# Linealidad de la iteración del operador Suma y sus aplicaciones en la suma geométrica

Mat. Enrique Torres Miguel

*kike_torres@ciencias.unam.mx*

20 de enero de 2022

**Resumen**

Este escrito tiene como objetivo mostrar la propiedad de linealidad inherente a las funciones aritméticas presente en la recursividad del operador Suma sobre dichas funciones, exponiendo una notación alternativa para el concepto de diferencias y sumas finitas, tomando como referencia a la suma geométrica para mostrar generalizaciones empleando el método iterativo del operador Suma. Las identidades que se obtendrán serán de carácter finito y sus demostraciones elementales.

---

## 1. Introducción

La suma geométrica de forma usual se define como el valor $S$ de los primeros $n$ términos de una progresión geométrica y esta definida por la siguiente identidad,

$$S = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + x^n.$$

Sin pérdida de generalidad, se descartan los caso triviales, esto es cuando $x = 0$ y $x = 1$. El valor de esta suma se obtiene empleando un razonamiento elegante por su simpleza, veamos esto. Puesto que

$$S = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + x^n, \tag{1}$$

entonces

$$xS = x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + x^{n+1}. \tag{2}$$

Por lo tanto, restando la ecuación (1) a la ecuación (2) se tiene que,

$$S - xS = x - x^{n+1}.$$

Así, despejando $S$ de la igualdad anterior resulta que,

$$S = \frac{x - x^{n+1}}{1-x} \quad \forall x \neq 1.$$

Por otra parte, usaremos el símbolo $\Sigma$ para asociar la noción de operador discreto y la idea de recursividad sobre suma geométrica, entonces en estos términos el valor de $S$ se describe como,

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1-x} \qquad \forall x \neq 1. \tag{3}$$

Puesto que se expondrán razonamientos iterativos, se deben introducir los conceptos necesarios que permitan mostrar algunas generalizaciones de la suma geométrica usando la propiedad lineal de la iteración poniendo en evidencia la importancia de dicha propiedad.

## 2. Definición de función iterada e iterada dual respecto del operador suma

De forma usual se denota al conjunto de las funciones aritméticas como $A(\mathbb{N}) = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}\}$.

**Definición 2.1** *Sea $f \in A(\mathbb{N})$ y $m \in \mathbb{N}$. La función iterada de grado $m$ de $f$ respecto al operador Suma, es la función aritmética $h$ tal que,*

$$h(n) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{k_1} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} f(k_m).$$

*y se denota como,*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k)$$

*esto es,*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{k_1} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} f(k_m).$$

**Definición 2.2** *Para cualquier función aritmética $f$, se define a la misma función $f$ como su función iterada de grado 0 y esto se denota como*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{0} f(k) = f(n).$$

Análogamente se tiene que.

**Definición 2.3** *Sea $f \in A(\mathbb{N})$ y $m \in \mathbb{N}$. La función iterada recíproca o dual de grado $m$ respecto al operador Suma de la función $f$, es una función aritmética $h$ tal que,*

$$f(n) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{k_1} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} h(k_m)$$

*y se denota como*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-m} f(k).$$

# 3. Teorema de linealidad sobre las iteraciones del operador Suma respecto las funciones aritméticas

El siguiente resultado es la base del método iterativo en general y su demostraciones resultan inmediatas.

**Teorema 3.1** *Sean $f, g, h$ y $p$ funciones aritméticas tales que*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = g(n)$$
$$\sum_{k=1}^{n} h(k) = p(n)$$

*entonces se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n} f(n+1-k)p(k) = \sum_{k=1}^{n} h(n+1-k)g(k)$$

*Demostración.*

*Primero, se definen las siguientes funciones aritméticas*

$$X(n) = \sum_{k=1}^{n} f(n+1-k)p(k)$$
$$Y(n) = \sum_{k=1}^{n} h(n+1-k)g(k)$$

*entonces aplicaremos inducción sobre $n$.*

*i) El caso* $X(n) = Y(n)$ *para* $n = 1$, *es inmediato.*
*Nótese que,*

$$\begin{aligned} X(1) &= \sum_{k=1}^{1} f(2-k)p(k) = f(1)p(1) = f(1)h(1) \\ Y(1) &= \sum_{k=1}^{1} h(2-k)g(k) = h(1)g(1) = h(1)f(1) = f(1)h(1) \end{aligned}$$

*entonces, se tiene que* $X(1) = Y(1)$.

*ii) Ahora, suponiendo que* $X(n) = Y(n)$ *es cierta hasta alguna* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces hay demostrar que* $X(n+1) = Y(n+1)$.
*Nótese que,*

$$\begin{aligned} X(1) &= f(1)p(1) \\ X(2) &= f(2)p(1) + f(1)p(2) \\ &\vdots \\ X(n) &= f(n)p(1) + f(n-1)p(2) + \cdots + f(2)p(n-1) + f(1)p(n) \\ X(n+1) &= f(n+1)p(1) + f(n)p(2) + \cdots + f(2)p(n) + f(1)p(n+1) \end{aligned}$$

*así, sumando las igualdades anteriores se tiene que,*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} X(k) &= \left(f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n-1) + f(n) + f(n+1)\right)p(1) + \\ &\quad \left(f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n-1) + f(n)\right)p(2) + \\ &\quad \left(f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n-1)\right)p(3) + \\ &\quad + \cdots + \\ &\quad \left(f(1) + f(2) + f(3)\right)p(n-1) + \left(f(1) + f(2)\right)p(n) + \left(f(1)\right)p(n+1) \end{aligned}$$

*por lo tanto,*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} X(k) &= g(n+1)p(1) + g(n)p(2) + \cdots + g(3)p(n-1) + g(2)p(n) + g(1)p(n+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} g(n+2-k)p(k). \end{aligned} \tag{4}$$

*Análogamente,*

$$\begin{aligned}
Y(1) &= h(1)g(1) \\
Y(2) &= h(2)g(1) + h(1)g(2) \\
Y(3) &= h(3)g(1) + h(2)g(2) + h(1)g(3) \\
&\vdots \\
Y(n-1) &= h(n-1)g(1) + h(n-2)g(2) + h(n-3)g(3) + \cdots + h(1)g(n-1) \\
Y(n) &= h(n)g(1) + h(n-1)g(2) + h(n-2)g(3) + \cdots + h(2)g(n-1) + h(1)g(n) \\
Y(n+1) &= h(n+1)g(1) + h(n)g(2) + h(n-1)g(3) + \cdots + h(2)g(n) + h(1)g(n+1)
\end{aligned}$$

*y sumando las igualdades anteriores se tiene que,*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} Y(k) &= (h(1) + h(2) + h(3) + \cdots + h(n-1) + h(n) + h(n+1))\ g(1) \\
&\quad +(h(1) + h(2) + h(3) + \cdots + h(n-1) + h(n))\ g(2) \quad + \\
&\quad (h(1) + h(2) + h(3) + \cdots + h(n-1))\ g(3) + \cdots + \\
&\quad (h(1) + h(2) + h(3))g(n-1)(h(1) + h(2))\ g(n) + (h(1))g(n+1)
\end{aligned}$$

*así que,*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} Y(k) &= p(n+1)g(1) + p(n)g(2) + \cdots + p(3)g(n-1) + p(2)g(n) + p(1)g(n+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} g(n+2-k)p(k) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} p(n+2-k)g(k) \qquad (5)
\end{aligned}$$

*entonces, comparando las igualdades (4) y (5) se sigue que*

$$\sum_{k=1}^{n+1} X(k) = \sum_{k=1}^{n+1} Y(k)$$

*y por la hipótesis de inducción sabemos que*

$$\sum_{k=1}^{n} X(k) = \sum_{k=1}^{n} Y(k)$$

*por lo tanto, se tiene que* $X(n+1) = Y(n+1)$.

