圖書館

算學叢書

極限論

竹內端三 著
朱紘熙 譯

商務印書館發行

序

六十年來,日本科學之進步,浩然有一日千里之勢,考其故蓋有二要點焉.一則學校教育嚴密充暢,一則編譯書籍,注重詳解,使自修者讀之,不啻面教口授而心領神會也.居今日而言求學,大都爲經濟環境所限迫,其能受學校完全教育者幾何人,設無詳解書籍,以資向隅者之自習,則小之多數才智之士,末由進取,或致用其心思腦力於不正當之行爲,大之國家文化因以寖衰,勢將長此不振,有識之士,能不加意於潛移默運間乎.觀彼算學界自樺正董後,長澤龜之助繼起譯著,鴻篇鉅製,幾佔算學全部,其爲書也,陳義務詳,問題列解,好學者不難階而升也.最近二十年間,林鶴一小倉金之助等,集中人才,所作大規模編輯之數學叢書,亦復不離此旨.故一般無力求學,或中途輟學之人,皆可按籍尋探,歷級而進,以求深造,不必強迫勸導,而學程之遠到,收效之宏大,幾十百倍蓰於強迫勸導者,此算學界優秀人才之所以蔚然蠭起者也.竹內氏新露頭角,所著函數論,高等微分學積分學等書,莫不便於自習,本書編輯大意,已詳緒言,其反覆設論,周詳精緻,殊足發人深省,研究微分學者讀之,當另得一境地焉.吾國算學程度,亟待極力提高,成效如日本者,要亦足以爲法,吾故譯之而復爲之言.

中華民國十六年八月奉賢朱純熙序

緒　　言

本書爲微積分學階梯。蓋不獨自修者所最難了解,即就師學習,亦往往易陷於誤解者,厥爲極限之概念。本書專偏重於極限之意義及計算法,故命其名曰極限論。

但關於極限思想之哲學的論究,固非本書目的,即關於算學方面,例如級數連分數等,必須豫備特殊解析之知識者,又如用微積分法決定極限値之方法等項,亦皆屛而不載,要在使其合乎微積分學階梯也。

僅就極限論名義觀之,本書內容,不免卑近而不完全,然本書目的旣如上述,則亦當然之事已,讀者若以本書與拙著「高等微分學」並觀,當知本書爲微分學第一章之詳論。故公刊本書之目的,半亦爲該微分學作參考書耳。

抑極限概念之所當理會,不特有志高等算學者所不可缺,即在初等算學,亦屢有必須知其概念之點。例如循環小數之理論,等比級數無窮項之和,圓周之長, 0° 及 90° 之三角函數等皆爲關於極限之問題。矧邇來函數及格欄幅等次第重用,在此趨勢之下,雖初等算學素無極限思想,又豈能長此墨守,不求其澈底明白也耶。

是以我文部省對於中等教員檢定試驗之算學科試驗課目中,訂有高等算學初步一項,專就解析幾何學及微積分學初步出題。不佞從事檢定有年,每閱答案,常以與試者之不能深明極限思想爲憾。此亦不揣謭陋,公刊本書之一原

因也。

奢望雖如此,然不佞淺學不文,深恐未能達其目的,唯仰諸賢之叱正,漸期其爲完璧而已,

大正十四年十一月 著者識

極 限 論

目 次

極　限　論

第一章　實數

§1. 自然數

何爲自然數,曰

$$1, 2, 3, 4, 5, \cdots\cdots$$

等是。卽以未習算學者言之,可謂如核計零錢一,二,三,四等之數,若以代數學初步知識爲之定義,則可謂爲正之整數。

自然數之名稱,或有驚爲新奇之事,但其概念,世無不具之人,又以自然數行加減乘除運算,在素有敎育之士,不啻日常茶飯,故於此等事不必更爲敘述。但爲後節議論參考之用,揭其關於自然數之大小及四則之重要原則於次。

關於大小之原則

表隨意自然數,用 a, b, c 等文字。

a 與 b 表同一自然數時,謂之「a 等於 b」,或「a 與 b 相等」,以 $a=b$ 記號示之。故常 $a=a$。又 $a=b$ 時,常 $b=a$。又 $a=b, b=c$ 時,常 $a=c$。

(I)　非 $a=b$ 時,(記之以 $a \neq b$) 必 $a<b$,或 $a>b$。前者謂之「a 較 b 小」,後者謂之「a 較 b 大」。

又 $a<b$,改書爲 $b>a$,則謂之「b 較 a 大」,又 $a>b$,改書爲 $b<a$,則謂之「b 較 a 小」。

(II)　$a<b$ 時,$a \neq b$。

北京圖書館藏

(南)

(III) $a<b, b<c$ 時, $a<c$。

由上原則之結果,得次之定理。

a及b爲自然數時,其間所能成立之關係,必爲

$$a<b, \quad a=b, \quad a>b.$$

三者之一,亦唯限於一。

蓋非 $a=b$,則依 (I) 必 $a<b$ 或 $a>b$。 此二者之一,與 $a=b$ 不兩立,觀 (II) 明也。 又若 $a<b$ 而且 $b<a$,則依 (III) 將得 $a<a$,此非所能。 故得上之定理。

關於四則之原則

(I) 關於加法者

(1) 二自然數之和,常確定於一種

(2) $a+b=b+a$ 名之曰對易律

(3) $a+b+c=a+(b+c)$ 名之曰締合律

(4) $a<b$ 時, $a+c<b+c$

(II) 關於乘法者

(1) 二自然數之積,常確定於一種。

(2) $ab=ba$ 名之曰對易律

(3) $abc=a(bc)$ 名之曰締合律

(4) $a<b$ 時, $ac<bc$

(5) $a(b+c)=ab+ac$ 名之曰配分律

(III) 減法及除法,爲加法及乘法之反運算。 即

$$a-b+b=a$$

$$a\div b\times b=a$$

欲使 $a-b$ 之自然數存在,須得 $a>b$,爲充要條件。

欲使 $a\div b$ 之自然數存在,須得 $a=bc$ 之自然數 c 存在,爲充要條件。此時謂之 a 能以 b 除盡之或整除之。

§2. 自然數之分立性

自然數不僅一個,而爲許多數之集,* 亦非雜亂之集,而爲具有一定整齊秩序之集。今再揭自然數列於次,

$$1,2,3,4,5,6,7,8,\cdots\cdots$$

欲就其集之狀態考察之。

(*I*)　各自然數,有直繼其大之自然數。例如 1 之後有 2, 2 之後有 3, 7 之後有 8, 普通 a 之後有 $(a+1)$。故自然數中無最大者,其並列者可以無窮繼續也。

(*II*)　除 1 外,各自然數有直繼其小之自然數。例如 8 之前有 7, 3 之前有 2, 2 之前有 1, 普通 a 不爲 1, 則 a 之前有 $(a-1)$。然唯 1 無直繼其小之自然數。(1 之前有 0, 固勿待言,然 0 非自然數。) 故自然數有最小者,即 1 是也。

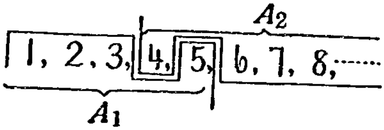
(*III*)　最後更有一重要性質之必須注意者。今將自然數之全體,分爲二集 A_1 A_2, 設屬於 A_1 者,皆較屬於 A_2 者小,則上記數列,截爲二段,在其左方者爲 A_1, 右方者爲 A_2。例如

$$\underbrace{1,\ 2,\ 3,\ 4,}_{A_1}\ \Big|\ \underbrace{5,\ 6,\ 7,\ 8,\cdots}_{A_2}$$

---

* 集之算學的定義,待諸第二章,茲僅作「物之聚集」解可也。

若如



錯雜分之,則屬於 A_1 之數,有較屬於 A_2 之數爲大者 (如 $5>4$) 矣。

然則分爲如此二集,有次之性質明也。

(1)　A_1 有最大之自然數。以之爲 a_1(如上例之4)

(2)　A_2 有最小之自然數。以之爲 a_2(如上例之5)

(3)　a_2 爲直繼 a_1 之大之自然數。

此性質,驟觀之平淡無奇,若無何等需要,實則不然,當後節講論緻密性及綿續性等,卻爲極重要之參考資料也。

從此得次之重要結論。

有二自然數 a, b 其 $a<b$, 則從 a 逐次移於其繼大之自然數,終可達於 b。

例如 $3<8$, 故從 3 出發,次第移於其繼大之自然數,則

$$3 \curvearrowright 4 \curvearrowright 5 \curvearrowright 6 \curvearrowright 7 \curvearrowright 8$$

遂達於 8。

今欲普通證明之,可設從 a 次第移於其繼大之自然數 a', a'', ……等,終不能達於 b, 則以自然數全體中較 a 小者,及從 a 出發所能達到之 a', a'', ……等全體爲 A_1 羣,以其不能達到之其餘自然數之全體 (其中含 b) 爲 A_2 羣,則自然數之全

體,依此分爲 A_1, A_2 二羣,且屬於 A_1 者,明較屬於 A_2 者小。故依 (1) 則 A_1 不可無最大之自然數,以之爲 α。依 (2) 則 A_2 不可無最小之自然數,以之爲 β。依 (3) 則 $\beta=\alpha+1$。然則從 α 再進一步,卽可移至 β,而 α 爲從 a 出發所能達到之自然數,故遂得 β 亦可達到之結論,此與 A_2 羣成立關係之假定相反。故從 a 出發,終不至不得達於 b 也。由是得本定理。此定理爲所謂算學歸納法之根據者也。

§3. 算學歸納法

算學歸納法之說明,自本書主眼觀之,未免趨入歧途,但此法爲算學各分科所廣用,故玆特闢一節以述之。

設 n 爲自然數,則欲證明

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

其法雖有種種,然如次考之,亦是一法。

試先於 (1) 式,令 $n=1$ 則得

$$1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}$$

(1) 式確成立。

次假定 (1) 式對於 n 之某特別值,例如 r 能成立,則

$$1+2+3+\cdots\cdots+r=\frac{r(r+1)}{2}$$

兩邊各加 $r+1$, 則得

$$1+2+3+\cdots\cdots+r+(r+1)=\frac{r(r+1)}{2}+(r+1)$$

$$=\frac{(r+1)(r+2)}{2}$$

關係。此卽示(1)式之$n=r+1$亦能成立者也。

由是觀之,公式(1)在

(i) $n=1$時確能成立,

(ii) 若假定$n=r$時能成立,則$n=r+1$時亦能成立。

然則成立(1)式之n之值,究竟如何,考之如次,

$n=1$固不待言

$n=1$旣可,則依(ii) $n=2$亦可

$n=2$旣可,則依(ii) $n=3$亦可

……………………………………

結果自1出發,次第採取鄰於其大之自然數,則皆爲成立(1)式之n之值。然依前節最後所述定理,其自然數b,如上方法進行,必可達到,故結果(1)式當$n=b$時,亦得成立。

故(1)式對於隨意自然數n,皆得成立,可知已。

如此之證明法,名曰**算學歸納法**。以上說明,似太繁縟,其實證明某定理或某公式,不須如此詳說,僅證(i),(ii)二段,卽可依據算學歸納法,斷定其定理或公式之成立也。

今舉一二例於次,

例1. n爲隨意自然數,試證x^n-y^n可以$x-y$除盡之。

$n=1$時,$x^n-y^n=x-y$,故可以$x-y$除盡,不待論矣。

次設r爲一自然數,當$n=r$時x^r-y^r可以$x-y$除盡之,以其商之整式爲Q_r則

$$x^r-y^r=(x-y)Q_r$$

然

$$x^{r+1}-y^{r+1}=x^{r+1}-xy^r+xy^r-y^{r+1}$$
$$=x(x^r-y^r)+(x-y)y^r$$
$$=x(x-y)Q_r+(x-y)y^r$$
$$=(x-y)(xQ_r+y^r)$$

故知 xQ_r+y^r 亦爲整式。由是可知 $x^{r+1}-y^{r+1}$ 亦可以 $x-y$ 除盡之。

故依算學歸納法,可知 n 爲隨意自然數時, x^n-y^n 常可以 $x-y$ 除盡之。

注意, 普通令

$$x^n-y^n=(x-y)Q_n$$

則有 $$Q_{n+1}=xQ_n+y^n$$

關係,亦同時可知。

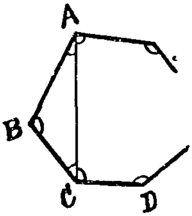
例 2. 試證明凸 n 角形內角之和爲 $(2n-4)$ 直角。

本題之 n 至少須爲 3.

今令 $n=3$ 則

$$2n-4=2$$

卽三角形內角之和爲兩直角之定理,(此爲已知) 明爲眞也。



次以 r 爲一自然數,假定本題對於凸 r 角形常能成立,於是取凸 $(r+1)$ 角形 $ABCD\cdots\cdots$ 依對角線 AC 分之爲三角形 ABC 及凸 r 角形 $ACD\cdots\cdots$。則 ABC 內角之和爲2直角, $ACD\cdots\cdots$ 內角之和,依假定爲 $(2r-4)$ 直角,此等總和爲全形

$ABCD$……內角之和,故其和爲

$$2+(2r-4)=2(r+1)-4 \quad (\text{直角})$$

此卽 $(2r-4)$ 之 r, 代以 $(r+1)$ 者也。故本定理若於 $n=r$ 時爲眞,則 $n=r+1$ 時亦爲眞。

已上考究甚詳,依算學歸納法,可知本定理之成立。

注意 1. 本例從 $n=3$ 始。可見算學歸納法,非必限於常從 $n=1$ 始者。

注意 2. 當作第二段證明,若無發生誤解之虞,則不必用文字 r,而儘用原文字 n 證明「n 時爲眞,則 $n+1$ 時亦爲眞」亦可也。

注意 3. 或變更證明之第二段爲「$n=1, 2, \cdots\cdots, r$ 時爲眞,則 $n=r+1$ 時亦爲眞」。(次揭問題中,卽有此例)

依算學歸納法可以證明之練習問題,舉於次。

問 題 I

1. 求等比級數

$$1+r+r^2+\cdots\cdots+r^n$$

之和。

2. 證明

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

3. 證明次式

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

4. $y=x+\frac{1}{x}$ 試證 $x^n+\frac{1}{x^n}$ 等於 y 之 n 次式。

5. n 為自然數,試證

$$\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$$

之值,亦為自然數。

6. 證明次之不等式,

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}}>\frac{1\cdot3\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots\cdots2n}>\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1}$$

7. $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n$ 皆為正數,試證

$$(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geqq n^2$$

8. n 為較 1 大之整數,試證

$$2^n>1+n\sqrt{2^{n-1}}$$

9. $a>0,\ b>0$ 且

$$a_1=\frac{1}{2}\left(a+\frac{b}{a}\right),\qquad a_2=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{b}{a_1}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\qquad a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{b}{a_{n-1}}\right).$$

試證次之關係

$$\frac{a_n-\sqrt{b}}{a_n+\sqrt{b}}=\left(\frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}\right)^{2^n}$$

10. 求 $\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{4},\cdots\cdots,\ \sqrt[n]{n},\cdots\cdots$ 中之最大者。(注意。$n\geqq3$ 時,可以證明普通 $\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}$)

11. 試證 $(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ 可以 2^n 除盡之。但 n 為自然數。

12. 一平面上有 n 條直線，任何二線，皆不平行，又任何三線，皆不過一點，試證此等直線，分平面爲 $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ 個部分。

§4. 分數

分數概念所由發生之原因，當爲計算不等於單位之幾倍之量，今未遑作如此歷史的或心理的研究。且關於分數之大小，及四則之種種事實，又爲讀者所熟知，故玆唯論理的述其大要，而討論第一節所舉諸原則之對於分數，亦能成立否耳。

a, b 爲二自然數，其 a 能以 b 除盡之，則以 $\frac{a}{b}$ 表其商。倘 a 不能以 b 除盡，則 $\frac{a}{b}$ 表一種新數，名之曰**分數**。

例如 $\frac{2}{1}=2,\quad \frac{15}{5}=3,\quad$ 及 $\quad\frac{1}{2},\quad \frac{5}{15}$.

等爲分數。

$\frac{2}{1}$, $\frac{15}{5}$ 雖表整數，但其形式與眞分數同，亦於橫線上下各置自然數者。其實一切自然數，皆可書爲如此「假分數」之形。

例如
$$2=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\cdots\cdots$$
$$3=\frac{3}{1}=\frac{6}{2}=\cdots\cdots$$

以下爲便宜計，不論自然數與分數，有皆書爲 $\frac{a}{b}$ 形者。

自然數及分數，總稱之曰**有理數**。

有理數大小間之關係，如次定之。

設有二有理數$\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$則

(1)　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 與 $ad=bc$ 爲同意義。

(2)　$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ 與 $ad>bc$ 爲同意義。

如此定義,則第1節所舉關於大小之原則(*I*),(*II*),(*III*),亦可見其仍各成立。

例如
$$\frac{a}{b}\neq\frac{c}{d}$$
時依上之(1)
$$ad\neq bc$$
故依第1節(*I*)必爲
$$ad>bc \quad \text{或} \quad ad<bc$$
由是依上之(2)得
$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d} \quad \text{或} \quad \frac{a}{b}<\frac{c}{d}$$

此即第1節(*I*),推擴於普通有理數之應用者也。同理第1節之(*II*),(*III*),亦可推擴之。(讀者可自試之)

有理數四則之運算,規定如次。

(3)　$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$

(4)　$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

(5)　$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$

但$\frac{a}{b}$及$\frac{c}{d}$皆爲整數時,(1)至(5)爲能實際證明之定理。今則就$\frac{a}{b}$及$\frac{c}{d}$中,至少有一方爲非整數者而爲之定義者也。

依此定義,亦可將第1節所舉關於自然數四則運算原則中之(*I*)及(*II*),推擴於普通有理數,其證明甚易。今舉一例,證明(*I*)之(2),

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$=\frac{bc+ad}{bd} \qquad \text{依}(I)\text{之}(2)$$

$$=\frac{cb+da}{db} \qquad \text{依}(II)\text{之}(2)$$

$$=\frac{c}{d}+\frac{a}{b} \qquad \text{依定義}(3)$$

再舉一例,以證明(*II*)之(4),

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \text{ 時 } ad<bc$$

故 $ad\cdot ef<bc\cdot ef$ 依(*II*)之(4)

卽 $ae\cdot df<bf\cdot ce$ 依(*II*)之(2)

依此得 $\frac{ae}{bf}<\frac{ce}{df}$ 依定義(2)

故 $\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}<\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$ 依定義(4)

其餘皆請讀者練習之。

關於四則之原則(*III*)中,其所述除法之充要條件,應删去之。卽在有理數範圍內,除法常能成立也。

注意。今後對於分數,亦有用 $a, b, c, \cdots\cdots$ 等一文字表之者。斯時在第 1 節所舉諸原則,中之文字 $a, b, c, \cdots\cdots$ 等,普通爲表有理數者,仍各適用。(除關於四則中原則 (*III*) 之最後項。)

§5. 有理數之續密性

有理數之全體,爲包括一切自然數於其中,而作之更廣大之一集團。今將其集之狀態,與第 2 節所述自然數集之狀態,比較研究之。

關於自然數集狀態之第2節之 (*I*), (*II*) 二性質,全不成立。即對於一有理數無直繼其大之有理數,亦無直繼其小之有理數。欲證明之,須先注意次之事實。

二相異有理數之間,有無窮多之有理數存在。

蓋以 a, b 爲二相異有理數,假定 $a<b$ 則 $\frac{a+b}{2}$ 亦爲一有理數,而

$$a<\frac{a+b}{2}<b$$

容易證明之。故 a 與 b 之間,至少有一有理數存在可知。同法於 a 與 $\frac{a+b}{2}$ 之間,及 $\frac{a+b}{2}$ 與 b 之間,亦各一一求之,再於此所得有理數之間,次第復求其新之有理數,則結果可知 a, b 之間,含有無窮多之有理數。

由是觀之,一有理數無直繼其大之有理數存在明矣。蓋謂一有理數 a,有直繼其大之有理數 b,則 a 與 b 之間,須無一有理數存在,而依上述理有所未能也。一有理數無直繼

其小之有理數存在,亦可同上證之。

卽自然數集之狀態,爲彼此具有若干間隔,而點點分立者,反之有理數集之狀態,充實緻密,隨取如何小部分檢查之,常見無窮多之有理數羣集其間也。

今更進考相當於第2節(*III*)之性質,在有理數能成立與否,卽詳言之欲考

有理數之全體,分爲 A_1, A_2 二集,其屬於 A_1 之有理數,皆可較屬於 A_2 者小否,若曰可也,則

(1) 屬於 A_1 有最大有理數否,

(2) 屬於 A_2 有最小有理數否,

(3) 兩者俱有,則其間之關係如何,

等也。

今爲簡便以後記述計,對於以後有理數全體分爲如上所記 A_1, A_2 二集,名曰作有理數之截斷,此截斷以 (A_1, A_2) 記號表之。

先證如此二集之可作。蓋隨意取有理數 a,以較 a 小之一切有理數屬於 A_1,較 a 大之一切有理數屬於 A_2, a 自身隨意編入 A_1 或 A_2 之內,則由是得確適於所求條件之 A_1 及 A_2。卽 (A_1, A_2) 作一截斷。

於是 a 屬於 A_1 則爲 A_1 中最大之有理數。卽其時得對於(1)之答曰「有」。同時對於(2)而答曰「否」。蓋設屬於 A_2 之隨意有理數爲 b,則 a 與 b 之間,必有無窮多之有理數存在,而此等較 A_1 中之最大數 a 大,故不能屬於 A_1,卽皆屬於 A_2。

是A_2中較b小之有理數,尚有無窮多,故b非A_2之最小數。由是得其結果,卽在A_2中任取一有理數,亦必非A_2之最小數。

依此研究,已得「A_1能有最大數,則同時A_2無最小數」之結論矣。

與上同理,可得次之結論。「A_2能有最小數,則同時A_1無最大數。」

論至此,上記(3)之問題,自歸消滅,蓋A_1之最大數與A_2之最小數,不能共存故也。

然茲尙有一疑問在。曰「A_1無最大數,A_2無最小數之事,得毋起乎」是也。或謂「取一有理數a爲標準,以較之小者大者,分別組織A_1及A_2後,a之自身,自不能不編入A_1或A_2之何方,否則不能謂一切有理數之分爲二集A_1, A_2也。然則a屬於A_1則爲其最大數,或屬於A_2則爲其最小數,固已定之矣,今所疑問者又焉能起諸實際耶。」

雖然此非正論,吾人所謂二集A_1, A_2者,僅網羅一切有理數,且屬於A_1者,皆較屬於A_2者小則可也。吾人於上組織A_1, A_2,以一有理數a爲標準,分爲較其大者小者而作之者,不過便宜上所採之一方法耳。若作A_1, A_2二羣也,取一有理數a爲標準,而分之以其他何等方法,則以上論者之言,必將失其根據。然則吾人之疑問,非可輕易否定者。請進述如此情形之實有可能。

今將$x^2<2$之一切有理數x之集名以A_1, $y^2>2$之一切有理數y之集名以A_2。則無平方適等於2之有理數,故一

切有理數,必入於A_1及A_2之中,又屬於A_1之有理數x,較屬於A_2之有理數y小明也。卽(A_1, A_2)作有理數之截斷。

然此A_1爲無最大數之集團。蓋以屬於A_1之隨意一有理數爲a,則依假定爲$2>a^2$。故滿足於次之二條件之有理數h,必能存在。

$$h<a, \qquad h<\frac{2-a^2}{3a}$$

則

$$(a+h)^2=a^2+(2a+h)h<a^2+3ah<2$$

卽A_1中較a更大之有理數$a+h$,尙能存在。對於A_1中隨意有理數a,常得如此結果,故可知A_1中無最大數。

同理亦可證明A_2中無最小數。

由此觀之,今所考之截斷(A_1, A_2)爲A_1無最大數A_2無最小數者。

於是可知有理數之截斷(A_1, A_2),有下之三種。

(*I*)　A_1有最大數A_2無最小數者,

(*II*)　A_1無最大數A_2有最小數者,

(*III*)　A_1無最大數A_2無最小數者。

(A_1有最大數且A_2有最小數者,不得存在,如前證明。)

吾人總稱(*I*)及(*II*)曰有端截斷,(*III*)曰無端截斷。

§6. 無理數

依前節研究,已知有理數之截斷,有有端無端兩種。若於有端截斷,除去其端(A_1之最大數,或A_2之最小數)則與無端截斷,呈同一狀態明也。然則反之,欲使無端爲有端,如何

則可。

如欲爲之,必須補足原來無有之一端。然不能以有理數補足,固不待言,蓋一切有理數皆爲作此截斷,亦已用盡。故吾人不可不創造一種新數。此新數名曰無理數,即

無理數者超於有理數之間,補足無端截斷爲有端截斷之數也。

說明如次。

今設有理數之無端截斷爲 (A_1, A_2),吾人試求一新數 a,定之爲 A_1 之最大數,既無何等不合之發生,即視之爲 A_2 之最小數,亦無何等不合之發生。以上所謂補足無端截斷者,即此意義也。

至是截斷 (A_1, A_2),常可謂僅有一端矣。(A_1, A_2) 有端時,其端爲一有理數,無端時爲今所補足之一無理數。此二者之端,皆用

$$[A_1, A_2]$$

記號表之,名曰**截痕**,或名曰**閘數**。(爲依截斷 (A_1, A_2) 所定之數)

例如以 $x\leqq1$ 之有理數 x 之集爲 A_1,以 $y>1$ 之有理數 y 之集爲 A_2,則

$$[A_1, A_2]=1$$

又以 $x^2<2$ 之有理數 x 之集爲 B_1,以 $y^2>2$ 之有理數 y 之集爲 B_2,則

$$[B_1, B_2]=\sqrt{2}$$

如此記數法,雖不便實用,然在理論上之研究,卻常用之,以下本書亦用之,

有理數無理數總稱之曰實數。

隨意實數常可以

$$[A_1, A_2]$$

記號表之。但其數爲無理數時,表示此之截斷 (A_1, A_2),僅有一種,爲有理數時常有二種,即其數自身,爲 A_1 之端與 A_2 之端是。

實數之大小

今設無理數 a 爲依截斷 (A_1, A_2) 決定者,即

$$a=[A_1, A_2]$$

則關於 a 與一有理數 x 之大小,定之如次。

$$x \text{ 屬於 } A_1 \text{ 時 } x<a$$

$$x \text{ 屬於 } A_2 \text{ 時 } a<x$$

由是無理數與有理數間之大小關係定矣。

例如 $\sqrt{2}$ 與 $\frac{3}{2}$,何者爲大

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}>2$$

故令

$$\sqrt{2}=[A_1, A_2]$$

則 $\frac{3}{2}$ 屬於 A_2 故

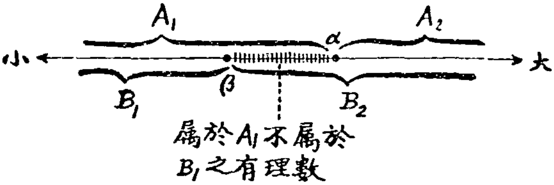
$$\sqrt{2}<\frac{3}{2}$$

次將定無理數彼此間之大小,今以二無理數爲

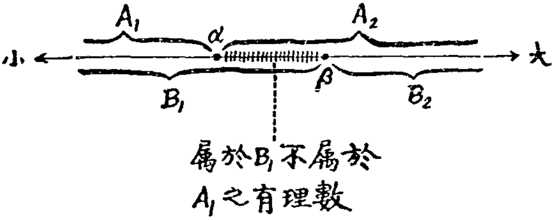
$$\alpha=[A_1, A_2], \qquad \beta=[B_1, B_2]$$

A_1 與 B_1 全相一致時,(從而 A_2 與 B_2 亦相一致時) $\alpha=\beta$, 若 A_1 與 B_1,不相一致,則有屬於 A_1 不屬於 B_1 之有理數,又有屬於 B_1 不屬於 A_1 之有理數。前者爲 $\alpha>\beta$, 後者爲 $\alpha<\beta$。

($\alpha>\beta$ 之圖解)



($\alpha<\beta$ 之圖解)



例如欲考 $\sqrt{2}$ 與 $\sqrt{3}$ 孰爲大,可命

$$\sqrt{2}=[A_1, A_2], \qquad \sqrt{3}=[B_1, B_2]$$

但 A_1,A_2 之意義,一如前述,又 B_1 爲 $x^2<3$ 之有理數 x 之集,B_2 爲 $y^2>3$ 之有理數 y 之集。於是試取 $\frac{3}{2}$ 有理數觀之,則

$$2<\left(\frac{3}{2}\right)^2<3$$

明也，是 $\frac{3}{2}$ 雖屬於 B_1，卻不屬於 A_1。故可斷定 $\sqrt{2}<\sqrt{3}$。

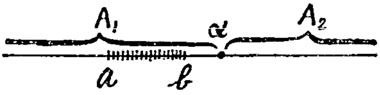
如上定義，則關於第 1 節及第 4 節所述有理數大小之原則，可以通用於實數之全體。徵驗之頗容易，徒見其議論之長贅而已，故皆從略。

但於第 5 節已知二有理數間，有無窮多之有理數存在。然則無理數與有理數間，及無理數與無理數間，究竟如何。研究如次。

先以 a 為有理數，α 為無理數，令

$$\alpha=[A_1, A_2]$$

且假定 $a<\alpha$。則依定義 a 屬於 A_1。然 A_1 應無最大數，故 A_1 中必有較 a 大之有理數，以其一為 b。則以二有理數 a, b 之間，有無窮多之有理數存在，故其結果 a 與 α 間，必有無窮多之有理數存在，不待論矣。

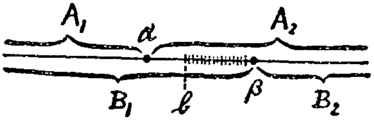


假定 $a>\alpha$ 亦可同上論之。

次以 α, β 為二無理數

$$\alpha=[A_1, A_2], \qquad \beta=[B_1, B_2]$$

且假定 $\alpha<\beta$。則依定義，可有屬於 B_1 不屬於 A_1 之有理數，以其一為 b。則 b 與 β 間，依上述理，知有無窮多之有理數存在，故其結果 α 與 β 間，亦有無窮多之有理數存在，無待論矣。



假定 $\alpha>\beta$ 亦可同上論之。

據以上結果,得次之定理。

定理 1. 二實數間有無窮多之有理數存在。從此將述關於無理數四則運算之定義,今先證明二豫備定理。

定理 2. 對於所設隨意實數,可以求得其極相接近而夾之之二有理數。

更嚴密易言之,

對於隨意實數 a,必有如

$$a_1<a<a_2, \qquad a_2-a_1<\varepsilon$$

之二有理數 a_1, a_2 存在,但 ε 爲隨意(無論如何小亦可)指定之實數。

證明之際,視 ε 爲有理數可也。蓋若爲無理數,則取較其小之一有理數代之,以示本定理之成立足矣。

今取較 $\frac{\varepsilon}{2}$ 小之一有理數,以之爲 δ。則所設之 a 當適等於 δ 之整數倍,或在相隣二整數倍之間。*

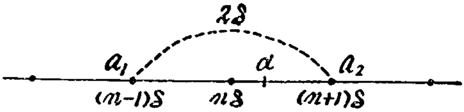
今例令

$$n\delta \leqq a<(n+1)\delta$$

則

$$a_1=(n-1)\delta, \qquad a_2=(n+1)\delta$$

* 參看第13節。



卽爲所求之二數。蓋

$$a_1<\alpha<a_2$$

且
$$a_2-a_1=2\delta<\varepsilon$$

故也。

附言 1. 依此定理,可知隨意無理數,有近於此之有理數之近似值存在。a_1 爲不足近似值,a_2 爲超過近似值。

附言 2. 對於一實數 α, 若可求得如本定理所謂之二有理數 a_1, a_2, 則於其次,必可求得較此更近於 α 而夾之之二有理數 a'_1, a'_2。因此取較 $(a_2-\alpha),(\alpha-a_1)$ 中小者更小之一數 ε', 按照

$$a'_1<\alpha<a'_2, \qquad a'_2-a'_1<\varepsilon'$$

求其 a'_1, a'_2 可也。

次更如上接續行之,可得加一層近於 α 之一組有理數 a''_1, a''_2。以下次第如次,行至 ε 爲無窮小,則在 α 兩側,可有無窮近於此之無窮多之有理數二羣。

$$a_1<a'_1<a''_1<\cdots\cdots<\alpha<\cdots\cdots<a''_2<a'_2<a_2$$

於是生次之問題。曰,已知此等有理數之二羣 $a_1, a'_1, a''_1, \cdots\cdots$ 及 $a_2, a'_2, a''_2\cdots\cdots$, 則爲其所夾之實數 α, 能決定爲唯一否。吾人對之毅然而答曰「然」,於是有次之定理,

定理 3. 有有理數所成之二集 A_1, A_2 對此設次之二假定

(i)　以屬於 A_1 之隨意有理數為 a_1，屬於 A_2 之隨意有理數為 a_2，則常假定 $a_1<a_2$。

(ii)　對於隨意小之實數 ε，所取適當之 a_1 及 a_2，常假定為 $a_2-a_1<\varepsilon$。

則有較 A_1 中任何有理數不小，及較 A_2 中任何有理數不大之一實數存在，而唯限於一。

證明如次。

今於一切有理數中，以較屬於 A_1 之隨意有理數大者(例如屬於 A_2 之有理數)之集為 B_2，不然者之有理數之集為 B_1，則 B_1 與 B_2 作一有理數之截斷明也。以此截斷 (B_1, B_2) 所定之實數為 β。

則 β 較 A_1 之任一有理數不小，又較 A_2 之任一有理數不大。蓋 A_1, A_2 各各含於 B_1, B_2 之中，而 β 較 B_1 之任何數不小，又較 B_2 之任何數不大故也。

