新中學教科書

初級混合數學

第一冊

編者

歙縣 程廷熙　高安 傅種孫

校者

江寧 張鵬飛　無錫 華襄治

中華書局印行

新 中 學 教 科 書

初級混合數學編輯大意

1. 新學制初級中學之數學科　舊制中學四年,數學科授算術代數幾何三角四種。新學制初級中學三年,高級中學三年。就數學科言之:初級中學當為公民必需知識計,高級中學則升學與謀生當兼籌並顧。且初級中學之數學基礎不立,則高級中學亦受其影響。

2. 混合數學之必要　初級中學以三年之光陰,習必需之數學,非力求教學之經濟不可。中學三三制創於美國,其教數學也,初級即用混合法。顧彼國小學基礎較良,與我國現狀,又稍不同;故彼之教材,不盡適我國之用。同人服務北京高等師範附屬中學,近兩年來,用混合法教授,成績似較佳。自編課本,鉛印講授,隨用隨改;教材之支配,理法之說明,似有一日之長。今付中華書局印行,以供各地學校之用。

3. 編輯旨趣之大綱　下列數則,為全書一般的說明。其他則分述於各年級教材要目之後。

一. 採混合制,俾學生易於了解而收貫通之效。

二. 便學生自動的學習。

三. 問題多擇其切於實用者,力矯從前空泛之弊。

四. 每年各自為一段落。

五. 插入中外數學家小傳以增學者之興趣。

4. 第一學年之要目.

第一學期 (1)幾何圖形。(2)幾何作圖。(3)加法—線段加法,角加法。(4)減法—線段減法,角減法.

(5)乘法—綫段乘法,面積。(6)除法—知長方形面積及一邊求他邊。(7)四則雜題,速算法,中國度量衡,米突制,小數記法。(8)分數—線段等分法,角度法,非十進諸等數。(9)因數,倍數,公因,公倍—線段的公度。(10)分數四則。

第二學期 (11)分數與小數,循環小數化法。(12)略算法。(13)比及比例,連比,複比—面積比,相似形。(14)諸等數,互變,交易。(15)百分法—利息。(16)商功,均輸,盈不足。(17)正方形,長方形,平行四邊形,三角形之面積及派達哥拉氏定理(割補術前篇)。(18)開平方。(19)難題雜術。(20)數性通論。

說明 (1)本年以算術為經,以計量幾何為緯,所以互相說明也。

(2)首授圖形及作圖法,所以引起學生之興味也。

(3)開立方移至第二年教授,因代數開方較易,算術較難,由淺入深,宜次算術開方於代數開方之後。

(4)混合比例移至第三年教授,以其非不定方程式不明也。

(5)第十六章係切於實用之問題,故又另闢一章。

(6)第十七章專以截長補短之法研究面積,不務證明。

(7)第十九章係應用問題,四則問題之較難而有專法者屬之。

(8)第十二章專抽象的講不名數的性質及

記數法,用此書者可視時間之有無,或授或不授。

5. 第二學年之要目

第一學期 (1)圖表。(2)代數加減,線段及角加減法。(3)一次方程,公理。(4)角及角耦——直線同旁諸角和,一點四周諸角和,接角,補角,餘角,對頂角,三角形內外角和。(5)代數乘法。(6)平行線。(7)比例圖,相似形。(8)比(分數),比例,正變,反變。(9)相合三角形,圓(僅及弦弧圓心角之關係)。(10)作圖法,對稱形。

第二學期 (11)正數,負數,符號公律。(12)加法及減法。(13)乘法及除法。(14)一次方程解法及應用問題。(15)聯立一次方程代數解法,圖線解法及應用問題,(16)特別積,劈因數,二次方程。(17)柱體體積(割補術後篇),平行及垂直的直線與平面。(18)開立方。(19)求積公式及其他公式。(20)全年復習。

說明 (1)本年以代數爲經,以計量幾何爲緯。

(2)首授圖表爲後來比例圖及用圖線解方程之預備。

(3)前十章不論正負,所有問題皆不得負値。

(4)第四章之配置,專爲一次方程應用。

(5)第九,十兩章略示推證幾何,祇求學生心中生推證幾何之印象,不求收若何效果。

(6)前三年不論及虛數,第十六章及以後各章之問題無得虛根者.

(7)第十七章專用截長補短方法研究各種柱體體積,不尙證明,惟因論及柱體之便,故附帶指示直線平面之垂直及平行的

關係。

(8) 第十八章先論代數開立方法,後論算術開立方法。

(9) 求積公式如角椎體體積,圓椎體體積,球體積,圓面積,球表面積之類,實用方面有相當之重要,而因其理論較繁,雖第三學年亦難於推證者,概於此章論之,免至第三年發生教授的困難。

(10) 第二十章復習,或授或略,聽教者斟酌。

6. 第三學年之要目

第一學期 (1) 第二學年所授(代數提綱幾何提要)。(2) 證定理方法。(3) 二元聯立一次方程。(4) 四邊形,三角及四邊形面積公式之證明。(5) 成比例之線段,平行平面,柱體表面及其面積。(6) 比例,相似形,劈因數。(7) 多邊形面積之比,比例與正變反變之關係。(8) 三角形之邊相互的關係,派氏定理及其推廣的定理二次方程,根式。(9) 三角比,根式,二元二次方程。(10) 分式及分式方程。

第二學期 (11) 圓。(12) 以弧度角法。(13) 圓內成比例之線段。(14) 不等式,極大及極小,直線與平面垂直,(15) 軌跡,共點線。(16) 正多邊形,圓周長。(17) 正多邊形面積,字母方程,圓面積。(18) 指數,對數,複利息。(19) 方程通論,不定方程,混合比例。(20) (代數幾何)系統表。

說明 (1) 本年以幾何爲經,代數及三角爲緯。

(2) 第一章幾何提要,權當幾何基礎,爲以後推證時便於徵引,不必引第二年之定理

也,

(3) 本年論幾何尚推證。

(4) 極限及不可通約之理論,本年尚不詳論。

(5) 本年尚不論虛數,所有第八章及以後各年之習題無得虛根者。

(6) 本年僅於五及十四兩章論及空間位置幾何之重要者,其餘空間幾何之定理,概行略而不論。

(7) 本年僅於九及十七兩章論及正弦餘弦及正切諸圓函數,其餘從略。

(8) 第十九章論方程個數與未知數個數之關係及不定方程,混合比例亦附焉,此章授否,著者無成見,教者自行斟酌可也。

(9) 本書將算術代數幾何三角混合編製,猶恐學者不得系統,故於第二十章錄代數系統及幾何系統,庶學者一覽了然。

7. 本書每年分二冊,三年共六冊。每冊供半年之用。但各校支配教材時,如有困難,不妨活用之。

8. 同人學識有限,本書雖悉心編訂,却未敢自信;大雅宏達,幸指教之!

新中學教科書

初級混合數學第一冊

目次

第壹章 圖形

(1—13頁)

第貳章 作圖法

(14—23頁)

第叁章 數量及其基本性質

(24—32頁)

第肆章 整數加減法

第伍章 整數乘除法

第陸章 四則復習及應用問題

第柒章 十進制複名數與小數

第捌章 因數及倍數

第玖章 分數及比率

第拾章 小數通論

新中學教科書

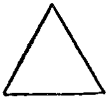
初級混合數學

第一年上

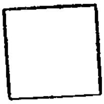
第壹章

圖形

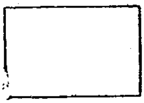
§1. 形. 物體形狀,千差萬別,尋常所習見者:如牆壁院落等作正方形或長方形;山牆之上部作三角形;月有時圓,有時不圓;亭臺池沼有圓者,有多角者;諸如此類,不勝枚舉.吾人若將其形繪之於紙,是爲**圖形**.茲列數圖形於下以爲例,學者試舉其名!



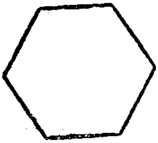
(1)



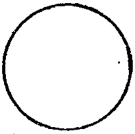
(2)



(3)



(4)

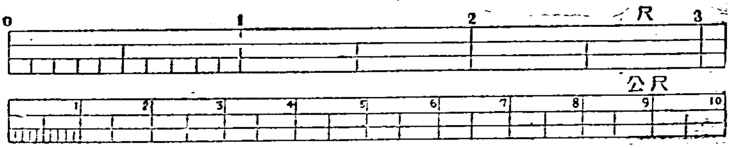


(5)

(6)

§2. 直線. (1)至(4)各圖形之邊,皆爲**直線**.泛言直線,其長無限,若上述各直線有一定之長度或直線中

之一部分者,特稱**線段**.線段之長度,可用兩邊刻有分,寸;或公釐,公分;等之**直尺**(簡稱爲尺)以量之.



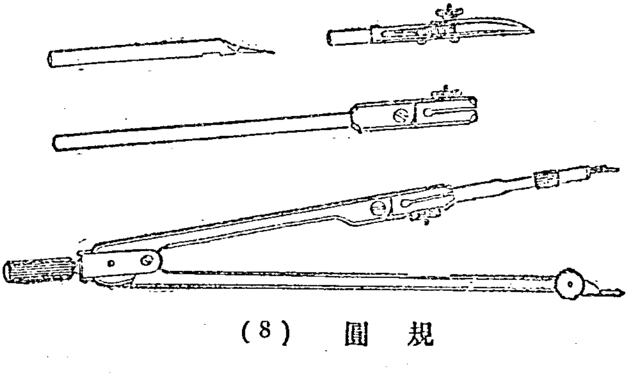
(7)

習題 I

1. 日光由小孔射入室中,作何形狀?
2. 試舉實物之形如直線者.
3. 以尺量(1)(2)圖形各邊之長度.
4. 以公尺量(3)(4)圖形各邊之長度.

§3. **等線段.** 將一線段置於他線段之上,其兩端恰彼此相合者,此兩線段謂之相等.

兩線段是否相等,實際上亦可用尺量其長度或用**圓規**以驗之.



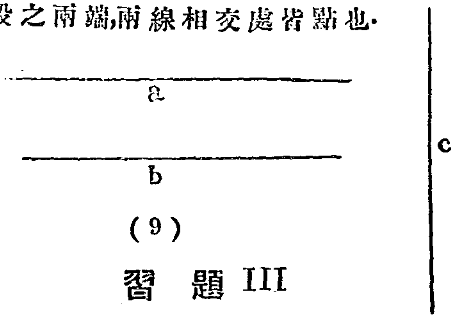
(8) 圓規

習題 II

1. 用尺量 a, b 二線段驗其是否相等.如不相等,孰長孰短?

2. 用圓規驗 a, c 二線段則如何?

§4. 點. 用圓規驗線段時,當以其脚之尖端置於線段之上;此尖端與線段接合之處是爲**點**.點之用在示明位置,線段之兩端,兩線相交處皆點也.



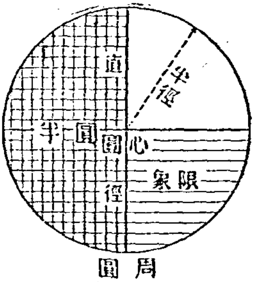
(9)

習題 III

1. 試舉實物之式樣視之如點者.

2. 北斗七星相互之位置如何?以七點誌之,可否?

§5. 圓及弧—度. 第(5)圖形爲**圓**.其邊爲**圓周**;中央一點爲**圓心**;由圓心至圓周之距離爲**半徑**;通過圓心兩端各抵圓周之直線爲**直徑**.直徑分圓爲二等份,每份謂之**半圓**.半圓之半,謂之**象限**.如(10)圖所示.

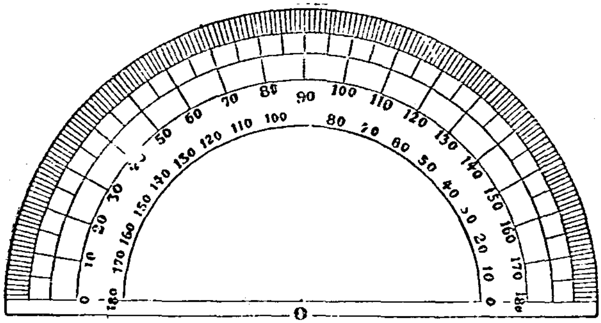


(10)

圓周之一部分謂之**弧**.第(6)圖形之邊,卽由二弧所成.

分圓周爲360等份,每份謂之**一度**,

度以(0)記之,如 630° 是.觀半圓儀自明.



(11)半圓儀

習題 IV

1. 圓之大小,與半徑之長短有無關係?

2. 直徑與半徑之關係如何?

3. 同圓內各半徑之長度相同否?

4. 擲鐵餅鐵球時,每於擲者立足處畫半圓形,其故安在?

5. 半圓周,一象限之弧度各若干?

6. 鐘之分針,由12點行至3點,問針尖所行之度數若干.由2點至6點?由3點至11點?

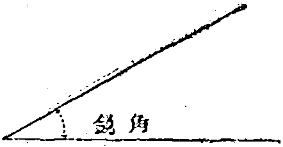
§ 6. **角.** 兩直線相交而生**角.** 其交點爲角之**頂**;兩線爲角之**邊.** 角之大小,以度計之——將角頂置於圓心,角之兩邊所夾之弧爲若干度,則此角亦謂爲有若干度.

角有90度,則此角稱爲**直角,** 其兩邊彼此直立也.

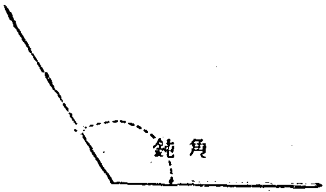
角有180度,則此角稱爲**平角**,其兩邊成一直線也.
小於直角者爲**銳角**,其頂處尖銳也.
大於直角而小於平角者爲**鈍角**,對於銳而言也.

(12)

(13)



(14)



(15)

角之度數,用半圓儀測量之.

習題 V

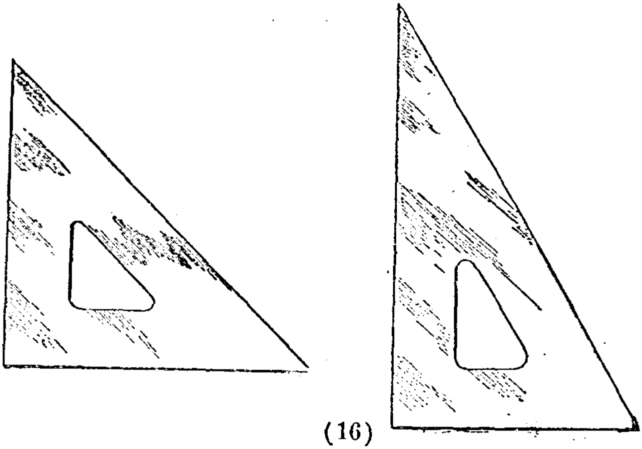
1. (1)至(4)各圖形之角爲何角?

2. 時鐘敲3點時,兩針所成之角爲何角?敲6點時?敲9點時?

3. 時鐘敲幾點時,兩針成銳角?成鈍角?

4. 試述用半圓儀量角之法.

5. 下列兩三角板之各角爲幾度?



(16)

6. 角之大小,與兩邊之開度有關係否?與兩邊之長短有關係否?

§7. **等角.** 將此角置於他角之上,其頂及兩邊均能彼此密合者,此兩角謂之相等角.

角之相等與否,亦可用半圓儀量其度數以驗之.

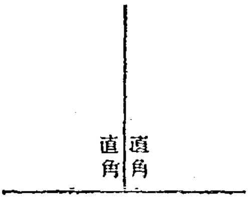
習題 VI

1. (1)圖中之三角相等否?

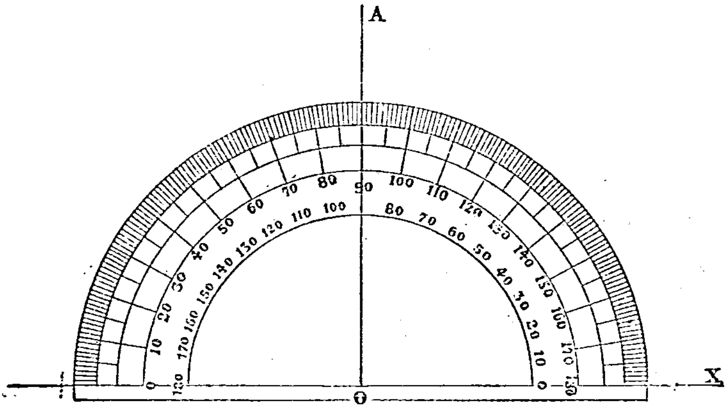
2. 不等兩角,孰大孰小,用何法比較之?

§8. **垂線.** 兩線相遇成直角時,彼此互爲**垂線.**

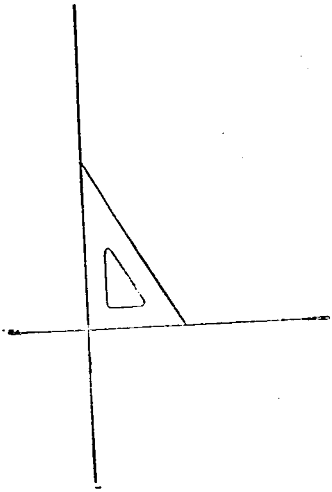
兩線是否垂直,可用半圓儀或三角板以驗之.



(17)



(18)



(19)

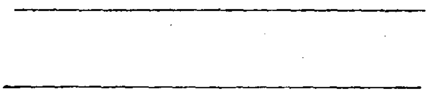
習題 VII

1. 用半圓規或三角板驗兩線是否成垂直,其法如何?試就(18)(19)兩圖復述之.

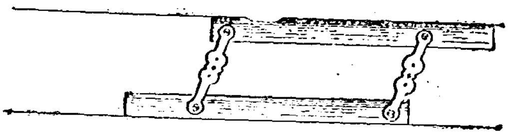
2. 指出教室內互為垂直之線.

§ 9. **平行線**. 在一紙上或板上有二直線,無論若干長,終不相遇者,謂之**平行線**.

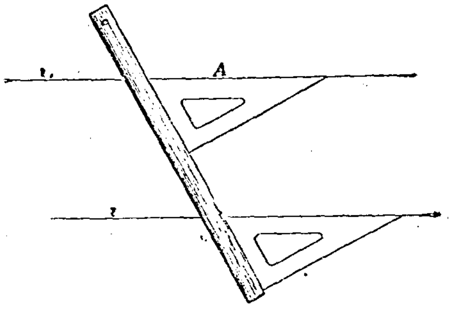
紙上二線是否平行,可用**平行尺**或三角板以驗之.



(20)



(21)



(22)

習題 VIII

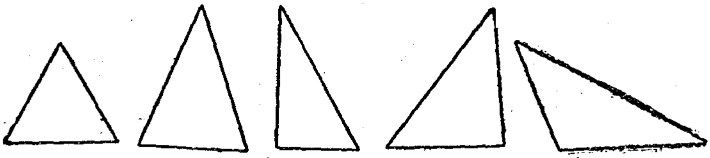
1. 指出教室內互相平行之線.

2. (2)(3)兩圖形相對之邊,是否平行?試用平行尺及三角板以驗之.

§ **10.** 簡單圖形. 圖形因邊數之多寡,線之曲直長短,或角之大小而各有不同.今將圖形中之簡單而習見者,大別之爲直線形與曲線形二類,分列於下:—

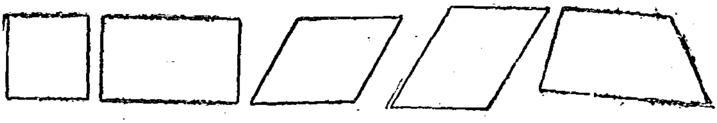
I 直線形

(a) 三角形



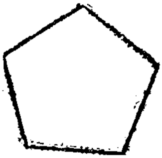
正三角形 (23)　等腰三角形 (24)　直角三角形 (25)　銳角三角形 (26)　鈍角三角形 (27)

(b) 四邊形

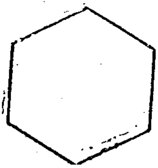


正方形 (28)　長方形 (29)　菱形 (30)　平行四邊形 (31)　梯形 (32)

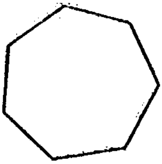
(c) 多邊形



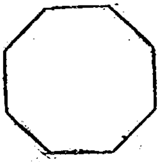
正五邊形
(33)



正六邊形
(34)

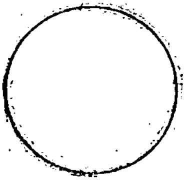


正七邊形
(35)

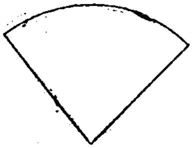


正八邊形
(36)

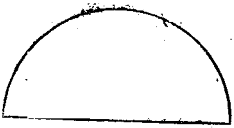
II 曲線形



圓
(37)

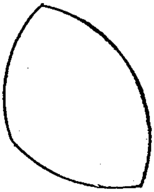


扇形
(38)

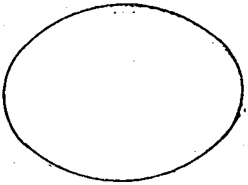


弓形
(39)

新月形
(40)



弧三角形
(41)



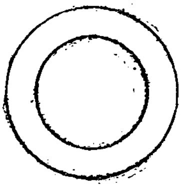
橢圓形
(42)

習 題 IX

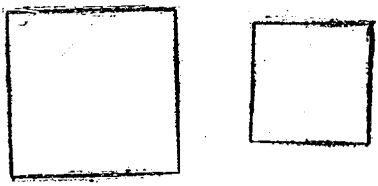
1. (23)至(36)各圖形之邊或角，有何性質?

2. 試揣想(37)至(42)各圖形名稱之意義.

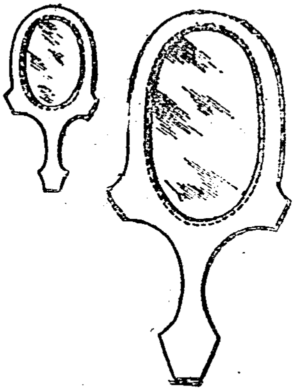
§ 11. 相似形. 圖形之形狀相同而大小不同者,謂之相似形.



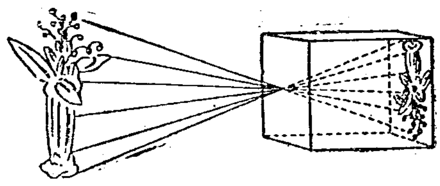
(43)



(44)

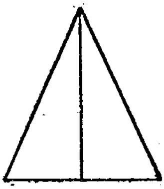


(45)

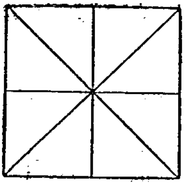


(46)

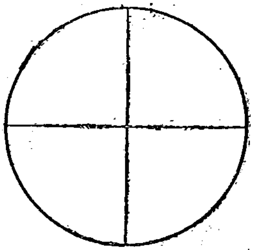
§ 12. 對稱形. 如上列各圖形,依某處摺疊之,其兩部分處處相合者,是爲對稱形.其摺疊處之一直線,謂之對稱軸.



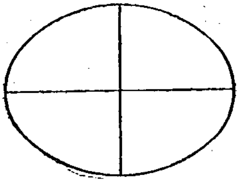
(47)



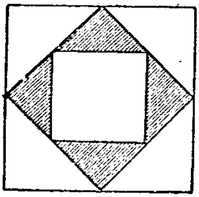
(48)



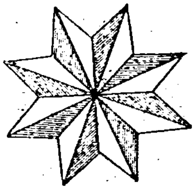
(49)



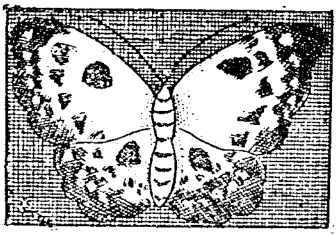
(50)



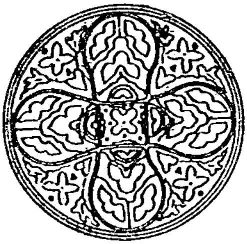
(51)



(52)



(53)



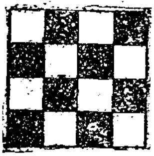
(54)

習題 X

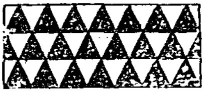
1. 指出(47)至(54)各圖形之對稱軸.

§ 13. 複合圖形. 編織建築等物,其形多極美

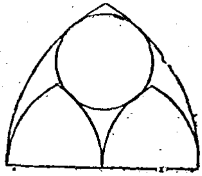
觀;分析之:每係一種或數種簡單圖形集合而成者.如下各圖形是.



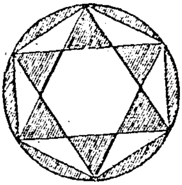
(55)



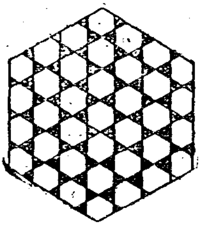
(56)



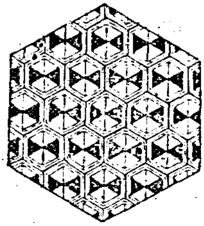
(57)



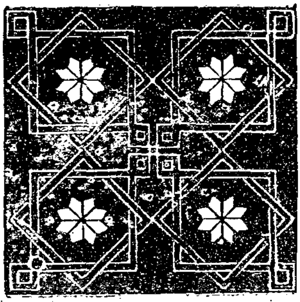
(58)



(59)



(60)



(61)

習題 XI

1. 分析(55)至(61)各圖形由何種較簡圖形集合而成者.

第貳章

作圖法

§1. 作圖器具. 「工欲善其事,必先利其器」茲於述作圖法之先,將本章所需用器具之要點,略述於下:

(1) 尺(壹7圖) 邊要直;所刻尺度要準.

(2) 圓規(壹8圖) 兩脚要齊;針尖要尖銳;螺絲要能旋得緊;含墨之處要滑利.

(3) 直線筆(1圖) 尖端兩側綫要齊;螺絲要能旋得緊;含墨之處要滑利.

(1)

(4) 半圓儀(壹11圖) 質要透明;刻度要精密.

(5) 三角板(壹16圖) 邊要直;角度要準.(度數見壹V,5.)

(6) 平行尺(壹21圖) 板之寬度處處要相等;邊要直;伸縮要靈活.以上數種,學者須預先考驗精確,以備應用.

【註】 實際作圖時,無論何種器具,均可用之以圖便利;若在幾何學上則不然,所用器具,備有未刻尺度之尺及圓規二者而已,其餘除直線筆無關係外,概不許用.

習題I

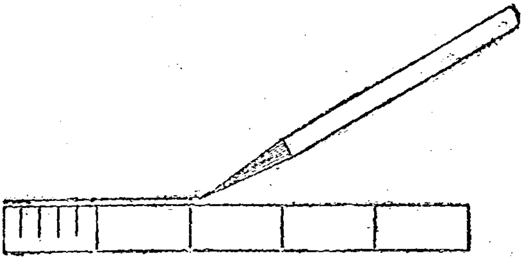
1. 本節所述各器具之用處何在?試就壹章所習者分

別言之.

§2. 基本作圖. 作圖之基本爲作點,直線與圓(弧)三者.今分別述其法如下:

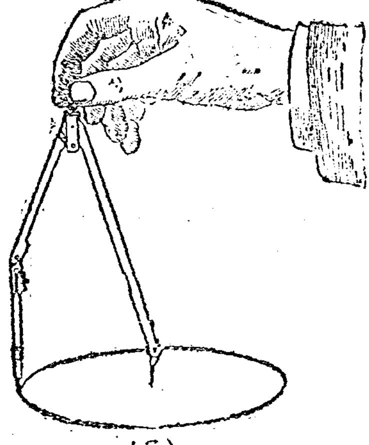
(1) 點. 某處欲誌點時,以筆作一小點(•)或叉(×)或小圓圈(∘)均可.

(2) 直線. 作直線所用之器具爲尺.置尺於紙上,沿其邊而以筆畫之卽得.實際上用三角板或平行尺等之邊以代尺亦可.

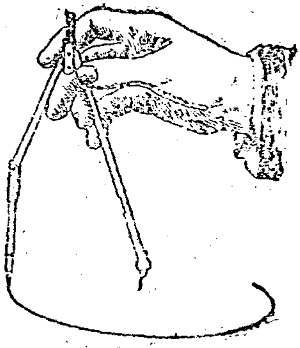


(2)

(3) 圓與弧. 作圓或弧所用之器具爲圓規.將圓規



(3)



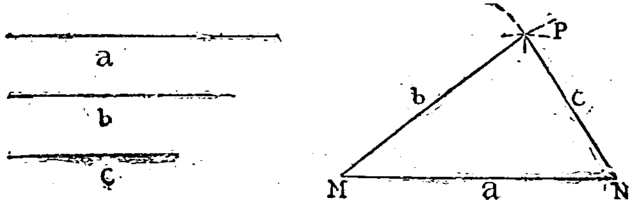
(4)

之一脚固定於紙上,旋轉他脚一周,即得圓周.若旋轉不足一周而僅其一部分者即爲弧.

習題 II

1. 引長 3 公分長線段至 5 公分,8 公分.
2. 作一線段與已知線段等長.
3. 作一線段爲已知線段之 2 倍,3 倍,4 倍.
4. 過兩點可作幾直線?過一點則如何?
5. 作半徑 2 公分及 3 公分長之二同心圓.
6. 作一象限之弧;再引長之至150度.

§3. **作三角形法.** 三角形之三邊長 a, b, c.



(5)

先作 MN 線與 a 等長.

再以 MN 各爲心, b, c 各爲半徑作弧,相交於 P.聯 PM 及 PN 作線,則 PMN 爲所求之三角形.

習題 III

1. 作一正三角形,每邊 5 公分.
2. 作一等腰三角形,底 3 公分,腰 5 公分.
3. 作一三角形,其三邊之長爲 3 公分,4 公分,5 公分.

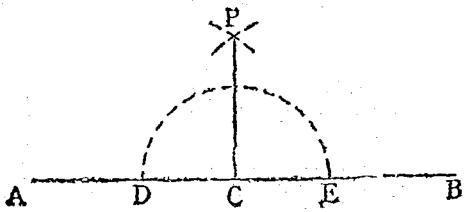
4. 作一三角形,其三邊之長爲 6 分, 8 分, 10 分

5. 此二形爲何種三角形?

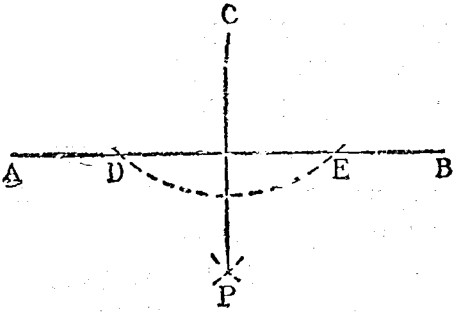
§ 4. 作垂線法. 過一點作已知線之垂線,其法如下.

(1) 用三角板 }
(2) 用半圓儀 } 學者參考(壹, § 8)而述之.

(3) 用圓規及尺(幾何學上之法) AB爲已知線, C爲已知點.



(6) 點在線內者



(7) 點在線外者

以 C 爲心,任意半徑作弧,交AB線於 D, E 點.以 D, E 各爲心,任意半徑作弧(兩半徑相同)務使其相交.設交於P, 聯 PC 線,即所求之垂線.

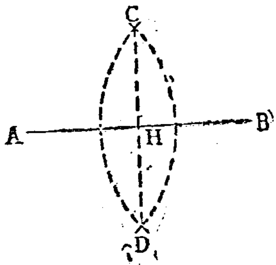
習題 IV

1. 過已知線之一端作垂線,其法如何?
2. 作一直角三角形,其兩股一爲一寸,一爲一寸五分.

§ 5. 平分線段法. AB 爲線段.

(1) 以尺量其長度而平分之.

(2) 以 A, B 各爲心,任意長爲半徑(兩半徑相同)作弧,務使其相交.設交於 C, D 兩點,聯 C, D 所作之線與 AB 交於 H, 此 H 點即平分 AB 線.



(8)

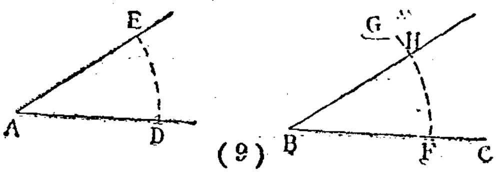
習題 V

1. 分已知線段爲 4 等分.
2. 知正方形之周,求作其形.(周者,諸邊之和也.)
3. 作三角形之三中線.(中線者,自角頂至對邊中點之線也.)
4. 自三角形三邊之中點各作垂線,以其交點爲心,交點距一角頂之長爲半徑作圓.(此圓稱爲三角形之外接圓.)

§ 6. 作等角法. A角爲已知角.

(1) 用半圓儀量其度數而作之.

(2) 任作一直線FC. 以 A 爲心,取任意半徑作DE弧,



(9)

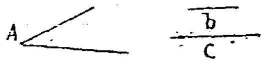
以 B 爲心,原半徑爲半徑,作 FG 弧.再以 F 爲心,DE 距離爲半徑,作弧,截 F G 弧於 H.作 H B 線,則 HBC 角與 A 角相等.

習題 VI

1. 用半圓儀或三角板作以下各角:

30°, 45°, 60°, 72°, 90°, 150°.

2. 作角爲(9)圖 A 角之 2 倍,3 倍,4 倍.



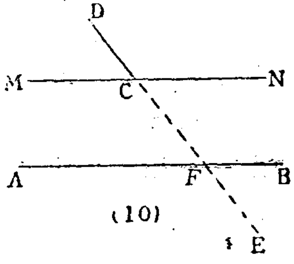
3. 作一三角形,頂角爲 A,兩腰爲 b, c.

