# 震旦學院課本

法文科

# Éléments d'Algèbre

# 代數學

n° 816

第二版

上海土山灣印書館印行

震旦學院課本

法文科

# Éléments d'Algèbre

# 代數學

nº 816

第二版

上海土山灣印書館印行

# 目 錄.

## 第一章。正負數。

## 第二章。正負數之致用。

## 第三章。代數運算之要義。



---

## 第四章。一次方程。

## 第五章。一次方程問題。一次函數。

---

第六章。二次方程及其問題。

## 第七章。級數對數利息。

# 附錄

# 序

近今代數譯自東西籍者。不下數十種。然高者入微茫。無徑術可循。不足爲行遠自邇之助。而淺者不粗舉大畧。僅列算式。代數之原理。了不涉及。又無以爲學者仰高鑽深之階梯。兩者交譏焉。此書爲法蘭西補蘭氏BOURLET原著。其理論詮解皆新異。與我國前所譯諸代數迥殊。蓋是書最近印行之期。距今不及三載。代數學之新著述也。書中所列演算法式簡明詳備。足爲初學從事實習之用。而其理論處。又復探源竟委。冰釋的破。亦可爲學者精研高等代數之基。故是書雖云初等。而第二章所論之定向線。第五第六兩章所論一次函數及二次函數之圖解。實開圖解幾何之門徑。爲近譯諸代數所無。淺近而不病譾陋。言理而不入艱深。可爲初學用。又可爲高等基。我國亦曷可少此書哉。翔肄業震旦應韓先生紹康干先生吾祿孔先生明道命。以課暇譯述此書。才力綿薄。黽勉從事。旣不能如譯東籍者之顚倒字句。卽可成文。又不能如譯小說者之任意出入。增損原文。昕夕握管。一載乃成。雖意義、之間。

未能盡當。然文義力求雅暢。一字一句。不敢掉以輕心。間有疑義。則質之干先生。譯成後。復由孔潘兩先生少加刪改。翔之此書。豈敢躋于近世述作之林。然由此書足以窺見歐洲代數最新之學說。最近之理論。亦何獨非精研算術者之一助乎。

宣統二年冬十月吳江陸翔序於震旦大學院之寄宿舍

一千九百二十八年再印。

# 初等代數學

## 第一章。正負數。

### 第一節。發凡。

**1. 代數之宗旨，** 因數學之算法而廣其途術。起簡例以御運算之方。立公式以表同模問題之答數。此代數之宗旨也。求達此宗旨。則有元字記號之用。

**2. 元字之運用。** 元字者。用以代表數目也。

數學取 $4, 5, \frac{2}{3}$ 等數目而理論之。代數則取代表巳知數若未知數之 $a, b, c, \ldots x, y \ldots\ldots$ 等元字而理論之。演元字以推答數。其義最爲概括。葢元字初無定値。則任以何數代之。答數固當無乎不應

**3. 記號。** 代數用數學之記號。亦用其他諸記號。此諸記號。當定其界說於後。今先釋數學記號。

### 4. 演算記號。

$+$ 者加法號。讀曰加。

$-$ 者減法號，讀曰減。

$\times$ 者乘法號。讀曰被乘於。若用元字表數目。每以一點代 $\times$。或連書兩元字不間以記號。亦表此兩元字相乘也。

如 $a\times b$, $a \cdot b$, $a\, b$ 三者。均表 $a$ 被乘於 $b$ 之積數也。

者除法號。讀曰被除於。命分之一畫。代數中亦爲除號之用。

如 $\frac{a}{b}$, $a:b$ 兩者。均表 $a$ 被除於 $b$。然用一者爲多。

乘方者。相等諸生數之積數。以指數表此積數中凡含生數若干倍。乘方之寫法。先書此生數一次。乃加指數於生數右上方。

例如 $4^3$ 所以表 $4\times4\times4$; $a^4$ 所以表 $aaaa$; $a^m$ 所以表此積數共含 $m$ 次等 $a$ 之生數。謂之曰 $m$ 次 $a$ 之乘方。

$\sqrt{\ }$ 者開平方根號。

$\sqrt[3]{\ }$ 者開立方根號。

廣言之。$\sqrt[m]{\phantom{a}}$為開 $m$ 次根號。故 $\sqrt[m]{a}$ 者。言有一數。其乘方至 $m$ 次。乃等於 $a$。

如 $\sqrt{4}$ 所以表 4 之平方根。$\sqrt[4]{81}$ 所以表 81 之四次根。謂是數之乘方。至於四次。乃等於 81（即 3）。

## 5. 比較記號。

$=$ 者等號。讀曰等於。

$\neq$ 者不等號。讀曰異於。

$>$ 讀曰大於。

$<$ 讀曰小於。

如 $4+3=7$, $4+3\neq 6$, $3>2$, $2<3$.

四者讀曰 4+3 等於 7, 4+3 異於 6, 3 大於 2, 2 小於 3.

等號與非等號。時亦併合而兼用之。故

$\geqq$ 指或大或等。

$\leqq$ 指或小或等。

如 $a\geqq b$ 言 $a$ 或大或等於 $b$.

## 6. 括弧。

置一幾何於 ( ), [ ], { } 等括弧之中。所以表是幾何合一不可分也。

故一算式為括弧所含。便作其推得之答數論。

例如 $4+3-5$, 表此式應即 4, 3, 5 諸數目而演算之。$(4+3-5)$ 則否。所以表是式演算後之結數也。

括弧之用。可取譬如下。設有

$$4+3\times5+2$$

及
$$(4+3)\times(5+2)$$

兩算式。此兩式絕不同。其一言加 3 與 5 之積數於 4. 復以 2 加之。其結數爲 21. 其二則言先爲 4, 3 之和。又爲 5, 2 之和。然後以兩和相乘。其得數爲 49. 故隅返之。則元字之算式如

$$(a+b+c)\ (d+f+g)$$

者謂以 $a+b+c$ 之和乘 $d+f+g$ 之和也。

**7. 問題。** 解決一問題者。因已知數與未知數之關係。以求未知數之等值也。

詮釋一問題者。以常語達未知數與已知數之關係也。

未知數之等值。名之曰答數或曰根。

**8. 運用元字之便益。** 運用元字。何以能概括諸問題也。此可取譬以明之。設有問題如下。今有火車速率。每點鐘 45 基羅邁當。問二點鐘有半。能行遠若干。依數學術可徑得此題之根。夫火

車以一點鐘行45基羅邁當。則當以二點半鐘行遠二倍有半。即 $45\times 2{,}5=112{,}5$ 即所求之根也。如徒易速率及時兩已知數之値。則可擬諸同模題。惟遵數學以推此同模諸題。須仍就題始終詳解。

代數則否。借元字以解一題。題解而同模者槪可應之矣。

設以 $v$ 代火車之速率。$t$ 代所行之時刻。夫以一點鐘久。車行 $v$ 遠。是 $t$ 點鐘久。必行 $v\times t$ 遠也。以代所行之路。即得 (1) $x=vt.$ 假令有題與此同模。便可於此等式中。以已知數目代 $v,\ t,$ 即得答數。譬有火車以50基羅邁當速率行3點鐘久。求行遠。則於 (1) 式中以50代 $v$。以3代 $t$。得

$$x=50\times 3=150\text{ 基羅邁當}$$

即行遠數也。

**9. 公式。** 凡等式有若集已知元字。以表未知數値。上所舉 (1) 式之屬。謂之公式。

故曰公式者。以簡要之格。明已知數運算之步驟以求未知數之等値也。凡公式槪同模諸題之解法。

例如有題已知速率及時求行遠。總可以公式

(1) 推得之。又如求簡利公式亦數學所常用、

$$即\ I = a \cdot \frac{t}{100} \cdot N.$$

I 爲利。$a$ 爲本。$t$ 爲息。N 爲年數。

---

## 第二節。界說。

**10. 凡幾何均含相反兩方向。** 幾何含相反兩方向者。無往不遇其例焉。例如下。

**11. 贏虧。** 銀行家及商家較算欵項出入。不外兩義。曰贏。曰虧。贏虧二者。即欵項所含相反兩方向也。

**12. 熱度。** 寒暑表者。衡熱度之器也。熱度亦含相反兩方向。蓋寒暑表玻璃直管中之流質。可升可降。此直管上刻分百度。0 度者。即置此表於融氷中直管流質所據之定點也。如是表緊傍熱度高於融氷之物。則管中流質之定點。必高於 0 度。若緊傍熱度下於融氷之物。則管中流質之定點。必低於 0 度。故高於 0 低於 0 兩者。即熱度所含相反兩方向也。

**13. 距離。** 今有一物行走於一直線上。設是物自直線上一點 A 起行。其所行之路。可分兩方向。或自 A 向左。或自 A 向右。故向左向右。即 A 點距離所含相反兩方向也。

**14. 數學之數目不足以盡衡較幾何之用。** 代數之宗旨。在立公式(見第 9 欵)以表同模問題之答數。誠如前所述矣。但又有難者。使公式所含未知數之值。爲一幾何之含相反兩方向者。則不特當知此數之值。且當知此數之定向。如徒用數學之數目以衡之。則公式所含者。僅未知數之值。而其定向無以知之矣。因此不得不創一新數目。不特表幾何之值。且表是幾何之定向。

**15.** 使公式而誠概括也。當應用不窮。然觀於數學數目。有以知其不然矣。

設(見第 11 欵)一商人

(一)有入欵兩宗。一爲 A 佛郎。一爲 B 佛郎。總額爲 A + B 佛郎之入欵。

(二)若支入者爲 A 佛郎。而支出者爲 B 佛郎。使支入之數。大於支出。則總額爲 A − B 佛郎之

入欵。使支出之數。大於支入。則總額爲 $B-A$ 佛郎之出欵。

(三)若兩欵均爲支出。則總額爲 $A+B$ 佛郎之出欵。故設以 $X$ 代總額。得三式如下。

$$X=A+B,$$

$$X=A-B,$$

$$X=B-A.$$

不特此三等式不表總額之爲贏爲負。且亦不可定爲一式也。自代數之新數目創。答數均有定向。公式乃定於一。應用以之不窮(見第 28 欵)。此新數目。當定其界說於後。

**16.** 由前所論。知數目之前。當加一記號。公式乃能應用不窮。蓋數目表幾何之值。而記號且表其定向也。表定向之記號有二。曰正曰負。正即用加法記號十.負即用減法記號一.恐兩者相混。故加減號之十一.謂之演算記號。正負號之十一.謂之表別記號。

**17.** **正負數。** 除零數 0 外。凡數目之加一正號者。均謂之正數。除零數 0 外。凡數目之加一

負號者。均謂之負數。

集正負數。系以無記號之零數。合成一數。是數謂之代數數目。

如 $+4$ 讀曰加四,爲正數。$-25$ 讀曰減廿五,爲負數。

正負數用以衡含相反兩方向之幾何。

如商人支入 215 佛郎。商人即多此 215 佛郎。故爲 $+215$. 設支出 128 佛郎。商人即少 128 佛郎。故爲 $-128$.

**18.** 用元字以表代數之數目。倘慮混淆。故以後數章。用小寫元字以表代數數目。用大寫元字以表數學數目。

**19.** 有當留意者。表正負數之 $+-$ 號。絕無演之意義。蓋正負號與數目。合爲一體也。欲表是二者爲一體。可以數目及記號置之括弧內。

**20.** **絕對值。** 凡代數數目。刪去記號後。所存之值。謂之代數數目之絕對值。表一數之絕對值。可置此數於二竪畫之間。如 $|a|$ 即 $a$ 之絕對值。 $|+4|=4,\quad |-3|=3,\quad |0|=0.$

**21. 定例。** 凡正數均等於其絕對值。

例如 $+5=5,\qquad +\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$

此定例無自相矛盾之處。且因是知正數與數學數目無異。而代數新創者。只有一數。即負數是也。

**22. 相等。** 兩數目之絕對值與記號均同。謂之兩數相等。反是謂之不相等。

以 $=$ 表相等。以 $\neq$ 表不相等。

**23.** 兩數之絕對值同而記號異。謂之兩數相反。

例如 $+3$ 及 $-3,\qquad +\frac{1}{2}$ 及 $-\frac{1}{2}.$

---

## 第三節。加減法。

### A. 加法。

**24. 兩數之和。** 已知兩代數數目。謂之是兩數之和者。即用下法推得之數也。

(一) 若兩數為同號。則用數學法。推得是兩數絕對值之和。而兩數之公記號。即為推得數之記號。

(二) 若兩數為異號。則用數學法。推得是兩數之較。而兩數中含最大絕對值者之記號。即為推得數之記號。若兩數適相反。則其和為0.

(三) 若兩數中有一數為0.則兩數之和。即等於他一數。

表兩數之和。即用記號+。而另置數目及其記號於括弧中。以避淆惑。

例如

$$(+3)+(+2)=+5,$$
$$(+3)+(-2)=+1,$$
$$(-3)+(+2)=-1,$$
$$(-3)+(-2)=-5,$$
$$(-3)+\quad 0\quad =-3.$$

**25. 諸數之和。** 已知諸數求其和。

(一) 若諸數為同號。則用數學法。推得此諸數絕對值之和。而諸數之公記號。即為推得數之記號。

(二) 若諸數為異號。則先求諸正數之和。再求諸負數之和。然後按第二十四欵定例。將正負兩和相加。即得答數。

例如

$$(+4)+(+5)+(+2)=+11,$$
$$(-4)+(-5)+(-2)=-11,$$

$$(+4)+(-5)+(-2)+(+3)=(+7)+(-7)=0,$$

$$(+15)+(-10)+(+2)+(-3)+(-8)$$
$$=(+17)+(-21)=-4.$$

**26. 簡寫法.** 如所加諸數。不為元字。可將諸數連續書之。

如應書 $(-4)+(-5)+(-2)$

可簡書之。如下式 $-4-5-2.$

又 $(+4)+(-5)+(-2)+(+3)=+4-5-2+3,$

$$(+15)+(-10)+(+2)+(-3)+(-8)$$
$$=+15-10+2-3-8.$$

如第一數為正數。并可刪去其記號＋。蓋此數等於其絕對值也。故上式可書作

$$4-5-2+3, \quad 15-10+2-3-8.$$

**27. 要按。** 因上所述簡寫法。知即此一式。可含兩義。一為數學意義。一為代數意義。并可知此兩意義之不相背。試取下式

$$15-10+2-3$$

論之。如以數學論之。則此式所表者。為從 15 減去 10。得答數後。加以 2。再得答數後。減去 3。

如以代數論之。則此式所表者。爲 $+15, -10, +2, -3$ 四數之和。

任取何法以推此式。其答數恒同。蓋求之以數學。或求之以代數。是式總等於正數絕對値之和減負數絕對値之和所餘之數也。即 $17-13=4$.

**28. 收入及費用。** 設一人收進若干欵。又用去若干欵。如欲求其總結。當先將收進諸欵合爲一宗。得進欵之總結。再將用去諸欵合爲一宗。得出欵之總結。然後將進出欵之兩總結相減。使收進者大於用去之欵。則兩總結之較爲嬴。使用去者大於收入之欵。則兩總結之較爲虧。今如以記號 $+$ 表收進諸欵。以記號 $-$ 表用去諸欵。則以上之推算。於代數術中。即爲求諸數和之問題。而答數記號。即表總結之爲嬴爲虧也。

故求進出欵之相抵總數。可先將正號 $+$ 置之收入諸欵前。以負號 $-$ 置之用去諸欵前。然後按代數例推諸數之和。推得之和。即所求之總數也。

**問題一。** 一商人賣呢一疋。得佛郎125. 又一疋得佛郎 242. 後買呢一疋。用佛郎 175. 售出時

得佛郎 218. 再買呢一疋。用佛郎 98.

其進出欵總數。爲

$$+125+242-175+218-98$$

$$=+585-273=+312,$$

即商人赢佛郎 312.

**問題二。** 設一人支出佛郎 25,35；收進 17,40. 又支出 115；收進 93,25；再支出 8,70.

其出入欵總數。爲

$$-25{,}35+17{,}40-115+93{,}25-8{,}70$$

$$=-149{,}05+110{,}65=-38{,}40.$$

答數爲負。故是人虧佛郎 38,40.

按第 15 欵曾論代數公式概括。今觀於此而益信。蓋上所述二問題。設以數學解之。則二題各有理解。各有公式。不相通假。今馭以代數。用一公式而已足。

**29. 距離。** 設一人旅行於巴黎地頌二城之間。每次自巴黎向地頌行。與巴黎相去之距離日增。設是人忽反前向。每次自地頌向巴黎行。與巴黎去之距離日縮。前所行之路。應視爲正。後所

行之路。當視爲負。蓋按前定方向進行不退。每次路程之和。即爲旅行者與巴黎相去之距離。今忽反向。則當於向前路程中。減去退後路程。乃能得旅行者與巴黎相去之距離。

**30. 問題。** 設一人旅行。自巴黎達地頌。距離爲 315 基羅邁當。自地頌反向巴黎至瓊嚴。距離爲 169 基羅邁當。後復向地頌。行 31 基羅邁當。至雷城而稅駕焉。問旅行者與巴黎相去之距離。

按題意。自巴黎向地頌所行之路。應表以正號(+);反向所行之路。應表以負號(−). 故所求距離。卽每節距離之代數和。可演其式如下。

$$(+315)+(-169)+(+31)=315-169+31$$

$$=177 \text{ 基羅邁當。}$$

**31. 定理。** 凡和數所含各項。可任意易其次序。

(證) 第 25 欵之界說。卽此定理所由來。蓋界說未言諸數之和。各項當有定次也。

例如 $4-5+3-2=-5-2+4+3$

$$=4-2-5+3.$$

**32. 定理。** 凡多項和數。可分取若干項求其和。而以求得之和。代此若干項。

(證) 此定理可以收進及費用兩義證之。

設保祿於第一人付83佛郎。而收進之欵爲52佛郎。於第二人收進42佛郎。及37佛郎。而付彼之欵爲115佛郎。於第三人付29佛郎。而收進之欵爲95佛郎。

保祿之出入總數爲

$$-83+52+42+37-115-29+95.$$

然求此總數。尙有他法。分求保祿與每一人出入欵之答數。後將三答數相加。卽得總數。夫保祿

與第一人之出入欵。其答數爲

$$-83+52=-31$$

與第二人之出入欵。其答數爲

$$+42+37-115=-36.$$

與第三人之出入欵其答數爲

$$-29+95=+66.$$

故可言保祿付31佛郎於第一人。付36佛郎於第二人。收進66佛郎於第三人。其總結答數爲

$-31-36+66$,用此三項。以推總數。與用上式。

$$-83+52,\quad +42+37-115 \text{ 及 } -29+95$$

各項以推總數。其答數恆同。

故知定理所言爲不謬。如用括弧(見第6欵)。上式可書爲

$$\begin{aligned} & -83+52+42+37-115-29+95 \\ = & (-83+52)+(42+37-115)+(-29+95) \\ = & -31-36+66. \end{aligned}$$

## B. 減法

**33. 兩數之較。** 從一數$a$減去他數$b$.卽求一第三數。與$b$相加。其和仍等於$a$也。

試取 $(-7)+(+8)=+1.$

譬之。$+8$卽$+1$及$-7$之較。蓋$+8$與$-7$相加。其和仍等於$+1$也。

**34.** 減法記號爲$-$,與數學無異。恐與負號相混。故置數目及其正負號於括弧中以別之。

例如 $(+1)-(-7)=+8.$

**35. 例。** 求減一數。加此數之反。

(證) 設$(+4)-(-5)$,例言$(+4)-(-5)=(+4)+(+5)$.依第33欵界說。從$+4$減$-5$,卽

求一第三數。與 $-5$ 相加。和仍等於 $+4$. 故以上等式。若為合理。應得 $(-5)+(+4)+(+5)=(+4)$.

但按第24欵界說。兩數相反。其和為零。

故 $(-5)+(+4)+(+5)=(+4)+(-5)+(+5)=(+4)+0=(+4)$. 合第33欵界說。故 $(+4)-(-5)=(+4)+(+5)$ 為合理。

**36. 代數和。** 凡代數式。雜含加減號者。謂之代數和。

例如 $(+4)+(-5)-(-3)+(-1)-(+7)$. 是式表 $+4$ 應與 $-5$ 相加。得答數後。減去 $-3$; 再得答數後。加 $-1$; 復從末次答數。減去 $+7$.

但依前例。減 $-3$ 者。卽加 $+3$, 減 $+7$ 者卽加 $-7$.

故上式可演為

$$+4-5+3-1-7.$$

此卽諸數和之尋常式。

故可解之曰。代數和者。卽諸數和之尋常式。特各數之前有減號 $(-)$ 者。應易以此數之反。故代數和之性質。與諸數和之尋常式。無以異也。

**37. 推論。** 設有代數和

$$a+b-c+d-e,$$

式中 $a, b, c, d, e$ 等元字。或表正數。或表負數。如變此式爲諸數和之尋常式。須將 $-c$ 及 $-e$ 兩項各代以反數。

因是不得不創一例。例曰。置記號 (−) 於一數前。卽以表此數之反。

如 $-a$ 表 $a$ 之反數

$$-(-5)=+5, \qquad -(+3)=-3.$$

因此定例。代數和 $a+b-c+d-e$ 可視爲 $a, b, -c, d, -e$ 諸數和之尋常式。$a, b, -c, d, -e$ 等。謂之項。

**38. 定理。** 和數所含各項。均易以反數。則此新得之和。與前和數適相反。

(證) 各項均易以反數。則和數所含各項。向之正者。悉變爲負。向之負者。悉變爲正。此新得之和與則和數。同其絕對値而記號相反。故與前和數適相反。

設有和數

$$5-4+3-2=+2$$

使所含各項。均易以反數。則得與爲相反數也。

$$-5+4-3+2=+2.$$

如以元字論。則

$$-(a+b-c+d)=-a-b+c-d,$$

蓋 $-(a-b-c+d)$ 所以表 $(a+b-c+d)$ 之反數也。(見第6欵)。

**39.** **定理。** 加減一代數和。可將和數所含各項加減之。

(證)　定理言

$$a-b+(c-d+e)=a-b+c-d+e.$$

按第32欵定理。可分取等號下端數項 $c-d+e$. 易其推得之和 $(c-d+e)$. 卽得 $a-b+(c-d+e)$. 故定理所言爲不謬也。

定理又言

$$a-b-(c-d+e)=a-b-c+d-e.$$

夫減 $c-d+e$ 者。當加此諸數之反。而按第38欵。此反數卽 $-c+d-e$.

故 $a-b-(c-d+e)=a-b-c+d-e.$

**40.** 依上所述。可得加括弧及去括弧之式如下。

$$a+b+(c-d)+(e-f+g)=a+b+c-d+e-f+g;$$

$$(a-b+c)-(d+f)-(g-h)=a-b+c-d-f-g+h;$$

$$a-b+c-d-f=a-(b-c+d)-f;$$

$$a-b+c-d-f=a-b+c-(d+f);$$

$$a-b+c-d-f=a+c-(b+d+f);$$

$$a-b+c-d-f=(a-b)+(c-d)-f.$$

觀右列各式。推得兩例焉。

（例一）可於和數內。加一括弧。或去一括弧。其前有加號者。弧內各數之記號。無所更變。

（例二）凡加一括弧。或去一括弧。其前有減號者。弧內各數之記號。均當更變。

---

## 第四節。乘除法。

### A. 乘　法。

**41. 兩數之積。** 凡數。其絕對値等於他兩數絕對値之積。而其記號之正負。從兩數記號之同異。此數謂之兩數之積。

若兩數中其一爲0,則其積亦爲0.

因是界說。推得兩數乘積之記號定例。

(例) $\begin{cases} + \text{被乘於} + \text{爲} + \\ + \text{被乘於} - \text{爲} - \\ - \text{被乘於} + \text{爲} - \\ - \text{被乘於} - \text{爲} + \end{cases}$

如

| | |
|---|---|
| $(+3)\cdot(+4)=+12,$ | $(-3)\cdot(-4)=+12.$ |
| $(+3)\cdot(-4)=-12,$ | $(-3)\cdot 0=0,$ |
| $(-3)\cdot(+4)=-12,$ | $0\cdot(-4)=0$ |

**42. 諸數之積。** 謂之諸數之積者。卽用下法推得之數也。

(一) 按數學例。求諸數絕對値之積。

(二) 若諸數中。負數之次數爲零。或爲偶。則置一正號於積數前。

(三) 若諸數中。負數之次數爲奇。則置一負號於積數前。

若諸數中有一爲0,其積亦爲0.

試舉其例如下。

$$\left(+3\right)\cdot\left(+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+5\right)\left(+\frac{1}{7}\right)=+\frac{15}{14},$$

$$\left(+3\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-5\right)\left(+\frac{1}{7}\right)=+\frac{15}{14},$$

$$\left(-3\right)\left(+\frac{1}{2}\right)\left(+5\right)\left(+\frac{1}{7}\right)=-\frac{15}{14},$$

$$\left(-3\right)\left(+\frac{1}{2}\right)\left(-5\right)\left(-\frac{1}{7}\right)=-\frac{15}{14},$$

$$(+3)\cdot 0\cdot(-5)=0,$$

$$0\cdot\left(-4\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=0.$$

**43. 定理。** 任變諸生數之次序。積數無所增損。

(證) 求諸生數之積。不外求其絕對値之積。及定其記號兩者而已。但按數學。諸生數連乘。可任易其次序。故任變諸生數之次序。積數之絕對値。無所增損。至積數之記號。則係乎負生數次數之奇偶。今易諸生數之次序。次數之奇偶。固無所增損。故積數之記號。亦無所增損。絕對値與記號無所更變。故積數無所增損也。

**44. 定理。** 凡諸生數連乘。可分取一積數。代相當諸生數。

設有諸數連乘式

$$(-7)(-4)(+3)(-5)\left(+\frac{1}{3}\right)(-12).$$

但　$$(-4)(+3)(-5)=+60.$$

故　$$(-7)(-4)(-3)(-5)\left(+\frac{1}{3}\right)(-12)$$

$$=(-7)(+60)\left(+\frac{1}{3}\right)(-12).$$

卽以積數代相當諸生數 $(-4)(+3)(-5)$ 也。

**45.　乘方。** 凡積數含 $m$ 次生數而各生數均等於一數 $a$. 此積數謂之 $a$ 之 $m$ 次乘方(見第4欵)。

$m$ 謂之乘方之指數。

例如 $a^4=a\cdot a\cdot a\cdot a$ 讀曰 $a$ 四方又由4.

$(-3)^5=(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)=-243.$

**46.** 由第42欵界說得:

(一)　正數之乘方。仍爲正數。例如 $(+3)^3=+27$

(二)　負數乘方之正負。隨指數之奇偶而定。使指數爲偶。則乘方爲正數。使指數爲奇。則乘方爲負數。

例如　$(-3)^4=+81$　(有四個負生數),

　　　$(-3)^3=-27$　(有三個負生數).

**47. 定理。** 同數諸乘方連乘。其積爲此數之乘方。而各生數指數之和。爲此乘方之指數。

（證） 設有連乘積 $a^4 \cdot a^3 \cdot a^5$ 此卽以四次 $a$ 乘三次 $a$. 又乘五次 $a$ 之積。故上式可書作

$$a^4 \cdot a^3 \cdot a^5 = \overset{\text{四次}}{aaaa} \cdot \overset{\text{三次}}{aaa} \cdot \overset{\text{五次}}{aaaaa}$$

共得 $4+3+5=12$ 次 $a$, 即 $a^{12}$.

$$a^4 \cdot a^3 \cdot a^5 = a^{12}.$$

例如 $$(+3)^2 \cdot (+3)^4 \cdot (+3)^7 = (+3)^{13};$$

$$(-2)^2 \cdot (-2)^5 = (-2)^7.$$

（案） 無指數之數。其指數可視爲一。

故 $a^1 = a$.

而 $$a^3 \cdot a^5 \cdot a = a^9,$$

蓋各生數指數之和。爲

$$3+5+1=9.$$

**48. 定理。** 以一數乘多項式之和。卽求以此數乘各項所得乘積之和。

（證） 此定理可設譬以證之。但定理言多項式故當憶項之界說。卽元字含加減號謂之項也（見

第19欵)。設以 $m$ 及 $(-m)$ 乘多項式 $(a-b+c-d)$.

定理言:

$$(a-b+c-d)\,m = am - bm + cm - dm.$$

$$(a-b+c-d)(-m) = a(-m) - b(-m) + c(-m) - d(-m)$$

$$= -am + bm - cm + dm.$$

試設譬以證之

(譬一)設以3乘 $2-3+5$. 按定理

$$(2-3+5)(+3) = 2(+3) - 3(+3) + 5(+3)$$

$$= 6 - 9 + 15 = +12.$$

今求括號內諸數之和。得

$$2-3+5 = +4,$$

$$(+4)\cdot(+3) = +12.$$

其答數與依定理以求者無異。故知定理所言爲不謬。

(譬二)設以 $(-3)$ 乘 $+3-(-5)+(-2)$。按定理

$$[+3-(-5)+(-2)]\,(-3)$$

$$= +3(-3) - (-5)(-3) + (-2)(-3).$$

若先求括號內諸數之和。得

$$= -9 - (+15) + (+6) = -9 - 15 + 6 = -18,$$

$$(+6)(-3)=-18.$$

其答數與依定理以求者無異。故知定理所言不謬。

**49. 定理。** 兩和數相乘之積。等於以一和數各項乘他和數各項所得積數之和。

（證） 設兩和數相乘。$(a-b+c)(d-f)$.

按定理。應得

$$(a-b+c)(d-f)$$

$$=ad-bd+cd+a(-f)-b(-f)+c(-f)$$

$$=ad-bd+cd-af+bf-cf.$$

欲證此之合理與否。可設譬以明之。

（譬一）設以 $(12-7)$ 乘 $(4-5+3)$. 按定理

$$(4-5+3)(12-7)$$

$$=4\cdot 12-5\cdot 12+3\cdot 12+4(-7)-5(-7)+3(-7)$$

$$=48-60+36-28+35-21$$

$$=119-109=+10.$$

若先求兩括號內諸數之和。得

$$4-5+3=+2,\quad 12-7=+5,$$

$$(+2)(+5)=+10.$$

其答數與依定理以求者無異。故知定理所言為不謬。

（譬二）設以$[-5-(-3)]$乘$[+12+(-5)-(-2)]$.

依定理

$$[+12+(-5)-(-2)][-5-(-3)]$$
$$=+12(-5)+(-5)(-5)-(-2)(-5)$$
$$-12(-3)-(-5)(-3)+(-2)(-3)$$
$$=-60+25-10+36-15+6=-18.$$

若先求兩括號內諸數之和。得

$$+12+(-5)-(-2)=12-5+2=+9.$$
$$-5-(-3)=-5+3=-2,$$
$$(+9)(-2)=-18.$$

其答數與依定理以求者無異。故知定理所言為不謬。

**50. 推解一。** 兩數和之方。等於兩項方之和。加二倍兩項之積。

（證）按第49欵定理。得

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=aa+ba+ab+bb$$

因 $aa=a^2,\ bb=b^2,\ ba=ab,$

故 $$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab.$$

蓋 $ab+ab$ 等於兩次 $ab$ 卽 $2ab$.

**51. 推解二。** 兩數較之方。等於兩項方之和。減二倍兩項之積。

(證) 依第49欵定理。得

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=aa+a(-b)-ba-b(-b)$$

$$=a^2-ab-ba+b^2.$$

故 $$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab.$$

蓋 $-ab-ba=-ab-ab$ 等於兩次 $(-ab)$ 卽 $-2ab$.

**52. 推解三。** 兩數和與兩數較之積。等於兩項方之較。

(證) 按第49欵定理。得

$$(a+b)(a-b)=aa+ba+a(-b)+b(-b)$$

$$=a^2+ba-ab-b^2.$$

但 $$ab-ab=0,$$

故 $$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

譬 $$(4+3)^2=4^2+3^2+2\cdot4\cdot3,$$

$$(4-3)^2=4^2+3^2-2\cdot4\cdot3,$$

$$(4+3)(4-3)=4^2-3$$

## B. 除法

**53. 兩數之商。** 謂 $a$ 與 $b$ 兩數之商。即第三數受乘於 $b$. 其積仍等於 $a$. $a$ 謂之實數。$b$ 謂之法數。

代數大率用命分之一畫表兩數之商。

如 $\frac{a}{b}$ 即表 $a$ 受除於 $b$ 之商。

又可謂 $\frac{a}{b}$ 爲命分。蓋 $a$ 爲分子。而 $b$ 爲分母也。

**54. 例。** 兩數之商。以兩數絕對値之商爲絕對値。而其記號之爲正爲負。則隨是兩數記號之同異。

商數之記號。亦可依第四十一欵求之。

分母應異於零。若分母爲零。則此命分絕無意義。

除法記號之例。可舉之如下。

$$\frac{+3}{+4}=+\frac{3}{4}\qquad \frac{-3}{+4}=-\frac{3}{4}\qquad \frac{-5}{-2}=+\frac{5}{2}$$

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(+\frac{3}{5}\right)}=-\frac{5}{6}\qquad \frac{\left(+\frac{3}{4}\right)}{-5}=-\frac{3}{20}$$

凡此記號定例。均依乘法及除去界說而推得者。故爲合理也。

**55. 命分。** 代數命分。其性質與數學命分同。今將其性質略言如下。

**56.** 以同數乘分子及分母。命分之值不變。

(證) 以同數乘分子及分母。命分之絕對值不變。其記號亦不變。故命分之值不變。

例如

$$-\frac{4}{7}=\frac{(-4)\cdot(-2)}{7(-2)}=\frac{8}{-14}\ ,\quad \frac{3}{5}=\frac{3(-5)}{5(-5)}=\frac{-15}{-25}$$

變分子及分母之記號。命分之值不變。

(證) 變分子及分母之記號。卽以 $-1$ 乘分子及分母。故命分之值不變。

例如 $\quad \frac{4}{5}=\frac{-4}{-5}\ ,\quad \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{2}=\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)}{-2}.$

**57.** 依右述性質。欲數命分變爲同分母。可將各命分乘以他命分諸分母之積。

(譬一) 設有三命分

$$\frac{a}{b} \qquad \frac{c}{d} \qquad \frac{e}{f},$$

求其公分母。依第56欵。得

$$\frac{a}{b}=\frac{adf}{bdf} \qquad \frac{c}{d}=\frac{cbf}{dbf}, \qquad \frac{e}{f}=\frac{ebd}{fbd}.$$

卽得三命分之公分母 $bdf$.

(譬二)設有三命分

$$\frac{-4}{3} \qquad \frac{5}{-6} \qquad \frac{7}{8},$$

求其公分母。3, 6, 8 之最小公倍數爲 24.

依第56欵。得

$$\frac{-4}{3}=\frac{-4\cdot 8}{3\cdot 8}=\frac{-32}{24} \qquad \frac{5}{-6}=\frac{5(-4)}{-6(-4)}=\frac{-20}{24},$$

$$\frac{7}{8}=\frac{7\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{21}{24}$$

**58.** 求數命分之和。可先求其公分母。然後求諸分子之代數和。公分母卽爲答數之分母。

此例由第48欵定理而推得者。欲證此例之合理。可取等式

$$\frac{a}{p}+\frac{b}{p}-\frac{c}{p}+\frac{d}{p}=\frac{a+b-c+d}{p}$$

證其合理。夫上設等式。若爲合理。則等號上端諸命分。受乘於$p$，應得$a+b-c+d$，蓋等號下端受乘於$p$，又得$a+b-c+d$. 但按第48欵。

$$\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{p}-\frac{c}{p}+\frac{d}{p}\right)p=\frac{a}{p}p+\frac{b}{p}p-\frac{c}{p}p+\frac{d}{p}p$$
$$=a+b-c+d.$$

故此等式爲合理。卽此例爲合理也。

(譬一) 試求

$$\frac{4}{3}-\frac{5}{6}+\frac{7}{8}-\frac{1}{12}$$

之和。求公分母。上式變爲

$$\frac{32}{24}-\frac{20}{24}+\frac{21}{24}-\frac{2}{24}=\frac{32-20+21-2}{24}=\frac{31}{24}.$$

(譬二) 試求

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}.$$

之和。依第52欵。得

$$\frac{1}{a+b}=\frac{a-b}{(a+b)(a-b)}=\frac{a-b}{a^2-b^2},$$

$$\frac{1}{a-b}=\frac{a+b}{(a+b)(a-b)}=\frac{a+b}{a^2-b^2}.$$

故 $$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}=\frac{a-b+a+b}{a^2-b^2}=\frac{a+a}{a^2-b^2}.$$

蓋 $b-b=0$. 且 $a+a$ 即2倍 $a$, 或 $a+a=2a$. 故上式

又爲
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}=\frac{2a}{a^2-b^2}.$$

**59.** 數命分連乘。其積等於一命分。以諸分子之積。爲其分子。而以諸分母之積。爲其分母。

例如
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{f}{g}=\frac{acf}{bdg}.$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(+\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{7}\right)=\frac{(-1)\ (+2)\ (-5)}{2\cdot3\cdot7}=+\frac{5}{21}$$

如欲取一命分而乘方之。可將其分子及分母各乘方之。

例如
$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}.$$

$$\left(\frac{-3}{5}\right)^3=\frac{(-3)^3}{5^3}=\frac{-27}{125}$$

**60.** 求兩命分之商。可以倒置之法數命分。乘實數命分。

例如
$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

$$\frac{\left(-\frac{4}{3}\right)}{\left(\frac{5}{6}\right)}=-\frac{4\cdot6}{3\cdot5}=-\frac{24}{15}.$$

**61. 定理。** 同數兩乘方之商。卽爲此數之乘方。而以分子指數與分母指數之較。爲其指數。

（證）設以 $a^4$ 除 $a^7$. 按乘方定理（見第47欵），$a^7 = a^4 \times a^3$,

故
$$\frac{a^7}{a^4} = \frac{a^4 \cdot a^3}{a^4} = a^3.$$

又
$$\frac{a^8}{a^3} = a^{8-3} = a^5,$$

$$\frac{4^4}{4^3} = 4^{4-3} = 4^1 = 4.$$

**62. 零指數。** 若同數兩乘方之指數相等。則其商爲1。

如
$$\frac{5^4}{5^4} = 1.$$

此命分。分子與分母等。故其商爲 1。但依第61欵定理。應得等式

$$\frac{5^4}{5^4} = 5^{4-4} = 5^0.$$

故可言："一數乘方之指數爲零。則此數等於1."

推廣言之。設 $a$ 爲任一數。$\frac{a^p}{a^p} = 1$. 而

$$1 = \frac{a^p}{a^p} = a^{p-p} = a^0.$$

仍得等式

$$a^0 = 1;$$

因此推得定例如下:

(例) 凡數以零爲乘方指數。總等於1。

例如 $$a^0 = b^0 = 5^0 = 3^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1.$$

**63. 代數式。**正負數演算之方法。今於上數欵定其例矣。由此知代數之運算。與數學之運算無異。惟有一事當表明者。則負數之乘方根。尙未確定爲何物也。故凡確定之乘方根。僅爲正數。蓋惟正數而乘方根爲有意義。

謂之代數式者。卽一式用以表代數數目。或數元字。當依演算定例。惟其等値也。

凡代數式。若命分之分母。不等於零。乘方根之數。不爲負數。均爲有意義之代數式。

如 $(a+b)c$, $\dfrac{a^2-b^2}{ab}$, $\dfrac{4a^3+5b^4+3c^2}{a^2+b^2}$,

$$\sqrt{a^2+b^2}, \qquad \frac{25}{3}x^2y - \frac{4}{5}xy^3 + y^4,$$

均爲代數式。

**64. 代數式之數值。** 以數目代式中元字。求得之值。謂之代數式之數值。

設有代數式

$$(a+b)c.$$

若 $a=3,\quad b=5,\quad c=2,$

則代數式之數值。爲

$$(3+5)\cdot 2=16.$$

設有代數式

$$\frac{4a^3+5b^4+3c^2}{a^2+b^2}$$

若 $a=-2,\quad b=1,\quad c=2,$

則此式之數值。爲

$$\frac{4(-2)^3+5\cdot 1^4+3\cdot 2^2}{(-2)^2+1^2}=\frac{-32+5+12}{4+1}=\frac{-15}{5}=-3.$$

凡公式等號下端。皆爲代數式。而數值之借公式以求得者。卽以數目代式中元字所推得之代數式數值也。

例如圓面積之公式。爲

$$S=\pi R^2.\quad 而\quad \pi=3{,}1416.$$

故 $\pi R^2=3{,}1416\ R^2$ 成一代數式。

設圜之半徑爲3邁當。求其面積。則當以3代式中元字R.求此代數式之數値。即

$$S = 3,1416.9 = 28^{mq}, 2744.$$

又如直角三角形。弦爲$a$.直角傍之兩邊爲$b$與$c$.得公式

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

$\sqrt{b^2 + c^2}$ 成一代數式。設直角傍之兩邊。一爲4邁當。一爲3邁當。求弦之長。則當以4代$b$.以3代$c$.求代數式$\sqrt{b^2 + c^2}$之數値。即

$$a = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5^m.$$

---

## 第五節。不等式。

**65. 界說。** 謂一數$a$大於一數$b$者。即兩數之較$a-b$爲正數也。反之。謂一數$a$小於一數$b$者。即兩數之較$a-b$爲負數也。

代數用$>$及$<$兩記號。表不等式。與數學同(見第5欵).

例如兩數之較 $(+5)-(-2)=+7$

爲正數。故 $+5>-2.$

又兩數之較 $(-5)-(-3)=-2$

爲負數。故 $-5<-2.$

因是界說。得以下推論數則。

**66.** 凡正數均大於零。凡負數均小於零。

(證) 兩數之較 $a-0$, 等於 $a$. 故其記號從 $a$.(見第22款)。

若 $a$ 爲正數。則 $a-0$ 亦爲正數。故

$$a>0.$$

若 $a$ 爲負數。則 $a-0$ 亦爲負數。故

$$a<0.$$

故嗣後表一數之爲正爲負。書以不等式 $>0$ 及 $<0$. 如。

$a>0$ 卽謂 $a$ 爲正數。

$a<0$ 謂 $a$ 爲負數也。

**67.** 凡正數均大於負數。

(證) 設 $a$ 爲正數。$b$ 爲負數。$a-b$ 亦當爲正數。蓋 $b$ 既爲負。則 $-b$ 卽爲正。是 $a-b$ 爲兩正數之和。故 $a-b$ 爲正數 (或 $a-b>0$)。故 $a>b$.(見第65款)。

例如 $+4>-200,\ +\frac{1}{10}>-1000.$

**68.** 兩負數以絕對值之小者爲大。

(證) 凡異號兩數之較。以絕對值大者之記號爲記號。設於 $a-b$ 內,$a$ 爲負數。而 $a$ 之絕對值。大於 $b$. 則 $a-b$ 之記號。當從 $a$. 故 $a-b$ 均爲負數(或 $a-b<0$). 故

$$a<b.$$

例如 $-5<-2$ [因 $(-5)-(-2)=-5+2=-3$],

$$-\frac{1}{10}>-10,\quad -0{,}1>-200.$$

**69.** **定理。** 可加一同數。或減一同數。於不等式之兩端。此不等式。不因之而變。

(證) 謂 $a>b$. 卽謂 $a-b$ 爲正數(見第65款)。設 $c$ 爲任一數。得

$$(a+c)-(b+c)=a+c-b-c=a-b.$$

但 $a-b>0$. 故 $(a+c)-(b+c)>0$. 卽

$$a+c>b+c.$$

此不等式。卽加 $c$ 於 $a>b$ 之兩端而得者。故加一同數於不等式之兩端。此不等式。不因之而變。

例如 $$-4>-20;$$

設加15於其兩端。仍得不等式

$$-4+15>-20+15$$

或 $$+11>-5.$$

**70. 定理。** 以異於零之一數。乘或除不等式之兩端:

(一)若此數爲正。則不等式不因之而變;

(二)若此數爲負。則不等式變其向。

(證) 設 $$a>b.$$

卽 $a-b$ 爲正數。則乘積

$$(a-b)\,c=ac-bc$$

之記號。當從 $c$.

若 $c$ 爲正數。$ac-bc$ 亦爲正數。故

$$ac>bc.$$

若 $c$ 爲負數。$ac-bc$ 亦爲負數。故

$$ac<bc.$$

例如 $$-\frac{1}{2}>-5,$$

若以 $+10$ 乘兩端。得

$$-\frac{1}{2}\cdot 10>-5\cdot 10,$$

或 $$-5 > -50;$$

若以 $-3$ 乘兩端。得

$$\left(-\frac{1}{2}\right)(-3) < (-5)(-3),$$

或 $$+\frac{3}{2} < +15.$$

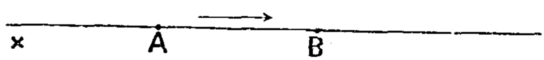
# 第二章。正負數之致用。

## 第一節。定向線。熱度。

**71.** **界說。** 直線之一分。其趨向有定者。謂之定向線。

線之起點。謂之元。線之止點。謂之末。

以兩元字表一定向線。與幾何學用兩元字表直線之一分者同。惟當留意者。表定向線之兩元字。其首一字乃表此線之元。



(第一圖)

設一動物往來於直線$xy$上(圖一)。謂此物行一定向線AB者。即謂此物自A起程至B而止也。故定向線者。即動物趨一定向所行之路也。

**72.** 因此界說。知兩定向線AB與BA爲不相同。蓋此兩定向線所截直線之一分誠同。而其向則異。AB爲一動物自A向B之線。而BA爲自B

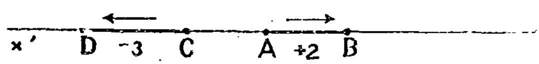
向A之線。AB, BA其長相等。其向相背。謂之相反之兩定向線。

**73. 定向線之代數量。**直線一分之量。即一數表直線一分之長。含準個若干倍。或含準個之分數若干倍也。

設以邁當為準個。云長等於3,5者。即謂直線一分之長。含三邁當又十分之五邁當也。

惟此直線量。尚不足以衡一定向線。蓋衡一定向線。不特當衡其長。又當表其向。因是度一定向線。不得不用代數學之正負數。

**74.** 設有無窮直線$x'x$(圖二)。而於此直線上。擇取一向。謂之正向。設取$x'$趨$x$之向為正向。而於直線末。以一矢表之。此有定向之無窮直線。謂之軸。




(第二圖)

設A與B為軸上兩點。定向線AB之向。或為$x'x$之正向。或為$x'x$之反向。若AB之向為正向。此

定向線。謂之正。而以度得之長。加一記號(+)爲此定向線之量。

若定向線之向。爲$x'x$之反向。此定向線謂之負。而以度得之長。加一記號(−).爲此定向線之量。

右所述。可以下數語概括之。於無窮直線上。取一正向。謂之定向線之代數量者。即一代數數目。以定向線之長。爲其絕對値。而記號之正負。隨此定向線之或爲正向。或爲負向。

例如第二圖。定向線AB爲正。若AB之長爲二生的邁當。AB之代數量爲+2.

定向線CD爲負。若CD之長爲三生的邁當。定向線CD之代數量爲−3.

表一定向線之代數量。以一畫置表定向線之兩元字上。

例如$\overline{AB}$即表定向線AB之代數量。$\overline{CD}$即表定向線CD之代數量。按第二圖

$$\overline{AB} = +2, \quad \overline{CD} = -3.$$

相反兩定向線之代數量。爲相反數。

**75. 數定向線之和。** 凡往來道上之旅

行者郵差火車運送車。均行一定向線。若知定向線之代數量。不特知其行程。并可知其定向。上章第29欵30欵曾論求距離之推算法曰。若旅行者。歷程若干。而其向各異。欲求旅行者與一定點之距離。應加正向之路程。而減去其異向者。因是知下例之確當。

(例) 一動物以軸上所行之數定向線。卽一定向線。以此物起程之地爲其元。以此物之止點爲其末。而以此物所行數定向線代數量之和。爲其代數量。

**76. 問題一。** 一動物自直線上一點O起程。連行數定向線。此數定向線之代數量爲$+5^{m}$, $-12^{m}$, $+6^{m}$, $-3^{m}$. 問此動物。當於直線上何點停止。解之曰。

設A爲止點。得

$$\overline{OA}=+5-12+6-3=-4^{m}.$$

卽動物止點A在負向。離O點四邁當遠也。

上設問題。可詮釋之如下。動物初自O點起程。取正向進行至B: 其距離爲5邁當(圖三)。後取負

(第三圖)

向反行12邁當。故是物復經O點至C在負向一邊。其距離為$12-5=7$邁當。此動物復自C起程。取正向趨O.行6邁當至D.此D點尙在負向一邊。與O相去之距離為$7-6=1$邁當。此動物再自D取負向。行3邁當至A.此A點在負向一邊。與O相去之距離為$3+1=4$邁當。

觀是知前例之簡概。蓋用前例。可徑求答數。不必繪圖。亦不必為此冗長之理論也。

**77.** 問題二。一人乘自由車。往來於思泰思堡。巴黎。馬賽。三城間。第一日,自巴黎起程。向馬賽行 125 基羅邁當。第二日,忽反前向趨思泰思堡。行 148 基羅邁當。第三日,仍趨思泰思堡。行 96 基羅邁當。至第四日。復向馬賽行 165 基羅邁當。問第四日晚。是人應達何處。

解之曰。若取巴黎至馬賽之向為正向。四日路程之代數量。為

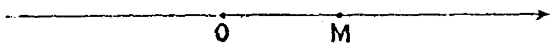
$$+125, -148, -96, +165.$$

其和爲

$$+125-148-96+165=+46.$$

故是人於第四日晚。在巴黎馬賽兩城間。距巴黎44基羅邁當而止焉。

**78. 橫線。** 設定$x'$趨$x$之向爲軸之正向(圖四)。又設O點爲軸上一定點。謂之橫線之元點。今欲定軸上任一點M之位置。當知兩事。(一)此點與O相去之距離若干。(二)此點在O之何邊。




(第四圖)

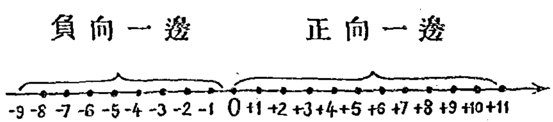
若知定向線OM之代數量。則可兼知兩事。OM之代數量。謂之M點之橫線。故曰橫線者。卽自元點O至任一點M之代數量也。大率用元字$x$。表一點之橫線。

橫線可設譬以明之。設一點以$x=+4$爲橫線。卽此點在正向一邊。與之距離爲4。設一點以$-3$爲橫線。卽此點在負向一邊。與O之距離爲3。

O點之本橫線爲零。

**79. 橫線之變動。** 設O爲諸橫線之元。而以圖顯$+1, +2, +3, +4, +5$等... 及$-1, -2, -3, -4$等... 橫線之各點。則得兩行無窮點(圖五)。

正向橫線之各點在右。負向橫線之各點在左。




(第五圖)

若一點趨正向進行。此點連經$+1$, $+2$, $+3$, $+4$等點。而其橫線增長不已。

若一點趨負向進行。則此點連經$-1, -2, -3$等各點。而其橫線以絕對値論則增。以實數論則減。蓋負數以絕對値之小者爲大。絕對値愈增則數愈減。

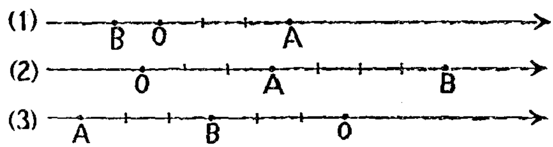
前用圖定正負數大小之次序。最爲有益。蓋有此圖。而數目次序。曉然易見也。

設兩數以大者居他數之右。得不等式如下。

$$-5<-4<-3<-2<-1<0<+1$$
$$<+2<+3<+4.$$

**80. 定理。** 凡定向線之代數量。均等於末點之橫線。減元點之橫線。

(證) 設A與B爲正向已定之軸上兩點。又設O點爲諸橫線之元。無論O, A, B三點之位置。或如第六圖之(1)。或如(2)。或如(3)。一動物自A至B。總可始自A至O。行一定向線AO。繼自O至B。行一定向線OB。




(第六圖)

依第75欵定例。無論何式。定向線之AB代數量。總等於OB及AO兩定向線之代數量之和。因是得

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}.$$

但 AO 及 OA 兩定向線相反。故

$$\overline{AO} = -\overline{OA}.$$

故 $$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}.$$

(譬一) (第六圖第一線) 設

$$\overline{OA} = +3, \qquad \overline{OB} = -1,$$

得 $$\overline{AB} = -1 - (+3) = -4.$$

(譬二) (第六圖第二線) 設

$$\overline{OA} = +3, \qquad \overline{OB} = +7,$$

得 $$\overline{AB} = +7 - (+3) = +4.$$

(譬三) (第六圖第三線) 設

$$\overline{OA} = -6, \qquad \overline{OB} = -3,$$

得 $$\overline{AB} = -3 - (-6) = +3.$$

**81. 寒暑表之度。** 寒暑表者。衡熱度之器也。其下端爲一玻璃瓶。連以細長玻璃管。瓶及細管一分均盛水銀或酒精 (圖七)。細管謂之寒暑表之幹。

幹上刻分度數。水銀線止點之度。卽熱度也。

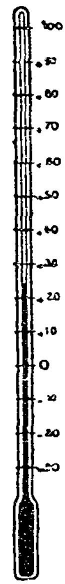
例如第七圖。水銀線止點在24度。卽此表近傍之流質或空氣。其熱度爲百度之24.

若將是表置融冰中。則水銀線至0而止。

若炙之。則水銀上升。若置之沸水中。則水銀升至＋100度。

若反是。置是器於較冰寒之流質中。則水銀降至零度以下。

凡高於零之諸度。均表以記號(＋)。謂之溫度。下於零之諸度。均表以記號(－)。謂之冷度。故表熱度之數。卽代數學之正負數也。



(第七圖)

**82. 熱度變動之推算。** 幹中升降之水銀線。可比之行定向線之一動物。其止點之度數。卽以零度爲元點之橫線。當水銀自A度至B度時。所行定向線$\overline{AB}$之代數量。卽爲熱度變動之量。欲求此變動之量。可依第80欵定理。取熱度止點B之距度線。減熱度起點A之橫線。因是得定例如下。

(例) 當寒暑表水銀線自一分度至他分度時。熱度變動之代數量。爲熱度止點及起點而距度線之較。

若變動之代數量爲正。則水銀上升而熱度爲增。若爲負。則水銀下降而熱度爲減。

(譬一) 設二月一號昧爽。熱度爲 $-3$. 正午熱度爲 $+9$. 問是半日間之熱度。有何變動。

解之曰。熱度始爲 $-3$. 末爲 $+9$.

故此變動爲

$$+9-(-3)=+12.$$

故熱度增高12度。

(譬二) 設二月一號正午。熱度爲 $+8$. 夜半熱度爲 $-7,5$. 問此半日間熱度之變動若何。

解之曰。熱度初爲 $+8$. 末爲 $-7,5$.

