Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Grundkurs Mathematik I

Vorlesung 25

Das Archimedes-Axiom für die rationalen Zahlen

Archimedes (ca. 287 -212 v. C.)

LEMMA 25.1. *Zu jeder rationalen Zahl q gibt es eine natürliche Zahl n mit*

$$q \leq n.$$

Beweis. Sei

$$q = \frac{a}{b}$$

mit positivem b. Wenn a negativ ist, kann man jede natürliche Zahl nehmen. Wenn a nicht negativ ist, so ist

$$a \leq ba$$

und damit

$$q \leq a$$

gemäß der Definition der Ordnung auf den rationalen Zahlen. □

Vor der folgenden Definition erinnern wir daran, dass jeder angeordnete Körper (und jeder angeordnete Ring $\neq 0$) die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ enthält.

DEFINITION 25.2. Es sei K ein angeordneter Körper. Dann heißt K *archimedisch angeordnet*, wenn das folgende *Archimedische Axiom* gilt, d.h. wenn es zu jedem $x \in K$ eine natürliche Zahl n mit

$$n \geq x$$

gibt.

Gemäß Lemma 25.1 sind die rationalen Zahlen archimedisch angeordnet. Die reellen Zahlen bilden ebenfalls, wie wir später sehen werden, einen archimedisch angeordneten Körper. Grundsätzlich ist jeder angeordnete Körper, für den der Zahlenstrahl ein sinnvolles Modell ist, archimedisch angeordnet, da es ja jenseits eines jeden Punktes noch größere natürliche Zahlen gibt. Es gibt allerdings auch angeordnete Körper, die nicht archimedisch angeordnet sind.

Die folgende wichtige Aussage sollte man so lesen: Egal wie groß y ist und egal wie klein ein positives x ist, man kann stets mit hinreichend vielen x die Zahl y übertreffen. Egal wie klein eine Strecke ist, wenn man sie hinreichend oft hintereinander legt, übertrifft man damit jede gegebene Strecke. Mit Sandkörnern beliebig kleiner Größe kann man eine beliebig große Sanddüne aufbauen.

Lemma 25.3. *Sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Dann gibt es zu $x, y \in K$ mit $x > 0$ stets ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$.*

Beweis. Wir betrachten y/x. Aufgrund des Archimedes-Axioms gibt es ein n mit $n \geq y/x$. Da x positiv ist, gilt nach Lemma 24.5 (2) auch $nx \geq y$. □

Lemma 25.4. *Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Es sei $x > 0$. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} \leq x$.*

Beweis. Es ist x^{-1} eine nach Aufgabe 24.16 positive Zahl und daher gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq x^{-1} > 0$. Dies ist nach Aufgabe 24.19 äquivalent zu

$$\frac{1}{n} = n^{-1} \leq \left(x^{-1}\right)^{-1} = x.$$

□

Bei den beiden folgenden Aussagen denke man bei B an eine sehr große und bei ϵ an eine sehr kleine Zahl.

Lemma 25.5. *Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und $x > 1$. Dann gibt es zu jedem $B \in K$ eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$x^n \geq B.$$

Beweis. Wir schreiben $x = 1 + u$ mit $u > 0$. Aufgrund von Lemma 25.3 gibt es eine natürliche Zahl n mit $nu \geq B - 1$. Damit gilt unter Verwendung der Bernoulli-Ungleichung die Abschätzung

$$x^n = (1+u)^n \geq 1 + nu \geq 1 + B - 1 = B.$$

□

Korollar 25.6. *Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und $x \in K$ mit $0 < x < 1$. Dann gibt es zu jedem positiven $\epsilon \in K$ eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit*

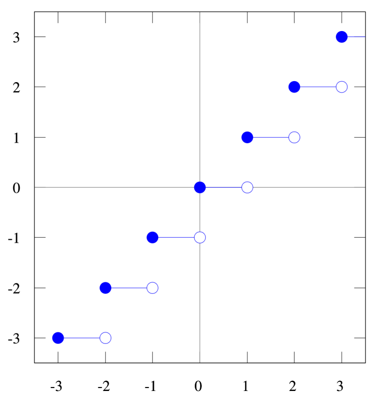
$$x^n \leq \epsilon.$$

Beweis. Sei $y := x^{-1}$ und $B := \epsilon^{-1}$. Nach Lemma 25.5 gibt es ein n mit

$$y^n \geq B.$$

Durch Übergang zu den inversen Elementen erhält man gemäß Lemma 24.5 (4) die Behauptung. □

Gemischte Brüche



Definition 25.7. Zu einer rationalen Zahl x ist die *Gaußklammer* $\lfloor x \rfloor$ durch

$$\lfloor x \rfloor = n, \text{ falls } x \in [n, n+1[\text{ und } n \in \mathbb{Z},$$

definiert.