4. 作一三角形,底 5 公分,底端之角 40° 及 60°.

§ 7. 作平行線法. 過一點作已知線之平行線,其法如下:

(1) 用平行尺 }
(2) 用三角板 } 學者參考(壹,§ 9)而述之.

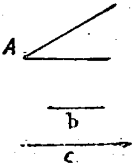
(3) 用圓規及尺. A B 爲已知線,C 爲一點.過 C 點任作 D E 線交 A B 於 F.作 D C M 角(或 F C N 角)與 C F A 角相等.如是所作之 M N 線,與 A B 線平行.



(10)

習題 VII

1. 作平行四邊形,其一角爲A,夾 A 角之邊爲 b, c.

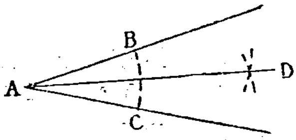


2. 作每邊 5 公分之正方形.
3. 作每邊 5 公分,一角 60° 之菱形.
4. 作一長方形,長 2 寸,寬 1 寸.

§ **8.** 平分角法. A爲已知角.

(1) 以半圓儀量其度數而平分之.

(2) 以 A 爲心,任意半徑作 C B 弧.以 C, B 各爲心,任意半徑(兩半徑相同)作弧,務令其相交.設交於D,則 DA 線平分A 角.



(11)

習題 VIII

1. 試平分一平角.
2. 試平分一直角.
3. 分60°之角爲 4 等分.
4. 作三角形三角之平分線,以其交點爲心,交點至一邊之垂線爲半徑作圓.(此圓稱爲三角形之外切圓.)
5. 作正方形之內切圓及外切圓.

§ **9.** 作圓內接正多邊形法. 欲作幾邊形卽分圓周(360°)爲幾等份,——用半圓儀按其每份之度數分之,——將圓周上之分點順次聯以直線卽得.

習題 IX

1. 作圓內接正六邊形(此題尋常作法:係以圓周上任一點爲心,原圓之半徑爲半徑作弧,截圓周於一點;再以此點爲心,原半徑爲半徑作弧,截圓周於又一點;如是順次截之而聯以直線卽得.

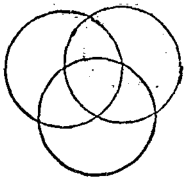
2. 作圓內接正三角形,正五邊形,正九邊形.

3. 作正八邊形之內切圓及外接圓.

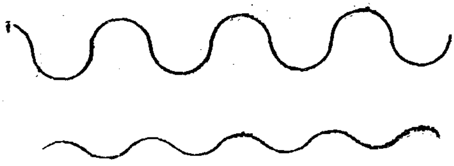
§ 10. 作複合圖形法. 由(壹,§ 13),可知複合圖形率由簡單圖形集合而成;故簡單者之作法既明,複合者自不難迎刃而解,不過其參伍錯綜之處各有不同耳.

習題 X

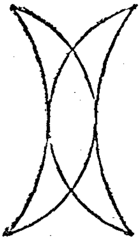
1. 摹下列各圖形,並說明其作法:



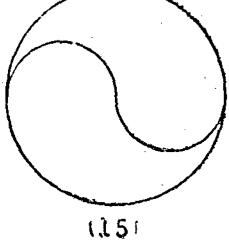
(12)



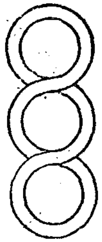
(13)



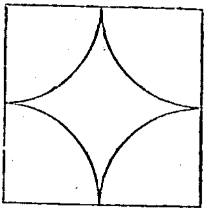
(14)

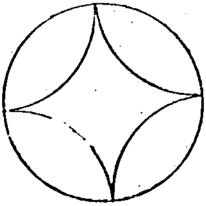


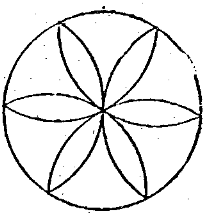
(15)

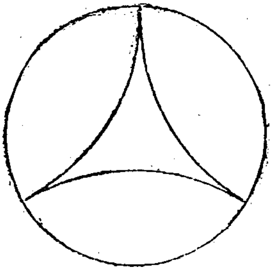


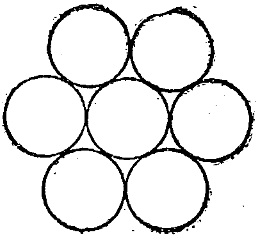
(16)

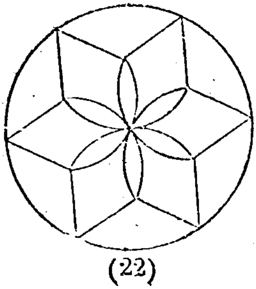

(17)

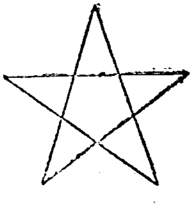

(18)

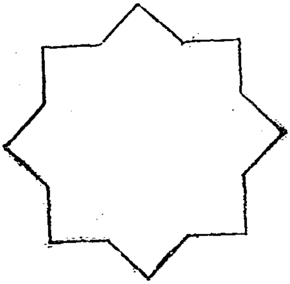

(19)


(20)

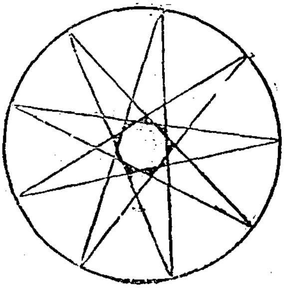

(21)


(22)


(23)



(24)



(25)

第叁章

數量及其基本性質

§ **1.** **數.** 計量之大小多少,事物及類之衆寡,次第者曰**數**.例如:

五尺,三寸,千金;三仁,五帝,三王;三族;三宿,再拜,三番,五次,一擊;第一席,第五日.

§ **2.** **個數與序數.** 計個體之個數,事之次數;類之類數者曰**個數**;如五男,二女,三國,六朝;九叩首,一擊,九族,四班,八組,之五,二,三,六,九,一,九,四,八是.每個數本身僅有大小,不含次序之意義,若按其大小順序排列之爲

〇,一,二,三,四,五,六,七,八,九,十,十一,十二,十三…………

則稱爲**自然數串**.前十數稱爲**單數**.

數之記事物之次第者曰**序數**.序數之最通用者爲

第一,第二,第三,第四…………

此外尙有別種形式之序數.如甲,乙,丙…;子,丑,…;a, b, c,…;長,次;孟,仲,季;等字,皆序數之變形.

習題 I

試就下列各語中指出何數爲序數,何數爲個數.

1. 宣統三年八月十九日革命軍起於武昌.
2. 中華民國六年七月三日張勳復辟.
3. 再拜稽首.

4. 司儀唱曰『向國旗行三鞠躬禮！一鞠躬！再鞠躬！三鞠躬！』

5. 季文子三思而後行．子曰，『再思可矣．』

6. 西喪地於秦七百里，長子死焉．

7. 仲春之月，……

§ 3. **數字與數碼．** 今將通用各種數字及數碼表列於下：

中國數字	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	五十	百	五百	千
又	壹	貳	叁	肆	伍	陸	柒	捌	玖	拾	伍拾	佰	伍佰	仟
中國數碼	〡	〢	〣	〤	〥	〦	〧	〨	〩	什	〥十	〡百	〥百	〡千
又	一	二	三	𝍬	〥	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱	10	〥0	100	〥00	1000
羅馬數碼	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	L	C	D	M
又	i	ii	iii	iv	v	vi	vii	viii	ix	x				
阿拉伯數碼	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50	100	500	1000

上表中阿拉伯數碼一種，世界各國均已通用．羅馬數碼雖創作於阿拉伯數碼之前，今則用以記數之處甚少．中國數碼第一種現時我國人用之者尚多；第二種則僅昔日治古算學者用之．

習題 II

下列各數，用五種數碼表示之：——

十二，十五，十四，二十，三十，五十二，四十七，一百二十，九十九，一百八十，六百四十，一千零二十五，九百五十．

§ 4. 名數與不名數. 計量之大小多寡者,如七尺,五斗,百鈞,等數,常附以名焉,以指數意之所在,故曰名數.治數之學往往抽象用數而不指名,如三加五等於八,二二爲四,其中三,五,八,二,四皆爲不名數.

名數有異類而異名者,如 5 尺與 8 斤,一計長,一計重.有同類而異名者,如八公尺與三寸,同係計長.有異類而同名者,如「一刻十五分」之「分」與「一度六十分」之「分」是.

習題 III

下列各數,孰爲名數?孰爲不名數?何數與何數同類異名?何數與何數同名異類?

一斤十六兩;一髮千鈞;三三如九;十個爲一十,十十爲一百,十百爲一千,十千爲一萬;十寸爲一尺,十尺爲一丈;一時八刻;一時(一點鐘)四刻;失之毫釐差以千里;執政如執衡,絲毫不假;禹疏九河;吾日三省吾身;一尺之棰,日取其半,萬世不竭;一日不見,如三秋兮;鑄爲金人十二;三分天下有其二.

§ 5. 單位與量數. 計長則曰九尺,曰三尺;計重則曰百斤,曰六兩;計時間則曰五百年,曰一月;此尺,寸,斤,兩,年,月諸名皆用以計量之標準也,稱爲單位,或曰么率,亦曰準個;其九,三,百,六,五百,皆所以表示被量之量爲標準量之多少倍,稱爲量數.量經測量後則以名數記之,其名單位也,其數則量數也.一類之量必定一標準以量之,故每類量必須有單位,然亦有一類而用幾單位爲標準者.

習題 IV

1. 試列舉最習用之計時單位.
2. 試列舉最習用之計長單位.
3. 試列舉最習用之計重單位.
4. 試列舉最習用之計廣單位.

計量所得之量數,常因所用單位之不同而異其值.例如 AB 一直線,以寸爲標準而量之則爲 3 寸,以分爲標準而量之則爲30分,單位不同,量數因之而異.半斤之與八兩,

A————————————————B

其重相若,人之所知也.其半斤之等於八兩者重相等耳,非半與八相埒也.故治量必須注意單位(名),不可僅注意量數(數).僅注意量數,則難免蹈「半等於八」之誤謬矣.

§ 6. 單名數與複名數. 一數僅含一名者曰單名數;如§4中一切名數皆係單名數.一數含二名或多名者曰複名數;如「二斗五升」,「七尺五寸五分」,「三百六十五日五小時四十八分四十六秒」是.

習題 V

1. 試各說複名五個.
2. 記量何必用二名?更何必用多名?

§ 7. 整數,分數,小數. 將一石均分爲四份,每份不足言石.然一石即十斗,四分之爲二斗半;一石即百升,四分之爲二斗五升,二斗五升爲複名數記法.若僅用升爲單位,恰合25升,其量數25爲整數.若僅用斗爲單位,不能恰合整斗數,記爲2.5斗;若用石爲單位,不足一石,記爲0.25石.此稱爲小數記法,其點號稱爲小數點.點之左爲整數,右爲小數.回憶此二斗五升乃將一石均分爲四份中

之一份,欲表明此種事實常寫爲 $\frac{1}{4}$ 石,其量數 $\frac{1}{4}$ 稱爲**分數**.是爲**分數記法**.

記法名稱	寫法	讀法
複名數記法	2 斗 5 升	二斗五升
整數記法	25 升	二十五升
小數記法	2.5 斗	二點五斗
又	0.25 石	零點二五石
分數記法	$\frac{1}{4}$ 石	四分之一石

§ 8. 個體事物與連續量. 學者試思

一線段,三等分之;
一角,三等分之;
漢冶萍公司一股,三等分之;
一牛,三等分之;
一人,三等分之;

孰可孰否?線段之分法吾人已能之矣(§ 11)當然可分.一角之三等分法,雖未能,吾人固認爲可分也.漢冶萍公司一股,自其價值言之,認爲可分;自其股權言之,認爲不可分.人之不可分,衆有同心焉.至於牛,其爲個體無異於人,照例應認爲不可分.然而宰夫能分之何也?此無他,宰夫之所分者牛肉耳,非牛也.

若是乎可分與不可分之辨不難矣.苟可分如線段,不可分如人,誠不難辨.至於角之可分而不能分,股票,牛,可分與不可分有兩解,則辨玆難矣.算學之務不在辨孰可分孰不可分;而(1)在研究苟可分矣,分後何以識其大小;(2)苟不可分矣,則相戒不謂之分,換言之,不認其分(例如 $\frac{1}{3}$ 人)有大小性.

桃之不可分有如牛.然而三人公有二桃則認爲各得 $\frac{2}{3}$ 桃,三人公有一桃則認爲各得 $\frac{1}{3}$ 桃.是已非數量矣.而吾人又各存有

$$\frac{2}{3}\text{桃} > \frac{1}{3}\text{桃}$$

之半明半晤的含糊觀念.是强以可分量之性質

$$\frac{2}{3}\text{尺} > \frac{1}{3}\text{尺}$$

附會於不可分量也.算學當然不承認.

算學中所用記號如分數記法 $\frac{2}{3}$,$\frac{4}{5}$,等,小數記法 0.2, 1.3 等,乃專爲可分量而設,絕對與個體的事物無關.此等記號之設,乃專用於吾人認爲有無限制的受分性之量.平常所用之線段(長),角,面積,體積,時間,重,貨幣(價),溫度,等,吾人皆認爲有此性質.其中最有代表資格者厥爲線段.

所謂連續量,其最顯著之性質,即在有無限制的受分性.連續量除可以任意分爲若干分外,尙有其他性質,俟有機會再論之.

§9. 絕對量與有向量. 數量有具正反兩義者,如向東一里與向西一里,午前二點鐘與午後二點鐘是,稱爲**有向量**,或曰**方向量**,亦曰**動量**.亦有絕無反對意義者,如五斗,八斤是,稱爲**無向量**,或曰**絕對量**,亦曰**靜量**.又如云『南口者,居庸關之下關也.下關南門至北門一里,由下關北行十五里至中關,中關南門至北門一里,由中關北行十五里至上關,上關南門至北門一里.由上關北行十五里至八達嶺,』其中三個「十五里」皆係有向量,蓋有北行二字表其方向也,(與之正相反者爲南行十五里.)其中兩個「一里」皆係無向量,僅表示南北門之距離.試將「由下關北行十五里至中關」改爲「由中關北行十五里至下

圖」則與事實大相背謬.將「南門至北門一里」改爲「北門至南門一里,」行文雖欠佳,然與事實則相符.

習　題 VI

試指出下列各數量孰爲絕對量,孰爲有向量.

1. 乘扶搖而上者九萬里.

2. 天下之地,方千里者九,齊實有其一,以一服八,何以異於鄒敵楚哉?

3. 巨無霸身長十丈,廣寬四圍.

4. 五百年必有王者興.由周而來,八百有餘歲矣.

§ **10.** 量之種類. 量之通用者有下列各種:—

1. 長,距離長短是也.其名爲尺,寸,分;公尺,公寸,公分;等.

2. 重,質量輕重是也.其名爲斤,兩;磅;公斤,公兩;等.

3. 時間,久暫是也.其名爲年,月,日,小時,分,秒,等.

4. 面積,廣袤是也.其名爲方尺,方公尺,畝等.

5. 體積,空間容積是也.其名爲斗,升,立方寸,立方尺,立方公尺等.

6. 角,旋轉之寬狹是也.其名爲直角,度,分,秒等.

7. 熱,寒暖是也.其名爲華度,攝度,列度.

8. 貨幣,金錢之價值是也.其名爲圓,角,分,文等.

不名數亦可視爲量之抽象,故亦自爲一類.

§ **11.** 數量之基本性質. 數量之性質甚多,且各類不同,就前列七類而論,其最淺顯而通用者如下:

1. 同類二量,必甲量大於乙量,或甲量等於乙量,或甲量小於乙量,三者必居其一,且祇居其一.

2. 若甲量等於乙量,則乙量等於甲量.

3. 若甲量等於乙量,乙量等於丙量,則甲量等於丙量.

4. 凡量各等於其本身.

5. 若甲量大於乙量,卽乙量小於甲量.

6. 同類二量可以相加,仍得一同類量,大於各該量.

7. 凡量各可劃分之爲二部分,且二部分相加等於該量.

8. 全體大於其任意一部分.

9. 若甲量等於乙量,各加以同量,其和相等.

10. 若甲量大於乙量,各加以同量,其和前者仍大於後者.

11. 若甲量大於乙量,則甲量之中必有一部分等於乙量.

12. 若甲量大於乙量,可由甲減去乙,其差仍爲同類量較甲小.

13. 若甲量大於乙量,由甲減去乙後復加入一等量,或加以乙後復減去一等量,仍等於甲量.

14. 相等二量,各減去較小之同量,差相等.

15. 若甲量大於乙量,各減去更小之同量,其差前者仍大.

16. 若干等量相加之和卽爲各該量之若干倍.

17. 相等二量之同倍相等.

18. 若甲量大於乙量,則其同倍,亦前者大於後者.

19. 甲量爲乙量之若干倍,卽乙量爲甲量之若干分.

20. 一量若干分之若干倍,或若干倍之若干分,仍爲原量.

21. 相等二量之同分相等.

22. 若甲量大於乙量,則其同分前者亦大於後者.

23. 凡量,可任意均分之爲若干分.

24. 若甲量小於乙量,則必有甲量之若干倍大於乙量.

(後二性質爲個體事物所無)

第肆章

整數加減法

§ 1. 加法. 同類之量併而合之曰加，併合而得之數曰和. 故相加者必同類，非同類不得相加.至於不名數之相加，乃泛指同名數而言，可視爲同名數.同類而異名者須化爲同名而後相加.今茲所論乃同名數之加法也.同名數之有小數及分數者其加法以後詳之.今先述整數加法.

（甲）二數相加，先齊其位，(個位與個位列於同行，十位與十位列於同行，諸如此類.)個位與個位相加，足十則進 1.十位與十位相加，併所進，足十則進 1.如此遞推則得和數.

例 1. 3+8.

算草

$$\begin{array}{r} 3 \\ +\quad 8 \\ \hline 11 \end{array}$$

例 2. 3567+2083

算草

$$\begin{array}{r} 3567 \\ +\quad 2083 \\ \hline 5650 \end{array}$$

（乙）多數疊加，本應順次加之.惟爲提便起見常一併加之.其法，先齊其位.自右而左，個位各數相加，足十則進 1，足二十則進 2，….十位與十位相加，併所進，如法進位.如此遞推則得和數.

例 3. 7582+360+1003+72.

$$\begin{array}{r} 7582 \\ +\quad 360 \\ \hline 7942 \\ +\ 1003 \\ \hline 8945 \\ +\quad 72 \\ \hline 9017 \end{array} \qquad\qquad \text{捷草} \quad \begin{array}{r} 7582 \\ 360 \\ 1003 \\ +\quad 72 \\ \hline 9017 \end{array}$$

(丙) 同數自加，可用前法爲之.惟自加猶如乘,故可以乘法代之.(待下章詳論.)

例4.　23+23.

$$\begin{array}{r} 23 \\ +\ 23 \\ \hline 46 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23 \\ \times\ \ 2 \\ \hline 46 \end{array}$$

例5.　367+367+367.

$$\begin{array}{r} 367 \\ 367 \\ +\ 367 \\ \hline 1101 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 367 \\ \times\quad 3 \\ \hline 1101 \end{array}$$

習題 I

1.
$$\begin{array}{r} 123456789 \\ +\ 987654321 \\ \hline \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{r} 13579 \\ +\ 97531 \\ \hline \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{r} 2468 \\ +\ 8642 \\ \hline \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{r} 9630 \\ +\ \ 369 \\ \hline \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{r} 1192 \\ 3475 \\ +\ 5787 \\ \hline \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{r} 131232 \\ 223311 \\ +\ 312123 \\ \hline \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{r} 393077 \\ 779990 \\ 937333 \\ +\quad 709 \\ \hline \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{r} 3333333 \\ +\ 1234567 \\ \hline \end{array}$$

9.　789+10030+2466+290000.

10.　鐵發明於西歷紀元前1406年,柏士米製鋼法創於西歷1860年.問相距幾年.

11.　下表各數係以海里計算;其餘空格內,問當各塡若干海里.

至＼由	上海	鎮江	蕪湖	九江
鎮江	157			
蕪湖		103		
九江			198	
漢口				140

12. 某生入學時計繳學費十元,購書三元八角五分,文具五角六分,制服三元六角五分.問共用幾何.

13. 歐洲比澳洲大 3033 萬方里,非洲比歐洲大 6250 萬方里,美洲比非洲大 3550 萬方里,亞洲比美洲大 110 萬方里,而澳洲爲 67 萬方里.問亞洲有若干萬方里.

14. 某舟在靜水中每小時能行 8 里,今行於河中,順流駛下,水速每小時 5 里.問每小時能行若干里.

15. 二船在靜水湖中由同地點相背而行.其速度每小時一 5 里,一 7 里.問二舟相對速度若干里.

§2. 加法交換律. 二數相加,通常稱前數爲**被加數**,後數爲**加數**;例如甲筐盛桃 3 枚,乙筐盛桃 5 枚,傾乙筐之桃於甲筐,3 枚爲被加數,5 枚爲加數,8 枚爲和.然若傾甲筐之桃於乙筐,則 5 枚爲被加數,3 枚爲加數,其和仍爲 8 枚.是故知加法不論次序,加數與被加數不必有劃然之界限也.此稱爲**加法交換律**,卽

甲數+乙數=乙數+甲數.

例如　3枚+5枚=5枚+3枚;

8尺+9尺=9尺+8尺.

習 題 II.

1. 大數加小數與小數加大數,何者順心?

2. 二數相加不拘次序,多數相加拘次序否?可計算下列各和數以驗之.

$(7+2)+4$　　$(2+7)+4$　　$(2+4)+7$

$7+(2+4)$　　$2+(7+4)$　　$2+(4+7)$

§ 3. **加法結合律.** 甲筐盛 3 桃,乙筐盛 5 桃,丙筐盛 6 桃,先傾乙筐之桃於甲筐,得 8 桃,再益以丙筐,得 14 桃.若先傾丙筐之桃於乙筐,得 11 桃,再傾之於甲筐,仍得 14 桃.此理稱爲加法結合律,即

(甲數+乙數)+丙數=甲數+(乙數+丙數)

例如　$(17+29)+3=46+3=49, 17+(29+3)=17+32=49.$

此較上節習題 2 所得結果爲狹.與交換律合之卽可得廣義的

加法結合律:—— 諸數相加,不論加合之先後,總和常相同.

此理應用最廣.相加時先加同位數,疊加不拘次序,一併施加,皆本此理也.今更述一應用於下:——

施疊加演草時,吾人極願先擇相加能得 10 之諸數先加併之,以便進位.凡兩數相加等於 10 者謂爲**補數**. 1 與 9, 2 與 8, 3 與 7, 4 與 6, 5 與 5 是也.

習 題 III.

演下列諸題時,須注意同位補數.

1.

$$\begin{array}{r} 9232 \\ 863 \\ 378 \\ 1379 \\ 441 \\ +\quad 737 \\ \hline \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{r} 78923 \\ 3618 \\ 2440 \\ +\quad 6122 \\ \hline \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{r} 93823 \\ 3018 \\ 19003 \\ +\quad 321 \\ \hline \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{r} 8315 \\ 6920 \\ 6774 \\ +\quad 24185 \\ \hline \end{array}$$

5. $3315+1470+2805.$

6. $93+7281+363.$

§4. 減法. 囊中5圓去其3則餘2圓.5圓爲**被減數**,3圓爲**減數**,2圓爲**差數**,或曰**較數**.而此種手續謂爲**減**. 同類數而後可以施減,不同類數則否,此正與加法同.例如求馬於牛廐,廐中之牛雖多,必不能得馬也.同類異名數須先變爲同名數然後施減,(其法俟後論之.)被減數,減數,差數皆係同名數,其關係如下:

被減數－減數＝差.

今先述同名整數減法.

整數施減,被減數列上,減數列下,齊其位.由被減數之個位數減去減數之個位數,得較數之個位數;如不足減,於被減數之十位取1至本位當十以待減;如十位無可借(即爲0)於被減數之百位借1至十位當10,留其9,取其1至本位當10以待減;如此類推.次,由被減數之十位數(或新留之9)減去減數之十位數,如曾爲個位所借,則再減1;如不足減,倣上法借上位數以待減.如此遞演,乃得差數.

例 **1.**

$$\begin{array}{r} 156 \\ -\quad 27 \\ \hline 129 \end{array}$$

例 **2.**

$$\begin{array}{r} 103 \\ -\quad 56 \\ \hline 47 \end{array}$$

例 **3.**

$$\begin{array}{r} 2330059 \\ -\quad 2132164 \\ \hline 197895 \end{array}$$

習題 IV

1. 1111111110−123456789.

2. 10020037−5206612.

3. 25637−8076.

4. 加何數於837,其和為1000?

5. 數學大家奈端生於西歷1642年,歿於1727年.問其歿年幾歲.

6. 希臘古數學家兌拉斯生於西歷紀元前640年,歿於546年.問其享壽幾何.

7. 木星距太陽約496000000哩,距土星約909000000哩.問土星比木星遠太陽幾哩.

8. 就下列現金出納簿記入逐日餘數,及本月存款,並合計支出數與收入數.

現金出納簿

民國十一年

月	日	摘要	收入		支出		餘數	
9	1	上月轉入	3	45				
	3	數學一部			2	25		
	5	洗浴剪髮				45		
	8	父親給洋	5	00				
	13	運動鞋			2	50		
	15	報費				80		

	15	洗浴剪髮				45		
	17	車費				10		
	20	筆一支				15		
	21	母親給洋	24	00				
	〃	牛乳			3	00		
	23	洗浴剪髮				45		
	27	布鞋一雙			1	00		
	30	本月存款						

9. 某人生於光緒 2 年歿於民國 9 年.問此人歿年幾歲.

【注】 清光緒三十四年,宣統卽位,宣統三年退位,改建中華民國.

10.

	大　數	小　數	大小之和	大小之差
i	835		1105	
ii	1000			12
iii		431	875	
iv		213		57

問此表中各空格應塡何數.

11. 每日早 6 時起,夜 10 時寢,問眠時幾何.

12. 甲倉有米 1256 石,乙倉有米 798 石.今由甲倉取米 60

石後,問再取米若干石則與乙倉等.

13. 某舟在靜水中每小時能行 8 里.今行於河中,水速每小時 5 里.若逆駛而上,每小時能行若干里?

§ **5.** 加減演算之次序——括號. 加法不論次序,故無指明演算手續先後之必要.減法則不然.被減數常大於減數,最小亦相等,顛而倒之卽無從施減(除非相等.)在加減並施之計算,縱可減,亦往往因施算手續先後不同而得數以異.故非用一種符號以指明施算手續不可.此種符號常用者有四種:

括線	——
括弧	(　)
括帶	{　}
括弓	[　]

統稱爲括號.列上者爲小括號,較下者爲大括號.加減並施之式,施算手續先結束小括號,以次及大括號.其無括號以相連屬者,由左而右,以次結算.

例 **1.** $3+\{2-(3-2)\}-(3-1)+8.$

$=3+\{2-1\}-2+8$

$=3+1-2+8$

$=4-2+8$

$=2+8$

$=10.$

習　題 V

1. $126-78-32+6.$

2. $126-\{78-(32+6)\}.$

3. $126-(78-32)+6.$

4. $(126-78)-(32+6)$.

5. 上四題答數有相同者否?

6. $(18-8)-7$ 與 $18-(8-7)$ 相等否?

7. 計算下列各式,比較其結果:

(i) $362-78+59-33$;

(ii) $362+59-78-33$;

(iii) $362+59-33-78$;

(iv) $362-33+59-78$;

(v) $362-33-78+59$;

(vi) $362-78-33+59$.

8. 再將上題結果與下列各式比較.

$(362+59)-(78+33)$.

9. 比較下列二數孰大,

$37-5-8-11-2$,

$37-(5+8+11+2)$.

10. 比較下列二數孰大,

$78-9+3-7-8+6-19$;

$(78+3+6)-(9+7+8+19)$.

§6. 減法與加法之關係. (甲)囊中5圓去其3苟餘2圓,則歸還3圓於囊中,必仍爲5圓.換言之,欲知$5-3$得幾何,但問何數加3得5可也.故減法可以加法定其義如下:—

$5-3=2$ 者, $3+2=5$ 也.

擴而充之,

被減數$=$減數$+$差數.

減者加之逆.此之謂也.此理常用之以爲核算:—

加減互驗. 加法之有無錯誤恒以減法驗之,減法

有無錯誤恆以加法驗之.

例 1.

$$\begin{array}{r} 5789 \\ +\quad 43240 \\ \hline 49029 \end{array}$$

核算

$$\begin{array}{r} 49029 \\ -\quad 43240 \\ \hline 5789 \end{array}$$

例 2.

$$\begin{array}{r} 7878936 \\ -\quad 24809 \\ \hline 7854127 \end{array}$$

核算

$$\begin{array}{r} 7854127 \\ +\quad 24809 \\ \hline 7878936 \end{array}$$

（乙） 又就其先去後還,或先入後去,仍為原數而言,可見:二數相加,其一加以某數,其一減去某數(苟可減)然後相加,得數不變.二數施減時,先以同數加於二數,然後施減,得數不變.此理常用之以立

加減互代法

例 2. $7238-992$.

若按常法演草,勢必撤動各位.不如以加代減照下法心算之.

$$7238-992=(7238+8)-(992+8)$$
$$=7246-1000=6246.$$

例 3. $1807+997$.

此可以減代加心算之如下:——

$$1807+997=(1807-3)+(997+3)$$
$$=1804+1000=2804.$$

（丙） 由上節習題 7 結果,可知:若干數施加減,祇求將應加者加之,應減者減焉(苟可減)可耳,不必拘定施算之先後也.

本此理故施算時可以捷便為施算次序之標

準.

例 4. $328+693-28+7+336+42+77-19$.

此可定次序如下:

$(328-28)+(693+7)+336+(42+77-19)$

$=300+700+336+100=1436$.

(丁) 由上節 9,10 兩題結果,可知:若干數施加減,可將應加者一併相加,應減者亦一併相加,然後於前和中減去後和.

例 5. $378+23-43+18-128$.

卽 $(378+23+18)-(43+128)$

$=419-171=248$.

此之謂併加併減. 然亦有時併加併減不如分別加減之便,如例 4 是也.

習 題 VI

1. $8+\triangle=25$?
2. $\triangle+76=100$?
3. $250-\triangle=189$?
4. $\triangle-725=75$?

演下列各題並核算之.

5. $87605+9995$.
6. $71284-9994$.
7. $86352+49997$.
8. $79950+42650$
9. $86352-49997$.
10. $143651-99980$.

計算下列各題時須預先想定一捷便手續,然後着手.

11. 37—15+13+150—185.

12. 761+575—842—73+64.

13. 864+35—860—35+200—4.

14. 250+763—187—63－93.

15. 就習題IV, 8簿記第一行計其收入總計,就第二行計其支出總計,然後施減.是否與前次所得餘數相符?其理何居?

16. 二舟行於靜水中,一每小時12里,一每小時10里.今駛行於河流中,二舟由同地相背而行,一點鐘後相離幾里?(北高附中, 1922)

【注】 參觀:I, 14, 15; IV, 13; §6, 乙.

17. 若前題二舟由同地上駛,一點鐘後相離幾里?

18. 若前題二舟由同地下駛,一點鐘後相離幾里?

§7. 減法與加法之比較.

習題 VII

試分辨下列各仂語之通否,及命題(等式即命題)之眞僞,並述所以然.

1. 二數相加.	**1′.** 二數相減.
2. 諸數疊加.	**2′.** 諸數疊減.
3. 一數加他數,常得一數以爲之和.	**3′.** 一數減他數,常得一數以爲之較.
4. 甲+乙=乙+甲.	**4′.** 甲—乙=乙—甲.
5. (甲+乙)+丙=甲+(乙+丙).	**5′.** (甲—乙)—丙=甲—(乙—丙).
6. 甲+乙+丙=甲+丙+乙.	**6′.** 甲—乙—丙=甲—丙—乙

7. 僅含加號之式,其中括號可以任意撤消,增設,或改變之,

7'. 僅含減號之式,其中括號可以任意撤消,增設,或改變之.

8. $113+91-16=188$,
$113+(91-16)=188$.

8'. $113-91+16=38$,
$113-(91+16)=38$.

9. 減者加之逆.

9'. 加者減之逆.

10. 一數,加以他數後必增大.

10'. 一數,減去他數後必變小.

11. 15 牛+8 馬=23 牛?
=23 馬?

11'. 15 牛−8 馬=7 牛?
=7 馬?

§ 8. 1及0之特性. 自然數

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,........

之中有一特別數焉,加之而不增,減之而無損,自加自減仍爲本身,0 是也.又有一特別數焉,從 0 起,迭加之,則自然數魚貫而來,無或不致,1 是也.

習題 VIII

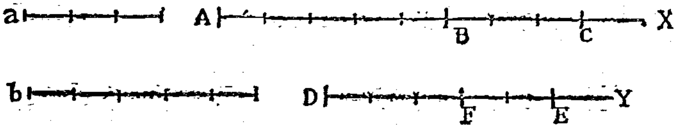
1. $7+0=\triangle$?
2. $0+5=\triangle$?
3. $8-0=\triangle$?
4. $0+0=\triangle$?
5. $0-0=\triangle$?
6. $0+\triangle=0$?
7. $12-\triangle=12$?
8. $\triangle+50=50$?
9. 從 0 起,迭加以 2, 所得爲何等數? 能盡自然數否? 3? 5? 7?

