Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2023**

Differentialgeometrie

Vorlesung 4

Die Weingartenabbildung

Es sei $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Hyperfläche. Zu einem Punkt $P \in Y$ definiert man eine lineare Abbildung

$$L_P\colon T_PY \longrightarrow T_PY$$

auf dem Tangentialraum zu Y. Es sei N ein differenzierbares Einheitsnormalenfeld auf Y, das auf einer offenen Umgebung von Y definiert sei. Die wesentliche Idee ist, einen Tangentialvektor $v \in T_PY$ durch eine differenzierbare Kurve

$$\gamma\colon I \longrightarrow Y$$

zu parametrisieren, dabei ist also

$$\gamma'(0) = v.$$

Das Einheitsnormalenfeld definiert dann die Abbildung

$$N \circ \gamma\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

längs I. Die infinitesimale Änderung des Einheitsnormalenfeldes längs γ wird durch den Limes

$$\lim_{t \to 0} \frac{N(\gamma(t)) - N(P)}{t}$$

gemessen, falls dieser existiert. Nach Lemma 43.4 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) ist dieser Limes gleich der Richtungsableitung $(D_vN)(P)$ und wiederum gleich $(DN)_P(v)$, dem totalen Differential ausgewertet am Vektor v. Es wird sich herausstellen, dass diese Zuordnung

$$T_PY \longrightarrow \mathbb{R}^n,\, v \longmapsto (D_vN)(P),$$

in T_PY landet.

Definition 4.1. Es sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $h\colon W \to \mathbb{R}$ eine zweifach stetig differenzierbare Funktion und $Y = h^{-1}(c)$ die Faser zu $c \in \mathbb{R}$, wobei h in jedem Punkt von Y regulär sei. Es sei N ein Einheitsnormalenfeld und sei $P \in Y$. Dann nennt man

$$L_P\colon T_PY \longrightarrow T_PY,\, v \longmapsto -(D_vN)(P),$$

die *Weingartenabbildung* in T_PY.

Man beachte, dass die Weingartenabbildung vom Einheitsnormalenfeld abhängt, auch wenn dies nicht immer explizit gesagt wird. Wenn Y als Faser zu h gegeben ist, so nimmt man in der Regel das zugehörige normierte Gradientenfeld zu h.

Lemma 4.2. *Es sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $h\colon W \to \mathbb{R}$ eine zweifach stetig differenzierbare Funktion und $Y = h^{-1}(c)$ die Faser zu $c \in \mathbb{R}$, wobei h in jedem Punkt von Y regulär sei. Es sei $P \in Y$.Dann ist die Weingartenabbildung L_P ein linearer Endomorphismus des Tangentialraumes T_pY.*

Beweis. Es ist $N(P) = \frac{\text{Grad } h(P)}{\|\text{Grad } h(P)\|}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das auf einer offenen Umgebung $Y \subseteq U$ definiert ist. Daher ist gemäß Proposition 46.1 (Analysis (Osnabrück 2021-2023))

$$(D_vN)(P) = (DN)_P(v)$$

linear in der Richtung v. Wegen der Einheitsnormalenbedingung ist $\langle N(P), N(P)\rangle = 1$ für alle $P \in U$ und daher ist unter Verwendung von Aufgabe 43.14 (Analysis (Osnabrück 2021-2023))

$$0 = (D_v \langle N, N\rangle)(P) = 2 \langle N(P), (D_vN)(P)\rangle .$$

Daher steht $(D_vN)(P)$ senkrecht auf $N(P)$ und gehört bei $P \in Y$ zum Tangentialraum T_PY.

$\square$

Die Weingartenabbildung L_P ist also die negierte Einschränkung des totalen Differentials des Einheitsnormalenfeldes auf den Tangentialraum T_PY in den Tangentialraum T_PY. Wenn man das totale Differential über die Jacobi-Matrix von $-N$ ausrechnet, so muss man deren Wirkungsweise auf einer Basis des Tangentialraumes bestimmen, um eine Matrixdarstellung der Weingartenabbildung zu erhalten.

Lemma 4.3. *Es sei $W \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $h\colon W \to \mathbb{R}$ eine zweifach stetig differenzierbare Funktion und $C = h^{-1}(c)$ die Faser zu $c \in \mathbb{R}$, wobei h in jedem Punkt von C regulär sei und es sei $P \in C$.Dann ist die Weingartenabbildung in P die Multiplikation mit der Krümmung $\kappa(P)$ von C in P.*

Beweis. Dies ist eine Umformulierung von Lemma 3.11.

$\square$

In der vorstehenden Aussage wurde nicht explizit auf die Orientierung Bezug genommen, dies muss man sich dazudenken.