Diese ganze Zahl n existiert, da wir uns in einem archimedisch angeordneten Körper befinden. Ein damit verwandtes Konzept ist die *Rundung*. Die Rundung einer rationalen (oder reellen) Zahl x ist durch $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ definiert. Sie gibt an, welche Ganze Zahl der Zahl am nächsten ist, wobei man die $\frac{1}{2}$-Werte abrundet.

Definition 25.8. Unter einem *gemischten Bruch* versteht man einen Ausdruck der Form

$$n\frac{a}{b}$$

mit einer natürlichen Zahl n und einer rationalen Zahl $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}_+$ und $a < b$. Der Wert eines gemischten Bruches ist

$$n + \frac{a}{b}\,.$$

Die natürliche Zahl n heißt der *ganzzahlige Anteil* und $\frac{a}{b}$ heißt der *Bruchanteil.* Ein gemischter Bruch ist eine besondere Darstellung für eine rationale Zahl, sind ist vor allem bei Zeit- und bei Längenangaben gebräuchlich, wie wenn man sagt, dass die Oper dreieinviertel Stunden gedauert hat. Vorteile sind, dass durch den ganzzahligen Anteil die Größenordnung der Zahl unmittelbar ersichtlich ist und dass sich diese Darstellung ergibt, wenn man bei einem gegebenen Bruch die Division mit Rest von Zähler durch Nenner durchführt. Ein Nachteil ist die Verwechslungsgefahr von $7\frac{1}{4}$ mit dem Produkt $7 \cdot \frac{1}{4}$. In einem Kontext, in dem man mit gemischten Brüchen arbeitet, muss man auf die Konvention, dass man das Produktzeichen weglassen darf, verzichten. Was gemischte Brüche für negative Zahlen sind ist auch heikel.

Jede positive rationale Zahl besitzt eine Darstellung als gemischter Bruch, die bis auf das Kürzen des Bruchanteils eindeutig bestimmt ist. Zu einem Bruch $\frac{c}{b}$ erhält man die Darstellung als gemischter Bruch, indem man die Division mit Rest

$$c = nb + a$$

mit $0 \leq a < b$ durchführt und die Umformung

$$\frac{c}{b} = \frac{nb + a}{b} = n + \frac{a}{b} = n\frac{a}{b}$$

vornimmt. Insbesondere ist $n = \lfloor \frac{c}{b} \rfloor$. Bei der Weiterverarbeitung eines gemischten Bruches $n\frac{a}{b}$ arbeitet man mit $n + \frac{a}{b}$. Dies kann man in einen ungemischten Bruch zurückrechnen, was aber nicht immer von Vorteil ist. Wenn man beispielsweise die beiden gemischten Brüche $n + \frac{a}{b}$ und $m + \frac{c}{d}$ miteinander addieren möchte, und das Ergebnis als gemischten Bruch haben möchte, so kann man von $(n + m) + \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)$ ausgehen und muss für die Summe der Brüche hinten nur überprüfen, ob diese 1 übertrifft oder nicht und gegebenenfalls 1 zum ganzen Anteil dazuschlagen.

Monotone Abbildungen

Abbildungen eines angeordneten Körpers in sich kann man dahingehend untersuchen, ob sie die Ordnung beibehalten oder verändern.

Definition 25.9. Es sei K ein angeordneter Körper und $T \subseteq K$ eine Teilmenge. Eine Abbildung

$$f \colon T \longrightarrow K$$

heißt *wachsend*, wenn für je zwei Elemente $x, x' \in T$ mit $x \leq x'$ auch $f(x) \leq f(x')$ gilt.

Definition 25.10. Es sei K ein angeordneter Körper und $T \subseteq K$ eine Teilmenge. Eine Abbildung

$$f \colon T \longrightarrow K$$

heißt *streng wachsend*, wenn für je zwei Elemente $x, x' \in T$ mit $x < x'$ auch $f(x) < f(x')$ gilt.

Definition 25.11. Es sei K ein angeordneter Körper und $T \subseteq K$ eine Teilmenge. Eine Abbildung

$$f \colon T \longrightarrow K$$

heißt *fallend*, wenn für je zwei Elemente $x, x' \in T$ mit $x \leq x'$ die Abschätzung $f(x) \geq f(x')$ gilt.

Definition 25.12. Es sei K ein angeordneter Körper und $T \subseteq K$ eine Teilmenge. Eine Abbildung

$$f \colon T \longrightarrow K$$

heißt *streng fallend*, wenn für je zwei Elemente $x, x' \in T$ mit $x < x'$ die Abschätzung $f(x) > f(x')$ gilt.

