工學小叢書

應用力學

徐驤著

商務印書館發行

工學小叢書

應用力學

徐驥 著

商務印書館發行

中華民國二十三年二月初版
中華民國二十四年五月六版

(60747)

工學小叢書 應用力學一冊

每冊定價大洋伍角
外埠酌加運費匯費

著作者 徐驥

發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

四六一七上

應用力學

目錄

應用力學

第一章　單位

緒言　力學（Mechanics）一名重學，爲論力及力之作用之科學。就力學上研究之原理，旁及其應用之道，以分別解釋工程學（Engineering）中之主要問題者，則稱爲應用力學（Applied Mechanics）。故應用力學實爲一切工程學之基礎；無論爲土木工程（Civil engineering）、機械工程（Mechanical engineering）、電機工程（Electrical engineering）、以及採礦工程（Mining engineeing）等等，靡不先取徑於此，以爲入門之階梯。本書按照工學小叢書編輯體例，取基礎上所需之原理及方法，扼要述之。

西哲柏拉圖（Plato）氏有言：『設將計算，權度脫離一切學術，所存復有幾何？』全物理界之精確智識，

多由精確之計量(Measurement)而得。計量先須明定單位，故本書首章，先論單位(Unit)。

量 凡有大小多寡可得而計量者，曰量(Quantity)。欲測各種之量，每以與所求量同一種類之一定量作爲標準，則此所求之量爲標準量之幾倍，卽可以實驗測定之。此標準量，名爲量之單位。所示單位幾倍之數值，卽所求量與單位之比，名爲測數(Numeric)。實驗的求得測數，名爲量之測定(Measurement of quantity)。故量爲單位之測數倍，僅言測數，決不能謂爲表示其量也。卽

$$\text{量} = \text{測數} \times \text{單位}$$

例如測某物之長，以市尺爲單位，測之則得六倍；若以公分爲單位，測之則得二〇〇倍。同此一物之長，而因所表之方法不同，所得或爲六市尺，或爲二〇〇公分。此『市尺』，『公分』爲單位，六與二〇〇爲測數，可知若不表明單位而僅記其量之測數，是毫無意義可言。

上例所測之長，以 u(市尺)爲單位得 n(六)之測數，以 u′(公分)爲單位得 n′(二〇〇)之測數，則

其量（卽其長）爲 nu 或 n′u′

故　$un = n'u'$

或　$\frac{n}{n'} = \frac{u'}{u}$

是卽測數與單位之大小成反比例。此定理於量之換算時，用以驗其計算之結果，頗爲便利。

基本單位與誘導單位　物理學上所用各種之量及其量之單位，種類甚多，例如長、面積、體積、質量、密度、時間、速度、加速度、力、功……等。然其間皆有互相關聯之處，若以少數之量爲其基本，則其他諸量之單位，皆可自此誘導而得。力學上之長（Length)、質量（Mass）、時間（Time）之三種單位及以此爲基本而化成諸量之單位，總稱爲絕對單位（Absolute unit)。而作爲基本之長、質量、時間之三種單位，名爲基本單位（Fundamental unit）。由此化成諸量之單位，名爲誘導單位（Derived unit），或曰組立單位。例如面積之單位，爲一邊單位長之正方形，體積之單位，爲一邊單位長之立方形；故面積及體積之單位，長之誘導單位也。又有單位體積之質量，謂之密度，是密度之單位，

又爲長與質量之誘導單位。速爲單位時間中所經過之路程，則速之單位，又爲長與時間之誘導單位。如力之單位，更爲複雜，乃爲長與質量及時間三者所合成之單位。

基本單位之中，時間之單位，各國一律，以平均太陽日（Mean solar day）爲基本，而更分爲時、分、秒。一秒等於平均太陽日之八六四〇〇分之一。

長及質量之單位，各國不同，今將我國自中華民國十九年一月一日起施行之度量衡法及度量衡法施行細則中所舉長及質量之單位，摘述如次：

長以公尺爲單位，一公尺等於萬國權度公會所製定鉑銥公尺原器在攝氏溫度計零度時首尾兩標點間之距離。

公尺之補助單位及各單位間之進位當量，有如下表：

公釐(粍)	(Millimetre)	等於公尺千分之一
公分(糎)	(Centimetre)	等於公尺百分之一
公寸(粉)	(Decimetre)	等於公尺十分之一
公尺(米)	(Metre)	
公丈(籵)	(Decametre)	等於十公尺
公引(粨)	(Hectometre)	等於百公尺

公里(粁)	(Kilometre)	等於千公尺

質量以公斤爲單位，一公斤等於萬國權度公會所製定鉑銥公斤原器之質量。（水在攝氏四度時，其密度最大；此時每一立方公寸之質量，大致與一公斤相等。）

公斤之補助單位及各單位間之進位當量，有如下表：

公絲(毨)	(Milligramme)	等於公斤百萬分之一
公毫(瓱)	(Centigramme)	等於公斤十萬分之一
公釐(兝)	(Decigramme)	等於公斤萬分之一
公分(克)	(Gramme)	等於公斤千分之一
公錢(兙)	(Decagramme)	等於公斤百分之一
公兩(兡)	(Hectogramme)	等於公斤十分之一
公斤(兛)	(Kilogramme)	
公噸(瓲)	(Tonne)	等於千公斤

此種以萬國權度公會所製定鉑銥公尺，公斤原器爲度量衡之標準，稱爲標準制。標準制之一公尺等於市用制三市尺，一公斤等於二市斤。

上述基本單位中，如用公分（糎）表長，公分（克）表質量，秒表時間，由此誘導而出之絕對單位系統，曰

糎克秒系（C. G. S. system）。若用公尺（粎），公斤（瓩）及秒，則所誘導而出之系統，可稱爲粎瓩秒系（M. K. S. system）。實用上亦有以公里（粁）表長，公噸（瓲）表質量，時表時間者，則於大量計算時用之。

我國工程界以前頗多採用英制，以呎（Foot）表長，以磅（Pound）表質量，卽所謂呎磅秒系（F. P. S. system）；自標準制頒布後，已不復適用矣。

絕對單位中之質量，實用上有以重量（Weight）代用者，凡以長、重量及時間之三單位爲基本而導出之單位系統，總稱爲重力單位（Gravitational unit）。重力單位因於實用上極爲便利，工程界頗多採用，故又有工程單位（Engineer's unit）之稱。本書對此兩種單位——絕對單位與重力單位，兼而用之。

第二章　物體之運動

運動　力之作用，其及物而顯著者，曰運動。蒸汽膨脹力之能使汽機迴轉，電力之能使電車進行，地心引力之能使物體直墜，均吾人日常習見之事，而足以證明力之作用者也。故研究力之作用，須先知運動。

凡一物對於他物而變其位置者，曰運動（Motion）。如列車之運動，即對於地球一部而變位置是也。又凡一物對於他物而位置不變者，則曰靜止（Rest）。如人靜立船中，則人對於船體，其位置未嘗變更。故論凡物之動靜，必有標準物以爲對象；而標準物之爲動爲靜，固無妨也。世間普通之所謂動靜，都以大地爲標準，然力學上往往以對於地球而運動之物爲標準。如研究鐵路機車一部之運動，則以機車之臺爲標準，而機車之臺對於地球之動靜，則無計及之必要矣。

直線運動及圓運動　凡物對於他物之位置，以其相互之方向及距離而決定。故物體運動之時，有僅變更距

離者，亦有僅變更方向者。前者爲直線運動（Rectilinear motion），後者之行於一平面上者，曰迴轉運動或曰圓運動（Circular motion）。如自由落體（Free falling body）之爲直線運動，車輪迴轉時，車周一點對於軸心之爲迴轉運動即圓運動是也。

速度 研究運動，須先知其遲速，凡運動方向上之位置變更對於時間之比，即單位時間內所經過之距離，曰速度（Velocity）。物體運動時間之內，某瞬間之速度與任何他瞬間之速度常相等者，曰常速度（Uniform velocity）。某瞬間之速度與他瞬間之速度不相等者，曰變速度（Variable velocity）。物體以常速度運動者，曰常速運動（Motion with uniform velocity）。以變速度運動者，曰變速運動（Motion with variable velocity）。列車初自車站出發之時，係變速運動，至中途而達於一定速度之時，則殆爲常速運動矣。

設物體爲常速直線運動，則測其速度之時，可於某時間察定其位置，俟經過適當時間後再察定之。今設測得先後二位置間之距離爲 S 糎，其時間爲 t 秒，則所測

之速度，爲$V=\frac{S}{t}$。其結果讀爲每秒間若干糎，或略稱爲若干每秒糎（Centimetre per second）

由 $V=\frac{S}{t}$一式，可導得下列二式：

$S=Vt,$

$t=\cancel{VS}\ \frac{S}{V}$

凡求常速直線運動中距離與時間，可用上二式計算得之。

在變速運動中，其物體之速度，不能僅稱爲若干每秒糎，必附記測定速度之時刻或其地方。如曰自由落體之速度在一秒終時爲 980 每秒糎，其意蓋謂以前之一秒間未必曾以 980 每秒糎降落，以後之一秒間亦未必仍以 980 每秒糎下墜；若氤今之速度，能與此一秒終時之速度相同而進行者，則一秒間得進 980 糎是也。故變速運動物體速度之測定方法，較常速者爲難，其法有二：

（一）減去實際所及各種妨礙運動之抵抗，而於將欲測定速度之瞬間除去運動起因之力，使物體自此瞬間進行於小時期而測其距離爲 S 糎，其時間爲 t 秒，則所求之速度卽爲 $V=\frac{S}{t}$。蓋依牛頓氏運動第一定

律，凡運動之物體，非加以外力，則恆爲常速直線運動也。阿特吾氏（Atwood）測定自由落體速度之機械，蓋卽根據此理。

（二）測定物體於極小時間經過之距離，以之爲 ΔS，其時間爲 Δt，則所求之速度爲 $V=\frac{\Delta S}{\Delta t}$。若此時間充分短小，則其間速度自可視爲不變者矣。

平均速度 設有在某時間內經過某距離之物體，其速度之爲變爲常，姑不具論，若假定另有一常速度，能與此物在同時間經過同距離，則此常速度，卽爲此物之平均速度（Mean velocity）。如自由落體在最初二秒間落下 1960 糎，則其間雖速度漸增，而其平均速度則固爲 980 每秒糎。又若甲乙兩地間之汽車里程爲 600 粁，而行駛須十九小時，則不問其速度如何變更，中途曾否停頓，而甲乙兩地間之平均速度固爲一時間 31·58 粁也。

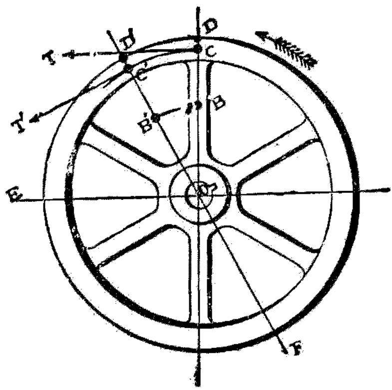
速度之單位 速度之單位，爲單位時間內動體在運動方向上進行單位距離時之速度。在糎克秒系，單位速度爲每秒間進行一糎之常速運動之速度，稱之爲每秒糎，

已如前述。大於每秒粍者，有所謂每秒粎（Metre per second），每秒粁（Kilometre per second）等單位，意卽每秒間動體在運動方向上行動一粎或一粁也。此外有論速度之單位以時爲單位之時間者，如言汽車之速度，通常必稱每時若干粁或每時若干里，是其所用速度之單位爲每時粁（Kilometre per hour），每時里。

速　速度不特有其大小（Magnitude）之可言，且有其一定之方向（Direction）。若略去方向，僅論其大小，則稱之曰速（Speed），以示與速度有別。例如有二汽車，一向東行，一向西行，雖於同一時間內進行相等之距離，但因其方向不同，祇能謂其速相等，絕不能謂爲速度相等也。

角速度　測定直線運物物體之速度，不妨任取物體中之何點，因其體內各點均以同一速度進行於同方向也。若係迴轉運動，則體內各點之速度，因其位置而不同。玆設有第一圖中以矢示方向迴轉之物體，例如汽機上之調速輪（Fly wheel）是也。試考其各點之運動，C點經過之路程爲CC′弧，B點爲BB′弧，D點爲DD′弧；

第　一　圖



而運動方向則瞬息變換，在C點時爲C T切線，C′點時則爲C′T′切線。又若此輪運動爲常速，其經過C C′弧之時間爲 t ，則C點之速度，爲以 t 除CC′弧長，卽$\frac{\overset{\frown}{CC'}}{t}$也，是爲C點之線速度(Linear velocity)，

以同理推之，D點之線速度爲$\frac{DD'}{t}$，B點之線速度爲$\frac{BB'}{t}$。然D D′較C C′爲長，而B B′則較C C′爲短，至其沿弧運動之時間，則固相等；故D之線速度必較大於C之線速度，而C之線速度則又大於B之線速度。是以若僅知某點之線速度，則殊難決定全體之迴轉運動，必須知線速度及此點與軸心間距離而後可也。有時以此法卽求知某點之線速度及此點與軸心間距離而決定其迴轉運動，自無不可，然普通究以用角速度(Angular velocity)

爲簡便。其法不用迴轉體（Revolving body）之一定點，而考察體中通過軸心一定直線之運動。今設於一秒間，定線OC動至OC′位置，則OC所經過之角爲∠COC′。且不獨OC線爲然也，凡OE，OF等線一秒間所經過之角，均爲∠COC′無疑。故知迴轉體中任意直徑一秒間所經過之角度，則可完全決定其運動矣，是爲角速度。簡言之：角速度者，卽迴轉體中直徑所經角度之速也。

測定角速度時，時間之單位用秒，角度單位則以用弧度法（Circular measure）爲最便。弧度法之單位，爲與半徑等長之圓弧，對於圓心所張之角，名爲弧度角（Radian）。據此法，則一直角爲以半徑除全周四分之一，卽 $\frac{2\pi r}{4} \div r = \frac{\pi}{2}$ 弧度角，二直角則爲 $\frac{2\pi r}{2} \div r = \pi$ 弧度角。故一弧度角爲 $\frac{180}{\pi}$ 卽五十七度零三餘是也。一秒間迴轉於一弧度角之速，爲角速度之單位。

前法專用於理論，實際研究機械之運動，則以一分間之迴轉數（Number of revolution）爲便。今以 θ 爲弧度法所測之角速度，N爲一分間之迴轉數，則

$$\theta=\frac{2\pi N}{60}=\frac{\pi N}{30}=0.10472\,N$$

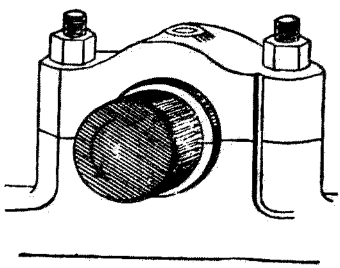
迴轉體之角速度，以弧度法記之，則易求其任意點之線速度。如第一圖中，半徑 OC 為 r，角速度為 θ，C 點之線速度為V，則t秒間所經過之弧長

$$OC'=Vt,$$

$$\angle COC'=\theta t\text{弧度角}，2\angle COC'=\frac{CC'}{r}=\frac{Vt}{r}\text{弧度角}，$$

$$\therefore\frac{Vt}{r}=\theta t,\qquad \text{卽}\ V=\theta r$$

例——有半徑三糎之心軸，如第二圖所示，架於軸承（Bearing）上而為一分間一百五十次之迴轉。問其角速度為何？又心軸外面軸承金（Bearing matal）相擦之速度如何？



第 二 圖

$$\text{角速度}\,\theta=\frac{\pi N}{30}=\frac{\pi\times150}{30}$$

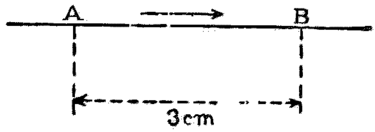
$$=3.1416\times5=15.708\text{弧度角}$$

$$\text{又相擦速度}\,V=\theta r=15.708\times3$$

$$=47.124\ \text{每秒糎}$$

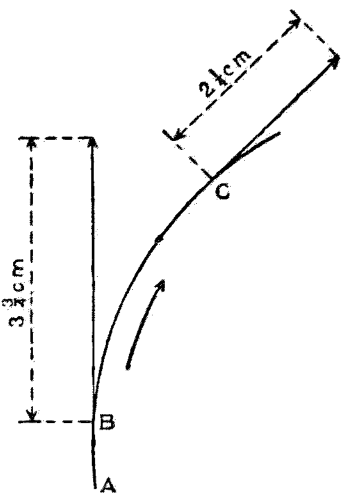
速度圖示法　動體軌跡（Locus）上任意點之運動，得以其速度之大小及方向而決定。而速度之大小及方向，均得以直線表示之，是爲圖示法（Graphical representation）。

如第三圖中AB爲軌跡，A點之速度爲24每秒糎，其方向如矢。則如圖所示，先自A點作如矢方向之直線，以適當之縮尺，擇一B點，以AB直線表示24每秒糎。設如以$\frac{1}{8}$糎表示一每秒糎，則A B之長恰爲三糎。



第　三　圖

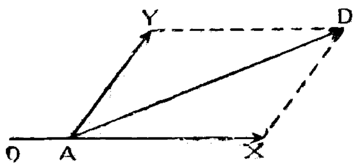
又若在曲線上而爲變速運動者，則可如第四圖所示。動體沿ABC曲線而運動，B點之速



第　四　圖

度爲 30 每秒糎，C 點之速度爲 18 每秒糎，今於 B，C 兩點各作切線，則其長卽可表示各速度之大小。若用上例之縮尺，則 B 之切線爲三糎又四分之三，C 之切線爲二糎又四分之一。

速度合成法 用圖示法，則易了解關於運動之定理茲設有一動體以某速度進行於 OX 方向，如第五圖，而其到達 A 點之時，忽與以 AY 方向之某速度之運動，則動體不進行於 AX 方向，亦不進行於 AY 之方向，而以一定之速度，進行於其間之 AD 方向。如此求自二速度合併而成之速度及方向之法，曰速度合成法 (Composition of velocities)。二速度合併而成之結果曰合成速度 (Resultant velocity)。速度合成法，由速度平行形而成，其定理如下：



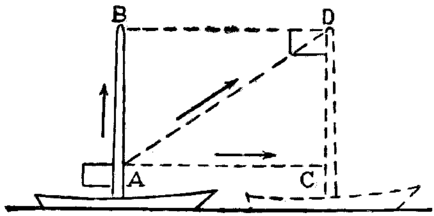
第 五 圖

自一點作二直線，表示所與之二速度，以此二直線爲隣邊而作平行四邊形，則由此點所作之對角線，卽表

示合成速度之方向及大小。

在第五圖中，AX及AY表示所與之二速度，而作平行四邊形AXDY，則對角線AD卽表示合成速度。

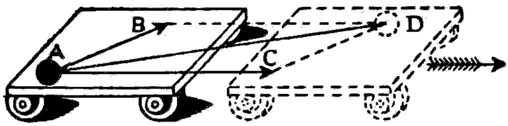
第　六　圖



今取一二簡單之例證明之：設如第六圖中，有船以常速度進行於AC方向，一秒間自A而至C，卽船之速度爲AC；又同時以常速度沿檣AB而升旗，一秒間自A至B，卽旗之速度爲AB。然至一秒之終，因旗始終與船同進行，同時亦沿檣而上，故必在D處無疑。其間A點沿AC線而進行，B點沿BD線而進行，而旗則沿AD路徑而斜向上升，故其速度及方向，得以AD表示之也。

在前例中，二速度成爲直角，然不論二速度間之角度如何，而理皆一致。設有下附車輪之臺，如第七圖以某速度進行於矢之方向，其速度爲AC；而同時又有一球

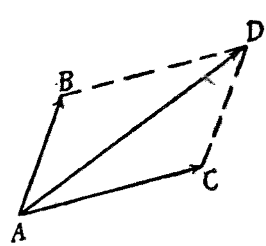
第 七 圖



自A點而轉動於AB之方向，其對於臺板之速度爲AB。然則以前例推之，一秒之終，臺之位置變至如點線所示，而球則沿AD對角線，而至D之位置。

速度分解法 速度分解法(Resolution of velocity)爲速度合成法之逆，即以單一之速度，分解爲同結果之二以上之速度也。其分解所得之速度，曰分速度(Component velocity)。

第 八 圖

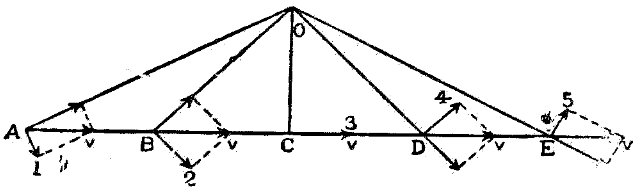


如第八圖所示，先作AD以表示所與之某一速度，以之分解於二方向AB,AC時，可以AD爲對角線，而作ABDC平行四邊形，則AB,AC之長，即所求之分速度也。

速度分解法頗關重要，茲更取一實例以說明之。如

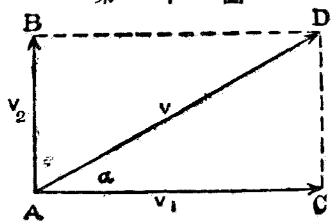
人佇立鐵路線傍，而瞻望列車之經過，雖列車本有定速，而其運動之感於人目者，則顯覺遲速不同。始必覺其甚緩，漸近則漸快，至經過目前時最大，自此漸遠漸緩，終則悠然而逝。如第九圖所示，ABCDE為路線，取Av, Bv,Cv,……為A,B,C……各點列車之速度，其映於佇立於O處之人目者，必為直角於AO,BO,CO,……視線之分

第　九　圖



速度A1,B2,C3,……其分解於視線方向之分速度，則不稍感覺於人目中。然直角於視線方向之分速度，在A點為最小，在B稍增，至C而最大，過此而D,E則漸小矣；故在人目中，有遲速不同之視覺也。

第　十　圖



互為直角之二分速度與合成速度之關係，可以三角法表示。如第十圖，AD為v，CAD角為α，水平分速

度AC為v_1，垂直分速度AB為v_2，

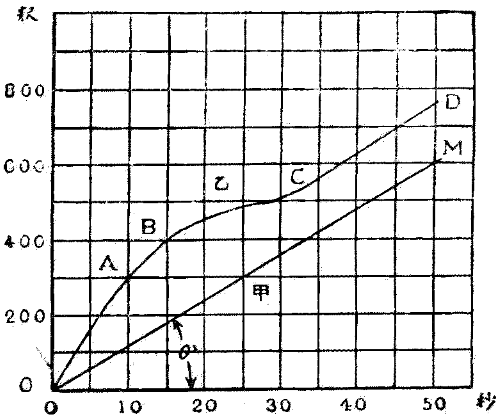
則
$$v_1 = v\cos\alpha,$$
$$v_2 = v\sin\alpha,$$
$$v = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}$$

速之圖表　置物體運動中之時間於橫軸，而以其經過之距離置於縱軸，以作表示兩者關係之曲線，則此曲線名為距離時間曲線（Distance time Curve），可以表示此動體之速。

時間(秒)／距離(粎)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
甲	0	60	120	180	240	300	360	420	480	540	600
乙	0	170	300	400	460	480	520	570	630	690	750
乙物體各5秒間之平均速（每秒粎）		34	26	20	12	4	8	10	12	12	12

例如有為如上表所示運動之物體甲、乙，則得作如第十一圖之距離時間曲線。就表觀之，知甲物體各五秒間常運動 60 粎，故可知甲為常速運動，而其速為$\frac{60}{5}$，即 12 每秒粎也。作圖時可先沿橫軸取 5，沿縱軸取 60，次沿兩軸取 10 及 120 等各點，聯絡各點而作曲線，則得甲體運動之距離時間曲線OM。

第　十　一　圖



又以OM與橫軸所成之角爲θ,則表示

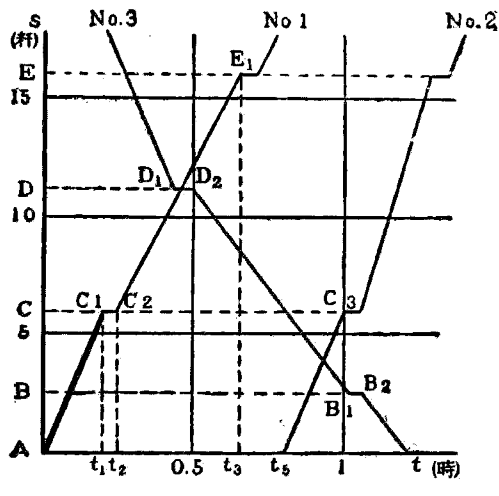
$$\tan\theta=\frac{\text{距離}}{\text{時間}}=\text{速}$$

在此法相同之線圖中，曲線任意點上所作之切線，其與橫軸所作之角愈大者，則此點之速愈大。故距離時間曲線，所以表示運動中各點之速者也。

更就乙物體之運動觀之，則5秒間之運動均各不同；其速在開始間爲大，自 20 秒至 25 秒間爲最小，是固視表而即明瞭者也， 故知乙運動爲變速運動 。若照上法，亦得作成此運動之距離時間曲線OABCD；其中CD

部份所以與OM平行者，卽示乙體於 35 秒以後，與甲體以同速進行也。在第十二圖之距離時間曲線中，動體No.1自A點出發，以不變之速，在 12 分卽 0.2 時(At_1)間進行於距離AC＝6粁。若5分間靜止，則可作平行於

第 十 二 圖



橫軸之C_1C_2。若自此 24 分卽 0.4 時(t_2t_3)間，進行於距離CE＝10粁，則No.1之運動，卽如曲線$AC_1C_2E_1$所示而行 AC 間之速，爲$\frac{AC}{At_1}=\frac{6}{0.2}=30$每時粁，又 CE 間之速，爲$\frac{CE}{t_2t_3}=\frac{10}{0.4}=25$每時粁。

次若動體No.2於零時 50 分(t_5)自A點出發，以30每時粁之速，向 E 進行，則如圖中作平行於AC_1之t_5C_3可也。又若有自 E點向 A點之動體 No.3，亦可以同法解之；此時 No.2與No.3 二曲線，相交於約離 A點 4 粁之處，故二者若於一直線上同時運動，必發生衝突可知。此圖表於鐵路行車有一見而能使運轉系統明瞭之便，故常用之。

相對速度　無風之日，疾走於微雨中之電車，其窗上必見有斜來之雨跡，此時電車與雨，雖對於地球而爲某速度之運動，而窗上雨跡，則以電車爲標準，而自電車中從雨之運動方向中所觀測者也。又如 A,B兩電車同向進行於平行線路中，則自 A 視 B，若其速甚緩，幾若停頓不前者，又異向進行時，必覺其甚速；此以A 爲標準，而觀測 B之速度也。是爲A（電車）對於 B（雨）之相對速度（Relative velocity）或曰關係速度。

加速度　變速運動中之速度，瞬息不同；凡物在運動方向上之速度變更對於時間之比,曰加速度(Acceleration）。例如自由落體，一秒間增加 980 每秒糎之速

度，故其加速度爲一秒間 980 每秒糎。又如有十每秒粎速度之動體，以等比減速，至二秒終則其速爲六每秒粎，則其減速之比爲一秒間二每秒粎。此時可仍用加速度之一語，而用負號以區別之，即前例之加速度爲每秒間（＋980 每秒糎），而後例爲每秒間（－2 每秒粎）也。

速度變化之比，有始終相等者，亦有瞬息不同者，前者曰常加速度（Uniform acceleration），後者曰變加速度（Variable acceleration）。如自由落體爲常加速度，而列車在車站出發之時，則屬於變加速度。

求常加速運動（Uniform accelerated motion）中動體之加速度，可先於某時間測得其速度，又於經過適當時間之後，復測得其速度。今以前後二速度爲V_0及V，經過之時間爲 t，則所求之加速度爲 a

$$a=\frac{V-V_0}{t}$$

在變加速運動（Variable accelerated motion）中，求其加速度之法，與測定變速度相同。即於極短時間內視其速度之變化，設爲 ΔV，其時間爲 Δt，則其時間

內之加速度，爲

$$a=\frac{\Delta V}{\Delta t}$$

蓋因時間非常短者，則其間之加速度，得視爲不變者亦不妨也。

在常加速運動中，自前式得

$$V=V_0+at \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

此式卽表示初速度(Initial velocity)與最後速度(Final velocity)之關係。

又有V_0速度之物體，以同比變其速度而達於V，則其時間內之平均速度爲$\frac{V_0+V}{2}$，故t時間內經過之距離，爲

$$S=\frac{V_0+V}{2}.t \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

此簡易之(1)，(2)兩式，所以示常加速運動之原理，凡關於常加速運動之問題，均得自此兩式算定之。例如已定加速度而求距離與速度之關係，則自(1)式，得

$$at=V-V_0$$

又自(2)式，得

$$S=\frac{V+V_0}{2}.t$$

$$\therefore aS=\frac{V^2-V_0{}^2}{2}$$

卽
$$S=\frac{V^2-V_0{}^2}{2a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

又若知加速度，而求距離與時間之關係，則可以(1)式之値代入(3)式中，卽得

$$S=V_0t+\frac{1}{2}at^2\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

加速度之單位，爲單位時間內所起單位速度變化之常加速運動之加速度。在糎克秒系，速度之單位爲每秒糎，故加速度之單位，爲每秒間發生一每秒糎之速度變化之常加速運動之加速度，稱爲每秒每秒糎(Centimetre per second per second)。大於此之單位，有所謂每秒每秒粎(Metre per second per second)，每秒每時粁(Kilometre per hour per second)等等，意卽每秒間動體之速度變化爲每秒粎或每時粁也。

落體之運動 地心引力又名重力(Gravity)。凡在地球表面未受他物支持之物體，莫不受重力之影響以一定之加速度向地面落下，其運動爲一種常加速運動。所謂一定之加速度，嚴格言之，雖因緯度之不同隨地而

異，惟通常總以緯度 45^0 之海面上為準，即 980 每秒每秒糎也。此種加速度，稱之曰落體加速度(Accetleration of falling body)，又因其係由重力而來，亦稱重力加速度(Acceleration of Gravity)常以 g 代之。

物體自靜止而自由落下，其運動公式即為前節諸式之特例。在(1)，(2)，(3)及(4)式中，置 $V_0=0$，$a=g$，即得自由落下之運動公式：

$$V=gt, \qquad V_2=2gS, \qquad S=\frac{1}{2}gt^2$$

加速度之合成及分解　加速度所以表示時間之單位中所有速度之增減，則凡關於速度之規則，均得應用。即如以直線圖示速度，加速度亦得以直線圖示之。又速度平行形之理，亦得應用於加速度。故加速度之合成及分解，其法均與速度相同。

第三章 運動之定律

運動第一定律 凡物體不受他物體之作用及外力時，則其物體本係靜止者，必維持其靜止狀態；若既有速度，亦必以不變之速度而繼續其直線運動。簡言之：即物體無外力作用，則其速度不變也。是爲牛頓氏之運動第一定律（Newton's First law of motion）。

此定律說明凡物體決不能自起運動，或運動中物體自己靜止及變其運動之方向。凡物體均有此性質，故稱爲物體之惰性（Inertia）。第一定律卽言凡物體均有惰性，故又稱爲惰性定律（Law of inertia）。

