# Einfache Pythagoräische Quadrupel

**Vorbemerkung:**
Im rechtwinkligen Dreieck gilt der Satz des Pythagoras: "Der Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates ist gleich der Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate." – verkürzt meist ausgedrückt durch die Formel "$a^2 + b^2 = c^2$" unter der stillschweigenden Voraussetzung, dass der der Seite c gegenüberliegende Winkel $\gamma$ der rechte ist.
Unabhängig vom geometrischen Inhalt kann man nach Zahlen a, b und c – insbesondere natürlichen Zahlen – suchen, die die Gleichung "$a^2 + b^2 = c^2$" erfüllen. Diese Zahlen bezeichnet man als pythagoräisch. (a, b, c) könnte man auch als ein pythagoräisches Tripel bezeichnen.
Das kleinste dieser Tripel ist (3, 4, 5) wegen $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$. Es ist das einzige, das nur aus einstelligen Zahlen besteht.
Wie man nach der Summe von zwei Quadratzahlen gesucht hat, deren Summe wieder eine Quadratzahl ist, kann man dies auch mit der Summe von drei Quadratzahlen tun. Im Folgenden werden pythagoräische Quadrupel definiert und einige Eigenschaften in Form von Sätzen formuliert. Deren Beweise – sofern sie nicht direkt benötigt werden – befinden sich für daran Interessierte im Anhang.

**Definition 1:**
Die vier natürlichen Zahlen a, b, c, d bilden ein **pythagoräisches Quadrupel** (a, b, c, d), wenn die Bedingung $\mathbf{a^2 + b^2 + c^2 = d^2}$ erfüllt ist.

**Satz 1:**
Ist n eine natürliche Zahl und (a, b, c, d) ein pythagoräisches Quadrupel, so ist auch (na, nb, nc, nd) ein pythagoräisches Quadrupel.
[Beispiel: (1, 2, 2, 3) ist ein pythagoräisches Quadrupel. Wie man leicht nachrechnen kann, ist das auch bei (2, 4, 4, 6) und (3, 6, 6, 9) etc. der Fall.]

**Satz 2:**
Ist (a, b, c, d) ein pythagoräisches Quadrupel, so ist es auch (b, c, a, d) etc..
[Beispiel: (1, 2, 2, 3) ist ein pythagoräisches Quadrupel. Natürlich ist das auch bei (2, 1, 2, 3) und (2, 2, 1, 3) der Fall.]

**Definition 2:**
Ist x eine natürliche Zahl und (a, b, c, d) ein pythagoräisches Quadrupel, so heißt es vom **Typ Ax**, wenn die Differenz von d und c gleich x ist.

**Lemma:**

Jede natürliche Zahl y lässt sich darstellen als $y = 2xt + w$ ($t, w \in N_{(0)}$, $w < 2x$), wobei die Schreibweise $N_{(0)}$ ausdrücken soll, dass nicht t und w gleichzeitig Null sind.

Speziell gilt: $a = 2kx + u$ mit $\mathbf{a^2 = 4k^2x^2 + 4kxu + u^2}$ ($k, u \in N_{(0)}$, $u < 2x$) und

$b = 2xn + v$ mit $\mathbf{b^2 = 4x^2n^2 + 4xkv + v^2}$ ($n, v \in N_{(0)}$, $v < 2x$).

(Im Folgenden verwendet an mit * gekennzeichneten Stellen)

[Beispiel: Für $x = 6$ lässt sich etwa 41 schreiben als $41 = 2\cdot6\cdot3 + 5$ oder 8 als $8 = 2\cdot6\cdot0 + 8$.]

**Satz 3:**

Zu jeder natürlichen Zahl x gibt es ein pythagoräisches Quadrupel des Typs Ax.

**Beweis:**

(a, b, c, d) ist ein pythagoräisches Quadrupel des Typs Ax.

$$\Longleftrightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 = (c + x)^2 = c^2 + 2xc + x^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad a^2 + b^2 - x^2 = 2xc$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2x} = c$$

$$\Longleftrightarrow \quad c = \frac{4k^2x^2 + 4kxu + u^2 + 4n^2x^2 + 4nxv + v^2 - x^2}{2x} \qquad [*]$$

$$\Longleftrightarrow \quad c = 2k^2x + 2ku + 2n^2x + 2nv + \frac{u^2 + v^2 - x^2}{2x}$$

Die ersten vier Summanden, aus denen c besteht, sind natürliche Zahlen.