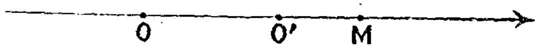
故此變動爲

$$-7,5-(+8)=-15,5.$$

故熱度降下15,5度。

**83. 橫線元點之易位。** 設於正向已定之軸上(圖八)。取兩定點O及O′

又設M爲軸上任一點。今以$x$表以O爲元之距度線$\overline{OM}$.以$x'$表以O′爲元之距度線$\overline{O'M}$.



(第八圖)

若$x$爲已知數。則$x'$之值。卽可推求。蓋按第80欵定理。

$$\overline{O'M}=\overline{OM}-\overline{OO'}.$$

$\overline{OO'}$爲O′點以O爲元之横線。設以$a$表之。則得

$$x'=x-a. \qquad (1)$$

此等式爲已知$x$及$a$求$x'$之公式。又可以常語解之曰。

新横線。等於故横線。減去新元點。以故元點。爲元之横線。

(譬)設　　$\overline{OO'}=+3.$

則公式(1)變爲

$$x'=x-3.$$

若$x=+4$,　則　$x'=+1$,

若$x=+2$,　則　$x'=-1$,

若$x=-3$,　則　$x'=-6$.

**84. 絕對熱度。** 物理學所謂絕對熱度。卽以百分度之 $-273$. 爲元之熱度。

若已知百分度之熱度。則求絕對熱度。僅元點.易位之推算法而已。蓋百分度熱度。以 0 爲元。而絕對熱度。以 $-273$ 爲元。新元點與故元點之距度線爲 $-273$ 也。

故設 $t$ 以表百分度之熱度。而以 T 表絕對熱度。用公式 (1) 而易

$$x \text{ 爲 } t,\ x' \text{ 爲 } \mathrm{T},\ a \text{ 爲 } -273,$$

則得
$$\mathrm{T} = t + 273.$$

故可定其例曰。加定數 273 於百分度熱度。卽得絕對熱度。

$$\text{例如}\quad t = +15^\circ,\quad \text{則}\quad \mathrm{T} = +288^\circ$$

$$\text{如}\quad t = -52^\circ,\quad \text{則}\quad \mathrm{T} = +221^\circ$$

物理學證無論何物之熱度。不能下於百分度之 $-273^0$. 故絕對熱度。恒爲正數。

## 第二節。論時。

**85. 時之準個。** 每歲分365日。每日分24小時。每小時分60分。每分分60秒。

凡衡一時。歲。日。小時。分。秒。均可作爲準個。

準個之最慣用者。於錢債問題。則用歲及日。於推算動物速率等問題。則用小時及秒。

若時之準個已定。則當計算時。宜取此準個及準個之小數。爲時之數學量。

故時之推算。將十進外諸等數。化爲十進諸等數。

例如 $3^h30^m$ 變爲 $3^h,5.$

$28^m5^{sec}$ 化爲 $1685^{sec}.$

**86. 時之紀元。** 於一日間定一時。往往言是時爲某小時。如言午後兩小時叉半。猶言自正午(日輪過經線時。謂之正午)。至是時。共兩小時叉半。

故正午卽爲一日內時之紀元。而以自午起算

之小時。及其命分。表任一時。

但用是法表時。猶嫌未足。蓋是法僅可用於一日間。且常當指定所表之時為午前。或為午後也。如徒言兩小時又半。則既不確定為某日。而午前午後。又不指明。聞者固無從推測也，

故欲以記時之數。置之代數術中。則當用一比是較確之量。卽正負數是也。

因是時之推算。可定其例曰。任取一時為時之元。以自元算起之小時數。及其命分數表任一時。而用記號(+)表凡時之後於元者。用記號(−)表凡時之前於元者。

(譬)設以千九百零三年正月一號正午為元。

則 $+4,5$ 為千九百零三年正月一號午後四點鐘半。

$+49$ 小時為正月一號午後四十九小時。卽正月三號午後一點鐘也。

$-3^{h},25$ 為千九百零三年正月一號午前三小時又四分之一。卽正月一號晨八點三刻也。

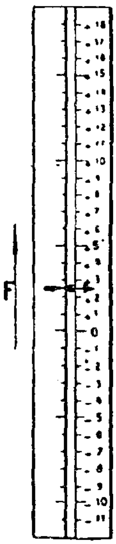
$-24$ 為千九百零三年正月一號午前二十四

小時。卽千九百零二年十二月三十一號正午也。

餘可按此類推。

**87.** **鐘**。計時之鐘。可製之如下式。於長方板上。開一竪槽(圖九)。槽之兩旁。刻分等分。而於每等分之橫畫上。誌

$-4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$, 等數。自 0 起。趨兩方向而遞長。



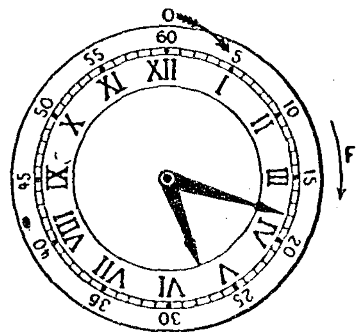
(第九圖)

槽中一針。受動於鐘機。向 F 進行。且因鐘機之動。可使是針於時之元。指 0 點。於 $-3$ 時。指 $-3$ 一點。於 $+6$ 時。指 $+6$ 一點。要言之。每時。是針總指一正數。或一負數也。用是式之鐘表時。恰如於一直線上。

用橫線表一點之位置。故時可方之距度線。凡鐘用此法製造。於理論及時之推算。最爲便利。推是法尙不能見之實用。蓋此板其兩端當長至無窮也。

上設想之長形鐘。旣不能見之實用。於是創一環形鐘以計時(圖十)。此鐘之面。分同心兩圜周。而於圜周之中心置兩針。長針之尖。取 F 向。於刻

分60等分之大圜周上移動。每60分鐘。此長針適行一周。故設於時之元。



(第十圖)

長針指O點。則以後長針所指之點。均表自元至任一時。相去爲若干分鐘也。

但使僅有長針。則此鐘僅能記一小時間之各時。一小時後。長針已行一周。前所指各點。將復見矣。故欲知時之確數。又當知長針已行若干周。短針卽用以記長針之周數也。短針之移動。與長者同向。惟速度較緩。一小時僅行周十二分之一。短針所指之小圜周。共分十二等分。每等分均以羅馬號目記之。長針行大圜周一周。短針行小圜周十二分之一。故小圜周之等分。卽以表長針所行之周數也。

例如第十圖。短針在V與VI之間。長針在18.卽長針行五周又周六十分之十八。故所表之時。自元起共五小時又十八分鐘也。由是以觀。短針雖

以表時。亦以表長針所行 $5+\frac{18}{60}$ 之路。故凡時均可方之距度線。然當理論時。用環形鐘以解時與距度線之同理。究不如用直形鐘解之之明顯也。

**88. 時間之量。**設有兩事A與B.若言此兩事相去四小時。則兩事之序次。仍不能確定。蓋兩事之中。不知何者在先。A之一事。可先於B.或後於B.欲分兩者之先後。不得不用正負數矣。

謂自A至B時間之代數量。卽一數以兩事相去之時間。爲其絕對值。而其記號之正負。以A前於B或後於B爲斷。

例如自午後二點鐘至五點鐘時間之代數量。爲$+3$.自晨六點鐘至本晨一點時間之代數量爲$-5$.

**89.** 觀上所設之直形鐘(圖九)。則知時間之代數量。與定向線之代數量無異。蓋每時間之初。針所指之點。卽定向線之元。而時間之末。針所指之點。即定向線之末。而此兩點之距度線。適爲時初時末之數。故依第80欵定理。卽得下例。

(例) 凡時間之代數量。等於時初之數。減去時

末之數。

(譬一) 問一日內。自晨 $8^h\,1/4$ 至午後 $5^h\,1/2$. 共若干時。

解之曰。設取正午爲元。則時之初爲 $-3{,}75$. 時之末爲 $+5{,}5$. 故所問之時間。爲

$$+5{,}5-(-3{,}75)=+9{,}25.$$

(譬二) 問自晨 $2^h\,1/2$ 至晨 $7^h\,3/4$. 共若干時。

解之曰。若取夜半爲元。則時之初爲 $+2{,}5$. 時之末爲 $+7{,}75$. 所求之時。爲

$$+7{,}75-(+2{,}5)=+5{,}25.$$

若取正午爲元。則時之初爲 $-9{,}5$. 而時之末爲 $-4{,}25$. 故所求之時。爲

$$-4{,}25-(-9{,}5)=+5{,}25.$$

元雖異。答數仍同。故知時間之量。不固因所取異元而變也。

**90. 紀年學。** 史學之紀年。取耶穌降生爲紀元。若言某事在耶穌後一年。卽言此事在耶穌降生後第一年內也。但有當辨別者。云此事在第一年內。此第一年固未全過也。則此事之見。離耶

穌降生相去之時間。必爲一年之分數。

故若以年爲準個。所問之時爲小於一之數。

若言一事在千九百零三年二月十七號。卽言此事見於自耶穌降生後。第千九百零三年內也。故此事之見。與耶穌降生相去之時。爲千九百零二年又四十八日。或 $1902+\frac{48}{365}$

記已往歲月。亦用正負數。以記號 (+) 表耶穌以後事實發見之日。而以記號 (−) 表耶穌以前事實發現之日。

例如耶穌降生後千九百零三年二月十七號爲 $+\left(1902+\frac{48}{365}\right)$. 耶穌降生前五年十二月一號爲 $-\left(4+\frac{30}{365}\right)$.(本日二月十七號或十二月一號不記在內)。

**91. 問題。** 設一人生於耶穌降生前三十一年十一月十七號。卒於耶穌降生後四十三年三月十八號。問是人存年幾歲。

解之曰。生時爲 $-\left(30+\frac{44}{365}\right)$

卒時爲 $+\left(42+\frac{77}{365}\right)$;

生存歲數。卽自生至卒相去之歲月。故(見第89欵)

$$+\left(42+\frac{77}{365}\right)-\left[-\left(30+\frac{44}{365}\right)\right]=+72+\frac{121}{365}.$$

是人生七十二歲又一百二十一日而卒。

**92. 按。** 紀年學之紀元。僅可用之如上法。若用之於年次。則有所不能。蓋年次不表是時與紀元相去若干時。僅表是時在紀元後第幾年也。

年之次序。自耶穌前一年。徑至耶穌後一年。無0年介於其間也。

**93. 易元。** 觀直形鐘之制。知凡時均可視爲距度線。而時間均可視爲定向線。距度線之元可易。故時之元亦可易也。

若以 $t$ 表一時與第一紀元相去之數。以 $t'$ 表此時與第二紀元相去之數。而以 $0$ 表第二紀元與第一紀元相去之數。則按第83欵公式(1),得:

$$t'=t-$$

此等式可以常語解之曰。凡時與新元相去之數。等於此時與故元相去之數。減新元與故元相去之數。

（譬）設新元與故元相去之數。爲 $-3{,}5$. 則

$$\theta=-3{,}5.\text{ 而等式變爲 } t'=t+3{,}5.$$

故　若 $t=+4$,　則 $t'=+7{,}5$;

若 $t=-3$,　則 $t'=+0{,}5$;

若 $t=-8{,}5$,　則 $t'=-5$.

**94. 推解。** 計時之鐘。或速或遲。用易元公式。可推時之確數。與巴黎之經線不同之城。若知巴黎之鐘點。及此城與巴黎鐘點之較。用易元公式。亦可推此城之鐘點。試舉問題以明之。

**問題一。** 保祿之表緩五分鐘。問表指 $3^h, 2^m$. 當爲何時。

解之曰。言保祿之表緩五分鐘者。卽言當正午。表指正午減五分鐘也。

故表之新元爲 $-5$. 欲求時之確數。當於表上所指之時數。減去 $(-5)$. 卽加 $+5$.

故表上指 $3^h,2^m$ 時之確數爲 $3^h,7^m$

**問題二。** 羅杜正午。巴黎爲正午十一分三十八秒。若知巴黎之鐘點。問當用何法求羅杜之鐘點。

解之曰。以巴黎之正午。卽日輪過巴黎經線時爲元。罷杜以罷杜之正午。卽日輪過罷杜經線時爲元。因罷杜及巴黎不在一經線上。

故巴黎之紀元。非罷杜之紀元。罷杜所用之元。於巴黎爲十 ($11^m$, $38^s$).

故於巴黎之鐘點。減去十 ($11^m$, $38^s$). 卽得罷杜鐘點數。

例如巴黎三點鐘。罷杜爲二點四十八分二十二秒也。

## 第三節。均速行動。

**95. 界說。** 設一物於正向巳定之軸上行動。謂之均速行動者。動物於相等之時間。行相等之定向線也。

每一小時。動物所行定向線之代數量均等。每一分鐘所行定向線之代數量亦均等。餘皆類此。

因動物所行者爲定向線。故不特於相等之時

間行相等之路已也。其所取之向亦相同。

從此可推均速行動之物。常取一向以行也。

**96. 速度。** 動物於時間準個所行定向線之代數量。謂之均速行動之速度。

速度或爲正數。或爲負數。以動物方向之正負爲斷。若速度之絕對值。則係乎所取之準個。

故論速度。不可不表明所取準個爲某數也。

如言速度一小時行三十基羅邁當。長度之準個爲基羅邁當。而時之準個爲小時也。

因是不可不知準個之調換法。試舉問題以明之。

**問題。** 取基羅邁當及小時爲準個。其速度爲V.若取邁當及秒爲準個。其速度若何。

解之曰。言取基羅邁當及小時爲準個。其速度爲 V 者。猶言一小時間。動物行 V 基羅邁當。或 $V\times1000$ 邁當也。

一小時之久。共含 3600 秒。而每秒動物所行之路恒等。故取 $V\times1000$ 分 3600 等分。即可得一秒鐘所行之路。若以 V 表取邁當及秒爲準個之速度

得

$$v=\frac{V\times 1000}{3600}=\frac{V}{3,6}$$

故求邁當及秒爲準個之速度。當以3,6基羅邁當爲準個之速度。

反言之。

$$V=v\times 3,6.$$

故求基羅邁當及小時爲準個之速度。當以3,6乘邁當及秒爲準個之速度。

例如一人乘自由車。每小時行18基羅邁當。則每秒行$\frac{18}{3,6}=5$邁當。

一火車每秒行11邁當。則每小時行39,6基羅邁當也。

**97. 均速行動之公式。** 關於均速行動之問題。其最概括者。可舉之如下。

設有均速行動之一物。於時間之初在A.於時間之末在B.知速度$v$及時間$t$.求AB定向線之代數量。

解之曰。問題中未言時初時末之孰先孰後。故$t$可爲正數。亦可爲負數。

若 $t>0$. 則時初在時末之前。故動物自 A 向 B 行。

若 $t<0$. 則時初在時末之後。動物先至 B 而後至 A. 故自 B 向 A 行。

今設　　$e=\overline{\mathrm{AB}}$.

則無論動物自 A 向 B. 自 B 向 A. 總可得等式

$$e=vt. \tag{1}$$

欲證 $e$ 及 $vt$ 兩數相等。當證(一)兩數之絕對值相等。(二)數之記號相同。

(一)此兩數之絕對值相等。

設以 E, V, T 表 $e$, $v$, $t$ 之絕對值。按四率比例法(卽有三求一法)。動物於時間 1 行 V 遠。則於 T 時間。當行 T 倍遠。卽 V×T.

故得　　$\mathrm{E}=\mathrm{V}\times\mathrm{T}$

或　　$|e|=|vt|$

(二)此兩數之記號相同。

若 $t$ 爲正數。則動物自 A 向 B 行。故定向線 AB 之向。與行動之向同。而 $e=\overline{\mathrm{AB}}$ 之記號與 $v$ 同。卽與 $vt$ 同也。

若 $t$ 爲負數。則動物自 A 向 B 行。定向線 AB 之向與行動之向相反。而 $e=\overline{AB}$ 之記號與 $v$ 異。但 $t$ 爲負數。$vt$ 之記號又與 $v$ 異。

故 $vt$ 仍與 $e$ 同號也。$e$ 與 $vt$ 之絕對値旣同。而記號又同。

故兩數恒等。而等式 (1) 爲公式也。

**98. 弧線行動。** 上立公式。動物所行之路。設爲直線。然使所行者爲弧線。此公式仍不變。蓋理想中。常可矯弧線而直之。可視爲直線而理論之也。於弧線上。亦可定一正向。而定向弧線之同此正向者。可視爲正。反此正向者。可視爲負。

例如一火車於軌上行動。所行之路。弧線爲多。然仍可用以上公式。蓋於鐵路上。常可定一向爲正向。而與此同向及異向之路。亦易衡也。

**問題。** 於巴黎,里昂,馬賽三城間之路線上。一火車自巴黎向馬賽。每點鐘行 90 基羅邁當。於 $2^h$, $35^m$ 時過里昂。問 $1^h$, $15^m$ 時。車在何地。

解之曰。取分爲時間準個。基羅邁當爲長度準個。而以車行之向爲正向。則火車之速度。爲

$$v = \frac{90}{60} = \frac{3}{2} = +1,5.$$

時間之初。爲 $2^h, 35^m$ 或 155 分鐘。

時間之末。爲 $1^h, 15^m$ 或 75 分鐘。

故依第 89 欵。時間 $t$ 爲(見第 89 欵)：

$$t = 75 - 155 = -80.$$

旣知 $v, t$. 與里昻相距之定向線。可以公式推得之。卽

$$e = 1,5 \times (-80) = -120.$$

答數爲負。故火車於 $1^h, 15^m$ 時再當行 120 基羅邁當。乃能達里昻也。

**99. 求時間。** 因 $e$ 爲 $v$ 與 $t$ 之積。故 $t$ 爲 $e$ 與 $v$ 之商。卽

$$t = \frac{e}{v}; \tag{2}$$

與用此式。知 $e$ 與 $v$. 卽可求 $t$.

**100. 求速度。** 因 $e$ 爲 $v$ 與 $t$ 之積。故 $v$ 爲 $e$ 與 $t$ 之商。卽

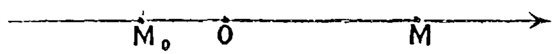
$$v = \frac{e}{t}, \tag{3}$$

與用此式。知 $e$ 與 $t$. 卽可求 $v$.

**101. 均速行動之方程。** 均速行動之公式。可易以他式。謂之均速行動之方程。

於動物所行之直線上(圖十一)。定一正向。取一點O爲距度線之元。

設 $M_0$ 爲時間之初 $t_0$ 動物所在之地。而以 $x_0$ 表 $M_0$ 點之距度線 $\overline{OM_0}$.




(第十一圖)

又設 M 爲任一時 $t$ 動物所在之地。而以 $x$ 表 M 點之距度線 $\overline{OM}$. 若 $t$ 爲已知數。$x$ 之等値爲何。

解之曰。動物初在 $M_0$. 後在 M. 依均速行動之公式 (1), $\overline{M_0M}$ 等於速度 $v$ 與時間之積。

按第 89 欵。此時間爲 $t-t_0$, 故

$$\overline{M_0M}=v\,(t-t_0).$$

但 $$\overline{M_0M}=x-x_0.$$

故 $$x-x_0=v\,(t-t_0).\qquad(4)$$

或 $$x=x_0+v\,(t-t_0).\qquad(5)$$

此卽均速行動之方程也。

方程中$x_0, v$及$t_0$爲已知數。謂之定幾何。

謂之恒値$x$及$t$爲幾何之每時變易者。謂之變値。

此方程(5)爲知$t$求動物橫線$x$之用。卽定每一時動物在直線上地位之用。

**102. 弧線行動。** 第98欵所表明者。於此可申言之。

方程(5)用以求均速之直線行動。亦可以用求弧線行動。蓋於弧線上。定一點爲元點。擇一向爲正向。而取橫線之同於正向者爲正。異於正向者爲負也。

(譬)一火車於午後35分鐘時。自巴黎起程。向那珊。每點鐘行66基羅邁當。設此車進行不停。試求車行之方程。

解之曰。若以巴黎往那珊之向爲正向。而取基羅邁當及分爲長度及時間之準個。

得
$$v=+1,1$$

因火車每分鐘行1基羅邁當又1分。又因橫線之元爲巴黎。

故 $t_0 - +35, \quad x_0 = 0.$

按公式(5)。得

$$x = \ ,1\ (t - 35).$$

此卽所求之方程。今若欲知於 $2^h 26$, $3^h 31$, $4^h 15$, $5^h 25$, $5^h 56$ 時。火車與巴黎相去之距離。可將各鐘點數。代方程中 $t$.

故 $2^h 26$ 時。 $t = 146.$ 而 $x = 122^{km},1.$

$3^h 31$ 時。 $t = 211.$ 而 $x = 193^{km},6.$

$4^h 15$ 時。 $t = 255.$ 而 $x = 242^{km}.$

$5^h 25$ 時。 $t = 325.$ 而 $x = 319^{km}.$

$5^h 56$ 時。 $t = 356.$ 而 $x = 353^{km},1.$

因那珊距巴黎 353 基羅邁當。故火車於 $5^h 56^m$ 時達那珊。

**103. 求時。** 按公式(4), $x - x_0$ 爲 $v$ 乘 $t - t_0$ 之積。故 $t - t_0$ 爲 $v$ 除 $x - x_0$ 之商。卽

$$t - t_0 = \frac{x - x_0}{v}, \quad 或 \quad t = t_0 + \frac{x - x_0}{v}. \qquad (6)$$

此公式能求得動物在一橫線 $x$ 點爲何時 $t$.

## 第四節。知直線上一點與兩定點距度之比例,定此一點在直線上之位置。

**104.　發端。** 設於無窮直線上。取兩定點A,B(圖十二)。而定一向為正向。又設 $\dfrac{\overline{BM}}{\overline{AM}}$ 為定向線


(第十二圖)

BM與AM代數量之商。若以 $y$ 表之。得

$$y=\frac{\overline{BM}}{\overline{AM}}$$

$y$ 之值。與所取之正向無關係。蓋若變直線之正向。兩定向線代數量之記號。同時皆變。其商固不變也。故AB之向。可任意定之。不必鄭重言AB為某向也。

若M點介於B,A之間。則兩定向線BM, AM為反向。而 $y$ 為負。

若M點不在B,A之間。則兩定向線BM, AM為

同向。而 $y$ 爲正。

故 $y$ 之記號。所以表 M 點是否介 B,A 兩點之間。

若 M 點與 A 點相合。則 $y$ 絕無意義。蓋 M 與 A 合。分母 $\overline{AM}$ 爲零。凡以零爲分母之命分。皆無意義。

**105. 定一點之位置。** AB 直線上。除 A 點外。凡點若 M. 均有一定値 $y$ 應之。然反言之。

若已知 $y$ 爲正數。或爲負數。是否有一點 M 應之。且是否應之者。只有一點。可得

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} = y. \qquad (1)$$

試討論之如下。

設以自 A 向 B 爲正向。而取 A 點爲橫線之元。

如　　M 點之橫線爲 $\overline{AM}$. 以 $x$ 表之。

　　　B 點之橫線爲 $\overline{AB}$. 以 $a$ 表之。

由第 80 欵。得等式

$$\overline{BM} = \overline{AM} - \overline{AB} = x - a;$$

故等式 (1) 變爲

$$\frac{x-a}{x} = y. \qquad (2)$$

因 $y$ 爲 $x-a$ 與 $x$ 之商,

故 $$x - a = yx,$$

還項得 $$x = a + yx,$$

再還項得 $$x - yx = a. \qquad (3)$$

但按第48欵之定理

$$x(1-y) = x - yx;$$

故(3)等式。終書

$$x(1-y) = a. \qquad (4)$$

使$y$而不等於一。$1-y$卽不等於零。則等式(4)表$x$乘$1-y$之積。等於$a$也。因此等式以按除法界說。則$x$爲$a$與$1-y$之商。卽

$$x = \frac{a}{1-y}.$$

由此以觀。$y$若不爲一。$x$均有不二之定値應之。

然直線上。以$x$爲橫線者。只有一點。

故除一外。凡$y$之値。直線上均有不二之一點應之。

以上討論。可以數語賅之。

凡點若M.均有一定値$y$應之。凡$y$之値。均有一點M應之。

故知$y$.即可於直線上定M點。

惟M點與A點相合。而$y=1$, 則不可以常理論。當別論之於後。

**106. 論M與A點相合時$y$之情狀。** 如M點與A點合。則$y$絕無意義。

然可設想M雖不在A，而與A絕相近。夫M與A相離至近。則距度AM至小。而$x=\overline{AM}$之絕對值亦至微。故命分

$$y=\frac{x-a}{x}$$

之分子。與$-a$相差甚微。而分母與零。相差甚微。凡命分其分子鄰於零。而分母不為零者為極大。

試觀下所舉數命分。

$$\frac{1}{0{,}1}=10\ ,\ \frac{1}{0{,}01}=100,$$

$$\frac{1}{0{,}001}=1\,000\ldots\ldots\frac{1}{0{,}000\,001}=1\,000\,000.$$

可見分母愈小。命分愈大。

使分母之絕對值變小不已。則與零幾乎無間。而命分增長不已。大至無限。

故現所討論之$\frac{x-a}{x}$. 當$x$之絕對值。變為極小

時。此命分之絕對值。變爲極大。

若取AB爲長度準個。則 $a=1$. 而命分變爲

$$y=\frac{x-1}{x}.$$

$$使\ x=+0{,}001,\ 則\ y=\frac{-0{,}999}{0{,}001}=-999,$$

$$使\ x=-0{,}001,\ 則\ y=\frac{-1{,}001}{-0{,}001}=+1\,001,$$

$$使\ x=+0{,}000\,001,\ 則\ y=\frac{-0{,}999\,999}{0{,}000\,001}=-999\,999,$$

$$使\ x=-0{,}000\,001,\ 則\ y=\frac{-1{,}000\,001}{-0{,}000\,001}=+1\,000\,001.$$

於此可見當 $x$ 極小時。$y$ 之絕對值。爲極大。

故M點與A點相離至近時。$y$ 之絕對值極大。

M與A幾於相合時。$y$ 之絶對値大至無限。因之M在A點時 $y$ 之值。謂之無窮大。

而表以簡號 $\infty$.

**107.** **按。**由前討論。知命分之絕對值。可大至無窮。卽命分可大於無論如何大之數學數目也。

然此無窮數。可分兩式。

若命分爲正數。謂之正數無窮大。表以簡號 $+\infty$. 讀曰正無窮。

若命分為負數。謂之負數無窮大。表以簡號$-\infty$.讀曰負無窮。

故上欵所舉等式。$x$至小而為正數。則$y$為負。反是$x$至小而為負數。則$y$為正。

若$x$由正數趨近零數。則$y$為負數無窮大。

若$x$由負數趨近零數。則$y$為正數無窮大。

**108. 論$y=1$時$x$之情狀。** 第105欵。曾言除$y=1$外。$x$均有定值。今將$y=1$時$x$之情狀。討論之。

由等式 $$x=\frac{a}{1-y},$$

可見$y=1$時。$x$之分母為零。

故現所討論者。仍一分母為零之命分也。

使$y$所取之值。與1相差甚微。則$1-y$以絕對值論為至小。而$x$以絕對值論為至大。

故$y$之值近於1, AB直線上有甚遠之點應之。

使$y$所取之值。與1幾乎間。則$1-y$幾為零。而$x$大至無窮。

故$y$與1至近時。M點為無窮遠。

因此以推。$y=1$時。M點遠至無窮也。

若$y$小於1,則$x$爲正,$y$大於1,則$x$爲負。

故M點在正向一邊遠離。或在負向一邊遠離。以$y$由小於1之數向1,或由大於1之數向1爲準。

**109. 比例之變動。** 欲詳審比例$y$與M點相應之情狀。可設想M點自A向B行AB全線(圖十三)。而按點所在各地。攷求相應之值。

上言(見第105欵)

$$y = \frac{x-a}{x}.$$

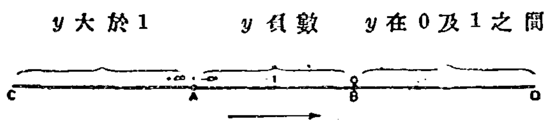
此等式可變爲

$$y = \frac{x}{x} - \frac{a}{x}$$

因$\frac{x}{x} = 1$,又可變爲

$$y = 1 - \frac{a}{x}$$

當M點取AB向行動時。橫線$x$增長不已。故$\frac{a}{x}$減小不已。而$y = -\frac{a}{x}$增長不已。




(第十三圖)

蓋所減去之數$\frac{a}{x}$愈小。則其較$y$愈大也。

故比例$y$常增。

當M在左邊相離甚遠時。$x$無窮大而爲負數。故$y$近於1(第108欵)。

當M行直線上一分AC時。$y$自1加增。M與A愈近。$y$之值愈大(第106欵)。

質言之。M趨向A,$y$趨向$+\infty$

當M過A時。$y$陡易記號。變爲負數。初$y$有極大之絕對值。而爲正數。至是$y$仍有極大之絕對值。但變爲負數矣。故謂$y$是時自$+\infty$陡躍至$-\infty$.

當M自A至B時。$y$爲負數。自$-\infty$趨近O. M點至B. 而$y$等於零矣。

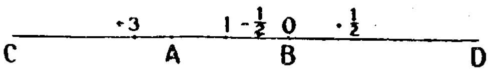
當M行過B後。$y$仍爲正數。而M在B之右。逐漸遠離。當向D. 而$y$近於$+1$. 故$y$自O增至$+1$也。

第十三圖包舉上義。

**110. 按。** 若M點在AB之中。則$y=-1$. 蓋是時兩定向線$\overline{AM}$與$\overline{BM}$適相反。卽

$$\overline{AM} = -\overline{BM}.$$

若知 $y$ 之值。卽可約畧求 M 點之地位。試設譬以明之。




(第十四圖)

若知 $y=+3$, 卽知 M 在 A 左 AC 界域內。因 $y>1$ 也(圖十四)。

知 $y=+\frac{1}{2}$, 卽知 M 在 B 右 BD 界域內。因 $0<y<1$ 也。

知 $y=-\frac{1}{2}$, 卽知 M 在 A,B 之間。因 $y<0$ 也。

$y$ 之變態第六章第四節(第265欵)以圖解表之。更爲明顯也。

# 第三章。代數運算之要義。

## 第一節。代數式。

**111. 界說。** 代數之運算。曾於前章。定其要例。可據之以變化代數數目矣。今重舉第63欵之界說於下。

凡諸代數數目。聯以運算記號者。謂之代數式。

代數式含兩原質。(一)數值已定之代數數目。(二)數值未定之代數數目。而以元字表之者。

欲憶代數式之數值爲何物。可重舉第64欵之界說於下。

以數目代式中元字。而按式中所含記號以運算之。推得之值。謂之代數式之數值。

**112. 分類。** 凡代數式中諸元字。無有在根號下者。此式謂之常數式。反是謂之不盡式。

例如 $\frac{3a^2bc}{d}+\sqrt[3]{2ab}+\frac{2c-\sqrt{3d}}{4}$

爲常數式。蓋根號不含元字也。

$$\sqrt[3]{a^2-b^2}+4a+\sqrt{a^3+b^3}$$

爲不盡式。

凡一數之平方根。或立方根。僅可爲正數。故不盡式中諸幾何之在根號下者。可設之爲正數。

**113. 單項式。** 代數數目之積。謂之單項式。

例如 $(-5)\cdot a\cdot(-3)\cdot a\cdot 4\cdot b\cdot a\cdot 2\cdot b$ 爲單項式。

單項式所含之生數。可爲命分。

例如 $$-\frac{5a^2bc}{3d}$$

亦爲單項式。蓋是式可視爲五生數

$$-\frac{5}{3},\quad a^2,\quad b,\quad c,\quad \frac{1}{d}$$ 之積。

若命分單項式之分母。不含元字。此式謂之整式。

**114. 單項式之係數。** 凡諸生數之積。可任易生數之序次(見第43款)。故單項式

$$(-5)\cdot a\cdot(-3)\cdot a\cdot 4\cdot b\cdot a\cdot 2\cdot b$$

可先書數目諸生數。而集合生數之用者。此式卽變爲

$$(-5)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\,.$$

又諸生數之積。可分取諸生數。而以推得之積代之(見第44欵)。故前式可變爲

$$120\,a^3\,b^2.$$

由是以推。知凡單項整式。均可約爲

$$120\,a^3\,b^2,\quad -5\,a^2\,b^4\,c^3,\quad -\frac{5}{3}\,a^2\,bc,\quad \sqrt{2}\,bc$$

等式。而謂之單項式之係數者。卽除元字外單項式所含之數目也。故上列各項之係數。爲

$$120,\quad -5,\quad -\frac{5}{3},\ \sqrt{2}.$$

因是得定例如下。

(例) 約一單項式。聚數目諸生數。置之單項式前。因以求其積。此卽單項式之係數。又集元字之同者。而以其積代之。此卽單項式之元字乘方。

**115.** **按**。如欲單項式

$$-\,a^2\,bc^3$$

與前定界說相符。當書爲

$$(-1)\cdot a^2\,bc^3.$$

此單項式之係數爲$-1$. 又單項式

$$a^2\,b^2\,c^3$$

之係數爲$(+1)$.

**116. 單項式之次數。** 謂之單項式之次數屬於一元字者。卽單項式已約後。此元字所含之指數也。

例如 $$-5a^2b^2c^3$$

以 $a$ 或 $b$ 論。此單項式爲二次。以 $c$ 論則爲三次也。

謂之單項式之次數屬於數元字者。卽各元字次數之和數也。

例如 $$-5a^2b^2c^3.$$

以一元字 $a$ 論。則此單項式爲二次。

以兩元字 $a$ 及 $b$ 論。則爲四次。

以三元字 $a, b, c$ 論。則爲七次。

**117. 多項式。** 多項式者。單項式之和也。

如 $$ab^3-3abc+7ab^2c^3$$

是。蓋此式爲

$$ab^3,\quad -3abc,\quad +7ab^2c^3$$

三單項式之和。

合成多項式之單項式。謂之多項式之項。

多項式含兩項者。謂之雙項式。

含三項者。謂之三項式。

若各項爲整式。則多項式謂之整式。

**118. 似項。** 多項整式中元字同而係數不同之項。謂之似項。

例如 $4ax^3-2a^3x+\frac{3}{2}ax^3-x^4-5ax^3$

其項 $4ax^3,\quad +\frac{3}{2}ax^3,\quad -5ax^3$

均爲似項。

**119. 似項之併合。** 凡一和數之各項。均可以相當之和代之(見第32欵)。故前欵所設多項式。可以(見第48欵)。

$$\left(4+\frac{3}{2}-5\right)ax^3,$$

卽 $$\frac{1}{2}ax^3$$

代相似之三項。多項式卽變爲

$$\frac{1}{2}ax^3-2a^3x-x^4.$$

此之變化。謂之似項之併合。

似項併合後之係數$\left(\frac{1}{2}\right)$。卽爲各似項係數之和。

$$\frac{1}{2}=4+\left(+\frac{3}{2}\right)+(-5).$$

因之得定例如下。

(例) 如多項整式中有數項相似。可用一項代之。此一項與前數項相似。而以前數項係數之和爲其係數。

**120. 循序多項式。** 從多項式之界說。知項之次序。可任意置之。然擇一定序。較爲有益也。

若多項式僅含一元字。則似項併合後。將各項排列之。使其次數爲升。或使其次數爲降。此多項式謂之循序多項式。

例如 $$4+x+x^3-5x^4$$

爲 $x$ 之升序多項式。

$$4,\quad +x,\quad +x^3,\quad -5x^4$$

爲項。而係數則爲

$$4,\quad +1,\quad +1,\quad -5.$$

此循序多項式。按照 $x$ 之降序。爲

$$-5x^4+x^3+x+4.$$

若多項式含兩元字 $a$ 及 $x$. 則兩者之中取一元字乘方之高下。爲各項之次序。譬如,設一多項式似項併合後爲

$$ax^3+x^4-x^3+2ax^2+4x-3x^2+1,$$

則可按$x$乘方之高下。書之如下式。

$$x^4+ax^3-x^3+2ax^2-3x^2+4x+1.$$

但 $$ax^3-x^3=(a-1)x^3\ (\text{見第48欵}),$$

$$2ax^2-3x^2=(2a-3)x^2,$$

故上式又可易爲

$$x^4+(a-1)x^3+(2a-3)x^2+4x+1.$$

此多項式謂之$x$之降序多項式。而引伸係數之義。亦可謂多項式之係數爲

$$1,\quad (a-1),\quad (2a-3),\quad 4,\quad 1.$$

**121. 多項式之次數。** 謂之多項式之次數屬於$x$乘方者。卽$x$最高乘方之指數也。

如上所舉多項式。以$x$論爲四次也。又多項式

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

以$a$論。則爲升序。以$b$論。則爲降序。然兩元字$a$與$b$.任取其一以論之。此多項式總爲三次。

又若以$a$與$b$合論之。此式之各項。均爲三次(見第116欵)。故此多項式。謂之以$a$與$b$論同次多項式。

**122. 完備多項式。** 謂多項式於$x$爲完

備者。卽此式所含各項之次數。自最高次以至不變項。皆完備也。不變項可視爲 $x$ 之零次。蓋 $x^0=1$（第 62 欵）。

多項式不完備者。謂之不全多項式。

例如 $$x^4-3x^3+6x^2-2x+5$$

爲完備多項式。末項 5 爲不變項。可視爲 $x$ 含零指數之項。蓋（第 62 欵）

$$5x^0=5\cdot1=5.$$

又 $$x^3+2x$$

爲不全多項式。蓋此式有三次項。而無二次項。且無不變項也。

---

## 第二節。單項式與多項式之加減法。

**123. 單項式之加減法。** 單項式之加法。曾見之前節（第 117 欵）。然欲會集單項式與多項式之運算方法於一處。不得不申言其例於此。

（例）數單項式相加。不外將各單項式銜接書之。而聯以記號。

減去一單項式。卽加此單項式之反。

**124. 多項式之加減法。** 加減一多項式。不外遞加或遞減多項式之各項。

右所舉例。由第39款定理而推得者。

故兩多項式相加。不外將一多項式之各項。書於他多項式後。然後依法加之。

試將兩多項式

$$x^4-x^2+x+1,\quad x^3+x^2-2x+3,$$

相加。此兩式之和。爲

$$(x^4-x^2+x+1)+(x^3+x^2-2x+3);$$

依定例。可易爲

$$x^4-x^2+x+1+x^3+x^2-2x+3,$$

將似項倂合之。得

$$x^4+x^3-x+4.$$

此多項式卽所求之和。

試從多項式 $(x^2-3x+1)$，願減去多項式 $(x^3+6x-7)$，此兩式之較爲

$$(x^2-3x+1)-(x^3+6x-7).$$

依前例及單項式之減法。減 $x^3+6x-7$ 者。卽加三單項式

$$-x^3,\quad -6x,\quad 7,$$

於第一多項式中。故上式可變爲

$$x^2-3x+1-x^3-6x+7,$$

將似項倂合之而循序以書。得

$$-x^3+x^2-9x+8.$$

此卽所求答數也。

**125. 實用定例。** 以公例言之。求諸多項式之和。不外銜接書多項式之各項。而倂合其似項。

然以實用言之。則運算時。當使似項易於倂合。因之得實用定例於下。

(例) 各多項式之似項倂合後。以一元字爲主。定各式爲同序多項式。然後疊置各式。使似項同處於一縱線上。後將各縱線之似項。按法疊加。此卽所求多項式之代數和。

若所加之多項式爲不全式。則當疊置各式時。其所缺之項。宜留一空白。

(譬) 設求多項式

$$x+x^2-1,\quad x^3-x+4x^2-3,\quad x-4$$

之和。

先列各式爲同序多項式而按法疊加之。得

$$\begin{array}{r} x^2+x-1 \\ x^3+4x^2-x-3 \\ x-4 \\ \hline x^3+5x^2+x-8. \end{array}$$

設求多項式

$$\begin{array}{l} x^4+2x^2y^2-3x^3y+y^4 \\ x^4-y^4 \\ 6x^3y-5xy^3 \\ 4x^2y^2+2y^4 \end{array}$$

之和。此數式中。第一式缺 $x$ 項。第二式缺 $x^3$, $x^2$, $x$ 項。第三式缺 $x^2$, $x^4$ 項。等等。凡此缺項。均宜留一空白。故此數式可疊置之如下式。

$$\begin{array}{rrrrr} x^4 & -3x^3y & +2x^2y^2 & & +y^4 \\ x^4 & & & & -y^4 \\ & 6x^3y & & -5xy^3 & \\ & & 4x^2y^2 & & +2y^4 \\ \hline 2x^4 & +3x^3y & +6x^2y^2 & -5xy^3 & +2y^4. \end{array}$$

## 第三節。單項式與多項式之乘法。以單項式除多項式。

**126. 單項式之乘法。** 由第43及44兩欵生數乘積之定例。推得定例如下。

（例）求兩單項式之積。卽求兩單項式所含各生數之積。因是知兩單項式係數之積。卽兩單項式乘積之係數。

設求單項式

$$4x^3y^3z,\qquad 3x^2yt$$

之積。此積數應爲

$$4x^3y^3z\ 3x^2yt.$$

但按第114欵。可化爲

$$12x^3x^2y^3yzt.$$

或

$$12x^5y^4zt.$$

卽所求之答數也。

**127. 多項式受乘於單項式。** 依第48欵代數和受乘於一數之定例。可定多項式受乘

於單項式之例於下。

(例) 求多項式受乘於單項式之積。即求多項式各項受乘於單項式所得積數之和。

(譬) 設求

$$(x^4 - x^2 + 2x + 7)\, 2x^2$$

之積。其答數為

$$2\,x^6 - 2\,x^4 + 4\,x^3 + 14\,x^2.$$

又 $(a^4 - 2\,a^2\,b^2 + b^4)\,ab = a^5b - 2\,a^3b^3 + ab^5.$

**128. 兩多項式之積。** 求兩多項式之積。可用第49欵兩代數之和乘法。而定其例曰。

兩多項式相乘。卽以一多項式之各項。遞乘他多項式。而將所得各乘積相加。此公例也。

然求之實用。則運算時。當布置如下。

(例) 以一元字為主。列兩式為同序多項式。而置一多項式(法數)於他多項式(實數)下。以法數各項遞乘實數。將所得各積數疊置。如第125欵。而按法加之。

(譬一) 設求

$$4\,x - x^2 + 2\,x^3 - 3 \text{ 與 } x^2 + 15 - x$$

之積。

將兩式疊置而按上例以運算之。得

$$
\begin{array}{ll}
\text{實數} & 2x^3 - x^2 + 4x - 3 \\
\text{法數} & \quad\;\; x^2 - x + 15 \\
\hline
\text{分積} & \left\{\begin{array}{l} 2x^5 - x^4 + 4x^3 - 3x^2 \\ \quad\;\; - 2x^4 + x^3 - 4x^2 + 3x \\ \qquad\qquad\quad 30x^3 - 15x^2 + 60x - 45 \end{array}\right. \\
\hline
\text{總積} & 2x^5 - 3x^4 + 35x^3 - 22x^2 + 63x - 45.
\end{array}
$$

(譬二) 設求

$$x^3 + ax^2 + a^2x + a^3 \quad \text{與} \quad x - a$$

之積。

將兩式疊置而按上例以運算之。得

$$
\begin{array}{ll}
\text{實數} & x^3 + ax^2 + a^2x + a^3 \\
\text{法數} & \quad\;\; x - a \\
\hline
\text{分積} & \left\{\begin{array}{l} x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x \\ \quad\;\; - ax^3 - a^2x^2 - a^3x - a^4 \end{array}\right. \\
\hline
\text{總積} & x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - a^4.
\end{array}
$$

因得公式如下。

$$x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3).$$

**129. 恒等式。**無論何數代元字。兩代數式之數值恒同者。謂之同值代數式。

如 $\quad a(b + c) \quad$ 與 $\quad ab + ac$

為同值式也。

凡等式以同值代數式爲兩端者。謂之恒等式。

如
$$a(b+c)=ab+ac,$$
$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$$
爲恒等式也。

**130. 恒等式之明顯者。**凡求兩數式多項式之積。所得同值代數式。卽恒等式也。

恒等式之最明顯者。當強識之。

今先舉最要數式。爲第 49, 50, 51 諸欵所證者。

卽
$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2,$$
$$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2,$$
$$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$$
是也。

又按多項式乘法定例(見第 128 欵)。得以下恒等式。

卽
$$(x^2+ax+a^2)(x-a)=x^3-a^3,$$
$$(x^3+ax^2+a^2x+a^3)(x-a)=x^4-a^4,$$
$$(x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4)(x-a)=x^5-a^5,$$
等等…
$$(x^2-ax+a^2)(x+a)=x^3+a^3,$$

7

$$(x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4)(x + a) = x^5 + a^5$$

是也。

**131. 單項式之除法。**一單項式(實數)受除於他單項式(法數)之商。等於一命分以實數單項式爲其分子。而以法數單項式爲其分母也。

兩單項整式之商。大概不爲整式。然兩式若含元字。則命分可用公元字除分子分母以約之。

例如 $4a^3bc^2$ 與 $\frac{2}{3}ab^2d$ 之商。爲

$$\frac{12a^3bc^2}{2ab^2d};$$

此命分可約爲

$$\frac{6a^2c^2}{bd}.$$

**132.** 法實兩單項式已約後。若分母不含元字。則兩單項式之商爲一單項整式。

例如 $$\frac{4a^3b^4c^2}{3ab^2c} = \frac{4}{3}a^2b^2c.$$

從此可見。若兩單項整式之商。可爲一單項整式。實數當盡合法數各元字。而實數各元字之指數。至少當等於法數各元字之指數。此定理證法。與數學中證推求已擘質生數之一整數受除於

他整數之亦舉爲質生數者同。

**133. 單項式與多項式相除。** 以單項式除多項式。可以單項式之倒數除多項式。依第48款定理。卽得下例。

(例) 以單項式除多項式。卽以單項式除多項式之各項。

例如

$$\frac{4x^4-2ax^3+3a^2x^2+a^4}{5ax^2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{x^2}{a}-\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}a+\frac{1}{5}\cdot\frac{a^3}{x^2}.$$

又 $$\frac{\frac{2}{3}a^2x^3-5a^3x^2+2a^4x}{6a^2x}=\frac{1}{9}x^2-\frac{5}{6}ax+\frac{1}{3}a^2.$$

上所舉第二式除法。法實商三數。均爲整式也。

# 第四章。一次方程。

## 第一節。通論。

**134. 方程式。** 第129欵言。若任取一數代元字。兩代數式之數值恒同者。謂之同值代數式。設以A與B表此兩代數式。則等式

$$A = B$$

謂之恒等式。如第50欵所證等式

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

卽恒等式之例。

若A與B不爲同值代數式。則往往可求一定數。代式中元字。今兩式相等。所代之元字。謂之未知數。代入之數。謂之方程之根。或方程之答數。

故曰。方程者。獨以某數之(名爲根或名爲答數者)。代元字之(名爲未知數者)。所得之等式也。

解一方程。卽求方程之根。

**135.** (例一) 等式

$$2x + 3 = x + 5$$

非恒等式也。蓋任取一數代 $x$。此式兩端不相等。

設 $x=1$. 則上端爲 5, 而下端爲 6. 設 $x=10$. 則上端爲 23, 而下端爲 15.

故是式爲方程式。解此方程。卽求 $x$ 之定值。使兩端相等。

此定值。卽 $x=2$. 蓋若 $x=2$, 兩端之值均爲 7.

故 $x=2$ 卽方程之根。此方程僅含一根。當論其理於後。

(例二) 一方程可含數根。如

$$x^2+2=3x$$

有兩根。卽

$$x=1 \qquad x=2,$$

此方程之僅有兩根。當論其理於後。

(例三) 方程

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{3}{2}$$

亦有兩根。卽

$$x=3 \qquad x=\frac{4}{3}$$

是也。(不難證實也。)

(例四) 一方程含兩未知元字 $x$ 與 $y$.

如 $$10x+y=63.$$

其根之易見者。爲

$$x=6 \qquad y=3;$$

然此方程。尙含其他無限根數。

**136. 界說。**謂兩方程爲同根者。兩方程之根相同。卽一方程之根。置之他方程中而亦合也。

解決方程。均據以下易一方程。爲同根方程之兩定理。故不得不定同根方程之界說於此。

**137. 定理一。** 加等代數式於方程式之兩端。所得新方程與原方程爲同根。

(證) 設
$$A=B \tag{1}$$
爲任一方程式。A與B表代數式之含未知數者。而另以C表任一代數式。證此定理。當證方程(1)與方程

$$A+C=B+C \tag{2}$$

爲同根。可分兩端論之。

(一) 凡方程(1)之根。皆可爲方程(2)之根。

取方程(1)之根代未知數時。$a, b, c,$ 三式之值。可設之爲A, B, C. 因代未知元字之數。爲方程(1)之根。

故應得等式 $a=b$;

加同數$c$於其兩端,又得等式

$$a+c=b+c,$$

此可見方程(1)之根。置之方程(2)而亦合。蓋由等式$a+c=b+c$.知用方程(1)之根。代未知數。方程(2)兩端之值相等也。

(二) 凡方程(2)之根。皆可爲方程(1)之根。

取方程(2)之根代未知數時。A, B, C, 三式之值。可設之爲$a, b, c$, 因代未知元字之數。爲方程(2)之根。故設爲應得等式

$$a+c=b+c;$$

減同數$c$於其兩端,又得等式

$$a=b,$$

此可見方程(2)之根。置之方程(1)而亦合。因此兩端。知定理所言爲不謬也。

**138. 致用。**此定理爲方程各項。自一端遷至他端之用。

設於方程式

$$2x-5y+6=x+3y-7$$

之兩端。各加 $(-3y)$. 得同根方程

$$2x-5y+6-3y=x-7.$$

下端 $3y$ 一項遷至上端矣。

故凡方程一端之項。均可遷至他端。惟當變其記號耳。

**139. 推論。** 因方程下端各項。均可遷至上端。

故凡方程均可變之如下式。卽

$$A=0$$

是也。A 表一代數式。

**140. 整方程之次。** 若方程公式

$$A=0$$

之 A. 以未知元字論。爲多項整式。

此方程謂之整方程。多項式 A 之次數。卽方程之次數也。

例如方程式

$$x^2-3x+2=0$$

爲一元二次方程。又二元方程

$$x^3-x^2y+x-y+3=0,$$

以 $x$ 論爲三次。以 $y$ 論爲一次。以 $x$ 與 $y$ 並論之。亦

爲三次也。

凡方程未變爲 A＝O 時。當詳審以察其次。欲知方程之次。先當變方程爲 A＝O 蓋 A 爲已約多項式也。

例如方程式

$$(x+1)(x+2)=x^2-5$$

形似二次。蓋其兩端均爲二次。然變化之。此方程可易爲

$$3x+7=0;$$

卽爲一次矣。

**141. 定理二。** 以等代數式之已知而異於零者。乘方程之兩端。所得方程。與原方程爲同根。

（證） 設方程式爲

$$A=B, \qquad (1)$$

而 $m$ 爲已知代數式。（故 $m$ 不含未知數）。證此定理。當證方程 (1) 與方程

$$mA=mB \qquad (2)$$

爲同根。可分兩端論之。

（一） 凡方程 (1) 之根。皆可爲方程 (2) 之根。

取方程(1)之根代未知數時。A, B, 之值。可設之為$a, b$. 因代未知元字之數。為方程(1)之根。

故應得等式

$$a=b,$$

以$m$乘之。又得等式

$$ma=mb;$$

此可見方程(1)之根。置之方程(2)而亦合。

(二) 凡方程(2)之根。皆可為方程(1)之根。

取方程(2)之根代未知數時。A, B, 之值。可設之為$a, b$. 因代未知元字之數。為方程(2)之根。

故應得等式

$$ma=mb,$$

因$m$不為零。故上式可易為

$$a=b,$$

此可見方程(2)之根。置之方程(1)而亦合。因此兩端。知定理所言為不謬也。

**142. 按。** 若以未知代數式。(卽含未知數者)。乘方程之兩端。新方程與原方程之根。可不相同。

例如以$x-4$乘方程式

$$x-1=2x-3$$

之兩端。所得新方程為

$$(x-1)(x-4)=(2x-3)(x-4).$$

此方程有二根。一為 $x=2$. 置之原方程而合者。一為 $x=4$. 置之原方程而不合者。

**143. 致用。** 定理二為方程去分母之用。

例如 $$\frac{2x}{3}-\frac{1}{6}+x=\frac{x}{4}-5+\frac{x}{2}$$

以各分母之最小公倍數 12. 乘其兩端。得同根方程

$$8x-2+12x=3x-60+6x,$$

各項之分母均消去矣。

---

## 第二節。一元一次方程。

**144. 界說。** 第140款。曾定整方程之次為何物。而一元一次方程之界說。固未確定也。故特舉之。謂之一元一次方程者。卽將各項均遷至上端而約之。所得整方程式為

$$ax - b = 0$$

也。是式與 $$ax = b \qquad (1)$$

爲同根。$a, b$ 表已知之兩代數數目。此方程未加討論以前。先舉有數值可求之數例於下。

**145.** (例一) 試將方程

$$\frac{x}{3} - \frac{1}{4} = \frac{x}{8} + \frac{1}{12}$$

變之如 (1) 式。幷求其根。

若以各分母之最小公倍數 24. 乘其兩端。得同根方程。(見第 141 欵定理二)。

$$8x - 6 = 3x + 2.$$

而按第 137 欵。此方程與方程

$$8x - 3x = 6 + 2.$$

或 $$5x = 8$$

爲同根。

初列方程 $\frac{x}{3} - \frac{1}{4} = \frac{x}{8} + \frac{1}{12}$ 既改作第二式方程 $5x = 8$。知此方程。僅含一根。蓋是式表一數 $x$. 受乘於 5. 其積等於 8 也。故 $x$ 爲 8 與 5 之商。卽

$$x = \frac{8}{5} = 1{,}6.$$

**146.** (例二) 試求方程

$$(x-1)(x-2)=x^2$$

之根。

將上端算式展開之。得方程

$$x^2-3x+2=x^2,$$

由遷項法。是式變爲一次方程

$$-3x+2=0,$$

或 $$3x=2;$$

故 $$x=\frac{2}{3}$$

卽所求之根。

**147.** (例三) 試求方程

$$\frac{x}{2}-7-\frac{x}{5}=\frac{x}{4}-\frac{1}{5}+\frac{x}{20}$$

之根。

以 20 乘兩端。得同根方程

$$10x-140-4x=5x-4+x.$$

若將未知數 $x$ 項遷至上端。而已知數各項遷至下端。又得同根方程

$$0 \cdot x=136,$$

此可見所設方程爲無理式。蓋無有一數受乘於0. 其答數可異於0者。

**148.** 由前數例。推得一次方程之解法於下。

(法) 解一元一次方程。

(一) 如有分母則消去之。

(二) 展開兩端之算式。

(三) 將未知數各項遷至上端。而已知數各項遷至下端。

用是法以化方程。凡方程均可變爲 $ax=b$. 而其根易求也

**149. 討論。** 試取一次方程式

$$ax=b. \tag{1}$$

分三次論之。

(一) 設 $a$ 異於 0. 卽 $a\neq 0$.