■

Por otra parte, veamos lo siguiente.

**Definición 3.2** *Sean* $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$. *Entonces se define la siguiente función aritmética* $\theta_m(n)$ *como,*

$$\theta_m(n) = \sum_{k=1}^{n}{}_m \left[\frac{1}{k}\right]$$

Esta función es fundamental para establecer el teorema que describe a las funciones iteradas de las funciones aritmética, por lo tanto es necesario encontrar los valores que toma. Para lograr esto se dividirá el estudio en dos casos.

***Caso* 1.** Demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-m} \left[\frac{1}{k}\right] = (-1)^{n-1}\binom{m}{n-1} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

***Solución.*** Se demuestra usando inducción sobre $m$.

Supóngase que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-m} \left[\frac{1}{k}\right] = (-1)^{n-1}\binom{m}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

es cierta hasta alguna $m \in \mathbb{N}$. Probar que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-m-1} \left[\frac{1}{k}\right] = (-1)^{n-1}\binom{m+1}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Usando la siguiente igualdad[1]

$$\binom{m+1}{n} = \binom{m}{n} \quad + \quad \binom{m}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

se obtiene que,

$$\begin{aligned}(-1)^n\binom{m+1}{n} &= (-1)^n\binom{m}{n} \quad + \quad (-1)^n\binom{m}{n-1} \\ &= (-1)^n\binom{m}{n} \quad - \quad (-1)^{n-1}\binom{m}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

[1]Esto es claro,

$$\begin{aligned}\binom{m}{n} + \binom{m}{n-1} &= \frac{m!}{n!(m-n)!} + \frac{m!}{(n-1)!(m+1-n)!} \\ &= \frac{m!}{n!(m-n)!}\left(1 + \frac{n}{m+1-n}\right) = \frac{m!}{n!(m-n)!}\frac{(m+1-n+n)}{(m+1-n)} \\ &= \frac{m!(m+1)}{n!(m-n)!(m+1-n)} = \frac{(m+1)!}{n!(m+1-n)!}\end{aligned}$$

por lo tanto, aplicando el operador Suma a la igualdad anterior

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \binom{m+1}{k} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \binom{m}{k} \quad - \quad \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \binom{m}{k-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{6}$$

Por otro lado,

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1} \binom{m+1}{k-1} = 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \binom{m+1}{k} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces, utilizando (6) en la igualdad anterior se sigue que,

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1} \binom{m+1}{k-1} = 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \binom{m}{k} \quad - \quad \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \binom{m}{k-1} \tag{7}$$

Ahora, por la hipótesis de inducción

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-m}\left[\frac{1}{k}\right] = (-1)^{n-1}\binom{m}{n-1}$$

entonces, aplicando el operador Suma se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{k}{}_{-m}\left[\frac{1}{r}\right] = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{m}{k-1}$$

y la **Definición 2.3** implican que,

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{k}{}_{-m}\left[\frac{1}{r}\right] = \sum_{k=1}^{n}{}_{1-m}\left[\frac{1}{k}\right] = \sum_{k=1}^{n}{}_{-(m-1)}\left[\frac{1}{k}\right]$$

pero la hipótesis de inducción es cierta hasta **m**, en particular también es cierta para **m-1**, por lo tanto se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-(m-1)}\left[\frac{1}{k}\right] = (-1)^{n-1}\binom{m-1}{n-1}$$

entonces, comparando igualdades se sigue que

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{m}{k-1} = (-1)^{n-1}\binom{m-1}{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Ahora, ya que (8) es cierta para cualquier numero natural, entonces es valida para **n+1**, esto es

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\binom{m}{k-1} = (-1)^n\binom{m-1}{n}$$

y por otra parte

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\binom{m}{k-1} = 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{m}{k}.$$

Así, se sigue que

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\binom{m}{k-1} = 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{m}{k}. \tag{9}$$

Por lo tanto, sustituyendo (8) y (9) en (7) se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\binom{m+1}{k-1} &= (-1)^n\binom{m-1}{n} - (-1)^{n-1}\binom{m-1}{n-1} \\ &= (-1)^n\binom{m}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

es decir,

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{m+1}{k-1} = (-1)^{n-1}\binom{m}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{10}$$

y por la hipótesis de inducción

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-m}\left[\frac{1}{k}\right] = (-1)^{n-1}\binom{m}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ahora aplicando el operador $\sum_{-1}$ a esta igualdad se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-m-1}\left[\frac{1}{k}\right] = \sum_{k=1}^{n}{}_{-1}\ (-1)^{k-1}\binom{m}{k-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por último, usando (10) y la **Definición 2.3** se sigue que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-1}\ (-1)^{k-1}\binom{m}{k-1} = (-1)^{n-1}\binom{m+1}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-m-1}\left[\frac{1}{k}\right] = (-1)^{n-1}\binom{m+1}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

■

Por otra parte,

***Caso* 2.** Demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} 1 = \binom{m+n-1}{n-1} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

donde

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-m} 1 = \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{k_1}\cdots\sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}}\sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} 1.$$

***Solución.***

Se procede por inducción sobre $m$.

i) Para el caso $m=1$, la igualdad es inmediata.

ii) Supóngase que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} 1 = \binom{m+n-1}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

es cierta hasta alguna $m \in \mathbb{N}$. Entonces se probará que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m+1} 1 = \binom{m+n}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por la hipótesis de inducción se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} 1 = \binom{m+n-1}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} 1 = \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}{}_{m-1} 1 = \sum_{k=1}^{n}\binom{m+k-2}{k-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, resulta que

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{m+k-2}{k-1} = \binom{m+n-1}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ahora, aplicando el **Teorema 3.1** a las siguientes igualdades

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{m+k-2}{k-1}=\binom{m+n-1}{n-1}$$
$$\sum_{k=1}^{n}1=n$$

se obtiene que

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{m+k-1}{k-1}=\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\binom{m+k-1}{k-1} \tag{11}$$

Por otro lado, de lo siguiente

$$\binom{m+k-1}{k-1}=\frac{(m+k-1)}{m}\binom{m+k-2}{k-1} \qquad \forall k,m\in\mathbb{N}$$

se obtiene que

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{m+k-1}{k-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(m+k-1)}{m}\binom{m+k-2}{k-1} \tag{12}$$

Así, comparando (11) y (12) se deduce que,

$$\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\binom{m+k-2}{k-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(m+k-1)}{m}\binom{m+k-2}{k-1} \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

y manipulando esta igualdad,

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{m+k-2}{k-1}=\frac{(mn+1)}{m+1}\sum_{k=1}^{n}\binom{m+k-2}{k-1}=\frac{(mn+1)}{m+1}\binom{m+n-1}{n-1} \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Sustituyendo ésto en (12), ésta se reduce a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\binom{m+k-1}{k-1} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{(m+k-1)}{m}\binom{m+n-2}{k-1}\\
&= \left(\frac{m-1}{m}\right)\sum_{k=1}^{n}\binom{m+k-2}{k-1}+\left(\frac{1}{m}\right)\sum_{k=1}^{n}k\binom{m+k-2}{k-1}\\
&= \left(\frac{m-1}{m}\right)\binom{m+n-1}{n-1}+\left(\frac{1}{m}\right)\frac{(mn+1)}{(m+1)}\binom{m+n-1}{n-1}\\
&= \binom{m+n}{n-1} \qquad \forall n\in\mathbb{N}
\end{aligned}$$