Wählt man nun $u = 0$ und $v = x$, so ist der Bruch gleich Null, und man erhält:

$c = 2k^2x + 2ku + 2n^2x + 2nv$. Damit ist c ebenfalls ganzzahlig und (a, b, c, d) ein pythagoräisches Quadrupel des Typs Ax.

[Beispiel für $x = 7$: Zu $a = 14k + u$ und $b = 14n + v$ sucht man Zahlen c und d mit der Differenz Sieben, so das ein pythagoräisches Quadrupel entsteht. Man wählt nun $u = 0$ und $v = 7$.

Damit erhält man: $a^2 = 196k^2$ und $b^2 = 196n^2 + 28n + 49$.

Dann gilt: $a^2 + b^2 + c^2 = 196k^2 + 196n^2 + 28n + 49 + c^2 = (c + 7)^2 = c^2 + 14c + 49$.

Zusammengefasst ergibt das: $196k^2 + 196n^2 + 28n = 14c$, und nach c aufgelöst: $c = 14k^2 + 14n^2 + 2n$.

($14k$, $14n + 7$, $14k^2 + 14n^2 + 2n$, $14k^2 + 14n^2 + 2n + 7$) ($k, n \in N$) ist ein pythagoräisches Quadrupel.

Für $k = 0$ und $n = 1$ erhält man beispielsweise (7, 14, 14, 21).]

**Satz 4a:**

Neben der Lösung $u = 0$, $v = x$ ist $u = x$, $v = 0$ ebenfalls eine bei der Suche nach ganzzahligem c.

**Satz 4b:**

Ist x gerade, gibt es zwei weitere Lösungen, nämlich $u = v = 0$ und $u = v = x$.

**Definition 3:**

Die in den Sätzen 4a und 4b genannten Lösungen heißen **triviale Lösungen**.

**Satz 5a:**

Ist die natürliche Zahl x gerade, dann gibt es pythagoräische Quadrupel des Typs Ax nur, wenn der Bruch $\frac{u^2+v^2}{2x}$ ganzzahlig ist.

[Beispiel für x = 10: Für a = 20k + u und b = 20n + v wählt man u = 2 und v = 6 und erhält

$a^2 = 400k^2 + 80k + 4$ und $b^2 = 400n^2 + 240n + 36$.

Aus $a^2 + b^2 + c^2 = (c + 10)^2$ ergibt sich $c = 20k^2 + 4k + 20n^2 + 12n - 3$.

$(20k + 2, 20n + 6, 20k^2 + 4k + 20n^2 + 12n - 3, 20k^2 + 4k + 20n^2 + 12n + 7)$ ist ein pythagoräisches Quadrupel. Für k = n = 1 erhält man beispielsweise (22, 26, 53, 63).]

**Satz 5b:**

Ist die natürliche Zahl x ungerade, dann gibt es pythagoräische Quadrupel des Typs Ax nur, wenn der Bruch $\frac{u^2+v^2+x}{2x}$ ganzzahlig ist.

[Beispiel für x = 5: Für a = 10k + u und b = 10n + v wählt man u = 1 und v = 2 und erhält

$a^2 = 100k^2 + 20k + 1$ und $b^2 = 100n^2 + 40n + 4$.

Aus $a^2 + b^2 + c^2 = (c + 5)^2$ ergibt sich $c = 10k^2 + 2k + 10n^2 + 4n - 2$.

$(10k + 1, 10n + 2, 10k^2 + 2k + 10n^2 + 4n - 2, 10k^2 + 2k + 10n^2 + 4n + 3)$ ist ein pythagoräisches Quadrupel. Für k = n = 1 erhält man beispielsweise (11, 12, 24, 29).]

**Anmerkung:**

Bei Satz 5a und Satz 5b gibt es wegen der Beschränkung von u und v (u, v < 2x) jeweils nur endlich viele Fälle bei der Untersuchung der Brüche $\frac{u^2+v^2}{2x}$ beziehungsweise $\frac{u^2+v^2+x}{2x}$ auf Ganzzahligkeit. Mit den dabei gefundenen Werten für u und v erhält man bei vorgegebenem x alle pythagoräischen Quadrupel des Typs Ax.

**Definition 4:**

Die vier natürlichen Zahlen a, b, c, d bilden ein **einfaches pythagoräisches Quadrupel** (a, b, c, d), wenn die Bedingungen

(1) $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$,

(2) a, b, c und d sind teilerfremd,

(3) $a \leq b \leq c$ erfüllt sind.