力 力（Force）爲吾人日常使用之語，其根本觀念，卽推動物體或制止物體運動時，吾人手臂筋肉間所起之感象。而力學上則以此觀念推言之，凡與物體以加速度時所有外界之影響，均本於力之作用。例如用制動機（Brake）使電車停止，係因力作用車輪與制動板之間。又如物體落下，則原因於物體與地球間之引力卽重

力也。

然若逆考之，見物體之速度無變化，而即認為必無力作用於其間，則又不然。蓋因動作於物體之力而在平衡狀態者，則雖有外力作用，而物體之速度不變也。關於力之平衡，其理讓諸後章，今但就力動作於物體而生速度變化者論之。

力之為名，吾人已習用之。前如重力，為地球與地球上物體間之吸引力，凡地球上物體均絕對不能避免，是以物體有重量（Weight）也。又如物體在空氣或液體中則有浮力（Buoyancy），二磁石間則有吸力，充電體間則有電的吸力，及宇宙萬物間所有之萬有引力(Universal gravitation)，均有種種關係存乎其間。

力之特別者，則有發生於物體之運動初期且常在運動之反對方向，即普通所謂抵抗力是也。例如在空氣中進行之汽車或火車，則受空氣之抵抗；進行於水中之船，則受水之抵抗。又如物體輾動於地面或桌面上時，則接觸面必受名為摩擦力之抵抗。

運動第二定律　外力作用於物體，則生速度變化於

其力之方向，然有速度變化則有加速度，故曰外力動作於物體，必生加速度也。至動作以若干之力，而作若何之加速度，則其說如次：

（一）以種種之力作用於一定之物體，則其加速度正比例於力，其方向與力一致。

（二）以一定之力，作用於種種相異之物體，則其加速度，逆比例於各物體之質量。

換言之：即物體受外力作用，則生加速度於其力之方向，而加速度則正比例於力，逆比例於物體之質量也。是爲運動第二定律（Second law of motion）。

今以一定之力F，作用於質量m之物體，而生加速度 a，則此定律可以下式表示之，即

$$a \propto \frac{F}{m}$$

或 $$F \propto ma$$

以比例常數爲K，則

$$F = Kma$$

比例常數K，則因關係諸量 F,m,a 等之單位而不同，姑俟下節述之。此式所表示者，即謂力作用於物體而生

之加速度與物體質量之乘積，比例於所作用之力也。

力之單位　力之單位有絕對單位與重力單位兩種：

（一）絕對單位　力之絕對單位(Absolute unit of force)者，根據運動第二定律由三種基本單位而成，卽選取能使單位質量之物體，發生單位加速度者，爲力之單位。

在糎克秒系中，卽與質量一克之物體以一每秒每秒糎之加速度之力也，此稱爲達因(Dyne)，或簡稱曰達。卽用糎克秒系時，上式

$$F = Kma$$

中，$m=1, a=1$時，F亦定爲1，故$K=1$，是以上式爲

$$F = ma$$

（二）重力單位　力之單位之第二系統，爲重量瓩(Kilogramme weight，或譯瓩重)或重量斤等。夫所謂重量瓩及重量斤者，卽以作用於質量一瓩或一斤之物體之重力爲基本者也。此系統之單位，均以一定地點作用於有單位質量物體之重力之大小，卽其地點所有單位質量之物體之重量爲標準。是以此種單位，稱爲力之重

力單位（Gravitational unit of force）；實用頗多。

物體之重量w'爲g加速度作用於此物體時所起之力，故若此物體之質量爲m，則

$$w' = mg$$

加速度g因地方而不同，故同質量之物體，其重量因地方而稍有差異。但其數甚微，實用上得視一重量瓩卽爲質量一瓩之物體之重量，是亦重力單位所以採用之原因也。重量斤等亦同。

凡有質量m之物體，在重力單位中，其重量爲w，則

$$w = m$$

又凡以重力單位而採用於實用者甚多，如重量瓩，重量克，重量兩等均是。此種稱謂，在不必特別表明其爲重力單位，而不致有與質量單位相混之虞時，則略去重量二字，僅云瓩，克，兩亦可。

力之重力單位，係以物體之重量爲標準，其因重力所生物體之加速度g，其物體無論爲木爲鐵，設空氣等均無抵抗時，則均相等。若與加速度a於質量m物體之

力爲F，則

$$F=Kma$$

又與加速度g於同質量物體之力，等於其物體之重量，則

$$w=Kmg$$

$$\therefore \frac{F}{w}=\frac{a}{g}$$

又 $$F=\frac{w}{g}a$$

此式祇須F與w及g與a之單位相同，則無論絕對單位及重力單位均得成立。

使物體昇降之力 在地球上同一之處，因重力而起之加速度，不關於其高而一定。因其高達於數千粎或數萬粎，自難免有異，然在四千粎之高處，g值之相差亦不過千分之一，故在實地計算可視g爲一定之値也。

僅支持重量w之物體，則須w重力單位之力。若欲以a加速度上昇，自須另加以$\frac{w}{g}a$重力單位之力，但此時空氣等之抵抗自不計及。故此重量w之物體，以不變加速度a而上昇時，其所需之力，爲

$$F = w + \frac{w}{g}a = \frac{w}{g}(g+a)\text{ 重力單位}$$

又若以a加速度而下降，則其力可較少$\frac{w}{g}a$。故此時所需之力F'，爲

$$F' = w - \frac{w}{g}a = \frac{w}{g}(g-a)\text{ 重力單位}$$

動量 使物體運動之原因爲力。今設以同質量之物體，欲與以較大之速度，則需力亦較大。又雖速度相若，亦不得不比例於其質量，而予以相當之力。此同運動第二定律，而讀者所習知者也。故凡物運動，必須就其速度與其質量同時考慮；物體所有質量與其速度之乘積，稱爲動量（Momentum）。今設重量m之物體，在速度v時之動量爲M，則

$$M = mv$$

設物體之重量爲w，則其速度v時之動量M，爲

$$M = \frac{w}{g}v$$

動量亦得用圖示法分解或合成之。

力時積 力作用於物體，其間總須若干時間，而其效果，亦有關於作用時間之久暫。大凡力巨而僅作用於

瞬息間者，其效果或較遜於力小而長時間作用之時。今自第二定律考之，卽前式 $F=Kma$ 中，平均加速度 a，在直線運動中爲 $\frac{v-v_0}{t}$，故

$$F=Km\frac{v-v_0}{t}$$

或 $$Ft=K(mv-mv_0)$$

卽以一定之力 F 作用於速度 v_0 質量 m 之物體，經 t 時間而其速度爲 v，因其物體最初之動量爲 mv_0，而 t 時間後之動量爲 mv，故動量之變化 $mv-mv_0$ 比例於力與時間之乘積。此積稱爲力時積（Impulse）。

但實際力作用於物體之某時間中，其力往往不同。今以其時間分爲若干微小時間 $t_1,t_2,t_3\cdots\cdots t_n$ 在各微小時間中之力得視爲一定，以 $f_1,f_2,f_3\cdots\cdots f_n$ 表之，則

時間 t_1 之力時積 $f_1t_1=K(mv_1-mv_0)$，但 v_0 與 v_1 爲 t_1 初期與終期之速度

時間 t_2 之力時積 $f_2t_2=K(mv_2-mv_1)$，但 v_1 與 v_2 爲 t_2 初期與終期之速度

時間 t_3 之力時積 $f_3t_3=K(mv_3-mv_2)$，但 v_2

與v_3爲t_3初期與終期之速度

………………………………………………………

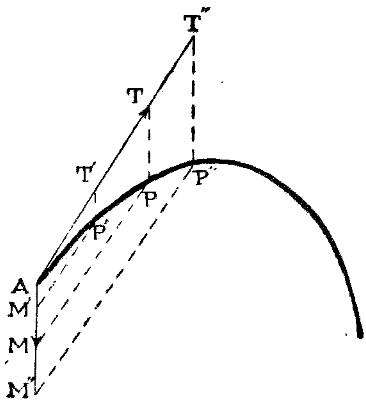
時間t_n之力時積　$f_n t_n = K(mv_n - mv_{n-1})$，

但v_{n-1}與v_n爲t_n初期與終期之速度

故　$\Sigma ft = K(mv - mv_0)$

故知無論一定或變化之力，其動量之變化，正比例於其力時積之變化也。

拋物運動　凡擲射之物體，如彈丸或自小孔流出之水滴，皆取拋物線之徑路而進行，是爲拋物運動（Parabolic motion）。今有一物A（第十三圖），擲射於不



第 十 三 圖

鉛直之AT方向，則A必進AP之徑路而進行。設擲射之速度爲V，僅以擲射力而於t時間內可進行之距離，爲

$$AT=Vt\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又設AM爲因重力而於t時間內落下之距離，則

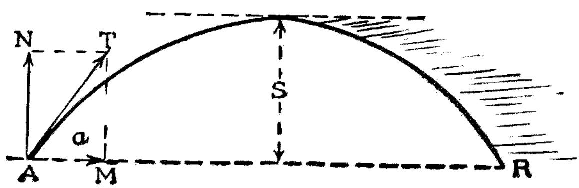
$$AM=\frac{1}{2}gt^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以運動第二定律言之，則此二力各不相妨，而各施其作用於本力之方向，故t時間之終，物體之位置必爲平行四邊形ATPM中對角線之一端。今自(1),(2)兩式消去t，則

$$AT^2=\frac{2V^2}{g}AM$$

即
$$PM^2=\frac{2V^2}{g}PT\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

此式以言辭述之，即謂平行於定直線AT所測P點距離PM之平方，等於以常數乘平行於他定直線A M所測之距離PT。而此關係，不獨P點爲然，即徑路中任何點



第　十　四　圖

P,P"均有相同之關係。故知AP線爲拋物線也。

在第十四圖中，以 AT 示擲射速度，而以之分解於水平及垂直方向，A 之擲射速度爲V，其與水平所成之角度爲 α，則

$$垂直分速度=AN=V\sin\alpha$$

$$水平分速度=AM=V\cos\alpha$$

物體擲射之時，得視爲同時與以兩分速度者；故物體垂直上昇之最高距離 S，必爲垂直分速度 $V\sin\alpha$ 完全爲重力所減失時所達之高度。即

$$S=\frac{AN^2}{2g}=\frac{V^2\sin^2\alpha}{2g}$$

此爲拋物上昇之最高距離（Maximum height）。又拋物達於最高點之時間，可自落體之公式導演而得，即

$$S=\frac{1}{2}gt^2=\frac{V^2\sin^2\alpha}{2g}$$

$$\therefore \qquad t=\frac{V\sin\alpha}{g}$$

然拋物達至最高後，必復歸於原水平線 AR 之上，其所須之時間 T 爲 t 之兩倍，即

$$T=\frac{2V\sin\alpha}{g}$$

此爲拋物之飛行時間（Time of flight）。又其進行距離，而在水平面上測得者，曰拋物之到達距離（Range），如第十四圖中之AR是也。因拋物進行於RA方向者，僅爲水平分速度 $V\cos\alpha$ 故，

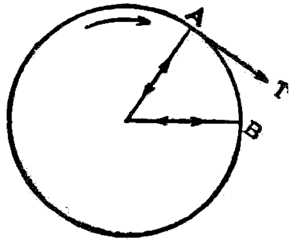
$$AR=V\cos\alpha.T=\frac{V^2\sin2\alpha}{g}$$

實際上因空氣之抵抗，大有影響於運動，故不甚適合於理論上之結果；而其速度大者，其差異尤甚。

常速圓運動　運動第一定律謂凡運動之物體，非有外力作用，則以一定速度進行於直線方向。今設有一物體，不進行於直線而取曲線之徑路者，則必有外力加於其間，使之自直線徑路而變更方向。前述之拋物運動，卽其一例也。又若火車之進行於曲線之時，必有限制正在繼續進行於直線上之發動輪，而使之進行於曲線之力，是卽軌條之抵抗力也。

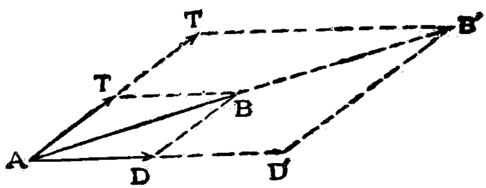
今取以繩懸重之石或錘於手，而旋轉之。設自A點運動開始，而其初速度爲AT，則依運動第一定律，A

必如第十五圖所示，將進行於切線AT，然被限制於繩，故不能進行於AT，而運動於AB圓弧。強A以進行於此方向者，即繩之張力，以手持繩而感覺於手指者也。此力經繩而傳達，若此力過強，則A必不運動於AB圓弧，而自AT切線方向飛去，尤吾人之所素知者也。若欲求其力與加速度之關係，須依運動第二定律。



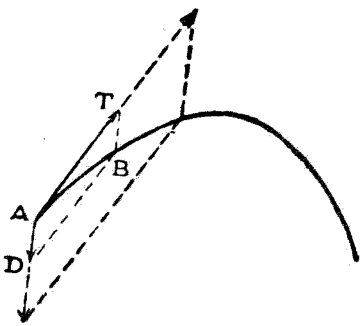
第十五圖

設有物體如第十六圖中之A，同時於AT,AD方向與以某速度，則必如前所述，於一秒之終，A之位置必在以各速度所能進行距離AT,AD爲二邊之平行四邊形之對角點B。以同理推之，在二秒之終則在B'點，其軌跡爲直線AB。

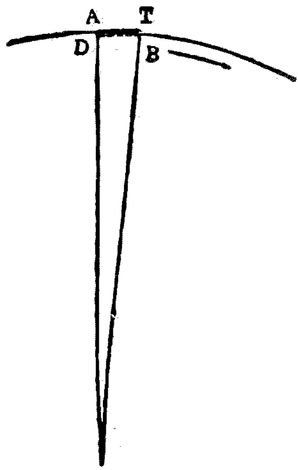


第十六圖

次如第十七圖中，以某速度擲射物體於 AT 方向，同時因重力之作用，故一秒之終，其位置必在以擲射速度及重力所能進行距離 AT,AD 爲二邊之平行四邊形之對角點 B，而其軌跡則爲拋物線也。逆言之：即以某速度擲射物體而使之循拋物線而進行時，則必有定方向之定力——即重力，不絕作用。然則以某速度擲射物體，而欲使之爲常速圓運動，（Uniform Circular motion）應加以如何之力是爲本問題之要點。在圓運動中，A以



第十七圖



第十八圖

常速運動，而如前例（第十五圖）將進行於 AT 方向，而以一定之力，不絕引之；但此引力之方向，因繩之方向而始終不同。故如應用研究擲射物時所用平行四邊形之原理，則非取其極小時間而討論之不可，蓋時間極小則得視爲方向不變者也。今以其時間爲 t，擲射速度爲 V，如第十八圖中作切線 AT，以其長表示此極小時間內所直行之距離，則

$$AT = Vt$$

又此時牽引於中心 C 之力，其方向得視爲不變，故作平行於AD之TB，與AB弧相交於B，而作ATBD平行四邊形，則B爲 t 時終物體之位置，TB爲 t 時間內因引力而牽引於中心之距離。今以此力之加速度爲 a，則

$$TB = AD = \frac{1}{2}at^2$$

自前二方程式消去t，且因BD＝AT，故

$$BD^2 = V^2 . \frac{2AD}{a} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

又以半徑爲r，則依幾何定理，

$$BD^2 = (2r - AD) . AD$$

即　$$\frac{BD^2}{2r}=AD-\frac{AD^2}{2r}$$

然t至極小之時，則AD較諸直徑，其數愈小，即$\frac{AD^2}{2r}$之極限值爲零，故

$$\frac{BD^2}{2r}=AD\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

自（1），（2）兩式，得

$$V^2.\frac{2AD}{a}=2r.AD$$

即　$$a=\frac{V^2}{r}$$

此式以語述之　即謂以常速度使物體爲圓運動時，其所必須向中心牽引之力之加速度，等於以其半徑除其速度之平方也。又若以角速度θ表之，則

$$a=\frac{\theta^2r^2}{r}=\theta^2r$$

此加速度僅變更運動之方向，而不變更其速度之大小，故名之曰半徑狀加速度（Radius acceleration）。（註）今以物體之重量爲W斑，其牽引於中心之力（重力單位）爲f，則

$$f=\frac{wa}{g}=\frac{wV^2}{gr}$$

此力稱爲向心力（Centripetal force）。又既有牽引於中心之力，則必有與此相對之抵抗力，而常欲使物體遠離中心，此力名曰離心力（Centrifugal force），其力之大小亦等於$\frac{wV^2}{gr}$。

應用離心力之實例頗多，設如以手巾着水，縛於繩端而持繩之他端迴轉，則數次急速迴轉之後，水分因離心力而飛散，手巾漸覺乾燥。今若每秒間作三次旋轉，繩長爲三十糎，W爲巾上附着之水之重量，則其離心力爲

（註）半經狀加速度，又名法線加速度（Normal acceleration）。法線之名，係對切線而言，當物體作任意曲線運動時，其加速度均得設想爲由成直角之二分加速度所合成，其一爲沿切線之方向，其他則爲垂直之方向，前者係變更速度大小之部份，稱爲切線加速度(Tangential acceleration)，通常以a_T表之；後者僅爲變更方向之部份，稱爲法線加速度，通常以a_N表之。唯在常速圓運動，速度之大小爲一定，故切線加速度a_T爲零。其加速度僅法線加速度a_N而已。

$$f=\frac{w}{g}\cdot\frac{(3\times 2\pi\times 30)^2}{30}=\frac{3197.77}{294}w=10.87w(約)$$

卽手巾水分子之離心力，約爲其重量之十倍半餘，此其所以勝過水分子附着於巾上之力而飛散也。此平易之學理，工業上應用者不少，如析乳器（Cream Separator）及砂糖清淨器（Sugar Centrifuge）之類均是也。

運動第三定律　吾人以手壓柱，得覗同時自柱有力反壓及手，桌壓地面，得覗地面亦同時有力反壓及桌。故力決非單獨得作用於一物體，而被力作用之第二物體，亦必有力而成相互之作用。運動之第一第二兩定律，僅就此相互作用之一方觀察而已。

今就此相互作用（Mutual action）之任何一方面——如上例之柱或地面——而觀察之，則其作用之手力或桌之重力，稱爲作用或原動（action），作用於其他物體——如上例之手或桌——之力，卽柱或地面之反抗力，稱爲反作用或反動（Reaction）。若反自手或桌觀察之，則其作用與反作用之稱謂相反。

故凡二物體作用間，必有反作用相因而生。作用與反作用，其力之大小相等，而其方向相反。此爲牛頓發

見之定律，稱爲運動第三定律(Third law of motion)。

今以小磁石與鐵片，置於水面浮栓之上，而使適度相近，則必見其因相互引力而漸近，至互相接觸後而靜止，是卽足以證明作用與反作用之相等也。又如自礮發射礮彈，則礮車必後退。在此等例中，小磁石與鐵片，或礮彈與礮車兩者間之相互作用，其作用與反作用之大小必相等，其作用之時間亦必相等，卽兩者所受之力時積，亦必相等可知。然其速度則以相異者爲常，蓋因其質量必不同之故也，此得自運動第二定律說明之。

設甲物體之重量爲w，初速度爲v_0，力作用後所得之速度爲v，則其力時積爲

$$\Sigma ft=\frac{w}{g}v-\frac{w}{g}v_0$$

又乙物體之重量爲w'，初速度爲v_0'，力作用後所得之速度爲v'，則其力時積爲

$$(\Sigma ft)'=\frac{w'}{g}v'-\frac{w'}{g}v_0'$$

力時積必甲乙相等，故

$$\frac{w}{g}v-\frac{w}{g}v_0=\frac{w'}{g}v'-\frac{w'}{g}v_0'$$

最初甲乙均靜止時，其初速度均爲零，故上式爲

$$\frac{w}{g}v=\frac{w'}{g}v'$$

故　$$wv=w'v'$$

或　$$\frac{v'}{v}=\frac{w}{w'}$$

卽以力作用於靜止之物體而起運動時，其各所得之速度，反比例於其重量。

壓力　如前節所述，力非單獨發現，必存於甲乙二物體間，或一物體之甲乙二部分。其互相壓迫者，則稱爲壓力（Pressure)。卽壓力如桌與地面，發生於兩固體間；或如貯水與油之器，發生於固體於液體間；又或水面或地面上之空氣，發生於液體與氣體或固體與氣體之間；甚至如固體，液體，氣體之內部，亦莫不有壓力存在也。

壓力無論何種，必因其所加面積之大小，而其強弱大異。通常在壓力作用方向取垂直斷面，其單位面積所作用之力，稱爲壓力之強度（Intensity of Pressure)，普通略稱曰壓力。而斷面全積上所作用之壓力，特稱爲

全壓力（Tolal pressure）。如空氣之壓於水面或如重錘之作用於較小斷面，則斷面各部必受同樣之壓力，設斷面積 s 上所加之全壓力爲 F，壓力之強度爲 P，則

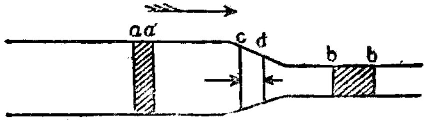
$$P=\frac{F}{s}$$

設如第十九圖有置於水平而廣狹不同之水管，使液體以定量而流於其中，若管徑甚大而可置液體與管壁間之摩擦於度外，則就一斷面間所有斷面上各部所受壓力之強，可視爲相等。但廣斷面壓力之強，與狹斷面壓力之強必異，今設 a 斷面之面積爲 s_a 其速度爲 V_a，b 斷面之面積爲 s_b，其速度爲 V_b，液體在管中自左向右流動，則單位時間液體之流量，在 a 斷面爲 V_as_a，在 b 斷面爲 V_bs_b，而因流量常定，故

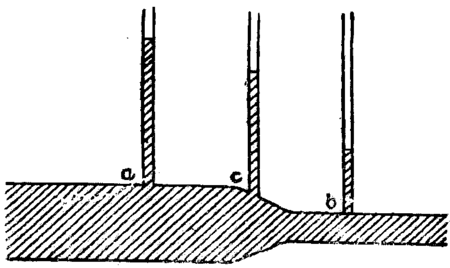
$$V_as_a=V_bs_b \qquad 之 \frac{V_b}{V_a}=\frac{s_a}{s_b}$$

在圖中 $s_a>s_b$，故 $V_a<V_b$，卽液體在 b 斷面之速度，必較大於在 a 斷面之時。如是則在 cd 間之液體微小部分，漸離廣處則速度漸大。換言之：卽自 c 斷面而向 d 斷面流動者，必爲加速運動。此時 c 處壓向右方之力，自必須較大於 d 處壓向左方之力也。普通以定量流於管中之

液體，其壓力在廣斷面上必較大也。又若第二十圖在種



第　十　九　圖



第　二　十　圖

種斷面設直立之枝管，則各枝管中水面之高下，卽可實驗壓力之大少也。

壓力之單位，爲單位面積上所受單位之力。力之單位既有絕對單位及重力單位兩大系統，則壓力之單位可知亦有兩系統。在絕對單位糎克秒系，壓力之單位用每平方糎達，或曰一巴（Bar）。一巴之百萬倍，卽$10^6\times$巴，稱曰㔶（Megbar），約等於一氣壓。重力單位之壓力單位，爲一平方糎受一重量瓩或一重量克之壓力。

擊力 以鎚擊物體，或使二物體互相衝突時，則於短時間內起動量之變化，能以大力作用於二物體之間，此種力特稱爲擊力（Impulsive force）。設其力爲 f，時間爲 t，則其力時積爲 ft，因其時間極小，故 f 極大也。

又若噴射之水或蒸汽，以無數質點連續衝擊於固定板之時，其起因於各質點衝擊之力，相集而連續作用於板。欲求此壓力，則求其單位時間中動量之變化可也。

設噴射之水或蒸汽，以定比量且以與板面垂直方向，與衝擊於固定之板，假定不因板之反動，而水或水蒸氣反射，且其速度終至於零，此時力係一定，今以 F 表之，在單位時間則 $t=1$，故力時積爲 F 也。又初速度 V_0 之水或蒸汽，其終速度爲 $v=0$，若其單位時間中流出之質量爲 $\frac{w}{g}$，則其動量之變化爲 $\frac{w}{g}V_0$，而力時積卽等於其動量之變化，故

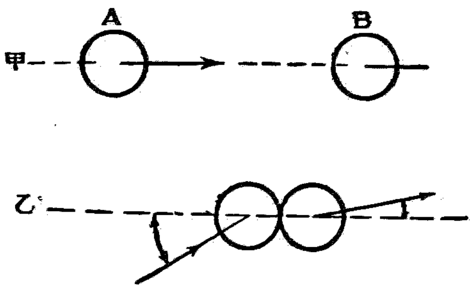
$$F=\frac{w}{g}v_0\text{重力單位}$$

若板受衝擊而以 v' 之速度運動，則水或蒸汽在衝擊後其速度亦不爲零，而或爲 v，此時板之運動方向之擊力，卽以水或蒸汽在衝擊前後間關於板之運動方向之速度變

化，代入上式之 V_0 可也。

彈性球之衝突　普通兩物體相衝突，其理必甚複雜。因物必爲種種材料所組成，其首受衝突之部分，必先減其速度，至其力消費於種種部份，而後全體靜止。其理甚難，非此處所能說明；玆僅就簡單而同質如球之衝突論之。

在兩球衝突中，如第二十一圖之甲所示，若兩球衝



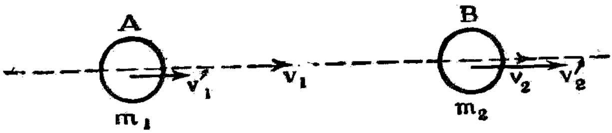
第　二　十　一　圖

突前速度之方向與連結兩球中心之線一致，則曰向中衝突（Central　collision）。又若如圖中乙所示，其方向斜者則曰斜向衝突（Oblique　collision）。斜向衝突時球必轉動，故較複雜也。

普通兩球衝突時，必不合爲一體，而必以與前相異

之速度而分離。此因兩球衝突時，除稍起變形外，同時兩球各生方向相反之彈力，而互相反撥之故也 。

今如第二十二圖中，A,B 兩球其質相同，A 球之質量 m_1，重量 w_1，衝突前之速度為 v_1，衝突後之速度為 v_1'；又 B 球之質量 m_2，重量 w_2，其衝突前後之速度為 v_2 及 v_2'。假定速度之右向者為正，則若 $v_1>v_2$，必起衝突，其結果普通必 B 增速度而 A 則減少。



第二十二圖

因衝突而 A 所失去動量之變化，為 $m_1v_1-m_1v_1'$

因衝突而 B 所得動量之變化，為 $m_2v_2'-m_2v_2$

然因衝突中作用於各球之力時積相等，故 A 球所失去之動量，必與 B 所得者相等。即

$$m_1v_1-m_1v_1'=m_2v_2'-m_2v_2$$

故 $$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'$$

若質量用重力單位代之，則得

$$w_1v_1+w_2v_2=w_1v_1'+w_2v_2'$$

以文字表之，則各球所有衝突前動量之代數和，等於衝突後之動量之代數和。換言之：即謂兩者之動量之代數和，不因衝突而變化也。然如後章所述之動能，則因衝突而減少，蓋因動能得變爲音或熱之能也。

如衝突體全無彈性，卽所謂非彈性體者；則衝突後必合爲一體而運動，此時以其衝突後之共通速度爲 v'，則前式中 $v_1'=v_2'=v'$，故前式爲

$$m_1v_1+m_2v_2=(m_1+m_2)v'$$

$$w_1v_1+w_2v_2=(w_1+w_2)v'$$

彈性兩球於衝突後，必以各別之速度而分離，其衝突後兩球漸遠之相對速度，曰分離速度（Velocity of separation)；衝突前兩球漸近之相對速度，曰接近速度（Velocity of approach)。而其比則關於其速度之大小僅因球之種類，而有種種定數。此爲牛頓氏所發見關於彈性球衝突之定律，其比曰反撥係數（Coefficient of restitution)，以 e 表之，則

$$e=\frac{\text{分離速度}}{\text{接近速度}}=\frac{v_2'-v_1'}{v_1-v_2}$$

其值如下表：

玻璃球與玻璃球	0.94
象牙球與象牙球	0.81
鐵球與鐵球	0.61
鐵球與鉛球	0.13

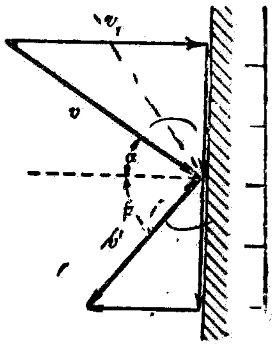
固定壁面彈性球之衝突 重量w_1之彈性球，以v_1之速度，垂直衝突於反撥係數 e 之固定壁面時，則必以 ev_1 之速度而反射。卽以衝突後之反射速度爲 v_1'，因其方向必與投射速度v_1之方向相反，故

$$v_1'=-ev_1$$

此式得由前式 $w_1v_1+w_2v_2=w_1v_1'+w_2v_2'$中，以 w_2 爲固定面，$v_2=0$，$v_2'=0$ 代入，卽易得也。

次就平滑而無摩擦之固定面上發生斜向衝突時論之。設以重量 w_1之彈性球，以斜方向投射於反撥係數 e 之固定面上，如第二十三圖所示。其投射速度爲 v，反射速度爲 v′，今以此分解爲平行及垂直於固定面之分速度，

因係平滑之面，故沿於平面之平行分速度初無變化，僅就其垂直分速度考慮之可也。今以投射速度及反射速度所有沿於固定面之垂直分速度爲v_1及v_1'，則與上相同，亦得



第二十三圖

$$v_1'=-ev_1$$

次以投射角爲α，反射角爲β，則投射速度所有沿於平面之平行分速度爲$v_1\tan\alpha$，反射速度之平行分速度，則爲$v_1'\tan\beta$。因平行分速度於衝突前後，絕無變化，故

$$v_1\tan\alpha=v_1'\tan\beta=-ev_1\tan\beta$$

卽 $$\tan\alpha=-e\tan\beta$$

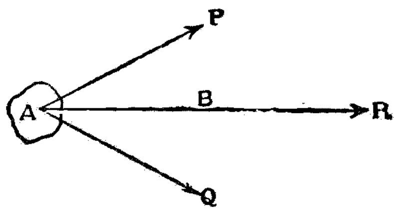
但通常彈性體中，$0<e<1$，故

$$\alpha<\beta$$

卽通常以彈性球衝突於平滑面上時，則其反射角必較投射角爲大。

第四章　力之合成及分解

力之平行形　如第二十四圖中，有P及Q二力，作用於物體A，而A體不移動於P之方向，亦不移動於Q之方向，而其移動方向恰如其中間AB。是即P，Q二力，同時作用於物體，得以他一力R代之。如此單一之力，



第二十四圖

其作用之結果，恰與二力或二力以上之結果相同者，稱爲此二或二以上定力之合力（Resultant force）。求此合力，得適用加速度之合成法。蓋力爲質量與加速度之乘積，則作用於同物之力，自正比例於其加速度，故今以直線之長以表示加速度，當然亦得以其長以表示力也。是以關於加速度中平行形之法則，即可適用於力之合成

