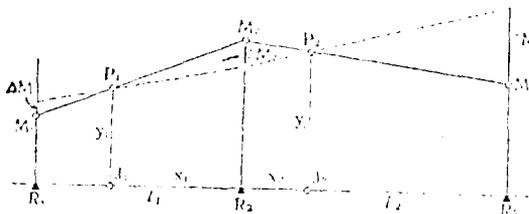


圖 84

如圖 84，若任何  $M$  線之經過  $P_1$  及  $P_2$  點者，能適合 (174) 式，則此兩點，即係配對點，今試假定有任何兩個  $M$  線，經過此兩點，因荷重為對稱的，且惰

性率為常數，故此兩線之任一線，皆能適合 (174) 式。

由圖 84 之幾何學的關係，可得

$$\Delta M_1 = -\Delta M_2 \times \frac{l_1 - x_1}{x_1}, \quad \Delta M_3 = -\Delta M_2 \times \frac{l_2 - x_2}{x_2}.$$

以此代入 (174) 式，而得

$$(-\Delta M_2 \times \frac{l_1 - x_1}{x_1} + 2\Delta M_2)l_1 + (-\Delta M_2 \times \frac{l_2 - x_2}{x_2} + 2\Delta M_2)l_2 = 0$$

簡化之，即得

$$\left(3 - \frac{l_1}{x_1}\right)l_1 = \left(\frac{l_2}{x_2} - 3\right)l_2 \dots \dots \dots (175)$$

此為決定兩配對點相對的橫平位置之公式，亦即決定兩固定點  $J_1$  及  $J_2$  相對的橫平位置之公式。

又由圖 84 之幾何學的關係，可得

$$M_1 = M_2 - (M_2 - y_1) \frac{l_1}{x_1} = \left(1 - \frac{l_1}{x_1}\right)M_2 + \frac{l_1}{x_1} y_1$$

$$M_3 = M_2 - (M_2 - y_2) \frac{l_2}{x_2} = \left(1 - \frac{l_2}{x_2}\right) M_2 + \frac{l_2}{x_2} y_2$$

以此二者，代入 (174) 式，然後減去 (175) 式，即得

$$\frac{l_1 V_1}{x_1} + \frac{l_2 V_2}{x_2} = \dots 3(A_1 + A_2) \dots \dots \dots (176)$$

此為決定兩配對點相對的垂直位置之公式。

若兩點之中，有一點  $P_1$  為已知者，即可利用 (175) 式及 (176) 式，以決定其又一點  $P_2$  之位置。因上文假定者，為任何兩線之經過  $P_1$  點，且能適合 (174) 式者。故知凡經過  $P_1$  點且適合 (174) 式之其他各線，亦必皆能經過  $P_2$  點。故又知若真確  $M$  線經過  $P_1$  點，此線亦必經過  $P_2$  點。如是則於已知一點之後，可利用 (175) 及 (176) 兩式，依次求得相連各徑間中之配對點。

61. 用圖解法求配對點。先於每一徑間中，求得  $U$  及  $V$  點之位置，用以代表所受荷重之影響。此諸點必居於各該三分線中。其高等於  $\frac{A}{l}$  (參閱圖 82)。易言之，

$$U_1 = V_1 = \frac{A_1}{l_1}; \quad U_2 = V_2 = \frac{A_2}{l_2}; \quad \text{等等}, \dots \dots \dots (177)$$

給入各  $T$  線，如第 58 節之所述，若相鄰兩徑間之長相等，則該  $T$  線自必與  $R$  線重合，並按照第 58 節之定義，分別求得  $T_{1,2}$ ,  $T_{2,3}$ , 等點。

由圖 85 之幾何學的關係，而得  $T$  點之高度如下。

$$T_{1,2} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{l_1 + l_2} \dots \dots \dots (178)$$



圖 85

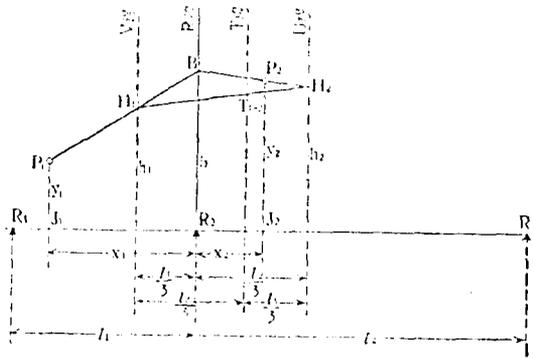


圖 86

既得 T 點之後，作一小旗圖 Peumant Diagram,  $P_1 H_1 B H_2$ , [圖 86] 如下。由  $P_1$  點，作一任何斜線  $P_1 B$ ，與 V 線交於  $H_1$ ，與 R 線交於 B，聯絡  $H_1$  與  $T_{1,2}$ ，並延長之，使與次徑間之 U 線，交於  $H_2$ 。聯絡 B 與  $H_2$  兩點，如是則所求之  $P_2$  點，必居於  $BH_2$  線中，讀者應注意，上述小旗圖之三頂點分別居於 V, R, U, 三線之中。

上開作法，可證明如下。

因  $P_1, H_1, B$  三點，同居一直線中，故

$$h_1 = \frac{l_1}{3} + \frac{v_1}{x_1} + \frac{b}{x_1} \left( x_1 - \frac{l_1}{3} \right) \dots \dots \dots (a)$$

又因  $B_1, B_2, B_3$  三點 同居一直線中 故

$$b_2 = \frac{l_2}{3} - x \frac{v_2}{x_2} + \frac{b}{x_2} \left( x_2 - \frac{l_2}{3} \right) \dots \dots \dots (b)$$

又因  $U_1, U_2, U_3$  三點 同居一直線中 故

$$b_1 l_1 + l_2 b_2 = T_{1,2} (l_1 + l_2) \dots \dots \dots (c)$$

$$\left[ T_{1,2} = \frac{l_1}{l_1 + l_2} v_1 + \frac{l_2}{l_1 + l_2} U_2 = \frac{\Lambda_1}{l_1 + l_2} + \frac{\Lambda_2}{l_1 + l_2} \right]$$

以 (a), (b) 兩式, 代入 (c) 式, 而得

$$\frac{l_1^2}{3} \times \frac{v_1}{x_1} + \frac{b l_1}{x_1} \left( x_1 - \frac{l_1}{3} \right) + \frac{l_2^2}{3} \times \frac{v_2}{x_2} + \frac{b l_2}{x_2} \left( x_2 - \frac{l_2}{3} \right) = T_{1,2} (l_1 + l_2) \dots \dots (d)$$

由 (175) 式, 而知 (d) 式中含有  $b$  之項, 可互相銷去, 如是而得

$$\frac{l_1^2}{3} \times \frac{v_1}{x_1} + \frac{l_2^2}{3} \times \frac{v_2}{x_2} = T_{1,2} (l_1 + l_2) = \Lambda_1 + \Lambda_2 \dots \dots \dots (e)$$

此即 (176) 式也, 故上開作圖法, 可以適合 (175) 及 (176) 兩式, 而得所求之配對點。

上文 (e) 式右方之號, 與 (176) 式相反, 因  $M$  圖係繪於基線之上之故。

若  $v_1, v_2$ , 及  $T_{1,2}$  皆等於零, 此係一特殊情形, 如是則小旗圖落至基線, 如圖 93 所示, 以此諸零值, 代入 (d) 式, 則得

$$\frac{l_1}{x_1} \left( x_1 - \frac{l_1}{3} \right) + \frac{l_2}{x_2} \left( x_2 - \frac{l_2}{3} \right) = 0$$

此即 (175) 式也。

上開作圖法，既經證明能適合 (175) 及 (176) 兩式，則下述各法自皆可用。

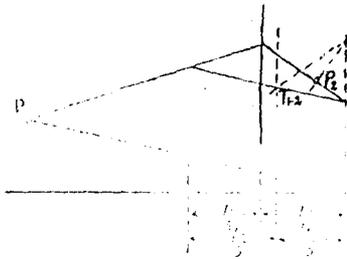


圖 87



圖 88

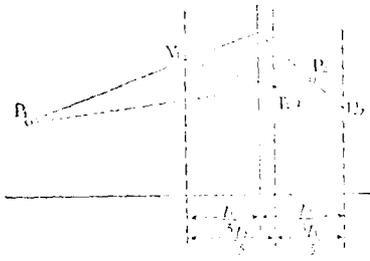


圖 89

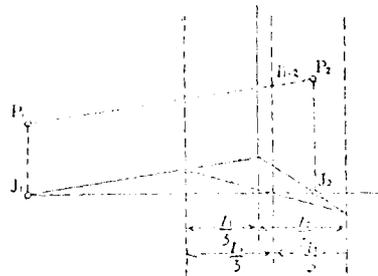


圖 90

(a). 圖 86 之中，小旗圖之第一線， $P_1H$ ，既可取任何方向，則由  $P_1$  點也所給另一小旗圖，必與先給之小旗圖，相交於所求之點  $P_2$  (圖 87)。

(b). 若由  $P_1$  點所作之第一線，經過  $T_1$  點，則圖 86 之小旗圖，變為一直線，故  $P_1 T_1 P_2$  必為一直線，(圖 88)。

(c). 為減少所作之線起見，由  $P_1$  點所作之第一線，可使經過  $V_1$  點，如是則即以  $V_1 U_2$  線為小旗圖之底邊，(圖 89)。

(d). 小旗圖之繪畫，既能適合 (175) 式，(此式可決定橫距之相對的關係，) 則此圖即可用以決定各固定點之位置，(圖 90)。

上述四法之任一法，皆可用以求配對點之位置，但圖 89 之法，最為簡捷，本文此後擬儘量採用之。

上述之法，皆利用三分線（即 U 線及 V 線）及反三分線（即 I 線），但並非必用此等線也，即改用二分線（即 C 線 及反二分線，亦無不可，如圖 91 所示。

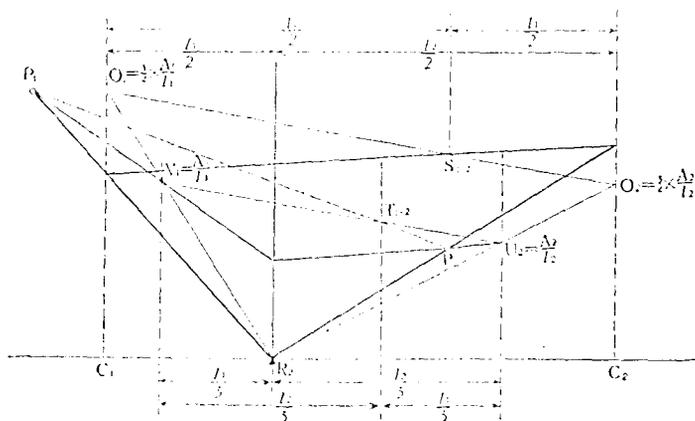


圖 91

62. 配對點圖解法之應用。上述之法，可施用於連續梁之具有任何數之徑間，並受有任何對稱的荷重者，茲先假定該梁首尾兩端為簡承的，其兩端固定之梁，則於第 63 節中討論之。

(a). 按照比例尺，繪入該連續梁，並於每徑間之上，繪入各該簡梁彎率圖，然後按照下法，繪入 M 線（即前兩章中之 M.C.L.）。

(b). 因首尾兩端為簡承的，故 M 線必經過該首尾兩支點，由左支點起，將此點作為第一已知點 \$P\_1\$，按照圖 89 之法，（或其他各法之一）求得第二徑間之配對點 \$P\_2\$，再按照此法，求得第三徑間之 \$P\_3\$ 點，與 \$P\_2\$ 點相配對，如是繼續進行，至求得最末徑間之 P 點而後已。

(c). 由最右支點起, 向左依次進行, 按照同法, 求得各徑間之配對點 .....  $Q_3, Q_2, Q_1$ , 等等.

(d). 此時每一徑間中, 均已有一  $P, Q$  點各一, 乃分別以直線聯絡各徑間中之相當的  $P, Q$  點, 並延長之使與鄰近之  $R$  線相遇, 如是則所得之斷折線 Broken Line 即為所求之  $M$  線, 讀者應注意, 凡相鄰兩徑間之  $M$  線 與其中間之  $R$  線 必須同遇於一點, 若然, 則此項圖解法之無誤, 即可為之證明.

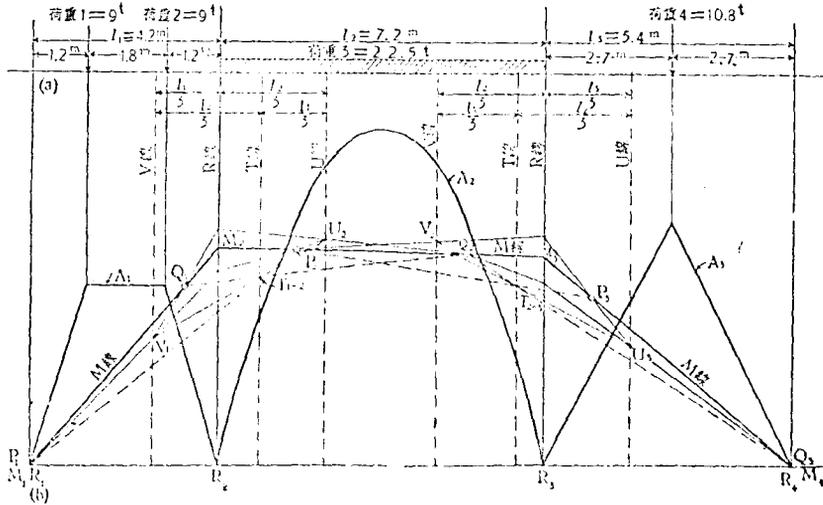


圖 92

圖 92 表示按照上法, 解算一實際問題, 此問題與第 55 節中之圖 79 完全相同, 惟此係按照配對點法, 求得  $M$  線耳, 其結果與圖 79 亦完全相同.

讀者注意,  $M$  線代表因有連續性而發生之彎率, 惟號適相反, (即繪於基線之上, 實則應繪於其下, 以表示其為負號.) 所以按照相反

之號給入者，不過為便利其與正號彎率相減而已。（此項正號彎率即簡梁彎率也）

63. 首尾端受有約束之梁，若梁端受有約束（即固定的），則圖 92 之作法，必須稍予變更，因 M 線不經過首尾兩支點也。

梁端若係固定，即無異更有一鄰接之徑間，其長等於零，( $l_0=0$ ) 而該端彎率亦等於零 ( $M_0=0$ )。如是則三彎率定理，[即 (174) 式]，變為

$$(M_2 + 2M_1)l_1 = -3A_1 \dots\dots\dots(179)$$

而 M 線必須適合此式。

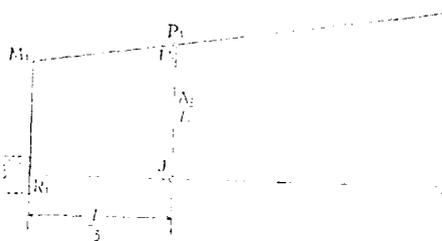


圖 93

由圖 93 可見任何線之能適合 (179) 式者，必須經過三分線中之  $U_1$  點，故 M 線亦必經過  $U_1$  點，如是則此點即可用作第一個配對點， $P_1$ ，藉以給入 M 線。

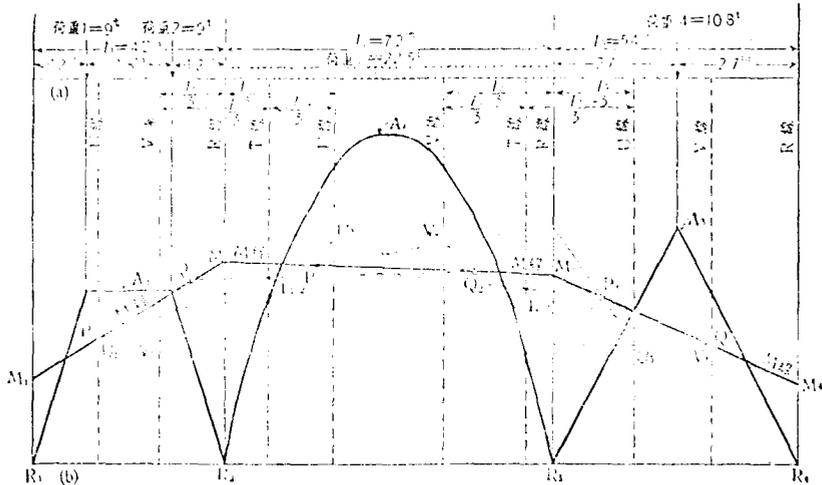


圖 94

故連續梁之兩端固定者，儘可仍用第 62 節之法，惟兩端起點不在首尾支點，而在與之相鄰之 U 或 V 點耳。

圖 94 之作法，即為解算圖 92 之問題，惟首尾支點為固定的。

64. 不對稱的荷重。若荷重為不對稱的，則該徑間之簡梁彎率圖重心，大抵不在該徑間之中心，如是則其 G 線與支點之橫平距離，不為  $\frac{l}{2}$  而為  $g$ ，如圖 95 所示。

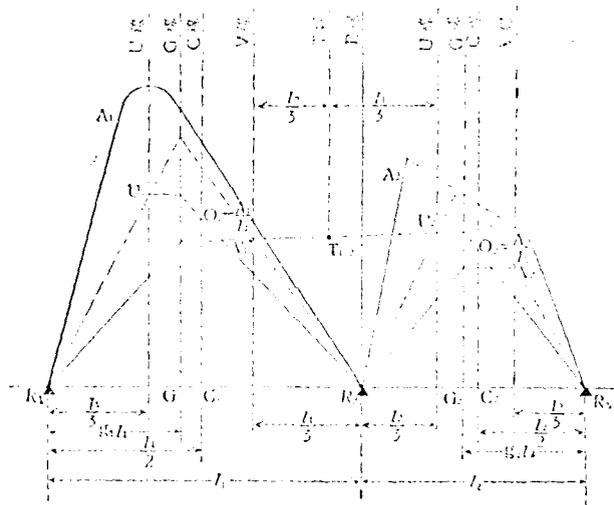


圖 95

由第 59 節中 (174) 式之前一式，而知若荷重為不對稱的，祇須將 A 之係數，由  $\frac{1}{2}$  改為  $g$ ，如是則 (174) 式變為

$$(M_1 + 2M_2)l_1 + (M_2 + 2M_3)l_2 = -6(g_1 A_1 + g_2 A_2) \dots \dots (180)$$

此即適用於不對稱荷重之一般的三彎率定理也。

因此而圖解法所應有之變更，如圖 95 所示，於該徑間之中線（即 C 線）中，求得一點 O，其高等於  $\frac{A}{7}$ ，將此點與該徑間之兩端

相聯絡，此兩斜線與 G 線之兩交點，即足以表示所求之 U 及 V 點之高度，其餘作圖法與上文所述者完全相同。

此項作圖法之能適合 (180) 式，似因極易明瞭，無須加以證明。為校核作圖法是否無誤起見，圖 95 中之 RU 及 RV 兩線，必須與 G 線同交於一點。

65. 各徑間之惰性率不相等。若各徑間之惰性率互異，但每一徑間中之惰性率，並非隨處變更，而為通體一致的，則 (174) 式變為

$$(M_1 + 2M_2) \frac{l_1}{I_1} + (M_3 + 2M_2) \frac{l_2}{I_2} = -3 \left( \frac{\Delta_1}{I_1} + \frac{\Delta_2}{I_2} \right) \dots \dots (181)$$

上式中之  $I_1$  及  $I_2$ ，為兩徑間中之惰性率。

因此而圖解法所應有之變更，如圖 96 所示，祇須將 T 線之位置，酌予變易而已。

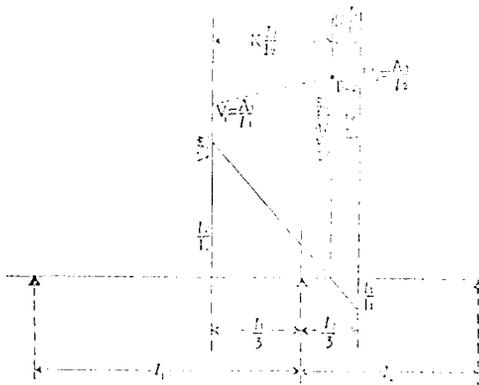


圖 96

其法即係將 V 線與 U 線間之距離，按照  $\frac{l_1}{I_1}$  及  $\frac{l_2}{I_2}$  之反比例，劃分之，而得變易之 T 線位置，如圖 96，其餘作圖法，仍與上文所述者完全相同。

關於前節及本節作圖法之證明，如讀者必欲知悉，可參閱 Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 90, 1927, pp. 43-45.

66. 改換徑間法, Method of "Transformed Spans". 凡在各徑間之惰性率互異之時, 除用第 65 節之法外, 有時或以採用改換徑間法, 較為相宜, 此法之要領, 在將若干徑間之長度, 改換其比例尺以繪入圖中, 俾其結果與各徑間之具有同一惰性率者相等, 設取主要荷重徑間之惰性率, 作為一標準, 凡其他徑間之具有較小惰性率者, 酌予加長之, 而其他徑間之具有較大惰性率者, 則酌予縮短之, 其加大(或縮短)徑間對於原有徑間之比率, 等於標準惰性率與各該<sup>徑</sup>間惰性率之比率, 按照此法改換徑間之後, 其作圖法即可按照各徑間具有同一惰性率者進行。

此法係基於下開之原則, 此即「若將任何徑間之長度,  $L$  及其惰性率,  $I$ , 按照同一比率變更之, 俾該徑間之剛率 (以  $\frac{I}{L^3}$  表示之) 並未有何變更, 則該結構中其他各徑間之應力狀況, 亦不因而變更」是也。

圖 98 及圖 103 可表示此法之如何應用。

67. 不靜定架構, 上述圖解各法, 亦可適用於不靜定架構, 祇須將其各剛結構件, 視作連續梁之各徑間而已。

圖 97 表示用配對點法, 求個是矩形架構之轉率圖, 圖 98 表示用此法, 以求定是矩形架構之轉率圖, 此圖中之  $M$  線, 經過  $F_1$  及  $C_1$  點, 而不經過梁端, 因兩端為固定的也。

圖 97 係用第 65 節之法, 而圖 98 則用第 66 節之法, 藉示兩法之如何應用, 若架構為梯形的 (即兩壓柱傾斜而不垂直) 圖 97 及圖 98 之作圖法, 仍不變更。

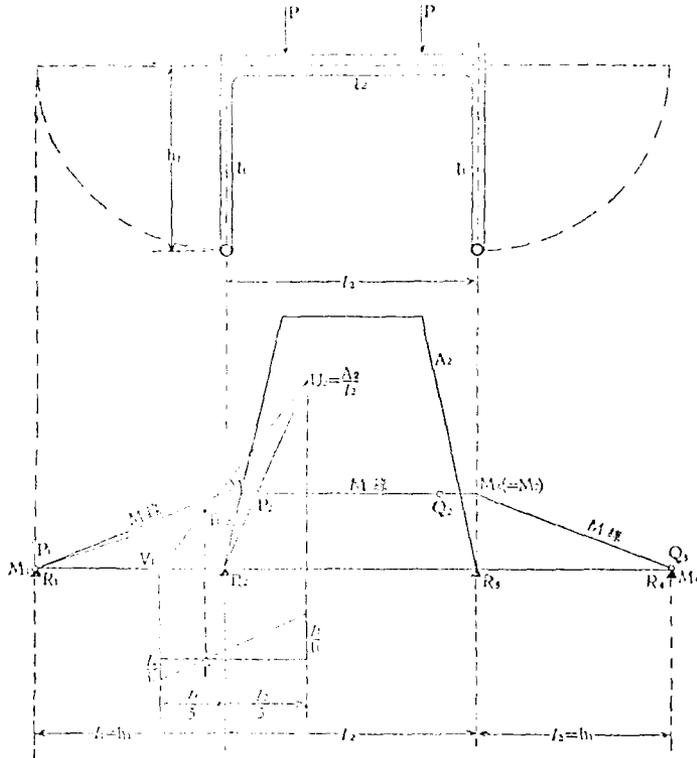


圖 97

於圖 97 及圖 98 之中，假定架構及荷重均為對稱的，故祇須在該結構之一方，施用圖解法，如圖所示。若架構或荷重，為不對稱的，則須略加修正，如圖 99 至圖 102 所示。因該架構發生側欹 Side Sway 也。（參閱第 29 節）。此項側欹之結果，與兩端徑間各該支點之下陷相等。（參閱第 72 節）

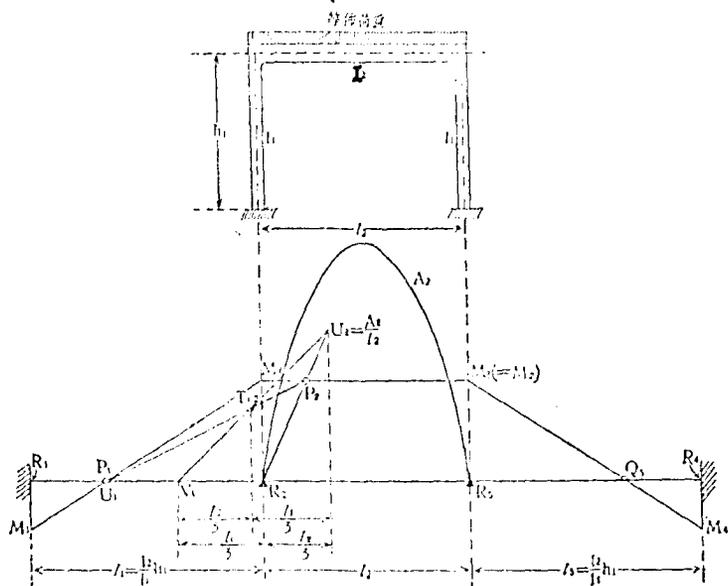


圖 98

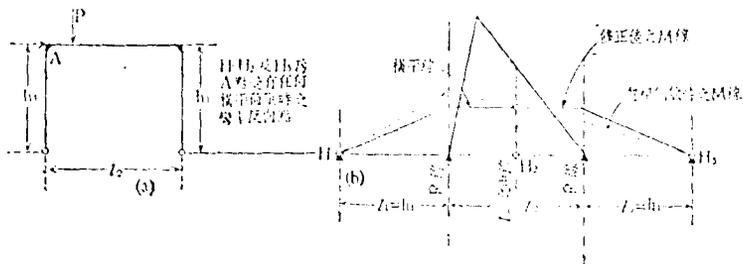


圖 99

圖 99 所示者，爲此項作圖法之如何適用於對稱的假是架構。在此問題中，因 A 點受有橫平荷重而得之彎率反向點， $H_2$ ，適居於中央徑間之中心，故祇須將 M 線，繞此點而旋轉，使居於橫平位置，M 線經修正後，左右兩徑間中之傾度，成爲對稱的。此即表示兩個垂直立柱中之剪截力，數量相等而方向相反。

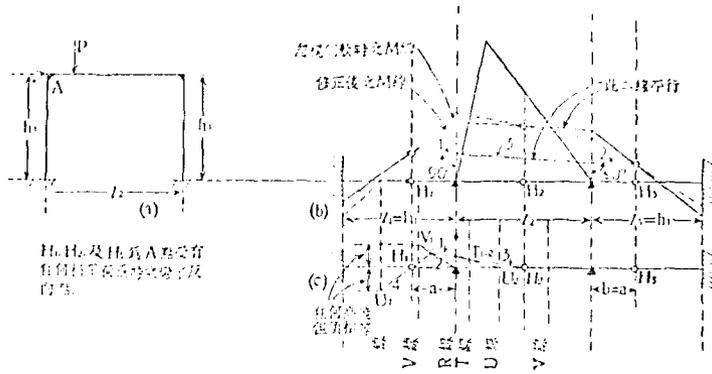


圖 100

圖 100 表示此法之適用於對稱的定足架構，A 點受有任何橫平荷重時，中央徑間之彎率反向點， $U_3$ ，仍在該徑間之中心，其左右兩徑間之彎率反向點， $H_1$  及  $H_2$ ，必居於對稱的位置，可按照圖 109 之原則，用圖解法求得之，如圖 100 (c) 所示，其  $M$  線仍按前法旋轉之，使成爲橫平線，且使兩側徑間中之  $M$  線，具有相等而相反之傾度，欲得此項結果，固有種種簡單方法，可以採用，圖 100 (b) 所示者，係在中央徑間之左右兩  $R$  線，取得兩點，使其高度分別與  $H_1$  及  $H_2$  之高度相等，以一直線 3，[圖中各線之標有 1, 2, 3, 等字者，表示作各線之次序，圖 101 及圖 102 皆然] 再作一線，經過  $H_3$  點，與線 3 平行，即得修正後之  $M$  線。

圖 101 表示此法之適用於不對稱的定足架構，其中之 (c) 圖，表示如何利用圖 109 之原則，以求得  $H_2$  之位置，在此問題中，令  $V_1$  及  $U_1$  之高度，可爲任何高度，但其比率，必須與  $h_1$  及  $h_2$  之平方，成反比，用以表現該架構頂部發生任何橫平變位之影響，由是而得之  $M$  線，[指圖 101 (c) 而言] 可以決定  $H_2$  之位置，其圖 101 (b) 之  $M$  線，須旋轉之，使兩側徑間中之  $M$  線，具有相等而相反之傾度，其法如圖 101 (b) 之所示。

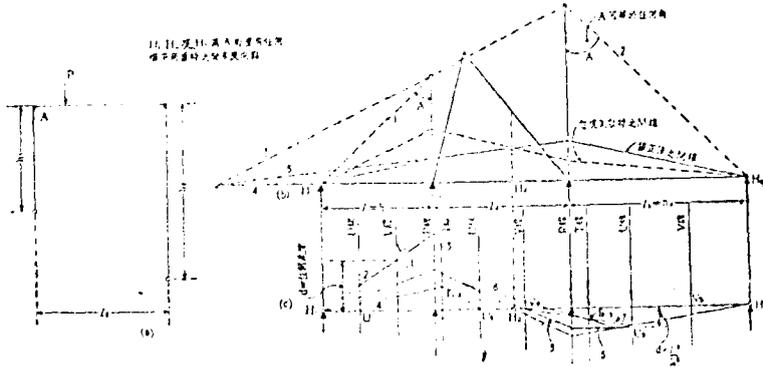


圖 101

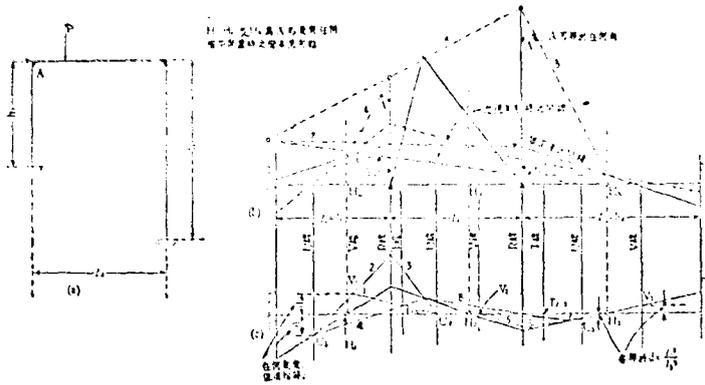


圖 102

圖 102 表示此法之適用於不對稱的定足架構，其法與上述者彷彿相同，其見該圖 (b) 及 (c) 兩部份，茲不贅述。

配對點圖解法，亦可用以解算較為繁複之不靜定結構，即有兩個以上之桿件，同遇於一結點者是也。圖 103 即爲此項解法之一例。此係一個三徑間連續梁，其中間有兩個立柱，與之剛結。

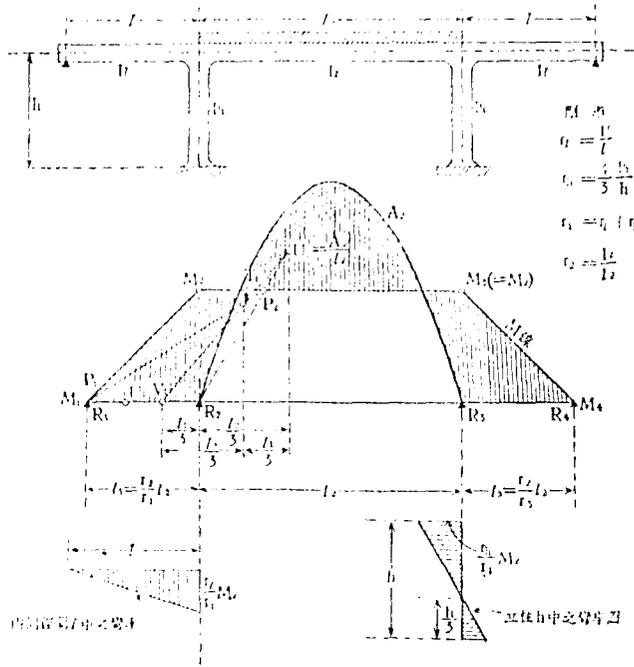


圖 103

圖 103 所示者，可稱為剛率合併法。Composition of Rigidities。凡一桿件之剛率，與  $\frac{EI}{l}$  成正比，若  $E$  為常數，則剛率可以  $r = \frac{I}{l}$  表示之。若該桿件之外端，受有約束，可以  $r = \frac{4}{3} \frac{I}{l}$  表示之。[參閱第四節第 85 節]。如有兩個或兩個以上之桿件，同遇於一結點，則此諸桿件，可以另一桿件之剛率等於各該桿件剛率之和者代之，而得同一之效果。

圖 103 之作法，即採用上述原則，中央徑間兩端之二桿件， $l$  及以另一相當桿件  $l'$  代之，此相當桿件之剛率，必為  $r = r_1 + r_2$  而此

桿件之折合長度 自必爲  $l_1 = \frac{r_2}{r_1} l_2$  俾其折合惰性率可等於中央徑間之惰性率，(此即改換徑間法也)，兩側徑間長度  $l_1$  既用此法決定，其餘作圖法，與前述之連續梁圖解法及簡單架構圖解法，完全相同，(試將圖 103 與圖 97 及圖 98 比較)。

作圖既竟，所求得代用桿端之彎率，必再設法分解，藉得原有各桿件之彎率，桿端全部彎率  $M_2$  (圖 103) 必須比照各該剛率之多寡以分配於原有各桿件，此項分配法，如圖 103 所示，凡桿件之端，得自由旋轉者，其  $M$  線通過該端，若桿件之端，爲固定的，則  $M$  線通過其外方三分之一點。

68. 雙徑間連續梁，若左右兩端，爲簡承的，則  $M_1 = M_3 = 0$ ，故 (174) 式變爲

$$M_2 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{l_1 + l_2} \dots \dots \dots (182)$$

以此與 (178) 式相比較，可見  $M$  線最高點 (即  $M_2$  點) 之高度，等於  $\frac{3}{2}$  乘  $T$  點之高度，如是則並無求得配對點之必要，可將  $U$  及  $V$  點之高度，加高半數，由是而得之  $T$  點高度，亦因而加高半數，由此  $T_{1-2}$  點，作一橫平線，即可得所求之  $M_2$  點。

若左右兩端爲固定的，則由 (174) 及 (179) 兩式，可得

$$M_2 = -\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{l_1 + l_2} \dots \dots \dots (183)$$

此式並無  $\frac{3}{2}$  因子在內，故祇須按照常法，求得  $T_{1-2}$  點，經過該點，作一橫平線，即可得  $M_2$  點。

若不用三分線及反三分線，而用二分線及反二分線，亦可求得  $S_{1-2}$  點，其高與  $M_2$  點同，(參閱圖 91)。

若係不對稱的荷重，或兩徑間之惰性率不相等，自須按照圖 95 及圖 96 之法，加以修正。

若祇有一徑間，則更爲之簡化。如一端固定，一端簡承，則 (182) 式變爲  $M = -\frac{3}{2} \frac{A}{l}$ ，如兩端皆固定，則 (183) 式變爲  $M = -\frac{A}{l}$ 。此等結果，亦可由圖 93 直接求得。

69. 連續梁任何徑間中之惰性率爲變數。若一徑間中之惰性率爲變數，(即非通體一致者)，則 (174), (180), (181) 等式所用取出公因子  $\frac{1}{I}$  之法，自不適用。而必須以各該相當之  $I$ ，除所有彎率面積圖中之各個縱距，若已知一徑間之惰性率，如何逐點變易，自可按照逐一除之，而得一修改的彎率面積圖，Modified Moment Area。

試閱圖 83，每一徑間有三個彎率面積圖，就第一徑間左言之，計有左方之  $M$  三角形 (即  $M_1$  三角形)，右方之  $M$  三角形 (即  $M_2$  三角形) 及簡梁彎率圖 ( $M_1$ ) 三種，此三圖中，每一圖之各個縱距，皆須以其相當惰性率除之，然後可施用上所述之圖解法，若欲求得一個新公式，以表示三彎率定理，亦必須利用此諸修改的彎率面積圖之面積及重心。

因兩端彎率  $M_1$  及  $M_2$ ，在此時尚爲未知量，可假定  $M_1=1$ ，及  $M_2=1$ ，而作其相當的  $M$  三角形，其  $A_1$  面積圖之高度，亦可假想爲按照比例減小之，至其平均縱距等於一，然後以  $I$  除之，(此等高度之縮小，並不變更各重心之橫平位置)。

以變數之  $I$ ，分別除此三圖之相當縱距，可得該徑間之修改的彎率面積圖，將此多數縱距相加，即可求得其平均縱距及其重心所在，如圖 104 所示。

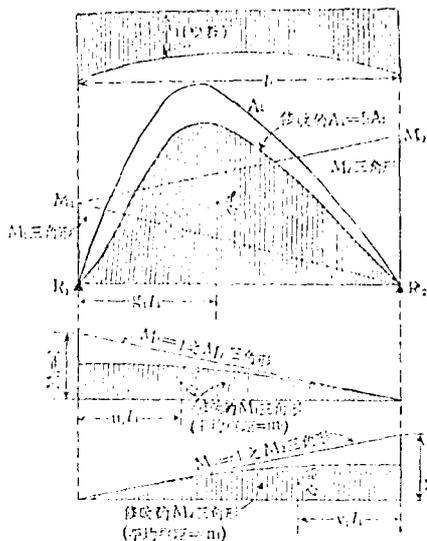


圖 104

設令

$m_1$  = 修改的  $M_1$  三角形 ( $M_1=1$ ) 之平均縱距 = 該三角形之面積, 以  $A_1$  除之.

$n_1$  = 修改的  $M_2$  三角形 ( $M_2=1$ ) 之平均縱距 = 該三角形之面積, 以  $M_2$  除之.

$f_1$  = 修改的  $A_1$  面積圖 ( $\frac{A_1}{l}$ ) 之平均縱距 = 該圖之面積, 以  $A_1$  除之.

$u_1$  = 修改的  $M_1$  三角形重心之橫距比率, ( $u_1$  = 由  $R_1$  起量之橫距).

$v_1$  = 修改的  $M_2$  三角形重心之橫距比率, ( $v_1$  = 由  $R_2$  起量之橫距).

$g_1$  = 修改的  $A_1$  面積圖重心之橫距比率, ( $g_1$  = 由  $R_1$  起量之橫距).

其相鄰徑間  $l_2$  之相當數量, 以  $m_2, n_2, f_2, u_2, v_2, g_2$  等字代表之, (若該徑間中之截面變更, 為對稱的, 則  $m=n$ , 而  $u=v$ , 若所受荷重, 亦為對稱的, 則  $g=\frac{1}{2}$ , 若該徑間中之彈性率為常數, 則  $m=n=\frac{1}{2}, f=1 \times \frac{1}{l}$ ,

$$u=v=\frac{1}{3}.$$

按照求得 (174), (180), (181) 等式之方法, 可得一極普通之公式如下:

$$(C_1 M_1 + D_1 M_2) L_1 + (C_2 M_2 + D_2 M_3) L_2 = -(F_1 \Delta_1 + F_2 \Delta_2) \dots \dots \dots (184)$$

上式中

$$\begin{aligned} C_1 &= m_1 \times u_1 (= n_1 \times v_1) & C_2 &= m_2 (1 - u_2) \\ D_1 &= n_1 (1 - v_1) & D_2 &= n_2 \times v_2 (= m_2 \times u_2) \\ E_1 &= f_1 \times g_1 & E_2 &= f_2 (1 - g_2) \end{aligned}$$

在施用於任何實際問題之時, (假定已知荷重及慣性率之如何變更), 可先計算各徑間中  $m, n, f, u, v, g$  等等之數值, 然後將  $C, D, E$  等等之數值, 代入 (184) 式, 而得支配該兩徑間之公式。

若於求得  $U, V, T$  等點之位置之時, 注意及於方程式中各係數之變易, 則配對點圖解法, 亦同可適用於 (184) 式之解法, 若  $U, V, T$  等點之位置, 係按照下法求得, 則甚易證明此等新係數, 皆可為之適合, (作法如圖 105)。

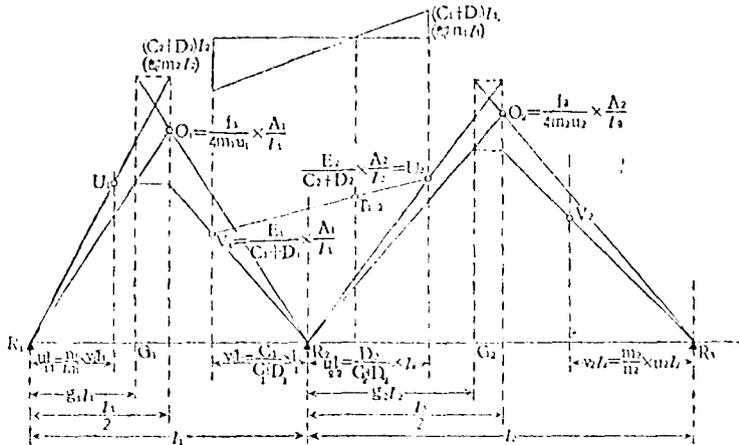


圖 105

1. 作 U 線及 V 線，使經過各個修改的 M 三角形之重心。易言之，使每一 U 線，距該徑間之左端，等於  $u_1$ ，並使每一 V 線，距該徑間之右端，等於  $v_1$ 。（注意  $v_1 = \frac{C_1}{C_1 + D_1}$ ， $u_2 = \frac{D_2}{C_2 + D_2}$ ）。

2. 決定 T 線位置之方法，係將相鄰 U, V 兩線之距離，分為兩段，使與  $n_1 l_1$  及  $m_2 l_2$  成反比例，易言之，使與  $(C_1 + D_1) \times l_1$  及  $(C_2 + D_2) \times l_2$  成反比例。

3. 由下列兩式，以決定 U 點及 V 點之高度。

$$V_1 = \frac{E_1}{C_1 + D_1} \times \frac{A_1}{l_1} = \frac{f_1 g_1}{n_1} \times \frac{A_1}{l_1}$$

$$U_2 = \frac{E_2}{C_2 + D_2} \times \frac{A_2}{l_2} = \frac{f_2(1-r_2)}{m_2} \times \frac{A_2}{l_2}$$

其餘之作圖法（用以求得 M 線之位置），與前述者完全相同。（本節作圖法之證明，見 Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 90, 1927, pp. 45—48）

Nishkian 及 Steinman 兩氏原文中，於此節之後，曾舉一實際問題，其中之連續梁，為加腰梁 Haunched Beams，文中附列兩表，並說明如何由各該表，求得  $m, n, u, v$ ，等等數值，因而計算  $C, D, E$ ，等等數值，以決定 U, V, T，等點之位置，此論文發表後，經 Walter Ruppel 氏加以討論，其討論文中，對於加腰梁之解法，詳加研究，並附有極詳備之表，藉供實際應用，編者認為 Ruppel 氏之表，遠勝於原著者之表，爰於第十五章中，將 Ruppel 氏解算加腰梁之法，摘要陳述，並將此君所作之表，附於該章之末。

70. 剪截力及反力之推求，M 線既已求得，即可或用計算法，或用圖解法，求梁中之剪截力及各支點處之反力。

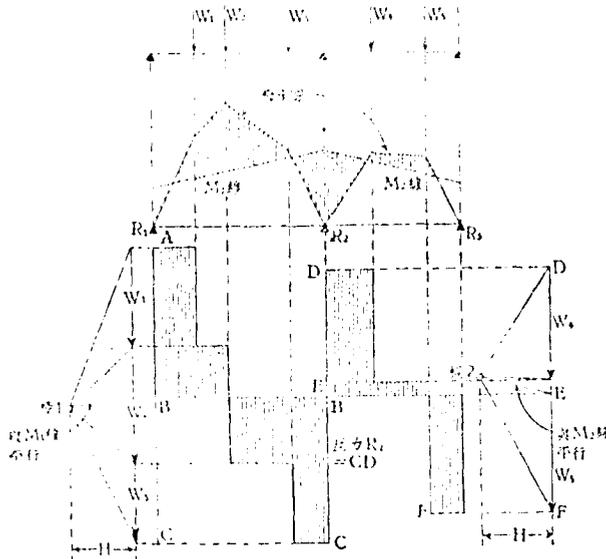


圖 106

圖解之法，以圖 106 表示之，先作極圖，Pole Diagram (即外力多邊形 Force Polygon) 與該徑間之簡梁彎率圖相當，在此圖中，由極點 Pole 作斜線與 M 線平行，此斜線將外力線 Load Line 分為兩段，各該段即代表各該端之剪截力，在任何中間支點處之兩剪截力相加，即為該支點處之反力，(參閱第 41 節。)由外力線上各分割點，作橫平線，至與荷重垂直線相交，即得所求之剪截力圖 Shear Diagram.

若彎率圖為一曲線，則極圖中之外邊兩斜線，應與曲線兩端

之切線平行，藉以求得極點之位置。

相連各徑間之極圖，必須具有同一之極距  $\Pi$ ，此因各該彎率圖係用同一的垂直比例尺繪入之故，此節應加以注意。

上述作圖方法，實與尋常計算方法所用下開之原則相等，即

$$R_1 \text{ 與 } R_2 \text{ 間之剪截力} = \text{簡梁剪截力} + \frac{M_1 - M_2}{l_1}$$

[參閱第 37 節，此與 (138) 式互異，因本章之彎率正負號之意義，與第二編不同之故。]

71. 影響線圖之繪製。若假定有一個集中荷重 (=1) 依次作用於連續梁中各點，其逐次所得之彎率，剪截力，或反力之數值，（按照上述各法求得之）可繪成曲線，以表示各該影響線，在此等影響線圖中所量得之垂直線段長度（按照所用比例尺量之）即足以代表活動荷重居於各該位置時此項彎率，剪截力，或反力之數值。

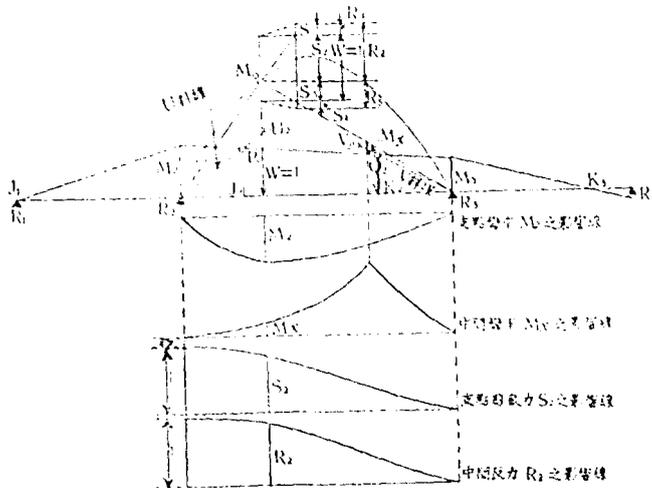


圖 107

圖 107 示作圖之通法，假定有一個單位荷重， $W=1$ ，依次作用於一個連續梁之各點，其簡梁彎率圖為三角形，其頂點  $M_0$ ，必垂直的居於該荷重之上，而  $M$  線必經過相當的配對點，如圖所示， $M$  線在任何支點處之高度，即足以代表各該支點彎率，( $M_2$  或  $M_3$ ) 之數值，在任何中間點  $x$  處， $M_x$ 。三角形與  $M$  線間之縱距，即為在該  $x$  點處之彎率  $M_x$ 。以  $M_0$  頂點為極，以荷重為  $W=1$ ，作一極圖。在此圖中，作一斜線與荷重徑間之  $M$  線平行，其在外力線上所截得之兩線段，即足以代表兩支點剪截力， $S_2$  及  $S_3$ ，更作其他兩斜線，分別與相鄰不受荷重兩徑間之  $M$  線平行，即得各該徑間中之剪截力， $S_1$  及  $S_4$ 。將每一支點處之剪截力相加，即得各該反力，計  $R_1=S_1$ ， $R_2=S_1+S_2$ ， $R_3=S_3+S_4$ 。

每一彎率，剪截力，或反力之數值，均以該圖中之相當縱距代表之，按照活動荷重迭次所居位置，而分別量得此項縱距之各個數值，可繪成若干曲線，此即各該影響線也，圖 107 表示用此法繪製之支點彎率  $M_2$ ，中間彎率  $M_x$ ，支點剪截力  $S_2$ ，及中間反力  $R_2$ ，等四個影響線圖。

在不受荷重各徑間中，其外邊配對點之高度等於零，易言之，各該點即居於基線之中，與其投射點 Projections 膾合，配對點之投射點，名曰固定點，凡在荷重徑間左方之各徑間，其  $M$  線必經過左固定點  $J$ 。在荷重徑間右方之各徑間，其  $M$  線必經過右固定點  $K$ 。

因此項作圖，對於迭次假定之活動荷重位置，必須反覆重作，其所需各項動作，自必須減至最少之數，其中如求得配對點位置之圖解捷法，多不勝舉，圖 90 所示之法，頗可採用，蓋用此法，則於荷重

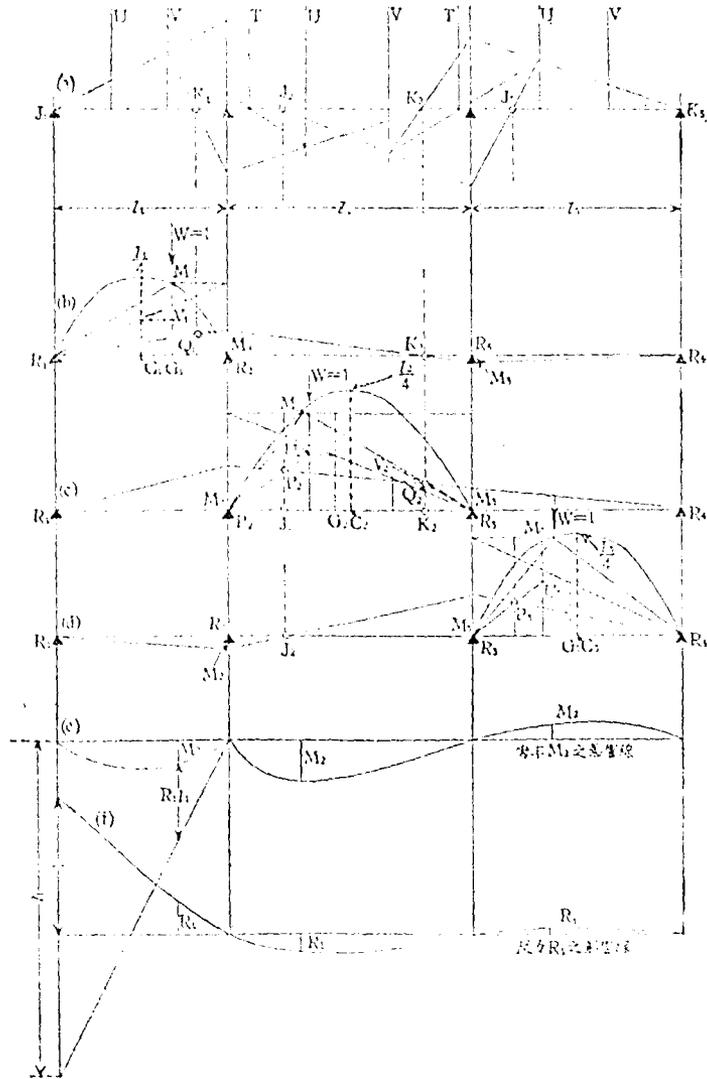


圖 103

迭次變易其位置之時，無須逐次繪入新的小旗圖也，其法可先求得各固定點之位置，分作垂直線，經過此諸固定點，如是則無論活動荷重，居何位置，其相當之配對點，必在此諸垂直線中，此外更有一有用的原則，（如圖 97，圖 98，圖 103，圖 107，所示）即配對點必分別居於  $U$  及  $V$  兩斜線之中（ $P_2$  點在  $R_2 U_2$  線中， $Q_2$  點在  $R_3 V_2$  線中，但此係假定相鄰之左右兩徑間，皆不受荷重，此其理由，因  $R_2 U_2$  線及  $R_3 V_2$  線分別為各該小旗圖之一邊之故），故祇須求得  $U$  及  $V$  之位置，由該徑間鄰近支點，分別作斜線至  $U$  及  $V$  點，此兩斜線與其鄰近之固定點垂直線相交之處，即係所求之  $P$  及  $Q$  點，如圖 107 所示，又各個簡梁彎率圖三角形頂點  $M$ 。之軌跡 Locus，必為一個拋物線，其在該徑間中央之高度，等於  $\frac{l}{4}$ ，此節亦可加以注意。

上述各法之適用於圖解，如圖 108 所示，其中之 (a) 圖，表示如何求得固定點（可與圖 75 及圖 79 相比較）之位置，由是而知各配對點必居於經過此諸點之垂直線中，其 (b)，(c)，(d)，三圖，分別表示荷重在第一，第二，第三徑間中居於某一位置時，如何求得  $M$  線之位置，(c) 圖表示  $M_2$  之影響線，此項  $M_2$  之影響線，（除第一徑間  $l$  外）如以  $l$  除其縱距，即係  $R_1$  之影響線，其在第一徑間  $l$ ，則此等縱距須自另一基線起量，此另一基線係一斜線，其一端之縱距等於  $l$ 。(f) 圖表示用此法求得之  $R_1$  影響線。

於圖 108 中，由 (b)，(c)，(d) 等圖，亦極易繪製其他彎率，剪截力，或反力之影響線，蓋祇須利用圖 107 所示之各該截得線段也。

第一徑間中任何點之剪截力或彎率影響線之求得極易，祇須加繪一直線於  $R_1$  影響線，此項  $R_1$  影響線，亦名曰彈性曲線 Elastic Curve

[參閱 Hool and Kinne 兩氏合編之 Movable and Long-Span Steel Bridges 書中 Continuous Bridges 章, 1923 年版.]

關於影響線, 讀者如需參考, 可閱 Merriman and Jacoby 兩氏合著之 Roofs and Bridges, Part IV, Higher Structures, 第 37, 74, 及 87 等節, 1909 年版, 及 Cross and Morgan 兩氏合著之 Continuous Frames of Reinforced Concrete, 第八章, 1932 年版.

72. 支點下陷. 配對點圖解法, 亦可用以解算各種問題之涉及連續梁中有一個或一個以上支點之下陷者.

若某一徑間  $l_1$  之右端下陷量, 大於其左端下陷量, 設令  $d_1$  為其相差之數量, 則該徑間之兩端傾度差 (即撓角差) 為  $\varphi_1 = \frac{d_1}{l_1}$ . 按照同法, 可得第二徑間  $l_2$  之兩端傾度差, 為  $\varphi_2 = \frac{d_2}{l_2}$ .

用此二者, 以入第 59 節之式 [(174) 式之前一式], 可得

$$\frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{3} (M_1 l_1) + \frac{2}{3} (M_2 l_1) \right] + \varphi_1 = -\frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{3} (M_3 l_2) + \frac{2}{3} (M_2 l_2) \right] + \varphi_2$$

上式可改書如下.

$$(M_1 + 2M_2)l_1 + (M_3 + 2M_2)l_2 = -6EI(\varphi_1 - \varphi_2) \dots \dots \dots (185)$$

此式適用於兩徑間之具有同一惰性率者, 若惰性率不相同, 則(185)式變為下式,

$$(M_1 + 2M_2) \frac{l_1}{I_1} + (M_3 + 2M_2) \frac{l_2}{I_2} = -6E(\varphi_1 - \varphi_2) \dots \dots \dots (186)$$

[可將上列兩式, 與 (174) 式及 (181) 式, 分別比較.]

上文所述作圖各法，自可適用於本問題，惟 U, V, T, 等點之高度，必須略予變更，俾能適合上列兩式之一，其 U, V, T, 等線之位置，則仍如前，並不有所變更。

如使 T 點之高度，合於下開之 (187) 式，則 (185) 式及 (186) 式，即可適合，此層極易證明。

$$T_{12} = 2 \cdot \frac{\phi_1 - \phi_2}{c_1 + c_2} \dots \dots \dots (187)$$

上式中之  $c_1$  及  $c_2$  為各該徑間之柔率常數 Flexibility Constants. 其定義如下，即  $c_1 = \frac{l_1}{EI_1}$ ， $c_2 = \frac{l_2}{EI_2}$  是也，此等常數，係剛率常數 Rigidity Constants 之倒數 Reciprocals, 所謂剛率常數者，即

$$r_1 = \frac{EI_1}{l_1}, \text{ 及 } r_2 = \frac{EI_2}{l_2} \text{ 是也.}$$

若各徑間之惰性率不相等，可按照第 65 節之法，將相鄰 U, V 兩線間距，分為兩段，使與  $c$  成反比例，或使與  $r$  成正比例，藉以求得變易的 T 線之位置。

為求得 T 點高度俾能適合 (187) 式起見，圖解方法頗多，下列四法，可任其一。

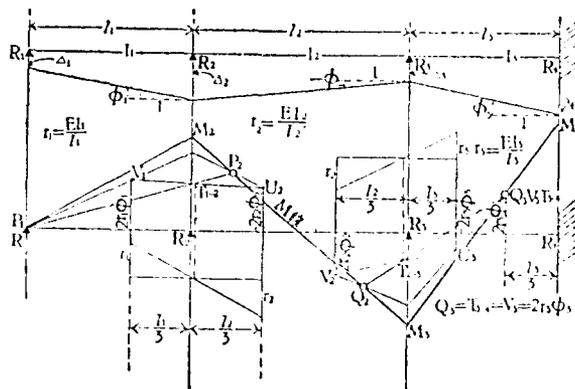


圖 169

(a) 於每一徑間中，用下式定 U 點及 V 點之位置。

$$U = -2r\varphi, \quad V = 2r\varphi, \dots\dots\dots (188)$$

以求得 T 點之位置。然後按照常法進行。圖 109 表示如何用此法以解算一實際問題。為表示兩種處理方法起見，特假定該梁為一端簡承一端固定者，其傾度差之數值， $\varphi$ ，可按照比例量得之，如圖所示。

(b). 用 (187) 式，直接求得各徑間中 T 點之位置，此法如圖 110 所示，其撓角變更之數值，(即  $\varphi_1 - \varphi_2$ ) 可由下陷圖中直接量得之，如圖所示。

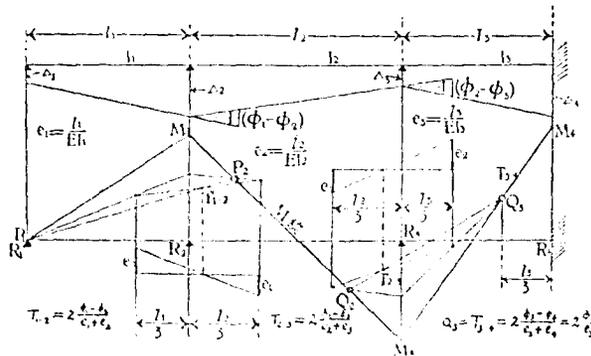


圖 110

(c). 第 66 節所述之改換徑間法，亦可採用，其 U, V, T, 等點之高度，則按照 (187) 及 (188) 兩式，求得其數值，即以此等數值應用，而不復變更。

(d). 若各徑間之長度相同，且簡性率亦相同，則 T 之高度，變為

$$T_{1-2} = \frac{2EI}{l^2} \cdot d_{1-2}$$

上式中之  $d_{1,2}$  爲該支點對於左右鄰兩支點之撓度 Deflection. 若於下陷圖中, 作直線以聯絡左右兩支點,  $R_1$  及  $R_3$ , 則中間支點  $R_2$  與該聯絡線之垂直距離, 即爲此項相對撓度  $d_{1,2}$  之數值, 如是則各 T 點之高度, 可按照此諸  $d_{1,2}$ ,  $d_{2,3}$ ,  $d_{3,4}$ , ... 之數值, 繪入圖中, 但此後由圖解法求得之彎率, 必須以  $\frac{2EI}{l^3}$  乘之, (此法之應用, 如圖 111 所示.)

73. 用圖解法求副應力. 橋梁工師於計算桁梁各桿件之副應力之時, 需要一合乎實用之捷法, 藉以求得此等副應力之約值, 現在所用以計算副應力之標準方法, 冗長繁複, 必須由各節點 Panel Points 之彎率的相互關係, 作成多數聯立方程式而解算之, 始可求得某一指定節點處之副應力, 實則凡從事實際工作之工師所欲知者, 不過若干少數節點處之副應力之約值而已, 故按照學者所用理論的方法而得之結果, 實覺過於精密, 與原作之假定, 以及實際之需要, 皆不相稱.

上文所述之原理, 及作圖法, 可利用之以得一簡捷圖解法, 藉以推算副應力之多寡, 其所得結果之精密, 足以適合橋梁工師之普通的需要, 下文所陳者, 係利用配對點圖解法以求副應力之數值, 計凡三法, 此三法所得之結果, 精粗不一, 第一法最粗而最捷, 第二第三兩法, 逐加精密, 但工作亦加繁多耳.

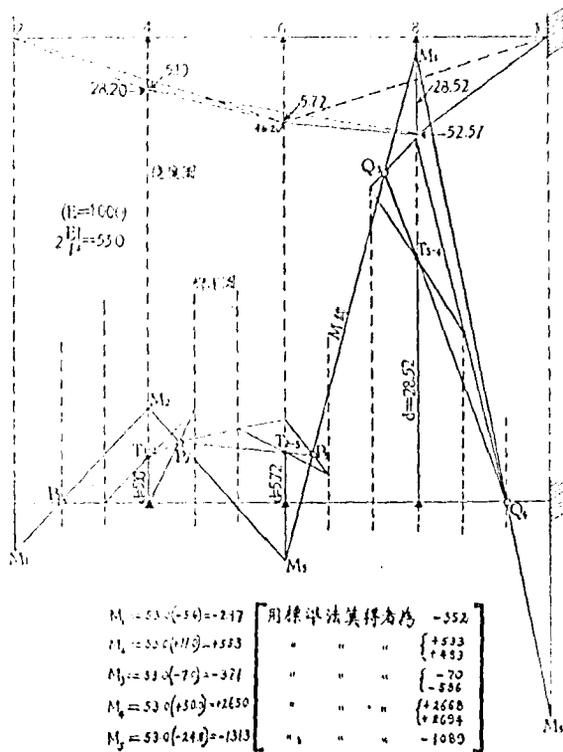


圖 111

(i). 第一法，忽視剛率較小各桿件之影響，故係一約略之法，圖 111 表示如何適用此法於一桁梁之上肢桿，Top Chord of a Truss，其腰桿各件 Web Members 之影響，作為可以忽視不計，先將已知各節點之垂直撓度，繪成一撓度圖 Deflection Diagram，因各桿件之長度及慣性率，皆相等，故可適用第 72 節之 (d) 法，將每一中間節點之撓度（此項撓度，由聯絡左右鄰節點之線起量）作為 T 點之高度，輸入於撓率圖之相當的反力線上，（因徑間相等，故 T 線與反力線重合）。

經過此諸 T 點，作小旗圖，以求得配對點之位置，如該圖所示，然後作 M 線，經過此諸配對點，此即該肢桿全部之副變率圖也，圖中假定該肢桿之兩端，受有約束，此與實際情形，約略相當，如是則首尾兩徑間中之 M 線，自須經過其三分之一點。

(b). 第二法顧及鄰接各腰桿之影響，但忽視各該腰桿彼端之變率（此係未知量）。此法係將第 65, 67, 72 等節之法，合併應用，圖 112 表示如何適用此法於桁梁之一個上肢桿 6-8，凡與該桿件相遇合之各個桁梁桿件，皆計及之，而不予以忽視，各該剛率， $r = \frac{EI}{l}$ ，

以及各該撓角， $\omega = \frac{d}{l}$ ，（由另作之變位圖 Displacement Diagram, or

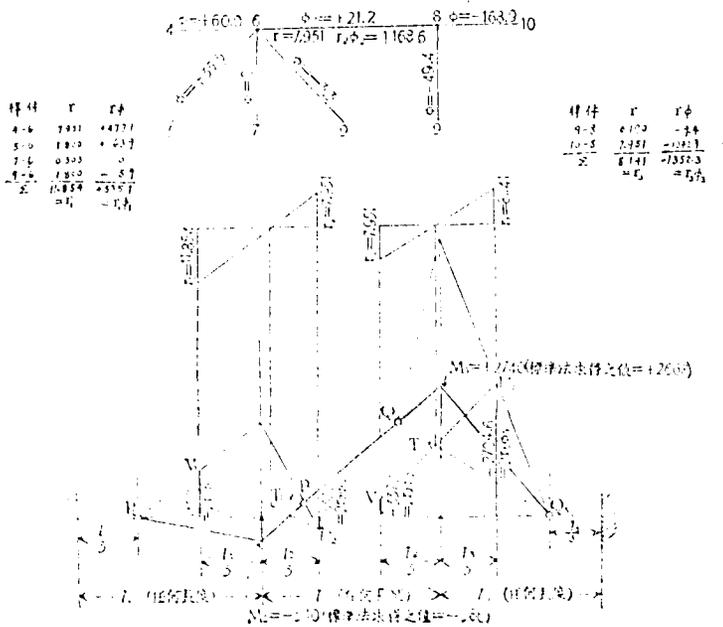


圖 112

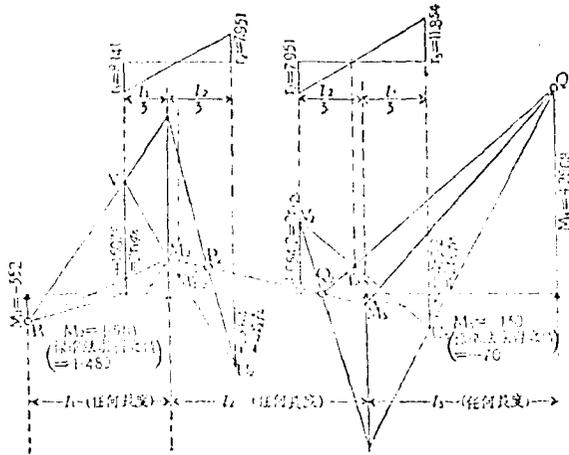
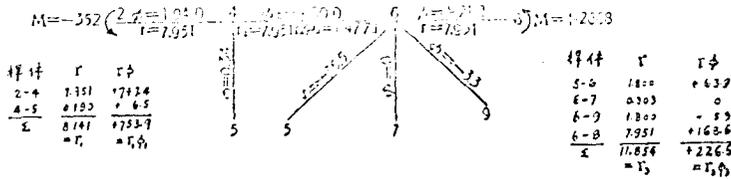


圖 113

Williot Diagram, 求得各該變位量。此項變位圖, 不必包括該桁梁所有各桿件, 祇須輸入有關各桿件, 即已足矣。關於變位圖之作法, 讀者如不甚明瞭, 可參閱 Merriman and Jacoby 兩氏合著之 *Roofs and Bridges Part IV, Higher Structures*, 第 73 節, 1909 年版) 皆注入圖中。在肢桿 6-8 左端相遇之四個桿件, 按照前述之剛率合併法 (見第 67 節) 以另一相當桿件代之。此相當桿件之剛率,  $r_1$ , 為各組合桿件的剛率  $r$  之和, 而此相當桿件之  $r_1 \phi_1$  等於各組合桿件的  $r\phi$  之和。按照同法, 在上肢桿 6-8 右端相遇之兩個桿件, 亦代以一個相當桿件, 其剛率為  $r_2$ , 其撓角為  $\phi_2$ 。至該上肢桿 6-3 自身亦有其剛率  $r_3$  及撓角  $\phi_3$ 。此

肢桿可作爲一個三徑間連續梁之中央徑間， $l_2$  其左右兩側徑間，則以上述兩相當桿件充之，其長度分別等於改換徑間之長， $l_1$  及  $l_3$ 。作圖之時，此諸徑間，可按照任何比例尺繪之，然後將  $2r^2$  之數值，分別繪於各該三分線上，以得各該 U 點及 V 點之位置，由聯絡此諸 U, V 點之直線，可求得各該 T 點之位置，（各該 T 線之位置，按照  $r_1:r_2$  及  $r_2:r_3$  之比率定之，如圖所示，）經過各 T 點作小旗圖，即可求得各配對點  $P, Q$  之位置，最後乃作 M 線，經過此諸配對點， $P_2$  及  $Q_2$ ，因假定該梁首尾兩端受約束之故，其首末兩配對點， $P_1$  及  $Q_3$ ，必在各該徑間之三分之一點。

(c). 第三法不特顧及所有各鄰接桿件，並顧及各該桿件彼端之已知的彎率，圖 113 表示此法之如何應用於桁梁之一個上肢桿 4-6，此桿中之副應力較小，但其鄰桿中之副應力則甚大，（此指圖 112 所推算之肢桿 6-8 而言）鄰桿中甚大之彎率  $M_1$ ，如果忽視不計，將使所得結果，發生較大之差誤，（但此項差誤，就數字言之，仍屬不甚重要耳，）圖 113 表示如何利用此等已知彎率以施行圖解，此等已知彎率  $M_1$  及  $M_2$ ，即照數繪入圖中，其 M 線之求得，與 (b) 法完全相同，惟首尾兩徑間之 M 線，則使之經過已繪入之  $M_1$  及  $M_2$  而已。

爲便利比較起見，上述圖解各法（圖 111，圖 112，圖 113）係就 C.V. von Abo 君所著論文“Secondary Stresses in Bridges”中之桁梁問題，而加以推求，（此論文見 Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 89, 1926, p. 1）圖解所得結果，與 von Abo 君用標準法算得者之比較，經列入各該圖中，由此可得下開之結論。

(1). 第一圖解法（圖 111）可用以獲得桁梁中任何若干相連桿件之副應力之大概的性質及大小，其差誤若按照此諸桿件中最大副應力之百分數計之，少至百分之一，多至百分之十一。

(2). 第二圖解法(圖 112) 可以獲得尙屬精密之結果, 若施用於桁梁桿件之具有最大副應力者, 其結果尤為精密, 圖 112 所得之兩個副應力, 較之各該真確數值, 相差不及百分之八, 及百分之三, 若按照較大副應力, 以計算其百分數, 則相差蓋不及百分之二及百分之三.

