中等教育平面幾何学教科書教授の実際

広島高等師範学校附属中学校数学研究会・著

修文館

昭和２

PLANE GEOMETRY

PRACTICE IN TEACHING

SHUBUNKWAN

中等教育

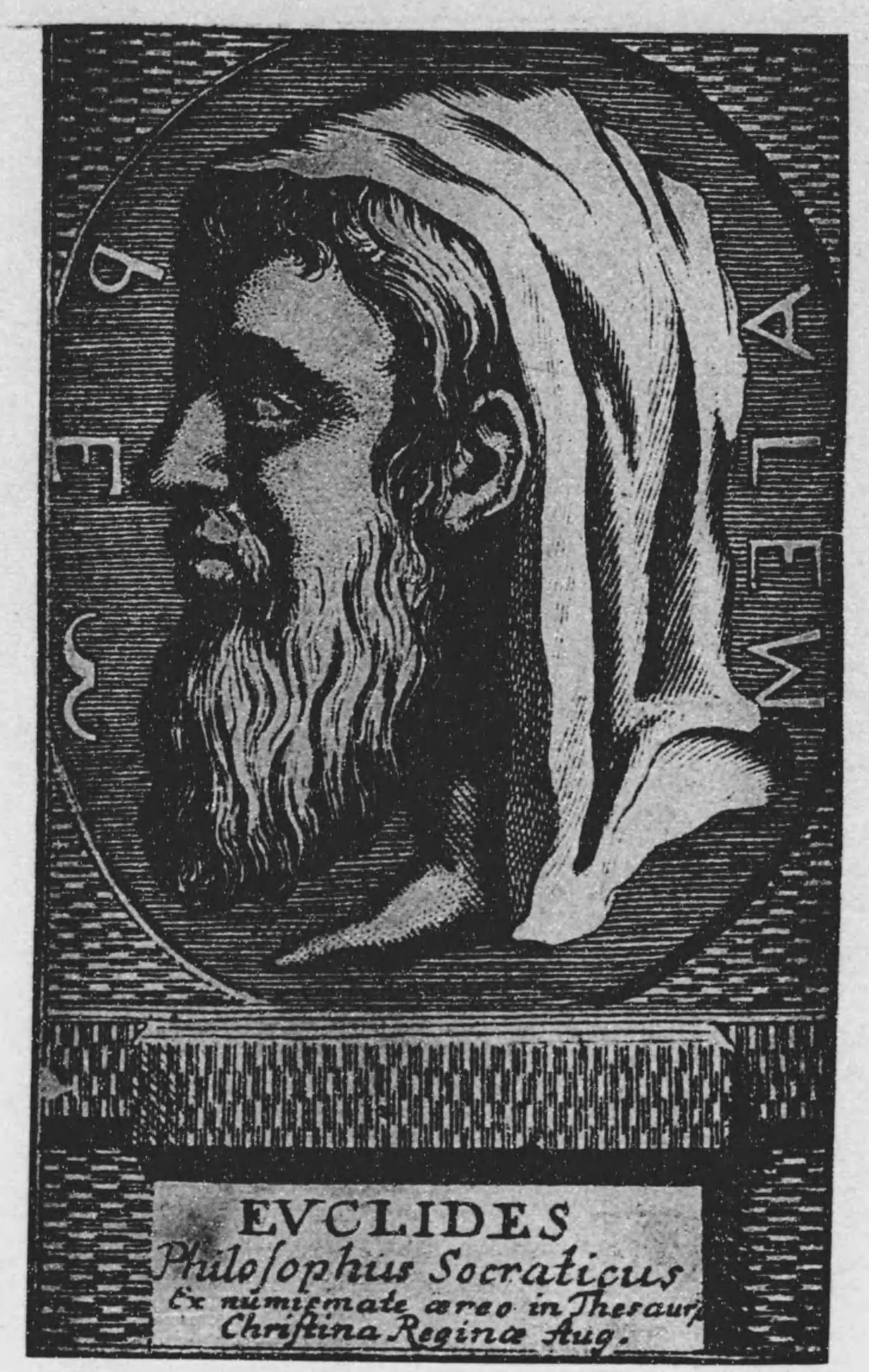
平面幾何學教科書

教授の實際

廣島高等師範學校附屬中學校
數學研究會著

東京
修文館發行

ユークリッド


EVCLIDES
Philosophus Socraticus
Ex numismate æreo in Thesaur.
Christina Reginæ Aug.

「ユークリツド」Euclid

（紀元前330年頃—275年頃）

「アレキサンダー」大王「マケドニア」王トナルヤ希臘，小亞細亞ヲ征服シ埃及ヲ占領セリ。王ハ地中海沿岸「ナイル」河口ニ一大都市ヲ建設セント企テ之ヲ「アレキサンドリア」ト名ヅケタリ。

大王ノ死後ソノ領地ハ分割サレ埃及ハ「トレミー」王ノ手ニ歸シタリ。「トレミー」王ハ「アレキサンドリア」ヲ首府トシ宮殿ノ近接地ニ一大大學ヲ建設シ多クノ賢人哲人ヲ集メタリ。此ノ大學ハ實ニ世界最初ノ大學ナリ。ソノ中心タル圖書館ハ又宏大ニシテ創立僅カニ 40 年ヲ經ザルニ早クモ 60 萬卷ノ書ヲ有スルニ至レリトイフ。

「ユークリツド」ハ實ニ當大學最初ノ大數學者ナリキ。彼ノ名聲嘖々タリシコトハ彼ノ著書ノ代名詞トシテ「ユークリツド」ノ名ノ用ヒラレタリシ事ヲ以テシテモ知ラル。

彼ノ著書「エレメンツ」Elements ハ二千年後ノ今日迄數學教科書ノ見本トセラルルモノニシテ英國ニ於テハ今尚幾何學ノ別名トシテ「ユークリツド」ノ名ヲ用フトイフ。

「ユークリツド」幾何學ハ綜合的ニ成レルモノニシテソノ證明ノ如キモ整然トシテ立派ナルモノ多シ。然レドモ之レ却テ初學者ヲシテ學ビ難カラシムル處ノモノナリ。カツテ「トミレー」王之ヲ學ビソノ難キニ苦シミ「ユークリツド」ニ向ヒ「幾何學ニハ更ニ學ビ易キ方法ハナキカ」ト問ヒタルニ彼ハ即座ニ「幾何學ニ王道ナシ」ト答ヘタリト。

幾何學ヲ學ブ生徒ノ中ニモ「トレミー」王ノ如キ歎ヲモラスモノアラン。「幾何學ニ初學者ノ道アラシムル」コトハ吾ガ數學研究會ノ不斷ノ努カナリ

「ユークリツド」ハ又學問ハ學問ノ爲ニ學ブベキコトヲ主張シ利ニ趨ルコトヲ惡メリ。幾何學ヲ學バントスル一靑年アリ。「ユークリツド」ニ對ヒテ「幾何學ヲ學ババ如何ナル利得アリヤ」ト問ヒタルニ彼憤然色ヲナシ「彼ガ如キハ利ヲ得ルタメニノミ學問ヲナスモノナレバ只ソレ之ヲトラセヨ」トテ奴隷ヲシテ一錮貨ヲ與ヘシメタリトイフ。

緒　　言

(1) 幾何學ノ價値

「幾何學ノ價値ハ奈邊ニ存スルカ。」

「幾何學ハ何ノ爲ニ教ヘラルヽカ。」

モシ吾々幾何學教授ノ實際家ニ對シテ此種ノ質問ガ發セラレタトシタラバ誰シモ一種ノ侮辱ヲ感ズルコトデアラウト思フ。然シ乍ラ教授實際家ハ果シテ之ニ對シテ滿足ナ答辯ヲナスコトガ出來ルデアラウカ。或ハ曰ク

ソレハ

1 數理數量ニ對スル觀念ヲ擴充スルタメニ

2 空間概念ノ養成ノタメニ

3 論理ノ體系ヲ知ラシメソノ應用ヲ計ラシメンガ爲ニ

4 思考ヲ陶冶センガタメニ

5 科學的精神ノ養成ノタメニ

曰ク何曰ク何ト一々列擧スルデアラウ。然シ乍ラ是等ガ果シテ云ハムトスル衷心ノ叫ビデアラウカ。否々少ナクトモ心ノ奥底ニハ尚一ツノ理由而モカナリ根強イ理由ガ潜ンデ居ルコトハ爭ハレナイ事實デアラウ。曰ク

入學準備ノタメニ

中學校ノ數學教授ガ高等諸學校ニ於ケル數學ノ基礎ヲ作ルコトヲ以テ唯一ノ目的トスルナラバ入學準備トシテノ意味ニ於テ幾分教育的ノ價値ヲ見ルコトガ出來ルデアラウガ只單ニ高等ノ學校ニ入ランガタメニ一切學校ニ於ケル數學ヲ犠牲ニスルトイフナラバコレ吾々ノ到底忍ブベカラザルコトデアルト思フ。然シ現今ノ有樣ヨリ見テヨシコレ程極端ニ走ルコトハナイトシテモ

入學準備ニサヘオビヤカサレナイナラバ尚一層幾何學ヲ價値アラシメソノ目的ヲ達セシムルヤウニ教授スルコトガ出來ル。

ト云フコトハ確カデアツテ之ニハ誰シモ異議ナク贊成スルコトト思フ。

翻ツテ考ヘテ見ルニ現今ノ高等學校ノ入學試驗ハ單ニ學校ノ教育ダケデ十分應ジ得ラレルノデアラウカ。モシ應ジ得ラレナイトシタナラバ人ノ子弟ヲ預ル學校トシテハソノ子弟ノ進ムニ有利ナ何等カノ方法ヲ取ルコトガ當然ノコトデハナイカ即チ入學準備ハ餘儀ナク，シナケレバナラナイデアラウ。而モカク教育スルコトガ大キナ人間ノ教育ト云フ立場カラ考ヘテ人ノ子ヲ毒スル結果ニ終ルモノデアルトシタナラバ學校ノ教育ハ如何ニシテモ此ノ「ヂレンマ」カラ免レルコトハ出來ナイデアラウ。併シ茲ニ更ニ一歩ヲ進メテ考ヘテミルニ

入學試驗トイフモノニ脅カサレテ教育的ノ教授ガ出來ナイトイフノハ如何ナル理由デアラウカ。何等カソコニ改善スベキ餘地ハナイノデアラウカ。勿論出題者ノ方ニ於テ反省スベキコトガ多々アラウト考ヘルガ其ノ方面ニ對スル考察ハ姑ク措キ差當リ吾々中學校ノ教育者トシテ考ヘタ場合ニ學校教育ト入學準備トニ調和ヲ謀ツテソノ「ヂレンマ」ヲ撤スル工夫ハナイデアラウカ。

學校ノ教育即チ入學準備

即チ眞ノ數學教育ヲナシツヽアルコトニヨツテ十分入學試驗ニ應ズル實力ヲ與ヘルコトハ出來ナイモノデアラウカ。若シ之ヲナスコトガ出來タナラバコヽニ始メテ幾何學教授ノ價値ガ發揮サレルコトヽナルデアラウト思フ。

一體幾何學ハソノ內容ソノモノカラ考ヘタナラバ其ノ實用的ノ價値ハ僅少ノモノデアツテ幾何學ヲ學ンダガタメニ社會生活上ニ都合ノヨイ知識ヲ增シ得タ分量ハ何程アルデアラウカ。極端ニ云ヘバ小學ノ課程以上ニ餘リ出デナイデアラウト思フ。コレダケノコトヲ以テ教授ノ目的トスルナラバ敢テ中學校ニ於テアノ多クノ日子ヲ費スニモ及バナイコトデアラウト思フ。單ニ幾何學ノ實質的價値ヲ叫ブモノニ對シテハ幾何學ヲ學ベバ如何ナル利得アルヤト云ヘル人ニ對シ「ユークリツド」ガシタヤウニ一錢銅貨デモ與ヘテヤリタイヤウナ氣ガスルノデアル。

幾何學ノ重要ナル價値ソレハドウシテモ幾何學ノ形式的方面ニ求メナクテハナラヌモノデハナイカ。卽チ前ニ擧ゲタ3,4,5,等ガソレニ屬スル所ノモノデアラウ。

幾何學ニ於テ

考ヘル　工夫スル　研究スル　發見スル

等ノコトヲ除イテ見タナラバ恐ラク殘ルトコロノモノハ肉ヲ取リ去ツタ骨ニ相當スル程ノモノモナイノデアラウ。

即幾何學ニ於ケル思考陶冶ハソノ內容ソノモノニ密着シテ居ルモノデナクテソノ內容ヲ取扱フ仕事ノ中ニ出來ルモノデハナカラウカ。

又社會的實用方面カラ見テモ系統的ノ考ヘ方ソノモノガ人間生活ノ大部分ヲ占メテ居ルト思フ。加フルニ工夫研究ノ結果自己ノ努力ニヨツテ問題ヲ解キ得タ時ノ喜悅ハ眞ニ眞理ヲ摑ミ得タトキノ歡喜ソノモノデアツテコレガ即チ科學的精神ノ湧出スル源泉デナクテ何デアラウ。

然ルニ實際教授法ハドウデアラウカ。入學準備ニ應ズルタメニ出サウナ問題ヲ多ク漁ル。問題ヲ多ク漁ラナクテハナラナイデ勢多クノ時間ヲ要スル，從ツテ生徒ヲシテ考ヘシメルヨリモ教師ガ教ヘタ方ガ早イ。

コヽニ於テ一匹ノ兎ヲ獲ンガタメニ蟻モ漏サヌ網ヲ張ルトイフ戰法ヲ取ルノデ日ニ日ニ生徒ノ工夫力ヲ創ギ思考力ノ若芽ヲ摘ミツヽアルノデアル。ソレ故吾々ノ絕叫シタイコトハ

學校教育ヲバ即チ入學準備タラシメルコト

教ヘルヨリモ考ヘシムルコト

知ラシメルヨリモ學バシメルコト

デアル。

(2) 生徒ノ態度

幾何學ノ教授ヲシタ人ハ生徒ヲソノ能力ニ依ツテ大凡次ノ三階級ニ分ツコトガ出來ルノニ氣付クコトヽ思フ。即チ

1 教ヘテモ理解セザルモノ

2 教ヘタルコトハ理解シ得ルモ自ラ問題ヲ解ク力ニ乏シイモノ

3 教ヘラレタルコトハ理解シ尙進ンデソノ應用問題ヲ解キ得ルモノ

內容ヲ主トスル學科ニ於テハ2ノ階級ニ止メテ滿足スベキモノデアルガ形式ヲ主トスル學科タル幾何學ニ於テハ3ノ階級ニ進マナクテハ教授ノ効果ヲ奏シ得タトハ云ヘナイノデアル。然シ實際ニ於テハ3ニ進ミ得ザルモノヽ多イノハ勿論1ノ部ニ屬スルモノモ亦カナリ多イノデ落第者ガ數學科ヨリ頻々トシテ出ルコトヲ考ヘテ見テモソノ教授ノ効果ヲ疑ハザルヲ得ナイノデアル。生徒ノ方面ヲ考ヘテ見タナラバ生徒ハ果シテ教師ノ要求スル勉强法ヲトツテキルノデアラウカ。生徒ハ努力ヲ惜ミテ自發的研究ヲナサントノ忍耐ヲ欠キ，學科ニ對スル興味ヲ失ツテ居ルノデアル。入學トイフ難關ヲ突破シナクテハナラナイト云フ觀念ニ强迫セラレ勢多クノ問題ヲ漁リ單ニ理解ト云フコトニ忙シク漸ク2ノ階級ニ止マルコトヲ以テ滿足シ3ノ階級ニ進マント心掛ケル者ハ甚ダ稀デアル。其ノ茲ニ到ツタ責任ノ一半ハ生徒自身ノ態度ニモ在ルコトヽ思フ。ソレ故生徒ヲシテ

學校ノ數學教育ヲ信ゼシメヨ。教場ヲ本城トシ教師ヲ將トシテ進ムトコロ如何ナル難關ヲモ突破シ得ザルナシ

トノ確信ヲ獲シメルコトガ最モ必要ノコトヽ思フ。

(3) 教授內容ノ研究ノ必要

吾々ガ或ル問題ヲ教授セントシテ教場ニ臨ム。時トシテハ教師ノ教ヘタモノヨリモ優ツタ解ヲ生徒ノ方カラ示サレルコトガアル。即チ生徒ニ教ヘラレタノデアル。作圖題ノ教授ヲスル。時トシテハ解ノ數ヲ落スコトガアル。ソレデ生徒ヲ責メルコトガ出來ヨウカ。吟味ヲナストキ混亂ヲ來ス。否當然シカアラザルベカラザル軌跡證明ノ形式ニツイテデサヘ疑ヲ懷キツヽ教授シテ居ル人モアルトイフコトデアル。コレデ以テ生徒ヲシテ信頼セシメ得ルデアラウカ。マシテヤ生徒ヲシテ數學ニ對スル興味ヲ喚起セシムルトイフコトハ望ムベクモナイデハナイカ。教授內容ノ研究ノ不徹底ソレガヤガテ生徒ヲシテ不徹底ニ終ラシムルデハナカラウカ。教授ノ方法ノ研究ノ前ニ吾々ハ先ヅソノ內容ノ研究ヲシナクテハナラナイト思フ。否教授ノ方法ハ其ノ內容ノ研究ヨリ自然生レ出ヅルモノデアルコトハ云フマデモナイ所デアル。ソレ故

證明問題ニツイテハ

圖形ニ於テ起リ得ル場合ノ總ベテヲ盡シ得タカ。

證明法ニ於テ各種類ノ方法ヲ試ミタカ。

ソレト類題ニハ如何ナルモノガアルカ。等

作圖題ニツイテハ

與條件ヨク起リ得ベキ總テノ場合ヲ盡シ得タカ。

作圖方法ハ各種類考ヘテ見タカ。

吟味ハ隅カラ隅マデ行キ亘ツタカ。

ソノ種類ニハ如何ナルモノガアルカ。等

其他

教授事項ノ歷史的考察ハ如何。

等ニ就テ充分研究ヲ積ンデ然ル後ニ確信アル數師トシテ敎場ニ臨ミ得ルコトガ出來ヨウト思フ。カク考ヘテ來タナラバ吾々ノ今マデ取扱ツテ來タ敎授材料ノ中ニ未ダ以テ研究ノ不十分ナ部分ガ殘サレテアルコトデソノ研究ニヨツテ又更ニ新シイ野ガ開カレテ數學ハ日ニ日ニ進ムトイフコトトナルノデアル。一體吾々數學敎師ニハ相互ノ研究ガ足ラヌト思フ。オ互自己ノ研究シタコトヲ吾ガ胸一ツニ藏メテ之ヲ廣ク敢テ發表シナイ。從ツテ問題ノ取扱モ優ツタモノニ置換ヘラレテ行クト云フコトガナイノデアル。些細ナコトタリトモ少シデモ價値アルコトハ之ヲ發表シテソノ改良ニ進歩ニ盡シタイト思フ。

(4) 本書ノ體裁

我校ノ數學敎科書ハ敎場ガ問題ノ二行式排列ニナツテ居テソノ

左側ノ問題ハ敎室ニ於ケル練習問題

右側ノ問題ハ敎室ノ補充問題タリ又敎室外ノ練習問題

デアツテコレハ

自學自習ヲスヽメルタメニ

宿題ノ過重ヲ防グガタメニ

學習ヲ興味アラシメルガタメニ

シテ居ルコトハ世間ニヨク知ラレテヰルコトデソノ取扱タル實際敎授法トシテハ

敎室ニ於ケル生徒ノ學習ト敎師ノ補導トヲ尊重シ

「**カード**」ヲ使用シテ自發研究ヲナサシメルヤウニ計ツテヰル。

コトモ亦世ニ知ラレタルコトヽ思フ。(本會著數學敎授ノ實際參照)

本書ハ吾ガ敎科書ノ實際的取扱ヲ示スモノデアツテ吾々ガ日々實行シツヽアル其ノ實際ヲ述ベ且ツ我々ノ研究ノ一端ヲ載セタルモノデアル。ソレ故又一般ノ幾何學ノ敎授書トモ見ルコトガ出來ル。

其ノ內容ニ於テハ

單ニ敎師ノ參考ノタメニ書イタコトモアルカラ其ノ敎授ニ際シテハヨロシク取捨選擇セラルベキデアル。

問題ハ生徒ヘノ考ヘ方ヲ示シタモノデ敎授者ニ敎ヘタノデハナイ。我校ノ「カード」ノ內容ヲ示シタモノデアル從ツテソノ文句モ生徒ニ對スル書キ方ニシテアル。

勿論我々ノ研究ハ微々タルモノデアル。實際家諸賢ガヨリ優ツタ研究ヲ多々積マレテヰルコトヽ思フ。願クハ御敎示ニヨツテコノ研究ヲヨリヨキモノトサレンコトヲ。

著　者　識

口繪說明

(1) 幾何學ノ起源ニ就テ

幾何學ハモト埃及ニ起ツタトイハレテ居ル。「ピラミッド」Pyramid ハ紀元前3000年ヨリ2400年頃マデノ間ニ建テラレタモノデアルガソノ形ガ整然トシタ四角錐デアルコト及ビソノ底面ノ邊ガ正シク東西南北ノ方向ヲ指シテ居ル事等ヨリ考ヘテモ如何ニ古代埃及人ガ幾何學的ノ考ニ優レテ居タカガワカル。尚紀元前1700年頃生存シテ居タ人トイハレル「アーメス」Ahmes ノ記錄ニ依ツテ見テモ古代埃及人間ニ如何ナル幾何ガ行ハレテ居タカガワカル。此記錄ハ今尚英國博物館ニ殘ツテ居ルノデアル。希臘ノ歷史家「ヘロドタス」Herodotus ノ言ニヨレバ埃及王「セソストリス」Sesostris ハ「ナイル」河ノ氾濫ノ度毎ニ區劃ヲ定メ土地ヲ量ツテ人民ノ間ニ之ヲ分配シタトイフコトデアル。ソノ當時野外ノ測量ハ繩デ三邊ガ 3：4：5 ノ三角形ニ張ツテ直角ヲ作ツタトイフコトデ「ハーピドナプテ」Harpedo-naptae「張リ繩」トイフノハコノコトデ「ピタゴラス」ノ定理ヲ以前

カラ實用ニ供シテ居タモノトモ考ヘラレル。幾何學ヲ「ヂオメトリー」Geometry トイフガ此ノ Geo ハ土地トイフコトデ metry トハ測量トイフコトデアルトイフ。希臘七賢人ノ一人デアル「ターレス」Thales (B.C.640—548)ハ青年ノ時商用ノタメニ埃及ニ行ツテ數學ヲ學ンダ。非常ニ考ノ優レタ人デ間モナク數學ニ長ジタ。「ピラミツド」ノ高サヲソノ影ノ長サト立テタ棒ノ影ノ長サトカラ計算シテ出シテ「アマシス」Amasis 王ヲ驚カシタトイハレテ居ル。後「ミレツト」Miletus ニ歸ツテ「アイオニツクスクール」Ionic school ヲ建テ大ニ埃及ノ數學ヲ希臘ニ傳ヘタトイフ。

「ターレス」ノ第一高弟デアル「ピタゴラス」Pythagoras (B.C.569—500) ハ又數學ニ長ジ面積ニ關スル諸定理 三角形ノ內角ノ和ニ關スル定理ヲ發見シ正五邊形ヤ五ツノ正多面體ノ作圖ヲナシタトイフコトデアル。「ヒポクローテイーズ」Hipocrates (B.C.440年頃) ハ圓ノ正方化問題，立方倍積問題等ノ研究ヲナシテ圓ノ面積ニ關スル定理ヲ發見シ又世界最初ノ數學教科書ヲ書イタトイハレテ居ル。「プラトー」Plato (B.C.429—348) ハ當時世ニ知ラレ居ル定義公理公準等ヲ定メ初等幾何學ト高等幾何學トノ系統的區別ヲ立テ初等幾何學ノ作圖題デ使用スベキ器具ハ定規ト「コンパス」トニ限ルコトニシタ。之ニ依ツテ作圖不能問題ガイヨイヨ明ニナツタ。「プラトー」ト同時代ニ「フイリツパス」「ユードクサス」「メネクムス」「アリストートル」等ノ學者ガ出テ數學ノ研究ヲナシソノ進步ヲ計ツタ。「ユークリツド」Euclid(B.C.380—275年頃) ハ「アレキサンドリア」大學ノ數學ノ教授デアルガ當時世ニ知ラレタ幾何學ノ諸定理ヲ集メ之ヲ整頓シテ論理的ノ順序トシテ一冊ノ幾何學教料書ヲ作リ上ゲタ。之ハ「ユークリツト」ノ原本Elements トイツテスベテ

* 「ユークリツド」ノ作ツタノハ13卷デ後ニ2卷ガ加ヘラレテ15卷トナツタ。1, 2, 3, 4, 6卷ハ平面幾何，5卷ハ比例論，11,12,卷ハ立體幾何，13,14,15卷ハ正多面體及附錄7,8,9卷 無理數論デアル。

*13篇ヨリ成ツテ居テ其後二千餘年間ノ幾何學書ノ基準トナツタモノデアル。幾何學ノ教授モ皆コノ「エレメンツ」ニ依ツタモノデ二千餘年間ノ今日ニ到ルマデノ幾何學ノ根柢ヲナシテ來タモノデアル。歐米諸國ニ於テ「ユークリツド」トイフ名ガ幾何學ノ別名ノ如ク考ヘラレテ居ルノヲ見テモ如何ニ此ノ「エレメンツ」ガ重ンゼラレテ來タカガワカル。「ユークリツド」以來幾多ノ數學者ガ出テ數學ノ研究ヲナシ新シイ發見ヲ齎ラシタケレドモ初等幾何學ノ上ニハ大シタ影響ハナカツタ。

實ニ幾何學ハ「ピラミツド」ノ建設サレタ埃及古代ヨリソノ「ピラミツド」ノ上ヲアラビア沙漠ニ向ツテ飛行機ノ群レ飛ブ三千年後ノ今日ニ到ルマデノ人ノ思考ヲ練リ，人ノ思考ヲ指導シテ來タモノデ人文開化ノ上ニ多大ノ貢獻ヲナシテ來タモノデアルトイフコトガ出來ル。

口繪ハ即チソノ間ノ歷史ヲ物語ルモノデ將來モ亦此ノ幾何學ニ依テ文化ノ益々進步スベキ勢ヲ示シテ居ルモノデアル。

(2) 日本ノ幾何學ニ就テ

1622年毛利重能ガ算術書ヲ著ハシタ。コレガ我國デ出版サレタ數學書ノ最初ノモノデアラウ。同氏ハ又1625年歸除濫觴ヲ著ハシタガソノ內容ハ主トシテ算術デアツテ幾何學ニ關スルコトハナカツタ。1627年吉田光由ガ塵劫記ヲ著ハシタ。之レモ算法ヲ主トシテ球算ヲ教ヘタモノデ專ラ算術ノ應用ヲ計ツタ書デアル。關孝和ハ我國ニ於ケル數學ノ大家デアツテ1642年ニ生レタ。其發明セルトコロハ多クテソノ中ノ球術，角術，弧背，圓理術等ニ於テハ大ニ幾何學ノ實用ヲ計ツタケレドモ現今吾々ガ研究スルヤウナ幾何學デハナカツタ。1659年山田正重ガ改算記ヲ著シタ。其內容ニモ矢張リ平面形ヤ立體ノ求積ニ關スルモノハ多クアルガソノ理論ハ述ベズシテ只公式ヲ應用スル方法ヲ教ヘ

タノミデアル。爾來明治初年ニ到ル二百餘年間ニ時ニハ西洋ノ數學モ入ツテ來タニハ相違ナイガ現今ノ幾何學ノヤウナ內容ヲ取扱ツタモノハナカツタト見エル。

日本ニ於テ出版サレタ幾何學ノ最初ノ本ハ

明治十五年　田中矢德編　幾何學敎科書（ユークリツドノ譯）

デ次ニ出版サレタノガ

明治十七年　長澤龜之助譯「トドハンター」ノ「ユークリツド」ノ幾何學原本

デハナイカト思フ。併シ乍ラ眞ノ著述デアツテ最モ日本ノ數學敎育ニ影響ヲ及ボシ且日本ノ數學界ニ權威ノアツタ本ハ

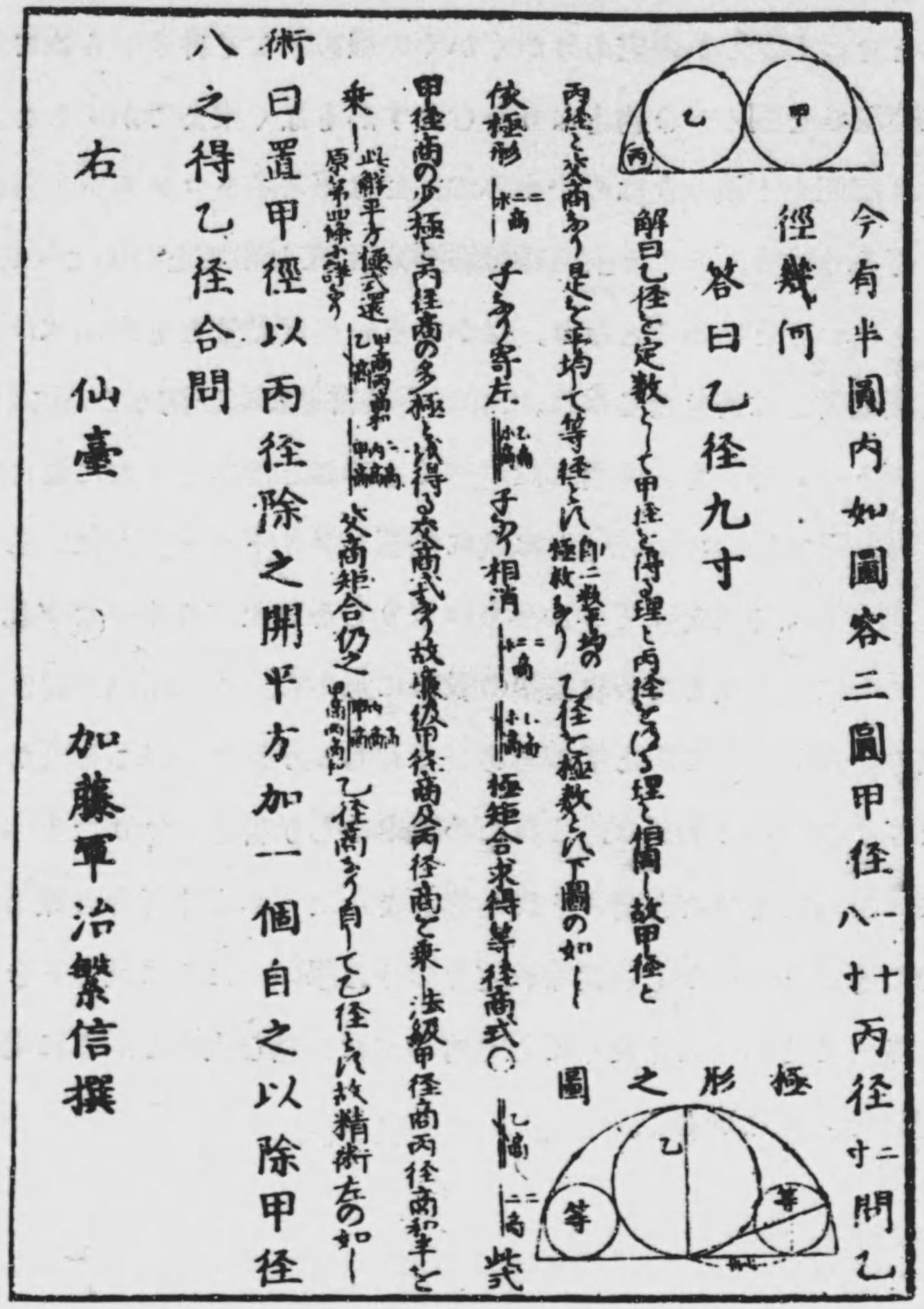
明治二十一年出版　菊池博士著　幾何學敎科書デアラウ。

爾來幾多ノ學者ガ出テ幾何學ノ研究ヲナシ且歐米ノ數學ノ傾向モ入ツテ來テ各種ノ幾何學敎科書ガ現ハレソノ內容ニ於テモ亦敎授法ニ於テモ大ニ改善サレテ時々刻々ソノ進步ヲ見ツヽ今日ニ到ツタノデアル。今田中矢德氏幾何學敎科書ニアル近藤直琴氏ノ序文ヲ載セテ明治初年ノ幾何學ノ狀況ヲ知ル參考トシ，尙文政十三年(1830年)ニ出版サレタ算法所書中ノ一頁ヲ揭ゲテ參考ニ供スルコトトシヤウ。

近藤眞琴氏序

いまよりはたとせばかりまへに海軍測量のふみ求むとて長崎屋といふ家にゆきけるに測量書と書きたるがありければこれこそと思ひかひとゝのへて家に歸りて見れば直ぐなる筋は二つの點の間の近みちなり。すぐなるすぢは左右心のまゝにのぶることを得るものなりなどたやすくもたやすきことのみことありげにあげつらふを見てかくてやはと思ひふたひらみひらひ

らきて見つれば直ぐなる筋ふたつならぶときにまた一つの直ぐなる筋の行きあふときはしかじかの定ありかくかくの理ありなど書きつらねて山のたかさ海の深さを測るべき物となりなむよすがもなく末までかゝることのみなりければ深くも讀みきはめず止みつ。こは「メイトコンスト」といふふみにてぞありける。「メイト」とは阿蘭陀の詞にてはかるといふこゝろ「コンスト」とはわざといふことなり。はかるといへば測量ともいふべければさてこそ測量書とは書きたるなれ。そののち英書をまなび初るころこの「メイトコンスト」の書はものの用にたつべくも非じと思ひしも大に世に益あるを知りぬ。「メイトコンスト」とは英には「ゼヲメトリー」とはいふなり。さてその書かゝる業をすてゝかへりみざりしをひたすらくいなげきて明治の初めに人にさきだちて我攻玉塾の敎科に加へぬ。されば己が國の詞もてこの業のふみしるしてんと年ころ思ひくらしゝが世の中のことにかかづらひなほざりにのみ打過ぎぬ。このころ田中ぬしが書きつゞりたまへるをあづさにものしたまひぬと聞きうれしくもまたなつかしくて昔の繰言今更云ひ出でむもいとはづかしき業なれど今のうゐ學の人たちに我ごとき悔あらせじとさてこそかくはくだくだしくものべたれ見む人あながちに老の繰言にな思ひそ。あなかしこ。


今有半圓內如圖容三圓甲徑八十一寸丙徑十二寸問乙徑幾何
荅曰乙徑九寸
解曰乙徑を定數として甲徑を得る理と丙徑を得る理と但同し故甲徑と丙徑と次商あり是を平均して等徑とし自二數平均の極數あり乙徑と極數とハ下圖の如し
極形之圖
依極形 子を寄左 子を相消 極矩合求得等徑商式 式
甲徑商の少極と丙徑商の多極とを得る次商式なり故に乗法級甲徑商及丙徑商を乗し法級甲徑商丙徑商和半を乗し 此解平方條式還原第四條ニ詳なり 次商矩合仍之 乙徑商なり自して乙徑となる故精術左の如し
術曰置甲徑以丙徑除之開平方加一個自之以除甲徑八之得乙徑合問
右 仙臺 加藤軍治繁信撰

目次

中等教育 平面幾何學教科書教授の實際

緒言

口繪說明

第一篇

幾何學ノ基礎

第一章　點ト直線

第二章　角

第三章　圓

第四章　多角形

第五章　幾何學的證明

第二篇

直線形

第一章　三角形ノ合同

第二章　作圖題

第三章　平行線

第四章　多角形ノ內角ノ總和

第五章　二等邊三角形及直角三角形

第六章　三角形ノ角及邊ノ不等

第七章　平行四邊形

第　三　篇

圓

第一章　弧及弦

第二章　弓形角

第三章　切線及切圓

第　四　篇

軌跡及作圖題

第一章　軌跡

第二章 作圖題

第五篇

面積

第一章 三角形及平行四邊形ノ面積

第二章 線分ノ上ノ正方形及線分ノ包ム矩形

第六篇

比及比例

第一章 數及線分ノ間ノ比及比例

第二章　相似形

第三章　面積ノ比

第七篇

圓周及圓ノ面積ノ計算

女子教育

幾何學教科書教授ノ實際

目次

第一篇

幾何學ノ基礎

第一章　直線

第二章　角

第三章　圓

第二章　弓形角

第三章　切　線

第四章　二ツノ圓

第五章　軌　跡

第　四　篇

面　積

第一章　三角形及平行四邊形ノ面積

第二章　線分ノ包ム矩形及線分ノ上ノ正方形

第　五　篇

比　及　比　例

第一章　數及線分ノ比及比例

第二章　相似形

第三章　面積ノ比

第　六　篇

圓周及圓ノ面積

第一編

幾何學ノ基礎

幾何學ノ初歩教授ニ就テ

凡ソ中學校ノ數學課程ノ中デ幾何學程敎ヘ難ク又生徒ニトツテ學ビ難イモノハナカラウ。ソレハ幾何學ソノモノガ六ケシイトイフコトニヨルノハ勿論デアルガソノ初步ノ入リ惡イトイフコトガ又重大ナ原因ヲナシテ居ルノデアル。元來幾何學ハ演繹的ノ體系ヲナシテ居ルモノデアツテ僅少ノ定義公理カラ出發シ極メテ嚴密ナ論理ノ形式ニ從ツテ次カラ次ヘト連續シテ行クモノデアル。而シテ此ノ核トナリ原子トナルベキ基礎的ノ定義ヤ公理トイフモノガ極メテ理解シ難イノデアル。ソレハ

1　生徒ノ經驗界ト餘リ離レタルコト

2　餘リニ嚴密過ギルコト

等ノコトガ原因トナツテ幾何學トハ分リ切ツタ普通ノコトヲ徒ラニ六ケ敷云ウテ人ヲ苦メルモノト考ヘ新敎授ニ對スル珍ラシサノ失セルト共ニ

3　學習ニ對スル興味ガ去ツテシマウ

ノデアル。幾何學ハ推理ヲ伴フモノデアル。從ツテ生徒ノ之レガ學習ニ對スル努力ハ中々大デアル。ソレ故生徒ノ興味ガナクナツタナラバ最早幾何學ノ敎授ノ價値ハナクナルノデアル。實ニ幾何學ノ初步敎授ガ幾何學ノ敎授ノ効果ヲ左右スルトイツテモヨイ位デアル。

幾何學ノ初步敎授ヲ入門トシテ豫備幾何學ヲ敎授シテ居ル所モ多クアル。

豫備幾何學ノ取リ方ニモ大體三通アル。

1 幾何學全體ノ事項ヲ一ツニ纒メ實驗的ニ幾何學ノ性質ヲ研メルモノデ

Godfrey and Siddons, Plane Geometry

Betz and Webb, Plane and Solid Geometry

ナドハソレデアル。

2 豫備的ノ事項ヲ只初歩ノ入門ノ部ニダケ設ケソノ材料モ初歩ニ入ル部分ヲ平易ニ理解セシムルタメノ材料ヲ取ツテ實驗實測ヲスルモノ

Wentworth—Smith, Plane and Solid Geometry

Ford and Ammerman, Plane and Solid Geometry

ナドハソレデアル。

3 豫備幾何ヲ初歩ノミナラズ幾何學全體ニ設ケ各定理ノ始メニ置イテアルモノ

黑田稔氏ノ平面幾何學教科書

ノ如キハソレデアル。

吾々ノ教科書ハ2ト3ノ折衷ノヤウナモノデアツテ初歩ノ入リ難イトコロヲ入リ易カラシムルヤウニ豫備幾何ヲ施シ且全體ニ亘ツテモ必要ノ箇所ニハ實驗實測ニヨル豫備的事項ヲ加ヘテアルノデアル。

而シテ入門ニ於ケル實驗實測ヲナサシムル目的ハ

a 先ヅ圖形ニ親シマシメ

b 幾何學的用語ニ親シマシメ

c 長サ角等ノ幾何學量ノ觀念ヲ明カナラシメ

d 幾何學的ノ事項ヲ知リ

e 用具ノ使用ニ慣レシメル

等ニアルノデソレニヨツテ生徒ノ興味ヲソヽリツヽ學習ヲ進メシメ漸次幾何學ノ何タルカヲ知ルコトヲ得サシメルコトガ出來ルノデアル。

1. 嚴密ナル言ヒ表ハシ方

吾々ノ日常用フル言語ニハ隨分粗雜ナモノガアル。ソレデモ大シタ間違モ起ラズニ意志ガ通ジテ行クモノデアル。併シ乍ラ學問上ニ於テハ用語ノ意義ガ限定サレテ居ナクテハソノ研究ヲ進メテ行クコトハ出來ナイ。幾何學デ用フル語句ハ小學校ニ於テモ起ルモノデ生徒ハソノ意義ノ大體ハ知ツテ居ルモノデアル。トコロガソノ知リ方モ極メテ漠タルモノデ到底ソレヲ以テ幾何學ノ基礎的概念トスルコトハ出來ナイ。ソレ故幾何學ノ初歩ニ於ケル豫備的ノ事項ヲ取扱フ場合ニハ生徒ノ既有概念ノ整理トイフコトモ重要ナ仕事ノ一ツト考ヘナクテハナラナイ。ソコデ生徒ガ幾何學ノ入門ニ於テ驚ク事ハ定義ノ嚴密トイフコトデアル。勿論徒ニ嚴密ヲ强フルコトハヨロシクナイガ幾何學ノ出發點トナルニ足ルダケ確實ナ意義ヲ知ラシメナクテハナラナイ。ソレ故

用語ノ意味ヲ明カニスルコト

之ヲ正確ニ言ヒ表ハスコト

ノ二ツノ事項ハ幾何學ニ於テハ是非守ラナクテハナラナイ重要ナコトデアルコトヲ知ラシムルタメニ本節ヲ幾何學ノ冒頭ニ揭ゲタ次第デアル。幾分コジ付ノ氣味モアルガソノ意味ノ徹底スル樣ニ取扱ハレタイ。

2. 點 Point.

普通ノ教科書デハ立體ノ定義ヲ第一ニ揭ゲ次ニ面，線，點ト進ンデ居ル。之レハ生徒ニトツテハ理解シ難イコトデアル。コトニ

空間ノ一部分ヲ立體トイフ。トイフ定義ハ中々六ケシイ。空間トイフ語ガ極メテ抽象的ナ語デ說明スル言葉ノナイモノデアルカラデアル。コトニ理論的ニ考ヘレバ體，面，線，點ガ順序デアルデアラウガ體ノ定義ノ實際必要ナノハ立體幾何ニ於テデアル。ソレ故本書ハコヽニ之ヲ省キ點ヨリ始メテ

點 → 線 → 面　ト進ムコトニシテアル。

問　圖ニヨツテ何レガ眞ノ點ニ近キカト問ヒ，生徒ノ觀察セルトコロ及考ヘ居ルトコロヲ自由ニ發表セシメ，生徒ノ既有觀念ヲ整理シ學問上デイフ嚴密ナ定義ヲ知ラシメル。

次ニ實際上ノ點ノ表ハシ方，呼ビ方ヲ授ク。

點ヲ表ハスニ×ノ如ク線分ノ交點ニヨツテスルモノガアルガ點ノ多イ場合ハ複雜デヨクナイ。矢張成ルベク鉛筆ノ尖端ヲ尖ラシテ小サイ星ヲ打チ理論的ノ定義ニ近カラシムルガヨイ。

點ヲ呼ブニハA點，B點デナクテ

點A，點B，點Pノ如クイハシメタイ其他スベテ符號ト共ニ呼ブトキニハ

名稱ヲ先ニ符號ヲソノ後ニ呼ブ コトニスベキデアル。

參考ノタメニ他ノ教科書ニ現ハレタ定義ヲ揭ゲテ見ヨウ。

ユークリット
Euclid—A point is that which has no part.

點トハ場所ヲ有セザルモノナリ。

プラトー
Plato—A point is the beginning of a line.

點トハ線ノ端ナリ。

アリストートル
Aristotle—A point is something indivisible but having position.

位置ヲ有スレドモ分割シガタキモノ

ピタゴレアン
Pythagoreans—Position without magnitude.

大サノナイ場所

ニクソン
Nixon—A point has position, but can not be measured or divided.

位置ハ有スルガ測ルコトモ分割スルコトモ出來ナイモノ。

3. 線 Line.

問一　地圖ニヨツテ境界ガ線ナルコトヲ考ヘシメ線ノ定義ヲ問答ニヨツテ導キ出ス如クシタ。畫イタ線ハ如何ニ細クトモ之ヲ顯微鏡デ見レバ或幅ヲ有スル。

之レト同樣ナ考デ物ノ影ノ端モ線トイフコトガ出來ル。

實際上デハ尖端ノ尖ツタモノデ畫イテ線ノ代用トスル。

參考ノタメニ線ニ關スル二三ノ定義ヲ揭グレバ

ユークリッド
Euclid—A line is $\begin{cases}\text{breathless length}\\ \text{that which has length without breadth or thickness.}\end{cases}$

線ハ長サアレドモ幅モ厚サモナキモノナリ。

プロクルス
proclus—A magnitude in one dimension.

一ツノ擴ガリヲ有スル量

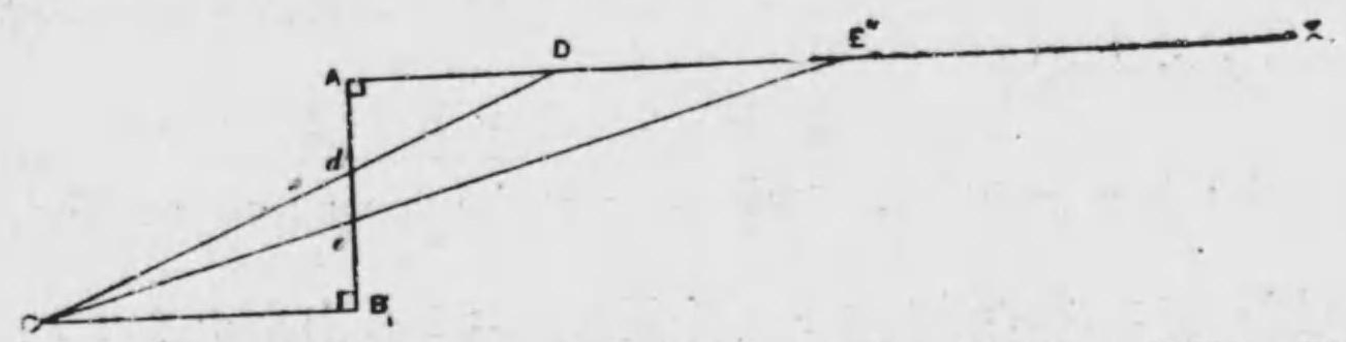
アリストートル
Aristotle—A magnitude divisible in one way only.

只一ツノ方法デ分割シ得ル量

等ガアルガ本書デハ「ユークリッド」ノ如ク定義シタ。

問二　線ト線ト出會フトコロ及線ノ端ハ點ナルコトヲ知ラシメル。

此ノ様ニ考ヘルト線ヲ形成スルモノハ點デアルガ如ク考ヘラレルガ **點ハ如何程集ツテモ線トハナラナイ。** 今參考ノタメニソノ理ヲ述ベルト線



分ABニ直角ニ直線BCト無限ノ直線AXトヲ引クAX上ノ任意ノ點D, E等トCト結ンダ直線トABトノ交點ヲd,eトスレバAX上ノ任意ノ點ニ應ズル點ガAB上ニ在ルコトニナル。モシ點ガ線ノ一部分デアルナラバAB上ノ點ノ數ニハ限ガアル筈デアル。然ルニAXハ無限ニ長イカラ無限ノ點ガアツテ而モ之ニ對應スル點ガAB上ニアル。

モシ點ガ線ノ一部分デアルナラバ無限ニ點ヲ集メテABトナルトイフヤウナコトハナイ筈デアル。

點ハ位置アルガ故ニ其ノ位置ヲ變ズル事ガ出來ル此點ノ變位即チ點ノ運動セル跡ガ線デアル。

線 { 直　線　Straight line.
　　 曲　線　Curved line.

直線ノ定義 ニモ古來ヨリ種々アル。

Euclid (ユークリッド)—A straight line is that which lies evenly with respect to the points on itself.

直線トハソノ上ニ點ガ一様ニ存スルモノデアル。

Archimedes (アルアメデス)—Of all the lines which have the same extremities the straight line is the least.

A straight line is the shortest distance between two points.

直線ハ二點間ノ最短距離ナリ。

Proclus (プロクルス)—A straight line is a line that is stretched to its utmost.

直線トハ極度ニ張レル線デアル。

Heron (ヘロン)—A line such that any part, placed with its ends on any other part, must lie wholly in the line, is called a straight line.

ソノ線上ノ或部分ヲ取リソノ兩端ヲソノ線上ニ置ケバ全ク重リ合フ如キ線ヲ直線トイフ。

等ガアルガ「一様ニ横ハル」トイフ意味モ解シ悪イ，距離ヲ線トイフモ適當デナイ。又「極度ニ張ル」トイフノハ物理的ノ性質デアツテ幾何學的ノ性質トイヘナイ。ソレ故最後ノ定義ガ完全デハアルガ生徒ニハ解シ悪イ。ソレ故コヽニハ定義ヲ揭ゲズニ唯直線狀ヲナスモノノ例ヲ示シテ直線ヲ想像セシメルコトトスル。

問三　直線狀ヲナスモノニハ

強ク張ツタ糸，重錘ヲ吊シタ糸，細孔ヨリ漏レル光線，

紙ノ折リ目　等

問四　AB, CD ハ一見曲線ノ如クデアルガ測ツテ見ルト直線デアル。

AB 又ハ CD ノ間ニ他ノ直線ヲ引イテモ皆是等ト重ル。

ソレヨリ考ヘシメ

二點ヲ通ル直線ハ唯一ツアリ…………(1)

ヲ考ヘシメルノデアル。此ノ公理ハ「ユークリッド」デイフ

二直線ハ場所ヲ圍ムコト能ハズ

二直線ハ共通部分ヲ有スルコト能ハズ

ト同様デアル。

眞直ナ棒ヲ釘ニ架ケルニ二本ノ釘ナラバ容易デアルガ三本ノ釘ナラバ三本ガ一直線上ニ在ルトキノ外ハ三本ニ觸レルヤウニ架ケルコトガ出來ナイノハ此ノ公理ノ一例トモ見ラレル。

直線 ｛無限直線（直線） Straight line.
　　 ｛有限直線（線分） Segment.