則解方程 (1) 者。卽求一數 $x$. 被乘於 $a$. 其積等於一已知數 $b$. 而按之除法界說 (見第 53 欵)。此數適爲 $b$ 與 $a$ 之商 $\frac{b}{a}$. 故是時方程僅有一根。卽

$$x=\frac{b}{a}.$$

(二) 設 $a$ 等於 0. 而 $b$ 異於 0.

$$a=0,\quad b\neq 0,$$

則方程爲無理式。(見第 147 欵,例三)。

(三) 設 $a$ 與 $b$ 均爲 0. 則未知數 $x$ 爲無定。卽謂 $x$ 之値可爲任一數。蓋無論 $x$ 爲何數。等式

$$0.x=0$$

總爲合理也。

**150.** **按。** 若 $b$ 與 $a$ 均異於 0, 則方程式 $ax=b$ 含一根。若 $a$ 等於 0. 而 $b$ 異於 0, 則方程無根(見第 149 欵,二)。亦可謂方程之根消滅。消滅之故。可推究之於下。

設方程 (1) 式 $b$ 爲定數。而 $a$ 爲動數, 其所取之値。漸與 0 相近。則命分

$$x=\frac{b}{a}$$

變爲無窮。(見第 106 欵)。故曰。若 $b$ 爲定數而異於 0. $a$ 爲動數而與 0 接近。則方程 (1) 之根。變無窮而消滅也。

試舉第 105 欵之方程

$$x-a=xy.$$

爲例設 $a\neq 0$. 此方程可書爲

$$x(1-y)=a,$$

而按討論。可推究之曰。

使 $y$ 不爲 1, 方程僅有一根。

使$y$與1接近,則方程之根。變無窮而消滅。

此所推究與用幾何學以推究者同(見第105欵)。

---

## 第三節。一元一次不等式。

**151. 界說。** 等式分爲兩類(見第134欵)。曰恒等式。曰方程式。不等式亦可分爲兩類。曰不等式之可以任一數代元字者。曰不等式之僅可擇合宜諸數值。代未知元字者。第二類之不等式。謂之定數不等式。

故曰。定數不等式者。以合宜諸數值代未知諸元字。所得之不等式也。

解一定數不等式。卽求代入元字後。可使不等式爲合理之諸數值也。

兩定數不等式謂之同根者。兩不等式之根相同。卽兩不等式之根。可互用也。

定數不等式與方程。理論相同。故由第一節可推得以下數定理。

**152. 定理。**加等代數式於定數不等式之兩端。所得新不等式與原不等式爲同根。

(證) 此定理證法。與前節第137欵同。故不復贅。

此定理爲不等式。各項自一端遷至他端之用。且因是知凡定數不等式。均可化爲

$$A > 0,$$

A表一代數式

若A以未知元字論。爲多項整式。則是式謂之整不等式。多項式之次。卽不等式之次。

**153. 定理二。**以同數乘或除定數不等式之兩端。

(一) 若是數爲正。則所得新不等式與原不等式爲同根。

(二) 若是數爲負。則所得新不等式與原不等式爲同根。惟當易其向。

(證) 此定理證法。與第141欵同。當據第70欵定理也。此定理爲不等式去分母之用。

**154.** (例) 試取定數不等式

$$5x-\frac{x}{2}-\frac{1}{3}>3x-\frac{1}{6}+\frac{x}{3},$$

解之。

以6乘其兩端。得同根不等式

$$30x-3x-2>18x-1+2x.$$

由遷項法。得

$$30x-3x-18x-2x>2-1$$

或

$$7x>1.$$

故所求之根。為

$$x>\frac{1}{7}$$

**155.** 由前例。可得不等式解法之步驟於下。

(法) 解一元一次不等式。

(一) 據定理二。第153款去其分母。

(二) 遷各項於一端。而約不等式為 $ax-b>0$.

一元一次不等式之公式為

$$ax-b>0.$$

此式與

$$ax>b$$

為同根。

(一) 若 $a$ 為正數。則以 $\frac{1}{a}$ 乘其兩端(見第153款)。得

$$x > \frac{b}{a},$$

卽所求之根。

（二） 若$a$爲負數。則以$\frac{1}{a}$乘

$$ax > b$$

之兩端。得反向不等式

$$x < \frac{b}{a},$$

卽所求之根。

---

## 第四節。多元一次方程。

**156. 方程兩解法。** 兩元聯立方程之解法有二。曰代替法。曰消去法。試舉數例以顯之。

**157. 例一。** 設兩元聯立方程爲

$$\begin{cases} y = 2x - 13, \\ 3x - 2y = 17. \end{cases}$$

此兩方程之一。以$y$論。爲已解法者。故當用代替法。以$y$之同數,代入次方程。得

$$3x - 2(2x - 13) = 17$$

或 $$3x-4x+26=17,$$

故 $$x=9.$$

又以代入首方程。得

$$y=2\cdot 9-13=5.$$

**158. 証明。** 上例所舉方程解法。甚易證明其確否。蓋聯立方程類於前欵所設者。可定其公式。爲

$$(\mathrm{I})\ .\begin{cases} y=ax+b, \\ mx+ny=p, \end{cases}$$

而設 $a, b, m, n, p$, 爲已知代數數目。

若以 $y$ 之同數，代入次方程。則應得等式

$$mx+n(ax+b)=p;$$

展開，得 $$mx+nax+bn=p$$

或 $$(m+na)x+bn=p,$$

故 $x$ 之同數必爲

$$x=\frac{p-bn}{m+na} \qquad (1)$$

(若 $(m+na)$ 異於0)；則 $y$ 之同數必爲

$$y=ax+b=\frac{a(p-bn)}{m+na}+b$$

或
$$y=\frac{ap+bm}{m+na}\qquad(2)$$

反言之。以 $x, y$ 之同數 (1) 與 (2), 代入聯立方程 (I) 之次方程。方程亦爲合理。故使 $(m+na)$ 不爲 0, 則聯立方程 (I), 有一根, 且僅含一根, 卽等式 (1) 與 (2) 是也。

**159. 例二。** 前例設聯立方程之一。以未知數 $y$ 論爲已解者。如其否也。可於兩未知數中任取其一爲主。而視他未知數爲已知數。將聯立方程之一。先解之。

例如聯立方程

$$\begin{cases}\dfrac{x}{3}-y+2=y+1, & (1)\\ 2x+y-3=5y-3x+8 & (2)\end{cases}$$

解之之法。

可取 $x$ 爲方程 (1) 之惟一未知數。方程 (1) 而視 $y$ 爲已知數。則 (1) 爲一元方程矣。故由第 138 第 143 兩欵。得 (1) 同根方程

$$x=6y-3,$$

於是原設之聯立方程。變爲

$$\begin{cases}x=6y-3,\\ 2x+y-3=5y-3x+8,\end{cases}$$

與前例所設之式同類矣。以$x$同數代入方程(2),得

$$12y-6+y-3=5y-18y+9+8.$$

因是得 $$26y=26,$$

或 $$y=1.$$

因 $$x=6y-3,$$

故 $$x=6-3=3.$$

**160. 代替法。** 由前數例。推得聯立方程之解法於左。

(法) 解聯立方程之法。1° 取一未知數爲主。先解聯立式之首方程。2° 卽以此未知數之等值。代入次方程。3° 於是次方程僅含一未知數。可徑求其值。4° 而以求得之值。代入首方程。卽得他未知數之值。

此法謂之代替法。因取兩未知數轉輾相代而得答數也。

**161. 例三。**

$$(\text{II})\quad \begin{cases} x+y=a, & (1)\\ x-y=b, & (2)\end{cases}$$

爲已知兩數之和$a$及其較$b$.推求兩數之聯立方

程式。

使$(x, y)$之同數爲聯立式之根。則聯立兩式方程相加所得之方程。亦必以$(x, y)$之同數爲根也。今將方程(1)與方程(2)相加。得

$$2x = a + b$$

或

$$x = \frac{a+b}{2}.$$

又減方程(2)於方程(1)，得

$$y = \frac{a-b}{2}.$$

此兩同數。置之聯立式(II)中。甚易見其合理也。

**162. 例四。**

$$(\mathrm{III}) \quad \begin{cases} x + y = a, & (1) \\ \dfrac{x}{m} = \dfrac{y}{n} & (2) \end{cases}$$

爲求分一數 $a$ 爲兩分。而使此兩分與兩已知數 $m$ 與 $n$. 各成一比例數之聯立方程式(III)也。依等比例定理。方程(2)可化爲

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{x+y}{m+n}$$

或

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{a}{m+n};$$

從此推得

$$x=\frac{am}{m+n}\quad,\quad y=\frac{an}{m+n}.$$

此兩同數置之方程式(III)中。甚易見其合理也。

此聯立方程式。時遇之幾何學中。例如求三角形一邊爲分角綫截分之兩段。求圓錐截體之體面及體積等類。

**163.　按。** 由上例。亦可解聯立方程式

$$(\mathrm{III}\,bis)\left\{\begin{aligned}&x-y=a,\\&\frac{x}{m}=\frac{y}{n}.\end{aligned}\right.$$

此聯立式之根爲

$$x=\frac{am}{m-n}\quad,\quad y=\frac{an}{m-n}.$$

**164.　例五。** 加減兩方程法。用之於例三而有效。蓋聯立式中 $x$ 之兩係數。及 $y$ 之兩係數。以絕對值論。皆相等也。故兩方程相加。即消去 $y$. 而兩方程相減。即消去 $x$.

然使聯立式 $x$ 之兩係數不相等。則應以相當一數乘兩方程。使兩係數相等。然後解之如例三。此可舉例以明之。設係數不同之聯立方程

$$\begin{cases} 2x-3y=1, & (1) \\ x+2y=4. & (2) \end{cases}$$

若以2乘方程(1).以3乘方程(2).得同根聯立方程(見第141欵):

$$\begin{cases} 4x-6y=2, \\ 3x+6y=12. \end{cases}$$

此兩方程中 $y$ 之係數。以絕對值論爲等數。故兩方程相加。$y$ 卽消去。而得一元方程

$$(4+3)\,x=2+12;$$

由是 $$x=2.$$

若以(－1)與2乘方程(1)與(2).則 $x$ 之係數。以絕對值論。亦爲等數。故兩方程相加。$x$ 卽消去。而得一元方程

$$(3+4)\,y=-1+8;$$

由是 $$y=1.$$

**165. 兩元聯立方程公式。** 試取兩元一次聯立方程之最公者。解之於此。

將聯立式每方程未知數之各項。均遷至上端。而已知數之各項。均遷至下端。則聯立式變化後。恒

可等於

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} ax+by=c, & (1) \\ a'x+b'y=c', & (2) \end{cases}$$

$a, b, a', b', c, c'$ 用以表已知數也。

以 $b'$ 乘方程(1)。以 $b$ 乘方程(2)。得同根聯立式(見第141欵):

$$\begin{cases} ab'x+bb'y=cb' \\ ba'x+bb'y=bc'. \end{cases}$$

此聯立式。$y$ 之兩係數相等。夫聯立式之根 $(x, y)$ 亦必爲此聯立式兩端相減後所得方程之根。故聯立式之兩端。可兩兩相減。令 $y$ 消去而得一元方程

$$(ab'-ba')x=cb'-bc'. \qquad (1)$$

又以 $a'$ 乘方程(1)。以 $a$ 乘方程(2)。得(IV)之同根聯立式:

$$\begin{cases} aa'x+ba'y=ca', \\ aa'x+ab'y=ac'. \end{cases}$$

此聯立式 $x$ 之兩係數相等。夫聯立式之 $(x, y)$ 亦必爲此聯立式兩端相減後所得方程得之根。故聯立式之兩端。可兩兩相減。令 $x$ 消去。而得一

元方程

$$(ab'-ba')\,y=ac'-ca'. \qquad (2)$$

由此推算。知 $(x, y)$ 若爲聯立式 (IV) 之根。$x$ 必爲方程 (1) 之根。而 $y$ 必爲方程 (2) 之根。

若 $$ab'-ba' \neq 0,$$

則方程 (1) (2) 皆有一根。且惟有一根。卽

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}\ ,\quad y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}. \qquad (3)$$

以此兩同數。代入聯立式 (IV)。甚易見其合理。故定理之最公者。可述其旨。曰

若 $ab'-ba' \neq 0$, 則聯立式 (IV) 有一根,且惟有一根,卽公式 (3) 是也。

**166. 消去法。** 由前數例。推得消去法。以之解决聯立方程。其用甚廣。今以數語概括之於下。

(法) 解一次聯立方程式。先將聯立式中每方程未知數之各項。均還至上端。而已知數之各項。均還至下端。又從而約之。使聯立式等於

$$ax+by=c,$$

$$a'x+b'y=c',$$

是式既得。

然後於兩未知數中。推算其一。

然欲推算此未知數。當消去他未知數。而消去一未知數之法。當先取此未知數之兩係數。交乘聯立式之兩方程。後將兩方程之兩端。兩兩相減。

(譬) 使是法易於領會。可舉例以明之。

設聯立式爲

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} + 7 = 2x + 1; \\ \frac{x}{3} - 7y + 1 = x + y. \end{cases}$$

去分母。得 $\begin{cases} 3x - 2y + 42 = 12x + 6, \\ x - 21y + 3 = 3x + 3y. \end{cases}$

遷未知數各項於上端。已知數各項於下端。(即按 (IV) 式。見第165欵)。得

$$\begin{cases} 9x + 2y = 36, & (1) \\ 2x + 24y = 3. & (2) \end{cases}$$

以24乘方程 (1), 以2乘方程 (2), 得

$$\begin{cases} 24 \times 9x + 48y = 36 \times 24, \\ 2 \times 2x + 48y = 3 \times 2. \end{cases}$$

而將兩端相減。$y$ 因以消去。得一元方程

$$(24 \cdot 9 - 2 \cdot 2)\, x = 36 \cdot 24 - 3 \cdot 2$$

或

$$212x = 858.$$

因是推得

$$x=\frac{858}{212}=\frac{429}{106}$$

又以2乘方程(1)，以9乘方程(2)，而將兩端相減。$x$因以消去。得一元方程

$$(24.9-2.2)\,y=3.9-36.2,$$

或
$$212y=-45;$$

因是推得

$$y=-\frac{45}{212}$$

（按）乘兩方程之法數。尚可取簡於是例所用者。如求消$y$，可取12乘方程(1)，而方程(2)仍其舊。如是則$y$之兩係數仍相等。而兩方程相減。卽得

$$(12.9-2)\,x=12.36-3,$$

或
$$x=\frac{429}{106}$$

**167. 無理方程式之例。** 聯立方程無根可求者。謂之無理式。兩元一次聯立方程式中。時或遇之。今舉其例於下。

試取聯立式：

$$\begin{cases} 8x - 6y = 11, \\ 12x - 9y = 25 \end{cases}$$ 解之。

以3與$(-2)$為乘兩方程之法數。而將兩方程相加。得

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 17.$$

夫聯立式之根$(x, y)$而亦必為此方程。然此方程為無理。故所設之聯立式。亦為無理也。

**168. 無定方程式。** 聯立方程。含無窮根數者。謂之無定式。兩元一次聯立方程式中。亦時或遇之。今舉其例於下。

試取聯立式

$$\begin{cases} 8x - 6y = 11, \\ 12x - 9y = 16,5 \end{cases}$$ 解之。

以3與$(-2)$為乘兩方程之法數。而將兩方程相加。得等式

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0.$$

無論$x, y$為何數，此等式總為合理也。

此聯立式約可為一方程。蓋以$\frac{3}{2}$乘首方程之兩端。得同根方程(見第141款)；而此乘得之方程。

適爲所設聯立式之次方程。故此聯立式。可約爲一方程

$$8x-6y=11.$$

從此可見未知數如 $y$ 爲無定。蓋可任意定 $y$ 爲何數也。然使 $y$ 之值既定。則 $x$ 之值。等於

$$x=\frac{6y+11}{8}$$

爲有定矣。此聯立方程。謂之無定式。

無定式之根無窮。可任意定 $y$ 之值。而推算 $x$ 之相當值。

例如 $x=\frac{11}{8}$ , $y=0;$

$x=\frac{5}{8}$ , $y=-1;$

$x=\frac{1}{8}$ , $y=-2\ldots$

等。皆聯立式之根也。

**169. 多元方程式。相代法。** 前定兩元一次聯立方程式之解法。可引伸之。用於兩元以上之聯立方程式。然此處僅言相代法者。以此法用之多元方程。可無增損也。

(法) 使一次多元聯立方程式爲合理。方程之

數。當等於未知數之數。

解之之法。以一未知數爲主。先解聯立式之一方程。

卽以此未知數之值。代入所餘之諸方程。

於是所餘諸方程。成含方程及未知數較前少一之新聯立式。

復將此新聯立式解之如前法。如是遞解之。以至末一方程。僅含一未知數。卽可求得其值。

後將此值代入前所已解之方程中。卽可推得第二未知數之值。如是遞代。自後至前。可盡得聯立式未知數之值。

**170.** 例一。試解多元聯立方程:

$$(1)\quad \begin{cases} x - z = 3, \\ y - x + 2 = 0, \\ 3z - y - 1 = 0. \end{cases}$$

從首方程推得

$$(2)\qquad x = z + 3.$$

將此$x$之值。代入其餘諸方程。得兩元聯立式

$$(3)\quad \begin{cases} y-(z+3)+2=0, \\ 3z-y-1=0. \end{cases}$$

於此聯立式之首方程。推得

$$(4)\qquad y=z+1,$$

以此值代入末方程。得

$$3z-(z+1)-1=0.$$

因此推得

$$2z=2$$

或

$$z=1.$$

以 $z$ 同數。代入方程 (4), 得

$$y=1+1=2.$$

再以 $z$ 同數。代入方程 (2). 得

$$x=1+3=4.$$

故聯立式之根爲

$$x=4,\quad y=2,\quad z=1.$$

**171.** 例二。試解多元聯立方程:

$$\begin{cases} x+y+z=3a+b+c, \\ x+y+t=a+3b+c, \\ x-z-t=a+b-c, \\ y+z-t=3a-b-c. \end{cases}$$

從首方程。推得

$$(1)\qquad x = 3a + b + c - y -$$

而以$x$同數。代入其餘三方程。得

$$\begin{cases} 3a + b + c - y - z + y + t = a + 3b + c, \\ 3a + b + c - y - z - z - t = a + b - c, \\ y + z - t = 3a - b - c; \end{cases}$$

從而約之。得

$$\begin{cases} t - z = -2a + 2b, \\ y + 2z + t = 2a + 2c, \\ y + z - t = 3a - b - c. \end{cases}$$

從此聯立式之首方程。推得

$$(2)\qquad z = t + 2a - 2b,$$

即以此值。代入其餘兩方程。得

$$\begin{cases} y + 2(t + 2a - 2b) + t = 2a + 2c, \\ y + t + 2a - 2b - t = 3a - b - c. \end{cases}$$

約之。得

$$\begin{cases} y + 3t = -2a + 4b + 2c, \\ y = a + b - c. \end{cases}$$

末方程即$y$之值。以此代入首方程。得

$$3t = -3a + 3b + 3c$$

或
$$t = -a + b + c.$$

以 $t$ 之值。代入方程 (2)。得

$$z = a - b + c.$$

復以 $y$ 與 $z$ 之值。代入方程 (1)。得

$$x = a + b + c.$$

故聯立方程之根。爲

$$\begin{cases} x = a + b + c, \\ y = a + b - c, \\ z = a - b + c, \\ t = -a + b + c. \end{cases}$$

# 第五章。一次方程問題。一次函數。

## 第一節。一元方程問題。

**172. 界說。** 第7欵所言者,可申言之於此。

解決一問題者。因已知數與未知數之關係。以求未知數之等値也。

詮釋一問題者。以常語解已知數與未知數之關係也。

解一問題。卽求未知數之値。求得之値。謂之根。

例如言:"求一數被除於3,其商等於此數與30之較",此卽詮釋一問題也。問題之已知數。爲3與30.而其未知數。卽所欲求之數。解此問題。卽推求是數之根也。

解決問題之法術未立以前。先舉數問題爲例。

**173. 問題一。** 求一數被除於3,其商等於此數與30之較。

解之曰。以$x$表所求之數。則被除於3之商爲$\frac{x}{3}$.

若$x$為所求之數。則$\frac{x}{3}$應等於$x-30$;故應為

$$\frac{x}{3}=x-30.$$

反言之。凡數$x$合於是方程者。均合題旨。故為是題之根。

推求是根。可將此一次方程式解之。

去是方程之分母。得

$$x=3x-90$$

或 $$2x=90,$$

$$x=45.$$

故所求之數為45.

**174. 問題二。** 父年30歲。子年4歲。問再歷若干年。父年適為子年之倍。

解之曰。以$x$表所求之年數。則再歷$x$年數。父年為$30+x$而子年為$4+x$.

若$x$為所求之數。則父年$30+x$,應等於子年$4+x$之倍。故應為

$$30+x=2(4+x).$$

反言之。凡數$x$可合於是方程者。按之題旨而

亦合。故爲是題之根。

推求是根。宜將此一次方程式解之。展開下端之算式。得

$$30+x=8+2x;$$

遷項得
$$2x-x=30-8$$

或
$$x=22.$$

故22年後。父年適爲子年之倍。則父年爲$30+22=52$,而子年爲$4+22=26$也。

**175. 例方程式。** 解決問題之步驟。可於是兩例見之。先以$x, y$等元字。表未知數。而按題旨。立一等式。使未知數$x, y$等之同數。代入之而合理也。

如是所得之等式。卽問題之方程。而推求問題之根。不外解决此方程而已。

謂之一次問題者。所應解之方程惟爲一次也。

**176. 定未知數。** 題旨大率表明何者爲未知數。

例如問題一之題旨言求一數。則未知數固爲是數。

然有時題旨不切定何者爲未知數。則當取幾何之足以定所求之答數。而無混淆之弊者。爲未知數。

例如問題二。可用下法詮釋之曰。父年 30 歲。子年 4 歲。問可有一時。父年適倍於子年。

按此題旨。未知數尙未切定。故幾何之可爲未知數者。不止一數。或如前法。取父年倍子年時所歷之年數。爲未知數。或取是時父所有之年。爲未知數。或取是時子所有之年。爲未知數。

凡此諸未知數。均可任意定之。

試取父所有之年。爲未知數 $x$. 解此問題。夫子年較之父年。少 26 歲。則父年爲 $x$. 子年必爲 $x-26$. 故得方程式

$$x = 2(x-26);$$

因是得 $$x = 52.$$

未知數雖可任意選定。然亦不可出之意外。當定一未知數。令所得方程爲最簡式。

自後數章觀之。知未知數之含兩方向者。不可不注意也。

**177. 問題三。** 求一整數爲兩號碼所合成者。其十位之號碼。爲單位號碼之倍。而倒置兩號碼之次序。是數卽減少27.

解之曰。此題不可取所求之整數。爲未知數。蓋攷其實。應有二未知數。卽所求數之兩號碼也。然知單位號碼。十位號碼可徑得之。故可取單位號碼爲未知數$x$. 十位號碼。卽爲$2x$.

於是所求之數。爲$2x\times10+x=21x$.

而倒置號碼後所得之數。爲$x\times10+2x=12x$.

按題旨應得方程式

$$21x-12x=27$$

或
$$9x=27;$$

因是得
$$x=\frac{27}{9}=3.$$

單位號碼爲3, 十位號碼爲6.

而所求之數爲63.

**178. 無理問題。** 問題之可爲無理。其故有二。

(一) 所用以解決問題之方程。無根可求;

(二) 方程雖有根。而不合題旨。蓋所求之幾何。

當與所問之條欵相應。

例如問題三。未知數 $x$ 爲一號碼。故所求之根。應爲整數。爲正數。而小於10者。乃能合理也。

是類問題。可舉數例於下。

**179. 問題四。** 試求一數。從是數之半。減去是數之三分之一。又加12,等於是數之六分之一加4.

解之曰。設 $x$ 爲所求之數。

按題旨。應得:

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+12=\frac{x}{6}+4.$$

去分母。得

$$3x-2x+72=x+24$$

或 $$3x-2x-x=24-72$$

或 $$0\cdot x=-48.$$

此方程爲無理式。故問題爲無理。

**180. 問題五。** 一人以銀幣八枚。付欵五十佛郎。此八枚中。有值五佛郎者。有值二佛郎者。問值五佛郎者幾枚。值二佛郎者幾枚。

解之曰。若以 $x$ 表值二佛郎銀幣之枚數。

則值5佛郎銀幣之枚數爲$8-x$.

於是所付之總數。爲$5(8-x)+2x$佛郎。而按題旨。此總數應等於50佛郎。故應得方程式

$$5(8-x)+2x=50$$

或
$$40-5x+2x=50.$$

因是得
$$x=-\frac{10}{3}$$

$x$之值爲分數。又爲負數。夫按問題之性質。$x$之值。應爲正數。爲整數。而最大者等於8. 故問題無根。

（案）若所付總數。爲31佛郎。此問題能含一根。蓋前立方程。變爲

$$40-5x+2x=31;$$

因是得
$$x=3.$$

故值二佛郎銀幣之枚數爲3. 而值五佛郎銀幣之枚數。爲$8-3=5$.

## 第二節。負根。討論。

**181. 負根之解釋。**若解一問題。按其性質。

所得之根。應爲正數。而竟得負根。此問題爲無理。

問題五。卽其例也。

然有時未知數爲幾何之可以兩方向論者。若時刻。若距離。若欵項之爲贏爲虧。則負根亦有意義可繹。

故負根之義可釋之曰。記號(—)列於未知數之前者。所以表此未知數之向。與題旨所定未知數之向相反。

欲知問題之負根。是否當理。可用下法核之。

先取題旨所定之向爲未知數之正向。而以 $x$ 表未知數之代數量。

後按第二章諸定理。重立問題之方程式。如常法。

使所得之負根。誠爲當理。重立方程。應與原立方程相等。

試舉數例於下。

**182** **問題六。** 父年60歲。子年34歲。問再歷若干年。父年倍於子年。

解之曰。設以 $x$ 表所歷年數。則由題旨以推。應得:

$$60+x=2(34+x).$$

因是得 $x=-8.$

按題旨所設。$x$之值應爲正數。然此所論者爲時。故記號(−)。卽或以表父年倍子年時在八載以前。

求達是義。可設$x$爲一數。其正負隨所求之時。前於今時。或後於今時爲斷。

於$x$時。無論$x$爲正數。或爲負數。父年總等於$60+x$. 子年總等於$34+x$. 故仍得前定方程。

$$60+x=2(34+x).$$

故此題負根之義。可解之曰。八載以前。父年$60-8=52$歲。爲子年之倍。蓋是時子年爲$34-8=26$歲也。

**183. 問題七。** 設有旅行者兩人。由路上之兩點A及B, 同時起程。而兩人均自A向B行。首一人自A起程。每點鐘行15基羅邁當。次一人自B起程。每點鐘行18基羅邁當。A與B相去42基羅邁當。問兩人相遇處。距B點若干遠。

解之曰。定$x$爲所求距離之基羅邁當數。則按

題旨。首一人行$x+42$基羅邁當。而所行之時間爲$\frac{x+42}{15}$點鐘。次一人行$x$基羅邁當。而所行之時間爲$\frac{x}{18}$點鐘。兩人相遇時。則應得等式

$$\frac{x+42}{15}=\frac{x}{18};$$

化之,得 $$6x+252=5x.$$

從此得 $$x=-252$$

因$x$之値爲負。故二人相遇處。不能在B點後。

兩人相遇處。旣不能在B點後。則應在B點前。此不可不推求者也。今設兩人所行之路。同趨一向。兩人之就道。不自A點及B點而始。

則題旨可增損之如下。

有旅行者兩人。同行一路。皆自A向B行。首一人每點鐘行15基羅邁當。次一人每點鐘行18基羅邁當。首一人行經A時。次一人在B. A與B相去42基羅邁當。問距B若干遠。二人適相遇。

解之曰。此新立之題旨。未定兩人之相遇點。亦未言兩人相遇在B點前。或在B點後。

故可取自A至B之向爲正向。而以$x$表B點與相遇M點之距離。此距離以AB向爲正。而以反乎是者爲負。

故所取之未知數爲定向線$\overline{\mathrm{BM}}=x.$

夫$\overline{\mathrm{AM}}$之大小及記號。等於

$$\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BM}}=42+x.$$

而按第99欵公式(2).自兩人經A與B.至兩人相遇。其間所行之時。於首一人爲$\frac{42+x}{15}$於次一人爲$\frac{x}{18}$故得

$$\frac{42+x}{15}=\frac{x}{18}$$

此式與前定方程同。

故負根$x=-252$確有意義。卽謂二人相遇處。在B點前252基羅邁當也。

**184. 公例。** 由前數例。可見每遇負根。當尋繹其義者。其故由於問題之措詞不妥。或由於題旨所定未知數之向。未盡確當也。

若問題之措詞既妥。於題旨中。不必先言未知數爲何向。蓋未知數之向。可定之於後也。如是則

問題不必重行解决。而負根之義已定。今定解問題之公例於後。

若問題中未知數可以相反兩方向論者。則應先定一向爲未知數之正向而以 $x$ 表未知數之代數量。

然後審取法之最公者。立問題之方程。要使所立方程。無所往而不通。於是求得之根。常有意義矣。

**185. 問題八。** 一人以佛郎200與人博。共博兩次。第一次赢第二次輸餘之倍。第二次輸300佛郎。問兩次後。是人輸去或赢得者幾何。

解之曰。定爲 $x$ 輸去或赢得之佛郎數。使是人於兩局後。總計之而赢。則 $x$ 爲正。使總計之而輸。則 $x$ 爲負。無論 $x$ 之或爲正或爲負。

是人於第二次後所餘之佛郎數。總爲 $200+x$.

夫第一次赢 $2(200+x)$ 佛郎。則第一次後。是人所有之佛郎總數。爲 $200+2(200+x)$. 第二次輸300佛郎。則第二次後。是人所有之佛郎總數。爲 $200+2(200+x)-300$ 故應得

$$200+2(200+x)-300=200+x$$

或 $$200+400+2x-300=200+x.$$

因是得 $$x=-100.$$

故是人於兩次後。輸去100佛郎。

**186. 討論。** 若問題之已知數。非數目而元字。則求得之根。爲已知元字合成之代數式。而未知數之值。係乎已知元字之值。

取類於是之問題而討論之者。卽遞按代入已知元字之數値。推求(一)問題能否含合理之根。(二)答數之性質若何。試取問題之最簡者而審察之。

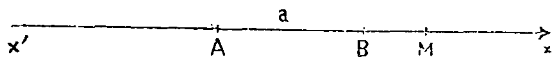
**187. 問題九。** 已知軸上兩點A及B,求一點M,使定向線$\overline{AM}$, $\overline{BM}$之比例。爲

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{AM}}=k,$$

$k$爲已知數。

解之曰。此題爲第二章第四節問題之反(見第105款。

解之之法。可先於AB直線上。(第十五圖)。定自A趨B爲正向。而以$a$表定向線$\overline{AB}$故爲正數。




(第十五圖)

又取定向線 $\overline{AM}=x$ 爲未知數。可常得等式(見第80欵)

$$\overline{BM}=\overline{AM}-\overline{AB}=x-a,$$

故 $$\frac{x-a}{x}=k$$

或 $$x-a=kx,$$

由遷項法。得 $$x(1-k)=a. \quad (1)$$

(討論) 令方程(1)有一根數。當令 $1-k$ 不爲零。卽謂 $k$ 應異於1也。使 $k$ 誠異於1。

則方程有一根。卽

$$x=\frac{a}{1-k}. \quad (2)$$

於是再當推求者。爲M點之地位。然欲知是點之地位。當知 $x$ 爲正。抑爲負。旣知 $x$ 爲正矣。又當知 $x$ 大於或小於 $a$,試論之於後。

若 $k>1$, 則 $x$ 爲負。而M點在 $x'$A界內。偏向A點一邊。

若 $0<k<1$, 則 $x$ 爲正。而大於 $a$, 蓋其分母小

於1也。

則M點在B以外。B$x$界內。

若$k<0$，則$x$爲正。而小於$a$，則M介於AB之間。

若$k=0$，則$x=a$，而M在B.

綜核之。可列表如下。

若 $k<0$，則 $0<x<a$， M介於AB之間；

若 $k=0$，則 $x=a$， M在B；

若 $0<k<1$，則 $x>a$， M在B以外；

若 $k=1$，則方程無根；

若 $k>1$，則 $x<0$， M在A前。

**188.** **問題十。** 一直角四邊形。底等於十邁當。高等於五邁當。問底當引長幾何。或縮短幾何。可使此四邊形之面積。等於S.

解之曰。定$x$爲所求之長。若底當引長。則$x$爲正。若底當縮短。則$x$爲負。無論$x$之爲正爲負。按之題旨。底總等於$10+x$.而求積之方程。爲

$$(10+x)5=S$$

化之。得
$$50+5x=S.$$

因是得
$$x=\frac{S-50}{5}.$$

(討論) 討論是題。當先知 $x$ 之記號。

若 $S > 50$, 則 $x$ 爲正。而底當引長。

若 $S > 50$, 則 $x$ 爲負。而底當縮短。

然因底僅10適當。故 $x$ 若爲負。以絕對值論。當小於10. 卽謂 $x$ 當大於 $-10$. 此可表之以不等式

$$\frac{S-50}{5} > -10$$

或 $$S - 50 > -50$$

或 $$S > 0.$$

按題常通。故求得之根。常能合理也。

若 $S = 50$, 則 $x = 0$. 此可豫見者。蓋已知四邊形之面積。等於50也。

---

## 第三節。多元問題。

**189. 通論。** 多元問題之解法。與定列方程式。與一元問題同。(見175欵及184欵)。

以 $x, y, z \ldots$ 表未知數。而將等式含未知數 $x, y, z \ldots$ 之同數而合理者。書列之。於是問題之方程立。

其餘所當從事者。僅解決方程。及討論答數耳。

**190. 要按。** 然有當注意者。使問題含若干根有一定數。當使方程之個數。與未知數之個數等。

**191.** 若方程之個數。少於未知數之個數。則問題往往為無定式。無一數不可為是題之根。

例如求兩數 $x, y$, 使方程

$$5x+3y=8 \text{ 為合理。}$$

以一方程求兩未知數。其答數之無窮。甚為易見。蓋上列方程。可易以下式

$$x=\frac{8-3y}{5}.$$

若以任一數代 $y$. $x$ 必有相當之值應之。

例如 $y=0$ ，則 $x=\frac{8}{5}$;

$y=1$ ，則 $x=1$;

$y=-1$ ，則 $x=\frac{11}{5}$;

$y=\frac{1}{3}$ ，則 $x=\frac{7}{5}$;

以此類推。$x$ 與 $y$ 之同數。可至無窮。

**192.** 若方程之個數。多於未知數之個數。則問題往往爲無理式。無一數可爲是題之根。

試按立聯方程

$$\begin{cases} 5x-3y=12, \\ 2x+\ \ y=7, \\ 4x-2y=3, \end{cases}$$

求 $x, y$ 之同數。若解首兩方程。則 $x, y$ 各有一同數。可爲是兩方程之根。卽 $x=3, y=1$.

然以 $x=3, y=1$ 代入末一方程中。則不合。蓋其答數爲

$$10=3 \text{ 也。}$$

因 $x,y$ 之値。能爲首兩方程之根。而不能爲末一方程之根。故聯立式無根。

**193.** **問題十一。** 兩數之較。與此兩數之商。均等於5. 問是兩數爲何數。

解之曰。定 $x$ 與 $y$ 爲所求之兩數。按題旨。應得

$$\begin{cases} x-y=5, \\ x=5y. \end{cases}$$

以 $x$ 之等値 $5y$, 代入首方程。得

$$4y = 5,$$

故
$$\begin{cases} y = \frac{5}{4}, \\ x = 5 . \frac{5}{4} = \frac{25}{4} \end{cases}$$

**194. 問題十一之公式。** 兩數之較與兩數之商。均等於一數 $a$. 問是兩數爲何數。

解之曰。定 $x, y$ 爲所求之兩數。則按題旨。應得

$$\begin{cases} x - y = a, \\ x = ay. \end{cases}$$

以 $x$ 等值代入首方程。得

(1) $$ay - y = a,$$

則 $$y = \frac{a}{a-1}, \qquad \text{若 } a \neq 1,$$

而 $$x = \frac{a^2}{a-1}$$

使 $a \neq 1$, 問題常有根。

使 $a = 1$, 則方程 (1) 爲

$$0 = 1:$$

而問題無根。

**195. 問題十二。** 設於一比例之兩項。各

加5,比例等於$\frac{9}{11}$.復於其兩項。各減5,比例等於$\frac{2}{3}$.問是比例之兩項爲何數。

解之曰。定$\frac{x}{y}$爲此比例。則按題旨。應得

$$\begin{cases} \dfrac{x+5}{y+5}=\dfrac{9}{11}, \\ \dfrac{x-5}{y-5}=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

化之得兩方程

$$\begin{cases} 11x+55=9y+45, \\ 3x-15=2y-10. \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} 11x-9y=-10, \\ 3x-2y=5. \end{cases}$$

若消去$y$(見166款)。

則 $5x=65$, 故 $x=13$.

若消去$x$.

則 $5y=85$, 故 $y=17$.

故所求之比例爲$\frac{13}{17}$.

**196. 問題十三。** 兩旅行者A與B相向行。自相距46里之兩城起程。若A先B行$5^h\,3/4$,則

相遇時。在B起程後$6^h$ 1/8. 若B先A行$5^h$ 3/4, 則相遇時。在A起程後$5^h$ 5/8. 問A,B之速度若何。

解之曰。定$x$爲A之速度。$y$爲B之速度。以里及小時爲準個。

按題旨所設之前半節, A行$5^h$ 3/4 ＋ $6^h$ 1/8, 卽$11^h$ 7/8. 故A所行之路,爲$x\left(11+\frac{7}{8}\right)$里;B僅行$6^h$1/8, 故B所行之路,爲$y\left(6+\frac{1}{8}\right)$里。

因兩人共行46里。

故共和爲

$$x\left(11+\frac{7}{8}\right)+y\left(6+\frac{1}{8}\right)=46.$$

又按題旨所設之下半節。A行$5^h$ 5/8, 故A所行之路,爲$x\left(5+\frac{5}{8}\right)$; 而B行$5^h$ 3/4 ＋ $5^h$ 5/8里。卽$11^h$ 3/8. 故B所行之路,爲$y\left(11+\frac{3}{8}\right)$里。

因兩人共行46里,故共和爲

$$x\left(5+\frac{5}{8}\right)+y\left(11+\frac{3}{8}\right)=46.$$

去各項分母。得兩方程

$$\begin{cases} 95x + 49y = 368, \\ 45x + 91y = 368. \end{cases}$$

解决之。得

$$x = \frac{12}{5}, \qquad y = \frac{20}{7}.$$

故 A 每小時行 2, 2/5 里。

B 每小時行 2, 6/7 里。

**197. 問題十四。** 若分 232 爲三分。而於第一分。加餘兩分和數之半。於第二分。加餘兩分和數三分之一。又於第三分。加餘兩分和數四分之一。可使此所得之三和數相等。問所分三分。各得若干。

解之曰。定 $x, y, z$ 爲三數。

按題旨。應得

$$x + y + z = 232,$$

$$x + \frac{y+z}{2} = y + \frac{x+z}{3} = z + \frac{x+y}{4}$$

此聯立式。可化爲

$$\begin{cases} x + y + z = 232, \\ 4x - 3y + z = 0, \\ 3x + y - 2z = 0. \end{cases}$$

解决之。得

$$x = 40, \qquad y = 88, \qquad z = 04.$$

即所求之數也。

---

## 第四節。一次函數之消長。

**198. 變數。** 凡幾何可變動而不均於一定數者。謂之變數。

凡幾何可取任意一數爲等值。而所取之數。或大或小。或正或負。皆不可計者。是幾何謂之自變數。猶言是幾何不隨他幾何而變也。

大概用元字$x$表自變數。

**199. 函數。** 謂一變數幾何爲自變數之函數者。其等值隨自變數之等值而易也。

故函數又可謂之被變數。

例如。圜周之長。爲圜半徑之函數。又如。一行動物速度。每秒鐘行4邁當。則其所行路程之遠近。隨所行時間之久暫而變。故路程爲時間之函數。

物理學中函數之例。尤爲多見。如鐵桿之長。隨熱度而變。炙之則伸。寒之則縮。是鐵桿之長。亦爲熱度之函數。

大概以$y$表函數。或被變數。

言一數$y$爲自變數$x$之函數者。卽言$x$之值若可知。$y$之值卽可求也。

設圜之半徑爲$x$. 則圜周之長。可以公式

$y=2\pi x$表之。夫$\pi=3,1416$.

故$x$若爲已知數。卽可求$y$.

例如

$x=1$邁當。則$y=6$邁當, 2832;

$x=3$邁當。則$y=18$邁當, 8496.

以下類推。

又設一動物每秒鐘能行4邁當。則於$x$時間所行之路$y$, 爲

$$y=4x.$$

若知$x$, $y$之値。卽可於是式求之。

例如 $x=2$秒。 則$y=8$邁當。

$x=3$秒。 則$y=12$邁當。

$x=5$秒, 2。則$y=20$邁當, 8.

以下類推。

若一幾何$y$爲變數$x$之函數。卽有一公式可爲已知$x$求$y$之用。

此公式於算學中。卽所以定函　$y$者也。

**200. 一次函數。** 函數之最簡者。爲$y$等於$x$之一次多項式。是類函數。謂之一次函數。

例如等式

$$y = 4x - 5 \tag{1}$$

所以定函數$y$者。$y$之値隨$x$之値而變。已知$x$卽可求$y$，然$4x-5$爲$x$之一次多項式。是等式(1)之函數$y$爲一次函數也。

故曰$y$爲$x$之一次函數者。卽$y$等於$x$之一次多項式也。卽$y$之數値。當以公式

$$y = ax + b$$

求之者也。公式中$a$與$b$表一定數及已知數。謂之恒數。

上舉諸例。如以圜之半徑求圜周。以時間求動物所行之路。以熱度求鐵桿之長。皆一次函數也。

若圜之面積。卽非半徑之一次函數矣。蓋設 $y$ 爲圜之面積。而以 $x$ 表半徑。得公式

$$y = \pi x^2 = 3{,}1416 . x^2.$$

$y$ 爲 $x$ 二次。故 $y$ 不爲一次函數。

**201. 升函數。** 謂之升函數者。函數之消長。與變數之消長同向也。

質言之。

謂之升函數者,變數之値增。函數之値,與之俱增也。

例如圜周爲半徑之升函數。蓋半徑增而圜周亦增。

又鐵桿之長。亦爲熱度之升函數。蓋熱度升而桿亦加長。

**202. 降函數。** 謂之降函數者。函數之消長。與變數之消長反向也。

質言之。

謂之降函數者,變數增而函數反減也。

設取一圜筒。實以空氣。以木塞封口。用力壓木塞使之下降。則空氣收縮。容積因以減小。

是圓筒中空氣之容積。爲木塞壓力之函數也。因壓力長而容積反減。故此函數爲降。

**203. 按。** 由前數欵推之。如欲知函數之爲升爲降。可以任意兩數代變數。而觀函數相應之兩值。其最大爲何數。

如變數大而應之之函數亦大。則函數爲升。

如變數大而應之之函數反小。則函數爲降。

**204. 定理一。** 一次函數之升降。視$x$係數之正負。

(證) 設於一次函數

$$y = ax + b.$$

以任意兩數$x'$ $x''$代$x$而設

$$x' > x''.$$

於是$x$變數有兩值。而$y$函數亦以兩值$y'$及$y''$應之。卽

$$\begin{cases} y' = ax' + b, \\ y'' = ax'' + b. \end{cases}$$

可分兩端論之。

**205.** (一) 設$a > 0$. 因$a$爲正數。故以$a$乘

不等式

$$x' > x''$$

之兩端(見第70款)。仍得一同向之不等式

$$ax' > ax''.$$

於此不等式之兩端。可各加一數 $b$(見第69款)。得

$$ax' + b > ax'' + b,$$

即

$$y' > y''$$

因函數之最大値 $y'$. 應 $x$ 之最大値 $x'$. 故函數爲升。

例如 $$y = 4x - 3$$

爲升函數。蓋 $x$ 之諸數若升。相應之諸函數。與之俱升。

| | | | |
|---|---|---|---|
| 設 | $x = -2,$ | 則 | $y = -11,$ |
| ,, | $x = -1,$ | ,, | $y = -7,$ |
| ,, | $x = 0,$ | ,, | $y = -3,$ |
| ,, | $x = 1,$ | ,, | $y = 1,$ |
| ,, | $x = 2,$ | ,, | $y = 5,$ |
| ,, | $x = 3,$ | ,, | $y = 9,$ |

等。

$y$ 之同數。$-11, -7, -3, 1, 5, 9,$ 等。由小至大。故

爲升數也。

**206** (二) 設 $a<0$. 因爲負數。故以乘不等式

$$x'>x''$$

之兩端。應得一反向不等式(見第70款)

$$ax'<ax''.$$

而於此不等式之兩端。各加一數 $b$(見第69款),得

$$ax'+b<ax''+b,$$

卽

$$y'<y''$$

因函數之最小値 $y'$ 應變數 $x$ 之最大値 $x'$ 故函數爲降。

例如 $$y=7-2x$$

爲降函數。蓋

$$\begin{array}{ll} x=-2, & y=11, \\ x=-1, & y=\ \ 9, \\ x=\ \ \ 0, & y=\ \ 7, \\ x=\ \ \ 1, & y=\ \ 5, \\ x=\ \ \ 2, & y=\ \ 3, \\ x=\ \ \ 3, & y=\ \ 1, \\ x=\ \ \ 4, & y=-1, \end{array}$$

等等。

$x$ 之諸數升。而 $y$ 之諸數 11, 9, 7, 5, 3, 1, $-1$, 等反

降。故函數爲降也。

**207. 定理二。** 若變數大至無窮。則一次函數亦大至無窮。而其記號視$x$項之記號。

（證） 試取函數

$$y=\frac{x}{10}-3,$$

證之。定理$x$言之值極大而爲正數。$y$則亦極大而爲正數。

設$y$之值欲其大於1 000 000.

則當令

$$\frac{x}{10}-3>1\,000\,000,$$

而將是式解之（見第155欵）。得

$$x>10\,000\,030,$$

故使$x$大於10 000 030，可令$y$大於一兆。

由是以言必可使$x$大於一數。令$y$大於一京一垓也。故定理所言爲不謬。

定理又言$x$之值極大而爲負數則$y$之絕對值極大。而爲負數。設$y$之絕對值。欲其大於一秭。而爲負數。則應小於$-1\,000\,000\,000$，卽

$$\frac{x}{10}-3<-1\,000\,000\,000,$$

而 $$x < -9\,999\,999\,970$$

故令$y$爲負數。而其絕對值大於一秭。不外令$x$之絕對值大於 9 999 999 970 而爲負數而已。此亦足以證定理所言爲不謬。

**208.** 然上欵所取函數$x$之係數爲正。故$x$大而$y$亦大也。使$x$之係數爲負。則$x$與$y$適相背。

試取函數

$$y = \frac{1}{5} - \frac{x}{2} = 0{,}2 - 0{,}5x$$

觀之。此理甚易見也。蓋於所取函數中。令$x$極大而爲正數。則$y$之絕對值。亦極大。惟易爲負數矣。設

$$x = 1\,000\,000, \qquad 則 \quad y = -499\,999{,}8;$$

$$x = 1\,000\,000\,000, \quad 則 \quad y = -499\,999\,999{,}8,$$

等等。

反是。令$x$有極大絕對值而爲負數。$y$亦極大。惟易爲正數矣。設

$$x = -1\,000\,000, \qquad 則 \quad y = 500\,000{,}2;$$

$$x = -1\,000\,000\,000, \quad 則 \quad y = 500\,000\,000{,}2,$$

等等。

**209.** 按。前章曾以記號$+\infty$(見第107欵)

表極大之正數。而以$-\infty$表數之有極大絕對值而負者。今亦可用是二記號。概括前數欵如下式。

凡一次函數均可化為

$$y = ax + b,$$

$$若 a > 0, \begin{cases} x = +\infty & 時, \quad y = +\infty; \\ x = -\infty & 時, \quad y = -\infty; \end{cases}$$

$$若 a < 0, \begin{cases} x = +\infty & 時, \quad y = -\infty; \\ x = -\infty & 時, \quad y = +\infty. \end{cases}$$

**210. 函數$ax+b$之消長。** 由前兩定理。卽可推一次函數

$$y = ax + b$$

之消長。惟函數$y$若為零。則等式變為

$$0 = ax + b,$$

而

$$x = -\frac{b}{a}.$$

此不可不表別者。

**211.** (一) 設$a > 0$. 若將$x$之值逐漸增長。自極大絕對值之負數。至極大之正數。卽$x$自$-\infty$長至$+\infty$.(讀曰自負無窮。長至正無窮)。

由定理一及定理二(見204欵及207欵)知函數$y$.

於是時亦自$-\infty$長至$+\infty$.

故函數初爲負。於$x=-\frac{b}{a}$時爲零。後爲正。

**212.** (二) 設$a<0$. $a$既爲負。則由前兩定理(見204欵及207欵)。知$x$若自$-\infty$長至$+\infty$函數。$y$自$+\infty$降至$-\infty$.

故函數初爲正。於$x=-\frac{b}{a}$時爲零。後爲負。

**213. 消長表。**欲將前兩欵所言者概括之。當立一表。此表須含兩行。於首一行自下向上。列$x$逐漸增之諸數。於次行列函數$y$與$x$相應之諸値。於是取表自下向上讀之。卽可知函數之爲升爲負矣。今定兩表於下。一爲$a>0$ $y$之消長。一爲$a<0$消長。

| $a>0$ | | $a<0$ | |
|---|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $x$ | $y$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| 升 | 升<br>負 | 升 | 降<br>正 |
| $-\frac{b}{a}$ | 0 | $-\frac{b}{a}$ | 0 |
| 升 | 升<br>正 | 升 | 降<br>負 |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

然欲洞曉函數之消長。當以圖顯之。蓋按圖能知消長之趨向。較表爲尤善。下節卽推究用圖顯消長之法也。

## 第五節。$ax+b$ 消長之圖解。

**214. 熱度之圖解。** 設有人旅居一地。時方正月。將一日內。自正午至子時夜各小時之熱度盡誌之。則得一熱度表如下。

| | | | |
|---|---|---|---|
| 正午…… | $+5°,1$ | 7 點……… | $+3°$ |
| 1 點……… | $+5°,8$ | 8 點……… | $+1°,5$ |
| 2 點……… | $+6°,2$ | 9 點……… | $-0°,7$ |
| 3 點……… | $+5°,9$ | 10 點……… | $-2°,1$ |
| 4 點……… | $+5°,5$ | 11 點……… | $-3°,6$ |
| 5 點……… | $+5°$ | 12 點……… | $-4°,3$ |
| 6 點……… | $+4°,2$ | | |

是表爲連續各小時之熱度所合成。故觀此。知自正午至二點鐘。熱度自 $+5°,1$ 升至 $+6°,2$. 以後連降。至子夜爲 $-4°,3$. 設以圖解易此表。則尤爲爽目。試將圖解法。敘列於後。

取(第十六圖)一紙有方格者。而於紙上。以鉛筆畫一橫線 $ox$ 及一縱線 $oy$.

在 $ox$ 之直線上。平分格線。以表各小時。$o$ 所以表正午。而 1,2,3 等所以表一點,二點,三點鐘也。用 $oy$ 表熱度。$o$ 所以表熱度 $0°$. 而取 $oy$ 自下向上之各分。爲格線所平分者。表正度 $+1°, +2°, +3°$ 等。取自上向下由 0 起點之各分。表負度 $-1°, -2°, -3°$ 等。

如是。則凡一熱度。均以時間縱線與熱度橫線

相交處之一點表之。

例如7點鐘時。熱度爲十3°. 即可以7點鐘之縱線與3°之橫線相交處之M點表之。(見第十六圖)。循是以求。

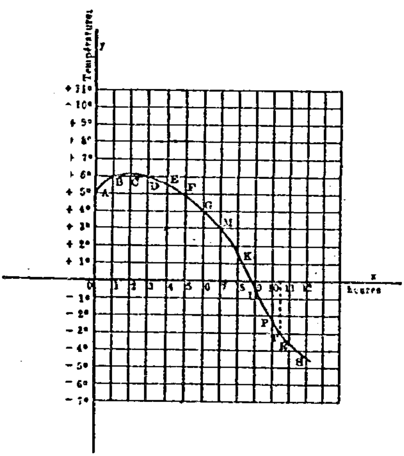
*oy* 線上之A點。即所以表正午熱度爲十5°,1;

縱線上之B點。所以表1點鐘時熱度爲十5°,8;

縱線上之C點。所以表2點鐘時熱度爲十6°,2;

縱線上之D點。所以表3點鐘時熱度爲十5°,9;

餘皆準此。



(第十六圖)

自9點鐘。各點均處 $ox$ 下。蓋熱度爲負數也。

例如縱線上之L點。所以表9點鐘時熱度爲 $-0°,7$;

縱線上之P點。所以表10點鐘時熱度爲 $-2°,1$;

縱線上之R點。所以表11點鐘時熱度爲 $-3°,6$;

縱線上之S點。所以表子夜熱度爲 $-4°,3$.