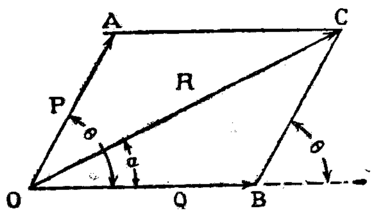
法，是謂力之平行形（Parallelagram of force）。卽自任意一點作二直線，以表作用於物體之二力，今以此二線爲隣邊，而作平行四邊形，則自此點所作之對角線，卽示二力之合力之大小及方向。

二力作用於物體之一點，而其方向互相會合者，則其合力易自上法求之。今如第二十五圖，作 OA 及 OB 以示 P 及 Q 二力，而作平行四邊形，則測其對角線OC之長，卽可得合力 R 之大，又以量角規（Protractor）測得 COB 角之角度，則可得其方向。若此關係以公式示之，則爲

$$R=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\theta}$$

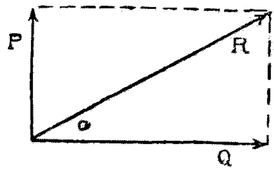
$$\frac{\sin\alpha}{P}=\frac{\sin\theta}{R}=\frac{\sin(\theta-\alpha)}{Q}$$

二定力之合力，因其夾角不同而有大小。



第二十五圖

第 二 十 六 圖



第 二 十 七 圖

第 二 十 八 圖

第一 $\theta=0^\circ$, 則 $R=P+Q, \alpha=0^0$（第二十六圖）

第二 $\theta=90^\circ$, 則 $R=\sqrt{P^2+Q^2}$, $\sin\alpha=\frac{P}{R}$

（第二十七圖）

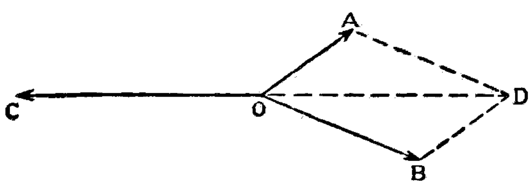
第三 $\theta=180^\circ$, 則 $R=P-P$ 或 $Q-P$, $\sin\ =0$

（第二十八圖）

故二定力之合力，因 θ 之值而消長。但 $\cos\theta$ 之最大值為（$+1$），其最小值為（-1），故知R之最大值在 $\theta=0^\circ$ 之時，而其值為 $P+Q$；R之最小值，則在 $\theta=180^\circ$ 之時而其值為 $P-Q$。而因 θ 之大小，消長於其間也。

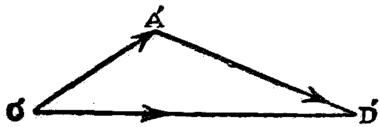
力之平衡　二力作用於物體，其大小相等而其方向正相反者，則其作用互相平均，而物之動靜不稍變。又若三或三以上之力，同加於一物，其中一力與其他諸力之合力，大小相若而方向相反者，則此各力亦互相平均，而亦不稍變更其物之動靜。卽物體之本係運動者，則以其以前之速度而直線進行於以前之方向；若物體本係靜止者，則依然靜止也。如此二或二以上之力，同時加於一物，而其作用互相平均者，曰力之平衡（Equilibrium of forces）。

力之三角形　先如第二十九圖所示，求得OA,OB二力之合力OD，若以與OD同大之力OC，加於OD之正反對方向，則如前所述，物體O決不稍變其動靜，卽OA,OB及OC三力爲平衡也。然此三力之方向及大小，卽如三角形OAD之三邊OA,AD,DO所表示，故作與三角



第二十九圖

形OAD相似之三角形 O'A'D'（第三十圖），則其三邊應順次比例於三力。是以得定理如下：



第 三 十 圖

三力互爲平衡時，取平行於三力之方向引三線而作三角形，則此形之三邊，得順次與三力成比例。

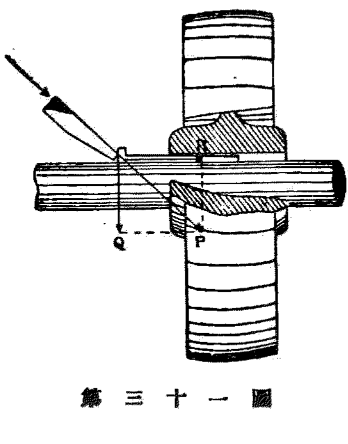
自此定理，得易求二定力之合力。例如欲求OA,OB二力之合力，可先作 O'A,'A'D'以示二力，然後聯結 O'D'，則 D'O'之長，卽示合力之大， 欲知其方向， 則可順次作矢號於O'A,'A'D'，至D'O'則矢取反對方向可也。

此定理之逆亦係正確，卽爲三力作用於一點而爲平衡之條件，此爲力之三角形（Triangle of forces）。卽謂凡三力會於三點者，則引平行於三力之三線，以作三角形之三邊，而順次比例於三力者，則三力成平衡。

力之分解 力之分解，亦與加速度之分解相同。設以一定力分解於定方向，可以其力爲對角線，以表示分力方向之二線爲其隣邊，而作平行四邊形，則二邊之長，

即示分力之大小。

二定力之合力，因其夾角之大小而消長，故一定力之分力，亦隨分力方向之變更而異。然實際因力所作用之物體之結構上，分力之方向常有一定。例如以調速輪固定於軸之時，如第三十一圖所示，常以鐵杆栓置之頭部，而以鎚擊之，此時擊栓之力P，可分爲 R,Q 二分力，Q 係直角壓迫於軸，而消於栓溝底面之抵抗力，R 則以與軸平行之方向作用於栓，而使栓進入軸上之栓溝中者也。此時若以同大之力，加於其正反對方向，則栓固自靜止，而無進入栓溝中之可能。



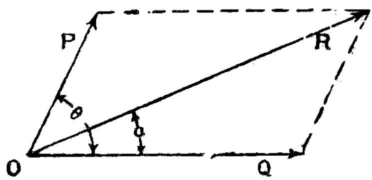
第三十一圖

第三十二圖中，R 爲一定力，分力之夾角爲 θ，Q 與 R 所成之角爲 α，則

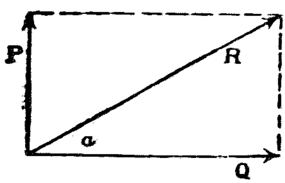
$$P=\frac{R\sin\alpha}{\sin\theta}$$

$$Q=\frac{P\sin(\theta-\alpha)}{\sin\alpha}$$

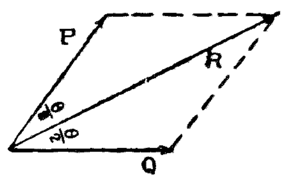
今舉一二特例如左：



第三十二圖



第三十三圖



第三十四圖

第一 $\theta=90^\circ$（第三十三圖）

$$P=R\sin\alpha,\quad Q=R\cos\alpha$$

第二 $\alpha=\theta-\alpha$，即 $\alpha=\frac{1}{2}\theta$（第三十四圖）

$$P=\frac{R\sin\alpha}{\sin\theta}=\frac{R}{2\cos\frac{1}{2}\theta}\quad Q=P=\frac{R}{2\cos\frac{1}{2}\theta}$$ 或

以定力分解之時，作三角形而求其分力，亦甚簡便。

茲舉一例而就前所述之分力說明之。

例——如第三十五圖所示，繩之一端固定於壁上一點A，而懸於同水平位置上之滑輪B，再以滑圈懸十瓩重量於AB間繩之中點C，今懸P重於繩之他端，而欲使其於ACB角120度時平衡，問P重幾何？又問150度時如何？170度時如何？

此例中十瓩之方向，與繩之方向，自係同角，故繩之張力，兩方相同。卽

$$P=\frac{R}{2\cos\frac{1}{2}\theta}$$

$$\theta=120^\circ,\quad P=\frac{10}{2\cos60^\circ}=\frac{10}{2\times\frac{1}{2}}=10\text{瓩}$$

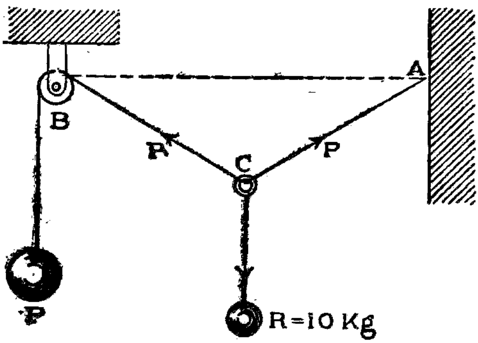
$$\theta=150^\circ,\quad P=\frac{10}{2\cos75^\circ}=\frac{10}{2\times0.26}=19.2\text{瓩}$$

$$\theta-170^\circ,\quad P=\frac{10}{2\cos85}=\frac{10}{2\times0.087}=58\text{瓩}$$

$$\theta=176^\circ,\quad P=\frac{10}{2\cos 88^\circ}=\frac{10}{2\times 0.035}=135\text{瓩}$$

$$\theta=178^\circ,\quad P=\frac{10}{2\cos 89^\circ}=\frac{10}{2\times 0.0175}=286\text{瓩}$$

$$\theta=179^\circ 30',P=\frac{10}{2\cos 80^\circ 45'}=\frac{10}{2\times 0.006}=833\text{瓩}$$

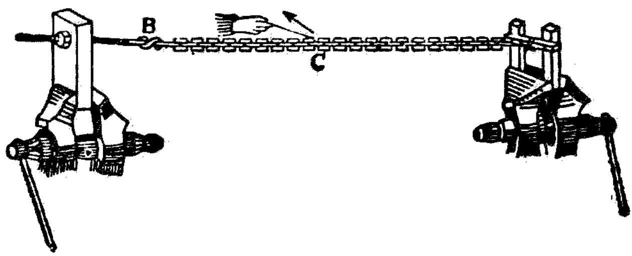


第 三 十 五 圖

由此觀之，可知P之張力，因C之位置而大異，ACB角之角度愈大，則P愈大，ACB角爲180°時，則P爲無限大。

此理可以實地見聞之事證明之。如牽引於水平之繩，雖有萬夫之勇，決不能使之伸爲眞確之平直。又若電線在兩柱之間，必稍帶弧狀，卽最初裝置電線之時，或用

特殊器具以大力牽引，亦不能使爲眞直，皆此理也。若懸繩下垂，而自下牽引，則易使繩破壞。關於此事有一甚有趣味之試驗，卽如第三十六圖中，AB爲長約八尺之鐵鍊，其一端連結於螺桿B，他端則縛於方約半寸長約五寸之杉材，此杉材之兩端，以螺釘旋入二鐵杆，且以二鐵杆緊夾在老虎鉗，使之不能稍動。今以螺旋絞緊鐵鍊之B端，而於其中央，裝以力約能勝二三十斤重量之繩，而靜靜牽引之，則A材卽被切斷。但欲折斷方約半寸長約五寸之杉材，最少須有百斤之力，今乃以未及二三十斤之力而竟斷之，則自繩傳於鐵鍊之分力其大可知矣。

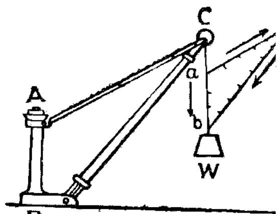


第三十六圖

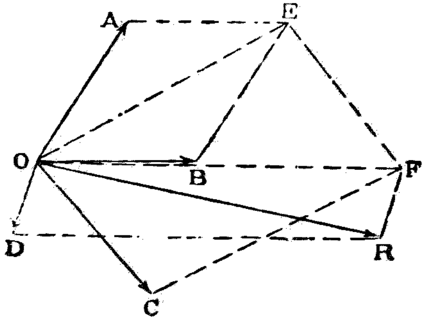
列——有如第三十七圖所示之起重機（Crane），亦得

以力之三角形求得其各部所作用之分力。圖中AB為直立之柱，BC為腕，AC為聯結A點與C點之桿。今於C點懸以重量W，而假定其重為3噸，欲求作用於AC及BC之分力如何，可先以適當之尺度，沿CW鉛直線取ab=3噸，然後自b作平行於BC之bc，自a作平行於AC之ac，使與bc相交於c，則加於BC之壓力，可測bc之長而知之，而加於AC之張力，亦可測ac之長而知之，即8噸與6噸是也。

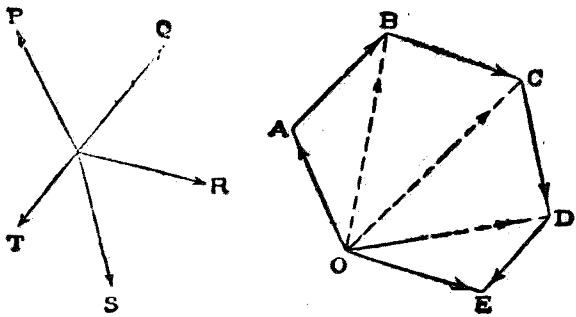
二力以上之合成法 力之平行形之原理，亦得適用於同平面上方向不同之諸力之合成。設如第三十八圖，求作用於O點各力OA,OB,OC,OD之合力，可先求OA,OB之合力OE，次求OE,OC之合力OF，最後所求得OF,OD之合力OR，即為諸力之合力也。但求諸力之合力之時，以應用力之多角形定理為簡，即如第三十九圖，P,Q,R,S,T為已定之諸力，可先於紙上取一點O，自O作平行於P之OA，以示P之方向



第三十七圖



第三十八圖



第三十九圖

及大小，次自A作平行於Q之AB，以示Q，似此順次作線，而以最後之點E，與原點O相聯結，則得線OE，是即所求諸力之合力也。至其方向決定之方法，則可在OA等線上各附矢頭，至最後之邊OE，則記矢頭於與前相

反之方向。欲知其理由，可於圖上作OB,OC,DO諸線，而以力之三角形解釋，自易了然矣。

力之多角形 今若於合力 OE 之反對方向，而加以相等之力，則諸力必互相平衡。故得定理如次：

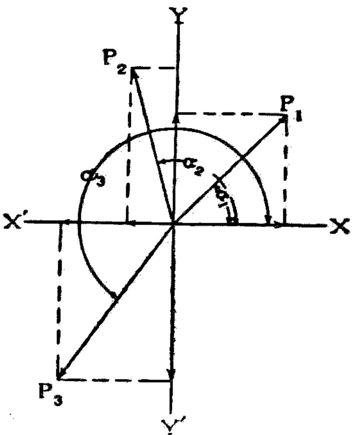
凡作用於一點之諸力，得順次作邊而圍成一多角形者，則諸力互相平衡。

是曰力之多角形（Polygon of forces），爲圖法力學（Graphical Statics）中之重要定理。

同在平面上會於一點諸力之直角分力 前所述以一力分解於直角之法，得應用於二力以上而求其合力。設如第四十圖中，P_1,P_2,P_3 等爲已定之力，其會合之點爲O，今經過O點，作直交之 XOX′,YOY′ 之縱橫軸，P_1, P_2,P_3與XOX′所成之角爲 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等，則各力沿 XOX′ 方向之分力，爲 $P_1\cos\alpha_1, P_2\cos\alpha_2, P_3\cos\alpha_3$，而沿於YOY′方向之分力，則爲$P_1\sin\alpha_1$, $P_2\sin\alpha_2$, 及 $P_3\sin\alpha_3$，而此二組分力，各作用於同直線之上，故其合力卽等於其代數之和今以 XOX′ 方向上各分力之合力爲 X，YOY′方向上各分力之合力爲Y，則

$$X = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y = P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + P_3\sin\alpha_3 + \cdots\cdots\cdots\cdots$$



第四十圖

所求諸力之合力，卽X,Y之合力也，以R表之，則

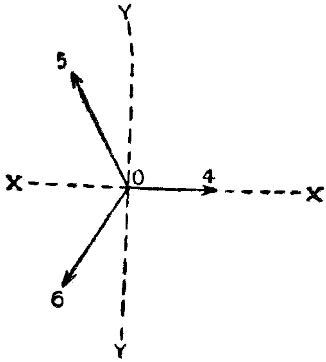
$$R^2 = X^2 = Y^2 \cdots\cdots(1)$$

以R在XOX'線上之角爲θ，則

$$\tan\theta = \frac{Y}{X}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

例——有4,5,6瓩之力，互以120°作用於一點，求合力。

解此問題，可如第四十一圖，先假定一力之方向爲XOX'，則



第四十一圖

$$X=4\cos0^\circ+5\cos120^\circ+6\cos240^\circ$$

$$=4-2.5-3$$

$$=-1.5$$

$$Y=4\sin0^\circ+5\sin120^\circ+6\sin240^\circ$$

$$=0+\frac{5\sqrt{3}}{2}-3\sqrt{3}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

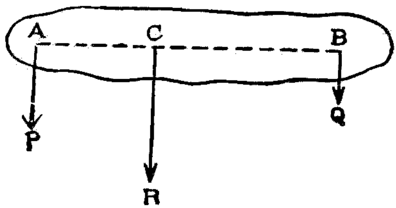
$$\therefore R=\sqrt{3(-1.5)^2+(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2},=\sqrt{3}=1.73\text{尅}$$

又 $$\tan\theta=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \theta=210^\circ$$

在(1)式中，欲R爲零，則非X,Y均爲零不可。以辞述之，卽謂諸力在同平面內作用而平衡者，則分解於直角之分力，其代數和必等於零也。

平行力之合成　二平行力(Parallel forces) P,Q，如第四十二圖中，以同方向作用於某物體之A及B點，



第四十二圖

則其合力R，其大小自必等於P與Q之和，至於方向如何，可假定合力與AB線會合之點爲C，則

$$AC : BC = Q : P$$

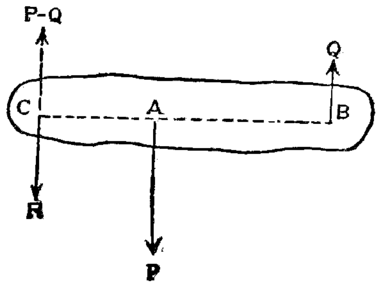
卽　　$$Q \times BC = P \times AC$$

蓋因若以C點支持物體，則物體ACB能保平衡之故也。

又如第四十三圖，二平行力P,Q作用於反對方向者，則可以BA延長於大力P之一方至C點，使

$$P : Q = BC : AC$$

此時P,Q二力之合力R，與二力平行，而作用於與P力相同之方向，其大爲P—Q。何則？蓋若設有P—Q之力，



第 四 十 三 圖

以與R相反之方向加於C點，則是物必平衡。此Q力及P—Q力，爲二平行力而作用於同方向者，故其合力爲Q+(P—Q)即等於P也。又因作法

$$P:Q=BC:AC$$

$$(P-Q):Q=AB:AC$$

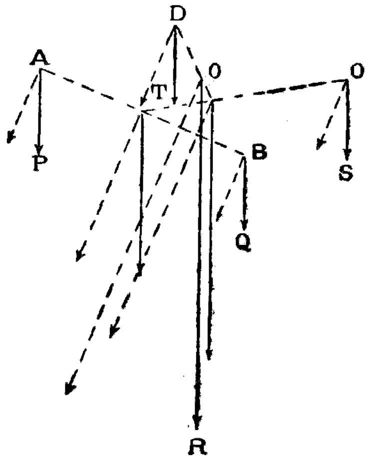
即 $$(P-Q)AC=Q\cdot AB$$

故方向相反之二平行力P,Q，其合力R爲P－Q，而其着力點(Point of action)則爲以二力之反比，外分AB線之點也。

如有二以上平行力而求其合力時，可先任意擇其中

之二力，求其合力，次以此合力與任擇其餘一力再求合力，如此順次求之，至最後之合力，卽爲諸平行力之合力也。

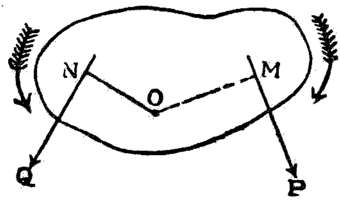
平行力之合力所作用之點，曰平行力之中心(Centre of parallel forces)。若各平行力所作用之諸點，及力之大小一定，則雖其共通之方向，任何變更，其中心之位



第　四　十　四　圖

置，始終不變。此爲平行力中心之特殊性質，卽如第四十四圖中所示者是也。實際上求平行力中心之方法，以依力矩之原理，爲最便捷。

力矩 玆有某物體，如第四十五圖，得就定點O而自在迴轉。今以P力在離O點OM距離之處，以MP方



第四十五圖

向作用之，則物體必將迴轉於右矢之方向，而其將使迴轉之傾向，固因P力大小而有強弱，亦因OM之長短而增減。故物體將迴轉於定點之傾向，即可因力之大小與自定點垂直距離之乘積而測定之也。此乘積曰該力之力矩(Moment of force)，垂直距離OM曰P力之臂(Arm)在此例中P力對於定點O之力矩，為$P \cdot OM$。

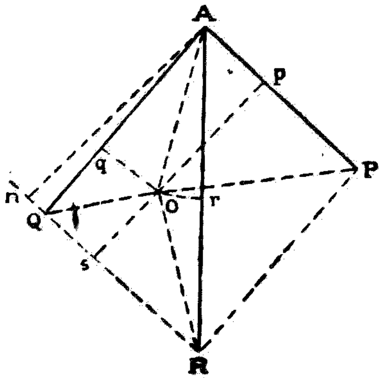
又若於P之異側，有Q力以ON之距離而作用於物體，則物體必將取左矢之方向而迴轉，而Q之力矩必為$Q \cdot ON$。故凡力之作用於物體，因其着力點所對於定點之位置而不同，或迴轉於與鐘錶時針相同之方向，或迴轉於其相反之方向。此兩種方向，通常以正負號示其區

別，至於以何者為正，何者為負，原屬任意，若以P之力矩記為正號，則Q之力矩記以負號可也。

力矩之定理如次：

在同平面上之諸力，其對於任意點各力矩之代數和，等於其合力之力矩。

先以不平行之二力證之。如第四十六圖中，有P,Q



第四十六圖

二力作用於A，而R為其合力，茲先作平行四邊形APRQ，取任意一定點O，自O向P,Q,R作垂線op, oq, or，則

$$P \cdot op - Q \cdot oq = R \cdot or$$

今試證之，作OA,OP,OQ及OR線，自A點作垂直於

QR 之 An，更引長 po 至 s，則

$$po = An - os, \quad AP = QR$$

故 $$\triangle AoP = \frac{1}{2}op \cdot AP = \frac{1}{2}(An - Os)QR$$

$$= \frac{1}{2}An \cdot QR - \frac{1}{2}Os \cdot QR$$

$$= \triangle AQR - \triangle QOR$$

$$= \triangle AOQ + \triangle AOR$$

卽 $$\frac{1}{2}P \cdot op = \frac{1}{2}Q \cdot oq + \frac{1}{2}R \cdot or$$

$$\therefore P \cdot op - Q \cdot oq = R \cdot or$$

若以O點取於形外，亦可證明各分力之力矩，其代數和等於其合力之力矩也。

次就二平行力而證此定理。設如第四十七圖，P,Q 爲二平行力，R爲其合力，而 A,C,B 爲三力之着力點，今取任意之點 O，而作垂線 Oprq，則

$$P \cdot op + Q \cdot oq = R \cdot or$$

何則？因

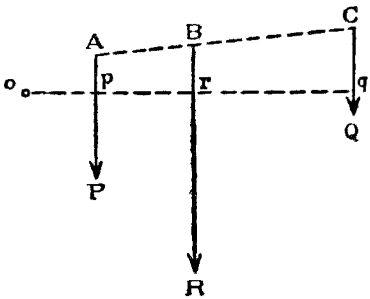
$$P \cdot op + Q \cdot oq = P(or - pr) + Q(or + rq)$$

$$= (P + Q)or + Q \cdot rq + P \cdot pr$$

然　$\dfrac{P}{Q}=\dfrac{CB}{AB}=\dfrac{rq}{pr}$，　即 $Q\cdot rq=P\cdot pr$

又　$P+Q=R$

故　$P\cdot op+Q\cdot oq=(P+Q)or=R\cdot or$



第四十七圖

方向不同之二平行力，亦得以同法證明之。

次就作用於同平面內之任意諸力而證明之。設有 P, Q, S, T 諸力，可先求 P 與 Q 之合力 R_1，次求 R_1 與 S 之合力 R_2，終求 R_2 與 T 之合力 R，則 R 即爲 P,Q,S,T 諸力之合力。今擇任意之定點，而求各力之力矩，則

R 之力矩 $=R_2$ 及 T 之力矩之代數和

R_2 之力矩 $=R_1$ 及 S 之力矩之代數和

R_1 之力矩 $=$ P 及 Q 之力矩之代數和

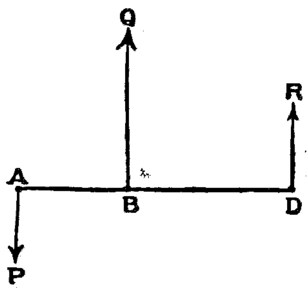
$\therefore$ R 之力矩 $=$ P,Q,S,T 之力矩之代數和

凡作用於同平面之諸力而爲平衡，其合力當然爲零，此時其面上任何點所取之合力之力矩，亦必爲零也明矣。故以力矩之定理而適用平衡之諸力，則如次：

同平面上諸力爲平衡者，則任何點所取諸力之力矩，其代數和必爲零。

此定理凡在同平面上之諸力，無論是否會於一點，及是否平行，均可適用。

偶力 平行力之合成已如前述，茲就兩平行力大小相等方向相反者之一種論之。設有平行力 P 與 Q，作用



第四十八圖

於反對方向，假定 Q 爲較大之力，如第四十八圖中，

$$R = Q - P$$

而其着力點爲D，則BD之値如次：

$$\frac{BD}{AD}=\frac{P}{Q}$$

則 $$\frac{BD}{AD-BD}=\frac{P}{Q-P},\quad 即\quad BD=\frac{P}{Q-P}AB$$

若$P=Q$. 則$R=0$, $BD=\infty$，其意蓋謂在有限距離上無P,Q之合力存在，卽以單一之力，加於任何點上。決不能與P,Q平衡也。如此大小相等而方向相反之二平行力，稱爲偶力(Couple)。其間之垂直距離，稱爲偶力臂(Arm of couple)。其一力與臂之乘積，曰偶力矩(Momentof couple)。

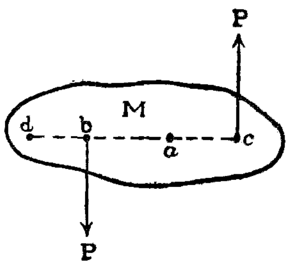
偶力旣無合力，故作用於物體決無全體移動之理。若係自由物體，則其作用可使之就實質之中心而迴轉，又若物體之有定軸者，則使之迴轉於軸心之周圍，且無論定軸在任何位置，皆有一定之力矩。設如第四十九圖中，有P,P偶力作用於M物體，而以a爲軸，則

$$P\cdot ac+P\cdot ab\quad 卽\quad P\cdot bc$$

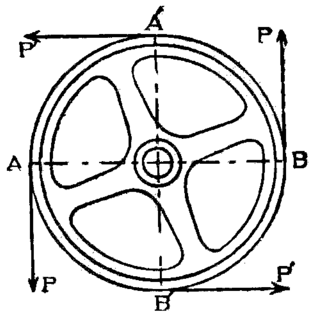
斯時此物體以$P\cdot ba$之力矩而迴轉於與時針相反之方向。又設以d爲定軸，則

$$P \cdot dc - P \cdot db = P \cdot bc$$

此物體亦以 $P \cdot bc$ 之力矩而迴轉於與時針相反之方向也。故知偶力矩必爲常數。



第四十九圖



第五十圖

機械中如以兩手迴轉之手輪(Hand wheel), 如第五十圖所示者，其輪心受兩手所作用之等力，是卽偶力之一例也。

偶力雖不能以單一之力使之平衡，如欲使爲平衡，須加以力矩等大而反向之偶力其理得證明如下:

設如第五十一圖中，有 P,P 及 Q,Q 兩對偶力作用於某物體，其力矩相等而方向相反者，此時四力互相平衡。蓋若任取一點O而作垂線 Oab 及 mon 於 P,P 及

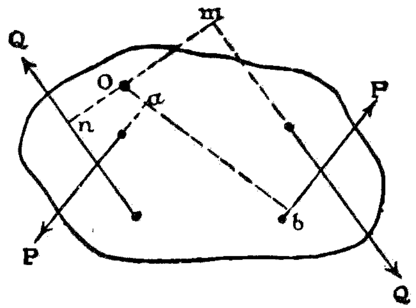
Q,Q，求其力矩之代數和，則

$$Q\cdot om+Q\cdot on-P\cdot ob+Poa=Q\cdot mn-P\cdot ab$$

然自題意，

$$Q\cdot mn-P\cdot ab=0$$

故知諸力對於O點之力矩，其代數和爲零也。



第五十一圖

同平面上力之平衡條件　就以上所述會於一點之力，平行力，偶力諸理而概括之，則得力之平衡條件如次：

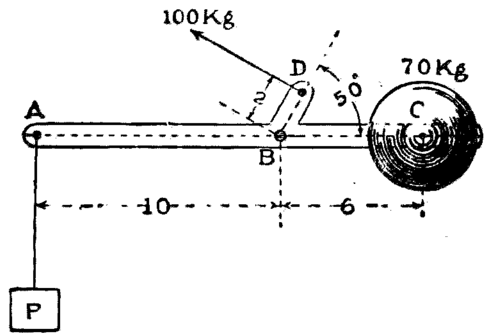
凡在同平面而作用於任意方向之力，其保持平衡之要件，爲

第一　分解於任何縱橫軸方向之直角分力，其代數和須各爲零。

第二 就任一點所求之力矩，其代數和須各爲零。

此條件之理甚充分，而實用上實爲必要，蓋凡同平面上諸力合成之結果，不問其力方向如何，其合力或爲零，或爲單一之力，或爲偶力，三者必居其一焉。若所定之力，旣合於第一條件，則必非單一之力，而又合於第二條件，則非偶力可知，自非爲零不可也。凡關於力之平衡諸問題，均得據此條件以解之。

例——如第五十二圖所示，ABC 爲以B爲支點之直桿，而架重 70 瓩之球於C點，且於枝桿 BD 之端，以直角方向加以100瓩之力，今欲懸P錘於A點，而使ABC水平，求P之重及壓B支點之力。



第五十二圖

假定B點之反抗力爲R，其與BC所作之角爲θ，先以各力分解於水平及垂直方向，則因第一條件，得

$$R\cos\theta - 100\cos 40^\circ = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$R\sin\theta - 100\sin 40^\circ - P - 70 = 0 \cdots\cdots (2)$$

次就B點而求力矩，更因第二條件，得

$$P \times 10 + 100 \times 2 - 70 \times 6 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

故得　$P = 22$瓩，$\theta = 20^\circ$(約)，$R = 8145$

第五章 重心

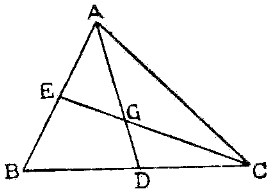
重心 組成物體之各分子所受之地心引力，實際上得視爲平行者。若支持此平行諸力之中心，則物體得保持平衡，而如前所述，平行力中心之位置不因諸力之共同方向變更而變更，故無論在任何位置，支持其中心，則物體必可平衡，此中心曰重心（Centre of gravity）。是以物體之重心爲一定點，卽支持其點，則物體在任何位置，均能平衡之一點也。

