Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 12

Heute war es besonders anstrengend, Vorli muss noch mehr schlafen. Ein gesunder Schlaf ist für alle Beteiligten wichtig.

Potenzreihen

DEFINITION 12.1. Es sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen und x eine weitere reelle Zahl. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

die *Potenzreihe* in x zu den Koeffizienten $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Bei Potenzreihen ist es wichtig, dass man x variieren kann und dass die Potenzreihe in einem *Konvergenzintervall* eine Funktion in x darstellt. Jedes Polynom ist eine Potenzreihe, bei der allerdings alle Koeffizienten ab einem bestimmten Glied gleich 0 sind. In diesem Fall hat man kein Konvergenzproblem.

Eine wichtige Potenzreihe haben wir schon in der 9ten Vorlesung kennengelernt, nämlich die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (hier sind alle Koeffizienten gleich 1), die für $|x| < 1$ konvergiert und dort die Funktion $1/(1-x)$ darstellt. Eine weitere besonders wichtige Potenzreihe ist die *Exponentialreihe*, die für jede reelle Zahl konvergiert und zur *reellen Exponentialfunktion* führt. Ihre Umkehrfunktion ist der *natürliche Logarithmus*.

Das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe wird durch den folgenden Satz beschrieben.

Satz 12.2. *Es sei*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

eine Potenzreihe und es gebe ein $x_0 \neq 0$ *derart, dass* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ *konvergiere. Dann gibt es ein positives* R *(wobei* $R = \infty$ *erlaubt ist) derart, dass für alle* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $|x| < R$ *die Reihe absolut konvergiert. Auf einem solchen (offenen) Konvergenzintervall stellt die Potenzreihe* $f(x)$ *eine stetige Funktion dar.*

Beweis. Der Beweis beruht auf einer systematischen Untersuchung für Potenzreihen und dem Limes von Funktionenfolgen. Wir werden ihn nicht durchführen. □

Wenn zwei Funktionen durch Potenzreihen gegeben sind, so wird ihre Summe einfach durch die (koeffizientenweise definierte) Summe der Potenzreihen beschrieben. Es ist keineswegs selbstverständlich, durch welche Potenzreihe ihr Produkt beschrieben werden kann. Die Antwort gibt das Cauchy-Produkt von Reihen.

Definition 12.3. Zu zwei Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ reeller Zahlen heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{ mit } c_k := \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

das *Cauchy-Produkt* der beiden Reihen.

Auch für die folgende Aussage geben wir keinen Beweis.

Lemma 12.4. *Es seien*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \textit{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

zwei absolut konvergente Reihen reeller Zahlen. Dann ist auch das Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ *absolut konvergent und für die Summe gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

Dies hat die Auswirkung, dass das Produkt von Potenzreihen durch eine Potenzreihe gegeben ist, deren Koeffizienten sich wie bei der Multiplikation von Polynomen ergeben, siehe Aufgabe 12.3.

Die Exponentialreihe und die Exponentialfunktion

Wir besprechen ene weitere wichtige Potenzreihe, nämlich die Exponentialreihe, und die durch sie dargestellte Exponentialfunktion.

Definition 12.5. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

die *Exponentialreihe* in x.

Dies ist also die Reihe

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \ldots .$$

Satz 12.6. *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Exponentialreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

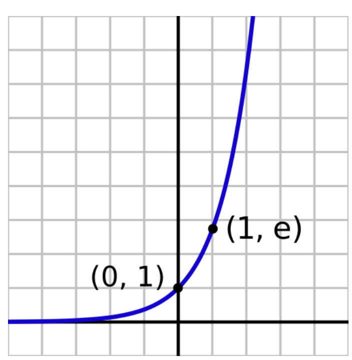
absolut konvergent.

Beweis. Für $x = 0$ ist die Aussage richtig. Andernfalls betrachten wir den Quotienten

$$\left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right| = \frac{|x|}{n+1}.$$

Dies ist für $n \geq 2|x|$ kleiner als $1/2$. Aus dem Quotientenkriterium folgt daher die Konvergenz. □

Aufgrund dieser Eigenschaft können wir die reelle Exponentialfunktion definieren.



Der Graph der reellen Exponentialfunktion

Definition 12.7. Die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \exp x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

heißt (reelle) *Exponentialfunktion*.

Die folgende Aussage heißt die *Funktionalgleichung der Exponentialfunktion*.