§ 9. 線段加減法. 二線段加減,其法有二:—

第一法. 量二線段之長,加減其量數.

第二法. 二線段加減,量其和差.

例如有 a, b 二線段,求其和及差.



第一法. 量得 $a=3$ 公分, $b=5$ 公分.

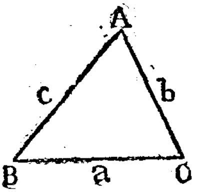
$\therefore$ $b+a=5+3=8$ 公分,

$b-a=5-3=2$ 公分.

第二法. 按第二節之法,作 $AB=b$, $BC=a$; 則 $AC=b+a$. 作 $DE=b$, $DF=a$, 則 $FE=b-a$.

習題 IX

1. 任意作一三角形 ABC.其三邊命爲 a, b, c, 求 $a+b$, $b+c$, $c+a$; 且順次將各和與 c, a, b, 比較大小.求 a 與 b 之差, b 與 c 之差, c 與 a 之差;且順次將各和與 c, b, a 比較大小.



2. 三角形二邊之和大於餘一邊,而其差小於餘一邊.此語與 1 題實驗結果合否?試詢之同班生,皆合否?

3. 任意作一四邊形,作一線段等於其周.

4. 任意作一五邊形,求其周之長.

5. 用兩法求本書長寬之差.

6. 用線段加法說明加法交換律, $a+b=b+a$.

7. 用線段加法說明加法結合律, $(a+b)+c=a+(b+c)$.

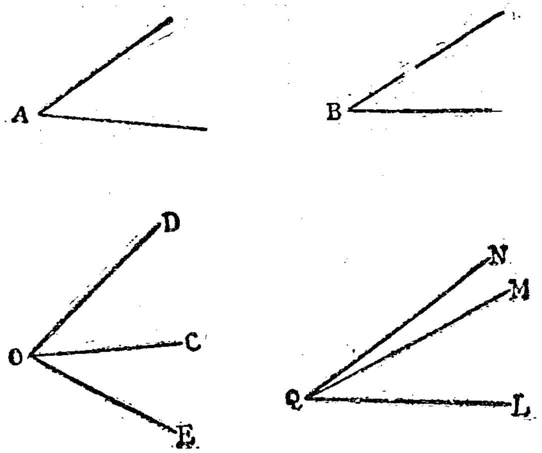
§ 10. 角加減法.

角之加減法有二:—

第一法. 用半圓儀量二角,加減其度數.

第二法. 二角先加減後量其和差.

例如有A,B二角,求其和及差.



第一法. 量得$\angle A=40^\circ$, $\angle B=30^\circ$.

$\therefore \quad \angle A+\angle B=40^\circ+30^\circ=70^\circ$;

$\angle A-\angle B=40^\circ-30^\circ=10^\circ$.

第二法. 按第貳章之法,作(如上圖)

$\angle COD=\angle A$, $\angle COE=\angle B$; 則$\angle DOE=\angle A+\angle B$,

又作$\angle LQN=\angle A$, $\angle LQM=\angle B$; 則$\angle MQN=\angle A-\angle B$.

習題X

1. 任意作一三角形ABC,用兩法求三角之和.
2. 全班實驗結果是否與下語相合?

三角形三角之和等於180°,即二直角.

3. 任意作一四邊形ABCD,用兩法求四角之和.倣2題語書其結果於下:——

....

4. 今欲用三角板一塊,作一15°之角,有幾法?

5. 用三角板作一75°之角.

6. 正三角形每角若干度?

7. 今有三角,一為110度,一35度,一45度.求作一100°之角(祇用圓規及直尺).

第伍章

整數乘除法

§ 1. **乘法.** 乘者倍積之謂也,同數頻加之謂也.一斤計16兩,四斤則16兩者凡四.此本可用加法得之,人厭其煩,故獨立一法曰**乘**; 16兩+16兩+16兩+16兩寫作16兩×4; 讀曰「以四乘16兩」,或「16兩乘以4」; 16兩為**被乘數**, 4為**乘數**, 所得64兩為**積**.被乘數與積數同名,蓋因同名數相加仍為同名數也;其有不同名者,乃經變化之結果,(其法後詳)然亦必同類.不名數泛指同名數,亦可視為同名數.乘數常為不名數;其有表面非不名數者蓋別有說在,非眞非不名數也.今玆所述,乃整數乘法.

(甲) **二數相乘.** 二單位數相乘可按九九歌為之.

九九歌

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

單位數乘多位數,可以乘數徧乘被乘數各位數,挨次左移一位而加之.多位數乘多位數,可以乘數之各位數分乘被乘數,挨次左移一位而加之.

例 1. $363\times4.$

$$\begin{array}{r} 363\\ \times\quad 4\\ \hline 12\\ 24\\ 12\\ \hline 1452 \end{array}$$

捷草

$$\begin{array}{r} 363\\ \times\quad 4\\ \hline 1452 \end{array}$$

例 2. $1363\times407.$

$$\begin{array}{r} 1363\\ \times\quad 407\\ \hline 9541\\ 0000\\ 5452\\ \hline 554741 \end{array}$$

捷草

$$\begin{array}{r} 1363\\ \times\quad 407\\ \hline 9541\\ 5452\\ \hline 554741 \end{array}$$

例 3. $189603\times2030.$

$$\begin{array}{r} 189603\\ \times\quad 2030\\ \hline 000000\\ 568809\\ 000000\\ +\ 379206\\ \hline 384894090 \end{array}$$

捷草

$$\begin{array}{r} 189603\\ \times\quad 2030\\ \hline 5688090\\ +\ 3792060\\ \hline 384894090 \end{array}$$

(乙) **諸數連乘.** 諸數連乘時可挨次施乘.

例 4. $32\times15\times6.$

$32\times15\times6=(32\times15)\times6=480\times6=2880.$

諸數連乘時,各數悉稱爲其積之**因數**;兩數相乘亦然.

(丙) **同數自乘.** 同數自乘仍須按連乘法施乘.

例 5. $31\times31\times31=961\times31=29791.$

同數自加而生乘法,同數自乘則生**乘方法**.同數自加爲**倍**.($2+2,2+2+2,\ldots$稱爲 2 之二倍,三倍,$\ldots$)同數自乘爲**方**.如$31\times31=961$,961稱爲31之**二方**,或**平方**,寫作31^2;

又如$6\times6=6^2$,$6\times6\times6=6^3$,…稱爲6之二方(或平方),三方(或立方),….

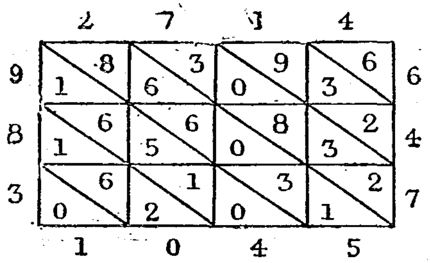
習題 I

1. 8×125.
2. 4×25.
3. 3×37.
4. $7\times11\times13$.
5. 16×125.
6. 125×16.
7. 101×11.
8. $714\times285\times8\times7$.
9. 13^2.
10. 11^2.
11. 10^3.
12. 11^3.
13. 11^4.
14. 12321^2.
15. 35×191與191×35孰大?
16. 十,百,千,萬,各數試用10之方表之.
17. 米價每斤九分.今買20石,每石計155斤,問須銀若干.
18. 七人各七貓,一貓食七鼠,一鼠食七穗,一穗生七穀粒.問人,貓,鼠,穗,穀粒各若干.又各數相加共若干?(Ahme's)

$$\begin{array}{rl}
7 & \cdots\cdots\text{人數}\\
7 & \\
\hline
49 & \cdots\cdots\text{貓數}\\
7 & \\
\hline
343 & \cdots\cdots\text{鼠數}\\
7 & \\
\hline
2401 & \cdots\cdots\text{穗數}\\
7 & \\
\hline
16807 & \cdots\cdots\text{穀數}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
7 & \\
49 & \\
343 & \\
2401 & \\
16807 & \\
\hline
19607 & \cdots\cdots\text{總數}
\end{array}$$

19. 七老媼赴羅馬,各有七驢,每驢負七囊,每囊盛七麵包,每麵包帶七刀,每刀附有七套.問媼,驢,囊,麵包,刀,套各若干.各數總計若干?(Cantor's)

20. 有一種乘法演草,名曰鋪地錦,列草成矩形,斜加得積數.今列389×2714之草如下.學者可猜想其意,併做此作一329×173之草.




```
  3523
 17860
 3523,0000
 2466,1
  281,84
   21,138
 6292,0780
```

21. 有一種右行的乘法草,多位數相乘急欲得概數時用之.例如3523×17860,欲急知其合若干萬,其草如上.(勾點以後常略而不算,或祗算一位.)學者試做此列5103×33921之草.

22. 一度合200里,一里合180丈,一丈合2步,一步合5尺.地球赤道圈長360度,問合若干里,若干丈,若干步,若干尺.

23. 一引合200斤,一斤合16兩.今有鹽52船,每船載315引.問共有鹽若干兩.

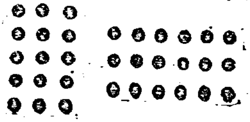
24. 一日合24小時,一小時合60分,一分合60秒.問一星期(=7日)合若干秒.

25. 一度60分,一分60秒.問36度之角爲若干秒.

§2. 乘法交換律. 甲有桃5筐,每筐3枚;乙有桃3筐,每筐5枚.甲桃之數較之乙桃何如?此固人人知其同爲15枚也.然則擴而充之.

$$3\text{枚}\times 5=5\text{枚}\times 3;$$

$$\text{甲}\times\text{乙}=\text{乙}\times\text{甲}.$$



此之謂**乘法交換律**.即謂乘數與被乘數交換其位置而積不變也.(惟名不得交換,蓋處於乘數地位之數須不名數也.)

乘法交換律於實用上亦有便利之處.例如以 8 乘 2 (即 2×8)九九歌不曰"八二一十六"而曰"二八一十六"此蓋因人之天性慣以小乘大,不慣以大乘小也.列式演草.以小乘大捷便,以大乘小迂緩.然亦有例外.

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 856 \\ \hline 150 \\ 125 \\ 200 \\ \hline 21400 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 856 \\ \times\ 25 \\ \hline 4280 \\ 1712 \\ \hline 21400 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 365 \\ \times 2040 \\ \hline 14600 \\ 73000 \\ \hline 744600 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2040 \\ \times\ 365 \\ \hline 10200 \\ 12240 \\ 6120 \\ \hline 744600 \end{array}$$

通常兩數相乘,取實位(非〇)少者為乘數,較為捷便.又數碼多重複者亦宜於為乘數.

習　題 II

演下列各題之先,須考察何數為乘數較捷便.

1. 8×756.　　　　**4.** 318×10012.

2. 24×452.　　　　**5.** 2486×550552.

3. 1256×4200.　　　　**6.** 12467×455454.

7. 兩數相乘可以交換位置,諸數連乘則如何?可計算下列各數以驗之.

3×5×12　　5×12×3　　12×3×5

3×12×5　　5×3×12　　12×5×3

8. 7 題所得結果,試舉實例以明之.

§ 3. 乘法結合律. 由上節 7,8 兩題結果可知

諸數連乘,不論施乘之先後,積數常相同.此之謂**乘法結合律**.其最簡單之形式爲

(甲數×乙數)×丙數=甲數×(乙數×丙數)

故諸數連乘可任意定其次序;(惟便是視)且由是可得捷算法;

(甲) 諸數連乘,可擇其能得積較簡者先乘之.

例 1. $25\times3682\times4$.

$25\times3682\times4=25\times4\times3682=368200.$

例 2. $36\times218\times25=36\times25\times218$

$=900\times218=196200$

(乙) 積乘可以代連乘.

例 3. $1316\times8\times25$.

$=1316\times(8\times25)=1316\times200=263200.$

(丙) 以連乘代積乘,可省布草中之加法.

例 4. 2788×56.

$2788\times56=2788\times(7\times8)=2788\times7\times8$

$=19516\times8=156128.$

習題 III

心算以下各積再以式明之;

1. $2\times25\times7\times4$.
2. $13\times5\times5\times3\times4$.
3. $7\times8\times7\times125$.

試自覓捷法演下列各題.

4. $24\times3123\times10001\times25$.
5. $37\times5\times3\times4$.

6. $11+7\times25\times13\times4$.

演下列式題時須注意: 式中加減乘各號雜陳者,須先演乘後演加減;但有括弧者,先就括弧內演算.

7. $(17+26)\times8$. 8. $17\times8+26\times8$.

9. $19\times(123+31)$. 10. $123\times19+31\times19$,

11. $8\times(13-5)$. 12. $8\times13-8\times5$.

13. $(7+8-2)\times11$. 14. $7\times11+8\times11-2\times11$.

15. 7與8, 9與10, 11與12, 13與14,各題答數有何關係? 兩種演算孰便?

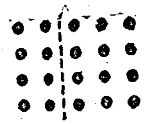
16. 甲作工5日,乙7日,丙10日.工價每日32枚(銅元),問三人共得工資若干(如何計算較捷?)

§4. **乘法分配律.** 由上節7—15各題結果,可知諸數按一定次序施加減後以一數乘之,與以該數徧乘諸數然後如法加減,得數相同.此稱為**乘法分配律**.其簡單形式為

$$(甲+乙)\times丙=甲\times丙+乙\times丙$$

例如

$$(2+3)\times4=5\times4=20,$$
$$2\times4+3\times4=8+12=20.$$



此理之用甚廣.§1所述之一般乘法卽含有此理.

例如

$$\begin{aligned}563\times4&=(500+60+3)\times4\\&=500\times4+60\times4+3\times4\\&=2000+240+12\\&=2252.\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 563\\ \times\quad 4\\ \hline 12\\ 24\\ 20\\ \hline 2252\end{array}$$

此理又可用之以立捷算法:—

以減代乘. 此法之手續及其便利可於下例見之.

例 1. $85\times 99=85\times(100-1)=8500-85=8415.$

例 2. $35\times 998=35\times(1000-2)=35000-70=34930.$

例 3. $238\times 4998.$

$$\begin{array}{r} 238\times 5000=1190000 \\ 238\times \quad 2=\qquad 476 \\ \text{相減}=\overline{1189524.} \end{array}$$

通常分乘不如積乘捷便.

例 4. $15\times 36+24\times 36-17\times 36.$

先算 $15+24-17=22.$

次 $22\times 36=792.$

習題 IV

1. 就 87×23 之算草中指出應用分配律之點.

2. 試舉實說明 $(3+2)\times 5=3\times 5+2\times 5.$

3. 心算下列各積後再以式明之:

(i) $935\times 9.$　(ii) $28\times 99.$　(iii) $36\times 999.$

(iv) $25\times 98.$　(v) $25\times 996\times 3.$

4. 某工廠僱工人四人,甲每日工價 7 角,乙 6 角,丙 3 角,丁 2 角.問該工廠每週開消工資若干.

5. 甲乙二農夫,遇農忙時互相助工.計甲助乙二月 3 工,三月 7 工,四月 2 工,七月 5 工;乙助甲,二月 1 工,三月 2 工,四月 4 工,五月 1 工,七月 3 工.以每工 110 文計算,乙應給甲若干文.

§ 5. 除法. 除者均分之謂也.百畝之田,5 人分之,人各 20 畝.是謂以 5 除 100 得 20.寫作

$$100\text{畝}\div 5=20\text{畝}.$$

100爲被除數,或曰實,5爲除數,或曰法,20爲商.商云者,均分之舉,多分則不足,少則有餘,欲均分而恰盡,非先有計議不可,故曰商.

就上例而言,百畝均分之後計二十畝者凡五,故

100畝=20畝×5

可見被除數,除數,商數之關係,可以兩種方法表示之:

被除數÷除數=商,

被除數=除數×商,

通常,被除數與商數爲同名數,除數爲不名數.今先論

整數除法. 整數除法可以下例明之.

例1. 二十三人均分57638錢,各得若干?

$$
\begin{array}{r}
2506 \\
23\overline{)57638} \\
46 \\
\hline
116 \\
115 \\
\hline
138 \\
138 \\
\hline
0
\end{array}
$$

演草如左.除數列左,被除數列右,中界以一線,商數書於被除數之上,中界以一線. 57000以23人分之,各得2000,書2於千位;共去46000,書46於57之下而減之,餘11000.益之以600共計11600 23人分之各得500,書5於百位;共去11500,書115於116之下而減之,餘100.益之以30,共計130 23人分之不能得十數,書0於十位.益8於130共計138. 23人分之各得6錢,書6於個位;共去138,書於138之下,減去無餘.

習題V

注意:式中乘除兼有,而無加減號隔離之者,爲算手續自左而右順次爲之.加減乘除並有者,先乘除,後加減.

1. $27-9\times 2-3\times 6$

$$27-9\times 2-3\times 6=\{((\overline{27-9}\times 2)-3\}\times 6$$

$$=\{(3\times 2)-3\}\times 6=(6-3)\times 6$$

$=2\times6=12.$

2. $786\div6.$ **3.** $2982\div42.$

4. $57638\div2506.$ **5.** $14641\div121.$

6. 比較$324\div27\times27$與$324\times27\div27$孰大,並舉實例以明之.

7. 比較下列各數:

(i) $4536\div7\times5\div6\div9\times11;$

(ii) $4536\times5\div7\div6\div9\times11;$

(iii) $4536\times5\div6\div7\div9\times11;$

(iv) $4536\times5\div6\div9\div7\times11;$

(v) $4536\times5\div6\div9\times11\div7;$

(vi) $4536\times5\div6\times11\div9\div7;$

(vii) $4536\times5\times11\div6\div9\div7.$

8. 上題結果再與下數比較其大小.

$(4536\times5\times11)\div(6\times9\times7)$

9. $(10584\div9)\div(126\div9)$與$10584\div126$孰大?

10. $(10584\times13)\div(126\times13)$與$10584\div126$孰大?

11. 演以上各題(6—10)後有何心得?(可與肆章,§6對照觀之.)

12. $48\div3-2\{5-(2^2-3)\times2+4\}+(24-6)\div6.$

第一項, $48\div3=16;$

第二項, $2\{5-(2^2-3)\times2+4\}=2\{5-1\times2+4\}$

$=2\{5-2+4\}=2\times7=14;$

第三項, $24-6=18;$

第四項, $6.$

$16-14+18\div6=26.$答.

13. 比較$330\div11+198\div11$與$(330+198)\div11.$

14. 比較 330−11−198−11 與 (330−198)−11

15. 比較 (1111+330−198)−11 與 1111−11+330−11−198
11.

16. 演 13, 14, 15 題後有何見地?(可與乘法分配律對照研究之.)

§ 6. 乘法與除法之關係. 乘除之關係與加減之關係甚相類似,然間亦有不同處,今略舉乘法與除法之重要關係於下,學者可與上章 § 6 比較之.

(甲) 除法之發生,例如 100÷5,本由於兩種問題.

第一, 若干畝之 5 倍=100 畝? (1)

第二, 100 畝=5 畝之若干倍? (2)

第一問題,直截了當用均分之義表之

$$100\text{畝}\div 5=\text{若干畝?} \qquad (3)$$

於吾人心性甚明且順後問題有時亦寫作

$$100\text{畝}\div 5\text{畝}=\text{若干?} \qquad (4)$$

此則與均分之義大不相同矣此題問題之本旨雖異,而解決之之方法則相通蓋苟有法解決前問題,得知

$$100\text{畝}\div 5=20\text{畝} \qquad (3)$$

是猶謂

$$20\text{畝}\times 5=100\text{畝} \qquad (1)$$

然據乘法交換定律,

$$20\text{畝}\times 5=5\text{畝}\times 20$$

是故

$$100\text{畝}=5\text{畝}\times 20 \qquad (2)$$

或寫作

$$100\text{畝}\div 5\text{畝}=20. \qquad (4)$$

是故除有兩義而法則相通,其理在乘法交換律.

(乙) 由上義,除者乘之逆,乘者除之逆

$$100\div 5=20 \text{ 者 } 100=20\times 5 \text{ 也;}$$

即

$$\text{被除數}=\text{商數}\times\text{除數}$$

可利用之以為乘除核算之助,其法即**乘除互驗**.

例 1.

$$
\begin{array}{r}
834\\
\times\ \ 78\\
\hline
2672\\
2338\ \\
\hline
26052
\end{array}
\qquad\qquad
\text{核算}\quad
\begin{array}{r}
78\\
834\overline{)26052}\\
2338\ \\
\hline
2672\\
2672\\
\hline
0
\end{array}
$$

例 2.

$$
\begin{array}{r}
205\\
92\overline{)18860}\\
184\ \ \\
\hline
460\\
460\\
\hline
0
\end{array}
\qquad\qquad
\text{核算}\quad
\begin{array}{r}
205\\
\times\ \ 92\\
\hline
410\\
1845\ \\
\hline
18860
\end{array}
$$

(丙) 前者乘法之結合律詔吾人曰

$$(5\times3)\times4=5\times(3\times4)$$

左方被乘數15為右方被乘數5之三倍,而左方乘數4為右方乘數12之三分之一可見二數相乘時,先以同數除此數(苟可除)而乘彼數,然後相乘,結果仍同

此理常用之以立捷算之術——**以除代乘**:

例 3.　25×488

$25\times488=(25\times4)\times(488\div4)=100\times122=12200.$

(丁) 由(習題V,10)之結果,可知二數施除時,先以同數乘兩數,然後施除,其商不變.

此理常用之以立捷算之術——**以乘代除**:

例 4.　$48500\div125.$

$48500\div125=(48500\times8)\div(125\times8)=388000\div1000=388$

(戊) 由(習題V,9)之結果,可知二數施除時,先以同數除兩數,(苟可除)然後施除,其商不變.(與丁同)

此理常用之以立捷算之術——**約除法**.

例 5.　$1921000\div17000=1921\div17=113.$

例 6.　$193330\div330,$

以10除法實得19833÷33.

以3除法實得6611÷11＝601.

(己) 由(習題V, 8)之結果,可知諸數依次施乘除,可以應乘者連乘,應除者亦連乘,以後積除前積.

此理常用之以為**積乘積除之術**:—

例**7.**　$240\div2\div3\div4\div5\times7$

$2\times3\times4\times5=120,$

$240\times7=1680,$

$1680\div120=14.$

(庚) 己之一部分又可逆述之曰;以諸數之積除一數,可以諸數順次除之.(與§3丙對照觀之.)

此理常用以立捷算之術—**以連除代積除**,或曰**短除法**:

例**8.**　$2640\div165.$

因$165=3\times5\times11.$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 2\ 6\ 4\ 0 \\ \hline 5 & 8\ 8\ 0 \\ \hline 11 & 1\ 7\ 6 \\ \hline & \ \ 1\ 6 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad 2640\div165 &= 2640\div3\div5\div11 \\ &= 880\div5\div11 \\ &= 176\div11 \\ &= 16. \end{aligned}$$

(辛) 由(習題V, 7)可見諸數按次施乘除時,可以任意更動其次序,祇須應乘者施乘,(首數為應乘者)應除者施除(苟可除)可耳.

有此理而後施乘除時可以圖巧捷定次序矣.

例**9.**　$4\times101\times99\div22\times25\div303\times2\times2$

更換次序,

$4\times25\times99\times2\div22\times101\div303\times2$

$=100\times198\div22\times101\div303\times2$

$=100\times9\times101\div303\times2$

$=100\times909\div303\times2$

$=100\times3\times2=600.$

以上各條僅乘除二者間關係之重要者,若益之以加減,則法理愈多矣.今姑備其一:—

(壬) 由(習題 V, 13—16)可見:諸數按一定次序施加減後以一數除之,或先以此數徧除各數然後如序加減,得數相同.

上節之除法蓋已預用此理矣.通常,先併而後除之較為捷便,但亦有變例:

例 **10.** $139993\div7.$

$139993\div7=(140000-7)\div7=20000-1=19999.$

習題 VI

演下列諸題時,須先心算,或預定一捷便手續,然後着手計算.

1. 364日爲若干週?
2. 3993丈爲121丈之若干倍?
3. 求下列二商,並以乘法核算其結果.
   $43236705600\div495.$ $56007000576\div3178$
4. $25\times28.$
5. $125\times888.$
6. $75\times404.$
7. $504\div72.$
8. $150000\div1625.$
9. $3817836\div99\div8.$

10. $3250000 \div 25 \div 8 \div 2 \div 125.$

11. $2520 \div 8 \times 7 \div 9 \div 49 \times 11 \div 55.$

12. $2520 \div 5 \div 6 \div 7$(用短除法.)

13. $31250 \div 125$(注意$125 = 5 \times 5 \times 5.$)

14. $2 \times 7 + 4 \times 5 + 8 \times 75 - 7 \times 15.$

15. $99 \times 5 + 22 \times 7 + 44 \times 13.$

16. $1001 \div (7 \times 11).$

17. $10^5 \div 5^5.$

18. $10^5 \div 2^5.$

19. $2^5 \times 5^5.$

20. $6^3 \div 2^2 \div 3^3 \times 7.$

§7. 乘法與除法之比較.

習題 VII

試分辨下列各仂語之通否,及命題之眞僞(等式卽命題),並述所以然,或舉實例以爲佐證.

1. 二數相乘.

1′. 二數相除.

2. 諸數連乘.

2′. 諸數連除.

3. 一整數乘他整數必另得一整數以爲之積.

3′. 一整數除他整數必另得一整數以爲之商.

4. 甲×乙=乙×甲.

4′. 甲÷乙=乙÷甲.

5. (甲×乙)×丙=甲×(乙×丙)

5′. (甲÷乙)÷丙=甲÷(乙÷丙)

6. 甲×乙×丙=甲×丙×乙.

6′. 甲÷乙÷丙=甲÷丙÷乙.

7. 僅含乘號之式,其中括號可以任意撤消,增設,或改變之.

7′. 僅含除號之式,其中括號可以任意撤消,增設,或改變之.

8. $588\times21\div7=1764$

$588\times(21\div7)=1764.$

9. 除者乘之逆.

10. 同數自加是爲乘.

11. 一數,以他整數乘之則變大.

12. 凡數俱可用之以乘他數

8′. $588\div21\times7=196.$

$588\div(21\times7)=196$

9′. 乘者除之逆

10′. 同數自減是爲除.

11′. 一數,以他整數除之則變小

12′. 凡數俱可用之以除他數.

§8. 1及0之特性. 1之爲數也,以之乘數而不見多,以之除數而不見少,是1之特性,所以與他數不同者也.設用 n 作爲「某數」,

$$n\times1=n,\qquad n\div1=n$$

是故數無不可以1除者

0之爲數也,以數乘之其積爲0,以之乘數其積亦爲零何以言之,譬如國家徵人口稅,每人出2圓,百人之地出200圓,千人之地出2000圓,無人之境固未嘗有所出也.是 $2\times0=0$ 之說也.及至國家有大慶,免徵人口稅,無論地之大小人之多少,其無所出一也,是 0× 任何數 =0 之說也故曰

$$n\times0=0,\qquad 0\times n=0$$

以0乘數無適而非0者.是故數經0乘過之後則其本性湮沒矣乎.勿不擅用0乘數,爲其無益而有害也.何謂害?易啟逆算法(除)之誤會也.

以0除他數,其意難解,其結果雖奇,故常謂爲不可能.例如,假令 $2\div0=$某數,

則必 $2=$某數$\times0$,

但 $2\neq$某數$\times0$,

故吾人不得謂$2\div0=$任何數.

由此可知以0除他數無從而得商,故曰0不得除他數.不能除他數固矣,究能自除耶?答曰

$$0\div0=0,\quad 0\div0=1,\quad 0\div0=2,\quad 0\div0=3,\cdots\cdots$$

蓋因 $$0=0\times0,\quad 0=0\times1,\quad 0=0\times2,\quad 0=0\times3,\cdots\cdots$$

也.由此可知以0除0無數不可以爲商.然而無從定之.以0除他數則商不存在,自除則商不確定:是以算學不用0爲除數.算學誤謬因用0爲除數而生者甚多,學者其戒之!

習題 VIII

1. $5\times1=\triangle$?
2. $7\times\triangle=7$?
3. $4\div\triangle=4$?
4. $5\div5=\triangle$?
5. $\triangle\times5=5$?
6. $\triangle\times1=5$?
7. 自乘仍得本數者爲任幾數?
8. $0\times7=\triangle$?
9. $8\times0=\triangle$?
10. $0\div9=\triangle$?
11. $0\div\triangle=0$?
12. $0\div0=$何數?

§9. 可除與不可除. 以個數(泛指個體事物)乘除與加減比較,則乘類於加,減類乎除.於小數中減去大數爲不可能,前已言之矣.在除法不但以大除小爲不可能,卽以小除大亦未必常可能.蓋除者均分之謂也.苟分之而不能盡,則除之術窮矣.甲乙丙三人分五桃,各得二桃則不足,各得一桃則有餘.如此不能恰盡無餘者謂之**不可除**.通常「可除」二字乃指被除數爲整數,除數爲整數,能得整商而言;「不可除」三字乃指被除數爲整數,除數爲整數不能得整商而言.

例1. 下列各除法,試分辨其可除否?

$$24\div6,\quad 24\div5,\quad 2\div10,\quad 123\div456.$$

遇不可除之事實究竟如何了局?此亦極有趣味之問題也.如上述三人分五桃之事,將使甲乙各得二桃而丙得一桃耶?則丙必不承認.將使各得一桃而棄其餘耶?則三人必俱不忍捨.持平辦理,惟有各得一桃,存記二桃,作爲3人共有而已.算學做此意謂其各得$1\frac{2}{3}$桃,其中1指各人實得之數,2指餘桃數,3指人數.$\frac{2}{3}$桃意卽請三人公有二桃.$\frac{2}{3}$稱爲**分式**,3爲**分母**,2爲**分子**.列式如下.

$$5\div3=1\frac{2}{3}$$

推而廣之

$$1253\div11=113\frac{10}{11}$$

$$1720\div24=71\frac{16}{24}$$

$$7\div9=\frac{7}{9}.$$

$$\begin{array}{r@{}l}
 113 & \cdots\cdots\text{商} \\
11\overline{)1253} & \\
11 & \\
\hline
15 & \\
11 & \\
\hline
43 & \\
33 & \\
\hline
10 & \cdots\cdots\text{餘}
\end{array}$$

如此,所謂分式,不過一種不可除之記載而已,與眞正分數不同.(參,§8)眞正分數之研究法將於§11略示途逕,第玖章再詳論之.今姑擱下不可除問題,先研究「如何便可除,如何便不可除?」

(甲) 2——4——8.偶數可以2除盡,奇數則否.可否以4除,全視其末二位爲轉移.數之是否可以8除盡,全視其末三位爲轉移.餘類推.

例1. 42可以2除盡,而41則否.

例2. 428可以4除盡,而254則否.

因 $428=400+28$; $254=200+54$.

例**3.** 9364可用8除盡,而4444則否.

因 $9864=9000+864$,可以8除盡;

$4444=4000+444$.

(乙) 3——9. 數之可否用3(或9)除盡之,全視其各位數字相加可否用3(或9)除盡之爲轉移.

例**4.** 923523可用3除盡.

$9+2+3+5+2+3=24$ 可用3除盡.

$923523=9\times(99999+1)+2\times(9999+1)+3\times(999+1)+5\times(99+1)$
$+2\times(9+1)+3=9$ 之整倍數 $+9+2+3+5+2+3$
$=9$ 之整倍數 $+24$.

例**5.** 29358可以9除盡而29355則否.

因 $2+9+3+5+8=27$ 而 $2+9+3+5+5=24$.

例**6.** 2973可以3除盡而2972則否.

因 $2+9+7+3=21$ 而 $2+9+7+2=20$.

(丙) 5——25——125. 數之可否以5除之,全視其末位爲轉移;25,視末二位;125,視末三位;餘類推.

例**7.** 13000, 23125, 71500, 可以125除; 900, 325, 3150, 3275可以25除,而不能以125除; 715, 20可以5除而不能以25除, 42, 53不能以5除.

(丁) 10——100——1000. 學者試自定其可否除之規律.

(戊) 11. 數之可否以11除之,全視其奇位數和與偶位數和之差可否以11除之爲轉移.

例**8.** 15939可以11除而782則否.

$(9+9+1)-(3+5)=19-8=11$,可以11除,

因 $15939=10909+5030=\{(9999+1)+9\times(99+1)+9\}$

$$+\{(5500-550+55-5)+(33-3)\}$$

$$=1+9+9-5-3+11\text{ 之倍數}$$

$$=11+11\text{ 之倍數,故可以 }11\text{ 除}$$

$2+7-8=1$,不可以11除

以上諸款亦可用之以爲驗算,且有時利用之可以得捷便除法.今不備述,留爲學者用思想之餘地

習題 IX

1. 下表中空格,先用上法心算其可除與否,然後實除以驗之,填其商焉.(有除不盡者記爲分數)

除數＼商＼被除數	19324	23250	131899	300003	251832	5918	1034000
2							
4							
8							
5							
25							
125							
3	$6441\frac{1}{3}$						
9							
11							
100							

2. 1259□78339一數中空位須塡以何字乃可以3除盡?又須塡以何字乃可以9除盡?又須塡以何字乃可11除盡?

3. 不用除法,問7429以上表中各除數除之,應各餘若干.

4. 某數以25除之,商24,餘12.求某數.假無餘數,則某數$=25\times24=600$;尙餘12,故某數爲$600+12=612$.由是可見被除數=商×除數+餘數.