次設如此之數，若於 β 以外尚有存在，例如以之為 β'，假定 $\beta<\beta'$ 則如

$$\beta<b_1<b_2<\beta'$$

之二有理數 b_1, b_2，必能存在。(定理 1)　若然，則對於其從 A_1, A_2 中隨意所取之 a_1, a_2，常

$$a_1<b_1<b_2<a_2$$

從而不可不

$$b_2-b_1<a_2-a_1$$

此明明反於假定(ii)。

$\beta>\beta'$ 時亦可同上論之。

故所謂 β' 者,決無存在之理。

注意. β 有屬於 A_1 或 A_2 之一者,又有皆不屬之者。

定義. A_1 及 A_2 非必含有理數全體者,從而(A_1, A_2)亦非如第5節所述意義,作有理數之截斷。然因有(ii)之假定,故亦為決定一實數者。據此今後二羣有理數 A_1, A_2,滿足於假定(i),(ii)時,就廣義言,亦名之曰有理數之截斷,以記號(A_1, A_2)表之,又其所決定之數,以 β 表之,則可書為

$$[A_1, A_2]=\beta$$

吾人從此可述實數之四則定義矣。

實數之四則

二實數 α,β 依如次之有理數之截斷定之。

$$\alpha=[A_1,A_2], \qquad \beta=[B_1,B_2]$$

先述加法定義如次

$$\alpha+\beta=[A_1+B_1,\ A_2+B_2]$$

但 A_1+B_1 表屬於 A_1 之有理數,與屬於 B_1 之有理數所有配合之和所成之集,A_2+B_2 亦準此。

欲證$(A_1+B_1,\ A_2+B_2)$作廣義之截斷,可以屬於 A_1, A_2, B_1, B_2 之各有理數為 a_1, a_2, b_1, b_2,先示

$$a_1+b_1<a_2+b_2 \tag{1}$$

及對於隨意實數 δ 可使

$$(a_2+b_2)-(a_1+b_1)<\delta \tag{2}$$

可也。然依假定 (A_1, A_2), (B_1, B_2) 皆作截斷,故可得

$$\left.\begin{array}{ll} a_1<a_2, & a_2-a_1<\varepsilon \\ b_1<b_2, & b_2-b_1<\varepsilon \end{array}\right\} \tag{3}$$

此 ε 爲隨意可取之實數。

故今令 $\varepsilon=\frac{\delta}{2}$, 則從 (3) 之四式,容易求得 (1) 及 (2) 二式。

依據同上之考究,以

$$\alpha\beta=[A_1 B_1,\ A_2 B_2]$$

爲乘法之定義。

但欲證明 $(A_1 B_1,\ A_2 B_2)$ 之作截斷,示以

$$a_1 b_1<a_2 b_2 \tag{1'}$$

$$a_2 b_2-a_1 b_1<\delta \tag{2'}$$

可也。(1′) 之成立自明。變 (2′) 之形則爲

$$a_2(b_2-b_1)+b_1(a_2-a_1)<\delta$$

故於 B_2 中豫取一隨意數 β, 按照

$$\beta(a_2-a_1)<\frac{\delta}{2}$$

定 a_1, a_2, 然後按照

$$a_2(b_2-b_1)<\frac{\delta}{2}$$

定 b_1, b_2 則 (2′) 必成立。

此所定義之加法及乘法,對於第1節四則之原則 (I) 及 (II) 皆能成立,不難驗證。蓋組織 A_1+B_1, A_1B_1 等之數皆爲

有理數,而有理數之於此等原則,悉能成立故也。

加法乘法既定,則作其反運算而減法乘法亦定。但除法雖常可能,減法$\alpha-\beta$則唯限於$\alpha>\beta$時可能。苟皆可能,則其結果,唯定於一種。

注意. 若以爲$\alpha-\beta=[A_1-B_1, A_2-B_2]$則誤矣,見次節。

注意. 此所定義之算法,不能用於實際之計算,固不待論。在實際α,β爲無理數時,取近於此之有理數之近似值,而求$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$等之近似值足矣。其計算法,詳於普通算術,茲略。

§7. 零及負數

吾人從自然數之概念出發,而遂達於實數,關於此之大小意義,及四則之運算,雖已各予定義,然尚有一不便之點,卽所謂「非$a>b$則$a-b$之減法爲不可能」是也。

欲廢此限制,使減法常爲可能,則吾人不可不更推廣數之範圍。其結果遂發生零及負數之概念,人所知也,苟閱初等代數學者,必於其卷首卽見關於此之說明,當能記憶。本書卻無提前詳述之之必要,唯恐理路中斷,故略述零及負數之定義,及其大小與四則之意義。

零 $a=b$時以$a-b$之差爲一新數,名之曰零,用記號0表之,卽

$$a-a=0$$

0較以前所定定義之一切實數小。

0與隨意實數a($a\neq0$)之加法及乘法,其定義如次。

$$0+a=a,\qquad a+0=a,\qquad 0+0=0$$

$$a\cdot 0=0\qquad 0\cdot a=0\qquad 0\cdot 0=0$$

減法爲加法之反運算,故

$a-0=a$

$0-0=0$

$0-a$ 爲(非用負數則)不能,

除法爲乘法之反運算,故

$0\div a=0$

$a\div 0$ 爲不能

$0\div 0$ 爲不定

負數　$a<b$ 時,以 $a-b$ 之差爲一新數,用記號 $-(b-a)$ 表之。即

$$a-b=-(b-a)$$

例如
$$3-5=-(5-3)=-2$$

此爲新所定義之數,名之曰負數,從來論定諸數對此而名之曰正數。

正數 a,謂之負數 $-a$ 之絕對值。正數及0以其自身爲絕對值。

負數皆較0小。又負數彼此之間,以其絕對值之大者爲小。例如

$$-3<-2<-1<0<1<2<3$$

以 a,b 等文字表正數(或零),以 $(-a)$, $(-b)$ 等表負數(或零)時,其夾雜負數之加法及乘法之定義,以次之各式示之。

加法 $$a+(-b)=a-b$$

$$(-a)+b=b-a$$

$$(-a)+(-b)=-(a+b)$$

乘法 $$a(-b)=-(ab)$$

$$(-a)b=-(ab)$$

$$(-a)(-b)=ab$$

普通a與$-a$互名曰反數。即 3 之反數爲 -3,又 -3 之反數爲3。0以其自身爲反數。

於是 $$a+(-a)=a-a=0$$

即某數與其反數之和,常等於 0.

故以減法爲加法之反運算,則不關於 α,β 之正負如何,常可謂 $\alpha-\beta$ 爲α與β之反數即 $(-\beta)$ 之和。即

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$$

蓋於此加以β,則爲

$$\alpha+(-\beta)+\beta=\alpha$$

故也。

因此對於隨意實數,必有其反數存在。故至此不問α,β之大小如何,常可求$\alpha-\beta$之差矣。

除法爲乘法之反運算,故亦可據以定其定義。祇須除數不爲0,則除法必常可能。

注意。 $\alpha=[A_1, A_2]$ $\beta=[B_1, B_2]$

不可作 $$\alpha-\beta=[A_1-B_1, A_2-B_2]$$

已見前節注意。然則如何而可。須知

$$-\beta=[-B_2, -B_1]$$

故必

$$\alpha-\beta=[A_1-B_2, A_2-B_1]$$

明也。

依上考究,以 α, β 爲正數,且

$$\alpha=[A_1, A_2],\qquad \beta=[B_1, B_2]$$

則 A_1, A_2, B_1, B_2 僅爲正數之集,故 $\alpha\div\beta$ 得如次之定義

$$\begin{aligned}\alpha\div\beta&=\alpha\times\frac{1}{\beta}\\&=[A_1, A_2]\times\left[\frac{1}{B_2}, \frac{1}{B_1}\right]\\&=\left[\frac{A_1}{B_2}, \frac{A_2}{B_1}\right]\end{aligned}$$

於是回顧第 1 節列舉諸原則而審查之,則其在一切實數範圍內之倘能成立與否,不難知之,卽大小之原則 (I), (II) (III), 儘皆成立。又四則之原則 (I), (II) 除 (II) 之 (4) 外,亦皆爲眞,頗易驗證。

(II) 之 (4),祇當 C 爲正時可以成立。又就 (III) 考之,隨零及負數之創造,而減法得常可能,然除法之以零爲除數者,倘爲不能或不定也。

§8. 實數之綿續性

吾人已知有理數之截斷,有有端無端兩種,其無端者亦隨一無理數之插入而遂爲有端。然則合有理數及無理數之實數全體作一截斷,必常有端否。次將考之。

今將實數全體分爲 A_1, A_2 二集,屬於 A_1 之數,皆較屬於

A_2之數小。於是以含於A_1中之有理數之全體爲B_1,含於A_2中之有理數之全體爲B_2,則(B_1, B_2)明爲有理數之截斷,而定一實數β。然一切實數不可不含於A_1及A_2之中,故β必屬於A_1或A_2。若β屬於A_1則爲A_1之最大數。蓋A_1中若有較β更大之數,例如以之爲a,則β與a之間,尚可有無窮多之有理數。(第6節定理1) 而此等數一方較a小,故屬於A_1,又一方較β大故不可不屬於B_2,是適兩相矛盾。故A_1中不得有較β大之數。若β屬於A_2,則爲其最小數,亦可如上證明之。故得次之定理。

定理. 分實數全體爲A_1及A_2二集,使屬於A_1之一切數,較屬於A_2之一切數小,則A_1有最大數,A_2無最小數,否則A_1無最大數,A_2有最小數。

易言之,

在實數全體間所作之截斷皆爲有端。

此性質名曰,實數之綿續性。

謂之綿續者,較所謂緻密更爲充實之集之狀態也。有理數之全體,雖成緻密之集,然截斷之得爲無端,若於實數之全體,則截斷之必爲有端,如上所記也。且有理數間尚有插入無理數之空隙,若於實數全體之間,則早無此類空隙存在。「綿續」之名,實基於此。

本章爲吾人從自然數出發,循求實數全體概念之大略途徑。今日算學上所謂之數,此外尚有虛數,(普通爲複數)然本書祇考實數,故以下所謂之數,常指實數。

第二章　集

§9. 集

算學上所謂集者,爲若干物之團體,有可判別隨意一物屬於此否之明瞭定義存在者也。但實際不關於判別此之簡便方法之有無,至少須有理論上可以考其判別者在。

例如

(1)　一切有理數

(2)　絕對值不過10之一切整數

(3)　所設直線上之一切點

等各作一集。判別隨意所設一數爲有理數或爲無理數,雖時有不易(例如證明圓周率3.1415……爲無理數,非容易事。)但不須絲毫顧慮。總之觀其所設數可用二整數m,n書爲$\frac{m}{n}$,之形否,當可辨別其爲有理數或無理數,故(1)確作一集。反之如

(4)　一切簡單分數

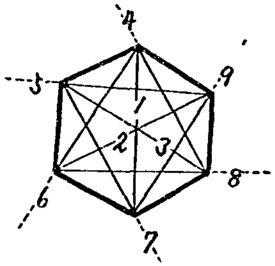
(5)　不甚大之一切整數

所云,其標準暗昧,故不得謂作算學的之一集也。

一集之各原素,名曰其集之元。

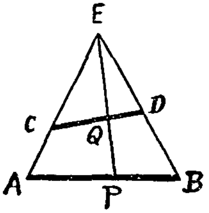
有甲乙二集,可依何種方法使甲之一元,對應於乙之一元,或反之使乙之一元,對應於甲之一元,則甲與乙謂爲得成「一對一」對應之集。或簡之曰「甲與乙爲對等」。

例 1. 一個六角形之一切對角線,與 1,2,3,……,8,9 自然數爲對等。



謂「六角形對角線之數爲「9」,卽以言語表明此事實者也。

例 2. 有二線段 AB, CD。設 AC, BD 相交於 E,其過 E 之隨意直線與 AB, CD 之交點,常以 P, Q 記號表之,則 AB 上之一點 P,常對應於 CD 上之一點 Q,或反之 CD 上之一點 Q,常對應於 AB 上之一點 P。



直線 AC, BD 若成平行,則平行於此(指過 E 之直線)之隨意直線與 AB, CD 之交點,以 P, Q 表之,亦可得同上之結果。

故無論如何,線段 AB 上一切點之集,與線段 CD 上一切點之集爲對等。

例 3. 一切自然數之集,與一切正之偶數之集,可如下表成一對一之對應。故爲對等。

自然數	1	2	3	4	…	n	……
正之偶數	2	4	6	8	…	$2n$	……

但上例 2 之 AB, CD 其長普通不相等;又例 3 正之偶數含於自然數中,(每隔一奇數) 明爲其半。(自然數奇偶各半)

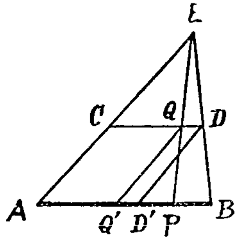
然此等之互爲對等,卻如上示。則對等云者,必與所謂相等異其意義可知已。時有一集與其自身之一部分爲對等者。現例3卽其一例也。

普通與其自身一部分成對等之集,名曰**無窮集**,不然者,名曰**有窮集**。

例如上示自然數1, 2, 3,……之集,與其一部分2, 4, 6,……之集爲對等,故自然數之集爲無窮集。

反之僅爲1, 2, 3,……, 9, 10之自然數集,無論如何設想,亦不得與其一部分成一對一之對應,故爲有窮集。

又例,線段 AB 上一切點之集,謂爲有窮集抑無窮集乎。今平行於 AB 引較此小之線段 CD,依前方法,若 AB 上之一點 P,對應於 CD 上之一點 Q,則兩線段上之一切點,正成一對一之對應。



次過 D, Q 引平行於 AC 之直線,以其與 AB 之交點爲 D', Q',若線段 CD 上之一點 Q,對應於線段 AD' 上之一點 Q',則二線段 CD, AD' 上之一切點,亦成一對一之對應。故結論 AB 上之點,與其一部分 AD' 上之點,成爲一對一之對應。由是可知 AB 上之一切點爲無窮集。

定理. 一集之一部分爲無窮集,則其原全集亦爲無窮集。

蓋以原全集中成無窮集之一部分爲 A,其餘部分爲 B,

原全集以$A+B$記號表之。依假定A爲無窮集,故必與其一部分例如A'爲對等。從而雙方各加B,則$A+B$亦必與$A'+B$爲對等。然$A'+B$明爲$A+B$之一部分。卽$A+B$與其一部分$A'+B$成對等,故爲無窮集。

系. 一切自然數之集,如前證明爲無窮集。從而含此之一切整數之集,亦爲無窮集。依同理逐次推之,可知含此之一切有理數之集,及一切實數之集,亦皆爲無窮集。

§10. 可數集

無窮集中特與自然數全體之集成對等者,名曰可數集。易言之,可數集者,其各元可附以 1, 2, 3,……等數號,而無一遺漏之無窮集也。附與數號之方法,可有種種,有同一元而某方法使之對應於 1,他方法使之對應於 2 等者,總之無論用何順序,但使其各元有附以數號之可能者,其集爲可數集。亦有乍見似爲不可數之無窮集,卻因巧定順序而變爲可附數號者,視爲意外可數者可也。

例 1. 自然數全體之集,卽其自身而可數,固不待論。然整數之集

$$\cdots\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots$$

如何。

此集向左右兩側無窮延長,故從其中一元始,僅向一側附以數號,則他側之並列數將永久拋棄,不得數號,例如

整數	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
數號	無數號			1	2	3	4	5	6	…

故於此變其方法,從一元始,交向左右兩側遞附數號可也,例如

整數	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
數號	…	7	5	3	1	2	4	6	…

若是則任何整數必可得何等數號。故

一切整數之集,爲可數集。

例 2. 一切有理數之集,爲可數集。

此例若從有理數之大小順序,附與數號,必不可能明也。蓋某一有理數,固可附與數號 1,然有理數分布緻密,任取如何接近之數,亦非其直接之隣數,故附與數號 2 之數之選擇惑矣。然則有理數全體之集,將斷爲不可數集乎。曰否,倘有別種方法在。

先取一切正之有理數,凡同分母者橫列之,同分子者縱列之如下。

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \cdots\cdots \\[6pt]
\frac{1}{2} & \left(\frac{2}{2}\right) & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \cdots\cdots \\[6pt]
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \left(\frac{3}{3}\right) & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \cdots\cdots \\[6pt]
\frac{1}{4} & \left(\frac{2}{4}\right) & \frac{3}{4} & \left(\frac{4}{4}\right) & \frac{5}{4} & \cdots\cdots \\[6pt]
\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \left(\frac{5}{5}\right) & \cdots\cdots \\[6pt]
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots
\end{array}$$

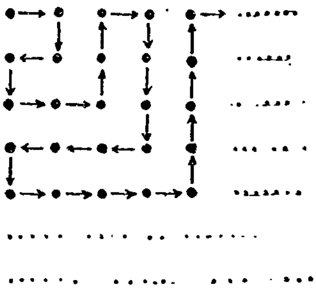
此中有許多爲實質上相同者,例如

$$\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=\frac{5}{5}=\cdots\cdots$$

$$\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\cdots\cdots$$

故將無用者包以括符,視若無視。則吾人得將一切有理數,排列無遺矣。於是從此表左上角始,漸次從右圖之矢向,附其各數以數號可也。



其結果如次。

數號	1	2	3	4	5	6	7	8	……
正之有理數	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	3	4	……

若是,則任何正之有理數,必可附以第某之數號,故一切正之有理數之集爲可數者。

從此進證有理數全體之集之可數,極容易矣。先以依上方法所附數號之正之有理數,順次爲

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \cdots\cdots$$

則一切有理數可以

$$0,\ \pm r_1,\ \pm r_2,\ \pm r_3,\ \cdots\cdots$$

表之。故附其數號如次。

有理數	…	$-r_3$	$-r_2$	$-r_1$	0	r_1	r_2	r_3	……
數號	…	7	5	3	1	2	4	6	……

由此觀之

一切有理數之集爲可數者。

例 3. 一切實數之集,爲不可數集。

欲證明之,僅示實數之一部分,在 0 與 1 之間者,已爲不可數足矣,蓋一切實數若果可數,則特在 0 與 1 之間者,亦應皆可附以數號故也,

今按照 $0<\alpha<1$ 取一實數 α, 依小數之記法書之,(例如 0.1425) 以 a_1 爲小數第一位之數字, a_2 爲小數第二位之數字, 普通以 a_n 爲小數第 n 位之數字, 則

$$\alpha=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\cdots\cdots$$

但 9 之循環小數,皆不用之,例如 0.24999……, 則書爲 0.25000……

今假定在 0 與 1 之間之一切實數爲可數者,則以順其數號之數爲 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,$……此等各以小數記法表之,則爲

$$\alpha_1=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\cdots\cdots$$

$$\alpha_2=\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2}+\frac{b_3}{10^3}+\cdots\cdots$$

$$\alpha_3=\frac{c_1}{10}+\frac{c_2}{10^2}+\frac{c_3}{10^3}+\cdots\cdots$$

……………………………

於是可作一數β如次。

先設β之小數第一位(以之爲p_1)與a_1及9異,小數第二位(以之爲p_2)與b_2及9異,普通小數第n位(以之爲p_n)與α_n之小數第n位及9異,卽

$$\beta=\frac{p_1}{10}+\frac{p_2}{10^2}+\frac{p_3}{10^3}+\cdots\cdots$$

$$\begin{cases}p_1\neq a_1\\p_1\neq 9\end{cases}\qquad\begin{cases}p_2\neq b_2\\p_2\neq 9\end{cases}\qquad\begin{cases}p_3\neq c_3\\p_3\neq 9\end{cases}\qquad\begin{matrix}\cdots\cdots\\\cdots\cdots\end{matrix}$$

如此之β,總爲較1小之實數。

然β與$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots\cdots$無一相同。

蓋比α_1異其小數之第一位,比α_2異其小數之第二位,次第如此,可知比之某α,必異其小數之第某位也。

然則$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots\cdots$,未嘗網羅較1小之一切實數,至少亦必遺漏一數β。

由是觀之,較1小之一切實數之集,已不可數。況一切實數乎,其爲不可數集,無待論矣。(第七章IV有別證)

§11. 一直線上之點集

吾人已於第6節敘述一直線上之點,可以代表實數,而藉畫圖以助理論之領悟矣。今後尙欲使用同此之幾何學比喻。然於未用之先,應將其所以爲直線者之性質,略加精密考察。經此考察後,始可應用幾何學之表示,若於第6節則急於借助,率爾用之,究嫌未妥,今後吾人將飜更有所精思。

然則何爲直線耶,謂如「緊張之細絲」乎,雖可髣髴其形

狀,卻不足爲算學之推理基礎。至如所謂點,直線,平面等之基本概念,即簡括之,亦不能以一言爲之定義,吾人僅以存於其間之若干關係,定爲公理,而作推理之基礎可也。

雖然今吾人殊無深考幾何學根本之暇,故設簡單如次之假定。

便宜上設直線爲水平延長於左右方向者,則

(1)　此直線上之一點,對應於一實數,或反之,一實數對應於此直線上之一點。即此直線上之一切點,與一切實數之間,有一對一之對應成立。

(2)　對於前項對應,設對應於隨意二點 A, B 之二數爲 a, b,若 A 在 B 左,則 $a<b$,或轉之,若 $a<b$ 則 A 在 B 左。

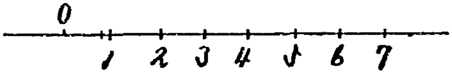
據以上假定,吾人對於直線上之一點,可呼以對應於此之實數。稱其數曰,其點之座標。

考究實數全部或一部之集之問題,常可視爲以此等實數爲座標之點之集之問題。如此直捷考法,有藉圖形之助,而得容易推理之利。故今後吾人考究數(例如) a 者,代以考究座標 a 之點,謂之爲點 (a) 或 a 點,此外雖尚有類於此之幾何學語,可以採用,然其內容實爲講論數集者,可以純關於數之事項直言之,極爲容易,吾將舉委於讀者矣。

同一直線上之點之全部,或一部之點之集,名曰**一直線上之點集**。本節簡言之,僅曰點集或集。

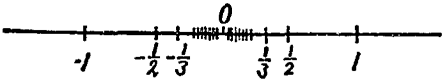
示點集之例如次。

例 1. $x=n$ (n 爲自然數) 之點 (x) 之集



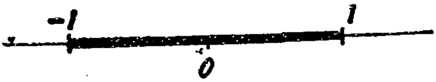
點 (0) 不屬於其集。

例 2. $x=\frac{1}{n}$ (n 係不爲 0 之整數) 之點 (x) 之集。



點 (0) 不屬於其集。 然其隣近,屬於點集之點,無窮密集,

例 3. $-1<x<1$ 之點 (x) 之集。

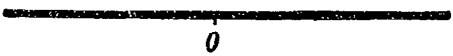


點 (1) 及點 (-1),不屬於其集。

例 4. $x>0$ 之點 (x) 之集。

點 (0) 不屬於其集。

例 5. 一直線上一切點之集。



對於屬於一點集之一切點 (x),常有如次

$$S_1 \leqq x$$

之點 (S_1) 存在時,名之曰其集之下界。若又

$$x \leqq S_2$$

時,點 (S_2),名曰其集之上界。

一點集非必有上下界者。有之則其定法可有種種。

例如以 S_1 為下界,則如 $S'_1 < S_1$ 之點 (S'_1),皆得稱為下界,上界亦準此。

就已上所舉諸例,辨其上下界如次,

例 1 及例 4,僅有下界卽點 (0),

例 2 及例 3,上下界俱有,卽點 (1) 及點 (−1),

例 5 上下界俱無。

點集之上下界俱有者,謂之有界。

定理 1. 點集有下界時,有如次之一點 g_1 存在,而唯限於一。

(i) 對於屬於其集之隨意點 (x),常

$$g_1 \leqq x$$

(ii) 設 ε 為隨意小之正數,亦常有

$$x < g_1 + \varepsilon$$

之點 (x) 存在於其集內。

證明如次。

今於一切實數中,以較屬於其集之點之座標 x 之隨意值小者(例如較其下界之座標小者)皆集為 A_1 集,不然者集為 A_2 集。則 (A_1, A_2) 確作一截斷,從而決定一實數 α。此 α 卽本定理所謂 g_1 也。

蓋若有 $x<\alpha$ 之 x，則在 x 與 α 間之數較 x 大，而謂屬於 A_1，必有不合，又若無 $x<\alpha+\varepsilon$ 之 x，則在 α 與 $\alpha+\varepsilon$ 間之數，較任何 x 小，故應屬於 A_1，卻謂屬於 A_2，亦必有不合。故 α 備有如(i)及(ii)之 g_1 之性質。

g_1 之存在，此已知矣，若謂唯限於一，則觀如次所考明也，今假設如此之數有二，以之為 g_1, g_2，且令 $g_1<g_2$，則依 (i) 一切 x 必為 $g_2\leqq x$，故 g_1 與 g_2 之間，無一 x 存在。然又依 (ii) 對於隨意小之正數 ε，必有 $x<g_1+\varepsilon$ 之 x，故 g_1 與 g_2 之間，必不可無 x，此明為矛盾之結論。然則謂有 g_1, g_2 二者之無從稽考可知已。

定理 2. 點集有上界時，有如次之一點 g_2 存在，而唯限於一。

(i)　對於屬於其集之隨意點 (x)，常

$$x\leqq g_2$$

(ii)　設 ε 為隨意小之正數，亦常有

$$g_2-\varepsilon<x$$

之點 (x) 存在於其集內。

證明與定理 1 同故路。

如定理 1 及 2 所證明存在之點 (g_1) 及 (g_2)，分別名之曰，其集之**下端**及**上端**。

上下端有其自身屬於其集者，亦有不屬之者。上端乃得為上界之點中有最小座標者，下端乃得為下界之點中有最大座標者。

在前舉諸例中

例 1 有屬於其集之下端,即點 (1),而無上端。

例 2 有屬於其集之上下端,即點 (1) 及 (−1)。

例 3 有不屬於其集之上下端,即點 (1) 及 (−1)。

例 4 有不屬於其集之下端,即點 (0)。

例 5 上下端俱無。

§12. 集積點

以 a 爲一定數,ε 爲一正數,則適合於

$$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$$

關係之一切點 (x) 之集,名曰點 (a) 之隣近。但 ε 爲指定之正數時,點 (x) 之集,謂之「點 (a) 之 ε 隣近」,又 ε 爲隨意正數時,謂之「點 (a) 之隨意隣近」。

例如以 n 爲一自然數,則點 $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ 在點 (0) 之 1 隣近。設 n 爲十分大,則此點得逼赴點 (0) 之隨意隣近。

屬於一點集之點,在一定點之隨意隣近,有無窮多存在時,此一定點,名曰其集之**集積點**。

集積點自身,有屬於其集者,有不屬於其集者。

例 1. $x=\frac{1}{n}$ (n 爲自然數) 之點 (x) 之集,有不屬於此之集積點 (0)。

例 2. $-1<x<1$ 之點 (x) 之集,既有以屬於其集之一切點爲集積點外,又有不屬於此之二集積點 (1) 及 (−1)。

定理 1. 屬於一點集之點,在一定點之隨意隣近,除其點外,至少常有一點存在時,此一定點爲集積點。

蓋以點 (α) 爲一定點，ε 爲隨意正數，則依假定點 (α) 之 ε 鄰近，至少有在其點外而屬於其集之一點，以之爲點 (a_1)。

次令 $\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon_1$，則依假定在點 (α) 之 ε_1 鄰近，亦至少有在其點外而屬於其集之一點，以之爲點 (a_2)。

次更令 $\frac{\varepsilon_1}{2}=\varepsilon_2$，則仍依同理，點 (α) 之鄰近，亦有在其點外而屬於其集之點，以之爲點 (a_3)。以下倣此。

此所得點

$$(a_1),\ (a_2),\ (a_3),\ \cdots\cdots,\ (a_n),\ \cdots\cdots$$

中或有可相一致者，然必限於其途中之有限個數，蓋今例設

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=a_{n+1}$$

則不可不

$$|a_1-\alpha|<\varepsilon_n=\frac{\varepsilon}{2^n}$$

然 n 十分大時，此右邊可小至不可思議，故此關係遂至不能成立。故自 a_1 至某 a_{n+1}，雖或可一致，但決不能永久繼續一致，斯可知已。對於其他之 a，亦同此理。然則數列 $a_1, a_2, \cdots, a_n \cdots$，可含無窮多之數已。

但今設隨意正數 η，使 n 爲十分大，則得 $\varepsilon_n<\eta$。而自上記數列 a_{n+1} 以下無窮多之數，皆在點 (α) 之 ε_n 鄰近，故又可謂在 η 鄰近。由是得結論，在點 (α) 之 η 鄰近，有屬於其集之無

窮多之點存在。此η爲隨意正數,故從此可知點(α)爲集積點。

定理 2. 自有界而且無窮多之點所成之點集,至少有一集積點。

如欲證明之,可以屬於其集之隨意一點,普通稱之爲點(x),今將含於其集之直線上之一切點,分爲如次二羣 A, B。

(i) 對於一點 (a),凡 $x<a$ 之點不存在於其集內,或雖存在而其數有限時,點 (a) 屬於 A。

(ii) 對於一點 (b),凡 $x<b$ 之點,有無窮存在於其集中時,點 (b) 屬於 B。

據假定原集爲有界而且有無窮多之點,故爲 a 及 b 之點必存在,例如其下界確屬於 a,上界確屬於 b。又 $a<b$ 固不待論。依此 (A, B) 作一截斷,從而可定一數 α。故點(α)爲原集之一集積點。

蓋以 ε 爲隨意小正數,則點$(\alpha+\varepsilon)$屬於B,故 $x<\alpha+\varepsilon$ 之點(x)有無窮多。反之點$(\alpha-\varepsilon)$屬於A,故 $x<\alpha-\varepsilon$ 之點(x),不能有無窮多存在。故結論知

$$\alpha-\varepsilon<x<\alpha+\varepsilon$$

之點(x),有無窮多存在。故點(α)爲集積點。

注意 1. 點(α)僅爲集積點之一,卽此外亦尙可有集積點,固勿待論。然無座標較 α 小之集積點。

蓋設 $\alpha'<\alpha$,正數 ε 爲如次

$$\alpha'+\varepsilon<\alpha$$

之小者,則點$(\alpha'+\varepsilon)$屬於A,故$x<\alpha'+\varepsilon$之點(x),決無無窮多存在。從而

$$\alpha'-\varepsilon<x<\alpha'+\varepsilon$$

之點(x),必無無窮多存在,勿待論矣。故點(α')非集積點。

注意 2. 本定理之(i), (ii),若代以

(i′) 對於一點(a),凡$a<x$之點(x),有無窮存在於其集中時,點(a)屬於A。

(ii′) 對於一點(b),凡$b<x$之點(x),不存在於其集內,或雖存在而其數有限時,點(b)屬於B。之條件,則又得一集積點。而無座標較此大之集積點,一如注意 1 之證明。

如點(α)之集積點中,其有最小座標者,名曰其集之下限,有最大座標者,名曰上限。

§13. 亞基默德氏定理

本章臨終欲證明所謂亞基默德(*Archimedes*)氏之定理。其定理如次。

對於隨意二正數a, b,取適當自然數n,則必可得$na>b$。

先就$a\geqq b$時考之,此定理之成立不俟言。故就$a<b$時證明之可也。

今作無數a之倍數$a, 2a, 3a, \cdots$,假定此等無一超過b者,則此等無窮多之集有上界b,故依第11節定理 2,必有上端g_2存在。然則在a之一切倍數中,對於隨意正數ε,其較$g_2-\varepsilon$大之一倍數,必應存在,例如以之為ka,則

$$g_2-\varepsilon<ka$$

然無論 ε 爲若何小之正數,亦無不合,故今特令 $0<\varepsilon<a$ 則

$$g_2<ka+\varepsilon<(k+1)a$$

即 a 之一倍數 $(k+1)a$ 較 g_2 大。此與所謂 g_2 爲上端者相反。

由此觀之,a 之一切倍數無一超過 b 之假定,不能成立可知。易言之,其如 $na>b$ 之倍數 na,必能發現也。

系 1. 對於隨意實數 a,其如 $n>a$ 之自然數 n 必存在。

(證明) 於本定理令 $a=1$,且改 b 爲 a 即得。

系 2. 對於隨意二正數 a,b,取適當自然數 n,必可得 $\frac{a}{n}<b$。

(證明) 依本定理有如 $nb>a$ 之自然數 n,從此得 $b>\frac{a}{n}$。

系 3. 有隨意二正數 a,b,其 $a<b$ 時,取適當自然數 n,則必可得

$$na\leqq b<(n+1)a$$

(證明) 蓋 a 之一切倍數中,至少有 a 自身較 b 小,又取其十分大之整數倍,則依本定理較 b 大。故其途中對於某自然數 n,當適爲 $na=b$,否則必爲 $na<b<(n+1)a$。

注意 1. 系 3 在第 6 節定理 2 之證明中,已用之矣。本節理論,絲毫未用第 6 節定理 2,及從此所生之結果,故理論上欲求順序之嚴正,須以關於上下端存在之定理,及亞基默德氏定理等,插入第 6 節爲佳。

注意 2. 本節所謂亞基默德氏定理,亦有稱爲亞基默德氏公理者。例如希爾倍特 (*Hilbert*) 氏幾何原理 (已經共

學社傅種,孫韓桂叢二氏譯行)即稱之爲公理。然本書旣依戴斷規定無理數定義,又本此定義求得實數之綿續性而後求之,故不曰公理而爲定理。

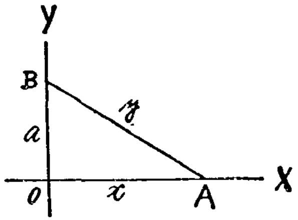
第三章　變數及函數

§14. 變數

算學上表數,除數字外,用 a, b, c, x, y, z 等文字。初等算術之比例問題,用文字 x 表未知數,而得立式之便,然非必限於僅表未知數,普通表示存在於隨意數間之普遍關係,以用文字爲便,此代數學及其他之所公認也。

文字代表之數,名曰文字之數值,或僅曰值。

在同一問題中常代表一定數值之文字,(或數字) 名曰常數,反之代表種種隨意數值之文字,名曰變數。



例如直交二直線 OX, OY 上,各各有點 A, B,

令 $$OA=x, \quad OB=a, \quad AB=y$$

則有 $$y=\sqrt{x^2+a^2}$$

關係明也。今固定 B 點,使 A 點運動於 OX 上,於是研究相應於 x 之一值之 y 之值如何變動,則對於此問題言之,上式之

a 爲常數,　x, y 爲變數。

若 A, B 皆運動於 OX, OY 上,則

a, x, y 皆爲變數。

B 雖固定,然依其所固定之位置不同,而 a 亦可取種種之值,

無待贅述,所稱之爲常數者,僅對於現在問題,不問 x 之變動如何,而 a 只取某一數值,始終不變耳。

(解析幾何學上所書直線及曲線之方程式,其中流動座標 x, y 爲變數,其係數等之文字普通爲常數。)