Así, aplicando el operador suma a la hipótesis de inducción y gracias a la última igualdad se prueba que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m+1} 1 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{k}{}_{m} 1 = \sum_{k=1}^{n}\binom{m+k-1}{k-1} = \binom{m+n}{n-1} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

■

Por último, de la **Definición 2.1** y de la **Definición 3.2** se tiene que

$$\theta_m(n) = \sum_{k=1}^{n}{}_{m-1} 1$$

ya que

$$1 = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}\right],$$

entonces

$$\theta_m(n) = \binom{m+k-2}{k-1} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, se concluye por lo demostrado anteriormente que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\theta_m(n) = \begin{cases} \binom{m+k-2}{k-1}, & m > 0, \\ \left[\frac{1}{n}\right], & m = 0, \\ (-1)^{n-1}\binom{-m}{n-1}, & m < 0. \end{cases}$$

Ahora que ya se conocen los valores de la función descrita en la **Definición3.2** se puede enunciar y demostrar de forma simple el siguiente resultado.

**Teorema 3.3** *Para cualquier función aritmética $f$ se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k) = \sum_{k=1}^{n}\theta_m(n+1-k)f(k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}$$

*Demostración. Se aplicará inducción sobre $m$*

*i) Probar que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{0} f(k) = \sum_{k=1}^{n}\theta_0(n+1-k)f(k) \qquad \forall f \in A(\mathbb{N}).$$

*Por la **Observación 2.2**, resulta que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{0} f(k) = f(n) \qquad \forall f \in A(\mathbb{N})$$

*y por la **Definición 3.2** se tiene que*

$$\theta_0(n) = \left[\frac{1}{n}\right]$$

*entonces*

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_0(n+1-k)f(k) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k}\right] f(n+1-k) = f(n) \qquad \forall f \in A(\mathbb{N}).$$

*Así, comparando igualdades se concluye que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{0}\, f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_0(n+1-k)f(k) \quad \forall f \in A(\mathbb{N}).$$

*ii) Supóngase que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m}\, f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_m(n+1-k)f(k)$$

*es cierta hasta alguna $m \geq 0$ y $\forall f \in A(\mathbb{N})$ Demostrar que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m+1}\, f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{m+1}(n+1-k)f(k) \quad \forall f \in A(\mathbb{N}).$$

*Por el **Teorema 3.1** y **Definición 3.2** resulta que*

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_m(k) = \theta_{\ m+1}(n).$$

*Ahora, si*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = g(n),$$

*entonces se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_{m+1}(n+1-k)f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_m(n+1-k)g(k)$$

*por el **Teorema 3.1**.*

*Por otro lado, de la hipótesis de inducción se sigue que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m}\, g(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_m(n+1-k)g(k)$$

*y por la **Definición 2.1***

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m+1}\, f(k) = \sum_{k=1}^{n}{}_{m}\, g(k).$$

*Por lo tanto, comparando las últimas igualdades se concluye que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m+1}\, f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{m+1}(n+1-k)f(k) \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall f \in A(\mathbb{N}).$$

*Ya se demostró que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_m(n+1-k)f(k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \geq 0.$$

*Sólo falta probar la igualdad para las $m$ negativas. Nótese que $m \in \mathbb{Z}^- \Leftrightarrow m = -p$ para alguna $p \in \mathbb{N}$, entonces se procederá por inducción sobre $p$.*

*i) Probar que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-1} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{-1}(n+1-k)f(k) \quad \forall n \in \mathbb{N} \forall f \in A(\mathbb{N}).$$

*Por la **Definición 3.2** se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_{-1}(k) = \left[\frac{1}{n}\right] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

*y sin pérdida de generalidad supóngase que*

$$\sum_{k=1}^{n} g_f(k) = f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \forall f \in A(\mathbb{N})$$

*entonces*

$$\sum_{k=1}^{n} g_f(n+1-k)\left[\frac{1}{k}\right] = \sum_{k=1}^{n} \theta_{-1}(n+1-k)f(k) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

*aplicando el **Teorema 3.1** a las igualdades anteriores. Y por otra parte,*

$$\sum_{k=1}^{n} g_f(n+1-k)\left[\frac{1}{k}\right] = g_f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

*luego*

$$g_f(n) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{-1}(n+1-k)f(k) \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{13}$$

*Por otro lado,*

$$\sum_{k=1}^{n} g_f(k) = f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

*lo cual implica que*

$$g_f(n) = \sum_{k=1}^{n}{}_{-1} f(k) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad . \tag{14}$$

*por la **Definición 2.3**.*

*Por lo tanto, comparando las igualdades (13) y (14) se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-1} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{-1}(n+1-k)f(k) \quad \forall n \in \mathbb{N} \forall f \in A(\mathbb{N}).$$

*ii) Supóngase que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m}\, f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_m(n+1-k)f(k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

*es cierta hasta alguna* $p = -m \in \mathbb{N}$ *y* $\forall f \in A(\mathbb{N})$ . *Demostrar que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-(p+1)}\, f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{-p-1}(n+1-k)f(k) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in A(\mathbb{N}).$$

*Por el* ***Problema 3*** *y* ***Definición 2.3*** *se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_z(k) = \theta_{z+1}(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Ahora, supóngase que*

$$\sum_{k=1}^{n} g_f(k) = f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

*entonces*

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_{-p-1}(n+1-k)f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{-p}(n+1-k)g_f(k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

*por el* ***Teorema 3.1*** *ya que*

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_{-p-1}(k) = \theta_{-p}(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

*Por otra parte, la hipótesis de inducción implica que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-p}\, g(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{-p}(n+1-k)g_f(k) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

*y por la* ***Definición 2.3***

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-(p+1)}\, f(k) = \sum_{k=1}^{n}{}_{-p}\, g(k) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Por lo tanto, comparando las últimas igualdades se concluye que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-(p+1)}\, f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{-p-1}(n+1-k)f(k) \quad \forall n \in \mathbb{N}\, \forall f \in A(\mathbb{N}).$$

$\blacksquare$

# 4. Extensiones complejas

Recordemos que las generalizaciones de los factoriales complejos son las siguientes,

- $z^{\underline{n}} = z(z-1)...(z-n+1)$
- $z^{\overline{n}} = z(z+1)...(z+n-1)$
- $z^{\underline{0}} = z^{\overline{0}} = 1$

Y cumple la siguiente relación,

- $z^{\overline{n}} = (-1)^n(-z)^{\underline{n}}$

Y por otra parte, los factoriales pueden ser descritos en términos de la función Gamma,

- $z^{\overline{n}} = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)} \qquad \Re(z) \succ 0$
- $z^{\overline{-n}} = (-1)^n \frac{1}{(1-z)^{\overline{n}}}$

Usando las propiedades anteriores podemos extender la función $\theta_z(n)$.