(3). 若兩端彎率為已知量, 則用第三圖解法(圖 113) 所得之結果, 可使其精密, 達任何所需之程度, 圖 113 之圖解法, 僅計及上肢桿兩端之已知彎率, 但腰桿彼端之彎率, 則忽視不計, 其所得結果, 較之各該真確數值, 相差不過為鄰桿中最大副應力之百分之一及百分之二.

當實際應用之時, 可先取一桿件, (例如圖 112 之桿件 6-8), 由桁梁之形狀及所受荷重觀之, 預測其中之副應力, 當為最大量, 用第二圖解法, 以求得其兩端彎率, 即用此項彎率, 按照第三圖解法, 以推求其他相鄰各桿件之彎率, (圖 113 中之  $M_1$ , 縱使忽略不計, 其結果亦不至相差甚鉅), 若用此項辦法, 以推算該結構中各桿件之副應力, 其結果必可精密合用.

若所求者, 不過約值, 則儘可採用第一圖解法(圖 111), 以期迅捷省時.

## 第十五章 加腰梁之解法

## ANALYSIS OF HAUCHED BEAMS.

74. 緒言. 本章所述, 及附列各表, 取材於 Walter Ruppel 氏之討論文 (參閱第 69 節之末段) 該討論文, 見 Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 90, 1927, pp. 152-187.

所謂加腰梁者, 即梁之中央部份最薄, 而於鄰近支點之處, 則逐漸加厚之, 使其在支點處為最厚是也. 如是則該梁各截面之惰性率, 並不全體一致, 而可以隨處變易, 此項加腰梁, 大都用於連續梁中, 或以鋼筋混凝土為之, 或以組合鋼梁 Built-up Steel Beams 為之, 皆可, 採用此等梁之主要優點, (一) 為省費, (二) 為美觀.

Ruppel 氏所習用之圖解法, 係以特種點法為根據, 其所附列之表, 以德國 Strassner 氏之表為藍本, 而加以改善擴充, [Strassner 氏之表, 見其所著之 Neuere Methoden, Vol. 1, Second Edition, Berlin, 1921].

75. 符號及定義. 本章所用各符號之定義如下.

$I$  = 該梁之最小惰性率.

$I'$  = 該梁之最大惰性率 (在支點處).

$I_1$  = 距加腰起點等於一處截面之惰性率.

$h_2$  = 與  $I_1$  相當之截面之厚.

$a$  = 加腰長度與該梁徑間之比率.

$b$  =  $I$  與  $I'$  之比率.

$c =$  一個指數, 表示第四類加腰梁(見第 76 節) 之曲度 Degree of Curvature.

$E =$  彈性係數.

$W =$  任何集中荷重, 或全部等佈荷重, 或全部三角形荷重之作用於該梁上者.

$l =$  該梁之徑間

$u = \frac{N'}{l} =$  在  $l$  等於一之時, 左支點與左特性點間之橫平距離.

$v = 1 - \frac{N''}{l} =$  在  $l$  等於一之時, 右支點與右特性點間之橫平距離.

$p = A'EI =$  左支點受有轉率  $M$  等於一之時,  $\frac{M}{EIz}$  圖之面積, 斯時之  $l, E,$  及  $I,$  各等於一,  $A'$  及  $A''$  之意義, 與第十二章同.

$q = A''EI =$  右支點受有轉率  $M$  等於一之時,  $\frac{M}{EIz}$  圖之面積, 斯時之  $l, E,$  及  $I,$  各等於一.

$s = \frac{U}{W} =$  當  $l$  及  $W$  各等於一之時, 左特性點之高度.

$t = \frac{V}{W} =$  當  $l$  及  $W$  各等於一之時, 右特性點之高度.

76. 加腰梁之形式.

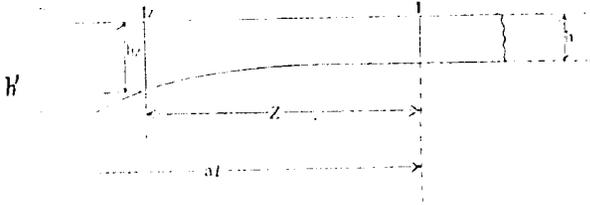


圖 114

第一類 銳曲加腰 Sharply Curved Haunch.

$$I_z = \frac{I}{1 - \frac{(1-b)z}{al}}$$

$$h_z = \frac{h}{\sqrt[3]{1 - \frac{(1-b)z}{al}}}$$

如圖 114. 此類加腰, 愈近支點, 則曲度愈銳, 此曲線並不與中央之直線部份相切, 但在實際上, 如欲使其相切, 亦可照辦, 由上列兩式, 而此項加腰可以隨時照繪, 或使之與一指定之加腰相配合.

第二類 直線加腰. Straight Haunch. 此類加腰, 由支點處起, 至鄰近中央之一點止, 隨橫距而按等佈之率, 逐漸減小其厚度.

第三類 拋物線加腰 Parabolic Haunch. 此係二次式之拋物線 A Parabola of the Second Degree, 其頂點 Vertex 即為加腰之起點, 其曲線在頂點處, 與中央直線部份相切.

第四類 各種曲度之銳曲加腰。(圖 115).

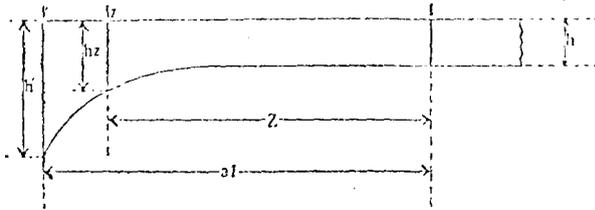


圖 115

$$I_z = \frac{I}{1 - \frac{(1-b)z^2}{al}}$$

$$h_z = \frac{h}{\sqrt[3]{1 - \frac{(1-b)z^c}{al}}}$$

此為一般的公式，第一類為此類之特殊變相，其中  $c=1$ 。

$c$  為表示曲度之指數，其值常在 0.5 與 5.0 之間，如將  $c$  值，於此兩限之內，隨意變更，即可得有各個加腰形式，俾與實際所需要者相適合， $c$  值愈大，則接近支點處之曲度，愈趨於尖銳。

77. 附表之用途，為推算加腰連續梁中之彎率起見，必須先求得  $U, V$  兩點（特性點），及  $T$  線之位置，若利用下列各表（表 11 至表 37），即可求得各該點線之位置，此諸表既適用於對稱梁之兩端皆有加腰者，亦適用於任何梁之祇在一端有加腰者，其如各表表首附圖所示。

$U$  及  $V$  點之橫平位置，可由表 11 至表 16，及表 33 求得之，並利用下列之關係。

U 線與左支點之距離  $=vL$ .

V 線與右支點之距離  $=vL$ .

爲決定 T 線之位置起見，必須知悉在左右兩支點分別受有彎率  $M=1$  之時，其  $\frac{M}{EI}$  圖之面積等於何值，（如第十二章所述），若利用下列公式及表 11 至表 16 以及表 33 中之係數 p 及 q，即可求得此項面積。

左支點受有  $M=1$  之時， $\frac{M}{EI}$  圖之面積  $=\frac{p}{EI}$ （即第十二章之 1A）。

右支點受有  $M=1$  之時， $\frac{M}{EI}$  圖之面積  $=\frac{q}{EI}$ （即第十二章之 A'）。

此諸係數，u, v, p, q，祇隨該梁之形式而變易，與所受荷重無關，故名曰梁的係數 Beam Coefficients。

U 及 V 點之高度，不獨隨梁之形式而異，亦隨所受荷重而變易，關於各種荷重之係數，經詳加推算，名之曰荷重係數 Load Coefficients，列入表 17 至表 32，及表 34，如欲求 U 及 V 點之高度，可代入下列兩式而得之。

$$U = \Sigma(Ws)/L \quad \text{及} \quad V = \Sigma(Wt)/L$$

用  $\Sigma$  號之意義，蓋以表示其荷重必須分爲若干部份，俾可適用於荷重係數之各表。

由表 17 至表 22，可求得於一個集中荷重作用於任何  $\frac{1}{12}$  點之時，其荷重係數 s 及 t 之數值，由表 23 至表 28，及表 34，可求得於全徑間受有等佈荷重之時，各該係數之值，由表 29，至表 32，可求得於全徑

間受有三角形荷重之時，各該係數之值。若有其他荷重，（例如該徑間之一部份，受有等佈或三角形荷重）則各該係數可用下開兩法之一求得之。

(a) 約畧法，將該荷重分爲若干集中荷重，而利用表 17 至表 22，用此法之差誤，可在百分之一以內。

(b) 精密法，求得在每一  $\frac{1}{12}$  點受有單位集中荷重時之係數，以各該點實受之荷重乘之，將此等乘得之積，分別繪於各該點，聯以一曲線，如圖 117 或圖 118 所示，求得該曲線下之面積，以 12 乘之，再以徑間長與所受荷重相乘之積除之，其結果即爲與此項荷重相當之係數。此因子 12，係用以顧及該圖之橫平比例尺。其求得曲線下面積之法，則或用求積計 Planimeter 或用 Simpson 氏求積法，或其他方法，均無不可。

關於第四類加腰梁，表中之荷重係數，祇適用於全徑間之受有等佈荷重者，如所受者爲其他荷重，可用下法求得其係數，此即取第一類 (a) 之係數，以第四類之支點與特性點間之橫平距離乘之，再以第一類 (a) 之支點與特性點間之橫平距離除之是也。此法所得，尙稱精密，如係等佈荷重，則完全無差，如係他種荷重，亦約畧眞確，大抵荷重愈不近於等佈，或  $b$  及  $c$  之數值與一相差愈遠，則其結果亦愈不精密，若  $b=0.03$ ,  $c=5.0$ ，則中央集中荷重係數之差誤爲百分之 2.1。就任何實用之梁，及各項荷重言之，其差誤當不至超過此百分數，在各種初步設計之中，此項約略法，實已精密合用，若於最後設計之時，荷重過於異常，儘可再用精密法以校核之。

若有特殊之梁，或特殊荷重，須推算其數值，最好按照荷重，徑

間長， $E$  及  $I$  各等於一，而計算其係數之值，如是則此項係數，與附表所列者，具有同一形式，可添作新表，供此後其他工作之用。

表中相鄰兩值之間隔，經妥慎選擇，俾於實際應用之時，用直接比例法，Direct Interpolation 求得兩值間之係數值，其精密已足以合用，如必欲更求精密，可將所求數值之前後若干數值，繪成一個曲線，再由此曲線，讀得所需之數值。

此外尚有三表，(表 35 至表 37) 於解算連續梁之惰性率等於常數者，極為有用，茲亦附列，由表 35，可以求得該梁受有一部份等佈荷重，且分別居於各位置時之荷重係數，由表 36，可以求得三角形荷重之荷重係數，此項荷重之最大量，在支點，而其彼端，則在該徑間之各點，由表 37，可以求得梯形荷重（即等佈荷重與三角形荷重合併）之荷重係數，並可求得各係數，用以繪入此等荷重之簡梁彎率圖，凡利用特性點法以解算結構物之受有水力荷重，或與之相當之荷重者，表 36 及表 37 尤為有用。

78. 表中數字之精密程度，表中各值之最後數字，或不免有微誤，其表 17 至表 23 之最後數字，或有相差至 2 或 3 單位者，其他各表之最後數字差誤，大抵不逾 1 單位，且鮮有差至如許之多者，各表均經一再覆核，縱有微誤，亦不至發生較大之影響。

如能善用此諸表，則解算加腰梁之工作，比之解算惰性率為常數之梁，並不加繁也。

79. 解法舉例。試推算一例題，如圖 116 所示，該連續梁之左端固定，而右端簡承，其右側徑間所受之荷重，為不對稱的，各徑間之梁，皆互異，用以完全表示各種解法之如何應用。

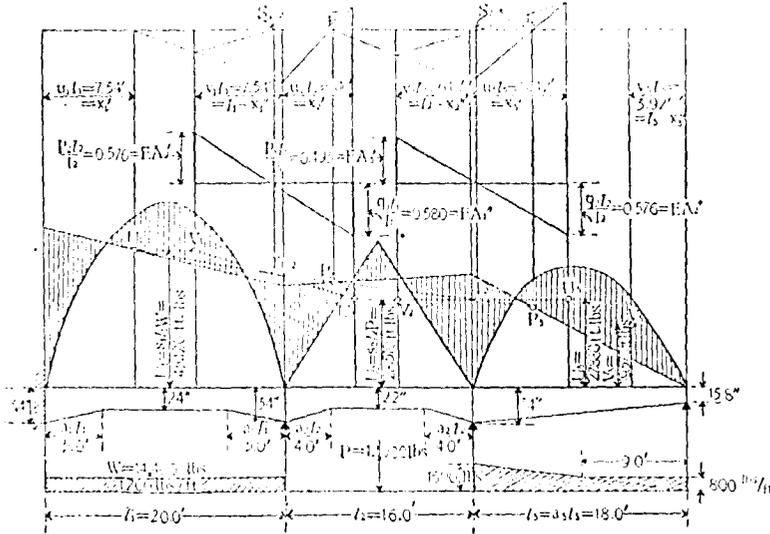


圖 116

圖 116 中求 T 線之法，即第十二章中所得方程式之圖解法，亦即第十四章所用之法，該圖中所用之  $EA'$  及  $EA''$ ，經以 1000 乘之。

第一徑間

$$I_1 = 34^3 = 39,304$$

$$I_2 = 24^3 = 13,824$$

$$b_1 = \frac{I_2}{I_1} = \frac{13,824}{39,304} = 0.3517.$$

$$a_1 = \frac{5}{20} = 0.25.$$

由表 13，查得  $u_1 = v_1 = 0.377$ ，故  $u_1 l_1 = v_1 l_1 = 0.377 \times 20 = 7.54'$ 。

$$\text{又查得 } P_1 = q_1 = 0.401. \text{ 故 } EA'_1 = EA''_1 = \frac{P_1 l_1}{I_1} = \frac{0.401 \times 20}{13,824} = 0.000580$$

由表 25, 查得  $s_1 = t_1 = 0.0940$ , 故  $U_1 = V_1 = 0.0940 \times 20 \times 20 \times 1200 = 45,120 \text{ ft}^2 \cdot \text{lb/s}$ .

### 第二徑間

$$I'_2 = 34^3 = 39,304$$

$$I_2 = 22^3 = 10,648$$

$$b_2 = \frac{I_2}{I'_2} = \frac{10,648}{39,304} = 0.2709$$

$$a_2 = \frac{4}{16} = 0.25$$

由表 13, 查得  $u_2 = v_2 = 0.385$ , 故  $u_2 l_2 = v_2 l_2 = 0.385 \times 16 = 6.16 \text{ ft}$ .

$$\text{又查得 } p_2 = q_2 = 0.383, \text{ 故 } EA'_2 = EA''_2 = \frac{p_2 l_2}{I_2} = \frac{0.383 \times 16}{10,648} = 0.000576$$

由表 19, 查得  $s_2 = t_2 = 0.1485$ , 故  $U_2 = V_2 = 0.1485 \times 16 \times 12,000 = 28,510 \text{ ft}^2 \cdot \text{lb/s}$ .

### 第三徑間

$$I_3 = 15.8^3 = 3,944$$

$$I'_3 = 34^3 = 39,304$$

$$b_3 = \frac{I_3}{I'_3} = \frac{3,944}{39,304} = 0.100$$

由表 14, 查得  $v_3 = 0.468$ , 故  $v_3 l_3 = 0.468 \times 18 = 8.42 \text{ ft}$ .

$$v_3 = 0.218, \text{ 故 } v_3 l_3 = 0.218 \times 18 = 3.92 \text{ ft}$$

$$p_3 = 0.108, \text{ 故 } EA'_3 = \frac{p_3 l_3}{I_3} = \frac{0.108 \times 18}{3,944} = 0.000493$$

$$q_3 = 0.232, \text{ 故 } EA''_3 = \frac{q_3 l_3}{I_3} = \frac{0.232 \times 18}{3,944} = 0.001059$$

由表 31, 查得全部三角形荷重之   $s_3 = 0.0910$ .

$$\text{故 } U'_3 = 0.0910 \times 18 \times \frac{1600 \times 18}{2} = 23,590 \text{ ft. lbs.}$$

又查得  $U'_3 = 0.0583$ ,

$$\text{故 } V'_3 = 0.0583 \times 18 \times \frac{1600 \times 18}{2} = 15,110 \text{ ft. lbs.}$$

爲求得一部份三角形荷重之  $U''_3$  及  $V''_3$  數值起見，必須按照第 77 節所述之法，由表 20 而計算其係數，茲爲便利計算之故，假定其徑間爲 12，荷重爲 18，如是用精密法求得  $U''_3$  之值如下。(圖 117)

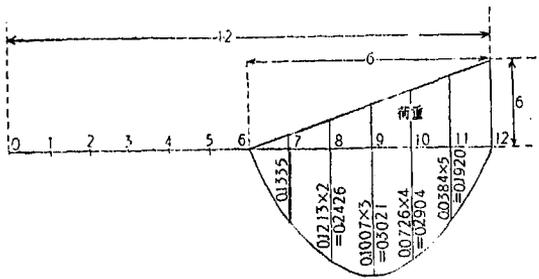


圖 117

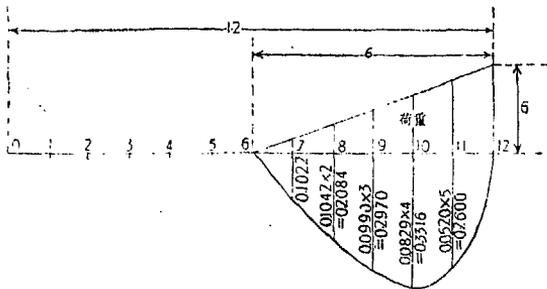


圖 118

曲線下之面積 = 1.192, 故  $s''_3 = \frac{1.192}{18} = 0.0662$

如用約畧法, 則得

$$s''_3 = \frac{0.1367 \times 0.5 \times 0.25 + 0.1335 + 0.1213 \times 2 + 0.1007 \times 3 + 0.0726 \times 4 + 0.0331 \times 5 + 0.0096 \times 0.5 \times 5.75}{18}$$

= 0.0669. (較大約百分之一)

$$U''_3 = 0.0662 \times 18 \times \frac{800 \times 9}{2} = 4,290 \text{ ft. lbs.}$$

如用精密法求  $u''_3$  之值, (圖 118)

曲線下之面積 = 1.239, 故  $u''_3 = \frac{1.239}{18} = 0.0688$ .

如用約畧法, 則得

$$u''_3 = \frac{0.0765 \times 0.5 \times 0.25 + 0.1022 + 0.1042 \times 2 + 0.0990 \times 3 + 0.0829 \times 4 + 0.0520 \times 5 + 0.0139 \times 0.5 \times 5.75}{18}$$

= 0.0694 (較大約百分之一)

$$V''_3 = 0.0688 \times 18 \times \frac{800 \times 9}{2} = 4,460 \text{ ft. lbs.}$$

$$U_3 = U'_3 + U''_3 = 23,590 + 4,290 = 27,880 \text{ ft. lbs.}$$

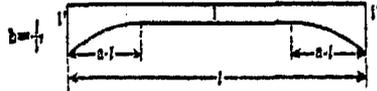
$$V_3 = V'_3 + V''_3 = 15,110 + 4,460 = 19,570 \text{ ft. lbs.}$$

將此諸值 繪入圖 116 之中, 作彎率閉合線 (M.C.L.) 如前文所述, 則此問題即告解決矣。

讀者按, 關於加暖梁之解法, Hardy Cross 及 Newlin Dolbey Morgan 兩教授合著之 Continuous Frames of Reinforced Concrete 書中第五章 (1932 年版, pp. 126--155) 有詳細之討論, 並附圖甚多, 藉資推算之用, 頗有參攷價值, 讀者如有此書, 可一讀之。

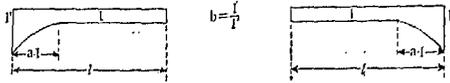
表 11. 梁的係數 情性率不一致

第一類 (a) 對稱的銳曲加腰



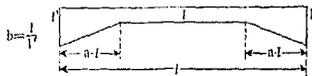
a 之值		b 之 值													
		1.00	0.60	0.80	0.20	0.15	0.12	0.10	0.08	0.06	0.05	0.04	0.03		0.02
0.50	u	0.333	0.354	0.378	0.389	0.395	0.399	0.402	0.404	0.407	0.409	0.410	0.412	0.413	v
	p	0.500	0.400	0.325	0.300	0.288	0.280	0.275	0.270	0.265	0.263	0.260	0.257	0.255	q
0.40	u	0.333	0.356	0.380	0.390	0.395	0.398	0.401	0.403	0.406	0.407	0.408	0.410	0.411	v
	p	0.500	0.420	0.360	0.340	0.330	0.324	0.320	0.316	0.312	0.310	0.308	0.306	0.304	q
0.35	u	0.333	0.356	0.379	0.388	0.393	0.396	0.398	0.400	0.403	0.404	0.405	0.406	0.407	v
	p	0.500	0.430	0.378	0.360	0.351	0.346	0.342	0.339	0.335	0.334	0.332	0.330	0.328	q
0.30	u	0.333	0.356	0.377	0.385	0.389	0.392	0.394	0.396	0.397	0.399	0.400	0.400	0.401	v
	p	0.500	0.440	0.395	0.380	0.373	0.368	0.365	0.362	0.359	0.358	0.356	0.355	0.353	q
0.25	u	0.333	0.354	0.373	0.380	0.384	0.386	0.388	0.389	0.391	0.392	0.392	0.393	0.394	v
	p	0.500	0.450	0.413	0.400	0.394	0.390	0.388	0.385	0.382	0.381	0.380	0.379	0.378	q
0.20	u	0.333	0.352	0.368	0.374	0.377	0.379	0.380	0.382	0.383	0.384	0.384	0.385	0.385	v
	p	0.500	0.460	0.430	0.420	0.415	0.412	0.410	0.408	0.406	0.405	0.404	0.403	0.402	q
0.15	u	0.333	0.349	0.362	0.366	0.369	0.370	0.371	0.372	0.373	0.373	0.374	0.374	0.375	v
	p	0.500	0.470	0.448	0.440	0.436	0.434	0.432	0.431	0.430	0.429	0.428	0.427	0.426	q

表 12. 梁的係數. 惰性率不一致  
第一類 (b) 不對稱的銳曲加腰



a 之值	左端加腰	b 之值											右端加腰		
		1.00	0.60	0.30	0.20	0.15	0.12	0.10	0.08	0.06	0.05	0.04		0.03	0.02
1.00	u	0.333	0.364	0.406	0.429	0.442	0.452	0.458	0.466	0.473	0.477	0.481	0.485	0.490	v
	v	0.333	0.308	0.283	0.273	0.267	0.264	0.262	0.260	0.257	0.256	0.255	0.254	0.252	u
	p	0.500	0.367	0.267	0.233	0.217	0.207	0.200	0.193	0.187	0.184	0.180	0.177	0.173	q
	q	0.500	0.433	0.383	0.367	0.358	0.353	0.350	0.347	0.343	0.342	0.340	0.338	0.337	p
0.60	u	0.333	0.370	0.409	0.425	0.434	0.440	0.443	0.448	0.451	0.454	0.456	0.457	0.460	v
	v	0.333	0.319	0.308	0.304	0.302	0.300	0.300	0.299	0.298	0.298	0.297	0.297	0.296	u
	p	0.500	0.416	0.354	0.333	0.323	0.316	0.312	0.308	0.304	0.302	0.300	0.298	0.296	q
	q	0.500	0.484	0.471	0.467	0.464	0.463	0.462	0.462	0.461	0.461	0.460	0.460	0.459	p
0.40	u	0.333	0.367	0.401	0.414	0.421	0.426	0.429	0.432	0.435	0.436	0.438	0.440	0.442	v
	v	0.333	0.323	0.316	0.313	0.311	0.310	0.310	0.309	0.309	0.308	0.308	0.308	0.308	u
	p	0.500	0.431	0.379	0.361	0.352	0.348	0.344	0.340	0.337	0.335	0.334	0.332	0.330	q
	q	0.500	0.496	0.481	0.479	0.477	0.476	0.476	0.476	0.475	0.475	0.474	0.474	0.474	p
0.35	u	0.333	0.365	0.395	0.407	0.413	0.417	0.420	0.422	0.425	0.427	0.428	0.430	0.431	v
	v	0.333	0.325	0.319	0.317	0.316	0.316	0.315	0.314	0.314	0.313	0.313	0.313	0.313	u
	p	0.500	0.438	0.392	0.376	0.369	0.364	0.361	0.358	0.355	0.353	0.352	0.350	0.348	q
	q	0.500	0.492	0.486	0.484	0.483	0.482	0.482	0.481	0.481	0.481	0.480	0.480	0.480	p
0.30	u	0.333	0.362	0.389	0.399	0.405	0.408	0.410	0.412	0.415	0.416	0.417	0.418	0.419	v
	v	0.333	0.327	0.322	0.321	0.320	0.319	0.319	0.319	0.318	0.318	0.318	0.318	0.318	u
	p	0.500	0.446	0.406	0.392	0.385	0.381	0.378	0.376	0.373	0.372	0.370	0.369	0.368	q
	q	0.500	0.494	0.489	0.488	0.487	0.487	0.486	0.486	0.486	0.486	0.486	0.485	0.485	p
0.25	u	0.333	0.359	0.382	0.390	0.395	0.397	0.399	0.401	0.403	0.404	0.405	0.406	0.407	v
	v	0.333	0.329	0.325	0.324	0.324	0.323	0.323	0.323	0.323	0.322	0.322	0.322	0.322	u
	p	0.500	0.454	0.420	0.408	0.403	0.400	0.397	0.395	0.392	0.391	0.390	0.389	0.388	q
	q	0.500	0.496	0.493	0.492	0.491	0.491	0.490	0.490	0.490	0.490	0.490	0.490	0.490	p
0.20	u	0.333	0.355	0.374	0.381	0.384	0.386	0.388	0.389	0.390	0.391	0.392	0.393	0.394	v
	v	0.333	0.330	0.328	0.327	0.327	0.327	0.327	0.326	0.326	0.326	0.326	0.326	0.326	u
	p	0.500	0.463	0.435	0.425	0.420	0.418	0.416	0.414	0.412	0.411	0.410	0.410	0.409	q
	q	0.500	0.497	0.496	0.494	0.494	0.494	0.494	0.494	0.494	0.494	0.494	0.494	0.494	p
0.15	u	0.333	0.351	0.365	0.370	0.373	0.374	0.375	0.376	0.377	0.378	0.378	0.379	0.379	v
	v	0.333	0.332	0.330	0.330	0.330	0.330	0.329	0.329	0.329	0.329	0.329	0.329	0.329	u
	p	0.500	0.472	0.450	0.443	0.439	0.437	0.436	0.434	0.433	0.432	0.432	0.431	0.430	q
	q	0.500	0.499	0.497	0.497	0.497	0.497	0.496	0.496	0.496	0.496	0.496	0.496	0.496	p

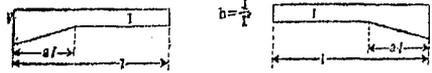
表 13. 梁的係數. 惰性率不一致  
第二類 (a) 對稱的直線加腰



a 之值		b 之值													
		1.00	0.60	0.30	0.20	0.15	0.12	0.10	0.08	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	
0.50	u	0.333	0.354	0.380	0.394	0.403	0.410	0.416	0.422	0.430	0.434	0.439	0.446	0.456	v
	p	0.500	0.389	0.279	0.232	0.203	0.184	0.170	0.154	0.136	0.126	0.115	0.102	0.086	q
0.40	u	0.333	0.358	0.387	0.402	0.412	0.420	0.428	0.431	0.440	0.444	0.449	0.455	0.462	v
	p	0.500	0.411	0.324	0.286	0.263	0.248	0.236	0.228	0.209	0.201	0.192	0.182	0.169	q
0.35	u	0.333	0.358	0.387	0.402	0.412	0.419	0.424	0.430	0.437	0.441	0.446	0.450	0.457	v
	p	0.500	0.422	0.346	0.312	0.292	0.279	0.269	0.258	0.246	0.238	0.230	0.221	0.210	q
0.30	u	0.333	0.357	0.385	0.400	0.408	0.415	0.419	0.425	0.431	0.434	0.438	0.443	0.448	v
	p	0.500	0.433	0.368	0.333	0.322	0.310	0.302	0.292	0.282	0.276	0.269	0.261	0.252	q
0.25	u	0.333	0.356	0.382	0.394	0.402	0.407	0.412	0.416	0.422	0.425	0.428	0.432	0.436	v
	p	0.500	0.444	0.390	0.366	0.352	0.342	0.335	0.327	0.318	0.313	0.307	0.301	0.293	q
0.20	u	0.333	0.354	0.376	0.387	0.393	0.398	0.401	0.405	0.409	0.412	0.415	0.418	0.422	v
	p	0.500	0.455	0.412	0.392	0.381	0.374	0.368	0.362	0.354	0.350	0.346	0.341	0.334	q
0.15	u	0.333	0.350	0.368	0.377	0.382	0.385	0.388	0.391	0.394	0.396	0.398	0.401	0.404	v
	p	0.500	0.466	0.434	0.420	0.411	0.405	0.401	0.396	0.391	0.388	0.384	0.380	0.376	q

表 14. 梁的係數. 惰性率不一致.

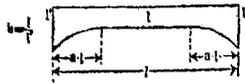
第二類 (b). 不對稱的直線加腰.



a 之值	左端加腰	b 之 值												右端加腰	
		1.00	0.60	0.30	0.20	0.15	0.12	0.10	0.08	0.06	0.05	0.04	0.03		0.02
1.00	u	0.333	0.329	0.403	0.427	0.443	0.458	0.404	0.482	0.604	0.510	0.523	0.540	0.500	v
	v	0.333	0.306	0.269	0.260	0.230	0.226	0.218	0.207	0.196	0.188	0.179	0.168	0.153	u
	q	0.500	0.364	0.224	0.171	0.141	0.122	0.108	0.093	0.077	0.068	0.059	0.048	0.037	u
0.50	u	0.333	0.375	0.426	0.455	0.475	0.490	0.501	0.515	0.531	0.540	0.551	0.564	0.580	v
	v	0.333	0.317	0.297	0.288	0.282	0.277	0.274	0.270	0.260	0.253	0.246	0.236	0.225	u
	q	0.500	0.408	0.321	0.284	0.262	0.248	0.237	0.225	0.212	0.205	0.197	0.188	0.177	u
0.40	u	0.333	0.370	0.417	0.441	0.458	0.470	0.479	0.489	0.502	0.509	0.517	0.527	0.538	v
	v	0.333	0.321	0.308	0.301	0.297	0.294	0.292	0.289	0.286	0.284	0.282	0.280	0.277	u
	q	0.500	0.423	0.350	0.319	0.300	0.288	0.279	0.269	0.258	0.251	0.244	0.237	0.227	u
0.35	u	0.333	0.368	0.410	0.433	0.447	0.456	0.465	0.474	0.485	0.491	0.498	0.505	0.515	v
	v	0.333	0.324	0.313	0.308	0.306	0.302	0.300	0.298	0.296	0.295	0.293	0.291	0.288	u
	q	0.500	0.432	0.366	0.338	0.321	0.310	0.302	0.293	0.283	0.277	0.271	0.264	0.256	u
0.30	u	0.333	0.365	0.403	0.427	0.435	0.443	0.450	0.457	0.466	0.471	0.477	0.483	0.492	v
	v	0.333	0.326	0.318	0.314	0.312	0.310	0.308	0.307	0.305	0.304	0.303	0.301	0.299	u
	q	0.500	0.440	0.382	0.358	0.343	0.333	0.326	0.318	0.309	0.304	0.299	0.292	0.284	u
0.25	u	0.333	0.362	0.394	0.416	0.420	0.427	0.433	0.439	0.446	0.450	0.455	0.460	0.466	v
	v	0.333	0.328	0.322	0.319	0.318	0.316	0.315	0.314	0.312	0.312	0.311	0.310	0.309	u
	q	0.500	0.449	0.400	0.379	0.366	0.356	0.352	0.345	0.337	0.333	0.328	0.322	0.316	u
0.20	u	0.333	0.357	0.384	0.397	0.405	0.411	0.416	0.420	0.425	0.428	0.432	0.436	0.441	v
	v	0.333	0.330	0.326	0.324	0.323	0.322	0.321	0.321	0.319	0.319	0.318	0.318	0.317	u
	q	0.500	0.458	0.418	0.401	0.391	0.384	0.379	0.373	0.366	0.363	0.359	0.354	0.349	u
0.15	u	0.333	0.352	0.373	0.383	0.389	0.393	0.396	0.399	0.403	0.406	0.408	0.411	0.414	v
	v	0.333	0.331	0.329	0.328	0.327	0.326	0.326	0.326	0.325	0.325	0.325	0.324	0.324	u
	q	0.500	0.468	0.438	0.424	0.416	0.411	0.407	0.403	0.398	0.395	0.392	0.388	0.384	u

表 15. 梁的係數. 惰性率不一致.

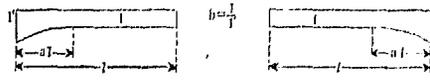
第三類 (a). 對稱的拋物線加腰.



a 之值		b 之 值													
		1.00	0.60	0.30	0.20	0.15	0.12	0.10	0.08	0.06	0.04	0.03	0.02		
0.50	u	0.333	0.356	0.382	0.395	0.405	0.411	0.416	0.422	0.429	0.433	0.438	0.444	0.451	v
	p	0.500	0.424	0.345	0.308	0.286	0.270	0.257	0.243	0.227	0.218	0.206	0.194	0.177	u
0.40	u	0.333	0.355	0.380	0.393	0.402	0.408	0.413	0.418	0.425	0.428	0.433	0.438	0.444	v
	p	0.500	0.439	0.376	0.347	0.328	0.316	0.306	0.295	0.282	0.274	0.266	0.255	0.242	u
0.35	u	0.333	0.354	0.378	0.390	0.399	0.404	0.408	0.413	0.419	0.423	0.426	0.431	0.438	v
	p	0.500	0.447	0.392	0.360	0.346	0.338	0.330	0.320	0.309	0.302	0.295	0.286	0.274	u
0.30	u	0.333	0.353	0.375	0.386	0.393	0.398	0.403	0.407	0.412	0.415	0.419	0.423	0.428	v
	p	0.500	0.455	0.407	0.385	0.371	0.362	0.354	0.346	0.336	0.331	0.324	0.316	0.306	u
0.25	u	0.333	0.351	0.371	0.381	0.387	0.392	0.396	0.399	0.403	0.406	0.409	0.413	0.417	v
	p	0.500	0.462	0.422	0.404	0.393	0.385	0.378	0.372	0.364	0.359	0.353	0.347	0.339	u
0.20	u	0.333	0.348	0.366	0.374	0.379	0.383	0.386	0.389	0.393	0.395	0.397	0.400	0.404	v
	p	0.500	0.470	0.438	0.423	0.414	0.408	0.403	0.398	0.391	0.387	0.383	0.378	0.371	u
0.15	u	0.333	0.346	0.359	0.366	0.370	0.373	0.375	0.377	0.380	0.382	0.384	0.386	0.389	v
	p	0.500	0.477	0.454	0.442	0.436	0.431	0.427	0.423	0.418	0.415	0.412	0.408	0.403	u

表 16. 梁的係數 惰性率不一致

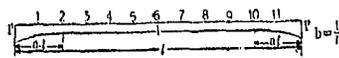
第三類 (b) 不對稱的拋物線加腰



b 之值	左端加腰	a 之值												右端加腰
		1.00	0.60	0.30	0.20	0.15	0.12	0.10	0.08	0.06	0.05	0.04	0.03	
1.00	u	0.333	0.368	0.416	0.444	0.494	0.479	0.492	0.507	0.520	0.538	0.552	0.571	0.598
	v	0.333	0.311	0.283	0.297	0.267	0.249	0.242	0.235	0.225	0.219	0.212	0.204	0.192
	p	0.500	0.389	0.279	0.232	0.203	0.184	0.170	0.154	0.136	0.126	0.116	0.102	0.086
	q	0.500	0.459	0.411	0.385	0.307	0.265	0.244	0.233	0.218	0.209	0.208	0.226	0.268
0.50	u	0.333	0.366	0.406	0.428	0.443	0.454	0.462	0.472	0.484	0.492	0.500	0.511	0.524
	v	0.333	0.324	0.312	0.309	0.302	0.299	0.297	0.294	0.291	0.289	0.286	0.283	0.279
	p	0.500	0.434	0.367	0.337	0.318	0.300	0.290	0.285	0.273	0.264	0.257	0.247	0.236
	q	0.500	0.490	0.478	0.471	0.407	0.401	0.401	0.458	0.454	0.452	0.456	0.446	0.442
0.40	u	0.333	0.362	0.377	0.415	0.427	0.430	0.443	0.451	0.461	0.466	0.473	0.481	0.492
	v	0.333	0.327	0.319	0.315	0.312	0.310	0.308	0.306	0.304	0.303	0.301	0.299	0.296
	p	0.500	0.446	0.390	0.365	0.360	0.339	0.331	0.322	0.311	0.305	0.297	0.289	0.279
	q	0.500	0.494	0.480	0.482	0.479	0.477	0.475	0.473	0.471	0.469	0.468	0.466	0.463
0.35	u	0.333	0.360	0.370	0.408	0.418	0.426	0.432	0.439	0.447	0.452	0.458	0.465	0.474
	v	0.333	0.328	0.322	0.319	0.316	0.315	0.313	0.312	0.310	0.309	0.308	0.306	0.304
	p	0.500	0.452	0.402	0.380	0.366	0.350	0.349	0.341	0.332	0.326	0.319	0.312	0.303
	q	0.500	0.495	0.489	0.486	0.484	0.482	0.481	0.480	0.478	0.476	0.475	0.474	0.472
0.30	u	0.333	0.357	0.365	0.399	0.408	0.415	0.420	0.426	0.433	0.437	0.442	0.448	0.455
	v	0.333	0.320	0.320	0.322	0.320	0.319	0.318	0.317	0.316	0.315	0.314	0.313	0.311
	p	0.500	0.458	0.412	0.395	0.383	0.375	0.368	0.361	0.353	0.348	0.342	0.336	0.327
	q	0.500	0.499	0.495	0.490	0.488	0.487	0.486	0.485	0.484	0.483	0.482	0.480	0.479
0.25	u	0.333	0.354	0.378	0.390	0.397	0.403	0.407	0.412	0.418	0.421	0.426	0.430	0.436
	v	0.333	0.330	0.327	0.326	0.324	0.323	0.322	0.322	0.321	0.320	0.319	0.318	0.317
	p	0.500	0.404	0.428	0.411	0.401	0.394	0.388	0.382	0.373	0.371	0.366	0.360	0.353
	q	0.500	0.497	0.494	0.493	0.492	0.491	0.490	0.490	0.489	0.488	0.487	0.487	0.486
0.20	u	0.333	0.351	0.370	0.380	0.386	0.390	0.394	0.398	0.402	0.405	0.408	0.412	0.416
	v	0.333	0.331	0.320	0.328	0.327	0.327	0.326	0.326	0.326	0.325	0.324	0.324	0.323
	p	0.500	0.471	0.441	0.428	0.420	0.414	0.409	0.404	0.398	0.395	0.391	0.386	0.380
	q	0.500	0.498	0.490	0.496	0.495	0.494	0.494	0.493	0.493	0.492	0.492	0.491	0.491
0.15	u	0.333	0.347	0.362	0.360	0.374	0.377	0.376	0.382	0.386	0.388	0.390	0.393	0.396
	v	0.333	0.332	0.331	0.330	0.330	0.330	0.330	0.329	0.329	0.328	0.328	0.327	0.327
	p	0.500	0.478	0.456	0.445	0.439	0.434	0.431	0.427	0.422	0.420	0.416	0.413	0.408
	q	0.500	0.490	0.498	0.497	0.497	0.497	0.496	0.496	0.496	0.496	0.496	0.495	0.495

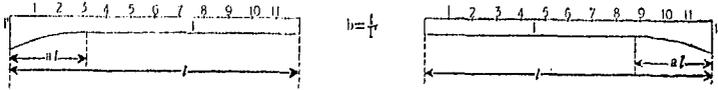
表 17. 荷重係數 梁之惰性率不一致 集中單位荷重

第一類 (a) 對稱的銳曲加腰



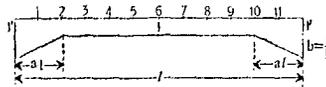
a 之值	b 之值	s 之值, 向下讀											
		集中單位荷重, 在下列之點.											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
—	1.00	1.0488	1.0449	1.0394	1.1235	1.1283	1.1350	1.1408	1.0988	0.781	0.6640	0.6276	
	0.20	1.0482	0.8894	0.1217	1.1435	1.1499	1.1528	1.1484	1.120	0.9937	0.6988	0.6323	
	0.10	1.0478	0.904	0.1241	1.1478	1.1598	1.1590	1.1464	1.1240	0.972	0.6685	0.6333	
	0.05	0.9478	0.9911	0.1258	1.1504	1.1630	1.1620	1.1495	1.1275	0.993	0.674	0.6359	
0.50	0.03	0.9478	0.9914	0.1267	1.1516	1.1640	1.1643	1.1512	1.1281	1.001	0.680	0.6342	
	0.20	0.9480	0.9907	0.1234	1.1479	1.1540	1.1570	1.1408	1.1201	0.9940	0.6643	0.6324	
	0.10	0.9481	0.9910	0.1247	1.1484	1.1592	1.1580	1.1466	1.1248	0.9970	0.6663	0.6333	
	0.05	0.9480	0.9915	0.1261	1.1505	1.1619	1.1607	1.1485	1.1265	0.9980	0.6671	0.6338	
0.40	0.03	0.9479	0.9918	0.1270	1.1516	1.1630	1.1622	1.1495	1.1278	0.9985	0.6670	0.6340	
	0.20	0.9486	0.9904	0.1236	1.1499	1.1520	1.1509	1.1393	1.1196	0.9950	0.6640	0.6329	
	0.10	0.9486	0.9912	0.1250	1.1477	1.1577	1.1577	1.1438	1.1230	0.9964	0.6657	0.6331	
	0.05	0.9482	0.9920	0.1263	1.1497	1.1590	1.1582	1.1461	1.1251	0.9981	0.6660	0.6335	
0.35	0.03	0.9483	0.9925	0.1270	1.1505	1.1611	1.1604	1.1473	1.1262	0.9986	0.6669	0.6337	
	0.20	0.9489	0.9909	0.1228	1.1430	1.1510	1.1486	1.1371	1.1178	0.9928	0.6632	0.6320	
	0.10	0.9488	0.9917	0.1232	1.1464	1.1551	1.1527	1.1409	1.1210	0.9940	0.6649	0.6327	
	0.05	0.9486	0.9925	0.1264	1.1483	1.1570	1.1551	1.1431	1.1228	0.9965	0.6658	0.6331	
0.30	0.03	0.9488	0.9925	0.1269	1.1489	1.1589	1.1558	1.1437	1.1237	0.9969	0.6661	0.6332	
	0.20	0.9491	0.9913	0.1225	1.1415	1.1487	1.1460	1.1346	1.1156	0.9913	0.6621	0.6316	
	0.10	0.9493	0.9923	0.1246	1.1443	1.1516	1.1493	1.1377	1.1189	0.9935	0.6640	0.6322	
	0.05	0.9493	0.9928	0.1257	1.1457	1.1535	1.1508	1.1390	1.1198	0.9944	0.6646	0.6325	
0.25	0.03	0.9492	0.9930	0.1259	1.1464	1.1543	1.1519	1.1401	1.1204	0.9948	0.6649	0.6327	
	t 之值, 向上讀												
			11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
	a 之值	b 之值	集中單位荷重, 在上列之點.										

表 18. 荷重係數. 梁之惰性率不一致. 集中單位荷重.  
第一類 (b) 不對稱的銳曲加腰.



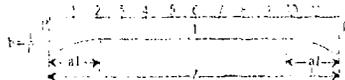
a 之值	b 之值	左端加腰	集中單位荷重, 在下列之點											右端加腰	
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
1.00	1.00	s	0.0488	0.0849	0.1094	0.1235	0.1283	0.1250	0.1148	0.0988	0.0781	0.0540	0.0270	t	
		t	0.0276	0.0540	0.0781	0.0988	0.1148	0.1250	0.1283	0.1250	0.1094	0.0849	0.0488	s	
	0.20	s	0.0441	0.0819	0.1108	0.1307	0.1414	0.1427	0.1359	0.1200	0.0973	0.0681	0.0350	t	
		t	0.0226	0.0450	0.0680	0.0854	0.1017	0.1137	0.1200	0.1181	0.1088	0.0700	0.0316	s	
	0.10	s	0.0431	0.0807	0.1109	0.1329	0.1453	0.1486	0.1421	0.1265	0.1031	0.0729	0.0380	t	
		t	0.0217	0.0432	0.0639	0.0828	0.0993	0.1116	0.1184	0.1181	0.1085	0.0729	0.0380	s	
	0.05	s	0.0420	0.0797	0.1111	0.1340	0.1478	0.1511	0.1459	0.1306	0.1068	0.0758	0.0396	t	
		t	0.0212	0.0426	0.0627	0.0817	0.0980	0.1108	0.1178	0.1178	0.1086	0.0744	0.0325	s	
	0.03	s	0.0417	0.0795	0.1112	0.1346	0.1490	0.1528	0.1480	0.1325	0.1082	0.0767	0.0403	t	
		t	0.0210	0.0421	0.0624	0.0812	0.0974	0.1104	0.1174	0.1177	0.1085	0.0756	0.0325	s	
	0.50	0.20	s	0.0456	0.0840	0.1156	0.1373	0.1488	0.1500	0.1411	0.1232	0.0986	0.0684	0.0353	t
			t	0.0252	0.0501	0.0738	0.0960	0.1126	0.1261	0.1299	0.1263	0.1120	0.0880	0.0507	s
0.10		s	0.0448	0.0847	0.1170	0.1401	0.1529	0.1551	0.1463	0.1281	0.1024	0.0714	0.0368	t	
		t	0.0249	0.0496	0.0731	0.0944	0.1124	0.1250	0.1303	0.1268	0.1130	0.0884	0.0512	s	
0.05		s	0.0445	0.0848	0.1175	0.1420	0.1553	0.1579	0.1492	0.1306	0.1048	0.0730	0.0376	t	
		t	0.0247	0.0494	0.0729	0.0943	0.1123	0.1250	0.1303	0.1271	0.1134	0.0887	0.0512	s	
0.03	s	0.0444	0.0846	0.1180	0.1423	0.1563	0.1588	0.1501	0.1318	0.1057	0.0737	0.0380	t		
	t	0.0246	0.0492	0.0727	0.0942	0.1122	0.1250	0.1303	0.1271	0.1136	0.0887	0.0513	s		
0.40	0.20	s	0.0464	0.0869	0.1185	0.1396	0.1499	0.1495	0.1392	0.1209	0.0965	0.0671	0.0344	t	
		t	0.0260	0.0516	0.0757	0.0972	0.1148	0.1263	0.1304	0.1260	0.1119	0.0872	0.0503	s	
	0.10	s	0.0459	0.0869	0.1196	0.1423	0.1539	0.1539	0.1436	0.1252	0.0994	0.0694	0.0356	t	
		t	0.0257	0.0512	0.0753	0.0970	0.1146	0.1264	0.1304	0.1263	0.1123	0.0874	0.0505	s	
	0.05	s	0.0458	0.0871	0.1204	0.1440	0.1568	0.1562	0.1458	0.1270	0.1012	0.0707	0.0362	t	
		t	0.0256	0.0511	0.0752	0.0968	0.1147	0.1264	0.1307	0.1264	0.1126	0.0876	0.0506	s	
0.03	s	0.0457	0.0871	0.1209	0.1447	0.1570	0.1570	0.1469	0.1280	0.1020	0.0708	0.0365	t		
	t	0.0256	0.0508	0.0752	0.0970	0.1149	0.1265	0.1309	0.1266	0.1127	0.0878	0.0506	s		
0.35	0.20	s	0.0468	0.0875	0.1193	0.1401	0.1494	0.1482	0.1376	0.1193	0.0949	0.0660	0.0338	t	
		t	0.0263	0.0523	0.0767	0.0982	0.1153	0.1264	0.1302	0.1258	0.1116	0.0868	0.0501	s	
	0.10	s	0.0466	0.0882	0.1209	0.1433	0.1533	0.1524	0.1415	0.1230	0.0978	0.0680	0.0349	t	
		t	0.0261	0.0519	0.0764	0.0982	0.1154	0.1265	0.1302	0.1258	0.1119	0.0871	0.0501	s	
	0.05	s	0.0465	0.0883	0.1221	0.1447	0.1554	0.1545	0.1438	0.1246	0.0994	0.0691	0.0354	t	
		t	0.0260	0.0517	0.0764	0.0981	0.1154	0.1265	0.1304	0.1260	0.1119	0.0872	0.0502	s	
0.03	s	0.0464	0.0885	0.1234	0.1453	0.1559	0.1550	0.1447	0.1254	0.1001	0.0696	0.0356	t		
	t	0.0260	0.0519	0.0763	0.0980	0.1155	0.1265	0.1306	0.1261	0.1120	0.0873	0.0502	s		
0.30	0.20	s	0.0479	0.0885	0.1201	0.1401	0.1485	0.1466	0.1357	0.1179	0.0930	0.0647	0.0331	t	
		t	0.0266	0.0526	0.0773	0.0988	0.1154	0.1263	0.1298	0.1253	0.1112	0.0862	0.0497	s	
	0.10	s	0.0476	0.0894	0.1218	0.1431	0.1517	0.1501	0.1390	0.1209	0.0950	0.0654	0.0340	t	
		t	0.0265	0.0526	0.0772	0.0989	0.1154	0.1263	0.1301	0.1254	0.1113	0.0864	0.0497	s	
	0.05	s	0.0474	0.0897	0.1230	0.1442	0.1523	0.1517	0.1409	0.1217	0.0958	0.0673	0.0345	t	
		t	0.0264	0.0525	0.0772	0.0989	0.1154	0.1264	0.1301	0.1256	0.1114	0.0865	0.0499	s	
0.03	s	0.0473	0.0898	0.1234	0.1451	0.1543	0.1529	0.1418	0.1226	0.0974	0.0677	0.0347	t		
	t	0.0264	0.0525	0.0772	0.0989	0.1154	0.1265	0.1304	0.1256	0.1116	0.0868	0.0499	s		
0.25	0.20	s	0.0484	0.0897	0.1206	0.1393	0.1467	0.1440	0.1331	0.1151	0.0919	0.0632	0.0324	t	
		t	0.0269	0.0533	0.0778	0.0992	0.1154	0.1261	0.1296	0.1248	0.1106	0.0859	0.0495	s	
	0.10	s	0.0483	0.0907	0.1222	0.1418	0.1498	0.1470	0.1369	0.1174	0.0935	0.0647	0.0329	t	
		t	0.0268	0.0533	0.0778	0.0992	0.1156	0.1265	0.1309	0.1260	0.1108	0.0860	0.0495	s	
	0.05	s	0.0483	0.0908	0.1233	0.1431	0.1511	0.1487	0.1374	0.1180	0.0946	0.0655	0.0335	t	
		t	0.0268	0.0533	0.0778	0.0992	0.1157	0.1264	0.1299	0.1261	0.1109	0.0861	0.0495	s	
0.03	s	0.0483	0.0909	0.1238	0.1437	0.1518	0.1494	0.1380	0.1183	0.0950	0.0658	0.0337	t		
	t	0.0267	0.0532	0.0778	0.0992	0.1157	0.1264	0.1299	0.1263	0.1111	0.0861	0.0496	s		

表 19. 荷重係數. 梁之惰性率不一致. 集中單位荷重  
第二類 (a) 對稱的直線加腰



a 之值	b 之值	s 之值, 向下讀										
		集中單位荷重在下列之點										
—	1.00	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.50	0.20	0.0488	0.0849	0.1094	0.1235	0.1283	0.1250	0.1148	0.0988	0.0781	0.0540	0.0276
	0.10	0.0473	0.0879	0.1209	0.1443	0.1573	0.1577	0.1447	0.1220	0.0954	0.0650	0.0327
	0.05	0.0456	0.0881	0.1235	0.1509	0.1679	0.1709	0.1563	0.1318	0.1014	0.0686	0.0345
	0.03	0.0450	0.0876	0.1250	0.1558	0.1770	0.1827	0.1666	0.1393	0.1067	0.0720	0.0360
0.40	0.20	0.0470	0.0885	0.1227	0.1470	0.1618	0.1609	0.1484	0.1259	0.0977	0.0664	0.0334
	0.10	0.0463	0.0888	0.1254	0.1552	0.1726	0.1739	0.1607	0.1356	0.1041	0.0706	0.0353
	0.05	0.0453	0.0884	0.1274	0.1607	0.1826	0.1856	0.1714	0.1434	0.1097	0.0737	0.0369
	0.03	0.0445	0.0877	0.1282	0.1636	0.1882	0.1922	0.1775	0.1482	0.1127	0.0754	0.0377
0.35	0.20	0.0474	0.0892	0.1234	0.1483	0.1604	0.1596	0.1470	0.1258	0.0977	0.0663	0.0334
	0.10	0.0469	0.0894	0.1271	0.1560	0.1712	0.1712	0.1585	0.1348	0.1038	0.0704	0.0352
	0.05	0.0458	0.0890	0.1291	0.1617	0.1798	0.1811	0.1674	0.1419	0.1088	0.0731	0.0366
	0.03	0.0450	0.0887	0.1299	0.1644	0.1851	0.1869	0.1720	0.1463	0.1117	0.0747	0.0374
0.30	0.20	0.0476	0.0899	0.1240	0.1482	0.1580	0.1570	0.1450	0.1242	0.0977	0.0659	0.0332
	0.10	0.0470	0.0906	0.1283	0.1560	0.1682	0.1689	0.1548	0.1325	0.1028	0.0699	0.0348
	0.05	0.0465	0.0908	0.1308	0.1612	0.1755	0.1751	0.1620	0.1386	0.1073	0.0721	0.0361
	0.03	0.0461	0.0904	0.1316	0.1644	0.1799	0.1804	0.1671	0.1427	0.1090	0.0736	0.0368
0.25	0.20	0.0485	0.0911	0.1254	0.1467	0.1554	0.1530	0.1412	0.1215	0.0954	0.0650	0.0327
	0.10	0.0478	0.0923	0.1293	0.1532	0.1635	0.1619	0.1495	0.1285	0.1006	0.0684	0.0342
	0.05	0.0472	0.0923	0.1321	0.1585	0.1700	0.1683	0.1555	0.1338	0.1045	0.0705	0.0353
	0.03	0.0471	0.0924	0.1336	0.1611	0.1732	0.1719	0.1594	0.1369	0.1067	0.0717	0.0358
a 之值	b 之值	t 之值, 向上讀										
—	—	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

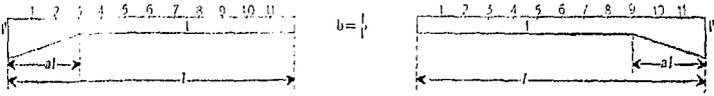
表 21. 荷重係數. 梁之惰性率不一致. 集中單位荷重  
第三類 (a) 對稱的拋物線加腰



a 之值	b 之值	s 之值, 向下讀										
		集中單位荷重在下列之點										
—	1.00	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.50	0.20	0.0488	0.0849	0.1094	0.1235	0.1283	0.1250	0.1148	0.0988	0.0781	0.0540	0.0276
	0.10	0.0478	0.0893	0.1229	0.1459	0.1569	0.1561	0.1459	0.1225	0.0957	0.0652	0.0328
	0.05	0.0474	0.0898	0.1260	0.1526	0.1672	0.1676	0.1543	0.1310	0.1015	0.0690	0.0345
	0.03	0.0464	0.0897	0.1283	0.1586	0.1760	0.1777	0.1638	0.1383	0.1066	0.0719	0.0360
0.40	0.20	0.0457	0.0892	0.1291	0.1615	0.1814	0.1841	0.1695	0.1428	0.1098	0.0736	0.0368
	0.10	0.0480	0.0906	0.1235	0.1469	0.1554	0.1538	0.1420	0.1215	0.0952	0.0649	0.0328
	0.05	0.0474	0.0908	0.1276	0.1526	0.1650	0.1634	0.1514	0.1295	0.1020	0.0680	0.0342
	0.03	0.0467	0.0908	0.1299	0.1580	0.1726	0.1721	0.1593	0.1357	0.1053	0.0711	0.0355
0.35	0.20	0.0464	0.0906	0.1305	0.1616	0.1773	0.1778	0.1647	0.1401	0.1082	0.0727	0.0363
	0.10	0.0484	0.0906	0.1238	0.1448	0.1538	0.1515	0.1398	0.1199	0.0941	0.0644	0.0324
	0.05	0.0480	0.0915	0.1276	0.1515	0.1621	0.1605	0.1482	0.1270	0.0920	0.0640	0.0334
	0.03	0.0473	0.0917	0.1302	0.1568	0.1690	0.1682	0.1555	0.1331	0.1035	0.0702	0.0351
0.30	0.20	0.0470	0.0919	0.1311	0.1600	0.1734	0.1730	0.1600	0.1368	0.1061	0.0710	0.0358
	0.10	0.0486	0.0911	0.1236	0.1436	0.1514	0.1490	0.1371	0.1181	0.0931	0.0637	0.0320
	0.05	0.0483	0.0922	0.1276	0.1498	0.1590	0.1566	0.1445	0.1244	0.0978	0.0664	0.0334
	0.03	0.0480	0.0926	0.1304	0.1545	0.1649	0.1632	0.1508	0.1296	0.1013	0.0689	0.0345
0.25	0.20	0.0473	0.0931	0.1321	0.1576	0.1689	0.1672	0.1545	0.1329	0.1037	0.0703	0.0351
	0.10	0.0495	0.0917	0.1230	0.1416	0.1484	0.1458	0.1344	0.1157	0.0913	0.0624	0.0316
	0.05	0.0490	0.0922	0.1268	0.1469	0.1548	0.1523	0.1406	0.1209	0.0922	0.0652	0.0329
	0.03	0.0487	0.0938	0.1295	0.1515	0.1600	0.1576	0.1454	0.1255	0.0987	0.0674	0.0337
0.03	0.0483	0.0941	0.1313	0.1540	0.1631	0.1610	0.1486	0.1280	0.1007	0.0685	0.0343	
a 之值	b 之值	t 之值, 向上讀										
—	—	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

表 20. 荷重係數. 梁之惰性率不一致. 集中單位荷重.

第二類 (b) 不對稱的直線加腰.



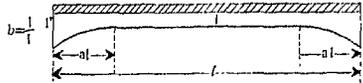
a 之值	b 之值	左端加腰	集中單位荷重, 在下列之點									右端加腰		
			1	2	3	4	5	6	7	8	9		10	11
1.00	1.00	s	0.0488	0.0449	0.1094	0.1236	0.1283	0.1250	0.1148	0.0988	0.0781	0.0540	0.0276	t
		t	0.0276	0.0540	0.0781	0.0988	0.1148	0.1250	0.1283	0.1236	0.1094	0.0449	0.0488	s
	0.20	s	0.0440	0.0709	0.1003	0.1247	0.1349	0.1370	0.1306	0.1165	0.0952	0.0750	0.0550	t
		t	0.0205	0.0412	0.0600	0.0782	0.0931	0.1043	0.1114	0.1119	0.1039	0.0849	0.0517	s
	0.10	s	0.0412	0.0764	0.1026	0.1222	0.1339	0.1377	0.1335	0.1213	0.1007	0.0726	0.0384	t
		t	0.0181	0.0350	0.0531	0.0689	0.0831	0.0946	0.1022	0.1042	0.0990	0.0829	0.0520	s
0.05	s	0.0382	0.0709	0.0979	0.1178	0.1310	0.1371	0.1361	0.1244	0.1050	0.0776	0.0413	t	
	t	0.0166	0.0312	0.0461	0.0603	0.0733	0.0842	0.0921	0.0957	0.0925	0.0795	0.0513	s	
0.03	s	0.0361	0.0674	0.0933	0.1138	0.1273	0.1354	0.1349	0.1257	0.1079	0.0804	0.0432	t	
	t	0.0140	0.0281	0.0414	0.0542	0.0665	0.0766	0.0845	0.0889	0.0872	0.0760	0.0510	s	
0.50	0.20	s	0.0428	0.0800	0.1110	0.1346	0.1466	0.1542	0.1469	0.1301	0.1046	0.0732	0.0377	t
		t	0.0239	0.0470	0.0702	0.0916	0.1000	0.1035	0.1028	0.1028	0.1140	0.0895	0.0518	s
	0.10	s	0.0401	0.0760	0.1087	0.1347	0.1537	0.1626	0.1577	0.1407	0.1142	0.0801	0.0416	t
		t	0.0228	0.0455	0.0677	0.0885	0.1077	0.1220	0.1299	0.1280	0.1164	0.0907	0.0526	s
	0.05	s	0.0372	0.0720	0.1053	0.1333	0.1555	0.1684	0.1603	0.1501	0.1225	0.0864	0.0443	t
		t	0.0218	0.0430	0.0652	0.0860	0.1054	0.1212	0.1296	0.1286	0.1162	0.0918	0.0534	s
0.03	s	0.0355	0.0699	0.1020	0.1314	0.1559	0.1714	0.1708	0.1560	0.1274	0.0892	0.0492	t	
	t	0.0213	0.0425	0.0638	0.0843	0.1038	0.1202	0.1294	0.1286	0.1166	0.0923	0.0538	s	
0.40	0.20	s	0.0441	0.0830	0.1152	0.1399	0.1536	0.1554	0.1461	0.1280	0.1034	0.0711	0.0366	t
		t	0.0250	0.0497	0.0735	0.0956	0.1139	0.1260	0.1308	0.1269	0.1133	0.0883	0.0509	s
	0.10	s	0.0421	0.0809	0.1149	0.1432	0.1609	0.1647	0.1561	0.1374	0.1106	0.0771	0.0397	t
		t	0.0242	0.0485	0.0718	0.0940	0.1133	0.1261	0.1314	0.1240	0.1085	0.0801	0.0517	s
	0.05	s	0.0402	0.0784	0.1135	0.1440	0.1654	0.1716	0.1644	0.1451	0.1171	0.0819	0.0422	t
		t	0.0236	0.0472	0.0705	0.0927	0.1128	0.1260	0.1317	0.1285	0.1140	0.0890	0.0520	s
0.03	s	0.0380	0.0769	0.1122	0.1438	0.1675	0.1754	0.1686	0.1496	0.1206	0.0848	0.0437	t	
	t	0.0232	0.0465	0.0697	0.0919	0.1118	0.1259	0.1319	0.1288	0.1157	0.0905	0.0524	s	
0.35	0.20	s	0.0450	0.0848	0.1181	0.1419	0.1545	0.1546	0.1445	0.1259	0.1004	0.0697	0.0359	t
		t	0.0256	0.0508	0.0752	0.0973	0.1149	0.1266	0.1309	0.1280	0.1127	0.0870	0.0505	s
	0.10	s	0.0433	0.0833	0.1186	0.1465	0.1619	0.1638	0.1540	0.1344	0.1079	0.0749	0.0386	t
		t	0.0249	0.0493	0.0739	0.0964	0.1147	0.1267	0.1315	0.1270	0.1135	0.0883	0.0511	s
	0.05	s	0.0417	0.0815	0.1183	0.1437	0.1668	0.1703	0.1609	0.1413	0.1134	0.0790	0.0407	t
		t	0.0244	0.0489	0.0730	0.0957	0.1146	0.1269	0.1319	0.1281	0.1143	0.0892	0.0515	s
0.03	s	0.0409	0.0804	0.1173	0.1496	0.1693	0.1789	0.1648	0.1450	0.1167	0.0814	0.0419	t	
	t	0.0241	0.0483	0.0721	0.0951	0.1143	0.1268	0.1321	0.1286	0.1146	0.0890	0.0518	s	
0.30	0.20	s	0.0460	0.0860	0.1203	0.1435	0.1537	0.1528	0.1423	0.1233	0.0984	0.0684	0.0350	t
		t	0.0260	0.0518	0.0765	0.0985	0.1164	0.1267	0.1305	0.1261	0.1120	0.0872	0.0502	s
	0.10	s	0.0445	0.0859	0.1222	0.1485	0.1611	0.1611	0.1507	0.1309	0.1044	0.0729	0.0373	t
		t	0.0256	0.0511	0.0758	0.0980	0.1155	0.1269	0.1313	0.1280	0.1128	0.0878	0.0505	s
	0.05	s	0.0438	0.0847	0.1226	0.1516	0.1667	0.1671	0.1567	0.1366	0.1092	0.0765	0.0391	t
		t	0.0252	0.0504	0.0760	0.0978	0.1167	0.1272	0.1315	0.1270	0.1132	0.0883	0.0507	s
0.03	s	0.0425	0.0841	0.1227	0.1532	0.1686	0.1701	0.1599	0.1401	0.1121	0.0783	0.0401	t	
	t	0.0250	0.0500	0.0747	0.0976	0.1150	0.1274	0.1319	0.1280	0.1133	0.0883	0.0513	s	
0.25	0.20	s	0.0472	0.0887	0.1223	0.1433	0.1523	0.1502	0.1392	0.1207	0.0956	0.0656	0.0341	t
		t	0.0265	0.0527	0.0776	0.0990	0.1159	0.1264	0.1302	0.1264	0.1114	0.0865	0.0498	s
	0.10	s	0.0464	0.0888	0.1248	0.1486	0.1586	0.1573	0.1463	0.1269	0.1009	0.0703	0.0360	t
		t	0.0262	0.0523	0.0772	0.0990	0.1160	0.1270	0.1308	0.1261	0.1119	0.0870	0.0501	s
	0.05	s	0.0450	0.0882	0.1265	0.1517	0.1630	0.1626	0.1513	0.1316	0.1049	0.0729	0.0374	t
		t	0.0259	0.0518	0.0768	0.0989	0.1161	0.1273	0.1310	0.1267	0.1123	0.0874	0.0502	s
0.03	s	0.0446	0.0879	0.1270	0.1537	0.1657	0.1657	0.1546	0.1344	0.1072	0.0746	0.0382	t	
	t	0.0257	0.0515	0.0766	0.0989	0.1163	0.1276	0.1315	0.1268	0.1126	0.0870	0.0505	s	

表 22. 荷重係數. 梁之惰性率不一致. 集中單位荷重.  
第三類 (b) 不對稱的拋物線加壓.



