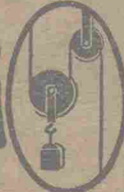
物理學計算問題解法



下冊

編者　王維廉
　　　王止善

中華書局

物理學計算問題解法下册

目錄

物理學計算問題解法下册

第五章 膨脹

定義、定律、及公式.

1. 固體膨脹

線膨脹係數(Coefficient of linear expansion).——温度上昇一度,固體所增之長與其原長之比曰線膨脹係數.

公式: 設α= 線膨脹係數,

l_0 = 固體於0°C.時之長,

l_t = 温度t°C.時之長,

$$l_t = l_0(1+\alpha t).$$

α之值甚小,設已知t°C.時之長l_t,其t′°C.時之長l_t',可由下列近似公式求之:

$$l_t' = l_t[1+\alpha(t'-t)].$$

體膨脹係數(Coefficient of cubical expansion).——温度昇高一度,某物所增之體積與其原體積之比曰該物之體膨脹係數.

公式: 設V_0=0°C.時之體積,

V_t=t°C.時之體積,

β = 體膨脹係數,

$$V_t = V_0(1+\beta t) = V_0(1+3\alpha t).$$

2. 液體膨脹

液體之實膨脹係數及視膨脹係數之關係:

容器之實膨脹係數,等於其所貯液體之實膨脹係數與其視膨脹係數之差.

公式: 設 β = 液體之實膨脹係數,

β_A = 液體之視膨脹係數,

β_G = 容器之實膨脹係數,

其關係如下:

$$\beta_G=\beta-\beta_A.$$

3. 氣體膨脹

查理士 (Charles') 或艾留利克 (Gay-Lussac's) 定律.——一定量之氣體,在一定壓力時,溫度每昇一度,則其體積增加零度時體積之$\frac{1}{273}$.

公式: 設 V_0 = 氣體於 0°C. 時之體積,

V_t = 該氣體於 t°C. 時之體積,

α = 該氣體之體膨脹係數,

$$V_t=V_0+V_0\times\frac{t}{273}=V_0\left(1+\frac{t}{273}\right)$$

$$=V_0(1+\alpha t) \qquad =V_0\cdot\frac{273+t}{273}.$$

又設已知 t°C. 時之體積 V_t, 其於 t′°C. 時之體積 V_t', 可由下式求之:

$$\frac{V_t'}{V_t}=\frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}=\frac{273+t'}{273+t}=\frac{T'}{T}.$$

上式中 T′ 與 T 爲絕對溫度(Absolute temperature).

由是得一定量之氣體,其體積與其絕對溫度成正比.

一定體積時,壓力與溫度之關係:

公式：　　設 P_0 = 氣體 0°C. 時之壓力，

P_t = 氣體 t°C. 時之壓力，

則　$P_t = P_0(1+\alpha t) = P_0\left(1+\frac{t}{273}\right)$.

又　$\frac{P_t'}{P_t} = \frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t} = \frac{273+t'}{273+t} = \frac{T'}{T}$.

波以耳艾留剎克定律(Boyle–Gay–Lussac's Law).——一定量之氣體，其壓力與體積之相乘積與其絕對溫度爲正比。

公式：　　設 P = 壓力，　　V = 體積，

T = 絕對溫度，　R = 常數，

則　　$PV = RT$.

附　　線膨脹係數表

玻璃	0.0000086	赤銅	0.000017
鉑	0.0000086	黃銅	0.000019
鐵與鋼	0.000012	鋅	0.000029

計算問題

1. 固體之膨脹

1. 鋅棒 0°C. 時長 128 粴，求在 200°C. 時之長。

〔解〕　設 l_{200} = 鋅棒在 200°C. 之長，

$\therefore\ l_{200} = l_0(1+\alpha\times 200) = 128(1+0.000029\times 200)$

$= 128.7424$ 粴。

2. 黃銅線在 250°C. 時適長 3 粎，求在 0°C. 時之長

〔解〕　$l_0 = \frac{300}{(1+250\alpha)} = \frac{300}{(1+250\times 0.000019)}$

$$=\frac{300}{1.00475}=298.582\text{糎}.$$

3. 黃銅棒上二記號間之距離在 10°C. 時爲 90 糎,求在 90° 時之距離.

〔解〕 設 l_t = 黃銅棒上二記號間在 t°C. 時之距離,

l_t' = 在 t′°C. 時二記號間之距離,

則

$$l_t=l_0(1+\alpha t)\cdots\cdots(1)$$

$$l_t'=l_0(1+\alpha t')\cdots\cdots(2)$$

$$(2)\div(1):\quad \frac{l_t'}{l_t}=\frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t},$$

$$\therefore\quad l_t'=l_t\cdot\frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}.$$

$$\therefore\quad l_{90}=l_{10}\cdot\frac{1+90\alpha}{1+10\alpha}=90\times\frac{1+90\times0.000019}{1+10\times0.000019}$$

$$=90.1368\text{糎}.$$

上式不便於計算,故可用下列之近似公式,其所得結果之差異甚少.

$$l_t'=l_t[1+\alpha(t'-t)],$$

$$\therefore\ l_{90}=l_{10}[1+\alpha(90-10)]=90(1+0.000019\times80)$$

$$=90.1368\text{糎}.$$

4. 鐵製公尺桿在 60°C. 時長 99.981 糎,在 40°C. 時長 100.015 糎.求其膨脹係數,及長適爲 100 糎之溫度.

〔解〕 $l_t'=l_t[1+\alpha(t'-t)]$,

$$\alpha(t'-t)=\frac{l_t'}{l_t}-1=\frac{l_t'-l_t}{l_t},$$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{l_t'-l_t}{l_t(t'-t)}=\frac{100.015-99.981}{99.981\times30}$$

$$=\frac{0.034}{2999.43}=0.0000113.$$

設 x° = 該桿正確時之溫度,即長適100糎時,

$$100=99.981[1+0.0000113(x-10)]$$

$$\therefore\quad x-10=\frac{0.019}{99.981\times0.0000113}=16.82,$$

$$\therefore\quad x=10+16.82=26^\circ.82\text{C}.$$

5.　鐵製碼尺製於冰點,求在沸點時之差數.

〔解〕　$l_{100}=3(1+100\alpha)=3(1+0.000012\times100)$

$=3.0036$呎,

$\therefore\quad l_{100}-3=3.0036-3=0.0036$呎

$=0.432$吋.

6.　鐵之膨脹係數爲0.000012.設夏日之溫度爲40°C., 冬日爲 −20°C.,求1700呎長鐵橋伸脹之距離.

〔解〕　伸脹之距離 $=l\alpha t=1700\times0.000012\times(40+20)$

$=1.224$呎.

7.　黃銅線溫度增高200° 時,其長增 1 糎,求其長.

〔解〕　$l_t'=l_t(1+0.000019\times200)$ ……………………(1)

$l_t'-l_t=1,$

或　$l_t'=1+l_t$ ……………………………………………(2)

(1)=(2):　$1+l_t=l_t+0.000019\times200\times l_t,$

$$\therefore\quad l_t=\frac{1}{0.000019\times200}=\frac{1}{0.0038}$$

$=263.16$ 糎.

8.　赤銅線在25°C.時較 5°C. 時長 0.034 糎,求其在 0°C. 時之長(用精確公式計算).

〔解〕　$\because\quad l_t=l_0(1+\alpha t),$

$\therefore\quad l_{25}=l_0(1+0.000017\times 25)=1.000425l_0,$ ……………(1)

及 $\quad l_5=l_0(1+0.000017\times 5)=1.000085l_0,$ ……………(2)

但 $\quad l_{25}-l_5=0.034,$ ……………(3)

(1)−(2)=(3): $\therefore\quad l_0(1.000425-1.000085)=0.034$

$\therefore\quad l_0=0.034/0.00034=100$粴.

9. 金屬尺於32°F.與 76° F.間,增長0.014吋,求溫度增至50°C.時所增之長.

〔解〕 $50°\text{C.}=(50\times\frac{9}{5}+32)=122°\text{F}.$

$\therefore\quad 0.014=l_t\alpha(t'-t)=l_{32F}\alpha(76-32),$

$\therefore l_{32F}\alpha=0.014/44,$

$\therefore$ 50°C.時尺所增之長 $=l_{32F}\alpha(112-32)$

$=(0.014/44)\times 90=1.26/44$

$=0.02864$ 吋.

10. 鋼尺於 15°C.時製成,今有2000呎之距離,於10°C.時度之,求其差數.

〔解〕 $\because\quad l_{15}=l_0(1+15\alpha),$ ……………(1)

$l_{10}=l_0(1+10\alpha),$ ……………(2)

(2)/(1): $\quad l_{10}=l_{15}\cdot\frac{1+10\alpha}{1+15\alpha}=\frac{1+10\alpha}{1+15\alpha},$

$\therefore$ 差數 $=2000l_{10}-2000.$

$$=2000\left(\frac{1+15\alpha}{1+10\alpha}-1\right)=2000\left(\frac{5\alpha}{1+10\alpha}\right)$$

$$=2000\times\frac{5\times 0.000013}{1+10\times 0.000013}=\frac{0.13}{1.00013}$$

$=0.129$ 呎.

11. 在 0°C.時鐵棒長 1.5 粎,黃銅棒長 2.5 粎,並列而

釘其一端,他端相距1糎,設投入220°C.之油槽中,求兩棒他端相距之長.

〔解〕 $l_A=1.5(1+0.000012\times220)=1.5\times1.00264$

$=1.50396$ 粍,

$l_B=2.5(1+0.000019\times220)=2.5\times1.00418$

$=2.51045$ 粍,

∴兩棒他端相距之長 $=2.51045-1.50396$

$=1.00649$ 粍.

12. 於抵償擺 (Compensated pendulum) 中,鐵棒長87糎,問鋅棒應長若干?

〔解〕 於抵償擺中,兩棒膨脹之長必相等,故

$$87\times0.000012t=l\times0.000029t,$$

$$\therefore \quad l=\frac{87\times0.000012}{0.000029}=36 \text{ 糎}.$$

13. 擺振動所需之時與擺長之平方根成正比,某鐘於5°C.時指示正確之時間.設溫度增至30°C.時,每日走慢若干?

〔解〕 設擺為秒擺,則每日振動之次數 $=60\times60\times24$

$=86,400.$

設 l_5 為5°C.時之擺長,則於30°時,其長為

$$l_{30}=l_5[1+\alpha(30-5)]=l_5(1+0.000012\times25)$$

$$=1.0003l_5.$$

由擺之公式, $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,或 $T\propto\sqrt{l}$,

但 f(振動次數)$=\frac{1}{T}$,

$$\therefore \quad \frac{1}{f} \propto \sqrt{l},$$

或 $$f \propto \frac{1}{\sqrt{l}},$$

於30°時之每日之振動次數 $=86,400\sqrt{\frac{1}{1.0003}}$

$=86,400/1.00015=86,400(1-0.00015)$

$\therefore$ 每日走慢之秒數 $=86,400-86,400(1-0.00015)$

$=86,400\times 0.00015$

$=12.96$ 秒.

14. 於 0° 時鐵球直徑 5.01 糎,赤銅環內直徑 5 糎,欲使鐵球穿過銅環,問溫度須增高若干?

〔解〕 設 $t=$ 應增之溫度,

鐵球於t°C.時之直徑 $=5.01(1+0.000012t)$,

赤銅環於t°C.時之內直徑 $=5(1+0.000017t)$,

但鐵球穿過銅環時,兩直徑相等,故

$$5.01(1+0.000012t)=5(1+0.000017t),$$

$$0.01+(5.01\times 0.000012t)=5\times 0.000017t,$$

$$\therefore \quad t=0.01/(5\times 0.000017-5.01\times 0.000012)$$

$$=0.01/0.00002488$$

$$=402\,^{\circ}\mathrm{C}.$$

15. 於 0°C. 時,鉑絲長 251 糎,鋅片長 250 糎,問於何溫度時,其長相等?

〔解〕 $$251\times(1+0.0000086t)=250\times(1+0.000029t),$$

$$1+251\times 0.0000086t=250\times 0.000029t,$$

$$\therefore t=1/(250\times 0.000029-251\times 0.000086)$$

$=1/0.0050914$

$=196^\circ.4C.$

16. 玻璃管於 5°C. 時長 99.994 糎,黃銅棒於22°C. 時,長 100.019 糎.於 5° 與22°C. 中間某溫度時,二者之長適相等,求此溫度.

〔解〕 由 $l_t{}'=l_t[1+\alpha(t'-t)]$,得下式:

$99.994[1+0.0000086(t'-5)]=100.019[1+0.000019(t'-22)]$,

$\therefore\ 99.994\times0.000086t'-99.994\times0.0000086\times5$

$=0.025+100.019\times0.000019t'-100.019\times0.000019\times22$,

$\therefore\ 100.19\times0.000019t'-99.994\times0.0000086t'$

$=100.019\times0.000019\times22-99.994\times0.0000086\times5-0.025$,

$\therefore\ t'=\dfrac{0.0125082}{0.0010404}=12^\circ C.$

17. 試證一物之體膨脹係數約爲其線膨脹係數之 3 倍.

樹膠之線膨脹係數爲 0.00008,於 0°C. 時,其長爲 1 呎,高 10 吋,厚 1 吋,求於 90°C.時所增之體積.

〔解〕 設某物爲立方體,其每邊於 0°C. 時之長爲 l_0,則於t°C.時之長爲

$$l_t=l_0(1+\alpha t)$$

於0°C.時其體積爲 $V_0=l_0{}^3$, 則

於 t°C.時之體積爲

$V_t=l_t{}^3=l_0{}^3(1+\alpha t)^3$

$=V_0(1+3\alpha t+3\alpha^2t^2+\alpha^3t^3)$.

但體膨脹係數之公式爲

$V_t=V_0(1+\beta t)$,

$\therefore\quad V_0(1+\beta t)=V_0(1+3\alpha t+3\alpha^2t^2+\alpha^3t^3),$

$\therefore\qquad \beta=3\alpha+3\alpha^2t+\alpha^3t^2.$

但 α 之值甚小,則 $3\alpha^2t+\alpha^3t^2$ 之値可略去之,

$\therefore\qquad \beta=3\alpha.$

樹膠於 90° 時所增之體積 $=V_0(1+3\alpha t)-V_0=V_0\cdot 3\alpha t$

$=12\times10\times1\times3\times0.00008\times90$

$=120\times0.0216$

$=2.592$ 立方吋.

18. 鉛球於 0°C. 時之體積為 2.5 糎^3,於 98°C. 時為 2.521 糎^3,試證其體膨脹係數為 0.0000857.

〔證〕 $\because\quad V_t=V_0(1+\beta t),$

$$\therefore\beta=\left(\frac{V_t}{V_0}-1\right)\cdot\frac{1}{t}=\frac{V_t-V_0}{V_0t}=\frac{2.521-2.5}{2.5\times98}$$

$=0.021/(2.5\times98)=0.0000857.$

19. 於 0°C. 時銀之密度為 10.31,其體膨脹係數為 0.000058;求 150°C. 時之密度.

〔解〕 $\because\quad D=\frac{M}{V}$ 或 $D\propto\frac{1}{V}.$

設0°C. 時之體積 $=V_0$,則 150°C. 時之體積為

$$V_{150}=V_0(1+0.000058\times150)=1.01275V_0,$$

$$\therefore\quad \frac{D_{150}}{D_0}=\frac{V_0}{V_{150}},$$

$$\therefore\quad D_{150}=10.31\times\frac{V_0}{1.01275V_0}=\frac{10.31}{1.01275}$$

$=10.22.$

20. 黃銅片在 0°C. 時長 20 糎,闊 15 糎,求於 80°C. 時之面積.

〔解〕 $A_{80}=[20(1+0.000019\times 80)][15(1+0.000019\times 80)]$

$=20\times 1.00152\times 15\times 1.00152$

$=300.912$糎^2.

12. 鐵棒長12呎,直徑1吋,自15°C.熱至165°C.釘其兩端,復冷至15°C,求棒內引力.設$E=30\times 10^6$磅/吋^2.

〔解〕 $12=l_0(1+15\alpha)$,……(1)

又 $l_{165}=l_0(1+165\alpha)$,……(2)

(2)÷(1): $l_{165}=12\cdot\dfrac{1+165\alpha}{1+15\alpha}$,

∴ 溫度自165°C.降至15°,棒所減之長

$$=l_{165}-12=12\cdot\frac{1+165\alpha}{1+15\alpha}-12$$

$$=12\times\frac{150\alpha}{1+15\alpha}=12\times\frac{150\times 11.9\times 10^{-6}}{1+15\times 11.9\times 10^{-6}}$$

$$=\frac{12\times 150\times 11.9\times 10^{-6}}{1.0001785}.$$

又由公式, 彈性率$=\dfrac{\text{應力}}{\text{變形}}$, 或 $E=\dfrac{S}{\delta}$,

∴棒內引力 $=SA=E\delta A$

$$=30\times 10^6\times\frac{12\times 150\times 11.9\times 10^{-6}}{1.0001785}\times\frac{1}{4}\pi\times 1^2.$$

$=42,000$磅.

2. 液體之膨脹

22. 設水銀在玻璃容器中之視膨脹係數爲1/6500,但水銀之實膨脹係數爲1/5500,求玻璃之體膨脹係數.

〔解〕 $\beta_G=\beta-\beta_A$

$$=\frac{1}{5500}-\frac{1}{6500}=0.00018182-0.00015385$$

$$=0.00002797.$$

23. 某液體於0°時之密度為D_0,其體膨脹係數為K;試證t°時之密度為

$$D_t=D_0/(1+Kt).$$

〔證〕　設0°時,液體之體積為V_0,

則t°時,液體之體積$V_t=V_0(1+Kt)$,

但液體之密度與其體積成反比例,即$D\propto\frac{1}{V}$,

$$\therefore\quad\frac{D_t}{D_0}=\frac{V_0}{V_0(1+Kt)}=\frac{1}{(1+Kt)},$$

$$\therefore\quad D_t=D_0/(1+Kt).$$

24. 溫度4°時,1克水之體積為1竰;60°時為1.0169竰;求4°與60°間,水之平均膨脹係數.

〔解〕　水之平均膨脹係數$=\frac{1.0169-1}{60-4}=0.0003018.$

25. 4°時水之密度為1;60°時為0.9834.求40°與60°間,水之平均膨脹係數.

〔解〕　設$V_4=4°C.$時水之體積,則

$$\frac{V_{60}}{V_4}=\frac{1}{0.9834},$$

$$\therefore\quad V_{60}=1.01688V_4,$$

$$\therefore\text{水之平均膨脹係數}=\frac{1.01688V_4-V_4}{(60-4)V_4}$$

$$=0.0003014.$$

26. 求t°時水密度D_t與0°時密度D_0之關係,倘一單位體積4°之水,冷至0°,脹大e;熱至t°脹大e′.

〔解〕 0° 時水之體積 $=1+e$,

t° 時水之體積 $=1+e'$,

但密度與體積成反比例,故

$$D_t : D_0 = 1+e : 1+e'.$$

27. 用度隆普提 (Dulong and Petit) 之方法,測定水銀之膨脹係數.今水銀柱各高 60 及 61.09 糎,其溫度各爲 0° 及 100°;求水銀之膨脹係數.

〔解〕 設 $H_t=$ 水銀柱在 t° 時之高,

$H_0=$ 水銀柱在 0° 時之高,

$$\therefore \quad \alpha=(H_t-H_0)/H_0 t.$$

$$\therefore \quad \alpha=(61.09-60)/60\times 100$$

$$=0.0001817.$$

28. 於度隆普提方法實驗中,兩水銀柱高 90 及 91.7 糎.設前者溫度爲 0°,求後者之溫度.

但水銀之膨脹係數爲 0.000182.(題28－34,均以此值計算.)

〔解〕 由前題公式,得

$$t=(H_t-H_0)/H_0\alpha,$$

$$\therefore \quad t=(91.7-90)/90\times 0.000182$$

$$=103°.8.$$

29. 設 0° 時水銀之密度爲 13.6,試證 120° 時,其密度爲 13.3.

〔證〕 設 0° 時,水銀之體積爲 V_0,則

120° 時水銀之體積爲 $V_0(1+0.000182\times 120)$,

$$\therefore \quad D_t=13.6\cdot\frac{V_0}{V_0(1+0.000182\times 120)}=\frac{13.6}{1.02184}$$

$$=13.3.$$

30. 於 $110°$ 時，1 克水銀之體積爲 0.075 竰.試證 $80°$ 時，1 竰水銀重 13.4 克.

〔證〕 $30°$ 時之 1 竰水銀在 $110°$ 時之體積

$=1\times[1+0.000182(110-80)]=1.00546$ 竰.

$\therefore$ 水銀之重 $=1.00546/0.075=13.4$ 克.

31. 一比重瓶於 $70°$ 時，恰容水銀 687 克，試證其容積爲 51.158 竰（$0°$ 時水銀之密度爲 13.6）.

〔證〕 $0°$ 時之 1 竰水銀，在 $70°$ 時之體積

$=1\times(1+0.000182\times70)=1.01274$ 竰，

$\therefore$ $70°$ 時水銀之密度 $=13.6/1.01274$，

$\therefore$ 比重瓶之容積 $=687/13.6/1.01274$

$=51.158$ 竰.

32. 一重量寒暑表 (Weight thermometer) 容 $0°$ 之液體 M 克；當溫度昇至 $t°$，排去液體 m 克；試證該液體之視膨脹係數爲

$$\alpha_g=m/(M-m)t.$$

〔證〕 設 $0°C.$ 時液體之密度 $=D_0$，

則排去液體在 $t°$ 時之體積 $=m(1+\alpha_g t)/D_0$.

液體在 $0°$ 時之體積 $=M/D_0$.

$$\therefore\quad \alpha_g=\frac{m(1+\alpha_g t)/D_0}{Mt/D_0}=\frac{m(1+\alpha_g t)}{Mt},$$

$$M\alpha_g t=m+m\alpha_g t,$$

$$(M-m)\alpha_g t=m,$$

$$\therefore\quad \alpha_g=\frac{m}{(M-m)t}.$$

33. 一重量寒暑表，重 40 克，裝入 $0°$ 之水銀，則重 490

克;設溫度昇至 100°,排去水銀 6.85 克,求玻璃之膨脹係數.

〔解〕　水銀之視膨脹係數 $=\dfrac{6.85}{(490-40-6.85)\times 100}$

$=0.0001546.$

但水銀之實膨脹係數 $=0.000182.$

∴　玻璃之膨脹係數 $=0.000182-0.0001546$

$=0.0000274.$

34.　玻璃瓶容 0° 之水銀 1.36 瓩,設其溫度昇至 100°,求其排去水銀之體積(玻璃之體膨脹係數爲 0.000025).

〔解〕　0° 時,水銀之體積 $=1360/13.6=100$ 竰,

則 100° 時,其體積 $=100[1+(0.000182-0.000025)\times 100]$

$=101.57$ 竰,

∴排去水銀之體積 $=101.57-100=1.57$ 竰.

35.　攝氏寒暑表上刻自 $-10°$ 至 110°C.,其間長 25 糎.設管之直徑爲 0.5粍,求其球部之體積,但玻璃之線膨脹係數爲 0.000008, 水銀之膨脹係數爲 0.00018.

〔解〕　溫度由 $-10°$ 昇至 110°C. 時,水銀膨脹之量恰充滿 $-10°$ 與 110° 間之管中,設其時溫度爲 110°,球部之體積爲 V,則得下式:

$$V[(0.00018-3\times 0.000008)(110+10)]=\frac{1}{4}\pi\times 0.05^2\times 25,$$

$$\therefore\quad V=\frac{\frac{1}{4}\pi\times 0.05^2\times 25}{0.000156\times 120}=2.624\ \text{竰}.$$

36.　水銀之膨脹係數爲 $\dfrac{1}{5550}$.設水銀寒暑表之球部體積爲 1 竰,管之橫切面面積爲 0.001平方糎, 0°C. 時球

部充滿水銀,問於 100°C. 時,水銀之位置如何?但玻璃之膨脹不計.

〔解〕 水銀溫度昇至100° 時所增加之體積

$$=1\times\frac{1}{5550}\times 100\ 竰,$$

則水銀升上管內之高度 $=(1\times\frac{1}{5550}\times 100)/0.001$

$=18.02$ 糎.

37. 設冰重57.5磅/立方呎,求重10,000噸冰山之體積.倘海水重64磅/立方呎,問冰山浮出海面之體積若干?

〔解〕 冰山之體積 $=10,000\times 2,240/57.5$

$=389,600$ 立方呎,

設冰山排去海水之體積爲V,

因冰山之重=海水之浮力=冰山排去海水之重,

$\therefore\quad 10,000\times 2,240=64V,$

$\therefore\quad V=10,000\times 2,240/64=350,000$ 立方呎,

$\therefore$ 冰山浮出海面之體積 $=389,600-350,000$

$=39,600$ 立方呎.

38. 玻璃一塊,於空氣中重46.75克,於最大密度(4°時)之水中重31.29克,在60°之水中重31.51克;求水之體膨脹係數.但玻璃之體膨脹係數爲0.000024.

〔解〕 玻璃塊在4°水中失去之重 $=46.76-31.29$

$=15.47$ 克,

$\therefore$ 玻璃塊4°時之體積 $=15.47$ 竰,

於60°時玻璃塊之體積 $=15.47[1+0.000024(60-4)]$

$=15.4908$ 竰.

$\therefore$ 玻璃塊在 60° 水中失去之重 $=46.76-31.51$

$=15.25$ 克.

故 15.25 克水在 60° 時之體積爲 15.4908 竰,在 4° 時爲 15.25 竰.

設 α 爲水之體膨脹係數,

$$\therefore\quad 15.4908=15.25(1+56\alpha),$$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{0.2408}{15.25\times 56}=0.000282.$$

39. 玻璃棒在空氣中重 90 克;在 12° 之某液體中重 49.6 克;在 97° 之該液體中之視重爲 51.9 克.求該液體之實膨脹係數.

〔解〕　玻璃棒在 12° 液體中失去之重 $=90-49.6$

$=40.4$ 克.

設 $D=12^\circ$ 時液體之密度,

$\therefore$ 12° 時玻璃棒之體積 $V=40.4/D$,

玻璃棒在 97° 液體中失去之重 $=90-51.9$

$=38.1$ 克.

設 $D'=97^\circ$ 時液體之密度,

$\therefore$ 97° 時玻璃棒之體積 $V'=38.1/D'$.

但玻璃之膨脹係數爲 0.000024,

$$\therefore\quad V'=V(1+85\times 0.0000024)$$

$$=1.00204V,$$

$$\therefore\quad 38.1/D'=1.00204\times 40.4/D.$$

設 α 爲該液體之實膨脹係數,

因爲 $D'=D(1+85\alpha)$,

$$\therefore\quad 38.1(1+85\alpha)=1.00204\times 40.4$$

$$=40.4824,$$

$\therefore \quad \alpha=(40.4824-38.1)/(38.1\times 85)$

$=0.0007356$.

40. 某固體在空氣中重45.6克;在10°,比重1.21之某液體中重29.9克;在95°,比重1.17之該液體中重30.4克.求該固體之體膨脹係數.

〔解〕 在10°時該固體之體積$=(45.6-29.9)/1.21$

$=12.9752$ 竰,

在95°時,其體積 $=(45.6-30.4)/1.17$

$=12.9914$ 竰,

$\therefore$ 該固體之體膨脹係數

$$\alpha=\frac{12.9914-12.9752}{12.9752\times(95-10)}=\frac{0.0162}{12.9752\times 85}$$

$=0.00001468$.

3. 氣體之膨脹

41. 氧0°時之體積為300竰,求91°時之體積.

〔解〕 設氧0°時之體積為V_0, 91°時之體積為V_{91},

$$V_{91}=V_0\left(1+\frac{t}{273}\right)=300\left(1+\frac{91}{273}\right)$$

$=400$ 竰.

42. 某氣體0°時之體積為27.3竰,27°時為30竰,求其膨脹係數.

〔解〕 設膨脹係數為α,

則 $30=27.3(1+27\alpha)$,

$$\therefore \quad \alpha=\frac{30-27.3}{27.3\times 27}=\frac{1}{273}.$$

43. 有氣體 78° 時之體積為 9 竕.求其 0° 時之體積.

〔解〕 設氣體0°時之體積為V_0, t°時之體積為V_t,

則 $$V_0=V_t\Big/\left(1+\frac{t}{273}\right)=9\Big/\left(1+\frac{78}{273}\right)$$

$=7$ 竕.

44. 空氣在標準溫壓(即溫度0°C.,壓力為76糎水銀柱高)時重1.293克/竕,問空氣熱至幾度,其1竕恰重1克?

〔解〕 設 t°= 所求之溫度,

則 t° 時,1.293克之空氣之體積為1.293竕

$$\therefore\quad 1.293=1+t/273,$$

$$t=0.293\times 273=79°.99.$$

45. 20°時空氣之體積為 100 竰,設溫度升至 50°,壓力不變,求其體積.

〔解〕 設50°時空氣之體積為V_{50},

則 $$\frac{V_{50}}{100}=\frac{273+50}{273+20}=\frac{323}{293},$$

$$\therefore\quad V_{50}=32300/293=110.24 \text{ 竰}.$$

46. 15竕之空氣,自溫度 27° 降至7°,求其減少之體積.

〔解〕 設V_7= 在7°時空氣之體積,

$$\therefore\quad \frac{V_7}{15}=\frac{273+7}{273+27}=\frac{280}{300},$$

$$\therefore\quad V_7=14 \text{ 竕},$$

∴減少之體積$=15-14=1$竕.

47. 溫度幾度時,一定質量之某氣體之體積為17°時之兩倍?

〔解〕 設t=所求之溫度.

$$\therefore \quad \frac{V_t}{V_{17}}=\frac{273+t}{273+17}=\frac{273+t}{290},$$

但 $$V_t=2V_{17},$$

$$\therefore \quad t=580^\circ-273^\circ=307^\circ C.$$

48. 一鋼圓柱體之容器,內裝壓緊氧氣,以壓力計(Manometer)測得27°時之壓力爲30氣壓(Atmosphere).今於該器四周置以寒劑,溫度降至 −13°,壓力爲26氣壓,求其壓力增加係數(Coefficient of increase of pressure).

〔解〕 設α=壓力增加係數,

$$\therefore \quad \frac{1+27\alpha}{1-13\alpha}=\frac{30}{26},$$

$$\therefore \quad 26(1+27\alpha)=30(1-13\alpha),$$

$$26+702\alpha=30-390\alpha,$$

$$\therefore \quad \alpha=4/1092=1/273.$$

49. 一閉塞之瓶,以水銀壓力計相接,在0°時,瓶內外之壓力相差15糎水銀柱高.倘瓶加熱,求瓶內外壓力相等時之溫度及瓶內壓力爲瓶外2倍時之溫度(氣壓表高75cm).

〔解〕 設t°=瓶內外壓力相等之溫度,

$$\therefore \quad 75=(75-15)\left(1+\frac{t}{273}\right),$$

$$60t/273=15,$$

$$\therefore \quad t=273\times 15/60=68^\circ.25.$$

設t'°=瓶內壓力爲瓶外2倍時之溫度,

$$\therefore \quad 75\times 2=(75-15)\left(1+\frac{t'}{273}\right),$$

$60t'/273=90,$

$\therefore\quad t'=273\times 90/60=409°.5.$

50. 26竔之空氣,溫度自0°昇至21°,求其體積.

〔解〕　設 21°時空氣之體積爲V_{21},

則　$V_{21}=26\left(1+\dfrac{21}{273}\right)=28$ 竔.

51. 某氣體0°時之體積爲90竰,問溫度幾度時,其體積爲 120 竰?

〔解〕　設所求之溫度爲 t,

則　$120=90\left(1+\dfrac{t}{273}\right),$

$\therefore\quad t=\left(\dfrac{120}{90}-1\right)\times 273=91°.$

52. 200竰之空氣,自0°熱至 30°, 其體積增至 222 竰.求空氣之膨脹係數.

〔解〕　設空氣之膨脹係數爲 α,

則　$222=200(1+30\alpha),$

$\therefore\quad \alpha=\left(\dfrac{222}{200}-1\right)\times\dfrac{1}{30}=0.0036.$

53. 1 竔之燒瓶,可容0°之空氣1.293克,求100° 時,可容空氣之重量.但燒瓶之體積不脹.

〔解〕　1 竔空氣,於100°時之體積$V_{100}=1\times\left(1+\dfrac{100}{273}\right)$

$=1.365$ 竔,

$\therefore$　燒瓶可容空氣之重量 $=1.293/1.365$

$=0.9487$ 克.

54. 溫度 50° 時,1 克之氫之體積爲 13.2 竔,求(1)0°,

(2) 30° 時之體積.

〔解〕(1)設 0° 時 1 克之氣之體積爲 V_0,

則 $$13.2=V_0\left(1+\frac{50}{273}\right),$$

$$\therefore\quad V_0=13.2\bigg/\left(1+\frac{50}{273}\right)=11.16 \text{ 竔}.$$

(2)設 30° 時 1 克之氣之體積爲 V_{30},

則 $$1.32=V_{30}\left(1+\frac{50-30}{273}\right),$$

$$\therefore\quad V_{30}=13.2\bigg/\left(1+\frac{50-20}{273}\right)=12.38 \text{ 竔}.$$

55. 於温度 0° 時,1 竔之氫重 0.0896 克.求 110° 時,氫 1602 竰之重量.

(解) $$1 \text{ 竔之氫於 } 110° \text{ 時之體積} =1\times\left(1+\frac{110}{273}\right)$$

$$=1.404 \text{ 竔} =1404 \text{ 竰},$$

$$\therefore\quad \text{氫 } 1602 \text{ 竰於 } 110° \text{ 時之重量} =0.0896\times\frac{1602}{1404}$$

$$=0.10231 \text{ 克}.$$

56. 空氣在 0° 時之密度爲 0.001293; 200° 時爲 0.0007457. 求於 0° 與 200° 間,空氣之膨脹係數.

〔解〕 設 0° 時空氣之體積爲 V_0, 空氣之膨脹係數爲 α,

則空氣 V_0 於 200° 時之體積 $V_{200}=(1+200\alpha)V_0$,

但 $$\frac{V_0}{V_{200}}=\frac{0.0007457}{0.001293},$$

$$\therefore\quad \frac{V_0}{(1+200\alpha)V_0}=\frac{0.0007457}{0.001293},$$

$$0.001293=0.0007457+0.14914\alpha,$$

$$\therefore\quad \alpha=0.0005473/0.14914=0.00367.$$

57. 玻璃燒瓶,內容空氣,當溫度自0°昇至100°時(瓶口開),恰失去空氣1克,求燒瓶原來所容空氣之重量(玻璃之膨脹不計).

〔解〕 設燒瓶0°時可容空氣之體積爲V_0,

則100°時其體積$V_{100}=V_0\left(1+\frac{100}{273}\right)=1.366V_0$,

$\therefore$ 100°時排去之空氣體積 $=1.366V_0-V_0$

$$=0.366V_0.$$

又設排去之空氣於0°時之體積$=V_0'$,

$$\therefore\quad 0.366V_0=V_0'\left(1+\frac{100}{273}\right),$$

$$\therefore\quad V'_0=0.366V_0\Big/\left(1+\frac{100}{273}\right)=0.268V_0,$$

但 $$0.268V_0\times0.001293=1,$$

$$\therefore\quad V_0=1/0.268\times0.001293.$$

$\therefore$ 所求之重量$=\dfrac{1}{0.268\times0.001293}\times0.001293=37.3$克.

58. CO(一氧化炭)與CO_2(二氧化炭)之密度,各爲28及44.試證壓力相同時,156°時CO_2之密度適等於0°時CO之密度.

〔證〕 設$V_0=0°$時CO_2之體積,

則於156°時CO_2之體積$V_{156}=V_0\left(1+\frac{156}{273}\right)$

$$=1.57V_0,$$

$\therefore$ 156°時CO_2之密度 $=D_0\times\dfrac{V_0}{V_{156}}=44\times\dfrac{V_0}{1.57V_0}$

$$=28.$$

與0°時CO之密度相等.

59. 空氣泡由湖底(深20米)昇至湖面,湖底溫度4°C.,湖面20°C.求其所增之體積.

〔解〕 設V_2 = 氣泡在湖面之體積,

V_1 = 氣泡在湖底之體積.

則由公式, $V_2 = V_1 \times \frac{P_1}{P_2} \times \frac{T_2}{T_1}$.

大氣壓力為76糎水銀柱之高,

得 $$V_2 = V_1 \times \frac{76 \times 13.6 + 20 \times 100}{76 \times 13.6} \times \frac{273 + 20}{273 + 4}$$

$$= 3.1 V_1,$$

故氣泡在湖面之體積為在湖底時之3.1倍,或其所增之體積為在湖底時之2.1倍.

60. 於米突制(C. G. S. System 卽法國制)中,溫度0°C.,壓力1.0132×10^6 達/糎^{2}時,1000竰之空氣重1.2928克,求公式PV=RT中R之值.

〔解〕 $$R = \frac{PV}{T} = \frac{1.0132 \times 10^6 \times 1000/1.2928}{273}$$

$$= 2.87 \times 10^6 \text{厄/度/克}.$$

61. 於8°、壓力79糎時,某氣體之體積為1750竰.求於26°、壓力74糎時之體積.

〔解〕 由公式 $$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2},$$

得所求之體積 $$V_2 = V_1 \cdot \frac{P_1}{P_2} \cdot \frac{T_2}{T_1}$$

$$= 1750 \times \frac{79}{74} \times \frac{273 + 26}{273 + 8}$$

$$= 1986 \text{竰}.$$

62. 某氣體之壓力加倍,溫度自0°昇至91°,求其體積之變化.

〔解〕 設 P_1 = 該氣體0°時之壓力,

$V_1=0°$,P_1 壓力時,該氣體之體積,

$V_2=91°$,$2P_1$ 壓力時,該氣體之體積,

則 $$V_2=V_1\cdot\frac{P_1}{2P_1}\cdot\frac{273+91}{273}=\frac{2}{3}V_1.$$

故氣體之體積爲其原來之2/3.

63. 某氣體於溫度21°,壓力80糎時之體積爲392竰,求於標準溫壓時之體積.

〔解〕 標準溫壓時之體積

$$V_2=392\times\frac{80}{76}\times\frac{273}{273+21}=383.2\text{ 竰}.$$

64. 求等體積空氣之質量之比,當(1)溫度0°,壓力30吋時;(2)溫度 65°,壓力29吋時

〔解〕 設 V_1 = 溫度0°,壓力30吋時,空氣之體積,則於溫度 65°,壓力29吋空氣之體積,

$$V_2=V_1\times\frac{30}{29}\times\frac{273+65}{273}=1.2808V_1,$$

$$\therefore\ V_2:V_1=1.2808V_1:V_1=1:0.7808.$$

故所求等體積空氣質量之比爲1:0.7808.

65. 溫度 17° 之氣體,其壓力自75糎降至70糎,倘其體積不變,問溫度宜降至幾度?

〔解〕 由公式 $\frac{P_t'}{P_t}=\frac{T'}{T}$,

得 $$T'=TP_t'/P_t=(273+17)\times 70/75$$

$$=270°\frac{2}{3},$$

而所求之温度 $t=270\frac{2}{3}-273=-2°\frac{1}{3}$C.

66. 於標準温壓時,1 竰之乾空氣重0.001293克.試證温度 15°C., 壓力 76.8 糎時,其密度爲0.001239.

〔解〕 標準温壓時 1 竰之空氣,於温度15°,壓力 76.8 糎時之體積 $V=1\times\frac{76}{76.8}\times\frac{273+15}{273}=1.044$ 竰,

∴ 所求空氣之密度 $=\frac{1}{V}\times0.001293=\frac{1}{1.044}\times0.001293$

$=0.001239$ 克/竰.

67. 室內空氣體積爲750立方粎,求温度17°,壓力77糎時,室內空氣之重量.

〔解〕 室內空氣於標準温壓時之體積爲

$$V=750\times\frac{77}{76}\times\frac{273}{273+17}=715\text{ 立方粎},$$

但在標準温壓時,1 竰乾空氣重0.001293克,

∴ 室內空氣之重量 $=715\times1{,}000{,}000\times0.001293$

$=924{,}900$ 克

$=924.9$ 瓩

78. 氫與空氣之密度比爲1:14.44, 問温度16°,壓力77糎時,重 1 克氫之體積幾何?

〔解〕 於標準温壓時,1 克之體積

$$=\frac{1}{0.001293}\times14.44=11.16\text{ 竏},$$

∴ 所求之體積 $=11.16\times\frac{76}{77}\times\frac{273+16}{273}$

$=11.66$ 竏.

69. 溫度 $0^\circ C.$,壓力760粍時,氧之密度爲 1.429 克/竏,今於 $12^\circ C.$,壓力 780 粍時,以氧導入2.5竏之圓柱體中.求圓柱體內氧之質量.

〔解〕 於溫度 $12^\circ C.$,壓力 780 粍時 2.5竏之氧於溫度 $0^\circ C.$,壓力 760粍時之體積爲

$$V=2.5\times\frac{780}{760}\times\frac{273}{273+12},$$

$$\therefore \text{氧之質量}=2.5\times\frac{780}{760}\times\frac{273}{273+12}\times 1.429$$

$$=3.512\ \text{克}.$$

70. 已知溫度 $0^\circ C.$,壓力 76 糎時,1 克氫之體積爲 11.16竏,問溫度 $23^\circ C.$,壓力 74.6 糎時 3.85 克氫之體積若干?

〔解〕 氫 1 克於溫度 $23^\circ C.$,壓力 74.6 糎時之體積

$$=11.16\times\frac{76}{74.6}\times\frac{273+23}{273}\text{竏},$$

$$\therefore\ 3.85\text{克氫之體積}=3.85\times 11.16\times\frac{76}{74.6}\times\frac{296}{273}$$

$$=47.45\ \text{竏}.$$

71. 溫度 0° 時,玻璃瓶之容積爲 1 竏,其內裝入標準溫壓之空氣;設溫度昇至 91°,壓力爲 72 糎(瓶口開),問瓶內空氣失去之重量若干?

〔解〕 標準溫壓時之 1 竏空氣,於 91°、壓力 72 糎時之體積爲 $V=1000\times\frac{76}{72}\times\frac{273+91}{273}=1406$ 竰,

則失去空氣之體積 $=1406-1000=406$ 竰,

失去空氣在標準溫壓時之體積 $=406\times\frac{72}{76}\times\frac{273}{273+91}$

$=288.2$ 竰.

∴ 所失空氣之重量 $=288.2\times0.001293$

$=0.3743$ 克.

72. 壓力74糎,8 竔之氫,與壓力76糎,3 竔之氧相混合,其溫度均為 14°. 設混合物之體積,縮至10竔,(1)試證其壓力為82糎.(2)設混合後溫度降至 −7°,證其壓力與混合前氧之壓力相等.

〔解〕 (1)混合後氫之壓力 $P_1=\frac{P_1'V_1'}{V_1}=\frac{74\times8}{10}=59.2$糎,

氧之壓力 $P_2=\frac{P_2'V_2'}{V_2}=\frac{76\times3}{10}=22.8$ 糎,

∴混合後之壓力 = 氫之壓力 + 氧之壓力 $=P_1+P_2$

$=59.2+22.8=82$ 糎.

(2)混合後,氫之壓力 $P_1=74\times\frac{8}{10}\times\frac{273-7}{273+14}$

$=54.8$ 糎.

氧之壓力 $P_2=76\times\frac{3}{10}\times\frac{273-7}{273+14}$

$=21.2$ 糎,

∴混合後之壓力 $=P_1+P_2=54.8+21.2$

$=76$ 糎.

故混合後之壓力與混合前氧之壓力相等.

73. 氣球容量84,000立方呎,於溫度20°C.,壓力比大氣壓力大20糎水銀柱高時,貯以(1)氫,(2)氦.求其上升之力.

〔解〕 設氣球之重不計,又其容量不變.

由密度表,得

空氣於0°C.,1氣壓時之密度 $=0.001293$ 克/竰,

氫於0°C.,1氣壓時之密度 $=0.00008988$ 克/竰,

氦於0°C.,1氣壓時之密度 $=0.0001785$ 克/竰,

(1)　氫於0°C.,1氣壓時之體積

$$=84{,}000\times\frac{76\times13.6+20}{76\times13.6}\times\frac{273}{273+20}$$

$=79{,}750$ 立方呎.

∴氣球上升之力

$$=79{,}750\times12^3\times2.54^3\times(0.001293-0.00008988)$$

$=2{,}720{,}000$ 克重.

(2)　氦於0°C.,1氣壓時之體積 $=79{,}750$ 立方呎,

∴氣球上升之力

$$=79{,}750\times12^3\times2.54^3\times(0.001293-0.0001785)$$

$=2{,}520{,}000$ 克重.

74.　兩容器A、B,以備有活塞之管通連之,活塞閉時,A、B貯以空氣,其壓力各等於水銀柱高360及240糎,A之容積為800竰,B為600竰.求活塞開時容器內之結果壓力.但溫度始終不變.

〔解〕　A容器之空氣佔A、B兩容器時之壓力

$$=360\times\frac{800}{800+600}=205.7\text{ 糎},$$

B容器之空氣佔A、B兩容器時之壓力

$$=240\times\frac{600}{800+600}=102.9\text{ 糎},$$

∴容器內之結果壓力 $=205.7+102.9$

$=308.6$ 糎.

75. 半徑 r_1、r_2 之兩空心球,各裝入溫度 t_1、t_2 之相等質量之空氣,試證球內壓力之比爲

$$(1+\alpha t_1)/r_1{}^3:(1+\alpha t_2)/r_2{}^3,$$

及其球內面上之壓力之比爲

$$(1+\alpha t_1)/r_1:(1+\alpha t_2)/r_2.$$

但 α 爲空氣之膨脹係數.

〔證〕 設兩球內空氣之質量均爲M克,

則在標準溫壓時,空氣之體積 $=M/0.001293$ 竰,

$$\therefore\quad V_{t_1}=M(1+\alpha t_1)/0.001293\ 竰,$$

$$V_{t_2}=M(1+\alpha t_2)/0.001293\ 竰.$$

故兩球球內之壓力:

$$P_1=\frac{M(1+\alpha t_1)}{0.001293}\times 76\Big/\frac{3}{4}\pi r_1{}^3\ 糎,$$

及
$$P_2=\frac{M(1+\alpha t_2)}{0.001293}\times 76\Big/\frac{4}{3}\pi r_2{}^3\ 糎,$$

$$\therefore P_1:P_2=\frac{M(1+\alpha t_1)}{0.001293}\times 76\Big/\frac{4}{3}\pi r_1{}^3:\frac{M(1+\alpha t_2)}{0.001293}\times 76\Big/\frac{4}{3}\pi r_2{}^3$$

$$=(1+\alpha t_1)/r_1{}^3:(1+\alpha t_2)/r_2{}^3.$$

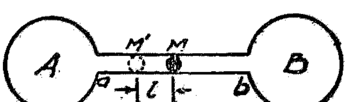
但球之內面積 $=4\pi r^2$,

$\therefore$ 兩球內面上之壓力之比

$$=\frac{(1+\alpha t_1)}{r_1{}^3}\times 4\pi r_1{}^2:\frac{(1+\alpha t_2)}{r_2{}^3}\times 4\pi r_2{}^2$$

$$=(1+\alpha t_1)/r_1:(1+\alpha t_2)/r_2.$$

76. A與B爲兩容器,以橫切面積 0.2 糎²之長管 ab 相連接.M爲一滴水銀.於溫度0°C., 壓力P時, A、B 各裝入某氣體 100 竰,水銀恰在 ab



之中點;設B及水銀右邊之管之溫度升高2°,A及水銀左邊之管之溫度,仍為0°,問M之位置如何?

〔解〕　設水銀M向A移至M′之長 $=l$糎,則兩器壓力相等,各等於P′,故

$$\frac{P\times100}{273}=\frac{P'(100+l\times0.2)}{273+2}=\frac{P'(100+0.2l)}{275},\quad\cdots\cdots(1)$$

$$P\times100=P'(100-l\times0.2),\quad\cdots\cdots(2)$$

$$(1)/(2):\qquad \frac{1}{273}=\frac{(100+0.2l)}{275(100-0.2l)},$$

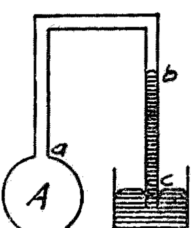
$$\therefore\quad 275(100-0.2l)=273(100+0.2l)$$

$$109.6l=200,$$

$$\therefore\quad l=\frac{200}{109.6}=1.825\text{糎}.$$

故水銀滴M向左移過1.825糎.

77.　某氣體100竰,於20°,某壓力時,裝入容器A中,連通管ab之橫切面積為0.2糎²,其中水銀柱高75糎,但氣壓表為76糎;設容器與連通管之溫度增高,水銀柱降至65糎,求此時之溫度.



〔解〕溫度不增時,A中氣體之壓力 $=76-75=1$糎,

溫度增高時,A中氣體之壓力 $=76-65=11$糎,

$$\therefore\quad \frac{1\times100}{273+20}=\frac{11\times(100+11\times0.2)}{T},$$

$$\therefore\quad T=329^{\circ}.4C.$$

∴所求之溫度 $=329^{\circ}.4-273^{\circ}=56^{\circ}.4C.$

78. 如前題圖,0° 時 A(容器及連通管)中氣體之體積爲100竰,連通管之橫切面直徑爲 0.33 粴,水銀柱高 30 粴.設容器與連通管放入水蒸氣中,水銀柱高降至 14 粴,但大氣壓力爲 76 粴,求容器內氣體之膨脹係數.但容器與連通管之膨脹不計.

