西大特刊

中等學校理科教員暑期講習班專號

要　　目

努力現代文化去復興中華民族……馬君武
大科學家達爾文的生平及其成功……馬君武
談理科學會組織的意義和研究科學……馬君武
數之系統之推廣……鄧靜華
幾何畧論……嚴藥裳
力學中之重要定律及其應用……謝厚藩
原子物理學概論……開　詩
熱電眞空管之進展及其應用……史至純
何謂物質……嚴德烱
化學反應次數之決定……朱文政
理科教員暑期講習班雜感……馬心儀

中華民國二十四年一月卅一日出版

目錄

努力現代文化去復興中華民族……………………馬君武…………1—7

大科學家達爾文的生平及其成功………………馬君武………8—16

談理科學會組織的意義和研究科學……………馬君武………17—22

數之系統之推廣……………………………………鄧靜華………23—45

幾何畧論……………………………………………嚴蘋裳………46—64

力學中之重要定律及其應用………………………謝厚藩………65—85

原子物理學概論……………………………………開　詩………86—110

熱電真空管之進展及其應用………………………袁至純……111—120

何謂物質……………………………………………嚴德炯……121—143

化學反應次數之決定………………………………宋文政……144—149

理科教員署期講習班雜感…………………………馬心儀……150—154

附錄一

主辦中等學校理科教員署期講習班教職員錄………155—156

附錄二

中等學校理科教員署期講習班學員錄……………………157—168

編後…………………………………………………………………………169

努力現代文化去復興中華民族

馬君武演講　　梁明致筆記

『中西文化的不同點厥爲科學,
科學是現代文化的骨骼,
文化是活動的發展的無所謂固有,
它隨時代人類生活方法而演進,
毀滅現代文化此印度之所以依然淪落,
努力現代文化此蘇俄土耳其之所以復興』.

今天先介紹各位認識暑期講學的先生,然後再述講習班開辦的歷史和理科知識的內容.開辦暑期理科教員講習班原是教育部的意旨,至於所講習些什麼亦爲教部所規定.當學校方面接到教部暨省府的命令旋即與省府商議,究竟本省高初中理科教員有多少?應設多少班次?後來奉到省府的答覆,理科教員共二百六十人,在班級方面分高級班及初級班,高級班純爲高中的理科教員而設,初級班爲初中的教員而設:班數方面則數學組有三班高級一班,初級兩班;物理化學合爲一組稱理化組共有兩班,高級一班,初級一班;而生物組也分高初兩班.此種班次的分配,在人數方面頗有一些困難,高級班人數過少,而初級班人數過多,實驗時頗有問題;如理化組高級班不過寥寥幾人,而初級班爲數盈百.但既經與省府商定,且開課在邇,亦無法再行更改,所以也祗好依照原定計[illegible]開始講學,至講學的教員則由本校暑期留校的教[illegible]儀的舉行,匆忙得很,有許多教員尤未週知;有的因[illegible]事或訪友;有些是本省遠處的教員尚未到來,

所以今天來參加開學的較少.

說起暑期講學,大家或許以爲兩廣乃天氣酷熱的地區,辦理暑期學校似不甚宜;實際上這話不見得完全眞確,據報紙所載,近幾年來,上海北平等處夏天氣溫高達華氏一百零幾度,在這樣酷熱的天候,病菌繁殖甚速,行路的人有時因受熱過甚,至心臟停止跳動,所以許多醫院裏都滿住病人,今年上海一帶又奇熱乾旱,報端上也頻頻登載.但梧州近幾星期以來,溫度平均不過華氏八十四度,和北方相差幾達二十度.事實上畢竟南方的炎夏冗長,但是希望來參加講習諸君提起對於理科知識研習的濃興而忘了苦熱的感覺.

理科智識的成立源於歐洲,和我國古代哲學同時萌發,惟與我國古哲所研究的方向不同而已!中國古代學者注重思想而研探的對象,則爲倫理道德;希臘方面則所崇尚者爲科學與實用,於是東西的文化的進展,漸漸不同.一般說來,國民的思想與行爲,往往受先哲的影响;我國的文化,孔子孕育了極長的時間;而西方文化由亞里士多德啓示而發展漸趨於科學的途徑.歐洲文化在中古時期曾經一黑暗時代,其時文藝復興,智識的研究,漸露曙光,迄近世紀二三百年以來,經倍根一般人實驗方法的提倡,科學遂極速猛進,從前世界各民族老死不相往來,自現代科學發達,交通工具發明,而科學於民族間的生死存亡,關係異常密切!蓋科學即智識的結晶,爲現代文化的骨髓,其智識內容有物理,化學,數學,天文,地質,生物學等,各種科學的相互間,有着密切的關係存在.科學除方法和智識外尙有一種創造前進的精神,大科學家倍根說:「人類能認識自然然後才征服自然」從此已足見一般.但我國幾千年來文化的結晶爲孔子政治哲學,其一貫的思想,則爲「以天統君,以君統民」,孔子作亂臣賊子懼的春秋,其意義實以「天」爲一切根本.當君主暴弱無道,民生塗炭,於是用「天」以恐嚇之;年荒歲旱,冰雹交作是謂之「天怒」.天帝動怒,君上應虔心修德,造福黎民,庶

幾可以挽回「天怒」.於是幾千年來,「國人不曾理解什麼」,是天更不曾問是否有「天帝」的存在;而愚昧相習,祗知「畏天敬天」,造成了從來一般人民宗教的迷信的思想,並且「靠天吃飯」.但是歐西則不然,所謂「天」就是「自然」,對自然無所謂「畏敬」,乃先行研究及認識其物理,化學,生物諸現象,然後如何設法以征服它及利用它,此爲歐西倍根以來的思想.於茲亦足以洞見東西文化根本差異何在!

科學自十八世紀以還繼續的猛進,現在世界上無論任何民族,如無科學素養,不知利用科學成果,則結局惟有沒落與滅亡,我國東北四省之所以爲敵侵佔,西北旦夕在危殆當中,裡面因有極棕錯的國際關係存在,而人家能利用現代文化精髓——科學,以製造最新的「生產工具」及「戰鬥武器」,而我則墨守舊習不懂科學,不知利用科學,國家民族遂致不能保障其自由與獨立.但最近一月以前,尚有人來桂演說,什麼「保存中國固有文化中華民族而後可以自由獨立」云云,誠屬不通已極,試問今日的意大利,完全保存其二千年前羅馬時代的文化,非亞里士多德及柏拉圖的思想學說,皆屏棄而弗用,那麼縱有莫沙里尼,意大利又焉能復興?原來所謂「文化」乃人類精神的物質的生活過程的總和,所以文化追隨時代而不同,人類的生活改進,文化遂因之進展,原無所謂「固有」;我國固有文化以孔孟程朱爲其表率,但是即吾人竭力以行使孔孟程朱之道,事實上是否能使中華民族屹然適存於現代?從前,中國之有孔孟程朱,而歐西各國其文物尚在野蠻狀態,這固中國歷史上的光榮;然人類的生活演進迄今,孔孟程朱的時代,早成過去!二十世紀,科學爲文化的骨髓,吾人亟應努力科學,發展科學,以適應現代生活的方法,庶幾可以穧振民族改進社會,今試舉現代的三大人物以爲例証,一爲印度之甘地,一爲蘇俄的史達林,一爲土耳其的凱末爾.三人的思想與行爲各有不同,而致力於民族復興運動則一.

甘地是領導印民反抗英帝國的領袖，彼主張把現代的鐵路拆毀，把所有的紗廠燒掉，要以手紡紗織布製衣，用土法以自製食鹽，日吃印羊奶以度命，這表示與英帝國「不合作」，所以甘地無論到什麽地方，都隨身携帶紡紗機及綿羊．但是這種方法——這種毀滅現代文化而保存其固有文物以與頑敵抗衡的方法，致印度民族獨立之運動，至今毫無結果．但是史達林就不同，在歐戰時深感國內工業不振，武備不精，致笑話百出，一九一四年（民三）俄與德將興登堡戰，常全軍為德軍所俘虜；故史氏持政治以後，不惜下最大決心，上下同心，撙節犧牲，縮衣減食，嬰孩亦少飲乳汁，然後由國家大批收買將一切農產品及工業原料，廉價出售外國，於是得集中全國財力以購取新式的機器．當時行經西伯利亞的旅客，如果棄些須吃剩麵包，那麽小孩數十成羣，爭取奪食．但是「五年計劃」實施以後，全國工業化完成，最新的科學方法總能利用，一日以內所製的汽車，耕田機不下千百，而飛機的出品數量，現在占全世界第二．歐戰時俄軍有兵無鎗，有大砲無子彈，現在一切軍實，不可勝用！自日本佔取滿洲後蘇俄深覺遠東國防的重要，復鑒於一九零四年日俄戰失敗的經驗，極力講求遠東國防的充實，但因全國工業化後，國防準備迅而易舉，現橫貫歐亞的西伯利亞鐵路經敷設雙軌，舉凡戰時所需要的軍實原料，毒氣，糧食等，皆可由西伯利亞供給，這是史達林的辦法，使列强不敢小覷蘇俄．說起土耳其，人口不過一千四百萬僅及蘇俄人口十分之一，地域現在也很小，僅存小亞細亞；但是在凱末爾領導之下，戰敗希臘軍後，遂成為歐洲不可侮的國家，不但不平等條約取消，在軍備上的必需品，亦可以自行製造，然而實質上土耳其是否保持其所謂「固有文化」呢？這是值得我們去注意的．

從前土耳其在政體上是皇帝兼教主，回教的思想和迷信的觀念，異常深刻；但是自凱末爾持政以後，皇帝及教主先後廢止，以打破其長時間遺留的宗教思想．從前土耳其女子，外出必以紗布罩

面，現在土耳其的女子，不但露面，而且爲國服務，許多機關中有女職員如女警察，女秘書等．而土耳其最驚人的則爲文化改革，廢用艱深難學的回文而改用ABCDE拼成的拉丁文字，時至今日，土耳其的回文，無形中已完全淘汰，那麼，彼主張保存「固有文化」的，對此能不痛哭流涕？但是這又有什麼關係呢？事實上，土耳其已爲歐洲各國承認它是一個獨立自由的國家，試看無論在土地上和人口上，土耳其不過藐然小邦，和廣西差不多，然能苦戰奮鬥吸收現代文化，戰敗的恥辱終能洗雪，不平等條約終能廢除而成爲今日的新興國家！

文化是活動的發展的，追踪時代環境人類生活方法而日日在演進中，固有文化，即實質上也是一個不通名詞，中國今日所需的固多，要而言之，則爲吸收並消化現代文化以製造最新式的「生產工具」及「戰爭武器」，我們有茲二者，而後中華民族可以「自給」和「自衛」，但是此爲中國「固有文化」中所無，而從現代的世界文化結晶——科學而來；倘若我們努力科學，發展科學，有了這兩件新的寶貝，中國在現代得以適存，那麼我國舊有的文化也許可以保存於萬一啊，幾千年前的時代，早經過去，孔孟的時代不復存在於今日，印度的甘地，僅知憧憬夢憶幾千年前的愉快生活而咀咒現代文化，故不惜主張毀滅鐵路焚燒紗廠，但其結果所獲到的不過爲「空虛」與「失望」；觀乎此吾人應該猛然覺悟，以最大的决心，努力去學史達林和凱末爾的方法，吸取現代文化建設一獨立自由的國家，謀民族的解放，生活的充實．

科學發展迄今，其征服自然，改進我們人類生活的工作，眞足令人咋舌！現在隨便說幾句．我們知道，在空氣中，不是有百分之七十九氮素存在，土中的細菌或豆科植物之根瘤菌能吸取而固定之而成硝酸鹽類，供給植物爲肥料，然依此自然進行的程序，那麼由幾百萬萬的細菌工作，一日之內所能製成的肥分以供植物需用的數量，恐怕不到幾克；但自歐戰以還，德人發明「空氣製硝」，以人

工方法在工廠中大規模的製造，一天可造成硝酸鹽幾千噸以供農業上的肥料.空氣製硝的方法有兩種，一爲哈伯的方法，其二則爲卡路(Caao)的方法，應用水電力以資備製，使人取之不盡用之不竭.又如藍靛及蠶絲，前者爲兩廣出口貨的大宗，但是自從人造藍靛及人造絲發明，外人以科學新法大批製造，現在兩廣的藍靛已不能向外推銷，絲業更一蹶不振，如今蒼梧玉林一帶種桑養蠶的很少很少，從前梧州的繅絲廠，現在也就無影無踪，種天然藍靛的也就寥寥無幾，泰半俱爲科學的能力所打倒.其他農產品爲吾人一日不可或缺的如米麥等，外人應用機器及人造肥等可以大量生產，現在我國的舊農，墨守幾千年來的老法生產，在世界上經難立足，中國在食料上也發生嚴重的問題，若不改良生產方法，那麼問題無法解決，中國的危機是一天天的迫切起來!

現代生產方法就是以科學爲其內容，在生產的過程中，無往而不與科學連繫，而西大就是一個純粹努力科學發展科學的一個團體，在民十七年成立，從時間上算來西大開設至今已有六年，但中間民十八至民二十兩年中因政變而停辦，所以在事實上西大的年齡不過四歲.西大在國內雖然是一個幼年的大學，但因一般人的努力，於國內已有相當的地位；在設備上，許多老大的大學也不及得上西大的.廣西是一個窮困的省分，所以西大的建設，殊覺不易；經濟方面，直接是省府而來，間接是出諸廣西人民的血汗；各位向來在各處指導一般人民的科學研究，現在暑期到西大來，當然我們表示異常的歡迎.

記得暑期講學，民十七，西大未成立以前也曾在桂林舉行一次，但當時設備和實驗都沒有的；流光易逝，轉瞬已經六年，經過這六年，西大已經成立了.當民十八至民二十的停辦兩年中，西大常爲駐軍的地點，而粵，桂，湘軍的輪換駐紮達二十餘次.迄二十年秋恢復以來，經過修補添造，繼續努力迄今，才有現在的規模.今天見各位從各處中學到此研究科學，這是很可喜的；西大建設到現在，雖

不敢說盡善盡美,但各種要重的基本的設備總算無缺,所以對於理,化,生物方面,我們當盡量地供給各位的儀器和實驗材料.同時在科學研究方面,實驗是很重要的,所以這次的暑期講學,我們不但要注意科學理論,並且尤其要注重科學的實驗,不過在此講學的僅僅是四個星期,在這短時間而欲研究科學的全部內容,事實上爲不可能,所以祇能綱要的討論科學的基本原則.不過從茲以後,各地中學的理科教員可以和西大發生一種關係,這是一種很可喜的現象.本來,學科學的大家既在同一的途徑努力,早就應該互相聯絡;現在各位到這裡來,我們應當盡力使諸君生活和研習方便;就是將來離開了這裡,如果各位在科學上有什麼探討,問題,等等仍可隨時提出和各教授互相研討,而各位在理學的教學上的質疑,同時也可以供西大教授們的參攷.有時西大在生物方面赴各地採集,也希望得各位幫忙和指導,所以今後各位和西大的關係當日深一日,在科學上的合作日益密切,這是所最希望的.

我時常說,蘇俄在建設五年計劃中,需要一百二十萬的建設人才,現在我們正謀廣西的建設,以十分之一計,那麼廣西應有十二萬科學人才以資建設之用.現在廣西的建設人才萬不及萬,千不及千.各位一向在廣西各處任理科教席,有科學智識的基礎,在科學教育方面服務,希望將來能在科學上有所貢獻,並造成一般後起的人,繼續在科學上努力.向來,各位在各處爲科學工作,但因地理上的關係,彼此很少見面,在科學的工作上也很少聯絡;以後我們在同一方面努力科學的,應互助共研,期廣西的科學教育有長足的發展.

最後的一句,今天是講習班舉行開學典禮的一天,我們藉這個機會很懇切的表示歡迎.

大科學家達爾文的生平及其成功

馬君武演講　　梁明政筆記

現在暑期講習班經開學一星期，今後很想尋一個共通的時間，訂爲「特別演講」。值茲酷暑，長時間研究理化，數學，生物等學科，並須運用腦力去實地實驗與觀察，是很容易疲倦的；特別講演的內容着重於科學的歷史和科學名人的傳記，一方面可以提起研究科學的興趣，一方面藉以明瞭世界大科學家研究科學的途徑，所以這是很有意義的，至於今天要講的就是達爾文的生平及其成功。關於達爾文的歷史，從前君武曾著了一本小冊子叫做「達爾文傳」，可資參攷；倘若讀書的速率很快，大概要兩三個鐘頭才可讀完那書，現今我在這個短時間摘要講述。

達爾文（Charles Robert Darwin），誰都知道他是一個大科學家在十九世紀佔有重要的科學地位，於生物方面確立了新的學說，對人類思想發生了空前的大影响。在科學界有兩大人物，無機界當時首推牛頓，在有機界就首推達爾文，最值得我們驚異的，這兩個特殊的人物，都出自同一的大學，這個大學日本人譯爲『建橋』（Cambridge）。而達爾文的生平及彼於科學研究的成功，還有幾點是值得我們注意：

第一，達爾文在學校，生活極放浪自由，對於所學了無心得，其父嘗言難於成材，但結果出人意料，他竟成了一位大科學家。

第二，達爾文雖壽七十四齡，但從三十四歲以後，日日在病苦中，在社會上致不能有所作爲，移居鄉村靜養，彼即利用病後短期的

康健來從事研究,蘊積了他四十年來研究工作的總成績,竟確立了重要的新學說,成爲十九世紀科學家的泰斗.

復次達爾文以染病的身體,不能在社會工作,但是他得父親的遺產甚多,所以勿須耗時間從事生產,經濟生活亦無問題,得以專心致力於興趣所及的科學研究,所以達爾文的進化論的創立,得其父的助力亦頗不少!

達爾文的祖父愛拉司穆司(Erasmus)對於物種進化的思想,已蘊蓄甚早,彼與歌德同時,曾著一書名『Zoonomia』力言物種變物;但其內容方面純屬思想,而缺乏事實的証明,達爾文幼時讀之亦覺乏味,是以不能引起當時英國社會人士的注意.其祖父進化論的思潮,對達氏可說是無大影响,而進化論理論的確立和事實的証明,完全是屬諸達氏本己的成功.

達爾文生於一八〇九年,距離現在已經一百二十四年,他在幼年的時候是一個頑童,九歲進巴特勒博士(Dr. Butler)學校,這是達爾文中學時代,但是他在這個教育的歷程中,也學不到什麼知識,因爲從前的中學和現在的不同,當時以拉丁文字及希臘文爲重要科目,所以在這個時代達爾文僅知道一些嚴格古典式的文字,次要的爲詩歌,彼一日中能背誦數十行,但歷四十八小時後,遺忘殆盡.至於數學和繪圖的成績很壞,於茲可見達爾文所受的中等學校教育異常缺乏,對於他的心身和事業都沒有若何的幫助,在這個時期,他最有興趣的生活爲騎馬,射獵和捕鼠,其校教師嘗每葸訝的說:『如行經達爾文的室窗,常可以聽到鞭馬鞭的聲音』.不過,在這個時候,最值得注意的,就是他對於博物學的興味頗濃,常搜集動植礦物,依法分類並觀察昆虫的形態.

達爾文的祖父和父親都是醫生,所以也叫達爾文習醫學,十六歲,他進愛丁堡(Edinburgh)大學,但是他對於醫事作業,無論是聽講和實驗,都覺得異常無聊,在他的自傳中曾這樣的說:「藥物學講義令人讀之心悸;人體解剖學講義其乾燥乏味就如同那教授的

而孔般討厭」:學醫的在實驗方面,當時對於割症,非常重視,據達爾文自己所說,曾到過割症手術室兩次,在那時,麻醉藥方尚未發明,開刀施割的時候,就醫者狀極苦痛,在他第二次到割症室,看見為割一小孩,流血,號哭,呼痛,慘不忍睹,未待施割工作完畢,達爾文即離室迴避,從今以後誓不再往手術室,所以他雖然在愛丁堡兩年但於醫學知識和技術,了無心得,終日騎馬行獵,事為其父得聞,悉其無意於學醫;其兄弟姊妹亦認其學醫必無成就.但他的家庭方面仍殷望其將來在社會有一種正當職業,不流而為「耍仔玩家」英語所謂「Sportsman」,於是令他改入「劍橋」(Cambridge)大學學宗教神學準備將來做鄉村牧師,但是這仍然引不起達氏研究的興趣,他初時也很希望到劍橋以後一斂前此的放蕩,可是希望終是希望,不久騎馬射獵的癖好又復如故,並且飲酒打牌,唱歌作樂,時光一樣地虛度過去,不過在劍橋大學這個時候達氏得與亨司絡教授(Prot. Henslow)相識,亨氏各種科學,俱甚精通,而植物學,昆虫學,化學,礦物學,地質學知識尤豐富,達爾文一生的事業受彼影響最大,亨氏於每星期中指定一晚召集從事科學的在家開會,達爾文遂加入這個團體,常與亨氏作長途步行,或往鄉村游覽,但是達爾文對於此種生活頗覺意義深長,眞的,作科學的研究或提起科學的興味,决不是單純的講義所能為力,應有以觀察和實驗,而後可以引人入勝,走到科學的園地裡.現在暑期講習班亦規定四分之一的時間即一星期為「教授法」的研究,自然科學的教授法是什麼?即實地觀察和實驗,是這樣,一種理論或一條律例,自己可以懂得而學生也才懂得,如果不是這樣,就是你口若懸河,滔滔不絕的說得天花亂墜,而學生仍然是覺得隔鞋搔癢,格格不入,終難燠發對於科學研究的興趣,達爾文對於科學研究之所以具有濃厚的興趣,完全是得益於亨司絡教授的循循善導,多實地的觀察和實驗,在他們長途旅行的時候.於是植物學達爾文便發生了特殊的興趣,他曾發誓不再研讀的地質學,也因得崴格兩光(Sedg wick）的領導，從事於調查，採集，和旅行觀察，對於地質學始有相當的心得，在這個時候，達爾文的大學教育生活宣告結束．現在的大學，無論設備，教學都較從前進步，達氏在這百年前的大學裡，其所修習的植物學時間為一年，而地質學亦不過半年而已，可見其所得益於學校的作業，至為有限，然竟能成為十九世紀一大科學家．即不計較其著名的學說，物競天擇，雌雄淘汰，等等在科學的大功績，即在地質學上亦有重要的發現，在地質學上不是有所謂珊瑚島嗎？首先發現的就是達爾文．在南非洲有許許多多島嶼錯列，在達爾文幼年時代，科學界對此未經任何觀察，達氏首先發現這種島嶼為一種小動物名珊瑚虫死後其遺骸所堆積而成．而所謂珊瑚島，即由達氏所命名，單是這種發達，達爾文在科學上已經可以不朽，不愧為科學的名人．但是考察達爾文的日常生活，極覺平凡而竟能在科學上有此驚人的成功，實堪注意！吾人綜觀達爾文的生平成功，第一為享司洛教授的善導煥起其研究的興趣，復次就是五年的比格爾（Beagle）旅行，在這一次長時間的旅行得實地觀察和探索大自然的現象和秘密，造成了他成功的基礎．

當達爾文幼年，即喜奇異遊記的書籍，早懷有遠地旅行的壯志而比格爾旅行的發動，乃其師函告使彼得知，據云有一小兵船作環游世界的旅行，欲尋一青年博物學者同行，調查各地博物狀況，惟不供給薪金，達爾文聽到這個消息喜不自勝，但是他的父親見其在學生生活已如許浪費而無所成，初不贊同，且云，『如果你尋得吾所深信者，彼贊成汝此次旅行，我亦未嘗不可表示同意』．事為達爾文的外祖父所聞，認為此種機會極為難得，不可輕易錯過，自駕馬車由許劉司伯雷（Shrewsbury）歸來與其父商量，力贊其行，達爾文的外祖父為其父向所欣佩為最能明察的一人，結果遂允其請．比格爾旅行的成行，是達爾文一生事業成功的關鍵，頻行，他攜帶了許多的書籍俾在船中的閱讀和參攷，在長途旅行中也是一最好閱讀的機會．

從達爾文的成功關鍵來說,可知一個青年的學問成功,所得於學校的實際助力極微,在學校中功課繁複,研究的意志每難專致,許多的科學家其大部的成功多在剛離學校那幾年間不斷的努力.實在一個人在學校的時候,學校所能給與他的不過是幾把鑰匙,我們去應用這幾把鑰匙,就可打開學問的門徑或解決問題,如果畢業以後鑰匙在手,而不繼續努力或畢業以後,不知專注研究幾個問題以求解決方案,其學問的成功之希望絕少.達爾文的成功,還有一特殊之點,就是他喜歡作比較的觀察和疑懷例外的事實,並且假設以資解釋特例,當『假設』(Hypothesis)與外界的事實和環境完全符合,這就成為『理論』(Theory).

當達爾文在南美的時候,他看到許多特殊的事態,掀起他的疑竇:

第一,南美產有一種披甲獸,在地層中同樣也發掘有這種動物的化石,比現在的要大許多;化石是遠古動物的遺骸,從前的披甲獸何以較現代的為大?但是發掘得古代的馬較現代的為小,具有五個趾頭?

復次,由南美轉北而南,各處所採集的動植物標本何以會有顯著的差異;

第三,南美附近的海島,何以與南美的相似而不相同;

這三個問題,乃達爾文歸來蘊藏心中而亟待解決的,於是惟有假設物種是進化的,所以遠古的和現在的生物不同;其次,物種是可以變異的,所以一個地方和其附近的生物相似而不相同;而這一個地方和更遠處的地方的生物,遂生顯處的差異.如果我們承認物種進化是真理的,那麼就可以解釋這些特殊事例;倘若我們相信萬物為上帝所創造的,千古不變的,那麼就沒有方法去解釋這些擺在眼前的特例,物種何以會進化呢?那就是生存競爭自然淘汰為其原動.而達爾文於是確立了他進化的理論,發現了千古不朽的學說,在人類的思想上掀起了空前的大革命.

至於達爾文如何去注意觀察特殊的事實呢?我們知道相同的就是普通的,而相異的就是屬諸於特殊.但是有許多事實雖然看似普通,而實爲特殊,所以往往爲人們所忽略,試舉一個例來說,比如鷄,是家喻戶曉婦孺皆知的家禽,但是雄鷄的冠高大而紅,雄鷄的羽毛分外美麗,這在孔雀等禽類也是一樣,由家禽推而及於哺乳類動物,莫不皆然,兩性間常發生顯著的差異,但是這是什麼緣故呢?原來因爲性的選擇和競賽當中,兩性的發展遂致不同,雄性具有卓越的體態和雄壯的精神,往往在性的選擇中獲得優越的地位,雌性亦然;經過長時間的選擇和淘汰作用,雌雄兩性間的特殊形態與性質得此形成,這樣達氏便確立了『雌雄淘汰的學說』(The Theory of Sexual Selection).鷄是多麼的平常的禽類,大家都認定紅冠美羽在雄鷄爲普通的,而不知這在雌鷄即爲特殊的事例,既能察知特例,那麼立假設爲解釋以確立理論,這就是科學的工作.我國幾千年來的歷史人物中,有哲學家,有文學家,有政治家等,但是單是沒有科學家.所以我國古代的文化中除了感情和思想的結晶品外即一無所有;過去中國之所以沒有科學家,這就因爲不能以大自然爲其對象,和注重實地觀察和實驗,及應用科學方法從事研究的結果.因此,我們的歷史,既是這樣的貧乏,我們尤其是應該努力向科學這條途徑發展.

達爾文在長途旅行中,就是得到最良的讀書機會,他在船中所讀的書籍,幫助他的理解得到成功,和確立其重要的學說相關至密,在比格爾船中,達氏首先讀來勒(Lyell)著的「地質學原理」(Principles of Geology),讀了這本書以後,受益匪淺,深知地質的時期是異常的悠長,地質的變化,決不是在極短的時間內可以發現,而地質史所用以紀載和計算地質變動的時間,以一百萬年爲一個單位.普通人們以爲人類的歷史是很悠久的,但是自最古巴比倫,埃及時代人類有文化以來,文字發明,利用火食以迄於今,爲時亦不過九千年,而較諸地質時期的單位所謂「Formation」尙不及百分之一.

如以人類全部的歷史比諸地質形成的歷史,直無異滄海一粟,渺少得很!達爾文知道地質變動是在很長的時間,這對於其進化論的確立,頗有關係;由此彼可以悟物種變化,單細胞動物進化以迄於人類也是長時間的作用,世俗的人,如與言及進化論,人類乃猴猿進化而成;必遭反詰何以現在的猿猴不變而成人類?此即不理解進化的眞諦乃長時間內的天演淘汰所成,非夢幻的西遊記中之孫悟空搖身一變而成者.

達爾文明察古今動物不同,故甲獸由大而變小,馬由小而變大,馬趾由五而三而一,已顯然示古今物種不同,但是物種進化的原動力何在?仍有待於理解,古今的物種何以必須變異?及讀馬爾薩斯的「人口論」,(On Population)得知人口常呈幾何級數而增加,而食物呈算術級數而增加,食物不敷,於是人類社會發生劇烈的競爭.從這些簡單的原理,達爾文推知在生物方面爲生存而競爭尤爲劇烈,譬如一年生的植物,歷一年後則繁殖爲二,歷二年繁殖爲四,逐年呈級數增加爲八,爲十六,爲三十二,……歷二十年後,將繁殖得植物一百零四萬八千四百一十六株,而且一株植物每年結子何止兩粒,如一年生的稻種,每株每年所結子實數達百顆,如皆能繁植,數年後,其所產生的數目,誠足以驚人,那麼爭土地,爭養分,爭空間,爭日光,…………必異常急劇.在這種競爭中,最適於生存條件的,遂得生存的利益,不適者遂爲自然所淘汰而滅亡.一切生物爲適應生存的基礎,爲競爭生存的便利,於是非改變形態則爲自然所淘汰,於是達爾文成就不朽的學說.

比格爾五年旅行歸來,達爾文卽居留倫敦從事整理著作,最先刊行的就是「比格爾旅行日記」銷售頗多,頗足以提起達氏著作的興趣,繼續出版「地質觀察」(Geological observrations)「珊瑚島」諸書.比格爾旅行是達爾文事業成功的基礎,但五年旅行中,因受大風大浪及採集過勞因此染心臟病,歸來後又被推任地質學會名譽秘書,社交及工作甚勤,致常常使病痛增加,居留倫敦四年,覺於身

心的不宜,遂移住一僻靜的地方名寶恩(Down)居住靜養,與外界隔絕,社交工作較少,從此以後,直至七十四歲日日在病苦當中,其工作皆在病體稍愈後從事.吾人常以為研究科學如無多量的儀器,或大規模的實驗室,則無辦法以研究科學,其實不然,達爾文居留的寶恩,不過是一個小鄉村,並無若何的設備,除建立溫室以栽培熱帶植物以供研究外,既沒有精密的顯微鏡,也沒有近代的切片機,達爾文的手是很笨拙的,切片的工作做不好,畫圖尤其不行,有時病苦致不能成眠;但是他深知運用腦力,在不斷的努力,積四十年的成績,就得下了可驚的成功,科學的研究和發達,最重要的還是人類生活的需要和腦力的發展.如果沒有活動的思考力和理解力,就把歐美各國設備最周的研究院搬回中國,在科學研究上,仍然不會得到結果的;如果有充分的腦力,實驗時所用的材料和儀器,自己也可以設法;所以設備方面對於中國科學的發展是沒有多大關係,設備好,在研究上固然便利甚多,設備稍差也可以研究發明的,現在巴黎博物館陳設有法化學家拉瓦錫試驗養氣的儀器,那種儀器眞是粗陋極了,全為黃銅所製成,在我國窮極陋極的化學實驗室中,至少也有兩條橡皮管和玻璃管,在黃銅管中,所發生的化學作用如何?或放出氣體如何?皆不能看見,但是拉氏以這陋簡的儀器從事實驗也能發明燃燒的原理和氧氣的發見,可知設備的精粗是不大在乎的,而腦力的活用為最重要.

達爾文在寶恩長期居留和病後工作,成了一本很偉大的書為「物種原始」(The origin of Species)這本書來勒(Lyell)與虎克(Hooker)得讀,但達爾文初時不肯出版,一八五八年華雷司(Wallace)在馬來半島旅行,亦同時發現進化原理,主張物種乃進化,其進化由於生存競爭自然淘汰,和達爾文的理論相同,並作成一文寄達爾文請代修正,並在雜誌上發表,後來沒有辦法,和來勒及虎克商定同時發表,這一部書出版以後,不但對於生物界影响很大,對於社會,政治方面也有很大的影响,這種偉大的功績達爾文和華雷司互相

謙遜推讓，比牛頓發明微積分時和德國的賴卜里支(Leipinz)打起官司來的態度好得多了，在那個時候宗教迷信思想過於濃厚，耶穌徒認人為上帝所創造的，萬物為耶穌之子，所以達氏的「物種原始」不敢言及人，後來即繼續出版「人類原始」(The Descent of man)對於人類進化的道理縷述頗多.此外達爾文的著作很多，如「家養動植物的變異」(Variation of Animals and Plants Domestication)「人類及諸動物之感情表示(Expréssion of the Emotions in man and Animals)，除外都是不甚重要的，沒有多少翻譯的價值如「蘭科受精」(Fertilization of Orchids)，「食虫植物」(Insetcivorous Plants)等是，達爾文年至七十四歲仍繼續工作，最後所研究多是植物泥土，其所著書達二十餘部，現在關於達爾文所著比格爾旅行日記最近孫科發起成立的中山文化教育會即準備翻譯.

總括起來有下列數點值得吾人注意的，第一祇要繼續研究工作.努力不懈，必有所成!

第二，研究的成功，不限於在學校的範圍裡.

第三，隨處都是研究的材料，平時注意特殊的事例即有所發現，不限於有研究院和博物館始可進行研究工作，達爾文注意雄鷄，冠大而紅羽毛美麗而發現雌雄淘汰原理，可見在研究的進程須要有科學方法和活用自己的頭腦.

第四，中國歷史上向來是缺乏科學家，希望諸位自身努力成為科學並造成一般未來的科學家.

談理科學會組織的意義和研究科學

馬君武演講　　梁明政筆記

『它是本省統一的研究科學機關，
促進科學教育的動力.
巴斯德是十九世紀法國最偉大的科學家，
於科學上貢獻頗多，
巴氏的研究科學歷史，
是我們最良的模範』.

現在暑期學校結束，在形式上要頒發文憑及舉行畢業典禮，這次暑期學校報到的共一百八十六人，參加考試的一百七十七人，缺考九人，與考者全數及格，暑期講學的時間不逾四個星期，在此短時間中，當然不能給予諸位莫大的幫助，也談不上所謂「研究」，任何一個實驗的成功，都非這短時間內所能，況大家紛在本省高中負教學責任，在暑期中亦斷難在此久留，各位乃由遠地而來招待不週的地方，尚請大家原諒，暑期學校現在雖行結束，不過，自此以後西大與省內各中學理科教員發生關係，這種在科學研究的關係，決不因暑期學校結束而消滅，如果各位有什麼問難或切磋，自後西大各教授依然樂意代爲解答，共同取得聯絡，踏上合作研究的途上.

向來，省內學科學的，彼此都各不相關，這是一種很大的損失；現在已有「理科學會」的發起，我們很希望從茲能够好好的組織起來，機關的地點，可以設在西大，即人才與設備方面，西大亦可借助．以後，西大的理科學生都可以加入．這個學會就是廣西一般研究理科智識的一個團體，也可以說是暑期學校的一種留念．茲復在科學的研究上，彼此所互相需賴的正多；即以生物學而言，生物的研究，最重要的是標本；以後，各地中學的切片標本，悉數可以由西

大供給·而西大的生物採集除紛赴各處採集標本的時候,頗多藉助各位的引導和幫忙,預計在下半年,西大所附設的「自然歷史博物院」即可成立,地址設於河濱公園山頂,美國退還的庚款所組織的「教育文化基金委員會」派送一位陳煥鏞先生幫忙採集,他在中大附設的農院植物研究所,一向專事採集的的工作,爲時不下五年,經驗宏富,以後將兼理西大採集事宜·自然歷史博物院的成立,不但要植物標本,乃合各時代的動物礦物標本而成,所以需要大家的助力愈多,這種助力,不但是對於西大研究科學有好處,於全省全國都有莫大的貢獻·本省致力科學的一向各自努力,自學會成立後,即可以有統一的討論或研究科學的中心機關,以後,雖不能如講學時直接以語言爲傳達智識或解答問題,但無論其爲數學,理化,生物的問題及教材上的困難,仍可作書面上的往還研究·梧州爲廣西的門戶,交通方便,來往必然經過梧州在路過梧州的時候,有何不明之點也可以來西大互相討論,在寒暑假的期間,常常來作實驗研究,亦所歡迎·西大正在努力建設當中,目下雖不敢云完善,但也頗有可觀,下年理科有四年級,農工兩科有三年級,俟幾年後,西大全部組織成立,不單爲廣西一重要的科學研究機關,在全國也具有相當的地位及特殊的價值·因爲在廣西其足資研究的材料很多,即以化學方面而言,植物油有茶油,桐油,花生油,八角油,桂油等等,如果從事研究以後,得益良多;工業化學方面,榨糖即爲其特色,如果着心研究,應用最新榨糖方法,生產量必然增加,品質亦可以改良·大家學科學的,在研究上如果能够通力合作,必定可以發生很大的效果·復次,現在大都紛議廣西中等學校學生程度畧遜,都急切希望提高學生的智識程度,但是畢業會考的辦法,我終覺得未免操之過急,於實際上沒有多大的補益,反足使學生失望,視求學爲畏途·最有效提高學生程度的方法,應積極的從教學方面着手,這在各位應負有莫大的責任·茲後切實努力研究並切實指導學生,務使對科學研究的興趣激增,並能澈底

理解;在中學教授方法上,各位應將自己的心得及意見,提供學會討論或採行,使科學教育獲到很好的結果.一方面藉以推進本省的文化,一方面確立高等教育的基礎.科學研究,如同建築房屋,根基不固,終結必然倒踏的,要使後起研究科學的基本穩固,這就是各位的責有所歸;希望自理科學會成立後,大家統一地相互的向這個方向努力研究,使科學教育有效,而將來在廣西科學亦得以發達.一個人的智識畢竟有限,我們集思廣益合多數人的見解和努力,進步和成功必定很快,現在學會由各位熱心地發起而迄於成,茲後,西大全體人員俱願盡力,大家同心努力,數年後理科學會必定有很好的結果,這是今天理科學會成立的一點希望.

各位都是中學教員,常以大學方面不能容納較多的研究人才為憾,關於這,我想說幾句.從前很想找一個機會談談法國化學家巴斯德(Louis Pasteur)的歷史,現在就借這個舉行畢業典禮的聚會,述其梗概.巴斯德是法國高等師範主講,這間學校與巴黎大學同為當時法國最高學府,具有同等的地位.記得巴氏在高師乃講授化學,他有一位學生,對於研究上頗著心得,自己很想在大學繼續研究得相當學位,但法國教育部派他到中學做教員,於是,心中很不高興,因為中學教課時間甚多,設備不周,要做研究的工作以為非常困難,但是巴斯德勸他最好前去,這樣地說:『你不但要將自己學好,還要將你所學的心得付諸後學的人,這是學問家的責任;同時你有餘裕的時間,再放到研究上』.巴氏的說話實在很忠懇的,至於設備不周就不能做研究的工作,我認為這是不大真確的話,簡言之,說這話的不是沒有研究科學的熱忱,或對於研究科學沒有真正了解,便是推諉騙人.凡熱心研究科學具有敏活的腦力的,不必一定有很宏偉的研究室和富麗的圖書館亦可以研究發明,現今再以巴斯德研究的歷史來作例証.