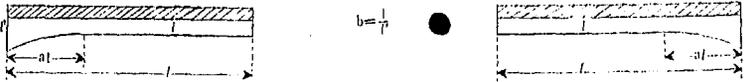
a 之值	b 之值	左端加壓	集中單位荷重, 在下列之點											右端加壓
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
—	1.00	s	0.0488	0.0849	0.1094	0.1235	0.1289	0.1250	0.1148	0.0988	0.0781	0.0540	0.0276	t
		t	0.0276	0.0540	0.0781	0.0988	0.1148	0.1250	0.1289	0.1235	0.1094	0.0849	0.0488	s
1.00	0.20	s	0.0435	0.0708	0.0877	0.0950	0.1415	0.1442	0.1384	0.1233	0.1003	0.0705	0.0644	t
		t	0.0222	0.0441	0.0649	0.0843	0.1007	0.1133	0.1202	0.1200	0.1101	0.0882	0.0524	s
	0.10	s	0.0407	0.0767	0.1047	0.1274	0.1421	0.1480	0.1449	0.1313	0.1087	0.0777	0.0408	t
		t	0.0201	0.0402	0.0596	0.0778	0.0938	0.1071	0.1154	0.1168	0.1088	0.0877	0.0533	s
	0.05	s	0.0371	0.0704	0.0995	0.1236	0.1403	0.1495	0.1484	0.1376	0.1166	0.0839	0.0441	t
		t	0.0182	0.0364	0.0542	0.0711	0.0869	0.0999	0.1093	0.1123	0.1069	0.0889	0.0542	s
	0.03	s	0.0348	0.0688	0.0948	0.1194	0.1371	0.1485	0.1497	0.1405	0.1200	0.0880	0.0468	t
		t	0.0160	0.0338	0.0505	0.0664	0.0815	0.0943	0.1043	0.1088	0.1045	0.0880	0.0546	s
0.50	0.20	s	0.0454	0.0852	0.1174	0.1401	0.1516	0.1526	0.1426	0.1249	0.0994	0.0600	0.0355	t
		t	0.0254	0.0506	0.0744	0.0961	0.1139	0.1258	0.1304	0.1265	0.1127	0.0879	0.0505	s
	0.10	s	0.0434	0.0832	0.1173	0.1428	0.1580	0.1608	0.1520	0.1331	0.1007	0.0744	0.0383	t
		t	0.0240	0.0483	0.0730	0.0949	0.1130	0.1258	0.1308	0.1273	0.1130	0.0887	0.0513	s
0.05	s	0.0418	0.0803	0.1160	0.1445	0.1622	0.1671	0.1592	0.1409	0.1130	0.0791	0.0408	t	
	t	0.0240	0.0479	0.0713	0.0932	0.1123	0.1255	0.1312	0.1281	0.1149	0.0898	0.0510	s	
0.03	s	0.0404	0.0792	0.1144	0.1440	0.1645	0.1711	0.1640	0.1461	0.1170	0.0822	0.0424	t	
	t	0.0235	0.0470	0.0702	0.0923	0.1115	0.1254	0.1319	0.1286	0.1152	0.0903	0.0524	s	
0.40	0.20	s	0.0405	0.0811	0.1195	0.1415	0.1514	0.1509	0.1398	0.1219	0.0967	0.0672	0.0344	t
		t	0.0261	0.0519	0.0761	0.0978	0.1151	0.1265	0.1305	0.1260	0.1119	0.0871	0.0500	s
	0.10	s	0.0492	0.0863	0.1219	0.1461	0.1581	0.1585	0.1479	0.1286	0.1027	0.0717	0.0368	t
		t	0.0266	0.0512	0.0752	0.0974	0.1153	0.1267	0.1310	0.1267	0.1128	0.0879	0.0506	s
0.05	s	0.0438	0.0853	0.1212	0.1487	0.1631	0.1645	0.1547	0.1353	0.1081	0.0750	0.0387	t	
	t	0.0261	0.0502	0.0744	0.0968	0.1160	0.1268	0.1318	0.1274	0.1135	0.0884	0.0508	s	
0.03	s	0.0428	0.0842	0.1208	0.1502	0.1655	0.1685	0.1588	0.1391	0.1112	0.0775	0.0399	t	
	t	0.0248	0.0496	0.0738	0.0965	0.1147	0.1260	0.1317	0.1278	0.1138	0.0887	0.0511	s	
0.35	0.20	s	0.0478	0.0884	0.1209	0.1414	0.1508	0.1488	0.1382	0.1198	0.0950	0.0690	0.0338	t
		t	0.0265	0.0529	0.0771	0.0985	0.1155	0.1265	0.1303	0.1266	0.1116	0.0867	0.0497	s
	0.10	s	0.0492	0.0881	0.1226	0.1463	0.1571	0.1593	0.1465	0.1291	0.1006	0.0699	0.0358	t
		t	0.0260	0.0520	0.0764	0.0983	0.1156	0.1266	0.1306	0.1262	0.1121	0.0872	0.0501	s
0.05	s	0.0448	0.0873	0.1239	0.1496	0.1623	0.1623	0.1515	0.1316	0.1052	0.0732	0.0376	t	
	t	0.0266	0.0513	0.0760	0.0980	0.1155	0.1269	0.1309	0.1266	0.1127	0.0878	0.0506	s	
0.03	s	0.0441	0.0864	0.1241	0.1516	0.1650	0.1654	0.1552	0.1353	0.1078	0.0748	0.0386	t	
	t	0.0264	0.0503	0.0756	0.0979	0.1157	0.1270	0.1318	0.1270	0.1133	0.0882	0.0508	s	
0.30	0.20	s	0.0479	0.0893	0.1212	0.1419	0.1492	0.1468	0.1366	0.1172	0.0933	0.0640	0.0331	t
		t	0.0267	0.0531	0.0776	0.0989	0.1166	0.1265	0.1300	0.1253	0.1111	0.0863	0.0496	s
	0.10	s	0.0470	0.0899	0.1239	0.1457	0.1549	0.1538	0.1428	0.1230	0.0978	0.0680	0.0349	t
		t	0.0264	0.0525	0.0773	0.0990	0.1168	0.1268	0.1305	0.1257	0.1117	0.0866	0.0500	s
0.05	s	0.0468	0.0896	0.1255	0.1493	0.1600	0.1607	0.1478	0.1281	0.1019	0.0708	0.0363	t	
	t	0.0261	0.0522	0.0771	0.0988	0.1158	0.1268	0.1306	0.1262	0.1120	0.0872	0.0501	s	
0.03	s	0.0452	0.0891	0.1252	0.1513	0.1625	0.1613	0.1508	0.1307	0.1043	0.0725	0.0372	t	
	t	0.0269	0.0519	0.0769	0.0983	0.1159	0.1273	0.1309	0.1266	0.1122	0.0873	0.0503	s	
0.25	0.20	s	0.0487	0.0904	0.1212	0.1399	0.1470	0.1442	0.1338	0.1160	0.0912	0.0631	0.0324	t
		t	0.0270	0.0537	0.0780	0.0992	0.1154	0.1249	0.1294	0.1206	0.1006	0.0599	0.0494	s
	0.10	s	0.0480	0.0912	0.1242	0.1441	0.1523	0.1498	0.1388	0.1197	0.0953	0.0660	0.0338	t
		t	0.0268	0.0532	0.0780	0.0993	0.1158	0.1261	0.1300	0.1251	0.1109	0.0861	0.0497	s
0.05	s	0.0476	0.0914	0.1263	0.1478	0.1566	0.1546	0.1432	0.1238	0.0981	0.0682	0.0350	t	
	t	0.0266	0.0531	0.0778	0.0993	0.1158	0.1267	0.1302	0.1254	0.1113	0.0864	0.0499	s	
0.03	s	0.0469	0.0919	0.1273	0.1497	0.1592	0.1575	0.1458	0.1266	0.1002	0.0697	0.0357	t	
	t	0.0264	0.0529	0.0777	0.0994	0.1159	0.1268	0.1306	0.1258	0.1115	0.0866	0.0500	s	

表 23. 荷重係數，梁之惰性率不一致，等佈荷重，總荷重=1。  
第一類 (a)，對稱的銳曲加腰



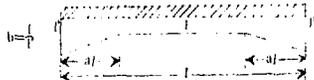
a 之值	b 之值													
	1.00	0.60	0.30	0.20	0.15	0.12	0.10	0.08	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	
0.60	s	0.0833	0.0889	0.0946	0.0972	0.0987	0.0997	0.1004	0.1011	0.1018	0.1022	0.1026	0.1030	t
0.40	s	0.0833	0.0897	0.0950	0.0976	0.0987	0.0999	0.1009	0.1018	0.1024	0.1029	0.1034	0.1038	t
0.35	s	0.0833	0.0891	0.0948	0.0970	0.0982	0.0991	0.0999	0.1006	0.1010	0.1014	0.1018	0.1021	t
0.30	s	0.0833	0.0889	0.0942	0.0963	0.0973	0.0980	0.0987	0.0993	0.0998	0.1002	0.1006	0.1009	t
0.25	s	0.0833	0.0883	0.0932	0.0951	0.0960	0.0966	0.0970	0.0973	0.0977	0.0979	0.0981	0.0984	t
0.20	s	0.0833	0.0880	0.0920	0.0934	0.0942	0.0947	0.0950	0.0954	0.0956	0.0959	0.0960	0.0962	t
0.15	s	0.0833	0.0872	0.0904	0.0916	0.0922	0.0927	0.0931	0.0934	0.0937	0.0939	0.0941	0.0943	t

表 24. 荷重係數，梁之惰性率不一致，等佈荷重，總荷重=1。  
第一類 (b)，不對稱的銳曲加腰



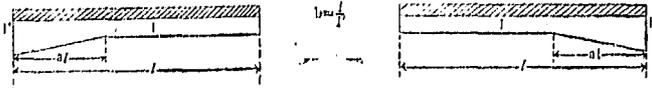
a 之值	左端加腰	b 之值												右端加腰	
		1.00	0.60	0.30	0.20	0.15	0.12	0.10	0.08	0.06	0.05	0.04	0.03		0.02
1.00	s	0.0833	0.0864	0.0906	0.0929	0.0941	0.0952	0.0958	0.0966	0.0974	0.0979	0.0981	0.0985	0.0991	t
	t	0.0833	0.0808	0.0783	0.0772	0.0767	0.0764	0.0762	0.0759	0.0757	0.0756	0.0755	0.0753	0.0752	s
0.50	s	0.0833	0.0833	0.0839	0.0863	0.0876	0.0884	0.0888	0.0895	0.0900	0.0902	0.0906	0.0908	0.0912	t
	t	0.0833	0.0822	0.0831	0.0830	0.0830	0.0830	0.0830	0.0830	0.0830	0.0830	0.0830	0.0830	0.0830	s
0.40	s	0.0833	0.0877	0.0940	0.0969	0.0973	0.0979	0.0983	0.0990	0.0996	0.0997	0.1000	0.1003	0.1006	t
	t	0.0833	0.0833	0.0836	0.0837	0.0837	0.0837	0.0837	0.0837	0.0837	0.0838	0.0838	0.0838	0.0838	s
0.35	s	0.0833	0.0837	0.0938	0.0965	0.0969	0.0975	0.0978	0.0984	0.0988	0.0991	0.0994	0.0996	0.0999	t
	t	0.0833	0.0830	0.0837	0.0838	0.0838	0.0838	0.0839	0.0839	0.0839	0.0839	0.0839	0.0839	0.0839	s
0.30	s	0.0833	0.0835	0.0931	0.0957	0.0962	0.0968	0.0971	0.0975	0.0980	0.0981	0.0984	0.0986	0.0987	t
	t	0.0833	0.0830	0.0838	0.0838	0.0839	0.0839	0.0840	0.0840	0.0840	0.0840	0.0840	0.0840	0.0841	s
0.25	s	0.0833	0.0833	0.0926	0.0944	0.0951	0.0956	0.0960	0.0963	0.0966	0.0969	0.0970	0.0971	0.0973	t
	t	0.0833	0.0830	0.0838	0.0839	0.0839	0.0839	0.0839	0.0840	0.0840	0.0840	0.0840	0.0840	0.0841	s
0.20	s	0.0833	0.0877	0.0916	0.0929	0.0936	0.0940	0.0943	0.0946	0.0949	0.0950	0.0953	0.0954	0.0956	t
	t	0.0833	0.0830	0.0837	0.0838	0.0838	0.0838	0.0839	0.0839	0.0839	0.0839	0.0839	0.0839	0.0839	s

表 25. 荷重係數，梁之惰性率不一致，等佈荷重，總荷重=1。  
第二類 (a)，對稱的直線加腰



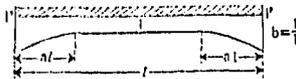
a 之值	b 之值													
	1.00	0.60	0.30	0.20	0.15	0.12	0.10	0.08	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	
0.50	s	0.0833	0.0889	0.0951	0.0960	0.0960	0.0960	0.0960	0.0960	0.0960	0.0960	0.0960	0.0960	t
0.40	s	0.0833	0.0894	0.0967	0.1006	0.1010	0.1010	0.1010	0.1010	0.1010	0.1010	0.1010	0.1010	t
0.35	s	0.0833	0.0894	0.0968	0.1006	0.1010	0.1010	0.1010	0.1010	0.1010	0.1010	0.1010	0.1010	t
0.30	s	0.0833	0.0893	0.0963	0.0999	0.1020	0.1037	0.1048	0.1061	0.1077	0.1086	0.1096	0.1108	t
0.25	s	0.0833	0.0890	0.0954	0.0986	0.1006	0.1018	0.1034	0.1049	0.1064	0.1079	0.1090	0.1101	t
0.20	s	0.0833	0.0884	0.0946	0.0967	0.0984	0.0995	0.1008	0.1018	0.1024	0.1030	0.1037	0.1044	t
0.15	s	0.0833	0.0876	0.0921	0.0942	0.0956	0.0964	0.0970	0.0978	0.0986	0.0991	0.0996	0.1002	t

表 26. 荷重係數 梁之惰性率不一致. 等佈荷重. 總荷重=1.  
第二類 (b). 不對稱的直線加腰.



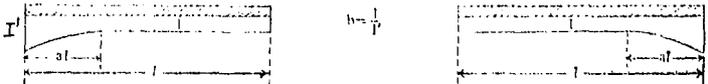
a 之值	左端加腰	b 之 值												右端加腰	
		1.00	0.60	0.30	0.20	0.15	0.12	0.10	0.08	0.06	0.05	0.04	0.03		0.02
1.00	s	0.0833	0.0858	0.0884	0.0899	0.0906	0.0908	0.0910	0.0910	0.0909	0.0906	0.0903	0.0894	0.0886	t
	t	0.0833	0.0800	0.0758	0.0722	0.0701	0.0683	0.0660	0.0645	0.0622	0.0607	0.0588	0.0563	0.0527	s
0.50	s	0.0833	0.0855	0.0877	0.0874	0.0863	0.0850	0.0835	0.0814	0.0795	0.0776	0.0750	0.0717	0.0678	t
	t	0.0833	0.0831	0.0820	0.0822	0.0819	0.0817	0.0815	0.0812	0.0810	0.0808	0.0805	0.0803	0.0799	s
0.40	s	0.0833	0.0839	0.0855	0.0835	0.1000	0.1018	0.1028	0.1038	0.1051	0.1057	0.1066	0.1073	0.1082	t
	t	0.0833	0.0835	0.0834	0.0834	0.0833	0.0833	0.0832	0.0832	0.0831	0.0831	0.0830	0.0830	0.0828	s
0.35	s	0.0833	0.0890	0.0954	0.0985	0.1004	0.1016	0.1028	0.1038	0.1052	0.1057	0.1065	0.1073	0.1082	t
	t	0.0833	0.0835	0.837	0.0838	0.0838	0.0838	0.0838	0.0838	0.0838	0.0838	0.0838	0.0837	0.0836	s
0.30	s	0.0833	0.0889	0.0951	0.0981	0.1000	0.1012	0.1021	0.1032	0.1044	0.1048	0.1057	0.1065	0.1076	t
	t	0.0833	0.0830	0.0830	0.0840	0.0841	0.0841	0.0841	0.0841	0.0841	0.0842	0.0842	0.0842	0.0842	s
0.25	s	0.0833	0.0889	0.0944	0.0972	0.0988	0.0999	0.1000	0.1000	0.1018	0.1038	0.1040	0.1049	0.1057	t
	t	0.0833	0.0836	0.0830	0.0840	0.0841	0.0842	0.0842	0.0842	0.0842	0.0843	0.0843	0.0843	0.0844	s
0.20	s	0.0833	0.0881	0.0933	0.0950	0.0972	0.0981	0.0988	0.0998	0.1007	0.1012	0.1017	0.1024	0.1031	t
	t	0.0833	0.0830	0.0838	0.0830	0.0840	0.0841	0.0841	0.0841	0.0841	0.0841	0.0842	0.0842	0.0843	s

表 27. 荷重係數 梁之惰性率不一致. 等佈荷重. 總荷重=1.  
第三類 (a). 對稱的拋物線加腰.



a 之值		b 之 值													
		1.00	0.60	0.30	0.20	0.15	0.12	0.10	0.08	0.06	0.05	0.04	0.03		0.02
0.50	s	0.0833	0.0888	0.0954	0.0988	0.1012	0.1028	0.1040	0.1050	0.1073	0.1084	0.1096	0.1109	0.1126	t
	t	0.0833	0.0887	0.0951	0.0983	0.1005	0.1031	0.1044	0.1044	0.1062	0.1070	0.1081	0.1095	0.1110	t
0.40	s	0.0833	0.0885	0.0946	0.0970	0.0997	0.1010	0.1021	0.1034	0.1048	0.1056	0.1066	0.1078	0.1094	t
	t	0.0833	0.0882	0.0938	0.0965	0.0983	0.0990	0.1000	0.1017	0.1031	0.1038	0.1047	0.1058	0.1071	t
0.35	s	0.0833	0.0882	0.0938	0.0965	0.0983	0.0990	0.1000	0.1017	0.1031	0.1038	0.1047	0.1058	0.1071	t
	t	0.0833	0.0878	0.0928	0.0952	0.0968	0.0979	0.0988	0.0992	0.1008	0.1016	0.1023	0.1032	0.1043	t
0.25	s	0.0833	0.0871	0.0914	0.0936	0.0948	0.0965	0.0964	0.0972	0.0982	0.0987	0.0994	0.1001	0.1011	t
	t	0.0833	0.0864	0.0898	0.0914	0.0925	0.0932	0.0938	0.0944	0.0951	0.0956	0.0961	0.0966	0.0974	t

表 28. 荷重係數 梁之惰性率不一致. 等佈荷重. 總荷重=1.  
第三類 (b). 不對稱的拋物線加腰.



a 之值	左端加腰	b 之 值												右端加腰	
		1.00	0.60	0.30	0.20	0.15	0.12	0.10	0.08	0.06	0.05	0.04	0.03		0.02
1.00	s	0.0833	0.0878	0.0916	0.0935	0.0945	0.0952	0.0956	0.0961	0.0962	0.0962	0.0962	0.0961	0.0955	t
	t	0.0833	0.0813	0.0792	0.0773	0.0761	0.0750	0.0741	0.0729	0.0715	0.0704	0.0692	0.0679	0.0653	s
0.50	s	0.0833	0.0886	0.0946	0.0974	0.0992	0.1009	0.1014	0.1024	0.1036	0.1043	0.1051	0.1060	0.1068	t
	t	0.0833	0.0835	0.0835	0.0835	0.0834	0.0833	0.0832	0.0831	0.0831	0.0830	0.0829	0.0828	0.0827	s
0.40	s	0.0833	0.0884	0.0941	0.0969	0.0987	0.1000	0.1008	0.1019	0.1032	0.1038	0.1046	0.1056	0.1066	t
	t	0.0833	0.0836	0.0837	0.0838	0.0839	0.0839	0.0839	0.0839	0.0839	0.0839	0.0839	0.0839	0.0838	s
0.35	s	0.0833	0.0882	0.0937	0.0964	0.0980	0.0992	0.1000	0.1011	0.1023	0.1030	0.1037	0.1046	0.1056	t
	t	0.0833	0.0836	0.0838	0.0839	0.0840	0.0840	0.0840	0.0840	0.0841	0.0841	0.0841	0.0842	0.0842	s
0.30	s	0.0833	0.0879	0.0930	0.0955	0.0970	0.0982	0.0990	0.0999	0.1011	0.1018	0.1024	0.1032	0.1042	t
	t	0.0833	0.0836	0.0838	0.0839	0.0840	0.0840	0.0840	0.0840	0.0841	0.0841	0.0842	0.0842	0.0842	s
0.25	s	0.0833	0.0875	0.0929	0.0944	0.0957	0.0967	0.0975	0.0984	0.0993	0.0999	0.1006	0.1014	0.1023	t
	t	0.0833	0.0835	0.0837	0.0838	0.0839	0.0840	0.0840	0.0841	0.0841	0.0841	0.0842	0.0842	0.0842	s
0.20	s	0.0833	0.0869	0.0910	0.0930	0.0940	0.0949	0.0956	0.0963	0.0973	0.0977	0.0983	0.0990	0.0998	t
	t	0.0833	0.0835	0.0837	0.0837	0.0838	0.0839	0.0839	0.0839	0.0839	0.0840	0.0840	0.0841	0.0841	s

表 29. 荷重係數. 梁之惰性率不一致. 三角形荷重. 總荷重=1.

第一, 二, 三類. 對稱梁  $b = \frac{l}{l'}$

a 之值	最大荷重在左端	惰性率一致 b	第一類(a). 對稱的銳曲加腰					第二類(a). 對稱的直線加腰					第三類(a) 對稱的拋物線加腰					最大荷重在右端
			b 之值					b 之值					b 之值					
			1.00	0.20	0.10	0.05	0.03	0.20	0.10	0.05	0.03	0.20	0.10	0.05	0.03			
0.50	s	0.0889	0.1019	0.1047	0.1064	0.1072	0.1028	0.1075	0.1114	0.1141	0.1033	0.1079	0.1118	0.1139	t			
	t	0.0778	0.0926	0.0959	0.0978	0.0987	0.0943	0.1003	0.1054	0.1089	0.0944	0.1000	0.1049	0.1078	s			
0.40	s	0.0889	0.1022	0.1047	0.1062	0.1068	0.1047	0.1097	0.1138	0.1160	0.1030	0.1074	0.1107	0.1129	t			
	t	0.0778	0.0928	0.0957	0.0973	0.0980	0.0964	0.1028	0.1082	0.1112	0.0937	0.0989	0.1032	0.1060	s			
0.35	s	0.0889	0.1018	0.1042	0.1055	0.1061	0.1047	0.1096	0.1133	0.1158	0.1024	0.1065	0.1097	0.1117	t			
	t	0.0778	0.0922	0.0949	0.0963	0.0969	0.0962	0.1022	0.1069	0.1097	0.0927	0.0975	0.1016	0.1040	s			
0.30	s	0.0889	0.1013	0.1034	0.1045	0.1050	0.1043	0.1088	0.1122	0.1141	0.1015	0.1053	0.1083	0.1102	t			
	t	0.0778	0.0913	0.0936	0.0948	0.0953	0.0954	0.1008	0.1049	0.1075	0.0915	0.0959	0.0993	0.1015	s			
0.25	s	0.0889	0.1003	0.1021	0.1030	0.1034	0.1034	0.1075	0.1104	0.1120	0.1004	0.1038	0.1064	0.1079	t			
	t	0.0778	0.0909	0.0919	0.0929	0.0933	0.0938	0.0985	0.1021	0.1040	0.0900	0.0937	0.0967	0.0985	s			

表 30. 荷重係數. 梁之惰性率不一致. 三角形荷重. 總荷重=1.

第一類 (b). 不對稱的銳曲加腰

a 之值	左端加腰	最大荷重在加腰端					右端加腰	左端加腰	加腰端無荷重					右端加腰
		b 之值							b 之值					
		1.00	0.20	0.10	0.05	0.03			1.00	0.20	0.10	0.05	0.03	
1.00	s	0.0889	0.0953	0.0973	0.0984	0.0989	t	0.0778	0.0906	0.0945	0.0970	0.0980	t	
	t	0.0778	0.0897	0.0922	0.0937	0.0942	s	0.0889	0.0848	0.0841	0.0838	0.0836	s	
0.50	s	0.0889	0.0992	0.1012	0.1025	0.1029	t	0.0778	0.0934	0.0965	0.0982	0.0989	t	
	t	0.0778	0.0762	0.0760	0.0759	0.0758	s	0.0889	0.0899	0.0901	0.0901	0.0901	s	
0.40	s	0.0889	0.0988	0.1018	0.1028	0.1033	t	0.0778	0.0927	0.0954	0.0967	0.0973	t	
	t	0.0778	0.0773	0.0771	0.0771	0.0771	s	0.0889	0.0901	0.0902	0.0903	0.0904	s	
0.35	s	0.0889	0.0993	0.1017	0.1028	0.1031	t	0.0778	0.0919	0.0944	0.0956	0.0962	t	
	t	0.0778	0.0770	0.0776	0.0775	0.0775	s	0.0889	0.0901	0.0902	0.0902	0.0903	s	
0.30	s	0.0889	0.0996	0.1014	0.1023	0.1027	t	0.0778	0.0908	0.0930	0.0940	0.0946	t	
	t	0.0778	0.0778	0.0778	0.0778	0.0778	s	0.0889	0.0899	0.0899	0.0900	0.0902	s	
0.25	s	0.0889	0.0990	0.1006	0.1015	0.1018	t	0.0778	0.0894	0.0913	0.0922	0.0927	t	
	t	0.0778	0.0780	0.0780	0.0780	0.0781	s	0.0889	0.0897	0.0898	0.0898	0.0899	s	

表 31. 荷重係數. 梁之惰性率不一致. 三角形荷重. 總荷重=1.

第二類 (b). 不對稱的直線加腰

a 之值	左端加腰	最大荷重在加腰端					右端加腰	左端加腰	加腰端無荷重					右端加腰
		b 之值							b 之值					
		1.00	0.20	0.10	0.05	0.03			1.00	0.20	0.10	0.05	0.03	
1.00	s	0.0889	0.0919	0.0910	0.0892	0.0871	t	0.0778	0.0877	0.0901	0.0914	0.0917	t	
	t	0.0778	0.0845	0.0833	0.0820	0.0816	s	0.0889	0.0893	0.0901	0.0904	0.0905	s	
0.50	s	0.0889	0.0988	0.1007	0.1014	0.1015	t	0.0778	0.0964	0.1023	0.1067	0.1090	t	
	t	0.0778	0.0746	0.0733	0.0720	0.0712	s	0.0889	0.0898	0.0897	0.0896	0.0894	s	
0.40	s	0.0889	0.1007	0.1037	0.1054	0.1062	t	0.0778	0.0965	0.1021	0.1064	0.1088	t	
	t	0.0778	0.0765	0.0759	0.0753	0.0750	s	0.0889	0.0903	0.0907	0.0907	0.0908	s	
0.35	s	0.0889	0.1014	0.1046	0.1060	0.1074	t	0.0778	0.0957	0.1011	0.1051	0.1073	t	
	t	0.0778	0.0772	0.0768	0.0766	0.0763	s	0.0889	0.0904	0.0908	0.0910	0.0911	s	
0.30	s	0.0889	0.1016	0.1049	0.1068	0.1079	t	0.0778	0.0949	0.0996	0.1030	0.1051	t	
	t	0.0778	0.0777	0.0775	0.0774	0.0773	s	0.0889	0.0903	0.0906	0.0909	0.0911	s	
0.25	s	0.0889	0.1014	0.1046	0.1060	0.1078	t	0.0778	0.0931	0.0974	0.1004	0.1023	t	
	t	0.0778	0.0780	0.0780	0.0780	0.0780	s	0.0889	0.0901	0.0904	0.0906	0.0908	s	

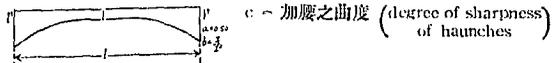
表 32. 荷重係數. 梁之惰性率不一致. 三角形荷重. 總荷重=1.

第三類 (b). 不對稱的拋物線加腰.

a 之值		最大荷重在加腰端					加腰端無荷重					
		b 之值					b 之值					
		1.00	0.20	0.10	0.05	0.03	1.00	0.20	0.10	0.05	0.03	
1.00	s	0.0889	0.0952	0.0952	0.0939	0.0922	t	0.0778	0.0920	0.0961	0.0989	0.1000
	t	0.0778	0.0939	0.0939	0.0910	0.0879	s	0.0889	0.0952	0.0982	0.0979	0.0772
0.50	s	0.0889	0.1005	0.1031	0.1048	0.1055	t	0.0778	0.0949	0.0997	0.1039	0.1064
	t	0.0778	0.0767	0.0761	0.0755	0.0751	s	0.0889	0.0901	0.0904	0.0906	0.0907
0.40	s	0.0889	0.1007	0.1037	0.1058	0.1079	t	0.0778	0.0932	0.0980	0.1018	0.1042
	t	0.0778	0.0775	0.0774	0.0770	0.0769	s	0.0889	0.0901	0.0905	0.0907	0.0909
0.35	s	0.0889	0.1009	0.1039	0.1057	0.1069	t	0.0778	0.0922	0.0967	0.1002	0.1023
	t	0.0778	0.0779	0.0777	0.0775	0.0775	s	0.0889	0.0901	0.0903	0.0906	0.0908
0.30	s	0.0889	0.1001	0.1030	0.1053	0.1063	t	0.0778	0.0910	0.0949	0.0982	0.1000
	t	0.0778	0.0780	0.0780	0.0779	0.0779	s	0.0889	0.0899	0.0902	0.0904	0.0905
0.25	s	0.0889	0.0993	0.1021	0.1043	0.1054	t	0.0778	0.0895	0.0929	0.0957	0.0974
	t	0.0778	0.0780	0.0781	0.0781	0.0781	s	0.0889	0.0897	0.0899	0.0901	0.0903

表 33. 梁的係數. 梁之惰性率不一致.

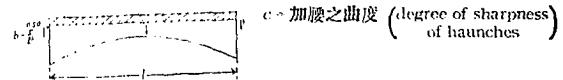
第四類. 對稱的銳曲加腰. (各種曲度)



c 之值	b 之值												
	1.00	0.60	0.30	0.20	0.15	0.12	0.10	0.08	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02
0.5	u	0.333	0.351	0.379	0.388	0.396	0.401	0.403	0.413	0.416	0.418	0.420	0.423
	p	0.500	0.367	0.267	0.233	0.217	0.207	0.200	0.193	0.187	0.183	0.180	0.177
1.0	u	0.333	0.354	0.378	0.389	0.395	0.399	0.402	0.404	0.407	0.409	0.410	0.412
	p	0.500	0.400	0.325	0.300	0.288	0.280	0.275	0.270	0.265	0.263	0.260	0.257
2.0	u	0.333	0.354	0.374	0.382	0.386	0.389	0.390	0.392	0.394	0.395	0.396	0.397
	p	0.500	0.433	0.383	0.367	0.358	0.353	0.350	0.347	0.343	0.342	0.340	0.338
3.0	u	0.333	0.352	0.369	0.375	0.378	0.380	0.382	0.383	0.385	0.386	0.387	0.387
	p	0.500	0.450	0.412	0.401	0.394	0.390	0.388	0.385	0.382	0.381	0.380	0.379
5.0	u	0.333	0.348	0.361	0.365	0.368	0.369	0.370	0.371	0.372	0.373	0.373	0.374
	p	0.500	0.467	0.442	0.433	0.429	0.427	0.425	0.423	0.422	0.421	0.420	0.419
10.0	u	0.333	0.343	0.351	0.353	0.355	0.356	0.356	0.357	0.357	0.358	0.358	0.358
	p	0.500	0.460	0.458	0.464	0.466	0.466	0.466	0.467	0.467	0.467	0.467	0.467

表 34. 荷重係數. 梁之惰性率不一致. 等佈荷重\*. 總荷重=1.

第四類. 對稱的銳曲加腰. (各種曲度)



c 之值	b 之值												
	1.00	0.60	0.30	0.20	0.15	0.12	0.10	0.08	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02
0.5	s	0.0833	0.0877	0.0938	0.0939	0.0939	0.1012	0.1012	0.1022	0.1033	0.1039	0.1045	0.1051
1.0	s	0.0833	0.0885	0.0946	0.0929	0.0987	0.0997	0.1004	0.1011	0.1018	0.1022	0.1026	0.1030
2.0	s	0.0833	0.0885	0.0935	0.0955	0.0965	0.0972	0.0976	0.0981	0.0985	0.0988	0.0990	0.0995
3.0	s	0.0833	0.0880	0.0929	0.0938	0.0946	0.0951	0.0954	0.0958	0.0961	0.0963	0.0965	0.0967
5.0	s	0.0833	0.0871	0.0909	0.0913	0.0919	0.0923	0.0925	0.0928	0.0930	0.0931	0.0934	0.0935
10.0	s	0.0833	0.0858	0.0877	0.0884	0.0887	0.0889	0.0890	0.0890	0.0893	0.0894	0.0895	0.0896

\*關於其他荷重, 如何求得其荷重係數, 見第 77 節.

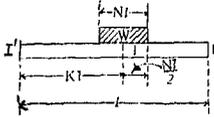
表 35. 荷重係數. 梁之惰性率, 通體一致.

梁之一部份, 受有等佈荷重. 總荷重=1.

$$b = \frac{I}{I'} = 1.000$$

$$u = v = 0.333, p = q = 0.500$$

$$U = sWL, V = tWL.$$



s	K 之值	N 之值										K 之值	t		
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0				
s 之值 向 右 讀	0.05	0.0301												0.35	t 之 值 向 左 讀
	0.10	0.0562	0.0540											0.40	
	0.15	0.0779	0.0758	0.0722										0.85	
	0.20	0.0953	0.0933	0.0900	0.0853									0.80	
	0.25	0.1088	0.1069	0.1037	0.0994	0.0938								0.75	
	0.30	0.1184	0.1167	0.1138	0.1097	0.1044	0.0980							0.70	
	0.35	0.1246	0.1230	0.1202	0.1165	0.1116	0.1056	0.0986						0.65	
	0.40	0.1275	0.1260	0.1235	0.1200	0.1155	0.1100	0.1035	0.0960					0.60	
	0.45	0.1274	0.1260	0.1238	0.1205	0.1164	0.1114	0.1054	0.0985	0.0908				0.55	
	0.50	0.1246	0.1233	0.1212	0.1183	0.1146	0.1100	0.1046	0.0983	0.0912	0.0833			0.50	
	0.55	0.1192	0.1181	0.1162	0.1136	0.1102	0.1061	0.1012	0.0959	0.0892				0.45	
	0.60	0.1117	0.1107	0.1090	0.1067	0.1037	0.1000	0.0957	0.0907					0.40	
	0.65	0.1021	0.1012	0.0998	0.0977	0.0951	0.0919	0.0881						0.35	
	0.70	0.0908	0.0900	0.0887	0.0870	0.0848	0.0820							0.30	
	0.75	0.0779	0.0773	0.0762	0.0748	0.0729								0.25	
	0.80	0.0638	0.0633	0.0625	0.0618									0.20	
	0.85	0.0488	0.0484	0.0477										0.15	
	0.90	0.0329	0.0327											0.10	
0.95	0.0166												0.05		
s	K 之值	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	K 之值	t		

表 36. 荷重係數. 梁之惰性率, 通體一致.

梁之一部份, 受有三角形荷重, 其最大荷重在一支點處. 總荷重=1.



最大荷重在左支點	N 之值										最大荷重在右支點
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
s	0.0206	0.0381	0.0526	0.0643	0.0736	0.0805	0.0853	0.0881	0.0893	0.0889	t
t	0.0111	0.0220	0.0324	0.0423	0.0514	0.0595	0.0663	0.0718	0.0757	0.0778	s

表 37. 簡梁彎率係數, 及荷重係數 (梁之慣性率, 通體一致)  
等佈荷重, 梯形荷重, 及三角形荷重, 總荷重 = 1.

$\frac{w_m}{w_u}$  - 最大荷重與最小荷重之比率.

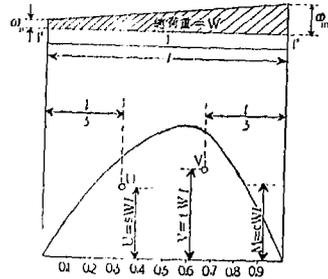
$b = \frac{l}{l'} = 1.000$

$a = v = 0.333$

$p = q = 0.501$

$U = sWl$

$V = tWl$



荷重種類	$\frac{w_m}{w_u}$ 之值	最大荷重在右支點, 向下讀										荷重係數	
		在下列各點之簡梁彎率係數											
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	s	t	
等佈	1.0	0.0450	0.0800	0.1050	0.1200	0.1250	0.1200	0.1050	0.0800	0.0450	0.0833	0.0833	
	1.1	0.0444	0.0792	0.1044	0.1196	0.1250	0.1204	0.1056	0.0808	0.0456	0.0830	0.0836	
	1.2	0.0439	0.0785	0.1038	0.1192	0.1250	0.1208	0.1062	0.0815	0.0461	0.0828	0.0839	
	1.3	0.0434	0.0779	0.1031	0.1190	0.1250	0.1210	0.1068	0.0821	0.0465	0.0826	0.0840	
	1.4	0.0430	0.0772	0.1026	0.1186	0.1250	0.1214	0.1072	0.0826	0.0470	0.0824	0.0842	
	1.5	0.0425	0.0768	0.1021	0.1184	0.1250	0.1216	0.1078	0.0832	0.0474	0.0821	0.0845	
	1.6	0.0421	0.0762	0.1018	0.1181	0.1250	0.1219	0.1082	0.0838	0.0478	0.0820	0.0846	
	1.8	0.0415	0.0754	0.1010	0.1178	0.1250	0.1222	0.1090	0.0846	0.0484	0.0818	0.0849	
	2.0	0.0410	0.0746	0.1002	0.1174	0.1250	0.1226	0.1096	0.0854	0.0490	0.0815	0.0851	
	2.25	0.0404	0.0739	0.0996	0.1169	0.1250	0.1230	0.1104	0.0861	0.0496	0.0811	0.0855	
	2.5	0.0399	0.0731	0.0990	0.1165	0.1250	0.1234	0.1110	0.0869	0.0501	0.0809	0.0858	
	2.75	0.0394	0.0725	0.0985	0.1162	0.1250	0.1238	0.1115	0.0875	0.0506	0.0806	0.0860	
	3.0	0.0390	0.0720	0.0980	0.1160	0.1250	0.1240	0.1120	0.0880	0.0510	0.0805	0.0861	
	3.5	0.0384	0.0711	0.0972	0.1155	0.1250	0.1244	0.1128	0.0889	0.0516	0.0802	0.0864	
	4.0	0.0378	0.0704	0.0966	0.1152	0.1250	0.1248	0.1134	0.0896	0.0521	0.0800	0.0866	
4.5	0.0374	0.0698	0.0961	0.1149	0.1250	0.1251	0.1139	0.0901	0.0526	0.0798	0.0869		
5.0	0.0370	0.0694	0.0956	0.1146	0.1250	0.1254	0.1144	0.0906	0.0530	0.0796	0.0870		
6.0	0.0364	0.0685	0.0950	0.1142	0.1250	0.1258	0.1150	0.0915	0.0535	0.0794	0.0874		
7.0	0.0360	0.0680	0.0945	0.1140	0.1250	0.1260	0.1155	0.0920	0.0540	0.0791	0.0875		
8.0	0.0356	0.0675	0.0941	0.1138	0.1250	0.1262	0.1159	0.0925	0.0542	0.0790	0.0876		
9.0	0.0354	0.0671	0.0938	0.1136	0.1250	0.1264	0.1161	0.0928	0.0546	0.0789	0.0876		
10.0	0.0351	0.0669	0.0935	0.1135	0.1250	0.1265	0.1165	0.0931	0.0548	0.0788	0.0879		
15.0	0.0345	0.0660	0.0928	0.1130	0.1250	0.1270	0.1172	0.0940	0.0555	0.0785	0.0881		
20.0	0.0341	0.0655	0.0924	0.1128	0.1250	0.1272	0.1176	0.0945	0.0559	0.0784	0.0884		
40.0	0.0335	0.0648	0.0916	0.1124	0.1250	0.1276	0.1184	0.0952	0.0564	0.0780	0.0886		
三角形	>	0.0330	0.0640	0.0910	0.1120	0.1250	0.1280	0.1190	0.0960	0.0570	0.0778	0.0889	
荷重種類	$\frac{w_m}{w_u}$ 之值	在上列各點之簡梁彎率係數										荷重係數	
		最大荷重在左支點, 向上讀.										t	s

上圖頂部左端之字應改為  $w_u$ , 右端之字應改為  $w_m$ .

## 第四編 分配彎率法

## MOMENT—DISTRIBUTION METHOD.

## 第十六章 直接分配法 THE DIRECT METHOD.

80. 緒言. 分配彎率法為美國 Illinois 大學 Hardy Cross 教授所創用. 1930 年五月間, 此君作一論文, 題為 Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments. 登入是月之美國土木工師學會月刊 Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 嗣經各名宿詳加討論, 一致贊用此法, 並有稍加以修改或補充者, [原論文及各討論文, 經該學會彙刊入 1932 年會報, Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 96, 1932, pp. 1--156.] 1932 年九月間 Hardy Cross 教授與 Newlin Dolbey Morgan 教授合著一書, 名曰 Continuous Frames of Reinforced Concrete. 其中第五章, 述分配彎率法頗詳. 本編所述, 大都取材於上開之論文及其討論文以及兩教授合著之書, 至若第十九章之壓柱比擬法 Method of Column Analogy, 則以該書之第三章 B 為藍本, 其第二十章之鋼筋混凝土拱解法, 則大率取材於該書之第九章.

81. 名詞定義. 為便利敘述起見, 下開三名詞之意義, 必須充明白了.

(a). 固定端彎率 Fixed-End Moment. 凡一桿件之固定端彎率即係於假定該桿件兩端皆固定之時, 各該端所應有之彎率.

按照本書第五章第 27 節之所述, 若該桿件直而不曲, 且其性率為通體一致者, 則桿端彎率之公式如下.

$$M_1 = \frac{2EI}{l}(2\theta_1 + \theta_2) + C \dots \dots \dots (189)$$

上式中之  $C$ ，爲一常數，隨該桿所受荷重而異，若該桿並不受有荷重，則  $C$  即等於零。若該桿兩端皆固定，則  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ，故  $M_1 = C$ 。此即所謂固定端彎矩也。此項  $C$  之數值，即第五章中之  $C$ ，在尋常各問題中，可由表 5 或表 6 查得之，如遇有特殊問題，亦可用第十九章之壓柱比較法，求得之。（參閱第 105 節例題一）。

(C) 剛率 Stiffness. 假定一桿件之一端爲固定的，所須以旋轉又一端，至達一個單位撓角 ( $\theta = 1$ ) 之彎率，謂之該桿件之剛率 [假定該兩端之支點，皆無任何變位]。

假定有一彎率，作用於某桿件之一端，其彼端爲固定的，因該彎率之作用端在作用之故（此時固定端之  $\theta_2 = 0$ ），(189) 式變爲  $M_1 = \frac{4EI\theta_1}{l}$ 。當  $\theta_1 = 1$ ，則  $M_1 = \frac{4EI}{l} = 4EK$ ，即爲該桿件之剛率。

當有兩或兩以上之桿件，同遇於一個剛結點，設此結點處有一總彎矩  $M$ ，則此項  $M$  之分配於各該桿件，必須使各桿端旋轉一個同一之撓角  $\theta$ 。而此諸桿端（指同遇於一結點之各桿端）之彎率，必合於下開之比例。

$$M_1 : M_2 = EI\theta_1 K_1 : 4EI\theta_1 K_2$$

$$\text{即 } M_1 : M_2 = K_1 : K_2, \quad M_1 : M_3 = K_1 : K_3, \dots \dots \dots$$

易言之，原有之總彎率  $M$ ，必須按照各桿件之剛率之比率，分配於各桿也。若各桿件直而不曲，且其惰性率，各爲通體一致的，則其剛率各與其  $\frac{I}{l}$  成正比，若有一桿件曲而不直，或其惰性率並非通體一致，

則可用第十九章之壓柱比擬法，以求得其剛率，（參閱第 106 節例題二及例題三。）

(c) 傳達因子 Carry-over Factor. 設一桿件兩端支點，皆無任何變位，若彼端固定，而此端發生旋轉，其固定端之轉率，與此端發生旋轉之轉率之比率，謂之傳達因子。

設一桿件之此端，發生旋轉，其轉率為  $M_1$ ，而彼端則固定不轉，其轉率為  $M_2$ ，由 (189) 式，可得

$$M_1 = 2EK(2\theta_1 + \theta_2), \quad M_2 = 2EK(\theta_1 + 2\theta_2),$$

因固定端之  $\theta_2 = 0$ ，故  $M_1 = 4EK\theta_1$ ，而  $M_2 = 2EK\theta_1$

如是而得  $M_2 = \frac{1}{2}M_1$ ，即傳達因子 =  $\frac{1}{2}$ 。

讀者注意，本章及下兩章所用轉率正負號之定義，與撓角撓度法相同，而與最小働法及圖解法所用者不同，故此項傳達因子為  $+\frac{1}{2}$ ，分配轉率法之原發明人 Cross 教授，則習用後者之定義，故其所得之傳達因子為  $-\frac{1}{2}$ 。[關於轉率之正負號，第 84 節中當更詳述之。]

讀者又須注意，上文所得傳達因子之數值， $\frac{1}{2}$ ，祇適用於直桿件之具有通體一致的慣性率者，若有一個桿件，曲而不直，或其慣性率，並非通體一致，則可用第十九章之壓柱比擬法，以求得其數值，（參閱第 106 節 例題二及例題三。）

82. 結點旋轉之影響，設有一結構物，其中各桿件，因外力作用或其他原因，而發生變形，今試假想其中任一結點，先受有約束，不能旋轉，然後撤去約束，俾得旋轉自如，設先求得環繞該結點各桿件之固定端轉率之代數的總和，名之曰不平衡的固定端轉率，Unbalanced Fixed-End Moment，在未撤約束之前，此項不平衡的固定端轉率，大抵不等於零，而於既撤約束之後，則環繞該結點各桿端轉率之代數

的總和，必等於零，如是則各桿端轉率所經變更之總和，必與不平衡的固定端轉率相等，易言之，原有之不平衡的固定端轉率，業經按照某種比率，分配於各該桿端。

當撤去約束之時，環繞該結點各桿件，皆必旋轉成同一之撓角，（因其為剛結點故）而各桿端轉率，亦因而變更，此項變更量，必與各該桿之剛率，成正比例（參閱上文第 81 節 b）

結點旋轉，環繞該點各桿端之轉率，發生變更，則各該桿之彼端轉率，亦必隨而變更，此等變更量，即等於此端轉率變更量，以其傳達因子乘之，（此項因子，係旋轉端之傳達因子），此由傳達因子之定義觀之，即可明了。

#### 83. 分配轉率法之概要。

(a). 假想該結構物中各結點，皆固定不轉，如是而計算各桿件之固定端轉率。

(b). 在每一結點處，按照環繞該點各桿件剛率之比率，分配其不平衡的固定端轉率，於各該桿端。

(c). 以各桿件在該結點之傳達因子，分別乘各該桿件所分配而得之轉率，作為各該桿件彼端所得之轉率。

(d). 將此項傳達轉率，再按 (b) 法分配之。

(e). 按照上法，反覆分配傳達，直至所傳達之轉率，為量甚微，可以忽視不計而後已。

(f). 在每一桿件之每端，將所有各轉率（包含固定端轉率，分配轉率，傳達轉率皆在內）作代數的相加，其結果即為該桿端之正確轉率。

84. 轉率之正負號，Hardy Cross 教授論文中關於轉率之正負號，所主張者如下。

凡橫平之梁，彎率之能使該梁向下屈曲者為正，反之則為負，其在垂直桿件，祇須將繪列該桿件之紙的下邊，向左旋轉九十度，則該垂直桿件，可視同橫平之梁，仍適用上開之正負號定義。

凡立柱若繪作一個垂直桿件，其頂端之彎率，應於左旋該紙九十度之後，書於該柱之上方，而其底端之彎率，應於左旋該紙九十度之後，書於該柱之下方，此為必要之舉，因任何梁左端之正號彎率，以及任何柱頂端之正號彎率，皆使其所聯之結點，有逆乎鐘針方向而旋轉之趨勢也。

梁端彎率，或書於梁上，或書於梁下，並無若何關係，可隨意定之，但若將立柱彎率，書之使與該柱平行，橫梁彎率，書之使與該梁平行，則自可免有混淆矣。

若環繞任何結點之各彎率，業已平衡，則在該結點左方各彎率之和，與在該結點右方各彎率之和，必完全相等，即數量及正負號皆相同也，如尚有不平衡的彎率，則必為左右兩方彎率總和之相差數。

以上為 Cross 教授主張採用之法，此論文刊佈之後，各討論員大都主張改用撓角撓度法所用正負號定義，以期簡捷醒目，而免發生錯誤，但該教授因習用舊法之故，不願捨棄其主張，其後與 Morgan 教授合著之 *Continuous Frames of Reinforced Concrete* 書中，仍堅持其從前之主張，編者竊謂彎率正負號，若改用撓角撓度法之定義，實覺較為便利，且若有斜桿件與縱橫各桿件，同遇於一結點，則 Cross 教授所主張者，似更不及撓角撓度法之便利，故本章及下兩章中之彎率正負號，均採用第二編第 25 節之定義，以期與現時通行者相合。

今將兩法比較如下，圖 119 示 Cross 教授之正負號，圖 120 示第二編之法。

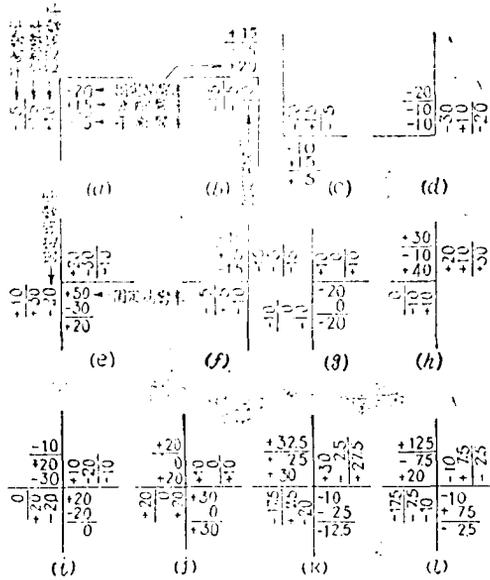


圖 119

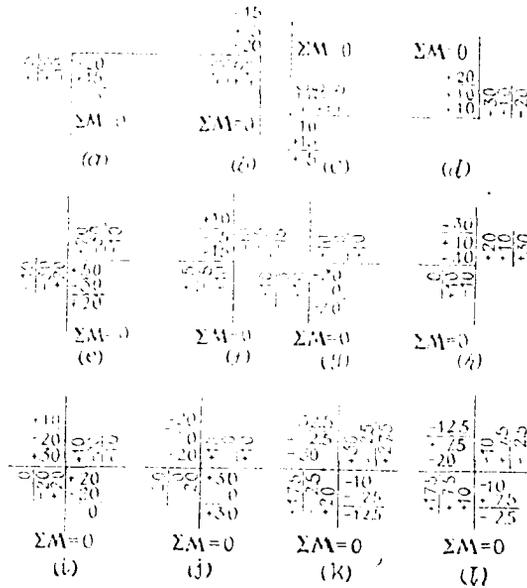


圖 120

由圖 119. 可見任何結點. 於平衡之後, 其左方彎率之租, 必等於右方彎率之租, (數值及正負號皆相等), 由圖 120. 可見任何結點於平衡之後, 環繞該點各桿端彎率之總租, (兼左右兩方面言), 必等於零.

85. 桿件一端得以旋轉自如者, 若一桿件之一端, 得以旋轉自如, (例如簡承端, 或樞結端), 而按照上述之法, 反覆傳達分配彎率於該端, 殊覺徒費時間, 不若於入手之時, 即按照旋轉自如之端以處理之, 如是則必須將其固定端彎率及其剛率, 略予修改, 其法如下. (修改之後, 該桿兩端之傳達因子, 各等於零.)

(a) 修改固定端彎率, 若該梁之惰性率為常數, 其固定端彎率

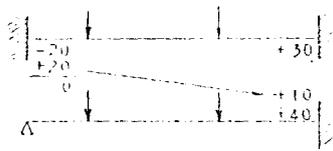


圖 121

如圖 121 所示, 如欲求一端簡承時之修改彎率, 則祇須撤去該端之約束, 令該端之彎率等於零 (即加以正號彎率 20), 而將其影響之半數 (因惰性率為常數, 故傳達因子 = 1/2), 傳達於彼端, 即於彼端加以正號彎率 10, 俾其彎率為  $+30 + 10 = +40$  是也.

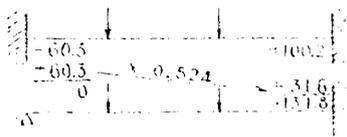


圖 122

若該梁之惰性率為變數, 其法亦與上同, 惟須先設法求得其固定端彎率及傳達因子之數值, (例如用第十九章之壓柱比擬法.) 假令其固定端彎率為  $-60.3$  及  $+100.2$ , 而左端之傳達因子, 為  $+0.524$ , 則修改之法, 具如圖 122 所示.

(一) 修改剛率

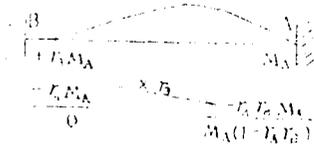


圖 123

如圖 123, 設兩端皆固定之時, 使 A 端發生單位遠角之轉率 (即 A 端之剛率) 為  $M_A$ , 又設 A 端之傳達因子為  $r_A$ , B 端之傳達因子為  $r_B$ , 如是則 B 端轉率必等於  $+r_B M_A$ , 今在 B 端撤去約束, 而將其相當的影響, 傳達於 A 端, 則 A 端轉率必變為  $M_A(1-r_A-r_B)$ , 此即原有剛率以  $1-r_A-r_B$  乘之, 而得修改後之剛率也。

如該梁之惰性率為常數, 則  $r_A = r_B = +\frac{1}{2}$ , 而修改剛率, 即等於原有剛率, 以  $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$  即  $\frac{1}{2}$  乘之。

86. 演算舉例. 圖 124 表示如何按照第 83 節之通法, 以求得一個連續梁在各支點處之轉率。

圖 125 表示如何利用第 85 節修改固定端轉率及修改剛率之法, 以求得該梁在各支點處之轉率, 以此與圖 124 相較, 可見此法之省便實多。

相對的轉率	20'		20'		20'	
	①		①		①	
	0.6 K/l					
$M = \frac{1}{2}WL$	-20K	+20K	-10	+10	-5	+5
第一次分配	+5	-5	+5	-5	+2.5	-2.5
第二次分配	+2.5	-2.5	+1.25	-1.25	+0.625	-0.625
等等	+0.9	-0.9	+0.45	-0.45	+0.225	-0.225
	+0.3	-0.3	+0.15	-0.15	+0.075	-0.075
	+0.1	-0.1	+0.05	-0.05	+0.025	-0.025
	+0.03	-0.03	+0.015	-0.015	+0.0075	-0.0075
K 在表內 l 在表外 係數 0.6	0	+16.0	-16.0	0	+4.0	-4.0

圖 124

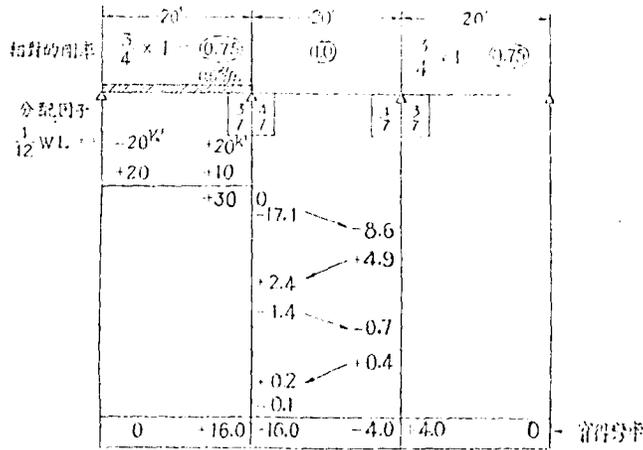


圖 125

圖 126 所示者，為一較為普通之問題，左端 A 為固定的，每次因 B 點旋轉而生之彎率之半數，必須傳達以至該端，此項彎率，不必逐次加以計算，儘可於其他計算工作完畢之後，作一次之計算，B 點原有之彎率為  $+16.3$ ，(此指  $M_{BA}$  而言)，其最後彎率為  $+6.7$ ，故其相差數為  $-9.6$ ，以此數之半，(即  $-4.8$ ) 加於原有之  $M_{AB}$ ，即得其正確彎率  $= -21.1$ 。

該梁之右端，為一懸臂梁，E 點之彎率即按懸臂計算之，因懸臂之剛率等於零，故 E 點之不平衡的彎率，(即  $-26.3$ ) 悉數轉入 ED 徑間，(即加  $+26.3$  於  $M_{ED}$ ) 並將其半數傳達於結點 D，(即加  $+13.1$  於  $M_{DE}$ )。如是則結點 E 已屬平衡，其作用等於一個樞結點，故 ED 之剛率，可按照第 85 節之法修改之，其餘之分配彎率工作，與前述者完全相同，其 B、D、兩結點外方之彎率，自無予以分配傳達之必要。



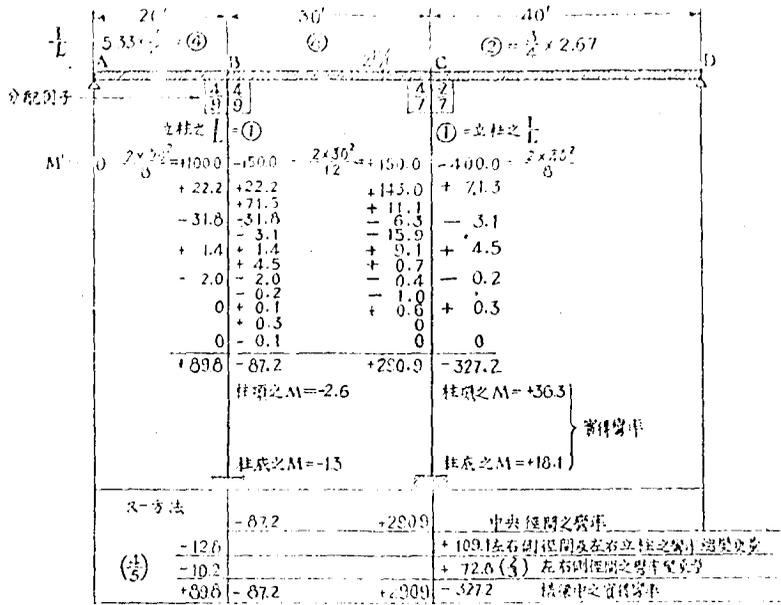


圖 127

圖 127 所示者，為一個連續梁之具有兩個固定立柱者，其柱頂與梁相聯接處，皆為剛結點。梁之首尾兩端，皆為簡承式，該梁在立柱左右兩方之彎率，均經分別分配傳達，至獲得最後結果而後已，其柱頂彎率，由  $\sum M = 0$  求得之，而柱底彎率，則等於柱頂彎率之半，其正負號亦相同。

兩側徑間中之彎率，並無分配傳達之必要，蓋若已算得中央徑間中之彎率，則其他可迎刃而解，如圖中又一方法之所示，由靜力學之  $\sum M = 0$ ，即可求得側徑間及相鄰柱頂之彎率總變更量，（例如  $M_{10}$  原為 +100.0，而最後之  $M_{10}$ ，則求得為 -87.2，故左側徑間及左立柱頂之總變更量，必為 -12.8），然後再按照各該桿件剛率之比率，分配此項總變更量於各該桿件 [例如  $B_A$  之剛率 = 4，左立柱之剛率 = 1，故  $B_A$  所分得之變更量，等於  $\frac{4}{4+1} \times$  總變更量 =  $\frac{4}{5} \times (-12.8) = -10.2$  ]。

本書前三編中各例題 除因結構物不對稱, 或荷重不對稱發生側歛, 須用第十七章之法解算者外, 皆可利用上述之直接分配轉率法, 以求得各結點處之轉率, 茲舉二例如下。

例題一. 與第 9 節之例題同, 解法如圖 128.

例題二. 與第 16 節之例題同, 解法如圖 129.

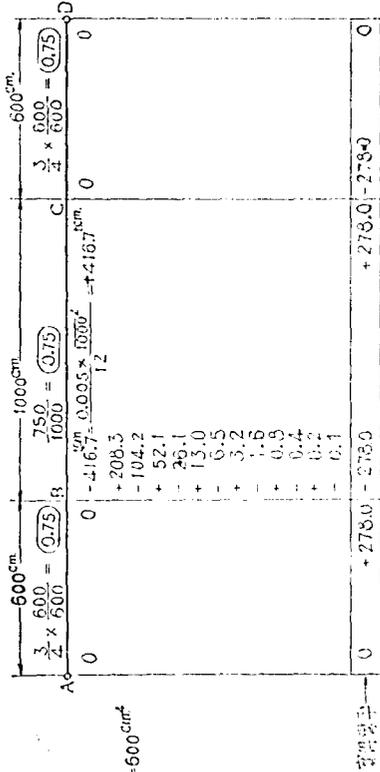


圖 128

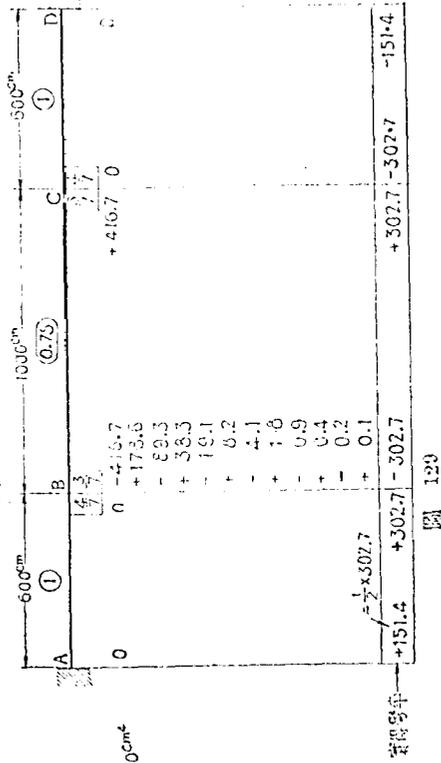


圖 129

87. 分配轉率後之校核. 欲知分配後所得最後轉率, 有無錯誤, 可用下法以校核之.

若各桿件之惰性率, 均係通體一致, 且各結點均無任何變位, 則在任何結點處各桿件之  $M_a - \frac{1}{2}M_b$ , 應與各該剛率成正比例, 此式中之  $M_a$ , 為該桿一端最後轉率減去原有固定端轉率後之變更量, 而  $M_b$ , 為該桿另一端最後轉率減去原有固定端轉率後之變更量.

上開原則, 可用下法以證明之.

按照轉率面積法之原則, 如將  $\frac{M}{EI}$  圖作為荷重, 其在 a 端所發生之剪截力, 等於該端之撓角  $\theta_a$  (參閱第 24 節及第 50 節), 由第 26 節之 (87) 式, 可得  $\theta_a = -\frac{l}{3EI}(M_a - \frac{1}{2}M_b)$ , 又因環繞 a 點各桿端之撓角  $\theta_a$  皆相同, 故  $M_a - \frac{1}{2}M_b$  與  $\frac{l}{I}$  相乘之積, 必等於一常數, 易言之,  $M_a - \frac{1}{2}M_b$  必與其  $\frac{1}{I}$  (即剛率) 成正比例.

至若桿件之惰性率不一致者, 應如何校核, 可參閱第 94 節.

今試就圖 127 所得各最後轉率, 施用上述校核之法, 作為一個舉例, 如下. (圖 130).