**Definición 4.1** *Para cualquier $z \in \mathbb{C}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ definimos la función $\theta_z(n)$ como;*

$$\theta_z(n) = \begin{cases} \dfrac{(z)^{\overline{n-1}}}{(n-1)!}, & \forall z \neq 0 \ , \\ \left[\frac{1}{n}\right], & z = 0. \end{cases}$$

Y por otra parte,

**Definición 4.2** *Sea $f \in A(\mathbb{N})$ y $z \in \mathbb{C}$ . Diremos que la función iterada de grado $z$ de la función $f$, es una función aritmética $g$ tal que*

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} \theta_z(n+1-k)f(k)$$

*y la denotaremos como*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{z} f(k).$$

# 5. Identidades y aplicaciones

**Problema 5.1** ***(SG versión simétrica simple)***

*Aplicar* ***Definición 2.1*** *y el* ***Teorema 3.3*** *a la suma geométrica*

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1-x} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

*y demostrar la siguiente generalización*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m}\, x^k + \sum_{r=1}^{m}{}_{n} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r = x^n \left(\frac{x}{x-1}\right)^m \qquad \forall m \in \mathbb{N} \text{ y } \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1\},$$

*o de forma explícita,*

$$\sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} x^{k_m} + \sum_{r_1=1}^{m} \cdots \sum_{r_n=1}^{r_{n-1}} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{r_n} = x^n \left(\frac{x}{x-1}\right)^m .$$

***Solución.***

*Procederemos por inducción sobre* $m$.

*El caso* $n = 1$ *es claro aplicando la* ***Definición 2.1***. *Ahora supongamos que la igualdad,*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m}\, x^k + \sum_{r=1}^{m}{}_{n} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r = x^n \left(\frac{x}{x-1}\right)^m \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ y } \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

*es cierta hasta alguna* $m \in \mathbb{N}$, *entonces aplicando el operador*

$$\sum_{k=1}^{n} [\quad]$$

*a ambos lados de la igualdad anterior y usando la* ***Definición 2.1*** *obtenemos que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m+1}\, x^k + \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{m}{}_{k} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r = \sum_{k=1}^{n} x^k \left(\frac{x}{x-1}\right)^m \quad \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \tag{15}$$

*por el* ***Teorema 3.3*** *tenemos que*

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{k} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r = \sum_{r=1}^{m} \binom{m+k-r-1}{m-r} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r .$$

*Además*

$$\sum_{r=1}^{m} \binom{m+k-r-1}{m+1-r} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r = \sum_{r=1}^{m} \binom{(m+1-r)+k-2}{k-1} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r ,$$

*entonces*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}{}_{k}\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\binom{(m+1-r)+k-2}{k-1}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r}\\ &= \sum_{r=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\binom{(m+1-r)+k-2}{k-1}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r} \qquad \forall n\in\mathbb{N}\ y\ \forall x\in\mathbb{C}\setminus\{1\}.\end{aligned}$$

*y como*

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{(m+1-r)+k-2}{k-1}=\binom{(m+1-r)+n-1}{n-1}$$

*por lo tanto*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}{}_{k}\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r} &= \sum_{r=1}^{m}\binom{(m+1-r)+n-1}{n-1}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r}\\ &= \sum_{r=1}^{m}\binom{(m+1)+n-r-1}{(m+1)-r}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r} \qquad \forall n\in\mathbb{N}\ y\ \forall x\in\mathbb{C}\setminus\{1\}.\end{aligned}$$

*Así, sustituyendo lo anterior en (15) y utilizando la siguiente igualdad*

$$\sum_{k=1}^{n}x^{k}=\frac{x-x^{n+1}}{1-x} \qquad \forall n\in\mathbb{N},\quad \forall x\neq 1$$

*obtenemos que,*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m+1}\,x^{k}+\sum_{r=1}^{m}\binom{(m+1)+n-r-1}{(m+1)-r}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r}=\left(\frac{x-x^{n+1}}{1-x}\right)\left(\frac{x}{x-1}\right)^{m} \quad \forall x\in\mathbb{C}\setminus\{1\}.$$

*Por otro lado, tenemos que*

$$\left(\frac{x-x^{n+1}}{1-x}\right)\left(\frac{x}{x-1}\right)^{m} = -\left(\frac{x}{x-1}\right)^{m+1}+x^{n}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{m+1} \quad \forall x\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$$

*entonces se sigue que,*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m+1}\,x^{k}+\sum_{r=1}^{m}\binom{(m+1)+n-r-1}{(m+1)-r}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r}+\left(\frac{x}{x-1}\right)^{m+1}=x^{n}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{m+1} \tag{16}$$

*y por el **Teorema 3.3** sabemos que,*

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{m+1}{}_{n}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r} &= \sum_{r=1}^{m+1}\binom{(m+1)+n-r-1}{(m+1)-r}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r}\\ &= \sum_{r=1}^{m}\binom{(m+1)+n-r-1}{(m+1)-r}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r}+\binom{n-1}{0}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{m+1}\\ &= \sum_{r=1}^{m}\binom{(m+1)+n-r-1}{(m+1)-r}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r}+\left(\frac{x}{x-1}\right)^{m+1}\end{aligned}$$

*por lo tanto sustituyendo lo anterior en la igualdad (16) se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m+1}\, x^k + \sum_{r=1}^{m+1}{}_{n} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r \;=\; x^n \left(\frac{x}{x-1}\right)^{m+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \; y \; \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

■

**Problema 5.2** ***(SG forma simétrica equivalente)*** *Demostrar que los siguientes enunciados son equivalentes:*

*(i)*

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_m(k) v^{k-1}(1-v)^m \;+\; \sum_{r=1}^{m} \theta_n(r)(1-v)^{r-1}v^n \;=\; 1 \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \; y \; \forall v \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}.$$

*(ii)*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m}\, x^k + \sum_{r=1}^{m}{}_{n} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r \;=\; x^n \left(\frac{x}{x-1}\right)^{m} \qquad \forall n, m \in \mathbb{N} \; y \; \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}.$$

***Solución.*** *Primero notemos que por el* ***Teorema 3.3*** *se tiene lo siguiente,*

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{m}{}_{n} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r &= \sum_{r=1}^{m} \theta_n(m+1-r) \left(\frac{x}{x-1}\right)^r \\
&= \sum_{r=1}^{m} \theta_n(r) \left(\frac{x}{x-1}\right)^{m+1-r} \\
&= \sum_{r=1}^{m} \theta_n(r) \left(\frac{x}{x-1}\right)^{m} \left(\frac{x-1}{x}\right)^{r-1} \qquad \forall m \in \mathbb{N}\,,\; \forall x \neq 0, 1
\end{aligned}$$

*por lo tanto*

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{n} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r = \sum_{r=1}^{m} \theta_n(r) \left(\frac{x}{x-1}\right)^{m} \left(\frac{x-1}{x}\right)^{r-1} \qquad \forall m \in \mathbb{N}\,,\; \forall x \neq 1, 0.$$

*Análogamente, se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m}\, x^k = \sum_{k=1}^{n} \theta_m(k) x^n \left(\frac{1}{x}\right)^{k-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,\; \forall x \neq 1, 0$$

*entonces sumando las igualdades anteriores se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m}\, x^k + \sum_{r=1}^{m}{}_{n} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r \;=\; \sum_{k=1}^{n} \theta_m(k) x^n \left(\frac{1}{x}\right)^{k-1} + \sum_{r=1}^{m} \theta_n(r) \left(\frac{x}{x-1}\right)^{m} \left(\frac{x-1}{x}\right)^{r-1}$$

*por otro lado sabemos que,*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m}\, x^k + \sum_{r=1}^{m}{}_{n} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r \;=\; x^n \left(\frac{x}{x-1}\right)^{m} \qquad \forall n, m \in \mathbb{N} \; y \; \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$$

