Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis I

Arbeitsblatt 9

Aufgabe 9.1. Zeige, dass bei einer Folge die Änderung von endlich vielen Folgengliedern weder die Konvergenz noch den Grenzwert ändert, und dass bei Reihen die Änderung von endlich vielen Reihengliedern zwar die Konvergenz nicht ändert, wohl aber die Summe.

Aufgabe 9.2. Zeige, dass die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+2}$$

divergieren.

Aufgabe 9.3. Beweise das Cauchy-Kriterium für Reihen komplexer Zahlen.

Aufgabe 9.4. Es seien

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

konvergente Reihen von komplexen Zahlen mit den Summen s und t. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $c_k = a_k + b_k$ ist ebenfalls konvergent mit der Summe $s + t$.
(2) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ mit $d_k = \lambda a_k$ konvergent mit der Summe λs.

Aufgabe 9.5. In einer Studenten-WG bereitet Studi 1 Kaffee zu, und füllt die Menge x_1 Kaffee in den Kaffeefilter. Dies sieht entsetzt Studi 2 und sagt: „Willst Du, dass wir alle schon total wach werden?“ und nimmt die Kaffeemenge $x_2 < x_1$ wieder aus dem Filter heraus. Danach kommt Studi 3 und sagt: „Bin ich hier in einer Weicheier-WG gelandet?“ und kippt wieder eine Kaffeemenge $x_3 < x_2$ dazu. So geht es unendlich weiter, wobei sich Kaffeeherausnehmer und Kaffeenachfüller abwechseln. Wie kann man charakterisieren, ob die Kaffeemenge im Filter konvergiert?

Aufgabe 9.6. Nachdem der Kaffee am Vortag für die Befürworter eines starken Kaffees zu schwach geworden ist, entwickeln sie eine neue Strategie: Sie wollen etwas früher aufstehen, so dass am Tagesanfang und zwischen je zwei Kaffeereduzierern immer zwei Kaffeeauffüller zum Zuge kommen. Dabei bleibt die interne Reihenfolge der beiden Lager als auch die hinzuzufügende bzw. wegzunehmende Kaffeemenge einer Person unverändert. Können sie mit dieser Strategie den Kaffee stärker machen?

AUFGABE 9.7. Sei z eine komplexe Zahl, $z \neq 1$. Beweise für $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}\,.$$

AUFGABE 9.8. Zwei Personen, A und B, sitzen in der Kneipe. A will nach Hause gehen, aber B will noch ein Bier trinken. „Na gut, dann trinken wir eben noch ein Bier, das ist aber das allerletzte“ sagt A. Danach möchte B immer noch Bier, aber da das vorhergehende Bier definitiv das letzte war, einigen sie sich auf ein allerletztes halbes Bier. Danach trinken sie noch ein allerletztes Viertelbier, danach noch ein allerletztes Achtelbier, u.s.w. Wieviel „allerletztes Bier“ trinken sie insgesamt?

AUFGABE 9.9. Sei $k \geq 2$. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

konvergiert.

AUFGABE 9.10.*

Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

konvergiert.

AUFGABE 9.11.*

Untersuche, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{4n^3-3n+2}$$

konvergiert oder divergiert.

AUFGABE 9.12. Zeige, dass es für jedes $\epsilon > 0$ eine Familie ϵ_n, $n \in \mathbb{N}$, von positiven reellen Zahlen mit $\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \leq \epsilon$ gibt.

AUFGABE 9.13. Beweise das folgende *Minorantenkriterium*.

Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei Reihen von nichtnegativen reellen Zahlen. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sei divergent und es gelte $a_k \geq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Aufgabe 9.14. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

divergiert.

Aufgabe 9.15. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe mit $a_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeige, dass die durch

$$y_n := \sum_{k \geq n/2}^{n} a_k$$

definierte Folge eine Nullfolge ist.

Die nächste Aufgabe befasst sich mit der *g-adischen Entwicklung* von reellen Zahlen, vergleiche Aufgabe 9.19.

Aufgabe 9.16. Es sei $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$. Es sei eine Ziffernfolge

$$z_i \in \{0, 1, \ldots, g-1\} \text{ für } i \in \mathbb{Z},\ i \leq k\,,$$

(wobei $k \in \mathbb{N}$ ist) gegeben und es sei

$$r = \sum_{i=k}^{-\infty} z_i g^i$$

die durch diese Ziffernfolge definierte reelle Zahl. Zeige, dass die Ziffernfolge genau dann ab einer gewissen Stelle *periodisch* ist, wenn r eine rationale Zahl ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 9.17. (2 Punkte)

Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Bestimme und beweise eine Formel für die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k\,.$$

Aufgabe 9.18. (3 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}_+$. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{ak+b}$$

divergiert.

Aufgabe 9.19. (3 Punkte)

Es sei $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$. Eine *Ziffernfolge*, die durch

$$z_i \in \{0, 1, \ldots, g-1\} \text{ für } i \in \mathbb{Z},\ i \leq k\,,$$

(wobei $k \in \mathbb{N}$ ist) gegeben ist, definiert eine reelle Reihe[1]

$$\sum_{i=k}^{-\infty} z_i g^i\,.$$

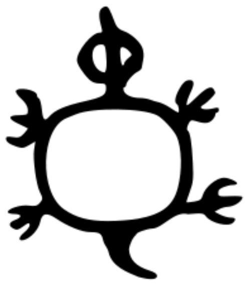
Zeige, dass eine solche Reihe gegen eine eindeutig bestimmte nichtnegative reelle Zahl konvergiert.

Aufgabe 9.20. (4 Punkte)

Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

konvergiert.



Aufgabe 9.21. (4 Punkte)

Die Situation im Schildkröten-Paradoxon von Zenon von Elea ist folgendermaßen: Eine langsame Schildkröte (mit der Kriechgeschwindigkeit $v > 0$) hat einen Vorsprung $s > 0$ gegenüber dem schnelleren Achilles (mit der Geschwindigkeit $w > v$ und dem Startpunkt 0). Sie starten gleichzeitig. Achilles kann die Schildkröte nicht einholen: Wenn er beim Ausgangspunkt der Schildkröte $s_0 = s$ ankommt, so ist die Schildkröte nicht mehr dort, sondern ein Stück weiter, sagen wir an der Stelle $s_1 > s_0$. Wenn Achilles an der Stelle s_1 ankommt, so ist die Schildkröte wieder ein Stück weiter, an der Stelle $s_2 > s_1$, u.s.w.

Berechne die Folgenglieder s_n, die zugehörigen Zeitpunkte t_n, sowie die jeweiligen Grenzwerte. Vergleiche diese Grenzwerte mit den direkt berechneten Überholungsdaten.

[1]Hier läuft also der Index in die umgekehrte Richtung.