注

基本几何学习题详解

基本幾何學習題註解

編著者　陳元亨
校閱者　壽孝天

上海學生書局印行

基本幾何學習題註解

全書一册 實價國幣

編著人 謝葦豐
校閱人 王友銘
出版者 學生書局
發行所 學生書局 上海棋盤街 交通路四十八號
發行人 王餘源
經售處 各大書局

出版日期 中華民國三十六年四月

目錄

原書節數 詳解面數

第一編 緒論

第二編 直界形

原書節數　詳解面數

第三編　直線同圓

第四編　比例，相似形

原書節數 詳解面數

第五編 多邊形的面積

第六編 正多邊形同圓

幾何

習題詳解

第一編　緒論

教科書內第 4 面　目解題

1. 一枝沒有削過的圓鉛筆有幾個平面? 幾條線? 是直線麼?

解　未削過的圓鉛筆兩頭各有一平面,都是曲線所圍成的.

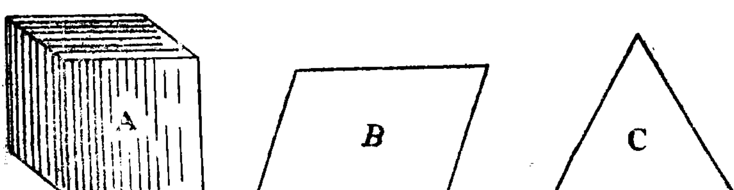
2. 課堂內的黑板有幾個面? 幾條線? 幾個交點?

解　黑板有 6 個面,12 條線,8 個交點.

3. 黑板的面都是平面麼? 線都是直線麼?

解　黑板的面都是平面,線都是直線.

4. 下面的幾個圖形那個表示立體?那個表示平面?



解　A 表示立體　B,C 表示平面

5. 一條絲線,一根頭髮,繃直了好算線段麼?

解 一根絲線或頭髮繃直了,那所成的線的方向是處處一樣的,所以可算為線段.

6. 拿鉛筆沿直尺畫一條線段. 這線段同幾何上理想的線段有什麼分別?

解 幾何上理想的線段是有位置,有方向,有長,而無闊.然筆畫的直線,總有少許的闊,但是很小,可以不計.我們只計其位置,方向,長短,就夠了.所以能代表幾何上的線段.

7. 你要試驗桌子的面是不是平面,用什麼法子?

解 把直尺的一邊緊挨桌面,對着亮處將尺移來移去,若桌面與尺邊處處重合,不漏一點光兒,那桌面就是平的.

教科書內第 6 至 7 面 目解題

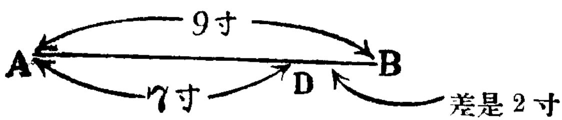
1. 畫一條長 9 寸,又一條長 7 寸的線段,求他們的和同差.

解 假若拿 $\frac{1}{2}$ 糎,代表一寸,※其畫法如下:

9 寸同 7 寸的和是16寸

※ 本編因限於紙幅,不夠將題裏所說的尺寸照樣畫出.只得依比例的法子縮小.以後的實驗題也是照樣類推.

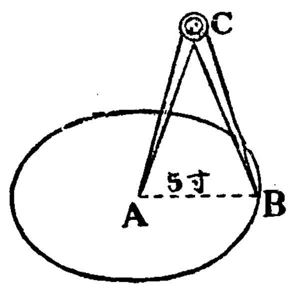
這兩線的和是 AC＝AB＋BC＝9寸＋7寸＝16寸
這兩線的差是 DB＝AB－AD＝9寸－7寸＝2寸



2. 無限直線有沒有端點? 線段有幾個端點? 圓有麼?

(解) 無限直線有兩端,但向對方伸張到無限遠.線段有兩端點,但圓沒有端點.

3. 用圓規畫一個半徑五寸的圓.



(解) 先將圓規 ACB 的兩脚放開.使 AB 的距離是 5 寸(如右圖)將 A 脚駐定 A 點,做圓心,旋轉 B 脚,就成了半徑五寸的圓.

4. 在地圖上離開某處一里路的地方,你用什麼法子去標他出來?

(解) 以某處做圓心,以一里的距離做半徑,畫一個圓,所以凡是爲這圓周所穿過的地方,都是離某處一里路的距離.

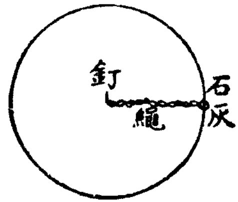
5. 解釋"地震波及到一百里外"這句話在幾何學上的意義.

(解) 地震的發動點是圓心,一百里的距離是半徑.所以凡是在這半徑百里的圓內的地方,都受地震的波及.

6. 給你一隻釘一條綳一塊石灰你能

在地上畫一個圓麼? 用什麼法子?

㊣ 先將繩的一端繫釘,一端繫石灰,再將釘釘在地上,把繩繃直做半徑,用手持着有石灰的一端.沿鐵釘旋轉,就畫成了一個圓.



教科書內第12至13面　目解題

1. 直角是平角的幾分之幾? 是週角的幾分之幾?

㊣ 1直角$=\dfrac{1\text{平角}}{2}=\dfrac{1\text{週角}}{4}$.

2. 一直角有幾度? 直角的補角是什麼角?

㊣ 1直角有$90°$,因兩角的和恰是兩直角,便互稱補角,所以直角的補角是(2直角$-$1直角$=$1直角).

3. $72°$的角是鈍角還是銳角? 銳角的補角是什麼角?

㊣ $72°<90°$ $\therefore 72°$的角是銳角,其補角是鈍角.

4. $135°$的角是不是鈍角? 鈍角的補角是什麼角?

㊣ $135°>90°$ $\therefore 135°$是鈍角,其補角是銳角.

5. $175°$的角是不是優角? $197°$是鈍角還是優角?

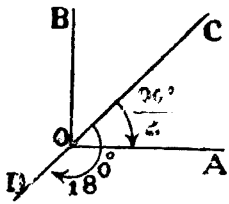
㊣ $175°<180°$ $\therefore 175°$的角是鈍角$(175°>90°)$

$197°>180°$ $\therefore 197°$的角是優角.

6. $22°\ 17'\ 5''$應當怎樣讀法?

解　讀二十二度,十七分,五秒.

7.　∠AOB是直角,OC是他的平分線,OD同OC成一直線,那麼∠AOD有幾度?∠BOD同∠AOD有什麼關係?



解　既知CO平分直角∠AOB

那麼$\angle COA=90^\circ\div2=45^\circ$

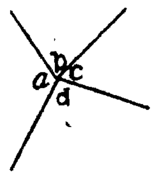
$\therefore\angle AOD=\angle COD-\angle COA$

$=180^\circ-45^\circ=135^\circ$

照樣找出∠BOD也是135°

$\therefore\angle BOD=\angle AOD.$

8.　∠a同∠c是互為補角,那麼∠b同∠d有什麼關係?



解　因∠a,∠b,∠c,∠d所成的是一周角.

$\therefore\angle a+\angle b+\angle c+\angle d=360^\circ$

$\angle a\qquad+\angle c\qquad=180^\circ$(相減)

$\angle b\qquad+\angle d=180^\circ$

∴∠b同∠d是互為補角.(因兩角的和恰是兩直角)

9.　假使∠AOB是平角.$\angle1=\angle2=\angle3=\angle4=\angle5=\angle6$,各等於幾度?　又問∠AOC是什麼角?

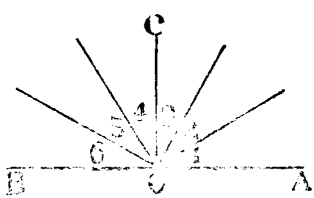
解　$\angle1=\angle AOB$的$\frac{1}{6}=180^\circ\div6=30^\circ$

∴各角都是30°.

$\angle AOC=\angle1+\angle2+\angle3$

$=3\times30^\circ=90^\circ$

∴∠AOC是直角.



10.　時鐘在兩點,三點,四點鐘時,兩針各成什麼角?

㊡ 時鐘在二點鐘時是 $2\times30^\circ=60^\circ$ (是銳角)

時鐘在三點鐘時是 $3\times30^\circ=90^\circ$ (是直角)

時點在四點鐘時是 $4\times30^\circ=120^\circ$ (是鈍角)

11. 時鐘長針每走十分鐘,轉過幾度的角?

㊡ 時鐘長針每走十分,轉過 $(2\times30^\circ=60^\circ)$ 的角

12. 時鐘兩針在幾時成平角,那幾時成直角,那幾時成銳角,那幾時成鈍角?

㊡ 六點鐘成平角. 三點,九點成直角,

一點,兩點,十點,十一點成銳角.

四點,五點,七點,八點,成鈍角.

教科書內第16面 目解題

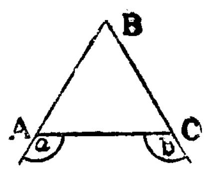
1. 等邊三角形都是等腰的麼? 等腰三角形都是等邊的麼?

㊡ 等邊三角形都是等腰的. 但等腰三角形不都是等邊的.

2. 直角三角形有等腰的麼? 鈍角三角形有等腰的麼?

㊡ 直角三角形與鈍角三角形,都有等腰的.

3. △ABC是等角三角形.延長BA邊所成的A角的鄰角∠a,和延長BC邊所成的外角的鄰角∠b,有什麼關係?



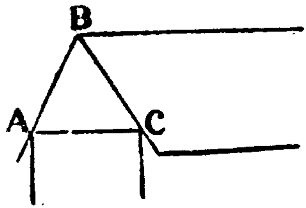
解 既知∠a是在BA的延線上,∠b是在BC的延線上,那麽∠BAC+∠a＝∠ACB+∠b＝180° 又△ABC是等角.

$\therefore \angle BAC = \angle ACB$ (兩式相減)

$\therefore \angle a = \angle b$

4. 指出屋子外面的等腰三角形.

解 一個屋子側面的上部(如右圖的△ABC)所成的三角形,總是等腰,也有許多屋子是做成等邊的.



5. 舉幾個等邊三角形的例.

解 用器中凡是三個脚的物件,那三隻脚便是等邊三角形的三頂點,如三隻脚的圓桌,三角鈴等等.

教科書內第17面 理解題

1. 找出34°; 28° 15′; 78° 16′ 45″的餘角.

解 34°的餘角＝90°－34°＝56°

28° 15′的餘角＝90°－28° 15′＝61° 45′

78° 16′ 45″的餘角＝90°－78° 16′ 45″＝11° 43′ 15″

2. 找出85°; 54° 15′; 120° 6′ 7″的補角.

解 85°的補角＝180°－85°＝95°

54° 15′的補角＝180°－54°15′＝125° 45′

120° 6′ 7″的補角＝180°－120° 6′ 7″＝59° 53′ 53″

3. 兩餘角相差21°,問那兩角各是幾度?

解 設所求的角等X度

則 $X^\circ+(X^\circ+21^\circ)=90$

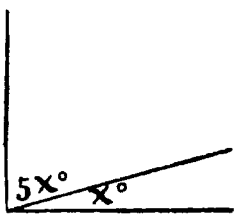
$2X^\circ=90^\circ-21^\circ=69^\circ$

$X^\circ=34^\circ30'$

$X^\circ+21=55^\circ30'$

$\therefore$ 那兩角一個是$34^\circ30'$,一個是$55^\circ30'$

4. 一角是他的餘角的五倍問這兩角各是幾度?



解 設X°=一角的度數

$5X^\circ$=他角的度數

$X^\circ+5X^\circ=90^\circ$

$6X^\circ=90^\circ$

$\therefore X^\circ=15^\circ$

$5X^\circ=75^\circ$

5. 一角是他的補角的$\frac{3}{4}$,問兩角各是幾度?

解 設X°=一角的度數

$180^\circ-X^\circ$=他的補角的度數

$X^\circ=\frac{3}{4}(180^\circ-X^\circ)$

$4X^\circ=540^\circ-3X^\circ$

$7X^\circ=540^\circ$

$\therefore X^\circ=77^\circ\frac{1}{7}$

$180^\circ-X^\circ=102^\circ\frac{6}{7}$

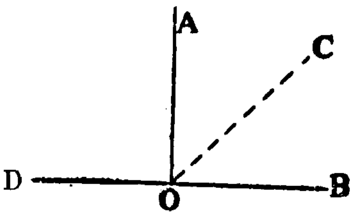
教科書內第20面 理解題

1. 用量角器試驗§29的圖裏面$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$是不是各角等於$\angle A'$,$\angle B'$,$\angle C'$?

解 用量角器量得 $\angle A=55^\circ=\angle A'$

$$\angle B=35^\circ=\angle B'$$
$$\angle C=90^\circ=\angle C'$$

2. 在一直線上畫一條垂線. 再畫直角的平分線.

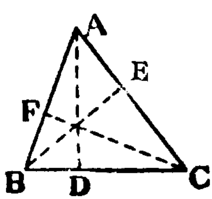


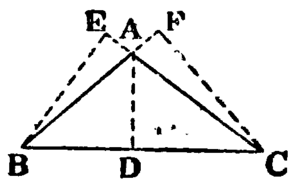
解 AO是BD的垂線
$\angle$AOB是直角
CO是$\angle$AOB的平分線

3. 畫一個三角形,的三個高.

解 畫三角形ABC,將三角板的直角一邊比齊BC線,一邊比齊A點,畫一直線AD,則AB爲由A點畫到BC的垂線,(就是底邊BC的高)

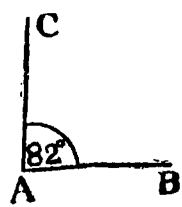
同樣的再畫BE與CF,如右兩圖.則BE是底AC的高.CF是AB的高.





4. 畫個82°的角.

解 先畫直線AB,將量角器的中心點與A點相合,底邊落在AB線上,再沿刻度處數82°,用筆誌1小點C.聯結AC卽得82°.

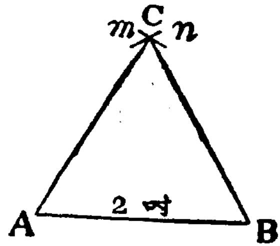


教科書內第22面 實驗題

1. 作每邊2吋的等邊三角形.

解 作直線AB, 2吋長,用A做圓心, AB做半徑畫m

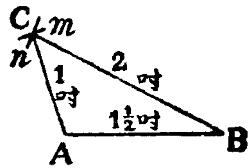
弧,再用B做圓心,AB做半徑畫n弧交m弧於C. 聯AC與BC兩線.



則 $AC=BC=AB$

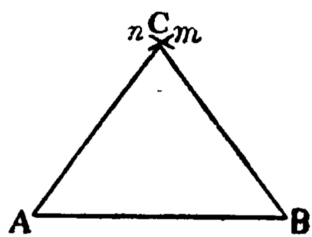
∴$\triangle ABC$是等邊三角形

2. 作三邊是2吋,$1\frac{1}{2}$吋,同1吋的一個三角形



解 先作AB線長$1\frac{1}{2}$吋. 用A做圓心,1吋做半徑畫m弧,再用B做圓心,2吋做半徑畫n弧,交m弧於C. 畫AC同BC兩線, 則$\triangle ABC$爲所求的三角形.

3. 作一個等腰三角形.



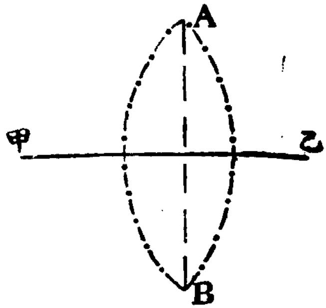
解 任取一直線AB. 用A做圓心,AC任意長做半徑,畫n弧. 再用B做圓心,AC做半徑,畫m弧交n弧於C. 則 $AC=BC$

∴$\triangle ABC$爲等腰.

4. 海口對岸,各有炮台,相隔16哩遠. 甲台的炮可以射到12哩遠,乙台的祇能射到10哩. 畫圖表示兩炮都打得到的地方. 量這個圖形,求出敵艦駛過火線時,所經最短的距離.

解 令1糎代表4哩.則4糎代表16哩. 3糎代表甲台能射的12哩. $2\frac{1}{2}$糎代表乙台能射的10哩. 用甲點做圓心,3糎做半徑,畫弧.再用乙點做圓心,$2\frac{1}{2}$糎做半徑,畫

弧.則兩弧所圍的地方,便是兩炮都打得到的地方. AB 就是敵艦駛過火線時最短的距離.量 AB 的距離得 $3\frac{3}{4}$ 糎(即 15 哩)



$\therefore$ 1 糎 : $3\frac{3}{4}$ 糎 = 4 哩 : X

X=15 哩

教科書內第 26 至 27 面　目解題

1.　沿直尺畫直線,根據了什麼公理沒有? 根據了什麼公法沒有?

(解)　沿直尺畫直線根據了 §41 幾何公理 (1), (2).根據了 §42 公法 (1).

2.　用刻有分寸的尺去量線段的長短,可以說明什麼公理?

(解)　用刻有分寸的直尺,量線段可以知道他的長短,是說明 §41 幾何公理 (1).

3.　假使有叁條尺,一條曉得是直的,你能根據什麼公理,用什麼法子去驗定其它兩條是不是直尺?

(解)　根據幾何公理之〔推論二〕,　用曉得的一條作標準,把他條與直尺比齊,若他的邊與直尺處處相合,則他尺亦為直尺.

4.　兩條線可以決定一點麼? 何以呢?

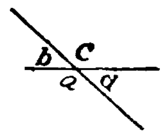
(解)　兩條線可定一點,因兩線相交只有一點(見公理 2 之推論一)

5. 兩點可以決定一線麼?何以呢?

解 兩點可以定1直線,因通連兩點只有一直線,(見幾何公理2).

教科書內第20面 實驗題

1. 畫相交兩直線,用量角器驗出是不是有兩對相等的角?

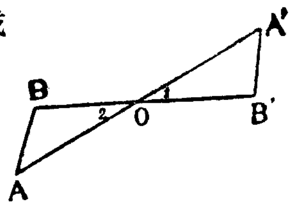


解 用量角器量第37面 §50定理的兩對角,就得$\angle a=\angle b=60^\circ$ $\angle c=\angle d=120^\circ$

又 如右圖裏量得 $\angle a=\angle c=140^\circ$

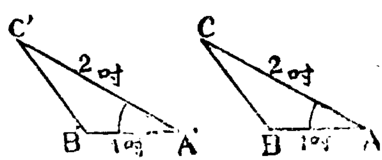
$\angle b=\angle d=40^\circ$

2. 畫兩直線相交, 截取$OA=OA'$ $OB=OB'$,量出是不是$AB=A'B'$,$\angle A=\angle A'$,$\angle B=\angle B'$, $\angle 1=\angle 2$.



解 用圓規量得 $AB=A'B'=($ $)$吋用量角器量得 $\angle A=\angle A'=($ $)^\circ$ $\angle B=\angle B'=($ $)^\circ$,$\angle 1=\angle 2=($ $)^\circ$

3. 畫兩三角形ABC同$A'B'C'$,令$AB=A'B'=1$吋,$AC=A'C'=2$吋,$\angle A=\angle A'=30^\circ$,再量出是不是$\angle B=\angle B'$,$\angle C=\angle C'$, $BC=B'C'$.



解 用圓規量得

$BC=B'C'=1\frac{1}{4}$吋

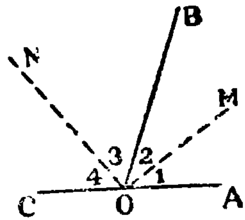
用量角器量得

$\angle B=\angle B'=126^\circ.5$

$\angle C=\angle C'=23^\circ.5$

教科書內第35面　理解題

1. 在 st∠AOC 裏面畫 OB 線段，又畫 ∠BOC 同 ∠BOA 的平分線 ON 同 OM 那 ∠MON 是一隻什麼角?



(設)　∠AOC是平角，OM平分∠BOA
ON平分∠BOC

(問)　∠MON是什麼樣的角?

(解)　$\angle 2=\dfrac{\angle AOB}{2}$　(∵OM是∠BOA的平分線)

$\angle 3=\dfrac{\angle BOC}{2}$　(∵ON是∠BOC的平分線)

$\angle 2+\angle 3=\frac{1}{2}(\angle AOB+\angle BOC)$ (以上兩式相加)

$=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ$

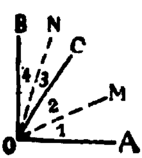
(∵$\angle AOB+\angle BOC=\angle AOC=180^\circ$)

$\angle MON=90^\circ$　(∵$\angle MON=\angle 2+\angle 3$)

2. 在 AOB 直角裏面畫 OC 線段；平分 ∠s AOC 同 COB 畫 OM 同 N，這樣做成的 ∠MON 是多少度?

(設)　∠AOB為直角　OM平分∠AOC　ON平分∠BOC

(問)　∠MON有幾度?



(解)

$\angle 3=\frac{1}{2}\angle BOC$

$\angle 2=\frac{1}{2}\angle AOC$

$\angle 3+\angle 2=\frac{1}{2}(\angle BOC+\angle AOC)$

$=\frac{1}{2}\times 90^\circ=45^\circ$

∴$\angle MON=45^\circ$

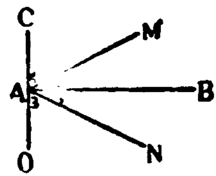
(理　由)：
ON平分∠BOC
OM平分∠AOC
上兩式相加
∠BOA＝90°
∠3＋∠2＝∠MON

3. 從OC線段上一點A畫垂線AB，又在AB兩側引AM AN，使$\angle BAM=\angle BAN$。那剩下來的$\angle MAC$同$\angle NAO$有什麼關係？

設 $CO\perp AB$，$\angle 1=\angle 2$

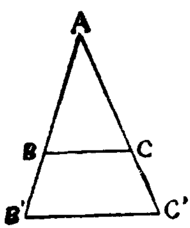
問 $\angle 3$同$\angle 4$有什麼關係？

證



	(理由)*
$\angle 4+\angle 2=90°$	$CO\perp AB$
$\angle 3+\angle 1=90°$	
$\therefore\ \angle 4=\angle 3$	$\angle 1=\angle 2$

4. 從等腰$\triangle ABC$的頂點A延長兩腰AB同AC到B′同C′，使$AB'=AC'$。那BB′同CC′有什麼關係？



設 $\triangle ABC$同$\triangle AB'C'$都是等腰$\triangle$

$AB=AC\qquad AB'=AC'$

問 BB′同CC′有什麼關係？

證

	(理由)*
$BB'+AB=AB'$	分量的和，等於全量，見§43 (6)
$CC'+AC=AC'$	
$\therefore\ BB'=CC'$	$AB'=AC'$，$AB=AC$

※ 凡解證幾何，各步定要有相當的理由．本編爲易於了解起見，特將解證與理由兩部用豎線分開．

第二編 直界形

教科書內第40面 目解題

1. 如圖1,已知$OA=OA'$, $OB=OB'$, 那麼$\triangle AOB\equiv\triangle A'OB'$. 詳細的說出理由來.

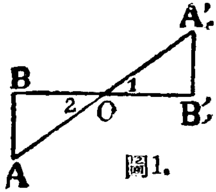


圖1.

設 AA'與BB'交於O

$OA=OA'$ $OB=OB'$

求證 $\triangle AOB\equiv\triangle A'OB'$

證 在$\triangle AOB$同$\triangle A'OB'$裏

$OA=OA'$	已設
$\angle 2=\angle 1$	對頂角相等
$OB=OB'$	已設
$\therefore\triangle AOB\equiv\triangle A'OB'$	兩△的兩邊及夾角對應相等.

2. 如圖2, $\angle 1=\angle 2$, $AB=AB'$, 那麼$\triangle ABC\equiv\triangle AB'C$詳細說出理由來.

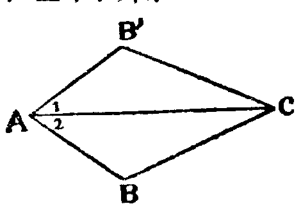


圖2.

設 $\angle 1=\angle 2$

$AB=AB'$

求證 $\triangle ABC\equiv\triangle AB'C$

證 在$\triangle ABC$同$\triangle AB'C$裏面

$\angle 2=\angle 1$	已設
$AB=AB'$	已設
$AC=AC$	兩△公共的一邊
$\therefore\triangle ABC\equiv\triangle AB'C$	兩邊及夾角對應相等

3. 正方形是各邊相等,各角都是直角

的四邊形.如圖3, ABCD是個正方形, E是AD的中點, 證明△AEB≡△DEC.

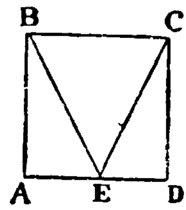


圖3.

設　ABCD是個正方形

則　AB=BC=CD=DA

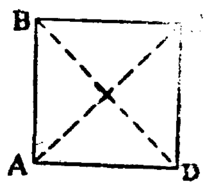
E是AD的中點

求證　△AEB≡△DEC

證　在△AEB同△DEC裏面

AB=CD	已設
AE=DE	E爲AD的中點
∠A=∠D=∠R	正方形各角都是直角
∴△AEB≡△DEC	兩邊及夾角對應相等

4.　如圖4, ABCD是一個正方形, 試證明△ADB≡△ADC.



設　ABCD是一正方形

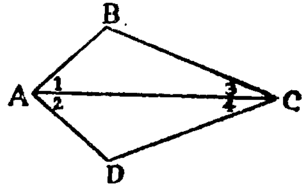
求證　△ADB≡△ADC

證　在△ADB同△ADC裏面

AD=AD	公共邊
AB=CD	□各邊相等
∠BAD=∠ADC	□的各角都是直角
∴△ADB≡△ADC	兩邊及夾角對應相等

教科書內第42面　自解題

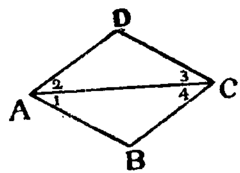
1.　設 ∠1=∠2, ∠3=∠4, 證明△ABC≡△ADC.



證 在△ABC同△ADC裏

$\angle 1=\angle 2$ } 已設
$\angle 3=\angle 4$
AC＝AC 公共邊
∴ △ABC≡△ADC 兩∠s及夾邊對應相等

2. 設∠1＝∠3, ∠2＝∠4,(圖2)證明△ABC≡△ADC

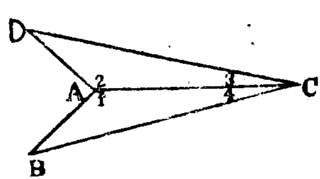


證 在△ABC同△ADC裏

$\angle 1=\angle 3$ 已設
$\angle 4=\angle 2$ 已設
AC＝AC 公共邊
∴ △ABC≡△ADC 兩∠s及夾邊對應相等

3. 設∠3＝∠4,BC＝DC,(圖3)

證明△ABC≡△ADC



證 在△ABC同△ADC裏

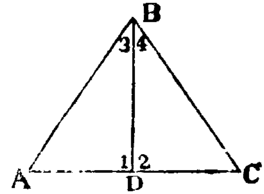
$\angle 4=\angle 3$ } 已設
BC＝DC
AC＝AC 公共邊
∴ △ABC≡△ADC 兩邊及夾角對應相等

4. 設∠1＝∠2, ∠3＝∠4,(圖3),證明△ABC≡△ADC.

證 在△ABC同△ADC裏

$\angle 1=\angle 2$ } 已設
$\angle 4=\angle 3$
AC＝AC 公共邊
∴ △ABC≡△ADC 兩∠s及夾邊對應相等

5. 設 AB＝BC, ∠3＝∠4 (圖 4) 證明 △ADB≅△CDB.



證 在△ADB與△CDB裏

AB＝BC	已設
∠3＝∠4	
BD＝BD	公共邊
∴△ADB≅△ADB	兩邊及夾角對應相等

教科書內第45至46面 目解題

1. 若 AB＝AD, BC＝DC (圖 1) 證明 (a)∠1＝∠2, (b)∠3＝∠4 (c)∠ABC＝ADC.

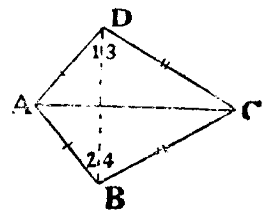


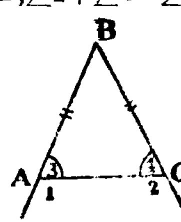
圖1.

設 在△ADC同△ABC裏
AB＝AD, BC＝DC

求證 ∠1＝∠2, ∠3＝∠4,
∠B＝∠D.

證 (a) △ADB是等腰	AB＝AD(已設)
∴∠1＝∠2	等腰△裏對等邊的角也等
(b) △DCB是等腰	已設BC＝DC
∴∠3＝∠4	等腰△裏對等邊的角也等
(c) ∠1+∠3＝∠2+∠4	等量加等量和相等
∴∠D＝∠B	∠1+∠3＝∠D, ∠2+∠4＝∠

2. 若 AB＝BC (圖 2), 證明 ∠1＝∠2.



設 在△ABC裏, AB＝BC

求證 ∠1＝∠2.

(證) △ABC是等腰	已設AB=BC
∠3=∠4	等腰△對等邊的角也等
∠3同∠1互爲補角	兩鄰角的兩外邊成直線
∠4同∠2互爲補角	〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃
∴∠1=∠2	等角的補角相等.

3. △ABC裏各邊相等, D,E,F, 是各邊的中點. 證明△ADF≡△BDE, △DEF裏各角相等.

(設) 在△ABC裏, AC=BC=AB

D,E,F, 是各等邊的中點

即AD=DB=BE=CE=CF=FA

(求證) (a)△ADF≡△BDE

(b)△DEF裏∠1=∠2=∠3.

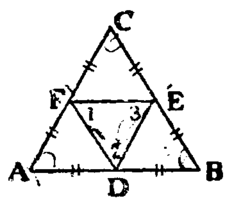


圖3.

(證) (a) 在△ADF同△BDE裏

∠A=∠B	等邊△的各角相等
AD=BD	D,E,F, 是各等邊的中點(設)
AF=BE	
∴△ADF≡△BDE	兩△的兩邊夾角對應相等

(b)依同理△ADF≡△FCE[證法與(a)同]

FD=DE	全等△ADF,BDE,的對應邊
FD=FE	全等△ADF,FCE,的對應邊
△DEF是等邊	FD=DE=FE
∴∠1=∠2=∠3	等邊△的各角相等

4. 在圖4的△ABC裏面, AB=BC, 並且所截的AE=DC, 證明△AEB≡△CDB.

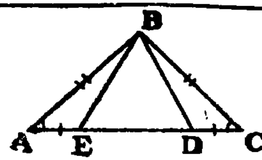


圖4.

(設) 在△ABC裏 AB=BC

AE=DC

(求)(證) △AEB≡△CDB

(證)

△ABC是等腰	AB=BC
∠A=∠C	等腰△裏,對等邊的角也等.
AB=BC	已設
AE=DC	已設
∴ △AEB≡△CDB	兩△的兩邊及夾角對應相等

5. 在△ABC裏面, AC=BC, AD=BD, (圖5),證明∠ADC=BDC.

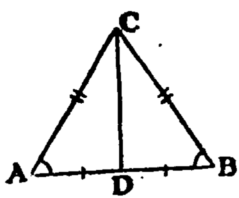


圖5.

(設) 在△ABC裏 AC=BC AD=BD

(求)(證) ∠ADC=∠BDC

(證) 在△ADC同△BDC裏

△ABC是等腰	AC=BC
∠A=∠B	對等邊的角
AC=BC	已設
AD=DB	已設
∴△ADC≡△BDC	兩邊及夾角對應相等
∴∠ADC=∠BDC	全等△的對應∠相等

6. ABCD圖形裏的四角都是直角,且AD=BC,DC=AB.(圖6),證明△ABC≡△ACD.

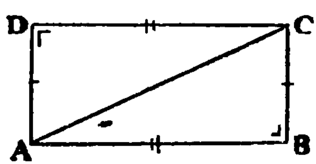


圖6.

(設) 在ABCD圖形裏

∠A=∠B=∠C=∠D=∠R.

AD=BC DC=AB

(求)(證) △ABC≡△ACD.

(證) 在△ABC同△ACD裏

AB＝DC BC＝AD ∠B＝∠D	已設
∴ △ABC≡△ACD	兩邊及夾角對應相等

教科書內第47至48面 目解題

1. 在圖1裏面，△ABC是等腰三角形，且AD＝DC，證明△ABD≡△CBD.

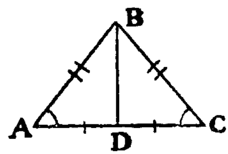


圖1.

設 △ABC是等腰AD＝DC.

求證 △ABD≡△CBD.

證 在△ABD同△CBD裏

AB＝BC	△ABC是等腰
∠A＝∠C	等腰△裏對等邊的角相等
AD＝DC	已設
∴△ABD≡△CBD	兩△裏兩邊夾角對應相等

2. 在圖2裏面，照§55用標記表明相等的線段，證明△ABC≡△ABD

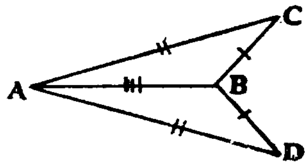


圖2.

設 AC＝AD BC＝BD

求證 △ABC≡△ABD

證 在△ABC同△ABD裏

AC＝AD BC＝BD	已設
AB＝AB	公共邊
∴△ABC≡△ABD	兩△裏三邊對應相等

3. 在圖3裏面，相等的各線段上畫有

標記,試證明$\triangle ABC \equiv \triangle ADC$.

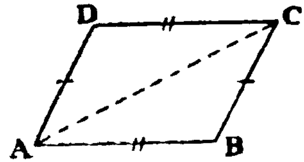


圖3.

(設)　$AD = BC$,　$DC = AB$

(求)(證)　$\triangle ABC \equiv \triangle ADC$

(證)　在$\triangle ABC$同$\triangle ADC$裏

$BC = AD$	已設
$AB = DC$	已設
$AC = AC$	公共邊
$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle ADC$	兩$\triangle$裏三邊對應相等

4.　在圖4裏面,O是圓心,證明$\triangle AOB \equiv \triangle COD$.

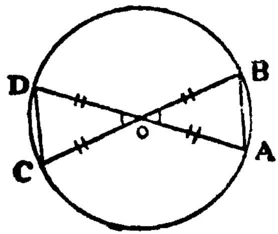


圖4.

(設)　O是圓心,AO, BO, CO, DO,都是半徑

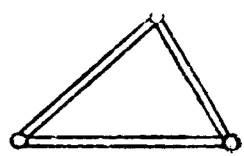
(求)(證)　$\triangle AOB \equiv \triangle COD$

(證)　在$\triangle AOB$同$\triangle COD$裏

$\angle AOB = \angle COD$	對頂角
$AO = DO$	圓的半徑都等
$BO = CO$	圓的半徑都等
$\therefore \triangle AOB \equiv \triangle COD$	兩$\triangle$裏兩邊夾角對應相等

教科書內第48至49面　自解題

1.　釘連三條桿的尖端如右圖,問這個形是固定的麼?什麼緣故?

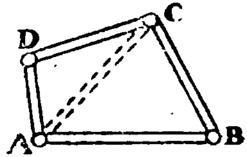


(解)　(a) 這形是固定的(見§56)

(b) 因1$\triangle$的三邊既已固定,這$\triangle$就是固定的,

2.　如右圖把四條桿的尖端釘連,問這

個形可以活動麼?你曾見四條邊的鐵架子有會變形的麼?

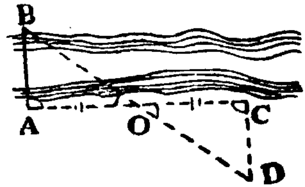


(解) (a)這形可以活動.(b)照相器的兩旁,與鏡頭相聯的活動鐵架,與放大尺的構造都本此理.

3. 假使在前題所說的形上面,定一條橫桿,穿過AC,這形會變成固定的麼?

(解) 若釘一橫桿穿過AC,則上形是固定的,因他所成的兩△ADC同ABC的三邊都已固定.

4. 要找出經過一條河從A到B的距離,可以依了同AB成直角的AO線上進行,一直到C,使AO=OC,再沿同OC成直角的線走到同O,B成直線的D爲止,指出CD=AB



(設) 在△AOB同△COD裏 AC, BD兩直線交於O, ∠BAC同∠ACD都是直角, AO=OC.

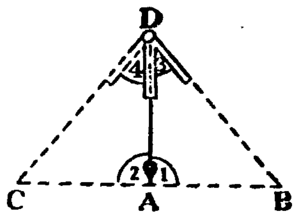
(求)(證) CD=AB

(證) 在△COD同△AOB裏

OC=AO	已設
∠C=∠A	兩角都是直角
∠COD=∠AOB	對頂角相等
∴△COD≡△AOB	兩角及夾邊對應相等
∴ CD=AB	兩全等△的對應邊相等

5. 想測從A點到望得見.走不到的B

點的距離,可以用武理斯(Thales)所發明的儀器:——先把兩桿連在D處,一桿照錘線DA同地面成直角,使別桿指着B點.再旋轉兩桿不變D角.使原來指着B的一桿在DA的位置,原來垂直的一桿就指着走得到的一點C.便可量下AC的距離.



證明AC=AB.

設　在△ABD同△ACD裏∠3=∠4　∠1=∠2=∠R

求證　AC=AB

證　在△ABD同△ACD裏

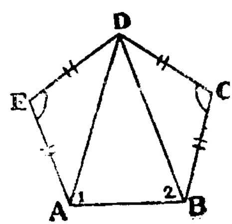
∠3=∠4	已設
∠1=∠2	已設
DA=DA	公共邊
∴△ABD≅△ACD	兩△的兩∠夾邊對應相等
∴ AB=AC	兩全等△的對應邊相等

教科書內第50至51面　理解題

1.　圖1裏AE=ED=DC=CB, ∠E=∠C.
證明∠1=∠2.

設　AE=ED=DC=CB,　∠E=∠C

求證　∠1=∠2



證　△AED≅△BCD (兩△的兩邊夾角對應相等)

AE=BC	已設
DE=DC	已設
∠E=∠C	已設

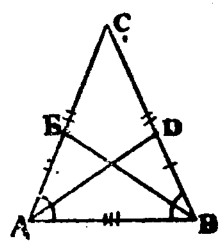
AD＝BD	兩全等△的對應邊相等
△ABD是等腰	AD＝BD
∴∠1＝∠2	等腰△裏對等邊的角相等

2. 設E,D是等腰三角形ABC裏等邊AC同BC上的兩中點,那麼聯結AD, BE也會相等嗎? 如果是的,怎樣去證明他?

(設) 在△ABC裏 AC＝BC AE＝BD

(求)(證) BE＝AD

(證) 在△ADC同△BEC裏



AC＝BC AE＝BD	已設
CE＝CD	等量減等量差相等
∠C＝∠C	公共角
BC＝AC	已設
△BEC≡△ADC	兩△裏兩邊及夾角對應相等
∴ BE＝AD	兩全等△的對應邊相等

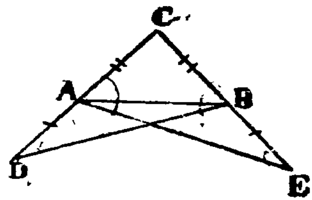
(或)(證)

△ABC是等腰	BC＝AC(已設)
∠A＝∠B	等腰△裏對等邊的角相等
AB＝AB	公共邊
AE＝BD	已設
△AEB≡△ABD	兩△裏兩邊夾角對應相等
∴ BE＝AD	兩全等△的對應邊相等

3. △ABC裏面兩等邊是CA同CB;從C延長CA到D,又CB到E.若AD＝BE,證明DB＝AE

設　AC=BC　AD=BE

求證　BD=AE

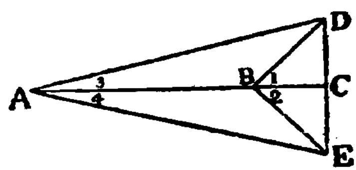


證　在△CDB同△CEA裏

BC=AC	已設
∠C=∠C	公共角
DA+AC=EB+BC	AC=BC,DA=BE(已設)
△CDB≡△CEA	兩△裏兩邊夾角對應相等
∴　BD=AE	兩全等△的對應邊相等

或依上題之又法,先證(∠A的補角)∠DAB=∠EBA(∠B的補角)再以兩邊夾角的理,證明△ABD≡△ABE亦可

4.　在圖2裏邊,知道AD=AE,BD=BE證明DC=EC



設　在△ADE裏面
AD=AE　BD=BE

求證　DC=EC

證　△ABD≡△ABE	兩△裏三邊對應相等(已設AD=AE,BD=BE, AB=AB)
∠ABD=∠ABE	兩全等△的對應∠s相等
∠1=∠2	等角的補角相等
△BCD≡△BCE	兩△的兩邊夾角對應相等(BD=BE,∠1=∠2,BC=BC)
∴　DC=EC	兩全等△的對應邊相等

5.　在前題的圖裏邊,倘若已經知道了∠3=∠4,和△ABD≡△ABE.證明DC=EC.

設　△ABD≡△ABE　∠3=∠4

求證　DC=EC

證　在△ADC同△ACE裏

AD=AE	全等△ABD,同ABE的對應邊
△ADC≌△ACE	兩△的兩邊夾角對應相等 (AD=AE, ∠3=∠4, AC=AC)
∴ DC=EC	兩全等△的對應邊相等

6.　求A到B的距離,先量AO同BO,再取OD=AO,OC=BO,倘BOC,AOD同是直線,那麼AB=CD什麼緣故?所以量CD便得AB

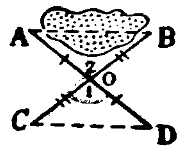


圖3.

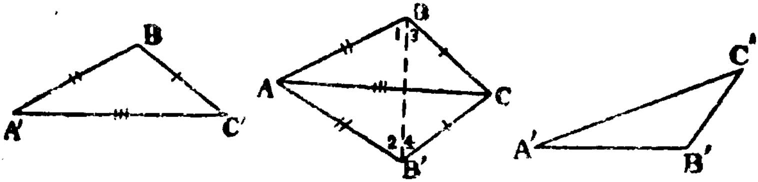
設　BOC同AOD都是直線　OD=AO　OC=BO

求證　AB=CD

證

∠1=∠2	AD,BC,兩直線所成對頂∠s相等
OD=AO OC=BO	已設
△COD≌△AOB	兩△的兩邊及夾角對應相等
∴ CD=AB	全等△的對應邊相等

7.　在§56的定理裏面,若∠B同∠B′是鈍角,應當怎樣證法?

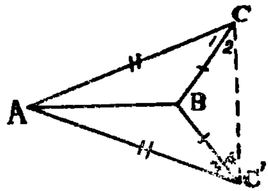


設　在△ABC同△A′B′C′裏　∠B同∠B′是鈍角

AB=A′B′　BC=B′C′　CA=C′A′

求證　$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

(證法一)　把$\triangle A'B'C'$的$A'C'$邊與$\triangle ABC$的AC邊相合. B,B'兩點在合線的兩邊,再畫BB'線,則成上圖.　其餘證法與§56的證法相同

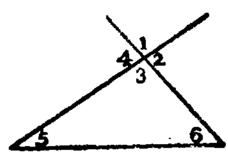


(證法二)　若把A'B'與AB相合,則C,C',在合線的兩旁,聯結CC'如右圖.

則$\triangle ACC'$同$\triangle BCC'$是等腰	$AC=AC'$　$BC=BC'$
$\angle ACC'=\angle AC'C$	等腰△裏對等邊的角
$\angle BCC'=\angle BC'C$	
$\angle 1=\angle 3$	等量減等量差相等
∴　$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$	兩邊夾角對應相等
	$(AC=AC', AB=AB, \angle 1=\angle 3)$

教科書內第59面　目解題

1.　在三角形的一個頂點上.可以做幾個外角?那些角的關係怎麼樣?



解　在△的一頂點上,可以做成兩個外角:— $\angle 2$,　$\angle 4$.

$\angle 1=\angle 3$　$\angle 2=\angle 4$.(對頂角)

$\angle 2$同$\angle 4$是外角,$\angle 5$同$\angle 6$是內對角

$\angle 1+\angle 4=\angle 4+\angle 3=\angle 3+\angle 2=\angle 2+\angle 1=180^\circ$

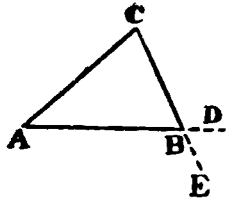
(一直線做外邊的兩鄰角的和,等於兩直角)

$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=360^\circ$ (圍1點的諸鄰∠s和爲360°)

$\angle 3$是$\triangle ABC$的內鄰角

2.　如圖$\angle EBD$是$\triangle ABC$的外角麼?

∠EBD同∠ABC有什麼關係?



解　∠EBA或∠CBD是△ABC的外角, ∠EBD不是△ABC的外角,

∠EBD=∠ABC(對頂角)

3. 三角形的一隻外角同他的內鄰角的和是什麼?

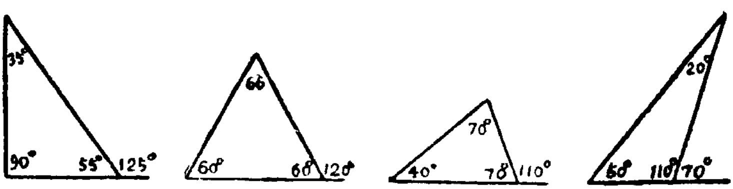
解　△的外角同內鄰角的和是兩直角.

教科書內第59面 實驗題

實驗題裏面所畫的圖,要畫得大些,還得仔細.

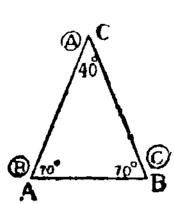
每題裏要畫的圖,當按照所指定的,畫大小不同的圖形.你對於每題的終結,像定理那樣去陳述出來.

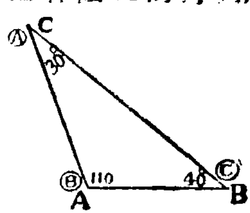
1. 畫一個三角形,並延長一邊做成外角. 量外角同兩個內對角.那個角頂大?畫幾個大小不同的三角形來試驗.