巴斯德是法國所首推重的一人,是十九世紀末葉對於科學有最大的發明和貢獻的化學家.凡是學生物化學,病理學的,莫不知

巴氏的研究之價值，如發酵作用及腐爛作用，從前的人也沒有眞確的認識，以爲這個純屬於化學的變化。巴氏於顯微鏡中發見微生物活動，遂力証其說之誤，知道這是酵母菌(Yeast)和細菌(Bacteria)的滋生繁衍所致。糖水因爲其中有酵母菌存在滋生，於是糖分解爲酒及無水炭酸。這在今天雖然屬於常識，但在十九世紀末葉，一般人都非常模糊，認爲是不可思議的化學變化，茲後巴氏更從事研究，知道各種物體的發酵與腐爛，其細菌皆不同。他發明了這個道理，對於法國的葡萄酒有莫大的貢獻，法國的葡萄酒是在世界馳名的，味香而清，但是製成後不能久藏，味即變酸，巴氏深察其理，得悉此爲別種微生物參在於中，致發生變酸作用，如果培養純粹的酵母那麼可以避免葡萄酒酸化，這種發明，年中已增進法國不少經濟利益，而巴氏尚有難得可貴的，即以細菌的發見及其滋生的原理應用於人生，更大有發見，明悉細菌爲人類致病的來源，細菌侵入人體的血液中，滋生繁衍，遂使人體的一部或全部發生病像，人類許多的疾，如傷寒，瘧疾，霍亂等皆由菌類釀成，巴氏這種發現，造成了醫學上的空前大改革，使醫學的面目煥然一新，當一八七〇年德法戰爭的時候，法國後方的傷兵，不下數十萬人，或手部受傷，或足部受傷，或足部中彈，經手術後，創口出膿，當時外科醫生竟束手無策，亦莫明其理，認爲屬諸自然發生，此與我國古昔流傳，什麼「腐草化螢」「蛤入大水爲蜃」或俗語所謂「汚髮生虱」等語同一滑稽，但自巴氏一八六八年的實驗，也不但反對自然發生的學說，同時根本打破人類這種思想，他發見這是化膿菌侵入血液，破壞白血球所致，這種菌類，存在於大氣中，一有機會即入人體血液中，創口或出血，是化膿菌得以侵入的最好機會，如果創口經過消毒作用，以石灰酸(Phenol)等爲消毒劑，那麼創口就不再發膿，亦無什麼危險，英國里士特(Lister)首先採用這種原理，凡是傷口，創痕，開割等皆行施消毒以防腐，以致甚著。說到自然發生的學說，現在已經成爲歐西十七世紀科學上的陳說，但前在廣東尙有所謂醫學

博士羅廣庭大倡其說,認爲是自己所發明的登人聽聞並且把他的實驗在廣州市公開陳列,這眞是丟盡了中國科學界的醜,而中國人科學的智識之簡陋,直至此極,當時廣東一般要人並且代爲宣傳,大吹大擂,做序題字,無所不至,東方雜誌也盡量登載此項消息,自然發生的學說果有成事實,那麽所有一切的學說知識和發明將全部推翻,醫術上所施用的方法像隔離,防止傳染等等一切無效,因爲無論如何盡其防禦的能事,而生物可以自然發生的,坐在家中,並沒有爲瘋狗所咬也會自然發生,狗瘋病,那麽人類的生命將完全失其保障,人群也就同樣地日日在危險中,但是事實告訴我們這是一件滑稽的事,而羅博士自然發生實驗竟出現蜘蛛類的高等動物,更屬滑稽之至,觀此,我們不禁嘆息中國科學的可憐!「自然發生」爲十七世紀科學上的舊說,迄十九世紀已爲巴斯德根本打破,事隔六十餘年,中國尙有人沾沾自喜瞎認爲科學新發明,可憐亦復可笑!實在巴氏擊破自然發生的學說,是很關重要的使人深知人類的病疫,非自然而生成,乃由外界有害的微生物而來,這於是建築了近代醫學的基礎,發明了消毒,隔離,注射,免疫,…………醫療新法.

巴氏是十九世紀的科學家,於科學上的貢獻至大,但是他發明微生物的那具顯微鏡,異常簡陋,這是什麽原因?因爲他有靈敏的頭腦,具有研究科學的決心,所以雖然很簡陋的工具,也可以發明;如其不然,雖有很宏偉的儀器,實驗室和圖書館,依然沒有用處,復以研究費而言,巴氏由法國政府每年供給研究費爲一千二百佛郎(Franc),一佛郎從前約值我國四毫,那麽一千二百佛郎,不過合我國四百八十元,巴氏所用的儀器現在雖然很窮的高初中都有,區區的每年四百八十元的一筆研究費,在我們現在的高初中也並不是困難,但是巴氏竟成爲一大科學家.在十九世紀於化學上醫學上發明很多,打破自然發生的陳說.關於巴氏的研究室.據云也很簡陋,在地窖當中,後來費了無限的心力,和政府交涉,當時是

拿破倫第三,教育部長爲巴黎大學校長秋雷(Sursy)兼任,結果得三萬佛郎(合我國一萬二千元)建築一間實驗室,現在我們的科學館耗八九萬建築,如果研究不出東西,對於社會國家眞是抱愧,清華大學的化學室建築費三十餘萬元,相形之下,我們不知作何感想!從這裡,我們可知發明與否,不全在設備的問題,這便是說,中國的科學沒有發明,這是社會的混亂的環境所造成,及缺乏巴斯德這一流的人物,專心致力於科學的研究,所以我希望各位勿因爲設備不良,對於科學的研究感覺失望,在聰明才力上我們並不後人,在以萬元建築的研究室和年中四百餘元的實驗費也未有什麼困難,最難是我們未有巴斯德的努力與决心,如果大家抱着極大的决心去努力研究科學,將來不難在科學上有莫大的貢獻,這是今天很希望的.

臨末,還附帶告訴諸君,巴氏還有一個重要的貢獻,法國是一個蠶業國家,每年蠶絲出產頗多,後來,蠶子多染黑絲病,在將吐絲的時候,即病死,巴氏刻苦研究五年,考察蠶病,發現其致病的淵源,純由極微小的細菌援害而成,彼根據此理,應用科學方法醫治,由政府檢查蠶種,凡未有病害的始准育養,依法檢查迄二十年,法國減少損失十五萬萬佛郎,有人問巴氏爲何不專利?他說:『我們學科學的,不但是爲自己求知,還要爲大衆謀福利,如果祇知利己,那是科學家的羞辱』,這是科學家巴斯德的精神,同時也是今天我對諸君的希望,倘若我們能够在科學有什麼發明,那麼應該公諸於世,供社會和大衆的享用才是,使大家都蒙到福利,莫要斤斤爲自己打算.

總括起來,希望諸位具有研究的熱忱和科學家的精神,去努力研究,貢獻社會,設備簡陋,不足爲我們研究和發明障碍的,這是我們讀了巴斯德的歷史所得的明白之教訓.

現在暑期學校是結束了,在這短時的研究,對於諸位未有多大的助力,望大家歸校以後本着科學研究的精神,繼續努力研究.

數之系統之推廣

邵靜華講演　汪英時 梁澤森 筆記

I.自然數系整數系與有理數系

數為算學之對象,是算學裡最重要之基本觀念.我們常用的 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 等數目字,有人說是阿拉伯人發明的;有人說是印度人 Bhaskara 發明的,我們且不去窮究,而 0 這個數為Bhaskara氏所發明,則為不可磨滅之事實.0, 1, 2, 3,………等,這串數即稱為自然數系,自然數即正整數,有正整數,當然就有結合,二數相併如

$1+2=3$………即成立了加法,

累加同數如:

$3+3+3=3\times3=9$………即成立了乘法

(乘法即加法之簡法)

累乘同數如:

$3\times3\times3=3^3=27$………即成立了冪法,

在正整數系統裡(自然數系裡),加法,乘法,冪法,無有不可能之時,但是有了以上總總之結合,而還原之要求必生.不過在自然數系裡,加法之逆運算減法,則不常能,例如:

$a=\times+b$, 一定要 $a>b$

若 $a>b$, 則 $\times=a-b$, 所得之數,即非自然數系裡所有了.於是負數應運而生.而自然數系,就推廣得如下之一串新數,

$\cdots\text{-}(n+1), -n, \cdots\text{-}2, -1, 0, +1, +2, \cdots\cdots, +n, +(n+1), \cdots$ 名之曰整數系.

乘法之逆法是為除,÷,在整數系裡,除法亦不常常可能,如:

$$a=b\times,\qquad \times=\frac{a}{b}.$$

a須爲 b 之倍數,否則即不可能.於是分數隨運而生,而數之系統,又由整數系,推廣成有理數系,在有理數系裡,加減乘除四大運算,即無不可能之時了.

說到此處,當然有一個很自然的問題發生,即是 $2,+2,+\frac{2}{1}$ 三數,是同的呢?還是不同的呢?如我們隨便看看必定說是相同的,而仔細的想來,又必發覺不對,嚴格的簡單的講,即是同而不同.其同的是在運算上,因爲無論用那種形式運算起來的結果都相同的.如

$$2\times3=6,\qquad (+2)\times3=6,\qquad (+\tfrac{2}{1})\times3=6.$$

不同的是在數系推廣後概念上之各別.因 2 是自然數系裡的一個數; +2 則在整數系;而 $+\frac{2}{1}$ 則在有理數系了.此三數可以說是相當.(Correspoundent),而不能說是全等.(Identical).

有理數系與整數系及自然數系之關係既明,再進一步談談有理數及整數之特性.我們知道在整數系裡是一個數跟着一個數分明而確定的,一個數以後就有牠的繼數,譬如 1 的繼數是2,100的繼數是101,所以在整數系裡,二個數之中間,只能含有限個數或不含一個數,如 0 與100之間,只含 99 個數,而100與101之間,即不含一個數,這種性質,叫作疏性.在有理數系裡的情形便兩樣了,無論兩數相差怎樣小,而其間之數可以多至無限.譬如0與1之間有 $\frac{1}{10}$,而0與 $\frac{1}{10}$ 之間又還有 $\frac{1}{10^2},\frac{1}{10^3}$ ……等等的數呢.現在來一個普遍的情形証之如次:

設 $\frac{P_1}{Q_1},\frac{P_2}{Q_2}$ 爲兩任意之有理數,

又設 $\frac{P_1}{Q_1}>\frac{P_2}{Q_2}$ 　　則 $\frac{P_1}{Q_1}>\frac{P_1\times P_2}{Q_1+Q_2}>\frac{P_2}{Q_2}$

因 $\frac{P_1}{Q_1}>\frac{P_2}{Q_2}$ 　　則 $P_1Q_2>P_2Q_1$

$$\therefore\ P_1Q_2+P_1Q_1>P_2Q_1+P_1Q_1 \text{或} P_1(Q_1+Q_2)>Q_1(P_1+P_2)$$

$$\therefore\ \frac{P_1}{Q_1}>\frac{P_1+P_2}{Q_1+Q_2}$$

同理可以証明 $\frac{P_1+P_2}{Q_1+Q_2}>\frac{P_2}{Q_2}$

照樣可以在 $\frac{P_1}{Q_1}$, $\frac{P_1+P_2}{Q_1+Q_2}$ 之間可以插入有理數 $\frac{2P_1+P_2}{2Q_1+Q_2}$ 這樣繼續下去,可以至於無限,這種性質,叫作密集性,由這個性質,便引出一個數比任何數還要小,即無限接近於0而不等於0之變數,例如 $P_2=0$, Q_2 爲不等於0之任何整數,即見0與 $\frac{P_1}{Q_1}$ 之間有無限個數存在,但又不等於0却可使與0之差小而又小,又再小以致無限接近,這就是,算學分析裡很珍貴的無窮小之觀念,於此可以見有理數密集性之重要.

II. 無理數

在上面說過,欲求減法常能而生負數,於是自然數系,不得不推廣,而另組一整數系,欲求除法常能而生分數,於是整數系,不得不推廣,合整數與分數,以另組一有理數系,但冪法之逆運算爲開方或對數,其所得之數,不盡爲有理數,即方程式

$$a=x^b, \text{及}\ b=a^x$$

非常常可解.今舉一簡單的例來請,即見有理數系統中,無有此數,而開方在有理數系統裡,非常常可能.

設求非平方數之正整數m之平方根.則m的平方根式,當然爲 $\sqrt{m}$ 此 $\sqrt{m}$ 即爲無理數,且終不能變成有理數,假使其爲有理數,即設

$$\sqrt{m}=\frac{P}{Q}$$

$\left(\frac{P}{Q}\text{爲有理數一般之形式,并設}\frac{P}{Q}\text{爲最簡之分數,}\right)$ 更設想有一正整數入,而合於不等式

$$入^2<m<(入+1)^2$$

(入爲正整數而常存在).同時以 Q^2 乘之,則

$$\lambda^2 Q^2 < m Q^2 < (\lambda+1)^2 Q^2$$

由上式看來　$\sqrt{m} = \frac{P}{Q}$,　$m = \frac{P^2}{Q^2}$

那末　$P^2 = m Q^2$

以 P^2 代入,則　$\lambda Q < P < (\lambda+1) Q$

因爲　$P^2 = m Q^2$

移項,則　$P^2 - m Q^2 = 0$

作恒等式　$(\lambda^2 - m)(P^2 - m Q^2) = 0$

即　$\lambda^2 (P^2 - m Q^2) - m (P^2 - m Q^2) = 0$

去括弧　$\lambda^2 P^2 - \lambda^2 m Q^2 - m P^2 + m^2 Q^2 = 0$

配平方　$m^2 Q^2 - 2 m Q \lambda P + \lambda^2 P^2 + 2 m Q \lambda P - \lambda^2 m Q^2 - m P^2 = 0$

$$\therefore\quad (mQ - \lambda P)^2 - m (\lambda^2 Q^2 + P^2 - 2 Q \lambda P) = 0$$

$$\therefore\quad (mQ - \lambda P)^2 - m (P - \lambda Q)^2 = 0$$

$$\therefore\quad (mQ - \lambda P) = m (P - \lambda Q)^2$$

$$\therefore\quad m = \frac{(mQ - \lambda P)^2}{(P - \lambda Q)^2}$$

$$\therefore\quad \sqrt{m} = \frac{m Q - \lambda P}{P - \lambda Q}$$

既　$\lambda Q < P < (\lambda+1) Q$

$$\therefore\quad (\lambda Q - \lambda Q) < (P - \lambda Q) < [(\lambda+1)Q - \lambda Q]$$

$$\therefore\quad P - \lambda Q < Q$$

由此結果,即見與原來所假設者,不相符合,因原設 $\sqrt{m}$ 爲有理數而等於最簡分數 $\frac{P}{Q}$,今 $P - \lambda Q < Q$ 既與原設相矛盾,可見有理數系統中,無此數存在.故不能不另創新數,爲欲澈底明瞭此中關係起見,再設一實例如下:

在代數裡,我們知道 2 的平方根爲無理數,今如設 2 的平方根爲有理數而反証之.

即令　$\sqrt{2} = \frac{P}{Q}$　$\left(\frac{P}{Q}\text{爲最簡分數}\right)$

即　$2 = \frac{P^2}{Q^2}$　　或 $P^2 = 2 Q^2$

則 $$Q^2=\frac{P^2}{2}$$

但是奇數之平方亦爲奇數,偶數之平方亦爲偶數,既 $P^2=2Q^2$,則無論 P^2 是奇數或偶數,$2Q^2$ 必爲偶數,即 P^2 爲偶數.今 Q^2 既爲 P^2 之二分之一,則 Q^2 必可用 2 除之而得整數.故 Q^2 亦必爲偶數.因爲偶數之平方亦爲偶數,故 P 與 Q 必同時爲偶數. P 與 Q 既同時爲偶數,必至少有一公約數 2,是即與 $\frac{P}{Q}$ 爲最簡分數之原設相背故 $\sqrt{2}$ 決不能爲有理數,在有理數系統裡最簡之二次方程式

$$X^2=2.$$

已不能解,勢不能不推廣數系,以濟其窮,於是無理數應運而生,不過無理數,非完全是不盡根數,Hermite 氏証明 $e=2.7182\cdots\cdots$ 爲超越數,Lendemaun 証明 $\pi=3.14159\cdots\cdots$ 爲超越數,這種超越數,俱屬於無理數,此外更有大部分之對數,亦屬於無理數,

例如 Log 5(以 10 爲底)即爲無理數,其証明甚簡而饒興趣.玆申述於下:

同前設 Log 5 爲有理數,即設

$$\text{Log } 5=\frac{Q}{P}$$

根據對數之定義,即

$$10^{\frac{Q}{P}}=5$$

$$\therefore\quad \underline{10^Q=5^P}$$

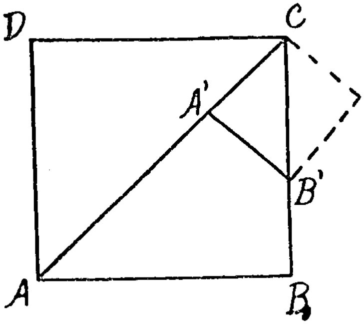
但 10 的任何次的方乘,其末位數,必等於零.而 5 的任何次的方乘,其末位數必爲 5,所以 10^Q 方就不能與 5^P 相等了,現既不合理.則 eog 5 決不能爲有理數而爲無理數了,合無理數與有理數,另組成一新系統,名曰實數系.在實數系統裡除負數開偶次方以外,其他如,減,乘,除,乘方,開方等,無有不可能之時了.

無理數發展之經過.——無理數之發展與近代分析學,頗有關係,玆畧談其發展之經過.大約在紀元前500多年,希臘之 Pythagorus 求單位正方形之對角線,即發現 $\sqrt{2}$,此即無理數,但是希臘的算

學家,俱以為不可解而摒棄于算術之外.印度代數學家Bhaskara,則因無理數能服從算律,遂聽其入於算式,但仍毫不了解其眞義.希臘大幾何學家Euclid在他的幾何學原理十三卷中之第五卷上,論一般之比之理論,第十卷上,論不可通約量,即論無理數,但歐氏所論僅限於兩不可通約量(Incommensurable maginitude)線分之比,如圖.

設ABCD為一正方形.

AB=BC=……=1.



若以幾何方法,用線段輾轉相除,則得如下之結果.在AC上以AB除之得A'點,AA'=AB,A'C為一餘數.(∵AC<AB+BC)是小于AB的,又以A'C來除AB,即是除BC.作A'B'⊥AC.得B'點,則BB'=A'B'=A'C,而B'C>A'C,再應以A'C除B'C,即與原來用AB除AC一樣的情形.如此繼續作下去,永不能盡,故為不可通約,即代表了規尺作圖,開不盡平方根之一類的無理數.Euclid以後千餘年,俱將數認為兩種量之比,即Newton所下數之定義,亦認為兩任何量之比.大致由希臘時代,迄於十六世紀,其認為無理數者,僅開方根之某種及歐氏幾何中之法則所得之極限位置而已.

自解析幾何與微積分發明以後,無理數的問題始稍有一線曙光.因為數之應用于量,是解析幾何之基本假定,一般人遂認定數與量是算學的對象,"有其數必有其量,有其量必有其數"為了這一個無確切証明假定,所以引得一般算學家,去追尋無理數,集點而成線,而此點不一定是有理點,也有無理點,為了要求數與形之諧和,而強迫一般算學家去探求無理數之理論.

十八世紀之末,十九世紀之初,傑出的大算學家,如 Cauchy, Abel, Piemanln, Disichlet 諸人遂決心整理算學之基礎,Abel 於 1826 年致其友人 Hansteems 之信中有曰:「予將集中全力,對于現在分析學中流行之黑暗,廓而清之,……在高等分析裡,僅有少數命題,嚴格証明,其他多由特別情形推廣,此種方法,誠爲驚人之詭辯……」在 Abel 全集,(Abel AuvresVol. 2)之他處,又有一段話,他說:"在無限級數中,僅有少數論証,無須反對,二項式定理,Taylor 氏展開式,以及微積分之全般基礎,亦俱無嚴格之証明."於此可見當時分析學基礎之不穩固,而一般學者,向這方面之努力.不過無理數之理論,仍未啟發.

1859 年,Weierstrass 在柏林大學講函數論,即對于無理數嚴格之理論,始有所啟示,1871 年,大算學家 Cantor 發表其關于無理數之論文. 1872 年,Dedekind 亦發表其關于無理數之論文,無理數之理論始明,分析學之基礎遂得鞏固.

以上三人爲何獨着眼於無理數之理論,可以 Dedekind 氏作代表而畧言其動機,Dedekind 於其'連續性與無理數'(Continuity and Irrational unmbers)之論文中之緒言裡,有一段話.大意說:「當我在 Zurich 工業學校講微積分時,覺得微積分之基礎,甚非科學的.在解釋一變量趨近於一固定之極限值時,($v \longrightarrow e$),即特別証明'變量之不絕的連續增加,而又不能超過一定值時,必趨近於一極限'之定理(即 $v-e<E, \lim v=1$)不過當時証明須藉助於幾何學之事實,對於初學者利用幾何的直觀,當然是異常收效,但是由此引入構成之微積分,當非科學的要求,……,微積分學取連續之值之處,非常之多,而對於連續性之解釋各處皆無,最嚴密之微積分學,於定理之証明須置其基礎於連續概念之上.那末,則暗示幾何學或運用幾何學之定理,而決未建立於純算術之上,如上述之定理或其同價值之定理,皆微積分學科學之基礎,須不藉幾何學而用純算術之証明,其基礎乃算穩固,……」由是可知十九世紀之算學家,對於無理數嚴密理論之構成,其動機在於[如何使分析學脫離幾何學而獨立,

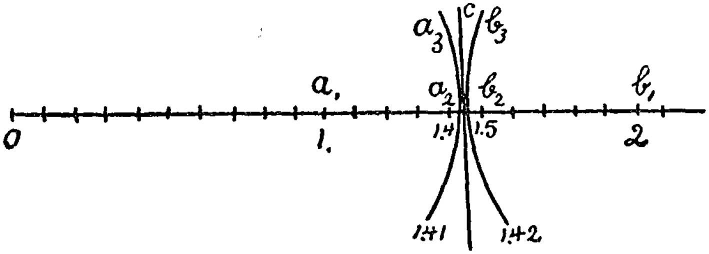
及如何使數之連續概念,不須直觀,亦得說明兩語了.

Dedekimd及Cantor兩氏的無理數理論之前提——我們想容易明白D, C.兩氏之無理數理論先用一個實例來看,即設

$$X^2=2,\ 則\ X=\sqrt{2}$$

這是在有理數系裡找不到一個數,恰好滿足這個方程式,但是可以在某一個有理數前或後,找出一個以致於無限個數,庶幾乎滿足這個方程式.這可由 2 直接開平方而得:即 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ……,這串數的平方,從小於2而逐漸接近於2,若依次各加以1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^3}$, $\frac{1}{10^4}$, ……,則得到另一串數爲 2, 1.5, 1.42, 1.415 1.4143,……,這一串數的平方,即由大於 2 而逐漸接近於 2.

最初,即由 $1^2<2<2^2$ 這個關係起,如圖



把1和2之間分成十等分,更由 $\overline{1.41}^2<2<\overline{1.42}^2$,這個關係,將1.41與1.42之間分成十等分.如此分下去.我們便得兩個啓示,(1)這兩串無限的有理貫數(Rationae Seguenee),第一串數和第二串數,相當的數之差爲1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ……,牠們的平方與 2 之差,即爲:一小而又小,又再小,以致無限小的變數——即無窮小,那末,愈往前走,就是愈近似的解答,如果我們不停留在任一個近似的解答上,而儘往前走,眞正的解答,即是這一串無限貫數的本身,這便是Cantor的收斂貫數的理論(Thehry of convergest sequence)的先聲,亦即Cantor的理數理論之前提,(2)由兩個有理數,如1.41與1.42無限接近之間.假定C點代表 $\sqrt{2}$.那末,C點總不能代表有理數,却可以爲有理

數之分界.這便是Dedekind的截分理論(Theory of section)的旨趣.即Dedekind 的無理數理論之前提.今請叙兩氏之學說,以見無理數理論之一般.

Dedekind的截分理論.——一切整數(0亦在內)幷一切分數,總謂之爲有理數,今設想用一有理數 r 爲出發,將一切有理數,分作R_1與R^2二類,將大於 r 的有理數,俱歸於R_2類,將小於r的有理數,俱歸於R_1內.那末,顯然沒有一個有理數會遺漏,不屬於R_1,必屬於R_2而且凡屬於R_1都小於屬於R_2的.由是我們得到一般的規定如下:「不論依據任何方法或性質,如果可以把所有的有理數分作截然的兩類R_1及R_2,換言之,任一有理數必屬於一類,亦僅屬於一類,同時屬於其中一類,如R_1的任一數,必小於屬於R_2的任一數,屬於R_2的任一數必大於R_1的任一數.我們就說這是一個有理數截分(Raticnal sectian).R_1叫做下類,R_2叫做上類,簡寫爲(R_1, R_2).」這樣成功的截分,必發生次述三種情況之一:

1°. 下類R_1,有一最大數,而上類R_2無最小數——令如前所設r爲任一有理數,如果現在依爲分類的分法是r,及凡小於r的屬於下類R_1,那麼上類R_2就是所有大於 r 的有理數了.這顯然適合上面的規定,如果將 r 本身歸於下類,則 r 即爲下類中之最大數,因下類中一切數均小於 r 也.同時因爲凡大於 r 的數已歸於上類,r 本身既歸於下類,上類當然無再有數以爲上類之最小數.

2°. 下類R_1無最大數,而上類R_2有最小數.——這和上所講的沒有兩樣,只稍將分類的方法改換,即 r 及大於 r 的有理數,屬於上類R_2,而下類R_1的數,卽是小於r,這樣一來,r 就爲上類R_2的最小數,而下類R_1無最大數了.

3°. 下類R_1無最大數,上類R_2亦無最小數.——此種情形,我們乍看上去,不能不生幾分懷疑,請先証其可能,例如將非平方數之正整數 m 之平方根作成截分,即將有理數分成兩類,凡其平方比 m 小之有理數以及 0 與負數令其屬於下類 R_1,凡其平方比 m

大之有理數,令其屬於上類 R_2，即將見上類無最小數,而下類無最大數.

因爲設想 X 爲可屬於 R_1 亦可屬於 R_2 的幾數,作一新函數 Y.即令

$$Y=\frac{X(X^2+3m)}{3X^2+m},$$

則

$$Y-X=\frac{X^3+3mX-3X^2-mX}{3X^2+m}$$

$$=\frac{2X(m-X^2)}{3X^2+m}$$

$$Y^2-m=\frac{X^2(X^4+6X^2m+9m^2)-m(3X^2+m)^2}{(3X^2+m)^2}$$

$$=\frac{X^6+6X^4m+9m^2X^2-9X^4m-6m^2X^2-m^3}{(3X^2+m)^2}$$

$$=\frac{X^6-3X^4m+3m^2X^2-m^3}{(3X^2+m)^2}=\frac{(X^2-m)^3}{(3X^2+m)^2}$$

若 X 屬於下類則 $X^2<m$,由上面 $Y-X$ 的結果來看 $Y>X$在;Y^2-m 的結果來看 $Y^2<m$，故 Y 亦屬於下類.若 X 屬於上類 $X^2>m$，由 $Y-X$ 的結果來看 $Y<X$(但 $Y>0$,因 0 和 0 以下之數,已屬於下類).由 Y^2-m 的結果來看 $Y^2>m$，故 Y 亦可屬於上類.結果所有的有理數,不是歸於上類,便是歸於下類.而下類即無最大數,上類即無最小數,如此之截分,顯然是不相當於有理數.

除以上三種情形外,還有 R_1 類有最大數,同時 R_2 類有最小數之情形麼?是可決定其無.因設 R_1 之最大數爲 r_1 而 R_2 之最小數爲 r_2，則 r_1 與 r_2 間有無窮多之有理數存在,此等數既不屬於 R_1，又不屬於 R_2，是即不合於凡一數不屬於此類即屬於彼類之假設,故決無是種之截分.

由此可知所作之截分僅有二種,第一種截分內上下二類之界,亦爲有理數,第二種截分內上下二類之界,幷非有理數,倘我們否

認有理數以外,尙有數,則亦可簡單的說第二種截分之二類間無有界,然類於$\sqrt{2}$的這種符號,運算時極多遇見,若不視之爲數,則最簡單之二次方程式——$X^2=2$,已不能解.故非將數之概念擴充不可,即第二種截分內上下二類之界,亦須視之爲數,但又與有理數別,故名此種數爲無理數.

合無理數與有理數遂另成一新集合,名曰實數,其定義如下:

凡有理數集 R 之截分(R_1, R_2),其數 R 不屬於R_1,必屬於R_2,不屬於R_2必屬於R_1,而凡在R_1中之數常小於R_2中之數,在R_2中之數常大於R_1中之數,如此之截分,對應一, 實數

含於R_1中之數,有最大數,或R_2中之數有最小數,如此之截分,對應之實數曰有理數.

含於R_1中之數無有最大數,含於R_2中之數無有最小數,對應如此截分之實數,即名曰無理數.

Contor 的收斂貫數理論——Contor 的無理數理論,乃利用滿足 Cauchy 收斂條件的貫數 (Sequence). 故又名收斂貫數理論,收斂貫數,亦名正則貫數(Reqular Sequence),爲引証便利起見,先將正則貫數之定義及重要性質敍於下:

定義 1. 若有理數之無限集合 $A_1, A_2, A_3 \cdots\cdots A_n \cdots\cdots$ 其元素與正整數有一一對應之關係者,名曰貫數.簡記爲(A_n).

定義 2. 有理貫數.(A_n).若任意指定一正數E,而有正整數m存在,使凡於$n>m$時,$|A_n-A_{n+p}|<E$, $P=1, 2, 3, \cdots\cdots$之關係成立者,則謂(A_n)爲收斂,收斂貫數,亦名正則貫數.

定義 3. 貫數各元素其絕對值不能超過於定值者,謂之爲有界貫數(Boand Sequence).

定義 4. 若貫數(A_n),常常$A_n \geq A_{n+1}$或$A_n \leq A_{n+1}$,則謂之爲單調貫數(Monotonic Sequence).

定理 1. 凡收斂貫數,必能選得一任意正數E.但凡於$n>m$時,$|A_n-A_{n+p}|<E$, $P=1, 2, 3, \cdots\cdots$

定理 2. 凡收斂貫數,只能收斂於一極限.

定理 3. 凡正則貫數爲有界.

定理 4. 凡正則貫數不收斂於零,則其元素自某個而後,必皆爲正或負.

定理 5. 凡有界單調貫數皆收斂.

以上之定理,因爲時間有限,不去証明,但其証明也很簡單,在普通之'無限級'教本裏即可查得.

Contor 氏理論之要素,乃假定每一有理數之正則貫數,必能决定唯一之物名曰實數者存在,即凡一有理數之正則貫數,皆决定一實數,而此實數即視爲此貫數所表示,但有理數之正則貫數,其决定之實數,不僅爲有理數,尚有非有理數之新數含於其中.今將前舉非平方數之正整 m 之平方根爲例,以說明之,設想一正整數 A,合於下之不等式.

$$A_1^2 < m < (A_1+1)^2$$

由 $A_1+\frac{1}{10},\ A_1+\frac{2}{10},\ A_1+\frac{3}{10},\ \cdots\cdots A_1+\frac{9}{10},$

九數中設其平方小於 m 之數,而其次一數之平方大於 m 之數爲 A_2,令

$$A_2 = A+\frac{\alpha_1}{10}$$

則 $A_2^2 < m < \left(A_2+\frac{1}{10}\right)^2$

再由 $A_2+\frac{1}{10^2},\ A_2+\frac{2}{10^2},\ A_2+\frac{3}{10^2},\ \cdots\cdots A_2+\frac{9}{10^2},$

九數中,設其平方小於 m,而其次一數之平方大於 m 之數爲 A_3,令

$$A_3 = A_2+\frac{\alpha_2}{10^2}$$

則 $A_3^2 < m < \left(A_3+\frac{1}{10^2}\right)^2$

如此繼續求之,可得一有理數之無限貫數即

$$A_1$$

$$A_2 = A_1+\frac{\alpha_1}{10}$$

$$A_3 = A_2 + \frac{\alpha_2}{10^2} = A_1 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2}$$

$$A_4 = A_3 + \frac{\alpha_3}{10^3} = A_1 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3}$$

....

$$A_n = A_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{10^{n-1}} = A_1 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} \cdots\cdots + \frac{\alpha_{n-1}}{10^{n-1}}$$

此無限貫數〔A_n〕爲有界單調貫數,依定理5必收斂,故爲一正則貫數,此正則貫數,即作爲表示m之平方根之數,然此數幷非有理數,已在前証明,故視凡正則貫數,皆表一數,此數之概念,非加擴充不可,即非加入一新之數不可,此新數名曰無理數,而實數系統遂得完成.

Cantor之實數定義,即假定每一有理數之正則貫數所決之數,即爲實數,惟如此所定義之實數,實包括有理數於其中,故有理數與無理數之區別,不如Dedekind之理之易爲判明罷了.

以上所述無理數之概念,當還有可以申論之處,惟因時間太少不再詳論,要而言之, Dedekind 所謂:凡有理數集之截分對應於一實數,這是極堪注意的結果,也是實數系與有理數系的分界線,因爲在有理數系裡一個數固然相當於一個截分,一個截分却不一定相當於一個數,所以要有無理數乃彌補這個缺憾,而實數系,則一個實數與一個截分,便可一一對應了.這就是實數取得不是有理數系所具備的完滿性了. (Perfectness). 由此事實,遂構成分析學中之所謂連續統 (Continum).現在拿幾何學上最具有直觀的連續性的直線來看看,在前已說過,所有有理數,固然相當於直線上的點,但直線上的點,却不一定相當於有理數,假如認爲直線上的點,可以代表連續變量,有理數系,就沒有這連續性了.縱然牠是密集的.拿實數系來看,情形便兩樣了.直線上的一點,可以對應於一個截分,而所有的截分都對應於一實數,因之直觀的連續意義得到論理的解釋,解析幾何之基本假設「有其數必有其點,有其點必有其數」.於是亦得以成立.

III. 虛數及複數

自法之 Girard 發明『n 次方程式有 n 個根』之定理後,解方程式時不能得出 n 個實數而引出虛數來了.例如今有一般的 n 次方程式,n 可爲任何數.

$$F(X)=A_0X^n+A_1X^{n-1}+A_2X^{n-2}+\cdots\cdots+A_n$$

其中之係數 $A_0, A_1, \cdots\cdots$ 等爲常數,或爲獨立變數,或爲其他諸變數之有理函數.若 $X=\alpha$ 而能使

$$F(X)=0$$

則 X 稱爲此方程式之根.解方程式即求其根.通常方程式的根式,總是係數的函數:如

$$F(X)=AX^2+BX+C=0$$

其根之公式爲

$$X=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$ 即其一例.

一次方程式的根是實數,二次方程式的根可以用係數表之如上.三次方程式也有其根的公式——$X^3+mX=n$ 之解法,已於1505年意大利 Ferro 所發明,曾傳授其法於其徒 Fior. 1535 年意大利 Brescia 之 Jartaglio 與 Fior 相約作解三次方程式之比賽,約期未至,聞對方已得傳授,乃竭智力以求,卒於比賽之前得到了 $X^3+mX=n$ 形之解法,1541 年更得 $X^3\pm AX^2=\pm B$ 形之解法,而 Ferro 與 Fior 的解法是失傳了.當時意大利有一怪傑名 Cardan 知 Tartalgio 能解三次方程式,設法引 Tartaglio 到了 Milan,用甜言騙出了他的解法.當時 Tartaglio 囑其勿宣佈,他亦誓守秘密,但至1545年 Cardan 終倍盟約而宣佈其所著拉丁文代數所謂『大術』(Ars Magna——按十五十六世紀意人常稱代數曰大術,算術曰小術)者之上,不過他也說明此法是得之於 Tartaglio. Tartaglio 原名 Nicolo,因其病結舌,故人每呼之爲 Tartaglio (即結舌之意)而 Cardan 實在是一個奇士,有時好學,有時貪賭,有時作教授,醫士,有時作階下囚徒,其行爲乖謬如此,但也許以其行爲乖異,天資卓絕,三次方程式之解法,乃得傳,亦快事也.至於三次方程式根式也爲其係數的函數.

四次方程式之解法,則爲Cardan之學生Ferrairi所發明,Ferrairi初爲Cardan之侍僮,Cardan以其聰明而用作書記,後又作其秘書,幷收爲學生.當Cardan解四次方程式,解不出來時,交給Ferraiai替他解,而Ferrairi竟得到解法,其根式亦爲係數之函數,此法亦被Cardan發表於[大術]之上.

五次方程式及五次以上之方程即不能造出一根式,使其爲係數之函數,即五次及五次以上之方程不能用根數解法解之.此即1824年Abel所精確証明的.

根式既爲係數之函數,就當生出各種不同情形的問題來.如二次方程式,根之判別式

$$b^2-4ac.$$

就有三種情形.當牠是正的,則二根爲實根;是零,則二根相等;是負的就得不出實根來了.今解釋之如次.即設二次方程式爲

$$aX^2+b+c=o,$$

如 $$b^2-4ac=(-).$$

即將上式改寫爲下形而討論之

$$A\left\{(X-\alpha)^2+\beta^2\right\}=0\cdots\cdots\cdots(A)$$

在此式裡,我很易看出沒有一個實數能使其滿足,卽相當于b^2-4ac是負數時的情形.如以$\alpha\pm\beta i$換X,即

$$a\left[(\alpha\pm\beta i-\alpha)^2+\beta^2\right]=0.$$

即 $$a\left[\beta^2(i^2+1)\right]=0,$$

即 $$i^2+1=0.$$

$$\therefore\quad i^2=-1,$$

$$\therefore\quad i=\sqrt{-1}.$$

此即數之系統不能不推廣之情形.$X=\alpha\pm\beta i$旣是原方程式之根,而i^2勢必要等于-1,i勢必要等于$\sqrt{-1}$,此即虛數.原方程式之根,即稱爲相配虛根(Conjugate imafinary roots).而$\alpha\pm\beta i$的形式是合實數與虛數而成的,故名之曰複數.欲求一切方程式俱有解,

數之系統又不得不推廣到虛數與複數了.

虛數複數之演進史略.虛數,複數及其幾何表示的演進,也是極重大而極有趣的事蹟,這些事蹟,既不是由少許天才的算學家一蹴即成,更不是簡單的由一世紀的年月奠定其基礎,是如像其他的算學概念一樣,由許多傑出的天才算學家,經過幾世紀的努力,然後認識其真義而建築其謹嚴之理論,大約在第一世紀,甚或上至希臘時代,即有負數,虛數之發現,但其命運之不幸,猶之無理數然,人皆以其不可解而摒棄之於算術之外.最古之代數學書爲希臘亞力山大城最後的一位數學家 Diophantus 之算書. Diophantus 的算書與 Euclid 的典籍,完全不同的.歐氏的是完全用幾何的形式,而 Diophantus 的,則純粹是分析的,他指出代數式可以符號表示,實大有功於代數,不過他解二次方程式得出 $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$ 時,他說 $\left(\frac{a}{2}\right)^2>b$ 始能解,可見他也是不取虛數的,至印度之 Bhashara 時,雖稍進步而認識負數,但仍棄虛數,他曾說:負數之平方爲正,正數之平方亦爲正,正數之平方根爲正與負,而負數則無平方根,因負數非平方之數,於此可以見當時之思想,至十五世紀時, Pacioli 作 'Summa' 一書,他得出 $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-C}$, 亦說 $\left(\frac{b}{2}\right)^2>C$ 始可解,至十六世紀 Cardan 作大術時,仍不十分明白虛數.可是有虛數運算的痕跡了.即 Cardan 特別表出

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=40$$

也算是有了進步.到十七世紀之初,法之代數學家 Viela 雖然被人稱爲近世代數學之鼻祖,但他仍未討論到虛數,直至 Girard 因爲發明了『N次方程式有n個根』之定理,始承認了虛數,以滿足他的方程式的根,亦即滿足他的定理.十七世紀發明解析幾何之 Descartes 對於虛數,亦無明確之觀念,不過『虛數』這個名詞,是他創立的,而 Leibniz 之書上寫有一複雜之式,即

$$X^4+A^4=\left(X+A\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(X-A\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(X+A\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(X-A\sqrt{\sqrt{-1}}\right)$$

虛數之觀念逐漸顯明,同時 Newton 亦有一定則,以定方程式之虛根,但到十八世紀 Maclaurin 及 Campbell 方能完成,十八世紀之末,有一重要問題,卽虛數之圖表,在圖表術未發明以前,均以爲虛數爲荒誕而不可解者,及 1797 年挪威之測量學家 Wessel 發表論文說明虛數之圖表.1799 年丹麥皇家科學院搜集而記錄之.又有瑞士人 Argand 1806 年亦有此種論文發表,不過當時俱無人注意,直至 Gauss 時始打破虛數最後之反對,而創用一種獨立單位縱位標以表示虛數,且承認 $\alpha \pm \beta i$ 爲複數,此後學者始明白承認虛數爲數而另成立一虛數系統.