5. 某數以9除之,商76,餘7.求某數.

6. 329以某數除之,商36,餘5.求某數.

7. 某校某年度學生343人.共用54108元2角5分.問平均每生用洋若干.

8. 某製造廠共有8工場,一工場又分5室,每室有電燈6盞.平均每夜電費共156元.問每盞須費若干.

9. 有字1489320,擬每頁28行,每行18字抄之;抄就以後,分訂5冊.問每冊有幾頁.

10. 定七日爲一週,四週爲一月.問一年(365日)有幾月,尙餘幾日.

以下各題遇不可除時,用分式記其餘數.

11. 1365兩合幾斤?

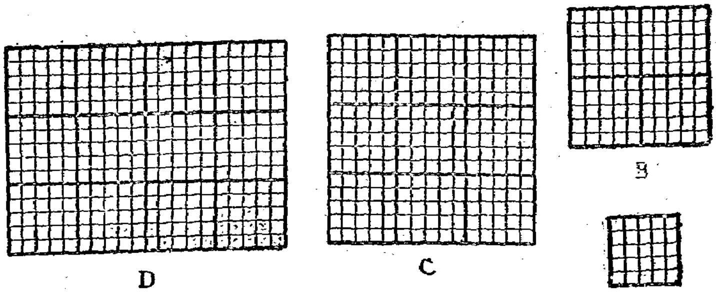
12. 43260秒合幾度?

13. 1公尺合3尺1寸2分5釐.問3000尺合若干公尺.

14. 七股東分利4125元.全股者3人,半股者4人.問全股與半股各分若干元.

15. 路長400里,擬分5日行到.行一日後,因事欲早到一日.問自第二日起,每日須行幾里,方不致誤.

§10. 面積. 面積者廣袤之謂也.計面積之單位則方丈,方步,方尺,方寸,方分,方公尺,方公寸,方公分等.所謂方公分者邊長一公分之正方形也,餘類推.



長方形之面積最易計算,如上列諸形.

B=2方公分×2=4方公分(每層二方公分,二層)

C=3方公分×3=9方公分(每層三方公分,三層)

D=4方公分×3=12方公分(每層四方公分,三層)

由此可見:計線段之單位若與計面積之單位相配,則

$$正方形面積=邊之平方,$$

$$長方形面積=長\times寬.$$

逆而求之,則

$$長=面積\div寬,$$

$$寬=面積\div長.$$

例1, 長方形面積15方寸,寬3寸,其

長$=15\div3=5$寸.

例2. 正方形邊長10寸者,

面積$=10^2=10\times10=100$方寸.

問題中,長,寬,面積之單位須相配,上列公式始可用.否則須將單位變更.

例3. 長方形寬7寸,長2尺,問面積若干.

$\because$長2尺$=20$寸,寬7寸; $\therefore$面積$=20\times7=140$方寸.

例4. 1方尺為若干方寸?(閱B圖)

$\because 1$尺$=10$寸, $\therefore 1$方尺$=10$方寸$\times10=100$方寸.

例5. 1方碼為若干方呎?(閱C圖)

$\because 1$碼$=3$呎, $\therefore 1$方碼$=3$方呎$\times3=9$方呎.

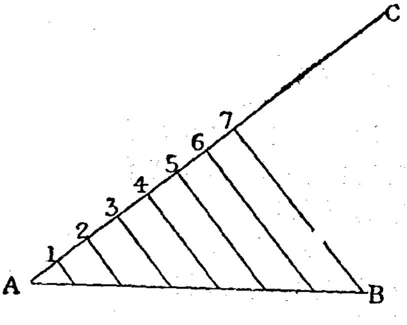
【註】 面積=長×寬,此公式用之於D形時應作$D=4$方公分$\times3$.或僅取其量數,作$D=4\times3$.今世流行寫法,作$D=4$公分$\times3$公分,實屬欠解;蓋名數不得為乘數也.公式長=面積÷寬,用之於D形,應作長之量數$=12\div3$解,不應作長$=12$方寸$\div3$寸解.

習題X

1. 試用面積之理,說明乘法交換律.(參觀§2之圖)
2. 試用面積之理,說明乘法分配律.(參觀§4之圖)
3. 1方公寸為若干方公分?
4. 1方丈為若干方步?(閱B圖大格)
5. 1方步為若干方尺?(閱A圖大格)
6. 1方尺為若干方分?
7. 有長方形,長6尺2寸,寬1尺3寸,面積若干?
8. 有長方形長2尺,面積為80方寸,寬若干?
9. 下列空格試填入相當之長,寬,面積.

長	寬	面　　積
1尺2寸	4寸	
	1丈	1000方寸
47尺		282方尺
	5尺	2500方寸
5丈5尺	7寸	
2丈5尺	4寸	
	2尺5寸	7方丈

§ 11. 均分線段法. 均分線段爲2,4,8, ...等分已詳(貳,§5),今述分爲任何等分之法.

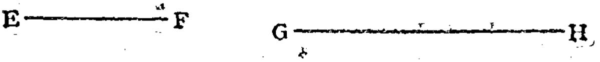


設有一線段AB,欲分爲7等分

先作一線段AC,於其上截取相等七段將末點(7)與B聯一線通過各分點(1,2,3,4,5,6)各作一直線與該線(B7)平行此等平行線卽將AB分爲7等分

習　題 XI

1, 二等分一線段有幾法?試用以分EF.



2. 四等分一線段有幾法?試用以分GH

3. 有正三角形,知其周長等於GH,求作其形.

4. 作二寸長之線段,三等分之

5. 求作一線段等於$\frac{1}{7}$公寸

6. 求作一線段等於$\frac{1}{9}$公寸.

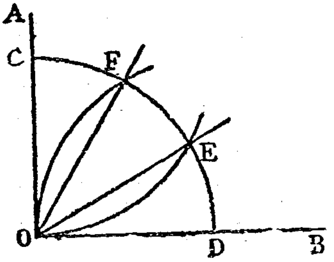
7. 作下列各線段,比較其長短:

$\frac{1}{2}$寸,　$\frac{1}{3}$寸,　$\frac{1}{4}$寸,　$\frac{1}{5}$寸.

§12. 平分一角及三等分直角法.

平分一角法. 已見(貳,§8).

三等分一直角法. 設∠AOB爲一直角以O爲圓心,取任意半徑,作一弧,與AO交於C,與BO交於D.取原長爲半徑,以C爲圓心,畫一弧,截CD弧於E;以D爲圓心,用同長半徑畫一弧,截CD弧於F.聯OE,OF則∠AOF=∠FOE=∠EOB=若干度?



習題 XII

作下列諸題祇許用圓規直尺,不許用半圓儀.

1. 求作一22°30′之角.(注意22°30′=45°÷2)

2. 求作一11°15′之角.

3. 求作一60°之角.

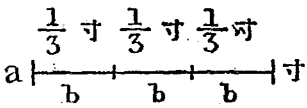
4. 求作一105°之角.(注意:105°=60°+45°.)

5. 求作一15°之角.(注意:15°=30°÷2.)

6. 試作一18°45′之角.(注意:18°45′=30°−11°15′.)

7. 試作一75°之角.

§13. 分數. 一寸長線段a,用§11之法可均分之為三等分;每一分以$\frac{1}{3}$寸表之,二分用$\frac{2}{3}$寸表之,謂



之分數.換言之,所謂$\frac{2}{3}$寸者,三分一寸而有其二也.然此與§9所謂$\frac{2}{3}$桃,意義微有不同.$\frac{2}{3}$桃乃不可分之記載,不得解作三分一桃而有其二.蓋一桃不可三分,無從而有其二也.$\frac{2}{3}$寸在欲分未分之時亦具有『三人公有二桃』一類意義,惟終非不可分耳.

三分一寸,分雖可分,然分得者亦非整寸數.故研究分數,須另闢途徑.

夫寸,名也.一寸長之線段可以名之曰寸,亦可名之曰a.其三分之一,名之曰$\frac{1}{3}$寸,$\frac{1}{3}$a可也.名之曰b亦未始不可.若是,同長異號可以謂之相等矣.

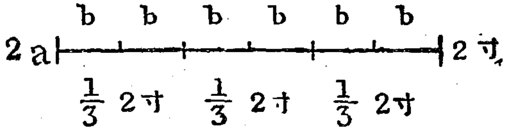
$$\therefore\quad \frac{1}{3}\text{寸}=b=\frac{3}{3}b,$$

$$\frac{2}{3}\text{寸}=2b,$$

$$1\text{寸}=\frac{3}{3}\text{寸}=3b,$$

三分一寸不可得整寸數,如今可得整數 b 矣.故分數之研究可應用整數爲基礎.

2 寸長之線段,三分之而有其一,則得2b,卽 $\frac{2}{3}$ 寸.



故 $\frac{2}{3}$ 寸可以兩解; (一)三分一寸而有其二,(二)三分二寸而有其一,二量實相等.

由此以進則分數之加減乘除有路可通矣.

例如:——

(甲) $\because 2b+1b=3b,$　　　$\therefore \frac{2}{3}寸+\frac{1}{3}寸=\frac{3}{3}寸.$

故曰:同母分數相加,以兩分子之和爲分子,公分母爲分母.

(乙) $\because 2b-1b=1b,$　　　$\therefore \frac{2}{3}寸-\frac{1}{3}寸=\frac{1}{3}寸.$

故曰:同母分數施減,以兩分子之差爲分子,公分母爲分母.

(丙) $\because 2b\times 5=10b,$　　　$\therefore \frac{2}{3}寸\times 5=\frac{10}{3}寸.$

故曰:以整數乘分數,但以整數乘其分子可也.

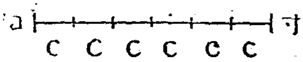
(丁) $\because 4b\div 2=2b,$　　　$\therefore \frac{4}{3}寸\div 2=\frac{2}{3}寸.$

故曰:以整數除分數,但以整數除其分子(尚可除)可也.

此外尙有一種重要性質,可以說明之如下.一寸長之

---

*第二解較廣.例如,$\frac{4}{2}$人能作『二分 4 人而有其一』解,不能作『二分 1 人而有其四』解.



線段,均分之爲六等分,每分名之曰 c.則

$$1c=\frac{1}{6}寸=\frac{1}{2}b,$$

$$2c=\frac{2}{6}寸=1b,$$

$$6c=1寸=3b.$$

(戊) $\because 4c=2b,$ $\therefore \frac{4}{6}寸=\frac{2}{3}寸.$

故曰:分數之子母同以一數乘之,其值不變.

分數之子母同以一數除之(苟可除),其值不變.

(己) $\because 5c>4c,$ $\therefore \frac{5}{6}寸>\frac{4}{6}寸.$

故曰:同母分數,分子大者分數亦大.

分數之大,小,等,加,減,乘,除,已言其大概矣.吾人須鄭重聲明此等理論,大部分祇能用之於連續量,如

線段(長), 時間, 面積, 角, 溫度, 重, 貨幣(值)

而不能用之於個體事物.例如吾人不能謂

$$\frac{5}{6}人>\frac{4}{6}人 \qquad 或\frac{2}{6}人+\frac{3}{6}人=\frac{5}{6}人.$$

蓋人不可得而分,$\frac{5}{6}$人本無數量(大小)之意義也.185人成六路縱隊,每路30人.餘5人固無法平均分配也.記之爲$\frac{5}{6}$人,所以表示「此五人者,乃成六路縱隊時所未曾分配於各路者也.」若謂$\frac{5}{6}$人爲既分而分配之於各路者,則不可通矣.

習題 XIII

1. 3 尺,記爲步.

2. 5 兩,記爲斤.

3. 7 寸,記爲丈.

4. 2 吋,記爲呎.

5. $\frac{2}{5}$步,記爲尺.

6. $\frac{3}{16}$斤,記爲兩.

7. $\frac{31}{100}$方尺,記爲方寸.

8. $\frac{1}{3}$呎,記爲吋.

9. 下列各語,試用分數記法,以斤爲單位譯述之.

(i) 5 兩+4 兩=9 兩.

(ii) 6 兩−2 兩=4 兩.

(iii) 3 兩×2=6 兩.

(iv) 12 兩÷4=3 兩.

(v) 2 兩=20 錢.

(vi) 4 兩>3 兩;
7 兩<8 兩.

第陸章

四則復習及應用問題

§ 1. 四則. 加減乘除者,算學之基本演算也,通常稱爲**算術四法**,亦曰**有理運算**,或曰**基本算法**,今簡稱曰**四則**. 百算起於四則,而四則基於加法,蓋減者加之逆,乘者迭加之法,而除者乘之逆也.故雖謂算不外乎加,不爲過也.

「減者加之逆,」「除者乘之逆,」此二義蓋通算學而莫違者也.「乘爲迭加,」惟整數乘法爲然,小數及分數之乘法,則難於索解矣.

或謂「除爲屢減,」其然乎?

§ 2. 四則合問.

習題 I

1. 述加減或乘除合問演算之規則.有括號則如何?
2. 述四則合問算草之規則.有括號則如何?
3. 述四則之基本定律,並各舉例以明之.
4. 述 1 及 0 之性質.
5. 演算以下各式:—

(i) $57\times 2+16\times 12-35\times 3-153.$

(ii) $985+42\times 105\div 30-24\times 17.$

(iii) $(555+362)\times(76-52)\div(100-16).$

(iv) $(19-18\div 3)\times 7-5\times\{3+2\times(7-5)\}.$

(v) $1+2\times[3+4\times\{5+6\times(7+8)\}]$.

6. 心算以下各式:—

(i) $354\div999\div572\times42\times0$.

(ii) $100\div25+606-40\div10-303$.

(iii) $48\times(11+14)\div12-10^4\div10^2$.

(iv) $75\times99+(100\div4-25\times0)+75\times4$.

(v) $803\times(37+21)-6\times8\times803+4015\div5$.

(vi) $(10^4\div5^2\div2^3-5^2)\times2^2+5^2\times3^2$.

§ **3.** **應用問題.** 宇宙事理,至爲繁賾,解應用問題,自無一成不變之法.今姑就尋常所習用者分類,示例於下;苟明白事理,多加練習,必能觸類旁通,馭題得法,學者當注意焉.

§ **4.** **平均算法.** 若干數之和,以其個數除之,所得之商謂之**平均數**.如56,62,743三數之和爲861,以3除之得287,卽平均數也.測定統計,求混合量之均價等多用之.

習 題 II

1. 求36,78,89,96四數之平均數.

2. 某人於某處測定地心加速率五次之成績爲981, 979, 981, 980, 979.求平均數.

3. 某生本學期之成績:

國文66分,英文72分,數學80分,歷史68分,地理70分,圖畫85分,手工73分,體育86分.

問其平均之成績如何.

4. 某校學生分三組旅行:第一組45人,用28元7角;第二組25人,用38元6角;第三組63人,用49元7角.問平均每

人用洋若干

5. 甲乙之平均數為 6825,丙為 474 問甲乙丙之平均數若干.

6. 上等酒 2 斤,每斤 3 角 5 分,中等酒 3 斤,每斤 3 角,下等酒 5 斤,每斤 2 角今三種混合之,則每斤之平均價若干?(此類問題尋常稱為混合法之第一種問題)

7. 每斤 1 角 1 分之砂糖 25 斤,與每斤 9 分者 65 斤混合之,每斤賣洋 1 角問共獲利若干.

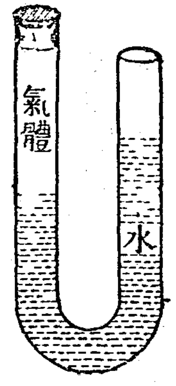
§ 5. 差額平分算法. 有不相等之二數,平分其差額,俾成彼此相等二數之算法也例如甲有 80 元,乙有 100 元問乙給甲幾元,則二人所有相等解之如下:——

因 乙比甲多 $100-80=20$ 元,即差額.

平分之,各取一份,則二人所有相等.

故 每份為 $20\div2=10$ 元,亦即乙應給甲之元數.

習 題 III



1. 兄有 8 元,弟有 5 元 6 角問兄給弟若干,則二人所有相等

2. 盛水於 U 字形玻璃管中,一端有塞,閉有氣體,故左端水面較低 3 寸若將塞啟開,則左端水面昇高若干?

3. 甲池容水 9 石 6 斗,乙池容水 1 石 5 斗.若甲池之水每小時流入乙池 6 斗,問幾小時後兩池之水量相等

4. 某人將田分給二子,長子得 5 畝,幼子得 42 畝,不均之數,令幼子補給長子 360 元問田每畝之價若干.

§6. **和差題算法.** 有大小二數,知其和及差而求其數之算法也.求之之法,恒用下列二公式:—

大數=(和+差)÷2,..................(1)

小數=(和−差)÷2,..................(2)

其理以大數比小數所多者卽差,加差於小數,則與大數相等,而和之中爲一大數一小數,故加差於和,卽爲大數之二倍,由是得(1)式.

習題 IV

1. 說明(2)式之理.
2. 大小二數,其和81,其差21.求二數.
3. 甲乙二人分銀85圓.甲比乙多得15圓.問二人各得若干.
4. 分150爲二數,命其和爲差之25倍.求二數.
5. 甲乙二股東分餘利1000元,乙所得比甲之2倍多10元.問各得若干.

§7. **歸一算法.** 此法係將各種事物先計其對於一個之値,而後引歸於所求個數之値也.其理極顯:觀下例自明.

例. 12人30日之工資爲252元,問18人25日之工資若干.

解　12人30日之工資爲252元,

1人30日之工資爲252元÷12=21元,

1人1日之工資爲210角÷30=7角,

18人1日之工資爲　7角×18=126角,

18人25日之工資爲126角×25=324元.

習題 V

1. 工人6名,四日食米1斗2升,今有工人10名作工10日,問食米若干.

2. 梨15個,價525錢;梨9個之價與蘋果7個之價相等今買蘋果12個,問須錢若干.

3. 麵若干袋,以騾車6輛運之,每輛45袋,6次運完.今改用手車9輛,每輛20袋,問須幾次運完.

4. 工人6名4日可成之工,今加2人作之,問須幾日可成.

5. 有米若干,可供45人15日之食.3日後5人他往,問餘米可供幾日之食.

§8 還原算法. 還原算者,逆其運算之順序而施,以逆運算之法也.例如某數以2除之,自其商減5,再3倍其差,更加以8,得20.欲求某數,如下解之:—

加8得20,	故未加8以前爲	$20-8=12$;
3倍其差爲12,	故未3倍以前爲	$12\div3=4$;
自商減5得4,	故未減5以前爲	$4+5=9$;
以2除得9,	故未除以前爲	$9\times2=18$,卽某數.

習題 VI

1. 自450減某數,其差以5除之,加12於此商,再以7除其和,得4.求某數.

2. 某人有果若干枚,以其半又1枚給甲,以餘數之半又2枚給乙,尙餘3枚.問原有若干枚.

3. 某人以所有存款之半又1000元捐入某圖書館,以其餘之半又100元捐入某平民學校,更以其餘之半又1000

元捐入紅十字會,尙餘1000元刋印其著作.問此人之存款若干.

4. 某數之立方以5除之,誤作3倍以5除之,如是所得之結果爲6問正當之結果若干

5. 七人同耘一田,每日工作10時,6日可竣事.今以五人耘之,八日而竣問每人每日須工作幾時 (北京高師,11年)

§ **9.** **植樹題算法.** 沿路植樹成行,通常行之兩端各植一株,其餘各株,則分路爲若干段,每段之距離相等,故路長,段數,每段之距離三者之關係爲

路長＝每段之距離×段數;

而株數恒較段數多1,其關係爲

株數＝段數＋1.

例　植樹一行,首末二株之距離爲36丈,相隣兩株之距離爲9尺問植樹幾株

解.　　段數＝360－9＝40,

故　　株數＝40＋1＝41.

習　題 VII

1. 長54丈6尺之街道,兩旁每隔1丈3尺植樹一株.兩端各植一株問兩旁共植幾株.

2. 學生40人列成一排,每人相隔3尺,排頭排尾二人離牆至少3尺.問操場至少須寬(或長)若干,方能容下.

3. 甲乙兩村間立電柱若干,已知相隣二柱相隔2丈5尺比相隔3丈時須多立45柱問甲乙兩村距離若干

4. 某路每隔1丈6尺有一電柱,連兩端共61柱;今擬換立73新柱,問相隣兩柱應隔若干.

§ 10. 行程題算法. 日行100里,5日行500里,10日行1000里,故

距離=速度×時間

此行程題算法之一種也.若二人同行,則距離,速度,時間而外,方向尤爲其行程之一要素.今分述其關係於下:—

(i) 二人同時由 同地同向 而行,則

二人之距離=二人速度之差×時間;

(ii) 二人同時由 同地同背 而行,則

二人之距離=二人速度之和×時間;

(iii) 二人同時由 兩地相背 而行,則

二人之距離=二人速度之和×時間+兩地之距離;

(iv) 二人同時由 兩地相向 而行,則

二人之距離=兩地之距離−二人速度之和×時間.

以上四者,其理極顯,學者試各舉一例以明之.

又二人行路,有時不能相遇,如(i)(ii)(iii)是也;有時可以相遇,其情形不外二種:—

(1) 由兩地相向而行[即(iv)],

(2) 一人在前,一人在後追之,而後者之速度大於前者.

茲各舉一例以明之:—

例1. 兩村相距45里,甲乙二人各自一村相向而行,甲每小時行8里,乙7里.問二人經幾小時相遇.

解. 行1小時後,二人較近8+7=15里,故至相遇時須經45÷15=3小時.

例2. 甲船每時行12里,乙船16里,今甲在乙前24里,問幾時後乙追及甲.

解 乙比甲每時多行16−12=4里,

今欲多行24里,故須$24\div4=6$時.

習 題 VIII

1. 由距離與速度求時間,由距離與時間求速度各如何?並舉例以明之.

2. 日行60里者與日行75里者同時自同地同向而行.問8日後二人相距幾里.

3. 甲乙二人同時由同地相背而行,甲日行85里,5日後二人相距600里.問乙日行幾里.

4. 甲乙二人同時由兩地相向而行,甲日行50里,乙日行60里.經5日二人相遇後復距70里.問兩地相距幾里.

5. 甲地A,B二人須往乙地,A行後3小時B始起身,A每小時行5里,B 8里.問B行幾小時即追及A.

6. 某船往返於兩地之間,往時日行90里,返時日行60里,返時比往時多2日.問兩地距離幾里.(北高附中,11年)

7. 每日甲行75里,乙行55里,二人同時自同處向某地而行,甲行60里後,以有物未帶而返原地,其後適與乙同時至某地.問兩地距離若干.旅行日數若干?

§ 11. 流水題算法. 置舟於靜水中,不加划力,則舟不動;若加以每時5里之划力,無論行向何方,舟亦每時前行5里.置舟於流水中,則不然;設水每時東流3里,置舟於上,不加划力,舟亦每時東行3里;若更加以每時向東5里之划力,舟必每時東行$3+5=8$里;反之,划力向西,則其中3里之力與水流3里之力相消,舟祇每時西行$5-3=2$里矣.故水流速度,划行速度及順水逆水行舟之速度有一定之關係如下:—

順水行舟之速度=划行速度+水流速度;

逆水行舟之速度＝划行速度－水流速度.

例. 水程100里,舟人順流而行,4時可到,逆流則須5時.問水流速度及划行速度各若干.

解. 順流4時行100里,

順流1時行$100\div4=25$里,

即 划行速度＋水流速度＝25里;

又 逆流5時行100里,

逆流1時行$100\div5=20$里,

即 划行速度－水流速度＝20里.

由§6和差題算法,得

$$\text{划行速度}=(25+20)\div2=22\frac{1}{2}\text{里},$$

$$\text{水流速度}=(25-20)\div2=2\frac{1}{2}\text{里}.$$

習題 IX

1. 某舟在靜水中划行,每小時能行7里.今在水流速度每小時3里之河中,順流下駛,每小時能行幾里?逆流上駛,每小時能行幾里?

2. 舟人划行速度每時10里.水流每時5里.今順流而行6小時可到之路,回時須行幾小時?

3. 順水行舟,13小時行520里,若水流每小時14里,問回時須行幾小時.

4. 舟人當水流速度每點3里時,逆流而上,4點鐘行24里.返時水流速度為前之2倍,問須幾時行75里.

5. 甲乙二舟逆流而上,行720里,甲須24時,乙須60時.若順流而下,甲祇須8時.問乙須幾時.

6. 某河水流之速度,中流每時75里,沿岸45里.今有船

沿岸上行12時達480里,若由中流還原地,問須幾時.

7. 甲自上游划舟下行,乙同時自下游上行,經9時相遇,是時甲已行前路之半又243里.而甲每時之划力爲45里,乙51里.問水流速度如何.

8. 兩舟在靜水中,一每小時能行8里,一6里.今行於流水中,由同地逆流上駛,5小時後兩舟相距幾里?

9. 上題,若兩舟由同地順流下駛,7小時後相距幾里?

10. 上題,若兩舟由同地一上一下,相背而行,9小時後相距幾里?(北高附中,11年.)

§12. 年齡題算法. 年齡題計算最要之點,在於此人增若干歲,他人亦增若干歲;故任二人年齡之差,爲一定不變之數.此類問題,多以此理爲根據.例如下:—

例. 父年44,子年8.問幾年後父年爲子年之4倍.

解. 父年與子年之差恆相等,

故父年爲子年4倍時,其差仍爲$44-8=36$;

而36爲子年之$4-1=3$倍,

故其時子年爲$36\div3=12$;

今子年8歲,故所求之年數爲$12-8=4$.

習題 X

1. 父年33,子年7.問幾年後父年爲子年之2倍.

2. 伯年48,姪年15.問幾年前伯年爲姪年之4倍.

3. 父子歲數之和爲74,11年前父年爲子年之3倍.問現年各若干.

4. 父年41,長子12,次子9,三子6.問幾年後父年與其子三人歲數之和相等.

5. 甲桶有酒 2 斗,乙桶有酒 1 斗 2 升.今於兩桶吸出等量,所餘者甲適爲乙之 5 倍.問兩桶各餘酒若干.

【注意】 此題表面上非年齡題,實際算法則與之相當,學者最宜注意,以收融會貫通之效.

§13. 龜鶴題算法. 此類問題,均求二種數量.求之之法:悉先假定祇爲一種,而由所生之差以得所求之二種數量.今舉例以明之:—

例. 龜鶴共100頭,共 350 足.問龜鶴各幾頭.

解. 龜 4 足,鶴 2 足.設100頭皆鶴,則足數當爲$100\times2=200$.但題言足數爲350,所多者爲$350-200=150$;若以一龜易一鶴,當多足數$4-2=2$,故欲多足數150,當易入龜$150\div2=75$頭.於是鶴之頭數爲$100-75=25$.

【注意】 先設100頭皆爲龜亦可.

習題 XI

1. 按「注意」所云解上例.

2. 雞兎同籠,共15頭,38足.問雞兎各幾頭.

3. 有九頭鳥與雞,共50足,129 頭.問九頭鳥與雞各若干.

4. 米50石,用大小二種袋分裝之;大袋 4 斗 5 升,小袋 4 斗,共計120袋.問兩種袋數各若干.

5. 陶器百個,僱工運之.運到一個,給錢 6 文,破壞一個,罰錢12文.最後工人得錢60文.問陶器壞幾個.

§14. 圖解法. 有若干問題懸想較難而繪圖解之則較易者.玆舉數例於下以明之:—

例 1. 某數之 3 倍加 2,與由其 5 倍內減20相等.求某數.

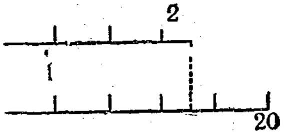
解. 作任意長之線段代表某數.

由圖 20+2 知爲某之 2 倍,

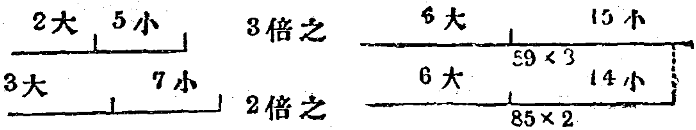
故 某數=22−2=11,

且由此可得立算之法

某數=(20+2)−(5−3)=11.



例2. 大數 2 倍小數 5 倍之和爲59,大數 3 倍小數 7倍之和爲85.求二數.



解. 由圖可知

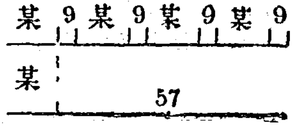
小數=(59×3−85×2)−(5×3−7×2)=7.

仿此可得 大數=12.

例3. 某數加57,等於其加 9 之 4 倍.求某數.

解. 由圖可見57與某數之 3 倍加 9 之 4 倍相當,故

某數=(57−9×4)−(4−1)=7.



習 題 XII

1. 某數之 8 倍內減 153, 則比其數之 5 倍多66.求某數.

2. 某數減 3 之 4 倍,與該數之 2 倍加36相等.求該數.

3. 某書上下二冊共價 1 元 4 角 5 分今買上冊 3 本,下冊 7 本,共洋 6 元 9 角 5 分.問上下冊之價各若干.

4. 甲工 5 日乙工 3 日之工資和爲 2 元 5 角 9 分;若

甲乙交換其每日所得之工資,則和爲2元4角5分.問甲乙每日之工資若干.

§ **15.** 鐘面度劃. 鐘面一週,等分爲12份,順次以 I, II, III, IIII, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII 十二字記之;每字又等分爲5劃,故一週有60劃.就時間言.

時針行過一字,謂之一「點」,或一「小時」,故行一週爲12小時;

分針行過一劃謂之一「分」,故行過一字爲5分,一週爲60分.

秒針行過一劃,謂之一「秒」,故行過一字爲5秒,一週爲60秒.

鐘之構造,恰令秒針行一週時,分針行一劃;分針行一週時,時針行一劃.於是

60秒爲1分,　　60分爲1小時.

由(壹, §5)知圓周一週分爲360度.故就度數言:鐘針(無論時針分針秒針)行一週爲360度;行一字爲30度;行一劃爲6度.

習題 XIII

1. 12點時,時針分針秒針均在 XII 之位置.問至1點時,三針各行過若干度.3點時?

2. 2點時,分針在時針後若干分?5點時?6點半時?8點24分時?

3. 4點時,時針與分針所成之角爲幾度?7點半時?5點12分時?4點36分時?

§ **16.** 太陽運行. 地球一日迴轉地軸一週,自地球上望太陽,恰如太陽於一日內自東而西環繞地球一

週.今假以太陽一日運行一週,而一日分為24小時,一小時60分,一分60秒;(時,分,秒,以 h, ′, ″ 記之,如 $3^{h}52'40''$)又一週分為360度,一度60分,一分60秒;(度,分,秒以 °, ′, ″ 記之,如 $72°16'5''$.)於是太陽運行度數與時間之關係如下:—

時間	太陽運行
24小時	360度
1小時	15度
1分	15分
1秒	15秒

習題 XIV

1. 時間經過5小時,問太陽運行若干. $3^{h}15'$? $4^{h}25'30''$?
2. 以太陽運行度數為標準,仿上製表.
3. 太陽運行80°,問須時間若干. $30°20'$? $32°45'20''$?

§ **17. 甲子推算.** 我國舊曆,用十天干(甲,乙,丙,丁,戊,己,庚,辛,壬,癸.)十二地支(子,丑,寅,卯,辰,巳,午,未,申,酉,戌,亥.),自甲子起順次配合以紀年,月,日,時,沿用蓋四五千年.今其制雖廢,史籍中甲子紀年固猶在也.故述歲次計算於下,以資應用.

干支相配六十年一週,周而復始,遞相推用.其配合如下:—

甲子	甲戌	甲申	甲午	甲辰	甲寅
乙丑	乙亥	乙酉	乙未	乙巳	乙卯
丙寅	丙子	丙戌	丙申	丙午	丙辰

丁卯	丁丑	丁亥	丁酉	丁未	丁巳
戊辰	戊寅	戊子	戊戌	戊申	戊午
己巳	己卯	己丑	己亥	己酉	己未
庚午	庚辰	庚寅	庚子	庚戌	庚申
辛未	辛巳	辛卯	辛丑	辛亥	辛酉
壬申	壬午	壬辰	壬寅	壬子	壬戌
癸酉	癸未	癸巳	癸卯	癸丑	癸亥

由某年至某年,其天干之差謂之**干差**,地支之差謂之**支差**.如丁亥下距壬戌,丁至壬(戊,己,庚,……數五字至壬)干差爲五,亥至戌(子,丑,寅……數十一字至戌)支差爲十一.今用干差支差二者示六十年內甲子之算法於下:—

(1) 兩年相距

(i) 同干之兩年(無干差)相距年數以10數,其10數爲(12−支差)之半.

例1. 庚寅下距庚午若干年?(庚午上距庚寅若干年?)

解. 寅至午支差4, $(12-4)\div2\times10=40$ 年.

(ii) 干差與支差相同之兩年,相距年數如干差(即支差.)

例2. 丙戌下距壬辰若干年?

解. 丙至壬,干差 6;戌至辰,支差 6.

故丙戌下距壬辰 6 年.

(iii) 通常計算由此年下距彼年,先如干差數由此年下推若干年;此推得之年與彼年無干差,可照(i)計算,再加干差數.

例3. 己酉下距丙子若干年?

解. 己至丙,干差7;酉至子,支差3.

由己酉下推7年(庚,辛,壬,癸,甲,乙,丙;戌,亥,子,丑,寅,卯,辰.)至丙辰.照(i)法,丙辰下距丙子20年.故己酉下距丙子27年.

(2) 由某年上推若干年

(i) 年數爲整十數者,以其十位數之2倍下推地支,配原天干即得.