次ノ二ツノ定義ハ本書ニハアゲテナイ。

折線 Broken line トハ連續セル線分ニテナル線ヲイフ。

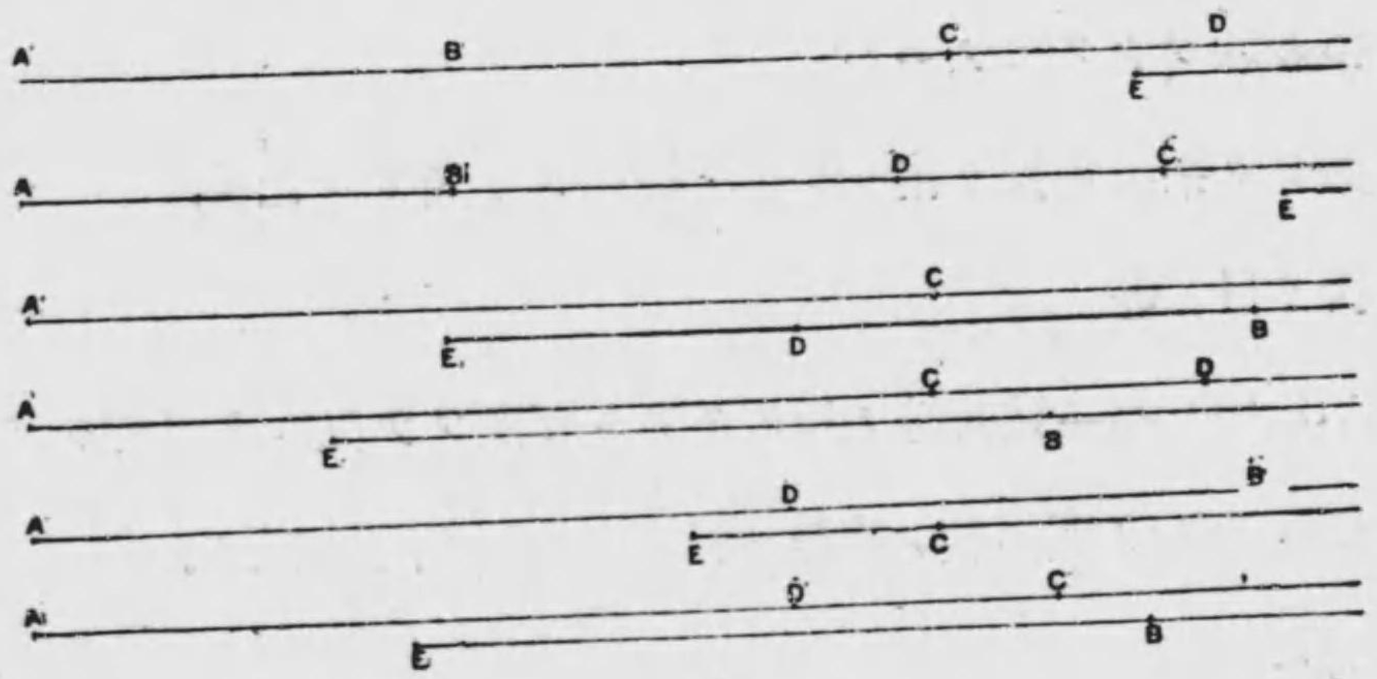
半直線 トハ一點ヨリ一方向ニノミ無限ニ延ビタル直線ヲイフ。

問五 錯覺ニヨル眼ノ不正確ヲ覺ラシメ實驗ノ必要ヲ知ラシム。

問六 錯覺ニヨル眼ノ不正確ヲ知ラシメ實測ノ必要ヲ知ラシム。

a ト b トハ等シクシテアル。

問七 距離ノ觀念ヲ與ヘ物指及「コンパス」ノ使用ニ慣レシム。且 A, B, C, D, E ノ順序ノ選擇ニ秩序正シイ方法ヲトル必要ヲ知ラシム。



最モ近イ途 ABDCE, 最モ遠イ途 ACDBE。

問八 紙ノ折リ目ハ二平面ノ交リニ當ツテ居ルカラ直線デアルベキデアルガソノ理由ヲ生徒ニ知ラシメルコトハ難イ。

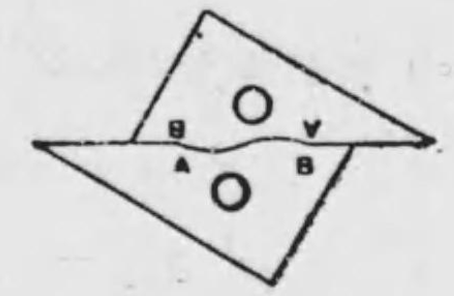
問九 折紙ニヨルナラバ線分ヲ二等分スルコトモ三等分スルコトモ n 等分スルコトモ出來ル。全ク重ネレバ相等シトイフ理ニヨルノデアル。

線分ノ二等分點ハ唯一ツナル事ヲ知ラシメ，中點ノ定義ニ入ルノデアル。

中點 Uid-point.

問十 紙ヲ折ツテソノ折目ヲ定規ノ線ニ重ネテ見ルコト。

定規ノ線ニ沿ウテ線ヲ書キ次ニソレト反對ノ側カラ線ヲソノ線ニ重ネテ見テ全ク重ナルカ否カヲ驗シテ見ルコト。



圖ノ如クナレバ唯一回全ク重ナツタダケデハ直線トイヒガタイ。

定規ヲ用ヒテ直線ヲ引クノハ定規ノ線ガ直線デアルトイフ假定ノ下デ書クノデアル。線ガ曲ツテ居レバ曲線ガ出來ルノデアル。ツマリ定規ヲ寫スノデアル。創造デナクテ模寫デアル。理論上直線ヲ創造スル器具ハ「ポーシエリーエ」ノ聯節機デアル。 （器具説明參照）

問題

問題ノ取扱ニ就テ

本文中ニ於ケル **問一,問二**…………等ハ既ニ前三節デ知ラレルヤウニ新授事項ノ豫備トシテ生徒ニ問フモノデアル。**問題**トハ既授事項ノ復習及ビ練習ノタメニ課スルモノデアル。問題ハスベテ二行式ニシテアル。左行ハ教室ニ於ケル練習題デ右行(　)ヲ附ケタモノハ教室内ノ補充問題デアリ教室外ノ練習題及家庭ノ宿題デアル。左右一々對應シテアツテ右行ノモノハ左行ノモノヲ少シク變化シタモノ或ハ同程度ノモノデアルカラ左行ヲヨク理解シ徹底セルモノハ右行ヲ解シ得ナイコトノナイヤウニシテアル。左行ノ進行シタ問題ニ對スル右行ノモノガ宿題トナルノデアルカラ

1 宿題ノ過重ニ陷ル弊ヲ防ギ

2 常ニ新シイ問題デ練習サセテ興味アラシメルコトガ出來ル。

3 又優等生ノ教室ニ於ケル補題トナサシメルコトガ出來ル。

ソレ故ソノ取扱ニ於テモソノ主旨ニ適フヤウニ注意シタナラバ敎授ノ効果モ多イコトト思フ。左右ヲ同時ニ進行スルトカ左右ノ問題ヲ同時ニ澤山宿題トシテ提出スルヤウナヤリ方ハ却テ敎授ノ能率ヲ削グモノデアル。

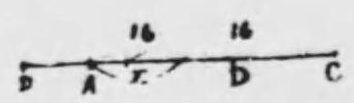
1 物指ニヨル測定ノ練習及ビ線分ノ書キ方符號ノ付ケ方等ヲ練習スルタメデアル。測定ニハ誤差ノアルコトヲ知ラシム。

2 初メ二本ノ棒ヲ重ネテ中點ト思フ所ニ印ヲシ，次ニ兩者ノ方向ヲ反對ニシテ再ビ重ネ印ガ一致スレバ中點，一致セザレバ中點デハナイ。ソノ二點ノ中點ニ印ヲ付ケ又前ノヤウニスレバ次第ニ中點ニ近イ點ガ求メラレル。

(1)

$$x+5+12=16\times 2+8$$

$$AB=23cm$$



$$x+5+12=16\times 2-8$$

$$AB=7cm$$

(2) 線分ヲ二ツニ分ツ點ト中點トノ距離ハ二部分ノ差ノ半分ニ等シキコトヲ實驗的ニ又式ノ上ヨリ究メサセンタメニ課スルノデ點ノ位置ニヨツテPA,PBノ何レガ大トモ分ラヌカラ差號ヲ用ヒテアル。

4. 平面 Plane.

面 トハ立體ト空間トノ境界ナリ。トカ

面トハ長サト幅トヲ有シ厚サヲ有セザルモノナリ。

ナド定義シタモノモアルガ是等ハ餘リ必要デモナイシ又後ノ方ノハ却テ生徒ヲ迷ハセルカラ，面トハ生徒ノ普通ニ考ヘル表面トイフ樣ナ意味デ濟シ，特ニ定義ハ與ヘナイコトニシタ。

平面 ノ定義ニモ種々アル。

Euclid—A plane surface is a surface which lies evenly with the straight lines on itself.

平面トハ直線ト面トガ面上ニ一樣ニ重ナル面ヲイフ。直線ノ定義ト同樣ニ evenly ガ不適當ナ語デアル。

Proclus—The surface which is stretched to the utmost.

極度ニ張リタル面ヲ平面トイフ。

コレハ物理的ノ意味ガアツテヨクナイ。

Heron—A surface all parts of which have the property of fitting on each other.

ソノ上ノ何レノ部分ヲトツテ他ニ重ヌルモ全ク重ナリ合フ面ヲ平面トイフ。

コレハ生徒ニ解シ難イ。

Heron ハ後ニハソノ上ノ二點ヲ通ル直線ガ如何ナル部分モ全ク重ナル面ヲ平面トイフト定義シタ。近頃ノ定義ハ之レト同一デ

Robert Simson—A surface such that a straight line joining any two points lies wholly in the surfare is called a plane.

ソノ面上ノ二點ヲ結付クル直線ガ全クソノ面上ニアル面ヲ平面トイフ。

コレハ近世ノ定義デアル。

直線ノ畫キ方ト平面ト比較シテ觀察セシメテ平面ノ定義ヲ導キ且大工ガ物指ニヨツテ平面ナルカ否カヲ驗ス方法ト平面ノ定義ト一致スル所以ヲ考ヘシメテ平面ノ定義ヲ敎ヘルノデアル。

問一 圓錐面ヤ圓壔面ニハ幾多ノ直線(母線)ヲソノ面ニ密着セシムルコトガ出來ルガ平面トハイヘナイ。球面上ニハ絶對ニ直線ヲ畫クコトガ出來ナイ。

問二 靜カナ水ノ面ヤ寫リノヨイ鏡等ハ平面ノ例デアル。

平面ハ四方ヘ窮リ無ク擴ガルモノデアルコトハ無限直線ガ双方ニ限ナク延ビテ居ルト同樣デアル。

問　題

3　平面ト平面トノ交リハ直線，各平面ノ端ハ直線直線ノ端ハ點デアル等ノ觀念ヲ實物ニヨツテ與ヘルタメデアル。

(3)　大工ガ鉋デ板ヲ削ルコトヨリ直線ガ一方向ニ動ケバ平面トナルコトヲ考ヘシメ且平面ノ定義ヲ復習セシム。

5. 定理及公理

(A), (B), (C), (D), (E) 及 (1), (2) デ定義ヤ公理ノ實例ヲ知ツタノデアルカラコヽニ是等ヲ纏メテ定義ノ何タルカヲ説明スルコトニシタ。

幾何學ノ價値ハ事實ノ知識ソノモノヨリモ演繹的ノ體系ヲ知リ事實ノ證明ヲスルコトニアルノデアル。ソシテ演繹ノ根源ニ溯ツタナラバソコニ證明ノ基礎トナルモノガアルノデアル。ソレガ卽チ定義ヤ公理デアル。

定義ノ必要條件

1　定義ニハソノ定義シタ語句(物)ガ如何ナル屬性(genus)ヲ持ツテ居ルカトイフコトガ表ハレテ居ナクテハナラナイ。

ソレニハ

物ソレ自身ヨリ簡單ナ語ヲ用ヒナクテハナラナイ。

人ニヨク知ラレタ語ヲ用ヒナクテハナラナイ。

ソノ屬スル最モ近イ性質ヲ表スモノデナクテハナラナイ。從テ曲線トハ何處ノ部分モ直線ナラザル線ナリナドイフヤウニ同格ナ語ヤ對比的ナ語ヲ用ヒテハナラナイ。

2　定義ニハ語句(物)ノ特異性(differentia) ガヨク表ハレテ居ナクテハナラナイ。卽チ他トノ區別ガハツキリスルヤウニシナクテハナラナイ。

ソレニハ

不用ナ語ガアツテハナラナイ。又

不足ナ語ガアツテモナラナイ。

定義ノ性質

或語句ヲ定義スルニハソノ語句ノ屬性ト特異性トヲ表スヤウニ而モ既ニ知ラレタ語句ヲ用ヒテソノ語句ノ意義ヲ明ニスルノデアル。云ヒ換ヘレバ或語

句ヲヨリ知ラレタ語句ニ置換ヘタコトニナルノデアル。ソレ故ソノ知ラレタ語句モ既ニ定義サレタ語句デナクテハナラナイ。カク根本的ニ前ヘ前ヘト溯ツテ行ツタナラバ最早ヤ**根元ノ語**ニ到達スルワケデアル。ソノ根源ノ語句ハ他ノ語ニテハ説クコトハ出來ナイモノデアル。例ヘバ

面トハ立體ト空間トノ境界ナリ。トイヘバ境界トハ何カ立體トハ何カトイフコトニナリ。

立體トハ空間ノ一部分ナリトイヘバ空間トハ何カトイフコトニナル。空間トカ，境界トカイフ語ハ最早說クコトノ出來ナイ根元ノ語デアル。

位置，方向，直線 平面 等ハ實ハ根元ノ語デアル。ソレ故平面ニシテモ直線ニシテモ定義ヲ與ヘルヨリモ觀念ヲ明カナラシメタガヨイ。

又定義ハ證明ノ基礎ヲナスタメニ置クモノデアルカラ中ニハソノ定義スルモノガ必ズシモ存在スルコトヲ意味シナイ。從ツテソノ定義ノ如クニ直觀スルコトガ困難ナモノガアル。例ヘバ

平行線トハ同一平面上ニ在リテ双方ニ如何程延長ストモ決シテ交ルコトナキ二直線ノコトナリ。トイフガ

錯角ノ相等シキ二直線ハ平行ナリ。ノ證明ヲシテソノ存在ヲ知ルコトガ出來ル如クデアル。又

切線トハ圓ト唯一點ニ於テ出會フ直線ナリ。トイフノモ

半徑ノ端ニ垂直ナル直線ハ切線ナリ。ヲ知ツテ初メテ畫キ得ル如クデアル。

定義ヲ教フルニハ只形式的ノ語句ヲ器械的ニ暗記セシメルノデハ何ノ價値モナイ。ソノ眞ノ意義ヲ知ラシメナクテハナラナイ。又定義ヲ知ラシメルニモ成ルベク説明デナク出來得ル限リ歸納的ナラシメルガヨイ。

公理

公理ハ定義ト同様ニ幾何學的推理ノ基礎ヲナスモノデアルコトハ既ニ述ベタトコロデアル。幾何學ノ眞ノ興味ハ此ノ僅ノ思理カラ無限ノ結論ヲ出スコトガ出來ル處ニ在ルノデアル。

公理ノ定義トシテハ普通ハ教科書ニハ經驗ニヨリテ眞ナリト認ムルトコロノモノトアルガ本書デハ之ヲ避ケテ居ル。經驗ヨリ自明ノ眞理トイフモ一人ニ眞ナルモノ必ズシモ他ニハ眞デハナイ。ソレデハ學問ノ基礎トシテトルトコロノモノトシテハ不確實タルヲ免レナイノデアル。ソレ故本書ノ如ク

<u>何等說明ヲ加フルコトナク幾何學ノ推理ノ基礎トシテ眞ナリト認ムル所ノ</u>

<u>**事項**</u>

トシタノデアル。

即チ公理ハ吾人ガ生レ乍ラニシテ眞ナリト認ムル所ノコト所謂先驗的綜合判斷デモナク又經驗ヨリ眞ナリト認容スルトコロノモノデモナク學問ノ基礎トシテ打チ建テタル一種ノ假定デアル。

公理ニハ

$$公理\begin{cases}\text{普通公理} & \text{(Axiom, axioma)}\\ \text{幾何學公理} & \text{(Postulate, aitema)}\end{cases}$$

トアルガ本書デハ此二ツノ名ハ教ヘナイコトニシテ居ル。

普通公理ハスベテノ種類ノ量ニ關シテ述ベタルモノデ既ニ算術及ビ代數ニ於テ知ラズ知ラズノ中ニ認容シ用ヒテ來タトコロノモノデソノ數モ定マツテ居ナイ Euclid ノ普通公理ハ 8 ツデアツテ本書ノ第 5 ヲ除ケバ他ハ同様デアル。本書デハ繁雜ヲ避ケルタメニ文字ヲ用ヒ式ヲ以テ表ハシテアルガ成ル

タケ之ヲ言葉ヲ以テ表ハサシタイモノデアル。例ヘバ

1　同ジモノニ相等シキモノハ互ニ相等シ。

2　同ジモノニ相等シキモノヲ加フレバソノ結果ハ相等シ。

相等シキモノニ相等シキモノヲ加フレバソノ結果ハ相等シ。

3　相等シキモノ任意ノ等倍量ハ相等シ。

等トイフノデアル。

幾何學公理　ハトクニ幾何學的ノ量ニ關シテ述ベタモノデ幾何學ノ基礎トシテハ是非共必要ナモノデアル。「ユークリツド」デハ

第八公理　全ク合スル所ノ量ハ相等シ。

第十公理　二直線ハ空間ヲ圍ムコトヲ得ズ。

第十一公理　スベテ直角ハ相等シ。

第十二公理　一直線ガ二直線ト交リテソノナス一方ノ側ノ内角ノ和ガ二直角ヨリ小ナルトキハソノ二直線ヲ限リナク延長スルトキハ二直線ハ二直角ヨリ小ナル方ノ側ニ於テ交ル。

此ノ第十公理ガ本書ノ(1)ニ相當スルモノデアル。第八，第十一ハ定義ノ中ニ取リ扱ヒ別ニ公理トシテ揭ゲテナイ。

第十二公理ハ幾何學ノ歴史上又幾何學其ノモノカラモ有名ナ公理デアッテ本書デハ平行線ノ公理ニ相當スルモノデアル。第十二公理ハ一見定理ノ如キ形ヲシテ居ルモノデアルカラ二千年間此ノ公理ヲ證明セント多クノ學者ガ努力シテ來タノデアル。英國ノ John Wallis（ジョン ワリス） (1616—1703) 佛國ノ Legendre（ルジヤンドル） (1752—1833) 伊太利ノ Beltrami（ベルトラミー） (1835—1900) ナドハソレデアル。然ルニ何レモ證明ヲスルコトハ出來ナクテ結局他ノ公理ヲ見出シタノニ過ギナイノデアル。中ニモ露國ノ Nicholaus（ニコラス） Lobatchewsky（ロバチウースキー） (1793—1856) Johann（ヨハン） Bolyai（ボリアイ）

(1802—1860)，伊太利ノ Riemann（リーマン） (1826—1866) ノ如キハ他ノ公理ニヨツテ一ツノ幾何學ヲ作ツタ。コレガ所謂非「ユークリツド」幾何學トイフノデアル。コレニツイテハ第二篇第三章デ更ニ述ベル。

問　題

4 (1)　場合ヲ落チナク考ヘ精密ナ考ヲ養フニヨイ問題デアル。

何レノ三點モ一直線上ニナイトキ。一點カラ他ノ點ニ引キ得ル一直線ノ數ハ(5−1)本デ各點カラ皆引イタト考ヘルト總數ガ(5−1)×5 本デアルガ是等ハ何レモ一本ヲ二度數ヘテ居ルカラ2デ割ラナクテハナラナイ。

$\frac{(5-1)\times5}{2}=10$　答10本

(2)　三點ガ一直線上ニアルトキ。

三點相互ニ引キ得ル數ハ $\frac{2\times3}{2}$ 本デアルガ重ツテ一直線トナル故

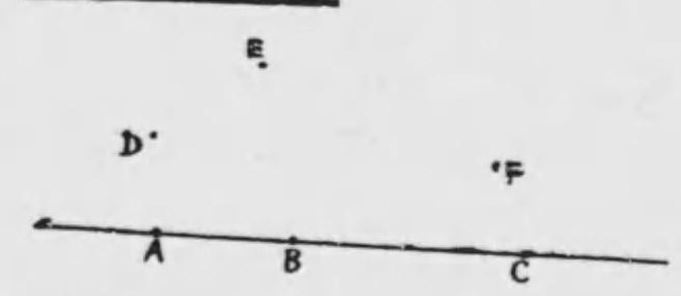
$\frac{4\times5}{2}-\frac{2\times3}{2}+1=8$　答 8本

(3)　四點ガ一直線上ニアルトキ。

$\frac{4\times5}{2}-\frac{3\times4}{2}+1=5$　答 5本

(4)　スベテガ一直線上ニ在ルトキ　答 1本

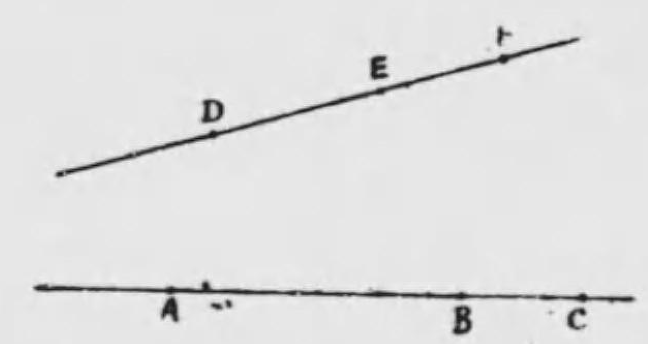
(4) (1)　D.E.F三點ガ同一直線上ニナク又D,E,Fノ何レカ二點トA,B,Cノ何レカガ同一直線ニ在ラザルトキ



六ツノ點ガスベテソノ何レノ三ツヲトツテモ三點ガ一直線上ニナイトキハ全部デ $\frac{5\times6}{2}$ 本アルベキデアルガ三點 A,B,C ガ一直線上ニ在ツテソレ等相互間ニ引イタ線ガ一本トナル故

$\frac{5\times6}{2}-\frac{2\times3}{2}+1=13$　答 13本

(2)　D,E,F ガ A,B,C ノ何レヲモ通ラヌ一直線上ニ在ルトキ

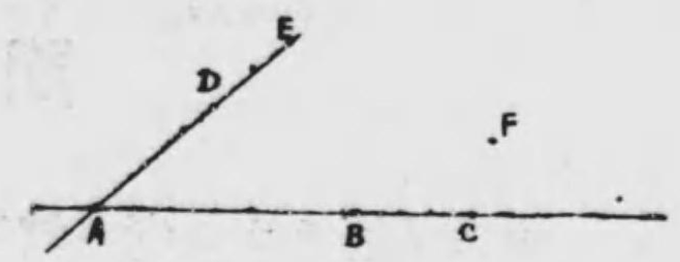


$\frac{5\times6}{2}-\frac{2\times3}{2}\times2+2=11$，答11本

5　定規ニヨツテ直線ノ引キ方,「コンパス」ニヨツテ線分ノ移シ方ヲ練習スルタメニ課スル問題デアル。又代數式ト幾何學的量トノ關係ヲモ知ラシメルタメデアル。

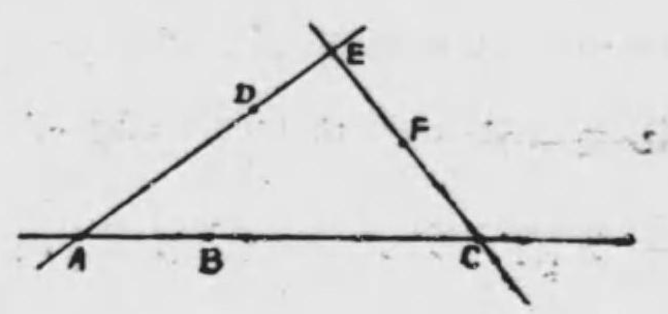
6　**問題5**　ニ同ジ。

(3)　D,E,F ノ二點ヲ通ル一直線ガA,B,Cノ何レカ一ツヲ通ルトキ。



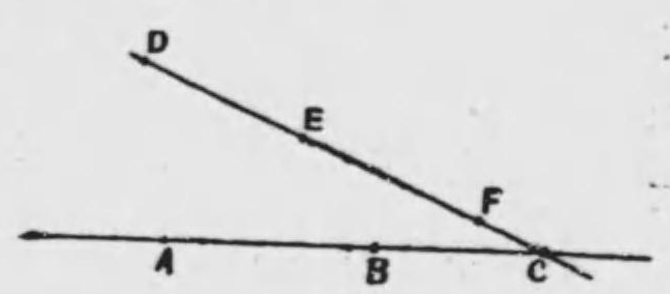
$\frac{5\times6}{2}-\frac{2\times3}{2}\times2+2=11$,答11本

(4)　D,E,F ノ何レカ二點ヲ通ル二直線ガA,B,Cノ一ツ宛ヲ通ルトキ。



$15-3-3-3+3=9$　答　9本

(5)　D,E,F ガ一直線上ニアリテソノ直線ガA,B,Cノ何レカ一ツヲ通ルトキ。



$\frac{5\times6}{2}-\frac{3\times4}{2}-\frac{2\times3}{2}+2=8$

答　8本

(5) (6) ハ問題 **5 6** ニ同ジ。

第二章　角

6 角　Angle.

角ノ要素トシテハ形ト大サトガアル。

角 { 形　一點ヨリ引ケル二ツノ半直線
　　大サ　廻轉ノ量(二邊ノ長サニ關セズ)

角ノ定義「一點ヨリ引ケル二直線」トカ「二直線ノナス方向ノ差」ナドイフノガアルガ何レモ適當デナイ。角ハ二邊ノ大小ニ關係ガナクソノ二邊ノ開キ即チ一邊ガ他ノ邊ト重リタル位置ヨリソノ位置ニ來ルマデノ廻轉ノ量ニ最モ關係ガ深イ。ソレ故角ノ觀念ヲ與ヘルニハ廻轉ノ量トイフコトヲ明ニ知ラセナクテハナラナイ。

∠BACヲ$\widehat{BAC}$ト書ク人モアルガ本書デハトラナイ。

問一　角ノ呼ビ方ノ練習ヲスルト共ニ各角ノ邊ノ長サハ異ツテモ同一ノ角デアルコト即チ角ハ邊ノ長サニ無關係ノコトヲ知ラシメルタメデアル。

角ヲ說明スル器具 { 1 テープ(「ピン」デトメテ)
2 コンパス
3 時計ノ針
4 本ノ綠ノ開キ } 等ガアル。

問二　角ノ讀ミ方,書キ方ノ練習ヲナスタメニ課スルノデアル。

角ノ加減ヲ含ム式ヲ書ク練習ヲセシメルガヨイ。

角ノ合同　他ノ圖形ト同樣頂點ト二邊トガ全ク重ル二ツノ角ハ合同デアルガコヽデハ合同ノ語モ意味モ敎ヘナイ。

問三　分度器ヲ使用スルノデハナク薄紙ニ一ツノ角ヲ寫シ之ヲ他ノ角ニ重ネテ見ルノデアル。

7 共軛角 Conjugate angle 接角 Adjacent angle

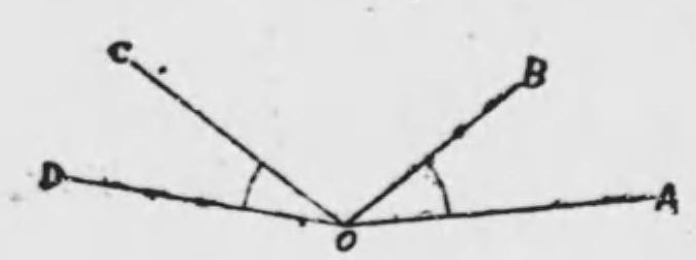
共軛角ハ角ガ邊ノ廻轉ニヨツテ生ズルトイフコトカラ起ツタ角デ只形ノ上カラバカリデハ二ツノ角ハ考ヘラレナイノデアル。ソレ故適當ナ器具生徒ノ所持スル「コンパス」等ヲ以テ角ノ成立ヲ知ラシメルガヨイ。

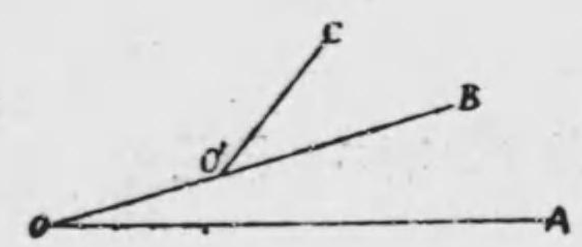
「曾田式コンパス」ハソノ兩脚ノ開キニヨツテ直チニ角ヲ見角ノ大サヲ知ルコトガ出來ル。

共軛角 { 優角 major angle 凹角(reflex angle)トモイフ。
劣角 minor angle

問一 接角ノ定義ノ豫備トシテ頂點 O ト一邊 OB トヲ共有スルコトヲ考ヘシメルタメデアル。

頂點ノミヲ共有スル二角　　一邊ノミヲ共有スル二角





問二 接角ノ畫キ方ノ練習ノタメデアル。邊 OP ガ∠AOB, ∠BOCノ何レカ內ニ落ル。

問三 折紙ニヨツテ角ヲ二等分スルコトヲ教ヘ全ク重リ合フ角ハ合同ナコトヲ知ラシメルノデアル。

問四 $\angle POQ=\frac{\angle\alpha}{2}+\frac{\angle\beta}{2}=\frac{\angle\alpha+\angle\beta}{2}$

8 直角 Right angle 鋭角 Acute angle 鈍角 Obtuse angle

「テープ」AOBヲ塗板上ニ「ピン」デ止メ他ノ「テープ」ノ一端ヲAB上ノ一點Oニ於テABニ「ピン」デ止メOCヲOノ廻リヲ廻轉スレバ∠AOCト∠BOCトノ變化ノ具合ガワカル。

問一 ∠AOCガ大キクナレバソレダケ∠BOCガ小トナリ，∠AOCハ0ヨリ∠AOBトナリ∠COBハ∠AOBカラ0ニナルノダカラ兩者ノ等シクナルコトガアルベキデアル。

R.∟ ハ Right angle ノ略號デアル。∠R ハ角Rト誤ル場合ガアルノデR.∟ト書クコトニシタ。

平角 ノ定義ハ教ヘナイ從ツテ名モ教ヘナイコトニシタ。必要ナ場合ニハ二邊ガ一直線ヲナス角トイフコトトスル。

問二 ∠AOC, ∠PQR ハモトヨリ2直角，(∠DEF+∠GHI+∠JKL) ハ薄紙ニ寫シテ三ツノ角ヲ加ヘテ行ツテ二邊ガ一直線トナルカ否カヲ見ルガヨイ。

「二邊ガ頂點ノ兩側ニ一直線トナル角ハ2R.∟ナリ」トソノ逆トハ定理デアルガコノ如キ簡單ナ定理ノ證明ガ却テ解リ惡イカラコヽデハ公理的ニ取リ扱フコトニシタ。

垂線 Perpendicular. (Perpendicular line)

問三 ニヨツテ一點ノ周リノ角ハ 4R.∟ ナルコトヲ知ラシメル。

問四 直線上又ハ直線外ノ點ヲ通ツテ之ニ垂直ナ直線ヲ引クコトノ最モ正確ナ方法ハ折紙デアル。2R.∟ ヲ全ク重ル二ツノ角ニ分テバ直角トナル。ノデアル。

斜線 Oblique line.

問五　ニツノ直角定規ヲ並ベテモ直角ノ正否ヲ檢スルコトガ出來ルガ何レガ正シイカハ圖ノ如クシテ見ル方ガヨクワカル。

問六　$\frac{\angle BCA'}{2}=1R.\llcorner-\angle ACB$

9　角ノ單位，餘角 Complementary angles 補角 Supplementary angles

角ノ單位　角ノ六十分法*ハモト「バビロニア」人ニ始マリ希臘ヲ經テ歐洲ニ傳ハツタモノデアル。「バビロニア」人ハ正三角形ノ一角ヲ角ノ單位トシ，ソノ$\frac{1}{60}$ヲ分トシ，更ニ分ノ$\frac{1}{60}$ヲ秒トシタノデアル。モトコレハ實用的見地カラ起キタモノデ圓周ヲ360等分シソレト一年ノ日數ト合セルヤウニシタモノデアル。近頃ハ最モ單純ナ圖形カラ進ンデ居ルノデ直角ヲ角ノ單位トシ，之カラ度分秒ヲ割出ス如クスルノデアル。

角ノ測定　天文ヤ航海トカ實地測量トカニハ精密ナ角ヲ要スルノデ經緯儀トカ六分儀トカヲ用フルノデアル。經緯儀デハ直立角ト水平角トヲ測リ六分儀デハ角ノ平面ガ如何ナル方向ニ傾イタモノ即チ距角ヲ測ルノニ用ヒルノデアル。何レモ相當高價ナモノデ備付ケルコトモ容易デナイト思ツテコヽニ精密ナ圖ヲ示シテ參考トシタノデアル。經緯儀ノヤウナ精密ナ器械デ測ツテモ一度ノ$\frac{1}{10}$ヲ測ルノハ中々困難デアル。況ヤ一秒ヲ測ルコトハ到底不可能デアル。分度器ナドデ角ヲ測ル場合ナドニハ鉛筆ノ太サダケデモ一度位異ルトキガアル。ソレ故本書デ分度器ヲ使用スル場合ニハ度ノ小數ヲ以テ讀ムコトニスル。尋常小學校等ニ於テハ角ノ分秒ノ單位ハ除イテシマツタ方ガヨイト思フ。

餘角，補角，共軛角ハソレゾレ二角ノ相對關係カラツケタ名デアツテ直角，二直角，四直角ヲ一纏メトシタトキニ考ヘタ角デアル。

*六十分法 Sexagesimal system.

羅針盤　方位ヲ知ルニハ羅針盤ガナクテハナラナイ。餘リ小區分ノ方位ヲ知ル必要ハナイガ羅針盤面カラ見レバ容易ニワカルコトデアルカラ參考ノタメニノセルコトニシタ。

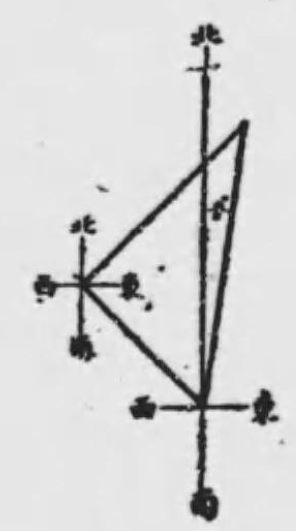
問　　題

7　23°.5ハ地軸ノ傾キノ度デアル。

8　或角ヲ$x°$トスレバソノ餘角ハ何度カ。題意ヲ式ニ表セ。

$x°=2(90°-x°)$　　答　60°

9　北ヨリ東8°ノ方向10浬



10　Oノ周リノ角ハスベテデ何度カ。

六ツノ角ガ皆等シケレバ一角ハ何度カ。　　答　60度

OCトOEトガ一直線トナルタメニハ∠EOCハ何度ナルベキカ。

∠AOBハ何度カ。

∠AOB−∠AOC＋∠BOEハ何度カ。

OC, OE ハ如何ニナルカ。

OD, OF ハ如何。

(7)　$150°\times\frac{5}{9}=83°\frac{1}{3}$ 即鋭角。

(8)　小ナル角ヲ$x°$トスレバ大ナル角ハ何度カ。

二角ガ補角ヲナス式ヲ作レ。

$x°+(x°+15°)=180°$　答　82°.5　97°.5

(9)　A東　B北東　C北北東　D西微北　E北北西　F南西　G,H南南東

(10)　∠AOBヲ$x°$トスレバ∠BOC, ∠COD, ∠DOE, ∠EOA ノ大サハ夫々∠BOC, ∠COD, ∠DOE. ∠EOA ノ夫々何倍ナルカ。

$x°+2x°+3x°+4x°+5x°$ ハ何度カ。

24°, 48°, 72°, 96°, 120°

11 $\angle e=145°$

12 $\angle AOB+\angle BOC+\angle COD$ $+\angle AOD$ ハ何度カ。

$\angle BOC+\angle AOD$ ハ何度カ。

$\angle BOC$ ノ半分ト $\angle BOA$ ト尚 $\angle AOD$ ノ中ノ何程トデ 2R.∟ トナルカ。

(11) $\angle AOB$ ハ何度カ。

$\angle AOC$ ガ 40° ナラバ $\angle COB$ ハ何度カ。

$\angle BOD=40°$, $\angle AOD=140°$

(12) $\angle AOD=\angle AOB+\angle COD$ $-\angle BOC=$ 2R.∟ $-\angle BOC$

$\angle AOD$ ト $\angle BOC$ トノ和ハ何度カ。

$\frac{\angle BOC}{2}$ ト $\angle COA$ ト優角 AOD ノ中ノ何程トデ 2R.∟ トナルカ。

第三章　圓

10　圓ノ基本性質

第三篇圓ニ到ル前ニ圓ニ關スル名稱及ビ最モ基本トナルベキ性質ヲ知ラシメテソノ應用ヲナサシメルコトニシテ居ル。第二篇第二章ニ於テ基本的ノ作圖題ヲ課スル場合ニ圓ヲ用ヒナクテハナラナイ。ソレ故ソノ豫備トシテモ前以テ圓ノ基本性質ヲ敎ヘテ置ク必要ガアルト思フ。

問一　圓ノ定義ヲ知ラシムルタメニ圓ヲ分解的ニ考ヘシメ

圓 {
平面圖形デアルコト
曲線形デアルコト
一定點ガアルコト
ソノ點ヨリ一定距離ニアル點ノ動イタ跡ナルコト
}

等ヲ知ラシメタイノデアル。コノ定義ハ軌跡トモ關係ガ深イノデ充分徹底セシメタイ。

基本性質

圓ノ基本性質トシテ

1　同圓又ハ等圓ノ半徑ハ相等シ。
2　圓ノ直徑ハ半徑ノ二倍ニ等シ。
3　同圓又ハ等圓ノ直徑ハ相等シ。
4　一ツノ圓ノ中心ハ唯一ツニ限ル。
5　相重ネルコトヲ得ル圓ノ半徑ハ相等シ。又ソノ逆。
6　圓ノ直徑ハ圓ヲ二等分ス。
7　直線ハ圓ト二點ヨリ多クノ點ヲ共有スルコトヲ得ズ。
8　二ツノ圓ハ二ツヨリ多クノ點ヲ共有スルコトヲ得ズ。
9　半徑ノ相等シカラザル同心圓ハ出會フコト能ハズ。
10　圓ノ中心ヨリ一點ノ距離ハ其ノ點ガ圓周ノ内ニ在ルカ，或ハ其ノ上ニ在ルカ，或ハソノ外ニ在ルカニ從テ半徑ヨリ小ナリ，或ハ之ト等シ，或ハ之ヨリ大ナリ。又ソノ逆

等ノ定理及系ガアルガ本書デハ是等ノ性質ヲ或ハ實測ニヨリテ確メ或ハ公理的ニ取扱フコトニシ，一々之ヲ證明シナイコトニスル。此種ノコトヲ嚴正ニ取扱フコトハ徒ニ困難デアルバカリデ興味モ薄ク生徒ノ腦力ニハ不適當デアルト考ヘル。

圓	Circle	中心	Center	圓周	Circumference
半徑	Radius(radii 複)	直徑	Diameter	弦	Chord
弧	Arc {優弧 Major arc, 劣弧 Minor arc}			割線	Secant
				中心角	Central angle
半圓	Semicircle			同心圓	Concentric circles

問二　AB+AC ト BC トガ相等シト誤リ易イカラ之ヲ課スルノデアル。

問三　直徑ハ圓ヲ二ツノ部分ニ分ツノデアルカラ紙ヲ二度折ツテ直徑ヲ 2 本作レバ中心ガワカル。

問四　半圓内ノ角ハ直角デアルトイフコトヲ實驗的ニ發見セシム。

問五　相等シキ物ヨリ相等シキ物ヲ減ズレバ殘リハ相等シノ理ヲ考ヘシム。

問六　圓ハ二點ヨリ多クノ點デ出會フコトノナイコトヲ考ヘシム。

尙點ノ位置ヤ半徑ヲ變ヘテ一點ヲ共有スルトキ全ク離レテ居ルトキ全ク内ニ含マレテ居ルトキナドヲ研究セシメルガヨイ。

中心線　The line of centers.

中心距離　The distance between the centers of two circles.

問　題

13　同圓ニ於テ相等シキ中心角ニ對スル弦ハ相等シノ理ヲ實驗的ニ知ラシム。

14　同弧ノ上ニ立ツ圓周角（定義ハ教ヘナイ）ハ相等シキコトヲ實驗的ニ知ラシム。

15　定規「コンパス」ノ使用ニナレシメルタメニ課スルノデアル。
上圖ハ圓周ノ六等分點ヲ中心トシタ圓ノ組合セ。
下圖ハ正方形ノ各圓ノ中點及ビ四等分點ヲ中心トシタ半圓ノ組合セ。

(13)　同圓ニ於テ相等シキ弦ニ對スル中心角ハ相等シノ理ヲ實驗的ニ知ラシメ且**13**ト逆關係ニアルコトヲ知ラシム。

(14)　圓ノ内接四邊形ノ相對スル角ハ互ニ補角ヲナスコトヲ實驗的ニ知ラシム。

(15)　**15**ト同一目的ノタメニ課スノデアル。
上圖ハ圓周ヲ六等分シソノ分點ヲ一ツ置ニ結ビソノ弦ノ交點ヲ又一ツ置ニ結ブノデアル。
下圖ハ正方形ノ各邊ノ中點及ビ各頂點ヲ中心トシ一邊ノ $\frac{1}{4}$ ヲ半徑トスル半圓及ビ四分圓ト頂點ヲ中心トシ一邊ノ $\frac{1}{2}$ ヲ半徑トセル四分圓トヨリ成ル。

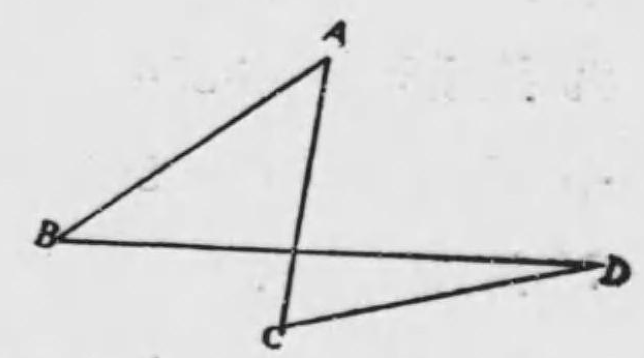
第四章　多　角　形

11　多角形　Polygon (Rectilinear figure)

多角形ノニ關スル名稱及基本性質ヲ知ラシメルタメニ課スルノデアル。

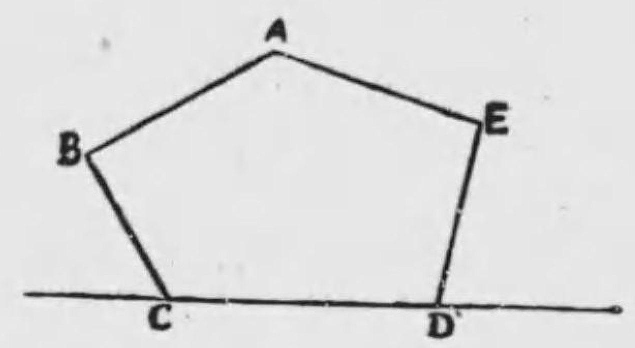
問一　生徒ノ既有知識ヲ經メテ之ヲ整理スルノデアル。

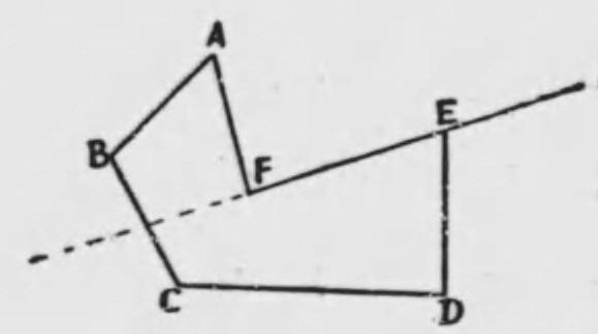
多角形 { 形 —— 高等數學
　　　　 大サ（面積）—— 初等數學



單ニ折線ニテナル圖形ナラバ圖ノ如キモノモ四邊形デアツテ之ハ高等數學デ取扱フ所ノモノデアル。

多角形 { 凸多角形　全體ノ形ガ各邊ノ一方ニノミアルモノ
　　　　 凹多角形　何レカノ邊ヲ延長スレバ圖形ガソノ兩側ニ分レルモノ





凹多角形ハ取扱ハナイ。生徒ガ特ニ興味ヲ以テ質問シタ場合ニハソレニ應ジテ説明ヲ與ヘルガヨイ。

面積　Area　角多角形ハ平面ノ一部分デアル。故ニ多角形ニハ廣サ卽チ面ガ伴ツテ居ルベキデアル。コトニ面積ニ關スルコトハ小學デ學ンダコトデアルカラ早クカラ應用セシメタイ。ソレ故本書デハコヽニ面積ノ定義ヲアゲタノデアル。

邊	Side	角	Angle	頂點	Vertex
周	Perimeter	內角	Interior angle	外角	Exterior angle
底邊	Base	高サ	Hight	正多角形	Regular Polygon
對角線	Diagonal			斜　邊	Hipotenuse
三角形	Triangle			四邊形	Quadrilateral
五邊形	Pentagon			六邊形	Hexagon
七邊形	Heptagon			八邊形	Octagon
九邊形	Nonagon			十邊形	Decagon
十一邊形	Undecagon			十二邊形	Dodecagon
N 邊形	Polygon of n sides			直角三角形	Right triangle

問二　三角形ノ內角ノ和ハ 2R.∟ ナルコトヲ實驗セシムルノデアル。分度器ヲ以テ測ラシメテ和ヲ求メルコト，三角形ヲ畫イテ之ヲ切リ拔キソノ三角ノ部ヲ切リトツテ並ベテ 2R.∟ トナルコトヲ驗スコト又90頁ノ如ク折リ曲ゲテ三角ガ一頂點ニ重ル如クシテモヨイ。

問三　種々ノ場合ニツイテ研究スルタメデアル。

3 邊形	ト 7 邊形	4 邊形	ト 4 邊形
3 〃	6 〃	4 〃	5 〃
3 〃	5 〃	5 〃	5 〃

問四　三角形ノ面積ハ底ト高サトノ積ノ $\frac{1}{2}$ デアルコトヨリ三角形ノ面積ヲ求メルノデアル。三角形ニハ三邊ガアルカラソノ面積ノ出シ方ニモ三通リアル理デアル。ソノ三通ガ一致スルナラバソノ實測モ亦正シカツタコトニナルノデアル。

問五　矩形ノ對角線ノ相等シイコトヲ實測スルタメデアル。

問六　$7-3=4$　總數　14

問七　問六ヨリ進ンデ n 邊形ノ對角線ノ總數ヲ求メシメルノデアル。一頂點ヨリ出ヅル對角線ノ數ハ　$n-3$

各頂點ヨリ皆 $(n-3)$ 出來タト考フレバ總數ハ　$n(n-3)$

一本ヲソノ兩端ノ點ヨリ出ルトシ二度數ヘタ故實際ノ數ハ　$\frac{n(n-3)}{2}$

問　　題

16　分度器ノ使用ヲ練習スル。

測定ニヨツテ內角ノ和ヲ知ツタナラバ四邊形ヲ三角形ニ分ツテ問二ヲ用ヒ二ツノ三角形ノ內角ノ和トシテ考ヘシム。

(16)　分度器ノ使用ヲ練習。

測定ニヨツテ 4R.∟ ナルコトヲ知ツタラバ，各頂點ノ內角ト外角トノ和ハ 2R.∟ ナルコトト問二トニヨリ 6R.∟ − 2R.∟ = 4R.∟ ナルコトヲ考ヘシム。

17　三角形ノ各內角ノ二等分線ハ一點ニ會スルコトヲ分度器ニヨリ又折リ紙ニヨリ實驗實測シテ發見セシム。

(17)　17 ト同樣ニシテ三角形ノ一內角ノ二等分線ト他ノ二內角ニ隣レル二ツノ外角ノ二等分線トノ一點ニ會スルコトヲ發見セシム。

折リ紙ニ就テ　Paper folding　折紙ハ既ニ角ノ二等分線ヲ作ルコト，一直線ニ垂線ヲ下ス等ノ場合ニ用ヒタ所デアルガ此問題等ニヨツテ特ニ折リ紙ノ價値ヲ認メルノデアル。直線形ニ關スル幾何學的性質ハ折リ紙ヲ使用スルコトニヨツテ簡易ニ而モ興味深ク究メラレルコトガ多イ。機會アルゴトニ利用サレンコトヲ望ム。

18　三角形ノ各頂點ヨリ對邊へ下セル垂線ハ一點ニ會スルコトヲ定規ノ使用及折紙ニヨリ發見セシム。

(18)　三角形ノ三中線ハ一點ニ會スルコトヲ實驗セシム。

19 CE⊥AB, DG⊥AB, DF⊥CE トシテ四邊形ヲ區分シテ各區分ノ面積ヲ計算セヨ。

△ADGハ	6平方糎
△BECハ	24 〃
△DFCハ	27 〃
矩形DEFGハ	54 〃
	111平方糎

(19) 五邊形ABCDEヲ分割スルヨリモA,C,D,Eヲ通ル方眼ノ線デ圍ム矩形ヲ作リソノ面積カラ五邊形ノ外部ニアル部分ノ面積ヲ除ケバヨイ。A及Cヲ通ル方眼ノ線ノ交點ヲFトシ，矩形ヲFGHIトスレバ

矩　形	272平方糎
四邊形ABCF	20 〃
△CGD	25 〃
△DHE	27 〃
△EIA	36 〃
	168平方糎

第五章　幾何學的證明

12　幾何學的證明 Geometric Proof

前四章デ幾何學的圖形ニハ如何ナルモノガアルカ，又是等ノ性質ハドウカ，幾何學ニ用フル用語ノ意義ハドウカニ就テ大體ヲ知ラシメルコトガ出來タ。而シテソノ取リ來ツタ方法ハ大體ニ於テ實驗實測デアツタノデ生徒ハ實驗實測ノ價値ヲ思フ一方ニハ

實驗實測 {
不確實ナコト
迂遠ナコト
一般的デナイコト

等ヲ知ツテ之レニ代ルベキ正確ニシテ直接的デ而モ一般的ノ理法ヲ求メルノデアル。生徒ガ此ノ傾向ニ進ンダ時ヲ待ツテ本章ニ於テ幾何學的證明ノ如何ナルモノデアルカヲ知ラシメ實驗實測トノ區別ヲ明ニシ理論幾何ノ出發點，演繹ノ基礎ヲ與ヘルノデアル。先ヅ

二點間ニ引ケル種々ノ線ノ中ニテ線分ハ最モ短シ。トイフ公理〔7頁(C)〕ヨリ出發シ

三角形ノ二邊ノ和ハ一邊ヨリ大ナリ。ニ進ミ，次ニ12頁普通公理4ニヨツテ

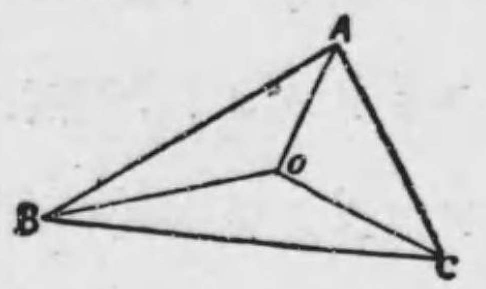
三角形ノ二邊ノ差ハ他ノ一邊ヨリ小ナリ。ヲ確メ，更ニ是等及ビ公理ノ5,4等ヲ用ヒテ

△ABC內ノ任意ノ一點ヲOトスレバAB+AC > OB+OC。ニ進ムノデアル。共ノ間ニハ少シノ實驗的ノコトモナク皆公理ヤ前ニ眞ナリト確メタトコロヲ用ヒテ進ムノデ演繹推理ノ進ミ方ヲ示シタノデアル。問題20ヨリ(22)マデハ

皆此ノ系統ニ屬スルモノデソノ進ミ方ガ一筋ニナツテ居ルノデ生徒ニモ之ヲ解クコトハ容易デアル。

問　　題

20



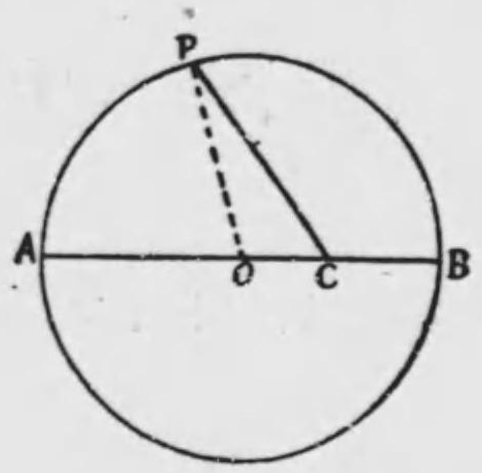
△AOBニツイテ考ヘタラバ AO+BOト ABトハ何レガ大ナルカ。

BO+COトBCトハ

CO+AOトCAトハ

2(AO+BO+CO)トAB+BC+CAトハ

21



OPヲ結ベバOPハ何ト等シイカ。ACト等シキ長サヲ他ノ線分デイヘ。

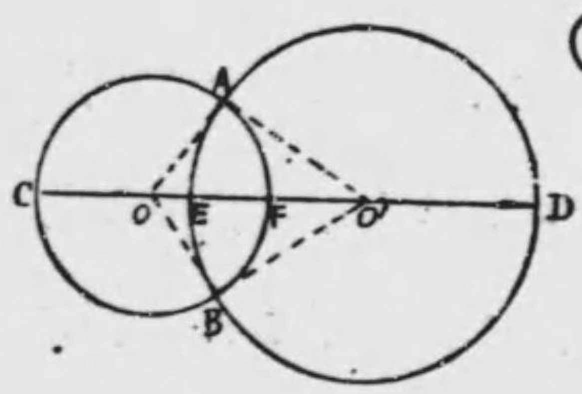
CPト CO+OP トハ何レガ大カ。

CP<CA

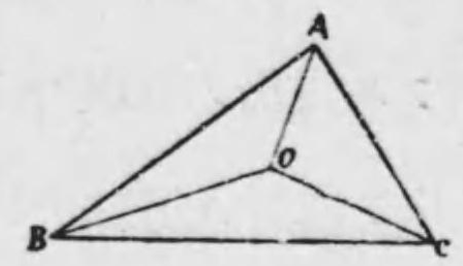
22 AO,AO′ヲ結ビテ考ヘヨ。AO,AO′ ハ何カ。

AO+AO′ト OO′ トハ

又OF+EO′ トOO′トハ



(20)