求重心法 （一）如實質無粗密之圓形，平行四邊形，矩形，正方形之板，或球，直柱體，圓柱等類，其重心均在形體之中心。

（二）三角形之重心，在三等分中線之點。

如第五十三圖所示之 ABC 三角形薄板，而以平行於底邊之線，分爲無數小片，每片之重心必在其中央，故全形之重心必在中線 AD 之上，以同理推之，全形之重心亦必在中線 OE 之上，故其交點G卽爲重心，卽三

等分 AD 之點也。



第五十三圖

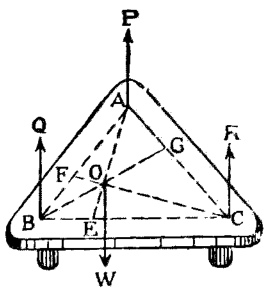
以等量之三物體，分置於三角形 ABC 之角端，其重心必與三角形之重心一致。設 W 為各體之重量，B,C二點（第五十三圖）所置W之合力為2W而在D點，又D點之2W與A點之W，其合力在三等分 AD 線之G點，故置重物於三角形桌子之重心，則各脚所負擔之重量——即各脚之壓力——相同，均為全量之三分之一。

以W之重量，置於第五十四圖所示之三角臺上之任意點O，而假定 P,Q,R 為三脚所負擔之重量，今經過O作AE,BG,CF，則因力矩之定理，

$$\frac{W}{P}=\frac{AE}{OE}=\frac{\triangle ABC}{\triangle BOC}$$

$$\frac{W}{Q}=\frac{BG}{OG}=\frac{\triangle ABC}{\triangle AOC}$$

$$\frac{W}{R}=\frac{CF}{OF}=\frac{\triangle ABC}{\triangle AOB}$$

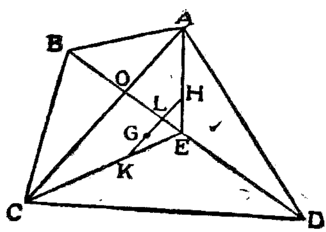


第五十四圖

$$\therefore P:Q:R=\triangle BOC:\triangle AOC:\triangle AOB$$

故置重物於三角形桌面之任何部份，其各脚負擔之重，約有一定，且卽以是桌置於較凹凸之地面，亦能穩而不欹也。然以四脚之桌上置以重物，則各脚負擔之重量不定，而以桌置於稍不平之地面，其一脚不接於地，卽欹側而易於動搖。是以凡須裝設於眞水平位置之器械，如電流計，經緯儀等，必置於三個平準螺旋之上，而其三個螺旋係成三角形，故旋動其中之一，則器械必沿其餘二螺旋之下端而迴轉，故一一鬆緊其螺旋，易使是器得占水平位置也。

（三）求四邊形之重心　在第五十五圖四邊形 ABCD中，先作對角線BD，以E點二等分之，作EA及EC，



第五十五圖

次取$KE=\frac{1}{3}CE$及$HE=\frac{1}{3}EA$，聯結KH而與BD相交於L，取HG＝KL，則G即為所求之重心。

何則？試作他對角線AOC，但K為△DCB之重心，H為△DAB之重心，故全形之重心，即為以△DCB與△DAB之反比內分KH之點也。然

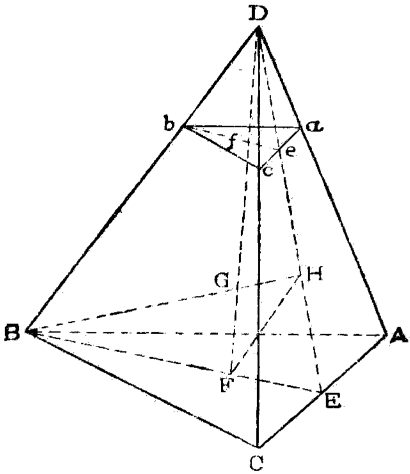
$$\frac{KG}{GH}=\frac{HL}{LK}=\frac{AO}{OC}=\frac{\triangle DAB}{\triangle DCB}$$

故G為ABCD四邊形之重心。

（四）三角錐體之重心　三角錐體之重心，在底面重心與頂點相聯結之線中，而在離底面四等分之處。設如第五十六圖中，ABC為底面，D為頂點，聯結ABC之重心F與D點，若以平行於底面之面分此三角錐體於無數小片時，則各小片例如abc之重心，為其中線be與DF線之交點f，更以DCA為底面，則全形之重心，亦在DCA之重心H與B相聯之HB線，故其交點G為所求之重心。然

$$\frac{FG}{GD}=\frac{HF}{DB}=\frac{EF}{EB}=\frac{1}{3}$$

$\therefore GD=3FG$



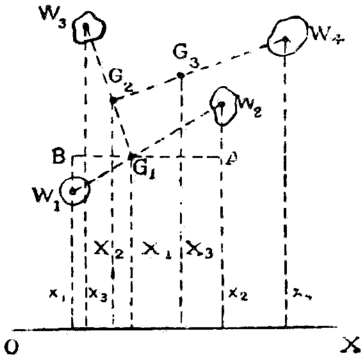
第五十六圖

卽 $FG=\frac{1}{4}DF$

以同理推之，知任意多角錐體及圓錐體之重心，亦在底面重心與頂點相聯結之線中，而在離底面四等分之處。

(五)梯形，錐臺及其他不規則形狀物體之重心 如第五十七圖中，$W_1,W_2,W_3,W_4,\cdots\cdots$爲物體各分子之重量，$X_1,X_2,X_3,X_4,\cdots\cdots$爲自某定面OX至各分子之距離，先聯結$W_1$與$W_2$，而以$W_1$，$W_2$之反比分之得$G_1$點，則$G_1$

爲W_1及W_2之重心。作平行於OX之BG_1A，G_1距OX之高爲X_1，則



第五十七圖

$$\frac{W_1}{W_2}=\frac{W_2G_1}{W_1G_1}=\frac{W_2A}{W_1B}=\frac{x_2-X_1}{X_1-x_1}$$

$$\therefore W_1(X_1-x_1)=W_2(x_2-X_1)$$

$$(W_1+W_2)X_1=W_1x_1+W_2x_2$$

$$\therefore X_1=\frac{W_1x_1+W_2x_2}{W_1+W_2}$$

次聯結G_1及W_3，而在G_2點以W_1+W_2與W_3之反比分之，則照上理，得

$$X_2=\frac{(W_1+W_2)X_1+W_3x_3}{W_1+W_2+W_3}$$

$$=\frac{W_1x_1+W_2x_2+W_3x_3}{W_1+W_2+W_2}$$

以同理推之，得

$$X_3=\frac{(W_1+W_2+W_3)X_2+W_4x_4}{W_1+W_2+W_3+W_4}$$

$$=\frac{W_1x_1+W_2x_2+W_3x_3+W_4x_4}{W_1+W_2+W_3+W_4}$$

故普通之範式，爲

$$X=\frac{W_1x_1+W_2x_2+W_3x_3+W_4x_4+\cdots\cdots}{W_1+W_2+W_3+W_4+\cdots\cdots}$$

$$=\frac{\Sigma Wx}{\Sigma W}$$

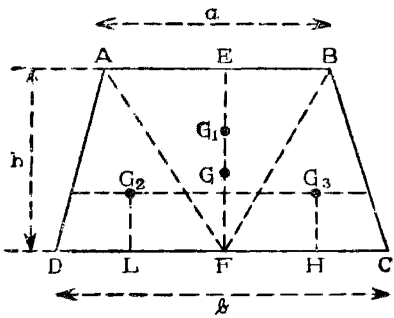
凡求複雜物體之重心，可用此法，而在互爲直角之三面上求其距離，自可決定重心之位置。若物質分子之在同平面上者，則利用此法在互爲直角之二定線上，求其距離，即得重心之位置矣。

例一——求ABCD梯形薄板之重心。

如第五十八圖，先聯結AB,CD之中點E,F，以其長爲h，則全形之重心，自必在EF線中，假定之爲G，唯G在EF線上之何處，可自下法求之。

作AF及BF，以全形分爲三個三角形，然△AFB

之重心，亦必在EF線上，以之爲G_1，則



第五十八圖

$$G_1F=\frac{2}{3}h$$

△ADF及△FBC之重心爲G_2及G_3，其自CD之距離，以平行於EF之G_2L及G_3H測之，則

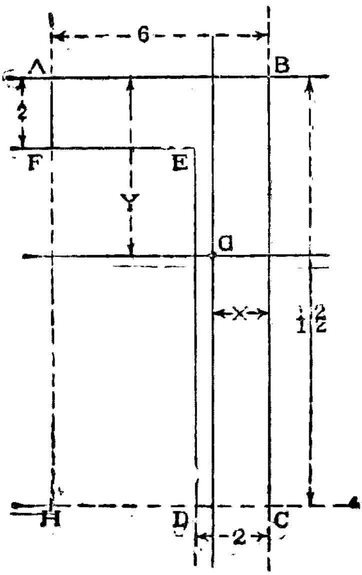
$$G_2L=G_3H=\frac{1}{3}h$$

因ABCD爲厚薄相等之板，故各三角形之重量比例於其面積，而各三角形同在平行線間，故其面積比例於其底邊。今以AB=a，CD=b，則△AFD之面積得以a表之，△ADF及△AFC之面積，均得以$\frac{1}{2}$b表之。故依上述之理，得

$$GF=\frac{a\times\frac{2}{3}h+\frac{b}{2}\times\frac{1}{3}h+\frac{b}{2}\times\frac{1}{3}h}{a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}b}=$$

$$\frac{h}{3}\times\frac{2a+b}{a+b}$$

例二——有 ABCD 直角定規，如第五十九圖，AB=6寸，BC=12寸，DC=AF=2寸，求其重心。



第五十九圖

設重心爲G，其距BC爲X，距AB爲Y，今延長CD，而使會於H，則□AHCB之重心，距BC爲3寸；而FHDE之重心，距BC爲4寸，故

$$X(12\times6-10\times4)+4\times10\times4=6\times12\times3$$

$$\therefore X=\frac{216-160}{72-40}=\frac{56}{32}=1\frac{3}{4}\text{寸}$$

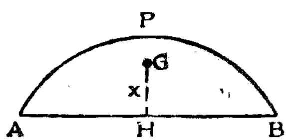
□AHCB之重心，距AB爲6寸；而□FHDE之重心，AB爲7寸，故

$$Y(12\times6-10\times4)+4\times10\times7=6\times12\times6$$

$$\therefore Y=\frac{432-280}{32}=\frac{152}{32}=4\frac{3}{4}\text{寸}$$

基爾廷紐之性質　關於線及面迴轉而成之形體之重，有二特性，是名曰基爾廷紐之性質（Properties of ldinus）。

第一　如第六十圖中，APB爲以鐵線等物作成之線，G設爲其重心，則APB AB爲軸而迴轉所成之表面，等於APB之長與重心所畫



第六十圖

圓周之長之乘積。卽APB之長爲L，重心距離爲X，面積爲S，則

$$S=2\pi XL$$

第二　APB面之重心爲G，則APB面以AB爲軸而迴轉所成之體積，等於APB之面積與重心所畫圓周之長之乘積。卽APB之面積爲a，重心距離爲x，體積爲V，則

$$V=2\pi xa$$

由此特性，得兩種應用，卽知面積或體積而求面或曲線之重心，以及知重心而求面積或體積也。

例一——求半圓面之重心。

以x表重心距離，γ爲半徑，則半圓面以直徑爲軸而迴轉所成之球之體積，爲

$$\frac{2}{3}\pi\gamma^3=\frac{\pi\gamma^2}{2}\times2\pi x,$$

$$\therefore x=\frac{4\gamma}{3\pi}$$

例二——以金屬線曲成半圓周，求其重心。

半圓周迴轉所成之球面，爲

$$4\pi\gamma^2=\pi\gamma\times 2$$

$$\therefore x=\frac{2\gamma}{\pi}$$

第六章　動力

動力及抵抗　凡物體之運動，必有某力以阻礙之，是爲抵抗或曰抵抗力（Resistance）。欲物體繼續運動，必須以與抵抗相等之力，加於運動之方向，是曰動力（Effort）。

以手舉物，則有地心引力之抵抗，而手力則爲動力。阻礙蒸汽機關活塞之運動者，爲機關自己之摩擦及機關所作工事之抵抗，而動力則爲蒸汽之膨脹力。阻礙鐘錶時針之迴轉者，大都係鐘錶各部所發生之摩擦，而彈條之彈力及作用於錘之地心引力，則爲其動力也。即加力於自由物體而使之運動，則物體之惰性，亦即爲其抵抗也。然上所列舉各種抵抗，除摩擦外，亦得爲動力之原。如舉物時，地心引力固爲抵抗，而在水車（Water wheel）及打樁機（Pile driver），則爲動力。氣體之彈力，在熱機關（Heat engine）中固爲動力，而在空氣壓縮機（Air Compressor）則爲抵抗。又若旋捲彈條之

抵抗，卽爲使鐘錶時針迴轉之動力。抵抗物體運動之惰性，在使運動物體停止之時，亦有動力之作用。故此等抵抗，稱爲交換性抵抗（Reversible resistance）。至若摩擦，祇足以妨礙運動而不得利用之爲動力者，則曰不交換性抵抗（Irreversible resistance）。今先就交換性抵抗說明之。

重力　地心引力爲動力及抵抗之重因。高地瀦貯之水，如以之送於水車之戽斗（Buchet），卽得借其重量而使水車迴轉，如以管導送而流出，則可使水臥輪（Water turbine）迴轉。此二例之動力，皆卽爲作用於水之實質之地心引力。

此種動力之強弱，得用彈簧秤（Spring balance）或常用之衡器以測定之。若無衡器之便，則先測其立積而乘以立方單位之重量（卽密度 Density）可也。

彈條之彈力　螺旋彈條伸縮之抵抗，如以下之試驗而測定之，極爲便利而精確。其法以彈條裝置於垂直位置，以重錘載於其上，或懸於其下，而視其長短之增減，如此屢更重錘之輕重而實驗之，則知重量於伸縮之間，

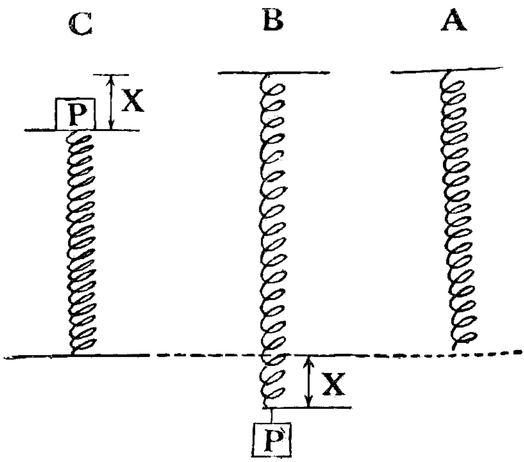
常有一定之關係。

第六十一圖中，A為彈條固有之長，若加以 P 力則如B及C，其伸縮之長爲X，則X若不較大於 l 之時，則 P 與 X 之關係如次：

$$\frac{P}{X}=C$$

C 爲常數，而因彈條之材質，大小及鍛鍊之程度而不同。

此關係以語表之，卽謂彈條之伸縮，正比例於其抵抗力也。且因有一定之關係，故知彈條對於一種伸縮之抵抗力，卽可推知對於他種伸縮之抵抗力，是以彈條頗

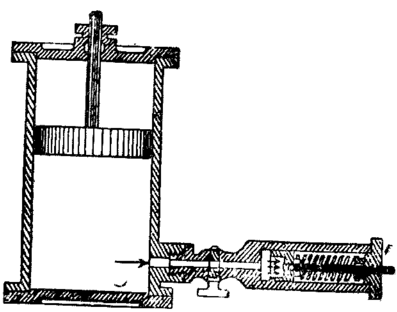


第六十一圖

適用於力之測定也。

氣體之壓力　氣體之壓力者，爲氣體壓於其容器內方之周壁之力也。若此內壓力勝於器之外壓力，而容器能自在伸縮者，則周方膨脹，如氣球之類是也。若容器爲圓筒形，而內具滑動之活塞，則壓活塞之內面而使之移動．此時圓筒內氣體膨脹，而壓力漸降，至與外壓力平衡時而停止矣。若加熱於氣體，則彈力愈烈，足勝強大之抵抗而推進活塞，是卽利用熱能（Heat energy）而得動力之原理也。

氣體之壓力，得以彈條壓一定面積之小活塞，而視其伸縮之度以測定之。卽如第六十二圖，以內設彈條及



第六十二圖

小活塞之圓筒，旋入於欲測定壓力之容器，而視活塞桿頭之上動。設此彈條以二十七瓩之重量，可使短縮 1.3 糎，今容器中之氣體，一部份入於小圓筒，而作用小活塞（其面積設爲一平方糎）之下方，其桿頭上動爲 0.9 糎，則氣體在活塞面上之壓力，爲

$$27 \times \frac{0.9}{1.3} = 18.7 \text{ 瓩}$$

氣體之壓力，無論在容器內任何部份，比例於其面積。故氣體之壓力，以一平方糎若干瓩表之，最爲便利，如在前例中，氣體壓力爲一平方糎18.7 瓩也。蒸汽機關圓筒內汽壓之測定，卽用如此圖所示之器具，名曰汽力指示器（Indicator）。

氣體膨脹壓縮之間，其壓力之消長狀態，因氣體之性質及境遇，未必一定，然大略適合於波義耳之氣體定律（Boyle's Law），且其應用法亦甚簡易，故算定氣體壓力變化之時，大都皆應用此定律，卽溫度不變，則一定量之氣體壓此容器內面之力，反比例於其容積。

設 V_1 爲一定量氣體之立積，P_1 爲其一平方單位之壓

力，若此氣體保持其溫度，而其立積變爲V_2，壓力爲P_2，則

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{V_1}{V_2}$$

即 $$P_1V_1=P_2V_2=\text{常數}$$

據此簡單之關係，則知一定量氣體於某時間內之立積及壓力，即可推知在他立積之壓力。蒸汽機關圓筒內之蒸汽，亦得應用此定律，而爲概略之計算。

動物力 動物之力（Animal power）不僅因其種類而異，即同一種類，亦有強弱之不同。蓋動物力之強弱，關係於其各個之體格、年齡、健康、性情及其境遇，自難一概論斷之也。

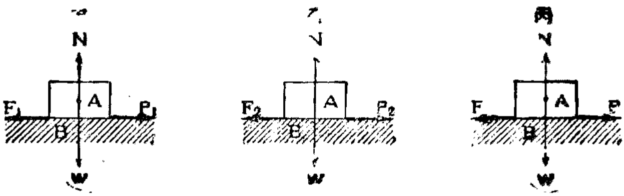
工人所能供給之動力，因其勞動之時間、方法、種類及用力之速度而不同，短時間之工作，自較長時間之勞動爲力較大，即同種工事，亦因工作之方法而有異。如引網之力，以及膝高爲最大，若舉及身高則最小。又使用器械之種類亦至有關係，如橈之推進於橫方向者爲最大，手論之迴轉次之，如喞筒（Pump）之槓桿上下者又次之；而速度之急者，則供給之力，不若速度緩者之

大。

牛馬之動力，亦因勞動之性質、時間及速度而不同，如載客馬車之速度高者 其牽引力較弱於速度慢之貨物馬車。

第七章 摩擦及彈性

摩擦力 摩擦力爲一種抵抗力。設有物體A置於水平面B上，必因A之重力，而B生反抗力（Reaction）N，N必垂直於B之表面，而其大小則等於B所受之直壓力，如第六十三圖所示。



第 六 十 三 圖

次設以小力 P_1 以平行於接觸面之方向加於A，在A不動之間，得視A與B間雖有抵抗力而實互相平衡者，此二物體間所現之抵抗力，稱爲摩擦力（Friction），或單稱摩擦。若 P_1 繼續增大，增至 $P_2, P_3, \cdots\cdots$，但在A未運動之間，摩擦力雖亦漸增而常保平衡。設若力增至P而A始運動，則其摩擦力亦等於P，稱爲極限摩擦力

(Limiting friction) ，或最大摩擦力。凡作用於物體之力，與因此而生之極限摩擦力，僅能使物體保持平衡之狀態者，稱爲極限平衡 (Limiting equiliblium)。而未達極限以前之摩擦，如P_1, P_2,……等，必較極限摩擦力爲小。

物體A在他物體B上滑動之間，必不絕受其摩擦之抵抗，此固吾人日常所習知者也。此物體滑動中接觸面間之抵抗力，曰動摩擦力 (Kinetic friction)，或曰滑動摩擦力 (Sliding friction)。其在未起運動以前之摩擦力，統稱爲靜摩擦力 (Statical friction)。

此種擦摩力之起因，實因兩物體之表面必有極微小之無數凹凸，而互相嚙合所致，且因兩物體間，必有附着力 (Adhesion) 之故也。

摩擦係數 摩擦原不僅起於固體之表面，即流體中亦有之。次所揭者，爲庫隆氏 (Coulomb) 及其他學者實驗上所發見之定律。

(一) 極限摩擦力正比例於接觸面間所作用之直壓力。

（二）極限摩擦力因接觸面之種類及性質而異。

（三）摩擦力與接觸面之大小無關。

（四）動摩擦力在滑動面之速度不起劇變時，殆與速度無關，但速度在極小或甚大時，動摩擦力不同。

今以極限摩擦力爲 F，因直壓力而生之反抗力爲 N，則據定律（一），

$$F \propto N$$

$$F = \mu N$$

或 $$\mu = \frac{F}{N}$$

μ 爲因兩物體之種類及表面之性質如粗滑及所用滑劑而不同，稱爲極限摩擦係數（Coefficient of limiting friction），即定律（二）所云是也。

若上式中，以F'爲動摩擦力時之係數爲 μ'，則

$$\mu' = \frac{F'}{N}$$

此 μ' 值稱爲動摩擦係數(Coefficient of kinetic friction)。

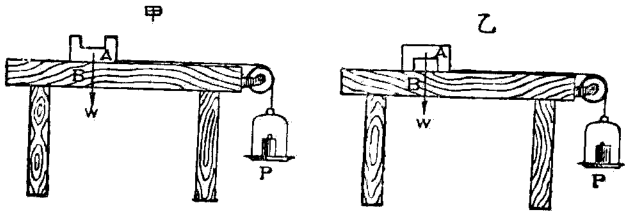
茲將極限摩擦係數及動摩擦係數表列於下：

接觸物	接觸面之性質	極限摩擦係數	動摩擦係數
木材與木材	使乾燥時	0.3～0.7	0.20～0.48
木材與木材	注肥皂液時	0.22～0.44	0.11～0.16
木材與木材	塗以脂肪時	0.3～0.4	0.02～0.10
金屬與木材	使乾燥時	0.6	0.20～0.62
金屬與木材	塗以脂肪時	0.1	0.10～0.16
金屬與金屬	使乾燥時	0.15～0.24	0.15～0.24
金屬與金屬	不時注油時	0.11～0.16	0.07～0.08
金屬與金屬	不絕注油時	——	0.04～0.06
革與木材	使乾燥時	0.62	0.3～0.5
革與木材	注油時	0.13	——
革與金屬	使乾燥時	0.62	0.56
革與金屬	使溼潤時	0.80	0.36
革與金屬	塗以脂肪時	0.27	0.23
革與金屬	注油時	0.13	0.15
麻繩與金屬	使乾燥時	——	0.20～0.34
麻繩與金屬	塗以脂肪時	——	0.15

就表觀之，可知除速度極小之外，凡 μ' 必較小於 μ。

以上所述之定律，實爲近似的正確之論，如（一）在甚強大壓力時，則不成立。在普通壓力之下，則可以

如第六十四圖之方法實驗而知之。卽以絕無伸縮之繩，結於置在水平面B上之物體A，以繩平行於B面，導經滑



第六十四圖

輪，而以重錘P置於繩之下端。今於A上置以種種重量w，而各求其能保極限平衡之重錘P，故因此而知大小相等方向相反之極限摩擦力F。且B爲水平面，故其反抗力N必等於w，故得計算極限摩擦係數μ。如下表，卽此實驗結果之一例也。

實	驗	計　算
w（直壓力N）	P（極限摩擦力F）	$\mu=\dfrac{F}{N}$
8（瓩）	2.3（瓩）	0.288
10	2.9	0.290
12	3.4	0.293
14	4.0	0.285

16	4.6	0.287
18	5.1	0.283
20	5.7	0.285
平均	—	0.290

又定律（三）之實驗，卽如第六十四圖乙所示，以接觸面上下兩面不同之物體，置於B面之上，而行同樣之實驗，卽可發見對於同一w而能使之運動之力，卽極限摩擦力F，必與上次實驗．卽A物體如第六十四圖所示時相同。故知此定律（三），卽示摩擦力不關於其單位面積之壓力也。

速度		動摩擦係數			實驗回數
每時杆	每秒杈	最大	最小	平均	
0	0	—	—	0.330	—
16	4.45	0.281	0.161	0.242	54
32	8.90	0.240	0.133	0.192	69
48	13.30	0.196	0.098	0.164	94
64	17.80	0.194	0.088	0.140	70
80	22.20	0.153	0.050	0.116	55
96	26.70	0.123	0.058	0.074	12

上所揭之表，係用鑄鐵製之制動機於鋼鐵輪時，而度種種變化時所得動摩擦係數之一例也。觀表知速度大，則動摩擦係數有漸小之傾向。

例——設以重量10瓩之物置於水平面上，而於與水成 15^0 之方向牽引之，問使物體滑動於水平面上所需小之力，爲值幾何？但物體與面間之極限係數爲 0.3。

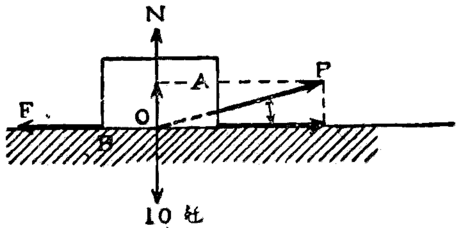
此問題得以下法解之，卽水平面上物體將動之時，作用於物體之力，爲重力.面之反抗力，牽引力及極限擦力之四者而已。今以面之反抗力爲N，則極限摩擦F，自公式 $F=\mu N$，得知爲 0.3N，而發現於與牽引反對之方向。所謂最小限之牽引力，卽上四力爲極限衡之時，此以P表之。若牽引力較P爲大，則物體生速度而立卽運動矣。

如第六十五圖所示，作通過O點之直交軸，在保持限平衡時，則如前力之平行條件所述。

x 軸上分力之代數和 $P\cos15^\circ-0.3N=0\cdots\cdots(1)$

y 軸上分力之代數和 $P\sin15^\circ+N-10=0\cdots(2)$

(1)與(2)爲聯立方程式求之，則得P值，卽



第六十五圖

$$P\cos 15^\circ + 0.3\sin 15^\circ - 0.3\times 10 = 0$$

$$P(\cos 15^\circ + 0.3\sin 15^\circ) = 0.3\times 10$$

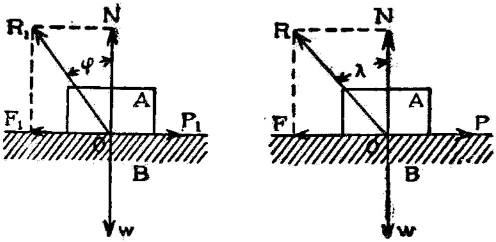
$$\therefore P = \frac{0.3\times 10}{\cos 15^\circ + 0.3\sin 15^\circ} = \frac{3}{0.9659 + 0.3\times 0.2588}$$

$$= 2.857$$

即最小牽引力為 2.857 瓩也。

摩擦角　摩擦兩面間摩擦力之大小，又得以摩擦角之大小表示之。以 A 物體置於水平面上，則生與其重量 w 相等之反抗力 N，若於水平方向加以 P_1 之力，則反對方向生摩擦力 F_1，此前節所述過者也。今以反抗力 N 與摩擦力 F_1 之合力為全抗力（Total reaction），以 R_1 表之，（第六十六圖）即摩擦面之全抗力，必與其面之法線成某角度，若係無摩擦之面，則 $F_1=0$，而全抗力垂

直於其面也。在A物體不運動之間，摩擦力F_1與加於物體之力P_1同時增加，故$\angle NOR_1=\phi$亦次第增加，至達於



第六十六圖

圖之右方所示之極限摩擦力F時，　其$\angle NOR$稱爲摩擦角（Angle of friction）。卽摩擦角者，全抗力與法線所成之最大角也。以λ表之，則

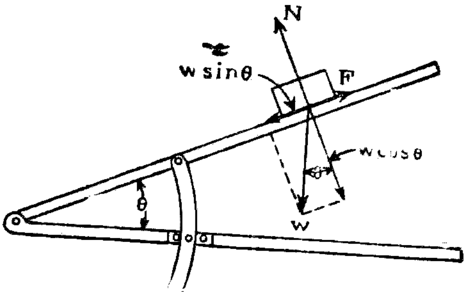
$$\tan\lambda=\frac{F}{N}$$

故若以與R相等之力，加以較λ稍大之角度，則物體A卽起運動矣。

極限摩擦係數μ與摩擦角λ，均爲表示接觸兩面間摩擦程度之詞，而兩者間有如次之關係。自公式$\mu=\dfrac{F}{N}$及$\tan\lambda=\dfrac{F}{N}$，則

$$\tan\lambda=\mu$$

次述以物體載於斜面上，次第增加其傾角，而使物體將滑動時之極限平衡。設如第六十七圖中所示，則斜



第　六　十　七　圖

面之傾角 θ，必等於摩擦角 λ。何則？因面之直壓力 N 等於 $w \cos \theta$，而沿斜面使物體將滑動時之力卽極限摩擦力 F，等於 $w \sin\theta$，故

$$\mu = \frac{F}{N} = \frac{w \sin \theta}{w \cos \theta} = \tan \theta$$

由上式 $\tan \lambda = \mu$，知

$$\tan \theta = \tan \lambda$$

$$\therefore \theta = \lambda$$

換言之：卽斜面之傾角 θ 較小於其面與物體間之摩擦角 λ 之間，則物體靜止；至 $\theta > \lambda$，則物體滑動。故摩擦角有

時亦稱爲靜止角（Angle of repose）。

用增滑時之摩擦　以油或石墨末等滑劑(Lubricant)供給於接觸二面間，則摩擦自大減。給油之方法，或因摩擦部份之運動，自行給油，或以壓力壓入，或使之迴轉於油槽之中；而以油能遍佈於軸與軸承二面間成爲薄膜者爲完全給油狀態。然即在不完全給油狀態，其摩擦係數 μ 之值，總較乾燥之時大減也。

油之種類	一號機械油				Spindle 油			
軸頸上之壓力（磅 平方吋）	12.5	25.0	37.5	50.0	12.5	25.0	37.5	50.0
溫度之上昇（F）	43	43	53	53	55	36	45	38
平均摩擦力（磅）	5.4	5.2	6.5	6.4	5.9	4.4	5.1	4.7
平均摩擦係數	0.11	0.05	0.04	0.03	0.12	0.04	0.03	0.02
一分間之迴轉數	818	819	822	829	810	817	824	821
最小摩擦力（磅）	1.5	4.0	6.5	1.0	5.3	4.0	4.0	4.0
最小摩擦係數	0.09	0.04	0.02	0.02	0.11	0.04	0.03	0.02