	A	B	C	D		
最後轉率	0	+ 89.8	- 87.2	+ 290.9	- 327.2	0
固定端轉率	0	+ 100.0	- 150.0	+ 150.0	- 407.0	0
$M_a$	0	- 10.2	+ 62.8	+ 140.9	+ 72.8	0
$-\frac{1}{2}M_b$		0	- 70.4	- 31.4	0	
$M_a - \frac{1}{2}M_b$		- 10.2	- 7.6	+ 109.5	+ 72.8	
$K = \frac{1}{I}$		5.33	4	4	2.67	

圖 130

因  $\frac{10.2}{7.6} = \frac{5.33}{4}$ ，及  $\frac{109.5}{72.8} = \frac{4}{2.67}$ ，故知各最後彎率無誤。

讀者注意，上表中 BA 及 CD 之剛率 ( $K = \frac{I}{L}$ )，係未經修改之數值。

88. 縮短計算法。凡熟習分配彎率法者，自可知悉，每次分配，實非必要之舉，祇須將逐次傳達之數值，書入表中，求得原有固定端彎率與迭次傳達彎率之總和，然後將不平衡的總和，如常法分配之，其算果與前同，而省時頗多，茲就圖 126 及圖 127 兩問題，按照縮短計結法，演算之，如圖 131 及圖 132 之所示。

	15	10	20	0.825 = $\frac{1}{2} \times 1.1$				
M	-16.3	+16.3	-45.1	+34.1	-215.4	+172.2	-21.0	+71.4
			+30.2	+5.8	-53.5	+60.4		
			+8.0	-6.0	-21.5	+15.9		
			+4.6	-1.6	-5.6	+9.1		
			+1.2	-0.9	-3.2	+2.4		
			+0.7	-0.2	-0.8	+1.3		
			+0.2	-0.2	-0.4	+0.3		
	-16.3	+16.3	-0.2	+31.0	-309.2	+261.6	-21.0	+71.4
M	-14.8	+9.7	-6.4	+89.7	+179.5	-170.1	-70.5	0
	-21.4	+6.6	-6.6	+120.7	-120.7	+91.5	-91.5	+71.4

圖 131

在表中之  $\frac{1}{L} = \frac{1}{4}$

	1	1	1
M	-100	+100	-100
	+71.5	+11.1	
	-3.1	-15.9	
	+4.5	+9.7	
M	+100	-77.1	+148.9
	-100	+100	-100
	+89.8	-87.3	+291.2
			-327.4
	0.5 & M = -2.5		0.5 & M = +36.3
	0.5 & M = -1.5		0.5 & M = +18.1

圖 132

## 第十七章 間接分配法

## THE INDIRECT METHOD.

69. 緒言 在某問題之中，與其由已知外力入手以求各個轉率，尚不如按照靜力學及剛結之條件，先求得若干轉率之數值，再由此諸轉率，求得發生各該轉率之外力，較為便利甚多，關於此節，可舉一普通之例，即知形架構之在頂部受有荷重者，如圖 133 所示。

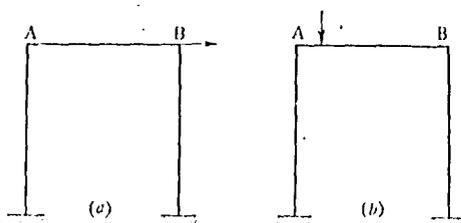


圖 133

在此等問題中，未便由所受荷重入手，求各立柱中之固定端轉率，如法分配，因而算得其真確轉率，蓋當分配之時，A、B 兩結點，已不免於橫平移動也，但可假想將 A 及 B 兩點，牽引

之使其移動，達某一行程，並執持之使居於此位置，求得此時各立柱中之固定端轉率，如法分配，而按照靜力學之原理，推算其所需之外力，俾該架構得居於此項位置。

抑有更善於此之法，如下所述，先假定立柱之中，有某某不相抵觸之轉率，〔此項轉率，能使該立柱發生若干移動量，（亦稱撓度）可置之不問〕，如法分配，而求得所需以維持平衡之橫平力，既得有此諸轉率及與之相當之橫平力，即可由其他橫平力，按照比例，求得與此橫平力相當之各轉率。

上文所謂假定某某轉率，俾能發生某種移動量，必須不相抵觸，就本問題言之，此等轉率必須能使兩立柱之頂端，發生同一移動量，

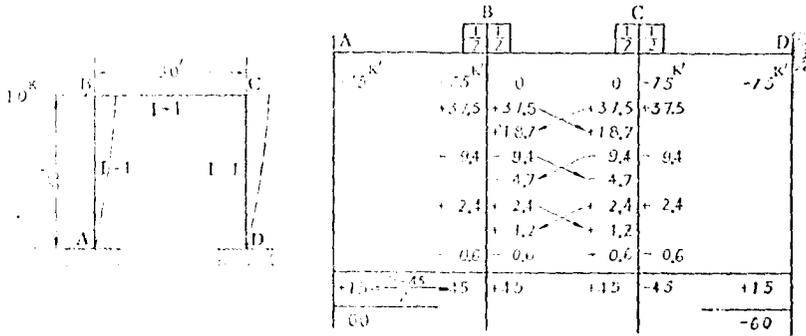
若該兩立柱之底端皆固定，則因有此項側欹而得之兩立柱的彎率曲線圖，必須為相似形，故若頂端移動量相同，則

$$M \propto \frac{I}{L^2} \propto \frac{K}{L} \left[ \text{因 } \Delta (\text{即移動量}) \propto \frac{M L^2}{I} \right]$$

$$H \propto \frac{I}{L^3} \propto \frac{K}{L^2} \left[ H \text{ 為各立柱中之剪截力} \right]$$

讀者注意，此項假定，祇適用於移動量相同之時。

90. 側欹 Sideway. 凡對稱架構受有對稱荷重者，不至發生側欹。如用直接分配法解算，其結果自可無錯誤。但若架構與荷重二者，有一不對稱，或兩者皆不對稱，則必發生側欹，尤以受有橫平荷重者為甚。如祇用直接分配法，則各立柱中之剪截力，必不能平衡。故須採用間接分配法，如下所述，或施用修正彎率法，如第 91 節所述。



每立柱中之剪截力 =  $\frac{45 + 60}{30} = +3.5k$ .

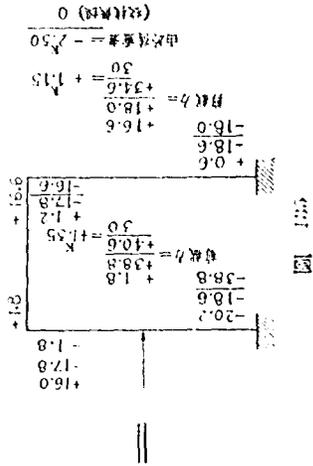
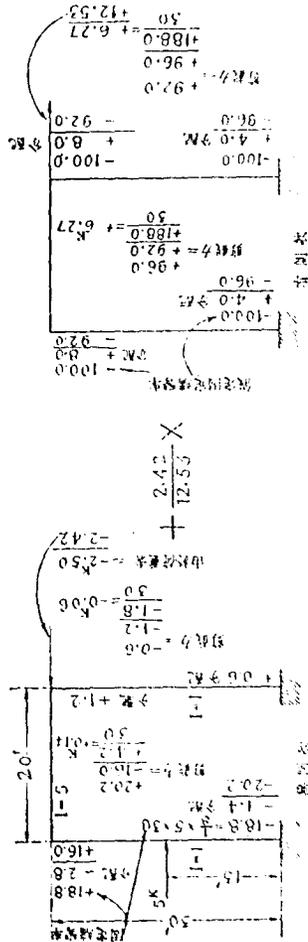
因正確剪截力 = 5.5k，故正確彎率可按照比例求得如下。

$$M_A = 60 \times \frac{5}{3.5} = 86k' = M_D$$

$$M_B = 45 \times \frac{5}{3.5} = 64k' = M_C$$

圖 131

如圖 134，先假定橫梁為剛而不可撓者，並假定兩立柱中之剪截力相等，且假定各該立柱中之轉率反向點，適在其中間，求得各結點處之轉率 [因假定立柱之轉率反向點在柱之中間故，入手所用之固定端轉率 =  $5k \times 15'$  ( $5k$  = 外力之半， $15'$  = 柱高之半) =  $75k$ ]。然後按照比例，求得各結點處之真確轉率，如該圖所示。



如圖 135，橫平荷重在立柱之中央，其解算方法，具如該圖所示，惟彎率分配之詳細步驟，則省略未示，僅將其結果書入，並書分配字樣於其傍。

此法先求得荷重立柱之固定端彎率，假定並無側歛，而如法分配之，分配後所得之彎率，與該架構頂端受有一剪截力  $=2^k.42$  者相當，然後假定其橫梁為剛而不可撓者，並假定兩立柱之兩端，各有一固定端彎率  $=-100^k$ ，將此諸彎率，如法分配，而得與之相當之架頂總剪截力  $=12^k.53$ ，如是即可按照比例，求得因側歛而生之真確彎率，以此分別加入原有之彎率（即假定無側歛時所得之彎率），即為實得彎率，如圖所示。

茲更解算一個不對稱的架構，如圖 136 所示。

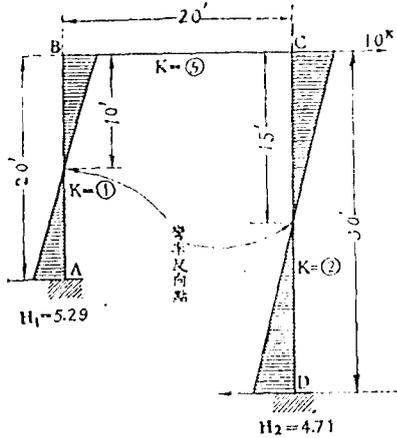
假定橫梁為剛而不可撓者，又立柱中之剪截力與其  $\frac{K}{L^2}$  成正比例，即與  $\frac{1}{4}$  及  $\frac{2}{9}$  成正比例。

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{9} = \frac{17}{36}$$

$$\text{故 } H_1 = \frac{9}{17} \times 10.0 = 5.29 \quad m'_B = 5.29 \times 10 = \pm 52.9^k$$

$$H_2 = \frac{8}{17} \times 10.0 = 4.71 \quad m'_C = 4.71 \times 15 = \pm 70.6^k$$

圖 136 (未完)



	5/6		5/7	
- 52.9	+ 44.0		+ 50.5	- 70.6
	+ 25.2		+ 22.0	
	- 21.0		- 15.7	
	- 7.8		- 10.5	
	+ 6.5		+ 7.5	
	+ 3.7		+ 3.2	
	- 3.1		- 2.5	
	- 1.1		- 1.5	
	+ 0.9		+ 1.1	
	+ 0.5		+ 0.4	
	- 0.4		- 0.3	
- 47.4	+ 47.4	+ 54.4	- 54.4	柱頂之 r
+ 5.5			+ 16.2	柱頂之 Δr
+ 2.7			+ 8.1	柱底之 Δr
- 50.2	- 52.9 + 2.7	- 70.6 + 8.1	- 62.5	柱底之 r

$$H_1 = \frac{-47.4 + 50.2}{20} = +4.488$$

$$H_2 = \frac{54.4 + 62.5}{30} = +3.90$$

因上圖所得各彎率，與總剪截力 4.88 + 3.90 = 8.78 相當，故若總剪截力為 10.00，

則各彎率必等於  $\frac{10}{8.78} \times$  上圖所得各彎率，即

$$M_{AB} = 57.0k'$$

$$M_{BA} = -54.0k'$$

$$M_{DC} = +54.0k'$$

$$M_{CB} = +61.8k'$$

$$M_{CD} = -61.8k'$$

$$M_{DA} = -71.3k'$$

圖 136 (續)

91. 施用修正彎率。若於每次分配及傳達之後，在各層各立柱兩端，酌加修正彎率 Correction Moments，俾該層各立柱之彎率總和（連同原用之固定端彎率在內），等於外力施於該層之彎率總和，然後再

表 38

分配因子	I	1			4			5		6			3				2				II
	I-1	1-1	1-4	1-2	4-1	4-5	4-3	5-4	5-6	6-5	6-6'	6-3	3-2	3-4	3-6	3-3'	2-II	2-1	2-3	2-2'	II-2
		0.407	0.339	0.254	0.364	0.364	0.272	0.667	0.333	0.250	0.250	0.500	0.286	0.214	0.286	0.214	0.324	0.203	0.270	0.203	
固定端彎率	-750	-750	-500		-500	-250		-250				-250	-500		-250		-750		-500		-750
分配		+509	+424	+317	+273	+273	+204	+167	+83	+62	+63	+125	+214	+160	+215	+161	+405	+254	+337	+254	
傳達	+254		+136	+127	+212	+83	+80	+136	+31	+42	+31	+107	+163	+102	+62	+80	+158	+107	+127	+202	
修正	-342	-343	-466		-467	-292		-292				-292	-466		-292		-343		-467		-342
分配		+222	+185	+139	+140	+140	+104	+83	+42	+28	+28	+56	+100	+75	+100	+76	+135	+85	+113	+85	
傳達	+111		+70	+42	+92	+42	+37	+70	+14	+21	+14	+50	+56	+52	+28	+38	+70	+50	+42	+67	
修正	-134	-134	-201		-202	-142		-142				-142	-202		-142		-133		-201		-134
分配		+91	+76	+56	+63	+63	+47	+39	+19	+14	+14	+29	+48	+37	+49	+36	+56	+35	+46	+35	
傳達	+45		+31	+17	+38	+19	+18	+31	+7	+9	+7	+24	+23	+23	+14	+18	+28	+24	+17	+28	
修正	-55	-55	-87		-87	-67		-67				-67	-87		-67		-55		-88		-55
分配		+38	+32	+24	+29	+29	+21	+19	+10	+7	+7	+13	+22	+16	+22	+16	+24	+15	+20	+15	
傳達	+19		+14	+7	+16	+9	+8	+14	+3	+5	+3	+11	+10	+10	+6	+8	+12	+11	+7	+12	
修正	-23	-23	-38		-39	-31		-31				-30	-39		-31		-23		-38		-24
分配		+16	+14	+10	+13	+14	+10	+9	+5	+3	+3	+5	+10	+8	+10	+8	+10	+6	+9	+6	
傳達	+8		+6	+3	+7	+4	+4	+7	+1	+2	+1	+5	+4	+5	+2	+4	+5	+5	+3	+5	
修正	-10	-10	-17		-17	-14		-14				-14	-17		-14		-9		-17		-10
分配		+7	+6	+5	+6	+6	+4	+4	+2	+1	+2	+3	+5	+3	+4	+4	+4	+3	+4	+2	
傳達	+3		+3	+1	+3	+2	+1	+3	0	+1	+1	+2	+2	+2	+1	+2	+2	+2	+1	+2	
修正	-4	-4	-8		-8	-6		-6				-6	-7		-7		-4		-8		-4
分配		+3	+3	+2	+3	+3	+2	+2	+1	+1	0	+1	+2	+2	+2	+1	+2	+1	+2	+2	
實有彎率	-878	-433	-317	+750	-425	-115	+540	-218	+218	+196	+174	-370	-659	+495	-288	+452	-681	+674	-589	+596	-1003

第一次分配及傳達之後，第三層（即最高層）之修正彎率，用下法求得之。

$$\text{立柱 } 5-4 \begin{cases} +167 \\ +136 \end{cases}$$

改號為-1168，以二除之，（因兩柱之剛率相同，故平均分配於兩柱）得-584。

$$\text{立柱 } 4-5 \begin{cases} +273 \\ +83 \end{cases}$$

再以二除之（平均分配於每柱之頂底），得-292，如上表所列。

$$\text{立柱 } 6-3 \begin{cases} +125 \\ +107 \end{cases}$$

第二層及第一層之修正彎率，亦用同法求得之。

$$\text{立柱 } 3-6 \begin{cases} +215 \\ +62 \end{cases}$$

此後各次之修正彎率，亦然。

$$\text{合 計 } +1168$$

行如法分配，則最後結果，即為實有彎率，如是即無施用間接分配法之必要，此項修正彎率，應使等於該次所得該層各立柱的分配彎率及傳達彎率之代數的總和，惟正負號適相反，此項總彎率，應按照 $\frac{K}{L}$ ，比例分配於該層各立柱，並平均分配於各該柱之頂及底。

此法之意，蓋即逐次分配其不平衡的剪截力於各立柱中也，茲用此法，解算第 35 節之問題，如表 38 所示，讀者注意，此法所得各結果，與用撓角撓度法所得者（參閱第 35 節之圖 59 B），幾於完全符合。

如用此法於圖 134，圖 135，圖 136 等較簡問題，亦可求得同一結果，讀者試自為之可也。

就一般言之，設某層中共有  $n$  個立柱，其剛率為  $K_1, K_2, K_3, \dots, K_n$ ，其高度為  $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ ，又設令每次分配傳達之後，各個立柱之頂及底新得分配彎率及傳達彎率之代數的總和，為  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ ，因彎率之分配於各立柱，與各該  $\frac{K}{h}$  成正比，又因剪截力之分配於各立柱，與各該  $\frac{K}{h^2}$  成正比，（見第 89 節），故知

$$\text{第一立柱之修正總彎率 (包括頂底)} = -\frac{K_1}{h_1} \cdot \frac{\sum \left( \frac{M}{h} \right)}{\sum \left( \frac{K}{h^2} \right)}$$

$$\text{第二立柱之修正總彎率} = -\frac{K_2}{h_2} \cdot \frac{\sum \left( \frac{M}{h} \right)}{\sum \left( \frac{K}{h^2} \right)}$$

$$\text{第三立柱之修正總彎率} = -\frac{K_3}{h_3} \cdot \frac{\sum \left( \frac{M}{h} \right)}{\sum \left( \frac{K}{h^2} \right)}$$

.....

.....

$$\text{第 } n \text{ 立柱之修正總彎率} = -\frac{K_n}{h_n} \cdot \frac{\sum \left( \frac{M}{h} \right)}{\sum \left( \frac{K}{h^2} \right)}$$

此項總彎率，可平均分配於頂底，即各得其半是也。

若各立柱之高度相同，則第  $r$  立柱頂部或底部之修正彎率，各等於  $-\frac{1}{2} \cdot \frac{K_r \cdot \sum(M)}{\sum(K)}$ 。若各立柱之剛率，亦皆相同，則任一立柱頂部及底部之修正彎率，必各等於  $-\frac{1}{2n} \cdot \sum(M)$ 。

上述之通法，適用於橫平荷重，亦適用於不對稱架構之受有任何荷重，或對稱架構之受有不對稱的垂直荷重者，今試舉一簡單例題，以明此法之如何應用於不對稱的架構及橫平荷重之作用於兩結點間。

表 39

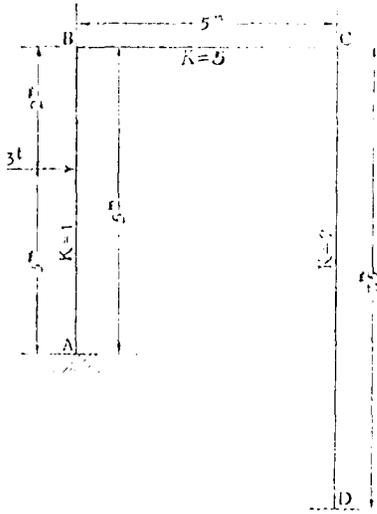


圖 137

	A	B		C		D
	AB	BA	BC	CB	CD	DC
		1/3	5/3	5/7	2/7	
1	-238	-238			-317	-317
2	-144	+216				
3	-19	-19			-25	-25
4		+7	+34	+241	+98	
5	+3		+122	+17		+49
6	-28	-29			-38	-38
7		-16	-77	+15	+6	
8	-8		+7	-38		+3
9	+5	+5			+6	+6
10		-2	-10	+23	+9	
11	-1		+11	-5		+4
12	-2	-1			-2	-2
13		-2	-8	+5	+2	
14	-1		+2	-4		+1
15	0	0			0	0
16		0	-2	+3	+1	
17	-433	-79	+79	+260	-260	-319

設有架構及荷重，如圖 137 所示，先計算  $-\frac{K_1}{2h_1} = \Sigma\left(\frac{K}{h^2}\right)$  及

$-\frac{K_2}{2h_2} = \Sigma\left(\frac{K}{h^2}\right)$  之值如下。

$$-\frac{K_1}{2h_1} = \Sigma\left(\frac{K}{h^2}\right) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{500} = \left(\frac{1}{500^2} + \frac{2}{750^2}\right) = -132.$$

$$[5.000 = 500^2, \quad 7.50 = 750^2]$$

$$-\frac{K_2}{2h_2} = \Sigma\left(\frac{K}{h^2}\right) = -\frac{1}{2} \times \frac{2}{750} = \left(\frac{1}{500^2} + \frac{2}{750^2}\right) = -176.$$

此兩數既經算得，此後可隨時應用，編者擅定其名爲修正因子 Correction Multipliers，不特橫平荷重需用之，即不對稱的垂直荷重，亦需用之。

既得各個修正因子，即可著手解算，如表 39 所示，表中第一橫行，係固定端彎率之用以抵銷在 B 點之簡梁剪截力者，（此項剪截力，等於 1.8<sup>l</sup>），故以 1.8<sup>l</sup> 分別乘上得之修正因子，即得 -238 及 -317。（此即第 90 節之固定端彎率，若荷重在 B 點，則此項剪截力，即等於 3<sup>l</sup>，而不為 1.8<sup>l</sup>）。

表中第二橫行之 -144 及 +216，即 AB 桿件受有 3<sup>l</sup> 荷重時之兩固定端彎率。（若荷重在結點，則此項彎率皆等於零），因此項固定端彎率，在 AB 桿件中，發生新的不平衡剪截力  $\left[ = -\frac{-144 + 216}{500} = +0.144 = \Sigma\left(\frac{M}{h}\right) \right]$ ，故必再加入新的修正彎率，此即等於以 -132 及 -176 分別乘 +0.144，而得 -19 及 -25。（若荷重在 AB 桿件中之位置，為對稱的，則此項新的修正彎率，皆等於零）。

第四橫行，係按照常法，分配其不平衡彎率，第五橫行，亦係按照常法，傳達彎率於彼端，第六橫行，係第二次修正彎率，其求得之法如下：

AB 桿新得之彎率，共為 +7 + 3，以 500（即  $h_1$ ）除之，得 +0.020<sup>l</sup>，CD 桿新得之彎率，共為 +98 + 49，以 750（即  $h_2$ ）除之，得 +0.196<sup>l</sup>，兩者相加，得 +0.216<sup>l</sup>，此即  $\Sigma\left(\frac{M}{h}\right)$  也，以 -132 及 -176 分別乘之，得 -28.5 及 -38，即修正彎率。

此後各橫行，皆仿照上述者，逐次進行，其最末橫行，即實有彎率也。

編者曾用撓角撓度法，解算此例題，所得結果如下。

$$\begin{aligned} M_{AB} &= -433.72 \text{ t}\cdot\text{cm}, & M_{BC} &= + 80.35 \text{ t}\cdot\text{cm}, & M_{CB} &= -260.14 \text{ t}\cdot\text{cm}, \\ M_{BA} &= - 80.35 \text{ t}\cdot\text{cm}, & M_{CD} &= + 260.14 \text{ t}\cdot\text{cm}, & M_{DC} &= -318.79 \text{ t}\cdot\text{cm}. \end{aligned}$$

可見兩法所得者，幾於全同。

此例題之演算，雖不免稍覺煩難，然若各立柱之高度相同，或剛率亦皆相同，則計算極為簡易，而結果仍極精密，（例如本節中演算第 35 節之問題）。

本節所述之法，係由編者自行求得，此法如能善為利用，則任何高樓大廈之受有風力荷重，皆不難於推算，比之 Grinter 氏之分配變率簡法，及 Witmer 氏之剛率百分法（見第二十三章），計算不加難，而結果則較密，似覺此愈於彼也。（參閱編者所著 *Analysis of Rigid Frames*，經登入 *Journal of the Association of Chinese and American Engineers*, Sept.-Oct., 1941）。

## 第十八章 桿端旋轉常數

## END-ROTATION CONSTANT

92. 桿端旋轉常數之意義。如能用任何方法，察知某桿兩端彎率變更量之比率，（此項彎率變更量，指最後彎率對於各該固定端彎率之變更而言。）則環繞該端各桿之彎率，可由不平衡的彎率，直接分配之，而不必顧及其他各結點處彎率之如何分配。如是則此項不平衡的彎率之分配，並不與剛率成正比，而與剛率乘某一因子之積成正比。此因子，名曰桿端旋轉常數，以  $\frac{1}{c}$  表示之，其值隨兩端彎率變更量之比率而異，茲求得  $\frac{1}{c}$  之通式如下。

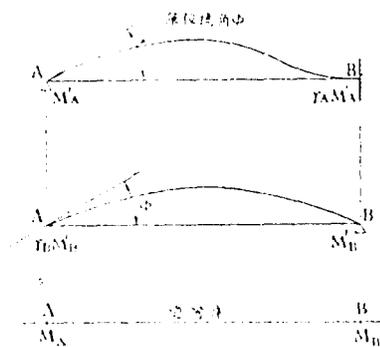


圖 138

如圖 138，設 AB 桿之 B 端固定，而 A 端旋轉成一單位撓角  $\phi$ ，設此時 A 端彎率為  $M'_A$ （即 AB 桿之剛率）則 B 端彎率必為  $r_A M'_A$ （ $r_A$  為 A 端之傳達因子）。

假設 A 端固定，俾其撓角  $\phi$ ，不復變更，而使 B 端旋轉自如，並使該端受有彎率  $M'_B$ ，如是則 B 端發生旋轉，而 A 端亦受有傳達彎率  $r_B M'_B$ （ $r_B$  為 B 端之傳達因子）。

設令各該端因此等旋轉而生之總彎率，為  $M_A$  及  $M_B$ ，則得

$$M'_B = M_B - r_A M'_A$$

$$M_A = M'_A + r_B M'_B = M'_A + r_B M_B - r_A r_B M'_A$$

$$= M'_A + r_B \frac{M_B}{M_A} M_A - r_A r_B M'_A$$

$$M_A \left( 1 - r_B \frac{M_B}{M_A} \right) = M'_A ( 1 - r_A r_B )$$

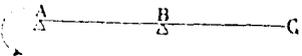
故 
$$\frac{M_A}{M'_A} = \frac{1 - r_A r_B}{1 - r_B \frac{M_B}{M_A}} \dots\dots\dots(190)$$

但  $M_A$  為按照上開旋轉方法在端 A 發生單位撓角時之 A 端彎率，而  $M'_A$  即 AB 桿之剛率，故剛率  $K_A (=M'_A)$  應以下開之因子乘之。

$$\frac{1}{C} = \frac{1 - r_A r_B}{1 - r_B \frac{M_B}{M_A}} \dots\dots\dots(191)$$

在若干特殊情狀之下，此項因子之數值，如表 40 所示。

表 40

桿端旋轉常數 $\frac{1}{C}$ 之數值。			
$\frac{1}{C} = \frac{1 - r_A \cdot r_B}{1 - r_B \cdot \frac{M_B}{M_A}}$		A 為所考慮之桿端 B 為其彼端	
桿件之情況	不對稱的加壓 $r_A \neq r_B$	對稱的加壓 $r_A = r_B = r$	通體一致的截面 $r_A = r_B = +\frac{1}{2}$
B 端固定 $M_B = r_A \cdot M_A$ 	$\frac{1}{C} = 1$	$\frac{1}{C} = 1$	$\frac{1}{C} = 1$
B 端簡承* $M_B = 0$ 	$\frac{1}{C} = 1 - r_A \cdot r_B$	$\frac{1}{C} = 1 - r^2$	$\frac{1}{C} = \frac{3}{4}$
因旋轉而兩端發生相等而相反之彎矩 $M_B = -M_A$  對稱的情況	$\frac{1}{C} = \frac{1 - r_A \cdot r_B}{1 + r_B}$	$\frac{1}{C} = 1 - r$	$\frac{1}{C} = \frac{1}{2}$
因旋轉而兩端發生完全相等之彎矩 $M_B = M_A$  反對稱的情況	$\frac{1}{C} = \frac{1 - r_A \cdot r_B}{1 - r_B}$	$\frac{1}{C} = 1 + r$	$\frac{1}{C} = \frac{5}{4}$
B 端與他桿相連，B 端之旋轉，完全由於 A 端之旋轉。 	$\frac{1}{C}$ 自 $1 - r_A \cdot r_1$ 至 1 不等。	$\frac{1}{C}$ 自 $1 - r^2$ 至 1 不等。	$\frac{1}{C}$ 自 $\frac{3}{4}$ 至 1 不等。

\* 此處假定此桿 A 端之固定端彎矩，係將 B 端作為簡承端而求得之。

93. 用桿端旋轉常數以分配彎率。前於截面通體一致而一端簡承之桿件，業已利用此法，（見第 85 節）。在此情狀之下，先以  $K$  乘該桿之剛率，然後進行分配彎率，但該桿中之彎率，不復使之傳達於彼端，其在一般情狀之下，該桿剛率應以  $1-r_A \cdot r_B$  乘之，讀者須注意，在此項一端簡承之桿件，其所用之固定端彎率，亦須假定彼端為簡承的而求得之。（即第 85 節之修改固定端彎率。）

若一結構物之尺寸及荷重，對於任何桿件，皆為對稱的，則該桿兩端因旋轉而生之彎率，必相等而正負相反，故  $M_B = -M_A$ ，如是即可由 (191) 式而得  $\frac{1}{C}$  之數值。

若能察知某桿兩端撓角相等而方向相反（即表中所謂反對稱的情狀），則  $M_B = M_A$ ，而  $\frac{1}{C}$  之數值，亦可由 (191) 式求得之。

94. 分配彎率後之校核。（參閱第 87 節）。按照上述之原理，不平衡的固定端彎率之分配，應與下列之式成正比。

$$\frac{K}{C} = K \cdot \frac{1-r_A \cdot r_B}{1-r_B} \cdot \frac{M_B}{M_A}$$

上式中之  $M_A$  為所取桿端之彎率變更量，而  $M_B$  為彼端之彎率變更量，

由是而知任何結點處之  $M_A$ ，必與  $K \cdot \frac{1-r_A \cdot r_B}{1-r_B} \cdot \frac{M_B}{M_A}$  成正比，易言之，

$$M_A \left( 1-r_B \cdot \frac{M_B}{M_A} \right) = M_A - r_B \cdot M_B, \text{ 必與 } K(1-r_A \cdot r_B) \text{ 成正比。}$$

此項結果，可利用之以校核最後實得彎率之有無錯誤，（讀者應注意， $M_A$  及  $M_B$ ，並非最後彎率，而係對於固定端彎率之變更量），圖 139 表示如何利用此原則以校核最後實得彎率。

相對的剛率  $K = \frac{1.56}{\times(1+0.36)} = 1.0$

傳送因數  $\gamma = 0.6$

$M \rightarrow$	$\Delta A$	$\Delta B$	$C \Delta - 6^\circ$	$+ 4.0$	D
		+ 2.1 - 1.1	+ 3.0 + 3.0		+ 1.2
			- 9.8 + 4.9 + 4.9		
		+ 3.4 - 2.3			+ 2.0
			- 1.6 + 0.8 + 0.8		
		+ 0.6 - 0.4			+ 0.3
			- 0.3 + 0.1 + 0.2		
實得 $M$	0	- 8.3 + 8.3	+ 24.1 - 24.1		+ 54.3
$\Delta M = M_A$	0	- 8.3 + 8.3	+ 24.1 + 35.9		+ 14.3
$-\gamma_B M_B$	0	0 - 16.9	- 5.8 - 10.0		- 14.3
$M_A - \gamma_B M_B$	0	- 8.3 - 8.6	+ 18.3 + 25.9		0
$K(1-\gamma_A \gamma_B)$	1.0			1.44	

圖 139

因  $\frac{8.3}{8.6} = \frac{1.0}{1.02}$  (約等)，及  $\frac{18.3}{25.9} = \frac{1.02}{1.44}$ ，故知各最後彎率無誤。

讀者注意，AB、BC、及 CD 之剛率，均經以  $1 - \gamma_A \gamma_B$  乘之（此指表中末行而言），此與圖 130 異，因圖 130 中 BC 及 CD 之剛率，並未以  $\frac{1}{2}$  乘之也。

若各桿件之截面，均為通體一致者，則  $M_A = M_B$  必須與  $K$  成正比，如第 87 節之所述。

95. 利用  $\frac{1}{C}$  之計算舉例。如圖 140，假定固定端彎率為 200

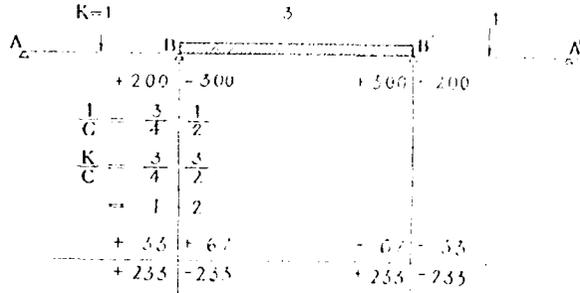


圖 140

及 300, 並假定剛率之數值為 1 及 3.

BB' 之  $\frac{1}{C} = \frac{1}{2}$  (因其為對稱的), BA 及 BB' 之  $\frac{1}{C} = \frac{3}{4}$  (因一端簡承),

B 點之不平衡的轉率, 可按照 AB 及 BB' 之  $\frac{K}{C}$  比率 (即一與二之比), 分配於該兩桿件.

凡單層單徑間之矩形或梯形架構, 或 L 形架構, 或矩形涵洞, (即閉合架構) 以及其他類似結構, 若不發生側欹, 其作用皆與簡單的連續梁相同, 若其形式及荷重, 皆為對稱的, 或受有相當約束, 使不能向左側或右側移動, 自不至發生側欹.

在此等問題之中, 其  $\frac{1}{C}$  之數值, 大抵皆可一望而知, 如係有對

稱的情狀, 則受重桿件之  $\frac{1}{C}$ , 必等於  $\frac{1}{2}$ .

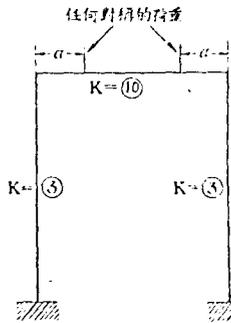


圖 141

如圖 141, 設該架構之形式及荷重, 皆為對稱的, 則

橫梁之  $\frac{1}{C} = \frac{1}{2}$

立柱之  $\frac{1}{C} = \frac{3}{4}$ . (假定柱足為樞結的)

或 = 1, (假定柱足為固定的)

若係定足立柱, 則

柱頂彎率 =  $\frac{3}{3 + (10 \times \frac{1}{2})} = 37\frac{1}{2}\%$  × (橫梁之固定端彎率).

若係樞足立柱, 則

柱頂彎率 =  $\frac{3 \times \frac{3}{4}}{(3 \times \frac{3}{4}) + (10 \times \frac{1}{2})} = 31\%$  × (橫梁之固定端彎率).

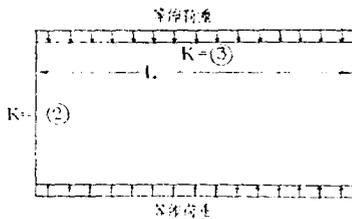


圖 142

如圖 142, 各桿件之  $\frac{1}{C}$ , 皆等於  $\frac{1}{2}$ .

兩側桿件之彎率 = 40% × 頂桿 (或底桿) 之固定端彎率.

若頂部所受者, 為集中荷重, 而底部所受者, 為等佈荷重, 則兩側桿件之

$\frac{1}{C}$ , 亦可約略估得, 其錯誤不至甚鉅.

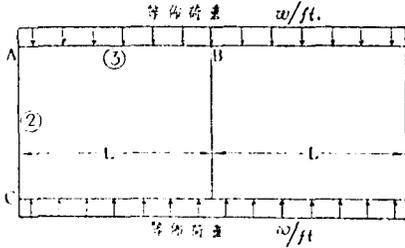


圖 143

如圖 143, 此係一個雙涵洞。

$$AB \text{ 之 } \frac{1}{C} = 1$$

$$AC \text{ 之 } \frac{1}{C} = \frac{1}{2}$$

$$M_A = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{2 \times \frac{1}{2} + 3 \times 1} \times \frac{1}{12} wL^2$$

$$= 25\% \left( \frac{1}{12} wL^2 \right)$$

$$M_B = \frac{1}{12} wL^2 + \frac{1}{2} \times (\text{橫梁在 A 端所減少之彎率})$$

$$= \frac{1}{12} wL^2 + \frac{1}{2} \times 75\% \times \frac{1}{12} wL^2$$

$$= 137\frac{1}{2}\% \times \left( \frac{1}{12} wL^2 \right)$$

下列之圖 144, 及圖 145, 表示如何利用此法, 以解算許多常見問題。

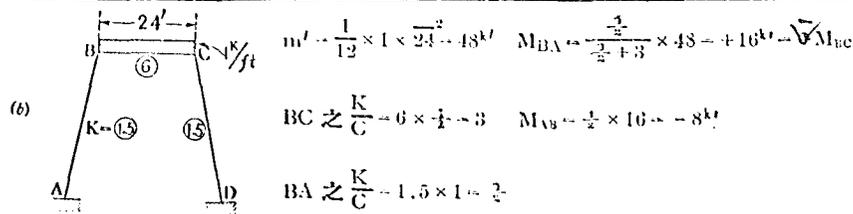
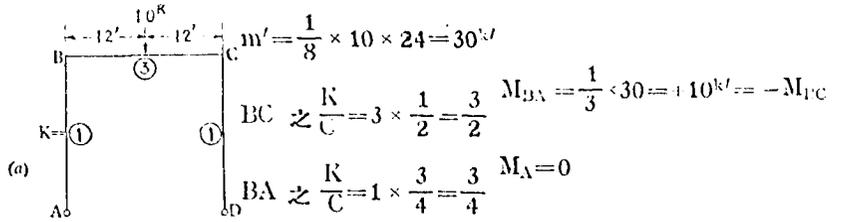
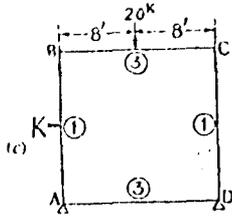


圖 144 (未完)



$$m' = \frac{1}{3} \times 20 \times 16 = 40^k$$

$$BA \text{ 之 } \frac{K}{C} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{9}{10}$$

$$BC \text{ 之 } \frac{K}{C} = AD \text{ 之 } \frac{K}{C}$$

$$M_{BA} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{3}{2} + \frac{9}{10}} \times 40 = +15^k$$

$$= 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$= -M_{BC}$$

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

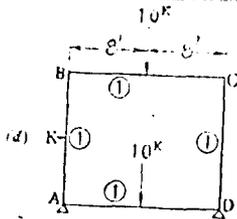
$$M_{AB} = \frac{1}{3} \times 15 = -5^k = -M_{AD}$$

\* 按照表 40 之右下角所示者，此值應在  $\frac{1}{2}$  與 1 之間儘可約估而得，不必如此處之費力求之。

§ 此式錄自 Continuous Frames of Reinforced Concrete，稍為釋明如下， $m_A$  及  $m_B$  為 A, B 兩點分配所得之彎率， $\frac{1}{2}$  = 傳遞因子

$$\frac{3}{2} = BC \text{ 之 } \frac{K}{C} = AD \text{ 之 } \frac{K}{C}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{3+1} = \text{按照剛率比率而分配 (參閱圖 144 b)}$$



$$m' = \frac{1}{3} \times 10 \times 16 = 20^k$$

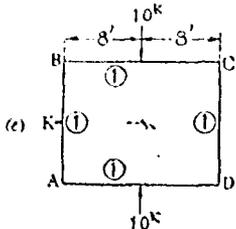
$$M_{BA} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}} \times 20 = +15^k$$

$$= -M_{BC}$$

$$BC \text{ 之 } \frac{K}{C} = AD \text{ 之 } \frac{K}{C} = \frac{1}{2}$$

$$M_{AB} = -15^k = -M_{AD}$$

$$AB \text{ 之 } \frac{K}{C} = BA \text{ 之 } \frac{K}{C} = \frac{3}{2}$$



$$m' = 20^k$$

$$M_{BA} = \frac{1}{2} \times 20 = +10^k = -M_{BC}$$

$$BC \text{ 之 } \frac{K}{C} = AD \text{ 之 } \frac{K}{C} = \frac{1}{2}$$

$$M_{AB} = -10^k = -M_{AD}$$

$$AB \text{ 之 } \frac{K}{C} = BA \text{ 之 } \frac{K}{C} = \frac{1}{2}$$

如有合併之荷重，可按照上法，分別求得彎率，而作代數的相加。

圖 144 (續)

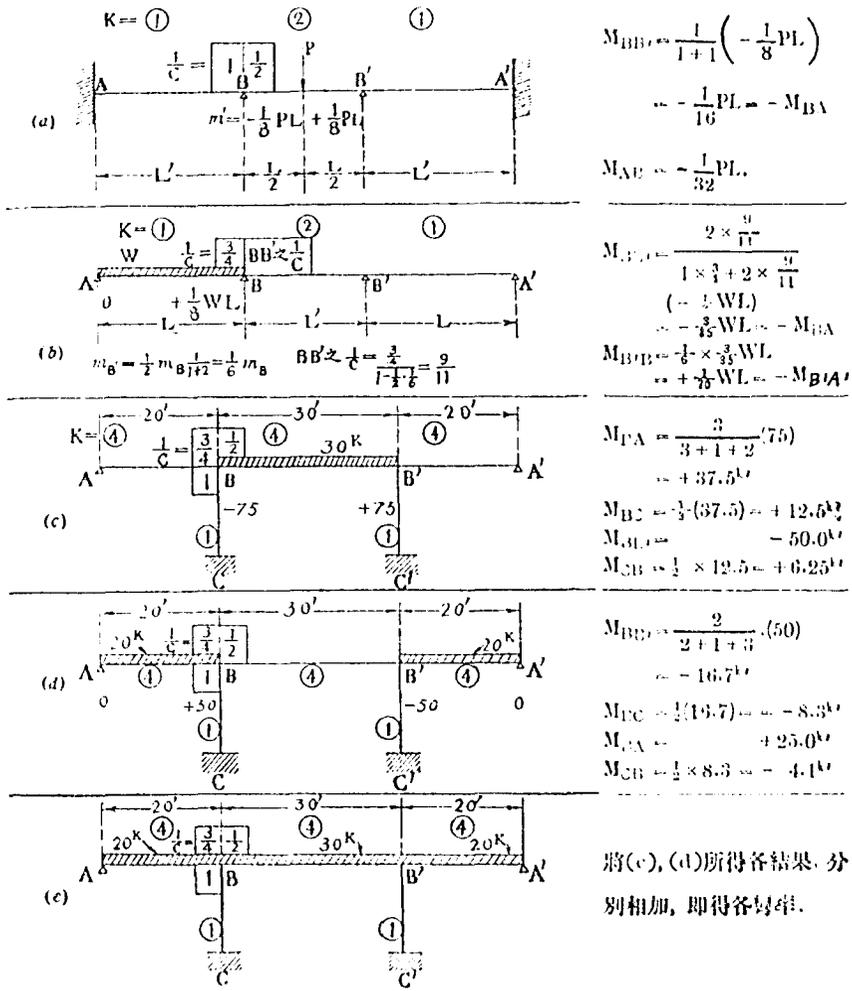


圖 145

96. 縮短的精密計算法. 凡在一結構物中, 若除一個桿件外, 其他各桿件之  $K$ , 皆為已知量, 則分配桿率時所成之級數, 可用一捷法, 以求得其總和, 試觀圖 131 及圖 132 之縮短計算法, 凡在未知  $K$

數值之桿件中（此係惟一之桿件，其變率須傳達於彼端。）於既作首兩次之分配以後，所書各數實係一個幾何級數，Geometrical Series，此級數之總和，等於  $\frac{1}{1-ab}$  乘首兩項之和，此處之  $a$  及  $b$  分別為該桿兩端分配因子與傳達因子相乘之積。

在此等情狀之下，可採取開之步驟。

- (1). 將不平衡的變率之被分配部份，作兩次之傳達。
- (2). 以  $\frac{1}{1-ab}$  乘兩次傳達變率之和，藉以求得傳達變率之總和。
- (3). 如法分配於各結點。

此法時或頗有效用，但須注意，此法祇適用於除一個桿件外，其他各桿件之  $k$  皆為已知量之時。

今試取圖 127 及圖 132 之問題，按照此法演算之，如圖 146 所示。

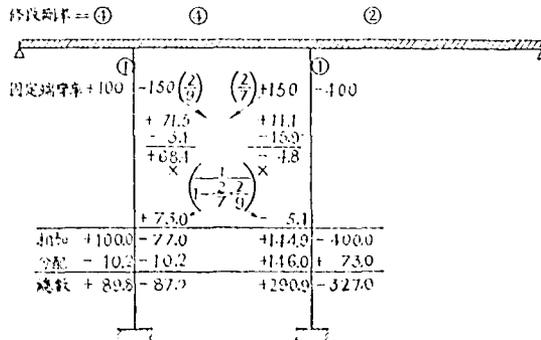


圖 146

編者按，民國二十四年十月一日中國工程師學會出版之「工程」雜誌第十卷第五號，載有林同棧君所著之「直接力率分配法」一文，其中所述之法，與本章頗相似，但更繁複，又查林君此文，曾先用英

文登人美國土木工師學會 1934 年 12 月份月刊，標題爲 A Direct Method of Moment Distribution，經該會各會員如 L. E. Grinter, Leon Blog, Austin H. Reeves, I. Oesterblom 諸氏加以討論，均認爲此法不合實用，遠不如 Cross 教授原發明者之簡單而易於計算，故此法至多不過在學理上略有興趣而已。

林君所著之英文論文及其討論文，見 Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 102, 1937, pp. 561 - 605. 讀者參閱之可也。

## 第十九章 壓柱比擬法

## METHOD OF COLUMN ANALOGY.

97. 緒言. 此法為 Hardy Cross 教授所發明, 並非分配彎率, 但與分配彎率法, 有密切關聯, 茲特於本章略述之, 以附於分配彎率法之後.

所謂壓柱比擬也者, 凡具有連續性的梁、拱、架、構中之彎率, 與受有偏心荷重的短壓柱中之應力, 實屬完全相似, 故可作數學的比擬, 藉以求得各彎率.

此法固可用以推求任何結構中各指定處所之彎率, 然其法並不優於其他各法, 且時或更形繁複, 但此法可視為一種極有用之工具, 藉以尋求他法所需之數值, 例如分配彎率法所需之固定端彎率, 剛率, 及傳達因子等數值, 尤以該桿件之截面 (即慣性率) 並非通體一致, 或桿件本身曲面不直者, 更為有用. (例如拱橋).

98. 壓柱比擬法之原理. 如圖 147 (a) 設有一矩形架結構, 在某一截面 A 處被切斷, 設被截面之左右方, 相對的旋轉, 而成一甚小之角  $\phi$ , 若一個立柱之足, B, 得以自由旋轉, 則 B 點將移動至 B' 點之位置, 如是則

$$\text{撓角} = \phi,$$

$$\text{橫平變位} = \phi y_1,$$

$$\text{垂直變位} = \phi x_1$$

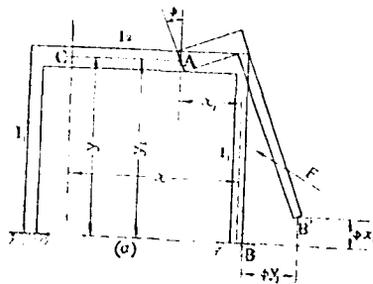


圖 147

若該柱是不得自由旋轉，則必為某種外力所約束，而該結構之全身，必因而發生彎率，此項外力可名之曰 F。

F 之位置及大小，必能使 B 點所因而發生之橫平變位及垂直變位，適與因  $\varphi$  而發生者，數量相等而方向相反。

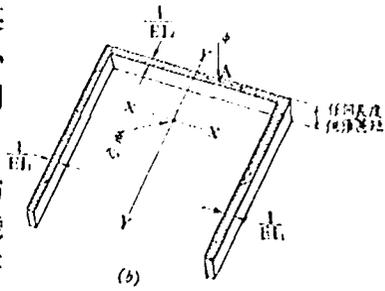


圖 147

設令某截面 C 處，因 F 作用而發生之彎率， $=m_i$ ，此項彎率，能使 C 處之甚短的桿身（其長 $=ds$ ）發生撓屈旋轉 Flexural Rotation，其角 $=\frac{m_i ds}{EI}$ （讀者對於此節，如不甚明，可參閱任何力學教科書。）此項撓角在 B 點所發生之影響如下。

$$\text{撓角} = m_i \cdot \frac{ds}{EI}$$

$$\text{橫平變位} = m_i \cdot \frac{ds}{EI} \cdot y$$

$$\text{垂直變位} = m_i \cdot \frac{ds}{EI} \cdot x$$

若 B 點固定不動，則

$$\int m_i \cdot \frac{ds}{EI} = -\varphi$$

$$\int m_i \cdot \frac{ds}{EI} x = -\varphi x_1$$

$$\int m_i \cdot \frac{ds}{EI} y = -\varphi y_1$$

又因任何點之  $m_i$  必等於  $F$  乘其力距 Lever arm 之故,  $m_i$  之數值自必與  $x$  及  $y$  之一次方成正比, 易言之,  $m_i$  為  $x$  及  $y$  之直線函數 Linear Function of  $x$  and  $y$ .

此條件 ( $m_i$  為  $x$  及  $y$  之直線函數) 連同上列三個方程式, 足以決定各個  $m_i$  之數值, 並可由是決定  $F$ .

今試取一甚短之壓柱 如圖 147 (b), 其平面圖之形狀, 與上開架構之立面圖 Elevation 相同, 但其各部份之寬度甚小, 分別等於架構各桿件之  $\frac{1}{EI}$ , 此壓柱在  $A$  點受有荷重, 其量等於  $\phi$ .

按照力學所得, 凡對稱截面的壓柱受有撓屈, 其底部之纖維應力 Fibre Stresses 之通式如下. (參閱任何力學教科書之較為詳善者).

$$f = \frac{P}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot x + \frac{M_y}{I_y} \cdot y \dots \dots \dots (192)$$

上式中之  $P$  為該截面所受之荷重.

$A$  為該截面之面積.

$M_x$  為該荷重對於重心軸  $Y$  之力率 Moment of the load about the centroidal axis  $Y$ .

$M_y$  為該荷重對於重心軸  $X$  之力率.

$I_x$  為該截面對於重心軸  $Y$  之慣性率.

$I_y$  為該截面對於重心軸  $X$  之慣性率.

$x$  及  $y$  為該截面中任何點之縱橫距.

$f$  為在該點處之單位纖維應力.

此項撓屈公式，係為下開二者所合成，(一)為短柱中心荷重時所習用之公式  $f = \frac{P}{\Lambda}$ ，(二)為撓屈梁之公式  $f = \frac{Mc}{I}$ 。(192)式係根據下列四項，推演而得。

(1). 假定  $f$  為  $x$  及  $y$  之直線函數。

$$(2). \int f. d\Lambda = -P. \quad (\Sigma X = 0).$$

$$(3). \int f.x. d\Lambda = -M_x. \quad (\Sigma M_x = 0).$$

$$(4). \int f.y. d\Lambda = -M_y. \quad (\Sigma M_y = 0)$$

若在上述特殊短柱之中，以  $m_i$  代替  $f$  字樣，則上列四項可改書如下。

(1)  $m_i$  為  $x$  及  $y$  之直線函數。

$$(2) \int m_i \cdot \frac{ds}{EI} = -\varphi.$$

$$(3) \int m_i \cdot \frac{ds}{EI} \cdot x = -\varphi \cdot x_1.$$

$$(4) \int m_i \cdot \frac{ds}{EI} \cdot y = -\varphi \cdot y_1.$$

此即所以決定架構中  $m_i$  數值之條件，故短柱中之  $f$  與架構中之  $m_i$ ，必完全相同，如能算得短柱中之  $f$ ，則架構中之  $m_i$ ，即為已知量。

不問其撓角  $\varphi$  如何產生，亦不問此等撓角，共有若干，上述之理

論，皆可適用，祇須假想有一短柱，受有此等荷重  $\varphi$ ，其尺寸及形狀，與架構完全相同，惟各部份之寬度，分別等於架構各桿件之  $\frac{1}{EI}$ ，而計算此短柱底部之單位纖維應力，所得者即為架構中相當點之變率。此項變率為維持其連續性之所必需。（即  $m_1$  是也）。

上述假想短柱，如圖 148<sup>7</sup> (b) 所示，名曰該架構之比擬壓柱 Analogous Column for that Bent.

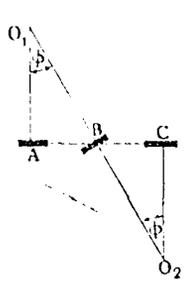


圖 148

若於與移動方向相正交之線上，選取兩點，凡繞此兩點而作相等而相反之旋轉，其結果或成為直線之移動，並不發生旋轉，如圖 148，A 處之短粗線，若先繞 O<sub>1</sub> 點而旋轉成 φ 角，（φ 角為甚微之量）則將居於 B 之位置，若再繞 O<sub>2</sub> 點而作方向相反之旋轉，仍成 φ 角，則將居於 C 之位置，故若各撓角在此擬壓柱中作為荷重，則直線之移動，在比擬壓柱中，應作為偶力

Couples，並可視作對於該移動線之力率以處理之。

若各個撓角 φ，係由於該結構物之受有荷重，則其數值如下。

$$\varphi = m_s \cdot \frac{ds}{EI} \dots\dots\dots(193)$$

上式中  $m_s$  之意義如下，假想將該結構物，在某一相當處所切斷，俾成為一個靜定結構，因各荷重作用於該結構而在任何截面所發生之變率，謂之  $m_s$ 。（此係靜定變率）。

但此與使圖 148<sup>7</sup> (b) 之短柱，受有一個荷重  $m_s$ ，完全相同，故若欲求得因荷重而生之不靜定變率，可於該結構物之上，按照各荷重，繪入一個任何便利合用之變率曲線圖，將此等變率，視作比擬壓

柱上所受之壓力，而計算其纖維應力，如是則在任何點之總彎率，等於下開二者相減所得之數。(一)為靜定彎率  $m_s$ ，(二)為不靜定彎率  $m_i$ 。

99. 不對稱的截面。上文所述，假定比擬短柱之截面為對稱的，若為不對稱的，則須用下開之通式，(此通式之證明，見 Hardy Cross 氏所著之 The Column Analogy, 登入 Bulletin 215, Engineering Experiment Station, University of Illinois, 1930)。

$$f = \frac{P}{A} + \frac{M'_x}{I'_x} \cdot x + \frac{M'_y}{I'_y} \cdot y \dots \dots \dots (194).$$

上式中之  $M'_x = M_x - \frac{I_{xy}}{I_y} \cdot M_y$

$$M'_y = M_y - \frac{I_{xy}}{I_x} \cdot M_x$$

$$I'_x = I_x - \frac{I_{xy}^2}{I_y}$$

$$I'_y = I_y - \frac{I_{xy}^2}{I_x}$$

上四式中之  $M_x, M_y, I_x, I_y$ ，皆與第 98 節所說明者相同，惟  $I_{xy}$  為該截面對於兩個重心軸  $X$  及  $Y$  之慣性積 Product of Inertia. ( $= \int x \cdot y \cdot dA$ )。

今試就此項慣性積，略加申述如下。

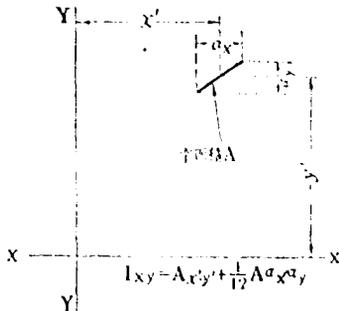


圖 140

凡一個面積對於  $XX$  及  $YY$  兩軸之慣性積 (如圖 149)，等於

該面積  $\times$  (其重心對於該兩軸之縱橫距相乘之積) + (該面積對於與  $XX$  及  $YY$  平行之兩重心軸之慣性積)

即  $I_{xy} = Ax'y' + I_{xy}$  ..... (195)

若該面積甚窄狹，則

$$I_{xy} = Ax'y' + \frac{1}{12} Aa_x a_y \dots \dots (196)$$

上兩式中之  $x'$  及  $y'$  爲其重心之縱橫距。

$a_x$  及  $a_y$  爲該面積投射於兩軸之長度。(見圖 149)

對於重心軸之慣性積, ( $I_{c_{xy}}$ ) 或正或負, 以下法決定之。

若該線之傾斜方向爲  $\swarrow$ , (即  $\frac{dy}{dx}$  爲正號), 則  $I_{c_{xy}}$  必爲正號,

若其傾斜方向爲  $\searrow$ , 則  $I_{c_{xy}}$  必爲負號。

若  $XX$  及  $YY$  兩軸重合, 則上式即變爲慣性率之式, 故慣性率實爲一種特殊的慣性積。

100. 不靜定外力  $F$  之推求。由圖 147 (a), 可見  $F$  爲一個不靜定外力, 爲維持連續性之所必需, 此力自必即爲各個反力之變更量。

在  $F$  之作用線中, 其不靜定變率, 必等於零, 故其作用線必與比擬壓柱受有該項荷重時之中立軸相當, 此中立軸中各點之  $f=0$ 。

$F$  之橫平的及垂直的分力 Horizontal and vertical components  
爲 
$$h_i = -\frac{\delta m_i}{\delta y} \quad \text{及} \quad v_i = \frac{\delta m_i}{\delta x}.$$

此即  $m_i$  對於每單位垂直的或橫平的距離之變更率也。

其在比擬壓柱, 由 (194) 式 可得

$$\frac{\delta f}{\delta y} = -\frac{M'_y}{I'_y} \quad \text{及} \quad \frac{\delta f}{\delta x} = \frac{M'_x}{I'_x}.$$

如係對稱的截面, 則此兩式變爲

$$\frac{\delta f}{\delta y} = -\frac{M_y}{I_y} \quad \text{及} \quad \frac{\delta f}{\delta x} = \frac{M_x}{I_x}$$

故知 
$$h_1 = \frac{M_y}{I_y} \quad \text{或} \quad \frac{M'_y}{I'_y}, \quad \text{及} \quad v_1 = \frac{M_x}{I_x} \quad \text{或} \quad \frac{M'_x}{I'_x} \dots\dots (197)$$

此即實際反力對於所假設靜定情狀所得反力之變更量也，故得

$$\left. \begin{array}{l} \text{實際橫平反力} \quad H = h_1 - h_1 \\ \text{實際垂直反力} \quad V = v_1 - v_1 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (198)$$

$P$  在重心軸上之截距 Intercepts，即等於架構中相當截面在中立軸上之截距。

故若係不對稱的截面，則 
$$x_1 = -\frac{\frac{P}{A}}{\frac{M'_x}{I'_x}} \quad \text{及} \quad y_1 = -\frac{\frac{P}{A}}{\frac{M'_y}{I'_y}} \dots\dots (199)$$

如係對稱的截面，則 
$$x_1 = -\frac{\frac{P}{A}}{\frac{M'_x}{I'_x}} \quad \text{及} \quad y_1 = -\frac{\frac{P}{A}}{\frac{M'_y}{I'_y}} \dots\dots (200)$$

若比假壓柱截面所受荷重合力 Resultant Load 之施力點之縱橫距為  $x_2$  及  $y_2$ ，而重心軸上之截距為  $x_1$  及  $y_1$  (如上兩式所求得者)，則由下列兩式，可決定此諸數量之相互的關係(參閱第 101 節)

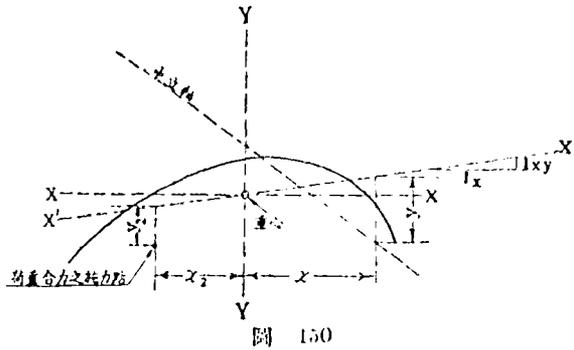
$$x_1 x_2 = p_x^2 \quad \text{及} \quad y_1 y_2 = p_y^2 \dots\dots\dots (201)$$

關於中立軸之位置，有一通式如下。(見上開 Hardy Cross 氏所著之 The Column Analogy.)

$$\frac{1}{A} + \frac{x_2}{I'_x} \cdot x + \frac{y_2}{I'_y} \cdot y = 0 \dots\dots\dots (202)$$

上式中之  $x$  及  $y$  為中立軸中某某點之縱橫距。

$x_2$  及  $y_2$  為荷重合力之施力點之縱橫距。



$x_1$  及  $x_2$  係由重心軸  $YY$  向左或向右橫平量之。

$y_1$  及  $y_2$  係由  $X'Y'$  軸向上或向下，垂直量之。

$X'Y'$  軸之位置，

由其傾度  $\frac{I_{xy}}{I_x}$  決定之，如圖 150 所示。

讀者注意，在重心處

之纖維應力適等於  $\frac{P}{A}$ 。

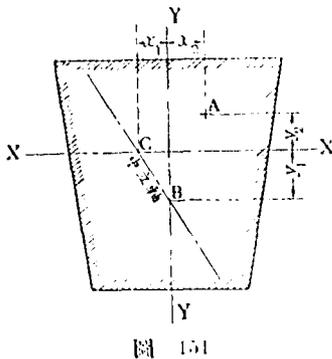
101. 核心 Kern. 凡在對稱的截面之中，荷重施力點在 A，其

縱橫距為  $x_2$  及  $y_2$ ，欲使重心軸  $YY$  中之 B 點處之應力，及重心軸  $XX$  中之 C 點處之應力等於零，(如圖 151)，祇須合乎下開條件，即

$$y_1 y_2 = \rho_y^2 \quad \text{及} \quad x_1 x_2 = \rho_x^2$$

上式中之  $\rho_y$  及  $\rho_x$  為該截面對於各該

軸之旋轉半徑，即  $\rho_y^2 = \frac{I_y}{A}$  及  $\rho_x^2 = \frac{I_x}{A}$ 。



上開兩式 [即 (201) 式]，於計算撓屈問題中，常遇及之，可謂之曰荷重與無應力點間之核心的關係 Kern Relation between Load and Point of Zero Stress. 由上述之 B, C 兩點，自即可以決定 A 點受有荷重時該截面之中立軸之位置。

上述之關係，可以決定該截面之核心，此項核心，蓋即該截面中之一部份的範圍，如欲使截面中任何點處，皆不發生拉力，則其所受荷重之施力點，不得出此範圍也，關於此項核心，從前頗多研究，例

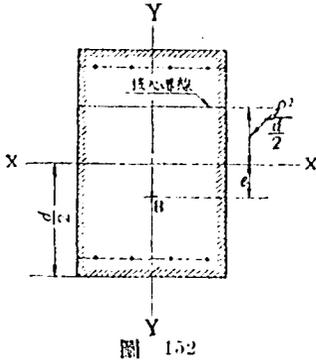


圖 152

如矩形截面之中央三分之一，即為常遇及之核心，在本章所述之各撓屈公式，時或可書作對於核心界線（或界點）之力率。

設有一個鋼筋混凝土截面，如圖 152 B 點受有荷重，欲求 A 點之應力，（假定 B 點所居之位置，能使該截面中任何點，皆不發生拉力。）

$$f_A = \frac{P}{A} + \frac{Pec}{I} = \frac{P}{A} \left( 1 + \frac{e \cdot \frac{d}{2}}{\frac{\rho^2}{2}} \right) = \frac{P \cdot \frac{d}{2}}{A \rho^2} \left( \frac{\rho^2}{d} + e \right)$$

上式中之 A 及 I，為將鋼筋折合混凝土後之改換截面面積及慣性率。

該截面核心界與重心之距離為  $\frac{\rho^2}{3d}$ ，故

$$f_A = \frac{P \cdot \frac{d}{2}}{A \rho^2} \left( \frac{\rho^2}{\frac{3}{2}d} + e \right) = \frac{M_k \cdot \frac{d}{2}}{I} \dots \dots \dots (203)$$

此式中之， $M_k$ ，即為荷重對於核心界之力率 Moment of the load about the kern point.

上式又可書作  $f_A = \frac{P}{A} \cdot \frac{e_k}{\frac{\rho^2}{N_A}} \dots \dots \dots (204)$

其中,  $P$  為所受荷重.

$A$  為該截面之面積.

$e$  為荷重對於核心界之偏心率 Eccentricity.

$\frac{P^2}{X_1}$  為核心界與重心之距離.

(204) 式, 時或可利用之, 以作圖解, 如圖 153. 由重心  $G$  點, 量得  $C$  點, 使  $CG = \frac{R}{A}$  ( $R$  為所受荷重之合力,) 由  $C$  點經核心界  $D$  及  $E$  點, 作兩線, 使與  $R$  力線相交, 此兩截距, 即等於與各該核心界相當之外面纖維應力的, 如圖所示.