例4. 壬戌前40年爲何年?

解. 由戌下推8字(4×2)至午,故壬戌前40年爲壬午.

(ii) 年數不足十者,照(10−該數)下推天干,照(12−該數)下推地支.

例5. 壬寅前7年爲何年?

解. 由壬下推3字(10−7)至乙,由寅下推5字(12−7)至未.故壬寅前7年爲乙未.

(iii) 通常自某年下推若干年,可如單位數依(ii)上推若干年,更如十位數依(i)上推若干年.即得.

例6. 丙寅前35年爲何年?

解. 丙寅前5年爲辛酉「見(ii)」,辛酉前30年爲辛卯「見(i)」.故丙寅前35年爲辛卯.

(3) 由某年下推若干年

(i) 年數爲整十數者從12減該數之2倍,如數下推地支,配原天干即得.

例7. 甲戌後40年爲何年?

解. 12−4×2=4. 由戌下推4字至寅,故甲戌後40年爲甲寅.

(ii) 年數不足十數者,如數下推干支.

例 8. 丙寅後 5 年爲何年?

解. 由丙下推 5 字至辛,由寅下推 5 字至未.故丙寅後 5 年爲辛未.

(iii) 通常自某年下推若干年,可如單位數依(ii)下推若干年,更如十位數依(i)下推若干年卽得.

例 9. 辛未後 53 年爲何年?

解. 辛未後 3 年爲甲戌「見(ii)」,甲戌後 50 年爲甲子「見(i)」故辛未後 53 年爲甲子.

習題 XV

1. 求以下相距之年數:—

(i) 壬辰下距壬子.

(ii) 甲子下距戊子.

(iii) 庚申上距乙巳.

(iv) 癸酉上距丁卯.

2. 今年爲癸亥年.試就自己之年齡推算應爲何年所生.

3. 今年爲癸亥年.問後 20 年爲何年?後 8 年?後 32 年?

§ 18. 雜題. 以上應用問題,各歸一類,學者解答,有解說爲依據,有例題爲模範,「按圖索驥,」其事較易.然實際應用時,焉能有一定程式,爲吾人解題之標準?故更羅列雜題數十則於此,不立方法,不加說明,學者試揆諸事理,參諸前例,深思而解答之.夫而後可以因應裕如,不致「束手無策」也.

習題 XVI

1. 兩數和爲32,大數爲小數之3倍.求二數.

2. 甲所有銀爲乙之5倍,甲比乙多200元.問二人各若干.

3. 甲乙之和35,甲丙之和40,乙丙之和45.求三數.

4. 酒若干石,買價1500元;今每石賣銀14元,計損100元.問每石買價若干.

5. 有工程,7人作之,18日完.今擬減1人作之,問須幾日可完.

6. 1元與5元鈔票共20張,合洋40元.問兩種鈔票各幾張.

7. 蝸牛登樹,日升1丈,夜降3尺.有樹高3丈9尺,蝸牛由某日清晨起自樹根上登,問須至第幾日始達樹頂.(北高附中,11年.)

8. 上題,若樹高3丈7尺則如何?

9. 麥300石,賣1400元;所賺元數,適爲麥50石之原價.問原價共若干.

10. 船在靜水中每小時可行8里.今於水每小時東流5里之河中西行5小時,問可行幾里.

11. 東倉存米504袋,西倉存396袋,今由東倉每日取出8袋,西倉每日取出12袋.問幾日後東倉存米適爲西倉之2倍.

12. 蜘蛛8目,亦有6目者.今兩種蜘蛛共15個,共114目.問各若干個.

13. 某人作工一日贏餘1角,休息一日消費2角.合計陽曆九月分積蓄1元2角.問作工若干日.

14. 兄5年前之年齡適與弟3年後之年齡相等,兄3年後之年齡與弟5年前之年齡之和爲30.問現年各若干.

15. 午後 3 點時,太陽偏西若干度?

16. 測得太陽偏東 75 度,問其時爲何時.

17. 父年 37,子年 5.問父年爲子年 2 倍時各幾歲.

18. 甲乙二錶共 20 元.若以鏈配於甲錶須 14 元,配於乙錶須 12 元,問二錶及鏈價各若干.

19. 甲每點行 15 里,乙 7 里;二人同時自同處赴某地,甲到時,乙尙離該地 56 里.問該地距起身之處幾里.

20. 火車長 60 丈,每秒進行 66 丈.有橋長 492 丈.問火車完全通過,須時若干.

21. 有電線 168 丈,電柱 15 根.今敷設於道旁,問可隔若干遠立柱一根.

22. 甲種酒每斤 3 角 3 分,乙種 3 角 6 分,丙種 4 角 8 分,今各取 7 斤,再加水 9 斤,問每斤平均價幾何.

23. 舟人順流行舟,每時 10 里,逆流則行 6 里.今大雨後水勢急激,逆流每時祇行 4 里,問此時順流可行幾里.

24. 有田 720 方丈,夫婦子三人合力耕之,6 日可完.若婦一人獨耕,須 16 日;子一人須 48 日.問夫一人獨耕須幾日.

25. 有正方地一塊,周圍 68 丈.今擬沿其周作寬 1 丈之路,且於中央作十字形路,亦寬 1 丈,問餘地尙有若干方丈.

第柒章

十進制複名數與小數

§1. 進法. 計量必有單位以爲標準,叁,§5已言之矣.然標準過小則難以計大,過大則無以量小,欲小大咸宜,多寡合用,殊不可能是以多名並立,大量用大單位.小量用小單位.然名多而無系統則亂,故進法尙焉.進法者,某單位足若干後更命以他名之謂也.

人類一手五指,二手十指,屈指而數之本能,人人有之.故五進十進發達最早.若夫屈趾而數之舉動,雖見笑大方,野蠻民族及孩提之童未始無之.然屈趾不如屈指便利,且人類愈進步而足掌愈不靈敏,屈趾愈不易.二十進法之流行不如五進十進之久且廣,職是故耳.就手而論,左右手靈敏相當,與其僅用一手,不如兼用兩手之爲愈,故五進之流行又不如十進之久遠.雖然,五進之遺跡固至今尙存也,觀夫羅馬數碼,中國數碼,及中國之珠算可以知之矣(北極附近,非洲,美洲各野蠻民族尙通行五進法.中國商販於交易場中作手勢以表示極緊甚大之數,亦係兼用五進)三種進法之中,五進太小,二十進太大,折衷二者之間者,厥爲十進.此十進之所以盛行也.

度量衡幣之用非十進法者不少.爲習慣所束縛,雖不便,不易剗除.法國革命之後,改定制度,度量衡各用十進,法至善,意至深.各國科學書籍皆通用之,稱爲萬國通制.吾國固有之度量衡,用十進法最多,爲各國所不及.今更採用公

制,新舊兩制皆十進矣.苟能通行,未始非國家之福也.

§2. 中國現行十進制度.

我國權度法於民國四年一月公布,所用權度分爲甲乙兩種,均以萬國權度公會所制定鉑銥公尺公斤原器爲標準.甲種稱爲營造尺庫平制,即我國習用者;乙種稱爲萬國權度通制,即上述法國革命後所改之制也.今分別列表於下(表中四號字乃該系之標準單位.)

甲種. 營造尺庫平制

長度	引	丈	尺	寸	分	釐	毫	絲	忽
容量	石	斗	升	合	勺	撮	抄	圭	
重量			兩	錢	分	釐	毫		

由右而左以十進

【附註】　5尺=1步,　180丈=1里,　200里=1度,

16兩=1斤,　100斤=1擔,　200斤=1引;

6粟=1圭

乙種. 萬國權度通制

長度	公里	公引	公丈	公尺	公寸	公分	公釐			
容量	公秉	公石	公斗	公升	公合	公勺	公撮			
重量	公敦	公石	公衡	公斤	公兩	公錢	公分	公釐	公毫	公絲

由右而左以十進.

國定幣制

現行銀圓制	圓	角	分	釐　毫
舊時生金／生銀制	兩	錢	分	釐　毫
文錢制	緡	文		

由右而左以十進.

萬國權度通制名號表

長度

中名	日名	法名(英名同)	略號	等於	合甲種
公里	粁	Kilometre	Km	10公引	
公引	粨	Hectometre	Hm	10公丈	
公丈	料	Decametre	Dm	10公尺	
公尺	米	Metre	M	10公寸	3.125尺
公寸	粉	Decimetre	dm	10公分	
公分	糎	Centimetre	cm	10公釐	
公釐	粍	Millimetre	mm		

容量

中名	日名	法名(英名同)	略號	等於	合甲種
公秉	竏	Kilolitre	Kl	10公石	

公石	竡	Hectolitre	Hl	10公斗	
公斗	竍	Decalitre	Dl	10公升	
公升	竏	Litre	l	10公合	0.965746升
公合	竕	Decilitre	dl	10公勺	
公勺	竰	Centilitre	cl	10公撮	
公撮	竓	Millimetre	ml		

重量

中名	日名	法名(英名同)	略號	合甲種
公鐓		Tonne, Millier		1675.55829 斤
公石		Quintal		167.555829 斤
公衡	[illegible]	Myriagramme	My	16.7555829斤
公斤	瓩	Killogramme	Kg	
公兩	瓸	Hectogramme	Hg	
公錢	瓧	Decagramme	Dg	
公分	克	gramme	g	0.0268089 兩
公釐	瓰	decigramme	dg	
公毫	甅	centigramme	cg	
公絲	瓱	milligramme	mg	

§3. 十進名數之各種記法 十進名數之進法與數目之進法相契合,其記法有便利可圖,論之於下.

例如5石8斗4升2合,複名數之記法也.寫字太多,毋寧寫爲5842合.此用合爲單名也.若欲以石名之,以斗名之,或以升名之,吾國通常寫爲

〥〨〤〢	〥〨〤〢	〥〨〤〢
石	斗	升

若倣此寫法,而改用阿拉伯數碼,則可寫爲

5842	5842	5842
石	斗	升

然此種寫法不合橫行文字.可改爲

5石842　　58斗42　　584升2

夾文字於數碼之中殊不雅觀不如略作記號將石斗升所在地位指點出之,寫作

5.842石　　58.42斗　　584.2升

現今通用者卽此種寫法也.

$$
\begin{aligned}
&5\text{石}8\text{斗}4\text{升}2\text{合}\\
&=5.842\text{石}\\
&=58.42\text{斗}\\
&=584.2\text{升}\\
&=5842\text{合}
\end{aligned}
$$

§4. 小數. 上節所用帶點記法謂之**小數記法**.其點稱爲**小數點**.點之左爲**整數**,點之右爲**小數**.如58.42斗中之58乃指58斗,爲整斗數,而42乃指四升二合,小於斗,故曰小數.

習題 I

1. 將2石8斗用小數記法寫作石數.
2. 將1公丈4公尺2公寸用小數記法寫作公尺數.
3. 將2圓8分寫作角數.
4. 指出下列各記法之意義

(i) 2.053兩, (ii) 0.253兩, (iii) 0.02公斗.

§5. 命法及通法. 單名數化爲複名數(各命之名)謂之命法. 複名數化作單名數(通盤計算)謂之通法.

十進制之命法及通法最易, §3及§4已言其方法矣 茲列數題於下,學者可多多練習

習題 II

1. 下表同行塡入相等數(整數或小數)

複名數	2丈3尺				
丈數		1.9丈			
尺數			0.23尺		
寸數				38.5寸	
分數					30030分

照1題辦法就2, 3兩題列表.

2. 2斗3升. 10.2石. 0.323石, 20333升.
3. 1公尺2公分, 2公尺3公分5公釐, 720023公里.

§6. 十進複名數加減法. 十進複名數之加減法與整數加減法相似今但舉例明之,不加解釋.

例1. 5斗6升7合+2斗5合−5斗1勺

算草甲	算草乙	算草丙(以升表之)
5斗6升7合	斗升合勺	56.70升
+) 2斗　5合	5 6 7 0	+) 20.50升
7斗7升2合	+) 2 0 5 0	77.20升
−) 5斗　1勺	7 7 2 0	−) 50.01升
2斗7升1合9勺	−) 5 0 0 1	27.19升
	2 7 1 9	

習　題 III

1. 甲乙丙三種算草何種較捷便而且明瞭?
2. 2尺1寸+2尺3寸5分−1尺2釐.(以尺表之)
3. 5公丈1公分−3公釐2公毫+2公寸.(以公尺表之)
4. 5圓9角7分+8圓2角3分.(以圓表之)
5. 8公斤−2公斤−35公兩.(以公斤表之)
6. 52公秉7公錢−2公斤+3公斤5公兩.(同上)

§7. **小數加減法.** 就§6之算草丙觀之,小數之加減法與整數亦復相似.所多之手續惟將各數之小數點排齊直列之而已.舉例明之如下:—

例1.　2.580+25.33−18+0.12−1.23−0.003.

$$\begin{array}{r} 2.58 \\ 25.33 \\ +\quad 0.12 \\ \hline 28.03 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 18.000 \\ 1.230 \\ +\quad 0.003 \\ \hline 19.233 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 28.030 \\ -\ 19.233 \\ \hline 8.797 \end{array}$$

例2.　29.3寸+23.3尺+18.22丈.

以尺表之,

29.3 寸= 2.93尺

23.3 尺= 23.30尺

18.22丈=182.20尺

總和=208.43尺

即　=2引8尺4寸3分.

習　題 IV

1. 求以下各式之結果:

(i) $3.21+80.541+.7921+.0004$.

(ii) $83.51-72.-.2123$.

(iii) $78-10.54+2.5-14.36$.

(iv) 5尺6寸2分5釐−3寸9分.(以尺表之)

(v) 6公丈−5公尺−1公丈2公寸+3公尺5公分.(以公尺表之)

2. 加何數於.73205方成整數?

3. 甲有金較乙多245.786元,較丙少124.325元,而丙有543.32元.問甲乙各若干元.

§ 8. **以整數乘十進複名數法.** 以整數乘十進複名數與以整數乘整數之方法相似.舉例明之如下.學者可與整數乘法對照觀之.

例 1.　3丈8尺2寸×52.

算草甲	算草乙	算草丙(以丈表之)
3丈8尺2寸	丈尺寸	3.82丈
×　52	382	×　52
7丈6尺4寸	×　52	7.64
191丈	764	191.0
198丈6尺4寸	1910	198.64丈
	19864	

§ 9. **以整數除十進複名數.** 以整數除十進複名數與整數除整數之方法相似.舉例明之如下.

例 1.　核算上節例1之答數.

算草甲

```
        3丈8尺2寸
52)198丈6尺4寸
   156丈
    42丈6尺
    41丈6尺
     1丈   4寸
     1丈   4寸
           0
```

算草乙

```
   |     3 8 2
52 |     丈尺寸
   | 1 9 8 6 4
   | 1 5 6
       4 2 6
       4 1 6
         1 0 4
         1 0 4
             0
```

算草丙(以丈表之)

```
      3.82丈
52)198.64丈
   156
    42.6
    41.6
     1.04
     1.04
        0
```

答.得3丈8尺2寸無誤.

習　題 V

1. 甲乙丙三種算草孰爲捷便?
2. 2斗3升4合×4523,並核算之(以升表之)
3. 3寸5分2釐5毫×4216,並核算之.(以尺表之)
4. 343公兩÷280,並核算之.(以公斤表之)
5. 2公里÷125,並核算之.(以公里表之)

§10. 以整數乘除小數法

以整數乘小數,以整數除小數之方法已於8,9兩節之丙式見之除藉小數點以定位外,蓋完全與整數相乘除無異.

例1. 23.068×358.

```
   23.068
  ×  358
  184.544
 1153.40
 6920.4
 8258.344
```

核算

```
        23.068
358)8258.344
    716
    1098
    1074
      24.34
      21.48
       2.864
       2.864
           0
```

答: 23.068×358=8258.344

習題 VI

1. 求以下各積,並核算之:

(i) 8.052×72;　(ii) 0.004963×561×76.

2. 求以下各商,並核算之:

(i) 43.587÷87;　(ii) 1587.45÷305.

例 2.　25×0.123.

$$\begin{array}{r} 0.123 \\ \times\ 25 \\ \hline .615 \\ +\ 2.46 \\ \hline 3.075 \end{array}$$

例 3.　0.0019×31.

$$\begin{array}{r} 0.0019 \\ \times\ 31 \\ \hline .0019 \\ .057 \\ \hline .0589 \end{array}$$

下列各題,用小數答之.

3. 中國度制,1 步=5 尺,問 1 尺=若干步.

4. 中國度制,1 丈=2 步,問 1 步=若干丈.

5. 中國權制,1 斤=16 兩,問 1 兩=若干斤.

6. 昔人作為兩求斤之歌訣,以免臨時計算之煩.歌詞如下,可校對之,有無錯誤.

兩求斤歌

一,退六二五	二,一二五	三,一八七五	四,二五
五,三一二五	六,三七五	七,四三七五	八,五
九,五六二五	十,六二五	十一,六八七五	十二,七五
十三,八一二五	十四,八七五	十五,九三七五	十六,

6. 買物一斤價百圓,問 1 兩價若干;2 兩價若干;3 兩價若干.答數與兩求斤歌有何關係?

7. 物價每斤百圓者每兩價若干?每斤二百圓者每兩

價若干?每斤三百圓者每兩價若干?答數與兩求斤歌有何關係?

知斤價求兩價,用兩求斤歌求之最便.

§ **11.** 以10^n乘除小數法. 以十百千萬等數乘小數,祗將被乘數之小數點往右移動卽得積,其所移之位數與10之方數相等.

例 **1.** $1.236\times100=123.6.$

例 **2.** $0.00036\times10000=3.6.$

以十百千萬等數除小數,祗將被乘數之小數點往左移卽得商,其所移之位數與10之方數相等.

例 **3.** $27.832\div100=0.27832.$

例 **4.** $1178\div1000=1.178.$

習題 VII

1. §2萬國權度通制表中空格,試以尺,斤,兩爲單位分別塡入相當數量.

2. §2之萬國權度通制表,既經塡完之後,乙種制各單位皆用甲種制之基本單位表之矣.試倣此更製三表,用乙種制之基本單位表示甲種制度之各種單位.

注意 1 尺=0.32 公尺

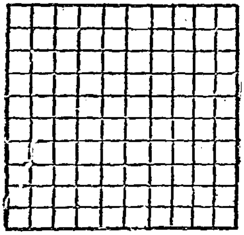
1 升=1.0354688 公升

1 兩=37.301 公分

§ **12.** 百進法——面積. 百進法蓋十進之支流也.長度採用十進者,面積採用百進.面積之單位,依長之單位規定之:每邊長一寸之正方形,其面積稱爲一**方寸**;**方丈**,**方尺**,**方公尺**,**方公寸**等名稱稱是.每名之於次

名,其大蓋百倍,故以百進.

方寸百倍於方分圖



國定面積制

甲種	方引	方丈	方尺	方寸	方分	方釐	方毫
乙種	方公里	方公引	方公丈	方公尺	方公寸	方公分	方公釐

由右而左以百進.

【附註】 國定甲種地積制以畝爲單位,1畝=60方丈.畝以上以百進,畝以下以十退.

1頃=100畝, 1畝=10分, 1分=10釐, 1釐=10毫.

萬國通制面積制名號表

中名	日名	法文原名	略號	別名(計地積時用之)			
方公里	方粁	Kilomètre carré	Km^2				
方公引	方粨	Hectometre carré	Hm^2	Hectare	公頃	竡	Ha
方公丈	方籵	Decamètre carre	Dm^2	Are	公畝	安	a
方公尺	方米	Mètre carré	m^2	Centiare	公釐	糎	ca

方公寸	方粉	Decimètre carré	dm^2				
方公分	方糎	Centimetre carre	cm^2				
方公釐	方粍	Millimetre carré	mm^2				

由下而上以百進.

面積亦有種種記法.

例1.　2方寸98方分.

以方分表之則為　298 方分(?)

以方寸表之則為　2.98 方寸(以100除上數得來)

以方尺表之則為 0.0298 方尺(?)

例2.　2方公尺32方公寸2方公分.

以方公分表之則為　23202方公分(?)

以方公寸表之則為　232.02方公寸(?)

以方公釐表之則為2320200方公釐(?)

餘類推.

習　題 VIII

1.　試填

甲種面積進位表

1方引	100方丈	10000方尺	1000000方寸	100000000方分
		100方尺		
		1方尺		
		001方尺		
.000000001方引	.0000001方丈			

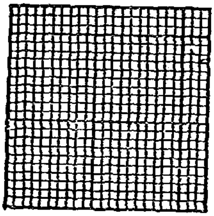
2. 做上表造一乙種面積進位表.

3. 3323356000105 方公釐,試用複名數,方公分,方公寸,方公尺,方公丈,方公引分別表示之.

4. 1 方丈 3 方釐試用方丈,方尺………等分別表示之.

§ 13. 小數乘法與面積.

用面積之理(見第伍章及上節)可以說明小數乘法.



例 1. 有一正方形邊長 2 公分 3 公釐,求面積.

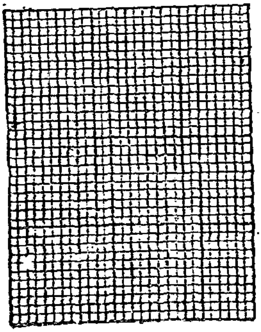
因 2 公分 3 公釐 = 23 公釐,

9 方公釐 = 0.09 方公分 = 0.0009 方公寸

60 方公釐 = 0.6 方公分 = 0.006 方公寸

400 方公釐 = 4 方公分 = 0.04 方公寸

(以公釐布算)		(以公分布算)		(以公寸布算)	
23		2.3		0.23	
× 23		× 2.3		× 0.23	
9	方公釐(此指何塊?)	0.09	方公分	0.0009	方公寸
60	方公釐(此指何塊?)	0.6	方公分	0.006	方公寸
60	方公釐(此指何塊?)	0.6	方公分	0.006	方公寸
400	方公釐(此指何塊?)	4.	方公分	0.04	方公寸
529	方公釐(此指何塊?)	5.29	方公分	0.0529	方公寸



例 2. 有長方形,寬 2 公分 8 公釐,高 3 公分 6 公釐,求面積.

以公釐布算		以公分布算		以公寸布算	
36		3.6		0.36	
× 28		× 2.8		× 0.28	
288	方公釐	2.88	方公分	0.0288	方公寸
72	方公釐	7.2	方公分	0.072	方公寸
1008	方公釐	10.08	方公分	0.1008	方公寸

因同列相等也.

可知：小數相乘可照整數乘法乘之,其積之小數位數等於被乘數與乘數小數位數之和.

諸小數連乘之積之小數位數爲各因數之小數位數之和.

例 3.　$2.5\times0.123\times0.0108$.

$$
\begin{array}{rr}
 & 0.123 \\
\times & 2.5 \\
\hline
 & 615 \\
 & 246 \\
\hline
 & 0.3075
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr}
 & 0.3075 \\
\times & 0.0108 \\
\hline
 & 24600 \\
 & 30750 \\
\hline
 & 0.00332100
\end{array}
$$

習　題 IX

1. 以下各列用公分布式演算之:

(i) 正方形,每邊 5 寸 2 分,求面積.

(ii) 正方形,每邊 1 尺 3 寸 5 分,求面積.

(iii) 長方形,長 7 尺 2 寸,寬 5 尺 4 寸,求面積.

(iv) 長方形,長 8 寸 2 分 5 釐,寬 5 寸 2 分,求面積.

2. 求以下各積:

(i) 48.2×3.2;　　(iii) 0.000567×0.00432;

(ii) 8.64×0.0048;　　(iv) 0.0018×0.0102003.

3. 修路1里需銀458元 3 角 2 分.今修路 3 里半,問需銀若干圓.

4. 田 1 畝,收穫穀4.732石.今有田 8.54 畝,可收穫穀若干?

5. 用右行乘草(伍, §1, 習題 1 之21)計算例 2.

$$
\begin{array}{rr}
 & 0.36 \\
\times & 0.28 \\
\hline
 & 0.072 \\
+ & 0.0288 \\
\hline
 & 0.1008
\end{array}
$$

6. 更用右行乘草演 2 之 (i), (ii), (iii), (iv).

7. 英度制, 1 呎$=0.304801$公寸, 而 1 公尺$=3.125$尺, 問 1 呎合若干尺.

§ **14.** 小數除法與面積. 知長方形之面積及一邊之長,則他邊之長可以除法求之.此理已見第五章.今更用之以說明小數除法.

例 1. 正方形,面積爲 1008 方公釐,長 36 公釐,求寬.

36 公釐$=3.6$公分$=0.36$公寸.

1008 方公釐$=10.08$方公分$=0.01008$方公寸.

28 公釐$=2.8$公分$=0.28$公寸.

用公釐布算　　用公分布算　　用公寸布算

```
     28               2.8                0.28
36)1008         3.6)10.08        0.36)0.1008
    72               7.2              0.072
   288               2.88               288
   288               2.88               288
     0                 0                  0
```

由此可知小數除小數,可照整數除法除之,幾列小數點,商數之小數位數等於被除數小數位數與除數小數位數之差.

又小數除小數,惜令除數及被除數之小數點悉往右移若干位,使除數變爲整數,然後按以整數除小數法除之.

例 2. $35.592 \div 0.24$.

$$35.592 \div 0.24 = (35.592 \times 100) \div (0.24 \times 100)$$
$$= 3559.2 \div 24$$
$$= 148.3.$$

習 題 X

1. 核算IX之2.

2. 下列各題,用尺布算.

(i) 長方形,面積28方尺14方寸,長4尺2寸,求寬.

(ii) 長方形,面積11方尺5方寸,長1尺3寸,求寬.

(iii) 長方形,面積5方尺,寬2尺5寸,求長.

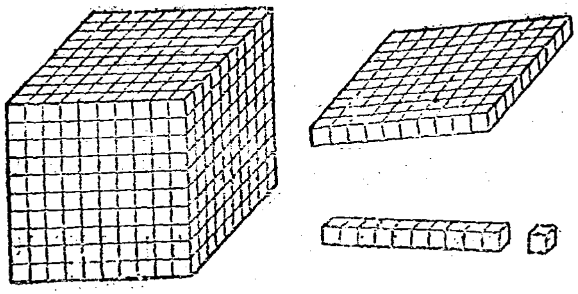
3. 有女工於六時半內織布8尺1寸2分半.問每時織幾尺.

4. 英衡制,1磅=4.53592公兩,中國1兩=0.37301公兩.問1磅=若干兩.(求至小數點後三位)

§15. 千進法——體積. 千進法猶之百進法,亦十進之支流也.長度採用十進者,其面積制多採用百進,而體積制多採用千進.正立方體每邊長1尺者其體積謂之1**立方尺**;邊長一寸者謂之一**立方寸**;餘類推.

方寸之木(長寬高各一寸)豎斷之為十等份,則得十板.每板高一分,長一寸,寬一寸.每板又縱分為十等份,則得十柱.每柱高1分,寬1分,長1寸.每柱又橫斷為十等份,則得

立方剖解圖



十小方塊.每方塊即一立方分.故每柱爲10立方分,每板爲$10\times10=100$立方分,大方塊爲$10\times10\times10=1000$立方分.

$\therefore$ 1立方寸=1000立方分;

同理　1立方尺=1000立方寸;

1立方丈=1000立方尺;

國定體積制

甲　種	立方引	立方丈	立方尺	立方寸	立方分	立方釐	立方毫
乙　種	立方公里	立方公引	立方公丈	立方公尺	立方公寸	立方公分	立方公釐

由右而左以千進.

萬國通制體積制名號表

中名	日名	法文原名	略號	又名			
立方公里	立粁	Kilometer cube	Km^3				
立方公引	立粨	Hectometre cube	Hm^3				
立方公丈	立料	Decametre cube	Dm^3				
立方公尺	立粎	Metre cube	m^3	Kilolitre	公秉	竏	Kl
立方公寸	立粉	Decimetre cube	dm^3	Litre	公升	竔	l
立方公分	立糎	Centimetre cube	cm^3	Millilitre	公撮	竰	ml
立方公釐	立粍	Millimetre cube					

例1.　1立方公分=1立方公寸$\div1000=0.001$立方公寸.

例2.　1立方公分=0.001立方公寸=0.000001立方公尺=0.000000001立方公丈.

用剖解方法甚易證明:

$$長立方體之體積 = 長 \times 寬 \times 高.$$

例3. 有長立方體長 3 寸,寬 4 寸,高 5 寸,求體積.

體積$=3\times4\times6=60$ 立方寸.

體積之各種記法與面積甚相似.

例4. 12立方尺23立方寸 9 立方分.

以立方分表之=12023009 立方分.
以立方寸表之=12023.009 立方寸(以1000除上數得來)
以立方尺表之=12.023009 立方尺(以1000除上數得來)
以立方丈表之=0.012023009 立方丈(以1000除上數得來)

習題 XI

1. 有方柱,長 6 寸,寬 5 寸,厚 3 寸.求體積. (作一解剖圖以說明之.)

2. (i) 2152 立方分,以立方寸表之.

(ii) 32立方分,以立方寸表之.

(iii) 7 立方尺 5 立方寸 92 立方分,以立方尺表之.

3. 正方池每邊 3 尺 2 寸,深 2 尺 5 寸.問體積若干.

§16. 千進——萬進——百萬進——分段法. 數目不甚大時,逢十而進,另立一名非不便也.若數過大則又不勝其煩矣.在法國及南歐各國(最近美國亦然)千個爲 Thousand, (1000) 千個 Thousand 爲 Million (1,000,000) 千個 Million 爲 Trillion (1,000,000,000) 上而至於 Quadrillion, Quillion, Sinllion,……皆以千進.在英德及北歐諸國,百萬爲 Million (1,000,000) 百萬 Million 爲 Trillion (1,000,000,000,000)上而至於 Quadrillion, Quillion,……皆以百萬進.在中國萬個曰萬,(1,

0000)萬萬曰億(1,0000,0000),萬億曰兆(1,0000,0000˙0000),上而至於京,垓,秭,壤,溝,澗,正,……皆以萬進.

通行千進及百萬進之國家,遇大數皆從個位而左每三位一勾,分段,以清眉目.我國用萬進,則每四位爲一段較便.然科學中通行三位分段法,吾人不宜特異.

習題 XII

1. 下列各數用三位分段法勾之:
12839200010000002301.
789123456.7890987654321.

2. 下列各數用四位分段法分之:
314159625.
17881988238816331111.

3. 記以下各數:
(i) 876054921,以萬爲單位.
(ii) 56709254381,以億爲單位.
(iii) 73.56,以億爲單位.

禮疏云:「算法億之數有大小二法:小數以十爲等,十萬爲億,十億爲兆也;大數以萬爲等,萬至萬,是萬萬爲億也.」是億兆等亦可以十進,現今尚有採用之者;不過大數一位一進,反覺不便,轉不如以萬進而四位一名也.甚望此後均以萬萬爲億,毋出兩歧,免滋疑惑!

第捌章

因數及倍數

☞本章專論有效整數☜

§1. 倍數及因數. $2\times3=6$, 故 6 爲 2 之三倍, 稱 6 爲 2 之倍數. 2 稱爲 6 之因數, 亦曰生數, 又曰約數.

$$(1),\quad 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\cdots\cdots$$

皆爲 2 之倍數, 各以 2 爲因數.

$$(2),\quad 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ 24,\cdots\cdots$$

皆爲 3 之倍數, 各以 3 爲因數.

凡二整數, 此數若爲彼數之倍數, 則彼數爲此數之因數. 欲知彼數是否爲此數之因數, 但考察此數是否彼數之倍數可耳. 實際方法常以彼數除此數, 若能整商無餘, 則彼數爲此數之因數; 否則彼數非此數之因數.

例 1. $1386\div22=63$, 故 22 爲 1386 之因數.

例 2. $1385\div22=62+\frac{21}{22}$. 故 22 非 1385 之因數.

習題 I

1. 試列出 5 之一切倍數.
2. 試列出以 6 爲因數之一切整數.

3. 下列各數中何者爲113553之因數?

2, 3, 5, 7, 9, 11.

4. 下列各數中何者爲178359之因數?(用除法實驗)

17, 23, 31, 43.

5. 任意一整數皆有二因數,其數爲何?

6. 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 等,每數除 1 及自身外有無因數?

7. 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14等,每數除 1 及自身外,有無因數?

§2. 倍數及因數之性質.

習題 II

下列各定理試譯作因數語句表之:—

子. 若甲數爲乙數之倍數,乙數爲丙數之倍數,則甲數爲丙數之倍數.

例1. $60=15\times 4,\quad 15=5\times 3$

$\therefore\quad 60=5\times(3\times 4)$

丑. 若二數皆爲某數之倍數,則其和及差必皆爲某數之倍數.

例2. $20\times 3+7\times 3=(20+7)\times 3$

$\therefore\quad 20\times 3-7\times 3=(20-7)\times 3$

寅. 二數之中,一數爲某數之倍數,一數非某數之倍數,其和或差必非某數之倍數.

例3. $15=3\times 5,$

4 非 3 之倍數;

∴ 15+4=19 非 3 之倍數;

卯. 若二數相乘之積爲某質數之倍數,則二數之中必有一數爲該質數之倍數.

例 4. 440×25=11000

爲 11 之倍數,故 25 及 440 之中必有一爲 11 之倍數.

辰. 若一數爲兩數之倍數,則必爲其積之倍數.

§ 3. **質數及複數.** 整數之中有除 1 及自身外尙有他因數者,如上節習題 7 各數是;稱爲**複數**,亦曰**合數**,謂其由他數相乘複合而成也.有除 1 及自身以外無他因數者,如上節習題 6 各數是;稱爲**質數**,亦曰**素數**.曰質曰素者,謂以此等數爲原質原素,則其餘一切整數皆可由之用乘法造成也.