將巳定之各點 A, B, C, D,... P, R, S 等連之。得一弧線 ABCD... PRS. 此弧線謂之熱度之圖解。

**215. 便利。** 於是前立之表(第165頁)。可以此第十六圖解易之矣。若欲知8點鐘時熱度爲何。第觀弧線與8點鐘之縱線相割處。卽可知是時之熱度爲 $1°,5$, 蓋交點K居 $+1°$ 與 $+2°$ 之中也。

圖解最便寓目。蓋使熱度而升。則表之之各點亦升。而弧線與之俱升。反是。使熱度而降。則表之之各點亦降。而弧線與之俱降。故第取圖解一閱。卽可知弧線始升至2點鐘。後降至子夜。

然圖解之利。尙不止是。無論某時。均可因圖解而知是時之熱度。反之。旣知熱度。亦可因圖解而知相當者爲某時。

如欲知 $10\frac{1}{2}$ 點鐘之熱度。可於 $ox$ 上10,5點鐘之分點處。畫一縱線(見十六圖上繼續細點處)。

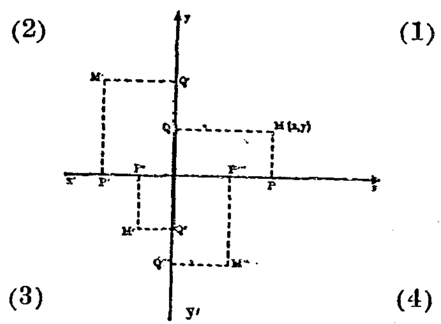
此縱線與弧線相遇於一點 T. 而 $oy$ 上與 T 點相應之一分點。卽指明是時之熱度。今與 T 相應之分點。鄰於 $-3^\circ$. 故 $10\frac{1}{2}$ 點鐘時之熱度。約 $-3^\circ$ 也。

反之。試於一日內求一時。其熱度適爲 $+2^\circ$. 此可取弧線與 $+2^\circ$ 橫線之交點求之。今此交點適在 7 點鐘及 8 點鐘兩分點之間。而與 7 點。$\frac{3}{4}$ 相近。故熱度等於 $+2^\circ$. 是時約 $7\frac{3}{4}$ 點也。

**216. 縱橫線。** 前所列熱度圖解法。攷其實。僅一函數之圖解耳。蓋一日內之諸熱度。爲各小時之函數也。

取是法而推廣之。可用以表任一函數。

試於平面上(第十七圖)畫相垂之兩軸 $ox, oy$.




(第十七圖)

而每軸均定一正向 $ox$. 以自 $o$ 趨 $x$ 之向爲正。$oy$ 以自 $o$ 趨 $y$ 之向爲正。

後自平面上任一點 M. 落兩垂線 MP 及 MQ 於 $ox$ 及 $oy$.

又任意定一幾何爲準個。於是縱橫線之界說。可定之曰。

謂之 M 點之縱橫線者。卽 $ox$ 與 $oy$ 兩軸所載兩定向線 $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ 之代數量也。

因是 $ox$ 與 $oy$ 軸。謂之縱橫線之軸。

$ox$ 所載之定向線 $\overline{OP}$. 謂之 M 點之橫線。

通常習用 $x$ 表 $\overline{OP}$. 卽

$$x = \overline{OP}.$$

$oy$ 所載之定向線 $\overline{OQ}$. 謂之 M 點之縱線。

通常習用 $y$ 表 $\overline{OQ}$. 卽

$$y = \overline{OQ}.$$

有時於 M 點旁 (第十七圖), 書縱線及橫線於括弧中。而表橫線之 $x$ 列之於首

**217. 縱橫線之記號。** 軸上 O 點。謂之縱橫線之元點。兩軸 $x'x$, $y'y$ 繞此元點。合成四角, 卽 $xoy$, $x'oy$, $x'oy'$, $xoy'$. 今以 (1), (2), (3), (4) 表之。

設於(1)角內(第十七圖)。取一點M.則其縱橫線均爲正。蓋定向線$\overline{OP}$, $\overline{OQ}$之向爲$ox$及$oy$也。

今於(2)角內。取一點M′.則橫線$\overline{OP'}$爲負。而縱線$\overline{OQ'}$爲正。蓋所取之向一爲$ox'$.一爲$oy$也。

若於(3)角內。取一點M″.則橫線$\overline{OP''}$與縱線$\overline{OQ''}$均爲負。

而於(4)角內。取一點M‴.則橫線$\overline{OP'''}$爲正。而縱線$\overline{OQ'''}$爲負矣。

求其簡括。可立一表如下。

| | | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| 點之位置 | (1) | + | + |
| | (2) | − | + |
| | (3) | − | − |
| | (4) | + | − |

由是表觀之。知(1)角與(3)角內之各點。其縱橫線同號。而(2)角(4)角內之各點。其縱橫線異號也。

**218.** 由前欵。知處四角之各點。其縱橫線之記號。或兩者俱正。或兩者俱負。或此負而彼正。或

此正而彼負。無一相同。故反言之。知一點縱橫線之記號。卽可知此點居四角(1),(2),(3)或(4)中之某角。

**219. 以縱橫線定一點。** 平面上凡點。均有一定之縱橫線。前已論定矣。然反之。已知任意兩數。或正或負。則平面上。亦必有惟一之點。以此兩數爲其縱橫線。今證其理於後。

設 $ox, oy$ 兩軸相垂(第十七圖)。而任取一數爲準個。又以 $x$ 及 $y$ 表任意兩數。

則 $ox$ 上必有P. 且P爲惟一之點(見78款), 使

$$\overline{OP} = x.$$

$oy$ 上亦必有Q. 且Q爲惟一之點。使

$$\overline{OQ} = y.$$

於P引一線與 $oy$ 平行。又於Q引一線與 $ox$ 平行。此兩線相割於一點M. 此卽平面上惟一之點。以 $x$ 爲橫線。而以 $y$ 爲縱線者。

故可斷之曰。

有縱橫線。平面上必有一點應之。

**220.** 已知縱橫線 $x, y$. 其M點又可求之如下法。於 $ox$ 上取一點P, 使

$$\overline{\mathrm{OP}} = x;$$

後於P起一 $ox$ 之垂線。而截取此垂線之一分PM.令PM等於 $y$ 之絕對值。使 $y$ 而正。則PM在 $ox$ 上。使 $y$ 而負。則PM在 $ox$ 下。

**221. 居軸上之點。** 凡點居 $ox$ 軸上。則其縱線爲零。

反言之。凡點其縱線爲

$$y = o,$$

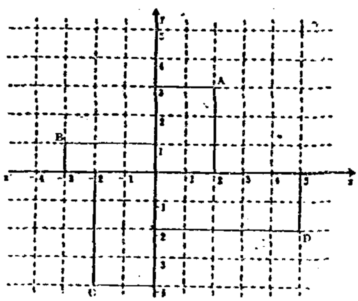
則此點居 $ox$ 上。

凡點居 $oy$ 軸上。則其橫線爲零。

反言之。凡點其橫線爲

$$x = o,$$

則此點居 $oy$ 上。



(第十八圖)

**222. 一次函數之圖解。** 試取函數

$y=2x-1$ 爲例。

將諸數代$x$而推$y$之相當值。

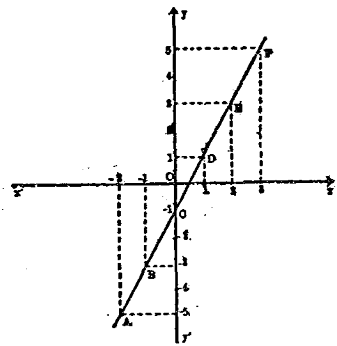
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 若 | $x=-2$, | 則 | $y=-5$; | A |
| „ | $x=-1$, | „ | $y=-3$; | B |
| „ | $x=0$, | „ | $y=-1$; | C |
| „ | $x=1$, | „ | $y=1$; | D |
| „ | $x=2$, | „ | $y=3$; | E |
| „ | $x=3$, | „ | $y=5$. | F |

定一點A.以$-2$及$-5$爲縱橫線。定一點B.以$-1$及$-3$爲縱橫線。由此類推。則以前定諸數爲縱橫線之各點A,B,C,D,E,F等。均可定其位置。於是連各點(第十九圖)。合成一線。此線謂之函數

$$y=2x-1$$

之圖解。

然此所取者。僅數點耳。若推廣言之。固可不拘於是數點也。凡數自$-\infty$至$+\infty$.非實有是數。而按之理論。能有是數者。皆可定爲$x$之等值。於是點數之多。可至無量。此無量點所合成之線。卽謂



（第十九圖）

之函數之圖解。

今所取之函數。成一直線。名爲圖解。其直線之理。當證之於後。

**223. 界說。** 由上欵。界說之最公者。可定之於後。

凡各點以 $x$ 能有之同數。自 $-\infty$ 至 $+\infty$. 爲其橫線。而以函數 $y$ 相應之諸値。爲其縱線。相連而成一線。謂之函數之圖解。

此卽用以求熱度圖解者。蓋求熱度圖解。先以

$ox$ 上之橫線表各小時。後定以相應諸熱度爲縱線之各點。經此諸點之線。卽熱度之圖解也。

**224. 定理。** 一次函數之圖解爲一直線。

(證) 證此要理。當歷按函數等式

$$y = ax + b$$

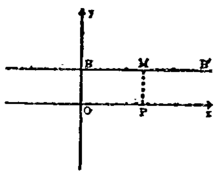
之 $a$ 與 $b$ 及其記號。分數境論之。

**225. 第一境。** 設 $a = o$. 於是

$$y = b.$$

無論 $x$ 爲何數, $y$ 之值不變。

夫 $y$ 既爲恒數。則表此函數之線。其各點與 $ox$ 之距離。均等於 $b$. 故是線爲 $ox$ 之平行線 BB′ (第二十圖)。而與 $oy$ 相割於一點 B. 使 $\mathrm{OB} = b$.



(第二十圖)

反之。凡此直線之 M 點。以

$$\overline{\mathrm{PM}} = \overline{\mathrm{OB}} = b$$

爲其縱線。等於 $b$.

故函數 $y$ 既爲恒數。則表此函數之線。成一平線。無所升降也

**226. 第二境。** 設 $b=0$. 於是

$$y=ax. \qquad (1)$$

若 $x=1$. 則 $y=a$. 卽可定一點 A 以 1 與 $a$ (第廿一或廿二圖) 爲其縱橫線。

而表等式 (1) 之線。卽直線 OA. 今證其理如下。

設任一點 M. 以等式 (1) 之 $x, y$ 爲其縱橫線。由 (1) 得

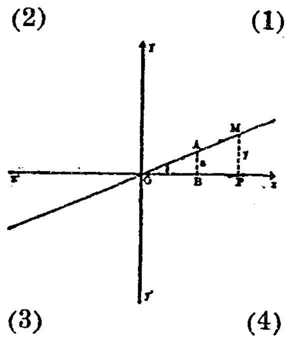
$$\frac{y}{x}=\frac{a}{1}. \qquad (2)$$

從 A 及 M 落兩垂線 AB, MP 於 $ox$. 得

$$\overline{\mathrm{OB}}=1, \quad \overline{\mathrm{BA}}=a,$$
$$\overline{\mathrm{OP}}=x, \quad \overline{\mathrm{PM}}=y.$$

故等式 (2). 可變爲

$$\frac{\overline{\mathrm{PM}}}{\overline{\mathrm{OP}}}=\frac{\overline{\mathrm{BA}}}{\overline{\mathrm{OB}}} \qquad (3)$$




(第二十一圖)

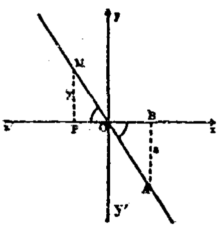
使 $a>0$. 則由等式 (2). 知 $x, y$ 爲同號。故 A 點若居 (1) 角 (見第廿一圖), M 或居 (1) 角或居 (3) 角。

反之。使 $a<0$. 則 $x, y$ 爲異號。故 A 點若居 (4) 角 (見第廿一圖), M 或居 (2) 角或居 (4) 角。

無論 $a$ 或爲正。或爲負。M 點總居於直線 OA 所

貫之角內。

然M點不僅居OA所貫之角內。且居OA上。求證是理。當證$\widehat{POM}$與$\widehat{BOA}$兩角相等。(第二十一及二十二圖)。夫是兩角之相等。甚爲易見。蓋按等式(3). $\widehat{OBA}$, $\widehat{OPM}$兩三角形，有一角等(直角)。而含此等角之邊。均有比例。故兩三角爲相似形。而




(第二十二圖)

$$\widehat{POM} = \widehat{BOA}.$$

故M點常居OA直線上。夫直線OA爲表等式(1) M各點之所。故OA爲函數之圖解也。

**227. 第三。公式。** 設$a \neq 0, b \neq 0$. 於是

$$y = ax + b.$$

因前欵曾論$b = 0$時函數圖解之情狀。故設

$$y' = ax.$$

其圖解必爲經元點O之直線OA(見第226欵)。試將此線畫之。(見第廿三圖)。

後定任一M點以$x, y$爲縱橫線，設$y = ax + b$; 又定M′點以$x$爲橫線。而以$y'$爲縱線。依前欵。M′點應在OA上。因M, M′之橫線同。故兩點居$oy$之

平行線PM上。由是得

$$\overline{M'M} = \overline{PM} - \overline{PM'} = y - y',$$

以等值代 $y, y'$. 得

$$\overline{M'M} = ax + b - ax = b.$$

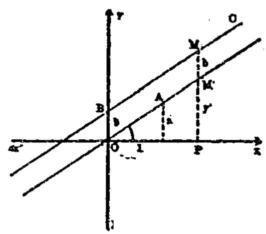
故定向線 $\overline{M'M}$ 常等於 $b$.

當 $x$ 變動時。M′點漸漸移動。成一直線OA. 而M點同時移動。成直線BC與OA平行。此直線BC由OA演出。以移動等於 $b$. 與 $oy$ 平行。簡言之。M點所成之處所。卽BC與OA平行。於 $oy$ 上以B點所引長者也。故

$$\overline{OB} = b.$$

此直線 BC, 卽函數之圖解。

(2) (1)



(3) (4)

(第二十三圖)

**228. 成角係數。** 一次函數

$$y = ax + b$$

之圖解爲一直線。已詳前數欵。

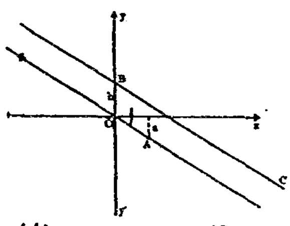
然函數中 $a$ 與 $b$ 兩數。其性質絕異。不可不討論之。

係數 $a$ 所以定直線之趨向者也。蓋已知 $a$, 卽可知直線BC之平行線OA(第二十三圖)。是直線BC與 $ox$ 所成之角。由 $a$ 而定。故 $a$ 謂之直線之成角係數。

使成角係數 $a$. 爲零(見第225欵)。則BC與 $ox$ 平行。因BC與 $ox$ 所成之角爲零。故此直線不升不降。而函數爲恒數。

使成角係數 $a$ 爲正。則OA居(1)角與(3)角(第廿三圖)。BC因之上升。而函數爲升。(見第211欵)。

使成角係數 $a$ 爲負。則OA居(2)角與(4)角(第二十四圖)。BC因之下降。而函數爲降。(見第212欵)。



(第二十四圖)

以上所論。與第215欵所論各節相合。故由圖解法。函數之升降。可一覽而知也。

然上所論。又未盡 $a$ 之情狀。蓋觀二十三二十四兩圖。知 $a$ 之絕對値。由漸增時。直線與 $ox$ 所成之角 $\widehat{Aox}$. 亦由0而長。

故成角係數 $a$ 又所以表角之量。$a$ 之絕對値

愈大。則角愈大。而直線之升降愈速。

且是係數又可比之道旁之斜坡。如以 $ox$ 爲地平線。則 $a$ 即表 M 點循地平線以適當尺進行而又漸次增高也。

**229. 元點縱線。** $a$ 之性質在 $y=ax+b$. 論定後。可進論 $b$. 夫 $b$ 惟以表直線 BC 與 $oy$ 之交點也。

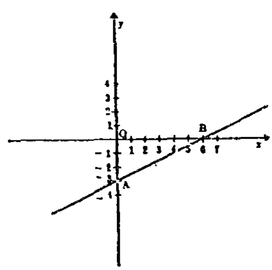
故 $b$ 謂之元點縱線。

使 $b$ 之值各異。而 $a$ 之值不變。則所得諸直線皆平行。因成角係數。彼此相同也。

**230. 定直線之實習法。** 因一次函數消長之圖解。爲一直線。故求定是線。第當定其兩點。因此得定直線之實習法如下。於等式

$$y=ax+b,$$

取特異兩數代 $x$. 如 $x=o$ 及 $x=1$. 而推 $y$ 之相當值。所得兩點。即用以定直線者也。亦可取直線與 $ox$ 與 $ox$ 之兩交點定直線。蓋令 $x=o$. 則 $y=b$. 即得直線與 $oy$ 之交點。令 $y=o$. 則 $x=-\frac{b}{a}$ 即得直線與 $ox$ 之交點。經此



（第二十五圖）

兩點之直線。卽函數圖解也。

(譬) 定函數 $y=\frac{x}{2}-3$ 之圖解。

令 $x=0$, 則 $y=-3$; 令 $x=6$, 則 $y=0$. 於是於 $oy$ 上定一點 A (第廿五圖), 以 $x=0, y=-3$ 爲其縱橫線。又於 $ox$ 上定一點 B, 以 $x=6, y=0$ 爲其縱橫線。AB. 卽所求之直線也。

**231. 致用。均速行動之圖解。** 速行動之公式。曾定爲(見第101欵)

$$(1) \qquad x=x_0+v\,(t-t_0).$$

由此方程式。知 $x$ 爲時間 $t$ 之一次函數。

此處 $t$ 爲自變數。而 $x$ 爲校變數也。

求此式之簡。可命

$$a=x_0-vt_0;$$

方程(1)卽易爲

$$x=vt+a.$$

此可以圖解表之。

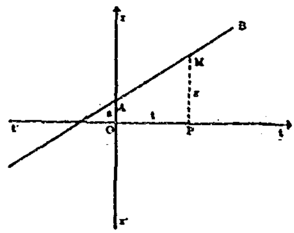
畫 $ot, ox$ 兩軸相垂(第二十六圖)。表 $t$ 以横線。而表 $x$ 以縱線。

由前所論者推之。表是方程之線。卽直線 AB

其成角係數等於$v$,而其元點縱線等於$a$.

此線卽謂之行動之圖解。

此圖解之便利。約有數端。



(第二十六圖)

(一)於每時。甚易定$x$之值。

蓋於$t$時間。欲知$x$之值。可於$ot$軸上。取定向線$\overline{OP}=t$.而從P引一綫與$ox$平行。此線割AB於M點。

定向線$\overline{PM}$.卽所求之值也。

(二)觀圖解。卽可知行動之遲速。

使行動而緩。則速度$v$微。而直線之成角係數小。於是直線與$ot$之斜勢不峻。

反是。使行動而速。則速度$v$大。而直線之成角係數亦大。於是直線與$ot$角之斜勢頓峻。

故圖解斜勢之大小。所以表行動之遲速也。

因是。速度等於圖解之斜勢。

**232. 鐵道之圖解。** 均速行動之圖解。時可用以鐵道上來往各車之行動。

試取滬寧鐵道爲例。

定江寧爲元點。$v$ 爲車之速度。$x$ 爲 $t$ 時。車距江寧之遠。得

$$x = v(t - t_0),$$

$t_0$ 所以表，車在江寧起程之時。

若以橫線表時。而以縱線表距離。則火車行動之圖解。爲一直線。以速度 $v$，爲其斜勢。

使火車於某處停留。則當停留時。距度 $x$ 爲恒數。而圖解(見第225欵)爲 $ot$ 之平行直線。

使火車停留數分鐘後。至 $t_1$ 時復行。而此處與元點之距度爲 $x_1$. 取速度 $v'$. 則行動之方程。爲

$$x = x_1 + v'(t - t_1),$$

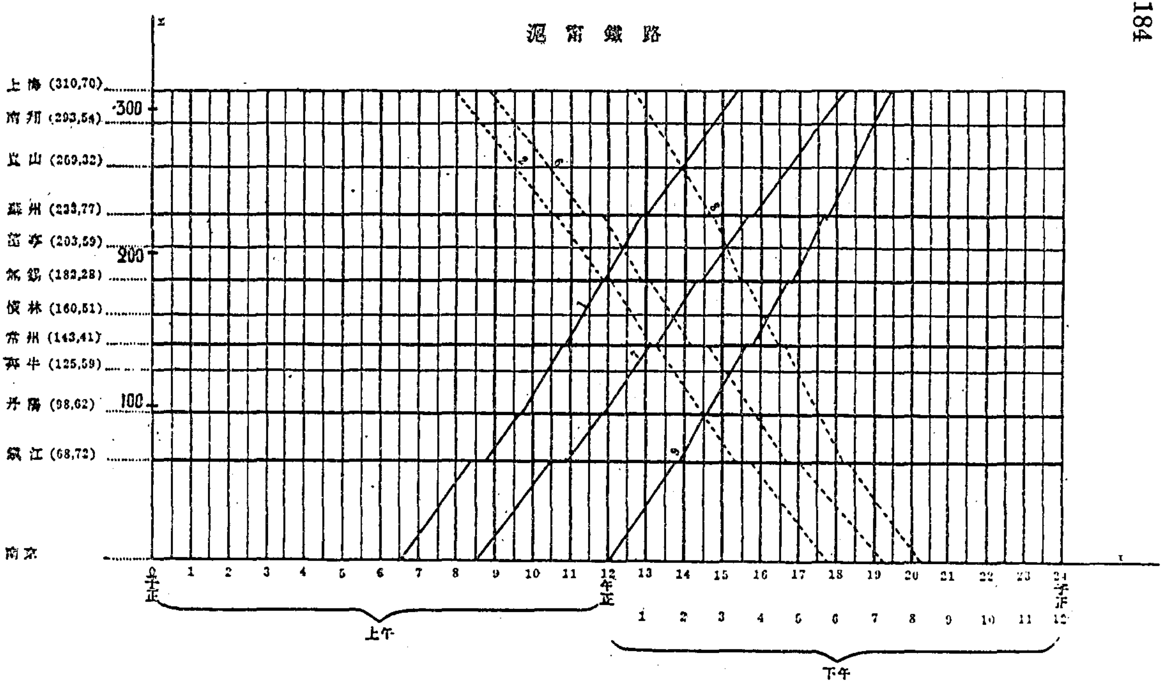
而圖解成另一直線。以 $v'$ 爲其斜勢。

故火車行動之圖解。其全線爲數直線所合成。而停留處。卽 $ot$ 之平行線。

(譬) 第廿七圖。卽滬寧鐵道往來各車之圖解。

每日鐘點。自0起算至24止。而分亦在計算之

滬甯鐵路




(第念七圖) 鐵路圖解

列。正午表以12.午後一點。表以13.餘彷此。橫軸 $ot$ 上之線。所以表時。而縱軸 $ox$ 上之線。所以表距離。距離以直羅邁當計算。取江寧為元點。

任取一長度。表100基羅邁當。於是100, 200, 300之各點。均有定所。而各車站。亦可以相當之距離。定其位置。

路線以江寧趨上海為正向。故自江寧開往上海1, 7, 9各車。其速度為正。而圖解之形。成一向上之折線。此數車。謂之上行車。自上海開往江寧2, 6, 8各車。其速度為負。而圖解之形。成一向下之折線。此數車謂之下行車。

此圖解最便於公司中之執事。

蓋(一)僅一紙而各車之行踪俱在。

(二)方車經路線上一點。即可知是時則某小時。

(三)觀圖解全線之斜勢。可知各車之遲速。如車7緩於車1.蓋其圖解上升之勢。較車1為緩。車9則反是。其圖解上升之勢。較前兩車為速。故為專車。又可知下行車8.亦為專車。蓋其圖解下降

之勢。較車2,車6爲速也。

（四）由圖解可知各車之交點。使路爲單軌。則兩車僅可於一車站相遇。若路爲雙軌。則同向之兩車。亦僅可於一車站相遇。而異向之兩車。無地不可相遇。

（五）若欲添派一車。用圖解法可定其起程之時。

使此車不與前數車相撞蓋。使路爲單軌。第當繪一圖解。令此圖解若其餘各車之圖解。僅相割於車站。使路爲雙軌。可繪一圖解。令此圖解與同向各車之圖解。僅相與於一車站。

# 第六章。二次方程及其問題。

## 第一節。一元二次方程之解法。

**233. 界說。** 按第四章(第139欵)。若方程爲整式。其各項均可遷之上端。故併合似項後。凡方程均可以 $x$ 之多項整式爲其上端。而以零爲其下端。上端多項式之次。卽方程之次也。由是得二次方程之界說如下。

謂之一元 $x$ 之二次方程者。遷各項於上端而併合其似項。所得之多項式。於 $x$ 爲二次也。

試取方程

$$x(x+1)-2x=(x-1)(2x+3)$$

爲例。將是方程之兩端展開之。得

$$x^2+x-2x=2x^2-2x+3x-3.$$

遷各項於上端而約之。得

$$-x^2-2x+3=0.$$

或變之記號。得

$$x^2+2x-3=0.$$

因上端之多項式於$x$爲二次。故方程爲二次。

**234. 公式。** 由上欵所言者推之。凡二次方程。均可定之如下式。

$$ax^2+bx+c=0. \tag{1}$$

$a, b, c$所以表已知數也。

若$a$不等於1.則能以$a$除方程之兩端。(見141欵)。於是方程式易爲

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

今用單簡法。以$p$表$\frac{b}{a}$. 以$q$表$\frac{c}{a}$.

於是方程式乃易爲

$$x^2+px+q=0.$$

故凡二次方程。均可定之如(1)式。或如(2)式。

**235. 平方根。** 求平方根之問題。可設之如下。

已知一代數數目。或正或負。求能以此數爲平方之諸正數。或諸負數。

此問題可分三端解之。

(一) 使已知數爲正數。則此數以相反之兩

代數數目爲其平方根。蓋按之乘法界說(見第41及46欵)。正數或負數之平方。均爲正數與絕對值之平方無異。卽

$$(+3)^2 = 9 \qquad (-3)^2 = 9.$$

故假有一數。以一已知之正數 $a$ 爲其平方。此數之絕對值。必爲 $a$ 之數學平方根 $\sqrt{a}$. 是能以 $a$ 爲平方者。不外兩數曰。

$$+\sqrt{a} \qquad -\sqrt{a}$$

且因

$$(+\sqrt{a})^2 = a \quad , \quad (-\sqrt{a})^2 = a,$$

故知是兩數合問。

是知有兩代數數目。且惟有兩代數目。以9爲平方。卽 $+3$ 及 $-3$ 也。

(二) 使已知數爲負數。則無一數能以此數爲其平方。蓋(見第41及46欵)無論正數或負數。其平方常爲正。一數以負數爲其平方。理之所不能有也。

(三) 使已選數爲零。則只有一數其平方可等於零。卽零是也。

**236. 二次方程不全式。** 試取方程

$$x^2 - 4 = 0$$

解之。由遷項法。此方程可變爲

$$x^2 = 4,$$

此卽表 $x$ 爲一數其平方等於 4 也。依前欵。平方可等於 4 之數有兩。且惟有兩數。卽

$$+\sqrt{4} = 2 \qquad -\sqrt{4} = -2.$$

故所設方程含兩根。且惟有兩根。卽

$$+2 \qquad -2.$$

試再取方程

$$x^2 + 3 = 0$$

解之。此方程可易爲

$$x^2 = -3;$$

此卽表 $x$ 爲一數其平方等於 $-3$ 也。然按前欵。無一數其平方可等於負數 $-3$.

故方程無根。

**237.** 廣言之。凡二次方程之不全式。均可定爲

$$x^2 + q = 0,$$

遷項得 $$x^2 = -q,$$

此卽表 $x$ 爲一數其平方等於 $-q$ 也。

故可分三端討論之。

(一) 若 $q$ 爲負數。則 $-q$ 爲正。而方程有兩根。卽

$$x=+\sqrt{-q}\;,\quad x=-\sqrt{-q}.$$

(二) 若 $q$ 爲正。則 $-q$ 爲負。而方程無根。

(三) 若 $q=0$, 則

$$x^2=0,$$

而方程惟有一根。卽

$$x=0.$$

此之討論。亦可用於方程式

$$ax^2+c=0,$$

蓋以 $a$ 除是式。仍可化之如上式也。

**238. 預案。** 按第50欵,

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2.$$

卽謂。一雙項式之方。等於第一項之方。加二倍兩項之積。加第二項之方。

於是。$x^2+2ax$ 卽一雙項式之方之前兩項。

此雙項式之第一項。爲 $x$. 卽首項 $x^2$ 之平方根。

雙項式之第二項。爲 $a$. 卽次項 $2ax$ 與第一項 $x$ 之二倍 (卽 $2x$) 之商。

由是以推。欲 $x^2+2ax$ 成一完全平方。須加後一項 $a^2$, 蓋是爲第二項 $a$ 之平方也。

(例) $x^2+6x$ 可書爲 $x^2+2.3x$.

因 $$(x+3)^2=x^2+6x+9,$$

故 $x^2+2.3x$ 是爲 $x+3$ 乘方後之首兩項。

然則欲得 $(x+3)^2$, 應加 9 於 $x^2+6x$.

又 $x^2+5x$ 可書爲 $x^2+2.\frac{5}{2}x$. 此卽平方 $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$ 之首兩項。然則欲得完全平方。應於 $x^2+5x$ 加 $\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$.

**239.** 例一。試取方程

$$x^2+2x-3=0 \text{ (第 233 款)}$$

解之。此式可書爲

$$x^2+2x=3.$$

其上端爲平方 $(x+1)^2$ 之首兩項。故欲得全方。加應 $1^2=1$ 於上端以補足之。各加 1 於方程之兩端。得

$$x^2+2x+1=3+1,$$

或 $$(x+1)^2=4.$$

此卽表 $x+1$ 爲一數其平方等於 4 也。平方可

等於4之數有兩。卽$+2$及$-2$.由是得

$$x+1=-2,\quad 而\quad x=-3$$

$$或\quad x+1=+2,\quad 而\quad x=1.$$

故方程有兩根。卽1與$-3$.

**240. 例二。** 試取方程

$$x^2+x+1=0$$

解之。是式可變爲

$$x^2+x=-1,$$

或

$$x^2+2\frac{1}{2}x=-1.$$

但$x^2+2\frac{1}{2}x$爲$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$之首兩項。故欲得一全方。應加$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$以補足之。

各加$\frac{1}{4}$於方程之兩端。得

$$x^2+2\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=-1+\frac{1}{4},$$

或

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}.$$

此卽表$x+\frac{1}{2}$應等於一數其平方爲等於$-\frac{3}{4}$於理不通。因$-\frac{3}{4}$爲負數。

故方程無根

**241. 公式。** 將前兩例廣其意義。可取二次方程式

$$x^2+px+q=0$$

解之。將定數項遷至下端。得

$$x^2+px=-q,$$

或

$$x^2+2\frac{p}{2}x=-q.$$

但 $x^2+2\frac{p}{2}x$ 爲 $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$ 之首兩項。故欲得全方。應加 $\left(\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}$. 各加 $\frac{p^2}{4}$ 於兩端。得

$$x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q,$$

或

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q. \qquad (3)$$

此卽表。若 $x$ 爲一根。則 $x+\frac{p}{2}$ 爲一數。其平方等於 $\frac{p^2}{4}-q$ 也。

當分三端討論之。

(一) 使 $\frac{p^2}{4}-q>0$, 則有相反兩數。且惟有兩數。其平方可等於 $\frac{p^2}{4}-q$. 卽 $+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ 及 $-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$. 故應得

$$x+\frac{p}{2}=+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},\quad 而\quad x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}:$$

或 $$x+\frac{p}{2}=-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},\quad 而\quad x=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

於是方程有兩根且惟有兩根。卽

$$-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\quad 及\quad -\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

(二) 使 $\frac{p^2}{4}-q<0$，則無一數其方可等於 $\frac{p^2}{4}-q$. 故方程無根。

(三) 使 $\frac{p^2}{4}-q=0$，則僅有一數 0 其方可等於 $\frac{p^2}{4}-q$. 故應得

$$x+\frac{p}{2}=0,\quad 而\quad x=\frac{p}{2}$$

於是方程僅有一根。卽 $-\frac{p}{2}$ 是也。

**242. 提要。** 上欵所言者。可舉其要如下。

解一二次方程

$$x^2+px+q=0, \tag{2}$$

先當合成其根號內之數。即 $\frac{p^2}{4}-q$;

(一) 使 $\frac{p^2}{4}-q>0$，則方程式由公式

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$ 得兩根。

此公式內。陸續用根號前之十一兩號。

（二）使 $\frac{p^2}{4}-q<0$，則方程無根。

（三）使 $\frac{p^2}{4}-q=0$，則方程僅有一根。卽

$$x=-\frac{p}{2}$$

**243. 按。** 若根號內之數爲正。則由公式

$$x=-\frac{p}{2}\quad\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\qquad(4)$$

按其根號前之十一兩號。可得兩根。

然使 $\frac{p^2}{4}-q$ 爲零。以上公式仍可用。

蓋 $\frac{p^2}{4}-q=0$，上公式變爲

$$x=-\frac{p}{2}\pm 0=-\frac{p}{2},$$

$x$ 由兩值易爲一值。

故根號內之數等於零時。用公式(4)求得之兩根。可謂之相等。

此所以根號內之數同於零時。仍可謂方程(2)僅有一根，名雙根（有相等之兩根也）。

**244. 例。** 解二次方程。先當化成(2)式。然後用242款所定之法求其根。試舉例以明之。

(例一) 設方程為

$$x^2-5x+6=0.$$

此處 $p=-5$， $q=6$;

故 $\frac{p^2}{4}-q=\frac{25}{4}-6=\frac{1}{4}$

因根號內之數為正。故方程含兩根。即

$$x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}$$

或 $x=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$ 及 $x=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=2.$

(例二) 設方程為

$$(x+1)(x+2)+2x=4x-5.$$

將上端展開之。得

$$x^2+x+2x+2+2x=4x-5.$$

遷各項於上端。得

$$x^2+x+7=0.$$

此處 $p=1$， $q=7$;

故 $\frac{p^2}{4}-q=\frac{1}{4}-7=-\frac{27}{4}.$

根號內之數為負。故方程無根。

(例三) 設方程為

$$4x^2+12x+9=0.$$

以4除兩端。得

$$x^2+3x+\frac{9}{4}=0.$$

今 $$p=3\quad,\quad q=\frac{9}{4},$$

故 $$\frac{p^2}{4}-q=\frac{9}{4}-\frac{9}{4}=0.$$

根號內之數。等於零。故方程僅有一根。或相等之兩根。卽

$$x=-\frac{3}{2}.$$

## 245. 解方程 $ax^2+bx+c=0$ 之方法。

若 $x^2$ 之係數不爲一。則化成(2)式。當以 $a$ 除兩端。

試取方程公式

$$ax^2+bx+c=0 \text{ 論之。} \qquad (1)$$

以 $a$ 除兩端。得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0;$$

與 $$x^2+px+q=0 \qquad (2)$$

同式。此處 $$p=\frac{b}{a},\quad q=\frac{c}{a}.$$

故用 (4) 公式。得

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}.$$

將根號內之兩命分。化為同分母。得

$$\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

而上列公式變為

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

但因 $$\sqrt{4a^2}=2a,$$

故以上公式又可變為

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

終 $$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (5)$$

此卽解方程

$$ax^2+bx+c=0$$

之公式也。

第 242 欵所言者。可申言之如下。

解方程公式

$$ax^2+bx+c=0, \qquad (1)$$

先當合成根號內之數 $b^2-4ac$.

(一) 若 $b^2-4ac>0$, 則方程有兩根。卽

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\qquad(5)$$

(二) 若 $b^2-4ac<0$, 則方程無根。

(三) 若 $b^2-4ac=0$, 則方程僅有一根。名雙根(或名兩等根;見第243欵)。仍用(5)公式推得之。卽

$$x=-\frac{b}{2a}.$$

**246.** **例。** 解二次方程。亦可用(5)公式。試舉例以明之。

(例一) 設方程爲

$$2x^2-5x+3=0.$$

此處　$a=2$　,　$b=-5$　,　$c=3$.

由(5)公式。得

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot2\cdot3}}{4}$$

或

$$x=\frac{5\pm\sqrt{1}}{4},$$

故方程含兩根。卽

$$x\quad\frac{5+1}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2},$$

及 $$x=\frac{5-1}{4}=\frac{4}{4}=1.$$

(例二) 設方程爲

$$3x^2-7x+1=0.$$

由 (5) 公式。得

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49-12}}{6}=\frac{7\pm\sqrt{37}}{6}.$$

開 37 之畧近平方根。得 6,08.

故兩根之畧近值。爲

$$x=\frac{7+6{,}08}{6}=\frac{13{,}08}{6}=2{,}18.$$

$$x=\frac{7-6{,}08}{6}=\frac{0{,}92}{6}=0{,}15.$$

(例三) 設方程爲

$$(x+1)(x+2)(x+3)=x(x-1)(x-2).$$

將兩端展開之。得

$$x^3+6x^2+11x+6=x^3-3x^2+2x.$$

方程形似三次。然遷各項於上端而約之。可消去 $x^3$，而方程易爲

$$9x^2+9x+6=0;$$

以3除其兩端。得

$$3x^2+3x+2=0.$$

此處根號內之數。爲

$$b^2-4ac=9-4\cdot3\cdot2=-15,$$

此根號內之數旣爲負數。故方程無根。

**247. $x$ 之係數爲偶數之方法。** 若方程

$$ax^2+bx+c=0$$

之係數 $a, b, c$ 均爲整數。而係數 $b$ 爲偶數。則公式(5)尙可約。

蓋 $b$ 旣爲偶數。必受除於2. 故可命

$$b=2b',$$

$b'$ 仍爲整數也。

於是(5)公式可書爲

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}.$$

因根號內之數。以4爲公生數。

$$4b'^2-4ac=4(b'^2-ac),$$

故 $$\sqrt{4b'^2-4ac}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{b'^2-ac}=2\sqrt{b'^2-ac}.$$

而上公式可易為

$$x=\frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}.$$

以$x$除分子分母。得

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a} \qquad (6).$$

(例) 設方程為

$$5x^2-6x+1=0.$$

$x$之係數為偶。故可依(6)改省公式求其根。

此處 $a=5$ , $b'=-3$ , $c=1$;

故 $$x=\frac{3+\sqrt{9-5}}{5}=\frac{3\pm\sqrt{4}}{5}.$$

故方程之兩根為

$$x=\frac{3+2}{5}=1,$$

$$x=\frac{3-2}{5}=\frac{1}{5}$$

## 第二節。係數與根之關係。

**248. 根之和積。** 由二次方程式

$x^2+px+q=0$ 觀之。

知根號內之數$\frac{p^2}{4}-q$若爲正數。則有兩根。由公式

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

可求此二根。設以$x'$表首一根。而以$x''$表次一根。得

$$x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

$$x'=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

此二根之和爲

$$x'+x''=-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}=-p.$$

而其積爲

$$x'x''=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)$$

夫以第二端$-\frac{p}{2}$與$\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$和乘其較。所得之積。必等於此兩數平方之較，(見第52欵)。故

$$x\,x''=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q.$$

約之，得

$$x'x''=q.$$

由是。得兩等式

$$\left|\begin{array}{l} x' + x'' = -p, \\ x'x'' = q. \end{array}\right. \qquad (7)$$

此可以常語解之曰。若

$$x^2 + px + q = 0$$

有兩根，

則根之和。等於$x$之係數而易其號。根之積等於定數項。

試取前節(第244欵)所解方程

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

印證之。此方程含兩根。2與3. 和為

$$2 + 3 = 5 \quad \text{而積為} \quad 2 \cdot 3 = 6.$$

與是欵所言者合。

**249. $x^2$之係數異於一。** 使$x^2$之係數不為1. 則方程式為

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

然以$a$除兩端。仍可化之如(2)式。即

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

故得 $$p=\frac{b}{a}.\quad q=\frac{c}{a}.$$

根與係數之關係(7).變爲聯立等式

$$\begin{cases} x'+x''=-\dfrac{b}{a}, \\ x'x''=\dfrac{c}{a}; \end{cases} \qquad (8)$$

此可以常語解之曰。若

$$ax^2+bx+c=0$$

有兩根,

則 $x$ 之係數改記號後被除於 $x^2$ 之係數。即根之和。

而定數項被除於 $x^2$ 之係數。即根之積。

試取前節(第246欵)所解方程

$$2x^2-5x+3=0$$

印證之。此方程有兩根。$\frac{3}{2}$ 與 1.和爲

$$\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}\quad \text{而積爲}\quad \frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}.$$

與是欵所言者合。

**250. 兩根相等。** 若方程之根號內之數

爲零。則兩根 $x'$ 與 $x''$ 相等。然等式 (7) 與 (8).仍可引用。

蓋 $x''=x'$, 則根之和爲

$$x'+x''=2x'=-\frac{b}{a};$$

故

$$x'=-\frac{b}{2a}.$$

由此得緊要斷語如下。

凡二次方程根號內之數爲零。則兩根相等。而兩等根和數之折半。即方程之根。

例如方程(第 244 欵。例三)

$$4x^2+12x+9=0$$

之根號內之數爲零。故兩根相等。而根之値等於兩等根和數之折半。

因根之和爲 $-\frac{12}{5}=-3$,

故根等於 $-\frac{3}{2}$; 此前節所求得者。

**251. 致用。** 立一二次方程式。使此方程以兩已知數爲根。

設

$$x^2+px+q=0$$

所求之方程式。若方程以兩已知數爲根。則 $p$

應等於此兩數之和而易其記號。$q$應等於此兩數之積。故$q$與$p$皆已求得。設$x', x''$為已知數。則

$$p = -(x' + x''), \qquad q = x'x''.$$

故所求之方程。為

$$x^2 - (x' + x'')\,x + x'x'' = 0.$$

此式之數以能以$x'\ x''$兩數為根者。因以上式可寫為

$$(x - x')\,(x' - x'') = 0$$

故也。蓋由此化成之式展開觀之。欲方程之上端等於零。當令兩生數之一等於零。即謂當

$$x - x' = 0 \quad 而 \quad x = x',$$

或當

$$x - x'' = 0 \quad 而 \quad x = x''.$$

(例) 立一二次方程式。使是方程以3及−8為根。

兩數之和為

$$3 - 8 = -5,$$

而兩數之積為

$$3 \cdot (-8) = -24.$$

故所求方程式為

$$x^2+5x-24=0.$$

**252. 問題。** 已知兩數之和及積。問此兩數為何數。

解之曰。所求兩數。必為二次方程式之根

$$x^2+px+q=0.$$

此方程式不難立。蓋按前款。$p$ 等於兩根之和。而 $q$ 等於兩根之積。

此問題之已知數。適為兩數之和及積。故以已知數易 $p$ 與 $q$. 即得一二次方程式。方程之兩根即所求之兩數也。

(例) 求兩數。以 $-\frac{1}{21}$ 為其和。而以 $-\frac{2}{21}$ 為其積。

此兩數為方程

$$x^2+\frac{1}{21}x-\frac{2}{21}=0$$

之根。去分母。得

$$21x^2+x-2=0.$$

由 (6) 公式。得

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+168}}{42}=\frac{-1\pm 13}{42}.$$

故所求兩數為

$$x'=\frac{-1+13}{42}=\frac{12}{42}=\frac{2}{7},$$

$$x'' = \frac{-1-13}{42} = \frac{-14}{42} = -\frac{1}{3}.$$

**253. 根之記號。**由根與係數之關係。可不煩演算而知二次方程兩根之記號。及兩根相形之大小。

試取方程

$$ax^2 + bx + c = 0$$

論之。設 $b^2 - 4ac > 0$. 而 $x', x''$ 爲方程之根。由 249 款得

$$x'x'' = \frac{c}{a}.$$

第取 $\frac{c}{a}$ 察之。已足知兩根記號之或同或異否。

蓋(一) 若 $\frac{c}{a}$ 爲正。則根之積爲正。而兩根同號。

(二) 若 $\frac{c}{a}$ 爲負。則根之積爲負。而兩根異號。

若兩根同號。則察兩根之和。即可知此公記號之爲正爲負與否。蓋

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}.$$

因兩根同號 $\left(\frac{c}{a} > 0\right)$,

故使 $-\frac{b}{a}$ 爲正。則根之和爲正。而兩根均爲正數;

使 $-\frac{b}{a}$ 爲負。則根之和爲負。而兩根均爲負數。

若兩根異號 $\left(\frac{c}{a}<0\right)$. 則察兩根和數之記號。卽可知兩根中絕對値之大者。

蓋異號兩數相加。所得和數之記號。卽兩數中絕對値大者之記號(第24款)。

故若兩根 $x', x''$ 異號 $\left(\frac{c}{a}<0\right)$,

使 $-\frac{b}{a}$ 爲正。則絕對値大者之根。必爲正數;

使 $-\frac{b}{a}$ 爲負。則絕對値大者之根。必爲負數。

(三) 若 $\frac{c}{a}=0$ 或 $c=0$, 則方程易爲 $ax^2+bx=0$,

或 $$x(ax+b)=0.$$

欲使上端爲零。當令兩生數中有一生數爲零。則有:

或 $$x=0;$$

而 $$ax+b=0 \quad \text{或} \quad x=-\frac{b}{a}.$$

方程有兩根。一爲零,而一爲 $-\frac{b}{a}$.

若 $b$ 與 $c$ 均爲零。則方程化爲 $x^2=0$, 而其雙根卽等於零。

上所述,可舉其要如下。

不解方程而欲知根之記號:

(一) 當察積數$\frac{c}{a}$之記號。

(二) 繼當察和數$-\frac{b}{a}$之記號。

**254. 要案。** 若$\frac{c}{a}$為負。則常可豫决方程必含異號之兩根。

蓋$\frac{c}{a}$既為負。則$c$與$a$異號(見第54欵)。故積數$ac$為負。而$-4ac$為正。於是根號內之數$b^2-4ac$為$b^2$與$-4ac$兩正數之和。則$b^2-4ac$為正數無疑。故知方程必含兩根。

又因此根積為負。故知兩根異號。

由是觀之。合成根號內之數以前。又當先察$c$與$a$是否異號也。

**255. 提要。** 上數欵所討論者。可立表以舉其要如下。

首當察$\frac{c}{a}$之記號。惟$\frac{c}{a}$為正時。則當合成根號內之數$b^2-4ac$,以推兩根之是否存立。

如$\frac{c}{a}>0$而有兩根(卽$b^2-4ac>0$),則$-\frac{b}{a}$不能為零。蓋使$-\frac{b}{a}=0$. 則兩根必為反數。然根之積既設為正。則兩根同號。同號之兩數而欲其相反。

理之所不能有也。

下表討論兩根之成立及其記號。不必解決方程。

$$\frac{c}{a}<0.\ \text{方程必含異號之兩根。}\begin{cases} -\frac{b}{a}>0.\ \text{絕對值大者之根爲正。}\\ -\frac{b}{a}<0.\ \text{絕對值大者之根爲負。}\\ -\frac{b}{a}=0.\ \text{兩根相反。}\end{cases}$$

$$\frac{c}{a}>0.\ \text{當合成根號內之數。}\begin{cases} b^2-4ac>0.\ \text{方程含兩根}\begin{cases}-\frac{b}{a}>0.\ \text{兩根均爲正數。}\\ -\frac{b}{a}<0.\ \text{兩根均爲負數。}\end{cases}\\ b^2-4ac=0.\ \text{方程含相等之兩根。根之值卽等於}-\frac{b}{2a}.\\ b^2-4ac<0.\ \text{方程無根}\end{cases}$$

$\frac{c}{a}=0.$ 方程之根一爲零而一爲 $-\frac{b}{a}$.

(例) 試取方程

$$4548x^2-x-36715=0$$

例之。因卽知 $c$ 與 $a$ 異號 $\left(\text{卽}\ \frac{c}{a}<0\right)$

故方程含異號之兩根。因根之和 $\left(\text{卽}\ \frac{1}{4548}\right)$ 爲正。故絕對值大者之根爲正。

由是觀之。不必解決方程。并不必運算。而已知是方程含兩根。一爲正。而一爲負。又知兩根之中其絕對値大者爲正數也。

不然。則欲解決之。運算甚長也。

將是方程解之。得兩根之畧近値

$$x' = \frac{25986}{9096} \qquad x'' = -\frac{25984}{9096}.$$

以絕對値論。此兩根相去甚微。然兩根之記號。及其相形之大小。與上所討論者無不應合也。

## 第三節。二次方程問題。

**256. 通論。** 凡問題,其答數須解二次方程式。以推得者。謂之二次方程問題。

立二次方程問題之方程。其法與一次方程式同。

首以元字 $x$ 表未知數。次按題意立一等式。使 $x$ 之値置是式中而合理。

此等式卽二次方程式也。將此式解決之。卽得

問題之根。方程之根可一可二可無。故問題之根亦可一可二可無。

**257. 問題一。** 兩數之較等於7. 其積等於60. 求是兩數之值。

解之曰。以 $x$ 表兩數中之小者。則大者必爲 $7+x$.

又按題旨。$x$ 若爲所求之數。則積數 $x(7+x)$ 應等於60.

故得方程式

$$x(7+x)=60$$

或

$$x^2+7x-60=0.$$

因首項與末項異號。故方程必含兩根。一爲正，一爲負。卽

$$x'=\frac{-7+\sqrt{289}}{2}=5,$$

$$x''=\frac{-7-\sqrt{289}}{2}=-12.$$

故問題含兩根。卽 5 及 12; $-5$ 及 $-12$.

**258. 問題二。** 一直角形。周等於20邁當面積等於21方邁當。問直角形兩邊之廣大。

解之曰。周爲兩邊和數之倍。故兩邊之和。等於周之半。卽 10 邁當。

以 $x$ 表直角形之一邊。則餘一邊必爲 $10-x$.

夫直角形之面積。等於兩邊之積。故 $x$ 若爲所求之邊。則應得方程式

$$x(10-x)=21$$

或
$$x^2-10x+21=0.$$

此方程含兩根。卽

$$x'=5+\sqrt{25-21}=7,$$

$$x''=5-\sqrt{25-21}=3.$$

若一邊爲 7 邁當。則餘一邊。爲 $10-7=3$ 邁當。反之。若取首一邊之長爲 3 邁當。則次一邊爲 $10-3=7$ 邁當矣。故攷其實。問題僅有一根。卽直角形之兩邊。一爲 7 邁當，而一爲 3 邁當。方程之所以含兩根者。因方程以兩邊中任一邊之長爲根。兩根因各當一邊也。

（按）若用係數與根之關係。解此問題。則法尤徑。蓋所求兩邊。和爲 10，而積爲 21. 此卽求兩數以其和與積爲已知數之問題也。由上卽所論者推

之(見第252欵)。此兩數應爲二次方程

$$x^2 - 10x + 21 = 0 \quad 之根。$$

**259. 問題三。** 以折中及首末理分折法。

已知同軸之兩點A與B，於此軸上求一M點。使

$$\overline{AM}^2 = \overline{MB} \cdot \overline{AB} \qquad (1).$$

(卽同長度與同記號)(第二十八圖)。

解之曰。定自A趨B之向爲軸之正向。而設

$$\overline{AB} = a.$$


(第二十八圖)

以$x$表M點離元點A之橫線。故

$$\overline{AM} = x.$$

又由第二章所論者推之(見第80欵)。知

$$\overline{MB} = \overline{AB} - \overline{AM} = a - x.$$

若$x$爲所求之橫線。照等式(1)，應得

$$x^2 = (a - x)\,a$$

或

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

因方程首項與末項異號。故方程常含兩根。一

爲正。而一爲負。卽

$$x' = \frac{-a+\sqrt{a^2+4a^2}}{2} = \frac{a[\sqrt{5}-1]}{2},$$

$$x'' = \frac{-a-\sqrt{a^2+4a^2}}{2} = -\frac{a[\sqrt{5}+1]}{2}.$$

首一根 $x'$ 爲正數，而小於 $a$. 蓋其畧近値爲 0, 6. $a$.

故與是根相應之一M點(第二十八圖)。居A,B之中。

次一根 $x'$ 爲負數。其畧近値等於 $-1, 6. a$.

故與是根相應之一M′點(第二十八圖)。在負向一邊。卽謂M′與B不同在A之一邊也。

**260. 討論。** 若已知數爲元字。則問題之能否含根。悉係乎已知數相形之大小。

按已知數之變遷。而辨別問題之根。謂之問題之討論。

試舉簡例數則如後。

**261. 問題一之廣式。** 已知兩數之較 $d$ 及其積 $p$. 求是兩數之値。

求是兩數之值。解之曰。設$x$為兩數中之小者。則其大者必為$d+x$.

若$x$為所求之數。則按題旨。應得

$$x(d+x)=p$$

或
$$x^2+dx-p=0;$$

此所得等式為二次方程式。

故可按第255欵所定之步驟以討論之。

根之積為$-p$. 故

(一)。若$p>0$, 則積為負數。於是方程必含兩根。一為正，而一為負。絕對值大者之根。其記號從$-d$.

(二)。若$p<0$, 則當求根號內之數。卽

$$\frac{d^2}{4}+p.$$

於是可分三端討論之:

$a$) 若$\frac{d^2}{4}+p>0$, 卽謂若

$$-\frac{d^2}{4}<p<0,$$

則方程含同號之兩根。其記號從$-d$.

$b$) 若$\frac{d^2}{4}+p<0$, 卽謂若

$$p<-\frac{d^2}{4},$$

則方程無根,

c) 若 $\frac{d^2}{4}+p=0$, 卽謂若

$$p=-\frac{d^2}{4},$$

則方程僅含一雙根。等於 $-\frac{d}{2}$.

(三)。若 $p=0$, 則方程有兩根。一爲零, 而一等於 $-d$.

以上討論。可舉其要如下。

$p>-\frac{d^2}{4}$, 方程得兩根。

$p=-\frac{d^2}{4}$, 方程得一根。

$p<-\frac{d^2}{4}$ 方程無根。

(按) 上所討論者推之。知 $p$ 之最小值能使問題有一答數者。爲 $-\frac{d^2}{4}$. 故可斷之曰。"兩數若以 $d$ 爲較。則此兩數乘積之極小數;等於 $-\frac{d^2}{4}$", 蓋無有兩數。以 $d$ 爲較而其積可小於 $-\frac{d^2}{4}$ 者。

**262. 問題二之廣式。** 一直角四邊形。周等於 $2p$. 積等於巳知正方形之積 $a^2$. 求此直

角形之廣大。

解之曰。所求兩邊之和等於周之半 $p$. 而其積等於 $a^2$. 此卽求兩數。旣知其和。復知其積也。故所求之兩邊。爲二次方程式

$$x^2 - px + a^2 = 0$$

之根 (見第 252 欵)。

使是方程能含根數。當令根號內之數 $\frac{p^2}{4} - a^2$ 爲正數。

故可斷之曰。

若 $a^2 < \frac{p^2}{4}$, 則方程有根。卽直角形之邊。

若 $a^2 = \frac{p^2}{4}$, 則方程有根。卽方形之邊。

若 $a^2 > \frac{p^2}{4}$, 則方程無根。

$a^2 = \frac{p^2}{4}$ 時。根號內之數爲零。方程之兩根相等。而直角形之兩邊相等。故直角形易爲方形矣。

(按) 由是觀之。欲所求之兩邊。能成一直角形。當令

$$a^2 \leqq \frac{p^2}{4};$$

$a^2=\frac{p^2}{4}$時。直角形卽爲方形。

故可斷之曰。"同周之諸直角形中。其面積之最大者爲方形"。蓋無有一直角形其周$2p$.與方形同。而其面積可大於方形之面積$\frac{p^2}{4}$者。

又不等式$a^2\leqq\frac{p^2}{4}$可化爲

$$p^2\geqq 4a^2,\quad 或\quad p\geqq 2a,\quad 或\quad 2p\geqq 4a.$$

此卽表。一直角形其周$2p$當大於,或至少等於$4a$也。夫$4a$卽已知方形之周。故$2p=4a$時。直角形卽已知之方形。由是言之。"與已知方形同積之諸直角形中。其周最小者爲方形也。"

---

## 第四節。$x^2,\frac{1}{x}$等之消長。

**263.** **預按。** 第一章,曾論兩負數,以絕對値之大者爲小(見第65款)。

此卽言。負數長大時。其絕對値減小也。

又有當表明者。若$a$與$b$爲兩正數目(數學之數目)。而$a>b$,則$a^2>b^2$.