Satz 12.8. *Für reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\exp(x+y) \,=\, \exp x \cdot \exp y.$$

Beweis. Das Cauchy-Produkt der beiden Exponentialreihen ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit $c_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \frac{y^{n-i}}{(n-i)!}$. Diese Reihe ist nach Lemma 12.4 absolut konvergent und der Grenzwert ist das Produkt der beiden Grenzwerte. Andererseits ist der n-te Summand der Exponentialreihe von $x+y$ gleich

$$\frac{(x+y)^n}{n!} \,=\, \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \,=\, c_n,$$

so dass die beiden Seiten übereinstimmen. □

Korollar 12.9. *Die Exponentialfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \exp x,$$

besitzt folgende Eigenschaften.

1. *Es ist* $\exp 0 = 1$.
2. *Für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $\exp(-x) = (\exp x)^{-1}$. *Insbesondere ist* $\exp x \neq 0$.
3. *Für ganze Zahlen* $n \in \mathbb{Z}$ *ist* $\exp n = (\exp 1)^n$.
4. *Für jedes* x *ist* $\exp x \in \mathbb{R}_+$.
5. *Für* $x > 0$ *ist* $\exp x > 1$ *und für* $x < 0$ *ist* $\exp x < 1$.
6. *Die reelle Exponentialfunktion ist streng wachsend.*

Beweis. (1) folgt direkt aus der Definition. (2) folgt aus

$$\exp x \cdot \exp(-x) \,=\, \exp(x-x) \,=\, \exp 0 \,=\, 1$$

aufgrund von Satz 12.8. (3) folgt für $n \in \mathbb{N}$ aus Satz 12.8 durch Induktion, und daraus wegen (2) auch für negatives n. (4). Die Nichtnegativität ergibt sich aus

$$\exp x \,=\, \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) \,=\, \exp\frac{x}{2} \cdot \exp\frac{x}{2} \,=\, \left(\exp\frac{x}{2}\right)^2 \,\geq\, 0.$$

(5). Für reelles x ist $\exp x \cdot \exp(-x) = 1$, so dass nach (4) ein Faktor ≥ 1 sein muss und der andere Faktor ≤ 1. Für $x > 0$ ist

$$\exp x \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \,=\, 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \ldots \,>\, 1,$$

da ja hinten nur positive Zahlen hinzuaddiert werden. (6). Für reelle $y > x$ ist $y - x > 0$ und daher nach (5) $\exp(y - x) > 1$, also

$$\exp y \,=\, \exp(y - x + x) \,=\, \exp(y - x) \cdot \exp x \,>\, \exp x.$$

□

Mit der Exponentialreihe definieren wir die *eulersche Zahl*.

Definition 12.10. Die reelle Zahl

$$e \,:=\, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

heißt *eulersche Zahl*.

Es ist also $e = \exp 1$. Diese Zahl hat den Wert

$$e \,=\, 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots \,\cong\, 2,71....$$

Bemerkung 12.11. Für die eulersche Zahl gilt

$$e \,=\, \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

so dass e auch als Grenzwert dieser Folge eingeführt werden kann. Die Konvergenz bei der Exponentialreihe ist aber deutlich schneller.

Statt $\exp x$ werden wir in Zukunft auch e^x schreiben. Diese Schreibweise ist für $x \in \mathbb{Z}$ mit der üblichen Potenzschreibweise im Sinne der vierten Vorlesung wegen Korollar 12.9 (3) verträglich. Für die Verträglichkeit mit der Wurzelschreibweise (bei rationalen Exponenten) siehe Bemerkung 12.17 und Aufgabe 12.19.

Satz 12.12. *Die reelle Exponentialfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\; x \longmapsto \exp x,$$

ist stetig und stiftet eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ *und* $\mathbb{R}_+$.

Beweis. Die Stetigkeit folgt aus Satz 12.2, da die Exponentialfunktion ja über eine Potenzreihe definiert ist. Nach Korollar 12.9 (4) liegt das Bild in $\mathbb{R}_+$ und ist nach dem Zwischenwertsatz ein Intervall. Die Unbeschränktheit des Bildes folgt aus Korollar 12.9 (3), woraus wegen Korollar 12.9 (2) folgt, dass auch beliebig kleine positive reelle Zahlen zum Bild gehören. Daher ist das Bild gleich $\mathbb{R}_+$. Die Injektivität ergibt sich aus Korollar 12.9 (6) in Verbindung mit Aufgabe 5.36. □

Logarithmen

Definition 12.13. Der *natürliche Logarithmus*

$$\ln\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \ln x,$$

ist als die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion definiert.