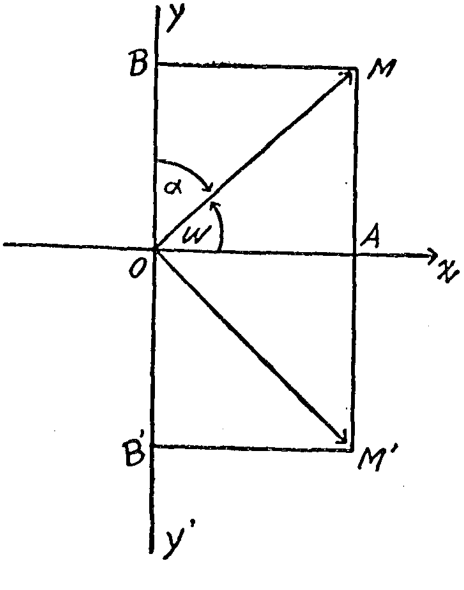
複數之幾何表示——自 Gauss 發明虛數與複數之幾何表示後,竟引出一個學術上重要的工具——向量分析,此情將於下段詳論 Gauss 的方法,是以獨立單位 i 之縱位標及實數之橫位標來表示

$$A \pm Bi$$

形式的複數.如圖:

O X 爲實數位標,以實數 1 爲單位.O Y 爲虛數位標,以 i 爲單位,在 OX 上取實數 a,在 O Y 或 O Y' 上取虛數 b i 或負 b i,如是得 A, B, B' 點,由此三點,各作垂線出去得兩交點 M, M',則 M 點就代表

$$a + bi$$



而M'就代表 $a-bi$,

而合M,M'兩點,可寫成

$$a \pm bi,$$

由此就生出複數的模(Modulus)及幅(Amplitude)來,今詳細解釋如下:

複數之模(Modulus),即OM之絕對長以$\left|\overrightarrow{OM}\right|$表示之由

$$\triangle AOM = Rt\triangle,$$

$$\therefore \quad \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

幅(Amylitude),即W角.

$$\because \quad a = \left|\overrightarrow{OA}\right|,$$

即向量$\overrightarrow{OA}$之代數值,亦即$\overrightarrow{OM}$在OX上之投影.

$$\therefore \quad a = \left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos(OX,OM).$$

又 $\because \quad \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{a^2+b^2},$

(OX,OM)用W代之,

$$\therefore \quad a = \left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos(OX,OM)$$

$$= \sqrt{a^2+b^3}\ \cos W.$$

而 $$\cos W = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$\therefore \quad W = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

又b是向量$\overrightarrow{OB}$的代數值亦是$\overrightarrow{OM}$在OY上的投影,

$$\therefore \quad b = \left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos(OY,OM),$$

但 $$(OY,OM) = (OY,OX) + (OX+OM)$$

$$= -\frac{\pi}{2} + W.$$

$$\therefore \quad b = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos\left(-\frac{\pi}{2} + W\right)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\ \cos\left(-\frac{\pi}{2}+W\right)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\ \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2}-W\right)\right]$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-W\right)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\ \mathrm{Sin}\ W.$$

$$\therefore \quad b = \sqrt{a^2+b^2}\ \mathrm{Sin}\ W.$$

而 $$\mathrm{Sin}\ W = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\therefore \quad W = \mathrm{arc\ Sin}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

〔按:角之正負是以軸爲標準,由軸向反時鐘方向進行的是正,否則爲負,如圖上W是正而α是負也〕.

由以上的情形看來,若a,b已知,則

$$a \pm bi$$

之模,幅都可定.模定就是量定了,而模是有正負的.所以其向(sense)亦定.幅定了,即角之方位(Direction)定了.故一'複數'具備一'向量'成立之要素,請俟下段申論之.

虛數及複數理論之推廣——虛數之單位爲i$(\sqrt{-1})$,即以i$\equiv\sqrt{-1}$.爲單位而成一虛數系.以1爲單位演進而成之系統,即爲實數系.凡屬此各系統之數,都服從算學上之三大算律:

1. 調換律(Commutative Law.)

$$a+b=b+a, \quad ab=ba.$$

2. 結合律(Assosiative Law.)

$$a+b+c=a+(b+c)=(a+b)+c.$$

$$abc=a(bc)=(ab)c.$$

3. 分配律(Distributive Law).

$$a(b+c)=ab+ac,$$

或 $$(b+c)a=ba+ca.$$

算學的運算都是由加法乘法出發推演的,故可以說算學之運

算爲加與乘·被計算之對象即爲[數],而[數]不論是實數或虛數,都是絕對服從算律的.假如 a, b, c, 所代表的東西幷不是數就不一定了.如微分符號

D,積分符號$\int$,非有特別之條件,則

$$D_{(2)}\ D_{(1)} \neq D_{(1)}\ D_{(2)}$$

又

$$\int_{(2)} \int_{(1)} \neq \int_{(1)} \int_{(2)}$$

但是也可以說,D,$\int$都是符號,而不是數,本無服從算律之義務.再如近世代數上之矩陣(Matrices).

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

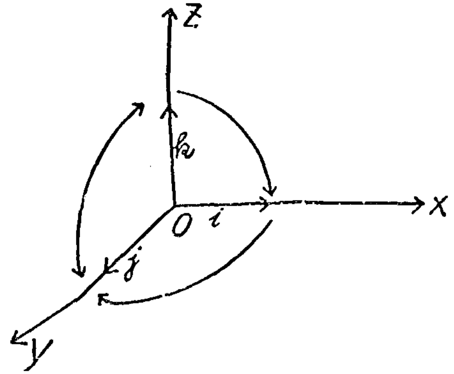
此亦可以說矩陣是數的陣勢,亦無非服從算律則不可之理.

輓近之算學家,對於此種情形,極爲注意,遂想根據這点原理出發,以立一新算學.

1843年,十月十六之夕,住在蘇格蘭京城Dublin的Hamilton,偕其夫人散步於皇家運河(Royal Canal)之Broughem橋上,忽有所感,即以小刀畫一基礎公式於橋之石基上,即

$$i^2 = j^2 = k^2 = i\,j\,k = -1.$$

此即推廣複數之單位爲四個單位 1, i, j, k, 以成立四元法(Quaternious)而 i, j, k, 之定義,如次



$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j,$

$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j,$

此即不服從乘法之調換律,而 i, j, k, 即顯然不是普通的數,可解释如下:

、其中之 i 可視爲代表 O X 軸上之單位向量，j 爲代表 O Y 軸上的單位向量，k 爲代表 O Z 軸上的單位向量，牠們都是向量，所以牠們的乘積也是向量乘積，算律是數所服從的，今 i, j, k, 是向量而非普通之數，即無服從算律之義務，故其乘積不能互換，互換即得負值，因向量分析所用之位標與解析幾何同，即以觀測者仰臥於 O Z (其足在原點)其向爲由左而右爲正，由右而左爲負.

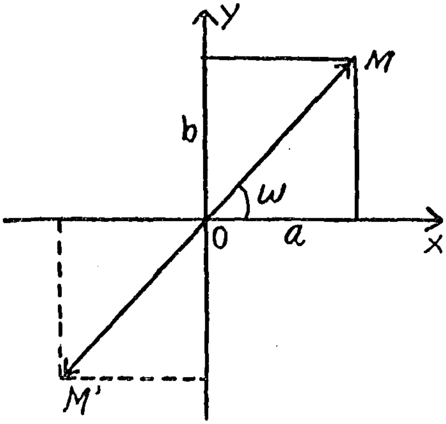
現在我們談談向量成立之要素.向量之成立，專賴三端.

1. 向 (Sense)

2. 量 (Magnitude)

3. 方位 (Direction)

有此三要素，即定一向量，有一向量，亦必具備此三要素.向量之符號通常以箭頭(⟶)表之，如 $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{a}$, 即表示向量.今設 $\overrightarrow{OM}$, 是一向量，則如圖.



$\overrightarrow{OM}$ 之向即爲由 O 到 M, $\overrightarrow{OM}$ 之長即爲其量，而 $\overrightarrow{OM}$ 與 O X 所成之角 W，即爲其方位，反之，如有一量爲 O M 而具備此三要素，則 O M 是一個向量，以 $\overrightarrow{OM}$ 表示之.

在前已談過，如複數一 a+bi 中之 a, b, 已知時，則其模

$$p = \sqrt{a^2 + b^2}$$

爲已知，複數之幅

$$W = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

亦爲已知.而複數之模,即相當於向量之向與量, 複數之輻即向量之方位.故有一複數即相當一向量,有一向量即相當一複數,此即虛數及複數之理論變爲分析的旨趣.

向量分析上之兩大乘積,即內乘積(inner product)及外乘積(Outer product). 或向量乘積(Vector product). 茲舉兩大乘積,以示明複數在向量分析之應用,設兩向量

$$\overrightarrow{AB} = Z = x + yi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = re^{i\varphi}$$

$$\overrightarrow{PQ} = U = a + bi = c\cos r + ic\sin r = ce^{ir}$$

由定義則向量之內乘積爲

$$(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ}) = ax + by = rc\cos(\varphi - r) = \frac{1}{2}(ZU_o + UZ_o)$$

外乘積爲

$$[\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ}] = ay - b\times = rc\sin(\varphi - r) = \frac{1}{2i}(ZU_o - UZ_o)$$

由此則兩向量之垂直條件,即

$$ZU_o + UZ_o = O.$$

兩向量之平行條件,即

$$ZU_o - UZ_o = O.$$

於此可見複數與向量之關係之一般.

向量分析學之成功,是數學史上一個非常重要的事蹟,因爲這種學說,開闢了算學的一個新途徑,精深縝密之理想造成一種奇巧的,很有力量的學術工具,現今用這種工具,推演舊的物理學,已得非常便利之效用,而新的物理學藉此工具推進者尤多,美國 Wilson 教授擴張向量分析於四度空間,以應用於相對論,前途發達,正未可限量,於此回頭看我們所講之虛數,在古人發明虛數的時候,恐未曾夢想到大有功於今日現實世界之研究,看他們所稱虛數之名,即知其用意,所以在此更可加足我們不求有用而自有用的求真理之勇氣,這就是要講虛數及複數理論推廣的一點區區之意.

中等算學內所習見之數之系統,於斯已告完成,茲借余介石先生所作之數系(見算學通論)表來結束.

系數表

數系	推廣的理由	
整數		疏性
負數	使 $a = x + b$ 常常得解	
分數	使 $ax = b$ 常常得解	
有理數		密集性
無理數	使 $x^2 = 2$,一類的方程式得解	
實數		連續性
虛數	使 $x^2 = -4$,一類之方程式得解	
複數	使一切方程式有解	有方位

幾何畧論

嚴棄瑩

此爲鄙人講稿之一,以原稿較長,爰删去數節,以成斯篇——廿三年八月,作者

幾何學之起源及其類別——公理與公設之意義——平行線之研究——非歐幾何學——三角形三內角之和——作圖題——軌跡教學談

1. 幾何學之起源及其類別——幾何學發源於埃及,初僅「量地」之意,蓋古代埃及人民,生活於尼羅(nile)河畔,河水時漲時落河岸時沉時現,國家爲確定界線,整理田賦起見,乃不得不從事於量地,所謂量地云者,僅一種簡單的觀察與夫粗率的計算而已.後經 Thales (640 — 546 B. C.) 希臘七賢 (Wise man) 之一)之介紹入於希臘,所研究之材料推廣至於衣料,於是直線之研究以起,降及 Pythagoras (約 580 — 500 B. C.)幾何學始實際上變爲測量之科學,待 Plato 出,幾何學之基礎方得完全確立. Hippocrates (約 430 B. C.) 暨其他諸氏復根據少數公理與定義系統的用論理的方法研究命題,其最著名者自爲Enchid (約 330 — 275 B. C.)氏之幾何原本 (Elements of Geometry),迄今仍爲初等幾何教本之惟一典型焉.

有明徐光啟氏譯幾何原本爲中文,是爲歐西幾何學入中國之始,氏之譯 "Geometry" 爲「幾何學」蓋音意兼顧者也.

洎乎近代以所據原理之不同,而幾何學有歐氏非歐氏之分,以研究方法之各異,而幾何學又有綜合解析之別.更有別幾何學爲數量 (metris) 與投影兩類或他種分類者,要皆由立足不同所致.吾

人在中學所讀之幾何爲歐氏綜合數量幾何,而所讀之解析幾何則爲歐氏解析數量幾何.

2. 公理與公設之意義——歐氏於其幾何原本中述公理五,公設亦五,玆依據 Heath 英譯 Heiberg 訂正版述之如次:

公理

1° 等於同量之量互等.

2° 等量加等量其和亦等.

3° 等量減等量其較亦等.

4° 凡能相合者相等.

5° 全量大於其分.

公設

1° 由任一點得引一直線至他點.

2° 任一直線得雙方任意延長.

3° 以任一點爲中心任意長爲半徑得畫一圓.

4° 凡直角均相等.

5° 二直線爲一線所截,若在同側二內角之和小於二直角,則此二直線延長後必於此側相交.

後人以其公理概係關於等量或不等量,公設概係關於幾何事項,於是而推定:

公理爲一切算學之基礎,

公設爲幾何學之基礎.

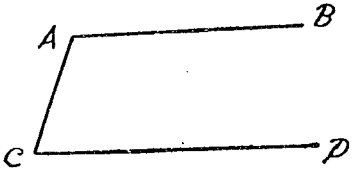
然其公理四明明屬於幾何方面,而公設五直至第一篇之定理29,無法証明,方予陳述.且歐氏對於其公理,亦僅稱爲 Common notion,而對於其公設亦僅謂"Let it be requested……"並無axioms與postulates二語,更絕未指明爲何科之基礎,甚至于其述完公理之後,力言"對于我的公設,我請求(request)你們同意.對于我的公理,我主張(claim)你們同意."從可知歐氏原意,當爲:

公理乃自証之理,不容懷疑;

公設則暫且假定,或可討論.

今之教科書中,關于公理公設,多所變動,惟間有改稱平行公設爲公理者,則爲絕大錯誤!

3. 平行線之研究——三種假設~~~~AB稱爲平行于CD時,



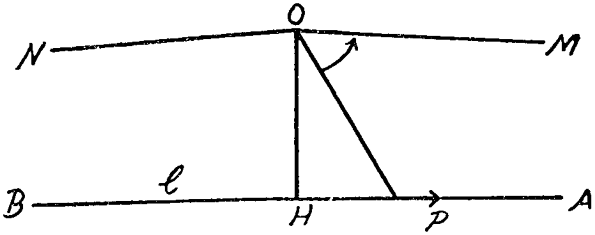
1° AB與CD在同一平面上.

2° AB與CD縱延長亦不相交.

3° 在∠CAB中任一過A之直線均與CD相交.

茲述關于平行線之三種不同之假設如次.

取任一直線 l,任一不在 l 上之点O.



作OH⊥l,並在 l 上取任一點P.則直線OP截 l 于P,當P在 l 上離開H向前移動時則生兩種情形如次:

1° P向前移動不已,HP伸至無窮遠,OP于是達一有定的極限位置OM,而OH乃稱爲平行于HA.若P沿 l 依另一方向移動,則OP將達另一極限位置ON,而ON∥HB.

歐氏(Euclid)謂OM與ON合成一直線;

羅氏(Zobachevsky)謂OM與ON乃兩線.

2° 黎氏(Riemann)謂尙有一種情形,即P于移動一定距離之後,仍回至出發點.換言之,即凡直線均相交.

由是關于平行問題,有三種不同之假設:

過線外一點必可而亦僅可作一直線平行于此直線——歐氏

過線外一點可作二直線平行於此直線——羅氏

過線外一點不能作任一直線,平行於此直線——茵氏

平行之假設既異,幾何之系統以分,於是而有歐派,羅派,茵派之別.所謂羅派茵派即通常之所謂非歐派也.惟含有關平行公設之命題外,三派之幾何又罔不相同焉.

有以歐氏幾何合於吾人經驗事實之需要,且能說明吾人所居之空間,因而懷疑非歐幾何者,殊不知事實証驗之幾何,與邏輯推理之幾何截然兩途,蓋即以經驗言,吾人以有限之時間觀察于宇宙間有限之部份中,其所得固已有限,且所謂幾何也者,係由某種前提所推得某種結論之學科,而其前提所論之事是否存在,則爲另一問題.如吾人思考代表吾人所居外界性質之幾何,則爲一種應用算學之研究.歐氏幾何固能說明此性質,然而能說明此性質者固不僅歐氏(即如羅氏幾何,如取一適宜之參量 Parameter, 則亦能說明外界事物之關係)且惟有非歐幾何之發明,然後幾何學之本性方得昌明,吾人固無從加以懷疑也. Poincare 曰:「一種幾何不能較眞於他種,僅在較便耳.」

反之,有因有歐氏幾何之發明,因而或覺歐氏幾何之價值不無稍減者.其實鵲巢鳩不能佔歐氏之席,亦决非非歐派可能奪.蓋歐氏之平行公設,决不能由其所選精之其他假設所可推出,今惟有歐派幾何之發明,方足証明此所以不能推出,正歐氏最大之成功而非其缺點. Heath 曰:「吾人試觀歷二十世紀中幾許幾何名家欲証此公設,而終歸失敗,當不能不贊歎原著者之天才,已知其幾何系統中所不能缺之公設果爲不可証明者矣.

總之,在解析幾何學中,引用笛氏座標固可,引用極座標亦可,歐派幾何與非歐派幾何亦猶是耳.

玆將歐羅兩氏關於平行線相同之定理,附述如次:

1° 平行於某直線之直線在其線上任一點均保其平行性.即一直線若在其線之一點平行於他線,則在線上各點,亦均平行于該

線.

2° 若此線平行於彼線,則彼線亦平行於此線.

3° 若二直線均平行於第三直線,則此二直線互相平行.

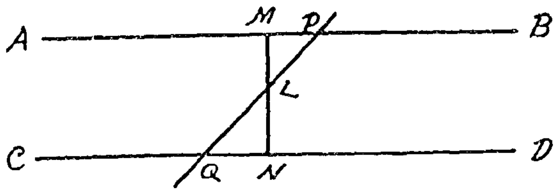
證明從畧

4. 非歐幾何學——歐氏幾何學閱者諒已嫻熟.茲就羅茵兩派幾何學,畧述一二定理,以見一斑:

1° 羅氏幾何學

定理 1. 二直線為一直線所截,若其同側內角互為補角,則此二直線既不相交又不平行.

證 令AB,CD兩直線為P,Q截於PQ二點,而$\angle APQ+\angle PQC=\frac{\pi}{2}$.



因$\angle PQC+\angle PQD=\frac{\pi}{2}$,故$\angle APQ=\angle PQD$.

於PQ之中點L,作$LM\perp AB$, $LN\perp CD$,則$\triangle LMP\cong\triangle LNQ$,而$\angle PLM=\angle QLN$.故MN為一直線,且同時垂直于AB,CD兩線.

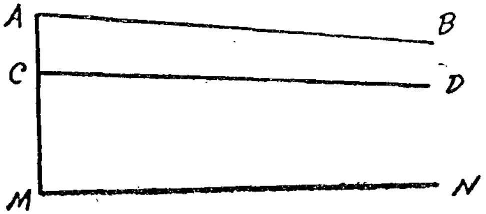
由對稱理,若AB與CD交於MN之一側,則亦必交於MN之他側.而此惟根據茵氏假設為可能,且AB與CD若於一方向平行,則亦必於另一方向平行,而此又惟根據歐氏假設為可能,由是在羅氏幾何學中,AB與CD既不相交,又不平行.

推論.若二平行線為第三線所截,則其同側內角之和必小于二直角.

定理 2. 一點至一直線之垂直距離P愈大,則該點對于該直線之平行角$\pi(p)$愈小.

證. 作直線$AM\perp MN$.過A作直線$AB\parallel MN$.再于AM上取一點C,過C亦作直線$CD\parallel MN$.如斯,則$AB\parallel CD$,而

$$\angle MAB+\angle ACD<\pi$$



但 $\angle MCD + \angle ACD = \pi$

故 $\angle MAB < \angle MCD.$

是故P愈大,則$\Pi(p)$愈小.

$\Pi(p)$爲(p)之連續函數,

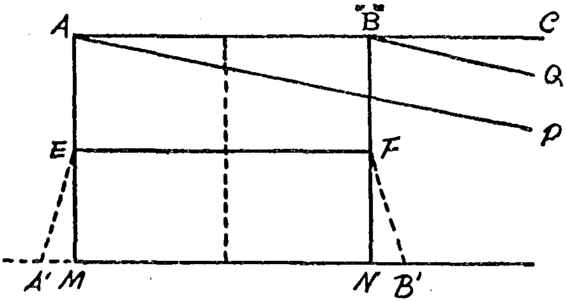
$p \longrightarrow \infty$時,$\Pi(p) \longrightarrow 0$,

$p \longrightarrow 0$時,$\Pi(p) \longrightarrow \frac{\pi}{2}$.

推論.若垂線之長相等,則其平行角亦等.

定理3. 若二等長直線于同側垂直線于第三直線,則該二等線他端之連線長于第三線,而此連線與垂線成一銳角.

証. 令二等長直線MA及NB各于M點及N點垂直于直綫MN,連接AB,



若以一直綫垂直平分MN,則由對稱理,知

$$\angle MAB = \angle NBA.$$

作AP與BQ平行于MN.

則 $\angle PAB + \angle QPA < \pi$,

但　　$\angle QBC + \angle QBA = \pi.$

故　　$\angle PAB < \angle QBC.$

又　　$MA = NB$

故　　$\angle MAP = \angle NBQ$

由是　　$\angle MAB < \angle NBC$

亦即　　$\angle NBA < \angle NBC$

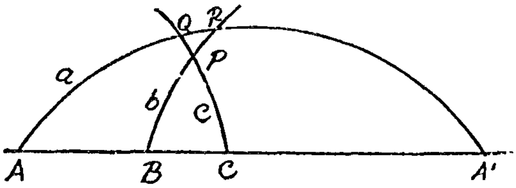
故　　$\angle NBA$ 與 $\angle MAB$ 均爲銳角

茲於 M A 上取中點 E, N B 上取中點 F, 連接 E F. 若以 E F 爲軸而將 A E F B 摺於 M E F N 上,則因 ∠ M A B 爲銳角,故 A, B 二點必各落於 M N 之延長綫上二點 A', B' 故 A', B' > M N 即 A B > M N.

2° 芮氏幾何學

定理 1.　凡垂直於同一直線之諸直線,過於與該直線成一定距離之某點.

證. 于任一直線 A A' 上之三點 A, B, C 作三線 a, b, c, 垂直於該線,其交點 P, Q, R 如圖



所示若延長 a, 則 a 將交 A A' 于 A' 或他點.茲令 A' 表示 a 延長後首交 A A' 之點,則

$$QA = QC = QA'$$

$$RA = RB = RA'$$

蓋各爲二等腰三角形之二邊也.

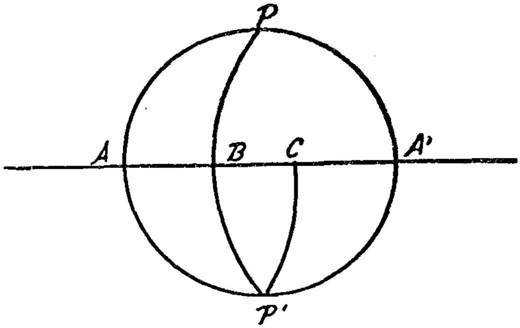
由是 Q, R 均爲線 A Q A' 之中點而 Q 必重合於 R.

同理,知 P, Q, R 三點必均重合,姑以 P 表之.

故所有於同側垂直於 A A' 之直線均交於 P, 而 P 與 A A' 上任

一點等距,此相等之距離可以 q 表之.

定理 2. 凡過任一點之諸直線必再交於某點,此二點之距離爲定長.



証: 命 P 爲任一點, P A 爲過 P 之任一直線.取 P A = q, 作 A A' ⊥ A P. 命 P B 爲其他過 P 之任一直線交 A A' 于 B,則 P B ⊥ A A'. 延長 P A 至 P', 取 A P' = P A, 並連接 P' B. 則

$$\triangle APB \cong AP'B$$

因而 $P'B = PB = PA$

$$\angle ABP' = \angle ABP = \angle R$$

故 P B P' 爲一直線

而 $PP' = 2q$

如斯之二點稱爲峙點 (antipodal points)

推論. 凡過 P 之諸直線必過 P' 而回至 P, 且有定長.

証: 如上圖過 P' 作 A P' 之垂線,則必交 A A' 于某點 C 而 P' C 必垂直於 A A',在 A A' 上取 C A' = A C 並聯 P, A' 及 P', A',如斯,則 P A', P' A' 均垂直於 A A',而 P' A' P 爲一直線,且

$$\triangle AP'C \cong \triangle CP'A'$$

因之 $\angle AP'C = \angle CP'A' = \angle R$

而 A P' A 亦爲一直線

故 P B 延長時必過 P' 而回至 P, 而凡過 P 之直線俱過 P' 而回

至P,其長爲4q.

然則P與P'確爲不相重之二點耶?曰,于此兩種假設:

a° P'即P.在此假設下,

i)二直線僅有一公共點.

ii)不相重之二點決定惟一直線.

iii)任一直線之長爲2q.

b° P'非P,在此假設下.

i)二直線可有二公共點

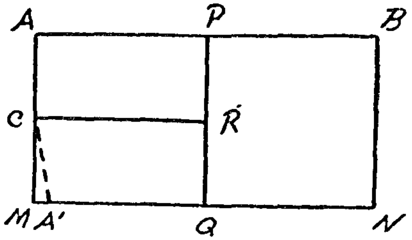
ii)不相重之二點,如非峙點,則此二點,決定惟一直線,否則可作無數直線通過之.

iii)任一直線均爲閉線其長爲 4q.

凡此均甚易由上述定理知之,且在第二假設下之黃氏幾何,實無異于球面幾何.

定理3. 若二等長直線于同側垂直于第三直線,則該二等線他端之連線短於第三直線,而此連線與垂線成一鈍角.

証: 作MA⊥MN,NB⊥MN,並取MA＝NB而連接AB,且令



P,Q各表示AB與MN之中點,如圖所示.

倘以PQ爲軸將APQM摺至BPQN上,則A將落B,∠A＝∠B,∠APQ＝∠BPQ＝∠R故AD乃MA在A點至PQ之垂直距離.

因MA與PQ終必相交,故AP必小於MQ.

若再於MA上取中點C,QP上取中點R,並連接CR.則以C,R爲軸將APRC摺至MQRC上,A必落於MQ上之某點A'而A'Q＜MQ,

$$\angle CA'Q > \angle R$$

故 $AP < MQ$, 因之 $AB < MN$, 且

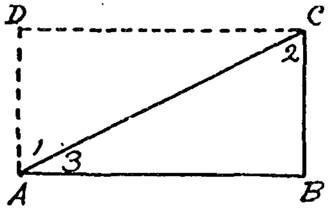
$$\angle A = \angle B > \angle R$$

5. 三角形三內角之和——茲就歐羅芮三氏之假設而研究邊長有限之三角形三內角之和.

定理 4. 于歐羅芮三派幾何學中,三角形三內角之和分別等于,小于,大于二直角.

証 1° 先就直角三角形論之.

令 $\triangle ABC$ 爲一直角三角形, $\angle B = \angle R$.



于 A 點作 $AD \perp AB$, 並取 $AD = BC$. 則 $\triangle\triangle CAD, ABC$, 中, $AD = BC$, $AC = AC$.

在歐氏幾何中 $DC = AB$, 故 $\angle 1 = \angle 2$;

在羅氏幾何中 $DC > AB$, 故 $\angle 1 > \angle 2$;

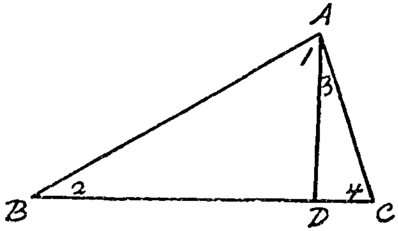
在芮氏幾何中 $DC < AB$, 故 $\angle 1 < \angle 2$;

由是在此三派幾何中 $\angle 1 + \angle 3$ 分別等于,大於,小於 $\angle 2 + \angle 3$, 但 $\angle 1 + \angle 3 = \angle R$, 故在此三派幾何中

$$\angle 2 + \angle 3 \text{ 等于,小于,大于 } \angle R.$$

2° 茲就任意三角形証之.

在邊長有限之任一三角形中,至少有二角爲銳角,故自第三角頂引垂線至對邊,必過對邊於三角形內.如下圖,

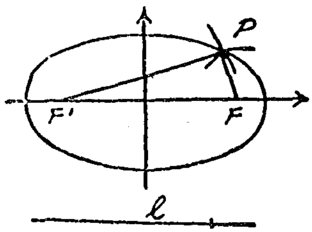


設 B, C 均爲銳角,自 A 引 BC 之垂線,必交 BC 于 D 點.如斯,則

∴ A B D, A C D 均為直角三角形,
故於歐,羅,黃三派幾何學中,由 1° 知
∠1＋∠2 與 ∠3＋∠4 均分別等于,小于,大于 ∠R,
故 ∠1＋∠2＋∠3＋∠4 分別等于,小于大于 2∠R
故 ∠A＋∠B＋∠C 等于,小于,大于二直角.

6. 作圖題——各派幾何,已畧加論列,茲再就作圖題一研究之.原幾何題除定理外,厥為問題.而問題之解答,根據歐氏假設※,僅能應用規矩.故規矩所不能解者即認為不可能.然吾人應用規矩,必有限制.若毫無限制,使用至無限次,則初等幾何學所認為不可能之問題,結果亦可作出.茲以橢圓為例,說明如次:

自 P 點至二定點 F, F' 之距離和為常數.則 P 之軌跡為橢圓,試作之.



令 ℓ 為此常數,則先以 F 為中心,小於 ℓ 之長為半徑畫一圓,再以 F' 為中心,ℓ－FP 之長為半徑畫一圓,此二圓之交點即橢圓之點,若變化 F P 之長而無限制的作圓,則最後必可作出橢圓

故無限次使用規矩,橢圓亦可作出.由是在初等幾何學,固僅可應用規矩,且亦僅可有限制的應用規矩,此乃作圖題之根本原則.

歷史上所不能作之問題,最有名者凡三:

1° 方圓——作一正方形與一已知圓等積,

2° 三分角——將一任意角三等分之,

3° 倍立方——作一立方形使其體積等於一已知立方形之二倍

※根據公設 3° 得用規,根據公設 1°,2° 可用矩,凡用規矩所不能作之問題,雖用其他機械可以作出,但在歐氏幾何中,則認為不可能矣.

之三問題,以限於歐氏之公設,僅用規矩,决不能作.然在解析學未產生前,算學家按圖索驥,判定未由.故歷史上之勞苦而功不高者已不知凡幾矣!茲分述之.

1° 方圓.

設圓之半徑爲 r 所求之正方形每邊之長爲 X 則

$$X^2 = \pi r^2$$

即 $$X = r\sqrt{\pi}.$$

於是此方形是否可作,依 π 之值而定.

往古算學家,群以爲 π 之值可求,直至 Zambert (1768) 與 Zegendre (1794)証明 π 爲不可約數 (incommensurable number) Zindemann 証明 π 爲一超然數(Transcendental nunber),於是此問題之不能作以規矩,方能决定.

然圓之面積等於其周長與半徑相乘積之半,而一圓可在一直線上轉 (roll) 而不滑 (slip),故其周長可作.倘以此直線之半爲底,圓之半徑爲高而作一三角形,則此三角形之面積應與此圓相等,由此可更作一面積與此三角形相等之正方形,故方圓問題亦未始不可解,特非規矩所能解,亦非普通之所謂作圖耳.

2° 三分角

設所求之角爲 X,則某任意角當爲 3 X. X 與 3 X 之代數的關係,可表以方程式.

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

以 cos 3 x 爲一已知數,故可代以常數 C.

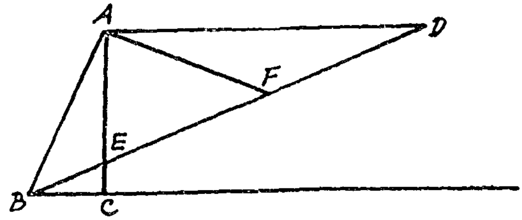
若再以 y 代 cos x,則上之方程式即變爲 y,之三次方程式.

$$4y^3 - 3y = C.$$

除已知角爲數特殊角如 90°, 180°, 360° 等外此方程式之根不能以規矩作之.

歷史上最初解此問題之方法,似爲三四世紀時 Pappus 於其所著 Collection 中所引述之下法.惟發明者誰,已不可考.

命∠ABC爲一任意角.作AC⊥BC,作AD∥BC,連接BD,交AC於E並取DE＝2AB.則



$$\angle ABC = 3\angle EBC.$$

何則?△DAE爲一直角三角形,AF＝EF＝FD.故△ABF,AFD均爲等腰三角形,而

$$\angle ABF = \angle AFB = 2\angle ADF = 2\angle EBC$$

由是此問題乃變爲『自B作直線BD使在DE＝2AB之情形下交二直線AC與AD.』

此所引出之問題可有數法解之,但均非規矩所能濟事,由Nicomedes所發明之蚌線(Conchoid)可求出D但蚌線亦不能作以規矩.

3° 倍立方.

設a爲已知立方形每邊之長,

X爲所欲作之正方形每邊之長,則應有

$$X^3 = 2a^3$$

即須 $X = a\sqrt[3]{2}$.

若 $X = a\sqrt[3]{2}$ 可用規矩作圖,則此題有解,但根據歐氏公設,必不可能,故亦無解可言.

Hippocrates將此題化爲

『在 $a: X = X: y = y: 2a$ 中求X與y』

蓋此二式可寫爲

$$ay = x^2 \text{ 與 } y^2 = 2ax.$$

因之 $X^4 = a^2y^2 = 2a^3x$

即 $X^3 = 2a^3$

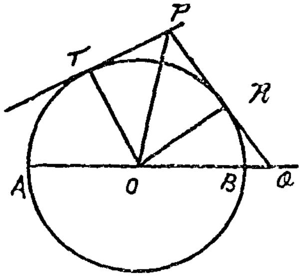
以上二方程式均爲拋物線,故此題可求此二拋物線之交點而解之.

Archytas (plato之友,約 400 — 350 B. C.)與其他諸氏曾用機械法以解決此題, Archytas 法涉及立體幾何,其他諸法則引用高次曲線,而Diocles之蔓葉線(Cissoid)尤負盛名.

三大問題,已如上述,若有一問題,不知其是否能解,則就綜合幾何立場言,可明証此題是否化歸一不可能之問題,而間接斷定之.茲舉一例:

已知一圓之直徑AB及一切線TP,求作另一切線,使其又於夾前二線間之部份爲切點所平分.

設問題已解決,PQ爲所作之切線,R爲切點,則



$PT = PR = RQ$

$OT = OR$

$\angle OTP = \angle ORP = \angle ORQ = \frac{\pi}{2}$

故 $\triangle OTP \cong \triangle OPR \cong \triangle ORQ$

$\therefore \angle TOP = \angle POR = \angle ROQ$

故PQ如可作,則任意角$\angle TOB$可三等分;但三分一任意角事實上不可能,故本題亦不可能.

一作圖題如有一解或數解,則稱爲確定,如有無窮解則稱爲不定.無合于所設解之,則稱爲無解.無解與不能解異,蓋不能解,乃指不能以規矩解之,並非此解不能存在也.若於規矩外再兼用他種器械,則此不能解之問題,仍可解決.即如方圓問題,若用積分器(Integraph)即可解決矣.至解答不定者,因條件不足故.無解者因所給之條件互相矛盾,根本不能成立,或所與條件適處特殊位置,致使所求之結果,或遠遁至于無窮遠處,或幻化入于虛境(若在近世幾何,則後二種爲無窮能或虛解,仍得歸納特例,冶于一爐,是爲綿續原

理，）皆無待於作圖者也.

故任一作圖題，其互相獨立之條件，固不容少，亦無庸多，更不能互相矛盾.例如欲作一三角形，必須有三個互相獨立之條件，方能作出，（已知其三角，實無異於兩個條件，因由任二角可推出第三角，）欲作一四邊形，除同于三角形之情形外，尚須決定一頂點，故必須 $3+2=5$ 個互相獨立之條件，推而至於欲作一n邊形，必要有 $3+2(n-3)=(2n-3)$ 個互相獨立之條件.此等所給之條件，絕不容互相矛盾，否則即無解可言矣.

作圖題可分定位，不定位兩種;解任一作圖題必合解析，作圖，証明，討論四項，有爲簡便起見，而省却解析，討論二項，甚至並証明而亦畧去者，殊爲所宜.蓋『解析』乃練習解題之唯一方法，『討論』乃訓練思維之不二法門，而作圖有無錯誤，尤應加以『証明』，是均不能且亦不應忽略者也.至專就作圖言，方法亦至繁夥，限于篇幅，姑予略去.

7. 軌跡教學談——定一點必須二條件，有時所與之條件不足，其點遂致不定.是點恒可有若干，或無數位置之綿續而成一圖形，此軌跡之所由生也，故軌跡可謂爲一平面內有公共性之點群.

其于初等幾何學，軌跡乃學生所最難瞭解之一部，考其原因約有數端:

1° 軌跡二字，異常生冷;

2° 教科書中，語焉不詳;

3° 証一定之理較易，定萬變之形爲難;

4° 在學者尚未明瞭軌跡之意義以及如何探求軌跡前，即教以繁複之証明.

故吾人認爲教學軌跡時，其主要部份，至少有三:

1° 軌跡之認識;

2° 軌跡之探求;

3° 軌跡之証明;

玆分論之,

1° 軌跡之認識——如何方能使學生獲得軌跡之基礎觀念?吾以爲在開始教學軌跡時,僅須令學生探尋某人或某物在某種情形下所走之路徑,而絕不談及「軌跡」兩字,如斯,則學生之注意力將集中于此路徑,而不甚注意走此路徑之某人或某物,反復舉例,直至學生已大體明瞭,然後再以幾何上之軌跡爲例,在証明以前,絕不宜教以軌跡之算學的定義.

啟發學生使認識軌跡之例甚多,略舉如次:

a° 電梯上下時,其路徑如何?

b° 火車來回時,其路徑如何?

c° 一女孩乘坐汽車,若汽車在一圓路上開駛,則此女孩所走之路徑如何?

d° 以定長之欄繩縛一小牛于樹上,若此小牛緊張其繩走動時,則其所走之路徑如何?

e° 一木梯斜倚于牆壁上,倘一人登此木梯正達中間時,另一人在此梯之下端將此梯逐漸拖離牆壁,則此人之足部將走如何之路徑?

f° 一幼童划船過河,倘此童必須其船與岸上兩樹等距離,則此船應如何划去?

舉例時應選擇本地適宜者,以上所述,僅示一斑.

學生對於軌跡既已有相當之認識,即可進而討論

2° 軌跡之探求——普通教科書中,往往先述軌跡爲何種圖形然後再加証明,對于探求方法,多付缺如,于是學生讀而生厭,且上焉者亦僅能証驗已得之軌跡爲合理,而不克闡明軌跡之情形于未得之先,故一遇軌跡題,遂無法入手.

其實所有軌跡題,僅有二種:

a° 指明軌跡爲何種圖形者;

b° 未曾指明者.