Beispiel 4.4. Es sei

$$h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

und wir betrachten die Faser Y zu h über r^2, also die Kugeloberfläche zum Radius $r > 0$ mit dem Ursprung als Mittelpunkt. Es sei $P = (x_0, y_0, z_0) \in$

Y. Durch eine Isometrie kann man diesen Punkt nach $Q = (r, 0, 0)$ transformieren, was die Weingartenabbildung nicht ändert. Eine Basis des Tangentialraumes ist dann $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Das nach innen gerichtete Einheitsnormalenfeld N ist $-\frac{1}{2r} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$ und daher ist zu

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$(D_v N)(Q) = b\frac{\partial N}{\partial y}(Q) + c\frac{\partial N}{\partial z}(Q) = -b\frac{1}{2r}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - c\frac{1}{2r}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{r}\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Daher ist die Weingartenabbildung Multiplikation mit dem Kehrwert $\frac{1}{r}$ des Radius.

Beispiel 4.5. Wir knüpfen an Beispiel 2.5 an. Die Jacobi-Matrix des Einheitsnormalenfeldes

$$N(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

ist

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ xz & yz & -x^2 - y^2 \end{pmatrix}.$$

Die Weingartenabbildung ist die negierte Einschränkung dieser Abbildung auf den Tangentialraum an die Fläche, wobei Lemma 4.2 sicherstellt, dass wir wieder im Tangentialraum landen. Wir setzen $x \neq 0$ voraus und arbeiten mit der Basis $\begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$ des Tangentialraumes. Es ist

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ xz & yz & -x^2 - y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y(y^2 + z^2) + x^2 y \\ -xy^2 - x(x^2 + z^2) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

sodass wir unmittelbar den Eigenvektor $\begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$ mit dem Eigenwert $-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ gefunden haben. Ferner ist

$$\begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ xz & yz & -x^2-y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(y^2+z^2)-x^2z \\ -2xyz \\ xz^2-x(x^2+y^2) \end{pmatrix} = 2yz \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} + \left(z^2-x^2-y^2\right) \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$

Somit wird die Weingartenabbildung bezüglich dieser Basis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} & -2yz(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ 0 & (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

beschrieben. Einen zweiten Eigenvektor im Tangentialraum erhält man (in Hinblick auf Korollar 4.9) am einfachsten, wenn man zum ersten Eigenvektor und zum Normalenvektor einen senkrechten Vektor bestimmt. Dies ergibt den Vektor $\begin{pmatrix} xz \\ yz \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$, und in der Tat ist (ohne den skalaren Vorfaktor)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ xz & yz & -x^2-y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ x^2+y^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} xz(y^2+z^2)-xy^2z-xz(x^2+y^2) \\ -x^2yz+yz(x^2+z^2)-yz(x^2+y^2) \\ x^2z^2+y^2z^2-(x^2+y^2)^2 \end{pmatrix} \\ &= \left(-x^2-y^2+z^2\right) \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ x^2+y^2 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Eigenwert ist also $(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$ (dies ist auch schon aus der beschreibenden Dreiecksmatrix ablesbar).

Lemma 4.6. *Es sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $h\colon W \to \mathbb{R}$ eine zweifach stetig differenzierbare Funktion und $Y = h^{-1}(c)$ die Faser zu $c \in \mathbb{R}$, wobei h in jedem Punkt von Y regulär sei. Es sei N ein Einheitsnormalenfeld und es sei $P \in Y$. Es sei γ eine zweifach differenzierbare Realisierung auf Y eines Tangentenvektors $v \in T_PY$.Dann ist*

$$\langle \gamma''(0), N(P) \rangle = \langle L_P(v), v \rangle .$$

Beweis. Es sei

$$\gamma\colon I \longrightarrow Y,\, t \longmapsto \gamma(t),$$

zweifach differenzierbar mit $\gamma(0) = P$ und $\gamma'(0) = v \in T_PY$. Es ist

$$\langle \gamma'(t), N(\gamma(t)) \rangle = 0$$

für alle $t \in I$ und daher ist mit Aufgabe 43.14 (Analysis (Osnabrück 2021-2023))

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \gamma'(t), N(\gamma(t)) \right\rangle'(0) \\ &= \left\langle \gamma''(0), N(\gamma(0)) \right\rangle + \left\langle \gamma'(0), \left(D_{\gamma'(0)} N\right)(\gamma(0)) \right\rangle \\ &= \left\langle \gamma''(0), N(P) \right\rangle - \left\langle L_P(v), v \right\rangle. \end{aligned}$$

□

In der vorstehenden Aussage ist keine zusätzliche Festlegung über die Orientierung nötig, da auf beiden Seiten das Einheitsnormalenfeld, rechts via die Weingartenabbildung, eingeht.