AO+BOト AC+BCトハ何レガ大ナルカ。

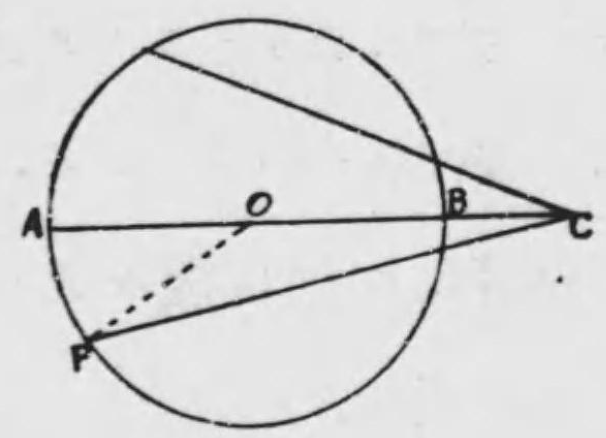
BO+COトBA+CAトハ

CO+AOトCB+ABトハ

2(AO+BO+CO)ト

2(AB+BC+CA)トハ

(21)



OP ヲ結ベ。CAト等シキ長サノ線分ハ何カ。

CPト　CO+OP　トハ

CP<CA

(22) CO+OA+AO′+O′DトCD トハ何レガ大カ。又

CF+ED　トCDトハ

尙一ツ演繹推理進行ノ例ヲ示ス。

角ノ二邊ガソノ頂點ノ兩側ニ一直線トナラバソノ角ハ2R∟ナリ。

ハ18頁ニ於テ實驗的ニ又公理的ニ認メタトコロデアル。之カラ出發シテ

二ツノ直線ノナス接角ノ二等分線ハ互ニ垂直ナリ。ト

二ツノ直線ガ相交レバソノ相向ヒ合ノ角ハ相等シ。トヲ論定シテ理論ノ嚴正ナコトヲ知ラシメ證明ノ內容ヲ知ラシメルノデアル。

13　定　　理 Theroem

前節マデニ揭ゲタトコロデ定理ノ實例モ證明ノ內容モワカツタノデアルカラコヽデ定理ト證明トヲ知ラシメルノデアル。

林博士ハ其著初等幾何學ノ體裁ニ於テ定理ヲ四種類ニ分ケテ居ラレル。卽チ

定理

1　存在ニ關スル定理

例　一直線外ノ一點ヨリ此ノ直線ニ下シ得ル垂線ハ唯一ツアリ。

2　計量ニ關スル定理

例　直角三角形ノ斜邊ノ上ノ正方形ハ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ。

三角形ノ二邊ノ和ハ他ノ一邊ヨリ大ナリ。

3　包含ニ關スル定理

(1)　直說法的定理

例　三邊ノ相等シキ三角形ハ正三角形ナリ。

(2)　接續法的定理

例　一直線ガ二平行線ニ交レバソノナス錯角ハ相等シ。

4 選出ニ關スル定理

例 一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ一ツノ角ノ二邊ト平行ナルトキハソノ二角ノ二等分線ハ互ニ平行ナルカ又ハ垂直ナリ。

然レドモ如何ナル定理モ假設 Hypothesis トナルベキ條件或ハ性質ト論定サルベキ事項即終結 Conclusion トガアル。只ソノ命題ノ言ヒ表シ方ガ直接法的或ハ假言的或ハ接續法的或ハ選言的ト色々アルトコロカラ種々ニ分レルノデアル。定理ヲ假設ト終結トニ分ツ上ニハ少シ無理ナ點ハアルガ條件的假言的ニ云ヒ表ハシタ方ガ生徒ニハ解リ易イヤウニ思フ。幾何學ニ於ケル定理ノ殆ドスベテガ此ノ形ニナツテ居ルノデタトヒ此形ニナツテ居ナイモノデモソレニ改メルノニソレ程困難ハナイト思フ。トハイヘ如何ナル不自然ヲ忍ンデモ之ヲ改メルニハ及バナイ。

定理,逆,對偶,裏等ノ關係ハソノ出テ來ル都度説明スレバヨイ。コトニ全體トシテハ軌跡ノ部ニ於テ説明スレバヨイ。

證明 Proof, Demonstration

幾何學ノ演繹推理ハ三段論法ニヨツテ進ムモノデアル。コヽニ簡單ニ三段論法ト證明ノ關係ヲ述ベテ見ヨウ

三段論法ハ大前提Major premise, 小前提 Minor premise, 結論 Conclusion ノ三段ヲトルモノデアル。例ヲ示セバ

大前提　凡ベテ亞細亞人ハ黄色人種ナリ。
小前提　日本人ハ亞細亞人ナリ。
結　論　故ニ日本人ハ黄色人種ナリ。

ノ如キモノデ亞細亞人ハ日本人ト黄色人種トノ關係ヲ表スモノデ媒辭Middle term トイヒ兩前提ニ含マレテ居ルモノデアル。

結論ノ主語トナルモノ(日本人)ハ之ヲ小名辭 Minor term トイヒ，結論ノ客語トナルモノ(黄色人種)ハ之ヲ大名辭 Major term トイフノデアル。

大前提	媒辭	大名辭
小前提	小名辭	媒辭
結論	小名辭	大名辭

今幾何學ノ例ヲトツテ見ルト

大前提　スベテ$\underbrace{\text{全ク重ネ合ハスコトヲ得ル圖形}}_{\text{媒辭}}$ハ$\underbrace{\text{合同}}_{\text{大名辭}}$ナリ。

小前提　$\underbrace{\text{二邊ト夾角トガ夫々相等シキ兩三角形}}_{\text{小名辭}}$ハ

$\underbrace{\text{全ク重ネ合スコトヲ得ル圖形}}_{\text{媒辭}}$ナリ。

結　論　故ニ$\underbrace{\text{二邊ト夾角トガ夫々相等シキ兩三角形}}_{\text{小名辭}}$ハ$\underbrace{\text{合同}}_{\text{大名辭}}$ナリ。

尙一例ヲトレバ

大前提　平行四邊形ノ面積ハ等底等高ノ矩形ノ面積ト相等シ。
小前提　三角形ノ面積ノ二倍ハ等底等高ノ平行四邊形ト等積ナリ。
結　論　三角形ノ面積ノ二倍ハ等底等高ノ矩形ノ面積ト相等シ。

而シテ幾何學ニ於ケル定理又ハ問題ハ此ノ結論ニ相當スルモノデアツテ證明トハ大前提ト小前提トヲ見出シテ此ノ關係ヲツケルコト所謂媒辭ヲ明ニシテ小名辭ト大名辭トノ連絡ヲツケルコトニナルノデアル。故ニ

假設ヨリ出發シテ終結ノ正シキコトヲ論ズル方法ヲ證明 トイフ。

トイヒ得ルノデアル。ソレ故證明ヲスルニハソノ演繹ノ基礎トナルベキ定理ヤ公理ヲ充分理解シ記憶シテ必要ニ應ジテ之ヲ想ヒ起サナクテハナラナイノデアル。幾何學ハ推理ヲ重ンズルガ全然記憶ガ不用トイフコトハナイ。

基礎トナルベキモノヲ充分ヨク理解スベキコトハ勿論デアツテ之レヲ充分明瞭ニ記憶シテ居テコソ新シイ命題ガ易々ト解カレルノデアル。

問題 ニハ證明セヨト書イテアルモノガアルシ無イモノガアル。タトヒ書イテナクテモ定理ノ如ク證明ヲ要求スベキモノデアル。問題ノ中計算問題ノ如キハ別トシテ普通證明ヲ要スベキモノハ名ハ問題トアツテモ矢張リ定理デアル。只幾何學ノ系統中是非トモナクテハナラナイ程ニ重要ナモノデモナイカラ證明練習用トシテ提出スルノデアル。

證明法 證明ノ意味ガ明トナツタカラコヽニ證明法ニツイテ述ベヨウ。勿論之ハ生徒ニ今遷メテ知ラスノデナク其必要ニ應ジテ說明スベキモノデアツテ只教授者ノ參考マデニコヽニ述ベルノデアル。

證明法	直接法	綜合法	Synthetic Method
		解析法	Analytic Method
		重置法	Method of Superposition
	逆ノ證明ニ用フル方法	間接證明法	Indirect Method of Proof
		歸謬法	Reductio ad Absurdum
		同一法	The Rule of Identity
		轉換法	Method of Coversion

<u>綜合法</u> 假設カラ終結ト進ンデ行ク方法デアツテ幾何學ノ證明法中最モ普通ナモノデアツテ生徒ニモ理解シ易イトコロノモノデアル。

<u>解析法</u> 終結ガ成立ツタメニ必要ニシテ充分ナ條件ヲ尋ネル。ソノ條件ガ成立ツタメニハ更ニ他ノ必要且充分ナ條件ガイル。ト次第ニ逆ニ進ンデ行ツテ最後ニ必要ニシテ充分ナ條件トシテ假設ニ到達シソレハ既ニ滿タサレテ居ルカラ終結ノコトモ成立スルトイフヤウニ證明スル方法デアル。此ノ方法ハ證明ノ容易ニ知ラレナイヤウナ問題ニヨイ。尤モ解析的證明法ヲヤレバソノ方法ヲ逆ニスレバ綜合法ニナルカラ只證明發見ノ途ノミニ用ヒテモヨイ。

<u>重置法</u> 二ツノ圖形間ノ計量比較ニ關スル問題ノ證明ノトキ用ヒル方法デ一ツノ圖形ヲ他ノ圖形ノ上ニ重ネテ合同ナリトカ，一方ハ他方ヨリ大ナリトカ論ズル方法デアル。此方法ハ初步的ノ方法デアツテ基礎的ノ定理ノ證明ニ用ヒルモノデアル。嚴密ニイヘバ圖形ヲ取リ出シテ他ノ圖形マデ移動スルノデアルカラ

圖形ハ之ヲ移動スルモソノ形及大サヲ變ズルコトナシ。トイフ剛體運動トカ空間ノ等質性(不變性)ニツイテ假定ヲ設ケナクテハナラナイノデアル。

<u>間接證明法</u> 直接ソノ定理ノ證明ヲセズシテソノ定理ノ對偶ノ證明ヲシテ本定理ノ證明ヲスル方法デ

「モシ終結ヲ眞ナラズトスレバ…………假設ニ戾ル(反ス)」トイフヤウニ假設ニ結ビ付ケル形式ヲ取ルモノデアル。

<u>歸謬法</u> 間接的證明法ト同ジク對偶ノ證明ヲナシテ本定理ノ證明トスルモノデアルガ

「モシ終結ヲ眞ナラズトスレバ…………不合理ナル結果トナル」トイヒ公理ヤ既ニ證明セル定理ニ反スル如ク導ク方法デアル。

ソレデアルカラ間接的證明法ト大差ハナイ只最後ノ歸着點ガ違フダケデアツテ本書デハ此兩者ヲ共ニ間接法トイウテ居ル。

同一法 或定理ヲ吟味シテ終結ガ唯一ツ，假設ガ唯一ツナルトキハ直チニソノ逆ノ成立ツコトヲ知ルトイフ方法デアル。

例ヘバ「二圓ノ共通弦ノ垂直二等分線ハソノ中心線ナリ」ヲ證スルニ中心線ハ唯一ツ，共通弦ノ垂直二等分線ハ唯一ツデアルカラ既ニ「二圓ノ中心線ハソノ共通弦ノ垂直二等分線ナリ」ガ證明サレテ居ル以上ハ之レヨリ直チニ眞デアルトイフ如キ方法デアル。同一法トトクニイハナクテモ一部分ニ此證明法ヲ用ヒテ居ルコトハ屢々アル。

轉換法 之レモ論理的ノ形式カラ來タ證明法デ或定理ヲ吟味シテ見テ假設ガ或事ニツイテ起リ得ベキスベテノ場合ヲ盡シ終結ガ相容レズシテソノ一ツハ必ズ眞ナルトキ換言スレバソノ假設ニ應ジテ異ツタ終結ノ起ル場合ハソノ定理ノ逆ハ眞ナリトイフ方法デアル。此ノ定理ハ假設ノ數ダケノ定理ニ分ツコトガ出來ルノデアルカラソノ逆モ間接法ニヨツテ證明スルコトガ出來ル。

例ヘバ「二邊ガ夫々相等シキ兩三角形ニ於テソノ夾角ノ大ナル三角形ノ第三邊ガ大ナリ」ヲ證明スルニ當リ終結ヲ否定シテモシ大ナラズトスレバ第三邊ハ等シイカ，小デアル。

然ルニ等シトスレバ夾角ハ等シイ，コレ假設ニ反ス。又

小ナリトスレバ夾角ハ小デアル，コレ假設ニ反ス。

故ニ　大デナケレバナラヌ。

トイフヤウニ一々證明スレバ容易ニ出來ル此ノ後ノ間接方法ヲ削除進行論證又ハ化醇論證 (Proof by Exaution) トイフノデアル。

問　題

23 $\angle p$ ヲ知レバドノ角ノ大サガワカルカ。

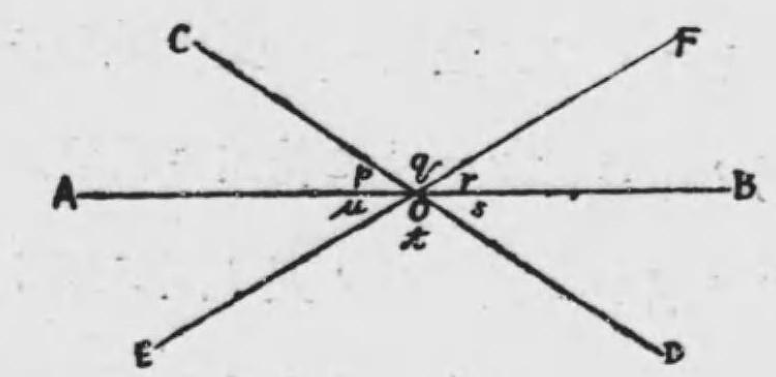
$\angle q$ ヲ知レバ如何。

$\angle p$, $\angle q$ ヲ知レバ $\angle u$ ハ知リ得ルカ。

(23) $\angle u$ ト等シイ角ハ何カ。

$\angle q$ ト等シイ角ハ何カ。

$\angle p$, $\angle s$ ハ如何ニシテ大サヲ知ルカ。



24 $\angle ABC$ ト等シイ角ハ何カ。

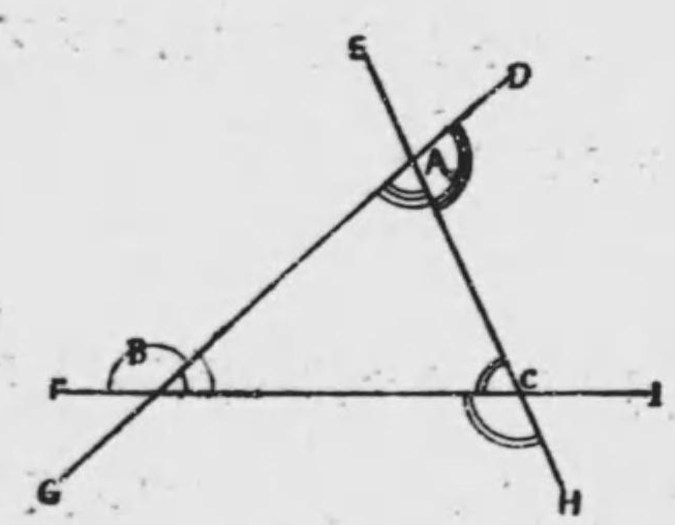
$\angle ABF$ 〃

$\angle BCA$ ト等シイ角ハ何カ。

$\angle BCH$ 〃

$\angle CAB$ ト等シイ角ハ何カ。

$\angle CAD$ 〃



(24) 對頂角ハ何レカ。

$\angle c=\angle e$ ナラバ

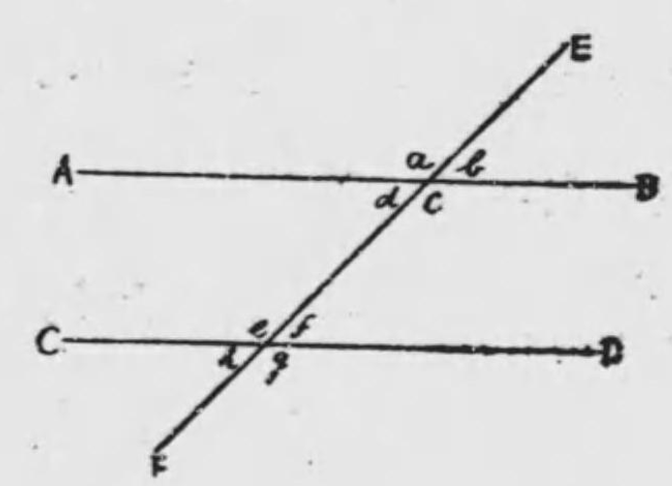
$\angle a$ ト $\angle c$ トハ

$\angle c$ ト $\angle g$ トハ

$\angle d$ ト $\angle f$ トハ

$\angle b$ ト $\angle f$ トハ

$\angle b$ ト $\angle h$ トハ



25 證明ノ形式ヲ知ラシメルタメニ完全ナ解ヲ揭ゲタノデアル。

特述 Particular Enunciation 定理ヤ問題ハ大抵一般的ニ述ベラレテ居ルモノデアル。ソレヲ特定ノ圖ニヨリ一般的ノ意味ヲ含メテ假設ト終結トヲ說明スルモノヲ特述トイフノデアル。ソレ故之ヲ題意トイツテアルノモアル。

解答トシテ書クベキモノハ證明デアツテ題意ヤ，特述ハ解答上ニ表ス必要ガナイ。之ハ只自己ノ覺エノタメニ必要ナモノデアルト論ズル人ガアル。(日本中等教育數學會雜誌第七卷第三號及第八卷第二號參照) 勿論一般的陳述ノ定理ヤ問題ヲ證明スルトキニハソノ證明ニ必要ナ圖形ニツイテ說明シテ置ク必要ハアルカラ之ヲ證明ノ中ニ書クヨリモ特述ニ於テ說明シテ置イタガヨイ，問題ガ既ニ特述的ニナツテ居レバ最早ソノ通リ圖ヲ畫イテ證明スレバヨイカラ特述ノ必要ハナイ。併シ乍ラ之ヲ書イタトテ誤デハナイ。條件ヨリ出發シ證明ヲ通シテ結論ニ到ルノハ論理ノ形式トシテハ整ツタ形デアル。眞ニ解答者ノ能力ノ表ハレルノハ證明ニアルノデアルカラ檢閱者トシテハ見ル必要ハナイガ解答者トシテハ書イテヨイ。加フルニ條件ヲ落スガタメニ證明ヲナシ得ザルガ如キコトガアルカラ多クノ場合之レヲ書キ出シテ置イタ方ガ生徒ノ利益ダト思フ。ソレ故初學ノ間ハコトニ假設終結ヲ明ニスベキデアル。

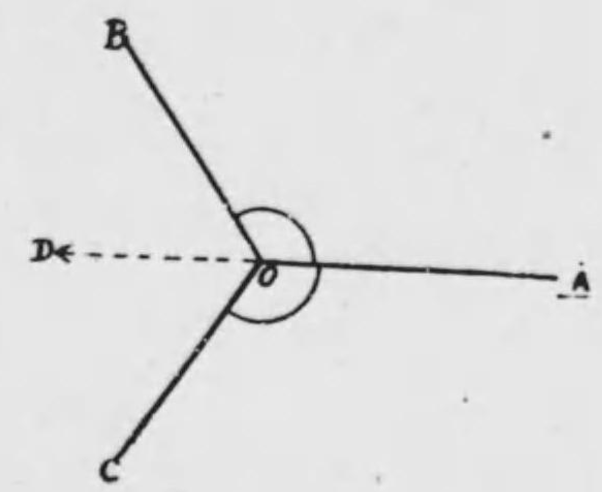
或時生徒ガ

「先生私ハ證明ハ違ツテ居マスガ假設終結ハハツキリ間違ナク書イテアリマス之レニハ少シモ點ハアリマセンカ」トイツタ。

先生ハ之ニ答ヘテ

「柿ハ蔕(ヘタ)ダケデハ價ハナイ。ケレドモ蔕ノ落チタヤウナ柿ハ駄目ダトテ買フ人ハナイ。シカシ蔕ソノモノニ價ガアルノデハナイ。」トイツテ笑ツタコトガアル。

26



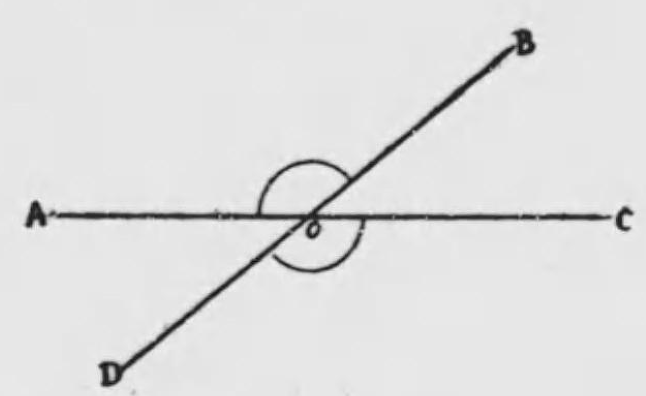
AO ヲ延長シテ考ヘヨ。

∠AOB＋∠BODハドレダケカ。

∠AOC＋∠COD 〃

∠BODト∠CODトハ如何。

27

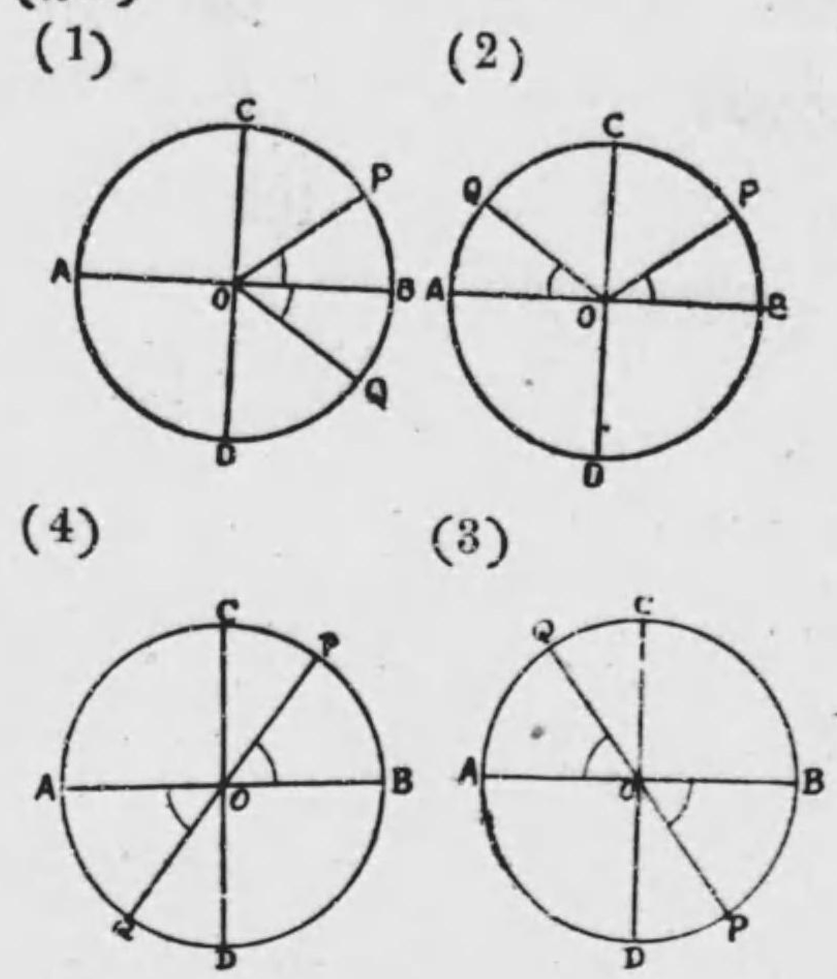


OB, OD ガ一直線ヲナスニハ∠BODハ何程カ。

∠BOC＋∠AOBト∠BOC＋∠CODトノ大サ如何。

∠BOC＋∠COD＝∠BODハ何度カ。

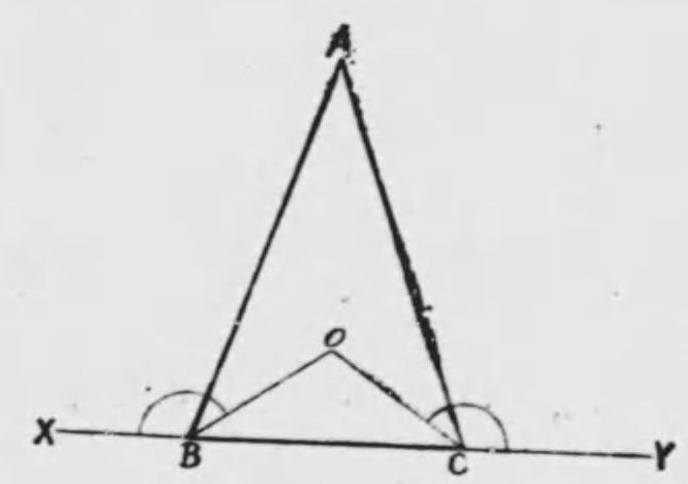
(26)



(1) ∠BOC−∠BOPト∠BOD−∠BOQトヲ比較セヨ。

(2) ∠BOC−∠BOPト∠AOC−∠AOQトヲ比較セヨ。

(27)



∠ABC＝∠ACB ナラバ

∠OBCト∠OCBトハ如何。

∠OBXト∠OCYトハ如何。

第二篇

直線形

第一章　三角形ノ合同

本篇カラ眞ニ理論幾何ニ入ツタノデアル。理論幾何ノ最初ノ部分ヲ如何ニ組立ツベキカガ又問題デアル。圖形ノ繁簡ノ度カライフト角カラ平行線ニ入ルベキデアルガ本書デハ角カラ直チニ三角形ノ合同ニ入ルコトニシタ。之レハ平行線ノ部ニ於テハ間接的ノ証明ガ多ク生徒ノ理解ニ困難ナタメト又三角形ニ關スル事項ノ方ガ興味ガ多イノデ幾何學ノ觀念ヲ與ヘルノニ都合ガヨイカラデアル。

14 合同 Congruent

問一　一ツノ圖ヲ薄紙ニ寫シ之ヲ他ノ上ニ重ネテ全ク重ルヤ否ヤヲ實驗セシム。重ネ合ハスコトノ練習トシテハ圖形ノ複雑ナ方ガ却テ都合ガヨイ。

$$\text{圖形}\begin{cases}\text{形一相似}\\ \text{大サ—等積}\end{cases}>\text{合同}$$

形，大サ，位置ノ同一ナルモノハ全ク重リ合フノデアツテ全ク重ネ合ハスコトヲ得ル圖形ヲ合同トイフノデアルカラ二ツノ圖形ノ合同ナルコトヲ証センニハソノ根本ヲナスモノハ重置法デアル。(37頁參照)

例ヘバ二ツノ形ト大サノ等シイ盆ヲ作ツタトスル。之ヲ海外ニ輸出シ「ロンドン」カ「ニューヨーク」デ賣ルトシ，ソノ時二ツノ盆ヲ合セテ見タノニ合ハナカツタ。之ハ如何ナルワケカトイヘバ外國ヘ行クマデニ形ヤ大サガ變ジタノデアル。

幾何學的ノ圖形ニツイテハ一ツノ圖形ヲ取リ出シテ他ノ圖形ニ重ネタトキソノ一ツノ圖形ガ他ノ圖形ニマデ行クニ如何ナル途ヲトロウガ一向關係ナク形ガ崩レナイノデアル。物質ヤ物體ニ於テハ條件ヲツケテ「水ヲツケテモ狂ヒマセンカ」トカ「熱ニ合ツテモ歪ミマセンカ」ト念ヲ押スガ幾何學圖形ニハ之ヲ一向意ニセヌ，コレハ前ニノベタヤウニ

圖形ハ形，大サヲ變ズルコトナクシテ其ノ位置ヲ變ズルコトヲ得。トイフコトヲ假定シテ居ルカラデアル。

圖形ノ移動ニハ

(1). **平行移動**　全圖形ガ同一平面上常ニ平行ニ動クコト。

(2) **同一面上廻轉**　同一面上ノ一定點ヲ中心トシテ廻轉スルコト。

(3) **空間廻轉**　平面上ノ一直線ヲ軸トシテソノ平面ヲ廻轉スルコト。

トノ三種類ガアル。

(1), (2) ダケノ移動ニヨツテ重ネ得ル圖形ハ**順ニ合同**デアリ，(1), (2), (3) ノ移動ニヨツテ重ネ得ル圖形ハ**逆ニ合同**トイフノデアル。

合同ノ順逆ヲ明ニ區別スルコトハ後々ノ作圖等ニ於テ極メテ必要ナコトデアル。

合同ナル圖形ノ符號

相對應スル頂點及角ヲ表ス文字ガ相對應スル位置ニアル樣ニ書クガヨイ。對應邊，對應角等ニハ相對應スル目印ヲ付ケルガヨイ。又色「チョーク」等デ同一色ニ染メテモヨイ。

問二　圓及半圓ノ合同ナルコトヲ知ラシメルタメデアル。嚴密ナ證明ハシナイ。

問三　三角形ニハ六ツノ要素ガアル。二ツノ三角形ノ合同ニハ此ノ中ノ三要素ガ夫々等シイコトヲ要スルコトヲ知ラシム。又角ノミ三ツガ相等シクテモ駄目デアルコトヲ知ラシメタイ。

問四　二邊ト夾角ノ夫々相等シイ二ツノ三角形ガ合同ナルコトヲ實驗シ，重ネ合ハセ方ヲ研究セシム。

15　三角形ノ合同（一，二）

順合同ノ圖ノミヲアゲタ。逆合同ノ圖ニツイテモ說明セラレタイ。合同ノ結果 BC＝EF, ∠B＝∠E, ∠C＝∠F 及兩三角形ノ面積ノ等シイコトヲ注意サレタイ。即チ44頁ノ下ニ記シテアルコトハ「合同ナリ」ノ次ニツクモノデアルコトヲ知ラシメタイ。

即チ合同ナルコトヲ証明スル目的ハ未知ノ線分ヤ角ノ相等ナルコトヲ証スルタメニスルノデアツテ合同ダケデハ何等興味ハナイノデアル。

重置ノ方法ヲ嚴密ニイフコトハ甚ダ困難ナモノデアルガ，結局重ネ合ハセル方法ヲ述ベレバヨイノデアルカラツトメテ實際方法ト近イヤウニ述ベルコトニシタ。此ノ如キ證明ノ發表ニ重キヲ置ク必要ハナイト思フ。生徒ハ實際此ノ定理ノ証明ヲ証明ノ範例ト考ヘ合同ノ証明ニハ重置シナクテハナラナイト考ヘルコトガアル。此定理ハ只演繹ノ順序トシテ証明スルノミデアル。

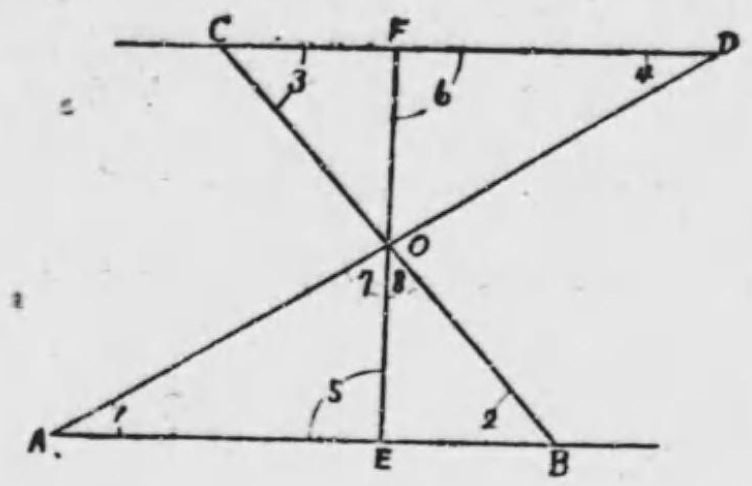
問一　一邊ト兩端ノ角トガ夫々相等シイ兩三角形ノ重ネ方ヲ考ヘシメ兩三角形ノ合同ヲ證明セシム。

三角形ノ合同ノ定理ノ中二邊ト夾角又ハ一邊ト兩端ノ角ガ夫々相等シイ場合ハ之ヲ應用スルコトガ極メテ多イカラソノ應用練習ヲ計ルコトガ必要デアル。而シテソノ練習問題トシテハ餘リ面倒ナモノデナク成ルベク合同ナルベキ兩三角形ガ重リ合ツテ居ナイ方ガヨイ。

問二　(1) ハ二邊夾角ノ等シイ兩三角形(2)ハ一邊ト兩端ノ角ガ夫々相等シイ場合ノ例ヲ示スノデアル。

是等ノ問題ハ敎師ノ少シノ工夫ニヨツテ簡單ニ作ルコトガ出來ル

例ヘバ



二邊ト夾角

AO＝OD, EO＝OF ナラバ △AEO≡△DFO

AO＝OD, AE＝DF, ∠1＝∠4 ナラバ △AEO≡△DFO

AE＝DF, EO＝FO, ∠5＝∠6 ナラバ △AEO≡△DFO

AE＝DF, EO＝FO, ∠5, ∠6, ガ直角ナラバ △AEO≡△DFO

一邊ト兩端ノ角

AO＝OD, ∠1＝∠4 ナラバ △AEO≡△DFO

AE＝DF, ∠1＝∠4, ∠5＝∠6 ナラバ △AEO≡△DFO

EO＝FO, ∠5＝∠6 ナラバ △AEO≡△DFO

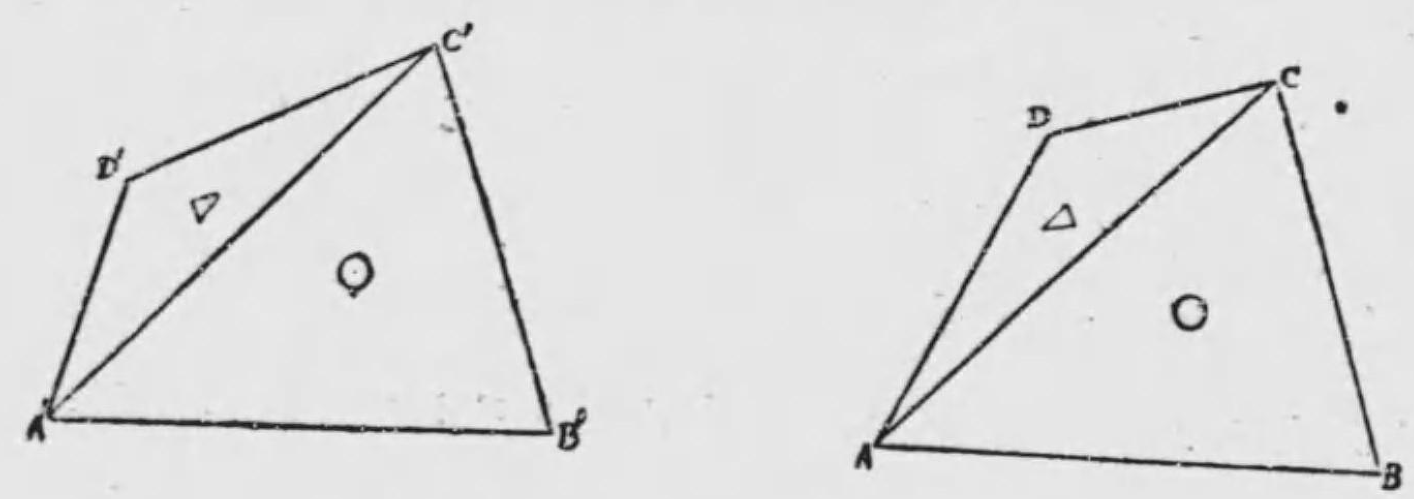
尙 △EOB≡△FOC, △ABO≡△DCO トトレバ一ツノ圖形デ幾ツカノ問題ヲ作ルコトガ出來ル。

問　題

1　四邊形ニ限ラズスベテノ直線形ガ合同ナルトキハ

相對應スル對角線ハ相等シク
相對應スル幾ツカノ合同ナル三角形ニ分ツコトガ出來ル。

然ルニ之ヲ逆ニシテ二ツノ直線形ガ合同ナル三角形ニ分ツコトガ出來タトテ兩直線形ハ合同デアルトハイフコトハ出來ナイ。



2 AB, A′B′ ノ相等シイタメニハ如何ナルコトガ必要カ。

△AOBト△A′OB′トニ於テ相等シイモノハ何カ。

3 CD ガ川幅 AB ト等シクナルニハ△ABOト△CDOトヲ如何ニ作レバヨイカ。

∠ABO＝R.∟ トスレバ∠CDOハ如何ニスレバヨイカ。

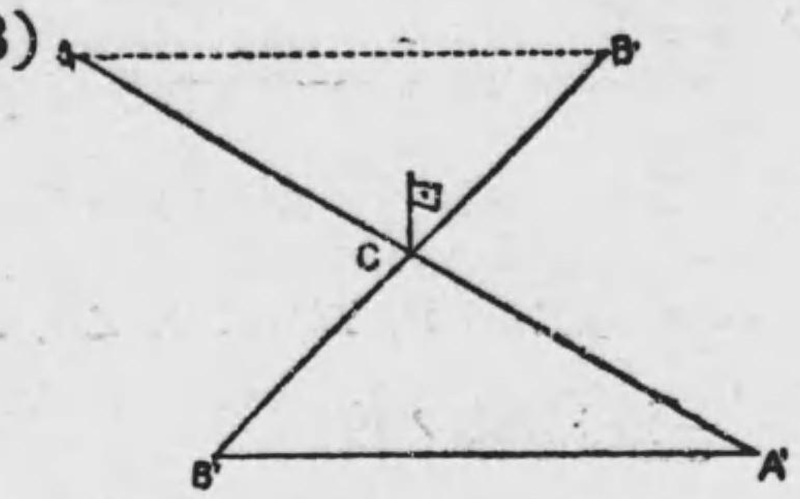
∠AOBト△COD トハ如何。

(2) 弦AB, CD ヲ作レ。

AB,CDノ等シイタメニハ△AOBト△COD トハ如何ナルベキカ。

27頁(13)ニ於テハ如何ニシテAB,CDノ等シイコトヲ知ツタカ。

(3)



A′B′ガAB ト等シクナルニハ△ABC ト△A′B′C トハ如何ニナベキカ。

ACトA′C, BCトB′C トハ如何ニスベキカ。

4 直線ニ關シテハ長サト位置トガアル。本書デハ此ノ二ツモシクハ一ツヲ供ヘルコトニヨツテソノ名ヲ異ニシテ用ヒテ居ル。

- **定直線**　位置ノ定マレル無限直線。
- **定長線分**　長サノ定マレル有限直線(位置ニハ關シナイ。)
- **定線分**　長サト位置トノ定マレル線分。

總テノ點ト任意ノ點　從來取リ扱ツテ來タ定理モ一般的ノコトデアツテ總テノ圖形ニツイテ有スル性質ヲ論ジテ來タノデアル。ソレヲ任意ノ圖形ヲ取ツテ代表的ニ論ジテ來タノデアル。本問題ニ於テ總テノ點モソノ意味デ取扱ヘバヨイ。任意ノ點ノ語ヲツケテ總テヲ代表セシメルノデアル。ソレ故特殊ノ點ヲ取ツテハナラナイ。

共通要素ヲ持ツ兩三角形　CP ハ兩三角形ニ共通デワカリ過ギテ却テ氣ガ付カナイコトガアル。カヽル場合ノアルコトヲ注意スルガヨイ。

軌跡問題證明ノ豫備　問題**4**ハ問題**7**ト逆關係ヲナシ二ツ合シテ軌跡問題証明ノ全體ヲナスノデアル。軌跡問題ノ証明ハ生徒ノ理解ガ困難デアルガ一時ニ本逆二定理ノ証明ヲスルコトモソノ困難ノ一部分ヲナシテ居ルト思フ。然ルニソノ別々ノ証明ハ既ニ軌跡ノ部ニ入ルニ先ダツテ濟ンデ居ルコトガ多イ。只ソレガ明カニナツテ居ナイ。本書ハ之ヲ明ニスルタメ時々ソレヲ對照シテ示シテアル。問題**4, 7**ニ於テ垂直二等分線ヲ赤線トシテアルノモ又ソノ理由ノ一ツデアル。

5 BE トCD トノ等シイコトヲ証スルニハ如何ナル三角形ヲ比較スルガヨイカ。

△ABEト△ACDトニ於テ夫々相等シイモノハ何カ。

AB＝AC, AD＝AE, 夾角ハ如何。

(5) OD, OE及EO, CO ノ夫々等シイヤウナ三角形ハドレカ。

△BODト△COEトヲ比較セヨ。

BD, CEハ等シイカ。

∠Bト∠Cトハ

∠BDOト∠CEOトハ

問題5ノ圖形ヲトツテモ其ノ與ヘラレタルモノヲ變ヘルコトニヨツテ幾通リカノ問題ガ出來ル。

<u>二邊夾角ノモノ</u>

1 AB＝AC, AD＝AE ノトキ

2 AB＝AC, BE＝CD, ∠B＝∠C ノトキ

3 BE＝CD, AD＝AE ∠ADC＝∠AEB ノトキ

4 BO＝CO, DO＝EO ノトキ

5 EO＝CO, BD＝CE, ∠B＝∠C ノトキ等

<u>一邊ト兩端ノ角</u>

1 AB=AC, ∠B=∠C ノトキ

2 AD=AE, ∠ADC=∠AEB ノトキ

3 BE=CD, ∠B=∠C, ∠AEB=∠ADC ノトキ

4 BD=CE, ∠B=∠C, ∠BDO=∠CEO ノトキ

5 BO=CO, ∠B=∠C ノトキ等

6 題意ヨリ等シキモノノ知ラレテ居ルモノハ何カ。

∠POR=∠POQ

∠OPR=∠OPQ=R.∟

△OPRト△OPQトニ於テ夫々相等シイモノハ何カ。

△OPR≡△OPQ

故ニ OQ=OR

PQ=PR

(6) 題意ヨリ等シキモノノ知ラレタルハ何々カ。

∠POEト∠POD トハ如何。

OEトOD トハ

是等ノモノガ夫々含マレル三角形ハ何カ。

尙他ニ何ガ等シイカ。

何レノ三角形ガ合同カ。

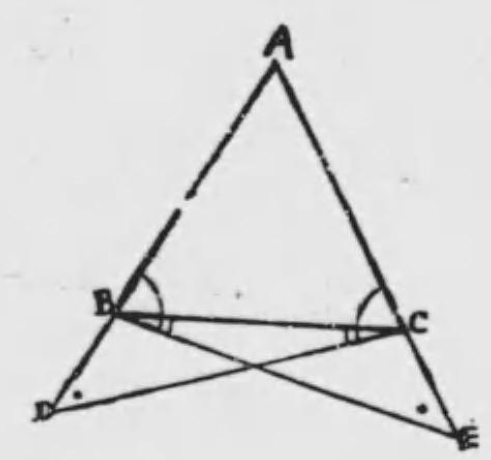
***Thales* ターレス** (B.C. 640—548) ハ希臘ノ七賢人ノ一人デアツタ。埃及ニ遊ンデ數學，天文ヲ研究シタ。「ピラミッド」ノ高サヲソノ影ノ長サニヨツテ測ツテ埃及王 Amasis (アマシス) ヲ驚カシタトイフコトデアル。後希臘ニ歸リ Ionic School (イオニア派學校) ヲ建テタ。Miletus (ミレツト) ニ近イ處デ海岸ニ基線ヲトリソノ兩端ニテ海上ノ船ノ方向ノ角ヲ測ツテソノ點ヨリ船マデノ距離ヲ測定シタトイフコトデアル。ソレ故此ノ當時カラ一邊ト兩端ノ角ノ定マレル三角形ハ合同ナリトイフ定理ハ知ラレテ居ツタト見エル。

16 二等邊三角形(一) Isosceles Triangle

三邊相等シキ三角形ノ合同ヲ證明スルノニ必要ナ定理デアルカラコヽニ教授スルコトトスル。

他ノ證明法 此定理ノ證明ヲスルノニ此ノ二等邊三角形ト同樣ナ三角形ヲ取リ出シ之ヲ裏返シテ重ネルトキハ二邊ト夾角ノ等シイ三角形トナツテ重ル故ソノ底角相等シトシタノガアル。此方法ニヨレバ此ノ定理ノ逆〔94頁27二等邊三角形(二)〕モ一邊ト兩端ノ角ノ等シイコトカラ證明ガ出來ル。併シ此ノ證明法ハ生徒ニハ了解困難デアルカラトラナイコトニシタ。

驢馬ノ橋 Pons asinorum 此定理ハ驢馬ノ橋トイフ名ガ付イテ居ル。ソレハ「ユークリッド」ノ二等邊三角形ノ定理ノ證明ノ圖ガ橋桁ニ似テ居ルカラ付ケタトイフ人ト，此ノ問題ハ驢馬ガ橋ヲ渡ルガ如クアブナイ困難ナモノデ到底渡ルコトハ出來ナイトイフ意ニトル人トガアル。コヽニ驢馬ハ愚者ヲ諷シタモノデアル。



「ユークリッド」ノ證明

AD=AEトスレバ △ADC≡△AEB

△DBC≡△ECB

$$\left.\begin{array}{l}\angle ABE-\angle CBE=\angle AEC\\ \angle ACD-\angle BCD=\angle ACB\end{array}\right\}\therefore \angle ABC=\angle ACB$$

假定的作圖 Hypothetical Construction 此定理ノ證明ニ用ヒタ頂角ノ二等分線ハ未ダソノ作圖法ヲ知ラザルモノデアツテ作圖ノ能否ノ不明ナ圖デアル。カヽルトキニハ「∠Aノ二等分線ヲADトセヨ」トイフヤウニイツテ居ルコノヤウナ作圖ヲ假定的作圖トイツテ證明中ニ之ヲ使用スルコトヲ避ケル人サヘアル。併シ之ハ懸念スル必要モナイト思フ。二等分線ノ存在サヘ明カデ

アルナラバ(教科書16頁ニ存在ヲ明ニシテ居ル)作圖ノ能否ハ証明ニハ差支ナイノデアル。吾々ハ角ノ三等分トカ,圓周ノ七等分ハ作圖不能問題トシテ居ルノデアルガ，証明問題ニ於テハ角ノ三等分線モ圓周ノ七等分點モ使用シタトテ理論ノ上ニ少シモ差支ハナイノデアル。

二等邊三角形ニ於テハ頂角ノ二等分線ガ底ヲ垂直ニ二等分スル重要ナ性質ヲ有スル故假設的作圖ト共ニ二等分線ノ定理ヲ加ヘタノデアル。

系　Corollary ハ定理デアル。他ノ定理カラ容易ニ推定シ得ル事項デアルカラ相互ノ關係カラ此ノ名ガアルノデ附屬事項デ重キヲ置クニ及バヌト考ヘルベキモノデハナイ。

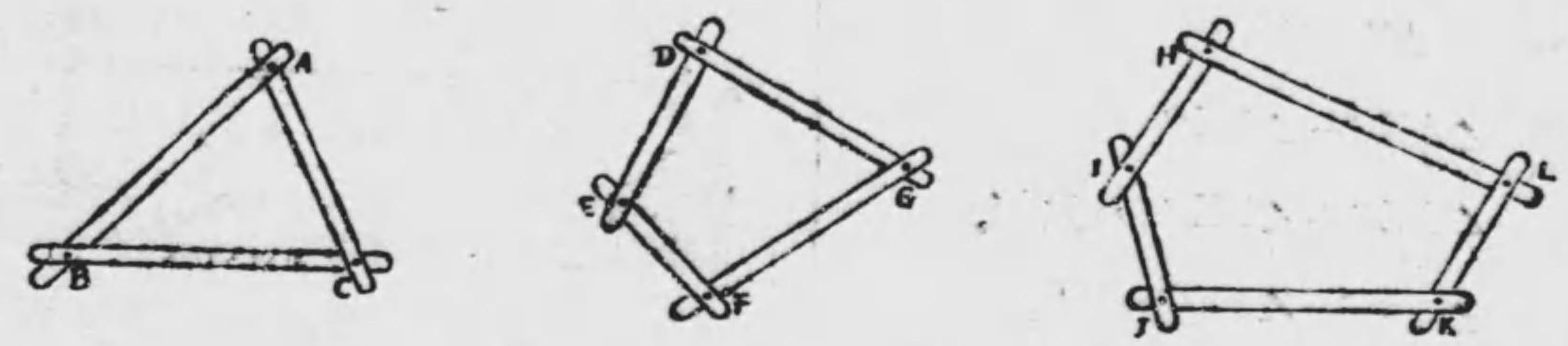
17　三角形ノ合同(一)

三邊ガ夫々相等シイ場合ノ合同ノ証明ハ中々困難デアル。コトニ前ノ二ツノ場合ト異リ，全ク重リ合フ様ニ置クコトガ出來ナイ。ソレ故**問一**ニ於テ三邊ノ夫々相等シイ三角形ヲ作圖セシメ，ソノ重ネ方ヲ考ヘシメタノデアル。証明ニ於テ重ネ合セル場合ニソノ何レカノ一邊シカ重ネルコトガ出來ナイ。「圖ノ如キ位置ヲトル如クセヨ」ト書イテ恰モ最大邊ヲ重ネ合セタヤウデアルガ何レデモカマハナイ理デアル。角ヲ一々イフハ繁雜デアルカラ符號ヲ用ヒテ一目ニ了解出來ルヤウニシタ。

問二　∠C及ビ∠Fガ直角ノ場合ハDFA′ハ一直線トナリ，DA′ト合スルノデアル。∠C及∠F ガ直角ナルコトガワカツテ居レバ重ネルニモ及バナイ。ダカラ此問ヲ△ABCト△DEF トヲ重ネFガDA′ノ上ニ在ラバ如何ニナルカ。トシタ方ガヨイ。

問三　∠C及∠FガF鈍角ノ場合ハFガDA′ノEト同ジ側ニアル場合デ$\angle p-\angle q=\angle r-\angle s$トナルノデアル。此問ヲ△ABCト△DEF トヲ重ネFガDA′ノEト同側ニ在ラバ如何ニナルカトシタ方ガヨイ。角ノ鋭鈍ニヨツテ重ネ方ヲ區別スルコトハ今ノトコロ困難デアル。

三角形ノ決定　三角形ノ合同トイフコトハソノ與ヘラレタ要素デハ一ツノ三角形以外ニ他ノ形ト大サノモノハ出來ナイトイフコトデアル。ソレ故三邊ハ三角形ヲ決定ストイツテモヨイノデアル。兩端ニ穴ヲ有スル板ヲ三枚，四枚，五枚ト連結シテ三邊形，四邊形，五邊形ノ枠ヲ作リソノ形ノ決定セルヤ否ヤヲ見セレバソノ意味ガワカル。