〔解〕 $\because \quad PV = K(1+\alpha t)$,

當 $t=0°$, $P=76-30=46$, $V=100$時,

$$\therefore \quad K = PV = 46\times 100 = 4,600.$$

又 $t=100°$ 時, $P=76-14=62$,

$$V = 100 + \pi\left(\frac{0.03}{2}\right)^2 \times (30-14) = 101.13$$

$$\therefore \quad 62\times 101.13 = 4600(1+100\alpha),$$

$$460000\alpha = 1670.06.$$

∴氣體之膨脹係數 $\alpha = 0.00363$.

79. 0°、1 氣壓之甲氣體 100 竰與 10°、5 氣壓之乙氣體 200 竰,混合於 150 竰之容器中.求於 35° 時,混合物之壓力.

〔解〕 $\because \quad P_2 = P_1\dfrac{T_2V_1}{T_1V_2}$,

∴混合後,甲氣體之壓力爲

$$P_2 = 1\times\frac{273+30}{273}\times\frac{100}{150} = 0.74\text{ 氣壓},$$

乙氣體之壓力爲

$$P_2' = 5\times\frac{273+30}{273+10}\times\frac{200}{150} = 7.15\text{ 氣壓},$$

∴混合物之壓力 $= P_2 + P_2' = 0.74 + 7.15$

$= 7.89$ 氣壓.

80. 温度 $17°C.$, 壓力74糎時,25 竰之硫磺,在空氣中權得重50克,試求其質量.但0°,76糎時,1竰之空氣重爲0.00129克,空氣之膨脹係數爲1/273,銅法碼之密度爲8.0克/竰.

〔解〕　硫磺排去空氣之體積 =25 竰,

排去之空氣在標準溫壓時之體積

$$V=25\times\frac{74}{76}\times\frac{273}{273+17}=22.9\text{ 竰},$$

故硫磺排去空氣之重量 $=22.9\times0.00129=0.0296$ 克.

但法碼之密度=8,而硫磺之密度=50/25=2.

∴法碼排去空氣之重量 $=\frac{2}{8}\times0.0296=0.0074$ 克,

∴硫磺之質量 $=50+0.0296-0.0074$

$=50.0222$ 克.

第六章 比熱與潛熱

定義、定律及公式.

1. 比 熱

卡(Calorie)、英熱單位 (British thermal unit) 及磅—度 (pound-degree). —— 1克之純粹水,溫度增加 1°C. 時所需之熱量,謂之1卡. 1磅之純粹水,溫度增加 1°F. 時所需之熱量,謂之1英熱單位. 1磅之純粹水,溫度增加 1°C. 時所需之熱量,謂之1磅—度.

注意: 磅—度(兩字間有一劃者)爲熱之單位,但磅度爲力之單位.

比熱(Specific heat). — 使物質1克,由溫度t°C., 昇高至(t+1)°C.所需之熱量,以卡爲單位表出之數字,曰此物質於溫度 t°C. 時之比熱.

水當量(Water-equivalent)或熱容量(Heat capacity).—— 某物體1克在溫度增高1度時所需之熱量,曰該物體之水當量或熱容量.

2. 潛 熱(Latent heat).

熔解(Melting).——固體化爲液體謂之熔解.

熔解熱(Latent heat of fusion). —— 固體質量1克熔化成爲同溫度之液體,所須之熱曰熔解熱.

蒸發(Vaporization).—— 由液體之表面氣化者曰蒸發.

蒸發熱 (Heat of vaporization).—— 使1克之液體,化爲同溫度之氣體所需之熱,謂之蒸發熱.

露點(Dew point).——若將空氣漸次冷却,使其內水分析出,凝結成露,此時之溫度,謂之露點.

相對濕度(Relative humidity).——現在大氣中實有之水蒸氣壓力,對於同溫度應有之水蒸氣最大壓力之比,謂之相對濕度.

公式: P=現在大氣中實有之水蒸氣壓力,

P'=同溫度大氣中應有之水蒸氣最大壓力.

$$\therefore \text{相對濕度} = \frac{P}{P'}.$$

計算問題

1. 比熱

1. 以100°C.之銅300克,投入10°C.、200克之水中,求混合後之溫度.銅之比熱=0.095.

〔解〕 設混合後之溫度為t,

則銅放出之熱量$=300\times(100-t)\times0.095$,

水吸收之熱量$=200\times(t-10)\times1$,

但銅放出之熱量等於水吸收之熱量,故

$$300(100-t)\times0.095=200(t-10)\times1,$$

$\therefore$混合後之溫度$t=21^\circ.2$C.

2. 重10磅之熱鐵球,投入14°之水16磅中,其結果溫度為49°C.求鐵球之原溫度. 鐵之比熱=0.119.

〔解〕 設鐵球之原溫度為t,

則鐵球放出之熱量$=10\times(t-49)\times0.119$,

水吸收之熱量$=16\times(49-14)\times1$,

$\therefore \quad 10\times(t-49)\times0.119=16\times(49-14)\times1,$

$\therefore$ 鐵球之原溫度 $t=520^\circ C.$

3. 某物體投入重104克,比熱0.43之卡計(Calorimeter)中,其間盛水375克,溫度自15°昇至38°C.問該物體放出熱量若干?

〔解〕 該物體所失之熱量=水與卡計所得之熱量.

$\therefore$ 所求之熱量 $=104\times(38-15)\times0.43+375\times(38-15)\times1$

$=9,654$ 卡.

4. 重40克之鐵卡計中,盛有15°C.之水160克.今以100°C.之銀100克,投入卡計中.求水溫度升高之度數(銀之比熱=0.0559).

〔解〕 設結果之溫度 $=t,$

而鐵之比熱 $=0.119,$

則銀所失之熱量 $=100\times(100-t)\times0.0559,$

水及卡計所得之熱量 $=(160\times1+40\times0.119)(t-15),$

$\therefore \ 100\times(100-t)\times0.0559=(160\times1+40\times0.119)(t-15),$

$\therefore \quad t=17^\circ.8,$

$\therefore$ 水昇高之度數 $=17^\circ.8-15^\circ=2^\circ.8.$

5. 某液體120克裝入20克之銅器內,熱至100°C.,然後置於80克之銅卡計之水中,水重300克,其溫度自13°昇至27°.5.若銅之比熱=0.1,求該液體之比熱.

〔解〕 設該液體之比熱為 S,

則液體及銅器所失之熱量

$=120\times(100-27.5)S+20\times(100-27.5)\times0.1,$

水及銅卡計所得之熱量

$=300\times(27.5-13)\times1+80\times(27.5-13)\times0.1$

$$\therefore\quad 120\times(100-27.5)S+20\times(100-27.5)\times 0.1$$
$$=300\times(27.5-13)\times 1+80\times(27.5-13)\times 0.1,$$
$$8700S+145=4350+116,$$
$$\therefore\quad S=0.531.$$

6. 溫度99°.6C.之銅絲圈45.1克,投入盛有10°C.,52.5克之水之卡計中,其結果溫度爲16°.8C.求銅絲圈之比熱.

〔解〕 設銅絲圈之比熱爲 S,

則銅所失之熱量 $=45.1\times S\times(99.6-16.8)$,

水所得之熱量 $=52.5\times 1\times(16.8-10)$,

$$\therefore\quad 45.1\times S\times 82.8=52.5\times 6.8,$$
$$\therefore\quad S=0.0956.$$

7. 有銀塊10.205克,熱至101°.9C.,投入內盛水81.34克之卡計中;水溫度自11°.09昇高至11°.71C.卡計,攪桿(Stirrer),及寒暑表之水當量爲2.91克,求銀之比熱.

〔解〕 設銀之比熱爲 S,

則銀所失之熱 $=10.205\times S\times(101.9-11.71)$,

水及卡計等所得之熱 $=(81.34+2.91)\times(11.71-11.09)$,

$$\therefore 10.205\times S\times 90.19=84.25\times 0.62,$$
$$\therefore\quad S=0.05677.$$

8. 同一銀塊,熱至102°.2C.,浸於75.3克之松節油(Turpentine)中,松節油之溫度自10°.98昇至12°.47C.設此實驗所用之儀器與前題同,求松節油之比熱.

〔解〕 由前題得銀之比熱 $=0.05677$.

設松節油之比熱 $=S$,

則銀所失之熱量 $=10.205\times 0.05677\times(102.2-12.47)$,

松節油及卡計所得之熱

$$=75.3\times S\times(12.47-10.98)+2.91\times(12.47-10.98),$$

$$\therefore\quad 10.205\times 0.05677\times(102.2-12.47)$$

$$=75.3\times S\times(10.47-10.98)+2.91\times(12.47-10.98),$$

$$51.97=75.3\times S\times 1.49+4.336,$$

$$\therefore\quad S=0.425.$$

9. 某容器盛有最大密度之水(當溫度 4° 時) 800 竰,若熱水至沸點(即 100°C.),需熱若干?

〔解〕　800 竰於 4°C. 時重 800 克,

$\therefore$　所需之熱量 $=800\times 1\times(100-4)=76,800$ 卡.

10. 以溫度 T°C. 比熱 S 之物體 M 克,投於 t°C. 比熱 S 之某液體 m 克中.證明其結果溫度為

$$\theta=\frac{MST+mst}{MS+ms}.$$

倘該液體為水,則

$$S=\frac{m(\theta-t)}{M(T-\theta)}.$$

〔證〕　該物體所失(或得)之熱量 $=MS(T-\theta)$,

該液體所得(或失)之熱量 $=ms(\theta-t)$,

$$\therefore\quad MS(T-\theta)=ms(\theta-t),$$

$$MST-MS\theta=ms\theta-mst,$$

$$\theta(MS+ms)=MST+mst,$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{MST+mst}{MS+ms}.$$

倘該液體為水時,則 $s=1$,

$$\therefore\quad MS(T-\theta)=m(\theta-t),$$

$$\therefore \quad S=\frac{m(\theta-t)}{M(T-\theta)}.$$

11. 150克之銅(比熱$=0.095$),其溫度自$10°$昇至$105°C.$,問需熱若干?

〔解〕 $150\times0.095\times(105-10)=1.995$ 卡.

12. 1 瓩之水銀(比熱$=0.033$),其溫度自$20°$昇至$170°C.$ 問需熱若干?

〔解〕 $1,000\times0.033\times(170-20)=4,950$ 卡.

13. 溫度$10°C.$之鐵150克,吸入熱342卡,問其結果之溫度幾何?設鐵之比熱$=0.114$.

〔解〕 設鐵之結果溫度爲 t,

則 $150\times0.114\times(t-10)=342$.

$$\therefore \quad t=\frac{342+150\times0.114\times10}{150\times0.114}=30°C.$$

14. 鐵塊長2粎,闊1粎,厚20糎,欲使其溫度自$10°$增至$140°$.需熱若干?(鐵之比重$=7.7$,比熱$=0.112$).

〔解〕 鐵之重量$=200\times100\times20\times7.7=3,080,000$克,

$\therefore$ 所需之熱量$=3,080,000\times0.112\times(140-10)$

$=44,844,800$ 卡.

15. 設等體積之銅與鐵吸入等量之熱.試求其昇高溫度之比.銅之密度爲8.9,鐵爲7.8;銅之比熱爲 0.094,鐵爲0.12.

〔解〕 銅之熱容量:鐵之熱容量$=8.9\times0.094:7.8\times0.12$,

但所得之熱量一定時,則所增之溫度與熱容量成反比;故

銅昇高之溫度:鐵昇高之溫度$=7.8\times0.12:8.9\times0.094$

$=936:837$.

16. 一銅製之卡計,重 125 克,求其水當量.

〔解〕　銅卡計之水當量 = 質量 × 比熱

$= 125 \times 0.095 = 11.875$ 卡/度.

27. 重 m'、比熱 s' 之卡計,盛有溫度 $t°C.$, 比熱 s 之某液體,重 m.今以 $T°C.$ 之某物體重 M 投於卡計中,該液體之溫度上昇至 θ,試證該物體之比熱為

$$S=\frac{(ms+m's')(\theta-t)}{M(T-\theta)}.$$

〔證〕　物體所失之熱量 $= MS(T-\theta)$,

液體及卡計所得之熱量 $= ms(\theta-t)+m's'(\theta-t)$,

$\therefore\quad MS(T-\theta)=ms(\theta-t)+m's'(\theta-t)$

$=(ms+m's')(\theta-t)$,

$$\therefore\quad S=\frac{(ms+m's')(\theta-t)}{M(T-\theta)}.$$

18. 以溫度 90°C. 之某物質 100 克,投入 12°C. 之水250 克中,其混合後之溫度為 18°.求該物質之比熱.

〔解〕　設該物質之比熱為 S,

則物質所失之熱量 $= 100 \times S \times (90-18)$,

水所得之熱量 $= 250 \times 1 \times (18-12)$,

$\therefore\quad 100 \times S \times (90-18) = 250 \times 1 \times (18-12)$,

$\therefore\quad S = 0.208$.

19. 溫度 120° 之水銀 1 瓩,投入 0° 之水 200 克中,求混合後之溫度.水銀之比熱 $= 1/30$.

〔解〕　設混合後之溫度為 θ,

則水銀所失之熱量 $= 1000 \times \frac{1}{30} \times (120-\theta)$,

水所得之熱量 $= 200 \times 1 \times \theta$,

$$\therefore \quad 1000\times\frac{1}{30}\times(120-\theta)=200\times1\times\theta,$$

$$\therefore \quad \theta=17^\circ.14C.$$

20. 2磅沸水,倒入16°之水銀10磅內.問混合後之溫度如何?

〔解〕 設混合後之溫度爲 θ,

則沸水所失之熱量 $=2\times1\times(100-\theta)$,

水銀所得之熱量 $=10\times\frac{1}{31}\times(\theta-16)$,

$$\therefore \quad 2\times1\times(100-\theta)=10\times\frac{1}{31}\times(\theta-16),$$

$$\therefore \quad \theta=88^\circ C.$$

21. 試求等體積之水與水銀之熱容量之比(水銀之密度 $=13.6$).

〔解〕 水之熱量：水銀之熱量 $=1\times1$; $13.6\times\frac{1}{30}$

$=1:0.453$.

22. 問容有溫度0°C.,0.5 瓩之水銀之燒瓶,浸入沸水內,至水銀與水同溫度時,水銀所得之熱量若干?

〔解〕 $500\times13.6\times\frac{1}{30}\times100=2266\frac{2}{3}$卡.

23. 等質量之沸水與溫度 $-5^\circ C.$ 之水銀相混合.試證其結果之溫度爲96°.61C.

〔證〕 設沸水與水銀各重M,結果溫度爲 θ,

則沸水所失之熱量 $=M\times1\times(100-\theta)$,

水銀所得之熱量 $=M\times\frac{1}{30}\times(\theta+5)$,

$$\therefore \quad M(100-\theta)=M\times\frac{1}{30}\times(\theta+5),$$

$$31\theta=2995,$$

$$\therefore \quad \theta=96^{\circ}.61C.$$

24. 溫度 100°C. 之鉛 200 克,投入重 100 克之水中,水溫度自 9°.6 昇至14°.9C.求鉛之比熱.

〔解〕　設鉛之比熱爲 s,

則鉛所失之熱量 $=200\times s\times(100-14.9)$,

水所得之熱量 $=100\times1\times(14.9-9.6)$

$$\therefore \quad 200\times s\times(100-14.9)=100\times1\times(14.9-9.6),$$

$$\therefore \quad s=0.031.$$

25. 玻璃瓶盛有水銀 1 瓩,熱至100°C.時,倒入 10° 之水 500 瓸中,結果溫度爲15°.6C.求水銀之比熱.

〔解〕　設水銀之比熱爲 s,

則水銀所失之熱量 $=1000\times s\times(100-15.6)$,

水所得之熱量 $=500\times1\times(15.6-10)$,

$$\therefore \quad 1000\times s\times(100-15.6)=500\times1\times(15.6-10),$$

$$\therefore \quad s=0.0332.$$

26. 98°.5C. 之銅 105 克,與 10° 之水 90 克相混合,結果溫度爲 19°.2C. 求銅之比熱.

〔解〕　設銅之比熱爲 s,

則銅所放出之熱量 $=105\times s\times(98.5-19.2)$,

水所吸收之熱量 $=90\times1\times(19.2-10)$,

$$\therefore \quad 105\times s\times(98.5-1.92)=90\times1\times(19.2-10),$$

$$\therefore \quad s=0.0995.$$

27. 水 $61\frac{1}{2}$ 兩與酒精 100 兩相混合,最後溫度適在兩者溫度之中間.求酒精之比熱.

〔解〕 設 θ 爲水所降下之度數,則 θ 亦爲酒精所昇高之度數.故

水所失之熱量 $=61\frac{1}{2}\times 1\times\theta$,

酒精所得之熱量 $=100\times s\times\theta$,

$\therefore\quad 61\frac{1}{2}\times 1\times\theta=100\times s\times\theta$,

$\therefore\quad s=0.615.$

28. 60 克之鐵釘溫度 100°C., 投入溫度 13°.2C. 之水 120 克中,最後溫度爲 17°.8C. 求鐵釘之比熱.

〔解〕 設鐵釘之比熱爲 s,

則鐵釘所放出之熱量 $=60\times s\times(100-17.8)$,

水所吸收之熱量 $=120\times 1\times(17.8-13.2)$,

$\therefore\quad 60\times s\times(100-17.8)=120\times 1\times(17.8-13.2)$,

$\therefore\quad s=0.112.$

29. 有沸水與 10°C. 之水,今欲得 35°C. 之水 20 加侖.問各需若干?

〔解〕 設沸水需 V 加侖,則 10°C. 之水需 (20−V) 加侖.

沸水所失之熱量 $=V\times 1\times(100-35)$,

10° 之水所得之熱量 $=(20-V)\times 1\times(35-10)$,

$\therefore\quad V\times 1\times(100-35)=(20-V)\times 1\times(35-10)$,

$\therefore\quad V=5\frac{5}{9}$ 加侖.

$\therefore$ 10° 之水 $=20-5\frac{5}{9}=14\frac{4}{9}$ 加侖.

30. 銅壺重 2 磅,內盛冷水 6 磅,入火燒煮,設銅之比熱 $=0.09$. 求壺與水所吸收熱量之比.

〔解〕 設水的溫度增高 t 度,則壺亦增高 t 度.

銅壺所得之熱量 $=2\times0.09\times t=0.18t$,

水所得之熱量 $=6\times1\times t=6t$,

$\therefore$ 銅壺所吸收之熱量 : 水所吸收之熱量 $=0.18t:6t$

$$=0.03:1.$$

31. 沸水 1 磅,若冷至 10°C.,則所放出之熱,可使 40 磅之空氣,自 0° 昇至幾度(空氣之比熱 $=0.237$)?

〔解〕 設空氣可自 0° 昇至 θ 度,

則水所放出之熱量 $=1\times1\times(100-10)$,

空氣所吸收之熱量 $=40\times0.237\times\theta$,

$$\therefore\quad 1\times1\times(100-10)=40\times0.237\times\theta,$$

$$\therefore\quad \theta=9°.49C.$$

32. 用下列實驗結果,求銀之比熱.

銀之重量……10.2克.

水之重量……84.0克.

銀之溫度……102° C.

水之溫度……11°.08.

結果溫度……11°.69.

〔解〕 設銀之比熱為 s,

則銀所失之熱量 $=10.2\times s\times(102-11.69)$,

水所得之熱量 $=84.0\times1\times(11.69-11.08)$,

$$\therefore\quad 10.2\times s\times(102-11.69)=84.0\times1\times(11.69-11.08)$$

$\therefore \quad s=0.0556.$

33. 7磅鐵球,自油池取出,立時投入10磅之水中,水溫度自8°昇至20°C.設鐵之比熱爲 0.112, 求油池之溫度(以此法可量高溫度火鑪等之溫度).

〔解〕 設油池之溫度爲 θ,

則鐵球所失之熱量 $=7\times0.112\times(\theta-20)$,

水所得之熱量 $=10\times1\times(20-8)$,

$$\therefore \quad 7\times0.112\times(\theta-20)=10\times1\times(20-8),$$

$$\therefore \quad \theta=173°.1\text{C}.$$

34. 等體積之松節油與酒精,溫度各爲70°及10°C.,求其混合後之溫度.

(松節油之比重 =0.87,酒精之比重 =0.80.

松節油之比熱 =0.47,酒精之比熱 =0.62.)

〔解〕 設所取之體積爲 V, 混合後之溫度爲 θ,

則松節油所失之熱量 $=V\times0.87\times0.47\times(70-\theta)$,

酒精所得之熱量 $=V\times0.80\times0.62\times(\theta-10)$,

$$\therefore \quad V\times0.87\times0.47\times(70-\theta)=V\times0.80\times0.62\times(\theta-10),$$

$$\therefore \quad \theta=37°.11\text{C}.$$

35. 有密度 2 及 3 之兩物質,其比熱各爲0.12及0.09.求其每單位體積所需熱量之比.

〔解〕 密度 2 之物質所需之熱量 $=1\times2\times0.12=0.24.$

密度 3 之物質所需之熱量 $=1\times3\times0.09=0.27.$

故其所需熱量之比 $=0.24:0.27$

$$=8:9.$$

36. 設沸水之密度爲 0.96.,溫度0°C.之水銀密度爲13.6.問等體積之沸水與0°之水銀混合後,其溫度若干?

〔解〕　設所取沸水或水銀之體積爲V,混合後之溫度爲 θ,

則沸水所失之熱量 $=V\times0.96\times1\times(100-\theta)$,

水銀所得之熱量 $=V\times13.6\times\frac{1}{30}\times\theta$,

$$\therefore\quad 0.96\times1\times(100-\theta)=13.6\times\frac{1}{30}\times\theta,$$

$$2880-28.8\theta=13.6\theta,$$

$$\therefore\quad \theta=67^\circ.9\text{C}.$$

37.　空氣於等壓時之比熱爲0.237;1竔之空氣重爲1.293克.今有空氣50竔,其溫度自25°降至5°C.間放出熱若干?

〔解〕　$50\times1.293\times0.237\times(25-5)=306.4$卡.

38.　如前題之實驗結果,問1竔之水降下1度所放出之熱,可使若干體積之空氣之溫度升高1度?

〔解〕　設所求之空氣體積爲V,

則水所放出之熱量 $=1000\times1\times1=1000$ 卡,

空氣所吸收之熱量 $=V\times1.293\times0.237\times1$,

$$\therefore\quad V\times1.293\times0.237\times1=1000,$$

$$\therefore\quad V=3263\text{ 竔}.$$

39.　以溫度650°C.之熱空氣,使100°C.之水蒸氣過熱(Superheating).空氣與水蒸氣於等壓時之比熱各爲0.237及0.48.當空氣2磅導入水蒸氣7磅之過熱器(Superheater)時,設空氣溫度降至400°C.,求水蒸氣升高後之溫度.

〔解〕　設水蒸氣升高後之溫度爲 θ,

則空氣所放出之熱量 $=2\times0.237\times(650-400)$,

水蒸氣所吸收之熱量 $=7\times0.48\times(\theta-100)$,

$\therefore\quad 2\times0.237\times(650-400)=7\times0.48\times(\theta-100)$,

$118.5=3.36\theta-336$,

$\therefore\quad \theta=135^\circ.3C.$

40. 重80克之白金球,自鑪取出投入盛有溫度15°C.,重400克之水之銅容器中,水溫度昇至20°C.求鑪之溫度(白金之比熱=0.03).

〔解〕 設鑪之溫度為t,

則白金球所失之熱量 $=80\times0.03\times(t-20)$,

水所得之熱量 $=400\times1\times(20-15)$,

$\therefore\quad 80\times0.03\times(t-20)=400\times1\times(20-15)$,

$2.4t-48=2000$,

$\therefore\quad t=853^\circ.3C.$

41. 等質量之不同三液體a、b、c,其溫度各為15°、25°及35°C.設a與b相混合,結果溫度為21°C.,b與c相混合,結果溫度為32°C.求a與c相混合後之結果溫度.

〔解〕 設a、b、c之比熱各為s_1、s_2、s_3,其質量各為m,a與c混合後之溫度為t,

則 $$ms_1(21-15)=ms_2(25-21),$$

或 $$s_1=\frac{2}{3}s_2\cdots\cdots(1)$$

$$ms_2(32-25)=ms_3(35-32),$$

或 $$s_3=\frac{7}{3}s_2\cdots\cdots(2)$$

$$ms_1(t-15)=ms_3(35-t)\cdots\cdots(3)$$

以(1)及(2)代入(3):　$\frac{2}{3}s_2(t-15)=\frac{7}{3}s_2(35-t)$,

$$2t-30=245-7t,$$

$$\therefore\ t=30^\circ.55C.$$

42. 重10克,溫度 90°C., 比熱0.45之液體A與溫度16°C.,比熱 0.25 之液體B相混合,其結果溫度爲43°.75.求液體B之重量.

〔解〕　設液體B之重量爲m,

則液體A所失之熱量 $=10\times0.45\times(90-43.75)$,

液體B所得之熱量 $=m\times0.25\times(43.75-16)$

$$\therefore\ 10\times0.45\times(90-43.75)=m\times0.25\times(43.75-16),$$

$$\therefore\ m=30\text{克}.$$

43. 溫度29°C.,比熱0.54之液體A與溫度11°C.,比熱0.36 之液體B相混合,結果溫度爲17°C.求液體A、B質量之比.

〔解〕　設 m_A、m_B 各爲液體A、B之質量,

則液體A所失之熱量 $=m_A\times0.54\times(29-17)$,

液體B所得之熱量 $=m_B\times0.36\times(17-11)$.

$$\therefore\ m_A\times0.54\times(29-17)=m_B\times0.36\times(17-11),$$

$$\therefore\ \frac{m_A}{m_B}=\frac{0.36\times6}{0.54\times12}=\frac{1}{3},$$

或　$m_A:m_B=1:3$.

44. 等質量之三液體,其比熱各爲 s_1、s_2、s_3, 溫度各爲 t°_1、t°_2、t°_3.設相混合,求其結果溫度.

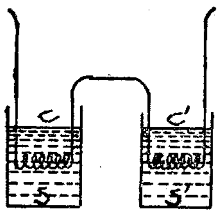
〔解〕　設所取三液體之質量各爲m,結果溫度爲 θ,

則三液體之總熱量 $=m(s_1t_1+s_2t_2+s_3t_3)$,

混合後三液體之總熱量 $=m(s_1+s_2+s_3)\theta$,

$\therefore \quad m(s_1t_1+s_2t_2+s_3t_3)=m(s_1+s_2+s_3)\theta$,

$$\therefore \theta=\frac{s_1t_1+s_2t_2+s_3t_3}{s_1+s_2+s_3}.$$

45. 

兩銅卡計 C 及 C',各重 40 克,銅比熱 =0.09,內各有相同之鉑絲圈(電阻相等).當電流通過卡計,各生相等之熱.C 盛水 101.4 克,C' 盛松節油 86.4 克.今電流通過15分鐘後,水溫度昇高 4°.35,松節油溫度昇高 11°.7.求松節油之比熱.

〔解〕 設松節油之比熱為 s,

則水及卡計所得之熱量

$=101.4\times1+4.35+40.\times009\times4.35$

$=461.09+15.66=456.75$,

松節油及卡計所得之熱量

$=86.4\times s\times11.7+40\times0.09\times11.7$

$=988.88s+42.12$,

$\therefore \quad 456.75=988.88s+42.12$,

$\therefore \quad s=0.424.$

46. 14.7 克之酒精,熱至沸點(78°.5C.),加於內盛 10°.6, 74克松節油之卡計中,結果之溫度為25°.2.松節油之比熱 =0.466.求酒精之比熱.

〔解〕 設酒精之比熱為 s,

則酒精所放出之熱量 $=147\times s\times(78.5-25.2)$,

松節油所吸收之熱量 $=74\times0.466\times(25.2-10.6)$,

$\therefore\quad 14.7\times s\times(78.5-25.2)=74\times0.466\times(25.2-10.6),$

$\therefore\quad 783.51s=503.4664.$

$\therefore\quad s=0.6426.$

47. 55°C.,200瓱之水,加入重30克,比熱0.095之銅卡計中,設卡計之溫度與空氣等——10°C.,水因冷却而放出之熱完全爲卡計所吸收,求水冷却後之溫度.

〔解〕　設水冷却後之溫度爲 θ,

則水所放出之熱量 $=200\times1\times(55-\theta)$,

卡計所吸收之熱量 $=30\times0.095\times(\theta-10)$,

$\therefore\quad 200\times1\times(55-\theta)=30\times0.095\times(\theta-10),$

$1100-200\theta=2.85\theta-28.5,$

$\theta=54^\circ.37C.$

48. 100°C.之石塊,投入10磅之水中,水溫度自0°昇至5°C.今投入30°C.,15磅之水中,求水昇高之度數.

〔解〕　設水昇高之度數爲 θ,

則石之水當量 $=\dfrac{10\times5}{100-5}=\dfrac{10}{19}$,

石所失之熱量 $=\dfrac{10}{19}\times(100-30-\theta)$,

水所得之熱量 $=15\theta$.

$\therefore\quad \dfrac{10}{19}\times(100-30-\theta)=15\theta,$

$700-10\theta=285\theta,$

$\therefore\quad \theta=2^\circ.4C.$

49. 今以10克之金屬,測定其比熱,初次實驗,發見昇高之溫度,僅3°.7.若將卡計中之水去其三分之一,間使

水溫度增高 12°,需金屬若干?但其他情形不變.

〔解〕 設卡計中之水重為 m,所需金屬之重為 x.

$$\therefore \quad 10 : x = m \times 1 \times 3.7 : \frac{2}{3} m \times 1 \times 12,$$

$$\therefore \quad x = \frac{10 \times 8}{37} = 21.6 \text{ 克}.$$

50. 45°C.之水 40 克,注入 300 克之鉛杯中.鉛杯之溫度與空氣同,等於 16°. 設水冷至 39°.46, 求鉛之比熱.

〔解〕 設鉛之比熱為 s,

則水所放出之熱量 $=40 \times 1 \times (45-39.46)$,

鉛杯所吸收之熱量 $=300 \times s \times (39.46-16)$,

$$\therefore \quad 40 \times 1 \times (45-39.46) = 300 \times s \times (39.46-16),$$

$$\therefore \quad s = 0.0315.$$

51. 有卡計內盛 12° 之水 100 克,當加入30°之水 56 克時,混合後得溫度 18°C.求卡計之水當量.

〔解〕 設卡計之水當量為 ω,

則加入之水所失之熱量 $=56 \times 1 \times (30-18)$,

卡計及其中之水吸收之熱量

$$= \omega \times (18-12) + 100 \times (18-12) \times 1,$$

$$\therefore \quad 56 \times 1 \times (30-18) = \omega \times (18-12) + 100 \times (18-12) \times 1,$$

$$\therefore \quad \omega = 12 \text{ 卡/度}.$$

52. 84°C., 8.5 克之水,注入16°之卡計中,其結果溫度為 18°.5.求卡計之水當量.

〔解〕 設卡計之水當量為 ω,

則水所失之熱量 $=8.5 \times 1 \times (84-18.5)$,

卡計所得之熱量 $=\omega \times (18.5-16)$,

$\therefore \quad 8.5\times1\times(84-18.5)=\omega\times(18.5-16),$

$\omega=222.7$卡/度.

53. 測鉛丸之比熱兩實驗中,卡計之水當量爲1.3,寒暑表之水當量爲0.5,求其平均值.實驗結果如下:

實驗	1.	2.
水重	48.1 克.	52.4 克.
鉛丸重	60.9 克.	90.0 克.
鉛丸溫度	100°.C.	100°.C.
水之原來溫度	13°.0.	14°.15.
水之結果溫度	16°.2.	18°.5.

〔解〕　設鉛丸之比熱爲 s.

實驗 1.

鉛丸所失之熱量 $=60.9\times s\times(100-16.2)$,

水、卡計、寒暑表所得之熱量 $=(48.1+1.3+0.5)(16.2-13)$,

$\therefore \quad 60.9\times s\times(100-16.2)=(48.1+1.3+0.5)(16.2-13),$

$5103.42s=159.68,$

$\therefore \quad s=0.03128.$

實驗 2.

鉛丸所失之熱量 $=90\times s\times(100-18.5)$,

水、卡計、寒暑表所得之熱量

$=(52.4+1.3+0.5)(18.5-14.15).$

$\therefore \quad 90\times s\times(100-18.5)=(52.4+1.3+0.5)(18.5-14.15),$

$7335s=235.77,$

$\therefore \quad s=0.03214.$

$\therefore$　鉛丸比熱之平均值 $=(0.03128+0.03214)/2$

$\doteq 0.03171.$

54. 設 酒精之比熱 $=0.56$,

水銀之比熱 $=0.33$,

酒精之比重 $=0.82$,

水銀之比重 $=13.6$,

今於等體積之酒精與水銀,各加等量之熱,求其溫度昇高之度數之比.

〔解〕 由題15,得

酒精之熱容量:水銀之熱容量

$=0.82\times0.56:13.6\times0.33.$

∴ 酒精昇高之溫度:水銀昇高之溫度

$=13.6\times0.33:0.82\times0.56,$

$=5610:574.$

55. 設一單位之物質,自0°昇至t°C.,其所需之熱量,可以

$$Q_t=at+bt^2+ct^3$$

表示之,試證於溫度 t° 與 t°′間,該物質之比熱為

$$S^{t'}_t=a+b(t+t')+c(t^2+tt'+t'^2),$$

及其t°C.之眞確比熱為

$$S_t=a+2bt+3ct^2.$$

〔證〕 該物質自0°昇至t°C.所需之熱量為

$$Q_t=at+bt^2+ct^3.$$

則自0°昇至t°′C.所需之熱量,

$$Q_t'=at'+bt'^2+ct'^3,$$

∴ 自t°昇至t°′C.所需之熱量,

$$Q_t'-Q_t=a(t'-t)+b(t'^2-t^2)+c(t'^3-t^3),$$

∴ 於t°與t°′間該物質之比熱為

$$S^{t'}_{t}=\frac{Q_t-Q_t'}{t-t'}=\frac{a(t'-t)+b(t'+t)(t'-t)+c(t-t')(t'^2+tt'+t^2)}{t'-t}$$

$$=a+b(t+t')+c(t^2+tt'+t'^2).$$

設 t° 與 $t^{\circ\prime}$ 之差極小,幾等於零時,卽 $t'=t$.

∴　該物質於 t° 時之比熱爲

$$S_t=a+2bt+3ct^2.$$

16.　雷尼耀(Regnault)發見一單位重之水,自 0° 昇至 100°C. 時需熱 100.5 單位,自 0° 昇至 200°C, 需熱 203.2 單位;設0°C.時水之比熱爲 1. 試證在 t°C.時水之比熱,可以下式表示之:

$$S_t=1+0.00004t+0.0000009t^2.$$

並證在 150°C. 時,水之比熱爲 1.02625.

〔證〕　從前題.

$$S^{t'}_{t}=a+b(t+t')+c(t^2+tt'+t'^2),$$

知 0°C. 時,卽 $t=0, t'=0$ 時,　$a=1$,

100°C. 時,卽 $t'=100$ 時,

$$\frac{100.5}{100}=1+100b+10000c,$$

或　$1.005=1+100b+10000c$ ……………………………(1)

200°C. 時,卽 $t'=200$ 時,

$$\frac{203.2}{200}=1+200b+40000c,$$

或　$1.016=1+200b+40000c$ ……………………………(2)

(1)×2−(2):　$0.006=20000c.$

$$\therefore\quad c=0.0000003.$$

代入(1):　$1.005=1+100b+0.003.$

$\therefore \quad b = 0.00002.$

代入 $S_t = a + 2bt + 3ct^2,$

得 $S_t = 1 + 0.00004t + 0.0000009t^2.$

再設 $t = 150°,$

則 $S_{150} = 1 + 0.00004 \times 150 + 0.0000009 \times 150^2$

$= 1 + 0.006 + 0.02025$

$= 1.02625.$

2. 潛熱

57. 等重量之沸水與冰混合,冰完全熔解後,其溫度爲10°C.求冰之熔解熱.

〔解〕 設所取沸水或冰之質量爲m,冰之熔解熱爲L,

則沸水所失之熱量 $= m \times 1 \times (100 - 10),$

冰所得之熱量 $= m \times L + m \times 1 \times 10,$

$\therefore \quad m \times 1 \times (100 - 10) = mL + m \times 1 \times 10,$

$\therefore \quad L = 80$ 卡.

58. 500 克之沸水,可熔 0°C. 之冰若干?

〔解〕 設熔去冰之質量爲m,今結果溫度爲 0°C.,

則沸水所失之熱量 $= 500 \times 1 \times 100,$

冰所得之熱量 $= m \times 80,$

$\therefore \quad 500 \times 1 \times 100 = m \times 80,$

$\therefore \quad m = 625$ 克.

59. 90°C.水銀 50000 克,與0°C.之水混合,間可熔冰若干?

〔解〕　水銀之比熱 $=0.0333$.

設所求冰之質量 $=m$,

則水銀所失之熱量 $=50000\times0.0333\times90$,

冰所得之熱量 $=80m$,

$\therefore\quad 80m=50000\times0.0333\times90$,

$\therefore\quad m=1873$ 克.

60. 欲使10磅之冰完全熔解,需75°C.之水若干?

〔解〕　設所需之水之質量 $=m$,

則水所失之熱量 $=m\times1\times75$,

冰所得之熱量 $=10\times80$,

$\therefore\quad m\times1\times75=10\times80$,

$\therefore\quad m=10\frac{2}{3}$ 磅.

61. 等重量之熱水與冰混合,結果溫度爲 0°C. 求熱水之原來溫度.

〔解〕　設熱水之原來溫度爲 t°C., 所取之質量爲 m,

則熱水所失之熱量 $=m\times1\times t$,

冰所得之熱量 $=m\times80$,

$\therefore\quad m\times1\times t=m\times80$,

$\therefore\quad t=80$°C.

62. 冰塊投入盛有30°C.,4磅之水之容器中,當冰完全熔解時,水溫度降至 8°C. 求冰塊之重量.

〔解〕　設冰塊之重量爲 m,

則水所失之熱量 $=4\times1\times(30-8)$

冰所得之熱量 $=m\times80+m\times1\times8$,

$\therefore\quad m\times80+m\times1\times8=4\times1\times(30-8)$,

$$88m=88,$$

$$\therefore\quad m=1\text{磅}.$$

63. 欲使 1 妌水之溫度,自 20°C. 降至 5°C., 問需冰若干?

〔解〕 設所需冰之質量 = m,

則水所失之熱量 $=1000\times1\times(20-5)$,

冰所得之熱量 $=m\times80+m\times1\times5$,

$$\therefore\quad m\times80+m\times1\times5=1000\times1\times(20-5),$$

$$85m=15000,$$

$$\therefore\quad m=176.5\text{克}.$$

64. 300克之冰與 700 克之沸水相混合,結果溫度為 46°C.,求冰之熔解熱.

〔解〕 設冰之熔解熱為 L,

則沸水所失之熱量 $=700\times1\times(100-46)$,

冰所得之熱量 $=300\times L+300\times1\times46$.

$$\therefore\quad 300L+300\times1\times46=700\times1\times(100-46),$$

$$300L+13800=37800,$$

$$\therefore\quad L=80\text{卡}.$$

65. 400°C.之鐵 750 克,置於冰卡計(Ice calorimeter)中,發生水 420 克,求鐵之比熱.

〔解〕 發生水 420 克,即熔去冰 420 克,結果溫度為 0°C.

今設鐵之比熱為 s,

則鐵所失之熱量 $=750\times s\times400$,

冰所得之熱量 $=420\times80$,

$$\therefore\quad 750\times s\times400=420\times80,$$

$\therefore\quad s=0.112.$

66. 銅100克,熱至100°C.,投入冰卡計中,熔去冰11.25克,求銅之比熱.

〔解〕　設銅之比熱爲 s,

則銅所失之熱量 $=100\times s\times 100$,

冰所得之熱量 $=11.25\times 80$,

$\therefore\quad 100\times s\times 100=11.25\times 80,$

$\therefore\quad s=0.09.$

67. 於測定冰之熔解熱之實驗中,以冰120克,投入盛有50°C.之水300克之杯中,冰完全熔解後,水溫度爲13°C.求冰之熔解熱.

〔解〕　設冰之熔解熱爲L,

則水所失之熱量 $=300\times 1\times(50-13)$,

冰所得之熱量 $=120L+120\times 1\times 13$,

$\therefore\quad 120L+120\times 1\times 13=300\times 1\times(50-13),$

$120L+1560=11100,$

$\therefore\quad L=79.5$ 卡.

68. 銅球重30克熱至100°C.,置於冰卡計中,熔去冰3.54克.求銅之比熱.

〔解〕　設銅之比熱爲 s,

則銅所失之熱量 $=30\times s\times 100$,

冰所得之熱量 $=3.54\times 80$,

$\therefore\quad 30\times s\times 100=3.54\times 80,$

$\therefore\quad s=0.0944.$

69. 100°C.之鐵片,置於冰卡計中,得水155克,設鐵片重1.08瓩,求其比熱.

〔解〕　設鐵片之比熱為 s,

則鐵片所失之熱量 $=1080\times s\times 100$,

冰所得之熱量 $=155\times 80$,

$\therefore\quad 1080\times s\times 100=155\times 80$,

$\therefore\quad s=0.1148$.

70. 水銀 100 竰,熱至110°C.,注入冰塊中,共熔成水 63 竰;水銀之密度 =13.6.求水銀之比熱.

〔解〕　設水銀之比熱為 s,

則水銀所失之熱量 $=100\times 13.6\times s\times 110$,

冰所得之熱量 $=63\times 1\times 80$,

$\therefore\quad 100\times 13.6\times s\times 110=63\times 1\times 80$,

$\therefore\quad s=0.0337$.

71. 有盛沸水之圓柱形容器,置於厚10糎之冰上.設沸水傾於冰上,則可完全熔解之,求器內沸水之高(冰之比重為 0.917, 沸水為 0.96).

〔解〕　設 A= 圓柱形容器之橫切面積(糎²),

h= 器內沸水之高(糎),

則沸水之體積 =Ah 竰,

沸水之重量 $=Ah\times 0.96$ 克,

冰之重量 $=10A\times 0.917$ 克,

沸水所失之熱量 $=Ah\times 0.96\times 1\times 100$ 卡,

冰所得之熱量 $=10A\times 0.917\times 80$ 卡,

$\therefore\quad Ah\times 0.96\times 100=10A\times 0.917\times 80$,

$\therefore\quad h=7.64$ 糎.

72. 冰之比熱為 0.5, 比重為 0.92; 1 立方呎之水重 62.5磅.欲使長 1 呎､厚 6 吋､闊 9 吋之冰塊,自溫度 −10°C.

化成 100° 之水蒸氣,問需熱若干(以單位磅一度表之)?但水蒸氣之蒸發熱為 536 卡.

〔解〕　冰重 $=1\times\frac{6}{12}\times\frac{9}{12}\times0.92\times62.5$ 磅,

$\therefore$　所需之熱量

$=1\times\frac{6}{12}\times\frac{9}{12}\times0.92\times62.5\times(10\times0.5+80+100+536)$

$=21.5625\times721=15546.6$ 磅一度.

73.　0°C. 1 英擔之冰,置於 29°C. 之暖室中,當冰完全熔解時,恰成 21°C. 之水.求冰之冷却效果(以磅一度表之).

〔解〕　冰所吸收之熱量 $=112\times80+112\times1\times21$

$=11,312$ 磅一度.

74.　0°C. 之雪 1 磅,與 30°C. 之水 4 磅相混合.求其結果溫度.

〔解〕　設混合後之結果溫度為 θ,

則水所失之熱量 $=4\times(30-\theta)$,

雪所得之熱量 $=1\times80+1\times\theta$,

$\therefore\quad 4\times(30-\theta)=1\times80+1\times\theta$,

$120-4\theta=80+\theta$,

$\therefore\quad \theta=8°C.$

75.　0°C. 之冰 2 磅,與 45°C. 之水 3 磅相混合,其結果如何?

〔解〕　水溫度降至 0°C. 所放出之熱量 $=3\times45$

$=135$ 磅一度.

冰完全熔解時所需之熱量 $=2\times80$

$=160$ 磅一度,

$135<160$.

∴ 結果溫度爲0°C.

設x=冰熔解之重量,

則 $80x=3\times45$,

∴ $x=1.69$ 磅.

故其結果得 0°C. 之水 4.69 磅及冰 0.31 磅.

76. 設雪 5 磅與60°C.之水 2 磅相混合,問可熔雪若干?

〔解〕 設 x=雪熔解之重量,

則 $80x=2\times60$,

∴ $x=1.5$ 磅.

77. 設冰之比熱 =0.5, 水之熔解熱=80,求 −10°C. 之冰 1 磅,與50°C. 之水 1 磅,混合後之結果.

〔解〕 水溫度降至 0°C. 所放出之熱量 =50磅一度,

冰完全熔解時所需之熱量 $=1\times0.5\times10+1\times80$

$=85$ 磅一度,

$50<85$, 故僅可熔冰之一部.

設 x=冰熔去之重量,

則 $(0.5\times10+80)x=50$,

∴ $x=0.5625$ 磅.

故結果得0°C.之水1.5625磅及冰0.4375磅.

78. 置雪於其重量 5 倍之25°C.水中,求水降低後之溫度.

〔解〕 設雪之質量爲 m,水降低後之溫度爲 t,

則水所失之熱量 $=5m(25-t)$,

雪所得之熱量 $=m\times 80+mt$,

$\therefore\quad 5m(25-t)=m\times 80+mt$,

$\therefore\quad t=7^{\circ}.5C$.

79. 沸水 2 磅注於 0°C., 2 磅之雪上,其結果如何?

〔解〕 設結果溫度爲 θ,

則沸水所失之熱量 $=2\times 1\times(100-\theta)$,

雪所得之熱量 $=2\times 80+2\theta$,

$\therefore\quad 2\times 1\times(100-\theta)=2\times 80+2\theta$,

$200-2\theta=160+2\theta$,

$\therefore\quad \theta=10^{\circ}C.$

故雪完全熔解,溫度昇至 10°C.

80. 黃磷之熔解點爲 44°.2C., 但其凝固稍可低於該點.黃磷之熔解熱爲5.4,在液體狀態時爲0.2,今黃磷之凝固在 30°.7C. 時,試證其重之二分之一仍在液體狀態.

〔證〕 設熔解黃磷之重量=1單位,

黃磷凝固之重量=x,

則當黃磷凝固時,其溫度上昇,結果固體黃磷 x 與熔解之黃磷(1-x)之溫度,均爲 44°.2C.

又凝固時所放出之熱量 $=5.4x$,

全體溫度增至 44°.2C. 所需之熱量 $=(44.2-30.7)\times 0.2$

$\therefore\quad 5.4x=(44.2-30.7)\times 0.2$,

$\therefore\quad x=0.5$ 單位重.

81. 黃磷10克,熔解而冷至 26°C., 於是開始凝固.問仍爲液體狀態之黃磷,其重若干?

〔解〕 設x=黃磷凝固之重量,

則凝固時所放出之熱量 $=5.4x$,

温度增至44°.2C.所需之重量 $=10\times0.2\times(44.2-26)$,

$$\therefore\quad 5.4x=10\times0.2\times(44.2-26).$$

$$\therefore\quad x=6.74\text{克}.$$

∴ 仍在液體狀態之黃磷重 $=10-6.74=3.26$ 克.

82. 温度 $-15°$ 之水,開始凝固.設水在冰點以下之比熱為1,問凝固之冰幾何?

〔解〕 設 $m=$ 水之質量, $x=$ 水凝固為冰之重量,

則水凝固時所放出之熱量 $=80x$,

水温度昇至0° 所需之熱量 $=m\times1\times15$,

$$\therefore\quad 80x=m\times1\times15,$$

$$\therefore\quad x=\frac{3}{16}m.$$

故水重之$\frac{3}{16}$,凝固成冰.

83. $-10°$C.之冰塊80克,投入0°C.之水中,結果5克之水凝固成冰,而冰之温度昇至0°C.求冰之比熱.

〔解〕 設冰之比熱為 s,

則水凝固時所放出之熱量 $=5\times80$,

冰温度昇至0°C.所吸收之熱量 $=80\times s\times10$,

$$\therefore\quad 5\times80=80\times s\times10,$$

$$\therefore\quad s=0.5.$$

84. 地上覆有密度0.2、厚10糎之雪.今欲使其完全熔解,問每平方粎需熱若干?

〔解〕 每平方粎雪之重量 $=100\times100\times10\times0.2$,

∴ 所需之熱量 $=100\times100\times10\times0.2\times80$

$$=1.6\times10^6\text{卡}.$$

85. 承上題,設雨水温度爲 10°C., 問使雪完全熔解, 雨水需深若干?

〔解〕 由上題得每平方粍之雪需熱1.6×10^6卡,始可完全熔解.

設 $x=$雨水之深,

則 $100\times100\times x\times1\times10=1.6\times10^6$,

$$\therefore\quad x=16\text{ 粍}.$$

86. 鉛之熔解點爲 326°C., 固體時之比熱爲 0.0316, 液體時之比熱爲 0.040,熔解熱爲 5 卡/克,今以 356° 之熔解鉛 100 克,投入 0°C. 之水槽中,水温度昇高0.1°C.求水槽所容之水重.但水槽吸熱不計.

〔解〕 設 $x=$水槽所容之水重,

則鉛所失之熱量

$$=100\times[(356-326)\times0.040+5+(326-0.1)\times0.0316],$$

水所得之熱量 $=0.1x$.

$$\therefore\ 0.1x=100\times[(356-326)\times0.040+5+(326-0.1)\times0.0316]$$
$$=1649.84,$$

$\therefore\ x=16498.4$ 克 $=16.5$ 瓩.