凡如軸（Shaft）或軸頸（Journal）等迴轉於圓筒形表面之摩擦，與前述平面上之摩擦稍異。關於此類摩擦之定律，亦自實驗得之，就其大體言，即凡摩擦係數 μ，隨直壓力之大者而愈小，且因迴轉速度之大小，及

給油之溫度與黏度而不同。上表示於軟鋼軸及砲金(Gun metal) 之軸頸金 (Journal metal) 上給以種種之油，所測定摩擦力及摩擦係數之一例也。其使用軸之直徑爲 $1\frac{1}{4}$ 吋，其試驗時間各爲 2 時。（註）

滾動摩擦力 電車汽車及其他各種車輪或圓墻，滾動於地面或軌道上時，必有若干抵抗，此抵抗稱爲滾動摩擦力或迴轉摩擦力 (Rolling friction) 滾動摩擦力關係於將使滾動體迴轉之力之力矩即滾動力矩，與本章首節所述之摩擦力略有不同。普通滾動體因自身重量之壓力，必稍凹陷地面，而曳引滾動體自凹陷處出來時之摩擦抵抗也。故若甚硬之車輪行於軌條上時，其滾動摩擦力必甚少。

就滾動摩擦力而研究之結果，知在水平面上使滾動體滾動之滾動力矩，比例於其直壓力。今設重量W之滾動體，在離水平面 h 高處，加 F 力於水平方向，則其力矩爲 Fh，又若滾動體之直壓力爲 N，（第六十八圖）則此定律可如下式所示：

（註）該表單位均係英制，按 1 吋＝2.54 糎，1 磅＝0.4536瓩)

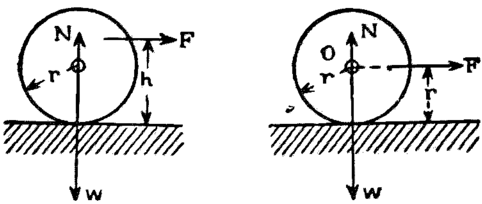
$$Fh \propto N$$

玆命比例常數爲 μ_r，則

$$Fh = \mu_r N$$

$$\mu_r = \frac{Fh}{N}$$

此 μ_r 爲滾動力矩對於直壓力之比，稱爲滾動摩擦係數（Coefficient of rolling friction）。



第　六　十　八　圖

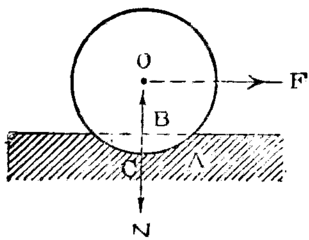
使圓墻或車輪滾動時，其力以通過其中心而作用於水平方向者爲最普通。今設圓墻或車輪之半徑爲 r，作用於水平方向之力爲 F，則其滾動力矩爲 Fr，此時上式爲

$$Fr = \mu_r N$$

故滾動摩擦係數（參照第六十八圖）爲

$$\mu_r = \frac{Fr}{N}$$

車輪在地面上必稍有凹陷（第六十九圖中表示極端之狀），今若以水平方向之力F，加於半徑爲r輪之中心方向，其直壓力爲N，而取關於輪周與地面接觸點A之力矩，則



第 六 十 九 圖

$$N \times AB - F \times BO = O$$

時，在極限平衡狀態，即

$$N \times AB = F(r - CB)$$

但對於半徑 r,CB之值甚小，故得略去之，於是

$$\frac{Fr}{N} = AB$$

即滾動摩擦係數在此例中得以AB表之。下表示普通輪周與地面間所有AB之值：

輪周與路面之種類	AB 之值（糎）
鋼鐵之軌條上鋼鐵車輪之轉動	0.02—0.04
木之道路上鋼鐵車輪之轉動	0.15—0.25
石砌道路上鋼鐵車輪之轉動	0.1 —0.5
柔軟地上鋼鐵車輪之轉動	7.0 —13.0
柏油路上打氣橡皮胎車輪之轉動	0.05—0.06
良好道路上普通橡皮車輪之轉動	0.1

彈性　固體雖有一定之形狀與體積，然一受外力之作用，亦必稍變其形積。此時體內必有與外力相抗之力，使形積之變化至若何程度而止，若外力自此愈強，則體內之反抗力亦增，而形積亦變化至較前大處而止。若外力減少，則與此相應之體內反抗力亦減，而形狀與體積亦必恢復至較前小之度。此性質曰物體之彈性（Elasticity），其形積之變化曰變形（Strain）。液體與氣體均不易保其一定之形狀，故是二體殊缺形狀之彈性，僅有體積之彈性而已。

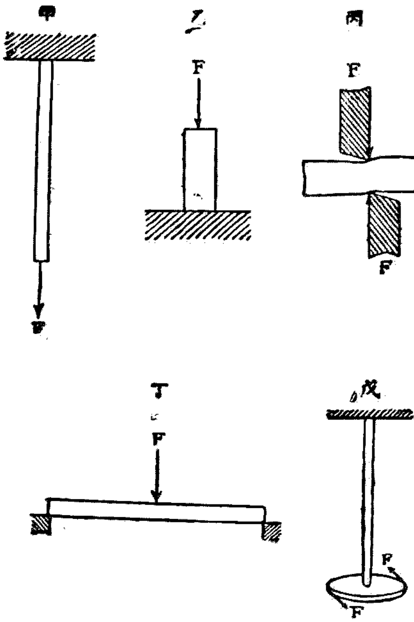
物體因外力而變形之時，其體內所現之反抗力稱爲應力（Stress），或曰內力。此力得視爲彈性體分子間之

分子力，而相對存在於物體內部之各點，去其外力，則欲與之相抗之應力亦隨卽消滅者也。

彈性體在所受外力不甚大時，若一旦除去外力，大都其變形亦隨之消滅而不稍限痕跡。但若外力雖去，而變形仍稍留殘跡者，則曰彈性之餘效(Elastic after effect)。彈性體有無此餘效之境，曰彈性極限 (Elastic limit)。卽在極限以內，則外力除去而變形同時消滅，超過限度則外力雖去，而變形仍稍留殘跡也。

彈性極限因彈性體之種類而異，又在同種之彈性體亦因其溫度等而不同。例如鍊鐵及鋼之彈性限度甚高，而鑄鐵則極小，殆同於無。

應力之種類 物體因外力而起變形，則體內發現應力，因外力不同，而應力亦相異。如第七十圖之甲，施外力於棒之長方向而引張之，其應力曰伸張應力 (Tensile stress)。如乙以外力壓迫之者，則曰壓縮應力 (Compressive stress)。如丙加外力於物體正對之兩側，如鋏之作用將剪斷之者，曰剪斷應力(Shearing stress)。如丁以外力橫加於梁之一部，而將壓之使曲者，曰彎曲應力，



第　七　十　圖

Bending stress）。又如戊以外力加於棒之一端而扭轉之者，其應力爲剪斷應力之一種，稱爲扭轉應力 Torsional stress）。實際以上述應力之二種以上同時生，形成所謂合成應力者爲多。例如加外力於細長棒兩端而壓迫之時，實生彎曲及壓縮兩種應力也。

應力有垂直於面者，亦有平行於面者，即稱爲垂直應力(Normal stress)及切線應力(Tangential stress)。單純之伸張應力對於棒或線之橫斷面爲垂直，剪斷應力則爲平行。而普通應力必稍傾斜於其面，則可分解爲垂直應力與切線應力而考慮之。

受同外力之作用，因其面之大小，其應力亦自不同。在某點周圍之單位面積上，垂直或平行作用之應力，稱爲其面上應力之強度(Intensity of stress)，普通則僅稱應力。設在 a 全面積上，等量發生 F 應力，則

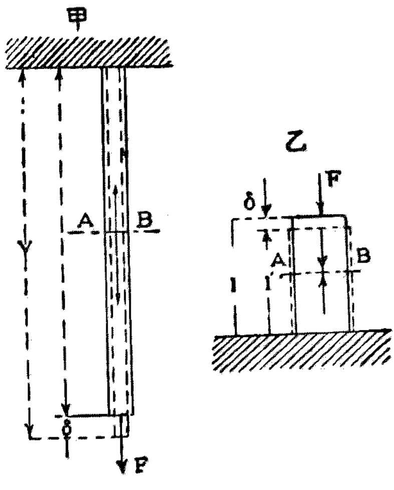
$$\text{應力之強度} = \frac{F}{a}$$

彈性係數 如前所述，據實驗之結果，凡彈性體在彈性限度以內，其應力之強度，約比例於變形。此說爲英人虎克氏所發明，故曰虎克定律(Hooke's Law)即

$$\frac{\text{應力之強度}}{\text{變形}} = \text{常數}$$

此常數即在同一物體中，亦因其變形之種類而名稱及值均各不同，普通得稱爲彈性係數或彈性率(Modulus of elasticity)以下就單純之變形述之。

（一）楊氏彈性係數　如第七十一圖之甲所示，以金屬線或細長棒之一端固定，而使外力作用於其他端，而引張之，其變形曰伸長(Elongation)或伸張變形(Tensile strain)如乙而壓迫之者，曰壓縮變形(Compressive strain)。設最初全棒之長爲 l，因外力而全長爲 l'，則全體之長之變化爲 l'−l，以 δ 表之則變形之量爲 δ/l。又設棒之斷面積全部相同爲 a，則應力之強爲 F/a，此時應



第七十一圖

力對於變形之比，曰直接彈性係數（Modulus of direct elasticity），或曰楊氏彈性係數(Young's modulus of elasticity)，通常以E表之，卽

$$楊氏彈性係數=\frac{F/a}{\delta/l}$$

$$E=\frac{Fl}{a\delta}$$

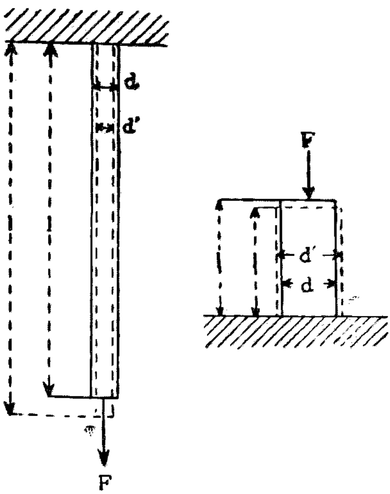
又自上式得求伸張變形或壓縮變形，卽

$$\delta=\frac{l}{aE}\cdot F$$

此E值爲關於伸縮之彈性係數，因物質而爲相異之常數。大約如下表所示。

物　　質	楊氏彈性係數 E（瓩/平方粴）	横彈性係數G（瓩/平方粴）	帕氏之倒比 m
鑄　鐵	1,200,000	457,000	3.7
錬　鐵（棒）	2,000,000	840,000	3.6
鋼　（軟）	2,100,000	950,000	3.25
銅　（錬）	1,020,000	394,000	2.6
黄　銅	840,000	394,000	3.0
鋁	700,000	—	—
杉	70,000	—	—
松	91,000	—	—

（二）帕氏比 凡物體受外力F而伸張或壓縮時，其長短發生變化，同時其斷面必縮小或膨大，而其厚薄粗細或闊狹必起變形。長短之變形稱爲縱變形（Longitudinal strain），其斷面之變形曰橫變形（Transverse strain）。今如第七十二圖所示，圓棒或線類最初之直



第七十二圖

徑爲d，伸縮後之直徑爲d'，則直徑之變化爲d－d'，以λ表之，則橫變形爲λ/d。

由實驗之結果，知橫變形對於縱變形之比爲一定之

値，稱爲帕氏比 (Poisson's ratio)。卽

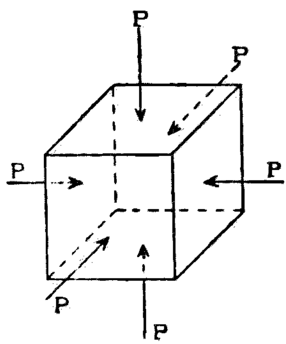
$$帕氏比=\frac{橫變形}{縱變形}=\frac{\lambda/d}{\delta/l}=\frac{l\lambda}{d\delta}$$

普通橫變形必較縱變形爲小，故帕氏比之值必小於一。爲用時便利起見，通常用其倒數，稱爲帕氏之倒比 (Reciprocal of Poisson's ratio)。以 m 表之，則

$$帕氏比=\frac{1}{m}=\frac{l\lambda}{d\delta}$$

m 之值因物質之種類而不同，約如上節附表所示。

(三) 體積之彈性係數　在固體周圍施以同樣外力而引張或壓縮之時，必起體積之變化，是謂體積變形 (Volume strain)。玆設其體積本爲 V，垂直施以互



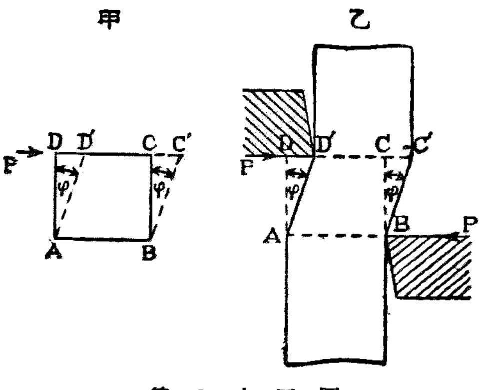
第七十三圖

等之P力，（第七十三圖）而體積有v之增減，則體積變形之量爲$\frac{v}{V}$。對於此變形所有應力之強度，就物質實驗之，知爲一定，卽得成立虎克氏之定律也。此比稱爲體積之彈性係數（Modulus of volume elasticity or bulk modulus），以K表之，則

$$體積之彈性係數=\frac{應力之強度}{體積變形}=\frac{P}{\frac{v}{V}}$$

$$K=\frac{PV}{v}$$

（四）橫彈性係數　使立方體之底面固定，如第七十四圖中甲所示，沿其面而施以外力，則物體中平行於



第七十四圖

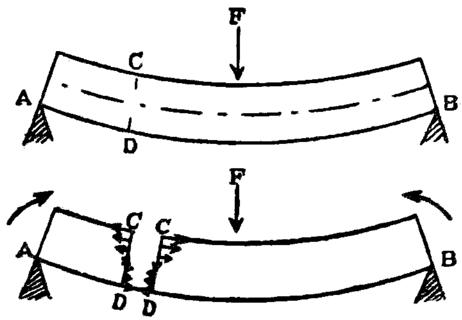
底面之各層，必稍有傾動，其甚者側面或成菱形。又如乙所示，施以外力 P，則其極端或至如圖所示之狀，而生剪斷應力。此種變形，稱爲剪斷變形（Shearing strain）。剪斷變形之量，以所變形之角測之。玆設爲ϕ弧度角，則據實驗之結果，知應力之強度 P 與 ϕ 之間，成立虎克之定律。其 P 對 ϕ 之比，曰橫彈性係數（Modulus of transverse elasticity）或曰剛性率（Modulus of rigidity），以 G 表之，則

$$橫彈性係數=\frac{剪斷應力之強度}{剪斷變形}$$

$$G=\frac{P}{\phi}$$

G 值見（二）節附表所示。

（五）彎曲　以細長物體如棒梁之一端或兩端支持之，而於垂直於縱軸方向加以外力，則棒或梁必呈彎曲之狀，是爲彎曲變形（Bending strain），或曰彎曲（Bending）。如第七十五圖所示，梁呈彎曲之時，則內側必被壓縮，而外側被伸張，其間不受壓縮，亦不受伸張之面，稱爲中立面（Neutral surface）。今就任意



第七十五圖

斷面 CD 考之，則知其面上有壓縮應力及伸張應力，亦同時生剪斷應力，其合成應力，卽爲彎曲應力。而自斷面 CD 分梁爲二部之點考之，其左右二方因外力而生之應力，自必相等，所差者僅異其方向而已。故欲知應力之大小，任就作用於一方之外力而求其力矩可也。

彎曲矩　梁上作用之力，有集中於一點或二三點者，有平均分配於其一部或全部者，前者曰集中荷重（Concentrated load），後者曰等布荷重（Distributed oad）。

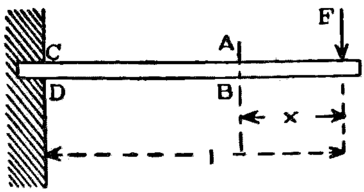
在任何梁中，其對於任何斷面所有外力之力矩，卽爲動作於其斷面之彎曲矩（Bending moment）。而任

何斷面上所作用之彎曲矩，等於任何斷面一方上所作用外力力矩之代數和。今假定梁本身之重不計在內，而舉數例如下：

（一）一端固定之梁上一個集中荷重　如第七十六圖所示，任何斷面 AB 上所作用之彎曲矩爲 M，集中荷重卽外力爲 F，則

$$M = Fx$$

卽斷面 AB 離 F 之作用點之距離 x 愈大，則其力矩亦愈



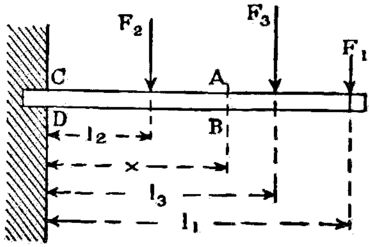
第 七 十 六 圖

大。故知離外力 F 最遠之斷面 CD 上，其力矩最大，卽最危險之處也，是曰危險斷面。今以最大彎曲矩爲 M′，梁之全長爲l，則

$$M' = Fl$$

（二）一端固定之梁上有數個集中荷重　如第七十

七圖中，梁上有三個集中荷重 F_1, F_2, F_3，以任意斷面



第七十七圖

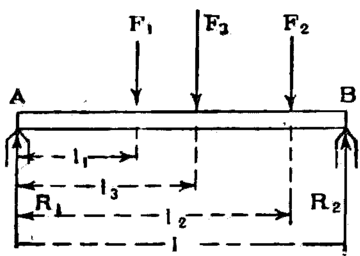
AB 上之彎曲矩爲 M，則 AB 右方之力矩，爲

$$M = F_1(l_1 - x) + F_2(l_2 - x)$$

又最大彎曲矩在 CD 斷面，以 M' 表之，則

$$M' = F_1 l_1 + F_2 l_2 + F_3 l_3$$

（三）兩端支持之梁上有數個集中荷重　如第七十八圖所示，有三個集中荷重 F_1, F_2 及 F_3，其距 A 點之距離



第七十八圖

爲 l_1, l_2 及 l_3。設支柱A及B之反抗力爲 R_1 及 R_2，因對於A點諸力之力矩之代數和爲零時，則梁平衡，故

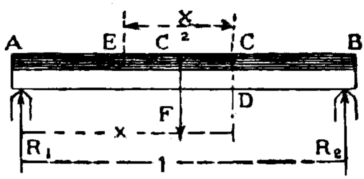
$$R_2 l - F_1 l_1 - F_2 l_2 - F_3 l_3 = 0$$

$$\therefore R_2 = \frac{F_1 l_1 + F_2 l_2 + F_3 l_3}{l}$$

以同理推之，則

$$R_1 = \frac{F_1(l - l_1) + F_2(l - l_2) + F_3(l - l_3)}{l}$$

（四）兩端支持之梁上有等布荷重　如第七十九圖



第七十九圖

所示，設荷重全部爲 F，支柱A及B之反抗力爲 R_1 及 R_2，則

$$R_1 = R_2 = \frac{F}{2}$$

今以AB全長爲 l，距A點 x 之斷面CD上所作用之彎曲矩爲M。因AC之荷重得視爲距A點 $\frac{x}{2}$ 之E點上

之集中荷重，而其量爲全部之$\frac{x}{l}$，故就斷面CD之左則觀之，則

$$M=R_1x-\frac{x}{l}F\times\frac{x}{2}$$

以上式代入之，則

$$M=\frac{F}{2}x-\frac{Fx^2}{2l}=\frac{F}{2}(1-\frac{x}{l})x$$

又危險斷面，自在梁之中央，設以其最大彎曲矩爲M′，則於上式中以$\frac{l}{2}$易x可也。卽

$$M'=\frac{F}{2}(1-\frac{l/_2}{l})\frac{l}{2}=\frac{F}{8}l$$

上數例中凡梁全身之重均未計入，若欲計算在內，則將梁之全重，視爲作用於其重心之集中荷重可也。

第八章　功及能

功及能　與一種抵抗力相反而使物體移動，則謂之作功（Work）。人若持舉地上之石，則為作功，在此例中，使石移動者為人力，自為人力作功之理，然以學理論之，則此動作可分為二，卽加力於石而使之移動之動作，及與地心引力相逆而使石移動之動作也。前段動作曰施能（Energy），後段動作則曰作功。唯所謂施能與作功者，其結果之意義相同，不過自動力之方面言之，則曰施能，自抵抗之方面言之，則曰作功而已。

施能或作功，必須力與移動之兩要素。人若持石而立，則雖費力而石未移動，自力學上觀之，不得謂為施能。又設有確係水平而毫無摩擦之平面，以物體為常速運動於其上，則亦不能謂為作功，蓋物體雖運動而無抵抗之之力也。故施能或作功，必須備具力與移動兩要素。

施能或作功，最少須有三方面：

（一）供給動力之體卽施能者，例如人。

（二）被動之體，例如地上之石。

（三）與移動相反之抵抗力之原因，例如地球。

能者，卽可以作功之能力。人有若干之能，故能與地心引力相抗而作舉物之功。捲繞之發條有若干之能，故能與鐘表內部之摩擦相抗，而作使時針移動之功。飛行之彈丸有能，故可勝標的物之抵抗而貫穿之。其他如爆裂藥亦有強大之能，此能卽組成爆裂藥各分子間之化學親和力，若一旦起化學的變化，則能勝強大之抵抗而使岩石崩裂。凡能之存於物者，其狀至夥，而得大別之爲兩類：

（一）勢能（Potential energy）。

（二）動能（Kinetic energy）。

勢能者，乃物體之組織因其位置之關係上所蓄有之能。動能者，乃物體在運動狀態中所有之能也。如高處之物體，捲繞之發條，壓縮之氣體，皆有勢能；飛行中之彈丸，降落中之鐵鎚，皆有動能是也。勢能與動能，又合併稱曰機械能（Mechanical energy），或曰力學

能（Dynamical energy）。

功及能之單位 能爲作功之原因，而曰施能或作功者，其結果皆爲相類之事項，故可以同一單位測定之也。凡以單位之力作用於一物體，使其在力之作用方向上移動單位之距離，稱爲功（或能）之單位。力之單位既有絕對單位與重力單位兩種，故功（或能）之單位，亦有絕對與重力兩種。在糎克秒系，以一達之力，作用於一物體，使其在力之作用方向上進行一糎之距離之功，曰一厄（Erg）。厄之値過小，不適於用，故實用上定厄之千萬倍（卽10^7倍）爲功之單位，稱曰一朱（Joule)。在重力單位中，如力用克，長用糎，則此時功之單位曰克糎（Gramme-centimetre）。如力用克，長用粎，則功之單位曰克粎（Gramme-metre）。如力用瓩，長用粎，則稱曰瓩粎（Kilogramme-metre）。以上各種之單位。其關係如下：

$$1\text{瓩粎}=1000\times100\text{克糎}=1000\times100\times980\text{達糎}$$

$$=9.8\times10^7\text{厄}=9.8\text{朱}$$

功之測算法 凡物體與抵抗力相反而移動，其動力

與抵抗力相平衡者，則物體爲常速運動，決不稍變其運動狀態，此時計算其所施之能或所作之功，其法甚易，卽求作用之動力或抵抗力與物體被其移動之距離之乘積可也。今舉例說明其算法。

例一——列車之重量二瓲，其抵抗力爲每瓲十瓩，今牽引此列車以常速度進行於五十米，問須施以若干之能？

此時所施之能，本卽等於所作之功，卽

$$2\times10\times50=100\text{瓩米}$$

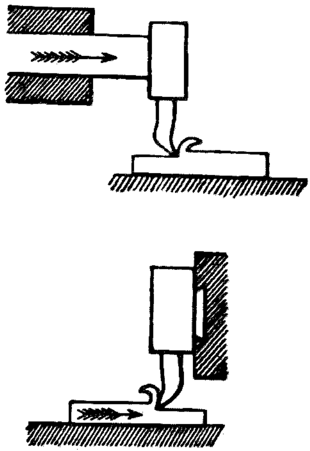
若此例中之列車，不以常速度進行，則動力與抵抗力不相等，則自當別論矣。

例二——在平削機中，金屬抵抗削刀之力爲R瓩，金屬削片之長爲L米，問一削間作功若干？

$$\text{一削之功}=R\text{瓩}\times L\text{米}=RL\text{瓩米}$$

此例中，無論削刀固定而所削之金屬運動，或金屬固定而削刀運動，其所作之功皆同（如第八十圖）。

以機械作功，而時須計算者，莫如喞筒（Pump）。卽筒所作之功固在揚水，而如吸揚船渠之水之喞筒，其功在以船渠中所有之水，每次以少許吸揚至高處。若逐



第八十圖

次計算其功，殊嫌繁瑣，不如就全功而計算之爲簡易也。今設

$w_1, w_2, w_3 \cdots\cdots\cdots$ 爲物體組成諸部分之重量；

$x_1', x_2', x_3' \cdots\cdots\cdots$ 自定水平面所測諸部分之高；

$x_1, x_2, x_3 \cdots\cdots\cdots$ 舉揚後各部分之高。

以逐次所作之功合計之，則爲

$$w_1(x_1 - x_1') + w_2(x_2 - x_2') + w(x_3 - x_3') + \cdots\cdots$$
$$= (w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + \cdots\cdots) - (w_1x_1' + w_2x_2' + w_3x_3' + \cdots\cdots\cdots\cdots)$$

設全體重心之高，最初為X′，舉揚後為X，全體重量為w，則如前章所述，

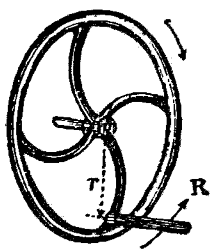
$$wX' = w_1x_1' + w_2x_2' + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$w\,X = w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore 功 = wX - wX' = w(X - X')$$

卽以全體之重量乘重心所揚之高，卽得所作之功。故求吸乾船渠內水量之功，不必於唧筒之每一迴轉間分別求之，祇須以水之總量，乘其重心所揚之高可也。

在迴轉運動之例中，如動力與抵抗力平衡者，則亦與直線運動同法以計其功。例如某機械之手輪（第八十



第 八 十 一 圖

一圖）迴轉之時，其抵抗為 R 瓩，則迴轉於 θ 角度間之功，為

$$R\times 移動距離 = R\times \theta r$$

$$= Rr\times\theta$$

$$= 抵抗力之力矩\times 角度$$

而一迴轉間之功，爲

$$Rr\times 2\pi rR 瓩粎$$

又 n 迴轉之功，爲

$$2\pi rnR 瓩粎$$

功之圖示法 凡任意數量，得以直線表之，而二數量之乘積，則得以面積表之。能與功爲力與距離之乘積，故得以面積簡明表示之。

設 P 爲以瓩表示之力，S 爲以粎表示之距離，卽設所施之能爲 PS 瓩粎。今先如第八十二圖中，作互爲直角之 AB,AC 兩線，以某尺度 x 糎 = 1 粎取 AB 之長以表 S，更以他尺度 y 糎 = 1 瓩取 AC 之長以表 P 瓩，則

$$面積ABDC = AB\times AC = Py + Sx$$

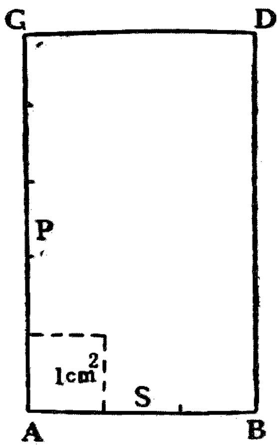
$$= PS\times xy 平方糎$$

故 ABDC 面積，卽以 xy 平方糎 = 1 瓩粎之尺度，而表示 PS 瓩粎。例如

$S=3$ 粎，　　$P=80$ 瓩

而用　　1 糎 $=1$ 粎，　$\frac{1}{16}$ 糎 $=1$ 瓩

第八十二圖



之尺度，則 AB 之長爲 3 糎，AC 之長爲 5 糎，其面積爲15平方糎，而以

$1\times\frac{1}{16}$ 平方糎 $=1$ 瓩粎

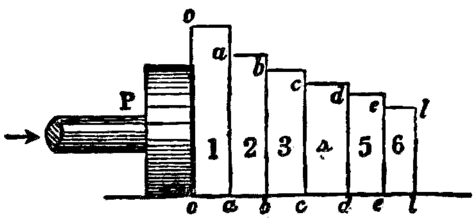
之尺度，表示其能，卽

所施之能 $=15\div\frac{1}{16}=240$ 瓩粎

凡迴轉運動之功，亦得以圖示法表之。設R爲抵抗力，r 爲其所作用之半徑，則每一迴轉間所作之功爲 $2\pi rR$ 瓩粎，故在第八十二圖中，作 AB 以某尺度表示 $2\pi r$，更作 AC 以他尺度表示 R，則 ABDC 面積，即可表示其所作之功。

如此簡易之例中，以圖示法計算或尚未見有多大之便利，然在複雜之問題，則其利極大。蓋在實際上，動力或抵抗力未必一定，而始終變更者多，此時欲求其所作之功，以用圖示法最爲便利。例如第八十三圖，P 爲直

第八十三圖

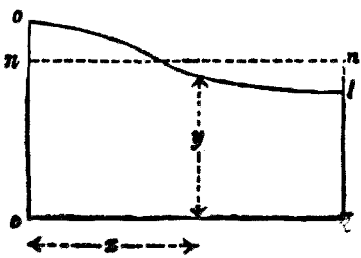


線運動之物體，而移動於 ol 距離，其抵抗力則在每運動於小距離中而變更者，即 P 進行於 oa 間，其抵抗力 oo，ab 間爲 aa，bc 間爲 bb，推而至於 cc，dd，ee 亦然。照前所述圖示法之法則，則進行於 oa 間所作之功，如長方形

l 之面積所表示，ab間之功如長方形 2，bc 間之功如長方形 3，以下均得以長方形 4,5,6 等表示之。故知 P 移動於全距離 ol 間所作之功，必爲各長方形面積之和也。

若抵抗力不絕變更，則表示抵抗力變化狀態之線，必如第八十四圖中之 ol 曲線，其所作之功，固等於 ooll 形之面積，而 ol 之縱徑，卽表示其於動程任意上點之抵抗力。例如自 o 移動於 x 距離之時，其抵抗爲 y，故 ol 曲線稱爲抵抗曲線（Curve of resistance）。