又例如所謂「解方程式 $x^2-3x+2=0$」之問題,其 x 雖爲常數,然於所謂「求二次式 $x^2-3x+2=0$ 之極小値」之問題,則 x 爲變數。蓋前者之 x,縱屬未知,究實代表定値,(實爲1及2)若後者之 x,則須考究其所取種種數値,而後始有問題之意義故也。

又例如

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

關係,不關於 a, b 之如何常能成立,故 a, b 代表一定數値可,代表種種變動之數値亦可。然則 a, b 俱視爲常數,或俱視爲變數,無不可也。其實此類問題,殆無常數變數區別云云之必要也。蓋一問題中有必須視爲常數者,及必須視爲變數者發生,而後始有嚴密區別之必要也。

表變數普通用字母末後文字 x, y, z 等者爲多。但無庸拘執,可不待論。

雖爲變數卻有不必代表一切實數値者。例如最初之例,點 A 從 O 向 OX 方向進行,則 x 不取負數値。又若 A 不入於距 O 之一定距離以內,則 x 之値必有下界。

普通一變數所取之一切値之集,名曰此變數之變域。

例如以 x 爲變數,則使

$$x^2-3x+2 \tag{1}$$

$$\sqrt{x} \tag{2}$$

爲實數之 x 之變域,在(1)爲實數全體,在(2)爲 0 及正數全體。又以

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n=2^{n+1}-1 \tag{3}$$

公式中之 n 爲變數,則其變域,爲限於不爲負之整數。

在變域內取隨意二數,在此二數間之實數,皆屬於其變域時,謂其變域爲綿續,否則謂爲不綿續。(或謂之間斷)

上例(1),(2)之變域爲綿續。(3)爲不綿續,因夾於二整數間之分數無理數等,非 n 之值所得取也。

變數在綿續變域內漸次增加或減少時,謂爲變數之綿續變動,或綿續之變數。

更就綿續變域細考之,其端之數有屬於變域者,有不屬者,例如 x 所取之值爲

$$a\leqq x\leqq b \tag{4}$$

則其變域之兩端皆屬之,若爲

$$a<x<b \tag{5}$$

則兩端皆不屬之。又爲

$$a<x\leqq b$$

及

$$a\leqq x<b$$

則僅一端屬於變域。如(4)之變域,名曰閉變域,(5)名曰開變域。

§15. 函數

前節所舉例

$$y=\sqrt{x^2+a^2}$$

中,x 與 y 二變數間有某關係,若其一方變數之値定,而他方變數之値,亦隨之而定者,則前者名曰自變數,後者名曰因變數,

上例爲 x 先自變動,而後考對於此之 y 之變動者,故此問題之 x 爲自變數,y 爲因變數。

普通,自變數略稱變數,因變數則稱爲其(自)變數之函數。上例 x 爲變數,y 爲 x 之函數。

變數=自變數

函數=因變數

本書以後常用此略言。

函數之定義,有須注意者二三點,舉於次。

(1) 所謂 y 爲 x 之函數者,不過謂每因 x 之數値定,而對於此之 y 之數値定也。x 與 y 之關係,能否書爲如上之代數式,非所問也。即確無表示此算式者,亦可用函數之語無妨。見次之例 7。

(2) 每因 x 値之定,而 y 之値亦隨之以定,然對於 x 之各相異値,不必限定 y 亦以各相異値爲之對應。易言之,x 値變動時,y 之値不必隨之變動也。

例如 x 之値遞變爲 1, 2, 3… 等時,y 有可暫保其一定値者,然則函數之定義,未可如次述之矣。

「有二變數 x, y，隨 x 值之變動而 y 之值亦變動時，y 名曰 x 之函數。」

(3)　前條所述之極端例。例如無論 x 種種變動，而 y 始終僅有一定值者，亦未嘗不可相容。此 y 實爲常數。故於廣義，常數亦可視爲一變數之函數。

（最初視 x, y 皆爲變數而下函數之定義者，故謂 y 爲常數亦可相容，乃稍擴充函數之定義者也。）

(4)　y 未必限取異於 x 之數值，即 $y=x$ 亦可。故 x 自身，謂爲 x 之函數，亦無妨。

(5)　表函數不必常用一文字（如 y），或以一式亦可，例如

$$y=\sqrt{x^2+a^2}$$

y 爲 x 之函數，或謂 $\sqrt{x^2+a^2}$ 爲 x 之函數亦可。

更舉函數之各例於次。

例 1.　關於 x 之有理整代數式

$$a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+a_2 x^{n-2}+\cdots+a_{n-1} x+a_n$$

爲 x 之函數，名曰**整函數**。

此 x 之變域，得爲實數全體。

例 2.　關於 x 之有理分數式

$$\frac{a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0 x^m+b_1 x^{m-1}+\cdots+b_m}$$

亦爲 x 之函數，名曰**分函數**。

整函數與分函數，總名之曰**有理函數**。

分函數之 x 之變域，得從實數中除去分母式之值爲 0 之 x 之值者。故 x 之變域必不綿續。

例 3. $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_m$ 皆爲 x 之整函數,而適合於方程式

$$A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \cdots + A_m = 0$$

中之 y 時,此 y 名曰 x 之**代數函數**。

$m=1$ 且 A_0 爲不爲 0 之常數時,y 爲 x 之整函數。又 $m=1$ 且 A_0 不爲常數時,y 爲 x 之分函數。故代數函數,爲以有理函數爲特款而包括之之一種廣大函數。代數函數而非有理函數者,名曰**無理函數**。

注意 1. 今吾人僅考 x, y 爲實數之數值,故對於 x 之隨意值,而能適合於上面方程式之 y 之值,非必存在。故 x 之變域,普通必爲極受限制者。

注意 2. 解上方程式,有可將 y 書爲 x 之根式者,亦有不然者。如高等代數學證明,在五次以上代數方程式,普通不能以其根爲係數之根式表之;故 x 之代數函數,非必能化爲 x 之根式而表之者。雖然不問表此之式之有無,若已知 x 之值,則 y 之值,亦隨之以定,故謂 y 爲 x 之函數無妨。

$$\text{代數函數}\begin{cases}\text{有理函數}\begin{cases}\text{整函數}\\ \text{分函數}\end{cases}\\ \text{無理函數}\begin{cases}\text{能作自變數之根式而表之者}\\ \text{不然者}\end{cases}\end{cases}$$

例 4. $\sin x$ 爲 x 之函數。

其他三角函數亦然。

注意. 非代數函數之函數,皆名曰**超越函數**。$\sin x, \log x$

等,皆爲超越函數。(參看第七章 *III*)

例 5.　反三角函數 $\sin^{-1}x$ 亦爲 x 之函數。

但此 x 之變域,爲閉變域 $(-1,1)$,對於 x 之一值而 $\sin^{-1}x$ 可取無窮多之值。然此等值非完全隨意者,以其一爲 α,則皆可以

$$n\pi+(-1)^n\alpha \qquad (n\text{ 爲整數})$$

式表之,此在三角學所知也。然則可謂 x 值定,則 $\sin^{-1}x$ 之值(雖非唯一然)亦定矣。故 $\sin^{-1}x$ 爲 x 之函數。

定義.　對於變數之一值,而函數之值唯一確定時,此函數名曰**一值函數**,反之函數之值,有較 1 多之確定時,名曰**多值函數**。多值函數,有從其值之數而稱之**二值函數**,**三值函數**,或**無窮多值函數**者。

例如

$\pm\sqrt{x}$ 爲 x 之二值函數,

$\sin^{-1}x$ 爲 x 之無窮多值函數。

例 6.　設圓之半徑之長爲 r,其全周之長爲 l,則因 r 之值定而 l 之值亦定。故 l 爲 r 之函數。

吾人依幾何學知 $l=2\pi r$。然不關於知此公式與否,總之 l 確可依 r 而決定之,則可謂 l 爲 r 之函數。

例 7.　有置於一室內一定所在之寒暖計,可隨時隨刻指示種種溫度。其度數爲時刻之函數。蓋指定某日某時某分某秒,則其時應有一定之度數故也。此算學的計算公式之有無,非所問也。又過去或將來某時刻之溫度,即現在

不知,亦毫無妨礙。總之當其時刻,必有一定之溫度存在,固確實也。

例 8. 設自然數 n 之約數之數爲 T 則對於

$$n=1,2,3,4,5,6,7,\cdots\cdots$$

而
$$T=1,2,2,3,2,4,2,\cdots\cdots$$

普通知 n 求 T 之事,雖爲數論所論,總之知 n 則 T 定明也,故 T 爲 n 之函數。

此變數 n 之變域,限於自然數,故間斷而不綿續。

例 9. 變域之各部分,以各相異式表之者,亦不妨稱一函數。例如以

$$x<-1 \quad \text{時} \quad y=-(1+x)$$

$$-1\leqq x\leqq 1 \quad \text{時} \quad y=0$$

$$1<1 \quad \text{時} \quad y=x-1$$

爲定義之 y,亦爲 x 之函數。

此 x 之全變域,不能以 y 之唯一代數式表之,必須用三相異式 $-(1+x)$, 0, $x-1$ 表之,而後能貫徹其各部分,然既如上結合以定 y 之意義,則 y 固爲 x 之一函數,非三函數也。(參看第17節例6)

§16. 函數之表示式

y 爲 x 之函數,則 x 與 y 間之關係,無必以算式表之之需要,如前節所力說。但作算學上關於函數之種種討論,卻以引用何等記號表之爲便,不俟論矣。又 x,y 間之關係,實際雖可以算式表之,然目前無用其算式之必要,則僅注目於

所謂 y 爲 x 之函數之事實可矣。故吾人對於普通所謂 y 爲 x 之函數者,僅示以記號而書爲

$$y=f(x)$$

可也。f 爲函數 (*function*) 之首字。同一問題中,若有考究種種相異函數之必要,則

$$f(x),\quad F(x),\quad g(x),\quad \varphi(x),\ \text{等}$$

皆可臨時引用。

$f(x)$ 僅表「x之函數」之意義,其爲若何函數,不能由此而知。例如欲明示此爲 $\sin x$, 則書爲

$$f(x)=\sin x$$

可也。

例.　$f(x)=\sin x,\quad g(x)=ax+b$

則　$f\{g(x)\}=\sin(ax+b)$

$g\{f(x)\}=a\sin x+b$

於函數 $f(x)$, 表 $x=a$ 時之值常書爲 $f(a)$。此不可誤解爲「a之函數」。$f(\ )$ 括弧內書常數 (例如 a) 時,非「a之函數」,乃表示「以a代其變數時之函數之值」者。

例.　$f(x)=x^2-x-2$ 時

$f(3)=3^2-3-2=4$

$f(0)=0^2-0-2=-2$

$f(-2)=(-2)^2-(-2)-2=4$

y 爲 x 之函數時,又常可視 x 爲 y 之函數。

例如 $$y=\sqrt{x^2+a^2}$$

時 $$x=\pm\sqrt{y^2-a^2}$$

故亦可視 x 為 y 之函數。(在 $y^2\geqq a^2$ 之變域內)。

普通有

$$y=f(x)$$

關係時,可視 x 為 y 之函數者,以之為

$$x=g(y)$$

則二函數 $f(x)$, $g(x)$ 名曰互為反函數。(不拘變數文字,只注目於函數形式,故二者皆用 x 為變數也。) 例如 $\sin x$ 與 $\sin^{-1}x$ 互為反函數。又 x^3 之反函數為 $\sqrt[3]{x}$。

表 $f(x)$ 之反函數,有用 $f^{-1}(x)$ 記號者。

例 1. $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 時令

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

就 x 解之,則

$$x=\frac{dy-b}{-cy+a}$$

故 $$f^{-1}(x)=\frac{dx-b}{-cx+a}$$

例 2. $f(x)=1-x$ 時,令

$$y=1-x \quad 則 \quad x=1-y$$

故反函數 $f^{-1}(x)$, 亦為 $1-x$。

如此 $f(x)$ 與 $f^{-1}(x)$ 同一者,往往有之。

普通於 x 與 y 之對稱式,以就 y 解之者為

$$y=f(x)$$

則就 x 解之者爲

$$x=f^{-1}(y)$$

此 $f(x)=f^{-1}(x)$ 明也。

變數與函數之關係，已知爲一等式時，例如

$$y=\sqrt{x^2+a^2}$$

其一邊爲 y，他邊不含 y 時，y 名曰 x 之陽函數，不然者，例如已知爲

$$y^2-x^2=a^2$$

時，y 名曰 x 之陰函數。

但此區別，僅爲表示函數之形式不同而已，非關於函數之內容者也。

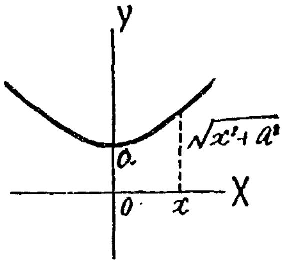
§17. 函數之圖示

當變數 x 之值變動時，考究其函數 $f(x)$ 之值作何變動，實爲重要問題。普通考究之法，以 x 爲從其變域內小之數值漸向大之數值變動，而隨此以查 $f(x)$ 值之變動者。故例如謂「$f(x)$ 爲增大（或減小）之函數」者，即謂 x 增大時 $f(x)$ 亦增大（或減小）之意也。

欲使函數 $f(x)$ 值之變動，一目瞭然，以畫其格欄幅爲善。格欄幅初等代數學已說，故茲略。

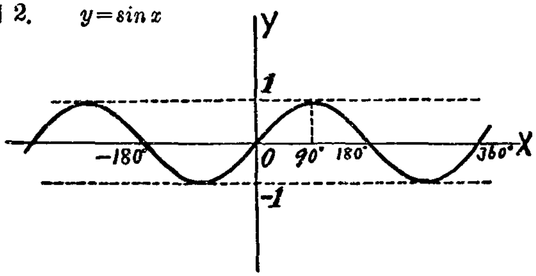
（借解析幾何學語言之，畫函數 $f(x)$ 之格欄幅者，即畫方程式 $y=f(x)$ 所表之曲線，詳言之，即畫適合於方程式 $y=f(x)$ 之點之軌跡也。）

例 1. $y=\sqrt{x^2+a^2}$

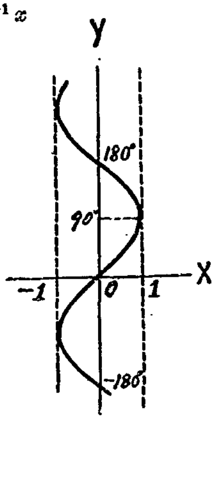


此格欄幅爲雙曲線之半。

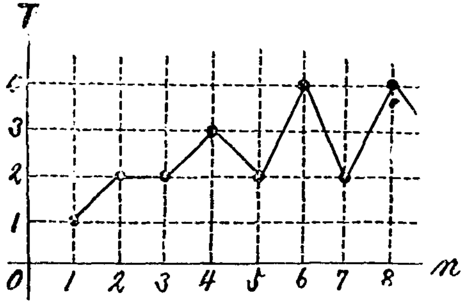
例 2. $y=\sin x$



例 3. $y=\sin^{-1}x$

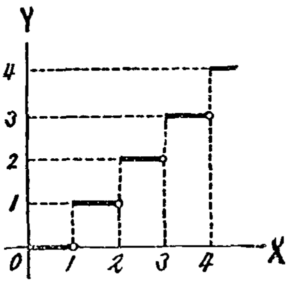


例 4. 第15節例8之T與n之關係,圖示如次。



此例之格欄幅,不為線,為相隔之點。此例以如圖之線段連結之,則易於觀察。

例 5. 設x為正數,其不越x之最大整數,以$[x]$表之,則$[x]$為x之函數。其格欄幅如次。

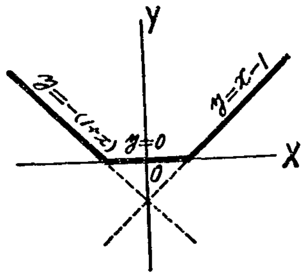


各級段右端之點,(即圖中以白圈示之者)不屬於本例之格欄幅,宜注意。

例 6. 第15節例 9 之函數 y 卽

$$\begin{cases} x<-1 \text{ 時 } y=-(1+x) \\ -1\leqq x\leqq 1 \text{ 時 } y=0 \\ 1<x \text{ 時 } y=x-1 \end{cases}$$

圖示如次。



問　題　II

求次揭各函數(從1至10)之圖示。

1. $2x^2-3x+4$　　**2.** $10-x-3x^2$

3. x^2　　**4.** $\sqrt{x}$

5. x^3　　**6.** $\sqrt[3]{x}$

7. $\dfrac{x}{1+x^2}$　　**8.** $\dfrac{1}{1-x^2}$

9. $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^x$，但 x 爲整數。

10. $\sqrt{x}+(-1)^x$，但 x 爲自然數。

11. x 爲正數，以小數記法寫 x 之小數部爲 $f(x)$。例如

$$f(1.25)=0.25$$

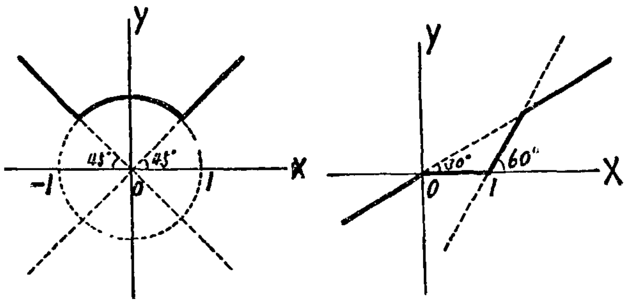
試圖示此函數 $f(x)$。

12. 以 x 爲較 1 大之自然數,以其 1 以外之最小約數爲 $f(x)$。例如

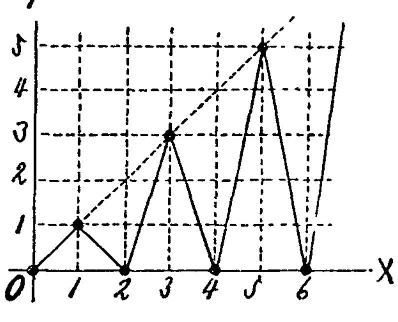
$$f(3)=3,\qquad f(4)=2$$

試圖示此函數 $f(x)$。

13. 求依次各圖中粗線所表示之函數之式。



14. 求次圖黑點所表示之函數之式。(試考究其唯以一式表之者)



15. 試證代數函數之反函數亦爲一代數函數。

16. 試證 $f(x)$, $g(x)$ 各爲 x 之代數函數時, $f\{g(x)\}$ 亦爲代數函數。

17. 試證 $f(x)$ 爲代數函數, $g(x)$ 爲超越函數時, $f\{g(x)\}$ 及 $g\{f(x)\}$ 皆爲超越函數。

第四章　極限之原理

§18. 變數之極限值

表變數 x 無窮接近於一定數 a, 用

$$x \to a$$

記號。此 a 名曰變數 x 之極限值,或謂爲變數 x 趨近極限值 a。

第17節所考,常以 x 爲從尋常小值向大值變化者,本節不必守此規定,卽可視 x 爲以隨意方法變化者。

例如 x 近於 0 之值,有順次取

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\cdots\cdots,\ \frac{1}{2^n},\cdots\cdots \tag{1}$$

等正值接近於 0 者,亦有歷

$$-1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2^2},\cdots\cdots,\ -\frac{1}{2^n},\cdots\cdots \tag{2}$$

等負值接近於 0 者,或則取如

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\cdots\cdots,\ (-1)^n\frac{1}{2^n},\cdots\cdots \quad (3$$

等正負交錯之值,而接近於 0 者。總之皆以

$$x \to 0$$

表之。

但如(1)及(2),或次第增,或次第減,僅偏於一方而趨近極限值者,名曰單調趨近。反之如(3)則爲非單調趨近之一例。

x 單調趨近於 a, 更有兩種方法,卽從較 a 小之值次第

趨近於 a 者,或從較 a 大之值次第趨近於 a 者是也。有區別之必要時,前者書爲

$$x \to (a-0)$$

後者書爲 $x \to (a+0)$

即在(1)爲 $x \to (0+0)$

在(2)爲 $x \to (0-0)$

注意 1. 普通 a 爲 0 時,對於 $0+0$ 及 $0-0$,僅書爲 $+0$ 及 -0。故上例書爲

$$x \to +0, \qquad x \to -0$$

可也。

注意 2. a 加 0 或減 0,其結果仍爲 a 之自身,原無變易,不待論也。然 $a+0$ 及 $a-0$ 非普通加法及減法之意義,唯表如上所記趨近方法之記號而已。

今再就「無窮接近」之意義詳說之。

所謂 x 無窮接近於 a 者,隨取如何小正數 ε,亦常可使 $x-a$ 之絕對值(以記號 $|x-a|$ 書之)較 ε 小也,即可使

$$|x-a| < \varepsilon \tag{1}$$

也。此 x 變化之結果,有遂使 $x=a$ 者,亦有 x 終不能達於 a 者。有併此皆非所問,只須 $|x-a|$ 較之如何爲小,即可謂爲

$$x \to a$$

者。

然因所謂「變數 x 之極限值爲 a」,而謂「x 之結果爲 a」,未免欠當,或謂「x 僅近於 a,決不能等於 a」,亦失之武斷。此

二者實皆可遇,吾人所考各問題之究為誰屬,不可不一一分別討論之。僅謂 $x\to a$ 者,皆不能決定也。

注意. (1) 式可改書為

$$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon \tag{2}$$

故 x 趨近 a 時,對於隨意正數 ε, 必有如 (2) 之 x 之值,

§19. 函數之極限值

有變數 x 之函數 $f(x)$。令 x 趨近一定數 a 時,相應於此之 $f(x)$, 亦趨近一定數 b, 則 b 名曰「$x\to a$ 時之 $f(x)$ 之極限值」以記號

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \tag{1}$$

表之。 lim 卽言「極限」,為拉丁語 (*Limes*) 之略字。

如前節所述 $x\to a$, 未必 $x=a$, 故 (1) 與所謂

$$x=a \quad 時 \quad f(x)=b$$

卽
$$f(a)=b \tag{2}$$

完全不同。雖 (1), (2) 亦有兩立之可遇,然卽兩立時言之,亦為 (1) 之當然結果,而非 (2) 之成立也,

據前節用 ε 所述之意義,將 (1) 式嚴密易言之,當如次。

設 ε 為如何小之正數,對於此選定適當正數 δ, 則對於

$$0<|x-a|<\delta \tag{3}$$

之一切 x 之值,有

$$|f(x)-b|<\varepsilon \tag{4}$$

關係成立時,稱為

$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$

(3) 表 $x\to a$, (4) 表 $f(x)\to b$. 但 (3) 僅爲

$$0<|x-a|$$

而倘省 $|x-a|$ 等於 0 者,蓋當 $|x-a|=0$ 卽 $x=a$ 時,(4) 不成立,亦屬無妨故也。易言之 $x=a$ 時,不必 (4) 式成立,其於所謂「$x\to a$ 時之 $f(x)$ 之極限值爲 b」毫無不合。(見次例 2)

注意 1. 對於所設 ε, 宜如何選定 δ, 須就各該問題,分別研究。普通常以 ε 之小而 δ 隨之以小。

注意 2. (1) 之 $x\to a$, 未嘗明示以如何方法趨近於 a。若特有明示之必要時,(其例見次之例 3) 書之如次,

$$\lim_{x\to(a+0)} f(x)=b, \qquad \lim_{x\to(a-0)} f(x)=b$$

又其他未曾如此書明者,其 x 之趨近方法,可勿置斷。

注意 3. $\lim f(x)$ 爲 $f(x)$ 之極限值而表定值者。故雖 $f(x)$ 接近於 b 然 $\lim f(x)$ 則等於 b 而非接近也。若將 (1) 式,改書爲

$$\lim_{x\to a} f(x)\to b$$

則誤矣。

例 1. $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$

蓋設隨意正數 ε,(其小隨便) 按照

$$0<|x-1|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{3'}$$

定之,卽 $\qquad 0<2|x-1|<\varepsilon$

故對於如此 x 之一切值,可知

$$|(2x+1)-3|=|2x-2|=2|x-1|<\varepsilon \tag{4'}$$

之成立，故

$$\lim_{x\to1}(2x+1)=3$$

(3′) 與 (4′)，相當於上記 (3) 與 (4)。本例選用 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ 可也。

注意．本例當 $x=1$ 時，實為 $2x+1=3$。然以此直斷為上之極限值，則不可。

例 2. $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

蓋 $x\neq1$ 時，

$$\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$$

然對於隨意正數 ε，按照

$$0<|x-1|<\varepsilon \qquad (3'')$$

以取 x，則常

$$|(x+1)-2|=|x-1|<\varepsilon \qquad (4'')$$

故

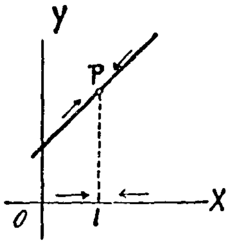
$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

(本例為 $\delta=\varepsilon$)

對於所設分數式，論 $x\to1$ 之極限值，不可就 $x=1$ 者而考之，如上說明。實際本例當 $x=1$ 時為

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

無有定值。然此為已令 $x=1$ 時之事，若就 $x\to1$ 時考之，則其極限值，固可得如上所示之定值 2 也，



圖示之如次。

當 $x \neq 1$ 時,函數

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

之格欄幅,與 $(x+1)$ 之格欄幅一致,為如圖所示之直線。然 $x=1$ 時, $f(x)$ 無定值,故其格欄幅,缺相當於此之一點,(圖中以空圈示之)

總之 x 接近於 1 時,對應於此之格欄幅上之點,為接近於圖中空圈 P 之位置,故其極限之位置確為 P。而 P 之縱線即為 2。

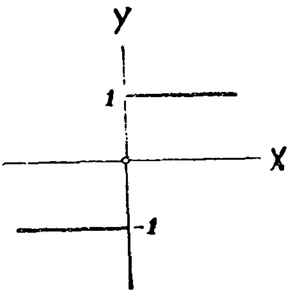
注意. 在初等代數學,計算分數式之數值,先改之為已約分數,而後代入文字之數值。今若遵此規定,則

$$\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$$

故 $x=1$ 時,此分數式之值為 2 非不定。但毋忘其為受此規定之結果。以上吾人所論,卻不用如此規定考究者。

例 3. $f(x)$ 為如次之函數。

$$\begin{cases} x<0 \text{ 時 } f(x)=-1 \\ x=0 \text{ 時 } f(x)=f(0)=0 \\ x>0 \text{ 時 } f(x)=1 \end{cases}$$



則 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 之值如何。

先設 x 從負值單調近於0, 則

在

$$0<|x|<\delta$$

限內,常

$$|f(x)+1|=|-1+1|=0<\varepsilon$$

但 δ 及 ε 為隨意之正數。故

$$\lim_{x\to-0} f(x)=-1$$

(此處 δ 為無關於 ε 之隨意正數)

同理若 x 從正值近於 0, 則

$$\lim_{x\to+0} f(x)=1$$

亦易證明。

若 x 交取正負之值而各各接近於 0, 則 $f(x)$ 或為 1 或為 -1, 故無趨近於一定值之事。故其時之

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

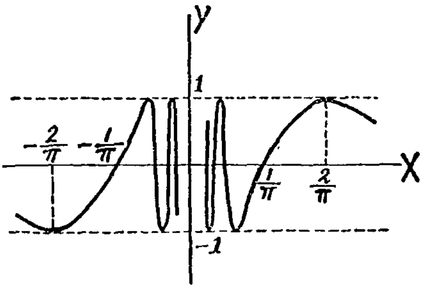
實不存在。

即本例隨 x 趨近於 0 之方法不同,而 $f(x)$ 之極限值,可有種種也。

但實際 $x=0$ 時之 $f(x)$ 之值,依據規定明明為 0, 故此與極限值毫無關係,而為確定者。

例 4. 求 $\lim_{x\to0} \sin\frac{1}{x}$

先設 x 歷綿續而且單調之正值以趨於 0, 專就此點考之,則所題極限值之不存在,可如次證明之。



今設 ε 爲如何小之正數,* 然如

$$0<\frac{1}{2(n+1)\pi}<\frac{1}{2n\pi}<\varepsilon$$

之自然數 n,常可求得無窮多明也。於是使 x 變動於

$$\frac{1}{2(n+1)\pi}\leqq x\leqq\frac{1}{2n\pi}$$

區域內,則 $sin\frac{1}{x}$ 從 $sin\,2n\pi$ 出發至 $sin\,2(n+1)\pi$,卽其間完全經過正絃函數之一週期。由是觀之,函數 $sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 之隨意降近,對於 $+1$ 與 -1 間所有之值,可以週期的輪流採取,杳無止境。故無一定之極限值。

x 經歷負值而綿續的單調趨近於 0 時,亦同乎此。

雖然 x 若取間斷的特殊之值而趨近於 0,則有所題之極限值存在。

例如 x 僅取

$$\frac{1}{2\pi},\ \frac{1}{4\pi},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{2n\pi},\ \cdots\cdots$$

---

* 此在便宜上用弧度法,然不知弧度法者,僅視 π 爲表 180° 角大之記號足矣。

等値而趨近於 0,則對於此之 $sin\frac{1}{x}$ 爲

$$sin\,2\pi,\ sin\,4\pi,\ \cdots\cdots,\ sin\,2n\pi,\ \cdots\cdots$$

卽常爲 0,故可謂

$$\lim_{x\to 0} sin\frac{1}{x}=0$$

(僅相當於圖中曲線與 x 軸之交點)

又若僅取

$$x=\frac{2}{\pi},\ \frac{2}{5\pi},\ \cdots\cdots,\ \frac{2}{(4n+1)\pi},\cdots\cdots$$

之値,則

$$sin\frac{1}{x}=sin\frac{\pi}{2},\ sin\frac{5\pi}{2},\cdots\cdots,\ sin\frac{(4n+1)\pi}{2},\ \cdots\cdots$$

卽常 $sin\frac{1}{x}=1$ 故

$$\lim_{x\to 0} sin\frac{1}{x}=1$$

總之如本例者,按照 $x\to 0$ 之意義,次第求之,則其極限値可等於 $+1$ 與 -1 間之隨意值。

§20. 極限値之存在

觀前節諸例,可知隨意所提問題之極限値,未必常能存在者。然則觀察某變數(此爲自變數及因變數之總稱)値變動之形狀,而有得以鑑定其果趨近確定極限値否之準據,則頗便利。次之二定理,卽對此目的所常利用者也。

定理 1. 變數(自或因) x 單調增大,(或減小) 終不超過一定數 M 時,x 有不較 M 大(或小)之極限値。

吾人就x單調增加者,證明本定理。(減小時與此全同)

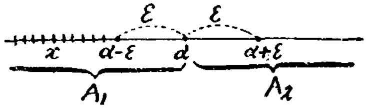
以一切實數中較x所取之某值大者,(例如較M大之數)皆屬於A_2集,不然者皆屬於A_1集,則(A_1, A_2)作一截斷而決定一實數。以此實數爲α,則α卽爲x之極限值。卽詳言之,以ε爲隨意正數,則x之值當常爲

$$|x-\alpha|<\varepsilon \qquad (1)$$

蓋設對於某ε,常爲

$$|x-\alpha|\geqq\varepsilon \qquad (2)$$

則試如第11節,以一直線上之點代表實數而考之,因其直線上之點(x)與點(α)間之距離必不較ε小,故在$(\alpha-\varepsilon)$與$(\alpha+\varepsilon)$間無一x之值,然較α大之x既不應存在,則$\alpha+\varepsilon$以上x之必不存在無論矣。故結果通徹實數範圍,無一較$\alpha-\varepsilon$大之x存在。然則$\alpha-\varepsilon$與α間之數,皆較一切x大,而謂屬於A_1,未免矛盾。由是觀之,(2)之成立不可考。故$x\to\alpha$。



系. 此處(變數增加時)$\alpha\leqq M$,而x以較α小之值趨近於α,卽$x\to(\alpha-0)$。(變數減少時適相反,而爲$x\to(\alpha+0)$)

蓋若有x取較α大之值,則在此值與α間之數必較x小,而謂屬於A_2,未免矛盾故也。

定理 2. 變數(自或因)x之變動非單調,

(1)　先從 a_1 至 b_1 爲增大,

次從 b_1 至 a_2 爲減小,

次從 a_2 至 b_2 爲增大,

以下次第如此,

(2)　而此

$$a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots<b_n<\cdots<b_2<b_1$$

(3)　且假定 (b_n-a_n) 之差,隨 n 增加而趨近於 0,

則 x 有確定之極限值。

今證明之,將 a_n 之 n,逐次代以 1, 2, 3,… 等之值,則依假定 a_n 雖次第增大,卻不得超過一定數,(例如 b_1) 故依定理 1 可有一定之極限值,以之爲 α。同理 b_n 亦有一定之極限值,以之爲 β。則依定理 1 之系,

$$a_n<\alpha,\qquad \beta<b_n$$

故若就 $\alpha<\beta$ 考之,則

$$b_n-a_n>\beta-\alpha>0$$

而差 (b_n-a_n) 常較一定正數 $\beta-\alpha$ 大,反於假定 (3)。故無 $\alpha<\beta$ 之理,

又若就 $\alpha>\beta$ 考之,則取如 $\alpha>\gamma>\beta$ 之一數 γ 觀之,無論 a_n 及 b_n 如何接近於 α 及 β,總有如

$$\alpha>a_n>\gamma,\qquad \gamma>b_n>\beta$$

之 a_n 及 b_n。是則 $a_n>b_n$ 反於假定 (2)。故亦無 $\alpha>\beta$ 之理。

故必 $\alpha=\beta$。

此公共之值 α，卽本定理所謂變數 x 之極限值。何則對於隨意正數 ε，必有如

$$\alpha-\varepsilon<a_n<\alpha=\beta<b_n<\beta+\varepsilon$$

之 a_n 及 b_n（第18節注意）而 x 之值終不出 (a_n, b_n) 範圍，故結果可得

$$|x-\alpha|<\varepsilon$$

故也。

注意 1. 定理 1 及 2 僅為核定極限值是否存在之依據，非所以求知極限值自身者。若欲求之，更須別事研究。

注意 2. 定理 1 及 2 之 x，非必須綿續變動者（見例 1, 2, 3）

例 1. n 僅取自然數之值，當其次第增大時

$$x=\frac{1}{2^n}$$

之值，雖次第減小，但決無為 0 或負之事。故依定理 1，x 必趨近於某一定之極限值。

注意. 此極限值實為 0。（見第27節）普通變數 x 雖僅取正值，然其極限值，不必為正，亦有如本例之為 0 者。但無負之極限值，蓋若以負數 $-\alpha$ 為極限值，則如 $-\alpha<x<0$ 之 x 之值，不可不存在故也。