其已指明者,僅須依法証明,此處無庸討論,即未曾指明者,在初等教科書中實際上亦僅直線或圓,或一綫分或一圓弧,甚或即為一孤立點;其為直綫與圓同時合成某點之軌跡者,事實上絕不多見,茲略述探求之步驟如次:

a° 軌跡種類之預測.——分四項論之:—

i) 直綫之預測,可因所求軌跡是否能至無窮處定之,其能至無窮遠者,必為直綫,否則決非直綫.

ii) 圓之預測,可因所求軌跡有無起訖之處而定之,其無起訖點者必為一圓,否則當為一綫分或一圓弧.

iii) 直綫或綫分與圓或圓弧之判別,可求出合于所設條件之三點,若連其任二點而第三點在此連綫上,則為直綫或線分,否則當為圓或圓弧.至線分與圓弧之判別,可求出軌跡上普通點與固定點之關係而比較教科書中之所謂基本軌跡以定之.

iv) 孤立點之判定,可因軌跡是否連續而定,凡連續者決非孤立點

b° 軌跡上特殊點之確定.——上述之判別方法,雖能預測軌跡之種類,然尚未足確定之.蓋軌跡上點之位置,移動莫定,須探求其動件與定件間不易之關係,然後方能守恆以馭變,故除題設之定件外尚須另求數特殊點,以應馭題之需要.

c° 任意點與特殊點之關係.——欲求其關係,可按預測之情形而比較基本軌跡以定之.

譬如觀電影時,獅追虎鬥,羅克繞汽車而奔,獅也,虎也,羅克也,汽車也,均所謂動件也,然而在電影片上,此等動件則又均固定之痕跡也,吾人何由而知其動?曰:門塲之旁,馬路之側,有樹木焉,有屋宇焉;樹木也,屋宇也,又均所謂定件也.樹木或屋宇既定,則影片放映時,獅虎等移動之路徑從可知矣.此移動之路徑相當于某點之軌跡,影片上固定之痕跡相當于軌跡上之某點,而樹木或屋宇則相

當于特殊點,是故吾人于軌跡題中,須先求出一或數固定之特殊點,次再求任意點與此等特殊點之關係,然後再以與基本軌跡比較,夫如斯,軌跡之一切定矣.

惟在學生練習描繪軌跡時,應令學生按所與之條件依次描繪若干點,直至其能自動發現此軌跡爲止,蓋可避免混淆也.

倘學生描繪之軌跡爲一直線,而學生又自己動的發現其爲直線即可順勢解釋此軌跡爲一直線,而此直線包含所有合于某條件之一群點,但決不含任何其他點;並隨時說明此無異于謂

"合于某條件之點之軌跡即一直線,

(a)所有合于該條件之點均在此直線上.

(b)軌跡上之任一點均合于某條件",

至是,方可教學者以軌跡之一般的定義.即不再作模稜之解釋.

軌跡之定義既明.即可進而研究

3° 軌跡之証明.——本上所述,可知定軌跡之條件應爲充要條件,故証明軌跡題必須同時証其正反兩面.

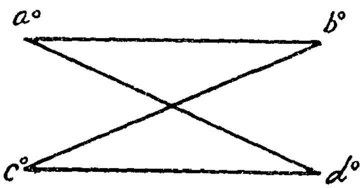
証明之術,普通書中,俱有論及.玆僅就下述數款作圖以明之.

a° 合于某條件之點,均在此圖形上,

b° 此圖形之點均合于某條件,

c° 不在此圖形上之點均不合于某條件(a°之反),

d° 不合于某條件之點均不在此圖形上(b°之反),



証題時,可視証法之熟便,而在左圖中取任一直線之兩端如a°與b°,或a°與d°,或c°與b°,或c°爲d°合爲一組以証之.

a°與c°或b°與d°,形異而實同,不能取爲一組,此等處亦應注意,否則勞而無功,殊非所宜.

初學者每于僅知合于某條件之點均在某一圖形上時,即貿然推斷合于某條件之點之軌跡即爲此圖形,或僅知某圖形上之點

均合于某條件時亦即斷定合于某條件之點之軌跡即爲某圖形,均屬錯誤,應舉例較正之,至學生最初練習証題時其題文中並須將『爲軌跡』一語爲實位,如有一題,其題文爲

『與二定點 A, B 等距離之點之軌跡乃線分 A B 之垂直平分線』

學生或將視『軌跡』爲假設,視『垂直平分線』爲終結,而以

『已知垂直平分線……

求証其爲軌跡………』

開始其証明.此難免之結果,常混淆于中學者之腦海中,故上之題文在學生初讀時應改爲

『線分 A B 之垂直平分線乃爲二定點 A, B 等距離之點之軌跡.』

如是,則黑白不致顛倒矣.

力學中之重要定律及其應用

謝厚藩講

1. 惰性原理;力之概念.

力學的第一基本原理,即是惰性原理;這是笛卡兒Decartes於1644年宣布,而由牛頓於1687年作成條文的.照這條原理所說,凡物體未受外間的原因以影響於其運動,則其速度之數量與方向,恒不改變.如果物體原來是靜止的,則仍爲靜止.

反轉來看,物體速度之數量或方向若改變了,或是兩者同時改變了,這種變更之所由起,必有原因.我們追求這種原因,就說是起於力之作用;所謂力是動之起因.

用直線來表示力,也是很早的事.Steviw於1600年即指示用直線來表示力,使線所含長度單位之數等於力之單位數,使線之方向,與力之方向相同,再用一箭頭以指示之.於是一段直線便完全代表一力.像這種有數量有方向的物理量,叫做有向量(Vector),或簡稱向量.反之,單用一數量即可完全決定的物理量,叫做無向量(Scalar).力,速度,加速度,動量等,屬於有向量;溫度,質量,電荷,磁量等,屬於無向量.

2. 質點之運動方程式.

力與速度兩個向量的聯絡關係,是討論運動的一件很重要的事項.這種關係,藉牛頓的運動第二定律而得一式以表示之.照這條定律所說,凡作用於物體的力向量,常與這物體的速度向量對時間之變更率成比例.就一個既定的物體說,這兩個向量之比率,似乎是一個常量,而爲此物體所特有;這常量即稱爲此物體之質量.

如把力與速度看作是向量而以 $\dot{F}$※與 $\dot{V}$ 表示,以m代一物體的質量(無向量)則牛頓第二定律,可以下列向量方程式表示:

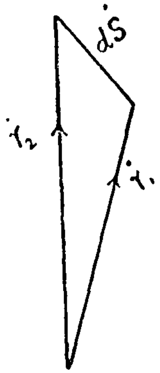
$$\dot{F} = m\frac{d\dot{V}}{dt} \qquad (1)$$

其中速度向量對時間之微分係數,$\frac{d\dot{V}}{dt}$,稱加速度,亦一向量也.

爲研究簡便起見,我們將假設一物體的全部質量集中於一点,這種理想上的点,稱曰『質点』(Particle). 質實說來,我們現在實祗研究物體之移動(Transtation),而把轉動(Rotation),振動(Vibration)的事項暫且不問.所以才有這種假想的點.

據此着想,一個運動的質點在任何一瞬的位置,可就一原點至該瞬的位置作一向徑(Radius-Vector)以決定之.

命 $\dot{r}_1$, $\dot{r}_2$ 爲向量在 t, $t+dt$ 兩瞬之值,則



$$\dot{r}_2 = \dot{r}_1 + \frac{d\dot{r}}{dt}dt \qquad (2)$$

如 $d\dot{S}$ 是 dt 時間所經過的路徑,則

$$\dot{r}_2 = \dot{r}_1 + d\dot{S} \qquad (3)$$

再者,速度的定義式,是

$$\dot{V} = \frac{d\dot{S}}{dt} \qquad (4)$$

或 $d\dot{S} = \dot{V}dt$

故由(2),(3)得

$$\dot{V} = \frac{d\dot{r}}{dt} \qquad (5)$$

如是 $\dot{b}$ 向量表示加速度,而加速度之定義既是說加速度是速度向量 $\dot{V}$ 對時間的變更率,故得

$$\dot{b} = \frac{d\dot{V}}{dt} \qquad (6)$$

或

$$\dot{b} = \frac{d^2\dot{r}}{dt^2} \qquad (7)$$

※ $\dot{F}$ 表示向量以下仿此

加速度既是速度對時間的微分係數，自可分解爲兩個分量其沿速度方向者，曰切線的加速度，垂直於速度方向者，曰法線的加速度．如以b_t, b_n單表示切線的加速度及法線的加速度的數量，則

$$b_t = \frac{dV}{dt} \tag{8}$$

$$b_n = V\frac{d\phi}{dt} \tag{9}$$

式中之ϕ爲速度向量，在dt時間所轉過的角．

設$AB = ds$，爲dt時間內所經過的路徑，則$d\phi$便是在A, B兩點的切線所夾之角．如命ρ爲ds段曲線之曲度半徑，則

$$ds = \rho\, d\phi$$

兩邊以dt除之，則

$$V = \frac{ds}{dt} = \rho\frac{d\phi}{dt}$$

$$\therefore \qquad b_n = \frac{V^2}{\rho} \tag{10}$$

質量與速度向量相乘之積，稱動量．如以$\dot{G}$表示動量，則

$$\dot{G} = m\dot{V} \tag{11}$$

因之

$$\dot{F} = \frac{d\dot{G}}{dt} \tag{12}$$

相乘積$\dot{F}dt$也是一向量，稱爲dt時間內作用於物體之擊量(Impulse)．故(12)式便表示道：動量之增量等於擊量．

由牛頓第二定律，可推出一條附則，以用於幾力同時作用於質點的情形．假設$\dot{b}_1$，$\dot{b}_2$是兩力$\dot{F}_1$，$\dot{F}_2$分別作用於一質點使其產生的加速度，則兩力同時作用此質點時所產生的加速度$\dot{b}$，本諸重疊原理，應爲

$$\dot{b} = \dot{b}_1 + \dot{b}_2 \tag{13}$$

以m分乘兩邊，則得

$$m\dot{b} = m\dot{b}_1 + m\dot{b}_2$$

因之，

$$m\frac{d\dot{V}}{dt} = \dot{F}_1 + \dot{F}_2 \tag{14}$$

此式的右邊,是兩力的向量和,爲一單獨的力向量,稱合力.故(14)式便表示道:一質點受兩力共同作用而運動,恰與受此兩力之合力而運動的情形相同.推之諸力,亦復如是.

3. 拋射運動.

一物體在地球重力場運動,這時的運動的微分方程式,是如下列:

$$\frac{d\dot{V}}{dt} = \dot{g} \qquad (1)$$

式中 $\dot{g}$ 是由重力而生的加速度,是一向量,其方向垂直向下.在緯度45°的區域,其平均值爲 981 Cm/sec²

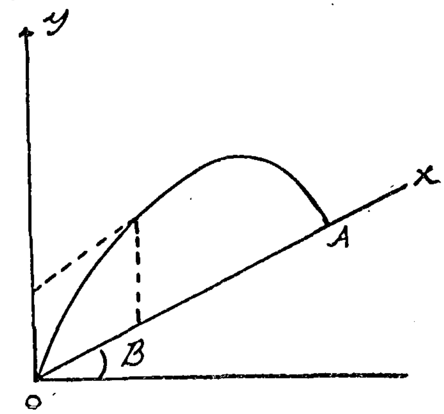
積分(1)式,得

$$\dot{V} = \dot{g}t + \dot{q}_o \qquad (2)$$

積分常量 $\dot{q}_o$ 是一向量,即 $t = o$ 時之速度,即初速也.

在地球的重力場內初速不爲零之運動,稱拋射運動(Projectill motion). 拋射方向依向量 $\dot{q}_o$ 而定,拋射速度之數量依 q_o 之數量而定.拋射方向與水平線所成之角,稱拋射角.

據(2)式看來,拋射體在 $\dot{q}_o$, $\dot{g}$ 兩向量所定的平面以內,即在一垂直平面以內也.現命此平面爲x-y平面,以 y 軸向上的方向爲正,x 軸水平與否均無不可;幷設拋射質點係在無阻的媒質中經過.



向量 $\dot{g}$ 是在 y 軸的負向;如以 u_o, v_o 代初速 q_o 沿 x, y 軸的分速度的數量,則(2)式的解析形式,便應如下:

$$\frac{dx}{dt} = u_o, \qquad \frac{dy}{dt} = v_o - g t \qquad (3)$$

$$X = u_o t, \qquad y = v_o t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (4)$$

積分常數,可以不用;因吾人可假設 $t=o$ 時,x 與 y 均爲零也.

由(4)消去 t,即得拋射質點的路徑方程式:

$$y = \frac{v_o}{u_o} x - \frac{g}{2u_o^2} x^2 \qquad (5)$$

這式代表一拋物線,其軸下垂.假使原點是取在此拋物線的頂點,并命 x 軸爲水平,則

$$x = u_o t, \qquad y = -\frac{1}{2} g t^2 \qquad (6)$$

因之,

$$y = -\frac{g}{2 u_o^2} x^2 \qquad (7)$$

或

$$x^2 = -\frac{2 u_o^2}{g} y$$

故通經 (Latus-rectum) 爲 $\frac{2 u_o^2}{g}$.

現命 q 爲任意 t 瞬的速度,則

$$q^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$= u_o^2 + g^2 t^2$$

$$= u_o^2 - 2 g y \qquad (8)$$

如命 y' 爲質點距準線 (Directrix) 的距離,則

$$y' = \frac{u_o^2}{2g} - y \qquad (9)$$

或

$$2 g y' = u_o^2 - 2 g y \qquad (10)$$

因之

$$q^2 = 2 g y'$$

由此得一結果:——質點在拋物線上任意一點的速度,等於靜止的質點由準線的水準面自由落下達到此點的水準面上的速度.

此段是就原點在頂及 x 軸水平的情形考究.回轉(4)式來討論,這時原點是路徑上的任意點,x 軸可有任意方向,如前圖.路徑不但與 x 軸遇於原點,并遇於第二點 A. O A 距離稱射程(Range). 欲

求OA之值a,可命(4)式中之y爲零;則得

$$t=\frac{2v_0}{g},\qquad a=\frac{2v_0u_0}{g} \tag{10}$$

或

$$a=\frac{u^2\sin 2\alpha}{g} \tag{11}$$

式中之α爲拋射角,而$u_0=u\cos\alpha$, $v_0=u\sin\alpha$. a即是在圖中斜面上的射程, $t=\frac{2v_0}{g}$爲飛射時間.

如命β爲此斜面對水平面的斜角,則初速$q_0(u_0, v_0)$是以下式定之:

$$\begin{aligned} q_0^2 &= u_0^2\cos^2\beta+(u_0\sin\beta+v_0)^2 \\ &= u_0^2+2u_0v_0\sin\beta+v_0^2 && (12) \\ &= (u_0-v_0)^2+2u_0v_0(1+\sin\beta) && (13) \end{aligned}$$

據此看來,q_0若是既定的,則相乘積u_0v_0之值,以$u_0=v_0$時爲最大;則拋射方向等分xoy角時也.故由(10),(13)兩式,得最大射程r如下:

$$r=\frac{q_0^2}{g(1+\sin\beta)} \tag{14}$$

如書

$$\theta=\frac{\pi}{2}-\beta,\qquad l=\frac{q_0^2}{g},$$

則(14)式易爲

$$r=\frac{l}{1+\cos\theta} \tag{15}$$

這是拋物的極坐標方程式,其焦點即係拋射點,而以垂直線爲元線(Initail live).(15)式指示了由原點以既定速度向各方拋射所能達的極限.

4. 在有阻的媒質中拋射.

欲研究質點在有阻媒質中的拋射運動,當然須知道阻力定律.速度若小,可假設阻力依速度變;速度中平,可假設阻力依速度的平方變;前者稱曰阻力之一次定律,後者稱曰阻力之二次定律.一次定律,不適于拋射的實際情形,故從畧不記.現祇就二次定律考究.

若假定阻力是依速度的平方變,則

減速度(Retardation) $= K V^2$; (1)

式中 V 為任意一瞬的速度,K 為阻力係數與質點相除之商.這時解析方式的運動式,是

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = - K V^2 \cos \phi, \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = - g - K V^2 \sin \phi \tag{2}$$

這是應用水平 x 軸垂直 y 軸作成;式中之 ϕ,為路徑對水平線的斜角.

然 $\frac{d x}{d t} = v \cos \phi$,故(2)中之前一式,可書作

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = - K V. \frac{d x}{d t}$$

或

$$\frac{\frac{d^2 x}{d t^2}}{\frac{d x}{d t}} = - K V = - K \frac{d s}{d t} \tag{3}$$

式中

$$\frac{d s}{d t} = V,$$

$$\therefore \quad \frac{d\left(\frac{d x}{d t}\right)}{\frac{d x}{d t}} = - K d s$$

積分之,得

$$\log\left(\frac{d x}{d t}\right) = - K S + \log A$$

如命 S = O 時 $\frac{d x}{d t} = u_o$,則

$$\log\left(\frac{\frac{d x}{d t}}{u_o}\right) = - K S$$

或

$$\frac{d x}{d t} = u_o e^{-KS} \tag{4}$$

欲將這事再往下考究,最好不用(2)式中之第二式,而應用各量沿路徑法線之分量.阻力既是沿切線方向,則法線方向無阻力分量.故法線方向的運動式,是

$$\frac{V^2}{\rho} = -g\cos\phi \qquad (5)$$

式中之ρ，代所討論的任意點的曲度半徑．$\frac{dx}{dt} = V\cos\phi$，或 $V = \frac{dx}{dt}\sec\phi = u_0 e^{-Ks}\operatorname{Sec}\phi \qquad (6)$

又由微積分學，知

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^3}\cos^3\phi \qquad (7)$$

換入(5)式，得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{u_0^2}e^{2Ks} \qquad (8)$$

假使我們專注意於彈道近於水平的部分，則以 x 換(8)式右邊的 亦無大錯誤；於是

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{u_0^2}e^{2KX} \qquad (9)$$

積分之，得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g}{2ku_0^2}e^{2KX} + A \qquad (10)$$

$$y = -\frac{g}{4k^2u_0^2}e^{2KX} + AX + B \qquad (11)$$

如假設 $x = o$, $y = o$ 時，$\frac{dy}{dx} = \tan\alpha$，則

$$A = \frac{g}{2ku_0^2} + \tan x,$$

$$B = \frac{g}{4k^2u_0^2}$$

於是這段近於水平的路徑的方程式，爲

$$y = x\left(\tan\alpha + \frac{g}{2ku_0^2}\right) + \frac{g}{4k^2u_0^2}\left(1 - e^{2KX}\right) \qquad (12)$$

如 K 不大，將上式展開，得

$$y = x\tan\alpha - \frac{g}{2u_0^2}x^2 - \frac{gk}{3u_0^2}x^3 - \cdots\cdots \qquad (13)$$

由此可以概見阻力影響於路徑而使路徑改變其拋物線的形狀．(13)式最初兩項，即表示無阻時所成拋物線的路徑．

5. 自由墜落.

在地球的重力場內拋射速度爲零之運動,曰自由墜落.假定媒質是無阻的,則速度與下落之高,是如下列兩式所表示:

$$V = gt, \qquad h = \frac{1}{2} gt^2 \qquad (1)$$

消去 t,得 v, h 的關係式:

$$V = \sqrt{2gh} \qquad (2)$$

假定媒質是有阻的,幷假定阻力依速度變,而以 K 表示阻力係數與質量相除之商,則質點的運動式,爲

$$\frac{dv}{dt} = g - kv \qquad (3)$$

這式可書作

$$\frac{dv}{g - kv} = dt$$

積分之,得

$$\log (g - kv) = kt + \log A.$$

或

$$\frac{g - kv}{A} = e^{kt}$$

即

$$g - kv = A e^{kt} \qquad (4)$$

現係自由下落,則 $t = o$ 時 $v = o$,故

$$A = g$$

$$\therefore \qquad v = \frac{g}{k} (1 - e^{kt}) \qquad (5)$$

據此看來,時間往前進,速度漸次達於常量 $\frac{g}{k}$ 矣.然 k 既是阻力係數與質量相除之商,由此便知阻力愈大,落體之質量愈小,則愈易達到常定的速度.

6. 變易重力下的運動.

命 x 爲一質點在任意一瞬對其原點之位移(Displacement),則其速度爲

$$u = \frac{dx}{dt}$$

加速度爲

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = u \frac{du}{dx}.$$

一質點向地面墜落,如以由地面起向上的方向爲 x 的正向,則位移向量與加速度向量 g 異向.故處常定重力下的運動式,爲

$$u\frac{du}{dx} = -g \tag{1}$$

積分之,得

$$u^2 = -2gx \tag{2}$$

就中 x 是自地面起算,而 g 爲動加速度在地面上之常值.其實(2)式與 5 節之(2)相同,惟所取的原點有別而已.

但是,照引力論所說,重力加速度是依自地心起算之距離平方反變.如將這件事實加入考究,則一質點向地心墜落的運動式,便不是(1)式而應取下形:

$$u\frac{du}{dx} = -\frac{\mu}{x^2} \tag{3}$$

式中 x 由地心起算,與前不同;μ 是在單位距離的加速度.

積分(3)式,得

$$\frac{1}{2}u^2 = \frac{\mu}{x} + c \tag{4}$$

如質點是在 c 距離處自由墜落,則

$$x = c,\ u = o;\quad 故\ c = -\frac{\mu}{c}.$$

因之

$$u^2 = 2\mu\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right) \tag{5}$$

命地球的半徑爲 a,而重力加速度在地上的值又知爲 g,代入(3)式,則得

$$-g = -\frac{\mu}{a^2}$$

或

$$u = ga^2 \tag{6}$$

故(5)式可易爲

$$u^2 = 2ga^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right) \tag{7}$$

如 c 狠大,則式近於

$$u^2 = \frac{2ga^2}{x} \tag{8}$$

這式表示由無窮遠自由墜落達到距地心 x 距離處之速度.據此則一質點由極遠處自由墜落達到地面之速度,可以算出.因這時 $x = a$,

$$\therefore \qquad u = \sqrt{2ga}$$

取 a 之值爲 6.38×10^{8} cm, g 之值爲 981 cm/sec², 則此速度約爲 11.2 km/sec, 或 7 miles/sec.

7. 簡諧運動 (Simple-Harmonic motion)

一質點被力作用而趨向運動線上之一定點 O,力之量依質點距此點之距離變.這時質點所作之運動,稱簡諧運動 (S. H. M.).這種式樣的運動,實爲具有一個自由度的動力體系傍其穩定平衡位置振盪的標準例子.

設 O 爲質點所趨向的定點,P 爲質點在任意一瞬的位置.命 $OP = X$, K 爲質點處單位距離時所受之力,則在 X 距離所受之力爲 $-KX$. 因力向量與位移 (Displacement) 向量,常是異向,故用一負號.

這時的運動式,爲

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad (1)$$

就中 m 爲質點的質量.

背 $$n^2 = \frac{k}{m} \qquad (2)$$

則 $$\frac{d^2x}{dt^2} = -n^2x \qquad (3)$$

此式之解,爲

$$x = A\cos nt + B\sin nt \qquad (4)$$

或 $$x = a\cos(nt + \epsilon) \qquad (5)$$

就中 A, B, a, ϵ 爲任意常數,其值依起動的情形而定.這種運動是週期的;其週期 T 是以下式定之:

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (6)$$

據此看來,週期與起動的情形無關,故為等時的運動(Isochronous motion).

一質點以等角速 n 畫圓時,投於 x 軸上的正射影,即作(5)式所示之簡諧運動,投於直交的 y 軸上的正射影,則作下列的簡諧運動:

$$y = a\,\mathrm{Sin}\,(nt + \epsilon) \qquad (7)$$

式中之 a,現為圓之半徑.

故等角速的圓周運動,實是由(5),(7)兩式所示的簡諧運動所合成.

以上所述,是假定質點在無阻的媒質內運動說的.假使媒質施有阻力,并認阻力之量是依速度變,則情形不同了.質點受有阻力的振盪,是阻尼振盪(Damped oscillation)的一個標準例子,於力學電學甚關重要,茲述於下.

這時的運動式是

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x - k\frac{dx}{dt} \qquad (8)$$

右邊第一項表示因恢復力所生的加速度,第二項表示因阻力所生的加速度;μ, k 為比例因數,各為一量.

(8)式移項為下式:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + \mu x = o \qquad (9)$$

把(9)式轉換,亦屬易事.若

$$x = ye^{\lambda t}$$

則

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dy}{dt} + \lambda y\right)e^{\lambda t},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda\frac{dy}{dt} + \lambda^2 y\right)e^{\lambda t}$$

代入(9)式,得

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (2\lambda + k)\frac{dy}{dt} + (\lambda^2 + k\lambda + \mu)\,y = o \qquad (10)$$

λ量是由我們任意取的;如取 $\lambda = -\frac{1}{2}k$,則(10)式之第二項為

零,於是該式易為

$$\frac{d^2 y}{dt^2}+(\mu-\frac{1}{4}k^2)y=o \qquad (11)$$

這式當然可被 $x=ye^{-\frac{1}{2}kt}$ (12)

滿足.現在因 $\mu \gtreqless \frac{1}{4}k^2$,而有三種情形發生;其中以 $\mu>\frac{1}{4}k^2$ 時的情形最為重要.現祇討論此一情形,而畧去其二.

這時可命

$$\mu-\frac{1}{4}k^2=n^2 \qquad (13)$$

於是(11)式便為

$$\frac{d^2 y}{dt^2}=-n y^2 \qquad (14)$$

其解為

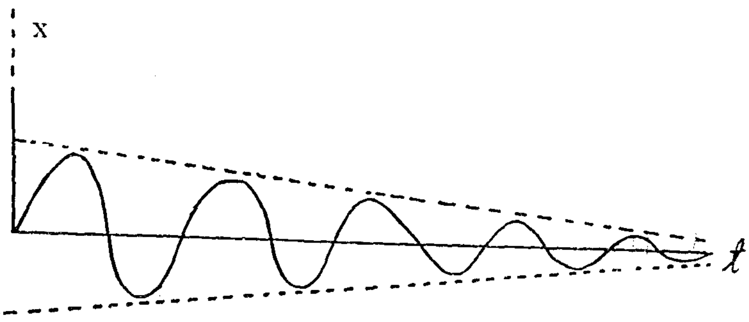
$$y=A\,\mathrm{Cos}nt+B\mathrm{Sin}nt \qquad (15)$$

或 $y=a\,\mathrm{Cos}(nt+\in)$ (16)

就中 A, B, a, $\in$ 為任意常數.

因之, $\underset{\sim\sim\sim}{x=ae^{-\frac{1}{2}kt}\cos(nt+\in)}$ (17)

這種運動,振幅 $ae^{-\frac{1}{2}kt}$ 因時間前進而漸近於零,已與振幅一定不變的簡諧運動不同;但仍可算作是屬於此類.三角函數 $\cos(nt+\in)$ 之值,在 ± 1 之間變動,故質點的時空圖線,便介於 $x=\pm ae^{-\frac{1}{2}kt}$ 兩線之間.



想像一 y 軸與 x 軸直交,並假設在 y 軸上亦有與(17)式相似簡諧

運動:

$$y = ae^{-\frac{1}{2}kt}\operatorname{Sin}(nt+\epsilon) \tag{18}$$

則(17),(18)兩式組合究竟成一種什麽運動,頗可玩味.

試令
$$\left.\begin{aligned} r &= ae^{-\frac{1}{2}kt}, \\ \theta &= nt+\epsilon, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

則該兩式易形爲

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{Sin}\theta \tag{20}$$

由(19)消去 t,則得

$$r = ae^{-\frac{1}{2}k\left(\frac{\theta-\epsilon}{n}\right)}.$$

或
$$r = a'e^{\theta\cot\alpha} \tag{21}$$

式中
$$a = a'e^{\frac{k\epsilon}{2n}}, \quad \cot\alpha = -\frac{k}{2n} \tag{22}$$

(21)式是一等角螺旋線(Equiangularspiral)的極坐標方程式;螺旋線之定角 α,可求出如下:

由(22)式,得

$$-\operatorname{Cot}\alpha = -\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$= \tan\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{k}{2n}$$

$$\therefore\ \alpha = \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\frac{k}{2n} \tag{23}$$

$\frac{k}{n}$ 比率若小,則 α 較一直角畧大.

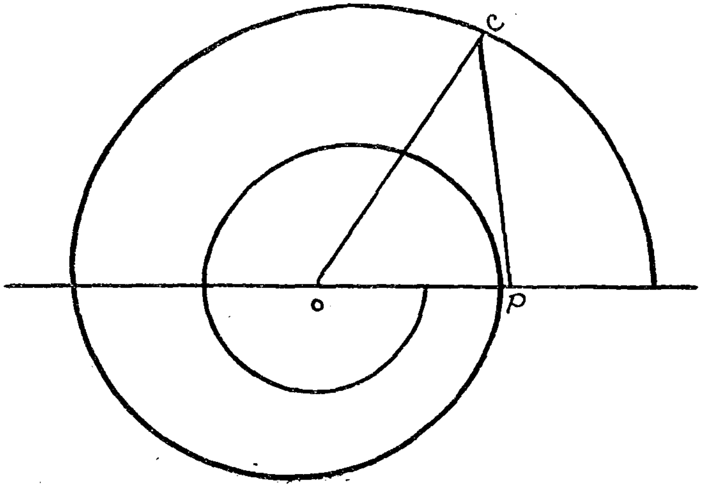
據此看來,一質點若在垂直兩軸上作(17),(18)兩式的簡諧運動,則其合成運動的路徑,便爲一等角螺旋線.換言之,無阻時之

$$x = a\cos(nt+\epsilon), \quad y = a\operatorname{Sin}(nt+\epsilon),$$

若換作有阻時之

$$x = ae^{-\frac{1}{2}kt}\cos(nt+\epsilon), \quad y = ae^{-\frac{1}{2}kt}\operatorname{Sin}(nt+\epsilon),$$

則前一情形下之圓周,便易爲等角螺旋線.



8. 刻卜勒第三定律之修正 (Correction to kepler's Third Law)

牛頓萬有引力說道:質量 m, m' 的兩質點相距 r 時,彼此各一力相互作用;此力與 $\frac{mm'}{r^2}$ 成比例.如以 F 表示相互的引力,以 $\propto$ 表示比例因數,則此定律可記如下:

$$F = \propto \frac{mm'}{r^2} \qquad (1)$$

$\propto$ 稱引力常量;此常量之因次 (Dimen sion) 為

$$L^3 M^{-1} T^{-2},$$

在 c.g.s. 制中之值為

$$6.658 \times 10^{-8}.$$

歸納至此,其中所經過的步驟,可述如下:

地球對於物體施以引力;在同一地方,此等力之量,各與被吸引的物體的質量成比例;這是已知的事.據此着想,則引力與質量成比例的定律,斷不至單適用于特別地方,而應適用於全部空間.再者,地球作用于一物體的力,可想像是地球各質元 (mass-element) 所施之引力之合力;質點 m' 施於質點 m' 的引力,是與質量 m' 成比例

而引力既是相互的,則質點m'施於質點m的引力,應與質量m成比例.因此,遂引出力與質量相乘積mm'成比例之假設.如再以ϕ(r)表示距離函數,則引力定律,可記如下式:

$$F \propto mm' \phi(r) \qquad (2)$$

式中ϕ(r)之形式,尙待決定.

在牛頓萬有引力定律發布之前六十年,刻卜勒根據行星運動的實際觀察,已宣布三條定律:

(1)各行星繞太陽畫橢圓,以太陽爲一焦點;

(2)連結行星與太陽的向徑,於相等時間內掃過相等的面積;

(3)各行星週期的平方,與其距太陽的平均距離的立方成比例.

這三條定律,完全係建築于實際觀察的事實上,并無任何假設;但應用第三定律,則牛頓萬有定律中之ϕ(r)函數之形式,可以求得.這條定律,如果用于近似圓周的橢圓軌道能够精確,則用之於眞正的圓周軌道,更無不精確.命r, r'爲兩圓周軌道的半徑,T, T'爲其週期,則刻卜勒第三定律是如下式:

$$\left(\frac{T}{T'}\right)^2 = \left(\frac{r}{r'}\right)^3 \qquad (3)$$

但在圓周軌道上之向心加速度,是$\omega^2 r$;就中ω爲角速.如ω, ω'爲兩軌道上之角速,則向心加速度,各爲

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r, \quad \left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2 r'$$

於是

$$\begin{aligned}\frac{\phi(r)}{\phi(r')} &= \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \div \left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2 r' \\ &= \left(\frac{T}{T'}\right)^2 \cdot \frac{r}{r'} \\ &= \frac{r'^2}{r^2} \qquad (4)\end{aligned}$$

是ϕ(r)依$\frac{1}{r^2}$變矣.因之,遂有下式:

$$F = \propto \frac{mm'}{r^2}$$

刻卜勒的實測三定律,亦可由牛頓的萬有定律推出.爲討論的上簡便起見,假定一行星的質量比太陽的質量小得多,於是行星作用太陽而使之向行星所生之加速度,可畧去不算.本此着想,則本問題便成爲一質點(行星)受向心加速度 $\frac{\mu}{r^2}$ 的影響繞一固定力心(太陽)而運動矣;此中之 μ,爲在單位距離之加速度.

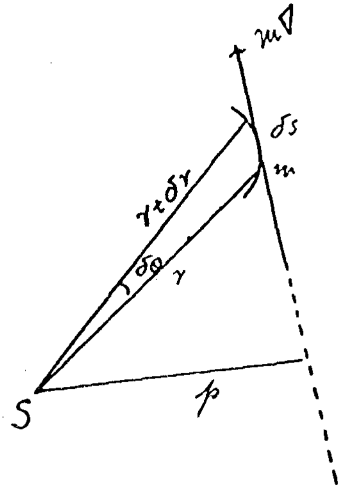
研究本問題,最好從角動量原理及能量方程式入手.

一質點的質量m與其速度V相乘之積(mv),曰動量;這是一向量.由力心引直線垂直於此向量,其長爲p,則mvp爲動量之矩;稱爲繞力心之角動量.

現在m所受S的引力是向力心S的,則切線方向已無力.mv是在切線方向,故mvp應爲常量;即

$$mvp = \text{const.}$$

或 $$pv = h \qquad (5)$$



式中h係代常量.質點m的動能爲 $\frac{1}{2}mv^2$,

$$\text{勢能} = \int \frac{m\mu}{r^2}dr$$

$$= -\frac{m\mu}{r}$$

故能量方程式爲

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{m\mu}{r} = \text{const.}$$

或 $$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu}{r} = \text{const.} \qquad (6)$$

與(5)式相併,得

$$\frac{h^2}{p^2} = \frac{2\mu}{r} + C \qquad (7)$$

這便是m繞s運行的軌道的p,r方程式,即所謂切線的極方程式(Tangential-palar equation).

原點在橢圓之一焦點時,橢圓之p,r方程式是

$$\frac{\ell}{p^2}=\frac{2}{r}-\frac{1}{a} \tag{8}$$

式中 ℓ 爲通徑之半,a爲長徑之半.

原點在雙曲之一內焦點時,雙曲線之p,r方程式是

$$\frac{\ell}{p^2}=\frac{2}{r}+\frac{1}{a} \tag{9}$$

又原點在拋物線之焦點時,拋物線之p,r方程式是

$$\frac{\ell}{p^2}=\frac{2}{r} \tag{10}$$

執此三式與(7)式相較,當知(7)式可分別與該三式相當,如果

$$\ell=\frac{h^2}{\mu},\quad a=\mp\frac{\mu}{c} \tag{11}$$

故軌道之爲橢圓,爲雙曲線,爲拋物線,須視常量C之爲負,爲正,爲零而定.

進一步看,我們想知道一質點受平方反比定律管理,究竟處什麼情形下纔分別畫橢圓,雙曲線,拋曲線,可就一事實考究.(7)式原爲

$$v^2=\frac{2\mu}{r}+C;$$

假設一質點受平方反比之力管理,自無窮之處由靜止起向力心墜落,則當 $r=\infty$ 時,$v=0$ 於是上式之C爲零.嗣後在任意距離r之處,其速度是爲 $V\ \frac{2\mu}{r}$ 這種速度,稱爲由無窮遠達到r距離之速度,或稱臨界速度(Critical velocity);現以V記之 $\left(\text{即 } V^2=\frac{2\mu}{r}\right)$. 分析來看,由無窮遠達到r的速度既是V,如果此質點照原路反轉去走,則自r距離之處以V速度逆行,必須達到無窮遠方纔靜止的.回轉本題來討論,如果

$$v\lesseqqgtr V,$$

則C爲負,爲正,爲零;即是這質點將畫橢圓,雙曲線,拋物線,換言之,質點在任意r距離的能量(Energy),如果不够把牠送到無窮遠

去,則將畫橢圓;如果太够,則畫雙曲線;如果恰够,則畫拋物線.由此可知一質點受平方反比定律的固定力心管理,而繞力心畫橢圓,不過是此中情形之一而已.

其次就上圖考究,可推出刻卜勒第二定律.命 δS 為一段極小路徑,則 $\delta S.\rho$ 等於圖中 $r, r+\delta r$, 及 δS 所成的小三角形的兩倍面積;命三角形的面積為 δA, 則

$$\delta A = \frac{1}{2} p.\ \delta S$$

$$= \frac{1}{2} pv.\ \delta t.$$

$$= \frac{1}{2} h\ \delta t. \qquad \text{(由 5 式得來)}$$

或 $$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} h \qquad (12)$$

這便表示向徑所掃過的面積之時變率 (Time-rate) 是一常量.換言之,向徑於相等時間內掃過相等的面積.每單位時間所掃過的面積為 $\frac{1}{2}$ h.

由此又可推出一重要方程式:命質點對力心為原點的極坐標為 r, θ; 我們便可書

$$\delta A = \frac{1}{2} r^2 \delta \theta$$

由此得 $$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h. \qquad (13)$$

這是有心軌道上的一個重要性質.

由(12)式便可推出刻卜勒第三定律.命質點繞橢圓全周的時間為 T,這即是週期. (12) 式積分,可得

$$ht = 2A.$$

現 $A = \pi ab$, 即橢圓的面積; a, b 為長短半軸, $t = T$, 即週期.

$$\therefore \qquad hT = 2\pi ab. \qquad (14)$$

但 $$h = \sqrt{\mu l}, \qquad (11)$$

$$l = \text{橢圓通徑之半}$$

$$= \frac{b^2}{a}$$

$$\therefore \qquad T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}$$

或 $$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{\mu}\right) a^3 \tag{15}$$

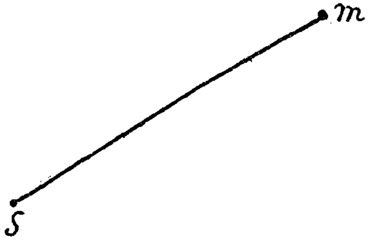
這式表示道:受同一力心管理所畫的各橢圓軌道,其週期的平方與其長半軸之立方成比例.

若以 n 表示向徑繞力心轉動的角速,則

$$nT = 2\pi.$$

因之 $$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}. \tag{16}$$

以上討論,是假定力心(太陽)的質量比質點(行星)的質量大得多,所以力心不因質點之吸引而向之生加速度.換言之,我們是以質點對力心的相對速度,看作是絕對速度來用.精密說來,這是有差誤的.故用刻卜勒第三定律以觀測行星的運動,時間若長久而爲幾世紀,則差誤便顯出了.因之應有下列的一段修正討論.



行星 m 與太陽 S 相距 r,彼此互相吸引,則 m 有一加速度向着 S,其量與 $\frac{S}{r^2}$ 成比例;S 亦有一加速度向着 m,其量與 $\frac{m}{r^2}$ 成比例.故 m 對於 S 的加速度,是與

$$\frac{S}{r^2} - \left(-\frac{m}{r^2}\right) = \frac{S+m}{r^2}$$

成比例.

處此情形下,m在單位距離內的加速度μ是與$S+m$成比例.

再就他一行星m'與太陽S考究,則m'在單位距離內的加速度μ'應與$S+m'$成比例.

因之,由(15)式得

$$T^2 : T'^2 = \frac{a^3}{\mu} : \frac{a'^3}{\mu'}$$

或

$$\left(\frac{a}{a'}\right)^3 = \frac{\mu}{\mu'}\left(\frac{T}{T'}\right)^2$$

$$= \frac{S+m}{S+m'}\left(\frac{T}{T'}\right)^2 \qquad (17)$$

這便是刻卜勒第三定律的修正式.如果質量m,m'比質量S小得多,則$\frac{m}{S}$,$\frac{m'}{S}$可以不算,如是(17)式成爲原有的形式.例如地球質量與太陽質量之比,爲$\frac{1}{330000}$,則該定律自不必修正.但木星(Gupitar)質量與太陽質量之比爲$\frac{1}{1000}$遂有修正之必要.