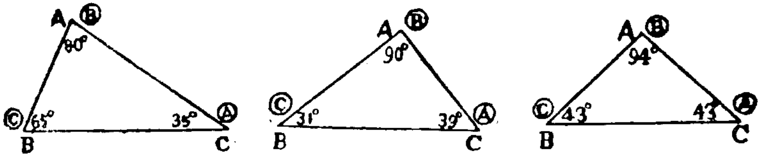


解　在上面4個△裏,得知—"無論什麼△的外角,總比他的任何內對角大."

2. 畫一個△ABC, 使AB<BC. 量這些邊對着的角.怎樣比較他們?





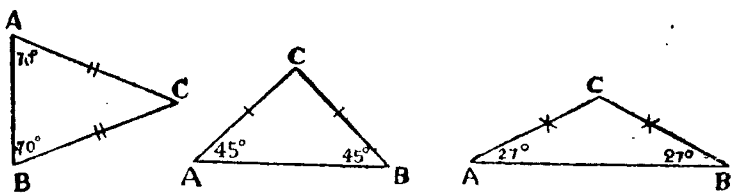


㊎ 量了上面幾個△,就知道:—"三角形的兩邊若不等,那麼大邊所對的角,必大於小邊所對的角."

3. 畫一個△ABC,使∠A<∠B.量這些角對着的邊.怎樣比較他們?

㊎ 若在上面題2的幾個△裏將A字變爲Ⓑ,B字變爲Ⓒ,C字變爲Ⓐ,那就是∠Ⓐ<∠Ⓑ,量得ⒷⒸ<ⒶⒸ.所以知道:—"三角形的兩角若不相等,那麼大角所對的邊,必大於小角所對的邊."

4. 畫一個△ABC,使∠A=∠B.量這些角對着的邊.怎樣比較他們?



㊎ 在上面幾個△裏,量得AC=BC.所以"三角形的兩角若等,那對等角的邊也必相等."

教科書內第62面 自解題

1. 在圖1裏面,∠1同∠4,∠3同∠6,∠1同∠5,∠3同∠4,∠2同∠6,∠2同∠5那一個角較大?說出理由.

解 $\angle 4>\angle 1$, $\angle 4>\angle 3$

$\angle 6>\angle 3$, $\angle 6>\angle 2$

$\angle 5>\angle 1$, $\angle 5>\angle 2$

都是外角大於內對角.

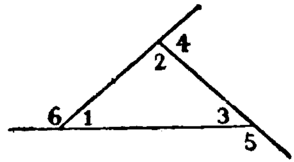


圖1.

2. 倘三角形內一角是直角,表明其餘兩角必是銳角.

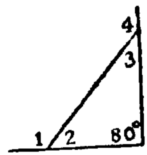


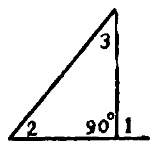
圖2.

解 $\angle 1$是鈍角	$\angle 1$(外角)>直角(內對角).
$\angle 1$是$\angle 2$的補角	兩鄰的外邊成直線.
∴ $\angle 2$是銳角	鈍角($\angle 1$)的補角是銳角.

依同法可證$\angle 3$也是銳角.

(又法)$\angle 1$是直角 直角的補角是直角.

$\left.\begin{array}{l}\angle 1>\angle 2,\text{即}\angle 2<90^\circ\\ \angle 1>\angle 3,\text{即}\angle 3<90^\circ\end{array}\right\}$外角>任何內對角.



3. 比較圖3裏面$\angle 3$同$\angle 2$,並$\angle 1$同$\angle 4$.

解 $\angle 3>\angle 2$ $\angle 4>\angle 1$

$\angle 3$同$\angle 4$都是外角.所以$\angle 3$同$\angle 4$大於內對角$\angle 2$同$\angle 1$.

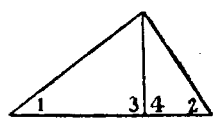


圖3.

4. 設D是三角形裏的任一點,同三頂點連結,證明在D點各角的和,比三角形各角的和大.

設 在△ABC裏,D是其中的任意點.並且D點與三頂點相連,成$\angle$ADC, $\angle$ADB, $\angle$BDC.

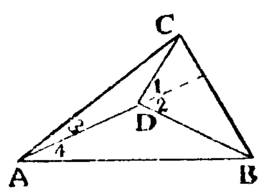


圖4.

求證 闡D點各角的和,大於三角形各角的和

證 $\angle 1 > \angle 3$	外角大於內對角
兩式相加 $\angle 2 > \angle 4$	
$\angle CDB > \angle A$	$\angle 1 + \angle 2 = \angle CDB$,
依同理 $\angle ADC > \angle B$	證法與 $\angle CDB$ 同
以上三式相加 $\angle ADB > \angle C$	

$\therefore \angle CDB + \angle ADC + \angle ADB > \angle A + \angle B + \angle C$

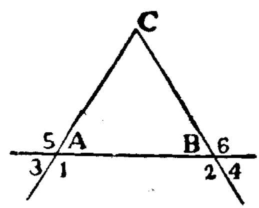
〔或用§69的推論二證明 $\angle ADB > \angle C, \angle CDB > \angle A$, $\angle ADC > \angle B$ 更便〕

教科書內第67面 目解題

1. 若把上面的定理反過來說,應該怎樣,以前有沒有過那樣的定理?

答 等腰△的兩邊相等,對等邊的角也相等(§54)

2. 設圖1,裏 $\angle 1 = \angle 2$ 證△ABC是等腰三角形. 又若 $\angle 3 = \angle 4$ 或 $\angle 5 = \angle 6$, 怎樣證他是等腰三角形?



設 在△ABC裏 (a) $\angle 1 = \angle 2$

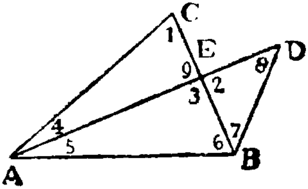
(b) $\angle 3 = \angle 4$ (c) $\angle 5 = \angle 6$

求證 △ABC是等腰

證 (a) $\angle A = \angle B$	等∠s($\angle 1, \angle 2$)之補角.
∴ △ABC是等腰	△的兩∠s相等,所對的邊也等.
(b) $\angle A = \angle 3 = \angle 4 = \angle B$	對頂∠s相等,又知 $\angle 3 = \angle 4$.
∴ △ABC是等腰	△的兩∠s($\angle A, \angle B$)相等,就是等腰△,
(c) $\angle A = \angle B$	等∠s($\angle 5, \angle 6$)之補角相等
∴ △ABC是等腰	兩底∠s($\angle A, \angle B$)相等,△就是等腰.

3. 看圖2比較 $\angle 3$ 同 $\angle 1$, $\angle 3$ 同 $\angle 4$, $\angle 2$

同∠5, ∠9同∠6, ∠2同∠5, ∠3同∠8.



● ∠3>∠1, ∠3>∠4,
∠9>∠5, ∠9>∠6,
∠2>∠5, ∠3>∠8,

以上都是外角大於任何內對角.

圖2.

4. 同圖裏AB>BD, 比較∠5同∠8.

● 若AB>BD, 則∠8>∠5.
(在△ABD裏,邊大則所對的角也大.)

5. 若∠9>∠4, 比較AC同CE.

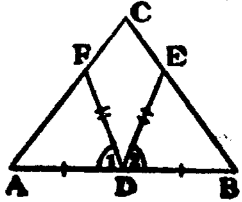
● 若∠9>∠4則AC>CE.
(在△ACE裏,角大則所對的邊也大.)

6. 若∠6>∠1, 比較AB同AC.

● 若∠6>∠1則AB<AC.
(在△ABC裏,角大則所對的邊也大.)

教科書內第67至68面　理解題

1. 在所給三角形底邊的中點,畫相等兩線段到其餘的兩邊,如這兩線和底邊所夾的兩隻角也相等,那麼這所給的三角形便是等腰三角形.



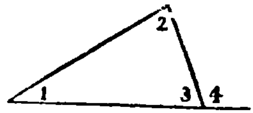
● 在△ABC裏, AD=BD
DF=DE, ∠1=∠2.

●● △ABC是等腰△.

● △ADF≡△BDE	兩△的兩邊夾角對應相等. (已設AD=BD, ∠1=∠2, DF=DE)
∠A=∠B	兩全等△的對應角相等.

∴ △ABC是等腰　|△的兩角相等,對邊亦等.

2.　凡三角形的兩隻角的和,必定比兩直角小.



(設)　△ABC的各角是$\angle 1$,$\angle 2$,$\angle 3$. 他的外角是$\angle 4$.

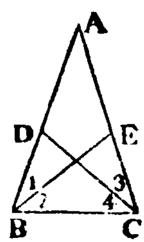
(求)(證)　$\angle 2+\angle 3<180^\circ$　$\angle 1+\angle 3<180^\circ$　$\angle 1+\angle 2<180^\circ$

(證)

$\angle 3+\angle 4=180^\circ$	兩鄰角的外邊成直線.
$\angle 2<\angle 4$.	外角大於內對角.
$\angle 3+\angle 2<\angle 3+\angle 4$	兩邊各加$\angle 3$.
∴ $\angle 3+\angle 2<180^\circ$	$\angle 3+\angle 4=180^\circ$.

依同理　$\angle 1+\angle 3<180^\circ$　$\angle 1+\angle 2<180^\circ$

3.　等腰三角形裏兩底角的平分線到對邊的線段相等.



(設)　△ABC是等腰

DC平分$\angle C$,　BE平分$\angle B$.

(求)(證)　DC=BE

(證)　在△DBC同△EBC裏

$\angle DBC=\angle ECB$	等腰△ABC的底角
$\angle 4=\angle 2$	等角($\angle B$,$\angle C$)的一半
BC=BC	公共邊
$\triangle BDC\cong\triangle BEC$	兩角夾邊對應相等
DC=BE	全等△的對應邊相等

〔或用$\angle 3=\angle 1$, AC=AB, $\angle A=\angle A$ 證明$\triangle ADC\cong\triangle ABE$〕

4.　在等腰三角形裏,若頂角等於底角的一半,那麼每一底角的平分線,分這三角形為兩個等腰三角形.

設　在上面的圖裏，$\triangle ABC$ 是等腰 $\triangle$.

$\angle A=\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{2}\angle C$

DC,BE. 平分 $\angle C, \angle B$.

求證　$\triangle$AEB,BEC,ADC,BDC 都是等腰.

證

$\angle 1=\frac{\angle B}{2}$	BE 平分 $\angle B$
$\angle 1=\angle A$	已設 $\angle A=\frac{\angle B}{2}=\angle 1$
$\therefore$ $\triangle$AEB 是等腰	底角相等
$\triangle$ADC 是等腰	$\angle A=\frac{\angle C}{2}=\angle 3$

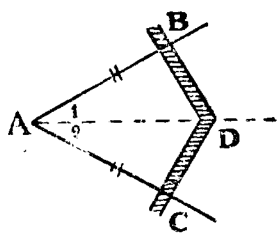
〔若用 §87 的推論 4，可有下面的證明〕

在 $\triangle$BCE 同 $\triangle$BCD 裏，

$\angle BEC=\angle 1+\angle A$	外角等於內對角的和
$\angle BEC=\angle 3+\angle 4$	DC 平分 $\angle C$，　$\angle A=\frac{\angle C}{2}$
$BC=BE$	對等角的邊也等
$\therefore$ $\triangle$BCE是等腰	$BC=BE$

$\therefore$ 依同理 $\triangle$BCD 也是等腰.

5.　一個木匠想平分A角用下面的法子：截取 $AB=CA$. 放上一個鋼的方尺，令 $BD=CD$. 如右圖. 畫 AD 這種平分的法子對麼？試證一證.



設　在 $\triangle$ABD 同 $\triangle$ACD 裏

$AB=AC$, $BD=DC$.

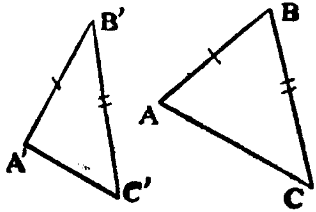
求證　$\angle 1=\angle 2$.

證

$\triangle ABD\cong\triangle ACD$	$AB=AC$, $BD=DC$, $AD=AD$.
$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$	兩全等$\triangle$的對應角相等.

教科書內第68面 實驗題

1. 畫兩個三角形ABC同A′B′C′. 令AB＝A′B′. BC＝B′C′, ∠B＞∠B′, 量AC同A′C′. 再比較他們.

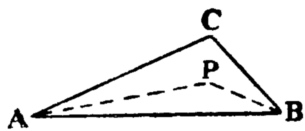


解 若在△ABC同△A′B′C′裏
AB＝A′B′, BC＝B′C′, ∠B＞∠B′, 量得AC＝(　)吋,
A′B′＝(　)吋. ∴ AC＞A′C′.

2. 作三角形ABC同A′B′C′使AB＝A′B′, BC＝B′C′, AC＞A′C′, 量∠B同∠B′, 再比較他們.

解 在前題的圖裏,若AB＝A′B′ BC＝B′C′, AC＞A′C′, 量得∠B＝(　)°,∠B,＝(　)°, ∴ ∠B＞∠B′.

3. 作△ABC,從裏面隨便一點P畫PA, PB, 用量的法子去比較AC＋BC同AP＋BP.



解 用量的法子量AC＝(　)吋, BC＝(　)吋,
AP＝(　)吋, BP＝(　)吋, ∴ AC＋BC＞AP＋BP.

〔*凡實驗題裏有(　)的可以在自己圖裏量出,填入.〕

教科書內第71至72面 自解題

1. §75的定理與§76的定理有什麼關係?

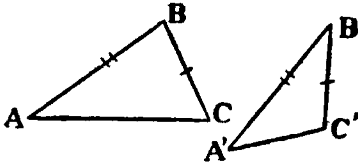
解 §75的定理與§76的定理是相反的定理.

2. 上面的定理用的什麼證法?

解 §76的定理用的是除外的證法.

3. 在△ABC同A′B′C′裏. AB＝A′B′. BC＝

B′C′. 若要 AC>A′C′, ∠B 同 ∠B′ 應該有什麼關係?



解 在△ABC同△A′B′C′裏, AB=A′B′ BC=B′C′. 若 AC>A′C′, 則∠B>∠B′.

(因兩△的兩邊對應相等.他邊大的△,其夾角必大.)

4. 在前題的兩△裏.若要∠B>∠B′對於AC同A′C′該有什麼關係?

解 在△ABC同△A′B′C′裏. AB=A′B′, BC=B′C′.

若∠B>∠B′, 則 AC>A′C′.

(因兩△的兩邊對應相等.夾角大的△,其第三邊必大.)

5. 在同樣△裏,若要AC=A′C′, ∠B同∠B′,該有什麼關係?要∠B=∠B′,AC同A′C′該有什麼關係?

解 (a) 在△ABC同A′B′C′裏 AB=A′B′, BC=B′C′,

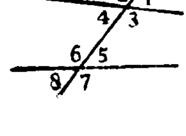
若 AC=A′C′, 則 △ABC≡△A′B′C′	兩△三邊對應相等.
∴ ∠B=∠B′	兩全等△的對應角.

(b) 在△ABC同A′B′C′裏. AB=A′B′, BC=B′C′, ∠B=∠B′,

則 △ABC≡△A′B′C′	兩△的兩邊夾角對應相等.
∴ AC=A′C′	兩全等△的對應邊相等.

教科書內第74面 自解題

1. 在上面的圖裏,那幾對角是相等的?還有那幾對角是補角?

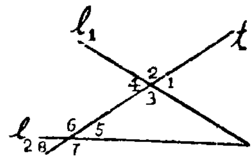


解 (a)∠1=∠4, ∠2=∠3,∠5=∠8, ∠6=∠7,(都是因為對頂角相等.)

(b) 以下各對都是互爲補角:—∠1同∠2, ∠1同∠3, ∠4同∠2, ∠4同∠3, ∠5同∠6, ∠5同∠7, ∠8同∠6, ∠8同∠7.

(都是因爲兩鄰角的外邊成1直線.)

2. 有兩線相遇，畫截線如圖，試比較∠1同∠5, ∠7同∠3, ∠6同∠3.



㊣ 兩直線l_1,l_2相遇，爲直線t所截，則∠1>∠5, ∠7>∠3, ∠6>∠3.

(都是因爲外角∠1,∠7,∠6大於內對角∠5,∠3,)

3. 同圖裏.∠3+∠5大於或小於2∠R?

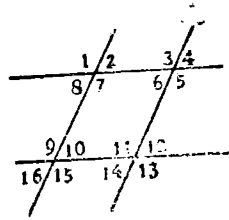
㊣ ∠4+∠3=2∠R	兩鄰角的外邊成直線.
而∠4>∠5	外角(∠4)大於內對角.
∴ ∠3+∠5<2∠R	∠5<∠4.

4. 同圖裏,∠4+∠6比2∠R大還是小?

㊣ ∠4+∠3=2∠R	兩鄰角(∠4,∠3)的外邊成1直線.
∠6>∠3	外角大於內對角.
∴ ∠4+∠6>2∠R	∠6>∠3.

教科書內第81至82面 目解題

1. 兩對鐵道互相穿過,如圖1, 裏面那幾個角相等,那幾個角是補角?



㊣ (a) ∠1=∠3=∠5=∠7=∠9=∠11=∠13=∠15.

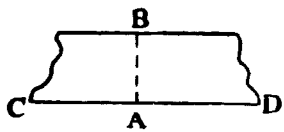
(b) ∠2=∠4=∠6=∠8=∠10=∠12=∠14=∠16.

(c) 凡(a)組任一角與(b)組任一角互爲補角.

2. 在同圖裏$\angle 1=120^\circ$,找出$\angle 3$,$\angle 9$,$\angle 11$,$\angle 5$,各是多少度.

㊙ 若$\angle 1=120^\circ$, $\angle 3=120^\circ$($\angle 1$的同位角)
$\angle 9=120^\circ$($\angle 1$的同位角). $\angle 11=120^\circ$($\angle 9$的同位角)
$\angle 5=120^\circ$($\angle 3$的對頂角)

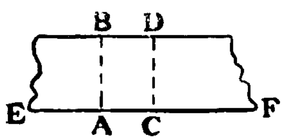
3. 把一張紙依AB摺攏(圖2),比齊AD同AC,要使$\angle BAC=\angle BAD$. 證明$\angle BAD$是一個直角.



㊙ 若CAD是紙的一直邊,將D疊在C上,其摺痕BA便使$\angle BAC=\angle BAD$. $\therefore \angle BAD$是直角.

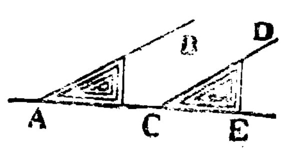
(因依§18的定義:一凡兩線相交所成的兩鄰角相等,兩角都是直角.)

4. 要在紙上摺兩條平行的痕跡(圖3)應該怎樣摺法?



㊙ 如欲在紙上摺兩平行線,可依前題的摺法,先在A點摺AB線⊥EF,再在C點依同樣的法子摺CD線⊥EF,則AB ∥ CD.(因兩線同一線正交,必定平行.見§83的推論.)

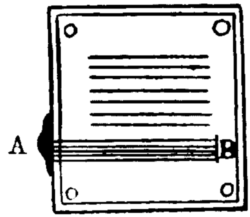
5. 怎樣可以用一根直尺,和一塊三角板,來畫平行線? (圖4.)



㊙ 將直尺AE擺在紙上,再將三角板的一邊靠齊直尺,沿AB作一線,然後又將三角板順移至C點作CD線,則AB ∥ CD.

(因 $\angle BAC=\angle DCE$ 同位角相等則兩線平行 §83.)

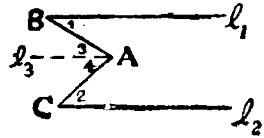
6. 丁字尺怎樣可以用來畫平行線?(圖5.)



解 丁字尺原係已成直角的兩直尺聯成,用時將丁字尺的A端,與桌邊或紙邊相齊,再從A到B,沿尺作線.將尺上下移動.可作無數的平行線. (因依§83的推論:—"諸線都同紙邊垂直,必定平行.")

教科書內第82至83面 理解題

1. 在下面圖1裏面,$\angle BAC=\angle 1+\angle 2$,證明 $l_1 \parallel l_2$.



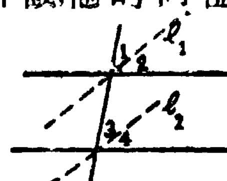
設 在圖1裏,$\angle BAC=\angle 1+\angle 2$.

求證 $l_1 \parallel l_2$.

證 畫 l_3 使 $\angle 3=\angle 1$.

$\angle 3+\angle 4=\angle 1+\angle 2$	$\angle 3+\angle 4$ 即 $\angle BAC$, $\angle 1+\angle 2=\angle BAC$.
$\angle 3 \quad =\angle 1$	已作.
$\angle 4 = \angle 2$	等量減等量,差相等.
$l_2 \parallel l_3$	兩線為他線所截,內錯角($\angle 4,\angle 2$)相等.
$l_1 \parallel l_3$	兩線為他線所截內錯角($\angle 3,\angle 1$)相等.
$\therefore l_1 \parallel l_2$	l_1,l_2 都與 l_3 平行,則互相平行.

2. 若平行線被一截線所截,他的同位角的平分線也必平行.



設 l_1 同 l_2 是平行線上的同位角的平分線.

求證 $l_1 \parallel l_2$

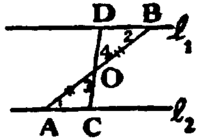
證 $\angle 1=\angle 3$ 等$\angle$s(平行線的同位$\angle$s)的一半,相等.

$\therefore$ $l_1 \parallel l_2$ 兩線為他線所截同位角($\angle 1,\angle 3$.)相等

3. 在兩平行線間的一截線被他一線所截,如成相等的兩線段,那麼他一截線也被分做相等的兩線段.

設 $l_1 \parallel l_2$ AO＝OB　　求證 CO＝OD

證 在△AOC同BOD裏

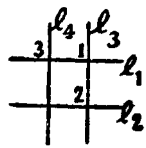


$\angle 1 = \angle 2$	$\parallel$s與截線所成的內錯角相等
AO＝OB	已設
$\angle 3 = \angle 4$	對頂角相等.
∴△AOC≡△BOD	兩角及其夾邊對應相等.
∴ CO＝OD	全等△s對應邊相等

4. 垂直於平行線的兩線段也相平行.

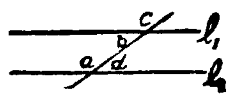
設 $l_1 \parallel l_2$, $l_3 \perp l_2$, $l_4 \perp l_1$,　　求證 $l_3 \perp l_4$

證



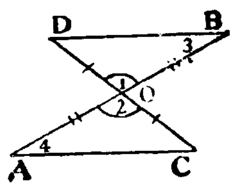
$\angle 2 = \angle 1$	$l_1 \parallel l_2$則同位角相等.
$\angle 2 = \angle R$	$l_3 \perp l_2$
$\angle 3 = \angle R$	$l_4 \perp l_1$
∴ $\angle 2 = \angle 3 = \angle 1$	等於同量的量相等.
∴ $l_4 = l_3$	同位$\angle$s($\angle 3$, $\angle 1$.)相等.

5. 如 $l_1 \parallel l_2$, $\angle a = 5 \times \angle b$, 找出 $\angle c$ 同 $\angle d$.



解 $\angle a + \angle b = 180°$	截線同旁內角的和是2$\angle$s R
$5 \times \angle b + \angle b = 180°$	$\angle a = 5 \times \angle b$
$\angle b = 30°$	$6 \times \angle b = 180°$
$\angle b = \angle d = 30°$	內錯角($\angle b = \angle d$)
$\angle c = \angle a = 150°$	$\angle a$同$\angle c$是同位角

6. AB, CD兩線段相交在O點. 若AO＝OB, CO＝OD. 試證AC $\parallel$ BD.



證 在△AOC同△BOD裏

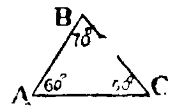
AO＝OB 又 CO＝OD

求證 AC $\parallel$ BD

(證) AO=OB, CO=OD	已設
∠1=∠2	對頂角相等.
△AOC≡△BOD	兩△的兩邊夾角對應相等.
∠4=∠3	兩全等△的對應角相等.
∴ AC ∥ BD	AC, BD 與截線 AB 所成內錯角(∠4, ∠3)相等.

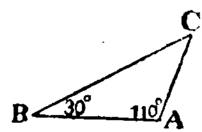
教科書內第83面 實驗題

1. 作一個△ABC, 使∠A=60°, ∠B=70°, 量∠C 問這三隻角的總和是多少?



(解) 畫任意長的AB線, 在A端作60°, B端作70°, 使交於C. 量得∠C=50° ∴這三角的和=180°.

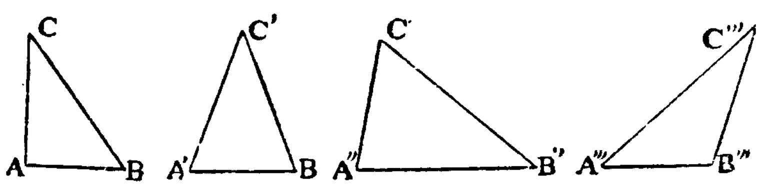
2. 作一個△ABC, 使∠A=110°, ∠B=30° 量∠C. 問這三隻角的總和是多少?



(解) 量得∠C=40°

∴∠A+∠B+∠C=110°+30°+40°=180°=兩直角.

3. 畫好幾個三角形,每個的角都去量一下,看各三角形裏面各角的總和,是不是都一樣?

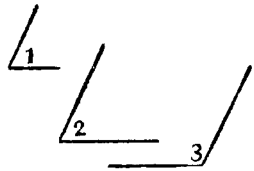


(解) 在上面的幾個三角形裏∠A=( )°, ∠B=( ), ∠C=( )°,

$\angle A'=(\quad)^\circ$, $\angle B'=(\quad)^\circ$, $\angle C'=(\quad)^\circ$,…………

∴ **任何**△裏各角的總和都是一樣等於兩直**角**.

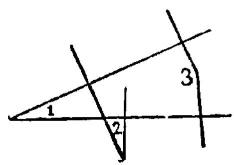
4. 畫兩隻角,令這隻角的邊恰和那隻的平行.量那些角.在右圖裏面,∠1同∠2,∠1同∠3有什麼關係?



解 用量角器量得$\angle 1=(\quad)^\circ$, $\angle 2=(\quad)^\circ$, $\angle 3=(\quad)^\circ$,

$\therefore \angle 1=\angle 2$, $\angle 1+\angle 3=180^\circ$,

5. 畫兩隻角,令這角的兩邊,各同那角的兩邊正交,量那些角,圖裏∠1同∠2,∠1同∠3有什麼關係?



解 用量角器量得$\angle 1=(\quad)^\circ$, $\angle 2=(\quad)^\circ$, $\angle 3=(\quad)^\circ$.

$\therefore \angle 1=\angle 2$, $\angle 1+\angle 3=180^\circ$.

教科書內第85面 目解題

1. 直角三角形裏的一銳角是40°問別一個銳角是幾度?

解 依§87推論一:"在直角三角形裏兩銳角的和是一直角."今知一銳角是40°.∴他銳角必定是$90^\circ-40^\circ=50^\circ$.

2. 三角形裏有二隻角都是60°.其餘一隻角有多少度?

解 依§87定理:"△裏各角的和是兩直角".

既知二隻角都是60°. ∴他一角$=180^\circ-2\times60^\circ=60^\circ$.

下列的題目裏面,ABC是三角形．找出$\angle C$的度數．

3.　$\angle A=40^\circ$，　$\angle B=80^\circ$．

解　$\angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)=180^\circ-120^\circ=60^\circ$，

4.　$\angle A=70^\circ$．　$\angle B=70^\circ$，

解　$\angle C=180^\circ-(70^\circ+70^\circ)=40^\circ$

5.　$\angle A=50^\circ$，　$\angle B=50^\circ$，

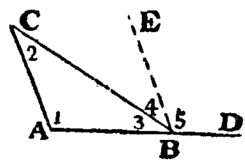
解　$\angle C=180^\circ-(50^\circ+50^\circ)=80^\circ$，

6.　$\angle A=45^\circ$，　$\angle B=45^\circ$

解　$\angle C=180^\circ-(45^\circ+45^\circ)=90^\circ$

教科書內第85至86面　理解題

1.　照下面圖1.證§87的定理．



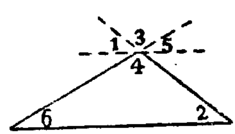
設　在△ABC裏，$\angle 1,\angle 2,\angle 3$是他的三隻內角．

求證　$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$

證　由B點畫BE與AC平行,組成$\angle 4$同$\angle 5$,

則　$\angle 2=\angle 4$	‖sBE,AC,與截線BC,所成的內錯角相等．
$\angle 1=\angle 5$	‖sBE,AC,與截線AD,所成的同位角相等．
$\angle 3=\angle 3$	兩節各加$\angle 3$．
$\therefore\ \angle 1+\angle 2+\angle 3$	
$=\angle 5+\angle 4+\angle 3$	等量加等量和相等．
$=180^\circ$	諸鄰角最外的兩邊,在1直線上．

2.　用圖2,再證同定理．



設　$\angle 2,\angle 4,\angle 6$是△的內角．

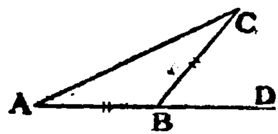
求證　$\angle 2+\angle 4+\angle 6=180^\circ$

證　過△的頂點畫直線與底邊平行,並引長他兩邊,

做成 $\angle 1, \angle 3, \angle 5$.

則 $\angle 1=\angle 2$	平行線與截線,所成的同位角相等.
$\angle 3=\angle 4$	兩直線相交其對頂角相等.
$\angle 5=\angle 6$	平行線與截線所成的同位角相等.
$\angle 1+\angle 3+\angle 5$	
$=\angle 2+\angle 4+\angle 6$	等量加等量和相等.
$=180^\circ$	諸鄰角最外的兩邊,在直線上.

3. 若等腰△ABC裏面,AB=BC, 試證∠A等於∠B上外角的一半.



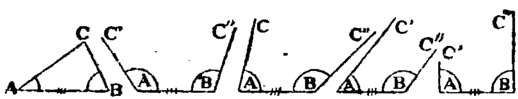
(設) 在△ABC裏 AB=BC,
∠DBC是△ABC的外角.

(求證) $\angle A=\frac{1}{2}\angle DBC$

(證) △ABC是等腰	AB=BC(已設)
$\angle A=\angle C$	等腰△的對等邊(BC,AB)的角相等.
$\angle DBC=\angle A+\angle C$	外角等於內對角的和.
$\therefore \frac{1}{2}\angle DBC=\angle A$	$\angle DBC=2\angle A$(兩節皆以2除).

4. 用§87的定理,去討論§63的作法.

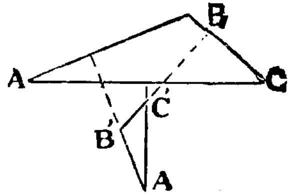
(討論) 依§87的定理:—"△內三隻角的和是兩直角." 所以無論AB有多長,∠A與∠B的和總要小於兩直角方可作成△,若∠A與∠B的和大於兩直角,或等於兩直角,AC與BC就不能相遇,那就不成△了.



教科書內第88至89面 理解題

1. 已知△ABC同A'B'C'裏, AB⊥A'B',

$BC \perp B'C'$, $CA \perp C'A$，求他們各角的關係.

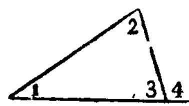


解

$\angle A=\angle A'$	$AB \perp A'B$, $AC \perp A'C'$
$\angle B=\angle B'$	$AB \perp A'B'$, $BC \perp B'C'$
$\angle C=\angle C'$	$AC \perp A'C'$ $BC \perp B'C'$

(都因兩隻角的邊，彼此正交，所以這兩隻角相等. 見§89)

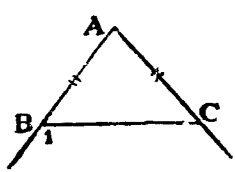
2. 三角形一隻角的外角是120°，他的內對角的差是15°.求這三角形的各角?



解

$\angle 2-\angle 1=15^\circ$	已設
$\angle 4=\angle 2+\angle 1=120^\circ$	外角是內對∠s和
$2\angle 2 \qquad =135^\circ$	兩等式相加，和相等.
$\therefore \angle 2=67^\circ.5$	等量的一半，也等,
$\therefore \angle 1=52^\circ.5$	$\angle 2-\angle 1=15^\circ$, $\therefore \angle 1=\angle 2-15^\circ$.
$\therefore \angle 3=60^\circ$	$\angle 3=180^\circ-\angle 1-\angle 2$.

3. 一個等腰三角形的頂角是60°.試問那底邊上的外角是幾度?



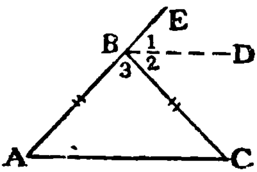
設 在$\triangle ABC$裏，$AB=AC$. $\angle A=60^\circ$

問 $\angle 1$是幾度

解

$\triangle ABC$是等腰	已設
$\angle B+\angle C=180^\circ-\angle A$	$\triangle$內各角的和是180°.
$2\angle B=180^\circ-\angle A$	等腰$\triangle ABC$裏，$\angle B=\angle C$.
$\angle B=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A\cdots\cdots(a)$	用2除上式.
若$\angle A=60^\circ$，則$\angle B=60^\circ$	以60°代(a)式的$\angle A$，就得$\angle B$.
然$\angle 1=180^\circ-\angle B\cdots\cdots(b)$	外邊成直線的兩鄰角.
$\therefore \angle 1=120^\circ$	將$\angle B=60^\circ$代入(b)式的$\angle B$.

4. 試證等腰三角形靠頂點的外角的平分線,必同他的底平行.



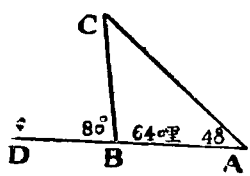
設 在等腰△ABC裏, BA=BC
BD是靠頂點的外角∠CBE的平分線.

求證 BD∥AC

證

∠A=∠C	等腰△ABC裏,對等邊的角相等.
∠1=∠2	BD是∠EBC的平分線.
∠EBC=∠A+∠C	外角等於內對角的和.
∠EBC=∠1+∠2	全量等於分量和
∠A+∠C=∠1+∠2	等於同量的量相等,
∠C=∠2	等量(∠A+∠C, ∠1+∠2)的一半相等.
∴ BD∥AC	BD,AC兩線,爲BC所截,內錯角(∠C,∠2)相等

5. 一個水手划船,從A處向AD方向出發,原來知道∠DAC是40°.後來划到64英里的地方,他找出∠DBC變爲80°了. 他於是斷定BC的距離,必定也是64英里. 這話對不對?(看圖.)



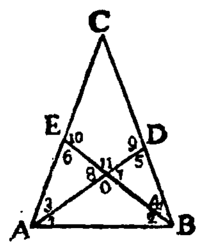
設 在△ABC裏, ∠DAC=40°
BA=64英里, ∠DBC

求證 BC=64英里

證

∠ABC=100°	∠CBD (80°)的補角.
∠C=180°−(∠ABC+∠A)	△裏各角的和等於180°.
=180°−(100°+40°)	∠ABC=100°, ∠A=40°.
=40°=∠A	∠DAC=40°, ∠C也是40°.
∴ BA=BC=64英里	△裏對等角(∠A,∠C)的邊也等.

6. 設等腰三角形ABC的底角平分線AD同BE相交於O,能夠成功那幾對等角? 幾對全等三角形? 幾對相等的線段?



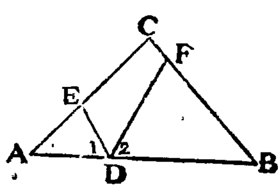
(假) 在等腰△ABC裏, $AC=BC$,
AD平分$\angle A$, BE平分$\angle B$.

(求) 等角,等線,同全等三角形

(證)

$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$	等腰△的等角之半.
$\angle 7=\angle 8, \angle 11=\angle O$,	對頂角相等
$\triangle ABD \cong \triangle ABE$	$\angle 1=\angle 2, AB=AB, \angle B=\angle A$(兩角夾邊)
$\angle 5=\angle 6$	全等△ABD,ABE的對應角相等,
$AE=BD$, $AD=BE$	全等△的對應邊相等.
$\triangle ADC \cong \triangle BEC$	$AD=BE, \angle 2=\angle 4, AC=BC$(兩邊夾角)
$CD=CE$	全等△ ADC,BEC的對應邊相等.
$\triangle AOE \cong \triangle BOD$	$\angle 5=\angle 6, AE=BD, \angle 3=\angle 4$(兩∠夾邊)
$AO=BO$, $DO=EO$	全等△AOE,BOD的對應邊相等.

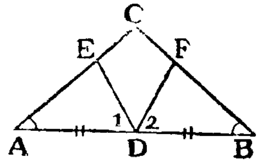
7. 設等腰三角形ABC內,D為底上的一點,而且$\angle 1=\angle 2$,試問有沒有一個D點的地位,能令$DE=DF$的麼?(圖2)



(假) 在等腰△ABC內$AC=BC$,
D是底邊上的一點, $\angle 1=\angle 2$.

(問) 有沒有一個D點的地位.
能令$DE=DF$

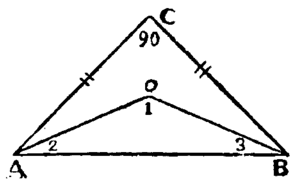
(答) 若D在底邊AB的中點上,則$DE=DF$.



(證) 在△AED同△BDF裏

AD=DB	D是AB的中點.
∠1=∠2	已設
∠A=∠B	等腰△ABC裏,對等邊的角相等.
△AED≡△BDF	兩△的兩角夾邊對應相等.
∴ DE=DF	兩全等△的對應邊相等.

8. 一個等腰三角形的頂角是直角,其餘兩銳角的平分線相交所成對底邊的角是多少度?



(設) 在等腰△ABC裏,AC=BC. ∠C=90°,AO平分∠A,BO平分∠B.

(找出) ∠1的度數來

(解) ∠A+∠B=90°	直角△裏兩銳角的和是一直角.
$\angle A=\angle B=\frac{90°}{2}=45°$	等腰△ABC的對等邊的角相等.
∠2=∠3=22°.5	AO平分∠A(45°),BO平分∠B(45°).
∴∠1=180°−2×22°.5	△AOB的各角的總和是180°.
=135°	三隻∠s中減去∠2,∠3便得∠1.

教科書內第93面 目解題

1. 凡正方形都是長方形嗎? 調轉來說,凡長方形都是正方形嗎?

(解) 正方形是各邊都相等的長方形,但長方形不能都是正方形.

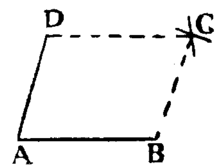
2. 凡正方形同長方形都是平行四邊形麼? 調轉來說對不對?

(解) 正方形同長方形的各對邊,都相平行,所以都可

稱爲平行四邊形. 但平行四邊形不都是長方形或正方形.

教科書內第93至94面 實驗題

1. 如圖作 ABCD 四邊形,令 DC=AB, BC=AD. 用 §83(2) 去試驗,是不是 BC ∥ AD, DC ∥ AB, 就是這個四邊形是平行四邊形嗎?



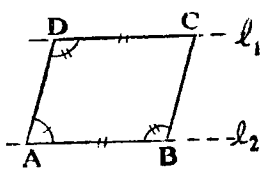
(解) 畫任意角 DAB,以 B 做圓心,AD 做半徑,再以 D 做圓心 AB 做半徑,各畫 1 弧相遇於 C,畫 BC, DC 則成 ABCD 四邊形.

量得 ∠D=( )° ∠C=( )° 則 BC ∥ AD(∵ BC, AD 兩線爲 DC 所截,截線同邊內角 ∠D, ∠C 的和是 180°) §83(2).

量得 ∠D=( )° ∠A=( )° 則 DC ∥ AB(∵ DC, AB 爲 DA 所截其截線同邊內角 ∠D, ∠A 的和是 180°) 見 §83(2).

∴ ABCD 是 ▱ (∵ BC ∥ AD, DC ∥ AB. 相對的兩邊平行).

2. 在平行線 l_1, l_2, 上,截取相等線段 AB 同 CD. 如圖,畫 AD 同 BC. 間 ABCD 是不是平行四邊形.



(解) 畫 l_1 ∥ l_2. 在此兩平行線上,截取 DC=AB. 畫 AD 同 BC. 量得 ∠A=( )° ∠B=( )° 則 AD ∥ BC (∵ 截線同邊兩角 ∠A, ∠B 的和是 180°)

∴ ABCD 是 ▱ (∵ DC ∥ AB, AD ∥ BC 相對的邊互平行)

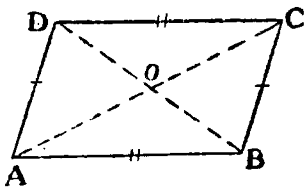
3. 在題一裏面作對邊都相等,題二裏

面.兩對邊等長且平行,這些是不是作平行四邊形的充分條件?

解 依§93的定義:一相對的兩邊互相平行的四邊形.叫做平行四邊形. 在題一題二裏,都可以證明相對的兩邊互相平行,所以都是作平行四邊形的充分條件.

4. 小心作一個大的平行四邊形ABCD.就是令 $AB \parallel DC$, $BC \parallel AD$. 畫對角線AC,BD.相交在O點,試比較(1)AB同DC,AD同BC;(2)AO同OC,BO同OD; (3)$\triangle ABC$同$\triangle ADC$.

解 先畫AB與CD兩線互相平行,由A點任作AD線與DC交於D.再由B點作 $BC \parallel AD$. 則此ABCD是▱.畫AC,BD兩對角線,相交於O.



量出 (1) $AB=DC=(\quad)$吋 $AD=BC=(\quad)$吋

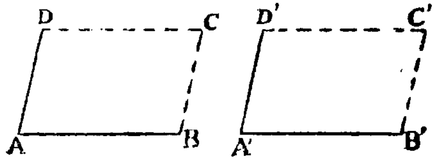
(2) $AO=OC=(\quad)$吋 $BO=OD=(\quad)$吋

由是則(3) $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ [$\because AB=DC$, $BC=AD$, $AC=AC$ (兩△三邊對應相等)]

5. 作平行四邊形ABCD,A′B′C′D′,如下邊右圖,令 $AB=A'B'$, $AD=A'D'$, $\angle A=\angle A'$ 試量BC同B′C′, CD同C′D′, $\angle B$同$\angle B'$, $\angle C$同$\angle C'$, $\angle D$同$\angle D'$,再比較他們.

解 依上面題一的作法,先畫 $\angle A=\angle A'$, $AB=A'B'$, $AD=A'D'$, 再使 $DC=AB=D'C'$, $BC=AD=B'C'$, 則成

ABCD,與 A'B'C'D'兩圖.



量得BC=B'C'=( )吋

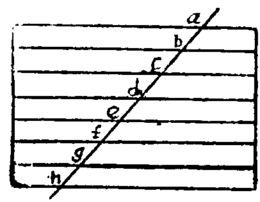
CD=( )吋=C'D'

∠C=∠C'=∠A=∠A'=( )°

∠B=∠B'=∠D=∠D'=( )°

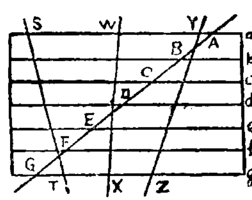
教科書內第100至101面 實驗題

1. 拿一張有橫格子的紙,畫一條線穿過那些格子,這條線在每格中間的各段,有什麼關係?



解 將圓規的一脚定在a點,他脚定在b點,再將a脚提起(b脚不動),徐徐轉在c點上,再將b脚提起(c點不動),轉在d點上,照樣把這線段量完,就知道在這橫格子中間的各段都相等.

2. 畫離開一吋寬的幾條平行線,再隨便畫一條截線. 比較每相鄰兩平行線,在這截線上所割各線段的長,再畫幾條截線試試. 說出一個似乎可用題1和本題去判定的命辭來.

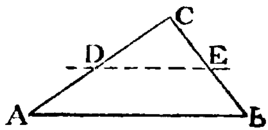


解 先依題意作好右圖,使a,b,c,d,……諸平行線都是離開1吋的距離,再照題1的量法,在AG線上量得AB=BC=CD=DE=…………在ST, WX, YZ,各線上量得諸平行線在截線上,所割的各段都相等.

由題1,題2,似乎可得一命辭如下:

"等距的諸平行線,任割若何截線,則其所割的各段必一一相等"

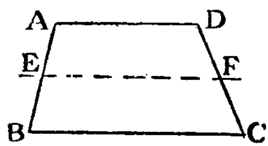
3. 作△ABC,從AC的中點D畫DE∥AB,遇BC於E,量BE同EC. 比較他們的長短.說出一個似乎可用本題判定的命辭.(圖2)



解 在任意△ABC裏,由AC的中點D作DE使與底邊AB平行,遇BC於E.用圓規照題1的量法,量得CE=BE.照樣畫下幾個三角形來實驗,便可得一命辭如下:

"與一三角形底邊平行的線,若平分其一邊,必平分他一邊",

4. 畫梯形,並從一邊的中點畫一線同底平行,問這線平分梯形那邊嗎? 說出一個似乎可以用這試驗判定的命辭來.



解 作梯形ABCD如圖,由AB的中點E畫EF與底邊BC平行,遇DC於F,用圓規量得DF=CF(即F平分DC邊)

照樣畫幾個梯形來試驗,便可得一命辭如下:—

"與梯形底邊平行的線,若平分一邊也必平分他邊".

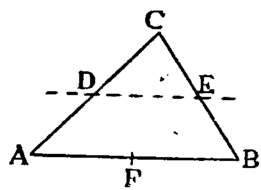
5. 在前面圖2裏,若連結AC,BC的中點D,E,那麼DE是不是同底邊平行?說出一個似乎可以判定的命辭來.

解 在題3的圖2裏若D,E,是AC,BC的中點,用量角器便量得∠CDE=∠DAB=( )° 即知DE∥AB.