在變數 x 僅取負值時，亦準此。

例 2. x 取綿續而且單調之正值，當其無限增大時，考究 x 之函數

$$f(x)=1+\frac{\sin x}{x}$$

之變動,(在$x=0$之附近者,俟第32節述之。)則在x從$\frac{\pi}{2}$變至$\frac{3\pi}{2}$之間,$f(x)$從$1+\frac{2}{\pi}$減至$1-\frac{2}{3\pi}$,又在x從$\frac{3\pi}{2}$變至$\frac{5\pi}{2}$之間,$f(x)$從$1-\frac{2}{3\pi}$增至$1+\frac{2}{5\pi}$,以下次第如此,互爲增減。*

與定理 2 之記號對照,則

$$a_1=1-\frac{2}{3\pi},\quad a_2=1-\frac{2}{7\pi},\cdots\cdots,\quad a_n=1-\frac{2}{(4n-1)\pi},$$

$$b_1=1+\frac{2}{5\pi},\quad b_2=1+\frac{2}{9\pi},\cdots\cdots,\quad b_n=1+\frac{2}{(4n+1)\pi},$$

此等a及b,適合於定理 2 之一切假定明也。故此

$$1+\frac{\sin x}{x}$$

有確定之極限值。

注意. 此極限值爲 1,甚易證明,讀者自試可也。

例 3. $a_1>a_2>0$ 時,順次作次之諸數。

$$a_3=\frac{a_1+a_2}{2},\qquad a_4=\frac{a_2+a_3}{2},\quad\cdots\cdots$$

則n無窮增大時,a_n趨近於一定之極限值。

蓋二數之算術平均,在原二數之中間,故$a_1>a_3>a_2$,$a_3>a_4>a_2$,……等。從而

$$a_1>a_3>a_5>\cdots\cdots>a_6>a_4>a_2$$

又普通

$$a_{n+2}=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$$

* 互爲增減之事,在本節程度不能嚴密證明之。

故

$$a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{a_{n+1}-a_n}{2}$$

同理

$$a_{n+1}-a_n=-\frac{a_n-a_{n-1}}{2}$$

次第如此,結果得

$$a_{n+2}-a_{n+1}=(-1)^n\frac{a_2-a_1}{2^n}$$

故 n 無窮增大時,$(a_{n+2}-a_{n+1})\to 0$。

由是依定理 2,a_n 趨近於一定之極限值。

注意. 此極限值爲 $\frac{a_1+2a_2}{3}$. 見問題 III, 18

§21. 無窮小數

不論自變數因變數,凡爲向 0 而趨之極限值者,其變數名曰無窮小數。例如 $x\to 0$ 時,即詳言之,雖取如何小之正數 ε,而對之常得爲

$$|x|<\varepsilon$$

者,此變數 x,謂之爲無窮小數,又

$$\lim_{x\to a} f(x)=0$$

時,謂之函數 $f(x)$ 當 $x\to a$ 時爲無窮小數。

零與無窮小數,不可泥同。零爲其絕對值較如何正數小之常數,無窮小數爲其絕對值較如何正數小之變數。然則無窮小數,不可斷定其必爲零也。

注意. 較之某數爲非常小之數,(例如前者之數百萬分之一)實際省之亦殆無妨者,乃世俗所稱之無窮小數也,但不正當。蓋無論此爲如何小,總係不爲零之常數,故不可稱爲無窮小數也。

定理 1. $x \to a$ 時,$x-a$ 爲無窮小數。又轉之 $x-a$ 爲無窮小數時,$x \to a$。

謂 $x \to a$ 者,蓋對於如何小正數 ε,倘常得 $|x-a|<\varepsilon$ 也,故今令 $x-a=y$,則必 $y<\varepsilon$。此卽 y 爲無窮小數也,故 $x-a$ 爲無窮小數。

同理可證明其轉辭。

定理 2. 二無窮小數之和,亦爲一無窮小數。

以 u, v 爲二無窮小數,則對於隨意小正數 ε,當可得

$$|u|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad |v|<\frac{\varepsilon}{2}$$

從此得

$$|u+v| \leqq |u|+|v|<\varepsilon$$

結果。故 $(u+v)$ 爲無窮小數。

系 1. 二無窮小數之差,亦爲一無窮小數。

(可利用 $|u-v| \leqq |u|+|v|$ 證明之)

系 2. 有限個無窮小數之代數和,亦爲一無窮小數。

系 3. 無窮小數與不爲零之常數,或不爲無窮小之變數之代數和,非無窮小數。

蓋以 u 爲無窮小數,a 爲不爲零之常數,或非無窮小之

變數,令其代數和為

$$u+a=v$$

則 $$a=v-u$$

故 v 若為無窮小數,則依系 1, a 不可不為無窮小數,此反於假定也。

定理 3. 一無窮小數與常數之積,亦為一無窮小數。

以 u 為無窮小數, c 為常數,

若 $c=0$ 則常 $cu=0$, 故不待論。

若 $c\neq0$ 則對於隨意小正數 ε,常可得

$$|u|<\frac{\varepsilon}{|c|}$$

從此得 $$|cu|<\varepsilon$$

結果。 故 cu 為無窮小數。

系 1. 一無窮小數以不為零之常數除之,其商亦為一無窮小數。

(以此常數之反數為c,則可依上證明之)

系 2. 一無窮小數與有有限絕對值之變數之積,亦為一無窮小數。

蓋以有有限絕對值之變數為 v, 則可定 $|v|<c$ 之一定正數 c。 故以 u 為一無窮小數,使對於隨意小正數 ε 為

$$|u|<\frac{\varepsilon}{c}$$

則從此得

$$|uv|<|cu|<\varepsilon$$

故 uv 爲無窮小數。

系 3. 一無窮小數以非無窮小之變數除之,其商亦爲一無窮小數。

定理 4. 二無窮小數之積,亦爲一無窮小數。

以 u, v 爲二無窮小數,則對於隨意小正數 ε, 常可得

$$|u|<\varepsilon, \qquad |v|<1$$

從此得

$$|uv|<\varepsilon$$

結果。故 uv 爲無窮小數。

系 1. $u, v, w\cdots\cdots$ 中至少有一無窮小數,其餘皆爲常數,或爲有有限絕對值之變數,則積

$uvw\cdots\cdots$ 爲一無窮小數。

系 2. 如系 1 之積,其有限個之代數和,

$$(uvw\cdots\cdots)+(u_1v_1w_1\cdots\cdots)+(u_2v_2w_2\cdots\cdots)+\cdots\cdots$$

亦爲一無窮小數。

§22. 關於極限值之定理

關於同一自變數 x 之二函數 y 及 z, 爲有

$$\lim_{x\to a} y=b, \qquad \lim_{x\to a} z=c$$

有限確定之極限值存在者,則次之諸定理必成立。

定理 1. $\lim\limits_{x\to a}(y+z)=b+c$

蓋依前節定理 1,$(y-b)$ 及 $(z-c)$ 皆爲無窮小數。故依

前節定理 2

$$(y-b)+(z-c)=(y+z)-(b+c)$$

亦爲一無窮小數。故再依定理 1,

$$(y+z)\to(b+c)$$

由此得本定理。

系 1. $\lim\limits_{x\to a}(y-z)=b-c$

系 2. 設 k 爲常數,則

$$\lim_{x\to a}(y+k)=b+k,\quad \lim_{x\to a}(k-y)=k-b$$

定理 2. $\lim\limits_{x\to a}(yz)=bc$

蓋 $yz-bc=(y-b)(z-c)+c(y-b)+b(z-c)$

此 $(y-b)$ 及 $(z-c)$ 各爲無窮小,故依前節定理 4 系 2,可知上式右邊爲無窮小。由是

$$yz\to bc$$

故得本定理。

系. 設 k 爲常數,則

$$\lim_{x\to a}(ky)=kb$$

定理 3. $c\neq 0$ 時 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{y}{z}=\dfrac{b}{c}$

蓋 $$\frac{y}{z}-\frac{b}{c}=\frac{c(y-b)-b(z-c)}{c(z-c)+c^2}$$

此右邊分子爲無窮小數,(前節定理 4 系 2)且 $c\neq 0$ 故其分母非無窮小數。(前節定理 2 系 3) 故右邊全體爲一無窮

小數,而

$$\frac{y}{z}\to\frac{b}{c}$$

依此得本定理。

系. <u>設 k 爲常數,則</u>

$$\lim_{x\to a}\frac{k}{y}=\frac{k}{b}\qquad \text{但 } b\neq 0$$

例. 依據以上諸定理,即可得次之結論。

以 x 爲變數, a 爲隨意常數,則 $x\to a$ 時,

$$x^n\to a^n\quad (n\text{ 爲自然數})$$

$$cx^n\to ca^n\quad (c\text{ 爲常數})$$

普通設 x 之整函數式爲

$$f(x)=c_0x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_{n-1}x+c_n$$

則

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}(c_0x^n)+\lim_{x\to a}(c_1x^{n-1})+\cdots\cdots$$
$$+\lim_{x\to a}(c_{n-1}x)+c_n$$

$$=c_0a^n+c_1a^{n-1}+\cdots+c_{n-1}a+c_n$$

$$=f(a)$$

更於普通整代數式

$$F(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$$

設使 a 爲分母不爲 0 之值,則

$$\lim_{x\to a}F(x)=F(a)$$

容易證明之。

次之二定理,亦屢用之。

定理 4. x 之函數 y, z, w 間常有

$$y \leqq w \leqq z$$

關係,且

$$\lim_{x\to a} y=b, \qquad \lim_{x\to a} z=b$$

時,

$$\lim_{x\to a} w=b$$

蓋依假定,對於隨意小正數 ε,取適當正數 δ,則在

$$0<|x-a|<\delta$$

限內,常可得

$$|y-b|<\varepsilon$$

即
$$b-\varepsilon<y<b+\varepsilon \tag{1}$$

同上又取適當正數 δ',則在

$$0<|x-a|<\delta'$$

限內,常可得

$$b-\varepsilon<z<b+\varepsilon \tag{2}$$

故以 δ, δ' 中之小者爲 δ_0,且 x 之值,按照

$$0<|x-a|<\delta_0$$

取之,則 (1) 及 (2),可以同時成立。從此得

$$b-\varepsilon<y\leqq w\leqq z<b+\varepsilon$$

即
$$|w-b|<\varepsilon$$

故
$$\lim_{x\to a} w=b$$

定理 5. x 之函數 y, z 間,常有

$$y<z$$

之關係,則

$$\lim_{x\to a} y \leqq \lim_{x\to a} z$$

蓋今若令

$$\lim_{x\to a} y=b \qquad \lim_{x\to a} z=c$$

假定 $b>c$,取極小之正數 ε,則常得

$$b>b-\varepsilon>c+\varepsilon>c$$

而依假定 y 及 z 各各趨近於 b, c,故 $|x-a|$ 爲極小時,可得

$$b+\varepsilon>y>b-\varepsilon, \qquad c+\varepsilon>z>c-\varepsilon$$

於是結論得

$$y>b-\varepsilon>c+\varepsilon>z$$

卽
$$y>z$$

此常與 $y<z$ 之假定相反。

故無 $b>c$ 之理,卽必 $b\leqq c$。

注意. 常有 $y<z$ 而 $b=c$ 者。

例. $y=x \qquad z=2x$

當 $x\to+0$ 常 $y<z$,然

$$\lim_{x\to+0} y=\lim_{x\to+0} z=0$$

最後吾人將考次之問題。

今 z 爲 y 之函數，y 又爲其他變數 x 之函數，則結果 z 可視爲 x 之函數。若設

$$\lim_{x\to a} y=b, \qquad \lim_{y\to b} z=c$$

則直接視 z 爲 x 之函數時，果

$$\lim_{x\to a} z=c$$

否。

對此直答曰「然」，未免失之過早。先將此假設精細考之，以 $\varepsilon, \varepsilon'$ 爲隨意小之正數，δ, δ' 爲對此所選適當之正數，則假定爲在

$$0<|x-a|<\delta \tag{3}$$

限內，

$$|y-b|<\varepsilon \tag{4}$$

常成立，又在

$$0<|y-b|<\delta' \tag{5}$$

限內，

$$|z-c|<\varepsilon' \tag{6}$$

常成立者。

ε 爲可隨意擇定之值，故特令 $\varepsilon=\delta'$，且假定 $|y-b|$ 決不爲 0，則 (4) 與 (5) 相一致。從而隨意設定 ε'，則對於此之 δ' 卽 ε 定，又對於此之 δ 亦定，故結果依 (3) 取 x，則 (6) 常成立，由是得

$$\lim_{x\to a} z=c$$

結果。

雖然此爲假定 $|y-b|$ 決不爲 0 者。若於 (3) 式擇取無

論如何小之δ,則在適合於(3)之x之範圍內,難保無$y=b$之發生,若然則$|y-b|>0$之假定不眞。縱有$\varepsilon=\delta'$條件,而(4)與(5)不能精密一致。故其時之

$$\lim_{x\to a} z=c$$

必不可得。

雖然亦有$y=b$而其間無不適合,卽(6)式成立者,亦可得

$$\lim_{x\to a} z=c$$

結果。但(6)之ε'爲隨意正數,故對於$y=b$之一定之值,欲使(6)常成立,是非$z=0$不可。

故總括之得次之定理。

定理 6. y爲x之函數,z爲y之函數,而

$$\lim_{x\to a} y=b, \qquad \lim_{y\to b} z=c$$

時,視z爲x之函數,則在次揭條件成立之下,

$$\lim_{x\to a} z=c$$

(i)　設δ爲適當正數,則

$$0<|x-a|<\delta$$

時,常　$$0<|y-b|$$

(ii)　$y=b$ 時,　$z=c$

(尙有關於此定理之緊要語,請參看第37節)

次舉關於定理6之種種例題。

例 1. 設 $y=x^2$, $z=y^2$ 則

$$\lim_{x\to 0} y=0,\qquad \lim_{y\to 0} z=0$$

且
$$\lim_{x\to 0} z=0$$

此於定理 6 之條件 (i) 及 (ii) 皆成立。

又直接考之, $z=y^2=x^4$, 故得上記之結論明也,

例 2. y 爲如次之函數,

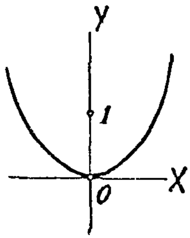
$$x\neq 0 \quad 時 \quad y=x^2$$

$$x=0 \quad 時 \quad y=1$$

而 $z=y^2$。則

$$\lim_{x\to 0} y=0 (非等於 1)$$

$$\lim_{y\to 0} z=0$$



此於 (i) 及 (ii) 皆成立,故亦爲

$$\lim_{x\to 0} z=0$$

試將 z 直接以 x 表之,則

$$x\neq 0 \quad 時 \quad z=x^4$$

$$x=0 \quad 時 \quad z=1$$

故得上記之結果明也,

例 3. $y=x^2$, z 爲如次之函數,

$$y\neq 0 \quad 時 \quad z=y^2$$

$$y=0 \quad 時 \quad z=1$$

此亦爲

$$\lim_{x\to 0} y=0 \qquad \lim_{y\to 0} z=0$$

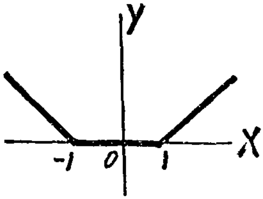
而唯條件 (i) 成立,(卽 $|x|>0$) 時 $|y|>0$) 故

$$\lim_{x\to 0} z=0$$

注意. 例 3 對於條件 (ii) 不能成立,蓋 $y=0$ 時 $z=1$ 而非 $z=0$ 故也,

然定理 6 只須 (i) 或 (ii) 之一成立卽可,故得上之結論。

例 4. y 爲如次之函數,



$x<-1$ 時 $y=-(x+1)$

$-1\leqq x\leqq 1$ 時 $y=0$

$1<x$ 時 $y=x-1$

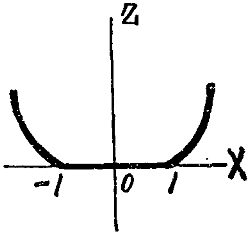
而 $z=y^2$。

則 $$\lim_{x\to 0} y=0 \qquad \lim_{y\to 0} z=0$$

於此 (i) 雖不成立,然 (ii) 成立,故

$$\lim_{x\to 0} z=0$$

試以 z 爲 x 之函數而表之,則如次,



$x<-1$ 時 $z=(x+1)^2$

$-1\leqq x\leqq 1$ 時 $z=0^2$

$1<x$ 時 $z=(x-1)^2$

例 5. 用前例之 y, 且設 z 如次。

$$y \neq 0 \text{ 時 } z = y^2$$

$$y = 0 \text{ 時 } z = 1$$

則

$$\lim_{x\to 0} y = 0 \qquad \lim_{y\to 0} z = 0$$

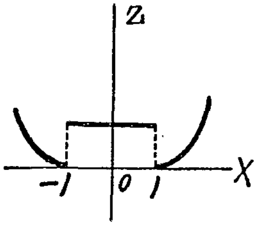
雖然此於 (i), (ii) 皆不成立,故不能依定理 6 求其結論。

試以 z 爲 x 之函數而表之,則

$$x < -1 \text{ 時 } z = (x+1)^2$$

$$-1 \leqq x \leqq 1 \text{ 時 } z = 1$$

$$1 < x \text{ 時 } z = (x+1)^2$$



故
$$\lim_{x\to 0} z = 1$$

例 6. $y = x \sin\frac{1}{x}$

$$z = y^2 + \frac{y^2}{1+y^2} + \frac{y^2}{(1-y^2)^2} + \cdots\cdots + \frac{y^2}{(1+y^2)^n} + \cdots\cdots$$

時

$$|y| \leqq |x| \text{ 故 } \lim_{y\to 0} y = 0$$

又 $y \neq 0$ 時

$$z = \frac{y^2}{1 - \frac{1}{1+y^2}} = 1 + y^2$$

故
$$\lim_{y\to 0} z = 1$$

然於本例,不可斷定爲

$$\lim_{x\to 0} z = 1$$

蓋此於 (i), (ii) 皆不成立如次。

設 δ 爲無論如何小之正數,則如

$$\left|\frac{1}{n\pi}\right|<\delta$$

之整數 n, 必有無窮多,而取如此之 n 令

$$x=\frac{1}{n\pi}$$

則 $0<|x|<\delta$, 而 $y=0$, 故 (i) 不成立。

又 $y=0$ 時,明爲 $z=0$, 而非 $z=1$, 故 (ii) 亦不成立。

考之實際,當 $x\to 0$ 時,除 x 之值適爲 $\frac{1}{n\pi}$ 外,雖 $y\to 0$ 然以 $y\neq 0$ 而 $z\to 1$。雖然 x 連續趨近於 0 時,是非其間經過無窮多 $\frac{1}{n\pi}$ 之值不可,而其時 $y=0$, 故必 $z=0$。

故 $x\to 0$ 時, z 無一定之極限值,而振動於 0 與 $(1+y^2)$ 之間。

§23. 無限大數

變數 x 超過如何大之正數而增大時, x 名曰正無限大數,以記號

$$x\to +\infty$$

書之。又 x 爲負,而其絕對值超過如何大之正數而增大時, x 名曰負無限大數,以記號

$$x\to -\infty$$

書之。但正無限大數,尋常略稱爲無限大數, $+\infty$ 多略書爲 ∞

無限大數與無窮小數,爲同以言語表明變數變動之一狀態者,非別有無限大之一數存在。無論如何大之數,若爲常數則不可稱無限大數。

注意 1. 無窮小之變數,有一定數 0 爲極限值。故謂「x 爲無窮小數」可用 $x\to 0$ 示之。反之「x 爲無限大數」則 x 無一定之極限值。然做無窮小數例,便宜上用 $x\to\infty$ 記號示之。記號 ∞ 非表示一數,不過表示其爲「無限大數」之意義之符牒而已。然則 ∞ 不可與普通數字或文字同一視之可知矣。

注意 2. 在論複變數函數之高等算學,(名函數論) 對於一切之數,以一平面及球面上之點代表之,其爲 ∞ 者,亦以一點代表之,至於某程度,則有與尋常之數,作同一待遇者。雖然本書僅就實變數之函數,論其初等性質,故充其量不須視 ∞ 爲表示「實物」之記號,而僅視爲表示「變動狀態」之記號足矣。

以上就變數 x 說明之事項,不僅限於自變數,卽因變數亦能適用之。

若 $x\to a$ 時, $f(x)\to\infty$, 則書之爲

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

其他　　$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a,\qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

等意義,甚易類推。

玆或書爲 $\to\infty$, 或書爲 $=\infty$, 非有他意,不過形式上使記

號∞之應用,與其他文字或數字同一體裁而已。不可一一拘執,誤爲有「近於無限大數」「等於無限大數」等之區別也。

例 1.　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x}=1$

蓋對於隨意小正數 ε,使 x 如

$$x>\frac{1}{\varepsilon}$$

爲極大,(其大無限制) 則常

$$\left|\frac{x+1}{x}-1\right|=\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$$

故如題言。

例 2.　$x\to\pm 0$ 從而 $\dfrac{x+1}{x}\to\pm\infty$

蓋今設 M 爲較 1 大之隨意正數,(其大無限制) x 爲正而如

$$0<x<\frac{1}{M-1}$$

之極近於 0,則常

$$\frac{1}{x}>M-1$$

從而

$$1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}>M$$

即 x 爲正,而極近於 0, 則 $\dfrac{x+1}{x}$ 較如何大之正數 M 更大。故

$$\lim_{x\to+0}\frac{x+1}{x}=\infty$$

次 x 爲負而如

$$0>x>-\frac{1}{M+1}$$

之極近於 0,則常

$$\frac{1}{x}<-M-1$$

從而

$$1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}<-M$$

卽

$$\left|\frac{x+1}{x}\right|>M$$

卽 x 爲負而極近於 0, 則 $\frac{x+1}{x}$ 爲負,而其絕對值較無論如何者爲大。故

$$\lim_{x\to -0}\frac{x+1}{x}=-\infty$$

注意. 此例之 x,雖同一趨近於 0,但 $x\to+0$ 時與 $x\to-0$ 時,函數 $\frac{x+1}{x}$ 或爲 $+\infty$ 或爲 $-\infty$。以此之故,漠視 $+\infty$ 與 $-\infty$ 之區別,或以爲「$+\infty$ 與 $-\infty$ 實爲同一」等者則誤矣。如此之臆說,某款或有便利,某款却又不合。例如

$$\lim_{x\to\pm 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

此款之極限,決不可與 $-\infty$ 視同一律。然則 $+\infty$ 與 $-\infty$ 之區別,不可不暢論之。

與第21節所述無窮小數之定理大略相同者,在無限大

數亦能成立。述之於次。(以下稱無限大數者,爲無限大之自變數或因變數)

定理 1. 二同號(皆爲正或皆爲負)無限大數之和,亦爲與此同號之一無限大數。

以 u, v 爲二變數。若

$$u \to \infty \qquad v \to \infty$$

則對於隨意大之正數 M,常可得

$$u > \frac{M}{2} \qquad v > \frac{M}{2}$$

從此知

$$u + v > M$$

故

$$(u + v) \to \infty$$

$u \to -\infty$, $v \to -\infty$ 時,亦可同上證明之。

系 1. 若干同號無限大數之和,常爲與此同號之一無限大數。

系 2. 二異號無限大數之差,亦爲一無限大數,其符號與被減數之符號同。

系 3. 一無限大數與常數或有限變數之代數和,爲與此無限大數同號之一無限大數。

定理 2. 一無限大數與不爲零之常數之積,亦爲一無限大數。

設 $u \to \infty$ 及 c 爲不爲零之常數。

則對於隨意大之正數 M,常可得

$$u > \frac{M}{|c|}$$

從此知

$$|cu|>M$$

故 cu 爲一無限大數,其符號隨 c 之正負。

$u\to-\infty$ 時亦可同上證明之。但 cu 之符號,與 c 之符號相反。

注意. $c\neq0$ 之假定,極爲緊要。蓋 $c=0$ 則 cu 常爲 0,無論 u 確爲無限大數,其 cu 必始終爲 0。但 c 爲變數而 $c\to0$ 時,是爲別一問題,請觀第25節及第七章 I 等處。

系 1. 一無限大數以不爲零之常數除之,其商亦爲一無限大數。

注意. 卽使所考者爲無限大數,然所謂以零除之者,亦不可不避。

系 2. 一無限大數與不爲無窮小之變數之積,亦爲一無限大數。

以 u 爲無限大數,v 爲不爲無窮小之變數,取極小之正數 δ,則可得

$$\delta<|v|$$

從此得

$$|uv|>\delta|u|\to\infty$$

系 3. 一無限大數以不爲無限大之變數除之,其商亦爲一無限大數。

(按不爲無限大之變數之反數,爲不爲無窮小之變數,故可歸於系 2。)

定理 3. 二無限大數之積,亦爲一無限大數,其符號隨原二無限大數之同號異號而爲正或負。

設 $u\to\infty$, $v\to\infty$, 則對於隨意大之正數 M, 常可得

$$u>M,\qquad v>1$$

從可知

$$uv>M$$

故

$$uv\to\infty$$

又若 $u\to\infty$, $v\to-\infty$ 時,可得

$$u>M,\qquad v<-1$$

即

$$u>M,\qquad -v>1$$

從此得

$$-uv>M,\quad 即\quad uv<-M$$

故

$$uv\to-\infty$$

其他亦可做此證明之。

系. $u, v, w,\cdots\cdots$(亦含常數)中至少有一無限大數,而又皆不爲零或不爲無窮小數時,其積 $uvw\cdots\cdots$ 爲正或負之無限大數。

對於無窮小數與無限大數之關係,尙有次之定理,

定理 4. 無限大數(正或負)之反數爲無窮小數。又無窮小數之反數爲無限大數,(正或負)

蓋 $u\to\pm\infty$ 時,對於隨意小正數 ε, 當得

$$|u|>\frac{1}{\varepsilon}$$

從而

$$\left|\frac{1}{u}\right|<\varepsilon$$

故 u 之反數爲無窮小數。

又若 $u\to 0$ 時,對於隨意大之正數 M,當得

$$u<\frac{1}{M}$$

從而

$$\left|\frac{1}{u}\right|>M$$

故 u 之反數爲正或負之無限大數。

系 1. 常數或不爲無限大之變數,以無限大數除之,其商爲無窮小數。

系 2. 不爲零之常數或不爲無窮小之變數,以無窮小數除之,其商爲無限大數。

(零以無窮小數除之,其商亦爲零。)

注意. 變數之特款,包含常數,故無窮小數之特款,亦包含零。(常數) 雖然今定理 4 及其系,却視爲不含此者。

§24. 無窮小數及無限大數之級數

例如 $x\to 0$ 時, $x^2\to 0$ 又 $x^3\to 0$。

卽此等皆爲無窮小數。然對於同一 x 值之此等之值,比較之有如次之相差。

x	x^2	x^3
1,	1,	1,
0,1	0,01	0,001
0,001	0,000001	0,000000001
....	....	....
....	....	....

卽 x^3 較之 x^2, 更覺漸次急速趨近於 0。

如是通稱無窮小數之中,亦有種種階級,故吾人設次之定義。

以 u, v 爲二無窮小數,今考其比 $\frac{u}{v}$, 若

$$\frac{u}{v}\to 0$$

卽此比亦爲一無窮小數,故 u 謂之較 v 高級之無窮小數。若

$$\frac{u}{v}\to\pm\infty$$

卽此比爲一無限大數,故 u 謂之較 v 低級之無窮小數。

例 $x\to 0$, 比較 x^2 與 x^3, 則

$$\frac{x^3}{x^2}=x\to 0$$

故 x^3 爲較 x^2 高級之無窮小數。又

$$\frac{x^2}{x^3}=\frac{1}{x}\to\pm\infty$$

故 x^2 爲較 x^3 低級之無窮小數。

普通u爲較v高級之無窮小數,則v爲較u低級之無窮小數可知已。

若比$\frac{u}{v}$不爲無窮小數,亦不爲無限大數,則不關於其極限值之如何,u與v名曰同級無窮小數。

例$x\to 0$時,$2x^2$與x^2爲同級無窮小數。此因x^2爲$2x^2$之半,故x^2常較$2x^2$小。然x^2不能謂較$2x^2$爲高級。蓋所謂無窮小數之級,實非尋常有數之等差,而爲規模極大之階級,無論一方確爲他方之百倍萬倍,總屬有限倍數,故常謂之同級,必至其比爲無窮小數或無限大數,而後始認其有階級之相殊者也。

無窮小數之級之高低度,若欲以數字精密表之,則更有次之定義。

u, v爲二無窮小數,若u與v^n爲同級,則u對於v而名之曰第n級(或第n次)無窮小數。此n雖爲正數,然不必爲整數。

例$x\to 0$時,對於此之

x^2爲第2級無窮小數,

$\sqrt[3]{x}$爲第$\frac{1}{3}$級無窮小數,

又
$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-5x^3}{x^2}=3$$

此極限值(卽3)不爲0,亦不爲$\pm\infty$,故對於x而言之,

$3x^2-5x^3$爲第二級無窮小數。

再示二三例於次。

例 1.　問對於 $x\to 0$ 之 $f(x)=\sqrt[5]{3x^2-4x^3}$ 爲第幾級無窮小數。

$$f(x)=x^{\frac{2}{5}}(3-4x)^{\frac{1}{5}}$$

故
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^{\frac{2}{5}}}=\lim_{x\to 0}(3-4x)^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{1}{5}}$$

故 $f(x)$ 爲第 $\frac{2}{5}$ 級無窮小數。

例 2.　x 爲第 1 級無窮小數,試求無窮小數

$$f(x)=\sqrt{(a+x)^3}-\sqrt{a^3},\quad a>0$$

之級數。

$$f(x)=\frac{(a+x)^3-a^3}{\sqrt{(a+x)^3}+\sqrt{a^3}}$$

$$=\frac{3a^2x+3ax^2+x^3}{\sqrt{(a+x)^3}+\sqrt{a^3}}$$

此分母當 $x\to 0$ 時,不爲無窮小數,而趨近極限值 $2\sqrt{a^3}$。故欲考 $f(x)$ 之級數,只就分子考之足矣。由是注目於

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3a^2+3ax+x^2}{\sqrt{(a+x)^3}+\sqrt{a^3}}$$

$$=\frac{3a^2}{2\sqrt{a^3}}=\frac{3}{2}\sqrt{a}$$

卽可知所求之級數爲 1,

倣以上所論,亦可就無限大數考之。次述其大要。

以 u,v 爲二無限大數,若

$\frac{u}{v}\to\pm\infty$ 則 u 謂之較 v 高級之無限大數，

$\frac{u}{v}\to 0$ 則 u 謂之較 v 低級之無限大數，

又若 $\frac{u}{v}$ 之極限值，不爲 0 亦不爲 $\pm\infty$，則 u 與 v 名曰同級無限大數。

以 n 爲一正數，若 u 與 v^n 爲同級，則 u 對於 v 而名之曰第n級（第n次）無限大數。

例 $x\to\pm\infty$ 時 $3x^2-5x^3$ 對於 x 爲第 3 級無限大數。蓋

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-5x^3}{x^3}=-5$$

不爲 0 亦不爲 $\pm\infty$ 故也。

§25. 定形及不定形

有 x 之函數 u 及 v，當 $x\to a$ 時，u 及 v 有有限確定之極限值 b 及 c，則依四則運算結合 u, v 之

$$u\pm v, \qquad uv, \qquad \frac{u}{v} \tag{1}$$

之極限值，爲

$$b\pm c, \qquad bc, \qquad \frac{b}{c}, \quad (c\neq 0)$$

已證明於第22節矣。

又無論 u, v 之一方或兩方爲無限大數，而依第23節定理所言，至於某程度，則 (1) 之極限值亦必可考。

次將表示其結果。

（但以下各表中 a, b，爲不爲 0 之有限確定數。）

(I) $u+v$ 之極限值。

(例 $u\to a$, $v\to b$ 時 $(u+v)\to(a+b)$,

$u\to a$, $v\to\infty$ 時 $(u+v)\to\infty$,

其他準此。)

$u \backslash v$	0	b	∞	$-\infty$
0	0	b	∞	$-\infty$
a	a	$a+b$	∞	$-\infty$
∞	∞	∞	∞	不定
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	不定	$-\infty$

(II) $u-v$ 之極限值。

$u \backslash v$	0	b	∞	$-\infty$
0	0	$-b$	$-\infty$	∞
a	a	$a-b$	$-\infty$	∞
∞	∞	∞	不定	∞
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	不定

(III) uv 之極限值。

$u \backslash v$	0	b	∞	$-\infty$
0	0	0	不定	不定
a	0	ab	∞_a	∞_{-a}
∞	不定	∞_b	∞	$-\infty$
$-\infty$	不定	∞_{-b}	$-\infty$	∞

但 ∞_a 爲與 a 同號之無限大數，

∞_{-a} 爲與 a 異號之無限大數，

其他準此。

(IV) $\frac{u}{v}$ 之極限值，

$u \backslash v$	0	b	∞	$-\infty$
0	不定	0	0	0
a	∞_{+a}	$\frac{a}{b}$	0	0
∞	$\pm\infty$	∞_b	不定	不定
$-\infty$	$\mp\infty$	∞_{-b}	不定	不定

以上四表所記「不定」中之關於$-\infty$者,變其符號則與關於∞之形式完全相同,故結果其爲疑問者,只有次之四種。

$$\infty-\infty,\qquad 0.\infty,\qquad \frac{0}{0},\qquad \frac{\infty}{\infty}. \tag{2}$$