本篇材料,多取自下列各書,可參閱之:

(1) Haas: Theoratical physics

(2) Max Plank: General Mechanics

(3) H. Lamb: Dynamics

原子物理學概論

聞 詩

(一) 緒 言

近三十年以來,物理學的進步,非常顯著,大半屬於定義的變更,及其擴充.例如就原子的概念而言,舊時科學家都認定原子爲元素不能再分的微小粒子,到了用X光線與輻射物質研究原子之構造的時候,此概念就大變更了.又就物質的意義而言,據一般意見,謂世界中的材料,爲五官皆能感覺者,叫做物質,但其確切的意義,則不易得.

茲就這枝鉛筆而言,由幾種不同材料——石墨,木,顏料,及其他所組成的,若以化學方法分析之,得知有爲化學的單純質的混合物.此等單純質由無數同類的物體,叫作分子的,所組成.此等分子更爲有一定數目之較少物體叫作原子的,所組成.同樣分子有爲同類原子所組成,有爲異類原子所組成.當物質的分子僅由一種原子構成者,稱爲元素.至原子的本身,尙有其自己的組織,即由二個基本成分——電子與質子組成之.各原子在正則狀況之下,含有定數的電子與等數的質子.於是我們得繪一物質的系譜如圖1所示:

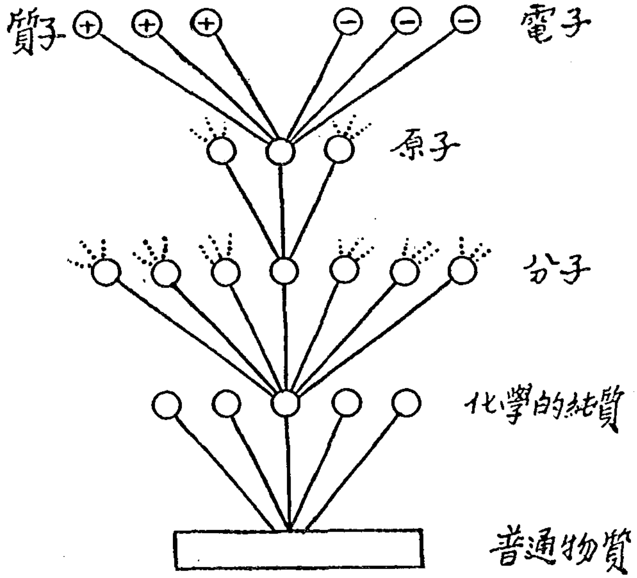


圖. 1.

任一物質由各種化學的單純質所組成,化學的單純質由很多同類原子所組成,原子則由電子與質子所組成.至於今日,都知電子是同樣的,二電子能互換位置,質子亦是如此的.電子與質子都是有質量的,質子大于電子一千八百四十五倍,故一片物質的質量,差不多是質子的質量.

一個原子分爲電子與質子二部,除質量有大小之比外,牠們各具有極强的電性,當其互相結合,成爲原子的時候,大減其電量,或全失其電性.有二種物體互相磨擦以後,牠們有互相吸引力或互相推拒力發生.此等吸引體或推拒體稱爲帶電體.設有一條金屬線連接於不同類的金屬片,並將此二片置於適宜的鹽類水中,成爲平常所謂電池者,於是此線上有特別現象發生:第一,此線變熱第二,使其隣近的磁針傾斜,乃謂此金屬線有電流通過,因使帶電

體移動,有同樣磁性發生,故謂線上的電流,屬於帶電體的流動,非無理性者;雖其運動不能目睹,但此等臆念可用實驗証明.今者電子與質子恰有此等現象表現,當其迅速運行之際,能發生電流的磁效應,如爲未曾帶電之物體所吸收,能使此物體顯示電吸或電推拒之現象,故可謂電子與質子爲帶電者;不過不宜謂其所帶的電量爲外加的東西.其所具的電性,乃其基本組織之一部耳.據舊理論遺留的判斷謂一物體能有正負二種電量.如以之推察彼種情境,質子當具有正電量,如正電體所帶之電.電子當具有負電量,如負電體所帶之電.故二電子,或二質子能互相推拒,電子與質子則互相吸引.

因等距的隔離,吸引力與推拒力相等,故若電子與質子隣接並置,牠們施於遠距離之他一電子,使之得達平衡.易言之,電子與質子具有相等而不同類的電量,如使二者置於一處,則互相中和.

凡一物體,如有電子的數目稍多於質子,則此物體之動作,如負電體一樣;稍少於質子之數,則其動作,如正電體一樣.因使物體受電的方法就是使電子移動,故物體受電以後,稱爲負電者,以其由體外得有電子,稱爲正電體者,則因本體失去電子.

近四十年以來,物理學已集於原子概念之討論,故稱爲原子物理學,以區別于舊物理學.舊物理學所討論的,關於容積內物質的運動,故稱爲克分子物理學.(Molar physics)十九世紀末十餘年間,物理學進行之路,已完全改變,考其致變之由,因研究氣體導電之結果所致,而電子之發明,實爲闊步進行之起點.

本篇之述,要讀者易懂起見,故於數學方面的理論畧而不載.

(二) 光譜

現在有一非常有價值的方法,可作原子的研究,我認定有提前叙述的必要,因爲以後講述原子的構造,得牠的助力很多!我們都知道太陽光通過玻璃三稜鏡,就成了一條有色的帶,排列的次序,是紅,橙,黃,綠,青,藍,紫等七色.這條色帶,所作光譜,如用一個精美分

光器，分析光線，則色帶格外清楚，格外輝明.如僅用黃色或他色陽光，使通過分光器，所現的色線是黃色的或他色的.此等輝線之數目及其光譜上之位置，能定放光的某物質之特性，例如使食鹽放於本生燈之火焰上，即現出黃色焰，觀察其光譜，如分光器是精良的，則有極鄰接的二條輝線可見.此等輝線稱爲鈉之特別線.現今其他原素之特別線，都已求知，所以某物質內有何元素存在，以分光器決定之，非常方便.至於星球上有何元素分佈，當然的，此法爲研究唯一之法也.

現在我們都信光爲理想媒質以太的波動所組成.此等以太波的波長，彼此均不相等，如水波有長短的波長，是一樣的.所謂波長者是爲前面的波峰至其次的波峰之距離，或前面的波谷至其次的波谷之距離，分光器的作用，是分析各種波長的混合波，使各波獨自分立，故各個波長，是代表一定的單色光，由是可知光譜分析法是求特別波長的法.所謂某物質有特別光譜者，就是此物質整個所放之光，僅有一定波長之光，此等特殊光譜，于事實上，僅限於氣體或蒸汽所產生.至於白熱固體，或液體則產生連續光譜.

太陽光譜上雜有黑線，因其白熱質之外層，有較冷氣體包圍，內部放出的光，有些光波，被此氣體吸收，故現爲黑色.由此等黑線可決定太陽上有何物質存在.此等黑線光譜稱爲吸收光譜.反之，輝線的光譜，稱爲發射光譜.

光柵亦是分光器之一種，有玻璃光柵，金屬光柵，天然光柵(或稱分子光柵)的分別，除天然光柵外，有爲平面狀的，有爲凹面狀的.通常於光柵之面上每粍之長，刻有六百條線溝乃美國物理學家駱蘭德教授所創的.光柵能得精良輝明的光譜.因每二線條間的距離，能精密計量光譜任何部的波長，所以光柵較優于稜鏡.

波長之數值甚微.例如綠光的波長有爲十萬分之五糎.尋常可見光，以紅色有最長的波(十萬分之八糎)紫光有最短的波，(十萬分之四糎)可見的光譜之兩端以外，尚有輻射存在.其性質與可見

的光相似,同隸於電磁波(或以太波)但波長相差,大小懸殊.吾人所見的光爲電磁波的輻射全體之一小部分.此等不可見的輻射,其最長之波爲無線電波,長者已有三十公里,短者已有0.22耗.其次則爲紅外波,以其波被物體吸收,能使物體發熱,故又稱熱輻射.又次之爲可見的光.又次之爲紫外光,其遠紫外部的光,易被空氣吸收,故作實驗都在眞空中.又次之,則爲X光線.其波長約爲可見的光萬分之一.又次之,則爲卄馬光線,爲鐳質所放三輻射之一,最後則爲輻射波之最短者,曰宇宙線.其波長有至8×10^{-13}糎之可能,但X光線之光譜,已有精確計量,其法將於後面述之,其對於原子大小及其構造之發明,有極大貢獻,故X光線于原子物理學內,確佔一主要部分.玆將電磁波之各部列表於下:

無線電波	波長30公里 ⟶ 波長 .22 mm
紅外部	波長 0.4 mm ⟶ 波長 .0008 mm
可見部	波長.0008mm ⟶ 波長.0004mm(或8000A ⟶ 4000A,A=$10m^{-8}$)
紫外部	波長 4000 A ⟶ 波長 137 A
X光線	波長 500 A ⟶ 波長 .06 A
r光線	波長 0.3 A ⟶ 波長 .006 A
宇宙線	有至 .00008 A之可能

(三) 原子

原子論之創始人爲化學大家道爾頓(Dalton).他在1803年所出板的著作,實開近代原子論之先河.道爾頓用其「原子之假設」,敍述分子與原子之存在,及創立定比定律,倍比定律,反比定律等,以

爲原子的假設,如果是眞實的,則所創的定律,必然眞實的,且能以實驗証實.此等定律果能以實驗証明,成爲日後化學進步之基礎.

道爾頓又專心研究各種元素之原子的相對重量.假使所有的化合物每分子僅含有一原子,那麽這個問題是簡易的.原子的相對重量即是元素的相對重量,但倍比定律指示:二種元素可成多種化合物,於事實上,並無這樣簡單的,自道爾頓的理論創立後,使化學家從事于原子量之決定有六十年之久.當時道爾頓以爲水的分子由一氫原子與一氧原子所組成.如其假設是對的,以氧重量八分,氫重量一分,組合,則一氧原子的重量八倍於氫原子的重量.但今日均知水分子含有二個氫原子.一個氧原子,氧原子之重大於氫原子16倍.

十九世紀前半期的化學家,大半消耗他們的時間及精力於此問題之討論.所幸者有亞佛加德羅(Avogadros)定律產生.使相對原子量得以決定.據此定律說:在等溫與等壓之下,等體積之氣體,所含分子之數目相等.故使二種氣體組合,成爲第三種氣體,此二種氣體及第三種氣體之相對體積,給出他們所有分子的相對數目.例如氫二單位體積,氧一單位體積,組合成爲蒸氣二單位體積,就是二個氫分子,一個氧分子給出二個蒸汽分子.今者每個蒸汽分子至少必含有一氧原子,但蒸氣分子僅利用半個氧分子,因知氧分子必有二個原子.因蒸汽分子含有二氫原子及一氧原子,故蒸汽之組織,氧重佔八分,氫重佔一分,氧原子量大於氫原子量16倍.

道爾頓選氫原子之重量作爲標準,化學家延用久之,後來以氧原子之重量作爲標準.其重量定爲16.以上所說的僅關於原子的相對重量,但其實在重量及其實在大小,非普通化學的方法所能測定,近三十年以來,原子的絕對重量及其大小,由物理學方面的精確智識,已測定矣.

1869年孟德來愛夫(Mendalee'ff)按各元素之原子量漸增之次序,以定各元素之次序,使化學性質相似的元素,列爲同組.所列之表,

稱爲元素週期表.全表共分八組,是直行的,七週期,是橫行的.

元素週期表

	I A	I B	II A	II B	III A	III B	IV A	IV B	V A	V B	VI A	VI B	VII A	VII B	VIII A	VIII B
1	IH															2He
2	3Li		4Be			5B		6c		7N		8o		9F		10Ne
3	11Na		12Mg			13BAl		14Si		15P		16S		17cl		18A
4	19K	29Cu	20Ca	30Zn	21Sc	31Ga	22Ti	32Ge	23V	33As	24cn	34Si	25Mn	35Br	26Fe27Co28Ni	36Kr
5	37Rb	47Ag	38Sr	48cd	39Y	49In	40Zr	50Sn	41cb	51Sb	42Mo	52Te	43Ms	53I	44Ru45Rh46pd	54Xe
6	55Cs	79Au	56Ba	80Hg	57771	81Tl	72Hf	82pb	73Ta	83Bi	74w	84Po	75Re	85	76os77Ir78pt	86Rn
7	87		88Ra		89Ac		90Tk		91Pa		92U					

表首標以I. II. III······VIII以別組之次序，每組又分A，B二小組．第一週期有元素二個，所佔表內之位置爲IA，VIII B．第二第三兩週期各有八個原素，前二組內的元素均列在A組，後六組內的元素，均列在B組．第四第五兩週期各有十八個元素．A，B二組每直行各有一元素，惟第八組之A則有三元素．第六週期元素之排列，與前二週期相同，惟第三組之A，則有十五個元素．第七週期有六元素均在A組．

孟德來愛夫的週期表原留有幾個空位，以待未知元素之補充，此未知元素之性質及原子量均能適合於此空地．

1912年以前，週期表內仍有許多困難，有二個地方元素之次序倒置，即前元素之原子量大於後元素之原子量，且尚有多個空位，未曾補充，表之後部分又多未確定，莫斯來(Moseley)之發明出世，此等困難始得解除．

1912年德人勞愛(Laue)發明X光線之分子光柵，能測得X光線之波長．X光線之光譜，係連續光譜，中雜以特別線，即區別陰極之質地．莫斯來利用此種特別線，以定元素前後之次序，他求得此特別線之波長的變化，非常有規則，乃規定一律曰：某輝線之振數之平方根，依原子數而變，示之如下式：

$$\sqrt{\nu} = k(z-a)$$

式內ν代表振數，z代表原子數，a爲一常數，k爲李德培，(Rydberg)常數．他又求得有二地方，原子量的次序是倒置的，不過由X光線之輝線推移所定的次序，與按化學性質定出的次序，完全相符．他又以幾個鄰接元素的特別線有雙倍的遠離，能決定此處有元素失落或元素尚未求知．

茲取k組輝線加以討論，藉得明瞭，如圖2所示．圖內各元素之特別線安排的方法如下：以各光譜上有同波長之點，置於同一垂直線上，並以輕原子之金屬置於上，重原子之金屬置於下，自鈣至於黃銅共有鈣，鈧，釩，鉻，錳，鐵，鈷，鎳，銅，黃銅，十種．觀圖二可注意者有

二點(一)以原子數之逐增,輝線自長波之一端向短波之一端推移,此等有規則之移動,不惟 k 組輝線是如此,即別組輝綫亦如此.(二)此等元素按自然次序排列,非常精密,如鈣鑽二元素間缺一元素,二光譜的輝綫,因是相離較遠.現知此所缺的元素曰錆,因莫斯來研究此等元素時,錆元素尚未發明故也.又如最末之光譜,即黃銅之光譜,與其上兩光譜作比較,即知此光譜除鋅外尚含有鎳銅之輝綫,所以用輝綫推移之位置,排列元素之次序,與週期表所用原子量之多寡而定元素之次序,完全符合.

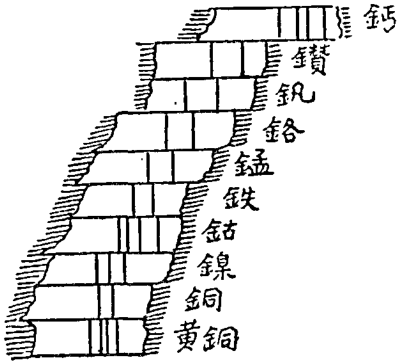


圖 2. k 組線

但代表各原子量之數目,其間無一有規定之關係可求,而 X 光線之位置在各一元素間之推移,可用莫斯來之定律細之,較多精確也.現週期表中尚有 85 號及 87 號二元素未發明,因其包含於輻射元素之中,或許原存在地中,現以年代久遠,已不復存在,或許尚在發明之期中.

(四) 電 子

古時電學實驗者以爲電量是繼續變化的.因以電流體稱之.惟此電流體有原子的構造他們沒有作過假定.法賴台在電分解實驗中已提及電量有固有單位的.將電池聯接,即有電流通過鹽類水,而鹽類水即被分解;有因分解而離出的東西,積於金屬片之上,金屬片之作用,使電流得進出於鹽類水;此乃電鍍之基本原理,此二金屬片,一稱爲陽電極,一稱爲陰電極.鹽類爲金屬與非金屬之化合物,當起電分解之時,金屬沉積於陰極之上,非金屬部則向陽極前進,但在有些電解液內,此非金屬部自分離以後,時常與水起

作用,惟不能集成,復爲原形,是時極上有氫氣放出.又在有些電解液內,金屬自分離以後,有時亦與水起作用,使氫氣放出.但金屬如銀等與水無作用,乃以固體之形狀沉積於陰極而成一薄層.法賴台用定量方法,測定電解的沉積,得一結果,即用一個已知電流,在一個已知時間內,通過電解質,使各種元素沉積,其重量與此元素之(原子量與其當量之商)成比例.故若金屬原子有電量帶走,及各原子所帶之量電與其原子價成比.則我們立可知道的,此精確的結果,應有遇見的.於是一價原子例如銀元素,所帶的電量,應該爲電量之固有單位.因液體與電池的金屬綫同一電路,各部上的電流無參差的表示,故自然是相同的,故可謂所有電流或所有電量爲此類單位電量所組成的.自然的,此爲一極可能的設想,因金屬原子移向陰極,其上之電量當爲正,如有一部陽電量給與此電解液,亦必有相等的負電量給與牠,否則當電分解繼續進行,此電解液所得的負電量當依時間而增多,但於事實上,並不如是.故非金屬必帶一種電量,單位定律同樣的亦可應用.再者因鹽類在電解液內隱滅,無任一產成物有多餘的,留在此液體內,又無剩餘電量在其內,故此二種單位必相等但不是同類的.

以前所述法賴台的概念,自創立後五十年間,無甚本重要的東西添加.迨乎氣體亦如電解液體能有導電之現象發生,電原子之學說,始大進展.

氣體在正則狀態時,是不導電的,但使電壓增高,氣體之絕緣性衝破,乃有大花通過.但在微壓之下,氣體之導電更爲容易.前世紀七八十年間,關於放電的,屬於一種定性的實驗作了許多.此等放電通常能放光並常有美麗現象發生.

陰極綫爲放電現象之一種,1859年爲德國物理學家伊道夫(Hittorf)所發明.其如光束一般,由陰極發出而散開,當擊於玻璃管之壁,乃有綠色螢光出現.如有磁石移近於此管,綫即彎傾.欲此線有美滿之發生,管內須僅有極低壓力存留,普通約少於尋常氣壓萬

分之一.陰極綫自發明以後,曾發生有興趣的議論,有謂陰極綫直可如帶電的質點視之,有謂陰極綫是與海爾玆波.(Hertzion Wave)聯絡的.但此綫在物理學史上佔有何種重要的地位,尙未確定.及1897年湯姆生(H-Thomson)証明此線是帶有電量的,其所帶的電量與其質量比較,較任何物體所帶的,都來得極大.湯姆生已測定電量與電子質量之比$\frac{e}{m}$及陰極線前進速度,其方法如下所述:以已知强度之磁石,使在電場內已生傾斜之陰極線,恢復其原來的方向,故陰極線上的電力與磁力平衡.由此二實驗之結果,及數學的推算式,得$\frac{e}{m}$及速度之值.

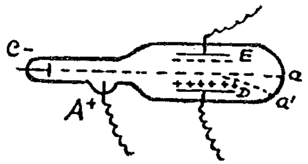


圖3.陰極線管

玆將算學之推算式推求如下.

設有一小炮,以水平方向安置,放出的彈子如不受地心吸引力及空氣的阻力之影響.以等速運動,取水平方向,望前進行.惟其不能脫離此二力之影響.故其進行之方向逐傾向地面,成一拋物線形之路線.當此彈子出發,跑了若干路程後,我們能計算傾斜之大小,並知傾斜與二變數,即與施於彈子的作用力與彈子的質量之商,就是$\frac{p}{m}$及彈子的速度V有關係.實則彈子的落下全與水平運動無關,故在時間 t 之末,傾斜之大小當爲

$$D = \frac{1}{2} gt^2 \cdots\cdots\cdots(1)$$

式內之地心加速度g等於$\frac{p}{m}$.又定V爲彈子以水平方向射出的速度,L爲彈子在時間 t 之末所經過之路程,故t等$\frac{L}{V}$.於是公式(1)變爲

$$D=\frac{1}{2}\frac{p}{m}\frac{L^2}{V^2}\cdots\cdots\cdots(2)$$

今者陰極線之質點自陰極射出,其情形與上述之例子相同.故若此質點以水平方向射出,取速度 V 在垂直電場 h 內進行.其受傾斜之大小與 $\frac{he}{m}$ 及 V 二變量有關,於是由公式(2)得式如下

$$D_1=\frac{1}{2}h\frac{e}{m}\frac{L^2}{V^2}\cdots\cdots\cdots(3)$$

又使此陰極線經過兩磁極之間,就是在磁場 H 內進行,故施於質點的力 p 等於 Hev,於是應用(2)得式如下:

$$D_2=\frac{1}{2}H\frac{e}{m}\frac{L^2}{V^2}\cdots\cdots\cdots(4)$$

由(3)與(4)得:

$$\frac{D_2}{D_1}=\frac{H}{h}V\cdot\text{或}\ V=\frac{D_2}{D_1}\times\frac{h}{H}.$$

如 $D_1=D_2$,$V=\frac{h}{H}$,以之代入(3)或(4)則得比率 $\frac{e}{m}$ 之值.

陰極線的質點之速度依力場而變,但如速度在不大時,比率 $\frac{e}{m}$ 之值差不多是一個常數,且完全與陽玻管內所留的小許氣體及陰極之元素無關.無論氣體是那一種,電極是那一種金屬作的,結果全然是一樣的.那末,這種質點既與各種物質無關,自然的,確實的,乃成爲各種物質之普遍成分了.化學原子爲宇宙內最小的成分的概念遂被打破了.此等質點以電子稱之.初定此名稱者爲斯督內(Gohn-stone stoney)(在 1891 年).

電子的比率 $\frac{e}{m}$ 是較電解中氫原子同樣的比,大一八四五倍.在此兩種情形之下(電解及陰極光線)e 的量却是一樣的.據米利根氏精確的試驗:得

$$e=4.77\times10^{-10}\ \text{靜電單位}.$$

那末電子的質量 m 是比氫原子的質量小一八四五倍了.

我們知道 1.0077 公分的氫含有原子的數目有 $N=6.06\times10^{23}$ 個,那末一個氫原子的質量是

$$\frac{1.0077}{N}=1.662\times10^{-24}\ \text{公分}$$

然則一個電子的質量應該爲

$$\frac{1.662\times10^{-24}}{1845}=9.0\times10^{-28}\text{公分}$$

所以我們得知電子均是同樣的,所帶的電量均相等的.原子在正則狀況之下是無電性發生的.故必有正電量在原子內部與電子所帶的電量中和,盧剌福(Rulhenford)稱此帶正電量之質點曰質子.因氫原子是中和的,質子上的電量必與電子的電量相等,但異其記號,故當二種電量相加,必消滅.所以其他各中和原子所含電子與質子的數目相等,但使一電子自原子上脫落,那末原子上有正電發生,又有原子拾取鄰接之自由電子,則顯出陰電量.此等帶電量之原子稱爲游離子.乃知原子所帶的電量,常爲原始單位之整倍數.

如各原子由等數的電子與質子所組成,所有一切原子的重量當爲氫原子量之整倍數.但許多元素的原子量的代表數目並不爲整數,例如氯的原子量爲35.5.似與整倍數的定則反背,及阿斯頓(Aston)得成著名實驗,以其結果始能說明此故,因各元素的原子(非個個是如此)有一種以上的原子,比方以氯元素爲例子,其原子量有爲35,有爲37,故知氯元素爲二種元素之混合物,此二種元素之化學性質相同,非化學方法所能使之分離,乃稱爲同位元素,由此,古時所認定[單體元素]今始知其有爲二個或二個以上的同位元素的混合體,於是化學上起了一個大革命了.

(五) 原子的重量及其大小

尋常所說的原子量都是相對的.僅指示這原子重於彼原子有若干倍.今欲求原子的實在重量,須求助於電學的事實.

法拉台的電解實驗已示出,某元素有若干重量沈積,其所帶的電量應當有若干.又據前節的理論謂在電解液中,元素的原子有正電量多於負電量的,有負電量多於正電量的,以一個或一個以上元的電子留在或不留在原子上爲判斷.這個電子數叫做原子價.茲以N代表單位時間內在陰極游離出來的原子數,Z爲原子

價,則電流在單位時間內經過陰極的量爲:

$$I = NZe.$$

由前式我們知道的,以電子所帶的元電量除一克元素所帶的電量,又以其原子價除此商數,就可得一克元素所含的原子數.所以決定一原子之重量,變爲求決電子所帶之元電量了.電子所帶的元電量通常以 e 表示.

兹舉米利根的方法如下:

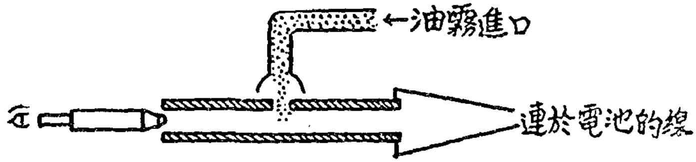


圖 4.

使極細的油滴在空氣中極緩的落下,能以顯微鏡窺視,並能以計時鐘記其自顯微鏡之上髮線落至下髮線之時間,倘空氣中存有自由電子或游離子,有一得與油滴接觸,並附着于上,則此滴立變爲有電體.此等自由電子之產生,使 X 光線通過空氣即得.現此油滴已使受電,能在電場內移動,其移動之快慢,增强或減弱二金屬片間之電場可也.此油滴因改變電場之方向,得由上部移至下部,或自下部移至上部.

米利根用此方法,能使同一油滴有時在1小時內升降經過1.52耗之距離.現假定所用的電力作用于油滴,使其升上與落下一樣快,(油滴未受電量)顯然的,使油滴上升的電力兩倍於油滴之重量,一部與油之重量平衡,一部使油滴移上與落下取同樣運動.因兩片之電位差可能計量,故油滴上之電量得以計量.

米利根求知,在電力場內,油滴之速度有偶然的變化,有時在此路進行,有時在彼路進行,但並知速度之變化時常相同,故得假定質點損失之電量或得來的電量只有一個單位,而作爲此變化之計算.由此速度之變化,此單位電量可能求出,而油滴所帶之電量

常求得爲此單位之整倍數,此電量之變化,每次均以同一單位電量;乃得有力之証實,謂電不是連續的,乃可分爲同樣的單位.此元電量之值等于

$$e = 4.77 \times 10^{-10} \text{靜電單位}$$

氫原子之重量由推算得其值爲1.66×10^{-24}公分.如氫原子之重量已知,其他原子之重量易得推算.因電子之重量爲氫原子之重1845倍,故電子的質量爲$9. \times 10^{-28}$公分.

至於原子的直徑,用[X光線在結晶體廻折]方法求之,拔來格(Bragg)曾作此類許多實驗,茲舉出他所得元素的原子直徑二三種如下:

原子數	元素	原子直徑
3	Li 鋰	3.00×10^{-8} cm
6	C 炭	1.54×10^{-8} cm
8	O 氧	1.30×10^{-8} cm

(六) 原子之構造:原子核

原子由等數目的電子與質子所組成的.這個假設現在都信爲眞實了.那末此成分在原子內怎樣排列的,爲當然的要會有的問題.過去廿餘年間,這個問題引起物理學家極大注意,但現在雖未十分解決,至少有些已證立作爲眞實了.盧剌福所創立的理論:原子的質量聚集於一區域,與整原子比較,此區域是非常之小.考此理論之起源,發於當初視爲無甚重要的一組實驗,如下所述

維爾遜(Wil son)的離化室內,α線的跡道當中,有幾條有顯著的灣曲,因爲α線與空氣的分子碰見,故改變牠的路向.但路向之改變多起於跡道之末端,而在α質點進行緩慢的時候.如α線當初有若干條,取同向進行,後在空氣中經過若干距離之後,有散展的趨勢,有些向旁邊散開.如使α線通過薄屑金屬,亦有同樣散展發生.盧剌福的原實驗使α線由放射質出來,通過屏上的小孔,擊於薄金片,反出此片,使擊於熒光屏之上,得見烱爍之光點,以顯微鏡

考察屏之各部,並計算每秒烱爍之數目能決定有偏斜成角的比例數.

大部分線道離開原道的偏斜甚微,惟有少數乃生頗大的偏斜.倘有些偏斜之大,致使投入線仍由金葉的同一面出來,雖牠們的數目不多,已足引起甚大興趣了.如謂原子由電子與質子所組成,此等大偏斜,必非α線與電子碰擊而成,蓋電子之重不足使α線生回折的緣故.茲舉一簡單例子說明之.使台球代表原子內之質子,乒乓球代表電子,二者同置于球棹之上,取一種樣式排列之,當另一台球由外方射入,乒乓球甚難改變他的方向,惟同量之台球庶幾能之,由實驗得知任一偏斜發生,必由碰擊而成.被碰物之質量至少等於施碰物之質量.至于α線由投入原面回折,必與一物碰衝而起,其重必大于α線,故原子內至少必有四個質子集合成團,以抗α線的碰擊.盧剌福假定一切質子集合而成一單個質量稱為核.在金原子,此單個質量幾五十倍於α線,故其對於α線之動作,與固定體無異.

α線的散展,依α線與原子核中間的力之性質而異.假定核與α線之動作如二正電點一般,那末,他們要互相推拒,力之大小以距離平方之倒數定之.如α線之進行直向原子核,則牠因推拒力而反回,如α線的標的,稍偏於核之一邊,則牠因推拒力而發生偏斜,如α線掠過原子核頗近,則推拒力愈大,當然的,偏斜也愈甚.

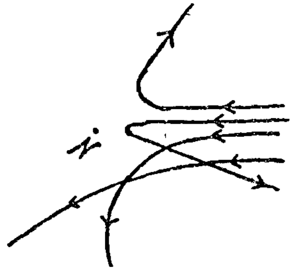


圖 5.

擴展線取不同的角衣分布,要計算其路線的形狀,於動力學上並不爲難作的事.路線計算的結果與實驗的成績十分符合.由擴展線的實在數目,推拒力之强弱可能求出,力之大小與核所帶的電量及∝線所帶的電量之積成比.∝線所帶之電量等於二單位,則核的電量當易計算.據實驗的結果,核所帶的電量是等于原子數.

原子數在元素分類中佔一重要部分的緣故,可用上面的重要結果可給與一個簡易的釋明.莫斯來的發明謂各元素的特殊X光線之波長,按其原子數漸增的順序,而取有規則的變化,如用此結果,尤易得有理的解釋.因爲核上的電量每增加一單位,近核的電作用之强弱,要以有規則的秩序增加.如謂X光線與在此部內的效應有關,那末我們能瞭解牠的波長依原子數的增加而取有規則的變化了.

此理論即原子核上的電量等於原子數,又給出同位質存在的釋解.什麼是同位質?就是異原子量同原子數及同化學性質的元素.前已說過,元素的質子聚集於原子核.又當憶起:原子數就是元素在週期表內的數目,元素的排列,除少數例外,儀按原子量增加的順序而成,除了氫氣(質子的數目等於原子量)原子數永沒有比原子量的半數,來得多,故質子的數目至少二倍於原子數,故若原子數等於核的電量,有些質子的電量必被中和.意即原子核含有多數電子,實在的,質子的集合,以其有互相推拒,必有一種東西,居間聯絡,自然的,必有半數電子導入,以吸引力維持他們的集合.那末,電子的作用,可視爲一種水泥了.至於核在原子構造內的任務,因其爲帶有陽電的集團,以吸引力吊住原子上的其他電子,其吸引力之大小與核上的純淨電量有關,就是與核內正質子的數目與負電子的數目之差有關.故若引入一個正質子與一個負電子於原子核之內,核上的純淨電量當無變更,如由原子外部上的電子之觀點看來,當無差異的.今者外部的電子是決定元素的化學

性質,及許多物理的性質.這種核上的變更對於上述的性質實際上是無影響的,但原子量實已增加一個單位了,於是同性質異重量的原子有二種了.

原子核既成爲電子運行的中心,又可決定原子的質量,又能決定原子放射的性質.原子核的電量與化學性質的關係以放射元素的性質可以表示.如放射質放出一α質點,核要減少電量二單位,乃有化學性質的變化,此新元素在週期表內要移後二位,例如鐳本屬鹼塲,如放出一α質點,乃變爲一種不鑑的氣體,稱爲氡(Radon)的.再就他一方面說,如放射元素放出一個β質點,因β質點帶有一個負電量,原子核的電量當增加一單位,於週期表內當向前移動一位.現設有一α線變化,繼之有二連續β線的變化,雖然,原子核已失去質量,但已恢復其原有之電量,故變爲同位元素了.但此等同位元素的化學性質雖是相同,他們的輻射性是不同的.因爲輻射性必是核的性質.核的內部情況在斯二者必不相同,故輻射性自是不同了.總之,放射是原子核的破裂,原子核的電量是決定化學的性質.

α質點與輕質量的核碰擊,已有維爾遜的跡線法研究之,例如空氣核之重不及四倍於α質點之重,以致任一碰擊,核即生偏斜.以反作用之故,α質點給與核以頗大的速度,此足以使核變爲游離子,所走之跡線顯爲叉狀,一枝屬於原α線之跡線,他枝屬於核被擊後所取之道.氫核僅有一個單質子,輕于α線,被碰擊後核之速度大於原α線之速度,所以其跡道較長.

盧刺福用此方法,研究快速的質子.他用一螢光片置於α光線之射程以外,惟質子僅能達至,得觀熠爍的現象.此實驗使他得到著名的發明,即有幾個長射距的質點發現.顧當時是無氫氣存在的,今在此情形之下,除α質點以外,無較輕的原子,所以任一質點能生此現象,似乎不可能.盧刺福乃下斷論謂α點與某原子例如氮原子很有機會碰擊,使此原子核放出一質子,以大的速度進行.

此乃表示原子破裂之程階更進一級,放射能爲原子核自然的破裂,此爲原子核的人爲破裂也.

(七) 放射

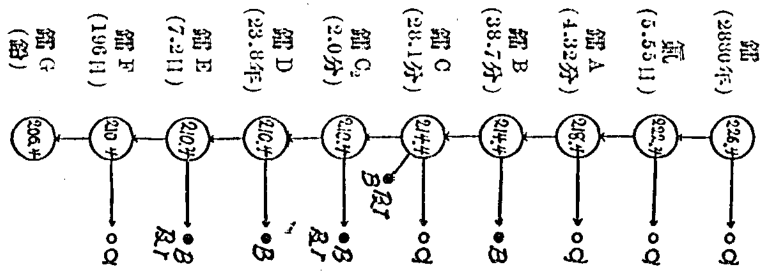
自X光線發明後三四年間,駭世的大發明陸續出世.在此短時期內,有如許新發明產生,實爲前時代所未有.除X光線本身尚繼續研究以外,電子的電量與質量之測定,創立研究氣體導電的基礎,及現在自成一科的放射學之基本實驗,都在那時期產生.放射學之創始.此爲法國物理學家貝克來爾(Beegurel),他受X光線發明的感動,試行搜求新式的輻射.其結果得有元素鈾放出的新輻射,能使照像乾片受影響,隨後又求得鈾質所放的輻射,不僅對照片起作用.且如X光綫一樣,能使空氣發生導電性,就是空氣分子,受此輻射之襲擊,能變成游離子.此性質更引出深奧的發明,最著的爲居利夫婦用化學方法自鈾礦中所取出的鈸,繼後所發明的鐳,其輻射性更强.

居利夫婦以爲輻射現象的來源必屬於原子的,此先導的原理,爲他們的工作成功唯一的幇助者.鈾質無論如何與他物質混合,或改變牠的物理狀態,如加熱等,或溶解牠的化合物於水中,如他的原子數目不變,輻射性質是時常相同.鐳的化學性質與鈣相似,故列於週期表內與鈣同組,但其原子量甚大,爲特殊耳.尚有他種輻射質曰鉒,其原子量之大居第二,以鈾爲第一.

由鈾所放的各輻射,非屬於同類的,可分爲三種,就是α線,β線,γ線,按牠透穿力的大小而定其次序,α線爲帶陽電的質點,穿透力是甚薄弱的,僅能透過六七糎厚的空氣層,但是也有幾個等級,鈾的α線最軟弱,鐳的稍硬,鉒的α線爲最硬.β線爲帶負電量的質點(電子)能穿過薄的鋁片,γ線爲電磁輻射之一種,其穿透的甚强,能穿過七公分的鉛片或十九公分的鉄片,至於此等輻射線的深切考察.及各種輻射的關係之披露.大多盧刺福與其同事者成之.

盧剌福與蘇(台Sodty)提出驚異的臆斷，謂放射性乃某式原子成為他式原子的變程·此種概念具有革命性的，甚可重視：蓋自道爾頓以來，百餘年間，化學家偪信化學元素的原子，不能消滅的，不可改變的·又J. J.湯姆生謂電子能由原子脫離而出，打破原子為不可破滅的實體觀念·但此脫離的部分佔全原子極小的一部，所餘留的，尚保存其化學的個性，如果有他電子投於其上，立即恢復他的原來狀態·至於放射性則異於是，其變化乃一永久的變化，母原子放射了質點，得成為子原子，其化學性質與母原子完全不同的·放射蛻變，與化學變化不同，蛻變時所發出的能是比化學變化所發出的，有無窮的倍數·居利曾測定一克的鐳，每小時能發出130個加路里的熱量，且蛻變的速度與物理及化學的狀態完全無關，人力不能使之快，亦不能使之慢·化學變化往往隨温度而變化，放射性體的蛻變就不然了·温度是毫不能左右的·由此看來，放射性體的蛻變與化學變化是不相同的·化學的變化，是分子的變化·放射性體之蛻變，是原子的變化·

蛻變的元素可分為三組，一組以鈾原子為蛻變的開始點，一組以釷原子為蛻變的開始點，一組以錒為開始蛻變之點·經過許多的變化方能到了一個固定的原子而蛻變方能終止·由是可知放射質的破裂是自然的，是繼續的·茲舉鐳蛻變之一例，亦可知蛻變之複雜：



上邊圓圈中的數目係原子量，元素下所列的數目為各元素的

平均生命,例如鐳的平均生命爲二千八百八十年,氡的平均生命爲五·七日,由鐳一直蛻變到鐳G就不再變了.鐳G就是鉛.∝質點就是帶電的氦原子,氦的原子量是4.鐳原子量失去五個∝質點以後,變爲鐳G,所以鐳G的原子量爲$226.4 - 5 \times 4 = 206.4$.

放射性體的平均壽命,變化殊甚.有少於千分之一秒的,有大至萬萬年的.所以有些的壽命是幾秒的,幾分的,幾日的,幾年的,長時期的.鈾的本身有最長的壽命,當地球壽終之時,或者鈾量尙不十分減少.故設想放射質的遞降,視爲族支繁衍之一種,那末,祖父子孫的壽命,相差太甚!這是與人類的壽命有基本的差別.在人類的繁殖上,死亡的機會全與各個的年齡有關.如人們得免初生二三歲的最危險時期,他可能活至五六十歲,尋常六十與八十間的死亡率,較大於二十歲內的死亡率,但是原子的死亡是不然的.原子如果是有死亡的,他們是有轉老還童的秘訣.如氡(Radon)平均有五日半的壽命,死後反生新原子.原子的死亡純是機會的,並不是原子內部起機械作用所得的結果.

(八) 能的單位

近代物理學的發達,是富於希望的,可絕大驚駭的.即如能的發明,亦如物質與電,有一定單位量的存在.自這個發明後,三十年以來,使全部物理學的進步,大爲增色.這個發明所導出的概念及臆想,集合起來,稱爲量子論,雖然,量子論尙在青年時期,但許多實驗的結果已有切實的聯絡.本篇的目的要說明幾個事實的綱要,並示出他們的,像似的不同之聯絡.