*entonces*

$$\sum_{k=1}^{n}\theta_m(k)x^n\left(\frac{1}{x}\right)^{k-1}+\sum_{r=1}^{m}\theta_n(r)\left(\frac{x}{x-1}\right)^m\left(\frac{x-1}{x}\right)^{r-1}=x^n\left(\frac{x}{x-1}\right)^m.$$

*Ahora, dividiendo la igualdad anterior por* $x^n\left(\frac{x}{x-1}\right)^m$ *obtenemos*

$$\sum_{k=1}^{n}\theta_m(k)\left(\frac{x-1}{x}\right)^m\left(\frac{1}{x}\right)^{k-1}+\sum_{r=1}^{m}\theta_n(r)\left(\frac{1}{x}\right)^n\left(\frac{x-1}{x}\right)^{r-1}=1\quad\forall x\neq 0,1 \tag{17}$$

*Por último, haciendo el cambio de variable* $v=\frac{1}{x}$ *se tiene que* $x=\frac{1}{v}$ *y* $\frac{x-1}{x}=1-v$. *Así, sustituyendo en la igualdad (17) se concluye que*

$$\sum_{k=1}^{n}\theta_m(k)v^{k-1}(1-v)^m \;+\; \sum_{r=1}^{m}\theta_n(r)(1-v)^{r-1}v^n \;=\; 1\quad \forall n,m\in\mathbb{N}\ y\ \forall v\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}.$$

*El reciproco se prueba análogamente.*

■

**Problema 5.3** *Probar que* $\forall p,q,n,m\in\mathbb{N}$ *y* $\forall x\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ *se tiene que*

$$ {\sum_{r=1}^{m}}_{q}\ {\sum_{k=1}^{n}}_{r+p} x^k+{\sum_{k=1}^{n}}_{p}\ {\sum_{r=1}^{m}}_{k+q}\left(\frac{x}{x-1}\right)^r \;=\; \left({\sum_{k=1}^{n}}_{p} x^k\right)\left({\sum_{r=1}^{m}}_{q}\left(\frac{x}{x-1}\right)^r\right).$$

***Solución.*** *Para probar esto sólo hay que definir las siguientes funciones:*

$$f(m,n)={\sum_{k=1}^{n}}_{m} x^k\quad y\quad g(n,m)={\sum_{r=1}^{m}}_{n}\left(\frac{x}{x-1}\right)^r\quad \forall m,n\in\mathbb{N}\ \ \forall x\neq 0,1$$

*entonces por el* ***Problema 5.1*** *sabemos que*

$${\sum_{k=1}^{n}}_{m} x^k+{\sum_{r=1}^{m}}_{n}\left(\frac{x}{x-1}\right)^r \;=\; x^n\left(\frac{x}{x-1}\right)^m \qquad \forall n,m\in\mathbb{N}\ y\ \forall x\in\mathbb{C}\setminus\{1\}.$$

*lo que implica que,*

$$f(m,n)\;+\;g(n,m)=\;x^n\left(\frac{x}{x-1}\right)^m \qquad \forall n,m\in\mathbb{N}\ y\ \forall x\in\mathbb{C}\setminus\{1\}.$$

*así, aplicando los operadores*

$${\sum_{k=1}^{n}}_{p}[\quad]\ \ y\ \ {\sum_{r=1}^{m}}_{q}[\quad]\quad \forall n,m,p,q\in\mathbb{N}$$

*a la igualdad anterior se tiene que*

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{q}\sum_{k=1}^{n}{}_{p} f(r,k)+\sum_{r=1}^{m}{}_{q}\sum_{k=1}^{n}{}_{p} g(k,r)=\sum_{r=1}^{m}{}_{q}\sum_{k=1}^{n}{}_{p}\; x^{k}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r} \quad \forall n,m,p,q\in\mathbb{N}, x\neq 0,1.$$

*Por otro lado, utilizando la **Definición 2.1** observamos que*

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{m}{}_{q}\sum_{k=1}^{n}{}_{p} f(r,k) &= \sum_{r=1}^{m}{}_{q}\sum_{k=1}^{n}{}_{p}\sum_{s=1}^{k}{}_{r} x^{s}\\ &= \sum_{r=1}^{m}{}_{q}\sum_{k=1}^{n}{}_{p+r} x^{k} \quad \forall n,m,p,q\in\mathbb{N}, x\neq 0,1\end{aligned}$$

*además,*

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{m}{}_{q}\sum_{k=1}^{n}{}_{p} g(k,r) &= \sum_{r=1}^{m}{}_{q}\sum_{k=1}^{n}{}_{p}\sum_{t=1}^{r}{}_{k}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{t}\\ &= \sum_{k=1}^{n}{}_{p}\sum_{r=1}^{m}{}_{q}\sum_{t=1}^{r}{}_{k}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{t}\\ &= \sum_{k=1}^{n}{}_{p}\sum_{r=1}^{m}{}_{q+k}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r} \quad \forall n,m,p,q\in\mathbb{N}, x\neq 0,1\end{aligned}$$

*y por último*

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{q}\sum_{k=1}^{n}{}_{p} x^{k}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r}=\left(\sum_{k=1}^{n}{}_{p} x^{k}\right)\left(\sum_{r=1}^{m}{}_{q}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r}\right).$$

*Por lo tanto, comparando las igualdades anteriores se sigue que,*

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{q}\sum_{k=1}^{n}{}_{r+p} x^{k}+\sum_{k=1}^{n}{}_{p}\sum_{r=1}^{m}{}_{k+q}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r}=\left(\sum_{k=1}^{n}{}_{p} x^{k}\right)\left(\sum_{r=1}^{m}{}_{q}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r}\right)$$
$$\forall n,m,p,q\in\mathbb{N}, x\neq 0,1.$$

■

**Problema 5.4** *Demostrar que*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{k+m-2}{k-1}x^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^{m}} \quad \forall m\in\mathbb{N}\ \ y\ \ \forall\,|x|<1$$

*utilizando la igualdad,*

$$\sum_{k=1}^{n}\theta_{m}(k)x^{k-1}(1-x)^{m} \;+\; \sum_{r=1}^{m}\theta_{n}(r)\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r-1}x^{n} \;=\; 1 \quad \forall n,m\in\mathbb{N}\ y\ \forall x\in\mathbb{C}\backslash\{0,1\}.$$

***Solución.***

*Sólo hay que aplicar el operador* $\lim_{n\to\infty}$ *a la siguiente igualdad,*

$$\sum_{k=1}^{n}\theta_m(k)x^{k-1}(1-x)^m \quad + \quad \sum_{r=1}^{m}\theta_n(r)\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r-1}x^n \;=\; 1$$

*para obtener que*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\theta_m(k)x^{k-1}(1-x)^m \quad + \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{m}\theta_n(r)\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r-1}x^n \;=\; \lim_{n\to\infty} 1$$

*entonces*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\theta_m(k)x^{k-1}(1-x)^m \quad + \quad \sum_{r=1}^{m}\left(\lim_{n\to\infty}\theta_n(r)x^n\right)\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r-1} \;=\; 1 \tag{18}$$

*Por otro lado, por las propiedades de los limites sabemos que*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\theta_m(k)x^{k-1}(1-x)^m &= (1-x)^m\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\theta_m(k)x^{k-1}\\
&= (1-x)^m\sum_{n=1}^{\infty}\theta_m(n)x^{n-1}\\
&= (1-x)^m\sum_{n=1}^{\infty}\binom{m+n-2}{n-1}x^{n-1}
\end{aligned}$$