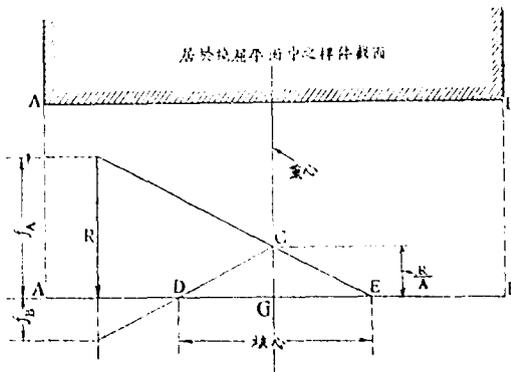


圖 153

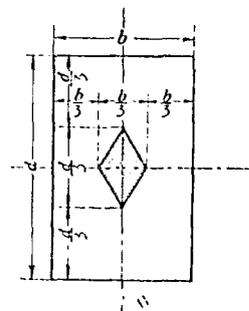


圖 153 A

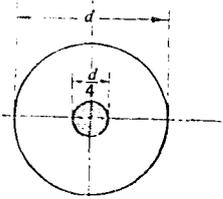


圖 153 B

圖 153 A 及圖 153 B, 示矩形及圓形截面之核心, 以備讀者參攷。

102. 壓柱比擬法所用彎率之正負號, Hardy Cross 教授所主張者, 凡彎率之能使架構或拱之下面或裏面纖維發生拉力者為正, 反之則為負, 此與第 84 節所述該教授之主張相同, 惟架構右方立柱中之號, 則與第 84 節所主張者適相反。

本章所述計算方法, 大都以 Cross 教授所舉各例為藍本, 關於此項正負號, 未便改動, 茲仍沿用其規定, 但所得結果之號, 自不能與前三章相同, 讀者如利用壓柱比擬法所得之結果, 以施行分配彎率, 自須酌加修正, 然後如法分配之可也。

103. 施用壓柱比擬法時之列表計算, 計算之時, 最好列表為之, 庶幾按步進行, 不易發生錯誤, 此項表式, 如表 41A 及表 41B 所示, 若  $x, y, x_0, y_0$  皆用其相當之正負號, 且若其靜定彎率  $m_0$ , 按照第 102 節所開, 採用相當之正負號, 則兩表中其他各數量之號, 自可隨計算而得之。

表中所列各步驟如下, (1) 填入已知各數量及所受荷重, (2) 推算所需各數量, (3) 求得各總和, (4), (5) 及 (6), 對於重心軸, 作各種修正, 若係不對稱的截面, 亦須作相當修正, 然後計算所求各數量。

入手之時, 可隨計算者之便利, 任意假定縱橫兩軸之位置, 而得  $x, y, x_0, y_0$  之數值, 此項縱橫距, 以向上者及向右者為正, 反之則為負。

讀者注意, 計算不對稱的截面, 比之對稱者, 並不特別困難, 不過多添兩個步驟而已, 但在不對稱的截面, 則所需逐一計算數量之桿件數, 約加增一倍。

壓 柱 比 擬  
解 算 對 稱 結 構 之 表 式

表 a 41A 續

截 面 性 質							截 面 所 受 荷 重								
(1) 已 知 性 質				(2) 算 得 性 質				(1) 已 知			(2) 算 得				
				靜 定 力 率		慣 性 率									
桿 件	長 度 L	寬 度 $\frac{1}{I}$	面 積 $\frac{L}{I} = a$	x	y	ax	ay	$ax^2 + i_x$	$ay^2 + i_y$	荷 重	荷 重 之 坐 標		力 率		
										$p = m_1 a$	$x_2$	$y_2$	$m_x = p x_2$	$m_y = p y_2$	
(3) 總和			A			$A\bar{x}$	$A\bar{y}$	✓	✓	P			✓	✓	
(4) 重心之位置			$\begin{cases} \bar{x} = A\bar{x} \div A \\ \bar{y} = A\bar{y} \div A \end{cases}$		✓	✓									
(5) 對於重心軸之修正量								$Ax^2$	$Ay^2$				$Px$	$Py$	
(6) 減去修正量								$I_x$	$I_y$				$M_x$	$M_y$	
由右列各 公式計算 彎率或外 力。	(7)		$m_i = \frac{P}{A} + \frac{M_x}{I_x} x + \frac{M_y}{I_y} y$				$M = m_1 - m_i$			不靜定外力 F 之截距					
			$v_i = \frac{M_x}{I_x}$				$V = v_1 - v_i$			$x_1 = -\frac{P}{A} \div \frac{M_x}{I_x}$				$y_1 = -\frac{P}{A} \div \frac{M_y}{I_y}$	
			$h_i = \frac{M_y}{I_y}$				$H = h_1 - h_i$								

壓 柱 比 擬

解算不對稱結構之表式

表 41B 表

截 面 性 質										截 面 所 受 荷 重					
(1) 已 知 性 質						(2) 算 得 性 質				(1) 已 知			(2) 算 得		
						靜 定 力 率		慣 性 率 及 慣 性 積							
桿 件	長 度 $L$	寬 度 $\frac{1}{l}$	面 積 $\frac{L}{l} = a$	$x$	$y$	$ax$	$ay$	$ax^2 + i_x$	$ay^2 + i_y$	$axy + i_{xy}$	荷 重		力 率		
											$p = m, a$	$x_2$	$x_2$	$m_x = px_2$	$m_y = py_2$
(3) 總和			$A$			$Ax$	$Ay$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$P$		$\checkmark$	$\checkmark$	
(4) 重心之位置	$\bar{x} = \frac{Ax}{A}$ $\bar{y} = \frac{Ay}{A}$			$\checkmark$	$\checkmark$										
(5) 對於重心軸之修正								$A\bar{x}^2$	$A\bar{y}^2$	$A\bar{x}\bar{y}$			$P\bar{x}$	$P\bar{y}$	
(6) 減去修正量								$I_x$	$I_y$	$I_{xy}$			$M_x$	$M_y$	
(7) 因不對稱而生之修正								$\frac{I_{xy}}{I_y} \cdot I_{xy}$	$\frac{I_{xy}}{I_x} \cdot I_{xy}$				$\frac{M_y}{I_y} \cdot I_{xy}$	$\frac{M_x}{I_x} \cdot I_{xy}$	
(8) 減去修正量								$I'_x$	$I'_y$				$M'_x$	$M'_y$	
(9)	$m_i = \frac{P}{A} + \frac{M'_x}{I'_x} x + \frac{M'_y}{I'_y} y$					$M = m_i - m_i$				不靜定外力 $F$ 之截距					
由右列各 公式計算 靜定或外 力。	$v_i = \frac{M'_x}{I'_x}$					$V = v_i - v_i$				$x_1 = -\frac{P}{A} + \frac{M'_x}{I'_x}$				$y_1 = -\frac{P}{A} + \frac{M'_y}{I'_y}$	
	$h_i = \frac{M'_y}{I'_y}$					$H = h_i - h_i$									

104. 施用壓柱比擬法所用彎率曲線圖之選擇 任何彎率曲線圖之不與荷重相接觸者，皆可用之於壓柱比擬法，但有某某彎率曲線圖，較為便利合用，茲於圖 154 中，標示若干，以便隨意採用。

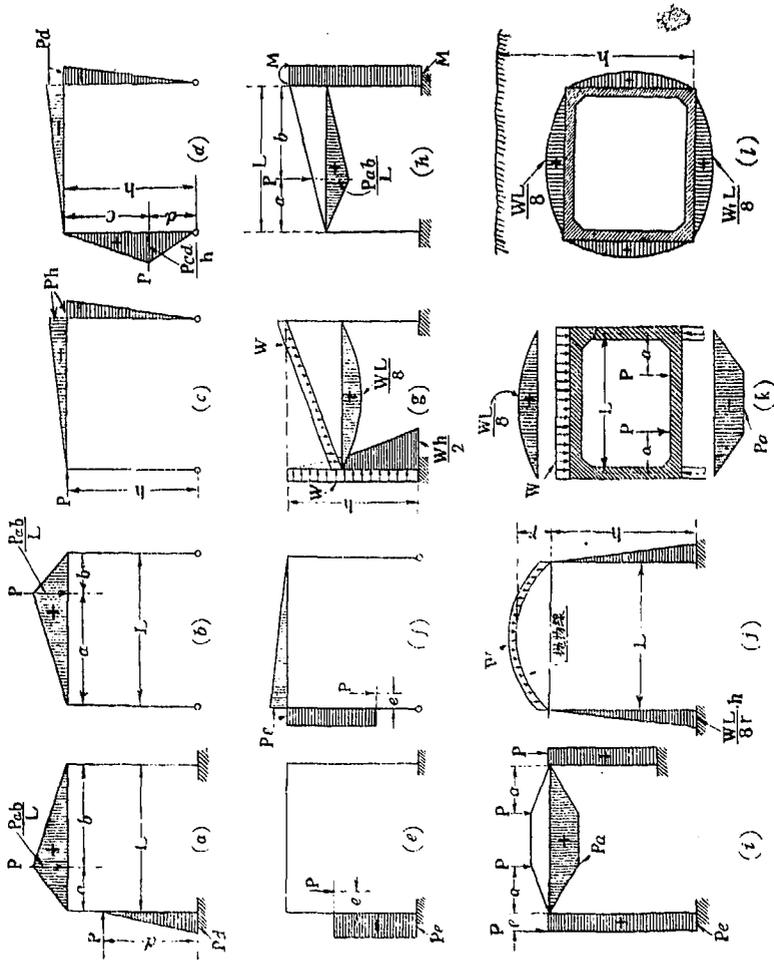


圖 154

在上列各圖中，所需各彎率，祇限於各主要桿件，其若(e),(f),(i)等圖中各突出懸臂之彎率，以及(g)圖中以虛線表示之一部份彎率，於此項解算，無甚關係，(h)圖中之上角彎率  $M$ ，係屬一個已知量，例如某懸臂所發生之彎率，此懸臂並未示於該圖中，(j)圖中所給示之等佈荷重彎率曲線，係假設該拋物線形桿件中並無彎率，若彎率曲線圖，及該桿件本身，具有同一形狀，則此層自屬可能。

105. 樞結點。鋼筋混凝土結構之中，雖不常遇有樞結點，然亦間或有之，如有此項樞結點，其處理之法如下。

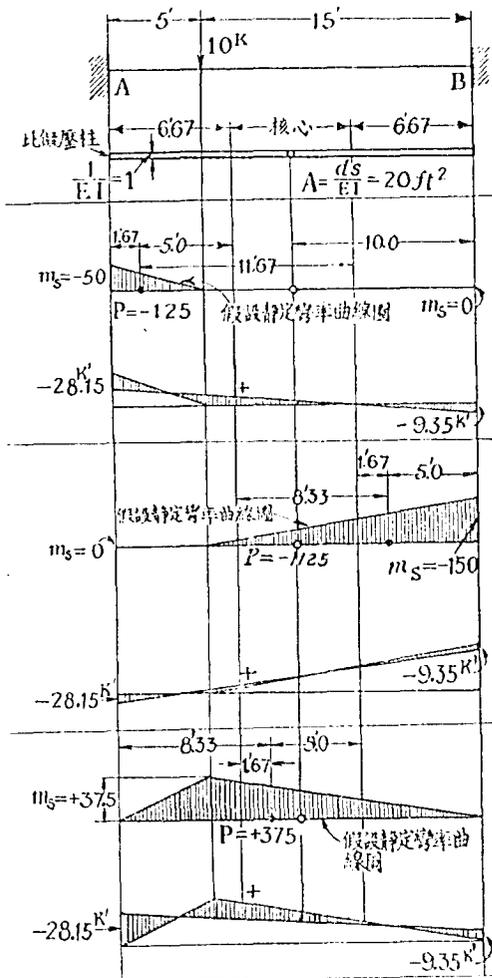
壓柱比擬法所用之極微面積  $\frac{ds}{EI}$ ，蓋為甚短桿身受有單位彎率時之撓角，若有一個無摩擦阻力之樞結點，連續的受有同一彎率，則其撓角可大至無限，故在壓柱比擬法中，樞結點在比擬壓柱中之相當面積，可作為無窮大，(即等於  $\infty$  也)，(參閱第 106 節例題四)。

106. 解算舉例。

例題一，圖 155 表示如何用三個不同的方法，以求得一桿件之兩固定端彎率，(桿件之慣性率為通體一致者)。

由以上所舉之例，可見靜定彎率曲線圖，可以任意選取，其所得最後結果，皆必相同。

例題二，圖 156，表示如何解算一個對稱加腰梁之受有等佈荷重者，並推算一端旋轉時之兩端彎率，易言之，即推算該梁之剛率及傳達因子也。



第一法. 左方作為懸臂.

第二法. 右方作為懸臂.

第三法. 全桿作為簡梁.

$$I_o = \frac{1}{12} \times 20 \times 20^3 = 667 \text{ ft}^4 \quad x = 10'$$

圖中之  $\circ$  表示壓柱之重心,  $\bullet$  表示  $P$  之重心.

第一法.  $m_i = \frac{P}{A} \pm \frac{Mx}{I_o}$ , 亦即  $m_i = \frac{M_k \cdot x}{I_o}$

$$\begin{aligned} \text{A 端. } m_i &= \frac{-125 \times (-11.67) \times (-10)}{667} \text{ 故 } M_A = -50 - (-21.85) \\ &= -21.85 \text{ k'ft} \qquad \qquad \qquad = -28.15 \text{ k'ft} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B 端. } m_i &= \frac{-125 \times (-5) \times (+10)}{667} \text{ 故 } M_B = 0 - (+9.35) \\ &= +9.35 \text{ k'ft} \qquad \qquad \qquad = -9.35 \text{ k'ft} \end{aligned}$$

第二法.

$$\begin{aligned} \text{A 端. } m_i &= \frac{-1125 \times (+1.67) \times (-10)}{667} \text{ 故 } M_A = 0 - (+28.15) \\ &= +28.15 \text{ k'ft} \qquad \qquad \qquad = -28.15 \text{ k'ft} \end{aligned}$$

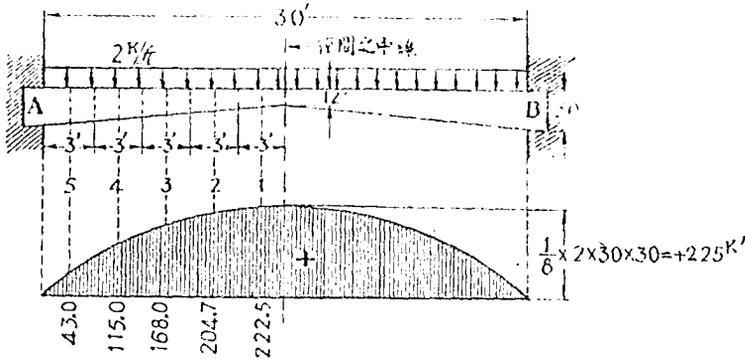
$$\begin{aligned} \text{B 端. } m_i &= \frac{-1125 \times (+8.33) \times (+10)}{667} \text{ 故 } M_B = -150 - (-140.65) \\ &= -140.65 \text{ k'ft} \qquad \qquad \qquad = -9.35 \text{ k'ft} \end{aligned}$$

第三法.

$$\begin{aligned} \text{A 端. } m_i &= \frac{+375 \times (-5) \times (-10)}{667} \text{ 故 } M_A = 0 - (+28.15) \\ &= +28.15 \text{ k'ft} \qquad \qquad \qquad = -28.15 \text{ k'ft} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B 端. } m_i &= \frac{+375 \times (+1.67) \times (+10)}{667} \text{ 故 } M_B = 0 - (+9.35) \\ &= +9.35 \text{ k'ft} \qquad \qquad \qquad = -9.35 \text{ k'ft} \end{aligned}$$

圖 155



截面	長度 $l$ ft.	深度 $d$ ft.	$x$	$a$	$ax^2 + i_x$	$m_x$	$P$	說 明
1	3	1.15	$\pm 1.5$	1.97	$\begin{matrix} 4.43 \\ 7.47 \end{matrix}$	+222.5	+438	a = $12 \cdot \frac{I_x}{d^3}$ 故在此計算中, 寬度 b 作為 $i_x'$ , B 作 為 1
2	3	1.45	$\pm 4.5$	0.98	$\begin{matrix} 19.80 \\ 0.73 \end{matrix}$	+204.7	+260	
3	3	1.75	$\pm 7.5$	0.56	$\begin{matrix} 31.50 \\ 0.42 \end{matrix}$	+168.0	+94	
4	3	2.05	$\pm 10.5$	0.35	$\begin{matrix} 38.05 \\ 0.26 \end{matrix}$	+115.0	+40	
5	3	2.35	$\pm 13.5$	0.23	$\begin{matrix} 41.90 \\ 0.17 \end{matrix}$	+43.0	+10	
				4.09	139.33		+782	
以二乘之, 得				8.18	278.7			

$$m_{ix} \times m_{ix} = \frac{+782}{4.09} = +191 K'$$

[ 縱軸 YY 與中線重合, 故  $M_x = 0$ .  
橫軸經過 A, B 兩點, 故  $y = 0$ . ]

$$M_x = M_{ix} - m_x - m_j = 0 - (+191) = -191 K'$$

若 A 端旋轉一單位，可於此樁柱之 A 端 使受有單位荷重，而求所需以發生單位  
 撓角之彎矩。

$$m_{1A} = \frac{1}{8.18} + \frac{(-15)(-15)}{278.7} = 1.029 \quad (\text{此即 AB 桿件之剛率})$$

$$m_{1B} = \frac{1}{8.18} + \frac{(-15)(+15)}{278.7} = -0.687$$

設  $m_{1A}$  所需以旋轉 A 端使成一單位撓角之 A 端彎矩。

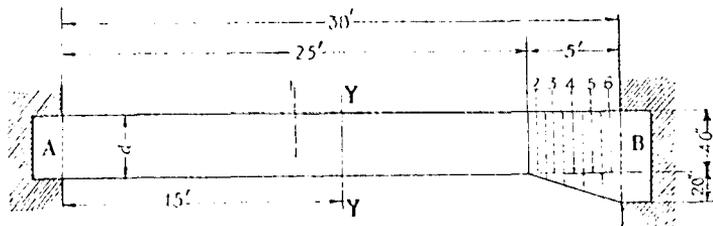
$m_{1B}$  A 端旋轉成單位撓角時，B 端因受有約束而生之彎矩。

$$\text{則} \quad \frac{m_{1B}}{m_{1A}} = \frac{-0.687}{1.029} = -0.74 \quad (\text{此即 A 端之傳達因子})$$

(亦即 B 端之傳達因子，以其為對稱的桿件也)

圖 156 (續)

例題三。圖 157 表示如何解算一個不對稱的加腰梁，求其於  
 任一端旋轉時，兩端所發生之彎矩。



截 面	長度 L ft.	深度 d ft.	x	a	ax	$ax^2 + i_x$	說 明	
1	25	3.33	- 2.5	8.15	- 20.4	51 .425	$a = \frac{1}{12} \cdot \frac{L}{d^3}$	
2	1	3.50	+ 10.5	0.23	+ 2.9	31 0		
3	1	3.83	+ 11.5	0.21	+ 2.4	28 0		
4	1	4.16	+ 12.5	0.17	+ 2.1	27 0		
5	1	4.50	+ 13.5	0.13	+ 1.8	24 0		
6	1	4.83	+ 14.5	0.11	+ 1.6	23 0		
					9.05	- 9.6	609	$E = 1$
			- 1.06				10	
				9.05			599	

圖 157 (未完)

(a) 設 A 端旋轉一個單位撓角。令比擬樁柱之 A 點受有單位荷重。

$$m_A = \frac{1}{9.05} + \frac{(-13.9) \times (-13.9)}{599} = +0.433 \quad \left[ \begin{array}{l} \text{此爲所需以旋轉 A 端一個單} \\ \text{位撓角之 A 端彎率, 亦即 AB} \\ \text{桿件在 A 端之剛率.} \end{array} \right]$$

$$m_B = \frac{1}{9.05} + \frac{(-13.9) \times (+16.1)}{599} = -0.263 \quad \left[ \begin{array}{l} \text{此爲受有約束的 B 端之彎率.} \end{array} \right]$$

故若 A 端受有任何彎率, 或旋轉成任何撓角, 則

$$\frac{m_B}{m_A} = \frac{-0.263}{+0.433} = -0.605 \quad \left[ \begin{array}{l} \text{此即 A 端之傳達因子} \end{array} \right]$$

(b) 設 B 端旋轉一個單位撓角。令比擬樁柱之 B 點, 受有單位荷重。

$$m_B = \frac{1}{9.05} + \frac{(+16.1)(+16.1)}{599} = +0.544 \quad \left[ \begin{array}{l} \text{此爲所需以旋轉 B 端一個單位} \\ \text{撓角之 B 端彎率, 亦即 AB 桿} \\ \text{件在 B 端之剛率.} \end{array} \right]$$

$$m_A = \frac{1}{9.05} + \frac{(+16.1)(-13.9)}{599} = -0.263 \quad \left[ \begin{array}{l} \text{此爲受有約束的 A 端之彎率.} \end{array} \right]$$

故若 B 端受有任何彎率, 或旋轉成任何撓角, 則

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{-0.263}{+0.544} = -0.484 \quad \left[ \begin{array}{l} \text{此即 B 端之傳達因子.} \end{array} \right]$$

圖 157 (續)

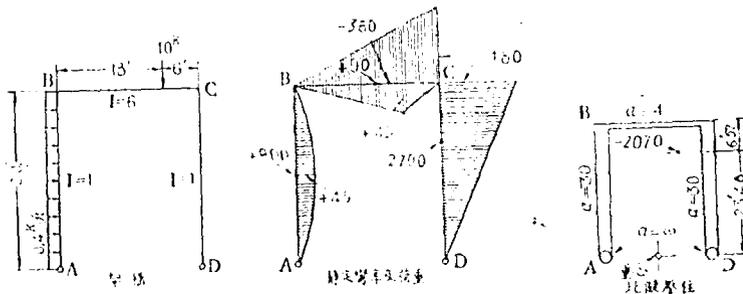
由此例題之演算觀之, 可見凡在不對稱的桿件, 其兩端之剛率不相同, 其兩端之傳達因子亦不相同。[注意, 例題二及例題三所得傳達因子, 皆爲負數, 因沿用 Cross 氏彎率正負號意義之故。]

若桿件曲面不直, 亦可做照上列兩例題之解法, 以求得其剛率及傳達因子。

例題四. 圖 158 表示一個樞足架構兼受垂直及橫平荷重者之解法.

讀者注意, 樞結點處之惰性率, 作為等於零, 故其彈性面積 Elastic Areas (即比樞壓柱中之相當面積) 作為無窮大, 如是則彈性面積之總和, 為無窮大, 該面積對於縱軸之惰性率 ( $I_x$ ), 亦為無窮大, 而橫平的重心軸即經過此兩個樞結點. (參閱第 105 節).

關於垂直荷重所取之彎率曲線圖, 係將橫梁作為一個簡梁, 關於橫平荷重所取之彎率曲線圖, 係假設 B 點為一個樞結點, 與 A, D, 兩點相同.

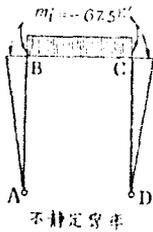


a	重心之 y	ay <sup>2</sup>	I <sub>o</sub>	m	P = m̄a	P 與架頂之距 y'	Py'
2 × 30	15	13500	4500	+ 45	+ 900	15	+ 13500
				- 180	- 2700	10	- 27000
4	30	3600	0	+ 45	+ 90	0	0
				- 180	- 360	0	0
I <sub>y</sub> = ay <sup>2</sup> + I <sub>o</sub>		$\frac{17100}{21600}$	4500		- 2070	6.52*	- 13500

$$\begin{aligned} &= \frac{-13500}{-2070} \end{aligned}$$

$$m_{iB} = m_{iC} = \frac{-2070 \times (+23.48) \times (+30)}{21600} = -67.5$$

圖 158 (未完)



$$M_B = 0 - (-67.5) = +67.5^k$$

$$M_C = -180 - (-67.5) = -112.5^k$$

$$M_A = M_D = 0$$

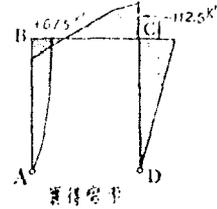


圖 158 (續)

茲就上文所得結果，求得各個結點處之橫平及垂直反力如下。

$$H_D := \frac{-112.5}{30} = -3.75^k \text{ (向左)} \quad H_A = 0.4 \times 30 - 3.75 = 8.25^k \text{ (向右)}$$

$$V_D := \frac{67.5 \times 10 + 18 + 3.75 \times 30}{24} = 15^k \text{ (向上)} \quad V_A = 15 - 10 = 5^k \text{ (向下)}$$

例題五 圖 159 所示者，為一個不對稱的架構，受有若干垂直荷重，所試取之縱軸，居於兩立柱之中央，而橫軸則經過桿件 a 之中心。

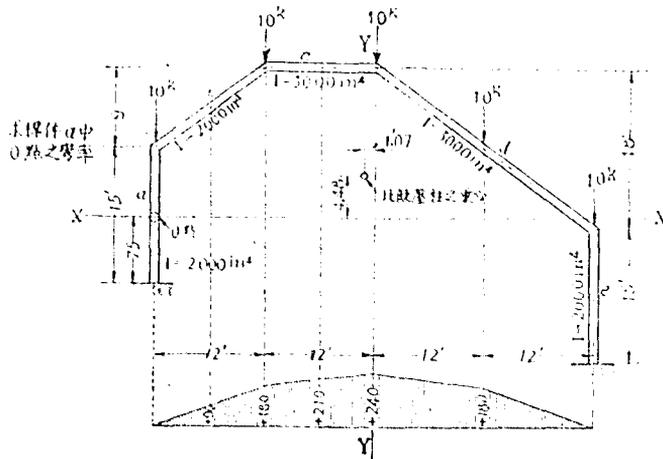


圖 159 (未完)

## 剛 構 解 法

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
桿件	長度 1000in'	a	x	ax	$ax^2 + ix$	y	ay	$ay^2 + iy$	$axy + ixy$	$m_i$	$v_i$	$h_i$	P	$M_x$	$M_y$
a	15	2	7.5	-24	-180	4320 0	0	0	0 140						
b	15	2	7.5	-18	-135	2430 90	+12	+90	1080 51	-1620 +68	+90	+15	+675	-10800	+9110
c	12	3	4.0	-6	-24	144 48	+16.5	+66	1090 0	-397 0	+210	+5	+840	-4800	+13860
d	30	3	10.0	+12	+120	1440 480	+7.5	+75	562 270	+900 -360	+180	-10	+1500	+13200	+14850
e	15	2	7.5	+24	+180	4320 0	-9.0	-67.5	603 140	-1620 0					
		A = 36.5		-39	13272 42	+163.5	3941 732	-3029 175					+3015	-2400 -3230	+37820 +13510
			-1.07 *-22.93		$I_x = 13230$ 2530	*-4.48	$I_y = 3209$ 614	-2854 = $I_{xy}$						+830 -21620	+24310 -180
					$I'_x = 10700$		$I'_y = 2595$							$M'_x = +22450$	+24490 = $M'_y$

\* 0 點之坐標為  $x = -24.0$ ,  $y = 0$ .

$$m_{s_0} = 0$$

$$m_{i_0} = \frac{3015}{36.5} + \frac{(+22450)(-22.93)}{10700} + \frac{(+24490)(-4.48)}{2595} = -7.84'$$

$$M_0 = 0 - (-7.8) = +7.84'$$

圖 159 (續)

上圖中計算各個數量之方法，均按照本章所述者為之，讀者細加玩索，自能領會，茲不逐一加以註釋。

其因不對稱而生之修正，可釋明如下。

$$\text{第 六 行 中 } I_x \text{ 之修正量, } I_{xy} \cdot \frac{I_{yy}}{I_y} = (-2854) \left( \frac{-2854}{3209} \right) = +2530.$$

$$\text{第 十 五 行 中 } M_x \text{ 之修正量, } M_y \cdot \frac{I_{yy}}{I_y} = (+24310) \left( \frac{-2854}{3209} \right) = -21620.$$

$$\text{第 九 行 中 } I_y \text{ 之修正量, } I_{xy} \cdot \frac{I_{xx}}{I_x} = (-2854) \left( \frac{-2854}{13230} \right) = +614.$$

$$\text{第 十 六 行 中 } M_y \text{ 之修正量, } M_x \cdot \frac{I_{xx}}{I_x} = (+830) \left( \frac{-2854}{13230} \right) = -180.$$

將此等修正量，分別由  $I_x, M_x, I_y, M_y$  中減去，即得  $I_x', M_x', I_y', M_y'$ 。

如是則任何點處（例如 0 點）之彎率，可由  $M = m_s - m_i$  求得之，如圖所示。

關於用壓柱比擬法，推算定足架構、樞足架構，及閉合架構中各點之彎率，R. A. Caughey 教授曾作一文，詳述解算之法，並以數字實行計算，其法與上述者完全相同。此文載於美國土木工師學會 1941 年五月出版之 Civil Engineering 雜誌第 294 頁至第 297 頁，讀者參閱之可也。

以上所舉例題凡五則，讀者如果詳加玩味，悉能了解，則壓柱比擬法之應用，當必思過半矣。[第二十章所述解算鋼筋混凝土拱之法，更足以闡明壓柱比擬法之應用]。

## 第二十章 鋼筋混凝土拱之解法 ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE ARCHES.

### 甲. 單拱. Single-Span Arches.

107. 緒言. 拱有三個拱, 雙樞拱, 無樞拱之分, 三個拱為靜定結構. 不在本書範圍之內, 雙樞拱多以鋼為之, 若鋼筋混凝土拱, 則大都為無樞拱, 即兩端固定之拱, 本章所述, 以鋼筋混凝土無樞拱為限, 讀者若果明白了解, 即遇全鋼雙樞拱, 亦儘可仿照本章所述者, 略加變通, 以從事於解算.

拱又有正拱 Right Arch 邪拱 Skew Arch 之分, 邪拱頗不多見, 其解法較為繁雜. 本章所述, 限於正拱, 即該拱之橋台 Abutments 與順沿橋身之中線 Longitudinal Axis of the Bridge 成直角者.

解算拱橋之法, 多不勝數, 大都失之於學理過奧, 或計算過繁, 實際採用, 諸多不便, 本章所述, 取材於 Cross and Morgan 兩教授合著之 Continuous Frames of Reinforced Concrete 第九章 (1932 年版), 編者認為此法, 最易了解, 亦最易布算, 故節述如下, 讀者如欲知其詳, 取原書第九章全文而研讀之可也. 此外尚有 C.B. McCullough 氏所著, 關於拱橋解法, 亦頗詳盡, 惟學理較奧, 計算較繁耳, 見 Hool and Kinne 兩教授合編之 Reinforced Concrete and Masonry Structures 自第 433 頁至第 529 頁 (1924 年版).

108. 解算概要. 解算拱橋中各項應力, 在乎推算各個反力 (或

即推算各個內部彎率)，俾能滿足靜力學各定律，並能滿足幾何學各條件，其所用各方程式之究為何式，以及解算之時，引用各該式之程序，儘可隨宜變化，不必拘泥也。

若拱軸之曲線，可以一個單簡方程式表示之，且順沿該軸各截面之惰性率之變易，亦可以一個單簡方程式表示之，則或可利用微積學，以得所求各數值之通用公式，例如拱軸為一個拋物線， $(y=ax^2)$ ，而  $I \propto \frac{ds}{dx}$  ( $ds$  為拱軸甚短部分之長， $dx$  為  $ds$  投射於橫平面之長)，則所有各項，均可求得其積分，而所得各公式，亦屬簡便易用，又若拱軸為圓弧，而沿軸各截面之惰性率，為不變之常數，則各式亦可求得其積分，但不甚單簡便用耳。

為一般的研究起見，此等數學公式，時或頗有效用，且足以表現一般的關係，但實際建築之拱橋，大抵既非拋物線，亦非圓弧，且沿軸各惰性率之變易，亦甚為複雜而並不單簡，如是則求積之法不可用，而必出之以分段求和之法 Summation in place of integration.

分段求和，計有三法，(1) 將拱軸分為等份，(即  $\Delta s$  為常數)，(2) 使各段之長，與其惰性率成正比，(即  $\frac{\Delta s}{I}$  為常數)，(3) 使各段之橫平投影為常數，(即  $\Delta x$  為常數)，此諸法曾經各著者分別採用。

第一法令各段之長為常數，似並無任何優點。

第二法令  $\frac{\Delta s}{I}$  為常數，曾經多人採用，其優點為求和所用之單位，亦為常數，但實行分段之時，必須特作某種圖解，此其缺點也，且鄰近起拱處 springing 各截面之惰性率甚大，故所分各段之軸長， $\Delta s$ ，

亦必隨之而加長，如是則所得結果，自難期其精密，欲免此項困難，固可將此等甚長之段，覆加割截，俾成較短之段，但作法亦因而加繁，故此法擬不予採用。

本章所用者為第三法，即令  $\Delta x$  為常數是也，採用此法，則各段極易於割截，且其所得各個  $x$  之數值，與 1, 3, 5, 7 等奇數，成正比，亦極便於應用。

本章所述之解法，係以壓柱比擬法為根據（參閱第十九章）。

為推算拱身荷重時所發生之應力起見，可先慎選一種靜定變率曲線，俾與所受各荷重不相抵觸，此等曲線，多不勝計，所選取者，自必力求其單簡便用。

若欲推求各項應力之由於 (1) 溫度變更 Changes of Temperature, (2) 收縮 Shrinkage, (3) 拱肋縮短 Rib-shortening, (拱肋因受有軸向壓力而縮短)，或 (4) 橋台移動 Abutment Movements 者，祇須假設該拱環不受橋台之約束，得以自由移動，並推算其因有各該原因而發生之移動量。

109. 對稱拱中因荷重而生之變率，靜定變率或反力，既用上述之相當曲線，而極易求得，所尚須推算者，厥惟因有橋台之約束，而發生之變率變更量（即不靜定變率）或反力變更量（即不靜定反力）耳。

按照壓柱比擬法所用之符號及術名，凡在任何點之變率變更量，可由下開之撓屈通式推得之，（參閱第十九章）。

如係不對稱拱，

$$f = \frac{P}{A} + \frac{M'_x}{I'_x} \cdot x + \frac{M'_y}{I'_y} \cdot y,$$

如係對稱拱，則化爲  $f = \frac{P}{\Lambda} + \frac{M'_x}{I'_x} \cdot x + \frac{M'_y}{I'_y} \cdot y$ . [刪去  $M$  及  $I$  右上方之']

先就較爲常見之對稱拱言之，上列式中各項目之定義如下。

$f$  爲因有橋台約束而生之彎率變更量。

$x$  及  $y$  爲所欲求得彎率變更量之任何點之橫距及縱距，其起量各該坐標之縱橫軸，經過該拱之彈性重心，Elastic Centroid，此項彈性重心，具如下文所規定。

$P$  爲比擬壓柱所受之彈性荷重總和，其值  $= \Sigma ma$ 。

此式中之  $m$  爲按照所假設之靜定彎率曲線，而推得各段之靜定彎率。

$a$  爲彈性面積 (Elastic Area)，即各該段之長，爲其慣性率所除得之數，亦即  $\frac{\Delta s}{I}$ ，上述之  $m$ ，即作用於此面積，(此指比擬壓柱而言)。

$M_x$  爲上述彈性荷重順沿  $X$  軸之靜定彎率，其值  $= \Sigma max$ 。

$M_y$  爲上述彈性荷重順沿  $Y$  軸之靜定彎率，其值  $= \Sigma may$ 。

$\Lambda = \Sigma a$  (即各個彈性面積之總和，亦即比擬壓柱之截面總面積)。

$I_x = \Sigma ax^2$  (即比擬壓柱全截面對於  $Y$  軸之慣性率)。

$I_y = \Sigma ay^2$  (即比擬壓柱全截面對於  $X$  軸之慣性率)。

拱環之性質，可由各段的  $a$ ,  $x$ ,  $y$  之數值而確定之，由此諸數值，可算得  $\Sigma a$ ,  $\Sigma ax^2$  及  $\Sigma ay^2$  之數值，各個彈性荷重，可由各段所受之靜定彎率 (即  $m$ ) 求得之，其性質則由  $\Sigma ma$ ,  $\Sigma max$ , 及  $\Sigma may$  確定之。

全截面彈性重心之位置，由  $\Sigma ax=0$  及  $\Sigma ay=0$  確定之，初入手之

時，此項重心之垂直的位置，並未先知，（因係對稱拱，其橫平的位置，必居於垂直對稱軸之中，故為已知者。）可先任取一便利合用之橫平線，作為 X 軸，然後推算該重心之位置，而將算得各數值，按照橫平重心軸之位置而修正之。

110. 對稱拱中因荷重而生之反力，若欲先求反力，然後由壓力線 Pressure Line 求得彎率，（此法用於解算拱橋，常覺較為便利。）則初繪壓力線之時，本已假定其反力，今祇須用下式，求得反力變更量。

$$v_i = \frac{M_x}{I_x} \quad \text{及} \quad h_i = \frac{M_y}{I_y}, \quad [\text{此即 (197) 式}]$$

並由下式，求得該反力作用線在縱橫軸之截距 Intercepts（參閱圖 160）

$$x_i = -\frac{P}{\Delta v_i} \quad \text{或} \quad y_i = -\frac{P}{\Delta h_i}, \quad [\text{此即 (200) 式}]$$

繪入該壓力線。

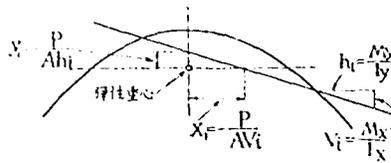


圖 160

111. 對稱拱中因溫度變更等等而生之彎率及反力，計算方法，與因荷重而生者相同，惟其彈性荷重，則為順沿 Y 軸之彎率，等於由各該情形而生之徑間變更量 Change of Span.

凡壓柱比擬法中之直線的變位，可作為等於旋繞一個經過重心

的平行軸之撓屈變率，(參閱第 98 節) 故橫平推力 Horizontal Thrust 之公式如下。

$$H = \frac{M_y}{I_y} \dots \dots \dots (205)$$

若該拱兩端，並無約束，則溫度變更  $t^\circ$ ，可發生橫平變位，其量等於  $\epsilon t^\circ L$ ，[此式中之  $\epsilon$  為混凝土之漲縮係數，(按照溫度變更一度而言)， $L$  為該拱之徑間長] 故因溫度變更而生之橫平推力， $H_t$ ，如下式。

$$H_t = \frac{E \epsilon t^\circ L}{I_y} \quad (E \text{ 為 Young 氏彈性係數}) \dots \dots \dots (206)$$

因拱肋縮短而生之徑間變更量，等於  $f_c L$ ，(此式中之  $f_c$ ，為受有任何荷重時拱肋全身中之平均單位受壓應力)，故其橫平推力， $H_{RS}$ ，如下式。

$$H_{RS} = \frac{f_c L}{I_y} \dots \dots \dots (207)$$

因橫平推力而生之撓率，必等於  $H.y$ ，此式中之  $y$ ，係由經過重心之  $X$  軸至所考慮之點之垂直距離。

若祇為顧及溫度變更與夫拱肋縮短之相當比率起見，亦可由壓柱比假法，直接寫出下列之式，(其中包括  $E$  為其一個因子，此因子於計算  $I_y$  時，常省略不計)。

$$m_i = \frac{\epsilon t t^\circ L y}{I_y} \dots \dots \dots (208)$$

112. 應行計算之數量。下列各數量，有加以考慮之必要，(a)

因死荷重之作用，在拱冠處 Crown，起拱處 Springing，及徑間  $\frac{1}{4}$  點處（此處或多從略）之拱環應力，(b) 因活荷重之作用 在此諸處之最大應力，(c) 因收縮及溫度變更之作用而生之應力，(d) 因橋台移動而可能發生之應力，(e) 基礎之反力。

因死活荷重及變形而拱環中發生之相對的受壓應力，隨各個拱環而大有出入，但若其拱環之尺寸，曾經妥慎規畫，則下開數字，頗可代表一切。

死荷重應力	由於橫平推力者	50%	} 40% 至 60%.
	由於彎率者	甚小	
活荷重應力	由於橫平推力者	5%	} 20% 至 50%.
	由於彎率者	30%	
溫度及收縮應力	由於橫平推力者	甚小	} 5% 至 20%.
	由於彎率者	10%	
合 計		100%.	

其中以死荷重應力，最為確定可靠，其活荷重應力因有若干原因，頗難確定，至若溫度變更及收縮所生之應力，則不能確定之成份更多：

因拱肋縮短而生之應力，常與溫度降低  $15^{\circ}$  至  $20^{\circ}$ （華氏表）者相同，此項應力，惟於其影響及於決定安危之應力者，方有計算之必要。

113. 不對稱拱之彎率及反力，若其拱為不對稱的，則應採用較為普通之撓屈公式，如是則因該拱具有連續性而生之彎率變更量，為

$$f = \frac{P}{A} + \frac{M'_x}{I'_x} \cdot x + \frac{M'_y}{I'_y} \cdot y,$$

上式中之  $M'_x = M_x - M_y \cdot \frac{I_{xy}}{I_y},$

$$M'_y = M_y - M_x \cdot \frac{I_{xy}}{I_x},$$

$$I'_x = I_x - I_{xy} \cdot \frac{I_{xy}}{I_y},$$

$$I'_y = I_y - I_{xy} \cdot \frac{I_{xy}}{I_x},$$

而  $I_{xy} = \sum axy.$

其他各項目，與對稱拱同 見上文所述，

其因有連續性而生之反力變更量，由下式決定之。

$$v_1 = \frac{M'_x}{I'_x}, \text{ 及 } h_1 = \frac{M'_y}{I'_y}. \text{ [即 (197) 式].}$$

此項反力作用線在縱橫兩軸之截距，為

$$x_1 = -\frac{P}{Av_1}, \text{ 及 } y_1 = -\frac{P}{Ah_1}. \text{ [即 (199) 式].}$$

解算不對稱拱，比之解算對稱拱，有不相同者四點，如下所列，

(a)、全拱均須解算，不能僅計算其半。

- (b). 彈性重心之縱橫位置，皆為未知的，而對稱拱之重心縱軸之位置，則為已知的，因其必與對稱軸脗合也。
- (c). 必須計算  $I_{xy}$  之數值。
- (d). 既已求得  $M_x, M_y, I_x, I_y$  之後，必須就不對稱之情狀，作相當之修正，藉以求得  $M'_x, M'_y, I'_x, I'_y$ ，(其修正之法，係利用上列諸式，參閱第十九章，及下文之舉例)。

114. 計算舉例。圖 161 至圖 164，分別詳示如何計算不對稱拱及對稱拱之核心兩界彎率之影響線縱距，及溫度變更之影響，先取不對稱拱，詳加計算，然後取對稱拱，仍用同一表式，藉示何者可以省略不計。

不對稱拱。所解算之拱，如圖 161 所示，其計算方法，具如圖 162 所示，拱軸之徑間為 60 英尺，分為五幅，Panels，每幅為 12 英尺，全拱之聳起量，Rise，共為 20 英尺，其兩橋台頂之高度差，為 15 英尺。

先將拱軸，分成 15 段，每段之橫平投影皆相等。

經過拱軸之最高點，繪縱橫線各一，作為初用縱橫軸。

將該拱已知各性質，逐項列入表中，此諸項可由圖中精密量得之，計為

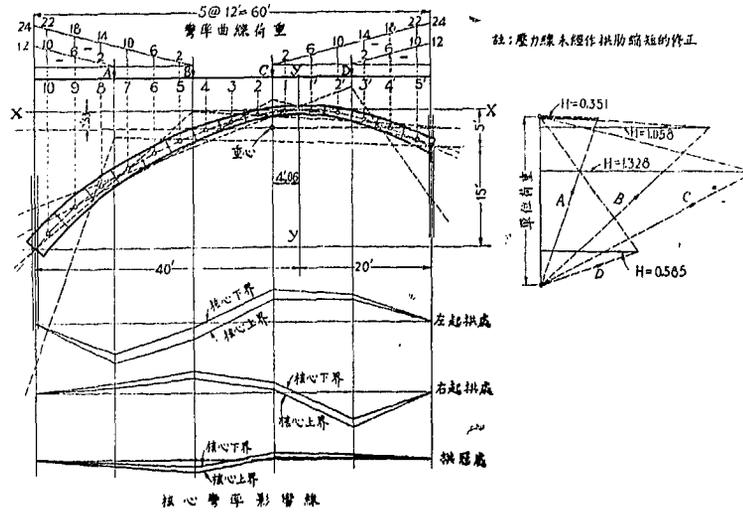


圖 161. (參閱圖 162).

截面各性質											彈性荷重 單位荷重在下開之點																
已知者					算得者						A				B				C				D				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	
號數	L	d	x	y	a	ax	ay	ax <sup>2</sup>	ay <sup>2</sup>	axy	m <sub>x</sub>	P	M <sub>x</sub>	M <sub>y</sub>	m <sub>x</sub>	P	M <sub>x</sub>	M <sub>y</sub>	m <sub>x</sub>	P	M <sub>x</sub>	M <sub>y</sub>	m <sub>x</sub>	P	M <sub>x</sub>	M <sub>y</sub>	
10	5.58	3.34	-38.0	-18.05	0.150	-5.70	-2.71	217	-49.0	+103.0	-10	-1.50	+67.0	+27.1	-22	-3.30	+125.5	+59.5									
9	5.23	3.04	-34.0	-14.45	0.187	-6.36	-2.70	216	-39.0	+91.7	-6	-1.12	+38.0	+16.2	-18	-3.36	+114.1	+48.0									
8	5.00	2.79	-30.0	-11.25	0.231	-6.94	-2.60	208	-29.3	+78.0	-2	-0.46	+13.8	+6.2	-14	-3.24	+97.2	+36.4									
7	4.78	2.54	-26.0	-8.45	0.291	-7.56	-2.46	197	-20.8	+64.0					-10	-2.91	+75.6	+24.6									
6	4.55	2.33	-22.0	-6.05	0.361	-7.93	-2.18	174	-13.2	+48.0					-6	-2.17	+47.7	+13.1									
5	4.45	2.16	-18.0	-4.05	0.443	-7.96	-1.79	143	-7.3	+32.2					-2	-0.89	+16.0	+3.6									
4	4.26	2.00	-14.0	-2.45	0.533	-7.46	-1.31	104	-3.2	+18.3																	
3	4.17	1.83	-10.0	-1.25	0.684	-6.84	-0.85	68	-1.1	+8.5																	
2	4.05	1.67	-6.0	-0.45	0.874	-5.25	-0.39	32	0.2	+2.3																	
1	4.01	1.54	-2.0	-0.05	1.102	-2.21	-0.06	9	0.0	+0.1									-2	-2.21	+4.4	+0.1					
1'	4.01	1.54	+2.0	+0.05	1.102	+2.21	-0.06	-4	0.0	-0.1									-6	-6.61	-13.2	+0.3					
2'	4.05	1.67	+6.0	+0.45	0.874	+5.25	-0.39	32	0.2	-2.3									-10	-8.74	-52.4	+3.9					
3'	4.17	1.83	+10.0	+1.25	0.684	+6.84	-0.85	68	-1.1	-8.5									-14	-9.57	-95.7	+12.0	-2	-1.37	-13.7	+1.7	
4'	4.26	2.00	+14.0	+2.45	0.533	+7.46	-1.31	104	-3.2	-18.3									-18	-9.59	-134.2	+23.5	-6	-3.26	-44.8	+7.8	
5'	4.45	2.16	+18.0	+4.05	0.443	+7.96	-1.79	143	-7.3	-32.2									-22	-9.75	-175.2	+39.5	-10	-4.43	-79.7	+17.9	
對於重心之修正						8.492	-34.49	-21.45	1714	174.9	+384.7		-3.08	+108.8	+48.5		-15.87	+476.1	+185.8								
對於不對稱之修正									1374	120.4	+297.7			+96.3	+30.7			+411.7	+145.3								
									734	56.2				+100.4	+18.2			+359.2	+77.7								
Σ					8.492		1'x	840	64.2	-1'y		-3.08	-4.1	+32.5		-15.87	+52.5	+67.9		-46.47	-660.6	+85.3		-9.00	-185.1	+37.6	

上列計算，係假設拱肋寬 12 英尺，因

$$\frac{1}{1 + \frac{L}{4b}} \text{ 作為等於 } \frac{1}{4}$$

所用單位，既全為英尺，凡於計算收縮、溫度變更、橋台移動的影響之時，所用 E 之數值，亦應以英尺為單位。

計算溫度變更，係假設其徑間得自由變更，達 100%。

$\frac{P}{A}$	-0.363		-1.869		-5.475		-1.059
$v_i = \frac{M'_x}{I'_x}$	-0.0049		+0.0825		-0.667		-0.220
$h_i = \frac{M'_y}{I'_y}$	+0.351		+1.058		+1.328		+0.585
$x_i = \frac{-P}{Av_i}$	-74.0		+29.9		-8.20		-4.81

溫度變更(上升)  
對於不對稱之修正

$$\begin{aligned} M_x &= -15 \\ &+ 148 \\ M'_x &= -163 \\ V &= -0.016 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= +60 \\ &- 2.8 \\ M'_y &= +62.8 \\ H &= 0.081 \end{aligned}$$

圖 162. (參閱圖 161).

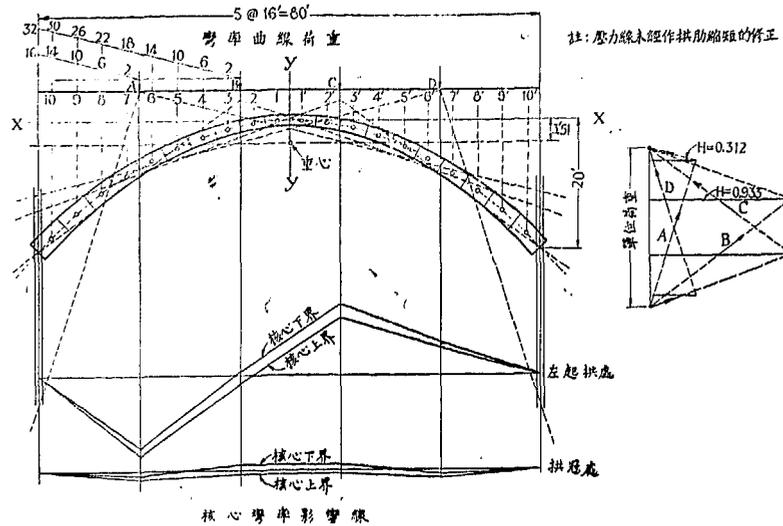


圖 163. (參閱圖 164).

截面各性質											彈性荷重 單位荷重在下開之點															
已知者					算得者						A				B				C				D			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
號數	L	d	x	y	a	ax	ay	ax <sup>2</sup>	ay <sup>2</sup>	axy	m <sub>x</sub>	P	M <sub>x</sub>	M <sub>y</sub>	m <sub>x</sub>	P	M <sub>x</sub>	M <sub>y</sub>	m <sub>x</sub>	P	M <sub>x</sub>	M <sub>y</sub>	m <sub>x</sub>	P	M <sub>x</sub>	M <sub>y</sub>
10	5.58	3.34	-38.0	-18.05	0.150	-5.70	-2.71	217	49.0	因係對稱拱,故axy之和等於零	-14	-2.10	+79.7	+37.9	-30	-4.50	+171.0	+81.2								
9	5.23	3.04	-34.0	-14.45	0.187	-6.36	-2.70	216	39.0	-10	-1.87	+63.5	+27.0	-26	-4.86	+165.1	+70.2									
8	5.00	2.79	-30.0	-11.25	0.231	-6.94	-2.60	203	29.3	-6	-1.39	+41.7	+15.6	-22	-5.09	+153.0	+57.2									
7	4.78	2.54	-26.0	-8.45	0.291	-7.56	-2.46	197	20.8	-2	-0.68	+15.1	+4.9	-18	-5.24	+136.4	+44.3									
6	4.55	2.33	-22.0	-6.05	0.361	-7.93	-2.18	174	13.2					-14	-5.05	+111.0	+30.5									
5	4.45	2.16	-18.0	-4.05	0.443	-7.96	-1.79	143	7.3					-10	-4.43	+79.6	+17.9									
4	4.29	2.00	-14.0	-2.45	0.533	-7.46	-1.31	104	3.2					-6	-3.20	+44.8	+7.8									
3	4.17	1.83	-10.0	-1.25	0.634	-6.84	-0.85	68	1.1					-2	-1.37	+13.7	+1.7									
2	4.05	1.67	-6.0	-0.45	0.874	-5.25	-0.39	32	0.2																	
1	4.01	1.54	-2.0	-0.05	1.102	-3.21	-0.06	4	0.0																	
左半拱					4.856	-64.21	-17.05	1363	163.1																	
右半拱					4.856	+64.21	-17.05	1363	163.1																	
			6	-3.51	9.712	0	-34.10	2726	326.2	0																
					A = 9.712		I <sub>x</sub> =	2726	206.7	-I <sub>y</sub>																

上列計算,係假設拱肋寬12英尺,因

$$\frac{1}{I} = \frac{1}{\frac{1}{6}bd^3}, \text{ 作為等於 } \frac{1}{d^3} \text{ 故.}$$

所用單位,既全為英尺,凡於計算收縮,溫度變更,橋台移動的影響之時,所用E之數值,亦應以英尺為單位.

計算溫度變更,係假設其徑間得自由變更,達100%.

$$\frac{P}{A} = -0.612$$

$$v_i = \frac{M_x}{I_x} = +0.0734$$

$$h_i = \frac{M_y}{I_y} = +0.312$$

$$x_i = -\frac{P}{Av_i} = +8.34$$

$$-3.47$$

$$+0.321$$

$$+0.933$$

$$+10.8$$

溫度變更(上升)

$$M_y = +80$$

$$M_x = 0$$

$$H = +0.032$$

圖 164. (參閱圖 163).

(1) 每段順沿拱軸之長  $L$ , (2) 每段重心對於縱橫軸之縱距  $y$  及橫距  $x$ , (3) 每段中心之拱厚,  $d$ , 均以英尺計。

假設拱肋寬一單位, 計算各彈性面積  $a$ , 此項面積各等於  $\frac{L}{1} = \frac{12L}{d^3}$ , 由此而計算其對於縱橫軸之靜力變率,  $ax$  及  $ay$ , 並計算各惰性率及惰性積  $ax^2$ ,  $ay^2$ , 及  $axy$ .

設每一幅點  $A, B, C, D$ , 各有一個單位荷重, 乃計算各段重心處之  $m_s$  數值, 而列入表中, 此等靜定變率之計算, 係假設各該荷重作用於一個懸臂端, 其懸臂由最近之拱端伸出, 故荷重與其最近橋台間任何段之靜定變率, 等於由該荷重至該段重心之橫平距離 (因荷重 = 1 之故), 由是而計算彈性荷重  $P = m_s a$ , 並計算該彈性荷重對於縱軸之變率  $P_x$ , 及其對於橫軸之變率  $P_y$ , 讀者注意, 此三項 ( $P, P_x$  及  $P_y$ ) 極易求得, 祇須將  $m_s$  分別乘第 7, 8, 9 等行即得, 各段皆如是也。

將彈性面積 靜定變率, 惰性率, 惰性積, 彈性荷重, 彈性變率等行, 分別求得其總和。

對於重心, 作相當之修正, 重心之位置, 以下列二式決定之。

$$\bar{x} = \frac{\sum ax}{A} \quad \text{及} \quad \bar{y} = -\frac{\sum ay}{A} \quad (\bar{x} \text{ 及 } \bar{y} \text{ 為重心之橫距及縱距}).$$

計算惰性率及惰性積之修正量,  $\bar{x}^2 A, \bar{y}^2 A, \bar{x} \bar{y} A$ , 及彈性變率之修正量,  $\bar{x} \sum P, \bar{y} \sum P$ , 此諸修正量, 均由各該總和中減去。

對於不對稱，作相當之修正，於  $I_x$  之下，書寫  $\frac{I_{xy}}{I_y} \cdot I_{xy}$  之數值，於  $I_y$  之下，書寫  $\frac{I_{xy}}{I_x} \cdot I_{xy}$  之數值，於  $M_x$  之下，書寫  $\frac{I_{xy}}{I_y} \cdot M_y$  之數值，於  $M_y$  之下，書  $\frac{I_{xy}}{I_x} \cdot M_x$  之數值，分別減去之，而得  $V_x, V_y, M'_x, M'_y$  之數值。

經過重心，繪一橫平線，作為新橫軸，假設每一幅點受有荷重，計算其較遠反力之縱橫分力， $v_i = \frac{M'_x}{V_x}$ ，及  $h_i = \frac{M'_y}{V_y}$ ，並計算該反力線在重心橫軸之截距， $x_i = -\frac{P}{\Delta V_i}$ 。

上述計算方法，對於拱肋縮短，並未作何修正，如欲修正，可假設任何荷重，而計算拱肋中受壓應力之平均值，由是而假設該拱肋得以自由縮短，計算其徑間變量，此項徑間變更，可視同因溫度變更而發生者，其折合之溫度變更  $= \frac{f_{av}}{E\epsilon}$ ，此式中之  $f_{av}$ ，即上述平均單位受壓應力， $\epsilon$  即第 III 節中之漲縮係數。

較遠橋台處反力之分力及位置，既用上法求得，即可繪入壓力線 Pressure Lines，設有任何指定截面，在圖中精密量得任何壓力線與該截面的核心點 Kern Point 間之垂直距離，而以該壓力線之 H 數值乘之，即可求得旋繞該核心點之轉率，如是若假設其單位荷重迭居各位置，而繪入各截面之核心點轉率，即可製成影響線圖 Influence Line

Diagrams, 由核心上下界彎率,

$$\text{可用下式} \quad f = \frac{M_k \cdot c}{I} \dots \dots \dots (209)$$

直接算得其應力 (詳見圖 168).

其關於溫度變更者, 若拱肋得自由漲縮, 則徑間的橫平變更量, 以  $E$  乘之, 為  $E\alpha t^2 \times 60'$ , 而橋台的相對移動量 (垂直的), 以  $E$  乘之, 為  $E\alpha t^2 \times 15'$ , 此項常數因子  $E\alpha t^2$ , 可暫予省略, 嗣後乃用以相乘, 以求得溫度應力. 按照第 111 節之說明, 凡直線的變位, 可比擬為旋繞該移動軸之彎率, 故此擬壓柱之彈性彎率, 即為  $M_x = \pm 15$ , 及  $M_y = \mp \frac{60}{88}$ . 此兩彎率之正負號必相反, 蓋徑間之變更, 可比擬為旋繞於拱軸兩端聯絡線之彎率, 此項彎率, 在比擬壓柱中該截面之頂部或左方, 發生壓力, 或在其底部或右方, 發生壓力, [此處所謂彎率正負號之意義, 與第十九章同, 參閱第 102 節] 因溫度變更而生之推力作用線既經確定之後, 祇須熟憶推力能使徑間縮短, 輓力能使之伸長, 即極易確定因溫度昇降而在任何點所發生之彎率正負號, [推力為負, 輓力為正, 此就橫平力言之也, 若係垂直力, 則適用尋常通用之剪截力正負號, 即左方向上, 右方向下者, 剪截力為正, 反之則為負, (參閱第 37 節), 又正號的變位, 與正號的力相當, 故正號的力乘正號的距離, 得正號的彎率, 此項距離, 以由該力至該截面向上或向右量得者為正, 反之則為負.]

此項彎率  $M_x = \pm 15$ , 及  $M_y = \mp 60$ , 須分別作不對稱的修正, 然後計算溫度推力之縱橫分力,  $V$  及  $H$ , 此項推力, 自必經過彈性重心, 此與梁之純受撓屈者, 其中立軸必經過重心, 完全相同.

對稱拱，若其拱為對稱的，則上述步驟，自可縮短，祇須計算全拱之半，且倚性積總和必等於零，無須分別計算，亦無須作不對稱的修正。

圖 163 及圖 164 指示如何解算與上相似之拱，惟徑間為 80 英尺，分為五幅，每幅長 16 英尺耳。

115. 死荷重之壓力線，凡作拱橋設計，務須儘力使其軸與死荷重壓力線相脗合，或使與死荷重外加全徑間受有半量活荷重之壓力線相脗合，欲得此結果，最好用較大比例尺繪成一圖，若其拱為實側的，Spandrel-filled，（拱環之上，左右兩側 築有側腹牆，Spandrel Walls，牆間用土墊實），則壓力線及拱軸，可以密切脗合，若其拱為空側的 Open Spandrels，（拱肋上方，備有若干立柱，其相鄰兩柱之頂，各聯以小拱）則壓力線為多邊形，（拱肋本身之死荷重則不然，仍為曲線形）故不能與拱軸曲線，完全脗合。

如是則所得之壓力線，能滿足靜力學定律，並能密切的或甚近的滿足幾何學定律，蓋此線或確為真正的壓力線，或與之甚相近也，若拱軸與壓力線完全脗合，則除因拱肋縮短而生之變率外，無須更作任何計算，若不完全脗合，則可按照上列表式中因死荷重而得各個  $m$  數值之壓力線，而採用其所求得之靜定變率各值，為滿足連續性的條件起見，可推算其所必需之反力變更量，然後修改該壓力線，並由是而計算所欲得之各個撓屈變率。

116. 壓力線定理，拱橋之壓力線，係受有各項荷重時之平衡多邊形，String Polygon or Equilibrium Polygon，應與拱軸幾於脗合，此壓力線定理也。

此定理於拱橋設計，最為重要，無論如何，務使壓力線與軸拱相合，此定理可用壓柱比擬法證實之，其證法並足以闡明此定理，蓋若繪一平衡多邊形，與拱軸相吻合，則所有各個  $m_s$  皆等於零，如是則  $m_i$  亦等於零 ( $m_s$  為靜定彎率之由於不連續性者， $m_i$  為不靜定彎率之由於連續性者)，而此多邊形即為用彈性學理 Elastic Theory 所推定之真確壓力線，若該多邊形之位置，與拱軸甚相近，則  $m_s$  之值甚小，即  $m_i$  之值亦甚小，而壓力線縱須變更，亦必為量無幾，易言之，觀於壓力線之位置，即可察知拱軸與多邊形間之彎率面積的代數總和，是否等於零，或甚近於零。(按照壓柱比擬法言之， $P=0$ ) 並可察知此項彎率面積對於該拱縱橫兩軸，是否正負相抵，( $M_x=0$  及  $M_y=0$ )。

讀者注意，上文所述，並未顧及拱肋縮短，及拱肋厚度之遞變，故此項定理，不免略有差誤。

117. 活荷重分界點，Load-divide for the Live Load. 除少數特殊情形外，解算混凝土拱，並無採用影響線以求得各個數量之必要，蓋設計所擬各尺寸，大抵為死荷重所決定，其活荷重可作為等佈荷重也。

據各項研究所得，在拱冠處或起拱處發生應力之活荷重分界點，甚近於徑間之  $\frac{1}{3}$  點，如即作為  $\frac{1}{3}$  點，如圖 165 及圖 166 所示，必無大誤也。

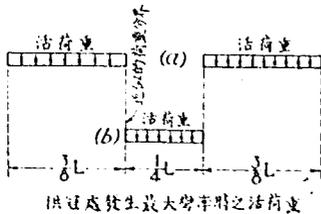


圖 165

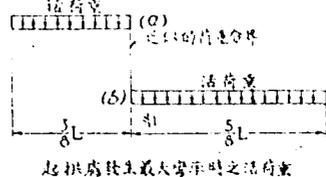


圖 166

118. 設題解算。圖 167 及 168 詳示如何解算一個對稱拱因死荷重，等佈活荷重及溫度變更而生之應力，其算法係遵照上述之算繪影響線方法，其推算拱冠處及起拱處應力之活荷重分界，係假設在該徑間之  $\frac{3}{8}$  點及  $\frac{5}{8}$  點，為便利計算起見，各個  $m_s$  數值之計算，係假想各個荷重，由較近之橋台，分別懸繫於懸臂之外端，若其拱軸曾經用較大比例尺繪示，則在受有死荷重及全部活荷重等情形之下，或可由與拱軸幾相吻合之壓力線，求得此諸數值，其結果或較為精密，但在受有  $\frac{3}{8}$  活荷重情形之下，此項壓力線並不便於應用。

因受有活荷重而拱冠處發生最大彎率，其荷重情形必為圖 165 所示者之一，(a) 種情形下之拱冠彎率，適倍於  $\frac{3}{8}$  荷重之拱冠彎率，如欲求 (b) 種情形下之彎率，可將 (a) 種情形下之彎率，由全徑間受有全部活荷重之彎率，減去之。

因受有活荷重而起拱處發生最大彎率，其荷重<sup>情</sup>情形必為圖 166 所示者之一，如係 (a) 種情形，可按照  $\frac{3}{8}$  荷重，求得荷重端之彎率，如欲得 (b) 種情形下之彎率，可將 (a) 種情形下之彎率，由全徑間受有全部活荷重之彎率，減去之。

先仿照上述之算繪影響線方法，並按照三種荷重情形，逐一計算其  $m_s$ ，連同該拱之已知各性質，如  $l, \Delta s, x, y$ ，等等，列入表中，然後分別計算  $a, ay, ax^2, ay^2$ ，彈性荷重及彈性彎率，即  $P(=m_s, a), M_x(=m_s, a, x), M_y(=m_s, a, y)$  是也，將此諸項，各求其總和，並對於重心，作相當的修正。

$$\text{然後就每個核心點，計算 } m_i = \frac{P}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot x + \frac{M_y}{I_y} \cdot y.$$

更就每個核心點，計算其  $m_s$ ，並求得  $M = m_s - m_i$ 。

其壓力線亦應繪入，用目觀察，即可知該線是否與拱軸約略相合，如是可免去計算之或有大誤，如欲作更精密之校核，可取其由算得壓力線而獲得之彎率，作為  $m_3$  之數值，覆加解算，此項最後解算，必較先作者更為精密，但其所得者必須較先得者相差甚微。

讀者注意，得數之正負號，完全出於自然的決定，正號之彎率，能使其拱有下撓之傾向，與橫梁同，〔此係按照 Cross 教授習用之正負號定義，見第 84 節。〕其縱橫距，以向上者或向右者為正，反之則皆為負。

將死荷重，活荷重，及溫度變更之影響，酌予合併，以求得最大彎率，再以截面係數除之，藉以算得其相當應力。

最後就決定安危的應力，作拱肋縮短之修正，此可由溫度應力，按照比例，直接算得之。

設  $A_{av}$  為各個垂直截面之平均面積，此項平均面積，先經算得，則任何已知推力之折合溫度變更，可由下式算得之。

$$\frac{H}{A_{av}} \cdot \frac{L}{E} = \epsilon t^{\circ} L, \quad \text{即} \quad t^{\circ} = \frac{H}{E \epsilon A_{av}} \dots \dots \dots (210)$$

解算本題，係採用  $E=3,000,000$ ,  $\epsilon=0.000006$ ,  $F\epsilon=18$ .

拱 之 性 質										荷 重										
已 知 者					算 得 者					死 荷 重			單 位 活 荷 重 ( $\frac{k}{ft}$ )			單 位 活 荷 重 (全 部)				
點	d	I	$\Delta s$	x	y	a	ay	ax <sup>2</sup>	ay <sup>2</sup>	m <sub>s</sub>	P	M <sub>y</sub>	m <sub>s</sub>	P	M <sub>x</sub>	M <sub>y</sub>	m <sub>s</sub>	P	M <sub>y</sub>	
1	3.85	11.36	5.65	42.75	14.00	0.50	7.26	915	108.0	2821	1410	20600	55.98	28.0	1197	409	101.25	50.6	739	
2	3.20	6.67	5.35	38.25	11.65	0.80	9.35	1171	108.9	2248	1795	20909	41.35	33.1	1265	386	81.00	64.9	755	
3	2.85	4.76	5.11	33.75	8.95	1.07	9.60	1219	85.9	1738	1860	16650	28.95	31.0	1058	278	63.00	67.4	604	
4	2.68	3.99	4.92	29.25	6.60	1.23	8.13	1051	53.7	1298	1597	10520	18.83	23.2	680	153	47.25	58.1	384	
5	2.56	3.49	4.78	24.75	4.65	1.37	6.37	839	29.6	925	1270	5900	10.95	15.0	371	70	33.75	46.2	215	
6	2.45	3.07	4.68	20.25	3.15	1.53	4.81	627	15.2	615	941	2970	5.33	8.2	166	26	22.50	34.4	108	
7	2.35	2.71	4.61	15.75	1.90	1.70	3.23	422	6.1	368	626	1199	1.95	3.3	52	6	13.50	23.0	44	
8	2.28	2.49	4.56	11.25	0.95	1.83	1.74	231	1.7	183	335	320	0.20	0.4	4	1	6.75	12.4	12	
9	2.22	2.30	4.53	6.75	0.37	1.97	0.73	90	0.3	61	120	40	0.07	0.1	1	0	2.25	4.4	2	
10	2.18	2.19	4.51	2.25	0.09	2.06	0.19	10	0.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
總和			48.70			+14.06	-51.41	+6575	+407.4		-995.4	+79090		-142.3	+479.4	+1329		-361.4	+2863	
對於重心之修正量					-3.65				+187.3			+36330				+519			+1319	
修正後之總和(半拱)									+220.1			+42760							+1544	
全上(全拱)					A=	+28.12		I <sub>x</sub> =	+13150		+440.2	-I <sub>y</sub>	-19908	+85520		-142.3	+479.4	+810	-722.8	+3088

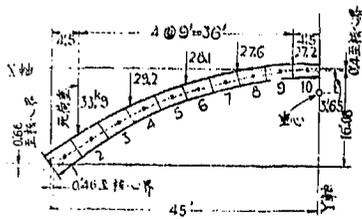
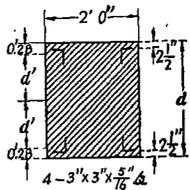


圖 107. (參閱圖 165).

$\frac{P}{A}$	-708	-5.06	-25.7
$v_i = \frac{M_x}{I_x}$		+0.364	
$h_i = \frac{M_y}{I_y}$	+194.3	+1.84	+7.01



拱肋截面

每幅活荷重 = 10.4 k

溫度  $t^\circ = \pm 40^\circ$   
 $\epsilon E = 18$

$$H_i = \frac{\epsilon E t^\circ L}{I_y}$$

$$= \frac{18 \times 40 \times 90}{440.2} \times 0.144 = 21.2 \text{ k}$$

拱肋縮短及收縮

折合  $t^\circ = 15^\circ$ .

$$\frac{15}{40} = 37.1\%$$

拱 處	核 心	界	x, y	c, I	死 荷 重	活 荷 重			溫度	拱肋縮短及收縮	最大纖維應力	
						全	活	死				
冠	核 心 上 界	x=0, y=+4'.05 c=1'.08 I=2.14' <sup>4</sup>	1.08 × 1 / 0.144 = 3.51 (死)	m <sub>s</sub>	0	0	0		H <sub>i</sub> = 21.2 k	t <sup>o</sup> = -15°	每力英寸之磅數	
				m <sub>i</sub>	-708	-5.06	-25.7					
				M	+79	+2.39	+2.7					
				f <sub>上</sub>	-277	-87	-98					
處	核 心 下 界	x=0, y=+3'.25 c=1'.08 I=2.14' <sup>4</sup>	因子 { 3.51 (死) 36.5 (活)	m <sub>s</sub>	0	0	0		± 85.9	± 301	+ 113	- 639
				m <sub>i</sub>	-708	-5.06	-25.7					
				M	+77	-0.94	+2.9					
				f <sub>上</sub>	-270	+34	-106					
拱	核 心 上 界	x=-45'.46, y=-11'.77 c=2.20 I=16.75' <sup>4</sup>	2.20 / 16.75 × 1 / 0.144 = 0.91 (死)	m <sub>s</sub>	-3217	-66.1	-114.8		± 249	± 227	- 85	- 729
				m <sub>i</sub>	-708	-5.06	-25.7					
				M	-222	-22.8	-6.5					
				f <sub>上</sub>	-202	-215	-61					
處	核 心 下 界	x=-44'.54, y=-13'.09 c=2'.20, I=16.75' <sup>4</sup>	因子 { 0.91 (死) 9.46 (活)	m <sub>s</sub>	-3083	-62.7	-110.2		± 277	± 252	+ 94	- 543
				m <sub>i</sub>	-708	-5.06	-25.7					
				M	+168	-17.3	+7.3					
				f <sub>上</sub>	-153	+163	-69					

夫彈性係數，有效的溫度變更，以及收縮等項，均未能確知其為量若干，若於拱肋縮短，獨欲力求精密，似覺輕重不均，故就一般言之，可假定  $\frac{\Pi}{\Delta_{av}}$  約等於每方英寸 300 磅，而其折合溫度變更，約為華氏表  $15^\circ$  至  $20^\circ$ 。

茲將圖 167 中各項，詳加說明如下。

### 1. 拱之性質。

$d$  = 量得拱肋之厚，以英尺計，此項厚度之量度，係在各段之中心，與拱軸正交。

$I$  = 在各段中心之拱肋截面之惰性率，以英尺四次方計，此項如作為  $\frac{1}{12} bd^3$ ，實已精密可用，但表中所列之數值，係包含四個角鋼之惰性率在內，此等角鋼，係按照  $n=15$  [按  $n = \frac{\text{鋼之彈性係數, } (E_s)}{\text{混凝土之彈性係數, } (E_c)}$ ]，折合混凝土，即於素混凝土截面惰性率之外，更加以  $\frac{1}{144} (14 \times A d'^2 \times 4) = 0.692 d'^2$  [按此式中之 14，為  $15-1$ ，因素混凝土惰性率，已包含與角鋼截面相等之惰性率一份，故所加角鋼截面惰性率，祇為 14 份， $A$  為每個角鋼截面面積，以方英寸計，故須以 144 除之，俾合成方英尺數，因有四個角鋼，故以 4 乘之， $d'$  為角鋼重心與中立軸之距離，等於  $\frac{d}{2} - 0.28$  (參閱圖 168 左方之簡圖)]

如是則  $I = \frac{d^3}{6} + 0.692 d^2$  [按拱肋寬二英尺，見圖 168 左方

之簡圖，即  $b = 2'$ ，故素混凝土截面之慣性率  $= \frac{d^3}{6}$  ]。

$\Delta s =$  量得各段拱軸之長，以英尺計，其各段之橫平投影之長，皆相等，各為 4.5 英尺，此行各數之總和，48.70 英尺 為半個拱軸之全長，並應將該全長，另行量度，以資校核。

$x =$  順沿初用 X 軸（此初用軸，經過拱軸之最高點）至各段中心之力距。

$y =$  順沿初用 Y 軸（亦經過拱軸之最高點）至各段中心之力距，（由圖中精密量得之。）

$a =$  各個彈性面積，即  $\frac{\Delta s}{I}$  之數值，此式中將 E 之數值省去，因其為常數也。

$ay =$  各個彈性面積旋繞初用 X 軸之力率（亦稱靜定彎率）。

由所得各行之總和，求得彈性截面（即比擬壓柱截面）之重

心，其縱距  $y_c = \frac{-51.41}{14.06} = -3.65$  英尺，即該重心居初用 X

軸之下，凡 3.65 英尺也，因此拱為對稱的，故  $x_c$  必等於零，無須計算。

$\Sigma ax^2 = I_s =$  彈性面積旋繞初用 Y 軸之慣性率，（或即順沿初用 X 軸之慣性率）。

$\Sigma ay^2 = I_y =$  彈性面積旋繞初用 X 軸之惰性率, (或即順沿初用 Y 軸之惰性率).

