Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Analysis I

Arbeitsblatt 22

Übungsaufgaben

Aufgabe 22.1. Bestimme sämtliche Taylor-Polynome der Funktion
$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 5$$
im Entwicklungspunkt $a = 3$.

Aufgabe 22.2. Bestimme das Polynom
$$f(z) = z^3 + 3z^2 - 7z - 4.$$
in der neuen Variablen $z - 2$ (also das umentwickelte Polynom) auf zwei verschiedene Arten, nämlich

a) direkt durch Einsetzen,

b) über das Taylor-Polynom im Entwicklungspunkt 2.

Aufgabe 22.3.*

Bestimme das Taylor-Polynom der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ im Entwicklungspunkt $a = 2$ der Ordnung 4.

Aufgabe 22.4.*

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 2 der Funktion
$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto f(z) = \frac{z^2 - z + 3}{z},$$
im Entwicklungspunkt i.

Aufgabe 22.5. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 3 der rationalen Funktion
$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 5}{x - 2}$$
im Entwicklungspunkt 0.

Aufgabe 22.6. Bestimme das Taylor-Polynom der Ordnung 4 zur Funktion $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ im Entwicklungspunkt $a = 3$.

Aufgabe 22.7. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 4 der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto (\sin z)(\cos z),$$

im Nullpunkt.

Aufgabe 22.8.*

Bestimme das Taylor-Polynom der Ordnung 3 zur Funktion

$$f(x) = x \cdot \sin x$$

im Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 22.9.*

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sin x}$$

im Reellen.

a) Bestimme den Definitionsbereich von f.

b) Skizziere f für x zwischen -2π und 2π.

c) Bestimme die ersten drei Ableitungen von f.

d) Bestimme das Taylor-Polynom der Ordnung 3 von f im Punkt $\frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 22.10.*

Bestimme das Taylor-Polynom der Ordnung 4 zur Funktion

$$f(x) = e^{x^2} - x$$

im Entwicklungspunkt $a = 1$.

Aufgabe 22.11.*

Bestimme das Taylor-Polynom der Ordnung 4 zur Funktion

$$f(x) = \sin x$$

im Entwicklungspunkt $\pi/2$.

Aufgabe 22.12. Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine im Punkt a n-fach differenzierbare Funktion. Zeige, dass das n-te Taylor-Polynom zu f im Punkt a, geschrieben in der verschobenen Variablen $x - a$, gleich dem n-ten Taylor-Polynom der Funktion $g(x) = f(x+a)$ im Nullpunkt (geschrieben in der Variablen x) ist.

Aufgabe 22.13. Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Vergleiche die polynomiale Interpolation zu $n+1$ gegebenen Punkten und die Taylor-Polynome vom Grad n zu einem Punkt.

Aufgabe 22.14. Man mache sich klar, dass man zu einer Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ das n-te Taylor-Polynom von f im Entwicklungspunkt b nicht aus dem n-ten Taylor-Polynom in einem Entwicklungspunkt a bestimmen kann.

Aufgabe 22.15. Es seien $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynome n-ten Grades und es seien $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ Punkte und $n_1, \ldots, n_k \geq 1$ natürliche Zahlen mit

$$\sum_{j=1}^{k} n_j > n.$$

Die Ableitungen von f und g in den Punkten a_j sollen bis einschließlich zur $(n_j - 1)$-ten Ableitung übereinstimmen. Zeige $f = g$.

Man mache sich zuerst die Aussage bei $k = 1$ und $n_1 = n+1$ und bei $k = n+1$ und $n_j = 1$ für alle j klar.

Aufgabe 22.16. Es sei $f(x) := \frac{x^2-x+5}{x^2+3}$. Bestimme ein Polynom h vom Grad ≤ 3, das in den beiden Punkten $x = 0$ und $x = 1$ die gleichen linearen Approximationen wie f besitzt.

Aufgabe 22.17.*

(1) Zeige, dass man mit Hilfe von Beispiel 22.5 und drei Summanden (also $m = 2$) auf dem Intervall $[-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}]$ eine polynomiale Abschätzung für den Kosinus mit einem Fehler $\leq \frac{1}{9}$ enthält.
(2) Zeige mit der Abschätzung aus (1), dass

$$\frac{\pi}{2} > \frac{4}{3}$$

gilt.
(3) Kann man mit der Abschätzung aus (1) auch zeigem, dass

$$\frac{\pi}{2} < \frac{5}{3}.$$

ist?

Aufgabe 22.18. Bestimme die erste Nachkommastelle von $\pi/2$ mit Hilfe von Beispiel 22.5.

Aufgabe 22.19. Bestimme die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion für einen beliebigen Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 22.20. Es sei $p \in \mathbb{R}[Y]$ ein Polynom und

$$g\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto g(x) = p\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zeige, dass die Ableitung $g'(x)$ ebenfalls von der Form

$$g'(x) = q\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

mit einem weiteren Polynom q ist.

Aufgabe 22.21. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}$ die Eigenschaft

$$\lim_{x \in \mathbb{R}_+,\, x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0$$

besitzt.

Aufgabe 22.22. Bestimme den Wendepunkt der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto e^{-\frac{1}{x}}.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 22.23. (4 Punkte)

Seien $n \in \mathbb{N}_+$ und $j \in \mathbb{Z}$. Zeige

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi \mathrm{i} jk}{n}} = \begin{cases} n, \text{ falls } j \text{ ein Vielfaches von } n \text{ ist,} \\ 0 \text{ sonst}. \end{cases}$$

Aufgabe 22.24. (4 Punkte)

Bestimme die Taylor-Polynome bis zur Ordnung 4 der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto \sin(\cos z) + z^3 \exp\left(z^2\right),$$

im Entwicklungspunkt 0.

Aufgabe 22.25. (4 Punkte)

Bestimme das Polynom

$$f(z) = z^3 + (4-\mathrm{i})z^2 - 2\mathrm{i}z + 5.$$

in der neuen Variablen $z - 1 - \mathrm{i}$ (also das umentwickelte Polynom) auf zwei verschiedene Arten, nämlich

a) direkt durch Einsetzen,

b) über das Taylor-Polynom im Entwicklungspunkt $1 + \mathrm{i}$.

Aufgabe 22.26. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der Funktion

$$f \colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = (\sin x)(\cos x),$$

hinsichtlich Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraphen.

Aufgabe 22.27. (4 Punkte)

Bestimme die ersten drei Nachkommastellen von $\pi/2$ mit Hilfe von Beispiel 22.5.

(Ganzzahlige Rechnungen gerne mit Taschenrechner ausführen.)

Aufgabe 22.28. (6 Punkte)

Sei ϵ, $0 < \epsilon \leq \frac{1}{3}$, vorgegeben. Zeige, dass es eine unendlich oft differenzierbare Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x \leq 0\,, \\ 1 \text{ für } x \geq \epsilon \text{ und } x \leq 1 - \epsilon\,, \\ 0 \text{ für } x \geq 1\,. \end{cases}$$

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7