第　八　十　四　圖

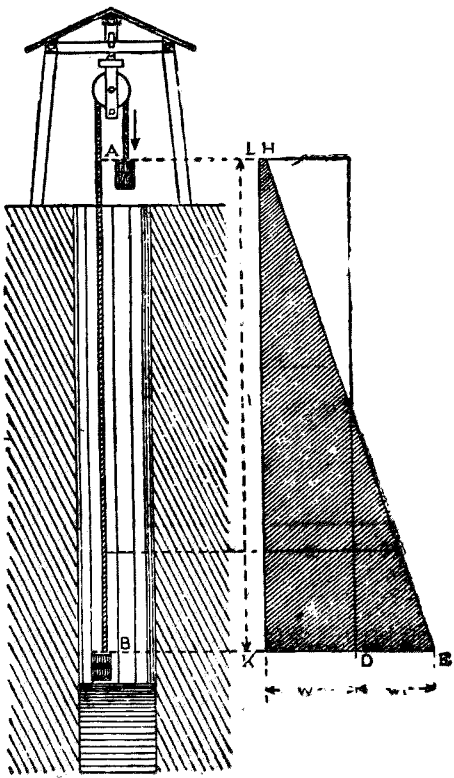


與變更抵抗力運動於同一距離，而作同量之功之常力，曰平均抵抗力（Mean resistance）。在上圖中作與 ooll 等積之長方形 onnl，則長方形之高 nl，卽所以表示平均抵抗力也。若以 R_m 代之，則

$$R_m = \frac{ooll}{ol} = \frac{功}{距離}$$

例一——有如第八十五圖之井車，其汲水之時，最

第 八 十 五 圖



初之抵抗力爲懸垂之繩重及弔桶中之水重，水重固係一定（設爲W瓩），而繩重則因貯水之弔桶上昇而遞減，故其抵抗力係始終變更者也。玆設繩之不平衡部份 AB 之長爲 l 粎，每粎重 w 瓩，則最初之抵抗力爲 $W+wl$，自此遞減，至最終之抵抗力則爲 $W-wl$。今以KL表示l，以KE表示$W+wl$，以LH表示$W-wl$，作HE，則HE爲抵抗曲線，KEHL之面積，即示所作之功。即

$$功=KEHL=\frac{LH+KE}{2}\times KL$$

$$=\frac{W-wl+W+wl}{2}\times l=Wl$$

又以KD表示平均抵抗力，則

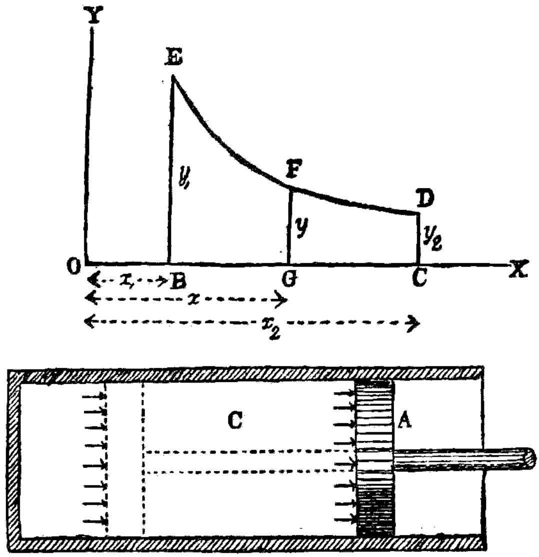
$$KD=KEHL\div KL=Wl\div l=W$$

例二——如第八十六圖，以有彈性之某種氣體置於圓筒 C 中，其壓力爲每平方粎 P_2 瓩，其體積爲V_2立方粎。

今以活塞 A 壓縮之，使爲壓力 P_1 體積 V_1，問須若干之功？又或最初以壓力 P_1 體積 V_1 之氣體，置於筒中，使與外力相反而膨脹，至壓力爲 P_2 體積爲 V_2而止，問氣體所費之能若干？

以上兩問題，其答相同，今取後者說明之。

第八十六圖



以A爲平方糎表示之活塞面積，今算其一平方糎上所費氣體之能。

先於圖上作互爲直角之 OX,OY，次取 OB 以示活塞離筒底之最始距離，OC 爲最終距離，均爲糎，而以 x_1，x_2 表之。又作 BE,CD 直線，以表 P_1,P_2，而假定爲 y_1,y_2。設氣體膨脹，活塞達任意位置G時，其容積爲 V，壓力爲 P,

於圖中作表示 P 之 GF，假定為 y，又假定 OG 為 x。則因波義耳氏之定律，

$$P_1V_1=PV=P_2V_2$$

$$\therefore\quad P_1Ax_1=PAx=P_2Ax_2$$

即

$$x_1y_1=xy=x_2y_2$$

此公式以詞述之，卽為曲線 EFD 上任意點之橫軸縱軸所作之長方形為常數也。有此性質之曲線，曰直角雙曲線（Rectangular hyperbola）。而 EBCD 之面積，則可自下式計算之：

$$\text{面積EBCD}=BE\cdot OB\ \log\frac{OC}{OB}$$

$$=CD\cdot OC\ \log\frac{OC}{OB}$$

設氣體在活塞面一平方粍間所費之能為 e，$\frac{x^2}{x_1}$ 為 r 則

$$e=P_1x_1\ \log\ r\ =\ P_2\ x_2\ \log r\ \text{瓩粍}$$

又以活塞全面積所費之能為 E，平均抵抗力為 R_m 則

$$E=P_1x_1A\ \log\ r=P_1V_1\log r=P_2V_2\log r$$

$$R_m=\frac{P_1V_1\log r}{x_2-x_1}=P_1A\frac{\log r}{r-1}$$

此式適用於完全氣體，完全氣體者，完全適合於波義耳定律之氣體也。蒸汽機關所用之蒸汽，雖非完全氣體，而概略之計算則用此式。

效功及耗功 直線或迴轉運動之機械，其抵抗動力之力，往往不止一種，普通以二種爲多，卽有效抵抗與摩擦是也。例如臥式蒸汽機關中，其抵抗氣壓之推進活塞者，卽活塞桿傳來之抵抗，及活塞與汽筒間之摩擦也。此摩擦係由活塞本身重量及彈條之反撥力而生。設活塞重量爲 W，彈條之力爲 S，摩擦係數爲 μ，則

$$摩擦抵抗=\mu(W+S)$$

若自活塞桿傳來之抵抗爲 Q，全體之抵抗爲 R，則

$$R=Q+\mu(W+S)$$

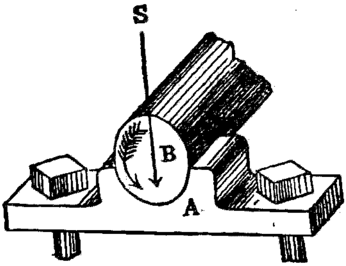
又若活塞移動 L 呎，則

$$功=QL+\mu(W+S)L$$

此中 QL 與 $(\mu W+S)L$ 兩項，其性質完全不同。QL 爲有效之作功，簡稱爲效功(Useful work)，$\mu(W+SL)$ 係因摩擦而消耗於無用之功，化爲熱能而不可復用者也。簡稱之爲耗功(Wasted work)。

在迴轉體亦因摩擦而損失若干之能。今如第八十七圖中，有迴轉軸 B，因外力 S 而被壓於軸承 A，此時抵抗迴轉之摩擦力 F，為　　$F=\mu S$

第 八 十 七 圖



而作用於距軸心半徑 r 粎之處者也。然則抵抗力矩 M，

$$M=\mu S r$$

而一迴轉間因摩擦所費之功，為

$$\mu S\times 2\pi r=2\pi\mu Sr$$ 廷粎

功率　功為力與距離之乘積，而距離則因時間與速度而不同，即在同一機械中，運動時間長則作工多，運動時間短則作功自少，故比較各機械之動作，須以單位時間所作功之量為標準，是為機械之工率（Power），

功率之單位，在糎克秒系，以每秒間作一尔之功為

單位，曰一瓦（Watt）。其千倍曰瓩（Kilowatt 簡寫作K.W.），測定發電機之功率，概用此單位。功率單位除用瓦或瓩而外，尚有一種曰馬力（Horse power 簡寫作 H.P. 或 HP），亦甚常用，爲每秒間能作 550 呎磅之功率，其間之關係，爲

$$1\text{馬力}=746\text{瓦}$$

如就大體言之，一馬力適爲 $\frac{3}{4}$瓩，一瓩爲 $1\frac{1}{3}$ 馬力。故由馬力求瓩時祇須減去其$\frac{1}{4}$；由瓩求馬力時，加其$\frac{1}{3}$卽得。例如 200 馬力等於 150 瓩，90 瓩等於 120 馬力。

第九章　功之原理

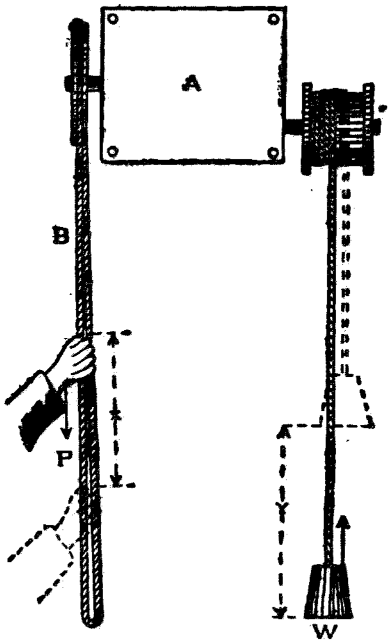
功之原理　所謂功之原理，卽能之常住性（Conservation of energy）而應用於機械學上者。故若能了解此原理，則凡機械之原理，無精無粗，無不迎刃而解。

凡能之狀態可變化，亦可自一物體而傳於他物體，但不能消滅之。無論何種機械，其構造或簡或繁，其作用或巧或拙，若施以若干之能，必能作同量之功，是爲功之原理（Principle of work）。

動力與抵抗平衡之例　施能於物，而能不足勝其摩擦抵抗者，則物自不移動，而所施之能，耗於無用。若能量漸增，至足以勝其摩擦抵抗之時，則物體移動，在繼續施能之間，始終以常速度運動。其時功之原理如左：

所施之能＝效功＋耗功

例如有一機械，裝於第八十八圖之筐A中，其機械



第 八 十 八 圖

之構造作用如何，姑不置論，但知若施P力於B繩，引下x呎。則W重錘將上昇y呎，而P與W平衡，則

$$Px = Wy + L$$

式中L爲消耗於摩擦衝突之功量。若假定此機械無擦摩衝突之損失，則

$$Px=Wy$$

寺功與抵抗不平衡者，例如機械運轉開始或將停之際，必生速度變化，此時功之原理如左：

所施之能＝效功＋耗功＋動能之變遷

機械　凡欲功之作成，必以能之施與爲前提。在少數事例中，能可直接使用而作功，如挽曳貨車，在道路抵抗五十瓩內外間，可直接利用牛馬之能而作相當之功。然在多數事例，則欲作之功，與所供之能，其情形不能相適，故其能自難直接利用也。如欲以人力扛一瓲重物至一粎高處，是爲不可能，然人雖僅能供給十瓩之動力，若以此力動作於一百粎之距離，則與以一瓲重物昇高一粎之功相同，而其所需之能亦自相等。故以此能設法傳達之，終使其力增大一百倍，而其運動則使減至一百分之一，卽得使爲相當之功也。

所謂機械之便利，卽不過以自然之能變更爲適宜之情形，而使爲所需之功而已。但功爲力與距離之乘積，故欲以較小動力對於大抵抗力而作功，則須增其力，且以同比減其速度；又若欲增其速度，則必以同比減其力

也。因工事之性質，有須增力之必要者，如起重機之類是也；又有須增其速度者，如縫衣機之類是也。是以研究機械，須分下列三項：

第一　須知機械上力之增減之比，即抵抗力與動力之比，是曰力比（Force ratio），又曰機械之利益（Mechanical advantage）。

第二　須知速度變化之比，即抵抗力速度與動力速度之比，是曰速比（Velocity ratio）。

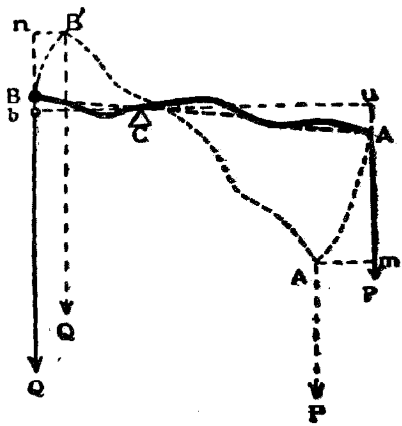
第三　須知機械傳達之比，即研究所施之能，其中若干爲效能，若干爲耗能也。效能與所施之能之比，曰機械之效率（Mechanical efficiency）。

若毫無損耗之機械，其效率爲一。然實際自不免有若干損耗，故效率爲較小於一之數。效率之大小，即爲判別機械良否之主因。

以下就功之原理，而研究簡單機械(Sinple mechine)之作用。

槓桿　在簡單機械中，最簡易而應用頗廣者，厥爲槓桿（Lever）。通常即如第八十九圖所示，爲鐵或木

製之棒，其一端施以動力，他端支以抵抗力，而就定點C得自由迴轉之裝置也。C點曰支點（Fulcrum）。今設 P 爲動力，Q 爲抵抗力，而 P 與 Q 正爲平衡之時，若



第八十九圖

徐徐引下 A 至 A′ 點，則 B 上昇至 B′ 點，此時間中，A 點在 P 方向上移動 Am 距離，而 B 則在 Q 方向上移動 Bn 距離，即所施之能爲 $P \times Am$，而所作之功爲 $Q \times Bn$。故因功之原理，

$$Q \times Bn = P \times Am$$

$$力比 = \frac{Q}{P} = \frac{Am}{Bn} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{AC}{BC}$$

$$速比=\frac{Bn}{Am}=\frac{BC}{AC}$$

$$效率=\frac{Q\times Bn}{P\times Am}=力比\times速度=1$$

力之方向與支點之最近距離，曰臂（Arm）。圖中Ca爲動力之臂，Cb爲抵抗力之臂。前式以詞述之如左：

（一）在槓桿中，動力與抵抗力平衡者，力反比例於臂之長；動力之力矩等於抵抗力之力矩。

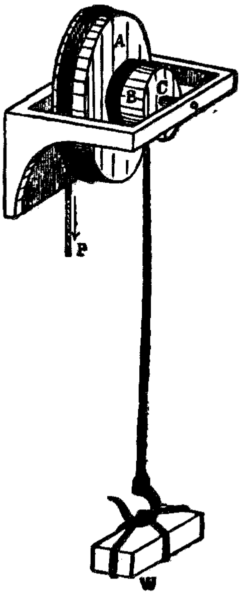
（二）動力臂之速度與抵抗力臂之速度，正比例於其長。

（三）效率等於力比與速比之乘積。

槓桿與支點互壓之力，曰支點之支持力。此壓力等於動力與抵抗力之合力，在此圖中，則等於其和。此壓力所發生之摩擦，比較的甚小，故通例在槓桿計算中，可不計及。

輪軸 輪軸（Wheel and axle）爲以較小之力，舉上重物之用，如第九十圖所示，由直徑不同之大小二圓柱體A,B而成，A曰輪，以鐵練或蔴繩卷於其周以供施以動力P之用；B曰軸，亦以鐵鍊或蔴繩卷於與輪相

反之方向，以供扛上重物 W 之便，而共固定於較小之心軸 C，迴轉於其軸承之周圍者也。



第　九　十　圖

輪軸得視爲槓桿之無間斷者。設 R 爲輪之半徑，r 爲軸之半徑，假定無摩擦及其他無效之抵抗，則加以 P 力而輪以常速度一迴轉，此時所施之能等於 $2\pi RP$，其所作之功，則爲 $2\pi rW$。因功之原理，知

$$2\pi RP = 2\pi rW$$

$$\therefore \text{力比} = \frac{W}{P} = \frac{R}{r}$$

$$\text{速比} = \frac{2\pi r}{2\pi R} = \frac{r}{R}$$

$$\text{效率} = \frac{2\pi rW}{2\pi RP} = \frac{r}{R} \cdot \frac{W}{P}$$

$$= \text{速比} \times \text{力比} = 1$$

輪軸之無效抵抗，實由二部份而成。其一因引上重物之輕重而變，即因P及W而發生之心軸間之摩擦，他則殆為常數，即輪軸重量所發生心軸之摩擦及練條或蔴繩於捲緊或拉開間發生之抵抗力也。此抵抗力在理論上頗頗難確定，普通以實驗法即測定輪軸空轉時所需之動力可也。今假定之為 b，心軸之摩擦係數為 f，其半徑為 r'，則因功之原理，

$$2\pi RP = 2\pi rW + 2\pi Rb + f(P - b + W)2\pi r'$$

$$\therefore P = \frac{r + fr'}{R - fr'} W + b$$

式中第二項 b，即為無效抵抗之常數部份。如第一項W之係數為 a，則

$$P=aW+b$$

$$\therefore 力比=\frac{W}{P}=\frac{1}{a}\left(1-\frac{b}{P}\right)$$

$$速比=\frac{2\pi r}{2\pi R}=\frac{r}{R}$$

$$效率=\frac{r}{aR}\left(1-\frac{b}{P}\right)$$

a 及 b 均得自實驗求得之。

例——有一輪軸，輪之周圍 221.25 糎，軸之周圍 37.25 糎，心軸直徑爲 1.88 糎。今充分注油而行數次之試驗，其結果得知 W 爲 31.5 瓩時，P 爲 6.39 瓩，又 W 爲 3.78 瓩時，P 爲 7.785 瓩。

此輪軸中 P 與 W 之關係，得因上式定之如下：

$$b+31.5\ a=6.39$$

$$b+37.8\ a=7.785$$

解之，得　$b=0.5,\quad a=0.2$

$$\therefore P=0.5+0.2W$$

故人若施以 6.8 瓩之力，則得舉上 31.50 瓩之重物，而其

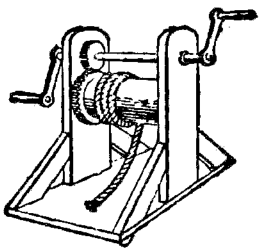
$$力比=\frac{W}{P}=\frac{1}{.2}\left(1-\frac{.5}{6.8}\right)=5\left(1-\frac{.5}{6.8}\right)=4.6$$

$$速比=\frac{37.25}{221.5}=\frac{1}{5.94}$$

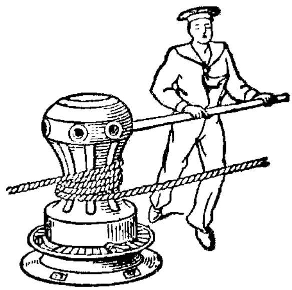
$$效率=\frac{4.6}{5.94}=0.77$$

卽此種輪軸，有百分之二十三之能消耗於無用也。

輪軸不但用以舉高重物，卽平地或山坂間，亦得用以拖引重物，其形狀有種種，約如第九十一及第九十二圖所示。凡心軸水平者，曰捲揚機（Windlass），心軸



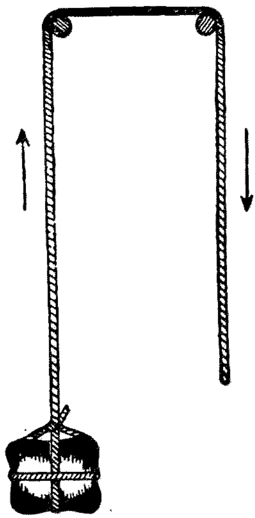
第九十一圖



第九十二圖

垂直者曰絞盤（Capstan）。而在絞盤則得於輻射棒之兩端各施以相等之力，此二力爲偶力，僅傳於繩而不在軸承，故絞盤之軸承，不必甚堅固也。此種機械，在船舶上用之極多，讀者當習見之。

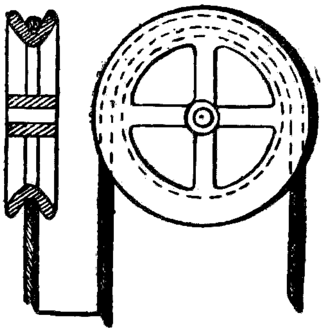
滑輪　滑輪（Pulley）之周圍有溝，爲捲以繩索而迴轉於小軸之裝置。滑輪之最大效用，在能變移力之方向而不損其能。蓋僅變力之方向，滑輪外倘有種種方法，而損其能者居多。譬如欲以重物昇諸樓上，於下方加以牽引之力而使重物上昇，則可如第九十三圖所示，



第九十三圖

於上層橫置兩棒，以繩引之，即足達變移方向之目的。但此種裝置，以甚大之力僅足舉甚輕之物，據實驗之結

果，以直徑 1.6 糎之鐵棒，相距 20.3 糎，設於水平位置，其重量僅 6.3 瓩，而所施之力須 30 瓩左右之巨。若一無摩擦，則引上 6.3 瓩之物，祇須 6.3 瓩之力足矣，而竟須五倍以上之力者，蓋因繩之纖維與鐵棒間有甚大之摩擦，其故固自瞭然也。若以直徑 35 糎鑄鐵製之滑輪如第九十四圖所示者代之，則僅 6.3 瓩之力，已足達前



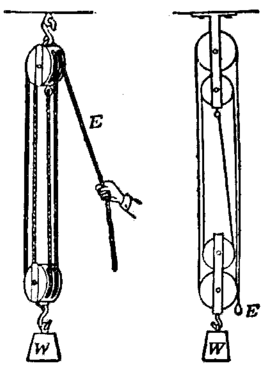
第九十四圖

項之目的。其所以有如是大差者，實因繩類納入滑輪周上 V 字形之溝中，繩與溝之內面互相緊壓，而毫無關係，滑輪與繩恰如一體，而迴轉於心軸之周圍，此時心軸雖受壓力，而妨礙心軸迴轉之摩擦則甚小。況摩擦發

生於心軸表示，而勝過此摩擦之力，則作用於輪周，故自輪軸之理推之，此力自甚小也。總之在同軸之滑輪，其勝過摩擦所需之力，反比例於其直徑者也。

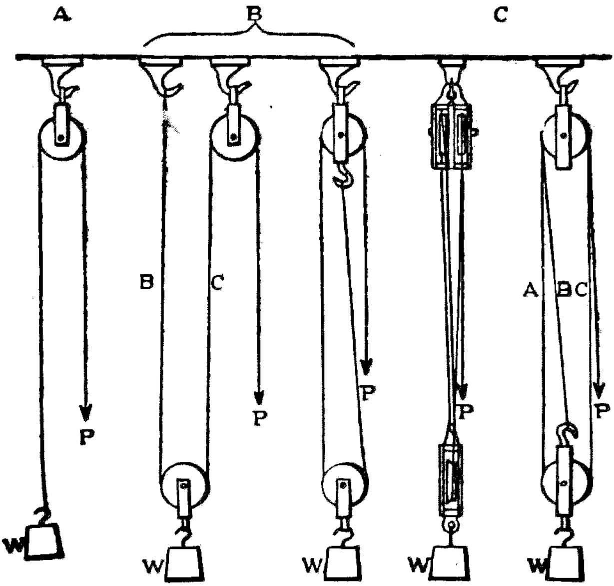
利用滑輪之理，而減少摩擦之裝置，在各種器具及建築上應用頗廣。如重大之門，往往於門之上下端設小轉輪（Roller），而於門限上設小軌條以為推移者，即其一例也。又若機械上一部與他部相接而為相對運動者，則置金屬製之小轉輪於其間亦多，是名曰減摩轉輪（Friction roller）。

重物升降用之滑輪，大概如第九十五圖所示，A為



第九十五圖

木製，B,C,D 爲鐵製。以此等合併使用之，則得大增其力比，是名爲滑輪之組合（Combination of pulleys）。其法雖有種種，而適於實用者，莫如第九十六圖所示。



第九十六圖

與重物同時升降者，曰動滑輪（Movable pulley），在上方者，曰定滑輪（Fixed pulley）。其力比因滑輪之多而增。今將動滑輪之重量及摩擦姑置不論，而論各

組合法中力比增加之理由。

設有P動力，引下繩x尺，則重物W當上升y尺，自功之原理，知

$$Px = Wy$$

在第一法中，

$$x = y,\quad P = W$$

卽　力比＝速比＝1

在第二法中，以P引繩一尺，則B,C各上升五寸，卽

$$x = 2y$$

$$\therefore 力比 = \frac{W}{P} = 2$$

$$速比 = \frac{y}{x} = \frac{1}{2}$$

在第三法中，以P引繩一尺，則A,B,C三繩各上升三分之一尺，卽

$$x = 3y$$

$$\therefore 力比 = \frac{W}{P} = 3$$

$$速比 = \frac{y}{x} = \frac{1}{3}$$

普通以動滑輪上所懸之繩數爲 n,則

$$x = ny$$

$$\therefore Wy = ny.P$$

$$力比 = \frac{W}{P} = n$$

$$速比 = \frac{y}{x} = \frac{1}{n}$$

$$效率 = n \times \frac{1}{n} = 1$$

如此滑輪之數加多，則力比可增大至任何程度，然實際因摩擦抵抗之增大，故動定兩滑輪均不可用至三個以上。

滑輪中消耗之功，爲因滑輪及繩之重量而發生心軸之摩擦，以及繩之強度對於舒卷時之抵抗也。此種無效抵抗，亦與輪軸相同，得區分爲常數及變數部分。今以 b 爲滑輪空轉間所需之動力，則 b 卽爲無效抵抗之常數部分。又變數間分所消耗之功，得以 cWy 表之， 但 c 爲常數。故自功之原理，

$$Px = Wy + cWy + bx$$

$$P = (1+c)\frac{y}{x} \times W + b$$

$$速比 \frac{y}{x} = \frac{1}{n}$$

若以　$(1+c)\dfrac{y}{x}=a$

則　$P=aW+b$

比 a 及 b 得自實驗求得之。

例——如動定滑輪均爲直徑 6.35 糎之鑄鐵輪，其數均爲三個，而實驗之結果如次：

$$P=2.36+0.238W$$

如 W 爲 200 瓩，則 P 爲 50，故

$$力比=\frac{W}{P}=\frac{200}{50}=4$$

$$速比=\frac{1}{n}=\frac{1}{6}$$

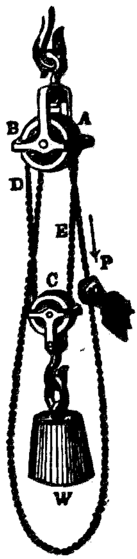
$$效率=4\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

故知此滑輪所施之能，其三分之一爲消耗也。

差動滑輪　前述之滑輪，輪數增則力比雖大，而摩擦亦同時增加，故徒增輪數，未爲良善之法。茲有不增輪數而力比能加大者，是爲差動滑輪（Differential pulley block），如第九十七圖所示，其定滑輪以直徑不同之 A,B 二輪作成，動滑輪則僅 C 輪，而以無

端之鐵鍊．自A懸於C，自C經B，自B下垂而復歸於A。

玆姑不論摩擦及動滑輪之重量，而研究其作用。設



第 九 十 七 圖

B之半徑為R，A之半徑為r，今以P力施於自B懸垂之繩，則B一迴轉間，繩之E部垂下之長為$2\pi r$，而D部則上升$2\pi R$之長，故重物W所上升之高，自必為$2\pi(R-r)$

之二分之一。故因功之原理，

$$2\pi r \cdot P = 2\pi\ (R - r) \cdot \frac{1}{2} \cdot W$$

$$\therefore 力比 = \frac{W}{P} = \frac{2R}{R-r}, \qquad 速比 = \frac{R-r}{2R}$$

故 $R-r$ 之差愈小，則力比得非常增大，而速度則漸緩，故以 $R-r$ 爲 R 之二十分之一者爲極限。

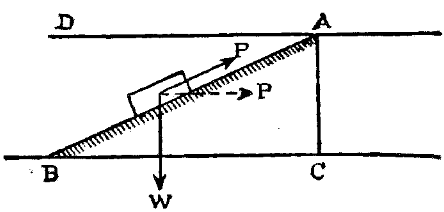
如以摩擦及其他抵抗計入，則通常滑輪爲

$$P = aW + b$$

就直徑 10.16 糎及 8.89 糎之滑輪而實驗之，得

$$a = 0.1508, \qquad b = 3.87$$

斜面　斜面（Inclined plane）亦爲增加力比之裝置。玆有高低二平面 AD 及 CB，如第九十八圖所示，欲將重物自 CB 升諸 AD，但使用之動力，不足以使重物垂



第　九　十　八　圖

直上升。故於二平面間設一斜面 AB，是即為使重物易於升舉之便法也。

設動力 P 平行於 AB，則所施之能為 P·AB，所作之功為 W·AC，故

$$W \cdot AC = P \cdot AB$$

$$\therefore \text{力比} = \frac{W}{P} = \frac{AB}{AC}, \qquad \text{速比} = \frac{AC}{AB}$$

次若動力平行於CB，則所施之能為P·BC，所作之功為W·AC，故

$$W \cdot AC = P \cdot BC$$

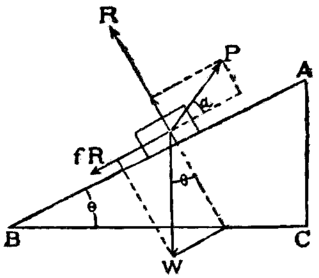
$$\therefore \text{力比} = \frac{W}{P} = \frac{BC}{AC}, \qquad \text{速比} = \frac{AC}{BC}$$

故自同斜面觀之，知前者之力比，較後者為大。

次更以摩擦計入而討論斜面之作用，且為便利起見，故作不論 P 力作用於任何方面均可適用之公式。

設動力 P 與斜面成任意之角度 α，如第九十九圖，而以 R 示斜面之直角抵抗力，是則物體與斜面間之摩擦抵抗，為摩擦係數 f 與 R 之乘積而作用於物體運動之反對方向。今若物體以常速度，則沿斜面而上升之頃，其

W, P, R, fR 四力,必互相平衡,故因力之平衡條件,互為直角之方向,例如 BA 及 R 方向上所分解之二力,其代



第　九　十　九　圖

數和必各為零也。卽

$$P\cos\alpha - W\sin\theta - fR = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$P\sin\alpha + R - W\cos\theta = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以 f 乘(2),而加以(1),則

$$P(\cos\alpha + f\sin\alpha) - W(\sin\theta + f\cos\theta) = 0$$

$$\therefore \frac{W}{P} = \frac{\cos\alpha + f\sin\alpha}{\sin\theta + f\cos\theta} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(一) P 沿斜面而動作之時,則 $\alpha = 0$,故自(3)式得

$$力比 = \frac{W}{P} = \frac{1}{\sin\theta + f\cos\theta}$$

$$速比 = \frac{AC}{AB} = \sin\theta$$

$$效率=\sin\theta\cdot\frac{1}{\sin\theta+f\cos\theta}=\frac{\tan\theta}{f+\tan\theta}$$

實際上重物或轉動於面上，或以貨車運轉，故 f 之值甚小。

於此有可研究之二事項：

(A)表示力比之式，得改作如次：

$$P=f\ W\cos\theta+W\sin\theta$$

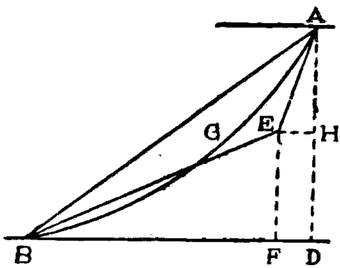
今以 AB 乘之，則

$$P\cdot AB=W\cdot BC+W\cdot AC$$

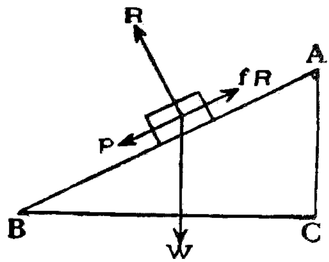
此式以詞述之，卽謂以重物沿斜面而上舉時，其所施之能，必等於沿同一摩擦係數之底面而運輸，是物所需之功及以是物垂直上舉於高處時所需之功之和也。因此理而得一至要之法則，卽以重物自某位置而移置於他位置時，不問其路徑如何，其所需之功相等也。