此卽言。一正數長大時。其平方與之俱大也。

其理可證之如下。

求證 $a^2>b^2$，當證 $a^2-b^2$ 爲正數（第 65 欵）。然

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

（第 52 欵）。$a^2-b^2$ 爲正數無疑。

蓋原設 $a>b$. 故 $(a-b)$ 爲正數。而原設 $a$ 與 $b$ 爲兩正數。故 $(a+b)$ 亦爲正數。兩數 $(a-b)$, $(a+b)$ 均爲正。其積 $a^2-b^2$ 不可不爲正。

**264. 函數 $y=x^2$ 之消長。** 設 $x$ 爲變數。凡能有之諸數。自 $-\infty$ 至 $+\infty$，皆可爲 $x$ 之値。按上章所定界說。$x$ 卽自變數也（見第 198 欵）。試取函數之消長討論之。

夫一數之平方。與其絕對值之平方同。且按上所立之預按。絕對値平方之消長。與絕對値之消長同向。故可斷之曰。

"一代數數目平方之消長。與絕對之消長同向"。

欲觀其消長。可將 $x$ 之値自 $-\infty$（負數之有最大絕對值者）。升至 $+\infty$（正數之最大者）。

當 $x$ 之絕對値極大時。其平方 $x^2$ 亦極大。蓋大於 1 之正數。其平方因大於此數也。

由此。設 $x$ 先取負數自 $-\infty$ 升至 $0$, 其絕對值自 $+\infty$ 降至 $0$, 故其平方 $x^2$ 亦自 $+\infty$ 降至 $0$.

設 $x$ 後取正數自 $0$ 升至 $+\infty$, 其絕對值亦自 $0$ 升至 $+\infty$. 故其平方 $x^2$ 亦自 $0$ 升至 $+\infty$.

約言之。"函數 $y=x^2$ 在 $-\infty$, $0$ 之間爲降。而在 $0$, $+\infty$ 之間爲升"。

$x=0$ 時。函數所取之値爲最小。故 $x=0$ 時, 謂 $y$ 爲極小函數。而是時, $y$ 所取之値 $0$. 謂之最小値。

上所討論之消長。可立表以舉其要。如右

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-\infty$ | $+\infty$ |
| 升 | 正數而降 |
| $0$ | $0$ (極小) |
| 升 | 正數而升 |
| $+\infty$ | $+\infty$ |

**265. 函數 $y=x^2$ 消長之圖解。** 如欲以圖解顯函數

$$y=x^2$$

之消長。當先定相垂之兩軸 $ox$, $oy$ (見第216款)。後取自 $-\infty$ 至 $+\infty$ 之各數代 $x$. 而推 $y$ 之相當値。於是以 $x$, $y$ 爲縱橫線之各點。可從而定矣,

$x=-\infty$ 時。$y=+\infty$. 相當之一點在縱軸之左,向上而甚遠。

$x$ 長大時。$y$ 減小。而弧線下降。

試定 $x$ 爲負值時相當之點(第二十九圖)。

$x=-2$ 時，$y=4$ 而相當之點爲 C；

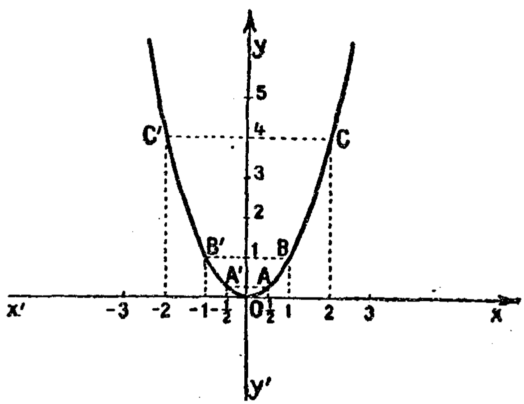
$x=-1$ 時，$y=1$ 而相當之點爲 B′；

$x=-\frac{1}{2}$ 時，$y=\frac{1}{4}$ 而相當之點爲 A′；

$x=0$ 時，$y=0$ 而相當之點爲 O.

故弧線。經元點 O.

於是得弧線下降之一分 C′B′A′O. 與 $x$ 諸負值相當者也。




(第二十九圖)

$x$ 變爲正數時。$y$ 長大而弧線自左邊移至右邊漸之上升。

其起點爲元點 O. 而上升不已。遠至無窮。居縱軸之右。

試定$x$爲正數時相當之點。

$x=\frac{1}{2}$ 時，$y=\frac{1}{4}$ 而相當之點爲 A;

$x=1$ 時，$y=1$ 而相當之點爲 B;

$x=2$ 時，$y=4$ 而相當之點爲 C.

於是得弧線上升之一分OABC.

弧線之兩分C′B′A′O與OABC向$oy$而等勢。

蓋$x$若取相反之兩值。$y$之值不變故相當之兩點。縱線相同。居$oy$之兩邊。而離$oy$之遠相等。故$x$爲負數時。所得之各點。與$x$爲正數時。所得之各點。爲等勢也。

例如A與A′, B與B′, C與C′各點。向$oy$而等勢。

**266. 函數$y=ax^2$之消長。** 引伸前欵。卽可論函數$y=ax^2$. $x$爲變數。$a$所以表一定數。可正亦可負。

此函數之消長。可徑從$y=x^2$之消長推得之。惟當依據第67欵定理耳。

蓋由此定理。知一變數若受乘於一正數。所得積數之消長與此變數之消長同向。

反之。若受乘於一負數。所得積數之消長與變

數之消長反向。

蓋設 $$x'^2 > x''^2;$$

(一) 若 $a > 0$, 則 (依第67款之定理)

$$ax'^2 > ax''^2;$$

(二) 若 $a < 0$, 則

$$ax'^2 < ax''^2.$$

故 $x$ 自 $x''$ 值變至 $x'$ 時。若 $x^2$ 而增。則 $ax^2$ 之升降。視 $a$ 之正負。(正升負降)。

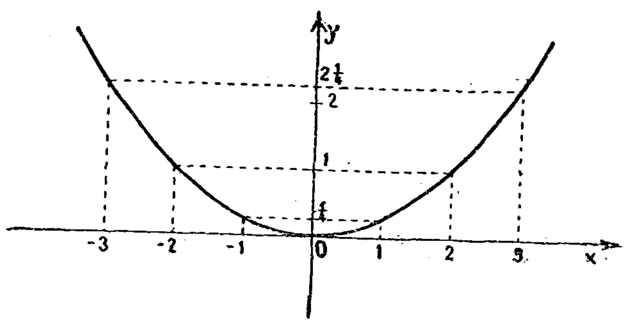
**267.** **$a > 0$ 之景。** 由前款。知 $a$ 爲正數時。$ax^2$ 與 $x^2$ 之消長同向。如立表以顯 $ax^2$ 之消長。則表內升降諸數。與264款所得者相類。

而其圖解之形。亦與 $y = x^2$ 同。卽謂與第二十九圖同式也。

(例) 試立函數

$$y = \frac{1}{4}x^2 \text{ 之圖解。}$$

先定相垂之兩軸 $ox, oy$. 而於 $ox$ 任意取一長




(第三十圖)

度爲準個。後取數目代 $x$. 求相當之各點。卽得圖解之形。如

$$取\quad x=\pm 3\ ,\quad 則\quad y=\frac{9}{4}=2+\frac{1}{4};$$

$$取\quad x=\pm 2\ ,\quad 則\quad y=1;$$

$$取\quad x=\pm 1\ ,\quad 則\quad y=\frac{1}{4}.$$

如是共得六點。連之卽得第三十圖之弧線。此弧線較之第二十九圖畧爲開展。

**268.** $a<0$ 之景。 若 $a$ 爲負數。則積數 $ax^2$ 常爲負數。其消長與 $x^2$ 之消長反向(第266欵)。

故將 $x^2$ 之消長揭之於表。而 $ax^2$ 之消長。從可推矣。

$x$ 自 $-\infty$ 升至 0 時。$ax^2$ 亦自 $-\infty$ 升至 0.

後, $x$ 自 0 升至 $+\infty$ 時。$ax^2$ 自 0 降至 $-\infty$.

$x=0$ 時。$ax^2$ 之値最高。故謂函數爲極大。而是時函數所取之値。卽謂之極大値。

$(a<0)$

| $x$ | $x^2$ | $ax^2$ |
|---|---|---|
| $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| 升 | 正數而降 | 負數而升 |
| 0 | 0 | 0(極大) |
| 升 | 正數而升 | 負數而降 |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

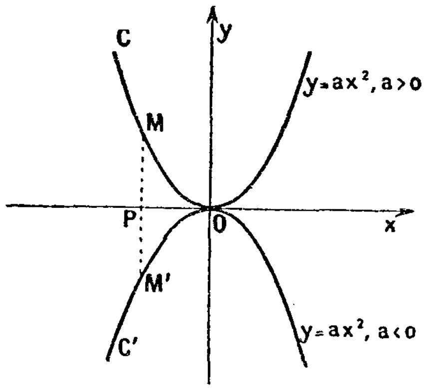
因 $y$ 常爲負數。故圖解之弧線均處 $ox$ 下。

此圖解之弧線。卽可從前欵所定之圖解式推得之。

蓋試作

$$y = 2x^2 \quad 及 \quad y = -2x^2,$$

兩函數之圖解。卽可知此兩圖解向横軸 $ox$ 而等勢。




(第三十一圖)

蓋若取一數代 $x$. 則兩數之相當値爲反數。設以横線 $\overline{OP}$ 表 $x$. 則相當之兩縱線適相反。一爲

$$\overline{PM} = 2x^2, \quad 一爲 \quad \overline{PM'} = -2x^2.$$

故 M, M' 兩點。各居 $ox$ 之一邊。而離 $ox$ 之距度等勢。

當 $x$ 自 $-\infty$ 升至 $+\infty$ 時。M 點行成一弧線 C (第三十一圖)。居 $ox$ 上。而 M' 點行成一弧線 C' C' 卽

函數 $y=2x^2$ 之圖解。C 與 C′ 向 $ox$ 而等勢。

故可一言以概之曰。$a$ 取相反兩值時。兩函數之弧線 C 與 C. 向 $ox$ 而等勢也。

**269. 提要。** 表函數

$$y=ax^2$$

消長之弧線。其形常如 C (第三十一圖)。

此弧線共分兩分。一居 $oy$ 之左。一居 $oy$ 之右。此兩分向 $oy$ 而等勢。是類弧線。幾何謂之拋物線。$oy$ 卽拋物線之軸。而 O 卽其頂也。

$a$ 爲正數時。拋物線 C 居 $ox$ 上。而其口向上。

$a$ 爲負數時。拋物線 C′居 $ox$ 下。而其口向下。

**270. 函數 $y=\frac{1}{x}$ 之消長.** 設 $x$ 爲自變數。試推究其倒數 $\frac{1}{x}$ 之消長。

夫 $x$ 絕對值之消長。與 $\frac{1}{x}$ 絕對值之消長。反向。

$x$ 之絕對值長大時, $\frac{1}{x}$ 之絕對值減小。$x$ 之絕對值至大時, $\frac{1}{x}$ 之絕對值至小, 卽與零漸近。

$x$ 愈大而 $\frac{1}{x}$ 愈近於零。

如 $x=1\,000$ 時, $\frac{1}{x}=0{,}001$

$x=1\,000\,000$ 時, $\frac{1}{x}=0{,}000\,001$ ;

... 等

故可斷之曰。$x$大至無窮時，$\frac{1}{x}$爲零。

反之，若$x$與零相近。則其倒數$\frac{1}{x}$之絕對値升大至無窮。

蓋一命分以極小數爲分母。此命分極大。此理已於第二第四章論之。(見第106, 107及150欵).

由此預按卽可推究$\frac{1}{x}$之消長。

$x$取負數自$-\infty$升至0，其絕對値自$+\infty$降至0，於是$\frac{1}{x}$之絕對値自0升至$+\infty$，而$\frac{1}{x}$取負數自0降至$-\infty$.

$x=0$時，$\frac{1}{x}$絕無意義。

後$x$取正數自0升至$+\infty$，則其倒數$\frac{1}{x}$亦取正數自$+\infty$降至0.

由是簡言之。$\frac{1}{x}$常降不息而無升。

$x=0$時。函數無定値。自$-\infty$陡躍至$+\infty$. 卽謂$y$自極大絕對値之負數。陡躍至極大正數(見第109欵)。故是之函數。謂之間斷函數。

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-\infty$ | 0 |
| 升 | 降 |
| | $-\infty$ |
| 0 | |
| | $+\infty$ |
| 升 | 降 |
| $+\infty$ | 0 |

以上討論可立表以揭其要。而以一畫置之0前。所以表$x=0$時。$y$無相當之値也。

**271. 函數 $y=\frac{1}{x}$ 消長之圖解。** 先定相垂之兩軸 $ox, oy$. 而任取一長度爲準個。

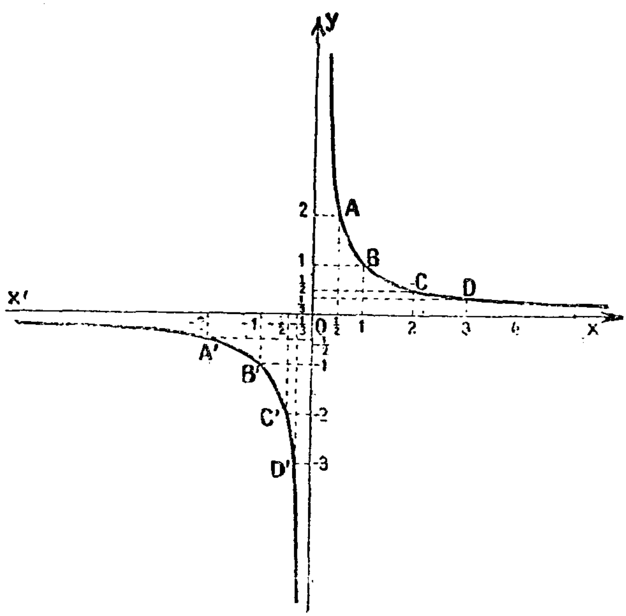
(一) $x$ 自 $-\infty$ 升至 0 時。則 $y$ 爲負。而自 0 降至 $-\infty$. 試求是時弧線所載之點。

取 $x=-2$, 則 $y=-\frac{1}{2}$ 而相當之點爲 A′;

取 $x=-1$, 則 $y=-1$ 而相當之點爲 B′;

取 $x=-\frac{1}{2}$, 則 $y=-2$ 而相當之點爲 C′;

取 $x=-\frac{1}{3}$, 則 $y=-3$ 而相當之點爲 D′.




(第三十二圖)

連此數點。卽得弧線下降之一分 $A'BCD'$. 居 $ox$ 下(第三十二圖)。

(二) $x$ 自 0 升至 $+\infty$ 時。則 $y$ 爲正。而自 $+\infty$ 降至 0. 試求是時弧線所載之點。

取 $x=\frac{1}{2}$, 則 $y=2$ 而相當之點爲 A;

取 $x=1$, 則 $y=1$ 而相當之點爲 B;

取 $x=2$, 則 $y=\frac{1}{2}$ 而相當之點爲 C;

取 $x=3$, 則 $y=\frac{1}{3}$ 而相當之點爲 D.

連此數點。卽得弧線下降之餘一分 ABCD. 居 $ox$ 上(第三十二圖)。

**272. 界線。** 謂一直線爲無窮弧線之界線者。弧線上一點遠至無窮時。此點與直線上之距度與零相近也。

反之。亦可謂弧線爲直線之界線。

界線之界說已定。卽可證上欵所定 $y=\frac{1}{x}$ 弧線之兩分。爲縱橫線兩軸之界線。

(證) 設 M 爲弧線上一點。從此點作兩垂線 MP, MQ 於 $ox$, $oy$ 上(第三十三圖)。MQ 等於 OP, 卽等

於 $x$ 之絕對值。MP 等於 OQ，即等於 $y$ 之絕對值。因是得

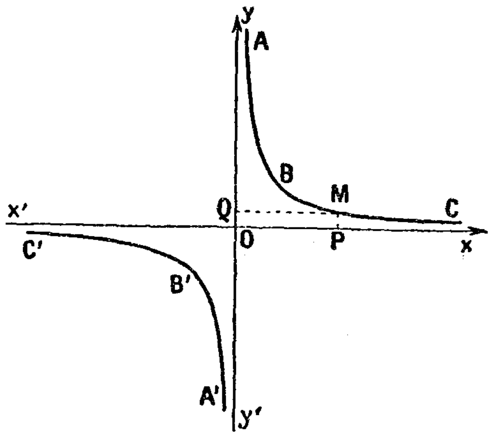
$$\mathrm{MQ} = |x| \qquad \mathrm{MP} = |y$$

(一) $x$ 長大至無窮時。$y$ 與零相近。故 M 點向 $ox$ 行。遠至無窮。而 MP 與零相近。

然距度 MP 既自 M 點至 $ox$ 漸與零相近。則 M 點所行之路。成一弧線。此弧線為 $ox$ 之界線。

若 $x$ 無窮長大而正數。則 M 所行之弧線 BC. 為 $ox$ 之界線。而居 $ox$ 上。(第三十三圖)。

若 $x$ 無窮長大而為負數。則 M 所行之弧線 B′C′. 為 $ox'$ 之界線。而居 $ox'$ 下。




(第三十三圖)

(二) $x$ 與零相近時。$y$ 長大至無窮。故 M 點向 $oy$ 行。遠至無窮。而 $MQ=|x|$ 與零相近。

然距度 MQ 旣自 M 點至 $oy$ 漸與零相近。則 M 點所行之路。成一弧線。此弧線爲 $oy$ 之界線。

若 $x$ 與零相近而爲正數。則 $y$ 無窮長大而爲正數。故 M 所行之弧線 BA (第三十三圖)。爲 $oy$ 之界線而向上。

若 $x$ 與零相近而爲負數。則 M 點居 $oy$ 之左。M 點所行之弧線 B′A′. 爲 $oy'$ 之界線而向下。

**273. 軸與中心。** 上言弧線圖表函數 $=ax^2$ 之消長者。有等勢之軸 (見第 269 款)。

謂弧線有一等勢之軸者。若此弧線上各點。離一直線之距度。兩兩相等勢也。

此直線卽謂之等勢之軸。

謂弧線有一中心者。若此弧線上各點。離一點之距度。兩兩相等勢也。

此點卽謂之中心。

由此兩界設。卽可證以下兩定理。

(一) 表 $y=\dfrac{1}{x}$ 消長之弧線。有兩等勢之軸。卽縱

橫線之兩軸所成角 $xoy$ 之分角線。

(二)幷有一中心。卽縱橫線之元點。

(證一) 設爲弧線上任一點 M. 以 $m$ 爲其橫線。則其縱線必爲 $y=\frac{1}{m}$. 又設 M′ 點(第三十四圖)。其橫線等於 $\frac{1}{m}$. 則其縱線必爲

$$y=\frac{1}{\left(\frac{1}{m}\right)}=m.$$

M′ 點之縱線。等於 M 點之橫線。故

$$OP=OP',$$

而 OPRP′ 成一正方形。因 OR 直線爲此正方之對角線，故 OR 爲 $xoy$ 角之分角線。

又 M′ 點之橫線。等於 M′ 點之縱線。故

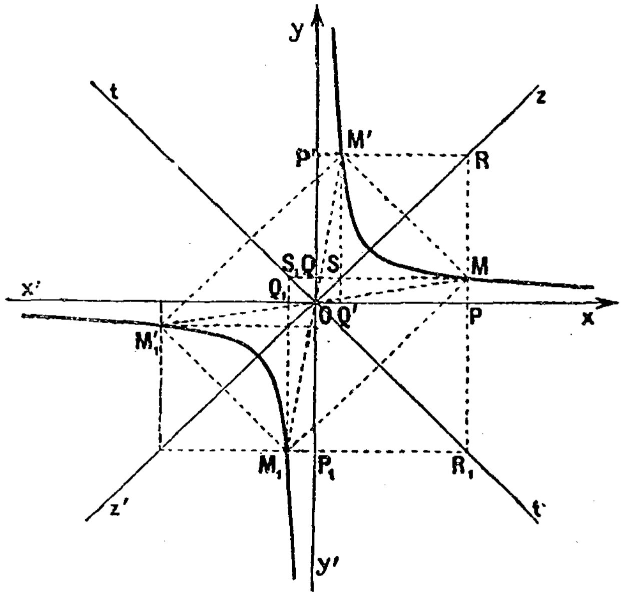
$$OQ=OQ'.$$

故 OQSQ′ 亦成一正方形。而其對角線 OS 亦爲 $xoy$ 之分角線。

故 O, R, S 三點爲一直線。居 $xoy$ 之分角線 $oz$ 上。然 MRM′S 亦爲一正方形。蓋其四角皆直。而

$$MS=Q'P=OP-OQ'=OP'-OQ=P'Q=M'S.$$

由是言之。MM′ 亦爲正方形 MRM′S 之第二對角線。與第一對角線 $oz$ 相垂而爲 $oz$ 所平分。




(第三十四圖)

故 M,M′ 兩點向分角線 $oz$ 而等勢。

由是以推。直線 $oz$. 卽爲弧線之等勢之軸。蓋於弧線上取一點 M. 必有一點 M′ 應之。此點 M′ 於 M 向 $oz$ 而等勢也。

設 $M_1$ 點(第三十四圖)。以 $-\frac{1}{m}$ 爲其横線。則其縱線必爲

$$y=\frac{1}{\left(-\frac{1}{m}\right)}=-m.$$

因 M 點之横線爲 $M_1$ 點之縱線。故

$$\overline{OP}=-\overline{OP_1},\quad \overline{OQ}=-\overline{OQ_1};$$

而其長度爲

$$OP = OP_1, \quad OQ = OQ_1.$$

理論之如上文。卽可見四邊形 $OPR_1P_1$ 與 $OQS_1Q_1$ 皆爲正方形。故 $S_1R_1$ 直線爲 $xoy'$ 之分角線。而 M 與 $M_1$ 向此分角線 $tot'$ 而等勢。

故縱橫線之兩軸所成角之第二分角線 $tt'$，亦爲等勢之軸。

(證二) 設 $M_1$ 點。以 $-m$ 爲横線。而其縱線爲 $y = -\frac{1}{m}$.

理論之如上文。卽可見 $M'_1$ 與 $M_1$ 向 $zz'$ 而等勢。而 $M'_1$ 與 $M'$ 亦向 $tt'$ 而等勢。

以上討論。可立表以揭其要。得 $M, M', M_1, M'_1$ 四點之縱横線。

| | $x$ | $y$ | 向 $zz'$ 而等勢 | 向 $tt'$ 而等勢 |
|---|---|---|---|---|
| M | $m$ | $\frac{1}{m}$ | $M'$ | $M_1$ |
| $M'$ | $\frac{1}{m}$ | $m$ | M | $M'_1$ |
| $M_1$ | $-\frac{1}{m}$ | $-m$ | $M'_1$ | M |
| $M'_1$ | $-m$ | $-\frac{1}{m}$ | $M_1$ | $M'$ |

若一點之橫線。等於他點之縱線。則此兩點向 $zz'$ 而等勢。

若一點之橫線。等於他點之縱線而反其記號。則此兩點向 $tt'$ 而等勢。

由是。以觀 $MM'M'_1M_1$ 爲直角形。而 $zz'$, $tt'$ 均垂於直角形邊之中。故 O 點爲直角形之中心。而 $M$, $M'_1$ 點爲直角形之相對頂。向 O 而等勢。

弧線上任一點 M 與相當之一點 $M'_1$. 向 O 而等勢。故 O 爲弧線之中心。

**274. 提要。** 函數 $y=\frac{1}{x}$ 之圖解爲一弧線。其兩分皆無窮。(見第 237 頁。第三十四圖)。

此兩分皆爲縱橫兩軸之界線。

且此弧線有兩等勢之軸。即縱橫線之兩軸所成角之分角線。并有一中心卽縱橫線之元點。

按之幾何學。是類弧線。謂之垂形雙曲線。

蓋其兩界線相垂也。

**275. 函數 $y=\frac{c}{x}$ 之消長。** 於第 266 欵。曾論一幾何若被乘於一正數。所得之乘積。其消長與是幾何之消長同向。若被乘於一負數。則所得

之乘積。其消長與是幾何之消長反向。

因是函數$\frac{c}{x}$之消長。可按$c$之正負。分兩端論之。

**276.** $c>0$**之景**。若法數$c$為正數。則函數$y=\frac{c}{x}$之消長與$y=\frac{1}{x}$之消長無異。故$y=\frac{c}{x}$常降。

其弧線亦成一垂形雙曲線。弧線之形與位置無一不與前弧線相同。(見第237頁。第三十四圖)。

**277.** $c<0$**之景**。若法數$c$為負數。則函數$y=\frac{c}{x}$之消長與$y=\frac{1}{x}$之消長反向。故$y=\frac{c}{x}$常升。

$x$為正數時，則$y$為負數。$x$為負數時，則$y$為正數。故$y=\frac{c}{x}$之消長表。卽可從$y=\frac{1}{x}$之消長表推得之。

$c<0$

| $x$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{c}{x}$ |
|---|---|---|
| $-\infty$ | 0 | 0 |
| 升 | 負數而降 | 正數而升 |
| | $-\infty$ | $+\infty$ |
| 0 | | |
| | $+\infty$ | $-\infty$ |
| 升 | 正數而降 | 負數而升 |
| $+\infty$ | 0 | 0 |

欲得弧線圖表消長。表只須畧按上文(第268欵)論$y=ax^2$弧線之理。而仿其意。

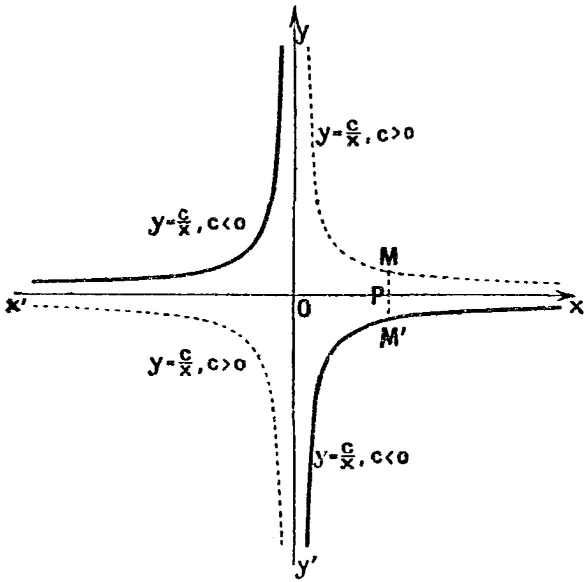
$c$為正數與為負數時。函數$y=\frac{c}{x}$之兩弧線。向$ox$而等勢。

試取

$$y=\frac{3}{x}\ ,\ y=\frac{-3}{x}\text{ 例之。}$$

若以一數代 $x$. 則 $y$ 應之以相反之兩值。故得相當兩點 M, M′ (第三十五圖). 其横線 OP 同。而其縱線 $\overline{PM}$, $\overline{PM'}$ 相反。故 M, M′ 兩點向 $ox$ 而等勢。

當 M 點行經各處。成 $y=\frac{3}{x}$ 之弧線 (卽圖中之虛線) 時。M′ 行經各處成 $y=\frac{-3}{x}$ 之弧線 (卽圖中實線), 向前弧線而等勢。




(第三十五圖)

由是以觀。$c$ 為負數時。表 $y=\frac{c}{x}$ 消長之弧線。仍為垂形雙曲線。仍以 $ox$, $oy$ 為界線。惟居 $x'oy$, $xoy$

兩角間耳。

**278. 函數$y=\dfrac{bx+c}{x}$之消長。** 推究是函數之消長。可將$y$化為

$$\frac{bx+c}{x}=\frac{bx}{x}+\frac{c}{x}=b+\frac{c}{x}.$$

由此可見是函數卽$\dfrac{c}{x}$而加一定數$b$耳。

但加一定數於不等式之兩端。此不等式仍存。(見第69款)。然則加一定數於變數。所得之和。其消長。必與此變數之消長同向。

故函數

$$y=b+\frac{c}{x}$$

之消長。與$y=\dfrac{c}{x}$之消長同向。

又有當表明者。若照$x$之值有

$$b+\frac{c}{x}=0$$

或
$$bx+c=0$$

或
$$x=-\frac{c}{b},$$

則函數為零。

(例) 試取

$$y=\frac{2x+3}{x}\text{觀之。}$$

此函數可易為

$$y=2+\frac{3}{x},$$

其消長與$\frac{3}{x}$之消長同向。故函數常降。又若

$$2+\frac{3}{x}=0$$

或 $$x=-\frac{3}{2},$$

則函數為零。

取$\frac{3}{x}$之消長表而加一定數 2. 卽得所設函數之消長表。

| $x$ | $\frac{3}{x}$ | $y$ |
|---|---|---|
| $-\infty$ | 0 | 2 |
| 升 | 降 | 正數而降 |
| $-\frac{3}{2}$ | $-2$ | 0 |
| 升 | 降 | 負數而降 |
| 0 | $-\infty$ / $+\infty$ | $-\infty$ / $+\infty$ |
| 升 | 降 | 正數而降 |
| $+\infty$ | 0 | 2 |

**279.** $y=\frac{bx+c}{x}$**之圖解。** 先畫相垂兩軸 $Ox$, $Oy$. 後定一直線 $O_1x_1$. 與 $Ox$ 平行。而以 $b$ 為距度,卽謂 $O_1x_1$ 線與 $Oy$ 相交於一點 $O_1$. 以

$$\overline{OO_1}=b$$

為縱線也。

設 M (見第三十六圖) 為弧線上任一點 M. 而從是點落一垂線 MP 於 $Ox$. 此垂線交 $O_1x_1$ 於 $P_1$.

因之得(見第75欵)

$$\overline{PM}=\overline{PP_1}+\overline{P_1M}.$$

但 $\overline{PM}$ 為M點之縱線。卽 $y$. 而 $\overline{PP_1}$ 等於 $\overline{OO_1}$. 卽等於 $b$. 設以 $y_1$ 表 $\overline{P_1M}$. 則

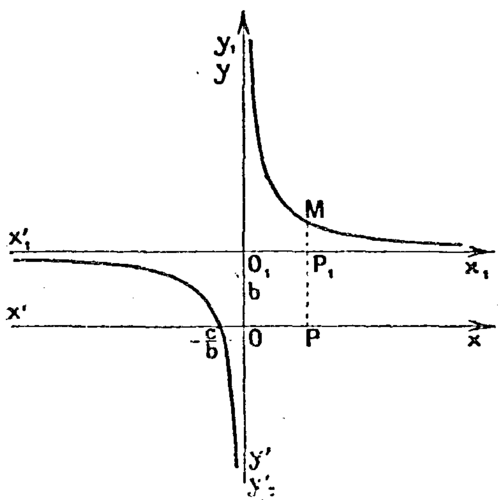
$$y=b+y_1.$$

故可視 $O_1x_1$ 與 $O_1y_1$ ($O_1y_1$ 與 $Oy$ 相合)為縱橫線之兩新軸。

M點之橫線 $\overline{O_1P_1}$, 與 $\overline{OP}$ 等。卽與 $x$ 之原橫線等。

故若以 $x, y$ 表 $Ox, Oy$ 軸上M點之縱橫線。而以 $x_1, y_1$ 表 $O_1x_1, O_1y_1$ 軸上M點之縱橫線。得

$$\begin{cases} x=x_1, \\ y=b+y_1. \end{cases} \qquad (1)$$




(第三十六圖)

夫M居函數$y=\frac{bx+c}{x}$之弧線上。故M點之方程。為

$$y=b+\frac{c}{x}. \tag{2}$$

以$x,y$之等值。由(1)之兩等式推得者代入之。得

$$b+y_1=b+\frac{c}{x_1};$$

約之得

$$y_1=\frac{c}{x_1}.$$

於是以$Ox_1$, $Oy_1$兩軸論。弧線之方程與第275欵所論者。無以異也。

夫$y_1$既為$\frac{c}{x_1}$式。則歸入前言之景(第275欵)。

故所求弧線之形為垂形雙曲線。

而以兩新軸$Ox_1$, $Oy_1$為界線(第三十六圖)。

由是言之。於兩新軸$Ox_1$, $Oy_1$上繪

$$y_1=\frac{c}{x_1}$$

之圖解。卽得函數

$$y=\frac{bx+c}{x}$$

之圖解。

弧線交$Ox$於一點。此點卽以$-\frac{c}{b}$為橫線也。

例如求函數

$$x=\frac{2x+3}{x}$$

之圖解(見第 278 欵)。卽可用是法。先取 $\overline{\mathrm{OO}_1}=2.$ 後以 $\mathrm{O}x_1$, $\mathrm{O}y_1$ 爲界線繪一雙曲線。卽此表

$$y_1=\frac{3}{x_1}$$

之消長也。

此弧線交 $\mathrm{O}x$ 於一點。其橫線爲

$$-\frac{3}{2}.$$

**280.** $y=\dfrac{bx+c}{x}$ **之致用。** 軸上一點與此軸之兩定點相去之距離成一比例。試以圖解表此比例之消長。

設 M 爲軸上一點。而 A 與 B 爲此軸之兩定點。則比例

$$y=\frac{\overline{\mathrm{BM}}}{\overline{\mathrm{AM}}}$$

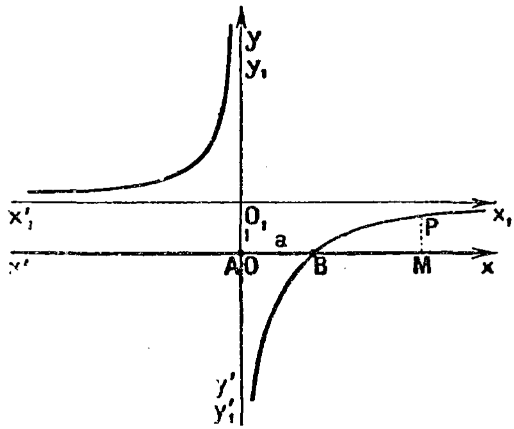
可變爲

$$y=\frac{x-a}{x}$$

[見第二章。第四節。第 105 欵 (2)]。$a$ 表定向線 $\overline{\mathrm{AB}}$, 而 $x$ 表 M 點之橫線 $\overline{\mathrm{AM}}$ 也。

欲詳惟是比例 $y$ 之消長。可以圖解表之。

先於AB直線上(第三十七圖)。取一點A.為橫線之元O.取AB向為正向。又取AB直線為 $x$ 之軸。於A(或O)點起一垂線 $Oy$.




(第三十七圖)

設M為AB上任一點。於M起一垂線MP.而於此垂線上。取一定向線 $\overline{MP}$ 等於 $y$; $y$ 為正數時,P居 $Ox$ 上。$y$ 為負數時,P居 $Ox$ 下。P點以 $x$, $y$ 為縱橫線。故 $x$ 變動時,P點行成一弧線。即表比例 $y=$

$\frac{x-a}{x}$ 之消長者也。

此比例。可化為

$$y=1-\frac{a}{x}.$$

按第279款。求此圖解。可於 $oy$ 上取定向線 $\overline{\mathrm{OO}_1}=1$. 而依 $\mathrm{O}_1x_1$ 與 $\mathrm{O}_1y_1$ ($\mathrm{O}_1y_1$ 與 $\mathrm{O}y$ 相合) 繪函數

$$y_1=-\frac{a}{x_1} \text{ 之圖解。}$$

此處 $c$ 等於 $-a$. 故 $c$ 為負數。故雙曲線居 $x'_1\mathrm{O}_1y_1$ 及 $x_1\mathrm{O}_1y'_1$ 兩角內。而以 $\mathrm{O}_1x_1$, $\mathrm{O}_1y_1$ 為界線。且此線交 $\mathrm{O}x$ 於 $x=a$ 一點。卽於B點也。

旣繪此雙曲線。$y$ 之消長。甚易見矣。

知 AB 直線上任一點M. 如欲求比例 $y=\frac{\overline{\mathrm{BM}}}{\overline{\mathrm{AM}}}$ 之值。可於M點起一垂線。使其交雙曲線於一點P. 定向線 $\overline{\mathrm{MP}}$ 之代數量。卽比例於M之值。

在 $x'$A 界域內。比例 $y$ 大於 $\overline{\mathrm{OO}_1}$. 卽大於1.

在AB界域內。弧線居 $\mathrm{O}x$ 下。故比例 $y$ 為負。

在 B$x$ 界域內。比例 $y$ 為正，而小於 $\mathrm{OO}_1$. 卽小於1.

第二章第四節第105款所討論之情狀。由此處觀之。甚為明顯也。

# 第七章。級數。對數。利息。

## 第一節。差級數。

**281. 界說。** 凡連續之若干項。共任一項與相連之前項相減。所得之較。成一定數者。謂之差級數。

此定數較。謂之級數之公差。

奏一差級數。時以記號$\div$置於首項之前。而以一點居相連兩項之間。

例如

$$\div 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 19 \cdots$$

為差級數。蓋

$$7-3=11-7=15-11=19-15=4.$$

其公差為4.

**282. 求$n$次項。** 試取差級數$\div a \cdot b \cdot c \cdot d \ldots$論之。

按界說得

$$b-a=c-b=d-c=\cdots=r,$$

卽公差也。

因是得

$$b=a+r,\ c=b+r,\ d=c+r.\ \ldots$$

由是以觀。級數中之每一項。皆等於相連之前一項。加其公差。

夫級數之首一項爲$a$;故第二項爲$a+r$;第三項等於第二項加公差。卽$(a+r)+r=a+2r$;第四項等於第三項加公差。卽$a+3r$,餘皆仿此。

由此可見:

凡求一項。當取前於此項之項數爲公差之次數。加此若干項之公差於首項。即得所求之項。

此處所求之項爲第$n$次。故$n$次項等於

$$a+(n-1)\,r,$$

蓋有$(n-1)$項數前於此項也。

(例) 連續之奇數

$$\div 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdots$$

成一差級數。以2爲其公差。

故第$n$次之奇數爲

$$1+2(n-1)=2n-1.$$

**283. 按。** 若反差級數各項之次序。則得一新差級數。其公差與前公差相反。

(證) 設

$$\div a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot$$

一差級數。以 $r$ 爲其公差。則

$$b-a=c-b=d-c=e-d=f-e=r.$$

因是得

$$e-f=d-e=c-d=b-c=a-b=-r.$$

此卽表

$$\div f \cdot e \cdot d \cdot c \cdot b \cdot a \cdot$$

成一差級數。以 $-r$ 爲其公差也。

**284. 定理。** 有限差級數中。距首尾相等遠之兩項。其和等於一定數。此定數卽首尾兩項之和。

(證) 設

$$\div \underbrace{a \cdot b \cdot c \cdot \cdots\cdots}_{p\text{項}} g \cdots\cdots \underbrace{h \cdots\cdots j \cdot k \cdot l \cdot}_{p\text{項}}$$

一差級數。以 $r$ 爲其公差。又設 $g$ 項之前。有若干項 $p$. 而 $h$ 項之後。有若干項 $p$. 則得等式

$$g = a + pr \qquad (1)$$

(見第282欵)。

今試反各項之次序。則得一新差級數。以 $-r$ 爲公差。以 $l$ 爲首項(見第283欵)。於是有若干項 $p$ 居 $h$ 之前矣。

故又得等式

$$h = l + p(-r) = l - pr. \qquad (2)$$

將(1)(2)兩等式之兩端。兩兩相加。得

$$g + h = a + pr + l - pr = a + l.$$

**285. 各項之和。**有限差級數中。各項之和。等於首尾兩項相加折半後。受乘於項數之積。

(證) 設

$$\div a \cdot b \cdot c \cdot \cdots\cdots h \cdot k \cdot l$$

一差級數。

含 $n$ 項。而以 S 表其各項之和。則

$$S = a + b + c + \cdots + h + k + l. \qquad (1)$$

今反等式下端各項之次序。則又得等式。

$$S = l + k + h + \cdots + c + b + a. \qquad (2)$$

將(1)(2)兩等式之兩端。兩兩相加。得

$$2S=(a+l)+(b+k)+(c+h)+\cdots+(h+c)$$
$$+(k+b)+(l+a).$$

此等式之下端。共得 $n$ 括弧。而每括弧所含之數。皆爲距首尾相等遠之兩項之和。故皆等於 $(a+l)$. 故等式下端等於 $n$ 倍 $(a+l)$. 卽

$$2S=(a+l)\,n,$$

因是

$$S=\frac{(a+l)}{2}\cdot n. \qquad (3)$$

**286.** **按。** 因級數含 $n$ 項。故

$$l=a+(n-1)\,r.$$

以此數易 $l$ 代入 (3) 公式。則得

$$S=\frac{2a+(n-1)\,r}{2}\cdot n.$$

**287.** **致用。** (求自 1 至 $n$ 各整數之和)。

連續之各整數。成一差級數.以 1 爲公差。

故自 1 至 $n$ 各整數之和。爲

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{(n+1)\,n}{2},$$

例如自 1 至 100 各整數之和。爲

$$\frac{101 \cdot 100}{2} = 5\,050.$$

**288.** (求自1至$n$各寄數之和)。

連續之各奇數。成一差級數。以2爲公差。此處首項爲1.而第$n$次之奇數爲$2n-1$(見第282欵).

故自1至$n$各奇數之和。爲

$$\frac{(2n-1+1)\,n}{2} = n^2.$$

故和等於$n$之平方。

例如

$$1+3 = 4 = 2^2$$

$$1+3+5 = 9 = 3^2,$$

$$1+3+5+7 = 16 = 4^2,$$

$$1+3+5+7+9 = 25 = 5^2.$$

## 第二節。倍級數。

**289.** **界說。** 凡連續之若干項。其任一項與相連之前一項相除。所得之商成一定數者。謂之倍級數。

此定數謂之級數之公倍

表一倍級數。時以記號 $\div\!\div$ 置首項之前。而以兩點居相連兩項之間。

例如

$$\div\!\div 1:2:4:8:11:32$$

爲公倍2之倍級數。蓋

$$\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=\frac{16}{8}=\frac{32}{16}=2.$$

## 290. 求 $n$ 次項。

設 $$\div\!\div a:b:c:d:\ldots$$

爲公倍 $q$ 之倍級數。

按之界說。應得

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\cdots=q.$$

因是得

$$b=aq\quad,\quad c=bq\quad,\quad d=cq.\quad\ldots$$

由此可見。級數中每一項。均等於前一項受乘於公倍之積。

夫級數之首一項爲 $a$, 故第二項等於 $aq$; 第三項等於第二項受乘於 $q$, 故等於 $aq\cdot q=aq^2$; 第四項等於第三項受乘於 $q$, 故等於 $aq^2q=aq^3$; 餘皆

準此。

由是以觀。

凡任求一項。當取前於此項之項數爲公倍之次數。以此若干次之公倍乘首項。卽得所求之項。

此處所求者爲第$n$次項。故等於$aq^{n-1}$.

例如公倍10之倍級數

$$\div\div 1:10:100:1000:\cdots$$

其$n$次項爲

$$1\cdot 10^{n-1}=10^{n-1}.$$

**291. 按**。倍級數各項絕對値之升降。以公倍之絕對値大於1或小於1爲準的。

例如倍級數

$$\div\div 1:2:4:8:\cdots$$

以2爲公倍。因公倍大於1.故級數爲升。

反之如

$$\div\div 1:\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{8}:\cdots$$

以$\frac{1}{2}$爲公倍。因公倍小於1.故級數爲降。

若反倍級數各項之次序。則得一新級數。其公倍爲前公倍之倒數。

蓋若

$$\div\div a:b:c:d:f:g$$

爲公倍$q$之倍級數。則得

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\frac{f}{d}=\frac{g}{f}=q.$$

因是得

$$\frac{f}{g}=\frac{d}{f}=\frac{c}{d}=\frac{b}{c}=\frac{a}{b}=\frac{1}{q},$$

此卽表

$$\div\div g:f:d:c:b:a$$

爲公倍$\frac{1}{q}$之倍級數也。

**292. 各項之和。** 從公倍與末項相乘之積。減去首項。復以公倍減一之數除之。所得之商。卽倍級數各項之和。

設

$$\div\div a:b:c:\cdots\cdots h:k:l$$

爲公倍$q$之倍級數。而以S表其各項之和。則

$$S=a+b+c+\cdots\cdots+h+k+l. \qquad (1)$$

以$q$乘此等式之兩端。得

$$Sq = aq + bq + cq + \cdots + hq + kq + lq.$$

但 $aq = b\ ,\ bq = c\ ,\ \cdots hq = k\ ,\ kq = l;$

故上式可易為

$$Sq = b + c + \cdots + k + l + lq. \qquad (2)$$

將(1)(2)兩等式之兩端。兩兩相減。而消去兩等式下端共有之各項 $b, c, \ldots, h, k, l$; 則得等式

$$Sq - S = lq - a;$$

以S為公生數。是式易為

$$S\ (q - 1) = lq - a.$$

若 $q$ 異於1. 則 $q - 1$ 異於零。而是式又可化為

$$S = \frac{lq - a}{q - 1}. \qquad (3)$$

**293.** **按一。** 設級數含 $n$ 項。則

$$l = aq^{n-1}.$$

以 $l$ 之同數代入(3)公式。得

$$S = \frac{aq^n - a}{q - 1} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

因是得恒等式如下。

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-2} + aq^{n-1} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

或

$$1+q+q^2+\cdots+q^{n-2}+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}$$

或

$$(1+q+q^2+\cdots+q^{n-2}+q^{n-1})(q-1)=q^n-1.$$

此恒等式已於第130欵論及矣。

(例) 由此恒等式,可推求下兩數。卽

$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1.$$

及

$$1+10+10^2+\cdots+10^{n-1}=\frac{10^n-1}{10-1}=\frac{10^n-1}{9}.$$

**294. 按二。** 前欵曾設$q$異於1.使$q$等於1.則級數中各項均相等。而第一項$n$共和卽等於$n$次之一項。

---

## 第三節。對數。

**295. 界說。** 設兩升級數。一爲首項零,公差$r$之差級數。一爲首項1,公倍$q$之倍級數:

$$\div 0.r.\ 2r.\ 3r.\ 4r.\ \ldots\ldots.\ nr.\ \ldots$$

$$\div\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \ldots\ldots : q^n : \ldots$$

差級數之任一項。各之曰。倍級數中一項。與此項同列者之對數。

反之。倍級數之任一項。各之曰。差級數中一項。與此項同列者之眞數。

例如$q^4$之對數爲$4r$.而$q^4$卽$4r$之眞數也。

故一數$a$之眞數。卽一數取$a$爲其對數也。

若取$q$近於1.而$r$近於零。則兩級數中相連之兩項。可令其相去甚微。故可謂大於一之數。均在所設倍級數內。卽不在倍級數內。亦必與所包含者相去甚微。

故大於1之任一數。各有一對數。

例如欲求2,5123之對數。先當察是數是否在倍級數內。若有是數。則差級數中與此數同列之項。卽其對數。若無是數。則於倍級數中。取一數。與此數畧近。如倍級數中與2,5123畧近之數爲2,5122.取是數之對數。卽得2,5123之畧近對數。

**296.** 上款界說。僅將大於1各數之對數定其意義。蓋升倍級數$q>1$

$$\div\div 1 : q : q^2 : q^3 \ldots$$

僅含大於1之諸數也。

今將小於1各數之對數。定其界說如下。

凡小於1各數之對數。卽是數倒置後之對數。而變其記號也。(卽倒數之對數之相反)。

例如求$\frac{1}{2}$之對數。當求其倒數2之對數。而變其記號。使0,301為2之對數。則$-0.301$. 卽$\frac{1}{2}$之對數。

由是以觀。無論何數。均有一對數。蓋或其本數。或其倒數。大概在所設倍級數內也。

**297. 尋常對數。** 由前定界說推之。對數之式。可至無窮。蓋$q$與$r$可任意取定也。

為便利計。可擇$q$與$r$兩數。使10之對數。適為1. 此對數之式。論之尋常對數。尋常式中有

$$r = 0{,}0\,001,$$

$$q = 1{,}0\,002\,303\,115\ldots$$

差級數之第10 001項遂為1. 而倍級數之第10 001項為10.

以$\log x$表一數$x$之尋常對數。

則得

$$\log 1 = 0 \qquad \log 10 = 1.$$

**298.** **按一。** 無論何對數聯立式。凡1之對數。總等於0.

蓋兩級數其首項總爲0與1也。

凡數大於1.其對數常爲正數。而數小於1.其對數常爲負數。

**299.** **按二。** 謂之對數聯立式之"底"者。卽一數於此式中。以1爲對數也。

故對數尋常式之底爲10.

**300.** **按三。** 須注意。此處惟言正數對數之界說。

**301.** **對數定法。** 對數中有緊要之性質數條。甚合於演算數目之用。

試舉之如下。

**302.** **性質一。** 積數之對數。等於各生數對數之和。

(證)　設有兩數目$a$與$b$.定理言

$$\log ab = \log a + \log b.$$

可分三方法證之。

(一)。 設 $a>1, b>1$. 則 $a$ 與 $b$ 在

$$\because\!\because 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots$$

倍級數內。故

$$a = q^n, \quad b = q^{n'}.$$

而(見第47欵) $ab = q^n q^{n'} = q^{n+n'}$.

按界說

$$\log a = \log q^n = nr,$$

$$\log b = \log q^{n'} = n'r,$$

$$\log ab = \log q^{n+n'} = (n+n')r.$$

故

$$\log ab = \log a + \log b.$$

(二)。 設 $a>1, b<1$. 則 $a$ 在倍級數內。而 $b$ 不與焉。於是 $b$ 之對數爲 $\frac{1}{b}$ 對數之相反數(第296欵)。

設

$$a = q^n, \quad \frac{1}{b} = q^{n'},$$

或

$$b = \frac{1}{q^{n'}},$$

因之得(見第61欵)

$$ab = \frac{q^n}{q^{n'}} = q^{n-n'}$$

(設 $n>n'$)。

按界說

$$\log a = q^{n} = nr,$$

$$\log b = -\log q^{n'} = -n'r,$$

$$\log ab = \log q^{n-n'} = (n-n')r,$$

故仍得

$$\log ab = \log a + \log b.$$

此處設$a > \frac{1}{b}$. 若$a < \frac{1}{b}$, 則$n' > n$, 而

$$a = \frac{q^{n}}{q^{n'}} = \frac{1}{q^{n'-n}},$$

故

$$\log ab = -\log q^{n'-n} = -(n'-n)r = (n-n')r,$$

其理仍遍。

(三)。設$a < 1, b < 1$. 則兩數目均當取其倒數$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$.

說

$$\frac{1}{a} = q^{n}, \quad \frac{1}{b} = q^{n'}$$

則

$$a = \frac{1}{q^{n}}, \quad b = \frac{1}{q^{n'}},$$

而

$$ab = \frac{1}{q^{n}} \cdot \frac{1}{q^{n'}} = \frac{1}{q^{n+n'}}.$$

由界說(第296欵)。得

$$\log a = -\log q^{n} = -nr,$$

$$\log b = -\log q^{n'} = -n'r,$$

$$\log ab = -\log q^{n+n'} = -(n+n')r,$$

仍得

$$\log ab = \log a + \log b.$$

由是論之。凡兩生數之積。無不可以是定理求其對數者。

**303.** 諸生數之積。即可取上言之性質引伸之。以求其對數。

試取積數 $abcd$ 例之。夫 $abcd$ 可視爲 $a$ 與 $bcd$ 兩數相乘之積。故按之第302欵。可得等式

$$\log abcd = \log a + \log bcd. \tag{1}$$

$bcd$ 亦可視爲 $b$ 與 $cd$ 相乘之積。故又得等式

$$\log bcd = \log b + \log cd. \tag{2}$$

終

$$\log cd = \log c + \log d. \tag{3}$$

將(1)(2)(3)立等式相加。而删去其兩端相同之項。(即 $\log bcd$, $\log cd$). 得

$$\log abcd = \log a + \log b + \log c + \log d.$$

**304. 性質二。** 商數之對數。等於實數之對數。減去法數之對數。

(證) 設以 $c$ 表 $\frac{a}{b}$ 之商。由除法界說(第 53 欵)。得

$$a = bc,$$

此可用第一性質以求其對數。即

$$\log a = \log b + \log c.$$

因是得

$$\log c = \log a - \log b$$

或

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

**305. 係。** 一數目之對數。其消長與是數目之消長同向。

(證) 設

$$a > b,$$

則

$$\frac{a}{b} > 1.$$

夫 $\frac{a}{b}$ 既大於1.則其對數必為正數(見第 298 欵)。故得

$$\log \frac{a}{b} > 0$$

或

$$\log a - \log b > 0;$$

因之得

$$\log a > \log b.$$

是$a, b$兩數目中之大者。其對數亦大。

例如尋常對數。10之對數爲1. 而1之對數爲0. 故若$a$而居1與10之間。

$$1 < a < 10,$$

則$a$之對數必居0與1之間。

$$\log 1 < \log a < \log 10$$

或

$$0 < \log a < 1.$$

**306. 性質三。** 乘方數之對數等於是數之對數。受乘於其指數之積。

(證) 試取$a^4$論之。按乘方界說(第45欵):

$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a.$$

故以第一性質。得

$$\log a^4 = \log a + \log a + \log a + \log a = 4 \log a.$$

取是法而廣之。設乘方爲$a^n$. 則

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots . a}_{n\text{生數}}.$$

故

$$\log a^n = \underbrace{\log a + \log a + \log a + \ldots . + \log a}_{n\text{次}}$$

或 $$\log a^n = n \cdot \log a.$$

**307. 性質四。** 數根之對數。等於是數之對數所受除於其根號之指數之商。

（證） 設 $a$ 爲正數。按界說（見4欵）。謂是數之 $m$ 次根。而以 $\sqrt[m]{a}$ 表之者。即謂一數 $b$ 以 $m$ 次 $a$ 爲其乘方也。故等式

$$b = \sqrt[m]{a}$$

與等式

$$b^m = a$$

無異。故由第三性質。得

$$\log b^m = m \log b = \log a.$$

因之得

$$\log b = \frac{1}{m} \log a$$

或 $$\log \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} \log a.$$

例如

$$\log \sqrt{3} = \frac{1}{2} \log 3,$$

$$\log \sqrt[3]{4} = \frac{1}{3} \log 4.$$

**308.　對數表。**凡數價於1與10之間。其對數必價於0與1之間(見第305欵)。而對數之整數分。常為0.

故以自1至10相去百分之一之各數。立一對表。即此表列自1;1,01;1,02;1,03等對數。直至9,98及9,99.