此外直可從u, v之各極限值,求其四則結合式之極限值,故其時之結合式(1)名曰定形。反之如(2),其值普通爲不定時之結合式,名曰不定形。

注意. (2)皆爲簡寫記號。例如$\infty-\infty$非「所謂∞者減所謂∞者」之意義。嚴密言之,可謂爲「$u-v$當$u\to\infty$; $v\to\infty$時之極限,」至此u與v,究以若何關係互進於∞,則殊未嘗明瞭,故必不可斷定爲$\infty-\infty=0$。其餘不定形亦準此。

求所設函數極限值之問題,其最困難之點,厥爲不定形。尋常雖用微分法處理之,但微分法只爲求不定形極限值之一種,故本書務求根本解法,不用微分法也。

$\frac{0}{0}$及$\frac{\infty}{\infty}$之例*

例如$\frac{u}{v}$爲$\frac{0}{0}$時,以對於x之u, v爲第m級及第n級,則

$$\lim_{x\to 0}\frac{u}{x^m}=a,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{v}{x^n}=b$$

此a, b爲有限值而非0。從此得

$$\lim_{x\to 0}\frac{u}{v}=\frac{a}{b}\lim_{x\to 0} x^{m-n}$$

故從$m>n, m=n, m<n$而所求之極限值爲

$$0,\qquad \frac{a}{b},\qquad \pm\infty$$

* 作$0.\infty$一因數之反數而考之,則歸於$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$。

$\frac{\infty}{\infty}$亦準此。

例 1. 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^2+3x^3-x^4}{3x^2-x^4+x^6}$

$x\to0$ 則分母分子,皆對於 x 為第 2 級,

$$\lim\frac{2x^2+3x^3-x^4}{x^2}=2$$

$$\lim\frac{3x^2-x^4+x^6}{x^2}=3$$

故
$$\lim_{x\to0}\frac{2x^2+3x^3-x^4}{3x^2-x^4+x^6}=\frac{2}{3}$$

但尋常卽以x^2約其分子分母,則如次

$$\lim_{x\to0}\frac{2x^2+3x^3-x^4}{3x^2-x^4+x^6}=\lim_{x\to0}\frac{2+3x-x^2}{3-x^2+x^4}=\frac{2}{3}$$

例 2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x^3-x^4}{3x^2-x^4+x^6}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^4}+\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x^4}-\frac{1}{x^2}+1}=0$$

例 3. 求 $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$,但 n 為自然數。

依代數學

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots\cdots+a^{n-1}$$

故
$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=a^{n-1}+a^{n-2}a+\cdots\cdots+a^{n-1}$$

$$=na^{n-1}\ (\text{第 22 節})$$

或最初令 $x-a=y$ 則

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{y\to0}\frac{(y+a)^n-a^n}{y}$$

然依二項定理

$$(y+a)^n=y^n+ny^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{2}y^{n-2}a^2+\cdots\cdots$$
$$+nya^{n-1}+a^n$$

故

$$\frac{(y+a)^n-a^n}{y}=y^{n-1}+ny^{n-2}a+\cdots\cdots+na^{n-1}$$

依此得

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{y\to 0}(y^{n-1}+ny^{n-2}a+\cdots\cdots+na^{n-1})$$
$$=na^{n-1}$$

$\infty-\infty$ 之例

例 1.　$\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-x^2)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2(x-1)=\infty$

例 2.　$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+a)-x}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=0$$

問　題　III

1.　$x\to 0$ 試求次各分數之極限值。

(1)　$\dfrac{x^2-2x+3}{2x^2+4x-5}$　　(2)　$\dfrac{x^3+6x^2-4x}{x^4-x^3-2x}$

(3)　$\dfrac{4x^3-5x^2}{x-x^2+x^3}$　　(4)　$\dfrac{3x^3+2x^2+x}{5x^5-3x^3}$

2.　$x\to\infty$ 及 $x\to-\infty$, 試求次各分數之極限值。

(1)　$\dfrac{3x^4+x^5}{2x^3-x^4+4x^5}$　　(2)　$\dfrac{3x-4x^3+4x^5}{x^2+5x^3-x^4}$

3.　求 $\lim\limits_{x\to(1-0)}\sqrt{1-x^2}$

4. x 爲無窮小數,或爲無限大數,(正或負) 試求代數分數

$$\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$$

之極限值。但 a_0, a_n, b_0, b_m 皆不爲 0。

5. 問 $n\to\infty$ 時,次各式之極限值如何。

(1) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

(2 $\frac{1+2+3+\cdots\cdots+n}{n^2}$

(3) $\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2}{n^3}$ (參照問題 I, 2)

6. x 爲第一級無窮小數,問次之各函數,各爲第幾級無窮小數。

(1) $\sqrt[5]{3x^4-4x^5}$

(2) $\sqrt{(a+x)^5}-\sqrt{a^5}$ $(a>0)$

7. u_1 爲對於 v_1 之第 n 級無窮小數,又 u_2 爲較 u_1 高級之無窮小數,v_2 爲較 v_1 高級之無窮小數,試證明 u_1+u_2 亦爲對於 v_1+v_2 之第 n 級無窮小數。

8. u, v 爲同級無窮小數,試證 $u\pm v$ 尋常亦爲與 u, v 同級之無窮小數,且討論其如何則否。

9. u 爲第 m 級無窮小數,v 爲第 n 級無窮小數,試研究積 uv 及商 $\frac{u}{v}$ 之級數。

10. 前三題之無窮小數,易以無限大數則如何。

11. x 爲第 1 級無窮小數,問

$$x+x^2(2+\sin x)$$

爲第幾級無窮小數。

12. x 爲第一級無限大數,問前題之函數,爲第幾級無限大數。

注意. 當求無窮小數或無限大數之級數,如其 $\frac{u}{v^n}$ 確實不爲無窮小數或無限大數,則雖其極限之數值不能判然決定者,亦謂之 u 對於 v 爲第 n 級。

13. 問次之極限值各存在否。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\cdots-(-1)^n\frac{1}{n}\right\}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ (參照問題 I, 10)

14. 求次之極限值。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-x)$

15. $x\to 0$ 時,次式之極限值如何。

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}}$$

16. $x\to\infty$ 時,次式之極限值如何。

(1) $\sqrt{x}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$

(2) $x(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-\sqrt{2}x)$

17. y 爲 x 之函數, z 爲 y 之函數,且

$$\lim_{x\to a} y=\infty, \qquad \lim_{y\to\infty} z=c$$

試證明直接視 z 爲 x 之函數時

$$\lim_{\to a} z=c$$

18. 試圖解第20節例 3。依其圖解或依直接計算示明

$$a_{n+2}=a_1-(a_1-a_2)+\frac{a_1-a_2}{2}-\frac{a_1-a_2}{4}+\cdots\cdots-(-1)^n\frac{a_1-a_2}{2^n}$$

而從此求

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

19. a, b 爲正數而

$$a_1=\sqrt{ab} \qquad\qquad b_1=\frac{a+b}{2}$$

$$a_2=\sqrt{a_1\,b_1} \qquad\qquad b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n=\sqrt{a_{n-1}\,b_{n-1}} \qquad\qquad b_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

試證明

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad 及 \quad \lim_{n\to\infty} b_n$$

存在而且相等。

20. x_1, x_2 爲正數,而

$$x_3=\frac{2x_1 x_2}{x_1+x_2}, \qquad x_4=\sqrt{x_2 x_3}$$

$$x_5=\frac{2x_3 x_4}{x_3+x_4} \qquad x_6=\sqrt{x_4 x_5}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

試證明 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 爲有限確定值。

注意. 以外切及內接於一圓之正 n 邊形之周圍爲 x_1, x_2, 則 x_3, x_4 相當於同圓之外切及內接正 $2n$ 邊形之周圍,從知 x_5, x_6 爲正 $4n$ 邊形之周圍,以下準此。

x_n 之極限值,卽爲此圓周之長。

第五章 初等超越函數

§26. 普通冪

先爲簡單計令 $a>0$，考 a^n 冪之意義,其指數 n 爲有理數者,已於初等代數學知之,即如次。

n 爲自然數則

$$a^n=a\cdot a\cdot a\cdots\cdots a\ (\text{因數 } n \text{ 個})$$

n 爲正分數,即如 $n=\frac{p}{q}$，$(p, q$ 爲自然數$)$ 則

$$a^n=\sqrt[q]{a^p}$$

n 爲負數,(或整數或分數) 即如 $n=-m$ 則

$$a^n=\frac{1}{a^m}$$

$n=0$ 則

$$a^n=a^0=1$$

關於此等冪之次之諸定理,在初等代數學亦易證其成立。

(i) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

(ii) $(a^m)^n=a^{mn}$

(iii) $m>n>0$ 時,若

$a>1$ 則 $a^m>a^n$

$a<1$ 則 $a^m<a^n$

(iv) $a>b>0, n>0$ 則 $a^n>b^n$

從此更進,當考指數爲無理數之冪之意義,茲於其定義之前,證明次之一重要定理。

定理. 設 a 爲隨意正數,x 爲僅表有理數之數值之變數,則

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1$$

證明之法,可分次之各款考之。

(i)　$a>1$,　$x\geqq 0$ 者。

因 $a>1$, 故今以 n 爲一自然數,則 $\sqrt[n]{a}$ 較 1 大,從此得令

$$a^{\frac{1}{n}} = 1+k, \quad k>0$$

故 $n>1$ 則

$$a = (1+k)^n = 1+nk+\frac{n(n-1)}{2}k^2+\cdots\cdots+k^n$$
$$>1+nk$$

從此得

$$\frac{a-1}{n} > k = a^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$$

之關係。而以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a-1}{n} = 0$$

故依第22節定理4

$$\lim_{n\to\infty}(a^{\frac{1}{n}}-1) = 0$$

故 x 僅取 $\frac{1}{n}$ 形分數值而趨近於0,則知

$$\lim_{x\to +0} a^x = 1$$

普通雖 x 未必僅取 $\frac{1}{n}$ 之值,然以次第趨近於 0 而至較 1 小,則對於 x 之各值,必有如

$$\frac{1}{n+1}<x\leqq\frac{1}{n}$$

之自然數 n。因得

$$1<a^x\leqq a^{\frac{1}{n}}$$

於是從 $x\to 0$ 而 $n\to\infty$。然 $n\to\infty$ 時 $a^{\frac{1}{n}}\to 1$, 已見上述。故再依第22節定理 4 得

$$\lim_{x\to+0} a^x=1$$

結果。

(ii) $a>1$, $x\leqq 0$ 者。

設 x 之絕對值爲 y, 則 $x=-y$ 而

$$\lim_{x\to-0} a^x=\lim_{y\to+0}\frac{1}{a^y}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{y\to+0} a^y} \text{ (第22節定理3)}$$

$$=1 \qquad \text{[依本節(i).]}$$

(iii) $0<a<1$, $x\geqq 0$ 或 $x\leqq 0$ 者。

此款以 $\frac{1}{a}>1$, 故

$$\lim_{x\to 0} a^x=\lim_{x\to}\left\{\frac{1}{\frac{1}{a}}\right\}^x$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{a}\right)^x}$$

$$=1$$

(iv)　$a=1$ 者。

此必 $\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$ 弗待論。

(v)　又 x 取種種正負之値,振動而趨近於0者,總之設 $-\varepsilon<x<\varepsilon$, 則爲

$$a^{-\epsilon}<a^x<a^\epsilon \quad (a>1\text{時})$$

或

$$a^{-\epsilon}>a^x>a^\epsilon \quad (0<a<1\text{時})$$

然依 (i) 至 (iii), 知

$$\lim_{\epsilon\to 0} a^{\pm\epsilon}=1$$

故亦得

$$\lim_{x\to 0} a^x=1$$

結果。

總括以上所述,則得定理 1。

由是欲作 a 爲正數 β 爲無理數之冪 a^β 之定義,可以依 β 而生之有理數之截斷 (第5節) 爲 (B, B'), 以從 B 及 B' 中取出之二羣有理數 $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n, \cdots\cdots$ 及 $b'_1, b'_2, \cdots\cdots, b'_n, \cdots\cdots$ 爲按照次之二條件取之者 (第6節定理2)

$$b_n<b_{n+1}<b'_{n+1}<b'_n \quad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots) \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} (b'_n-b_n)=0 \tag{2}$$

於是以指數爲有理數之冪

$$a^{b_n} \quad (n=1, 2, \cdots\cdots)$$

之集爲 $\overline{B}$, 又以

$$a^{b'_n} \quad (n=1, 2, \cdots\cdots)$$

之集爲 $\overline{B}'$，則 $\overline{B}$ 及 $\overline{B}'$ 作廣義之截斷。(第6節)

蓋假令 $a>1$，則

$$a^{b_n}<a^{b'_n} \tag{3}$$

且有

$$0\leqq a^{b'_n}-a^{b_n}=a^{b_n}(a^{b'_n-b_n}-1)$$

關係。而此 a^{b_n} 不關於 n 之如何，總較一定數(例如 $a^{b'_1}$)小，又依條件(2)及上定理，知

$$\lim_{n\to\infty}(a^{b'_n-b_n}-1)=0$$

故

$$\lim_{n\to\infty}(a^{b'_n}-a^{b_n})=0 \tag{4}$$

(3)及(4)卽示 $(\overline{B}, \overline{B}')$ 作廣義之截斷者也，

同理 $a<1$ 時，亦可證明 $(\overline{B}', \overline{B})$ 作廣義之截斷。

據此吾人知

$$\lim_{n\to\infty}a^{b_n} \quad 及 \quad \lim_{n\to\infty}a^{b'_n} \tag{5}$$

爲表示同一之實數。

從 B 及 B' 中取出如上 b_n, b'_n 有理數之方法，有無窮多。今於以上所取者之外，更從 B 及 B' 中按與(1)，(2)相同之條件，取出有理數

$$c_n \text{ 及 } c'_n \quad (n=1, 2, \cdots\cdots)$$

對此而考

$$\lim_{n\to\infty}a^{c_n} \quad 及 \quad \lim_{n\to\infty}{}^{c'_n} \tag{6}$$

則亦可得一實數。

然 (5) 與 (6) 實爲同一之數。蓋 b_n 爲向 β 而趨者,故對於隨意正數 ε,當 n 超過某一定整數例如 M 之後,常不可不

$$0<\beta-b_n<\varepsilon \quad (但\ n>M)$$

又依同理,以某一定整數爲 N,則不可不

$$0<\beta-c_n<\varepsilon \quad (但\ n>N)$$

故以不較 M, N 小之數爲 L,令 $n>L$,則對於同一 n 可使以上兩組不等式,皆成立。從此得

$$|b_n-c_n|<\varepsilon$$

據此可知

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-c_n)=0$$

由是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{b_n}}{a^{c_n}}=\lim_{n\to\infty}a^{b_n-c_n}=1$$

從此得 $$\lim_{n\to\infty}a^{b_n}=\lim_{n\to\infty}a^{c_n}$$

然則 $$\lim_{n\to\infty}a^{b'_n} \quad 及 \quad \lim_{n\to\infty}a^{c'_n}$$

亦有與上同一之極限值,不待論矣。

但以上證明,乃暗中假定 a^{c_n} 之極限值不爲 0 者。雖然,其爲正當,直可了解。蓋吾人既假定 $a>0$,故 a^{c_n} 總爲正數。而 a^{c_n} 及 $a^{c'_n}$ 二者,必有一與 n 同爲次第增大。正數而次第增大者之極限值,明明不能爲0。然則 a^{c_n} 及 $a^{c'_n}$ 之公共極限值 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{c_n}$,必無爲 0 之事可知已。

據上研究,(5)之值僅依 a 及 β 定之,與 b_n 之取法全無關係。故吾人以之爲羃 a^{β} 之定義。

定義. $$a^{\beta}=\lim_{n\to\infty}a^{b_n}$$

今尙有應行注意者,此定義當 β 爲有理數時,亦能通用是也。卽 β 爲有理數時,以 b_n $(n=1,2,\cdots\cdots)$ 爲趨近於 b 之有理數則以上定義之式,亦可成立。此與上論 a^{b_n}, a^{c_n} 有同一之極限值完全相同,故甚易證明之。

§27. 羃之値之變動

依前節所論,以 a 爲一正數,則對於隨意實數 β 而爲羃 a^{β} 者,必常有意義。本節將就此普通之羃,研究其指數變動時之羃之值之變動。

但 $a=1$ 時,常 $a^{\beta}=1$, 殊無何等變動,故以下就 $a>0$, $a\neq1$ 者論之。

(1) β,γ 爲二實數,而 $\beta>\gamma$ 時,

若 $a>1$, 則 $a^{\beta}>a^{\gamma}$。

若 $a<1$, 則 $a^{\beta}<a^{\gamma}$。

欲證明之,可以漸次增大而趨近 β 之一羣有理數爲 b_n, $(n=1,2,\cdots\cdots)$ 又以同樣趨近 γ 之有理數爲 c_n。$(n=1,2,\cdots\cdots)$ 則依假定,以 $\beta>\gamma$, 而 n 大至某程度以上,(例如較一定數 N 大)則常

$$b_n>\gamma>c_n \quad (n>N)$$

明也。於是令 n 之值爲

$$N+1,\ N+2,\ \cdots\cdots,\ N+p,\ \cdots\cdots$$

而考之,則

$$b_{N+p}>b_{N+2}>b_{N+1}>\gamma>c_{N+p}$$

當 $a>1$,而指數爲有理數之冪之大小,實同於指數之大小,故

$$a^{b_{N+p}}>a^{b_{N+2}}>a^{b_{N+1}}>a^{c_{N+p}}$$

從而

$$a^{b_{N+p}}-a^{c_{N+p}}>a^{b_{N+2}}-a^{b_{N+1}}$$

於是考 $p\to\infty$ 之極限,則左邊爲 $a^\beta-a^\gamma$,右邊爲與 p 無關之一定正數。故 a^β 較 a^γ 大。即

$$a^\beta>a^\gamma$$

$a<1$ 時,$a^\beta<a^\gamma$ 亦可同上證明之。

(2)　<u>β,γ 爲隨意二實數時,</u>

$$a^\beta\cdot a^\gamma=a^{\beta+\gamma}$$

設 b_n 及 c_n 之意義一如(1),則

$$a^\beta=\lim_{n\to\infty}a^{b_n},\qquad a^\gamma=\lim_{n\to\infty}a^{c_n}$$

但如前節所述,a^β 及 a^γ 之值,於 b_n 及 c_n 之值之取法毫無關係,故當併考此二者之際,常以 n 之同數號者,行同時之考察,如

$$a^\beta\cdot a^\gamma=(\lim_{n\to\infty}a^{b_n})(\lim_{n\to\infty}a^{c_n})=\lim_{n\to\infty}(a^{b_n}\cdot a^{c_n})$$

亦無妨。從而

$$a^{\beta}\cdot a^{\gamma}=\lim_{n\to\infty} a^{b_n+c_n}$$

$$=a^{\beta+\gamma}$$

(3) x 取隨意實數值而爲無窮小時,

$$\lim_{x\to 0} a^x=1$$

蓋若 x 趨近於 0, 而其絕對値較 1 小, 則必可決定如次之自然數 n。

$$\frac{1}{n+1}<|x|\leqq\frac{1}{n}$$

此則

$$-\frac{1}{n}\leqq x\leqq\frac{1}{n}$$

故若 $a>1$, 則依 (1)

$$a^{-\frac{1}{n}}\leqq a^x\leqq a^{\frac{1}{n}}$$

於是令 $n\to\infty$, 則依前節定理,

$$\lim_{n\to\infty} a^{\pm\frac{1}{n}}=1$$

故 $$\lim_{x\to 0} a^x=1$$

$a<1$ 時, 亦可同上證明之。

(4) x 爲隨意實數時,

$$\lim_{h\to 0} a^{x+h}=a^x$$

蓋依 (2)

$$a^{x+h}-a^x=a^x(a^h-1)$$

於是考 $h\to 0$ 之極限,則依 (3) 知右邊趨近於 0。

故
$$\lim_{h\to 0}(a^{x+h}-a^x)=0$$

然 a^x 無關於 h, 故從此得本定理。

今以 b 爲隨意實數,易 x 以 b, 其 $x+h$ 僅書爲 x, 則 (4) 爲

$$\lim_{x\to b} a^x=a^b$$

故

a^x 當 $x\to b$ 時之極限值,實等於以 b 代入 x 時之值 a^b。

易言之

x 十分近於 b 時,可使 a^x 之值極近於 a^b。

(5) $a>1$ 時

$$\lim_{x\to\infty} a^x=\infty,\qquad \lim_{x\to-\infty} a^x=0$$

$a<1$ 時

$$\lim_{x\to\infty} a^x=0,\qquad \lim_{x\to-\infty} a^x=\infty$$

先於 $a>1$ 時令

$$a=1+k,\qquad k>0$$

則對於較 1 大之自然數 n, 常

$$a^n=(1+k)^n=1+nk+\frac{n(n-1)}{2}k^2+\cdots\cdots$$
$$>1+nk$$

故使 n 增大,則 a^n 可較如何爲大,即

$$\lim_{n\to\infty} a^n=\infty$$

今實數 x 爲正而增大時,對此取如

$$n \leqq x < n+1$$

之自然數 n, 則依 (1)

$$a^n \leqq a^x < a^{n+1}$$

於是令 $x \to \infty$, 則易知

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$$

次考 $x \to -\infty$, 令 $x = -y$, 則依 (2)

$$a^x \cdot a^y = a^0 = 1$$

故

$$a^x = \frac{1}{a^y}$$

然 $x \to -\infty$ 時, $y \to \infty$, 從而 $a^y \to \infty$。 據此知

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

$a<1$ 時,亦可同上證明之。

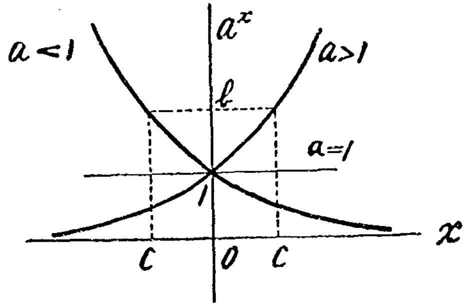
(6)　據以上研究,以 a 爲不爲 1 之一定正數, x 爲從 $-\infty$ 向 ∞ 次第增大,則冪 a^x 之值,爲如次之變動可知也。

$a>1$ 時, a^x 從無窮小出發,單調增大,遂爲正無限大數。

$a<1$ 時, a^x 從無限大出發,單調減小,遂爲無窮小數。

二者皆對於 x 值之微小變動,而 a^x 之值之變動,亦爲微小。

故畫 a^x 之格欄幅如次。



注意. $a=1$ 時，常 $a^x=1$，故其格欄幅爲以細線所示之水平線。

§28. 對數

於前節知 a 爲不等於 1 之正數，而使 x 採取所有一切實數值，則 a^x 之值得經歷一切正數。故今設隨意一正數 b，則如對於此之

$$a^x=b \tag{1}$$

之實數 x 必存在而唯限於一。

就前節圖，依幾何方法考之，先於縱軸上取高 b 之一點，從此引橫軸之平行線，使與曲線交，從其交點作橫軸之垂線，則相當於其趾之 x 之值，(圖中之 c) 卽爲適合於 (1) 者。

如此 x 值之存在，更欲直接而且嚴密證明之，則如次。

(不問 $a>1$, $a<1$，其論法大體相同，故今假定 $a>1$。)

與 x 以所有有理數之值，則其中某值，恰能適合於(1)時，

已達題旨,此外無論矣。

若與 x 以若干有理數之值,而 a^x 之值不能適等於 b,則可以

$$a^r<b$$

之有理數 r,皆屬於 A 集。又以

$$a^{r'}>b$$

之有理數 r' 爲屬於 A' 集,則依前節 (5) 可知一切有理數中,其爲 r 者爲 r' 者皆確實存在,又 $r<r'$ 亦已明白,故 (A, A') 作有理數之截斷。以此截斷決定之數爲 ρ,則此卽爲所求之 x 之值,而必

$$a^\rho=b$$

蓋若假令

$$a^\rho>b$$

依前節 (4) 取極近於 ρ 而較之小之有理數 r,則可使 $(a^\rho-a^r)$ 較隨意正數小,從而可使應較例如 $(a^\rho-b)$ 小。是卽

$$a^\rho-a^r<a^\rho-b$$

從此得 $$a^r>b$$

此與關於 r 之最初約束相反。

同上可證 $a^\rho<b$ 之不合。故非 $a^\rho=b$ 不可。

如此 x 值之限於唯一存在,觀前節(1)明已。蓋若謂有二,可以之爲 x_1, x_2,假令 $x_1>x_2$ 則

$$a^{x_1}>a^{x_2}$$

而謂此二者,等於同一之 b,實有不可能也。

定理及定義． 以a爲不等於1之正數，b爲隨意正數，則適合於

$$a^x=b \tag{1}$$

關係之實數x，常唯一存在。此x名曰「以a爲底之b之對數」以記號

$$x=\log_a b \tag{2}$$

書之。

(1)與(2)爲以相異之形式，表存在於a, b, x間之關係者，其內容實爲同一。

注意．1．對數之底，須爲不等於1之正數。

2．零及負數，無有對數。*

3．不問底之如何，1之對數總爲0。

4．等於底之數之對數爲1。

5．二數相等，則其對數亦相等。轉之二數之對數相等，則原二數亦相等。

6．於$y=\log_a x$

令$a>1$則

$$\lim_{x\to\infty} y=\infty, \qquad \lim_{x\to+0} y=-\infty$$

令$a<1$則

$$\lim_{x\to\infty} y=-\infty \quad \lim_{x\to+0} y=\infty$$

---

* 在高等算學所謂$\log(-1)=\pi i$，蓋由與茲所謂完全不同之立脚地言之者也。本書不論及之。

次揭關於對數之諸定理,爲初等代數學所知,故其證明從略。

(1) $log_a(mn)=log_a m+log_a n$

(2) $log_a\frac{m}{n}=log_a m-log_a n$

(3) $log_a(m^r)=r\,log_a m$

(4) $log_b m=\frac{log_a m}{log_a b}$

§29. 自然對數

實用上常以10爲對數之底,此種對數名曰**常用對數**。若爲便於理論上研究起見,則宜用

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

之極限值爲底。如此之對數,名曰**自然對數**。

吾人將先證明上記極限值之確實存在。

今設 x 等於一自然數 n,則依二項定理

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3$$

$$+\cdots\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-\overline{n-1})}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$$

$$+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

同樣

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

比較此等展開式,可知第三項以下,其前者之各項,較後者同數號之項為小,且後者多最後一項。故

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

無待論矣。即n為自然數時,從n之值之增大,而$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$次第增大。

然從又一方考之,則

$$\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{2!}$$

$$\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)<\frac{1}{3!}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}$$

又

$$3!=2\cdot3>2^2$$

$$4!=2\cdot3\cdot4>2^3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$n!=2\cdot3\cdots\cdots n>2^{n-1}$$

故

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

求此右邊之總和則得

$$1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

$$=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$$

故知

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$$

由是觀之,n爲自然數時,雖$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$與$n$同爲增大,然其值決不超過3。故依第20節定理1,此必有不越3之某極限值,通常以文字e表之,即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

次設x未必爲自然數,而爲極大之正數,則可取對於此之

$$n\leqq x<n+1$$

自然數n。若然則

$$1+\frac{1}{n}\geqq 1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{n+1}$$

從而

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

即

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)>\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}$$

於是考 $x\to\infty$ 之極限,則同時 $n\to\infty$, $n+1\to\infty$, 而

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

$$\lim_{(n+1)\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e \qquad \lim_{(n+1)\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=1$$

故結論可知

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

以上皆以 x 爲正無限大數而考之者,若 x 爲負無限大數,則亦有與前完全相同之極限值,可如次證明之。

令 $x=-y$ 則

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\left(\frac{y}{y-1}\right)^y=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y$$

$$=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)$$

故

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)\right\}=e$$

於是綜上一切,得次之定理。

定理. $$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

系. $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$\left(\text{可見本定理之 } x\text{，得代以 } \frac{1}{x}\text{。}\right)$

極限值 e 之存在，已可依上研究而知之，若欲實行求其數值，如次爲善。

如前所述

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$$

$$+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

故

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}$$

明也。

於又一方，以 k 爲一定之自然數，則對於 $n>k$ 之一切 n，常

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

於是令 $n\to\infty$，則

$$e\geqq 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{k!}$$

但 k 爲隨意自然數，故書之爲 n，亦屬無妨，若然則

$$e\geqq 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}$$

綜合此式與以前結果，則得次式。

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\leqq e$$

從此直可知(第22節定理4)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e$$

易言之,e等於次之無窮級數之和,

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\cdots$$

e之小數至第三十位之正值如次。

$$e=2,71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\cdots\cdots$$

§30. 指數函數及對數函數

吾人應用普通羃及對數,可於代數函數以外,作如次之新函數之定義.(皆以x爲變數)

(i)　x^a　a爲有理數時,雖爲代數函數,然爲無理數時則否,而爲一種新函數。但此函數之$x>0$

(ii)　a^x　但$a>0$

(iii)　x^x　但$x>0$

(iv)　$\log_a x$　但a爲1以外之正數,又$x>0$

(v)　$\log_x a$　但x爲1以外之正數,又$a>0$

但(v)可依

$$\log_x a=\frac{1}{\log_a x}$$

關係,歸納於(iv),故無特考必要。又(iii)亦可歸納於(ii),蓋注意於一正數c之常可書爲

$$x=c^{\log_c x}\qquad(c>0,c\neq 1)$$

則得*

$$x^x=\left(c^{\log_c x}\right)^x=c^{x\log_c x}$$

又 (i) 亦可改書爲

$$x^a=\left(c^{\log_c x}\right)^a$$

之形,故亦無採用爲基本函數之必要。

故結果取 (ii) 及 (iv),即

$$a^x \qquad (a>0)$$

$$\log_a x \qquad (a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$$

二者爲研究之對象足矣。然即此而論,除變數 x 外,其 a 亦可採取種種之值,故爲簡單函數之值計,而欲僅據 x 以確定之,通常應用 $a=e$ 之

$$e^x$$

$$\log_e x \quad (x>0)$$

二函數。

前者名曰 x 之指數函數,後者名曰對數函數。用此以表普通底 a 之對數,甚爲容易,即

$$a^x=e^{x\log_e a}$$

$$\log_a x=\frac{\log_e x}{\log_e a}$$

注意. 在高等算學,對於 $\log_e x$ 常僅記爲 $\log x$。本書以下亦從之。

---

* 此實對於隨意實數 β,γ,假定 $(c^\beta)^\gamma=c^{\beta\gamma}$ 者也。以下亦尚有假定此公式之處。然其證明姑俟第37節。

常用對數(以10爲底者)與自然對數,(以e爲底者)對照如次。

但此僅舉100以下質數之對數,求其適宜之加法,則亦得合成數之對數。

眞數	常用對數	自然對數
2	0,30103	0,69315
3	0,47712	1,09861
5	0,69897	1,60944
7	0,84510	1,94591
11	1,04139	2,39790
13	1,11394	2,56495
17	1,23045	2,83321
19	1,27875	2,94444
23	1,36173	3,13549
29	1,46240	3,36730
31	1,49136	3,43399
37	1,56820	3,61092
41	1,61278	3,71357
43	1,63347	3,76120
47	1,67210	3,85015
53	1,72428	3,97027
59	1,77085	4,07754
61	1,78533	4,11087
67	1,82607	4,20469
71	1,85126	4,26268
73	1,86332	4,29046
79	1,89763	4,36945
83	1,91908	4,41884
89	1,94939	4,48864
97	1,98677	4,57471

§31. 圓周及弧之長

吾人欲從此證明關於三角函數極限值之重要定理,應先作其準備,故本節就圓周及弧之長論之。

先假定計算直線之長爲已知之者。圓周或弧之長,若在同一圓周上,或有相等半徑之圓周上,施行比較,則可如直線然,不難相重以觀之,而知其大小或相等也。故以其圓周上隨意一弧爲單位,依此計算其他隨意所設之弧,則其長可以數表之。卽在特款,求全圓周與其一部分弧之長之比,亦從此可能矣。

然若比較半徑不相等之圓周或弧,或以圓周及弧與線段比較,則必不能相重而觀。故吾人通常所採方法,乃定某線段之長爲單位,用以計算今欲比較之圓周,弧,線段等,而比較其所得結果之數,則其大小或相等之關係,判然決定矣。

然則以一線段爲單位,將如何計算圓周之長耶。

對此之一簡單方法,爲尋常初等幾何學教科書所記載,卽先以所設圓周直徑之長爲$2r$,作內接於此之正方形,則其周圍之長爲 $4\sqrt{2}r=(2,82842\cdots\cdots)\times 2r$。次二等分對於其正方形各邊之弧,順次連結其分點與正方形之各頂點,得內接於原圓之正八邊形,計算其周圍之長,則爲 $8\sqrt{2-\sqrt{2}}\,r$。(此計算詳於幾何學茲略) 更次第續行同上之作圖,卽作內接於同圓之正 $16, 32,\cdots\cdots, 2^n,\cdots\cdots$邊形,其周圍之長,以 $P_{16}, P_{32},\cdots P_{2^n},\cdots\cdots$表之,則有

$$P_{16}<P_{32}<\cdots\cdots<P_{2^n}<\cdots\cdots$$

關係明也。然於又一方,無論使n爲如何大,其P_{2^n}總爲圓之內接正多角形之周圍,故較外切於此圓之正多角形之周圍小。卽較例如外切正方形之周圍$8r$小。

故依第20節定理1

$$\lim_{n\to\infty} P_{2^n}$$

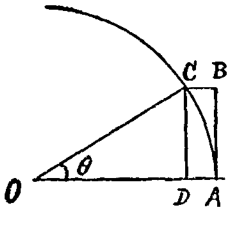
有有限確定值。吾人以此爲表今考圓周之長之數值之定義。

由是以一線段之長爲單位,則若干圓周之長,得一一求其數值。故再考圓周與弧之比,則其弧之長,亦可以數表之。於是比較此等數值,而定隨意圓周及弧,線段等長之大小相等可也。

以上爲初等教科書所載,僅此未可謂爲完全。上述方法內接於圓之正2^n邊形,易以其他正多角形,或不必限於正多角形,而用隨意多角形,則其極限,尚爲同一圓周之數值與否,不可不一考之。吾人將論之如次。