DEFGヲ決定シテ動カザル如クスルニハ尙何枚ノ板ヲ如何樣ニ用フベキカ。HIJKL ニツイテハ如何。

問　　題

7　問題4ト逆關係ニアル。

垂直二等分線ノ証明ニ於テハ

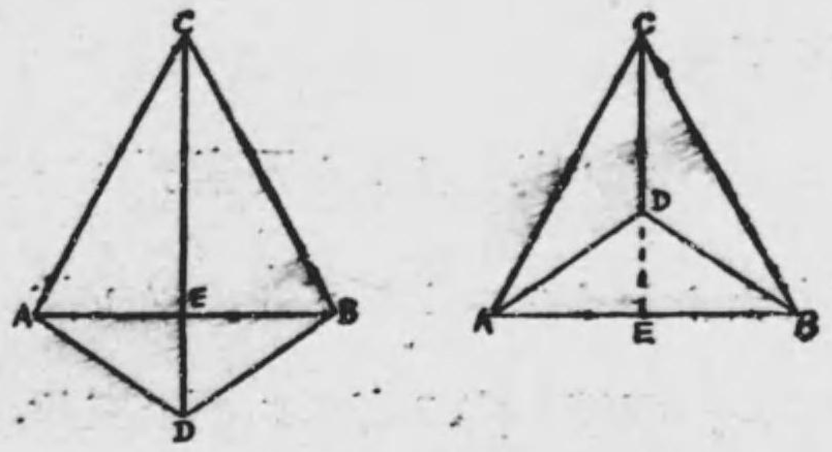
(1)　線分ノ中點ニ結ビタル直線ガ線分ノ垂線ナルカ。

(2)　線分ノ垂線ガソノ中點ヲ通ルカ。

ノ何レカヲ証明シナクテハナラナイ。此ノ場合ハ(1)ニヨラナクテハナラナイ。

7ト**4**トハヨク記憶セシメ定理ノ如ク用ヒサセタイ。

8



$\triangle ADC$ト$\triangle BDC$ トヲ比較セヨ。

$\angle ACE$ト$\angle BCE$ トハ如何。

$\triangle AEC$ト$\triangle BEC$ トヲ比較セヨ。

$AE=EB$

$\angle AEC=\angle BEC$

$\angle AEC+\angle BEC$ ハ如何。

$\angle AEC=\angle BEC=R.\angle$

又$\triangle ADE$ト$\triangle BDE$トヲ比較シタナラバ如何。

9

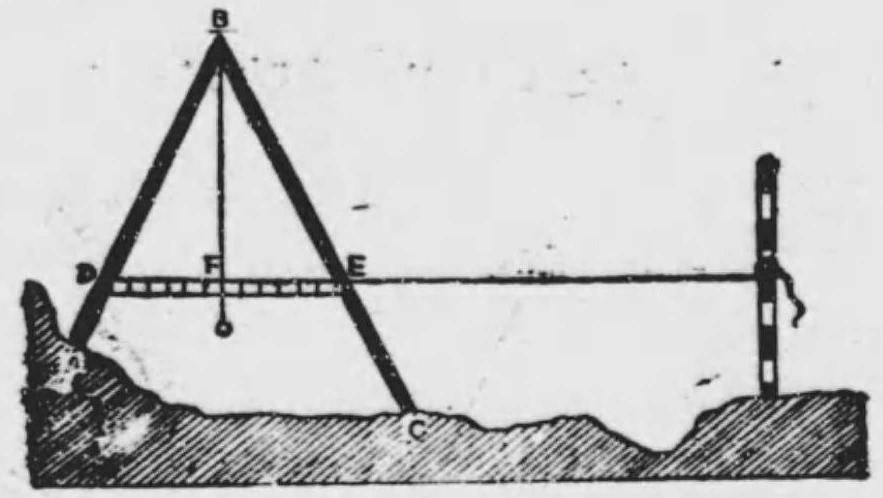
$\triangle AOB$ト$\triangle COD$ トヲ比較セヨ。

三邊ハ夫々如何ナル大サカ。

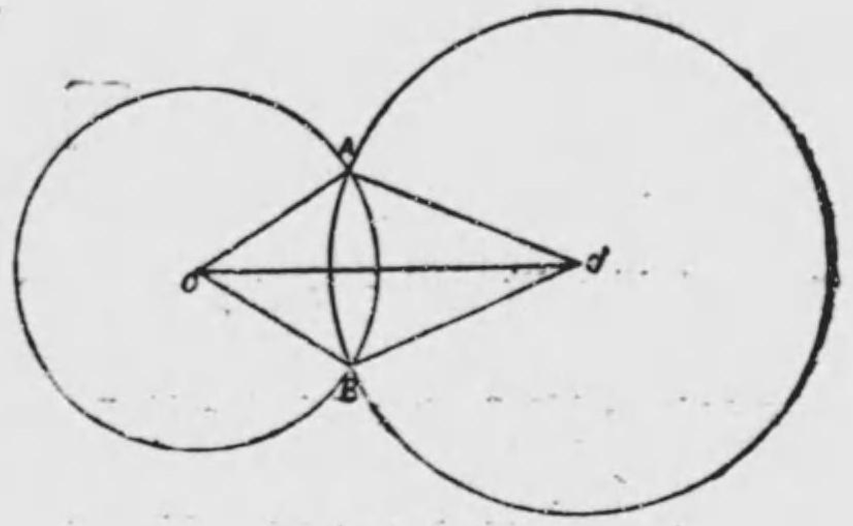
(8) $BD=BE$ ニシテFガDE ノ中點ニ來ラバ

$\triangle BDF$ト$\triangle BEF$トハ如何ニナルカ。

BFガDE ニ垂直ナラバDE ハ水平ナルカ。



(9)



$\triangle AOO'$ト$\triangle BOO'$ トヲ比較セヨ。

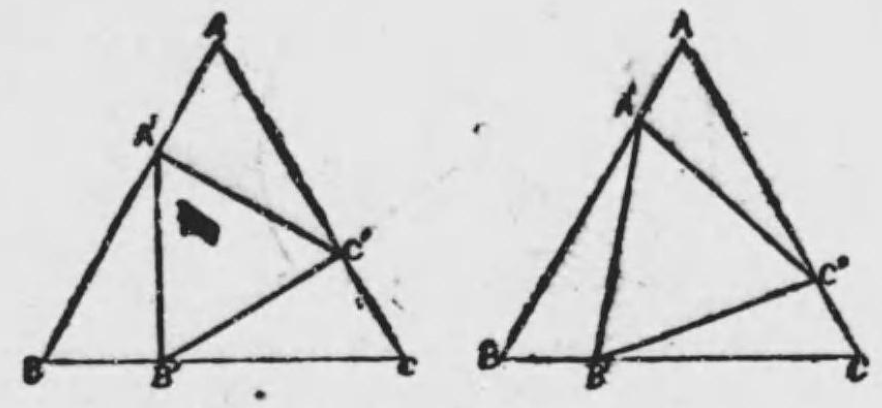
三邊ハ夫々如何。

$\triangle AOO' \equiv \triangle BOO'$

$\angle AOO'=\angle BOO'$

$\angle AO'O=\angle BO'O$

10



正三角形ノ各頂角ノ大サ如何。

(53頁系)

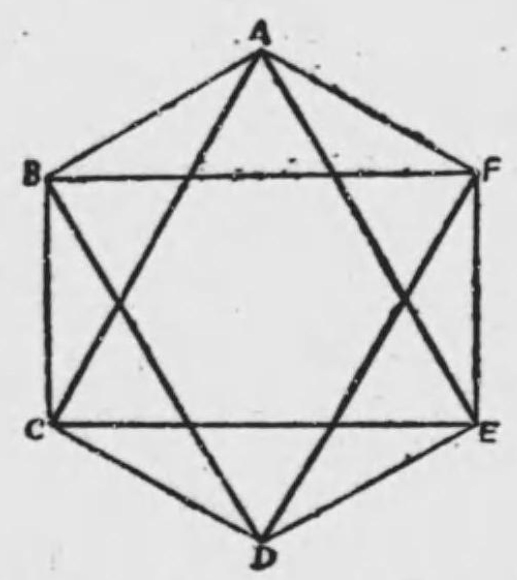
$\triangle AA'C'$, $\triangle BB'A'$, $\triangle CC'B'$ ヲ比較セヨ。

AA', BB', CC' ハ如何。

AC', BA', CB' ハ如何。

又AA', BB', CC' ガ各邊ノ $\frac{2}{5}$ ナラバ如何。

11



$\triangle ACE$ ハ如何ナル三角形カ。

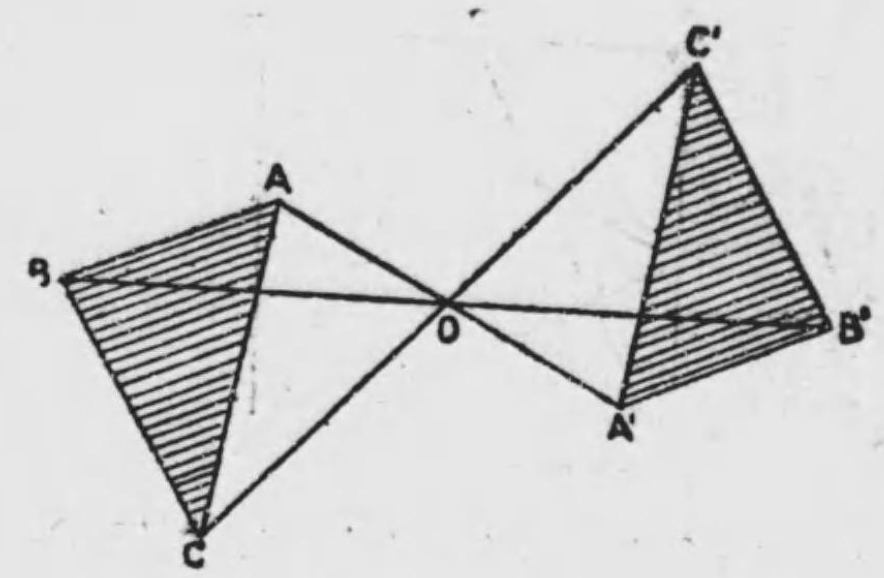
$\triangle BDF$ 〃

ACトBDトハ等シイカ。

$\triangle ABC$ト$\triangle BCD$ トヲ比較セヨ。

$\triangle ABC \equiv \triangle BCD$

(10)



$A'B'$トAB トノ等シキコトハ何ヲ比較シテ知ルカ。

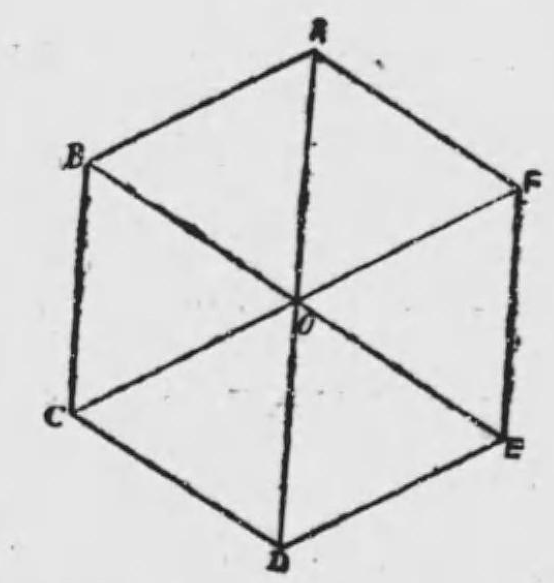
$\triangle ABO \equiv \triangle A'B'O$

$B'C'$トBC トハ如何。

$C'A'$トCA トハ如何。

O ハ何處ニ在ツテモヨイカ。

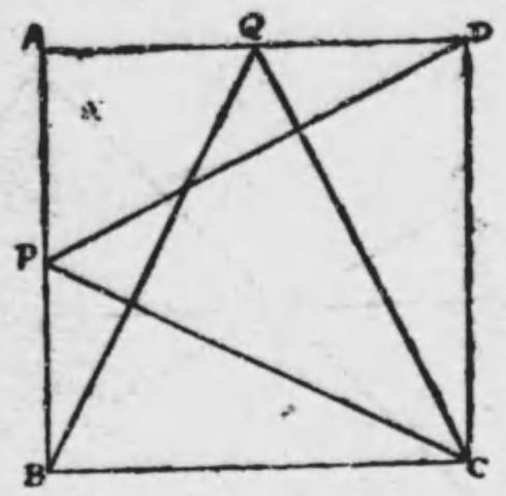
(11)



AB, BC, CD, DE, EF, FA, ノ相等シイコトハ何ニヨツテワカルカ。

A, B, C, D, E, F ニ於ケル角ハ互ニ等シイカ。

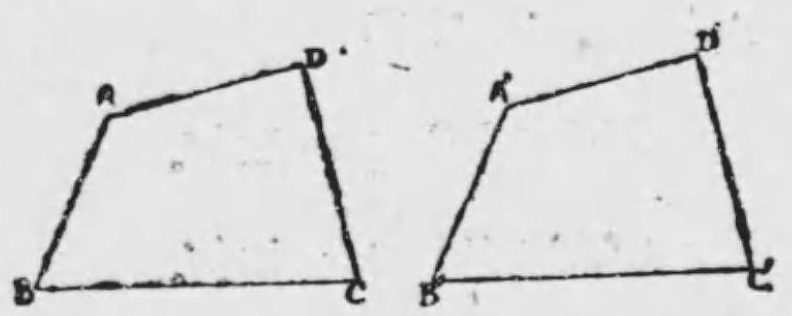
12



△BCP, △DCQ, △ABQ, △ADP

トヲ比較セヨ。

13



四邊ガ夫々順序ニ等シイ四邊形ハ何ヲ等シクスレバ全ク重ネルコトガ出來ルカ。

∠A＝∠A′ ナラバ如何。

△ABD≡△A′B′D′

BD＝B′D′

△BCD≡△B′C′D′

故ニ兩四邊形ハ全ク重合スコトガ出來ル。

故ニ一角ノ等シイトキハ合同。

又BD＝B′D′ ナラバ

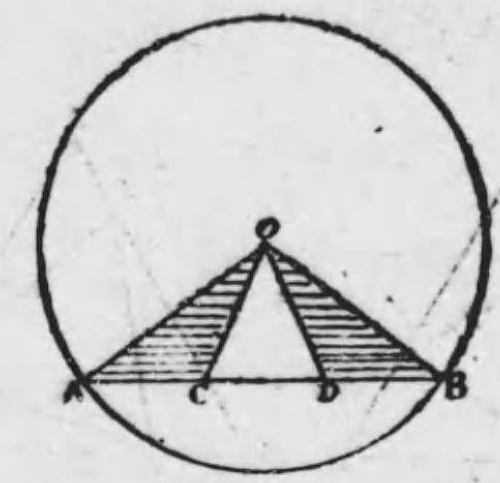
△ABD≡△A′B′D′

從テ△BDC≡△B′C′D′故ニ

四邊形ABCD≡四邊形A′B′C′D′

一對角線ノ等シイトキモ合同デアル。

(12)



△ACO ト△BDO トヲ比較セヨ。

AOトBO トハ如何。

ACトBD 〃

∠Aト∠B 〃

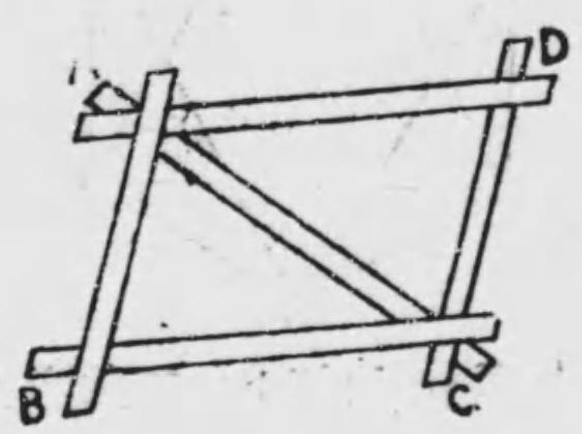
COトDO 〃

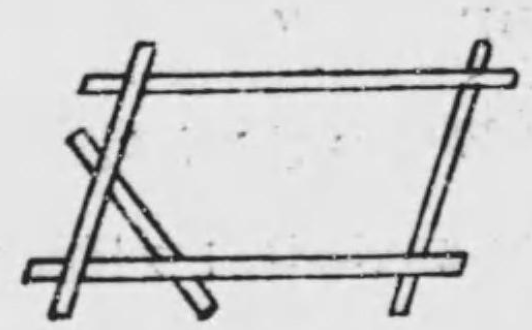
(13) 固定シタモノハ出來ナイ。

四邊形ハ四邊ノ大サガ定マツタダケデハ形ハ固定シナイ。

AC又ハBDニ對角線ノ板ヲ一板用ヒナクテハナラナイ。

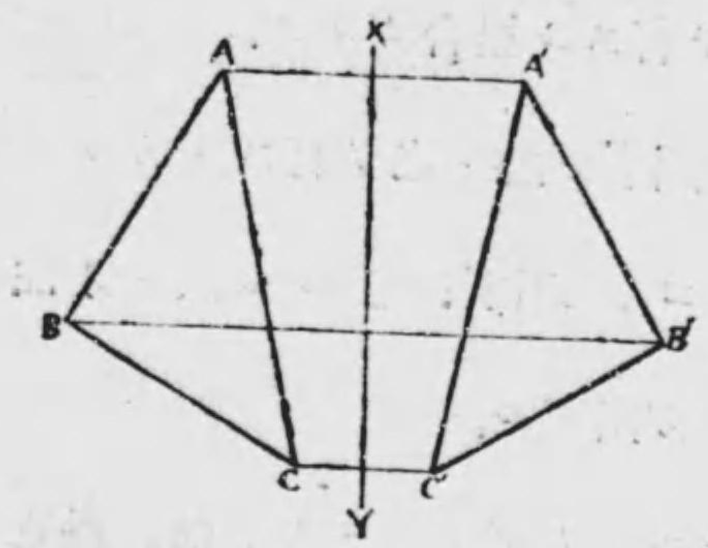
又ハ相隣レル各邊ノ上ノ點ヲ結付ケル線ノ板ヲ用ヒテモヨイ。



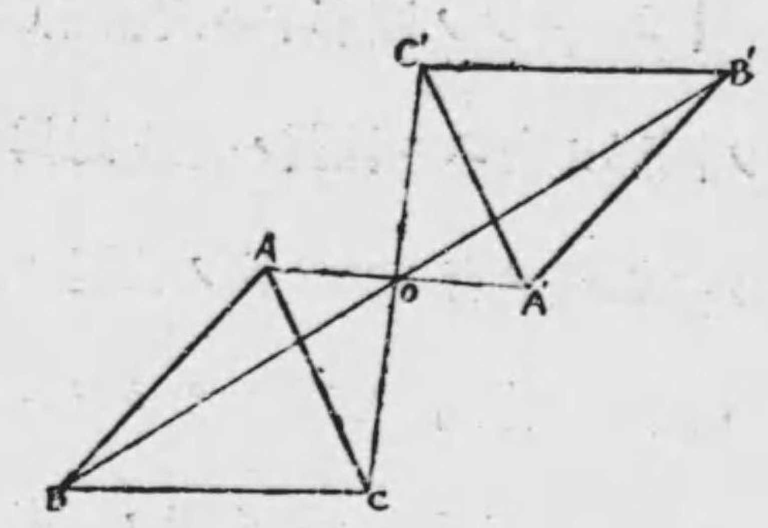


18 對稱 Symmetry

對稱ニハ線對稱ト點對稱トガアルガ，點對稱ノ方ハ餘リ必要デナイカラコヽニハ課セナイコトニシタ。然シ線對稱ト點對稱トハ相互ニ相對應シタ關係ヲ持ツモノデアルカラコヽニ比較シテ見ヨウ。



線對稱 Axial Symmetry



點對稱 Central Symmetry

1 一定直線xy ヲ軸トシテ一方ノ圖形ノ平面ヲ180°廻轉スレバ一方ノ圖形ハ他方ノ圖形ト全ク重ナル。

xyヲ**對稱軸**トイフ。

2 兩圖形ハ逆合同デアル。

3 軸ニ垂直ナル直線ガ兩圖形ニ交レバ對稱點ヲ生ズ。

4 一圖形上ノ二點ノ距離ハ其ノ對稱ナル二點ノ距離ニ等シイ。

5 二ツノ直線AB, CDノナス角ハ其ノ對稱ナルA′B′, C′D′ ノナス角ト等シイ。

(1) 一定點Oヲ中心トシ，一方ノ圖形ヲソノ點ノ廻リヲ180°廻轉スルトキハ一方ノ圖形ハ他方ノ圖形ニ全ク重ナル。

Oヲ**對稱ノ中心**トイフ。

(2) 兩圖形ハ順合同デアル。

(3) 中心ヲ通ル直線ガ兩圖形ニ交レバ對稱點ヲ生ズ。

(4) 線對稱ト同一デアル。

(5) 線對稱ト同一デアル。

6 相對應スル二直線ハ軸ト相等シイ角ヲナス。

(6) 相對應スル二直線ハ互ニ平行デアル。

尚對稱圖形ニモ

1 二ツノ圖形ガ相對應スル場合
2 一ツノ圖形中ニ對稱軸(點)ヲ有スル場合ガアル。

一ツノ圖形ノ有スル性質ハ之ト對稱ナル圖形ガ悉ク之ヲ有スルカラ一ツノ圖形ヲソノ性質ヲ有シツヽ他ノ位置ニ移スコトガ出來ル。ソレ故ソノ性質ヲ利用シテ證明ヤ作圖ヲ容易ナラシメルコトガ出來ル。

對稱圖形ハ美術工藝ニ於テ極メテ必要ナルモノデアツテ人ノ顔，動物ノ體軀，植物ノ葉等ニ見レバソノ例ヲ求メルコトガ出來ル。

問　　題

14 yy′ ヲ軸トシテ四邊形ABCDノ平面ヲ折返セバA ハ何處ニ落チルカ。B, C, D ハ夫々如何。

(14) AC, BD ノ二本。

15 正三角形ノ頂角ノ二等分線ハ正三角形ヲ如何ニ分ツカ。

(15) 六本。

16 線分PQトP′Q′トハ
QRトQ′R′トハ
RPトR′P′トハ
又ABヲ軸トシテ△PQRノ平面ヲ折返セバ如何ニナルカ。

(16) 折目ニ對シテ針ノ穴ハ如何ニナルカ。
折目ノ兩側ニ在ル圖形ハ全ク重リ合フカ。

第二章　作　圖　題

19 作圖題 Problem

今マデハ圖ヲ畫クノニ分度器ヤ物指ヲ使用シテ來タ。作圖題ニ於テハ直線定規ト「コンパス」ノ他ハ使用スルコトハ出來ナイノデアル。幾何學ノ理ニヨツテ作ルコト即幾何學的方法トイフノハ此ノ定規ト「コンパス」トヲ規定シタ方法ニヨツテ使用スルコトヲイフノデアル。ソノ使用規定ガ即**作圖題ノ規矩** Means of Construction デアル。

直線定規ニテハ

(1) 二點ヲ通ル直線ヲ引クコト

(2) 有限直線ヲ延長スルコト

「コンパス」ニテハ

(3) 任意ノ點ヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫クコト

(4) 二點間ノ距離ヲ移スコト

ダケガ許サレタコトデアル。此ノ作圖題ノ規矩ヲ作ツタノハ Plato (B.C.429—348)デアル。定規ト「コンパス」以外ノモノヲ使用シタナラバ幾何學ニ於テ多クノ作圖ガ可能トナルノデアル。例ヘバ任意ノ角ノ三等分ナドモ Quadratrix「クヲドラトリークス」トカ Conchoid「コンコイド」ノ線ヲ用フレバ可能デアル如キデアル。

ソレ故所謂**幾何學上ノ不能問題**トイフノハ此ノ規矩ノ範圍內デ不能トイフコトデアル。

例ニ於ケル角ノ二等分デハワザワザ「定規トコンパストノミヲ用ヒテ」トシテ注意ヲセシムルヤウニシタ。此ノ斷リ書ハドノ作圖題ニモツイテ居ルモノデアルカラ特ニ書添ヘルニハ及バナイノデアル。

注意 本作圖法ヲ繰返スコトニヨツテ角ノ 4, 8,……2ⁿ 等分スルコトガ出來ル。

基本的作圖問題　作圖題ノ一般論ハ第四篇ノ第二章ニ於テ教授スルコトニシテ居ル。即作圖題ノ解法トシテハ解析，作圖，証明，吟味ノ四階段ヲ踏ムベキデアル。然ルニコヽニ取リ扱フ問題ハ極メテ根元ノ問題デ **定理ノ直接應用問題** トモイフベキモノデ解析ヲスルマデモナイ簡單ナ問題デアル。

問一　圖形ハ全ク重ナリ，角ノ二等分線ハ角ノ對稱軸デアル。

問二　弧CF, DF ノ重ナリ合フコトニヨツテDC ガFニ於テ二等分サレルコトヲ明示スルノデアル。

問　　題

17　角ノ二等分ノ練習。

18　二等邊三角形ノ作圖ト等分ノ練習。

(17)　角ノ四等分ノ練習。

(18)　△ABDト△ACE トノ合同ナルコトヲ証セヨ。
又△BCDト△CBE トハ如何。

定規ト「コンパス」トノ使用

作圖題ハ既習ノ定理ヲ實地ニ應用スルモノデ生徒ニハ極メテ興味深イモノデアル。ソレ故本書デハ出來得ル限リ作圖題ヲ早クヨリ取リ入レソノ活用ヲ充分ナラシメルヤウニ計ツタノデアル。問題ノ証明ヲ明確ナラシメ作圖題ノ性質ヲ明カナラシムルニハ作圖法ヲ正確ニシナクテハナラナイ。ソレガタメニハ必ズ定規ト「コンパス」トヲ使用セシメナクテハナラナイ。時トシテハ是等ノ使用ヲ煩瑣ナルコトト考ヘテ教師ガ「フリーハンド」即器具ヲ用ヒズニ如何ハシイ圖ヲ書イテスマスコトガアル。之ハヤガテ生徒ニモ感染シテヨクナイ。幾何學ノ規矩ヲ無視シ，幾何學ノ眞精神ニ背クモノデアルト思フ。教授用「コンパス」トシテハ余ハ自讃的デハアルガ **曾田式コンパス** ヲ御勸メスル。コノ「コンパス」ハ圓心脚ガ「ゴム」トナツテ居テ圓ヲ書クトキ≡ラナイ板ニ傷ヲ付ケナイ。且兩脚ガ直線定規トナツテ居テ一器デ定規ト「コンパス」トヲ兼ネテ居ルカラ教授中ニ幾ツカノ道具ヲ持チカヘル面倒ガナイ。

20　基本的作圖題

作圖題　與角ヲ移スコト。

問題ヲ一般的ニ述ベズ，特述的ニシテアル。初學者ニハコノ方ガ理解シ易ク又一般的性質ヲ帶バシメルコトガ出來ル。

問　Rヲ中心トシテ圓ヲ書クベキノニ只弧ノ一部分ヲ畫イテアル。之ハ全體ヲ書クベキデアル。カクスルトキハEヲ中心トシテ書ク圓ト直線RQト上下對稱ノ二點ニ於テ交リ RQト∠AOB ニ等シキ角ヲナス直線ハ上下ニ各一本ヲ得。又 RP ノ部分ヲ一邊トシテ作ル角ヲモ考ヘルトキハ四本ト考ヘラレルモコレハ前ノモノト一直線ヲナス故結局ハ2本デアル。

問　　題

一般的ノ條件ノ場合ニハ **吟味** ガ伴ウテ複雜ニナルカラ限定シテ與ヘ吟味ヲ省クコトガ出來ルヤウニシタ。

19　三邊ヲ知ツテ三角形ヲ作ルコト，及角ヲ移スコトノ練習。

20　一邊ト兩端ノ角ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコトヲナサシム。47頁ノ定理ト對照セシム。

21　任意ノ角ヲナスl, mニ等シイ線分ヲ引キ，ソノ端トソノ端ヲ中心トシ夫々p, nニ等シイ半徑ノ圓ヲ畫イタ交點トヲ結ブ。
四邊ノ長サトソノ順序ノミヲ與ヘラレタ四邊形ノ形ハ定ラナイコト。即カヽル四邊形ハ無數ニアルコトヲ知ラシム。

(19)　二角ヲ移スコトノ練習。

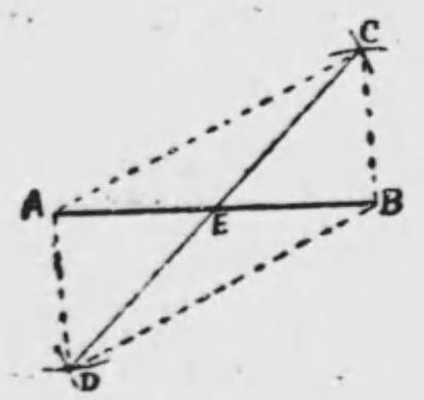
(20)　(1)　BCニ等シイ線分ノ兩端ニ∠B, ∠C ニ等シキ角ヲナス直線ヲ引キ之ヲ BA, CDニ等シク切ツテソノ端ヲ結ブ。
(2)　AB BC 及ソノ夾角ヲ移シ，ソノ端ヨリAD, CD ニ等シキ半徑ノ圓ヲ畫キソノ交點ト端ト結ブ。

(21)　四邊ト一角トヲ知レバ四邊形ノ形ハ定マル。

作圖題　定線分ノ垂直二等分線ヲ作ルコト。

與線分ヲ垂直ニ二等分スルコトハ幾何學ニテ頻繁ニ用フルコトデアル。證明ニ於テ目分量デ線分ノ中點ヲ求ムルコトハ差支ハナイガ矢張リ「コンパス」ヲ使用シテ二等分シタ方ガ生徒ニモ正確ノ觀念ヲ與ヘテヨイ。

注意　1　「コンパス」デ線分ノ中點ヲ求ムル際ニ急イデスル場合ニ「コンパス」ノ中心脚ヲ線分ノ中點ト思フトコロニ置キ他ノ脚端ヲソノ線分ノ兩端ニ來ルカ否カヲ見テ來ナイトキニハ又ヤリ直スト イフヤウナコトヲスルコトガアルガ之レハ實ニ迂遠ナコトデ正式ノ作圖ヲシタ方ガ早イ。又目分量デスルニシテモA, Bヲ中心トシテ等半徑ノ圓ヲ畫キ之ガABト交ル點ヲ求メソノ中點ヲ求ムレバ比較的正確デアル。



2　只與線分ノ中點ヲ求ムルダケナラバ圖ノ如クシテモヨイノデアル。作圖ノ手順ガ同一デ證明ガ少シ複雜ニナル。

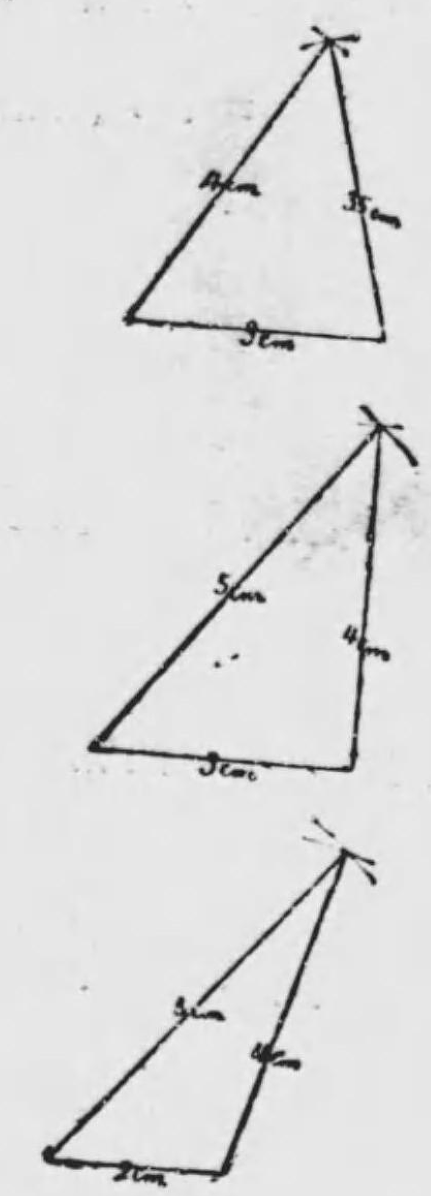
3　與線分ガ甚ダ長クテソノ半分ガ「コンパス」ノ最大ノ開キヨリ大ナルトキハ先ヅA, Bヨリ等距離ニAA′, BB′ヲ一回又ハ數回截リ取リ殘リノ部分ヲ二等分スレバヨイ。

4　本題ノ方法ヲ重用スルコトニヨッテ與線分ヲ2^n等分スルコトガ出來ル。

5　與線分ノ中點ヲ求ムルコトハ又與線分ヲ直徑トスル圓ヲ畫クコトヲ含マレルコトヲ考ヘネバナラヌ。圓ヲ畫クニハ中心ト半徑トヲ知ルコトガ必要ニシテ充分ナ要件デアル。

問　　題

22

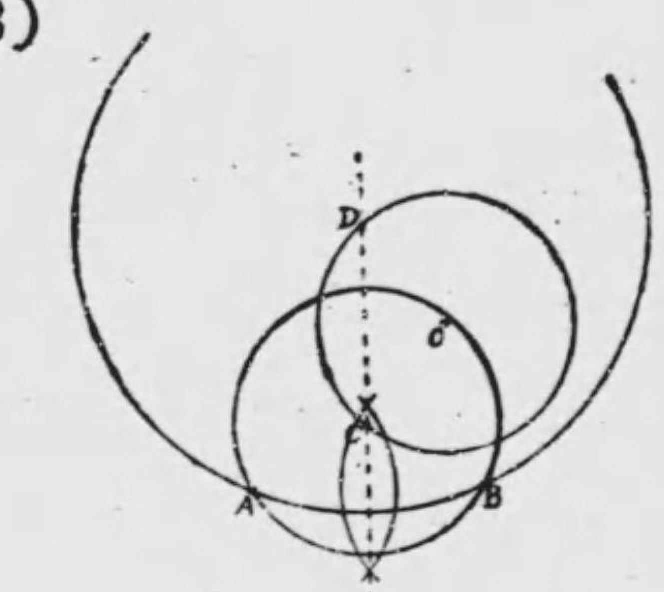


銳角，直角，鈍角ノ三角形ニツイテソノ各邊ノ垂直二等分線ガ一點ニ會スルコトヲ研究セシム。證明ハ出來ナイガ一點ニ會スルカ否カニヨッテ圖ノ正粗ガ知ラレル。（圖ハ$\frac{1}{2}$ノ縮圖）

23　A, B二點ヨリ等距離ニ在ル點ガ多ク集ツタ線ハ何カ。50頁4及ビ56頁7ヨリ考ヘヨ。

（22）　單ニ線分ノ二等分，四等分ヲナサシメルヨリモ趣味ガアル問題デアル。
小圓ハ直角ニ交ル半徑ノ中點ヲ中心トシテ居ル。

（23）



求ムル圓ノ中心ハA, Bヨリ如何ナル距離ニ在ルカ。
56頁問題7ヨリABノ垂直二等分線ノ必要ヲ考ヘシム。
求ムル圓ハ幾ツアルカ。

作圖題　與直線上ノ與點ニ垂線ヲ立テルコト。

此作圖題ハ∠AOBノ二等分線ヲ求ムルト同一ナルコト從テ此ノ垂線ガ唯一本ナルコトハ與角ノ二等分線ノ唯一本ナルコトト同一ナルコトヲ注意セシム。

問　題

24 135°ハ2R∟ノ何分ノ幾ツカ。 | **(24)** 22°30′ト直角トノ關係如何。

作圖題　與直線外ノ與點ヨリ之ニ垂線ヲ立テルコト。

點A, BハLM上ノ何處デモ可イ。A, BガPP′ノ兩側ニアルカ同側ニアルカノ二通トナルモ證明ハ同一デアル。

備考 (一) 尙次頁ノ(25)及ビ圓ノ性質ヲ用フル149頁(14)ナドモ垂線ノ作圖問題デアル。

(二) 作圖題ニ於テハ直線定規ト「コンパス」トノミヲ使用スルコトヲ許サレテ居ルノダカラ直角定規ノ直角ノ部ヲ用ヒテ直角ヲ作圖スルコトハ許サレテ居ナイ筈デアル。シカシ既ニ作圖法ヲ知ツタ以上ハ直角定規ヲ代用シテモ差支ハナイ。加フルニ作圖題ニ於テハ垂線ノ作圖ノ如キ基本ノ作圖法ヲ證明スル必要ノ起ルコトハナク，殊ニ多クノ垂線ヲ引クトキ一々正式ノ作圖ヲシテハ誠ニ繁雜デアルカラデアル。

注意　生徒ハ既知ノ作圖等ヲ如何ニ云ヒ表ハスカニ苦シムモノデアルカラコヽニソノ云ヒ方ヲ示シタノデアル。

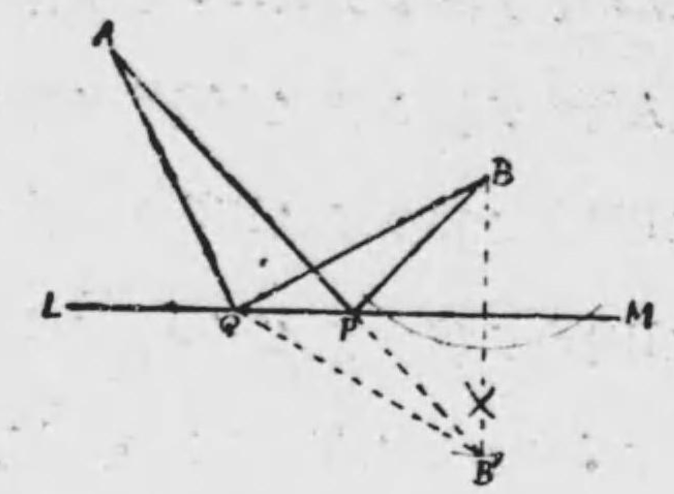
問　題

25 Cノ對稱點ハLM上ノ點ヨリ如何ナル距離ニアルカ。 | **(25)** ADハ∠CABノ二等分線デ又LMノ垂線。

26 Cヨリ入リタル光ガ鏡ノ面ニ投ズル點ニ於テABニ垂線ヲ立テヨ。

反射光線ト垂線トハ如何ナル角ヲナスカ。

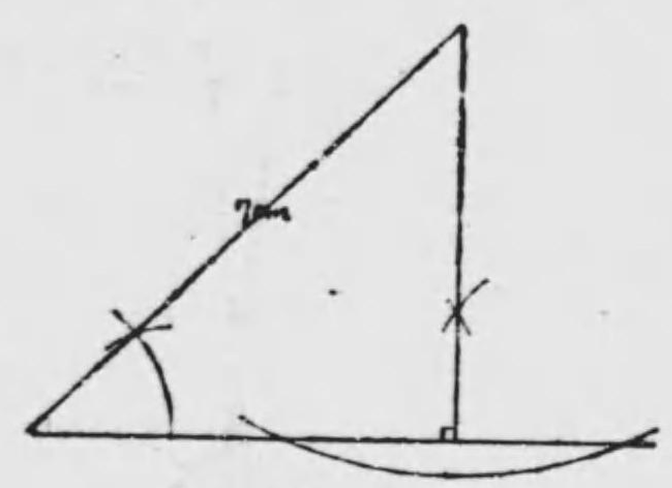
(26) LMニ關スルBノ對稱點ハ如何ニシテ作ルカ。



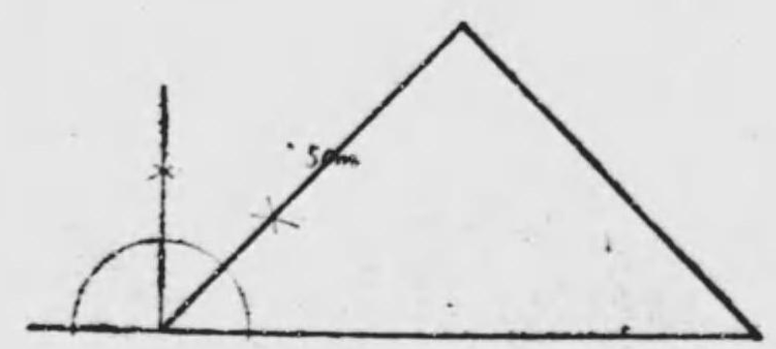
27 入ル光ト反射スル光トハ垂線ト如何ナル角ヲナスカ。

(27) BPトB′Pトハ如何。
BQトB′Qトハ如何。
AP+BPトAB′トハ，
AQ+BQトAQ+B′Qトハ，
AB′ト(AQ+B′Q)トハ何レガ大カ。

28

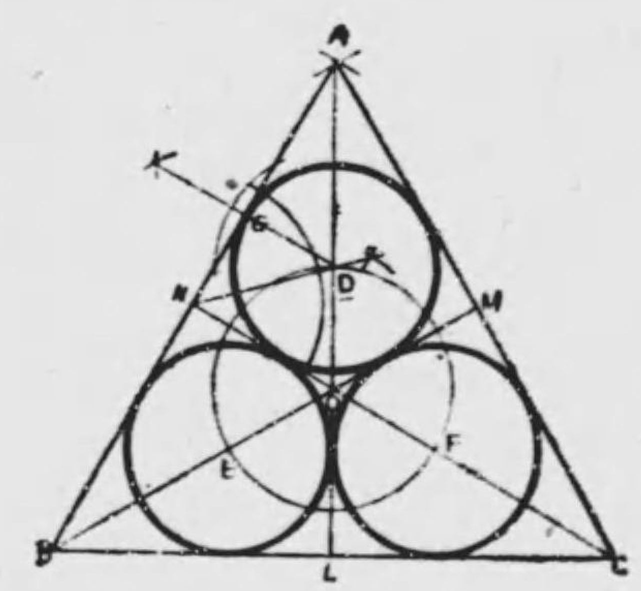


(28)



29 種々ナ基本的作圖ノ練習トシテ課スルノデ正五邊形ヲ畫クコトハ興味ガアルカラコヽニ揭ゲタ。勿論證明ハスベキデハナイ。

(29) 種々ナ基本的作圖ノ練習ノタメニ課ス。



30

∠APQ ヲ移シテ∠A′PQ ヲ作レ。

∠AQP ヲ移シテ∠A′QP ヲ作レ。

∠BPQ ヲ移シテ∠B′PQ ヲ作レ。

∠BQP ヲ移シテ∠B′QP ヲ作レ。

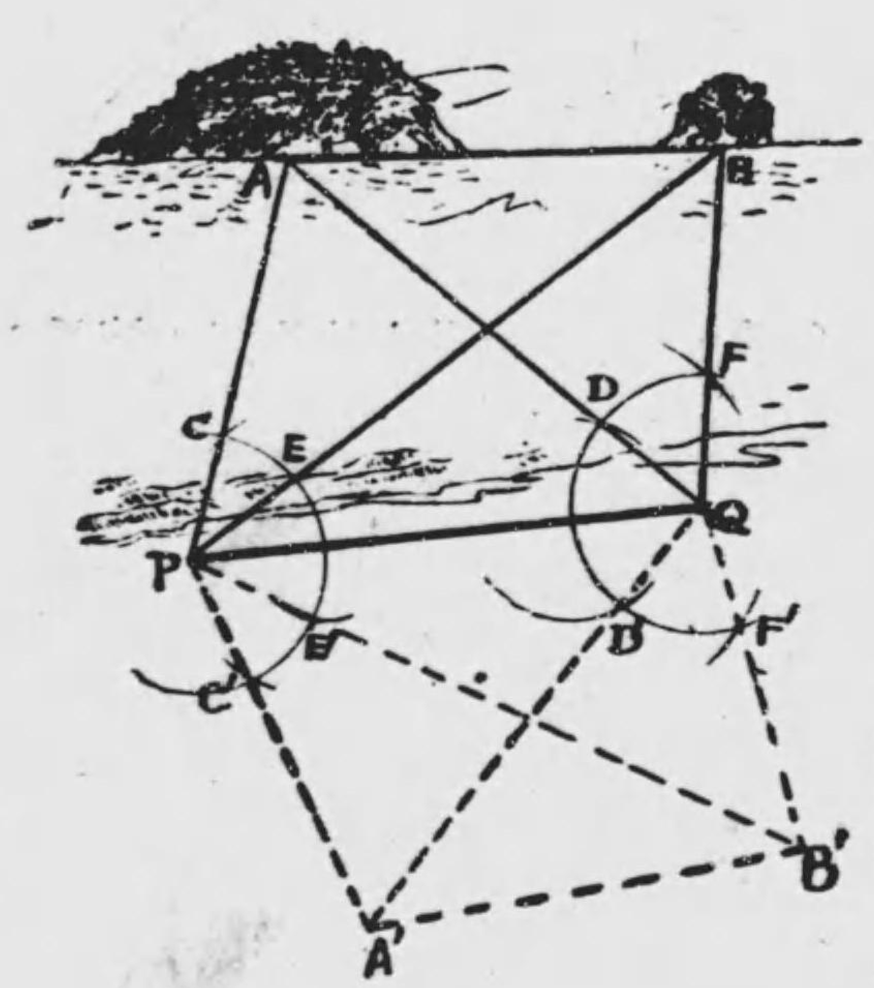
△APQ ト △A′PQ トハ如何。

△BPQ ト △B′PQ トハ如何。

∠APB ト ∠A′PB トハ如何。

△APB ト △A′PB トハ如何。

AB ト A′B′ トハ等シイカ。



(30)

AB ト A′B′ トガ等イヤウニスルニハ △ABC ト△ A′B′C トガ如何ニナレバヨイカ。

AC ト A′C トハ如何ナルベキカ。

BC ト B C トハ如何ナルベキカ

△ABC≡△A′B′C

故ニ　AB＝A′B′

又 BC＝A′C, A′C＝BC ニテハ如何。

第三章　平行線

21　平行線タルベキ二直線

定義　普通平行線ノ定義トシテハ

同一平面上ニ在リテ双方ニ如何程延長ストモ決シテ相交ルコトナキ二直線ヲ平行線トイフ。

Lines that lie in the same plane but do not meet, however far produced (in both directions), are called parallel lines.