習 題 III

1. 下列各數孰爲質數?孰爲複數?試用記號分別標識之.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100								

2. 耦數串中有幾質數?

3. 九九表(p. 49.)中之兩位數有無質數?

§ 4. 質數. 稍大之數,欲辨別其是否質數,至爲困難.吾人今日所用之方法乃考其是否複數,——是複數則非質數,非複數則是質數.換言之,——卽考其是否可以較該數小之質數除盡之.(其法,用2, 3, 5,.........等質數除之,至所用除數大於商數爲止.)惟此法至爲煩瑣,且必須先知較小之質數始能爲功.故先代學者造爲質數之表,以便檢查.質數表之造法乃 Eratosthenes (375——194B.C.)所發明.其法先列出自然數串

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,........

首數 1 爲質數.其餘 2 爲首數.從 2 起,二二數去,第二,第四,第六等數皆爲複數,剔去之.其餘 3 爲首數.從 3 起,三三數去,第三,第六,第九,等數皆爲複數,剔去之.其餘 5 爲首數.從 5 起,五五數去,第五,第十,第十五,等數皆爲複數,剔去之.其餘 7 爲首數.餘類推.複數剔去矣,每次所餘首數爲質數也.英文「質數」用 Prime, 原起於 Eratosthenes, 卽取元,始,首之義.此法世稱爲 Eratosthenes 之篩,(The sieve of Eratosthenes) 謂汰去複數而提取質數也.如此提得質數.表列於下:—

質數串

1	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73
79	83	87	89							

習題 IV

1. 試用上法續質數串,自 101 至 199.(全班合作.)
2. 用除法驗 539, 727, 1107 是否質數?

3. 連續二整數之積,必能以 2 除盡.試說明之.

4. 連續三整數之積,必能以 6 除盡.試說明之

5. 連續四整數之積,必能以24除盡.試說明之.

6. 連續五整數則何如?六整數?

§ 5. 質因數檢察法. 質因數者因數之爲質數者也.欲知一數是否有某質數爲因數,常用下法:—

2. 2 之倍數,末位可以 2 除之,卽耦數是也.

3. 3 之倍數,各位數字之和必爲 3 之倍數,或爲 0.

5. 5 之倍數,末位爲 5 或 0.

11. 11之倍數,奇位數相加,耦位數相加,二和之差爲11之倍數或爲 0.

(以上見伍,§ 9)

7——11——13. 7,11,13之倍數,從右而左,每三位劃爲一段,奇段相加,耦段相加,二和之差必爲 7,11,13之倍數,或爲 0.

例 1. 847963207是否 7 之倍數? 11? 13?

劃分爲847,963,207三段,

$$847+207-963=91.$$

91爲 7 及13之倍數,但非11之倍數.而

$$\begin{aligned}847963207&=847000000+963000+207\\&=847000000+847000-847000+847-847\\&\quad+963000-963+963\\&\quad+207\\&=847000\times1001-847\times1001+847\\&\quad+963\times1001-963\end{aligned}$$

$$+207$$
$$=(847000-847+963)\times1001$$
$$+847+207-963,$$

又 $1001=7\times11\times13,$

故847963207爲7及13之倍數,而非11之倍數.

11. 11之倍數除上述二法外尙可以下法視察之:11之倍數,從右而左,每二位劃爲一段,各段相加,必爲11之倍數.

例**2.** 271381是否有11爲因數?

$27+13+81=121$,爲11之倍數.

而 $271381=(270000-2700+2700-27+27)+(1300-13+13)+81$
$$=(2700+27+13)\times99+27+13+81,$$

$\therefore$ 271381爲11之倍數.

習題 V

1. 不用除法,說明2772能以2, 3, 7, 9, 11各數除盡之.
2. 6之倍數有何特徵?
3. 4之倍數有何特徵?
4. 8, 16,之倍數有何特徵?
5. 25, 125之倍數有何特徵?
6. 40189是否7之倍數? 11? 13?
7. 123431是否11之倍數?用三法分別檢察之.

§6. 劈因數. 求一數之因數謂之劈因數,或曰分解因數.劈因數常求至質因數爲止;其普通手續如下:—

依質因數檢查法,視其是否有因數2.如其有之,以2逐次除之,至不能除盡爲止.——可除一次則有因數2,二

次則有2^2,三次則有2^3,餘類推.——次以3, 5, 7等如法考之,則各質因數悉得矣.

例1. 分解5544之因數.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 5544 \\ \hline 2 & 2772 \\ \hline 2 & 1386 \\ \hline 3 & 693 \\ \hline 3 & 231 \\ \hline 7 & 77 \\ \hline & 11 \end{array}$$

5544以2除三次,最後商得693.

693無因數2.

693以3除二次,最後得商77.

77無3及5爲因數.

77以7除一次得11.

∴ $5544=2^3\times3^2\times7\times11$,

或 $=2\times2\times2\times3\times3\times7\times11$.

如此將一數劈爲若干質因數連乘之積,謂之**分解質因數**.

習題 VI

1. 劈下列各數之因數.

(i) 320, (ii) 462, (iii) 1188, (iv) 1485, (v) 16632.

2. 應用劈因數之法可變長乘除法爲短乘除法.(參考伍,§6,戊)

(i) 3784×72.

$72=8\times9$.

$$\begin{array}{r} 3784 \\ \times\quad 8 \\ \hline 30272 \\ \times\quad 9 \\ \hline 272448 \end{array}$$

∴ $3784\times72=272448$

(ii) $2436\div84$.

$84=3\times4\times7$.

$$\begin{array}{r|l} 3 & 2436 \\ \hline 4 & 812 \\ \hline 7 & 203 \\ \hline & 29 \end{array}$$

∴ $2436\div84=29$.

(iii) 472×28.　　(iv) 245×144.

(v) $9375\div25$.　　(vi) $14052\div132$.

3. 77人列成長方陣之方法如何?

4. 30人列成長方陣有幾法?

5. 年凡三百有六旬有五日有奇.陽曆年十二月,而十二非 365 之因數,以致各月日數參差不齊.陰曆以太陰虛盈爲月之朔望,而太陰周天之期約29日半;29非 365 之因數,故以閏年補救之,以致每年月數,每月日數,變異紛煩.近有人提議:每年365日之中以一日爲年節,其餘 364 日分爲13月,月分四週,週凡七日.其理何居?

§ 7. 一切因數. 質數之因數凡二,1 及本數是也.複數之因數較多,如12之因數凡六,1, 2, 3, 4, 6, 12是也;60之因數凡十二,1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60是也.其求法(以60爲例)如下:—

(i) 劈60爲質因數;$60=2^2\times3\times5$.

(ii) 任取若干質因數連乘,計得

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2^2 \\ 3 & 3\times2 & 3\times2^2 \\ 5 & 5\times2 & 5\times2^2 \\ 3\times5 & 3\times5\times2 & 3\times5\times2^2 \end{array}\right\}\text{卽}\left\{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 12 \\ 5 & 10 & 20 \\ 15 & 30 & 60 \end{array}\right.$$

(iii) 其個數爲「各種質因數之個數加 1 連乘之積.」

卽
$$(2+1)\times(1+1)\times(1+1)=3\times2\times2=12$$

複數可視爲兩因數相乘之積,例如

$4=1\times4$	$6=1\times6$	$12=1\times12$	$16=1\times16$
$=2\times2$	$=2\times3$	$=2\times6$	$=2\times8$
$=4\times1$	$=3\times2$	$=3\times4$	$=4\times4$
	$=6\times1$	$=4\times3$	$=8\times2$

$=6\times2$　　$=16\times1$

$=12\times1$

此因數變大則彼因數變小.數之爲完全平方者正中一組,兩因數相同;數之非完全平方者則否.就其全體觀之,被乘數與乘數適相倒置.故曰:

驗一數是否質數,但從2起以各質數除之,至所得商數小於除數爲止.

習　題 VII

1. 求下列各數之一切因數.

(i) 30.　(ii) 160.　(iii) 150.　(iv) 256.

2. 有正方磚84塊,欲用以鋪成一長方形.有幾法?其長寬兩邊各幾塊?

3. 有兵1056人欲均分爲若干隊.限定隊數多不得過50,少不得過20.問有幾法,每隊若干人.

4. 有工人四名,作工日數及每日工資(整元數)各不相同,但總共所得工資同爲60圓.問各人作工若干日,每日工資若干圓.

5. 試續質數串自209至397.(全班合作.)

【注意】 將200至400間之整數概行寫出.用質因數檢察法驗其是否2, 3, 5, 7, 11,之倍數,是者剔去之;不是者更以13,17,19實除而驗之. $400\div23=17+\frac{1}{9}<23$, 不必更往下檢驗矣.

【備考】 Pythagoras學派將整數分爲三類:—— 一,巧數,(亦曰完數)數之恰等於其一切因數(本數除外)之和者是,如$6=1+2+3$, $28=1+2+4+7+14$皆巧數也. 二,貧數(或

貧因數,)數之大於其一切因數(本數除外)之和者是,如 $8>1+2+4$, $10>1+2+5$,皆貧數也. 三,富數(或富因數)數之大於其一切因數者是,如 $12<1+2+3+4+6$, $60<1+2+3+4+5+10+12+15+20+30$,皆富數也.

6. 指出下列各數孰爲富數,孰爲巧數,孰爲貧數?

(i) 15; (ii) 16; (iii) 120; (iv) 504; (v) 496.

§8. 公倍及公因. 一數爲諸數之倍數者稱爲諸數之公倍數;例如36爲3, 4, 6之公倍數,52爲13,4,52之公倍數.一數爲諸數之因數者稱爲諸數之公因數;例如3爲9,12,3之公因數,12爲36,24,120之公因數.

習題 VIII

1. 指出下列各組數之公倍數;

(i) 2,3; (ii) 4,6; (iii) 3,5,7; (iv) 15,14,21.

2. 指出下列各組數之公因數:

(i) 6,4; (ii) 30,45; (iii) 8,2,12.

3. 2與5之公倍數有若干?何者最小?何者最大?

4. 8與12之公倍數有若干?何者最小?何者最大?

5. 150與210之公因數有若干?何者最大?何者最小?

6. 1是否爲任何數之因數?

§9. 最小公倍及最大公因. 若干數之公倍數無限之多,其中最小者稱爲最小公倍數.(畧寫爲L.C.M.)例如3與4之公倍數有12,24,36,48,……等,而其中最小者爲12,稱爲3與4之最小公倍數.

若干數之公因數往往不祗一個,其中最大者稱爲最大公因數.(略寫爲G.C.D.)例如150與120之公因數凡

六,卽 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30,其中最大者爲 30,稱爲 120 與 150 之最大公因數.

習 題 IX

1. 2 與 3 之最小公倍數爲 6. 試求其他各公倍數,按大小列出.

2. 120 與 150 之最大公因數爲 30. 試指出其他一切公因數.

§ 10. 互質數與通約數. 二整數除 1 外無他公因數者,謂之**互質數**;如 2 與 3,互爲質數,15 與 28 互爲質數. 二整數除 1 外尙有他公因數者,謂之**通約數**;如 4 與 6, 3 與 9 是.

二互質數之最大公因數爲 1,然慣常謂互質數爲無公因數,蓋謂 1 之外無他公因數也.

習 題 X

1. 「質數」與「互質數」之分別何在?

2. 不相同之二質數是否互質?

3. 試辨別下列各數是否互質?

   27 與 35; 81 與 602; 96 與 303.

4. 二互質數之最小公倍數是否卽該二數之積?

5. 二通約數之最小公倍數是否卽該二數之積?

6. 100 以內之數,若與 $2\times3\times5\times7(=210)$ 互爲質數,該數是否質數?

7. 500 以內之數,若與 $2\times3\times5\times7\times11\times13\times17\times19$ 互爲質數,該數是否質數?

§ 11. 求最大公因數第一法. 通約數之最

大公因數可用下法求之:—

分解質因數以求G.C.D.法. 求諸數之G.C.D.可將諸數之質因數一一分解,取出諸數公有之一切質因數,方次從最低者,連乘即得.

例1. 求63,231,147之G.C.D.

算草

$$\begin{array}{r|l} 3 & 63 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 231 \\ \hline 7 & 77 \\ \hline & 11 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 147 \\ \hline 7 & 49 \\ \hline & 7 \end{array}$$

又

$$\begin{array}{r|rrr} 3 & 63 & 231 & 147 \\ \hline 3 & 21 & 77 & 49 \\ \hline 7 & 7 & 77 & 49 \\ \hline & 1 & 11 & 7 \end{array}$$

可見

$63=3^2\times 7,\qquad 231=3\times 7\times 11,\qquad 147=3\times 7^2.$

$\therefore$ 三數之G.C.D.為$3\times 7=21$.

例2. 求135,495,900之G.C.D.

用分解因數法知

$135=3^3\times 5,\qquad 495=3^2\times 5\times 11,\qquad 900=2^2\times 3^2\times 5^2.$

$\therefore$ 三數之G.C.D.為$3^2\times 5=45$.

例3. 求25,27,28之G.C.D.

用分解因數法知

$25=5^2,\qquad 27=3^3,\qquad 28=2^2\times 7.$

此三數除1外別無公因數.

習題XI

1. 用劈因數方法求以下各組之G.C.D.

(i) 36, 48. (ii) 18, 42, 54.

(iii) 168, 210, 252. (iv) 136, 204, 357, 459.

2. 有紙長7寸2分,寬4寸8分.今欲剪為相等之正

方形,問有幾法,最大正方形之邊長若干.

3. 有院長24丈3尺,寬16丈8尺6寸.今欲製正方磚鋪之,磚邊最大能容若干寸?

4. 甲隊115人,乙隊92人,丙隊207人.欲各變成行數相同之縱隊,以便銜接.問每隊須排爲若干行.

§ 12. 求最大公因數第二法. 若數目太大,用上法頗不便,蓋分解因數爲難也.此外尙有一妙法:—

輾轉相除法. 求二整數之G.C.D.,可以小數除大數,有餘不盡則復以餘數除小數;有餘不盡,再以第二餘數除第一餘數:如此輾轉相除,直至商盡無餘爲止.最後用以爲除數者卽係G.C.D.

例1. 求240與1332之最高公因數.

算草甲

```
240)1332(5
    1200
     132)240(1
         132
         108)132(1
             108
              24)108(4
                  96
                  12)24(2
                     24
                      0
```

算草乙

1	240	1332	5
	132	1200	
4	108	132	1
	96	108	
	12	24	2
		24	
		0	

算草丙

240	5	1332
132	1	1200
108	1	132
96	4	108
12	2	24
		24
		0

所求之G.C.D.$=12$.

實核之如下:

$240\div12=20,\quad\therefore\quad 240=12\times20=2^4\times3\times5,$

$1332\div12=111,\quad\therefore\quad 1332=12\times111=2^2\times3^2\times37,$

演草之理由如下:—

240與1332若有一公因數○

○既爲240之因數,必爲其倍數1200之因數;　【§2,子】
○既爲1332及1200之公因數,必爲其差132之因數;　【丑】
○既爲240及132之公因數,必爲其差108之因數;　【丑】
○既爲132及108之公因數,必爲其差24之因數;　【丑】
○既爲24之因數,必爲其倍數96之因數;　【子】
○既爲108及96之公因數,必爲其差12之因數.　【丑】

故240與1332之公因數,悉爲12之因數.

逆之,12既爲24之因數,故必爲其倍數96之因數;　【子】
12既爲12與96之公因數,必爲其和108之因數;　【丑】
12既爲24與108之公因數,必爲其和132之因數;　【丑】
12既爲108與132之公因數,必爲其和240之因數;　【丑】
12既爲240之因數,必爲其倍數1200之因數;　【子】
12既爲132與1200之公因數,故必爲其和1332之因數.【丑】

求諸數之G.C.D.　法先求任兩數之G.C.D;將此G.C.D.復與第三數求G.C.D.如此遞求,最後所得即爲諸數之G.C.D.

例2.　求560,168,308之G.C.D.

3	168	560	3
	168	504	
	0	56	

2	56	308	5
	56	280	
		28	

G.C.D.爲28.

習題 XII

1.　用輾轉相除法求以下各組之G.C.D.

(i) 256,240;　(ii) 2479,3589;　(iii) 44323,61087.

2.　用輾轉相除法求以下各組之G.C.D.

(i) 855, 1197,1596;

(ii) 1177, 1391, 1819.

(iii) 7491, 9988, 12485, 16571.

3. 某班人數在10名以上,旅行時先生以菓品平均分給各生,計發梨567個,柿441個,橘357個.問該班人數若干.

4. 學生四百餘人,分抄某書.上册2556頁,平均分抄尙餘36頁.下册2959頁,平均分抄尙餘19頁.問學生的數若干.

5. 有田長66丈6尺,寬52丈2尺.欲沿畔植桑,間隔相等,且四隅各有一株.問最少須植若干株.

6. 試續質數串至499.(全班合作)

【注意】 先將400——500間之整數列出,察覺其爲複數者剔去之;用質因數檢驗法知其爲複數者剔去之;其餘使與$13\times17\times19(=4199)$用輾轉相除法求G.C.D.(參考X之7.)

§ 13. 求最小公倍數第一法. 求諸數之L.C.M.,可將諸數先分解質因數,取所有一切質因數,方次從最高者,連乘卽得.

例 **1.** 求24, 25, 28之L. C. M.

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 24 & 25 & 28 \\ \hline 2 & 12 & 25 & 14 \\ \hline 2 & 6 & 25 & 7 \\ \hline 5 & 3 & 25 & 7 \\ \hline & 3 & 5 & 7 \end{array}$$

$24=2^3\times3$

$25=5^2$

$28=2^2\times7$

三數之L. C. M.爲$2^3\times3\times5^2\times7$

習 題 XIII

1. 求以下各組之L. C. M.

(i) 63, 84, 156. (ii) 16, 25, 81.

(iii) 228, 304, 342. (iv) 16, 30, 48, 72.

2. 28與63二數之G.C.D.與L.C.M.相乘之積較之28與63二數相乘之積如何?

3. 學者任舉兩數如上法驗之.

4. 兩數之積以其G.C.D.除之,得何數?

由此數題得

§14. 求最小公倍數第二法.

(i) 求二數之L.C.M.法先求二數之G.C.D.以此G.C.D.除一數,以他數乘其商,即得.

例1. 求1692與2556之L.C.M.

1	1692	2556	1
	864	1692	
23	828	864	1
	72	828	
	108	36	
	108		
	0		

$1692 \div 36 = 47$, $47 \times 2556 = 120132$;

或 $2556 \div 36 = 71$, $71 \times 1692 = 120132$.

所求之L.C.M.為120132.

(ii) 求諸數之L.C.M.,法先求二數之L.C.M.再將此L.C.M.與第三數求L.C.M.,如此遞求,最後所得即為諸數之L.C.M.

例2. 求1466, 3665, 5864之L.C.M.

先求前二數之G.C.D.為733.

$1466 \div 733 = 2$, 故前二數之L.C.M. $= 3665 \times 2 = 7330$.

7330與第三數之G.C.D.為1466.

$7330 \div 1466 = 5$.

故三數之L.C.M.為 $5864 \times 5 = 29320$.

習題 XIV

1. 求下列各組之L.C.M.

(i) 399,589.　　(ii) 1233,1918

2. 求下列各組之L.C.M.

(i) 361,399,589.　　(ii) 558,702,1026.

3. 某校每日每班值日生二人.甲班共40人,乙班36人.甲班王生李生與乙班張生劉生同日值日.問至下次四生同日值日,須若干日.

4. 今年壬戌年,問再至壬戌年須若干年.

5. 自甲子日曜至甲子日曜須若干日.

6. 有磚三種,甲厚1寸,乙6分,丙7寸2分.三種磚分別層疊至於同高,每種須若干?

7. 韓信將兵不及萬人,三三數之無餘,五五數之,七七數之,九九數之,亦無餘.問兵數若干.

8. 有二輪,一48齒,一156齒,問互相銜合之齒至再銜合時,各輪旋轉幾次.

9. 三人繞圓場散步,甲8分鐘繞一週,乙10分,丙12分.今三人由同處起行,問各繞幾週始同歸於原處.

10. 甲乙丙三人同時由同地同向繞圓城而行,城周84里,甲每時行12里,乙9里,丙5里.問經若干時後三人同遇於一處.

11. 有長方磚一種,長8寸4分,寬5寸2分.欲用以鋪成一正方形.問此形最小須邊長若干.

第玖章

分數及比率

☞ 先溫習:叁,§8;伍,§9;伍,§13. ☜

§1. 分數及比率. 除有二義(伍,§6,甲)均分及求倍率是也.均分之意發達爲分數,求倍率之義發達爲比率:

分數發生於均分之義. 均分不能得整商時不得已創立分數以表之.

例1. $2寸\div3=\frac{2}{3}寸.$

及施行既便,能得整商者亦有時記爲分數.

例2. $6寸\div3=2寸=\frac{6}{3}寸.$

此種記法以被除數爲**分子**,以除數爲**分母**,而稱其商爲**分數**.

比率發生於求倍之義. 如

例3. $6寸\div3寸=2$,寫作$6寸:3寸=2$.

意卽謂6寸爲3寸之二倍.遇不能得整商時,苟甲量合乙量幾分之幾,則謂甲量比乙量爲幾分之幾.

例4. $2寸:3寸=\frac{2}{3}$,

意卽謂2寸爲3寸之$\frac{2}{3}$.卽$2寸=\frac{2}{3}(3寸)$.

如此寫法以被除數爲**前項**,除數爲**後項**,而稱商爲**比率**.

注意I. 分數有二解. 如$\frac{2}{3}$寸可作「三分二寸而有其一」解,亦可作「三分一寸而有其二,」即「$\frac{1}{3}$寸 × 2」或「$2\cdot\frac{1}{3}$寸.」兩解同等重要.

注意II. 分數之分母爲 1 者,該分數等於分子.

注意III. 整數可化爲分數,以原數爲分子,1 爲分母.

注意VI. 異類量不能比.「1 日:2 斤」毫無意義.

注意V. 不名數與名數不能比.「2:4 馬」毫無意義.

注意VI. 同類異名數相比,須化爲同名數然後比.

注意VII. 同名數之比等於量數之比.

注意VIII. 比之後項爲單位者,比率等於前項之量數.

注意IX. 0 不得爲後項;換言之:有與無不能比.

注意X. 0 不得爲分母.

習題 I

求1—8 各比率,以分數表之.

1. 5 圓 : 7 圓.	2. 7 圓 : 5 圓.
3. 1 斤 : 1 兩.	4. 1 兩 : 1 斤.
5. 1 丈 : 3 尺.	6. 7 方尺 : 125 方寸.
7. $\frac{1}{16}$斤 : $\frac{2}{16}$斤	8. $\frac{5}{10}$尺 : $\frac{4}{10}$尺.

9—14 各題,用分數答之.

9. 1 尺 = 若干步?	10. 1 步 = 若干丈?
11. 1 尺 = 若干丈?	12. 1 兩 = 若干斤?

13. 3 尺＝若干步？ 14. 2 步＝若干丈？

15. 7 尺＝若干丈？ 16. 3 兩＝若干斤？

§ 2. 分數及比之種種名稱. 普通分數(子母概係整數)有二:—

(一)眞分數, 分子小於分母,如$\frac{1}{7}$尺,$\frac{6}{7}$日是.其值小於單位.

(二)假分數, 分子大於或等於分母者也;如$\frac{3}{3}$尺,$\frac{8}{5}$斤,$\frac{9}{3}$人是.其值大於或等於單位.

假分數有二種:一種可變爲整數,(名不變)如

$$\frac{8}{2}\text{斤}=8\text{斤}\div 2=4\text{斤}$$

一種可變爲整數與眞分數之和(名不變),如

$$\frac{8}{3}\text{斤}=8\text{斤}\div 3=2\text{斤}+\frac{2}{3}\text{斤}$$

亦寫作 $=2\frac{2}{3}$斤.

如此夾分數帶整數者謂之帶分數.帶分數在高等算學不適用;本章用「分數」二字時專指普通分數而言.

比有三種:—

(一)劣比, 前項小於後項;如 1 尺:7 尺,6 日:1 週是.其值小於 1.

(二)優比, 前項大於後項;如 4 斤:3 斤,1 畝:4 方丈是.其值大於 1.

(三)平比, 前項等於後項;如 5 升:5 升,2 度:120 分是.其值等於 1.

兩分數子母互相倒置者,互稱爲倒分,或曰倒數.如$\frac{1}{7}$與 7 互爲倒數,$\frac{2}{3}$與$\frac{3}{2}$互爲倒數.

兩比前後項互相倒置者,互稱為**反比**.如 1 牛:7 牛與 7 牛:1 牛互為反比,2 尺:3 尺與 3 尺:2 尺互為反比.

分母相同之諸分數稱為**同母分數**.

分子相同之諸分數稱為**同子分數**.

習題 II

1. $\frac{2}{3}$丈為眞分數抑為假分數?但$\frac{2}{3}$丈$=\frac{20}{3}$尺. $\frac{20}{3}$尺為眞分數抑為假分數?

2. 2 丈:3丈為優比抑為劣比?但2丈:3丈＝20尺:30尺.20尺:30尺為優比抑為劣比?

3. 量,以分數表之,分數之眞假恒因所用單位而不同;比率之優劣,不因所用單位而變.試各舉三例以明之.

4. 化以下各假分數為整數或帶分數.(但不得變其單位)

(i) $\frac{8}{4}$日; (ii) $\frac{23}{7}$星期; (iii) $\frac{289}{34}$; (iv) $\frac{7800}{25}$尺.

5. 下列各比孰為優比?孰為劣比?孰為平比?

(i) 7 日:240 小時; (ii) 7 日:168 小時;

(iii) 90畝:541 方丈; (iv) 11 斤:170 兩.

6. 寫出以下各比之逆比:

(i) 1 日:5 日; (ii) 7 尺:1丈; (iii) 8 人:32人.

7. 寫出以下各數之倒數:

(i) 7; (ii) $\frac{1}{7}$; (iii) $\frac{6}{7}$; (iv) $\frac{3}{6}$; (v) $\frac{4}{3}$.

8. 指出下列分數中之同母分數與同子分數:

$\frac{3}{4}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{19}$.

§3. 同母分數. 同母分數之計算最易,且在分

數之中佔重要地位,茲先論之.

(甲) 同母分數相加, 但將分子相加爲分子,公分母爲分母,即得和.

例 1. $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$

譬如$\frac{2}{7}$週爲2日,$\frac{3}{7}$週爲3日,2日+3日=5日,即$\frac{5}{7}$週.一般言之,$\frac{2}{7}$爲二倍$\frac{1}{7}$,$\frac{3}{7}$爲三倍$\frac{1}{7}$,相加得五倍$\frac{1}{7}$,即$\frac{5}{7}$.

(乙) 同母分數施減, 但將分子施減爲分子,公分母爲分母,即得差.

例 2. $\frac{8}{12}-\frac{5}{12}=\frac{8-5}{12}=\frac{3}{12}\left(=\frac{1}{4}\right)$

譬如$\frac{8}{12}$呎爲8吋,$\frac{5}{12}$呎爲5吋,8吋-5吋=3吋,即$\frac{3}{12}$呎.一般言之,$\frac{8}{12}$爲八倍$\frac{1}{12}$,$\frac{5}{12}$爲五倍$\frac{1}{12}$其差爲三倍$\frac{1}{12}$即$\frac{3}{12}$.

(丙) 同母分數之大小, 全視其分子爲轉移.

例 3. $\frac{8}{3}>\frac{6}{3}>\frac{4}{3}>\frac{3}{3}>\frac{2}{3}>\frac{1}{3}$.

(丁) 同母分數之比, 等於其分子之比.

例 4. $\frac{5}{16}:\frac{7}{16}=5:7$.

譬如$\frac{5}{16}$斤爲5兩,$\frac{7}{16}$斤爲7兩,其比爲5兩:7兩=5:7.

一般言之,$\frac{5}{16}$爲五倍$\frac{1}{16}$,$\frac{7}{16}$爲七倍$\frac{1}{16}$,其比應爲5:7.

異母分數之加減除及比較大小,須化作同母分數,然後按上法爲之.§§4—6卽係研究變更分數之形狀而不變其大小之方法.

習 題 III

1. $\frac{6}{8}+\frac{2}{8}$.

2. $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$.

3. $\frac{9}{10}-\frac{2}{10}$.

4. $\frac{60}{90}-\frac{31}{90}$.

5. $\frac{13}{17}+\frac{2}{17}-\left(\frac{4}{17}-\frac{3}{17}\right)$.

6. $\frac{8}{10}-\left\{\frac{7}{10}-\left(\frac{5}{10}-\frac{2}{10}\right)\right\}+\frac{3}{10}$.

7. 某商人營業一年,虧折原本百分之五,放出債額爲原本百分之13,又存貨價額爲原本百分之四十七.問所存現金爲原本百分之幾.

§4. 分數及比之基本定律. 設有某少年一週食米 2 斗,苟其飲食有恆,則必每二週食 4 斗,每三週食 6 斗,每四週食 8 斗.就其一週食 2 斗而言,則日食$\frac{2}{7}$斗,就其每二週食 4 斗而言,則日食$\frac{4}{14}$斗,就其每三週食 6 斗而言,則日食$\frac{6}{21}$斗. $\frac{2}{7}$斗, $\frac{4}{14}$斗, $\frac{6}{21}$斗, $\frac{8}{28}$斗,等名目雖殊,而每日入少年腹中之米量固無少異也.是故知

$$\frac{2}{7}=\frac{4}{14}=\frac{6}{21}=\frac{8}{28}=\frac{10}{35}=\frac{12}{42}=\cdots$$

細察此等分數子母間互相之關係:

$$\frac{4}{14}=\frac{2\times2}{7\times2},\quad \frac{6}{21}=\frac{2\times3}{7\times3},\quad \frac{8}{28}=\frac{2\times4}{7\times4},\cdots$$

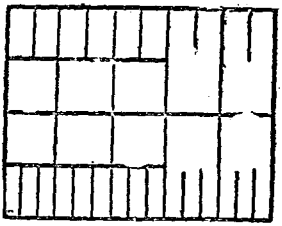
可見:—

擴分定律.　一分數之子母同以一整數乘之,分數之大小不變.

例 1.　$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{9}{15}\cdots\cdots$

$\frac{8}{5}a=\frac{6}{10}a$

$\frac{3}{5}a=\frac{9}{15}a$



擴比定律.　比之前後項同以一數乘之,比率不變.

例 2.　7 斤 : 5 斤 = 28 斤 : 20 斤.

7 斤 : 5 斤 $=\frac{7}{5}$,　28 斤 : 20 斤 $=\frac{28}{20}$;

$\because\frac{7}{5}=\frac{28}{20}$,　$\therefore$ 7 斤 : 5 斤 = 28 斤 : 20 斤.

將擴分定律逆述之,可知:—

約分定律.　一分數之子母同以一整數除之(苟可除)其大小不變.

例 3.　$\frac{72}{27}=\frac{72\div 9}{27\div 9}=\frac{8}{3}$.

約比定律.　比之前後項同以一整數除之(苟可除)比率不變.

例 4.　72 寸 : 27 寸 =(72 寸 ÷ 9) : (27 寸 + 9)

= 8 寸 : 3 寸.

§ 5.　**約分.**　一分數之子母同以其公因數除之,謂之**約分**.約至子母互質,稱爲**最簡分數**,或曰**最低分數**.

約分之法有二:——

(一) 子母各分解質因數,將公有質因數一一對消;

(二) 求子母之G.C.D.以之除分子及分母.

例1. 約簡$\frac{24}{30}$.

$$\frac{\overset{4}{\cancel{\overset{12}{\cancel{24}}}}}{\underset{5}{\cancel{\underset{15}{\cancel{30}}}}}=\frac{4}{5}\qquad\text{或}\qquad\frac{24}{30}=\frac{\cancel{2}\times2\times2\times\cancel{3}}{\cancel{2}\times\cancel{3}\times5}=\frac{4}{5}.$$

例2. 約簡$\frac{1211}{1903}$.

此分數之母太大,且不易看出公因數,須用第二法約之.

1	1211	1903	1
	692	1211	
3	519	692	1
	519	519	
	0	173	

1903與1211之G.C.D.爲173.

$1903\div173=11$

$1211\div173=7$

$$\therefore\ \frac{1211}{1903}=\frac{1211\div173}{1903\div173}=\frac{7}{11}.$$

約分法可用以驗二分數是否相等.

例3. $\frac{24}{42}$與$\frac{108}{189}$是否相等? 例4. $\frac{91}{104}$與$\frac{369}{492}$是否相等?

約分, $\frac{24}{42}=\frac{\cancel{2}\times2\times2\times\cancel{3}}{\cancel{2}\times\cancel{3}\times7}=\frac{4}{7}$;

7	91	104	1
	91	91	
	0	13	

3	369	492	1
	369	369	
	0	123	

$$\frac{108}{189}=\frac{2\times 2\times \cancel{3}\times \cancel{3}\times \cancel{3}}{\cancel{3}\times \cancel{3}\times \cancel{3}\times 7}=\frac{4}{7}\qquad \frac{91}{104}=\frac{7\times \cancel{13}}{8\times \cancel{13}}=\frac{7}{8}\text{,不可再約;}$$

$$\therefore\ \frac{24}{42}=\frac{108}{189}.\qquad \frac{369}{492}=\frac{3\times 123}{4\times 123}=\frac{3}{4}\text{,不可再約;}$$

$$\therefore\ \frac{7}{8}\neq\frac{3}{4},$$

約分法除上述兩種應用之外,通分時亦須應用,俟下節論之.