豫備定理1. $x\to 0$時

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0,\qquad \lim_{x\to 0}\cos x=1$$



今命$OA=1$,以O爲中心,OA爲半徑畫圓周。又以ε爲隨意小正數,從A立OA之垂線AB,使

$$AB<\varepsilon$$

從B引平行於OA之直線,以其與圓周之交點爲C。於是連結OC,命

$$A\hat{O}C=\theta$$

又以從 C 所下 OA 之垂線為 CD,則

$$\sin\theta=\frac{CD}{OC}=\frac{BA}{OA}<\varepsilon$$

故普通 $x\leqq\theta$ 則 $\sin x<\varepsilon$ 明矣。

卽以 x 爲適當小,則對於隨意正數 ε,常得

$$0<\sin x<\varepsilon$$

故

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0$$

又如三角學所知,在正之銳角爲

$$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$$

故今對於隨意正數 ε,欲使

$$1-\cos x<\varepsilon$$

則使

$$1-\sqrt{1-\sin^2 x}<\varepsilon$$

卽

$$(1-\varepsilon)^2<1-\sin^2 x$$

可矣。變其形則爲

$$\sin^2 x<\varepsilon(2-\varepsilon)$$

今特就 ε 之小值考之,斯已足矣,故令 $0<\varepsilon<1$,則欲使上式成立,只須

$$|\sin x|<\varepsilon$$

足矣。蓋此時確爲

$$\sin^2 x<\varepsilon^2<\varepsilon(2-\varepsilon)$$

故也。

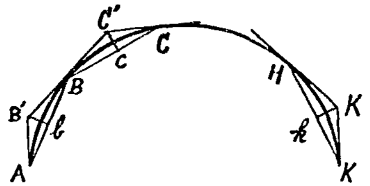
故結果使 x 爲十分小,則得

$$1-\cos x<\varepsilon$$

故
$$\lim_{x\to 0}\cos x=1$$

豫備定理 2. 以內接於一圓周或圓弧之屈折線之長爲 p,引於其各頂點之切線所成外切屈折線之長爲 P,則各邊之長爲無窮小(從而邊數爲無窮多)時,P 與 p 之比,趨近於 1。

如圖以 $ABC\cdots\cdots HK$ 爲內接屈折線以 $AB'C'\cdots\cdots K'K$ 爲對應於此之外切屈折線。



又以從 $B, C', \cdots\cdots, K'$,向 $AB, BC, \cdots\cdots, HK$ 所下垂線之趾爲 $b, c, \cdots\cdots, k$ 則

$$\frac{P}{p}=\frac{AB'+B'C'+\cdots\cdots+K'K}{AB+BC+\cdots\cdots+HK}$$

$$=\frac{AB'+B'B+BC'+C'C+\cdots\cdots+K'K}{Ab+bB+Bc+cC+\cdots\cdots+kK}$$

故如代數學所知,此分數之值,在

$$\frac{AB'}{Ab},\ \frac{B'B}{bB},\ \frac{BC'}{Bc},\ \cdots\cdots,\ \frac{K'K}{kK}$$

中最大者與最小者之間。然此各數當邊 $AB, BC, \cdots\cdots$ 爲無窮小時,其結果皆趨近於 1 者也。

例如取第三位分數之反數觀之,則爲

$$\frac{Bc}{BC'}=\cos C'Bc$$

各邊次第減小,則頂點 B 之位置,亦次第變動,然三角形 $C'Bc$

之 $C'\hat{c}B$ 常爲直角，而 $C'\hat{B}c$ 無窮趨近於 0。故(依前定理)

$$lim\frac{Bc}{BC'}=lim\cos C'\hat{B}c=1$$

因一切分數皆如此，故

$$lim\frac{P}{p}=1$$

豫備定理 3. 於一圓周或圓弧，取內接屈折線，使其各邊爲無窮小(從而邊數爲無窮多)時，其長常趨近於同一之極限值。

今以一內接屈折線之長爲 p_1，連結對於其各邊之弧上之一隨意點與邊之兩端所得第二內接屈折線(邊數爲前之二倍)之長爲 p_2。更如上反覆行之，以其所得次第二倍邊數之內接屈折線之長爲 $p_3, p_4, \cdots\cdots$。又以對應於此等之外切屈折線之長爲 $P_1, P_2, P_3, \cdots\cdots$。則普通 p_n 與 n 同爲次第增大，然無較 P_1 更大之事，* 故依第20節定理 1 有

$$\lim_{n\to\infty} p_n=L$$

之有限確定值 L 存在。若然則依前定理得

$$\lim_{n\to\infty} P_n=\lim_{n\to\infty} p_n=L$$

次取內接於同圓周或圓弧之第二內接屈折線，以其長爲 q，又以對應於此之外切屈折線之長爲 Q。則 q 較 $P_1, P_2, \cdots\cdots$ 之一皆小，故依第22節定理 5

---

* 普通對於兩端公共之二凸屈折線，其一全在他一之內側時，前者較後者短，在初等幾何學頗易證明之。

$$q \leqq \lim_{n\to\infty} P_n = L$$

同理 Q 較 $p_1, p_2, \cdots\cdots$ 皆大,故

$$Q \geqq \lim_{n\to\infty} p_n = L$$

由是結果得

$$q \leqq L \leqq Q$$

卽

$$1 \leqq \frac{L}{q} \leqq \frac{Q}{q}$$

然依前定理,各邊皆爲無窮小時,$\frac{Q}{q}$ 趨近於 1。 從而 $\frac{L}{q}$ 亦趨近於 1。 故

$$\lim q = L = \lim p$$

系. $\lim Q = L$

據以上研究,吾人欲定圓周或圓弧之數值,可取隨意內接屈折線而求其極限值足矣。 故欲決定圓周之長,亦不妨取其內接正多角形而求其周圍之極限值明已。 然內接正多角形之周圍,比例於其圓之半徑,頗易證明。 故直得次之定理。

定理 1. 圓周之長,比例於其半徑(或直徑)之長。

圓周對於直徑之比,尋常以文字 π 表之,人所知也。 π 之數值如次。

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\cdots\cdots$$

旣知內接屈折線之長之極限,爲圓周或圓弧之長,及內

接屈折線,常較外切屈折線小,則從此直得次之重要定理。

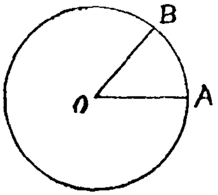
定理 2. <u>圓弧較對於此之弦長。</u>

定理 3. <u>從圓弧 AB 之兩端引切線,以其交點爲 C,則</u>

$$\overline{AC}+\overline{BC}>\text{弧 } AB$$

§32. 弧度法

今以 O 爲中心,OA 爲隨意半徑畫圓,於其圓周上取弧 AB 等於 OA。(如此之弧不過理論上考究之,實非初等的所能作圖也。) 則



$$\hat{AOB}:360°=(\text{弧 } AB):(\text{全圓周})$$
$$=r:2\pi r$$

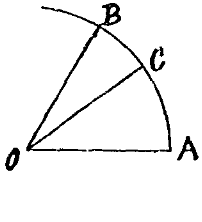
故

$$\hat{AOB}=\frac{360°}{2\pi}=57°,29577951\cdots\cdots$$
$$=57°17'44'',806\cdots\cdots$$

此角之大,與半徑 r 無關,蓋一定者也。此一定之角,卽爲對於隨意圓上等於半徑之弧之中心角,名曰**半徑角**。測角大之單位,不用度分秒,而代以半徑角者,名曰**弧度法**。

然弧度法之意義,又可如次考之。

今以 AOC 爲所設之角,以 O 爲中心,r 爲隨意半徑,畫圓,以與角之二邊之交點爲 A, C。以弧 AC 之長爲 l,又取弧 AB 之長等於 r,則



$$\frac{A\hat{O}C}{1\text{半徑角}}=\frac{A\hat{O}C}{A\hat{O}B}=\frac{\text{弧}\,AC}{\text{弧}\,AB}=\frac{l}{r}$$

故

$$A\hat{O}C=\frac{l}{r}\text{半徑角}$$

普通$\frac{l}{r}$之數,(不名數)名曰角 AOC 之弧度。故弧度法,可謂爲依弧度表角大之方法。

例. $A\hat{O}C=180°$ 時 $l=\pi r$

故

$$\frac{l}{r}=\pi$$

即 $180°$ 之弧度爲 π。

主要角之度數與弧度,對照如次。

度數	0	30	45	60	90	180	270	360
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

普通設某角之度數爲 n, 弧度爲 x, 則有

$$\frac{x}{\pi}=\frac{n}{180}$$

之關係。

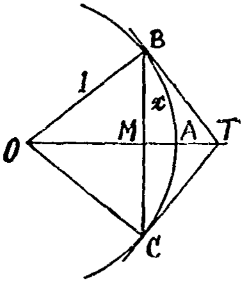
角之測法,實際雖用六十分法,(以度分秒爲單位)然理論上之研究,以用弧度法爲便。本書以下亦常用弧度法。故例如謂 $\sin x$,則 x 爲角之弧度而爲不名數。據此,則三角函數爲角之弧度之不名數之函數。故

$$\sin(x^2),\qquad \sin(\sin x)$$

等,亦皆有意義。

注意. 設角之度數爲 n,則其角之三角函數,未嘗不能視爲數 n (不名數) 之函數。雖然,特在尋常漫無斷定之三角函數,視爲不名數之函數時,始用如上所記之弧度耳。故例如言 $\sin 3$, 則非 3° 之正弦,而認爲弧度 3 之角之正弦。

更進至高等數學,既知三角函數之值,純爲解析的決定之後,對於所謂「弧度 3 之角之正弦」,直作「數 3 之正弦」解,亦無妨礙。然本書尚未準據幾何定義論之,玆將進於斯矣。



取一正銳角 AOB, 以 O 爲中心,用隨意半徑畫圓,以與角之二邊之交點爲 A, B, 從 B 作 OA 之垂線 BM, 使其延長線再與圓周交於 C 點,則

$$A\hat{O}B = A\hat{O}C,\quad BM = MC,\quad \widehat{BA} = \widehat{AC}$$

明也。又於 B 及 C, 各引切線,則此二切線,必與 OA 之延長線相交,亦容易證明之。以其交點爲 T, 則依前節定理 2 及 3, 可知

$$\text{弦 } BMC < \text{弧 } BAC < BT + TC$$

從而

$$BM < \text{弧} BA < BT$$

今爲簡單計,令 $OB=1$, 又以角 AOB 之弧度爲 x, 則

$$\text{弧 } BA = x$$

且
$$BM = \sin x, \qquad BT = \tan x$$

故上之不等式爲

$$\sin x < x < \tan x$$

從而

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

卽

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \tag{1}$$

據此卽知

$$\sin x < x \tag{2}$$

卽角之弧度,較其正弦大。

注意. 上圖雖以角 AOB 爲正銳角,然角之至於直角以上者,其

$$\sin x \leqq 1, \qquad x > 1$$

因而　　$\sin x < x$

無待論也。 故此結果,對於隨意正角而常爲眞,(對於負角,則變 (2) 兩邊之符號,故 $\sin x > x$)

次依前節豫備定理 1 知

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

故從 (1) 直得次之定理。

定理.　$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

系 1. 弦與對於此之弧,俱爲無窮小數時,兩者之比之極限值爲 1

系 2.　$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

蓋

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)=1$$

系 3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=1$

但 $\sin^{-1}x$ 爲取其主值者。

蓋令 $\sin^{-1}x=y$ 則

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1$$

系 4. $x\to 0$ 時,對於此之 $\sin x$, $\tan x$, $\sin^{-1}x$, $\tan^{-1}y$ 等,各爲第一級無窮小數。

系 5. $x\to 0$ 時,對於此之 $1-\cos x$ 爲第二級無窮小數。

蓋

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right\}^2=\frac{1}{2}$$

故也。

§33. 總括

指數函數對數函數三角函數反三角函數四種,及其互作有限次結合之函數,或其與代數函數所作有限次結合之函數,總稱之曰初等超越函數。

例如
$$\sin^2 x+2\tan x\sec x$$
$$\sqrt{1+\log x}-\sin^{-1}x$$
$$x^x\,(\text{即 } e^{x\log x})$$

皆為初等超越函數。但如

$$\sin(\sin^{-1}x)=x$$

結合之結果,僅為代數函數者,不能稱為超越函數,勿待論也。

注意 1. 初等算學上 $\log x$ 之底用10,且以三角函數為角之函數,但在高等算學 $\log x$ 之底用 e,且以三角函數為數(相當於角之弧度)之函數。

注意 2. e^x, $\log x$, $\sin x$, $\sin^{-1}x$ 等,皆非 x 之代數函數,俟第七章證明之。

本章所得結果之中,關於次之二極限定理,最為重要。

(I)
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

(II)
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

又本章已就二重要常數 e 及 π 述之矣。此二數皆為無理數,不能以有限術數之小數表之,亦不能以循環小數表之。(參看問題 IV,7) 且亦不能為以有理數為係數之代數方程式之根之數。(參看第七章 IV)

問　題　IV

1. 畫函數 $\log x$ 之格欄幅。

2. 用格欄幅,求方程式

$$\log x-\frac{1-x}{1+x}=1$$

之根之近似值。

3. 用格欄幅求下方程式之正根之近似值。

$$e^x \sin x=\frac{1}{10000}$$

4. 用格欄幅求下方程式之負根之近似值。

$$e^x=x^{1000000}$$

5. 有名雙曲正弦 (*sinh*) 及雙曲餘弦 (*cosh*) 之函數,其定義如次

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

又從此求做照三角函數之

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}, \qquad \coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\operatorname{sech} x=\frac{1}{\cosh x} \qquad \operatorname{cosech} x=\frac{1}{\sinh x}$$

等定義。此等總稱之曰雙曲函數。

試就雙曲函數,證明次之諸公式。

$$\begin{cases}\cosh^2 x-\sinh^2 x=1\\ 1-\tanh^2 x=\operatorname{sech}^2 x\\ \coth^2 x-1=\operatorname{cosech}^2 x\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y\\ \cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y\end{cases}$$

6.　畫表示雙曲函數之各格欄幅。

7.　若e爲有理數,則假定之爲$\frac{p}{q}$,(p, q爲自然數)且令

$$\frac{p}{q}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{q!}+\frac{1}{(q+1)!}+\frac{1}{(q+2)!}+\cdots\cdots$$

此兩邊乘以$q!$,則得

$$(q-1)!\,p=A+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\cdots\cdots$$

式;但A爲一自然數。於是表示

$$0<\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\cdots\cdots<\frac{1}{q}$$

故證明e非有理數矣。

8.　求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{n-1}{x}\right)^x$

9.　$b\neq 0$試證明次式。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin a x}{\sin b x}=\frac{a}{b}$$

10.　用六十分法測角,以其度數爲n,則次之極限値如何。

$$\lim_{n\to 0}\frac{\sin n^\circ}{n}$$

11.　x爲第一級無窮小數,問

$$\tan x-\sin x$$

爲第幾級無窮小數。

12　以A, B爲同一圓周上之二點,從B向A點之切線上引垂線,以其趾爲C。設弧AB爲第一級無窮小數,則

線段 AC 及 BC 各爲第幾級無窮小數耶,

13. 弓形之弧長爲第一級無窮小數,試證此弓形之面積,爲第三級無窮小數。

14. 求 $\lim_{n\to\infty}\left(2^n \sin\frac{x}{2^n}\right)$

15. $n\to\infty$ 時,次式之極限值如何。

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}$$

16. 利用前題結果,試證明次式,

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots\cdots=\frac{2}{\pi}$$

17. 三角形之兩邊,各爲一定,其夾角之外角,爲第一級無窮小數,試證明其兩邊之和與第三邊之差,爲第二級無窮小數。

第六章　綿續函數

§34. 函數之綿續性

函數 $f(x)$ 當 $x \to a$ 時.此函數之極限值,與實際令 $x=a$ 時之函數之值 $f(a)$ 相一致,即

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{1}$$

時,曰 $f(x)$ 於 $x=a$ 爲綿續。否則曰不綿續。

例 1. 於 $f(x)=2x+1$, 求 $x \to 1$ 時之極限值,則爲3。(第19節例 1) 然又一方爲 $f(1)=3$。故 $f(x)$ 於 $x=1$ 爲綿續。

例 2. 於 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 其

$$\lim_{x \to \pm 0} f(x) = \pm\infty$$

而 $f(0)=\dfrac{1}{0}$ 爲全無意義。故此處 (1) 之關係,不能成立。由是知 $f(x)$ 於 $x=0$ 爲不綿續。

例 3. 於 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 其

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

然令 $x=1$ 則爲

$$f(1)=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

無一定之值。故於此題,(1) 亦不能成立。因而 $f(x)$ 於 $x=1$ 爲不綿續。

改書上記之(1),則得綿續之定義爲

$$\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$$

或

$$\lim_{h\to 0}\Big\{f(a+h)-f(a)\Big\}=0$$

更溯極限之定義,(第19節)則亦可如次述之,

對於隨意正數(如何小亦可)ε 取適當小之正數 δ,則對於

$$|x-a|<\delta$$

之一切 x 之值,常得

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

時,此 $f(x)$ 於 $x=a$ 爲綿續。

注意. 在極限值之定義,(第19節)爲

$$0<|x-a|<\delta$$

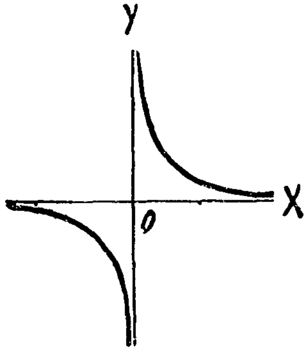
今却省去較0大之條件,宜注意。蓋考 $x\to a$ 時之 $f(x)$ 之極限值,雖不必考 $x\to a$ 時之 $f(x)$ 之值,然欲謂 $x=a$ 爲綿續,則其極限值確須爲 $f(a)$ 故也。

函數 $f(x)$ 於 $x=a$ 爲綿續,則 x 自 a 有極小變動時,對於此之 $f(x)$ 之變動亦爲極小,如上所述。故畫表示此函數之曲線,則在相當於 $x=a$ 之附近,其曲線必無間斷之事,綿續之名,蓋以此也。

若至函數不綿續之點,則表示此之曲線,或驟然斷絕,或不能以圖精密示之,種種異狀,紛然雜呈。今舉作圖簡易之二三相異例於次。

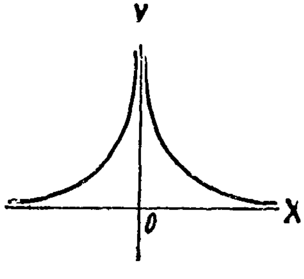
例 1.　$f(x)=\dfrac{1}{x}$

於 $x=0$ 爲不綿續, $x\to\pm 0$ 時 $f(x)\to\pm\infty$ 又 $x=0$ 時, $f(x)$ 無有值。



例 2.　$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

於 $x=0$ 爲不綿續, $x\to\pm 0$ 時 $f(x)\to\infty$, 又 $x=0$ 時 $f(x)$ 無有值。

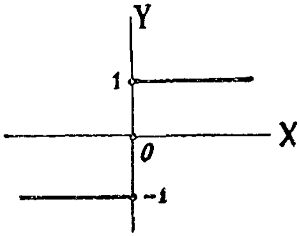


例 3.　設

$$x>0 \text{ 時 } f(x)=1$$

$$x=0 \text{ 時 } f(x)=0$$

$$x<0 \text{ 時 } f(x)=-1$$



則

$$\lim_{x\to+0} f(x)=1,$$

$$\lim_{x\to-0} f(x)=-1, \quad f(0)=0$$

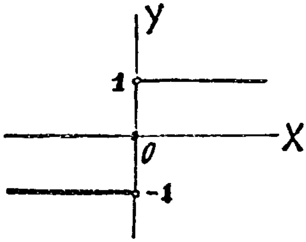
此三值皆相異。

故 $f(x)$ 於 $x=0$ 爲不綿續。

例 4.　設

$$x\geqq 0 \text{ 時 } f(x)=1$$

$$x<0 \text{ 時 } f(x)=-1$$



則

$$\lim_{x\to+0} f(x)=f(0)=1$$

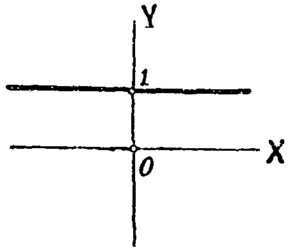
$$\lim_{x\to-0} f(x)=-1\neq f(0)$$

故 $f(x)$ 於 $x=0$ 爲不綿續。

例 5. 設

$$x\neq 0 \text{ 時 } f(x)=1$$

$$x=0 \text{ 時 } f(x)=0$$

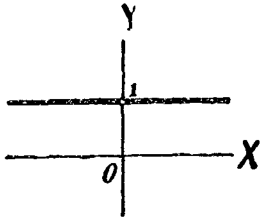


則 $$\lim_{x\to\pm0} f(x)=1, \quad f(0)=0$$

不相一致。

故 $f(x)$ 於 $x=0$ 爲不綿續。

例 6. 設 $f(x)=\frac{x}{x}$ 則



$$x \neq 0 \text{ 時 } f(x)=1,$$

$$x=0 \text{ 時 } f(x)=\frac{0}{0},$$

爲不定。

故雖
$$\lim_{x\to\pm 0} f(x)=1$$

但 $f(0)$ 不存在。

故 $f(x)$ 於 $x=0$ 爲不綿續。

如例 5 及例 6 二函數,雖於今所考究之點,(尋常設 $x=a$)

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \quad \text{及} \quad \lim_{x\to a-0} f(x)$$

皆爲有限確定,而且相等,但以其值與 $f(a)$ 不相一致,故不能謂爲綿續。雖然若於此二例,變更 $f(a)$ 之值,或爲適宜之指定,使與上記極限值正相一致,則 $f(x)$ 可於 $x=a$ 爲綿續。

例如於上二例,令 $f(0)=1$, 則皆於 $x=0$ 得

$$\lim_{x\to\pm 0} f(x)=f(0)=1$$

而爲綿續。

但例 5, 初固以 $x=0$ 時 $f(x)=0$ 爲定義者,故不可隨意改變。然反之如例 6, $x=0$ 時 $f(x)$ 無有一定之值,故吾人以 $f(0)=1$ 之值補足之,未嘗不可。據此,普通有次之規律。

規律. 函數 $f(x)$ 於 $x=a$ 無有確定之值,而

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \quad \text{及} \quad \lim_{x\to a-0} f(x)$$

俱爲有限確定且相一致時,更定 $f(a)$ 爲等於其公共極限值者,則從而視 $f(x)$ 於 $x=a$ 爲綿續可也。

注意. $f(a)$ 已有定值者,不可應用此規律。又 $x\to a\pm0$ 時, $f(a)$ 之極限值爲 ∞ 或 $-\infty$ 者,不在此規律範圍內,弗待論也,

例 1.　於 $f(x)=x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\cdots\cdots$

若 $x\neq0$ 則

$$f(x)=\frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}}=1+x^2$$

從而　$\lim\limits_{x\to0} f(x)=1$

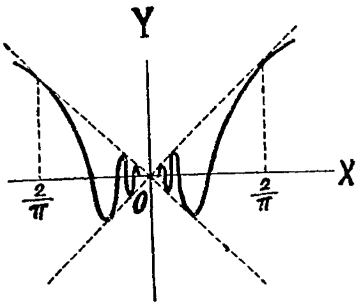
然 $x=0$ 時,原級數之各項爲 0, 故

$$f(0)=0$$

與上之極限值不一致,故 $f(x)$ 於 $x=0$ 爲不綿續。

本例 $f(0)$ 既存在,故不得依上規律,定 $f(0)=1$,而認爲綿續。

例 2.　$f(x)=x\sin\frac{1}{x}$



不問變數如何,正弦函數之絕對值,總不超過 1, 故

$$0\leqq|f(x)|\leqq|x|$$

故
$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

雖然令$x=0$,則$\frac{1}{x}$無有意義。從而$f(x)$無有定值。但此$f(x)$僅於$x=0$爲不綿續,然應用上之規律,定$f(0)=0$,則此款固爲綿續也。

故對此意義,認$f(x)$於$x=0$爲綿續。

以上皆研考對於某一值之綿續性者,若$f(x)$對於x之某變域內之一切值爲綿續時,曰$f(x)$在其變域爲綿續。

例 1. $f(x)=\frac{1}{x}$除$x=0$外,在其他隨意變域爲綿續。

例 2. $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$在隨意(亦含$x=0$)變域爲綿續。

注意. 謂之綿續之語句,如次所用各種意義,皆彼此不同,宜注意。

實數之綿續性(第 8 節)

綿續之變數(第14節)

綿續之變域(第14節)

函數之綿續性,綿續之函數(本節)

§35. 關於綿續函數之定理

定理 1. 函數$f(x)$於$x=a$爲綿續,且$f(a)$不等於零時,對於十分小之正數h,必$f(a\pm h)$與$f(a)$常有同符號。

蓋$f(x)$於$x=a$爲綿續,故使h之絕對值爲適當小,則對於隨意正數ε,可得

$$|f(a\pm h)-f(a)|<\varepsilon \qquad (1)$$

今特按 ε 取 $|f(a)|$，又令

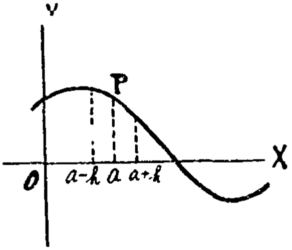
$$f(a\pm h)=f(a)+k \tag{2}$$

從 (1) 得

$$|k|<|f(a)|$$

故依 (2)，知 $f(a\pm h)$ 與 $f(a)$ 為同符號。

圖解本定理，則與所謂從一曲線上 $x=a$ 之 P 點，在橫軸之上（或下），而在 P 十分近之隣近之曲線部分，亦在橫軸之上（或下），相當。 P 雖如何近於橫軸，但使相應於此之 h 為十分小，則此事常可成立。



定理 2. 在 x 之某綿續變域內函數 $f(x)$ 為綿續，對於屬於此變域之 x 之二值 a,b，而 $f(a)$ 與 $f(b)$ 有相異之符號時，此 a 與 b 之間，如 $f(x)=0$ 之 x 之值，至少有一個存在。

今設 $a<b,\ f(a)>0,\ f(b)<0$ 證明本定理。（其他亦可以同一方法證明之。）

則依假定 $f(a)>0$，故 x 雖稍微增大，但在十分近於此之間，應常 $f(x)>0$。（定理 1）

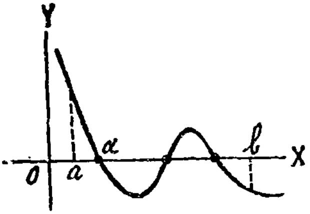
今普通於 a 與 b 之間，取隨意一數，對於從 a 至此數間之一切數，得常使 $f(x)>0$ 不等式成立者，可以之屬於 A 集，不然者以之屬於 A' 集，則 a 與 b 間之數，不屬於 A，卽屬於

A',(近 a 者屬於 A,近 b 者屬於 A'。)且屬於 A 之數,皆較屬於 A' 之數小。故 (A, A') 作一截斷,而定一數,今以之爲 α。

則 $f(\alpha)=0$。蓋若 $f(\alpha)>0$, 則對於極小正數 h, 不可不 $f(\alpha+h)>0$。是較 α 大之數,尚有屬於 A 者,實不合理。又若 $f(\alpha)<0$, 則應 $f(\alpha-h)<0$。是對於較 α 小之數,不能使 $f(x)>0$ 成立也,亦不合理。故必 $f(\alpha)=0$ 無疑。

使 $f(x)=0$ 之 x 之值,除 α 外,雖尚可有其他之值,但至少必有一值存在,此固已證明之矣。

圖解本定理,則相當於所謂綿續曲線上,一點在橫軸之上,他一點在橫軸之下時,其途中曲線與橫軸,至少有一次相交。



系 1. 設在 x 之某綿續變域內,函數 $f(x)$ 爲綿續,對於屬於此變域之 x 之二值 a, b, 有

$$f(a)=A,\quad f(b)=B\quad (A \neq B)$$

時,對於 A 與 B 間之隨意一數 C, 其如

$$f(x)=C$$

之 x 之值,在 a 與 b 間至少有一個存在。

蓋今命

$$\varphi(x)=f(x)-C$$

則 $$\varphi(a)=A-C,\quad \varphi(b)=B-C$$

此二值依假定,有相異之符號. 故依本定理,在 a, b 間,如 $\varphi(x)=0$ 卽 $f(x)=C$ 之 x 之值,至少有一個存在。

此系又可易言如次。

系 2. x 在綿續變域內,自 a 至 b 變動時,綿續函數 $f(x)$,對於 $f(a)$ 與 $f(b)$ 間所有之值,至少須有一次之經歷。

定理 3. 二函數 $f(x)$, $g(x)$ 均於 $x=a$ 爲綿續,則次之各函數,亦於 $x=a$ 爲綿續。

(i) $f(x)\pm g(x)$,　(ii) $f(x)g(x)$,　(iii) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

但 (iii) 之 $g(a)\neq 0$。

蓋依假定

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a),\qquad \lim_{x\to a} g(x)=g(a)$$

從此得

$$\lim_{x\to a}\left\{f(x)\pm g(x)\right\}=f(a)\pm g(a)$$

故 $f(x)\pm g(x)$ 於 $x=a$ 爲綿續。

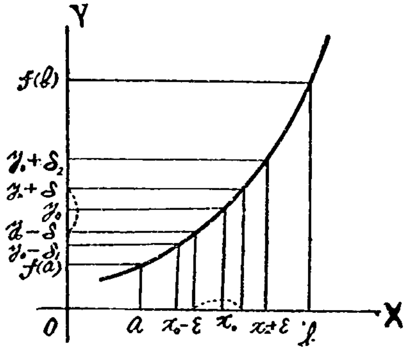
(ii), (iii) 亦可同此證明之。

定理 4. 函數 $f(x)$ 在綿續變域 (a, b) 內爲綿續,而且單調增減,則其反函數亦在綿續變域 $\{f(a), f(b)\}$ 內爲綿續,而且單調增減。

今定 $a<b$, $f(x)$ 在變域 (a, b) 內爲單調增大者以證明之。(其他亦可用同法證明之。)

變域 $\{f(a), f(b)\}$ 之爲綿續,直可從定理 2 系 1 及 2 知之。蓋 $f(x)$ 必爲 $f(a)$ 與 $f(b)$ 間之如何之值也。

又因 $f(x)$ 假定爲單調增大者,故令 $f(x)=y$, 則於 y 之一值,必有唯一之 x 之值對應。蓋若 x 有二值,則對於其大者之 y,不可不較對於他一之 y 爲大故也。故 $f(x)=y$ 之反函數,確爲一值函數。以之爲 $x=\varphi(y)$。



依假定從 x 值之大而對於此之 y 之值亦隨之大,故 $\varphi(y)$ 爲單調增大之函數。

次將證明 $\varphi(y)$ 爲 y 之綿續函數。

今以變域 $\{f(a), f(b)\}$ 中之隨意一值爲 y_0, 對於此之 x 之值爲 x_0。又隨意取小正數 ε, 以對於 $(x_0-\varepsilon)$ 及 $(x_0+\varepsilon)$ 之 y 之值爲

$$y_0-\delta_1=f(x_0-\varepsilon), \qquad y_0+\delta_2=f(x_0+\varepsilon)$$

此 δ_1, δ_2 爲正數。以較 δ_1 及 δ_2 不大之一正數爲 δ, 則從 $\varphi(y)$ 之爲單調增大,直可得次之關係,

$$\varphi(y_0-\delta_1)\leqq\varphi(y_0-\delta)<\varphi(y_0)<\varphi(y_0+\delta)\leqq\varphi(y_0+\delta_2)$$

即 $$x_0-\varepsilon\leqq\varphi(y_0-\delta)<x_0<\varphi(y_0+\delta)\leqq x_0+\varepsilon$$

由是觀之, y 之值,若於

$$y_0-\delta<y<y_0+\delta$$

即 $$|y-y_0|<\delta$$

範圍內取之,則對於此之 x 之值,必確在

$$x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$$

卽

$$|x-x_0|<\varepsilon$$

範圍內。而此 ε 爲可隨意取之之小正數,故於 $x=\varphi(y)$ 之 $y=y_0$ 之絲續性,今已證明之矣。

又此證明之 y_0, 爲變域 $\{f(a), f(b)\}$ 中之隨意值,故結果可知 $\varphi(y)$ 之在其變域爲絲續矣。

§36. 初等函數之絲續性

(1)　整函數

$$f(x)=c_0x^n+c_1x^{n-1}+\cdots\cdots+c_{n-1}x+c_n$$

對於隨意實數 a 爲

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

(第22節)。故知整函數,爲普遍(對於 x 之隨意數值)絲續者。

(2)　分函數

以 $f(x)$ 爲關於 x 之分函數,以其分母不爲 0 之隨意實數爲 a, 則

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

(第22節)。故分函數,除其分母爲 0 之變數之值外,爲普遍絲續者。

(3)　n 次根(n 爲自然數)

設 $x=y^n$,(n爲自然數) 則依 (1) x 爲 y 之函數,而爲單調增大之綿續函數,當 n 爲奇數時,x 取一切實數值,n 爲偶數時,x 取一切正數值。

故依前節定理 4,函數 $y=\sqrt[n]{x}$,當 n 爲奇數時,對於隨意實數值爲綿續,n 爲偶數時,對於隨意正數值爲綿續。

(4)　指數函數

設 a 爲隨意實數,則

$$\lim_{h\to 0} e^{a+h}=\lim_{h\to 0}(e^a\cdot e^h)=e^a\lim_{h\to 0} e^h$$

$$=e^a\quad［第 27 節(3)］$$

故指數函數 e^x,爲普遍綿續者。

(5)　對數函數

設 $x=e^y$,則 x 爲 y 之綿續函數,且取單調增加之一切正數值者。

故其反函數 $y=\log x$ 對於 x 之一切正數值而爲綿續。(前節定理 4)