トアツテ多クノ本ニハ双方ニ如何程延長ストモトイフ句ガ付ケテアル，併シ直線トイヘバ双方ニ無限ニ延ビタモノヲイフコトハ直線ノ定義デ既ニ延ベタコトデアルカラコノ斷リハ餘分ナ語デアル。ソレ故本書ニハ之ヲ省イタ。

以前我校デ上記ノ如キ定義ヲ敎ヘテ居ル際ニ一生徒ガ「圖ノ如クナツテ居レバ双方ニ如何程延長シテモ交ラナイデハアリマセンカ」ト質問シタ。ソレ以來上記ノ定義ガ却テ生徒ヲ迷ハスモノナルコトヲ知ツテ本書ノ如ク改正シタ。

問一　同一平面上ニ在リテトイフ語ノ必要ヲ感ゼシメルタメニ此ノ問ヲ置イタ。平面幾何デアルカラ省イテモ差支ナイヤウデアルガ立體幾何ニ於テ空間ニ於ケル二直線相互ノ關係ノトキ同一平面トイフコトヲ考ヘル必要ガアルカラ特ニ印象ヲ深クシテ置ク必要ガアル。

問二　「レンズ」ノ焦點カラ出ヅル光ハ完全ナ平行線デアル。重錘ニヨル糸ハ地球ノ中心ニ向フ故實際ハ平行線トイヘナイ。平行線ト見做スコトガ出來ル。

平行線ノ公理 コレハ普通ニ Playfair「プレーフエーア」ノ公理トイハレテ居ルモノデアル。

問三 AB∥CD, AB∥EF ナラバ平行線ノ公理ニ反スルコトヲ考ヘシム。

問四 交ラズトスレバ如何ニナルカヲ考ヘシム。

同一平面上ニ於ケル二直線ガ

「相交ラズ」トイフコトハ「平行ナリ」トイフコトデアル。

空間ニ於ケル二直線ガ

「相交ラズ」トイフコトハ「平行ナルカ」又「平行ナラズシテ出會ハザルカ」デアル。

問五 Oヲ通ル直線ヲOノ周リヲ時計ノ針ト反對ノ方向ニ廻轉スルトキハソノ直線トABトノ交點ハ右方ニ遠ザカリ終ニハ無窮遠トナリテソノ交點ハ消失シ，其直線ハABト平行トナリ，尙廻轉スレバソノ交點ハ左方ニ現レ次第ニ近ヅキ來リ直線ガ元ノ位置ニ來レバ交點モ元ノ位置ニ來ル。

「プレーフエーア」 John Playfair (1748—1819) ハ「ダンディー」ニ近イ「ベンブイー」ニ生レタ。「スコツトランド」ノ地質學者デ又數學者デアル。「リツフ」及「ベンブイー」ニ於テ父ノ業ヲ繼イデ牧師トナツタ。「エヂインバラ」大學デ「アダムフエルグーソン」ト共ニ數學ノ敎授トナリ後ニ物理學敎授トナツタ。彼ハ最モ地理學ニ興味ヲ有シテ居ツタ。彼ノ著書ニハ

The Elements of Geometry,

Illustration of the Hutton Theory of the Earth,

Outlines of Natural Philosophy 等ガアル。

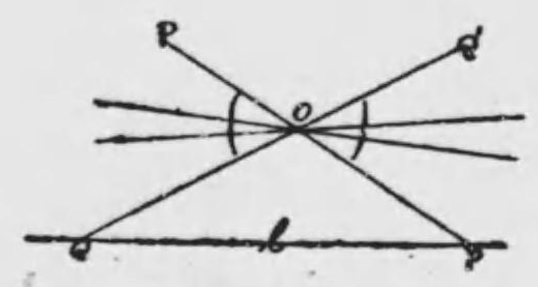
非ユークリツト幾何學ニ就テ Non-Euclidian Geometry

平行線ノ公理ハ「ユークリツド」ノ第五公理

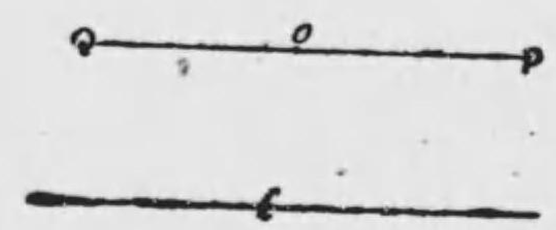
モシ一ツノ直線ガ他ノ二ツノ直線ト出會ヒ其ノ同ジ側ニ在ル二ツノ內角ノ和ガ二直角ヨリ小ナルトキハ此ノ二直線ヲ延長スレバソノ和ガ二直角ヨリ小ナル方ノ側ニ於テ交ルベシ。

トイフノデアツテ一見定理ノ如クデアルカラ他ノ多クノ學者ガ或ハ之ヲ證明セントシ，或ハ之ニ代ルベキ公理ヲ發見セントシタガ遂ニ適當ナモノヲ發見スルニ到ラナカツタ。此ノ公理ハ實ニ平面上ニ於ケル二直線ノ關係ヲ示スモノデアツテソノ公理ノ如何ニヨツテ幾何學上重大ナ變化ヲ來スモノデアル。

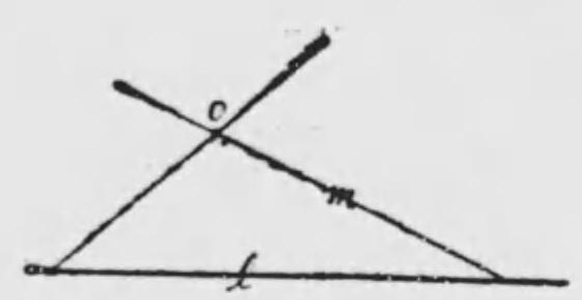
問五デ考ヘタ如ク一直線ノ外ノ一點ヲ通ル直線ガソノ直線ト交ル點ノ移動ヲ考フルニ三通アル。



(1) 直線mガOノ周リヲ廻轉スルトキP點ガ右方ニ無窮遠ニ行ツタトキノ直線PP′ト左方ニ無窮遠ニ行ツタトキノQQ′トハ或角ヲナスト考ヘル仕方デアツテPP′,QQ′ガlト交ル直線ノ極限ノ位置ニ在ルモノ故∠POQ內ニアル直線ハスベテ直線lト交ラズ。卽チlト平行ナル直線ハ無數ニアル。



(2) 極限ニ在ル二直線PP′トQQ′トガ一致スル場合デアル。コレハ直線l外ノ點Oヲ過リlニ平行ナ直線ハ只一本ト考ヘル方法デアル。



(3) 尙一ツハ直線mガ點Oノ周リヲ廻轉スルトキ交點Pガ右方ニ無窮遠ニ行ツタ場合更ニ此ノ直線ヲ廻轉スレバソノ交點ハ左方ヨリ現レ來ルト考ヘル仕方デ此ノ場合ハlトmト交ラナイコトハナイ。卽チ直線

外ノ定點ヲ通ツテ之ニ平行ナル直線ハ一本モナイト考ヘルノデアル。

(2) ハ普通吾々ノ考ヘル幾何學所謂「ユークリツド」幾何學デアル。

(1) 及 (3) ノ假定ヲ基トシテ組織シタ幾何學ガ卽非「ユークリツド」幾何學デアツテ勿論吾人ノ經驗ヲ超越シタモノデアル。

(1) ハ露國ノ數學者 Nicholaus Lobatchewsky「ロバチウスキー」(1793—1856) ガ其著「完全ナル平行論ヲ有スル新幾何學初步」中ニ於テ論ジ彼ガ虛數幾何學ト呼ブトコロノモノデアル。又「ハンガリー」人 Johann Bolyai「ボリアイ」(1802—1860) モ絕對空間學ト唱ヘテ同樣ナ論ヲナシタ。是等ノ人ノ論ズルトコロヲ以テスレバ

1 三角形ノ內角ノ和ハ二直角ヨリ小ナリ。

2 三角形ノ面積ハ三角形ノ內角ノ和ト 180° トノ差ニ比例スル。

3 同一直線ニ異ル點ニ於テ立テタ二垂線ハ次第ニ擴ル。

4 相似形ハナイ。

トイフ定理ヲ何等矛盾モナク導キ出スコトガ出來ル。

(3) ハ獨人 Riemann「リーマン」(1826—1866) ガ其著「幾何學ノ根柢ニ橫ハレル假設」中ニ於テ論ジタモノデソノ假定ヲ以テ進ムトキハ矢張リ矛盾モナクシテ

1 三角形ノ內角ノ和ハ二直角ヨリ大ナリ。

2 三角形ノ面積ハソノ內角ノ和ヨリ 180° ヲ減ジタル殘ニ比例スル。

3 同一直線ニ異ル點ニ於テ立テタ二垂線ハ次第ニ收斂スル。

4 相似形ハナイ。

等ノ定理ヲ導キ出スコトガ出來ル。

非「ユークリツト」幾何學ノ理論ハナカナカ高遠デアツテ之ヲ簡易ニ書キ盡スコトハ出來ナイ。近來此種ノ著書モ多イコトデアルカラソレ等ニ依ツテ特ニ研究サレンコトヲ望ム。

定義 l ヲ截線トイフコトハ敎ヘナイコトニシタ。餘リ用ヒナイシ又圓ノ割線ト混同スル懼モアルカラ。

外　角	Exterior angles	內　角	Interior angles
同傍內角	Interior angles on the same side of the transversal	同傍外　角	(之ハ敎ヘナイデヨイ)
同位角	Corresponding angles	錯　角	Alternate angles
截　線	Transversal		

$\angle a$ ト $\angle g$, $\angle b$ ト $\angle h$ ハ錯外角デ, $\angle c$ ト $\angle e$, $\angle d$ ト $\angle f$ ト ハ錯內角デアルベキデアルガ內角ノ錯角ノミヲ錯角ト呼ンデ居ル。

問六 對頂角ヲ考ヘシム。

問七 交點ノ周リノ角ヲ考ヘシム。

問八 同位角, 錯角ヲ考ヘルコトノ練習。

問九 同位角ノ相等シイトキハ他ノ角ノ組ノ間ニ如何ナル關係ガアルカヲ考ヘシム。

問十 錯角ノ相等シイコトヨリ起ル他ノ組ノ關係ヲ考ヘシム。

注意 錯角, 同位角等ノ上ニ揭ゲタ角ノ組ノ名ハ任意ノ二直線ニ一直線ガ交ツテ出來タ角ニツイテ付ケタ名デアル。然ルニ生徒ハ此ノ二直線ヲ平行線ダト考ヘ

「錯角ナル故相等シ。」

「同傍內角ナル故補角ヲナス。」トイツテ

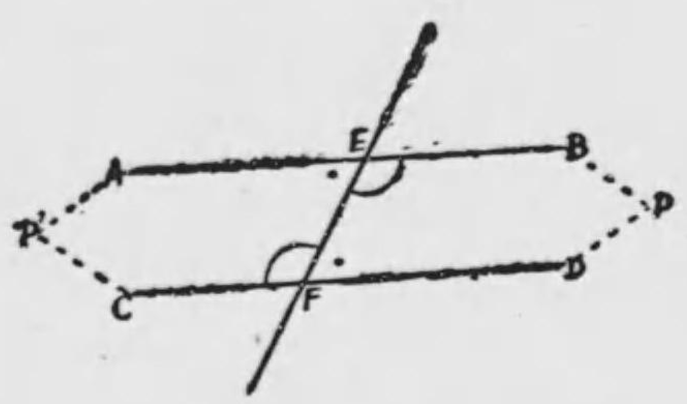
一直線ノ交ル二直線ガ如何ナル場合ニモ成立ツ如ク考ヘルコトガアル。必ズ

「平行線ニヨル」 ノ語ヲツケサセルヤウニシタイ。

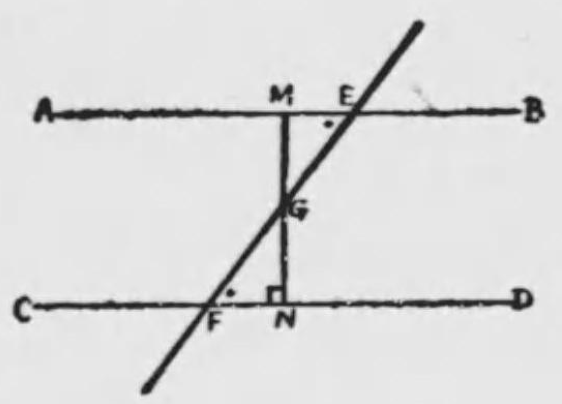
定理 一直線ガ二直線ニ交リテナス錯角相等シケレバソノ二直線ハ平行ナリ。

平行線ノ部ニ於テハソノ證明ニ間接法ノ入ツテ來ルノヲ免レルコトガ出來ナイノミナラズ又間接法ガ多イノデアル。間接的ノ證明ハ初學者ニハ理解シ悪イノデ出來得ル限リ之レヲ避ケナクテハナラナイ。平行線ノ章ヲ三角形ノ後ニ廻シタノモ之レガ一ツノ理由デアルコトハ前(42頁)ニモ述ベタ。本書ガ此ノ定理ノ證明ニトツタ方法モ間接法ヲ少クスルタメニトツタモノデアル。次ニ他ノ證明法ヲ述ベヨウ。

(一) AB,CDガ平行ナラズトスレバ何レカ一方例ヘバ右方(P)ニ於テ交ルトス。今圖形ヲ180°廻轉シEヲF,FヲEニ重ヌレバEB,FDハソレゾレFC,EAニ重ナル故EA,FOモ左方(P′)ニ於テ交ル。故ニ二點ヲ通ツテ二直線ガアルコトトナリ不合理トナル。故ニAB,CDハ決シテ出會フコトハナイ。即チ平行デアル。



(二) EFノ中點ヲGトシ,GヨリCDニ垂線GNヲ下セ。EMヲFNニ等シクEFニ對シNト反對ノ側ニトリ。GMヲ結ブ



$\triangle GNF \equiv \triangle GEM$

$\therefore\ \angle FGN = \angle EGM,$

$\angle GNF = \angle GME$

即GN,GMハ一直線ヲナシ

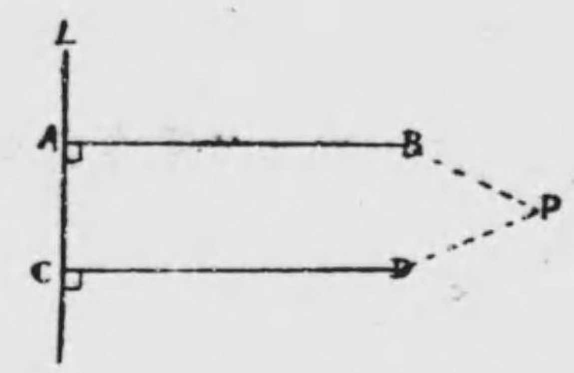
AB,CDハ同一直線ニ垂直ナル故

$AB /\!/ CD$

(一)ノ圖形ノ廻轉ニヨル證明ハ複雑デアツテ生徒ニ理解困難デアル。

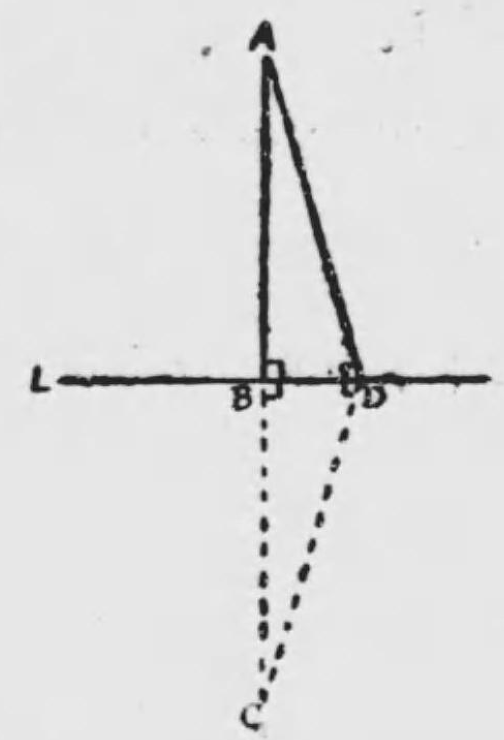
(二)ハ直接的證明デアツテ生徒ニハ理解シ易イケレドモ此定理ノ豫備トシテ

(*a*) 同一直線ニ垂直ナル二直線ハ互ニ平行ナリ。



AC⊥AB,AC⊥CDニシテAB,CDガ一點ニ於テ交ルトスレバ直線AC外ノ一點ヨリ二本ノ垂線ヲ引キ得ルコトトナリ不合理デアル。

(*b*) 一直線外ノ一點ヨリ唯一本ノ垂線ヲ引クコトヲ得。



AB⊥L, ABノ外ニ尚垂線ガアリトシ之レヲADトシABヲ延長シテBCヲABニ等シクトリCDヲ結メバ

$\triangle ABD \equiv \triangle BCD$

故ニ $\angle ADB = \angle CDB = R.\angle$ 故ニ AD, DCハ一直線トナル。

A,C二點ヲ通ツテハ唯一本ノ直線ガアルバカリデアルカラADハ垂線トナルコトハ出來ナイ。

トイフヤウニ二ツノ間接的ノ證明ヲシナクテハナラナイ。本書ノ證明ハ(二)ノ(*b*)ダケニ相當スル故餘程簡易ナワケデアル。

系一 何レモ錯角ノ等シイ場合ニ歸スルコトガ出來ル。

二直線ニ一直線ガ交リテソノ二直線ノ平行ナコトヲ證明スル場合ニ角ノ間ニ三種類ノ關係ガアルガ普通ハ錯角カ同位角ノ相等シイ場合ニ歸スルコトガ多イ。

問十一 定規ヲ以テ平行線ヲ引キ得ル理ヲ考ヘシム。

問十二 錯覺ニヨリ行平線ト見エザルモノヲ實驗ニヨリ角ヲ測ツテ平行ナルコトヲ覺ラシム。AB,CDノ間ヲ細キ紙デ被ツタナラバ平行ニ見エル。

系二 系三 本定理ノ證明法ニヨツタタメ此二定理ガ系ト考ヘラレルヤウニナツタノデアル。本書デ

系二ノ逆 二平行線ノ一ツニ垂直ナル直線ハ又他ノ一ツニモ垂直ナリ。

ガ省イテアル。82頁ノ定理ノ系トシテ課セラレタイ。

22 平行線ニヨル角

定理 一ツノ直線ガ平行線ニ交リテナス錯角ハ相等シ。

此ノ定理ハ78頁ノ定理ノ逆デアツテ直接ニ證明スル方法ガナイノデ止ムナク間接法ニヨラナクテハナラナイ。此ノ證明ノ後ノ部ノ

「同一點Fヲ通リABニ平行ナル二直線アルコトトナリテ不合理ナリ。」(歸謬法)ハ

「同一點Fヲ通リABニ平行ナル直線ハ唯一本アルノミデアル。ソレ故MNヲABニ平行デアルトスレバCDハAB ニ平行デナイ。コレハ假設ニ戻ル。(間接法)

トイフヤウニ證明スルコトガ出來ル。

問一 80頁ト對照セシメルガヨイ。

系(1),(2) 錯角ノ等シイコトカラ當然導出サレルコトデアル。本定理ノヤウニ直線MNヲ引カシテ證明セシメ間接法ノ證明ノ練習ヲスルモヨイ。

圖ニ於ケル角ノ一ツニ度數ヲ與ヘテ他ノ角ノ大サヲイハシムル練習モスルガヨイ。例ヘバ $\angle a=60^\circ$ ナラバ $\angle c'$ ハ何度カ。

23 直接證明法ト間接證明法

直接法ハ既ニ充分理解シタコト思フ。

間接法ニツイテハコノ部デ說明スルノガ最モ適當ダト思フ。又ドウシテモ說明シナクテハナラナイ場所デアル。既ニ37頁ニ於テ述ベタ如ク

歸謬法ハ公理又ハ既ニ眞ナルコトヲ證シタ定理ニ戻ルトスル方デ間接法ハ證明スベキ定理ノ對偶ヲ證明シ假設ニ戻ルトスル方法デアルガ共ニ

1 終結ヲ否定スルコトヨリ論ヲ始メ

2 不合理ニ導キ

3 以テソノ定理ノ眞ナルコトヲ斷定スルコト

ニ於テ一致シテ居ルノデ歸謬法ト間接法トヲ同一ノ方法ト見テ別ニ區別シテ敎ヘナイノデアル。ソレデ一向差支ハナイト思フ。

間接法ハ幾何學ニ於ケル證明ニ用フルバカリデナク吾々ノ實社會ニ於テモ屢用フルモノデアル。或事ノ正シイコトヲ直接ニ辯明セズシテ之ト反對ノコトヲ考フレバ矛盾シタ結果ヲ來スカラソノ事ハ正シイト斷定スルコトガ之デアル。

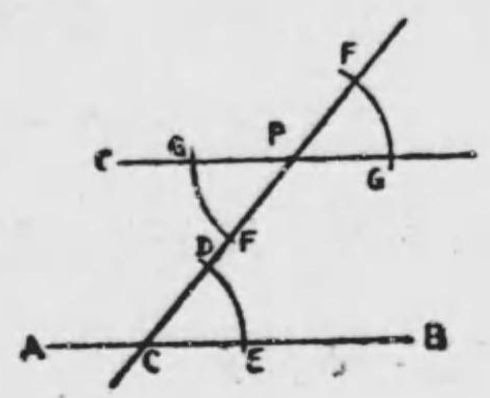
定理 同一直線ニ平行ナル二直線ニ互ニ平行ナリ。

直接法ト間接法トヲ比較シテ揭ゲソノ相違ヲ明ニセントスルノデアル。

此ノ定理ニ附隨シテ

平行ナル二直線ノ各ニ平行ナル二直線ハ又互ニ平行ナリ。ナドモ考ヘシメタイ。

作圖題　錯角，同位角ノ何レヲ等シクスルヤウニシテモヨイ。



本書ノ如クスルナラバCPハ證明ノトキ必要デアルガC,Pヲ中心トシテ畫ク圓ノ半徑ガCPト違ツテ居クラバ先ヅCPヲ引カナクテハナラナイ。

問　　題

31 $\angle 3$ ト等シキ角ハドレカ。

$\angle 3$ ト補角ヲナス角ハドレカ。

(31) 錯角　$\angle b=\angle g,\ f=\angle c,$

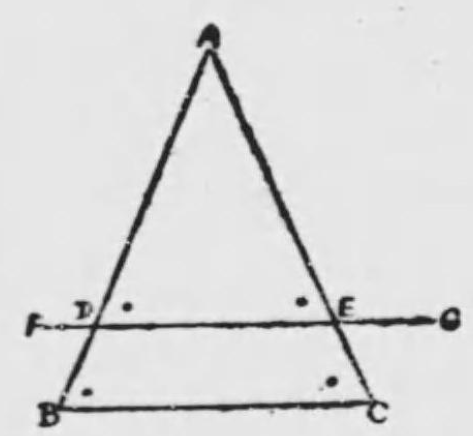
$\angle l=\angle r,\ \angle q=\angle m,\ \angle e=\angle l$

$\angle f=\angle k,\ \angle g=\angle n,\ \angle h=\angle m$

同位角　$\angle a=\angle c,\ \angle b=d$　等

$\angle a=\angle k,\ \angle e=\angle p$　等

32



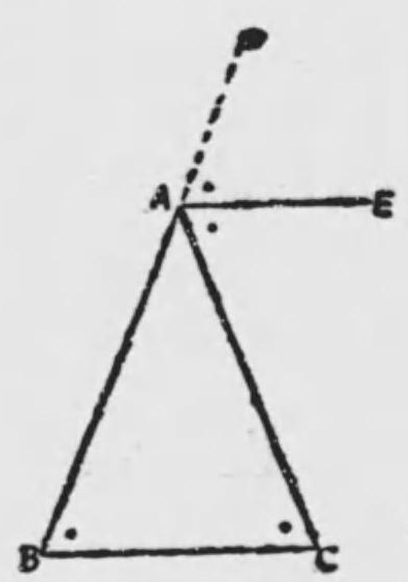
二等邊三角形ニ於テハ角ノ關係如何。

$\angle$B ニ等シキ角ハ如何。

$\angle$C ニ等シキ角ハ如何。

又$\angle$ADFト$\angle$AEGトハ如何。

(32)



$\angle$Bト等シイ角ハドレカ。

$\angle$Cト等シイ角ハドレカ。

外角DACト$\angle$B,$\angle$Cトノ關係如何。

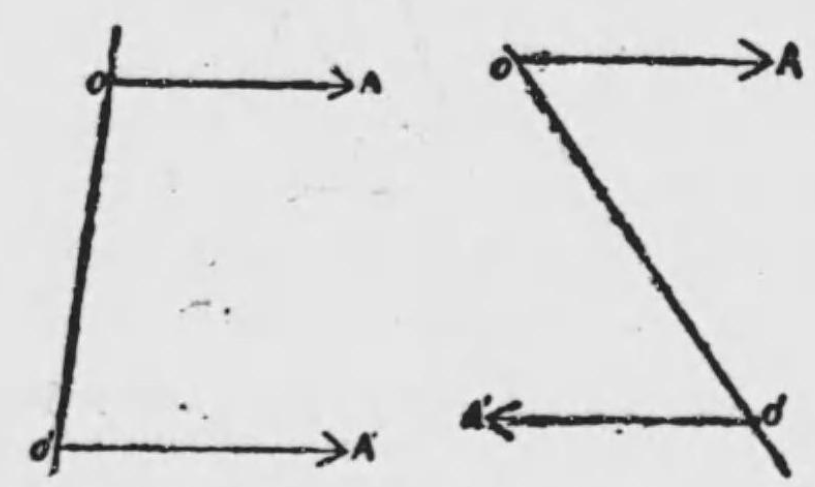
24　定理ノ逆

既ニ定理及ビソノ逆ノ例ガ出タノデソノ説明スルニモ都合ガヨクナツタ。

幾何學上ノミナラズ實社會ノ例ヲトツテモ或事柄ノ眞ナルトキニソノ逆ノ眞デナイヤウナ場合ハ隨分アル。生徒ニイハシメテソノ眞僞ヲタシカメルガヨイ。

問　　題

33 此問題デハ直線ノ方向トイフコトヲ知ル必要ガアル。

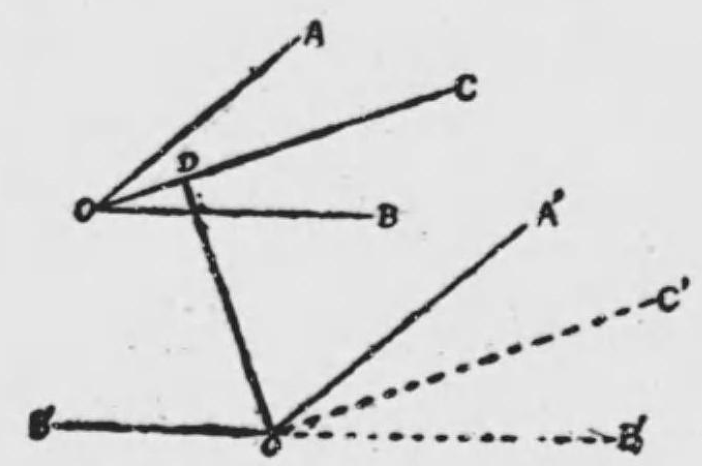


OO′ヲ結ンダ時ニ OA,OA′ ガ直線OO′ノ同側ニ在レバ同方向デ兩側ニ在レバ異方向デアル。角ノ邊ヲ延長シ交ラシメテ見ルガヨイ。

34（1）$\angle$MLPト$\angle$OPLトノ和ハ如何。

（2）又ハ LM,PO ガ平行ナラバ OB,OA ハ如何ニナルカヲ考へ，LM, PO ハ平行ナラザルコトヲイへ。

(33) 角ノ邊及ビ二等分線ヲ延長シ交ハラシメテ證セヨ。



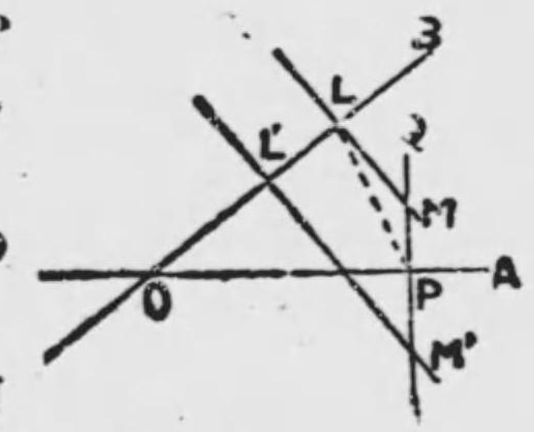
OCトOC′トハ如何。

ODトOC′トハ如何。

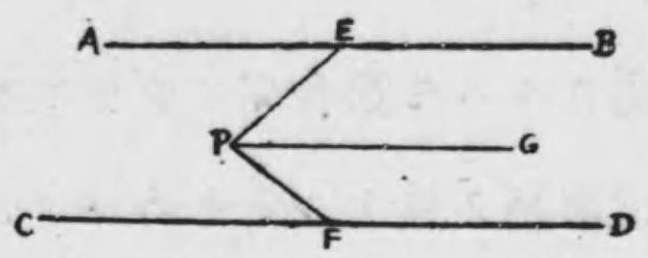
ODトOCトハ如何。

34（1）$\angle$MLPト$\angle$OPLトノ和ハ如何。

（2）又ハLM,POガ平行ナラバOB,OA ハ如何ニナルカヲ考へ，LM,POハ平行ナラザルコトヲイへ。



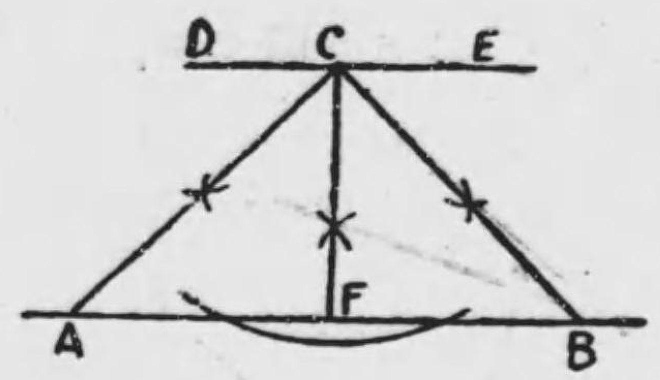
35



PヨリABニ平行ナル直線ヲ引ケバPGトCDトハ如何。

相等シキ角ヲ考ヘヨ。

36



ABト45°ノ角ヲナス直線ハCヲ通リABノ平行線トハ何度ノ角ヲナスカ。

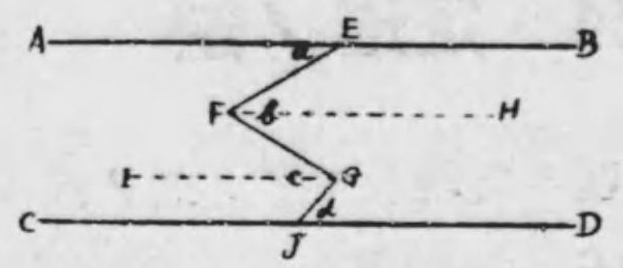
CF⊥ABトスレバCA,CBハCFト何度ノ角ヲナスカ。

37

AC,BDノ等シキタメニハ如何ナルコトガ必要カ。

∠Aト∠Bトハ如何。

(35)



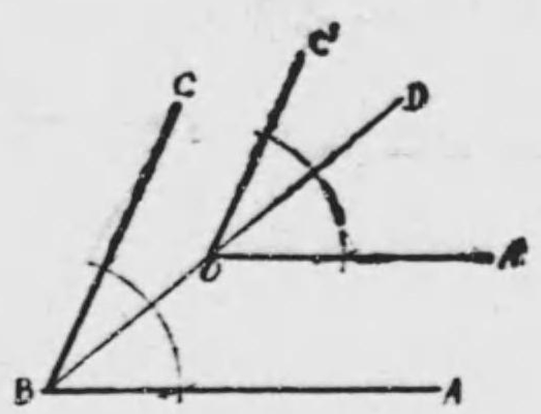
FH,GIヲABニ平行ニ引ケバFH,GIトCDトハ如何。

$\angle b-\angle a$ノ大サハ何程カ。

$\angle c-\angle d$ノ……………………

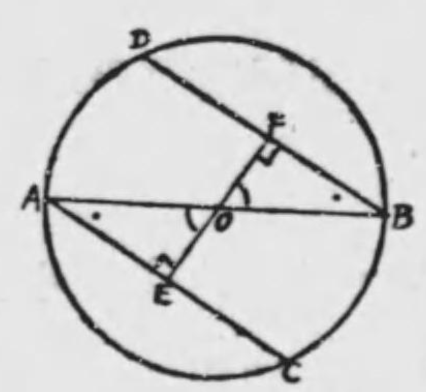
∠HFGト∠IGFトハ如何。

(36)



OA′∥BAナラバハOA′,BAハBOト如何ナル角ヲナスカ。

(37) OヨリACニ引ケル垂線ハ



BDニハ如何ニナルカ。

△AEOト△BFOトヲ比較セヨ。

第四章　多角形ノ內角ノ總和

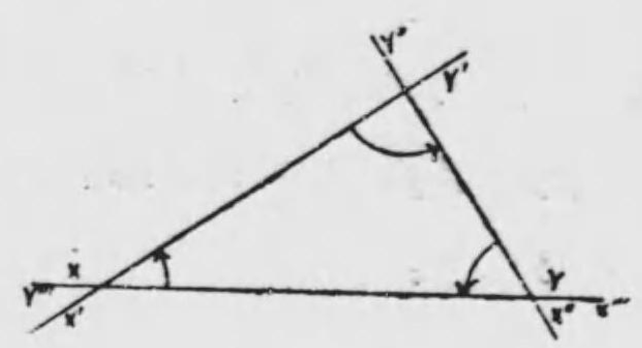
25　三角形ノ內角ノ總和

外角 Exterior Angle ハ一頂點ニ二ツ宛在ル。

內對角 Opposite Interior Angles

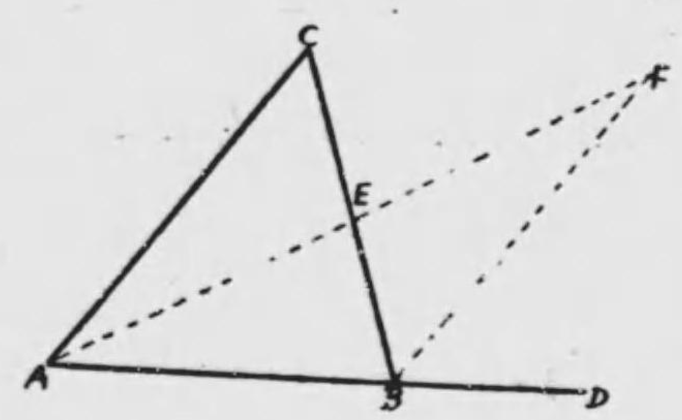
平行線ニヨラザル證明

18世紀ノ初メ頃獨逸ノ Thibaut（テイバウト）ガ廻轉ニヨリ平行線ヲ用ヒズシテ內角ノ和ガ二直角ニ等シイコトヲ證明シタ。



xyガx′y′ノ位置ヨリx″y″ノ位置ニ行キx‴y‴ノ位置ニ歸ルマデニ各三角形ノ內角ダケ廻轉スル。

外角ハ一內對角ヨリ大 ノミノ證明ナラバ



CBノ中點ヲEヲトシ,AEヲ延長シテEFヲAEニ等シクシ, BFヲ結べバ

$\triangle ACE \equiv \triangle FBE$

$\therefore \quad \angle C = \angle FBE$

$\angle CBD > \angle C$

補助線 補助ノ線ヲ引クトイフコトハ證明ノ重要ナ部分デアツテコレヲナスコトガ出來レバ證明ハ半出來タヤウナモノデアル。ソレ故敎授ノ際ニモ漫然補助ノ線ヲ與ヘズ生徒ニ自ラ發見セシムルヤウニ導キタイモノデアル。

問一 實驗ニヨツテ三角形ノ內角ノ和ガ二直角ナルコトヲ證明セシメルニハ本問ノ如ク紙ヲ折ルモヨイ，又各頂點ノ所ヲ截リ離シテ一所ニ集メテ見ルモヨイ。

三角形 ｛直角三角形
鈍角三角形
銳角三角形

系一，系二 三角形ノ或角ニ角度ヲ與ヘ種々ノ三角形ニツイテ他ノ角ノ度ヲイハシメルガヨイ。

問　題

38 53頁系

39

1 △ABCト合同ナモノ

2 BCノ位置ニアル邊ガABト等シイモノ

3 ACノ位置 …………

40 ∠ADBハ∠EDF ノ外角

∠EDFハ△ADF ノ外角等

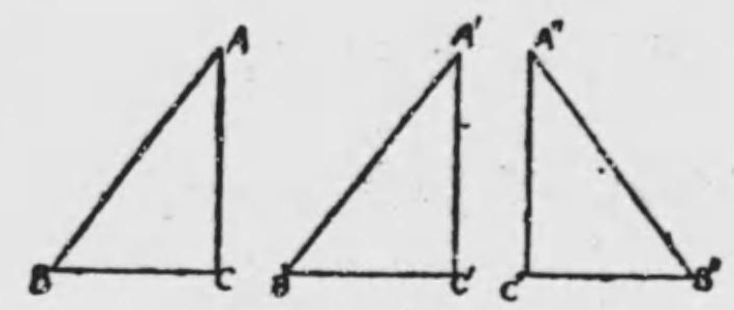
∠EDF＝∠DAB＋∠DBA

∠DFE＝

∠FED＝

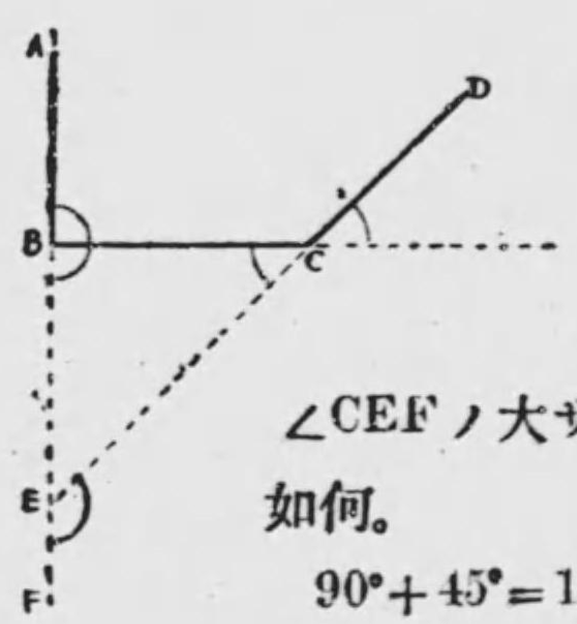
(38) 直角ヲ三等分スルコトハ正三角形ヲ畫クコトニ歸スルコトヲ考ヘヨ。

(39)



三角形合同ノ何レノ場合ニ入ルカ。

(40)



∠CEFノ大サハ如何。

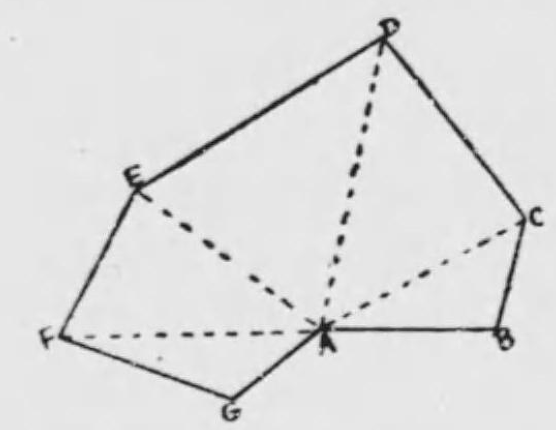
$90°+45°=135°$

26 多角形ノ內角及外角ノ總和

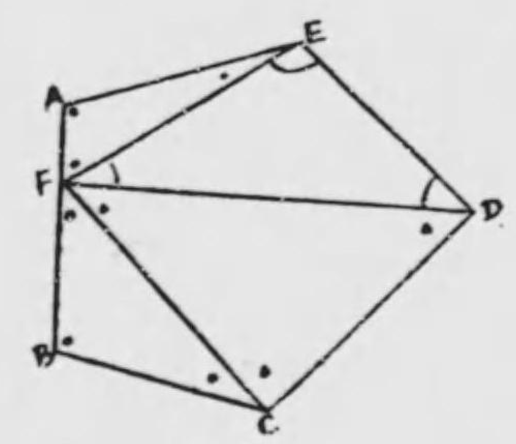
定理 多角形ノ內角ノ總和ニ關スル定理モ早クヨリ研究サレタモノデソノ特段ノ場合ハ Proclus「プロクルス」(A,D 412−485) ガ作リ，一般ノ場合ハ Regiomontanus「レジオモンタナス」(1436—1476) ノ得タモノデアルトイフ。

$2(n-2)$ R.∟ ノ公式ヲ知ラシムルニハ一頂點ヨリ對角線ヲ引イテ三角形ニ分割スル圖ガ適當デアリ，$(2n-4)$R.∟ノ公式ヲ知ラシムルニハ形內ノ一點ヲ各頂點ニ結ビテ三角形ニ分割スルガ適當デアル。

此ノ定理ハ凹多角形ニ於テモ成リ立ツ。



又圖ノ如クシテ三角形ヲ $(n-1)$ 作リ



內角ノ總和ノ直角ノ數ハ

$$2(n-1)-2=2n-4$$

トスルモヨイ。

注意 多角形ハ三ツヨリ多クノ銳角ヲ有スルコトハ出來ナイ。何トナレバ假ニ三ツガ銳角デアルトシ他ガ全部2R.∟ト見テ計算スレバ直角ノ數ハ $2(n-3)+3=2n-3$ ヨリ小デ $2n-4$ ヨリモ大デアリ得ルガ，

四ツガ銳角デアルトスルト

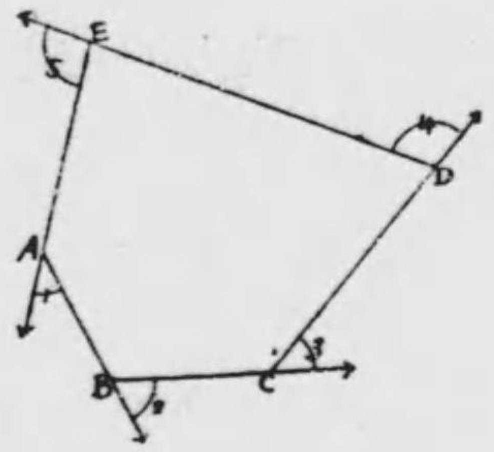
$2(n-4)+4=2n-4$ ヨリ小デナクテハナラナイノデ不合理トナルカラデアル。

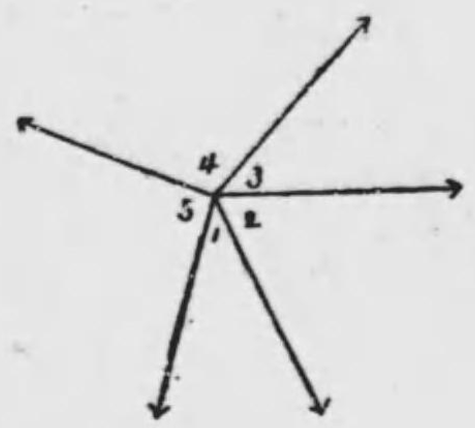
問一　三角形ヨリ始メテ十二邊形位マデノ多角形ノ内角ヲ計算サスガヨイ。

問二　26直角，即2340°

問三 問四　正多角形ノ一內角ハ系二ニヨリ外角カラ計算スル方ガ簡單デアルガコヽニハ總和ヲ出シテ邊數デ以テ割ルコトニシテ居ル。

系一　外角ノ總和ノ證明ニ邊ヲ廻轉セシメル方法ヤ一點カラ多角形ノ邊ニ平行ナ直線ヲ引キスベテノ外角ヲ一點Oノ周リニ集メル方法ガアルガ本書ノ證明ノ方ガ簡易デアルト思フ。





星形多角形 Star plygon ノ各頂點ニ於ケル角ノ總和ヲ求メル問題モ面白イ。

系二　正多角形ノ內角ヤ外角ノ大サヲ知テ邊數ヲ求ムル計算モサシタイ。

例ヘバ　一內角ガ144°ノ正多角形ハ何邊形カ。　　（十邊形）

一外角ガ30°ノ正多角形ハ何邊形カ。　　（十二邊形）

問　　題

41　正六邊形ノ一內角ハ何度カ。一內角ト4直角ト如何ナル關係ノトキ敷キツメラレ得ルカ。

(41)　正八邊形ノ一內角ハ何度カ。正八邊形ノ內角二ツト正方形ノ一內角トヲ加フレバ何度カ。

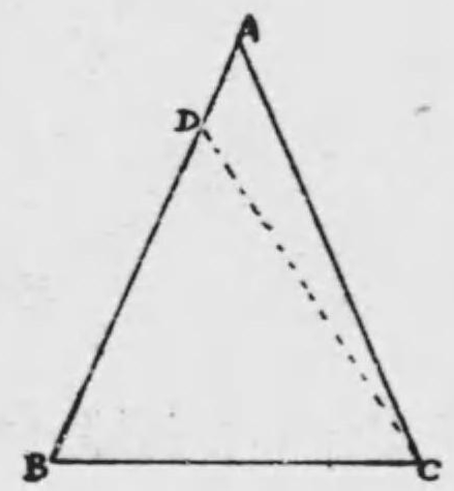
第五章　二等邊三角形及直角三角形

27　二等邊三角形(二)

問一　二等邊三角形ノ底角ノ相等シキコトヲ想ヒ起サシム。

定理　52頁ト對照シテ補助線ノ引キ方ヲ考ヘシム。

他ノ證明法　二角ノ相等シイ三角形ヲ取リ出シ，之ヲ裏返シテ重ネ合ハス方法(50頁參照)モアル。又間接法ニヨリ AB≠ACニシテAB>ACトシ BDヲACニ等シクトレバ



$\triangle DBC \equiv \triangle ACB$

$\therefore \quad \angle DCB = \angle ABC$

$\angle ABC = \angle ACB$　假設

$\angle DCB = \angle ACB$　不合理

トスル方法ガアル。

何レモ理解シ悪イ方法デアル。

問二　定理ガ逆關係ニアルコトヲ比較スルノミナラズ證明ノ方法モ比較シタイ。

問三　內角ノ和ノ定理ノ必要ヲ明ニシタイ。

注意　補助線ADハ只證明ニ必要ナバカリデナク二等邊三角形トシテハ重要ナ線デアルカラソノ性質ヲ明ニシテ置クガヨイト思フ。即ADハ頂點ヨリ引イタ線デ頂角ヲ二等分シ底ノ中點ヲ通リ，底ニ垂直デアル。

故ニ二等邊三角形デハ一頂點ヨリ出ヅル中線ト頂角ノ二等分線ト底邊ヘノ垂線トハ一致スルノデアル。

系　53頁ノ系トハ逆ナルカ否カヲ考ヘシムレバ面白イ。

正三角形 $\begin{cases} \text{等邊三角形} \\ \text{等角三角形} \end{cases}$

問　　題

42　頂角ノ相等シイ二ツノ二等邊三角形ノ底角ハ如何。

二ツノ二等邊三角形ノ何々ガ等シイカ。

43　立木ガ直立スルナラバ∠ACBハ如何。

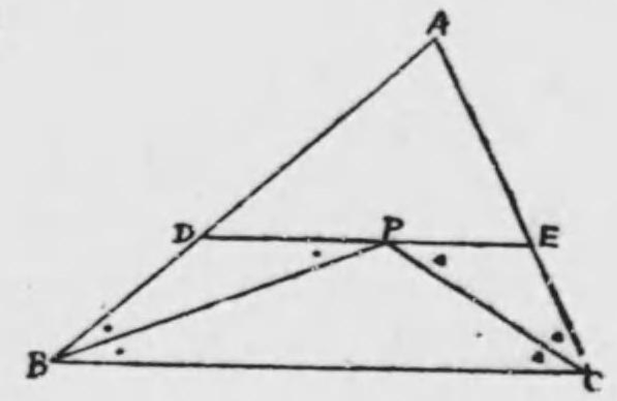
∠Bハ如何。

ACトBCトハ如何。

(42)　∠BACノ大サハ如何。

ACトBCトハ如何。

(43)



DP∥BC　ナラバ平行線ニヨル角ハ如何。

△DBPハ如何ナル三角形カ。

BDトPDトハ

CEトPEトハ

DE＝BD＋CE

實際問題ニ就テ　問題(42)及43等ハ校庭デモ實際ニナシ得ル問題デアル。45° ヲ作ルニハ紙ヲ折ラシメレバヨイ。幾何學ノ問題ヲ實地測量ニ用フルトキハ多クハ迂遠デアツテ實用的ノ價値ハ少イ。併シ只單ニ幾何圖形ノ一問題ヲ取リ扱フヨリハ遙ニ實際的氣分ヲ起サシメ學理ヲ實地ニ應用シヤウトイフ氣分ヲ喚起セシムルコトガ出來ル。ソレ故成ルベク此種ノ適當ナ問題ヲ多クトリタイモノデアル。

28　直角三角形ノ合同

問一

$\begin{cases} a=a' \\ \angle A=\angle A \end{cases}$　$\begin{cases} a=a' \\ \angle B=\angle B \end{cases}$　$\begin{cases} c=c' \\ \angle A=\angle A' \end{cases}$

$\begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$　$\begin{cases} a=a' \\ c=c' \end{cases}$

定理　斜邊ト一邊トガ夫々相等シキ二ツノ直角三角形ノ合同

直角三角形ノ合同ヲ特ニ一定理トシテ出サナクテハナラナイノハ此ノ最後ノ場合即斜邊ト他ノ一邊トガ夫々相等シキ二ツノ直角三角形ノ合同ノ場合デアル。コレハ二邊トソノ一邊ニ對スル角ガ夫々相等シキ二ツノ三角形ノ合同ナ場合ノ特別ノ場合デアル。ソノ一般ノ場合ハ兩意ノ場合デアル。

問二　二ツノ接角ノ和ガ二直角ニ等シケレバソノ相隣ラザル二邊ハ一直線ヲナス。

二等邊三角形ノ底角ハ相等シ。

◎　三角形ノ内角ノ和ハ二直角ニ等シ。

二邊ト夾角トガ夫々相等シキ兩三角形ハ合同ナリ。

等ノ定理デアルガ，此ノ定理ガ此ノ位置デナクテハ證明出來ナイノハ三角形ノ内角ノ和ノ定理ヲ要スルカラデアツテ問二ノ要點モソコニアルノデアル。

問　　題

44 Pヲ二邊OA,OBヨリ等距離ニ在ル點トスレバ

PM＝PL

△OPMト△OPLニ於テ相等シキモノハ何々カ。

△OPM≡△OPL

∴ ∠POM＝∠POL

研究 AO,BOノ延長ノナス角, EO AO トソノ延長ノナス角ニツイテハ如何。

(44) Pヲ∠AOBノ二等分線上ノ點トス。

PL⊥OA, PM⊥OB

△POLト△POMトニ於テ相等シキモノハ何カ。

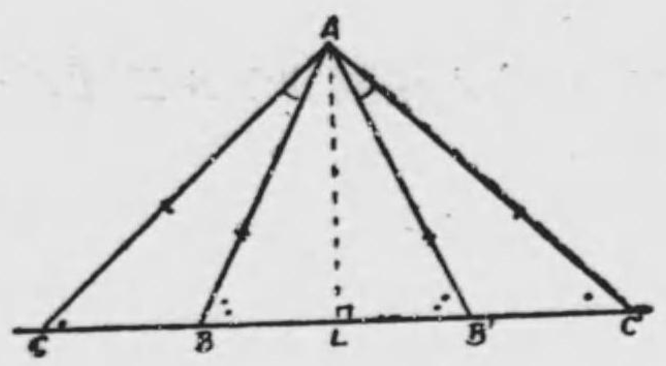
△POL≡△POM

∴ PM＝PL

研究 二直線ガ交リテナス角ノ二等分線ハ如何。

注意 44, (44) ノ兩證明ガ「相交ル二直線ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡」ノ證明トナル。軌跡ノ部ノ教授ノトキ此問題ヲ參考ニサレタイ。

45



(1) AB, AB′ナラバ ∠ABB′, ∠AB′Bハ如何。又AC,AC′ナラバ如何。

∠CABト∠C′AB′トハ如何。

△ABC≡△AB′C′ ∴ BC＝B′C′

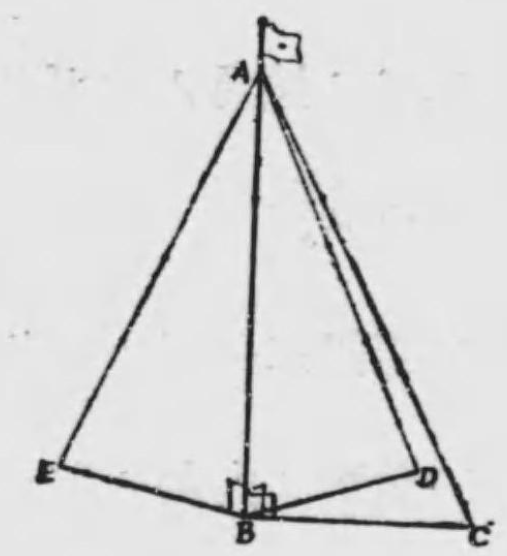
(2) 又ハ AL⊥BB′

△ABL≡△AB′L ∴ BL＝B′L

CLトC′L トハ如何。

BC＝B′C′

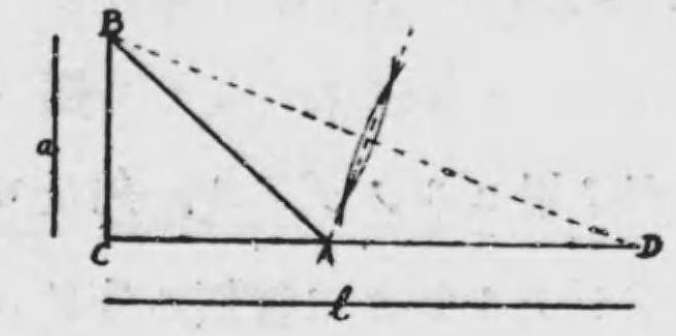
(45)



△ABC, △ABD, △ABE等ハ夫々如何ナル三角形カ。何故合同ナルカ。

BC＝BD＝BE

46



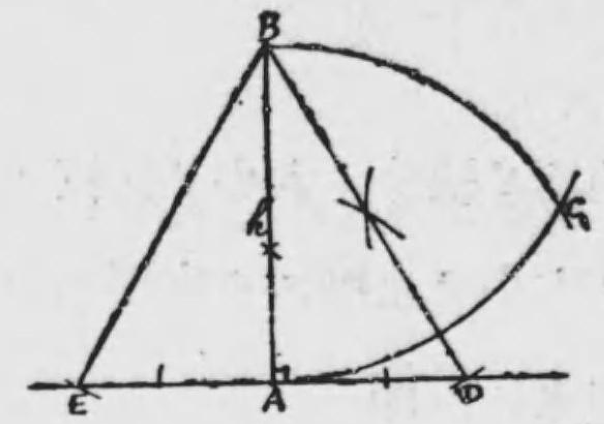
△ABC ヲ求ムル三角形トシ BC ハaニ等シクAB＋ACハlニ等シイトスル。CAヲ延長シAD＝ABトスレバCDノ長サハ如何。

△CDBハ如何ニシテ作ルカ。

△ABDハ如何ナル三角形カ。

點Aハ如何ニシテ求メルカ。

(46)



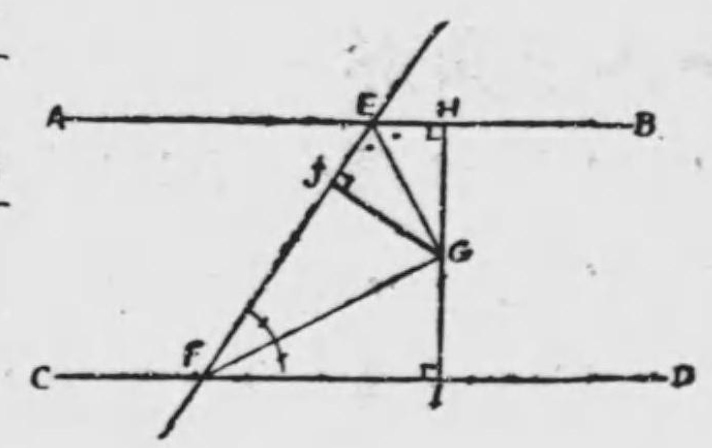
△BDEヲ正三角形BAヲソノ高サトスレバ∠ABDハ何程カ。

30°ノ角ハ如何ニシテ畫クカ。

BD＝BEトスレバ△BDEハ正三角形トナルカ。

47 $\angle GEF=\dfrac{\angle BEF}{2}$

$\angle GFE=\dfrac{\angle DFE}{2}$



∠BEFト∠DFEトノ關係如何。

∠GEF＋∠GFE ノ大サ如何。

∠EGFノ大サ如何。

(47) GJ⊥EFトスレバ

△GHEト△GJEトハ如何。

GH＝GJ

△GJFト△GIF トハ如何。

GI＝GJ

$GJ=\dfrac{HI}{2}$

第六章　三角形ノ角及邊ノ不等

角及ビ線分ノ大小ヲ比較スルニハ本章ノ定理ヲ用ヒルノデアル。角及ビ線分ノ大小ヲ比較スル定理ハ29節ト30節トニアゲデアル如ク二種類ニ分ツコトガ出來ル。即

{ 1　一ツノ三角形ニツイテイフモノ
　2　二ツノ三角形ニツイテイフモノ

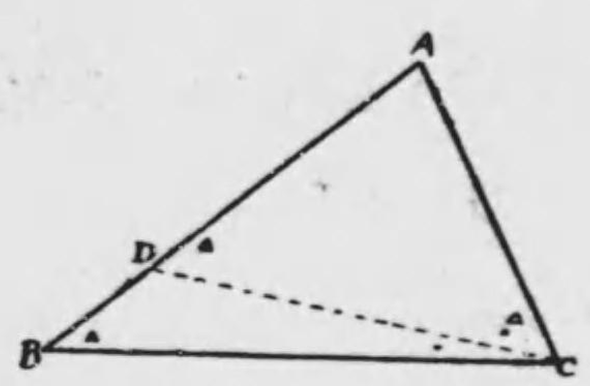
角及ビ線分ノ大小ハソノ何レカノ角及ビ線分ヲ他ニ移動スルコトニヨツテ證明シ得ルコトガ多イ。此移動ハ圖形ヲ折返スコトニヨツテ出來ルノデ「折リ紙」ハ此レ等ノ定理ノ證明ト深イ關係ガアルモノデアル。教授者ハ折リ紙ニヨル實驗ヲモ試ミサセラレタイ。