[Wegen (1) handelt es sich um ein pythagoräisches Quadrupel, wegen (2) handelt es sich nicht um Vielfache eines anderen Quadrupels (siehe Satz 1), durch (3) wird für Eindeutigkeit gesorgt (siehe Satz 2).]

**Satz 6:**

Nicht zu jeder natürlichen Zahl x gibt es ep3 Zahlen des Typs Ax.

**Satz 7:**
Die trivialen Lösungen führen zu keinen einfachen pythagoräischen Quadrupeln.

**Satz 8:**
Genau zwei Zahlen eines einfachen pythagoräischen Quadrupels sind gerade.

**Satz 9:**
Ist (a, b, c, d) ein einfaches pythagoräisches Quadrupel, so ist d ungerade.

**Satz 10:**
Liefert das Zahlenpaar (u; v) ($0 < u, v < 2x$, $x \in N$) einen ganzzahligen Wert des Bruches $\frac{u^2 + v^2\,[+\,x]\,^{*)}}{2x}$, so gilt das auch für die Paare ($2x - u$; v) und (u; $2x - v$).
*) Der Summand x tritt nur bei ungeradem x auf.

**Satz 11a:**
Wenn die natürliche Zahl t Teiler von c und d ($d > c$) ist, dann ist t auch Teiler der Differenz $d - c$.

**Satz 11b:**
Wenn die natürliche Zahl t kein Teiler der Differenz $d - c$ ist, dann ist t kein Teiler von c oder kein Teiler von d, das heißt, t ist kein gemeinsamer Teiler von c und d.
Als gemeinsame Teiler von a, b, c und d kommen nur Teiler von $x = d - c$ in Frage.

**Vorgehensweise für das Auffinden von einfachen pythagoräischen Quadrupeln:**

1. Für die gegebene natürliche Zahl x wird die Tabelle axuv.xls erstellt mit 2x Zeilen für $0 \leq u < 2x$ und 2x Spalten für $0 \leq v < 2x$. In den Zellen werden für gerades x die Werte des Bruches $\frac{u^2+v^2}{2x}$ und für ungerades x die des Bruches $\frac{u^2+v^2+x}{2x}$ berechnet.

| u\v | 0 | 1 | 2 | ... | 2x-1 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | |
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| ... | | | | | |
| 2x-1 | | | | | |

[siehe auch Beweis von Satz 6 für x = 3.]

2. Die Lösungspaare (u, v), für die die Brüche ganzzahlig sind, liefern pythagoräische Quadrupel (siehe Satz 3).

3. Mit Hilfe der gefundenen Lösungen werden a, b, c und d konstruiert, die von den Parametern k und n abhängig sind.

4. a, b, c und d werden mit Hilfe von Satz 11b auf Teilerfremdheit untersucht und gegebenenfalls nicht berücksichtigt.

5. Zusätzlich werden diejenigen Werte von k und n ausgeschlossen, die negative c ergeben oder gegen die Bedingung (3) aus der Definition 4 verstoßen.

**Anmerkung:**

Ist x eine Zweierpotenz, gibt es ein einfacheres Verfahren.

# Anhang

**Beweis von Satz 1:**

Es gilt:

$(na)^2 + (nb)^2 + (nc)^2 = n^2a^2 + n^2b^2 + n^2c^2 = n^2(a^2 + b^2 + c^2) = n^2d^2 = (nd)^2$, q. e. d..

**Beweis von Satz 2:**

Wegen der Kommutativität der Addition sind die Summanden $a^2$, $b^2$ und $c^2$ in der Gleichung "$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$" in ihrer Reihenfolge beliebig vertauschbar.

**Beweis des Lemmas:**

Für $y < 2x$ wählt man $t = 0$ und $w = y$, um die Darstellung zu erhalten.

Für $y = 2x$ wählt man $t = 1$ und $w = 0$, um die Darstellung zu erhalten.

Für $y > 2x$ führt man eine Division mit Rest durch mit y: $2x = z$ Rest $r$ ($z \in N$, $r \in N_0$).

Nun wählt man $t = z$ und $w = r$, um die Darstellung zu erhalten.

**Beweis von Satz 4a:**

Auch hier ist der Bruch gleich Null und c damit ganzzahlig.