*y dado que*

$$\left(\lim_{n\to\infty}\theta_n(r)x^n\right) = \left(\lim_{n\to\infty}\binom{n+r-2}{n-1}x^n\right) = 0 \quad \forall \quad |x|<1$$

*entonces sustituyendo lo anterior en la igualdad (18) se concluye que*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{k+m-2}{k-1}x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^m} \quad \forall m\in\mathbb{N} \;\; y \;\; \forall\,|x|<1.$$

■

**Problema 5.5** *Sean* $n, m \in \mathbb{N}$ , $x \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ . *Demostrar que* $\forall z, w \in \mathbb{C}$ *se tiene lo siguiente:*

*i)*

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{w} \sum_{k=1}^{n}{}_{r+z} x^k + \sum_{k=1}^{n}{}_{z} \sum_{r=1}^{m}{}_{k+w} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r = \left(\sum_{k=1}^{n}{}_{z} x^k\right)\left(\sum_{r=1}^{m}{}_{w} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r\right) .$$

*ii)*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{z+1} \sum_{r=1}^{m}{}_{w} \theta_r(k) x^{k-1}(1-x)^r + \sum_{r=1}^{m}{}_{w+1} \sum_{k=1}^{n}{}_{z} \theta_n(r)\,(1-x)^{r-1} x^k = \theta_{z+1}(n)\theta_{w+1}(m).$$

*iii) Sea* $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ $\Re(a), \Re(b) \succ 0$, *Entonces,*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{z+1} \sum_{r=1}^{m}{}_{w} \theta_r(k) B(a+k, b+r+1) + \sum_{r=1}^{m}{}_{w+1} \sum_{k=1}^{n}{}_{z} \theta_k(r) B(a+k+1, b+r) =$$

$$\theta_{z+1}(n)\theta_{w+1}(m) B(a,b) \qquad \Re(a), \Re(b) \succ 0.$$

***Solución.***

*i) Por el **Problema 5.1** sabemos que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} x^k + \sum_{r=1}^{m}{}_{n} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r = x^n \left(\frac{x}{x-1}\right)^m \qquad \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ y } \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1\},$$

*entonces de forma análoga a la solución del **Problema 5.3** definimos las siguientes funciones*

$$f(m,n) = \sum_{k=1}^{n}{}_{m} x^k \quad y \quad g(n,m) = \sum_{r=1}^{m}{}_{n} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \;\; \forall x \neq 0, 1.$$

*Entonces*

$$f(m,n) + g(n,m) = x^n \left(\frac{x}{x-1}\right)^m \qquad \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ y } \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

*y aplicando los operadores* $\forall n, m \in \mathbb{N}$ , $\forall z, w \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{z} [\;\;]$$

*y*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{w} [\;\;]$$

$\forall n, m \in \mathbb{N}$ , $\forall z, w \in \mathbb{C}$ *a la igualdad anterior, se tiene que*

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{w} \sum_{k=1}^{n}{}_{z} f(r,k) + \sum_{r=1}^{m}{}_{w} \sum_{k=1}^{n}{}_{z} g(r,k) = \sum_{r=1}^{m}{}_{w} \sum_{k=1}^{n}{}_{z} x^k \left(\frac{x}{x-1}\right)^r$$

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \;,\; \forall z, w \in \mathbb{C} \;,\; x \neq 0, 1.$$

*Ahora, observemos lo siguiente*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{z} f(r,k) = \sum_{k=1}^{n}{}_{z} \sum_{s=1}^{k}{}_{r} x^{s} = \sum_{k=1}^{n}{}_{z+r} x^{k}$$
$$\forall n, r \in \mathbb{N} \ , \ \ \forall z \in \mathbb{C} \ , \ \ x \neq 0, 1.$$

*Análogamente,*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{w} g(r,k) = \sum_{r=1}^{m}{}_{w} \sum_{t=1}^{r}{}_{r} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{t} = \sum_{r=1}^{m}{}_{w+k} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{t}$$
$$\forall m, t \in \mathbb{N} \ , \ \ \forall w \in \mathbb{C} \ , \ \ x \neq 0, 1.$$

*Por lo tanto ,*

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{w} \sum_{k=1}^{n}{}_{r+z} x^{k} + \sum_{k=1}^{n}{}_{z} \sum_{r=1}^{m}{}_{k+w} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{r} = \left(\sum_{k=1}^{n}{}_{z} x^{k}\right)\left(\sum_{r=1}^{m}{}_{w} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{r}\right) .$$

*ii) Por el* ***Problema 5.2*** *sabemos que*

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_{m}(k) v^{k-1}(1-v)^{m} \quad + \quad \sum_{r=1}^{m} \theta_{n}(r)(1-v)^{r-1} v^{n} \ = 1$$

*Entonces, aplicando*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{z} [ \quad ] \ y \sum_{k=1}^{n}{}_{w} [ \quad ] \forall n, m \in \mathbb{N} \ , \ \ \forall z, w \in \mathbb{C}$$

*a la igualdad anterior, se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{z+1} \sum_{r=1}^{m}{}_{w} \theta_{r}(k) x^{k-1}(1-x)^{r} + \sum_{r=1}^{m}{}_{w+1} \sum_{k=1}^{n}{}_{z} \theta_{k}(r)(1-x)^{r-1} x^{k} = \sum_{k=1}^{n}{}_{z} \sum_{r=1}^{m}{}_{w} 1$$
$$= \theta_{z+1}(n)\theta_{w+1}(m)$$

*iii) Por el inciso anterior se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{z+1} \sum_{r=1}^{m}{}_{w} \theta_{r}(k) x^{k-1}(1-x)^{r} + \sum_{r=1}^{m}{}_{w+1} \sum_{k=1}^{n}{}_{z} \theta_{k}(r)(1-x)^{x-1} x^{k} = \theta_{z+1}(n)\theta_{w+1}(m)$$

*entonces, multiplicando por* $x^{a-1}(1-x)^{b-1} \quad \Re(a), \Re(b) \succ 0$ *la igualdad anterior obtenemos que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{z+1} \sum_{r=1}^{m}{}_{w} \theta_{r}(k) x^{a+k-2}(1-x)^{b+r-1} + \sum_{r=1}^{m}{}_{w+1} \sum_{k=1}^{n}{}_{z} \theta_{k}(r)(1-x)^{b+r-2} x^{a+k-1}$$
$$= \theta_{z+1}(n)\theta_{w+1}(m) x^{a-1}(1-x)^{b-1}$$

*Entonces, aplicando el operador* $\int_0^1 [\ \ ]$ *a la igualdad anterior , se deduce que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{z+1}\sum_{r=1}^{m}{}_{w}\,\theta_r(k)B(a+k,b+r+1)+\sum_{r=1}^{m}{}_{w+1}\sum_{k=1}^{n}{}_{z}\,\theta_k(r)B(a+k+1,b+r)$$
$$=\theta_{z+1}(n)\theta_{w+1}(m)B(a,b)\qquad \forall a,b\in\mathbb{C}\quad con\quad \Re(a),\Re(b)\succ 0$$

■

**Problema 5.6** *Sean* $n\in\mathbb{N}$ , $m\in\mathbb{Z}$ *y* $x\in\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ *,entonces definamos las siguientes funciones :*