87. 100°C.之金屬 0.484 克,置於本生卡計(Bunsen calorimeter) 中,其細管內之水銀移動 1.21 糎,細管直徑0.6 粍.設移動 1 糎之水銀,需熱 881 單位,試證該金屬之比熱爲 0.06227.

〔解〕 設金屬之比熱爲 s,

而水銀縮小之體積 $=\pi\left(\dfrac{0.06}{2}\right)^2\times1.21$ 糎,

則金屬所放出之熱量 $=\pi\left(\dfrac{0.06}{2}\right)^2\times1,21\times881$ 單位,

$$\therefore \quad 0.484\times s\times 100=\pi\left(\frac{0.06}{2}\right)^2\times 1.21\times 881,$$

$$\therefore \quad s=0.06227.$$

88. 設熱 150 卡,加於冰及水之混合物中,問其體積縮小若干?

〔解〕 1 克之冰,熔解成水,其體積縮小 0.0908 竰,故

$$\frac{150}{80}\times 0.0908=0.17 \text{ 竰}.$$

89. 試驗管盛有體積30竰之冰水混合物,當試驗管置於溫水中時,其體積減至 29 竰,求其所吸收之熱量.

〔解〕 所求之熱量$=\dfrac{(30-29)}{0.0908}\times 80=888.8$ 卡.

90. 100°C. 之水銀 15 克,注入本生卡計中,細管內水銀移動 0.0567 竰,求水銀之比熱.

〔解〕 設水銀之比熱爲 s,

則水銀所放出之熱量$=\dfrac{0.0567}{0.0908}\times 80,$

$$\therefore \quad 15\times s\times 100=\frac{0.0567}{0.0908}\times 80,$$

$$\therefore \quad s=0.0336.$$

91. 1 磅熱水注入淺而光之容器中,該器置於三軟木塞上,因蒸發耗去水 0.25 唡,而水溫度自 90° 降至80°,傳導、對流、輻射所失之熱不計,求水之蒸發熱.

〔解〕 設水之蒸發熱爲L,

則蒸發所需之熱量$=0.25\times\dfrac{1}{16}L,$

水溫度降至80°C.所失之熱量$=1\times(90-80),$

$\therefore\quad 0.25\times\frac{1}{16}L=1\times(90-80),$

$\therefore\quad L=640$ 卡/克.

92. 由實驗結果,得下表:

銅卡計重……………………326.3 克.

銅卡計重＋水……………………757.7 克.

凝固之水蒸氣重……………………46.35 克.

水蒸氣溫度……………………100°C.

實驗前水之溫度……………………7°.5C.

實驗後水之溫度……………………65°.2C.

求水蒸氣之潛熱.

〔解〕 銅之比熱$=0.09$.

設水蒸氣之潛熱爲L,

則卡計之水當量$=326.3\times0.09=29.4$,

水蒸氣所失之熱量$=46.35L+46.35\times(100-65.2)$

$=46.35L+1612.9,$

水及卡計所得之熱量$=(757.7-326.3+29.4)(65.2-7.5)$

$=460.8\times57.7=26{,}588.2,$

$\therefore\quad 46.35L+1{,}612.9=26{,}588.2,$

$\therefore\quad L=538.8$ 卡.

93. 欲使12°C.之水50克,化成100°C.之水蒸氣,需熱若干? 水之蒸發熱爲536.

〔解〕 所需之熱量$=50\times1\times(100-12)+50\times536$

$=31{,}200$ 卡.

94. 欲使0°C.之冰30克,完全化成水蒸氣,需熱若干?

〔解〕 所需之熱量$=30\times80+30\times1\times100+30\times536$

$=2,400+3,000+16,080$

$=21,480$ 卡.

95. 100°C. 之水蒸氣 1 瓩,可熔 0°C. 之冰若干?但結果溫度爲 0°C.

〔解〕 設可熔冰之重 $=m$,

則水蒸氣所失之熱量 $=1,000\times 536+1,000\times 100$,

冰所得之熱量 $=80m$,

$\therefore\ 80m=1,000\times 536+1,000\times 100$,

$\therefore\ m=7,950$ 克.

96. 0°C. 之冰 50 磅,欲使其完全熔解,間需 100°C. 之水蒸氣若干?

〔解〕 設所需之水蒸氣重 $=m$ 磅,

則水蒸氣所失之熱量 $=m(536+100\times 1)$,

冰所得之熱量 $=50\times 80$,

$\therefore\ m(536+100\times 1)=50\times 80$,

$m=6.29$ 磅.

97. 100°C.,m克之水蒸氣,通過 t°C.,M 克之水,水溫度昇至 t′°C. 試證水蒸氣之潛熱(x)爲

$$x=\frac{M}{m}(t'-t)-100+t'.$$

〔證〕 水蒸氣所失之熱量 $=mx+m\times 1\times(100-t')$

水所得之熱量 $=M\times 1\times(t'-t)$,

$\therefore\ mx+m\times 1\times(100-t')=M\times 1\times(t'-t)$,

$m(x+100-t')=M(t'-t)$,

$$\therefore\ x=\frac{M}{m}(t'-t)-100+t'.$$

98. 某種煤 1 磅,可使 100°C. 之水 15 磅完全蒸發.求其放出之熱.

〔解〕 煤放出之熱量 $=15\times536=8,040$ 磅—度.

99. 使 $-3°.2$C. 一定質量之冰成為 38°C. 之水所需之熱,與使此水化成 100°C. 之水蒸氣所需之熱,其比若何(冰之比熱 $=0.5$)?

〔解〕 設冰重為 m,

則 $-3°.2$C. 之冰成為 38° 之水所需之熱量

$$=(3.2\times0.5+80+38\times1)m=119.6m,$$

38°C. 之水化為 100° 之水蒸氣所需之熱量

$$=m\times1\times(100-38)+536m=598m.$$

$$\therefore\quad 119.6:598=1:5.$$

100. 重 50 克之銅卡計,盛有 0°C. 之水與冰各 100 克,今導入在 1 氣壓時之水蒸氣 50 克,求其結果溫度(卡計之比熱 $=0.1$).

〔解〕 設結果溫度為 θ,

則水蒸氣所失之熱量 $=50\times540+50\times1\times(100-\theta)$,

水及卡計所得之熱量 $=100\times1\times\theta+100\times80+100\times1\times\theta+50\times0.1\times\theta$.

$$\therefore\quad 50\times540+50\times(100-\theta)=100\theta+100\times80+100\theta+50\times0.1\times\theta,\quad 27,000+5,000-50\theta=8,000+205\theta.$$

$$\therefore\quad \theta=94°.1\text{C}.$$

101. 某日空氣溫度為 16°.5C., 露點為 12°C., 求相對濕度.

〔解〕 12°C. 時水蒸氣之最大壓力 $=1.04$ 糎,

16°C. 時水蒸氣之最大壓力 $=1.36$ 糎,

17°C.時水蒸氣之最大壓力 $=1.44$ 糎,

則 16°.5C.時水蒸氣之最大壓力 $=(1.36+1.44)/2$

$=1.40$ 糎.

$\therefore$ 相對濕度 $=\dfrac{1.04}{1.40}=0.744=74.4\%$.

102. 18°C.之空氣40竏,通過一乾燥管(內貯乾燥劑 Drying agent); 管重增加0.396克(因吸收空氣中之水蒸氣).設18°C.時之飽和空氣,每立方粎含水蒸氣 15.2 克,求空氣之相對濕度.

〔解〕 每竏空氣實有之水蒸氣 $=\dfrac{0.396}{40}=0.0099$ 克.

則每立方粎空氣實有之水蒸氣 $=9.9$ 克.

$\therefore$ 相對濕度 $=\dfrac{9.9}{15.2}=0.65=65\%$.

103. 有溫度27°C.之濕空氣7.6竏,已知露點爲 15°C., 氣壓表高 762.75 粍,求其質量與相對濕度.但在 27° 及 15°C.時水蒸氣之最大壓力,各爲 25.5 及 12.75 粍.

〔解〕 27°C.時乾空氣之壓力 $=762.75-12.75=750$ 粍.

在標準溫壓時乾空氣之體積

$$=7.6\times\frac{750}{760}\times\frac{273}{273+27}=6.825 \text{ 竏}.$$

$\therefore$ 乾空氣之重量 $=6.825\times1.293=8.825$ 克.

但15°C.時,濕空氣中之飽和蒸氣重 12.71 克/立方粎 $=0.01271$ 克/竏.

$\therefore$ 濕空氣中之水蒸氣重 $=7.6\times0.01271$

$=0.097$ 克,

$\therefore$ 7.6竏之濕空氣重 $=8.825+0.097=8.922$ 克.

$$相對濕度=\frac{12.75}{25.5}=0.5=50\%.$$

104. 有 300 竰之容器,於 20°C. 時,裝入乾空氣及飽和蒸氣,其壓力共為 73.74粴.在標準溫壓時空氣之密度為 0.001293 克/竰,在 20°C.時水蒸氣之最大壓力為 1.74 粴.求乾空氣之重量.

〔解〕　器內乾空氣之壓力 $=73.74-1.74=72$ 粴,

器內乾空氣在標準溫壓時之體積為

$$V=300\times\frac{72}{76}\times\frac{273}{273+20}=265\text{ 竰},$$

∴乾空氣之重量 $=265\times0.001293=0.3424$ 克.

105. 某日大氣壓力(Atmospheric pressure)等於水銀柱高 760 粍,空氣溫度為 20°C.,相對濕度為 0.5;求水蒸氣壓力與大氣壓力之比.在 20°C.時,水蒸氣最大壓力為 18 粍.

〔解〕　在 20°C. 時之水蒸氣壓力 $=18\times0.5=9$ 粍,

∴　水蒸氣壓力 : 大氣壓力 $=9:760$.

106. 在體積不變之容器中,充有空氣及少許之某液體蒸氣.該液體在 15°C. 時,器內壓力為 70 粴;30°C.時為 38 粴;45°C. 時為 110 粴;60°C. 時為 145 粴.若在 15°C. 時,該液體蒸氣之最大壓力等於水銀柱高 15.4 粴,求在 30°、45° 及 60°C. 時蒸氣之最大壓力.

〔解〕　(1) 在 15°C. 時器內空氣之壓力 $=70-15.4$

$=54.6$ 粴,

則在 30°C. 時器內空氣之壓力為

$$P=54.6\times\frac{273+30}{273+15}=57.44\text{ 粴}.$$

∴　在 30°C. 時該液體蒸氣之最大壓力

$=88-57.44=30.56$ 糎.

(2) 在45°C.時器內空氣之壓力爲

$$P'=54.6\times\frac{273+45}{273+15}=60.29 \text{ 糎}.$$

∴ 在45°C.時該液體蒸氣之最大壓力

$=110-60.29=49.71$ 糎.

(3) 在60°C.時器內空氣之壓力爲

$$P''=54.6\times\frac{273+60}{273+15}=63.13 \text{ 糎}.$$

∴ 在60°C.時該液體蒸氣之最大壓力

$=145-63.13=81.87$ 糎.

107. 於體積不變之瓶,裝入空氣,某液體之蒸氣及少許之該液體.當溫度27°C.時,瓶內壓力等於水銀柱高90糎;在57°C.時爲150糎.若溫度仍爲57°C.,而其體積縮小至原體積之三分之一,則瓶內之壓力若干(在27°C.時,水蒸氣之最大壓力等於水銀柱高30糎)?

〔解〕 在27°C.時水蒸氣之最大壓力$=30$糎,

則在27°C.時器內空氣之壓力$=90-30=60$糎,

在57°C.時器內空氣之壓力爲

$$P=60\times\frac{273+57}{273+27}=66 \text{ 糎}.$$

∴ 在57°C.時,水蒸氣之壓力$=150-66=84$糎.

但在57°C.時,空氣體積縮至三分之一,則空氣之壓力P′可求之於

$$P'\times\frac{1}{3}=66\times1,$$

$$\therefore\ P'=198 \text{ 糎}.$$

∴　瓶內之壓力 $=84+198=282$ 糎.

108. 有均粗之玻璃管,兩端開口,垂直插入水槽內,露出水面之長爲 1 粎.於是將上端管口關閉,閉後管內水面較管外水面低 11 糎.室內溫度爲 60°C., 水蒸氣之最大壓力在 60°C. 時等於水銀柱高 15 糎,大氣壓力等於水銀柱高 75 糎.若水之表面張力 (Surface tension) 不計,求管內空氣之相對濕度.

〔解〕　管內空氣所受之壓力 $=75+\dfrac{11}{13.6}=75.81$ 糎

設管內空氣之壓力 $=P$, 由波以耳定律得

$$P\times(100+11)=75\times 100,$$

$$\therefore\quad P=67.56\text{ 糎}.$$

∴　管內水蒸氣之壓力 $=75.81-67.56$

$=8.25$ 糎.

∴　管內空氣之相對濕度 $=\dfrac{8.25}{15}=0.55=55\%$.

第七章　熱之傳導與熱能當量

定義、定律、及公式.

1. 熱之傳導

熱之移動.—— 熱由一物體移至他一物體,或由同一物體之一部份移至他一部份,其方法有三:(1) 傳導(Conduction),(2)對流 (Convection),(3)輻射(Radiation).

導熱率(Coefficient of thermal conduction or thermal conductivity).—— 某物體於單位時間、單位面積、單位溫度傾度(Temperature gradient)內所流出之熱量,曰該物體之導熱率.

公式:　設有物質一段,厚為d,兩端為平行面,面積為A,一端之溫度為t_1,他端為t_2,經時間 t 後,由一端移至他端之熱量H,導熱率為K,則

$$H=K\cdot\frac{t_2-t_1}{d}\cdot At.$$

$\left(\frac{t_2-t_1}{d}\right)$謂之溫度傾度.

2. 熱功當量

熱功當量(Mechanical equivalent of heat).—— 由熱變功或由功變熱,兩者之比,恆為一常數,即熱功當量.

公式:　設　H=熱,　w=功,　則

$$w=JH.$$

$J = 4.2 \times 10^7$ 厄/卡 $= 427$ 瓩一粎/瓩一度

$= 778$ 呎一磅/英熱單位 $= 1,400$ 呎磅/磅度.

計算問題

1. 熱之傳導

1. 大水箱面,覆以厚 6 糎之冰,面積爲 24 平方粎.設冰之導熱率爲 0.003 (C. G. S. 單位),冰外面之溫度爲 $-10°C$. 求每小時間自水傳至冰外面之熱量.

〔解〕 所求之熱量 $H = K \cdot \frac{t_2 - t_1}{d} \cdot At$

$$= 0.003 \times \frac{10}{6} \times 240,000 \times 60 \times 60$$

$$= 43,200 \text{ 卡}.$$

2. 蒸氣室頂,蓋以長 60 糎,闊 50 糎,厚 10 糎之石塊,其上鋪以冰,於 0.5 小時間,熔去 5 瓩,求石之導熱率.

〔解〕 冰所吸收之熱量 $= 5 \times 1,000 \times 80 = 400,000$ 卡

$$\therefore \quad 400,000 = K \times \frac{100}{10} \times 60 \times 50 \times 0.5 \times 60 \times 60,$$

$$\therefore \quad K = 0.00741.$$

3. 銅之導熱率爲 0.96. 設有銅板長 1 粎,闊 1 粎,厚 1 糎,兩面溫度差 10°. 問 1 分鐘間,傳過銅板之熱量若干?

〔解〕 1 分鐘間,傳過銅板之熱量

$$= 0.96 \times \frac{10}{1} \times 100 \times 100 \times 60$$

$$= 5.76 \times 10^6 \text{ 卡}.$$

4. 設有一汽罐,用鐵板製成,壁厚0.4糎,其導熱率爲0.2,壁內外之溫度爲 120°C. 及 300°C. 求 1 小時間,由面積 1 平方粍所通過之熱量.

〔解〕 1 小時間,由面積 1 平方粍所通過之熱量

$$H=0.2\times\frac{300-120}{0.4}\times10{,}000\times60\times60$$
$$=3.24\times10^{9}\text{ 卡.}$$

5. 有鐵板厚 2 糎,面積爲 500 平方糎,兩面溫度爲 0° 及 100°C. 已知每時傳過熱 1.44×10^{7} 卡.求鐵之導熱率 K.

〔解〕 $$1.44\times10^{7}=K\times\frac{100}{2}\times500\times60\times60,$$

$$\therefore\quad K=0.16.$$

6. 屋牆厚30糎,其導熱率爲 0.0035, 室內溫度爲15°C.,室外爲5°C., 牆面積爲 1,000 平方粍,求每時傳出之熱量.設 1 克之煤,燃燒發生熱量8,400卡,欲保持室內溫度,需燃煤若干?

〔解〕 1 小時間傳出之熱量

$$H=0.0035\times\frac{15-5}{30}\times10{,}000{,}000\times60\times60$$
$$=42\times10^{6}\text{ 卡,}$$

$$\therefore\quad 1\text{ 小時間所需之煤重}=\frac{42\times10^{6}}{8{,}400}=5{,}000\text{克}=5\text{兛.}$$

7. 一室有玻璃窗四扇,每扇面積 300 糎×200糎,室外溫度爲 0°C. 今燃煤以保持室內40°C.之溫度,求每時煤之消費值.

知　窗玻璃厚 =0.2 糎,

玻璃之導熱率 $=0.0012$,

煤每噸(2,000磅)之價 $=30$ 元,

1 克之煤,燃燒發生之熱量 $=7000$ 卡,

1 磅 $=454$ 克.

〔解〕 1 小時間,玻璃傳出之熱量

$$H=0.0012\times\frac{40}{0.2}\times300\times200\times60\times60\times4$$

$$=207{,}360{,}000 \text{ 卡.}$$

$\therefore$ 所需之煤重 $=207{,}360{,}000/7{,}000=29{,}623$ 克.

但 $29{,}623$ 克 $=\dfrac{29{,}623}{454}$ 磅 $=65.25$ 磅

$$=\frac{65.25}{2{,}000}\text{ 噸 }=0.03262\text{ 噸.}$$

$\therefore$ 1 小時間,煤之消費值 $=0.03262\times30$

$$=0.9786\text{ 元 }=0.098\text{ 元.}$$

8. 有厚 3 糎之鐵板 1 平方糎於 1 小時間,傳過熱 21,600 卡,鐵之導熱率爲 0.12, 此板較高之一面溫度爲 200°C. 求他一面之溫度 t_1.

〔解〕 $21{,}600=0.12\times\dfrac{200-t_1}{3}\times1\times60\times60,$

$$21{,}600=28{,}800-144t_1,$$

$$\therefore\ t_1=50^\circ\text{C}.$$

9. 有關閉之鐵槽,內盛以水,用水蒸氣通過水槽,使水保持 100°C.之溫度.若 1 秒間,須水蒸氣 100 克,水槽面積爲 6 平方粎,厚爲 0.4 糎,其導熱率爲 0.2, 則槽內外溫度之差若何?

〔解〕 1 秒間水槽傳出之熱量 $=100\times536,$

$$\therefore\quad 100\times 536=0.2\times\frac{t_2-t_1}{0.4}\times 60{,}000.$$

∴　槽內外溫度之差 $t_2-t_1=18°C.$

10.　鐵鍋鑪厚 0.8 糎,面積 8 平方米,其內水溫度爲 120°C.,鍋鑪外溫度爲 95°C. 設鐵之導熱率爲 0.164, 問每小時因傳導而消失之熱量幾何?

〔解〕　每小時消失之熱量

$$H=0.164\times\frac{120-95}{0.8}\times 80{,}000\times 60\times 60$$

$$=1.476\times 10^9\ 卡.$$

11.　設有一玻璃杯,其外面恆保持 100°C., 內容冰與水之混合物,攪拌極勻.如杯壁厚 0.05 糎,全面積爲 200 平方糎,其導熱率爲 0.002, 問每分間熔化之冰爲若干?

〔解〕　每分間導入杯內之熱量

$$H=0.002\times\frac{100}{0.05}\times 200\times 60$$

$$=48{,}000\ 卡.$$

∴　每分熔化之冰重 $=48{,}000/80=600$ 克.

12.　設有一冰箱,質爲軟木,其壁之總面積爲 15,000 平方糎,厚爲 3 糎,導熱率爲 0.00013.假定箱外之溫度爲 30°C.,求箱內每日可熔化若干克之冰.

〔解〕　每日導入冰箱之熱量

$$H=0.00013\times\frac{30}{3}\times 15{,}000\times 24\times 60\times 60$$

$$=1{,}684{,}800\ 卡,$$

$$\therefore\quad 每日熔化之冰重=\frac{1{,}684{,}800}{80}=21{,}060\ 克\doteq 21\ 瓩.$$

13. Pe′clet 謂 1 小時間傳過面積 1 平方粍,厚 1 粍,兩面温度差1°之鉛板之熱量爲 13.83 瓩一度,求鉛板之導熱率K.

〔解〕 $13.83\times1{,}000=K\times\frac{1}{100}\times10{,}000\times1\times60\times60,$

$\therefore\ 13{,}830=360{,}000K.$

$\therefore$ 鉛板之導熱率 $K=0.0384.$

14. 有一玻璃瓶,面積 100 平方糎,厚1.5粍,內容有冰.設以瓶置於 100°C. 之器具內,問每分間可熔冰若干?玻璃之導熱率爲0.00185.

〔解〕 1 分鐘間傳入瓶內之熱量

$$H=0.00185\times\frac{100}{0.15}\times100\times60$$

$=7{,}400$ 卡.

$\therefore$ 1 分鐘間熔化之冰重 $=7{,}400/80=92.5$ 克.

15. 鐵鍋鑪厚 1 糎,燒面 2 平方粍,其中水之温度爲100°C., 燒面爲 280°C., 水蒸氣之潛熱爲 536, 鐵之導熱率爲 0.16.求每小時間所蒸發之水重.

〔解〕 1 小時間傳入鍋鑪之熱量

$$H=0.16\times(280-100)\times20{,}000\times60\times60,$$

$\therefore\ H=20{,}736\times10^5$ 卡.

$\therefore$ 1 小時間所蒸發之水重 $=20{,}736\times10^5/536$

$=3{,}869{,}000$ 克 $=3{,}869$ 瓩.

2. 熱能當量

16. 比熱 0.32 之鉛彈,以速度 400 粍/秒,射擊靶子,如

該彈所生之熱,半留於彈內,則鉛彈之溫度若何?但其原來溫度爲 10°C.

〔解〕　設 m = 鉛彈之質量,

則鉛彈之動能 $=\frac{1}{2}m\times(40,000)^2$.

$\therefore$　鉛彈所生之熱量 $=\frac{m(40,000)^2}{2\times4.2\times10^7}=\frac{80m}{4.2}$.

設 $\theta=$ 鉛彈所昇高之溫度.

$$\therefore\quad \frac{40m}{4.2}=m\times0.32\theta,$$

$$\therefore\quad \theta=297^\circ.1C.$$

$\therefore$　鉛彈之溫度 $=297^\circ.1+10^\circ=307^\circ.1C.$

17.　一個 20 克之鉛彈丸,需以何速度射擊靶子,方能令其溫度昇高 100°C. (鉛之比熱 =0.0315).

〔解〕　設鉛彈之速度爲 V,

則鉛彈之動能 $=\frac{1}{2}\times20V^2=10V^2$,

鉛彈溫度昇高 100°C.所需之熱量 $=20\times0.0315\times100$,

$$\therefore\quad \frac{10V^2}{4.2\times10^7}=20\times0.0315\times100,$$

$$\therefore\quad V^2=2.646\times10^8,$$

$$\therefore\quad V=16,200\text{糎/秒}=162\text{米/秒}.$$

18.　子彈射中靶子,使其溫度昇高 100°C. 假定由衝突而生之熱,一半保留於彈內,其比熱爲 0.03, 則其進行之速度當爲若干?

〔解〕　設 m= 子彈之質量, V= 子彈進行之速度,

則子彈之動能 $=\frac{1}{2}mV^2$,

子彈所生之熱量 $=\frac{\frac{1}{2}mV^2}{4.2\times10^7}$.

但子彈溫度昇高100°C.所需之熱量 $=m\times0.03\times100$.

$$\therefore\quad \frac{\frac{1}{2}\times mV^2}{2\times4.2\times10^7}=m\times0.03\times100.$$

$$\therefore\quad V^2=50.4\times10^7$$

$$\therefore\quad V=(224.5\times10^2)\text{糎/秒}$$

$$=224.5\text{米/秒}.$$

19. 重 100 克之運動體,其速爲25 米/秒,若忽然靜止,問放出熱若干?

〔解〕 運動體之動能 $=\left[\frac{1}{2}\times100\times(2{,}500)^2\right]$厄,

$$\therefore\quad \text{放出之熱量}=\frac{\frac{1}{2}\times100\times(2{,}500)^2}{4.2\times10^7}=7.43\text{ 卡}.$$

20. 水滴落至地面,其溫度昇高 5°C. 求水滴落下之高度(設 $J=1{,}400$).

〔解〕 $J=1{,}400$,即1,400呎一磅之功,可使 1 磅之水,溫度昇高1°C.

設 m磅 = 水滴之質量, h = 水滴落下之高度,

則水滴溫度昇高 5°C. 所需之熱量=5m 磅一度,

水滴之勢能 =mh 呎一磅,

$$\therefore\quad \frac{mh}{1{,}400}=5m,$$

$$\therefore\quad h=7{,}000\text{呎}.$$

21. 冰塊投入井中,水及冰均爲0°C.,冰落至水面,熔

其五十分之一.求冰落下之高度(設 $J=427$).

〔解〕　$J=427$, 卽 427 瓩一米之功,可變爲 1 瓩一度之熱.

設　m 瓩 = 冰之質量, h米 = 冰落下之高度,

則冰在高 h 時之勢能 $=mh$ 瓩一米,

$$\text{熔五十分之一之冰所需之熱量}=\frac{1}{50}\times m\times 80$$

$$=1.6m\text{瓩一度},$$

$$\therefore\quad \frac{mh}{427}=1.6m.$$

$$\therefore\quad h=1.6\times 427=683.2\text{ 米}.$$

22.　欲使水 1 磅之溫度,昇高 1°C.求其功當量(以厄表之).

〔解〕　1 磅 = 453.6 克.

1 磅之水,溫度昇高 1°C.所需之熱量

$$=453.6\times 1\times 1=453.6\text{ 卡},$$

$\therefore$　所需之功 $=453.6\times 4.2\times 10^7=(1.905\times 10^{10})$厄.

23.　水銀由10米之高處,落至不導熱之面上,問其溫度昇高幾度?

〔解〕　設　m克 = 水銀之質量,　θ = 水銀昇高之度數,

則水銀 m 克之勢能 $=m\times 980\times 1{,}000$ 厄,

水銀勢能所生之熱量 $=(m\times 980\times 1{,}000/4.2\times 10^7)$卡.

但水銀溫度,昇高 θ°C.所需之熱量 $=(m\times 0.033\theta)$卡.

$$\therefore\quad \frac{m\times 980\times 1{,}000}{4.2\times 10^7}=m\times 0.033\theta,$$

$$\therefore\quad \theta=0^\circ.71\text{C}.$$

24. 令鐵 1 瓩之溫度,昇高 40°C., 需熱若干?(比熱 =0.112)設給鐵以當量之動能,求其速度.

〔解〕 鐵所需之熱量 $=1,000\times0.112\times40=4,480$ 卡.

設 V=鐵之速度,

則 $4,480\times4.2\times10^7=\frac{1}{2}\times1,000V^2,$

$\therefore\quad V^2=376,320,000.$

$\therefore\quad V=19,400$糎/秒$=194$粎/秒.

25. 1 克之氫,燃燒時放出熱 34,460 卡.今每時燃氫 50 克,所生之熱,完全變爲功,求其功率,以瓦表之.

〔解〕 每時氫放出之熱量 $=50\times34,460$ 卡,

則每時氫所作之功 $=[(50\times34,460)\times4.2\times10^7]$尼,

每秒氫所作之功 $=\left(\frac{50\times34,460}{60\times60}\times4.2\times10^7\right)$尼,

$\therefore$ 所求之功率 $=\frac{50\times34,460}{60\times60\times10^7}\times4.2\times10^7$

$=2,010$ 瓦.

26. 內摩擦消耗之功爲 100 瓦,如全部均化爲熱,可使若干克之水,在 1 小時間內溫度昇高 1°C.?

〔解〕 1瓦$=10^7$尼/秒,

則 100瓦$=10^9$尼/秒,

1 小時間所作之功 $=10^9\times60\times60=(36\times10^{11})$尼;

1 小時間發生之熱量 $=\frac{36\times10^{11}}{4.2\times10^7}=\left(\frac{6}{7}\times10^5\right)$卡,

$\therefore$ 所求之水重 $=\frac{6}{7}\times10^5=85.714$ 瓩.

24. 有礮彈,以 800 呎/秒之速度射擊靶子,而所生之

熱,半為靶所吸收.彈以鐵製成,比熱為 0.112. 試證其溫度昇高 32°C.

〔解〕 設 m 磅 = 礮彈之質量, θ= 礮彈溫度昇高之度數,

則礮彈之動能 $=\frac{1}{2}\times m\times 800^2$ 呎—磅度,

礮彈溫度昇高 32°C. 所需之熱量 $=m\times 0.112\theta$,

$$\therefore\quad \frac{\frac{1}{2}m\times 800^2}{2\times 32\times 1400}=m\times 0.112\theta,$$

$$\therefore\quad \theta=32^\circ C.$$

28. 鉛之熔解點為 335°C.,熔解熱為 5.4, 比熱為 0.032. 令鉛 10 克之溫度,自 0°C. 昇至熔解點,且完全熔化,求其所需熱之功當量(以厄表之).

〔解〕 鉛所需之熱量 $=10\times 335\times 0.032+10\times 5.4$

$=161.2$ 卡,

$\therefore$ 所需熱功當量 $=161.2\times 4.2\times 10^7$

$=6.77\times 10^9$ 厄.

29. 功率 20 馬力之引擎,每時消費煤 56 磅.設 1 磅之煤,燃燒時發生之熱,可使 100°C., 15 磅之水,完全化為同溫度之水蒸氣,求該引擎之效率.

〔解〕 引擎每分鐘所作之功 $=20\times 33{,}000$

$=660{,}000$ 呎—磅,

煤 1 磅燃燒時發生之熱量 $=15\times 536=8{,}040$ 磅—度,

則每分鐘煤發生之熱量 $=56\times 8{,}040/60=7{,}504$ 磅—度,

該熱量之功當量 $=7{,}504\times 1{,}400=10{,}505{,}600$ 呎—磅,

$$\therefore\ \text{該引擎之效率}=\frac{660,000}{10,505,600}=0.06279$$
$$=6.279\%.$$

30. 有一引擎消費煤10磅,可作功 300 呎噸.求其效率.

〔解〕 由前題,得1磅之煤燃燒時發生熱8,040磅一度,故

10磅煤所生之熱量 $=10\times 8,040=80,400$ 磅一度,

該熱量之功當量 $=80,400\times 1,400=112,560,000$ 呎一磅.

$$=\frac{112,560,000}{2,240}\text{呎一噸}=50,248\text{呎一噸}.$$

$$\therefore\text{該引擎之效率}=\frac{300}{50,248}=5.97\%.$$

31. 某引擎每小時消費煤10磅,能於3小時間,將深200呎之水抽起6,000加侖.求其作功所需熱之百分比.

〔解〕 引擎每時抽起之水 $=6,000/3=2,000$ 加侖,

則每時抽起之水重 $=2,000\times 10=2\times 10^4$ 磅,

每時所作之功 $=2\times 10^4\times 200=4\times 10^6$ 呎一磅,

每時所需之熱量 $=4\times 10^6/1,400$ 磅一度,

但10磅煤發生之熱 $=10\times 8,040=80,400$ 磅一度.

$$\therefore\text{所求之百分比}=\frac{\dfrac{4\times 10^6}{1,400}}{80,400}=\frac{400}{14\times 804}=0.03554$$
$$=3.554\%.$$

32. 重400噸之火車,以效率0.05之引擎引之.若消費煤0.5英擔,則於平面上可引火車至若干遠?但運動之阻力,等於火車重之$\frac{1}{200}$.

〔解〕 煤0.5英擔發生之熱量 $=0.5\times 112\times 8{,}040$

$=450{,}240$ 磅一度，

則該熱之功當量 $=450{,}240\times 1{,}400=630{,}336{,}000$ 呎一磅，

引擎可作之功 $=630{,}336{,}000\times 0.05=31{,}516{,}800$ 呎一磅.

設 $s=$ 火車所行之遠,則

火車所作之功 $=400\times\dfrac{1}{200}\times 2{,}240\times s=4{,}480s$ 呎一磅，

$\therefore\quad 4{,}480s=31{,}516{,}800,$

$\therefore\quad s=7{,}035$ 呎 $=1\frac{1}{3}$ 哩(約).

33. 一馬每分鐘作功28,000呎一磅,若代以效率0.04之抽水引擎,以同一功率作功,問每時需煤若干?

〔解〕 每時馬所作之功 $=28{,}000\times 60$ 呎一磅，

設引擎每時所需煤之重量為 m,則

煤 m 磅所發生之熱量 $=8{,}040m$ 磅一度，

該熱量可作之功 $=8{,}040m\times 1{,}400$ 呎一磅.

$\therefore\quad 8{,}040m\times 1{,}400\times 0.04=28{,}000\times 60,$

$450{,}240m=1{,}680{,}000.$

$\therefore\quad m=3.75$ 磅.

第八章　音　學

定義、定律、及公式.

1. 波長、音速、振數及唸.

波長 (Wave length).—— 相隣兩同相點間之距離曰波長.

波長、波速、及週期 (Period) 之關係: 波長等於波速與週期之相乘積.

公式: 設 $\lambda=$ 波長, $V=$ 波速,

$T=$ 週期, $n=$ 振數 (Frequency).

得 $$\lambda=VT.$$

但 $$T=\frac{1}{n},$$

故又得 $$\lambda=V\cdot\frac{1}{n} \quad 或 \quad V=n\lambda.$$

音之速度:

1. 牛頓公式:

設 $V=$ 音速, $\rho=$ 媒質之密度,

$E=$ 媒質之彈性率, $P=$ 空氣之壓力.

$$\therefore\quad V=\sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

但媒質爲空氣時, $E=P$ (是可由波以耳定律證明之), 故又得

$$V=\sqrt{\frac{P}{\rho}}.$$

2. 拉伯拉斯(Laplace's)公式:

設 γ= 某媒質在一定壓力時之比熱與其在一定溫度時之比熱之比 =14.1.

$$\therefore \quad V=\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}=\sqrt{\frac{1.41P}{\rho}}.$$

設壓力變而溫度不變,其速亦不變;

設溫度變,則其速須由下列公式計之:

設 t = 媒質之溫度,

V = t°C. 時之音速,

α = 媒質之體膨脹係數,

T = 媒質之絕對溫度,

$$V=\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}(1+\alpha t)}.$$

設爲空氣,則 $\gamma=1.41$, $\alpha=\frac{1}{273}$.

$$V=\sqrt{\frac{1.41P}{\rho}\left(1+\frac{t}{273}\right)}=\sqrt{\frac{1.41P}{\rho}\times\frac{273+t}{273}}$$

$$=\sqrt{\frac{1.41PT}{273\rho}}.$$

都普魯效應(Doppler's effect).—— 某前進或後退物所發音調 (Pitch) 高低之改變之現象,曰都普魯效應.

公式:

(a)音源行動,

設 V=音速,

V_s =音源之速度,

n_0 =音之實在振數(Actual frequency),

h_1=音之相視振數(Apparent frequency),

(1)設音源向觀測者進行,

$$n_1 = n_0 \frac{V}{V - V_S}.$$

(2)設音源背觀測者進行,

$$n_1 = n_0 \frac{V}{V + V_S}.$$

(b)觀測者行動,

設V_0=觀測者行動之速度,

(1)設觀測者向音源進行,

$$n_1 = n_0 \frac{V + V_0}{V}.$$

(2)設觀測者背音源進行,

$$n_1 = n_0 \frac{V - V_0}{V}.$$

(c)設音源與觀測者同時行動,

(1)設二者相向進行,

$$n_1 = n_0 \frac{V + V_0}{V - V_S}.$$

(2)設二者相背進行,

$$n_1 = n_0 \frac{V - V_0}{V + V_S}.$$

測音器(Siren).——音之振數,可以測音器測之.

設n=測音器之孔數,

N=每秒間轉動之次數,

t=轉動n次所需之秒數,

則發出之音之振數$=\frac{nN}{t}$.

唸(Beat).——振動相差無多之兩音叉,同時振動,則由干涉結果,成爲時強時弱之音,曰唸.1秒間之唸數,等於兩者之振數差.

2. 發音體之振動

弦振動之公式:

設 V=横波之波速,

T=弦之張力,

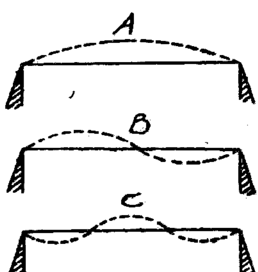
m=弦單位長之質量,

l=弦長,

λ=波長,

n=振數,

則 $$V=\sqrt{\frac{T}{m}}.$$



如圖A,以指彈弦之中點,使全弦振動,所發之音,稱爲原音(Fundamental tone).

又如圖B與C,若用指輕按弦上$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$等處,則弦分作二段或三段振動,所發之音,爲原音振數之2倍或3倍,統稱爲倍音(Overtones).

設 N= 弦之段數(No. of segments),

則每段之長 $=l/N$,

$$\therefore \quad \lambda=\frac{2l}{N},$$

但　$V=n\lambda$,

$$\therefore\quad n=\frac{V}{\lambda}=\frac{VN}{2l}=\frac{N}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}.$$

棒振動之公式:

(a)縱振動.

(1)一端固定之棒.

設 $E=$ 棒之彈性率,

$\rho=$ 棒之密度,

$l=$ 棒長.

因　$l=\frac{\lambda}{4}=\frac{1}{4}\times\frac{V}{n}=\frac{1}{4n}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$,

$$\therefore\quad n=\frac{1}{4l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

其倍音之振數爲3n、5n…………等.

(2)中央固定之棒.

$$n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

其倍音之振數爲2n、3n、4n…………等.

(3)兩端固定之棒.　公式及倍音與(2)同.

(b)橫振動.

設 $b=$ 振動方向之棒厚,

$A=$ 常數,

$$n=A\cdot\frac{b}{l^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

氣柱振動之公式:

(a)閉管(Closed pipe).

設 $l=$管長,

則　　$\lambda = 4l$,

$$\therefore \quad n = \frac{V}{\lambda} = \frac{V}{4l}.$$

其原音及倍音之振數之比為1：3：5等,即等於連續奇數之比.

管端之更正, l=管之實長+0.6管半徑.

(b) 開管(Open pipe).

$$\because \quad \lambda = 2l,$$

$$\therefore \quad n = \frac{V}{\lambda} = \frac{V}{2l}.$$

其原音及倍音之振數之比為1：2：3等,即等於連續整數之比.

管端之更正, l= 管之實長 +1.2管半徑.

計算問題

1. 波長、音速、振數及唸.

1. 音叉振動數為256.設音速為1,126呎/秒,求其波長.

〔解〕　波長 $\lambda = \frac{V}{n} = \frac{1,126}{256} = 4.4$ 呎.

2. 音波波長 $2\frac{1}{2}$ 呎,設波速為 1,100 呎/秒,求其振數及週期.

〔解〕　週期 $T = \frac{\lambda}{V} = \frac{2.5}{1,100} = \frac{1}{440}$ 秒.

又振數 $n = \frac{1}{T} = 440$.

3. 感官所能聞之最短波長爲 1.8 糎,最長波長爲 900 糎. 求各音波之振數,及其間均之音程 (Octaves interval). 設音在空氣中之速度 =33,000 糎/秒.

〔解〕 $\because \quad n=V/\lambda,$

$\therefore \quad n_1=33{,}000/1.8=18{,}330,$

$n_2=33{,}000/900=36.7.$

設 $n_1=2n_2$,則其間均之音程爲 1,

又設 $n_1=2^n n_2$,則其間均之音程爲 n.

$\therefore \quad 18{,}330=2^n\times 36.7.$

以對數解之,得 $n=8.97$.

4. 鐵棒橫切面積 1 平方吋,加以3,000磅之力,則引長原長之 1/10,000. 求棒內之音速 (1立方呎之鐵 =480 磅).

〔解〕 E= 鐵之楊率

$=9.6\times10^6$ 磅/平方吋 $=96\times18^6\times12^2$ 磅/平方呎.

$\therefore \quad V=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}=\sqrt{\dfrac{9.6\times10^6\times12^2}{480}}=17{,}000$ 呎/秒.

5. 鋼棒密度 7.8,棒內之音速爲 5,200 粎/秒,求其楊率.

〔解〕 $\because \quad V=\sqrt{E/\rho},$

$\therefore \quad E=\rho V^2=7.8\times1\times5{,}200^2\times100^2$

$=2.109\times10^{12}$ 達/平方糎.

6. 水之彈性率爲 2.1×10^{11}. 求水中 10°C.時之音速.

〔解〕 由水之密度表得 10°C. 時之 $\rho=0.9997\doteq1,$

$\therefore \quad V=\sqrt{E}=\sqrt{2,1}\times10^5=1{,}449\times10^5$ 糎/秒,

7. 水溫度 8°.1C. 時水中之音速爲 1,435 米/秒.求水之彈性率.

〔解〕 8°.1C. 時水之 $\rho \doteq 1$,

$\therefore \quad E=V^2=1{,}435^2\times100^2=2.059\times10^{10}$ 達/平方糎.

8. 水在壓力 1,033 糎水柱高時,縮去原體積之 1/21,000. 求水中之音速.

〔解〕 $V=\sqrt{E/\rho}$,

但 $E=\dfrac{S}{\delta}=\dfrac{1{,}033\times981}{1/21{,}000}=1{,}033\times981\times21{,}000$ 達/平方糎.

$\therefore \quad V=\sqrt{1{,}033\times981\times21{,}000}=1.459\times10^5$ 糎/秒.

9. 由下列結果,求 0°C. 時之音速.

氣壓表高, 760 粍;水銀密度, 13.6 克/立方糎;比熱之比, 1.41;1竔之乾空氣在 0°C. 時之質量, 1.29 克;重力加速度, 981 糎/秒².

〔解〕 $\because \quad V=\sqrt{\gamma P/\rho}$,

$$\therefore \quad V=\sqrt{\frac{1.41\times13.6\times76\times981}{1.29/1{,}000}}=33{,}129\ \text{糎/秒}.$$

10. 設空氣內之音速爲 332 米/秒,求氫內之音速.已知 1 竔之氫 =0.0896 克, 1 竔之空氣 =1.293 克.

〔解〕 由公式: $V=\sqrt{\gamma P/\rho}$,

二者之 γ 值幾相等,

$$\therefore \quad \frac{V_a}{V_h}=\sqrt{\frac{\rho_h}{\rho_a}}.$$

$$\therefore \quad V_h=V_a\sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_h}}=332\sqrt{\frac{1.293}{0.0896}}=1{,}261.2\ \text{米/秒}.$$

11. 設音在 0°C. 空氣中之速度爲 332 米/秒,求 15°C.

時之音速.

〔解〕 由公式: $V=\sqrt{\frac{1.41PT}{273\rho}}$,

$$\therefore \quad \frac{V_0}{V_{15}}=\sqrt{\frac{T_0}{T_{15}}},$$

$$\therefore \quad V_{15}=V_0\sqrt{\frac{T_{15}}{T_0}}=332\sqrt{\frac{273+15}{273}}=332\times1.0276$$

$$=341\text{呎/秒}.$$

12. 某人由1,500呎遠處之鎗聲而對其表之時刻.設溫度爲15°C.,求該表之差數.

〔解〕 由前題,得 $V_{15}=341$ 呎/秒.

∴該表之差數 = 音行 1,500 呎所需之時

$$=1{,}500/341=4.39\text{秒}.$$

13. 音在空氣中之速度爲 350 呎/秒,求空氣之溫度.

〔解〕 $\because \quad \frac{V_0}{V_t}=\sqrt{\frac{T_0}{T_t}}$, 或 $T_t=T_0\frac{V_t^2}{V_0^2}$,

$$\therefore \quad t+273=273\times\frac{350^2}{332^2}=303.4,$$

$$\therefore \quad t=303.4-273=30^\circ.4C.$$

14. 求暑天(35°C.)音速與寒天(−20°C.)音速之比值

〔解〕 $\because \quad \frac{V_1}{V_2}=\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$,

∴暑天音速與寒天音速之比 $=\frac{V_1}{V_2}=\sqrt{\frac{273+25}{273-20}}$

$$\fallingdotseq\sqrt{1.217}:1=1.103:1.$$

15. 已知溫度 0°C.,氣壓 75 糎時, 11.4 竔之氫重 1 克,求 −100°C.時,氫中之音速.

〔解〕　在一定壓力時,氣體之密度與絕對溫度成反比.

$$\therefore\quad \rho_{-100}\Big/\frac{1}{11.4\times1{,}000}=273/(273-100),$$

$$\therefore\quad \rho_{-100}=\frac{273}{173}\times\frac{1}{11.4\times1{,}000}.$$

$$\therefore V=\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}=\sqrt{\frac{1.41\times75\times13.6\times980\times173\times11.4\times1{,}000}{273}}$$

$$=1.005\times10^5\text{糎/秒}.$$

16.　某氣體在溫度 0°C., 壓力 75 糎時之比重爲水之 1/1,000. 求此時該氣內之音速. 設溫度增至 100°C., 問音速若干?(設該氣比熱之比 =1.4).

〔解〕　水之密度 =1 克/立方糎.

∴　該氣體之密度 =1/1,000 克/立方糎.

$$\therefore\quad V_0=\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho_0}}=\sqrt{1.4\times75\times13.6\times980\times1{,}000}$$

$$=3.74\times10^4\text{ 糎/秒}.$$

$$\therefore\quad V_{100}=V_0\sqrt{\frac{T_{100}}{T_0}}=3.74\times10^4\sqrt{\frac{273+100}{273}}$$

$$=4.36\times10^4\text{ 糎/秒}.$$

17.　音在溫度 16°C. 之某氣體內,速度爲 340 米/秒. 設該氣之壓力加倍而溫度昇至 168°C., 求此時之音速.

〔解〕　音速與壓力之增減無關.

由公式, $\dfrac{V_1}{V_2}=\sqrt{\dfrac{T_1}{T_2}}$.

得 $V_2=V_1\sqrt{\dfrac{T_2}{T_1}}=340\sqrt{\dfrac{273+168}{273+16}}=340\sqrt{\dfrac{441}{289}}$

$=420$ 粎/秒.

18. 礮手放礮 $5\frac{1}{2}$ 秒後,始聞回響(Echo),求反射面之遠.但音速爲 1,126 呎/秒.

〔解〕 設礮手與反射面間之距離 $=S$,

則 $\frac{S}{\text{音速}}=\frac{1}{2}\times$ 放礮後至聞回響間之時間.

$\therefore\quad \frac{S}{1,126}=\frac{1}{2}\times 5\frac{1}{2}.$

$\therefore\quad S=3,096.5$ 呎.

19. 鎗彈之速度爲 1,200 呎/秒.放鎗 6 秒後,始聞其擊靶之聲.設音速爲 1,126 呎/秒,求靶之遠.

〔解〕 設 $S=$ 靶之遠,

由題意,得 $\frac{S}{1,200}+\frac{S}{1,126}=6,$

$\therefore\quad S=6\Big/\left(\frac{1}{1,200}+\frac{1}{1,126}\right)=3,480$ 呎.

20. 在海面打鐘,隔 3 秒後聞由海底反射而回之音,求海深.但假定音在水中之速度爲 1,450 粎/秒.

〔解〕 海深 $=\frac{3}{2}\times 1,450=2,175$ 粎.

21. 某人放鎗於兩峭壁 A、B 間,於 $1\frac{1}{2}$ 秒後聞得回響;$2\frac{1}{2}$ 秒後又聞回響.求兩壁間之距離.

〔解〕 設 $S=$ 兩壁間之距離,

$S'=$ 某人與壁 A 間之距離,

$S-S'=$ 某人與壁 B 間之距離,

由題意,得　$\frac{S'}{1,120}=\frac{1}{2}\times 1\frac{1}{2}$,

$\therefore\quad S'=1,120\times\frac{3}{4}=840$ 呎.

又　$\frac{S-S'}{1,120}=\frac{1}{2}\times 2\frac{1}{2}$,

$\therefore\quad S-S'=1,120\times\frac{5}{4}=1,400$,

$\therefore S=1,400+S'=1,400+840=2,240$ 呎.

22. 引擎於距峭壁$\frac{1}{2}$哩處鳴汽笛, $4\frac{1}{2}$秒後始聞回響.設音速爲 1,100 呎/秒,求引擎之速度.

〔設〕　設 V= 引擎向峭壁前進之速度,

則音波由$\frac{1}{2}$哩處至峭壁所需之時 $=\frac{1}{2}\times 5,280/1,100$,

由峭壁反射後至引擎所需之時 $=\frac{\frac{1}{2}\times 5,280-4\frac{1}{2}V}{1,100}$,

$\therefore\quad \frac{\frac{1}{2}\times 5,280}{1,100}+\frac{\frac{1}{2}\times 5,280-4\frac{1}{2}V}{1,100}=4\frac{1}{2}$,

$5,280-\frac{9}{2}V=\frac{9}{2}\times 1,100$,

$\therefore\quad V=(5,280-\frac{9}{2}\times 1,100)\times\frac{2}{9}=\frac{660}{9}$ 呎/秒

$=50$ 哩/時.

23. 火車以60哩/時之速度迎面而來,其汽笛之振數,每秒爲2,000次.溫度爲15°C.求其相視振數.