(∵DE, AB, 兩線, 爲 CA 所截, 其同位角相等)

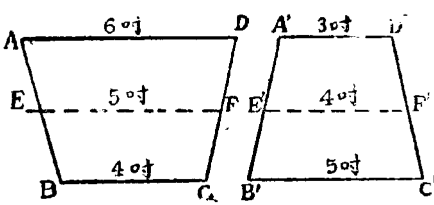
由此可知:—"聯三角形兩邊中點的線段, 必與第三邊平行".

6 畫△ABC, 連結 AC, BC 的中點 D,E 比較DE同AB的長短,同樣多畫幾個三角形做試驗,說出一個似乎可從這個試驗得來的命辭.



解 畫任△ABC, 連結AC, BC的中點D, E. 用圓規量得AB恰是DE的2倍. 照樣再畫幾個△s(圖略)其結果都是同右圖一樣, 故知:— "連結三角形兩邊中點的線段,必是第三邊的一半".

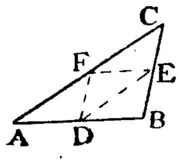
7. 作一個兩底是6吋, 4吋的梯形,畫中線,量他的長短,再同兩底的和比較,再作底是 5 吋, 3 吋的梯形做試驗,這裏邊又似乎有什麼命辭好說麼?



解 作一任意高的兩梯形ABCD,A'B'C'D'. ABCD的底是6吋,4吋,EF是他的中線. 量得EF=5 吋, A'B'C'D' 的底是3吋,5吋. E'F' 是他的中線, 量得E'F'=4吋.由此可得一命辭:— "梯形的中線,是他兩底和的一半".

8. 畫一個不等邊三角形,聯各邊的中點,把所成的四個三角形剪開來,再一個一

個疊起來,比較他們的大小.(圖3.)



解 將上圖△ABC裏,四個小△,剪開疊起,就知道△AFD≡△DFE≡△DBE≡△FEC

教科書內第101面 目解題

1. 下一個平行四邊形的定義.

解 凡四邊形的兩對對邊,互相平行(或相等)就稱爲平行四邊行. (見§93)

2. 從平行四邊形定理,試舉出他的幾個性質.

解 在平行四邊形中: (1)對邊相等, (2)對角相等, (3)兩對角線互相平分, (4)不相對的兩角互爲補角, (5)兩對邊相等且平行, (6)對角線分▱爲兩全等△.

3. 全等平行四邊形定理,是用什麼證法.前面幾個定理曾用同樣法子證過麼?

解 全等平行四邊形定理(卽§98的定理)其證法是用§29 (1)的直接驗全等法(卽§46所說的理想重合法)在前面§51, §53, §56, §75, 幾個定理都用過"理想重合法"證過的.

教科書內第105至106面 目解題

1 聯結△ABC內各邊的中點,設AB=22單位,BC=14單位,AC=28單位,找出DE,DF,同EF. (圖1.)

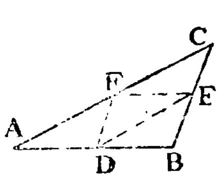


圖1.

設 △ABC裏D, E, F, 是AB, BC, AC,

的中點. AB=22, BC=14, AC=28.

(找出) DE, DF, 同 EF 來.

解 $DE=\frac{AC}{2}=14$

$DF=\frac{BC}{2}=7$

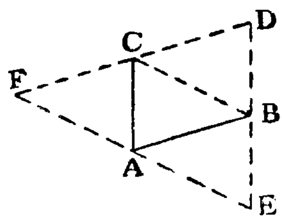
$EF=\frac{AB}{2}=11$

聯結△兩邊中點的線,是第三邊的一半 (見 §99 推論五)

2. 如圖 2 過 △ABC 各頂點,畫和對邊平行的各線, (a) ABCD 是什麼形?

(b) 比較AB同CD; BD同AC.

(c) 同樣比較 AB 同 CF; BC同AF;AC同BE;CB同AE.



證 過 △ABC 的各頂點畫 FD ∥ AB; FE ∥ BC; DE ∥ AC.

解 (a) ABCD是▱ | AB ∥ CD, AC ∥ BD (兩對對邊相平行)

(b) AB=CD, AC=BD | ▱ ABCD 的對邊相等.

(c) AB=CF. BC=AF | ▱ ABCF 的對邊相等.

AC=BE, CB=AE | ▱ ACBE 的對邊相等.

3. 上面圖 2 裏面

(a) BC等於EF的一半嗎?如果這樣,什麼緣故?

(b) 同樣比較 AC 同 ED, AB 同 FD.

解 在上面第 2 題的圖 2 裏

(a) 已知 BC=FA=AE, ∴BC=(FA+AE)÷2= $\frac{FE}{2}$

(b) 已知 AC=DB=BE, $\therefore$ AC=(DB+BE)÷2=$\frac{DE}{2}$

(c) 已知 AB=FC=CD, $\therefore$ AB=(FC+CD)÷2=$\frac{FD}{2}$

4. 又在上邊圖2裏面,若AB=3吋,BC=3吋半,AC=2吋半,找出DF,FE同ED.

㊀ 若AB=3吋 $\therefore$ DF=FC+CD=2AB=6吋

BC=$3\frac{1}{2}$吋 FE=FA+AE=2BC=7吋

AC=$2\frac{1}{2}$吋 ED=DB+BE=2AC=5吋

5. 用平常的尺,我們怎樣去測定幾條平行線是不是等距離?是不是一定要使這尺同這些線成直角,才可以測得出來嗎?

㊁ 用直尺放在諸平行線上,照第100面實驗題1,題2,的理,只要直尺能通過這些線,無論如何放法,都可測出等距來,不一定要與這些平行線成直角.

6. 倘梯形的一底是五吋,又一底是二吋,中線的長是多少?

㊂ 依§99推論六所說的:—"聯結梯形兩邊中點的線,是兩底和的一半."(看下圖)

$\therefore$ 這梯形的中線=(5+2)÷2=3.5吋

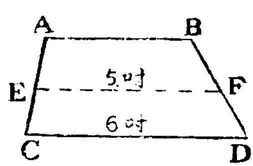
7. 倘梯形的一底是六吋,中線是五吋,其他一底是多少?

㊃ 既知梯形的中線是兩底和的一半

$\therefore$ EF=(AB+CD)÷2=5吋

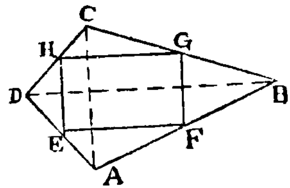
AB+6吋=2×5吋

$\therefore$ AB=2×5吋−6吋=4吋



教科書內第106至107面 理解題

1. 聯結四邊形相鄰各邊的中點,證明所成的必是一個平行四邊形.



㊙設 在ABCD四不等邊形裏,各邊的中點是E,F,G,H,

㊙求證 EFGH是平行四邊形

㊙證 聯結D與B, A與C.

在△BCD與ABD裏

HG ∥ DB, EF ∥ DB	聯△兩邊中點的線∥第三邊.
HG ∥ EF	兩線皆與他線平行,則互相平行.
依同理 HE ∥ GF	△ADC, ABC裏, HE,GF都與AC平行.
∴ EFGH是▱	HG ∥ EF, HE ∥ GF (兩對對邊相平行).

(或證HG ∥ EF並且 $HG=EF=\frac{DB}{2}$. 以兩對邊相等且平行做理由,證明EFGH是▱也可.)

2. 三等分等邊三角形的每邊,照圖1畫線,試證∠A=∠F=∠B.

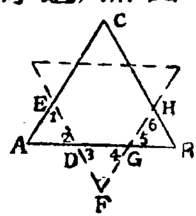


圖1.

㊙設 在等邊△ABC裏

$$AE=AD=DG=BG=BH=\frac{AB}{3}$$

㊙求證 ∠A=∠F=∠B.

㊙證 ∠A=∠B=∠C $=180°\div3=60°$	等邊△各角都等. △裏各角的和是180°.
$\angle1=\angle2=\frac{180°-\angle A}{2}=60$	等腰△ADE裏, AD=AE, ∠A=60°.
$\angle5=\angle6=\frac{180°-\angle B}{2}=60°$	等腰△BGH裏, BH=BG, ∠B=60°.
$\angle3=\angle4=60°$	等角∠2, ∠5的對頂角相等.
$\angle F=180°-2\times60°=60°$	△DFG裏各角的和是180°

∴ $\angle A=\angle B=\angle F$　　　$\angle A$, $\angle B$, $\angle F$都是60°.

3. 幾根棒用釘連住,可以自由活動,如下邊圖2.假若AB=AC,證明不管BC傾斜到甚麼地步,那垂直距離AD同CE總相等.

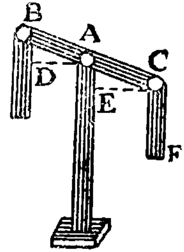


圖2.

㊟ 右圖裏A,B,C,是三個釘BC,BD,CF,三棒都可自由活動,所以無論BC斜到怎樣,BD;CF總是向下垂.

即 BD ∥ AE ∥ CF.AB=AC.

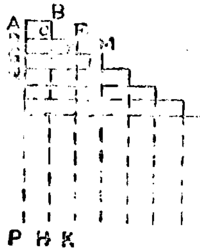
AD ⊥ BD, CE ⊥ AE

求證. AD=CE.

㊟ 在△ABD與△ACE裏,無論BC怎樣傾斜,下面的證明總是真確的.

AD ∥ CE	BD, AE,兩平行線的垂線.
∠BAD=∠ACE	平行線AD,CE為BC所截,同位角相等.
∠ABD=∠CAE	平行線BD,AE為BC所截,同位角相等.
AB=AC	已設
△ABD≅△ACE	兩△的兩角夾邊對應相等.
∴ AD=CE	兩全等△的對應邊相等.

4. 有樓梯從下到上,高十二呎.每步八吋高,十吋寬. 試問要多少長的地氈才可以把這梯舖滿,舖到樓還多十吋?



㊟ 樓梯每步高8吋=BC.

樓梯每步寬10吋=CE.

舖到樓口所多的10吋=AB.

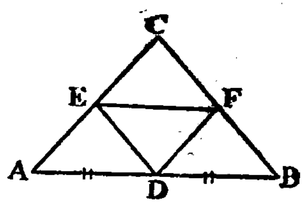
樓高12呎=144吋=BH.

㊟ 舖滿樓梯並多10吋的地氈的長.

解 ABCD, ABHP 是▭.	BC⊥AB, BH∥AP, AB∥PH.
AB=PH, BC=AD	矩形的對邊相等.(餘可類推)
梯各步高的和=樓高	諸▭的對邊BC,EF,MN,…和是BH
梯的步數$=\frac{144}{8}=18$步	每步高8吋,總和是144吋.
「(梯各步寬的和)+(到樓多的10吋)=(17×10)+10=180吋」	「每步寬10吋,樓梯到B點就盡了,故18步只有17個寬.但到樓還多10吋,仍可作18步算」.
∴氈長=(樓高)+180吋=12呎+15呎=27呎	氈必舖滿梯的總高及總寬.

5. ABC是等腰△,D是底邊AB的中點,DE∥BC, DF∥AC, 畫EF並證四個三角形都相等.

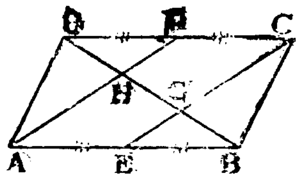
設 等腰△ABC裏,AC=BC,
D是底邊AB的中點
DE∥BC,DF∥AC,畫EF.



求證 △ADE≡△DEF≡△CEF≡△BDF

證 E是AC的中點	DE平分AB,且平行於BC.
F是BC的中點	DF平分AB,且平行於AC.
EF∥AB	連△裏兩邊中點的EF∥底AB.
ADFE是▱	EF∥AD, AE∥DF.(兩對邊平行)
∴ △ADE≡△DEF	▱的對角線,分▱為兩全等△,
依同理 △CEF≡△DEF≡△BDF	}CEDF, BDEF都是平行四邊形.

6. ▱ABCD裏面.E,F,是AB,CD的中點,證明AF,CE三等分DB.



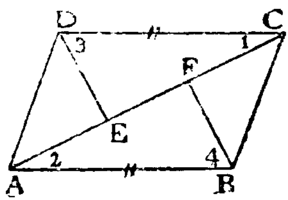
設　在▱ABCD裏面
E, F, 是AB, CD的中點

求證　DH=HG=GB

證

FC=AE	▱ABCD裏等邊的一半相等
AFCE是▱	FC∥AE, FC=AE(對邊∥,且相等)
FA∥CE	▱AFCE的對邊相平行.
△DGC裏,DH=HG	FH平分DC,且∥CG,所以也平分DG.
△BHA裏,GB=HG	EG平分AB,且∥AH,所以也平分BH.
∴ DH=HG=GB	等於同量的量相等.

7.　從▱的頂點,畫對角線的垂線,求證這垂線都相等.



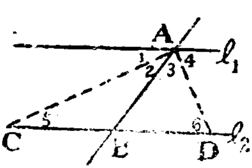
設　AC是▱ABCD的對角線.
BF⊥AC, DE⊥AC

求證　DE=BF

證　在直角△CED同ABF裏

∠1=∠2	平行線DC, AB,爲AC所截.內錯∠相等,
∠3=∠4	兩rt.△裏,1銳角對應相等,他角必等.
DC=AB	▱ABCD的對邊相等.
△DEC≅△ABF	兩△裏,兩角夾邊對應相等.
∴ DE=BF	兩全等△的對應邊相等.

8.　右圖裏面,l_1 l_2兩平行線被AB所截,AC和AD平分A處的兩內角,證明CBA,DBA都是等腰三角形.



設　$l_1 \parallel l_2$, AB是他們的截線,
AC,AD兩平分線,使∠1=∠2,∠3=∠4.

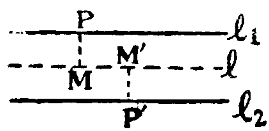
求證　△ABC, △ABD是等腰△.

證 $\angle 1=\angle 5$	$l_1 \parallel l_2$ 爲 AC 所截其內錯角相等.
$\angle 2=\angle 5$	$\angle 1=\angle 2$ (已設)
∴ △ABC 是等腰	△裏,兩角相等,其對邊 CB,BA 也相等.
$\angle 4=\angle 6$	$l_1 \parallel l_2$, 爲 AD 所截,其內錯角相等.
$\angle 3=\angle 6$	$\angle 3=\angle 4$ (已設)
∴ △ABD 是等腰	△裏,兩角相等,其對邊 AB,BD 也相等.

教科書內第110至111面 自解題

1. 如圖 l_1, l_2 各離開 l $\frac{3}{8}$ 吋,並且同 l 平行,那麼這平面裏所有和 l 相隔 $\frac{3}{8}$ 吋點的軌迹是什麼?

答 在一平面內所有和 l 相隔 $\frac{3}{8}$ 吋的點的軌迹都在 $l_1 l_2$ 上.



解 由 l_1 或 l_2 上任意點 P 或 P' 所作與 l 垂直的線 MP, M'P' 總是 $\frac{3}{8}$ 吋. (∵ $l_1 l_2$ 是與 l 平行,並距 l 爲 $\frac{3}{8}$ 吋)

距 l 爲 $\frac{3}{8}$ 吋的點都在 $l_1 l_2$ 上. 若不在 l_1 或 l_2 上的點,便是大於(或小於) $\frac{3}{8}$ 吋.

(∵ $l_1 \parallel l, l_2 \parallel l$, 則平行線間的距離($\frac{3}{8}$ 吋)處處相等).

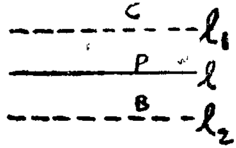
2. 一平面裏同所給直線所有有一定距離點的軌迹是什麼?

答 在一平面內同一直線有一定距離點的軌迹便是與那直線成1定距離的平行線.

如 上題1, $l_1 l_2$ 都是與 l 所給線有一定距離的平行線.
∴ $l_1 l_2$ 便是與 l 成一定距離的點的軌迹.

3. 如圖 $l_1 \parallel l_2$, l 恰在他們的中間,並且

都相平行,那麼這平面裏所有離 l_1 同 l_2 等遠點的軌迹是什麼?



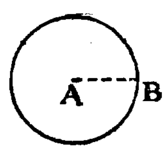
答 在一平面內所有離開兩平行線 l_1 l_2 等遠點的軌迹是在 l_1 l_2 中距處所作的平行線 l.

解 l 線上任便那一點P,到 l_1 l_2 的距離總是相等.
(∵ l 是在 l_1 l_2 中距處的平行線)
與 l_1 l_2 等距的點都在 l 上. 若不在 l 線上的點, 便不等於 l_1 l_2 距離的一半.

4. 所有和兩平行線等遠點的軌迹是什麼?

答 和兩平行線等遠點的軌迹,是兩平行線中距處所畫的平行線(如上面的題 3.)

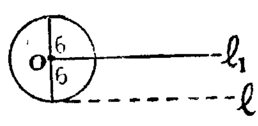
5. 在一平面裏,所有離一個定點 3 吋長的點的軌迹是什麼? 畫出這個軌迹來.



解 離一定點 3 吋遠的點的軌迹,是:用所給點做圓心,3 吋做半徑所畫的圓周. 如右圖,A 是所給點,AB 長 3 吋,所有在圓周上的點,距 A 點都是 3 吋.

教科書內第112面 目解題

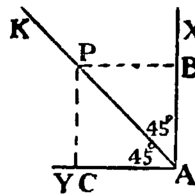
1. 直徑一呎長的車輪,在他的軌道上進行,這輪軸的中心點的軌迹是什麼?



解 輪軸中心的軌迹是離軌道 $\frac{1}{2}$ 呎的點上所作與軌道平行的線.

如　右圖的圓是直徑1呎的車輪,O是軸心,軌道l與軸心O的距是$\frac{1}{2}$呎. ∴距l 6吋遠的平行線l_1便是軸心的軌迹.

2.　和本書這頁的下邊同右邊的等遠的點的軌迹是什麼?



答　與書面下邊同右邊等遠的點的軌迹是那兩邊所成角(即90°角)的平分線.〔解法與§100同理〕

3.　一平面上離開一定點二吋長的點的軌迹是什麼?

答　離一定點二吋長的點的軌迹,是以定點做圓心,二吋長做半徑所畫的圓周.〔此題與111面題5同〕.

4.　一架鐘上面長針端點的軌迹是什麼?

答　長針端點的軌跡便是鐘面的邊上所畫的一個圓周.(或云,以針軸爲心,到針端的距爲半徑,所畫的圓便是長針端點的軌迹.)

教科書內第116面　目解題

1.　四邊形各角的和等於多少直角?

解　依§105:—"n邊形各角的和$=(2n-4)$∠s R."

∴　4邊形各角的和$=(2\times4-4)$∠s R. $=4$∠s R.

2.　五邊形各角的和等於多少直角?等角五邊形的一隻角是多少度?

解　n邊形各角的和$=(2n-4)$∠s R$=(n-2)2$∠s R.

∴　5邊形各角的和$=(5-2)2$∠s R$=6$∠s R$=540°$

等角5邊形的一角$=540°\div5=108°$.

3. 等角五邊形的外角是多少度?

解 依§106"一任何多邊形的外角的和是$4\angle s$R."

∴等角5邊形的外角的和$=4\angle s\,R=360^\circ$.

∴等角5邊形的各外角$=360^\circ\div5=72^\circ$

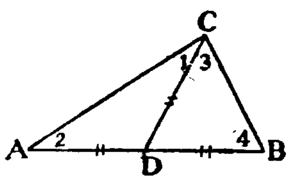
或用$180^\circ-108^\circ=72^\circ$. 也可.

4. 等角十邊形的外角是多少度?

解 等角10邊形的外角$=360^\circ\div10=36^\circ$

教科書內第124至128面 理解題

1. 在一個三角形的底邊上的中線,若等於底邊的一半,那麼這個三角形是直角三角形.



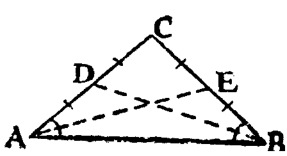
設 △ABC裏,D是AB的中點. CD是△ABC的中線,又是AB的一半,即 CD=AD=DB.

求證 △ABC是直角△.

證 在△ADC同△BCD裏

$\angle1=\angle2,\angle3=\angle4$	AD=DC,DB=DC.(對等邊的角)
$\angle1+\angle2+\angle3+\angle4=180^\circ$	△ABC裏,各角的和是180°,
$2\angle1+2\angle3=180^\circ$	$\angle1=\angle2,\angle3=\angle4$
∴ $\angle1+\angle3=90^\circ$	用2除上式.
則△ABC是直角△	△ABC裏∠C是直角.

2. 等腰三角形兩腰上的中線相等.



設 等腰△ABC裏,AC=BC.

AE,BD是兩腰上的中線

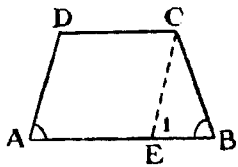
即 E, D,是BC,AC的中點

求證 AE=BD.

證 在△AEB與△ADB裏,

EB=DA	等腰BC, AC,的一半相等.
AB=AB	公共邊
∠ABE=∠DAB	等腰△ABC裏,對等邊的角相等.
△AEB≌△ADB	兩△的兩邊夾角對應相等.
∴ AE=BD	兩全等△的對應邊相等.

3. 梯形底邊兩端的角若相等,那麼這個梯形的不平行的兩邊也相等.



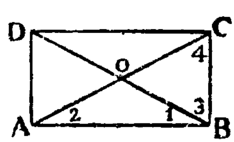
設 梯形ABCD的∠A=∠B

求證 DA=CB.

證 由C作CE∥DA

∠1=∠A=∠B	CE∥DA,其同位角相等.
CE=CB	△BCE裏,兩角∠1,∠B相等,其對邊也等.
ADCE是▱	DC∥AE, CE∥DA(兩對對邊相平行).
CE=DA	▱ADCE的對邊相等.
∴ DA=CB	等於同量CE的量相等.

4. 平行四邊形的對角線若相等,那麼這個平行四邊形是一個長方形.



設 ▱ABCD裏,其對角線AC=BD.

求證 ABCD是長方形.

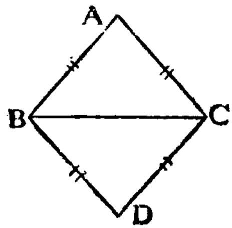
證 在△AOB同△COB裏

(參看前面題1.)

AO=CO=DO=BO	▱的對角線互相平分,且設AC=BD.
∠1=∠2, ∠3=∠4	AO=BO, CO=BO(對等邊的角相等)
∠1+∠3=90°	∠1+∠2+∠3+∠4=180°

DA⊥AB	▱的對邊(CB, DA)是平行的.
DC⊥CB	▱的對邊(AB, DC)是平行的.
∴ABCD是長方形	▱的各角都是直角(卽四線互成正交)

5. 若經過等腰三角形底邊的兩端畫兩線,各同一腰平行,那麼又可成功另外一個等腰三角形.



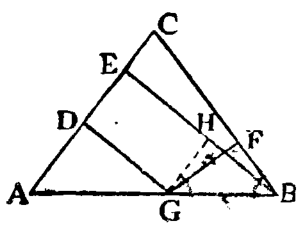
設 等腰△ABC裏, AB=AC,
DC ∥ AB, BD ∥ AC.

求證 △BDC也是等腰△.

證

ABDC是▱	DC ∥ AB, BD ∥ AC.
△ABC≡△BDC	▱的對角線BC 平分▱ABDC爲兩全等△.
∴△BDC是等腰	△BDC與等腰△ABC全等

6. 等腰三角形底邊上隨便那一點到兩腰的垂線的和,等於底邊一端到對邊的高.



設 等腰△ABC裏, AC=BC.
G是底邊AB上的任意點
DG⊥AC, GF⊥BC, BE⊥AC.

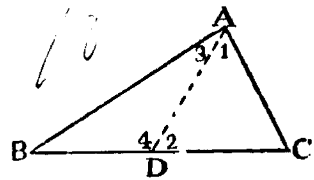
求證 DG+GF=BE.

證 由G作GH ∥ AC;
在△HGB, FBG裏,

∠HGB=∠FBG	HG ∥ CA, 同位角∠HGB=∠A(∠A=∠B).
∠GHB=∠BFG	BE⊥AC,則BE⊥GH(因GH ∥ AC)又GF⊥BC.
GB=GB	△HGB同△FBG的公共邊.
△HGB≡△FBG	兩直角△的一邊與一銳角對應相等,他銳角必也相等.
BH=GF	兩全等△的對應邊相等

▱的對邊 $HE=DG$	GD,BE都$\perp AC$;$GH \parallel AC$,則$HEDG$是▱.
$BH+HE=GF+DG$	等量加等量和相等.
$DG+GF=BE$	$BH+HE=BE$.

7. 證明三角形的隨便那一邊比其餘兩邊的差大.



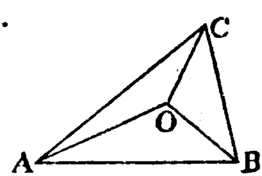
設　任意$\triangle ABC$裏,$BC>AC$.

求證　$AB>BC-AC$.

證　在BC邊上截取$CD=CA$.

畫AD則$\angle A<180^\circ$	$\triangle$裏各角和是180°.(全量大於分量)
$\angle 2+\angle 4>\angle 1+\angle 3$	$\angle 2+\angle 4=180^\circ$. $\angle 1+\angle 3<180^\circ$.
$\angle 2\quad=\angle 1$	$\triangle ACD$裏,對等邊CA,CD的角也等.
$\angle 4>\angle 3$	上兩式相減.
$AB>BD$	$\triangle ABD$裏大角的對邊也大.
$\therefore AB>BC-AC$	$BD=BC-AC$.

8. 三角形裏隨便那一點到三頂點的距離的和,比三邊和的一半大.



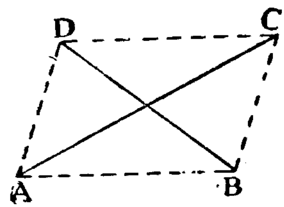
設　$\triangle ABC$裏,O是其中的任意點.
畫AO, BO, CO.

求證　$CO+BO+AO>\dfrac{AB+BC+AC}{2}$

證

$CO+BO>BC$	由B至C以直線爲最短.
$BO+AO>AB$	〃 A 〃 B 〃 〃 〃 〃 〃 〃
$CO+AO>AC$	〃 A 〃 C 〃 〃 〃 〃 〃 〃
$2(CO+BO+AO)>BC+AB+AC$	以上三式相加
$\therefore CO+BO+AO>\dfrac{AB+BC+AC}{2}$	用2除各節

9.　若平行四邊形的兩對角線不等,那麼這個平行四邊形不是長方形.



設　▱ABCD的對角線不等

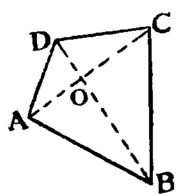
AC>BD.

求證　▱ABCD非長方形,

證　在△ABC同△BCD裏,

AB=DC	▱ABCD的對邊相等.
BC=BC	兩△的公共邊,
AC>BD	已設
∠B>∠C	兩△裏兩邊對應相等,第三邊大者其夾角也大. (見§76定理)
∴▱ABCD非▭	長方形的各角都是直角.

10.　四邊形各邊的和,比兩對角線的和大,比這和的兩倍小.



設　AC,BD是四邊形ABCD的對角線

求證　(a) AB+BC+CD+DA>AC+BD.

(b) AB+BC+CD+DA<2(AC+BD)

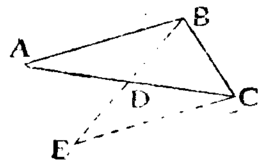
證　(a)

BC+CD>BD AB+AD>BD	由B至D以直線爲最短.*
AB+BC>AC CD+AD>AC	由A至C以直線爲最短
2(AB+BC+CD+AD)>2(BD+AC)	以上四式相加,
∴AB+BC+CD+AD>BD+AC	用2除各節.

*　此種理由§41(1)也可用來證明:—
"任意三角形的兩邊的和大於第三邊".

(b) $AB<AO+BO$	由 A 至 B 以直線爲最短
$BC<CO+BO$	〃 B 〃 C 〃 〃 〃 〃 〃 〃
$CD<CO+DO$	〃 C 〃 D 〃 〃 〃 〃 〃 〃
$DA<AO+DO$	〃 D 〃 A 〃 〃 〃 〃 〃 〃
$AB+BC+CD+DA<2(AO+CO+BO+DO)$	上四式相加
$\therefore\ AB+BC+CD+DA<2(AC+BD)$	

11. 三角形兩邊的和,比第三邊上中線的兩倍大.



設 $\triangle ABC$ 裏,BD 是 AC 上的中線

即 $AD=DC$

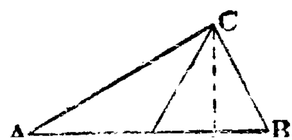
求證 $AB+BC>2BD$.

證 延長 BD 至 E, 使 $DE=BD$.

在 $\triangle ABD$ 同 $\triangle DEC$ 裏,

$AD=DC$, $BD=DE$	已設 $AD=DC$; 已作 $BD=DE$.
$\angle ADB=\angle CDE$	AC,BE 兩直線相交,其對頂角相等
$\triangle ABD\cong\triangle DEC$	兩△裏,兩邊及夾角對應相等
$BA=CE$	兩全等△的對應邊相等.
$CE+BC>BE$	由 B 至 E 以直線爲最短.
即 $AB+BC>2BD$	$CE=BA$, $BE=2BD$.

12. 在 $\triangle ABC$ 裏,若 $AC>BC$,$CD\perp AB$,CE 是 AB 上的中線. 證明:(1)$\angle ACD>\angle BCD$:(2)$\angle AEC>\angle BEC$.



設 在 $\triangle ABC$ 裏, $AC>BC$

$CD\perp AB$, CE 是 AB 上的中線

(2) $\angle AEC > \angle BEC$

(證) (1)在 $\triangle BCD$ 同 $\triangle ACD$ 裏

$\angle BCD + \angle B = \angle A + \angle ACD$	直角△裏,兩銳角和是90°
$\angle B > \angle A$	△ABC裏,對大邊AC的角大.
∴ $\angle BCD < \angle ACD$	上兩式相減〔見§43(13)〕.

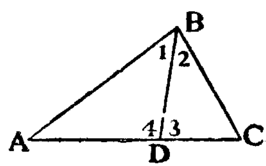
(2) 在 $\triangle AEC$ 同 $\triangle BCE$ 裏

$AE = BE$	CE是AB邊的中線,(已設)
$CE = CE$	CE是△AEC同△BCE的公共邊,
$AC > BC$	已設.
∴ $\angle AEC > \angle BEC$	兩△裏,兩邊對應相等,第三邊大者,其夾角也大,(§76)

按〔提示 $\angle CED < \angle R$〕則有下面的證法:—

$\angle CED < 90°$	直角△CED裏,他兩角都是銳角.
$\angle AEC > 90°$	在AB線上 $\angle CED + \angle AEC = 180°$.
∴ $\angle AEC > \angle CEB$	$\angle CED$ 卽 $\angle CEB$.

13. 畫△ABC裏一角的平分線BD,證明BC>DC, BA>AD.



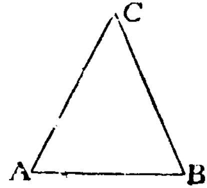
(設) BD平分△ABC的∠B.

(求證) $BC > DC$, $BA > AD$.

(證) $\angle 3 > \angle 1$. $\angle 4 > \angle 2$	△的外角比任何內對角大.
$\angle 3 > \angle 2$. $\angle 4 > \angle 1$	BD平分∠B,則 $\angle 1 = \angle 2$.
∴ $BC > DC$, $BA > AD$	△BCD,ABD裏,大角∠3,∠4,所對的邊也大.

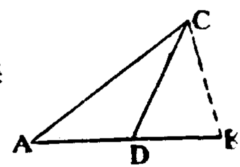
14. 給了頂角同底邊,作一個等腰三角形

解析： 假定右圖的△ABC是等腰，若知道頂角∠C的度數，那麼
$\angle A=\angle B=(180^\circ-\angle C)\div 2$. 再畫AB等於所設底邊的長. 在AB的兩端各作一角等於$(180^\circ-\angle C)\div 2$. 引長所作的∠A同∠B的AC, BC兩邊，必相遇於C.
則$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$.



∴ 等腰△ABC可以作成.

15. 給了兩邊同其中一邊上的中線，作這三角形.

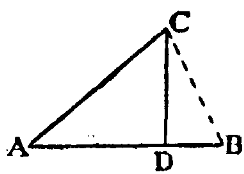


設 已知AB邊，AC邊，與AB上的中線CD的長.

求作 ABC三角形.

解析： 假定右圖的△ABC是所作的三角形. 既知道CD是AB線上的中線，那麼AD必等於DB. 所以在△ACD裏，他的三邊都知道了，那就可以作△ACD. (見§60.)再延長AD至B，使DB=AD. 聯結C, B，則△ABC是所求的△.

16. 給了兩邊同其中一邊上的高，作這三角形.



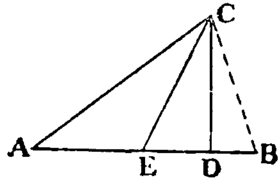
設 給了AB, AC兩邊，與AB邊上的高CD.

求作 ABC三角形.

解析 假定右圖的△ABC是所作的△. 若CD是底邊AB的高，那麼CD必與AB垂直. 所以先畫CD等於所給的高，再畫AB⊥CD (AB任意長). 既知AC是由C點到底邊的斜線，那麼就用C做圓心，AC做半徑，畫一弧截底邊於A 畫AC而成直角△ADC 再在底邊截取AB的長 聯C與B.

則△ABC卽是所求.

17. 給了底邊,和在這底邊上的高同中線,作這三角形.

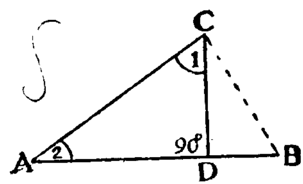


㊜ 給了底邊AB的長,底邊上CD的高,同中線CE的長.

㊟㊝ ABC三角形.

㊞㊕: 假定右圖的△ABC是所作的△.(叁看上題(16)的解析) 若CD是AB的高.就作AB⊥CD.(AB是任意長) CE與AB斜交,就用C做圓心,CE中線的長做半徑,畫一弧截AB於E點,畫CE,就成直角△CDE. 既知AB的中線是CE,所以在E的兩邊各截AB的一半於A於B. 畫AC,BC,則△ABC卽是所求.

18. 給了一邊,同在這邊上的高,又給了這邊的鄰角,作這三角形.



㊜ 給了AB底邊同在AB上的高.又給了AB邊的鄰角∠A.

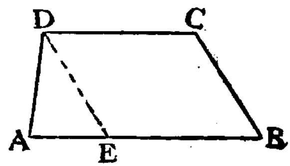
㊟㊝ ABC三角形.

㊞㊕ 假定右邊的△ABC是所作的△. 若CD是AB邊上的高,那麼CD⊥AB. 既知AB邊的鄰角∠A,那麼∠1 $=90^\circ-\angle A$ (∵rt△的兩銳角的和是90°).所以在C點作∠1,引長CA必與底邊相遇於A,則成rt△ADC. 再在底邊由A截取AB的長,於B. 聯結C同B. 則所求的ABC三角形就成了

19. 給了四邊,作一個梯形,

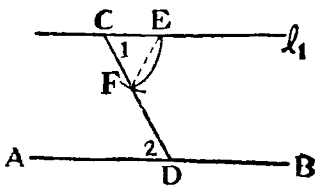
㊙設 給了AB,BC,CD,DA四邊.

求作 ABCD一個梯形.



解析: 假定梯形ABCD裏有所給的四邊,作 $DE \parallel CB$,那麼BCDE就是▱.而 $DE=BC$, $AE=AB-DC$. 於是 $\triangle ADE$ 是固定的,因為他的三邊都已知道了. 再延長AE到B使他等於所給的AB,畫 $DC \parallel AB$ 並使DC等於所設的長,聯C與B.則ABCD是所求的梯形了.

20. 在所給線外的一點,作一線同所給線成功60°的角.



設 AB是所給的線,C是線外的一點.

求作 CD與AB成功60°的角.

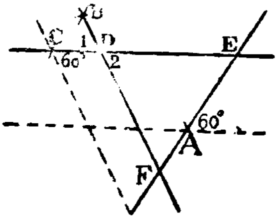
解析 過C點作 $l_1 \parallel AB$. 在 l_1 上,以C做圓心,CE適宜的長做半徑,畫EF弧,再以E做圓心,CE做半徑,畫一弧與弧EF相遇於F. 聯C與F並引長他,使與AB相遇於D. 則 $\angle 2=\angle 1=60^\circ$($\because l_1 \parallel AB$,其內錯角相等. $\triangle CEF$ 是等邊, $\therefore$ 他的各角都是60°).

21. 給了不在一直線上的三點,作一個等邊三角形,要使每一點在每條邊上或他的延長線上.

設 給了不在一直線上的任意三點A,B,C,

求作 等邊△DEF,使A,B,C,各點在他的每條線上或延長線上.

(作法) (1)過B點作一任意直線BF.(BF的方向可以隨便).



(2) 過C點作一直線與BF平行.

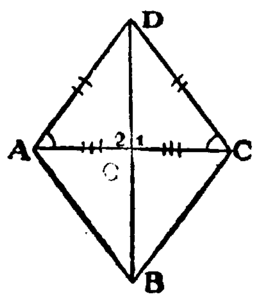
(3) 依上題20的作法.由C點作CD線與BF成功60°的角∠1,延長CD到E. 則∠2=∠1=60°.(對頂角相等)

(4)又由A點作AE線與CE(或BF)成功60°的角∠E(或∠F).引長EA到F與BF交於F點.則∠F=180°−(∠2+∠E)=60°

∴△DEF是等邊(∵∠2=∠E=∠F=60°則等角△的各邊都等. 見§74推論)

〔討論〕 在這A,B,C,三點上可作無數個等邊△.因這△是以BF爲根據,而BF的方向又可任意更改.所以這等邊△的大小和方位也因之而變.

22. 斜方形的對角線互爲垂線.



㊣ 斜方形ABCD裏,BD,AC是他的對角線.

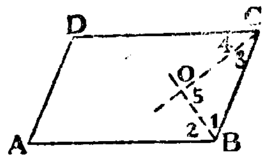
㊍㊎ AC⊥BD.

㊊ 在△ADO同△CDO裏

AD=DC	斜方形是各邊都相等的▱.
AO=OC	▱的對角線互相平分.
∠DAO=∠DCO	△ADC裏,對等邊AD,DC的角相等.
∴ △ADO≡△CDO	兩△的兩邊夾角對應相等
∠2=∠1=90°	AC線上.∠1∠2是全等△的對應角.
AC⊥BD	AC與BD相交,其兩鄰角∠2,∠1相等.

23. 平行四邊形之鄰角的平分線互爲

垂線.



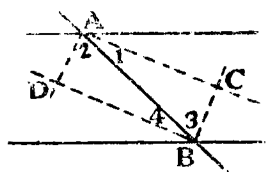
設　在▱ABCD裏,CO平分∠C.

BO平分∠B.

求證　$CO \perp BO$.

證　$\angle C+\angle B=180^\circ$	$DC \parallel AB$,其同邊內角和是180°
$\frac{\angle C}{2}+\frac{\angle B}{2}=\frac{180^\circ}{2}$	兩節都用2除
$\angle 3+\angle 1=90^\circ$	CO平分∠C, BO平分∠B.
$\angle 5=180^\circ-90^\circ=90^\circ$	△COB裏, $\angle 1+\angle 3+\angle 5=180^\circ$
∴　$CO \perp BO$	∠COB是直角.

24. 兩平行線同一截線所成兩對內錯角的平分線成功一個長方形.



設　$l_1 \parallel l_2$ AB是他們的截線, AD, BC, AC, BD是兩對內錯角的平分線.

求證　ACBD是長方形.

證　$\angle 1=\angle 4$	AC同BD是相等內錯角的平分線.
$AC \parallel BD$	AC同BD爲AB所截,其內錯角∠1,∠4相等.
$\angle 2=\angle 3$	AD與BC是相等內錯角的的平分線.
$AD \parallel BC$	AD與BC爲AB所截,其內錯角∠2,∠3相等.
ACBD是▱	$AC \parallel BD$, $AD \parallel BC$,(兩對對邊相平行).
$\angle 1+\angle 3=\frac{180^\circ}{2}$	∠1,∠3是平行線的同邊內角的一半.
$\angle C=90^\circ$	△ABC裏, $\angle 1+\angle 3+\angle C=180^\circ$
∴ ACBD是□	▱的一角是90°,則餘三角都是90°.

25. 一個木匠要把一塊木板分成幾條一樣闊的板,他用下面的法子: 假定要分成五條. 他用曲尺照圖1的兩位置放下.

使尺上的刻度,在木板邊緣中間的都是5的同倍數,(在這圖裏是15),再照圖上,於數字的各處做下記號,連起線來. 依線一鋸,就得所求的五條了. 證明這法子不錯.

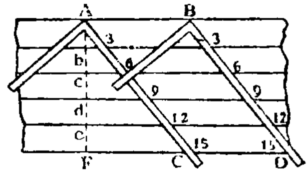


圖1.

(設) 木板的兩邊 AB ∥ FD. 曲尺 AC=BD. AC ∥ BD.

AC 與 BD 間的各段都是3寸.連起線來.

(求)(證) 依線鋸下的五條都是一樣闊.

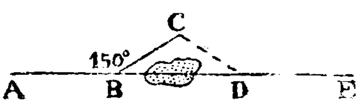
(證) 由 A 點作 AF ⊥ FD.

ABDC 是▱	AC ∥ BD, AC=BD. (對邊平行且相等)
A,3,3,B 是小▱	A,3;=B,3; AC ∥ BD. (對邊平行且相等)
AB ∥ 3,3,	▱A,3,3,B, 的對邊相平行.
同理3,3 ∥ 6,6 ∥ 9,9···	3,3,6,6;6,6,9,9;9,9,12,12;········ 都是▱
∴ Ab=bc=cd······	∥s 在 AC 截線上截取5個相等線段,也在 AF 截線上截取5個相等線段.

∴ 依線鋸下的五條木都是一樣闊.

(因 Ab=bc=cd=de=eF).

26. 在圖2裏邊,在 B 點的角是 150°, 怎樣畫出 BC 同 CD, 使 AB 同 DE 在一直線上.



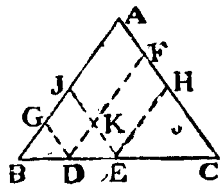
(解)(析) 假定圖2是所作的草圖, ABDE 是一直線. 若∠ABC 是 150°. 那麼 ∠C+∠CDB=150°. (外角是內對角的和) 而∠CBD=30° 所以在△BCD 裏,∠CDB 可以等於任意多的度數(惟不

得大於150°)其中以∠CDB=30°為最適宜.

於是便知道BC=CD, ∠C=120°

所以作圖的時候,先在BC邊(取任意的長度)的C點作120°,再截取CD=BC再在D點作∠CDE=150°. 則ABDE是一條直線了.

27. 在等腰三角形底上隨便兩點,各作同兩腰平行的線,成功兩個平行四邊形.證明他們的週界相等.



(設) 等腰△ABC裏,AB=AC, D.E是底邊BC的任意兩點,GD∥AC, FD∥AB, JE∥AC, HE∥AB.

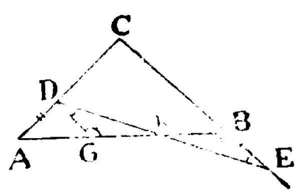
(求)(證) ▱AGDF的週界=▱AJEH的週界.

(證) ∠KDE=∠KED	△KDE裏,∠D=∠B,∠E=∠C
KD=KE	△KDE裏,對等角的邊相等.
FK=HE	▱FKEH的對邊平行,也相等.
GD=JK	▱GDKJ的對邊平行,也相等.
KD+FK+GD=KE+HE+JK	以上三式相加
FD+GD=JE+HE	KD+FK=FD,JK+KE=JE
2(FD+GD)=2(JE+HE)	以2乘上式.

∴▱AGDF的週界=▱AJEH的週界.

(因▱的兩對對邊相等)

28. 設ABC是等腰三角形,於AC上截取AD.延長BC到E,使EB=AD. DE交底邊AB於



F, 證明 DF=FE.

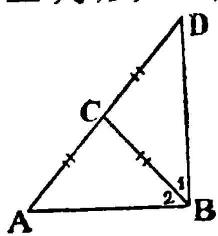
(設) 等腰△ABC裏, 延長CB到E, 截取AD, 使EB=AD, DE交底邊AB於F.

(求證) DF=FE.

(證) 由D作DG∥CB,

∠AGD=∠ABC	DG∥CB, 其同位角相等.
∠AGD=∠A	等腰△ABC的∠A=∠ABC.
BE=DA=DG	△DAG裏對等角的邊也相等.
∠FBE=∠FGD	CE∥DG, 為BG所截, 其內錯角相等.
∠BEF=∠GDF	CE∥DG, 為ED所截, 其內錯角相等.
△BFE≡△GFD	兩△的兩角夾邊對應相等.
∴ DF=FE	兩全等△的對應邊相等.

29. 若ABC是一個等腰三角形, AC腰延長到D, 使DC=AC, 證明DB⊥AB.



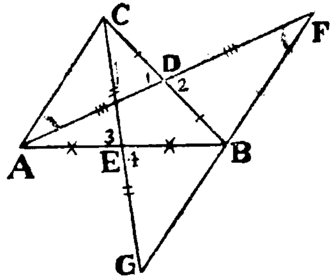
(設) △ABC是等腰, CA=CB, CD是AC的延線, 且CD=AC.

(求證) DB⊥AB.

(證) △ABC裏, ∠A=∠2	CB=CA,
等腰△BCD裏, ∠D=∠1.	CB=CD
∠A+∠2+∠D+∠1=180°	△ADB裏各角的和是180°.
2∠2+2∠1=180°	∠A=∠2, ∠D=∠1.
∠2+∠1=90°	以2除上式
∴ DB⊥AB	∠ABD是直角

30. 在△ABC裏, E, D, 是AB同BC的中點, 畫AD延長到F使DF=AD, 畫CF交

長到G, 使 EG＝CE. 證 F,B,G. 在一直線上.