*a)*

$$x^{\prec m\succ}(n)=x^m\theta_m(n)$$

*b)*

$$\rho_x^{\prec p\succ}(n)=\underbrace{\rho_x(n)*\cdots*\rho_x(n)}_{p-veces}$$

*donde,*

$$\rho_x(n)=\sum_{k=1}^{n}{}_{-1}\frac{1}{(1-x)^k}=\frac{x^{1-\left[\frac{1}{n}\right]}}{(1-x)^n}$$

*c)*

$$\kappa_x^{\prec p\succ}(n)=\underbrace{\kappa_x(n)*\cdots*\kappa_x(n)}_{p-veces}$$

*donde,*

$$\kappa_x(n)=x^{\prec 1\succ}(n)*-\rho_x(n)=\frac{-x}{(1-x)^n}$$

*Demostrar lo siguiente:*

*i)* $x^{\prec m\succ}(n)*x^{\prec p\succ}(n)=x^{\prec m+p\succ}(n)\quad\forall m,p\in\mathbb{Z}$

*ii)*

$$\sum_{r=1}^{m}x^{\prec r\succ}(n)=\rho_x(n)*(x^{\prec 1\succ}(n)-x^{\prec m+1\succ}(n))\quad\forall m\in\mathbb{N}$$

*iii)*

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{p}\,x^{\prec r\succ}(n)\ +\sum_{s=1}^{p}{}_{m}\,\kappa_x^{\prec s\succ}(n)=x^{\prec m\succ}(n)*\kappa_x^{\prec p\succ}(n)$$

*iv)*

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{p}\,\theta_r(n)x^r\ +\sum_{s=1}^{p}{}_{m}\frac{\theta_s(n)}{(1-x)^{n-1}}\left(\frac{x}{x-1}\right)^s=x^m\left(\frac{x}{x-1}\right)^p\sum_{k=1}^{n}{}_{m}\ \frac{\theta_p(k)}{(1-x)^{k-1}}$$

*v)*

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{p}\,\theta_{r+z}(n)x^r+\sum_{s=1}^{p}{}_{m}\sum_{k=1}^{n}{}_{z}\ \frac{\theta_s(k)}{(1-x)^{k-1}}\left(\frac{x}{x-1}\right)^s=x^m\left(\frac{x}{x-1}\right)^p\sum_{k=1}^{n}{}_{m+z}\frac{\theta_p(k)}{(1-x)^{k-1}}$$

*vi)*

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{p}\,\theta_{r+m}(n)x^{r+m} \;+\sum_{s=1}^{p}{}_{m}\sum_{r=1}^{m}{}_{s}\;\theta_r(n)x^r \;=$$
$$x^{2m}\left(\frac{x}{x-1}\right)^p\sum_{k=1}^{n}{}_{2m}\;\frac{\theta_p(k)}{(1-x)^{k-1}}\;-\sum_{s=1}^{p}{}_{2m}\;\frac{\theta_s(n)}{(1-x)^{n-1}}\left(\frac{x}{x-1}\right)^s$$

***Solución.***

*i) Es inmediato*

$$\begin{aligned} x^{\prec m\succ}(n)*x^{\prec p\succ}(n) &= x^m\theta_m(n)*x^p\theta_p(n)\\ &= x^{m+p}\theta_{m+p}(n)\\ &= x^{\prec m+p\succ}(n)\quad \forall m,p\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

*ii) Sea*

$$S(n,m)=\sum_{r=1}^{m}x^{\prec r\succ}(n)\quad\Rightarrow\quad S(n,m)*(x^{\prec 0\succ}(n)-x^{\prec 1\succ}(n))=x^{\prec 1\succ}(n)-x^{\prec m+1\succ}(n)$$

*Ahora, solo hace falta ver que,*

$$\rho(n)*(x^{\prec 0\succ}(n)-x^{\prec 1\succ}(n))=\left[\frac{1}{n}\right].$$

*Para esto hagamos lo siguiente, por el inciso b) sabemos que*

$$\rho(n)=\theta_{-1}(n)*\frac{1}{(1-x)^n}$$

*entonces se tiene que,*

$$\begin{aligned}\rho(n)*(x^{\prec 0\succ}(n)-x^{\prec 1\succ}(n)) &= \theta_{-1}(n)*\frac{1}{(1-x)^n}*(x^{\prec 0\succ}(n)-x^{\prec 1\succ}(n))\\ &= \theta_{-1}(n)*\frac{1}{(1-x)^n}*(\theta_0(n)-x\theta_1(n))\\ &= \theta_{-1}(n)*\frac{1}{(1-x)^n}-\frac{x}{(1-x)^n}\\ &= \frac{x^{1-\left[\frac{1}{n}\right]}}{(1-x)^n}-\frac{x}{(1-x)^n}=\left[\frac{1}{n}\right]\end{aligned}$$

*Por lo tanto, se sigue que*

$$\sum_{r=1}^{m}x^{\prec r\succ}(n)=\rho_x(n)*(x^{\prec 1\succ}(n)-x^{\prec m+1\succ}(n))$$

*iii) Aplicaremos inducción sobre p.*

*El caso $p=1$ es claro. Entonces, supongamos que la igualdad*

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{p}\,x^{\prec r\succ}(n)+\sum_{s=1}^{p}{}_{m}\,\kappa_x^{\prec s\succ}(n)\;=\kappa_x^{\prec p\succ}(n)*x^{\prec m\succ}(n)$$

*es cierta hasta alguna $p \in \mathbb{N}$, entonces aplicando el operador*

$$\sum_{r=1}^{m} [\quad]$$

*a ambos lados de la igualdad anterior y usando la **Definición 2.1** obtenemos que*

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{p+1}\, x^{\prec r \succ}(n) + \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{p}{}_{r}\, \kappa_x^{\prec s \succ}(n) = \kappa_x^{\prec p \succ}(n) * \sum_{r=1}^{m} x^{\prec r \succ}(n) \tag{19}$$

*y como*

$$\sum_{s=1}^{p}{}_{r}\, \kappa_x^{\prec s \succ}(n) = \sum_{s=1}^{p} \binom{(p+1-s)+r-2}{r-1} \kappa_x^{\prec s \succ}(n)$$

*entonces;*

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{p}{}_{r}\, \kappa_x^{\prec s \succ}(n) &= \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{p} \binom{(p+1-s)+r-2}{r-1} \kappa_x^{\prec s \succ}(n) \\
&= \sum_{s=1}^{p} \sum_{r=1}^{m} \binom{(p+1-s)+r-2}{r-1} \kappa_x^{\prec s \succ}(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ y } \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.
\end{aligned}$$

*Por lo tanto,*

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{p}{}_{r}\, \kappa_x^{\prec s \succ}(n) &= \sum_{s=1}^{p} \binom{(p+1-s)+m-1}{m-1} \kappa_x^{\prec s \succ}(n) \\
&= \sum_{s=1}^{p} \binom{(p+1)+m-s-1}{(p+1)-s} \kappa_x^{\prec s \succ}(n) \qquad \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ y } \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.
\end{aligned}$$

*Así, sustituyendo lo anterior en (19) y utilizando la siguiente igualdad*

$$\sum_{r=1}^{m} x^{\prec r \succ}(n) = \rho_x(n) * (x^{\prec 1 \succ}(n) - x^{\prec m+1 \succ}(n))$$

*obtenemos que,*

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{p+1}\, x^{\prec r \succ}(n) + \sum_{s=1}^{p} \binom{(p+1)+m-s-1}{(p+1)-s} \kappa_x^{\prec s \succ}(n) = \kappa_x^{\prec p \succ}(n) * (x^{\prec 1 \succ}(n) - x^{\prec m+1 \succ}(n))$$

