Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2018/2019**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 28

Übungsaufgaben

Aufgabe 28.1. Berechne in $\mathbb{Q}(X,Y)$

$$\frac{7X^2 - XY^3 + Y^4}{5X - \frac{1}{3}Y^4} \cdot \frac{1}{X^2Y^3} + \frac{3X^3 + X^2Y^2 - XY^2}{2 + 4X^3 - X^{257}} \cdot \frac{1}{X^2Y^3} - \frac{1}{7}X^3 + XY + Y^6 + 9$$

Aufgabe 28.2. Es sei $K \subseteq L$ eine algebraische Körpererweiterung. Zeige, dass dann auch die Körpererweiterung

$$K(X_1, \ldots, X_n) \subseteq L(X_1, \ldots, X_n)$$

der rationalen Funktionenkörper algebraisch ist.

Aufgabe 28.3. Zeige, dass eine Unterfamilie einer algebraisch unabhängigen Familie wieder algebraisch unabhängig ist.

Aufgabe 28.4. Es seien $e_1, \ldots, e_n$ positive natürliche Zahlen. Zeige, dass die Familie $X_1^{e_1}, \ldots, X_n^{e_n}$ im Polynomring $K[X, \ldots, X_n]$ über einem Körper K algebraisch unabhängig ist.

Aufgabe 28.5. Zeige, dass die Familie $X+Y, XY$ im Polynomring $K[X,Y]$ über einem Körper K algebraisch unabhängig ist.

Aufgabe 28.6. Es sei A eine kommutative R-Algebra über einem kommutativen Ring R und seien $f_1, \ldots, f_n \in A$ eine Elementfamilie. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) Die Elemente $f_1, \ldots, f_n$ sind algebraisch unabhängig.
(2) Der Einsetzungshomomorphismus
$$R[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow A,\ X_i \longmapsto f_i,$$
ist injektiv.
(3) Der Einsetzungshomomorphismus
$$R[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow R[f_1, \ldots, f_n],\ X_i \longmapsto f_i,$$
ist bijektiv.

Aufgabe 28.7. Es sei $K[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring über einem Körper K und seien $n+1$ Polynome $f_1, \ldots, f_{n+1} \in K[X_1, \ldots, X_n]$ gegeben. Zeige, dass diese algebraisch abhängig sind.

Aufgabe 28.8. Es seien $f_1, \ldots, f_n$ Elemente eines Körpers K und seien $f_1, \ldots, f_{n-1}$ algebraisch unabhängig. Zeige, dass die Familie $f_1, \ldots, f_n$ genau dann algebraisch unabhängig ist, wenn f_n transzendent über $K(f_1, \ldots, f_{n-1})$ ist.

Aufgabe 28.9. Besitzt die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ eine endliche Transzendenzbasis?

Aufgabe 28.10. Es sei $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}$ eine Familie von reellen Zahlen. Zeige, dass es daraus eine algebraisch unabhängige Teilfamilie gibt.

Es ist übrigens unbekannt, ob die beiden transzendenten Zahlen e und π algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind.

Aufgabe 28.11. Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Zeige, dass eine echte Unterfamilie einer Transzendenzbasis von L über K keine Transzendenzbasis ist.

Aufgabe 28.12. Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und $L \subseteq M$ eine algebraische Körpererweiterung. Es sei $f_1, \ldots, f_n \in L$ eine Transzendenzbasis von L über K. Zeige, dass diese Familie auch eine Transzendenzbasis von M über K ist.

Aufgabe 28.13.*

Es seien $K \subseteq L$ und $L \subseteq M$ Körpererweiterungen. Es sei $f_1, \ldots, f_r \in L$ eine algebraisch unabhängig über K und $g_1, \ldots, g_s \in M$ algebraisch unabhängig über L. Zeige, dass die Familie

$$f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s \in M$$

algebraisch unabhängig über K ist.

Aufgabe 28.14. Es sei K ein Körper der Charakteristik 0 und

$$f_1, \ldots, f_n \in K[X_1, \ldots, X_n]$$

Polynome, die für den Körper der rationalen Funktionen $K(X_1, \ldots, X_n)$ eine Transzendenzbasis über K bilden. Es sei f_n ein Primpolynom. Zeige, dass die Restklassen der $f_1, \ldots, f_{n-1}$ im Quotientenkörper $Q(K[X_1, \ldots, X_n]/(f_n))$ eine Transzendenzbasis bilden.