設　ABC是任意三角形,E, D,是AB同BC的中點.

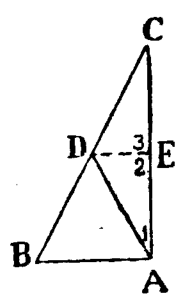
畫AD,CE,延長AD到F,延長CE到G,使DF＝AD, EG＝CE.

求證　F,B,G,在一直線上.

證　在△ADC,BDF, AEC, BEG 裏.

△ADC≡△BDF	∠1＝∠2,CD＝DB,AD＝DF(兩邊夾角)
∠CAD＝∠DFB	兩全等△的對應角相等.
∴ AC ∥ BF	AC,BF與截線AF所成的內錯角相等
△AEC≡△BEG	∠3＝∠4, AE＝EB, CE＝EG(兩邊夾角)
∠EAC＝∠EBG	兩全等△的對應角相等.
∴ AC ∥ GB	AC,GB與截線AB所成的內錯角相等.
GBF 在一直線上	從一點B,只能作一直線,與AC平行.

31. 直角三角形斜邊上的中點同這三角形的三頂點等距.



設　△ABC裏,∠A是直角.D是斜邊BC的中點. 即DC＝DB.

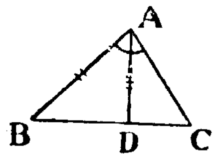
求證　DA＝DC＝DB.

證　由D作DE ∥ BA.

∠3＝90°	∠A同∠3是同位角.
∠3＝∠2	∠CEA是平角,∠3＝90°.
ED＝ED	公共邊.

$CE=EA$	平行△底邊的線,平分1邊,也平分他邊.
$\triangle CED\equiv\triangle DEA$	兩邊夾角
$DC=DA$	全等△的對應邊相等.
$\therefore DC=DA=DB$	已設 $DC=DB$.

32. 給了一邊,一鄰角同高,求作這個三角形.



(設) 給了 AB 邊,鄰角 $\angle A$,
BC 邊上的高 AD.

(求)(作) ABC 三角形.

(解)(析) 假定右邊的△ABC是已作的△. 若AD是BC邊上的高,那麼 $BC\perp AD$. 既已給了AB邊,所以用A做圓心,AB長做半徑,必與BC邊遇於B,聯AB. 再在AB的A端作 $\angle BAC$ 等於 $\angle A$. 延長AC使與BC遇於C. 則所求的三角形就作成了.

33. 如下邊圖 3 ,ABCD 是一個正方形. 如圖畫直線,使 $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$. 證 $xyzw$ 是正方形, 照這個樣子,畫一個大一些同方格多一些的.(圖 4.)

(設) 在 ABCD 正方形裏. $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$.

(求)(證) $xyzw$ 是正方形.

(證) $\angle 5=\angle 2+\angle 9$	$\triangle wCD$ 的外角是內對角的和.
$\angle 5=\angle 1+\angle 9=90^\circ$	$\angle 1=\angle 2$,正方形ABCD的 $\angle D=90^\circ$
$\angle 6=\angle 7=\angle 8=90^\circ$	證法與 $\angle 5=90^\circ$ 的法子相同.
$\triangle wDC\equiv\triangle xDA$(兩角夾邊)	$DC=DA$, $\angle 2=\angle 1$, $\angle 9=\angle 12$
$\equiv\triangle zBC\equiv\triangle yAB$	都是因△的兩角夾邊對應相等.

$wC=xD=yA=zB$ $zC=wD=xA=yB$	全等△的諸對應邊相等.
$wz=wx=xy=yz$	以上兩式相減.
∴ $xyzw$ 是正方形	各角都是直角各邊都相等.

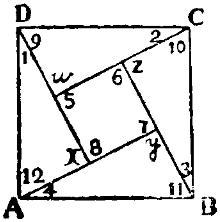


圖3.

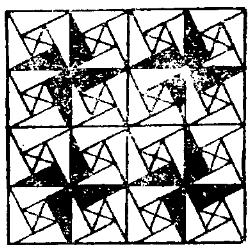


圖4.

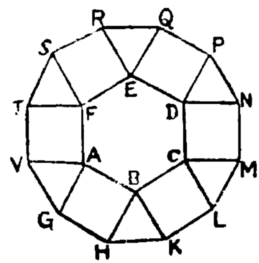


圖5.

34. 如上面圖5. ABCDEF是正六邊形 ABHG,BCLK,等都是正方形.

(a) 三角形BHK,CLM等等都是什麼三角形?

(b) HKLMN………是不是正十二邊形?

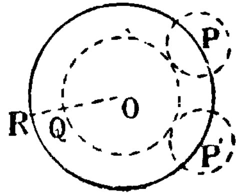
解 (a) 六邊形諸內角的和 $=(6-2)\times180^\circ=720^\circ$

正六邊形各內角 $=720^\circ\div6=120^\circ$	正多邊形,各角都等.
$\angle HBK=360^\circ-(120^\circ+2\times90^\circ)=60^\circ$	圍B的鄰角是 360°
△BHK裏, BH=BK	相等正方形,邊也等.
$\angle BHK=\angle BKH=\dfrac{180^\circ-60^\circ}{2}=60^\circ$	對等邊的角也等.
∴ △BHK是等邊.	△裏各角都是 60°

依同理△CLM,△DNP,………都是等邊三角形.

(b) HK=LK=LM=……	等邊△的邊又是等⊡的邊
HKLMN……是正12邊形	多邊形的各邊都相等.

35. 若令半徑長.5吋的一個圓,在另一半徑長1吋的圓外轉動,找出他的圓心的軌迹,



㊎ ⊙OQ的半徑是1吋.

⊙P的半徑是.5吋.

⊙P沿着⊙OQ的外邊轉動.

㊍㊌ ⊙P的圓心的軌迹.

㊏ 用⊙OQ的圓心O做圓心,用1.5吋做半徑,畫⊙OR與⊙OQ同心.

則 (一) ⊙OR上任一點P′所畫的半徑.5吋的圓都是與⊙OQ挨着的.(∵⊙OR上各點與⊙OQ的距總是.5吋)

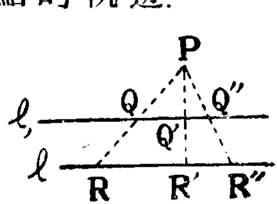
(二) 沿着⊙OQ的外邊轉動的⊙P的圓心必在⊙OR的圓周上.

若⊙P的圓心在⊙OR的圓周外,就不能挨着⊙OQ轉動了.(∵在⊙OR外的點與⊙OQ距大於.5吋)

若⊙P的圓心在⊙OR裏,⊙P就轉入⊙OQ內,而與⊙OQ相交 (∵在⊙OP內的點與⊙OQ距小於.5吋)

36. 給了一直線l同不在l上的P點.試找出由P到l各線段中點的軌迹.

㊎ PR, PR′, PR″……是一定點P畫到l線上的各線段.



㊍㊌ PR, PR′……各線中點的軌迹.

[作法同證] 平分PR於Q,由Q作$l_1 \parallel l$,

則 (一) l_1上任一點Q′或Q″是由P到l所畫的PR′或PR″線的中點.(∵同△PRR′底邊RR′平行的直線l_1,若是平

分 PR 邊,也必平分 PR′ 邊或 PR″……)

(二) 由 P 到 l 的各線的中點必在 l_1 上,

(∵聯△兩邊中點的線必與底邊平行)

37. 聯結平行四邊形的中心同所有各邊上的點.試問這些聯結線的中點的軌迹是什麼?

設 O 是▱ABCD 的中心.

OP, OP′, OP″,…… 是由 O 到▱各邊的線.

求作 OP, OP′…… 各線中點的軌迹.

解 聯 OA, OB, OC, OD 各邊中點的線 EF, FG, GH, EH.

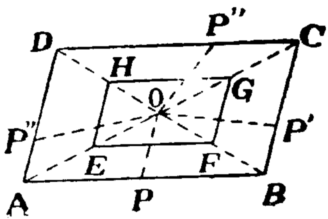
則 EF 是由 O 到 AB 邊各線段中點的軌迹.

FG 是由 O 到 BC 邊各線段中點的軌迹.

GH 是由 O 到 CD 邊各線段中點的軌迹.

EH 是由 O 到 AD 邊各線段中點的軌迹.

(其理由與 36 題同)



第三編 直線同圓

教科書下册第11至12面 目解題

下面陳述定義的時候,最要注意的是在把你的意思十分確切的說出來. 陳述精確是算學文字的第一個要素.

1. 述圓的定義.

㊫ 一曲線所圍成的平面形,在這曲線上的諸點與其內一定點的距離都相等的叫做圓.

2. 述圓周,圓心的定義.

㊫ 圍成一圓的那曲線爲圓周.圓內一點,與圓周上各點等距的叫做圓心.

3. 述弦,半徑,直徑割線同切線的定義.

㊫ 聯圓周上任意兩點(或聯1弧的兩端)的線爲弦.自圓周至圓心的線稱爲半徑. 過圓心的弦稱爲直徑.

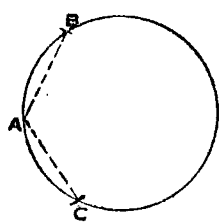
依§116"延長弦的一端或兩端的線稱爲割線."

圓外一任意線,只遇圓周於一點的稱爲切線.

4. 述半圓,圓心角同圓周角的定義.

㊫ 一直徑分圓爲兩部,各部稱爲半圓. 兩半徑所成的角爲圓心角. 圓內兩弦所成的角,其頂點在圓周上的爲圓周角.

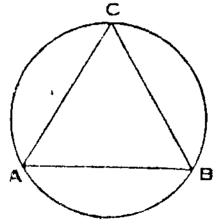
5. 把A做圓心,相等的半徑畫弧,截圓於B,C兩點. 比較$\overset{\frown}{AB}$同$\overset{\frown}{AC}$.



㊫ 聯A與B. A與C.則

AB=AC	已作
$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$	同圓裏,等弦所對的弧也等.

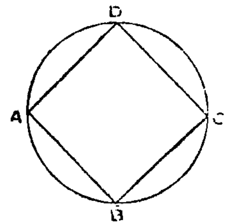
6. 上邊右圖裏面, AB, BC, CA 各弦, 都把他量一下, 再比較他們所對的弧.



(解) 量得 $AB=BC=CA$.
所以 $\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CA}$

(同圓裏,等弦所對的弧也等)

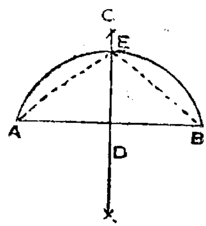
7. 在右圖裏面, 試比較 AB, BC, CD, DA 四條弦, 再比較他們所對的弧.



(解) 量得 $AB=BC=CD=DA$.

則 等弦所對的弧都等.

8. 平分一條弧, 應當怎樣分法? 〔用§126(1)〕.



(解) 聯弧的兩端, 作 AB 的中垂線 CD, 截 $\widehat{AB}$ 於 E 點. 則 $\widehat{AE}=\widehat{BE}$.

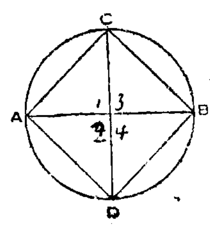
(證) 連 AE, BE, 則 $AE=BE$

(中垂線上各點和 AB 等遠)

$\therefore$ $\widehat{AE}=\widehat{BE}$ (等弦所對的弧也等)

〔若用 §126(1), 則由圓心 D 連弧兩端 AD, BD, 再平分 $\angle ADB$. 於 CD.〕

9. 右圖裏面 AB,CD, 兩直徑互做垂線, 試證明他們分圓周做四等分.



(設) AB,CD 兩直徑互相垂直.

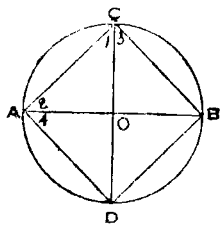
(求)(證) AB,CD 平分圓周爲 4 等分
即 $\widehat{AC}=\widehat{BC}=\widehat{BD}=\widehat{AD}$

(證) 兩直徑 AB, CD 遇在圓心, 則

$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4=90^\circ$ ($AB\perp CD$)

∴ $\widehat{AC}=\widehat{BC}=\widehat{BD}=\widehat{AD}$(相等圓心角所含的弧也相等)

10. 用前題的圖,證明AC,CB,BD同DA,四弦都相等,且∠1=∠2=∠3=∠4.



(設) AB,CD兩直徑互相垂直. AC, BC, BD, DA是這圓上的四弦.

(求證) AC=BC=BD=DA·

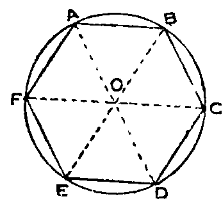
∠1=∠2=∠3=∠4.

(證) ∵AB⊥CD,則△AOC≌△BOC≌△BOD≌△AOD.(兩邊夾角)

(∵半徑為各△的公共邊,其夾角都是直角)

∴AC=BC=BD=DA	全等△的對應邊相等.
∠1=∠2	等腰△AOC的對等邊的角相等.
∴ ∠3=∠1=∠4	全等諸△的對應角相等.

11. 表明怎樣分一圓做六等弧.

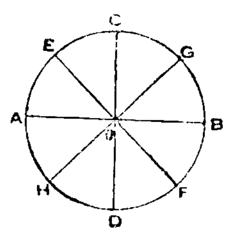


(解) 在⊙OA的圓周上截取AB,BC,CD,DE,EF,FA,諸弦,等於半徑OA. 則△AOB,BOC,COD……等,都是等邊△(各邊都等於OA)

∴∠AOB,∠BOC,∠COD……等都是60°(等邊△的各角都是60°)

∴$\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CD}=\widehat{DE}=\widehat{EF}=\widehat{FA}$=圓周之$\frac{1}{6}$.

12. 表明怎樣分一圓做八等弧.



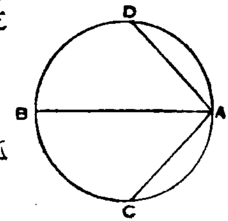
(解) 一個圓是360°,若分做8等弧,則每個圓心角必是$\frac{360°}{8}$=45°

∴先在⊙O裏畫AB,CD,兩直徑互相垂直. 則∠AOC,∠COB……

等角都是90°再畫直徑EF,GH,平分∠AOC,∠COB,則∠AOE,∠EOC,∠COG⋯等角,都是45°.(即圓周的$\frac{1}{8}$)

∴$\overset{\frown}{AE}$,$\overset{\frown}{EC}$,⋯⋯各是圓的$\frac{1}{8}$.

13. 在右面的圖裏邊AB是直徑,AD=AC. 比較$\overset{\frown}{DB}$同$\overset{\frown}{BC}$.

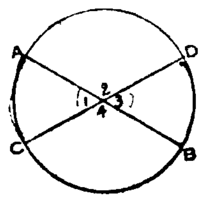


解

$\overset{\frown}{BDA}=\overset{\frown}{BCA}$	直徑平分1圓.
$\overset{\frown}{DA}=\overset{\frown}{CA}$	等弦AD,AC的對弧也等.
$\overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{BC}$	等量減等量.

教科書內第14面 理解題

1. 試證兩直徑分一圓成兩對等弧.



設 AB,CD是圓的兩直徑.

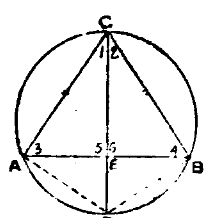
求證 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$.

證 AB,CD遇於圓心 | 直徑必過圓心.

圓心角:∠1=∠3,∠2=∠4 | 對頂角相等.

$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$, $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$ | 等圓心角的對弧也等.

2. 畫一個三頂點都在圓周上的等腰三角形,同他底邊上的中垂線. 試證這兩腰同中垂線的夾角所含的兩弧相等.



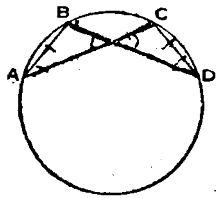
設 下圖裏,△ABC是頂點在圓周上的等腰△. AC=BC. CE是底AB上的中垂線. 即CE⊥AB. AE=BE

求證 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$

證 引長等腰△ABC的中垂線AE,與圓周遇於D. 聯AD,BD, 則

$\angle 3=\angle 4$	等腰△ABC裏,對等邊的角.
$\angle 5=\angle 6=90^\circ$	$CE\perp AB$.
$\angle 1=\angle 2$	等∠s3,4,的餘角.
$\triangle ADC\cong\triangle BDC$	兩邊夾角($AC=BC,\angle 1=\angle 2,CD=CD$)
$\therefore\ \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$	全等△s的對應邊(AD,BD)的對弧也等.

3. 聯結圓內兩等弦不相接近的兩端的線段必相等.

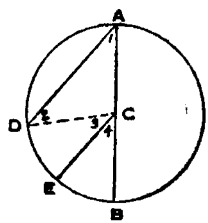


設 右圖裏面,AB=CD. AC,BD是聯結兩等弦不相接近的兩端的線段.

求證 AC=BD.

證 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$	等弦AB,CD的對弧相等.
$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$	等弧$\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$上各加$\overset{\frown}{BC}$.
$AC=BD$	等弧$\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BD}$的對弦也等.

4. 從直徑AB的A點,引隨便的一弦AD; 又從圓心畫和AD同側並且平行的半徑CE. 試證$\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EB}$.



設 AB是⊙C的直徑.

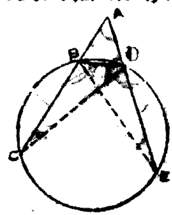
AD是從A點所作的任意弦;CE是從圓心C所作的半徑;且$CE\parallel AD$.

求證 $\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EB}$.

證 聯D點與圓心C. 則

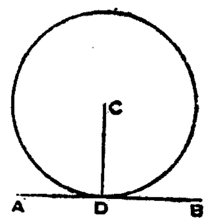
$\angle 1=\angle 2$	CA, CD都是半徑,故△ACD是等腰.
$\angle 1=\angle 4$	$AD\parallel CE$所成的同位角相等.
$\angle 2=\angle 3$	$AD\parallel CE$所成的內錯角相等.
$\angle 3=\angle 4$	等腰△ACD的$\angle 1=\angle 2$.
$\therefore\ \overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EB}$	相等圓心角∠3, ∠4,所含的弧也等.

5. 倘右圖裏面,$\widehat{BC}=\widehat{DE}$, 證 $\triangle ABD$ 是等腰三角形.



解 $BC=DE$	等弧 $\widehat{BC}$, $\widehat{DE}$, 所對的弦也等.
$DC=BE$	等弧($\widehat{BC}+\widehat{BD}$,與 $\widehat{DE}+\widehat{BD}$)所對的弦相等.
$BD=BD$	兩$\triangle$的公共邊.
$\triangle DBC\cong\triangle BDE$	三邊對應相等.
$\angle CBD=\angle EDB$	全等$\triangle$的對應$\angle$s.
$\angle ABD=\angle ADB$	等$\angle$s的補角相等.
$\therefore\triangle ABD$是等腰	等$\angle$s所對的邊也等.

教科書內第15面 實驗題



1. 在CD半徑的端點 D 處,畫$AB\perp CD$.這線和圓相遇,是不是只有 D 點? 這線的名稱是什麼?

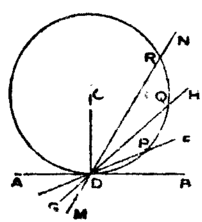
試完成下面這個命辭:

"同半徑在端點正交的線,就是…………".

解 若 AB 與半徑 CD 的 D 端垂直, 則 AB 與圓只遇於 D點. 這線稱為圓的切線.

∴ "同半徑在端點正交的線,就是圓的切線".

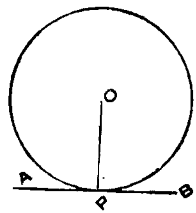
2. 用題1的圖, 經過 D 點,畫 AB 以外的各線. 除 D 點外, 這些線有沒有同圓周在別點相遇呢?經過圓周上隨便那一點到底能畫幾條切線?



解 過 D 點再畫EF,GH,MN各線.

但除AB線與CD垂直外,別線都不能與CD垂直. ∴這些線除遇圓於D點外,並遇於別點. ∴經過圓周上隨便那1點,只能畫1切線.

3. 畫與圓周相遇只有一點的線(切線). 從那切點作垂線. 問這垂線是不是一定穿過圓心? 試歸納這個實驗的結果做一個命辭.



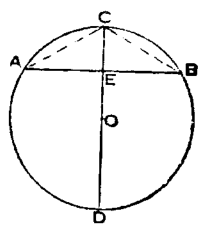
解 畫AB(切線)與⊙O相遇於1點P. 由切點P,作PO⊥AB. 則PO必過圓心.

∴ 過切點並垂直於切線的直線必過圓心.

4. 題1題3的命辭有什麼關係呢?

解 題1題3的命辭是相反的命辭.

5. 作同圓裏一弦正交的直徑,量這弦被分成的兩線段,比較長短.



解 在右圖⊙O裏,直徑CD垂直於AB弦. 量得AE=BE(即CD平分AB弦).

6. 在題5的圖裏面, $\overset{\frown}{AC}$ 同 $\overset{\frown}{BC}$ 有甚麼關係呢?

解 聯A,C; B,C; 則成△AEC與△BEC.

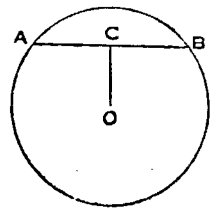
由題5裏知道AE=BE,而CE為公共邊,又CD⊥AB,

∴△AEC≅△BEC	兩△的兩邊夾角對應相等.
AC=BC	全等△的對應邊相等.
$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$	等弦的對弧也等.

7. 試完成下面這個命辭:"同弦正交的直徑平分…………".

解 "同弦正交的直徑,平分這弦與這弦所對的弧".

8. 聯結圓心同一弦的中點,量那所成的角比較大小. 完成下面的命辭:"平分一弦的直徑就是…………".



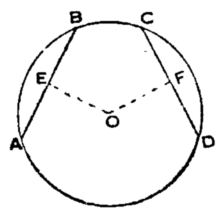
解 聯⊙O的圓心,與AB弦的中點C.則成∠s ACO, BCO.量得∠ACO=∠BCO=90°.

∴"平分一弦的直徑就是弦的垂線".

9. 題5題8的命辭有什麼關係?

解 題5與題8的命辭也是相反的.

10. 在圓裏作相等的兩弦. 量他們到圓心的距離比較長短. 歸納這個結果作命辭並述相反的命辭.



解 ⊙O裏AB=CD. 由圓心O,畫OE⊥AB, OF⊥CD. 用圓規量得OE=OF. ∴"在同圓裏的兩弦若相等,他們到圓心的距離也必相等".

上面種種實驗,是不是可以把那些命辭都證實了,還是祇能顯出他們似乎是對的呢!

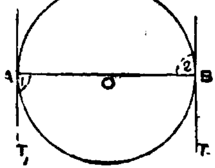
答 上面諸實驗,只能顯出那些命辭似乎是對的,並沒有確實的證明出來.

教科書內第19至20面　目解題

1. §131的推論一,是用的什麼證法?

(註) §131的推論一,是用§82所說的"間接證法"

2. 若從一圓的直徑兩端引這圓的兩切線(圖1)證明這兩切線相平行.

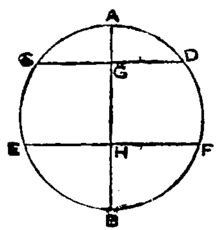


(設) AB是⊙O的直徑.
t_1 t_2兩切線切在直徑的兩端A,B,

(求證) $t_1 \parallel t_2$.

(證) $OA \perp t_1$,則$\angle 1=90^\circ$ ⎫過切點的半徑,是
$OB \perp t_2$,則$\angle 2=90^\circ$ ⎭切線的垂線.
∴ $t_1 \parallel t_2$ | t_1 t_2與AB所成同位角相等.

3. 證明如直徑平分平行兩弦的一弦,也必平分其他一弦.(圖2.)

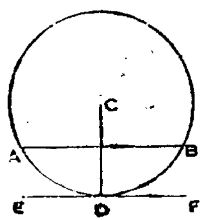


(設) AB是圓的直徑,CD,EF,是兩弦.
CD ∥ EF. AB平分CD於G.

(求證) AB也平分EF於H.

(證) $AB \perp CD$ | 平分弦的直徑,是弦的垂線.
$AB \perp EF$ | AB與平行線(CD ∥ EF)的CD正交,也同EF正交
∴AB平分EF於H | 同弦(EF)正交的直徑(AB,)必平分(EF)弦.

4. 同直徑尖端的切線平行的各弦,都被直徑所平分.(圖3)

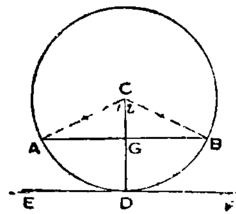


(設) EF切線切在圓的D點CD是圓的半徑. AB是弦 AB ∥ EF.

(求證) CD徑平分AB弦.

(證) $CD \perp EF$	過切點的半徑,是切線的垂線.
$CD \perp AB$	CD與AB的平行線($AB \parallel EF$) EF正交.
∴ CD平分AB弦	與弦正交的直徑必平分這弦.

5. 證明凡切線切於弧的中點,必同這弧所對的弦相平行.(圖 3.)



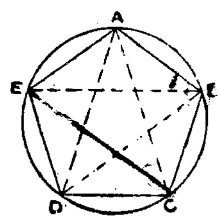
(設) D是⊙C裏,$\overset{\frown}{AB}$的中點.

EF是過D點的切線.

(求證) 切線 $EF \parallel AB$ 弦.

(證) $\angle 1 = \angle 2$	$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$(D是$\overset{\frown}{AB}$的中點)
$\triangle ACG \equiv \triangle BCG$	兩邊夾角.($AC = BC$, $\angle 1 = \angle 2$,共CG)
$AG = BG$	全等兩△的對應邊相等.
$CD \perp AB$	平分弦的徑是弦的垂線.
$CD \perp EF$	切點上的半徑,與切線垂直.
∴ $AB \parallel EF$	AB,EF都同CD正交,必定平行.

6. 在圖4裏面,$AB = BC = CD = DE = EA$. 證明那些對角線都相等.



(設) 圓裏面$AB = BC = CD = DE = EA$.

(求證) 對角線$AC = AD = BD = BE = CE$.

(證) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{EA}$	等弦,AB,EA所對的弧.
$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DE}$	等弦,BC,DE所對的弧.
$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$	上兩式相加.
∴ $AC = AD$	$\overset{\frown}{AC}$,與$\overset{\frown}{AD}$等,其所對的弦也等.

依同理$AD = BD = BE = CE = AC$.

7. 將一圓隨便分作幾等分,倘順序把

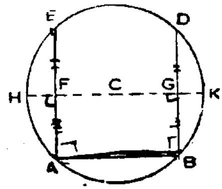
那些分點聯結起來,所成的多邊形總是等邊的麼?

解 順序聯結圓的等分諸點所成的多邊形,總是等邊的. 因所分的弧等,則等弧所對的各弦也等.

〔如證此多邊形是等角,可由題6的圖裏,先證諸三角形全等.〕

教科書內第20面 理解題

1. 從一弦的兩端作弦的垂線,他們在圓內的部分相等.



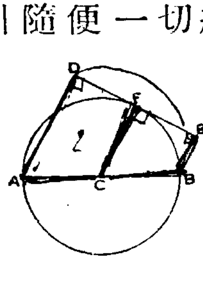
設 在右圖圓裏, $AE \perp AB$, $BD \perp AB$.

求證 $AE = BD$.

證 畫直徑HK,使HK與AB平行.

$HK \perp AE$ $HK \perp BD$	$HK \parallel AB$, $AB \perp AE$, $AB \perp BD$.
HK平分AE,BD於F,G	直徑與弦正交,必平分這弦,
則 FABG是長方形	鄰邊正交,對邊平行.($AE \parallel BD, HK \parallel AB$)
$FA = GB$	長方形的對邊相等.
$AE = BD$	HK平分AE,BD.

2. 倘從直徑的兩端點,引隨便一切線的垂線,這垂線的和就等於這圓的直徑.



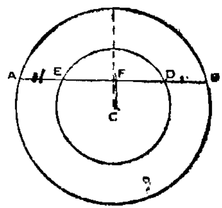
設 AB是圓的直徑,切線DE切圓於F. AD,BE是由直徑兩端與切線垂直的線. (卽$AD \perp DE$, $BE \perp DE$.)

求證 $AD + BE = AB$.

證 聯圓心C與切點F,畫CF.

$CF \perp DE$	CF是過切點的半徑.
$BE \parallel CF \parallel AD$	BE,CF,AD都與DE垂直
ADEB是梯形	4邊形的一對對邊平行(見§94)
$CF=\dfrac{AD+BE}{2}$	梯形的中線,是兩底和的一半.
$AB=AD+BE$	CF是半徑;AB是直徑.

3. 兩同心圓被1線所割,那夾在兩圓間的線段相等.



㊦ AB割兩同心圓⊙CA,⊙CE,於A,B,同E,D.

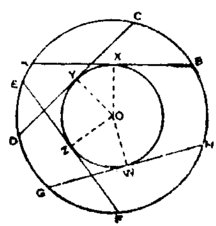
㊟㊟ $AE=DB$

㊟ 由圓心畫$CF \perp AB$. 則

$AF=BF$	⊙CA裏,$CF \perp AB$則平分AB弦.
$EF=FD$	⊙CE裏,$CF \perp ED$則平分ED弦.
$AE=DB$	上兩式相減.

教科書內第22面 理解題

1. 在兩個同心圓裏面,所有同內圓相切的外圓的弦,都必等長.



㊦ 在兩同心圓裏,AB,CD,EF……是外圓的弦.又是內圓的切線.

㊟㊟ $AB=CD=EF=$……

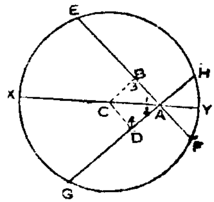
㊟ 由圓心O,畫OX,OY,……與諸切點X,Y,……相聯,則 $OX \perp AB$, $OY \perp CD$, $OZ \perp EF$, $OW \perp GH$, ……

(過⊙OX諸切點的半徑,是切線的垂線)

∴ $AB=CD=EF=GH$ ……(外圓諸弦AB,CD,……,到

圓心的距離OX,OY,……(即內圓的半徑)相等,諸弦就相等.)

2. 如兩弦同直徑相交在一點,同直徑成功等角,這兩弦便相等



設 ⊙C裏EF與GH兩弦交在直徑XY的A點. 使∠1=∠2.

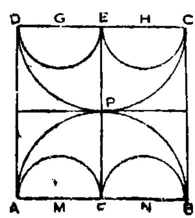
求證 EF=GH

證 由圓心C作CB⊥EF, CD⊥GH.

△ABC≡△ADC	兩角一邊(∠1=∠2, ∠B=∠D, CA=CA)
CB=CD	全等△的對應邊相等.
EF=GH	兩弦EF, GH到圓心的距離CB,CD相等,

教科書內第24面 理解題

1. 如下圖A, B, C, D,是一個正方形的頂點. 表明這圖的作法怎樣. 那幾個半圓是相切的?



設 A,B,C,D是正方形的頂點,

∠A=∠B=∠C=∠D=90°

AB=BC=CD=DA

問 (a)右圖的作法怎樣.

(b)那幾個半圓相切.

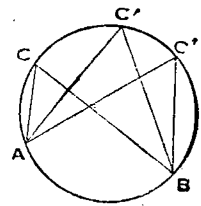
答 (a)取AB, CD各邊的中點E,F,做圓心,AF做半徑,畫兩半圓. 再取AF, FB, DE, EC的中點M, N, G, H做圓心,AF的一半做半徑,畫4個小半圓,就成右圖.

(b)依§135定理:"若兩圓相遇在兩圓心的連線上,兩圓必相切". 所以⊙G與⊙E切在D點.

⊙G與⊙H切在E點.　⊙E與⊙H切在C點.
⊙E與⊙F切在P點.　⊙M與⊙F切在A點.
⊙M與⊙N切在F點.　⊙F與⊙N切在B點.

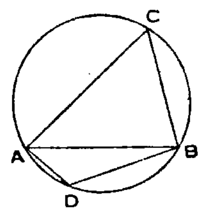
教科書內第26面　實驗題

1. 試較量同弓形裏的圓周角如C,C′,C″.從比較所得的結果,說出一個命辭來.



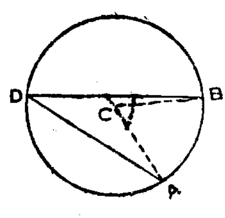
㊗ 在弓形ACB裏,量得,
$\angle C=\angle C'=\angle C''=(\quad)^\circ$ ∴同在1弓形內所含的諸圓周角都相等.

2. 在右圖AB弦的他邊,任作一圓周角如∠D.量∠C同∠D,並找出這兩角的總和.



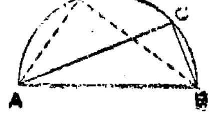
㊗ 量得$\angle C=(\quad)^\circ$, $\angle D=(\quad)^\circ$
∴在AB弦兩邊的兩圓周角的和是兩直角(即180°).

3. 在一圓裏作一圓周角,再作這圓周角所含的弧所對的圓心角,如下面左圖.量那兩角,比較他們的大小.



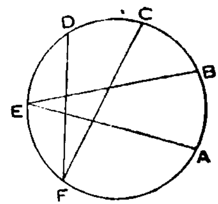
㊗ 在⊙C裏的圓周角ADB與圓心角ACB所共含的弧是$\widehat{AB}$.
量得$\angle D=(\quad)^\circ$, $\angle C=2\times(\quad)^\circ$
$\therefore \angle C=2\angle D$.

4. 作半圓裏面的圓周角如右圖.試量那角的度數.



㊗ 半圓裏的圓周角,量得90°.

又 任取半周上1點C',與直徑兩端所成的角也是90°.

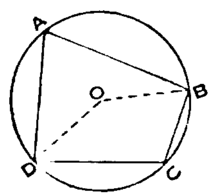


5. 在同圓裏作相等的兩圓周角,量那所含弧的大小.倘要決定$\overset{\frown}{AB}$同$\overset{\frown}{CD}$是不是相等,用什麼方法才便當.

(解) $\angle AEB$, $\angle DFC$是同圓裏相等的圓周角,$\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$是他們所含的弧,將圓規的一脚定在A點,挪開他脚使定B點,則兩脚的距離,即弧上A,B,兩點的距. 以此距再量$\overset{\frown}{CD}$,若兩脚恰在CD上,則兩弧相等.

"因AB, CD兩距即$\overset{\frown}{AB}$ $\overset{\frown}{CD}$所對的弦長,兩弦既相等,則所對的弧也等".

教科書內第29面 理解題



1. 任意四邊形的各頂角若都在圓周上,那兩對相等的角必互為補角.

(設) 任意4邊形ABCD的各頂角$\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$都在⊙O的圓周上.

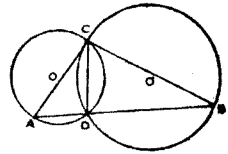
(求證) $\angle A+\angle C=180^\circ$. $\angle B+\angle D=180^\circ$

(證) $\angle A=\frac{1}{2}$劣角BOD $\angle C=\frac{1}{2}$優角BOD	圓周角是他的含弧所對圓心角的一半.
$\angle A+\angle C=\frac{1}{2}$(1周角) $=180^\circ$	$\angle BOD$的優角與劣角和,是1周角.

依同理$\angle B+\angle D=180^\circ$

(別證) $\angle A=\frac{1}{2}\overset{\frown}{DCB}$	圓周角A可用$\frac{1}{2}\overset{\frown}{DCB}$去量
$\angle C=\frac{1}{2}\overset{\frown}{DAB}$	圓周角C可用$\frac{1}{2}\overset{\frown}{DAB}$去量
$\angle A+\angle C=\frac{1}{2}$圓角$=180$	$\overset{\frown}{DCB}+\overset{\frown}{DAB}=1$圓周$=360^\circ$

2.　兩圓相交於C,D.畫這兩圓的兩直徑,CA,CB試證A, D, B在一直線上.



設　$\odot O$與$\odot O'$交於C,D.兩點.由交點C畫$\odot O$的直徑CA, $\odot O'$的直徑CB,　聯AD,DB

求證　ADB在一直線上.

證　在$\odot O'$裏$\angle CDB=90^\circ$ 在$\odot O$裏$\angle CDA=90^\circ$	半圓裏圓周角是直角
∴ ADB是在1直線上	兩鄰角的和是兩直角,兩外邊就成功一直線.

教科書內第29至30面　實驗題

1.　在圓內畫幾條平行的弦.　比較每一對弦中間所隔斷的兩弧如下圖1的$\overset{\frown}{AC}$同$\overset{\frown}{BD}$;$\overset{\frown}{CE}$同$\overset{\frown}{DF}$;$\overset{\frown}{AE}$同$\overset{\frown}{BF}$.

比較的方法,只要量AC, BD……等弦.然後根據量出來的結果,做一個命辭.

證　將圓規的兩脚先量準A,C的距.照樣去量BD的距,就知$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.再用圓規的兩脚量準CE與DF,知道$\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{DF}$.又用圓規來量AE,BF,知道$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BF}$.(證法當看§138)

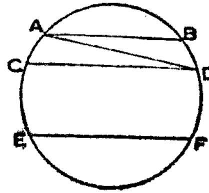
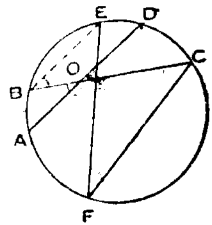


圖1.

〔若將A.D兩點相聯,則兩錯角$\angle BAD=\angle ADC$,於是則$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AC}$ (∵$\angle BAD$可用$\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$去量. $\angle ADC$可用$\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$去量)依同理可知$\overset{\frown}{DF}=\overset{\frown}{CE}$.〕

∴"過同圓的幾條平行線所截的弧必相等".

2. 畫圓內兩弦AD, BC交於O點,如下面圖2.截取$\widehat{DE}=\widehat{AB}$.那麼$\widehat{CE}=\widehat{CD}+\widehat{AB}$.
把C同E和圓上的F點聯結.
量出∠F同∠COD.的度數.
並且比較這兩角的大小.



㊗ 依§137定理,則圓周角∠F可用$\frac{1}{2}\widehat{CE}$去量. 但由量的結果,知道∠COD與∠F相等. 所以便知∠COD也就可用$\frac{1}{2}\widehat{CE}=\frac{1}{2}(\widehat{CD}+\widehat{AB})$去量出來. (此題證法當看下之§139)

〔若上面題1的命辭是眞確的,(看§138)就先由B點作BE∥AD 則$\widehat{DE}=\widehat{AB}$,其同位角∠COD=∠CBE=$\frac{1}{2}\widehat{CE}$=∠F (∵圓周角是他所含弧的1半) ∴∠COD可用$\frac{1}{2}(\widehat{CD}+\widehat{AB})$去量〕.

3. 在AB弦的端點作圓的切線AD, 把A,B同圓周上不在∠BAD所含的弧上面的任一點C連結.

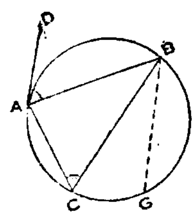


圖3.

試完成下面這句話. "因∠C可以用$\frac{1}{2}\widehat{AB}$去量他,因此∠BAD便可用……去量他."

㊗ 由量的結果可知∠BAD=∠ACB. ∴"因∠C可以用$\frac{1}{2}\widehat{AB}$去量他,因此∠BAD便也可用$\frac{1}{2}\widehat{AB}$去量他."

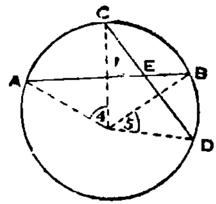
(此題證法當看下面§140)

〔但若上面題1的命辭是眞確的(看§138)就由B點作BG∥DA則$\widehat{GA}=\widehat{BA}$ ∴同位角∠BAD=∠ABG=$\frac{1}{2}\widehat{AG}=\frac{1}{2}\widehat{AB}$

教科書內第33面 目解題

1. 若對$\overset{\frown}{BD}$的圓心角是30°對$\overset{\frown}{AC}$的圓心角是40°；又若對$\overset{\frown}{BD}$的圓心角是12°,對$\overset{\frown}{AC}$的圓心角是18°,如圖找出∠1.

設 AB,CD是交於圓內的兩弦.



∠1是AB,CD兩弦所成的角.

若 (1) $\overset{\frown}{BD}=30°$, $\overset{\frown}{AC}=40°$,

(2) $\overset{\frown}{BD}=12°$, $\overset{\frown}{AC}=18°$

找出 ∠1的度數來.

解 由上面§139定理,可知

$\angle 1=\frac{1}{2}(\angle 4+\angle 5)$	∠4,∠5是∠1與其對頂角所含的兩弧($\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BD}$)所對的圓心角.
$\angle 1=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})$	圓心角∠4,∠5是用他所含$\overset{\frown}{AC}$,$\overset{\frown}{BD}$去量.
∴ (1) $\angle 1=\dfrac{40°+30°}{2}=35°$	$\overset{\frown}{AC}=40°$　$\overset{\frown}{BD}=30°$
(2) $\angle 1=\dfrac{18°+12°}{2}=15°$	$\overset{\frown}{AC}=18°$　$\overset{\frown}{BD}=12°$

2. 若對$\overset{\frown}{CB}$的圓心角是110°,對$\overset{\frown}{ACD}$的圓心角是170°, 又若對$\overset{\frown}{CB}$的圓心角是150°,對$\overset{\frown}{ACD}$的圓心角是200°,如上圖找出∠1

解 在上圖裏$\overset{\frown}{ACD}-\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}$. 由題1,則知

$\angle 1=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})$	∠1是兩交弦所成的角.
$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{ACD}-\overset{\frown}{CB})$	$\overset{\frown}{ACD}-\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}$
∴ (1) $\angle 1=\frac{1}{2}(170°-110°)=30°$	已設 $\overset{\frown}{ACD}=170°$, $\overset{\frown}{CB}=110°$
(2) $\angle 1=\frac{1}{2}(200°-150°)=25$	又設 $\overset{\frown}{ACD}=200°$, $\overset{\frown}{CB}=150°$

3. 同圖裏面若∠1=20°對$\overset{\frown}{BD}$的圓心

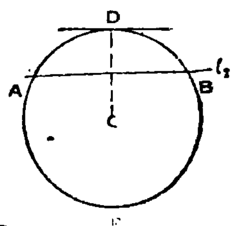
角是30° 找出對$\overset{\frown}{AC}$的圓心角. 又若$\angle 1=50°$,對$\overset{\frown}{BD}$的圓心角是60°也找出對$\overset{\frown}{AC}$的圓心角.

解 $\because \angle 1=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{AC})$ 則 $2\angle 1=\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{AC}$

$\therefore \overset{\frown}{AC}=2\angle 1-\overset{\frown}{BD}$

(1) $\overset{\frown}{AC}=2\times 20°-30°=10°$ (2) $\overset{\frown}{AC}=2\times 50°-60°=40°$

4. 如§141的圖1裏面,對$\overset{\frown}{AD}$的圓心角是55°,找對其他各弧的圓心角. 如對$\overset{\frown}{BD}$的圓心角是110°,也找對其他諸弧的圓心角.



設 $l_1\ l_2$兩平行線同圓相遇,使

(1) $\overset{\frown}{AD}=55°$ (2) $\overset{\frown}{BD}=110°$

(找出) (1)對$\overset{\frown}{BD}$的圓心角,與對$\overset{\frown}{AEB}$的圓心角.

(2)對$\overset{\frown}{AD}$的圓心角,與對$\overset{\frown}{AEB}$的圓心角.

解 (1)$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AD}=55°$ | 兩平行線,截同圓的兩弧相等.

$\overset{\frown}{AEB}=360°-2AD$ | 圓周上減去$\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{BD}$,餘$\overset{\frown}{AEB}$

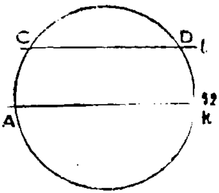
$=250°$ | $AD=55°$ $2AD=110°$

依同理則 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}=110°$

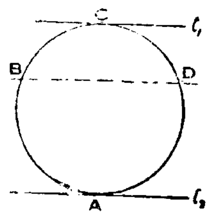
$\overset{\frown}{AEB}=360°-2\times 110°=140°$

5. 如§141的圖2裏面,對$\overset{\frown}{AC}$的圓心角是40°,對$\overset{\frown}{CD}$的圓心角是150°,找對$\overset{\frown}{DB}$同$\overset{\frown}{AB}$的圓心角.

解 $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AC}$	‖s所截兩弧相等.
對$\overset{\frown}{BD}$的圓心角$=40^\circ$	$\overset{\frown}{AC}$上的圓心角是40°.
$\overset{\frown}{AB}=360^\circ-(2AC+CD)$	$\overset{\frown}{AB}$是圓周減去$\overset{\frown}{ACDB}$.
$=360^\circ-(80\times150^\circ)$	$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AC}=40$,
	$\overset{\frown}{CD}=150^\circ$.
對$\overset{\frown}{AB}$的圓心角$=130$	$\overset{\frown}{AB}$上的圓心角,是用
	$\overset{\frown}{AB}$的度數去量.



6. 如§141的圖3裏面,對$\overset{\frown}{BC}$的圓心角是30°,找對$\overset{\frown}{CD}$,$\overset{\frown}{DA}$同$\overset{\frown}{AB}$的圓心角。又若對$\overset{\frown}{AD}$的圓心角是95,也找對其餘諸弧的圓心角.