29　邊ノ不等ナル三角形

問一　一ツノ三角形ノ角ノ大小ト邊ノ大小トノ關係ヲ折リ紙ニヨツテ實驗セシメントスルノデアル。定理ノ證明ト比較サレタイ。

定理　一ツノ三角形ニ於ケル邊トソノ對角トノ關係

別證明　AB>AC トシ,AB上ニADヲACニ等シクトル。



$\angle ADC > \angle B$

$\angle ADC = \angle ACD$

$\angle C > \angle B$

逆　多クノ教科書デハ間接法ニヨツテ證明シテアルガ本書ニ於テハ直接證明ヲトツタ。コレ直接法ノ方ガ生徒ニ理解シ易イノト30節ノ證明ノ間接法ガ本節ト形式ヲ一ニスルカラ30節デ練習サシタ方ガ遙ニ都合ガヨイト考ヘタカラデアル。

問二　互ニ逆關係ニアル。前定理ニ於テハ「一ツノ三角形ノ邊ガ不等ナレバ」ガ假設デアリ後ノ定理ニ於テハ「一ツノ三角形ノ角ガ不等ナレバ」ガ假設デアル。△ABCヲトツテ假設終結ヲ符號デ表ハシテ見レバヨクワカル

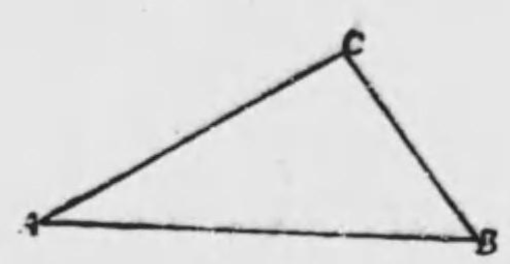
問三　問四　一ツノ三角形ニツイテ角ノ大小ト邊ノ大小トノ對應關係ヲ明ニスルノデアル。

中線　Median

問　題

48　次ノ系ノ證明デアル。
△PLMニ於テPL,PM ハ夫々如何ナル角ニ對スルカ。
PQ,PN ノ大小ハ何ニヨツテ定メルカ。∠PNQト∠PQN トノ大小如何。
LQ,LNノ大小トPQ,PN ノ大小トノ關係如何。
PM,PQノ如ク斜線ガPLノ兩側ニ在ラバ如何。

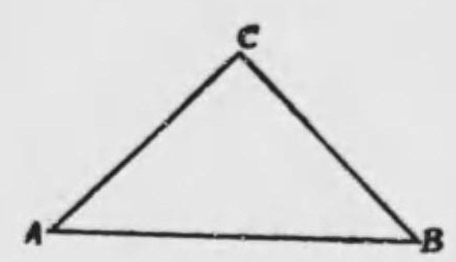
49



△ABCノ邊ABヲ最大トスレバ
∠Cト∠Aトハ何レガ大カ。
∠Cト∠Bトハ何レガ大カ。
∠A,∠B ニ鋭角デナイモノガアルトスレバ∠Cノ大サハ如何。
三角形ノ内角ノ和ハ如何。

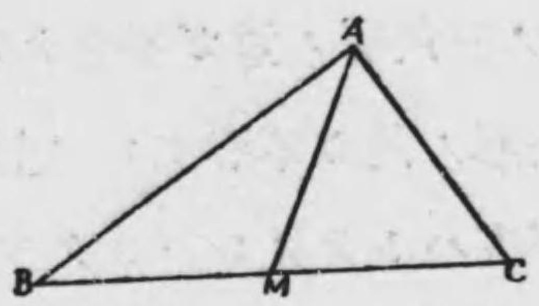
(48)　PLヲAB ニ下シタ最小ナ線分トス。PLガAB ニ垂直デナイトシ他ニ垂線 PL′ガアルトスレバPLトPL′ト何レガ大ナルコトトナルカ。
然ラバ如何ナル不合理ガ起ルカ。

(49)



△ABCニ於テABヲ最大邊トシ,
AC＝BCトスレバ ∠Cト∠A,∠Bトノ大小ハ如何。
∠A,∠B,∠C ガ皆等シトスレバ∠Cハ何度カ。∠Cガ何度ヨリ大ナラバ最大ナルコトガ出來ルカ。
∠C ハ60°ヨリ大デアル。

50

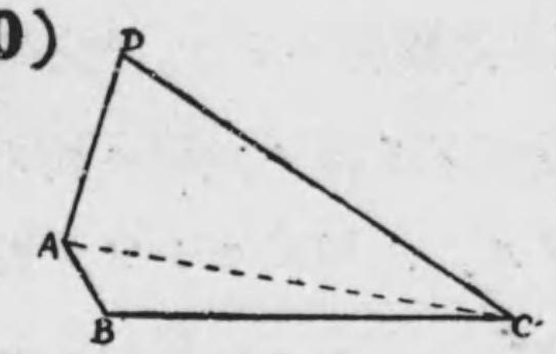


AM<BMナラバ∠Bト∠BAMトハ如何。AM<CMナラバ∠Cト∠CAMトハ。∠BACト(∠B+∠C)トハ何レガ大カ。

AMガ$\frac{BC}{2}$ト等シキトキハ∠BACハ如何ナル大サカ。

又 AM>$\frac{BC}{2}$ノトキハ如何。

(50)



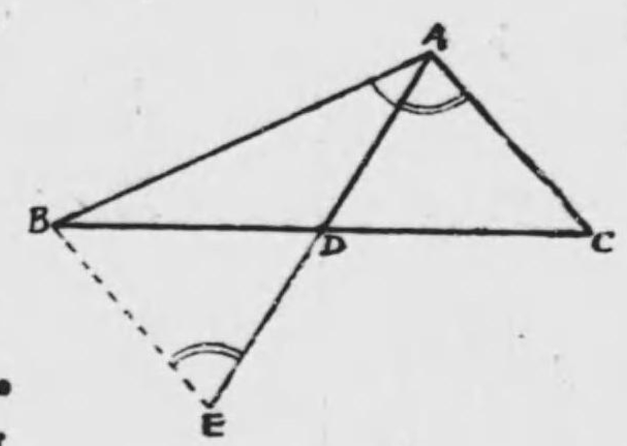
ABヲ最小,CDヲ最大トシ，ACヲ結ベバ△ABCニ於テ∠BACト∠BCAトノ大小如何。

又△ADCニ於テ∠DACト∠DCAトノ大小如何。

∠BADト∠BCDトノ大小如何。

又∠Bト∠Dトノ大小ハ如何ニシテ比較スルカ。

51 ADヲ延長シテDEヲADニ等シクスレバBEトACトノ大サ如何。∠Eト∠DACトハ如何。



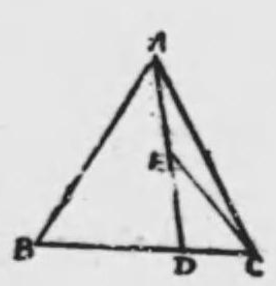
△ABEニ於テ∠Eト∠BAEトハ何レガ大カ。

∠BADト∠DACトハ何レガ大カ。

(51) AB,BEノ和トAEトハ何レガ大カ。

ADト$\frac{AB+AC}{2}$トハ何レガ大カ。

52



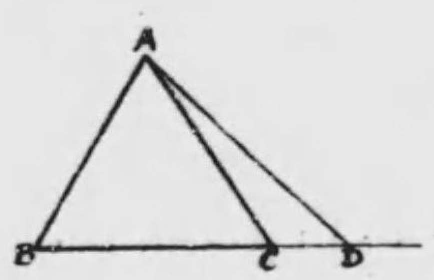
∠EDCト∠Bトハ何レガ大カ。

∠ECDト∠ACDトハ何レガ大カ。

∠EDCト∠ECDトハ何レガ大カ。

DEトCEトハ如何。

(52)

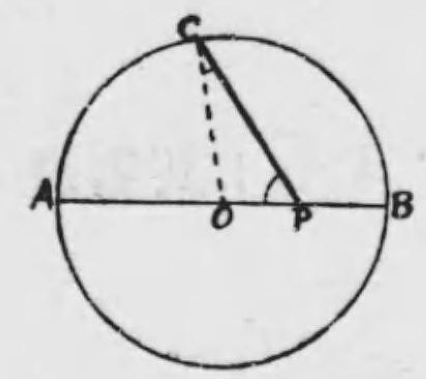


△ABDニ於テAB,ADヲ比較スルニハドノ角ヲ比較スレバヨイカ。

∠B=∠ACB>∠D

又ハ△ACDニ於テAC,ADヲ比較スルニハ如何。

53



(CO+OP)トAP,CPト比較セヨ。

(CO−OP)トBP,CPト比較セヨ。

(53) ∠OCPト∠OPCトノ大小ハ何ニヨリテ定マルカ。

COトOPトハ何レガ大カ。

54 AC′=ACトシ，C′Dヲ結ベバ△ADCト△ADC′トハ如何。

C′D=CD

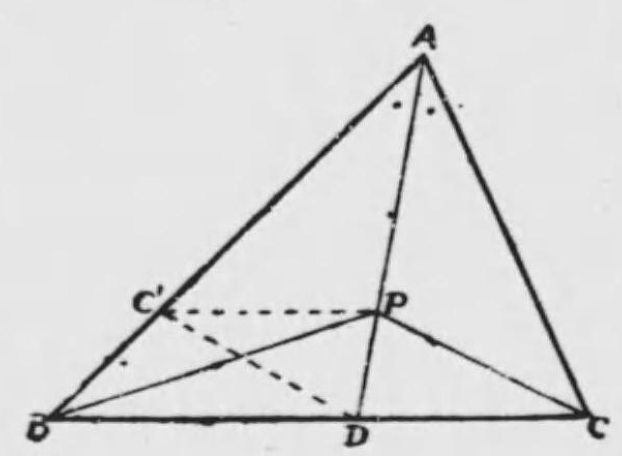
△BDC′ニ於テBDトC′Dトヲ比較セヨ。

∠B<∠ADC=∠ADC′
<∠DC′B

BD>C′D

故ニBD>CD

(54) AC′=ACトスレバ△AC′Pト△ACPトハ如何。



C′P=CP

△C′PBニ於テBP−C′PトBC′トハ何レガ大カ。

BC′=AB−AC

AB−ACトBP−CPトハ何レガ大カ。

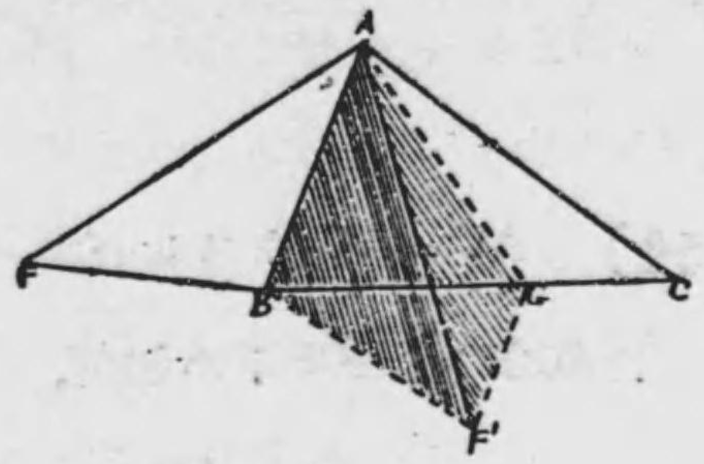
注意 54,(54)ハ△ABCヲ∠Aノ二等分線ニヨツテ折リ曲ゲテ見レバヨクワカル。

30　二邊ノ等シキ二ツノ三角形

定理　二邊ノ相等シキ二ツノ三角形ノ夾角ノ大小ト其對邊ノ大小。

折紙ニヨル證明法

本定理ノ證明ト同樣ナコトヲ折リ紙ヲ以テ示スコトガ出來ル。



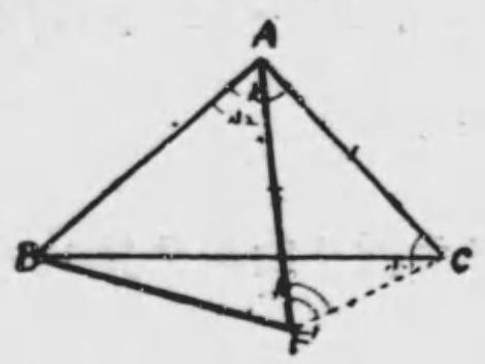
$\triangle ABC$ ト $\triangle ABF$ ニ於テ

AB ハ共通, $AF=AC$, $\angle BAF<\angle BAC$ ノ如ク作圖シ, 四邊形 AFBC ヲ切リ拔キ, 先ヅ $\triangle ABF$ ヲ AB ニテ折リ $\triangle ABF'$ トシ, 次ニ AC ガ AF′ ニ重ルヤウニ折レバ $\triangle BGF'$ ニヨリ

$$BF'<BG+GF'$$
$$BF<BC$$

ガ知ラレル。

他ノ證明法　$\triangle DEF$ ノ邊 DE ヲ $\triangle ABC$ ノ AB ト重ネ, $\triangle ABF'$ ノ位置ヲトラシム。F′C ヲ結ベ。



$\angle AF'C=\angle ACF'$

$\angle BF'C>\angle AF'C$,　$\angle ACF'>\angle BCF'$

$\therefore\ \angle BF'C>\angle BCF'$

故ニ　BC　BF′

　　　$BC>EF$

此ノ證明ハ F′ ガ A ニ對シ BC ノ同側ニアルカ, 反對ノ側ニアルカ, 又ハ BC 上ニアルカニ依デ作圖ト證明トヲ異ニスル不便ガアル。

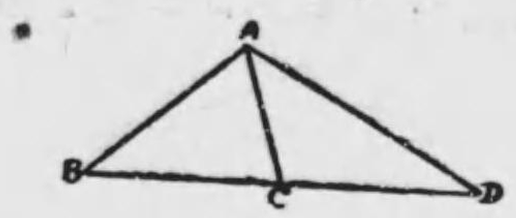
注意　丙ノ場合ハ特別ナ場合デアルガ, 二邊トソノ一邊ニ對スル角ガ夫々等シイ二ツノ三角形ノ場合ト同一デアルカラ注意サレタイ。

55

$\angle AOB<\angle COD$ ナラバ

$\triangle AOB$ ト $\triangle COD$ ハ如何ナル關係アルカ。

56



（1）　AD ト BC トノ大小ヲ比較スルニハ何レノ三角形ヲ比較スルガヨイカ。

$\triangle ABC$ ト $\triangle ADC$ トノ二邊ト夾角トハ夫々如何。

（2）　又ハ $(AB+AD)$ ト $(BC+CD)$ トハ何レガ大カ。

AD ト BC トハ何レガ大カ。

(55)

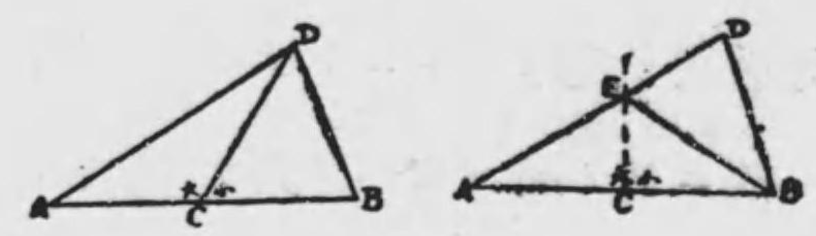
（1）　$\triangle PAX$ ト $\triangle PAX'$ トヲ比較セヨ。

（2）　PX′ ト垂直二等分線トノ交點ヲ B トシ, B× ヲ結ベバ

$$X'P=X'B+BP=XB+BP$$

X′P ト XP トノ大小如何。

(56)



（1）　$\triangle ADB$ ニ於テ ´A,<B ノ大小ヲ比較スルニハ何ノ大小ヲ比較スベキカ。

AD,BD ノ大小ヲ二ツノ三角形 $\triangle ACD$ ト $\triangle BCD$ トニヨツテ比較セヨ。

（2）　又 C ニ於ケル AB ノ垂線ト AD ト交點ヲ E トスレバ

$$\angle A=\angle CBE$$

$\angle A$ ト $\angle B$ トハ何レガ大カ。

定理　二邊ノ相等シキ兩三角形ノ第三邊ノ大小ト其對角ノ大小。

本定理ノ證明法ハ間接法デハアルガ他ノ間接法ト異ツテ終結ヲ否定シタトキニ起リ得ル場合ガ只一通デナクテ二通以上アル。ソレデソノ一々ニツイテ調ベテ假設ニ依ルコトヲ述ベナクテハナラナイ。ソレ故此證明法ハ間接法デハアルガ特ニ削除進行論證又ハ化醇論證 Proof by Exhaution トイフノデアル。

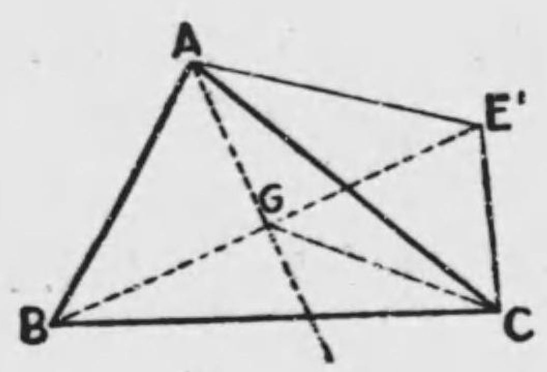
(39頁參照)

轉換法　轉換法デハ既ニ證明シタ定理ヲ吟味シソノ形式カラ考ヘテ逆ノ眞ナルコトヲ證明スルノデアル。即

二ツノ三角形ノ二邊ノ相等シキ場合ノ既ニ證明セル定理ニツイテイヘバソノ夾角ニ就テハ大ナルカ等シイカ小ナルカノ起リ得ベキスベテノ場合ヲ盡シ且ソノ何レカ一ツナラザルベカラズ。而シテ終結ハ一々ソレニ應ジ互ニ矛盾及ビ交錯スルコトナシ。(相容レズ)

故ニソノ逆ハスベテ眞ナリ。(39頁參照)

直接證明法　餘リ簡易ナ方法デハナイガ參考ノタメニ述ベヤウ。



$\triangle ABC$ト$\triangle DEF$トニ於テ

$AB=DE, AC=DF, BC>EF$トス

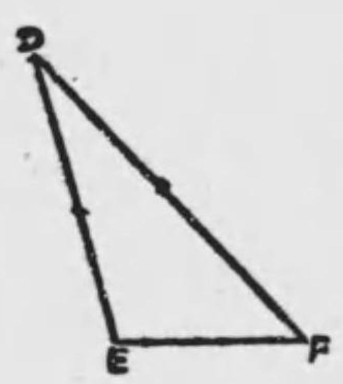
$\triangle DEF$ヲDFガACト重リEガACニ對シBト反對ノ側ノE'ニ落ツル如クス。

$AG\perp BE'$トスレバGハBE'ノ中點ナリ。

CGヲ結ベバ$\triangle BGC$ト$\triangle E'GC$トヲ比較シ

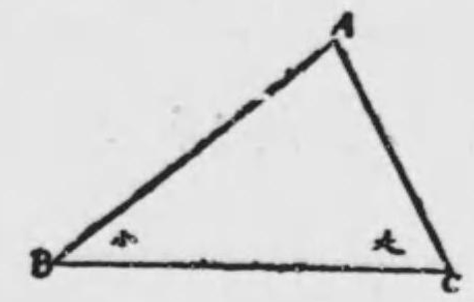
$\angle BGC>\angle E'GC$　卽CAハAGニ對シE'ノ側ニ在リ。故ニ $\angle BAC>\angle E'AC$

卽 $\angle BAC>\angle EDF$



問一,問二　ハ既ニ92頁ニ說イタ。

問三　ABガACヨリ大デナイトスレバ



$AB=AC$ カ$AB<AC$カデナケレバナラヌ。

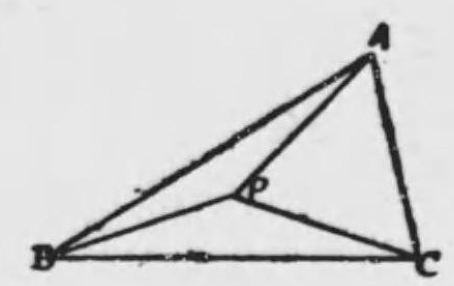
$AB=AC$ナラバ$\angle C=\angle B$デナクテハナラナイ。之ハ假設ニ反スル。

$AB<AC$ナラバ$\angle C<\angle B$デナクテハナラナイ。之ハ假設ニ反スル。

故ニ$AB>AC$デナケレバナラヌ。

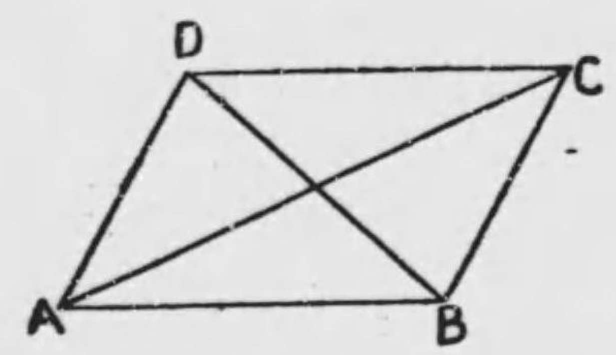
問　題

57



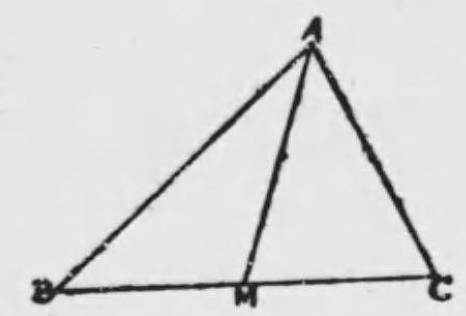
$\triangle ABP, \triangle BPC, \triangle CPA$ヲ比較セヨ。

58



ACトBDトノ大小ヲ比較スルニハ何レノ三角形ヲ比較スルカ。$\triangle ABD$ト$\triangle AEC$ノ二邊ハ夫々如何。$\angle BAD$ト$\angle ABC$トノ關係如何。$\angle ABC$ガ大トナレバ$\angle BAD$ハ如何ニナルカ。

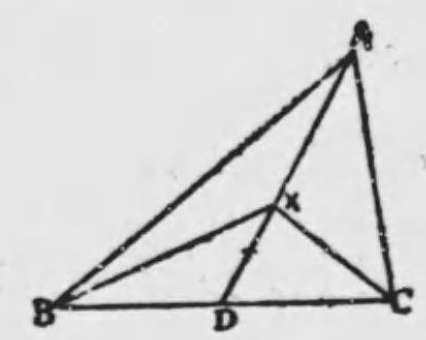
(57)



$\triangle ABM$ト$\triangle ACM$トヲ比較セヨ。

$\angle AMB$ト$\angle AMC$トハ何レガ大カ。

(58)



$AB>AC$ ナラバ$\angle ADB$ト$\angle ADC$トハ如何。

$\angle ADB>\angle ADC$ ナラバBX, CXハ如何。

第七章　平行四邊形

31　平行四邊形ノ性質

問一　四邊形ノ內角ノ和ノ4R.∟ナルコトハ三角形ノ內角ノ和ガ2R.∟ナル如ク記憶セシメタイ。

問二　四邊形ニ關スル名稱ヲイハシメソレヲ整理シテ系統ヲ立テシム。

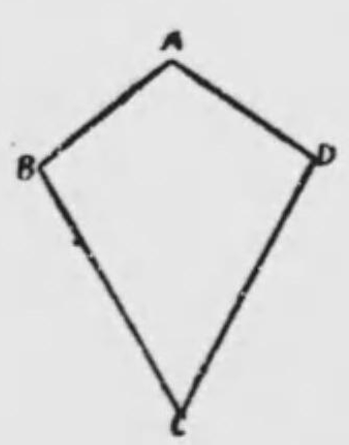
四邊形 Quadrilateral
- 不等邊四邊形
- 梯形…………等脚梯形
- 平行四邊形 { 矩形, 菱形 } ＞ 正方形

不等邊四邊形ハ一般四邊形ノコトデアル。對邊ガ平行デナイモノデソノ對邊ガ交ルマデ延長シタ圖形ヲ **完全四邊形** Complete Quadrilateralトイフ。又平行四邊形中デ矩形ニ對シテ斜平行四邊形 Romboid トイフノガアルベキデアルガ餘リ用ヒナイシ平行四邊形トイヘバ斜平行四邊形ヲ指スベキデアル。

注意　平行四邊形ノ **高サ** ニハ二通アルコトヲ思ハセナクテハナラナイ。

矩形ヤ正方形ニ於テハソノ一邊ガ高サデアル。

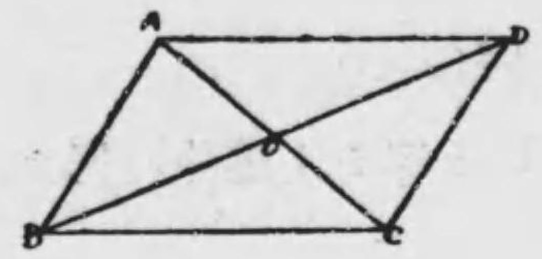
凧形



一ツノ對角線ノ上ヘ兩側ニ立ツ二ツノ二等邊三角形ニテ成ル形ニ凧形 Kite トイフ名ヲツケタノモアル。

定理　四平行邊形ノ性質ニ關スルモノ

初メニ平行四邊形ノ定義ヨリ導キ出シ得ル平行四邊形ノ諸性質ヲ掲ゲテ之ヲ證明シタ。今平行四邊形ノ性質ヲ掲ゲレバ



1　$AB /\!/ DC$,　$BC /\!/ AD$
2　$\angle BAD + \angle ABC = 2R.∟$　$\angle BAD + \angle ADC = 2R.∟$
3　$\triangle ABC \equiv \triangle CDA$,　$\triangle ABD \equiv \triangle CDB$
4　$\angle BAD = \angle DCB$,　$\angle ABC = \angle CDA$
5　$AB = CD$,　$BC = DA$
6　$AO = CO$,　$BO = DO$

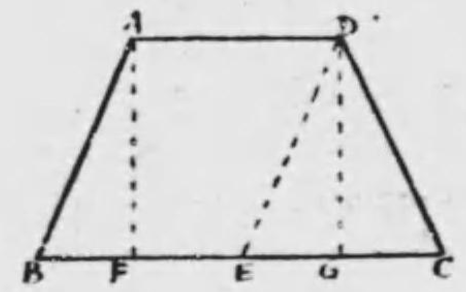
系一　矩形ノ重要ナ性質デアル。

系二　直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ヲ相隣レル二邊トスル矩形ヲ作リ系一ヲ用ヒテ證明スルノガ簡略デアル。

問三　二平行線間ノ距離ハ何處モ相等シ。

問　　題

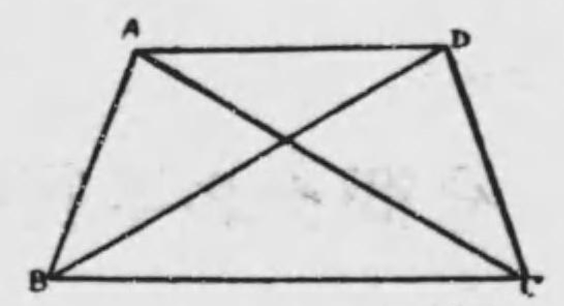
59



(一)　$DE /\!/ AB$ トスレバ$\triangle DEC$ハ如何ナル三角形カ。

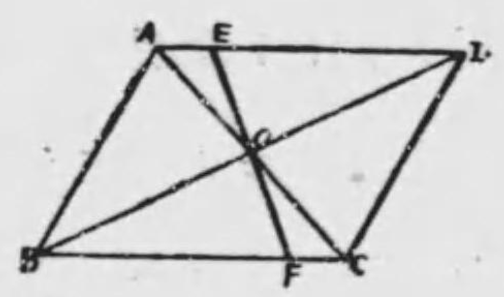
(二)　又ハA,DヨリBCニ垂線ヲ下シ$\triangle ABF$, $\triangle DCG$ ニツイテ考ヘヨ。

(59)



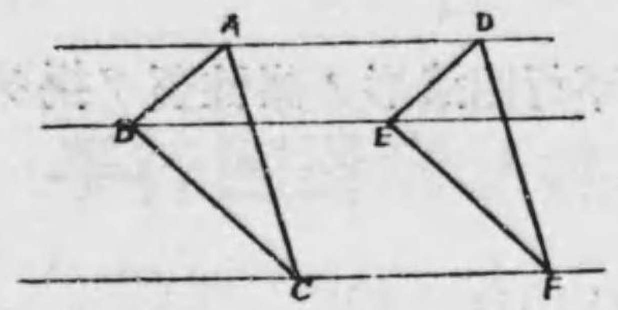
問題59ヲ用ヒテ$\triangle ABC$ト$\triangle DCB$トヲ比較セヨ。

60　$\triangle AOE$ト$\triangle COF$ニツイテ考ヘヨ。



(60)　四邊形ABFEト四邊形CDEFトハ重ネ得ルカ。

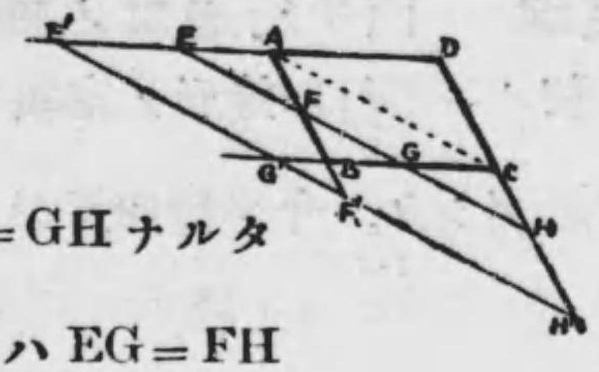
61



ABトDEトハ如何。

BCトEF, CAトFDトハ如何。

(61)



EF＝GHナルタ

メニハ EG＝FH

ナレバヨシ。

EG, FH ト等シイ線分ハ何カ。

32 平行四邊形タルベキ四邊形

平行四邊形トナルニ充分ナ條件ヲ揭ゲテ平行四邊形ノ定義ニ導クノデアル。

問　　題

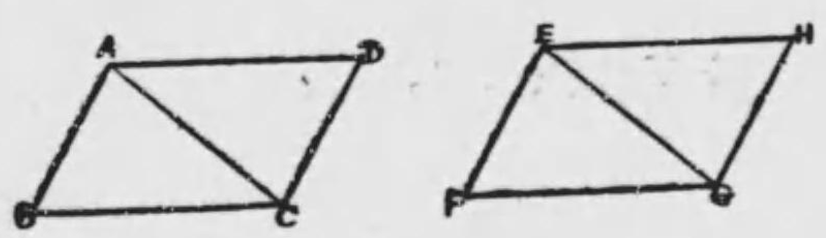
62 ABCD, ABEFハ平行四邊形デアル。同一底ノ上ニ立ツ二ツノ平行四邊形ニツイテ研究ス。

器具 ニツイテハ器具說明書ヲ見ラレタシ。

(62) 各枠ヲナス棒ノ中央ト兩端トヲ連結シテ四邊形ガ連續シテ居ルヤウニシテアル。且柱ニ取リ付ケアル部ノ端ハ上下ニ自由ニ動キ得ル如クシテアル。

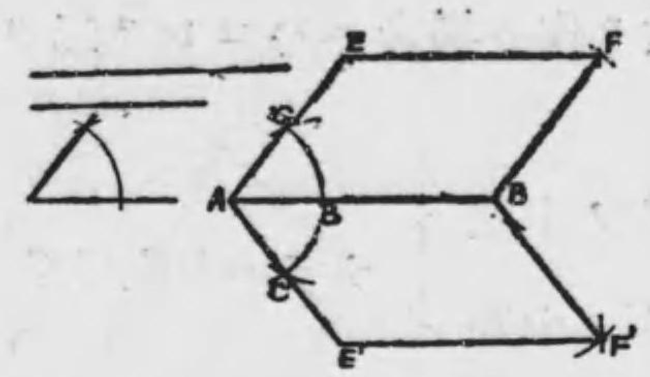
此ノ四邊形ハ自由ニ形ヲ變ジ得ルカラソノ對角線ノ長サモ種々ニ變ジ得ルノデアル。從テ電燈ト柱トノ距離ヲ自由ニスルコトガ出來ル。

33 合同ナル平行四邊形



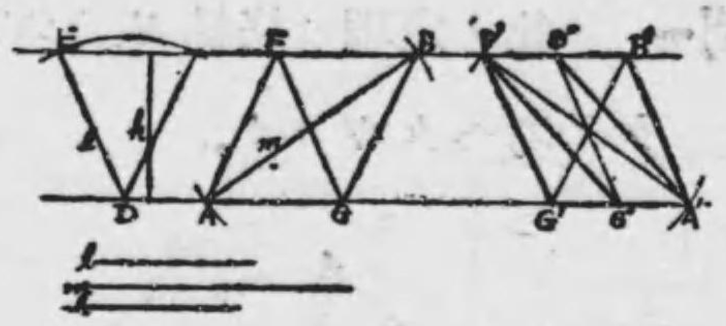
對角線ヲ引キ △ABC≡△EFG ノ △CDA≡△GHE 故ニソノ二ツヲ合シタ▱ABCD ト ▱EFGHトハ合同ダナドト證明シテハイケナイ。幾ツカノ合同ナモノモ結合ノ仕方ニヨツテハ合同ナモノヲ生ジナイカラ結合ノ仕方モ同一ダトイハナクテハナラナイ。本證明ノ如ク全ク重ネ合ス方ガヨイ。

63



▱ABFEト▱A′E′F′E′トハ逆ニ合同デアル。

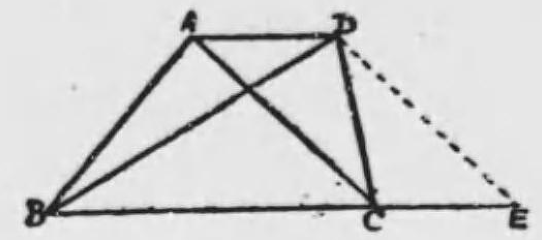
(63)



▱AGBFト▱A′G′F′B′トノ關係如何。

▱A′B″F′G″ハ條件ニ適スルカ。

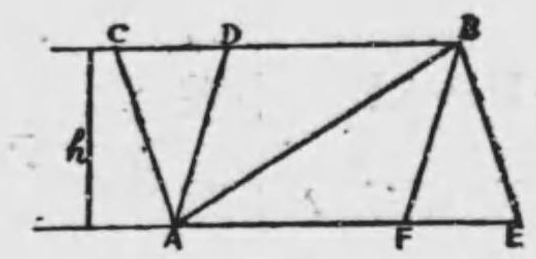
64



梯形 ABCD ヲ作ラントスルニ DE∥AC トスレバDE及BEノ長サハ何程カ。

△DBE ヲ畫クコトガ出來ルカ。

(64)



▱AEBC ▱AFBD トハ夫々與ヘラレタル條件ニ叶フカ。

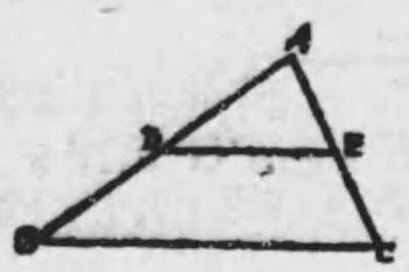
逆ニ合同ナルモノモ考ヘヨ。

34 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ直線

三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ガ底邊ニ平行ニシテ且底ノ半ニ等シイコト及ソノ逆ハ極メテ重要ナコトデアツテソレヲ利用シテ解キ得ル問題モ非常ニ多イ。ソレ故此ノ定理ノ應用ニモ充分力ヲ用ヒタイト思フ。教科書ニヨツテ118頁ノ數多ノ平行線ニヨツテ截ラレル截線ノ分ニ關スル系ヲ定理トシテ第一ニ揭ゲ三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ニツイテノ定理ハソノ系ノ特別ノ場合ノ系トシテアルモノガアルガ三角形ニ關スルモノノ方ガ利用サルルコトガ多イカラコレヲ第一ニトルコトニシタ。

定理　三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ニ關スルモノ

問一　此ノ定理ハ終結ガ二ツアルソレ故逆ヲ作ル場合ニハコレヲ二ツニ分ケテ考ヘタガヨイ。



(1) $\left\{\begin{array}{l}\text{DハABノ中點}\\ \text{EハACノ中點}\end{array}\right\}$ ナラバDE∥BC

逆 $\left\{\begin{array}{l}\text{DガABノ中點}\\ \text{DE∥BC}\end{array}\right\}$ ナラバEハACノ中點

$\left\{\begin{array}{l}\text{DE∥BC}\\ \text{EガACノ中點}\end{array}\right\}$ ナラバDハABノ中點

(2) $\left\{\begin{array}{l}\text{DハABノ中點}\\ \text{EハACノ中點}\end{array}\right\}$ ナラバ $DE=\frac{1}{2}BC$

逆 $\left\{\begin{array}{l}DE=\frac{1}{2}BC\\ \text{DガABノ中點}\end{array}\right\}$ ナラバEハACノ中點

$\left\{\begin{array}{l}DE=\frac{1}{2}BC\\ \text{EガACノ中點}\end{array}\right\}$ ナラバDハABノ中點

(2)ノ逆ハ一般ニハ眞デナイ。AB又ハACノ中點ヨリBCノ半分ニ等シイ線分ヲ他ノ邊ニトルトキノ點ハ一般ニ二ツアルカラデアル。

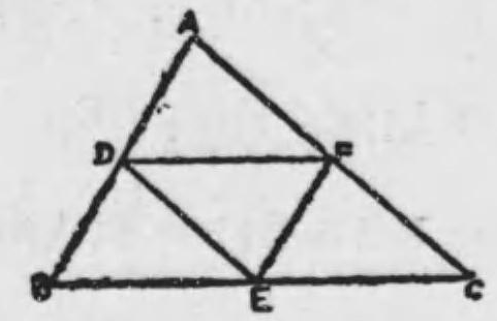
系一　ハ(1)ノ逆デアル。本書ノ證明法ハ歸謬法デアル。参考ノタメニ同一法ニヨル證明法ヲ掲ゲルト，

ABノ中點DトACノ中點Eヲ結ビ付ケル直線ハBCニ平行デアル。DトEトヲ結ブ線分ハ只一本デアル。Dヲ通リBCニ平行ナ直線ハ只一本デアル。故ニDヲ通リBCニ平行ナル直線ハDトEトヲ結ブ直線デアル。即チDヲ通リBCニ平行ナル直線ハACノ中點ヲ通ル。

問二　直接法モ本定理證明ノ復習トモナツテ有益デアルカラ生徒ニ各自ヤラセルコトニシタ。

問　題

65



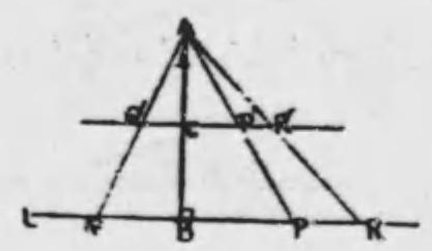
四邊形ADEFハ如何ナル四邊形カ。

△ADFト△EFDトヲ比較セヨ。

△BDEト△FEDトヲ比較セヨ。

△CFEト△DEFトヲ比較セヨ。

66

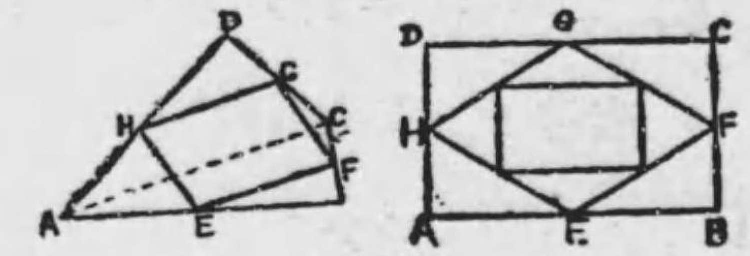


△APQニ於テP′, Q′ガAP, AQノ中點ナラバP′Q′ハ如何ナル線カ。

AB⊥QPトス，Q′ヲ通リQPニ平行ナル直線ハABト如何ナル點ニテ交ルカ。

P′Q′ハABノ垂線二等分線ナリ。

(65)



HGトACトノ關係如何。

EFトACトノ關係如何。

EFGHハ如何ナル形カ。

ABCDガ矩形ナラバEFGHハ何カ。

ABCDガ菱形ナラバ如何。

又正方形ナラバ如何。

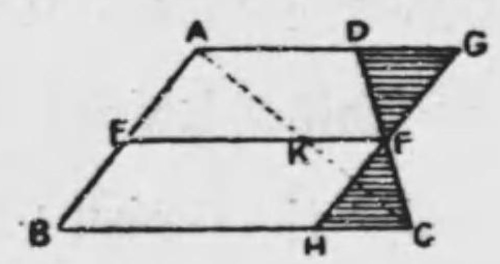
(66)　ABノ垂直二等分線トAヨリLニ引ケル線分ARトノ交點R′ハARノ中點ナルコトヲ證セヨ。

△ABRニツイテ考ヘヨ。

CガABノ中點デCR′ガBRニ平行ナラバR′ハ如何ナル點ナルカ。

注意　66, (66)ヲ合セテ軌跡ノ證明トナル。

系二



Fヲ通リABニ平行ナ直線ヲ引イテモヨイガ，本書ノ方ガ兩底ノ和ノ半分ヲ知ラシメルニハヨイ。

系三　直接法　ACヲ結ビ△ABCト∠CDAトヲ用ヒKガACノ中點，FガCDノ中點ト進ムガヨイ。

間接法　系一ト同樣。

問　　題

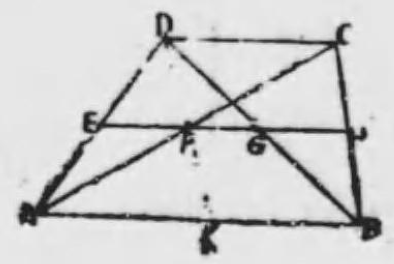
67 △ACD ニ於テEFハ如何ナル直線カ。 EF∥DC

△ABD ニ於テ

EGハ如何ナル直線カ。

EFトEGトハ如何ニナルベキカ。

EGノ延長ガ BCト交ル點Hハ如何ナル點カ。



(67) (**1**) EGトAB トノ長サノ關係如何。EFトDCトハ

$$EG-EF=\frac{1}{2}(AB-DC)$$

(**2**) 又DFノ延長トABトノ交點ヲKトスレバ

AK＝DC

KBノ長サハAB－DC

FGトKBトノ關係如何。

68 OヨリLニ垂線OO′ヲ下セ。

四邊形 PQQ′P′ハ如何ナル形カ。

OO′ハ如何ナル線カ。

$PP'+QQ'=2OO'$

PP′＋QQ′ハ一定セルカ。

(68) 四邊形AA′C′Cハ何カ

$AA'+CC'=2OO'$

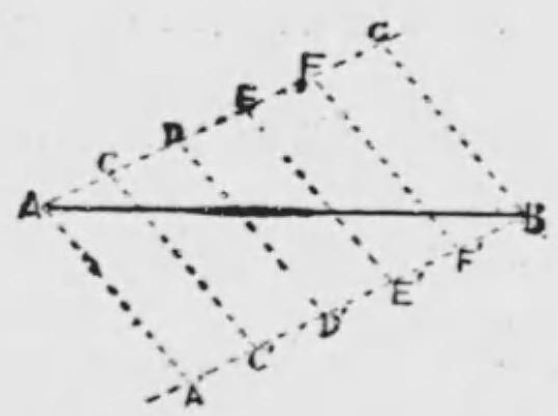
DD′＋BB′ ハ

系四 A,A′ガ合スレバ三角形ヲ生ズ。

A′,B′,C′ ヨリ AD ニ平行ナ直線 A′A″, B′B″, C′C″ ヲ引キ △A′B′A″, △B′C′B″, △C′D′D″ ノ合同ヲ用ヒテ證シテモヨイ。

作圖題 系四ノ應用デアル。

69



AG∥BA′, AC＝CD＝DE＝EF＝FG＝A′C′＝D′C′＝D′E′＝E′F′＝F′B

(69) 系四ノ逆ヲ考ヘテ應用セヨ。

板ノ端ニ物指ノ七區間ノ兩端ヲ當テ、線ヲ引キ各區間ノ點ヲ打テ。

同樣ニシテ向一線ヲ引キ相對應スル點ヲ結ビ付ケヨ。

70 (**1**) AB,CDノ交點ヲ Eトス PB∥CD

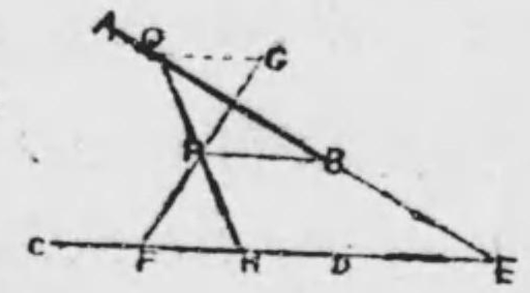
PガQRノ中點ナラバ

QBトBEトノ關係如何。

(**2**) PヨリCDニ任意ノ直線PFヲ引キFPヲ延長シテPG＝PFトスレバ

△PFRト△PGQトハ如何。

GQハ如何ナル直線カ。



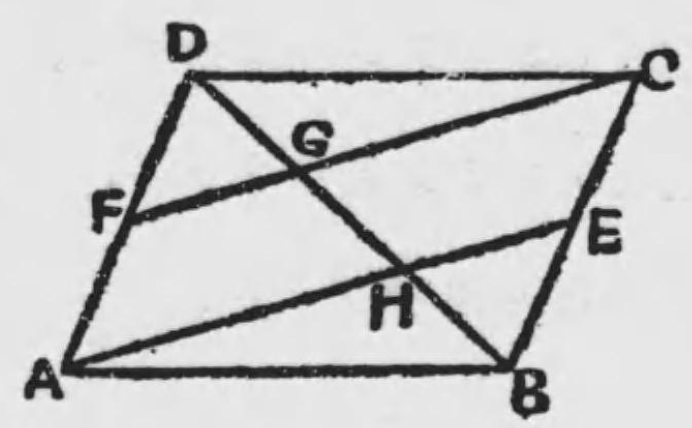
注意 AB∥CDナラバ如何。

(70) モシQRノ他ニPニ於テ二等分サル、線分Q′R′ガアルトスレバ

Q′RR′Q ハ如何ナル形カ。

AB,CDハ如何ニナルベキカ。

71



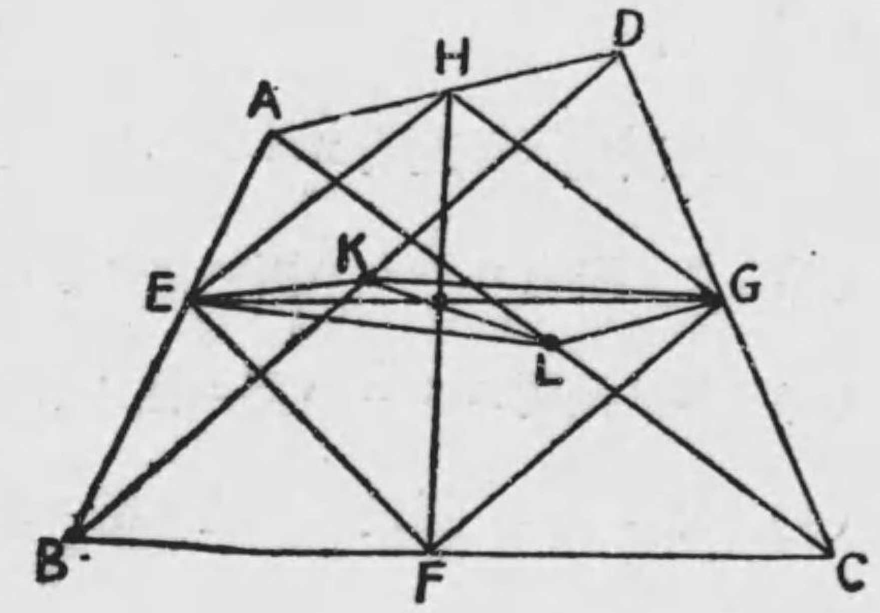
四邊形AECFハ如何ナル形カ。

△DAHニ於テFG∥AH ナラバGハ如何ナル點カ。

△BCG ニ於テ E ハ BC ノ如何ナル點カ。

DG＝GH＝HB

(71)



四邊形EFGHハ如何ナル形カ。

〔115頁(65)ヲ見ヨ〕

HF,GEハ如何ニナルカ。

GLEKハ如何ナル形カ。

GE,LKハ如何ニナルカ。

HFモLKモGEノ中點ヲ通ル。

摘要ニ就テ 幾何ノ問題ヲ解クニハ引用スベキ定理ヲ確實ニ知ツテ居ナクテハナラナイ。否定理ヲ明瞭ニ知ツテ居レバ自ラ證明ガ秩序ヨク出來ルノデアル。ソレ故既習ノ定理ヲ纏メテヨク理解シ記憶セシムルコトガ極メテ必要デアル。而モ之ヲ機械的ニ記憶スルノデハナクテソノ圖形ニヨツテ證明ヲ理解シテ記憶スルコトハ餘程記憶ヲ深クシテヨイ。摘要ノ圖ニヨツテ定理ヲ云ヒ得ル如ク復習セシメナクテハナラナイ。

35　問題ノ解析

以上教授シ來ツタ問題ノ多クハ或定理ヲ直接ニ適用シテ容易ニ證明ヲシ得ルカ又ハ比較的容易ニ證明法ヲ發見シ得ルモノノミデアツタ。然シ一般ニ幾何學ノ問題ニハ可ナリ複雜ナモノガアツテソノ證明法ヲ發見スルノニ苦シムモノガアル。此ノ場合ニハソノ證明スベキ事柄ヲ他ノ事柄ニ置キ替ヘテ見ルノデアル。

(1)　此問題Xヲ證明スルニハ他ノ事項Pガ證明サレナクテハナラナイ。

(2)　Pヲ證明スルニハ更ニ他ノ事項Kガ證明サレナクテハナラナイ。

(3)　Kヲ證明スルニハ更ニ他ノ事項Aガ證明サレナクテハナラヌ。

(4)　然ルニAハ假設又ハ他ノ既ニ明ニナツテ居ル事項デアル。

トイフヤウニ

1　先ヅ證明スベキ事項ガ成リ立ツモノト假定シ,

2　次ニ此ノ假定ガ成リ立ツタメニハ如何ナル條件ガ必要デアルカヲ尋ネ,

3　次第ニ逆ニ進ミ，コレ等ノ條件ト假設等ニ於テ與ヘラレタ事項又ハ既知ノ事項トノ關係ヲ明カニスルノデアル。

ツマリ終結ガ成リ立ツタメニ<u>必要ニシテ充分ナ條件</u>ヲ尋ネ之ニ置キ換ヘテ證明ヲスルノデ此ノ方法ヲ **解析的證明法** トイフノデアル。勿論必要ニシテ充分ナル條件ヲ尋ネテ逆ニ進ンデ假設ニ進ンダノダカラ之ヲ又逆ニ進メバ假設ヨリ進ンデ終結ニ到ル證明卽**直接法（綜合的證明法）**ガ出來ルノデアル。解析的證明法モ完全ナ證明法デアル。然シソノ進ムトキ必ズ逆ニ進ミ得ル方法ヲトツテ行カナクテハナラナイノデアル。之ヲ實際教授スル上ヨリ考ヘテ見ルト生徒ニ此ノ解析的證明法ヲ完全ニ書カセルコトハ困難デアル。時トスルト證明スベキコトト與ヘラレタルコトトヲ逆ニ考ヘテシマウコトガアル。ソレ故本書デハ問題ノ解析ヲ證明發見ノ方法ト考へ，タトヘ解析ヲシタ場合デモ綜合的證明法卽直接法ニヨツテ證明ヲヤリ直サセルヤウニシテ居ル。問題ヲ解キ得ルカハ卽 **解析ヲナシ得ル力** トイツテモヨイ位デアツテ如何ニシテソノ問題ノ解キ方ヲ考ヘツイタカトイフ所謂 **考ヘ方** トイフモノガ最モ必要ナモノデアル。ソレ故生徒ガ直チニ解キ得ル問題ハ別トシテ少シク困難ヲ感ズル問題ニハ必ズ解析ヲセシムベキデアル。