Aufgabe 28.15. Bestimme den Transzendenzgrad des von den beiden trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus über $\mathbb{R}$ erzeugten Körpers.

Aufgabe 28.16. Diskutiere Gemeinsamkeiten zwischen dem Konzept lineare Unabhängigkeit (Basis, Dimension) und dem Konzept algebraische Unabhängigkeit (Transzendenzbasis, Transzendenzgrad).

Aufgabe 28.17. Es sei K ein Körper und $L = K(X_1, \ldots, X_n)$ der rationale Funktionenkörper in n Variablen. Es sei $G \subseteq \operatorname{Gal}(L|K)$ eine endliche Untergruppe der Galoisgruppe. Zeige, dass der Transzendenzgrad des Fixkörpers L^G über K gleich n ist.

Aufgabe 28.18. Wir betrachten den Funktionenkörper in zwei Variablen $L = K(X,Y)$ über einem Körper K der Charakteristik 0. Die Gruppe $K^\times$ ist eine Untergruppe der Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(L|K)$, indem man $s \neq 0$ als den durch $X \mapsto sX$, $Y \mapsto sY$ festgelegten Automorphismus auffasst. Bestimme den Fixkörper $K(X,Y)^{K^\times}$ sowie dessen Transzendenzgrad über K.

Aufgabe 28.19. Wir betrachten den Funktionenkörper $L = K(X_1, \ldots, X_n)$ über einem Körper K. Wie betrachten auf der Menge $\mathcal{Z}$ aller Zwischenkörper die Relation, die durch

$$M_1 \sim M_2,$$

falls es einen Zwischenkörper M derart gibt, dass $M_1 \subseteq M$ und $M_2 \subseteq M$ endliche Körpererweiterungen sind, gegeben ist. Zeige, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt.

Aufgabe 28.20. Man gebe ein Beispiel für Zwischenkörper

$$L, M \subseteq K(X,Y),$$

die den gleichen Transzendenzgrad haben, die aber nicht zueinander äquivalent im Sinne von Aufgabe 28.19 sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 28.21. (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Betrachte auf dem rationalen Funktionenkörper $\mathbb{C}(X)$ die Gruppe der $\mathbb{C}$-Körperautomorphismen, die durch $X \mapsto \zeta_n X$ erzeugt wird, wobei ζ_n eine primitive n-te Einheitswurzel bezeichnet. Bestimme den Fixkörper $\mathbb{C}(X)^{\mathbb{Z}/(n)}$.

Aufgabe 28.22. (4 Punkte)

Zeige, dass die Familie $X+Y+Z, XY+XZ+YZ, XYZ$ im Polynomring $K[X,Y,Z]$ über einem Körper K algebraisch unabhängig ist.

Aufgabe 28.23. (8 (2+2+4) Punkte)

Es sei K ein Körper und $L = K(X_1, \ldots, X_n)$ der rationale Funktionenkörper in n Variablen. Wir knüpfen an Beispiel 10.12 an.

(1) Zeige, dass es einen natürlichen injektiven Gruppenhomomorphismus
$$\mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow \mathrm{Gal}\,(L|K)$$
(2) Zeige, dass dieser nicht surjektiv ist.
(3) Es sei nun zusätzlich vorausgesetzt, dass der Körper K die Charakteristik 0 habe. Zeige für den Fixkörper die Gleichheit
$$L^{\mathrm{GL}_n(K)} = K.$$

Aufgabe 28.24. (1 Punkt)

Es sei $L = K(X_1, \ldots, X_n)$ der rationale Funktionenkörper über einem Körper K. Wie betrachten auf der Menge $\mathcal{Z}$ aller Zwischenkörper die Äquivalenzrelation aus Aufgabe 28.19. Zeige, dass der Transzendenzgrad auf den Äquivalenzklassen wohldefiniert ist.

Aufgabe 28.25. (2 Punkte)

Es sei $L = K(X_1, \ldots, X_n)$ der rationale Funktionenkörper über einem Körper K. Es seien Zwischenkörper
$$K \subseteq M_1, M_2 \subseteq L$$
mit der Eigenschaft gegeben, dass die Körpererweiterungen
$$M_1 \cap M_2 \subseteq M_1, M_2$$
endlich seien. Zeige, dass es dann auch einen Zwischenkörper N derart gibt, dass $M_1, M_2 \subseteq N$ endlich sind.

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5