**Beweis von Satz 4b:**

Für $u = v = 0$ ergibt sich für den Bruch: $\frac{u^2 + v^2 - x^2}{2x} = \frac{-x^2}{2x} = -\frac{x}{2}$.

Für geradzahliges x ist $-\frac{x}{2}$ eine ganze Zahl und c damit ganzzahlig.

Für $u = v = x$ ergibt sich für den Bruch: $\frac{u^2 + v^2 - x^2}{2x} = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$.

Für geradzahliges x ist $\frac{x}{2}$ eine ganze Zahl und c damit ganzzahlig.

**Beweis von Satz 5a:**

(a, b, c, d) ist ein pythagoräisches Quadrupel des Typs Ax.

$$\begin{aligned}
&\iff a^2 + b^2 + c^2 = (c + x)^2 = c^2 + 2cx + x^2 \\
&\iff a^2 + b^2 - x^2 = 2xc \\
&\iff \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2x} = c \\
&\iff c = \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2x} = \frac{a^2 + b^2}{2x} - \frac{x}{2}, \text{ wobei } \frac{x}{2} \text{ eine ganze Zahl ist.} \\
&\iff c = \frac{4k^2x^2 + 4kxu + u^2 + 4x^2n^2 + 4xnv + v^2}{2x} - \frac{x}{2} \qquad [*] \\
&\iff c = 2xk^2 + 2ku + 2xn^2 + 2nv - \frac{x}{2} + \frac{u^2 + v^2}{2x}
\end{aligned}$$

Nur wenn der Bruch $\frac{u^2 + v^2}{2x}$ ganzzahlig ist, ist es auch c und (a, b, c, d) ein pythagoräisches Quadrupel.

**Beweis von Satz 5b:**

(a, b, c, d) ist ein pythagoräisches Quadrupel des Typs Ax.

$$\Longleftrightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 = (c + x)^2 = c^2 + 2cx + x^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad a^2 + b^2 - x^2 = 2xc$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2x} = c$$

$$\Longleftrightarrow \quad c = \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2x} = \frac{a^2 + b^2 + x}{2x} - \frac{x+1}{2}, \text{ wobei } \frac{x+1}{2} \text{ ganzzahlig ist.}$$

$$\Longleftrightarrow \quad c = \frac{4k^2x^2 + 4kxu + u^2 + 4x^2n^2 + 4xnv + v^2 + x}{2x} - \frac{x+1}{2} \qquad [*]$$

$$\Longleftrightarrow \quad c = 2xk^2 + 2ku + 2xn^2 + 2nv - \frac{x+1}{2} + \frac{u^2 + v^2 + x}{2x}$$

Nur wenn der Bruch $\frac{u^2 + v^2 + x}{2x}$ ganzzahlig ist, ist es auch c und (a, b, c, d) ein pythagoräisches Quadrupel.

**Beweis von Satz 6:**

Man wählt x = 3.

Die nachstehende Tabelle liefert alle Werte des Bruchs $\frac{u^2 + v^2 + 3}{6}$:

| | | v | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $v^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 |
| u | $u^2$ | | | | | | | |
| 0 | 0 | | 0,50 | 0,67 | 1,17 | 2,00 | 3,17 | 4,67 |
| 1 | 1 | | 0,67 | 0,83 | 1,33 | 2,17 | 3,33 | 4,83 |
| 2 | 4 | | 1,17 | 1,33 | 1,83 | 2,67 | 3,83 | 5,33 |
| 3 | 9 | | 2,00 | 2,17 | 2,67 | 3,50 | 4,67 | 6,17 |
| 4 | 16 | | 3,17 | 3,33 | 3,83 | 4,67 | 5,83 | 7,33 |
| 5 | 25 | | 4,67 | 4,83 | 5,33 | 6,17 | 7,33 | 8,83 |

Nur in den beiden markierten Fällen ist $u^2 + v^2 + x$ durch 2x = 6 ohne Rest teilbar.

Es handelt sich um die beiden trivialen Lösungen, so dass nach Satz 7 keine einfachen pythagoräischen Quadrupel vorliegen.

**Beweis von Satz 7:**

Für $u = x$ und $v = 0$ erhält man:

$a = 2kx + x$, $b = 2nx$, $c = 2xk^2 + 2kx + 2xn^2$, $d = 2xk^2 + 2kx + 2xn^2 + x$.