〔解〕　由公式, $n_1=n_0\frac{V}{V-V_S}$,

15°C.時之音速(由題11) =341 粎/秒.

$V_s = 60$ 哩/時 $= 88$ 呎/秒.

$$= \frac{88 \times 12 \times 2.54}{100} \text{ 粎/秒} = 26.8 \text{ 粎/秒}.$$

$$\therefore \quad n_1 = 2,000 \times \frac{341}{341 - 26.8} = 2,170.$$

24. 某引擎以45呎/秒之速度迎面而來,其汽笛之高低與每秒振動 458 次之音叉相等.求汽笛之實在振數(音速 =1,100 呎/秒).

〔解〕　由公式,　$n_1 = n_0 \dfrac{V}{V - V_s}$,

$$\therefore \quad n_0 = n_1 \frac{V - V_s}{V} = 458 \times \frac{1,100 - 45}{1,100}$$

$$= 440.$$

25. 測音器之圓板上,有小孔 40.於 1 分 24 秒內,此板轉 500 周.設音波在空氣中傳播之速度爲 34,000 糎/秒,求此時所發之音之振數及其波長.

〔解〕　測音器發音之振數 $= \dfrac{nN}{t} = \dfrac{40 \times 500}{60 + 24}$

$$= 238.$$

又　$V = n\lambda$,

$$\therefore \quad \lambda = \frac{V}{n} = \frac{34,000}{238} = 143 \text{ 糎}.$$

26. 測音器有孔 200,每分鐘轉 132 周,其所發之音較音叉之音低一均.求音叉之振數.

〔解〕　測音器所發音之振數 $= \dfrac{nN}{t} = \dfrac{200 \times 132}{60}$

$$= 440.$$

∴音叉之振數 $=440\times2=880$.

27. 兩管所發之音,由原音及第一第二調音(Harmonics)所組成.設一管每秒振動256次,他管170次.試證有二調音可生每秒2次之唸.

〔解〕　甲管原音每秒之振數 $=256$,

甲管第一調音每秒之振數 $=512$,

甲管第二調音每秒之振數 $=768$,

乙管原音每秒之振數 $=170$,

乙管第一調音每秒之振數 $=340$,

乙管第二調音每秒之振數 $=510$.

今甲管第一調音之振數爲512,乙管第二調音之振數爲510,故每秒所生之唸數爲2.

28. 兩弦每秒之振數爲300及302次.求(1)原音,(2)第一倍音,每秒內所生之唸數.

〔解〕　(1)每秒之唸數 $=302-300=2$ 次.

(2)每秒之唸數 $=302\times2-300\times2=4$ 次.

29. 音叉A本與振動512之音叉B同音(In unison).設A銼短少許,則同時發音時,每秒得唸5次.求音叉A銼後之振數.

〔解〕　音叉A銼去少許後,其振數將增加少許.

∴ 音叉A之振數 − 音叉B之振數 = 每秒之唸數.

∴ 音叉A之振數 $=5+512=517$.

30. 兩音叉A與B,同時發音時,每秒生唸4次.A每秒之振數爲256,設B塗蠟則唸減.求B之振數.

〔解〕　音叉B塗蠟後,其質增,而其振數減,故

B之振數 $=256+4=260$.

2. 發音體之振動

31. 線長50糎,加以25瓩之張力,求其音之振數(設2粎長之線重4.79克).

〔解〕　由公式,

$$n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}=\frac{1}{2\times50}\sqrt{\frac{25\times1,000\times981}{4.79/200}}$$

$$=320.$$

設C之振數爲256,則該線所發之音爲E,因320/256 $=\frac{5}{4}$也.

32. 線長50糎,質量80克,其每秒之振數爲80.求張力.

〔解〕　$\because\quad n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}},$

$$\therefore\quad T=m(2ln)^2=\frac{80}{50}\times4\times50^2\times80^2$$

$$=1.024\times10^6\text{ 達}.$$

33. 兩等質、等粗、等長之線,一線之張力爲4磅,他線爲9磅.求兩音間之音程.

〔解〕　$\because\quad n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}},$

$$\therefore\quad \frac{n_1}{n_2}=\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}.$$

故兩音間之音程爲五度音程(Fifth)(C至G).

34. 兩等質、等長之線,其所受之張力爲1:3,張力大者其橫切面積大.設細線所發原音之振數爲粗線之兩倍,試比兩線之直徑.

〔解〕 設 D= 粗線之直徑, d= 細線之直徑.

由公式, $n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$.

單位長之質量,與其橫切面積成正比,

$$\therefore\quad \frac{2}{1}=\sqrt{\frac{1}{3}\times\frac{D^2}{d^2}},\quad 或\quad 2=\frac{D}{\sqrt{3}\,d}.$$

$$\therefore\quad d:D=1:2\sqrt{3}.$$

35. 欲使一弦之振數成5:2,求增加後之張力與原張力之比.又設張力不變,求該弦減短後之長.

〔解〕 由公式 $n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$,

得 $$\frac{n_1}{n_2}=\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}.$$

$$\therefore\quad \frac{T_2}{T_1}=\frac{n_2^2}{n_1^2}=\left(\frac{5}{2}\right)^2=25:4.$$

故增加後之張力與原張力之比為25:4.

又設張力不變,減其長,則

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{l_2}{l_1},$$

$$\therefore\quad \frac{l_2}{l_1}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{2}{5}.$$

故減短後之弦長為原長之2/5.

36. 近弦之中點,以橋架之.設弦之張力為8 瓩,敲弦之兩部,則每秒生唸 3.設張力增至11瓩,求每秒之唸數.

〔解〕 兩發音體振數之差等於每秒之唸數.

設 l_1=一部分弦之長, l_2=他部分弦之長,但$l_1<l_2$,
n'= 張力為11瓩時每秒之唸數.

由公式，　$n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$，

得　$n_1=\frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{T}{m}}$，　及　$n_2=\frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{T}{m}}$.

∴每秒之唸數 $=n_1-n_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{m}}\left(\frac{1}{l_1}-\frac{1}{l_2}\right)$.

但 l_1, l_2 與 m 爲常數,故

每秒之唸數 $\propto\sqrt{T}$.

$$\therefore\quad \frac{n'}{3}=\sqrt{\frac{11}{8}}.$$

$$\therefore\quad n'=3\sqrt{\frac{11}{8}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{11}{2}}=\frac{3}{2}\times2.345=3.52.$$

37.　弦長75糎,其第一倍音之振數爲200,張力爲4瓩.求兩支點間弦之質量.

〔解〕　由公式　$n=\frac{N}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$，

令　$N=2$，　得　$n=\frac{1}{l}\sqrt{\frac{T}{m}}$.

$$\therefore\quad m(\text{單位長之質量})=\frac{T}{n^2l^2}=\frac{2\times1{,}000\times981}{200^2\times75^2}=\frac{98.1}{75^2}$$

$$\therefore\quad \text{全弦之質量}=\frac{98.1}{75^2}\times75=1.308\text{ 克}.$$

38.　銅線密度8.5,半徑0.02糎,緊張於相距90糎之夾器中,其每糎之延長爲0.05糎.設銅線之楊率爲9.8×10^{11}達/平方糎.求其最低音之振數.

〔解〕　由公式，　$E=S/\delta$，　或　$S=E\delta$，

得　$T=SA=E\delta A=9.8\times10^{11}\times\frac{0.05}{100}\times\pi\times0.02^2$ 達，

$$\therefore\ n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}=\frac{1}{2\times 90}\sqrt{\frac{9.8\times 10^{11}\times 0.05\times \pi\times 0.02^2}{8.5\times \pi\times 0.02^2}}$$

$$=\frac{1}{180}\sqrt{\frac{9.8\times 10^{11}\times 0.05}{8.5}}=\frac{10,000}{180}\times\frac{3.130}{4.123}$$

$$=42.2.$$

39. 單弦每秒振動 100 次,設倍其長,變其張力,則每秒 150 次.求前後張力之比.

〔解〕 由公式, $n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$,

得 $$\frac{n_1}{n_2}=\frac{l_2}{l_1}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}.$$

$$\therefore\ \frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{n_1 l_1}{n_2 l_2}\right)^2=\left(\frac{100\times l_1}{150\times 2l_1}\right)^2=\frac{1}{9}.$$

故前後張力之比爲 1 : 9.

40. 同質之兩線 A 與 B, 其長爲 2 : 1, 直徑爲 1 : 2. 設 A 之張力爲 5 瓩,欲使 B 之音調與 A 相同,其張力幾何?

〔解〕 由公式, $n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$,

得 $$\frac{n_1 l_1}{n_2 l_2}=\sqrt{\frac{m_2 T_1}{m_1 T_2}}.$$

$$\therefore\ \frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{n_1 l_1}{n_2 l_2}\right)^2\frac{m_1}{m_2}.$$

今 $n_1=n_2$,

$$\therefore\ T_2=T_1\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2\frac{m_2}{m_1}=5\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{2}{1}\right)^2=5\text{ 瓩}.$$

41. 三線 A, B 與 C, 其長相等.設其重量之比爲 2 : 8 : 18, 張力之比爲 12 : 12 : 27, 求其振數之比.

〔解〕　由公式, $n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$,

$\therefore\ n_A:n_B:n_C=\sqrt{\frac{12}{2}}:\sqrt{\frac{12}{8}}:\sqrt{\frac{27}{18}}=2:1:1.$

42. 弦振動時分為三段,其張力為32克.設欲分為(1)四段,(2)五段,求其張力.

〔解〕(1)由公式, $n=\frac{N}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$,

弦分為三段與四段時,n、l 及 m 均相等,

$$\therefore\ \frac{N_1}{N_2}=\sqrt{\frac{T_2}{T_1}},$$

$\therefore$ 弦分為四段時之張力 $T_2=T_1\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2=32\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$

$=18$ 克.

(2)同理,得

弦分為五段時之張力 $T_2=32\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=11.5$ 克.

43. 塗煙煤之玻璃垂直繫於振動之音叉前.音叉有針,玻璃因動下墮時,波形刻其上.設於距離 d(自起至終)內之波數為N,試證音叉之振數為 $N/\sqrt{2d/g}$.

〔解〕　$\because\ n=1/T$,

$$d=\frac{1}{2}g(NT)^2,$$

$\therefore\ T=\sqrt{2d/g}\,/N,$

$n=1/T=N/\sqrt{2d/g}.$

44. 黃銅棒長 $1\frac{1}{2}$ 米,其楊率為 1.02×10^{12} 達/平方糎,

密度爲8.5克/立方糎.設固定其中央,求縱振動之振數.

〔解〕　由公式，　$n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}=\frac{1}{300}\sqrt{\frac{1.02\times10^{12}}{8.5}}$

$=1,154.$

45.　玻璃棒長70糎,緊夾其中央,以濕布擦之使之縱振動.設振數爲3,000,求玻璃內之音速.

〔解〕　由公式，　$n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$　及　$V=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$,

得　　$n=V/2l.$

$\therefore\quad V=2ln=2\times70\times3,000=4.2\times10^5$ 糎/秒.

46.　共振管(Resonance tube)直徑2糎,當水面上之空氣柱高15.5糎時,則與振數512之音叉得最強之音調,求(a)該音調之波長,(b)音在空氣中之速度.

〔解〕　(a)由公式，　$\lambda=4l$,

$l=15.5+0.6\times\frac{2}{2}=16.1$糎,

得　$\lambda=4\times16.1=64.4$ 糎.

(b)　$V=n\lambda=512\times64.4=32,980$ 糎/秒.

47.　於風琴之閉管內,吹入0°C.之空氣,則得C音調(振數256).求管長.

〔解〕　由公式，　$n=V/4l$,

設　$V=33,200$ 糎/秒,

得　$l=\frac{V}{4n}=\frac{33,200}{4\times256}=32.4$糎.

48.　音在水中之速度爲1440粎/秒.一閉管滿貯以水,適能與振數256之音叉共振,求管長.設一較長之管亦能與該音叉共振,求此管之長.

〔解〕　由公式，$n=V/4l$,

得　$$l=\frac{V}{4n}=\frac{1,440}{4\times 256}=1.406\text{ 粎}.$$

由公式，$n=V/4l$, 知振數與管長為反比,故管長增,則振數減.又其倍音之倍數常為 3、5 等,由是知該管之振數,必為 256 之 $\frac{1}{3}$ 倍.

$$\therefore\quad l=\frac{1,440}{4\times\frac{1}{3}\times 256}=1.406\times 3=4.218\text{ 粎}.$$

49.　風琴管(Organ pipe)長 83 糎,吹入 0°C.之空氣,求其音調之振數.

〔解〕　由公式，$n=V/2l$,

設　$V=33,200$ 糎/秒,

得　$$n=\frac{33,200}{2\times 83}=200.$$

50.　以沸油熱風琴管,使其溫度由 16°C. 增至 127°C. 求其對於音調之效應.

〔解〕　由公式，$n=V/2l$,

音速 V 與絕對溫度 T 之平方根成正比,

得　$$\frac{n_1}{n_2}=\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}=\sqrt{\frac{273+16}{273+127}}=\frac{17}{20},$$

故其音之振數與原振數成 20 與 17 之比.

51.　風琴管所發音之振數為 120. 設吹以較強之氣,則得振數 240 之音調.問該管為開管抑為閉管?

〔解〕　開管倍音之倍數常為 2、3、4 等連續整數,今 240 適為 120 之 2 倍,故該管為開管.

52. 某溫度時口笛所發音之振數,爲18°C.時之$\frac{9}{8}$倍.求該溫度.

〔解〕 由題50,得 $\frac{n_1}{n_2}=\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$,

$\therefore \quad T_2=T_1\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2=(273°+18°)\left(\frac{9}{8}\right)^2=291°\times\frac{81}{64}$

$=368°.3\,C.$

$\therefore$ 該溫度 $=368°.3-273°=95°.3C.$

53. 風琴管於朝晨(溫度15°C.)吹之,其音之振數爲256,於晚上吹以較強之氣,則其音之振數爲516.求晚上之溫度.

〔解〕 開管倍音之最小倍數爲2,故晚上所發原音之振數 $=516\times\frac{1}{2}=258.$

$\therefore \quad T_2=T_1\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2=(273°+15°)\left(\frac{258}{256}\right)^2=288°\times\left(\frac{129}{128}\right)^2$

$=292°.4C.$

$\therefore$ 晚上之溫度 $=292°.4-273°=19°.4C.$

54. 兩風琴管:一爲開管,一爲閉管,其所發之音調相同,求兩管之比.

〔解〕 設 $l_o=$ 開管之長, $n_o=$ 開管之振數,

$l_c=$ 閉管之長, $n_c=$ 閉管之振數,

由公式,得 $n_o=\frac{V_0}{2l_0}$ 及 $n_c=\frac{V_0}{4l_0}.$

今 $n_o=n_c$,

$\therefore \quad \frac{V_0}{2l_0}=\frac{V_0}{4l_0}.$

$$\therefore \quad l_o : l_c = 2 : 1.$$

55. 兩風琴管:一爲開管,一爲閉管,各長3呎.設音速爲1,120呎/秒,求其原音及主要倍音之振數.

〔解〕(1)開管.

原音之振數 $=\dfrac{V}{2l}=\dfrac{1,120}{2\times 3}=186.7.$

第一倍音之振數 $=186.7\times 2=373.3.$

第二倍音之振數 $=186.7\times 3=560.$

第三倍音之振數 $=186.7\times 4=746.7.$

(2)閉管.

原音之振數 $=\dfrac{V}{4l}=\dfrac{1,120}{4\times 3}=93.3.$

第一倍音之振數 $=93.3\times 3=280.$

第二倍音之振數 $=93.3\times 5=466.7.$

第三倍音之振數 $=93.3\times 7=653.3.$

56. 兩開管A與B,A長2呎9吋,B較A長$\frac{1}{2}$吋,設同時發音,每秒得唸3.求此時空氣中之音速.

〔解〕由公式, $n=V/2l,$

得 $n_A=\dfrac{V}{2\times 2\frac{9}{12}}=\dfrac{6V}{33},$

及 $n_B=\dfrac{V}{2\left(2\frac{9}{12}+\frac{1}{12\times 2}\right)}=\dfrac{12V}{67},$

但 $n_A-n_B=3.$

$$\therefore \quad \frac{6V}{33}-\frac{12V}{67}=3,$$

$$67\times 6V-12\times 33V=3\times 33\times 67.$$

$$\therefore\quad V=1{,}105.5\text{ 呎/秒}.$$

57. 空氣柱及音叉同時發音(音叉之音低於空氣柱之音),空氣溫度為15°C.,每秒生唸 4. 當溫度降至10°C.時,每秒生唸 3. 求音叉之振數.

〔解〕　設n= 音叉之振數, V_0= 空氣0°C.時之音速,

l= 空氣柱之長,

則　$$\frac{V_0}{2l}\sqrt{\frac{273+15}{273}}-n=4,$$

或　$$\frac{V_0}{2l}\sqrt{\frac{288}{273}}=4+n,\qquad\cdots\cdots(1)$$

又　$$\frac{V_0}{2l}\sqrt{\frac{273+10}{273}}-n=3,$$

或　$$\frac{V_0}{2l}\sqrt{\frac{283}{273}}=3+n,\qquad\cdots\cdots(2)$$

(1)/(2):　$$\sqrt{\frac{288}{283}}=\frac{4+n}{3+n},$$

$$3\sqrt{288}+n\sqrt{288}=4\sqrt{283}+n\sqrt{283},$$

$$\therefore\ n=\frac{4\sqrt{283}-3\sqrt{288}}{\sqrt{288}-\sqrt{283}}=110.5.$$

58. 設音速為 335.3 粎/秒.有一開管及一音叉於此,音叉之音,較開管所發之音略低,音叉之振數為 256. 令兩者同時發音,則每秒生唸 8 次.然則欲使兩者發出同一音調時,應如何變更管長?

〔解〕　欲使減開管之振數,必增其管長.

設 l_0= 管之原長, l= 管所增加之長.

由題意,得　$$\frac{335.3\times100}{2l_0}-256=8,$$

$$2l_0\times264=335.3\times100,$$

$$\therefore\quad l_0=\frac{335.3\times100}{2\times264}.$$

又　$$\frac{335.3\times100}{2(l_0+l)}-256=0.$$

$$\therefore\quad l=\frac{335.3\times100}{2\times256}-l_0=\frac{335.3\times100}{2}\left(\frac{1}{256}-\frac{1}{264}\right)$$

$$=1.986\text{ 糎}.$$

59. 設空氣中之音速為340米/秒,由長100糎之開管發出最初之三個倍音,其波長及振數各若干?

〔解〕　原音之振數 $n=\frac{V}{2l}=\frac{340\times100}{2\times100}=170.$

(1)第一倍音.

振數 $=2n=2\times170=340.$

波長 $=\frac{340\times100}{340}=100$ 糎.

(2)第二倍音.

振數 $=3n=3\times170=510.$

波長 $=\frac{340\times100}{510}=66.7$ 糎.

(3)第三倍音.

振數 $=4n=4\times170=680.$

波長 $=\frac{340\times100}{680}=50$ 糎.

60. 欲使開管所發之第三倍音,與閉管所發之第二倍音,成為同調,則兩者之長短之比若何?

〔解〕 設 l_o＝開管之長，l_c＝閉管之長，
則開管第三倍音之振數 $=4n=4V/2l_o=2V/l_o$，
　閉管第二倍音之振數 $=5n=5V/4l_c$.
但兩音同調時其振數必等.

$$\therefore \quad \frac{2V}{l_o}=\frac{5V}{4l_c}.$$

$$\therefore \quad l_o : l_c = 8 : 5.$$

第九章　光學

定義、定律、及公式.

1. 亮度與光度.

亮度(Intensity of illumination).——一物之表面(與光線垂直之表面)單位面積上,於單位時間內所受之光量,曰此表面之亮度.

設 $I=$ 一點之亮度,　$C=$ 燭光,

$d=$ 此點與光源間之距離,

則 $$I=C/d^2.$$

反平方定律 (Law of inverse square).——以 d 爲半徑作球面,設燭火 C 置於中點,則球面每點之亮度爲 I,

$$\text{球面積}=4\pi d^2.$$

$$\therefore\ \text{燭火 } C \text{ 所放之總光量}=4\pi d^2 I.$$

但由 Gauss's Law,

$$\text{燭火 } C \text{ 所放之總光量}=4\pi C.$$

$$\therefore\ 4\pi d^2 I=4\pi C,$$

$$\therefore\ I=C/d^2.$$

由是得 $I_1=\dfrac{C}{d_1^2}$,　及　$I_2=\dfrac{C}{d_2^2}$.

$$\therefore\ \frac{I_1}{I_2}=\frac{d_2^2}{d_1^2}.$$

故各點之亮度,與該點至光源間之距離之平方成反比.

光度 (Illuminating power). —— 一光源之光度等於其單位距離之亮度.

光度計 (Photometer): 測定光度之裝置曰光度計.

設 C_1 = 已知光源距紙屏 (Screen) d_1 之光度,

C_2 = 欲測光源距紙屏 d_2 之光度.

移動欲測之光源,使兩者之光在紙屏上之亮度相等,於是

$$\frac{C_1}{d_1^2}=\frac{C_2}{d_2^2}, \text{或} \ \frac{C_2}{C_1}=\frac{d_2^2}{d_1^2}.$$

2. 光之反射與平鏡.

反射定律 (Law of Reflection). ——

(1) 投射光線 (Incident ray), 反射光線 (Reflected ray), 及反射面之法線 (Normal), 在同一平面內.

(2) 投射角等於反射角.

光反射後之偏向 (Deviation). —— 一光線經二次反射後,其偏向之程度一定,其值僅視兩反射面間之角度而異.

設 θ = 兩反射面間之傾斜角,

則 偏向 $=2\pi-2\theta$.

平鏡 (Plane mirror) 中一點之物像 (Image). —— 平鏡中一點之物像,位於由此點所作垂直於鏡面之垂線內;該物像與鏡面之距離等於此點與鏡面之距離.

傾斜平鏡 (Inclined mirrors).——設兩平鏡間作 θ 之傾

斜時,其物像之總數 n,可由下式得之,

$$n=360/\theta-1.$$

3. 球 鏡

球鏡之普遍公式:

設 u= 實物(Object)與鏡面間之距離,

v= 物像與鏡面間之距離,

r= 球鏡之曲率半徑(Radius of curvature),

f= 焦點距離(Focal length 即主焦點 Principal focus 與鏡面間之距離),

則
$$\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{2}{r}.$$

但
$$r=2f.$$

故又得
$$\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f}.$$

v、u 與 f 之正負.——各量均自鏡面度之,其方向之與投射光線相同者,則其符號爲負;其與投射光線相反者,則爲正.換言之即鏡前之距離爲正,鏡後之距離爲負.

凸鏡(Convex mirror)之 f 與 v 皆爲負.

凹鏡(Concave mirror)之 f 爲正;其 v 之正負爲視物像之實虛(Real and virtual)而定,實者爲正,虛者爲負.

物像之大小.——實物與物像之大小之比,等於 u 與 v 之比.

設 AB= 實物之高, ab= 物像之高,

則
$$\frac{AB}{ab}=\frac{u}{v}.$$

4. 光之屈折

屈折定律(Law of Refraction):

(1)投射線,屈折線與表面之法線,同在一平面內.

(2)投射角之正弦對於屈折角之正弦之比,等於光波在第一媒質內傳播之速度,對於其在第二媒質內傳播之速度之比;此比曰由第一媒質進入第二媒質時之屈折率(Index of refraction).

設 i = 投射角,　　r = 屈折角,

V_1 = 光在第一媒質內之速度,

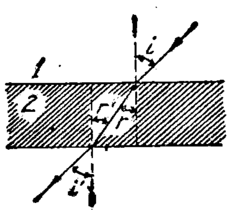
V_2 = 光在第二媒質內之速度,

μ_{12} = 光由第一媒質進入第二媒質時之屈折率,

則 $$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{V_1}{V_2}=\mu_{12}.$$

連續數次之屈折.

(1)如圖,其第一媒質爲空氣,第二媒質爲平板之物質.



第一屈折時,　$$\frac{\sin i}{\sin r}=\mu_{12},$$

第二屈折時,　$$\frac{\sin r'}{\sin i'}=\mu_{21}.$$

因　$r=r'$,　$i=i'$,

故　$\mu_{21}=1/\mu_{12}$.

即第二媒質對於第一媒質之屈折率,等於第一媒質對於第二媒質之屈折率之逆數.

(2)又設兩平行板相重時,

則 $$\mu_{23}=\frac{\mu_{13}}{\mu_{12}}.$$

卽第二媒質對於第三媒質之屈折率,等於第一媒質對於第三媒質之屈折率,除以第一媒質對於第二媒質之屈折率.

透明物體之視厚(Apparent thickness).——透明物體之視厚,等於該物體之實厚,除以空氣對於該物體之屈折率.

設 $d_a=$ 實厚, $d_P=$ 視厚,

則 $$d_P=d_a/\mu.$$

臨界角(Critical angle).——臨界角爲屈折角 90° 時之投射角.

完全反射(Total reflection).——光線由密度較密之媒質進入較疎之媒質時,設其投射角大於臨界角,則其光線完全反射.

5. 透　鏡

單球面物體之屈折之公式:

設 $r_1=$ 該球面物體之曲率半徑,

$v=$ 物像與球面間之距離,

$u=$ 實物與球面間之距離,

$\mu=$ 該球面物體之屈折率,

則 $$\frac{\mu}{v}-\frac{1}{u}=\frac{\mu-1}{r_1}.$$

定 v、u 與 r_1 符號正負之法,與球鏡同;卽凡由透鏡

向投射光線方向所取之距離爲負,由透鏡背投射光線方向所取之距離爲正.

兩球面物體卽透鏡(Lens)之屈折之公式:

設 r_1 = 第一球面(卽近實物之球面)之曲率半徑,

r_2 = 第二球面之曲率半徑,

則
$$\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=(\mu-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{1}{f}.$$

定 v、u、r_1 與 r_2 符號正負之法,與上同.

於凹透鏡(Concave lens)中,其 v、u 與 f 之符號恆爲正;於凸透鏡(Convex lens)中,f 恆爲負.

實物與物像之大小.——

設 AB = 實物之大小, ab = 物像之大小,

則
$$\frac{AB}{ab}=\frac{v}{u}.$$

複透鏡(Combination of lenses).——

(1)如若干焦點距離 f_1、f_2、f_3 …… 之透鏡相互緊接,則成複透鏡.其合成焦點距離F,可由下式求之:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\frac{1}{f_3}+\cdots\cdots\cdots.$$

(2)兩透鏡相距離 d 時,其合成焦點距離可由下式求之:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\frac{d}{f_1f_2}.$$

6. 光器與稜鏡

明視距離(Distance of distinct vision).——在調節範圍

內,使眼不感疲勞,又能得最明瞭之視覺之距離,曰明視距離.

近視 (Short-sight) 與遠視 (Long-sight).——

(1) 近視.

設 v = 眼之水晶體與網膜間之距離,

d = 遠點 (Far point),

d_1 = 用眼鏡後,其最大之明視距離,

f = 水晶體之焦點距離,

則其所需眼鏡之焦點距離 f_1,可由下式得之:

$$\frac{1}{v}-\frac{1}{d}=\frac{1}{f},\qquad\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{1}{v}-\frac{1}{d_1}=\frac{1}{f}+\frac{1}{f_1},\qquad\cdots\cdots(2)$$

於(1),(2)兩式,消去 v 與 f,又得

$$\frac{1}{f_1}=\frac{1}{d}-\frac{1}{d_1}.\qquad\cdots\cdots(3)$$

(2) 遠視.

其公式則與近視同,惟其式內 d = 近點 (Near point) 距離, d_1 = 用眼鏡後,其最小之明視距離.

度 (Dioptre). —— 透鏡焦點距離(以米作單位)之逆數,謂之該透鏡之度.眼鏡之作用之程度,恆以度表之.

光器之倍率 (Magnification). ——

(1) 單顯微鏡 (Simple microscope) 之倍率.

設 f = 透鏡之焦點距離(以糎表之),

M = 單顯微鏡之倍率,

d = 最小明視距離(普通爲 25 cm.),

則 $$M=1-\frac{d}{f}.$$

(2) 複顯微鏡(Compound microscope)之倍率,

設 M = 該顯微鏡之倍率,

M_1 = 物鏡(Objective)之倍率,

M_2 = 目鏡(Eye-piece)之倍率,

d = 最小明視距離,

L = 物鏡與目鏡間之距離,

f_1 = 物鏡之焦點距離,

f_2 = 目鏡之焦點距離,

v = 物像與鏡之距離,

u = 實物與鏡之距離,

則 $M_1=\frac{v}{u}$, 及 $M_2=\left(1-\frac{d}{f_2}\right)$.

$$\therefore \quad M=M_1M_2=\frac{v}{u}\left(1-\frac{d}{f_2}\right)\doteq Ld/f_1f_2(約)$$

(3) 天體望遠鏡(Astronomical telescope)之倍率

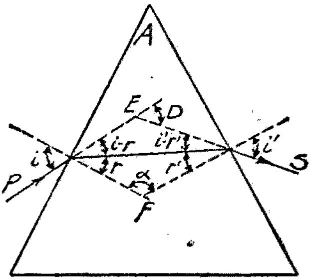
$$M=f_1/f_2.$$

(4) 伽利略望遠鏡(Galilean telescope)之倍率.

$$M=f_1/f_2.$$

稜鏡(Prism).——由水晶,玻璃等透明體而成之三角柱,曰稜鏡.其容光通過之兩側面所夾之角,曰屈折角(Refracting angle).

偏向(Deviation).——光線通過稜鏡後所生之方向變化,曰偏向.



設 $D=$ 偏向,

如圖,得 $D=(i+i')-(r+r')$,

$A=r+r'$,

$A+D=i+i'$.

最小偏向(Minimum deviation).——D成爲最小時,特稱之曰最小偏向.

當 $i=i'$, $r=r'$ 時,D成爲最小.

由 $i=\frac{1}{2}(A+D)$, $r=\frac{1}{2}A$, 及

$$\mu=\frac{\sin i}{\sin r},$$

得 $$\mu=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+D)}{\sin\frac{1}{2}A}.$$

因此,D及A測得後,其屈折率即可算出.

計算問題

1. 亮度與光度

1. 一標準燭與紙屏相距1呎;於他邊距紙屏12呎處,置以9燭光之電燈.試比紙屏兩邊之亮度.

〔解〕 $I_1=$ 標準燭光照於紙屏上之亮度 $=\frac{1}{1^2}=1$,

$I_2=$ 電燈光照於紙屏上之亮度 $=\frac{9}{12^2}=\frac{1}{16}$,

$$\therefore \quad \text{紙屏兩邊亮度之比} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16:1.$$

2. 承前題,設欲使紙屏兩邊之亮度成 1 與 16 之比,問電燈須向紙屏移近若干?

〔解〕 設 $d=$ 電燈向紙屏移近之距離,

則 $$I_1 = \frac{1}{1^2} = 1,$$

$$I_2 = \frac{9}{(12-d)^2},$$

$$\therefore \quad \frac{I_1}{I^2} = \frac{1}{\frac{9}{(12-d)^2}} = \frac{1}{16},$$

$$\therefore \quad 16 = \frac{9}{(12-d)^2},$$

$$\therefore \quad d = 12 - \frac{3}{4} = 11.25\ \text{呎}.$$

3. 月球與地球之距離為 240,000 哩.月光照於地面之亮度與一標準燭在距離 4 呎處之亮度相等.間月光合成燭光數若干?

〔解〕 設 $C=$ 月光合燭光數,

$$\therefore \quad \frac{C}{(240{,}000 \times 5{,}280)^2} = \frac{1}{4^2},$$

$$\therefore \quad C = (240{,}000 \times 5{,}280/4)^2 = 10{,}036{,}224 \times 10^{10}\ \text{燭光}$$

4. 標準燭與洋油燈相離 6 呎.如洋油燈為 4 燭光欲紙屏對於兩者得相等之亮度,問須放在何處?

〔解〕 設燭置於左,燈置於右,

$x=$ 標準燭與紙屏間之距離,

則　$6-x=$洋油燈與紙屏間之距離,

$$\therefore\quad \frac{1}{x^2}=\frac{4}{(6-x)^2},$$

$$(6-x)^2=4x^2,$$

開平方,　$6-x=\pm 2x,$

$$\therefore\quad x=+2\ 或\ -6,$$

故紙屏須在兩者連結線上,放於燭右 2 呎,或燭左 6 呎處.

5.　試求燭光 400、高 16 呎之日光燈 (Sunbeam lamp) 及燭光 1,000、高 40 呎之弧光燈於地板上之亮度之比.

〔解〕 $I_1=$日光燈照於地板上之亮度$=\frac{400}{16^2}=\frac{25}{16},$

$I_2=$弧光燈照於地板上之亮度$=\frac{1,000}{40^2}=\frac{5}{8},$

$$\therefore\quad \frac{I_1}{I_2}=\frac{25}{16}\Big/\frac{5}{8}=\frac{25}{16}\times\frac{8}{5}=5:2.$$

6.　設煤氣每 1,000 立方呎,價 2 元;電每度價 0.2 元.今 60 燭光之煤氣燈,每時用煤氣 3 立方呎,50 燭光之電燈,於 40 小時用電 2 度.求兩者之價之比.

〔解〕　每燭光每小時所用之煤氣價

$$=\frac{2}{1,000}\times 3\times\frac{1}{60}=0.0001,$$

每燭光每小時所用之電價

$$=0.2\times\frac{2}{40}\times\frac{1}{50}=0.0002.$$

$\therefore$ 電價為煤氣價之 2 倍.

7.　兩光源各 2 燭光,置於本生光度計之一邊,一與

油點之距離為 1 呎,一為 2 呎.第三光源光度 5 燭光,置於光度計之他邊,欲使兩邊之亮度相等,問第三光源與油點間之距離為若干?

〔解〕 設 d＝第三光源與油點間之距離,

則
$$\frac{2}{1^2}+\frac{2}{2^2}=\frac{5}{d^2},$$
$$\frac{5}{2}=\frac{5}{d^2},$$
$$\therefore\quad d^2=2,$$
$$\therefore\quad d=\sqrt{2}=1.414\text{ 呎}.$$

8. 兩光源 A 與 P,距油點 1 呎與 4 呎時,可使油點得相等之亮度.設 B 與油點之距離為 8 呎,求 A 與油點之距離.

〔解〕 設 C_1＝光源 A 之光度,C_2＝光源 B 之光度,
d＝光源 B 與油點之距離為 8 呎時,光源 A 與油點之距離,

由題得
$$\frac{C_1}{1^2}=\frac{C_2}{4^2},$$
$$\therefore\quad \frac{C_1}{C_2}=\frac{1}{16}\cdots\cdots(1)$$

又
$$\frac{C_1}{d^2}=\frac{C_2}{8^2},\text{ 或 }\frac{C_1}{C_2}=\frac{d^2}{8^2}\cdots\cdots(2)$$

(1)＝(2)
$$\therefore\quad \frac{d^2}{8^2}=\frac{1}{16},$$
$$\therefore\quad d=2\text{ 呎}.$$

9. 電燈與紙屏間距離為85糎時,則得某亮度.設置一玻璃於紙屏與電燈間,則將電燈向紙屏移近 5 糎後,

始得同一亮度.問玻璃阻去之光之之百分數.

〔解〕　設　x= 玻璃阻去之光之百分數,

C= 電燈之光度,

則
$$\frac{C}{85^2}=\frac{C(1-x)}{(85-5)^2}.$$

$$\therefore\quad (1-x)=\frac{80^2}{85^2}=\frac{16^2}{17^2}=0.8858,$$

$$\therefore\quad x=1-0.8858=11.42\%.$$

10.　一室墻高 3.5 呎,闊 7.5 呎.設所需之亮度為 25 呎燭,又設 $\frac{3}{4}$ 之光係反射光,求所需之燭光.

〔解〕　設 C= 所需之燭光,

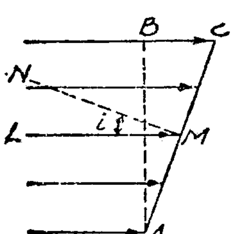
而墻之面積 =3.5×7.5 平方呎,

墻上之燭光 =25×3.5×7.5,

則　$C=25\times3.5\times7.5\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=164$ 燭光.

11.　某表面與光源(光度 C)之距離為 d,光之投射角為 i,則其表面之亮度為 $\frac{C}{d^2}\cos i$,試證明之.

〔解〕　如圖,∠LMN=i,



又　∠BAC=∠LMN=i,

設面 BA 之面積 =S,

面 CA 之面積 =S′,

面 BA 之亮度 =I,

面 CA 之亮度 =I′,

面BA與CA上所受之光量必相等,

故　　$IS = I'S'$.

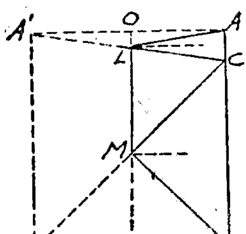
但　　$I = \frac{C}{d^2}$,　　及　　$S = S'\cos i$,

$$\therefore \quad I' = \frac{IS}{S'} = \frac{C}{d^2} \cdot \frac{S'\cos i}{S'} = \frac{C}{d^2}\cos i.$$

2. 光之反射與平鏡

12. 人高5呎10吋,欲見全身之像,問最短直立之平鏡,須高幾何?

〔解〕 設LM爲直立平鏡,AB爲人高,C爲人之目.



於$\triangle AA'C$內,因$A'O = OA = \frac{1}{2}AA'$,

及 $A'B' \parallel ON \parallel AB$,

$$\therefore \quad A'L = LC = \frac{1}{2}A'C.$$

於$\triangle A'CB'$內,因$LC : A'C = 1 : 2$,

$$\therefore \quad \frac{LM}{A'B'} = \frac{LC}{A'C} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \quad LM = \frac{1}{2}A'B'.$$

但$A'B' = AB$.

$$\therefore \quad LM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times (5 \times 12 + 10) = 35\text{ 吋}.$$

13. 設某人行近平鏡,則鏡中之像以同一速度行動;

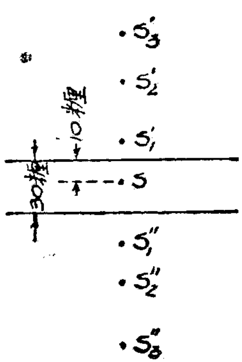
設平鏡移近某人,則其像以 2 倍之速度行近該人.試證之.

〔解〕　因某人未行近平鏡時與平鏡之距離,等於其像與平鏡之距離;某人行近後,兩者之距離相等,故像行動之速度與該人相等.

設鏡移近距離 d,則其像與鏡面之距離亦近 d.而像與該人間之距離則近 2d,故其像移近之速度爲鏡之 2 倍.

14.　兩平行平鏡 A 與 B 相距30糎.一物置其間(與 A 之距離爲10糎),求各鏡最近三像與其鏡面之距離.

〔解〕　由圖,物體 S 於 A 生像 S_1',於 B 生像 S_1'';像 S_1' 於 B 復生像 S_2'',像 S_1'' 於 A 復生像 S_2';像 S_2' 於 B 復生像 S_3'',像 S_2'' 於 A 復生像 S_3'.



故 S_1' 與 A 之距離 $=10$ 糎,

S_1'' 與 B 之距離 $=20$ 糎,

S_2' 與 A 之距離 $=AS_1''=30+20$
$=50$ 糎,

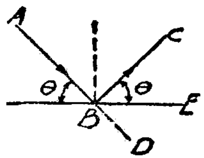
S_2'' 與 B 之距離 $=BS_1'=30+10$
$=40$ 糎,

S_3' 與 A 之距離 $=AS_2''=30+40$
$=70$ 糎,

S_3'' 與 B 之距離 $=BS_2'=30+50$
$=80$ 糎,

15.　光線與平鏡作 θ 之角,試證反射與投射光線作 2θ 之角.

〔解〕　觀圖可知反射光線與投射光線間之角度



$=$ 反射光線之偏向角度

$= \angle CBD$

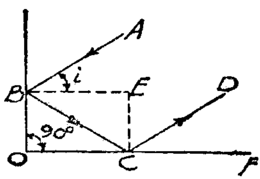
$= \theta + \angle EBD.$

但 $\angle EBD = \theta,$

$\therefore$ 反射光線與投射光線間之角度 $= \theta + \theta = 2\theta.$

16. 兩平鏡互成直角,試證光線反射後之方向與原方向平行.

〔解〕 在下圖中, 設 i= 光線之投射角,



則 $\angle ABE = i,$

$\angle EBC = i,$

$\angle BCO = \angle EBC = i.$

又 $\angle BCO = \angle DCF,$

$\therefore \angle DCF = i.$

因 BE與OF平行, $\angle ABE = \angle DCF = i,$

$\therefore$ AB與CD平行.

以上結果,亦可由偏向公式得之,

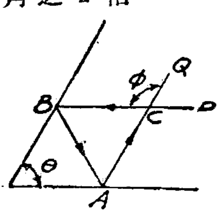
$$偏向 = 2\pi - 2\theta,$$

$$= 2\pi - 90^\circ \times 2 = 180^\circ.$$

因反射光線之偏向為180°,故與原光線平行

17. 兩直立平鏡A與B,一光線 PB 射入鏡B,反射後抵A.試證鏡A之反射光線AQ與PB所成之角為兩鏡間之角之2倍

〔解〕



設 AQ與PB所成之角 $= \phi,$

兩鏡間之角度 $= \theta,$

由圖, $\phi = 360^\circ -$ 偏向.

但 偏向 $= 2\pi - 2\theta,$

$\therefore \phi = 360^\circ - (2\pi - 2\theta) = 2\theta.$

18. 兩平鏡A與B作θ之角.設平行A鏡之光線經二次反射後與鏡B平行,求θ之值.

〔解〕　由上圖　偏向 $=180^\circ+\angle QCP$
$=180^\circ+\theta,$

但　偏向 $=2\pi-2\theta,$

$$\therefore\quad 180^\circ+\theta=2\pi-2\theta,$$

$$\therefore\quad \theta=60^\circ.$$

19. 欲使反射光線與投射光線恆作 40° 之角,求兩平鏡之裝置法(偏向 $=\pi+40^\circ$).

〔解〕　是可由兩傾斜平鏡得之.

由公式,　偏向 $=2\pi-2\theta,$

及　偏向 $=180^\circ+40^\circ=220^\circ,$

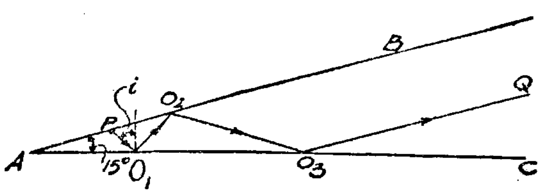
得　$2\pi-2\theta=220^\circ,$

$$\therefore\quad \theta=70^\circ.$$

故兩者須成 70° 之角.

20. 兩平鏡AB與AC作 15° 之角, P為AB內之一點.欲使其光線經三次反射後與 AB 平行,求 P點光線在AC上之投射角.

〔解〕



$$\because\quad O_3Q \parallel AB,$$

$$\therefore\quad \angle QO_3C=\angle BAC=15^\circ.$$

設 P點光線於O_1之投射角 $=i,$

則　$\angle PO_1A=\angle O_2O_1O_3=90^\circ-i,$

$$\angle AO_2O_1 = \angle O_2O_1O_3 - 15^\circ = 90^\circ - i - 15^\circ$$
$$= 75^\circ - i,$$

$\therefore\quad \angle BO_2O_3 = \angle AO_2O_1 = 75^\circ - i. \cdots\cdots\cdots (1)$

又 $\quad \angle BO_2O_3 = 15^\circ + \angle O_2O_3O_1 = 15^\circ + \angle QO_3C$
$= 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ \cdots\cdots\cdots (2)$

(1)=(2): $\quad 75^\circ - i = 30^\circ,$

$\therefore\quad i = 45^\circ.$

21. 兩平鏡作 60° 之角,其間置一物,求所造成之像數.

〔解〕 由公式, $\quad n = 360^\circ/\theta - 1$
$= 360^\circ/60^\circ - 1$
$= 5.$

3. 球 鏡

22. 物體置於凹鏡前 3 呎處,其像生於鏡前 1 呎處;求該鏡之焦點距離.

〔解〕 由公式, $\quad \dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{f},$

令 $\quad u = +3, \quad v = +1,$

得 $\quad \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{f},$

$\therefore\quad f = \dfrac{3}{4}$呎 $= 9$ 吋.

23. 凹鏡之曲率半徑為30糎.一物體置於鏡前60糎處,求像之位置.

〔解〕 由公式, $\quad \dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{u} = \dfrac{2}{r},$

得　$$\frac{1}{v}=\frac{2}{r}-\frac{1}{u}=\frac{2}{30}-\frac{1}{60}=\frac{1}{20},$$

$$\therefore\ v=20\text{糎}.$$

故像生於鏡前20糎處.

24. 長1糎之燭,置於焦點距離30糎之凹鏡前36糎處,求物像之性質,位置及其大小.

〔解〕　$\because\quad f=+30$糎,　$u=+36$糎,

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{v}=\frac{1}{f}-\frac{1}{u}=\frac{1}{30}-\frac{1}{36}=\frac{1}{180},$$

$$\therefore\ v=+180\text{糎}.$$

故像之位置在鏡前180糎處.因v為正,故其像為倒立之實像.

又　$$\frac{AB}{ab}=\frac{u}{v},$$

$$\therefore\quad ab=AB\frac{v}{u}=1\times\frac{180}{36}=5\text{糎}.$$

故物像長5糎.

25. 設前題之燭在鏡前15糎處,又將何如?

〔解〕　$$\frac{1}{v}=\frac{1}{f}-\frac{1}{u}=\frac{1}{30}-\frac{1}{15}=-\frac{1}{30},$$

$$\therefore\ v=-30\text{糎}.$$

故其像為直立之虛像,生於鏡後30糎處.

又　$$ab=AB\frac{v}{u}=1\times\frac{30}{15}=2\text{糎}.$$

故其像之長為實物之2倍,即2糎.

26. 設置物體於凹鏡及其主焦點之中點,則其像之大爲實物之 2 倍,試證之.又其像之性質如何?

〔解〕　由題意,　$u=+\frac{f}{2}$,

則　$$\frac{1}{v}=\frac{1}{f}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f}-\frac{1}{\frac{f}{2}}=-\frac{1}{f}.$$

$$\therefore\quad v=-f.$$

$$\therefore\quad \frac{ab}{AB}=\frac{v}{u}=\frac{f}{\frac{f}{2}}=2:1.$$

故其像爲直立之虛像,其大小爲實物之 2 倍.

27. 凹鏡之實像之大小爲實物之 3 倍.設實物與鏡面之距離爲 1 呎,求鏡之焦點距離.

〔解〕　由題得,　$\frac{AB}{ab}=\frac{u}{v}=\frac{1}{3}$,

$$\therefore\quad v=3u=3\times1=3.$$

又由公式,　$$\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f},$$

得　$$\frac{1}{3}+\frac{1}{1}=\frac{1}{f},$$

$$\therefore\quad f=\frac{3}{4}\text{呎}=9\text{吋}.$$

28. 燭與屏相距 8 呎.欲使屏現出 3 倍大之實像,問須用何種球鏡?並須置於何處?

〔解〕　惟凹鏡能生實像,故須用凹鏡.

由題意,　$\frac{ab}{AB}=\frac{v}{u}=3.$

$$\therefore\quad v=3u\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 $$\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f} \cdots\cdots (2)$$

$$v=u+8 \cdots\cdots (3)$$

(1)=(3): $3u=u+8,$

$$\therefore\ u=4\text{ 呎}.$$

u 代入 (1): $v=3\times4=12$ 呎.

u 與 v 代入 (2): $$\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{f},$$

$$\therefore\ f=+3\text{ 呎}.$$

故所求凹鏡之焦點距離 3 呎,其位置與實物相距 4 呎.

29. 光點置於焦點距離等於 6 糎之凹鏡前 24 糎處,求像之位置.又將光點從凹鏡移遠 d 糎,則像應如何移動?

〔解〕(1) $$\frac{1}{v}=\frac{1}{f}-\frac{1}{u}=\frac{1}{6}-\frac{1}{24}=\frac{1}{8},$$

$$\therefore\ v=+8\text{ 糎}.$$

故像生於鏡前 8 糎處.

(2) 光點移遠後之 $u=24+d$.

$$\therefore\ \frac{1}{v}=\frac{1}{f}-\frac{1}{u}=\frac{1}{6}-\frac{1}{(24+d)}.$$

$$\therefore\ v=6(24+d)/(18+d).$$

v 之值較小於 8,故像移動之距離

$$=8-6(24+d)/(18+d)$$

$$=2d(18+d).$$

30. 一實物置於凹鏡前 8 吋處,其實像放大 3 倍.設由鏡面移遠 1 吋,則實像向鏡面移近 6 吋,此時像僅放

大 2 倍,試證之.

〔解〕 由公式, $\frac{AB}{ab}=\frac{u}{v}=\frac{1}{3}$,

$$\therefore\quad v=3u=3\times 8=24\text{ 吋}.$$

又由公式, $$\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f},$$

得 $$\frac{1}{24}+\frac{1}{8}=\frac{1}{f},$$

$$\therefore\quad f=+6\text{ 吋}.$$

設實物移遠 1 吋,則

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{8+1}=\frac{1}{6},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{v}=\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{1}{18},$$

$$\therefore\quad v=+18\text{ 吋},$$

$\therefore$ 實像移近之距離 $=24-18=6$ 吋.

又 $$\frac{ab}{AB}=\frac{v}{u}=\frac{18}{9}=2.$$

31. 由凹鏡所得之像爲實物之 2 倍.設鏡之焦點距離爲 1 呎,求實物與像之位置.設兩者之位置相易,求兩者大小之比.

