

**Körper- und Galoistheorie****Arbeitsblatt 15****Aufwärmaufgaben****AUFGABE 15.1.\***

Es sei  $F \in \mathbb{Q}[X]$  ein irreduzibles Polynom vom Grad 3 und es sei  $\mathbb{Q} \subseteq L$  eine Körpererweiterung, in der  $F$  in Linearfaktoren zerfällt. Zeige, dass die Nullstellen von  $F$  in  $L$  nicht die Form  $\alpha, \alpha + \beta, \alpha + \gamma$  mit rationalen Zahlen  $\beta, \gamma$  haben können.

**AUFGABE 15.2.** Zeige, dass man in Satz 15.4 (2) nicht auf die Bedingung der Irreduzibilität verzichten kann.

**AUFGABE 15.3.** Zeige, dass man in Satz 15.4 die äquivalenten Bedingungen durch die folgende Eigenschaft ergänzen kann:

Zu jeder Körpererweiterung  $K \subseteq M$  und zu zwei  $K$ -Algebrahomomorphismen

$$\varphi_1, \varphi_2: L \longrightarrow M$$

ist  $\varphi_1(L) = \varphi_2(L)$ .

**AUFGABE 15.4.\***

Sei  $\mathbb{Q} \subseteq K$  eine endliche normale Körpererweiterung und sei

$$\kappa: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

die komplexe Konjugation.

a) Zeige, dass  $\kappa(K) \subseteq K$  gilt.

b) Zeige, dass  $\kappa|_K = \text{Id}_K$  genau dann gilt, wenn  $K \subseteq \mathbb{R}$  ist.

**AUFGABE 15.5.** Es sei  $q \in \mathbb{Q}$  eine rationale Zahl, die in  $\mathbb{Q}$  keine dritte Wurzel besitzt, so dass  $\mathbb{Q} \subseteq L = \mathbb{Q}[X]/(X^3 - q)$  eine Körpererweiterung vom Grad 3 ist. Zeige anhand der verschiedenen äquivalenten Formulierungen von Satz 15.4, dass diese Körpererweiterung nicht normal ist. Man gebe die verschiedenen Einbettungen von  $L$  in  $\mathbb{C}$  an.

**AUFGABE 15.6.** Sei  $K \subseteq L$  eine endliche normale Körpererweiterung und  $M, K \subseteq M \subseteq L$ , ein Zwischenkörper, der über  $K$  nicht normal sei. Zeige, dass es einen weiteren Zwischenkörper  $M' \neq M$  gibt, der zu  $M$  isomorph ist.

AUFGABE 15.7. Wir betrachten die Körpererweiterung  $\mathbb{Q} \subseteq M$  aus Beispiel 15.6. Zeige anhand der verschiedenen äquivalenten Formulierungen von Satz 15.4, dass diese Körpererweiterung nicht normal ist.

AUFGABE 15.8. Finde für den Körper  $L$  aus Beispiel 14.9 eine endliche Körpererweiterung  $L \subseteq L'$  mit  $L' \subseteq \mathbb{C}$  und so, dass  $L'$  über  $\mathbb{Q}$  normal ist. Beschreibe einen  $\mathbb{Q}$ -Automorphismus  $\varphi: L' \rightarrow L'$  mit  $\varphi(L) \neq L$ .

AUFGABE 15.9. Es sei  $K$  ein Körper,  $D$  eine endliche kommutative Gruppe und  $K \subseteq L$  eine  $D$ -graduierte Körpererweiterung. Zu jedem Primpotenzteiler  $p^r$  von  $\#(D)$  enthalte  $K$  eine  $p^r$ -te primitive Einheitswurzel. Zeige, dass  $K \subseteq L$  eine separable Körpererweiterung ist.

AUFGABE 15.10. Bestimme für die Körpererweiterung  $\mathbb{F}_3 \subseteq \mathbb{F}_9$ , welche Elemente aus  $\mathbb{F}_9$  untereinander konjugiert sind.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 15.11. (4 Punkte)

Man gebe in jeder Charakteristik Beispiele für eine normale Körpererweiterung  $K \subseteq L$  vom Grad 3.

AUFGABE 15.12. (3 Punkte)

Sei  $K \subseteq L$  eine endliche Körpererweiterung und seien  $M_1, M_2$  Zwischenkörper, die beide über  $K$  normal seien. Zeige, dass auch  $K \subseteq M_1 \cap M_2$  normal ist.

AUFGABE 15.13. (4 Punkte)

Es sei  $K$  ein Körper,  $D$  eine endliche kommutative Gruppe und  $K \subseteq L$  eine  $D$ -graduierte Körpererweiterung. Zu jedem Primpotenzteiler  $p^r$  von  $\#(D)$  enthalte  $K$  eine  $p^r$ -te primitive Einheitswurzel. Zeige, dass  $K \subseteq L$  eine normale Körpererweiterung ist.

AUFGABE 15.14. (4 Punkte)

Sei  $K \subseteq L$  eine endliche normale und separable Körpererweiterung. Es sei  $x \in L$  mit  $x^n = a \in K$ , wobei  $\text{grad}_K K(x) = n$  sei. Zeige, dass  $L$   $n$  verschiedene  $n$ -te Einheitswurzeln besitzt.

AUFGABE 15.15. Bestimme für die Körpererweiterung  $\mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{F}_8$ , welche Elemente aus  $\mathbb{F}_8$  untereinander konjugiert sind.

## Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 3
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 3