Für $u = 0$ und $v = x$ erhält man:

$a = 2xk$, $b = 2xn + x$, $c = 2xk^2 + 2xn^2 + 2xn$, $d = 2xk^2 + 2xn^2 + 2xn + x$.

Für $u = v = 0$ und gerades x ($\frac{x}{2}$ ganzzahlig!) erhält man:

$a = 2xk$, $b = 2xn$, $c = 2xk^2 + 2xn^2 - \frac{x}{2}$, $d = 2xk^2 + 2xn^2 - \frac{x}{2} + x$.

Für $u = v = x$ und gerades x ($\frac{x}{2}$ ganzzahlig!) erhält man:

$a = 2xk + x$, $b = 2xn + x$, $c = 2xk^2 + 2xk + 2xn^2 + 2xn + \frac{x}{2}$,

$d = 2xk^2 + 2xk + 2xn^2 + 2xn + \frac{x}{2} + x$.

In allen vier Fällen sind a, b, c und d durch x teilbar. Die zweite Bedingung der Definition der einfachen pythagoräischen Quadrupel ist also verletzt.

**Beweis von Satz 8:**

<u>1. Fall</u>: a, b, c und d sind gerade.

a, b, c und d sind durch Zwei teilbar, also nicht teilerfremd (Bedingung (1)).

<u>2. Fall</u>: a, b, c und d sind ungerade.

Die Differenz zweier ungerader Zahlen ist gerade, also auch die von d und c:

$d - c = 2x$ ($x \in N$) oder $d = c + 2x$.

Nun gilt: $a^2 + b^2 + c^2 = (c + 2x)^2 = c^2 + 4cx + 4x^2$

$\Longleftrightarrow a^2 + b^2 = 4cx + 4x^2 = 4x(c + x)$

Die Summe $a^2 + b^2$ muss daher durch Vier teilbar sein.

Da a und b ungerade sind, gibt es natürliche Zahlen m und n mit

$a = 2m - 1$ und $b = 2n - 1$.

Dann gilt: $a^2 + b^2 = (2m - 1)^2 + (2n - 1)^2$

$= 4m^2 - 4m + 1 + 4n^2 - 4n + 1$

$= 4(m^2 - m + n^2 - n) + 2$

Die Summe $a^2 + b^2$ ist nicht durch Vier teilbar.

<u>3. Fall</u>: Genau eine Zahl des Quadrupels ist gerade, oder genau drei Zahlen sind gerade.

Da die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl ungerade beziehungsweise die Summe gerader Zahlen gerade ist, kann auch dieser Fall nicht eintreten.

Damit bleibt als einzige Möglichkeit die Behauptung.

**Beweis von Satz 9:**

Annahme: d ist gerade.

Dann gibt es eine natürliche Zahl n mit $d = 2n$ und $d^2 = 4n^2$.

Nach Satz 2 sind genau zwei der vier Zahlen a, b, c und d gerade.

Da d der Annahme nach gerade ist, haben die übrigen drei die Darstellungen

$2i - 1$, $2j - 1$ und $2k$ ($i, j, k \in N$).

Man erhält: $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 = 4n^2$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^2+b^2+c^2}{4} = n^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(2i-1)^2+(2j-1)^2+(2k)^2}{4} = n^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4i^2-4i+1+4j^2-4j+1+4k^2}{4} = n^2$$

$$\Leftrightarrow \quad i^2 - i + j^2 - j + k^2 + \frac{1}{2} = n^2.$$

$n^2$ ist keine natürliche Zahl. Damit war die Annahme falsch, und die Behauptung des Satzes ist richtig.

**Beweis von Satz 10:**

Wegen des Symmetrie von u und v wird nur der Beweis mit dem ersten Paar geführt.

Es gilt: $\frac{(2x-u)^2 + v^2\,[+ x]}{2x} = \frac{4x^2 - 4xu + u^2 + v^2\,[+x]}{2x}$

$= 2x - 2xu + \frac{u^2 + v^2\,[+ x]\ ^{*)}}{2x}$, wobei der Bruch nach Voraussetzung ganzzahlig ist.

**Beweis von Satz 11a:**

t ist Teiler von c und von d. Dann gibt es natürliche Zahlen r und s mit $c = rt$ und $d = st$.

Nun gilt: $d - c = st - rt = t(s - r)$.

Damit ist t Teiler von $d - c$.

**Beweis von Satz 11b:**

Es handelt sich um die logische Umkehrung des Satzes 11a.