*y como*

$$\kappa_x^{\prec p \succ}(n) * \rho_x(n) * (x^{\prec 1 \succ}(n) - x^{\prec m+1 \succ}(n)) = \kappa_x^{\prec p+1 \succ}(n) * x^{\prec m \succ}(n) - \kappa_x^{\prec p+1 \succ}(n)$$

*entonces se sigue que,*

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{p+1}\, x^{\prec r \succ}(n) + \sum_{s=1}^{p} \binom{(p+1)+m-s-1}{(p+1)-s} \kappa_x^{\prec s \succ}(n) = \kappa_x^{\prec p+1 \succ}(n) * x^{\prec m \succ}(n) - \kappa_x^{\prec p+1 \succ}(n)$$

*entonces*

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{p+1}\, x^{\prec r\succ}(n) \ + \ \sum_{s=1}^{p} \binom{(p+1)+m-s-1}{(p+1)-s} \kappa_x^{\prec s\succ}(n) + \kappa_x^{\prec p+1\succ}(n) = \kappa_x^{\prec p+1\succ}(n) * x^{\prec m\succ}(n)$$

*y por lo tanto*

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{p}\, x^{\prec r\succ}(n) \ + \ \sum_{s=1}^{p+1}{}_{m}\, \kappa_x^{\prec s\succ}(n) = \kappa_x^{\prec p+1\succ}(n) * x^{\prec m\succ}(n) \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

*iv) Por el inciso c) se tiene que*

$$\kappa_x(n) = x^{\prec 1\succ}(n) * (-\rho_x(n)) = \frac{-x}{(1-x)^n},$$

*entonces*

$$\kappa_x^{\prec p\succ}(n) = \frac{-x}{(1-x)^n} * \cdots * \frac{-x}{(1-x)^n} = \frac{(-x)^p \theta_p(n)}{(1-x)^{n+p-1}}.$$

*Por otra parte, usando el inciso iii) sabemos que*

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{p}\, x^{\prec r\succ}(n) \ + \ \sum_{s=1}^{p}{}_{m}\, \kappa_x^{\prec s\succ}(n) = \kappa_x^{\prec p\succ}(n) * x^{\prec m\succ}(n)$$

*por lo tanto, sustituyendo el valor de* $\kappa_x^{\prec p\succ}(n)$ *en la igualdad anterior se tiene que*

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{p}\, x^{\prec r\succ}(n) \ + \ \sum_{s=1}^{p}{}_{m}\, \frac{(-x)^s \theta_s(n)}{(1-x)^{n+s-1}} = \frac{(-x)^p \theta_p(n)}{(1-x)^{n+p-1}} * x^{\prec m\succ}(n).$$

*Entonces*

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{m}{}_{p}\, x^{\prec r\succ}(n) \ + \ \sum_{s=1}^{p}{}_{m}\, \frac{(-x)^s \theta_s(n)}{(1-x)^{n+s-1}} &= \frac{(-x)^p \theta_p(n)}{(1-x)^{n+p-1}} * x^{\prec m\succ}(n) \\ &= \left(\frac{x}{x-1}\right)^p \frac{\theta_p(n)}{(1-x)^{n-1}} * x^m \theta_m(n) \\ &= x^m \left(\frac{x}{x-1}\right)^p \sum_{k=1}^{n}{}_{m}\, \frac{\theta_p(k)}{(1-x)^{k-1}} \end{aligned}$$

*con lo que concluimos la demostración.*

*v) Es inmediato aplicando el operador*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{z}\, [\ ]$$

*a la igualdad del inciso iv).*

*vi) Basta con aplicar* $z = m$ *en el inciso anterior y la igualdad del inciso iv).*

■

**Problema 5.7** *Sean $n, p, m \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}\, y\, \beta \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Este problema es básicamente una generalización del anterior, no se adjunto como inciso para poder mostrar de forma clara la aplicación que dicho caso tenia.*

*a)* $x_{\alpha,\beta}^{\prec a \succ}(n) = x^{\alpha a}\theta_{\beta a}(n)$

*b)* $\rho_{x,\alpha,\beta}^{\prec p \succ}(n) = \underbrace{\rho_{x,\alpha,\beta}(n) * \cdots * \rho_{x,\alpha\beta}(n)}_{p-veces}$

*donde,*

$$\rho_{x,\alpha,\beta}(n) * (x_{\alpha,\beta}^{\prec 0 \succ}(n) - x_{\alpha,\beta}^{\prec 1 \succ}(n)) = \left[\frac{1}{n}\right]$$

*c)* $\kappa_{x,\alpha,\beta}^{\prec p \succ}(n) = \underbrace{\kappa_{x,\alpha,\beta}(n) * \cdots * \kappa_{x,\alpha,\beta}(n)}_{p-veces}$

*donde,*

$$\kappa_{x,\alpha,\beta}(n) = x_{\alpha,\beta}^{\prec 1 \succ}(n) * (-\rho_{x,\alpha,\beta}(n))$$

*Demostrar lo siguiente:*

*i)* $x_{\alpha,\beta}^{\prec a \succ}(n) * x_{\alpha,\beta}^{\prec b \succ}(n) = x_{\alpha,\beta}^{\prec a+b \succ}(n)$

*ii)*

$$\sum_{r=1}^{m} x_{\alpha,\beta}^{\prec r \succ}(n) = \rho_{x,\alpha,\beta}(n) * (x_{\alpha,\beta}^{\prec 1 \succ}(n) - x_{\alpha,\beta}^{\prec m+1 \succ}(n))$$

*iii)*

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{p}\, x_{\alpha,\beta}^{\prec r \succ}(n) \; + \sum_{s=1}^{p}{}_{m}\, \kappa_{x,\alpha,\beta}^{\prec s \succ}(n) = x_{\alpha,\beta}^{\prec m \succ}(n) * \kappa_{x,\alpha,\beta}^{\prec p \succ}(n)$$

***Solución.*** *Inmediatas de las definiciones.* ■

# Referencias

[1] Aigner, Martin. *A course in enumeration.* Springer Science & Business Media, 2007.

[2] Apostol, Tom M. *Introducción a la teoría analítica de números.* Reverté, 1984.

[3] Balanzario, Eugenio P. *Breviario de teoría analítica de los números.* Sociedad Matemática Mexicana, 2008.

[4] Bogart, Kenneth P. *Introductory combinatorics.* Saunders College Publishing, 1989.

[5] Comtet, Louis. *Analyse combinatoire: Vol. 1.* Presses Universitaires de France, 1970.

[6] Friedlander, John B. and Heath-Brown, DR and Iwaniec, H. and Kaczorowski, J. *Analytic number theory.* Springer, 1891.

[7] Gupta, Hansraj. *Selected topics in number theory.* Abacus Press, 1980.

[8] Ivic, Aleksandar. *The Riemann zeta-function: theory and applications.* Courier Corporation, 2012.

[9] Ríbnikov, Konstantin. *Análisis combinatorio.* Mir, 1988.

[10] Ríbnikov, Konstantin. *Análisis combinatorio: problemas y ejercicios.* Mir, 1989.

[11] Rosen, Kenneth H. *Handbook of discrete and combinatorial mathematics.* CRC Press, 2000.

[12] Rota, Gian-Carlo and Doubilet, P. *Finite operator calculus.* Academic Press, 1975.