(6)　三角函數

設 a 爲隨意實數,則

$$\lim_{h\to 0}\sin(a+h)=\lim_{h\to 0}(\sin a\cos h+\cos a\sin h)$$

$$=\sin a(\lim_{h\to 0}\cos h)+\cos a\,(\lim_{h\to 0}\sin h)$$

$$=\sin a$$

故 $\sin x$ 爲普遍綿續者。

同上 $\cos x$ 亦爲普遍綿續。

從而

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \sec x=\frac{1}{\cos x}$$

在 $\cos x \neq 0$ 之限內，卽在

$$x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2} \qquad (n\text{爲整數})$$

限內，爲普遍綿續。

又

$$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}, \qquad \operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$$

在 $\sin x \neq 0$ 限內，卽在

$$x \neq n\pi \qquad (n\text{爲整數})$$

限內，爲普遍綿續。

(7) 反三角函數

反三角函數，雖非一值函數，然今以 n 爲一整數，而於

$$x=\sin y$$

$$x=\tan y$$

$$x=\operatorname{cosec} y$$

僅就

$$(2n-1)\frac{\pi}{2}<y<(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

變域考之，於

$$x=\cos y$$

$$x=\cot y$$

$$x=\sec y$$

僅就

$$(n-1)\pi<y<n\pi$$

變域考之,則其間之 x, 爲 y 之綿續函數,且爲單增或單減者。故若考其域中之反函數 $y=sin^{-1}x$ 等,則 y 爲 x 之綿續函數。(前節定理4)

例令 $n=0$ 則相當於採取反函數之主値。故僅考主値,則爲一値綿續函數。

§37. 關於極限値定理之補足

y 爲 x 之函數, z 爲 y 之函數,且雖

$$\lim_{x\to a} y=b, \quad \lim_{y\to b} z=c$$

然直接視 z 爲 x 之函數,則未必

$$\lim_{x\to a} z=c \tag{1}$$

但若加以所謂

$$y=b \text{ 時實際 } z=c \tag{2}$$

之條件,則 (1) 確成立。(見第22節定理 6 及其各例)

然 (2) 非他,實 y 之函數 z 於 $y=b$ 爲綿續也。故第22節定理 6 之 (ii),更易言以明之,則得次之定理。

定理. <u>y 爲 x 之函數, z 爲 y 之綿續函數,且</u>

$$\lim_{x\to a} y=b, \quad \lim_{y\to b} z=c$$

<u>則直接視 z 爲 x 之函數時,</u>

$$\lim_{x\to a} z=c$$

注意 1. 此所述定理,僅將第22節定理 6 之(ii)易言之者。依同定理(i),則不須 z 爲 y 之綿續函數。(第88頁例3)

注意 2. 本定理當 $a=\infty$ 時,亦尙成立。(蓋其時對於 $0<|x-a|<\delta$ 式,可取隨意大之正數 M,而代以 $|x|>M$ 之式,則其餘證明中,不須何等變更故也。) 又 $b=\infty$ 時,不必 z 爲 y 之綿續函數,本定理自可成立,(問題 III, 17)

注意 3. 例如第一百二十九頁,求 $x=-\infty$ 時 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 之極限値,猶之先令 $x=-y$ 而求 $y\to\infty$ 時 $\left(\frac{y}{y-1}\right)^y$ 之極限値,雖爲第22節定理 6 之簡單應用,然此係依於 (i) 者可見也。以下類此者尙多。不一一註記。

但依本定理 z 爲 y 之綿續函數,則

$$\lim_{x\to a} z=\lim_{y\to b} z$$

故今令

$$z=f(y),\qquad y=\varphi(x)$$

則

$$\lim_{x\to a} f\{\varphi(x)\}=\lim_{y\to b} f(y)$$

然 $f(y)$ 爲綿續函數,故

$$\lim_{y\to b} f(y)=f(b)=f\{\lim_{x\to a}\varphi(x)\}$$

從玆得次之關係。

$$\lim_{x\to a} f\{\varphi(x)\}=f\{\lim_{x\to a}\varphi(x)\}$$

卽 f 若爲綿續函數,則可將 f 與 lim 交易之。($a=\infty$ 亦可)

次舉二三重要結果,以明此定理之應用。

例 1. 設 $a>0$, 及 β,γ 爲隨意實數,則

$$(a^{\beta})^{\gamma}=a^{\beta\gamma}$$

如次證明之。

β,γ 俱爲有理數時,初等代數學上亦既述之,故茲略。

若 β 爲有理數 γ 爲無理數時,設趨近於 γ 之一列有理數爲 $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n\cdots\cdots$ 則依第26節,

$$(a^{\beta})^{\gamma}=\lim_{n\to\infty}(a^{\beta})^{c_n}$$

然 β, c_n 俱爲有理數,故

$$(a^{\beta})^{c_n}=a^{\beta c_n}$$

又以 $c_n\to\gamma$ 故 $\beta c_n\to\beta\gamma$

故 $$(a^{\beta})^{\gamma}=\lim_{n\to\infty}a^{\beta c_n}=a^{\beta\gamma}$$

次 γ 爲有理數,β 爲無理數時,設趨近於 β 之有理數爲 $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n, \cdots\cdots$ 則

$$(a^{\beta})^{\gamma}=(\lim_{n\to\infty}a^{b_n})^{\gamma}$$

然尋常 $f(u)=u^{\gamma}$ 函數,對於 u 之正數値爲綿續函數。據此則得

$$(\lim_{n\to\infty}a^{b_n})^{\gamma}=\lim_{n\to\infty}(a^{b_n})^{\gamma}$$

但以 b_n, γ 俱爲有理數,故

$$(a^{b_n})^{\gamma}=a^{b_n\gamma}$$

又 $b_n\gamma\to\beta\gamma$ 明也。故

$$(a^{\beta})^{\gamma}=\lim_{n\to\infty}a^{b_n\gamma}=a^{\beta\gamma}$$

最後 β,γ 俱爲無理數，則

$$(a^{\beta})^{\gamma}=\lim_{n\to\infty}(a^{\beta})^{c_n}$$

然以 c_n 爲有理數，故依上所證明

$$(a^{\beta})^{c_n}=a^{\beta c_n}$$

故
$$(a^{\beta})^{\gamma}=\lim_{n\to\infty}a^{\beta c_n}=a^{\beta\gamma}$$

總括以上結果，則普通

$$(a^{\beta})^{\gamma}=a^{\beta\gamma}$$

可知。

例 2.　$a\neq 0$，　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{x}$。

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}}\right\}^{a}$$

於是令

$$z=y^{a},\qquad y=\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}}$$

則 z 對於 y 之正數値爲絲續函數，又

$$\lim_{x\to\infty}y=e$$

故所求之極限値爲

$$\lim_{x\to\infty}z=(\lim_{x\to\infty}y)^{a}=e^{a}$$

例 3.　於 $z=\log y$，　$y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$

令 $x=\pm\infty$ 則 $y\to e>0$。然 z 對於 y 之正數値而爲絲續，故

$$\lim_{x\to\pm\infty} \log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \log\left\{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}$$

$$=\log e=1$$

故
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left\{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}=1$$

更令 $x=\frac{1}{t}$ 則

$$\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1 \tag{3}$$

更於此令

$$\log(1+t)=u$$

則
$$t=e^u-1$$

而 $t\to 0$ 時 $u\to 0$。故從 (3) 得

$$\lim_{u\to 0}\frac{u}{e^u-1}=1$$

從此得

$$\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}=1 \tag{4}$$

(3) 及 (4) 爲微分學上之緊要定理。

§38. 齊綿續性

函數 $f(x)$ 在變域 (a, b) 內爲綿續,而對於此變域內之隨意值 x_1, 取適當正數 δ, 則對於如

$$|x_2-x_1|<\delta \tag{1}$$

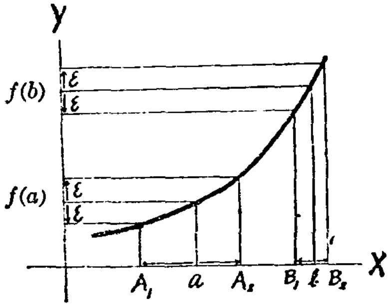
之一切 x_2, 常得使

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon \tag{2}$$

但 ε 爲隨意所設之正數。

以上僅將綿積性之定義,易言之耳,其爲當然,固不待論,所可注意者,其 δ 之大,不特僅關於 ε, 兼亦關於 x_1 焉。

例如 $f(x)$ 爲如圖所表之曲線,就圖考之, $x_1=a$ 時, x_2 可有之區域爲 $\overline{A_1A_2}$,(δ 以不超過 $\overline{A_1a}$ 及 $\overline{aA_2}$ 中小者之長爲宜)但 $x_1=b$ 時, x_2 可有之區域僅爲 $\overline{B_1B_2}$。



故在變域 (a,b) 內之某處,欲使 (2) 式成立,雖祇須 x_2, x_1 適於 (1) 式爲已足,但在他處,對於與此相異之 δ 之值,(例如 δ') 則務須使

$$|x_2-x_1|<\delta'$$

雖然吾人所當更進而證明者,對於一定之 ε 得取無關於 x_1 之值之某 δ 也,卽易言之,對於一定 ε, 選定十分小之 δ, 則在 x_1, x_2 適合於 (1) 之限內,任在變域 (a,b) 內之如何部分,常可證明 (2) 之得以成立也。

今假定 $f(x)$ 於 $x=a$ 爲綿績,從變域 (a,b) 內取十分近於 a 之一數 c, 則 x 在 (a,c) 之限內,常得使

$$|f(x)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

於是以 (a,c) 內之隨意二數為 x_1, x_2, 則

$$|f(x_1)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$|f(x_2)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

從此得

$$\begin{aligned}|f(x_2)-f(x_1)| &= |\{f(x_2)-f(a)\}-\{f(x_1)-f(a)\}| \\ &\leqq |f(x_2)-f(a)|+|f(x_1)-f(a)| \\ &<\varepsilon\end{aligned}$$

即在此小區域內,可見今所欲證明之性質,確能成立矣。此處之 δ, 以不超過 $(c-a)$ 之隨意正數為可。

有如此性質之數 c 之大,既能取之,故若 c 等於 b, 則吾人主張之成立明矣。

若或不然,則如次考之。

取變域 (a,b) 內之一數 x 觀之,若在 (a,x) 內確有如上所記性質之成立,(例如 $x=c$) 則屬 x 於 A 集,否則屬 x 於 A' 集。於是 (A, A') 作一截斷,可以其所定之數為 l。

二數 x_1, x_2 俱較 l 小時,使 $|x_2-x_1|$ 為十分小,則 (2) 雖成立,然在 x_1, x_2 之一或二較 l 大,或其一較 l 大,他一與 l 相重,則縱定正數 δ 為如何小,必可有不關於

$$|x_2-x_1|<\delta$$

之

$$|f(x_2)-f(x_1)|\geqq\varepsilon \tag{3}$$

蓋若謂 (3) 爲決不發起,則截斷 (A, A') 所定之數必非 l,而應爲較 l 更大之數矣。

但從又一方面考之,l 爲 (a, b) 域內之數,$f(x)$ 在 (a, b) 域內爲綿續者,故在 l 亦必爲綿續。從此可知 x_1, x_2 十分相近於 l 時,必不可不

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$$

此與 (3) 矛盾。

由是觀之,a, b 之間實無 l 存在之餘地。即通徹 (a, b) 全變域內,取對於十分小正數 δ 之

$$|x_2-x_1|<\delta$$

之二數 x_1, x_2,則所謂得使

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$$

之性質,必常能成立。

第 34 節所述綿續性之定義,僅固定 x_1, x_2 之一方而考之,至於今雖二方皆有變動,但令 δ 爲適當小,且適合於 $|x_2-x_1|<\delta$ 條件,則 (2) 亦必能成立可知矣。是名曰函數之齊綿續性,蓋綿續性之條件,可於同一形式下,齊等通用之意也。凡函數在某變域爲綿續時,必爲齊等之綿續。

此性質對於證明定積分之存在,有所必要。

§39. 綿續函數之上下限

函數 $f(x)$ 在變域 (a, b) 爲綿續,則 $f(x)$ 對於其變域內之各數值,必有有限確定值不待論。然則在 (a, b) 內,函數 $f(x)$

所取之值之全體,必作有界集。從知其値有上端及下端,以之爲 M 及 N。(第11節定理1及2)

普通某集之上下端,雖不限其自身之必屬於其集,然今之 M, N, 却爲屬於其集者,卽詳言之, x 若取 (a, b) 內適當之值,則實有 $f(x)=M$ 及 $f(x)=N$ 也。次就 M 證明之。(N 之證明亦同之)

先從最初說,若 $f(a)=M$ 則無須論。若 $f(a)$ 不等於 M,則必 $f(a)<M$。蓋 M 爲 $f(x)$ 所取之值之上端故也。然則吾人可將 (a, b) 間之一切數,分爲如次之二集 A, A'。卽於 a, b 間取一數 x, 其在 (a, x) 變域中 $f(x)$ 之值之上端較 M 小,則屬其 x 於 A 集,反之若在 (a, x) 中之 $f(x)$ 之上端爲 M,則屬其 x 於 A' 集。於是 (A, A') 作一截斷,以其截痕爲 c。

今以 δ 爲十分小之正數,因 $c-\delta$ 屬於 A, 故在 $(a, c-\delta)$ 變域中 $f(x)$ 值之上端較 M 小。又 $c+\delta$ 屬於 A', 故在 $(a, c+\delta)$ 中 $f(x)$ 之上端爲 M。由是觀之,雖以 δ 爲如何小正數,然在含 c 於中之小變域 $(c-\delta, c+\delta)$ 內,其 $f(x)$ 之上端,不可不爲 M 明也。

於此若得 $f(c)=M$, 則吾人之主張成立。若 $f(c)\neq M$, 則當然 $f(c)<M$。依此令

$$M-f(c)=2\varepsilon>0 \tag{1}$$

則依假定因 $f(x)$ 亦於 c 爲綿續,故取十分小之正數 δ, 則在

$$|x-c|<\delta$$

限內,不可不

$$|f(x)-f(c)|<\varepsilon \tag{2}$$

若然則從 (1) 及 (2) 得

$$f(x)<M-\varepsilon$$

據此可知在 $(c-\delta,\ c+\delta)$ 中 $f(x)$ 之上限,不能超過 $M-\varepsilon$,卽爲較 M 小,是與前所得結果相矛盾。

故非 $f(x)=M$ 不可。

依此得次之定理。

定理 1.　在有限綿續變域爲綿續之某函數,其所取之值有上下端。此函數在此變域中,實取其上下端之值。

此所謂上下端,又相當於其函數所取之值之上下限。(第12節)　蓋雖設 ε 爲如何小之正數,然 x 旣十分近於 c, 則得

$$|f(c)-f(x)|<\varepsilon$$

卽

$$M-\varepsilon<f(x)<M$$

故也。故

定理 2.　前定理之「上下端」改爲「上下限」亦無妨。

更將定理 1 之證明仔細點檢之,在其前半,(卽未入於 $f(c)=M$ 證明之前之部分) 毫無假定 $f(x)$ 綿續性之可以發見。故又得次之定理。

定理 3.　設在綿續變域 (a,b) 內,函數 $f(x)$ 所取之值之上端 (或下端) 爲 M, 從 (a,b) 內取適當之一數 c, 以 δ 爲如何小之正數,則得使在含於 (a,b) 內之變域 $(c-\delta,\ c+\delta)$ 之 $f(x)$ 之上端等於 M.

次用此定理,再將前節所述綿續函數之齊綿續性,加以別證。

今設 $f(x)$ 於 (a,b) 內爲綿續,就 (a,b) 間隨意一 x 之值 x_0,取對於隨意所設正數 ε 之適當之 δ,則在

$$|x-x_0|<\delta$$

限內,常可得

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

旣知之矣。此 δ 不特有關於 ε,抑且有關於 x_0,然確知 ε 與 x_0 後,δ 亦尙不能一定。蓋於某 δ 若能成立上記事實,則取較此更小之 δ 而用之,亦必無妨,可弗待論,故 δ 之取法,其大雖有某限制,小則固無所限制也。由是欲使此點更爲明瞭,可以如此所考 δ 之上端,用 $\delta(x_0,\varepsilon)$ 表之,蓋此上端固可依 x_0 及 ε 確定之也。

於是以 ε 爲一定,使 x_0 變爲 (a,b) 間種種之值,則 $\delta(x_0,\varepsilon)$ 亦必從而各取對應於此之值,卽可視爲 x_0 之函數。而其值常爲正數,故其下端必爲 0 或爲某正數,今以其下端爲 λ。則依定理 3 對於 (a,b) 間之某小變域 $(c-\eta,c+\eta)$,其 $\delta(x_0,\varepsilon)$ 所取之值之下端,有恰爲 λ 者。於是令

$$\delta\left(c,\frac{\varepsilon}{2}\right)=\delta_0$$

則依假定 $f(x)$ 亦於 c 爲綿續,故 δ_0 爲某正數。

而在

$$|x-c|<\delta_0$$

限內,常

$$|f(x)-f(c)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

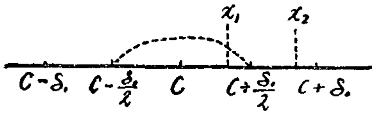
故於如此區域 $(c-\delta_0, c+\delta_0)$ 內,取 x 之隨意二值,x_1, x_2,則確爲

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon \tag{3}$$

然今就 $\left(c-\frac{\delta_0}{2},\ c+\frac{\delta_0}{2}\right)$ 小區域考之,x_1 可以自由移動於其間,而對此可以使 (3) 成立之 x_2 之值,則可以隨意取之於 $(c-\delta_0, c+\delta_0)$ 內,故 $\delta(x_0, \varepsilon)$ 之值,至少爲 $\frac{\delta_0}{2}$。

例就極端者說明之,先取 $x_1=c+\frac{\delta_0}{2}$,再從遠距 x_1 處取 x_2,卽取 $c+\delta_0$ 爲 x_2,且依此取成立

$$|x_2-x_1|<\delta$$



條件之 δ 值之大,則其值必不至較 $c+\frac{\delta_0}{2}$ 與 $c+\delta_0$ 之距離小,卽無較 $\frac{\delta_0}{2}$ 小之事可知也。

由是觀之,在 $\left(c-\frac{\delta_0}{2},\ c+\frac{\delta_0}{2}\right)$ 內之 $\delta(x_0, \varepsilon)$ 之值之下端,決不較 $\frac{\delta_0}{2}$ 小。然則設 η 爲十分小,卽視如 $\eta<\frac{\delta_0}{2}$ 者,則在 $(c-\eta, c+\eta)$ 內之 $\delta(x_0, \varepsilon)$ 之下端卽 λ,亦得較 $\frac{\delta_0}{2}$ 小。卽 λ 確爲正數。

故於 (a, b) 間,按

$$|x_2-x_1|<\lambda$$

取 x_1, x_2, 則常

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$$

從此證明 $f(x)$ 之齊綿續性矣。

問 題 V

1. 試證 $e^{\frac{1}{x}}$ 於 $x=0$ 爲不綿續,且畫表示此函數之圖。

2. 問次之函數,於 $x=0$ 爲綿續否。又試畫其格欄幅,

$$f(x)=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

3. 證明 $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=e^a$。

4. $a>0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$

5. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$ 但 $a>0$, $a\neq 1$。

6. x 爲第一級無窮小數,問次之各函數,各爲第幾級無窮小數。

(1) $\log(1+x)$ (2) $\log(1+x+x^2)$

(3) $1-\dfrac{1}{e^x}$ (4) $\log(1-\sqrt{x})$

(5) $\log\sqrt{1+x^2}$ (6) $\log\cos x$

7. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$

8. $b\neq 0$, $x\to 0$ 求次之函數之極限值。

$$\frac{\log(1+ax)}{\log(1+bx)}$$

9. 證明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(e^x-1)}{\log x}=1$

10. $y=\dfrac{1}{\log(e^x-1)}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0} x^y$

11. 試從 $e^a=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$, 做照第29節方法證明次式.

$$e^a=1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{a^n}{n!}+\cdots\cdots$$

12. n 爲隨意自然數,試依前題結果,證明次之不等式

(1) $e^{\frac{1}{n+1}}<1+\dfrac{1}{n}<e^{\frac{1}{n}}$

(2) $\dfrac{1}{n+1}<\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$

第七章 雜論

I. 不定形之極限値

第25節吾人已得次之四種不定形矣。

$$\infty-\infty,\qquad 0.\infty,\qquad \frac{0}{0},\qquad \frac{\infty}{\infty}$$

然該節所考,只行二函數之加減乘除而已。若更進考羃法,則尙發生如次之不定形。

$$1^{\infty},\qquad 0^{0},\qquad \infty^{0}$$

但 1^{∞} 爲示 u^{v} 當 $u\to 1$ 之同時 $v\to\infty$ 之略號。非 1^{v} 之 $v\to\infty$ 也,若考自始定爲 1 者之 v 乘,則 1^{v} 之値,固常爲 1 而非不定形也。

同樣 0^{0} 爲示 u^{v} 當 $u\to 0$ 之同時 $v\to 0$ 者。∞^{0} 爲示 u^{v} 當 $u\to\infty$ 之同時 $v\to 0$ 者。

決定極限値問題之困難,乃遭逢如此不定形而發生,應用微分法解決此種問題,比較容易,然本節並不論及微分學,但欲專示可以初等方法解決之若干例題而已。但可用微分法簡單解決者,雖用初等方法(或反因之繁雜)處置之,亦非常可推許,玆之所以揭之者,一面可作極限値計算之好練習,他一面亦以示微分法者不僅爲解答一種不定形 $\frac{0}{0}$ 之極限値而止,使毋徒機械的應用微分法,而反昧於眞意也。

(I) 依據適當之變形改爲定形者

例 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ $\left(\dfrac{0}{0}\text{之形}\right)$

以 $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ 乘其分母分子,則得

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$=\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

今所欲考者,爲 $x\to 0$ 之極限問題,非 $x=0$ 時之問題,而僅爲 x 無窮近於 0 時之問題。故 $x\neq 0$,而其分母分子,得以 x 約之。從之得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=1$$

例 2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $\left(\dfrac{0}{0}\text{之形}\right)$

便宜上令 $\sqrt{x}=y$, $\sqrt{a}=b$ 則

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{y-b+\sqrt{y^2-b^2}}{\sqrt{y^4-b^4}}$$

$$=\frac{y-b+\sqrt{(y-b)(y+b)}}{\sqrt{(y-b)(y+b)(y^2+b^2)}}$$

$$=\frac{\sqrt{y-b}+\sqrt{y+b}}{\sqrt{(y+b)(y^2+b^2)}}$$

故所求之極限値爲

$$\lim_{y\to b}\frac{\sqrt{y-b}+\sqrt{y+b}}{\sqrt{(y+b)(y^2+b^2)}}=\frac{\sqrt{2b}}{\sqrt{2b.2b^2}}=\frac{1}{\sqrt{2b}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

例 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{(a+x)(b+x)}-\sqrt{(a-x)(b-x)}\right)$ ($\infty-\infty$ 之形)

今欲考之式,等於次之分數式,

$$\frac{(a+x)(b+x)-(a-x)(b-x)}{\sqrt{(a+x)(b+x)}+\sqrt{(a-x)(b-x)}}$$

$$=\frac{2(a+b)x}{x\sqrt{\left(\frac{a}{x}+1\right)\left(\frac{b}{x}+1\right)}+\sqrt{\left(\frac{a}{x}-1\right)\left(\frac{b}{x}-1\right)}}$$

$$=\frac{2(a+b)}{\sqrt{\left(\frac{a}{x}+1\right)\left(\frac{b}{x}+1\right)}+\sqrt{\left(\frac{a}{x}-1\right)\left(\frac{b}{x}-1\right)}}$$

故

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(a+x)(b+x)}-\sqrt{(a-x)(b-x)}\right)=\frac{2(a+b)}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=a+b$$

(II) 應用次之諸定理者

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

例 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a$ (1^∞ 之形)

(此證明在第37節例2。)

例 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$, $a>0$, $b>0$ $\left(\frac{0}{0}\text{之形}\right)$

$$\frac{a^x-b^x}{x}=\frac{e^{x\log a}-e^{x\log b}}{x}$$

$$=\frac{e^{x\log b}\left(e^{x\log\frac{a}{b}}-1\right)}{x\log\frac{a}{b}}\log\frac{a}{b}$$

然令 $x\log\frac{a}{b}=y$, 則

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x\log\frac{a}{b}}-1}{x\log\frac{a}{b}}=\lim_{y\to0}\frac{e^y-1}{y}=1$$

故所求之極限值爲

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{x}=\left(\lim_{x\to0}e^{x\log b}\right).1.\log\frac{a}{b}=\log\frac{a}{b}$$

例 3. $\lim_{x\to0}\left(\frac{a+x}{a}\right)^{\frac{1}{x}},\quad a>0\quad(1^\infty$之形)

先令

$$A=\left(\frac{a+x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}$$

則

$$\log A=\frac{1}{x}\log\frac{a+x}{a}=\frac{\log(1+\frac{x}{a})}{x}$$

於此令 $\frac{x}{a}=y$ 則

$$\log A=\frac{\log(1+y)}{ay}$$

故

$$\lim_{y\to0}\log A=\frac{1}{a}$$

由是

$$\lim_{x\to0}A=e^{\frac{1}{a}}$$

例 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{a}{x}\right)^x$ (1^∞之形)

x 十分大時,$\frac{a}{x}$ 逼近於 0, 故

$$0<\cos\frac{a}{x}<1$$

從此可知所求之極限值為 0 為 1, 或為 0 與 1 間之數。

然於又一方為

$$\cos\frac{a}{x}=1-2\sin^2\frac{a}{2x}$$

$$>1-2\left(\frac{a}{2x}\right)^2$$

故

$$\left(\cos\frac{a}{x}\right)^x>\left(1-\frac{a^2}{2x^2}\right)^x$$

然

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{a^2}{2x^2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{a^2}{2x^2}\right)^{x^2}\right\}^{\frac{1}{x}}$$

於是

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{a^2}{2x^2}\right)^{x^2}=e^{-\frac{a^2}{2}} \qquad \text{(依例 1)}$$

故 (第 37 節)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{a^2}{2x^2}\right)^x=\left(e^{-\frac{a^2}{2}}\right)^0=1$$

由是知所求之極限值,結果為 1。

(III) 導歸於 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 者

例. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x$ ($0.\infty$之形)

令 $\frac{\pi}{2}-x=y$ 則

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x=2\lim_{y\to 0}y\tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$$

$$=2\lim_{y\to 0}y\cot y$$

$$=2\lim_{y\to 0}\left(\frac{y}{\sin y}\cos y\right)$$

$$=2.$$

(IV) 變數僅取自然數之值者,有次之定理。

定理 1. x 超過一定自然數而增大時,常 $f(x)>0$, 且有

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}>k>1$$

之常數 k 存在,則

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

蓋今設 $x>n$ (n 爲一定自然數)時,本定理之假定爲成立者,則

$$\frac{f(n+2)}{f(n+1)}>k$$

故 $$f(n+2)>k\,f(n+1)$$

同理 $$f(n+3)>k\,f(n+2)$$

從而 $$f(n+3)>k^2f(n+1),$$

以下如上得

$$f(n+4)>k^3f(n+1)$$

$$f(n+5)>k^4f(n+1)$$

....

然 $k>1$ 因得

$$\lim_{m\to\infty} k^m f(n+1)=\infty$$

故

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

定理 2. x 超過一定自然數而增大時,常有

$$\left|\frac{f(x+1)}{f(x)}\right|<k<1$$

之常數 k 存在,則

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

蓋如前定理,得

$$|f(n+2)|<k\,|f(n+1)|$$

$$|f(n+3)|<k^2|f(n+1)|$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

然 $0<k<1$ 因得

$$\lim_{m\to\infty} k^m|f(n+1)|=0$$

故

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

例 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{n!}$.

$0\leqq x\leqq 1$ 時此極限值爲 0 明也,

$x>1$ 時爲 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 之形。然今命

$$\frac{x^n}{n!}=f(n)$$

則

$$\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}=\frac{x}{n+1}$$

故 n 至於十分大,則常可求得

$$\left|\frac{f(n+1)}{f(n)}\right|<k<1$$

之常數 k。故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$$

從此可知 $x<0$ 時,此極限值亦常爲 0。

例 2.　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$　　　(∞^0 之形)

依前例設 M 爲如何大之正數,則

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M^n}{n!}=0$$

故 n 十分大時,常爲

$$\frac{M^n}{n!}<1$$

從得

$$n!>M^n$$

故

$$\sqrt[n]{n!}>M$$

卽 M 雖爲如何大,然相應於此之 n 達於十分大時,$\sqrt[n]{n!}$ 常較 M 大。故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$$

(V) 次之定理,亦屢有用處。

定理 3. $x\to\infty$ 時,二式

$$f(x+1)-f(x) \quad 及 \quad \frac{f(x)}{x}$$

有同一極限值,或(除不定者外)俱為 ∞ 或俱為 $-\infty$。

欲證明之,可先設第一式為有有限確定之極限值 k,當 x 達於某值例如 h 之後,$f(x+1)-f(x)$ 常取 $(k+\varepsilon)$ 與 $(k-\varepsilon)$ 間之值,但 ε 為隨意選定之小正數。依此得

$$|f(h+1)-f(h)-k|<\varepsilon$$

$$|f(h+2)-f(h+1)-k|<\varepsilon$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|f(h+n)-f(h+n-1)-k|<\varepsilon$$

故相加得

$$|f(h+n)-f(h)-nk|<n\varepsilon$$

此 h 不必限為整數,故吾人常可就 $x=h+n$ 者考之。由是

$$|f(x)-f(h)-(x-h)k|<(x-h)\varepsilon$$

故

$$\left|\frac{f(x)}{x}-\frac{f(h)}{x}-\left(1-\frac{h}{x}\right)k\right|<\left(1-\frac{h}{x}\right)\varepsilon$$

據此令 $x\to\infty$ 則

$$\left|\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-k\right|<\varepsilon$$

然 ε 可取為如何小,故欲使此關係成立,不可不

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k=\lim_{x\to\infty}\left\{f(x+1)-f(x)\right\}$$

次爲令

$$\lim_{x\to\infty}\left\{f(x+1)-f(x)\right\}=\infty$$

取如何大之正數M,及對於此之十分大之h,則常

$$f(h+1)-f(h)>M$$

$$f(h+2)-f(h+1)>M$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(h+n)-f(h+n-1)>M$$

故相加得

$$f(h+n)-f(h)>nM$$

卽

$$f(x)-f(h)>(x-h)M$$

從而

$$\frac{f(x)}{x}-\frac{f(h)}{x}>\left(1-\frac{h}{x}\right)M$$

於是使$x\to\infty$,則

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}>M$$

從此得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$$

極限值爲$-\infty$時,亦可如上證明之。

例 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{之形}\right)$

先考次式

$$\log(x+1)-\log x=\log\frac{x+1}{x}=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

故

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\log(x+1)-\log x\right\}=\log 1=0$$

依此得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$$

例 2.　$\lim_{n\to\infty}\frac{e^x}{x^n}$.　　　$\left(\frac{\infty}{\infty}\text{ 之形}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}(e^{x+1}-e^x)=\lim_{n\to\infty}e^x(e-1)=\infty$$

故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty$$

更使用此結果,則

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{x+1}}{x+1}-\frac{e^x}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}\left(\frac{ex}{x+1}-1\right)=\infty.$$

從而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\infty$$

如上反覆行之,則得對於隨意自然數 n 者如次。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty$$

例 3.　$\lim_{x\to 0}x^x$.　　　(0^0 之形)

先取對數則

$$\log(x^x)=x\log x.$$

令 $\log x=-y$，則 $x=e^{-y}$，而 $x\to0$ 時 $y\to\infty$。故

$$\lim_{x\to0}(x\log x)=\lim_{y\to\infty}\frac{-y}{e^y}=0 \qquad \text{(例 2)}$$

由是得

$$\lim_{x\to0}x^x=e^0=1$$

例 4. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}}{n}$$

令

$$f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$$

則

$$\lim_{n\to\infty}\left\{f(n+1)-f(n)\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

故所求之極限值爲 0。

(別解)　如次亦能解之。

普通有次之關係。(問題 V, 12)

$$\frac{1}{n+1}<\log\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

取此不等式之前半，則

$$\frac{1}{n+1}<\log\frac{n+1}{n}.$$

於此順次令 n 爲 $1, 2, \cdots\cdots, n-1$ 則

$$\frac{1}{2}<\log\frac{2}{1}$$

$$\frac{1}{3}<\log\frac{3}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

……………

$$\frac{1}{n}<\log\frac{n}{n-1}$$

各邊相加,且加 1 於其兩邊,則

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<1+\log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\cdots\frac{n}{n-1}\right)$$

$$=1+\log n$$

同理從上不等式之後半,得

$$\log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$$

依此得

$$\frac{\log(n+1)}{n}<\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}}{n}<\frac{1+\log n}{n}$$

然

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\log(n+1)}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\right\}=0 \qquad \text{(例 1)}$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\log n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{\log n}{n}\right)=0 \qquad \text{(例 1)}$$

從而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}}{n}=0$$

問　題　VI

1. $x\to 0$ 及 $x\to\infty$, 試求次式之極限值.

$$\frac{3x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{2}}}.$$

2. 求次之極限值。

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$,　(n 爲自然數)

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}-(x-1)}{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt{x-1}}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^m-1)^2-(x^m-1)(x^n-1)+(x^n-1)^2}{(x^m-1)^2+(x^m-1)(x^n-1)+(x^n-1)^2}$,

(m, n 爲自然數)

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$,　$(a\neq 0)$

(5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a+\sqrt{2a^2-2ax}-\sqrt{2ax-x^2}}{a-x+\sqrt{a^2-x^2}}$　$(a\neq 0)$

3. $x\to\infty$, 試求次之各式之極限值。

(1) $\dfrac{a^x-1}{x}$,　$(a>0)$

(2) $\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$,　$(a>0,\ a\neq 1)$

4. $x\to 0$, 試求次之各式之極限值。

(1) $\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$,

(2) $x\log_a x$　$(a>0,\ a\neq 1)$

5. 求次之極限值。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\log(1+x)}$,

(2) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{1-\dfrac{x^2}{\pi^2}}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\log(1+x)}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \log x$

(5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \cos x \log \tan x.$

(6) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^{\sin x}$

(7) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x^2-1}}$

(8) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{(x-1)^2}}$

6. $x\to\infty$ 時 $f(x)>0$, 則二式

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} \quad 及 \quad f(x)^{\frac{1}{x}}$$