解 按圖上$\overset{\frown}{ABC}+\overset{\frown}{CDA}=360^\circ$ 依§141第三種證法

則 $\overset{\frown}{ABC}=\overset{\frown}{ADC}=360^\circ\div2=180^\circ$ 已知$\overset{\frown}{BC}=30^\circ$ 故

1 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{ABC}-\overset{\frown}{BC}=180^\circ-30^\circ=150^\circ$. $\therefore$對$\overset{\frown}{AB}$的圓心角$=150^\circ$

$\because BD\parallel l_2$ 則$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AB}=150^\circ$ $\therefore$對$\overset{\frown}{AD}$的圓心角$=150^\circ$

$\because l_1\parallel BD$ 則$\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{BC}=30^\circ$ $\therefore$對$\overset{\frown}{DC}$的圓心角$=30^\circ$

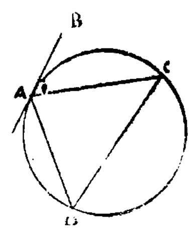
(2) $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{ADC}-\overset{\frown}{AD}=180^\circ-95^\circ=85^\circ$ $\therefore$對$\overset{\frown}{CD}$的圓心角$=85^\circ$

$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=85^\circ$ $\therefore$對$\overset{\frown}{BC}$的圓心角$=85^\circ$

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AD}=95^\circ$ $\therefore$對$\overset{\frown}{AB}$的圓心角$=95^\circ$

教科書內第35面 目解題

1. 在圖內(a)若$\angle ADC=60^\circ$;(b)若$\angle ADC=47^\circ$;(c)若$\angle ADC=35^\circ30'$.試求$\angle 1$.



解 由§140定理可知:切線AB同過切點A的弦AC所成的$\angle 1$,等於$\overset{\frown}{AC}$

上的圓周角$\angle ADC$.

$\therefore$ 若$\angle ADC=60^\circ$　則$\angle 1=60^\circ$

若$\angle ADC=47^\circ$　則$\angle 1=47^\circ$

若$\angle ADC=35^\circ 30'$　則$\angle 1=35^\circ 30'$

2.　(a)若$\angle 1=40^\circ$; (b)若$\angle 1=35^\circ$; (c)若$\angle 1=23^\circ, 15'$,問$\overparen{AC}$所對的圓心角是多少度?

解　$\because \angle 1=\overparen{AC}$上的圓周角$=\overparen{AC}$上的圓心角之半

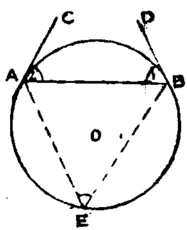
$\therefore$　$\overparen{AC}$上的圓心角$=2\angle 1$

若$\angle 1=40^\circ$　則　$\overparen{AC}$所對的圓心角$=2\times 40^\circ=80^\circ$

若$\angle 1=35^\circ$　則　$\overparen{AC}$所對的圓心角$=2\times 35^\circ=70^\circ$

若$\angle 1=23^\circ 15'$,　$\overparen{AC}$所對的圓心角$=2\times 23^\circ 15'=46^\circ 30'$

教科書內第36面　理解題



1.　在一圓上畫兩切線同連結兩切點的弦.　證所成的二角相等,

設　AC, BD是$\odot O$的兩切線.

AB是聯兩切點的弦,與切線成$\angle 1, \angle 2$.

求證　$\angle 1=\angle 2$.

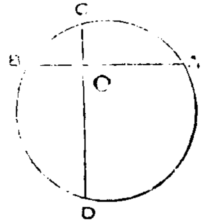
證　在圓上取E點,聯AE,EB,則$\angle AEB$是$\overparen{AB}$上的圓周角.

$\left.\begin{array}{l}\angle 1=\angle AEB\\ \angle 2=\angle AEB\end{array}\right\}$ 切線與切點弦AB所成的角,等於所含$\overparen{AB}$上的圓周角$\angle AEB$.

$\therefore \angle 1=\angle 2=\angle AEB$.

2.　如圖2互相垂直的兩弦,所含相對

兩弧的和等於半圓.



(設) 在圓裏,AB,CD,兩弦互相垂直.
AB,CD,截圓成兩對對弧,$\overset{\frown}{BC}$ $\overset{\frown}{AD}$與$\overset{\frown}{AC}$ $\overset{\frown}{BD}$.

(求)(證) $\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AD}=180^\circ$

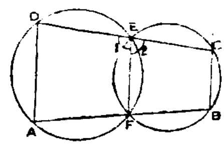
$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=180^\circ$

(證) $\angle AOD=90^\circ$	$\angle AOD$是AB,CD兩弦互相垂直所成之角.
$\angle AOD=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AD})$	兩弦的夾角,是AD,BC所對圓心角之半.
$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AD})=90^\circ$	都等於$\angle AOD$.
$\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AD}=180^\circ$	用2乘上式

依同理 則$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=180^\circ$

3. 畫通過兩圓交點的二線,到圓周爲止. 證明聯結相當諸端點的弦必相平行.

(設) 兩圓交在E,F,兩點. DC線過E點,並遇兩圓周於D,C. AB線過F,並遇兩圓於A,B.
聯接A,D與B,C.



(求)(證) AD∥BC.

(證) 聯EF,則分平角CED爲$\angle 1$,$\angle 2$.

$\angle A+\angle 1=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{DEF}+\overset{\frown}{FAD})=180^\circ$	圓周角是所含弧,所對圓心角之半.
$\angle B+\angle 2=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{CEF}+\overset{\frown}{FBC})=180^\circ$	
$\because \angle A+\angle 1=\angle 2+\angle 1$ $\therefore \angle A=\angle 2$	$\angle A$,$\angle 2$都是$\angle 1$的補角.
$\angle B+\angle A=180^\circ$	$\angle B+\angle 2=180^\circ$又$\angle A=\angle 2$
$\therefore$ BC∥AD	BC,AD,兩線,爲BA所截,其同邊內角和,是兩直角.

教科書內第35至36面 實驗題

1. 如下圖1.畫兩割線相遇於圓外,含

有 $\widehat{AB}$ 同 $\widehat{CD}$. 截取 $\widehat{CE}=\widehat{AB}$. 於是 $\widehat{DE}=\widehat{CD}-\widehat{AB}$. 聯結 D,E 於圓周上的 F 點. 量 ∠P 同 ∠F, 是不是相等? 因 ∠F 等於 $\widehat{DE}$ 上的圓周角, ∠P 等於什麼? ∠P 似乎等於 ($\widehat{CD}-\widehat{AB}$) 上的圓周角, 對不對呢?

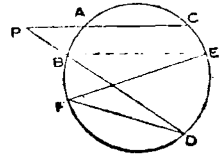


圖1.

㊣ 照題上所說的將圖作好後,

(1) 量得 $\angle P=\angle F$

(2) 因 $\angle F=\widehat{DE}$ 上的圓周角,

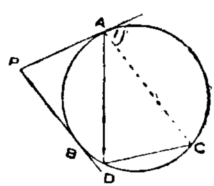
又 $\angle P=\angle F$.

$\therefore$ ∠P 也等於 $\widehat{DE}$ 上的圓周角

(3) $\because \widehat{DE}=\widehat{CD}-\widehat{AB}$ $\therefore \angle P=(\widehat{CD}-\widehat{AB})$ 上的圓周角.

〔若由 B 作 BE∥PC, 則 ∠P=同位角 ∠EBD=$\widehat{ED}$ 上的圓周角. $\because \widehat{CE}=\widehat{AB}$, 而 $\widehat{ED}=\widehat{CD}-\widehat{AB}$ $\therefore \angle P=(\widehat{CD}-\widehat{AB})$ 上的圓周角.〕

2. 如圖2, 畫兩切線遇於 P. 截取 $\widehat{BC}=\widehat{AB}$ 於是 $\widehat{AC}=\widehat{ACB}-\widehat{AB}$ 聯結 C, A 兩點於圓周上的 D 點. 較量 ∠P 同 ∠D. ∠P 似乎等於 ($\widehat{ACB}-\widehat{AB}$) 上的圓周角對不對呢?



㊣ 依題意作圖, 量得 $\angle P=\angle D$.

$\because \angle D=\widehat{AC}$ 上的圓周角, 而 $\widehat{AC}=\widehat{ACB}-\widehat{AB}$

$\therefore \angle P=\angle D=(\widehat{ACB}-\widehat{AB})$ 上的圓周角.

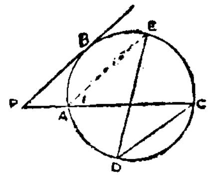
〔若由 A 作 AC∥PB 則 $\angle P=\angle 1=\widehat{AC}$ 上的圓周角.

$\because \widehat{BC}=\widehat{AB}$ 而 $\widehat{AC}=\widehat{ACB}-\widehat{AB}$

$\therefore \angle P=(\widehat{ACB}-\widehat{AB})$ 上的圓周角.〕

3. 如圖3, 畫切線同割線相遇於 P. 截取 $\widehat{BE}=\widehat{AB}$. 完成這個圖形, 並且說明 ∠P

似乎等於在$(\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AB})$上的圓周角.



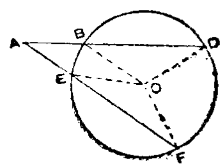
㊖ 切線PB與割線PC遇於P點截取$\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{AB}$. 聯C,E,兩點於圓周上D點. 量得$\angle P=\angle D$. ∵$\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{BE}$; 而$\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{AB}$. ∴$\angle D=\overset{\frown}{CE}$上的圓周角 $=(\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AB})$上的圓周角.

∵量得$\angle P=\angle D$ ∴$\angle P=(\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AB})$上的圓周角.

〔若由A作AE∥PB. 則$\angle P=\angle$ $=\overset{\frown}{CE}$上的圓周角. ∵$\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{AB}$ 而$\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AB}$ ∴$\angle P=(\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AB})$上的圓周角.〕

教科書內第38至39面 目解題

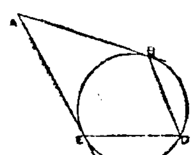
1. 若§144的圖1裏面, $\overset{\frown}{DF}$所對的圓心角是50°. $\overset{\frown}{BE}$所對的圓心角是20°. 求$\angle A$.



㊖ 已知對$\overset{\frown}{DF}$與對$\overset{\frown}{BE}$的圓心角是50°與20°. 則

含$\overset{\frown}{DF}$的圓周角$=\frac{50^\circ}{2}=25^\circ$ 含$\overset{\frown}{BE}$的圓周角$=\frac{20^\circ}{2}=10^\circ$	圓周角是他所含弧所對的圓心角的一半.
∴ $\angle A=25^\circ-10^\circ=15^\circ$	$\angle A$是兩割線遇於圓外所成的角.

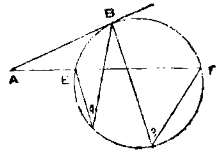
2. 若§144的圖2裏面, $\overset{\frown}{BDE}$所對的圓心角是280°, 求$\angle A$.



㊖ 已知$\overset{\frown}{BDE}$所對的圓心角是280°,

則$\overset{\frown}{BE}=360^\circ-\overset{\frown}{BDE}=80^\circ$	$\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{BDE}=1$圓周.
$\overset{\frown}{BE}$上圓周角$=40^\circ$ $\overset{\frown}{BDE}$上圓周角$=140$	圓周角是同弧上的圓心角的一半.
∴$\angle A=140^\circ-40^\circ=100$	$\angle A$是兩切線遇於圓外所成角.

3. 若§144的圖3裏面，$\angle A=20^\circ$，$\angle 3=100^\circ$，求$\angle 4$的度數.

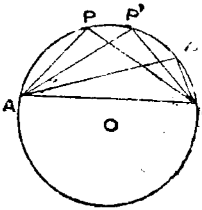


解 $\angle A$是切線AB同割線AF所成的角. 則$\angle A$=圓周角$\angle 3$,與$\angle 4$的差

$\therefore \angle A=\angle 3-\angle 4$. 移項,則

$\angle 4=\angle 3-\angle A=100^\circ-20^\circ=80^\circ$.

4. 從下面圖1,比較同弓形裏的圓周角.設頂點P沿着弧上移動,但兩邊都穿過A點同B點.問那些角的大小是不是不變呢?證一證.



解 $\angle APB$是在弓形APB內的角他的頂點P若沿$\overset{\frown}{APB}$移動兩邊都過A, B,那麼"在這弓形裏的那些角的大小不變".即$\angle P=\angle P'=\angle P''=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AP}$.

(按§137的推論二說:"同弓形裏的圓周角相等.")

5. 若一弧比半圓小. 那麼裏面的圓周角比直角大還是小呢?看圖2.

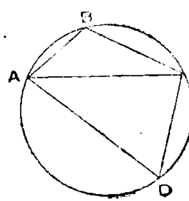


圖2.

設 $\overset{\frown}{ABC}$小於半圓周,

$\angle ABC$是$\overset{\frown}{ABC}$裏面的圓周角.

問 $\angle ABC$是比直角大還是小

解 $\overset{\frown}{ABC}<$半圓,則$\overset{\frown}{ADC}>$半圓

($\because \overset{\frown}{ABC}+\overset{\frown}{ADC}$是1圓周)

對$\overset{\frown}{ADC}$的圓心角>兩直角	$\overset{\frown}{ADC}>$半圓.
$\therefore \angle ABC$大於1直角	$\angle ABC$是$\overset{\frown}{ADC}$上的圓周角.

6. 若一弧比半圓大. 那麼裏面的圓周角比直角大還是小呢? 看圖2.

解 已知$\widehat{ADC}>$半圓,則$\widehat{ABC}<$半圓.

對$\widehat{ABC}$的圓心角<2直角	$\widehat{ABC}<$半圓
∴ $\angle ADC$小於1直角	$\angle ADC$是$\widehat{ABC}$上的圓周角.

7. 畫含有120°,圓心角的弧,在這弧的兩端作兩切線,這兩切線組成的角是多少度? 看圖3.

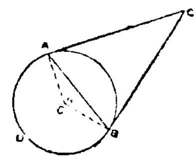


圖 3.

解 已知$\widehat{AB}$是含有120°的圓心角的弧.

$\widehat{ADB}=360°-\widehat{AB}$	$\widehat{ADB}+\widehat{AB}$是1圓周.
$\widehat{ADB}=240°$	$\widehat{AB}=120°$
$\angle C=\frac{1}{2}(\widehat{ADB}-\widehat{AB})$	$\angle C$是兩切線在圓外所成角.
$=\frac{1}{2}\times 120°=60°$	$\widehat{ADB}=240°$, $\widehat{AB}=120°$.

8. 如圖4, AB切於圓. $\angle 1=65°$, $\angle 2=25°$ 求$\angle B$. BC是不是這圓的直徑?

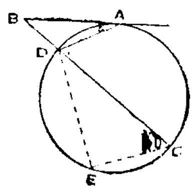


圖 4.

解 (1)在△ABD裏,$\angle 1$是外角.

$\angle 1=\angle 2+\angle B$(∵外角是內對角的和.)

∴ $\angle B=\angle 1-\angle 2=65°-25°=40°$,(∵已設$\angle 1=65°$,$\angle 2=25°$)

(2) $\widehat{AD}$上的圓周角$=\angle 2$	$\angle 2$是切線AB與弦AD所成角.
$\widehat{AD}$上的圓心角$=2\angle 2=50°$	圓周角是圓心角的一半.
$\widehat{AC}$上的圓心角$=2\angle 1=130°$	$\angle 1$ (65°)是$\widehat{AC}$上的圓周角.
∴ DC是直徑,可平分這圓.	$\widehat{AD}+\widehat{AC}=50°+130°=180°$.

9. 如圖5, AB同DE兩弦平行,聯結各弦的兩端於圓心. 證明$\angle ACD=\angle BCE$.

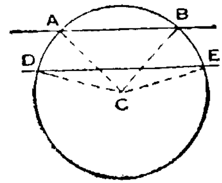


圖5.

(證) $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BE}$	$AB \parallel DE$,所截的弧等.
$\angle ACD=\angle BCE$	等弧所的圓心角也等.

10. 如圖6, AB為直徑, 若$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EF}$, $\overset{\frown}{FD}=\overset{\frown}{DB}$. 證明$\angle ECD$是直角.

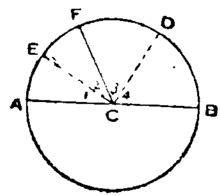
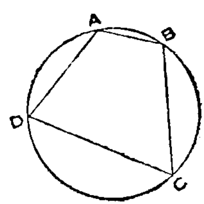


圖6.

(證) $\overset{\frown}{AFB}$是半圓	直徑AB平分1圓.
$\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$	對等弧的圓心角.
$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180^\circ$	$\overset{\frown}{AFB}$是半圓.
$\angle 2+\angle 3=\angle ECD=90^\circ$	上式的一半.

教科書內第39至40面 理解題

1. 若一個四邊形的頂點都在圓周上. 試證各角的和是四直角.



(設) 四邊形ABCD的頂點都在圓周上.

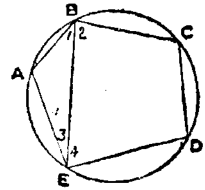
(求證) $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4rt\angle s$.

(證) $\angle A$可用$\frac{1}{2}\overset{\frown}{DCB}$去量	$\angle A$是$\overset{\frown}{DCB}$上圓周角.
$\angle C$可用$\frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD}$去量	$\angle C$是$\overset{\frown}{BAD}$上圓周角.
$\angle A+\angle C=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{DCB}+\overset{\frown}{BAD})$	上兩式相加.
$\therefore \angle A+\angle C=\frac{360^\circ}{2}=180^\circ$	$\overset{\frown}{DCB}+\overset{\frown}{BAD}$是1個周

依同理 $\angle B+\angle D=180^\circ=2rt\angle s$.

∴ $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ=4rt\angle s$,

2. 若一個五邊形的頂點都在圓周上. 試證各角的和是六直角.



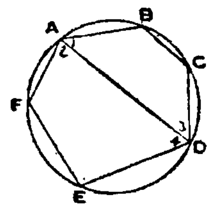
(設) ABCDE 5 邊形頂點都在圓周上.

(求)(證) $\angle s$ A,B,C,D,E, 的和是 6rt$\angle s$.

(證) 作 BE 對角線,則分 ABCDE 成 1 個四邊形 BCDE, 與一個三角形 ABE.

$\angle 1+\angle A+\angle 3=2rt\angle s$	△裏各角的和是2直角.
$\angle 2+\angle C+\angle D+\angle 4=4rt\angle s$	四邊形的頂點都在圓周上.
$\angle s$ A, B, C, D, E 的和 $=6rt\angle s$	上兩式相加.

3. 若一個六邊形的諸頂點都在圓周上. 試證各角的和等於八直角.



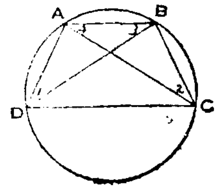
(設) ABCDEF 6 邊形的頂點都在圓周上.

(求)(證) $\angle s$ A,B,C,D,E,F 的和是 8rt$\angle s$.

(證) 作對角線 AD,分 ABCDEF 成功 ABCD 與 DEFA 兩個四邊形. 則 依上面題 1 的證法可知:—

$\angle 1+\angle B+\angle C+\angle 3=4rt\angle s$	四邊形的頂點都在圓周上.
$\angle 2+\angle F+\angle E+\angle 4=4rt\angle s$	
∴ 6 邊形各角的和 $=8rt\angle s$	上兩式相加.

4. 若一梯形的諸頂點都在圓周上,他的對角線相等且梯形的兩腰也相等



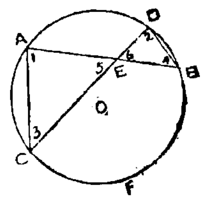
設 梯形的頂點A,B,C,D都在圓周上, AB, CD是梯形的兩底. AC,BD,是對角線.

求證 AC=BD. AD=BC.

證 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$	AB∥DC(梯形的平行兩底所截的弧相等.)
$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}$	兩邊各加$\overset{\frown}{AB}$.
∴ AC=BD	對等弧($\overset{\frown}{ABC}$, $\overset{\frown}{DAB}$)的弦.
AD=BC	對等弧($\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{BC}$)的弦.

或證 △ABD≡△ABC ∠1=∠2, ∠3=∠4, AB=AB.

AC=BD AD=BC 全等△的對應邊相等.



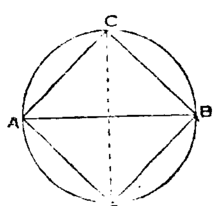
5. 聯結相交二弦的端點. 證明這樣所成功的兩個三角形裏的各角,都對應相等.

設 ⊙O裏兩弦AB.CD交於E.

AC,BD是聯兩弦端點的線,成功兩△ACE, BDE.

求證 兩△ACE,BDE的各對應角都相等.

證 ∠AEC=∠BED	對頂角相等.
∠CAB=∠CDB	同在$\overset{\frown}{BFC}$上的兩圓周角相等.
∠ACD=∠ABD	同在$\overset{\frown}{AD}$上的兩圓周角相等.



6. 用所給線段做對角線作正方形.

設 用AB做正方形的對角線.

求作 ACBD正方形.

(作法) 以AB做直徑作一圓,

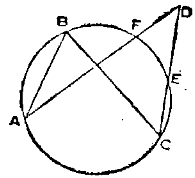
平分$\overset{\frown}{ACB}$與$\overset{\frown}{ADB}$於C, D. 聯AC,BC,AD,BD. 則ACBD即所求

的正方形.

證 $\widehat{AC}=\widehat{BC}=\widehat{BD}=\widehat{AD}$	直徑AB平分1圓,而C,D,是等弧的中點.
$AC=BC=BD=AD$	等弧所對的弦也等.
$\angle C=\angle D=90^\circ$	半圓裏的圓周角是直角.
$\angle A=\angle B=90^\circ$	$\angle A$所對的$\widehat{BC}+\widehat{BD}=\angle B$所對的$\widehat{AC}+\widehat{AD}$
$\therefore ACBD$ 是正方形	四邊相等各角都是直角.

7. 如下面的圖, $\angle ABC$ 的頂點在圓周上, $\angle ADC$ 的頂點在圓外,

試證 $\angle ABC>\angle ADC$.



證 $\angle ABC$ 可用$\frac{1}{2}\widehat{AC}$去量 ($\angle ABC$ 是對$\widehat{AC}$上的圓周角.)

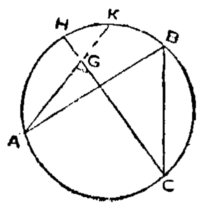
$\angle ADC$ 可用$\frac{1}{2}(\widehat{AC}-\widehat{EF})$ 去量.

($\angle ADC$ 是兩割線 AD,DC 遇於圓外 D 點所成的角.)

$\because \frac{1}{2}\widehat{AC}>\frac{1}{2}(\widehat{AC}-\widehat{EF})$ $\quad\therefore \angle ABC>\angle ADC$.

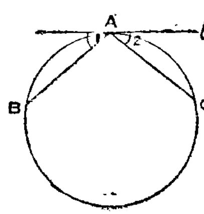
8. 在同圖裏, $\angle AGC$ 的頂點在圓內.

試證 $\angle ABC<\angle AGC$.



證 $\angle ABC=\frac{1}{2}\widehat{AC}$	在$\widehat{AC}$上的圓周角
$\angle AGC=\frac{1}{2}(\widehat{AC}+\widehat{HK})$	兩弦相交所成的角
$\therefore \angle ABC<\angle AGC$	$\frac{1}{2}\widehat{AC}<\frac{1}{2}(\widehat{AC}+\widehat{HK})$

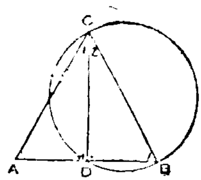
9. 如下面右圖, l 線與圓相切於 A. 畫 AB, AC 弦, 令 $\angle 1=\angle 2$. 證明 $AB=AC$.



證 $\angle 1=\frac{1}{2}\widehat{AB}$
$\angle 2=\frac{1}{2}\widehat{AC}$ } $\angle 1,\angle 2$是切線 l 與切點弦所成的角.

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$	$\angle 1=\angle 2$
$\therefore$ AB=AC	對等弧的弦相等.

10. 把等腰三角形的一邊做直徑作圓. 證明圓周必平分這三角形的底. 看下面的圖.



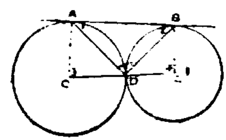
設 用等腰△ABC的BC邊做直徑, 畫一圓截底邊AB於D.

求證 D點平分AB邊(即AD=DB)

證 聯C,D則成△ACD與△BCD.

$\angle BDC=90°$	半圓裏的圓周角∠BDC是直角.
$\angle ADC=90°$	∠BDC是直角,則CD是AB的垂線.
$\angle A=\angle B$	等腰△ABC的對等邊BC, AC的角相等.
$\angle 1=\angle 2$	兩直角△的一銳角對應相等,他銳角也相等.
AD=DB	平分等腰△頂角的CD線,必平分底邊.

11. 隨便相等的或不等的兩外切圓相切於D. 畫他們的公切線AB. 試證∠ADB一定是直角.看下面右圖.



設 ⊙C與⊙C'外切於D點,AB是兩圓的公切線.

聯AD, BD.

求證 ∠ADB是直角.

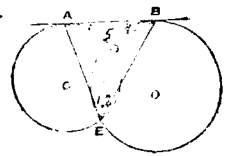
證 聯兩圓心C, C'. 並聯CA, C'B.

CDC'是一直線聯兩切圓心的線必過切點.

AC ∥ BC'	切點上的半徑AC,BC'都垂直於公切線AB.
$\angle 3+\angle 4=180°$	平行線AC,BC'與截線CC'所成的同邊內角,

$\angle 1+\angle 2=\dfrac{\angle 3}{2}+\dfrac{\angle 4}{2}$	切線與切點弦所成角是含弧的圓周角. $\angle 3+\angle 4$的一半是一直角.
$=90^\circ$	
$\therefore\ \angle ADB=90^\circ$	△的各角和是2直角 $\therefore\ \angle ADB=180^\circ-(\angle 1+\angle 2)$

12. 如下左圖,兩圓相交於D, E, 有公共的切線AB. 試證∠s ADB同AEB互爲補角.



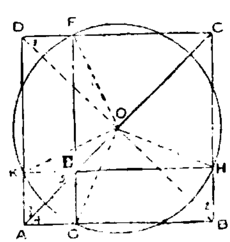
設 兩圓交於D,E. AB是公切線. DA, DB, EA, EB是聯交點D, E與切點的線.

求證 $\angle ADB+\angle AEB=2rt\angle s$.

證 聯結兩交點D, E, 則

$\angle 1=\angle 3\quad \angle 2=\angle 4$	切線與切點弦所成角,等於他含弧上所對的圓周角.
$\angle 5+\angle 3+\angle 4=180^\circ$	△ABD裏各角的和是兩直角.
$\angle 5+\angle 1+\angle 2=180^\circ$	$\angle 1=\angle 3\quad \angle 2=\angle 4$
$\angle ADB+\angle AEB=2rt\angle s$	$\angle ADB=\angle 5\quad \angle AEB=\angle 1+\angle 2$.

13. 如下右圖,過正方形對角線上的隨便一點E,畫與正方形邊平行的諸線,遇邊於F, G, H, 同K. 若AO=OC, 表明用O做圓心, OG做半徑所畫的圓,必經過F, H, K, 各點.



設 AC是正方形ABCD的對角線. AO=OC. E是AC上的任意點. KH,GF,是過E點的兩線,且KH ∥ AB,GF ∥ AD. KH,GF兩線與正方形的邊遇於F,G,H,K.

求證 以O做圓心,OG做半徑的圓,必過F,G,H,K.

㊣ 畫BD對角線. 又聯圓心O與F, G, H, K各點. 則

BD與AC交於O	▱對角線互相平分,而O是AC的平分點.
AO=OC=DO=OB	□對角線AC,BD是相等的.(見86面題9).
∠1=∠2=45°	∠1,∠2是等腰直角△的底角.
∠3=∠4=45°	同樣,∠3,∠4都是等腰直角△的底角.
∠5=∠4=45°	KH∥AB與截線AE所成的內錯角相等.
AK=KE	△AKE的底角相等.(∠3=∠5=45°)
AGEK是個小□	對邊(AK,KE)相平行且相等.角是90°.

∴△AGO≅△AKO≅△DFO≅△BHO(∵兩邊夾角對應相等)

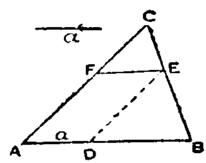
OG=OK=OF=OH(∵全等△的對應邊相等)

∴用OG做半徑的圓必過F,G,H,K.

(F,G,H,K,諸點到圓心O的距離都等)

教科書內第44至45面 理解題

1. 在三角形裏面,作一線段等於所給線段的長,他的兩端點在二邊上,並且同第三邊平行.



(給) 任意△ABC與1線段a.

㊡㊢ 用AC, BC做界,作FE線與底邊AB平行,並等於a線.

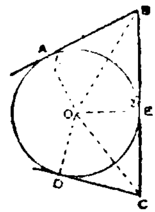
(作法) 在AB線上的A端截取AD=a. 由D畫DE∥AC截BC邊於E. 過E點作FE∥AB則FE=AD=a.

㊣ ADEF是▱	已作DE∥AC, FE∥AB
∴ FE=AD=a	▱的對邊相等.(已作AD=a.)

(討論) 若在AB的B端,截取與a相等的線段,他的作法證法都是一樣. 但所給的線段a若大於底邊AB, 則

△ABC裏面不能容他,那作法就不可能.

2. 如圖,AB, BC, CD同圓相切於A,E,D三點;表明BC=BA+CD.



㊟ AO=EO　圓的半徑都等.

BO=BO　兩△的公共邊.

∠1=∠2=1直角 過切點的半徑⊥切線.

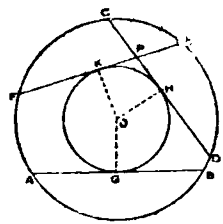
△ABO≡△EBO　rt△的弦與1股對應相等.

BA=BE　全等△的對應邊.

同理CD=CE　依上理則,△DCO≡△ECO.

BA+CD=BC　將上二式相加.

3. 過圓裏面的所給點作弦,等於所給弦的長.



(給) P是圓内的所給點.

AB是圓内的所給弦.

㊟㊟ 過P點作1弦等於AB.

(作法) 以AB弦到圓心的距離OG做半徑,畫1同心圓. 由P點作PD或PF與內圓相切. 引長DP或FP與外圓遇於DC或FE.則過P點的CD弦或EF弦等於AB弦的長.

㊟ 聯圓心與切點H, K. (參考本編96面的題1)

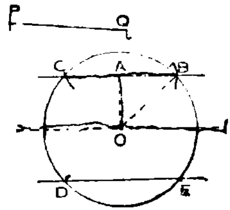
OH⊥CD　OK⊥EF　過內圓切點的半徑,是切線的垂線.

AB=CD=EF　諸弦到圓心的距離相等.
(OG, OH, OK是半徑.)

〔討論〕 若P到圓心的距離大於OG,就可以作兩弦與AB相等. 若P到圓心的距離等於OG,就只能作一弦與AB相等. 若P到圓心的距離小於OG,就不能作弦與AB

相等.

4. 作一圓,在平行兩線上截取等於所定長的相等二弦.



(給) CB∥DE. PQ是所給的長.

求作 作一圓,截CB,DE兩平行線等於PQ定長的兩弦.

(作法) 在CB與DE兩線中距之處作l∥CB. 截取CB=PQ. 由CB的中點A,作OA⊥CB. 則OA遇l於O點. 以O做圓心OB的長做半徑,畫1圓, 那末所截的CB=DE=PQ.

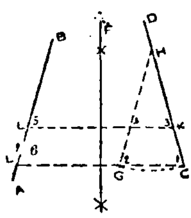
證 CB與DE到圓心O的距離相等.

(∵ l是在平行線CB, DE中距的地位,而l∥兩弦.)

已作CB=PQ ∴CB=DE=PQ(∵與圓心等距的弦也等.)

〔討論〕無論所給線的長短怎樣,平行線的距離怎樣,作法總是可能的.

5. 在下面圖裏有兩不相交線段AB同CD. 不許延長AB, CD, 求作EF線, 要令這線平分延長AB, CD所成的角.



(給) 不相交線段AB, CD. 並不延長.

求作 平分AB, CD的延線所成的角.

(作法) 在CD線上任取H點,由H點畫HG∥BA 使HG=HC. 連G, C則成等腰三角形HCG. 再由CD上的任意點K畫KL∥CG 在KL的中點作FE⊥KL. 則FE平分AB與CD延線所成的角.

(證) $\angle 1=\angle 2$	已作 HG=HC, 則 $\triangle$HGC 是等腰.
$\angle 3=\angle 1=\angle 2=\angle 4$	KL ∥ CG 與截線 HC,HG 所成同位角相等.
$\angle 3=\angle 4=\angle 5$	HG ∥ BA 與截線 KL 所成同位角相等.

AB 與 CD 延線的交點到 K, L, 所成的形是等腰三角形.

(∵ 對等角 $\angle 5$, $\angle 3$ 的邊也等)

∴ FE 平分 AB, CD 延線所成的角.

(∵ 垂直等分等腰$\triangle$底邊 KL 的線, 平分頂角.)

〔另一作法〕 任取 CD 上的一點 H, 由 H 點畫 HG ∥ BA 使 HG=HC. 連 CG 並延長他, 使與 BA 遇於 L′. 在 CL′ 線上畫垂直等分線 FE. 則 FE 平分 AB 與 CD 延線所成的角.

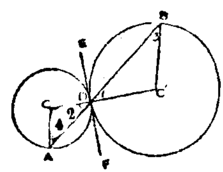
(證) $\angle 1=\angle 2$	$\triangle$HCG 裏對等邊 (HG,HC) 的角相等.
$\angle 6'=\angle 2=\angle 1$	HG ∥ BA 與截線 CL′ 所成同位角 ($\angle 2$, $\angle 6'$) 等

CL′ 與 AB,CD 延線所成的形是等腰$\triangle$

(∵ 對等角 $\angle 1$, $\angle 6'$ 的邊相等)

∴ 垂直等分等腰$\triangle$底邊 CL′ 的 FE, 平分 AB,CD 延線所成角.

6. 兩圓 C, C′ 外切於 D. 過 D 畫一線段, 一端到 ⊙C 為 A 點; 又一端到 ⊙C′ 為 B 點. 試證 AC ∥ BC′.

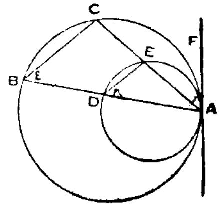


(證) 連兩圓心 C,C′, 則

CC′ 線必過切點 D	⊙C 與 ⊙C′ 是兩切圓.
$\angle 4=\angle 2$　$\angle 3=\angle 1$	$\triangle$ACD, $\triangle$BCD 都是等腰.
$\angle 4=\angle 3$	AB, CC′ 兩線所成對頂角($\angle 1$, $\angle 2$)相等.
CA ∥ C′B	CA 與 C′B 兩線為 AB 所截其內錯角相等.

〔若在 D 點畫公切線 EF, 則 EF ⊥ CC′, 對頂角 $\angle 1=\angle 2$. $\angle BDE=\angle ADF$ ∵ $\overset{\frown}{BD}$ 對的圓心角 $\angle BC'D=\overset{\frown}{AD}$ 對的圓心角 $\angle ACD$ 則 BC′ ∥ CA〕

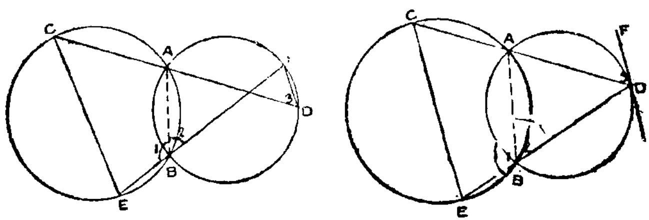
7. 大小兩圓內切於A,從A畫大圓的一弦AB割小圓於D;又一弦AC割小圓於E. 試證BC || DE.



(證) 在切點A畫公切線AF. 則

$\angle FAE=\angle 1$	切線與切點弦所成角等於$\overset{\frown}{AE}$上的圓周角.
$\angle FAC=\angle 2$	切線與切點弦所成角等於$\overset{\frown}{AC}$上的圓周角.
$\angle 1=\angle 2$	$\angle FAE$就是$\angle FAC$
BC || DE	BC,DE為AB所截,其同位角($\angle 1,\angle 2$)相等.

8. 用下面左圖表明CE || FD, 在右圖裏面,表明D處的切線平行於CE.



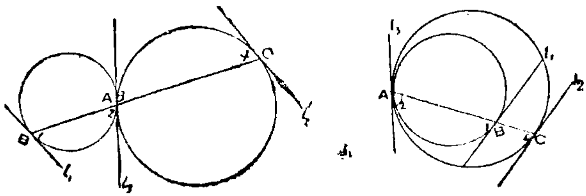
(設) 兩圓交於A, B. 在左圖裏,CD線過交點A. EF線過交點B. 在右圖裏,CD線過交點A,ED線過交點B. DF與1圓切於D點.

(求)(證) CE || FD.

(證) 在右圖與左圖裏,都畫1個公弦AB. 則

$\angle C+\angle 1=2rt\angle s$	$\angle C$可用$\frac{1}{2}\overset{\frown}{ABE}$去量, $\angle 1$可用$\frac{1}{2}\overset{\frown}{ACE}$去量
$\angle C=\angle 2$	$\angle C+\angle 1=\angle 2+\angle 1=2rt\angle s$
$\angle C=\angle 3$	$\angle 2$與$\angle 3$是含同弧的角.
∴ CE || FD	CE, FD為CD所截,則其內錯角($\angle C,\angle 3$)相等.

9. 兩圓內切或外切於A, 過A的割線遇兩圓於B, C, 證明在B, C的切線平行.



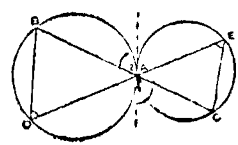
(設) 兩圓切於A點. BC割線經過切點A. l_1是過B點的切線. l_2是過C點的切線.

(求)(證) $l_1 \parallel l_2$

(證) 過切點A畫1公切線l_3

$\angle 1=\angle 2$ $=\angle 4$	切線與切點弦所成角,都等於所含弧上的圓周角.(但上邊左圖的對頂角$\angle 2=\angle 3$, $\therefore \angle 2=\angle 4$)
$l_1 \parallel l_2$	l_1與l_2為截線AC所截,其$\angle 1=\angle 4$.

10. 如圖,兩圓外切於A. 把圓做界通過A點畫兩割線. 表明聯結兩線段端點的線必相平行.



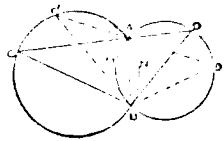
(設) 兩圓外切於A點. BC, DE是過切點A, 直抵兩圓周的兩割線. 聯BD; EC.

(求)(證) $BD \parallel EC$

(證) 過切點A作一公切線. 則

$\angle E=\angle 1$	切線與切點弦所成的$\angle 1=\overset{\frown}{AC}$上的圓周角$\angle E$.
$\angle D=\angle 2$	切線與切點弦所成的$\angle 2=\overset{\frown}{AB}$上的圓周角$\angle D$
$\angle E=\angle D$	對頂角$\angle 1=\angle 2$.
$BD \parallel EC$	BD與EC為DE所截,其內錯角$\angle E$, $\angle D$相等.

11. 兩圓相交於A, B,過A作割線交兩圓於C同D. 證明∠CBD是一定角.



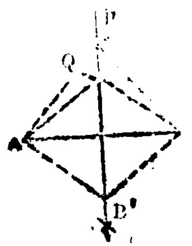
解　在△BCD裏,畫公弦AB.則無論CD的位置怎樣,

$\angle C$總可用$\frac{1}{2}\overset{\frown}{ANB}$去量	$\overset{\frown}{AB}$上的圓周角雖可移動,但他們所含$\overset{\frown}{ANB}$,$\overset{\frown}{AMB}$卻總是一定.
$\angle D$總可用$\frac{1}{2}\overset{\frown}{AMB}$去量	
$\angle CBD=180^\circ-(\angle C+\angle D)$	△各角和是180°
∴ $\angle CBD$總是一定的	$\angle C$, $\angle D$總是一樣不變.

教科書內第47面　目解題

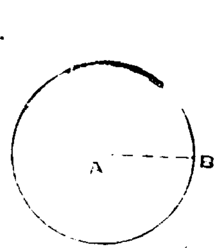
試說明下面各題裏適合條件的平面軌迹並不須去證明他(看§101, §102)

1. 所有和兩點時時等遠的點.



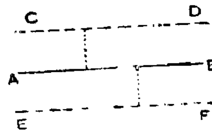
解　若A,B是所給的兩點.
則所有和A, B時時等遠的P點,就在A,B聯線的中垂線上.而在聯線AB的中垂線上的諸點,都與A,B兩點時時等遠.
不在中垂線上的Q點,不與AB兩點等距.

2. 所有和一定點有一定距離的點.



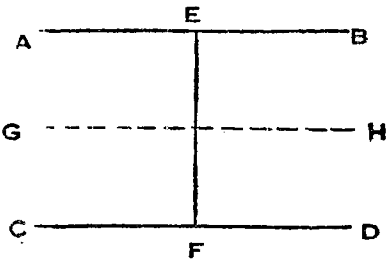
解　若A是所給的一定點.B是與A有一定距離(AB)的點.　則所有和A有定距離(AB)的諸點,都在以A爲心AB爲半徑的圓周長上.　凡以A爲心AB爲半徑的圓周上的諸點,與A點都是等距.不在圓周上的點,與A點的距離必大於AB距或小於AB距.

3. 所有同一定線有一定距離的點.



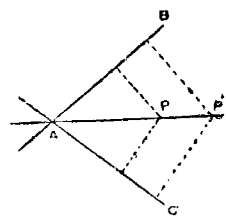
解 若AB是一定直線, a是一定的距離. 則所有同AB相距是a的諸點,都在AB的兩側, 與AB有a距的平行線上. 而在AB兩側有a距的平行線CD, EF上諸點, 都和AB的距是a. 不在EF, 或CD上的點與AB的距, 必大於或小於a距.

4. 所有同兩平行線等遠的點.



解 若AB, CD是兩定平行線, 則距AB, CD等遠的點,都在平行線間(公垂線EF)的中垂線GH上. 而在兩平行線間公垂線GH的中垂線上各點, 都與AB,CD兩平行線等距. 不在GH線上的點, 不與AB, CD兩平行線等距.

5. 所有同相交兩線等遠的點.



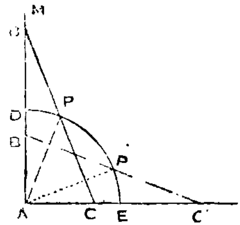
解 若AB, AC是兩定線交於A點. 則距相交兩線AB, AC等遠的點,都在那所夾角(∠BAC)的平分線AP上. 而在他們所夾角的平分線上諸點,都與兩相交直線等距. 不在分角線上的各點,不與AB, AC等距.

教科書內第48面 理解題

1. 一條一定長的線段的兩端接着一隻直角的兩邊上移動,找出這條動線中點的軌迹.

解 BC是MAN直角上一定長的直線. P是BC的中點.

求作　BC中點P,的軌迹.



〔作法同證〕　用A做圓心,用BC的一半PC做半徑,畫$\overset{\frown}{DE}$. 則

(一)　$\overset{\frown}{DE}$上隨便一點P,是接着直角兩邊的BC線的中點.

因依§149的方法,用已定斜邊BC做直徑的圓周是直角三角形頂點的軌迹. 則無論BC在∠A的邊上怎樣移動. △BAC總是直角△. ∴PA是由定長的斜邊BC中點所作的線段,且與$\frac{1}{2}$BC相等.

〔參考上冊127面題31〕

(二)　接着直角兩邊的B'C'線的中點,必在$\overset{\frown}{DE}$上.

因爲　P'點若在$\overset{\frown}{DE}$的外面則AP'>P'C'

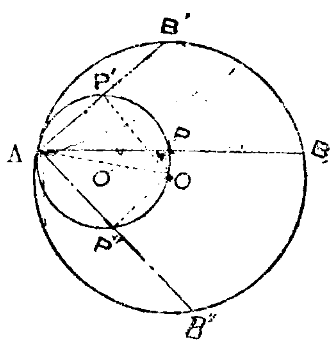
(在圓外的一點到圓心的距離,大於半徑P'C').

P'點若在$\overset{\frown}{DE}$的裏面,則AP'<P'C'

(在圓裏的一點到圓心的距離,小於半徑P'C')

∴以A做心,BC的一半做半徑,所畫在直角裏面的$\frac{1}{4}$圓周,即係所求的軌迹.

2.　過圓上一定點畫所有的弦. 試求那些弦上中點的軌迹.



設　在⊙O的圓周上一定點A,作AB,AB',AB''弦.

求作　諸弦中點的軌迹.

〔作法同證〕　用⊙O的半經OA做直徑,畫⊙O'. 則

(一)　⊙O'上的任一點P,是一個弦AB的中點.

因爲　OP⊥AB	∠P是半圓上的圓周角.
P點平分AB	垂直於弦AB的直徑,必平分弦

(二) 任一弦AB′的中點P′必在⊙O′的圓周上.

因爲 P′點若在⊙O′的外面,則∠AP′O<90°.

(∠AP′O是兩割線P′A, P′O在圓外所成的角.)

P′點若在⊙O′的裏面,則∠AP′O>90°.

(∠AP′O是兩弦P′A, P′O在圓裏所成的角.)

OP′旣不垂直於AB′,則P′不是AB′的中點.

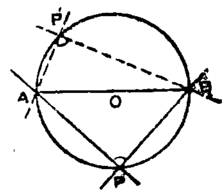
(同弦正交的直徑,必平分那弦.)

∴ 用⊙O的半徑(OA)做直徑的⊙O′便是所求的軌迹.

3. 過一定點A畫若干線. 求出另過一點B對於這許多線上所畫垂線正交的點的軌迹.

㊣ A, B,是兩定點,作AP, AP′與BP, BP′成正交.

㊣㊣ 正交點P, P′的軌迹.



〔作法同證〕 聯A, B,兩定點.

用AB做直徑畫⊙O. 於是則

(一) ⊙O上任一點P,是AP, BP的正交點.

因爲 連P與A, B,兩定點的PA, PB,是互相垂直的.

(半圓上的圓周角是直角.)

(二) 由A,B,兩點所引的任便兩條互相垂直線的正交點P′,必在⊙O的圓周上

因爲 P′點若在⊙O的外面,則∠AP′B<90°

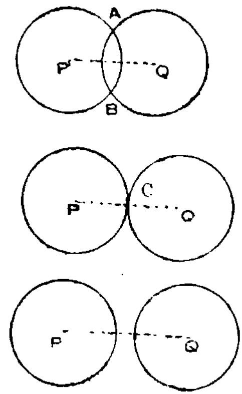
P′點若在⊙O的裏面,則∠AP′B>90°.