Satz 4.7. *Es sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $h\colon W \to \mathbb{R}$ eine zweifach stetig differenzierbare Funktion und $Y = h^{-1}(c)$ die Faser zu $c \in \mathbb{R}$, wobei h in jedem Punkt von Y regulär sei.Dann ist die Weingartenabbildung L_P in jedem Punkt $P \in Y$ selbstadjungiert.*

Beweis. Für Vektoren $v, w \in T_P Y$ ist

$$\left\langle v, L_P(w) \right\rangle = \left\langle L_P(v), w \right\rangle$$

zu zeigen. Mit $N(P) = \frac{\text{Grad } h(P)}{\|\text{Grad } h(P)\|}$ ist gemäß Lemma 45.10 (Analysis (Osnabrück 2021-2023))

$$\begin{aligned} \left\langle v, L_P(w) \right\rangle &= -\left\langle v, (D_w N)(P) \right\rangle \\ &= -\left\langle v, \left(D_w \frac{\text{Grad } h}{\|\text{Grad } h\|} \right)(P) \right\rangle \\ &= -\left\langle v, \left(D_w \frac{1}{\|\text{Grad } h\|} \right)(P) \cdot \text{Grad } h(P) + \frac{1}{\|\text{Grad } h(P)\|} \cdot (D_w \text{ Grad } h)(P) \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\|\text{Grad } h(P)\|} \left\langle v, (D_w \text{ Grad } h)(P) \right\rangle, \end{aligned}$$

da der erste Summand senkrecht auf dem Tangentialvektor v steht. Mit Koordinatenfunktionen ist

$$\begin{aligned} (D_w \text{ Grad } h)(P) &= \left(D_w \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right) \right)(P) \\ &= \sum_{j=1}^{n} w_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right)(P) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial x_1}(P), \ldots, \sum_{j=1}^{n} w_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial x_n}(P) \right). \end{aligned}$$

Der obige Ausdruck ist somit gleich

$$\begin{aligned} \left\langle v, L_P(w) \right\rangle &= -\frac{1}{\|\text{Grad } h(P)\|} \left\langle v, (D_w \text{ Grad } h)(P) \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\|\text{Grad } h(P)\|} \sum_{i,j=1}^{n} v_i w_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial x_i}(P). \end{aligned}$$

Nach Satz 44.10 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) kann man die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschen, sodass man auch die Rollen von v und w vertauschen kann.

$\square$

Lemma 4.8. *Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ eine offene Menge und sei $Y \subseteq V \times \mathbb{R}$ der Graph zu einer zweifach stetig differenzierbaren Funktion*

$$f \colon V \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Dann ist die Weingartenabbildung L_P in einem Punkt $P = (x_1, \ldots, x_{n-1}, f(x_1, \ldots, x_{n-1})) \in Y$ (zu dem nach oben gerichteten Einheitsnormalenfeld) durch $\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\right)^2}} \operatorname{Hess} f$ gegeben, wobei Hess f *die Hesse-Matrix zu f bezeichnet und wenn man Grundvektoren $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ mit den Tangentialvektoren aus T_PY im Sinne von Beispiel 1.2 identifiziert.*

Beweis. Wir knüpfen an Beispiel 1.2 an. Das nach oben gerichtete Einheitsnormalenfeld ist durch

$$N(x_1, \ldots, x_{n-1}, f(x_1, \ldots, x_{n-1})) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\right)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir betrachten den Weg

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1 + tv_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} + tv_{n-1} \\ f\begin{pmatrix} x_1 + tv_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} + tv_{n-1} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

auf dem Graphen zum Grundvektor v. Die zweite Ableitung davon ist

$$\gamma''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sum_{1 \leq i,j \leq n-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} v_i v_j \end{pmatrix}.$$

Nach Lemma 4.6 ist

$$\begin{aligned} & \langle L_P(\gamma'(0)), \gamma'(0) \rangle \\ = \; & \langle \gamma''(0), N(x_1, \ldots, x_{n-1}, f(x_1, \ldots, x_{n-1})) \rangle \\ = \; & \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\right)^2}} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sum_{1 \leq i,j \leq n-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} v_i v_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

$$= \frac{\sum_{1\le i,j\le n-1} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} v_i v_j}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\right)^2}} (v_1,\,\ldots,\,v_{n-1}) \operatorname{Hess} f \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Das bedeutet, dass die nach Satz 4.7 symmetrische Bilinearform $\langle L_P(-), -\rangle$ im Tangentialraum $T_P Y$ mit der durch die (durch den Vorfaktor) skalierte Hessematrix gegebenen Bilinearform auf $\mathbb{R}^{n-1}$ übereinstimmt, wenn vorne und hinten der gleiche Vektor eingesetzt wird. Nach Lemma 38.10 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) stimmen dann generell die Bilinearformen über ein. Dann stimmen auch die linearen Abbildungen L_P und die durch die Hessematrix gegebene lineare Abbildung überein.

□

Korollar 4.9. *Es sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $h\colon W \to \mathbb{R}$ eine zweifach stetig differenzierbare Funktion und $Y = h^{-1}(c)$ die Faser zu $c \in \mathbb{R}$, wobei h in jedem Punkt von Y regulär sei.Dann ist die Weingartenabbildung L_P in jedem Punkt $P \in Y$ diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten und zueinander orthogonalen Eigenräumen.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 4.7 und Satz 41.11 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)).

□

Abbildungsverzeichnis