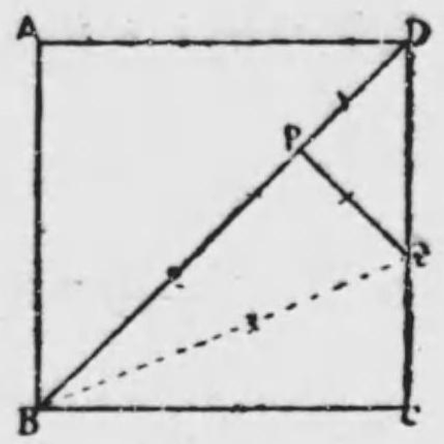
本節デハ主トシテ解析ノ方法ヲ知ラシムルタメニソノ一段一段ヲ明ニシ假設ニ到達スル方法ヲ示シ且直接法トノ關係ヲ明ニシタノデアル。

條件ノ分類

問題ノ證明ヲスルトイフコトハ既知ノ定理ヲ適用シテ假設ト終結トノ關係ヲ明ニスルトイフノデアルカラ既ニ學ンダ定理ヲ充分理解シ記憶シテ居ルコトガ最モ必要ナコトデアル。而シ漫然ト定理ヲ記憶シテ居ルヨリモ之ニ系統ヲ付ケ分類ヲシテ記憶シテ置ケバ之ヲ應用スルトキニモ速ニナシ得ルノデ或問題ノ證明ニ一々既知ノ定理ヲ全部考ヘナクテモ二角ノ相等シキコトヲ證明スルニハ如何ナル定理ガアルカ，二線分ノ相等シキコトヲ證明スルノニ最モ都合ノヨイ定理ハ何カト考ヘテ來レバ餘程證明シ易イノデアル。本書ハ只ソノ二ツノ例ヲ示シタノミデアルガ生徒ニハ尚種々ノ場合ニツイテ分類的ニ考ヘテ置クヤウニツトメサセルガヨイト思フ。

1　二線分ノ相等
2　二角ノ相等
3　二線分ノ大小
4　二角ノ大小
5　二直線ノ垂直ニ交ルコト
6　二直線ノ平行ナルコト

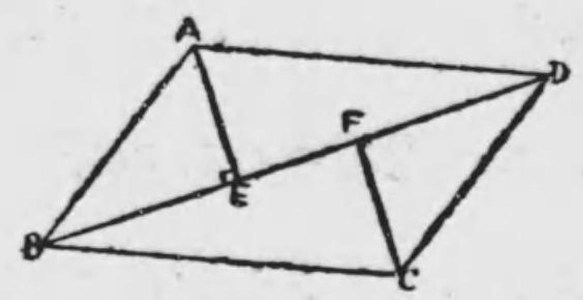
73



△PDQニ於テ∠BDQ,∠PQDハ如何ナル角カ。PD,PQハ如何。QP, QC ヲ比較スルニハ何ノ比較ニヨルカ。

△PBQト△CBQトヲ比較セヨ。

(73)



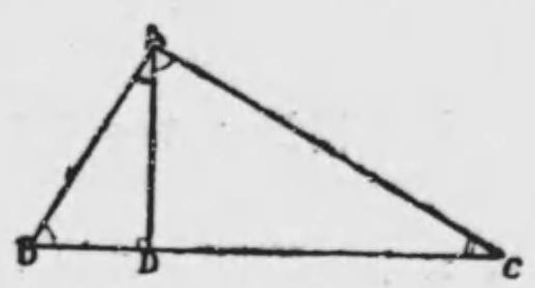
AE,CFヲ比較スルニハ何ヲ比較スレバヨキカ。

∠ABEト∠CDF,∠EABト∠FCD, ABトCDトヲ比較セヨ。

△ABEト△CDFトハ如何。

ACニB,Dヨリ垂線ヲ下セバ如何。

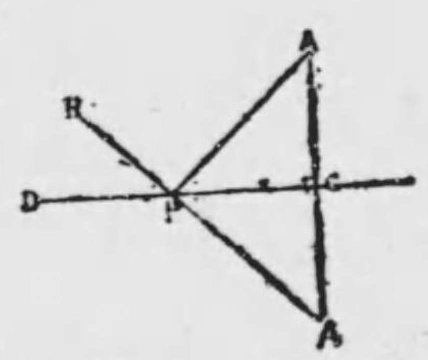
74



∠DABト合セテ 1R.∟ トナル角ハ何カ。

∠C,∠DAB ハ夫々ドノ角ノ餘角カ。

(74)



∠BPDト等シキ角ハ何カ。

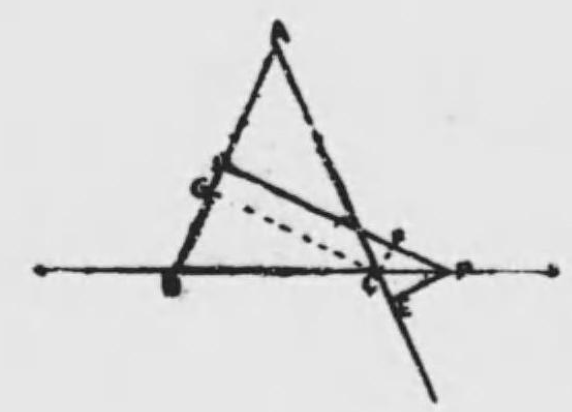
∠APCト∠A'PCト等シキタメニハ△APCト△A'PCトハ如何ナルベキカ。

∠BPD＝∠A'PC＝∠CPA

75　一定ノ問題 ハコレガ本書デ見ル初メテノ問題デアルカラ特ニ注意ガ必要デアル。和，差等ガ一定ナリトイフトキハソノ一定ノ大サガソノ圖形ノ特殊ナ位置ニ存在スル筈デアル。之ヲ發見スルニハソノ點ヲ移動サシテ見テ極限ノ位置ニ持ツテ來ルガヨイ。此問題ニ於テハ點ヲ底邊上ヲ移動サシテ見テ底邊ノ一端ニ來ラシメタナラバ一方ヘノ垂線ハ0トナリ他方ノ垂線ダケガ殘リ。コレガ底ノ上ノ點ヨリ等邊ニ下シタ二垂線ノ和ニ等シクナルコトヲ知ルコトガ出來ル。問題76。(76)ニツイテモ同様ニ考ヘレバ一定ノ大サヲ知ルコトガ出來ル。

注意　PヨリBGニ垂線PHヲ下シ，△PDB≡△BHP故ニBH＝PDト證明シテモヨイ。

76

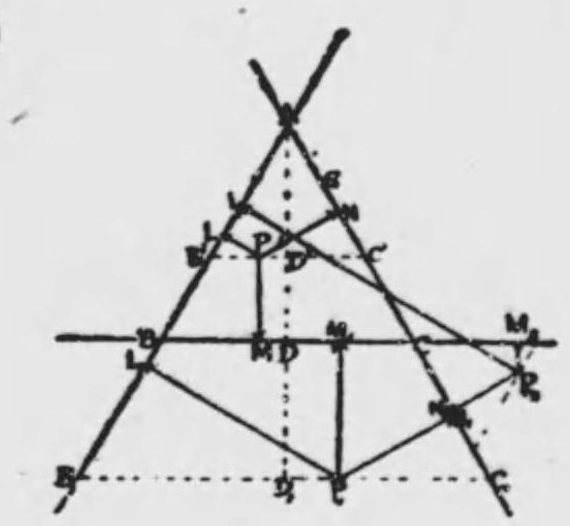


點Pガ底ノ一端Cニ來レバPヨリ兩邊ニ下ス垂線及ソノ差ハ如何ニナルカ。

△PECト△PFCトノ合同ナルコトヲ證セヨ。FDハ何ト等シイカ。

CBノ延長上ノ點ナラバ如何。

(76)



Pヲ通リBCニ平行ナル直線B'C'ヲ引ケ。PL＋PNハ何ニ等シイカ。

PL＋PM＋PN＝AD ヲ證セヨ。

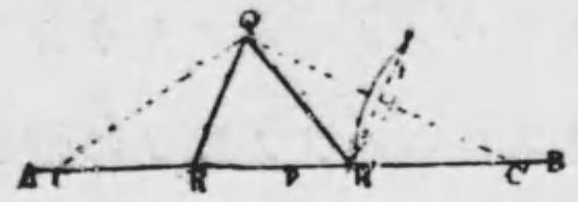
PガABC外ニ在ルトキ

(1)　∠BAC内ニ在ルトキ　$P_1L_1-P_1M_1+P_1N_1=AD$

(2)　∠ACBノ對頂角内ニ在ルトキ　$P_2L_2-P_2M_2-P_2N_2=AD$

P_1 P_2ヨリ AB,BC,CA ニ下ス垂線ガ PL,PM,PNト方向ノ反對ニナツタモノハ減ズルコトトナル。

77



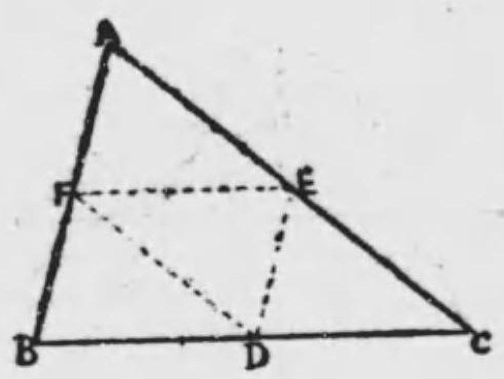
PR＋QR＝lトシ RC＝QR ニトレバ PC ノ大サハ如何。

△QCR ハ如何ナル三角形カ。

QC ヲ畫イテカラ點 R ハ如何ニシテ求メルカ。

點R ハ點 P ノ右方ニモ求メルコトガ出來ルカ。

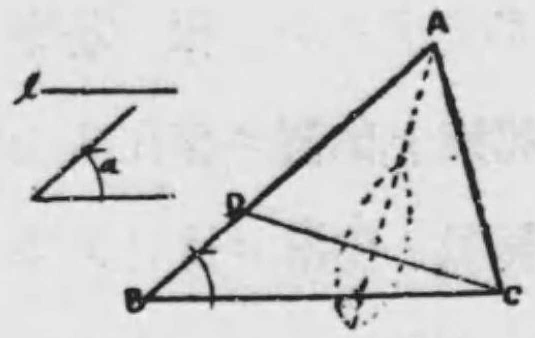
78



△ABC ガ出來タト考ヘソノ中點ヲD,E,F トスレバ DE ト BA,EF ト CB,FD ト AC トハソレゾレドウナルカ。

△ABC ノ畫キ方如何。

(77)



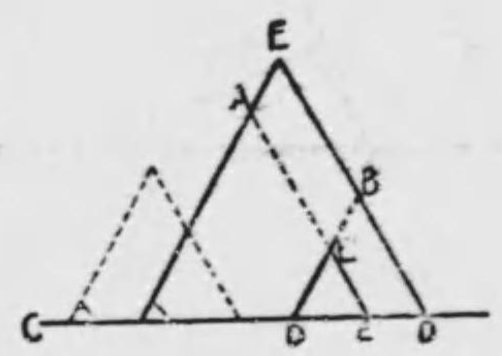
AB－AC＝l トシ AD＝AC トスレバBD ノ長サハ何程カ。

∠B ハ何ト等シイカ。

△BCD ハ如何ニシテ畫クカ。

△ADC ハ如何ニシテ畫クカ。

(78)



△CDE ガ出來タトシテ考ヘヨ。

CE,DE ハ夫々L ト如何ナル角ヲナスカ。

A,B ヲ通リ與線L ト60° ノ角ヲナス直線ハ何本アルカ。

△D′CE′ ハ條件ニ適スル三角形カ。

36 三角形ノ內心,傍心,外心,垂心,重心

共點性 Concurrency 三ツ以上ノ直線ガ一點ニ會スルトキハ是等ノ直線ハ共點ナリトイフ。

本節ニ於テハ三角形ニ於テ共點性ヲ有スル種々ノ直線ニ關スル定理ヲ揭ゲタ。

三直線ガ一點ニ會スルコトノ證明ニハ二通ガアル。

(1) 先ヅ二直線ノ交ルコトヲ證明シ，ソノ交點ト第三ノ直線ノ通ルベキ點トヲ結ビコレガ第三ノ直線ト同一ナルコトヲ證明スル方法。

此ノ方法デハ後ノ部ハ同一法ヲ用ヒテ居ルノデアル。生徒ガソノ部ノ理解ニ苦シムノデアルカラ充分注意アリタイ。尙問題ニツイテ述ベヤウ。

(2) 三直線ノ二ツガ他ノ一ツノ上ノ同一點ヲ通ルコトニヨリ三直線ハ同一點ニ會スト證明スル方法

問題79 ∠A, ∠B ノ二等分線ガ相交ルコトヲ證明シ，ソノ交點ヲDトスル。CDヲ結ブ。CDガ∠C ノ二等分線ナルコトヲ證明スル。

故ニ三ツノ內角ノ二等分線ハ一點ニ會ス。

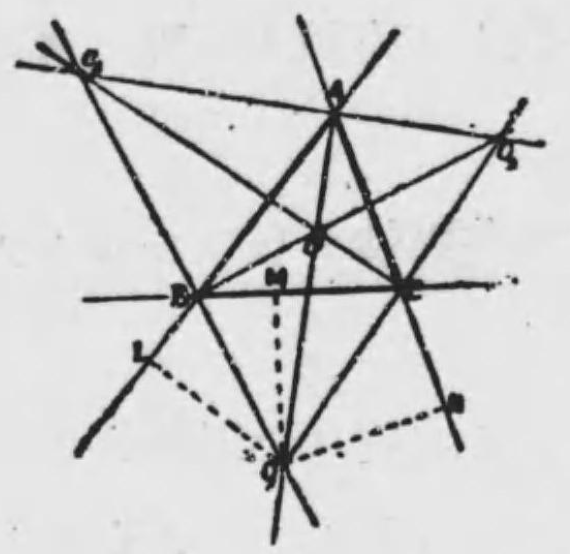
此ノ證明ノ形式ニツイテ考ヘルニ

(*a*)「∠A,∠B ノ二等分線ノ交點トCトヲ結ブ直線ハ∠Cヲ二等分ス。」ト

(*b*)「∠C ノ二等分線ハ∠A, ∠B ノ二等分線ノ交點ヲ通ル。」トハ互ニ逆ノ關係ニ在リ。ソレ故(*a*)ダケヲ以テ直チニ三內角ノ二等分線ハ一點ニ會ストイフコトハ出來ナイノデアル。∠A,∠B ノ二等分線ノ交點トCトヲ結ブ直線ガ唯一本,∠C ノ二等分線ガ唯一本ナルトキニ限リソノ逆ガ眞デアル。此ノ場合ニハ同一法ガ適用出來ルノデアル。此ノ證明ニ於テハ同一法トハイフテ居ナイノデアルガ「∠C ノ二等分線ハ唯一ツニ限ル。」ト述ベテ上ノ意味ヲ明ニシテ居ル。

內心 Incenter ハ內接圓ノ中心ノ略デアル。

80 ∠A ノ二等分線ト∠B ノ外角ノ二等分線トハ相交ルカ。ソノ交點ヲO_1トシ,O_1ヨリAB,BC,CA又ハソノ延長ニ垂線 O_1L,O_1M O_1Nヲトセ。$O_1L=O_1M=O_1N$ ヲ證セヨ。



CO_1ガ∠Cノ外角ヲ二等分スルコトヲ證セヨ。

(80) $A,B\ C,O,O_1,O_2,O_3$ 三點ガ同一直線上ニ在ルモノハドレドレナルカヲ考ヘヨ。

傍心 Excenter トハ傍接圓ノ中心ノ略デアル。

注意 內心ハ恒ニ三角形內ニ在ル。

81 コヽニイフ

(*a*) $\left\{\begin{array}{l}\text{(1) OトACノ中點Fトヲ結ブ直線}\\ \text{(2) OヨリACへ下セル垂線}\end{array}\right\}$ ハACノ垂線二等分線ナリ。ハ

(*b*)「ACノ垂直二等分線ハOヲ通ル」ノ逆デアル。ソレ故ACノ垂直二等分線ハ唯一ツデOトACノ中點ヲ結ブ直線モ唯一ツデアルコトヲ述ベナクテハナラナイ。

外心 Circumcenter ハ外接圓ノ中心ノ略デアル。

注意 外心ハ恒ニ三角形內ニ在ルトハ限ラナイ。

82 鋭角三角形ニ於テハ外心ハ恒ニ形內ニ在ル。

(82) 直角三角形ノ外心ハ何處ニアルカ。何故カ。

鈍角三角形ノ外心ハ何處ニ在ルカ。

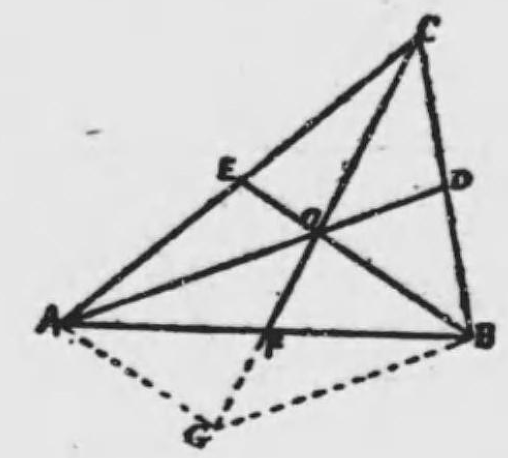
83 本問題ノ證明ハ圓ノ性質ヲ用ヒテモスルコトガ出來ル。

注意 垂心 Orthocenter ハ恒ニ三角形內ニアルト限ラナイ。

(83) 直角三角形ノ直角頂ハ垂心デ鈍角三角形ノ垂心ハ形外ニ在ル。

84 本證明ハ107頁**(2)**ニ述ベタ方法ヲトツタ。別證トシテ**(1)**ニヨル方法ヲ示サウ。多クノ教科書デハ此ノ別證ノ方ヲトルノデアルガコレハ餘リ綜合的デ生徒ニ適シナイト思ツテ本書デハトラナンダ。

別證明 A, B ヨリ出ヅル中線AD,BEノ交點ヲOトスル。COヲ結ビ延長シ,AヨリEBニ平行ニ引ケル直線トノ交點ヲGトスル。



CE＝EA,　EB∥AG

故ニ　CO＝OG

又　CD＝DB

故ニ　OD∥GB

四邊形AGBOハ二双ノ對邊ガ平行ナル故平行四邊形デアル。

故ニ　AF＝FB　卽CFハ中線デアル。

又　CO＝OG　OF＝FG　故ニ　$OC=\frac{2}{3}CF$

又　$OD=\frac{1}{2}GB$　AO＝GB　故ニ　$AO=\frac{2}{3}AD$

$OE=\frac{1}{2}AG$　OB＝AG　故ニ　$BO=\frac{2}{3}BE$

注意 重心 Centroid ハ恒ニ三角形內ニ在ル。

三角形ノ重心ハ三角形ノ重力ノ中心 The center of gravity デアルコトハ圖ノ如クシテ實驗スルコトガ出來ル。

(84) GヲAOノ中點トスレバ

EG∥CO

HヲBOノ中點トスレバ

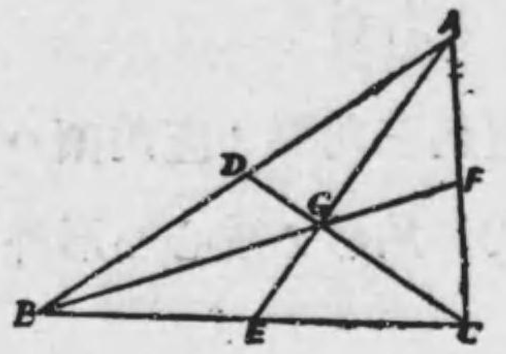
DH∥CO　故ニOF∥EK∥DL

AG＝GO＝OD故ニAK＝KF＝FL

BH＝HO＝OE故ニBL＝LF＝FK

故ニ　AF＝BF

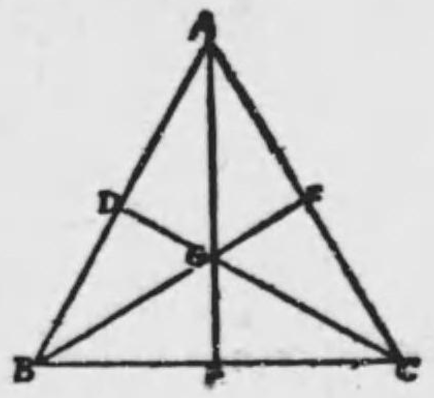
85



BF,CDヲ中線トシ,Gヲソノ交點トスレバ BF>CDヲ證スル代リニBG,CGノ大小ヲ證スレバヨイカ。

BG>CG ナルタメニハ ∠GEB, ∠GEC ハ如何ナルベキカ。此レ等ノ角ハ AB>AC ト如何ナル關係ニアルカ。

86



三角形ノ内心,外心,垂心,重心 ハ如何ニシテ出來ルカヲ考ヘヨ。正三角形ノ一角ノ二等分線ト底ノ垂直二等分線,中線,頂點ヨリ對邊ヘノ垂線ノ關係如何。

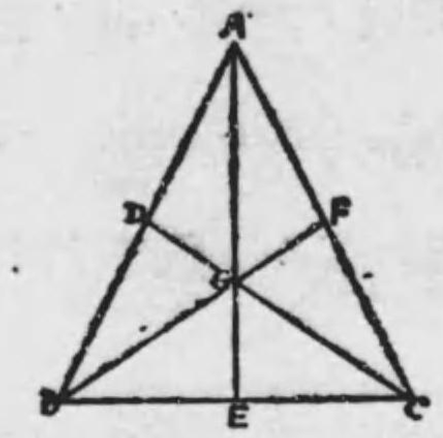
87 ∠ABF=∠EBDノ大サヲ考ヘヨ。∠BAF ノ大サハ。

$$\angle F=2R\llcorner-(2R\llcorner-\angle A)-\frac{\angle A+\angle C}{2}$$

$$=\angle A-\frac{\angle A+\angle C}{2}=\frac{\angle A-\angle C}{2}$$

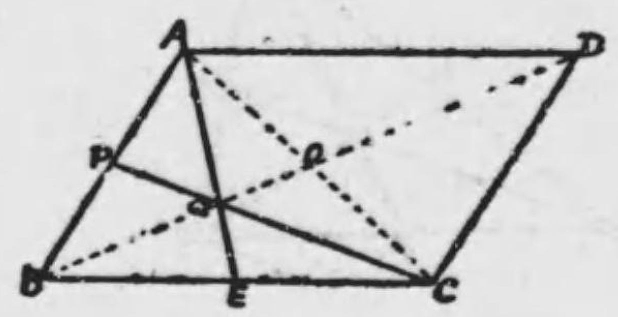
BC<AC ナラバ $\frac{\angle C-\angle A}{2}$

(85)



BF,CD ヲ中線トスレバ AE ハ何カ。△ABC ニ於テ AB=AC ナルタメニハ AEハBCニ對シテ如何ニナルベキカ。∠GEB,∠GECトBG,CGトノ關係如何。

(86)



BE=ECナルタメニハ Q ハ如何ナル點デアルベキカ。

BD,ACヲ結ビテ見ヨ。

BO,CP ハ△ABCニ對シテ如何ナル線カ。

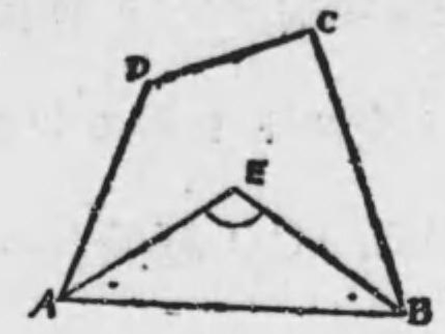
(87) ∠Bノ二等分線ト∠Cノ外角ノ二等分線トノ交點ヲ Fトスレバ

$$\angle F=2R\llcorner-\left(\frac{\angle B}{2}+\angle C+\frac{\angle A+\angle B}{2}\right)$$

$$=2R\llcorner-\left(\angle B+\angle C+\frac{\angle A}{2}\right)$$

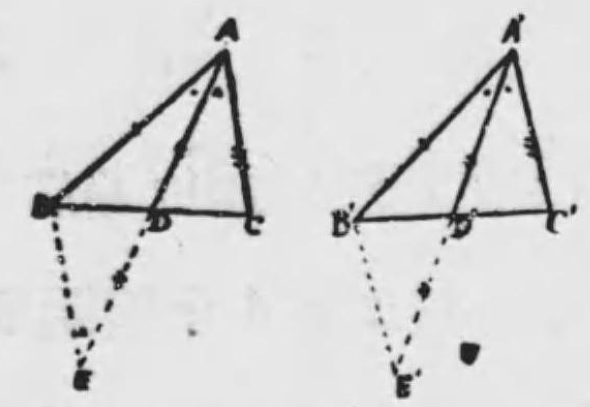
$$=\frac{\angle A}{2}$$

88



$\frac{\angle A}{2}+\frac{\angle B}{2}+\frac{\angle C}{2}+\frac{\angle D}{2}$ ト △ABE ノ内角ノ和トヲ比較セヨ。

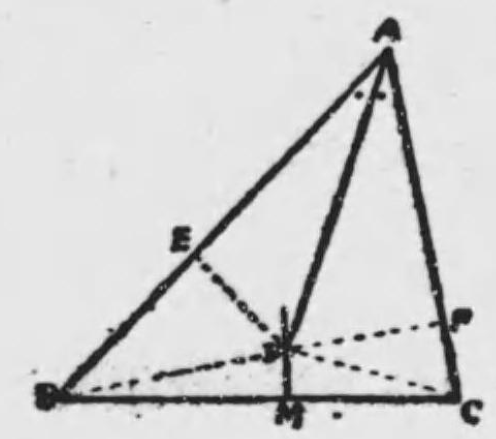
89



△ABCト△A′B′C′トニ於テ AB=A′B′, AC=A′C′,AD=A′D′ トスル。DE=AD, D′E′=A′D′ トシ, BE, B′E′ ヲ結ベバ △ABE ト △A′B′E′ トハ如何。

∠BACト∠B′A′C′ トハ如何。

90



AB>AC

DE⊥AB, DF⊥AC トスレバ

△ADE≡△ADF ∴ AE=AF

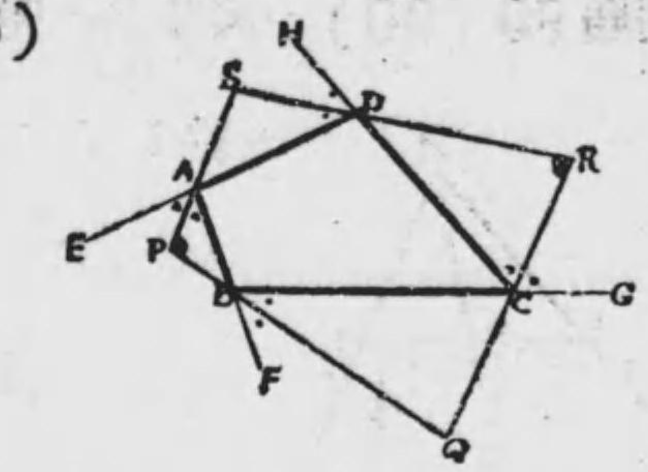
DE=DF

又DB=DC ∴ △DEB≡△DFC

故ニ BE=CF

故ニ AB=AC コレ即不合理。

(88)



$$\angle P=2R\llcorner-\left(\frac{2R\llcorner-\angle DAB}{2}\right)-\left(\frac{2R\llcorner-\angle ABC}{2}\right)$$

$$=\frac{\angle DAB+\angle ABC}{2}$$

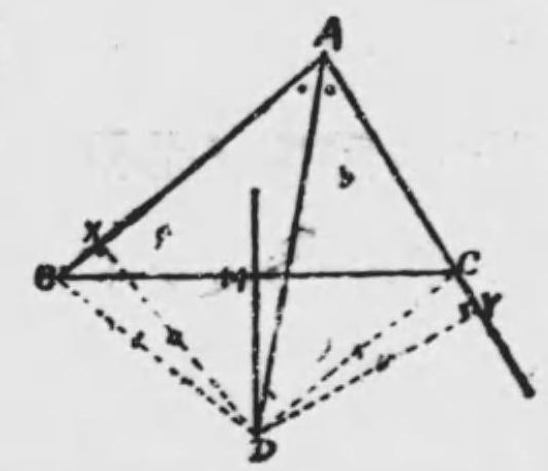
$$\angle R=\frac{\angle BCD+\angle CDA}{2}$$

∠P+∠R ハ何程カ。

(89) 二邊ト中線ノ2倍トデ三角形△ABE ヲ作レ

左ノ圖ニ於テ △ABE ヲ畫イテ後點C ハ如何ニシテ求メラレルカ。

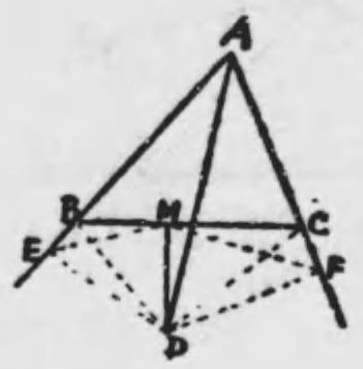
(90)



△ADX≡△ADY ∴ AX=AY, DX=DY

△DBX ト △DCY トガ合同ナルコトヲ證セヨ。 BX=CY

問題90（90）ハ興味アル問題デアル。∠Aノ二等分線トBCノ垂直二等分線トガ△ABC外ノ點Dニ於テ交ルトシテモDヨリAB, ACヘ下シタ垂線ガ圖ノ如ク, AB, ACノ延長上ニ在リトスレバ矢張リ　AE=AF,　BE=CF



AB=AE−BE,　AC=AF−CF

∴　AB=AC

トナツテごまかし(Paradox)ノ問題トナル。

然レドモ之ハ單ニ圖ノ畫方ガ惡イトイフダケノコトデアツテ證明ノ道筋ニハ少シモ誤ハナイノデアル。ソレ故「**圖ハナルベク正確ニ畫イテ證明ヲ進メヨ**」トシテアルガ之ハ全ク「ユークリツド」幾何ノ不備カラ來ルモノデアル。此ノ證明ヲ尙進メタナラバABCDハ同一圓周上ニ在ル故∠ABD=∠DCF

BEDM及DMCFハ夫々同一圓周上ニ在ル故

∠EBD=∠EMD　　∠DMF=∠DCF

∠ABD+∠EBD=2∠R　ナル故　∠DMF+∠EMD=2∠R

即EM, MFハ一直線トナルベキデアル。一直線ト出會フ直線EMFガソノ直線ノ一方ノ側ニノミアルコトトナル。コレハPasch「パツシユ」ヤHilbert「ヒルベルト」等ノ唱ヘル**順序ノ公理**ニ背クモノデアル。

Hilbertハ「ユークリツド」幾何ヲ嚴密ナラザルモノトシ極メテ嚴密ニ公理ヲアゲFoundation of Geometry幾何學ノ基礎トイフ書ヲ書イタ。順序ノ公理ノ一ツハ

一直線上ニアラザル三點A, B, Cト平面ABC上ニ在ツテA, B, Cノ何レヲモ含マザル直線lトアルトキモシlガAB上ノ點ヲ含ムトキハ必ズBC又ハAC上ノ點ヲ含ム。

第三篇

圓

第一章　弧及弦

37　中心角ト弧及弦

既ニ10節圓ノ基本性質ノ部及其以後ノ問題ニ於テ圓ノ各部ノ名稱ヤソノ性質ノ大體ヲ與ヘタカラ本節デハ先ヅ**問一**ニ於テ是等ヲ整理シ更ニ新ナ事項ニ進マントスルノデ

第10節ニ於テ敎ヘタ各部ノ名稱ハ

圓, 中心, 圓周, 弧, 半徑, 直徑, 弦, 割線, 中心角, 半圓, 同心圓

等デアル。

圓ノ基本性質トシテハ

1　同圓又ハ等圓ノ半徑(直徑)ハ相等シ。(10節)

2　圓ノ直徑ハ半徑ノ2倍ニ等シ。(同)

3　一ツノ圓ノ中心ハ唯一ツニ限ル。(同)

4　圓ノ直徑ハソノ圓ヲ二等分ス。(10, 14節)

5　半徑ノ相等シキ圓ハ合同ナリ。及ソノ逆　(41節)

6　直線ハ圓ト唯二點ニ於テ交ル。(10節)

7　二ツノ圓ハ二ツヨリ多クノ點ニ於テ出會フ能ハズ。(10節)

8　圓ノ中心ヨリ一點ノ距離ハソノ點ガ圓周ノ內ニ在ルカ, 或ハソノ上ニ在ルカ, 或ハソノ外ニ在ルカニ從テ半徑ヨリ小ナリ, 或ハ之ト等シ, 或ハ之ヨリ大ナリ。又ハソノ逆　(10節)

9　同圓又ハ等圓ニ於テ中心角ガ相等シケレバ之ニ對スル弦ハ相等シ, 又ソノ逆　(49頁, 57頁)

10　同圓ニ於テ中心角ガ等シケレバ之ニ對スル弧ハ相等シ。(64頁問二)

扇形　Sector

共軛弧 Conjugate arc { 優弧　Major arc
　　　　　　　　　　　劣弧　Minor arc

問二　二圓ノ大小ハ半徑ノ大小ニ依テ定マリ弧ノ長サヤ弦ノ長サ等ニヨツテハ定マラヌコトヲ知ラシム。

共通弦　Common Chord

問三　等圓叉ハ同圓ノ中心角ト弦トノ關係ヲ三角形ノ合同叉ハ二邊ノ等シキ二ツノ三角形ノ第三邊ノ大小ノ定理ニヨツテ研究セシム。(105頁55參照) 之ヲ纒メテ

同圓叉ハ等圓ニ於テ中心角ガ相等シケレバ之ニ對スル弧ハ相等シク中心角ガ不等ナルトキハ大ナル中心角ニ對スル弦ハ小ナル中心角ニ對スル弦ヨリ大ナリ。及ソノ逆

定理　**中心角ノ大小ト之ニ對スル弧ノ大小ニ關スル定理。**

重置法ニヨリ中心角ヲ重ネテソノ大小ト之ニ對スル弧ノ大小ヲ研究シソノ逆ノ場合ハ弧ヲ重ネテ中心角ノ大小ヲ研究スレバヨイ。

問　　題

1　圓周ヲ8等分シタソノ一分ノ弧ニ對スル中心角ノ大サハ何程カ。直角ノ何分ノ一カ。

2　$\angle AOC=2\angle AOB$, $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{AC}$ $\overset{\frown}{AD}$ ハ如何。弦 AC,AD ト 2AB, 3AB トノ大小如何。

(1)　圓周ヲ12等分シタソノ一分ニ對スル中心角ノ大サハ直角ノ幾分ニ當ルカ。

(2)　中心角QOA,AORヲ比較セヨ。$\angle QOA$, $\angle AOR$ ト等シキ角ハ何々カ。

定理　**弧ノ大小ト之ニ對スル弦ノ大小トノ關係。**

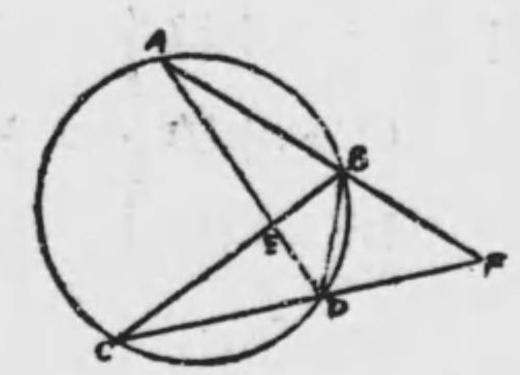
弦 → 中心角 → 弧

問　　題

3　邊ノ大小ト之ニ對スル弧ノ大小如何。叉邊ノ大小ト中心角ノ大小如何。

(3)　$\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ ニ對スル中心角ハ何レカ。叉ソレ等ノ角ハ何故互ニ等シイカ。

4　△ABDト△CDBトニ於テ夫々相等シキモノハ何カ。AD,CB ハ何故相等シイカ。△AEBト△CEDノ一邊ト兩端ノ角ノ大サヲ比較セヨ。



(4)　△ABDト△CDBトニ於テ AD＝CB, BD ハ共通 AB, CD ハ何故等シイカ。△AFDト△CFBトニ於テ AD＝CB, ∠F ハ共通 ∠FAD＝∠FCB 何故 ∠ADF,∠CBF ハ等シイカ。

定理　**圓ノ弦ニ垂直ナル直徑**

問四　∠AOC,∠BOC ハ等シイカ。∠AOD,∠BOD ハ如何。

問五　「弦ヲ二等分スル直線ハ圓ノ弦ニ垂直ナル直徑ナリ」ノ如ク假設ノ全部ト終結ノ全部ヲトリカヘルヤウナコトノナイヤウニ注意ス。

假設ガ二ツ以上ノ條件ヲ含ム定理ノ逆ハ假設ノ一ツト終結トヲトリカヘタモノデアルカラ逆ノ數ハ條件ノ數ト等シイ。

定理　PトQトRナルトキハSナリ。ヲ一定理トスレバ

ソノ逆ハ { SトQトRナルトキハPナリ。
　　　　　PトSトRナルトキハQナリ。
　　　　　PトQトSナルトキハRナリ。

是等ノ逆ノ中全部眞ナルコトモアルガ或モノハ眞デ或モノハ眞デナイモノノアルコトハ條件ガ一ツノ場合ノ逆ト同一デアル。ソノ眞ナルカ否カハ別ニ證明シナクテハナラナイ。例ヘバ

134頁(85)ヲトツテソノ逆ヲ考ヘル＝

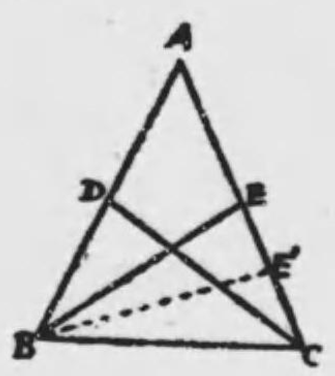
定理　三角形ノ二ツノ中線ガ相等シケレバソノ三角形ハ二等邊三角形ナリ。

逆 1　二等邊三角形ノ底ヨリ引ケル二中線ハソノ長サ相等シ。

逆 2　二等邊三角形ノ底ノ一端ヨリ對邊ニ引ケル線分ガ他端ヨリ引ケル中線ノ長サト等シキトキハソノ線分ハ中線ナリ。

逆 3　逆 2 ト同一

△ABC ニ於テ



定理　BE ハ中線, CD ハ中線, BE＝CD ナレバ AB＝AC

逆 1　AB＝AC, BE ハ中線, CD ハ中線 ナレバ BE＝CD

逆 2　AB＝AC, BE＝CD, CD ハ中線 ナレバ BE ハ中線

逆 3　逆2ノ EB ハ中線ト CD ハ中線トガ入レカハツタモノ。

逆 2, 3 ハ眞デナイ。BE′ハ CD ニ等シクテ而モ中線デハナイ。

終結ガ二ツ以上アルトキハ終結ヲ一ツ宛持ツ定理ニ分ツベキデアル。

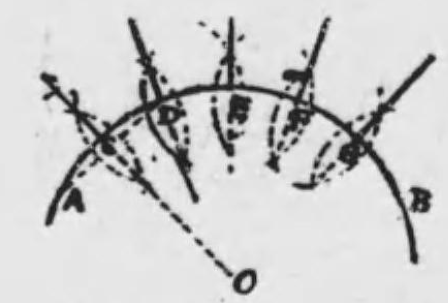
二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ垂直ニ二等分ス。トイフ定理ハ底ニ垂直ナリト底ヲ二等分ストノ各ヲ終結トスル二ツノ定理ニ分解サレソノ各ガ二ツ宛ノ逆ヲ有スルノデアル。

問　　題

5

弧ヲ移スニハ何ヲ求ムレバヨイカ。弧 ACB ノ中心ハ何處カ。弧ADB ノ中心ハ何處カ。

(5)



中心ヨリ出ヅル放射線ト垂直ナル弦ハ如何ナル弦カ。

AD⊥CO ナルニハ $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{CD}$ ノ大サ如何。

系三　直接證明ハ57頁問題 8 及70頁ノ作圖ヲ參照セシメラレヨ。

同一法　AB ノ垂直二等分線ハ兩圓ノ中心ヲ通ル。即チ中心線ナリ。然ルニ AB ノ垂直二等分線ハ唯一本ナリ。

又兩圓ノ中心線モ唯一本ナリ。

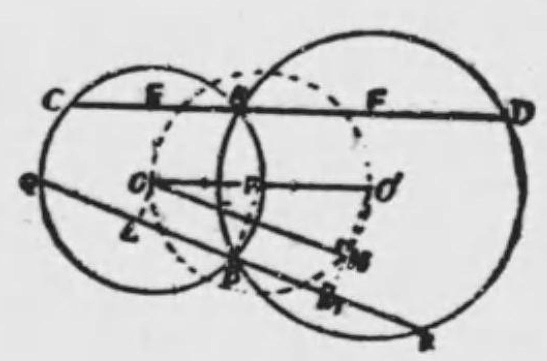
故ニ相交ル二圓ノ中心線ハソノ共通弦ノ垂直二等分線ナリ。

問　　題

6　CD∥OO′

OE⊥AC, O′F⊥AD トスレバ OO′ ト等シイ長サハ何カ。

EF ハ CD ノ半分カ。



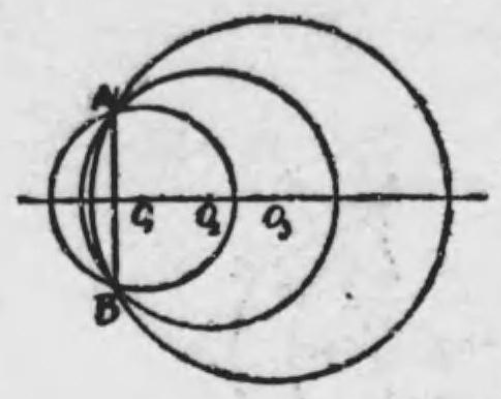
(6)　OL⊥QB, O′M⊥BR トスレバハ OL, PB, O′M ハ如何ナル線カ。OP＝PO′ナラバ LB, BM ハ如何。QB ト LB, BR ト BM ハ如何。

注意　(6) ニ依テ二圓ノ交點ヲ通ツテ割線ヲ引キ兩圓ノ弦ヲ等シカラシメルコトガ出來ル。又 OP＝2PO′ ノ如ク點 P ヲトレバ QB＝2BR トスルコトガ出來ル。又 OO′ヲ直徑トスル圓周上ニ ON ヲ與長ノ線分ノ半徑トシ, O′N⊥QR トスレバ QR ハ與長ノ線分デアル。

7

AB ヲ弦トスル圓ノ中心ハ何處ニ在ルカ。CDヲ弦トスル圓ノ中心ハ。同心圓ノ中心ハAB,CDノ垂直二等分線ト如何ニ關係セルカ。

(7)



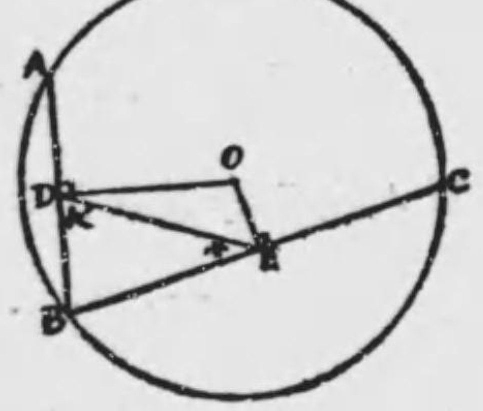
二定點A,B ヲ通ルスベテノ圓ノ中心ハ弦 AB ニ對シテ如何ナル位置ニ在ルカ。

38　弦ト中心トノ距離

定理　弦ノ大小ト中心ヨリノ距離ノ大小

此ノ定理ノ證明ニハ色々ノ方法ガアルガ本書ノ方法ガ理解シ易ク，又等シイ弦モ同様ナ方法デ證明スルコトガ出來且又逆ノ證明モ本定理ノ證明ヲ逆ニタドルコトデ出來，興味ノアル適當ナ證明法デアルト思フ。試ニ二三ノ別法ヲ示シテ見ヤウ。

別法 一　等弦ノ場合ハ省ク。不等ナル弦ノ一端ヲ重ネルヤウニ置ク。



AB<BCトス。

OD⊥AB,　OE⊥BC　トスレバ

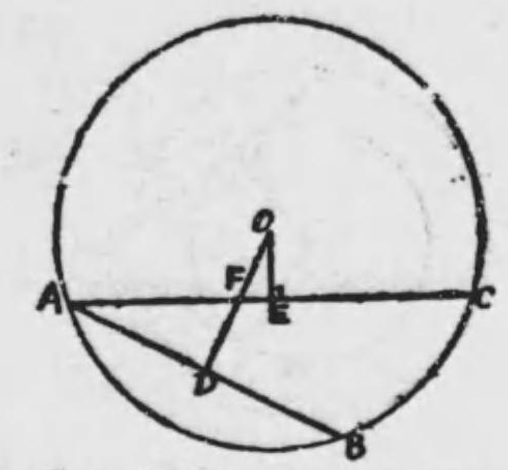
$DB=\frac{AB}{2}$,　$BE=\frac{BC}{2}$　∴　DB<BE

∠BDE>∠BED

∠ODB=∠OEB　故ニ　∠ODE<∠OED

∴　OD>OE

別法 二　不等ナル弦ノ一端ヲ重ネ兩端ヲソノ點ノ一方ノ側ニ在ラシム。



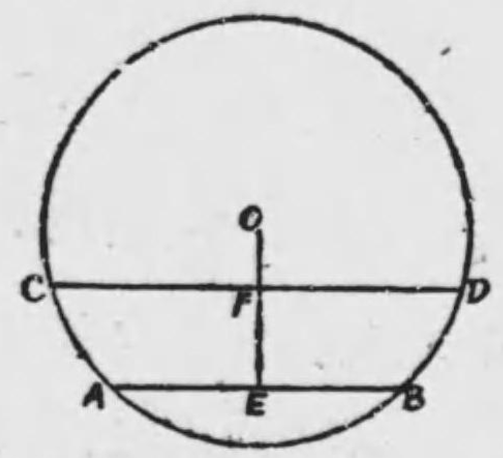
AB<AC　トス。

AB<AC　ナル故　$\overset{\frown}{AB}<\overset{\frown}{AC}$

即　Bハ$\overset{\frown}{AC}$上ニ在リ。

OD⊥AB, OE⊥AC　トスレバDハACニ對シOト反對ノ側ニ在リ。故ニODハACト交ル。ソノ交點ヲFトス。OFハ斜線ナル故　OF>OE　∴　OD>OE

別法 三　AB<CD　ナル故　$\overset{\frown}{AB}<\overset{\frown}{CD}$　故ニ



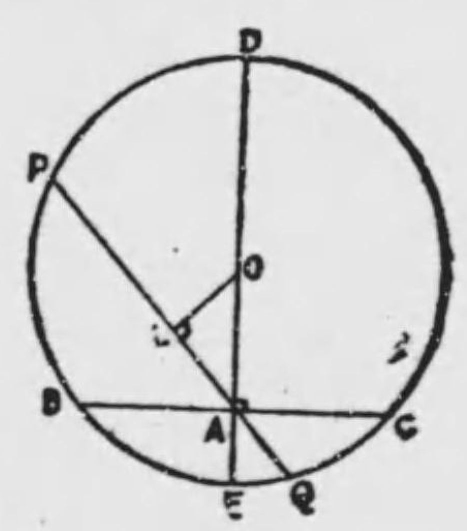
AB∥CD　ナル如ク　AB　ヲ置ケバOヨリABへ下セル垂線ハCDト交リ之ニ垂直ナリ。ソノ交點ヲFトスレバ　OE>OF

別法 四　「ユークリツド」ノ如ク圓ヲ面積ノ後ニ教授スル場合ニハ斜邊ノ等シイ二ツノ三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ノ大小ヲ比較スルノニ「ピタゴラス」ノ定理ヲ用ヒテモヨイ。

問一　間接法ハ是非試ミサシタイ。逆ノ間接的證明ニヨツテ本定理ノ證明ガイヨイヨ明トナルノデアル。

問二　中心ヨリノ距離ガ最小ナル故直徑ハ最大ナル弦ト考ヘテモヨシ。又圓ノ中心ヲOトシ弦ABト直徑PQトヲ比較スルニ　AB<AO+BO=PQ

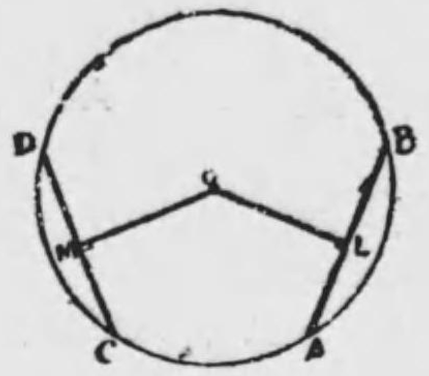
問三



定點ヲAトス。直徑DEガ最大。DEニ垂直ナルBCガ最小。PQヲ任意ノ弦トシ，OL⊥PQトスレバ　OA>OL　故ニ　PQ>BC

問　　題

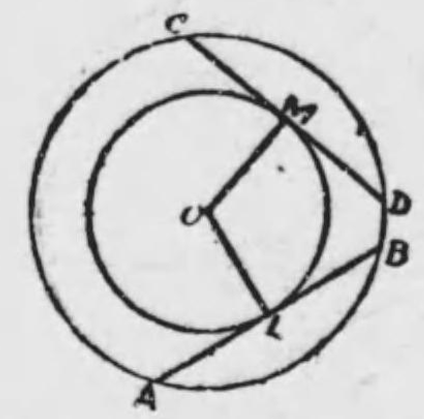
8



CDヲAB ト等シイ長サノ弦トスレバ中心ヨリノ距離ハ如何。

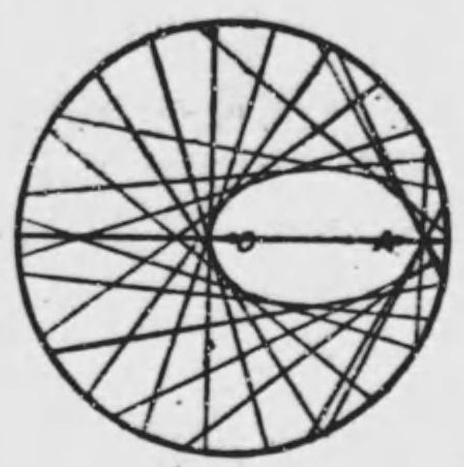
OM＝OL トスレバMハ如何ナル圓周上ニ在ルカ。

(8)

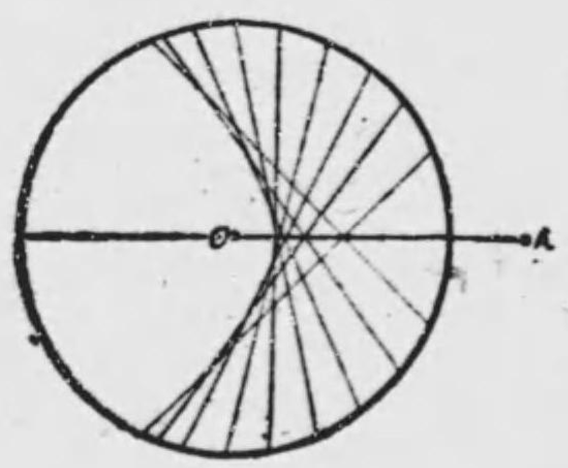


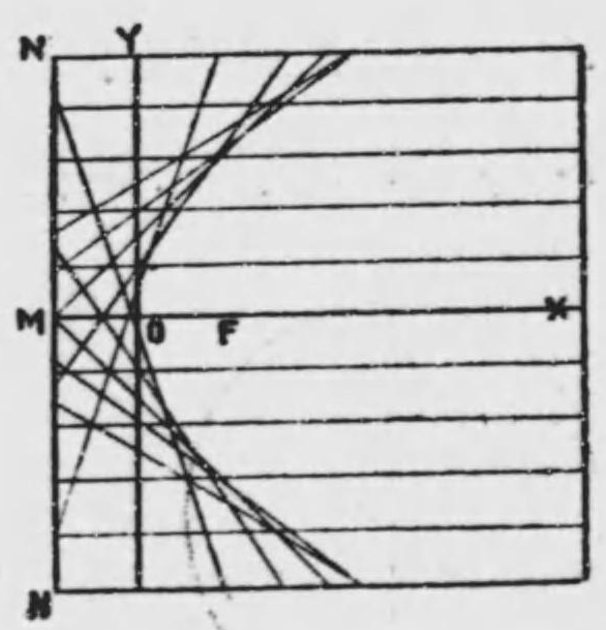
AB,CD ノ中點L, Mト中心Oトヲ結べ。OL,OMハAB,CDニ對シ如何ニナルカ。AB,CD ノ大サ如何。

包絡線 Envelope 問題8ノ圖ノ如ク相等シキ無數ノ弦ヲ引クトキハ是等ノスベテノ弦デ包マレタ弦ニ切スル曲線(同心圓)ガ出來ル。之ヲ包絡線トイフノデアル。他ノ例ヲ示スト圓O内ニ定點Aヲトリ，圓ヲ折曲ゲテソノ周ガ點Aヲ通ル如クスレバソノ折目ノ弦ハ一ツノ包絡線トシテ點OトAトヲ焦點トセル橢圓ヲ生ズ。



點Aヲ圓O外ニトツテ同樣ナ方法ヲ施セバスベテノ弦ハ點OトAトヲ焦點トセル双曲線ヲ生ズルノデル。OM＝OF, MN, MN′ ガFニ重スルヤウニ折レバソノ折目ハ抛物線ヲ包絡スル。





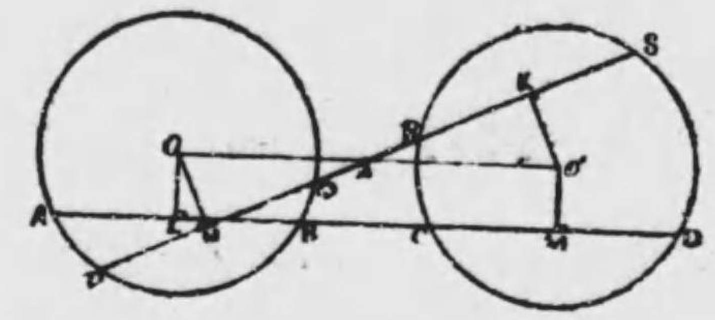
9　中心Oヨリ弦CD,EFノ距離如何。

研究　點ガ圓周上ニ在ラバ如何。又圓外ニ在ラバ如何。

(9)　不等ナル三邊ノ中心ヨリノ距離ノ大小如何。同心圓ニヨツテ出來タ弦ノ中心カラノ距離ノ大小ノ順序如何。

10　AB,CDノO,O′ヨリノ距離如何。

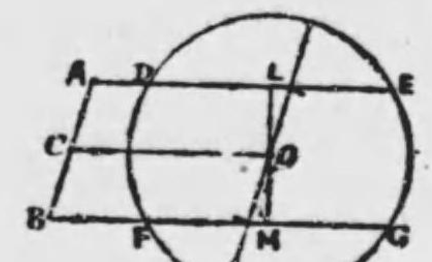
$\overset{\frown}{AB}$,$\overset{\frown}{CD}$ハ等シキカ



(10)　ONトO′Kトハ如何。弦PQトRSトハ如何。$\overset{\frown}{PQ}=\overset{\frown}{RS}$

研究10 (10)　ハ兩圓ガ相交ルトモ眞ナルカ。

11

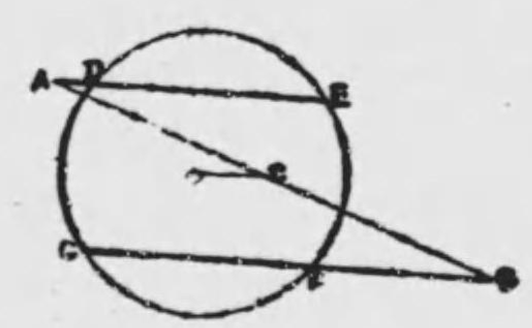


DE, FG ガ等シクテ平行ナルトキLMヲDEノ垂線トスレバOL, OMハ如何。

AB ノ中點ヲCトスレバAL, CO, BMハ如何ニナルカ。

AE BG ハ如何ニ引クベキカ。

研究　A,Bノ位置ニツイテ考ヘヨ。



(11)

PP′, QQ′ノOヨリノ距離ハ等シイカ。

第二章　弓形角

39 圓周角 Inscribed angle.