然整數分既常為0.只須於表內置數尾之號碼。是名曰尾數分。

今於是書之後殿以4位尾數之對數表。

其號碼之位置。可述之如下。

為簡便計。先將表尾數之一撇删去。

凡一數之首兩號目。均在左邊第一行內。是行之首。冠以$N$字。

其第三號碼。則在下數行中一行之首。

例如求3,57之對數。

先將一撇删去。所說之數。易為357.

於是於左邊$N$行內求35.

所求對數之尾數分。卽在35居首之橫行。與第三號碼7居首之縱行。相交之處。卽5527.

故得

$$\log 3{,}57 = 0{,}5527.$$

又如求4,6之對數。因是數僅兩號碼。故當補一零於其後。而求4,60之對數。

去撇,得460.

所求對數之尾數。即在N行中46居首之橫行與0居首之縱行相割之處。卽6628. 故得

$$\log 4{,}6 = 0{,}6628.$$

**309. 眞數表。** $a$數之眞數。卽一數以$a$爲其對數也(第295欵)。

今附一眞數表於是書之末。表中備列自0至1相去千分之一各數之眞數。卽謂表中備列自0; 0,001; 0,002; 0,003; 等至0,998, 0,999, 等各數。其四个號碼。而其中三个爲尾數也。

因對數之整數分常爲0, 故0不列於表。以免繁複。而眞數之一撇。亦删去。

此表各號自之位置。與對數表同。

對數之尾數分之首兩號碼。處左邊$L$字居首之行內。其尾數分之第三號碼。則處下數行之首。

例如已知對數0,663.試求其眞數。

此處對數之尾數分爲663.

故先求66於$L$行內。而所求之眞數。

卽在66居首之橫行。與號碼3居首之縱行。相交之處。

卽得4603.

故所求之數爲4,603.

又如已知對數0,047.試求其眞數。

此處尾數分爲047.

所求之數。卽在04居首之橫行。與7居首之縱行。相交之處。

卽1114.

故所求之數爲1,114.

**310. 大於10之數目。** 對數表僅列自1至10之對數。然凡大於10各正數之對數。無不可於是表求之。

求證是理。當先定一預按於下。

(按) 凡10乘方之尋常對數。等於此乘方之指數。

（證）按第三性質（見第306欵）。得

$$\log 10^n = n.\log 10 = n,$$

因

$$\log 10 = 1 \text{ 也。}$$

是按既立。卽可證各正數之對數。無不包於表內。試取大於10之數452例之。此數可書爲

$$452 = 100 \times 4,52.$$

故（第一性質，第302欵）

$$\log 452 = \log 10^2 + \log 4,52$$

或

$$\log 452 = 2 + \log 4,52.$$

然則求4,52之對數。仍不外求價於10與1間。求之表上。得

$$\log 4,52 = 0,6551.$$

故

$$\log 452 = 2 + 0,6551 = 2,6551.$$

整數分2謂之特表分。尾數6551謂之尾數分。

**311.** 然上所論者。僅舉一數耳。實則大於10之諸數。無不可視爲一數與10乘方相乘之積。取撇置首號碼之右。

蓋凡10之乘方指數。等於取尾數撇。置之首號碼之右之行數。質言之。乘方之指數。卽等於整數

分之號碼數而減 1.

例如

$$21{,}7 = 10 \times 2{,}17,$$
$$3580 = 10^3 \times 3{,}58,$$
$$45900 = 10^4 \times 4{,}59.$$

謂之正對數之"特表分"者。卽對數中之整數分也。

故特表分,等於10乘方之指數。

例如

$$\log 21{,}7 = 1 + \log 2{,}17,$$
$$\log 3580 = 3 + \log 3{,}58,$$
$$\log 45900 = 4 + \log 4{,}59.$$

由是言之。凡大於 1 各數之對數特表分。等於整數分之號碼數而減 1.

其尾數分,與介於 1 與 10 間,退置撇後,各數之尾數分,無異。

**312. 小於1之數。負數特表分.** 先當表明凡10乘方之倒數。其對數等於指數改其記號。

蓋 (第 296 欵)

$$\log \frac{1}{10^n} = -\log 10^n = -n.\log 10 = -n.$$

今試取任一數目小於1,如0,0657.此數可書作

$$0{,}0657 = \frac{1}{10^2} \times 6{,}57.$$

故有
$$\log 0{,}0657 = \log \frac{1}{10^2} + \log 6{,}57,$$

卽
$$\log 0{,}0657 = -2 + \log 6{,}57.$$

求6,57之對數於表。得0,8176.故有

$$\log 0{,}0657 = -2 + 0{,}8176.$$

本可求是兩數之較、然爲演算便利計。仍其原式不變。

惟簡其寫法。置一畫於2上。書作

$$\log 0{,}0657 = \overline{2}{,}8176.$$

$-2$謂之特表分。8176謂之尾數分。

**313.** 然上所論者。僅舉一數耳。實則凡小於1之數。均可視爲介於1與10間之一數。受乘於10乘方之倒數。蓋小於一之各數。均可取尾數撇。移至尾數中有數値之首一號碼右。而以10乘方之倒數乘之也。

10乘方之指數。等於尾數撇移動之位數。卽謂

等於左邊零之箇數。連尾數撇前之零。亦應計算在內也。

例如

$$0{,}257 = \frac{1}{10} \times 2{,}57,$$

$$0{,}0031 = \frac{1}{10^3} \times 3{,}1,$$

$$0{,}0000493 = \frac{1}{10^5} \times 4{,}93.$$

由是言之。凡小於1各數之對數。卽兩數之和。一爲整負數。謂之特表分。一爲小於1之正數。謂之尾數分。

例如

$$\log 0{,}257 = \log \frac{1}{10} + \log 2{,}57 = -1 + \log 2{,}57,$$

$$\log 0{,}0031 = \log \frac{1}{10^3} + \log 3{,}1 = -3 + \log 3{,}1,$$

$$\log 0{,}0000493 = \log \frac{1}{10^5} + \log 4{,}93 = -5 + \log 4{,}93.$$

故凡小於1各數之對數。其特表分爲一整負數。此整負數之絕對值。等於尾數中有數值之首一號碼,左邊零之箇數。連尾數撇前之零。亦應計算在內。

尾數分，與介於1及10之間，移後尾撇者之數相同。

是以按表。有

$$\log 2{,}57 = 0{,}4099,$$
$$\log 3{,}10 = 0{,}4914,$$
$$\log 4{,}93 = 0{,}6928;$$

故有

$$\log 0{,}257 = -1 + 0{,}4099 = \overline{1},099,$$
$$\log 0{,}0031 = -3 + 0{,}4914 = \overline{3}{,}4914,$$
$$\log 0{,}0000493 = -5 + 0{,}6928 = \overline{5}{,}6928.$$

用省寫法。

**314.** **按。**上數欵所用以取譬之諸數目。常爲三位號碼之數目。

若一數目之號碼。不止三位。可取首三號碼而畧其餘。則成畧近値。

設一數目爲25,238.則25,2卽是數之畧近値。故求25,2之對數。卽得25,238對數之畧近値。

因對數之演算。僅一求畧近値之演算。故一數目中節去小數數位。按之實用。尚無大礙。惟有當留者。若節去之數號碼。其首號碼大於5.則當於

未節去之末號碼內增1.

例如 5,7381 之畧近值。應取 5,74. 蓋是雖稍强。而較之5,73其值尤近。

**315.** **提要。**凡推求一正數之對數爲上數欵所已論者。可提其要如下。

（法）凡求一正數之對數。

（一）先求特表分。

若數大於1.則對數之特表分爲正。而等於是數中整數之號碼數減1.

若數小於1.則對數之特表分爲負。而其絕對值等於是數有數值之首號碼左邊零之個數。連撇左邊之零亦在內。

（二）次求尾數分。

爲此。先將數中一撇删去。若得數之號碼不止三位。則留首三號碼而去其餘。若數之號碼不及三位。則補一零於右以足之。於是求是尾數分之對數於表。如.第308欵。

試按是法。求以下諸數之對數。得

$$\log 31{,}7 = 1{,}5011, \qquad \log 4{,}253 = 0{,}6284,$$

$$\log 0{,}317 = \bar{1}{,}5011, \qquad \log 2878 = 3{,}4594,$$

$$\log 0{,}00317 = \bar{3}{,}5011, \qquad \log 2 = 0{,}3010,$$

$$\log 425{,}3 = 2{,}6284, \qquad \log 0{,}02 = \bar{2}{,}3010.$$

由上所舉之諸數觀之。凡兩數僅以尾數撇之位置而異。其兩對數之尾數分無異。

若2878之對數。則由前按(第314欵)。於7增1而求288之尾數分。

**316. 求眞數法。**已知一數目之對數。不難求此數。

蓋由對數之尾數分。卽可得合成眞數之號碼。

由對數之特表分。卽可得眞數中尾數撇之位置。

今定其推求法如下。

(法) 凡已知一數目之對數。求此數。

(一) 先求眞數之號碼。

取尾數分中首三號碼而畧其餘。於是檢眞數表。如309欵。卽得所求數之號碼。

(二) 次定眞數中尾數撇之位置。

若對數之特表分爲正。則眞數之整數。等於特表分加 1. 故一撇之位置，在眞數中特表分加 1 之號碼左。

若對數之特表分爲負。則取特表分之絕對値爲零之個數。而書此若干位零於眞數之左。一撇之位置。卽在首一位零之右。

例如

$$\log x = 3{,}452, \quad 則 \quad x = 2831,$$

$$\log y = \overline{2}{,}781, \quad 則 \quad y = 0{,}06039,$$

$$\log z = 0{,}123, \quad 則 \quad z = 1{,}327.$$

又設 $\log u = \overline{5}{,}6928.$

刪去末一號碼 8. 而於 2 增一(見第 314 欵)。$\overline{5}{,}693$ 之眞數。卽

$$u = 0{,}00004932.$$

又設 $\log t = \overline{1}{,}4099.$

求 $\overline{1}{,}410$ 之眞數。得

$$t = 0{,}2570.$$

**317. 對數之致用。** 運用對數以求乘法，除法，乘方，開方根，諸算式。甚爲徑捷。

然借對數求得之數。常為原數之畧近值。

蓋此處表中所載者。僅與三位號碼相當之四位尾數耳。

若欲求一數與原數相差極微。當用五,或七,或八位尾數之對數表。

**318. 積數。** 求積數,當依據第一性質。(見302欵)。

求各生數之對數。而將求得之各對數相加。卽得是積數之對數。於是用求眞數法(見316欵)。推得積數。

(例) 試求積數

$$x = 423 \times 0{,}0082 \times 0{,}743 \times 36{,}17.$$

按表得

$$\begin{aligned} \log 423 &= 2{,}6263 \\ \log 0{,}0082 &= \overline{3}{,}9138 \\ \log 0{,}743 &= \overline{1}{,}8710 \\ \log 36{,}17 &= 1{,}5587 \\ \hline \text{和為} \qquad \log x &= 1{,}9698 \end{aligned}$$

求1,970之眞數。得

$$x = 9{,}333.$$

此處求各對數之和。當求其代數和。因特表分有負數也。

至尾數分常爲正數。但當求其數學和。而加各尾數分相加後所得之整數，於各特表分之代數和中。

是以如上譬。得尾數分數術之和。卽尾數 9698. 整數爲 2.

繼作代數術之和。以算此整數分。及特表分。

$$2+2-3-1+1=1.$$

**319. 倒對數。** 如欲求 $\frac{a}{b}$ 商數之對數。當求兩對數 $(\log a-\log b)$ 之較。然此之演算。較加法爲繁。故爲便捷計。仍變此較數爲和數。可寫作

$$\log\frac{a}{b}=\log a+\log\frac{1}{b}\cdot$$

是以如知 $\log\frac{1}{b}$ 可歸入加法。此爲倒數致用之理。

故謂之一數之“倒對數”者。卽是數倒置後之對數也。

由是言之

$$\operatorname{colog} a = \log \frac{1}{a} = \log 1 - \log a,$$

故
$$\operatorname{colog} a = -\log a,$$

因
$$\log 1 = 0.$$

然則一數目之倒對數。卽等於是數之對數變其記號。然當令一倒對數與尋常之對數同式。

夫尋常之對數。其式爲 $c+m$. ($c$ 可正可負。常爲整數。卽特表分也。$m$ 正數而小於1. 卽尾數分也)。

故若
$$\log x = c + m,$$

則得
$$\operatorname{colog} x = -c - m.$$

是式可書爲
$$\operatorname{colog} x = -(1+c) + 1 - m;$$

$-(1+c)$ 可正可負。常爲整數。$1-m$ 正數而小於1. 故 $-(1+c)$ 爲特表分。$1-m$ 爲尾數分。

例如
$$\log x = 3{,}2894.$$

有
$$c = 3, \quad m = 0{,}2894,$$

故
$$-(1+c) = -4,$$

$$1 - m = 1 - 0{,}2894 = 0{,}7106.$$

求 $1-m$. 當易 0,2894 各號碼，爲 9 之補足數。惟右邊末一號碼。當易爲 10 之補足數。

倒對數之演算法。可定之如下。

（法）一數目之倒對數。其特表分卽此數對數之特表分增一。而變其記號。

其尾數分。則取是數對數尾數分中各號碼。易爲 9 之補足數。惟右邊有數值之末一號碼。易爲 10 之補足數。若有數值之末一號碼右邊，尙有零。仍書於後。

（譬）有

$$\begin{aligned} \log 7,05 &= 0,8482, \\ \log 0,0705 &= \overline{2},8482, \\ \log 0,2 &= \overline{1},3010, \\ \log 423 &= 2,6263. \end{aligned}$$

則

$$\begin{aligned} \operatorname{colog} 7,05 &= \overline{1},1518, \\ \operatorname{colog} 0,0705 &= 1,1518, \\ \operatorname{colog} 0,2 &= 0,6990, \\ \operatorname{colog} 423 &= \overline{3},3737. \end{aligned}$$

**320. 商數。** 由前欵推之。凡商數之對數。等於實數之對數。加法數之倒對數。所得之和。卽商數之對數。而商數卽可從此推得矣。

(譬) 設求

$$x=\frac{4,86}{0,0732}$$

按對數表。有

$$\begin{array}{r} \log 4,86 = 0,6866 \\ \underline{\operatorname{colog} 0,0732 = \bar{1},1355} \\ \log x = 1,8221 \end{array}$$

檢眞數表。得

$$x=66,37.$$

**321. 乘方。** 由第三質性(第306欵)。卽可求任一數之乘方。求此數之對數。而以指數乘之。卽得乘方之對數。檢眞數表。卽得原數。

(譬) 設求

$$x=(2,51)^5.$$

檢對數表。有

$$\log 2,51 = 0,3997,$$

$$\log x = 5 \cdot \log 2,51 = 1,9985;$$

故 $$x = 99,54.$$

**322. 對數受乘於一數之積。** 使對數之特表分爲正。則對數受乘於一數之積。與數學乘法無異。使對數之特表分爲負。則當知對數

爲代數和。以一數乘之。如以一數乘代數和也。

（譬） 設求

$$x = (0,75)^8.$$

檢表有

$$\log 0,75 = \overline{1},8751.$$

以 8 乘之。如以 8 乘代數和 $-1+0,8751$. 故其積爲

$$-8+0,8751\times 8 = -8+7,0008 = -1+0,0008.$$

故 $$\log x = \overline{1},0008;$$

由是得 $$x = 0,1.$$

**323. 方根。** 由第四性質（第 307 欵）。卽可徑捷求任一數之方根。爲此求數之對數。而以根號之指數除之。卽得是數方根之對數。後檢眞數表。卽得此方根。

（譬） 設求

$$x = \sqrt[7]{200}.$$

按對數表。得

$$\log 200 = 2,3010,$$

故 $$\log x = \frac{1}{7}\log 200 = 0,3287;$$

檢 0,329 之眞數於表。得

$$x = 2.133.$$

**324. 對數受除於整數之商。** 由前欵所舉例觀之。對數當受除於整數。若對數之特表分爲正。以一整數除之。固無阻難。若特表分爲負。則欲除得之商。仍與尋常之對數式無異。不可不立法以馭之。

設 $$\log a = -c + m,$$

$-c$ 爲負特表分。而 $m$ 爲介於 0 與 1 之數。則

$$\log \sqrt[p]{a} = \frac{1}{p} \cdot \log a = \frac{-c+m}{p}.$$

欲變 $\frac{-c+m}{p}$ 爲尋常之對數式。當求較 $c$ 畧大 $p$ 之最小倍數。設此倍數爲 $pk$. 則應得

$$c = pk - r,$$

$r$ 小於 $p$. 由是得

$$\log \sqrt[p]{a} = \frac{-c+m}{p} = \frac{-pk+r+m}{p} = -k + \frac{r+m}{p}.$$

$k$ 爲整數。$\frac{r+m}{p}$ 爲正數而小於 1 (蓋 $r+m < p$).

故 $-k$ 爲特表分。而 $\frac{r+m}{p}$ 爲尾數分。

此之運算。可立其法於下。

以整數除一負特表分之對數。先當求此整數之最小倍數。而此倍數以絕對值論。當大於或等於特表分。以整數除此倍數。所得之商。變其記號。卽所求之特表分。

後加原特表分與倍數相較之餘數於原尾數分。以整數除此和數。所得之商。卽所求之尾數分。

(譬) 設求

$$x=\sqrt[5]{0{,}03}.$$

檢對數表。有

$$\log 0{,}03=\bar{2}{,}4771.$$

故 $$\log x=\frac{1}{5}\log 0{,}03=\frac{1}{5}(\bar{2}{,}4771)$$

$$=\frac{1}{5}(-5+3{,}4771)=-1+\frac{3{,}4771}{5};$$

由是得 $$\log x=\bar{1}{,}695;$$

故 $$x=0{,}4955.$$

**325. 致用。** 用對數可求任何單項式之畧近值。

(譬) 試求下列單項式

$$x=\frac{4a^3bc^2}{\sqrt[4]{7\cdot d}}$$

之數値。

若　$a = 0{,}271,\quad b = 6{,}15,\quad c = 44{,}82,\quad d = 0{,}059.$

有
$$7\,d = 0{,}413.$$

對數表。得

$$\begin{aligned}
\log 4 &= 0{,}6021,\\
\log a &= \overline{1}{,}4330,\\
\log b &= 0{,}7889,\\
\log c &= 1{,}6513,\\
\log 7\,d &= \overline{1}{,}6160,\\
\operatorname{colog} 7\,d &= 0{,}3840.
\end{aligned}$$

但

$$\log x = \log 4 + 3\log a + \log b + 2\log c + \frac{1}{4}\operatorname{colog} 7\,d.$$

故將第二端之各對數相加。卽得

$$\begin{aligned}
\log 4 &= 0{,}6021\\
3\log a &= \overline{2}{,}2990\\
\log b &= 0{,}7889\\
2\log c &= 3{,}3026\\
\frac{1}{4}\operatorname{colog} 7\,d &= 0{,}0960\\
\hline
\log x &= 3{,}0886
\end{aligned}$$

求 3,089 之眞數。得

$$x = 1227.$$

# 第四節。繁利。

**326. 簡利。** 算術中所論之簡利。今申述數語於此。

資本家以銀若干借於人。而收還賃金若干。

此收還之賃金。謂之"利"。借出之銀謂之"本"。

簡利者,與本銀及借出之時間有比例。此習用之通例也。

借出100佛郎一年後收得之利。謂之"息"。

如言本銀存息5%,卽言每100佛郎一年得利5佛郎也。

**327. 簡利公式。** 設以$a$表本。以$i$表利。以$t$表息。以$n$表放出之年數。則得算術中所立之公式

$$i = a \cdot \frac{t}{100} \cdot n.$$

$n$可爲整數。亦可爲分數。今命

$$\frac{t}{100} = r.$$

則$r$卽1佛郎於一年後所得之利。

故前公式可書爲

$$i = arn. \qquad (1)$$

然則於此式中。令 $n = 1$. 卽得 $a$ 本於一年後所得之利。卽

$$i = ar. \qquad (2)$$

**328. 繁利。** 於每年之終。將本銀所生之利。加入本銀。而於下一年此加入之利叉生利者。謂之"繁利"。

例如一人放出 1 000 佛郎本銀。存息 4 %. 則於第一年之終。應得利 40 佛郎。使是人不取此欵，而加入本銀中。則本銀爲 1 040 佛郎。於第二年之終。此新本銀所生之利。爲

$$1040 \times 0{,}04 = 41^{\mathrm{fr}}, 60$$

設叉將此利加入本銀。則本銀爲 $1081^{\mathrm{fr}}, 60$. 於第三年之終。此新本銀所生之利。爲

$$1081{,}60 \times 0{,}04 = 43^{\mathrm{fr}}{,}264.$$

將此欵叉加入本銀中。得

$$1081{,}60 + 43{,}264 = 1124^{\mathrm{fr}}{,}864;$$

準此推求。本愈增而利愈厚。數年後可成一鉅欵也。

**329. 公式。** 設$a$爲生繁利之本銀。而$t$其息也。今命$r=\frac{t}{100}$;$r$卽1佛郎於1年之終應得之利。

故$a$本銀於一年之終。應得之利。爲$ar$〔第327欵公式(2)〕。

加是利於本銀中。則本銀爲

$$a+ar=a(1+r).$$

由此等式觀之。

本銀於一年之終所得之値。卽以$1+r$乘本銀所得之數也。

故於第一年之終。本銀$a$變爲$a(1+r)$.

於第二年之終。本銀爲

$$a(1+r)(1+r)=a(1+r)^2.$$

於第三年之終。本銀爲

$$a(1+r)^2(1+r)=a(1+r)^3;$$

餘皆類此。

然則每年加一次利於本。卽以$1+r$乘$a$. 故$n$年後加$n$次利於本。卽以$n$次之$1+r$乘$a$. 卽以$(1+r)^n$乘$a$.

故本銀$a$於$n$年之終。所得$t$息之繁利爲A, 其

式爲下。

$$A = a(1+r)^n = a\left(1+\frac{t}{100}\right)^n \qquad (3)$$

**330. 實用演算。**欲依據此公式。當用對數。蓋有

$$\log A = \log a + n.\log\left(1+\frac{t}{100}\right). \qquad (4)$$

乃爲實用演算之公式。

由此公式觀之。當以$n$乘$\left(1+\frac{t}{100}\right)$. 然使演算者。僅知是對數之4位尾數。而使$n$之値畧大。則乘得之數與原數相差頗大。故能多知是對數之尾數數位。則計算較爲準確。

今立一表。列10位尾數$\left(1+\frac{t}{100}\right)$,合通用$t$息之値。

| $t$ | $1+\frac{t}{100}$ | $\log\left(1+\frac{t}{100}\right)$ |
|---|---|---|
| 2 | 1,02 | 0,0086001718 |
| 2 1/4 | 1,0225 | 0,0096633167 |
| 2 1/2 | 1,0250 | 0,0107238654 |
| 2 3/4 | 1,0275 | 0,0117818305 |
| 3 | 1,03 | 0,0128372247 |
| 3 1/4 | 1,0325 | 0,0138900603 |
| 3 1/2 | 1,035 | 0,0149403498 |
| 3 3/4 | 1,0375 | 0,0159881054 |
| 4 | 1,04 | 0,0170333393 |

求 $n.\log\left(1+\frac{t}{100}\right)$ 之積。可引用此表。單首 4 位尾數而截去其餘。

**331. 問題一。** 設本銀 1 250 佛郎。借出已有 8 年。言明繁利。以 3 ½ % 起息。問第 8 年之終。此本銀得幾何。

解之曰。第 8 年之終。本銀為

$$A = 1250\left(1+\frac{3.5}{100}\right)^8,$$

用演算公式 (4) (第 330 款)。得

$$\log A = \log 1250 + 8.\log 1{,}035.$$

$$\begin{aligned} \log 1250 &= 3{,}0969, \\ 8\log 1{,}035 &= 0{,}1195, \\ \hline \log A &= 3{,}2164, \\ A &= 1644^{\mathrm{fr}}. \end{aligned}$$

**332. 問題二。** 一鄉人有地一方。價值 5 840 佛郎。1793 年革命時。為人侵佔。後鄉人之承嗣人。俟事定後。與侵佔者商定。此地之價值。卽作為生繁利之本銀。以 3 % 起息。問至 1903 年。鄉人之承嗣人。應收銀若干。

解之曰。此本銀借出之年數。為

$$n = 1903 - 1793 = 110 \text{ 年。}$$

由第330欵公式(4),得

$$\log A = \log 5840 + 110 \log 1{,}03.$$

$$\log 5840 = 3{,}7664,$$

$$110 \log 1{,}03 = 1{,}4121,$$

$$\log A = 5{,}1785,$$

$$A = 150\,700.$$

故應收之數。約爲 150 700fr

**333. 求本。** 由第330欵公式(4),得

$$\log a = \log A - n \log\left(1 + \frac{t}{100}\right),$$

或 $$\log a = \log A + n \operatorname{colog}\left(1 + \frac{t}{100}\right) \qquad (5)$$

由此公式。卽可求 $n$ 年後。以 $t$ 息繁利之 $a$ 本銀 A 若干。

**334. 問題三。** 問應借出生利之本銀若干。以 4 % 起息。於 10 年後。可得 100 000 佛郎。

解之曰。由公式(5),得

$$\log a = \log 100\,000 + 10 \operatorname{colog} 1{,}04,$$

$$\log a = 5 + \overline{1}{,}8297 = 4{,}8297,$$

故 $$a = 67\,610^{\text{fr}}$$

**335. 求息。** 由第330欵公式(4),得

$$\log\left(1 + \frac{t}{100}\right) = \frac{\log A - \log a}{n},$$

或 $$\log\left(1+\frac{t}{100}\right)=\frac{\log A+\operatorname{colog} a}{n}. \qquad (6)$$

由此公式。卽可求 $t$.

盖由 $\log\left(1+\frac{t}{100}\right)$ 得 $1+\frac{t}{100}$ 之值。而 $t$ 卽由是推得矣。

**336. 問題四。** 設借出生繁利之本銀3000佛郎。而於15年後。得5000佛郎。問其息若干。

解之曰。由公式(6),若

$$A=5000,\quad a=3000,\quad n=15,$$

得 $$\log\left(1+\frac{t}{100}\right)=\frac{\log 5000+\operatorname{colog} 3000}{15}.$$

因 $$\log 5000=3,6990$$

$$\operatorname{colog} 3000=\bar{\bar{4}},5229$$

$$和=0,2219,$$

故 $$\log\left(1+\frac{t}{100}\right)=\frac{0,2219}{15}=0,0146,$$

由是得

$$1+\frac{t}{100}=1,035,$$

故 $$t=3,5\,\%.$$

**337.** **求時。** 由第330欵公式(4),得

$$n=\frac{\log A-\log a}{\log\left(1+\frac{t}{100}\right)}.$$

或
$$n=\frac{\log A+\operatorname{colog} a}{\log\left(1+\frac{t}{100}\right)}.\tag{7}$$

欲求下端之商。仍可用對數。

然由公式(7)求得之$n$.可不爲整數。時加利於本之次數。不特按年之整數計。并按年之分數計。

問題似無意義。

然攷其實。仍無背謬處。

盖公式(4)無往不可依據。卽$n$不爲整數。亦可引用也。

故公式(4)當視爲繁利最公之式。無往不可依據。卽借出之年數不爲整數。亦可引用。

**338.** **問題五。** 設借出之本以3%起息。問歷若干年。可使此本銀爲倍。

解之曰。若取一爲本。則

$$a=1,\quad A=2,\quad t=3.$$

由公式(7),得

$$n=\frac{\log 2+\operatorname{colog} 1}{\log 1{,}03}.$$

因 $\operatorname{colog} 1=-\log 1=0;$

故 $$n=\frac{\log 2}{\log 1{,}03}=\frac{0{,}3010}{0{,}0128}$$

由是得

$$\log n=\log 0{,}3010+\operatorname{colog} 0{,}0128$$

$$\begin{array}{r} \log 0{,}3010=\bar{1}{,}4786 \\ \operatorname{colog} 0{,}0128=1{,}8928 \\ \hline \log n=1{,}3714 \end{array};$$

故 $n=23{,}5.$

故應歷23年 $^1/_2$, 即23年又6月。本銀乃能至倍。

代數學終

# 附錄問題

## 第一章習演問題。

**問一。** 試將下式演算之

$$x = a + b$$

若 $\begin{cases} a=+10, & b=+15; \\ a=15, & b=-10; \\ a=10, & b=-15; \\ a=-10, & b=-15; \end{cases}$ $\begin{cases} a=+15, & b=+15; \\ a=-10, & b=15; \\ a=-15, & b=10; \\ a=-15, & b=-10. \end{cases}$

**問二。** 演算下列代數式之數值

$$a = b + c$$

若 $\begin{cases} a=+45, & b=+17, & c=+51; \\ a=45, & b=17, & c=-51; \\ a=45, & b=-17, & c=51; \\ a=-45, & b=17, & c=51; \\ a=45, & b=-17, & c=-51; \\ a=-45, & b=17, & c=-51; \\ a=-45, & b=-17, & c=51; \\ a=-45, & b=-17, & c=-51; \end{cases}$

**問三。** 演算下列代數式之數值

$$l + m + p + r$$

若 $\begin{cases} l=+3, & m=+7, & p=+11, & r=+17; \\ l=+\frac{1}{4}, & m=-\frac{1}{2}, & p=+10, & r=+4; \\ l=-0,5, & m=+2,6, & p=+49, & r=0; \\ l=\frac{3}{8}, & m=-\frac{1}{4}, & p=\frac{2}{3}, & r=\frac{7}{12}; \end{cases}$

$$\text{若}\begin{cases} l = 100\quad, & m = -100\quad, & p = 27\quad, & r = -5; \\ l = -\frac{2}{3}\quad, & m = \frac{3}{2}\quad, & p = -\frac{1}{5}\quad, & r = 5; \\ l = -15\quad, & m = -\frac{4}{9}\quad, & p = \frac{7}{12}\quad, & r = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

**問四。** 試將下式演算之

$$x = a - b$$

$$\text{若}\begin{cases} a = -77\quad, & b = 30; & \Big| & a = 68\quad, & b = -47; \\ a = -91\quad, & b = -169; & \Big| & a = -89\quad, & b = -45. \end{cases}$$

**問五。** 試將諸下式演算之

$$16 + 7 + (-7);\quad 25 - 9 + 10;\quad 40 - (-50) + (-62);$$
$$108 + (-15) - (-9) + 4.$$

**問六。** 試將諸下式演算之

$$15 + 13 - 7 - 3 - 5 + 9 - 2;$$
$$25 - 42 + 1 - 37 + 10 - 12;$$
$$13 - (2 + 5) + (6 + 4 - 1) - 9;$$
$$6 - 10 - 4 - (6 - 17 - 9 + 25).$$

**問七。** 試將下式演算之

$$4{,}7 + 3{,}25 - 1{,}04;\quad 8{,}3 - 9{,}01 + 15;$$
$$0{,}0695 - 1{,}293 + 1{,}1056 - 2{,}44;$$
$$57 - 0{,}74 - 49{,}59 - 19{,}007.$$

**問八。** 試將下式演算之

$$105 - \frac{3}{4} + \frac{47}{56} + 11 - \frac{156}{48};\qquad 2 - \frac{11}{4} - \frac{69}{2} - \frac{108}{15};$$

$$\frac{3\ 125}{1\ 000}-\left(\frac{7}{25}-\frac{41}{75}+3\right)+\frac{2}{15};$$

$$\frac{83}{20}-\left(-\frac{81}{50}-9-\frac{1}{4}\right)+\left(-6+\frac{89}{70}\right)$$

問九。求代數式$a-b+c-d$之數值

$$\text{若}\left\{\begin{array}{llll} a=95, & b=7, & c=21, & d=30; \\ a=3, & b=35, & c=25, & d=21; \\ a=19, & b=-4, & c=-15, & d=8; \\ a=-55, & b=68, & c=197, & d=74; \\ a=\frac{16}{21}, & b=-9, & c=\frac{7}{33}, & d=-\frac{2}{3}; \\ a=-\frac{6}{15}, & b=-\frac{8}{25}, & c=-\frac{31}{40}, & d=9. \end{array}\right.$$

問十。一商存5689元於銀櫃中。一日付出銀票值490,5元。即日得買客價銀561,75元。後又購物用去1500元。隨取3000元往存諸銀行。問是晚其銀櫃中存銀元若干。

問十一。四工人同作工。第一人應得195元。第二人應得之數較第一人少42元。第三人應得之數較第二人多75元。第四人應得之數較第三人少60元。問四人共應得若干。

問十二。一子生時。其父年27歲。但其父生時。其祖父年30歲。問此子年20歲。其祖父年若干。

問十三。一騎者其馬小跑。行 2 基羅邁當。隨向原路回。其馬慢走。行175邁當。後其馬飛跑。行1900邁當。問已抵其起程之地否。又問其時下馬。離起程之地。尚遠若干。

問十四。演算下式。

$$x = a.b$$

若 $\begin{cases} a=-5, & b=10; \\ a=9, & b=-7; \end{cases}$ $\quad\begin{vmatrix} a=-15, & b=11; \\ a=-20, & b=-7. \end{vmatrix}$

問十五。求 $ab$ 之積之數值。

若 $\begin{cases} a=10, & b=-10; \\ a=5, & b=-5; \end{cases}$ $\quad\begin{vmatrix} a=-20, & b=20; \\ a=-8, & b=-8. \end{vmatrix}$

問十六。求 $a\,b\,c$ 之積之數值。

若 $\begin{cases} a=b=c=-7; \\ a=b=10, \quad c=-10; \\ a=8, \quad b=c=-8; \\ a=b=c=-20. \end{cases}$

問十七。於 $x=a^n$ 公式中求 $x$ 之數值。

若 $\begin{cases} a=-1, & n=5; \\ a=5, & n=1; \\ a=-3, & n=2; \\ a=3, & n=3; \\ a=10, & n=7; \end{cases}$ $\quad\begin{vmatrix} a=25, & n=4; \\ a=-5, & n=2; \\ a=-5, & n=3; \\ a=-10, & n=7; \\ a=\frac{1}{2}, & n=0. \end{vmatrix}$

**問十八。** 演算下式。

$$140 \times (-10);\quad 437 \times (-6) \times 2;$$
$$9 \times (-11) \times 5 \times (-7);$$
$$7,2 \times (-9) \times (-0,3);$$
$$4,12 \times (-100) \times (-1).$$

**問十九。** 演算下式。

$$(3 + 4 - 5) \times 9 + (5 + 2 - 10) \times (-3);$$
$$(2 - 7 - 9) \times (-8) + (4 + 2 - 1) \times (-5);$$
$$(16 + 2 - 6 - 12) \times 5 + (9 - 6 + 5) \times (-3);$$
$$(20 - 14 - 6 - 2) \times 14 + (6 + 5 - 4)(-4).$$

**問二十。** 凡數N分爲$x, y, z$分。此三分與$a, b, c$成比例。其公式如下。

$$x = \frac{Na}{a + b + c},\quad y = \frac{Nb}{a + b + c},\quad z = \frac{Nc}{a + b + c}.$$

照此公式。試將52 877數目分作$5, 7, \frac{1}{10}$之比例。

**問二十一。** 演算下式。

$$-39 : 13;\quad 9 : (-3);\quad 180 : (-36);$$
$$-55,8 : 6,2;\quad -66,56 : (-8,32);\quad 485 : (-1).$$

**問二十二。** 演算下式。

$$-\frac{6}{7} \cdot \frac{5}{12};\quad \frac{-11}{15} \cdot \frac{5}{22}\quad \frac{4}{-9} \cdot \frac{18}{15};$$

$$\frac{-6}{7} \cdot \frac{-5}{12};\quad \frac{11}{15} \cdot \frac{-5}{22}\quad \frac{4}{9} \cdot \frac{18}{15};$$

$$\frac{6}{7}\cdot\frac{-5}{-12}\quad;\quad\frac{11}{-15}\cdot\frac{-5}{22}\quad;\quad\frac{-4}{-9}\cdot\frac{-18}{-15}.$$

問二十三。演算下式。

$$\frac{16}{15}:\frac{4}{3}\quad;\quad\frac{80}{81}:\frac{-25}{7}\quad;\quad\frac{8}{15}:\frac{-49}{-45};$$

$$\frac{-16}{15}:\frac{-3}{4}\quad;\quad\frac{80}{-81}:\frac{25}{7}\quad;\quad\frac{-8}{-15}:\frac{49}{45};$$

$$\frac{-16}{-15}:\frac{3}{-4}\quad;\quad\frac{-80}{81}:\frac{-25}{-7}\quad;\quad\frac{-8}{-15}:\frac{-49}{-45}.$$

問二十四。演算下式。

$$\left(7+\frac{4}{5}+\frac{-1}{15}\right)\cdot(-3)+\frac{-4}{11}+\left(9-\frac{-6}{5}\right):\frac{15}{102}.$$

問二十五。演算下式。

$$4.\left(3-\frac{5}{7}+\frac{11}{28}\right)\cdot\frac{-49}{74}-\left(10-4-\frac{6}{15}+2\right):\frac{45}{8}.$$

問二十六。求以下代數式之數值。

$$\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\left(1+\frac{a+b}{a-b}\right)$$

$$\text{每}\left\{\begin{array}{ll} a=1, & b=7; \\ a=+5, & b=2; \\ a=4, & b=-3; \\ a=-6, & b=5; \\ a=-10, & b=-15. \end{array}\right.$$

問二十七。求以下代數式之數值。

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

若　$a=1\ ,\ b=2\ ,\ c=3.$

問二十八。求以下代數式之數值。

$$(a+b)(c+d)$$

若 $\left\{\begin{array}{llll} a=95, & b=5, & c=14, & d=3; \\ a=95, & b=5, & c=14, & d=-3; \\ a=95, & b=5, & c=-14, & d=3; \\ a=95, & b=5, & c=-14, & d=-3. \end{array}\right.$

演算用二法。或照第49欵定理。或否。

問二十九。演算以下代數式之數值

$$(a+b)(c-d)$$

若 $\left\{\begin{array}{llll} a=15, & b=8, & c=20, & d=11; \\ a=19, & b=12, & c=-20, & d=-11; \\ a=40, & b=-8, & c=15, & d=12; \\ a=-21, & b=-17, & c=-50, & d=30; \\ a=11, & b=11, & c=11, & d=-11. \end{array}\right.$

演算用二法。或照第49欵定理。或否。

問三十。求以下代數式之數值

$$(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

若 $\left\{\begin{array}{lll|lll} a=3, & b=4, & c=5; & a=-3, & b=-4, & c=5; \\ a=-3, & b=4, & c=5; & a=-3, & b=-4, & c=-5. \end{array}\right.$

問三十一。設二同心圜。其一之半徑爲R.其他爲r.求二圜之較之面積S(卽二圜叠加所餘

之圈)。其公式如下

$$S = 3,1416\,(R^2 - r^2).$$

若 $\left\{\begin{array}{lll} R = 10^m & , & r = 5^m \;; \\ R = 13^m & , & r = 2^m,50 \;; \\ R = 0^m,015 & , & r = 0^m,007. \end{array}\right.$

**問三十二。** 以三角形之 $a, b, c$ 三邊。求此三角形之面積。其公式如下

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

$p$ 爲三角形之半周線

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

以此二公式。求以下諸三角形之周圍線及其面積。

若 $\left\{\begin{array}{lll} a = b = c = 25^m \;; & & \\ a = b = 30^m & , & c = 50^m \;; \\ a = 75^m \;, & b = 56^m & , \; c = 40^m \;; \\ a = 0^m,25 \;, & b = 0^m,38 & , \; c = 0^m,52 \;; \\ a = 0^m,072 \;, & b = 0^m,125 & , \; c = 0^m,1. \end{array}\right.$

**問三十三。** 演算以下代數式之數值

$$y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

若 $x = 2 \;;\; x = 1 \;;\; x = 10.$

**問三十四。** 求一堆石子之體積。其公式如下

$$V = \frac{h}{6}\,[B + b + 4\beta].$$

$h$爲堆之高。B與$b$爲二底之面積。$\beta$爲中底之面積。此中底。距前二底等遠。

今有一堆石子。其二底B與$b$,

$$B = lm; \qquad b = l'm'.$$

其中底$\beta$,

$$\beta = \frac{(l + l')(m + m')}{4}$$

求此堆石子之體積。若

1e $h = 0^m{,}50$, $l = 2^m$, $m = 1^m$, $l' = 1^m{,}50$, $m' = 0^m{,}20$;
2e $h = 0^m{,}75$, $l = 3^m$, $m = 2^m$, $l' = 1^m$, $m' = 0$.

## 第二章演習問題。

**問三十五。** 二火車行於二平行路線上。其方向各相反。二車相遇。其一車每點鐘行$50^{km}$. 其他車每點鐘行$41^{km}$. 問二火車不停。一點鐘之後。二車相距若干遠。

問三十六。設A,B,C,D四點在一直線上。在此線上定一正向。設$\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$為定向線之代數量。試證定有得數如下。

$$\overline{AD}.\overline{CB}=\overline{CD}.\overline{AB}+\overline{AC}.\overline{DB}.$$

今再檢實，

若
$$\left\{\begin{array}{lll}\overline{AB}=80, & \overline{AC}=50, & \overline{AD}=60;\\ \overline{AB}=80, & \overline{AC}=50, & \overline{AD}=100;\\ \overline{AB}=80, & \overline{AC}=-50, & \overline{AD}=25;\\ \overline{AB}=80, & \overline{AC}=-50, & \overline{AD}=-25;\\ \overline{AB}=80, & \overline{AC}=100, & \overline{AD}=200.\end{array}\right.$$

問三十七。設有A,B二點於一直線上。設M點在AB之中間。O點為距度線之元。證定向線OM之公式為

$$2\,\overline{OM}=\overline{OA}+\overline{OB}.$$

問三十八。一寒暑表。在一房中有17度。在他房中有－12度。問此二房氣候之別。

問三十九。巴黎午時。與他城之較如下。

Amsterdam . . . . . . . . . . . midi $10^m\,12^s$ (午後).
Berlin. . . . . . . . . . . . . midi $44^m\,14^s$ (午後).
Lisbonne . . . . . . . . . . . $11^h\,14^m\,5^s$ (晨).

| | |
|---|---|
| Londres . . . . . . . . . . . . . | $11^h\ 50^m\ 15^s$ (晨). |
| Madrid . . . . . . . . . . . . . | $11^h\ 35^m\ 54^s$ (晨). |
| Melbourne . . . . . . . . . . . . | $9^h\ 30^m\ 33^s$ (晚). |
| New-York . . . . . . . . . . . . | $6^h\ 54^m\ 37^s$ (晨). |
| Pékin. . . . . . . . . . . . . | $7^h\ 36^m\ 32^s$ (晚). |
| Rome. . . . . . . . . . . . . | midi $40^m\ 25^s$ (午後). |

問倫敦午時。此各等城在何時。

**問四十。** 設有一均速行動之一物。於一分鐘行2邁當。問行$2^h\ 50^m$之後。其路程若干。

**問四十一。** 設有一均速行動之一物。於$3^h\ 15^m\ 27^s$行$3^{km},5\ 181$. 問其速度若干。

**問四十二。** 一坐脚踏車者。在一$333^m$週圍之田中。行十週。用$9^m\ 15^s\ \frac{3}{5}$時。設其行動爲均速行動。問其速度若干。

**問四十三。** 有人於一點鐘行$5^{km}$. 問行何時。可得$6\ 250^m$.

**問四十四。** 北極星距地球73 944 056兆法里。(一法里爲$4^{km}$也)。設光線速度。每秒鐘得$300\ 000^{km}$. 問按北極星與地球相距之遠。其光線於何時始能達於地球。

**問四十五。** 五車二星(星名)之光線於 72 年始達地球。而光線速度。每秒鐘得 300 000$^{km}$. 問照法里計算。(卽 4$^{km}$). 地球與五車二星。相距若干遠。

**問四十六。** 欲知聲音之速度。有人於一村中放炮。他村之人見其光。至 55 秒後。又聞炮聲。此二村相距 18 700$^{m}$. 問聲音之速度若干。(不計光線之速度)。

**問四十七。** 有一生鐵管。長 951$^{m}$,25. 甲乙二人在此鐵管兩端。甲擊管之一端。乙在他端。於 $2'\frac{1}{2}$ 秒鐘之距離。繼續聞二聲。(其一自生鐵上。其他自空氣傳來也)。知聲浪於空氣之速度。每秒鐘得 340$^{m}$. 問生鐵上之速度若干。

**問四十八。** 二跑者其方向同。其一自 A 點起行。每點鐘跑 10$^{km}$. 其他自 B 點起行。每點鐘跑 7$^{km}$. 而 A 點與 B 點相距 1 500$^{m}$. 問二人

(一) 至 20 分鐘後。相距若干。(二) 至半點鐘後。(三) 至 45 分鐘後。相距若干。

(注意) 二跑者之方向。或由 A 至 B. 或由 B 至 A. 此二問題均須演算。

**問四十九。** 均速行動之二動物。同時自A點與B點起行。而A點與B點相距35里。此二動物彼此將相遇。其一每點鐘行10里。其他每點鐘行15里。問二動物

(一)至55分鐘後。(二)至一點鐘30分鐘後。(三)至$2^h 45^m$後。(四)至$3^h 45^m$後之距度。

**問五十。** 設一木片上。刻有十度。A點爲第4度。B點爲第8度。若放M點於每度之中。問$\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MA}}$之值。

**問五十一。** 設A點與B點相距5尺。在A點與B點之間。有4相等位置。設置M點於此4位置上。問$\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MA}}$之值。

**問五十二。** 設AB線長4尺。又設(見第105欵)

$$\overline{AM} = x.$$

若$\dfrac{\overline{AM}}{\overline{BM}}$等於$-3, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{7}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}, 5, 100, 1000,$演算其距度線$x$之價值若干。

# 第三章演習問題。

## A. 代數式之數值。

**問五十三。** 求下式

$$5x^3 + 21x^2 - 3x + 7$$

之數值。 若 $x = 10.$

**問五十四。** 求下式

$$a^3 + 3a^2 + 3a + 1$$

之數值。 若 $a = 9.$

**問五十五。** 求下式

$$x^2 + 2xy + y^2$$

之數值。 若 $x = 7$ 及 $y = 3.$

**問五十六。** 設有代數式

$$a^4 + b^4 + 6a^2b^2 - 4a^3b - 4ab^3.$$

若 1° $a = 9,\ b = 8;$ 2° $a = 11,\ b = 10;$

3° $a = \frac{1}{5},\ b = \frac{1}{10};$ 4° $a = 0{,}7,\ b = 0{,}6.$

問此式數值爲何。

**問五十七。** 求下式

$$72a^2b^2 + 18ab - 64a^4 - 81b^4$$

之數值。 若 $a = \frac{1}{2},\quad b = \frac{1}{3}.$

**問五十八。** 求下式

$$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

之數值。

若 1° $x = 4,\quad y = 1;$
2° $x = 5,\quad y = -2;$
3° $x = 11,\quad y = 0.$

**問五十九。** 求下式之數值。

$$(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2.$$

若 1° $a = 17,\quad b = 13;$
2° $a = 20,\quad b = -30.$

**問六十。** 求下式之數值。

$$(a^2 - c^2)\left[(a + b)^2(b + c) - (a + c)(a - c)^2\right] + (1 + 2a - 3b)c^2,$$

若 $a = -1,\quad b = 2,\quad c = -3.$

**問六十一。** 設B與$b$斗方形之二底。$h$爲斗方形之高度。其面積S如下公式。

$$S = \frac{(B + b)h}{2}$$

今有一斗方形。其二底

$$B = 3^{m},50 \qquad b = 14^{cm};$$

其高度乃二底之幾何形折中數。

問此斗方形之面積若干。

**問六十二。** 設R與$r$一圓錐體下段二底之半徑。$h$爲圓錐體下段之高度。其體積之公式如下。

$$V = \frac{\pi . h}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

知$\pi = 3, 1\,416.$

今有一圓錐體之下段。其高度$h = 50^{cm}$. 其二底之半徑。等於$17^{cm}$與$25^{cm}$.

問此圓錐體下段之體積若干。

**問六十三。** 設R爲一長圓體底之半徑。H爲長圓體之高度。其體積之公式如下。

$$V = \pi R^2 H.$$

知$\pi = 3, 14.$

今有五長圓體。若其半徑與高度等於

$$\begin{array}{ll} R = \ \ 1^m & H = 1^m; \\ R = \ \ 1^m & H = 1^{cm}; \\ R = \ \ 1^{cm} & H = 1^m; \\ R = \ \ 5^{cm} & H = 2^{cm}; \\ R = 20^{mm} & H = 5^{dm}; \end{array}$$

求其體積若干。

**問六十四。** 求下式之數值。

$$\frac{1}{p-3} + \frac{1}{p+3} - \frac{6}{p^2-9}$$

若$p = 13.$

問六十五。求下式之數值。

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}+\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b},$$

若 $1^\circ\ a=30,\quad b=10;$
$2^\circ\ a=-50,\quad b=7.$

問六十六。求下式之數值。

$$\frac{\left(x-3+\dfrac{5x}{2x-6}\right)\dfrac{3}{2}x}{2x-1+\dfrac{15}{x-3}}-\frac{4x}{x^2-1}\left(x-\frac{x}{4}-\frac{3}{4x}\right),$$

若 $1^\circ\ x=4\quad;\quad 2^\circ x=-4.$

問六十七。設R爲一球之半徑。其體積及其面積之公式如下。

$$S=4\pi R^2;\qquad V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

今有二球。其半徑等於

$$R=35^{mm}\qquad R=50^{cm}.$$

知 $\pi=3,1416.$

求其體積及其面積若干。

問六十八。一體重量公式如下:

$$P=VD$$

(V卽體積。D卽密度)。

又圓錐體之下段二底之半徑。等於R與$r$,其

高度等於$h$,其體積之公式如下。

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr).$$

今有一鐵圓錐體之下段之密度等於7,7.其半徑等於

$$R = 15^{cm}; \qquad r = 15^{mm};$$

其高度等於

$$h = 1^{m},5;$$

求其重量P若干。

問六十九。求下式之數值。

$$\frac{5x^3 + 3x^2 - 5x + 1}{9x^2 - 2},$$

若 $x = -3.$

問七十。求下式之數值。

$$\frac{(3x + 1)^2 (5x - 2)^3}{2x + 1},$$

若 $x = -5.$

問七十一。求下式之數值。

$$(x + y - z)^2 - 4(x + y)^2(x - y + z) + (x - y)^3.$$

若 $x = -2$, $y = -4$, $z = \frac{1}{2}$

問七十二。設有二式

$$\frac{a(a + b)}{2(a^2 - b^2)}; \quad \frac{4a(a - b)}{6(a^2 - 2ab + b^2)}$$

若　$a=3$;　$b=2$,

較此二式相互之數值。

問七十三。求下式之數值。

$$\frac{ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)},$$

若　$a=5$，$b=4$，$x=10$，$y=8$.

問七十四。求下式之數值。

$$\left[\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right]\left[\frac{x^2+y^2}{2xy}+1\right]\frac{xy}{x^2+y^2},$$

若　$x=\frac{7}{4}$，$y=\frac{3}{4}$.

問七十五。求下式之數值。

$$\frac{\dfrac{a^3-ab^2+b^3}{(a-b)^3}-\dfrac{b}{a-b}}{\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab+b^2}-\dfrac{b}{a}},$$

若　1° $a=5$，$b=0$

2° $a=10$．$b=6$.

問七十六。R為三角形外切圓之半徑。$2p$為此三角形之週圍。其三邊等於 $a, b, c$. R之公式如下。

$$R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

若三角形之三邊

$$a = 3^{\text{m}} \quad , \quad b = 4^{\text{m}} \quad , \quad c = 5^{\text{m}},$$

求此外切圓之半徑若干。

內切圓之半徑之公式如下

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

求此內切圓之半徑若干。並證明

$$\mathrm{R}\,r = \frac{abc}{4p}\cdot$$

## 問七十七。求下式之數值。

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\frac{2}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}}$$

若 $x = 2.$

## 問七十八。求下式之數值。

$$\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{b}+1}+\frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{a}-1}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{b}-1}+\frac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{a}-1}\right)-\frac{a-1}{b-1}-\frac{b-1}{a-1}$$

若 $a = 16 \quad , \quad b = 81.$

## 問七十九。求下式之數值。

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}-4,$$

若 $x = \frac{9}{16}$

## B. 似項之併合。

**問八十。** 以下多項式中。將似項併合之。

(1) $4b+6c-2a+4c+8a-9b+3a-9c+7b$;

(2) $5c-\frac{2}{3}a+b-\frac{7}{2}c+3a-8b-5a-\frac{4}{9}c$;

(3) $a^3+2a^2-3a+1-2+4a+2a^3-3a^2+4a^3-9-5a$;

(4) $5x^2-\frac{3}{2}x+12x^2-15+10x-8x^3-\frac{7}{4}x^2+\frac{x}{6}$;

(5) $3a+4b-6c-3d-2b+d+3c$
$-2a-2b+2d+3c-a$;

(6) $3a^2b^4+8a^3b^3+1+3a^2b^4-9a^3b^3-1+5a^3b^3$;

(7) $9a^3b-c+8a^2b-3c-a^2b+10a^3b+4c$;

(8) $\frac{3}{5}x^4y^2-\frac{2}{3}x^3y^2-\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{5}x^4y^2$
$+\frac{7}{6}x^2y+\frac{2}{3}x^3y^2+x^2y$.