習題 IV

1. 約下列各分數爲最簡分數:—

(i) $\frac{21}{48}$.　(ii) $\frac{144}{156}$.　(iii) $\frac{231}{273}$.

(iv) $\frac{840}{3080}$.　(v) $\frac{1110}{1221}$.　(vi) $\frac{728}{2128}$.

2. 驗下列各組分數是否相等:—

(i) $\frac{48}{96}$與$\frac{85}{170}$.　(ii) $\frac{225}{660}$與$\frac{255}{748}$.

3. 驗下列各組數量是否相等:

(i) $\frac{2}{3}$丈與$\frac{4}{6}$尺.　(i) $\frac{2}{15}$丈與$\frac{2}{3}$步.

§ 6. 通分. 異母分數可用擴分法則化爲同母分數,而不變其值.

例如$\frac{7}{5}$與$\frac{2}{3}$爲異母分數,然由擴分定律,

$$\frac{7}{5}=\frac{14}{10}=\frac{21}{15}=\frac{28}{20}=\frac{35}{25}=\frac{42}{30}=\cdots\text{而}\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}=\frac{10}{15}=\frac{12}{18}=\cdots$$

其中$\frac{21}{15}$與$\frac{10}{15}$則爲同母分數.

將異母分數化爲同母分數,而不變其值,謂之**通分**.

其手續如下:—

第一步,將諸分數約之使為最簡.

第二步,求各分母之L.C.M.(稱為最小公分母).

第三步,用各分母除此L.C.M.

第四步,用各商各乘本分數之子母.

例 1. 將$\frac{5}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{8}$通分.

各分數皆係最簡分數,不能再約.

各分母之L.C.M.為$3\times5\times8=120$.

$120\div3=40$, $120\div5=24$, $120\div8=15$.

$\frac{5}{3}=\frac{5\times40}{3\times40}=\frac{200}{120}$, $\frac{2}{5}=\frac{2\times24}{5\times24}=\frac{48}{120}$, $\frac{7}{8}=\frac{7\times15}{8\times15}=\frac{105}{120}$.

例 2. 將$\frac{6}{8}$, $\frac{10}{125}$, $\frac{3}{20}$通分.

約簡$\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$, $\frac{10}{125}=\frac{2}{25}$; $\frac{3}{20}$最簡.

4, 25, 20之L.C.M.為100.

$100\div4=25$, $100\div25=4$, $100\div20=5$.

$$\therefore \frac{6}{8}=\frac{3}{4}=\frac{3\times25}{4\times25}=\frac{75}{100};$$

$$\frac{10}{125}=\frac{2}{25}=\frac{2\times4}{25\times4}=\frac{8}{100};$$

$$\frac{3}{20}=\frac{3\times5}{20\times5}=\frac{15}{100}.$$

通分之應用有三:—

一. 比較異母分數之大小

二. 異母分數加減法

三. 異母分數除法.

例 3.　比較$\frac{1}{3}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{15}$孰大.

通分,　$\frac{1}{3}=\frac{10}{30}$,　$\frac{3}{10}=\frac{9}{30}$,　$\frac{4}{15}=\frac{8}{30}$;

$\therefore\ \frac{1}{3}>\frac{3}{10}>\frac{4}{15}$.

例 4.　$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$.　解　$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$.

例 5.　$\frac{2}{3}\div\frac{1}{2}$.　解　$\frac{2}{3}\div\frac{1}{2}=\frac{4}{6}\div\frac{3}{6}=\frac{4}{6}:\frac{3}{6}$

$=4:3=\frac{4}{3}$.

習題V

將1—6各組分數通分.

1. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$.　　2. $\frac{4}{7}$, $\frac{13}{8}$, $\frac{4}{9}$.

3. $\frac{2}{15}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{110}{45}$.　　4. $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{7}{42}$.

5. $\frac{2}{8}$, $\frac{10}{30}$, $\frac{35}{84}$.　　6. $\frac{17}{192}$, $\frac{23}{238}$, $\frac{2}{999}$.

7—10各題,先通分而後加減.

7. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$.　8. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$.　9. $\frac{4}{5}-\frac{2}{3}$.　10. $\frac{7}{12}-\frac{3}{8}$.

11—12各題,先通分而後除.

11. $\frac{3}{5}$尺:$\frac{2}{7}$尺.　　12. $\frac{5}{7}\div\frac{2}{3}$

13—14各題,先通分而後比較.

13. $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$孰大?　　14. $\frac{5}{17}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{11}{24}$孰大?

15. 試做通分之法將下列各組分數化爲同子分數:

(i) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$. (ii) $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{8}$. (iii) $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$.

§7. 分數加減法.

由§3知

同母分數施加減, 但將諸分子如法加減爲分子,公分母爲分母.

例 1. $\frac{7}{13}+\frac{12}{13}-\frac{2}{13}+\frac{1}{13}=\frac{7+12-2+1}{13}=\frac{18}{13}=1\frac{5}{13}$

異母分數施加減, 先通分,使變爲同母分數,然後如法加減.

例 2. $\frac{2}{3}+\frac{17}{24}-\frac{23}{18}$.

先通分,最小公分母爲72,

$\frac{2}{3}=\frac{48}{72}$, $\frac{17}{24}=\frac{51}{72}$, $\frac{23}{18}=\frac{92}{72}$

$\therefore\ \frac{2}{3}+\frac{17}{24}-\frac{23}{18}=\frac{48}{72}+\frac{51}{72}-\frac{92}{72}=\frac{48+51-92}{72}=\frac{7}{72}$,

分數與整數施加減, 可將整數變爲分數(原數爲子,1 爲母)然後加減.

例 3. $2-\frac{4}{3}+\frac{1}{5}$.

$2-\frac{4}{3}+\frac{1}{5}=\frac{2}{1}-\frac{4}{3}+\frac{1}{5}=\frac{30}{15}-\frac{20}{15}+\frac{3}{15}=\frac{30-20+3}{15}=\frac{13}{15}$.

例 4. 空氣一體積中含有氮氣$\frac{78}{100}$,氧氣$\frac{21}{100}$. 間其餘雜質若干?

$1-\frac{78}{100}-\frac{21}{100}=\frac{100-78-21}{100}=\frac{1}{100}$. 答:含雜質$\frac{1}{100}$.

習題 VI

1. $\frac{2}{5}$斤$+\frac{3}{7}$斤.　　2. $\frac{3}{5}$尺$+\frac{2}{3}$尺-1尺$+\frac{3}{8}$尺.

3. $2-\frac{3}{4}+\frac{2}{5}$.　　4. $9+\frac{5}{20}=\frac{4}{25}+\frac{21}{36}$.

5–8各題須先化爲同名數.

5. 1兩$+\frac{3}{4}$斤.　　6. 7尺$-\frac{2}{3}$丈.

7. 13時$+\frac{2}{4}$日.　　8. 1吋$+\frac{2}{3}$呎$-\frac{1}{5}$呎.

9. 1尺之線,剪去$\frac{2}{3}$尺,又剪去$\frac{1}{6}$尺.問餘幾分之幾尺.

10. 某班學生在校四年中死去百分之4,因事休學者占百分之12,轉入他校者占百分之2.問所餘爲原數之若干.

11–13各題答數不必變爲帶分數.

11. $\frac{4}{5}+\frac{4}{5}$.　　12. $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$.　　13. $\frac{4}{7}+\frac{4}{7}+\frac{4}{7}+\frac{4}{7}$

14. 演11–13各題後有何見地? $\frac{4}{5}\times 2=$? $\frac{2}{3}\times 3=$? $\frac{4}{7}\times 4=$?

§ 8. 帶分數. 帶分數之整數與分數兩部分本係藉加法聯繫之者; 例如　$2\frac{3}{5}=2+\frac{3}{5}$　　$1\frac{2}{3}=1+\frac{2}{3}$.

故將帶分數變爲假分數,可按整數加分數之方法爲之.

例 1. 將$2\frac{2}{5}$變爲假分數.

$2\frac{2}{5}=2+\frac{2}{5}=\frac{10}{5}+\frac{2}{5}=\frac{12}{5}$.　　核算：$\frac{12}{5}=12\div5=2\frac{2}{5}$.

故將帶分數變爲假分數，乃以分母乘整數加於分子以爲分子，原分母爲分母.

例 2.　$5\frac{3}{4}=\frac{5\times4+3}{4}=\frac{20+3}{4}=\frac{23}{4}$.

加式中夾有帶分數時，整數加整數，分數加分數.

例 3.　$2+3\frac{2}{5}+7\frac{1}{3}+\frac{2}{7}$.

$$
\begin{aligned}
2+3\frac{2}{5}+7\frac{1}{3}+\frac{2}{7}&=2+3+\frac{2}{5}+7+\frac{1}{3}+\frac{2}{7}\\
&=(2+3+7)+\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+\frac{2}{7}\\
&=12+\frac{42+35+30}{105}=12+\frac{107}{105}=12+1\frac{2}{105}\\
&=13\frac{2}{105}.
\end{aligned}
$$

加減式中夾有帶分數時，整數與整數加減，分數與分數加減；若分數部分不足減，相機化整數爲分數；若整數部分不足減，俟分數部分結束後再行併算.

例 4.　$4+3\frac{2}{5}-7\frac{1}{3}+2\frac{2}{7}$.

$$
\begin{aligned}
4+3\frac{2}{5}-7\frac{1}{3}+2\frac{2}{7}&=(4+3-7+2)+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}+\frac{2}{7}\right)\\
&=2+\frac{42-35+30}{105}=2+\frac{37}{105}=2\frac{37}{105}.
\end{aligned}
$$

例 5.　$3\frac{1}{5}-1\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+2$.

$$3\frac{1}{5}-1\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+2=(3-1+2)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\right)=4+\frac{12-20-45}{60}$$

分數部分不可減,故變為 $=3+\frac{60+12-20-45}{60}$

$$=3+\frac{7}{60}=3\frac{7}{60}$$

例 6. $2\frac{1}{2}-3\frac{1}{3}+\frac{5}{6}$.

$$2\frac{1}{2}-3\frac{1}{3}+\frac{5}{6}=(2-3)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}\right)=(2-3)+\frac{3-2+5}{6}$$
$$=2-3+1=0.$$

習題VII

1—3各帶分數化為假分數:—

1. $2\frac{4}{15}$　2. $8\frac{5}{16}$　3. $101\frac{1}{7}$　4. $3\frac{1}{2}+7\frac{1}{2}$

5. $21\frac{1}{7}+20\frac{1}{5}$　6. $6-1\frac{2}{3}$

7. $7\frac{3}{8}-5\frac{1}{4}$　8. $13\frac{1}{4}-10\frac{5}{6}$

9. $4+1\frac{2}{3}+6\frac{1}{2}-12\frac{1}{6}$　10. $5-14\frac{1}{5}+26\frac{1}{7}-5\frac{34}{35}$.

§ 9. 分數乘法. 由VII之11—13各題可知以整數乘分數,但以整數乘其分子.

例 1. $\frac{2}{7}\times 2=\frac{2\times 2}{7}=\frac{4}{7}$.

譬如$\frac{2}{7}$週為2日,以2乘之得4日即$\frac{4}{7}$週.

又以分數乘整數，可以分子乘整數而以分母除之.

例 2.　$2\times\frac{3}{8}=\frac{2\times3}{8}=\frac{6}{8}$.

譬如 2 日卽 48 小時,八分之而取其三,得 18 小時,卽$\frac{6}{8}$日.

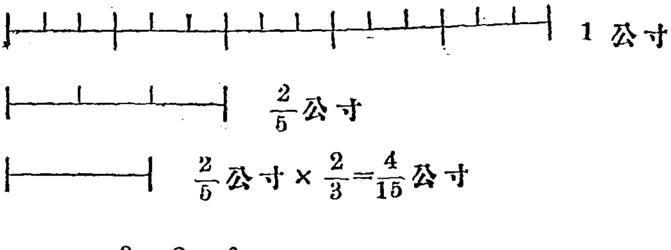
$\therefore$ 2 日 $\times\frac{3}{8}=\frac{2\text{日}\times3}{8}=\frac{6}{8}$日.

分數相乘，分子相乘爲分子,分母相乘爲分母,卽得積.

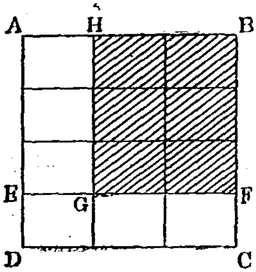
例 3.　布一丈,價$\frac{2}{5}$圓.今買布$\frac{3}{4}$丈,需若干圓?

布一丈,價$\frac{2}{5}$圓 $=$ 40 分;布$\frac{1}{4}$丈,價 10 分,卽$\frac{2}{20}$圓;布$\frac{3}{4}$丈,價 30 分,卽$\frac{6}{20}$圓.

例 4.　$\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$.



例 5.　$\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{6}{12}$.



如圖 ABCD$=1$ 方寸,

ABFE$=\frac{3}{4}$方寸

BFGH$=\frac{3}{4}$方寸$\times\frac{2}{3}$.

方寸中凡十二小長方,每長方$=\frac{1}{12}$方寸,

BFGH 合 6 長方$=\frac{6}{12}$方寸.

$\therefore\frac{3}{4}$方寸$\times\frac{2}{3}=\frac{6}{12}$方寸.

此外尙有一巧法,可以說明分數乘法.

例6. $\frac{3}{7}$尺$\times\frac{2}{3}$.

$\frac{3}{7}$尺意卽謂1尺之長七分之而取其三.

$\frac{3}{7}$尺$\times\frac{2}{3}$意卽謂$\frac{3}{7}$尺之長三分之而取其二.

夫一尺之長,其始七分之而取其三,繼又三分所得而取其二,是無異於七分之而取其二也.

$\therefore\frac{3}{7}$尺$\times\frac{2}{3}=\frac{2}{7}$尺.

凡兩分數相乘,法之分子與實之分母相同者,皆可用此法解釋之.否則用擴分法使法之分子與實之分母化爲同數可也.

例7. $\frac{2}{7}$尺$\times\frac{3}{5}$.

$\frac{2}{7}$尺$\times\frac{3}{5}=\frac{6}{21}$尺$\times\frac{21}{35}=\frac{6}{35}$尺.

習題 VIII

1. $\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}$.　　2. $\frac{1}{3}\times\frac{3}{16}$.　　3. $\frac{4}{7}\times\frac{7}{8}$.

4. $\frac{6}{5}\times\frac{2}{7}$.　　5. $\frac{2}{3}\times\frac{11}{7}$.　　6. $\frac{3}{4}\times\frac{2}{15}$.

7. $3\times\frac{4}{5}$.　　8. $\frac{7}{5}\times15$.　　9. $\left(\frac{3}{4}\right)^3$.

10. 舉例說明分數乘法交換律.

11. $\left(\frac{8}{7}\times\frac{3}{4}\right)\times\frac{2}{3}$.　　12. $\frac{8}{7}\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\right)$

13. 舉例說明分數乘法結合律.

14. $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)\times\frac{3}{5}$.　　15. $\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}$.

16. $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{4}$.　　17. $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}$.

18. 舉例說明分數乘法分配律.

19. 長方形,長$\frac{3}{7}$公寸,寬$\frac{2}{3}$公寸,面積若干方公寸?

20. 某工人一日工作10小時得工資三角.若一日工作七小時,得工資若干?

21. 1公尺$=\frac{25}{8}$尺,問$\frac{2}{3}$公尺$=$若干尺.

22. $\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\right)\times\frac{4}{5}$　　23. $\left(\frac{5}{6}\times\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{2}$.

24. 兩分數相乘,積為$\frac{8}{15}$,法為$\frac{4}{5}$.用何法可以求實?

25. 兩分數相乘,積為$\frac{10}{18}$,法為$\frac{2}{3}$.用何法可以求實?

§ 10. **分數除法.** 分數除法亦係乘法之逆算.

同母分數施除,但以分子施除.

分數除法亦有二義:

$$\frac{2}{3}\text{尺}\div\frac{5}{7}=\text{何數?即何數}\times\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\text{尺}$$

$$\frac{2}{3}\text{尺}\div\frac{5}{7}\text{尺}=\text{何數?即}\frac{5}{7}\text{尺}\times\text{何數}=\frac{2}{3}\text{尺?}$$

然法則相通: $\frac{2}{3}\text{尺}\div\frac{5}{7}\text{尺}=\frac{14}{15}$, 則 $\frac{2}{3}\text{尺}\div\frac{5}{7}=\frac{14}{15}\text{尺}$

因 $\frac{2}{3}\text{尺}=\frac{5}{7}\text{尺}\times\frac{14}{15}$ 即 $\frac{2}{3}\text{尺}=\frac{14}{15}\text{尺}\times\frac{5}{7}$ 也.

例 1. $\frac{1}{3}\text{尺}\div\frac{2}{3}$.

$\frac{1}{3}\text{尺}\div\frac{2}{3}\text{尺}=\frac{1}{3}\text{尺}:\frac{2}{3}\text{尺}=1:2=\frac{1}{2}$, (§3). $\therefore\frac{1}{3}\text{尺}\div\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\text{尺}$.

異母分數施除,先通分,然後如法施除.

例 2. $\frac{4}{7}\div\frac{2}{3}$.

$\frac{4}{7}\div\frac{2}{3}=\frac{12}{21}\div\frac{14}{21}=12\div14=\frac{12}{14}$.

惟 $\frac{12}{14}$ 即 $\frac{4\times3}{7\times2}$ 亦即 $\frac{4}{7}\times\frac{3}{2}$, 故

分數除分數, 但以法之倒數乘實.

例 3. $\frac{3}{5}\div\frac{4}{7}=\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{21}{20}\left(=1\frac{1}{20}\right)$

核算: $\frac{21}{20}\times\frac{4}{7}=\frac{3\times7}{5\times4}\times\frac{4}{7}=\frac{3}{5}$.

例 4. $\frac{2}{13}\div5=\frac{2}{13}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{65}$.

核算: $\frac{2}{6}\times5=\frac{10}{65}=\frac{2}{13}$.

例 5. $6\div\frac{5}{7}=6\times\frac{7}{5}=\frac{42}{5}.\left(=8\frac{2}{5}\right)$

核算: $\frac{42}{5}\times\frac{5}{7}=\frac{210}{35}=6.$

習 題 IX

1. $\frac{2}{7}\div\frac{3}{7}$　　2. $\frac{10}{17}\div\frac{5}{17}$　　3. $\frac{7}{16}\div\frac{15}{32}$

4. $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$　　5. $\frac{91}{103}\div7$　　6. $\frac{101}{244}\div210$

7. $18\div\frac{9}{10}$　　8. $21\div\frac{13}{12}$　　9. $7\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}$

10. $9\frac{2}{51}\div\frac{2}{17}$　　11. $2\frac{1}{7}\div15$　　12. $61\frac{7}{8}\div16$

13. $9\frac{2}{5}\div3\frac{1}{61}$　　14. $24\frac{5}{13}\div7\frac{1}{8}$

15. 3 寸為$\frac{1}{3}$寸之若干倍?

16. $\frac{5}{3}$斤為$\frac{2}{7}$兩之若干倍?

17. 求下列各比率:—

$\frac{5}{8}:\frac{2}{3}$,　$2\frac{1}{7}$公尺 : $3\frac{2}{5}$公尺,　$4\frac{1}{4}$畝 : $3\frac{1}{3}$畝,

18. 圓周長$14\frac{1}{7}$尺,直徑長$4\frac{1}{2}$尺.求圓周與直徑之比率.

19. 輪旋一周之$\frac{1}{12}$,車進 1 尺.問輪旋$17\frac{3}{4}$次時,車進幾尺.

20. 製衣一件,用布$14\frac{1}{2}$尺,共洋$2\frac{61}{100}$元.問布一尺價

洋若干.

§ **11.** 四則合問 分數四則合問演算之規則,與整數同,學者試述之.

習題 X

1. $9\frac{1}{2}+10\frac{1}{3}-12\frac{5}{6}+7\frac{11}{12}$ **2.** $5\frac{1}{2}-6\frac{3}{4}+13\frac{1}{2}-2\frac{1}{7}$

3. $87\times\frac{5}{3}\times\frac{5}{29}\div4\frac{1}{6}$ **4.** $13\frac{1}{2}\div4\times7\frac{2}{9}\div\frac{6}{7}$

5. $\frac{1}{18}\div\frac{5}{9}+\frac{5}{8}\times\frac{4}{15}$

6. $\left(4\frac{4}{5}+3\frac{3}{5}\right)\times\left(2\frac{2}{5}-1\frac{1}{5}\right)\div1\frac{1}{5}$

7. $20\times\frac{17}{60}\times\frac{15}{68}\div\left(24\frac{5}{11}-10\frac{6}{7}\right)$

8. $1\frac{1}{2}\times\left(3\frac{1}{3}+4\frac{2}{3}\right)+5\div\left(8\frac{1}{2}-7\frac{1}{3}\right)$

§ **12.** 分數基本問題. 關於分數之應用題,有一最普通之語句,即「甲數爲乙數之幾分之幾.」此種語法,乃用乙數爲標準以表甲數之大小.故常稱乙數爲主數,甲數爲賓數,其比率幾分之幾爲分率. 分數應用題之基本問題不外於主數賓數分率三者之中知其二而求其餘.換言之,即不外下列三種問題:—

(一)甲數爲乙數之幾分之幾?

(二)何數爲乙數幾分之幾?

(三)某數之幾分之幾爲甲數,問某數若干.

第一問題在求分率,第二問題在求賓數,第三問題在求主數.其法如下:—

(1) 賓數 ÷ 主數 = 分率.(此與§1求比率相同)

例 1.　3尺為1丈之幾分幾?

解.　3尺 ÷ 1丈 = 3尺 ÷ 10尺 $=\frac{3}{10}$.

例 2.　$\frac{2}{7}$斤為$\frac{5}{6}$斤之幾分幾?

解.　$\frac{2}{7}$斤 $\div\frac{5}{6}$斤 $=\frac{2}{7}\div\frac{5}{6}=\frac{2}{7}\times\frac{6}{5}=\frac{12}{35}$.

習　題 XI

1.　8為12之幾分幾?

2.　100之幾分幾為25?

3.　$\frac{1}{7}$尺為$3\frac{1}{2}$尺之幾分幾?

4.　$8\frac{1}{2}$斤之幾分幾為$10\frac{2}{3}$斤?

5.　某校男女生共420人,其中女生60人.問女生占全體之幾分幾,男生占全體之幾分幾,女生占男生之幾分幾.

(2) 賓數 = 分率 × 主數　〔由(1)及(伍,§5)而得〕

例 3.　20元之$\frac{3}{5}$為幾元?

解.　20元 $\times\frac{3}{5}=20\times\frac{3}{5}$元 $=12$元.

例 4.　20斤之$\frac{3}{100}$為若干兩?

解.　20斤 $\times\frac{8}{100}=\frac{20\times3}{100}$斤 $=\frac{3}{5}$斤.

$\frac{3}{5}$斤 $=\frac{3}{5}\times16$兩 $=\frac{48}{5}$兩 $=9\frac{3}{5}$兩.

習題 XII

1. 27之$\frac{2}{3}$爲何數?

2. $\frac{3}{8}$元之$\frac{1}{2}$爲幾元?

3. 何數爲83$\frac{1}{2}$之$\frac{1}{4}$?

4. 何數爲9$\frac{2}{5}$之1$\frac{2}{3}$?

5. 銀100元,用去$\frac{1}{4}$.問用去幾元.

6. 兵600人出戰,戰後受傷者$\frac{2}{25}$,戰死者$\frac{1}{50}$.問無恙者幾人.

7. 3元及其$\frac{1}{3}$爲幾元?與3元及$\frac{1}{3}$元同否?

8. 8斤及其$\frac{2}{5}$爲幾斤?

9. 甲有3000元,以其$\frac{1}{4}$給乙,乙以所得之$\frac{1}{3}$給丙.問丙得幾元.

10. 3000元之$\frac{1}{4}$之$\frac{1}{3}$爲幾元?

11. 8$\frac{2}{5}$之$\frac{4}{7}$之$\frac{5}{6}$爲若干?

12. 9$\frac{3}{4}$丈之$\frac{9}{10}$之$\frac{5}{6}$之$\frac{1}{13}$爲幾丈?

(3) 主數 = 賓數 ÷ 分率. ((2)之還原)

例5. 某數之$\frac{2}{3}$爲18,求某數.

解. 某數乘以$\frac{2}{3}$後,既得18,則未乘以$\frac{2}{3}$之前應爲

$$18\div\frac{2}{3}=18\times\frac{3}{2}=27.$$

例6. 何數之$\frac{3}{100}$爲$\frac{3}{5}$?

解. $\frac{3}{5}\div\frac{3}{100}=\frac{3}{5}\times\frac{100}{3}=20.$

習題 XIII

1. 24爲何數之$\frac{3}{8}$?

2. 某數之$\frac{7}{9}$爲$8\frac{2}{3}$,求某數.

3. 弟年12歲,適爲兄年$\frac{6}{7}$.問兄年若干.

4. 地1畝之$\frac{3}{10}$價120元.問1畝之價若干.

5. 某股東之股份,占某公司資本之$\frac{1}{3}$;今將其所有之$\frac{3}{4}$售價4800元.問此公司之資本若干.

6. 何數之$\frac{3}{7}$之$\frac{1}{3}$爲$8\frac{2}{5}$?

7. 某數之$\frac{1}{3}$與$\frac{1}{4}$之和爲70.求某數.

8. 某人車行全路之$\frac{3}{4}$,舟行$\frac{1}{5}$,共行280里.問全路若干里.

9. 何數之$\frac{1}{8}$與$\frac{1}{10}$之差爲$10\frac{1}{5}$?

10. 線一段,其$\frac{1}{3}$比$\frac{1}{5}$長2尺4寸.求線長.

§ 13. **定一法.** 對於分數應用問題,除上述三者之外,尙有一法實解答之要訣,學者所不可不知者,是爲定一法,此法之用有三種,分述於下:——

(一)不論某量爲何,而以 1 代表之.

例1. 有工程,甲爲之,5 日可成;乙爲之,8 日可成.問二人合作,幾日可成.

解. 此工程大小如何,可不必問,祗以 1 代表此圓圖一體之全工程,於是

甲 1 日成全工程之$\frac{1}{5}$,　　乙 1 日成其$\frac{1}{8}$,

而二人一日可成其　$\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{13}{40}$

故　所須日數$=1\div\frac{13}{40}=\frac{40}{13}=3\frac{1}{13}$.

(二)定某數爲主數,於是某數對於主數之分率爲 1.

例2. 某人先用其所有元數之$\frac{3}{5}$,次用所餘之$\frac{7}{8}$,尙餘 5 元.問此人原有若干元.

解. 定原有元數爲主數.

第一次所用元數對於主數之分率爲$\frac{3}{5}$,

第一次所餘元數對於主數之分率爲 $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$,

第二次所用元數對於主數之分率爲 $\frac{2}{5}$之$\frac{7}{8}=\frac{7}{20}$,

,,　,,　餘　,,　,,　,,　,,　,, $\frac{2}{5}-\frac{7}{20}=\frac{1}{20}$,

主數之$\frac{1}{20}$爲 5 元,故主數$=5\div\frac{1}{20}=100$元,即原有元數.

(三)定所求諸數中之一數爲主數,因之所求各數由

兆對於主數之分率而得之.

例3. 女子之工資爲男子之$\frac{2}{3}$,童子之工資爲女子之$\frac{1}{2}$.今男 4 人之工資比童 7 人之工資多 1 元 2 角.問男女童各一人之工資若干.

解. 定男一人之工資爲主數.

則男一人之工資對於主數之分率爲 1,

女 ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, $\frac{2}{3}$,

童 ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, $\frac{2}{3}$之$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$.

而男 4 人 ,, ,, ,, ,, ,, ,, 4,

童 7 ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, $\frac{7}{3}$.

於是男 4 人工資與童 7 人工資之差對於主數之分率爲

$4-\frac{7}{3}=\frac{5}{3}$

由題可知 1 元 2 角爲主數之$\frac{5}{3}$,故

主數$=120$分$\div\frac{5}{3}=72$分,即男一人之工資;

女一人之工資$=72$分$\times\frac{2}{3}=48$分;

童一人之工資$=72$分$\times\frac{1}{3}=24$分.

習 題 XIV

1. 水一池,由甲管流出,5 時可完;由乙管流出,7 時可完.今兩管齊開,幾時可以流完?

2. 甲乙二人共作一工,15日告成.若甲一人作之,須25日,問乙一人作之須幾日.

3. 開甲管注水於盆,10分鐘可滿,開乙管須15分鐘.放出時開盆底丙管,20分鐘即可流盡.今三管齊開,幾分鐘可將水注滿?

4. 有洋若干,買米可得180石,以之買麥,可得270石,今將此款買米麥,其石數相同,問各該若干石.

5. 大小二數和爲$53\frac{1}{3}$,小數爲大數之$\frac{3}{8}$.求二數.

6. 晝長爲夜長$\frac{5}{7}$.問晝夜各幾小時.

7. 甲乙二人相距$64\frac{2}{3}$里,相向而行,至相會時,甲行里數爲乙之$1\frac{2}{3}$.問各行幾里.

8. 大小二數差爲$9\frac{1}{4}$,小數爲大數$\frac{3}{4}$.求二數.

9. 某人用去所有銀$\frac{2}{3}$,尙餘800元,問此人原有幾元.

10. 某數之$\frac{1}{3}$與$\frac{1}{7}$之和較原數少25.求某數.

11. 三人合股營商,甲出全資本$\frac{1}{3}$,乙出$\frac{2}{5}$,丙出5400元,問全資本若干.

12. 插竿於池,在水中者8尺4寸,入泥者適當在水中者$\frac{5}{12}$,在水上者爲全長$\frac{1}{3}$.求竿長.

13. 水與酒混合,水爲全量之$\frac{1}{3}$,酒比全量之半多2斗5升.問水酒各若干.

14. 夫婦子三人共100歲.婦年當夫年$\frac{8}{9}$,子年當婦年$\frac{3}{8}$問各人幾歲.

15. 某人以其財產$\frac{1}{4}$捐助善舉,以其$\frac{1}{9}$購地,所餘者比購地銀尚多3800元.求財產總數.

16. 某人用去所有銀$\frac{2}{5}$後,得洋240元,此時總額適為原有之$\frac{2}{3}$,問原有若干.

17. 茶三種,上等為全斤數之$\frac{1}{3}$,中等比上等之$\frac{3}{5}$少50斤,下等為上中兩等之和.問各若干斤.

18. 由高處落球,其返躍力為原高之$\frac{3}{10}$.今有球由高處落下,返躍至第三次時,高5尺4寸.問落球處之高若干.

19. 金1388元,7男12女分之,女一人所得當男一人所得之$\frac{12}{29}$.問男女各一人得若干.

20 鶴之頭數為龜之$\frac{2}{7}$,足數共320.問龜鶴各幾頭.

第拾章

小數通論

§ 1. 有限位小數與分數. 吾人在第柒章曾經論及小數是十進複名數之一種簡便的記載.而十進複名制每名各為其上名之十分之一.故分數與小數間之關係用複名為媒介而益顯.今分三種記法並列於下:——

分數記法	複名記法	小數記法
$\frac{12}{10}$丈	1丈2尺	1.2丈
$\frac{12}{100}$丈	1尺2寸	0.12丈
$\frac{235}{1000}$丈	2尺3寸5分	0.235丈

由此可見有限位小數皆可化為分數,其法:一位小數,用10為分母;二位小數用 10^2 為分母,三位小數用 10^3 為分母,諸如此類;將原小數去點以為分子.

若是:有限位小數化成之分數皆以10,100,等為分母;但亦可約之.

例 1. 1.2丈$=\frac{12}{10}$丈$=\frac{6}{5}$丈

例 2. $0.12=\frac{12}{100}=\frac{3}{25}$.

例 3. $0.235=\frac{235}{1000}=\frac{47}{200}$.

例 4. $1.25=\frac{125}{100}=\frac{5}{4}$

由是可見:將有限位小數化爲分數,約簡之後,其分母必祗含 2 與 5 兩種質因數.蓋 10, 100, 1000, 10000 等數本祗含 2 與 5 兩種質因數也.

逆之,凡最簡分數之分母祗含 2 與 5 兩種質因數者皆可化爲有限位小數.其位數與分母所含之 2 或 5 之個數相等,而從其最多者.

例 5. $\frac{6}{25}=\frac{6}{5^2}=\frac{6\times 2^2}{5^2\times 2^2}=\frac{24}{100}=0.24$

例 6. $\frac{73}{50}=\frac{73}{2\times 5^2}=\frac{146}{2^2\times 5^2}=\frac{146}{100}=1.46.$

例 7. $\frac{37}{200}=\frac{37}{2^3\times 5^2}=\frac{37\times 5}{2^3\times 5^3}=\frac{185}{1000}=0.185.$

習題 I

將下列各小數變爲分數,並約之.

1. 1.01丈　　2. 2.132尺　　3. 0.0408

4. 23.723　　5. 9.1023

6. 以分母除分子核算1—5各題結果.並注意分母之因數 5,2,及小數之位數.

下列各問試用小數答之:

7. 一小時 = 4 刻,一刻 = 若干小時?

8. 一斤值 3 圓之物,7 兩價若干?

9. 兩求斤歌詞中之小數,何以至多不過四位?

10. 下列各數若化爲小數,應有小數若干位?