有同一之極限值否,且(除不定者外)證明其俱爲∞。

7. $x\to\infty$, 試求次之各式之極限值。

(1) $x^{\frac{1}{x}}$

(2) $(\log x)^{\frac{1}{x}}$

(3) $(x!)^{\frac{1}{x}}$ (x 爲自然數)

(4) $(ax^n+bx^{n-1}+\cdots\cdots+c)^{\frac{1}{x}}$

8. 自然數 n 無限增大,則 $\sqrt[n]{n}$ 之極限值如何。

9. n 爲較 1 大之自然數,試證明

$$0<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\log n<1$$

II. 幾何極限

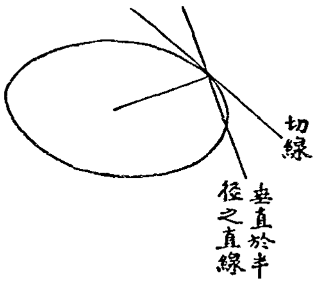
極限之思想,不特可驗於變數,且可推而及於幾何圖形,或其他也。蓋謂變數 x 之極限值爲 a 者,實爲 x 無窮近於 a 之意義。近者謂 $|x-a|$ 小也,無窮近者謂 $|x-a|$ 較隨意小之正數更小也。然則變數以外,(例如幾何圖形)凡有所謂無窮近之得以規爲定義者,皆可與變數同論其極限明矣。

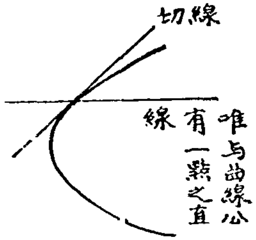
次論初等幾何學範圍內關於極限之二三問題。

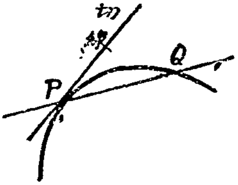
(I) 切線之定義

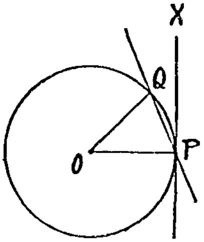
圓之切線之定義,或謂之「垂直於半徑端之直線」或謂之「唯與圓周公有一點之直線」,在初等定義雖無不可,但自稍爲高等之立脚地觀之,此二者皆未涉及切線之本質,何足以當定義。蓋對於圓以外之曲線,此等定義皆不能通用故也。

例如對於橢圓,垂直於半徑端之直線,未必爲切線,又對於拋物線,與之公共一點者,亦未必爲切線。









通用於普通曲線之切線定義如次。

以曲線上相異二點為 P, Q, 今引直線 PQ, 固定 P 使 Q 沿其曲線無窮逼近於 P, 則直線 PQ, 無窮近於過 P 之某一定直線,此一定直線,名曰在點 P 之此曲線之切線。

但 Q 近於 P 者,謂 PQ 之長小也,又 PQ 近於過 P 之某一定直線者,視為在 P 相交之兩者間之角甚小可也。

例如於 O 為中心之圓周上之一點 P, 作垂直於 OP 之直線 PX, 又以圓周上 P 外之一點為 Q, 則

$$Q\hat{P}X=\frac{1}{2}POQ$$

故 Q 在圓周上無窮近於 P 時, $Q\hat{P}X$ 為無窮小。故 PX 為在 P 之切線。

注意. 以上定義中,所宜注意之要點,為 Q 沿其曲線以近於 P。若離此線而隨意近於 P, 則直線 PQ 可無窮近於過 P 之隨意直線。

若用所謂極限之語,則在 P 之切線,即為直線 PQ 之極

限。但此僅爲考究位置者，故亦可謂 PQ 之極限位置爲切線。

依此可將切線之定義易言如次。

在曲線上一點 P 之切線，爲連結其曲線上 P 外之隨意一點 Q 與 P，而使 Q 沿曲線無窮近於 P 時(爲趨近於 P 時)之直線 PQ 之極限。

注意. 本節爲從高等立脚地之見解，論切線之定義者，非敢主張初等算學教授，應用如此定義也。

(II)　有謂直線可視作圓之半徑爲無限大之極限者其意義如何。

今取一圓，固定其中心，而使半徑漸次增大，則圓周向一切方向次第擴張，遂入於廣漠無涯不可思議之域。然則吾人果何所捕捉而謂之極限耶。

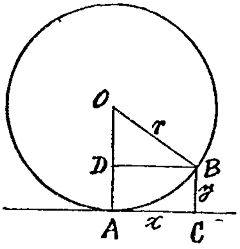
但自一方考之，圓之半徑漸大，則其弧之曲度漸減，此常識所承認之事實也。故使半徑爲無限大，則其弧亦爲如何平直之形，即其接近於直線之情狀，不難想像也。

然則吾人可改最初所考者如次。

先取一圓，固定其周上一點，使其中心漸次離遠，則其半徑漸次增大，可知也。

若然則在最初固定一點鄰近之圓之弧，無窮近於其點之切線可證明也。但謂弧近於切線者，蓋指自其弧上各點，下於切線之垂線之長，皆爲甚小也。證明之如次。

以圓之中心爲 O，圓周上一點爲 A，他點爲 B，從 B 向



在 A 之切線下垂線 BC, 及向 OA 下垂線 BD, 令

$$OA=OB=r,\qquad AC=DB=x,\qquad BC=DA=y$$

則

$$OD^2+DB^2=OB^2$$

即 $$(r-y)^2+x^2=r^2$$

從此得次式,

$$y=\frac{x^2+y^2}{2r}$$

今僅考 A 之鄰近, 則 x^2+y^2 爲有限之大。 故於此令 $r\to\infty$ 則 $y\to 0$。 即 B 無窮近於 A 點之切線。

於此意義,可視一切直線爲切於此之一圓之半徑,達於無限大時之圓之極限。

於此有不可忘者,今吾人僅考其切點鄰近之事也。若考此圓周之他部分,例如正在切點反對側之部分,則(上記部分)不得謂爲近於同一直線。(全須依其他方法考究,故爲

別一問題)

在解析幾何學,稱拋物線,橢圓,雙曲線之一焦點,趨向無窮遠之極限,亦與上有同一意義者也,

(III) 曲面積

內接於圓之多角形之各邊,達於無窮小 (從而邊數無窮多) 時,其周圍之長之極限爲圓周之長,此圓周之長之定義也,又如上內接多角形面積之極限爲圓之面積,此圓之面積之定義也,

隨意平面曲線之長,或空間曲線之長,及平面形之面積之定義,亦可按上方法定之,此積分學所論也,

又立體之體積,依上考究,亦可以內接多面體體積之極限爲定義,

但曲面之面積,不能應用以上方法,是宜注意。即欲下一曲面面積之定義,先作頂點皆在其面上之多面體,(不必爲包圍空間之體,亦有爲多角形之連結者) 其稜達於無窮小時,此多面體表面積之極限,爲最初曲面之面積,此在常識,似屬確當,實則未必得當也。 次舉一例,示其所以不當之故。

今取半徑 r 高 h 之直圓壔,欲採如次之方法,決定其曲面積。

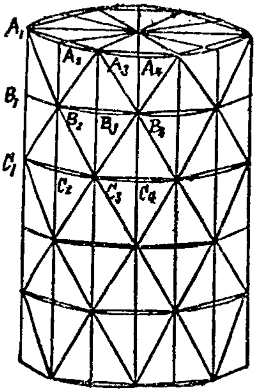
先將此圓壔之軸,n 等分之,過各分點作平行於底面之平面,則以其與曲面相交,而生 $(n-1)$ 個圓周。 次將底面之圓周 $2m$ 等分之,引過各分點之母線,則與兩底之周,及上記 $(n-1)$ 個圓周相交,各得 $2m$ 個點, 如圖命名爲

$$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_{2m}$$

$$B_1, B_2, \cdots\cdots, B_{2m}$$

$$C_1, C_2, \cdots\cdots, C_{2m}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$



於是作如次之 $2mn$ 個三角形

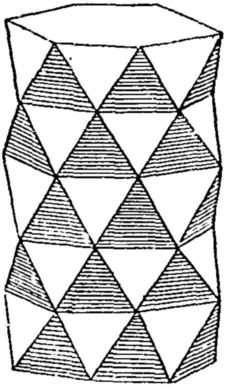
$$A_1B_2A_3,\quad B_2A_3B_4,\quad A_3B_4A_5,\ \cdots\cdots,\ B_{2m}\ A_1B_2,$$

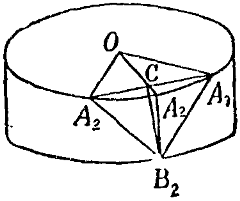
$$C_1B_2C_3,\quad B_2C_3B_4,\quad C_3B_4C_5,\ \cdots\cdots,\ B_{2m}\ C_1B_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

依此等三角形所連結而作之多面體,如圖呈有許多襞積之提燈形。今爲計算其表面積,令 m 及 n 俱爲無限大,則此圓壔之曲面積,果如吾人所豫期爲 $2r\pi h$ 與否,不可不一討論之





先求三角形 $A_1 B_2 A_3$ 之面積

$$A_1\hat{O}A_2 = A_2\hat{O}A_3 = \frac{2\pi}{2m} = \frac{\pi}{m}$$

$$A_1A_3 = 2r\sin\frac{\pi}{m}$$

$$CA_2 = OA_2 - OC = r\left(1-\cos\frac{\pi}{m}\right) = 2r\sin^2\frac{\pi}{2m}$$

$$A_2B_2 = \frac{h}{n}$$

$$CB_2 = \sqrt{\overline{A_2B_2}^2 + \overline{CA_2}^2} = \sqrt{\frac{h^2}{n^2} + 4r^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}$$

故

$$\triangle A_1B_2A_3 = \frac{1}{2}\overline{A_1A_3}\cdot\overline{CB_2} = r\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{h^2}{n^2} + 4r^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}$$

依此得全表面之面積為

$$2mn\cdot\triangle A_1B_2A_3 = 2mn\,r\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{h^2}{n^2} + 4r^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}$$

$$= 2r\left(m\sin\frac{\pi}{m}\right)\sqrt{h^2 + 4r^2n^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}.$$

於是使 m,n 俱爲無限大,則

$$\lim_{m\to\infty}\left(m\sin\frac{\pi}{m}\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\pi\frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}}\right)=\pi$$

又以

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}}=1$$

故上之全表面之極限值,等於

$$2\pi r\sqrt{h^2+4r^2n^2\left(\frac{\pi}{2m}\right)^4}\ 之極限值,$$

卽

$$2\pi r\sqrt{h^2+\frac{\pi^4r^2}{4}\left(\frac{n}{m^2}\right)^2}\ 之極限值,$$

故此極限值,爲關於 m,n 俱爲無限大時之比 $\frac{n}{m^2}$ 者

$$\frac{n}{m^2}\to 0\ 時,面積爲\ 2\pi rh,$$

否則常較 $2\pi rh$ 大,但

$$\frac{n}{m^2}\to\infty\ 時,面積爲\ \infty$$

此卽示曲面積之考究,非僅就其內接多面體表面積之極限,所能決定之之一例也。

III. 超越函數

尋常實行辨別隨意所設函數,究爲代數函數,抑爲超越函數,在初等算學範圍,必不容易。

茲欲證明四個代表的初等超越函數,即就三角,反三角,指數,對數各函數,證明其爲超越函數.

今以 x 爲變數,以其隨意有理整式爲 $A, B, C, \cdots\cdots, K$,則所謂 x 之代數函數者,即爲如次

$$Ay^n+By^{n-1}+Cy^{n-2}+\cdots\cdots+K=0 \qquad (n\text{ 爲自然數})$$

之 y 是也。從此直可推知者,對於 x 之一值,所生 y 之值之個數,必爲有限,蓋如代數學所考,n 次方程式,不能有多於 n 個之根也。n 得爲種種自然數,固不俟論,然取一代數函數考之,必有一確定之 n,從可知對於一 x 之 y,不能取較其 n 更多之相異之值。

行此簡易觀察,吾人直可得**反三角函數非代數函數**之結論。蓋反三角函數,對於變數之一值,爲有無窮多之相異值之多值函數故也。

但代數函數之反函數,亦爲一代數函數.(問題 II, 15) 從此可知**三角函數非代數函數**,蓋三角函數,若爲代數函數,則爲其反函數之反三角函數,亦不可不爲代數函數,是與上之結論矛盾故也。

次將就指數函數考之矣;未考之前,應先認明關於代數函數之次之性質。

以 y 爲 x 之代數函數,命

$$Ay^n+By^{n-1}+\cdots\cdots+K=0 \tag{1}$$

$$\begin{cases} A=a_0x^a+a_1x^{a-1}+\cdots\cdots+\cdots\cdots \\ B=b_0x^\beta+b_1x^{\beta-1}+\cdots\cdots+\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K=k_0x^k+k_1x^{k-1}+\cdots\cdots+\cdots\cdots \end{cases}$$

今以 A 爲無有常數項者,例如令

$$A=a_0x^a+a_1x^{a-1}+\cdots\cdots+a_hx^{a-h}$$

$$a_0\neq0,\qquad a_h\neq0,\qquad h\neq a$$

則當 $x\to0$ 時, $A\to0$。 故變 (1) 之形爲

$$K\left(\frac{1}{y}\right)^n+\cdots\cdots+B\left(\frac{1}{y}\right)+A=0$$

從此式考之,可知 $x\to0$ 時 $\frac{1}{y}\to0$。(但 y 爲多值函數故 $\frac{1}{y}$ 之值,雖有種種,但其中至少有一值趨近於 0, 以下皆爲考此一值者。) 從而 $x\to0$ 時, $y\to\pm\infty$。

此 A 能以 x^{a-h} 除盡之,但非較此高之 x 之羃所能除盡,故今爲簡單記號計,普通以除盡

$$A,\ B,\ C,\ \cdots\cdots,\ K$$

之 x 之最高羃爲

$$x^a,\quad x^b,\quad x^c,\ \cdots\cdots,\ x^k$$

假定此等中最大之指數爲 g, 又令

$$A=A'x^a,\quad B=B'x^b,\ \cdots\cdots,\ K=K'x^k$$

更令

$$x^gy=z\quad 卽\quad y=\frac{z}{x^g}$$

則 (1) 爲

$$\frac{A'}{x^{ng-a}}z^n+\frac{B'}{x^{(n-1)g-b}}z^{n-1}+\cdots\cdots+K'x^k=0 \tag{2}$$

於是依 g 爲最大指數之假定,直可知

$$ng-a\geqq(n-1)g-b\geqq\cdots\cdots$$

故以 x^{ng-a} 乘 (2) 之兩邊,則各項 z 羃之係數,皆爲關於 x 之整式。且 z^n 之係數爲

$$A'=a_0x^h+a_1x^{h-1}+\cdots\cdots+a_h \qquad a_h\neq 0$$

當 $x=0$ 時 $A'\neq 0$。

故 $x=0$ 時之 z 之值爲有限。依此得次之定理。

<u>y 爲 x 之代數函數,當 $x\to 0$ 時,$y\to\pm\infty$,但以 g 爲適當之正整數,則 $x\to 0$ 時得使 $x^g y$ 爲有限。</u>

若 $x\to\pm\infty$ 時,$y\to\pm\infty$,則可令 $\frac{1}{x}=u$,而視 y 爲 u 之代數函數,若然則 $u\to 0$ 時,$y\to\pm\infty$。故從上定理,又直得次之定理。

<u>y 爲 x 之代數函數,當 $x\to\pm\infty$ 時 $y\to\pm\infty$,但以 g 爲適當之正整數,則 $x\to\pm\infty$ 時,得使 $\frac{y}{x^g}$ 爲有限。</u>

依此定理可知**指數函數 e^x 非 x 之代數函數矣**。蓋依 188 頁例 2,雖以 n 爲如何自然數,卒不能使

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty$$

爲有限也。

從此可知 e^x 之反函數 $\log x$ **亦非代數函數矣**。

IV. 超越數

有一切係數皆爲整數之代數方程式

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots\cdots + a_n = 0 \tag{1}$$

(n 爲自然數 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 爲整數 $a_0 \neq 0$)

則得爲此方程式之根之數,總稱之曰代數數。

例如

$\sqrt{2}$ 爲 $x^2-2=0$ 之根,

$\sqrt{3-\sqrt{2}}$ 爲 $x^4-6x^2+7=0$ 之根,

$\frac{1}{2}+3i$ 爲 $4x^2-4x+37=0$ 之根,

$\sin 10°$ 爲 $3x-4x^3=\sin 30°$ 卽 $8x^3-6x+1=0$ 之根,

皆爲代數數。

注意. 有爲代數數而不能用根號精確表之者。例如五次方程式

$$x^5-5x-5=0$$

之根,雖爲代數數,卻不能化作根數以表之。

次之三項,爲從上定義卽可發生之結果。

(1) 有一切係數爲有理數之代數方程式,則得爲此式之根之數,爲代數數。

蓋以一切係數之分母之公倍數,乘其方程式之兩邊,則一切係數皆爲整數故也。

(2) 一切有理數,皆爲代數數。

以其有理數爲$\frac{p}{q}$,則此數必能適合於

$$x=\frac{p}{q} \quad \text{或} \quad qx-p=0$$

一次方程式故也。

(3)　一切根數,皆爲代數數。

蓋冠有理數以根號而表之之數,(卽根數)不問其根號錯雜如何,可先令其等於x,施行適當之加減乘除,增高其兩邊之羃,則遂達於有有理係數之方程式也。依次例可知其眞。

例.

$$x=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}.$$

$$4(x-\sqrt{3})^2=\sqrt{5}-1.$$

$$\{4(x-\sqrt{3})^2+1\}^2=5.$$

$$(4x^2-8\sqrt{3}\,x+13)^2=5$$

$$16x^4-64\sqrt{3}\,x^3+296\,x^2-208\sqrt{3}\,x+169=5$$

$$4\,x^4+74\,x^2+41=4\sqrt{3}(4\,x^2+13)\,x$$

$$(4\,x^4+74\,x^2+41)^2=48(4\,x^2+13)^2\,x^2$$

如此一切有理數及根數,皆爲代數數,然轉之,不得謂代數數爲有理數或根數,

故所謂代數數者,有較根數更廣之意義。雖然一切無理數,亦非盡爲代數數,其關係表示如下

$$\text{數}\left\{\begin{array}{l}\text{有理數}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \text{無理數}\left\{\begin{array}{l}\text{根數}\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \text{不爲根數者之一部}\\ \text{不爲根數者之一部}\end{array}\right.\end{array}\right.\quad \text{代數數}$$

欲證明非代數數(是無理數不待論)之存在,只須證明次之二定理足矣。

定理 1. 凡代數數之集爲可數集

定理 2. 凡實數之集爲不可數集

從此直可推知實數之中,有非代數數之存在。欲證明定理 1,應先考對於方程式 (1) 之如次之一數 N

$$N=n-1+|a_0|+|a_1|+\cdots\cdots+|a_n|$$

但 $|a_0|$ 爲 a_0 之絕對值,其他準此。N 名曰方程式(1)之高度,

N 明爲整數且至少爲 1。蓋 n 至少爲 1,又 $a_0, a_1, \cdots\cdots$ 中至少有一不爲 0 也。

又有所設一高度 N 之方程式之數爲有限。蓋 N 爲正整數之和,其表之之方法之數,本屬有限,而此等數依所有順序排列之方法之數,亦爲有限故也,

例令 $N=1$

則限於 $n=1,\quad |a_0|=1$

$N=2$

則限於 $n=1,\quad |a_0|=1,\quad |a_1|=1,$

或 $n=1,\quad |a_0|=2$

或 $n=2,\quad |a_0|=1$

三種。故有高度 2 之方程式,可限於

$$x+1=0,\qquad x-1=0$$

$$2x=0$$

$$x^2=0$$

故吾人於所有如 (1) 之代數方程式中,以其高度相等者各爲一羣,則生 $N=1, 2, 3, \cdots\cdots$ 等之各羣,而屬於各羣之方程式之數爲有限。然則先於 $N=1$ 者,附以數號,次於 $N=2$ 者附以數號,如此次第進行,則無論如何之方程式,必可附以何等之數號。故方程式 (1) 之一切集爲可數集。

然各方程式,皆有有限數之根。故其一切根之集,即一切代數數之集,亦爲可數集。

次證明定理 2 (第 10 節已證明之,玆更揭其別證。)

先假定一切實數爲可數者,且設順其數號並列如次。

$$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots \tag{2}$$

於是以 a_1, a_2 中之小者名之爲 b_1,大者名之爲 b_2,即

若 $a_1<a_2$ 則

$$b_1=a_1, \qquad b_2=a_2$$

若 $a_1>a_2$ 則

$$b_1=a_2, \qquad b_2=a_1$$

皆爲 $b_1<b_2$

次於 $a_3, a_4, \cdots\cdots$ 中,必有某者之大在 b_1, b_2 間,某者較 b_1 小或較 b_2 大。今以 a_3 以下,初落於 b_1, b_2 者,例如 a_k 名之爲 b_3。即

$$b_3=a_k$$

是爲

$$b_1<b_3<b_2$$

次以 a_{k+1} 以下,初落於 b_3, b_2 間者,名之爲 b_4。則從之得

$$b_1<b_3<b_4<b_2$$

次更以其數以下,初落於 b_3, b_4 間者爲 b_5, 卽

$$b_1<b_3<b_5<b_4<b_2$$

次第如此,可得如次之不等式,

$$b_1<b_3<b_5<\cdots\cdots<b_{2n-1}<\cdots\cdots \tag{3}$$

$$\cdots\cdots<b_{2n}<\cdots\cdots<b_6<b_4<b_2 \tag{4}$$

此手續無論如何行去,終無底止,蓋無論二 b 至於如何接近,其間仍尙有無窮多之實數.故限定(2)爲含有一切實數者,則其可入於二 b 間之 a 必應存在於 (2) 之數列之殘部中也。

但 $b_1, b_3, b_5, \cdots\cdots$ 等奇數號之 b, 雖次第增大終不超過 b_2, 故依第20節定理 1

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n-1}=\beta$$

有有限確定之極限値 β 存在。 又同理

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n}=\beta'$$

亦有極限値存在。

而此

$$\beta\leqq\beta'$$

明也,蓋 b_{2n-1} 常較 b_{2n} 小故也。 但自又一方面考之,若 $\beta<\beta'$ 則 β, β' 間之數,必不含於 (2) 中,然則 (2) 非含有一切實數者,是反於假定矣。 故必

$$\beta=\beta'$$

此公共極限値 β, 決非 (2) 中所含之數。蓋若 β 含於 (2) 中,則必爲一 b 是可取而得也。然 (3) 次第增大,可以無限繼續,故其中一數,適達於極限値之事,實不可能。(4) 亦準此。

由是觀之, (2) 亦非含有一切實數者,蓋現逸 β 一數也,故一切實數爲可數者之假定,未能成立。

按以上研究,當知一切代數數雖可數,而一切實數,卻爲不可數者矣。

故一切實數中,有非代數數存在可知已。如此之數,總稱之曰**超越數**。

第五章所論之數 e 及 π, 皆爲超越數。其證明從略。

問題之解答

I.

6. 假使此式在 n 時爲眞,乘兩邊以 $\frac{2n+1}{2n+2}$。然後依二數之相加平均,(或算術平均) 較相乘平均 (或幾何平均) 大,證明

$$\frac{1}{\sqrt{2n+3}}>\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}$$

及

$$\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}>\frac{\sqrt{n+2}}{2n+3}$$

則得

$$\frac{1}{\sqrt{2n+3}}>\frac{1.3.\cdots\cdots(2n+1)}{2.4.\cdots\cdots(2n+2)}>\frac{\sqrt{n+2}}{2n+3}$$

7. 令 $p_n=(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$ 則

$$p_{n+1}=p_n+x_{n+1}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$$

$$+(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)\frac{1}{x_{n+1}}+1$$

$$=p_n+\left(\frac{x_{n+1}}{x_1}+\frac{x_1}{x_{n+1}}\right)+\left(\frac{x_{n+1}}{x_2}+\frac{x_2}{x_{n+1}}\right)+\cdots\cdots$$

$$+\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)+1$$

然普通

$$\frac{x_{n+1}}{x_1}+\frac{x_1}{x_{n+1}}\geqq 2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故 $$p_{n+1}\geqq p_n+2n+1\geqq n^2+2n+1$$

卽 $$p_{n+1}\geqq(n+1)^2$$

8. 兩邊乘以 2 則

$$2^{n+1}>2+n\sqrt{2^{n+1}}$$

於此證明

$$2+n\sqrt{2^{n+1}}>1+(n+1)\sqrt{2^n}$$

可也，變此式之形則

$$n\sqrt{2^n}(\sqrt{2}-1)>\sqrt{2^n}-1,$$

卽 $$n\sqrt{2^n}>\sqrt{2^{n-1}}+\sqrt{2^{n-1}}+\cdots\cdots+\sqrt{2}+1,$$

此明為真。

或於原式之兩邊加 2^n 則

$$2^{n+1}>1+n\sqrt{2^{n-1}}+2^n$$

於此證明

$$n\sqrt{2^{n-1}}+2^n>(n+1)\sqrt{2^n}$$

可也，變此式之形，則

$$\sqrt{2}(\sqrt{2^n}-1)>n(\sqrt{2}-1)$$

卽

$$\sqrt{2}(\sqrt{2^{n-1}}+\cdots\cdots+\sqrt{2}+1)>n$$

此明為真。

9. 將所欲證明之式之兩邊，自乘而觀之可也。

10. 欲證明 $\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}$，則證明

$$n^{n+1}>(n+1)^n$$

卽

$$n>\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

可也。此兩邊乘以$\frac{n+1}{n}$，則

$$n+1>\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

然

$$\frac{n+1}{n}>\frac{n+2}{n+1}$$

故

$$n+1>\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$$

(設已知第29節之理論，則

$$n \geqq 3 > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

卽明矣。)

11. 命 $p_n=(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ 則

$$p_n\{(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})\}$$
$$=p_{n+1}+(3+\sqrt{5})^n(3-\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})^n(3+\sqrt{5})$$

卽 $$6p_n=p_{n+1}+4(3+\sqrt{5})^{n-1}+4(3-\sqrt{5})^{n-1}$$

依此得 $$p_{n+1}=6p_n-4p_{n-1}$$

故 p_n 能以 2^n 除盡之, p_{n-1} 能以 2^{n-1} 除盡之,則 p_{n+1} 可以 2^{n+1} 除盡之。

12. 以直線爲 $n+1$ 條,則部分之數,更增 $(n+1)$ 個宜注意之。

II.

13.

(1) $$\begin{cases} x \leqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ 時 } y=-x \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ 時 } y=\sqrt{1-x^2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \text{ 時 } y=x \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} x \leqq 0 \text{ 時 } y=\dfrac{x}{\sqrt{3}} \\ 0 \leqq x \leqq 1 \text{ 時 } y=0 \\ 1 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2} \text{ 時 } y=\sqrt{3}(x-1) \\ \dfrac{3}{2} \leqq x \text{ 時 } y=\dfrac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

14. $y=\frac{x}{2}\left\{1-(-1)^x\right\}$. ($x$ 爲 0 或自然數)

17. 以 f 之反函數爲 f^{-1},則依問題 15,f^{-1} 亦爲代數函數. 然則 $f\{g(x)\}$ 若爲代數函數,則 $f^{-1}[f\{g(x)\}]$ 依問題 16 亦不可不爲代數函數。然於一方面爲

$$f^{-1}[f\{g(x)\}]=g(x)$$

依假定此爲超越函數。

又 $g\{f(x)\}$ 若爲代數函數,則以之爲 $F(x)$, 又令 $f(x)=y$ 則

$$g(y)=F\{f^{-1}(y)\}$$

此右邊爲代數函數,是反於 $g(x)$ 爲超越函數之假定。

III.

1. (1) $-\frac{3}{5}$. (2) 2.

(3) 0. (4) $-\infty$

2. $x\to\infty$ 時 (1) $\frac{1}{4}$. (2) $-\infty$

$x\to-\infty$ 時, (1) $\frac{1}{4}$. (2) ∞

3. 0

4. $x\to 0$ 時,爲 $\frac{a_n}{b_m}$.

$x\to\infty$ 時,

$$\begin{cases} n>m \text{ 則爲與 } \frac{a_0}{b_0} \text{ 同號之} \infty \\ n=m \text{ 則爲 } \frac{a_0}{b_0} \\ n<m \text{ 則爲 } 0 \end{cases}$$

$x\to-\infty$ 時,

$$\begin{cases} n>m \text{ 則爲與 } (-1)^{n-m}\dfrac{a_0}{b_0} \text{ 同號之 } \infty \\ n=m \text{ 則爲 } \dfrac{a_0}{b_0} \\ n<m \text{ 則爲 } 0 \end{cases}$$

5. (1) 1. (2) $\frac{1}{2}$. (3) $\frac{1}{3}$

6. (1) 第 $\frac{4}{5}$ 級。 (2) 第 1 級。

8. 令 $lim\frac{u}{v}=a$ 則 $lim\frac{u\pm v}{v}=a\pm1$. 故非 $a\pm1=0$, 則 $u\pm v$ 與 v 爲同級。

9. uv 爲第 $(m+n)$ 級, $\frac{u}{v}$ 當 $m>n$ 時爲無窮小,且爲第 $(m-n)$ 級。

10. 改「無窮小」爲「無限大」,則問題 7 不成立。 問題 8 及 9 無妨。

11. 第 1 級

12. 第 2 級

13. (1) 存在。(其極限值等於 $log\,2$ 可以微分學證明之。) (2) 存在。(其極限值爲 1 見問題 VI, 8)

14. (1) $\frac{1}{\sqrt{a}}$. (2) $\frac{1}{2}$.

15. 所題之式等於

$$\frac{\sqrt{1-x}\,(1+\sqrt{1+x})}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}$$

極限值爲 1。

16.　(1)　$\frac{a}{2}$.　(2)　0.

18.　$\frac{a_1+2a_2}{3}$.

19.　可倣照第20節例3方法。　但以 a_n 及 b_n 之極限值爲 α,β 則

$$\alpha=\sqrt{\alpha\beta}, \qquad \beta=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

從此得

$$\alpha=\beta$$

IV.

2.　$x=19$ 弱。(可求 $log\,x$ 及 $\frac{2}{1+x}$ 之格欄幅之交點。)

3.　$x=n\pi+(-1)^n\varepsilon$,　n 爲自然數, ε 爲微小之正數。(可求 $sin\,x$ 及 $\frac{e^{-x}}{10000}$ 之格欄幅之交點。)

4.　$x=-1+\varepsilon$,　ε 爲微小之正數。(令 $x=-y$ 取原方程式兩邊之對數, 則

$$-y=1000000\,log\,y$$

於是求此方程式之正根可也。)

8.　$\frac{1}{e}$

10.　$\frac{\pi}{180}$

11.　第3級。

12.　AC 爲第1級, BC 爲第2級。

13.　以對於弓形之弧之中心角爲 x, 半徑爲 r, 則此弓

形之面積爲

$$\frac{r^2}{2}(x-\sin x)$$

然 $x=2\frac{x}{2}>2\sin\frac{x}{2}$ 故

$$x-\sin x>2\sin\frac{x}{2}-\sin x=2\sin\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)$$

此右邊爲第 3 級之無窮小。

又 $x<\tan x$ 故

$$x-\sin x<\tan x-\sin x$$

此右邊依問題 11 爲第 3 級之無窮小。

綜合以上結果,則 $x-\sin x$ 亦爲第 3 級。

14. x

15. 宜注意於

$$2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}=\sin x$$

依此得所求之極限值爲$\frac{\sin x}{x}$

16. 於前題結果命 $x=\frac{\pi}{2}$ 可也。

V.

2. 綿續。其格欄幅在原點近傍,當 $x>0$ 時切於 x 軸,$x<0$ 時切於 $y=x$ 之直線。

4. $\log a$

5. $\log_a e$

6. (1) 第 1 級。 (2) 第 1 級。

(3)　第 1 級。　(4)　第 $\frac{1}{2}$ 級。

(5)　第 2 級。$\left\{\log\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right\}$

(6)　第 2 級。$\left\{\log\cos x=\frac{1}{2}\log(1-\sin^2 x)\right\}$

7.　2.

8.　$\frac{a}{b}$

9.　令 $\dfrac{\log(e^x-1)}{\log x}=\dfrac{\log\dfrac{e^x-1}{x}+\log x}{\log x}$，可也。

10.　先取 x^y 之對數則可利用前題求之。

12.　(1)　$e^{\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2!\,n^2}+\cdots\cdots>1+\frac{1}{n}$.

又　$e^{\frac{1}{n+1}}=1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2!(n+1)^2}+\cdots\cdots$

$$<1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\cdots,$$

故

$$e^{\frac{1}{n+1}}<\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=1+\frac{1}{n}$$

VI.

1.　$x\to 0$ 時爲 3，$x\to\infty$ 時爲 ∞.

2.　(1)　$\frac{1}{2}n(n+1)$　(2)　0.

(3)　$\dfrac{m^2-mn+n^2}{m^2+mn+n^2}$.　(4)　$\dfrac{1}{2a}$.

(5)　1.

3.　(1)　若 $a>1$ 則爲 ∞, 若 $a \leqq 1$ 則爲 0.

(2)　0.

4.　(1)　1.　　(2)　0.

5.　(1)　2.　　(2)　$\frac{\pi}{2}$.

(3)　1.　　(4)　0.

(5)　0.　　(6)　1.

(7)　$e^{\frac{1}{2}}$　　(8)　$x \to (1+0)$ 則爲 ∞,

$x \to (1-0)$ 則爲 0.

7.　(1)　1.　　(2)　1.

(3)　∞　　(4)　1.

8.　1.

9.　利用問題 V, 12 如本節 (V) 例 4 之別解證之可也.

中華民國二十年一月初版
中華民國二十二年二月國難後第一版
中華民國二十四年六月國難後第二版

算學叢書 極限論一冊 (54707)

每冊定價大洋貳元
外埠酌加運費匯費

原著者 竹內端三
譯述者 朱純熙
發行兼印刷者 商務印書館 上海河南路
發行所 商務印書館 上海及各埠

版權所有 翻印必究

C二三六九