〔解〕 因 $$\frac{ab}{AB}=\frac{v}{u}=2,$$

$$\therefore\quad v=2u\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 $$\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f}=\frac{1}{1}=1\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以(1)式 v 之值代入(2),則 $$\frac{1}{2u}+\frac{1}{u}=1;$$

$$\therefore \quad u=1.5\text{ 呎 }=18\text{ 吋},$$

以 18 代(1)之 u,　$v=2u=2\times 18=36$ 吋.

設兩者之位置相易,則 $v=18$ 吋, $u=36$ 吋.

$$\therefore \quad \frac{ab}{AB}=\frac{v}{u}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}.$$

故像之大小,僅爲實物之半.

32. 實物置於焦點距離 f 之凹鏡前 $2f/3$ 處,則其像爲直立之虛像,其大小爲實物之 3 倍,試證之.

〔解〕　由題意,　$u=2f/3$,

及公式,　$$\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f},$$

得　$$\frac{1}{v}+\frac{1}{2f/3}=\frac{1}{f},$$

$$\therefore \quad v=-2f.$$

因 v 之符號爲負,故其像爲直立之虛像.

又　$$\frac{ab}{AB}=\frac{v}{u}=\frac{2f}{2f/3}=3.$$

故其像之大小爲實物之 3 倍.

33. 實物置於焦點距離 f 之凹鏡前 $3f/2$ 處,其像之性質及大小何如?設實物置於他位置,問能得同一倍率否?

〔解〕　(1)由公式,　$$\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f},$$

得　$$\frac{1}{v}=\frac{1}{f}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f}-\frac{1}{3f/2}=\frac{1}{3f},$$

$$\therefore \quad v=+3f.$$

又　$$\frac{ab}{AB}=\frac{v}{u}=\frac{3f}{3f/2}=2.$$

故其像爲倒立之實像,其大小爲實物之 2 倍.

(2)倍率爲 2 時.

設 v 爲負號,則得 $v=-2u.$

$$\therefore \quad \frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f},$$

$$-\frac{1}{2u}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f},$$

$$\therefore \quad u=\frac{1}{2}f.$$

故實物置於 $\frac{1}{2}f$ 處,其倍率亦爲 2,惟其像爲虛像耳.

34. 用焦點距離 f 之凹鏡欲造成爲實物 n 倍大之像,其位置距實物幾何?

〔解〕 由題意, $\frac{ab}{AB}=\frac{v}{u}=n.$

$$\therefore \quad v=nu.$$

又由公式, $\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f}.$

(1)成實像時:

$$\frac{1}{nu}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f},$$

$$\therefore \quad \frac{u}{f}=\left(\frac{1}{n}+1\right)=\frac{n+1}{n},$$

$$\therefore \quad u=\frac{n+1}{n}f.$$

(2)成虛像時:

$$-\frac{1}{nu}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f}.$$

$$\therefore\ u=\frac{n-1}{n}f.$$

35. 實物與凸鏡之距離等於該鏡之焦點距離,求像之大小.

〔解〕　由公式, $\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f}$,

得 $$\frac{1}{v}+\frac{1}{f}=-\frac{1}{f},$$

$$\therefore\ v=-\frac{f}{2},$$

$$\therefore\ \frac{ab}{AB}=\frac{v}{u}=\frac{f/2}{f}=\frac{1}{2}.$$

故其像之大小爲實物之半.

36. 用焦點距離 f 之凸鏡,所得像之大小爲實物之 1/n 倍,試證實物與鏡之距離爲

$$(n-1)f.$$

〔解〕 $$\because\ \frac{ab}{AB}=\frac{v}{u}=\frac{1}{n},$$

$$\therefore\ v=\frac{u}{n}.$$

又由公式, $$\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f},$$

$$\therefore\ -\frac{1}{u/n}+\frac{1}{u}=-\frac{1}{f},$$

$$\therefore\ u=(n-1)f.$$

37. 公尺桿置於焦點距離20糎之凹鏡之主軸上,其零端與鏡面相接.試求刻 1、5、10、20、40、100糎處之位置及每刻劃之長(設桿闊 2 糎).

〔解〕 (1)(a) 1 糎處之位置.

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{f}-\frac{1}{u}=\frac{1}{20}-\frac{1}{1}=-\frac{19}{20},$$

$$\therefore\ v=-\frac{20}{19}=-1.05\text{ 糎}.$$

故其像在鏡後1.05糎處.

(b) 5 糎處之位置.

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{20}-\frac{1}{5}=-\frac{3}{20},$$

$$\therefore\ v=-\frac{20}{3}=-6.67\text{ 糎}.$$

故其像在鏡後6.67糎處.

(c) 10糎處之位置.

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{20}-\frac{1}{10}=-\frac{1}{20},$$

$$\therefore\ v=-20\text{ 糎}.$$

故其像在鏡後20糎處.

(d) 20糎處之位置.

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{20}-\frac{1}{20}=0,$$

$$\therefore\ v=\infty.$$

故其像在無窮遠.

(e) 40糎處之位置.

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{20}-\frac{1}{40}=\frac{1}{40},$$

$$\therefore\ v=40\text{ 糎}.$$

故其像在鏡前40糎處.

(f) 100糎處之位置.

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{20}-\frac{1}{100}=\frac{1}{25},$$

$$\therefore\quad v=25\text{糎}.$$

故其像在鏡前25糎處.

(2)　(a)　$ab=AB\frac{v}{u}=2\times\frac{1.05}{1}=2.1$糎.

(b)　$ab=2\times\frac{6.67}{5}=2.67$糎.

(c)　$ab=2\times\frac{20}{10}=4$糎.

(d)　$ab=2\times\frac{\infty}{20}=\infty.$

(e)　$ab=2\times\frac{40}{40}=2$糎.

(f)　$ab=2\times\frac{25}{100}=0.5$糎.

38.　凹鏡曲率半徑20糎,凸鏡曲率半徑30糎,兩者相距40糎,對立於公軸上.一光體高5糎,垂直於軸上,其與凹鏡之距離為15糎.求二次反射後所成之像之性質及位置(設第一次由凹鏡反射).

〔解〕　由公式,　$\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{2}{r},$

$$\therefore\quad \frac{1}{v}=\frac{2}{r}-\frac{1}{u}=\frac{2}{20}-\frac{1}{15}=\frac{1}{30},$$

$$\therefore\quad v=+30\text{糎}.$$

又　$ab=AB\frac{v}{u}=5\times\frac{30}{15}=10$糎.

故第一次由凹鏡反射後所成之像爲實像,距該鏡30糎,其高爲10糎.

又由公式,　$\frac{1}{v}=\frac{2}{r}-\frac{1}{u}$,

令　$r=-30$ 糎,　$u=40-30=10$ 糎,

得　$\frac{1}{v}=\frac{2}{-30}-\frac{1}{10}=-\frac{1}{6}$,

$\therefore\ v=-6$ 糎.

又　$\frac{a'b'}{ab}=\frac{v}{u}$,

$\therefore\ a'b'=ab\frac{v}{u}=10\times\frac{6}{10}=6$ 糎.

故二次反射後之像爲虛像,在凸鏡後 6 糎處,其高爲 6 糎.

39.　一凸鏡與一平鏡相距28糎,相對而立.在兩者之中點置一光體.設經二次反射後所見之像生於平鏡後38糎處,求凸鏡之曲率半徑.

〔解〕　第一次由凸鏡反射後所生之像與平鏡之距離 $=38$ 糎(在平鏡前).

故由凸鏡所成之像與凸鏡之距離

$=28-38=-10$ 糎(在凸鏡後).

由是　$\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{2}{r}$,

得　$-\frac{1}{10}+\frac{1}{28/2}=\frac{2}{r}$,

$\therefore\ r=-70$ 糎.

4. 光之屈折

40. 投射角爲45°時,屈折角爲30°.求其屈折率.

〔解〕　由公式，$\mu=\sin i/\sin r$,

得　$$\mu=\frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}.$$

41. 光線射入一玻璃內,其投射角爲45°.設玻璃之屈折率爲1.5,求光線在玻璃內之方向.

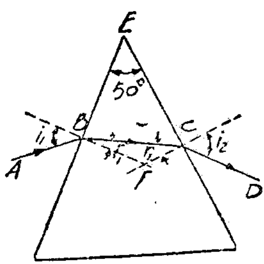
〔解〕　由公式，$\mu=\sin i/\sin r$,

得　$$\sin r=\frac{\sin i}{\mu}=\frac{\sin 45^\circ}{1.5}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1.5}=0.4713,$$

$$\therefore\quad r=28^\circ 8'.$$

42. 稜鏡之屈折率爲1.5,稜鏡角(Angle of prism)爲50°.設光線之投射角爲20°,求其所經之路徑.

〔解〕



由圖，$\dfrac{\sin r_1}{\sin i_1}=\dfrac{1}{\mu}$,

$$\therefore\quad \sin r_1=\frac{\sin i_1}{\mu}=\frac{\sin 20^\circ}{1.5}$$

$$=\frac{0.3420}{1.5}=0.2280.$$

$$\therefore\quad r_1=13^\circ 11'.$$

又　$$r_2=180^\circ-\angle BFC-r_1$$
$$=180^\circ-(180^\circ-\angle BEC)-r_1$$
$$=180^\circ-180^\circ+50^\circ-13^\circ 11'$$
$$=36^\circ 49'.$$

$$\sin i_2/\sin r_2=\mu.$$

$$\therefore \quad \sin i_2 = 1.5 \times \sin 36°49' = 1.5 \times 0.5992$$
$$= 0.8988.$$
$$\therefore \quad i_2 = 64°.$$

43. 空氣對於水之屈折率爲 4/3, 空氣對於玻璃之屈折率爲 3/2. 求玻璃對於水及水對於空氣之屈折率.

〔解〕 由公式, $\mu_{23} = \dfrac{\mu_{13}}{\mu_{12}}$,

$\therefore$ 玻璃對於水之屈折率 $= \dfrac{4/3}{3/2} = \dfrac{8}{9}$.

又由公式, $\mu_{21} = \dfrac{1}{\mu_{12}}$,

$\therefore$ 水對於空氣之屈折率 $= \dfrac{1}{4/3} = \dfrac{3}{4}$.

44. 池深 6 呎,求其視深(設水之屈折率爲 1.333).

〔解〕 由公式, $d_P = \dfrac{d_a}{\mu} = \dfrac{6}{1.333} = \dfrac{6}{4/3} = \dfrac{9}{2}$
$= 4.5$ 呎.

45. 一紙片,覆以厚 5 糎屈折率 $\dfrac{3}{2}$ 之玻璃塊.自上視之,求紙之相視變位.

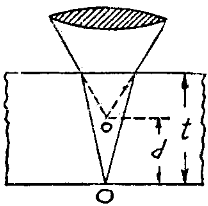
〔解〕 由公式, $d_P = \dfrac{d_a}{\mu}$,

$\therefore$ 紙之相視變位 $= d_a - d_P = d_a - \dfrac{d_a}{\mu} = \dfrac{d_a(\mu - 1)}{\mu}$

$= \dfrac{5(1.5-1)}{1.5} = 1.667$ 糎.

46. 顯微鏡向杯底一點 O 對光.設注入深 t 之液體,顯微鏡必升上距離 d,求該液體之屈折率.

〔解〕



設 $\mu=$ 該液體之屈折率,

O點之視深 $=t'=\frac{t}{\mu}$.

而 $d=t-t'=t-\frac{t}{\mu}$,

$\therefore \quad \mu=\frac{t}{t-d}$.

47. 顯微鏡向一小物對光,設該物覆以透明物片,則顯微鏡再對光時,必升上2.1粍;欲向片上一點對光時,必再升上4.5粍,求該物片之屈折率.

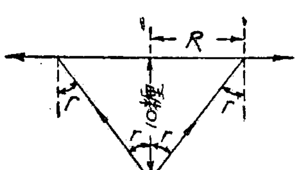
〔解〕 由公式, $\mu=\frac{t}{t-d}$,

令 $d=2.1$ 粍, $t=2.1+4.5=6.6$ 粍,

$$\therefore \quad \mu=\frac{6.6}{6.6-2.1}=1.47.$$

48. 水之屈折率爲 4/3. 將光點置於水面下深10糎處,由此發出之光線中,其能透出水面上者,在水面上適成一圓,求此圓之半徑.

〔解〕



設 R= 該圓之半徑.

由公式, sin r(臨界角之正弦) $=\frac{1}{\mu}$,

$\therefore \quad \tan r=\frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}}$,

$$\therefore \quad \frac{R}{10}=\tan r=\frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}},$$

$$\therefore \quad R=\frac{10}{\sqrt{\mu^2-1}}=\frac{10}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2-1}}=\frac{10}{\frac{1}{3}\sqrt{7}}=\frac{30}{2.646}$$

$=11.3$ 糎.

49. 某物質之臨界角爲 45°, 求其屈折率.

〔解〕　由公式，$\sin r=1/\mu$,

$$\therefore \quad \mu=\frac{1}{\sin r}=\frac{1}{\sin 45^\circ}=\sqrt{2}.$$

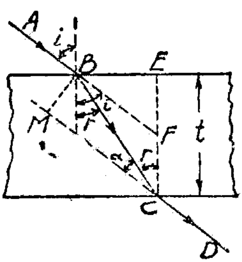
50. 設玻璃之屈折率爲1.6,求全反射開始時之最小投射角.

〔解〕　$$\sin r=\frac{1}{\mu}=\frac{1}{1.6}=0.625,$$

$$\therefore \quad r=38^\circ 41'.$$

51. 一光線射入等厚之玻璃片,求其橫變位(Lateral displacement).

〔解〕



設　$i=$ 投射角，$r=$ 屈折角，

$t=$ 玻璃片之厚，

$BM=$ 橫變位.

由圖,延長 DC 至 M,作 $BM \perp DM$, 作 $CE \perp BE$,延長 AB 至 F.

由是　$a=\angle CBF=i-r$,

$$\frac{BM}{BC}=\sin a=\sin(i-r),$$

又　$$\frac{EC}{BC}=\frac{t}{BC}=\cos r.$$

$$\therefore \quad \frac{BM}{t}=\frac{\sin(i-r)}{\cos r},$$

$$\therefore \quad BM=\frac{t\sin(i-r)}{\cos r}.$$

5. 透　鏡

52. 凹面物體之屈折率爲1.7,曲率半徑爲 6 呎,求平行光線之像之位置.

〔解〕　由公式, $\frac{\mu}{v}-\frac{1}{u}=\frac{\mu-1}{r_1}$,

令　$\mu=1.7$, $r_1=+6$ 呎, $u=\infty$,

得
$$\frac{1.7}{v}-\frac{1}{\infty}=\frac{1.7-1}{6},$$

$$\frac{1.7}{v}=\frac{0.7}{6}.$$

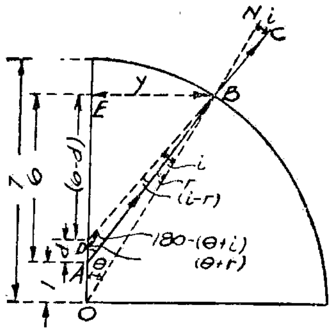
$$\therefore \quad v=\frac{1.7\times 6}{0.7}=+14\frac{4}{7}\text{呎}.$$

故其像在凹面前 $14\frac{4}{7}$ 呎處.

53. 一小物位於半徑 7 糎,屈折率1.4之玻璃球內,距球心 1 糎處.設自該物距球邊最近處視之,問該物昇高若干(設小角等於其角之正弦之值)?

〔解〕　設 $d=$ 該物之相視變位 $=AD$,

$BE=y$,



由是得，$\frac{y}{7}=\theta$ ……………(1)

又　$\frac{y}{6}=\theta+r$,

或　$r=\frac{y}{6}-\theta$ ………(2)

$\frac{y}{6-d}=i+\theta$,

或　$i=\frac{y}{6-d}-\theta$ …(3)

則以(1)式中 θ 之值,代入(2)及(3),

得　$r=\frac{y}{6}-\frac{y}{7}$ ……………………………………………(4)

$i=\frac{y}{6-d}-\frac{y}{7}$ ……………………………………(5)

$$\therefore\quad \frac{i}{r}=\frac{\frac{1}{6-d}-\frac{1}{7}}{\frac{1}{6}-\frac{1}{7}}=\frac{42}{6-d}-6,$$

但　$\frac{\sin i}{\sin r}=\mu=1.4$,

$$\therefore\quad 1.4=\frac{42}{6-d}-6,$$

$$\therefore\quad d=6-\frac{210}{37}=\frac{12}{37}\text{糎}.$$

故其昇高之距離爲$\frac{12}{37}$糎.

54. 等雙凸透鏡,每面之曲率半徑各爲 46.5 糎,其屈折率爲1.532,求其焦點距離.

〔解〕 由公式, $\frac{1}{f}=(\mu-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$

$$=(1.532-1)\left(\frac{1}{-46.5}-\frac{1}{46.5}\right)$$

$$=-\frac{1.064}{46.5},$$

$$\therefore\ f=-\frac{46.5}{1.064}=-43.7\text{糎}.$$

55. 已知雙凹透鏡之 $r_1=30.4$糎, $r_2=34.5$糎, $f=30.6$糎. 求其屈折率.

〔解〕 由公式, $\frac{1}{f}=(\mu-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$,

得 $$\mu=\frac{1}{f\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}+1.$$

今 $f=-30.6$ 糎, $r_1=-30.4$ 糎, $r_2=34.5$ 糎,

$$\therefore\ \mu=\frac{1}{-30.6\times\left(-\frac{1}{30.4}-\frac{1}{34.5}\right)}+1=0.528+1$$

$$=1.528.$$

56. 一雙凸透鏡,以玻璃製之,其屈折率為1.5,一面之曲率半徑為20糎.設其焦點距離為30糎,求他面之曲率半徑.

〔解〕 由公式, $(\mu-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{1}{f}$,

得 $$(1.5-1)\left(\frac{1}{-20}-\frac{1}{r_2}\right)=-\frac{1}{30},$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{r_2}=-\frac{2}{30}+\frac{1}{20}=-\frac{1}{60},$$

$$\therefore \quad r_2=60\text{糎}.$$

57. 試證平凹玻璃透鏡之焦點距離爲凹面曲率半徑之 2 倍.

〔解〕 由公式, $(\mu-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{1}{f}$,.

設 r_1 爲平面之曲率半徑 (其值爲 ∞), r_2 爲凹面之曲率半徑,r_2 之符號爲正, f 爲負,

得 $$(\mu-1)\left(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{r_2}\right)=-\frac{1}{f},$$

$$\therefore \quad f=\frac{r_2}{\mu-1}.$$

但玻璃之屈折率 $\mu=1.5$.

$$\therefore \quad f=\frac{r_2}{1.5-1}=2r_2.$$

58. 玻璃透鏡在水中時之焦點距離爲在空氣中時之 4 倍.試證之.

〔解〕 從題43,知空氣對於玻璃之屈折率 $=1\frac{1}{2}$,

空氣對於水之屈折率 $=\frac{4}{3}$.

$\therefore$ 水對於玻璃之屈折率 $=\frac{1\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}}=\frac{9}{8}$.

又設 f_1 = 在空氣中之焦點距離,

f_2 = 在水中之焦點距離,

則由公式, $(\mu-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{1}{f}$,

得
$$\left(1\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{1}{f_1}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\left(\frac{9}{8}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{1}{f_2}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)/(2),
$$\frac{f_2}{f_1}=\frac{1\frac{1}{2}-1}{\frac{9}{8}-1}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}}=4.$$

59. 一實物置於透鏡前 3 呎處,其像生於透鏡後 1 呎處.問其焦點距離幾何?該透鏡爲凸透鏡抑爲凹透鏡?

〔解〕　$u=+3,\quad v=-1,$

則
$$\frac{1}{f}=\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{-1}-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}.$$

$$\therefore\ f=-\frac{3}{4}\text{呎}.$$

故其焦點距離爲 $-\frac{3}{4}$ 呎.又因其符號爲負,故爲凸透鏡.

60. 實物置於凸透鏡前 8 吋處,其像生於透鏡後 24 吋處.設該物置於透鏡前 4 吋處,求其像之位置.

〔解〕　由公式,　$\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f},$

得
$$\frac{1}{-24}-\frac{1}{8}=\frac{1}{f}.$$

$$\therefore\ \frac{1}{f}=-\frac{1}{6}.$$

又
$$\frac{1}{v'}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{6}.$$

$$\therefore\ v'=12\text{吋}=1\text{呎}.$$

故其像生於透鏡前 1 呎處.

61. 一實物長 5 糎,置於凸透鏡(焦點距離 8 糎)前 12 糎處.求像之位置及其大小.

〔解〕　由公式, $\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f}$,

令　$f=-8$ 糎, $u=+12$ 糎,

得
$$\frac{1}{v}=\frac{1}{f}+\frac{1}{u}=\frac{1}{-8}+\frac{1}{12}=-\frac{1}{24},$$

$$\therefore\quad v=-24\text{ 糎}.$$

故其像在透鏡後 24 糎.

又
$$\frac{ab}{AB}=\frac{v}{u},$$

$$\therefore\quad ab=AB\times\frac{v}{u}=5\times\frac{24}{12}=10\text{ 糎}.$$

故其像長 10 糎,為實物之長之 2 倍.

62. 一凸透鏡生成為實物 n 倍大之實像,試證實物與透鏡間之距離必為 $(n+1)f/n$.

〔解〕
$$\frac{ab}{AB}=\frac{v}{u}=n,$$

$$\therefore\quad v=nu.$$

由公式,
$$\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f},$$

得
$$\frac{1}{-nu}-\frac{1}{u}=\frac{1}{-f},$$

$$-\frac{1}{u}\left(\frac{1}{n}+1\right)=-\frac{1}{f}.$$

$$\therefore\quad u=\frac{n+1}{n}f.$$

63. 實物與收斂透鏡(Convergent lens)之距離為透鏡

焦點距離之 2 倍,試證其像與實物等大.

〔解〕 由公式, $\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f}$,

令 $u=2f$,

得 $\frac{1}{v}-\frac{1}{2f}=\frac{1}{-f}$,

$\therefore\ v=-2f.$

$\therefore\ \frac{ab}{AB}=\frac{v}{u}=\frac{2f}{2f}=1:1.$

故其像與實物等大.

64. 燭與屏相距 3 呎,其間置一焦點距離 8 吋之凸透鏡,使燭火之像生於屏.求透鏡之位置.

〔解〕 由公式, $\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f}$,

得 $\frac{1}{-v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{-8}$,

或 $\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{8}$ ……………………………………(1)

但 $v+u=3\times 12=36$,

或 $v=36-u$ ……………………………………(2)

以 v 之值代入(1),得 $\frac{1}{36-u}+\frac{1}{u}=\frac{1}{8}$,

$u^2-36u+288=0$,

$(u-24)(u-12)=0$,

$\therefore$ u=24 或 12 吋.

故該透鏡必置於與燭火相距 24 吋或 12 吋處.

65. 一實物置於凸透鏡前 3 吋處,其像之大小為實

物之 3 倍,求該凸透鏡之焦點距離.

〔解〕　因像有實與虛,故其解有二:

(1)實像時,

因像爲實物之 3 倍,故

$$v=3\times3=9\text{吋},$$

由公式,

$$\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f},$$

得

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{-9}-\frac{1}{3}=-\frac{4}{9}.$$

$$\therefore\ f=-\frac{9}{4}=-2\frac{1}{4}\text{吋}.$$

(2)虛像時,

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{9}-\frac{1}{3}=-\frac{2}{9}.$$

$$\therefore\ f=-\frac{9}{2}=-4\frac{1}{2}\text{吋}.$$

66.　凸透鏡之焦點距離爲15糎,欲得 3 倍大之實像,問須置於何處?

〔解〕　得實像時,v 爲負,故

$$v=-3u\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又

$$\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{-15}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以(1)式 v 之值代入(2), $-\frac{1}{3u}-\frac{1}{u}=-\frac{1}{15},$

$$\therefore\ u=20\text{糎}.$$

故該鏡須置於與實物相距20糎處.

67.　一發光體長 3 糎,橫置於焦點距離12糎之凸透

鏡之軸上,其末端距透鏡21糎,求像之長.

〔解〕 (1)發光體末端之像,

由公式, $$\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f},$$

得 $$\frac{1}{v}-\frac{1}{21}=\frac{1}{-12},$$

$$\therefore\ v=-28\text{ 糎}.$$

(2)發光體頂端之像,

$$u=21+3=24\text{ 糎}.$$

$$\therefore\ \frac{1}{v}-\frac{1}{24}=\frac{1}{-12},$$

$$\therefore\ v=-24\text{ 糎}.$$

故像之長 $=28-24=4$ 糎.

68. 燭與屏相距 l,一凸透鏡置其間,生像於屏.設凸透鏡移動距離 d,屏上亦得明像.試證凸透鏡之焦點距離爲 $(l^2-d^2)/4l$,又實物之大小爲其兩像之等比內項(Geometrical mean).

〔解〕 由題, $l=u+v$, 或 $u=l-v$,

則 $$\frac{1}{-v}-\frac{1}{(l-v)}=\frac{1}{f}\cdots\cdots(1)$$

設透鏡向實物移近 d,則 $u'=l-v-d$, $v'=v+d$,

則 $$\frac{1}{-(v+d)}-\frac{1}{(l-v-d)}=\frac{1}{f}\cdots\cdots(2)$$

(1)=(2): $$\frac{1}{v}+\frac{1}{(l-v)}=\frac{1}{(v+d)}+\frac{1}{(l-v-d)},$$

解之,得 $$v=\frac{1}{2}(l-d),$$

以 v 之值代入(1), $\frac{1}{f}=-\frac{1}{\frac{1}{2}(l-d)}-\frac{1}{l-\frac{1}{2}(l-d)}=-\frac{4l}{l^2-d^2}$

$$\therefore\quad f=-(l^2-d^2)/4l.$$

又設 AB=實物之大小, ab=像之大小,

$a'b'$=透鏡移動後像之大小,

則 $$ab=AB\frac{v}{u}=AB\frac{\frac{1}{2}(l-d)}{l-\frac{1}{2}(l-d)}=\frac{(l-d)}{(l+d)}AB.$$

又 $$a'b'=AB\frac{v'}{u'}=AB\frac{\frac{1}{2}(l-d)+d}{l-\frac{1}{2}(l-d)-d}=\frac{(l+d)}{(l-d)}AB.$$

ab 與 $a'b'$ 之等比內項 $=\sqrt{ab\times a'b'}$

$$=\sqrt{\frac{(l-d)}{(l+d)}AB\times\frac{(l+d)}{(l-d)}AB}$$

$$=AB.$$

69. 兩收斂透鏡(焦點距離一爲15糎,一爲30糎)相緊接,求其合成焦點距離.

〔解〕 由公式, $\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{-15}+\frac{1}{-30}$

$$=\frac{1}{-10},$$

$$\therefore\quad F=-10\text{ 糎}.$$

70. 一焦點距離8糎之凹透鏡與焦點距離6糎之凸透鏡相緊接,求其合成焦點距離.

〔解〕 $$\frac{1}{F}=\frac{1}{8}+\frac{1}{-6}=\frac{1}{-24},$$

$$\therefore\quad F=-24\text{ 糎}.$$

71. 一焦點距離16糎之凸透鏡與一凹透鏡相緊接,其合成焦點距離爲48糎.求凹透鏡之焦點距離.

〔解〕 $$\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{-48}=\frac{1}{-16}+\frac{1}{f_2}.$$

$$\therefore\quad f_2=+24\text{糎}.$$

72. 一燭置於一凸透鏡前1呎處,其像生於透鏡後4吋處.設與一凹透鏡相緊接,則其像生於透鏡後12吋處.求凹透鏡之焦點距離.

〔解〕 設 $f_1=$ 凸透鏡之焦點距離,

$f_2=$ 凹透鏡之焦點距離.

則由公式, $$\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f_1},$$

得 $$\frac{1}{-4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{f_1}.$$

$$\therefore\quad f_1=-3\text{吋}.$$

又 $$\frac{1}{-12}-\frac{1}{12}=\frac{1}{F},$$

$$\therefore\quad F=-6\text{吋}.$$

但 $$\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{-6}=\frac{1}{-3}+\frac{1}{f_2}.$$

$$\therefore\quad f_2=+6\text{吋}.$$

73. 焦點距離6吋之凹透鏡與焦點距離6吋之凸透鏡,置於同一軸上,其間相距12吋.一實物置於凹透鏡外9吋處,求其像之位置.

〔解〕 (1)經凹透鏡屈折後像之位置,——

由公式,得 $$\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{v}-\frac{1}{9}=\frac{1}{6},$$

$$\therefore\quad v=3\frac{3}{5}\text{吋}.$$

其第一次之像在凹透鏡外$3\frac{3}{5}$吋處.

(2)經凸透鏡屈折後像之位置,即最後所得之像之位置.——

由凹透鏡所得之像,爲凸透鏡之實物.故

$$u'=12+3\frac{3}{5},$$

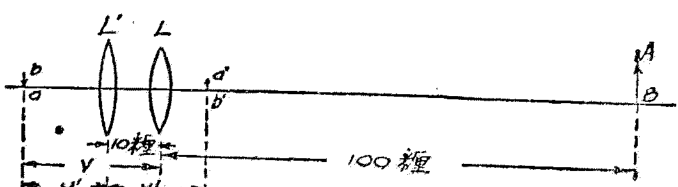
$$\frac{1}{v'}-\frac{1}{12+3\frac{3}{5}}=\frac{1}{-6}$$

$$\therefore\quad v'=-9.75\text{ 吋}.$$

故實物之像在凸透鏡外 9.75 吋處.

74. 兩凸透鏡 L 與 L′ 焦點距離各爲20糎與30糎,兩者相距10糎.一實物長 2 糎置於透鏡 L 前 100 糎處.求其像之位置及大小.

〔解〕



(1)先經透鏡L屈折後之像.——

$$\because \quad \frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f},$$

$$\therefore \quad \frac{1}{v}-\frac{1}{100}=\frac{1}{-20},$$

$$\therefore \quad v=-25\text{糎}.$$

$$ab=AB\frac{v}{u}=2\times\frac{25}{100}=\frac{1}{2}\text{糎}.$$

故透鏡L所生之像在其後方25糎處,卽在透鏡L′外(25−10)=15糎處;其長為$\frac{1}{2}$糎.

(2)再經透鏡L′屈折後之像.——

u′=−15糎(因為由透鏡L′向投射光線方向所取之距離).

$$\therefore \quad \frac{1}{v'}=\frac{1}{f'}+\frac{1}{u'}=\frac{1}{-30}+\frac{1}{-15}=\frac{1}{-10}.$$

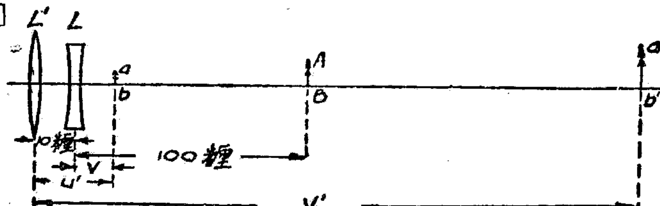
$$\therefore \quad v'=-10\text{糎}.$$

$$\therefore \quad a'b'=ab\frac{v'}{u'}=\frac{1}{2}\times\frac{10}{15}=\frac{1}{3}\text{糎}.$$

故最後之像生於透鏡L′外10糎處,其長為$\frac{1}{3}$糎.

75. 承前題,設凸鏡L易以焦點距離相等之凹透鏡,則其像之位置及大小若何?

〔解〕



(1)先經透鏡 L 屈折後之像.——

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{f}+\frac{1}{u}=\frac{1}{+20}+\frac{1}{+100}=\frac{3}{50},$$

$$\therefore \quad v=\frac{50}{3}\text{糎}.$$

$$\therefore \quad ab=AB\frac{v}{u}=2\times\frac{50}{3}\times\frac{1}{100}=\frac{1}{3}\text{糎}.$$

故透鏡 L 所生之像在其前方$\frac{50}{3}$糎處,其長為$\frac{1}{3}$糎.

(2)再經透鏡 L′ 屈折後之像.——

$$\because \quad u'=10+\frac{50}{3}=\frac{80}{3}\text{糎};$$

$$\therefore \quad \frac{1}{v'}=\frac{1}{f'}+\frac{1}{u'}=\frac{1}{-30}+\frac{1}{+\frac{80}{3}}=\frac{1}{240},$$

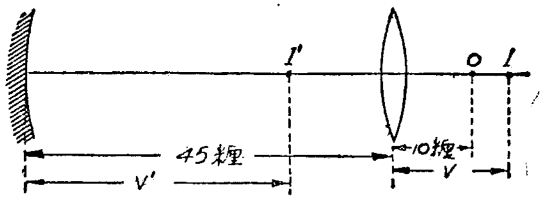
$$\therefore \quad v'=240\text{糎}.$$

又 $$a'b'=ab\frac{v'}{u'}=\frac{1}{3}\times\frac{240}{\frac{80}{3}}=3\text{糎}.$$

故其最後之像生於透鏡 L 前 240－10＝230 糎處,其長為 3 糎.

76. 設有一凸透鏡,其焦點距離等於30糎,在同一軸上置一凹鏡,其曲率半徑等於40糎,兩者間之距離為45糎.在透鏡之他一方置一光點,仍在此軸上,與透鏡之距離為10糎.求像點與凹鏡中心之距離.

〔解〕 如圖,光點 O 經透鏡屈折後,其像 I 之位置可



自下式求之.

$$\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{v}=\frac{1}{f}+\frac{1}{u}=\frac{1}{-30}+\frac{1}{10}=\frac{1}{15},$$

$$\therefore\quad v=+15\text{ 糎.}$$

由此知 I 在透鏡前15糎處.

透鏡之像 I 爲凹鏡之實物,由凹鏡所造之像 I' 或最後所得之像,可由球鏡公式求之.

$$\therefore\quad \frac{1}{v'}+\frac{1}{u'}=\frac{2}{r},$$

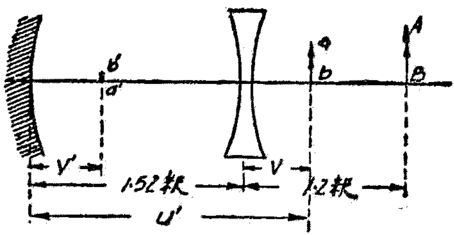
$$\therefore\quad \frac{1}{v'}=\frac{2}{+40}-\frac{1}{+(15+45)}=\frac{1}{30},$$

$$\therefore\quad v'=30\text{ 糎.}$$

故最後所得之像在凹鏡前30糎處.

77. 焦點距離爲0.8粎之凹透鏡與曲率半徑0.8粎之凹鏡,主軸一致,相距 1.52 粎時,在凹透鏡前方1.2粎處之物體發出之光,首經透鏡屈折,次經凹鏡反射,其所造之像在何處?像之大小爲實物之若干倍?

〔解〕　首經凹透鏡屈折後,其像ab之位置及大小,可



由下式求之.

$$\because \quad \frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f},$$

$$\therefore \quad \frac{1}{v}=\frac{1}{f}+\frac{1}{u}=\frac{1}{0.8}+\frac{1}{1.2}=\frac{1}{0.48},$$

$$\therefore \quad v=0.48 \text{ 粎}.$$

$$ab=AB\frac{v}{u}=AB\frac{0.48}{1.2}=0.4AB.$$

故像ab在凹透鏡前方 0.48 粎處,其大小爲實物之0.4倍.

後經凹鏡反射後所造最後之像 a′b′ 之位置及大小,可由球鏡公式求之.——

從 $$\frac{1}{v'}+\frac{1}{u'}=\frac{2}{r},$$

令 $$u'=1.52+0.48=2 \text{ 粎},$$

得 $$\frac{1}{v'}=\frac{2}{r}-\frac{1}{u'}=\frac{2}{0.8}-\frac{1}{2}=2.$$

$$\therefore \quad v'=\frac{1}{2} \text{ 粎}.$$

又 $$a'b'=ab\frac{v'}{u'}=0.4AB\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{AB}{10}.$$

故最後之像生於凹鏡前0.5粎處,其大小爲實物之$\frac{1}{10}$倍.

6. 光器與稜鏡

78. 一近視者,其最大明視距離爲$4\frac{1}{2}$吋,問須用何種眼鏡始克明視10吋處之物體?.

〔解〕　由公式, $\frac{1}{f_1}=\frac{1}{d}-\frac{1}{d_1}$,

得
$$\frac{1}{f_1}=\frac{1}{4\frac{1}{2}}-\frac{1}{10}=\frac{11}{90}.$$

$$\therefore\quad f_1=\frac{90}{11}=8.18\text{ 吋}.$$

故須用焦點距離8.18吋之凹透鏡.

79. 一近視者對於8糎與100糎間之距離之物體,可以明視,須用何種眼鏡始克明視一星?且用此眼鏡時,明視之物體之最短距離若干?

〔解〕
$$\frac{1}{f_1}=\frac{1}{d}-\frac{1}{d_1}=\frac{1}{100}-\frac{1}{\infty}.$$

$$\therefore\quad f_1=100\text{ 糎}.$$

故須用焦點距離100糎之凹透鏡.

設d_2=用眼鏡時,明視之物體之最短距離.

從公式, $\frac{1}{v}-\frac{1}{d}=\frac{1}{f}$, d代以8糎,

得
$$\frac{1}{v}-\frac{1}{f}=\frac{1}{8},\quad\cdots\cdots(1)$$

以(1)式$\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{f}\right)$之值代入，$\frac{1}{v}-\frac{1}{d_2}=\frac{1}{f}+\frac{1}{f_1}$，

或 $$\frac{1}{v}-\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{d_2}.$$

得 $$\frac{1}{8}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{d_2};$$

$$\therefore\quad \frac{1}{d_2}=\frac{1}{8}-\frac{1}{100}=\frac{23}{200},$$

$$\therefore\quad d_2=\frac{200}{23}=8.7\text{ 糎}.$$

80. 一遠視者之最小明視距離為 8 呎，問須何種眼鏡始克明視 18 吋處之書本？

〔解〕　由公式，得 $\frac{1}{f_1}=\frac{1}{d}-\frac{1}{d_1}=\frac{1}{8}-\frac{1}{\frac{18}{12}}=-\frac{13}{24}$，

$$\therefore\quad f_1=-\frac{24}{13}\text{ 呎}=-12\text{ 吋}\times\frac{24}{13}.$$

$$=-22.15\text{ 吋}.$$

故須用焦點距離 22.15 吋之凸透鏡。

81. 遠視眼鏡之焦點距離為 40 糎，其安適之明視距離為 30 糎，求其明視之近點。

〔解〕　由公式，得 $\frac{1}{f_1}=\frac{1}{d}-\frac{1}{d_1}$.

$$\therefore\quad \frac{1}{d}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{d_1}=\frac{1}{-40}+\frac{1}{30}=\frac{1}{120}.$$

$$\therefore\quad d=120\text{ 糎}.$$

82. 一透鏡 L 與一焦點距離 20 糎之收歛透鏡相緊接後，其作用之程度為 3 度，求 L 之作用程度。

〔解〕　從公式，$\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$，

令　$\frac{1}{F}=P$，$\frac{1}{f_1}=P_1$，$\frac{1}{f_2}=P_2$，

得　$P_2=P-P_1=3-\frac{1}{\frac{20}{100}}=3-5=-2$度.

故透鏡L之作用程度為 -2 度.故L為一焦點距離50糎之發散透鏡(Divergent lens).

83. 一作用程度6度之收斂透鏡與一 -2 度之發散透鏡相合併,求其合成作用程度及焦點距離.

〔解〕　$P=+6-2=+4$,

則　$F=+\frac{4}{100}$,

$\therefore\ F=+25$ 糎.

故其合成作用程度為+4度,與一焦點距離25糎之收斂透鏡相當.

84. 一伽利略望遠鏡由一焦點距離30糎之收斂透鏡與一焦點距離5糎之發散透鏡所組成.求其倍率.

〔解〕　由公式,　$M=f_1/f_2$,

得　$M=30/5=6$.

85. 一望遠鏡由焦點距離6糎與12糎之兩凸透鏡所組成,求其倍率.

〔解〕　由公式,　$M=f_1/f_2$,

得　$M=12/6=2$.

86. 某人之明視距離為1呎.設加以透鏡,則小物體放大6倍,求透鏡之焦點距離.

〔解〕　由公式，　$M=\left(1-\frac{d}{f}\right)$,

得　　$6=\left(1-\frac{1}{f}\right)$.

$\therefore\ f=-\frac{1}{5}$呎$=-2.4$吋.

87. 一最小明視距離為15糎之人,用一焦點距離5糎之透鏡,以放大一物體.求對光後透鏡與物體間之距離,及其倍率.

〔解〕　由公式，　$M=\left(1-\frac{d}{f}\right)$,

得　　$M=\left(1-\frac{15}{-5}\right)=4$.

又由公式，　$\frac{1}{f_1}=\frac{1}{d}-\frac{1}{d_1}$,

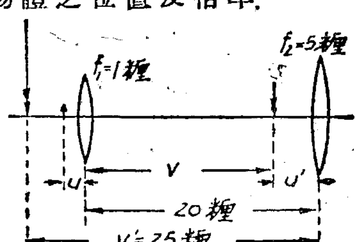
得　　$\frac{1}{d_1}=\frac{1}{d}-\frac{1}{f_1}=\frac{1}{15}-\frac{1}{-5}=\frac{4}{15}$,

$\therefore\ d_1=\frac{15}{4}=3.75$糎.

故透鏡與物體間之距離為3.75糎,其倍率為4.

88. 一顯微鏡由焦點距離5糎與1糎之兩透鏡所組成,兩者相距20糎.設某人之明視距離為25糎,物像生於25糎處,求物體之位置及倍率.

〔解〕



由公式，　$$\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f},$$

得　$$\frac{1}{u'}=\frac{1}{v'}-\frac{1}{f'}.$$

因像爲虛像，故 v' 爲正，

而　$$\frac{1}{u'}=\frac{1}{25}-\frac{1}{-5}=\frac{6}{25}.$$

$$\therefore\quad u'=\frac{25}{6}\text{糎}.$$

$\therefore$　物體由物鏡所造之像，在鏡後 $20-\frac{25}{6}=\frac{95}{6}$ 糎處.

又　$$\frac{1}{u}=\frac{1}{v}-\frac{1}{f},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{u}=\frac{1}{-\frac{95}{6}}-\frac{1}{-1}=\frac{89}{95},$$

$$\therefore u=\frac{95}{89}=1.067\text{糎}.$$

其倍率 $=\frac{v}{u}\left(1-\frac{d}{f_2}\right)$

$$=\frac{95}{6}\times\frac{89}{95}\left(1-\frac{25}{-5}\right)=89.$$

89.　稜鏡之屈折率爲 $\sqrt{2}$. 設光線之投射角大於 $45°$ 時，則他面無光線出現.求其屈折角(Refracting angle).

〔解〕　由題意(如 P. 123 圖)，當投射角 $i=45°$，則 $i'=90°$，

故由　$$\frac{\sin i}{\sin r}=\mu,$$

得 $$\sin r=\frac{\sin i}{\mu}=\frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2},$$

$$r=30^\circ.$$

由 $$\frac{\sin i'}{\sin r'}=\mu,$$

得 $$\sin r'=\frac{\sin i'}{\mu}=\frac{\sin 90^\circ}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$r'=45^\circ.$$

又由公式, $$A=r+r',$$

$$\therefore\quad A=30^\circ+45^\circ=75^\circ.$$

90. 稜鏡之屈折角爲 60°, 其屈折率爲 $\sqrt{2}$. 設投射角爲 45°, 求其出現角 (Angle of emergence) 及其偏向.

〔解〕 已知 $i=45^\circ$,

由公式, $$\frac{\sin i}{\sin r}=\mu,$$

得 $$\sin r=\frac{\sin i}{\mu}=\frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore\quad r=30^\circ.$$

由公式, $$A=r+r',$$

得 $$r'=A-r=60^\circ-30^\circ=30^\circ.$$

又由 $$\frac{\sin i'}{\sin r'}=\mu,$$

得 $$\sin i'=\mu\sin r'=\sqrt{2}\sin 30^\circ=\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore\quad \text{出現角 } i'=45^\circ.$$

又 $$\text{偏向 } D=(i+i')-(r+r')$$

$$=(45°+45°)-(30°+30°)$$
$$=30°.$$

91. 玻璃稜鏡之屈折角爲 $45°4'$, 最小偏向爲 $26°40'$, 求其屈折率.

〔解〕 由公式, $\mu=\sin\frac{1}{2}(A+D)/\sin\frac{1}{2}A$,

$$\therefore\quad \mu=\frac{\sin[\frac{1}{2}(45°4'+26°40')]}{\sin(\frac{1}{2}\times 45°4')}=\frac{\sin 35°52'}{\sin 22°32'}=\frac{0.586}{0.384}$$
$$=1.53.$$

92. 鈣玻璃稜鏡屈折率爲 1.526, 其最小偏向爲 $17°20'$, 求其投射角.

〔解〕 由公式, $\mu=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A+D)}{\sin\frac{1}{2}A}=\dfrac{\sin(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}D)}{\sin\frac{1}{2}A}$,

得 $$\mu\sin\frac{1}{2}A=\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}D+\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}D,$$

$$\sin\frac{1}{2}A\left(\mu-\cos\frac{1}{2}D\right)=\sin\frac{1}{2}D\sqrt{1-\sin^2\frac{1}{2}A},$$

$$\sin^2\frac{1}{2}A\left(\mu-\cos\frac{1}{2}D\right)^2=\sin^2\frac{1}{2}D\left(1-\sin^2\frac{1}{2}A\right)$$

$$=\sin^2\frac{1}{2}D-\sin^2\frac{1}{2}D\sin^2\frac{1}{2}A.$$

$$\therefore\quad \sin^2\frac{1}{2}A\left[(\mu-\cos\frac{1}{2}D)^2+\sin^2\frac{1}{2}D\right]=\sin^2\frac{1}{2}D,$$

$$\therefore\quad \sin\frac{1}{2}A=\sin\frac{1}{2}D\Big/\sqrt{\mu^2-2\mu\cos\frac{1}{2}D+1}.$$

$$\therefore\quad \sin\frac{1}{2}A=\frac{\sin(\frac{1}{2}\times 17^\circ 20')}{\sqrt{1.526^2-2\times 1.526\cos\frac{17^\circ 20'}{2}+1}}$$

$$=\frac{0.1507}{0.5581}=0.270.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}A=15^\circ 40'.$$

但　$$A=i+i'=2i=2i',$$

$$\therefore\quad i=\frac{A}{2}=15^\circ 40'.$$

93. 某稜鏡之屈折角爲$1^\circ 30'$,屈折率爲 1.54,求其所得之偏向.設欲得$48'$之偏向時,問屈折角須若干?

〔解〕　當屈折角甚小時, i、r、i′ 與 r′ 亦均甚小,小角之正弦等於其角之弧度,

故　$$\mu=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+D)}{\sin\frac{1}{2}A}=\frac{\frac{1}{2}(A+D)}{\frac{1}{2}A}=\frac{A+D}{A}.$$

$$\therefore\quad D=(\mu-1)A.$$

故當　$A=1^\circ 30'=1.5\times 0.0174$ 弧度時,

$$D=(1.54-1)\times 1.5\times 0.0174\text{ 弧度 }=48'36''.$$

又當　$D=48'=0.8\times 0.0174$ 弧度時,

$$A=\frac{D}{\mu-1}=\frac{0.8\times 0.0174}{1.54-1}\text{弧度 }=1^\circ 29'.$$

94. 設水與空氣間之屈折率爲 4/3, 玻璃與空氣間之屈折率爲 3/2. 試證由水製成之薄稜鏡所得之偏向爲其屈折角之$\frac{1}{3}$,由玻璃薄稜鏡所得之偏向爲其屈折角之$\frac{1}{2}$.

〔解〕 (1)由公式， $D=(\mu-1)A$,

得 $$D=\left(\frac{4}{3}-1\right)A=\frac{1}{3}A.$$

(2) $$D=\left(\frac{3}{2}-1\right)A=\frac{1}{2}A.$$

第十章 磁學

定義,定律,及公式.

庫隆之磁力定律(Coulomb's law of magnetic force).——兩極間之磁力F,與極之強度m與m′之乘積為正比,與距離d之平方為反比,是曰庫隆定律.

設 μ= 兩極間媒質之透磁率(Permeability),

k= 比例常數,

則其定律當如下:

$$F=k\frac{mm'}{\mu d^2}.$$

如用C.G.S.單位,則k為1,在眞空或空氣中,μ等於1.故定律成為

$$F=\frac{mm'}{d^2}.$$

磁場強度(Intensity of magnetic field).——單位N極在磁場一點所受之磁力,曰在此一點之磁場強度.用C.G.S.單位時之磁場強度之單位曰臬(gauss).

設 H= 一點之磁場強度,

m= 磁極強度(Pole strength),

F= 磁極在此點所受之力,

則 $F=mH.$

磁石之磁矩(Magnetic moment of a magnet).——一磁石之磁矩M,等於其磁極之強度m與其兩極間之距離$2l$之相乘積,即

$$M=2ml.$$

等強磁場內之扭力(Torque in a uniform field).——

設 $H=$ 磁場之強度,

$\theta=$ 磁石與磁場方向間之角度,

$L=$ 偶力矩(Moment of couple),

則 $L=2Hml\sin\theta$

$=HM\sin\theta.$

磁棒之磁場強度.——

(1)磁棒軸上一點P(卽Gauss位置A)之磁場強度.——

設 $2l=$ 磁棒之長,

$m=$ 磁棒之磁極強度,

$d=$ P點與磁棒中心間之距離,

$H=$ P點之磁場強度,

$M=$ 磁矩,

則 $H=\dfrac{4mld}{(d^2-l^2)^2}=\dfrac{2Md}{(d^2-l^2)^2}.$

其方向與軸相合.