初步的,按歷史的程序,是要說等溫室所產生的輻射.等溫室的意思,就是封閉的爐,他四壁的溫度都是相等的,要研究此爐放出的輻射,自然的,任何一處,必須有一小孔,使輻射線出來.但此孔須甚少,使無顯著的現象發生.爐的溫度測定法,示出有一大興趣在那邊,就是由理論與實驗兩方面而言,輻射線與製爐的材料無關的.故輻射線具有一種現象(物質所施出的)的特性.但此等現象與

所用的特種的物質是無關係的.此即示輻射線有基本的東西存在物的統系中.此等輻射線示出一個連續光譜,但譜上各部的光强不等.茲設有一波長,輻射有此波長時爲最强烈的.當溫度增加.此波長減短.有一熟知的例,就是燒熱煤炭的色,依溫度的升降而起變化,初次出現的光現爲暗紅,及溫度增高,變爲白熱,那末波長,(即使輻射爲最强的)由光譜的紅端移向紫端,自然的,由嚴格言之,一塊炭不能作爲溫室之用,但輻射的性質,相差是不甚大的!

現據力學的原理,試說明光譜上輻射能的分配,所尋到的,不僅與所逃的結果於數目上不相一致,且與所觀察的完全異其性質.故在理論上,原不應該有一特定的波長.但在所有溫度,輻射能的全部,差不多限於甚短的波.假定能由物質到輻射或由輻射到物質,是繼續的變量,此結果立可用很普通的力學原理說明.但此假定使問題永不符合的.蒲郎克乃於1900年倡一假定,使理論與實驗符合,得甚大的眞確.他假定[能]的變化,由物質到輻射,由輻射到物質,每回僅發生一個定量的變化.此等有定的量,稱爲量子.所以[能]具有原子的性質,就是[能]如物質與電然亦有單位的.但牠們有一特別的差別,就是一切電子有同樣電量,同類的原子有同樣的質量,但量子是不然的,一量子的[能]與某特別輻射的振數成比例.振數即輻射每秒振動的數目,等於光速用輻射的波長除.因有任一波長的輻射,自有其大小的量子.故單位能的性質較物質單位的性質,有幾分不完全;僅對於一已知波長,單位能是相等.

爲表示單位能之確實大小,蒲郎克引用一普偏常數,以 h 作代表,單位能即等於 h乙,乙爲振數,h 之值等於 6.55×10^{-27} ery/sec. 自然的,可注意到的,若波長愈短,就是振數愈大,量子之值愈大.

量子論的成功,始於1905年應用於光電現象的解釋.我們知道的,鋅片受紫外光的作用,有電子放出,普通稱爲光電現象.拉奈(Lenard)研究此現象,於眞空中,所得的結果,非常可驚異的,就是電子的最大值速度,全與激刺光的光强無關,雖然光是强烈的,電子之

進行並不增快,所差異者電子之數量增多耳.愛斯坦解析此等實驗,假定每一電子,得一輻射量子能,始得自金屬內部透出,因為量子有要足够的能,纔能脫離牠的鄰居.故激刺光的波長,必須極短,就是振數要大,此個概念已証實非常周至且有許多實驗藉以說明.例如X光綫的游離作用,為光電現象之一例.X光線的波長,非常的短,量子是非常强大,電子由原子射出非常猛烈的,路上的分子,受此電子之碰擊,乃變為游離子.

愛斯坦的概念之推論,尚不以此為終結.比方一量子每次僅能產生一輻射線,於是要此輻射產生,必須有一能量至少等於此量子,當電子忽爾停止,以他的動能變為量子,以產生X光線.我們應用愛斯坦的公式及蒲朗克的常數,能計算X光線的波長.

(九) 原子之構造:(2)能階

前篇已說過原子核由質子與有些電子所組成的.本篇要說核外的電子之情形如何.因核上的電量是等於原子數,亦必等於核外之電子數,蓋原子整個處在中和狀況之下故也.一九一三年丹麥物理學家包爾(Niels Bohr)創造電子行星論,謂電子在軌道繞核起公轉,恰如行星繞日運行一樣.雖然,其著述,就最新智識來說已有許多改變,但仍有許多仍得保留着,縱有些是錯誤的,但於進程上是不能免的,如果現行理論的發明,無舊理論作為底子,以其近於革命性的,或許不克即被採取.

核外電子理論的第一件事實,有所謂能階的存在,牠的概念謂原子內每一電子,要有一能量,纔可完全離開原子,此能量用定特別原子的特性,亦以定特別電子的特性.雖同一能階上不只一個電子的.比方光電現象所說的,一個輻射的量子,等於能h與輻射振數之積,以整個給與單個電子,而使此電子與原子脫離.尋常求光電現象都以近紫外光來作,倘用X光線,因其振數非常大,量子能有相當的大,使電子放射,不僅及於束縛較鬆的電子,亦可及于其他電子,於是設有一束X光線落於一片元素之上,使電子由所

有可能的能階射出.現若X光線均為同振數之光線,他們的量子具同樣的能,各個射出的電子所得的能等於此量子能減去電子脫離特別能階時所需的能,故許多電子由一群原子出來的,組成多群不等能的電子,每一能階有相當的一羣電子.這可能的,可使不等速的電子分離,法使電子受磁場之作用,起彎下的傾向,而分成一定羣數落下.由任一羣的能與所用X光線的量子能相減,即可得能階之能.

當一能階上,有一電子撤去,原子即變為游離子,較其正則狀態時所具之能為多.欲除去此餘量之能,當用放射法以去之.此空虛之能階,由高能階的電子來補充.其能差作為輻射的量子,與愛斯坦理論恰相適合.即他的振數等於有用之能以h除.(此處有用之能等於二能階之差).

元素光譜分析的第一步為求適宜的能階之差,而給出所觀察的光譜線.此等能階就簡單光譜而論,有一可懸的關係.欲明此關係,我們須用代數式表之.氫原子為最簡原子,自然的,牠的光譜是最簡的,是由幾羣光譜線組成的,線之排列,取有規則狀態的.各羣內線之振數以下三式表之.

$$N\left(1-\frac{1}{n^2}\right);$$

$$N\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right);$$

$$N\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{n^2}\right).$$

此處N為一常數,n為一組整數.在第一式內,n為2.3.4....,第二式內n代表3.4.5....,在第三式內n代表4.5.6....要注意的,此等公式適合於所說的規則,即振數等於二量之差.而振數所相當的能階之形狀為$\frac{Nh}{n^2}$,與一組整數之平方成反比.

此三組光譜線的波長,由理論所得的與實驗所得的非常符合,足証明光之產生,有由於原子內電子之跳動也.

結論

因講授時間短促,對於物質波動論及其應用於原子的構造未曾述及,頗引爲憾!但對於物質電能三者之單位已有相當的敘述,明之已足知近代物理學之概觀矣:

熱電眞空管(Thermionic vacuum tube)之進展及其應用

袁至純

1883年愛迪生氏(Edison)曾有一個重要的發現,就是在他所發明的炭絲白熱燈中,炭絲熱到相當的程度時,不特使燈的壽命短促,同時也使燈泡變黑.這是因爲炭的質點,由炭絲向各方向直射,射到燈泡的內壁上,就附着了的緣故.當愛氏研究此現象時,把一個金屬屏封入燈泡內,恰好在馬蹄形燈絲的當中,(圖1),再在屏與炭絲的正極間,連一個精密的電流表,若將S與b相接,發現有電流通過,與a相接,却毫無影響.在有電流通過時,分明電流曾經過炭絲與屏間空虛的空間.這現象就是所謂愛迪生效應(Edison effect).也就是近世熱電眞空管的出發點.

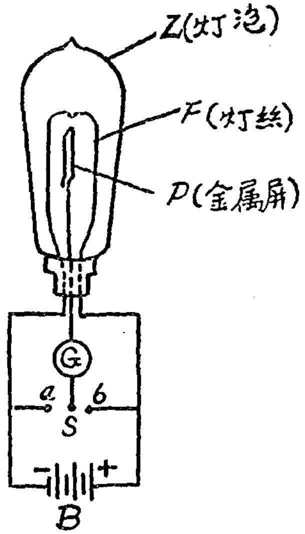


圖 1.

1884及1885年,英人Preece曾將愛氏效應作量的測驗,証明了屏所用的金屬和該效應無關;但絲屏間的距離,絲的溫度,以及絲屏間的電位差,却同電流有密切的關係了.

同時,Hittorf和Goldstein亦証明陰極燒熱時,雖電位差甚小,也能使電流通過眞空管.

1896年,J. A. Fleming氏,由研究愛氏效應雖知道它可矯低週波的交流,但他首先提議,用它偵察高週波的振動,爲無線電報收報

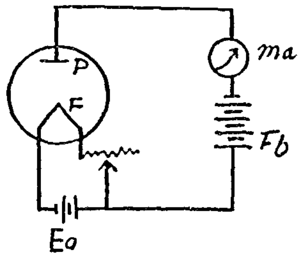


圖 2.

機的檢波器(detector).它的組織同圖1相似,有燈絲與屏,一并封入抽空的燈泡內,成兩極管,通常叫做Fleming value. (圖 2).

據 1897 年 J. J. Thomson 和 O. W. Richardson二氏,以電子說解釋二極真空管作用之理,說是燈絲受熱,就有電子放射出來.若屏極不和管外任何電路相連,那末管內電子逐漸增加,佈滿了空間,電子本同性相斥,故在短時間內,電子愈多,斥力愈大,結果使燈絲不能再放射出電子來.若如圖2把P與電池Eb相連,於是屏與燈絲成了一個屏電路.燈絲所放射的電子,原爲負性,被屏的陽極所吸引,飛渡空間,抵屏後,在 P Eb F 路內通行,成屏電流,它的大小,在ma表內可以測出.

1903及1904年, A. Wehnelt發現金屬絲上若塗些鍶(Strontium),鋇(Barium),鈣(Calcium),等的氧化物,電子就容易發射.近世真空管多把它作發射電極.這種電極,通常叫做Wehnelt陰極(Cathod).

(圖 3)就是Fleming氏用二極管作檢波器的連接法. A爲天線,經初級線圈P而入地G. S爲次級線圈, C爲可變容電器, S C組成一諧振電路,並與天綫線圈P相偶聯. V爲二極管,在屏與燈絲負極加以電位,那末只有屏爲正時才有電流通過.當天線接到信號時,感應S C線路,使它發生振動.於是容電器C兩端的振動電位,遂作用於管的

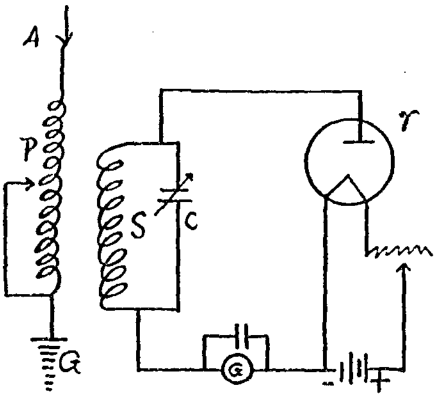


圖 3.

屏與燈絲之間.而矯正的電流遂使電流表 G 指針發生傾斜.若把聽筒代電流表,那末就會發出可以聽得見的聲音了.這是1904和1905年間的事.

其次就要看看它如何用作矯流器了.物理實驗室中所用的tungar rectifier,就是把一個二極管,充若干種壓力的純氬氣(argon)這種管,在低電壓中矯相當大的電流,是非常適用的.通常從 A C. 電源充電於蓄電池,多是用它.其連法如圖 4. E 爲交流電源 110 或 220 Volts,T 爲變壓器,P 爲初級線圈,S_1,S_2 爲兩個次級線圈.S_1 供熱燈絲,S_2 供屏電壓之用.

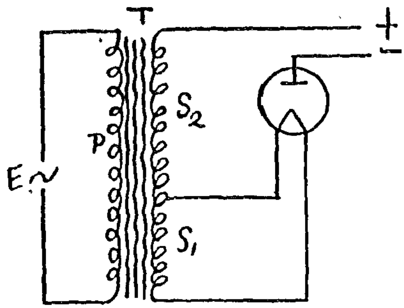


圖 4.

1907 年,Lee de Forest 將二極管加以改良而成三極管(triodes),即在屏與絲之間加一第三電極,形狀如柵,故叫做柵極(grid).這極可以抗制屏流的大小,故較二極管便利的多.其接法如圖 5. E_c 連於柵極及 E_a 的負極,柵電壓是正或是負,全隨 E_c 與柵極所連接的是正或是負而變.若是正,就會吸引電子,即得電流,作用和屏完全相同.不過使燈絲放射較多的電子,使屏流較大罷了.若是負,那末與電子相斥,使電子一部分未能越柵到屏,屏流也就減少.若增加柵的負電壓至某程度時,可將全部電子排斥,屏流爲之中止. De Forest 初次用此管作檢波器時之接

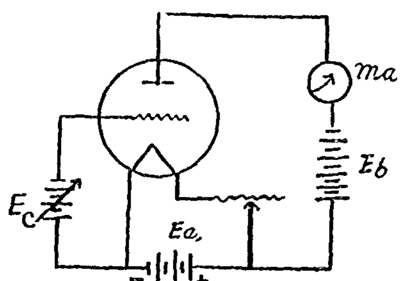


圖 5.

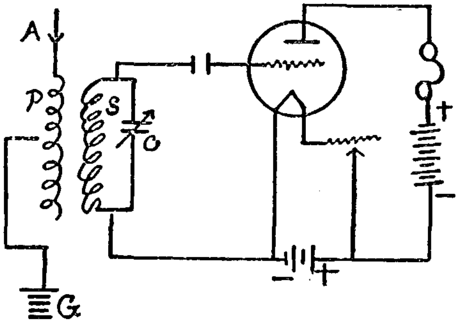


圖 6.

法如圖 6. 波動電壓作用於柵絲之間,而電流表或聽筒則與屏絲間之電池直連.

插入一個第三極,遂使眞空管得了一個新性質,即柵與絲之相對電位變化,可使屏絲路電流也起相當變化,三極管之所以能够做放大器的,也就爲此.它的放大能力,全由所用的電池供給.通常放大係數在 8 倍左右,大的能够到百倍以上.圖 7 的左邊,是射電週率放大,右邊是成音週率放大.

到 1915 年, E. H. Ormstrong 發現回授式線路,使三極管放大係數,大爲增加.圖 7 的中段,就是此種線路的代表.

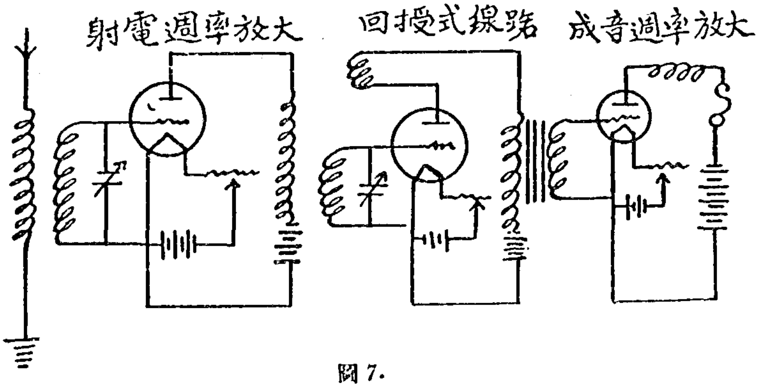


圖 7.

若三極管的屏電路回授柵電路的能力增加到某程度時,即發生自已振動.這時眞空管的作用,彷彿任何週波的交流發電機,而變成另外一種有用的工具.Alexander meissner 就是首先認識這種新用途的一人,至於發明三極管之有振動性質,那末美國的 Armstrong 和 De Forest, 英國的 C. S. Franklin 和 H. J. Round 都是有功勞的.

眞空管振動性質被發現,發報台就把它當做振動器,它的連結法很多,這裏只舉兩個連法罷了.圖 8. 因為有這種新應用的需要,自然地使能够出較多能力的大三極管,逐漸地進步.在經過許多

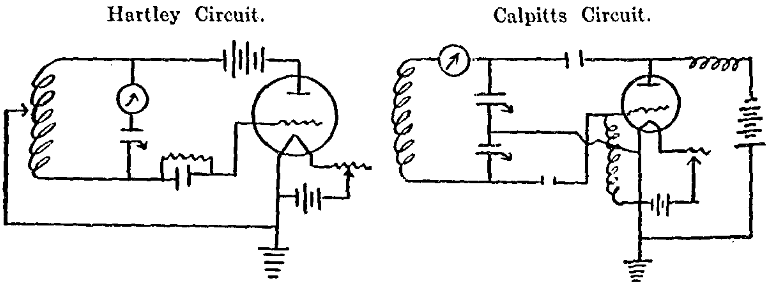


圖 8.

困難之後,三極管居然能够發出數百瓦特(Watt)的能力.現在的,且能發出數基羅瓦特了.增加所出能力的極限,要看屏上所能消散的熱量而定.若封在眞空管內的屏,只有輻射能够散熱.

在 1911 年,開始用許多實驗來研究無線電話時,對成功無線話所必須的連續振動,最初是用弧光或連熄火花 (Quenched sparks) 發生的,自從眞空管振動器出世以後,於是使無線電話有長足的進展.眞空管於無線電話中,還可作變調(modulation)之用.據實驗証明,從來沒有別種方法能够比它好的.

眞空管及其應用進步最快的,要算世界大戰的時候了,因為那時無線電交通非常重要.可惜在各國互相仇視的期內,很少科學的聯絡,所以不免有許多重複了的工作.

自無線電播音出世,收音機成為大衆必備品後,為燃燒燈絲,必須用電.最初的眞空管,都是用 6 V. 的蓄電池,如 R C A 的眞空管 U × 201 A 等.但是蓄電池太貴,而充電亦甚麻煩,於是省電眞空管相繼而出,燈絲則由純鎢絲改為鎢釷混合絲 (Thoriated filament) 及鍍養化物的絲 (Oxide-coatid filament); 溫度則由白熱而亮黃而暗紅;

電流則由一安培而0.25安培及0.06安培.以故用乾電池供給燈絲電力的眞空管,得以風行,如U V 199,就可以作這類眞空管的代表.

最初一般收音機,多是用一種或兩種眞空管.如U×201,既可檢波,又可放大,有全能眞空管之稱.但此種收音機所發出的音量,决不能使聽者長久滿意;因此需要一種眞空管,既能供給巨量的電力輸出,又能不會失眞.應時而生的,就先有U×120,繼有U×171.

三極管既能檢波又能放大,且可用作發振器,不愧稱爲全能.惟因它是全能,所以同時也就有它的缺點了.即用在射電週率放大時,每易發生自己振動,失去放大的作用.此缺陷雖可以用種種連結法來彌補,但究是一件煩難的工作.1919年,W Schottky首先建議用第二柵放在抗制柵與屏之間,作爲靜電簾(Screen).兩柵的電位均較屏稍低,它的作用是去減小屏柵間的電容量,以免自身發生振動.簾柵管却是Hull和Willions所製成.自此管一出,使射電週率放大較爲平穩,且不費事.就是放大率也比三極管好的多.在1928或1929年間,即風行美國.近世接收機用的很多.圖9.

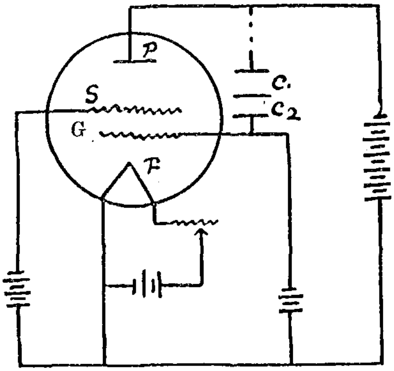


圖 9.

還有一種塢柵管,它的第二柵却放在燈絲和抗制柵之間.這柵之電位,較燈絲稍高,它的作用是消除燈絲周圍環護着的負電荷,而令電子易於透過燈絲而上之負電荷以達於屏.它的目的,是在減低屏的電位.

以上兩管,因第二柵所在的位置不同,而作用亦異.但都叫做四極管(tetrodes)或雙柵管.

眞空管還有一個最重要的進步,就是它的設計,已由直流而交

流了.因直流真空管,無論用乾電池或蓄電池,價均甚昂,而且不便.若用交流則在電燈線上裝一電鑰,就能應用.因普通電燈多用交流,而收發又甚廉,較之用電池,便利多了.

交流真空管有用直接燃燒的陰極(directly heated cathodes)如U×266.有用間接燃燒的陰極(indirectly heated cathodes)如UY 227.惟前者只能夠用作放大,後者却兼可檢波.現在一切交流真空管,多採用後法.

同時四極真空管也逐漸發展,最初的代表,在直流有222式,不久在交流方面也有224出來了.

收音機差不多總需要增加電力的輸出,171—A之後,又有246起而代之.245可輸1.6 W.不失真的電力.再後,又有250號,輸出力可達4.6 W.這種電力的增加,是加大真空管的體積和增高屏極電壓的結果.但是要增加電力,顯然不能再用舊法.若用舊法,一則真空管的價值太貴;二則屏電壓的供給不易;三則體積太大了,也不便裝置.於是五極真空管(Pentodes)出來解決這些問題了.

五極真空管又叫做三柵管.就是在簾柵管的簾柵和屏之間,再加一柵,叫做阻柵.這柵的電位和燈絲相同,因阻柵連於燈絲的中點(圖10).它的作用是阻止由極發出的電子,不能離開屏極,故用比較小的輸入電壓,可得較大的輸出電力;幷且還有較大的放大.如47,用於收音機最後一級,甚爲合宜.但'57,'58等也可用作高週波放大.

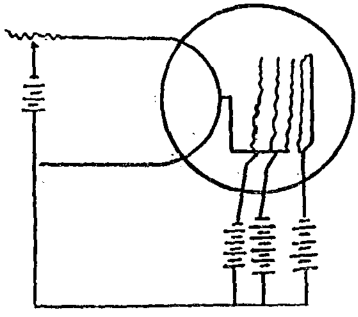


圖 10

至於2V的真空管如230,231,232及6V,間接燃燒的如236,237,238等,都是供給裝在汽車上的收音機用的.

還有一種變放大係數的真空管,它的柵極是特製的,以免作音

最抗制器時的失眞和干擾.如235,551等,就是這種交流四極管的代表,圖234,239就是可變放大係數的車用眞空管.

以上所述,都是關於小的眞空管,當1915年試驗語言傳播大西洋時,証明用許多眞空管平行連接,能產生大電力的電振動(那時是從美國Arlington Va.之Naval站至法京巴黎,最大路程5000里,所用眞空管300個,每個容量25瓦特)因眞空管用太多,既不方便,效率亦差.且進步的趨勢,電力漸漸增大,於是有人起首作增加眞空管振動能力之實驗.普通眞空管,屏在管內,在屏上所生的熱,僅由輻射散失,其限度約爲1至2 K W. W. G. Housckeeper發明一種方法,將銅管封在玻璃上,作爲屏極.此種設計,該屏可用水或油以冷却之,其電力可達500 K W.,圖11.

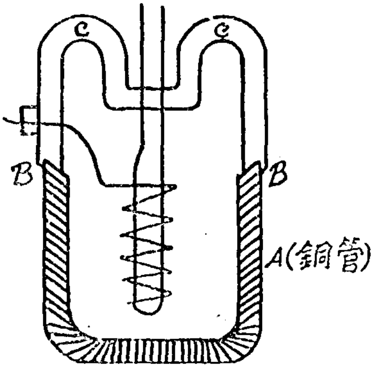


圖11

至收音機方面,雖超等外差式(Super-hetrodyne)爲目前最盛行的一種.也因每機需多數眞空管,致製造不易,成本加重,殊爲美中不足.自五柵管(Pentogrid converters)或叫做七極管2A7及6A7出世,而這種缺憾始除.這兩種功用完全相同,所不同的,僅燈絲電位罷了.它的特點,是在一單管內,同時有發振與檢波兩種作用,不只能够供給本身電路中的振動,且能將此振動與外來之射電週率週波相混合,以發生我們所需要的中間週波,完成外差的任務.圖12:

五柵管的內部,實含有發振和調幅的兩部份.兩部作用情形,約畧如次:當燈絲發生電子時,因屏柵及簾柵有正電壓,被它吸引,穿過發振柵,更因它穿過時有極高速率,甚至再經過屏柵和簾柵的

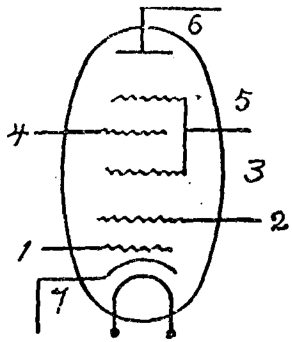


圖 12

3 而到主控柵.主控柵原爲帶有負性電壓的電極,電子到了這裏,就都滯留在 3, 4 兩極之間,不再前進.這電子負有極重要的任務,就是把它供給 4, 3 — 5, 6 各極之用.由此看來, 1, 2, 7 三個極組成一組,可看作其餘各極的事實上的燈絲電極又發振柵的電壓,時正時負,當他的變化不十分强烈時,發振部分的電子流量仍多,還可供調幅部分的應用.今設發振柵的電壓漸向負增,那末電子就逐漸減少,甚或完全停止.調幅部分,因無電子,作用亦失.換句話說,調幅部分是完全受發振部分的支配的.我們乃利用此特點,將外來的信號加于主控柵上,而將輸出電路接入到屏極.圖 13.結果屏路中才能够發生中間週率的差意.

1. 第一柵又名振柵,因它的作用和發展管之柵極相同.

2. 第二柵又名屏柵,實際上並無線網,僅有金屬桿一對.它的作用與三極管的屏極相同.

3, 5 兩柵接成一個,具有簾柵的作用,故又名簾柵.

4. 第四柵又名主控柵,因它具有四極管主控柵的作用.

6. 屏.

7. 燈絲.係間接燃燒式.

眞空管是一個最容易壞的東西,用時只好在它的平穩界限(Safe range)之內,以保持它的壽命.它最容易壞的部分,自然是燈絲了,而燈絲致壞的原因,則多屬電流過量.故想得到適當的方法,不可不先知道它的性質.凡製造者對於一種燈絲,必定有工用的常

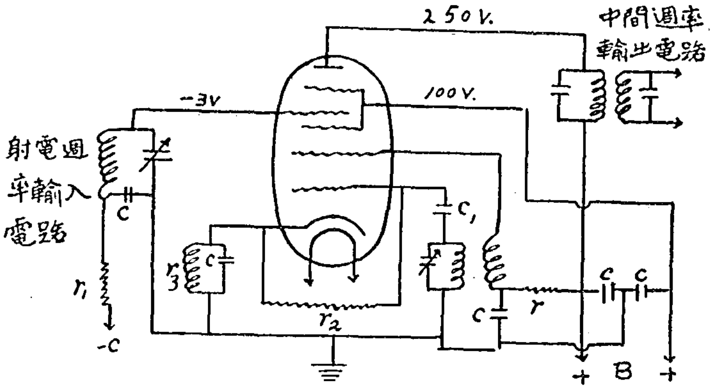


圖 13

數(Operating Constant),就是燈絲兩端的電壓和燈絲的電流.這是按最長壽命最大放出能力的溫度而定的.這溫度叫做平穩溫度(Safe temperature).要使用眞空管,是不可不注意的.

眞空管的進展,正在等待我們的需要而大踏步邁進,前途殊未可限量;就現在說,它的種類已甚多,應用場地亦甚廣,不止在這無線電交通的一方面,本篇不過叙述其大概罷了.

何謂物質？

嚴德烱

§I 何謂物質？

特別是一個物理學家,或者是一個化學家,常常被人這樣的追問:『什麼是物質?』許多人把物理學或者化學下給這樣一個定義:物理學者(或者化學)研究物質與能之科學也.這定義切適不切適,此地用不着討論,但確是有人這樣下的,我已經看見了不少的中學教員這樣告訴學生了.於是學生,假使我是學生我也是要這樣的,就即時要追問什麼是物質了.這問題剛一聽見的時候,我也曾立即跳起來回答:『物質是········』.——是什麼?但始終『是』答不下去了.我認爲這問題是不能答,且不可答的.我所謂的不可且不能,並不是說絕對的不可且不能,乃是要一個完密的定義是不可的,且不能的.固然,我也曾聽見許多這樣的定義:『能佔有空間的是物質』,『能施力且能受力的是物質』『能············』.但我無論旁人的意思怎樣,我總以爲這一切的定義均是滿意的,而且我自己也想不出一個來,或者甚至於會想這問題沒意義.

我們要給一件東西下個定義,我們必定先要知道這東西所有的特性,且知道其他一切東西的特性,於是把這些特性比較一下,尋出什麼特性是這東西單獨有的——如果牠沒有牠就不能是這件東西——於是我們才可以用這特別的特性來爲這東西下個定義.假設物理學是研究物質的,現在的物理學達到了牠的最後目的了嗎?物質所有的特性都已經知道了嗎?不然,這定義是不

能下的.設使能下,我很耽心着物理學也沒什麼可研究了.在科學上,有一些最後的問題,是不能回答的,到了這時只有前進,再往後追究不獨走入迷惑,且於科學上是沒進步的益處的.誰能回答出這些問題呢?『什麼是物質?』『什麼是電?』『爲什麼正負電會互相吸引』?『爲什麼一條電流可以當作一塊磁片?——安培定律』.

若是有人總是放心不下,不能忘情於一個定義,我還可以更進一步說,定義在科學上是無用處;科學上所用的字不必都能下個定義.科學不是論理學,論理學才把字的定義看得非常重要,因爲牠是把字用成工具,想從牠們的組織中推出斷論來.這方法在科學上是無用的,科學的知識是不能從『凡人皆死』的三段論法求得來的.每一個字都想給牠下個定義是不可能的,所以現在的論理學多半連字都不用,取符號來代替了字,於是不說『凡人皆死』,而說『凡 A 皆 B』了.科學既不要字來作求得知識的工具,每一字在科學上不過是代表一個概念(Concept)而已.你看一句書,每一個字在你腦中引起個概念來,於是你遂從而了解這書的意思是什麼.沒有定義的字就不能用嗎?不合論理學的話就不能了解嗎?你對嬰孩及貓犬的俚語,不是很有効嗎?你能用論理學來解釋這些俚語的文法構造嗎?這工作除非是亞理士多德再生才能够解決,物質是什麼?在哲學上說,物質是個概念.桌子是物質(切莫說物質是桌子),茶杯,我手中的筆,筆上的墨水,·····都是物質.從這種種的東西當中,於是遂得出一個物質的抽象概念.一定要有了個物質的定義才能知道物質是什麼嗎?黃金誰能下個定義;但誰也不需要一個定義而知道黃金是什麼.我現在並不想在這乾枯無味的問題上作冗長的辯論,我本來的目的是想把現在物理學研究物質所得的結果,作一個簡潔的序述.或許有人會由這中間得出個物質的定義,但我是不能的.有人或許會不滿意我所說的這許多話,或者罵我故作無味的怪論,那嗎,在『物質是·······』的這句話內,他加上些什麼字都可以,我只知道物質是————————

§II 物質的構造是什麼?

我們所研究的量有些是連續的,有些是不連續的.所謂連續的意思,即是在某一定範圍之內,這量的價值可以任意取什麼價值,如時間,長度都是連續的量.不連續的量就有一個最小單位,這量之價值是不能任意的,必須總是爲這最小單位的整數倍.物質不是連續的,這思想在西曆紀元420年以前德謨頡利圖(Democritus)已經有了.現在我們知道:物質是由分子組成的,分子是原子組成的,原子是由電子組成的.依現在的眼光看來,電子或許是物質的最基本成分了.輕氣或許是原素中最簡單的了,牠一個原子只有一個陽電子(Proton)及一個陰電子或簡稱電子(electron).

在1911年以後,剌得福(Rutherford)從研究α-微粒穿過金屬薄片的播散(Scattering)現象,遂把由電子組成的原子模型洩漏給我們,再經1913年波耳(Bohr)把量子論(Quantum theory)的思想應用到剌得福的模型上去,從研究一直發展到現在,原子的構造我們已經差不多沒有什麼不知到的了.現在一般人所承認的原子模型,即是波耳的原子模型.波耳的原子模型把一個小到不能用任何方法看見的原子構造,表現成一個太陽系一樣.在原子的中心,有個原子核,同太陽系內的太陽一樣.遶着這核運行着的是些電子,牠們可以說就是這原子核的行星.一個原子是由些陽電子及陰電子組合而成,陽電子的數目剛好與陰電子的相等,所以普通狀況下的原子是不帶電的.這些陰電子有一些同陽電子結合而成一個原子核,剩餘的就環遶在這核的外面.但這些遶着原子核的電子的軌道,並不似太陽系的行星的一樣,似乎是任意的,牠是被量子化了的.這在我的『光學原理之演進及其最近發展之趨勢』內已經說過了,不必在此再說.

這新的原子理論,把我們舊有的物質開念打破了.我們從前以爲物質是實體,所以我們可以駁倒不信物質存在的唯心主義者叫他用脚去踢桌子,証明物質的具實存在,而佔有空間.現在新理

論把這舊的實體觀念顛覆了.自剌得福以後,所有留下來的,已經是空虛得不值一踢.構成物質基本的原子幾乎是一個完全虛無的空間,在這虛無的空間裡祇有幾點碎星似的微塵散布着.設使原子核是太陽,電子距離原子核將比行星離太陽還更遠些.電子的半徑不過是原子的五萬分之一,陽電子比電子來得更小.把一個人身體的陰電子陽電子都聚集起來,所有空虛的部分除掉了去,這個小東西用個顯微鏡剛剛可以看見,物質是消滅了,電即是我們以前所謂的物質.

對於這新的理論,有人或許會因牠的奇怪而驚嘆,但因為牠太與我們平素所有的物質觀念,及肉眼的事實相差太遠,而不敢接受,或接受心中終感覺有些不安適,因為感覺得自己身體的實體現在突然間變成了渺少而至於虛無,整個的世界變成了影子.但科學是不循情而且鐵面無私的,利劍似的實驗証據,放置着在你的面前,不允許你有選擇的餘地而要你相信.無論將來實驗有任何的發現,理論有任何的變遷,想回到早日實質的物質觀念去,是不可思議的了.

許多好奇的人或許會特別對於這新的原子模型大表同情,但科學之探討固然多半是出於好奇心,但却並不想專揑造出些使人舌禁目呆的奇異事情,牠是要依着眞確的實驗証據步步為營地前進的.設使這理論祇是說得好聽,對於現象一點也不能解釋,牠不過是塊石田罷了,在科學上是沒有任何價值的.所以我們現在且把這新的理論,這新原子模型,試試去解釋各種物理的現象及化學的現象,看牠有這能力也無,然後再去相信牠.不過對於光的現象我現在實可以不必再提,因為在「光學原理之演進及其最近發展之趨勢」內我已提及過了.

§III 波耳的原子模型是個有効的模型嗎？

這模型怎樣解釋電的現象呢? 構成物質基本的原子既然是由帶電的電子組成,這現象自然是很易解釋的.因爲正電同負電是互相吸引的,而原子核乃是由多數的陽電子及少數的陰電結合而成所以帶正電,這帶正電的原子核吸引着外面的陰電子使牠們不得不環遶着牠而運行,這現象是與行星服從着牛頓的萬有引力的定律而遶行太陽是一樣的.各種原子對於牠外層電子的拘束力是不同的,有的很容易喪失牠的電子,有的較難一點.我們不獨有方法使原子喪失牠的電子,且可以把電子任意加入進去.一個原子失却了電子就應當帶正電,因爲牠的原子核的陽電子已經超過了陰電子的數目;反之,多得些陰電子就應當帶負電.兩種不同的物質互相摩擦,因爲兩種原子的核對於外層電子的拘束力有强弱上之差別,所以摩擦的結果,一方面損失了些電子就上了正電,一方面多得了些電子遂帶上了負電.

電子不獨能離開了原子而單獨跑出,在許多物質中(金屬),原子的最外層電子還是能自由地遨遊於原子之間的,這種電子我們叫做自由電子(Free electrons).〔不過在此地我要聲明一點,自由電子的有無與否在目前已發生疑問,已成爲現在原量論的一大問題.但現在正在研究還沒有固定結果〕.因爲金屬中有自由電子之故,所以一個金屬物體帶到一個帶電物體的近旁就要感應生電,這現象是很容易說明的.電流也不過金屬線中自由電子向着一個方向的一種衝動.我所用的「衝動」兩字是有些微的隱義的.電流通過一條導線的時候,電子並不是如水在自來水管內一般的流過去,乃是後面的電子衝着前面的電子,互相衝突着前進.電流的速度即是這種「衝動」傳播出去的速度,並非一個電子運動的速度,電子實際上移動的距離是很短的.可惜這不是我們的肉眼所能看見的,不然在一條線上成千成萬的電子被電動力(Electromotive Force)驅使着,猛烈向着一個方向衝突跳躍着前進,這是何等偉大的奇觀呢?由這些電子的衝突,導線上的原子遂給牠們振

動了，如是遂從而發熱.設使這條路過於窄狹險阻難走，於是路途上遂益形擁擠了，於是振動得更利害，遂熱到極點而發光.愛狄生(Edsion)看出了這點來，遂知道用抵抗(Resistence)最大的金屬造成白熱的燈絲.我們能同一般偉大的發明家同生一世，目睹着牠們偉大功績的告成，精神上是應當何等鼓舞，感謝而且興奮地願意共同負起世界文明的使命.這宇宙是何等的神秘，光明却是一種最渺小的微物造成的!

這模型怎樣解釋磁的現象呢? 在電磁學中，有一條基本定律，即是安培定律(Ampere's Law).這定律說，凡電流的近旁，都有磁場發生，一個給電流流着的閉合電路(Close circuit)可當作一個磁片(magnetic Shell)看待，這磁片的力量(Strength)即與這電流的大小(用電磁單位)相等.我們若是連這條定律都不承認，則其他的一切電磁現象都是無從解釋的.在1880年羅侖士(Lorentg)首創出一個假定，以為一個運動着的帶電體同一個電流相等，這電流名曰運行電流(Conaection curpent).所以一個運動着的帶電體也照樣能發生磁場.在一個原子內，原子核的周圍既有許多的電子迅速地旋遶着，每一個電子都發生一個電流，而且依安培定律說自然就是一個磁片.所以一個原子就是一個小磁石.在一個物體內這些小磁石普通均亂雜無章的排列着，所以顯不出磁性來但經過了外界磁場的感化作用，使得牠們個個都回轉身來向着一個方向，於是遂從而變成一塊磁石了.

從元量論的研究，我們在磁學得了更深刻的解釋.我早就說過了，原子內電子的一切行動都是被量子化(Quantigd)了的.一個原子在磁場內所居的方向是不能任意的，也是被量子化了的.決定一個原子內所有電子的總角運動量(Total angular momentum)有一個量子數，這量子數名曰內量子數(inner Quantum number).凡是內量子數等於零的原子，(這即是表示原子內所有各個電子的角運

動量加起來等於零)，都是反磁性的(diamagnetic)。祇有內量子數不等於零的原子才是順磁性物質(Paramagnetic Substance)，才能化作磁石。一個原子在磁場內的位置既然是不能任意的，而是被量子化了的，決定一個原子在磁場內到底有幾個位置可能，這數目也需內量子數來決定；可能位置的數目等於內量子數的二倍加一。這事實在1922年給革那黑(Gerlach)及石勒論(Stern)用實驗証明了。他們在高度真空中把銀蒸發，造成所謂的原子線(Atomic rays)，使牠隨後經過一過強有力的磁場。銀原子的內量子數是$\frac{1}{2}$，所以牠在磁場內的可能位置是2$\left(等於1+2\times\frac{1}{2}\right)$。一條銀原子線，在磁場中遂分開成二條，堆積在一塊冷却的板上而可以看出來。反之，內量子數為零的反磁性物質是不能發生這現象的，牠們的原子線是不能被磁場折迴而分開的。

磁性的發生乃由於原子內部有細小的電流存在着而成為一個小磁石之故，這現在早已得着了兩個直接的証明：一個乃為愛恩斯坦(Einstein)及得哈斯(de Haas)在1915所完成，他們把一條軟鉄柱用磁場把牠磁化，把磁化的方向迅速地反復顛倒着，這空懸着的軟鉄柱便自動的旋轉起來。在1917年，伯雷勒(Bernett)又把這反作用完成了，他祇把一條軟鉄柱迅速地旋轉着，而成功把牠鉄柱化成磁石。

從各種實驗及理論之根據，我們現在的原子模型之能解釋一切磁的現象似乎已經是沒有什麼疑問。從此且可知道，世間祇有電，並沒有磁，磁是由電的運動而發生的一種作用。換句話說，磁場是相對的，不是絕對的。

這模型能解釋化學的現象嗎？　這問題的回答是，『是的』。在知道原素是由些單位原子構成之後，化學上之兩條基本定律——定比定律及倍數比例定律(Law of fixed proportion and Law of multiple proportion)——才能夠給與解釋：因為既然是有個最小單位

存在,則物質化合之時,質量自然須爲此最小單位之倍數,而且因定着不能任増加且減少了.但那時的思想,以爲原素是不會變的,原子是不能往下再分了的.放射物質的發現與研究,眞空管中的放電現象,電氣分解,光電效應等等把舊的思想打破了,把原子分解成了電子,把最貴的金屬鐳變成了最不值錢的鉛.