## 2. 死荷重.

$m_i =$  圖中各荷重在各段中心之靜定懸臂力率, (或彎率)

$P = \Sigma m_i \cdot a =$  比假壓柱截面所受之彈性荷重.

$M_y = \Sigma m_i \cdot a \cdot y =$  此諸荷重旋繞初用 X 軸之力率, (或彎率)

## 3. 活荷重.

活荷重之計算, 係假設在各荷重點, 受有單位荷重, 此蓋假定其或為等佈活荷重, 或為折合等佈荷重, 但此法儘可適用於任何種之荷重方法.

言乎  $\S$  活荷重, 拱肋所受之荷重, 係為一種等佈活荷重, 每幅各為一單位, 例如  $1^k$ , 共佔該徑間之  $\frac{3}{8}$  即由起拱處起, 凡延長 33.75 英尺, 在本題中, 此項荷重外端, 適與圖中之第 8 點略合, 如是則鄰近拱心之荷重點, 亦受有少許荷重, 其量為  $0^k \cdot 03$ . [按第八段所受之荷

重為  $\frac{1}{4}^k$ , 此項荷重之重心, 距其左方之分段點,  $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times 9' = \frac{9}{8}$  英

尺, 故該荷重旋繞該分段點之力率  $= \frac{1}{4}^k \cdot \frac{9'}{8} = \frac{9}{32}^k$ , 由此求得其右方

荷重點所分擔之荷重  $= \frac{9}{32} \div 9' = \frac{1}{32}^k = 0^k \cdot 03$ ].

彎率及彈性荷重之計算, 與死荷重完全相同, 因  $\S$  荷重, 係不對稱的荷重, 故必須計算旋繞縱橫兩軸之靜定彎率.

茲更就死活兩荷重之計算, 覆加詮釋如下.

下列之說明，限於第一點，即表中之第一橫行，他橫行皆倣此。

關於死荷重欄：

$$M_s = -2821 = -(27.2 \times 38.25 + 27.6 \times 29.25 + 28.1 \times 20.25 \\ + 29.2 \times 11.25 + 33.9 \times 2.25).$$

其中 38.'25 爲荷重 27.<sup>k</sup>2 與第一點之橫平距離，29.'25 爲荷重 27.<sup>k</sup>6 與第一點之橫平距離，20.'25 爲荷重 28.<sup>k</sup>1 與第一點之橫平距離，11.'25 爲荷重 29.<sup>k</sup>2 與第一點之橫平距離，2.'25 爲荷重 33.<sup>k</sup>9 與第一點之橫平距離，因各該距離，均係自右向左，故皆爲負數，而  $m_s$  亦因而爲負數。

$$P = m_s, a = (-2821) \times (+0.50) = -1410.$$

$$M_y = m_s, ay = (-2821) \times (-7.26) = +20,600. (\text{約數})$$

關於單位活荷重 (§) 欄

$$m_s = -55.98 = -(1 \times 2.25 + 1 \times 11.25 + 1 \times 20.25 + 0.72 \times 29.25 + 0.03 \times 38.25).$$

其中首三項之 1，各爲第一第二第三等荷重點所受之單位荷重 (=1<sup>k</sup>)，而 2.'25，11.'25，20.'25 分別爲各該荷重與第一點之橫平距離，其第四荷重點應受之荷重，爲 0.<sup>k</sup>75，因第五荷重點分擔 0.<sup>k</sup>03，故實得荷重爲 0.<sup>k</sup>72，而 0.<sup>k</sup>03 即爲第五荷重點所受之荷重，至若 29.'25 及 38.'25，則分別爲第四第五兩荷重點與第一點之橫平距離，此諸距離，均係負數，故  $m_s$  亦爲負數。

$$P = m_s, a = (-55.98) \times (+0.50) = -28.0.$$

$$M_x = m_s, ax = (-55.98) \times (+0.50) \times (-42.75) = +1,197.$$

$$M_y = m_s, ay = (-55.98) \times (-7.26) = +409. (\text{約數}).$$

關於單位活荷重 (全部) 欄：

$$m_s = -101.25 = -(1 \times 2.25 + 1 \times 11.25 + 1 \times 20.25 + 1 \times 29.25 + 1 \times 38.25),$$

詮釋同上，(此係就半拱計算之，各該行之足，將所得總和倍之，即得全拱之數值。)

$$P = m_s \cdot a = (-101.25) \times (+0.50) = -50.6.$$

$$M_y = m_s \cdot a_y = (-101.25) \times (-7.26) = +739. \quad (\text{約數}).$$

此表所用之正負號，與尋常所通用者，並不抵觸，具如各行頂端所示。

半拱之彈性面積總和 = +14.06，故全拱之  $\Delta = +28.12$ 。

全拱之  $I_x = +13,150$ 。因縱軸並未移易位置，故無須作對於重心之修正。

半拱之  $I_y = +407.4$ 。因橫軸降落 3.65 英尺，故必須作對於重心之修正，此項修正量，等於半拱彈性總面積乘橫軸降落距離之平方，即  $+14.06 \times (3.65)^2 = +187.3$ ，將此數由 +407.4 減去，得 +220.1 為修正後之半拱的  $I_y$ ，倍之得 +440.2 為全拱之  $I_y$ 。

次對於各荷重之彎率(或力率，即  $M_y$ )，亦須分別作對於重心之修正，試取死荷重欄舉例以說明之，已算得  $M_y$  總和 = +79,090，其修正量應為  $P \times \bar{y}$ ，即  $(-9954) \times (-3.65) = +36,330$ ，將此數由 +79,090 減去，得 +42,760 為半拱之  $M_y$ ，倍之得 +85,520，為全拱之  $M_y$ ，其活荷重兩欄倣此。

表中其餘各項，係為計算不靜定彎率之用，其公式為

$$m_i = \frac{P}{\Delta} + \frac{M_x}{I_x} \cdot x + \frac{M_y}{I_y} \cdot y.$$

拱冠及起拱等截面之核心上下界位置，由下列兩式算得之。

$$\text{拱冠處,} \quad e_k = \frac{I}{\Delta c} = \frac{2.14}{5.03 \times 1.08} = 0.4 \text{ 英尺.}$$

[拱冠截面之厚 = 2.17 英尺。按照上述之法，求得  $I = \frac{(2.17)^3}{6}$

$$+ 0.692 \left( \frac{2.17}{2} - 0.28 \right)^2 = 2.14 \text{ ft}^4,$$

$A = 2' \times 2'.17 + \frac{14 \times 4 \times 1.78}{144} = 5.03$  方英尺。（每一角鋼截面面積 = 1.78 方英寸）。

$$c = \frac{2.17}{2} = 1.08 \text{ 英尺。}]$$

起拱處，  $e_k = \frac{16.75}{9.49 \times 2.20} = 0.8$  英尺。

[起拱處截面之厚 = 4.40 英尺，  $I = \frac{(4.40)^3}{6} + 0.692 \left( \frac{4.40}{2} - 0.28 \right)^2$   
= 16.75 ft<sup>4</sup>，

$$A = 2' \times 4'.40 + \frac{14 \times 4 \times 1.78}{144} = 9.49 \text{ 方英尺， } c = \frac{4.40}{2} = 2.20 \text{ 英尺。}]$$

因起拱處之截面，係順沿拱弧半徑之方向，故可按照此方向，求得該核心界之縱距 = 0.66 英尺，及橫距 = 0.46 英尺，如圖 167 之簡圖所示。

圖 168 標示拱冠處及起拱處核心上下界對於彈性重心之縱橫距數值，並就死荷重，及活荷重，及全部活荷重，分別求得核心兩界之變率， $M = m_1 - m_2$ ，茲更詳加詮釋如下。

拱冠處核心上界，  $m_2 = 0$ ，（死荷重，及活荷重，及全部活荷重皆然。）

$$\text{死荷重， } m_1 = \frac{P}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot x + \frac{M_y}{I_y} \cdot y = -708 + \frac{M_x}{I_x} \times 0 + (+194.3) \times (+4.05)$$

$$= -708 + 787 = +79.$$

$$[\text{因 } \frac{P}{\Lambda} = -708, \frac{M_y}{I_y} = +194.3, \text{ 俱見圖 167, } x=0, y=+4.05]$$

$$\text{故 } M = m_s - m_i = 0 - (+79) = -79.$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{8} \text{活荷重, } m_i &= \frac{P}{\Lambda} + \frac{M_x}{I_x} \cdot x + \frac{M_y}{I_y} \cdot y = -5.06 + (+0.364) \times 0 \\ &+ (+1.84) \times (+4.05) = -5.06 + 7.45 = +2.39. \end{aligned}$$

$$[\text{因 } \frac{P}{\Lambda} = -5.06, \frac{M_x}{I_x} = +0.364, \frac{M_y}{I_y} = +1.84, \text{ 俱見圖 167, } x=0, y=+4.05]$$

$$\text{故 } M = m_s - m_i = 0 - (+2.39) = -2.39.$$

$$\begin{aligned} \text{全部活荷重, } m_i &= \frac{P}{\Lambda} + \frac{M_x}{I_x} \cdot x + \frac{M_y}{I_y} \cdot y = -25.7 + \frac{M_x}{I_x} \times 0 + (+7.01) \times (+4.05) \\ &= -25.7 + 28.4 = +2.7. \end{aligned}$$

$$[\text{因 } \frac{P}{\Lambda} = -25.7, \frac{M_y}{I_y} = +7.01, \text{ 俱見圖 167, } x=0, y=+4.05]$$

$$\text{故 } M = m_s - m_i = 0 - (+2.7) = -2.7.$$

拱冠處核心下界做此。

起拱處核心上界。

$$\begin{aligned} \text{死荷重, } m_s &= -[33.9 \times (4.50 + 0.46) + 29.2 \times (13.50 + 0.46) \\ &+ 28.1 \times (22.50 + 0.46) + 27.6 \times (31.50 + 0.46) \\ &+ 27.2 \times (40.50 + 0.46)] = -3217. \end{aligned}$$

[因 0'.46 爲核心上界之橫平投影, 4'.50, 13'.50, 22'.50, 31'.50, 40'.50 分別等於第一, 第二, 第三, 第四, 第五等荷重點與左方起拱中心之橫平距離.]

$$m_i = \frac{P}{\Lambda} + \frac{M_x}{I_x} \cdot x + \frac{M_y}{I_y} \cdot y = -708 + 0 \times (-45.46) \\ + (+194.3) \times (-11.77) = -708 - 2287 = -2995.$$

$$[\text{因 } \frac{P}{\Lambda} = -708, \frac{M_x}{I_x} = 0, \frac{M_y}{I_y} = +194.3, x = -45.46, y = -11.77].$$

$$\text{故 } M = m_s - m_i = -3217 - (-2995) = -222.$$

$$\text{§ 活荷重, } m_s = -[1 \times (4.50 + 0.46) + 1 \times (13.50 + 0.46) + 1 \times (22.50 + 0.46) \\ + 0.72 \times (31.50 + 0.46) + 0.03 \times (40.50 + 0.46)] = -66.1.$$

[詮釋見前].

$$m_i = \frac{P}{\Lambda} + \frac{M_x}{I_x} \cdot x + \frac{M_y}{I_y} \cdot y = -5.06 + (+0.364) \times (-45.46) \\ + (1.84) \times (-11.77) = -5.06 - 16.55 - 21.66 = -43.3.$$

$$\text{故 } M = m_s - m_i = -66.1 - (-43.3) = -22.8.$$

$$\text{全部活荷重, } m_s = -(1 \times 4.96 + 1 \times 13.96 + 1 \times 22.96 + 1 \times 31.96 + 1 \times 40.96) \\ = -114.8.$$

$$m_i = -25.7 + 0 \times (-45.46) + (+7.01) \times (-11.77) = -25.7 - 82.6 \\ = -108.3.$$

$$\text{故 } M = m_s - m_i = -114.8 - (-108.3) = -6.5.$$

起拱處核心下界做此。

既得核心兩界之彎率，即可由  $f = \frac{Mc}{I}$  公式，求得纖維應力，若  $M$  為正號，則上方纖維受有壓力，(核心下界彎率)，下方纖維受有拉力，(核心上界彎率)，負號則反此，其用以折算至每方英寸所受磅數之因子，如係死荷重，則拱冠處為 3.51，起拱處為 0.91，(推算方法見圖 168，此項因子，即公式中之  $\frac{c}{I}$  也。)

上文所考慮之活荷重，係假設每幅受有單位荷重，但實受之荷重，為每幅 10.4，故求得其因子，如圖 168 所示，關於活荷重其他情形所發生之纖維應力，可參閱圖 165 及圖 166，或圖 168 所示之影響線簡圖，例如取拱冠處之核心上界，若以纖維應力代表影響線下之總面積，則得  $2 \times (-87) = -174$ ，即兩個負號面積之和，但  $-98$  為受有全部活荷重之總面積，故中央之正號面積，必等於  $-98 - (-174) = +76$ 。(每方英寸磅數)。

圖中所示溫度應力，係假設溫度變更  $= \pm 40^\circ$ ，其應力之由於拱肋縮短及收縮者，係假設其與溫度降低  $15^\circ$  者相等。

119. 解算拱橋之近似的公式，若拱軸為拋物線，而  $\frac{ds}{I}$  為一常數， $= \frac{dx}{Ic}$ ，則該拱各性質，均可以單簡算式表示之，此拱在起拱處之厚，遠不及各拱橋之所習見者，且大多數拱橋之軸，亦並非具有拋物線形者，但由此等拋物線拱，大可獲得若干通用公式，藉便計算各項性質之用。

關於此等拱橋，下列各式極易求得，(參閱圖 173)。

$$\Delta = \int \frac{ds}{EI} = \frac{1}{EI_c} \cdot \int dx = \frac{L}{EI_c} \quad [I_c = \text{拱冠處之慣性率}] \dots\dots (211)$$

$$y_c = \frac{\int y \cdot \frac{ds}{EI}}{\int \frac{ds}{EI}} = \frac{h}{3} \quad [h = \text{拱之彎起量}] \dots\dots (212)$$

$$I_x = \int x^2 \cdot \frac{ds}{EI} = \frac{1}{12} AL^2 \dots\dots (213)$$

$$I_y = \int y^2 \cdot \frac{ds}{EI} = \frac{4}{45} Ah^2 = \frac{1}{12} Ah^2 (\text{近似值}) \dots\dots (214)$$

受有全部等佈荷重 =  $W$  時之拱冠橫平推力，  $H = \frac{1}{2} W \cdot \frac{L}{h} \dots\dots (215)$

Charles S. Whitney 氏所著之 Design of Symmetrical Concrete Arches 論文，(見 Transactions, American Society of Civil Engineers, Vol. 88, 1925 pp. 931—1029)曾就許多形式大異之拱橋，推得其影響線，最大彎率數值，(由於活荷重者)以及各項彈性的性質，其拱軸為若干同類之曲線，該軸之如何屈曲，以曲度係數 Shape Coefficient,  $N$ , 表示之，至沿軸各截面厚度之如何遞變，以厚度係數 Form Coefficient,  $m$ , 表示之，此二係數之定義如下，(參閱圖 169)。

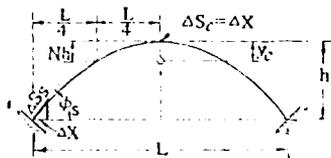


圖 169

曲度係數,  $N = \frac{\text{徑間 } \frac{1}{4} \text{ 點處之拱軸降低量}}{\text{拱之彎起量 (即 } h)}$   $\dots\dots (216)$

厚度係數,  $m = \frac{\text{起拱處之 } \frac{\Delta S}{t}}{\text{拱冠處之 } \frac{\Delta S}{t}}$  (就同一的  $\Delta x$  而言)

$$= \frac{\frac{\Delta S_s}{I_s}}{\frac{\Delta S_c}{I_c}} = \frac{\frac{\Delta x}{\cos \phi_s}}{I_s} \cdot \frac{I_c}{\Delta x} = \frac{I_c}{I_s} \cdot \sec \phi_s \dots \dots (217)$$

[上式中各字右下角所綴小字, s 代表起拱, c 代表拱冠,  $\phi_s$  為拱軸在起拱處與橫平線所成之角, 見圖 169]

圖中之  $y_c$  為自拱冠至橫平中立軸之垂直距離。

Whitney 氏所用曲度係數  $N$ , 自 0.15 至 0.25, 此 0.25 即係拋物線在徑間  $\frac{1}{2}$  點處之相對的降低量, 故此君所研究之各拱, 均居於拋物線之上方, 凡拱橋皆應如是也。

Whitney 氏所用厚度係數  $m$ , 自 0.15 至 0.40, 此等拱肋在起拱之厚度, 比之拱冠之厚度, 自 1.5 倍至 2 倍, 若  $\frac{ds}{l}$  為一常數, 則  $m=1$ . [參閱 (217) 式].

圖 170 標示拱冠處, 起拱處, 及  $\frac{1}{2}$  點處之彎率影響線, 圖 171 標示拱冠處之推力影響線, 此兩圖係錄自 Whitney 氏論文, 圖 172 所示之數值, 係由該論文中所示各資料, 推算而得, 若  $m$  之影響頗微, 因而省略不計, 其所得結果, 或與真值略有出入, 凡由上述論文或由此等曲線所推得之公式, 皆彙列於圖 173, 讀者可並參閱下文之圖 176.

由此諸曲線及公式之研究, 而得下列極重要之結論。

- (a). 拱之曲度及厚度, 對於荷重分界點之位置, 影響甚微。
- (b). 曲度有出入, 比之厚度有出入, 較為重要。
- (c).  $A$  及  $I_x$  之數值, 為  $\frac{l}{EI}$  及  $\frac{1}{12} \cdot \frac{l}{EI} \cdot l^2$ , 與截面通體一致之梁, 約略相同, 但  $y_c$  及  $I_y$  之數值, 則隨曲度厚度而出入頗多。
- (d). 拱冠處及起拱處活荷重最大彎率之係數, 隨曲度厚度而頗有出入, 其近似的平均數值如下。

$$\left. \begin{aligned} \text{拱冠處, } M_c &= \frac{1}{225} \cdot wL^2 \\ \text{起拱處, } M_s &= \frac{1}{45} \cdot wL^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (218)$$

此等係數，與拱之彎起比率（即彎起量對於徑間之比率）並無關係。

(e). 足以決定溫度應力之主要因素，為拱厚對於彎起量之比率，如其拱為指定之某式，則  $f_t \propto \frac{d}{h}$ 。

(f). 若該拱具有指定的某種拱肋截面，並承受指定的某種荷重，

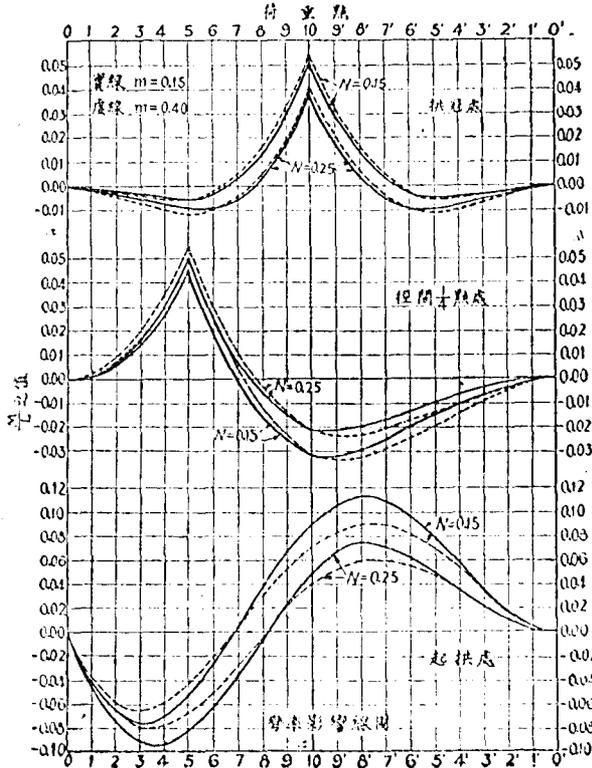


圖 170

則其死荷重

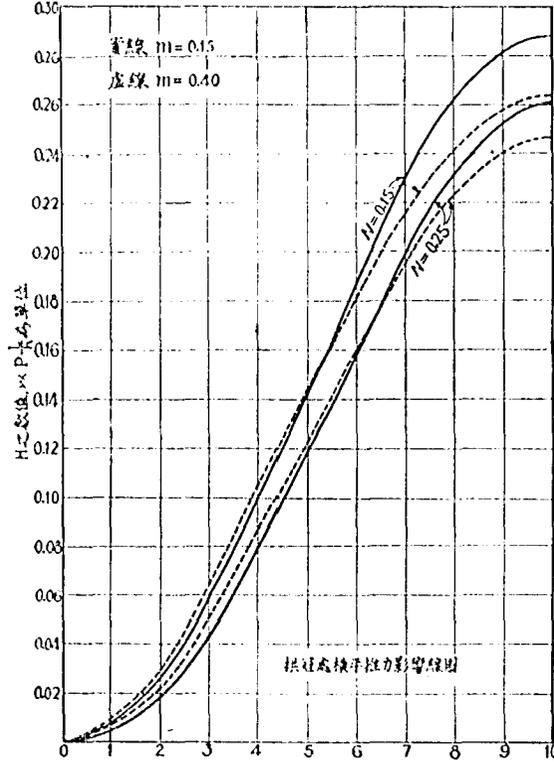
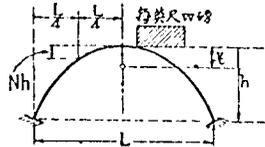
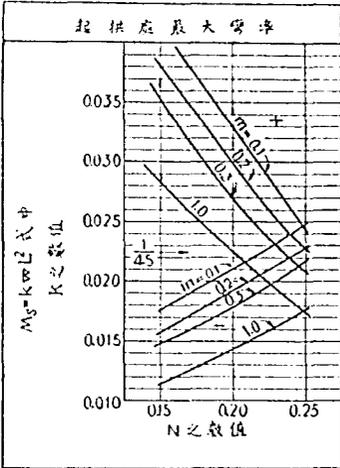
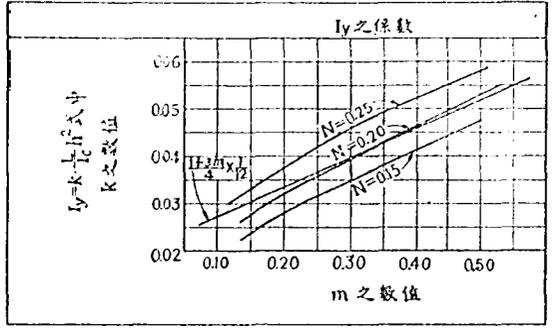
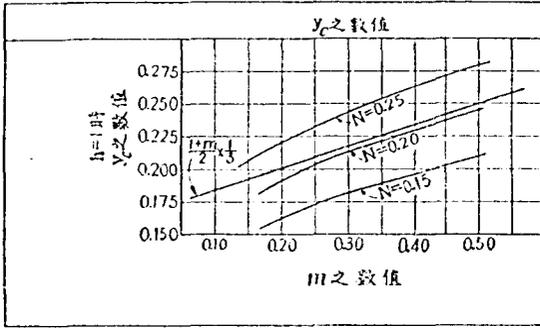


圖 171



$N = \frac{\text{徑間 } \frac{1}{4} \text{ 點處降低量}}{h}$

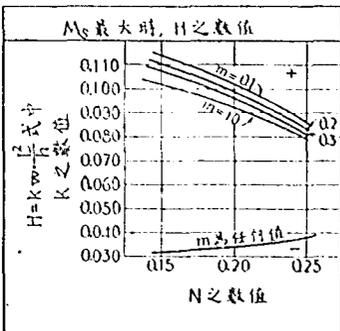
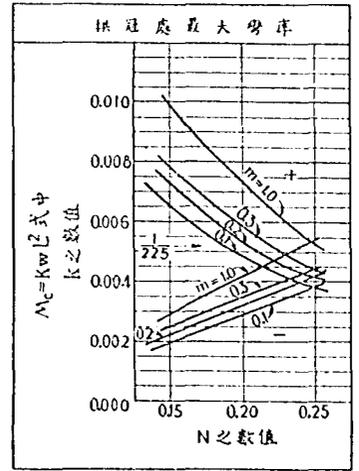
$m = \frac{\text{起拱處之 } \frac{\Delta S}{I}}{\text{拱冠處之 } \frac{\Delta S}{I}} \quad (\Delta x \text{ 相同})$

$A = \frac{1+m}{2} \cdot \frac{1}{EI_c}$

$y_c = \frac{1+m}{2} \cdot \frac{h}{3}$

$I_x = \frac{1+3m}{2+2m} \cdot \frac{1}{12} AL^2$

$I_y = \frac{1+3m}{2+2m} \cdot \frac{4}{45} Ah^2$



又可得各近似值如下。

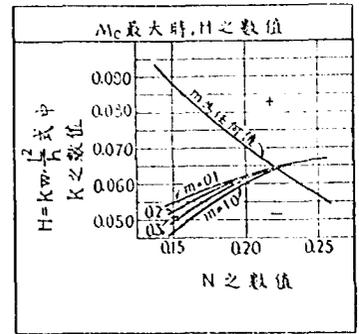
$M_s = \pm \frac{1}{45} wL^2$

$M_c = \pm \frac{1}{225} wL^2$

$M_s = 5 M_c$

$M_s \text{ 最大時, } H = 0.10 w \frac{L^2}{h}$

$M_c \text{ 最大時, } H = 0.06 w \frac{L^2}{h}$



近似公式 (以拋物線拱為根據).

以括弧內之因子乘之, 即可適用於一般折衷的拱.

$$\Delta = \int \frac{ds}{EI} = 2 \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dx}{EI_c} = \frac{L}{EI_c} \quad (\text{因子為 } \frac{1+m}{2})$$

$$v = \frac{2 \int \frac{ds}{EI} \cdot y}{\Delta} = \frac{2 \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dx}{EI_c} \cdot h \cdot \left(\frac{x}{\frac{L}{2}}\right)^2}{\frac{L}{EI_c}} = \frac{8h}{L^3} \cdot \frac{L^3}{24} = \frac{h}{3} \quad (\text{因子為 } \frac{1+m}{2}).$$

$$I_x = \int \frac{ds}{EI} \cdot x^2 = 2 \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dx}{EI_c} \cdot x^2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{L^3}{EI_c} = \frac{1}{12} \Delta L^2 \quad (\text{因子為 } \frac{1+3m}{2+2m}).$$

$$I_y = \int \frac{ds}{EI} \cdot y^2 = 2 \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dx}{EI_c} \cdot h^2 \cdot \left(\frac{x}{\frac{L}{2}}\right)^4 = \Delta \cdot \frac{h^2}{9} = \frac{4}{45} \Delta h^2 \quad (\text{因子為 } \frac{1+3m}{2+2m}).$$

溫 度

$$H_t = \frac{\epsilon E t^2 L}{I_y} = \frac{\epsilon E t^2 L}{\frac{4}{45} \cdot \frac{L}{EI_c} \cdot h^2} = \frac{45}{4} \epsilon E t^2 \cdot \frac{I_c}{h^2}, \text{ 約等於 } 200 t^2 \cdot \frac{I_c}{h^2} \quad (\text{因子為 } \frac{4}{1+2m}).$$

$$M_c = H_t \cdot y_c = \frac{45}{4} \cdot \epsilon E t^2 \cdot \frac{I_c}{h^2} \cdot \frac{h}{3} = \frac{15}{4} \epsilon E t^2 \cdot \frac{I_c}{h} = 67.5 t^2 \cdot \frac{I_c}{h} \quad (\text{因子為 } \frac{2+2m}{1+3m}).$$

若忽視鋼筋之存在, 可得近似值如下.

$$I = \frac{M_c y}{I} = \frac{15}{4} \epsilon E t^2 \cdot \frac{I_c}{h} \cdot \frac{d}{2I_c} = \frac{15}{8} \epsilon E t^2 \cdot \frac{d}{h} \quad (\text{因子為 } \frac{2+2m}{1+3m}).$$

若  $t = 40^\circ$  (華氏), 則約等於  $1350 \cdot \frac{d_c}{h}$ .

尋常計算  $\Delta$  之數值, 祇求  $\frac{L}{I}$  之值, 而省略  $E$ , 故分母祇用  $\frac{1}{I}$  以代  $\Delta$ .

則其死荷重應力，約與  $\frac{L^2}{h}$  成反比例，又凡任何拱之具有指定的式樣，彎起量，及徑間者，其因拱肋本身重量而生之應力多寡，幾與該拱肋之尺寸大小，並無關係。

(其近似的數值為

$$f_c = \frac{1}{8} \frac{A \cdot \frac{L}{h} \cdot L}{A} = \frac{1}{8} \cdot \frac{L^2}{h}, \text{ 此式中之 } L \text{ 及 } h, \text{ 均以英尺計}$$

上述各項，對於設計，均屬極關重要。

關於解算鋼筋混凝土單拱，Charles S. Whitney 氏主張用表解法，其所著論文兩篇及其討論文，如下所開，極有研讀價值。

(a). Design of Symmetrical Concrete Arches, 載入 Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 88, 1925, pp. 931-1103.

(b). Analysis of Unsymmetrical Concrete Arches, 載入 Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 99, 1934, pp. 1268-1294.

## 乙. 彈性橋墩上之連續拱. Continuous Arches on Elastic Piers.

120. 連續拱之解算. 架構之中，或有若干拱，與其橋墩 Piers 或支柱，相連續而不可分，並與桁梁 Girders 或他拱，亦相連續，此項居於細長橋墩之多數相連拱橋問題，近頗日形重要，而連續拱與梁桁之合併應用，於橋梁房屋等工程，同具有採用的可能性，殊為耐人尋味。

此等問題之解算，現已有若干法術，此諸法中，似以下述者，最為簡而易明。其實此不過分配固定端彎率及分配固定端推力之法，略加變通而已。

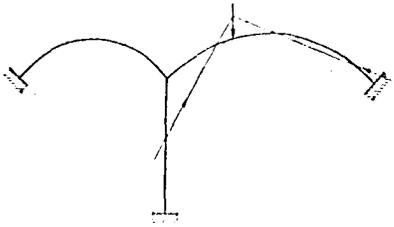


圖 174

試考慮一個雙徑間連續拱及其中間之橋墩，如圖174所示，若墩頂受有約束，不克自由移動，當該橋承受某種荷重時，假設其所發生之各推力線 Thrust Lines，如圖所示，

可先將橋墩所受不平衡的橫平推力，按照該兩拱一墩之推力剛率 Thrust Stiffness，比例分配於此三個桿件，此項推力剛率之意義，可規定如下，即一桿件之彼端受有約束之時，此端所需之橫平推力，俾足以發生單位的變位，而並不發生旋轉是也，照此分配之後，墩頂將發生不平衡的轉率，必須與原有之不平衡的轉率相合併。

此項不平衡的轉率總和，可按照該三桿件之轉率剛率 Moment Stiffness，比例分配於各該桿件，此項轉率剛率之意義，可規定如下，即一桿件之彼端受有約束之時，此端所需之轉率，俾足以發生單位的旋轉，而並不發生變位是也。

分配轉率之後，墩頂又發生不平衡的推力，故必反覆更迭分配，至橫平外力及轉率兩者，均得精確平衡而後已。

上述之法，極易明瞭，<sup>緣</sup>此係利用分配轉率之法，固讀者所熟知者也。然此法有一缺點，蓋因旋轉而生之不平衡的推力，與夫因變位而生之不平衡的轉率，兩者之數值，常屬甚大，故逐次分配之結果，縮斂頗嫌遲緩，計算工作不免稍繁耳。

121. 計算手續 凡結點之旋轉，不必作為繞墩頂，而可作為繞任何點而為之，此點可量予選擇，俾墩頂變位（並不旋轉）所生之推力，對於此點，並不發生旋轉，若此點果照此選取，則該結點繞此點而旋轉所發生之推力，亦不至發生不平衡的推力總和。

爲使最後所得各數字，簡單易明起見，最好以每一桿件之實得的推力變更量（包括該推力變更量之大小及位置），表示該結點業經平衡之結果，既得此等數字，則其他各個數值，均可用靜力學算得之矣。

拱之推力，作爲正號，而輓力則作爲負號。如欲得橋墩之推力，可將相鄰兩拱之推力，相減而得之，拱之轉率，可按照習用規則，以定其正負號。（正號之轉率，使拱裏 Intrados 發生拉力，負號者則使拱表 Extradós 發生拉力），如是則作用於任何點之上方之正號推力，（其力距 Lever Arm 爲正號者）必發生正號轉率，反之則發生負號轉率。

此類問題之解算，需求得下列五項，此五項隨各桿件之物理的性質而異。

(a). 求得某一點之位置，如欲使所得各推力，互相平衡，則墩頂必繞此點而旋轉，如欲使墩頂變位而不旋轉，則各轉率亦必繞此點而平衡，此點可名之曰該結點之中立點，Neutral Point of the Joint.

(b). 三桿件中各桿件之推力剛率之數值，此爲所需以使各桿端發生單位的變位而不發生旋轉之推力。

(c). 三桿件中各桿件之轉率剛率之數值，此爲所需以使各桿端繞該結點之中立點發生單位的旋轉而不使該中立點變位之轉率。

(d). 假設其結點變位而不旋轉，推定各桿件之推力線之位置。

(e). 假設其結點繞中立點而旋轉，但該中立點並不變位，推定各桿件之推力線之位置。

上開諸項，用壓柱比擬法求之頗易，其所需用之數字，於將各桿端視作固定之時，本爲必需求得者，如係對稱拱，則此諸項更易於求得若干便於應用之公式。

下列之法術，可適用於任何荷重或任何變形之合併，如有若干連續拱，欲作一詳盡之研究，最好將單位推力及單位彎率，各自分別分配於各中立點，若將單位推力及單位彎率，先從鄰近該結構物中心之一結點起，施行分配，則進行更形便利，其在該結點之左右各結點，續行分配之時，可將先用之結點，作為固定而不可旋轉，並利用業已求得之各因子，將先得之推力及彎率，按法分配，如是則於考慮距中心愈遠之各結點之時，其推力或彎率之分配，亦愈迅捷，參閱 Continuous Frames of Reinforced Concrete 第 104 頁及第 105 頁，(1952年版)。

如施用此法於兩個以上之連續拱，不獨原有之不平衡的固定端推力及彎率，應行分配，即由其他結點傳達至該結點之推力及彎率，亦必要予分配，當施行分配之時，若祇書寫其所傳達之數值，(參閱第 88 節)，似覺較為便利，夫所分配及所傳達之彎率，既可寫作順沿推力線而作用之推力，以供此項分配之用，則最後所得結果，自可以推力變更量之多寡表示之。

於計算拱肋縮短，收縮，溫度變更，基礎<sup>礎</sup>移動等等影響之時，可先假設各種移動，均在拱中發生，而橋墩則作為並不變形，然後假想各拱為不相連續之獨立徑間，用壓柱比擬法，計算所需以維持連續性之拱端外力，(即彎率及推力)，再將此項算得之不平衡的外力，按照下文所述如何分配因荷重而生之不平衡的外力之法，妥予分配。

如是則橫平移動(即因拱身之收縮，或溫度變更，或拱肋縮短，或墩身不旋轉而作橫平移動所發生之徑間變更量)可作為各該拱之  $M_0$  數值，以供壓柱比擬法之用，其垂直移動(即因拱身之收縮，或溫度變更，或拱肋縮短，或墩身不旋轉而下陷所發生之起拱處高度變更量)可作為與各該拱相當之比擬壓柱之  $M_0$  數值，至若墩底之旋轉，則可作為與相鄰兩拱相當之比擬壓柱所受之荷重，如就高墩基礎旋轉之影響，加以研究，尤足以闡明下述妥慎均衡死荷重推力及溫度變更推力之重要性。

圖 175 及圖 176 中對稱拱之各常數，以及圖 182 中不對稱拱之各常數，若用以推定上開各外力，頗為便利。

對稱混凝土拱之常數(錄自 Whitney 氏論文)

比擬壓柱之性質, 以  $K = \frac{I_c}{L}$  為單位 (參閱圖

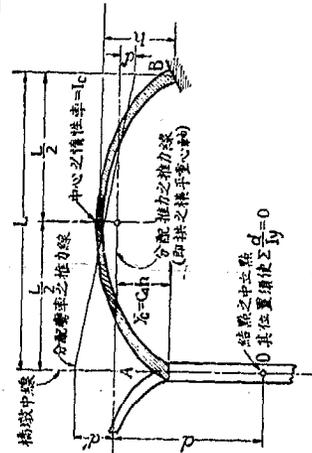
$$175) \frac{1}{I_y} = \frac{c_1}{h^2} K, \quad y_c = c_4 h, \quad c_2 = \frac{c_1}{c_0 + c_5}, \quad c_3 = \frac{c_0 - c_5}{c_0 + c_5}$$

(並參閱圖 172)

	m = 0.20		m = 0.30		m = 0.40		m = 0.50	
$C_5 \rightarrow$	$\frac{1}{A} = 1.67$		$\frac{1}{A} = 1.54$		$\frac{1}{A} = 1.43$		$\frac{1}{A} = 1.33$	
$C_6 \rightarrow$	$\frac{x^2}{I_x} = 7.50$		$\frac{x^2}{I_x} = 6.32$		$\frac{x^2}{I_x} = 5.45$		$\frac{x^2}{I_x} = 4.80$	
N	$c_1$	$c_4$	$c_1$	$c_4$	$c_1$	$c_4$	$c_1$	$c_4$
0.15	36.10	0.8388	28.90	0.8201	24.33	0.8140	21.19	0.7901
0.16	34.97	0.8325	28.09	0.8135	23.70	0.7971	20.63	0.7830
0.17	33.90	0.8262	27.32	0.8039	23.15	0.7903	20.16	0.7761
0.18	32.79	0.8201	26.60	0.8004	22.57	0.7836	19.72	0.7691
0.19	31.85	0.8139	25.91	0.7940	21.98	0.7770	19.27	0.7622
0.20	30.96	0.8078	25.25	0.7876	21.46	0.7704	18.87	0.7554
0.21	30.12	0.8017	24.57	0.7813	21.05	0.7638	18.48	0.7487
0.22	29.24	0.7957	23.93	0.7750	20.58	0.7573	18.03	0.7420
0.23	28.41	0.7897	23.31	0.7688	20.03	0.7509	17.67	0.7355
0.24	27.70	0.7837	22.88	0.7626	19.65	0.7444	17.33	0.7287
0.25	27.03	0.7778	22.32	0.7564	19.23	0.7381	17.01	0.7221

$$\frac{dd'}{h^2} = \frac{c_0 + c_5}{c_1}, \quad \frac{d''}{d'} = \frac{c_0 - c_5}{c_0 + c_5}$$

圖 175



$$dd' = -\frac{\frac{1}{A} + \left(\frac{L}{2}\right)^2}{\frac{1}{I_x}} = \frac{h^2}{c_2}$$

$$\frac{d''}{d'} = \frac{\frac{1}{A} - \left(\frac{L}{2}\right)^2}{\frac{1}{A} + \left(\frac{L}{2}\right)^2} = c_3$$

$$\text{推力剛率} = \frac{1}{I_y} = c_1 \frac{I_c}{h^2} \frac{1}{L}$$

旋繞 O 點之彎率剛率

$$= d(d + d') \frac{1}{I_y}$$

圖 175

122. 分配常數，各常數之適用於對稱拱者，如圖 175 所示，由該拱之物理的性質，可求得四個常數，名之曰  $c_1, c_2, c_3,$  及  $c_4$ 。圖 176 表示適用於 Whitney 氏所解算各拱之此諸常數。

此等常數，可用壓柱比擬法求得之，

拱端並不旋轉 而作橫平的變位，與其比擬壓柱截面繞一個橫平軸而撓屈者相當，其推力線（中立軸）即比擬壓柱截面之橫平的重心軸 其因單位變位而生之推力，即比擬壓柱截面在與中立軸之垂直距離等於單位距離處之應力，故

$$\text{推力剛率} = \frac{1 \times 1}{I_y} = \frac{1}{I_y} \dots \dots \dots (219)$$

旋繞結點之中立點而生之單位旋轉 與比擬壓柱截面在該點受有單位荷重者相當，其因此而得之推力 順沿該比擬壓柱截面受此荷重時之中立軸 而發生其作用，此推力即等於壓柱截面在與中立軸之垂直距離等於單位距離處，受有此項荷重時之纖維應力，其中立軸之位置，可由纖維應力等於零之兩點推定之，故（參閱圖 175）

$$\frac{1}{A} + \frac{\left(\frac{L}{2}\right)}{I_x} \cdot \frac{L}{2} + \frac{d}{I_y} \cdot d' = 0,$$

及  $\frac{1}{A} - \frac{\left(\frac{L}{2}\right)}{I_x} \cdot \frac{L}{2} + \frac{d}{I_y} \cdot d'' = 0,$

由此而得  $dd' = - \frac{\frac{1}{A} + \left(\frac{L}{2}\right)^2}{I_x} \dots \dots \dots (220)$

$$\frac{1}{I_y}$$

$$\text{及 } \frac{d''}{d'} = \frac{\frac{1}{\Lambda} - \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2}{I_x}}{\frac{1}{\Lambda} + \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2}{I_x}} \dots\dots\dots (221)$$

繞中立點而作單位旋轉 其所發生之彎率 (繞該中立點之彎率), 即此假壓柱截面於該點受有單位荷重時, 在該點之纖維應力, 故得

$$\text{彎率剛率} = \frac{1}{\Lambda} + \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2}{I_x} \cdot \frac{L}{2} + \frac{d}{I_y} \cdot d.$$

$$= \left[ \frac{\frac{1}{\Lambda} + \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2}{I_x}}{\frac{1}{I_y}} + d^2 \right] \frac{1}{I_y} = (dd' + d^2) \frac{1}{I_y} = d(d + d') \frac{1}{I_y} \dots (222)$$

如欲求橫平推力, 可將 A 點處之彎率變更量, 以力距  $(d + d')$  除之, 或將 B 點處之彎率變更量, 以 B 點之  $(d - d')$  除之.

其關於橋墩所需用之各常數, (1) 為  $\frac{1}{I_y}$ , 用以推定推力剛率, (2) 為彈性重心之位置, (3) 為  $-\frac{1}{\Lambda}$ , 用以推定發生旋轉時之推力

線位置, 並由此而求得彎率剛率.

123. 設題演算. 試取四個連續徑間, 如圖 178 及圖 179 所示, 藉以闡明此法之應用, 各拱均假設為同式. 按照 Whitney 氏分類法, 作為  $m=0.40$ ,  $N=0.20$ , 為便利起見, 各墩之豎面, 均作為垂直而不斜, 各拱之徑間, 彎起量, 及拱冠厚度, 以及各墩之高度及寬度, 均先

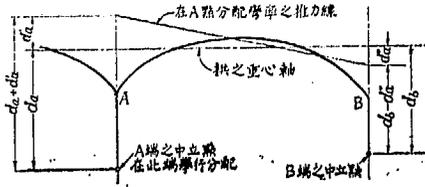
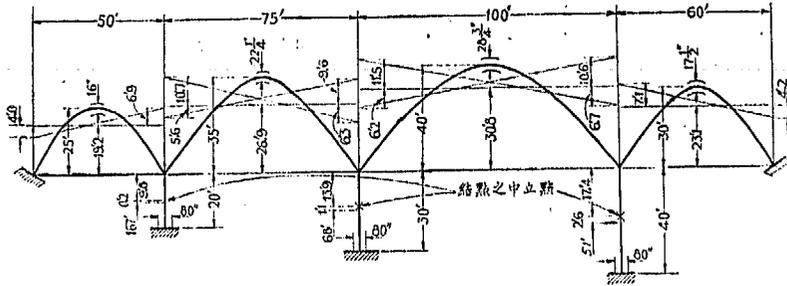


圖 177. (參閱圖 175).



項別	m	N	$\frac{1}{I_y}$	dd'	d''	y <sub>c</sub>
拱	0.4	0.2	$\frac{21.46}{h^2} \frac{c}{L}$	$\frac{h^2}{3.12}$	0.585d'	0.77h
墩	垂直面		$\frac{12}{h^2} \frac{1}{h}$	$\frac{h^2}{12}$	—	$\frac{1}{3}h$

參閱圖 176.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
(1)	$\frac{1}{I_y} d \frac{r^4}{Lh^2}$	1		0.92		1.12		0.76
(2)	相對的 $\frac{1}{I_y} d \frac{r^4}{h^2} \frac{h}{L} \times \frac{12}{31.46}$		274		81		34.1	
(3)	$\Sigma$		276		82		36	
(4)	分配, %	0.35		0.33 1.11		1.35 3.10		2.10
(5)	$\times y_c$	$\times (+19.2)$	$\times (-10.0)$ $-2740$ $+ 19$ $+ 25$ $\frac{-2896}{276}$ 9.8	$\times (+26.9)$	$\times (-15)$ $-1215$ $+ 85$ $+ 25$ $\frac{-1105}{83}$ 13.9	$\times (+30.8)$	$\times (-20.0)$ $-682$ $+ 35$ $+ 18$ $\frac{-629}{36}$ 17.4	$\times (33.1)$
(6)	d	29.0	0.2	36.7 40.8	1.1	44.7 48.2	2.6	40.5
(7)	$d' \begin{cases} \frac{h^2}{3.12d} - \\ \frac{h^2}{12d} - \end{cases}$	6.9		10.7 9.6		11.6 10.6		7.1
(8)	$d'' = 0.585d'$	4.0		6.3 5.6	68	6.7 6.2	61	4.2
(9)	$d(d' + d) \frac{1}{I_y}$	1049	9180	1600 1900	6160	2820 3180	4760	1460
(10)	$\Sigma$		11820		10880		9400	
(11)	%	8.8		13.5 17.5		26.0 33.8		16.5
(12)	$\times \frac{d_b - d_a}{d_a + d_b}$	$\times \frac{25}{35.9}$		$\times \frac{34.5}{47.4} \times \frac{31.1}{50.4}$		$\times \frac{41.5}{56.2} \times \frac{33.5}{68.8}$		$\times \frac{36.3}{47.6}$
(13)	%	6.1		9.9 10.8		19.2 22.1		11.8

圖 178. (參閱圖 179).



列示於圖中，然後由圖 176，求得各拱之主要常數。此係初步工作所需之數字。

先計算各桿件之相對的  $\frac{1}{I_y}$  數值，此項數值，在第一拱（自左方起），作為等於一，在其他桿件，則由所示之  $\frac{1}{I_y}$  公式，用比例求得之。

設令  $y_c$  為自墩頂至拱（或墩）之橫平重心軸之垂直距離（參閱圖 175），讀者注意，此與單拱之  $y_c$  異。

求得  $d$  之數值，俾每墩之  $\sum \frac{d}{I_y} = 0$ 。

由  $dd' = -\frac{h^2}{c_2}$  式，求得  $d'$  之數值。

求各拱之  $d'' = c_3 d'$ ，既得  $d$ ， $d'$ ， $d''$  等數值，則各拱之推力線位置，即為之決定。

求各結點之  $d(d+d')$   $\frac{1}{I_y}$ ，用以量度各該結點處之彎率剛率。

求各墩頂推力在各拱端之分配因子，此即等於

$$\text{各桿件之 } \frac{1}{I_y} \times \sum \frac{1}{I_y}$$

旋繞每一墩頂中立點之彎率，應按  $\frac{d(d+d') \frac{1}{I_y}}{\sum \left[ d(d+d') \frac{1}{I_y} \right]}$  之比率以分配

之，各拱中此等分配彎率之發生，係由於順沿推力線而作用之推力，俾在中立點發生旋轉。此項分配彎率，並能發生旋繞該拱彼端中立點之彎率，其數值等於（頂）此推力與其力距相乘之積，故任何結點之彎率，應按照

$\frac{d_a(d_a + d'_a) \frac{1}{I_y}}{\Sigma \left[ d_a(d_a + d'_a) \frac{1}{I_y} \right]} \cdot \frac{d_b - d''_a}{d_a + d'_a}$  比率, 以傳達於該拱之彼端。此式中各字右

下角之 a 字表示施行分配的結點, 而 b 字則表示該拱之彼端。此等關係 觀圖 177 自明。

由上所述, 計共推定下開三種主要常數, 以供分配之用, 即

(a). 不平衡推力之分配因子, 亦即不平衡推力之百分數, 必須傳達至各該拱之彼端者。

(b). 旋繞中立點之不平衡彎率之百分數, 必須傳達至各該拱之彼端, 作為旋繞彼端中立點之彎率。

(c). 關於分配推力及分配彎率之推力線之位置。

關於本問題各拱, 此諸數值, 具如圖 178 所示, 茲將該圖中各數字, 逐一詮釋於下。

橫行 1, 縱行 2 之 1, 即第一拱之  $\frac{1}{I_y}$ , (自左方起之第一拱)。

縱行 4 之 0.92, 即第二拱之  $\frac{1}{I_y}$ ,  $\left[ = \left( \frac{22\frac{1}{2}}{16} \right)^3 \times \frac{50}{75} \times \left( \frac{25}{35} \right)^2 \right]$ 。

縱行 6 之 1.12, 即第三拱之  $\frac{1}{I_y}$ ,  $\left[ = \left( \frac{28\frac{3}{4}}{16} \right)^3 \times \frac{50}{100} \times \left( \frac{25}{40} \right)^2 \right]$ 。

縱行 8 之 0.76, 即第四拱之  $\frac{1}{I_y}$ ,  $\left[ = \left( \frac{17\frac{1}{2}}{16} \right)^3 \times \frac{50}{60} \times \left( \frac{25}{30} \right)^2 \right]$ 。

橫行 2, 縱行 3 之 274, 即第一墩之  $\frac{1}{I_y}$ ,  $\left[ = \left( \frac{80}{16} \right)^3 \times \left( \frac{25}{20} \right)^2 \times \frac{50}{20} \times \frac{12}{21.46} \right]$ 。

縱行 5 之 81, 即第二墩之  $\frac{1}{I_y}$ ,  $\left[ = 274 \times \left( \frac{20}{30} \right)^3 \right]$ 。

縱行 7 之 34.1, 即第三墩之  $\frac{1}{3}$ ,  $\left[ =274 \times \left(\frac{20}{40}\right)^2 \right]$ .

橫行 3. 縱行 3 之  $276=1+274+0.92$ .

縱行 5 之  $83=0.92+81+1.12$ ,

縱行 7 之  $36=1.12+34.1+0.76$ .

橫行 4. 縱行 2 之  $0.35=\frac{1}{276}$ , [此數實應為 0.36],

縱行 4 之  $0.33=\frac{0.92}{276}$ ,  $1.11=\frac{0.92}{83}$ .

縱行 6 之  $1.35=\frac{1.12}{83}$ ,  $3.10=\frac{1.12}{36}$ .

縱行 8 之  $2.10=\frac{0.76}{36}$ .

橫行 5. 縱行 2 之  $+19.2=0.77h$  (參閱圖 176)  $=0.77 \times 25'$ ,

縱行 3 之  $-10.0=\frac{1}{2}h'=\frac{1}{2} \times -20'$  (20' 為墩高),

$$-2740=-10 \times 274, \quad +19=1 \times (+19.2),$$

$$+25=0.92 \times (+26.9) \text{ [參看縱行 4].}$$

縱行 4 之  $+26.9=0.77h=0.77 \times 35'$ .

縱行 5 之  $-15=\frac{1}{2}h'=\frac{1}{2} \times -30'$  (30' 為墩高),  $-1215=-15 \times 81$

$$+35=1.12 \times (+30.8) \text{ [參看縱行 6].}$$

$$+25=0.92 \times (+26.9), \quad \text{[參看縱行 3].}$$

縱行 6 之  $+30.8=0.77h=0.77 \times 40'$ ,

縱行 7 之  $-20.0=\frac{1}{2}h'=\frac{1}{2} \times -40'$  (40' 為墩高),

$$-682=-20 \times 34.1, \quad +35=1.12 \times (+30.8),$$

$$\text{[參看縱行 5], } +18=0.76 \times (+23.1) \text{ [參看縱行 8].}$$

$$\text{縱行 8 之 } +23.1=0.77 \times 30'$$

$$\text{橫行 6, 縱行 2 之 } 29.0=19.2+9.8.$$

$$\text{縱行 3 之 } 0.2=10.0-9.8.$$

$$\text{縱行 4 之 } 36.7=26.9+9.8, \quad 40.8=26.9+13.9.$$

$$\text{縱行 5 之 } 1.1=15.0-13.9.$$

$$\text{縱行 6 之 } 44.7=30.8+13.9, \quad 48.2=30.8+17.4,$$

$$\text{縱行 7 之 } 2.6=20.0-17.4,$$

$$\text{縱行 8 之 } 40.5=23.1+17.4,$$

$$\text{橫行 7, 縱行 2 之 } 6.9=\frac{h^2}{3.12d}=\frac{(25)^2}{3.12 \times 29.0}, \text{ 餘做此.}$$

$$\text{縱行 3 之 } 167=\frac{h'^2}{12d}=\frac{(20)^2}{12 \times 0.2}, \text{ 餘做此.}$$

$$\text{橫行 8, 縱行 2 之 } 4.0=0.585 \times 6.9, \text{ 餘做此.}$$

$$\text{橫行 9, 縱行 2 之 } 1040=d(d'+d)\frac{1}{I_y}=29.0(6.9+29.0) \times 1, \text{ 餘做此.}$$

$$\text{縱行 3 之 } 9180=d(d'+d)\frac{1}{I_y}=0.2(167+0.2) \times 274, \text{ 餘做此.}$$

$$\text{橫行 10, 縱行 3 之 } 11820=1040+9180+1600, \text{ 餘做此.}$$

$$\text{橫行 11, 縱行 2 之 } 8.8\%=\frac{1040}{11820},$$

$$\text{縱行 4 之 } 13.5\%=\frac{1600}{11820}, \quad 17.5=\frac{1900}{10880}, \text{ 餘做此.}$$

$$\text{橫行 12, 縱行 2 之 } \frac{25}{35.9}=\frac{29.0-4.0}{29.0+6.9},$$

$$\text{縱行 4 之 } \frac{34.5}{47.4}=\frac{40.8-6.3}{36.7+10.7}, \quad \frac{31.1}{50.4}=\frac{36.7-5.6}{40.8+9.6},$$

$$\text{縱行 6 之 } \frac{41.5}{56.2} = \frac{43.2 - 6.7}{44.7 + 11.5}, \quad \frac{38.5}{53.8} = \frac{41.7 - 6.2}{48.2 + 10.6},$$

$$\text{縱行 8 之 } \frac{36.3}{47.6} = \frac{40.5 - 1.2}{40.5 + 7.1}.$$

$$\text{橫行 13, 縱行 2 之 } 6.1\% = 8.8\% \times \frac{25}{35.9},$$

$$\text{縱行 4 之 } 9.9\% = 13.5\% \times \frac{34.5}{47.4}, \quad 10.8\% = 17.5\% \times \frac{31.1}{50.4}.$$

餘做此。

於此四個連續拱中，試假設一種荷重，即 BC 徑間之中央，受有垂直荷重 = 0<sup>k</sup>.2，如圖 179 所示。

先由固定端拱之影響線圖（即圖 170 及圖 171），求得此項荷重之推力及拱端轉率，[指 BC 拱而言] 如下。

$$H = 0.256 \frac{L}{h}, \quad P = 0.256 \times \frac{100'}{40'} \times 0.2 = 0^k.128 = 128 \text{ 磅} [0.256 \text{ 由圖 171 查得, 因 } m = 0.40, N = 0.20]$$

$$M = 0.054 P \cdot L = 0.054 \times 0.2 \times 100' = 1^k.080 = 1080 \text{ 磅英尺} [0.054 \text{ 由圖 170 之起拱處圖查得, 因 } m = 0.40, N = 0.20]$$

乃將此等端轉率，改換為旋繞 B、C 兩點的中立點之轉率，故得

$$\text{旋繞 B 點中立點之轉率} = 1080 + 128 \times 13.9 = + 2860, [13.9 = \text{該中立點在 B 點下之距離}]$$

$$\text{旋繞 C 點中立點之轉率} = 1080 + 128 \times 17.4 = + 3310, [17.4 = \text{該中立點在 C 點下之距離}]$$

先將不平衡的推力，如法分配，故得

$$\text{由 B 至 A,} \quad 128 \times 0.0111 = 1.42, [0.0111 = 1.11\%, \text{ 後做此}]$$

$$\text{由 B 至 C,} \quad 128 \times 0.0135 = 1.73.$$

由 C 至 B,  $128 \times 0.0310 = 3.98$ .

此後更分配一次, 如圖 179 所示.

乃將所傳達之全部推力, 改換為旋繞中立點之轉率, 改換之法, 係將自該中立點至分配推力之推力線間之距離, 乘此項全部推力, 例如 A 點之分配推力總和 = +1.38, 以 36.7 乘之 (此 36.7 為自 A 點中立點至 AB 徑間分配推力之推力線間之距離, 見圖 178 中, 橫行 6 及縱行 4 之左方) 得 +51, 此即旋繞 A 點中立點之改換轉率, 餘做此, 此項改換轉率, 與原有轉率相加, 而得轉率總和, 例如 AB 徑間 A 端原無轉率, 故其轉率總和, 即等於 +51, B 端原無轉率, 而分配推力等於零, 故改換轉率亦等於零, 而轉率總和自亦必等於零, BC 徑間 B 端原有轉率為 +2860, 其改換轉率為 -176 (=  $-3.93 \times 44.7$ ), 故轉率總和為 +2684 (=  $+2860 - 176$ ), C 端做此.

乃將各個分配轉率, 分別自此端傳達至彼端, 例如

由 A 至 B,  $51 \times 0.099 = 5$ , [0.099 = 9.9%, 後做此]

由 B 至 A,  $2684 \times 0.108 = 290$ ,

由 B 至 C,  $2684 \times 0.192 = 516$ ,

由 C 至 B,  $3229 \times 0.221 = 713$ ,

按照尋常分配轉率之法, 繼續分配並傳達之, 計共作五次.

復將此項傳達轉率總和, 改換為推力, 改換之法, 係將自被傳達端中立點至分配轉率之推力線間之距離, 除上得之轉率總和, 例如 AB 徑間 A 端之傳達轉率總和 +225, 以 31.1 除之 (此 31.1 為自 A 端中立點至 AB 徑間分配轉率之推力線間之距離, 見圖 178 中, 橫行 12 及縱行 4 右方之分子) 而得 +7.22, 餘做此.

此項推力, 可做照分配原有不平衡的推力之法, 再加分配, 其實此次分配, 儘可省略不作, 其因此而生之差誤, 亦必為量無幾.

然後求得其推力總和，計共有三項，(一)由於分配推力之被傳達者（此為 $-3.63-1.47=-5.10$ ），(二)由於自 B 傳達至 C 者（此為 $-9.70$ ），(三)由於自 C 傳達至 B 者（此為 $-16.25$ ）

此後所餘之問題，為求拱冠處及左右兩起拱處之轉率變更量，此乃用靜力學可以解算者，法將每個推力變更量，以其與起拱處相距之力距乘之，並將各個乘得之積相加，即得轉率變更量，[例如，求 BC 徑間 B 點之各個轉率變更量如下，

$$-5.10 \times 30.8 = -157 \quad (\text{此 } 30'.8 \text{ 為自起拱處至分配推力之推力線間之距離})$$

$$-16.25 \times 24.6 = -400 \quad (\text{此 } 24'.6 = 30'.8 - 6'.2, \text{ 見圖 } 178).$$

$$\underline{-9.70 \times 42.3 = -410} \quad (\text{此 } 42'.3 = 30'.8 + 11'.5, \text{ 見圖 } 178).$$

$$\text{合計 } -31.05 \quad -967.$$

其 C 點之各個轉率變更量，亦可做照求得之。至若欲求拱冠 D 點處之轉率變更量，則將兩起拱處（即 B 及 C）之轉率變更量，取其平均之數，再於其中減去推力變更量與彎起量相乘之積，即得。[圖 179 之  $-1015 = \frac{-967 - 1064}{2}$ ，推力變更量總和  $= -31.05$ ，彎起量  $= 40'$ ，故得 D 點之轉率變更量  $= -1015 - (-1242) = +227$ 。至若 D 點之原有固定端轉率，圖中所示者為  $+950$ ，此  $+950$ ，係由圖 170 之拱冠處圖求得之，因  $m=0.4$ ， $N=0.2$ ，由該圖查得所需之係數  $= 0.0475$ ，故拱冠處之原有固定端轉率  $M=0.0475 \times 200 \times 100' = +950$  磅英尺]。

124. 轉率影響線圖。拱端固定而受有垂直荷重之影響線圖之繪畫，可利用 Müller-Breslau 氏原則，使某一指定截面之左右兩方，繞該截面之軸發生相對的旋轉，以此項旋轉量，除各荷重之垂直變位，即得所求轉率之影響線縱距。

〔註：設欲求某函數之影響線，例如圖 180 (a) 所示連續梁在 A 點之撓率，可用下法求得之。

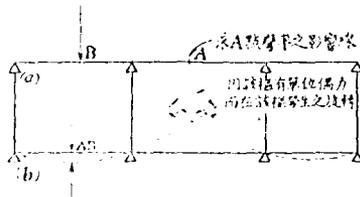


圖 180.

- (a). 於 A 點，假想有一個樞。
- (b). 於任何點 B 處，假想有一個垂直單位荷重。
- (c). 求得梁軸在該樞左右兩方之相對的旋轉量。
- (d). 假想有一個單位偶力 Couple，各作用於該樞之左右方，求得梁軸在該樞左右兩方之相對的旋轉量 [圖 180 (b)]。

得梁軸在該樞左右兩方之相對的旋轉量 [圖 180 (b)]。

$$(c). \quad \text{則 } M_A = \frac{\text{因 B 點受有單位荷重，而 A 樞發生之旋轉量}}{\text{因 A 點受有單位偶力，而 A 樞發生之旋轉量}}$$

但據 Maxwell 氏相互變位定理 [本書第 44 節及 Whitney 氏論文 (第 119 節)] 而知 因 B 點受有單位垂直荷重而 A 樞發生之旋轉量 = 因 A 點受有單位偶力而 B 點發生之垂直撓度，(圖中之  $\Delta_B$ )，故得

$$M_A = \frac{\text{因 A 點受有單位偶力，而 B 點發生之垂直撓度}}{\text{因 A 點受有單位偶力，而 A 點發生之旋轉量}}$$

易言之，在無樞的結構物中，因 B 點受有垂直單位荷重而在 A 點所發生之撓率，等於在有樞的結構物中，因 A 樞受有相當偶力，俾 A 樞作單位的旋轉，而在 B 點所發生之垂直撓度。

上文所述，僅就彎率舉例說明。若就一般言之，如欲求某應力之影響線，可假設其發生一個單位的變位，俾與該應力相當，如是則可見該結構物桿件各點所發生之變位，即形成各該桿件之影響線。

此即影響線之通用原則，亦稱爲 Müller-Breslau 氏原則。]

若其拱爲若干連續拱之一，凡發生旋轉之各外力，必亦能使該拱兩端（即墩頂）旋轉而且變位，而此等移動，必更能發生垂直的變位，如是則該徑間中受有各荷重之影響線，可視作由下開三部份構成之，

- (a) 拱端固定時之影響線縱距。
- (b) 受有外力時，因拱端變位而發生之影響線縱距變更量。
- (c) 受有外力時，因墩頂旋轉而發生之影響線縱距變更量。

據研究多數問題之所得，上列之第三項，較爲無關重要，其第二項所發生之變更量，若繪成曲線，其形狀與拱端固定者之拱冠推力影響線相同，故若假定其全部變更量（b, c 兩項合併），違守同一之變化，其錯誤當不至甚大。

如是則祇須假設該連續拱中各拱冠處，逐一受有荷重，而計算其彎率，即可迅速繪成甚相近似之影響線圖。蓋由此項算得彎率，即可確定每拱之一個影響線縱距，若繪入拱端固定時之影響線圖，並於各拱中央，加以與拱冠推力成正比之縱距，即可獲得影響線總縱距之一個數值，如是則所得之近似值，對於初步解算，固甚有貢獻，即於最後設計，亦常屬精密合用。

圖 181 所示之影響線圖，係就圖 179 之 BC 徑間，假定祇有該徑間承受荷重，而表示拱冠處 D 點之彎率，及起拱處 B 點之彎率。

如使各該徑間其他各點，亦受荷重，則繪入之影響線圖，自必更爲精密，此項精密，究應達到何種程度，此則視設計人所需要者而定，但若過求精密，無裨實用，則殊可不必也。

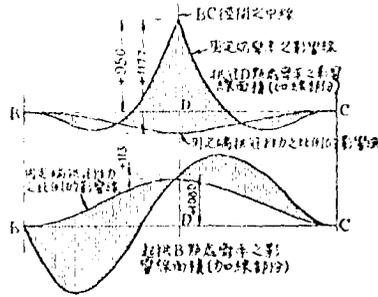
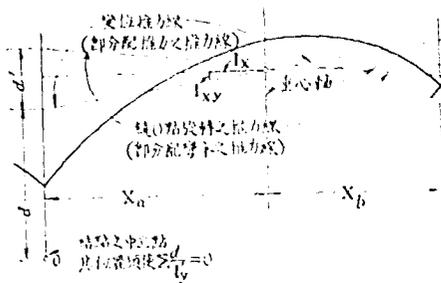


圖 181.

125. 連續拱中之不對稱拱.



$$dd' = \frac{\frac{1}{A} + \frac{X_a^2}{I_x}}{\frac{1}{I_y}}$$

$$\frac{d'}{d} = \frac{\frac{1}{A} - \frac{X_a \cdot X_b}{I_x}}{\frac{1}{A} + \frac{X_b^2}{I_y}}$$

$$\text{推力剛率} \frac{1}{I_y} = \frac{1}{I_y - \frac{P_{xy}}{I_x}}$$

$$\text{繞O點之轉率剛率} = d(d + d') \frac{1}{I_y}$$

圖 182.

若係不對稱拱，則上述各公式之表示各拱性質者，應略加修改，其變位推力線（即分配推力之推力線）並非橫平線，但各縱距仍以由此線起量為便利，(圖182)。此推力線與橫平軸所成之角等於  $\tan^{-1} \frac{I_{xy}}{I_x}$ ，其繞O點旋轉之推力線（即分配轉率之推力線）可由變位推力線以定其位置，即由算得之  $d'$  及  $d''$  數值以確定該推力線也。

此等關係，可用壓柱比擬法求得之，其結果自係一般的解法，而對稱拱則其中之特殊者耳，其結點之中立點，須使其位置，能令  $\sum \frac{d}{I_y} = 0$ ，如係對稱拱，則  $I_y = I_y$ 。

關於彈性橋墩上之連續拱解法，尚有下列四篇，可資讀者參考。

(a). Hool and Kinne兩教授合編之 Reinforced Concrete and Masonry Structures, pp. 486—496, 1924 年版。

(b). A.C. Janni 氏所著之 The Design of A Multiple-Arch System and Permissible Simplifications, 及其討論文，見 Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 88, 1925, pp. 1142—1244.