又設d甚大時,則 l^2 可略去不計,其公式更成為

$$H=\frac{2M}{d^3}.$$

(2)通過中心之磁軸垂線上一點(卽 Gauss 位置B)之磁場強度.——

$$H=\frac{2ml}{(d^2+l^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{M}{(d^2+l^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

其方向與軸平行.

設d甚大時,則

$$H=M/d^3.$$

地磁之伏角(Dip)及方位角(Declination).——伏角爲地磁力之方向與水平面間之角度.方位角(或稱偏角)爲磁子午面與同地之地理子午面間之角度.

地磁力之強度(Intensity of earth magnetic field).——

設 $H=$ 地磁之水平強度,

$V=$ 地磁之鉛直強度,

$E=$ 地磁之全強度,

$\phi=$ 伏角,

則 $$\frac{H}{E}=\cos\phi \quad 及 \quad \frac{V}{H}=\tan\phi.$$

測磁計(Magnetometer).——

設 $H=$ 磁場強度,

$R=$ 與 H 互成直角之磁場強度,

$\theta=$ 磁針與 H 方向間之角度,

則 $$\frac{R}{H}=\tan\theta.$$

磁場內磁棒之振動周期.——

設 $I=$ 磁棒對於鉛直軸之惰矩(Moment of inertia),

則 $$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{MH}}.$$

扭秤(Torsion balance).——

由公式, $L=MH\sin\theta$,

設 $x=$ 於磁場強度 H 內欲使磁針偏向 ϕ 時所需之扭力,

$k=$ 懸線之常數.

則 $$x=kMH\sin\phi.$$

計算問題

1. 強度32與36單位之兩磁極,相距12糎,求其間作用之力.

〔解〕　由公式,　$F=\dfrac{mm'}{d^2}$,

得　$$F=\frac{32\times36}{12^2}=8\text{ 達}.$$

2. 兩等強磁極,相距 8 糎,其間相斥之力為 9 達.求各磁極之強度.

〔解〕　由公式,　$F=\dfrac{mm'}{d^2}$,

令　$m=m'$,

得　$m=d\sqrt{F}=8\sqrt{9}=24$ 單位.

3. 一強度90單位之磁極,與他磁極相距 2 糎,其間作用之力等於 1 克之重.求他磁極之強度.

〔解〕　由公式,　$F=\dfrac{mm'}{d^2}$,

得　$m'=\dfrac{Fd^2}{m}=\dfrac{981\times1\times2^2}{90}=43.6$ 單位.

4. 兩 N 極相距 2 糎時之斥力為2.4達,求斥力3.6達時兩極之距離,及相距 3 糎時之斥力.

〔解〕　由公式,　$F=\dfrac{mm'}{d^2}$,

得　$mm'=Fd^2=24\times2^2=9.6$,

又　$$d=\sqrt{\frac{mm'}{F}}.$$

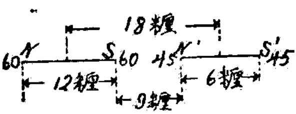
∴斥力3.6達時之距離 $d=\sqrt{\frac{9.6}{3.6}}=\frac{2}{3}\times 2.449$

$$=1.633\text{糎}.$$

又相距3糎時之斥力 $=\frac{mm'}{3^2}=\frac{9.6}{9}=1.067$達.

5. 有兩磁棒,一長12糎,磁極強度60單位;一長6糎,磁極強度45單位.兩者置於同一軸上,其中心相距18糎.求其間作用之力.

〔解〕 由圖,



$$N'\text{所受之力}=\frac{45\times 60}{9^2}-\frac{45\times 60}{(9+12)^2}$$

$$=45\times 60\left(\frac{1}{9^2}-\frac{1}{21^2}\right),$$

$$S'\text{所受之力}=\frac{45\times 60}{(12+9+6)^2}-\frac{45\times 60}{(6+9)^2}$$

$$=45\times 60\left(\frac{1}{27^2}-\frac{1}{15^2}\right),$$

$$\therefore\text{兩磁棒間所用之力}=45\times 60\left(\frac{1}{9^2}-\frac{1}{21^2}+\frac{1}{27^2}-\frac{1}{15^2}\right)$$

$$=+18.91\text{達(引力)}.$$

設兩磁棒之N極或S極相近,則其間之力成爲斥力故其間作用之力爲±18.91達.

6. 強度3之磁極,置於某磁場內,其所受之力爲8.1達.求該磁場之強度.

〔解〕 由公式, $F=mH$,

得 $H=F/m=8.1/3=2.7$臯.

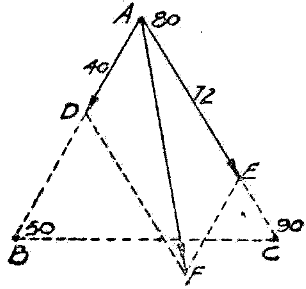
7. 某磁極置於強度0.18臯磁場內,其所受之力爲9達,求其磁極之強度.

〔解〕 由公式, $F=mH$,

得 $$m=\frac{F}{H}=\frac{9}{0.18}=5\text{ 單位.}$$

8. 在等邊三角形之角頂B與C處,有強度50與90單位之N極.今於角頂A處置強度80之S極,求其所受之力.

〔解〕



由公式, $$F=\frac{mm'}{d^2},$$

得 A,B兩極間之力 $F=\dfrac{50\times 80}{10^2}=40$達.

A,C兩極間之力 $F=\dfrac{80\times 90}{10^2}=72$達.

A所受之力均爲引力,由餘弦定律,得

A極所受之力 $=AF=\sqrt{72^2+40^2+2\times 72\times 40\cos 60^\circ}$

$=\sqrt{5184+1600+2880}$

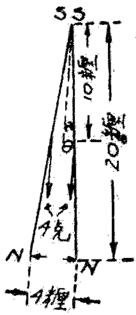
$=98$ 達.

9. 兩等強磁針,各重 4 克,其S極繫於一處(可自由轉動), 其N極垂於F,靜止時兩N極相距 4 糎.設針各長20糎,其重心距S 極10糎,求其磁極強度.

〔解〕　設 m＝ 各磁針之磁極強度。

當兩者靜止時,於 A 點之力距必等於零,故

$$4\times980\times10\sin\theta=\frac{m\times m}{4^2}\times20\cos\theta,$$



$$\therefore m=\sqrt{\frac{4\times980\times10\sin\theta\times4^2}{20\cos\theta}}$$

$$=\sqrt{980\times2\times4^2\tan\theta}$$

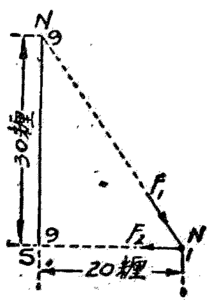
$$=40\sqrt{9.8\times2\times\frac{2}{\sqrt{20^2-2^2}}}$$

$$=40\sqrt{\frac{9.8\times4}{19.9}}=40\times1.41$$

$=56.4$ 單位.

10.　一鉛直之磁棒 NS, 長30糎,強度 9 單位.設於 S 極之水平距離20糎處,置一單位磁極 N,問此單位磁極受力若干?其水平分力又若干?

〔解〕



由圖,單位磁極與 N 極間作用之力

$$F_1=\frac{1\times9}{30^2+20^2},$$

$$F_1\text{之水平分力}=\frac{9}{30^2+20^2}\times\frac{20}{\sqrt{30^2+20^2}}=\frac{18}{1300\sqrt{13}}$$

$$=0.00384\text{達}.$$

$$F_1\text{之鉛直分力}=\frac{9}{30^2+20^2}\times\frac{30}{\sqrt{30^2+20^2}}=\frac{27}{1300\sqrt{13}}$$

$$=0.00576\text{達}.$$

又單位磁極與S極間作用之力

$$F_2=\frac{1\times 9}{20^2}=\frac{9}{400}=0.0225\text{達}.$$

$$\text{故單位磁極所受之力}=\sqrt{(0.0225-0.00384)^2+0.00576^2}$$

$$=\sqrt{0.0005207}=0.02\text{達}.$$

$$\text{其所受之水平分力}=0.0225-0.00384$$

$$=0.019\text{達}.$$

11. 一强度 180 單位之磁極,置於長20糎,强度40單位之磁針之軸上,與磁針之中心相距30糎,求其所受之力.

〔解〕 由公式, $F=mH$,

$$\text{得}\quad F=180\times\frac{4\times40\times\left(\frac{20}{2}\right)\times30}{\left[30^2-\left(\frac{20}{2}\right)^2\right]^2}=180\times\frac{4\times40\times10\times30}{800^2}$$

$$=13.5\text{達}.$$

12. 一等邊三角形之底邊,以一磁棒爲之,求其頂點之磁力之大小及方向.

〔解〕 由公式, $H=\dfrac{2ml}{(d^2+l^2)^{\frac{3}{2}}}$,

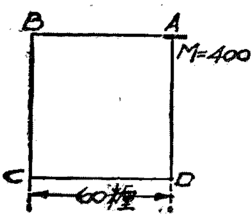
令　$d=$ 三角形一邊之長 $\times \sin 60^\circ = 2l \times \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}\,l$,

得　$H = \dfrac{2ml}{(3l^2+l^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{2ml}{8l^3} = \dfrac{m}{4l^2}$.

故磁力之大小爲 $\frac{m}{4l^2}$,其方向與底邊平行.

13. 一磁矩等於 400 之短磁棒之中心,置於每邊長 60 糎之正方形之一角頂 A 處,並令軸在 AB 邊上,求 B,D 兩角頂之磁場強度.

〔解〕　由公式.　$H = \dfrac{2M}{d^3}$,



得　$H_B = \dfrac{2\times 400}{60^3} = 0.0037$ 皋.

又由公式,　$H = \dfrac{M}{d^3}$,

得　$H_D = \dfrac{300}{60^3} = 0.00185$ 皋.

14. 磁棒長 20 糎,其 N 極向南,距該極 10 糎處,磁場之強度爲零.設地磁之水平強度爲 0.2 C. G. S. 單位,求磁棒之磁矩.

〔解〕　該磁棒於距 N 極 10 糎處所生之磁場強度

$$= \frac{2Md}{(d^2-l^2)^2} = \frac{2M\times(10+10)}{\left[(10+10)^2-\left(\frac{20}{2}\right)^2\right]^2} = \frac{4M}{9{,}000},$$

則磁場強度等於零時, $\frac{4M}{9{,}000}$ 必等於 0.2,

$$\therefore \quad \frac{4M}{9{,}000} = 0.2$$

$\therefore\ M=\frac{0.2\times 9,000}{4}=450$ C. G. S. 單位.

15. 磁針長10糎,強度15單位,在強度12單位之磁場內,欲使其軸與磁場方向作 60° 之傾斜,問需偶力矩若干?

〔解〕　由公式,　$L=2lmH\sin\theta$,

得　$L=10\times 15\times 12\sin 60^\circ=10\times 15\times 12\times 0.866$

$=1,558.8$ 達—糎.

16. 欲使磁針 N S 與地磁力(強度0.2)方向成 60° 之傾斜時,需偶力矩0.6達×2糎,求其磁矩.

〔解〕　由公式,　$L=HM\sin\theta$,

得　$M=\frac{L}{H\sin\theta}=\frac{0.6\times 2}{0.2\times 0.866}=\frac{6}{0.866}$

$=6.9$ C. G. S. 單位.

17. 一短磁棒,在 H=0.18 之磁場中,與一磁力計同置於東西方向內,兩者相距30糎,磁力計磁針之傾斜角為30°,求此磁棒之磁矩.

〔解〕　由公式,　$\frac{R}{H}=\tan\theta$,

$R=\frac{2M}{d^3}$,

得　$\frac{2M}{d^3H}=\tan\theta$.

$\therefore\ M=\frac{d^3H\tan\theta}{2}=\frac{30^3\times 0.18\tan 30^\circ}{2}=1,403$ 單位.

18. 一小振動磁針,在地磁場中,15秒內振動20次.設於子午線方向內置一N極指北之磁棒,則此針在80秒

內振動20次.求該棒在振動磁針處所生之磁場強度 $(H=0.18)$.

〔解〕　由公式,$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{MH}}$,

得　$$\frac{150}{20}=2\pi\sqrt{\frac{I}{M\times 0.18}}\cdots\cdots(1).$$

置磁棒後,設 H'= 磁棒在振動磁針處所生之磁場強度,

則　$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{M(H+H')}},$$

而　$$\frac{80}{20}=2\pi\sqrt{\frac{I}{M(0.18+H')}}\cdots\cdots(2)$$

(1)/(2):　$$\frac{150}{80}=\sqrt{\frac{0.18+H'}{0.18}},$$

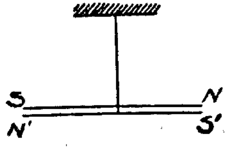
$$\frac{15^2}{8^2}=\frac{0.18+H'}{0.18}=1+\frac{H'}{0.18},$$

$$\therefore\quad H'=\left(\frac{15^2}{8^2}-1\right)\times 0.18=\frac{161}{64}\times 0.18$$

$$=0.453\ \text{C. G. S. 單位.}$$

19.　兩並立之磁棒,振動於水平面內.當同極並立時,其振動周期為12秒;設異極並立時,則振動周期為16秒.試比兩磁棒之磁矩.

〔解〕



設 M_A= 磁棒 A 之磁矩,

M_B= 磁棒 B 之磁矩,

$M_A>M_B$,

由公式,　$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{MH}}$,

得同極並立時，　$12=2\pi\sqrt{\dfrac{I_A+I_B}{(M_A+M_B)H}}$ ………………(1)

異極並立時，　$16=2\pi\sqrt{\dfrac{I_A+I_B}{(M_A-M_B)H}}$ ………………(2)

(1)/(2):　$\dfrac{12}{16}=\sqrt{\dfrac{M_A-M_B}{M_A+M_B}}=\dfrac{3}{4},$

$$\therefore\quad \frac{9}{16}=\frac{M_A-M_B}{M_A+M_B},$$

$$\therefore\quad 9M_A+9M_B=16M_A-16M_B,$$

$$7M_A=25M_B,$$

$$\therefore\quad M_A:M_B=25:7.$$

20.　一磁針在伏角 70° 處,每分內振動 40 次;在伏角 60° 處,每分內振動 50 次.設第一處之全磁力爲 0.6, 問第二處之全磁力若干?

〔解〕　由公式，　$T=2\pi\sqrt{\dfrac{I}{MH}},$

$$H=E\cos\phi,$$

得　$T=2\pi\sqrt{\dfrac{I}{ME\cos\phi}},$

在第一處，　$\dfrac{60}{40}=2\pi\sqrt{\dfrac{I}{M\times0.6\times\cos70^\circ}}$ ………………(1)

在第二處，　$\dfrac{60}{50}=2\pi\sqrt{\dfrac{I}{M\times E_2\times\cos60^\circ}}$ ………………(2)

(1)/(2):　$\dfrac{5}{4}=\sqrt{\dfrac{E_2\cos60^\circ}{0.6\times\cos70^\circ}},$

$$\frac{25}{16}=\frac{E_2\times0.5}{0.6\times0.3420},$$

$$\therefore \quad E_2=\frac{25\times0.6\times0.3420}{16\times0.5}=0.64 \text{ C. G. S. 單位.}$$

21. 先用未曾扭轉之金屬線懸磁石於磁子午面內,後將上端扭轉180°,則磁石由子午面偏向 30°. 然則須將此金屬線之上端扭轉若干度,磁石自子午面之偏向,始成45°?

〔解〕 由公式, $x=k\,MN\sin\phi$,

知 x (所需之扭力) 與金屬線上端扭轉之度數 A 成正比.

故 $$A=k'\sin\phi,$$

而 $$180^\circ=k'\sin30^\circ=\frac{1}{2}k'\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

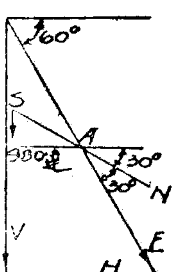
$$A=k'\sin45^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,k'\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2)/(1): $$\frac{A}{180^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}},$$

$$\therefore \quad A=180^\circ\sqrt{2}=255^\circ.$$

22. 設有一處,其伏角磁針與水平作 60° 之傾斜.如在其上附加 1 克之重量,則伏角成爲 30°. 然則須加若干克之重量,始能使其成爲水平?

〔解〕



設 $2l=$ 磁針之長,

$w=$ 使磁針成爲水平時所加之重量.

從靜止時,全磁力 E 作用於磁針 A 點之偶力矩,必等於 1 克之重量作用於 A 點之力矩,

知 $1\times980\times l\cos30^\circ=2\,lm\,E\sin30^\circ.$

$$\therefore \quad E=\frac{980}{2m\tan 30^\circ}.$$

又當磁針成爲水平時,

$$w\times 980\times l=2\,lm\,E\sin 60^\circ,$$

$$\therefore \quad w=\frac{2m\,E\sin 60^\circ}{980},$$

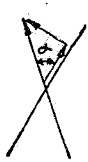
$$=\frac{2m\sin 60^\circ}{980}\times\frac{980}{2m\tan 30^\circ}=\frac{\sin 60^\circ}{\tan 30^\circ}$$

$$\doteqdot 1\frac{1}{2}\text{克}.$$

23. 伏角計(Dip circle)在磁子午面內如轉動 α 之角度,此時相視之伏角 θ' 與此地眞確伏角 θ 之間,有下列之關係,試證明之.

$$\tan\theta=\tan\theta'\cos\alpha.$$

〔解〕



因伏角計轉動 α 之角度時,地磁力之鉛直強度 V' 仍等於 V,而其水平強度 H',則等於 $H\cos\alpha$,

故 $\tan\theta'=\dfrac{V'}{H'}=\dfrac{V}{H\cos\alpha}$,

或 $$\frac{V}{H}=\tan\theta'\cos\alpha.$$

但 $$\frac{V}{H}=\tan\theta.$$

$$\therefore \quad \tan\theta=\tan\theta'\cos\alpha.$$

24. 承前題,設伏角計在磁子午面內,轉動某角度時,所得之相視伏角爲 θ_1,設更轉動 90° 時(順或逆時針方向),其所得之相視伏角 θ_2,則該地之眞實伏角,可由下

式求之:

$$\cot^2\theta = \cot^2\theta_1 + \cot^2\theta_2,$$

試證明之.

〔解〕　由前題得

$$\tan\theta = \tan\theta'\cos\alpha,$$

或　$$\cot\theta = \cot\theta'\sec\alpha.$$

$$\therefore\quad \cot\theta = \cot\theta_1\sec\alpha_1, \quad\cdots\cdots(1)$$

及　$$\cot\theta = \cot\theta_2\sec\alpha_2. \quad\cdots\cdots(2)$$

又　$$\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ,$$

或　$$\alpha_1 = 90^\circ - \alpha_2, \quad\cdots\cdots(3)$$

以(3)式中 α_1 之值代入(1)式:

$$\cot\theta = \cot\theta_1\sec(90^\circ - \alpha_2)$$
$$= \cot\theta_1\csc\alpha_2,$$

或　$$\csc\alpha_2 = \frac{\cot\theta}{\cot\theta_1}.$$

已知 $\csc\alpha_2$ 之值, $\sec\alpha_2$ 之值亦可求之,

$$\sec\alpha_2 = \frac{\cot\theta}{\sqrt{\cot^2\theta - \cot^2\theta_1}},$$

以 $\sec\alpha_2$ 之值代入(2)式,則

$$\cot\theta = \cot\theta_2\frac{\cot\theta}{\sqrt{\cot^2\theta - \cot^2\theta_1}},$$

$$\therefore\quad \sqrt{\cot^2\theta - \cot^2\theta_1} = \cot\theta_2,$$

$$\therefore\quad \cot^2\theta - \cot^2\theta_1 = \cot^2\theta_2,$$

$$\therefore\quad \cot^2\theta = \cot^2\theta_1 + \cot^2\theta_2.$$

第十一章　動電學

定義,定律,及公式.

1　抵抗及導線系之抵抗

抵抗定律 (Law of resistance).——導線之抵抗 R 與導線之長 l 為正比例,與其橫切面積 A 為反比例.以式表之,即

$$R=\rho\frac{l}{A}.$$

式中之 ρ,表一常數,由導線之物質種類而定,曰各物質之比抗(Specific resistance).

設上式中之 A 以導線之質量 m,與密度 δ,或其橫切面之半徑 r 表之,則又得下二式:

$$R=\rho l/\pi r^2,$$

$$R=\rho l^2\delta/m.$$

同物質之兩導線之抵抗之比,可由下三式求之:

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{l_1A_2}{l_2A_1};\quad \frac{R_1}{R_2}=\frac{l_1r_2^2}{l_2r_1^2};\quad \frac{R_1}{R_2'}=\frac{l_1^2m_2}{l_2^2m_1}.$$

抵抗之變化.——設 R_0 及 R_t 表在 0°C. 及 t°C. 時同一物質之抵抗,則其關係如下:

$$R_t=R_0(1+\alpha t)$$

α 為一常數,由物質種類而定,曰抵抗之溫度係數(Temperature coefficient of resistance).

比抗表.——

比抗表

物質	比抗
銀	1.52×10^{-6} ohm.
赤銅	1.60×10^{-6} ohm.
鉛	2.90×10^{-6} ohm.
鉑	9.00×10^{-6} ohm.
鐵	9.70×10^{-6} ohm.
鉛	1.95×10^{-5} ohm.
銾	9.434×10^{-5} ohm.

導線系之抵抗.——

(1)順結(Connected in-series). 導線系之全抵抗R_S,等於各導線抵抗r_1、r_2、r_3……之和;卽

$$R_S = r_1 + r_2 + r_3 + \cdots\cdots.$$

(2)並結(Connected in parallel). 導線系之全抵抗R_P之逆數,等於各導線之抵抗r_1、r_2、r_3……之逆數之和;卽

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \cdots\cdots.$$

2. 歐姆定律

歐姆定律(Ohm's law).——一電路(Electric circuit)內之電流強度I,與其兩端之電勢差(Potential difference)V爲

正比,與其間之抵抗力R為反比.即

$$I=\frac{V}{R},$$

或 $$V=IR.$$

結合電池之歐姆定律.——結合後之電池,其電流強度I為內抵抗r與外抵抗R之和除電動力(Electromotive force)E而得之商,即

$$I=\frac{E}{r+R},$$

或 $$E=I(r+R)=Ir+IR.$$

上式中 IR 為外抵抗兩端之電勢差,亦為電池之端電壓(Terminal voltage).設 $IR=V$,

則 $$E=Ir+V,$$

或 $$V=E-Ir.$$

n 個等電動力等內抵抗電池之連結.——

(1)順結.

順結後全部之電動力 $=nE$,

順結後全體之內抵抗 $=nr$,

外抵抗R內之電流強度 $I=\frac{nE}{nr+R}$.

(2)並結.

並結後全部之電動力 $=E$,

並結後全體之內抵抗 $=r/n$,

外抵抗R內之電流強度 $I=\frac{E}{\frac{r}{n}+R}=\frac{nE}{r+nR}$.

3. 正切電流計

正切電流計(Tangent galvanometer)計算公式:

設 I= 導圈內電流強度(以安表之),

n= 導圈之卷數,

r= 導圈之半徑,

H= 該地之地磁力之水平強度,

δ= 磁針轉動之角度,

則 $$\frac{2\pi nI}{10rH}=\tan\delta,$$

或 $$I=\frac{10rH}{2\pi n}\tan\delta.$$

上式中 $10rH/2\pi n$ 曰正切電流計之修正因數(Reduction factor),恆以 k 表之,故又得

$$I=k\tan\delta.$$

4. 電 解

法剌第電解定律(Faraday's law of electrolysis).——

(1)由電流所析出之離子量,與流過之電量成正比例.

設 z= 電化當量(Electro-chemical equivalent,即 1 安之電流在 1 秒間所析出之離子量之克數),

m= 電流 I 安在 t 秒內所析出之離子量,

則 $m=zIt.$

(2)同一電流通過各種電解質(Electrolyte),在同一時間內,各電極析出之離子量,與其化學當量(Chemical equivalent)成正比例.

設 m_1 與 m_2 爲電解質A與B在同一時間內,在各電極所析出之離子量, C_1 與 C_2 爲A與B之化學當量,

則
$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

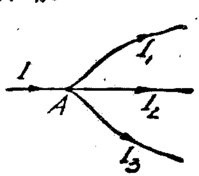
電化當量表.——

物質	原子量	價	電化當量
氯	35.46	1	0.0003676
銅	63.57	1或2	0.0003295
氫	1.008	1	0.0001045
氧	16.0	2	0.00008293
鉑	195.2	4	0.0005059
鉀	39.1	1	0.0004053
銀	107.88	1	0.0011183
鈉	23.00	1	0.0002384
鋅	65.37	2	0.0003388

5. 克希荷夫定律及分路

克希荷夫定律(Kirchhoff's law).——

(1)如各線同交於一點,則各線中之電流之代數和等於零.



如圖,向A流來之電流I,分作 I_1、I_2、I_3、……等流去.若定向A而來之方向爲正,則背A流出者爲負,故

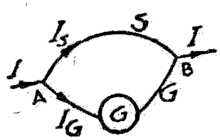
$$I - I_1 - I_2 - I_3 - \cdots\cdots\cdots = 0,$$

或 $\Sigma I = 0.$

(2)如各線聯接成閉路 (Closed circuit), 則各線中電流與其抵抗之相乘積之代數和,等於其電動力之代數和,即

$$\Sigma E = \Sigma IR.$$

分路 (Shunt). ——遇有強電流不便直接測定時,用抵抗相差頗遠之兩導線,同時並結插入電路中,如圖,在抵抗大之一方加電流計 (Galvanometer) G, 則由 A G B 中通過之電流僅總電流之一部份而已,故測定之較易. A S B 曰 A G B 之分路.



設 I 爲總電流, G 爲電流計之抵抗, S 爲分路之抵抗,則通過電流計之電流爲

$$I_G = I\frac{S}{G+S},$$

其通過分路之電流爲

$$I_S = I\frac{G}{G+S}.$$

6. 最大電流之電池連接法

最大電流之電池連接法(Arrangement of cells for maximum current). —— 設若干電池之內抵抗等於其外抵抗時,則電路內之電流爲最大.

設 N= 電池數,

R= 外抵抗,

$r=$ 每電池之內抵抗,

$m=$ 電池之列數,

$n=$ 每列之電池數,

則 $$m\times n=N \cdots\cdots(1)$$

欲得最大電流時,

$$\frac{nr}{m}=R \cdots\cdots(2)$$

7. 電力及電流之熱效應

電力 (Electric power). —— 在電路一部份中每秒間所作之功,曰此一部份之電力.

設 $V=$ 此部份兩端之勢差,

$I=$ 電流強度,

$R=$ 此部份電路之抵抗,

$P=$ 電力,

則 $$P=IV=\frac{V^2}{R}=I^2R \text{ 瓦(或朱/秒)}.$$

電能(Electric energy). —— 電流在一定時間內所作之功,曰電能.通常用瓩時,作單位表出之.即

$$1 \text{ 瓩時} = 1{,}000 \text{ 安弗時}$$
$$= 3{,}600{,}000 \text{ 朱}.$$

朱爾定律 (Joule's law). —— 電流由電路中流過,必伴之以熱之發生,此時所生之熱量 H,與電流強度 I 之平方,電路之抵抗 R,及經歷之時間 t 為正比例,即

$$H=\frac{1}{J}I^2Rt$$

$$=\frac{1}{4.16}\times I^2Rt=0.24I^2Rt\text{ 卡}.$$

計 算 問 題

1. 抵抗及導線系之抵抗

1. 等橫切面玻璃管長 92.1 糎,滿貯水銀,其抵抗爲 1.059 歐,水銀重 10.15 克.求水銀之比抗(水銀之比重爲 13.6).

〔解〕 $$\rho=mR/l^2\delta$$
$$=10.15\times1.059/(92.1)^2\times13.6$$
$$=9.3177\times10^{-5}.$$

2. 兩導線,其長相等,其質相同,其抵抗爲 4 與 9 歐.設前者之直徑爲 1 粍,求後者之直徑.

〔解〕 由公式, $$\frac{R_1}{R_2}=\frac{l_1r_2^2}{l_2r_1^2},$$

得 $$\frac{4}{9}=\frac{r_2^2}{(\frac{1}{2})^2},$$

$$\therefore\quad r_2=\frac{1}{3}.$$

$\therefore$ 後者之直徑 $=2r_2=\frac{2}{3}$粍.

3. 一導線抵抗 68 歐,已知 2 粎長之抵抗爲 0.75 歐,求全線之長.

〔解〕 全線之長 $=\frac{68}{0.75}\times2=181.3$ 粎.

4. A、B 兩導線之重相等,其質相同,而 B 爲 A 長之

9倍.試比二者之抵抗.

〔解〕　由公式, $\frac{R_1}{R_2}=\frac{l_1^2 m_2}{l_2^2 m_1}$,

得　$\frac{R_A}{R_B}=\frac{l_A{}^2}{(9l_A)^2}=\frac{1}{81}$,

故B之抵抗81倍於A.

5. 銅線直徑$\frac{1}{12}$吋,其抵抗爲8歐/哩,求直徑$\frac{1}{36}$吋,長1哩之銅線之抵抗.

〔解〕　由公式, $\frac{R_1}{R_2}=\frac{l_1 r_2^2}{l_2 r_1^2}$,

$$\therefore\quad \frac{8}{R_2}=\frac{\left(\frac{1}{36}\times\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{12}\times\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{9},$$

$$\therefore\quad R_2=72\text{ 歐}.$$

6. 1哩之電報線(直徑2粍),抵抗13歐,求長440碼,直線0.8粍之電報線之抵抗.

〔解〕　由公式, $\frac{R_1}{R_2}=\frac{l_1 r_2^2}{l_2 r_1^2}$,

$$\therefore\quad \frac{13}{R_2}=\frac{1\times(0.8)^2}{\frac{440\times3}{5,280}\times(2)^2}=0.64,$$

$$\therefore\quad R_2=20.31\text{ 歐}.$$

7. 第20號S. W. G. 銅線之抵抗爲0.026歐/米,重爲5.84克/米,求1米之第32號S. W. G. 之銅線(重0.524克)之抵抗.

〔解〕　由公式, $\frac{R_1}{R_2}=\frac{l_1^2 m_2}{l_2^2 m_1}$,

$$\therefore \quad \frac{0.026}{R_2}=\frac{0.524}{5.84},$$

$$\therefore \quad R_2=0.2903\text{歐}.$$

8. 木槽深 2 糎,闊2.5糎,長 2 粎,設半貯以水銀,求其兩端之抵抗.

〔解〕 由表,得 $\rho=9.43\times10^{-5}$,

$$\therefore \quad R=\rho\frac{l}{A}=9.43\times10^{-5}\times\frac{2\times100}{1\times2.5}$$

$$=0.00755\text{歐}.$$

9. 茲有兩導線,一以鉛製之,一以銅製之,兩者之長及抵抗均相等,試比較兩者之重(鉛之密度與銅之密度之比爲 1 : 3.6, 比抗之比爲 1 : 0.55).

〔解〕 $$\frac{R_1}{R_2}=\frac{\rho_1 l_1}{A_1}\times\frac{A_2}{\rho_2 l_2}.$$

但 $R_1=R_2$, $l_1=l_2$,

$$\therefore \quad \frac{A_1}{A_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

又兩者重量之比,等於其密度與體積相乘積之比,即

$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{\delta_1 v_1}{\delta_2 v_2}.$$

今 $l_1=l_2$,

則 $$\frac{v_1}{v_2}=\frac{A_1}{A_2},$$

而 $$\frac{w_1}{w_2}=\frac{\delta_1}{\delta_2}\times\frac{A_1}{A_2}=\frac{\delta_1}{\delta_2}\times\frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

$$\therefore \quad \frac{w_1}{w_2}=\frac{1}{3.6}\times\frac{1}{0.55}=\frac{1}{1.98}.$$

10. 直徑 0.05 吋,長 1,000 呎之銅線之抵抗,在 0°C. 時為 4 歐,然則直徑 0.20 吋,長 5,000 呎之銅線,在 50°C.時之抵抗將何如?設每昇高 1°C.,抵抗卽增加其在 0°C. 時之值之 $\frac{4}{1,000}$.

〔解〕　由公式, $R=\rho\frac{l}{A}$,

$$\therefore\quad \rho=\frac{RA}{l}=\frac{4\times\frac{1}{4}\pi\times(0.05)^2}{1,000}=\frac{\pi}{400,000}.$$

直徑 0.20 吋,長 5,000 呎,在 0°C. 時之抵抗為

$$R_0=\frac{\pi}{400,000}\times\frac{5,000}{\frac{\pi}{4}\times(0.20)^2}=\frac{5}{4}\text{歐}.$$

故在 50°C. 時之抵抗為

$$R_{50}=R_0(1+\alpha t)=\frac{5}{4}(1+\frac{4}{1,000}\times 50)$$

$$=1.5\text{歐}.$$

11. 三導線之抵抗為 1,3 及 5 歐.求其順結時之全抵抗.

〔解〕　由公式,　$R_S=r_1+r_2+r_3+\cdots\cdots$,

得全抵抗 $R_S=1+3+5=9$ 歐.

12. 三導線之抵抗為 1,3 及 5 歐.求其並結時之全抵抗.

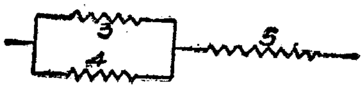
〔解〕　由公式, $\frac{1}{R_P}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\cdots\cdots$

得　$$\frac{1}{R_P}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{23}{15},$$

$\therefore$ 全抵抗 $R_P=\frac{15}{23}$ 歐.

13. 導線二,其抵抗為 3 與 4 歐.兩者並結後,復與抵抗 5 歐之導線相順結.求其全抵抗.

〔解〕



3 與 4 歐之全抵抗

$$=\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=\frac{12}{7}$$

$$=1.71 \text{ 歐.}$$

$\therefore$ 3、4 與 5 歐之全抵抗 $=1.71+5$

$=6.71$ 歐.

14. 導線 n 根,其順結時之全抵抗等於並結時之 n^2 倍.試證之.

〔解〕 設 R = 每根導線之抵抗,

R_s = 導線 n 根順結時之全抵抗,

R_P = 導線 n 根並結時之全抵抗,

由公式, $R_s=nR$,

及 $$\frac{1}{R_P}=\frac{1}{R}\times n,$$

得 $$R_P=\frac{R}{n},$$

$$\frac{R_s}{R_P}=\frac{nR}{\frac{R}{n}}=n^2.$$

15. 海底電線 A 與 C 兩站間之絕緣抵抗為 15,000 歐.設 A 與 B 站間之絕緣抵抗為 20,000 歐,求 B 與 C 站間之絕緣抵抗.

〔解〕 絕緣抵抗係對於海底電線四周之抵抗而言,

故AB與BC順結時,其作用等於並結.

$$\frac{1}{15,000}=\frac{1}{20,000}+\frac{1}{R_{BC}}.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{R_{BC}}=\frac{1}{15,000}-\frac{1}{20,000}=\frac{1}{60,000}$$

$$\therefore\quad R_{BC}=60,000\text{ 歐.}$$

2. 歐姆定律

16. 一白熱燈用電0.7安,其兩端之電勢差為98弗,求其抵抗.

〔解〕 由歐姆定律, $I=V/R$.

得 $$R=\frac{V}{I}=\frac{98}{0.7}=140\text{ 歐.}$$

17. 電槽(Battery)之電動力為15弗,設連以銅線,則有1.5安之電流通過,其兩端之電勢差降為9弗.求此線之抵抗及電槽之內抵抗.

〔解〕 設 $R=$銅線之抵抗, $r=$電槽之內抵抗,

則 $$R=\frac{V}{I}=\frac{9}{1.5}=6\text{ 歐.}$$

又 $$E=I(r+R),\text{ 或 }\quad r=\frac{E}{I}-R,$$

$$\therefore\quad r=\frac{E}{I}-R=\frac{15}{1.5}-6=4\text{ 歐.}$$

18. 電報所用鐵線之抵抗為 4.6 歐/哩.電槽以電動力 1.04 弗,內抵抗30歐之電池組之.設器械之抵抗為80歐,所需之電流為 8×10^{-3} 安.求所需之電池數(電報線長200哩).

〔解〕 設n＝所需之電池數，

則電槽之電動力 ＝1.04n 弗，

電槽之內抵抗 ＝30n 歐，

線之抵抗 ＝4.6×200＝920 歐，

器械之抵抗 ＝80 歐，

全外抵抗 ＝920＋80＝1,000 歐.

$$\therefore\quad I=\frac{E}{R+r}=\frac{1.04n}{30n+1{,}000}=0.008,$$

$$1.04n=0.24n+8,$$

$$\therefore\quad n=10.$$

19. 導線 ABC 之一端 A 與地相連，他端 C 之電勢 (Potential) 恆為 100 弗.設 AB 之抵抗為 9.6 歐，BC 為 2.4 歐，問線內之電流強度及 B 點之電勢.

〔解〕 $I=\frac{V}{R}=\frac{100}{9.6+2.4}=8\frac{1}{3}$ 安.

因 A 點之電勢等於零，

$\therefore$ B 點之電勢 $=8\frac{1}{3}\times 9.6=80$ 弗.

20. 本生電池(Bunsen cell)內抵抗為 0.3 歐，開路 (Open circuit) 時電動力為 1.8 弗.今將兩極連以抵抗 1.2 歐之導線，求電流之強度與電池兩端之電勢差.

〔解〕 $I=\frac{E}{r+R}=\frac{1.8}{0.3+1.2}=1.2$ 安.

電池兩端之電勢差 ＝IR＝1.2×1.2＝1.44 弗.

21. 設電路之抵抗加增 3 歐，則其電流降為 6 與 5 之比.求初時之抵抗.又欲使電流降為初時之半，問需加增抵抗若干？

〔解〕　設 R = 初時電路之抵抗,

R' = 使電流降爲初時之半所加增之抵抗,

V = 電路兩端之電勢差.

由公式,　$I=\frac{V}{R}$,

得　$$\frac{6}{5}=\frac{\frac{V}{R}}{\frac{V}{R+3}}=\frac{R+3}{R},$$

$$6R=5R+15,$$

$$\therefore\quad R=15\text{ 歐}.$$

又　$$\frac{2}{1}=\frac{\frac{V}{15}}{\frac{V}{15+R'}}=\frac{15+R'}{15},$$

$$30=15+R',$$

$$\therefore\quad R'=15\text{ 歐}.$$

22. Grove 電池 4 枚(內抵抗各爲 0.25 歐), 與電磁石 (Eletromagnet)(抵抗 5 歐)相連,欲使電流倍之,問需加入電池若干?

〔解〕　設 E = 每個電池之電動力,

n = 加入之電池數,

由題得, $$I_1=\frac{4E}{0.25\times4+5}=\frac{2}{3}E\cdots\cdots(1)$$

$$I_2=\frac{(4+n)E}{0.25(4+n)+5}=\frac{(4+n)E}{6+0.25n}\cdots\cdots(2)$$

但　$$2I_1=I_2\cdots\cdots(3)$$

以(1)式之 I_1 及(2)式之 I_2 代入(3)式,得

$$\frac{4E}{3}=\frac{(4+n)E}{6+0.25n},$$

$$24+n=12+3n,$$

$$\therefore\ n=6.$$

23. 一電槽由 5 電池組成,其兩極連以長 8 粎,抵抗 0.5 歐/粎之導線,求線上兩點間之電勢差爲 1 弗時之距離,但電池電動力爲1.4弗,內抵抗爲 2 歐.

〔解〕 $I(\text{線內電流})=\frac{1.4\times5}{2\times5+0.5\times8}=\frac{0.5}{14}$ 安.

設 d= 兩點間之電勢差 1 弗時之距離,

由公式, $V=IR,$

$$\therefore\ 1=0.5\times0.5d,$$

$$\therefore\ d=4\text{ 粎}.$$

24. 電槽由 4 電池組之,其兩極以長 8 呎之導線連結之.每個電池之內抵抗與長 1 呎之導線之抵抗相等.試求導線 3 呎間之電勢差與每個電池之電動力之比.

〔解〕 設 E=每個電池之電動力,

r=每個電池之內抵抗=導線長1呎之抵抗,

由題得 $1=\frac{4E}{4r+8r}=\frac{E}{3r},$

$\therefore$ V(導線 3 呎間之電勢差)=IR

$$=\frac{E}{3r}\times3r=E.$$

故導線 3 呎間之電勢差與每個電池之電動力相等,其比爲1:1.

25. 由一電槽供給之電流,通過(1)一 20 歐之抵抗,(2)一抵抗未知之導線,及(3)一 40 歐之抵抗,成爲 10:9:8

之比,求電池之內抵抗及導線之抵抗.

〔解〕　設 E= 電池之電動力, r= 電池之內抵抗,

R= 導線之抵抗,

得
$$\frac{E}{r+20}=10, \cdots\cdots(1)$$
$$\frac{E}{r+R}=9, \cdots\cdots(2)$$
$$\frac{E}{r+40}=8, \cdots\cdots(3)$$

(1)/(3):
$$\frac{r+40}{r+20}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4},$$
$$4r+160=5r+100.$$
$$\therefore \quad r=60 \text{ 歐}.$$

以 r 之值代入(1)式,得
$$E=10(r+20)=10(60+20)=800 \text{ 弗}.$$

以 r 與 E 之值代入(2)式,得
$$\frac{800}{60+R}=9.$$
$$\therefore \quad R=\frac{800}{9}-60=28.9 \text{ 歐}.$$

26.　電動力 1.8 弗之一本生電池,以抵抗 400 歐之導線與一 Plant'e 電池相連結,當其電動力方向相反時,察其電流強度.設使兩者之方向相同,仍得初時之電流強度,必加以 4,000 歐之抵抗,求 Plant'e 電池之電動力及所生之電流(兩電池之內抵抗不計).

〔解〕
$$I_1=\frac{E-1.8}{400} \cdots\cdots(1)$$

$$I_2=\frac{E+1.8}{400+4{,}000}\cdots\cdots(2)$$

但　　$I_1=I_2$,

$$\therefore\quad \frac{E-1.8}{400}=\frac{E+1.8}{4{,}400},$$

$$4{,}400E-1.8\times4{,}400=400E+400\times1.8,$$

$$\therefore\quad E=2.16\ \text{弗}.$$

$$\therefore\quad I_1=\frac{2.16-1.8}{400}=\frac{0.36}{400}=0.0009\ \text{安}.$$

27. 外抵抗爲 5 歐,電流由若干順結之電池供給之.設每個電池之電動力爲 1.8 弗,內抵抗 0.3 歐,試證所得之最大電流爲 6 安.

〔解〕　$$I=\frac{nE}{nr+R}=\frac{1.8n}{0.3n+5}=\frac{1.8}{0.3+\frac{5}{n}},$$

設　$n=\infty$,

則　$$I=\frac{1.8}{0.3}=6\ \text{安}.$$

故電池數爲無窮時,其電流爲 6 安.

28. 某電路之外抵抗爲電槽抵抗之 $\frac{2}{3}$.設電槽內抵抗減少一半,求電流改變若干?

〔解〕　設 E= 電槽之電動力, r= 電槽之內抵抗,

I_1= 初時之電流,

I_2= 電池內抵抗減少一半後之電流,

則　$$I_1=\frac{E}{\frac{2}{3}r+r}\quad\text{及}\quad I_2=\frac{E}{\frac{2}{3}r+\frac{1}{2}r}$$

$$\therefore\quad \frac{I_2}{I_1}=\frac{\frac{2}{3}r+r}{\frac{2}{3}r+\frac{1}{2}r}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{7}{6}}=\frac{10}{7}.$$

29. 電槽A之電動力 2 弗,內抵抗 1 歐,電槽B之電動力 $2\frac{1}{2}$ 弗,內抵抗 2 歐.以一線連結 A 之兩極或B之兩極,其電流之強度相等.求電流之強度及該線之抵抗.

〔解〕　設　R＝該線之抵抗,

則　$I_A=\frac{2}{1+R}$, 及 $I_B=\frac{2.5}{2+R}$.

但　$$I_A=I_B,$$

$$\therefore \quad \frac{2}{1+R}=\frac{2.5}{2+R},$$

$$4+2R=2.5R+2.5.$$

$$\therefore \quad R=3 \text{ 歐}.$$

$$\therefore \quad I_A(\text{或 } I_B)=\frac{2}{1+3}=0.5 \text{ 安}.$$

30. 電槽之電動力 8 弗,內抵抗 5 歐.今連以抵抗 6 歐之導線,求電流強度及電槽之端電壓.

〔解〕　$$I=\frac{E}{r+R}=\frac{8}{5+6}=0.727 \text{ 安}.$$

$$V=IR=\frac{8}{11}\times 6=4.36 \text{ 弗}.$$

或　$$V=E-Ir=8-\frac{8}{11}\times 5=4.36 \text{ 弗}.$$

31. 電槽之電動力 6 弗,以抵抗 12 歐之導線連結之,其兩極以靜電電壓表度之,得 4 弗.求電流強度及電槽之抵抗.

〔解〕　$$I=\frac{V}{R}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3} \text{ 安}.$$

又　$E=I(r+R)$,

$$\therefore \quad r=\frac{E}{I}-R=\frac{6}{\frac{1}{3}}-12=6\text{ 歐.}$$

32. 電池 4 個,其電動力各1.5弗,內抵抗各 2 歐,外抵抗為 2 歐.求在下各情形時導線內之電流:(a)均順結,(b)混合連結,卽兩順結之電池,再並結之;(c)均並結.

〔解〕　(a)全電動力 $=4\times1.5=6$ 歐,

全內抵抗 $=4\times2=8$ 歐.

$$\therefore \quad I=\frac{6}{8+2}=0.6\text{ 安.}$$

(b)全電動力 $=2\times1.5=3$ 弗,

全內抵抗 $=\dfrac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=2$ 歐.

$$\therefore \quad I=\frac{3}{2+2}=0.75\text{ 安.}$$

(c)全電動力 $=1.5$ 弗,

全內抵抗 $=\dfrac{1}{\frac{1}{2}\times4}=\dfrac{1}{2}$ 歐.

$$\therefore \quad I=\frac{1.5}{\frac{1}{2}+2}=0.6\text{ 安.}$$

33. 兩電池,其電動力各為 1.1 及 1.3 弗,內抵抗各為 0.4 及 0.6 歐,以抵抗 4 歐之電流表順結之.求在下各情形時電流強度:(1)設兩電動力之方向相同,(2)設方向相反.

〔解〕　(1)全電動力 $=1.1+1.3=2.4$ 弗,

全內抵抗 $=0.4+0.6=1$ 歐.

$$\therefore \quad I=\frac{2.4}{1+4}=\frac{2.4}{5}=0.48\text{ 安.}$$

(2)全電動力 $=1.3-1.1=0.2$ 弗,

全內抵抗 $=0.4+0.6=1$ 歐.

$$\therefore \quad 1=\frac{0.2}{1+4}=0.04\text{ 安.}$$

34. 兩電池,其電動力各為1.5弗,內抵抗各為 5 歐,以抵抗10歐之抵抗圈(Resistance coil)及抵抗箱(Resistance box)順結之.欲使抵抗圈兩端之電壓適為0.1弗,問抵抗箱內應置抵抗若干?

〔解〕 $$I=\frac{V}{R}=\frac{0.1}{10}=0.01\text{ 安.}$$

又 $$E=I(r+R+R'),$$

$$\therefore \quad R'(\text{抵抗匣內應置之抵抗})=\frac{E}{I}-r-R$$

$$=\frac{1.5\times 2}{0.01}-5\times 2-10$$

$$=280\text{ 歐.}$$

35. 電池之兩極連以抵抗 1 歐之導線,其端電壓為 1 弗.設以抵抗 3 歐之導線與 1 歐之導線並結,則其端電壓降為0.9弗.求電池之電動力及內抵抗.

〔解〕 由公式, $V=E-Ir.$

及 $$I=\frac{E}{r+R},$$

得 $$V=E-\frac{E}{r+R}r=E\frac{R}{r+R}.$$

$$\therefore \quad 1=E\frac{1}{r+1}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 1 歐之導線與 3 歐之導線並結時之全抵抗為

$$\frac{1}{\frac{1}{1}+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}\text{ 歐.}$$

$$\therefore\quad 0.9=E\frac{\frac{3}{4}}{r+\frac{3}{4}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)/(2),得 $$\frac{1}{0.9}=\frac{r+\frac{3}{4}}{r+1}\cdot\frac{4}{3},$$

$$3r+3=3.6r+2.7,$$

$$\therefore\quad r=0.5\text{ 歐}.$$

以 r 之值代入(1),得

$$E=r+1=0.5+1=1.5\text{ 弗}.$$

3. 正切電流計

36. 正切電流計由三導圈組成,每圈直徑30糎;通以0.85安之電流,求中心所生磁場之強度.設該地之H為0.17,求磁針之偏向之角度.

〔解〕 中心所生磁場之強度 $=\frac{2\pi nI}{10r}=\frac{2\pi\times3\times0.85}{10\times15}$

$$=0.1068.$$

由公式, $$\tan\delta=\frac{2\pi nI}{10rH},$$

$$\therefore\quad \tan\delta=\frac{2\pi\times3\times0.85}{10\times15\times0.17}=0.628,$$

$$\therefore\ \delta=39^\circ.$$

37. 正切電流計由一導圈(直徑40糎)組成,通以某電流,則生45°之偏向角,求該電流之強度(H=0.17).

〔解〕 由公式, $\tan\delta=\frac{2\pi nI}{10rH},$

$$\therefore\quad I=\frac{10rH}{2\pi n}\tan\delta=\frac{10\times20\times0.17}{2\pi\times1}\tan45^\circ$$

$=5.41$ 安.