Satz 12.14. *Der natürliche Logarithmus*

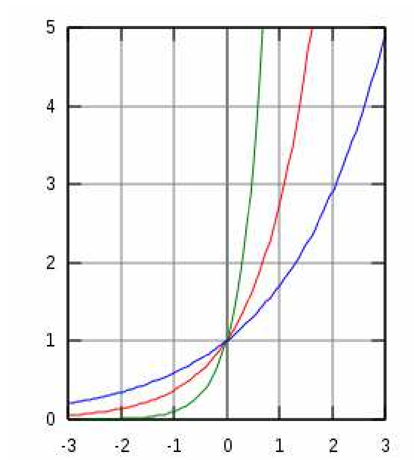
$$\ln\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \ln x,$$

ist eine stetige, streng wachsende Funktion, die eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}$ stiftet. Dabei gilt

$$\ln(x \cdot y) \;=\; \ln x + \ln y$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. Dies folgt aus Satz 12.12, Satz 11.7, Satz 12.8 und Korollar 12.9 (6). $\square$



Die Exponentialfunktionen für verschiedene Basen

Definition 12.15. Zu einer positiven reellen Zahl $b > 0$ definiert man die *Exponentialfunktion zur Basis b* als

$$b^x \;:=\; \exp(x \ln b).$$

Satz 12.16. *Es sei b eine positive reelle Zahl.Dann besitzt die Exponentialfunktion*

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto b^x,$$

folgende Eigenschaften.

1. *Es ist $b^{x+x'} = b^x \cdot b^{x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.*
2. *Es ist $b^{-x} \;=\; \frac{1}{b^x}$.*
3. *Für $b > 1$ und $x \;>\; 0$ ist $b^x \;>\; 1$.*

(4) *Für* $b < 1$ *und* $x > 0$ *ist* $b^x < 1$.
(5) *Für* $b > 1$ *ist* f *streng wachsend.*
(6) *Für* $b < 1$ *ist* f *streng fallend.*
(7) *Es ist* $(b^x)^{x'} = b^{x \cdot x'}$ *für alle* $x, x' \in \mathbb{R}$.
(8) *Für* $a \in \mathbb{R}_+$ *ist* $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.

Beweis. Siehe Aufgabe 12.9. $\square$

Bemerkung 12.17. Die Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$ zur Basis $a > 0$ kann man auch anders einführen. Für natürliche Zahlen $n \geq 0$ nimmt man das n-fache Produkt von a mit sich selbst, also a^n, als Definition. Für eine negative ganze Zahl x setzt man $a^x := (a^{-x})^{-1}$. Für eine positive rationale Zahl $x = r/s$ setzt man

$$a^x := \sqrt[s]{a^r},$$

wobei man natürlich die Unabhängigkeit von der gewählten Bruchdarstellung beweisen muss. Für eine negative rationale Zahl arbeitet man wieder mit Inversen. Für eine beliebige reelle Zahl x schließlich nimmt man eine Folge q_n von rationalen Zahlen, die gegen x konvergiert, und definiert

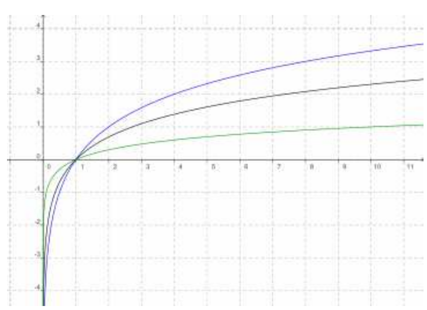
$$a^x := \lim_{n \to \infty} a^{q_n}.$$

Hierzu muss man zeigen, dass diese Limiten existieren und unabhängig von der gewählten rationalen Folge sind. Für den Übergang von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$ ist der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit entscheidend.

Definition 12.18. Zu einer positiven reellen Zahl $b > 0$, $b \neq 0$, wird der *Logarithmus zur Basis* b von $x \in \mathbb{R}_+$ durch

$$\log_b x := \frac{\ln x}{\ln b}$$

definiert.



Logarithmen zu verschiedenen Basen

Satz 12.19. *Die Logarithmen zur Basis* b *erfüllen die folgenden Rechenregeln.*

(1) *Es ist* $\log_b(b^x) = x$ *und* $b^{\log_b(y)} = y$, *das heißt der Logarithmus zur Basis* b *ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion zur Basis* b.

(2) *Es gilt* $\log_b(y \cdot z) = \log_b y + \log_b z$.
(3) *Es gilt* $\log_b y^u = u \cdot \log_b y$ *für* $u \in \mathbb{R}$.
(4) *Es gilt*

$$\log_a y = \log_a \left(b^{\log_b y}\right) = \log_b y \cdot \log_a b.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 12.27. □

Abbildungsverzeichnis