原素中最輕的且結構最簡單的就是輕氣,牠祇有一個不可再分的陽電子作原子核,一個陰電子遶在牠的外面.我們祇要尋得出一個帶有兩個陽電子的輕氣原子來,這近世的元量論即時可以完全的被推翻掉.其次較復雜的是氦原子,牠的原子核爲四個陽電子及兩個陰電子結合而成,外面圍着有兩個陰電子.圍遶在原子核外面的電子,並不是總是排列在同一個殼(Shell)上面,乃是排列在許多層不同的殼上面.核外的電子數目隨着了原子的重量逐漸增加,將第一層排滿了,遂將其餘的分配到第二層的殼上去,而且每層殼能排列的數目是不同的.第一層祇能排兩個,第二層祇能排上八個,八個大約也是第二層以外的最多數目.鋰(Lithium)的原子核外第一層祇有兩個電子,其餘的一個電子就排在第二層上去了,牠的原子核乃爲六個陽電子及三個陰電子結合而成.我們現在知道最重的鈾(Uranium)原子一共有92個電子在牠的核外面,牠的原子核一共爲238(即牠的原子量)個陽電子及146個電子結合而成.比鈾還重的原質是否是沒有,或者是因爲過重的原故,早就如現在的放射物質崩壞完了,或者是我們還沒發見呢?這是我們不能決定的.

原子的化學性質及許多物理性質,均與已經飽足的內層電子不生關係,要依最外層的電子數目來決定.設使這最外層的電子數目剛好是八,這原子是不善活動去與旁的原子化合;這即是氦(Helium)氖(Neon)氬(Argon)爲什麼成爲惰氣(Inerl-gas).的理由.惰氣不獨是無化學作用,而且是反磁性的.凡是最外層電子相等的原子,牠們在化學上的性質是相等的.比如,成鹽原屬(Halogen family)

內的原素氟(牠原子核外的電子數是9),氯(17)鎮(15)及碘(53)的化學性質爲什麼全相似呢?因爲牠們的最外層電子全都是七.我們把所有的原素依着牠們的原子量的大小,順次排列下去,我們自然而然地察出許多相同的化學作用重複地顯現着,於是而把所有的原素分成八類(Groups).於是遂造成了一個在化學史上很著名的週期表(Periodic table).這表不獨給我們一個最自然的原素分類方法,最重的是告訴我們世界上元素的種類是有限的,而且能預言出未發現的元素應當是有些什麼性質在表中居什麼地位.週期表在1169年早已爲門得雷夫(Mendeleeff)及羅得邁爾(Lothor meyer)所發明了,但一直到現代的原子理論出世之後,這表的所以能列成才能得到充分的解釋.我們順着了原子量的大小把原素排列着,並且每一個原素順次與牠一個數目字——這數目字我們叫做原子序數(Atomic number).氫的原子序數是1,氦的是2,……最後鈾的是92.這原子序數實在就是原子核外的電子數,所以依着上文所說的每層殼上排上八個電子即滿足的道理說來,週期表列成的道理是很容易解釋的,而且還可以知道爲什麼這樣剛好把元素分成八類,爲什麼惰氣剛好都排列在第八的最後一類.因爲惰氣氦,氖,氬的原子序數是2,10,18,氦的兩個電子剛好把第一個殼填滿,氖的10個電子,及氬的18個電子都剛好能滿足八個的關係.至於爲什麼不是七,也不是九,八個電子才能使一個殼上的排列滿足,這我們現在是不能解釋,這祇有萬物的創造者才會知道.

化學上最偉大的假設,沒有比原子價(Atomic valency)更偉大的了.這假設支配了一切化合的結合,牠的神秘性也一直到最近的原子理論出世後才得着了解釋.我們現在叫原子核最外層的電子爲定價電子(Valence electron).一個原子的外層電子,若不足八個的時候,這殼上的排列是很不安定或平衡的,牠無時不想從旁的原子取入些電子來補足這個數目,或者寧願不要牠們把牠們給

與旁的原子去.滿足殼層上的八個電子是很不易失去的.惰氣既不想取入電子,也不願放出電子.設使原子核最外層上的電子比八的一半還少,這原子就很容易放出牠的這些電子而帶正電,這種原子我們叫做電正(Electropositive)物質;設使比八的一半多,牠就很容易取入些電子來湊成八的數目,遂帶上負電,故這種容易取入電子的原子我們叫做電負 (Electronegative) 物質.鹼金屬原素的原子序數是 3 (Li), 11 (Na), 19 (K), 37 (Rb) 及 55 (Cs), 牠們的外層電子剛剛都比惰氣的原子序數 2 (He), 10 (Ne), 18 (A) 36 (Kr) 及 54 (Xe) 多一,所以都是些强有力的電正金屬.牠們與具原子序數 9 (F) 17 (Cl) 35 (Br) 及 53 (I) 的成鹽元素結合而成極堅固的化合物.一個正要尋求一個電子,容易帶負電的氯原子,碰見了一個正要賣脫一個電子容易帶正電的鈉原子,自然很難逃出電力的牽引與羈束而結合成功所謂食鹽 Nacl 了.當氫與氧結合成水時,兩個氫原子共給出兩個電子與一個氧原子,使牠最外層的電子數湊足是八,所以水的分子式是 H_2O. 所以氧的原子價是 2, 因爲牠核外電子數是 8, 最外層的電子數是 6, 牠須取入 2 個才能湊足 8 個.所以我們祇要把一個元素的原子數知道了,牠的原子價是隨着就可知道的.但是一個原子既知道奪取些電子進來補足一個足法人數,但牠同時也可以把這些超出的電子驅逐出去,所以一個原子是有正價與負價的;比 Cl 在 Nacl 中看來的正價是 1, 而在 $Kcl\ O_3$ 中看來負價是 7. 以前我們以爲物質的化合乃由於一種愛力,如今方知所謂愛力者卽電力而已.

現在且再舉兩個例來解釋一下.我們都知道化學上的錏根(C-hunicae nadical NH_4)的性質很與鹼金屬的相似.因爲 N 的原子數是 7, H 的是 1, 所以這根的核外一共有 11 個電子環遶着,這數目却剛好與鹼金屬 Na 的原子序數相等.沼氣(Methane CH_4)是一種很不容易與旁的東西結合的化合物,這是因爲 C 是原子序數是 6, 所以牠的分子一共有 10 個電子遶在核的外面,10 却剛好是惰氣氖

的原子序數.

但是,在這裡祇要稍微思索一下,有一個疑問就會立即發生:一個原子除了正價與負價而外就會不能有旁的價嗎?Cl的化合物中,不是有Cl_2O_7嗎?在這裡Cl的原子價不是7嗎?這我們還能用原子核最外層的電子數目來解釋嗎?這問題一直到1928年才得到回答.在1928倫登(London)由量子論的研究而創出一個理論.此理論以為原子的化合乃由於電子的配對(Pairing of electrons).原子內的電子在運動的狀態上說,也如太陽系內的行星一樣,是各不相同的.一個原子內兩個行動上相同的電子配成對以後,就與此原子的化學性質不再生關係了;一個原子的原子價是要以牠的還沒配成對的電子來決定的.所以惰氣的原子序數總是偶數的,所以在週期表中第二,第四,第六,第八類的元素的原子價總我偶數的,而其他的一切元素的元子價總是奇數的.因為是一種配對的關係,所以原子價總是以2增加的.與化學實驗所有之結果無不一致,倫登的理論指出原子序數比惰氣多一的成鹽元素,除了氟的原子價是一而外——因為氟是屬於第二週期,牠的原子數在本屬內是最小的,並且事實上也從沒發見牠有其他的原子價——可以是1,3,5及7.同樣,在週期表中第六類的元素(O, Se, Te, Po),除了氧祇能有一個2價而外——因為牠在本屬內原子數最小,而且事實上牠的確祇能是二價的元素——可以是2,4,及6.倫登的理論實乃更深一步,而把前面所說的八個電子造成個飽和層的理論包含在內面.

§VI. 物質是能佔有空間,具有質量,不變且不消滅的嗎?

物質是能佔有空間的嗎 現在從實驗方面推測,我們知道,原子幾乎完全是虛無的空間.實在有東西填滿着的部分,不過這

虛無空間一萬萬萬(10^{12})分之一.不過物理學家把這些空虛的部分,也看成與非空虛的部同等的重要;牠並非如一般普通人之所意料,中間是什麼東西也沒存在着原子核帶着正電發生出一個靜電塲,施出力來吸引住外周的電子,這些電子遶着這核子旋跑遂從而造成細小的電流,從這些電流遂從而發生許多的磁塲,——所以原子內的虛無空間是爲這些電塲及磁塲穿透且充滿着,是具有重大的物理學意義的.原子內電子的排列剛好使這些電塲磁塲達到一個極堅固的平衡;這平衡是不易破壞的,所以原子能永久存在而不被破壞.原子之所以佔有空間而拒絕外物的闖入,是因爲要保持這平衡而拒絕外物的闖入.所以物質即使是具能佔有空間,這句話的說法與意義已經與以前根本不相同了.以前我們以爲物質之有不可入性而佔有空間,是因爲物質被想成是有實質的實體.這定義在以前之不能算作完全,是因爲充滿宇宙之間的以太(Eather)却不是物質.但現在以太消滅了,但物質具有實質的實體觀念也消滅了.

在一個小到人不能希望看見的原子內,却存在着有這樣一個小天地:中心被一個帶正電的原子核佔據着;如同太陽系的太陽一樣,牽住些電子的小星兒在牠的周圍旋轉.一個帶正電,被放射物質放出的α-微粒,像一個慧星一樣,突然闖進這小太陽系內來,在牠接近原子核的時候,被原子核上的正電猛力向牠推逐,牠於是又飛退出去了.牠出進所畫的軌道成了一條雙曲線,原子核造成了這雙曲線的焦點.這現象使剌得福從α-微粒之播散理會出原子內部的空虛,且從牠出入道路的角度,計算出原子核上的電量.

能佔有空間的是物質,這句話即使還有何意義可言,也是與以前大不相同的了.近世的相對論告訴我們,物體的大小是相對的,牠要用牠運動着的速度來決定:在速度漸漸增大的時候,牠的長度就漸漸收短,——這現象我們叫做菲次澤剌德(Fitz gerald)收縮

(Contraction).在現在的物質構造看來,這收縮是沒什麼神秘性而不可解釋的.物質之伸張而佔有空間,是由於原子內一種電磁場維持着的平衡.物質運動的時候,原子內的電子即成為電流,遂從而發生出新的磁場.新的電磁場把運動前的平衡改變了,而另造出新的平衡,物體在運動方向的收縮遂從此發生.所以物體之有菲次澤剌德收縮乃物質的電結構不得不有的一種公有特性,如同有惰性(inertia)及旁的特性一樣,是值不得奇怪的.到物體運動的速度與光速度相等的時候,這物體在運動方向的長度就成了零.所以物質即使能佔有空間,其意義也是相對的.

物質已經電化了,舊有的物質觀念早沒有存在的價值了.能佔有空間的叫做物質,這句話早已失掉了牠原來的意義了——即使物質是能佔有空間的,這句話的意義與解釋也不是如以前那樣簡單得直接了當的,根本上已經是不同了.具有實質,佔有空間的古有物質觀念,乃是一種直接的視覺與觸覺的錯覺.這實在是一個疏忽人的好警告——辨別事物應當小心謹慎,祇看表面是絕不能知道事物的實在,而沒有不錯誤的.

物質是具有質量的嗎? 我們的質量觀念是從力學上來的.牛頓的力學第二定律告訴我們,一個物體的質量即是牠受力後力與加速度之比.但在1881年湯姆孫(J. J. thomson)把電磁的質量觀念引入以後,一直發展到現在,質量的觀念早已根本的變了.湯姆孫以為一個物體帶上電之後與未帶上電之前是完全兩樣的.一個帶電體的周圍是一個靜電場,這電場內面充有靜電能(Electrostatic energy).這帶電的物體若是運動了,周圍又有磁場發生,周圍的空間內遂又添上了磁能(Mag netic energy).加力於一個物體,這力就在這物體上作下工作,若是這物體運動了,這力所作的工作即變成物體的動能(Kinetic energy).設使這物體是帶了電的,那末,這力所作的工作除了化作這物體的動能而外,一部分應該化作

四圍空間的磁能,——這在能永存的定律看來是應當如是的.所以我們同以樣大的力,加於質量相等的兩物體上,若是這兩物體一個帶電一個未帶電,未帶電的物體所得的速度應當比帶電的大點;因為在這兩個物體上力所作的工作雖然相等,未帶電的物體將所有的工作都變成了動能,而在帶電的物體上只這工作的大部分變成動能,其餘的部分變成了四圍空間的電磁能.所以我們施力於一個物體之上,若是這物體帶上了電,我們見牠的速度比沒帶電時小些,遂覺牠的質量增加了;因為牛頓的力學第二定律告訴我們,力與每秒所得速度之比就等於質量.這因帶電而增加的質量,名曰電磁質量(Electro-mag-netic mass).設使這帶電體是個球,電磁質量是與球的半徑成反比例,與所帶的電量的平方成正比例.電子的電荷及質量是用實驗可測定的,所以牠的半徑即可從這關係求出.一個原子的重量幾乎全是陽電子的,一個陰電子的質量只才是一個陽電子的——即氫原子的——1846分之1;但陽電子的體積却比陰電子的更小.這似又是與我們的想像矛盾了,同其是電子,重的反比輕的小.湯姆孫從各種實驗檢驗電子的質量,終發覺不出我們以前力學上的物質的質量來,現在我們祇好判定質量不過是電表現出的一種作用.就相對論的推斷——特殊相對論(Special relativity theory)——質量是相對的:牠與物體的速度有關係,隨着速度增加,到速度等於光的速度的時候,牠就變成了無限大.具有真實存在而不變的東西,不是質量,或許是電.因從放射物質放射出來速度幾多於光速的β-微粒——即陰電子——其質量可增加至靜止時的十六倍.

一切原子既然是為兩種最小單位——陽電子及陰電子——所組成,而陰電子的質量幾乎為陽電子的二千分之一,所以一個原子的重量(即一種原素的原子量)應當與原子核內陽電子的數目相等.在1815年普朗特(Prout)就有這種思想了,他以為氫是物質的最原始者,一切物都是由氫結合而成.由這思想而來的有條定

律,這定律名整數定律 (Whole number law): 若是把氧的原子量定作16,其餘的原子量都應當爲整數.這思想在現在的理論看來應當是對的.但有些問題就發生了.其牠的原子若都是由氫構成,則氧的原子定作16,則其餘都應當是整數,爲何氯的原子量是35.46?鋅的是65.38呢?這數目比整數不是相差太遠了嗎?並且氫的原子量是1.008,若其餘的原子量都應當是整數,則.008的質量又消耗到何處去了?我們現在先試答第二個問題.在宇宙開始創造物質的時候,互相分離着的一些陽電子陰電子開始聚集起來,結合而成種種的原素.把一些散放的東西聚合起來,是要做工作的,而做工作是需要能的.這些能從何處而來?即由於這.008的質量變成,——依相對論說來,能與質是可互相交變的.因聚合起來而應當消失些質量,這作用我們叫做緊失作用(Packing effect).(我把Packing翻譯作「緊失」意思即表示因「包結緊」而「失」去一些質量的意思. Packing 即「包結」)但我們還可以更進一步再問,爲什麼從氫氣結合成各種元素時,每一個氫原子都剛好失去.008的質量呢?緊失的作用何以會這樣巧?要解答這問題,及上面第一個問題,我不得不把阿斯登 (Aston) 的兩次實驗(在1922年)提及一下.

在以前創立週期表的時候,原子量在化學上極佔重要的位置.自放射物質發現以後,牠的威權即漸漸搖動,一直到現在牠已無能再保持着牠的地位,而爲原子序數所替代了.原子量所以失去牠的重要地位的原因,即是因爲我們現在已經知道我們以前以爲祇有唯一原子量的原子,乃是由一些原子量不同的原子混合而成;這些原子除了原子量的差異外,其他的一切化學的性質無不相等.這些化學性質完全相同,祇原子量不相等的元素,我們叫做同性異質元素 (Isotope). 英文 Isotope 這字乃是「在同一位置」的意思,即是同性異質元素在週期表中應佔同一的地位.所以原子量是不能代表一個原子在化學上的地位的;能這樣的現在認爲不是原子量而是原子序數.在上文我已經說過了,原子序數即是原

子核外的電子的數目,也即是核上陽電的單位數目;化學上的性質是全靠這些外層的電子來決定的.原子序數不獨在化學上佔了重要的地位,在物理上——特別是光學——也是一樣,比如,在1913—14年摩茲力(Moseley)發現X-光的景線原理(Principle of X-ray Spectra)——X-光之某條一定景線的振數(Frequency)的平方根,是與原素的原子序數成正比例的.故從此我們且可用X-光景線的分析來決定元素的原子序數.在以前我們祇知道放射物質才有同性異質元素,比如在鐳鑛得出的鉛的原子量是206,在釷鑛得出的是207.9,而普通鉛的原子量是207.2.在1922年,阿斯呑(Aston)從眞空管中陽極線的分析,遂從而發現幾乎所有一切的元素都是由多種同性異質的元素混合而成.氯乃是由兩種同性異質具有原子量35_a,37_b(以a, b, c,‥‥等綴字順次表示成分的多寡)混合而成普通原子量爲35.46的氯.原子量爲65.38的鋅,乃是爲原子量64_a,65_e,66_b,67_d,68_c,69_g,70_f七種同性異質的元素混合成的.既是一種混合物,爲何在任何處所取來一種原素的原子量都沒差異,混合得這樣均一呢?這大概是因爲在地球還是熔質沒有冷結以前,所有這些同性異質元素都已經有了,而且混合好了.從阿斯呑的實驗結果看來,元素的原子量似乎總沒有不是整數的了(我們普通得出小數的原因,乃是因爲所用的是些同性異質的混合物),整數定律似乎是沒有什麼疑義.但我們現在又怎樣回答這問題呢?爲什麼由些氫原子組成的各種元素都剛剛把1.008中.008的質量失去了呢?各原子的原子核組織都相同而巧到這一步田地嗎?在阿斯呑再做第二次實驗之後,這問題遂被否認的解答了.他把以前所用儀器構造加大,使牠的精密程度增高,於是遂發現以前所認爲原子量都是整數的同性異質元素並不是整數,整數之後還帶有小數,不過前次儀器的精密程度倘够不上,把這些小數測量出來.於是整數定律被這最後的實驗判決而遺棄了,所有的元素的元子量——即使把氧的定作16——幾乎都不是整數.

但普牢特的假想是對的,氫是物質中的最元始者,各種元素似乎都是由牠造成的.

我不能再把馬縱馳下去了,現在已經離開了題目很遠.最後我在此提醒一句,原子構造的問題,現在可以說未完成百分之幾.原子核外層電子的排列現在我們雖然是大概知道了,核的結構研究可以說是還未踏上第一步的途程.

物質是具有質量嗎?這問題不是簡單而易回答的.古典力學上的質量觀念似乎已經演變得把舊日的意義全消滅了,質量似乎是電表現出的一種作用.很不幸,在18世紀雖很流行,現在看來可說是含混得不能了解而且無意義,把『質量』定作『物質多寡的量』的定義,在中國許多的教科書中還保存着.物質的質量是相對的,而不是絕對的.

物質是不變且不能消滅的嗎? 這回答即是,『不是』.電子的發現,把古有以原子爲物質的最小單位的思想打破了.放射物質(Radioactive sabstance)的發現,把原素不能分解成他元素的觀念推翻了.放射物質的崩潰,乃由於原子核的分解.在牠分解的過程中,牠從牠原子核中放射出三樣東西來,即 α-線,β-線及 γ-線.α-線乃由氦原子核構成,(由四個陽電子及二個陰電子結合而成)β-線即是陰電子,故這兩種都是物質的放射,祇是 γ-線才是比 X-光還短的電磁波,乃由於原子核崩潰時內部的振動而生.一個原子核放射出一個 α-微粒以後,牠的原子量即時就減少 4 個單位(即一個氦原子的重量);牠的原子核上的陽電同時也減少兩個單位,所以牠的原子序數也同時比前少 2——於是牠遂蛻變成了他種原素了.若是牠所放射出的,不是一個 α-微粒而是一個 β-微粒,那末原子核在失去一個陰電子,原子量雖沒有變動,原子核上的正電却因而多出了一個單位,於是原子序數遂比前加一;於是這原子的化學性質也變了而成爲他種元素.如原子序數爲88,原子

量爲226，的鐳在放射α-微粒之後,原子序數遂變成了86,原子量遂變成了222，成而爲與惰氣R_n相似的鐳的放射物(Radium Emanation)放射元素從母體鈾(Uranium)出發,漸漸蛻變成鐳,又漸漸蛻變最後而成鉛,但所需的時間是很長的,約300兆年至2000兆年之久.在蛻變的過程中,有時牠的生命祇一秒的幾分之一,有時長至一千多年.變成鉛以後,是否還再繼續蛻變,乃因經時過久我們等不及看見,及鈾是否從原子量更大的金屬蛻變而來,這都是現在還無從解答的問題.即普通一般原素是否均乃放射物質,這亦很難斷定;比如我們所常見的鈉似乎是有些極慢的放射性.這也是很可以玄思一下的問題,放射元素既是不能免於崩潰且蛻變的,則當初又是怎樣發生的呢?這問題或許可這樣回答.宇宙的創造成現在的形式,在現代物理學的眼光看來,不過是出於一種機遇(Chance)，放射元素之發生或由於一個極難得的機遇;但因爲牠這種構造是很難比較永久存在的,如是隨後就開始而且繼續地崩解了.

我們現在知道運動速度最大的質點,要算放射元素放射出的β-微粒了,牠的速度有時乃至於爲光速度的99.8%.在這時候牠的質量遂增加到了平時的16倍——這正是相對論所盼望着的結果.

這我們不知提及多少次了,物質是由兩種基本單位——陽電及陰電子——結合成的.現在可以提出這樣一個疑問:放射物質所放射出的物質放射一種既然爲陰電子的β-線爲什麼其他一種不是由陽電子組成,反是些由四個陽電子及兩個陰電子結合成的氦原子核呢?我們現在唯一的回答即是氦原子核的結合極其堅固,不能破壞,所以在放射物質元子核崩解的時候,放射出的,不能是氫原子核——即陽電子——而是氦原子核.實在,原子並不是絕對放射不出陽電子來,有時也可能的.現在我們不獨知道放射物質的自然崩解,而且能用人工破壞原子核使牠崩解.這工

作是剌得福在1919年完成的.牠研究C鐳($R_a c$)的∝-放射線——這放射的∝-微粒或許是我們現在所能使用具有最大能力的質點了;牠的速度是每秒2×10^9糎,即光速度的30分之2但因空氣阻力的原故,出空氣後祇能走7糎.但剌得福在實驗的時候,發覺在離40糎以外的螢光屏上還見着有閃光發生;這閃光顯然不是∝-微粒衝在上面發生的.用實驗才知衝在上面使螢光屏發生閃光的是些氫原子核,即陽電子.這陽電子乃是由於∝-微粒衝進氮的原子核內,把氮的原子核崩解了被驅逐出來的.這陽電子因爲質量小,而且因原子核破壞之時有巨量的能放出,所以得着極大的速度能飛過很長的距離.這種放射線,名曰H-線(H-rays),從此剌得福遂又利用C鐳的∝-微粒破壞其他許多元素的原子而發生出H-線,於是人工地把元素破壞了.近代化學的起源乃由於古代鍊金術家而來.他們的目的是在求得一種把賤金屬變成黃金的貪婪仙法,但始終一點並沒成功,這事業一直遺留到現在,——現在古代鍊金術家的迷夢居然爲物理學家實現了.但這或許也不是他們所希望的,我們能用人工變成的黃金,代價却比自然的黃金還貴.

『無限(Infinity)』這名詞在物理上現在已經是不佔任何重要的地位了.物質似乎是不能有比電子更小的基本單位;能似乎也有一個不能再分的最小單位h(等於6.545×10^{-27}爾格秒)存在着;每秒3×10^{10}糎的光速度似乎是物質不能達到的最大速度;甚至於宇宙的大及時間的長也不能當作無限看待.無限大,與無限小,在現在物理學見解的趨勢看來,是不能有,無意義,而且不可思議的.相對論的發展,對能及物質引入了新的觀念,牠以爲質量及能是可互相變換的.以前能永存及物質永存的兩條定律,現在被相對論結合起來成了一條;能與物質的總和才是能永存而不變的.依得洗特(De Sitter)及胡布勒(Hubble)二天文學家的計算,宇宙的直徑大約爲100兆光年(一光年等於10^{18}糎)飄浮在這無邊廣濶空間內

的,祇不過有5×10^{60}個陽電子及數目相等的陰電子存在着,牠們總共的質量也不過10^{7}公分 (Gram) 而已.

§V. 物質消滅了麼?

一個帶着陽電的原子核在中心位置着,四周圍繞着些陰電子,這些陰電子的軌道及行動都是量子化了的——這樣一個波耳的原子模型也可謂萬能了:牠解釋了為什麼氣體的分子由兩個或者更多的原子結合而成;牠解釋了一切化學的結合現象;牠解釋了週期表列成的意義;牠解釋了原子數的重要性;牠解釋了放射物質的蛻變情形;牠更重要地還能預言出各種景線的地位,…………………這種萬能似的空前絕後的成功,似乎是不能料到會有搖動的一天的.這模型現在化學上雖然還是威嚴如昔,而在物理學上看來似乎已經成為過去的陳跡了.在1923年得不斐尼(De Broglie)開始創立電子可與一群波相交換的理論,這怪觀念慫恿起許多實驗家去發現電子的波樣行動,不料到這發現居然成了功.在1925年海森伯格(Heisenberg)把新原量理論供獻給了科學,於是波耳的模型遂完全崩潰了.在1927年德衛孫(Davisson)及哲麥(Germer)把速度很慢的電子射在結晶體的表上而觀察牠們被反射的情形;湯姆孫(G. P. Thomson——B J. J. Thomson之子)及賴得 Reid)把細束的陰極線(Cathode rays)通過金屬的薄膜而觀察這些電子的行動.很奇怪這四人的結果都相同,在這兩種情形之下,電子的行動與穿透力極強的X-光無異.陽電子及陰電子的波動性質,在實驗上已經得着了堅實的証據,似乎已經是無可懷疑的了.在1929年湯姆孫曾說:『極短的波與質點是不能區別的.』現在已經把波動性及微粒性看成了是實在(Reality)的兩方面;以前當作『質點』的『電子』可以看作是『一群波,』以前以為是『波』的『光』也可當作是『質點』.在1927年,海森伯格發表出他的不定原理(Principle of indetermination)這原理說:一個質點無論怎樣是不能同時具有精確的速

度與位置的.這原理在我們的思想上引起了革命的變化;爾丁騰(Eddington)把這原理在科學上的重要地位,看成能與愛因斯坦的相對原理同列.這原理的意思即是說:電子在原子內的位置及速度是不能一同被精確知道的,祇能精確地知道一個;要想精確知道電子的位置,就須把牠的速度的精確犧牲了,反之要想精確知道牠的速度就不能精確知道牠的位置.我們以前祇知道因為器械,方法,及技巧所限制,所以不能無限地精密測得一個物理學量而已,像這種求全一個就非要犧牲一個不可的事情,是我們從沒夢想及的,現在試舉個例來說明這不定原理,設使我們與一件事物完全斷絕任何的關係,在我們及牠的中間沒有任何互感的作用,我們是無從知牠的存在的.我們怎樣知道一個電子的位置呢?我們可以用光去照他,即是射一個量子的能到牠上面去;如果光的振數愈大,則這量子的能也愈大,我們遂看得這電子愈清楚.但一個量子是有質量的,(相對論說凡有能的東西也就有質量),在這質量子打在電子上面的時候,牠的位置雖然看見了,速度却已經變了.光的振數愈大,一個光量子的能也愈多,電子雖然被你看得愈清楚,再要想知道牠的精密速度已經是不可能,牠已經變得不是你所要知道的了.電子在原子中的地位,是不能精確知道的,我們充其量也只能大概知道牠在某個區域裡.連一個電子在原子內的位置還不知道,而且又把牠看成是波,更還有什麼原子的模型可言呢?

說來雖然是奇異,但似乎是並不難知道的——波動這名詞我們早就聽慣了.但事實上却不是如此.物理學家現在把物質看成波——即所謂的物質波(Material waves),這波却不是容易領會的.牠不是光波,也不是水波,或者是任何物質的波,乃是一種數學上可能率的波動(Waves of Probablity)並且這波並不存在在我們所見慣了的三度空間裡,乃在3度以上的高度空間裡,這高度空間我們普通叫做形式空間(Space of configuration)我們怎樣用這些波來解

釋物質呢?且看爾丁塍打比喻的說道:你假想一種以太似的東西,在牠表面上滿布着細微的浪.這些細微的波浪的振動比尋常可視的光線快得一萬萬倍——快得過於超乎我們凡俗經驗範圍之外了.單獨個別的細波是超乎我們識見之外的;我們所能辨別出的是一種牠們結合的効果——即當着這些波動因趨一且結合而共同造成一個擾動面積的時候,這面積的區域比起個別的細波來是狠大,但在我們凡俗的眼光看來是很小的.這樣的一塊擾動面積被認作一個質點;有時牠能是一個電子.』從這粗椶的比喻,是不能領悟到什麽是波力學的.帶拉克(Dirac)曾說:『這些新的理論,離開了牠的數學的背景去看牠,是從一些物理觀念建造成的,這些觀念不能用學者以前所知道的事物名詞來說明,甚至於用文字來充分地說明都是不能夠的』.科學是由常識出發的,現在的物理學似乎是遠離開人的常識而去了,牠現在變成乃至於不能用言語,文字,及我以前所有的觀念來說明,而要用些數學上艱深的抽象符號.來作說明的言語,現在即使原子還有任何的模型可言,我們以前的模型是用電子,軌道,等觀念建築成的,現在建築的材料將是一堆的數學的符號.穿不過這些幽密的符號林子,是看不見現在理論的玄秘的.哲綸司(Jeans)曾說:『現在才知道創造宇宙的上帝是一位純粹的數學家(The Great Architect of the Universe now begins to appear as a pure mathematician)』『何謂物質』?這問題我們現在能解答了麽?我們爲了解宇宙的神秘而研究科學.原子的創造至少也是宇宙創造的一部分.現在的新量子論及波力學能說是把這玄秘的謎子猜着了麽?這是誰也不能說的;何況這新的理論現在不過是剛剛發生,意見還紛歧得很(如著名的原量論者薄麥斐爾特(Sommerfeld)就寧願把電子看成一個點電荷(Point Charge)而不願把牠當作連續布滿空中的波動,)離着完成的階段不知還有多少途程.道爾頓(Dalton)的原子理論會笑德謨頡利圖的;剌得福的會笑道爾頓的;波耳的比剌得福的更完美——我們

現在的原子思想再過一百年後不知會被想作是怎樣可趣的一個東西呢?我現在且引爾丁騰在他的『物理世界的眞性(The Noture of the Physical World)』中所說的幾句話來作個結論:

『量子論或許是能把自然的某些事實洩漏給我們的方法,但同時新的不知又隨着時間的進行而產生了.一種知識的增加,是由一種愚昧的增加作代價而贏得的.用一個漏桶是難把眞理(truth)的深井汲盡的』.

化學反應次數之決定

(Determination of order of reaction)

宋文政

一般化學反應方程式恆依反應開始前之各物質與反應終結後生成各物質間之關係而作成者,毫未顧及反應進行中各物質間之關係,故由化學方程式推定之反應次數,往往與實際所測定者不符,如第一氯化鐵之稀鹽酸溶液,受氯酸鉀 (Kcl O_3) 氧化而爲第二氯化鉄,即其實例.

$$6\,Fe\,cl_2 + Kcl\,O_3 + 6\,Hcl = 6\,Fe\,cl_3 + Kcl + 3\,H_2O$$

上列化學方程式,係由推論所得,依其左側所示,共有十三分子,故應爲十三次反應.但由 A. A. Noyes 之實測,始知僅爲一種三次反應耳.事實與推論,既已如斯逕庭,則一切化學反應次數非根據健全之理論,作實際之測定不可.茲將三種最重要之測定法縷述如下:

A. 積分法(Integration method.)凡一種化學反應之次數,在未實測以前,可假定其爲一次,二次或 n 次反應之一種;若爲一次反應,其反應速度可以

$\frac{dx}{dt} = k_1(a-x)$ 表示,a 爲反應物質最初之濃度(Mol concentration), x 爲反應物質經過 t 分後變化之濃度,k_1 爲一次反應速度恆數;若爲二次反應,則反應速度 (Reaction of velocity = dx/dt) 可以

$\frac{dx}{dt} = k_2(a-x)^2$ 表示,a; x 之意義同前 k_2 爲二次反應速度恒數;若爲 n 次反應(Nth order of reaction)則反應速度可以

$\frac{dx}{dt} = k_n(a-x)^n$ 表示之,今將各反應速度式積分以求反應恆數

$k_1, k_2, k_3 - k_n$ 之值，設其中之 k_n，不因反應時間之長短，與物質濃度之大小而變易其值者(即恒數)則此化學反應當為 n 次反應無疑.

例:燐化氫(PH_3)受熱可分解為赤燐(P_4)與氫，由推定所得之反應式為($4PH_3 = P_4 + 6H_2$)反應式之左側有四分子，故為四次反應其反應速度式則為

$$\frac{dx}{dt} = k_4(a-x)^4 \cdots\cdots(1)$$

設非四次反應而為一次反應時，則反應速度式應為(2)

$$\frac{dx}{dt} = k_1(a-x) \cdots\cdots\cdot(2)$$

今將(1)，(2)分別積分，以求 k_4，k_1.

$$\frac{dk}{dt} = k_4(a-x)^4, \qquad \frac{dx}{(a-x)^4} = k_4\,dt \qquad \int\frac{dx}{(a-x)^4} = k_4\int dt,$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(a-x)^3} = k_4 t + C \cdots\cdots\cdots(3)$$

在反應未開始前，$(t=0, x=0)$ $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{a^3} = C$ 故積分恆數C應為 $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{a^3}$

將C代入(3) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(a-x)^3} = k_4 t + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{a^3}$ 故 $k_4 = \frac{1}{3t}\left\{\frac{1}{(a-x)^3} - \frac{1}{a^3}\right\}\cdot\cdot(4)$

將(2)積分 $\frac{dx}{dt} = k_1(a-x)$，$\frac{dx}{(a-x)} = k_1\,dt$ $\quad \int\frac{dx}{a-x} = k_1\int dt$，

$$-\ln(a-x) = k_1 t + C \cdots\cdots\cdots(5)$$

在反應未開始前，$(t=0, x=0)$ $\quad -\ln a = C$ 將此代入(5)

$$-\ln(a-x) = k_1 t - \ln a \quad k_1 t = \ln\frac{a}{a-x}, \quad k_1 t = 2.303\log\frac{a}{a-x}$$

故 $0.4343\,k_1 = \frac{1}{t}\log\frac{a}{a-x}\left(\text{for } \frac{1}{2.303} = 0.4343\right)\cdots\cdots\cdots(6)$

細查燐化氫在分解前有四容之氣體，完全分解後可得六容之氣體(P_4為難揮發之固體，其蒸氣壓可以不加計算)設使反應前後氣體之容積，固定不變，則反應前後之壓力，應為二與三之比，壓力與分子數成正比，濃度亦然，故燐化氫反應前後之濃度，可以壓力

表示之.

設反應未開始前燐化氫之濃度爲a,其壓力爲P_o經過t分後,其分解之濃度爲x,混合氣體之壓力爲P則 $a:\left\{(a-x)+\frac{2}{3}x\right\}=P_o:P$

$(a-x)+\frac{2}{3}x$ 爲經過t分後PH_3與H_2之總濃度,因一容之PH_3分解後可得$\frac{3}{2}$容之H_2.

$$\therefore\ P=\frac{P_o}{a}\left(a-x+\frac{3}{2}x\right)=\frac{P_o}{a}\cdot\frac{2a+x}{2}$$ 由此求x,(a—x),

$$x=\frac{2a(P-P_o)}{P_o}\qquad a-x=\frac{(3P_o-2P)a}{P_o}\cdots\cdots\cdots(7)$$

將(7)代入(4)與(6)則得

$$k_4=\frac{1}{3a^3t}\left\{\left(\frac{P_o}{3P_o-2P}\right)^3-1\right\}\cdots\cdots\cdots(8)$$

$$0.4343\,k_1=\frac{1}{t}\log\frac{P_o}{3P_o-2P}\cdots\cdots\cdots(9)$$

Kooy對燐化氫實驗之結果,始知此項反應非四次而爲一次.

燐化氫之分解(溫度 = 446°)

t (時)	p (m.m.)	分解度(%)	$0.4343\,k_1$	$3a^3k_4$
0	715.21	0	——	——
7.83	730.13	4.17	0.00236	0.0174
18.75	751.04	10.02	0.00245	0.0193
28.17	765.88	14.17	0.00236	0.0206
38.50	781.59	18.56	0.00232	0.0221
45.33	793.93	22.00	0.00238	0.0244
56.28	809.30	26.31	0.00236	0.0267
68.83	828.01	31.54	0.00239	0.0307
89.67	855.60	39.23	0.00241	0.0385
			平均 0.00238	

觀上表$0.4343\,k_1$在各種分解時間後之值,恒與平均值0.00238相

近，至 $3a^3k$，由時間之變更，即大易其值，即表示其並非恒數，故燐氫之分解，應爲一次反應而非四次反應，其反應式應如下列

$$PH_3 = P + 3H \cdots\cdots\cdots (a) \qquad 4P = P_4 \,;\, 2H = H_2 \cdots\cdots\cdots (b)$$

燐化氫之分角，可以(a)完全代表，故爲一次反應，因(b)式所列之反應，進行極爲迅速，其完成時間可視爲零，毫不影響(a)之成立也.

B. 微分法(Differentiation method.)任何反應速度，俱與反應物質之濃度(C)成正比，若爲 n 次反應，則與濃度之 n 乘成正比 (C^n) 以式表示如下.

$$-\frac{dc}{dt} = kc^n$$

反應物質之濃度(C)由時間之進行，逐漸減少，即反應速度，由反應之進行而減小，故 $\frac{dc}{dt}$ 之前附有負號.設同一物質在兩種濃度(C_1，C_2)之下舉行反應，則兩種反應速度，應如下式所示.

$$-\frac{dc_1}{dt} = kc^n \quad -\frac{dc_2}{dt} = kc_2^n \,; \quad \frac{\frac{dc_1}{dt}}{\frac{dc_2}{dt}} = \frac{C_1^n}{C_2^n} \quad \text{取兩方之對數}$$

$$n \log C_1 - n \log C_2 = \log \frac{dc_1}{dt} - \log \frac{dc_2}{dt}$$

$$n = \frac{\log \frac{dc_1}{dt} - \log \frac{dc_2}{dt}}{\log C_1 - \log C_2} \cdots\cdots\cdots (10)$$

n 在理論上應爲正整數，其值可由實驗求得

例 Cyanic acid (H O C N) 受熱後可複合爲 Cyanamide $\left\{ (CNOH)^3 \right\}$，惟在複合中，常受他種副作用之擾亂，故其反應次數，不易推定，但 Cyanic acid之濃度，仍可以其蒸氣壓表示，已見於燐化氫之分解，(至 Cyanamide 爲難揮發之固體，其蒸汽壓可以不加計算)今將二次之實驗結果列下

(一) Cyanic acid 之初壓爲 188.84 經二十三小時之變化後，其壓力降至 153.46.