38. 一電池,一電流計與正切電流計相順結.正切電流計以直徑40糎之十導圈組成.偏向爲 42°, 電流計指示0.5157安.求該地H之值.

〔解〕 由公式, $\tan\delta=\frac{2\pi nI}{10rH}$,

$$\therefore \quad H=\frac{2\pi nI}{10r\tan\delta}=\frac{2\pi\times10\times0.5157}{10\times20\times0.900}=0.18.$$

39. 同一電流通入二同心圓之導圈內,圈半徑各爲1與3糎,惟其方向相反,一磁針置其中心.設該電流通入半徑2糎之導圈內,試比其中心之磁效應.

〔解〕 $f_1=$半徑1糎導圈中心之磁場強度

$$=\frac{2\pi nI}{10r}=\frac{2\pi I}{10},$$

$f_2=$半徑3糎導圈中心之磁場強度

$$=\frac{2\pi I}{10\times3}=\frac{2\pi I}{30},$$

$\therefore f=f_1$與f_2之合磁場強度

$$=f_1-f_2=\frac{2\pi I}{10}-\frac{2\pi I}{30}=\frac{4\pi I}{30},$$

又 $f'=$半徑2糎導圈中心之磁場強度

$$=\frac{2\pi I}{20},$$

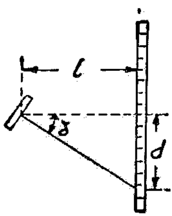
$$\therefore \quad f:f'=\frac{4\pi I}{30}:\frac{2\pi I}{20}=4:3.$$

40. 二單一之同心圓導圈,其面位於磁子午線內.於其中心置一磁針及一反射鏡.設依次通以相等之電流,則得偏向角之40與65.求其直徑之比.

〔解〕 $\because \quad \tan\delta=\dfrac{2\pi nI}{10rH},$

但 $\dfrac{2\pi nI}{10H}$ 爲常數,

$$\therefore \quad \tan\delta \propto \frac{1}{r} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$



又如圖, $\tan\delta=\dfrac{d}{l},$

但 l 爲常數,

$$\therefore \quad \tan\delta \propto d \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)與(2),得 $r\propto\dfrac{1}{d},$

$$\therefore \quad \frac{r_1}{r_2}=\frac{d_2}{d_1}=\frac{65}{40}=\frac{13}{8},$$

故兩導圈直徑之比爲13:8.

41. 兩正切電流計,A與B,其構造相同,而導圈之多寡則異.二者相順結,而通以電流,A之偏向爲45°,而B爲31°.試求二者導圈數之比($\tan 31°=0.60$).

〔解〕 $\tan\delta=\dfrac{2\pi nI}{10rH},$

$$\therefore \quad \tan\delta \propto n,$$

$$\therefore \quad \frac{n_1}{n_2}=\frac{\tan\delta_1}{\tan\delta_2}=\frac{\tan 45°}{\tan 31°}=\frac{1}{0.60},$$

$$\therefore \quad n_1 : n_2 = 10 : 6.$$

42. 正切電流計導圈半徑15糎,凡50捲.設該計之最大偏向爲60°,最小爲1°,求該計所度電流之範圍.

〔解〕 設 $H=0.18,$

$$\therefore \quad I=\frac{10rH}{2\pi n}\tan\delta,$$

當　$\delta=60^\circ$ 時,

$$I=\frac{10\times15\times0.18}{2\pi\times50}\tan 60^\circ=0.149\text{ 安.}$$

當　$\delta=1^\circ$ 時,

$$I=\frac{10\times15\times0.18}{2\pi\times50}\tan 1^\circ=\frac{10\times15\times0.18}{2\pi\times50}\times0.017$$

$$=0.00146\text{ 安.}$$

∴　該計所度電流之範圍爲自 0.00146 至 0.149 安.

43.　正切電流計有半徑 8 粴之導圈 10 捲.設於 H = 0.18 處,通以某電流,得偏向 45°. 問於電流等於 $\frac{1}{1,000}$ 安時欲得同樣偏向,其法何如?

〔解〕　$\because \quad I=\frac{10rH}{2\pi n}\tan\delta,$

$$\therefore \quad I(\text{某電流})=\frac{\times10\times80.18}{2\pi\times10}\tan45^\circ=\frac{0.72}{\pi}.$$

通以小電流而欲得大偏向,增導圈之數可矣.

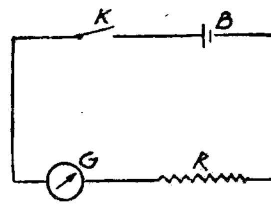
上式當 r、H 與 δ 爲常數時,

$$I\infty\frac{1}{n},$$

$$\therefore \quad \frac{I_1}{I_2}=\frac{n_2}{n_1},$$

$$\therefore n_2=\frac{I_1}{I_2}n_1=\frac{\frac{0.72}{\pi}}{\frac{1}{1,000}}\times10=2,292\text{ 捲.}$$

44. 如圖,一電槽與一已知抵抗R及一抵抗G之正切電流計相順結.正切電流計針之偏向爲δ,設已知抵抗增至R′,則偏向降爲δ'.試證電槽之內抵抗爲



$$B=\frac{R'\tan\delta'-R\tan\delta}{\tan\delta-\tan\delta'}-G.$$

〔解〕 設E=電池之電動力,

由題意,得 $$\tan\delta=\frac{2\pi n\dfrac{E}{B+R+G}}{10rH}\cdots\cdots(1)$$

又 $$\tan\delta'=\frac{2\pi n\dfrac{E}{B+R'+G}}{10rH}\cdots\cdots(2)$$

(1)/(2): $$\frac{\tan\delta}{\tan\delta'}=\frac{B+R'+G}{B+R+G},$$

$$B\tan\delta+R\tan\delta+G\tan\delta=B\tan\delta'+R'\tan\delta'+G\tan\delta',$$

$$\therefore\ B(\tan\delta-\tan\delta')=R'\tan\delta'-R\tan\delta-G(\tan\delta-\tan\delta'),$$

$$\therefore\quad B=\frac{R'\tan\delta'-R\tan\delta}{\tan\delta-\tan\delta'}-G.$$

45. 一但尼爾電池(Daniel cell)與一正切電流計(抵抗1歐)及一抵抗箱相順結.抵抗箱抵抗2歐時,正切電流計之偏向爲60°;抵抗20歐時,降爲30°,求電池內抵抗.

〔解〕 由題44之公式,

$$B=\frac{R'\tan\delta'-R\tan\delta}{\tan\delta-\tan\delta'}-G,$$

$$\therefore B=\frac{20\tan 30^\circ-2\tan 60^\circ}{\tan 60^\circ-\tan 30^\circ}-1=\frac{20\times 0.577-2\times 1.732}{1.732-0.577}-1$$

$$=\frac{8.076}{1.155}-1=7-1=6\text{ 歐.}$$

46. 如題44之圖,正切電流計G與電池B及已知抵抗R相結,得偏向δ.設R換以抵抗未知之導線,則正切電流計之偏向爲δ'.試證該導線之抵抗爲

$$(\tan\delta/\tan\delta')(B+G+R)-(B+G).$$

〔解〕　設R'=導線之抵抗.

則得下二式,
$$\tan\delta=\frac{2\pi n\dfrac{E}{B+R'+G}}{10r\,H}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\tan\delta'=\frac{2\pi n\dfrac{E}{B+R+G}}{10r\,H}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)/(2):
$$\frac{\tan\delta}{\tan\delta'}=\frac{B+R'+G}{B+R+G},$$

$$\therefore\quad R'=\frac{\tan\delta}{\tan\delta'}(B+R+G)-(B+G).$$

47. 電槽兩極以長10呎之導線連結之;該導線復作成一圈,環於正切電流計上,得偏向若干度.設該導線換以長50呎之導線(作成3圈),則其偏向相等.試證電槽之內抵抗等於長10呎之導線之抵抗.

〔解〕　設B=電池內抵抗,R=導線每呎之抵抗,

δ=偏向角度,

由題,得　$2\pi r=10,$

$$\therefore\quad r=\frac{10}{2\pi}.$$

$$\therefore \quad \tan\delta = \frac{2\pi nI}{10r\,H} = \frac{2\pi \times 1 \times \dfrac{E}{B+10R}}{10 \times \dfrac{10}{2\pi}H},$$

$$\therefore \quad \tan\delta = \frac{4\pi^2 E}{100H(B+10R)} \cdots\cdots\cdots(1)$$

又 $$\tan\delta = \frac{2\pi \times 3 \times \dfrac{E}{B+50R}}{10 \times \dfrac{10}{2\pi}H},$$

$$\therefore \quad \tan\delta = \frac{4\pi^2 \times 3E}{100H(B+50R)} \cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)=(2): $$\frac{4\pi^2 E}{100H(B+10R)} = \frac{4\pi^2 \times 3E}{100H(B+50R)},$$

$$\frac{1}{B+10R} = \frac{3}{B+50R},$$

$$B+50R = 3B+30R,$$

$$\therefore \quad B = 10R.$$

48. 正切電流計有兩圈,一厚導圈,抵抗G;一薄導圈,抵抗G′,兩圈之$\dfrac{10rH}{2\pi n}$之比爲R.當第一圈與未知抵抗及電池(內抵抗不計)相連時,其偏向爲δ;第二圈相連時,偏向爲δ'.試證未知抵抗爲

$$(RG - R'G')/(R'-R),$$

上式內 $R' = \tan\delta'/\tan\delta$.

〔解〕 設E=電池電動力, r=未知抵抗.

由題,得 $$\tan\delta = \frac{2\pi n \dfrac{E}{G+r}}{10r\,H} \cdots\cdots\cdots(1)$$

又　$$\tan\delta'=\frac{2\pi n'\dfrac{E}{G'+r}}{10r'H}\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)/(2):　$$\frac{\tan\delta}{\tan\delta'}=\frac{\dfrac{2\pi n}{rH}}{\dfrac{2\pi n'}{r'H}}\times\frac{(G'+r)}{(G+r)}.$$

但　$\frac{rH}{2\pi n}\Big/\frac{r'H}{2\pi n'}=1$,　及 $\tan\delta'/\tan\delta=R'$.

$$\therefore\quad \frac{1}{R'}=\frac{1}{R}\times\frac{(G'+r)}{(G+r)},$$

$$R'G'+R'r=RG+Rr,$$

$$\therefore\quad r=\frac{RG-R'G'}{R'-R}.$$

49. 電報線所用電槽之抵抗等於電報線30哩之抵抗.其電流(距電池120哩處)以正切電流計度之.表之導圈凡20捲.試證於距電池270哩處欲得同一偏向角,正切電流計之導圈數,必倍之(設地球之抵抗略去不計,又導圈之半徑相等).

〔解〕

$$\tan\delta=\frac{2\pi n\times\dfrac{E}{R+\dfrac{120}{30}R}}{10rH}=\frac{4\pi E}{5rHR}\cdots\cdots\cdots(1)$$

又　$$\tan\delta=\frac{2\pi n\times\dfrac{E}{R+\dfrac{270}{30}R}}{10rH}=\frac{\pi nE}{50rHR}\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)=(2)　$$\frac{4\pi E}{5rHR}=\frac{\pi nE}{50rHR},$$

$$\frac{4}{5}=\frac{n}{50},$$

$$\therefore \quad n=40\text{捲}.$$

50. 一正切電流計通以某電流(由電槽供給之),其偏向為 δ. 該表之 $10r\,H/2\pi n$ 為 k. 設加入抵抗 r, 則偏向降為 δ'. 試證該電槽之電動力為

$$kr\cdot\tan\delta\cdot\tan\delta'/(\tan\delta-\tan\delta').$$

[解] 設 E=電池之電動力, B=電池之內抵抗.

由題得 $\tan\delta=\dfrac{2\pi n\dfrac{E}{B}}{10r\,H}=\dfrac{E}{kB},$

$$\therefore \quad B=\frac{E}{k\tan\delta}\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\tan\delta'=\frac{2\pi n\dfrac{E}{B+r}}{10r\,H}=\frac{E}{k(B+r)},$$

$$\therefore \quad B=\frac{E}{k\tan\delta'}-r\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)=(2): $\dfrac{E}{k\tan\delta}=\dfrac{E}{k\tan\delta'}-r,$

$$E\tan\delta'=E\tan\delta-kr\tan\delta\tan\delta',$$

$$\therefore \quad E=\frac{kr\tan\delta\tan\delta'}{\tan\delta-\tan\delta'}.$$

4. 電 解

15. 銀鹽溶液內通以 1 安之電流. 欲析 1 克之純銀間需時若干?

〔解〕　由公式，　$m=zIt$，

得　$$t=\frac{m}{zI}=\frac{1}{0.0011183\times 1}=895\text{ 秒}$$

$=14$ 分 55 秒.

52. 問用1安之電流，1小時內析出銅若干?

〔解〕　$m=zIt=0.0003295\times 1\times 60\times 60$

$=1.186$ 克.

53. 1分鐘內析出銅 $\frac{1}{1,000}$ 克，求電流強度.

〔解〕　$\because\ m=zIt$，

$$\therefore\ I=\frac{m}{zt}=\frac{1}{1,000\times 0.0003295\times 60}$$

$=0.05055$ 安.

54. 1.868安之電流，在 $\frac{1}{2}$ 小時內析出銅1.108克，求其電化當量.

〔解〕　$\because\ m=zIt$，

$$\therefore\quad z=\frac{m}{It}=\frac{1.108}{1.868\times 30\times 60}=0.0003295.$$

55. 三順結之但尼爾電池與銅電量計 (Voltameter) 相連結，於1小時內析出銅31.7克.求同時間內電池中所析出之銅量及所溶解之鋅量 (銅原子量 $=63.4$，鋅原子量 $=65$).

〔解〕　由法剌第第一定律，所析出之質量與通過之電量爲正比，

得　電池內所析出之銅量＝銅電量計內所析出之銅量 $=31.7$ 克，

而　三電池內所析出銅之總量 $=31.7\times3=95.1$ 克

又由第二定律，

得
$$\frac{\text{三電池內所溶解之鋅量}}{\text{三電池內所析出之銅量}}=\frac{65}{63.4},$$

而　三電池內所溶鋅之總量 $=95.1\times\frac{65}{63.4}=97.5$ 克.

56. 某電流於 1 分 40 秒內析出銀 0.112 克；於兩倍時間內析出鉀 0.081 克.已知銀之化學當量為 108，求鉀之化學當量.

〔解〕　由第二定律，

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{C_1}{C_2},$$

及 1 分 40 秒內析出之銀量 $=0.112$ 克，

1 分 40 秒內析出之鉀量 $=\frac{0.081}{2}=0.0405$ 克，

得
$$\frac{C}{108}=\frac{0.0405}{0.112},$$

$$\therefore\ C=108\times\frac{0.0405}{0.112}=39.05.$$

57. 已知銀之電化當量為 0.0011183，試求 1 小時內 1 安電流所分解之水量(銀原子量 $=108$，氧原子量 $=16$，氫原子量 $=1$).

〔解〕　由第一定律，

$$m=zIt,$$

得
$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{z_1I_1t_1}{z_2I_2t_2},$$

設
$$I_1=I_2,\quad t_1=t_2,$$

則 $$\frac{m_1}{m_2}=\frac{z_1}{z_2}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又由第二定律,

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{C_1}{C_2}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

及(1)=(2), 得 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

$$\therefore\quad \frac{z_0}{0.0011183}=\frac{\frac{16}{2}}{108},$$

$$\therefore\ z_0=0.0011183\times\frac{8}{108}=0.00008293.$$

又 $$z_H=0.0011183\times\frac{1}{108}=0.00001045.$$

$\therefore$ 1 小時內所分解之水量 $=m_0+m_H$

$=z_0It+z_HIt=(z_0+z_H)It$

$=(0.00008298+0.00001045)\times1\times60\times60$

$=0.3362$ 克.

58. 一電路由一銀電量計及一正切電流計(表上導圈凡20捲,直徑16糎)所組成.設正切電流計之偏向爲45°,於15分鐘內析出銀0.115克,求地磁之水平强度(銀之電化當量=0.001118).

〔解〕 $$I=\frac{m}{zt}=\frac{0.115}{0.001118\times15\times60}=0.1143 \text{ 安}.$$

又由公式, $$\tan\delta=\frac{2\pi nI}{10rH},$$

$$\therefore\quad H=\frac{2\pi nI}{10r\tan\delta}=\frac{2\pi\times20\times0.1143}{10\times8\times\tan45^\circ}$$

$=0.1795$ 皐.

59. 一正切電流計與一電池及一銀電量計相順結.針之偏向爲$45°$,於1小時內析出銀0.1052克.巳知銀之電化當量爲0.001118,求正切電流計之常數.

〔解〕 由公式, $I=k\tan\delta$ 及 $m=zIt$,

得 $$k=m/zt\tan\delta.$$

$$\therefore\quad k=0.1052/0.001118\times60\times60\times\tan45°=0.0261.$$

60. 正切電流計導圈凡12捲,半徑15糎,與銅電量計相順結.設偏向爲$60°$, $H=0.18$,求15分鐘內所析出之銅量.

〔解〕 由公式, $\tan\delta=\dfrac{2\pi nI}{10rH}$,及 $m=zIt$,

$$\therefore\quad m=z\times\frac{10rH\tan\delta}{2\pi n}\times t$$

$$=0.0003295\times\frac{10\times15\times0.18\tan60°}{2\pi\times12}\times15\times60$$

$$=0.1838\text{ 克}.$$

61. 酸性水中,通以電流,於45分鐘內,集得乾燥氫430立方糎(壓力68糎,溫度$15°C$.).設電流計指1.2安,求其差數.

〔解〕 在標準溫壓時氫之體積$=430\times\dfrac{273}{273+15}\times\dfrac{68}{76}$

$$=365\text{ 立方糎}.$$

但22.4竔氫之重$=1.008\times2$克,

$\therefore$ 365立方糎氫之重 $=\dfrac{365}{22.4\times1,000}\times1.008\times2$ 克.

$$\therefore I=\frac{m}{zt}=\frac{365}{22.4\times 1,000}\times 1.008\times 2\times\frac{1}{0.00001045\times 45\times 60}$$

$=1.16$ 安.

$\therefore$　電流計之差數 $=1.2-1.16=0.04$ 安.

62.　Helmholtz電流計與銅電量計相順結,通電流後,其偏向爲 $40°$,於 $\frac{1}{2}$ 小時內析出銅 1.325 克,求電流計之修正因數.

〔解〕　由公式,　$I=k\tan\delta$　及　$m=zIt$,

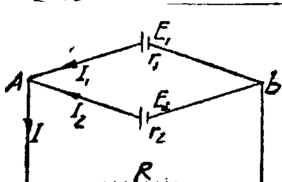
得　$$k=\frac{m}{zt\tan\delta}=\frac{1.325}{0.0003295\times 30\times 60\times 0.839}$$

$=2.658$.

5.　克希荷夫定律及分路

63.　兩電池之電動力爲 E_1 與 E_2,抵抗 r_1 與 r_2,兩者並結後(其電動力之方向相同),以抵抗R之導線連結之.求R內電流之強度.

〔解〕　由克希荷夫第二定律,於電路 E_1IR 內,得



$$I_1r_1+IR=E_1,$$

$$\therefore\ I_1=(E_1-IR)/r_1,$$

又於電路 E_2IR 內,得

$$I_2r_2+IR=E_2,$$

$$\therefore\ I_2=(E_2-IR)/r_2,$$

由克希荷夫第一定律,　$I=I_1+I_2$,

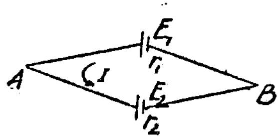
$$\therefore\ I=(E_1-IR)/r_1+(E_2-IR)/r_2,$$

$$Ir_1r_2=E_1r_2+E_2r_1-I(r_1R+r_2R),$$

$$\therefore\quad I=(E_1r_2+E_2r_1)/(r_1r_2+r_1R+r_2R).$$

64. 承前題,設以一電池代之,其通過 R 內之電流強度不變,試證其電動力必為$(E_1r_2+E_2r_1)/(r_1+r_2)$,其內抵抗必為$r_1r_2/(r_1+r_2)$.

〔解〕　兩電池之電動力等於開路時(即無外抵抗連結時)A、B 兩點之電勢差.



設$E_1>E_2$,則雖無外抵抗連結,兩電池內仍有電流流轉.

由歐姆定律,　$I=\dfrac{E_1-E_2}{r_1+r_2}$,

又由　　$V=E-Ir$,

$$\therefore\quad V_{AB}=E_1-\frac{E_1-E_2}{r_1+r_2}r_1=\frac{E_1r_1+E_1r_2-E_1r_1+E_2r_1}{r_1+r_2},$$

$$\therefore\ V_{AB}=\text{兩電池之電動力}=\frac{E_1r_2+E_2r_1}{r_1+r_2}.$$

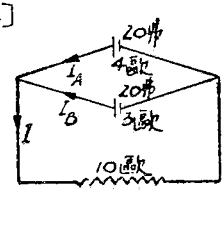
又設 r = 兩電池之內抵抗,

則　　$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{r_1+r_2}{r_1r_2},$$

$$\therefore\quad r=\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}.$$

65. 有電池 A,電動力 20 弗,內抵抗 4 歐;又電池 B,電動力 20 弗,內抵抗 3 歐;兩者並結後,其兩端以抵抗 10 歐之導線連結之,求各電池內之電流強度.

〔解〕



由公式,

$$I=\frac{E_1r_2+E_2r_1}{r_1R+r_2R+r_1r_2},$$

得　$$I=\frac{20\times3+20\times4}{4\times10+3\times10+4\times3}$$

$$=\frac{70}{41},$$

由克希荷夫第二定律,

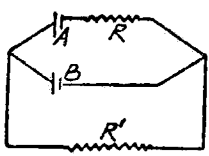
得 $$20-\frac{70}{41}\times10-I_A\times4=0.$$

$$\therefore\quad I_A=(20-\frac{700}{41})\times\frac{1}{4}=0.732\text{ 安}.$$

又由第一定律, $I_B=I-I_A$,

得 $$I_B=\frac{70}{41}-0.732=0.976\text{ 安}.$$

66. 兩電池 A 與 B 及兩抵抗 R 與 R′, 如圖連結之.求 R′ 內之電流強度.



設 A、B 之電動力各為 4 弗,
A、B 之內抵抗各為 2 歐,
R 為 5 歐,
R′ 為 10 歐.

〔解〕 本題之 R(5 歐)可作為 A 電池內抵抗之一部分.

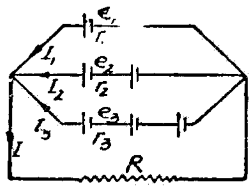
由公式, $$I=\frac{E_1r_2+E_2r_1}{r_1R+r_2R+r_1r_2},$$

得 $$I=\frac{4\times2+4\times(2+5)}{(2+5)\times10+2\times10+(2+5)\times2}=\frac{9}{26}$$

$$=0.346\text{ 安}.$$

67. 一電槽由三列並結之電池組成,其第一列有電池一,第二列有電池二,第三列有電池三,每電池內抵抗各為 r,其兩端連以抵抗 R 之導線,求導線及各列內之電流強度.

〔解〕 設 E = 每電池之電動力,



則 $e_1 = E,\quad r_1 = r,$

$e_2 = 2E,\quad r_2 = 2r,$

$e_3 = 3E,\quad r_3 = 3r,$

由克希荷夫第二定律,於電路 e_1IR 內,

$$E = I_1 r + IR,$$

$$\therefore\quad I_1 = (E - IR)/r \cdots\cdots(1)$$

於 e_2IR 內, $2E = 2I_2 r + IR,$

$$\therefore\quad I_2 = (2E - IR)/2r \cdots\cdots(2)$$

於 e_3IR 內, $3E = 3I_3 r + IR,$

$$\therefore\quad I_3 = (3E - IR)/3r \cdots\cdots(3)$$

又由第一定律, $I = I_1 + I_2 + I_3,$

$$\therefore\quad I = \frac{(E - IR)}{r} + \frac{(2E - IR)}{2r} + \frac{(3E - IR)}{3r},$$

$$6Ir = 6E - 6IR + 6E - 3IR + 6E - 2IR,$$

$$6Ir + 11IR = 18E,$$

$$\therefore\quad I = 18E/(6r + 11R).$$

I 之值代入(1)式,

$$\therefore\ I_1 = [E - 18ER/(6r + 11R)]/r$$

$$= E(6r - 7R)/r(6r + 11R).$$

I 之值代入(2)式,

$$\therefore\ I_2 = [2E - 18ER/(6r + 11R)]/2r$$

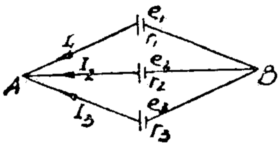
$$= E(6r + 2R)/r(6r + 11R).$$

I 之值代入(3)式,

$$\therefore\ I_3 = [3E - 18ER/(6r + 11R)]/3r$$

$=E(6r+5R)/r(6r+11R)$.

68. 三電池以無抵抗之導線連結之,如圖,試證各線內之電流可由下式類推之:



$$I_1=\frac{e_1(r_2+r_3)-e_2r_3-e_3r_2}{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1}.$$

設 e_1、e_2 及 e_3 爲各電池之電動力,r_1、r_2 及 r_3 爲各電池之內抵抗.

〔解〕 由克希荷夫第二定律,於電路 $Ar_1\ Br_3$ 內,

$$e_1-e_3=I_1r_1-I_3r_3,$$

或 $$-I_3=\frac{e_1-e_3-I_1r_1}{r_3}\cdots\cdots(1)$$

於電路 $Ar_1\ Br_2$ 內,

$$e_1-e_2=I_1r_1-I_2r_2,$$

或 $$-I_2=\frac{e_1-e_2-I_1r_1}{r_2}\cdots\cdots(2)$$

又由第一定律, $\Sigma I=0$,

$$\therefore\ I_1=-I_2-I_3,$$

以(1)式 I_3 及(2)式 I_2 之值代入,則得

$$I_1=\frac{e_1-e_2-I_1r_1}{r_2}+\frac{e_1-e_3-I_1r_1}{r_3}$$

$$=\frac{e_1r_3-e_2r_3-I_1r_1r_3+e_1r_2-e_3r_2-I_1r_1r_2}{r_2r_3}$$

$$I_1(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)=e_1(r_2+r_3)-e_2r_3-e_3r_2,$$

$$\therefore\ I_1=\frac{e_1(r_2+r_3)-e_2r_3-e_3r_2}{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1}.$$

69. 以每粍抵抗1.5歐之導線,作爲抵抗 5 歐之電流計之分路,使電流計中之電流爲總電流之 1/100, 問需

導線若干粍?

〔解〕 設 l = 所需導線之長,

由公式, $$I_G = I\frac{S}{G+S},$$

得 $$\frac{1}{100}I = I\frac{1.5l}{5+1.5l},$$

$$5+1.5l = 150l.$$

$$\therefore \quad l = \frac{5}{148.5} = 0.0337 \text{ 粍}$$

$$= 3.37 \text{ 糎}.$$

70. 欲使抵抗 396 歐之電流計之易感(Sensitiveness)降為 $\frac{1}{100}$,求分路之抵抗.

〔解〕 當電流計中之電流為總電流之 $\frac{1}{100}$,其易感則降為 $\frac{1}{100}$.

由公式, $$I_G = I\frac{S}{G+S},$$

得 $$\frac{1}{100}I = I\frac{S}{396+S},$$

$$396 + S = 100S.$$

$$\therefore \ S = 4 \text{ 歐}.$$

71. 電流計抵抗 300 歐,接以分路後,其中之電流僅為總電流之 0.01. 求(1)分路之抵抗,(2)電流計與分路之全抵抗.

〔解〕 (1)由公式 $$I_G = I\frac{S}{G+S},$$

得　$0.01\,I = I\dfrac{S}{300+S}$,

$3 + 0.01\,S = S.$

$\therefore\quad S = 3/0.99 = 3.03$ 歐.

(2)　設 $R=$ 全抵抗,

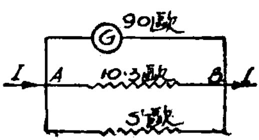
則　$\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{300} + \dfrac{1}{S} = \dfrac{1}{300} + \dfrac{0.99}{3} = \dfrac{1}{3}$,

$\therefore\quad R = 3$ 歐.

72.　電流計抵抗 90 歐,分路抵抗 10.3 歐,欲使電流計之電流為總電流之 $\dfrac{1}{10}$,問更須並結抵抗若干?

〔解〕　由圖,設 $R=$ 三並結抵抗之全抵抗,

$S' =$ 第二分路之抵抗,



則 $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{90} + \dfrac{1}{10.3} + \dfrac{1}{S'}$

$= \dfrac{100.3S' + 90\times 10.3}{90\times 10.3\,S'}$,

$\therefore\quad R = \dfrac{90\times 10.3\,S'}{100.3\,S' + 90\times 10.3}$.

又設 $V=A$、B 兩點間之電勢差,

則　$V = IR = I_G \times 90.$

$\therefore\quad I_G \times 90 = I\dfrac{90\times 10.3\,S'}{100.3\,S' + 90\times 10.3}$

令　$I_G = \dfrac{1}{10}I$,

$\therefore\quad \dfrac{90}{10}I = I\dfrac{90\times 10.3\,S'}{100.3\,S' + 90\times 10.3}$,

$103\,S' = 100.3\,S' + 90\times 10.3$,

$$\therefore \quad S' = \frac{90 \times 10.3}{2.7} = 343.3 \text{歐}.$$

73. 一抵抗10歐之正切電流計之分路爲 0.64 歐. 1 小時內銀電量計析出銀0.532克.電流計之偏向爲 52°. 求電流強度,及電流計之修正因數.

〔解〕 由公式, $m = zIt$,

得 $$I = \frac{m}{zt} = \frac{0.532}{0.001118 \times 60 \times 60} = 0.1321 \text{安}.$$

又設 k 爲修正因數,通過電流計中之電流爲 I_G,

則 $$I_G = I\frac{S}{G+S} \cdots\cdots(1)$$

$$I_G = k \tan \delta \cdots\cdots(2)$$

(1)=(2) $$\therefore \quad k = I\frac{S}{(G+S)\tan\delta},$$

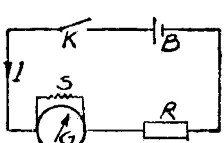
$$\therefore \quad k = 0.1321 \times \frac{0.64}{(10+0.64)\tan 52^\circ}$$

$$= 0.1321 \times \frac{0.64}{(10+0.64)} \times \frac{1}{1.28}$$

$$= 0.00621.$$

74. 一低抵抗之電槽 B 與抵抗箱 R 及一有分路之電流計相連結,如圖.已知偏向後,除其分路,欲使電流計之偏向與前相等,則 R 必增至 R′.設電槽之內抵抗不計,試證電流計之抵抗等於 S(R′−R)/R.

〔解〕



設 E= 電槽之電動力,

I= 總電流強度,

則 S、G 與 R 之全抵抗

$$= \frac{1}{\frac{1}{S}+\frac{1}{G}} + R$$

$$=\frac{GS+GR+SR}{G+S},$$

$$\therefore\quad I=E\Big/\frac{GS+GR+SR}{G+S}=\frac{E(G+S)}{GS+GR+SR}.$$

由是得
$$I_G=I\frac{S}{G+S}$$

$$=\frac{E(G+S)}{GS+GR+SR}\cdot\frac{S}{(G+S)}=\frac{ES}{GS+GR+SR}.$$

除去分路 S,則

$$I'=\frac{E}{G+R'}=I'_G.$$

因電流計之偏向前後相等,I_G 必等於 I'_G,

$$\therefore\quad \frac{ES}{GS+GR+SR}=\frac{E}{G+R'},$$

$$\therefore\quad G=S(R'-R)/R.$$

75. 先將抵抗 B 之電槽,與抵抗 G 之電流計相連結,後在電流計上結抵抗 S 之分路.試比較前後兩者之電流強度.欲使全電路之電流不變,必加入抵抗 $G^2/(G+S)$ 之抵償抵抗 (Compensating resistance), 試證之.

〔解〕　未加分路時之電流強度為

$$故\quad I=\frac{E}{B+G},$$

加分路後之電流強度為

$$I'=\frac{E}{B+\frac{1}{\frac{1}{G}+\frac{1}{S}}}=\frac{E}{B+\frac{GS}{G+S}}=\frac{E(G+S)}{BG+BS+GS},$$

$$\therefore\quad \frac{I}{I'}=\frac{E}{B+G}\Big/\frac{E(G+S)}{BG+BS+GS}=\frac{BG+BS+GS}{(B+G)(G+S)}.$$

又設 R' = 抵償抵抗,

則 $$I''=\frac{E}{B+R'+\frac{1}{\frac{1}{G}+\frac{1}{S}}}=\frac{E}{(B+R')+\frac{GS}{G+S}}$$

$$=\frac{E(G+S)}{(B+R')(G+S)+GS}.$$

但 $$I''=I=\frac{E}{B+G},$$

$$\therefore\quad \frac{E(G+S)}{(B+R')(G+S)+GS}=\frac{E}{B+G}.$$

$$\therefore\quad R'=G^2/(G+S).$$

76. 一電流計加以分路後,其內通過之電流降為 $\frac{1}{2}$,而電槽內之電流則增為 2 倍.試證電流計之抵抗為電槽抵抗之 2 倍,為分路之 3 倍.

〔解〕 設 B = 電槽之抵抗,

則未加分路時之電流強度為

$$I=\frac{E}{B+G},$$

加入分路後之總電流強度為

$$I'=\frac{E}{B+\frac{1}{\frac{1}{G}+\frac{1}{S}}}=\frac{E(G+S)}{BG+BS+GS},$$

電流計內之電流強度為 $I'_G=I'\frac{S}{G+S}$

$$=\frac{E(G+S)}{BG+BS+GS}\cdot\frac{S}{G+S}$$

$$=\frac{ES}{BG+BS+GS}.$$

又由題意, $I'=2I$,

得 $$\frac{E(G+S)}{BG+BS+GS}=\frac{2E}{B+G} \cdots\cdots(1)$$

由 $$I'_G=\frac{1}{2}I,$$

得 $$\frac{ES}{BG+BS+GS}=\frac{1}{2}\cdot\frac{E}{B+G} \cdots\cdots(2)$$

(1)/(2): $$\frac{G+S}{S}=4,$$

$$G+S=4S,$$

$$\therefore\quad G=3S.$$

以 S 之值代入(2),得

$$\frac{\frac{G}{3}}{BG+B\times\frac{G}{3}+G\times\frac{G}{3}}=\frac{1}{2(B+G)},$$

$$2B+2G=3B+B+G,$$

$$\therefore\quad G=2B.$$

77. 安計(Ammeter)圈抵抗 100 歐,當其兩端之電勢差爲 0.120 弗時,則得全刻度之偏向.欲使該計能度(1) 0 至 5 安,(2) 0 至 100 安,求加入分路之抵抗.

〔解〕 設 I_G= 該計之完全或最大電流,

則 $$I_G=\frac{V}{R}=\frac{0.120}{100}=0.0012\text{ 安}.$$

(1) 由公式, $$I_G=I\frac{S}{G+S},$$

$$\therefore\quad 0.0012=5\times\frac{S}{100+S},$$

$$0.12+0.0012\,S=5\,S,$$

$$4.9988\,S=0.12,$$

$$\therefore\quad S=0.024\text{ 歐}.$$

(2) $$0.0012=100\times\frac{S}{100+S},$$

$$0.12+0.0012\,S=100\,S.$$

$$99.9988\,S=0.12,$$

$$\therefore\ S=0.012\text{ 歐}.$$

78. 電流計抵抗40歐,電流 1/1,001 安時,得一度之偏向.設欲該計變爲(1)每度 1 安之安計,(2)每度 1 弗之弗計(Voltmeter),問須加入抵抗若干?其連結法如何?

〔解〕(1) 欲使電流計變安計,必加以並結之抵抗S,其大小可由下式求之:

$$I_G=I\frac{S}{G+S}.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{1{,}001}=1\times\frac{S}{40+S},$$

$$40+S=1{,}001\,S,$$

$$\therefore\ S=0.04\text{ 歐}.$$

(2) 欲使電流計變爲弗計,必加以順結之抵抗R,其大小可由下式求之:

$$V=I_G(R+G).$$

$$\therefore\quad 1=\frac{1}{1{,}001}(R+40),$$

$$R+40=1{,}001,$$

$$\therefore\quad R=961\text{ 歐}.$$

6. 最大電流之電池連結法

76. 電池18個,內抵抗各爲1.8歐.欲使 1 歐之外抵抗

得最大電流,應將電池如何連結?

〔解〕　由公式,　$mn=N$,

得　$mn=18$ ……………………(1)

又由　$\frac{nr}{m}=R$,

得　$\frac{1.8n}{m}=1$ ……………………(2)

(1)×(2):　$n^2=10$.

$\therefore\quad n=\sqrt{10}$,

n 最近之整數爲 3. 由是

$$m=\frac{18}{3}=6.$$

故此 18 電池必分爲 6 列,每列 3 個.

80.　一電槽由 4 相等電池組合而成,其電流通入一正切電流計(其抵抗等於一電池之內抵抗)內.試證無論電池皆並結或順結,正切電流計之偏向不變.何者爲最良之連結法?此時之偏向幾何?

〔解〕　設 $r=$ 每電池之內抵抗,

$E=$ 每電池之電動力,

當順結時,　$I=\frac{4E}{4r+r}=\frac{4E}{5r}$,

當並結時,　$I=\frac{E}{\frac{r}{4}+r}=\frac{4E}{5r}$.

因兩者電流強度相等,故正切電流計之偏向相等.

其最良之連結法,可由下式求之:

$mn=4$ ……………………(1)

又　$\frac{nr}{m}=r$ 或 $\frac{n}{m}=1$ ……………………(2)

(1)×(2): $$n^2=4.$$

$$\therefore\quad n=2.$$

故將此 4 電池分爲 2 列,每列 2 個,爲最良之連結,其電流爲

$$I'=\frac{2E}{\frac{2r}{2}+r}=\frac{E}{r}.$$

設電流爲 $\frac{4E}{5r}$ 時之偏向爲 δ,則電流爲 $\frac{E}{r}$ 時之偏向 δ' 可由下式得之:

$$\frac{4E}{5r}=k\tan\delta \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{E}{r}=k\tan\delta' \cdots\cdots\cdots(2)$$

(2)/(1): $$\frac{\tan\delta'}{\tan\delta}=\frac{5}{4}.$$

$$\therefore\quad \tan\delta'=\frac{5}{4}\tan\delta,$$

$$\therefore\quad \delta'=\tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\tan\delta\right).$$

81. 相同電池 12 個,每電池之內抵抗爲電路內外抵抗之 $\frac{1}{4}$.欲得最大電流,問電池須如何連結?

〔解〕 設 R=外抵抗,

由公式,得 $$mn=12 \cdots\cdots\cdots(1)$$

又 $$\frac{n\times\frac{1}{4}R}{m}=R \cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)×(2): $$n^2=12\times4=48.$$

$$\therefore\ n=\sqrt{48}$$

n之最近整數值爲6或7.但12僅爲6之整數倍數,故$n=6$,由是$m=2$.

故欲得最大電流,須將電池分成2列,每列6個.

82. 今有內抵抗0.6歐之電池12個,對於抵抗0.7歐之電磁石通以最強之電流,問須如何連結?

〔解〕

$$mn=12 \cdots\cdots(1)$$

$$\frac{n\times 0.6}{m}=0.7 \cdots\cdots(2)$$

(1)×(2):

$$0.6n^2=0.7\times 12,$$

$$n^2=14.$$

$$\therefore\ n=\sqrt{14},$$

$$\therefore\ n=3\text{或}4,\qquad m=4\text{或}3.$$

當$n=3$, $m=4$時,

$$I=\frac{3\times E}{\frac{3\times 0.6}{4}+0.7}=\frac{3E}{1.15}=2.61\,E.$$

當$n=4$, $m=3$時,

$$I'=\frac{4\times E}{\frac{4\times 0.6}{3}+0.7}=\frac{4E}{1.5}=2.66\,E.$$

因$I'>I$,故將電池分成3列,每列4個.

83. 一電槽由內抵抗6歐之電池48個組合而成,欲於15歐之外抵抗內得最大電流,問須如何連結?求電流強度及電槽兩端之電勢差.但每電池之電動力爲1.07弗.

〔解〕 $$mn=48 \cdots\cdots(1)$$

$$\frac{n\times 6}{m}=15 \cdots\cdots(2)$$

(1)×(2): $$6n^2=48\times 15,$$

$$n^2=15\times 8=120,$$

$$\therefore\ n=\sqrt{120}.$$

n 之最近整數値爲10與11,但48非其整數倍數,故得 n=8 或 12.

設 n=8, m=6 時,

$$I=\frac{8\times 1.07}{\frac{8\times 6}{6}+15}=\frac{8\times 1.07}{23}=0.37\text{ 安}.$$

設 n=12, m=4 時,

$$I'=\frac{12\times 1.07}{\frac{12\times 6}{4}+15}=\frac{12\times 1.07}{33}=0.39\text{ 安}.$$

因 $I'>I$,故須將電池分爲 4 列,每列 12 個.

電槽兩端之電勢差 $V=0.39\times 15$

$$=5.85\text{ 弗}.$$

84. 內抵抗1.5歐之電池 18 個,欲於外抵抗3.5歐內得最大電流,問須如何連結?

〔解〕 $$mn=18 \cdots\cdots(1)$$

$$\frac{n\times 1.5}{m}=3.5 \cdots\cdots(2)$$

(1)×(2): $$1.5n^2=18\times 3.5,$$

$$n^2=42,$$

$$\therefore\ n=\sqrt{42}.$$

n之最近整數值爲6或7.但18爲6之整數倍數,故$n=6$, $m=\frac{18}{6}=3$.

故須將電池分成3列,每列6個.

7. 電力及電流之熱效應

85. 欲於抵抗37.3歐之導線內,通以4安之電流,問功率若干?

〔解〕 由公式, $P=I^2R$,

得 $P=4^2\times 37.3$ 瓦

$=\frac{4^2\times 37.3}{746}$ 馬力 $=0.8$ 馬力.

86. 某抵抗箱之抵抗以每歐耗電0.0001瓦爲限.設所用抵抗爲1.5歐及2,500歐,各求其兩端之安全電壓.

〔解〕 $P=\frac{V^2}{R}$.

$\therefore$ $V=\sqrt{PR}=\sqrt{0.0001\times 1.5\times 1.5}=0.015$ 弗.

又 $V=\sqrt{0.0001\times 2{,}500\times 2{,}500}=25$ 弗.

87. 並結之電燈150盞,每盞抵抗120歐,其兩端之電壓爲100弗,由一發電機供給之.設10%之功率耗於電線內,求該發電機之功率.

〔解〕 電燈所用之功率 $=\frac{V^2}{R}=\frac{100^2}{120}\times 150$

$=12{,}500$ 瓦.

$\therefore$ 發電機之功率 $=12{,}500\times\frac{100}{100-10}\times\frac{1}{746}$

$=18.6$ 馬力.

88. 並結之電燈 250 盞,每盞抵抗 300 歐,由一電槽供給之.電燈兩極之電勢差爲 120 弗,設關去 100 盞,則升爲 122 弗.設電線之抵抗不計,求電池之內抵抗,及電壓爲 120 弗時每盞所用之功率.

[解]
$$V=E-Ir=E\frac{R}{r+R},$$

$$\therefore\quad 120=E\frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{300}\times 250}}{r+\dfrac{1}{\dfrac{1}{300}\times 250}}=E\frac{\frac{6}{5}}{r+\frac{6}{5}}=E\frac{6}{5r+6}\cdots\cdots(1)$$

$$122=E\frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{300}\times 150}}{r+\dfrac{1}{\dfrac{1}{300}\times 150}}=E\frac{2}{r+2}\cdots\cdots(2)$$

(1)/(2):
$$\frac{120}{122}=\frac{6}{5r+6}\cdot\frac{r+2}{2}=\frac{3r+6}{5r+6},$$

$$300\,r+360=183\,r+366.$$

$$\therefore\quad r=\frac{6}{117}=0.0513\text{ 歐}.$$

$$\text{每盞燈所用之功率}=\frac{V^2}{R}=\frac{120^2}{300}=48\text{ 瓦}.$$

89. 32 燭光之電燈 20 盞,每燭光用電 1.4 瓦.其電壓爲 250 弗.求所用全電流及每時之電費.但每瓩時付銀 0.1 元.

〔解〕 $$P=IV.$$

$$\therefore\ I=\text{所用全電流}=\frac{1.4\times 32\times 20}{250}=3.58\text{ 安}.$$

$$\text{每時之電費}=\frac{1.4\times 32\times 20}{1,000}\times 0.1=0.0896\text{ 元}.$$

90. 用同種之金屬絲造成之甲乙兩種白熱電燈.甲受 100 弗時,可發16燭光.乙受50弗時,可發32燭光.設兩者對於一燭光之功率彼此相等,求兩燈絲之抵抗之比.

〔解〕 設 P = 每燭光所耗之功率,

R_A = 甲燈之絲之抵抗,

R_B = 乙燈之絲之抵抗.

由公式, $$P=\frac{V^2}{R},\quad \text{或}\quad R=\frac{V^2}{P},$$

得 $$R_A=\frac{100^2}{16P}.$$

$$R_B=\frac{50^2}{32P}.$$

$$\therefore\ \frac{R_A}{R_B}=\frac{\dfrac{100^2}{16P}}{\dfrac{50^2}{32P}}=8:1.$$

91. 置抵抗圈於1 㗊之水中,歷1分鐘,其溫度增高10°C.抵抗圈兩端之電壓為 100 弗,求其抵抗.

〔解〕 由公式, $$H=0.24\,I^2Rt=0.24\frac{V^2}{R}t,$$

得 $$1,000\times 10=0.24\times\frac{100^2}{R}\times 60.$$

$$\therefore\ R=14.4\text{ 歐}.$$

92. 一電燈浸於1 l之水中,設通以$\frac{1}{2}$安之電流,則於5分鐘內,其溫度增加1°C.求該燈之電壓及其抵抗.

〔解〕 $$1{,}000\times 1=0.24\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times R\times 5\times 60.$$

$$\therefore\quad R=56\text{ 歐}.$$

又 $$V=IR.$$

$$\therefore\quad V=\frac{1}{2}\times 56=28\text{ 弗}.$$

93. 抵抗52歐之電燈,通以2安之電流.問1小時內所生之熱量及其兩端之電壓各若干?

〔解〕 1小時內所生之熱量 $=0.24\times 2^2\times 52\times 60\times 60$

$=178{,}000$ 卡.

兩端之電壓 $V=IR=2\times 52=104$ 弗.

94. 抵抗5歐之電線內,如有2安之電流通過,則每秒可生4.8卡之熱量.然則抵抗8歐之電線內,每3.5安之電流通過時,每秒可生熱若干?

〔解〕 設 H = 抵抗8歐電線內每秒所生之熱量,

則 $$4.8=\frac{1}{J}\times 2^2\times 5\times 1\cdots\cdots(1)$$

$$H=\frac{1}{J}\times 3.5^2\times 8\times 1\cdots\cdots(2)$$

(2)/(1): $$\frac{H}{4.8}=\frac{3.5^2\times 8}{2^2\times 5},$$

$$\therefore\quad H=\frac{3.5^2\times 8\times 4.8}{4\times 5}=23.5\text{ 卡}.$$

95. 將長2粍,直徑0.1糎之導線浸在一定量之水內

令10安之電流由其中通過,經歷若干時間後,水之溫度昇高10°C.今用同一物質製成長5粎、直徑0.05粴之導線,令3安之電流由其中流過,經歷同一之時間後,水之溫度可昇高若干度?

〔解〕　設V＝水之體積，θ＝水昇高之溫度，

又設導線之質量略去不計,則

$$V\times1\times1\times10=0.24\times10^2Rt$$

$$=0.24\times10^2\times\rho\times\frac{2\times100}{\pi\times\frac{0.1^2}{4}}\times t\cdots\cdots(1)$$

又　$$V\times1\times1\times\theta=0.24\times3^2\times\rho\times\frac{5\times100}{\pi\times\frac{0.5^2}{4}}\times t\cdots\cdots(2)$$

(2)/(1)　$$\therefore\quad\theta=\frac{3^2}{10^2}\times\frac{5}{2}\times\frac{0.1^2}{0.05^2}\times10=9^\circ C.$$

96.　一電流通入一Helmholtz電流計及一浸於100克水中之導圈(抵抗1歐)內,歷時40分,溫度增高15°.8.電流計之平均偏向為32°.求電流強度及電流計之修正因數(設J＝4.2).

〔解〕　水所得之熱量 $H=100\times15.8$,

導圈所生之熱量 $H=\frac{1}{4.2}\times I^2\times1\times40\times60$,

兩熱量相等,故

$$\frac{1}{4.2}\times I^2\times40\times60=100\times15.8,$$

$$\therefore\quad I=1.663\text{ 安}.$$

又由公式,　$$I=k\tan\delta,$$

$$\therefore\quad k=\frac{I}{\tan\delta}=\frac{1.663}{\tan 32^\circ}=\frac{1.663}{0.625}$$
$$=2.661.$$

97. 一定量之電流通入抵抗 r_1 與 r_2 內,設(1) r_1 與 r_2 順結,(2) r_1 與 r_2 並結,求兩結法所生熱量之比.