(c). Charles S. Whitney 氏所著之 Analysis of Continuous Concrete Arch Systems, 及其討論文，見 Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 90, 1927, pp. 1094—1146.

(d). Final Report of the Special Committee on Concrete and Reinforced Concrete Arches, 其中有一章，述代數的及實驗的解法之合併應用於連續拱，見 Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 100, 1935, pp. 1573—1581.

但編者認為上列諸法，皆不及本書所述分配推力變率法之簡明便用。

### 丙. 梁與拱之合用. Combinations of Girders and Arches.

126. 緒言. 梁拱合用之可能方法，多不勝計，此等合用方法，歐美各國橋工中，常加以採用，其在特殊房屋工作中，常為宜於採用之一種辦法，若其解算之法，果能明白了解，則採用或且較廣，此問題之範圍過大，此處未能詳加研究，祇就其可能各端，略舉一二，以見一斑，其最重要之問題，厥為何者確有詳加解算之價值，何種荷重及何種變率，確能影響及於設計，此固與其他問題相同者也，總之，所欲求得者，固不在乎按照理論，盡知其各種可能的應力，而在乎推定其有關安危之各桿件的截面。

127. 舉例說明，圖 183 至圖 186 所示者，不過酌舉若干例，以備研究而已。

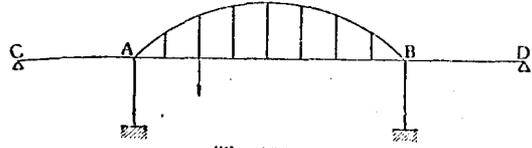
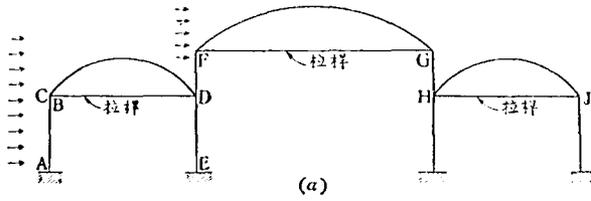
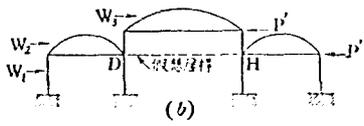


圖 183



(a)



(b)

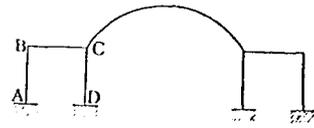
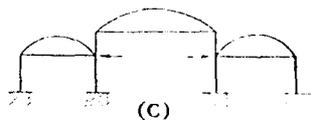


圖 185



(c)  
圖 184

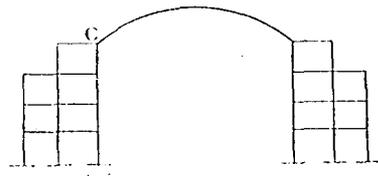


圖 186

圖 183. 拱端或可發生旋轉, 但不能變位, 其因梁或柱受壓而微有縮短者, 則不在此限, 故可將旋繞 A, B 兩點之彎率, 即予如法分配, 繞此兩點旋轉之推力線, 應先求得, 再以力距除彎率, 即得橫平推力之變更量.

- (1). 求得該拱在 A, B 兩點之固定端彎率.
- (2). 如法分配此諸彎率.
- (3). 求得其推力線, 及該拱之推力變更量.

圖 184. 此問題中, 各個具有拉桿之拱, 未便視作純粹剛勁之桿件, 當分配其剪截力之時, 必須利用分配彎率法.

- (1) 加入一個假想壓桿, 如 (b) 所示.

求得 A, B, C, D, E, F, G, 等點處之固定端彎率.

分配此諸彎率, 並利用靜力學, 以求得假想外力  $P'$  及  $U''$ .

$P' = W_2 \pm$  (立柱 DF 及 立柱 HG 之剪截力).

$U'' = W_2 \pm W_1 \pm$  (立柱 DF 及 立柱 HG 之剪截力)  $\pm$  (下層各柱底之剪截力).

(2). 假設有與  $P', U''$ , 相當之外力, 求得剪截力及其相當彎率, 凡兩組, 並利用聯立方程法, 求得因  $P'$  及  $U''$  而發生之彎率, 由是而求得假想壓桿中之軸向壓力.

- (3). 撤除假想壓桿, 並以相反而相等之力抵銷之, 如 (c) 所示.

假設各立柱之端, 均為固定者, 分配此諸力於各立柱, 將此等固定端彎率, 如法分配, 並推算此項分配彎率所確實代表之外力, 然後求得其真確彎率.

(4). 將 (1), (2), (3) 所得之彎率相加.

編者按, 此即本書第 154 節之法, 可參閱之.

128. 拱及矩形架構之合用. 如拱墩為矩形架構所承托, 此亦可用上述之法以解算之, 如圖 185, C 點有拱, 及立柱 CD, 及不對稱的磬折形架構, 同遇於該點.

此磬折形架構, 可視作一個不對稱的拱, 用壓柱比擬法以解算之, 先推算  $I_x, I_y, I_{xy}$ , 及重心所在, 由此而求得推力剛率及變位推力線 (即分配推力之推力線), 再於求得 C 點之中立點位置以後, 依次推求分配彎率之推力線, 及彎率剛率.

本問題更有一特宜採用之解法, 即推算 ABCD 整個架構之彈性的性質, 而於解算之時, 視此架構如同一個桿件是也, 施用此法之步驟如下.

(1). 於 ABCD 架構, 設令 C 點不變位, 而旋轉成一個單位角, 求得 C 點處之不平衡的  $H_a$  及  $M_a$ .

(2). 於 ABCD 架構, 設令 C 點不旋轉, 而移動達一個單位距離, 求得 C 點處之不平衡的  $H_b$  及  $M_b$ .

如是乃可按照拱及架構之推力剛率之比例 ( $H_a$ ), 分配 C 點之不平衡的推力於拱及架構, 並求得其因此而發生之不平衡的彎率 (由  $M_a$ ), 再按照彎率剛率之比例 ( $M_b$ ), 分配 C 點之不平衡的彎率, 並求得因此而發生之不平衡的推力 (由  $H_b$ ), 如是反覆演算, 至斂縮極微而後已.

圖 186 所示者, 為與此類似之又一問題.

## 第五編 新著摘述

### ABTRACTS OF SOME RECENT ARTICLES.

#### 第二十一章 連續梁之直接設計

##### DIRECT DESIGN OF CONTINUOUS BEAMS.

129. 緒言。科學發展，日新月異，自 Hardy Cross 教授發明分配彎率法以來，迄今已逾十年。此十年中新著迭出，多不勝讀，編者踴處遠東，孤陋寡聞，所得寓目之書報，無異滄海之一粟，絕不敢侈言廣博，茲姑就涉獵所及，摘取若干新著之關於剛構解法者，約略陳述於本編之中，掛一漏萬，知所不免，讀者諒之。

本章所述者，為 L. E. Grinter 氏之直接設計法，其文見 Engineering News—Record, Mar. 16, 1939. 並經轉載入是年七八兩月合刊之中美工程師協會月刊, Journal of the Association of Chinese and American Engineers, July-August, 1939.

Grinter 氏謂尋常結構物之直接設計方法，大都不能適用於連續梁，此項連續梁之現行設計步驟，(1) 為將各徑間所需用之截面，先予以揣測的假定，(2) 按照分配彎率法，使之平衡，而計算各點之纖維應力，(3) 如有應力過大或過小處，將各截面酌加修改，重作一揣測的假定，如是反復計算應力，並修改截面，至各徑間中並無應力過大或過小之處而後已。其法頗嫌繁複而費時，下述之法，利用分配彎率法以作直接設計，藉免屢次嘗試之煩。

130. 直接設計。此法於 1933 年間，初經作者施用於連續梁，嗣於 1934 年間，擴展之使適用於連續架構，此後雖有若干改善，但其基本原則，並無若何變更，凡桿件之兼受軸向力及撓屈作用者，以及因荷重不同而須採用不相同之實用應力 Working Stress 者，皆可用此法以作設計，茲篇僅就連續梁之直接設計，略予闡述，藉示舉隅而

已。又本章所述，雖為鋼梁之設計，其實儘可推用於鋼筋混凝土梁，且所受荷重，雖為固定的，其實亦儘可推及於活動荷重也。

此法之基本原則如下：凡在特殊情狀之下，與其分配彎率，使之平衡，不如分配截面係數 Section Modulus 使之平衡，蓋因

$$\text{截面係數} = \frac{\text{彎矩彎率}}{\text{實用應力}}$$

上述之特殊<sup>情</sup>狀有二，計(1)為各桿件之單位實用應力，必須相同，(2)為各支點決不發生下陷情事，即以此兩個條件言之，亦可設法免除之。

除尋常通用各符號外，本章並採用下列各符號。

b, c, d, 分別代表該梁之寬度，最遠纖維距離，(距中立軸)及深度，

$\frac{I}{c}$  或 S, 代表截面係數。

$\frac{I}{E}$  或 K, 代表剛率。

$\frac{L}{d}$  代表深度不變的梁之稜性比率 Prismatic Ratio。

F.E.M., B.M., C.O.M., C.M., 分別代表固定端係數 Fixed End Modulus, 分配係數, Balancing Modulus, 傳達係數 Carry Over Modulus, 修正係數, Correction Modulus。

至關於各係數之正負號，與第十六章至第十八章所用彎率之正負號，完全相同。

131. 計算須知：每一荷重徑間，皆計算其固定端彎率，再以實用應力(此係常數)除之，而得固定端係數 $(\frac{I}{c})$ ，由是而選取或揣定每一徑間之梁的深度，並計算其稜性比率 $(\frac{L}{d})$ ，然後由下開之式，計算其剛率。

$$\text{剛率} \frac{1}{L} (\text{相對的}) = \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 2K, \quad \text{因 } d = 2c \text{ 故}$$

用此式時，每徑間中之固定端係數，須取其較大者，然後計算每一結點處各梁之剛率總和（即  $2\Sigma K$ ）。

上述各數，既經算得，即可按照下開步驟，入手分配。

(1) 每一結點處，作一次或兩次之分配及傳達，使其截面係數平衡，其所用分配因子為  $\frac{K}{\Sigma K}$ （即  $\frac{2K}{2\Sigma K}$ ）。

(2) 求得各行截面係數之和，於每一徑間中，選取其較大者，用以選定一個新截面（如係鋼梁，可由通行之袖珍書 Handbook 中選定之。）由是而得修正的稜性比率  $\left(\frac{I}{d}\right)$ 。

(3) 由此新得數值，重新計算每徑間之相對的剛率  $\frac{1}{L} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ 。（可用算尺為之。）

(4) 由第 (2) 步驟所得各行截面係數之和，減去其相當的固定端係數，並以相當的  $\frac{I}{L}$  變量之百分數，分別乘各該減餘之係數，將所得結果，分別書入各該行，作為修正係數，凡剛率若加大，則彎率及係數亦為之加大，所以先減去固定端係數者，因此項係數與剛率之變更無關也。

按照上列四步驟，反復施行一二次，俾所得結果，皆能相合。

132. 設計舉例。圖 187 表示如何應用此法，作三徑間連續鋼梁之設計，此梁所受荷重，皆為固定的，其法首先計算各徑間兩端之固定端彎率，此等固定端彎率，以實用應力（每方英寸 20,000 磅）除之，而得固定端係數，由此等固定端係數，選取梁的深度，而計算其剛

率  $\left(\frac{I}{c} \div \frac{L}{d}\right)$ , 例如 AB 徑間, 若選用 18" WF 截面 (W.F. 代表 Wide Flange I-beam, 即寬肢工字梁) 可得其固定端係數 = 90, 故

$$2K = \frac{I}{c} \div \frac{L}{d} = 90 \div \frac{240}{18} = 6.8. \quad [240" \text{ 為徑間之長度}]$$

	20'		25'		10'	10'	10'
	3 1/2"		3 5/8"		18"	18"	
剛率	A 18" WF $80 \div \frac{240}{18} = 6.8$		B 21" WF $109 \div \frac{300}{21} = 7.6$		C 16" WF $72 \div \frac{360}{16} = 3.2$		D
固定端係數	K = 90		119.3		89		
$\frac{I}{c} \div \frac{L}{d}$	240		300		360		
固定端係數	150		152		120		170
F.E.M.	0		-109		+109		+72
B.M.及	+7		-13		-26		-11
C.O.M.	-7		+17		+8		-5
C.M.	0		+102		-105		+91
	+6		-105		+91		-83
	-1		-2		-1		-1
	+1		-2		-1		-1
	0		+106		-106		+88
							-88
							+65
投核	55%		45%		66%		34%
	+90		-109		+109		-72
	+10		+9		+4		
	-2		-13		-27		-14
	+8		+7		+3		
	-2		-1		-2		-1
	+2		+1				
	0		+106		-106		+87
							-87
							+65

圖 187.

截面係數之分配, 與彎率之分配相同, 所取以入手分配之結點為 C 點, 其左方之 +109 與右方之 -72, 共得不平衡的結點係數 = +37; 其分配係數為 -26 及 -11, 此二數與剛率 7.6 及 3.2 成正比. 其號適與不平衡的係數 +37 相反, 以便使之平衡, 此兩個分配係數, 必須傳達於鄰近兩結點, 故 B 點得 -13, 而 D 點得 -5. D 點不必分配, 因其為固定端也.

B 點之不平衡的結點係數, 為  $-109 - 13 + 90 = -32$ . 按照剛率比率分配之, 左方得 +15, 右方得 +17, 此兩數又分別傳達於鄰近兩

結點。故 A 點得 +7, C 點得 +8, A 點必須加入 -7, 以使之平衡, 因此點為簡承端, 該行之和必等於零也, 如是則 B 點又受其傳達係數 = -3。

此時各結點之分配, 已粗有端緒, 可以停止分配, 而入手求得其修正係數, 先將各行係數, 求得總和, 計 AB 徑間所需最大係數 = 102, BC 徑間所需者 = 105, CD 徑間所需者 = 83, 乃重新選取相當工字梁, 俾其截面各能適合此諸需要, 而再計算各徑間之新的剛率, (如圖首第二橫行之所示)。

剛率  $K$  若有變更, 則彎率與截面係數亦隨而變更, 且其所變更者, 適與  $K$  之變更量成正比, 但此等係數之變更, 祇限於分配係數及傳達係數二者, 其原有之固定端係數, 則隨荷重而改易, 並不隨剛率而變更, 故若就 AB 徑間之 B 端言之, 總係數 (+102) 與固定端係數 (+90) 之較數為 +12, 此即隨剛率變更之係數也, 剛率原為 6.8, 今為 10.4, 計加大 53%, 以此百分數乘 +12, 得 +6, 此即修正係數, 可書入該行, 如圖所示, 其他各行之修正係數, 皆依照此法以求得之, 若剛率減小, 則修正係數之號, 適與上述者相反。

各修正係數, 既已書入, 可再將各結點, 施行平衡, 若前此還有不平衡的係數, 必須與此次所得之修正係數相合併, 然後施行平衡。

C, B, A, 等結點一經平衡之後, 更無其他不平衡的結點, 將各行求得總和, 取其較大係數, 與圖頂第二橫行中之截面係數相比較, 而知各該工字梁之截面, 已稍大於平衡之所需, 故設計工作可稱已達到目的矣。

若有任一徑間之截面, 尚須加大或縮小, 則仍應按照剛率變更量以算得該徑間之修正係數, 而加入或減去之, 並重新分配各係數, 無論如何, 此項工作, 決不至過於繁複也。

欲校核此項設計, 有無錯誤, 可按照最後所得截面之剛率, 算得

分配因子 (例如 B 點之分配因子, 左方爲  $\frac{10.4}{10.4+8.4} = 55\%$ , 右方爲  $\frac{8.4}{10.4+8.4} = 45\%$ ). 按照常法, 由固定端係數入手, 迭次分配傳達, 至最後結果, 應與上文所得平衡結果相吻合, 如圖 187 所示.

133. 徑間中部所需之截面係數. 徑間中部所需之截面係數, 有時或較大於兩端之所需者, (但此亦不常遇見), 此節可加以覆核如下, 凡一徑間中各點所需截面係數, 如繪成一曲線, 其形狀必與彎率曲線圖相同, 故可先繪一簡梁彎率曲線圖, 如圖 188, 其縱距係以百分數表示之, (此曲線係爲簡梁在兩個三分之一點處, 各受有相等的集中荷重者, 如係等佈荷重, 則此曲線自必成爲一個拋物線, 他可類推.) 上例中 CD 簡梁在三分之一點處所需截面係數爲  $108 \left( = \frac{18,000 \times 10 \times 12}{20,000} \right)$ , 如是則由上文所得兩端需有之截面係數, (88 及 65) 可分別

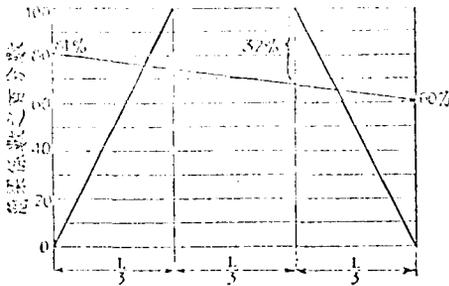


圖 188.

作爲簡梁係數之  $81\% \left( = \frac{88}{108} \right)$  及  $60\% \left( = \frac{65}{108} \right)$ , 而繪入兩端, 再以一斜線聯絡之, 觀其在三分之一點處所需截面係數之百分數, 此問題所得之最大百分數爲  $32\%$ , 較之兩端所需者爲小, 故可無庸修改其截面.

134. 經濟截面之選取. 用直接設計法, 極易獲得截面之經濟, 爲選擇截面起見, 可利用截面係數表, 例如美國鋼質建造協會 1937 年所出版之 Steel Construction (American Institute of Steel Construction) 第 90 頁之表, 該表中所列各截面, 係按照經濟的序次而排列之, 故



定端轉、率必等於  $-\frac{6EK\Delta}{L}$  [此由第 26 節之 (87) 式, 即可證明], 此式中之  $\Delta$  爲下陷量,  $L$  爲徑間之長, 故因此項下陷而需要之固定端係數, 必爲  $-\frac{6EK\Delta}{L}$ , 此式中之  $r$  爲單位實用應力, ( $\frac{\Delta}{L}$  爲撓角, 以順鐘針方向而旋轉者爲正, 反之則爲負.)

圖 189. 中之計算方法, 與圖 187, 大致相同, 讀者閱之自明, 可無須詳加解釋也, 由此重新設計, 可見支點下陷之影響, 爲採用較大之工字梁.

此項直接設計法之優點有二, (1) 爲所有計算, 具列一紙, 閱之一目了然, 設計者之精力, 不致爲之紊亂, (2) 爲每次所作之計算工作, 此後皆可利用, 縱有修改之處, 其前此所作者, 並非徒勞而無功.

## 第二十二章 半剛結點

## SEMI - RIGID JOINTS.

137. 緒言. 本章所述, 取材於美國 Bruce Johnston 及 Robert A. Hechtman 兩氏合著之文, 其標題為 Design Economy by Connection Restraint 登入 1940 年 10 月 10 日出版之 Engineering News-Record 雜誌, 並經轉載入 Journal of the Association of Chinese and American Engineers, May-June, 1941.

凡多層鋼質房屋架構之設計, 大都假定各橫梁之兩端為簡承端, 此項假定, 雖能使其設計確保安全, 但結點之聯結, 縱極柔軟易撓, 而各梁兩端, 總有若干約束存在, 以減小其最大正彎矩率, 故所用之梁, 不免超越其所必需之尺寸, 而有過於耗糜之嫌, 蓋若梁端聯結之剛度, 略有增加, 已能使房屋架構所用橫梁之平均重量, 減小 15% 至 20% 也.

從前所用以解算不靜定的房屋架構之方法, 至為煩難, 且半剛結點所能發生之梁端約束, 究達若何程度, 其數值是否可靠, 皆屬無從確知, 故寧認為簡承, 以便計算而策安全, 現在由種種試驗所得之結果, 已能確知各種梁柱間聯結方法之數值, 以供設計者之需要, 故此篇所述之設計方法, 可施用於任何房屋架構, 其中各結點處之最小的約束數值, 假定為測驗所已求得者.

若徑間長度，荷重情形，聯結式樣，各部份多屬相同，則所省材料可達最大量，據作者所作一百零五種橫梁尺寸之試驗結果，雖在剛性百分數頗小之處，亦可得有相當之節省，圖 190 表示因種種剛性百分數而可能節省之橫梁重量，此諸橫梁，皆按照本章所述之法，計算得之，「剛性百分數」之意義，見下文 (224) 式 1。

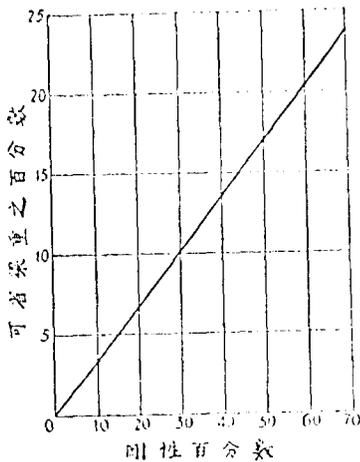
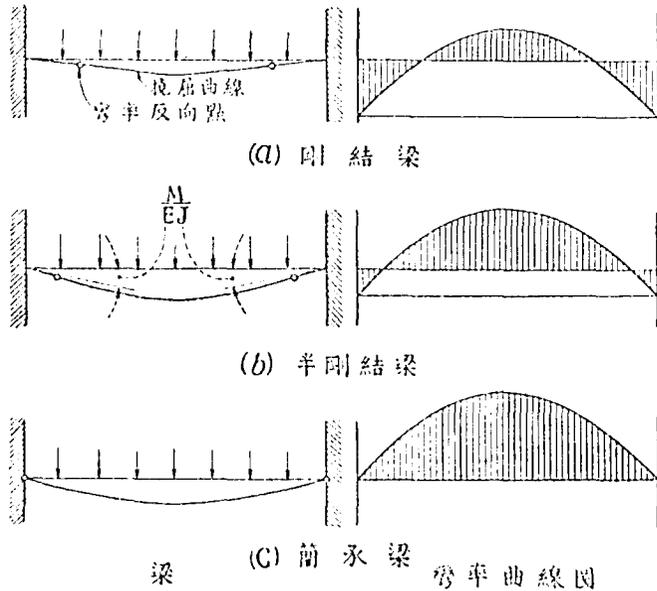


圖 190.

與橫梁設計有關之各問題，為聯結設計，為立柱設計，為風力推算等等，其中如聯結及立柱兩項，現正在 Lehigh 大學試驗室中繼續試驗，其目標在便利房屋之設計。

138. 半剛結點，若一架構中之梁柱間聯結，能傳達其撓曲彎率，使梁端與立柱之間，並不發生相對的旋轉，則此項聯結，謂之剛結，(參閱第 2 節之定義) 如是則該聯結具有 100% 之約束 (或連續性) 而最大彎率，必在梁端，若有某種聯結，於傳達彎率之時，能使梁與柱之間，發生若干相對的旋轉，則此項聯結，謂之半剛結，如是則該聯結處之抵抗撓曲彎率，不及剛結之完全，而該徑間中央之彎率，較小於簡承梁之全無約束者，(參閱圖 191.)



11 191.

凡半剛結點，如標準的梁腰聯結 Standard Beam Web Connection, 如上下角鋼聯結 Top and Seat Angle Connection 如劈分工字聯結 Split-I Connection, 其約束程度，在剛結與簡承之間，關於此節，有一要點，應加以注意，蓋 100% 之約束，於房屋建造，未必能獲得最大量之節省，其原因大都由於實行完全剛結所需之用款，不免超過所省梁料之價值也，故為獲得最大量之節省起見，常須使其約束程度在 40% 與 75% 之間。

139. 結點常數 Joint Constant. 圖 192 表示半剛聯結之試驗結果，以相對的梁柱間旋轉角為橫距，以所施之聯結處彎率為縱距，而繪成一曲線，該聯結處凡經過三個時期，(1) 彎率與旋轉角，約略成正比，(2) 聯結處之屈服 Yielding of the Connection, (3) 加速旋轉，卒至於毀壞，或發生過度之變形。

上述之第一時期，為設計之有用的範圍，凡聯結處對於旋轉一項，

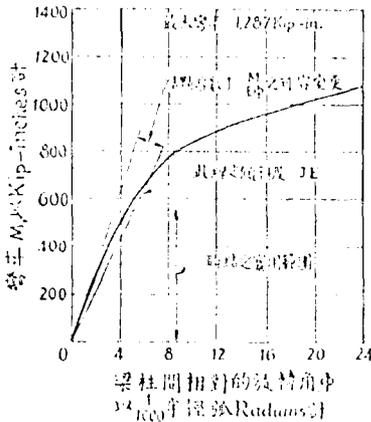


圖 192.

注意：結點常數，雖有出入，其於可能承受之轉率，並無甚大之影響。

亦應具有充足的安全因子 Factor of Safety，此應特加注意者也。凡所取半剛聯結之最大旋轉角，應以簡梁梁端之撓角為極限，除少數剛性極高之聯結外，凡半剛聯結毀壞時之撓角（即旋轉角），皆遠過於此極限，若在上述少數情形之下，其實用轉率應以最後轉率 Ultimate Moment 為依據。

為便利設計起見，有一個數量，必須由試驗測定之，此即結點常數  $J$  是也此常數之定義如下，

$$J = \frac{M}{E \cdot \phi} \dots \dots \dots (223)$$

上式中之  $\phi$  為撓角（或旋轉角），

$M$  為所施之轉率，

$E$  為 Young 氏彈性係數。

上開之結點常數，實即圖 192 中第一時期之傾斜度 Slope，以該項資料之彈性係數除之，此數可用以量度該聯結之剛性，故若  $J$  之值頗大，則該聯結必較為剛勁，其在實用能力範圍之內，比之常數較小之結點，必能承受較大之轉率，

剛性百分數 Percentage Rigidity,  $p$ ，隨結點常數  $J$  及該梁剛率  $K$ （= 全部慣性率  $\times$  徑間長度）而異，其定義如下，

$$p = \frac{100}{1 + 2 \frac{K}{J}} \dots \dots \dots (224).$$

故若聯結方法，及梁之尺寸，皆已選定，則剛性百分數亦隨而確定。

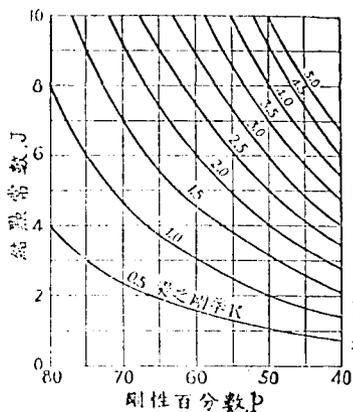
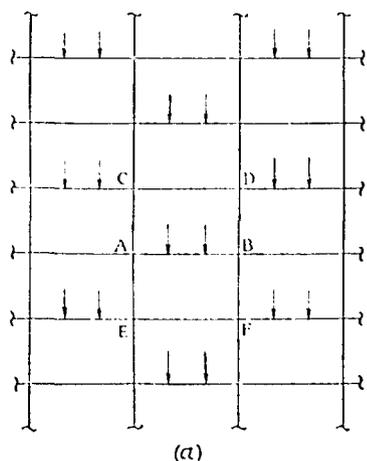


圖 193.

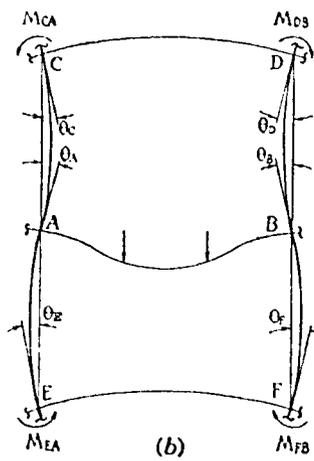
圖 193 表示剛性百分數與結點常數及該梁剛率之關係，蓋即由 (224) 式繪成者，房屋中所用橫梁之剛率，大都自 0.5 以至 5.0。由圖可見若  $p$  值小於 70%，結點常數縱使出入頗多，其於剛性百分數之影響，殊不甚大，例如梁之剛率 = 1.5，結點常數 = 10，則  $p = 77\%$ ，若結點常數減小一半，(即  $J = 5$ )，則  $p = 62.5\%$ ，故該徑間之梁端彎率之變更，不過 20% 而已。

由此可見，雖銲接或鉚接藝術不同，能使其結點常數相差頗多，其實際所得之彎率相差，亦不至於甚鉅，又可見凡在任何聯結，必須準備一個可容變更之範圍，如圖 192 所示，藉以適應下述二項情事，(1) 製造裝配或有出入，(2) 彎率與相對撓角間之關係，並不始終一致。

140. 擬用設計方法。本章所擬設計方法，假定立柱並不旋轉，計



(a)



(b)

圖 194.

算各半剛結端之彎率，因而推定該聯結處之尺寸，又假定各立柱實行旋轉，計算各橫梁之中央最大彎率，因而推定各該梁之尺寸，

為期作直

接設計起見，鄰近該梁之其他各梁，可忽視不問，此固不甚精確，然其錯誤，偏於安全之一方，且其法並可適用於最外徑間之木無鄰梁者。圖 194 (a) 所示者為某房屋結構中 AB 橫梁受有最大彎率時之情狀，圖 194 (b) 所示者為該梁及附近梁柱之撓屈狀況，惟 AB 梁之左右兩鄰梁，皆省略不計，凡荷重，聯結，以及相鄰立柱，皆假定為對稱的，下文所得各公式，均假定其剛性百分數 = 50%。

尋常剛結梁 AB 在 A 端之彎率為

$$M_{AB} = 2EK(2\theta_A + \theta_B) \pm M_R$$

此即第 27 節之 (95) 式， $M_R$  即  $C_{AB}$ ，荷重向上用正號，荷重向下則用負號。若係半剛結梁，其兩端之剛性百分數皆為 50%，則此式變為

$$M_{AB} = EK(1.25\theta_A + 0.25\theta_B) \pm \frac{M_R}{2} \dots\dots\dots (225).$$

[編者按，Bruce Johnston 及 Edward H. Mount 兩氏最近有一論文，標題為 Analysis of Building Frames with Semi-Rigid Connections，登入 Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Mar. 1941, pp. 405-431，其中所研究者，不特對於半剛聯結，抑且對於立柱及橫梁之寬度，均加以顧及，而求得最普通之公式若干，由該文第 (4a) 式，用其表 1 中之相當數值代入，即可得上列之 (225) 式]。

因結構及荷重，皆為對稱的，故  $\theta_A = -\theta_B = -\theta_C$

由是而得 
$$M_{AB} = EK\theta_A - \frac{M_R}{2} \dots\dots\dots (226)$$

由結點平衡條件而得  $M_{AB} + 2M_{AC} = 0$  (因  $M_{AC} = M_{AB}$ )，

故 
$$\theta_A = \frac{M_R}{2} \left( \frac{1}{4EK_C + EK_B} \right) = \frac{M_R}{2} \left( \frac{1}{2E\Sigma K_C + EK_B} \right) \dots\dots (227)$$

〔編者按，立柱 AC 及 AE，仍作為全剛結梁，故  $M_{AC} = M_{AE} = 2EK_C\theta_A$ 〕上式中 K 字右下角附綴之 C 字代表立柱，B 字代表橫梁，以 (227) 式代入 (226) 式，而得

$$M_{AB} = -M_R \left( \frac{1}{2 + \frac{K_B}{\sum K_C}} \right) \dots \dots \dots (228)$$

若以  $M_S$  代表簡梁彎率，則 AB 梁中央之彎率，為

$$M_C = M_S + M_{AB} = M_S - M_R \left( \frac{1}{2 + \frac{K_B}{\sum K_C}} \right) \dots \dots \dots (229)$$

凡剛性百分數等於或小於 75% 者，中央彎率必為最大彎率，可用以決定該梁之尺寸，在實行設計之時，可先按照簡梁設計，求得所需之截面係數，然後以下開之縮小因子 F (Reduction Factor) 乘之，藉以利用半剛結性質，求得荷重情狀最為不利時所需之截面係數。

$$F = \frac{\text{本設計方法所需截面係數}}{\text{簡梁所需截面係數}} = \frac{M_C}{M_S}$$

即 
$$F = 1 - \frac{M_R}{M_S} \left( \frac{1}{2 + \frac{K_B}{\sum K_C}} \right) \dots \dots \dots (230)$$

上式中之  $\frac{M_R}{M_S}$  隨荷重之式樣而異。

(230) 式，祇適用於剛性百分數 = 50% 者，若剛性百分數 = 其他數值，亦可按照上法，求得相當的 F 之值，圖 195 表示與各式荷重及各種剛性百分數相當的 F 之值。

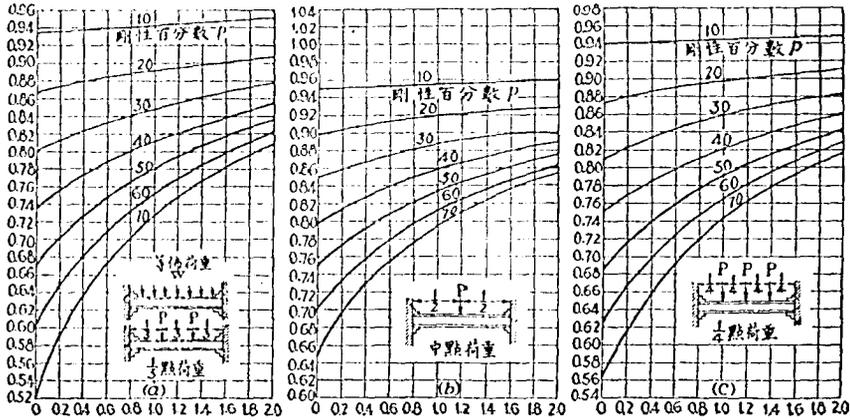


圖 195.

上圖中之橫距，為該梁一端之  $\frac{K_B}{\sum K_C}$  之比率，

其縱距為縮小因子  $F$  之值。

[編者按：據上文所謂 Bruce Johnston 及 Edward H. Mount 兩氏合著之論文，設 A 端之剛性百分數 = 任何數值， $p$ ，而 B 端之剛性百分數 = 又一任何數值， $p'$ ，可先算得  $\alpha = \frac{100-p}{p}$ ，及  $\beta = \frac{100-p'}{p'}$ ，其與 (225) 式相當之通式如下：

$$\left. \begin{aligned}
 M_{AB} &= \frac{1}{1+2\alpha+2\beta+3\alpha\beta} \left[ 2EK \left\{ (2+3\beta)\theta_A + \theta_B - 3R(1+\beta) \right\} \right. \\
 &\quad \left. - (1+2\beta)C_{AB} - \beta C_{BA} \right] \\
 M_{BA} &= \frac{1}{1+2\alpha+2\beta+3\alpha\beta} \left[ 2EK \left\{ (2+3\alpha)\theta_B + \theta_A - 3R(1+\alpha) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + (1+2\alpha)C_{BA} + \alpha C_{AB} \right]
 \end{aligned} \right\} \dots (231)$$

若  $p = p'$ , 即  $\alpha = \beta$ , 則

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{1}{1 + 4\alpha + 3\alpha^2} \left[ 2EK \left\{ (2 + 3\alpha)\theta_A + \theta_B - 3R(1 + \alpha) \right\} \right. \\ &\quad \left. - (1 + 2\alpha)C_{AB} - \alpha C_{BA} \right] \\ M_{BA} &= \frac{1}{1 + 4\alpha + 3\alpha^2} \left[ 2EK \left\{ (2 + 3\alpha)\theta_B + \theta_A - 3R(1 + \alpha) \right\} \right. \\ &\quad \left. + (1 + 2\alpha)C_{BA} + \alpha C_{AB} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots(232)$$

上式中  $R$ ,  $C_{AB}$ ,  $C_{BA}$  之意義, 與第二編中 (95) 及 (96) 兩式完全相同 (荷重方向, 作為向下) 若以 (232) 式  $M_{AB}$  之值為根據, 按照上述之法, 逐步進行, 自可求得  $F$  之值, 又若  $p = p' = 100$ , 即  $\alpha = \beta = 0$  (AB 兩端, 皆完全剛結), 則  $M_{AB} = 2EK(2\theta_A + \theta_B - 3R) - C_{AB}$ , 而  $M_{BA} = 2EK(2\theta_B + \theta_A - 3R) + C_{BA}$  此即 (95) 及 (96) 兩式也.]

141. 實際設計步驟. 下述之步驟, 係假定凡任何標準聯結方法之剛性百分數, 已得有可靠之數值, 關於鉚接聯結方法, 此項數值, 業經試得若干. [參閱 First, Second, and Final Reports of the Steel Structures Research Committee of the Department of Scientific and Industrial Research of Great Britain, 1931-1936, 及 J. Charles Rathbun 氏所著 Elastic Properties of Riveted Connections, 載於 Transactions, of the American Society of Civil Engineers, Vol. 101, 1936, p. 524.] 此時 (1940 年十月) Lehigh 大學試驗室正在繼續試驗, 期得可靠之數值, 至若銲接聯結, 則剛結之幾達完全程度者, 業經試驗, 其半剛結者, 則祇有上下角鋼聯結一種, 已經詳細研究, 見 Bruce Johnston 及 E. H. Mount 兩氏合著之 Designing Welded Frames for Continuity, American Welding Society Journal, Vol. 18, No. 10, October, 1939; Research Supplement, pp. 355-374. 故關於其他各種銲接聯結者, 尚須多加研究也.

標準可靠數值，此時雖尚感缺乏，如欲作任何特種房屋設計，儘可將擬用之聯結，實行試驗，求得所需數值，藉以施用本章所擬之設計方法，若該結構為層樓大廈，工費甚鉅，自有實行試驗之價值也。

設計步驟如下。

(1) 假定各梁為簡梁 按照常法，計劃其尺寸。

(2) 計算各梁之  $K_B = \frac{I_B}{l_B}$  並計算各該梁一端之上面立柱及下

面立柱之  $\Sigma K_C = \Sigma \frac{I_C}{l_C}$ ，

(3) 計算各梁之  $\frac{K_B}{\Sigma K_C}$ ，酌定設計所用剛性百分數之數值，按照荷重情狀，由圖 195，查得縮小因子  $F$  之數值。

(4) 以  $F$  乘簡梁所需截面係數，以此項縮小係數為根據，重新計劃該梁之尺寸。

(5) 按照各梁荷重情狀，計算其半剛端轉率，其法為以假定之剛性百分數，乘固定端轉率，即得。

(6) 以梁端反力，半剛端轉率，及所假定之剛性百分率為依據，選定其聯結辦法。

步驟(2)所算得之  $K_B$ ，係以簡梁設計所用者為據，其實此應以最後設計所得縮小的  $I_B$  為據，但此項數量，此時尚係未知量，故祇得採用其約值（即簡梁設計之  $I_B$ ）如是則可作直接設計，縱有差誤，亦偏於安全一方，但若某一尺寸之梁，用處甚多，其各處所受荷重皆相同，可先假定  $K_B$  等於簡梁的  $K_B$  之 80% 至 85%，迨至最後設計完竣之時，覆加校核，觀其與原假定是否約略相等，如是則更可節省若干質料，大抵此項試作設計，亦祇須嘗試一次，不必多也。

若一梁兩端之立柱尺寸並不相同，可取其較易撓屈者為計算根

據，雖略有差誤，亦偏於安全一方，若該梁所受荷重，並不完全對稱而稍有偏頗，其兩端彎率，仍可用(228)式算得其約值，而繪畫其約略的彎率圖，蓋圖 194 所假定之荷重情形，甚為嚴酷，事實上極不易於實現，縱使計算之時，稍差百分之幾，亦不至發生若何影響也。

步驟(3)中，所用剛性百分數，可斟酌定之，其選定方法，當以下列三者為依據，(1)某種聯結辦法之可行與否，(2)該辦法是法經濟，(3)該辦法有無特予採用之必要。

步驟(6)之最後選定聯結辦法，可參考各項具有標準性的聯結表，其中標示剪截力，彎率，及剛性百分數之安全數值，本節首段所列參考文三篇以及 C. R. Young 及 K. B. Jackson 兩氏合著之 The Relative Rigidity of Welded and Riveted Connections, (載入 Canadian Journal of Research, Vol. 11, p. 62, 1934) 皆可供此項參考之用。

關於選定橫梁之設計步驟，可舉例如下。

設欲選定一梁，其兩端之剛性百分數為 50%，其徑間長 20 英尺，受有等佈荷重 = 2 Kips/ft. 與梁端聯結之立柱為 16", 49<sup>lb</sup>. W.F. 49 之肢部，其每層之高 = 10 英尺。

$$\text{簡梁彎率 } M_s = \frac{2 \times (20)^2}{8} = 100k' = 1200k''.$$

$$\text{簡梁所需截面係數} = \frac{M}{f} = \frac{1200k''}{20} = 60 \text{ in}^3.$$

[ 式中  $f$  = 許容實用應力 = 20,000 <sup>lb</sup>/sq. in. ]

如作為簡梁，可選用 16", 40<sup>lb</sup> W.F. 工字梁，其惰性率  $I_B = 515.5 \text{ in}^4$ 。

$$K_B = \frac{515.5}{240} = 2.15 \text{ in}^3.$$

$$\Sigma K_C = 2 \times \frac{272.9}{120} = 4.55 \text{ in}^3. [ 272.9 = 10", 49^{\text{lbs}} \text{ W.F. 49 之惰性}$$

率,  $I_c$

$$\frac{K_B}{\sum K_c} = \frac{2.15}{4.55} = 0.47,$$

由圖 195 (a) 查得, 若  $\mu = 50\%$ ,  $\frac{K_B}{\sum K_c} = 0.47$ , 則  $R = 0.73$ ,

故所需截面係數  $= 0.73 \times 60 = 43.8 \text{ in}^2$ .

可選用 15", 33<sup>lb</sup>. M 梁.

如是則所省鋼料  $= 40 - 33 = 7^{\text{lb}}$ , 即 17.5%.

以上為 Johnston 及 Hechtman 兩氏關於半剛結點之論文, 此外尚有第 140 節所提及之 Johnston 及 Mount 兩氏合著之 Analysis of Building Frames with Semi-Rigid Connections, 此文所得各公式, 頗及半剛聯結, 並頗及立柱及橫梁之寬度, 可稱為極概括極渾滿的研究, 但其文甚為冗長, 算式亦甚繁複, 本書以限於篇幅, 未克譯附, 讀者如感興味, 可取此文而一讀之, 此文載入 1941 年三月出版之美國土木工師學會月刊 Proceedings, Am. Soc. C.E., 嗣由各會員及非會員加以討論, 討論結果如何, 編者苦未知悉也.

## 第二十三章 層樓受有風力之解法。 ANALYSES OF TALL BUILDINGS UNDER WIND LOAD.

142. 各種解法之概述。層樓受有風力，自必發生側欹，欲計算各桿件所受之力，其法甚多，大抵可分為兩大類，(1) 為約略法 Approximate Methods, (2) 為精密法 Exact Methods, 在撓角撓度法未經發明之前，計算風力之法，不得不採用約略法，約略法之最為通行者，計有四種 (1) 為懸臂法 The Cantilever Method, (2) 為等佈剪裁力法, The Method of Equal Shears, (3) 為門框法, The Portal Method, (4) 為連續門框法, The Continuous Portal Method, 此四法之如何應用可參閱 Robins Fleming 氏所著之 Wind Stresses in High Buildings 見 George A. Hool 及 W.S. Kinne 兩氏合編之 Stresses in Framed Structures, pp. 448-466, (1923 年版), 此諸算法，雖甚簡捷易用，施諸尋常結構，尚稱省時而合用，但其所得結果，較之用精密法算得者，相差或至 100% 之多，且因立柱伸縮而發生之副彎率，Secondary Moments, 用此簡略法者，大抵皆忽視不問，故其結果自不免去真甚遠。

精密法可分為三大種，(1) 為撓角撓度法，如本書第二編所述，此法最稱精密，一般學者多以此法算得之結果，作為圭臬，凡用他法算得者，皆取以與之比較，觀其相差若何，而決定各該法之精粗，然此法有一最大缺點，即若某結構具有多層多徑間，則未知量甚多，其聯立一次方程式之數，亦隨之而甚多，解算極費時日，亦極易發生錯誤，且因各係數大小相差頗多之故，其所得最後結果，亦未必能毫無謬誤，(例如第 35 節解法所得結果，各結點之彎率總和，未能皆等於零。) 故此法在理論上雖稱最優，在實際上殊不合用，(2) 為分配彎率法，此為 Hardy Cross 氏所發明之法，詳見 Hardy Cross 及 Newlin Dolbey Morgan 兩氏合著之 Continuous Frames of Reinforced Concrete, pp. 214-

233 (1932年版)。此法所得結果之精密，比之撓角撓度法不相上下，而佈算工作則簡省頗多，自有取該法而代之之勢。(本書第 91 節之法，即係此法)。(3) 爲 Spurr 氏法，此法有特點三，(a) 不必先作一個完全的草設計，(b) 因立柱伸縮而發生之副彎率，可忽視不問，(c) 架構側欹時之撓度，可隨意節制之，因須滿足上開 (b) 項條件之故，該架構受有風力時之作用，如同一個垂直的懸臂 Vertical Cantilever，故所作設計，應依照此項假定而爲之，如是則因立柱伸縮而生之副彎率，自必可以免除。此法見 Henry V. Spurr 氏所著之 Wind Bracing, 紐約市 McGraw-Hill Book Company 發行 (1930 年出版)，編者未見此書，不敢妄有論述。

此外尚有兩法，(1) 爲 Ross 氏法，此爲 C. T. Morris 及 A. W. Ross, Jr. 兩氏於 1929 年所擬之法，其法脫胎於撓角撓度法，惟縮短其計算方法，其所得結果，雖較稱約略，然尚屬可用，惟計算工作，仍不免煩雜費時，此法見 Bulletin No. 48, Ohio State University Engineering Experiment Station, Columbus, Ohio, U.S.A. 編者未見此冊，亦不敢妄加論評，(2) 爲 Goldberg 氏法，此亦以撓角撓度法爲依據，但用迭求約值法，以推算各個  $\theta$  及  $R$  之數值，頗與本書第 47 節所述之法相似，此法詳見 Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 99, 1934, pp. 962-985.

1933 年一月間 L. E. Grinter 教授發表其分配彎率簡法，Simplified Method of Moment Distribution，原文見 Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 99, 1934, pp. 610-669，此法係以 Cross 氏之分配彎率法爲藍本，但比之較爲簡化，所得結果，尚屬精密合用。

1939 年一月間，美國土木工師學會鋼質委員會第 31 分委員會發表其第六次工作進行報告，關於鋼質房屋之禦風繫桿 Wind Bracing in Steel Buildings，其中於計算各桿件之風應力 Wind Stresses，主張採用 Francis P. Witmer 教授最新發明之剛率百分法 The K-Percentage

Method (該報告書見 Proceedings of the American Society of Civil Engineers, June, 1939, pp. 969-1000), 去年 (1941年) 六月間 Witmer 教授又自作一文, 標題爲 Wind Stress Analysis by the K-Percentage Method, 詳述如何用此法以作高樓之設計, 並同時設法免除或減少因立柱伸縮而生之副彎率, 此文載入 Proceedings of the American Society of Civil Engineers, June, 1941, pp. 961-974. (此法可稱爲精粗合併法)。

總之, 上述各法之中, 除 Spurr 氏法及剛率百分法外, 凡因立柱伸縮而生之副彎率, 皆未能直接顧及, 必須於設計完了之後, 覆加推算, 庶幾各種應力之利, 不至超逾其規定限, (此項因立柱伸縮而生之副彎率, 即下文第二十四章之軸向變形彎率 Moments due to Axial Deformation.)

本章爲篇幅所限, 未能將上開各法逐一詳述, (Spurr 氏法及 Ross 氏法, 編者亦未知其詳), 茲擬就分配彎率簡法及剛率百分法, 分別略述於下, 讀者如欲窺全豹, 可設法取得上列各書報而一讀之。

甲. 分配彎率簡法 Simplified Method of Moment Distribution.

143. 原則. 分配彎率簡法之原則如下.

(a). 假定該結構物因受風力, 而發生側欹, 至達某種數量, 同時並假定各結點, 皆受有約束, 不能旋轉, 先計算固定端彎率.

(b). 將各結點四周之彎率, 如法分配, 俾各結點皆得以平衡, 此時須假定各結點並未發生橫平的移動.

(c). 由步驟 (b) 之結果, 可算得各層中之總剪截力, 由此項剪截力與實有剪截力之相差量, 可以求得各結點處之約束力, [因步驟 (a) 所得之側欹量, 並非實有之側欹量, 故必有約束力存在.]

(d). 在各該結點處, 施以相等而相反之力, 俾與步驟 (c) 所得者, 適相抵消.

(e). 假定該結構物因受有此諸新的外力, 而發生側欹, 並假定

各結點皆固定，不能旋轉，重新計算各固定端彎率，如法分配之，並再求得各結點處之約束力，此諸約束力，必較第一次所得者為小，且較為不甚重要。

(f). 按照上法，反復推求，至最後所得各約束力，為量甚微，可以忽視不計而後已。

(g). 將迭次平衡所得彎率，作代數的相加，其和即為實得彎率，(編者按第 91 節之法，即以上列原則為根據。)

此本法之原則也，但實施之時，不必如是之累墜，儘可量予縮短其計算工作，且各結點處之約束力，亦無實行計算之必要，蓋任一層中各立柱之平衡後的彎率總和，與原有各固定端彎率總和之相差量，即等於該層之第二次固定端彎率總和，此項新的固定端彎率總和，可按照各立柱之剛率數值，比例分配於各立柱也。

#### 144. 簡法之概要.

(1). 約估或計算各結點因受有風力而發生之側欹量(即撓度).

(2). 計算各桿件因此項側欹量而發生之固定端彎率，如此項撓度為橫平的，則各橫平桿件中，並無固定端彎率。

(3). 如法分配各彎率，俾各結點皆得以平衡，即  $\sum M=0$ 。

(4). 由所得平衡的彎率，計算每一層中之總剪截力，此項總剪截力與實有總剪截力之相差量，足以表示各彎率錯誤之多寡。

(5) 用下開比例方法，求得各立柱中之最後彎率，

$$\text{最後彎率} = \text{平衡的彎率} \cdot \frac{\text{實有總剪截力}}{\text{算得總剪截力}}$$

(6). 將各結點處各立柱最後彎率之和，按照步驟(3)所得有關各橫梁端彎率之相對的比率，分配於各該橫梁端。

若算得之總剪截力，比之實有總剪截力，相差在 10% 以下，則按

照步驟(5)及步驟(6)所得各彎率,比之真確彎率,其錯誤當不逾於5%,但其中數值較小之彎率,或不免錯誤至6%或7%。若該結構為不規則的結構,則錯誤比率自必較大。

145. 固定端彎率之計算。固定端彎率之發生,或由於該桿件之受有荷重,或由於結點之移動,如由於桿件之受有荷重,則其固定端彎率,可由表(5)或表(6)查得之,或用壓柱比擬法求得之,如由於結點之移動,設令  $\Delta$  為其移動量,  $l$  為桿件之長度,則其固定端彎

率,為 
$$M = -\frac{6EK\Delta}{l} \quad [\text{參閱第 136 節}]$$

本章所用各彎率正負號之意義,與第十六章至第十八章完全相同。

146. 有規則的結構之解法。在此等構物中,可假定各層之撓度與各該層之高度,成正比例。易言之,  $\frac{\Delta}{h} = C$ , 此式中之  $\Delta$  為側欹增加量,  $h$  為該層之高度,  $C$  為一個常數,因  $M = -\frac{6EK\Delta}{h}$ , 而  $\frac{\Delta}{h} =$  常數,故可謂  $M$  與  $K$  成正比例,又因本法所需用之固定端彎率,僅為其相對量,故可即令  $M=K$ , 或以任何常數乘  $K$  所得之積。

若相鄰兩層中之  $\frac{\text{實有總剪截力}}{\text{算得總剪截力}}$  兩比率,相差不逾於15%,即可

適用第144節之步驟(5)及步驟(6),以求得各實有彎率,今試舉例演算如下。

設一架構,受有風力,如圖196所示。





之百分數，如下表所示

桿件	1-1	1-1	1-6	6-1	11-2	2-11	2-5	5-2	1-2	2-1	6-5	5-6
撓角撓度法	-5.74	-4.29	-2.11	-2.89	-11.42	-8.58	-4.22	-5.78	+6.39	+6.39	+2.88	+2.88
分配彎率簡法	-5.81	-4.17	-2.29	-2.75	-11.61	-8.29	-4.41	-5.51	+6.46	+6.37	+2.75	+2.75
錯誤，%	1.7	2.8	8.5	4.8	1.7	3.1	5.2	4.7	1.1	0.3	4.5	4.5

由上表可見最大之錯誤，不過於 8.5%，而此項最大錯誤，發生於彎率為最小量之桿件，且其錯誤，偏於安全一方，自不成問題也。

147. 施用修正彎率 Introduction of Correction Moments, 若用上

述之法於不規則的結構，其所得  $\frac{\text{實有總剪截力}}{\text{算得總剪截力}}$  比率，各鄰層或相差

甚遠，如即用此以求最後彎率，勢必與真值相去懸殊，如是則必於某層中，酌加若干固定端彎率，俾此比率之相差額，得與上開限制約略相合，此項新加的固定端彎率，如何約估而得，初學或感覺困難，其實若稍加研究，即可約畧獲得其數值，此項數值，一經獲得，可即按照各立柱之剛率，比例分配於各該立柱，然後如法分配彎率，使之平衡，

將所得結果，與前此所得者，作代數的相加，而再求得  $\frac{\text{實有總剪截力}}{\text{算得總剪截力}}$

之新比率，若此等新比率，約畧合度，即可按照上法，用比例求得最後彎率，今試舉例演算如下。

設取第 35 節之問題，用分配彎率簡法，並施用修正彎率，求得各最後彎率，如圖 199 所示。

各結點處矩形格中之數字，仍為分配因子，因此架構之徑間數為奇數，而左方各桿件中之彎率，必與右方各相當桿件中之彎率，完全相等，故祇須解算左方半個架構，其中央徑間各橫梁之中點，可作為



次所得各平衡變率，求得  $\frac{\text{實有總剪截力}}{\text{算得總剪截力}}$  如下，計第一層比率為 0.1029，第二層比率為 0.1709，第三層比率為 0.0649，觀此可見第二層比率，比之第一及第三兩層比率相差過多，必須設法減小，使之約等於該兩層比率之平均數，（即 0.0839），易言之，須使第二層之算得總剪截力，等於  $\frac{8}{0.0839} = 95.4$ ，但第一次算得之第二層總剪截力 46.8，故須添加該項算得總剪截力，約等於 95.4 - 46.8，即 48.6，而該層各立柱頂底各變率之和，必須共添  $-48.6 \times \frac{5^m}{2} = -121 \text{ t. cm.}$ ，但若即以此數，作為修正變率之總和，則因此後尚須重新分配變率，必不免正負互抵，而最後所得結果，仍不能與預期者約合，故須將此數酌增四分之一或三分之一，今試酌增約四分之一，而令此項修正變率之總和為 -152，將此數按照該層左方兩立柱之剛率，比例分配於該兩立柱，本問題中該兩立柱之剛率相等，故各得 -76，再將此數平均分配於各該立柱之頂部及底部，故所添入之修正變率，各為  $-38' \text{ cm.}$  如圖所示，然後自結點 3 起，而 4，而 5，而 6，而 2，而 1，周而復始，如法重新分配此等不平衡的變率，而得第二次  $\frac{\text{實有總剪截力}}{\text{算得總剪截力}}$  各比率，計第一層為 0.1158，第二層為 0.0943，第三層為 0.0758，各層比率相差，雖尚超過 15%，但在此問題，恐不易再加改善，且亦無再加改善之必要，故可即用此諸比率，以算得各變率，如圖中各括弧內之數值，今試將此法所得各結果，與第 35 節中之圖 59 B 所示者，比較如下。

桿件	1-1	1-1	1-4	4-1	1-5	5-4	11-2	2-11	2-3	3-2	3-0	0-3
撓角撓度法	-878	-135	-322	-428	-110	-219	-1033	-685	-592	-658	-293	-372
施用修正變率法	-802	-391	-355	-115	-139	-205	-1030	-683	-591	-634	-303	<del>-356</del> -366
錯誤，%	1.0	9.4	11.2	3.0	11.2	6.4	2.7	0.3	0.3	4.0	4.5	4.3

桿件	1-2	2-1	2-2'	4-3	3-1	3-3'	5-6	6-5	6-6'
撓角撓度,法	+752	+674	+599	+541	+499	+419	+221	+198	+176
應用修正變率法	+752	+680	+597	+551	+433	+430	+205	+182	+171
錯誤, %	0	0.9	0.2	1.3	2.2	0.2	7.2	8.1	1.1

由此可見最大錯誤，為 14.2%，而此項錯誤，亦發生於變率最小之桿件，且其錯誤，偏於安全一方，自不成問題也。

上文所述添加修正變率之數值，不必求其精密，祇須約略估得，縱使稍有出入，亦不至影響過大也。

實有總剪截力與算得總剪截力之比率，祇須將緊鄰各層，互相比較，觀其相差，是否遠過於 15%，其不相鄰各層之比率，即使相差頗多，亦可置之不問，例如有七層架樑，第一層比率為 0.79，第二層比率為 0.91，第三層比率為 0.88，第四層比率為 0.61，第五層比率為 0.81，第六層比率為 0.97，第七層比率為 0.93，則祇須將第四層比率設法改善，（即於該層中，酌添修正變率。）俾重新分配變率之後，第二次比率改如下開各約數，即已足矣。

第二層=0.92，第三層=0.80，第四層=0.79，第五層=0.79，第六層=0.97。

上述施用修正變率之法，適用於祇有一層或兩層比率須加改善之處，若有兩層以上之比率，皆須改善，則估計各該修正變率之數值，殊屬不易，不如採用預估撓度之法，如第 148 節所述。

148. 預估側款量（即撓度）。上文所述之法，假定各層之撓度，與各該層之高度，成正比例，若結構為甚不規則的，如用上法，必至於有多層皆須施用修正變率，不如預估各結點之撓度，因而求得各固定端變率，如法分配之，而得各桿件之最後變率，如是即無須施用修正變率矣。

凡房屋受有風力而發生之側欹，隨所有各立柱及各橫梁之性質而異，故若設想有一個混合的立柱，在各層分界處，各有一橫梁以約束之，如是而估計各結點之側欹量，當必與實有側欹量約略相同，每層混合立柱之剛率，可作為該層所有各立柱剛率之總和，即  $\Sigma K_c$ ，(c 字代表立柱)，每層混合橫梁之剛率，可作為該層所有各橫梁剛率之總和，以二乘之，即  $2\Sigma K_g$ ，(g 字代表橫梁)，其所以必用二乘者，蓋因每一橫梁，能在兩個結點處，發生其約束力也。

今試先考慮任一層中轉率，撓度（即側欹量），及結點旋轉之相互關係，此混合立柱之撓度，可視作下列兩項合併而成，(1) 彼端撓角乘該層之高度，(2) 此端與彼端切線間之撓度，但若按照圖 200 所示，將該立柱撓度，在半高度處，分成兩部份，則可見

$$\Delta = \frac{\theta_A + \theta_B}{2} \cdot h + \frac{\delta_A + \delta_B}{2} = \theta' h + \delta, \quad \left[ \theta' = \frac{\theta_A + \theta_B}{2}, \delta = \frac{\delta_A + \delta_B}{2} \right]$$

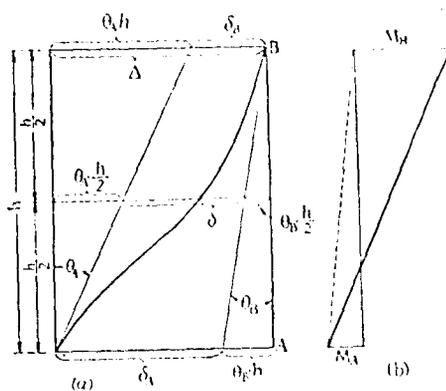


圖 200.

但  $\delta$  為兩端撓度之平均值，可由轉率面積法算得之，即

$$\delta = \frac{1}{2EI} \left( \frac{M_A h^2}{6} + \frac{M_B h^2}{6} \right) = \frac{(M_A + M_B) h}{12EK}$$

$M_A$  與  $M_B$  之和，等於該層之總轉率， $M_t$ ，亦即等於該層之總剪截力，乘該層之高度，而混合立柱之剛率，等於  $\Sigma K_c$ ，故

$$\delta = \frac{M_t h}{12E \Sigma K_c}, \quad \text{即}$$

$$\Delta = \theta' h + \frac{M_t h}{12E \Sigma K_c} \dots \dots \dots (233).$$

總轉率  $M_t$  如何分配於該立柱之頂及底，與上式中之第二項無關，但  $\theta_A$  及  $\theta_B$  之數值，則與總轉率之如何分配有關，故須加以研究。

橫梁及立柱之剛率比 Stiffness Ratio; 可以下式定之。

$$r = \frac{A, B \text{ 兩層間各橫梁之 } 2 \cdot \Sigma K_g}{A \text{ 層各立柱之 } \Sigma K_c + B \text{ 層各立柱之 } \Sigma K_c}$$

任何兩層分界處，皆有此項剛率比，可名之曰該兩層間之  $r$  比率，

設令  $n_{top} = 2 r_{top} + 1$ ,  $n_{bot} = 2 r_{bot} + 1$ , ( $top$  字代表柱頂,  $bot$  字代表柱底.)

由考察多數房屋架構之結果，而知立柱中頂部彎率與底部彎率之比率，約等於  $n_{top}$  與  $n_{bot}$  之比率，故任何層之總彎率，可分配如下。

$$M_{top} = M_t \cdot \frac{n_{top}}{n_{top} + n_{bot}}, \quad M_{bot} = M_t \cdot \frac{n_{bot}}{n_{top} + n_{bot}}.$$

讀者注意，最下層柱頂之  $n$  為  $\infty$ ，而其柱底之  $n$  為  $2\infty$ ，故該層總彎率之分配，應為柱頂佔 33%，柱底佔 67%，但為實際上的經濟起見，此項分配比率，宜分別為 40%（頂部）及 60%（底部）。

將任何兩層分界處之上下兩立柱彎率相加，可得該橫梁之彎率， $M_g$ ，因混合橫梁之剛率為已知量，若假定橫梁之彎率反方向點，適在該梁之中點，即可由彎率面積，算得該結點處之撓角（或旋轉角），觀於圖 201，而知

$$\theta = \frac{M_g l}{6EI} - \frac{M_g}{6E \cdot 2 \Sigma K_g} = \frac{M_g}{12E \cdot \Sigma K_g} \dots \dots \dots (234).$$

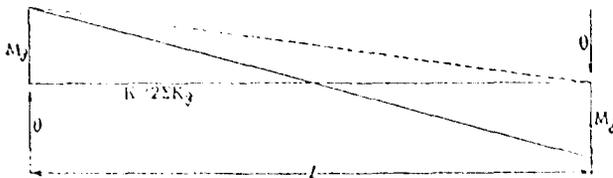


圖 201.

各個  $\theta$  之數值，既已算得，自可由 (233) 式求得各層之  $\Delta$ 。

$\Delta$ 之數值既得, 可由  $M = -\frac{6EK\Delta}{h}$ , 求得各個立柱之固定端彎率,

此式中之  $K$ , 為各個立柱之原有的剛率, 至各橫梁則仍作為並無固定端彎率, 然後如法分配各彎率, 使之平衡, 由此項平衡的立柱彎率, 算得各層總剪截力, 以與實有總剪截力相比, 而得各該層之比率, 以乘各柱端之彎率, 而得最後彎率, 其各橫梁端之彎率, 仍依照第 144 節之步驟 (6), 以算得之。

今試仍取第 35 節之問題, 用預估側欹量法, 求得各彎率如下,

層	高度 cm	$\Sigma K_c$	$\Sigma K_g$	$r$	$n$	彎率分配 %	剪截力 $T$	$M_1$	立柱彎率	$E\theta$	側欹量, cm			立柱的 固定端彎率 1-cm	
											$\frac{E\theta h}{100}$	$E\delta$	$\frac{E\Delta}{100}$	外柱	內柱
3	500	1.0	1.50	0.753	2.003	0.521	1,000	2000	1018	58.3	422.0	208.4	630.4	750.5	750.5
			2.25	0.503	1.879	0.476			0.2						
2	500	1.0	2.25	0.511	1.637	0.508	8.00	1000	2032	110.5	680.5	110.8	1007.3	1310.4	1310.4
					1.585	0.492			1.608						
1	500	1.8	2.25	0.511	2.0	0.492	12,000	6000	2100	101.7	101.0	521.0	925.0	1332.0	1332.0
					2.0	0.492			3000						

讀者注意, 上表所得各層之  $\frac{E\Delta}{100}$  各數值, 與第 47 節所得第三約值之  $n_3, n_2, n_1$  等數值, 約成正比例, 可見此次估計之大致無誤。

既得各立柱之固定端彎率, 可如法分配之, 如圖 392 所示, 其所得各層之  $\frac{\text{實有總剪截力}}{\text{算得總剪截力}}$  比率, 應約等於一, 惟第三層則相差 17.5%, 尙屬勉強可用。

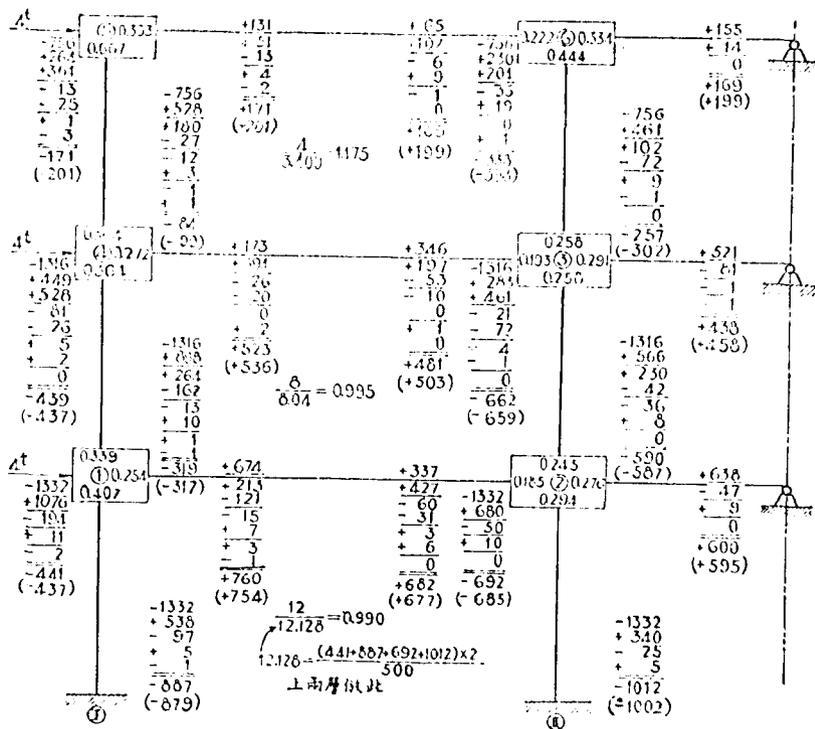


圖 292.