∴ 用AB做直徑的⊙O,就是所求的軌迹.

教科書內第50面 目解題

怎樣求出下面各題裏適合條件的諸點. 每題都加討論,但不必去證明他

1. 離開P三吋,Q三吋的點.



解 因與圓心等距的各點都在圓周上. 〔參考47面題2〕

∴ 以P爲心3吋爲半徑,畫一圓,再以Q爲心3吋爲半徑畫他圓則兩圓所遇之點,便是所求.

〔討論〕(a) 若PQ的距離小於6吋,則⊙P ⊙Q交於兩點A, B,

∴ 只有兩交點A, B, 可以適合所設的條件.

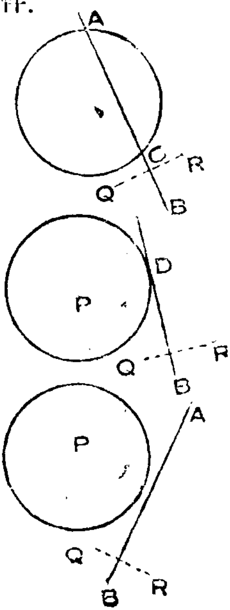
(b) 若PQ的距離等於6吋,則⊙P,⊙Q切於一點C.

∴ 只有一切點C,可以適合所設的條件.

(c) 若PQ的距離大於6吋,則⊙P,⊙Q不能相遇.

∴ 沒有那一點可以適合所設的條件.

2. 離開P四吋,並且和Q同R等遠的點.



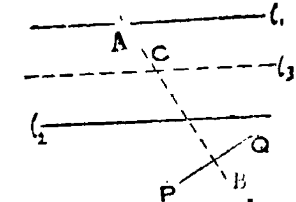
解 以P爲心,4吋爲半徑,畫圓.再聯QR,作QR的中垂線AB. 則AB與⊙P相遇之點,便是所求.

〔討論〕(a) 若QR的中垂線穿過⊙P,則A,C兩點能適合所設的條件.

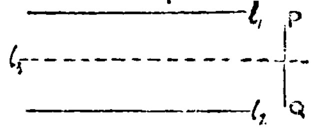
(b) 若QR的中垂線,切於⊙P. 則只有一切點D,能適合所設的條件.

(c) 若QR的中垂線,不與⊙P相遇,便沒有那一點,能合所設的條件.

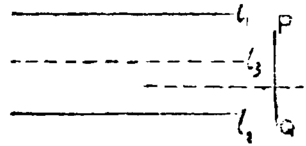
3. 同P,Q等遠也同兩平行線等遠的點.



解 作PQ的中垂線AB與l_1 l_2兩平行線等距的軌迹l_3相遇,則其交點便是所求.



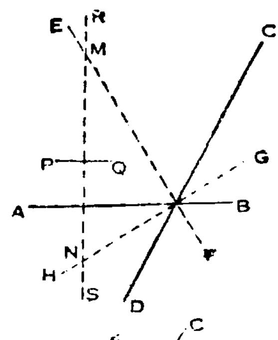
〔討論〕 (a) 若PQ的中垂線能與l_3相交,則其所交之一點C,必能適合所設的條件.



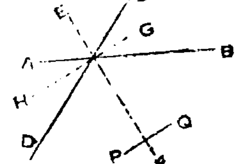
(b) 若PQ的中垂線與l_3相合,則l_3線上各點都能適合所設的條件.

(c) 若PQ的中垂線與l_3平行或不相交;就沒有那一點能合所設的條件.

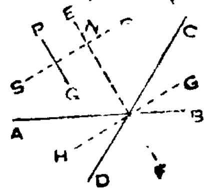
4. 同P,Q等遠也同兩交線等遠的點.



解 作PQ的中垂線RS.又作AB,CD所成角的平分線EF,GH.則EF,GH與RS相遇的點,便是所求.



〔討論〕 (a) 若PQ的中垂線與角的平分線EF斜交於M,也能與另一平分線GH斜交於他點N.



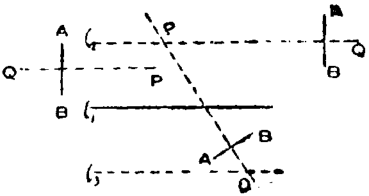
∴M,N兩交點可以適合所設的條件.

(b) 若PQ的中垂線恰與分角

線EF(或GH)相合,則EF(或GH)上諸點都能適合所設的條件.

(c) 若PQ的中垂線RS與分角線EF(或GH)恰成正交,則所交的一點N.可以適合所設的條件.

5. 離開一線有一定的長,又同兩點等遠的點.



㊀ 以定長之a距作距,在所給線l_1的兩旁畫$l_2 \parallel l_1$又畫$l_3 \parallel l_1$,則A, B,兩定點間的中垂線與l_2 l_3相交的點便是所求.

(a) 若AB的中垂線PQ與l_2交於一點P,也與l_3交於他點Q,則P, Q兩點都可適合所設的條件.

(b) 若AB的中垂線PQ與l_2(或l_3)相合,則l_2(或l_3)上的各點都能適合所設的條件.

(c) 若AB的中垂線PQ平行於l_1,但不與l_2或l_3相合,就沒有那一點可以適合所設的條件

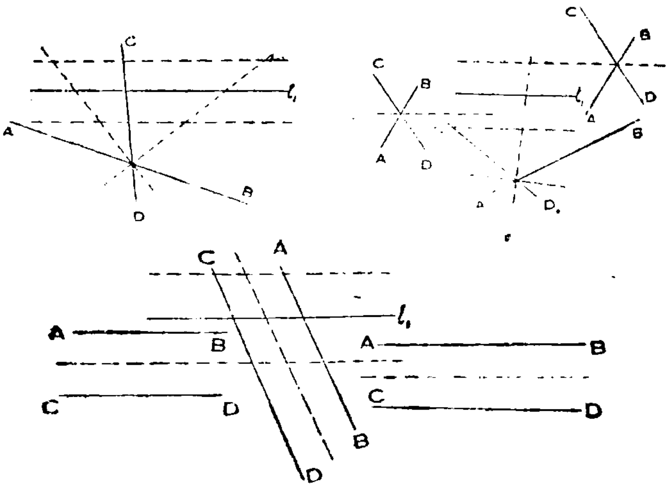
6. 離開一線有一定的長,又同兩線等遠的點.

㊀ 以一定的距離在l_1的兩旁作l_2 l_3與l_1平行.若所給的AB, CD兩線是相交的,則其所成角的平分線與l_2 l_3所遇的點,卽係所求.(參考下圖)

若所給的AB, CD兩線相平行(或不相交),則AB, CD兩線間等距的線,與$l_2 l_3$的相交點卽係所求.

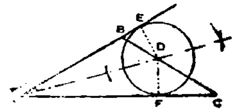
若AB, CD間等距的線不能與l_2 l_3相遇,則無解答

若與l_2(或l_3)相合則l_2(或l_3)上各點都合所求的條件



教科書內第51面 理解題

1. 作圓心在△一邊上並切於這△其餘兩邊的一個圓.（那△兩邊在必要時可以延長）



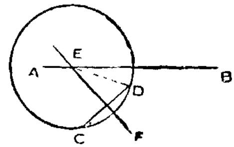
〔作法同證〕 畫AD平分∠A, 以AD與BC邊相交的D點做圓心, 以D點到AC邊(或BC邊)的距離DF做半徑, 所畫的圓便切於AC, AB. 因平分∠A的AD線上各點, 都與AC,AB兩邊等距. ∴ DE=DF.

又 AC,AB都是⊙D的半徑端點(F與E)的垂線.

∴⊙D與AC, AB相切於F, E.

〔討論〕 無論所給的△怎樣,作法總是可能的.

2. 作圓心在一定線上並經過兩定點的一個圓



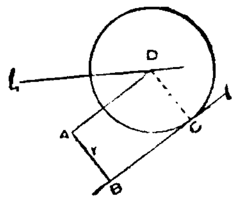
〔作法同證〕 聯兩定點C,D. 作CD的中垂線EF, 並延長他, 使與定線AB相遇. 用相遇的E點做圓心,ED距做半徑,畫⊙E. 則所畫的圓也必經過C點.

因在DC的中垂線上,諸點都與D,C等距. ∴ ED=EC.

〔討論〕 若DC的延線是與AB垂直,則DC的中垂EF與AB平行, 那便在AB線上找不出那一點可合所求.

若DC的中垂線與AB相合,便可以作出無數個圓, 其圓周都可經過D,C兩點.

3. 作圓心在所給線l_1上用r做半徑同所給線l相切的一個圓.



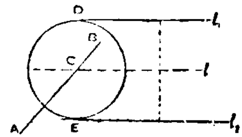
〔作法同證〕 在所給線l上, 作$AB \perp l$, 使$AB=r$. 由A點作$AD \parallel l$, 延引AD與l_1交於D點. 用交點D做圓心,r做半徑,畫1圓, 則⊙D必切於l線.

因l是半徑DC端點上的垂線. AD線上各點與l的距離都是等於r.

〔討論〕 若$l_1 \parallel l$而$l l_1$間的距,恰等於r, 那便可作無數圓與l相切. 若$l l_1$間的距,大於r,或小於r,那就沒有解法. 若l_1不與l平行,而l_1與l接近的一端的距離,又大於r,那也就沒有解法.

4. 作圓心在所給線上並和兩平行線相切的一個圓.

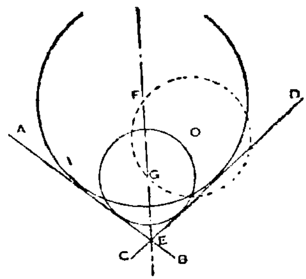
㊟ 在l_1 l_2兩平行線的中距處,作$l \parallel l_1$, 則l上的各點



與l_1 l_2等距. 引長l使與所給的AB線相遇於C點. 以C爲心, l_1與l_2的距離爲直徑.作一圓.則⊙C與l_1 l_2相切於D, E. 因圓心C到l_1 l_2的距離恰等於⊙C的半徑端點的垂線. ∴⊙C切l_1 l_2於D,E.

〔討論〕 若所給的AB線與l相合,就能作無數個相等的圓,與l_1 l_2相切. 若所給的AB不與l相遇(或平行),作法便不可能了.

5. 作圓心在所給圓周上並和已定相交兩線相切的一個圓.



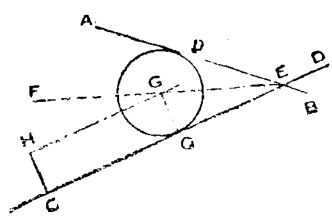
設 AB,CD交於E. ⊙O是所給圓.

〔作法同證〕 畫GE平分AB,CD所成角.延長EG到F遇⊙O於G, F. 以G(或F)爲心, G(或F)到AB,的距離做半徑.畫一圓.也必與CD相切.因與AB, CD等距的點,都在他們所成角的平分線上.

〔討論〕 若FE恰是⊙O的切線,那就只可作一個圓.(以切點爲圓心.)

若⊙O不與AB,CD所成角的平分線相遇,作法就不可能了.

6. 作一個一定半徑並切於所給相交兩線的一個圓.



〔作法同證〕 作AB,CD所成角的平分線FE. 畫HC⊥CD, 使HC等於所給的半徑. 由H作HG∥CD,則HG與FE相交於G. 用G做心, HC的長做半徑,畫一圓.

則 ⊙G 與 AB,CD 相切於 P,Q.
因在分角線 EF 上的各點到 AB, CD 的距離都等.
而 CD 是半徑 GQ 端點的垂線.
∴ ⊙G 切 AB, CD 兩交線於 P, Q.

第四編 量法比例相似形

教科書內第62面 理解題

1. 從 $a:b=c:d$, $m:n=r:s$, 證明 $am:bn=cr:ds$.

㊟ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $\frac{m}{n}=\frac{r}{s}$ | 變比例爲分數式.

$\frac{a}{b}\times\frac{m}{n}=\frac{c}{d}\times\frac{r}{s}$ | 等量乘等量積相等.

$am:bn=cr:ds$ | 變分數爲比例.

2. 若 $a:b=c:d$ 證明 $ma-b:mc-d=a:c$.

㊟ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ | 變比例爲分數式.

$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ | 用比例的倒轉法,倒轉原式.

$m-\frac{b}{a}=m-\frac{d}{c}$ | 用分比例法,兩端都由m裏減去.

$\frac{ma-b}{a}=\frac{mc-d}{c}$ | 化帶分數式,成假分數式.

$\frac{ma-b}{mc-d}=\frac{a}{c}$ | 用比例互換法,互換上式的內項.

$\therefore\ ma-b:mc-d=a:c$

3. 若 $a:b=c:d$, 證明 $c+d:a+b=d:b$.

㊟ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ | 變比例爲分數式.

$\frac{c}{d}+1=\frac{a}{b}+1$ | 用合比例法,兩端都加1.

$\frac{c+d}{d}=\frac{a+b}{b}$ | 化上式爲假分數式.

$\frac{c+d}{a+b}=\frac{d}{b}$ | 用比例互換法,互換上式的內兩項.

$\therefore\ c+d:a+b=d:b$

教科書內第63面目解題

1. 若 $X:4=7:8$, 求 X.

解 $8x=4\times7$ $\therefore x=3.5$ [見 §162(1)]

"若四數成比例,兩內項相乘積,等於兩外項的積."

2. 若 $3:X=2:3$, 求 X.

解 $2x=3\times3$ $\therefore x=4.5$

3. 若 $4:5=X:10$, 求 X.

解 $5x=4\times10$ $\therefore x=8$.

理解題

1. 求17,19和187的比例第四項.

解 若令 x 為比例第四項,則依 §160 所云,列式如下:
$17:19=187:x$ 則 $17x=19\times187$ $\therefore x=19\times11=209$.

2. 求6和54的比例中項.

解 設 x 為6和54間比例中項,則依 §159,列式如下:
$6:x=x:54$ 則 $x^2=6\times54=6\times6\times9=18^2$ $\therefore x=18$.

3. 求27和189的比例第三項.

解 設 x 是27同189的比例第三項,則依 §159,可得:
$27:189=189:x$ 則 $27x=189^2$ $\therefore x=189\times7=1323$。

4. 求以下各比例的未知項.

$x:4::27:126$; $78:x::13:3$; $99:117::x:39$; $171:27::57:x$.

解 (a) $126x=4\times27$ $\therefore x=\frac{6}{7}$.

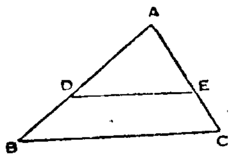
(b) $13x=3\times78$ $\therefore x=18$.

(c) $117x=99\times39$ $\therefore x=33$.

(d) $171x=27\times57$ $\therefore x=9$.

教科書內第69面 理解題

若在△ABC內，DE∥BC，由下表裏面的已知數算出空格內的線段.



AD	DB	AE	EC	AB	AC
20	24	15	(18)	(44)	(33)
4	56	(3)	42	(60)	(45)
(3)	102	12	408	(105)	(420)
25	(475)	18	342	(500)	(360)

解 由§173可知平行於三角形底邊的線，必分割其他兩邊成比例，所以在上圖裏面，可作一公式如下:—

AD:DB=AE:EC (表中各空格，都由此公式算出.)

(i) 20:24=15:EC ∴ EC=24×15÷20=18.

AB=AD+DB=20+24=44

AC=AE+EC=15+18=33

(ii) 4:56=AE:42 ∴ AE=4×42÷56=3.

AB=4+56=60 AC=3+42=45.

(iii) AD:102=12:408. ∴ AD=102×12÷408=3.

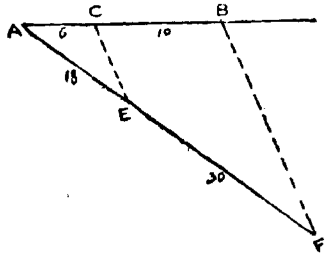
AB=3+102=105. AC=12+408=420.

(iv) 25:DB=18:342 ∴ DB=25×342÷18=475.

AB=25+475=500 AC=18+342=360.

教科書內第72面 自解題

1. 若a=6，b=10，c=18，對於a，b同c作比例第四項.



(給) $a=6$, $b=10$, $c=18$,

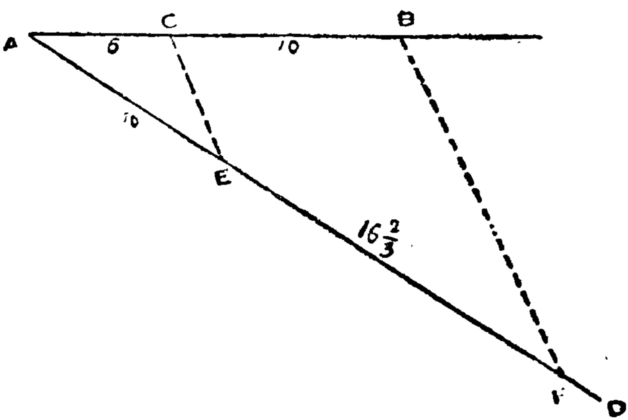
(求)(作) 線段d使$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

(作法) 畫AB線$=a+b=16$.
令$AC=a=6$, $CB=b=10$,
由A引1任意直線AF,在AF上取$AE=c,=18$. 聯C與E.
過B點畫BF‖CE, 則$EF=d$(即a,b同c的比例第四項).
若以量AC,CB的單位去量EF,則得30.

(證) 在△ABF裏面,CE‖BF,則

$AC:CB=AE:EF$	平行於△底邊的線,分他兩邊成正比例
$6:10=18:d$	已作$AC=a=6$, $CB=b=10$, $AE=c=18$
$\therefore\ d=\frac{18\times10}{6}=30$	內兩項之乘積,等於外兩項之乘積

2. 若a=6, b=10,對於a同b作比例第三項.



(給) $a=6$ $b=10$.

(求)(作) 線段 c 使 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

(作法) 畫 $AB=a+b=16$

使 $AC=a=6$　　$CB=b=10$.

由A引AD線,在AD上截取 $AE=b=10$.

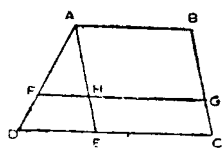
連C,E.過B點畫 $BF \parallel CE$,則 $EF=c$,即 a 同 b 的比例第三項.

若以量AC,CB的單位去量EF則得 $16\frac{2}{3}$

(證) 在△ABF裏,CE平行於BF,則

$AC:CB=AE:EF$	CE是平行於△ABF的一邊的線.
$6:10=10:EF$	$AC=a=6$　$CB=AE=b=10$
$\therefore\ EF=\frac{10\times10}{6}=16\frac{2}{3}$	解上式.

3. 一線與梯形的底平行,求證他分這梯形的不平行邊成比例.



(設) FG是與梯形ABCD的底平行. 即 $AB \parallel FG \parallel DC$.

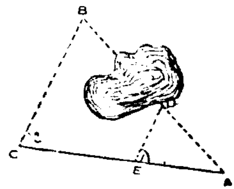
(求)(證) FG截AD,BC使 $AF:FD=BG:GC$.

(證) 由A作 $AE \parallel BC$ 截FG於H.

ABGH與HGCE是▱	$AE \parallel BC$,　$AB \parallel DC \parallel FG$.
$AH=BG$,　$HE=GC$	▱ABGH, ▱HGCE的對邊相等.
$AF:FD=AH:HE$	△ADE裏FH平行於底邊DE.
$\therefore\ AF:FD=BG:GC$	$AH=BG$　$HE=GC$.

教科書內第72至73面 理解題

1. 從A到B中間被某物遮蔽,不能接近.求測AB的距離.

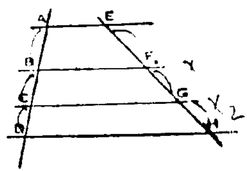


(解) 擇一適當的C點,使能與A點B點作連線. 在AC線上近A端的地方E,作∠1=∠2. 則ED∥CB
使ED的D端,遇AB連線於D.
(所遇之D點,當與A端接近爲宜)
於是則量AE,AC與AD,卽可知AB.因在△ABC裏ED∥CB
則AC:AE=AB:AD　DE與△ABC的BC邊平行.

$AB=\frac{AC\cdot AD}{AE}$ | 解上式則得AB的長.

∴量得AC, AE與AD的長,就可算出AB來.

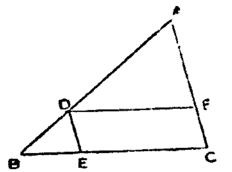
2. 在圖裏面,諸水平線互相平行. 若AB=8吋, BC=7吋, $CD=6\frac{1}{2}$吋. 並 EF=10吋,求FG同GH的長.



(設) AE∥BF∥CG∥DH
AB=8吋, BC=7吋, CD=$6\frac{1}{2}$吋, EF=10吋
(求) FG同GH的長.

(解) AB : BC=EF : FG	AC,EG爲AF,BF,CG諸平行線之截線
8 : 7=10 : FG	AB=8, BC=7, EF=10.
FG=70÷8=$8\frac{3}{4}$吋	解上之比例式.
BC : CD=FG : GH	BD,FH爲BF,CG,DH諸∥s的截線.
7 : 6.5=$8\frac{3}{4}$: GH	BC=7, CD=$6\frac{1}{2}$ FG=$8\frac{3}{4}$
GH $=\frac{6.5\times 8.75}{7}$=8.082吋	解上之比例式

3. 在三角形ABC裏面,作DE∥AC,



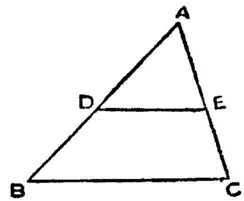
DF ∥ BC;

證明AF : FC＝CE : EB.

(設) 在 △ABC 裏, DE ∥ AC,DF ∥ BC.

(求)(證) AF : FC＝CE : EB.

(證) AF : FC＝AD : DB	DF ∥ BC 則分AC,AB兩邊成正比例.
AD : DB＝CE : EB	DE ∥ AC則分AB,BC 兩邊成正比例.
∴ AF : FC＝CE : EB	上兩比都等於 AD:DB.



4. 若如右圖 DE ∥ BC, 試用下表裏面的已知線段,算出沒有塡入的諸線段來.

	AD	AB	DB	AE	AC	EC
(i)	8	12	(4)	6	(9)	(3)
(ii)	6	9	(3)	(14)	(21)	7
(iii)	10	(18)	8	(10)	18	(8)
(iv)	240	(456)	(216)	200	380	(180)
(v)	120	(240)	(120)	(50)	100	50
(vi)	(25)	40	15	($18\frac{3}{4}$)	30	($11\frac{1}{4}$)
(vii)	($51\frac{3}{7}$)	90	($38\frac{4}{7}$)	40	70	(30)
(viii)	($144\frac{16}{61}$)	800	($655\frac{45}{61}$)	(66)	366	300
(ix)	(12)	(42)	30	20	(70)	50

㊱ 依§167定理的諸公式,可以算出空格內的數.

(i) $DB=AB-AD=12-8=4$

因 $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$ 則 $\frac{12}{8}=\frac{AC}{6}$ $\therefore AC=\frac{12\times6}{8}=9.$

$EC=AC-AE=9-6=3$

(ii) $DB=AB-AD=9-6=3$

因 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ 則 $\frac{6}{3}=\frac{AE}{7}$ $\therefore AE=\frac{6\times7}{3}=14$

$AC=AE+EC=14+7=21$

(iii) $AB=AD+DB=10+8=18$

因 $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ 則 $\frac{10}{18}=\frac{AE}{18}$ $\therefore AE=10$

$EC=AC-AE=18-10=8$

(iv) $EC=AC-AE=380-200=180$

因 $\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$ 則 $\frac{DB}{240}=\frac{180}{200}$ $\therefore DB=\frac{180\times240}{200}=216$

$AB=AD+DB=240+216=456$

(v) $AE=AC-EC=100-50=50$

因 $\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$ 則 $\frac{DB}{120}=\frac{50}{50}$ $\therefore DB=120$

$AB=AD+DB=120+120=240$

(vi) $AD=AB-DB=40-15=25$

因 $\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$ 則 $\frac{15}{40}=\frac{EC}{30}$ $\therefore EC=\frac{30\times15}{40}=11\frac{1}{4}$

$AE=AC-EC=30-11\frac{1}{4}=18\frac{3}{4}$

(vii) $EC=AC-AE=70-40=30$

因 $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$ 則 $\frac{40}{70}=\frac{AD}{90}$ $\therefore AD=\frac{40\times90}{70}=51\frac{3}{7}$

$DB=AB-AD=90-51\frac{3}{7}=38\frac{4}{7}$

(viii) $AE=AC-EC=366-300=66$

因$\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$ 則$\frac{DB}{800}=\frac{300}{366}$ $\therefore DB=\frac{240000}{366}=655\frac{45}{61}$

$AD=AB-DB=800-655\frac{45}{61}=144\frac{16}{61}$

(ix) $AC=AE+EC=20+50=70$

因$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ 則$\frac{AD}{30}=\frac{20}{50}$ $\therefore AD=\frac{600}{50}=12$

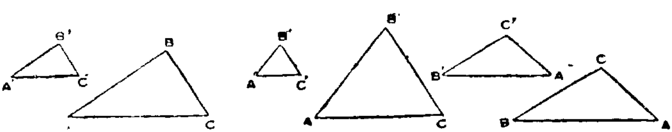
$AB=AD+DB=12+30=42$

教科書內第73面 實驗題

作兩個三角形ABC同A'B'C',使$\angle A=\angle A'$,$\angle B=\angle B'$,和$\angle C=\angle C'$,小心度量他們的邊,並比較下面的比,如$\frac{AB}{A'B'}$,$\frac{BC}{B'C'}$,同$\frac{CA}{C'A'}$.這個試驗,可以用好幾個邊和大小各不相同的三角形去覆試他.

那樣每對三角形是不是都相似呢?看§184

解 下面幾對三角形,都使他們每對的對應角相等,然後再量他們的對應邊,便得下面的一個結果.



在上面兩直角△裏,$\frac{AB}{A'B'}=\frac{18.4}{9.2}=2$; $\frac{BC}{B'C'}=\frac{12}{6}=2$;

$$\frac{CA}{C'A'}=\frac{22}{11}=2.$$

在上面兩銳角△裏,$\frac{AB}{A'B'}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$; $\frac{BC}{B'C'}=\frac{5\frac{1}{3}}{16}=\frac{1}{3}$

$$\frac{CA}{C'A'}=\frac{6\frac{2}{3}}{20}=\frac{1}{3}$$

在上面兩鈍角$\triangle$s裏,$\frac{AB}{A'B'}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$; $\frac{BC}{B'C'}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

$$\frac{CA}{C'A'}=\frac{17\frac{1}{4}}{23}=\frac{3}{4}$$

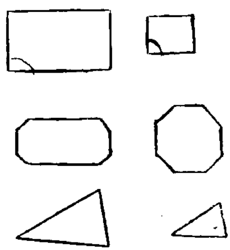
以上各對$\triangle$s的各角互等,對應邊又都可成正比例,所以依§176上看來,都可稱為相似形.

教科書內第80面目解題

1. 說出相似形的定義來.

解 兩形(或兩多邊形)的各角順次相等,其對應邊又成比例,則此兩形是相似形.

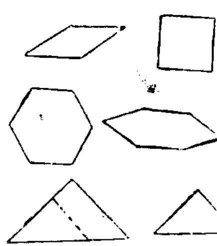
2. 互等角多邊形必相似麼? 三角形呢?



解 互等角的多邊形不必都相似,如右邊的圖就可看出.

互等角的兩三角形都必相似,如右邊下圖.(看§178定理同56面實驗題)

3. 多角形的對應邊成比例,那形就相似麼?若是三角形便怎樣?



解 多角形的對應邊成比例,那形不能說是相似,如右圖(見§176).

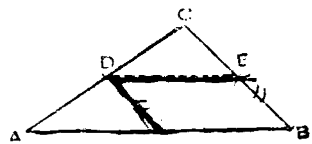
若兩三角形的對應邊成比例,那$\triangle$s就相似,如右圖(見§181).

4. 相等三角形都相似麼? 什麼緣故?

解 相等三角形都相似,因他們的邊同角都相等,所以能與相似形的兩個條件相合.

教科書內第81面 理解題

1. 試用相似三角形,證明聯結三角形兩邊中點的線段,必等於第三邊的一半.



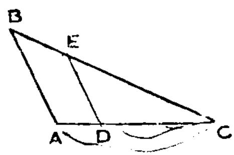
設 在△ABC裏, D, E, 是CA,CB的中點.

求證 $DE=\frac{1}{2}AB$.

證

$\frac{CD}{CA}=\frac{CE}{CB}=\frac{1}{2}$	D,E是CA,CB的中點.
$\triangle ABC\backsim\triangle DEC$	兩△的夾角(共∠C)等,兩邊成比例.
$\frac{DE}{AB}=\frac{CE}{CB}=\frac{1}{2}$	相似形的對應邊成比例.
$2DE=AB$	解上式之 $\frac{DE}{AB}=\frac{1}{2}$
$\therefore\ DE=\frac{1}{2}AB$	以2除上式的各節.

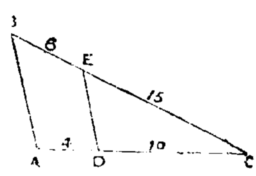
2. 如圖 DE ∥ AB, 且 $\frac{CD}{DA}=\frac{5}{2}$. 若 DE=4吋, 求 AB.



解 $CA=CD+DA=5+2=7$

$CD:CA=DE:AB$	DE∥AB所截△的各對應邊成比例.
$5:7=4:AB$	已設CA=5, CA=7, DE=4
$\therefore AB=\frac{7\times4}{5}=5.6$	解上之比例式.

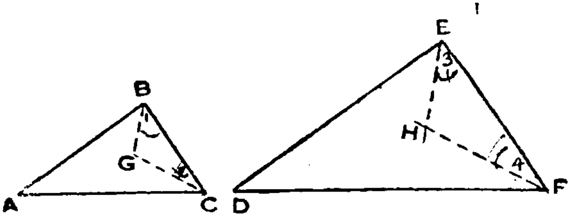
3. 如上圖,若AC=14吋, CD=10吋, BE=6吋, CE=15吋, DE與AB平行嗎?什麼緣故?



解 $AD=AC-CD=14-10=4$

$CD:AD=10:4=\frac{5}{2}$	以10代CD, 4代AD
$CE:BE=15:6=\frac{5}{2}$	$CE=15$, $BE=6$
$CD:AD=CE:BE$	CD:AD與CE:BE兩比都等於$\frac{5}{2}$.
$DE \parallel AB$	DE分△的兩邊成比例,則與AB平行.

4. 在兩個相似三角形裏面,對應角的平分線的比等於兩三角形的相似比.



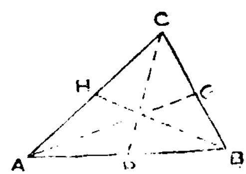
設 △ABC和△DEF相似, BG,CG平分∠B,∠C. EH, FH平分∠E,∠F.

求證 $\frac{BG}{EH}=\frac{CG}{FH}=\frac{BC}{EF}$

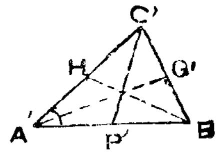
證 在相似△ABC.同DEF裏.

$\angle B=\angle E$; $\angle C=\angle F$	△ABC與DEF相似,其對應角互等.
$\angle 1=\angle 3$; $\angle 2=\angle 4$	BG,CG平分∠B,∠C.EH,FH平分∠E,∠F.
$\therefore \triangle GBC \backsim \triangle HEF$	兩△的兩角對應相等,兩△就相似.
$\frac{BG}{EH}=\frac{CG}{FH}=\frac{BC}{EF}$	相似形的對應邊成正比例.

5. 兩個相似三角形裏面,對應邊上諸中線的比等於兩三角形的相似比.



㊢ $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 相似.
AG, BH, CP 是 $\triangle ABC$ 的中線.
A'G', B'H', C'P', 是 $\triangle A'B'C'$ 的中線.



㊟㊣ $\frac{A'G'}{AG}=\frac{B'H'}{BH}=\frac{C'P'}{CP}=\frac{B'C'}{BC}$

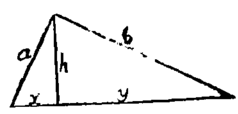
$=\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}$

㊣ $\angle C=\angle C'$	相似形的對應角互等.
$A'C':AC=B'C':BC$	相似形的對應邊成比例.
$A'C':AC=C'G':CG$	AG,A'G'是中線, $CG=\frac{1}{2}BC$. $C'G'=\frac{1}{2}B'C$
$\triangle ACG \backsim \triangle A'C'G'$	兩△的兩邊成比例,夾角相等.
$A'C':AC=A'G':AG$	兩相似形的對應邊成正比例.

依同理 $A'C':AC=C'P':CP=B'H':BH=A'B':AB=B'C':BC$.

教科書內第85至86面 自解題

1. 若上面推論一的圖裏面,x=8 同 y=18. 找 h.



㊕ 依§191的推論一:—"在直角三角形的斜邊上晝他的高,那麼高的平方等於斜邊上線段的相乘積"

$\therefore h^2=xy$ 則 $h=\sqrt{xy}=\sqrt{8\times18}=12$.

2. 若同圖裏,a=3同b=4,找x對於y的比.

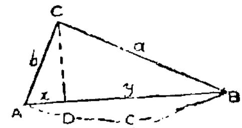
㊕ 依§191的推論二:"直角三角形裏面,在斜邊上晝高,那麼兩邊的平方的比,等於斜邊上鄰近線段的比."

$\therefore a^2:b^2=x:y$ 則 $3^2:4^2=9:16$

所以 x 對於 y 的比是9比16.

3. 又同圖裏 c=5, b=3, 找 x.

若 c=5, a=4, 再找 y.



解 照§191定理: "在直角三角形裏面,畫他的高到斜邊上面,那麼這三角形的每邊,就是整斜邊同鄰近線間的比例中項".

$\therefore\ \frac{x}{b}=\frac{b}{c}$　　又 $\frac{y}{a}=\frac{a}{c}$

解得 $cx=b^2$　　$cy=a^2$　　若以4, 3, 5代 a, b, c

則 $x=\frac{b^2}{c}=\frac{3^2}{5}=1.8$,　　$y=\frac{a^2}{c}=\frac{4^2}{5}=3.2$

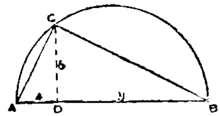
4. 又同圖裏, c=10, y=8, 找 a.

解 因 $\frac{y}{a}=\frac{a}{c}$ 則 $a^2=cy$ 若以10代 c, 8代 y.

則 $a^2=10\times 8$ $\therefore\ a=\sqrt{80}=8.9443$.

5. 上面推論三的圖裏面,若 AD=4, CD=6, 求DB.

解 照§183推論三:"若從圓上畫對於直徑的一垂線,那麼垂線就是直徑被垂線所分兩線段的比例中項".

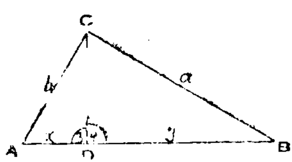


$\therefore AD:CD=CD:DB$

若 AD=4. CD=6.

則 $DB=\frac{\overline{CD}^2}{AD}=\frac{6^2}{4}=\frac{36}{4}=9$

6. 在右圖裏, △ABC的∠C是直角, CD⊥AB. 指出三對相似三角形來.



解 在右圖裏, △ABC∽△ADC

△ABC∽△BDC　△ADC∽△BDC

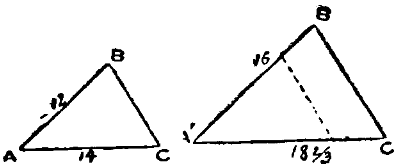
7. 在上圖的△ACD同ACB裏,那幾對角相等? 那幾對邊是對應邊?

㊙ 在△ACD同ACB裏, $\angle 3=\angle C=90°$, $\angle ACD=\angle B$. AC同AB; AD同AC; CD同BC都是對應邊.

8. 指出△ACD同CDB裏的等角同對應邊.

㊙ △ACD同CDB裏, $\angle 3=\angle 4=90°$ $\angle ACD=\angle B$. $\angle A=\angle BCB$. AC同BC; AD同CD; CD同DB都是對應邊.

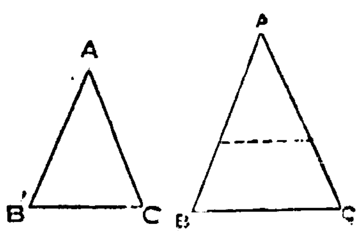
9. 有兩三角形ABC同A′B′C′, $\angle A=\angle A'$, $AB=12$, $AC=14$, $A'B'=16$, $A'C'=18\frac{2}{3}$. 這兩三角形相似麼? 倘若相似,爲什麼相似?



㊙ 在△ABC同A′B′C′裏, $AB:A'B'=12:16=\frac{3}{4}$. $AC:A'C'=14:18\frac{2}{3}=14\times\frac{3}{56}=\frac{3}{4}$

$AB:A'B'=AC:A'C'$	兩比俱等於$\frac{3}{4}$
$\angle A=\angle A'$	已設
$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$	兩邊成比例,夾角相等.

10. 兩個等腰三角形的頂角若相等,證明這兩個三角形相似.



㊙ 在等腰△ABC同A′B′C′

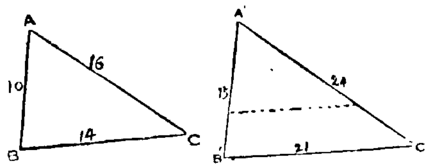
裏 $\angle A=\angle A'$

求證　$\triangle ABC$ 同 $\triangle A'B'C'$ 相似.

證　在等腰 $\triangle ABC$ 同 $A'B'C'$ 裏

$\angle B+\angle C=180^\circ-\angle A$ $\angle B'+\angle C'=180^\circ-\angle A'$	△各角的和是兩直角.
$\angle B=\angle C=90^\circ-\dfrac{\angle A}{2}$ $\angle B'=\angle C'=90^\circ-\dfrac{\angle A'}{2}$	兩等腰△裏對等邊的角也等.
$\angle B=\angle C=\angle B'=\angle C'$	已設 $\angle A=\angle A'$,則上兩式相等.
$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$	兩△的各角互等.

11. 有兩三角形 ABC 同 $A'B'C'$, $AB=10$, $BC=14$. $CA=16$, $A'B'=15$, $B'C'=21$, $C'A'=24$. 這兩三角形相似麼? 申明理由.



證　在△ABC, $A'B'C'$ 裏,

$AB:A'B'=10:15=\frac{2}{3}$

$BC:B'C'=14:21=\frac{2}{3}$

$AC:A'C'=16:24=\frac{2}{3}$

$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$	各比都等於 $\frac{2}{3}$
$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$	兩△的對應邊成比例.

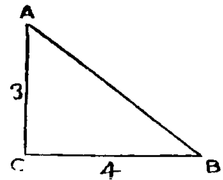
教科書內第87面　自解題

1. 若一個直角三角形的兩邊,一是3吋,一是4吋,試求他的斜邊.

解　直角△ABC 裏, $AC=3$ 吋, $BC=4$ 吋.

㊗ AB 邊的長.

㊙ 照畢氏定理:"直角三角形斜邊的平方,是他兩邊平方的和".



$\therefore \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$, 以 3,4 代 AC,BC.

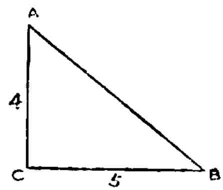
則 $\overline{AB}^2 = 3^2+4^2=25$ $\therefore AB=\sqrt{25}=5$ 吋.

2. 一直角三角形的邊各爲 4 吋同 5 吋,試求斜邊的平方. 又用平方根號表斜邊的長.

㊥ 直角 $\triangle ABC$ 裏, AC=4 吋, BC=5 吋.

㊗ 斜邊AB的平方,並用根號表出AB的長.

㊙ 照畢氏定理:—



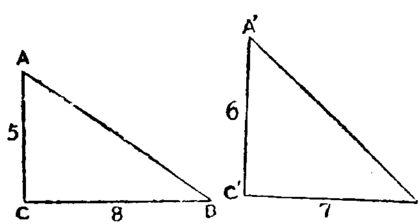
$\therefore \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$; 以 4,5 代 AC,BC.

則 $\overline{AB}^2 = 4^2+5^2=41$ 平方吋.

而 $AB=\sqrt{41}$ 吋或 6.4031 吋.

3. 一個直角三角形的邊是 5 吋同 8 吋,又一個直角三角形的邊是 6 吋同 7 吋,那一個的斜邊較長呢?

㊥ 在兩直角 $\triangle ABC$ 同 $\triangle A'B'C'$ 裏, AC=5 吋, BC=8 吋, A'C'=6 吋 B'C'=7吋. AB 同 A'B' 是他們的斜邊.



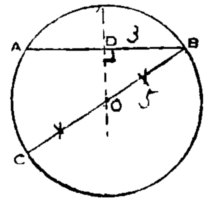
㊐ AB 與 A' B' 那一個長呢?

㊙ $\overline{AB}^2=5^2+8^2=89$ 則 $AB=\sqrt{89}$

$\overline{A'B'}^2=\overline{A'C'}^2+\overline{B'C'}^2=6^2+7^2=85$ 則 $A'B'=\sqrt{85}$

$\therefore AB > A'B'$.($\because \sqrt{89} > \sqrt{85}$)

教科書內第88面 理解題



1. 在直徑1尺的圓裏面，6寸的弦到圓心的距離是多少寸。

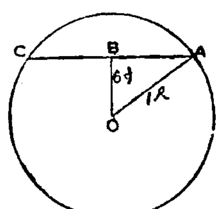
㊢ 在⊙O裏，直徑 BC=1尺

弦 AB=6寸. $OD \perp AB$.

㊟ 弦到圓心距 DO 的長.

㊫ ⊙O 裏 AB,BC,DO 三線組成直角△BDO.

$DB=\frac{AB}{2}=3$寸	同弦 AB 正交的直徑平分這弦 (AB=6)
$BO=\frac{BC}{2}=5$寸	BO 是半徑 (BC 直徑是1尺)
$\overline{DO}^2=\overline{BO}^2-\overline{DB}^2$	畢氏定理的推論.
$\overline{DO}^2=5^2-3^2$	BO=5寸 DB=3寸
$DO=\sqrt{16}=4$寸	將上式開平方.



2. 在半徑1尺的圓裏面，有條弦到中心的距離是6寸. 問這弦有多少長?

㊢ 在⊙O裏，半徑 OA=1尺.

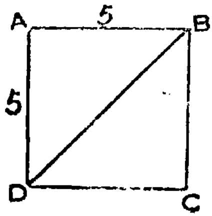
$OB \perp AC$ 弦. 弦到圓心的距 OB=6寸.

㊟ 弦 AC 的長.

㊫ ⊙O 裏, AC, OA, OB 組成1直角△ABO.

$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2-\overline{OB}^2$	畢氏定理的推論.
$\overline{AB}^2=10^2-6^2$	OA=10寸, OB=6寸.

$AB=\sqrt{64}=8$ 寸	將上式開平方.
弦 $AC=2AB=16$ 寸	同弦正交的直徑平分AC弦.



3. 一個正方形的邊是5. 求出他的對角線來.若他的邊是a,他的對角線是什麼?

㊙ BD是正方形ABCD的對角線.

(a) 每邊是5. (b) 每邊是a.

㊌ 對角線BD的長.

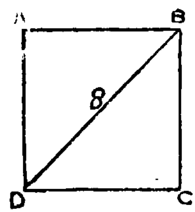
㊍ BD分正方形為兩等腰直角△.

(a) $\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2$	畢氏定理
$=5^2+5^2$	正方形每邊是5.
$\therefore BD=\sqrt{50}=7.071$	上式開方.

(b) 若每邊為a, 則以a代AB, AD.

$\overline{BD}^2=a^2+a^2 \quad \therefore BD=\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}=1.4142a.$

∴ 一正方形對角線的長,是他邊長的1.4142倍.



4. 一個正方形的對角線是8,他的邊是什麼? 若他的對角線是d,他的邊是什麼?

㊙ BD是正方形ABCD的對角線.

(a) BD是8. (b) BD是d

㊌ 正方形ABCD的邊長

㊍ BD分ABCD為兩等腰直角△.

(a) $\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2$	畢氏定理.
$\overline{BD}^2=2\overline{AB}^2$	AB=AD(正方形的邊都等)

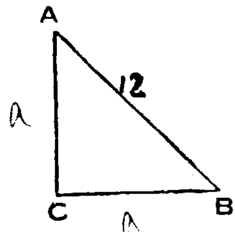
將上式用2除,則 $\overline{AB}^2=\dfrac{\overline{BD}^2}{2}=8^2\div2=32.$

開方則得　$AB=\sqrt{32}=5.6569$.

(2) 若對角線BD是d, 則$\overline{AB}^2=\dfrac{d^2}{2}$.　　$AB=\sqrt{\frac{1}{2}d^2}=d\sqrt{0.5}$

∴ 正方形每邊的長是對角線的0.7071倍.

5.　一個直角等腰三角形的斜邊是12吋,試求其餘邊的長.



設　直角等腰△ABC的斜邊AB長是12吋.

求　AC,BC的邊長.

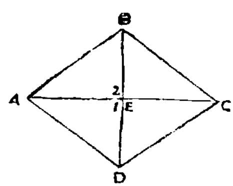
$2a^2=12^2$

$a^2=\dfrac{12^2}{2}$

$a=\sqrt{72}$

解　$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$	畢氏定理
$\overline{AB}^2=2\overline{AC}^2$	ABC是等腰直角△
$\overline{AC}^2=\dfrac{\overline{AB}^2}{2}=\dfrac{12^2}{2}=72$方吋	解上式而以12吋代AB.
$AC=\sqrt{72}=8.4853$ 吋	將上式開方

6.　一個斜方形的兩條對角線各是14寸同10寸求這斜方形各邊的長.



設　ABCD是斜方形,

AC, BD是對角線.