例如第一百圖所示，以某重物自 B 而升諸 A，此時其路徑約有三種：一爲AB斜面，其二爲BE 及EA二斜面所組成，其三則爲 BGA 弧線。但自 BEA 引上重物所需之功，卽等於先沿 BF 底面而運於 F 點，次取 FE之垂直

線上升至 E,更沿 EH 水平路而運至 H,然後升於AH之高時所需之功之和也。然此時之功，恰與先沿 BD 面而運至D，更沿垂直線 DA 而上升時之功相等，亦卽與沿 AB 斜面上升時之功相等，固前所證明者也。至於BGA弧線，得視爲無數小斜面所組成，照前理推闡之，則知其所需之功亦必相等也。



第一百圖



第一百一圖

(B)以重物沿斜面而挽下之時，設有重 W 之物體，在 AB 斜面上如第一百〇一圖所示，加以P力挽之，則物體以常速度而降下，此時之力比，卽以前式中之 P 及 f 易爲負數可也。卽

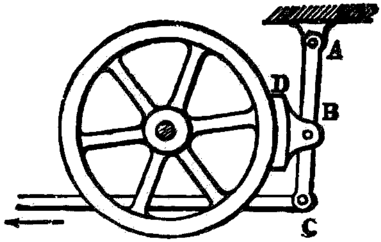
$$P = W(f\cos\theta - \sin\theta) = W\cos\theta(f - \tan\theta)$$

今就此式研究之:

第一 當 $f>\tan\theta$ 時，則 P 爲正數，意謂欲 W 以常速度降下，須加以相當之力而挽之也。

第二 當 $f=\tan\theta$ 時，則 P 爲零，意謂不必加以些許之力，物體自以常速運動而降下也。故若以適宜方法，屢次變更斜面之傾斜角 θ，則不難發見物體以自身重量而爲常速運動之際限，而自其角度之正切，卽可求得摩擦係數 f。此爲實驗摩擦係數之一法，其角卽以前所述之摩擦角。

第三 當 $f>\tan\theta$ 時，則 P 爲負數，意謂欲使是物沿斜面而下降，應以 P 力施於其反對方向而制御之也。如機關車、脚踏車之制動機，卽爲其實例。制動機之構造，如第一百二圖所示，D 爲鑄鐵所造而作成弧狀與輪周相接，若輪之迴轉過速，或須停車之時，則引 ABC 槓桿使 D 緊壓於輪周，因其壓力之強弱，得隨意增減其摩擦，故可減少輪周迴轉之能，而使之速度漸慢或停止之也。當物體沿斜面下降之時，其速度有過急之慮，故亦用此裝置增其摩擦，使爲常速運動，然其功則徒然消費，變爲熱而不復可用矣。



第一百二圖

(二)P之動作爲水平之時，則 α 爲$(-\theta)$，故自(3)式，

$$力比=\frac{W}{P}=\frac{\cos\theta-f\sin\theta}{\sin\theta+f\cos\theta}$$

$$速比=\frac{AC}{BC}=\tan\theta$$

$$效率=\tan\theta\cdot\frac{\cos\theta-f\sin\theta}{\sin\theta+f\cos\theta}$$

今以摩擦角爲 ϕ，卽 $f=\tan\phi$，則效率得以易於記憶之式表之：

$$效率=\tan\theta\cdot\frac{\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi}{\sin\theta\cos\phi+\sin\phi\cos\theta}$$

$$=\frac{\tan\theta}{\tan(\theta+\phi)}$$

(三)物體於平地上牽引之，卽 $\theta=0$，故自(3)式，

$$力比=\frac{W}{P}=\frac{\cos\alpha+f\sin\alpha}{f}=\frac{\cos\alpha+\tan\phi\sin\alpha}{\tan\phi}$$

$$=\frac{\cos(\alpha-\phi)}{\sin\phi}$$

$$速比=1$$

$$效率=\frac{\cos(\alpha-\phi)}{\sin\phi}$$

（四）欲以最小之動力，在斜面或平地上牽引重物其施力之角度宜如何？在斜面上 P 與W 之關係，如公式(3)所示，即

$$P=\frac{\sin\theta+f\cos\theta}{\cos\alpha+f\sin\alpha}\cdot W$$

今以 f 爲 $\tan\phi$，則

$$P=\frac{\sin(\theta+\phi)}{\cos(\alpha-\phi)}W$$

此式中，θ 與 ϕ 均爲常數，故欲求 P 之最小值，即須求 $\cos(\alpha-\phi)$之最大值可也。即 $\alpha=\phi$ 之時，$\cos(\alpha-\phi)$之值最大，P 值自爲最小矣。

平地上牽引物體，而欲P值最小者，其施力之角，

亦以 $\alpha=\phi$ 爲最宜，其理正與前相同也。

二重斜面　載重之車在斜面上因其重量而降下，嫌其速度過急，應於反對方向施以某力而制御之，已如前節所述。有時利用此力以挽空車，如礦山等處所用之二重斜面 (Double inclined plane) 是也。其法在山腰間築斜面，而鋪設複線軌道，且於山嶺設滑輪，以鐵練或繩聯結載重之車，甲載重下降時，乙以空車上升，乙載重降下時，甲以空車上升，祇須山嶺與山麓有人司裝卸貨物之役而已。今設 W 爲車上載物之重，w 爲空車之重，f 爲摩擦係數，則一升降間所費之能爲 $(W+w)BC$，而其效功爲 $w\cdot BC$，其耗功爲 $f(W+w)AB+fw\cdot AB$，故因功之原理，

$$(W+w)BC=w\cdot BC+f(W+w)AB+fw\cdot AB$$

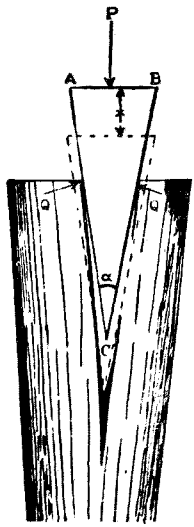
$$\therefore \frac{BC}{AB}=\tan\theta=f\,\frac{W+2w}{W}$$

若斜面之傾斜角與此相等，則車輪可以常速度升降，可少危險。

楔　楔 (Wedge) 爲一三棱角錐，其一稜銳如第一百三圖中之 C，加 P 力於背，則銳稜刻入物體之中，錐

刀斧斤，皆屬此類。機械中則用以嵌入材料接合部，而使之緊接。

楔之斷面，大都爲二等邊三角形。設如圖中，最初占



第一百三圖

實線位置，因施以P力，故深入物中而占點線之位置，此時物卽施力於楔以抗其入，其着力方向卽垂直於等邊，而其大小相等，以Q表之。若以P所動之距離爲 x，則與Q相抗而移動於斜面上之距離，爲 x 投射於斜面直角方

向之影，即 $x\sin\frac{\alpha}{2}$ 也。故因功之原理，

$$Px=2\cdot Q\cdot x\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{2Q}{P}=\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}$$

然楔中摩擦甚大，今以其係數為 f，其因擦摩而所損失之功，左右各為 $fQx\cos\frac{\alpha}{2}$，故

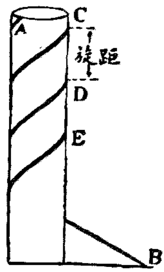
$$Px=2Qx\sin\frac{\alpha}{2}+2fQx\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{2Q}{P}=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}+f\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{效率}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}+f\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{f+\tan\frac{\alpha}{2}}$$

螺旋　螺旋（Screw）為斜面之特例。設截紙作直角三角形，如第一百四圖，捲於圓棒之周圍，其斜邊環為曲線，是為螺紋（Screw thread）。沿螺紋而刻以

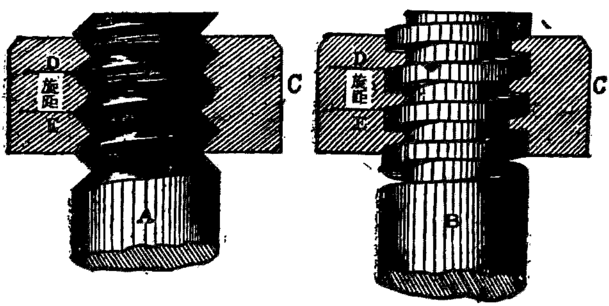
三角或四角之峯，則爲如第一百五圖之螺旋；A爲三角螺旋，B爲方螺旋。螺旋之一峯至他峯間之距離，曰旋



第一百〇四圖

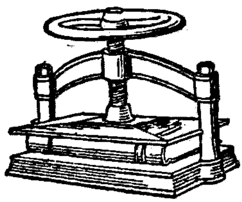
距（Pitch），卽圖中DE是也。

螺旋必陰陽相配，其效始顯，圖中之C，卽爲陰螺旋（Female screw）。陰螺旋之內壁周圍，鑿螺形曲線



第一百五圖

之溝，其深淺足容陽螺旋（Male screw）之峯，其旋距亦準於陽，是溝名曰螺谷。凡用以增加力比者，都使陰螺旋固定，以手柄迴轉陽螺旋而旋入之，往往用以爲壓縮之工作。手柄一迴轉間，螺旋下降一旋距。第一百六圖所示者，爲螺旋壓搾器（Screw press）。今先假定其無摩擦而求其功與抵抗之關係。



第一百六圖

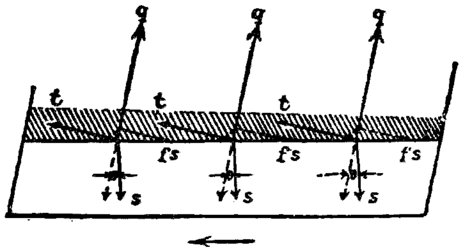
設Q爲抵抗螺旋下端而阻其旋入之力，P爲加於手柄之力，柄之長爲R，p爲旋距，今若手柄一迴轉，則因功之原理，

$$2\pi RP = Qp$$

$$\therefore \frac{Q}{P} = \frac{2\pi R}{p}$$

次以摩擦算入而求力比。試以螺峯螺谷互相壓迫之

面，展開而想像之，則如第一百七圖所示。若迴轉螺旋之力爲 t, t, …………，其抵抗力爲 q,q,…………，斜面之直壓爲 s,s,…………,摩擦爲 fs, fs,………… 令



第一百〇七圖

此螺旋爲常速運動，則此四力必每組互爲平衡，故 t, q, s 及 fs 四力之垂直分力，其代數和必等於零。若以斜面角爲 θ，則

$$q+fs\sin\theta-s\cos\theta=o$$

即
$$s=\frac{q}{\cos\theta-f\sin\theta}$$

$$\therefore fs=\frac{fq}{\cos\theta-f\sin\theta}$$

無論何組，其關係均同，故

$$\text{摩擦之全量}=\frac{fQ}{\cos\theta-f\sin\theta}$$

但加動力於手柄，而使之一迴轉間，其

所施之能$=2\pi RP$

效功$=pQ$

耗功$=\dfrac{p}{\sin\theta}\times\dfrac{fQ}{\cos\theta-f\sin\theta}$

$$\therefore 2\pi RP=pQ+\frac{fpQ}{\sin\theta}\times\frac{1}{\cos\theta-f\sin\theta}$$

卽
$$\frac{Q}{P}=\frac{2\pi R}{p}\times\frac{\sin\theta(\cos\theta-f\sin\theta)}{f+\sin\theta(\cos\theta-f\sin\theta)}$$

$$=\frac{2\pi R}{p}\times\frac{\sin\theta(\cos\theta-f\sin\theta)}{f\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{2\pi R}{p\cot\theta}\times\frac{\cos\theta-f\sin\theta}{f\cos\theta+\sin\theta}$$

以螺旋之平均半徑爲 r，則

$$p\cdot\cot\theta=2\pi r$$

故
$$\frac{Q}{P}=\frac{R}{r}\cdot\frac{1-f\tan\theta}{f+\tan\theta}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

速比$=\dfrac{p}{2\pi R}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

效率$=\dfrac{p}{2\pi R}\cdot\dfrac{R}{r}\cdot\dfrac{1-f\tan\theta}{f+\tan\theta}=\dfrac{p}{2\pi r}\cdot\dfrac{1-f\tan\theta}{f+\tan\theta}$

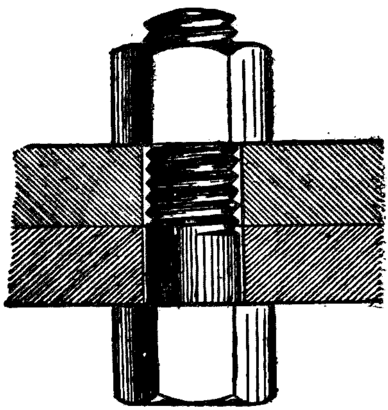
$$=\tan\theta\cdot\frac{1-f\tan\theta}{f+\tan\theta}$$

以 $\tan\phi$ 代式中之 f，則

$$效率=\frac{\tan\theta}{\tan(\theta-\phi)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

物之接合部所用之一對螺旋，如第一百八圖所示者，是名爲套頭螺旋 (Bolt and nut)。此種螺旋之旋距較小，故效率通常不過四分之一內外，但力比甚大，得以僅小之力而緊結之也。例如以長 12 糎之螺旋鉗 (Spanner) 絞緊每時間十旋距之螺旋，若無摩擦，則

第一百八圖



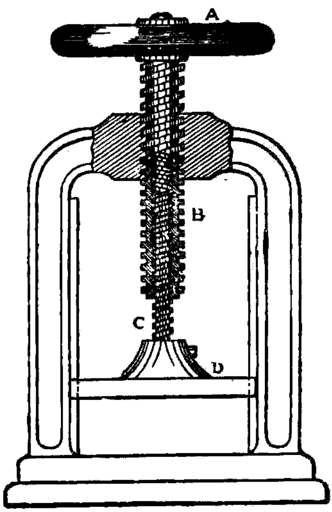
$$2\pi\times12\div\frac{1}{10}=754$$

卽以摩擦計入，爲其四分之一，亦約有188。質言之：卽以 12 瓩之力，能發生 $188\times12=2256$ 瓩約爲二噸餘之

巨力，絞螺旋使之緊接也。

差動螺旋 (Differential screw)　以方螺旋作成內空，內側鑿成旋距極小之陰螺旋，以相當之陽螺旋嵌入之，則更得增加力比，但陽螺旋不迴轉，僅上下運動而已。應用此理而作成之機械，曰亨特氏螺旋壓搾器 (Hunter's screw press)。其構造如第一百九圖所示，A 爲手輪，以供迴轉 B 螺旋之用，C 爲小螺旋，裝於壓板 D 上，而一同上下。今若 A 輪一次右迴，則 B 下降

第一百〇九圖



其一旋距之距離，同時C上升其一旋距之距離，故壓板D所降下之距離，卽爲兩旋距之差。設此二旋距爲 p，p′，A輪之半徑爲R，則

$$\frac{Q}{P}=\frac{2\pi R}{p-p'}$$

例如R爲十四寸，p爲二分之一寸，p′爲四分之一寸，則

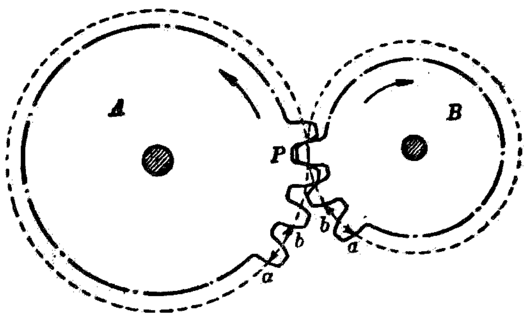
$$\frac{Q}{P}=\frac{2\pi\times 14}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=112\pi=352$$

但摩擦則同時增加，故此器實際上不多用。

齒輪　齒輪（Toothed wheel）者，爲周圍刻齒之圓板，用以傳運動或力於兩軸間者也。凡自一軸傳運動於他軸，可以圓板固定於兩軸，使其周面互相接觸，如第一百十圖所示者，亦得傳達運動之目的。蓋因A迴轉於矢之方向，則B輪在C點被壓迫，而迴轉於反對方向也。詳言之，卽二粗糙面互相接觸，故A面之凸處陷入B面凹處之中，故A迴轉，B自必隨之而迴轉也。但兩軸之距離，必等於兩半徑之和。若兩面不稍滑動，則線速度

必常等，此種運動，曰純粹轉動（Pure rolling）。今以 N_A，N_B 爲 A，B 兩輪每分間之迴轉數，r_A，r_B 爲其半徑，V 爲其輪周速度，則

第一百十圖



$$V=\frac{2\pi r_A N_A}{60}=\frac{2\pi r_B N_B}{60}$$

$$\therefore \frac{N_A}{N_B}=\frac{r_B}{r_A}$$

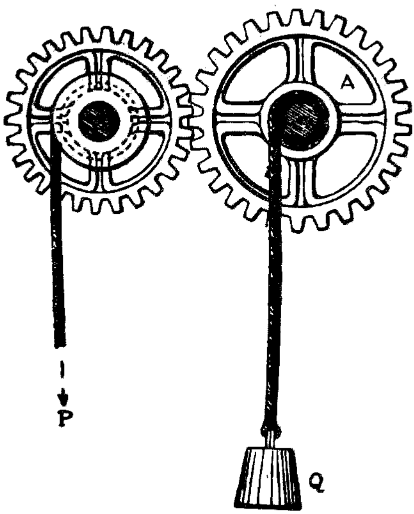
卽兩輪之迴轉數，反比例於其半徑。然實際難免稍有滑動，而尤以傳達動力之小者，或能確爲純粹轉動，而足以供實用，如製絲機械是也。至傳達大力之時，須用齒輪。

齒之適當形狀及其性質如何，固讀者所應素知，玆不贅述，唯略述其要點，卽齒之形狀須使兩輪在其齒距

圓（Pitch circle）間，恰如圓板之爲純粹轉動。

齒輪得因其組合方法而增大力比。設加力於小齒輪，而懸抵抗於大齒輪，如第一百十一圖，大輪之直徑爲 r_A，小輪之直徑爲 r_B，一分間之迴轉數爲 N_A，N_B，則

第　一　百　十　一　圖



$$\frac{N_A}{N_B}=\frac{r_B}{r_A}$$

又Q之力臂爲 r，P之力臂爲R，則一分間所施之能爲 $2\pi RN_BP$，而所作之功爲 $2\pi rN_AQ$，故

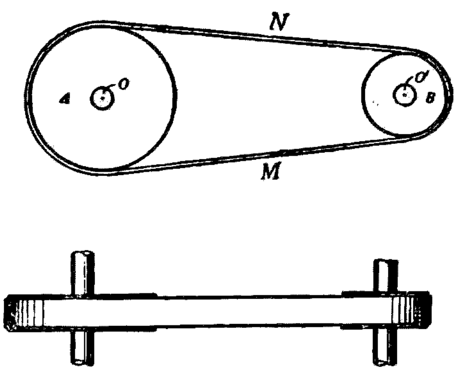
$$2\pi RN_BP=2\pi rN_AQ$$

$$\therefore \frac{Q}{P}=\frac{RN_B}{rN_A}=\frac{R}{r}$$

至其速比自爲其倒數。

皮帶輪　皮帶輪（Belt pulley）爲周圍平滑而中間稍凸之輪，以一對分裝於兩軸，套皮帶於其上，如第一百十二圖所示，自A至B，以傳達動力者也。

第一百十二圖



自A發動輪，傳動力於B受動輪之時，兩輪間皮帶各部如M，N等處均有張力，以吸引皮帶於輪之周圍，故兩輪周面與皮帶互相密接如一體而迴轉也。今以V每

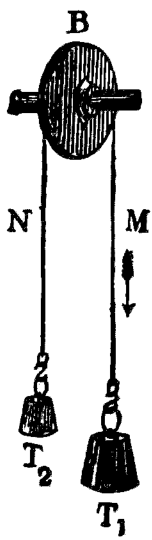
秒積表示其速度，r_A，r_B 表示兩輪之半徑，其迴轉數為每分間N_A及N_B，則

$$V=\frac{2\pi r_A N_A}{60}=\frac{2\pi r_B N_B}{60}$$

$$\therefore \quad \frac{N_A}{N_B}=\frac{r_B}{r_A}$$

即迴轉數與齒輪相同，反比例於其半徑；但迴轉方向則與齒輪不同，兩輪皆迴轉於同方向者也。

皮帶輪運轉間，皮帶兩部之張力必異，在前圖中，



第一百十三圖

則M部之張力必較大於N部，蓋必如此，而後動力始能自A傳於B也。其理由如第一百十三圖，M部之張力爲T_1錘之重量，可以T_1瓩表之，N部之張力爲T_2瓩，B輪之半徑爲r粎，軸上抵抗其迴轉之力，設爲Q瓩，而其力臂爲R粎，則B一迴轉間所費之能爲$2\pi rT_1$，而其所作之功則爲$2\pi rT_2$及$2\pi RQ$，故

$$2\pi rT_1=2\pi rT_2+2\pi RQ$$

$$\therefore T_1-T_2=\frac{RQ}{r}$$

今以若干動力，在此裝置傳達，故其抵抗Q，必有相當之值，故T_1-T_2必爲正數也明矣。

今以皮帶輪之速度爲V每秒粎，一分間之迴轉數爲N，則所傳達之功率，爲

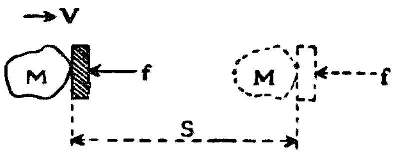
$$\frac{9.8\times2\pi rN(T_1-T_2)}{60\times1000}$$

$$=\frac{9.8V(T_1-T_2)}{1000}\text{瓩}$$

在略算中，以T_1爲T_2之二倍，亦無大差。

第十章 功之原理續

動力與抵抗不平衡之例 質量M單位之物體，如第一百十四圖所示，以V每秒呎之速度運動於一定之方向，必有與抵抗相逆而作功之可能，即此動體有若干之能也。



第一百十四圖

今設以f 瓩之抵抗力以正反對方向施於此動體，因此而動體為常減速運動，至S呎而終於靜止，則其動能必等於fS 瓩呎也。今以其加速度為a，其重量為W，則

$$f=Ma, \qquad S=\frac{V^2}{2a}$$

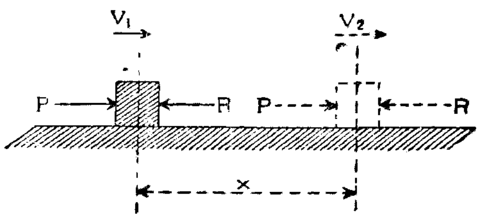
$$\therefore fS=\frac{1}{2}MV^2=\frac{1}{2}\ \frac{W}{g}V^2 \text{瓩呎}$$

又若重量W瓩之動體，其速度自V_1，而變為V_2，則其動能之變更為

$$\frac{1}{2}\ \frac{W}{g}\left(V_2^2-V_1^2\right)$$ 尪粎

卽因此變更，而能作此式所示分量之功也。逆言之，則此變更之間，必費去此式所示分量之能也。

重W之物體，受P尪之力，抗R尪之抵抗力，而於第一百十五圖以矢之方向運動x粎之距離，此時若P與R相等，則所施之能等於所作之功，則物體自爲常速運動。若P與R不等，則Px與Rx之值異，此時果爲若何之運動，自應分別研究者也。若P大於R，則能有(P－R)x之過剩，若P小於R，則感(R－P)x之不足。就吾人日常之經驗，知其結果必皆發生速度之變化，卽前者之終速度V_2必大於初速度V_1，而後者之終速度V_2，必較其初速度V_1爲小也。換言之，則前者所過剩(P－R)x



第一百十五圖

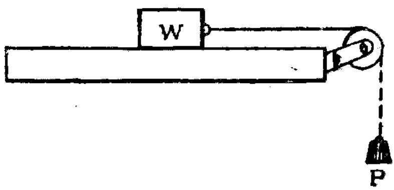
之能，必以動能而貯於物體，後者所不足（R－P）x之能，必物體放出其所固有之動能，以補足之也。故因功之原理，

$$Px=Rx+\frac{1}{2}\frac{W}{g}(V_2^2-V_1^2)$$

以詞述之，卽謂所施之能必等於所作之功與動能變更之和也。

茲舉數例說明之：

例一——在檢定摩擦係數之試驗中，如第一百十六圖所示之裝置，若重錘P之分量，較大於摩擦，則W爲常速運動，此卽動力與抵抗不相平衡之一例也。今以P降下x粎時之速度爲V每秒粎，摩擦係數爲f，則所施之能爲Px 瓩粎，所作之功爲 fwx 瓩粎。因此時W與P之速度相同，故其動能爲



第 一 百 十 六 圖

$$\frac{(W+P)V^2}{2g}$$

而最初之動能爲零，故因功之原理，

$$Px=fWx+\frac{(W+P)V^2}{2g}-0$$

$$\therefore V^2=\frac{P-fW}{P+W}.2gx$$

例二——以打樁機打樁之時，先以重錘捲揚至相當之高處，然後遽行放鬆而使重錘猛擊樁之頂上，此時與地面之抵抗相逆，而打樁入地之功，固由於重錘之動能。設重錘將擊樁頂時之速度爲V每秒呎，錘重爲W瓩，樁被打入地下之深爲x呎，地面之平均抵抗爲R。在打入之間，自外所施之能爲Wx，所作之功爲Rx。但Rx必較Wx爲大，其不足則由重錘之動能即$\frac{1}{2g}WV^2$，逐漸放出以補充之也。故因功之原理，

$$Wx=Rx+0-\frac{1}{2g}WV^2$$

$\frac{V^2}{2g}$爲重錘落下之高，以h表之，則上式爲

$$Wx=Rx-Wh$$

$$\therefore h=\frac{(R-W)x}{W}$$

如錘重為600 𥹥，地面之抵抗為5400 𥹥，則樁打入地面一呎時，其錘須自

$$h=\frac{5400-600}{600}=8\text{呎}$$

之高處落下也。

迴轉體之動能 物體為直線運動者，其各分子之速度相同。設以其各分子之重為 w，全體之重為W，其共同速度為 v，則一分子之動能為$\frac{w}{2g}v^2$，其全體之動能為$\frac{W}{2g}v^2$也。然若物體之迴轉於軸周者，則各分子之速度不等，近軸心之分子，其速度自較遠於軸心之分子為小，故求全體動能之時，必先就各分子一一計算，而後可求其總和。今以w_1，w_2，w_3，……為各分子之重，v_1，v_2，v_3，……為各分子之速度，則全體

$$\text{動能}=\frac{1}{2g}w_1v_1^2+\frac{1}{2g}w_2v_2^2+\frac{1}{2g}w_3v_3^2+\cdots$$

若以迴轉體之角速度為θ，又r_1，r_2，r_3，……為各分子離軸之距離，則

$$\frac{1}{2g}w_1v_1^2+\frac{1}{2g}w_2v_2^2+\frac{1}{2g}w_3v_3^2+\cdots\cdots$$

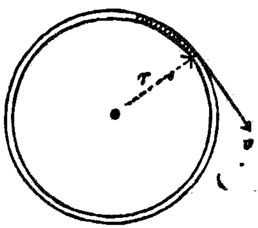
$$=\frac{1}{2g}w_1\theta^2r_1^2+\frac{1}{2g}w_2\theta^2r_2^2+\frac{1}{2g}w_3\theta^2r_3^2+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2g}\theta^2(w_1r_1^2+w_2r_2^2+w_3r_3^2+\cdots\cdots)$$

$$=\frac{1}{2g}\theta^2\Sigma wr^2$$

此Σwr^2者，卽以物體分爲無數小部分，以各部分之重乘以中心距離之平方之總和也，是爲惰矩（Moment of inertia）。卽迴轉體之動能，爲其惰矩與$\frac{\theta^2}{2g}$之乘積也。若物體實質各部平均而有規則之形狀者，則其惰矩得以數理求之。今舉數例如次：

(一)極薄之圓輪而就其軸線迴轉者（如第一百十七圖）可以之等分爲小部份，其各部之重爲w，其半徑爲r，則



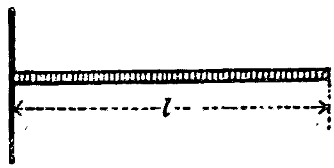
第一百十七圖

$$\frac{1}{2g}\theta^2\Sigma wr^2=\frac{1}{2g}\theta^2 Wr^2=\frac{W\theta^2}{2g}r^2$$

但 θ 爲圓輪之角速度，W爲其重量。

(二)直棒以垂直於其一端之線爲軸而迴轉者，（如第一百十八圖）則其動能爲 $\frac{1}{2g}\theta^2\cdot\frac{Wl^2}{3}$，但W爲直棒之重，$l$ 爲其長，θ 爲其角速度。

假定以其長 l 等分爲任意之 n 數，則



第一百十八圖

$$\Sigma wr^2=\Sigma\frac{W}{n}r^2=\frac{W}{n}\Sigma r^2$$

$$=\frac{W}{n}\left\{l^2+\left(\frac{n-1}{n}l\right)^2+\left(\frac{n-2}{n}l\right)^2+\left(\frac{n-3}{n}l\right)^2\right.$$

$$\left.\cdots\cdots+\left(\frac{2}{n}l\right)^2+\left(\frac{1}{n}l\right)^2\right\}$$

$$=\frac{Wl^2}{n^2}\left\{n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+(n-3)^2+\cdots\right.$$

$$\left.+2^2+1^2\right\}$$

$$=\frac{Wl^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{Wl^2}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

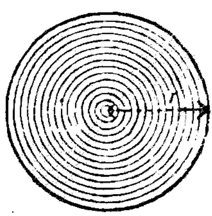
中若 n 極大，則 $\frac{1}{n}$ 爲零，故

$$\Sigma wr^2=\frac{Wl^2}{3}$$

$$\therefore 動能=\frac{W\theta^2}{2g}\cdot\frac{l^2}{3}$$

(三)圓板以通過其中心而垂直於板面之線爲軸而迴者，其動能爲$\frac{W\theta^2}{2g}\cdot\frac{r^2}{2}$。

今如前例，以 r 等分爲極大之數，通過各點而如第百十九圖作同心之圓，則圓板被分爲無數小圓輪。今



第一百十九圖

以圓板之重量一平方單位爲 w， 則最外之圓輪其重爲 $2\pi r\,\frac{r}{n}w$；其次圓輪之重爲 $2\pi\frac{n-1}{n}r\cdot\frac{r}{n}w$；又其次爲 $2\pi\frac{n-2}{n}r\cdot\frac{r}{n}w$； 最終第二輪之重爲 $2\pi\frac{2}{n}r\cdot\frac{r}{n}w$； 而最終之輪之重爲 $2\pi\frac{1}{n}r\cdot\frac{r}{n}w$。 故

$$\Sigma wr^2=\frac{2\pi r^2 w}{n}\cdot r^2+\frac{2\pi r^2 w(n-1)}{n^2}\cdot\left(\frac{n-1}{n}r\right)^2$$

$$+\frac{2\pi r^2 w(n-2)}{n^2}\cdot\left(\frac{n-2}{n}r\right)^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{2\pi r^2 w\times 2}{n^2}\cdot\left(\frac{2r}{n}\right)^2+\frac{2\pi r^2 w}{n^2}\left(\frac{r}{n}\right)^2$$

$$=\frac{2\pi r^2 w}{n^4}\left\{n^3+(n-1)^3+(n-2)^3+\cdots\cdots 2^3+1^3\right\}$$

$$=\frac{2\pi r^2 w}{n^4}\left\{\frac{n(n-1)}{2}\right\}^2$$

$$=2\pi\,r^4 w\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}^2$$

在極限中，則

$$\Sigma wr^2=\frac{\pi r^4 w}{2}$$

但 $\pi r^2 w=W$

故　　$\Sigma wr^2=\dfrac{Wr^2}{2}$

$$\therefore\quad 動能=\frac{W\theta^2}{2g}\cdot\frac{r^2}{2}$$

（四）圓環板以通過其中心而垂直於其面之線爲軸而迴轉者，其動能爲$\dfrac{W\theta}{2g}\cdot\dfrac{r_2^{\ 2}+r_1^{\ 2}}{2}$，但 r_1 及 r_2 爲內外半徑。