今將上圖所得結果，與圖 59 B 之結果，比較如下。

桿件	1-1	1-1	1-1	4-1	4-5	5-1	11-2	2-1	2-3	3-2	3-5	6-3
撓角撓度法	-8.8	-135	-3.2	-128	-119	-219	-10.3	-0.55	-5.92	0.58	-290	-372
預估撓度法	-8.57	-137	-3.17	-137	-119	-201	-10.2	-0.55	-5.87	-0.59	-302	-398
錯誤, %	0.1	0.5	1.5	2.1	16.8	8.2	0.1	0	0.8	0.1	4.1	7.0

桿件	1-2	2-1	2-2'	1-3	3-1	3-3'	5-6	6-5	6-6'
撓角撓度法	1.752	1.671	1.590	1.511	1.499	1.419	1.221	1.168	1.176
預估撓度法	1.751	1.677	1.595	1.530	1.503	1.458	1.291	1.199	1.199
錯誤, %	0.3	0.4	0.4	1.5	1.4	2.0	0.0	0.5	13.1

由此可見較大錯誤，皆發生於最高層各桿件，而最大錯誤為 16.8%，亦尚為一般設計所可容許，此例題之架構祇有三層，各桿件彎率之發生錯誤者，較為頗多，若層數甚多，或徑間數甚多，則所得成績，當必較優，但最高層各桿件，仍不免有較大錯誤耳。

149. 立柱變形之影響。本書第 29 節首段之假定 (b)，謂各桿件因受軸向力而生之長度變更等於零，此在尋常情形之下，自皆可以適用，但在細削之高樓受有風力之時，其向風各柱，受風力而欲伸長，而背風各柱，則有縮短之趨勢，如是則立柱與橫梁聯結各點，不免發生較大之副彎率 Secondary Moments，不宜完全忽視，如有此項情形，可於算得因風力而生之各彎率之後，計算各立柱中之軸向拉力及軸向壓力，由是而求得各該柱之伸長量及縮短量，更由是而算得各該橫梁之固定端彎率，重新如法分配，而得實有總剪截力與算得總剪截力之新比率，若此項新比率尚屬合度，可用之以求得因風力而生之各個新的彎率，以此與前此所得平衡的副彎率，分別相加（代數的相加）而得各最後彎率。（參閱第二十四章。）

#### 乙. 剛率百分法, The K-Percentage Method.

150. 原則。凡解算任何架構，最好先行求得各支點處之反力，俾與各外力得以平衡，但在施用撓角撓度法或分配彎率法之時，其進行程序，適與此相反，大抵皆於求得各橫梁中之彎率以後，始行計算因風力而生之各個垂直反力。

在此等架構之中，若能先求得各個垂直反力之真確數值，則各

桿件中之應力，自可利用靜力學，以求得其相當精密之數值，從前所習用之各種約略法，（見第 142 節）如門框法，如懸臂法，其實皆採用此項手續，但在此等約略法中，其於假定各桿件發生其作用之時，並未注意及於各該桿件之尺寸，故由風力而發生之反力數值，係由臆測得之，時或去真甚遠。

據 Witmer 教授詳細研究所得，各支點處垂直反力之相對的比率，全視各桿件之剛率為轉移，故可由此諸剛率，先求得此項垂直反力比率 Vertical Reaction Ratios。

凡用 Cross 教授之法，以解算架構，其於逐次分配彎率之時，各徑間中之垂直的風剪截力 Vertical Wind Shears 每次改變其數值，殊為微妙，蓋首次分配後所得之垂直剪截力，幾與最末次分配後所得者相同，（參閱表 38）且即使首次分配彎率，並未舉行，亦可由各梁柱之剛率，以求得垂直的剪截力比率，其精密程度，儘足供計算應力之用。

任何徑間中之全部垂直的風剪截力，必為該徑間中之各橫梁所擔任，故各徑間中因受有風力而生之全部垂直的風剪截力之比率，自必與各該徑間中所有各橫梁惰性率總和之比率，有一定之關係，此項假設，由檢察多數架構之結果，而業已證實，又據考查所得，任何架構之垂直剪截力比率，與一個簡單而折衷的三層架構 A Simple, Compromise, Three-Story Pent 幾於相同，此項折衷架構之尺寸，可假定之與實有架構中各相當桿件之平均尺寸相等，故任何架構可立即改換為一個三層折衷架構，由此而算得其垂直反力比率。

151. 剛率百分法之概要。此法之步驟如下。

(1). 於每一徑間中，分別求得所有各橫梁之平均惰性率，並求得每一立柱自架頂至架底之平均惰性率。

(2). 假想有一個三層的折衷架構，其尺寸即為步驟 (1) 所得之平均數值，其每層之高度，亦與實有架構各層平均高度相同。

(3). 在此折衷架構中，於每一橫梁之各端，計算該梁剛率對於

該結點周圍所有各桿件剛率總和所佔之百分數，並將此項百分數，分別書於該端。（立柱兩端之剛率百分數，可置之勿問。）

(4). 將接近任何立柱之各橫梁剛率百分數，按照下開比率，酌予修正。此比率為  $\frac{\text{該立柱之平均剛率}}{\text{左方外柱之平均剛率}}$ 。（此等修正百分數，可視作因折衷架構最上層受有假想的風力時，各橫梁所發生之彎率）

(5). 將各徑間中之修正的剛率百分數，分別相加，而以該徑間之寬度除之，其所得各商數 Quotients，可作為因有上開假想的風力而得之各該徑間全部垂直剪截力，由此諸剪截力，可以算得各該立柱之垂直反力，由此諸反力，可以算得該架構之風的反力比率。

既已算得反力比率，即可用靜力學方法，以計算各應力，其步驟如下。

(a) 假定各桿件之彎率反向點，皆在其中點，惟最下層各立柱之彎率反向點，則作為距柱底等於  $\frac{6}{10}$  高度之處。

(b). 對於實有架構各層，按照所假定之風力，求其對於右方外柱之彎率反向點所發生之彎率，而作成若干彎率方程式，因而求得各立柱之風的垂直反力，及風的軸向應力，（此諸方程式中任何立柱之風的反力及風的軸向力，可利用風的反力比率，作為左方外柱之相當反力及軸向力之若干倍。）

(c). 某一結點處，緊居於橫梁上方及其下方兩立柱軸向力之相差額，可作為該結點處之垂直剪截力增益量，由此可以求得各橫梁中之剪截力。

(d). 以每一橫梁長度之半，乘該梁中之總剪截力，而得該梁每端之彎率。

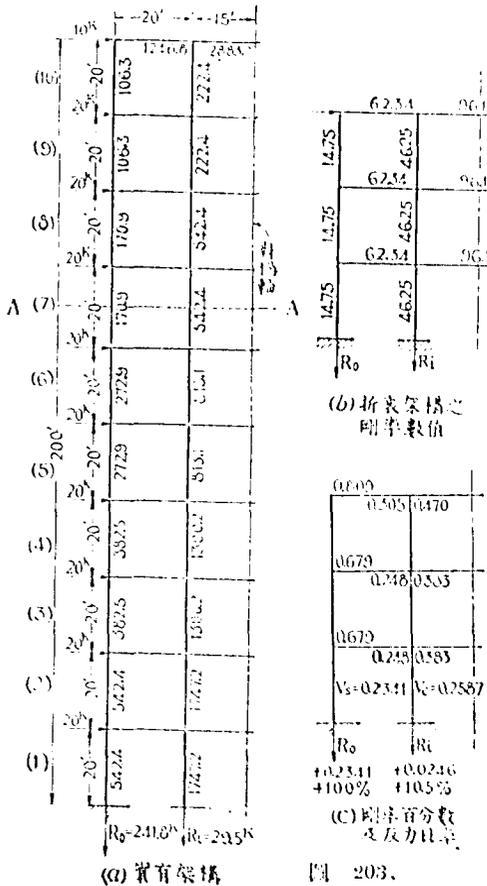
(e). 推算各立柱中之彎率，俾各結點處之  $\Sigma M=0$ ，除最下一層外，此項彎率，作為柱頂柱底皆相同。（此項推算彎率工作，可自架構之頂起，逐層向下計算，至達最下層之柱頂而後已）。

(f). 假定最下層之橫平總剪截力，按照各該立柱之平均剛率，比例分配於各該立柱，如是則最下層中任何立柱之總彎率，等於其

所分得之剪截力，乘該層之高度，而其柱底之彎率，必等於此項總彎率減去上所求得之該層柱頂彎率，用此法求得之柱底彎率，可以決定該柱中彎率反向點之位置，此項位置，比之原假定者，或不免略有出入，但對於垂直反力及軸向力之影響甚微，可以付諸不問。

如不用步驟 (f) 之法，而單獨施用分配彎率法於最下一層，亦可。

152. 演算舉例。



設有十層架構（對稱的），受有風力，如圖 203 (a) 所示，各立柱之惰性率，均標明於圖中。各橫梁之居於同一徑間中者，皆具有同一之惰性率，計旁側徑間各梁之惰性率，皆為 1246.8，中央徑間各梁之惰性率，皆為 2883.2。如是則

各中央橫梁之平均惰性率 = 2,883.2  
 各旁側橫梁之平均惰性率 = 1,246.8  
 各內柱之平均惰性率 = 3.14  
 各外柱之平均惰性率 = 3.14

試按照剛率百分法，求得剪截力及反力如下

0.305	0.809
0.248	0.679
0.248	0.679
$0.801 \times 3.14 = 2.518$	
	$4.6874 \times 20'$
	$= 0.2341 = V_s \div R_0$

[上文，以 3.14 乘 0.801，即係第 151 節之步驟 (4)]

0.470
0.383
0.383
$1.236 \times 2 \times 3.14 = 7.762 \div 30'$
$= 0.2587 = V_c$

圖 203.

由是而得  $R_1 = V_c - V_{c1} = 0.0246$  [c 表示中央徑間, s 表示旁側徑間] 故  $P = \frac{+0.0246}{+0.2341} = +10.5\%$ . [P 為內柱反力比率]

假定除最下一層外, 各層之彎率反向平面, (即 A-A 截面), 皆在各該層立柱之中點, 而最下一層之彎率反向平面, 則在高出柱底等於  $\frac{6}{10}$  高度之處, 令

旋繞此平面之傾覆力率 Overturning Moment = 各立柱應力之抵抗力率 Resisting Moment.

$$\text{則 } R_0 = \frac{M_A}{73.15} \quad [73.15 = 2(20' + 15' + 0.105 \times 15')]$$

因內柱之反力比率 = +0.105, 故旁側徑間中之垂直剪截力 =  $R_0$ , 而中央徑間中之垂直剪截力 =  $1.105R_0$ . 若假定各旁側橫梁之彎率反向點, 皆在各該梁之中點, 則頂層 (即第十層) 旁側橫梁中之最大彎率為,

$$M_{0s} = \frac{M_{10}}{73.15} \times 10, \quad [10' = \text{該梁長度之半}]$$

而中央橫梁中之最大彎率, 為

$$M_{0c} = \frac{M_{10}}{73.15} \times 1.105 \times 15. \quad [15' = \text{該梁長度之半.}]$$

至若其下各層, 例如第九層, 則各該最大彎率如下,

$$M_{9s} = \frac{M_9 - M_{10}}{73.15} \times 10,$$

$$M_{9c} = \frac{M_9 - M_{10}}{73.15} \times 1.105 \times 15.$$

由於風力而生之傾覆力率, 不必算得其實值, 若令  $H_9$  及  $H_{10}$ , 分別代表第九層及第十層之橫平剪截力, 並令  $h_9$  及  $h_{10}$  分別代表各該層之高度, 則  $M_9 - M_{10} = 0.5 H_9 h_9 + 0.5 H_{10} h_{10}$ . 其他各下層皆然, 惟最下一層則須用下式,

$$M_1 - M_2 = 0.4 H_1 h_1 + 0.5 H_2 h_2$$

由上列諸式, 可求得各橫梁彎率, 如表 42 所示.

其各立柱中之變率，除最下層柱底外，皆可由各結點處之  $\Sigma M=0$ ，求得之。最下層外柱中之總變率，可利用折衷架構之平均剛率，以求得之如下。

最下層外柱中之總變率

$$=(9 \times 20,000 + 10,000) \times 20' \times \frac{14.75}{2(14.75 + 46.25)} = 459,400 \text{ 磅英尺.}$$

最下層內柱中之總變率

$$=(9 \times 20,000 + 10,000) \times 20' \times \frac{46.25}{2(14.75 + 46.25)} = 1,440,600 \text{ 磅英尺.}$$

由是可得最下層柱底之變率 = 總變率減去該層柱頂之變率，(此項柱頂變率，已用上法求得。)

表 42 並表示用此法算得各結果，與用分配變率法算得者，互相比較，其錯誤均在 20% 以下。

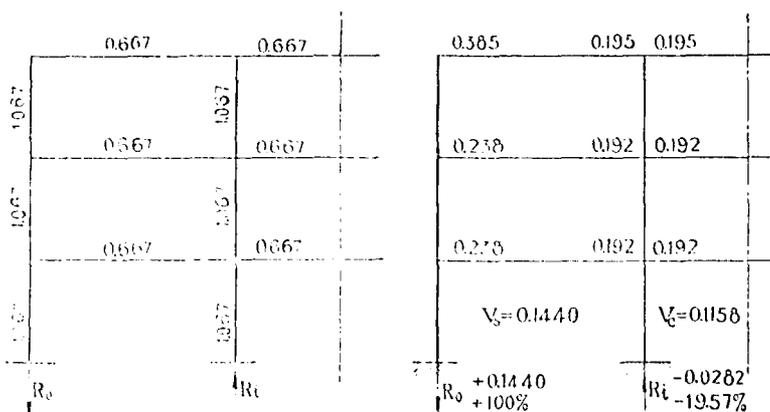
表 42

層	橫 梁				立 柱			
	分配變率法		剛率百分法	錯誤 %	分配變率法		剛率百分法	錯誤 %
	左	右			頂	底		
外 方 樑 件								
10	15.7	12.9	13.7	- 13	15.7	14.1	13.7	- 13
9	61.8	49.9	54.7	- 11	47.2	46.1	41.0	- 13
8	105.0	95.9	109.4	+ 4	58.9	57.6	68.4	+ 16
7	141.7	139.7	164.1	+ 16	84.1	81.6	95.7	+ 14
6	193.0	187.4	218.7	+ 13	111.4	107.4	123.0	+ 10
5	243.9	234.8	273.4	+ 12	135.5	134.1	159.4	+ 10
4	283.1	280.1	328.1	+ 16	149.0	146.2	177.7	+ 19
3	320.4	323.3	382.8	+ 18	174.2	168.7	205.1	+ 18
2	370.1	370.2	437.5	+ 18	201.4	197.6	232.4	+ 15
1	392.8	390.0	440.3	+ 12	195.2	252.6	207.9(頂), 251.7(底)	- 0.5
內 方 樑 件								
10	22.9		22.7	- 1	35.8	34.2	36.1	+ 2
9	89.0		90.6	+ 2	104.7	101.8	109.0	+ 2
8	201.2		181.3	- 10	195.3	187.9	181.7	- 7
7	318.6		271.9	- 15	270.4	263.8	251.3	- 6
6	421.6		362.5	- 14	345.2	336.0	326.9	- 5
5	521.4		453.1	- 13	420.2	409.2	399.6	- 5
4	640.2		543.8	- 15	511.1	493.7	472.3	- 7.5
3	756.6		634.4	- 16	586.2	570.8	544.9	- 7
2	855.6		725.0	- 15	655.0	646.8	617.6	- 6
1	892.6		729.5	- 18	635.8	816.3	552.2(頂), 883.4(底)	+ 9

上表所列剛率百分法算得之結果，均係用上述計算方法而求得者，讀者細加玩索，自能了解，似無再加釋明之必要。

又此例題，原係採自 Proceedings of the American Society of Civil Engineers, June, 1939, 其中所列用分配率法算得各結果，似有錯誤，茲由編者用第 91 節之法，自行推算，列入此表，表中數字，與原報告互異。其錯誤百分數，自必大有出入，讀者察之。

今試更取第 35 節之問題，用剛率百分法解之如下。



(a) 上表架構之剛率

(b) 剛率百分數及反力比率

圖 201.

0.667	1.067	0.667	1.067
1.067	1.067	0.667	1.067
<u>1.733</u> ) 1.667	0.667	<u>1.067</u> ) 1.667	0.667
0.585	<u>2.800</u> ) 1.667	<u>2.400</u> ) 1.667	<u>3.467</u> ) 1.667
	0.238	0.195	0.192

$$\begin{array}{r} 0.195 \\ 0.192 \\ \frac{0.192}{0.579} \times \frac{1.067}{1.067} = 0.579 \\ \hline 1.440 \div 10^3 = 0.1440 = R_0 = V_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.195 \\ 0.192 \\ \frac{0.192}{0.579} \times 2 \times \frac{1.067}{1.067} = 1.158 \div 10^3 = 0.1158 = V_c \end{array}$$

$$V_c - V_0 = 0.1158 - 0.1440 = -0.0282 = R_1$$

$$\rho = \frac{R_1}{R_0} = \frac{-0.0282}{0.1440} = -0.1957$$

$$R_0 = \frac{M_A}{2(10^3 + 5^3 - 0.1957 \times 5^3)} = \frac{M_A}{28.043}$$

$$M_0 \text{ (第三層)} = \frac{M_2}{28.043} \times 5 = \frac{4 \times 2.5 \times 5}{28.043} = 1.785^{\text{t.m.}} = 178.5^{\text{t.cm.}}$$

$$M_0 \text{ (第二層)} = \frac{M_2}{28.043} \times 5 = \frac{(8 \times 2.5 + 4 \times 2.5) \times 5}{28.043} = 5.355^{\text{t.m.}} = 535.5^{\text{t.cm.}}$$

$$M_0 \text{ (第一層)} = \frac{M_1}{28.043} \times 5 = \frac{(0.4 \times 12 \times 5 + 0.5 \times 8 \times 5) \times 5}{28.043} = 7.854^{\text{t.m.}} = 785.4^{\text{t.cm.}}$$

$$M_1 \text{ (第三層)} = \frac{M_2}{28.043} \times (1 - 0.1957) \times 5 = 1.432^{\text{t.m.}} = 143.2^{\text{t.cm.}}$$

$$M_1 \text{ (第二層)} = \frac{M_2}{28.043} \times (1 - 0.1957) \times 5 = 1.296^{\text{t.m.}} = 129.6^{\text{t.cm.}}$$

$$M_1 \text{ (第一層)} = \frac{M_1}{28.043} \times (1 - 0.1957) \times 5 = 6.301^{\text{t.m.}} = 630.1^{\text{t.cm.}}$$

$$\text{最下層 (即第一層) 外柱中之總彎率} = \frac{12 \times 5 \times 1.067}{2(1.067 + 1.067)} = 15^{\text{t.m.}} = 1,500^{\text{t.cm.}}$$

$$\text{最下層內柱中之總彎率} = \frac{12 \times 5 \times 1.067}{2(1.067 + 1.067)} = 15^{\text{t.m.}} = 1,500^{\text{t.cm.}}$$

茲將算得各結果，與用撓角撓度法算得者，列表比較如下。

層	旁側橫梁				外 柱			
	抗角撓度法		剛率百分法	錯誤 %	抗角撓度法		剛率百分法	錯誤 %
	左	右			頂	底		
3	220.6	198.2	178.5	- 19	219.4	118.8	178.5	- 18
2	513.6	496.4	535.5	- 4	428.0	321.8	357.0	- 16
1	752.0	674.1	785.4	+ 4	435.4	877.9	482.4 (頂) 1071.6 (底)	- 1 + 22
層	中央橫梁				內 柱			
	抗角撓度法		剛率百分法	錯誤 %	抗角撓度法		剛率百分法	錯誤 %
	左	右			頂	底		
3	175.8	143.2	143.2	- 18	372.0	289.6	321.7	- 13
2	419.1	429.6	429.6	- 4	657.8	592.4	613.4	- 2
1	596.3	631.1	631.1	+ 6	684.5	1002.5	772.1 (頂) 727.9 (底)	+ 13 - 27

按 Witmer 教授此法，係根據其所作模型試驗，而創為之。其模型試驗報告，及其討論文，見 Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 102, 1937, pp. 416—462. 讀者可參閱之。

153. 免除立柱變形所生之副彎率。上文所述之法，雖未言及如何避免因立柱變形而生之副彎率，但在設計之時，儘可先行求得各徑間中各橫梁撓性率總和之相對的數值，俾風力所發生之垂直反力，得與懸臂學理符合，如是則上開副彎率，即可忽視不問。

假定各立柱中之單位受壓應力，與各該柱距架構的垂直中立軸，成正比例，在第152節之十層高樓中，此項中立軸即與對稱軸吻合，設令  $A_0$  及  $A_1$  分別代表該架構第一層外柱及內柱之截面面積，並設令外柱之垂直風反力為  $R_0 = 1$ ，則內柱之垂直風反力  $R_1 = \frac{15^2}{20^2 + 15^2} \times \frac{A_1}{A_0} =$

0.105。若  $R_0=1$ ，則  $V_3=1$ ，而  $V_c=R_0+R_1=1+0.105=1.105$ 。

設令  $I_s$  代表任何層旁側橫梁之惰性率， $I_c$  代表該層中央橫梁之惰性率，則  $I_c$  應等於  $I_s \times 1.105 \times \frac{30^2}{20^2}=2.49 \times I_s$ ，[  $30'$  = 中央徑間之長， $20'$  = 旁側徑間之長。] 故知任何層之中央橫梁之惰性率，應等於 2.49 乘該層旁側橫梁之惰性率，方能使垂直風反力發生懸臂學理的關係，而立柱變形所生之副彎率，即可置而不問，實行設計之時，常須注意及此，即可免除覆算此項副應力之煩。關於實行設計，可參閱 Witmer 教授最新發表之論文，見第 142 節，（所謂垂直風反力發生懸臂學理的關係也者，該架構於受有風力荷重發生側歛之時，各層中所有各橫梁仍各居於同一平面，並不發生扭屈屈曲情事是也），但按照此法所作之設計，未必為最經濟的設計耳。

剛率百分法之應用，並不限於與懸臂學理相合之處，凡任何架構各桿件之具有任何尺寸者，以及各項架構之具有任何徑間數及任何徑間長者，與夫並不對稱之架構，皆可一體適用此法。

### 丙. 中斷層面樓房之解法。

#### Analysis of Buildings with Mezzanine Floors.

154. 用分配彎率法以解中斷層面。凡層樓中某某徑間具有層面，而其他徑間在同一高度之處，則無之，謂之具有中斷層面之層樓，Buildings with Mezzanine Floors。此項結構物之受有風力者，若用撓角撓度法以解算之，自可獲得精密之結果，但撓角撓度法之施用，過於繁難費時，一般工程師常不樂用，茲述利用分配彎率法於下，藉以求得相當精密之結果，此法並不限於橫平荷重，即在受有垂直荷重者，亦可依照採用之也。

Cross 及 Morgan 兩教授於其所著之 Continuous Frames of Reinforced Concrete 書中，謂樓房之中，若有中斷層面，則分配剪截力所用之原則，（即本書第 91 節之法）不復可以適用，因其左右兩方各立柱之

撓度，並不相同也，（見是書第 226 頁，1932 年版）兩教授所示解算此項問題之法，為（1），假想加入一個或若干橫梁，其兩端為樞接者，（2），推算此諸橫梁中之軸向壓力，（3），假想添施若干外力，與此項壓力大小相等而方向相反，以抵銷之，但並未舉例演算，今試舉下述兩例，詳加演算，以示此法之應用。

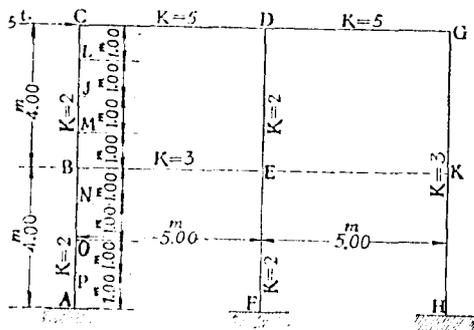


圖 205.

設有一剛構屋架，如圖 205 所示，在結點 C 處，有一個集中橫平荷重  $=5t$ ，假想添加一桿件 EK，其兩端皆為樞接者，如是則  $M_{EK}$  及  $M_{KE}$  各等於零，而 EK 桿件之剛率 K，可等於任何數值，今先按照本書第 91 節之法，解算此屋架之具有 EK 桿件者，如表 43 所示，

（所有各變率，均以 t.cm. 計。）

此時因添入 EK，故 GH 立柱，被分為兩段，每段之剛率，作為 6，比之圖中所示 GH 之剛率（3），適為一倍，而 EK 之剛率，則作為零，因其不能分受變率也。

由此表所得之結果，可知 GK 中之剪截力  $= -\frac{M_{EK} + M_{KG}}{400} =$

$$\frac{498 + 21}{400} = +1.2975t, \text{ 而 KH 中之剪截力} = -\frac{M_{KH} + M_{HK}}{400} = \frac{-21 + 750}{400} =$$

$+1.8225t$ ，故 EK 中之軸向壓力，必等於  $1.8225 - 1.2975 = 0.525t$ 。

更假想撤去 EK 桿件，並於 E, K 兩點，分別施以外力，其大小與 EK 桿件中之軸向壓力相等，而方向則相反，由此可算得該架構中各桿件兩端之變率，如表 44 所示。

## 剛 構 解 法

表 43

	A			B			C			D			E			F			G			K			H
	AB	BA	BC	BE	CB	CD	DE	DC	DG	EF	EB	ED	FE	GN	GD	KH	KG	HK							
分配因子																									
分配弯矩	-200	2/7 -200	2/7 -200	3/7 +172	2/7 -200	5/7 +143	1/6 -200	5/12 +83	5/12 +83	2/7 -200	3/7 +172	2/7 -200	6/11 -200	5/11 +273	1/2 -600	1/2 -600	1/2 -600	1/2 -600							
修正弯矩	+57	+114	+28 +114	+86 +172	+57 +157	+41 +186	+57 +186	+71 +136	+114 +125	+86 +125	+17 +187	+57 +124	+50 +119	+41 +100	+372 +385	+193 +185	+300 +373								
分配弯矩	-124	+56	+124 -187	+85	+23 -187	+64 -186	+13 -186	+32 -33	+60 -125	+89 +60	+60 +60	+119 +119	+119 +119	+100 +100	+385 +385	+192 +192	+225 +225								
修正弯矩	+28	-75	+93	+44	+23 -94	+59 -94	+30 -95	+32 -7	+50 -7	+42 +38	+6 +58	+30 +70	+192 -84	+102 +59	+70 +40	+225 +225	+225 +225								
分配弯矩	+16	+32	+33	+40	+12 +33	+59 +33	+19 -2	+20 -7	+24 -7	+21 +33	+1 +22	+19 +33	+112 +32	+112 +32	+27 +137	+130 +130	+130 +130								
修正弯矩	+44	-44	-56	+26	+12 -56	+31 -56	+56 -56	+7 -7	+24 -44	+33 +33	+22 +22	+22 +22	+44 +44	+168 +168	+168 +168	+168 +168	+168 +168								
分配弯矩	+8	-26	+32	+16	+8 -33	+3 -32	+11 -32	+13 -3	+13 -3	+13 +13	+13 +13	+11 -26	+11 -26	+68 +17	+15 +15	+80 +80	+80 +80								
修正弯矩	+5	-15	-19	+10	+5 -20	+1 -19	+7 -19	+10 -7	+7 -16	+8 +16	+8 +16	+6 -15	+6 -15	+40 -58	+9 +9	+48 +48	+48 +48								
分配弯矩	+3	-9	+12	+6	+5 -11	+11 -11	+4 -11	+4 -1	+4 -1	+4 +4	+4 +4	+4 -11	+4 -10	+21 +5	+1 +3	+28 +28	+28 +28								
修正弯矩	+2	-6	+7	+3	+2 -6	+2 -7	+3 -7	+3 0	+2 0	+2 +2	+2 +2	+2 -6	+2 -6	+14 +3	+9 +2	+17 +17	+17 +17								
分配弯矩	+1	-3	+0	+2	+1 -4	+0 -3	+1 -3	+1 0	+1 0	+1 +1	+1 +1	+1 -3	+1 -3	+8 0	+0 +1	+10 +10	+10 +10								
修正弯矩	-383	-260	-304	+564	-357	+337	-164	+197	+297	-240	+578	-338	-374	-105	+405	+21	-21								

表 44

	A	B		C		D		E		F	G		H			
	AB	BA	BC	BE	CB	CD	DE	DC	DG	EF	EB	ED	FE	GH	GD	HG
分配因子		2/7	2/7	3/7	2/7	5/7	1/6	5/12	5/12	2/7	3/7	2/7		3/8	5/8	
固定端轉率	-26	-26	+26		+26		+26			-26		+26	-26	-53		+53
分配		0	0	0	-7	-19	-4	-11	-11	0	0	0		+20	+33	
修正	0		-3	0	0	-5	0	-9	+16		0	-2	0		-5	+10
分配		+1	+1	+1	+1	+4	-1	-3	-3	0	+1	+1		+2	+3	
修正	0		0	0	0	-1	0	+2	+1		0	0	0		-1	+1
分配		0	0	0	0	+1	-1	-1	-1	0	0	0		0	+1	
最後	-26	-25	+24	+1	+20	-20	+20	-22	+2	-26	+1	+25	-26	-31	+31	+64

此次所用 GH 立柱之剛率=3，因 EK 桿件已不復存在也，GH 桿件兩端之固定端轉率，即為尋常橫梁中心受有集中荷重時，梁端之固定端轉率，其他各立柱（如 AB, BC, FE, ED, 皆是）固定端轉率之求得，係假定其集中荷重，平均分配於上層之底及下層之頂，即各受有 0.2625 之荷重也，讀者注意，此次計算，並未施用修正轉率（因不知其如何分配於各立柱之故），故所得最後轉率，僅為約值，但為實際計算起見，其精密已足以應用。

將兩表所得最後轉率，作代數的相加，即為各桿端之實得轉率，茲將此諸實得轉率，與用撓角撓度法求得者，相互比較之，如表 45 所示。

表 45

桿端轉率	AB	BA	BC	BE	CB	CD	DE	DC	DG	EF	EB	ED	FE	GH	GD	HG
分配轉率法	-409	-285	-280	+565	-337	+337	-444	+175	+269	-266	+579	-313	-400	-529	+529	-686
撓角撓度法	-417	-294	-279	+573	-337	+337	-452	+177	+275	-274	+590	-320	-406	-533	+533	-692

其次試更假定上開集中橫平荷重 5，作用於 CB 立柱之中點 J，其計算方法，與上述者相似，觀表 46, 47, 48, 自明。



由表 46 之結果，算得 EK 桿件中之軸向壓力 = 1.895t。由是而得表 47。

表 47

	A	B			C			D			E			F	G		H
	AB	BA	BC	BE	CB	CD	DE	DC	DG	EF	EB	ED	FE	GH	GD	HG	
分配因子		2/7	2/7	3/7	2/7	5/7	1/6	5/12	3/12	2/7	3/7	2/7		3/8	5/8		
固定彎率	-95	-95	+95		+95		+95			-95		+95	-95	-190		190	
分 配		0	0	0	-27	-68	-16	-39	-40	0	0	0		+71	+119		
傳 達	0		-13	0	0	-19	0	-31	+59		0	-8	0		-20	+35	
分 配		+4	+4	+5	+5	+14	-4	-11	-10	+2	+4	+2		+8	+12		
傳 達	+2		+2	+2	+2	-5	+1	+7	+6		+2	-2	+1		-5	+4	
分 配		-1	-1	-2	+1	+2	-2	-6	0	0	0			+2	+3		
傳 達	0		0	0	0	-3	0	+1	+1		-1	-1	0		-3	+1	
分 配		0	0	0	+1	+2	0	-1	-1	0	+1	+1		+1	+2		
傳 達	0		0	0	0	0	0	+1	+1		0	0	0		0	0	
分 配		0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0		0	0		
最 後	-95	-92	+87	+5	+77	-77	+74	-83	+9	-93	+6	+87	-94	-108	-108	+230	

表 46 及表 47 之最後彎率，相加，得實得彎率，並與用撓角撓度法算得者比較如下，(表 48)。

表 48

桿端彎率	AB	BA	BC	BE	CB	CD	DE	DC	DG	EF	EB	ED	FE	GH	GD	HG
分配彎率法	-100	-259	-286	+545	+633	-63	-197	-16	+213	-360	+471	-111	-451	-396	+396	-514
撓角撓度法	-118	-277	-284	+561	+611	-61	-202	-16	+218	-374	+488	-114	-466	-407	+407	-526

由表 45 及表 48 觀之，可見用分配彎率法算得各數值之錯誤，大都為百分之二至百分之三，其最大者為第二問題中  $M_{BA}$  之錯誤，計亦不過百分之 6.5。故此法在實用上，可稱精密可用，比之用撓角

撓度法，所省時間實多。

設令該集中橫平荷重 $5^t$ ，依次作用於 C, L, J, M, B, N, O, P, 等點，編者曾用撓角撓度法，逐一計算各桿端之彎率，茲將此項計算結果，列於表 49，以供讀者參攷，並備供繪製影響線各圖之用（各彎率均以 t.cm 計）。

表 49

	荷重在 C 點	荷重在 L 點	荷重在 J 點	荷重在 M 點	荷重在 B 點	荷重在 N 點	荷重在 O 點	荷重在 P 點
$M_{AB}$	-417.27	-413.43	-417.56	-432.82	-463.43	-507.04	-501.51	-361.09
$M_{FE}$	-405.67	-431.15	-466.29	-484.67	-460.86	-358.78	-293.70	-61.99
$M_{HG}$	-691.57	-632.21	-526.32	-408.66	-322.26	-239.00	-131.83	-39.38
$M_{BA}$	-293.79	-278.80	-276.64	-309.70	-409.08	-427.54	-43.35	+7.49
$M_{BC}$	-279.25	-300.46	-284.43	-166.52	+111.16	+25.56	-5.07	-5.37
$M_{BF}$	+573.04	+579.26	+561.06	+476.22	+288.92	+101.99	+18.43	-2.12
$M_{CB}$	-336.58	-54.11	+60.57	+71.17	+46.34	+24.05	+9.79	+2.23
$M_{CD}$	+336.58	+54.11	-60.57	-74.17	-46.34	-24.04	-9.78	-2.23
$M_{DE}$	-452.57	-345.67	-202.13	-63.56	+20.66	+41.43	+31.66	+11.23
$M_{DC}$	+177.09	+63.38	-15.54	-64.32	-81.65	-70.45	-42.10	-13.28
$M_{DG}$	+275.48	+232.28	+218.32	+127.85	+60.98	+29.01	+10.55	+2.05
$M_{EF}$	-270.60	-314.24	-374.10	-413.41	-394.94	-299.77	-167.73	-50.56
$M_{FB}$	+590.44	+552.68	+487.97	+393.44	+292.77	+183.75	+90.15	+24.66
$M_{ED}$	-319.85	-238.44	-113.87	+14.97	+102.17	+116.02	+77.58	+25.91
$M_{GH}$	-533.32	-491.90	-407.13	-310.16	-238.89	-174.84	-95.70	-28.42
$M_{GD}$	+533.35	+491.91	+407.14	+310.17	+238.91	+174.87	+95.72	+28.42

## 第二十四章 軸向變形

## AXIAL DEFORMATION.

155. 緒言. 本書上文所述求彎率各法, 均假定各桿件因受軸向力而生之長度變更(即軸向變形)等於零, 如第六章第 29 節首段 (b) 項之所假定, 故並未計及因此項軸向變形而發生之副彎率 Secondary Moments, 但在某種情狀之下, 此等副彎率有加以推算之必要, (例如層樓受有風力) 茲根據 A. Floris 氏之論文, 述推算軸向變形之副彎率如下, 此君論文之標題, 為 Axial Deformation Determined by Moment Distribution. 經載入美國 Journal of the Western Society of Engineers, Feb., 1941.

156. 演算公式. 如圖 206, 立柱  $ac$  因受壓力而縮短  $d_1$ , 立柱

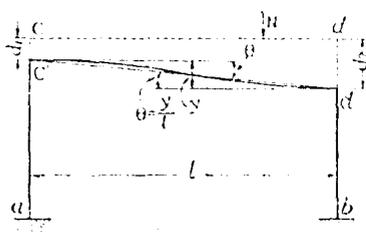


圖 206

$bd$  因受壓力而縮短  $d_2$ , 則橫梁  $cd$  兩端之相對的變位為  $y=d_2-d_1$ . 其

撓角  $\theta = \frac{y}{l}$ . (順鐘針方向者為正, 反之則為負.)

又如圖 207, 架構  $acdb$  受有橫平外力  $W$  而發生側欹,  $c$  端橫平變位

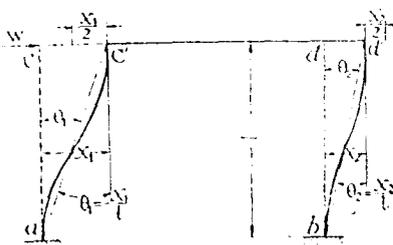


圖 207

$x_1$ ,  $d$  端橫平變位  $x_2$ . ( $x_1$  不必等於  $x_2$ , 因  $cd$  受有軸向力, 亦不免改變其長度.) 故  $ac$  之撓角  $\theta_1 = \frac{x_1}{l}$ , 而

$bd$  之撓角  $\theta_2 = \frac{x_2}{l}$ .

凡桿件因受有軸向力而發生變形，其長度變更量  $d = \frac{Nl}{EA} \dots (235)$

- 上式中  $N$  為軸向力，
- $l$  為桿件之長度，
- $A$  為桿件之截面面積，
- $E$  為彈性係數，

而任何桿件兩端之受有約束者，若其兩端發生相對的變位，（即發生相對的撓角  $\theta$ ），則各該端均有轉率發生，其量為

$$M = -6 EK \theta \dots (236)$$

此即副轉率之所由起也。（參閱第 136 節）。

157. 演算例題。設有一架構，如圖 208，先將各桿件之常數，列入表 50，並按照 (235) 式及 (236) 式，將各桿件之長度變更量，及固定端轉率各式，亦列入該表，以備此後計算之用，至所用各單位，則為 kip（即 1000 磅，縮寫為 k.）及英尺，（縮寫為'）。

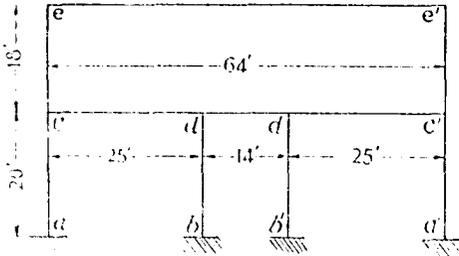


圖 208

表 50

桿件	面積 A	彈性率 I	剛率 K	$E \cdot d$	M
ee'	10.0	20,800	3250	6.40 N	0.0305y
cc'	6.0	4,500	2500	3.00 N	0.0833x
ac	6.0	4,500	2250	3.33 N	0.0675x
cd	7.0	7,150	2880	3.57 N	0.0687y
dd'	7.0	7,150	5140	2.00 N	0.0218y
bd	4.0	1,330	0655	5.00 N	0.020x

158. 垂直荷重。設此架構受有對稱等佈垂直荷重，計下層各橫梁所受荷重為每長一英尺得 4.6'，上層橫梁所受荷重為每長一英尺得 3'。

Floris 氏所示演算，僅為 a, c 兩結點處各桿件之分配轉率，如表 51，其左方為合併變形之轉率，右方為軸向變形之轉率，（此君所用各轉率之正負號，適與本書第二編所用者完全相反，今改從本書，以免混淆）。

表 51

	a		c							
	軸向		合 併 變 形				軸 向 變 形			
	ac	ac	ca	cd	ce		ca	cd	ce	
分配因子			0.294	0.373	0.328		0.294	0.373	0.328	
分配			+ 70.60	- 240.00	+ 78.60	- 230.00	+ 1.60	- 5.63	+ 1.84	- 5.63
合併彎矩			+ 72.26	+ 90.80	+ 87.30	+ 80.44				
傳遞彎矩	+36.13			- 29.23	+ 222.50	+ 193.27				
分配		- 2.18	- 56.77	- 73.10	- 63.40		- 2.18	- 2.03	+ 7.22	+ 3.01
合併彎矩	- 2.18		- 59.84	- 76.26	- 57.17		- 0.89	- 1.13	- 0.99	
傳遞彎矩	- 29.92			- 15.85	+ 56.34	+ 40.46				
		- 0.63	- 11.90	- 15.29	- 13.30		- 0.63	- 1.20	+ 1.62	- 0.21
	- 0.63		- 12.47	- 16.41	- 11.61		+ 0.06	+ 0.03	+ 0.07	
等 等										
全 上	- 6.23			+ 1.51	+ 21.60	+ 23.11				
		- 0.23	- 6.79	- 8.74	- 7.58		- 0.23	- 0.26	+ 0.61	+ 0.12
	- 0.23		- 7.05	- 9.05	- 7.01		- 0.03	- 0.05	- 0.01	
	- 3.52			+ 1.88	+ 8.86	+ 10.74				
		- 0.09	- 3.16	- 4.06	- 3.52		- 0.09	- 0.09	+ 0.22	+ 0.04
	- 0.09		- 3.26	- 4.17	- 3.31		- 0.01	- 0.02	- 0.01	
傳 達	- 1.63			+ 1.31	+ 2.79	+ 4.10				
分 配			- 1.21	- 1.55	- 1.34					
傳 達	- 0.60			+ 0.75	+ 1.12	+ 1.87				
分 配			- 0.55	- 0.71	- 0.61					
實得彎矩	- 8.90		- 12.12	- 303.48	+ 312.60					

上列之表 僅示兩個結點處各桿件之彎率分配 頗不易於釋明，茲由編者自行計算，列成全表，如表 52，因此項架構及所受荷重，均為對稱的，故祇須計算左半各桿件，其右半自必與之完全相同，（編者算得各數值，比之 Floris 氏所得者，自不免略有出入，讀者諒之。）今試釋明如下。

第 3 橫行各數，均為分配因子，係按照各桿剛率而算得之。

第 4 橫行左方各數，均為固定端彎率，由表 6 得之。

右方之 -5.60，係固定端彎率之由於軸向變形者，其算得之法如下。



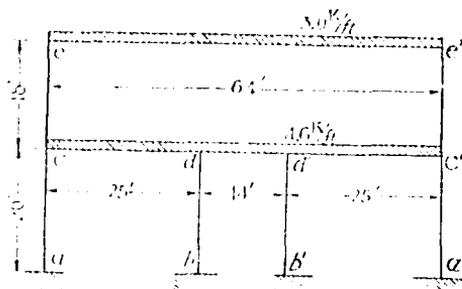


圖 209.

由圖 209 所示，先求得各桿件中之剪截力，軸向力，及 E.d. (利用表 50)，如下表所列。

桿件	ac	ce	ee'	cd	db	dd'
V	0	0	+ 96.00	+ 57.50	0	+ 32.20
N	+ 153.50	+ 96.00	0	0	+ 89.70	0
E.d.	+ 511.66	+ 288.00	0	0	+ 448.50	0

+ 代表壓力或縮短桿長

- 代表拉力或引伸桿長

由所得各桿件之縮短量或引伸量，可求得各結點之垂直的及橫平的變位如下。凡順沿一個桿件方向之結點變位量，等於該桿件長度總變更量之半，若一桿件之一端為固定的，則彼端結點之變位量，即等於該桿件長度總變更量，若有多數桿件，合組成一結點，此結點之縱橫變位量，等於同一直線中各桿端變位量之代數的總和。又任何結點之縱橫變位量，必與某一桿件具有最大長度變更者之方向相同。

由上文諸定則，而得各結點之縱橫變位，如下表所示。

	c		d		a	
	縱	橫	縱	橫	縱	橫
	0	↓ 367.66	0	↓ 655.66	0	↓ 448.50

既得各結點之真確變位量，即可由  $\theta = \frac{N}{L}$ ，或  $\theta = \frac{V}{L}$ ，算得  $E\theta$  之數值，更由此而求得  $M$  之數值 [利用 (236) 式]。

桿件	ac	ce	cc'	cd	db	dd'
$E\theta$	0	0	0	$\frac{+80.84 + 25}{L} = +3.2336$	0	0
$M$	0	0	0	-5.60	0	0

因 d 點下陷 448.50，而 c 點下陷 367.66，故 c, d 兩點之相對的變位量，為  $448.50 - 367.66 = 80.84$ 。且 cd 梁係順鐘針方向而旋轉，故 c 端之撓角， $F\theta = +3.2336$ ，如是則  $M_{cd} = -6 \times 0.288 \times 3.2336 = -5.60$ ，而  $M_{dc}$  亦等於 -5.60。

第 5 橫行，係將左右兩方不平衡的彎率，分別按照分配因子，如法分配。

第 6 橫行，將右方各彎率（固定端彎率及分配彎率）分別加入左方之分配彎率，而求得實在分配彎率。

如是則第一輪分配工作 First Cycle of Moment Distribution 業已告竣。

第 7 橫行左方所列各數，均係傳達彎率，此係將第 6 橫行所得實在分配彎率，分別由此端傳達至彼端。

第 8 橫行左方各數，均係將此等傳達彎率，按照分配因子，分別如法分配。

將左方第 7 第 8 兩橫行之數相加，得各桿件中之新彎率，如圖

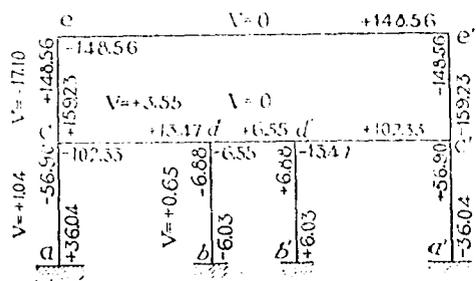


圖 210.

210 所示，由此各彎率，並可求得各桿件中之剪截力，亦如該圖所示。

但為推算副彎率起見，此諸剪截力，必須反其方向，藉以獲得外力對於各該桿端之影響（此諸外力之來源，蓋由於各固定支點處之縱橫反力）。

乃由此等反向之剪截力，做

照上法，求得各個副彎率，如下列三表所示。

桿件	ac	ce	ee'	cd	db	dd'
V	- 1.04	+17.10	0	- 3.55	- 0.65	0
N	- 3.55	0	- 17.10	+18.14	+ 3.55	+18.79
Ed	-11.82	0	-109.44	+64.76	+17.75	+37.58

c		e		d	
橫	縱	橫	縱	橫	縱
→32.38	↑11.82	←54.72	↑11.82	←13.59	↓17.75

桿件	ac	ce	ee'	cd	db	dd'
Eθ	+ 1.619	- 4.839	0	+ 1.183	- 0.680	0
M	- 2.18	+ 7.26	0	- 2.04	+ 0.27	0

第 7 橫行右方各數，即係此等副彎率，乃如法分配之，如第 8 橫行右方所示，並將此等副彎率及分配彎率，分別加入左方第 8 橫行之分配彎率，而求得實在分配彎率，如左方第 9 橫行之所示。

如是則第二輪分配工作，又已告竣。

此後仍繼續進行，作第三輪，第四輪，第五輪等分配工作（在各該輪中所用之剪截力，仍為反向的，如同第二輪之所用）至副彎率為量甚微，可以忽視不問而後已。

第 19 至第 22 等橫行，係按照常法，繼續分配，凡兩輪（此時已不復顧及副彎率）

第 23 橫行各數，係固定端彎率，實在分配彎率（連同副彎率及其分配量在內）傳達彎率之代數的總和，即各該桿件中之實有彎率也。

編者茲更按照常法（即忽視軸向變形），算得各桿件中之彎率，與表 52 所得者，比較如下（Floris 氏所算得者，與編者頗多舛錯，恐此君不免有誤）。

桿件	ac	ca	cd	ce	dc	db	dd'	bd	ec	ee'
忽視軸向變形	-4.70	-9.95	-290.25	+300.20	+158.56	-17.16	-141.40	-8.66	+618.37	-618.37
不忽視軸向變形	-8.75	-11.80	-299.74	+311.57	+151.30	-15.39	-135.92	-7.39	+624.42	-624.39

159. 橫平荷重. 設該架構受有橫平集中荷重，計結點 e 受有 24.6 Kips, 結點 c 受有 41.7 Kips., 兩力之方向均向右。

Floris 氏所示演算，亦僅為 a, c, 兩結點處各桿件之分配彎率，與表 51 略同。其中錯誤頗多，茲不錄。最後此君更列表以示其所得全架構各桿件之實有彎率，經編者覆核，似全屬錯誤，茲將編者自行計算全稿，列入表 53 A 及表 53 B。

此架構雖為對稱的，但於計算橫平荷重所生之副彎率之時，必須將全架構各桿件，逐一計算不得僅計算其半數桿件。

計算方法之大概，與第 158 節所述者，約略相同。惟於每次分配及傳達之後，必須加入修正彎率，與第 91 節之法相同。

第一輪分配時求得副彎率之法如下。

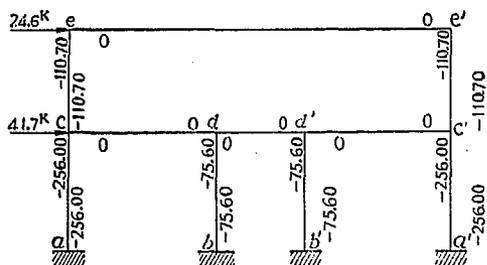


圖 211.

先算得上下兩層之總彎率，按照該層各柱之  $(\frac{K}{L})$ ，比例分配於各柱，而得各固定端彎率，如圖 211 所示。

由此諸彎率，及 c, e, 兩結點處之外力，而算得各桿件中之剪截力，軸向力，及 E.d, 如下表所列。

桿件	ac	ce	ce'	cd	db	dd'	a'e'	ce'	e'd'	d'b'
V	+25.60	+12.30	0	0	+7.56	0	+25.60	+12.30	0	+7.56
N	0	0	+12.30	+28.30	0	+20.84	0	0	+13.28	0
Ed	0	0	+78.72	+101.39	0	+41.68	0	0	+47.41	0

由是而得各結點之縱橫變位，如下表。

c		e		d		d'		e'		e'	
橫	縱	橫	縱	橫	縱	橫	縱	橫	縱	橫	縱
→50.70	0	→39.36	0	←29.86	0	→2.86	0	←39.36	0	←23.70	0

更由是而求得各桿件中之副彎率，M，如下

桿件	ac	ce	ce'	cd	db	dd'	a'e'	e'e'	e'd'	d'b'
EE	+2.535	-0.630	0	0	-1.493	0	-1.185	-0.870	0	+0.143
M	-3.42	+0.95	0	0	+0.60	0	+1.60	+1.30	0	-0.06

然後如法分配，並加入左方之分配彎率，而得實在分配彎率。

第二輪分配時求得副彎率之法如下。

先書入各傳達彎率及修正彎率，如法分配其不平衡的彎率。





將此三種彎率相加，求得各桿件中之剪截力，如圖 212 所示。

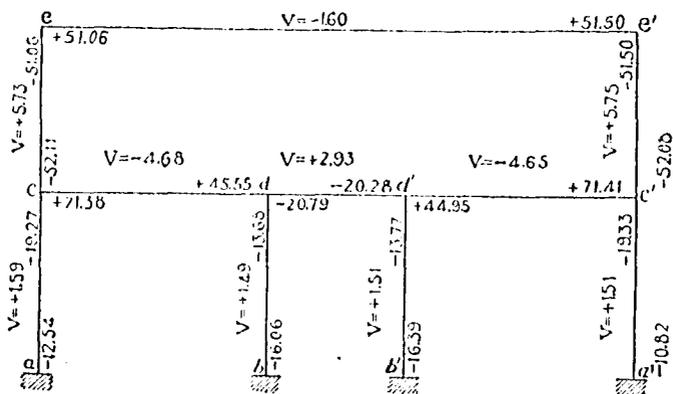


圖 212.

將此諸剪截力，反其方向，並由背風方面起（即由該架構之右方起）逐一計算各桿件中之軸向力及伸縮量如下表。

桿件	ac	ce	ce'	cd	db	dd'	a'e'	e'e'	e'd'	d'b'
V	-1.59	-5.73	+1.60	+4.68	-1.49	-2.93	-1.51	-5.75	+4.65	-1.51
N	+6.28	+1.60	-5.75	+1.24	-7.61	+2.73	-6.25	-1.60	+4.24	+7.58
E.d	+20.91	+4.80	-36.80	+4.43	-38.05	+5.46	-20.81	-4.80	+15.14	+37.90

由是而各結點之縱橫變位，及各桿件中之副彎率，如下列兩表。

c		e		d		d'		e'		e'	
橫	縱	橫	縱	橫	縱	橫	縱	橫	縱	橫	縱
→2.21	↓18.51	←13.40	↓23.31	→0.51	↑38.05	→4.84	↓37.90	→18.40	↑23.21	←7.57	↑18.41

桿件	ac	ce	ce'	cd	db	dd'	a'e'	e'e'	e'd'	d'b'
Eθ	+0.110	-1.145	-0.727	-2.262	+0.025	+5.425	-0.378	+1.443	+2.252	+0.242
M	-0.15	+1.72	+1.42	+3.91	-0.01	-16.73	+0.51	-2.17	-3.88	-0.10

此後各輪之求得副轉率，皆與第二輪同。

如是繼續至五輪之後，副轉率為量甚微，可以忽視不計，乃再按照常法繼續分配，凡三輪，而得各桿之實有轉率。

編者更按照第 91 節之法，求得忽視軸向變形時各桿中之轉率，並更用撓角撓度法覆核之，大致相符，茲列表比較如下。

桿 件	ac	ca	cd	ce	dc	db	dd'	bd	ec	ee'
忽視軸向變形	-270.89	-173.41	+248.37	-74.96	+120.97	-109.71	-11.26	-109.19	-146.38	+146.38
不忽視軸向變形	-277.77	-181.90	+256.11	-74.20	+138.20	-106.11	-32.09	-106.51	-143.81	+143.79

桿 件	a'c'	c'a'	c'd'	c'e'	d'e'	d'b'	d'd'	b'd'	e'c'	e'e'
忽視軸向變形	-270.89	-173.41	+248.37	-74.96	+120.97	-109.71	-11.26	-109.19	-146.38	+146.38
不忽視軸向變形	-267.35	-173.11	+250.52	-77.41	+133.35	-105.82	-27.56	-107.21	-146.58	+146.58

160. 溫度變更所生之轉率。凡架構中各桿件若同時發生同一之溫度變更（或昇或降），各該長度必因而伸縮，此項伸縮量，以  $E$  乘之如下式。

$$E.d = \pm Ect l \dots \dots \dots (237)$$

$E$  為該資料之 Young 氏彈性係數。

$c$  為該資料之漲縮係數（直線的）Linear Coefficient of Expansion or Contraction.

$t$  為溫度上昇或下降之度數。

$l$  為該桿件之長度。

既得各桿件之  $E.d$ ，即可按照上述之法，先後求得各結點之縱橫變位，及各桿件中之轉率。

## 第二十五章 爬 行 CREEP

161. 彈性係數  $E$  並非常數，本書以前所述，均假定彈性係數  $E$  為常數，此實以 Hooke 氏定律為根據，所謂彈性學理 Theory of Elasticity 者是也，然據種種觀察及試驗，而知此項彈性係數，並非永為常數，其變更隨下開四者而異，(1) 質料之種類，(2) 所受應力之大小，(3) 周圍溫度之高低，(4) 受力時間之久暫，故凡結構的或機械的部份，因在高溫度之下，受有荷重，隨所經時間之綿延，而發生連續的塑性變形 Plastic Deformation 者，蓋數見不鮮，此項塑性變形，係非彈性的變形，可名之曰 爬行 Creep 或塑性流動 Plastic Flow，且有若干質料，如鉛，如混凝土，如某某種鋁質合金 Aluminum Alloys 在尋常溫度之下，亦不免發生爬行。

162. 爬行與應力間之新定律。

(a). 受有軸向拉力之桿件，圖 213 表示某試件在某溫度下受有某拉力時，其爬行變形率 Creep Strain 與所經時間之關係，若所

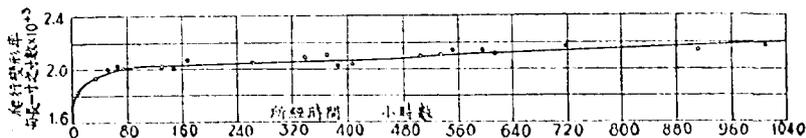


圖 213

受應力為尋常數值，許多質料之爬行變形率對於所經時間之關係，可繪成一直線，易言之，爬行率  $C = \frac{c}{t}$ ，此式中之  $c$  為變形率，(即每長一寸之伸長寸數)  $t$  為所經時間，但若用對數紙 Logarithmic Sheets 繪入此兩個變數，使成一直線，則更與試驗所得者近似，並可延長此線，用以預料將來之變形率，圖 214 即係用對數紙繪成者，故用以

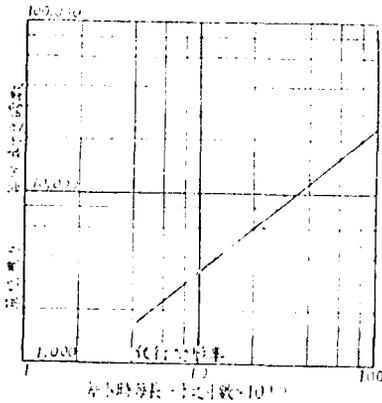


圖 214.

替代 Hooke 氏定律之爬行定律，可  
以下式表示之。

$$C = BS^n \dots\dots\dots(238)$$

上式中之 C 為爬行率，Creep Rate，  
以每小時每長一寸之伸縮寸數計，此  
係一個常數，S 為單位應力，以每方  
英寸之磅數計，B 及 n 為兩個常數，

由試驗測定之，若  $C = \frac{e}{t}$ ，則 (238)

式可改書如下。

$$e = BtS^n \dots\dots\dots(239)$$

B 及 n 之數值，隨質料而異，如係一種鋁質合金 3S- $\frac{1}{2}$ H，據  
試驗所得  $B = 6.51 \times 10^{-12}$ ，  $n = 1.18$ 。

(b). 受有純粹彎屈之桿件。凡受有純粹的彎率，M，之直梁，可  
按照 (239) 式之新定律，及下開三項假定，以求得其中應力之如何  
分配，此三項假定如下。

(1). 該梁之任何橫截面，原為一個平面與梁之中線正交者，於  
該梁彎屈之後，仍為一個平面。

(2). 任何纖維之爬行率與其應力之關係，遵從 (238) 式之定  
律，與桿件之受有軸向拉力者同。

(3). 凡在中立軸兩方之纖維，若與該軸之距離相同，則無論  
其為受拉的纖維，或受壓的纖維，其爬行率與應力之關係，完全相同。

此諸假定，曾就鉛梁（在尋常溫度中）及鋁質合金 3S- $\frac{1}{2}$ H，實  
行試驗，約略證實。

如採用上開諸假定，並利用下列之兩個平衡條件，即可得該梁

之纖維應力公式，如 (240) 式所示，此兩個平衡條件為

(1). 任何橫截面中各纖維應力之總和等於零。

(2). 此諸應力之力率總和 (即該截面之抵抗力率) 必等於外力之力率,  $M$ . 如是而得

$$S = \left( \frac{Mh}{2I} \right) \left( \frac{2y}{h} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \frac{2n+1}{3} \right) \dots \dots \dots (240).$$

上式中之  $S$  為任何纖維之單位應力.

$M$  為外力之力率, (即彎率).

$y$  為該纖維與中立軸之距離.

$I$  為該截面之慣性率.

$h$  為該梁之厚度(或深度).

$n$  為 (238) 式中由拉力試驗實測所得之常數.

按照尋常彈性學理所得之公式, 為  $S = \frac{My}{I}$ , 繪之成一直線, 但

由 (240) 式所得之諸應力, 繪之則成一個拋物線.

根據上述諸假定, 可得直梁撓度 Deflection 之微分方程式如下,

$$\frac{D}{t} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = M^n \dots \dots \dots (241).$$

上式中之  $y$  為任何點之撓度.

$x$  為該點之橫距.

$M$  為在該點處之彎率.

$t$  為所經時間.

$D$  為一個與資料常數  $B$  及該截面尺寸有關之數量.

如係矩形截面, 其寬 =  $b$ , 其深 =  $h$ , 則

$$D = \frac{1}{B} \frac{(2b)^n \left( \frac{h}{2} \right)^{2n+1}}{\left( 2 + \frac{1}{n} \right)^n} \dots \dots \dots (242).$$

[編者按，上式中之 (2b)<sup>n</sup>，原文爲 (2b)<sub>n</sub>，恐係排印之誤，茲爲拉改如上式]

讀者注意，(241) 式與尋常所得之微分方程式  $EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$ ，約略相似。

如做照常法，將 (241) 式，作兩次之求積分，並以相當數值代入，藉以求得積分所需兩個常數，即可獲得撓度公式。

凡桿件之受有扭振彎率者，亦可做照上法，以求得其剪截應力及扭振角之公式。

### 163. 不靜定應力之推算。

(a). 內働法 (即最小働法). 爲推算撓度起見，若一個結構物所受之荷重爲  $P$ ，則按照 Castigliano 氏第一定理，順沿該荷重方向之撓度，等於內働對於荷重  $P$  之偏微分率，(參閱本書第 5 節) 此項內働公式，不復以 Hooke 定律爲根據，而應另行求得。

如係軸向應力，(拉力或壓力)，設有一桿件，截面 =  $A$ ，長度 =  $l$ ，所受之軸向拉力或壓力 =  $P$ ，受力所經時間 =  $t$ ，爬行總量 =  $e$ ，內働 =  $W$ ，因  $P$  爲不變之數量，故  $W = Pe$ ，由此可得

$$W = \frac{Bt^2}{A^n} \cdot P^{n+1} \dots \dots \dots (243).$$

用相類似之法，亦可求得因彎屈而生之內働的公式。

(b). 撓角撓度法. 推算因爬行而生之應力，亦可適用撓角撓度法，惟須改用 (241) 式，以替代尋常所用之彈性學理的微分方程式，設有一個簡梁 AB，在 A 點及 B 點，分別受有彎率  $M_1$  及  $M_2$ ，設各該點之撓角，分別爲  $\theta_1$  及  $\theta_2$ ，則可得  $M_1$  及  $M_2$  之值如下。

$$\begin{aligned} M_1^n &= J [\theta_1(n+1) + \theta_2] \\ M_2^n &= J [\theta_2(n+1) + \theta_1] \end{aligned} \dots \dots \dots (244).$$

上式中之  $J = \frac{D(n+1)}{nt}$ .

(c). 分配轉率法. 分配轉率法, 可完全適用於爬行, 惟此法所需之固定端轉率, 傳達因子, 及分配因子等, 必須由 (244) 式求得之耳.

164. 實用應力 Working Stresses. 凡作結構物中各桿件之設計, 所選取之實用應力, 隨其應力為靜定的或不靜定的而異.

如係靜定的應力, (例如簡梁) 其實用應力之數值, 應較小於以 Hooke 氏定律為根據之實用應力, 至若爬行所生之撓度, 則或日益增大, 致超過所可許容之撓度最大限, 因而有改變其設計之必要, 設有一個簡梁, 其徑間中心, 受有一個集中荷重  $P$ , 由 (241) 式可得其最大爬行撓度如下:

$$y_m = y_e \left[ tEB \left\{ \frac{(2 + \frac{1}{n})^n}{n + 2} \right\} \left\{ \frac{S_w}{3} \right\}^{n-1} \right] \dots \dots \dots (245).$$

上式中之  $y_m$  為爬行撓度.

$y_e$  為按照彈性學理所得之撓度.

$S_w$  為可許容之彎屈應力.

如係不靜定的應力, 則不獨須考慮爬行所生之撓度, 並須顧及爬行對於各個不靜定反力數值之影響, 蓋因應力之如何分配, 與尋常彈性學理所得者不同, 故有此必要也.

以上所述, 係節錄 Joseph Marin 氏之論文, 此文之標題為 Methods of Structural Analysis in the Case of Creep, 經載入 Journal of the Western Society of Engineers, Dec., 1943, 據作者謂此係新的結構學理, 其中所述, 多以實驗所得之結果為依據, 本章僅節錄其概要, 至若各種實驗所得之數字, 則多從略, 以省篇幅.

此外尚有兩文，關於混凝土之爬行，研究頗詳，此兩文，(1) 爲 Lorenz G. Straub 教授所著之 Plastic Flow in Concrete Arches，經載入 Transactions of the American Society of Civil Engineers，並經各會員詳加討論，原文及討論文，見該會報第 95 冊（1931 年）第 613 頁至第 715 頁，(2) 爲 Charles S. Whitney 氏所著之 Plastic Theory of Reinforced Concrete Design，經載入 Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Dec., 1940, pp. 1749-1780. 此文亦經各會員加以討論，先後載入去年（1941）該學會各月刊 Proceedings，讀者如感興趣，可設法覓得此諸會報，而研讀之，本章爲篇幅所限，祇得從略。

## 第二十六章 結 論 CONCLUSIONS

165. 各種解法之比較。本書首四編所述，計凡四法，(1) 最小働法，(2) 撓角撓度法，(3) 圖解法，(4) 分配轉率法，茲就各法之優劣，比較如下。

(1). 最小働法。此法發見最早，施用之時，必須作許多求積分的工作 Perform the work of many integrations，而此項工作，常不免於繁重而困難，且極易發生錯誤，甚或為不可能者。如係甚為複雜之結構物，則此項工作，尤為困難，故現在一般學者，大都不復樂用此法，惟推算拱橋則仍以此法為根據，將拱身分成若干段，分別計算各個彈性荷重之縱橫轉率，而求其總和，以替代求積分的工作，(其法頗與第二十章之壓柱比擬法相似)，故此法之惟一的最大用途，實在於拱橋之推算，至若其他不靜定結構，則皆採用較新之法，不復借助於此法矣。

(2). 撓角撓度法。此法在學理方面，可稱為最精密者，故曾風行一時，奉為圭臬，然此有一最大困難之點，即解算多數聯立方程，工作極繁，極易發生錯誤，縱使採用迭求約值之法，其工作仍嫌過繁，需時仍不免甚久，且以實際計算言之，其所得結果之精密，未必較優於分配轉率法，而需時之久則遠過之，故此法雖善，已有為分配轉率法取而代之之勢。

此法為精密推算剛構各法之嚆矢，現雖漸失其重要性，然原發明人 (W. M. Wilson and G. A. Mundy 兩氏) 之大有造於結構工程界，其功自不可湮沒也。

(3). 圖解法。圖解各法之中，以固定點法及配對點法為便利合用，就一般的結構物言之，與其採用圖解方法，尚不如採用分配轉率法之簡捷精確，但若有特殊的計算工作，如桁梁各桿件中之副應力

如加腰梁之解算，若用圖解各法，如本書第十四第十五兩章之所述，或亦較爲省便，尤以推算加腰梁之利用 Ruppel 氏各表爲簡捷省時。

(4). 分配轉率法。此法最爲晚出，其精密不亞於撓角撓度法，而計算工作，則極爲簡單，不易發生錯誤，所需時間甚短，故自發表以來，人咸樂用，幾於風靡全球，近今剛構建築，屢見登出，蓋因計算工作，並不繁難，而所建之物，則省費美觀，其盛極一時，未始不由於 Cross 教授之發明此法，編者竊謂此實諸法中之最善者，吾輩工師，不可不詳加研究，期於深切了解也。

此外如 Cross 教授所發明之壓柱比擬法，在一般結構物之解算，雖未必能與他法媲美，但在特殊計算工作之中，如尋求特殊桿件之固定端轉率，剛率，傳達因子，或用以解算拱橋，此法實有相當之用途，故可作爲一種有用的工具，以輔他法之所不及。

至若第五編所紹介之各新著，僅就編者涉獵所及，酌述數則，藉以略見一斑而已，全世界之新書新報，浩如煙海，編者管窺蠡測，無異坐井觀天，此外新著之遠勝於此者，固屬更僕難數，此後各項發明之超出於今日者，自必更無限量，十年二十年之後，此書所述，或竟成明日黃花，用以覆瓿可也。



請 勿 翻 印

編 著 者 土 木 工 師 金 壽

發 行 者 北 京 地 安 門 內 東 板 橋 酒 醋 局 十 三 號 金 宅

印 刷 者 北 京 北 方 印 刷 所

崇 文 門 內 蘇 州 胡 同 五 十 號

價 目  $\frac{1}{2}$  350.00

中 華 民 國 三 十 一 年 六 月 初 版