$AB=BC=CD=DA$　$AB \parallel DC$,　$AD \parallel BC$

$AC=14$ 寸　　$BD=10$ 寸

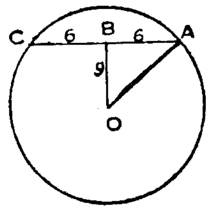
求　AB,BC,CD,DA各邊的長.

解　斜方形的對角線, AC, BD 遇於E.

$AE=EC$, $DE=EB$	▱的對角線互相平分.
$\triangle AED\cong\triangle AEB$	Ⓢ的三邊對應相等.

$\angle 1=\angle 2=90^\circ$	全等△的對應角相等.外邊又成直線
△AEB是直角△	∴∠2是直角.
$\overline{AB}^2=\overline{AE}^2+\overline{BE}^2$	畢氏定理.
$\overline{AB}^2=(\frac{14}{2})^2+(\frac{10}{2})^2$	AC=14, BD=10, 而AE,BE,是AC,BD的一半.
$=7^2+5^2$	
$AB=\sqrt{49+25}$	將上式開平方.
$=8.6023$寸	即斜方形各邊的長.

7. 在一個圓裏面,12寸長的弦到圓心的距離是9寸.求這圓半徑的長.



(設) 在⊙O裏的AC弦=12寸.
OB⊥AC. OB=9寸.

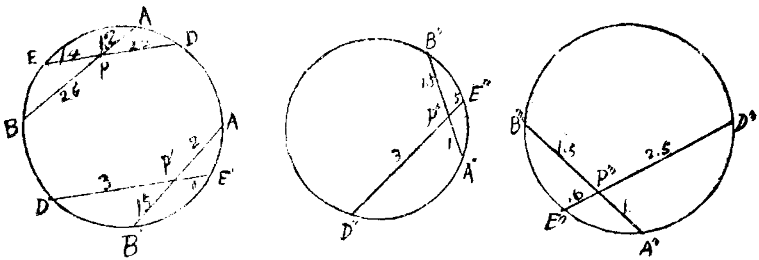
(求) 圓半徑OA的長.

(解) $AB=\frac{AC}{2}$	同弦正交(OB⊥AC)的徑平分AC弦.
$AB=12\div 2=6$寸	已設AC=12寸,而OB是平分AC的.
$AO=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{OB}^2}$	將“$\overline{AO}^2=\overline{AB}^2+\overline{OB}^2$”的$\overline{AO}$開方.
$=\sqrt{36+81}$	已知AB=6寸, 已設OB=9寸.
$=10.816$寸	即半徑的長.

教科書內第88至89面 實驗題

1. 作一個很大的圓,畫弦AB同DE相交於P.小心去量PA,PB,PD同PE. 然後找出PA×PB同PD×PE的積. 這兩積差不多相等麼? 把這個試驗多重覆幾次.

從這實驗似乎可以證明什麼陳述呢?



解 上圖裏面,由量得的結果,可知

$PA\times PB=1.2\times 2.6=3.12$ $PD\times PE=2.2\times 1.4=3.08$

$P'A'\times P'B'=2\times 1.5=3.$ $P'D'\times P'E'=3\times 1=3.$

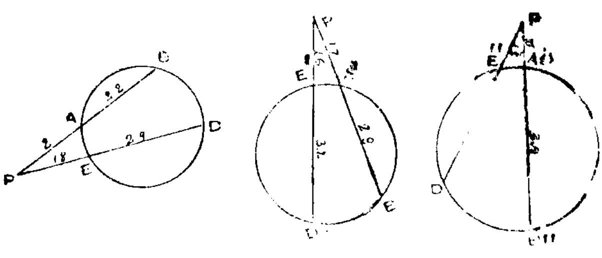
$P''A''\times P''B''=1.2\times 1.8=2.16$ $P''D''\times P''E''=3.6\times .6=2.16$

$P'''A'''\times P'''B=1\times 1.5=1.5$ $P'''D'''\times P'''E'''=.6\times 2.5=1.5$

由上面幾種看來,交在P點的兩弦所分成二線段的積似乎相等. 從這幾個實驗裏,似乎可以說:—

"圓內兩弦相交,則交點所分各弦上二部的乘積相等"

2. 從圓外一點P,畫兩割線遇圓於A,B,同D,E,量PA,PB,PD同PE. 然後找出PA×PB同PE×PD的積.這兩積相差是多少?



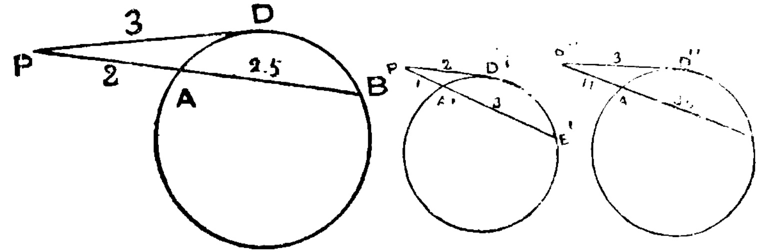
解 $PA\times PB=2\times 4.2=8.4$ $PE\times PD=1.8\times 4\frac{2}{3}=8.4$

$P'A'\times P'B'=1.7\times 4.5=7.65$ $P'E'\times P'D'=1.6\times 4.8=7.68$

$P''A''\times P''B''=1.1\times 5=5.5$ $P''E''\times P''D''=1.25\times 4.4=5.5$

第1種與第3種所量得的兩積不差,第2種差0.03.

3. 從圓外一點P,畫切線PD同一割線遇圓於A同B. 較量PA×PB同PD×PD($=\overline{PD}^2$)的積. 他們相差是多少?



㊙ $PA\times PB=2\times4.5=9.$　　$\overline{PD}^2=3\times3=9$

$P'A'\times P'B'=1\times4=4$　　$\overline{P'D'}^2=2\times2=4$

$P''A''\times P''B''=1.7\times5.3=9.01$　　$\overline{P''D''}^2=3\times3=9$

第一種第二種都沒有差.第三種差0.01

(以上三題不過是量上面各圖所得的結果.若多作幾個實驗,仔細的去量,就的確可以見得兩積相等.)

4. 上面兩個試驗似乎可以證明什麼陳述呢?

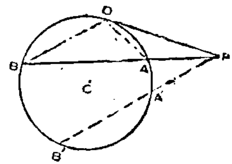
㊙ 在上面兩試驗裏似乎可以證明:—

"從圓外一點所引的一切線與一割線,(或多割線,)則切線上的平方,等於全割線與在圓外線段的乘積"

教科書內第92面 目解題

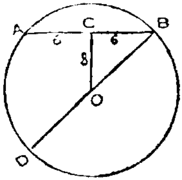
1. 若§195的圖裏面,把PD做邊作正方形,把PB做底、PA做高作長方形,用P做心把割線自由轉動. 試比較他們的面積.

解　若正方形每邊是圖裏的PD，他的面積就是$\overline{PD}^2$若長方形的底是右圖的PB，他的高是PA，那末這長方形的面積是PB×PA. 由§195的定理知道：　$PB\times PA=\overline{PD}^2$



∴這兩形的面積相等.

2.　一弦長12吋，離圓心8吋，求直徑.

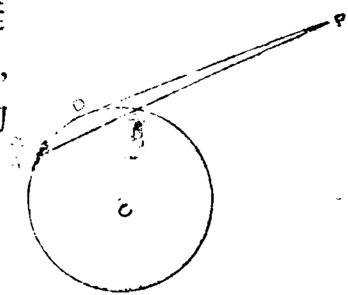


設　在⊙O裏. 弦AB=12吋
$CO\perp AB$，　CO=8吋

求　直徑BD的長.

解　$BC=\frac{AB}{2}$	同弦正交的徑平分這弦.
$BO=\sqrt{BC^2+CO^2}$	△BCO是直角△，則$\overline{BO}^2=\overline{BC}^2+\overline{CO}^2$
$=\sqrt{6^2+8^2}$	已知$BC=\frac{AB}{2}=\frac{12}{2}=6$吋；CO=8吋.
=10吋	$\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$吋
BD=2×10=20吋	直徑BD=2BO

3.　一弦AB長6吋，延長從B到P，令PB爲18吋，試求從P所畫到這圓的切線的長.



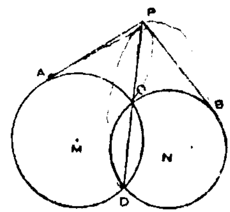
設　⊙C裏，AB弦=6吋.
從B引長到P.　PB=18吋.
PD線切⊙C於D點.

求　PD的長.

解　已知切線的平方等於全割線同圓外線段的相對的乘積.

$\overline{PD}^2 = PB \times PA$	$\odot C$ 的割線(PA)與切線(PD)遇在圓外P.
$PD = \sqrt{18 \times (18+6)}$	已知 $PB=18$; $PA=PB+AB=18+6$
$=12\sqrt{3}$	$\sqrt{18\times 24}=\sqrt{12^2\times 3}=12\sqrt{3}$
$=20.784$吋	$12\sqrt{3}=12\times 1.732$吋.

教科書內第92至93面



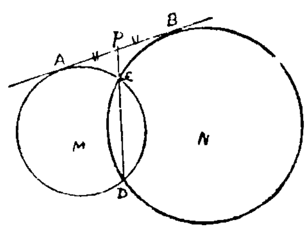
1. 從兩交圓的公共弦的延長線上的一點所畫兩圓的切線的長必相等.

(設) CD是兩交圓的公弦.
P是CD公弦的延線上的一點,
PA,PB是由P畫到各圓上的切線.

(求)(證) PA=PB.

(證) 已知切線的平方,等於全割線同圓外線段的相對的乘積.

$\overline{PB}^2 = PD \times PC$	$\odot N$ 的割線PD,同切線PB,遇在圓外的P點.
$\overline{PA}^2 = PD \times PC$	$\odot M$ 的割線PD,同切線PA,遇在圓外的P點.
$\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$	$\overline{PB}^2$, $\overline{PA}^2$ 都等於 $PD\times PC$
$PA=PB$	上式開平方.



2. 兩交圓的公共弦(延長)必平分他們的公共切線.

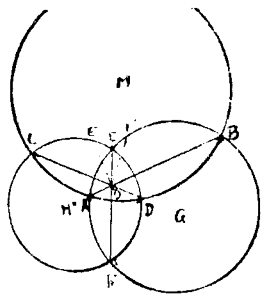
(設) AB是兩交圓的公切線.
CD是兩交圓的公弦.
延長DC與AB相遇於P.

(求)(證) AP=PB.

(證) 已知切線的平方,等於全割線同圓外線段的相對乘積.

$\overline{AP}^2=PD\times PC$	⊙M的割線PD,同切線PA,遇在圓外的P點.
$\overline{PB}^2=PD\times PC$	⊙N的割線PD,同切線PB,遇在圓外的P點.
$AP=PB$	$AP=\sqrt{PD\times PC}=PB$.

3. 若三個圓裏面,每一圓割開其他的二圓,那麼所有公共的三弦必相遇於一點.



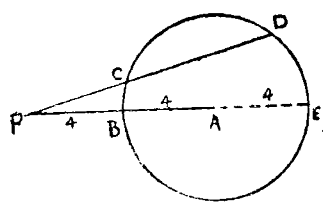
㊀ 三圓相割於A,B,C,D,E,F各點. AB, CD, EF是每二圓的公弦.

㊁㊂ 三公弦AB,CD,EF遇於O點.

㊃ 就令AB, CD交於O點,而EF不過O點. 則畫FO,並延長他使與$\overset{\frown}{AB}$遇於E″,與$\overset{\frown}{CD}$遇於E′. 則

$OE''\times OF=AO\times OB$	⊙G裏兩弦FE″, AB交於O點.
$OE'\times OF=DO\times OC$	⊙H裏,兩弦FE′, CD交於O點.
但 $AO\times OB=DO\times OC$	⊙M裏,兩弦AB,CD交於O點.
$OE''\times OF=OE'\times OF$	等於同量($DO\times OC$)的量相等
$OE''=OE'$	上式的兩節各用OF除.
則E″E′.必合於E點	$\overset{\frown}{AB}$與$\overset{\frown}{CD}$所交之點祇有E點.
∴ EF與AB,CD遇於O	OE″ OE′與OE都合成OE線.

4. 一個圓的圓心離P爲8吋,他的半徑長4吋,從P隨便畫割線分開這圓. 試求全割線乘圓外的線段的積.



㊀ 在⊙A裏,PA=8吋. A是圓心. AB是半徑長4吋.

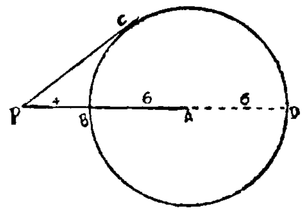
PD是由P點所作的另一割線.

(求) $PD \times PC$的積.

(解) 延長PA使與圓周遇於E. 則BE是直徑.

$PE = PA + AE = 12$	已設$PA = 8$,A是圓心,AE是半徑長4吋.
$PE \times PB = 12 \times 4$	$PE = 12$, $PB = PA - BA = 8 - 4 = 4$吋.
$PD \times PC = PE \times PB$	⊙A的兩割線PD, PE遇於P點.
$= 48$方吋	$PE \times PB = 12 \times 4 = 48$方吋.

5. 一個圓的圓心離P點為10吋,他的半徑是6吋,求從P點所畫切線的長.



(設) 在⊙A裏$PA = 10$吋

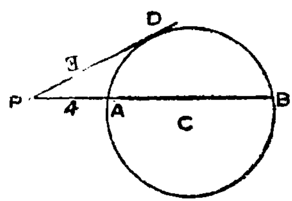
A是圓心. AB是半徑長6吋,PC是由P點到⊙A的切線.

(求) 切線PC的長.

(解) 引長PA與圓周遇於D. 則BD是直徑長12吋.

$PD = PA + AD = 16$吋	$PA = 10$, A是圓心,AD是半徑長6.
$PD \times PB = 16 \times 4$方吋	$PB = PA - BA = 10 - 6 = 4$吋.
$\overline{PC}^2 = PD \times PB = 64$方吋	⊙A的切線PC與割線PD遇於P.
$PC = \sqrt{64} = 8$吋	將上式開平方.

6. 一切線從P到圓周為7吋,又一割線的圓外線段是4吋,求這割線的長.



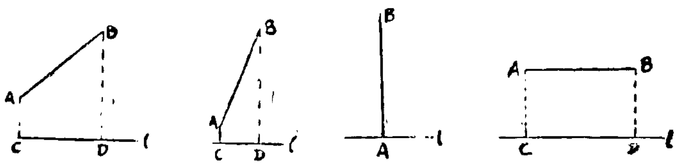
(設) ⊙C的切線$PD = 7$吋. PB是由圓外P點到⊙C的割線. 割線的圓外線段$PA = 4$吋

(求) PB割線的長

解 $\overline{PD}^2=PB\times PA$	⊙C的切線PD與割線PB遇於P.
$49=PB\times 4$	PA=4時 $\overline{PD}^2=7^2=49$方時.
$\therefore PB=49\div 4=12.25$時	用4除上式.

教科書內第100面 目解題

1. 若線段AB垂直於一直線l,那麼AB在l上正射影的長是什麼? 若AB∥l又怎樣?



解 若AB斜立於l線上,則AB的正射影,即由A, B兩端垂直於l之距離CD的長. 若AB⊥l線,則AB兩端的垂線,都與AB相合於A點,所以其正射影的長是0.

若AB∥l線,則由A,B兩端,所作的垂線AC, BD,與l線成功一長方形.(∵兩對對邊平行,∠C,∠D都是直角.)

∴ 與l線平行的AB的正射影CD長等於AB.

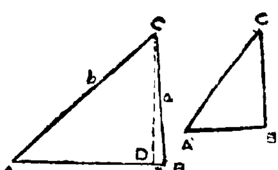
2. 若上節∠B是直角,那方程式$b^2=a^2+c^2-2cm$該變到怎麼樣?

解 若右圖的∠B是直角,

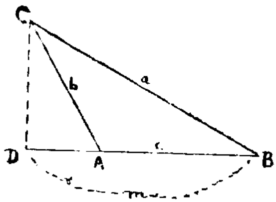
則CB線的正射影m變為0.

∴ 方程式$b^2=a^2+c^2-2cm$

變為 $b^2=a^2+c^2$ (因$2cm=0$)



3. 若上面§201右圖內 $a=10$, $c=8$ $m=9$, 求b.



㊣解 由上面§201定理知道，

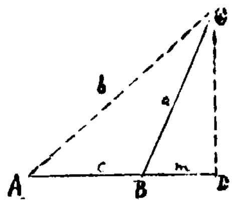
$b^2=a^2+c^2-2cm$. 以10,8,9,代a,c,m.

則 $b^2=10^2+8^2-2\times8\times9=20$

$\therefore\ b=\sqrt{20}=4.472$

教科書內第101至102面 理解題

1. 在§202的圖裏面,已知a, b, c, 求m的長. 若AC=15. AB=8, BC=9, 找出m來.



㊣設 在右圖裏, $BC=a$, $AC=b$,

$AB=c$, $BD=m$. B是鈍角.

㊣求 CB在AB線上正射影m的長

㊣解 右圖裏∠B爲鈍角.

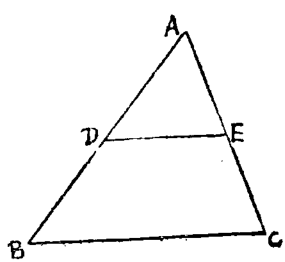
由§202定理,可知

$b^2=a^2+c^2+2cm$ 移項則 $2cm=b^2-a^2-c^2$

(以AC=15代b, AB=8代c, BC=9代a,)

$$\therefore\ m=\frac{b^2-a^2-c^2}{2c}=\frac{15^2-9^2-8^2}{2\times8}=\frac{80}{16}=5.$$

2. 聯結三角形兩邊中點的線段,必與第三邊平行. (用本編的證法去證他)



㊣設 △ABC裏D, E是AB, AC的中點.

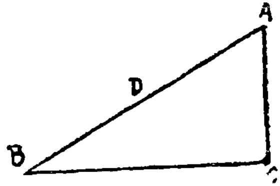
㊣求㊣證 DE ∥ BC

㊣證 $\triangle ADE\sim\triangle ABC$ (共夾角∠A, 且$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{1}{2}$)

∠D=∠B; ∠E=∠C (相似形的對應角相等.)

∴ DE ∥ BC (DE, BC爲AB所截 ∠D=∠B同位角

3. 直角三角形斜邊上的平方等於這斜邊一半上的平方的四倍.

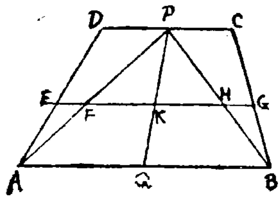


設 在直角△ABC的斜邊AB上, D是AB的中點.

求證 $\overline{AB}^2=4\overline{AD}^2$

證 AD=DB	D是AB的中點.
AB=DB+AD=2AD	DB=AD
$\overline{AB}^2=(2AD)^2=4\overline{AD}^2$	將上式自乘.

4. 平分梯形兩底的線段,必平分界於他兩邊而且平行於底邊的隨便什麼線段.

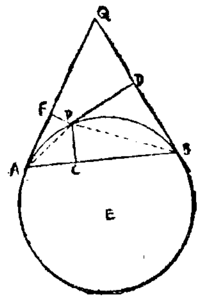


設 PQ平分梯形ABCD的兩底DC, AB. EG平行於底邊與PQ遇於K.

求證 EK=KG

證 $\frac{FA}{PA}=\frac{EF}{PD}$	△PDA∽△FEA (EF ∥ DP並截PA,DA)
HB:PB=HG:PC	△PCB∽△HGB(HG ∥ PC並截PB,CB)
EF:PD=HG:PC	上兩式之 $\frac{HB}{PB}=\frac{FA}{PA}$(△ABP∽△FHP)
∴ HG=EF	上式之PC=PD (卽PQ平分DC)
PF:PA=FK:AQ	△PAQ∽△PFK(FK ∥ AQ並截PA,PQ)
PH:PB=KH:QB	△PBQ∽△PHK(KH ∥ QB並截PQ,PB)
FK:AQ=KH:QB	上兩式之 $\frac{PF}{PA}=\frac{PH}{PB}$(△ABP∽△FHP)
∴ FK=KH	上式之AQ=QB(卽PQ平分AB)
EK=KG	EF=HG與FK=KH兩等式相加

5. 在 AB 弦的兩端畫切線,從 $\overset{\frown}{AB}$ 上一點,畫對於切線同弦的垂線,如 PD, PF 同 PC. 證明 PC 為 PD, PF 間的比例中項.



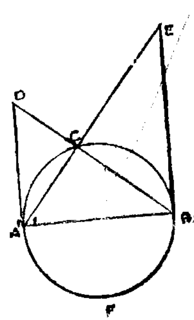
設 AB 是 $\odot E$ 裏的任意弦.
QA, QB 是切在 AB 兩端的切線.
P 是 $\overset{\frown}{AB}$ 上的任意點, $PF \perp QA$
$PD \perp QB$ $PC \perp AB$.

求證 $PD:PC=PC:PF$.

證 畫 AP, BP 兩弦, 則

$\angle PBD=\angle PAC$	切線同弦所成角,與共 $\overset{\frown}{PB}$ 的圓周角等.
$\triangle BPD \backsim \triangle APC$	兩直角△($PD \perp QB, PC \perp AB$)的 1 銳角相等.
$PD:PC=PB:PA$	相似△的對應邊成比例.
$\angle PBC=\angle PAF$	切線同弦所成角,與共 $\overset{\frown}{PA}$ 的圓周角等.
$\triangle BCP \backsim \triangle APF$	直角△($PC \perp AB, PF \perp QA$)的一銳角相等.
$PC:PF=PB:PA$	相似△的對應邊成比例.
$PD:PC=PC:PF$	$PD:PC$ 同 $PC:PF$ 兩比都等於 $PB:PA$.

6. 下圖裏面, AD, BE 切於直徑的兩端,若 BD, AE 與圓相遇於 C, 證明 AB 是 AD, BE 間的比例中項.

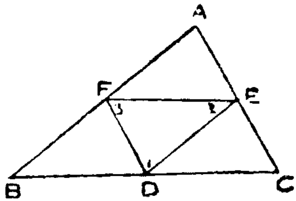


設 AB 是右圖的直徑.
AD, BE 是直徑 AB 兩端的切線.
BD, AE 是遇於圓周 C 點的割線.

求證 $AD:AB=AB:BE$

(證) $\angle 1=\frac{1}{2}\widehat{BC}$	$\angle 1$是$\widehat{BC}$上的圓周角.
$\angle D=\frac{1}{2}(\widehat{AFB}-\widehat{AC})$	$\angle D$是切線與割線所成的角.
$\angle 1=\angle D=\frac{1}{2}\widehat{BC}$	AB是直徑,則$\widehat{AFB}-\widehat{AC}=\widehat{ACB}-\widehat{AC}$
$\triangle ABD\backsim\triangle BEA$	兩rt$\triangle$的一銳角對應($\angle 1,\angle D$)相等.
$AD:AB=AB:BE$	相似$\triangle$的對應邊成比例.

7. 若聯結一三角形各邊的中點所成的內接三角形,那麼這內接三角形必與原三角形相似.

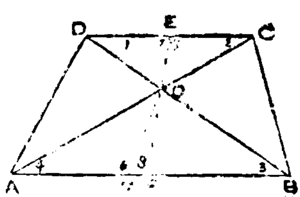


(設) D,E,F是$\triangle ABC$各邊的中點.

(求證) $\triangle DEF\backsim\triangle ABC$.

(證) $DE \parallel AB$ $FE \parallel BC$ $FD \parallel AC$	聯$\triangle$兩邊中點的線平行於第三邊.
$\angle 1=\angle A$	$\square$AEDF的對角相等.($DE \parallel FA, FD \parallel AE$)
$\angle 2=\angle B$	$\square$BDEF的對角相等.($FE \parallel BD, DE \parallel BF$)
$\angle 3=\angle C$	$\square$CDFE的對角相等.($FE \parallel DC, FD \parallel EC$)
$\triangle DEF\backsim\triangle ABC$	兩$\triangle$的各角互等.

8. 梯形兩底的平分線,必經過他的兩對角線的交點.



(設) 右圖的ABCD是一個梯形,EF是兩底DC,AB的平分線.AC,BD兩對角線交於O點.

(求證) EF必過O點.

(證) 設令EF不過O點,則聯

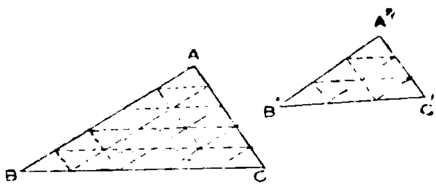
E,O. 引長EO,使與AB相遇於F'點.

$\triangle DOE \backsim \triangle BOF'$	兩角對應相等.(內錯角$\angle 1=\angle 3$, $\angle 7=\angle 8$)
$\triangle EOC \backsim \triangle F'OA$	兩角對應相等.(內錯角$\angle 2=\angle 4$, $\angle 5=\angle 6$)
$DE:F'B=EO:OF'$	相似$\triangle$DOE, BOF'的對應邊成比例.
$EC:AF'=EO:OF'$	相似$\triangle$EOC, F'OA的對應邊成比例.
$DE:F'B=EC:AF'$	DE:F'B與EC:AF兩比都等於EO:OF'.
$F'B=AF'$	已設DE=EC (EF平分兩底)
EF必過O點	但F是AB的中點(卽FB=AF)則F'與F相合.

第五編 多邊形的面積

教科書內第110面 實驗題

1. 如圖兩三角形相似,他們的相似比是5:3. 計算那些小的相等三角形去找出兩個面積的比. 他們的面積比,和那對應邊的平方比,有什麼關係呢?



解 畫△ABC同△A'B'C'相似. 使他們對應各邊的比爲5:3. 將他們的各邊等分的點相聯,則在△A'B'C'內,含有等大的小△9個. 在△ABC內含有等大的小△25個
∴ △ABC同△A'B'C'面積的比爲25:9.
卽 "兩相似三角形面積的比,爲其對應邊的平方比."

2. 作三角形ABC,並分他的邊爲四個相等部分.然後作三角形A'B'C',要令A'B'包含AB的四個相等部分的七個,同樣B'C'包含BC的各相等部分的七個,……………聯結這些三角形的分點如上圖,並計算那小三角形,去比較△ABC同A'B'C'的面積.

解 照上題的畫法使△ABC同△A'B'C'的

各對邊的比爲4:7. 連各分點的線段 則在△ABC內,分成16個等大的小⊿.分△A'B'C'成49個⊿.

∴ △ABC同△A'B'C'兩相似⊿面積之比,即其對應邊的平方比$(4^2:7^2)$.

教科書內第112面 目解題

1. 平行四邊形的底爲8高是7;試求他的面積.

解 ▱的面積=底×高=8×7=56.

2. 平行四邊形的面積是63,底邊是9;試求他的高.

解 ▱的面積=底×高. 則 ▱的高=面積÷底.

∴這▱的高=63÷9=7.

3. 平行四邊形面積是48,高是6;試求他的底.

解 ▱的面積=底×高. 則 ▱的底=面積÷高.

∴這▱的底=48÷6=8.

4. 有一三角形底是10,高是6;試求他的面積.

解 △的面積$=\frac{1}{2}\times$底×高$=\frac{1}{2}\times10\times6=30$.

5. 有一梯形兩底是8同6,高是5;試求他的面積.

解 梯形面積$=\frac{1}{2}\times$高×(上底+下底)

$=\frac{1}{2}\times5\times(8+6)=35$.

6. 兩個相似三角形的對應邊是3同

5. 找出他們面積的比來.

㊙ 依§212定理,知道"兩相似△面積之比,等於任兩對應邊平方之比." ∴他們面積之比$=3^2:5^2$

7. 兩個相似三角形的相似比是1:3. 知道小三角形的面積是25,試求大三角形的面積.

㊙ 依§185,"相似形兩個對應邊的比,叫做相似比". 又依§212定理,"相似△面積之比等於任兩對應邊平方之比." 則 $\frac{\text{小△的面積}25}{\text{大△的面積}x}=\frac{\text{小△的對應邊}1^2}{\text{大△的對應邊}3^2}$,

∴大△的面積$=3^2\times25=225$.

8. 兩個相似三角形的面積是25和144. 找出他們的相似比來.

㊙ 相似△面積之比=他們任兩對應邊平方之比.

則 小△面積25:大△面積$144=5^2:12^2$.

∴ 他們的相似比$=5:12$.

教科書內第114面目解題

1. 兩個相似多邊形面積的比是3:8. 若小多邊形一邊的長是3英寸,問大形對應一邊的長是多少?

㊙ 依§213"相似多邊形面積之比=他們任兩對應邊平方之比." 若以x代大多邊形的一邊. 則

$$\frac{\text{小多邊形面積}3}{\text{大多邊形面積}8}=\frac{\text{小多邊形1邊的平方}3^2}{\text{大多邊形1邊的平方}x^2}$$

$x^2=\frac{8\times9}{3}=24$　　$x=\sqrt{24}=4.899$英寸.

∴大多邊形對應的一邊長4.899英寸.

2. 兩個相似多邊形的相似比是1:4. 若小形的面積是9,問大形的面積是多少?

解 若P是大多邊形的面積,則依§213定理可知:—

小形面積9:大形面積P=小形1邊1^2:大形1邊4^2

∴大形的面積$P=4^2\times 9=144$.

3. 兩個相似多邊形周界的比是3:11. 若小多邊形的面積是74,問大形的面積是多少?

解 依§196定理"兩相似多邊形周界的比,等於任便兩相當的比." 又依§213定理,則

小形面積74:大形面積x=小形的3^2:大形的11^2

∴大形面積 $x=\frac{74\times 11^2}{3^2}=994\frac{8}{9}$.

4. 設1,2,3,4,5,6代表一組相似多邊形的對應邊. 若第一個多邊形的面積是1,問其餘各個多邊形的面積是什麼?

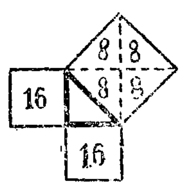
解 依§213"多邊形面積的比=其對應邊平方的比,"

此組相似多邊形對應邊的比=1:2:3:4:5:6

∴他們面積的比=$1^2:2^2:3^2:4^2:5^2:6^2$.

教科書內第114至115面 實驗題

1. 右圖裏面,粗線所畫的是等腰直角三角形. 斜邊同他兩邊上,都作一正方形. 計算那些小的正方,就能表明斜



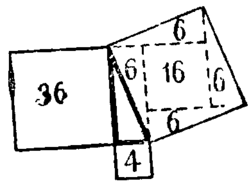
邊上正方的面積,等於兩股上正方的總和

解 在右圖等腰直角△裏,兩股都是4.

兩股上平方的和$=4^2+4^2=16+16=32$個小正方.

但斜邊的平方是4個$\frac{4\times4}{2}=4\times8=32$個小正方.

2. 右圖裏面,那直角三角形是不等邊的. 表明斜邊上的正方形等於40個小正方形.注意這斜邊上的正方也等於其他兩邊上正方的和.



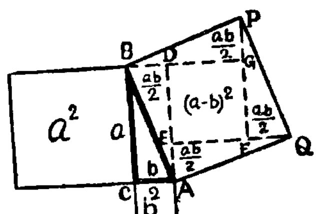
解 在右圖直角△裏,1股爲2, 他股爲6. 則

兩股上平方之和$=2^2+6^2=4+36=40$個小正方.

斜邊上的平方是4個$\frac{2\times6}{2}+(6-2)^2=40$個小正方.

3. 用右圖,去表明無論那個直角三角形都和上面的定理相符合.

〔提示〕 叫這所給三角形的兩股爲a同b. 再來說圖裏面的虛線,怎樣畫法;並且詳細解釋.



解 在直角△ABC的B點上作BD∥CA; 使BD$=b$.

由A作AD∥CB; 使AD$=a$. 則△BDA的面積$=\frac{ab}{2}$.

引長BD到G,使BG$=a$. 而DG$=a-b$(∵BD$=b$)

由G作PG⊥BG使PG$=b$. 延PG到F 使PF$=a$ 則GF$=a-b$.

由F作QF⊥PF使QF$=b$. 延長QF使與DA遇於E.

則 EF$=a-b$, EA$=b$, DE$=a-b$. 聯BPQA各點,

則 $\triangle BGP=\triangle PFQ=\triangle QEA=\triangle ADB=\frac{ab}{2}$

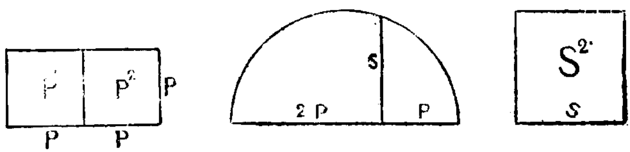
∴ $\triangle$ BGP, PFQ, QEA, ADB 的面積和 $=4\times\frac{ab}{2}$.

(因PF⊥BG;QE⊥PF;DE=EF=$a-b$).∴□DEFG的面積$=(a-b)^2$

∴ $\overline{BA}^2=4\times\frac{ab}{2}+(a-b)^2=2ab+a^2-2ab+b^2=a^2+b^2$

教科書內第121至122面 理解題

1. 用§217的方法,作一個正方形,他的面積等於所給正方形面積的二倍.



設 P^2是所給的正方形.

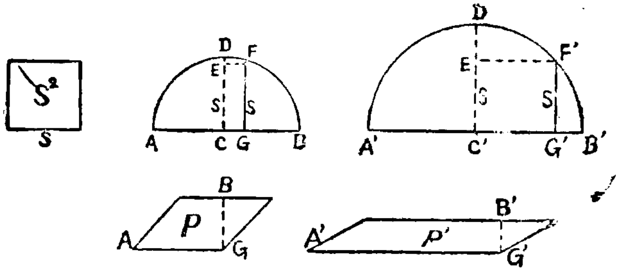
求作 求作另一正方形S^2等於$2P^2$

(作法) 以3P為直徑畫半圓,在2P與P的分點上作S與直徑垂直. 再用S做邊作一正方形S^2. 那麼S^2的正方形就是P^2形的二倍.

證 將兩個正方形P^2並攏,則成一個長方形其底為2P高為P. 其面積為$2P\cdot P=2P^2$ (▭的面積=底×高)

依§191的推論三,可知"與圓徑垂直的線,等於直徑被垂線所分兩線段的比例中項." ∴$S^2=2P\cdot P=2P^2$.

2. 作一平行四邊形,他的面積等於所給正方形S^2.



設 s^2是所給的正方形.

求作 平行四邊形P與s^2的面積相等.

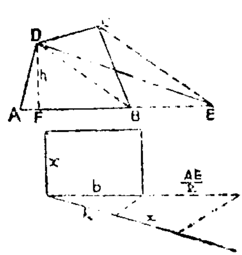
(作法) 以大於2s的任意線段AB作直徑,畫半圓.在圓心C上作DC⊥AB. 再在DC半徑上截取CE=s.由E點畫EF∥AB遇圓周於F. 再由F作FG⊥AB.以G點所分之AG為底,BG為高,作▱.則此▱的面積=s^2.

證 CEFG是▭	EF∥AB; DC,FG皆垂直於AB.
FG=EC=s	▭的對邊相等(已作EC=s)
s^2=AG·BG	s是圓周上垂直於直徑AB的線.
▱P與s^2面積相等.	▱的面積是底AG乘高BG的積.

〔討論〕 與所給正方形s^2等積的▱,是依直徑的短長去定那▱的大小.形雖不同,其面積恆等. 但圓的直徑必較2s為大,方可作圖.

教科書內第123面 理解題

1. 在所給的底上,作同所給四邊形等積的長方形.



設 b是所給的一邊.
ABCD是所給的任意四邊形.

求作 長方形與ABCD等積

即用b做底,找出長方形的高來.

(作法) 延長AB到E, 聯DB. 由C點作CE∥DB,使CE遇AB延線於E. 則△ADE與四邊形ABCD等積.(參考 §215).

由D畫DF⊥AE, 則AE是△的底, DF是△的高.

再(依§218的推論)作x爲b, $\frac{AE}{2}$,DF的比例第4項.

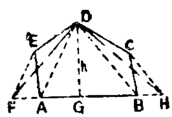
用b做底,x做高,所作的長方形,與四邊形ABCD等積.

(▭的面積xb=△的面積$\frac{AE}{2}$.DF=四邊形ABCD的面積)

(證) ABCD的面積=△DAE的面積(已作)

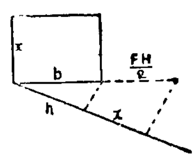
△ADE面積=▭xb面積	b : $\frac{AE}{2}$=h:x(已作)
ABCD與▭xb爲等積	ABCD,▭xb皆與△ADE等積.

2. 在所給的底上,作同所給五邊形等積的長方形.



(設) b是所給的一邊.

ABCDE是所給的五邊形.



(求)(作) 長方形,與ABCDE等積.

即用b做底,找出▭的高.

(作法) 照§215的作法,先化五邊形ABCDE的面積爲△DFH的面積.

由頂點D畫DG⊥FH, 則△DFH的底是FH,高是DG.

再作x爲b, $\frac{FH}{2}$,DG的比例第4項. 用b做底,x做高,所作的長方形,即與任意五邊形ABCDE爲等積.

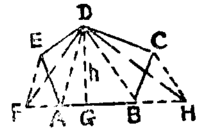
(▭的面積xb=△的面積$\frac{FH}{2}$.DG=五邊形ABCDE的面積)

(證) ABCDE的面積=△DFH的面積(已作)

△DFH 面積 = ▭ 的面積 xh | h : $\frac{FH}{2}$ = h : x

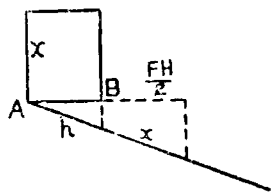
ABCDE 與 ▭ xh 爲等面積 | ABCDE, ▭ xh 都與 △DFH 等積.

3. 用五邊形的一邊做底,作一同他等積的長方形.



㊣ ABCDE 是所給的五邊形.

㊋㊍ 用五邊形的 1 邊 AB 做底,作 1 長方形與 ABCDE 等積.



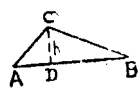
(作法同證) 先化5邊形爲△. 使 ABCDE 與 △DFH 等積. 由 D 作 DG ⊥ FH. (參考上題)

再作 x 爲 AB, $\frac{FH}{2}$, DG 的比例第 4 項.

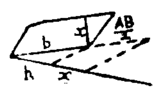
∴ 用 AB 做底, x 做高所作的長方形, 與 ABCDE 等積.

(▭ 的面積 x AB = △ 的面積 $\frac{FH}{2}$. DG = ABCDE 的面積)

4. 在所給底上作同所給三角形等積的平行四邊形.



㊣ b 是所給線. ABC 是所給 △.



㊋㊍ 用 b 做底,作一 ▱ 與 △ABC 等積.

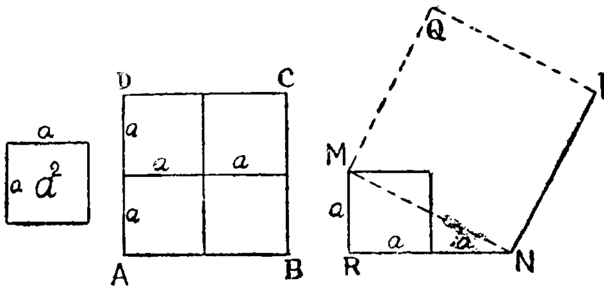
(作法) 由頂點 C 作 CD ⊥ AB.

再作 x 爲 b, $\frac{AB}{2}$, CD 的比例第 4 項.

用 x 做高, b 做底, 作 1 ▱, 則此 ▱ 與 △ABC 爲等積.

㊟ △ABC 面積 = $\frac{AB}{2}$. CD	△ABC 裏, AB 是底, CD 是高.
▱ 的面積 = xb = $\frac{AB}{2}$. CD	已作 b : $\frac{AB}{2}$ = CD : x
∴ △ABC 與 ▱ xb 的面積相等.	△ 與 ▱ 都等於 $\frac{AB}{2}$. CD

5. 作正方形,使他的面積等於所給正方形的四倍;五倍;二分之一;同五分之一.



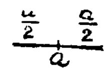
(設) a^2 是所給的正方形.

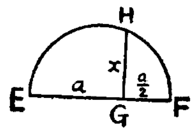
(求作) (i) □ABCD 面積 $=4a^2$

(ii) □MNPQ 面積 $=5a^2$

(iii) □x^2 面積 $=\frac{1}{2}a^2$

(iv) □y^2 面積 $=\frac{1}{5}a^2$



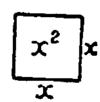


(作法同證) (i) 作 AB 線 $=2a$.

用 AB 做邊,所作□ABCD 卽係所求.

∴□ABCD 面積 = □a^2 面積的 4 倍.

($\overline{AB}^2=\overline{2a}^2=4a^2$)



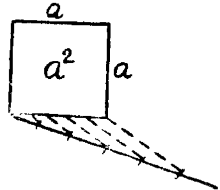
(ii) 作 MR⊥RN, 使 MR$=a$, RN$=2a$.

連 MN, 則△MRN 是直角三角形.

用 MN 做邊,所作的□MNPQ 等於 $5a^2$.

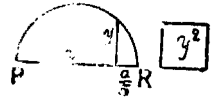
∴ □MNPQ 面積 = □a^2 面積的 5 倍.

($\overline{MN}^2=\overline{MR}^2+\overline{RN}^2=a^2+4a^2=5a^2$)



(iii) 在 $a+\dfrac{a}{2}$ 的直徑上畫半圓.

從 a 與 $\frac{a}{2}$ 的分點 G 上,作 x⊥EF.



用 x 做邊所作的□x^2 面積卽係所求

$\therefore$ $\square x^2$ 面積$=\square a^2$面積的$\frac{1}{2}$. ($\because a:x=x:\frac{a}{2}$) 參考§191推論3.

$\because$ 直徑上的垂線是所分直徑上兩線段的比例中項.

(iv) 依§179的作法，分a線爲5等分

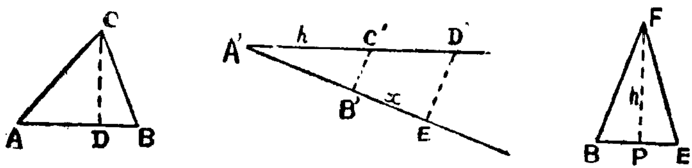
用 $a+\frac{a}{5}$ 作直徑畫半圓. 在a與$\frac{a}{5}$的分點上，作$y\perp$PR.

那麼用y做邊所作的$\square y^2$便是所求.

$\therefore$ $\square y^2$ 面積$=\square a^2$面積的$\frac{1}{5}$.($a:y=y:\frac{a}{5}$) 參考§191推論三.

(直徑上的垂線是所分直徑上兩線段的比例中項.)

6. 用所給的高h，作同所給三角形等積的等腰三角形.



(設) ABC是所給的三角形. h是所求等腰△的高.

(求)(作) 用h做高的等腰三角形，與△ABC等積.

(作法) 由C畫CD⊥AB，則CD是△ABC的高

在任意的直線A'D'上截取A'C'=h. C'D'=CD.

過A'引直線A'E，在A'E線上截取A'B'=AB. 聯C'與B'

再過D'點引D'E ∥ C'B'. 則B'E是h, CD, AB的比例第4項.

用B'E做底，作中垂線FP=h. 聯FB, FE.

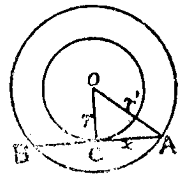
則組成一等腰△BEF與△ABC等積

(證) h:CD=AB:B'E	已作B'E爲h, CD, AB的比例第4項.
AB·CD=B'E·h	內項的乘積與外項乘積相等.
△ABC面積$=\frac{1}{2}$(AB·CD)	△的面積是底高相乘積的$\frac{1}{2}$.
△BEF面積$=\frac{1}{2}$(BE·h)	
△ABC與△BEF等積	AB·CD=BE·h

教科書內第125至127面　理解題

1.　所給同心圓的半徑，一是r；一是r'. 求切於小圓並且是大圓的弦的長.

設　兩同心圓，小圓的半徑是r. 大圓的半徑是r'. AB是小圓的切線又是大圓的弦



求　AB的長.

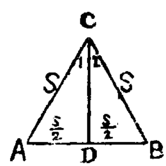
解　過切點C畫小圓的半徑OC. 又聯OA;則OA為大圓的半徑. 於是

AOC為直角△.	過切點的半徑,⊥切線.
$AC=\sqrt{r'^2-r^2}$	畢氏定理之推論.
$AB=2\sqrt{r'^2-r^2}$	同AB弦正交的徑OC必平分AB.(AB=2AC)

2.　說明每邊為 s 的等邊三角形的高是 $\frac{s}{2}\sqrt{3}$.

設　等邊△ABC的每邊是s.

CD是等邊△ABC的高.

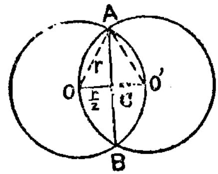


求證　$CD=\frac{s}{2}\sqrt{3}$.

證　CD分△ABC為兩直角△.(CD是AB底上的高).

$\angle 1=\angle 2$	兩直角△中∠A=∠B.
$AD=\frac{AB}{2}=\frac{s}{2}$	平分等腰△頂角的線,平分底邊.
$\overline{CD}^2=s^2-\left(\frac{s}{2}\right)^2$	CA是直角△ADC的斜邊.
$CD=\sqrt{\frac{3s^2}{4}}$	$s^2-\left(\frac{s}{2}\right)^2=s^2-\frac{s^2}{4}=\frac{4s^2-s^2}{4}=\frac{3s^2}{4}$
$=\frac{s}{2}\sqrt{3}$	

3. 兩等圓的半徑都是r,這兩圓相交,互過圓心;求公共弦的長.



設 兩等圓O與O',交於A,B.
兩圓的半徑都是r.並互過圓心

求 公共弦AB的長.