## C. 多項式之加減法。

**問八十一。** 演算。

(1) $(3a^3+2a^2b-ab^2-2b^3)+(5a^3+a^2b+4ab^2+5b^3)$
$+(a^3-2a^2b-2ab^2-b^3)$;

(2) $\left(\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}-z^2\right)+\left(x^2-\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{2}\right)+\left(\frac{x^2}{2}-y^2-\frac{z^2}{3}\right)$
$+\left(\frac{y^2+z^2-x^2}{6}\right)$;

(3) $$(a^4 b^3 c^2 + a^3 b^2 c^2 + a^2 b^2 + 2 b^2 c) + (a^2 c - 2 a^2 b^2 - a^3 b^2 c^2 + a^4 b^3 c^2) + (a^2 b^2 - 2 a^4 b^3 c^2 + a^2 c);$$

(4) $$\left(\frac{20 x^3 y}{3} + 4 yx^2 - 5 xy\right) + \left(\frac{10 y^3 x}{3} - 4 x^2 y\right) + \left(8 xy - \frac{5}{6} x^3 y - xy^3\right)$$

## 問八十二。演算。

(1) $$(7 a - 2 b + c) - (5 a - b + c);$$

(2) $$\left(3 a^2 - 2 b^2 + \frac{c^2}{5}\right) - \left(2 a^2 - 2 b^2 - \frac{4 c^2}{5}\right)$$

(3) $$\left(\frac{5}{2} x^4 - 3 ax^3 + 7 a^2 x^2 - \frac{2}{3} a^3 x\right) - \left(\frac{2}{5} x^4 - \frac{1}{3} ax^3 - \frac{1}{7} a^2 x^2 + \frac{3}{2} a^3 x\right)$$

(4) $$(a^4 - 3 a^3 b + 2 a^2 b^2) - (a^4 - 2 a^3 b - 5 a^2 b^2) - (3 a^4 - 2 a^3 b + 4 a^2 b^2).$$

## 問八十三。演算。

(1) $$(a + x) - (a + 2 x) + (a + 3 x) - (a + 4 x);$$

(2) $$(a + b - c) - (a - b - c) + (a + b + c) - (b + c - a) - (a - b + c);$$

(3) $$(7 a^3 - 4 b^3 + 5 c^3) - (a^3 - 13 b^3 + 16 c^3) + (6 a^3 + 9 b^3 - 11 c^3);$$

(4) $$(8 x^4 y + 7 x^2 y^5 - 3 x^2 y^3 - 7 x^5) - (9 x^4 y + 5 x^5 - 4 x^2 y^3 + 8 x^2 y^5) + (2 x^2 y^3 - 3 x^2 y^5 - x^4 y - 17 x^5).$$

## 問八十四。設有多項式

$$\mathrm{A} = x^5 + x^3 - 8 x^2 - 8 \quad ; \quad \mathrm{B} = x^4 - 5 x^3 + 6 x^2 + 4 x - 8;$$

$$C = x^5 - 2x^4 + x - 2 \quad ; \quad D = x^3 - 4x^2 + 4x,$$

演算下式

(1) $A + B + C + D$; (2) $A - B + C - D$;
(3) $A - B - C + D$; (4) $B - C - D - A$;
(5) $D - A - B - C$; (6) $B + D - C - A$.

**問八十五。** 演算

(1) $$3ac - (ab + d) + [4ac + d - (2ab - 3d)] - [7ac - (3ab - 4d - 2ac)];$$

(2) $$m - p - (x - y) + 2m - (3p - y + x) - [4m - (8p - x - y) + 4p] - [3m - y - (2p - x - y)].$$

**問八十六。** 甲乙丙三人分一$A^{fr}$數。甲得$a^{fr}$加所餘之數之三分之一。乙得$2a^{fr}$加再所餘者之三分之一。丙得$3a^{fr}$加所餘者之三分之一。

問甲乙丙三人各分若干。並問尚餘若干。

**問八十七。** 甲乙丙三人共賭。言定每局負者。當倍償其他二者之本。甲第一局失敗。乙第二局失敗。丙第三局失敗。若當未賭之先。甲有$a^{fr}$. 乙有$b^{fr}$. 丙有$c^{fr}$. 問甲乙丙結局各有若干。

## D. 單項式與多項式之乘法。

### 問八十八。設有六個單項式

$$A = 5a^3b^2c;\ B = 3ab^4c;\ C = 7a^2b^2c^2;\ D = \frac{1}{3}ab^2c^3;$$
$$E = 10a^6;\ F = \frac{3}{2}a^4bc,$$

演算

(1) $A \times B$; (2) $A \times C$; (3) $A \times D$; (4) $A \times E$; (5) $A \times F$;
(6) $B \times C$; (7) $B \times D$; (8) $B \times E$; (9) $B \times F$: (10) $C \times D$:
(11) $C \times E$; (12) $C \times F$; (13) $D \times E$; (14) $D \times F$; (15) $E \times F$.

### 問八十九。設有四個項式

$$A = 8ax^2y;\ B = 9bx^5y^2;\ C = 4axy^2;\ D = \frac{5}{6}bxy^3,$$

演算　(1) ABC; (2) ABD; (3) ACD; (4) BCD.

### 問九十。求多項式

$$6a - a^2b + 2a^3b^2 - 7b^3$$

受乘於單項式 $4ab^2$ 之積。

### 問九十一。求多項式

$$2a^2 - 5b^3x^2 - 7ax^3 + 9x^2$$

受乘於單項式 $-10ab^2x^3$ 之積。

### 問九十二。演算

(1)　$(3ac - 4ab + 7bc - 5) . 2abc$;
(2)　$(6a^2x^2y - 4ax^2y^3 - 7a^2xy^2) . (-9a^3x^2y)$;

(3) $$\left(\frac{3}{5}a^3b^2-\frac{7}{4}a^2b^3-a^5+b^5\right)\cdot(-10\,ab^4x^2$$

(4) $$4\,ac\,(a^4-10\,a^2b^2+b^4);$$

(5) $$(-2\,xyz^2)\cdot(4\,xyz-7\,x^2z-8\,xy^2+2\,z^3);$$

(6) $$(-7\,ac^2)\,(5\,bc^2-cd^2+7\,abd-3\,b^2d).$$

## 問九十三。以下兩多項式相乘。

$$x^3-3\,xy^2+3\,xy^2-y^3;\quad 2\,a^2-5\,ab.$$

## 問九十四。求

$$(2\,x+3)\,(8\,x^3-12\,x^2+18\,x-27)$$ 之積。

## 問九十五。求

(1) $$(x^2-3\,x+2)\,(x+3);$$

(2) $$(x^3-4\,x+2)\,(x^5-7\,x^4);$$

(3) $$(4\,a^4-5\,a^3b-7\,a^2b^2+8\,ab^3-9\,b^4)\,(3\,a^3-4\,b^3);$$

(4) $$(x^5-ax^4+a^2x^3-a^3x^2+a^4x-a^5)\,(x+a);$$

(5) $$\left(5\,x^2y-\frac{4}{5}xy^2-\frac{2}{3}y^3+x^3\right)\cdot\left(2\,x^3y-\frac{5}{6}xy^3\right)$$ 之積。

## 問九十六。求以下兩多項式

$$a^4-4\,a^3b+6\,a^2b^2-4\,ab^3+b^4;$$

$$a^3-3\,a^2b+3\,ab^2-b^3$$ 之積。

## 問九十七。求

$$\left(7\,x^2y+\frac{6}{7}xy^2-\frac{3}{4}y^3\right)\left(4\,x^3y-\frac{1}{6}x^2y^2+\frac{3}{7}xy^3-4\,y^4\right)$$

之積。

## 問九十八。演算

(1) $$(8b^3x^6-4a^2b^2x^4y^3+2a^2bx^2y^5-a^3y^9)$$
$$(2bx^3+ay^3+10b^4x^8);$$

(2) $$[3x^2-2x(x-y)-y(x+y)](2x^2-3xy+y^2);$$

(3) $$(5a^3b^2-8ab^4-3a^2b^3-6a^5+4a^4b)(3a^2-b^2+4ab);$$

(4) $$(a^5-a^3+a-1)(a^4+a^2+1);$$

(5) $$(x^4-5ax^3+3a^2x^2-7a^3x-a^4)(x^4-7a^2x^2+8a^4);$$

(6) $$[x^3-(a+2b)x^2+(a^2-b^2)x-a^3+b^3]$$
$$[x^2-(2a-b)x+a^2-b^2].$$

## 問九十九。以下多項式。求公生數。而劈爲單項與多項之諸生數。

(1) $$4a^5c-40a^3b^2c+4ab^4c;$$

(2) $$42b^2c^4-14bc^3d^2+21ab^2c^2d+70b^3c^3;$$

(3) $$27x^2y^3z^4-12x^3yz^3-15x^2y^3z+3xyz^2+xyz;$$

(4) $$8a^3b^2c^4d-16ab^4c^5+32a^2b^2c^4d^2-24a^5b^2c^4.$$

## 問一百。求

$$(x-a)(x-b);\quad (x-a)(x-b)(x-c);$$
$$[x^3-(2a-3b)x^2+(a^2+b^2)x-a^3-b^3][x^2-(a+b)x]$$

之積。而將此積。照 $x$ 之降序之排列。

## 問一百一。演算(見第130欵)。

(1) $(m+2p)^2$;　(2) $(a+1)^2$;　(3) $(a^2+b^2)^2$;

(4) $(7m-4p)^2$;　(5) $(2a^2b-5c)^2$;　(6) $\left(\frac{x}{4}-3y\right)^2$;

(7) $[(x+y)+(a-b)]^2$;　(8) $[(x-y)-(a+b)]^2$.

## 問一百二。演算(見第130欵)。

(1) $(5a+7b)(5a-7b)$; (2) $(1+a^2)(1-a^2)$;

(3) $(10ab-5cd)(10ab+5cd)$; (4) $\left(\frac{3}{4}a-\frac{7}{9}b\right)\left(\frac{3}{4}a+\frac{7}{9}b\right)$

(5) $\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)\left(\frac{a}{x}-\frac{b}{y}\right)$; (6) $(a+b+c)(a+b-c)$;

(7) $(x+y+a+b)(x+y-a-b)$.

## 問一百三。按第130欵之恒等式。演算

$(6x+5)^2$; $(x\sqrt{3}-2)^2$; $(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})$;

$(a+b)^2+(a-b)^2$; $(x\sqrt{2}+a\sqrt{3})(x\sqrt{2}-a\sqrt{3})$.

## 問一百四。將以下代數式。劈爲兩生數之積。

$25^2x^2-9a^2$; $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{64}{9}$; $x^2-y^2+2yz-z^2$;

$(a+b)^2+(a-b)^2$; $(x+5)^2-(3x-7)^2$.

## 問一百五。將以下代數式。劈爲生數之積

$a^2-b^2$; $25x^2-36y^2$; $\frac{4}{9}a^2-\frac{16}{25}b^2$;

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$; $x^4-1$; $a^4b^2-a^2b^4$;

$a^2-b^2+1+2a$; $a^2-b^2+2b-1$;

$4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$.

## 問一百六。演算

$(a+b)^3$; $(a-b)^3$; $(3a^2+4b^2)^3$; $(4a^2b-2ab^2)^3$.

## E. 以單項式除法。

### 問一百七。求下列諸式之商。

(1) $10a^2bc^3 : 5abc^2$; (2) $15a^2xy^2 : 3ay^2$; (3) $16a^4b^3c^2x : 8a^2b^3c$;

(4) $\frac{2}{3}a^3c^4x^3 : \frac{3}{5}ac^2x$; (5) $44x^6y^2z : 4x^4yz$;

(6) $6a^2x^4y^2 : -3a^2xy$; (7) $165a^2bx^5y : -11bx^4$;

(8) $-76abx^3y : 2ax^2y$; (9) $-105x^4y^5z^4 : 21x^3y^2z^3$.

### 問一百八。演算。

(1) $(2a^3+2a^2b-4ab^2) : 2a$; (2) $(18x^2y^2-15x^3y^4z+6xy) : 3xy$;

(3) $(10ax^4+8a^2x^3-12a^3x^3-4ax) : -4ax$;

(4) $(-12a^3x^2y-18a^2x^3y-16ax^2y^3+24a^2x^2y^2) : -2ax^2y$;

(5) $\left(-\frac{2}{5}x^5+\frac{7}{8}x^7-\frac{1}{3}x^8-x^4\right) : \frac{1}{2}x^4$.

## F. 第三章總雜問題。

### 問一百九。撿眞下列恒等式。

(1) $(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)=(aa'-bb')^2+(ab'+ba')^2$;

(2) $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$;

(3) $(x^2-2x-1)^2+(x^2+2x-1)^2=2(x^2+1)^2$;

(4) $(a+b+c)(ax^2+by^2+cz^2)-bc(y-z)^2-ca(z-x)^2$
$-ab(x-y)^2=(ax+by+cz)^2$.

### 問一百十。將下式

$$(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b);$$

$$8(x-1)^3+4(x-1)^2+(x^2-4x+2)^2-(x^4-x^2+1);$$

$$(a+b+c)^3+3(b+c)^2(a+b+c)-3(b+c)$$

$$\times(a+b+c)^2-(b+c)^3$$ 約盡。

## 問一百十一。設有

$$x=a^2-bc\ ;\quad y=b^2-ac\ ;\quad z=c^2-ab.$$

證有

$$(x+y+z)(a+b+c)=ax+by+cz.$$

## 問一百十二。撿眞下列恒等式。

(1) $$a(a+b)(a+2b)(a+3b)+b^4=(a^2+3ab+b^2)^2;$$

(2) $$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{(a-b)}{12}=\frac{a^2+b^2+ab}{3};$$

(3) $$x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1).$$

## 問一百十三。將下式

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$$

劈爲第一次生數之積。

## 問一百十四。撿眞下列恒等式。

$$(a-b)^2(b-c)^2+(b-c)^2(c-a)^2+(c-a)^2(a-b)^2$$

$$=[(b-c)^2-(a-b)(c-a)]^2.$$

## 問一百十五。設有。

$$\frac{5ab^3c^3}{d^4}\quad 與\quad 6a\sqrt{b^2cd^4}$$

兩式。求 (1) 其和之方; (2) 其較之方; (3) 其和與其較之積。

**問一百十六。** 設有兩多項式

$$P = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3,$$

$$Q = 9x^2 + 10x - 3.$$

求 (1) 其和 $P+Q$; (2) 其較 $P-Q$; (3) 其商

$$\frac{(P+Q)(P-Q)}{P^2-Q^2}$$

**問一百十七。** 演算 $(A+B)\cdot(A-B)$

若 $A = x + \frac{p}{2}$ ; $B = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

**問一百十八。** 設有兩多項式

$$P = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$Q = (x-2y-2z)^2 + (y-2z-2x)^2 + (z-2x-2y)^2.$$

撿眞 $$Q = 9P.$$

**問一百十九。** 約盡下式。

(1) $$\frac{1}{a(a-1)(a+1)} - \frac{1}{a(a-1)} + \frac{2}{a^2-1};$$

(2) $$a - \frac{1}{1+\frac{1}{a}} + \frac{a^2}{a+1} + \frac{a^2+2ab}{a+b} - a + \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

**問一百二十。** 撿眞下列等式

$$\frac{1}{\left(\frac{a}{b}-1\right)\left(\frac{a}{c}-1\right)}+\frac{1}{\left(\frac{b}{a}-1\right)\left(\frac{b}{c}-1\right)}+\frac{1}{\left(\frac{c}{a}-1\right)\left(\frac{c}{b}-1\right)}=1.$$

**問一百二十一。** 演算

$$\frac{1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

若 $a+b+c=2p.$

**問一百二十二。** 加

$$\frac{1}{(a-1)^2}+\frac{1}{(a+1)^2}-\frac{1}{a^2-1}.$$

**問一百二十三。** 約盡下式。

(1) $$\frac{\left[\dfrac{a(a+b)}{b-a}+a\right]\left[a-\dfrac{a(2a+b)}{a+b}\right](a+b)}{2ab(a^2+ab+b^2)}.$$

(2) $$\frac{4x^2}{(x+2)(4x-4)}-\frac{3(x+2)^2}{(x+2)(3x-6)}-\frac{(6x-4)^2}{(4x-4)(3x-6)}.$$

**問一百二十四。** 設有

$$\frac{4a^2-1}{(a-b)(a-c)}+\frac{4b^2-1}{(b-c)(b-a)}+\frac{4c^2-1}{(c-a)(c-b)}$$ 一式。

又設 $a, b, c$ 之值爲不拘何數。證此式之值爲恒不變。

## 問一百二十五。約盡下列諸式。

(1) $$\frac{a-b}{a^2-2ab+b^2}+\frac{a+b}{a^2-b^2}+1;$$

(2) $$\frac{x^3}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1};$$

(3) $$\frac{1}{(a+b)^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{2}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right);$$

(4) $$\frac{(x+1)^3}{x}-\frac{(x+1)^2}{x+2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}.$$

## 問一百二十六。

以 $\dfrac{(ab-b^2)\cdot 2d}{a+b}$ 除 $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}$.

## 問一百二十七。設有

$$x=\frac{x'(p+p')-2pp'}{2x'-(p+p')};\qquad y=\frac{y'(q+q')-2qq'}{2y'-(q+q')};$$

$$z=\frac{z'(r+r')-2rr'}{2z'-(r+r')}.$$

知 $$\left\{\quad x'=\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}}{q-q'};\qquad y'=\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}}{r-r'};\qquad z'=\frac{\frac{1}{q}-\frac{1}{q'}}{p-p'};\right.$$

又設 $$pqr=p'q'r'=1,$$

今演算 $$xyz.$$

## 問一百二十八。

設 $\dfrac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}-\dfrac{bx}{a}+\dfrac{3abc}{a+b}-3cx+\dfrac{a^3b^2}{(a+b)^3}$ 一式之間。

以$\frac{ab}{a+b}$代$x$.求此式之值。

問一百二十九。

今有$\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}-\frac{ab}{a+b}-\frac{cd}{c+d}$一式。

若設$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.問此式如何。

問一百三十。約盡下式

$$\frac{3\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2-\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3-3\left(\frac{a-b}{a+b}\right)+1}{3\left(\frac{a+b}{a-b}\right)-3\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2+\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^3-1}.$$

問一百三十一。撿眞

$$\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2}}+\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2}}=\sqrt{x+\sqrt{y}}$$

問一百三十二。約盡

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}};$$ 又求其值,

若 $$x=\frac{2ab}{b^2+1}.$$

問一百三十三。約盡

$$\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}+\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

問一百三十四。撿眞

$$2(a+\sqrt{a^2+b^2})(b+\sqrt{a^2+b^2})=(a+b+\sqrt{a^2+b^2})^2.$$

問一百三十五。約盡

$$1+\frac{x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+\frac{x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}.$$

問一百三十六。乘

$$\frac{\sqrt{5a^2}}{a}\cdot\frac{-3x^2}{b}\cdot\frac{\sqrt{x}}{a^2}\cdot\frac{x^2}{b^3}\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2bx^4}}$$

而約盡。

問一百三十七。求

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$ 之值。

若 $a^2=b^2+c^2.$

# 第四章演習問題。

## A. 一元一次方程。

**問一百三十八。** 求解以下方程。

$$(1)\ 8x+7=9x+2;\quad (2)\ 7-4x=27-9x;$$

$$(3)\ -2x-7=5x-49;\quad (4)\ 29-2x=3x-21;$$

$$(5)\ 18x+4=34x-4;$$

$$(6)\ \frac{x}{2}+\frac{3x}{4}-\frac{5x}{7}=30;\quad (7)\ \frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}=x-\frac{3}{4};$$

$$(8)\ \frac{x-1}{4}-\frac{5-2x}{9}=3x-\frac{2}{3};\quad (9)\ \frac{5x-2}{4}-\frac{x-8}{3}=\frac{x-1}{2}+5;$$

$$(10)\ \frac{x}{6}-\frac{x-1}{3}-\frac{1}{3}(x-3)=\frac{2}{7}-x.$$

**問一百三十九。** 求解下列方程。

$$(1)\ \frac{x}{176-x}=\frac{5}{6};\ (2)\ \frac{23+x}{40+x}=\frac{2}{3};\ (3)\ \frac{11+x}{6+x}=\frac{8+x}{4+x};$$

$$(4)\ \frac{x+315}{60}=\frac{x}{35};\ (5)\ \frac{7x}{5}=\frac{5(x-8)}{3};\ (6)\ \frac{5-x}{11}-35=\frac{x-10}{2};$$

$$(7)\ \frac{4x}{3}-\frac{10x}{7}=\frac{-2x-20}{4};\quad (8)\ \frac{3-2x}{1-x}=\frac{5-8x}{3-4x};$$

$$(9)\ 8-\left(\frac{4x}{9}-\frac{3x}{7}\right)=\frac{x}{3}-14;\quad (10)\ \frac{13x}{12}+11=\frac{3(x+4)}{2}.$$

## 問一百四十。試解以下方程。

(1) $$\frac{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}}{1+\dfrac{x+1}{x-1}}=\frac{1}{2}.$$

(2) $$\frac{7x}{5}-\frac{2x}{3}=12-\frac{209}{20}.$$

(3) $$(x^2+a^2-b^2)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a}\right)+(a^2+b^2-x^2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$
$$+(b^2+x^2-a^2)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{x}\right)=0.$$

(4) $$\frac{5x}{3}+427-8x=\frac{3-5x}{16}+\frac{8x-7}{15}.$$

(5) $$\frac{7x}{15}-\frac{(3x-5)}{20}+3=\frac{x}{5}+\frac{5x-15}{12}.$$

## 問一百四十一。求解下列方程。

(1) $ax-b=\dfrac{cx}{d}-1$; (2) $\dfrac{a+bx}{a-bx}=c$; (3) $\dfrac{ax}{3}-\dfrac{2bx}{5}=ab$;

(4) $\dfrac{a+x}{a}-\dfrac{b-x}{b}=1$; (5) $\dfrac{a-x}{a}=\dfrac{x-b}{b}$; (6) $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$;

(7) $\dfrac{x}{a}-\dfrac{x}{b}=a-b$; (8) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}-\dfrac{x}{b}$; (9) $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{x}$;

(10) $$\frac{x-a}{a-b}-\frac{3ax}{a^2-b^2}=\frac{x-a}{a+b}-\frac{ax}{a^2-b^2}.$$

# B. 一次定數不等式。

## 問一百四十二。求解定數不等式。

$$\frac{3x}{7}<1.$$

**問一百四十三。** 試解不等式。

$$\frac{x}{118}>\frac{42}{87}+\frac{x}{640}.$$

**問一百四十四。** 求解下列不等式。

$$(1)\quad x+5>3-3x;\quad (2)\quad \frac{3}{2}+5x>7x+4;$$

$$(3)\quad (x+2)^2>x^2-5x+4;\quad (4)\quad (4-x)^2+3x^2<5+(2x-1)^2;$$

$$(5)\quad \frac{x+60}{60}>\frac{x}{5}.$$

$$(6)\quad a-bx>cx-d;\qquad (7)\quad \frac{a+bx}{c^2}>x;$$

$$(8)\quad (ax+b)^2<ax(ax-d);$$

$$(9)\quad (x^2-a^2)x<(x+b)(x^2+c^2)-bx^2.$$

**問一百四十五。** 求得$x$之值。使不等式同時爲合理之數值。

$$6x+\frac{5}{7}>4x+7\qquad 及\qquad 4x+\frac{3}{2}<2x+25.$$

**問一百四十六。** 求$x$之值。使兩不等式。成合理之數值。

$$15x-\frac{1}{3}>2(x+1)\qquad 及\qquad 4(x-4)<3x-14.$$

**問一百四十七。** 宜以何値與$x$，使兩不等式。成合理之數值。

$$8x-5>\frac{15x-8}{2};\qquad 2x-3>\frac{20x-3}{8}.$$

問一百四十八。A與B爲兩代數值。求用何等便法。使成

$$\frac{A^3-B^3}{A-B}>\frac{A^3+B^3}{A+B}.$$ 且詮釋之。

## C. 兩元聯立式。

問一百四十九。求以下聯立方程解法。

$$\frac{x}{b}=\frac{x-y}{a},\qquad \frac{x}{y}=\frac{m}{n}.$$

問一百五十。求解下列聯立式。

$$x+y=a,\qquad \frac{1}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}=c.$$

問一百五十一。解以下聯立式。

$$\frac{x-3}{y+2}=\frac{1}{3},\qquad \frac{x+3}{y-4}=1.$$

問一百五十二。解下式聯立方程。

$$\frac{x-y}{a}+\frac{y-x}{b}=1,\qquad \frac{x-y}{a}=\frac{x+y}{b}.$$

問一百五十三。解下列聯立式。

$$\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=2a\qquad x-y=4ab.$$

問一百五十四。解以下聯立式。

$$\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right):\frac{5y}{x+y}=2, \qquad x+5y=10.$$

問一百五十五。解聯立式。

$$\frac{x}{6}=\frac{y}{9}+\frac{5}{3}, \qquad \frac{x}{16}=\frac{y}{24}+\frac{5}{8}$$ (無定)

問一百五十六。解聯立式。

$$\frac{21x}{5}+6y=141-3x+y, \qquad \frac{87x}{5}-\frac{2y}{3}=159+\frac{3x}{5}-\frac{37y}{3}.$$

(無理)

問一百五十七。解聯立方程。

$$a^2x+ay=1, \qquad b^2x+by=1.$$

## D. 多元聯立式。

問一百五十八。解聯立方程。

$$2x-7y-z=1, \qquad 5x+y+3z=10, \qquad 3x+6y-2z=9.$$

問一百五十九。解聯立式。

$$8x+y+z=64, \qquad x+8y+z=24, \qquad x+y+8z=2.$$

問一百六十。解聯立式。

$$6x+4y+9z=23, \quad 6x+4y-3z=3, \quad 12x+4y+3z=15.$$

問一百六十一。解聯立方程。

$$7x-7y-z=0, \qquad 11x-11y-z=0, \qquad x+y-14=0.$$

問一百六十二。解聯立式。

$x+y+z=8,\quad y+z+2u=11,\quad 2z+3u=14,\quad 3y-x=7.$

問一百六十三。解聯立式。

$3x+y+2z=1,\qquad x+3y+2z=1,\qquad 2x+y+3z=1.$

問一百六十四。解聯立方程。

$y+z-x=25,\qquad z+x-y=15,\qquad x+y-z=5.$

問一百六十五。解聯立式。

$3x+8y+2z=10,\qquad 3x-8y+2z=-38,$

$6x+2y+4z=-22.$ (無定之方程)

問一百六十六。解聯立式。

$2x-3y-4z=16,\qquad 6x+3y+2z=16,\qquad x+8y-6z=43.$

問一百六十七。解聯立式。

$6x-5y+2z=0,\qquad 6x+3y-2z=16,\qquad 2x+8y-4z=38.$

問一百六十八。解聯立式。

$9x-2y+12z=20,\qquad 6x+4y-3z=3,\qquad 3x+2y-3z=-1.$

問一百六十九。解聯立式。

$x=2y=3z,\qquad x+2y+3z=4.$

問一百七十。解聯立式。

$x+y+3z=12,\qquad 6x-y-z=1,\qquad x+y+z=6.$

問一百七十一。解聯立式。

$$2+\frac{5x-6y}{13}=4y-3x,\qquad 12+\frac{5x-6y}{6}=2y+\frac{3x-2y}{4}.$$

**問一百七十二。** 解聯立式。

$$\frac{8x}{15}-\frac{7y}{6}+\frac{11z}{12}=\frac{7}{2},\quad \frac{3x}{4}-\frac{4y}{5}+\frac{8z}{9}=5+\frac{53}{60},$$

$$9x-\frac{3y}{4}=42.$$

**問一百七十三。** 解聯立式。

$$7x-2y+4z=19,\quad 4x+2y-4z=36,\quad 3x+5y+2z=19.$$

## E. 撮要。

**問一百七十四。** 於聯立式內

$$(7m+2)x-(7m+3)y=22,\quad (3m+1)x-3my=84$$

定 $m$. 使 $x-y=2$; 檢眞得數。

**問一百七十五。** 於聯立式內

$$(5m+4)x-(2m+3)y=-2,\quad (3m-8)x+(2m-1)y=18$$

定 $m$. 使 $y=3x$; 檢眞得數。

**問一百七十六。** 解聯立式

$$3x+2y-z=a+1,\quad 5x+3y-2z=2a-1,$$

$$2x-y+3z=-a$$

定 $a$. 使於 $z, y, x$ 中有係屬

$$x=\frac{y+z}{2}.$$

**問一百七十七。** 解三方程之聯立式,

$$x-y+z=7,\quad 8x+13y+11z-27=m(3-5y-3z)$$

$$3x+8y+z-7=m(2z-5y-2).$$

**問一百七十八。** 解兩方程之聯立式。

$$(2m^2-6m)x-4m=9+(5m-15)x-my\ ,$$
$$2m(m-1)x+my+9=y+9m-\frac{2m-2}{2m-5}+(6m-6)x$$

**問一百七十九。** 解方程聯立式。

$$m(x+y)+m^2(2x-3y-2)=m+3\ ,$$
$$(m-m^2)x+m(y-1)=2m^2(x-y)-3m^2-2.$$

**問一百八十。** 解聯立方程

$$m^2(x-y)+m(2x+3y)-3=0,$$
$$m^2(x-y)-m(3x+2y)+2=0,\qquad 3x+2y+z-3=0.$$

**問一百八十一。** 解聯立方程。

$$(m-2)x-(m+1)y=3,\qquad \frac{x-y}{3}=\frac{(m+2)(m-1)}{(m-2)(m+1)}$$

**問一百八十二。** 解聯立方程。

$$\frac{1}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{z}=2,\qquad \frac{4}{x}-\frac{6}{y}+\frac{8}{z}=2,\qquad \frac{5}{x}-\frac{3}{y}+\frac{2}{z}=2.$$

**問一百八十三。** 解下列聯立式。

$$\frac{2}{x}-\frac{3}{y}-\frac{2}{z}=0,\qquad \frac{2}{z}+\frac{1}{x}-\frac{4}{3}=0,\qquad \frac{1}{y}-\frac{1}{x}-\frac{2}{z}=0.$$

**問一百八十四。** 解聯立方程。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{6}{z}=9,\qquad \frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{4}{z}=5,\qquad \frac{3}{y}-\frac{2}{x}-\frac{1}{z}=4.$$

## 問一百八十五。解聯立式。

$$(c+a)x-(c-a)y=2bc,$$
$$(a+b)y-(a-b)z=2ca,$$
$$(b+c)z-(b-c)x=2ab.$$

## 問一百八十六。解聯立式。

$$0{,}12x-0{,}23y+0{,}34z=2{,}071,$$
$$0{,}45y-0{,}56z+0{,}67u=-8{,}044,$$
$$0{,}78z-0{,}89u+0{,}87x=9{,}560,$$
$$0{,}65u-0{,}43x+0{,}21y=-4{,}881$$

## 問一百八十七。解聯立式。

$$ax+by-cz=2xy,$$
$$-ax+by+cz=2yz,$$
$$ax-by+cz=2zx.$$

# 第五章演習問題。

## A. 一元方程問題。

**問一百八十八。** 試求一數。其$\frac{2}{3}$加$\frac{3}{4}$及$\frac{4}{5}$等於102.

**問一百八十九。** 設有一池。能容水2 940立脫耳。今此池內尙有已流去之水量之$\frac{4}{3}$.問此水體積若干。

**問一百九十。** 甲乙二人。合股營商。分利時。甲得七倍於乙。卽多75 234佛郎於乙，問各分得若干。

**問一百九十一。** 一人賭錢。輸去其銀$\frac{3}{4}$.事後總計。只賸原有三分之一。而少10佛郎。問其原有共若干。

**問一百九十二。** 設有父子二人。父年45.子年13.問於幾年後。父年方爲子年之三倍。

問一百九十三。一人賭錢。於第一次輸去$\frac{3}{5}$之銀。第二次嬴得第一次賭後所餘之$\frac{1}{4}$·事後計之。共餘45佛郎。問入時携資若干。

問一百九十四。有一掛鐘。于正午時。二針適相遇。問再于幾點鐘時。更適相遇。

問一百九十五。 甲乙丙丁四人。共分18 515佛郎之總數。乙得甲之$\frac{3}{4}$·丙得乙之$\frac{5}{8}$·丁得丙之$\frac{9}{13}$·問各得若干。

問一百九十六。 一人于三次內。清償債欵。第一次付還全債$\frac{1}{5}$·多25佛郎。第二次還第一次之數。加其所欠總數之$\frac{1}{3}$·第三次還其原債之$\frac{1}{4}$·多100佛郎。問其所負之總數若干。

問一百九十七。 一人每年增產。得其所蓄三分之一。每年年終。扣去1 000佛郎。以作零用。三年後。其產增至二倍。問其始有之產爲幾何。

問一百九十八。 設有一數。加$\frac{3}{7}$·則等於70.問此數爲何。

問一百九十九。 設有一數。加25.則等於

其數之$\frac{2}{3}$加57之和。問此數若干。

問二百。 設有三个號碼之一數。其百位碼。爲十位碼之半。單位碼。爲其餘二碼之和。又此三碼之和。等於12.問此數爲何。

問二百零一。 以何數加入於命分式$\frac{23}{40}$之二項。始等於$\frac{2}{3}$.

問二百零二。 某商有布一疋。每尺値價3佛郎。後轉售去一半。每尺得價3,50佛郎。又售去三分之一。每尺得價2,90佛郎。其餘得價每尺3,20佛郎。如此得利181,50佛郎。問此疋布。共有幾尺。

問二百零三。 某商以每尺20佛郎之正價,購入羅紗一宗。後以每尺24佛郎之價,售去其半。每尺20佛郎之價,售去$\frac{1}{6}$.每尺30佛郎之價,售去$\frac{1}{12}$.其餘每尺售27佛郎。共獲利220佛郎。問此羅紗共有幾何長。

問二百零四。 一抽水機,能以$6\frac{3}{4}$點鐘之久,獨自排去滿池之水。另有一機,則能以$5\frac{1}{2}$點鐘之久排去之。設以此二機同用。問須經幾許時。可以排盡此池之水。

問二百零五。一人賭錢。輸去其所有之$\frac{2}{5}$後。尙存其所應有之半。加45佛郎。問未入局以前。有本金若干。

問二百零六。有甲乙二人。合議賭錢。言明負者。每次給勝者以2佛郎。入局之初。甲携40佛郎而乙携25佛郎。後停時。則甲有4倍於乙所存者。問甲勝得幾次。

問二百零七。甲乙二人携有同數之資本。入局賭錢。甲負去其銀之$\frac{2}{3}$.乙負去其銀之$\frac{3}{4}$後。出局。但知甲所存者。較乙多30佛郎。問此二人賭錢金若干。

問二百零八。甲乙二人同時自相距553啟羅邁當之AB二點。相對賽跑行。互遇於一處。甲每日跑42.乙跑37啟羅邁當。問自其起點至若何距離。始得相遇。

問二百零九。一人出外乘車旅行。每時行12啟羅邁當。今欲回時步行。每時行4啟羅邁當。經5時須抵家中。問當距離起點若干。棄車步行。

問二百十。 一騎兵馳馬行路。每時行12啟羅邁當速度。設彼每時只行8啟羅邁當。則抵此地須遲2時。問所經之距離若干。

問二百十一。 二人乘自行車。同時由巴黎出發。甲車每時行17,6啟羅邁當。而乙車則13,2啟羅邁當。行後3時。甲車減其速度。以待乙車。每時只行10啟羅邁當。問離巴黎幾何遠。二人方得相遇。

問二百十二。 金之成色重量為19.而銅為9.設有金銅相和成50格蘭姆之併合物。其成色重量為15.問此物和金銅質各若干。

問二百十三。 一馬商用8 180佛郎。購馬一群。以8 780佛郎售去。馬每匹得利30佛郎。問共購馬若干匹。每匹購價若干。

問二百十四。 有三噴泉。其一於6點鐘內。噴114碰(即百立脫耳)之水。其二於15點鐘內。噴375碰之水。其三則於24點鐘間。噴360碰之水。設以此三泉同噴。注入一能容水2 273碰之池。問需

幾點鐘。可以注滿。

問二百十五。 一人購一宅及一園。共費15 480佛郎。宅價5倍於園價。問各價若干。

問二百十六。木板48塊。逐次叠積成堆。共高200生的邁當。中分厚薄二種。其一每塊厚3生的邁當。其他則每塊5生的邁當。問於此堆內。每種各有若干塊。

問二百十七。一父年大於其子30歲。4年後。其年4倍於子年。問父子年各幾何。

問二百十八。一父年40.其子6歲。問於幾年後。父年爲子年之3倍。

問二百十九。設有甲乙二人。甲蓄銀7 482佛郎。乙有銀408佛郎。每人每年各節費325佛郎。問於幾年後。甲財多4倍於乙產。

問二百二十。設有一數 3 936, 試三分之。其一等於其二之4倍。其二等於其三之3倍。

問二百二十一。設一數。爲二號碼。其十位之號碼。等於單位之號碼之倍。若倒置此號碼

之序。則此數減27. 問此數爲何。

問二百二十二。一罇貯 275 立脫耳之酒。其價每立脫耳値 0,80 佛郎。問須冲入水幾許。始能成每立脫耳 0,55 佛郎折價之酒。

問二百二十三。設有 900 立脫耳之酒。每立脫耳値價 0,40 佛郎。問須添入値價 0,70 佛郎之酒若干立脫耳。始得値價每立脫耳 0,65 佛郎之混合酒。

問二百二十四。設以 184 佛郎之價。售出 220 立脫耳之酒一桶。此酒係由二種酒混合而成。其一値價每立脫耳 0,80 佛郎。其他則値每立脫耳 0,55 佛郎。但知售去後。得利 30 佛郎。問桶內共容此二種酒各若干。

問二百二十五。海水 32 啟羅格蘭姆含鹽 1 啟羅格蘭姆。問須加入淡水若干。始得 32 啟羅格蘭姆之混合水。而內只含有 120 格蘭姆鹽分者。

問二百二十六。一人自某日存 12 500 佛

郎之欵。息爲4%.三月有半以後。又存28 500佛郎之欵。息爲$4\frac{3}{4}$%.問須閱若干時後。二欵之利息相等。

問二百二十七。 一人按$\frac{3}{8}$,$\frac{5}{12}$及$\frac{1}{3}$之比例。分一資本金爲三份。第一份爲利息4%存過2年又7月而得者。資本金與利。共爲2 482,50佛郎。問其資本金總數爲何。

問二百二十八。 設有一資本金。先以4,50%佛郎之息存7月又9日。後以5,40%佛郎之息。存1年5月又12日。總得利金126,81佛郎。問此資本金爲若干。

問二百二十九。 有銅已與金混合,製成一器。共重3,07啟羅格蘭姆。其銅之成色本爲0,920.今須拆低爲0,900.試求銅之重量。

問二百三十。 甲金成色0,940.乙金成色0,800.今以二種金混合。製成一錠。其成色爲0,850,其量爲2,700啟羅格蘭姆。問兩金各應入重量若干。

問二百三十一。設有一資本金。以定額之息存9月。又有第二資本金。多前存者2 000佛郎。以同額之息存7月。若第一資本金之利。多於第二者爲88佛郎。又此二利之和數。爲1 208佛郎。試求此二資本。及存息各若干。

問二百三十二。一人存7 500佛郎。不知其息爲何。又以較多2%之息，存一2 500佛郎之欵。常年入息額爲550佛郎。問以若何之息。存此二欵。

問二百三十三。甲乙二人。甲以4%之息。存2 000佛郎。而乙只存1 500佛郎。甲之入欵。較乙少10佛郎。問乙以若何之息。存貯彼金。

問二百三十四。有一690佛郎之期票。70日後。可以支取。詎折扣以後。僅爲683,30佛郎。問此爲幾釐折扣。

問二百三十五。有一期票，外扣5,66佛郎。一如照例以6%爲折扣相同。問此票限期爲何。

**問二百三十六。** 有480佛郎之期票一紙。照4,5%折扣後。則爲475,80佛郎。問此票於幾日後可付。

**問二百三十七。** 有一器滿注水。及重量相同之水銀。重84,665啟羅格蘭姆。此器之容量爲4,015立脫耳。水銀之密度爲13,6. 問此器之重量爲何。

**問二百三十八。** 一商人於18月內須付9 000佛郎。以償負項，分二次交淸。經9月付第一次1 250佛郎。問於何時，始付第二次者。

**問二百三十九。** 一人以3%之息。存其2/3之產。又以4,5%之息。存其所餘者。3年後。計其本利。則得9 945佛郎。問其所存之數爲若干。

**問二百四十。** 中國算術，名九章算術者。作於紀經元前2600年。玆錄其二問題於下。

(一) 有方池一。寬廣各10尺。池之中心。生一蘆荻。高水面1尺。有人自池旁拽引蘆荻。使其斜側。

成一直線，則蘆杪適在此方形邊之中。問該池水深若干。

（二）有竹一株。高 10 尺。其竿頂已折。折破之部分。倒垂至地。距離竹根 3 尺。問該竹自根至折處。有幾何高。

（解決以上二問題。須先知弦上之方面也。）

**問二百四十一。** 於

$$(a^2+ab+xb^2)(a^2-ab+xb^2)$$

乘式內 $x$ 當給以若何之數值。始等 $a^4+x^2b^4$.

## B. 多元方程問題。

**問二百四十二。** 試解下列方程式

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+9y+25z=10 \\ x+81y+625z=100a \end{cases}$$

如各元字之數値爲正。試定 $a$ 之完全數值。

**問二百四十三。** 試求二數。其和爲 42. 其較爲 8.

**問二百四十四。** 試求一分數式。如同時加 15 於分子。加 18 於分母。則其數値不變。如加 55 於

分子。加6於分母。則大三倍。

問二百四十五。 設有三數。第一二數之和爲802.第一與第三之和爲1 535.第二三數之和則爲1 207.試求此三數爲何。

問二百四十六。 二人共有18 300佛郎之資本。其一用去其份內之2/5.其他則用其應有之3/7.其一所餘。二倍於其他之所餘者。問二人份內各有若干。

問二百四十七。 設有布一疋。長114,85邁當。須製衣14身。用布9,2/5邁當者數身。用8,1/4者數身。餘用7,3/8邁當製成。各身裁之衣應製若干。但知第一二種之衣。當同數也。

問二百四十八。 甲乙二噴泉。共噴水274立脫耳。甲泉經時3時。乙泉則經時2時。設令甲泉噴2時。乙泉噴3時。則共出水286立脫耳。問每泉每時共噴若干立脫耳之水。

問二百四十九。 一金銀匠。有錠二枚。其一含有270格蘭姆之金。30格蘭姆之銅。其他則

有 200 格蘭姆之金。及 50 格蘭姆之銅。問須有若何之數。取於此二錠之內。始能製成 400 格蘭姆重。成色 0,825 之混合金。

問二百五十。試求二塊鉄之重。但知其一之 $^2/_5$ 較其二之 $^3/_4$ 爲輕 96 啟羅格蘭姆。而其二之 $^5/_8$ 與其一 $^4/_9$ 之重相等。

問二百五十一。一頂冠重 300 格蘭姆。用金銀二種製成。於水中權之。則失其重量 20 格蘭姆。試測計其金銀含於其內者之廣量。知沉浮於水中之物體。其所消失之重量。等於所升高水體積之重。金銀之密率。爲 19,5 及 10,5.

問二百五十二。試以 38 佛郎。分與三人。其一所有。爲其二之倍。其二所得者。則較其三多 2 佛郎。

問二百五十三。有 225 佛郎之總數。從 2 及 0,50 及 0,05 佛郎之三種貨幣集成。問此各種貨幣之數。但知 2 佛郎幣之重，爲 0,50 佛郎者之 $^3/_8$. 又 0,50 佛郎幣之重，爲 0,05 佛郎者之 $^3/_5$.

問二百五十四。有銀1 620 \$, 由男12, 女15, 童20共分之。每女所得。爲每男所得之$^3/_5$. 每童所得。爲每女所得之半。問每人各分得若干。

問二百五十五。設有三號碼之一數。右端之號碼爲7. 如以十位及單位之二號碼。互相調置。則數增54. 如以百位及單位二號碼。互相調置。則數增297. 問此數爲何。

問二百五十六。試求二號碼之一數。其十位碼之5倍。等於單位碼之3倍加17. 如將其號碼之序次倒置。則等於其原數減9.

問二百五十七。設有二數。其一加3, 而其他減3. 相乘之積不變。如加5於其一數，而減3於第二數。則其積爲加16. 試求此二數爲何。

問二百五十八。試求二數。其商爲16. 其和爲306.

問二百五十九。設有二數。爲5與3之比。如減10於第一數。而加10於第二數。則得其反比。試求此二數。

問二百六十。 設有三金囊。各貯若干金錢。其第一及第二囊。合共有 795 佛郎。第一及第三囊。合共有 851 佛郎。第二及第三囊。合共有 1 012 佛郎。問每囊內。各貯金錢幾何。

## C. 無理或無定問題。

問二百六十一。 試求一數。其$\frac{1}{4}$加$\frac{1}{5}$。超過此數所餘之$\frac{9}{11}$加 7 準個。(無理。)

問二百六十二。 應取價每立脫耳 0,80 佛郎之酒若干。和入取價 0,50 佛郎之酒。100 立脫耳內。始成每百立脫耳取價 95 佛郎之酒。(無理。)

問二百六十三。 試求二數。與 17 及 21 分別乘之。此二積之和。等於 1 240. (無定。)

問二百六十四。 設有一數。以 7 除之,則餘 1; 以 8 除之,則餘 7. 問此數爲何。(無定。)

## D 負根。

問二百六十五。 加入何數於 3 及 7. 使此二新數成比例。等$\frac{4}{3}$

問二百六十六。 問於$\frac{339}{355}$此式內之二項。加減若干。始成$\frac{21}{22}$之式。

問二百六十七。一商人以1,17佛郎之價。售去一立脫耳之油。得利8%. 問如以1,04佛郎售之。則其或贏或折之息爲若干。

問二百六十八。 如加入90於一數後。開平方得9. 問此數何數。

問二百六十九。 有步行者甲乙二人。同行一路。於同點出發。甲每分鐘行80步。乙則行90步。甲先行。乙後行。相間爲45分鐘。甲每啟羅邁當行1 200)步。乙行1 440步。問於幾時後。甲乙相距。始等於5啟羅邁當。

## E. 討論。

問二百七十。 設有一存欵。於$n$年後可付。現以$p$之折扣。付出$s$佛郎。問此欵若干。

問二百七十一。 二人之年齒。爲25及31歲。於幾年後。其兩人年歲之比。始等於$k$. 試討論

之。

問二百七十二。求一數。與$a$相乘之積。等於此數加$a$.試討論其根之號。

問二百七十三。張君現有李君年之$n$倍。於$p$年後。張君之年。爲李君之$m$倍。問張君之年爲何。試討論之。

問二百七十四。試求二數。其較等於其和之$a$倍。其積等於其和之$b$倍。(以二數之倒置。作爲未知數)。

## F. 圖解。

問二百七十五。試圖解下列之函數$y$.

$$y=x\ ;\quad y=x+1\ ;\quad y=x-1;$$
$$y=2x\ ;\quad y=2x+1\ ;\quad y=2x-1;$$
$$y=\frac{x}{2}\ ;\quad y=\frac{x}{2}+1\ ;\quad y=\frac{x}{2}-1.$$

問二百七十六。試圖解下列之函數$y$.

$$y=3x+5;\quad x=\frac{x}{4}-\frac{1}{2};\quad y=-3x-4;\quad y=-5x+5.$$

# 第六章演習問題。

## A. 二次方程。

問二百七十七。解決下列方程。

(1) $x^2-8x+15=0$;
(2) $x^2+12x-45=0$;
(3) $3x^2-23x+14=0$;
(4) $4x^2+3x-7=0$;
(5) $x^2-12x+25=0$;
(6) $(2-\sqrt{3})x^2-5x=0$;
(7) $x^2+9x+14=0$;
(8) $x^2-9x-52=0$;
(9) $10x^2+17x+3=0$;
(10) $6x^2-25x-9=0$;
(11) $75x^2-80x+21=0$;
(12) $(3-\sqrt{5})x^2-6x+3+\sqrt{5}=0$.

問二百七十八。解決以下方程。

(1) $(x-2)(x-3)=6$; (2) $\dfrac{x-5}{5}=\dfrac{2}{x-2}$; (3) $\dfrac{x^2-6}{2}-\dfrac{x^2+4}{4}=5$;

(4) $\dfrac{x-3}{x+3}-\dfrac{x+4}{x-4}=\dfrac{x-4}{x+4}-\dfrac{x+3}{x-3}$; (5) $\dfrac{x}{6}+\dfrac{6}{x}=\dfrac{x}{24}+\dfrac{24}{x}$

問二百七十九。解二次方程。

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}-\frac{6}{x+6}=0.$$

問二百八十。解決以下方程。

$$\frac{x+2}{3}=\frac{3-x}{2(2-x)}.$$

**問二百八十一。** 解決下列方程。

(1) $\dfrac{7x+10}{x-2}=\dfrac{5x}{12}+\dfrac{35}{6}$; (2) $\dfrac{3-8x}{7-15x}=\dfrac{-3-2x}{-14+3x}$;

(3) $\dfrac{1}{6}=2\left(\dfrac{1}{15x}-x\right)$; (4) $\sqrt{2}-x=\dfrac{1}{2x}$;

(5) $6(x-5)+24=\dfrac{11}{6}-\dfrac{2}{3x}$;

(6) $\dfrac{2x-1}{x+2}=\dfrac{3x-1}{x+3}$; (7) $\dfrac{7x+10}{x-2}=\dfrac{5x}{12}+\dfrac{35}{6}$;

(8) $x^2-2(a+1)x+4a=0$.

**問二百八十二。** 今有方程

$$5x^2-12x+m-3=0.$$

試定$m$之値。使方程之根相等。又試定雙根之値。

**問二百八十三。** 今有方程

$$x^2-(3m-4)x+2m^2-2m-6=0.$$

問$m$有何値。能使其根相反。又以此$m$之値。試解決方程。

**問二百八十四。** 今有五个方程。

$$5x^2-3x+428=0,\quad 28x^2+47x+15=0,\quad 28x^2-47x+15=0,$$

$$21x^2-x-10=0,\quad 21x^2+x-10=0$$

不必先行解決。惟言(一)每方程是否有根。(二)如

有根者，是否同號，之異號。(三)如爲同號，係何號。(四)如爲異號，最大絕對數值之方程，有何記號。然後解決之。將預料之得數檢眞。

問二百八十五。 試以下列各數爲根。作成二次方程。

$$7 \text{ 及 } 3;\quad 7 \text{ 及 } -3;$$
$$-7 \text{ 及 } 3;\quad -7 \text{ 及 } -3.$$

問二百八十六。 試以下列各數爲根。作成二次方程。

$$\frac{3}{4} \text{ 及 } \frac{5}{9};\quad 8 \text{ 及 } -\frac{7}{15};$$
$$-\frac{2}{3} \text{ 及 } \frac{3}{2};\quad -\frac{2}{7} \text{ 及 } -\frac{4}{7}$$
$$\sqrt{2} \text{ 及 } \sqrt{3};\quad \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 及 } -\frac{1}{\sqrt{3}};\quad -\sqrt{2} \text{ 及 } -2\sqrt{2}.$$

問二百八十七。今有方程

$$x^2-2x-15=0.$$

試以係數及根之關係。作成二次方程。惟其根則爲本題之諸根而加5.檢眞得數。

問二百八十八。今有方程

$$6x^2-29x+9=0.$$

試作成二次方程。取本題方程之兩根。而各根以3乘之。

問二百八十九。今有方程

$$x^2-5x-14=0.$$

試作成二次方程。取本題之根。而易其記號。

問二百九十。今有方程

$$4x^2-3x-7=0.$$

試作成二次方程。取本題之根而倒之。

問二百九十一。今有方程

$$x^2+px+q=0$$

指定$x'$及$x''$爲本題之根。試作成二次方程。以

$$\frac{k}{x'} \quad 及 \quad \frac{k}{x''}$$

爲根。

問二百九十二。今有方程

$$x^2-15x+q=0.$$

試確定$q$值。使其根之一。等於5.

問二百九十三。今有方程

$$4x^2+ax-5=0.$$

試確定$a$值。使此方程根中之一。等於$-\frac{1}{2}$.

問二百九十四。今有方程

$$x^2-9x+m-3=0.$$

試確定$m$之值。使此方程根中之一。倍於他根。檢眞得數。

問二百九十五。今有方程

$$ax^2+bx+c=0.$$

試求其係數$a\ b\ c$之關係。使此方程之根爲$x=1$或$x=-1$. 又於每式內。推算其第二根函數$a$及$b$之表值。

問二百九十六。今有方程

$$(69+4m)x^2-15(9-4m)x+25(4+9m)=0.$$

問$m$應有何值:

(一) 能使其有根。

(二) 能使其根相等。如能相等。推算此相等根之值。

問二百九十七。今有方程

$$x^2-3xy+y^2+2x-9y+1=0.$$

問:

(一) $y$應有何值。使$x$之方程。有相等之根。

(二) $x$應有何值。使$y$之方程。有相等之根。

## B. 二次方程問題。

**問二百九十八。** 今有正方形一塊。如在其一邊。加1生的邁當。在他邊減5生的邁當。其面積卽等於1方邁當。問此正方形之邊為何邊。

**問二百九十九。** 今有一直角等腰三角形。如加3邁當於直角之一邊。而減3邁當於直角之他一邊。則此三角形之面積。頓小4倍。試推算此三角形之三邊。

**問三百。** 有一硬紙直角四方形。其廣大為$2a$及$2b$. 於四頂裁去相等4方塊。使賸下之面積大於裁去之方形3倍。

**問三百零一。** 試求兩連續之奇數。其自乘之和。等於394.

**問三百零二。** 今有直角四邊形。其面積為1232方邁當。試求其長與廣。惟知其廣度。得長度之$7/11$.

問三百零三。解决下列聯立方程

$$y^2-4x^2=5, \qquad 3y-2x=7.$$

問三百零四。解决下列聯立方程

$$3x^2-4xy=11, \qquad 4y+x=7.$$

問三百零五。解决以下聯立方程

$$x^2-4y=0, \qquad 5x=3(2-y).$$

問三百零六。解决

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=\frac{7x-2y-1}{2}=\frac{3x^2}{2}-\frac{2y^2}{3}$$

問三百零七。今有兩个號碼之數。其和爲13.如於其積數加34.則適得此數顚倒後而成之和。問此爲何數。

問三百零八。取58之數。劈爲二分使其積數。等於697.