半徑 r_2 圓板之惰矩爲$\dfrac{\theta^2}{2g}\cdot\dfrac{\pi r_2^{\ 4}w}{2}$，半徑 r_1 圓板之惰矩爲$\dfrac{\theta^2}{2g}\cdot\dfrac{\pi r_1^{\ 4}w}{2}$，故圓環板之惰矩，等於其差。故其

$$動能=\frac{w\theta^2}{2g}\left(\frac{\pi r_2^{\ 4}}{2}-\frac{\pi r_1^{\ 4}}{2}\right)$$

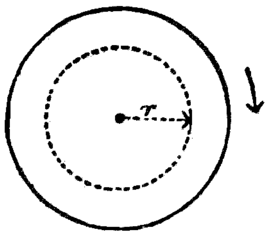
$$=\frac{\theta}{2g}\times\pi(r_2^{\ 2}-r_1^{\ 2})w\times\frac{r_2^{\ 2}+r_1^{\ 2}}{2}$$

然　　$\pi(r_2^{\ 2}-r_1^{\ 2})w=W$

$$\therefore\quad 動能=\frac{W\theta^2}{2g}\cdot\frac{r_2^{\ 2}+r_1^{\ 2}}{2}$$

惰性半徑　茲有圓壔體，例如工場所用之圓砥石，以一定之角速度 θ 而迴轉，今如第一百二十圖所示，於其中間取半徑 r 而作圓周，則此圓周各分子之運動，因各分

子之速度皆爲 θr，其重量相等，故其動能亦必相等也。而此圓周外之各分子，其速度大於 θr，其動能必較圓周



第一百二十圖

上各分子爲大；又此圓周內之各分子，其速度皆小於 θr，其動能亦必小於圓周上各分子之動能也。故若半徑 r 之所取適當，則此圓周外各分子過剩之動能，恰足以補充圓周內各分子動能之不足。詳言之：卽若半徑取之適當，則得視爲諸分子均集合於此圓周上者，故其動能恰與圓砥石全體之動能相等也。滿足此條件之半徑，曰其體之惰性半徑（Radins of inertia），或曰旋轉半徑(Radius of gyration)。今以此半徑爲R，惰矩爲I，則

$$\frac{WR^2\theta^2}{2g}=\frac{\theta}{2g}I$$

$$\therefore R^2=\frac{I}{W}$$

前節所舉各例之惰性半徑之平方如下表：

	物　體	惰性半徑
1.	極薄圓輪就其軸線迴轉者	r^2
2.	就心軸迴轉之圓壔體	$\frac{r^2}{2}$
2.	就心軸迴轉之空圓壔體	$\frac{r_2^2+r_1^2}{2}$
4.	直棒就其一端之直角軸而迴轉者	$\frac{l^2}{3}$

凡迴轉運動物體之動能，皆以自此半徑計算爲便。

調速輪　凡機械之動力變化而抵抗力一定，或動力及抵抗均有變更者，則運轉之速度殊欠平均。動力超過抵抗，則速度過於急激；抵抗超過動力，又必失於緩慢。欲調和緩急，故於迴轉軸上附設輪周質量極大之車輪，是卽名曰調速輪（Fly wheel）。蓋附設此輪，則動力超過抵抗之時，速度必增，則調速輪之速度亦增；至抵抗超過動力，速度減少，則調速輪亦必隨之而漸慢。換言之：卽前者調速輪得貯蓄若干之能，而後者則調速輪放出若干之能也。然調速輪之惰矩甚大，故其速度僅爲少許之變化，已得貯放相當之能，是以因機械所施之能

之變化，而設爲質量充分之調速輪，則得調和速度之緩急於所望之程度也。

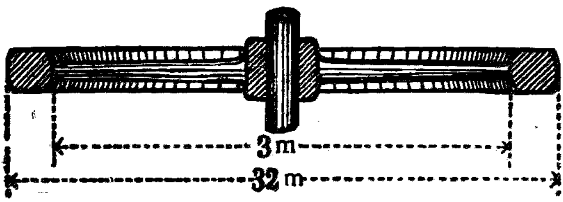
約略計算調速輪之動能，可計算其輪周之動能。設輪周之重量爲W瓩，惰性半徑爲R粎，一分間之迴轉數爲N，則調速輪之

$$動能=\frac{W\theta^2}{2g}\cdot R^2=\frac{W}{2g}\left(\frac{2\pi N}{60}\right)^2R^2$$

$$=\frac{\pi^2}{3\times 9.8\times 900}\cdot WN^2R^2$$

$$=0.000559WN^2R^2\text{瓩粎}$$

式中之R，取內外兩半徑之平均值，亦無大差。例如內徑3粎外徑3.2粎之調速輪，如第一百二十一圖，輪周重量爲1400瓩，一分間迴轉百次，則



第一百二十一圖

$$惰性半徑\ R^2=\frac{1.6^2+1.5^2}{2}=\frac{4.81}{2}=2.405$$

$$動能=0.000559\times1400\times100^2\times2.405$$

$$=18801.53呎磅$$

R若取半徑之平均值，則

$$R=\frac{1.6+1.5}{2}=1.55$$

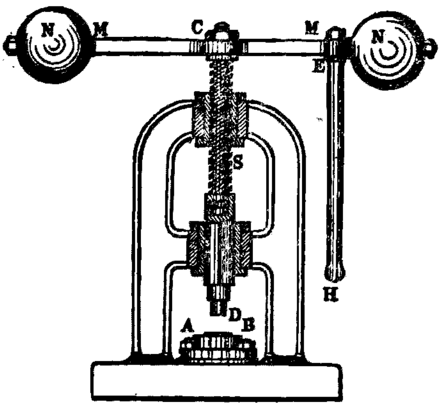
$$R^2=(1.55)^2=2.4025$$

與前相較，相差甚微，實際殊無礙也。

若以其臂（Arm）及轂（Boss）之動能算入，則臂及轂之重量，普通約為輪周重量之三分之一乃至四分之一，而臂及轂之旋轉半徑之平分約為$\frac{R^2}{3}$；故其動能約為輪周之$\frac{1}{9}$乃至$\frac{1}{12}$。

手動壓機　手動壓機（Flypress）者，刻印或穿孔於金屬板上時所用之壓力機也。如第一百二十二圖所示，NN 為重約二十三磅之球，固定於槓桿MCM 之兩端，設手柄 HE 以E供迴轉，S為旋距甚急之螺旋棒，其上端D有印型，以壓印於 AB 臺上所置之金屬板。使用之時，先取手柄 HE 而務使兩球急速迴轉，則D自降下至

與金屬板相觸而運動突然停止，此時球之動能作用於金屬板，以強大之力壓迫之也。今設D達於金屬板時球之速度為12每秒米，金屬板刻印之深為0.3糎，因摩擦而損失其能之三分之一，則因功之原理，



第一百二十二圖

$$\frac{2\times 23\times 12^2}{2\times 9.8}-\frac{1}{3}\cdot\frac{46\times 144}{2\times 9.8}=\frac{.3}{100}\,\mathrm{R}$$

但R為D所受之抵抗力，又球之臂及手柄之動能，較球之動能甚小，故可不算入之。

$$\therefore \mathrm{R}=\frac{1000\times 2\times 46\times 144}{3\times 3\times 2\times 9.8}=76666\frac{2}{3}\text{瓩}$$

卽能以人力勝過甚大之抵抗也。

車輪之滾動　車輪滾動於平面上時，其運動可分爲二，一爲全體之進行，一爲對於其軸之轉動，故車輪之動能，爲此二動能之和。例如半徑 r 呎重量W之圓板，其圓周以V每秒呎之速度而滾動，其動能爲全體進行之動能$\frac{1}{2g}WV^2$及對於軸而轉動之動能$\frac{W}{2g}\left(\frac{V}{r}\right)^2\frac{r^2}{2}$之和也。卽

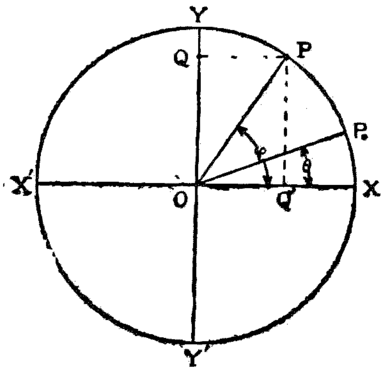
$$\text{全動能}=\frac{WV^2}{2g}+\frac{WV^2}{4g}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{WV^2}{2g}$$

第十一章 單調運動

單調運動 蒸汽機關之活塞桿或掛鐘之擺類，皆以一定之時間往復運動於同一路程之中，是爲振動 (Oscillation)。

在第一百二十三圖中，P 爲以常速圓運動而以與鐘上時針相反之方向迴轉於以 O 爲圓心之圓周 XYX'Y' 上，



第一百二十三圖

今試察任意直徑例如 YY' 上，P 之投影卽 Q 之運動，其位置因 P 之運動而移換。卽 P 由 X 至 Y 時，Q 向上方；P

自此而運動至 X'，則Q向下方。如此P沿圓周一迴轉間，Q沿YY'而上下往復。如就XX'直徑而察其上之P投影點Q'，則P迴中一周間，Q'沿XX'而左右往復。此種Q或Q'之運動，爲各種振動中最單純而又爲用最廣者，稱爲單調運動（Simple harmonic motion）。其中P點，曰單調運動之補助點（Auxiliary point）。圓XYX'Y'，曰單調運動之補助圓（Auxilliary circle）。補助圓之中心，曰單調運動之中心。P沿補助圓一周之時間，即Q完全一往復之時間，曰單調運動之周期（Period）。P於單位時間中沿補助圓周而迴轉之次數，即Q在YY'上往復之次數，曰單調運動之振數（Frequency）。

Q點至中心之距離OQ，曰單調運動之變位（Displacement），以OY之方向爲正，OY'之方向爲負。補助圓之半徑即最大變位OY或OY'，曰單調運動之振幅（Amplitude）。決定Q運動位置之角XOP，曰位置在Q時之相（Phase）；或以補助點通過角XOP之時間而以周期之分數表示者稱爲相。又P若自P_0出發而進行於弧P_0P之時，則角XOP_0，即始動時之相，特稱曰初角（Epoch）。

單調運動之公式　圖中初角OXP_0爲θ，補助點P之角速度ω，P進行弧P_0P間之時間爲t，則因$P_0OP=\omega t$，故

$$OQ=OP\sin XOP=OP\sin(\omega t+\theta)$$

以變位$OQ=y$，振幅$OP=r$，則

$$y=r\sin(\omega t+\theta)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

或以周期爲T，振數爲f，則因一圓周之角度爲2π，且單位時間之迴轉數爲$2\pi f$，故$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$，於是前式爲

$$\left.\begin{array}{l} y=r\sin(\frac{2\pi}{T}t+\theta) \\ y=r\sin(2\pi ft+\theta) \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此式就單調運動得求任意時刻間運動點Q之位置，故稱單調運動之公式。

補助點P在直徑XX′上投影點Q′之運動，亦爲單調運動，若以OQ′爲x，則

$$OQ'=OP\cos XOP$$

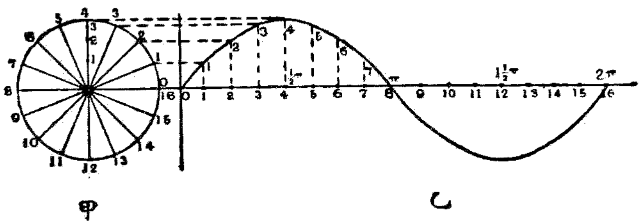
$$x=r\cos(\omega t+\theta)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

單調運動變位之圖表　在單調運動中，補助點P對於中心O以角速度ω而爲圓運動，故其投影點Q自O

點之變位 y 之變化，與相 ϕ 之變化之關係，亦得以 y 之變化與時間 t 之變化關係表示之。以公式示之，則如次，但初角爲零。

$$y = r \sin \phi \quad \text{或} \quad y = r \sin(\omega t)$$

此等關係如以曲線表示之，則尤明瞭。如第一百二十四圖中之甲，P 沿補助圓一周，其角度爲 2π 弧度角，



第一百二十四圖

今設以圓周十六等分之，其各分點爲 0,1,2,3,……，其對於縱軸上各投影點亦記以 0,1,2,3,……等符號。若單調運動之周期 T 爲 16 秒，則投影點 Q 爲一秒間各分點間之變位。

又如乙圖，以相 ϕ 或時間 t 爲横軸，以變位 y 爲縱軸。先於横軸上取等距離 0,1,2,3,……，在此等點上，各作與變位相當之縱線。以此等縱線之頂點聯結之而作曲線，

則得如圖所示之波狀曲線，此卽表示相或時間之變化及變位變化之關係，所謂正弦曲線（Sine curve）是也。自橫軸至曲線最高點或最低點之垂直距離，爲Q之最大變化，卽爲振幅 r。

單調運動之相差 若干初角不同之單調運動，則各單調運動僅其相有差異，凡相之不同稱爲相差（Phase difference）。例如二種單調運動，

$$y = r\sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{8}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (i)$$

$$y' = r'\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{8}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (ii)$$

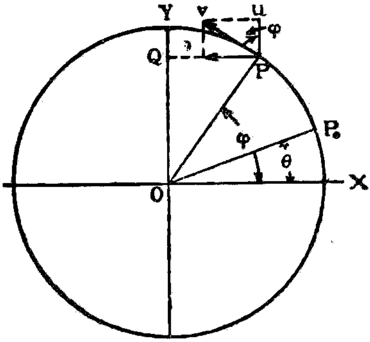
上式中(i)之初角爲$\frac{3\pi}{8}$，(ii)之初角爲$\frac{\pi}{8}$，故(i)與(ii)之相差爲$\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$。

單調運動之速度及加速度 爲單弦運動之點Q之速度，爲補助點P之速度所有直徑 YOY′ 方向之分速度，

(一)任意時間中Q之速度 在第一百二十五圖中，設 XOP $=\phi$，補助點P之速度爲 v，則 v 與 X 軸正方向所成之角爲$\frac{\pi}{2}+\phi$。今以Q之度速爲 u，則$u = v\cos\phi$，然P之

線速度爲 $v=r\omega$，$\phi=\omega t+\theta$ 故

$$u=r\omega\cos(\omega t+\theta)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$



第一百二十五圖

（二）任意變位中之速度　在單調運動間，Q 點在任意變位間所有 y 之速度 u，得自本章公式 (1) 及 (3) 而消去其時間 t 以求之。卽

$$\text{自(1)得}\quad \frac{y}{r}=\sin(\omega t+\theta)\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{i})$$

$$\text{自(3)得}\quad \frac{u}{r\omega}=\cos(\omega t+\theta)\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ii})$$

故以 (i) 與 (ii) 之各邊平方而加之，則有 $\sin^2A+\cos^2A=1$ 之關係，卽得

$$\frac{y^2}{r^2}+\frac{n^2}{r^2\omega^2}=1$$

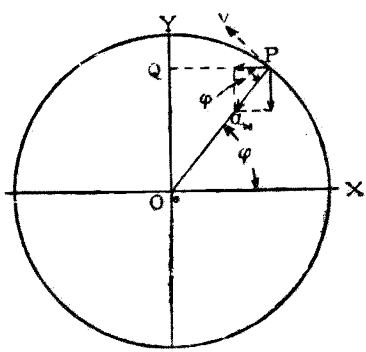
兩邊以 $r^2\omega^2$ 乘之，卽得

$$y^2\omega^2+u^2=a^2\omega^2$$

$$\therefore \quad u^2=w^2(r^2-y^2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

式中若 $y=0$ 時，u 之值最大，故知單調運動Q之速度在中心0時爲最大，變位 y 漸增則 u 漸減，至路程兩端 Y及Y′ 爲最小。

(三)任意時間中Q之加速度　單調動運點之Q加速度，爲補助點 P 之加速度對於 Y 軸上之分加速度。然 P 爲常速圓運動，故其加速度僅法線加速度 a_N，而 $a_N=\frac{v^2}{r}=r\omega^2$，而其方向爲與X軸正方向成 $\pi+\phi$ 之角(第一百二



第一百二十六圖

十六圖)。因知Q之加速度 $a=a_N\sin(\pi+\phi)=-a_N\sin\phi$,故

$$a=-r\omega^2\sin(\omega t+\theta)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

然 $y=r\sin(\omega t+\theta)$

$$\therefore\quad a=-\omega^2 y\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5')$$

式中負號所以表示加速度a之方向,與變位y之方向相反。而ω為補助點P之一定角速度,是為常數,故知加速度比例於變位也。又P之加速度常向中心,則為其分加速度之Q之加速度,亦必向中心無疑。故單調運動點之加速度常向中心而比例於變位也。

發生單調運動之力 凡力均比例於質量與加速度之乘積。今以與加速度於為單調運動之物體之力為F,因前節所述,知單調運動之加速度為 $-\omega^2 y$,故

$$\left.\begin{array}{ll} F=-m\omega^2 y & \text{糎克秒系} \\ F=-\dfrac{w}{g}\omega^2 y & \text{重力單位} \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

故凡為單調運動之物體上所作用之力,常向中心,而比例於其變位。

反之,若以比例於自一定點之距離之力,作用於靜

止之物體，且其力之方向常向定點者，則為單調運動。

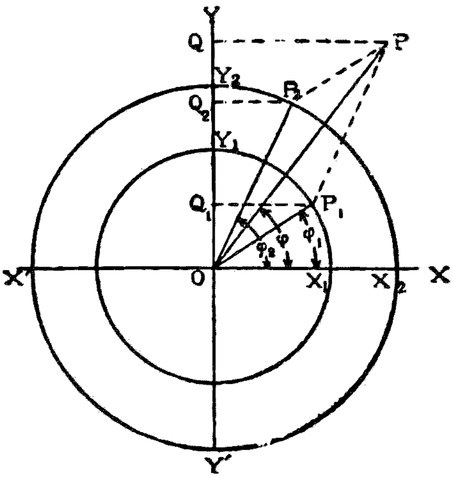
單調運動之合成 地震時鐘擺之振動，一係於鐘擺自身之振動。一係於地震間鐘體之振動，故受兩種單調運動之合成。但此二者或在同一直線上，或為若干傾角。又其振幅 r 周期 T 及相差 $\phi_2-\phi_1$，必有不同，而發生之關係。今舉一二特別者述之：

（一）同一直線上同周期之單調運動之合成 以同一直線上周期相等之二單調運動合成之，則為同直線上同周期之單調運動。下分幾何學的方法及解析的方法述之：

（1）幾何學的方法 如第一百二十七圖中，甲乙為單調運動之二補助圓，其運動均在直線 YY′ 之上。

以 P_1 為甲之補助點，OQ_1 為甲之變位，OX_1 為甲之振幅，ϕ_1 為甲之初角。P_2 為乙之補助點，OQ_2 為乙之變位，OX_2 為乙之振幅，ϕ_2 為乙之初角。今作以 OP_1, OP_2 為二邊之平行四邊形，而以P在YY′上之投影為Q，則 $Q_2Q=OQ_1$，故

$$OQ=OQ_1+OQ_2$$



第一百二十七圖

即OQ爲甲乙二單調運動之合成變位也。

因爲單調運動之物體 Q_1,Q_2 之周期相同，故補助點 P_1,P_2之角速度相等。是以其相差 $\phi_2-\phi_1$ 即角 P_1OP_2 亦屬一定。平行四邊形 OP_1PP_2 不關 P_1 及 P_2 之運動如何，常有一定之形。故 P 以與 P_1,P_2 相同之角速度，沿於以 OP 爲半徑之圓周而運動，其投影點 Q 則以與 Q_1 或 Q_2 同一之周期而爲單調運動也。

(2)解析的方法　甲單調運動之變位$OQ_1=y_1$，振幅

$OX_1=r_1$；乙單調運動之變位 $OQ_2=y_2$，振幅 $OX_2=r_2$，則

$$\text{甲單弦運動之變位} \quad y_1=r_1\sin(\omega t+\phi_1)$$

$$\text{乙單弦運動之變位} \quad y_2=r_2\sin(\omega t+\phi_2)$$

故若甲乙二單調運動之合成變位 $OQ=y$，則

$$y=y_1+y_2=r_1\sin(\omega t+\phi_1)+r_2\sin(\omega t+\phi_2)$$

$$=r_1(\sin\omega t\cos\phi_1+\cos\omega t\sin\phi_1)$$

$$+r_2(\sin\omega t\cos\phi_2+\cos\omega t\sin\phi_2)$$

$$=(r_1\cos\phi_1+r_2\cos\phi_2)\sin\omega t$$

$$+(r_1\sin\phi_1+r_2\sin\phi_2)\text{coi}\,\omega t\cdots\cdots\quad\text{(i)}$$

今若假定

$$r_1\cos\phi_1+r_2\cos\phi_2=r\cos\phi\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

$$r_1\sin\phi_1+r_2\sin\phi_2=r\sin\phi\quad\cdots\cdots\cdots\text{(iii)}$$

則必有同時能使(ii)，(iii)兩式滿足之 r 及 ϕ。何則？因若以(ii)，(iii)兩邊各平方而相加，則得

$$r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\phi_2-\phi_1)=r^2$$

$$\frac{\text{(iii)}}{\text{(ii)}}\quad\tan\phi=\frac{r_1\sin\phi_1+r_2\sin\phi_2}{r_1\cos\phi_1+r_2\cos\phi_2}$$

故知必有同時使兩式滿足之 r 及 ϕ 也。以(ii)及(iii)代

入(i)式，則

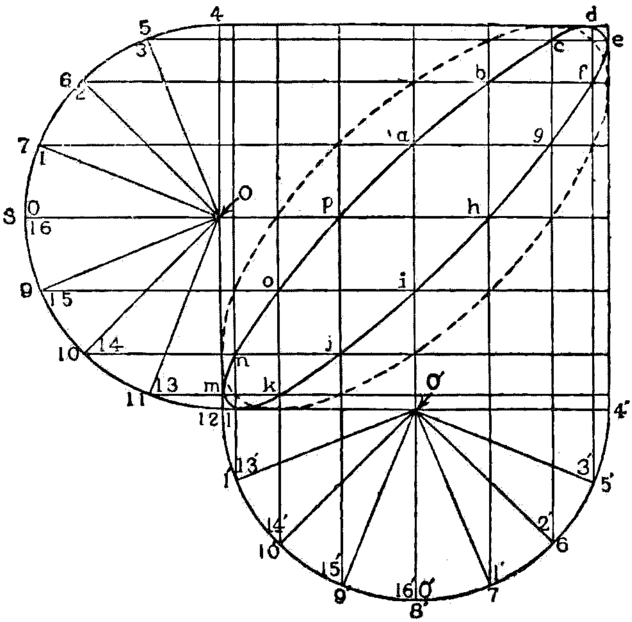
$$y=r\cos\phi\sin\omega t+r\sin\phi\cos\omega t$$

$$\therefore y=r\ \sin(\omega t+\phi)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(iv)$$

然(iv)仍為單調運動之公式，其周期為 ωt，而等於原定甲乙二單調運動之周期。

（二）同周期而互為直角之單調運動之合成　今以幾何學的方法說明之。

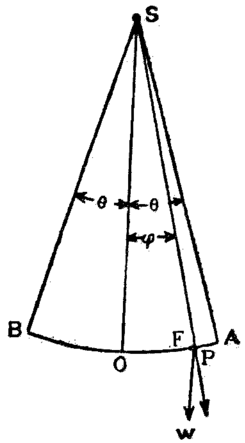
設如第一百二十八圖，甲單調運動在縱軸上，乙單調運動在橫軸上，而兩者之周期 T 均為 16 秒。今以補助圓十六等分之，其分點記以 0,1,2,3,……及 0′,1′,2′,3′,……等符號。而自 O 至甲各分點在縱軸上投影點之距離，為甲單調運動之變位；又自 O 至乙各分點在橫軸上投影點之距離為乙單調運動之變位。而兩者之振幅，均等於補助圓之半徑。今設以甲較乙進行於 T 之 $\frac{1}{16}$ 者合成之，則以甲之1在縱軸上投影，與乙之 O′ 在橫軸上投影之交點為 a；2 之投影與 1′ 之投影之交點為 b；3 投影與 2′ 之投影之交點為 c；再以同法求得 d,e,……m 各點，以此等點聯結之，則得如圖所示之橢圓。



第一百二十八圖

若甲較乙進行於$\frac{2}{16}$T，則以前法得圖中短徑較大之點線橢圓。若甲乙之相差爲$\frac{4}{16}$T，則其合成爲圓。若相差更大，則所得之橢圓其長徑必與以前之橢圓之長徑成直角。但如相差爲O或$\frac{1}{2}$T，則其合成爲一直線，讀者不妨自試以證明之也。

單擺 單擺 (Simple pendulum) 者，得視為重錘之質量小至可不計及，而以不延長之線懸之，而振動於含固定點之平面內者也。如第一百二十九圖，長 l 之單



第一百二十九圖

擺，其一端 S 固定，若引 P 至一方而放之，則 P 沿以 S 為中心之圓弧而振動。此 P 點一往復之時間，稱為單擺之周期。P 點在離中心 O 最遠時之角 OSA。為單擺之振幅。

擺之振動，起因於重力，今以振動中任意點 P 之重量 w，分解於線之方向及其直角之方向，則線方向之分

力恰與線之張力平衡．圓弧切線方向之分力 F，實為振動之原。故知 P 點之力，為 $F=w\sin\phi$

若振幅甚小，而在不妨視 $\sin\theta=\theta$ 範圍之內，且以變位 OP 為 y，則

$$F=w\phi=-w\frac{OP}{SP}=-\frac{w}{l}y\cdots\cdots\cdots\cdots(i)$$

卽力 F 比例於變位 y。又記號(－)，所以表力之方向常與變位方向相反。而 θ 甚小，圓弧 OP 得視為直線，且力 F 常向中心 O，故 P 點之運動為單調運動。

單調運動之公式如 (6) 所示為 $-\frac{w}{g}\omega^2y$，以與(i)式相較，

$$\frac{1}{l}=\frac{\omega^2}{g},\qquad \therefore\frac{1}{\omega}=\sqrt{\frac{l}{g}}$$

然周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 故單擺之周期如次：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

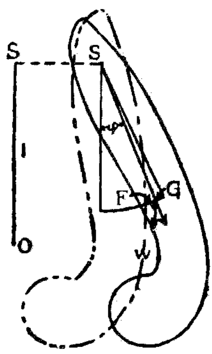
故單擺之周期， 在振幅甚小之間， 僅正比例於擺長 l 之平方根， 而反比例於重力加速度 g 之平方根， 與擺之種類質量及振幅變化均無關係 。 是為單擺之等時性

(Isochromism)。

實際上之擺，因其重錘有一定大小，其振幅亦必有相當之大小，故(1)式應如次：

$$T-2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

複擺　因重力而得振動於固定水平軸周圍之物體，曰複擺 (Compound pendulum)。如第一百三十圖，S 為複擺中軸之斷面，G 為其重心，自 G 作垂直於軸之線



第一百三十圖

SG，與垂直線所成之角為 ϕ。複擺迴轉於水平軸周圍時，其作用於複擺之重力w中，對於SG方向之垂直分力F所有對於軸之力矩，稱為複擺之扭力 (Torque)。茲命為

τ 則

$$\tau = w \times SG \sin\phi$$

若複擺對於軸之惰矩爲 I，其角加速度爲 α，則

$$w \times SG \sin\phi = -I\alpha \text{（重力單位）} \cdots\cdots\cdots\cdots (i)$$

（－）號所以表示將增加 α 之角速度，因扭力而減少也。

複擺在振動範圍甚小者，則得視爲 $\sin\phi = \phi$，又以 $SG = r$，則 G 點之加速度爲 $r\alpha$，故以 r 乘 (i) 之兩邊，則

$$w\phi rr = -I\alpha r$$

$$\therefore \quad r\alpha = -\frac{wr}{I} r\phi \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (ii)$$

而 $r\phi$ 卽 G 之變位，$\frac{wr}{I}$ 在複擺中爲定值，故上式爲

（加速度）＝（定値）×（變位），與單擺相同，得視爲單調運動也。故以 (ii) 式與 (5′) 式 $a = -\omega^2 y$ 較，則

$$\frac{wr}{I} = \omega^2, \qquad \therefore \frac{1}{\omega} = \sqrt{\frac{I}{wr}}$$

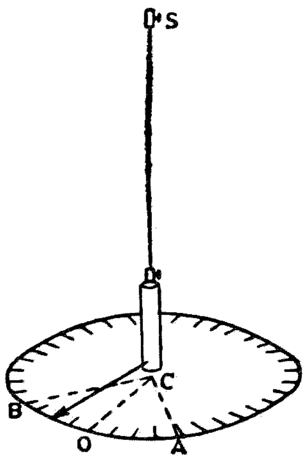
故周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$，卽

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{wr}} \quad \text{（動單位）} \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

卽複擺之周期，在振幅甚小之間，正比例於擺對於水平軸之惰矩之平方根，而反比例於其重量之平方根及自軸至重心之長之平方根也。

扭擺　以細線之一端固定，下端則懸以圓壔或圓板，扭轉而使之振動之裝置，稱爲扭擺(Torsion pendulum)。蓋以扭擺扭轉而放之，則以扭轉時線中之扭轉應力而使物體左右振動也。

如第一百三十一圖，線及於物體之扭力，比例於扭轉角 OCA，以此比例常數爲C，則



第一百三十一圖

$$\phi C = -I\alpha \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

式中 I 爲物體之惰矩，α 爲物體指針與 CO 線爲 ϕ 時之角加速度。又常數 C 關係於線長 l 半徑 R 及其剛性率 n，即得以下式表之

$$C = \frac{\pi R^2}{2l}n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

茲以 r 乘(i)之兩邊，則

$$r\phi C = -Ir\alpha$$

$$\therefore \quad r\alpha = -\frac{C}{I}r\phi \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iii)}$$

式中 $r\phi$ 爲物體之變位 OA，$r\alpha$ 爲其位置時之加速度。而 $\frac{C}{I}$ 爲常數，故(iii)與(5′)相較，則

$$\frac{C}{I} = \omega^2, \qquad \therefore \frac{1}{\omega} = \sqrt{\frac{I}{C}}$$

故設扭擺之周期爲 T，則

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(9)}$$