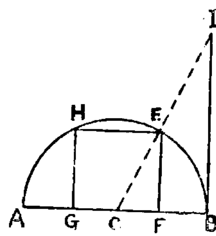
解 連OO',OA,O'A,則成每邊爲r的等邊△AOO',

兩交圓心的連線OO'平分公弦AB;並垂直於公弦AB.
(依§136定理,兩交圓心的連線,平分公弦,並是他的垂線)

由上之題2,得知$AC=\frac{r}{2}\sqrt{3}$ (AC是等邊△AOO'的高)

$\therefore AB=2AC=r\sqrt{3}$.(OO'平分AB弦於C)

4. 在半圓裏面,作正方形,頂點在圓周同直徑上.



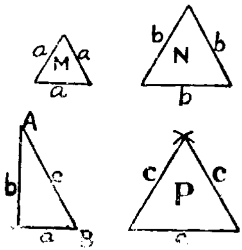
設 AB是所給半圓的直徑.

求作 □EFGH,使頂點在圓周同直徑上.

〔作法〕 在直徑AB的B端,作BD⊥AB.使BD=AB. 聯D與圓心C,遇圓周於E.由E點,畫EF⊥AB. 在AB上截取CG=CF.畫HG⊥AB,遇圓周於H. 聯HE.
則EFGH爲所求的正方形.

證 △FCE∽△BCD	EF∥DB並割△的兩邊CD,CB.
CF:EF=CB:BD=1:2	相似形的對應邊成比例(BD=AB)
EF=2CF	CF:EF=1:2
HG=EF=2CF	$\overline{HG}^2=AG\cdot GB$, $\overline{EF}^2=BF\cdot FA$,而$\begin{cases}AG=BF\\GB=FA\end{cases}$
∴ EFGH是正方形	HG⊥AB, EF⊥AB, HG∥EF, HG=EF.

5. 有兩個等邊三角形，一個的邊是a，一個的邊是b. 找出等於這兩三角形面積和的另一等邊三角形的邊長.



㊢ 等邊△M的邊是a.

等邊△N的邊是b.

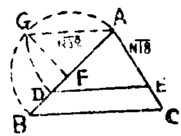
㊟㊢ 等邊△P的面積等於M,N,兩等邊◬面積的和.

(作法) 畫BC$=a$，作AC⊥BC. 令AC$=b$. 聯AB. 用AB做邊所作的等邊△即係所求.

㊟ 依§214的推論三，"在直角△斜邊上的相似多邊形，等於他兩邊上的相似多邊形的和."

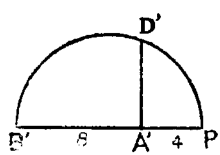
∴△M的面積＋△N的面積＝△P的面積.

6. 令一個三角形的三邊，是6, 8, 9. 畫二條平行於長邊的線，分這三角形成一個梯形同一個三角形互相等積. 找出在分開兩邊的線段的比.



㊢ AC$=6$, AB$=8$, BC$=9$.

㊟㊢ DE∥BC等分△ABC，使△ADE面積＝梯形DECB面積.



㊫㊟ 假定DE∥BC，且DE等分△ABC. 則

△ADE∽△ABC	假定DE∥BC，並割△的兩邊.
△ADE:△ABC$=1:2$	假定DE是平分△ABC的線.
△ADE:△ABC$=\overline{AD}^2:\overline{AB}^2$	相似形的比是對應邊平方比.
則 $\overline{AD}^2:\overline{AB}^2=1:2$	兩比都等於△ADE:△ABC

∴先作 $\overline{AD}^2=\frac{1}{2}\overline{AB}^2$，再由D點作DE∥BC，則DE平分△ABC.

(解) 用 $AB+\frac{AB}{2}$ 做直徑，在AB同 $\frac{AB}{2}$ 的分點A'，作D'A'垂直於B'C'. 則 $\overline{A'D'}^2=AB\cdot\frac{AB}{2}=\frac{1}{2}\overline{AB}^2$ 再在△ABC的AB上截取AD=A'D' 則 $\overline{A'D'}^2=\frac{1}{2}\overline{AB}^2=\frac{1}{2}\times8^2=32$

〔或用AB做直徑，作半圓AGB. 由AB的中點，作GF⊥AB. 連AG. 則 $\overline{AG}^2=\overline{AF}^2+\overline{FB}^2=\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2$ ∴在AB上取AD=AG. 則 $\overline{AD}^2=\frac{1}{2}\overline{AB}^2$〕

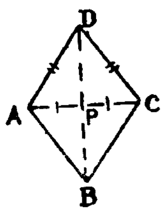
∴ $AD=\sqrt{32}=4\sqrt{2}=5.656$ 由D作DE∥BC截AE於E.

則 $\overline{AE}^2=\frac{1}{2}\overline{AC}^2=\frac{6^2}{2}=18$. ∴ $AE=\sqrt{18}=3\sqrt{2}=4.242$

∴DE截AB邊的比為 AD:DB=5.656:2.344

DE截AC邊的比為 AE:EC=4.242:1.758

7. 斜方形的面積等於他的兩對角線相乘積的一半.



(設) AC,DB是斜方形ABCD的對角線.

(求)(證) 斜方形ABCD的面積 $=\frac{1}{2}AC\cdot BD$.

(證) AC,DB分斜方形為4個小△.

DP=BP AP=PC	▱的對角線互相平分.
△APD≅△CPD	三邊對應相等(AD=DC, AP=PC, DP=DP)
∠APD=∠CPD	兩全等△的對應角相等.
=90	直線做外邊的兩鄰角相等.

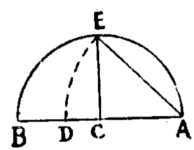
△ADC面積 $=\frac{1}{2}AC\cdot DP$ (∵△的面積是底乘高的一半)

依同理△ABC的面積 $=\frac{1}{2}AC\cdot PB$.(∵△APB≅△BPC；PB⊥AC)

∴斜方形ABCD的面積=△ADC+△ABC $=\frac{1}{2}AC(DP+PB)$.

$=\frac{1}{2}AC\cdot BD$

8. 在所給線段AB上，求D點要令 $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AD}^2}=\frac{2}{1}$.

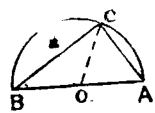


（作法） 用AB做直徑,作半圓AEB.
從AB的中點C,作EC⊥AB,交圓周於E.
用A做心,AE做半徑,畫$\overset{\frown}{ED}$,截AB於D.
則 $\overline{AD}^2=\frac{1}{2}\overline{AB}^2$　卽 $2\overline{AD}^2=\overline{AB}^2$

證　連AE,則成等腰直角△ACE.

$\overline{AE}^2=\overline{EC}^2+\overline{AC}^2=2\left(\frac{AB}{2}\right)^2$	AE是直角△的斜邊.C是圓心. EC,AC都是半徑$\left(\frac{AB}{2}\right)$.
$\overline{AE}^2=\frac{2\overline{AB}^2}{4}=\frac{1}{2}\overline{AB}^2$	
$\overline{AD}^2=\frac{1}{2}\overline{AB}^2$	已作AD=AE
$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AD}^2}=\frac{2}{1}$	$\overline{AB}^2\div\overline{AD}^2=\overline{AB}^2\div\frac{1}{2}\overline{AB}^2$

9. 設一個三角形的三角,是30°,60°,90°. 又設對着60°角的邊是a,試求他兩邊.



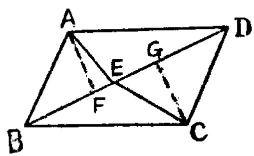
設　△ABC裏∠A=60°　∠B=30°
∠C=90°　對∠A的邊BC=a.

求　AC,AB的長.

解　若用對直角的斜邊AB做直徑畫半圓,則C必在圓周上. 以A做心,OA做半徑截圓周於C,連CO,AC,CB.

則△ABC是直角三角形	半圓裏的圓周角是直角.
∠A=60°	△COA的各邊都等於半徑.
∴半圓裏△ABC卽合所設	∠C=90°; ∠A=60°; ∠B=30°.
∴ $\overline{2AC}^2-\overline{AC}^2=a^2$	AB是斜邊=2AC. 又$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2-a^2$.
$3\overline{AC}^2=a^2$	$\overline{2AC}^2-\overline{AC}^2=4\overline{AC}^2-\overline{AC}^2=3\overline{AC}^2$
$AC=\frac{a}{3}\sqrt{3}$	將上式用3除,再開方.
$AB=\frac{2a}{3}\sqrt{3}$	用2乘上式的兩邊. (∵AB=2AC.)

10. 若在平行四邊形ABCD裏面的對角線BD上,從隨便一點E畫AE, CE. 那麼△BEA同BEC必是等積; △DEA同DEC便也等積.



(設) E是▱ABCD的對角線BD上的任意點. ∴聯AE, CE.

(求證) △BEA與△BEC等積.

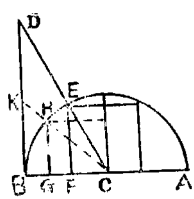
△DEA與△DEC等積.

(證) 由A作AF⊥BD. 由C作CG⊥BD.

△ABD≡△BCD	BD對角線平分▱爲兩全等△.
AF=CG	全等△的高對應相等.
△BEA面積$=\frac{1}{2}$(BE·AF)	△的面積是底高乘積的一半.
△BEC面積$=\frac{1}{2}$(BE·CG)	△的面積是底高乘積的一半.
△BEA同△BEC等積	AF=CG.

依同理△DEA與△DEC等積$\left(\because \frac{DE\cdot AF}{2}=\frac{DE\cdot CG}{2}\right)$

11. 在半圓同象限裏面,各作一正方形,頂點在圓周同圓徑上,比較他們的面積.



(作法) 照上面的題4, 在半圓裏,作一正方形,使他的邊爲EF.

而 $CF=\frac{EF}{2}$. $\therefore \overline{EF}^2$ 即大□面積.

再在BD上截取BK=BC. 聯K同C. 則KC遇圓周於H. 由H作HG⊥BC

則 CB:BK=CG:HG=1 (∵CB=BK 而△HCG∽△KCB)

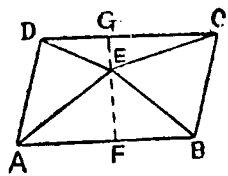
CG=HG. (∵CG:HG=1) $\therefore \overline{HG}^2$ 即小□的面積.

(解) 在直角△EFC同HGC裏面,

$\overline{EC}^2=\overline{CF}^2+\overline{EF}^2$	EC是直角△EFC的斜邊.
$\overline{HC}^2=\overline{CG}^2+\overline{HG}^2$	HC是直角△HGC的斜邊.
$\overline{CF}^2+\overline{EF}^2=\overline{CG}^2+\overline{HG}^2$	EC,HC都是半徑,則上兩式相等.
$\frac{\overline{EF}^2}{4}+\overline{EF}^2=\overline{HG}^2+\overline{HG}^2$	$\overline{CF}^2=\left(\frac{EF}{2}\right)^2$; CG=HG.
$\frac{5}{4}\overline{EF}^2=2\overline{HG}^2$	解上式
$\frac{\overline{EF}^2}{\overline{HG}^2}=\frac{8}{5}$	用$\frac{5}{4}\overline{HG}^2$除上式

∴半圓内正方形與象限内正方形面積之比爲8:5

12. 若E是平行四邊形ABCD裏面的隨便一點,那麼△ABE+△CDE等於這斜長方形面積的一半.



(設) E是▱ABCD裏的任意點.

AE, BE, CE, DE是各頂點與E的聯線.

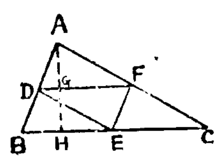
(求證) △ABE+△CDE$=\frac{1}{2}$▱ABCD面積.

(證) 由E作EF⊥AB, EG⊥DC,使爲兩△的高.

△ABE面積$=\frac{1}{2}$AB·EF	△的面積是底AB乘高EF的$\frac{1}{2}$.
△CDE面積$=\frac{1}{2}$CD·EG	△的面積是底CD乘高EG的$\frac{1}{2}$.
兩△和$=\frac{1}{2}$(AB·EF+CD·EG)	將上兩式相加.
$=\frac{1}{2}$AB(EF+EG)	▱的對邊AB=CD.
$=\frac{1}{2}$AB·GF.	EF+EG=GF.

∴兩△和=▱ABCD面積的$\frac{1}{2}$.(∵▱ABCD面積=AB·GF)

13. 聯結三角形的各邊中點,所成的平行四邊形同原三角形的一半等積.



(設)　D,E,F是△ABC各邊的中點

BDFE是連各中點所成的平行四邊形.

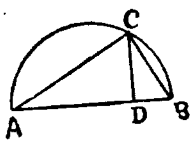
(求)(證)　$\dfrac{\square \mathrm{BDFE}\text{面積}}{\triangle \mathrm{ABC}\text{面積}}=\dfrac{1}{2}$

(證)　聯DE則成▱的對角線.

$\dfrac{\triangle \mathrm{BDE}\text{面積}}{\triangle \mathrm{ABC}\text{面積}}=\dfrac{\mathrm{BD}\cdot\mathrm{BE}}{\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BC}}$	兩△的B角相等,其面積是夾角的兩邊乘積的比.
$=\dfrac{\frac{1}{2}\mathrm{BA}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{BC}}{\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{4}$	用$\mathrm{BD}=\frac{1}{2}\mathrm{BA}$, $\mathrm{BE}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}$解之,即得$\frac{1}{4}$.
$\dfrac{\square \mathrm{BDFE}\text{面積}}{\triangle \mathrm{ABC}\text{面積}}=\dfrac{1\times2}{4}=\dfrac{1}{2}$	對角線DE平分▱爲兩全等△.

(或用上冊105面目解題的方法證明△ADF,FEC,DEF,DBE全等.)

14.　用已知線段AB做斜邊,求作一直角三角形,要令這三角形在斜邊上的高,恰遇於D點.



(設)　AB是一直角△的斜邊,

D是AB線上的所給點.

(求)(作)　直角△ABC,使斜邊上的高,恰遇於D點.

(作法)　用AB做直徑,作半圓.由D作CD⊥AB.

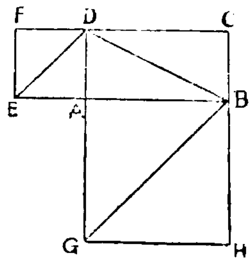
使CD遇圓周於C.　聯AC,BC.　則△ABC是直角△.

CD是AB線上的D點上的高.

(證)　△ABC是直角△	半圓裏的圓周角是直角.
CD是斜邊的D點上的高	由D點已作CD⊥AB.

15.　一長方形對角線上的正方,等於這長方形的兩鄰邊上所作正方的對角線上

的正方和的一半.



(設) DB是所給▱ABCD的對角線.

DE是AD邊上正方形的對角線.

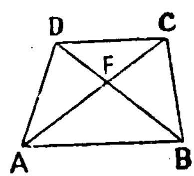
BG是AB邊上正方形的對角線.

(求證) $\overline{DB}^2=\frac{1}{2}(\overline{DE}^2+\overline{BG}^2)$

(證)

$\overline{DE}^2=2\overline{DA}^2$	$\overline{DE}^2=\overline{DA}^2+\overline{AE}^2$ 而 AE=DA.
$\overline{BG}^2=2\overline{AB}^2$	$\overline{BG}^2=\overline{AB}^2+\overline{AG}^2$ 而 AG=AB.
$\overline{DE}^2+\overline{BG}^2=2\overline{DB}^2$	直角△ABD裏, $\overline{DA}^2+\overline{AB}^2=\overline{DB}^2$
$\frac{1}{2}(\overline{DE}^2+\overline{BG}^2)=\overline{DB}^2.$	用2除上式

16. 畫梯形裏面的兩對角線,在不相平行的兩邊上所成兩三角形是等積.



(設) 梯形ABCD的對角線AC,BD交於F. DA,CB是梯形的不相平行的兩邊.

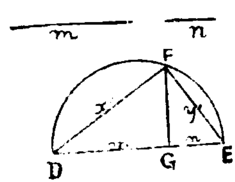
(求證) △DAF與△BCF等積.

(證) △ABD與△ABC等積.

(∵兩△的底同,且頂點都落在和底平行的線上.)

∴△ADF與△BCF等積(∵△ABD,ABC內各減去△ABF).

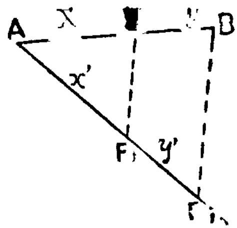
17. 分所給一線爲兩線段,要使每線段上所作正方同所設的比相等.



(設) AB爲所給的線段.

m與n兩線是所設的比.

(求作) 分AB線爲x,y兩段,使$x:y=m:n$.

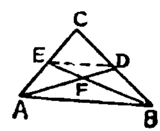


（作法） 在$m+n$的直徑上畫半圓. 又在m,n的分點G上作FG⊥DE. 遇圓周於F. 聯FD, FE. 則$\overline{FD}^2:\overline{FE}^2=m:n$. 再在AB線的A點引任一直線AE'. 在AE'上截取AF'=DF, F'E'=FE. 聯E'B. 過F'作F'H∥E'B. 則H分AB爲x,y兩份(卽AH,HB)

∴FD : FE $=x:y$　$x^2:y^2=m:n$.

證 DFE是rt△.	半圓裏的圓周角∠F是直角.
$\overline{FD}^2:\overline{FE}^2=m:n$	直角△兩邊平方的比,等於其在斜邊上射影的比.
$\overline{FD}^2:\overline{FE}^2=x^2:y^2$	已作FD:FE$=x:y$
∴　$x^2:y^2=m:n$	兩比都等於$\overline{FD}^2:\overline{FE}^2$

18. 若AD同BE是△ABC的中線,AD遇BE於F,於是三角形ABF與四邊形CDFE等積.

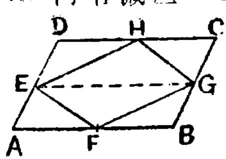


設 △ABC的中線AD, BE交於F.

求證 △ABF與四邊形CDFE等積.

證 聯ED則ED∥AB	聯△兩邊中點的線,平行底邊.
△AEB與△ADB等積.	同底的△s,頂點在ED平行線上.
△AEB與△CEB等積.	兩底(AE,CE)相等,又同一頂點B.
△ADB與△CEB等積.	都與△AEB等積.
△ABF與CDFE等積.	△ADB與△CEB內各減△BDF.

19. 若聯結一個隨便的平行四邊形鄰邊的中點,所成四個三角形必都等積.



設 E,F,G,H是▱ABCD各邊的中點. △AEF, △BFG, △CGH, △DEH, 是聯EF, FG, GH, EH所成的四個△s

求證　$\triangle AEF, \triangle BFG, \triangle CGH, \triangle DEH$ 都是等積.

證

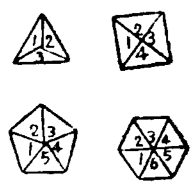
聯 EG 則 $EG \parallel AB$	對邊(EA,GB)相等且平行,則為▱.
$\triangle AEF$ 與 $\triangle BFG$ 等積	底(AF,FB)相等,頂點在平行線EG上.
$\triangle CGH$ 與 $\triangle DEH$ 等積	底(CH,HD)相等,頂點在平行線EG上
$\triangle AEF \equiv \triangle CGH$	$AE=GC, AF=CH, \angle A=\angle C$

$\therefore$ $\triangle AEF$, $\triangle BFG$, $\triangle CGH$, $\triangle DEH$ 都是等積.

教科書內第132面　自解題

1.　正三角形的中心角是什麼? 正四邊形,五邊形,六邊形的,各是什麼?

解　∵環繞一點的諸鄰角的和是4直角.



則正3邊形諸中心角的和 $=360^\circ$

$\therefore$ 正3邊形各中心角 $=360^\circ \div 3 = 120^\circ$.

正4邊形各中心角 $=360^\circ \div 4 = 90^\circ$

正5邊形各中心角 $=360^\circ \div 5 = 72^\circ$

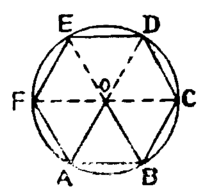
正6邊形各中心角 $=360^\circ \div 6 = 60^\circ$

2.　正多邊形的中心角應該怎樣求法?

解　依上題的解法,用n代表多邊形的邊,則

正n邊形的各中心角 $=360^\circ \div n = \dfrac{360^\circ}{n}$.

3.　把六個正三角形聚攏在一點,表明怎樣能成功一個正六邊形.



作　用等邊△OAB的O點做圓心,OA做半徑,畫一圓. 再用半徑OA在圓周上由B點順次截圓於C,D,E,…等點,分圓成6個等部(參考12面題11)

將諸截點連結,並連圓心,則成6個等邊△.(即正三角形)

∴由此可以表明6個正△,可聚攏成一正6邊形.

4. 一個正三角形的各角是多少度?正四邊形呢? 五邊形呢? 又六邊形呢?

解 三角形諸角的和=2直角.〔即$(3-2)\times180°$〕

∴正三角形的各角$=180°\div3=60°$

∴4邊形諸角的和=4直角.〔即$(4-2)\times180°$〕

∴正4邊形的各角$=360°\div4=90°$

∴5邊形諸角的和$=(5-2)\times180°=540°$

∴正5邊形的各角$=540°\div5=108°$

∴6邊形諸角的和$=(6-2)\times180°=720°$

∴正6邊形的各角$=720°\div6=120°$.

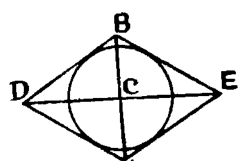
(註)多邊形裏各角的和,見上册§105定理.

5. 無論什麼正多邊形的角度,應當怎樣求出來.

解 依上題的求法,用n代表多邊形的邊數. 則正n邊形各角的度數$=[(2n-4)\measuredangle R]\div n$.

或$(n-2)\times180°\div n$.

教科書內第134至135面 理解題



1. 在直徑的延長線上取A點同B點,令AC=BC. AD, BD, AE, BE諸切線,都相遇於同AB垂直的直徑上的D,E兩點. 證明AD=BD=BE=AE.

證 在△ACD同△ACE裏,

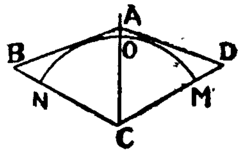
$\angle DAC=\angle EAC$	由圓外一點A,到圓的兩切線,與其連結圓心的線,所成的角相等.
$\angle ACE=\angle ACD=90^\circ$	已設 $DE\perp AB$.
$\triangle ACD\equiv\triangle ACE$	兩角夾邊對應相等.
$AD=AE$	全等$\triangle$的對應邊.

依同理 $AD=BD=BF=AE$.

〔註〕 若$AC=DC$則$\triangle ACD$裏的$\angle ADC$, $\angle DAC$都是45°,因此AEBD四邊形的各角相等.並都是直角.

若$AC\neq DC$,則$\triangle ACD$裏的$\angle A\neq\angle D$. 因此AEBD四邊形的兩對角相等,但相鄰的角不等.

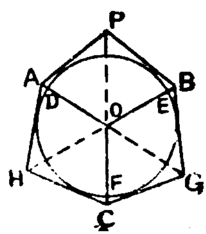
2. 如圖,C為MON弧的圓心,且$\angle DCA=\angle BCA$, AB同AD是從CO延長線上的隨便一點A所畫OM同ON兩弧的切線,證明$AB=AD$.



(證) 在$\triangle ABC$同$\triangle ADC$裏, AC是公共邊.

$\angle CAB=\angle CAD$	由圓外A點,所作的兩切線AB, AD,與其連結圓心線AC所成角相等.
$\angle BCA=\angle DCA$	已設
$\triangle ABC\equiv\triangle ADC$	兩角夾邊
$\therefore\ AB=AD$	全等$\triangle$的對應邊.

3. 求作等邊外切六邊形,但不等角.



(作法) 三等分$\odot O$於D,E,F. 聯OD,OE,OF. 在諸半徑的延線上截取$OA=OB=OC$,

則 $\angle AOB=\angle BOC=\angle AOC=120°$.

作 OP, OG, OH, 平分 $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle AOC$.

由 A,B,C 三點作 AH, AP; BP, BG; CG, CH 諸切線.

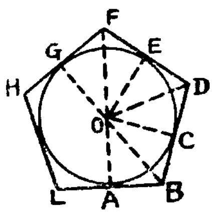
則 APBGCH 爲六等邊外切多邊形(證法與上題同).

證 在 △POB, △BOG, △GOC……等△裏,

$\angle PBO=\angle GBO$	BP,BG 是由圓外的 B,點,所作的兩切線.
$BO=BO$	△POB 與 △BOG 的公共邊.
$\angle POB=\angle BOG$	OP,OG 是 120° 的平分線.
$\triangle POB\equiv\triangle BOG$	兩角夾邊.
$\triangle BOG\equiv\triangle GOC$	兩邊夾角($OB=OC$,$OG=OG$,$\angle BOG=\angle GOC$)

依同理 $\triangle GOC\equiv\triangle COH\equiv\triangle HOA$ ∴AP,PB,BG……都相等.

〔註〕 此多邊形的邊數爲雙數,則所成的角也是雙數. 若將諸全等△的對應相等的角相加. 則 $\angle A=\angle B=\angle C$. $\angle P=\angle G=\angle H$. 但A組的角,無從決定其能與P組的角相等.所以此多邊形不能稱爲等角.



4. 若外切於圓的等邊多邊形,他的邊數是單數,必是等角.

解 依上題所證的外切多邊形

$BC+CD=DE+EF$	已知此形爲等邊.
$CD=DE$	由 D 點所作的兩切線.
$BC=EF$	從第一式減去第二式.
$OC=OE$	都是半徑.
$\angle BCO=\angle FEO$	是 ∠sR (過切點的半徑垂直於切線)
$\angle CBO=\angle EFO$	△OBC≡△OEF(兩邊夾角).
$\angle ABO=\angle GFO$	△OAB≡△OBC, △OFG≡△OEF(三邊對應相等)

$\therefore \angle B=\angle F$　依同理，則 $\angle F=\angle L=\angle D=\angle H=\angle B$.

〔註〕　由上面題3，題4裏看來，則知外切多角形的各角是隔一個相等的.若邊數是單數，角必也是單數.順次間隔，則各角皆互相等.　若邊是雙數，角必分為兩組(如上之題3)這組的角不能決定與那組角相等，所以只能稱為等邊，不能稱為等角.

教科書內第140面　理解題

1.　一個多邊形的周界是48吋，外切於半徑4吋的圓.　求那多邊形的面積.

㊫　依§231的推論:—

圓外切的多邊形的面積＝(那形的周界×圓半徑)÷2;

$\therefore$　這多邊形的面積＝$(48\times4)\div2=96$ 方吋.

2.　同邊數兩個正多邊形的頂心距，各是3吋同7吋.　找出兩形周界的比，並兩面積的比.

㊫　由§230的推論二與推論三，可知

同邊數兩正多邊形周界的比＝兩形頂心距的比

同邊數兩正多邊形面積的比＝兩形頂心距的平方比.

$\therefore$　這兩形周界的比＝3:7

這兩形面積的比＝$3^2:7^2=9:49$.

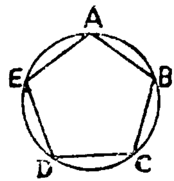
3.　同數兩正多邊形，同樣外切於圓，他們的邊心距各是2吋同6吋.　求出兩形的周界並面積的比.

㊫　由§230的推論二同推論三，則

這同邊數兩正多邊形周界的比＝2:6即1:3.

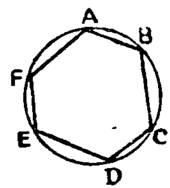
這同邊數兩正多邊形面積的比$=2^2:6^2$ 卽 1:9.

教科書內第144至145面 理解題



1. 凡內接於圓的等角多邊形都是正多邊形嗎?是不是要看邊數是雙數或是單數呢?

比較§227後面的理解題.



答 凡內接於圓的等角多邊形.未必都是等邊.看右兩圖便知:—

邊數是單數的,纔是正多邊形,

邊數是雙數的不是正多邊形.(與134面的理解題相同)

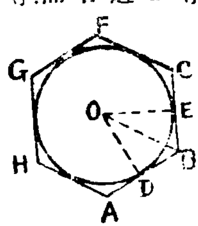
解 在右邊的兩圓裏,

$\widehat{AEC}=\widehat{BED}$	等角($\angle B$, $\angle C$)的對弧.
$\widehat{AB}+\widehat{BC}=\widehat{BC}+\widehat{CD}$	圓周減去$\widehat{AEC}$, $\widehat{BED}$.
$AB=CD$	等弧$\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$的對弦也等.

∴在上圖裏, $AB=CD=AE=BC=DE$

在下圖裏 $AB=CD=EF$. $BC=DE=AF$.

〔註〕內接等角多邊形的各邊隔一個相等. 若邊數是雙數,則成兩組等角,但不能決定這組是否能與那組相等. 若邊數是單數,則順次間隔相等,而各邊也等.



2. 證明正多邊形的頂心距平分他的兩相鄰邊心距所成的角.

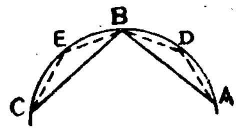
證 正多邊形ABCFG……的中心是O. OB是頂心距. OE, OD是邊心距.

求證　OB平分$\angle EOD$.

證　在$\triangle BOE$同$\triangle BOD$裏,

$OE=OD$	邊心距,卽內切圓的半徑.
$BE=BD$	正多邊形的內切圓,切在各邊的中點.
$OB=OB$	公共邊.
$\angle EOB=\angle DOB$	$\triangle EOB\equiv\triangle DOB$ (三邊對應相等)

3.　在同圓內,證明n邊內接多邊形的周界,必比2n邊內接多邊形的周界小.



設　在同圓裏面,$AB+BC+\cdots\cdots$是n邊內接多邊形的周界. $AD+DB+BE+EC+\cdots\cdots$是2n邊內接多邊形的周界.

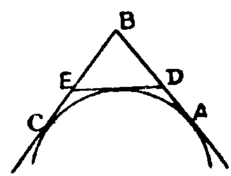
求證　$AB+BC+\cdots\cdots<AD+DB+BE+\cdots\cdots$

證

$AB<AD+DB$	A,B兩點間直線AB爲最短.
$BC<BE+EC$	B,C兩點間直線BC爲最短.

$\therefore AB+BC+\cdots\cdots<AD+DB+BE+EC+\cdots\cdots$

4.　在同圓內,證明n邊外切多邊形的周界,必比2n邊外切多邊形的周界大.



設　$AB+BC\cdots\cdots$是在同圓裏n邊外切多邊形的周界.
$AD+DE+EC+\cdots\cdots$是在同圓裏2n邊外切多邊形的周界.

求證　n邊形的周界>2n邊形的周界.

證　$DB+BE>DE$(D,E兩點間,直線DE爲最短)

$AD+DB+BE+EC>AD+DE+EC$	兩節各加$(AD+EC)$.
$AB+BC>AD+DE+EC$	$AD+DB=AB$,
	$BE+EC=BC$.

n邊形的周界>2n邊形的周界	AB,BC……諸邊的和,大於AD,DE,EC,……諸邊的和.

5. 比較題3裏面的兩個多邊形的面積.

解 題3裏,n邊內接多邊形,是包在2n邊內接多邊形內. n邊形面積比2n邊形面積少n個△ADB.

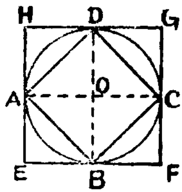
∴n邊內接多邊形的面積<2n邊內接多邊形的面積.

6. 比較題4裏面的兩個多邊形的面積.

解 題4裏2n邊外切多邊形,是由n邊外切多邊形裏分出來的. n邊形比2n邊形多n個△BDE.

∴n邊外切多邊形的面積>2n邊外切多邊形的面積.

7. 表明內接於圓的正方形,若是他的頂心距爲r,他的面積就是$2r^2$. 這同外切正方形的面積比較,有甚麼關係?



解 (a) 依§228圓內接□ABCD的作法. 知兩徑AC⊥BD而半徑爲r.

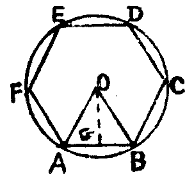
則△ADC面積$=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot DO$	△面積是底AC乘高DO的1半
$=\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot r=r^2$	AC是直徑,DO是半徑,
△ABC面積$=\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot r=r^2$	△ABC面積$=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot OB$,
∴□ABCD面積$=2r^2$	△ADC+△ABC$=r^2+r^2$

(b) 由正交兩直徑AC,BD,各端點作4切線.

則BD⊥HG, BD⊥EF	切點上的半徑是切線的垂線.
HG ∥ EF ∥ AC	諸線都同BD線正交,
同理 EH ∥ FG ∥ BD	諸線都同AC線正交,
□EFGH是正方形	兩鄰邊垂直,對邊平行,
□EFGH面積=AC·BD	□的面積等於底乘高.
$=2r\times 2r=4r^2$	AC,BD都是直徑(2r)

∴外切正方形的面積是內接正方形的 $\frac{4r^2}{2r^2}=2$ 倍.

8. 若一個圓的半徑是r, 那麼內接於這圓的正六邊形的邊心距同面積該怎樣計算.



設 ⊙O的半徑是r

ABCDEF是內接於⊙O的正6邊形.

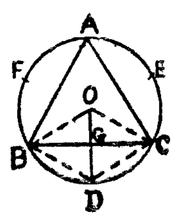
求 邊心距OG的長,與這6邊形的面積.

解 $AB=r$	內接正6邊形各邊等於半徑.
$OG \perp AB$	OG是邊心距
OG平分AB	同弦正交的弦,平分這弦.
$\overline{OG}^2=\overline{OB}^2-\overline{GB}^2$	OB是直角△OGB的斜邊.
$OG=\sqrt{r^2-\frac{r^2}{4}}$	OB是半徑(r),GB是½AB卽$\frac{r}{2}$.
$\therefore OG=\sqrt{\frac{3r^2}{4}}=\frac{r}{2}\sqrt{3}$	$r^2-\frac{r^2}{4}=\frac{4r^2-r^2}{4}=\frac{3r^2}{4}$

依§231,"正多邊形面積,等於周界與邊心距的乘積的½."

∴這個內接正6邊形面積 $=\frac{1}{2}\times 6r\times\frac{r}{2}\sqrt{3}=\frac{3}{2}r^2\sqrt{3}$

9. 一個正三角形內接於半徑是10的一個圓內.求這三角形的邊心距同邊.



設 ⊙O的半徑OB=10.

△ABC是⊙O的內接正三角形.

OG是正三角形的邊心距.

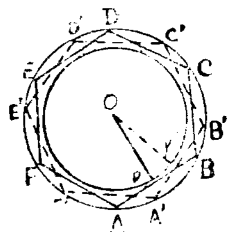
求 OG邊心距的長,與△各邊的長.

解 照§229推論三的作法畫半徑10的⊙O, 6等分圓

周於A,F,B,……,每隔一分點作聯線,便組成內接正三角形ABC. 由圓心O,引聯OB、OC. 再由6等分點的D,引聯BD,CD,OD. 則

BOCD是▱	對邊相等(OB=OC=BD=DC=半徑)
OG=GD, BG=GC	▱的對角線彼此平分
∴ $OG=\frac{10}{2}=5$	OD是半徑,OG是OD的一半.
又 $OD\perp BC$	平分BC弦的OD徑是弦的垂線.
$\overline{GC}^2=\overline{OC}^2-\overline{OG}^2$	OC是直角△OGC的斜邊.
$GC=\sqrt{100-25}$	半徑OC=10. OG=5.
$=5\sqrt{3}=8.66$	$\sqrt{100-25}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$.
∴ BC=17.32	BC=2GC(OD平分BC)

10. 找出外切於同圓所有邊數相同的正多邊形的頂點的軌迹.



㊅ ABCD……與A'B'C'D'……是外切於⊙O的正多邊形.

㊍㊌ 頂點A,A',B,B',……的軌迹.

㊣ ∵正多邊形的諸頂點,對於中心點距離,總是相等. ∴在右圖裏,用O做圓心,頂心距OA做半徑的圓,必過諸頂點A.B.……

(一)所有切於同圓的正多邊形的邊心距OP=OP'.

邊心距與邊是成垂直的,則 ∠APO=∠A'P'O=直角

正多邊形的邊數相同,則其中心角∠AOB=∠A'OB'

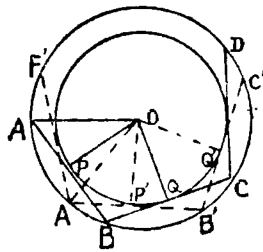
∴外圓上的任一點A',是外切於內圓,所有邊數相同的正多邊形的頂點. (∵OA,OA'是全等△APO,A'P'O的對應邊.)

(二)若A'點在外圓裏面,則∠A'>∠A. 若A'點在外圓外面則∠A'<∠A. 但△APO≡△A'P'O

∴外切於同圓所有邊數相同的正多邊形的頂點都在他的外接圓的圓周上.

所以外接於正多邊形的圓,便是所求的頂點的軌迹.

11. 找出內接於同圓所有邊數相同的正多邊形各邊中點的軌迹.



㊙ ABCD……同A'B'C'D……是內接於⊙O的正多邊形.

㊗㊥ 各邊中點P,P',Q,Q'…軌跡.

㊫ 正多邊形各邊的中點,對於中心距離總是相等. ∴在右圖裏,用O做圓心,邊心距OP做半徑的圓,必經過各邊中點P,Q……

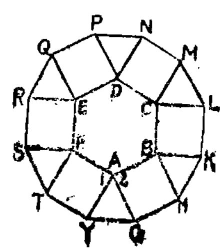
(一) 內圓上任一切點P',是接於外圓的正多邊形各邊的中點. (∵全等△APO,A'P'O的對應邊OP,OP'相等

(二) 內接於同圓所有邊數相同的正多邊形各邊中點都在他的內切圓的圓周上.

若P'點在內圓裏面,則$OP'<OP$. 若P'在內圓外面,則$OP'>OP$. 但$\triangle APO\equiv\triangle A'P'O$

∴內切於正多邊形的圓便是所求的各邊中點的軌迹.

教科書內第152至153面 理解題



1. 如圖GHKLMP……是正十二邊形,ABHG, BCLK……是在他的邊上所作的平方, 證明ABCDEF是他們成功的正六邊形.

(證) YG=GH=HK=……	正十二邊形的各邊都等.
AY=AG=GH=BH=……	等邊上的□各邊都等GH.
△AYG,BHK,CLM……是等邊△	AY=YG=AG=GH=……
∠YAG,∠HBK,∠LCM…都是60°	等邊△的各角都是60°
∠FAB=360°−(90°+60°+90°)	∠YAG=60°,∠1=∠2=90°.
依同理∠sABC,BCD……都是120°	都是360°−(90°+60°+90°)
AB=BC=CD=DE=EF=FA	等邊上的□的邊都相等.
∴ABCDEF是正六邊形	等角等邊的多邊形.

2. 求上圖正十二邊形的面積,(各邊都6吋).注意十二邊形的中心含有一個正六邊形,六個等邊三角形,同六個正方形.

(解) 依上題所證則知ABCDEF是正6邊形.

照145面題8的結果,則ABCDEF的面積$=\frac{3}{2}\times6^2\sqrt{3}$

照132面題3可知六個等邊△也等於一個正六邊形.

上面正十二邊形裏的六個正方形的面積$=6\times6^2$.

∴各邊6吋的正12邊形的面積=2個6邊形+6個正方形,

$$=2\times54\sqrt{3}+216=108\times1.732+216=403.056\text{方吋}.$$

3. 若一個正十二邊形的每邊是a,他的面積該怎樣求出?

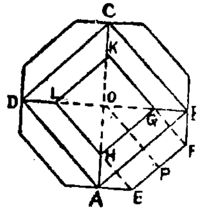
(解) 若正12邊形每邊是a,則ABCDEF每邊也是a那末ABCDEF的面積$=\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$=6個等邊△面積的和.

六個正方形的面積$=6a^2$

∴每邊是a的正12邊形的面積$=2\times\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}+6a^2$

$$=3a^2\sqrt{3}+6a^2=(1{,}732+2)3a^2=11{,}196a^2$$

4. 如圖把一個八邊形每間一邊的中點聯結起來,AH垂直於AE並等於AE.



同樣作BG,CK同DL.
證明ABCD同HGKL.
都是正方形.

正多邊形裏的邊心距,是內切圓的半徑.
∴在這8邊形裏可作一內切圓,聯圓心與諸切點,

則 OA=OP=OB=……	都是內切圓的半徑.
HA與OA合,GB與OB合	都是各邊中點的垂線
∠AEF=∠BFE=135°	8邊形的各角=(8−2)×180°÷8
AOPE形裏,∠AOP=45°	AOPE四邊形裏,各角的和是4直角. ∠A=∠P=90° ∠AEP=135°
∠AOB=90°	∠AOP=45°. 同樣∠BOP=45°
∠OAB=∠OBA=45°	△AOB是等腰直角△
依同理 ∠OBC=45°	△BOC也是等腰直角△.
AB=BC=CD=DA	全等△s AOB,BOC,……的對應邊.
∴ABCD是正方形.	A,B,C,D各角是直角,各邊都相等.

依同理四個等腰直角△s HOG, GOK, KOL, LOH全等,其各角H, G, K, L都是直角, HG, GK, KL, LH各邊都相等.

∴HGKL也是正方形.

(或)(證) 聯EH, FG,則△AHE≡△BFG(是等腰直角△s)

∠AEH=∠BFG=45°	等腰直角△的底角.
∠HEF=∠GFE=90°	∠E−∠AEH=∠F−∠BFG.
HEFG是長方形	EH,FG對邊相等,且平行(EH與FG都垂直於EF)
四邊形AHGB≡AEFB	各邊對應相等,∠H,∠G,∠E,∠F都是135°
AB平分rt.∠s HAE GBF	全等四邊形的對應角相等.
ABCD形的A,B,C,D是rt.∠s	依同理AD,BC,CD都是平分直角

∴ ABCD是正方形　各角都是90°,各邊都是相等.

　HGKL是正方形　各邊相等,各角90(即$360°-2\times135°$)

5.　一圓的直徑是5吋.　求他的面積和圓周.

解　直徑5吋的圓,其半徑$=\frac{5}{2}=2.5$吋.

依§243定理,圓面積$=\pi r^2=3.1416\times2.5^2=19.635$方吋.

依§236,則知圓周$=2\pi r=3.1416\times5=15.708$吋

6.　一圓的圓周是10呎.　求他的半徑同面積.

解　已知圓周$=2\pi r$.　則$r=$圓周$\div2\pi$.

∴此圓的半徑$=10\div(2\times3.1416)=1.5915$吋

　圓面積$=\frac{1}{2}.2\pi r.r=\frac{1}{2}\times10\times1.5915=7.9575$方吋.

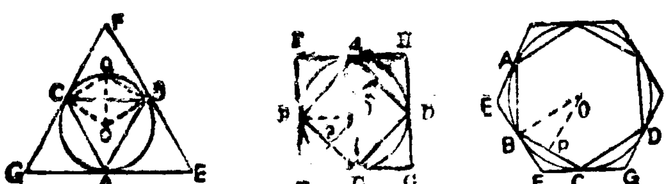
7.　一圓的面積是24平方吋.　找出他的半徑同圓周.

解　已知圓面積$=\pi r^2$　則$r^2=$圓面積$\div\pi$

∴此圓的半徑$=\sqrt{24\div3.1416}=2.76$吋

　此圓的圓周$=2\times3.1416\times2.76=17.34$吋

8.　找出同圓的內接同外切正三角形面積的比.並找出這樣正方形同這樣六邊形面積的比.



解　依§230的推論,則知"同邊數兩正多邊形的面積

的比,等於他們邊心距的平方相比."

(1) 聯外切和內接兩正三角形的邊心距 BO,PO.

則 直角$\triangle$OPB裏BO=2PO 〔參考145面題9〕

(對邊相等的▱BQCO裏對角線彼此平分.且OQ,OB,是半徑)

$\therefore$ $\triangle$EFG面積=$\triangle$ABC面積的4倍($\because$ $\overline{BO}^2=2\overline{PO}^2=4\overline{PO}^2$)

〔或用兩角夾邊對應相等法,證$\triangle$ABC,AGC,ABE,BCF全等〕

(2) 聯外切和內接兩正方形的邊心距 BO, PO.

則 直角$\triangle$OPB裏PO=BP

(□BFCO的對角線OF, BC相等,且互平分)

$\therefore$ □EFGH面積=□ABCD面積的2倍.

($\overline{BO}^2=\overline{PO}^2+\overline{PB}^2=\overline{PO}^2+\overline{PO}^2=2\overline{PO}^2$)

〔或用第145面題7的證法亦可〕

(3) 聯外切和內接兩正六邊形的邊心距 BO, PO.

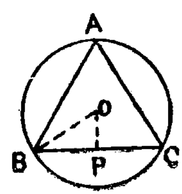
則 直角$\triangle$OPB裏OB=2BP 〔參考145面題6〕

(內接正6邊形各邊的長等於圓半徑.而OP是BC的中垂線)

$\therefore$ 外切正六邊形面積=內接正六邊形面積的$\frac{4}{3}$倍.

($\overline{OP}^2=\overline{OB}^2-\overline{BP}^2=4\overline{BP}^2-\overline{BP}^2=3\overline{BP}^2$ 因 $\overline{OB}^2=4\overline{BP}^2$)

9. 找出6吋圓半徑的內接正三角形的面積.



㊀ 依上題,則知BO=2PO.

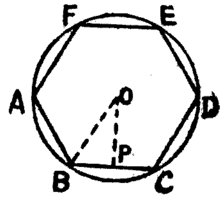
$\overline{BP}^2=\overline{BO}^2-\overline{PO}^2$ 以6吋代半徑,則

BP$=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}=5.196$吋,

AP=AO+OP=6+3=9吋,

$\therefore$ $\triangle$ABC的面積$=\dfrac{AP\cdot BC}{2}=AP\cdot BP=9\sqrt{27}=46.764$方吋

10. 找出6吋圓半徑的內接正六邊形的面積.



(解) 依§231定理,"正多邊形的面積等於其周界與邊心距乘積的一半." ∴內接正六邊形ABCDEF的周界=6×半徑=36吋.

又依上面題8,知OP=$\frac{3}{4}$OB.

則ABC……正六邊形面積=$\frac{1}{2}$×36×$\frac{3}{4}$×6=81方吋.