問三百零九。有一直角四角形。其面積爲3mq,9.其對角線爲3m,46.試推算此直角形之邊。

問三百十。今有一直角三角形。其弦得15適當之長。直角兩邊之和。爲22適當。試推算此兩邊之長度。

**問三百十一。** 有一商人購布若干邁當。用去600佛郎。如以此銀數。能多購3邁當。則每邁當布可省10佛郎。問此商購布若干邁當。

**問三百十二。** 某甲作工。得工值186佛郎。如若某甲少作10天。又若每天多得工資0,50佛郎。則此次可得136f,50. 問(一)某甲作工幾日。(二)每日工資若干。

**問三百十三。** 今有方程

$$(m-2)x^2-(m-4)x+m-3=0.$$

定$m$之値如下。若3倍其根中之一根。則等於其他一根反數之6倍。試解决此特別式之方程。幷檢眞得數。

**問三百十四。** 今有一直角三角形。其直角兩邊。以方程兩根表之。爲

$$x^2-28x+192=0$$

試推算此三角形之弦。及由直角頂所出之高度。推算時,用下列恒等式。

$$a^2+b^2= a+b)^2-2ab.$$

**問三百十五。** 今有方程

$$x^2+ax+4a=0.$$

試定$a$之値。使方程根自乘之和。等於20.檢眞得數。

**問三百十六。** 今有一直角四角形。其對角線有4邁當長。此四角形之面積。等於$a$邊正方形之面積。試推算此四角形之諸邊。而討論之。

**問三百十七。** 推算一等腰直角三角形之面積。其周圍爲$2p$.

**問三百十八。** 解決下列聯立方程

$$\frac{a^2}{5y}+\frac{4}{20x}=\frac{a}{xy},$$

$$3ax-a=\frac{2y^3-2y}{y-1}$$

既得文字之解決。又須施之於數目

$$a=15.$$

**問三百十九。** 解決聯立方程

$$25x+12y=98,$$

$$(2x-y+15)\left(\frac{y}{4}-\frac{x}{3}+\frac{1}{12}\right)=(y-2x+15)\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{4}+\frac{3}{4}\right)$$

**問三百二十。** 設於一比例內。外二項之積。等於 $a$. 而其和等於 $b$. 中二項之和等於 $c$. 試推算此比例之四項。

**問三百二十一。** 設有一比例內。其二中項之和等於 $a$. 外二項之和等於 $b$. 四項自乘之和等於 $c^2$. 試推算此比例之四項。

## C. 函數之消長及圖解。

**問三百二十二。** 函數 $y$ 之消長。以下列關係定之。

$$y = 3x^2; \quad y = -3x^2; \quad y = +\frac{1}{3}x^2; \quad y = -\frac{1}{3}x^2.$$

試立圖解以明之。

**問三百二十三。** 試作弧線為 $y = 2x^2$, 直線為 $y = -5x + 12$. 求其相遇點之橫線之值。

**問三百二十四。** 函數 $y$ 之消長定為

$$y = \frac{4}{x}; \qquad y = \frac{-4}{x},$$

$$y = \frac{0,4}{x}; \qquad y = \frac{-0,4}{x}.$$

試立圖解以明之。

**問三百二十五。** 試作弧線

$$y=\frac{3}{x},$$

直線

$$y=8x+10.$$

求其相遇點橫線之值。

**問三百二十六。** 試作弧線

$$y=\frac{x-1}{4x},$$

直線

$$y=\frac{x}{4}+m.$$

問 $m$ 有何值。能使此兩線相遇。

# 第七章演習問題。

## A. 差級數。

**問三百二十七。**

$$\div 10 \cdot 13 \cdot 16 \ldots\ldots$$

級數之第30項爲何項?

**問三百二十八。**

$$\div 9 \cdot 8\frac{5}{6} \cdot 8\frac{4}{6} \ldots\ldots$$

差級數之第100項爲何項?

**問三百二十九。** 試演算差級數

$$\div ax \cdot 2ax + by \cdot 3ax + 2by \ldots\ldots$$

之 $n$ 次項。

**問三百三十。** 若下列數 $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{b+c}$ 爲差級數。則証 $a^2, b^2, c^2$ 數亦爲差級數。

**問三百三十一。** 差級數第5項爲23. 第10項爲48. 試求其第50項。

**問三百三十二。** 今有差級數。其公差爲5.

其始爲$^2/_3$. 求其第15項。及其級數初15項之和。

問三百三十三。求差級數

$$\div 80 \cdot 75 \cdot 70 \cdot 65 \ldots\ldots$$

之初33項之和。

問三百三十四。 求差級數初15項之和。其差級數之第一項爲130, 其公差爲$-3$.

問三百三十五。今有差級數，其第1項爲4. 其公差爲4. 應取若干項。使其和得112.

問三百三十六。今有一差級數。有9項。其中項爲27. 求其9項之和。

問三百三十七。 今有一差級數。其中項爲51. 其各項之和爲867. 問此差級數共有若干項。

問三百三十八。 今有一差級數。已知其末項爲5. 項數爲10. 其各項之和爲140. 求其第一項與公差爲若干。

問三百三十九。 今有差級數三數。已知其和爲78. 其積爲16 640. 試求三數爲何。

問三百四十。 園丁某甲。須以水灌20顆樹。每顆各相距7邁當。每顆須灌水一桶。詎甲僅有一桶。去取池水。該池距第一顆樹10邁當之遠。問甲自始至灌水畢。至池取水。共行路若干。

問三百四十一。 在差級數內。任何二項之和。爲級數之一分。問此種差級數爲何。

## B. 倍級數。

問三百四十二。 求

$$\div\!\!\div 11 : 22 : 44 \ldots\ldots$$

倍級數之第30項。

問三百四十三。 求

$$\div\!\!\div 5 : \frac{5}{3} : \frac{5}{9} \ldots\ldots$$

倍級數之第15項。

問三百四十四。 問

$$\div\!\!\div 8\,192 : 4096 : 2048 \ldots\ldots$$

倍級數之第18項爲何。

問三百四十五。 求

$$\div\!\!\div 2 : 4 : 8 : 16 \ldots\ldots$$

倍級數之初10項之和。

問三百四十六。求

$$\div 336:84:21.....$$

倍級數之初6項之和。

問三百四十七。演算下式

$$\frac{2+2^3+2^5+2^7+2^9}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^9}}.$$

問三百四十八。問

$$\div \frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{8}\cdots$$

倍級數之初11項之和內。其單位之剩數爲何。

問三百四十九。今有倍級數。已知其第一項爲161.其公差爲3.其項數爲4.求其末項及諸項之和。

問三百五十。今有倍級數。其末項爲15 309.其公差爲3.其項數爲8.求其第一項及諸項之和。

問三百五十一。今有倍級數。其第一項爲4 347.其末項爲161.其項數爲4.求其諸項之

和。及其公差。

問三百五十二。今有倍級數。其第一項爲 2. 第 5 項爲 18. 求其第 11 項

問三百五十三。今有酒桶。盛酒 228 升。每日取用其所盛之半。問第 9 日。取酒若干升。桶內此時尙盛酒若干。

## C. 對數

問三百五十四。下列各數之對數爲何。

8 ; 95 ; 314 ; 5178 ; 6301 ; 70 ; 0,7 ; 0,07 ; 0,007 ;

708 ; 70,8 ; 7,08 ; 0,708 . 0,0708 ; 0,00708 ;

3141 ; 3,141 ; 0,03141 ; 4960 ; 49,60 ; 0,4960.

問三百五十五。以下諸數之倒對數爲何。

159 ; 5147 ; 60700 ; 0,77 ; 31,41 ; 3,876 ; 0,0056 ; 80,050 ; 136,6.

問三百五十六。下列對數。以 3 成積。

3,1750 ; 0,5056 ; $\overline{3}$,1781 ; $\overline{1}$,4145.

問三百五十七。下列對數。以 2 成商後，以 3 成商。

4,5103 ; 0,5031 ; 2,4150 ; 7,8150 ; $\overline{6}$,4502 ; $\overline{5}$,2020.

## 問三百五十八。以對數求下列之積。

$$364 \times 515;\quad 0{,}5674 \times 893;\quad 456 \times 128 \times 2476;$$

$$6398 \times 12{,}46 \times 464{,}5;\quad 0{,}6546 \times 0{,}237 \times 0{,}004523.$$

## 問三百五十九。以對數演算下式。

$$2^{11};\quad 67^{5};\quad 81^{7}\quad 4175^{6};\quad (0{,}026)^{9};\quad (1{,}475)^{8};\quad (0{,}004652)^{10};\quad (1{,}234)^{4}$$

## 問三百六十。以對數演算下式。

$$\sqrt[3]{479};\quad \sqrt[4]{4056};\quad \sqrt[7]{845700};\quad \sqrt[5]{0{,}007};\quad \sqrt[6]{0{,}0544};\quad \sqrt[17]{0{,}00004589}.$$

## 問三百六十一。以對數演算下商。

$$\frac{3642}{635};\quad \frac{5687}{458};\quad \frac{57{,}45}{876};\quad \frac{0{,}00541}{2405};\quad \frac{0{,}0007423}{8{,}144};\quad \frac{0{,}6519}{0{,}00678}$$

## 問三百六十二。以對數演算下式。

$$(1)\quad \frac{45 \times 651 \times 3026}{5831 \times 785};\qquad (2)\quad \frac{9681 \times 7564 \times 250}{1569 \times 852 \times 53400}$$

$$(3)\quad \frac{41{,}5 \times 62{,}35 \times 544{,}3}{89{,}36 \times 8{,}42 \times 2{,}13};$$

$$(4)\quad \frac{654^{3} \times 317^{2} \times 4230}{812 \times 547^{4}}\qquad (5)\quad \frac{0{,}0542 \times \overline{0{,}8546^{5}} \times \overline{0{,}0589^{4}}}{6{,}249 \times \overline{0{,}459^{3}}}$$

$$(6)\quad \frac{\sqrt[3]{546} \times \sqrt[2]{4175} \times 10{,}49}{\sqrt[2]{8170} \times \sqrt[5]{2130}}$$

## 問三百六十三。

今有圓球。其體積爲$0^{mc},345$,試求其半徑。

問三百六十四。 三角形面積S之公式如下

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

式內之$a, b, c,$為邊。$p$為半周。試以對數求一三角形之面積。其邊

$$a=15^{m},73\ ;\ b=20^{m},73\ ;\ c=26^{m},24.$$

## D. 繁利。

問三百六十五。 今有本銀20 000兩。其繁利為4 %. 問10年後共有若干。

問三百六十六。 本銀495$^{fr}$, 85. 其繁利為4 %. 問6年後應得利若干。

問三百六十七。 某甲以銀16.000$^{fr}$存行。言明繁利為3 1/2 %. 問17年後取銀時。應有若干。

問三百六十八。 今有甲乙二項銀洋。

甲項4 620$^{fr}$. 息5 %. 共存4年.

乙項845$^{fr}$, 50. 息3,75 %. 共存12年。

此兩項銀洋。俱利上加利。滾入本銀內作成一項者。

問每年之終。甲乙兩項本銀成爲若干。

**問三百六十九。** 今有銀洋一項。取息4 %. 14年後,成繁利27 707$^{fr}$. 問原有本銀若干。

**問三百七十。** 問應存本銀若干。使以繁利得

3 413$^{fr}$ 於8年後, 4,5 % 起息;

20 645$^{fr}$ 於20年後, 6 % 起息;

12 546$^{fr}$ 於18年後, 4,5 % 起息。

**問三百七十一。** 今有本銀4 958$^{fr}$. 以繁利6年,得6 274$^{fr}$. 問息若干。

**問三百七十二。** 今有本銀2 543$^{fr}$. 欲於25年後。連本及繁利。得7 460$^{fr}$. 問息若干。

附錄終

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0000 | 0043 | 0086 | 0128 | 0170 | 0212 | 0253 | 0294 | 0334 | 0374 |
| 11 | 0414 | 0453 | 0492 | 0531 | 0569 | 0607 | 0645 | 0682 | 0719 | 0755 |
| 12 | 0792 | 0828 | 0864 | 0899 | 0934 | 0969 | 1004 | 1038 | 1072 | 1106 |
| 13 | 1139 | 1173 | 1206 | 1239 | 1271 | 1303 | 1335 | 1367 | 1399 | 1430 |
| 14 | 1461 | 1492 | 1523 | 1553 | 1584 | 1614 | 1644 | 1673 | 1703 | 1732 |
| 15 | 1761 | 1790 | 1818 | 1847 | 1875 | 1903 | 1931 | 1959 | 1987 | 2014 |
| 16 | 2041 | 2068 | 2095 | 2122 | 2148 | 2175 | 2201 | 2227 | 2253 | 2279 |
| 17 | 2304 | 2330 | 2355 | 2380 | 2405 | 2430 | 2455 | 2480 | 2504 | 2529 |
| 18 | 2553 | 2577 | 2601 | 2625 | 2648 | 2672 | 2695 | 2718 | 2742 | 2765 |
| 19 | 2788 | 2810 | 2833 | 2856 | 2878 | 2900 | 2923 | 2945 | 2967 | 2989 |
| 20 | 3010 | 3032 | 3054 | 3075 | 3096 | 3118 | 3139 | 3160 | 3181 | 3201 |
| 21 | 3222 | 3243 | 3263 | 3284 | 3304 | 3324 | 3345 | 3365 | 3385 | 3404 |
| 22 | 3424 | 3444 | 3464 | 3483 | 3502 | 3522 | 3541 | 3560 | 3579 | 3598 |
| 23 | 3617 | 3636 | 3655 | 3674 | 3692 | 3711 | 3729 | 3747 | 3766 | 3784 |
| 24 | 3802 | 3820 | 3838 | 3856 | 3874 | 3892 | 3909 | 3927 | 3945 | 3962 |
| 25 | 3979 | 3997 | 4014 | 4031 | 4048 | 4065 | 4082 | 4099 | 4116 | 4133 |
| 26 | 4150 | 4166 | 4183 | 4200 | 4216 | 4232 | 4249 | 4265 | 4281 | 4298 |
| 27 | 4314 | 4330 | 4346 | 4362 | 4378 | 4393 | 4409 | 4425 | 4440 | 4456 |
| 28 | 4472 | 4487 | 4502 | 4518 | 4533 | 4548 | 4564 | 4579 | 4594 | 4609 |
| 29 | 4624 | 4639 | 4654 | 4669 | 4683 | 4698 | 4713 | 4728 | 4742 | 4757 |
| 30 | 4771 | 4786 | 4800 | 4814 | 4829 | 4843 | 4857 | 4871 | 4886 | 4900 |
| 31 | 4914 | 4928 | 4942 | 4955 | 4969 | 4983 | 4997 | 5011 | 5024 | 5038 |
| 32 | 5051 | 5065 | 5079 | 5092 | 5105 | 5119 | 5132 | 5145 | 5159 | 5172 |
| 33 | 5185 | 5198 | 5211 | 5224 | 5237 | 5250 | 5263 | 5276 | 5289 | 5302 |
| 34 | 5315 | 5328 | 5340 | 5353 | 5366 | 5378 | 5391 | 5403 | 5416 | 5428 |
| 35 | 5441 | 5453 | 5465 | 5478 | 5490 | 5502 | 5514 | 5527 | 5539 | 5551 |
| 36 | 5563 | 5575 | 5587 | 5599 | 5611 | 5623 | 5635 | 5647 | 5658 | 5670 |
| 37 | 5682 | 5694 | 5705 | 5717 | 5729 | 5740 | 5752 | 5763 | 5775 | 5786 |
| 38 | 5798 | 5809 | 5821 | 5832 | 5843 | 5855 | 5866 | 5877 | 5888 | 5899 |
| 39 | 5911 | 5922 | 5933 | 5944 | 5955 | 5966 | 5977 | 5988 | 5999 | 6010 |
| 40 | 6021 | 6031 | 6042 | 6053 | 6064 | 6075 | 6085 | 6096 | 6107 | 6117 |
| 41 | 6128 | 6138 | 6149 | 6160 | 6170 | 6180 | 6191 | 6201 | 6212 | 6222 |
| 42 | 6232 | 6243 | 6253 | 6263 | 6274 | 6284 | 6294 | 6304 | 6314 | 6325 |
| 43 | 6335 | 6345 | 6355 | 6365 | 6375 | 6385 | 6395 | 6405 | 6415 | 6425 |
| 44 | 6435 | 6444 | 6454 | 6464 | 6474 | 6484 | 6493 | 6503 | 6513 | 6522 |
| 45 | 6532 | 6542 | 6551 | 6561 | 6571 | 6580 | 6590 | 6599 | 6609 | 6618 |
| 46 | 6628 | 6637 | 6646 | 6656 | 6665 | 6675 | 6684 | 6693 | 6702 | 6712 |
| 47 | 6721 | 6730 | 6739 | 6749 | 6758 | 6767 | 6776 | 6785 | 6794 | 6803 |
| 48 | 6812 | 6821 | 6830 | 6839 | 6848 | 6857 | 6866 | 6875 | 6884 | 6893 |
| 49 | 6902 | 6911 | 6920 | 6928 | 6937 | 6946 | 6955 | 6964 | 6972 | 6981 |
| 50 | 6990 | 6998 | 7007 | 7016 | 7024 | 7033 | 7042 | 7050 | 7059 | 7067 |
| 51 | 7076 | 7084 | 7093 | 7101 | 7110 | 7118 | 7126 | 7135 | 7143 | 7152 |
| 52 | 7160 | 7168 | 7177 | 7185 | 7193 | 7202 | 7210 | 7218 | 7226 | 7235 |
| 53 | 7243 | 7251 | 7259 | 7267 | 7275 | 7284 | 7292 | 7300 | 7308 | 7316 |
| 54 | 7324 | 7332 | 7340 | 7348 | 7356 | 7364 | 7372 | 7380 | 7388 | 7396 |

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 55 | 7404 | 7412 | 7419 | 7427 | 7435 | 7443 | 7451 | 7459 | 7466 | 7474 |
| 56 | 7482 | 7490 | 7497 | 7505 | 7513 | 7520 | 7528 | 7536 | 7543 | 7551 |
| 57 | 7559 | 7566 | 7574 | 7582 | 7589 | 7597 | 7604 | 7612 | 7619 | 7627 |
| 58 | 7634 | 7642 | 7649 | 7657 | 7664 | 7672 | 7679 | 7686 | 7694 | 7701 |
| 59 | 7709 | 7716 | 7723 | 7731 | 7738 | 7745 | 7752 | 7760 | 7767 | 7774 |
| 60 | 7782 | 7789 | 7796 | 7803 | 7810 | 7818 | 7825 | 7832 | 7839 | 7846 |
| 61 | 7853 | 7860 | 7868 | 7875 | 7882 | 7889 | 7896 | 7903 | 7910 | 7917 |
| 62 | 7924 | 7931 | 7938 | 7945 | 7952 | 7959 | 7966 | 7973 | 7980 | 7987 |
| 63 | 7993 | 8000 | 8007 | 8014 | 8021 | 8028 | 8035 | 8041 | 8048 | 8055 |
| 64 | 8062 | 8069 | 8075 | 8082 | 8089 | 8096 | 8102 | 8109 | 8116 | 8122 |
| 65 | 8129 | 8136 | 8142 | 8149 | 8156 | 8162 | 8169 | 8176 | 8182 | 8189 |
| 66 | 8195 | 8202 | 8209 | 8215 | 8222 | 8228 | 8235 | 8241 | 8248 | 8254 |
| 67 | 8261 | 8267 | 8274 | 8280 | 8287 | 8293 | 8299 | 8306 | 8312 | 8319 |
| 68 | 8325 | 8331 | 8338 | 8344 | 8351 | 8357 | 8363 | 8370 | 8376 | 8382 |
| 69 | 8388 | 8395 | 8401 | 8407 | 8414 | 8420 | 8426 | 8432 | 8439 | 8445 |
| 70 | 8451 | 8457 | 8463 | 8470 | 8476 | 8482 | 8488 | 8494 | 8500 | 8506 |
| 71 | 8513 | 8519 | 8525 | 8531 | 8537 | 8543 | 8549 | 8555 | 8561 | 8567 |
| 72 | 8573 | 8579 | 8585 | 8591 | 8597 | 8603 | 8609 | 8615 | 8621 | 8627 |
| 73 | 8633 | 8639 | 8645 | 8651 | 8657 | 8663 | 8669 | 8675 | 8681 | 8686 |
| 74 | 8692 | 8698 | 8704 | 8710 | 8716 | 8722 | 8727 | 8733 | 8739 | 8745 |
| 75 | 8751 | 8756 | 8762 | 8768 | 8774 | 8779 | 8785 | 8791 | 8797 | 8802 |
| 76 | 8808 | 8814 | 8820 | 8825 | 8831 | 8837 | 8842 | 8848 | 8854 | 8859 |
| 77 | 8865 | 8871 | 8876 | 8882 | 8887 | 8893 | 8899 | 8904 | 8910 | 8915 |
| 78 | 8921 | 8927 | 8932 | 8938 | 8943 | 8949 | 8954 | 8960 | 8965 | 8971 |
| 79 | 8976 | 8982 | 8987 | 8993 | 8998 | 9004 | 9009 | 9015 | 9020 | 9025 |
| 80 | 9031 | 9036 | 9042 | 9047 | 9053 | 9058 | 9063 | 9069 | 9074 | 9079 |
| 81 | 9085 | 9090 | 9096 | 9101 | 9106 | 9112 | 9117 | 9122 | 9128 | 9133 |
| 82 | 9138 | 9143 | 9149 | 9154 | 9159 | 9165 | 9170 | 9275 | 9180 | 9186 |
| 83 | 9191 | 9196 | 9201 | 9206 | 9212 | 9217 | 9222 | 9227 | 9232 | 9238 |
| 84 | 9243 | 9248 | 9253 | 9258 | 9263 | 9269 | 9274 | 9279 | 9284 | 9289 |
| 85 | 9294 | 9299 | 9304 | 9309 | 9315 | 9320 | 9325 | 9330 | 9335 | 9340 |
| 86 | 9345 | 9350 | 9355 | 9360 | 9365 | 9370 | 9375 | 9380 | 9385 | 9390 |
| 87 | 9395 | 9400 | 9405 | 9410 | 9415 | 9420 | 9425 | 9430 | 9435 | 9440 |
| 88 | 9445 | 9450 | 9455 | 9460 | 9465 | 9469 | 9474 | 9479 | 9484 | 9489 |
| 89 | 9494 | 9499 | 9504 | 9509 | 9513 | 9518 | 9523 | 9528 | 9533 | 9538 |
| 90 | 9542 | 9547 | 9552 | 9557 | 9562 | 9566 | 9571 | 9576 | 9581 | 9586 |
| 91 | 9590 | 9595 | 9600 | 9605 | 9609 | 9614 | 9619 | 9624 | 9628 | 9633 |
| 92 | 9638 | 9643 | 9647 | 9652 | 9657 | 9661 | 9666 | 9671 | 9675 | 9680 |
| 93 | 9685 | 9689 | 9694 | 9699 | 9703 | 9708 | 9713 | 9717 | 9722 | 9727 |
| 94 | 9731 | 9736 | 9741 | 9745 | 9750 | 9754 | 9759 | 9763 | 9768 | 9773 |
| 95 | 9777 | 9782 | 9786 | 9791 | 9795 | 9800 | 9805 | 9809 | 9814 | 9818 |
| 96 | 9823 | 9827 | 9832 | 9836 | 9841 | 9845 | 9850 | 9854 | 9859 | 9863 |
| 97 | 9868 | 9872 | 9877 | 9881 | 9886 | 9890 | 9894 | 9899 | 9903 | 9908 |
| 98 | 9912 | 9917 | 9921 | 9926 | 9930 | 9934 | 9939 | 9943 | 9948 | 9952 |
| 99 | 9956 | 9961 | 9965 | 9969 | 9974 | 9978 | 9983 | 9987 | 9991 | 9996 |

| L | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 1000 | 1002 | 1005 | 1007 | 1009 | 1012 | 1014 | 1016 | 1019 | 1021 |
| 01 | 1023 | 1026 | 1028 | 1030 | 1033 | 1035 | 1038 | 1040 | 1042 | 1045 |
| 02 | 1047 | 1050 | 1052 | 1054 | 1057 | 1059 | 1062 | 1064 | 1067 | 1069 |
| 03 | 1072 | 1074 | 1076 | 1079 | 1081 | 1084 | 1086 | 1089 | 1091 | 1094 |
| 04 | 1096 | 1099 | 1102 | 1104 | 1107 | 1109 | 1112 | 1114 | 1117 | 1119 |
| 05 | 1122 | 1125 | 1127 | 1130 | 1132 | 1135 | 1138 | 1140 | 1143 | 1146 |
| 06 | 1148 | 1151 | 1153 | 1156 | 1159 | 1161 | 1164 | 1167 | 1169 | 1172 |
| 07 | 1175 | 1178 | 1180 | 1183 | 1186 | 1189 | 1191 | 1194 | 1197 | 1199 |
| 08 | 1202 | 1205 | 1208 | 1211 | 1213 | 1216 | 1219 | 1222 | 1225 | 1227 |
| 09 | 1230 | 1233 | 1236 | 1239 | 1242 | 1245 | 1247 | 1250 | 1253 | 1256 |
| 10 | 1259 | 1262 | 1265 | 1268 | 1271 | 1274 | 1276 | 1279 | 1282 | 1285 |
| 11 | 1288 | 1291 | 1294 | 1297 | 1300 | 1303 | 1306 | 1309 | 1312 | 1315 |
| 12 | 1318 | 1321 | 1324 | 1327 | 1330 | 1334 | 1337 | 1340 | 1343 | 1346 |
| 13 | 1349 | 1352 | 1355 | 1358 | 1361 | 1365 | 1368 | 1371 | 1374 | 1377 |
| 14 | 1380 | 1384 | 1387 | 1390 | 1393 | 1396 | 1400 | 1403 | 1406 | 1409 |
| 15 | 1413 | 1416 | 1419 | 1422 | 1426 | 1429 | 1432 | 1435 | 1439 | 1442 |
| 16 | 1445 | 1449 | 1452 | 1455 | 1459 | 1462 | 1466 | 1469 | 1472 | 1476 |
| 17 | 1479 | 1483 | 1486 | 1489 | 1493 | 1496 | 1500 | 1503 | 1507 | 1510 |
| 18 | 1514 | 1417 | 1521 | 1524 | 1528 | 1531 | 1535 | 1538 | 1542 | 1545 |
| 19 | 1549 | 1552 | 1556 | 1560 | 1563 | 1567 | 1570 | 1574 | 1578 | 1581 |
| 20 | 1585 | 1589 | 1592 | 1596 | 1600 | 1603 | 1609 | 1611 | 1614 | 1618 |
| 21 | 1622 | 1626 | 1629 | 1633 | 1637 | 1641 | 1644 | 1648 | 1652 | 1656 |
| 22 | 1660 | 1663 | 1667 | 1671 | 1675 | 1679 | 1683 | 1687 | 1690 | 1694 |
| 23 | 1698 | 1702 | 1706 | 1710 | 1714 | 1718 | 1722 | 1726 | 1730 | 1734 |
| 24 | 1738 | 1742 | 1746 | 1750 | 1754 | 1758 | 1762 | 1766 | 1770 | 1774 |
| 25 | 1778 | 1782 | 1786 | 1791 | 1795 | 1799 | 1803 | 1807 | 1811 | 1816 |
| 26 | 1820 | 1824 | 1828 | 1832 | 1837 | 1841 | 1845 | 1849 | 1854 | 1858 |
| 27 | 1862 | 1866 | 1871 | 1875 | 1879 | 1884 | 1888 | 1892 | 1897 | 1901 |
| 28 | 1905 | 1910 | 1914 | 1919 | 1923 | 1928 | 1932 | 1936 | 1941 | 1945 |
| 29 | 1950 | 1954 | 1959 | 1963 | 1968 | 1972 | 1977 | 1982 | 1986 | 1991 |
| 30 | 1995 | 2000 | 2004 | 2009 | 2014 | 2018 | 2023 | 2028 | 2032 | 2037 |
| 31 | 2042 | 2046 | 2051 | 2056 | 2061 | 2065 | 2070 | 2075 | 2080 | 2084 |
| 32 | 2089 | 2094 | 2099 | 2104 | 2109 | 2113 | 2118 | 2123 | 2128 | 2133 |
| 33 | 2138 | 2143 | 2148 | 2153 | 2158 | 2163 | 2168 | 2173 | 2178 | 2183 |
| 34 | 2188 | 2193 | 2198 | 2203 | 2208 | 2213 | 2218 | 2223 | 2228 | 2234 |
| 35 | 2239 | 2244 | 2249 | 2254 | 2259 | 2265 | 2270 | 2275 | 2280 | 2286 |
| 36 | 2291 | 2296 | 2301 | 2307 | 2312 | 2317 | 2323 | 2328 | 2333 | 2339 |
| 37 | 2344 | 2350 | 2355 | 2360 | 2366 | 2371 | 2377 | 2382 | 2388 | 2393 |
| 38 | 2399 | 2404 | 2410 | 2415 | 2421 | 2427 | 2432 | 2438 | 2443 | 2449 |
| 39 | 2455 | 2460 | 2466 | 2472 | 2477 | 2483 | 2489 | 2495 | 2500 | 2506 |
| 40 | 2512 | 2518 | 2523 | 2529 | 2535 | 2541 | 2547 | 2553 | 2559 | 2564 |
| 41 | 2570 | 2576 | 2582 | 2588 | 2594 | 2600 | 2606 | 2612 | 2618 | 2624 |
| 42 | 2630 | 2636 | 2642 | 2649 | 2655 | 2661 | 2667 | 2673 | 2679 | 2685 |
| 43 | 2692 | 2698 | 2704 | 2710 | 2716 | 2723 | 2729 | 2735 | 2742 | 2748 |
| 44 | 2754 | 2761 | 2767 | 2773 | 2780 | 2786 | 2793 | 2799 | 2805 | 2812 |
| 45 | 2818 | 2825 | 2831 | 2838 | 2844 | 2851 | 2858 | 2864 | 2871 | 2877 |
| 46 | 2884 | 2891 | 2897 | 2904 | 2911 | 2917 | 2924 | 2931 | 2938 | 2944 |
| 47 | 2951 | 2958 | 2965 | 2972 | 2979 | 2985 | 2992 | 2999 | 3006 | 3013 |
| 48 | 3020 | 3027 | 3034 | 3041 | 3048 | 3055 | 3062 | 3069 | 3076 | 3083 |
| 49 | 3090 | 3097 | 3105 | 3112 | 3119 | 3126 | 3133 | 3141 | 3148 | 3155 |

| L | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 3162 | 3170 | 3177 | 3184 | 3192 | 3199 | 3206 | 3214 | 3221 | 3228 |
| 51 | 3236 | 3243 | 3251 | 3258 | 3266 | 3273 | 3281 | 3289 | 3296 | 3304 |
| 52 | 3311 | 3319 | 3327 | 3334 | 3342 | 3350 | 3357 | 3365 | 3373 | 3381 |
| 53 | 3388 | 3396 | 3404 | 3412 | 3420 | 3428 | 3436 | 3443 | 3451 | 3459 |
| 54 | 3467 | 3475 | 3483 | 3491 | 3499 | 3508 | 3516 | 3524 | 3532 | 3540 |
| 55 | 3548 | 3556 | 3565 | 3573 | 3581 | 3589 | 3597 | 3606 | 3614 | 3622 |
| 56 | 3631 | 3639 | 3648 | 3656 | 3664 | 3673 | 3681 | 3690 | 3698 | 3707 |
| 57 | 3715 | 3724 | 3733 | 3741 | 3750 | 3758 | 3767 | 3776 | 3784 | 3793 |
| 58 | 3802 | 3811 | 3819 | 3828 | 3837 | 3846 | 3855 | 3864 | 3873 | 3882 |
| 59 | 3890 | 3899 | 3908 | 3917 | 3926 | 3936 | 3945 | 3954 | 3963 | 3972 |
| 60 | 3981 | 3990 | 3999 | 4009 | 4018 | 4027 | 4036 | 4046 | 4055 | 4064 |
| 61 | 4074 | 4083 | 4093 | 4102 | 4111 | 4121 | 4130 | 4140 | 4150 | 4159 |
| 62 | 4169 | 4178 | 4188 | 4198 | 4207 | 4217 | 4227 | 4236 | 4246 | 4256 |
| 63 | 4266 | 4276 | 4285 | 4295 | 4305 | 4315 | 4325 | 4335 | 4345 | 4355 |
| 64 | 4365 | 4375 | 4385 | 4395 | 4406 | 4416 | 4426 | 4436 | 4446 | 4457 |
| 65 | 4467 | 4477 | 4487 | 4498 | 4508 | 4519 | 4529 | 4539 | 4550 | 4560 |
| 66 | 4571 | 4581 | 4592 | 4603 | 4613 | 4624 | 4634 | 4645 | 4656 | 4667 |
| 67 | 4677 | 4688 | 4699 | 4710 | 4721 | 4732 | 4742 | 4753 | 4764 | 4775 |
| 68 | 4786 | 4797 | 4808 | 4819 | 4831 | 4842 | 4853 | 4864 | 4875 | 4887 |
| 69 | 4898 | 4909 | 4920 | 4932 | 4943 | 4955 | 4966 | 4977 | 4989 | 5000 |
| 70 | 5012 | 5023 | 5035 | 5047 | 5058 | 5070 | 5082 | 5093 | 5105 | 5117 |
| 71 | 5129 | 5140 | 5152 | 5164 | 5176 | 5188 | 5200 | 5212 | 5224 | 5236 |
| 72 | 5148 | 5260 | 5272 | 5284 | 5297 | 5309 | 5321 | 5333 | 5346 | 5358 |
| 73 | 5370 | 5383 | 5395 | 5408 | 5420 | 5433 | 5445 | 5458 | 5470 | 5483 |
| 74 | 5495 | 5508 | 5521 | 5534 | 5546 | 5559 | 5572 | 5585 | 5598 | 5610 |
| 75 | 5623 | 5636 | 5649 | 5662 | 5675 | 5689 | 5702 | 5715 | 5728 | 5741 |
| 76 | 5754 | 5768 | 5781 | 5794 | 5808 | 5821 | 5834 | 5848 | 5861 | 5875 |
| 77 | 5888 | 5902 | 5916 | 5929 | 5943 | 5957 | 5970 | 5984 | 5998 | 6012 |
| 78 | 6026 | 6039 | 6053 | 6067 | 6081 | 6095 | 6109 | 6124 | 6138 | 6152 |
| 79 | 6166 | 6180 | 6194 | 6209 | 6223 | 6237 | 6252 | 6266 | 6281 | 6295 |
| 80 | 6310 | 6324 | 6339 | 6353 | 6368 | 6383 | 6397 | 6412 | 6427 | 6142 |
| 81 | 6457 | 6471 | 6486 | 6501 | 6516 | 6531 | 6546 | 6561 | 6577 | 6592 |
| 82 | 6607 | 6622 | 6637 | 6653 | 6668 | 6683 | 6699 | 6714 | 6730 | 6745 |
| 83 | 6761 | 6776 | 6792 | 6808 | 6823 | 6839 | 6855 | 6871 | 9887 | 6902 |
| 84 | 6918 | 6934 | 6950 | 6966 | 6982 | 6998 | 7015 | 7031 | 7047 | 7063 |
| 85 | 7079 | 7096 | 7112 | 7129 | 7145 | 7161 | 7178 | 7194 | 7211 | 7228 |
| 86 | 7244 | 7261 | 7278 | 7295 | 7311 | 7328 | 7345 | 7362 | 7379 | 7396 |
| 87 | 7413 | 7430 | 7447 | 7464 | 7482 | 7499 | 7516 | 7534 | 7551 | 7568 |
| 88 | 7586 | 7603 | 7621 | 7638 | 7656 | 7674 | 7691 | 7709 | 7727 | 7745 |
| 89 | 7762 | 7780 | 7798 | 7816 | 7834 | 7852 | 7870 | 7889 | 7907 | 7925 |
| 90 | 7943 | 7962 | 7980 | 7998 | 8017 | 8035 | 8054 | 8072 | 8091 | 8110 |
| 91 | 8128 | 8147 | 8166 | 8185 | 8204 | 8222 | 8241 | 8260 | 8279 | 8299 |
| 92 | 8318 | 8337 | 8356 | 8375 | 8395 | 8414 | 8433 | 8453 | 8472 | 8492 |
| 93 | 8511 | 8531 | 8551 | 8570 | 8590 | 8610 | 8630 | 8650 | 8670 | 8690 |
| 94 | 8710 | 8730 | 8750 | 8770 | 8790 | 8810 | 8831 | 8851 | 8872 | 8892 |
| 95 | 8913 | 8633 | 8954 | 8974 | 8995 | 9016 | 9036 | 9057 | 9078 | 9099 |
| 96 | 9120 | 9141 | 9162 | 9183 | 9204 | 9226 | 9247 | 9268 | 9290 | 9311 |
| 97 | 9333 | 9354 | 9376 | 9397 | 9419 | 9441 | 9462 | 9484 | 9506 | 9528 |
| 98 | 9550 | 9572 | 9594 | 9616 | 9638 | 9661 | 9683 | 9705 | 9727 | 9750 |
| 99 | 9772 | 9795 | 9817 | 9840 | 9863 | 9886 | 9908 | 9931 | 9954 | 9977 |

# NOMENCLATURE

## 代數學名目法英華文合表

(注意。號碼指本書上之欵數)。

| | | Nº |
|---|---|---|
| Abscisse. *Abscissa* ... ... ... | 橫線(距度線) | 78,216 |
| Absolu. *Absolute (Voir* Valeur) ... ... | 絕對 ... | 20 |
| Accolade { }. *Brace* ... ... ... ... ... | 括弧之種 | 6 |
| Addition. *Addition* ... ... ... ... ... | 加法 | 24,123 |
| Algèbre. *Algebra* ... ... ... ... ... ... | 代數 ... | 1 |
| Algébrique (Nombre). *Algebraic Number* | 代數數目 | 17 |
| Antilogarithme. *Antilogarithm* ... ... ... | 眞數 ... | 295 |
| Application. *Application* ... ... ... ... | 致用 ... | 138 |
| Approchée (Racine). *Approximate Root* ... | 畧近根 | 246 |
| dº (Valeur). *Approximate Value*... | 略近値 | 246 |
| Arithmétique (Nombre). *Arithmetical Number* ... ... ... ... ... ... ... ... ... | 數學數目 | 14 |
| dº (Progression) *Arithmetical Progr.* | 差級數 | 281 |
| Asymptote. *Asymptote* ... ... ... ... | 界線 ... | 272 |
| Axe. *Axis* ... ... ... ... ... ... ... | 軸 ... ... | 74 |
| dº de symétrie. *Axis of Symmetry* ... | 等勢之軸 | 273 |
| Base. *Base* ... ... ... ... ... ... ... | 底 ... .. | 299 |
| Bilan. *Balance-sheet* ... ... ... ... ... | 總額 ... | 15,32 |
| Binôme. *Binomial* ... ... ... ... ... | 雙項式 | 117 |
| Calculer. *To calculate* .. ... ... ... ... | 推算 ... | 168 |
| Capital. *Principal* ... ... ... ... ... | 本銀 ... | 326 |
| Caractéristique. *Characteristic* ... ... ... | 特表分 | 310 |

N°

Correspondante (Valeur). *Corresponding Value* 相應值, ... ... ... ... ... ... ... ... 相當值 64

Courbe [graphique]. *Graphs* ... ... 弧線[圖解] 214.223

Crochets [ ]. *Brackets* ... ... ... ... ... 括弧之種 6

Croissance. *Increase* (*Voir* Fonction, Puissance) ... ... ... ... ... ... ... ... 升 ... ... 201

Curviligne (Mouvement). *Curvilinear Movement* ... ... ... ... ... ... ... 弧線行動 89

Décimale. *Decimal* .. ... ... .. ... 小數,尾數 308

Décroissance. *Decrease* (*Voir* Fonction, Puissance) ... ... ... ... ... ... ... ... 降 ... ... 202

Définition. *Definition* ... ... ... ... ... 界說 ... 10

Degré [d'un monôme]. *Degree* ... ... ... 次數 ... 116

d° [d'une équation]. *Degree* ... ... ... 次 ... 140

d° (1$^{er}$). *Simple* ... ... ... ... ... 一次 ... 144

d° (2$^{e}$). *Quadratic* .. ... ... ... ... 二次 .. 233

Démonstration. *Demonstration* ... ... ... 證 ... ... 31

Dénominateur. *Denominator* ... .. ... 分母 ... 53

d° (Chasser les). *Clearing of Fractions* 去分母 143

d° (Même). *Common Denominator* 公分母 57

d° (Réduire au même). *To reduce to a Common Denominator* ... 變爲同分母 57

Dépendante (Variable). *Dependant Variable* 被變數 199

Développer. *Expanding* ... ... ... ... 展開 ... 146

Diagonale. *Diagonal* ... ... ... ... ... 對角線 273

Diagramme. *Diagram* ... ... ... ... ... 圖解 ... 231

Différence. *Difference* ... ... ... ... 較 ... ... 33

Différent de ≠. *Unequal to* ... ... ... 異於 .. 5

| | | Nº |
|---|---|---|
| Discontinuité. *Discontinuity* ... ... ... | 間斷函數 | 270 |
| Discriminant. *Discriminant* ... ... | 根號內之數 | 242 |
| Discussion. *Discussion* ... ... ... ... | 討論 ... | 149 |
| Distance. *Distance* ... ... ... ... | 距度,距離,路 | 30,71 |
| Dividende. *Dividend* ... ... ... ... ... | 實數 ... | 53 |
| Divisé par :, —. *Divided by* ... ... ... | 被除於 | 4 |
| Diviseur. *Divisor* ... ... ... ... ... ... | 法數 ... | 53 |
| Division. *Division* ... ... ... ... ... | 除法 | 53,131 |
| Données. *Known Numbers* ... ... ... ... | 已知數 | 7,172 |
| Double (Racine). *Equal Roots* ... ... ... | 雙根 . | 243 |
| Droite. *Straight Line* ... ... ... ... ... | 直線 ... | 71 |
| Effectuer. *Calculating* ... ... ... ... | 演(運)算 | 123 |
| Égale =. *Equals* .. ... ... ... ... ... | 等 ... ... | 5 |
| Égalité. *Equality* ... ... ... ... ... | 等式 ... | 8 |
| dº (de 2 nombres). *Equality* ... ... | 相等 ... | 22 |
| Élimination (Méthode d'). *Elimination by Addition or Subtraction* ... ... ... ... ... | 消去法 | 166 |
| Ème ($n^{ème}$). $n^{th}$ ... ... ... ... ... ... | $n$ 次 ... | 4 |
| Énoncé. *Statement* ... ... ... ... | 題旨(詮釋) | 7,172 |
| Entier. *Entire* ... ... ... ... ... ... | 整 ... ... | 113 |
| Équation. *Equation* ... ... ... ... | 方程,方程式 | 134 |
| dº du 1er degré. 1st *Degr. Equation* | 一次方程 | 140 |
| dº du 2e degré. *Quadratic Equation* | 二次方程 | 233 |
| dº impossible. *Impossible Equation* | 無理方程 | 147 |
| dº indéterminée. *Indeterminate Equ.* | 無定方程 | 149 |
| dº (Mise en). *Expressing as an Equation* ... ... ... ... ... ... | 立爲方程,立方程 | 175 |
| Équilatère (Hyperbole). *Equilateral Hyperbola* | | |

N°

... .. ... ... ... ... ... 垂形雙曲線 274

Équivalente [Équation]. *Equivalent Equation* 同根 ... 136

d° [Expression]. *Equivalent Expression* 同値 ... 129

d° [Inégalité]. *Equivalent Inequality* 同根 ... 151

Espace parcouru. *Distance gone over* ... 所行之路 95

Exposant. *Exponent* ... ... ... ... ... 指數 .. 4,45

d° impair. *Odd Exponent* ... ... ... 奇指數 46

d° pair. *Even Exponent* ... ... ... 偶指數 46

d° zéro. *Exponent zero* ... ... ... 零指數 62

Expression. *Expression* ... ... ... ... 式 ... ... 6

d° algébrique. *Algebraic Express.* 代數式 63

d° équivalente. *Equivalent Expr.* 同値式 129

d° irrationnelle. *Irrational Expr.* 不睪式 112

d° rationnelle. *Rational Expression* 常數式 112

Extraire la racine carrée. *To extract the square*
*Root* ... ... ... ... ... 開平方根,開方 4

Extrêmes (Termes). *Extreme Terms* ... 首末兩項,
... ... ... ... ... ... ... ... 首尾兩項 7

Extrémité. *Extremity* ... ... ... ... ... 末點 ... 71

Facteur. *Factor* ... ... ... ... ... ... 生數 ... 42

d° commun. *Common Factor* .. ... 公生數 247,292

d° numérique. *Numerical Factor* ... 數目生數 114

Final (Instant). *Final Instant* ... 時間之末,時末 89

Fonction. *Function* ... ... ... .. ... 函數 ... 199

d° croissante. *Increasing Function* ... 升函數 201

d° décroissante. *Decreasing Function* 降函數 202

d° linéaire. *Linear Function* ... ... 一次函數 200

Formule. *Formula* ... ... ... ... ... 公式 ... 9

| | | N° |
|---|---|---|
| Mobile. *Body in Motion* ... ... ... ... | 動物 ... | 71 |
| Moins —. *Minus* ... ... ... ... ... ... | 減 ... ... | 4 |
| Monôme. *Monomial* ... ... ... ... .. | 單項式 | 113 |
| Mouvement curviligne. *Curvilinear Movement* ... ... ... ... ... ... ... ... | 弧線行動 ... ... | 98 |
| d rectiligne. *Rectilinear Movement* | 直線行動 | 98 |
| d° uniforme. *Uniform Movement* ... | 均速行動 | 95 |
| Moyenne et extrême raison. *Mean et extreme Ratio* ... ... ... ... ... | 折中及首末理 | 259 |
| Multiple (Commun). *Common Multiple* ... | 公倍數 | 57,143 |
| Multiplicande. *Multiplicand* ... ... ... | 實數 ... | 128 |
| Multiplicateur. *Multiplier* ... ... ... ... | 法數 ... | 128 |
| Multiplication. *Multiplication* ... ... ... | 乘法 | 41,126 |
| Multiplié par ×,. *Multiplied by* ... ... ... | 被乘於 | 4 |
| Négatif. *Negative* ... ... ... ... ... ... | 負 ... ... | 17 |
| Négative (Solution). *Negative Root* ... ... | 負根 ... | 181 |
| Nombre. *Number* .. ... ... ... ... ... | 數目 ... | 2 |
| d° algébrique. *Algebraic Number* ... | 代數數目 | 17 |
| d° arithmétique. *Arithmetical Number* ... ... ... ... ... ... ... ... | 數學數目 ... ... | 14 |
| d° inverse. *Reciprocal Number* ... | 倒數 ... | 270 |
| d° négatif. *Negative Number* ... ... | 負數 ... | 17 |
| d° opposé. *Opposite Number* ... ... | 相反數 | 23 |
| d° positif. *Positive Number* ... ... | 正數 ... | 17 |
| Nombres impairs. *Odd Numbers* ... ... | 奇數 ... | 288 |
| Numérateur. *Numerator* ... ... ... ... | 分子 ... | 53 |
| Numérique (Valeur). *Numerical Value* ... | 數值 ... | 64 |
| Opération. *Operation* .. ... ... ... ... | 演(運)算 | 4 |

| | | N° |
|---|---|---|
| Opposé. *Opposite* | 相反,反 | 23 |
| Ordonné [Polynôme]. *Arranged* | 循序 | 120 |
| Ordonnée. *Ordinate* | 縱線 | 265 |
| d° à l'origine. *Ordinate to the Starting Point* | 元點縱線 | 229 |
| Ordonner un polynôme. *To arrange a Polynomial* | 排列多項式 | 120 |
| Origine. *Starting Point* | 元(起)點 | 71 |
| Pair (Coefficient). *Even Coëfficient* | 偶係數 | 247 |
| Pair (Exposant). *Even Exponent* | 偶指數 | 46 |
| Parabole. *Parabola* | 拋物線 | 269 |
| Parenthèse ( ). *Parenthesis* | 括弧 | 39 |
| Périmètre. *Perimeter* | 周 | 258 |
| Plus +. *Plus* | 加 | 4 |
| d° grand que >. *Is greater than* | 大於 | 5 |
| d° ou moins ±. *Plus or minus* | 加或減 | 242 |
| d° petit commun multiple. *Lowest common Multiple* | 小公倍數 | 57,143 |
| d° petit que. *Is less than* | 小於 | 5 |
| Point d'origine. *Starting Point* | 元點 | 71 |
| Polynôme. *Polynomial* | 多項式 | 117 |
| Positif. *Positive* | 正 | 17 |
| Problème. *Problem* | 問題 | 7,172 |
| Produit. *Product* | 積(合) | 41 |
| Produits remarquables. *Special Products* | 明顯積 | 50,130 |
| Progression. *Progression* | 級數 | 281 |
| Progression arithm. *Arithmetical Progression* | 差級數 | 281 |
| d° géométrique. *Geometrical Progr.* | 倍級數 | 289 |

N°

Proportion. *Proportion* ... ... ... ... 比例 ...

Puissance. *Power; Exponent* ... ... ... 乘方 ...4,45

d° croissante. *Increasing Power* ... 升序 ... 120

d° décroissante. *Decreasing Power* 降序 ... 120

Quantité. *Quantity* ... ... ... ... ... 幾何 ... 6

Quantités fixes. *Fixed Quantities. Voir* Consantes.

Quotient. *Quotient* ... ... ... ... ... 商(得數) 53

Racine. *Root* .. ... ... ... ... ... ... 根 ... ... 134

d° carrée. *Square Root* ... ... ... ... 平方根 4,235

d° cubique. *Cubic Root* ... ... ... . 立方根 4

Radical $\sqrt{\phantom{x}}$. *Radical Sign* ... ... ... ... 根號 ... 4

Raison (progr. arithm.). *Common Difference* 公差 ... 281

Raison (progr. géom.). *Ratio* ... ... ... 公倍 ... 289

d° (Moyenne et extrême). *Mean & extreme Ratio*
... ... ... ... ... ... 折中及首末理 259

Rang. *Rank* ... ... ... ... ... ... ... 列 ... ... 290

Rapport. *Ratio* ... ... ... ... ... ... 比,關係

Rationnelle (Express.). *Rational Expression* 常數式 112

Rectangle. *Rectangle* ... ... ... ... ... 直角形 258

Rectangulaire. *Rectangular* ... ... ... 相垂 ... 274

Rectiligne (Mouvement). *Rectilinear Movement*
... ... ... ... ... ... ... ... 直線行動 98

Réduction (Méthode de). *Elimination by Addition or Subtraction* ... ... ... ... ... 消去法 166

d° au même dénominateur *Reducing to a Common Denominator* ... ... ... 求公分母 57

d° des termes semblables. *Uniting*
... ... ... ... ... ... ... 似項之併合 119

| | | N° |
|---|---|---|
| Règle des signes. *Rule of Signs* ... ... | 記項之定例 | 41 |
| Relation (égalité). *Equality* ... ... ... | 等式 ... | 8 |
| d° (rapport). *Ratio* ... ... ... ... | 比,關係 | |
| Résoudre. *To solve* ... ... ... ... ... | 解,解決 | 7,172 |
| Reste (différence). *Remainder* ... ... ... | 較 ... ... | 33 |
| Segment. *Segment* ... ... ... | 定向線,直線部分 | 71 |
| d° négatif. *Negative Segment* ... ... | 負定向線 | 74 |
| d° positif. *Positive Segment* ... ... | 正定向線 | 74 |
| Semblables (Termes). *Similar Terms* ... | 似項 ... | 118 |
| Sens. *Direction* ... ... ... ... ... ... | 方向 ... | 10 |
| d° arbitraire. *Optional Direction* ... ... | 任之意自 | 101 |
| d° contraire. *Opposite Direction* ... ... | 反向 ... | 74 |
| d° différent. *Different Direction* ... ... | 相反向 | 10,72 |
| d° (d'un segment). *Direction* ... ... ... | 向 ... | 71 |
| d° (Même). *Same Direction* ... ... ... | 同向 ... | 95 |
| d° négatif. *Negative Direction* ... ... | 負向 ... | 76 |
| d° opposé. *Opposite Direction* ... ... | 相背向 | 72 |
| d° (Pas de). *No meaning* ... ... ... ... | 無意義 | 104 |
| d° positif. *Positive Direction* ... ... ... | 正向 ... | 74 |
| Signe. *Sign* ... ... ... ... ... ... ... | 記號 ... | 4 |
| d° de comparaison. *Sign of Comparison* | 比較記號 | 4 |
| d° d'opération. *Sign of Operation* ... | 演算記號 | 4 |
| d° (même). *Like Sign* ... ... ... ... | 同號 ... | 22 |
| Signes contraires. *Unlike Signs* ... ... ... | 異號 ... | 23 |
| d° (Règle des). *Rule of Signs* ... | 記號之定例 | 41 |
| Simple (Intérêt). *Simple Interest* ... ... | 簡利 ... | 326 |
| Simplifier. *Reducing to lower Terms* ... | 約 ... ... | 131 |
| Solution. *Solution* ... ... ... ... | 解,答數,根 | 7,134 |

| | | N° |
|---|---|---|
| Solution négative. *Negative Root* | 負根 | 181 |
| d° (Pas de). *No Root* | 無根 | 187 |
| Somme. *Sum* | 和 | 24 |
| Sommet. *Vertex* | 頂 | 269 |
| Soustraction. *Subtraction* | 減法 | 33,124 |
| Substitution (Méthode de) *Elimination by Substitution* | 代替法 | 160 |
| Supérieur ou égal à $\geqq$. *Is superior or Equal to* | 或大或等 | 5 |
| Symétrie. *Symmetry* | 等勢 | 273 |
| Symétrique. *Symmetrical* | 等勢 | 265 |
| Système. *System* | 聯立式 | 157 |
| Table d'antilogarithmes. *Table of Antilogarithms* | 眞數表 | 309 |
| Table de logarithmes. *Table of Logarithms* | 對數表 | 308 |
| Taux. *Rate* | 息 | 326 |
| Temps. *Time* | 時 | 85,337 |
| d° (Intervalle de). *Interval of Time* | 時間 | 89 |
| Terme. *Term* | 項 | 37,48 |
| Terme constant. *Constant Term* 不變項 122, | 定數項 | 241 |
| Termes semblables. *Similar Terms* | 似項 | 118 |
| Théorème. *Theorem* | 定理 | 31 |
| Thermomètre. *Thermometer* | 寒暑表 | 81 |
| Trinôme. *Trinomial* | 三項式 | 117 |
| Uniforme (Mouvement). *Uniform Movement* | 均速行動 | 95 |
| Unité. *Unit* | 準個 | 85 |
| Valeur. *Value* | 値,同數 | 158 |

| | | No |
|---|---|---|
| Valeur absolue. *Absolute Value*... ... ... | 絕對值 | 20 |
| d° correspondante. *Voir* Correspondante. | | |
| d° numérique. *Numerical Value* ... ... | 數值 ... | 64 |
| Variable. *Variable* ... ... ... ... ... | 變值 ... | 101 |
| d° dépendante. *Dependant Variable* | 被變數 | 199 |
| d° indépendante. *Independant Variable* | 自變數 | 198 |
| Variation (d'abscisse). *Variation* ... ... | 變動 ... | 79 |
| d° (de fonction). *Id.*... ... ... ... | 消長 | 198,263 |
| d° (de température). *Id.* ... ... ... | 變動 ... | 82 |
| Vérifier. *To verify* ... ... | 證實,見其合理,檢實 | 135 |
| Verticale. *Vertical Line* ... ... ... ... | 縱線 ... | 314 |
| Vitesse. *Speed* ... ... ... ... ... ... | 速度 ... | 96 |
| Zéro. *Zero* ... ... ... ... ... ... ... | 零 ... ... | 17 |
| d° (Exposant). *Exponent zero* ... ... | 零指數 | 62 |

IMPRIMERIE DE TOU·SÈ·WÈ