Als gemeinsame Bezeichnung spricht man von (streng) monotonen Funktionen.

Lemma 25.13. *Es sei K ein angeordneter Körper, $T \subseteq K$ eine Teilmenge und*

$$f \colon T \longrightarrow K$$

eine streng wachsende (oder streng fallende) Funktion. Dann ist f injektiv.

Beweis. Seien $x, y \in T$ verschieden. Da wir in einem angeordneten Körper sind, ist $x > y$ oder $y > x$, wobei wir ohne Einschränkung den ersten Fall annehmen können. Bei strenger Monotonie folgt daraus

$$f(x) > f(y)$$

und insbesondere sind $f(x)$ und $f(y)$ verschieden, also ist die Abbildung injektiv. $\square$

Definition 25.14. Es sei K ein Körper. Eine Funktion der Form

$$f \colon K \longrightarrow K,\ x \longmapsto cx,$$

mit einem festen $c \in K$ heißt *lineare Funktion.*

Lineare Funktionen drücken eine Proportionalität aus.

Lemma 25.15. *Es sei K ein angeordneter Körper, $c \in K$ und*

$$f\colon K \longrightarrow K,\, x \longmapsto cx,$$

die zugehörige lineare Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Bei $c > 0$ ist f streng wachsend.*
(2) *Bei $c = 0$ ist f konstant und damit (nicht streng) wachsend und fallend.*
(3) *Bei $c < 0$ ist f streng fallend.*

Beweis. Die Aussagen folgen aus Lemma 24.5, wenn man dort $\geq$ durch $>$ ersetzt. Wir führen dies für (1) aus. Sei

$$c > 0$$

und $x > y$. Dann ist

$$x - y > 0$$

und damit

$$c(x-y) > 0,$$

also

$$cx > cy.$$

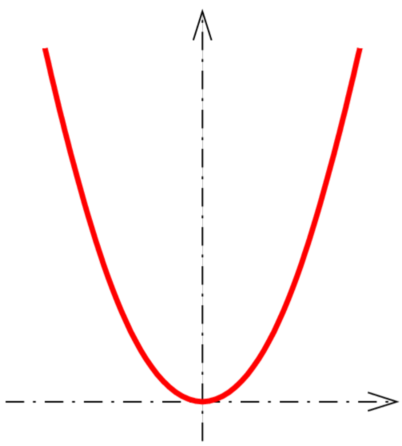
$\square$

Insbesondere ist die Negation

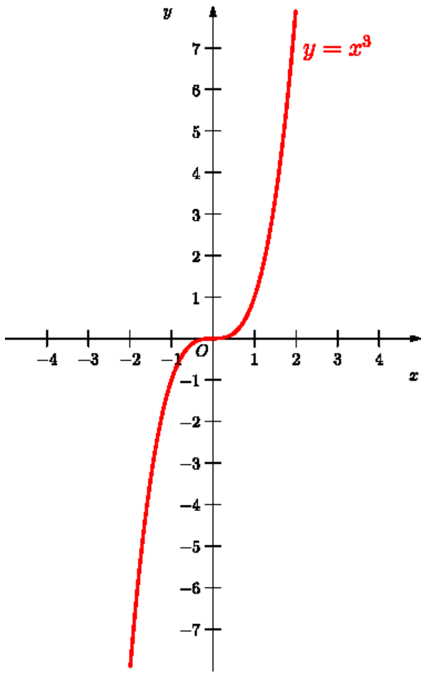
$$K \longrightarrow K,\, x \longmapsto -x,$$

streng fallend.

Die Funktionen, deren Monotonieverhalten in der folgenden Aussage besprochen wird, heißen *Potenzfunktionen.*



Die zweite Potenz ist im Positiven streng wachsend und im Negativen streng fallend.



Die dritte Potenz ist auf ganz $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ streng wachsend.

LEMMA 25.16. *Es sei K ein angeordneter Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Abbildung*

$$K_{\geq 0} \longrightarrow K,\ x \longmapsto x^n,$$

ist streng wachsend.

(2) *Die Abbildung*

$$K_{\leq 0} \longrightarrow K,\ x \longmapsto x^n,$$

ist bei n ungerade streng wachsend.

(3) *Die Abbildung*

$$K_{\leq 0} \longrightarrow K,\ x \longmapsto x^n,$$

ist bei n gerade streng fallend.

Beweis. Der erste Teil folgt unmittelbar durch n-fache Anwendung der Definition, die beiden weiteren Teile ergeben sich daraus durch Berücksichtigung der Negation und Lemma 25.15 (3). □

Abbildungsverzeichnis