〔解〕　設 I 為一定量之電流,則

$$(1)\quad H_1=0.24\,I^2(r_1+r_2)t.$$

$$(2)\quad H_2=0.24\,I^2\left(\frac{1}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}}\right)t=0.24\,I^2\cdot\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}\cdot t.$$

$$\therefore\ \frac{H_1}{H_2}=0.24\,I^2(r_1+r_2)t/0.24\,I^2\cdot\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}\cdot t$$
$$=(r_1+r_2)^2:r_1r_2.$$

98. 承前題,設其兩端保有一定之電壓,求其所生熱量之比.

〔解〕　由公式,　$H=\frac{1}{J}I^2Rt=\frac{1}{J}\cdot\frac{V^2}{R}\cdot t,$

得
$$H_1=0.24\times\frac{V^2}{r_1+r_2}\times t,$$
$$H_2=0.24\times\frac{V^2}{\frac{1}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}}}\times t=0.24\times\frac{V^2(r_1+r_2)}{r_1r_2}\times t.$$

$$\therefore\ \frac{H_1}{H_2}=0.24\times\frac{V^2t}{r_1+r_2}\Big/0.24\times\frac{V^2(r_1+r_2)t}{r_1r_2}=r_1r_2:(r_1+r_2)^2.$$

99. 如有A、B兩銅線,其長之比為2:3,橫切面半徑之比為3:5,A內通過之電流等於B內通過電流之3倍,求同時間內此兩者所生之熱量之比.

〔解〕　由公式，$H=0.24\,I^2Rt$,

$$R=\rho\frac{l}{A},$$

得　$$H=0.24\,I^2\rho\frac{l}{A}t,$$

今 0.24、ρ 及 t 為常數，故

$$H\propto I^2\frac{l}{A},$$

$$\therefore\quad \frac{H_A}{H_B}=\left(\frac{I_A}{I_B}\right)^2\left(\frac{l_A}{l_B}\right)\left(\frac{A_B}{A_A}\right)=\left(\frac{3I_B}{I_B}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5^2}{3^2}\right)$$

$$=50:3.$$

100. 電槽內抵抗 4 歐，其兩極聯並結之兩導線 A 與 B，A 抵抗 3 歐，B 5 歐．試比較於一定時間內電槽內所生之熱量與兩導線內所生之熱量．

〔解〕　設 E ＝ 該電槽之電動力，I ＝ 全電流，

I_A ＝ 導線 A 內之電流強度，

I_B ＝ 導線 B 內之電流強度，

則　$$I=\frac{E}{4+\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}}=\frac{E}{4+\frac{15}{8}}=\frac{8E}{47},$$

$$I_A=\frac{8E}{47}\times\frac{5}{3+5}=\frac{5E}{47},$$

$$I_B=\frac{8E}{47}\times\frac{3}{3+5}=\frac{3E}{47},$$

$$\therefore\quad \frac{\text{於一定時間內電槽內所生熱量}}{\text{兩導線內所生熱量}}=\frac{\left(\frac{8E}{47}\right)^2\times 4}{\left(\frac{5E}{47}\right)^2\times 3+\left(\frac{3E}{47}\right)^2\times 5}$$

$$=\frac{64\times4}{25\times3+9\times5}=\frac{64\times4}{120}=\frac{32}{15}.$$

第十二章　靜電學

定義、定律、及公式.

1. 電荷

庫隆定律 (Coulomb's law).——作用於兩帶電體間之引力或斥力 F,與兩者之電量 q、q′ 之乘積為正比例,與其間之距離 d 之平方為反比例.即

$$F=C\frac{q\,q'}{kd^2}\text{達}.$$

q、q′ 皆以靜電單位表之,C 由單位選擇而定,k 由媒質種類而定,同屬常數.於 C.G.S. 單位中,C 為 1,於尋常壓力之空氣中,k 為 1,故又得

$$F=\frac{q\,q'}{d^2}\text{達}.$$

電場強度 (Electrostatic field intensity).——單位正荷 (Unit positive charge)在場內一點所受之電力,曰電場強度,或曰電強度(Electric intensity).

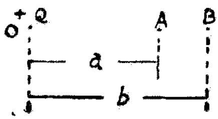
表面密度(Surface density).——單位面積上之電量,謂之表面密度.

設 q = 電量, A = 面積, σ = 表面密度,則

$$\sigma=\frac{q}{A}.$$

2. 電勢及電容

電勢(Electric potential).——電場內任意一點之電勢,為將單位正荷從無窮遠移至此點所需之功.



如圖,設O=帶有電量+Q之球體,

V_A= A點之電勢,

V_B= B點之電勢,

則 $$V_A=\frac{Q}{a},$$

$$V_B=\frac{Q}{b}.$$

半徑 r 之帶電球面上一點之 $V=\frac{Q}{r}$.

勢差 (Potential difference).——兩點間之勢差,等於將單位正荷自一點移至他點所需之功.

如上圖,設A,B兩點間之勢差 $=V_{A、B}$,

則 $$V_{A、B}=V_A-V_B=\frac{Q}{a}-\frac{Q}{b}.$$

電容 (Electric capacity).——使導體之電勢昇高 1 單位所需之電量,曰此導體之電容.

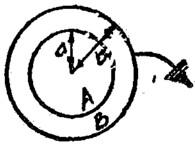
設Q=導體所有之電量, V=其電勢, C=其電容,

則 $$Q=CV.$$

半徑 r 之球,其 $C=r$,卽在數值上,球之電容等於其半徑.

蓄電器(Condenser) 之電容:

(1) 同心球形蓄電器 (Spherical condenser) 之電容.



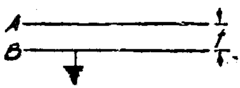
設　a＝內球半徑, b＝外球半徑,

K＝誘電常數(Dielectric constant).

則　$$C = K\frac{ab}{b-a},$$

於空氣中，　K＝1.

(2)平行板蓄電器(Parallel plates condenser)之電容.



設　A＝每板之面積,

f＝兩板間之距離,

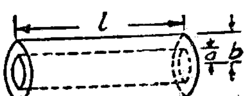
則　$$C = K\frac{A}{4\pi f}.$$

(3)來丁瓶(Leyden jar)之電容.

設瓶壁 t 遠小於瓶之半徑,則仍可用下式表其電容,即

$$C = K\frac{A}{4\pi t}.$$

(4)同心圓柱形蓄電器(Concentric cylinderic condenser)之電容.



設　l＝圓柱之長,

a＝內圓柱之半徑.

b＝外圓柱之半徑.

則　$$C = K\frac{l}{2\log_e\frac{b}{a}}.$$

並結之電容.——並結之電容等於各電容之和,即

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots\cdots.$$

順結之電容.——順結之電容之逆數,等於各電容逆數之和,即

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots.$$

或 $$C = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3 + \cdots\cdots}.$$

蓄電器之能.——以平行板蓄電器為例.

設 V= 兩板間之勢差, Q= 其一板上所帶之電量,
W= 此器內所具有之能,

則 $$W = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}.$$

靜電單位與實用單位之換算.——

電勢——1 伏 $= \frac{1}{3 \times 10^2}$ C.G.S. 靜電單位,

電量——1 庫 $= 3 \times 10^9$ C.G.S. 靜電單位,

電容——1 法 $= 9 \times 10^{11}$ C.G.S. 靜電單位.

計算問題

1. 電荷

1. 兩小球 A 與 B 相距 5 糎, A 荷電 10 單位, B 荷電 5 單位,求其間作用之力.

〔解〕 由公式, $F = \frac{qq'}{d^2}$,

得 $F = \frac{10 \times 5}{5^2} = 2$ 達.

設兩球之電相同(卽皆為陽電或陰電), 則為斥力; 設性質相異,則為引力.

2. 兩帶電體相距12糎,其間之引力為 6 達.設一帶電體荷電 +32 單位,求他帶電體所帶之電荷(Charge).

〔解〕　由公式，　$F=\frac{qq'}{d^2}$,

得　$q'=\frac{Fd^2}{q}=\frac{-6\times 12^2}{+32}=-27$ 單位.

3. 兩小球各帶電32與36單位,其間之斥力為 8 達,求兩者間之距離.

〔解〕　由公式，　$F=\frac{qq'}{d^2}$,

得　$d=\sqrt{\frac{qq'}{F}}=\sqrt{\frac{32\times 36}{8}}=12$ 糎.

4. 兩小球相距10糎,一球帶電45單位,其間作用之力等於 5 甀之重,求他球所帶之電荷.

〔解〕　由公式，　$F=\frac{qq'}{d^2}$,

$$\therefore\quad q'=\frac{Fd^2}{q}=\frac{\pm 5\times\frac{1}{1,000}\times 980\times 10^2}{45}=\pm 10.9 \text{ 單位.}$$

5. 一未帶電之小球與一同大之帶電球互相接觸後,隔 8 糎之遠,相互以16達之力作用,求帶電球所帶之電荷.

〔解〕　因兩球之大小相等,兩者接觸後,每球所帶之電荷必相等.

設 $q=$ 帶電球所帶之電荷,

則　$$\frac{\left(\frac{q}{2}\right)^2}{8^2}=16,$$

$\therefore\ q=4\times8\times2=64$ 單位.

6. 今有兩同大之帶電球,一球所帶之電荷爲 +10 單位,他球爲 −5 單位.兩者相距 5 糎,求其間作用之引力.設兩者相接觸後,仍隔 5 糎之遠,問其間之斥力幾何?

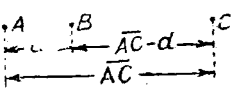
〔解〕 其間之引力 $=\dfrac{10\times5}{5^2}=2$ 達.

兩者相接觸後,每球所帶之電荷 $=\dfrac{1}{2}(+10-5)=+\dfrac{5}{2}$,

$$\therefore\ 其間之斥力 =\frac{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}{5^2}=0.25\ 達.$$

7. 帶電球 A、B 與 C,各帶電 1、2 與 4.三者置於一直線上,求 B 球之平衡位置.

〔解〕 如圖.A 對 B 之斥力 $=F_1=\dfrac{1\times2}{d^2}=\dfrac{2}{d^2}$,



C 對 B 之斥力 $=F_2=\dfrac{2\times4}{(\overline{AC}-d)^2}$

$$=\frac{8}{(\overline{AC}-d)^2},$$

B 平衡時, F_1 必等於 F_2,

$$\therefore\ \frac{2}{d^2}=\frac{8}{(\overline{AC}-d)^2},$$

$$4d^2=\overline{AC}^2-2d\overline{AC}+d^2,$$

$$3d^2+2d\overline{AC}-\overline{AC}^2=0,$$

$$\therefore\ (3d-\overline{AC})(d+\overline{AC})=0,$$

$$\therefore\ d=\frac{\overline{AC}}{3}\ 或\ -\overline{AC},$$

故 B 球之平衡位置有二:一在 A, C 兩球間,距 A 球 $\frac{\overline{AC}}{3}$處;一在CA延長線上,其距A球之遠等於$\overline{AC}$.

8. 一金屬球C及一小導體A相距30糎,兩者各帶陽電.設帶陰電之小導體B置於AC線上,距C20糎處,則C球所受之力爲零,試比A與B所帶之電荷.

〔解〕 設 q_A = 導體A所帶之電荷,

q_B = 導體B所帶之電荷,

q_C = 金屬球C所帶之電荷.

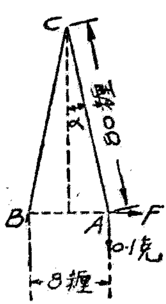
A對C之斥力必等於B對C之引力,故

$$\frac{q_A q_C}{30^2}=\frac{q_B q_C}{20^2},$$

$$\therefore \frac{q_A}{q_B}=\frac{30^2}{20^2}=\frac{9}{4}.$$

9. 兩帶等量電荷之小球各重0.1克,以長80糎之絲線懸於一點C.設兩者相斥之距離爲8糎,求各球所帶之電荷.

〔解〕 A球平衡時,於C點之力矩必等於零,故



$$F\times 80\cos\alpha-0.1\times 980\times 80\sin\alpha=0,$$

$$\therefore \quad F=98\tan\alpha,$$

但 $$F=\frac{q^2}{8^2},$$

$$\therefore \quad \frac{q^2}{8^2}=98\tan\alpha=98\times\frac{4}{\sqrt{80^2-4^2}}$$

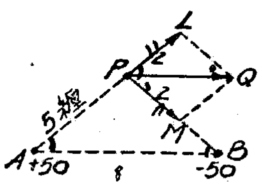
$$=\frac{98\times 4}{79.9}=4.91,$$

$$\therefore \quad q=8\sqrt{4.91}=8\times 2.215$$

$=17.7$ 單位.

10. 一50單位之正電荷與一50單位之負電荷相距8糎.求距兩者5糎處之電場強度.

〔解〕　設P爲電場強度欲求之一點.假如置一單位正荷於P點,則 $+50$ 於P之電場強度 $=50/5^2=2$, 以 PL 表之.又 -50 於P之電場強度爲2,以PM表之. PQ 爲所求之電場強度,其方向與AB平行.



由相似三角形PLQ與APB,

$$\frac{PQ}{PL}=\frac{AB}{AP},$$

或
$$\frac{PQ}{2}=\frac{8}{5},$$

$$\therefore \quad PQ=\frac{8}{5}\times 2=3.2 \text{ 達}.$$

11. 半徑等於5糎之球,帶電1,000單位,問其表面密度若干?

〔解〕　由公式, $\sigma=\frac{q}{A}$,

得
$$\sigma=\frac{1,000}{\pi\times(2\times 5)^2}=\frac{10}{\pi}=3.18.$$

12. 半徑等於25糎之球,欲使其帶電後,表面密度成爲 $\frac{5}{\pi}$,須電量若干?

〔解〕　由公式, $\sigma=\frac{q}{A}$.

得　　$q=\sigma A=\frac{5}{\pi}\times\pi(\times 2\times 25)^2$

$=12,500$ 單位.

2. 電勢及電容

13.　空心球形導體半徑10糎,帶電10單位,求(1)球面,(2)距球心15及25糎處,(3)球內之電勢.

〔解〕　由公式,　$V=\frac{Q}{a}$,

(1)　　$V_{10}=\frac{10}{10}=1$　靜電單位.

(2)　　$V_{15}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$　靜電單位;

$V_{25}=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}=0.4$　靜電單位.

(3)　球內之電勢等於球面之電勢,故等於1.

14.　一球半徑25糎,其表面密度爲$5/\pi$,求其電勢.

〔解〕　由公式,　$\sigma=\frac{q}{A}$,

得　$q=\sigma A=\frac{5}{\pi}\times\pi\times(2\times 25)^2$

$=5\times 4\times 25^2$.

又由公式,

$$V=\frac{Q}{a}=\frac{5\times 4\times 25^2}{25}=500\quad 靜電單位.$$

15.　於每邊長1粎之正方形之各角,置以50單位之電荷,求對角線交點之電勢.

〔解〕　角與交點之距離$=a=50\sqrt{2}$,

$\therefore$ 交點之電勢 $=\frac{Q}{a}\times 4=\frac{50\times 4}{50\sqrt{2}}$

$=2\sqrt{2}$ 靜電單位.

16. 兩小導體各帶正電10單位與20單位,兩者相距30糎,求兩者中點之(1)力,(2)電勢.

〔解〕(1)　由公式,　$F=\frac{qq'}{d^2}$,

$$\therefore F=\frac{20}{\left(\frac{30}{2}\right)^2}-\frac{10}{\left(\frac{30}{2}\right)^2}=\frac{10}{15^2}=0.0444 \text{ 達.}$$

(2)　$V=\frac{10}{\frac{30}{2}}+\frac{20}{\frac{30}{2}}=\frac{30}{15}=+2$　靜電單位.

17. 來丁瓶厚$\frac{1}{4}$糎,半徑3糎,高9糎.設玻璃之誘電常數爲6,求其電容.當勢差爲15靜電單位時,問帶電若干?

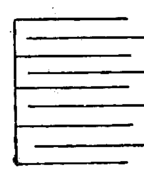
〔解〕　由公式,　$C=K\frac{A}{4\pi t}$,

$$\therefore C=6\times\frac{\pi\times 2\times 3\times 9}{4\pi\times\frac{1}{4}}=324 \quad \text{靜電單位.}$$

$$\therefore Q=CV=324\times 15$$

$=4,860$ 靜電單位.

18. 一蓄電器由厚0.04糎,長30糎,闊20糎之板10塊所組成.設板間之媒質爲空氣,求其電容.



〔解〕　如圖,板10塊,可組成蓄電器$(10-1)=9$個.

$$\therefore C=\frac{A}{4\pi t}\times 9=\frac{30\times 20}{4\pi\times 0.04}\times 9$$

$=10,740$ 靜電單位。

19. 兩同心球之半徑爲10糎與10.3糎,兩者間之媒質爲空氣,勢差爲50弗,求其所帶之電量。

〔解〕 兩同心球之電容 $=\dfrac{ab}{b-a}=\dfrac{10\times10.3}{10.3-10}$

$$=\frac{1,030}{3}\ \text{靜電單位},$$

$$50\ \text{弗}=50\times\frac{1}{3\times10^2}=\frac{1}{6}\ \text{靜電單位},$$

$$\therefore\quad Q=CV=\frac{1,030}{3}\times\frac{1}{6}$$

$$=57.2\ \text{靜電單位}.$$

20. 一直徑0.2糎之球形水滴之電勢爲100,求其所帶之電量.又設(1)兩滴合成一滴,其電勢若干?(2)三滴合成一滴,其電勢又若干?

〔解〕 由公式, $Q=CV$,

得 $Q=\dfrac{0.2}{2}\times100=10$ 單位。

(1)設 $Q_1=$ 兩滴合併後之總電量,

$R_1=$ 合併後水滴之半徑, $V_1=$ 合併後之電勢,

則 $Q_1=2Q=20$ 單位,

$$\frac{4}{3}\pi R_1{}^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{0.2}{2}\right)^3\times2,$$

$$R_1=0.1\sqrt[3]{2}\ \text{糎},$$

$$V_1=\frac{Q_1}{C_1}=\frac{20}{0.1\sqrt[3]{2}}=\frac{200}{1.260}$$

$$=159\ \text{靜電單位}.$$

(2)設 Q_2 = 三滴合併後之總電量,

R_2 = 三滴合併後之半徑,

V_2 = 三滴合併後之電勢,

則 $Q_2=3Q=3\times10=30$ 單位,

$$\frac{4}{3}\pi R_2^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{0.2}{2}\right)^3\times3,$$

$$R_2=0.1\sqrt[3]{3}\text{ 糎},$$

$$V_2=\frac{Q_2}{C_2}=\frac{30}{0.1\sqrt[3]{3}}=\frac{300}{1.442}$$

$$=208\text{ 靜電單位.}$$

21. 兩球半徑爲 3 糎與 8 糎,設給以電荷66單位,問各帶電若干?

〔解〕 設 Q_1 = 甲球所帶之電量,

Q_2 = 乙球所帶之電量,

Q = 甲乙兩球所帶之總電量,

則 $Q=Q_1+Q_2$ ……(1)

當靜止時,兩球之電勢必等,卽

$$\frac{Q_1}{C_1}=\frac{Q_2}{C_2}\quad\cdots\cdots(2)$$

解(1)與(2)得, $Q_1=\dfrac{C_1}{C_1+C_2}Q,$

$$Q_2=\frac{C_2}{C_1+C_2}Q,$$

由是得每球所得之電量與其電容爲正比。

今 $C_1=3,\quad C_2=8,$

$\therefore\ Q_1=\dfrac{3}{3+8}\times66=18$ 靜電單位,

$$Q_2=\frac{8}{3+8}\times 66=48\quad \text{靜電單位.}$$

22. 設有電容等於 1、2、3 之三球,令其電勢順次為 3、2、1. 如用一導線連結之,其共通之電勢如何?

〔解〕 三球所帶之電量之總和

$$=Q=C_1V_1+C_2V_2+C_3V_3$$
$$=1\times 3+2\times 2+3\times 1=10\ \text{單位.}$$

三球連結後之電容 $=C=C_1+C_2+C_3$

$$=1+2+3=6\ \text{單位,}$$

$$\therefore\ \text{共通電勢}=\frac{Q}{C}=\frac{10}{6}=1.67\ \text{單位.}$$

23. 兩球直徑各為 1 糎,連以導線,其共通電勢為 40,其作用之斥力為 5 達,問兩球相距若干?兩球相距 50 糎時,其斥力又若干?

〔解〕 由公式, $Q=CV$,

得 $$Q=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\times 40=40\ \text{單位.}$$

因兩球直徑相等,其電容相等,故

$$Q_1=Q_2=\frac{40}{2}=20\ \text{單位,}$$

又由公式, $F=\dfrac{qq'}{d^2}$,

得 $$d=\sqrt{\frac{Q_1Q_2}{F}}=\sqrt{\frac{20\times 20}{5}}$$

$$=4\sqrt{5}\ \text{糎.}$$

兩者相距 50 糎時,其斥力為

$$F=\frac{20\times 20}{50^2}=0.16\ \text{達.}$$

24. 一半徑25糎之導體球,其電勢為 100,與一已知電容之來丁瓶相連結,其電勢遂降下成為20,求來丁瓶之電容.

〔解〕 設 C_1 = 來丁瓶之電容, C_2 = 球之電容.

由公式. $Q_1=\frac{C_1}{C_1+C_2}Q$,

與 $C_2=25$,

$$Q_1=C_1V_1=C_1\times 20=20C_1,$$

$$Q=25\times 100=2,500,$$

得 $$20C_1=\frac{C_1}{C_1+25}\times 2,500,$$

$$20C_1+500=2,500,$$

$$\therefore\ C_1=100 \text{ 單位}.$$

25. 設有一未帶電之固體電媒體之蓄電器,及一同大之空氣蓄電器,如空氣蓄電器之電勢為V,則將此兩者連結後,其共通之電勢為V'.求此誘電體之誘電常數.

〔解〕 設 K = 誘電體之誘電常數,

C_1 = 空氣蓄電器之電容,

$C_2=KC_1$ = 固體電媒體蓄電器之電容.

由公式, $Q_2=\frac{C_2}{C_1+C_2}Q$,

與 $Q_2=KC_1V'$, $Q=C_1V$,

得 $$KC_1V'=\frac{KC_1}{C_1+KC_1}\times C_1V,$$

$$KV'=\frac{KV}{1+K},$$

$$(1+K)V'=V.$$

$$\therefore\quad K=\frac{V}{V'}-1=\frac{V-V'}{V'}.$$

26. 兩金屬球半徑爲10與5糎,以長導線連結之.小球外復圍以半徑5.5糎之同心球殼.設給以電量520單位,問各得若干?

〔解〕 設 C_1=半徑10糎之球之電容,

C_2=兩同心球之電容,

Q_1=電容 C_1 所得之電量,

Q_2=電容 C_2 所得之電量.

今 $C_1=10,$

$$C_2=\frac{ab}{b-a}=\frac{5\times5.5}{5.5-5}=55.$$

$$\therefore\quad Q_1=\frac{C_1}{C_1+C_2}\,Q=\frac{10\times520}{10+55}=80\text{ 單位},$$

$$Q_2=Q-Q_1=520-80=440\text{ 單位}.$$

27. 兩球A與B,半徑爲12糎與3糎,各帶電36與24單位.試比其電勢及其能.

〔解〕 由公式, $V=\dfrac{Q}{a},$

得 $$V_A=\frac{36}{12}=3,$$

$$V_B=\frac{24}{3}=8,$$

$$\therefore\ \frac{V_A}{V_B}=\frac{3}{8}.$$

又由公式, $W=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{Q^2}{C},$

得 $$W_A=\frac{1}{2}\times\frac{36^2}{12}=54,$$

$$W_B=\frac{1}{2}\times\frac{24^2}{3}=96,$$

$$\therefore\ \frac{W_A}{W_B}=\frac{54}{96}=\frac{9}{16}.$$

28. 一半徑 r 之帶電球與一半徑 r′ 未帶電之球相連結,試證前後所有電能之比為$(r+r'):r$.

〔解〕 設Q＝半徑 r 之帶電球所帶之電量,

則初時所有之能 $=W_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{r}.$$

又兩球連結後之電容 $=C_1+C_2=r+r'$,

則連結後所有之能 $=W_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{r+r'}.$

$\therefore$前後所有之能之比 $=\frac{W_1}{W_2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{r}\Big/\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{r+r'}$

$$=(r+r'):r.$$

29. 同心球形蓄電器之球半徑為20與24糎,兩者間貯以誘電常數 3 之媒質.該器帶電7,560單位.設全部電能化為熱能,問生熱若干?

〔解〕 該蓄電器之電容 $=K\frac{ab}{b-a}=\frac{3\times10\times12}{12-10}=180,$

$\therefore$電荷所具之能 $=\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C}=\frac{7,560^2}{2\times180}=158,760$ 厄

$$=0.015876\text{ 朱}$$

設H＝放電後所生之熱,

則　　$4.2H=0.015876,$

$\therefore\ H=0.003782$ 卡.

30. 蓄電器電容 700, 放電後適生一單位熱量,問其電勢若干?

〔解〕　因 $H=\dfrac{W}{4.2\times10^7}$ 及 $W=\dfrac{1}{2}CV^2$ 尼,

$$\therefore\quad H=\frac{CV^2}{2\times4.2\times10^7}$$

$$\therefore\quad V=\sqrt{\frac{2\times4.2\times10^7H}{C}}=\sqrt{\frac{2\times4.2\times10^7\times1}{700}}$$

$$=10^2\times2\sqrt{3}=346.4\ \text{靜電單位.}$$

（完）

附　　錄

表 1.　重要常數

1 呎 = 12 吋。

1 碼 = 3 呎。

1 哩 = 5280 呎。

1 吋 = 2.54 糎。

1 竔 = 1,000 立方糎。

1 加侖 = 0.1604 立方呎 = 277 立方吋

= 10 磅水於 62°F. 時之體積。

1 磅 = 16 啢。

1 㖊 = 14 磅。

1 英擔 = 112 磅。

1 噸 = 2,240 磅。

1 磅 = 453.6 克。

1 年 = 365 日。

1 日 = 24 小時。

1 小時 = 60 分。

1 分 = 60 秒。

1 立方呎之水之重 = 62.5 磅。

1 氣壓 = 1,033.6 克/糎^2 = 1,003,300 達/糎^2

= 14.7 磅/吋^2 = 76 糎(或 30 吋)水銀柱之高

= 1,034 糎(或 34 呎)水柱之高。

1 馬力 = 33,000 呎磅/分 = 550 呎磅/秒。

= 746 瓦 = $\frac{3}{4}$ 瓩(約)。

1 英熱單位 = 252 卡。

1 卡 = 778 呎磅 = 4.187×10^7 尨

= 4.187 朱。

絕對溫度，$T=\theta°C.+273°=\theta°F.+460°$。

$\pi=3.1416=\frac{22}{7}$(約)。

1 弧度(Radian) = 57.29 度。

$\log_e N=2.3026\log_{10}N$。

自然對數之底 $=e=2.71828$。

表 2.　幾何計算公式

設 R= 半徑, D= 直徑, a= 高, b= 下底, b′= 上底,
B= 底面積.

三角形面積 $=\dfrac{ab}{2}$.

梯形面積 $=\dfrac{a(b+b')}{2}$.

圓周 $=2\pi R=\pi D$.

圓面積 $=\pi R^2=\dfrac{1}{4}\pi D^2=0.785D^2$.

球面積 $=4\pi R^2=\pi D^2$.

球體積 $=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{1}{6}\pi D^3=0.524D^2$.

稜柱體 (Prism) 體積 = Ba.

圓柱體積 $=Ba=\pi R^2a$.

角錐體 (Pyramid) 體積 $=\dfrac{1}{3}Ba$.

圓錐體 (Circular cone) 體積 $=\dfrac{1}{3}\pi R^2a$.

表 3. 三角及代數公式

$\sin A = \dfrac{1}{\csc A}$, $\cos A = \dfrac{1}{\sec A}$,

$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$, $\tan A = \dfrac{1}{\cot A}$,

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$.

$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$, $\sin A = \cos(90° - A)$,

$\sin(180° - A) = \sin A$, $\sin(-A) = -\sin A$,

$\cos(180° - A) = -\cos A$, $\cos(-A) = \cos A$,

$\tan(180° - A) = -\tan A$, $\tan(-A) = -\tan A$.

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$,

$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$,

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B},$$

$$\cot(A \pm B) = \frac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A}.$$

$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$, $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$,

$\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$, $\cot 2A \quad \dfrac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A}$,

$\sin \dfrac{1}{2} A = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos A}{2}}$, $\cos \dfrac{1}{2} A = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos A}{2}}$,

$\tan \dfrac{1}{2} A = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$, $\cot \dfrac{1}{2} A = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos A}{1 - \cos A}}$,

$$\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{\tan\frac{1}{2}(A + B)}{\tan\frac{1}{2}(A - B)}.$$

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B),$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B),$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B),$$

$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$.

正弦定律 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$,

餘弦定律 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

$(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$,

$ax^2 + bx + c = 0$, 則 $x = \left(-b \pm \sqrt{b^2-4ac}\right)/2a$.

設算術(或等差)級數之初項爲a, 公差爲d,

則其n項 $l = a + (n-1)d$, 其總和 $s = \frac{1}{2}n(a+l)$.

設幾何(或等比)級數之初項爲a, 公比爲r,

則其n項 $l = ar^{n-1}$,

其n項之總和 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1} = \frac{a-lr}{1-r}$.

表 4. 三角函數的眞數

Deg	Sin	Tan	Deg	Sin	Tan	Deg	Sin	Tan
1	0.0175	0.0175	31	0.5150	0.6009	61	0.8746	1.8040
2	0.0349	0.0349	32	0.5299	0.6249	62	0.8829	1.8807
3	0.0523	0.0524	33	0.5446	0.6494	63	0.8910	1.9626
4	0.0698	0.0699	34	0.5592	0.6745	64	0.8988	2.0503
5	0.0872	0.0875	35	0.5736	0.7002	65	0.9063	2.1445
6	0.1045	0.1051	36	0.5878	0.7265	66	0.9135	2.2460
7	0.1219	0.1228	37	0.6018	0.7536	67	0.9205	2.3559
8	0.1392	0.1405	38	0.6157	0.7813	68	0.9272	2.4751
9	0.1564	0.1584	39	0.6293	0.8098	69	0.9339	2.6051
10	0.1736	0.1763	40	0.6428	0.8391	70	0.9397	2.7475
11	0.1908	0.1944	41	0.6561	0.8693	71	0.9455	2.9042
12	0.2079	0.2126	42	0.6691	0.9004	72	0.9511	3.0777
13	0.2250	0.2309	43	0.6820	0.9325	73	0.9563	3.2709
14	0.2419	0.2493	44	0.6947	0.9657	74	0.9613	3.4874
15	0.2588	0.2679	45	0.7071	1.0000	75	0.9659	3.7321
16	0.2756	0.2867	46	0.7193	1.0355	76	0.9703	4.0108
17	0.2924	0.3057	47	0.7314	1.0724	77	0.9744	4.3315
18	0.3090	0.3249	48	0.7431	1.1106	78	0.9781	4.7046
19	0.3256	0.3443	49	0.7547	1.1504	79	0.9816	5.1446
20	0.3420	0.3640	50	0.7660	1.1918	80	0.9848	5.6713
21	0.3584	0.3839	51	0.7771	1.2349	81	0.9877	6.3138
22	0.3746	0.4040	52	0.7880	1.2799	82	0.9903	7.1154
23	0.3907	0.4245	53	0.7986	1.3270	83	0.9925	8.1443
24	0.4067	0.4452	54	0.8090	1.3764	84	0.9945	9.5144
25	0.4226	0.4663	55	0.8192	1.4281	85	0.9962	11.4301
26	0.4384	0.4877	56	0.8290	1.4826	86	0.9976	14.3007
27	0.4540	0.5095	57	0.8387	1.5399	87	0.9986	19.0811
28	0.4695	0.5317	58	0.8480	1.6003	88	0.9994	28.6363
29	0.4848	0.5543	59	0.8572	1.6643	89	0.9998	57.2900
30	0.5000	0.5774	60	0.8660	1.7321	90	1.0000	∞

表 5. 漢英對照

(排列依畫數次序)

二 畫

力 force.

力之獨立作用定律 law of independence of force.

力時積 impulse.

三 畫

大小 magnitude.

四 畫

公式 formula.

分解 resolution.

分 minute(min.).

分壓 partial pressure.

分路 shunt.

分離速度 velocity of separating.

水平射程 horizontal range.

方向 direction.

方位角 declination.

牛頓三定律 Newton's three laws of motion.

反作用定律 law of reaction.

反平方定律 law of inverse square.

反射定律 law of reflection.

反射光線 reflected ray.

比重 specific gravity.

比熱 specific heat.

比抗 specific resistance.

巴斯加定律 Pascal's law.

厄 erg.

瓦 watt.

水當量 water-equivalent.

引擎 engine.

引力 attraction.

天體望遠鏡 astronomical telescope.

日光燈 sun beam lamp.

化學當量 chemical equivalent.

五 畫

加速度 acceleration.

平衡 equilibrium.

平行板蓄電器 parallel plates condenser.

功 work.

功率 power.

卡 calorie (cal.).

卡計 calorimeter.

本生卡計 Bunsen calorimeter.

本生電池 Bunsen cell.

平鏡 plane mirror.

主焦點 principal focus.

凹鏡 concave mirror.

凸鏡 convex mirror.

目鏡 eye-piece.
出現角 angle of emergence.
正切電流計 tangent galvanometer.
弗 volt.
弗計 voltmeter.
斥力 repulsion.

六畫

向心力 centripetal force.
艾留剎克定律 Gay-lussac's law
全壓 total pressure.
吋 inch(in.).
朱 joule.
朱爾定律 Joule's law.
共振管 resonance tube.
光學 light.
光度 illuminating power.
光度計 photometer.
曲率半徑 radius of curvature.
收斂透鏡 convergent lens.
伏角 dip.
伏角計 dip circle.
安 ampere(amp.).
安計 ammeter.
冰卡計 ice calorimeter.
同音 unison.
同心球形蓄電器 concentric spherical condenser.
同心圓柱形蓄電器 concentric cylinderic condenser.

七畫

拋射角 angle of projection.
吸上喞筒 suction pump.
呎 foot(ft.).
克 gram(gm.).
克希荷夫定律 Kirchhoff's law.
均之音程 octaves interval.
投射光線 incident ray.
完全反射 total reflection.
近視 short-sight.
近點 near point.
伽利略望遠鏡 Galilean telescope.
扭力 torque.
扭秤 torsion balance.
瓩時 kilowatt hour.
但尼爾電池 Daniel cell.

八畫

物理學 physics.
物性學 properties of matter.
物像 image.
物鏡 objective.
定律 law.
定理 definition.
㖊 stone (英國重量之名稱)
抵抗力或抵抗 resistance.
抵償擺 compensated pendulum.
抵抗定律 law of resistance.
抵抗之溫度係數 temperature coefficient of resistance.

抵抗箱 resistance box.

抵抗圈 resistance coil.

抵償抵抗 compensating resistance.

直衝突 direct impact.

阿梯吾特器械 Atwood's machine.

阿基米得原理 Archimedes' principles.

波以耳定律 Boyle's law.

波長 wave length.

虎克定律 Hooke's law.

抽氣喞筒 air pump.

固體 solid.

松節油 turpentine.

表面張力 surface tension.

表面密度 surface density.

法刺第 Faraday.

法線 normal.

法刺第電解定律 Faraday's law of electrolysis.

屈折定律 law of refraction.

屈折率 index of refraction.

屈折角 refracting angle.

明視距離 distance of distinct vision.

並結 connected in parallel.

易感 sensitiveness.

來丁瓶 Layden jar.

九 畫

重力 gravity.

重力加速度 acceleration of gravity.

重心 center of gravity.

重量寒暑表 weight thermometer.

英擔 cwt. (英國重量名).

相對速度 relative velocity.

相對溼度 relative humidity.

相視振數 apparent frequency.

飛行時間 time of flight.

恢復率 coefficient of restitution.

活塞 piston.

活栓 stop-cork.

查理士定律 Charles' law.

秒 second (sec.).

度 degree (deg.).

度隆普提 Dulong and Petit.

馬力 horse-power (H. P.).

音學 sound.

音調 pitch.

風琴管 organ pipe.

亮度 intensity of illumination.

修正因數 reduction factor.

速 speed.

速度 velocity.

射體 projectile.

效率 efficiency.

能 energy.

能常住定律 law of conservation of energy.

浮力 buoyant force.

氣缸 cylinder.

氣壓計 barometer.

氣體 gas.

氣壓 atmosphere (atm.).
米 meter (m.).
哩 mile (mi.).
瓩 kilogram (kg.).
時 hour (hr.).
振數 frequency.
原音 fundamental tone.
倍音 overtone.
紙屏 screen.
倍率 magnification.
庫 coulomb.
庫隆之磁力定律 Coulomb's law of magnetic force.
庫隆定律 Coulomb's law.

十一畫

組合 composition.
斜面 inclined plane.
動力學 kinetics.
動量 momentum.
動能 kinetic energy.
斜衝突 oblique impact.
接近速度 velocity of approach.
接受器 receiver.
密度 density.
液體 liquid.
張力 tension.
乾燥劑 drying agent.
週期 period.
唫 beat.
閉管 closed pipe.
閉路 closed circuit.
偏向 deviation.
透鏡 lens.
第 dioptre.
透磁率 permeability.
皋 gauss.
偶力矩 moment of couple.

十二畫

運動 motion.
運動學 kinematics.
等速運動 constant speed motion.
等加速運動 uniformly accelerated motion.
着力點 point of action.
滑車或滑輪 pulley.
惰性定律 law of inertia.
惰矩 moment of inertia.
視重 apparent weight.
視厚 apparent thickness.
道爾頓定律 Dalton's law.
絕對溫度 absolute temperature.
達 dyne.
寒暑表 thermometer.
溫度 temperature.
溫度傾度 temperature gradient.
過熱 superheating.
過熱器 superheater.
都普勒效應 Doppler's effect.
測音器 siren.
測磁計 magnetometer.

開管 open pipe.

開路 open circuit.

焦點距離 focal length.

虛像 virtual image.

單顯微鏡 simple microscope.

單位[illegible]ositive charge.

最小偏向[illegible]n deviation.

最大電流 maximum current.

等比內項 geometrical mean.

發散透鏡 divergent lens.

順結 connected in series.

十三畫

落體 falling body.

楔 wedge.

塊 block.

圓運動 circular motion.

勢能 potential energy.

勢差 potential difference.

楊率 Young's modulus.

雷尼耀 Regnault.

傳導 conduction.

實在振數 actual frequency.

實重 actual or true weight.

實物 object.

實像 real image.

傾斜平鏡 inclined mirror.

遠視 long-sight.

遠點 far point.

稜鏡 prism.

稜鏡角 angle of prism.

電學 electricity.

電路 electric circuit.

電勢差 electric difference.

電動力 eletromotive force.

電化當量 electro-chemical equivalent.

電解質 electrolyte.

電流計 galvanometer.

電力 electric power.

電能 electric energy.

電槽 battery.

電池 cell.

電勢 electric potential.

電磁石 electromagnet.

電量計 voltameter.

電容 electric capacity.

電荷 charge.

電場強度 electrostatic field intensity.

十四畫

槓桿 lever.

碼 yard (yd.).

熔解 melting.

熔解熱 latent heat of fusion.

蒸發 vaporization.

蒸發熱 heat of vaporization.

對流 convection.

磁學 magnetism.

磁場强度 intensity of magnetic field.

（統）

磁極強度 pole strength.
磁矩 magnetic moment.
端電壓 terminal voltage.
蓄電器 condenser.

十五畫

適用力 applied force.
質心 center of mass.
質點 particle.
輪軸 wheel and axle.
摩擦力 friction.
摩擦係數 coefficient of friction.
衝突 impact.
彈性率 modulus of elasticity.
墜物 sinker.
線膨脹係數 coefficient of linear expansion.
糎 centimeter (cm.).
磅 pound (lb.).
磅度 poundal.
磅-度 pound-degree.
熱 heat.
熱容量 heat capacity.
熱能當量 mechanical equivalent of heat.
潛熱 latent heat.
導熱率 coefficient of thermal conduction.
調音 harmonics.
複透鏡 combination of lenses.
複顯微鏡 compound microscope.
横變位 lateral displacement.
歐姆 ohm.
歐姆定律 Ohm's law.
誘電常數 dielectric constant.

十六畫

靜止 rest.
靜力學 statics.
器械 machine.
機械利率 mechanical equivalent.
輻射 radiation.
噸 ton.

十七畫

螺旋 screw.
螺矩 pitch.
螺線 thread.
壓力 pressure.
壓力計 manometer.
應力 stress.
燭光 candle power.

十八畫

擺 pendulum.
臨界角 critical angle.

十九畫

離心力 centrifugal force.

二十一畫

露點 dew point.

二十二畫

變位 displacement.

變形 strain.

體膨脹係數 coefficient of cubical expansion.

二十三畫

攪桿 stirrer.

表 6. 英漢對照

(排列依字母次序)

A

absolute temperature 絕對溫度.
acceleration 加速度.
acceleration of gravity 重力加速度.
actual frequency 實在振數.
actual or true weight 實重.
air pump 抽氣喞筒.
ammeter 安計.
ampere (amp.) 安.
angle of emergence 出現角.
angle of prism 稜鏡角.
angle of projection 拋射角.
apparent frequency 相視振數.
apparent thickness 視厚.
apparent weight 視重.
applied force 適用力.
Archimedes' principle 阿基米得原理.
astronomical telescope 天體望遠鏡.
atmosphere (atm.) 氣壓.
attraction 引力.
Atwood's machine 阿梯吾特器械.

B

barometer 氣壓計.
battery 電槽.
beat 唸.
block 塊.
Boyle's law 波以耳定律.
British thermal unit (B. T. U.) 熱量單位.
Bunsen cell 本生電池.
Bunsen calorimeter 本生卡計.
buoyant force 浮力.

C

calorie (cal.) 卡.
calorimeter 卡計.
candle power 燭光.
cell 電池.
center of gravity 重心.
center of mass 質心.
centimeter (cm.) 糎.
centrifugal force 離心力.
centripetal force 向心力.
C. G. S. System 糎克秒制.
charge 電荷.
Charles' law 查理士定律.
chemical equivalent 化學當量.
circular motion 圓運動.
closed circuit 閉路.
closed pipe 閉管.
coefficient of cubical expansion 體

膨脹係數

coefficient of friction 摩擦係數.

coefficient of linear expansion 線膨脹係數.

coefficient of restitution 恢復率.

coefficient of thermal conduction 導熱率.

combination of lenses 複透鏡.

compensated pendulum 抵償擺.

compensating resistance 抵償抵抗.

composition 組合.

compound microscope 複顯微鏡.

concave mirror 凹鏡.

concentric cylindric condenser 同心圓柱形蓄電器.

condenser 蓄電器.

conduction 傳導.

connected in parallel 並結.

connected in series 順結.

constant speed motion 等速運動.

convection 對流.

convergent lens 收斂透鏡.

convex mirror 凸鏡.

coulomb 庫.

Coulomb's law 庫隆定律.

Coulomb's law of magnetic force 庫隆之磁力定律.

critical angle 臨界角.

cubic centimeter (c. c.) 立方糎.

cylinder 氣缸.

D

Dalton's law 道爾頓定律.

Daniel cell 但尼爾電池.

declination 方位角.

definition 定理.

degree (deg.) 度.

density 密度.

deviation 偏向.

dew point 露點.

dielectric constant 誘電常數.

dioptre 第.

dip 伏角.

dip circle 伏角計.

direct impact 直衝突.

direction 方向.

displacement 變位.

distance of distinct vision 明視距離.

divergent lens 發散透鏡.

Doppler's effect 都普魯效應.

drying agent 乾燥劑.

Dulong and Petit 度隆普提.

dyne 達.

E

efficiency 效率.

energy 能.

engine 引擎.

electric capacity 電容.

electricity 電學.

electric circuit 電路.

electric energy 電能.
electric power 電力.
electro-chemical equivalent 電化當量.
electrolyte 電解質.
electromagnet 電磁石.
electromotive force 電動力.
electrostatic field intensity 電場強度.
equilibrium 平衡.
erg 厄.
eye-piece 目鏡.

F

falling body 落體.
Faraday 法剌第.
Faraday's law of electrolysis 法剌第電解定律.
far point 遠點.
focal length 焦點距離.
foot (ft.) 呎.
force 力.
formula 公式.
frequency 振數.
friction 摩擦力.
fundamental tone 原音.

G

Galilean telescope 伽利略望遠鏡.
gallon (gal.) 加倫.
galvanometer 電流計.
gas 氣體.
gauss 高.
Gay-lussac's law 艾留利克定律.
geometrical mean 等比內項.
gram (gm.) 克.
gravity 重力.

H

harmonics 調音.
heat 熱.
heat capacity 熱容量.
heat of vaporization 蒸發熱.
Hooke's law 虎克定律.
horizontal range 水平射程.
horse-power (H. P.) 馬力.
hour (hr.) 時.
hundred weight (cwt.) 英擔.

I

ice calorimeter 冰卡計.
illuminating power 光度.
image 物像.
impact 衝突.
impulse 力時積.
inch (in.) 吋.
incident ray 投射光線.
inclined mirror 傾斜平鏡.
inclined plane 斜面.
index of refraction 屈折率.
intensity of illumination 亮度.
intensity of magnetic field 磁場强度.

J

joule 朱.
Joule's law 朱爾定律.

K

kilogram (kg.) 瓩.
kilowatt hour 瓩時.
kinematics 運動學.
kinetic energy 動能.
kinetics 動力學.
Kirchhoff's law 克希荷夫定律.

L

latent heat 潛熱.
latent heat of vaporization 蒸發熱.
lateral displacement 橫變位.
law 定律.
law of conservation of energy 能常住定律.
law of independence of force 力之獨立作用定律.
law of inertia 惰性定律.
law of inverse square 反平方定律.
law of reaction 反作用定律.
law of reflection 反射定律.
law of refraction 屈折定律.
law of resistance 抵抗定律.
lens 透鏡.
lever 槓桿.
Leyden jar 來丁瓶.
light 光學.
liquid 液體.
long-sight 遠視.

M

machine 器械.
magnetism 磁學.
magnetic moment 磁矩.
magnetometer 測磁計.
magnification 倍率.
magnitude 大小.
manometer 壓力計.
maximum current 最大電流.
mechanical advantage 機械利率.
mechanical equivalent of heat 熱能當量.
melting 熔解.
meter (m.) 米.
mile (mi.) 哩.
minimum deviation 最小偏向.
minute (min.) 分.
modulus of elasticity 彈性率.
moment of couple 偶力矩.
moment of inertia 惰矩.
momentum 動量.
motion 運動.

N

near point 近點.
Newton's three laws of motion 牛頓三定律.

normal 法線.

O

object 實物.
objective 物鏡.
oblique impact 斜衝突.
octaves interval 均之音程.
ohm 歐姆.
Ohm's law 歐姆定律.
open circuit 開路.
open pipe 開管.
organ pipe 風琴管.
overtone 倍音.

P

parallel plates condenser 平行板蓄電器.
partial pressure 分壓.
particle 質點.
Pascal's law 巴斯加定律.
pendulum 擺.
period 週期.
permeability 透磁率.
photometer 光度計.
physics 物理學.
piston 活塞.
pitch 螺矩,音調.
plane mirror 平鏡.
point of action 着力點.
pole strength 磁極强度.
potential 電勢.
potential difference 勢差.
potential energy 勢能.
pound (lb.) 磅.
poundal 磅度.
pound-degree 磅-度.
power 功率.
pressure 壓力.
principal focus 主焦點.
prism 稜鏡.
projectile 射體.
properties of matter 物性學.
pulley 滑車或滑輪.

R

radiation 輻射.
radius of curvature 曲率半徑.
real image 實像.
receiver 接受器.
reduction factor 修正因數.
refracting ray 反射光線.
refracting angle 屈折角.
Regnault 雷尼耀.
relative humidity 相對濕度.
relative velocity 相對速度.
repulsion 斥力.
resistance 抵抗或抵抗力.
resistance box 抵抗箱.
resistance coil 抵抗圈.
resolution 分解.
resonance tube 共振管.
rest 靜止.

S

screen 紙屏.
screw 螺旋.
second (sec.) 秒.
sensitiveness 易感.
short-sight 近視.
shunt 分路.
simple microscope 單顯微鏡.
sinker 墜物.
siren 測音計.
solid 固體.
sound 音學.
specific gravity 比重.
specific heat 比熱.
specific resistance 比抗.
speed 速.
spherical condenser 同心球形蓄電器.
statics 靜力學.
stirrer 攪桿.
stone(st.)一[illegible](一英石)(英國重量之名).
stop-cork 活栓.
strain 變形.
stress 應力.
suction pump 吸上喞筒.
surface density 表面密度.
surface tension 表面張力.
sun beam lamp 日光燈.
superheater 過熱器.
superheating 過熱.

T

tangent galvanometer 正切電流計.
temperature 溫度.
temperature gradient 溫度傾度.
temperature coefficient of resistance 抵抗之溫度係數.
tension 張力.
terminal voltage 端電壓.
thermometer 寒暑表.
thread 螺線.
time of flight 飛行時間.
ton 噸.
torque 扭力.
torsion balance 扭秤.
total pressure 全壓.
total reflection 完全反射.

U

uniformly accelerated motion 等加速運動.
unison 同音.
unit positive charge 單位正荷.

V

vaporization 蒸發.
velocity 速度.
velocity of approach 接近速度.
velocity of separating 分離速度.
virtual image 虛像.
volt 弗.

voltameter 電量計.

voltmeter 弗計.

W

water-equivalent 水當量.

watt 瓦.

wave length 波長.

wedge 楔.

weight thermometer 重量寒暑表.

wheel and axle 輪軸.

work 功.

Y

yard (yd.) 碼.

Young's modulus 楊率.

(下册完)