$\frac{753}{2^2\times 5}$, $\frac{7661}{200}$, $\frac{95}{32}$, $\frac{34}{125}$, $\frac{33}{1250}$.

11. 將下列各數用除法化爲小數.

(i) $2\div3$; (ii) 9升$\div11$; (iii) $11\div9$;

(iv) $256\div7$; (v) $\frac{5}{6}$斗; (vi) $\frac{56}{55}$丈.

12. 11題,各有若干小數位?

13. 11題,各分母(或除數)是否祇含2與5兩種質因數.

14. 11題,各分母是否皆不含2與5兩種質因數.

§ 2. **循環小數**. 由上節11,12,13,14,各題研究結果,可知分數之分母苟含有非2非5之質因數,則以除法化爲小數時除法無終,位數無窮.凡小數之位數無窮者曰**無限位小數**.

此種無限位小數,尚有一特別性質:

例1. 將$\frac{25}{37}$化爲小數,

$$\begin{array}{r} .6756 \\ 37\,)\overline{25} \\ 222 \\ \hline 280 \\ 259 \\ \hline 210 \\ 185 \\ \hline 25 \end{array}$$

既商.675之後,餘數又爲25,與原被除數相似,再往下除去,小數點後三位爲6,四位爲7,五位爲5,六位又爲6.如此循環無已,雖千百位可知也.記爲$.\dot{6}7\dot{5}$

因此,故名之曰**循環小數**.小數點後之一節數碼,其後繼續蟬聯者稱爲**循環節**.循環節之位數稱爲**循環位數**.

例2. 例如上節11題之

$\frac{2}{3}=.6666\cdots\cdots=0.\dot{6}$ 循環節爲6,循環位數一

$\frac{9}{11}=.8181\cdots\cdots=0.\dot{8}\dot{1}$ 循環節為81,循環位數二

$\frac{11}{9}=1.2222\cdots\cdots=1.\dot{2}$ 循環節為2,循環位數一

$\frac{256}{7}=36.571428\cdots\cdots=36.\dot{5}7142\dot{8}$ 循環節為571428,循環位數六

$\frac{5}{6}=0.83333\cdots\cdots=0.8\dot{3}$ 循環節為3,循環位數一

$\frac{56}{55}=1.01818\cdots\cdots=1.0\dot{1}\dot{8}$ 循環節為18,循環位數二

末二例小數中有不循環之部分各一位 8, 0. 凡小數不循環部分之數,稱為**不循環位數**.

循環小數之無不循環部分者曰**純循環小數**.有不循環部分者曰**混循環小數**.帶整數者曰**帶循環小數**.

凡最簡眞分數之分母含有非 2 非 5 之質因數時化為小數必成循環小數,其循環位數小於分母.

蓋分數既約,則該分數不得約成分母僅含 2 及 5 之分數,是以不得化為有限位小數.又眞分數例如 $\frac{3}{14}$,分母大於分子.故以分母14除分子 3 時每次所餘之餘數不外 2, 4, 6, 8, 10, 12, 最遲,至六次必有餘數重見.是以商數必且循環.

合此理與§1之理及分數或可約或不可約觀之,可見:

凡分數皆可化為有限位小數或循環小數.

習題 II

將1—4各分數化爲小數,可約者先約之.

1. $\frac{7}{9}$.　**2.** $\frac{3}{22}$.　**3.** $\frac{15}{35}$.　**4.** $\frac{3}{13}$.

下列各問用小數答之:

5. 英度制，2 桿＝11碼,問 1 碼＝若干桿.

6. 英度制，1 碼＝3 呎,問 1 呎＝若干碼.

7. 中國度制，1 里＝360 步,問 1 步＝若干里.

8. 中國面積制，1 畝＝60方丈,問1方丈＝若干畝.

將 9 —12各分數化爲循環小數;不約而除.

9. $\frac{7}{9}$.　**10.** $\frac{72}{99}$.　**11.** $\frac{325}{999}$.　**12.** $\frac{2232}{99999}$.

13. 上列各題,原分母位數與化得小數之循環位數有何關係?分子與循環節有何關係?

14. 有法將下列小數化爲分數否?

$0.\dot{2}$;　$0.\dot{2}\dot{3}$;　$0.\dot{2}1\dot{7}$;　$0.\dot{2}18\dot{3}$

15. 更用除法核算14題之結果

【注意】凡各位數碼均爲 9 字之整數稱爲連 9 數.
$9=10-1$,　$99=10^2-1$.　$999=10^3-1$.

§3, 純循環小數化爲分數. 由上節 9—15 各題研究結果可知:以連九數爲分母之眞分數可化爲循環小數,以分母之位數爲循環位數,以分子爲循環節,(循環節數碼之位數少於循環位數時,於數碼之左加 0 以足之)

純循環小數可以化爲分數,以循環節(指有用數字)爲

分子,(有效數碼前之0可棄之)以連9數爲分母.分母之位數等於循環位數.

此可證之如下:

例1. 化 $\frac{23}{99}$ 爲循環小數.

$\because\ 0.23\times 99=0.23\times(100-1)$

$=23-0.23,$

$\therefore\ 0.23=\frac{23}{99}-\frac{0.23}{99},$

$\therefore\ \frac{23}{99}=0.23+\frac{0.23}{99}.$

可見以99除23時,既商0.23之後,仍餘0.23,是餘數重見也.

$\therefore\ \frac{23}{99}=0.\dot{2}\dot{3}.$

例2. 化 $0.\dot{0}8\dot{1}$ 爲分數.

倣上可以證明

$\frac{81}{999}=0.\dot{0}8\dot{1},$

$\therefore\ 0.\dot{0}8\dot{1}=\frac{81}{999}=\frac{3}{37}.$

連9數與2及5互爲質數.故以連9數爲分母之分數,無論如何約分,分母不含2與5之因數.故曰:

凡純循環小數可化爲分數,簡約後分母不含2及5之因數.

習 題 III

將1—8各純循環小數化爲分數,並約簡之.

1. $0.\dot{7}$. 2. $0.\dot{1}\dot{2}$. 3. $0.\dot{2}3\dot{4}$. 4. $0.\dot{2}18\dot{0}$.

5. $0.\dot{0}8\dot{1}$　**6.** $0.\dot{0}02\dot{0}$　**7.** $0.\dot{1}\dot{2}$.　**8.** $0.\dot{9}9\dot{9}$.

9. 作線段,使恰等於

$0.\dot{3}$公寸;　$0.\dot{7}$公寸;　$0.\dot{2}\dot{7}$公寸;　$0.\dot{3}\dot{6}$公寸.

將10－15各分數化爲循環小數.

10. $\frac{12}{99}$.　**11.** $\frac{86}{999}$.　**12.** $\frac{23}{9999}$.

13. $\frac{4}{33}$.　**14.** $\frac{4}{111}$.　**15.** $\frac{36}{37}$.

將下列各分數化爲循環小數:(不約而除.)

16. $\frac{71}{90}$.　**17.** $\frac{23}{990}$.　**18.** $\frac{3701}{9900}$.　**19.** $\frac{10823}{99900}$.

20. 上列各題,分母所用9字之個數與化得小數有何關係?0字之個數與不循環位數有何關係?

§4. 混循環小數化爲分數. 由上節16－19之研究可得下定理之一部分.

凡分數,其分母首數位爲若干9字,繼之以若干0字,而分子末碼非0者,(例如$\frac{17865}{99900}$)化爲小數必爲混循環小數.循環位數等於9之個數,不循環位數等於0之個數.

蓋將$\frac{17825}{99900}$與$\frac{17825}{999}$用除法化得之小數,所不同者僅在前者之小數點較後者左兩位,故有兩位不循環;至於循環形式則全然相同.

混循環小數可以化爲分數,以不循環部分聯一循環節(去小數點及有效數字前之0)減不循環部分(去小數點及有效數字前之0)爲分子,其分母首爲若干9字,繼以若干0字,9字之個數等於循環位數,0字之個數等於不循環位數.

例1.　將$0.012\dot{4}\dot{5}$化為分數.

$$\because\quad \frac{1245-12}{99000}=\frac{1200-12}{99000}+\frac{45}{99000}$$

$$=0.012+\frac{45}{99000}.$$

$$\frac{45}{99000}=0.00045+\frac{0.45}{99000}.$$

可見以99000除45時,既商0.00045之後,仍餘45,是餘數重見也.

$$\because\quad \frac{45}{99000}=0.000\dot{4}\dot{5}$$

$$\therefore\quad \frac{1245-12}{99000}=0.012+0.000\dot{4}\dot{5}=0.012\dot{4}\dot{5}.$$

$$\therefore\quad 0.012\dot{4}\dot{5}=\frac{1245-12}{99000}=\frac{1233}{99000}=\frac{137}{11000},$$

混循環小數中不循環部之末位碼與循環節之末位苟相同,可用下法變為不相同.

例2.　$0.31\dot{2}\dot{1}=\frac{3121-31}{9900}=\frac{312-3}{990}=0.3\dot{1}\dot{2}$

凡混循環小數,用上法化之,使其不循環部分極短者,曰**最簡混循環小數**.(有時化成純循環小數)

最簡混循環小數,不循環部之末位與循環部之末位不同,是以用上法化為分數,初步所得者末位非0.故分子之因數,2與5不能並立,苟分子無2,則既約後分母中因數2之個數有如其原有因數10之個數,故曰:

凡混循環小數可變為分數,約簡之後,分母含有非2非5之質因數且兼含2或5為因數,而所含2或5之個數(從其多者)與不循環位數相同.

習題 IV

先將1—4各分數約簡,次預斷其化成小數後之不循環位數.然後化爲循環小數.

1. $\frac{20}{60}$.　**2.** $\frac{30}{35}$.　**3.** $\frac{42}{220}$.　**4.** $\frac{5}{202}$.

將5—8各小數化爲分數並簡約之.

5. $0.02\ddot{5}$.　**6.** $0.017\dot{0}7\dot{8}$.　**7.** $0.29\dot{3}\dot{3}$.　**8.** $0.17\dot{2}9$.

將9—12各帶小數化爲帶分數,帶分數化爲帶小數.

9. 1.28.　**10.** 2.017.　**11.** $1\frac{3}{7}$.　**12.** $3\frac{41}{220}$.

下列各問用循環小數答之:

13. 英度制, 1 呎 = 12吋, 問 1 吋 = 若干呎.

14. 角度制, 1 度 = 60分, 問 1 分 = 若干度.

15. 中國度制, 1 里 = 180丈, 問 10丈 = 若干里.

§ 5. 有理小數與分數.

§2既言:

凡分數皆可化爲有限位小數或循環小數.

又由§§1,3,4,各節首定理可知:

凡有限位小數及循環小數皆可變爲分數*.

因三者關係如此密切,且分數亦常稱爲有理數.故稱有限位小數及循環小數爲有理小數(甚至直稱有理數,)故可謂:

有理小數卽分數*

*無限位小數中不循環者不得變爲分數.如0.10,10111 01111011111........是.

*亦有稱有理小數爲命分數者.

凡分數簡約後分母含非 2 非 5 之因數者,必爲循環小數;但若分母有 2 或 5 爲因數,則據§3 必不得爲純循環小數;若分母無 2 無 5 爲因數則據§4 必不得爲最簡混循環小數.故曰:

凡最簡分數,分母不含 2 或 5 者,必可化爲純循環小數.

凡最簡分數分母含非 2 非 5 之因數,且含 2 或 5 者,必可化爲最簡混循環小數,其不循環位數等於分母所含質因數 2 或 5 之個數,而從其較多者.

習 題 V

1. $1.0\dot{3}8\dot{2}$ 與 $1.03\dot{8}2\dot{3}$ 及 $1.038\dot{2}8\dot{3}$ 有無分別?

2. $1.0\dot{3}8\dot{2}$ 與 $1.0\dot{3}82382\dot{2}$ 及 $1.0\dot{3}82382382\dot{2}$ 有無分別?

3. $1.0\dot{3}8\dot{2}$ 與 $12.23\dot{7}2\dot{3}$ 不循環位數不同,能變化之使其相同否?

4. $1.\ddot{1}$ 與 $2.\dot{3}\dot{6}$ 循環位數不同,能變化之使其相同否?

5. 7 與 $7.\dot{0}\dot{0}$,$8.\dot{0}\dot{1}$ 與 $8.0\dot{1}\dot{0}$ 有無分別?

6. 不帶整數之循環小數,何者最大?

§ 6. 循環小數通位法. **通位**云者諸循環小數之循環位數不同或不循環位數不同,設法變化使其相同也.循環小數之有通位法,亦猶分數之有通分法,所以爲加減而設也.今舉例明之

例 **1.** 將$0.\dot{1}\dot{7}$與$2.\dot{1}83\dot{9}$通位.

不循環位數爲 1, 循環位數爲 6,

通不循環位, $0.\dot{1}\dot{7}=0.1\dot{7}\dot{1}$.

通循環位, $0.1\dot{7}\dot{1}=0.1\dot{7}17171$,

$2.\dot{1}83\dot{9}=2.1\dot{8}3983\dot{9}$,

例 **2.** 將$1.0\dot{2}1\dot{0}$與$0.\dot{7}\dot{8}$通位.

通不循環位, $1.0\dot{2}1\dot{0}=1.\dot{0}2\dot{1}$.

通循環位, $1.\dot{0}2\dot{1}=1.\dot{0}2102\dot{1}$,

$0.\dot{7}\dot{8}=0.\dot{7}8787\dot{8}$.

例 **3.** 將$12.3\dot{6}\dot{4}$, $1.\dot{3}\dot{3}$, $1.\dot{7}87\dot{8}$通位.

$12.3\dot{6}\dot{4},=12.3\dot{6}\dot{4}=12.3\dot{6}\dot{4}$;

$1.\dot{3}\dot{3}=1.3\ddot{3}=1.3\dot{3}\dot{3}$;

$1.\dot{7}87\dot{8}=1.7\dot{8}78\dot{7}=1.7\dot{8}\dot{7}$.

習題 VI

1. 將下列各循環小數化簡之: (此名爲約位.)

$0.\dot{2}32\dot{3}$; $1.71\dot{8}7\dot{1}$; $3.2\dot{3}23\dot{2}$.

2. 分數變化,將通分時必先約分.循環小數變化將通位時是否宜先約位? 何故?

3. 比較循環小數大小須先通位否?

4. 將下列各組循環小數通位:

(i) $1.\dot{2}\dot{3}$; $1.\dot{2}3\dot{4}$.

(ii) $0.0\dot{0}3\dot{2}$, $0.\ddot{1}$, $0.1\dot{8}\dot{1}$

(iii) $2.\dot{3}\dot{3}$, $2.4\dot{5}678\dot{9}$.

§ **7.** 循環小數加減法.

諸循環小數相加,先通位;然後同位相加;苟循環部分相加曾進數於上位,則如數添於末位,苟循環部分相加曾進則再添,最後定小數點

及循環點於相當位置.

例 1. $0.1\dot{2}\dot{4}+2.24\dot{7}\dot{7}$.

$$\begin{array}{ll|l} 0.1\dot{2}\dot{4} & =0.12 & \dot{4}\dot{2} \\ 2.24\dot{7}\dot{7} & =2.24 & \dot{7}\dot{7} \\ \hline & 2.36 & 19 \\ & +1 & 1 \\ \hline & 2.37 & \dot{2}\dot{0} \end{array}$$

$\therefore\ 0.1\dot{2}\dot{4}+2.24\ddot{7}=2.37\dot{2}\dot{0}$

例 2. $0.\ddot{5}+0.\ddot{7}+0.\dot{9}\dot{1}+0.\dot{7}\dot{5}$

$$\begin{array}{ll|l} 0.\ddot{5} & =0. & \dot{5}\dot{5} \\ 0.\ddot{7} & =0. & \dot{7}\dot{7} \\ 0.\dot{9}\dot{1} & =0. & \dot{9}\dot{1} \\ 0.\dot{7}\dot{5} & =0. & \dot{7}\dot{5} \\ \hline & 0. & 98 \\ & +2. & 2 \\ \hline & 2. & 00 \\ & +1 & 1 \\ \hline & 3. & \dot{0}\dot{1} \end{array}$$

循環小數減法. 先通位;然後同位施減;當循環部減循環部時苟會向上位借 1,則末位去 1;定小數點及循環點於相當位置.

例 3. 核算例 1. 結果.

$$\begin{array}{rl} 2.37\dot{2}\dot{0} & =2.37\dot{2}\dot{0} \\ 0.1\dot{2}\dot{4} & =0.12\dot{4}\dot{2} \\ \hline & 2.24\dot{7}\dot{7}=2.24\ddot{7} \end{array}$$

$\therefore\ 2.24\ddot{7}+0.1\dot{2}\dot{4}=237\dot{2}\dot{0}$

例 4. $3.2-1.\ddot{7}$.

$$\begin{array}{rl} 3.2 & =3.2\ddot{0} \\ 1.\ddot{7} & =1.7\ddot{7} \\ \hline & 1.4\ddot{2} \end{array}$$

$\therefore\ 3.2-1.\ddot{7}=1.4\ddot{2}$

習 題 VII

演 1—4 各題並核算之.

1. $2.\dot{7}\dot{8}+26.\dot{7}8$
2. $27.01\dot{8}2\dot{0}-20.0\dot{2}\dot{2}$.
3. $0.\dot{8}\dot{8}-0.\ddot{5}$.
4. $2.14-3.08\dot{7}$.

5. 按分數加減法算下列和差,並與上列諸題算法對照觀之.

$\frac{276}{99}+\frac{2652}{99}$, $\frac{88}{99}-\frac{5}{9}$, $\frac{2701793}{99900}-\frac{20002}{990}$, $\frac{214}{100}-\frac{3087}{990}$.

6. $0.0\dot{9}+0.\dot{8}+0.0\dot{6}1\dot{6}+0.247\dot{4}9\dot{4}$.

7. $2.3\dot{7}\dot{8}+.3\dot{7}\dot{8}+2.3\dot{7}\dot{8}$.

8. $2.3\dot{7}\dot{8}\times 3$ 如何算法?

§8. 以整數或有限位小數乘循環小數.

甲. 用一位數乘循環小數,其法如下:——

例 1. $2.2\dot{3}\dot{8}\times 6$.

$$\begin{array}{r} 2.2\dot{3}\dot{8} \\ \times\ \ 6 \\ \hline 228 \\ 132\ 2 \\ \hline 13.4\dot{3}\dot{0} \end{array}$$

例 2. $247\dot{6}\dot{2}\times 2.07$.

$$\begin{array}{r} 2.47\dot{6}\dot{2} \\ \times\ \ 2.07 \\ \hline 434 \\ 172\ \ 94 \\ \hline 173\ 3\dot{3}\dot{8} \end{array}$$

乙. 用多位數乘循環小數,可以各位數分乘循環小數,取各分積§7通位加之.

例 3. $0.01\dot{3}\dot{8}\times 14.3$.

$$\begin{array}{rl} 0.01\dot{3}\dot{8} & \\ \times 14.3 & \\ \hline 0.004\dot{1}\dot{5} & =0.004\dot{1}\dot{5} \\ 0.05\dot{5}\dot{3} & =0.055\dot{3}\dot{5} \\ 0.1\dot{3}\dot{8} & =0.138\dot{3}\dot{8} \\ \hline & 0.197\dot{8}\dot{8}=0.197\dot{8} \end{array}$$

習　題 VIII

1. $1.25\dot{3}\dot{8}\times 121$.

2. $0.\dot{3}8461\dot{5}\times 13$.

3. $0.01\dot{8}5\dot{7}\times 74.37$.

4. $0.0\dot{7}1428\dot{5}\times 14$.

5. $0.1\dot{2}\dot{9}\times 18$.

6. $0.05\dot{2}63157894736842\dot{1}\times 19$.

7. 循環小數,以10,100,1000,等數乘之,循環位數變否?

§9. 用整數或有限位小數除循環小數法.

舉例明之如下:—

例1. $0.\dot{1}8\dot{9}\div2.2$

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & 0.085995 \\
\hline
2.2) & 0.\dot{1}8\dot{9} \\
 & 176 \\
\hline
 & 13\dot{1}8\dot{9} \\
 & 110 \\
\hline
 & 21\dot{8}9\dot{1} \\
 & 198 \\
\hline
 & 20\dot{9}1\dot{8} \\
 & 198 \\
\hline
 & 11\dot{1}8\dot{9} \\
 & 110 \\
\hline
 & \dot{1}8\dot{9}
\end{array}
$$

被除數重見,

$\therefore\ 0.\dot{1}8\dot{9}\div2.2=0.0\dot{8}599\dot{5}$

例2. $2.1\dot{7}\dot{3}\div37$

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & 0.0587496 \\
\hline
37) & 2.1\dot{7}\dot{3} \\
 & 185 \\
\hline
 & 32\dot{3}\dot{7} \\
 & 296 \\
\hline
 & 27\dot{7}\dot{3} \\
 & 259 \\
\hline
 & 18\dot{3}\dot{7} \\
 & 148 \\
\hline
 & 35\dot{7}\dot{3} \\
 & 333 \\
\hline
 & 24\dot{3}\dot{7} \\
 & 222 \\
\hline
 & 21\dot{7}\dot{3}
\end{array}
$$

被除數重見,

$\therefore\ 2.1\dot{7}\dot{3}\div37=0.058749\dot{6}.$

習題 IX

計算1—6各題,並用乘法核算其結果:—

1. $0.\dot{6}\div3.$
2. $0.\dot{3}66\dot{3}\div9.$
3. $0.1\dot{3}\dot{2}\div11.$
4. $0.\dot{2}9\dot{3}\div4.95.$
5. $0.\dot{8}\div3$
6. $0.\dot{8}\div2.$
7. 核算VIII之1—6各題.

§10. 循環小數乘除法. 以整數或有限位小數乘除循環小數,除§§8,9,所用直接乘除法外,亦可將小數化為分數,依法乘除之,然後用除法化為小數.

例 1.　$1.2\dot{3}\dot{1}\times 1.2.$

$$1.2\dot{3}\dot{1}\times 1.2=\frac{1231-12}{990}\times\frac{12}{10}=\frac{1219\times 12}{9900}=\frac{14628}{9900}$$

$$=\frac{14775-147}{9900}=1.47\dot{7}\dot{5}.$$

例 2.　$0.1\dot{2}\dot{4}\div 14.$

$$0.1\dot{2}\dot{4}\div 14=\frac{124-1}{990}\div 14=\frac{123}{990}\div 14$$

$$=\frac{123}{13860},$$

然後化爲循環小數,得 $0.00\dot{8}8744\dot{5}$

法數爲循環小數之乘除,無直接方法可用,尋常用下列二法以計之.

(1)法實均化爲分數,按分數方法求其積或商,再化所得之分數爲小數.

(2)僅化法數爲分數,而依§§8,9,以計之.

例 3.　$0.\dot{1}\dot{2}\times 0.38\dot{7}.$

(法 1)　$0.\dot{1}\dot{2}\times 0.38\dot{7}=\frac{12}{99}\times\frac{387-38}{900}=\frac{12\times 349}{99\times 900}=\frac{1396}{29700},$

然後化爲循環小數,得 $0.47\dot{0}0336\dot{7}.$

(法 2)　$0.\dot{1}\dot{2}\times 0.34\dot{9}=0.\dot{1}\dot{2}\times\frac{349}{900}$

$$\begin{array}{rrl}
 & 0.\dot{1}\dot{2} & \\
 & 349 & \\
\hline
 & 1.\dot{0}\dot{9} & =1.\dot{0}\dot{9} \\
 & \dot{4}\dot{8} & =4.\dot{8}\dot{4} \\
 \dot{3}\dot{6} & & 36.\dot{3}\dot{6} \\
\hline
 & 900 & \underline{)\,42.\dot{3}\dot{0}} \\
 & & 0.047\dot{0}0336\dot{7}
\end{array}$$

例 4.　$0.\dot{2}\div0.\dot{2}\dot{9}$.

(法 1)　$0.\dot{2}\div0.\dot{2}\dot{9}=\dfrac{2}{9}\div\dfrac{29}{99}=\dfrac{22}{99}\div\dfrac{29}{99}=\dfrac{22}{29}$,

然後化爲循環數,得 $0.\dot{7}58620689655172413793103448\dot{2}$

(法 2)　$0.\dot{2}\div0.\dot{2}\dot{9}=0.\dot{2}\div\dfrac{29}{99}$

$$=0.\dot{2}\times\frac{99}{29}$$

$$\begin{array}{r}
0.\dot{2}\\
99\\
\hline
1.\dot{9}=\ \ 1.\dot{9}\\
1\dot{9}\ =\ 19.\dot{9}\\
\hline
29\,|\,21.\dot{9}\\
\hline
0.\dot{7}58620689655172413793103448\dot{2}
\end{array}$$

習　題 X

1.　$.\dot{3}\times0.\dot{1}\dot{2}$　　2.　$1.\dot{2}\dot{4}\times0.\dot{2}\dot{5}$

3.　$8\div0.\dot{2}\dot{5}$　　4.　$1.\dot{0}\dot{7}\div1.\dot{3}$

5.　$7.2\dot{3}\dot{5}\div3.\dot{8}$

§ 11.　無理小數.　有限位小數及無限位小數中之循環小數,皆稱爲有理小數,卽分數是也.無限位小數之中亦有不循環者亦卽不得化爲分數,稱爲**無理小數**.無理小數之例甚多,最簡單者如

0.10100100010000100000……丈

0.10200300040000500000……丈

0.10200100200010002000010000200000……丈

既不循環,位數又無限,皆無理小數也.

所謂無理小數,與有理小數相同,乃對一定標準而言例如1尺2寸長之線段,以丈,尺量之,固成小數;然若以寸分量之,未嘗不可爲整數,二吋長之線段,以呎量之固爲無限位小數(0.1$\dot{6}$呎),以吋量之則爲有限且爲整數(2吋).

0.20200200020000….尺

長之線段,以丈,尺,寸,分,等量之固爲無理小數.然若以另一線段,其名爲A其長爲

0.10100100010000….尺

者量之,則爲整數2A.以第二線段,其名爲B其長爲

0.50500500050000….尺

者量之,則爲有限位小數,0.4B.以第三線段,其名爲C其長爲

0.30300300030000….尺

者量之,則又爲循環小數,0.$\dot{6}$C.

可見,凡量所謂整數小數,有限位無限位,有理無理,乃相對的(對於單位而言)非絕對的.

習題 XI

1. 倣上例製造若干無理數.

2. 作一正方形,每邊長1公寸.用米突尺測其對角線之長.

3. 於厚紙上畫一圓,直徑長1公寸(即半徑長若干?)將圓剪下,用薄紙條裹一周.用米突尺量紙條之長.

§ 12. 量法. 上節2, 3,兩題,理論上應得無理數.邊長1公寸之正方形其對角線之長名爲($\sqrt{2}$公寸),其長爲

$\sqrt{2}$公寸$=1.41421356\cdots$公寸.

徑長一公寸之圓周,其名爲π公寸,其長爲

$$\pi \text{公寸} = 3.14159265\cdots \text{公寸}$$

皆無理小數也.然而事實上吾人所測得者究有幾位耶? 1 公寸也, 1 公分也, 1 公釐也,則誠可測得,至於公毫已不甚能辨別,更小則非肉眼所能及矣.公毫以下既不能辨,然則何由而知其究竟(循環否)耶?

姑無論有無方法可以知釐毫以下之數,即有之,亦係間接方法,吾人就量言量,直接所能量得者要不外乎釐毫,就人生日用而論,計較至於量毫亦可以已矣.

測量時有宜注意者二事:——

一. **選擇單位之注意.** 單位之大小應視計量之多寡,價值而定.例如,量布匹宜用尺寸,(用丈步則嫌大,用分釐則嫌小,)計道途必用里,丈尺皆嫌小,衡金須用錢用分,煤則用斤.量太倉之粟用石,量糶米則用升.

二. **計較量數之注意.** 單位既定,量數須計至何位亦須特別注意.例如,測京漢鐵路之長,用里爲單位,計至個位或小數點後一位可矣.秤金鐲之重,用兩爲單位,則計至小數點後四位,用錢爲單位,則計至小數點後三位,用分爲單位,則計至小數點後二位.

習題 XII

1. 任意作若干線段,用米突尺測其長.
2. 任意作若干角,用半圓儀測其角度.
3. 任意畫若干封閉形於方格紙上,用視察法測其面積.

§ 13. 省略算. 省略算亦名概算,略去微末而計其大概也.其需要有三:—(1)因微末無關重要,無庸計較,故設法計其大概,以圖捷便.(2)因直接測量不能精密,欲

精密計算而不可得,不得已而求大概計算.(3)對於大略數量計算不能精密,亦祇能大略計算.

例 1. 有鹽二十斤,三人均分,每人若干?(計至錢)

20斤÷3=320兩÷3≒106兩6錢6分

≒106兩7錢.

例 2. 有線段a,b,c,如下,求a+b+c之長(計至公分)

a

b

c

量得a≒27公釐,b≒34公釐,b≒45公釐.

∴a+b+c≒27+34+45

≒106公釐≒11公分.

例 3. 中國人口約四萬萬.若國家收人口稅,每人一角五分,問共得人口稅若干.(計至千萬)

400000000×15≒6000000000分

≒六千萬圓.

省略算法通常先計至指定位之下一位(或二位),最後用**四捨五入**之法截至指定位爲止.

§ 14. 省略算加減法.

習題 XIII

1. 任意作五線段,加其長度.(計至公釐)
2. 任意作三角,加其長度數.(計至度)
3. 任意作二角,求其度數之差.(計至度)
4. 中國十八省人口大約如下數.問十八省共計若干.(計至百萬)

直隸20937000	江西26532125	甘肅10385376
山東38247900	浙江11560692	四川68724890
山西12200456	福建22876540	廣東 3186525
河南35316800	湖北35280685	廣西 5142000

江蘇23670235	湖南22169673	貴州7650282
安徽23670314	陝西 8456182	雲南12324574

§ 15. 省略算乘法. 省略算乘法立法之意可以下例說明之.

例 1. 1 公尺=3.125尺,問12.9387公尺等於若干尺.(計至小數後二位.)

(甲)	(乙)	(丙)	(丁)
普通乘草.	右行乘草.	概算乘草原形.	省略算乘草.
3.125	3.125	3.125	3.1250
12.9387	12.9387	7839.21	7839.21
21875	31.25	31.25	31.25
25000	6.250	6.250	6.250
9375	2.8125	2.8125	2.8125
2.8125	9375	9375	938
6.250	25000	25000	250
31.25	21875	21875	22
40.4334375	40.4334375	40.4334375	40.4335

由(甲)變爲(乙),乃由左行變爲右行.由(乙)變爲(丙)乃將乘數字碼之順序顛倒之,(丁)式則又(丙)式之略形,小數點四位以後用四捨五入法略去之.所以取四位者,題中規定二位更多取二位,以防進位影響及於前二位也.積既定,乃用四捨五入法略去後二位.

∴12.938 公尺=3.125×12.9387≒40.43尺

如上所示省略算法之手續凡五:—

(1) 被乘數順列.

(2) 乘數之單位置於指定位右二位,十百千萬位以次右行,分釐毫位以次左行.

(3) 施乘次序先以乘數之最高位數施乘,由大而小以次遞降.

(4) 分積計至指定位右二位,此後用四捨五入法略去之.

(5) 總積計至指定位為止,此後用四捨五入法略去之.

§ 16. 省略算除法. 省略算除法立法之意可用下例說明之.

例 1. 1公尺＝3.125尺,問 40.43 尺合若干公尺.(計至小數點後三位)

普通除法算	省略除法算
12.9376	12.9376
3.125)40.4300000	3.125)40.430000
31 25	31 25
9 180	9 180
6 250	6 250
2 9300	2 9300
2 8125	2 8125
11750	1175
9375	938
23750	237
21875	218
18750	19
18750	19

$\therefore 40.43 \div 3.125 \doteq 12.938.$

省略草乃普通草之簡略形式:各次減數計至指定位右一位為止,其後用四捨五入法省略之,商數亦計至指定位右一位為止,最後得數則將此末位用四捨五入法略去之,以符指定位數.

習題 XIX

演下列諸題並核算之:

1. 1.725×3.1334. (計至小數點後三位)

2. 0.013×0.00245. (計至小數點後五位)

3. $31.159\div1.783353$. (計至小數點後四位)

4. $3.\dot{7}\div0.\dot{5}\dot{3}$. (計至小數點後二位)

5. 1呎=0.304788公尺.問 1 吋等於若干公尺.(計至小數點後三位)

6. 鐵絲一尺,熱度增高一度,則膨脹為 1.0000369 尺.問鐵板一方尺,熱度增高一度,面積變為若干方尺.(計至方釐止)

(終)

有著作權不准翻印

民國十二年三月發行
民國十二年四月再版

新中學教科書 初級混合數學(全六冊)
【第一冊定價銀六角】
(外埠另加郵匯費)

編者 歙縣程廷熙 高安傅種孫
校者 江寧張鵬飛 無錫華襄治
發行者 中華書局
印刷者 中華書局 上海靜安寺路一九二號
印刷所 中華書局 上海棋盤街
總發行所 中華書局
分發行所 中華書局 北京 天津 奉天 吉林 太原 長春 保定 張家口 石家莊 大同 濟南 東昌 煙台 開封 鄭州 西安 徐州 南京 蕪湖 安慶 南昌 九江 漢口 武昌 沙市 長沙 衡州 常德 成都 重慶 廣州 汕頭 潮州 福州 廈門 杭州 溫州 雲南 貴陽 新加坡

(三〇〇一)

(1048)