(二) Cyanic acid 之初壓爲 79.01 經二十小時之變化後其壓力降至 76.04

$$\frac{\triangle C_1}{\triangle t_1} = \frac{188.84 - 15546}{23} = \frac{35.38}{23} = 1.54$$

$$\frac{\triangle C_2}{\triangle t} = \frac{79.01 - 76.04}{20} = \frac{2.97}{20} = 0.149$$

$$n = \frac{\log 1.54 - \log 0.194}{\log \frac{188.84 + 153.46}{2} - \log \frac{79.01 + 76.04}{2}} = \frac{1.0143}{0.3440} = 2.9$$

故Cyanic之複合,應爲三次反應,其反應式非如下列不可.

$$3\,HOCN = (CNOH)_3$$

Cyanic acil　　Cyanamide.

$\frac{188.84 + 153.46}{2.}$ 爲實驗(一)之平均濃度,$\frac{79.01 + 76.04}{2}$ 爲實驗(二)之平均濃度.

C. 積分比較法(Comparison method)此法爲A. A. Noyes所創見即取同一物質在兩種濃(C_1,C_2)之下舉行反應,使C_1經過t_1分後變爲C_1'使C_2經過t_2分後,變爲C_2',以成立$\left(\frac{C_1 - C_1'}{C_1} = \frac{C_2 - C_2'}{C_2}\right)$之關係後,再將反應速度式分別積分,以求n之値.

$$-\frac{dc_1}{dt} = kc_1^n \cdots\cdots\cdots(11) \qquad -\frac{dc_2}{dt} = kc_2^n \cdots\cdots\cdots(12)$$

在$\left\{\begin{matrix} C = C_1 & C = C_1' \\ t = o\ , & t = t_2 \end{matrix}\right\}$之間,將(11)積分,在$\left\{\begin{matrix} C = C_2 & C = C_2' \\ t = o\ , & t = t_2 \end{matrix}\right\}$之間將(12)積分.

$$-\int_{C_1}^{C_1'} \frac{dc}{C^n} = k\int_{o}^{t_1} dt \qquad \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{C_1'^{\,n-1}} - \frac{1}{C_1^{\,n-1}}\right) = kt_1 \cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

$$-\int_{C_2}^{C_2'} \frac{dc}{C^n} = k\int_{o}^{t_2} dt \qquad \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{C_2'^{\,n-1}} - \frac{1}{C_2^{\,n-1}}\right) = kt_2 \cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

由(13),(14)可得 $\frac{(C_1^{n-1} - C_1'^{\,n-1})\,C_2^{n-1}\,C_2'^{\,n-1}}{(C_2^{n-1} - C_2'^{\,n-1})\,C_1^{n-1}\,C_1'^{\,n-1}} = \frac{t_1}{t_2} \cdots\cdots\cdots\cdots(15)$

但 $\frac{C_1 - C_1'}{C_1} = \frac{C_2 - C_2'}{C_2}$, $\left(\frac{C_1}{C_1'}\right)^{n-1} = \left(\frac{C_2}{C_2'}\right)^{n-1}$ $\left(\frac{C_1}{C_1'}\right)^{n-1} - 1 = \left(\frac{C_2'}{C_2}\right)^{n-1} - 1$

故 $\frac{C_1^{n-1}-C_1'^{\,n-1}}{C_1'^{\,n-1}}=\frac{C_2^{n-1}-C_2'^{\,n-1}}{C_2'^{\,n-1}}$ ....(16)

由 (15),(16) 可得 $\left(\frac{C_2}{C_1}\right)^{n-1}=\frac{t_1}{t_2}$ 取兩方之對數

$$(n-1)\log\frac{C_2}{C_1}=\log\frac{t_1}{t_2}\qquad\therefore\ n=1+\frac{\log t_1-\log t_2}{\log C_2-\log C_1}\ \cdots\cdots\cdots(17)$$

依理論 n 亦非正整數不可.

例 Bromic acid($HBrO_3$)與 Hydrobromic acid 間之反應,依推論反應式所示,應爲六次反應 $HBrO_3+5HBr=3Br_2+3H_2O$ ....(18)

$HBrO_3$ 之濃度,可由 $Na_2S_2O_3$ 規定液滴定.

$$(2Na_2S_2O_3+Br_2=Na_2S_4O_6+2NaBr)$$

由 Wal er 之實驗始知(18)並非六次反應而爲四次反應, Walker 所取之第一濃度 C_1 爲 77 C. C. (C. C. of $Na_2S_2O_3$)其分解至三分之一所需之時間 t_1 爲五十分,

第二濃度 C_2 爲 61.33 C. C. (C. C. of $Na_2S_2O_3$)其分解至三分一所需之時間爲五十分.

$$\frac{C_1-C_1'}{C_1}=\frac{C_2-C_2'}{C_2}=\frac{1}{3}$$

$C_1=77$ C. C. $\qquad C_2=51.33$ C. C.

$t_1=15$ minutes. $\qquad t_2=50$ minutes.

$$\therefore\ n=\frac{\log 50-\log 15}{\log 77-\log 51.33}+1=2.97+1=3.97.$$

n 既與四極爲接近,故(18)所示之反應,應爲四次反應.

理科教員暑期講習班教學雜感

馬心儀

民國二十三年夏承廣西大學之聘,留校任教暑期講習班.此班爲廣西中學校生物教員所組成.所有教員大都爲本省人士,來自各區各縣,同聚一堂,互相研究,好學不厭,殊爲一時勝事.各教員之資格各有不同,學識亦異,老少年紀距離懸殊,少者二十餘歲,老者五十餘歲;以年事差別故其經驗亦因之而異.就資格言:有初中畢業即當教員者,有大學畢業始任教職者;有初任教職一年者,有執教績二十餘年者;有爲好自然學科而教生物者,有爲經濟困難而任教員者.教育之不同不問而知.由此觀之,執教於講習班者,固不無困難也.語云教學相長,是以當時執教於講習班者,不但可增經驗,亦有感想發生.茲畧述數項如次:

一 中等教育的使命

教育人才與培養花木其目的雖不同,其方法則無甚差異.在種花時栽培者須選擇種子,土壤;撒種之後,須按時灌溉,依次施肥,且時加管理,以待美麗花卉之發生.教育兒童亦然,所以若希望有良好中等教育,必須於初等教育上着手,在兒童之環境上注意,依序教育,按法鼓勵,以適當之課程增加兒童之智識.迨兒童入中等學校時期,已具有相當之智識,始能領受中等教育.兒童之腦力不同,尤如種子之各異,若用同一方法培養不同之子弟,常致損此誤彼,所以掌理教育者,不可不注意也.就個人之意見言之,中等教育的目的有二:一,爲預備將來升入大學,一爲將來謀生之出路;職是之故,所以今日之廣西中學教育宜按以上之需要而從事改革.並宜

多設各種不同之中學教育機關以培養有用人才.總而言之:初等教育當視爲强迫教育,即國民所應有之基礎教育.又中等教育當認爲選擇教育藉子弟之必需及天材之可能而分別之.其長於藝術者,當入藝術學校;長於工業者,當入工業專習學校;長於武術者,當入軍事學校;天資聰穎而好讀書者,當入大學預備學校.由是言之,中等教育至少當分爲四種以供學子之需求.

二　中等學校教育之重要

中等學校是人生生活上一大關鍵,自髫齡至成年中所必經之程途.在初等時將基礎奠定,到中學時按其天材就其所好而以各種人才教育分別培植之.若教育得當,一個兒童之畢生生活由此着手,日異月新,以至中學畢業,在此長時期內如將來入社會服務已預備需要之工作,如入大學而求深造已具備充分之學識.凡在各種中等學校畢業,社會當給予相當之工作,若輩亦當給社會相當之貢獻,如此分類設備始不失教育之本意.若只有一種中等學校,一般子弟强授以不能受的一種同等教育;經過一種不適當的會考,千百人中只考取三數名,成績底劣者,不但不能自謀生活,反造成一般流氓,爲社會之蠹,若此之中學教育,不獨無益而反有害,言之可痛.是教育萬能之本意即由此失掉.一般青年前途生活之希望不但未能提高,反將彼輩墜入深淵,而不能自拔.

三　中等學校教員之選擇

諺云「有其父必有其子,有其師必有其弟.」若無良好教師,雖聰明高才子弟,亦不能得深高教育.欲子弟教育得法,必須有相當之教師.所以甄別教師,鑑定教育之資格有實行之必要.鑑定方法有二:一,凡中學教員資格當具有大學畢業或曾受相當訓練而有研究者;二,凡中學教員教某學科者當有充分之預備和研究.蓋教育雖是萬能,但任教員者能專精一科或二科已屬可貴.果則所有的中學教員其學識如豐富,自不患學生智識之不高,更不患子弟中學畢業後繼升學或工作之希望.除預備升入大學之中等學校外,

其他中等學校教員當負有帮助一班青年生產,營業,謀生之責任,並須注意養成國民獨立生活,對於國家之農工商業上并須爲謀美滿之幸福·

四 中等學校的軍訓

學校施行軍訓爲救國方案中提要之策·中等教員中有不以軍訓爲然者,其不贊成之原因何在,自是複雜·若只說不贊成實未能解决問題中不適當之點·就個人意見言之,廣西提倡軍國民教育,實寓深意·我國數百年來國人輕視軍人,殆無足諱·語云「好人不當兵,好鉄不打釘;」此語深入人心,是中國日形文弱,近來幾不能自衛,欲救此弊,非學校行軍訓不可·軍訓之功用,能使一般子弟,振起精神來鍜鍊身體,爲國効力;并能藉軍訓養成一種勤儉耐勞的習慣,藉軍訓造成一般愛國的志士,藉軍訓除掉一切不良的惡習,此種主義豈但廣西宜行,全中國亦當提倡·廣西不過試作;將來成績良好,他省自必仿行·現值提倡軍國民教育之際,應當注意之點,特畧述之·一,中等學校學生身體之檢驗,如有心病肺病之學生當免受軍訓·蓋因身體不良不堪受軍訓而致病時,使學生對於軍訓不但不生愛慕心,反生恐懼心·二,軍訓時當用一種緊急爽快之動作,在短時間內舉行;若每次時間過久教者學者均形疲憊·三,軍訓是每日每時起居行動中必須具有精神,不單是只在操塲上注意·四,軍訓實行期·在中學校施行時,最好使學生養成清潔,勤苦,耐勞,紀律的習慣·若是在學校畢業後或入大學或入社會服務,均已養成良好的習慣,幾成爲第二天性·即使用不着受軍訓的學生去抗日本,也是我們自已保衛,自已强身健性的一要途·希望中國全國子弟都樂意受軍訓·

五 中等學校教育辦理之改良

辦理中等學校教育者須看清楚中等學校教育的使命,要知中等學校教育之重要,當改良之處,都是竭力盡心的去改良,所以在選擇良好的教員之外,其他當改良的地方,就暑期講習班的提議

總括如左:

(一)中等學校教員的功課每週在二十小時以上,並且教的種類太複雜;雖聰明才智之人亦未必每一種科學都知道詳明;結果敷衍了事,弄成一種勉强搪塞的成績,有名無實的學科.不如稍減教員擔任的功課的時間,給教員有自修及預備的餘暇.

(二)中等學校設備不完備及欵絀的中學校多未能設圖書室,校園;有些學校只有一架顯微鏡,有些連一架都沒有,教生物學的不知不覺就偏於理論方面,與從前教的八股文章差不多的.所以對於設備方面當相法子來補救,在科學方面當提倡實驗,因爲學生對於實驗比理論多有興趣.

(三)觀察今日初等及中學校的課程.不覺使作者自覺頭暈.一個小學生的腦力有限,智力亦有限,所學的功課不但不是每日相同,且必須科外自習,在十二歲以下的兒童下課後只當玩耍,以養成天真瀾漫的天性.中學學生因爲功課太複雜,所以所學的功課不但不能澈底,常有莫明其妙,所學者爲何之現象;學識鞏固之基礎自難得到.甚至於中國人對於普通中國文字事宜都不知何如?如此中等學校課程當按學校的性質而別;並且基礎學問如中文,算學當特別注意,其他如英文,地理,歷史,科學常識,亦當斟酌加添.

(四)中學教員的待遇太薄.這一項是中國中等學校的通病,也是國聯教育調查團批評中之一項.按廣西最近的章程,每一教員每週授課時間在十八小時以上,月薪在六十元以上;雖比從前好些;但是名稱上雖不錯,在扣折之後,其餘者不過僅敷生活費,至購買書籍已沒有餘錢,所以教員們只孤陋寡聞,抱着一本死書教人,不能活用.

(五)教科書當注意改良.據現在科學出版書大半不是教中學的人寫出來的;對於教學方面,作書的人沒有經驗,所以寫出來的書也不適用;有些書簡直是自外國書裡譯出來的.化學,物理,數學教本還可以模模糊糊的來用,因爲世界上所有的數理化大致都相

同.若就現在作生物教員的,因爲世界上的動植物都是一處一處不同的,如人之面貌,言語一樣,東西南北各有差別.以外國教本內的教材來用在廣西就如將不認識之物,活剝生吞,一點不相當,也不適宜.所以作教本的第一要懂得中學學生的心理,第二要知道教中學學生的方法,第三要明瞭中國的生物,第四要注意特別部分或別省的生物,以便適用於某部分之學校.第五要看明書之用途,是爲將來入大學之預備或爲將來謀生之常識.

(六)改良學生生活的環境以清潔,衞生,儉樸,美育,合群爲主而養成學生愛身,愛家,愛國之習慣.

以上所述亦不過在暑期講習班與中學教員研究植物學時所得的一點經驗和感想.各人的學識不同,思想自異,所以我發表的意見未必都合用,就是適用亦未必一時能辦到.就生物學一門而言;教中學的人才暫時很少,就是要提高程度,一時也難辦到.講習班的設立,也不過是一個救急方法;若是能在短時間內訓練出良好的人才,勢所難能.若是將中學教員都改用大學畢業生,廣西爲有許多教材.教育之改良與菓樹之改良同,必須有一定的年限使其生長發育.若是僅以短促之時光將教育改好是辦不到的.對於生物方面希望大學學生能抱一種將來教子弟的誠心,努力研究,在畢業之後到民間去教中等學校,以便提高中學程度.總而言之:中學教育之改良上賴大學學生之師資,下賴初等學校所培養的基礎.上下相應,中學教育纔有好結果.如此作者希望廣西省不但要改良大學教育,中學,小學教育當一齊着手,纔有成效.若無好的小學,難有好的中學;若無好的中學,難有好的大學.反而言之:中學賴大學得師資,小學賴師範或大學得師資;彼此互相爲用,缺一未可.全省人士,如能努力前進,悉心研求,當改良者改良,當革新者革新,將來廣西教育,自然蒸蒸日上,可爲全國之模範,亦可爲世界所景仰,有厚望焉.

民國二十三年十月三十一日書於廣西大學農學院三樓

附錄一

廣西大學主辦中等學校理科教員暑期講習班教職員錄

職別	姓名	別號	籍貫	通訊處	附記
委員長	馬君武		桂林	上海昆明三百六十八號	現任本校校長
委員	蘇汝淦		藤縣	梧州女學左巷十九號	現任本校教務長
委員兼教授	段子燮	調元	四川江津	四川省江津縣班竹巷余家院子	現任本校理學院長
委員兼教授	張鎮謙	叠元	浙江嘉興		現任本校算學系主任
委員兼教授	鄭靜華		四川開江		現任本校教授
委員兼教授	謝厚藩		湖南新田		現任本校物理系主任
委員兼教授	聞　詩	仲像	浙江溫嶺		現任本校教授
委員兼教授	林炳光		廣東中山		現任本校探礦科主任
委員兼教授	朱文政		湖北當陽	湖北宜昌右順城街又一號	現任本校教授
委員兼教授	馬心儀		山東青島		現任本校生物系主任
委員兼教授	馮艷之		湖南長沙		現任本校教授

代理教授	楊葆昌				已離校
教員	李蕃	銳夫	浙江平陽	浙江平陽江南李家溪	現任本校講師
教員	嚴楷達	蕭裳	江蘇如皋	江蘇靜江季家市轉黃家市	現任本校講師
教員	袁至純	致深	福建崇安		現任本校講師
職員	盧延素	中强	桂林	桂林麒麟巷四十六號	現任本校秘書主任
職員	盛玫	潛叔	湖南衡陽	湖南衡陽下三觀街廿號轉	現任本校註冊主任
職員	過崑源		江蘇無錫		現任本校事務主任
職員	諸鑑		桂林		現任本校會計主任
職員	李次民		廣東		現任本校圖書主任

附錄二

廣西大學主辦中等學校理科教員暑期講習班學員錄

高級數學組

姓名	年齡	籍貫	通信處	附記
龐顯揚	二八	鬱林	鬱林城外南橋街巨益店轉	
楊甲棟	三六	鬱林	鬱林大塘墟郵局轉	
徐煥賢	三五	廣東蕉嶺	廣州市倉邊路登雲里興文書院	
何承聰	二五	consultas浦	防浦縣時雍街四十九號	

高級理化組

姓名	年齡	籍貫	通信處	附記
鍾傑生	二七	蒼梧	梧州洪聖街東三巷和生號	
靳爲藩	二四	桂林	桂林府前街靳宅	
雷御龍	二六	邕寧	南寧民生路182號	
梁立模	二六	邕寧	南寧良慶墟郵局轉平約村	

姚嘉銘	三二	湖南長沙	省立第一高中	
陳孔剛	二八	鬱林	南寧軍醫院陳孔謙君轉	
唐與祺	三五	鬱林	鬱林縣福綿村並生堂轉	
張啓祥	三八	邕寧	南寧明德街七十四號	
周建弼	二五	鬱林	鬱林南街吉安	
吳献瑞	二九	賓陽	賓陽蘆墟碗行街廣利昌轉	
武懷仁	二二	武宣	武宣縣東街胡源勝寶號轉	
沈鼎三	二五	浙江海寧	浙江省長安鎮	
李紹林	二七	邕寧	南寧自由街通恒號	

高級生物組

姓名	年齡	籍貫	通信處	附記
蘇宏仁	二六	蒼梧		
劉毓芬	三六	陸川	陸川烏石墟仁昌號收轉	
黃瑤	二三	務浦	務浦中山街均昌號轉交灘頭村	
陳光煊	三一	湖南藍山	南寧教育廳楊進德君轉交	
林絜芳	三四	北流	北流民樂墟郵務所轉交	

李嗣臯	二八	蒼梧	梧州小南路邦治隆	
李育英	三三	容縣	容縣楊梅墟致祥和號轉	

初級數學組

姓名	年齡	籍貫	通信處	附記
顧林	二七	湖南零陵	全縣中學	
勵敦本	三一	興業	興業裕發號	
蘇樹藲	二一	岑溪	岑溪馬路墟逢生堂轉	
蘇永彰	二七	義寧	義寧縣城內夷惠堂	兼習生物
殷振菁	三三	北流	北流縣悅勝街萬興隆棧轉	
譚耀仁	二八	興業	貴縣橋墟福安堂轉	
羅稻香	三一	蒼梧	梧州桂林路羅天福隆貨號轉交	
羅美衛	二四	蒼梧	梧州三角咀中學前街十五號	
閻朝堂	二八	興業	興業橋墟福安堂轉	
謝釗光	二七	容縣	容縣自良景福號轉	
謝元	三二	陸川	陸川烏石萬和轉	兼習理化
謝錫如	三十	柳城	柳城縣龍江區鳳山鎮南門街二十一號	

態喬豎	二四	浙江海寧	浙江省長安鎮	
鍾鈞陶	二七	廣東梅縣	廣州市大石東街四十三號	兼習理化
鍾永年	二十	蒼梧		
盧毓炘	二九	昭平	梧州竹園肚培正中學	
盧潛	三五	廣東茂名	香港九龍長沙灣長沙書院	
霍達勇	二七	藤縣		
鄺其焜	三十	靖西	靖西后府街十四號	
糅毓賓	二五	蒼梧		兼習理化
劉君模	三二	岑溪	岑溪盤古信櫃	
劉士拔	二九	容縣	容縣利民押轉	
劉乾元	二六	興安	興安新興街滙興轉高上田大同興	
劉烈承	三一	桂平	大湟江口源珍昌轉	
蔣一鳴	二五	賀縣	賀縣八步對河成發號轉	
黎維智	二四	容縣		
黎顯彬	二六	陸川	陸川米塘順安號轉	
黎達明	三一	貴縣	貴縣木格墟郵局轉	

趙　雯	二三	桂林	梧州電力廠	
鄭世需	三五	容縣	容縣楊梅墟華記隆轉	
蒙永寧	三一	邕甯	南甯德隣路福祥號轉	
鄧潤章	二五	靖西	靖西東街廿七號	
雷宜春	三十	湖北宜昌		
楊祿古	二九	興業	興業橋墟大成押轉交	
葉延齡	三三	鬱林	北流四里新墟德生堂轉榕根村	
葛蔭發	二六	邕甯	南甯照璧塘十三號轉	
彭鴻年	四七	蒼梧	梧州北平路善述書屋	
覃德全	二二	桂平		
覃維嶽	二五	興業	興業城隍墟彩記號轉大寮村	兼習理化
覃敷材	二五	桂平	桂平江口石咀社坡聯和號轉	
馮宗鑑	二四	博白	博白榆木市郵局轉社嶺	
馮峯華	二五	桂平	桂平華泉書局轉勁竹	兼習理化
馮軍超	四十	桂平	平南城西街協成轉	
馮士毅	三十	靈川		

梁傅霖	三一	平南	平南平山墟朱福和號轉鳳捐	兼習理化
梁璟武	三十	博白	博白縣立圖書館轉	
梁澤森	二七	果德	南甯民生路和生堂	
梁彩福	二五	貴縣	貴縣東津鄉公所轉	
梁天德	四八	桂平	桂平五甲街均如意號轉交	
張劍光	二六	邕寧	南寧城外經文街四十八號骨廳市轉	
張汝靜	二五	桂林	梧州省二中	
莫大文	三八	藤縣	藤縣三堡坡塘	
黃兆豐	三二	廣東揭揚	廣州靖海二馬路豐棧	兼習理化
黃活泉	三一	廣東開平	梧州女子中學校	兼習理化
黃顯岡	三七	藤縣	藤縣象棋郵局	
黃尙拔	三九	邕甯	南甯德隣路達生堂轉	兼習理化
黃德光	二九	平南	平南西街信昌號轉妙客廣源號轉交	兼習理化
黃友蘭	二二	邕甯	南甯民權路北一里二十四號	
馬瑞榕	四三	桂林	桂林伏波門大街五十五號	
唐永墀	三五	桂林	桂林伏波門城脚七號	

陸鴻飛	二五	貴縣	貴縣大墟永濟號轉	
秦振民	三二	桂林	桂林蘇橋福昌號轉	
秦宗瀆	二一	桂林	桂林太和街廿八號周宅轉交	
韋映晉	三九	同正	南寧三管圖書局轉	
韋容生	二五	容縣	容縣松山郵局	
陳椿林	二六	蒼梧	梧州大北較塲二號	兼習理化
陳志敦	二六	桂平	桂平江口恒福堂轉	
陳承材	三五	武宣	武昌西門振興書局轉	
陳起堯	三一	北流	北流民樂墟郵局轉羅村	
陳五侯	四六	貴縣	貴縣墟心街忠昌店轉	
麥以楨	二六	鬱林	北流新興街大生隆	
侯維鵬	四三	岑溪	梧州新倉街一號侯維鴻律師事務所轉	
徐振民	三四	容縣	容縣長河郵局轉	
胡　春	二七	平南	平南大安墟恒生號轉	兼習理化
胡廸生	三四	桂平	桂平五甲街	
封祝宗	二七	容縣	容縣楊梅市利記轉石嶺	兼習理化

吳樹椿	二七	鬱林	鬱林南門街義和號轉	
林建勳	二六	容縣	容縣松山郵局轉尋砂塘	
周鳳錦	二九	蒼梧	梧州桂林路富林號轉交	
周儀東	三十	北流	北流縣隆盛	兼習理化
沈鍾官	二四	天保	天保縣立簡易鄉村師範學校	兼習生物
汪英時	二八	原籍武昌現寓西博白	南甯南門外經文街一百二十一號	
何義智	三十	博白	博白城外北街口何宅	
何漢星	三一	邕甯	南寧雲亭街五十五號	兼習生物
何名德	二四	藤縣	藤縣和平墟聚興號轉	兼習理化
李才基	二八	博白	博白雙鳳市郵務處轉	
李顯華	二八	陸川	陸川灘西街恒興號轉	
李子軍	三三	蒼梧	梧州博愛路十七號李慶源堂	
李斗南	三九	福建上杭	汕頭轉峯市恆泰成記棧	
李曼	三一	博白	南寧中山路一百六十號	
李載鑑	四十	岑溪	岑溪縣南渡郵局轉	
李澤普	三一	容縣	容縣民和堂轉	

石仲元	二六	奉議	梧州省立第二中學胡萬鈿轉	兼習理化
甘海楽	三一	貴縣	貴縣瓦塘香江	兼習理化
王普霖	四六	河北天津	全縣初級中學校	

初級理化組

姓名	年齡	籍貫	通信處	附記
張經華	三十	容縣	容縣武塲張宅	
羅舉晃	三一	鬱林	鬱林南墟榮安號轉	
譚繼光	二七	桂平	桂平城內西巷聯輝堂	
戴家政	二七	蒙山	蒙山縣新圩永合隆轉	
蔣孫賓	二九	鬱林	鬱林城內恒隆轉	
楊家禮	二七	鬱林	鬱林城內北街元記棧轉	
溫顯金	二七	桂平	桂平蒙圩同記號轉	
覃吉福	二六	防浦	防浦十字街黃順與轉	
張國寶	三十	桂林	桂林鳳凰街一百三十五號	
張熙	二二	武宣	梧市四坊街建棧樓上	
黃日華	二九	藤縣	藤縣黃沙郵局轉	

黃惠群	三二	容縣	容縣南門德祥號轉	兼習生物
唐國楨	二五	全縣	廣西大學理學院	
陳彬	三五	浙江黃巖	浙江海門路橋橫街	
陳人闓	二七	博白	博白大街廣福號	
徐同民	三十	容縣	容縣長河郵局轉	
侯勵容	三十	岑溪	梧州新倉街一號律師侯維鴻事務所	
吳如岑	二八	永淳	永淳縣區立甘棠小學轉	
林本禮	二八	北流	北流河邊街和聚大記	
何報著	三一	興業	興業教育會	
何崖芳	二六	藤縣	藤縣和平墟郵政代辦所轉	
李承成	二四	義寧	桂林皇城內省立桂林女子中學	
李芬	二六	蒼梧	梧州東正街十三號	
李偉祜	二四	鬱林	鬱林南門街義和烟店轉	
宋絅文	三六	柳州	柳州龍角街二十三號	
呂應熊	二六	桂林	桂林學院街六十二號	
孔仲生	二六	蒼梧	梧州東橫街文化里十三號	兼習生物

王長非	二八	博白	博白大街如意祥轉	
毛學錦	二九	永福	永福羅錦墟毛恒泰轉交	

初級生物組

姓名	年齡	籍貫	通信處	附記
羅朗湖	四八	貴縣	貴縣城外百子閣羅繼業堂	
鄧作評	二六	桂平	桂平江口恒昌號轉	
馮朝輔	二七	博白	博白大街廣祥號	
傅斗中	三十	貴縣	貴縣城內三界巷傅宅	
覃業輝	二九	興業	興業縣城隍墟沛珍號轉	
覃瑤	二七	貴縣	貴縣大墟宿猪肉行陳德利號轉	
黃開天	二三	北流	北流電燈局轉	
梁朗如	四六	桂平	桂平城均如意號轉交	
陳憲仁	三五	鍾山	鍾山縣燕塘墟轉榜冠村	
廣裕德	三一	鬱林	鬱林福綿市和祥店收轉	
侯維鷹	三八	岑溪	梧州新介街一號侯維鴻律師事務所轉	
胡國良	二六	容縣		

杭汝珖	五十	邕寧	南寧中山路八十二號	
何天俠	三十	橫縣	橫縣城學前街何綸昌號轉	
何精華	二八	興業		
李長壎	二六	博白	博白城內縣立圖書館李毓光轉	
李耀林	二九	桂林	桂林桂南路一七八號李仁堂	
李韶聲	二七	貴縣	貴縣廟前街生泰號	
李承璋	四二	桂林	桂林城內文昌門小橋頭十三號	
李競生	三六	容縣	容縣楊梅墟義信號轉	
李偉奇	三三	義寧	義寧縣五通墟石牌坊彭萬隆店轉	
李雲蔭	二四	鬱林	鬱林南門街才記	
朱伯璵	三四	平南	平南思旺墟富昌號轉交	
王振英	二八	賓陽	陽賓蘆圩同仁堂	
王爽西	三二	靈川	桂林太史巷第二十六號	
王靖	二五	融縣	梧州三角咀中學前街十五號	
尹廷光	二五	中渡	榴江縣鹿寨墟民裕泰號轉	

編 後

在去年七月間,本校奉 教育部和 廣西省政府的令辦中等學校理科教員暑期講習班一次,當時曾組織委員會負責辦理,關於教員的選聘,參加講習的人員,以及一切進行的經過,均已分別呈報 教育部及 廣西省政府.不過,在這很短——一個月的時間,究竟教員所講演是什麼?自然是一般人所注意,并且很願意知道的.所以在講習班結束以後,本校就着手搜集各教員所講演的材料,擬印成特刊.可是,各教員在當時講演,因爲時間匆促,多未編成講稿;講演完畢,又以距開課時間尙遠,相率離校,致無法搜集.至秋季開學,才得講稿數篇——有的是當時教員講演的原稿,有的是由學員筆記的——編成本刊.在付印以後,又遇着很大的困難,以偏僻的梧州,求精美的印刷當然不可能,連科學上應用的符號都沒有,致遷延很久的時間,到現在才出版.

還有特別要聲明的,本刊內有三篇材料不是當時演講的:(一)宋文政先生的「化學反應次數之決定」宋先生原是講習班的教授,因在南京爲事情耽擱,未曾趕到,所以補寫了一篇;(二)馬心儀先生的「理科教員暑期講習班雜感」;(三)嚴德炯先生的「何謂物質」.有這三篇的材料,使本刊得以充實,不能不在此表示感謝!

正　誤　表

頁	列	誤	正
11	11	發達	發現
18	5	農院植物	農林植物
23	3	9,等數目字	9,這些數目字
,,	9	$=3\times3=9$	$=3\times3$
,,	12	$=3^3=27$	$=3^3$
,,	16	$a=\times+b$	$a=X+b$
,,	17	$a>b$ 則 $\times=a-b$	$a<b$ 則 $X=a-b$
,,	20	是爲除,÷,在	是爲除,在
24	1	$a=b\times,\quad \times=\frac{a}{b}$	$a=bX\quad X=\frac{a}{b}$
,,	23	$\frac{P_1\times P_2}{Q_1+Q^2}>\frac{P_2}{Q_2}$	$\frac{P_1+P_2}{Q_1+Q_2}>\frac{P_2}{Q_2}$
25	20	$\sqrt{m}$ 此 $\sqrt{m}$	$\sqrt{m}$,此 $\sqrt{m}$
26	5	因爲	又因
,,	13	$(mQ-\lambda P)=m(P-\lambda Q)^2$	$(mQ-\lambda P)^2=m(P-\lambda Q)^2$
27	3	論 P^2 是奇數	論 Q^2 是奇數
,,	11	Lendemaun	Lendemann
,,	16	$\mathrm{Log}\ 5=\frac{Q}{P}$	$\mathrm{Log}\ 5=\frac{P}{Q}$
,,	18	$10^{\frac{Q}{P}}=5$	$10^{\frac{P}{Q}}=5$
,,	19	$10^Q=5^P$	$10^P=5^Q$
,,	21	10^Q 方就不能與 5^P	10^P 方就不能與 5^Q
,,	22	eog 5	Log 5
28	10	得 B' 點,則 B	得 B' 點,則

28	11	B' = A' B'	B B' = A' B'
,,	20	條切証明假定	條切証明的假定
29	2	Piemauln, Disichlet	Riemaun, Dirichlet
,,	3	Hansteems	Hansteens
,,	6	Auvres	AEuvres
,,	18	(v ⟶ e)	(v ⟶ ℓ)
,,	20	v — e < E	v — ℓ < ∈
,,	26	皆微積分學科學之	皆爲微積分學之科學
30	2	Dedekimd	Dedekind
,,	4	X = '2	$X^2 = 2$
,,	14	Rationae	Rational
32	9	$X^6 + 6X^4m +$	$X^6 + 6X^4m +$
33	20	一正數 E	一正數 ∈
,,	21	$\mid A_n - A_{n+P} \mid < E$	$\mid A_n - A_{n+P} \mid < \in$
,,	24	Boand	Bound
,,	27	正數 E	正數 ∈
,,	28	$\mid A_n - A_{n+P} \mid < E$	$\mid A_n - A_{n+P} \mid < \in$
34	18	$A_2 = A +$	$A_2 = A_1 +$
36	17	Jartaglio	Tartaglio
,,	20	Tartalgio	Tartaglio
37	14	$aX^2 + b + c = o$	$aX^2 + bX + c = o$
,,	16	我很易	我們很易
38	13	Bhashara	Bhaskara
40-43		表示角的「W」	應作「ω」

正 誤 表

40	8	(Amylitude)	(Amplitude)
41	12	而模是有	而模的代數值是有
42	9	$r\delta$	$\gamma\delta$
43	21	$-a+bi$	$a+bi$
,,	22	$P=\sqrt{a^2+b^2}$	$\rho=\sqrt{a^2+b^2}$
44	7	$re^{i}\varphi$	$\gamma e^{i\varphi}$
,,	8	$c\cos r+ic\sin r=ce^{ir}$	$c\cos\alpha+ic\sin\alpha=ce^{i\alpha}$
,,	10	$rc\cos(\varphi-r)$	$\gamma c\cos(\varphi-\gamma)$
,,	12	$rc\sin(\varphi-r)$	$\gamma c\cos(\varphi-\gamma)$
49	23	可証明者矣.	可証明者矣.」
50	10	P, Q 截於 P Q	P Q 截於 P, Q
,,	,,	$\frac{\pi}{2}$	π
,,	11	$\frac{\pi}{2}$	π
51	8	直線於同側垂直線於第三直線	線分於同側垂直於第三線
,,	15	$\angle PAB+\angle QPA$	$\angle PAB+\angle QBA$
52	2	$\angle PAB<\angle QBC$	(1) $\angle PAB<\angle QBC$
,,	4	$\angle MAP=\angle NBQ$	(2) $MAP=\angle NBQ$
,,	5	$\angle MAB<\angle NBC$	(1)+(2) $\angle MAB<\angle NBC$
,,	10	$A', B'>MN$	$A'B'>MN$
54	19	故 A D 乃	故 A P 乃
57	2	判定末申	判定末由
57-58		所有「X」	隨改「x」
58	12	之正方形	之立方形
,,	14	$a\,3\sqrt{2}$	$a\sqrt[3]{2}$

58	15	a 3$\sqrt{2}$	a$\sqrt[3]{2}$
59	7	可明証此題是否化	可証明此題是否能化
,,	9	使其又於夾前二線	使其夾於前二線
,,	20	所設解之	所設之解
,,	26	爲無窮能或	爲無窮遠或
60	11	殊屬所宜	殊非所宜
64	8	於中學者之	於初學者之
,,	10	乃爲二定點A,B	乃爲與二定點A,B
66	20	如是$\dot{b}$向量	如以$\dot{b}$向量
68	13	Projectill	Projectile
69	11	故通經	故通徑
70	25	故從畧不記	故從畧不計
74	24	則式近於	則上式近於
79	11	在回一地方	在同上地方
,,	15	質點m'	質點m
86	6	爲五官皆能	爲五官所能
87	6	大小之比外	大小之分外
88	28	這條色帶所作	這條色帶叫作
92	表	13BAl	13Aℓ
,,	,,	24cn	24cr
,,	,,	34si	34se
,,	,,	57771	57—71
95	22	乃有大花通過	乃有火花通過
,,	26	如光末一般	如光束一般

正 誤 表

98	5	(Rulhenford)	(Rutherford)
,,	27	上元的電子	上的電子
100	15	:原子核	:(1)原子核
,,	21	如下所述	如下所述:—
,,	28	反出此片	及出此片
102	1	角衣分布	角度分布
103	8	鐳本屬鹼埃	鐳本屬鹼土族
104	8	創始此爲法國	創始者爲法國
,,	25	其穿透的甚	其穿透力甚
,,	27	大多盧剌福	大都盧剌福
107	26	有電子放出	有電子放出
108	1,8,11	愛斯垣	愛斯坦
,,	18	但仍有許多	但尙有許多
111	1	tube	tube
,,	4	氏(Edison)	(Edison)氏
,,	圖 1	6	b
112	圖 2	Fb	E_b
,,	11,13	Eb	E_1
115	9	或連熄火花	或強熄火花
,,	18	U×201	U X 201
116	3	U×201	U X 201
,,	6	U×120 繼有 U×171	U X 120 繼有 U X 171
,,	8	週率放大	週率放大
117	4	如 U×206	如 U X 206

118	2	圖 234, 239	234, 239
,,	5	5000 里	5000 哩
121	3	『什麽是物質?』	『什麽是物質?』
,,	13	均是滿意的	均是不滿意的
122	4	『什麽是物質?『什麽是電?』	『什麽是物質?』『什麽是電?』
,,	5	引』	引?』
,,	26	定義,但我是	定義來,但我是
123	20	所以普通狀況	所以在普通狀況
125	13	子就上了正電,	子就帶上了正電,
,,	17	有無與否在目前	有無在目前
126	15	(Conaection curpent)	(Conrection current)
127	26	倍數比例	倍比例
128	1	而且因	而且固
,,	26	(Inerl-gas)	(Inert-gas)
129	7	最重的是	最重要的是
,,	8	性質在表中	性質,及在表中
130	13	Nacl 了……兩個氧原子	Na Cl 了……兩個氫原子
,,	20	而在 Kcl O_3 中	而在 K Cl O_3 中
,,	23	的錳根 (C-	的錳根
,,	24	hunicae nadical	(Chemical radical
,,	26	焻氣	炤氣
,,	27	因爲 C 是原子	因爲 C 的原子
132	10	义-微粒	〆-微粒
,,	28	(Fitz gerald)	(Fetz gevald)

正誤表

134	2	同以樣大	同以一樣大
,,	22	因從放時物質····幾多於	從放射物質····幾等於
,,	23	加至靜止時	加至爲靜止時
,,	28	一切質都是	一切物質都是
135	16	何以會這樣巧	何以會這樣巧?
137	15	Sabstance	Substance
138	2	惰氣 R_n	惰氣 Rn
,,	27	有時也可能的	有時也是可能的
139	1	(R_a c)	(Ra C)
,,	20	6.545×10^{-57}	6.545×10^{-27}
,,	26	依得	依得
,,	28	一光年等於 10^{9}	一光年等於 10^{18}
140	2	不過 10^{7} 公分	不過 10^{57} 公分
141	15	這質量子	這個量子
142	1	說道:你假想	說道:『你假想
,,	8	一個電子,『從這	一個電子,』從這
147	1	故燐鹽	故燐化鹽
,,	4	燐化鹽之分角	燐化鹽之分解
,,	6	任向反應速度	任何反應速度
148	6	Cyanic acil	Cyanic acid
149	9	由 Wal ev	由 Wal kev
151	16	成績底劣者	成績低劣者
153	9	當相法子來佈置	當想法子來佈置
156	3	江蘇靜江	江蘇靖江

西大特刊

中等學校理科教員暑期講習班專號

定價大洋五角

編輯者	廣西大學出版股
發行者	梧州各書店
印刷者	梧州永發印務局