弓形 Segment

圓周角 Inscribed angle ト **弓形角** Angle inscribed in a segment トハ其ノ角ニ關スル弧ガ異ツテ居ル。同一ノ角デアレバ互ニ共軛ナル弧ヲトルコトニナル。

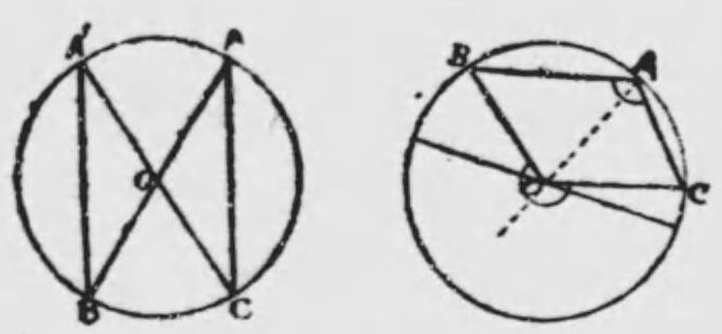
注意　弧ノ上ニ立ツ圓周角トイフベキヲ生徒ハ弦ノ上ニ立ツ圓周角ト誤ルコトガアル。共通弦ナドノ場合ニハ殊ニ誤ヲ來スカラ注意サレタイ。

問一　次ノ定理ノ豫備トシテ同弧ノ上ニ立ツ圓周角ト中心角トヲ考ヘシム。

問二　問一ト同ジク圓周角ト中心角トガ同弧ニヨツテ相對應スルコトヲ考ヘシム。

定理　同弧上ニ立ツ圓周角ト中心角トノ關係

極メテ應用ノ廣イ定理デアル。



(1)　ハ頂點ガ中心角ノ邊ノ延長上ニ在ル場合デ

(2)　ハ頂點ガ弧AA'ノ上ニアル場合

(3)　ハ頂點ガ弧AC又ハA'Bノ上ニ在ル場合デアル。此ノ場合ハ(2)ニ於ケル和ガ差トナツタダケデアルガ圖ガ複雑トナツテ生徒ガ理解ニ苦シムカラ角ヲ符號デ表スコトニシタ。

$\overset{\frown}{IC}$ガ半圓ノトキ及ビ半圓ヲ越シタ時モ考ヘルベキデアル。

系一　二定點ニ張ル角ヲ移動スルニ最モ都合ノヨイ定理デアル。

A,Bニ「ピン」ヲ挿シ,三角定規ノ兩縁ガソレゾレソノ「ピン」ニ觸レル如クシテ動カスト一頂點ハ如何ニ動クカヲ實驗セシムルガヨイ。

系二　弧ト圓周角トノ關係デアル。

等弧トハ只長サガ等シイダケデナクテ曲率モ等シクナクテハイケナイカラ同圓又ハ等圓ハナクテモヨイ理デハアルガナクテハ誤ヲ來スコトガ多イ。

逆トシテハ

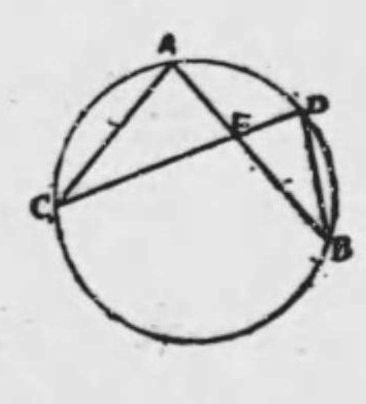
同圓又ハ等圓ニ於テ圓周角ガ等シケレバ之ニ對スル弧ハ相等シ。ヲトツテ同圓等圓ヲ終結ニ持テクベキデナイ。同圓又ハ等圓ノ範圍內ニ於テノ事項ヲイフノデアル。

一ツノ圓ノ圓周角ガ他ノ圓ノ圓周角ト等シケレバ之ニ對スル弧ハ相等シトイヒ得ルカ。

相等シキ弦ニ張ル圓周角ガ等シケレバソノ弓形ハ相等シキカヲ問ヒ「同圓等圓」ナル語ノ必要ヲ強ク感ゼシメテ置クガヨイ。

問　題

12



∠A ト等シイ角ハ何カ。

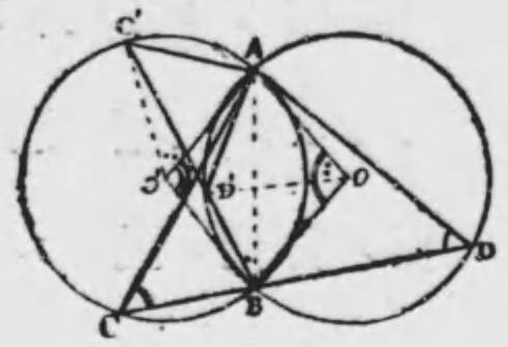
∠C ト等シイ角ハ。

(12)

∠A＝∠A' ナラバ BC ト B'C' トハ如何。

△ABC ト △A'B'C' トハ如何。

13 二ツノ圓ノ相等シイコトハ何ニ依ツテ定ルカ。AOトAO′ノ等シイコトハ何ニヨルカ。△AOBト△AO′Bトヲ比較セヨ。



次ニ△ABD′ト△ABC′ノ外接圓ノ相等シキコトヲ證スルニハ△AOD′ト△AO′C′トヲ比較セヨ

(13) C,DガBノ兩側ニ在ルトキ。

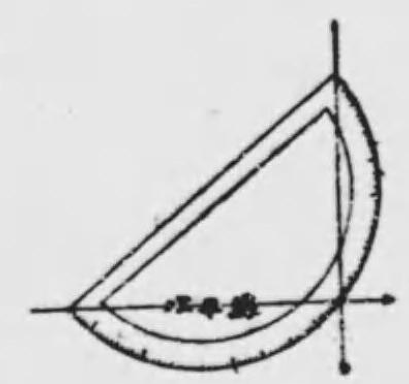
∠C,∠Dノ等シイタメニハ何ノ等シイコトガ必要カ。弧ABハ兩圓ニ於テ相等シイカ。

C′,D′ガBノ同側ニ在ルトキ。

∠ABD′ニ對スル兩圓ノ弧AC′, AD′ハ相等シイカ。

系三　弓形ノ大小トソノ中ニ含マレル角ノ大小トノ關係

此系ヲ應用シテ圓ヲ畫イタ板ヲ吊スコトニヨツテ水平線ヲ作ルコトガ出來ル。



系四　二定點ニ張ル角ノ大小ノ範圍ニ關スルモノ

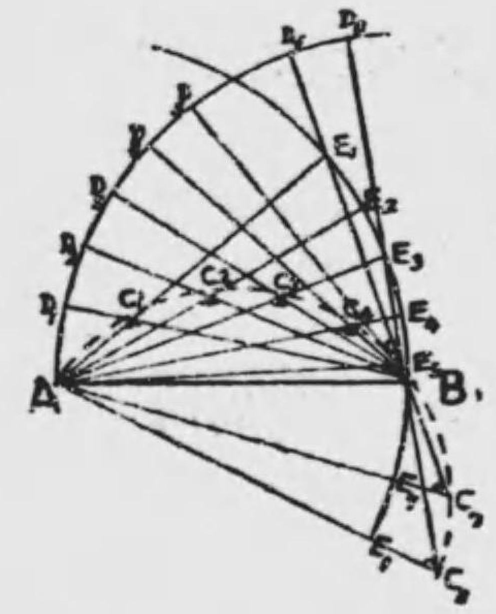
問三　點Pガ弓形內ニアルトキハAP,BPノ何レカヲ延長スレバ圓ト交ル。點Qノヤウニ外ニアツテモAQ′,BQ′ガ圓ト交ルトキハヨイガRノ如クAR, BRヲ反對ノ方向ニ延長シタトキ圓ト交ルトキハ點Q′ニ於テトツタ方法ヲトルコトガ出來ナイ。點Qノ如ク∠AQB＝Qヨリ任意ノ直線ヲ引イテ弧ト交ラシメ點Q′ノ如キ方法ヲ二回繰リ返セバ證明ガ出來ル。又點Rニツイテモ BCノ延長トARトノ交點ヲDトスレバ　∠ACB>∠ADC>∠Rトシテ別法デ證明ガ出來ル。

問　　題

14

船ノ位置ヲPトスレバ船ガ危險區域外ニ在レバ∠LPL′ノ大サハ如何。船ガ此區域內ニ入ラザルヤウニスルニハ∠LPL′ハ常ニ如何ニアルベキカ。此ノ圓弧ノ含ム角ヲ危險角Horizontal dangerous angleトイフ。

15

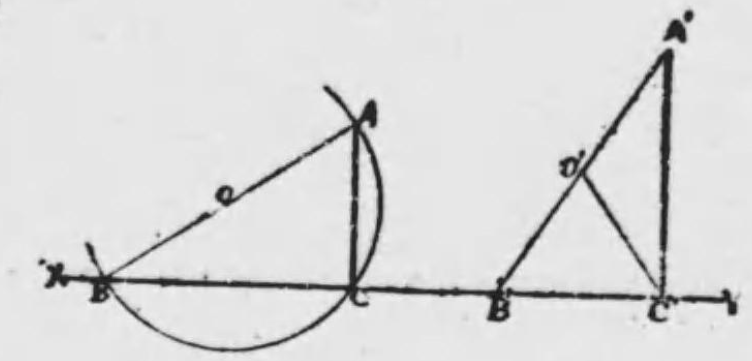


C_1, C_2, C_3……等ガ同一圓周上ニ在ルベキタメニハ如何ナルコトガ必要カ。

$\angle D_1BD_2$ト$\angle E_1AF_2$トハ等シイカ。

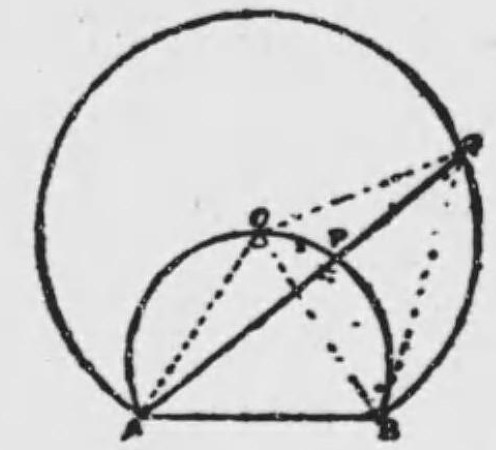
$\angle C_1$ト$\angle C_2$トハ如何。$\angle C_3$,$\angle C_4$等ハ如何。$\angle C_6$ $\angle C_7$等ハ152頁系二ニヨラナクテハナラヌ。

(14)



「コンパス」等ノ器具ヲ用ヒ得ザル程廣イ場所(野外)デ紐ノミヲ用ヒテ直線XY外ノ點A′カラ垂線ヲ立テルニハXY上ニ任意ニ點B′ヲトリ紐A′B′ヲ張リソノ中點O′カラA′B′ヲ二ツニ折ツタ長サヲXY上ニトリソノ點ヲC′トスレバA′C′⊥XY。

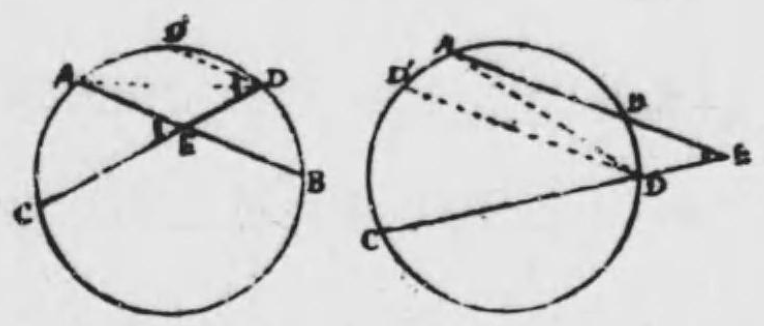
(15)



(1) $\overset{\frown}{AB}$ノ中點Oヲ中心トシ,AOヲ半徑トセル弓形ハ如何ナル角ヲ含ムカ。中心角AOBノ半分ト∠AQBトノ關係ヨリ點QガOヲ中心トシOAヲ半徑トセル圓周上ニ在ルコトヲイヘ。

(2) △OPBト△OPQトヲ比較セヨ。∠OPQト∠OPBトヲ比較セヨ。∠OPAト(∠POB＋∠PBO)ト$\overset{\frown}{OB}$,$\overset{\frown}{OA}$ニ對スル圓周角トハ如何。

16

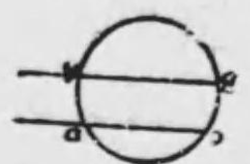


(1) $\angle AEC$ ハ $\angle EAD$, $\angle ADE$ ト如何ナル關係ニ在ルカ。$\overset{\frown}{BD}$, $\overset{\frown}{AC}$ ノ上ニ立ツ圓周角ト如何ナル關係ニ在ルカ。

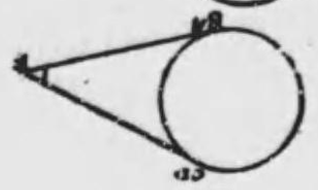
(2) $DD' /\!/ AB$ ナラバ $\angle DAB = \angle ADD'$ $\overset{\frown}{BD}$ ト $\overset{\frown}{AD'}$ トハ如何。

$\overset{\frown}{CD'}$ ニ對スル角 $\angle CDD'$ ト $\angle AEC$ トノ關係如何。

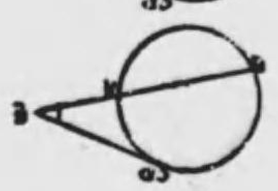
研究 點 E ガ圓內ニ在ルトキト圓外ニ在ルトキトヲ關係シテ考ヘルコトガ必要デアル。



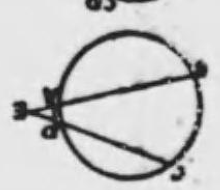
$\angle AEC = (\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD})$ ノ上ニ立ツ圓周角。



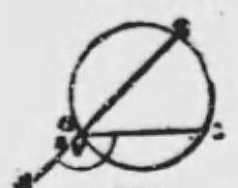
$\overset{\frown}{BD} = 0$



$\angle FAC = \overset{\frown}{AC}$ ノ上ニ立ツ圓周角 (157頁ノ定理ニ依ル)



$\angle FAC = (\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD})$ ノ上ニ立ツ圓周角。



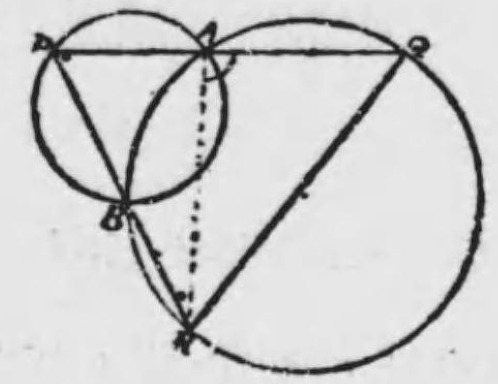
$\angle AEC$ ハ $(\overset{\frown}{AC} \sim \angle \overset{\frown}{BD})$ 卽 $\overset{\frown}{BC} \sim \overset{\frown}{AD}$ ノ上ニ立ツ圓周角

$\angle AEC = \overset{\frown}{BC} \sim \overset{\frown}{AD}$ ノ上ニ立ツ圓周角。

$\angle AEC = (\overset{\frown}{AC} \sim \overset{\frown}{BD})$ ノ上ニ立ツ圓周角

$CD /\!/ BA$ $\overset{\frown}{BC} \sim \overset{\frown}{AD} = 0$

(16)



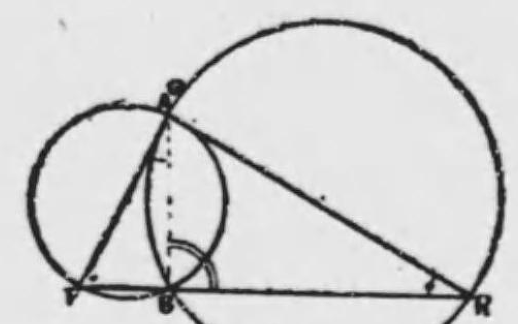
弦QRノ一定ナルタメニハ何ガ一定ナルベキカ。$\overset{\frown}{QR}$ ニ對スル角ハ何カ。

$(\angle APR + \angle ARP)$ ハ何故一定カ。

別法 $\triangle PQR$ ニ於テ $\angle P$ ハ一定ナリ。

$(\angle PRQ + \angle PQR)$ ハ如何。弧QABRガ一定ナラバ弦QRハ如何。

研究 此問題ハ點Pノ位置ニ依ツテ證明ニ種々ノ變化ガ起ル。點Pヲ圓APB上ヲ一廻轉シテスベテノ場合ヲ研究シテ見レバ有益デアル。但シ未學習ノ部ノ定理ヲ用ヒナクテハナラナイカラ本篇ノ終ニ雜題トシテ研究スルガヨイ。

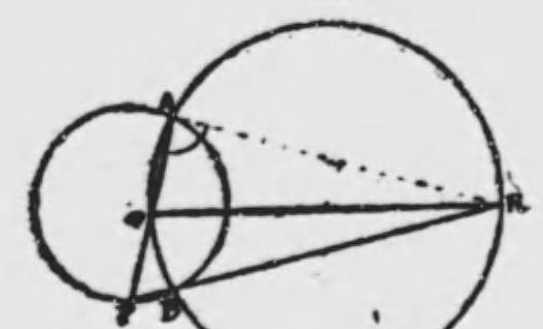


(1) A,Qガ一致シタ場合(APハ切線)

157頁ノ定理ニ依ラナケレバナラナイ。

$\angle PAB = \angle R$ 故ニ $\angle P + \angle PAB = \angle ABR$

故ニ $\angle ABR$ ハ上ノ證明ニ於ケル $\angle QAR$ ト等シクナリ $AR = QR$

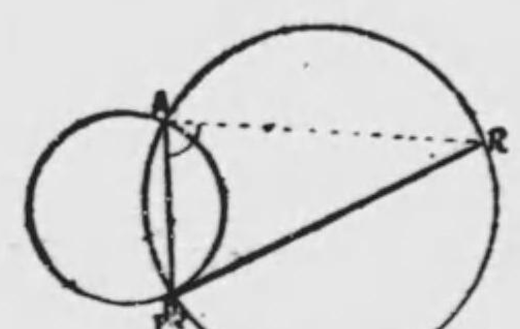


(2) AP(延長セズシテ)ガ弧ABト交ル場合

$\angle QAR = 2R.\llcorner - (\angle APR + \angle ARP)$ 一定

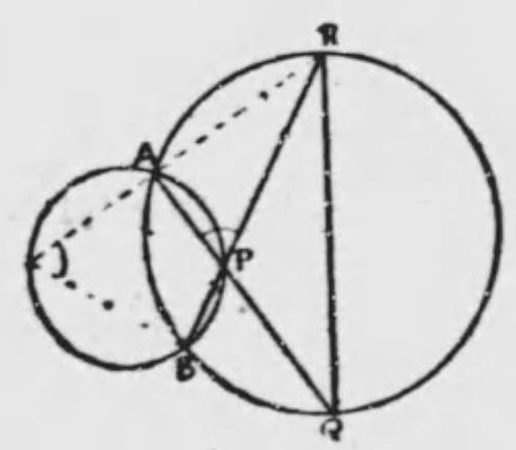
$2R.\llcorner - \angle QAR = 2R.\llcorner - \{2R.\llcorner - (\angle APR + \angle ARP)\} = \angle APR + \angle ARP$

故ニ弧QARハ上ノ證明ノ $\overset{\frown}{QR}$ ト等シイ。



(3) P,Q,Bノ一致シタ場合

157頁ノ定理ニ依ル。



(4) AP,BPノ延長ガ圓ト交ル場合

151頁ノ系一ヲ要ス。

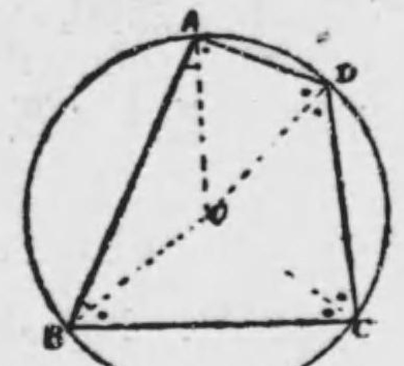
QRノ大サハ變ラナイ。

40 內接四邊形

內接多角形 Inscribed Polygon

外接圓 Circle circumscribed about a polygon (Circumscribed circle)

定理 內接四邊形ノ對角 別證明トシテハ四邊形ノ各項點ヲ中心ニ結ビ出來タ四ツノ二等邊三角形ノ底角ガ二双ノ相對スル角ノ中ニ等シク分タレルコトヨリモ出來ル。又問題17ノ如クスルモヨイガ中心角ト圓周角トヨリ考ヘサセルガ最モヨイ。



系一 內接四邊形ノ外角

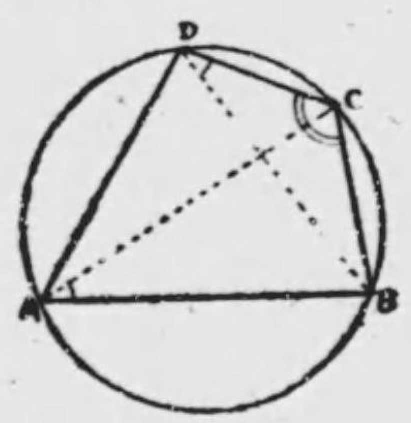
問一 圓ニ內接スル平行四邊形トハ相對スル角ガ補角ヲナス矩形ト同一デアル。

尙圓ニ內接スル梯形ハ如何ナル形カ。

圓ニ內接スル菱形ハ何カ。等ト質問シテ此ノ定理ヲ徹底セシメタイ。

問　題

17

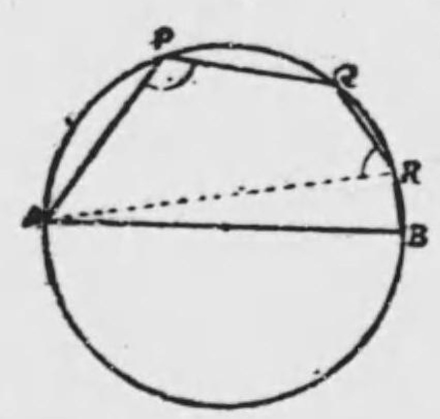


∠DAC ト等シイ角ハ

∠CAB ト等シイ角ハ

∠A+∠C ハ何度カ。

(17)



∠APQ+∠QRA+∠ARB ハ如何。

系二 對角ガ補角ヲナス四邊形

四邊形ABCDガ圓ニ內接スルトイフコトヲ云換ヘレバB,C,D三點ヲ通ル圓ハAヲ通ルトイフコトトナル。從テ此系ノ證明法モ歸謬法ニ依リ此ノ順序ヲ取ツタ。

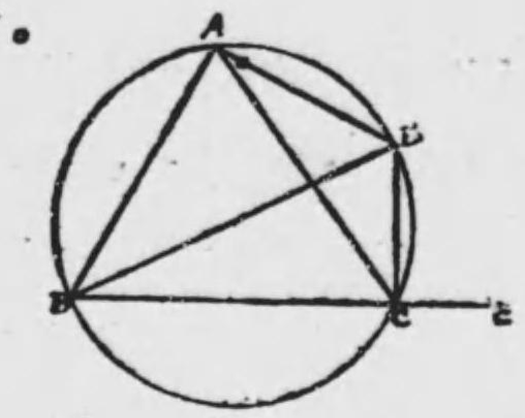
問二 四點A,B,C,D,ガ同一圓周上ニ在ル(Concyclic)ナル條件ヲ纏メテ知ルコトハ必要デアル。今マデノ所デ考ヘ得ルモノハ

1 AB,BC,CDノ垂直二等分線ガ一點ニ會スルコト。

2 ∠DAB+∠BCD=2R.

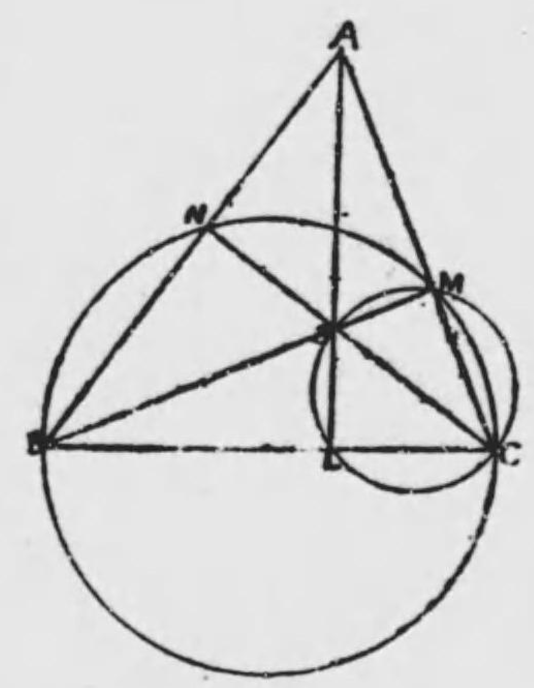
3 ∠DCE=∠DAB

4 ∠BAC=∠BDC



問　題

18

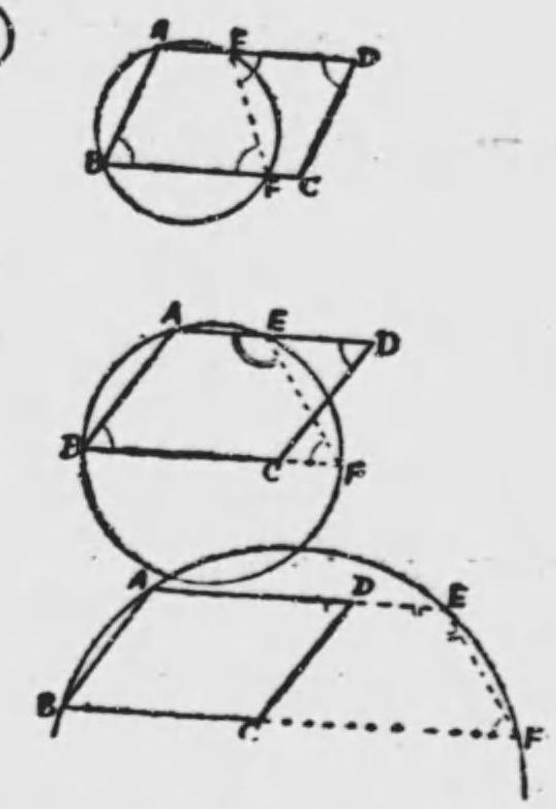


ANSMハ同一圓周上ニ在ルカ。

ABLMハ 〃

尙他ニ四點ヲ通ル圓ハ何々カ。

(18)



E,F,C,D ガ同一圓周上ニ在ルタメニ必要ナル條件如何。

∠EFB,∠CDAト等シキ理ヲ考ヘヨ

第三章　切線及切圓

41　切線 Tangent

問一　半徑ニ垂直ナル弦ガ次第ニ遠レバ弦ト中心トノ距離ガ大トナリ　弦ハ次第ニ小トナル。故ニ之ニ對スル弧モ小トナル。從テ割線ノ交點ハ次第ニ近ヅキソノ極限ニ於テハ圓ト唯一點ニ於テ出會フノミデアル。ソノ極限ニ到ル移動ノ有樣ヲヨク考ヘシメナクテハナラナイ。

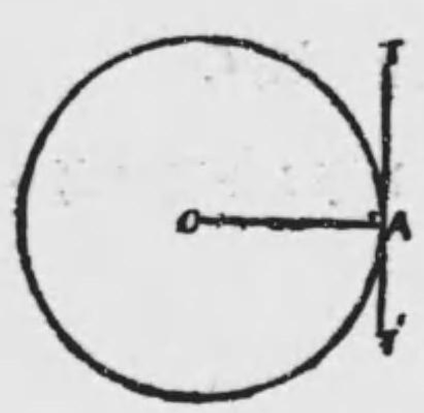
問二　圓外ノ一點カラ引イク割線ガソノ點ヲ中心トシテ廻轉シタトキノ交點ノ移動ヲ問一ト同樣ニ考ヘシメテ極限ノ位置ニ達スレバ切線トナルコトヲ知ラシム。問一,問二ノヤウナ考ヘ方ハ軌跡ニ於テハ殊ニ必要デアル

切點 Point of Contact

$$\text{共通切線 Common tangent}\left\{\begin{array}{l}\text{外共通切線}\ \left.\begin{array}{l}\text{External}\\ \text{Direct}\end{array}\right\}\text{Common tangent}\\ \text{內共通切線}\ \left.\begin{array}{l}\text{Internal}\\ \text{Transverse}\end{array}\right\}\text{common tangent}\end{array}\right.$$

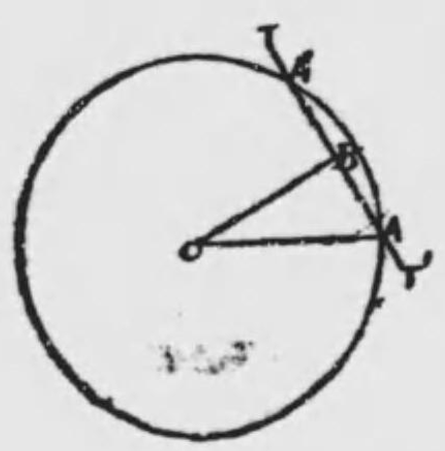
外(內)共通切線ヲ共通外(內)切線トイフ書モアル。

154頁ノ下ノ定理ト系一,系二ハ上ノ定理ノ逆デアル。從テ何レモ間接法ニヨツテ證明ガ出來ル。



$$\text{上ノ定理}\left\{\begin{array}{l}\text{OAハ半徑}\\ \text{TT}'\text{ハAヲ通ル}\\ \text{TT}'\perp\text{OA}\end{array}\right\}\text{ナラバ TT}'\text{ハ切線ナリ。}$$

$$\text{下ノ定理}\left\{\begin{array}{l}\text{OAハ半徑}\\ \text{TT}'\text{ハAヲ通ル}\\ \text{TT}'\text{ガ切線}\end{array}\right\}\text{ナラバ TT}'\perp\text{OA}$$



證明　TT′トOAガ垂直デナケレバ之ニ垂線ヲ下セバOB<OA　切線ノ一部分ガ圓內ニアル故圓ト二點デ交リ割線トナリ假設ニ反ス。故ニTT′⊥OA。

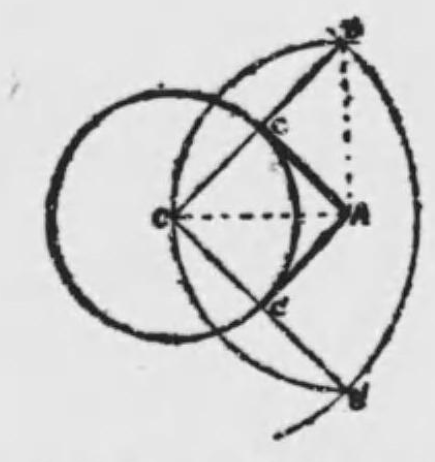
$$\text{系 一}\left\{\begin{array}{l}\text{TT}'\text{ガ切線}\\ \text{TT}'\text{ガAヲ通ル}\\ \text{OA}\perp\text{TT}'\end{array}\right\}\text{ナラバ OAハ半徑ナリ。(中心ヲ通ル)}$$

證明　切點ニ於ケル切線ノ垂線ガ中心ヲ通ラナケレバ中心ト切線ヲ結ブ直線ハ別ナ直線トナリ之ガ切線ニ垂直トナル故同一直線ニ同一點ニ於テ二本ノ垂線ガアルコトトナリ不合理デアル。

$$\text{系 二}\left\{\begin{array}{l}\text{OAハ半徑}\\ \text{TT}'\text{ハ切線}\\ \text{OA}\perp\text{TT}'\end{array}\right\}\text{ナラバ TT}'\text{ハAヲ通ル。(Aハ切點デアル)}$$

證明　中心ヨリ切線ニ下ス垂線ガ切點ヲ通ラナケレバ切點ト中心トヲ結ブ直線ガ切線ニ垂直トナリ直線外ノ一點カラソノ直線ニ二本ノ垂線ヲ下スコトトナツテ不合理デアル。

作圖題　作圖　圓外ノ一點ヨリソノ圓ニ切線ヲ引ク別法



Aヲ中心トシOAヲ半徑トスル圓トOヲ中心トシ,圓Oノ直徑ヲ半徑トスル圓トノ交點ヲB, B′トシOB,OB′ト圓トノ交點ヲC,C′トス。

AC,AC′ハ切線デアル。

證明　二等邊三角形ノ性質カラ明デアル。

外接多角形 Circumscribed polygon(A polygon circumscribed about a circle)

內接圓 Circle inscribed in a polygon (Inscribed circle)

切線ノ長サ AC,AC′ノヤウニ圓外ノ一點カラ引イタ切線ノ切點マデノ距離ヲ切線ノ長サトイフ。

定理　圓外ノ點カラソノ圓ニ引ケル切線ノ長サハ相等シトイヒ得ルノデアル。倚尋デニAOハ∠BACヲ二等分ストイフコトモ付ケ加ヘテ置キタイ。

19 (AB+CD)ト(BC+DA)ノ兩方ニ於ケル長サノ等シイ切線ノ分ヲ比較セヨ。

20 問題19ノ證明ハ平易デアルガソノ逆デアル本問題ノ證明ハ中々六ケシイ。ソレデ間接法ト直接法トヲ擧ゲタ。

間接法　四邊形ノ三邊ニ切スル圓ヲ畫ケ。內接セズトスレバ他ノ一邊ハ如何ニナルベキカ。

CEヲCヨリノ切線トスレバ四邊形ABCEノ對邊ノ和ハ如何。

$$\begin{array}{l} AB+CD=BC+DA \\ \underline{AB+CE=BC+EA} \\ CD\sim CE=DA-EA \end{array}$$

$CD\sim CE=ED$　此式ハ何ヲ意味スルカ。

直接法　$AB+CD=BC+DA$

$AB>DA$　トスレバ

$AB-DA=BC-CD$

$AF=AD,\ CF=CD$　トスレバ

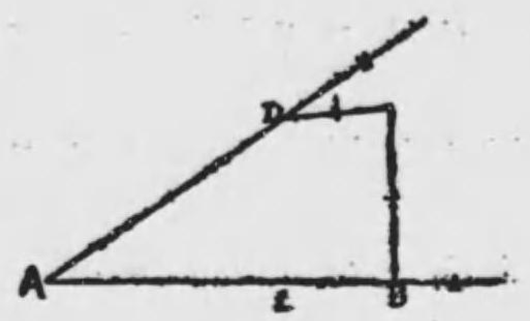
$\triangle AED, \triangle EBF, \triangle FCD$ ハ皆二等邊三角形デアル。

何故 $\angle A, \angle B, \angle C$ ノ二等分線ハDE,EF,FDノ垂直二等分線トナルカ。

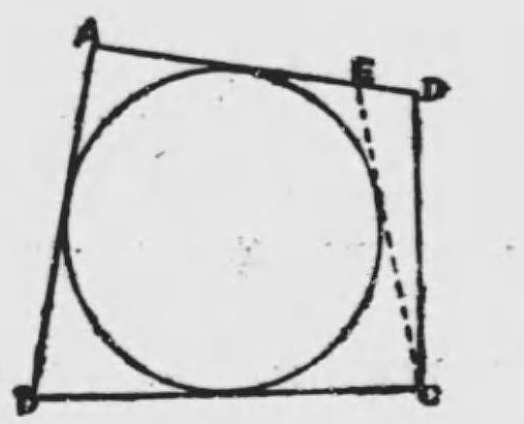
(19) (AB+CD+EF)中ノ切線ノ分ノ長サノ等シイモノヲ(BC+DE+FA)中ニ見出セ。

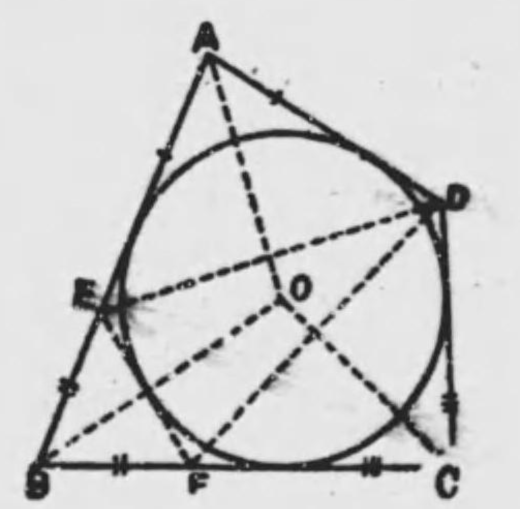
(20) 如何ナル四邊形ガ圓ニ外接シ得ルカ。

與ヘラレタル周ノ半分ヲLスレバ



此ノ如キ四邊形ノ形ハ定マツテ居ルカ。解ノ數ニ限ガアルカ。

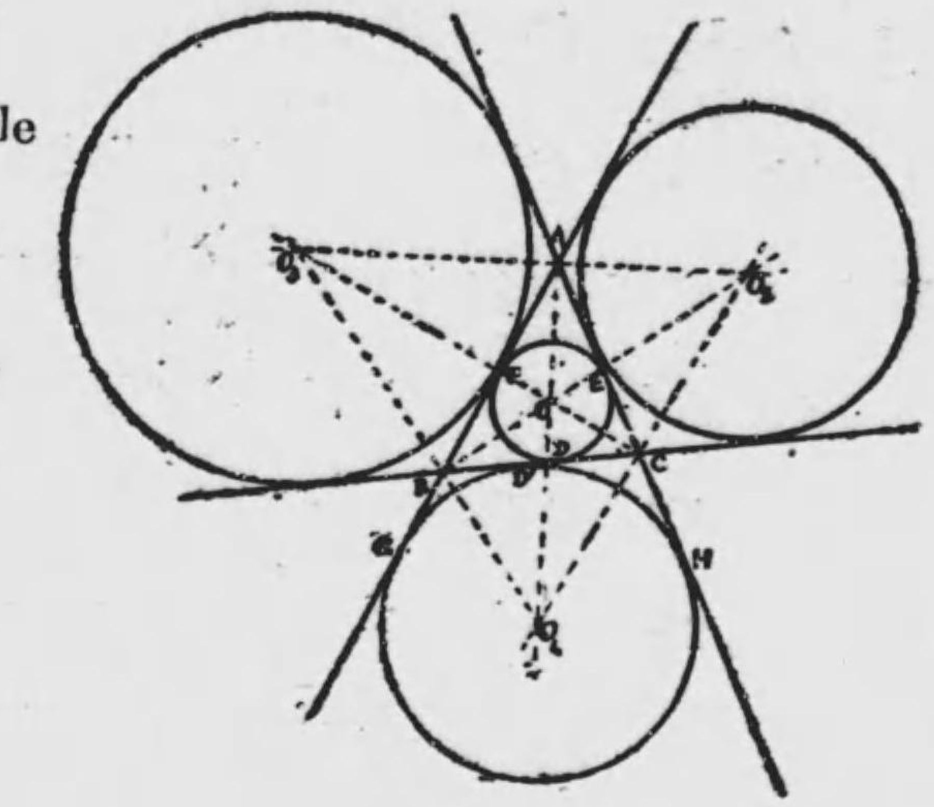




21 內接圓

Inscribed circle

三邊ニ切スル圓ノ中心ハ三邊ヨリ如何ナル距離ニアルカ。



(21) 傍接圓

Escribed circle

一邊ト他ノ二邊ノ延長ヨリ等距離ニ在ル點ハ如何ナル點カ。ソノ點ハ幾ツアルカ。

22 $AB+BC+CA$

$=AB+BD'+D'C+CA$

$=AB+BG+CH+CA$

$=AG+AH$

AG,AHハsカ。

AE,AFハ等シイカ。

$AB+BC+CA=2s$

$AB+CA=2s-a$

AE,AFハAB,ACカラ何ヲ引イタモノカ。

$AB-BF+CA-CE=2s-2a$

AF+AE　ハ

AF,AE　ハ如何。

(22) $BF=c-AF=c-(s-a)$

$=c-s+a=a+b+c-s-b$

$=2s-s-b=s-b$

叉AFト同樣ニシテ求メヨ。

$BD'=BG=AG-AB=s-c$

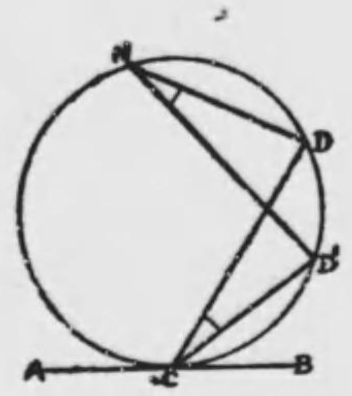
$DD'=BC-BD'-CD$

$CD=CE=s-c$

$DD'=c-b$

42 切線ト弦トノナス角

定理 切線トソノ切點ヲ通ル弦トノナス角 此定理ハ150頁問題16デ考ヘタヤウニ極限ノ考デモ證明出來ルガ生徒ニハ難解デアルカラ本書ノヤウナ方法ニヨツタ。參考ノタメニ極限ニヨル證明法ヲ示サウ。



AB ヲ點Cニ於ケル切線，CDヲCヨリノ弦トスル。Cヨリ他ノ弦CD′ヲ$\angle$BCD内ニ引キCD′ガCヲ中心トシテ廻轉シ次第ニCBニ近ヅクト考フルニ

$$\angle D'CD=\angle D'ND$$

D′ガ如何程Cニ近ヅクモ此ノ式ハ成リ立ツD′ガCニ合スレバCD′ハCBト重ツテ切線トナリ$\angle$DCD′ハ$\angle$DCBトナリ，$\angle$D′NDハ$\angle$CNDトナル。故ニ$\angle$DCBハ$\overset{\frown}{CD}$ノ上ニ立ツ圓周角ト等シイ。

問一 $\angle FAC=\angle FCA=75°$ B,Cニ於ケル角ノ大サハ如何。

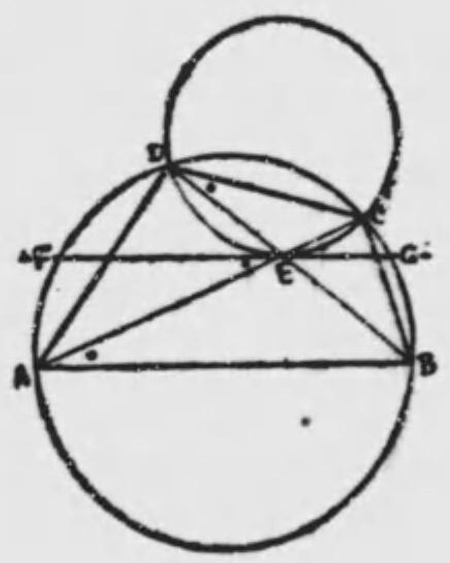
系 <u>直接法</u>ノ證明トシテハ前頁ノ證明ヲ逆ニスレバヨイ。

<u>間接法</u> ACガ切線デナイトスレバ他ニAヲ通ツテ切線ヲ引クコトガ出來ル。之ヲAC′トスレバ$\angle BAC=\angle\alpha$，然ルニ$\angle BAC=\angle\alpha$

$\angle BAC=\triangle BAC'$ コレ不合理デアル。

問 題

23



(23) Cハ$\overset{\frown}{AB}$ノ中點 $\angle CAH=\angle CAB$

$\angle$CAHト$\angle$CBA ト等シイカ。

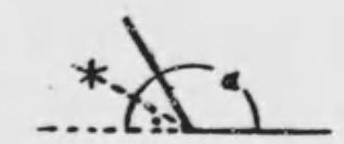
上ノ系ニヨルトキCガ$\overset{\frown}{AB}$ノ中點デナイトキハ$\angle$CAH ハ何ト等シケレバヨイカ。

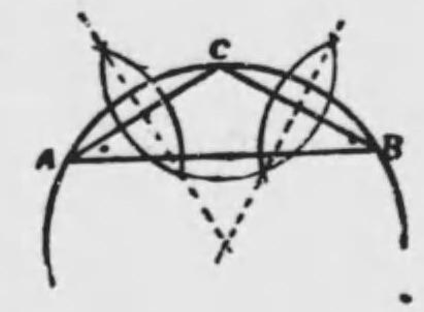
作圖題 與線分AB上ニ$\angle\alpha$ヲ含ム弓形ヲ作ルコトハ三角形ノ作圖ニハ極メテ必要ノコトデ屢用ヒラレルコトデアルカラ$\angle\alpha$ガ鋭角ナルトキ直角，鈍角ノスベテニツイテ作圖ヲセシメテ置クガヨイ。又コレハ基本的ノ作圖デアルカラ今後之ヲ應用スルトキハ

「與線分AB上ニ$\angle\alpha$ヲ含ム弓形ヲ作ル」ト簡單ニイフテ作圖スルヤウニシタイ。

弓形ハABノ兩側ニ二ツアルコトヲ忘レテハナラナイ。

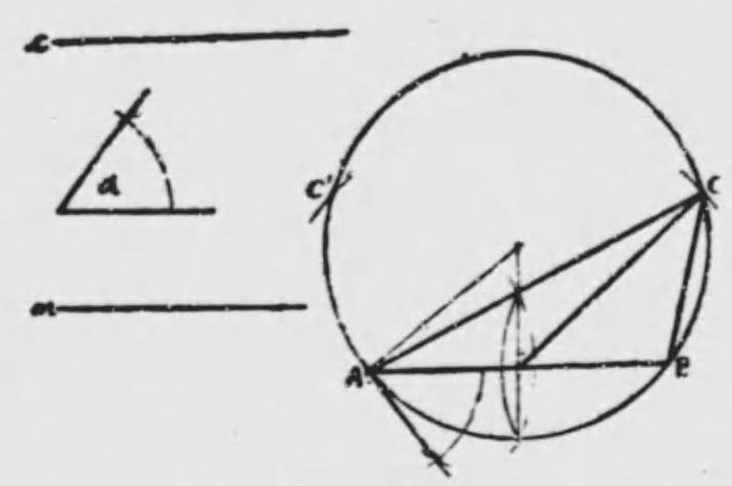
<u>別法一</u> ABノ兩端ニ$\angle\alpha$ノ補角ノ半分ヲ持ツ三角形ヲ作ツテソノ三角形ノ外接圓ヲ畫イタ時ノ弧ガ求ムルモノデアル。





問 題

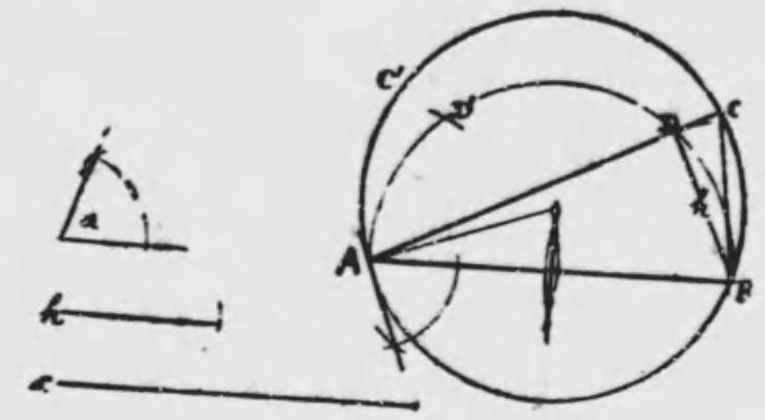
24



作圖 頂 ハ如何ナル圓周上ニ在ルカ。又頂點ハ底ABノ中點Dヨリ如何ナル距離ニ在ルカ。

研究 $\triangle$ABCト$\triangle$ABC′トハ合同カ。$\overset{\frown}{CB}$,$\overset{\frown}{C'A}$ノ等シイコトヨリ考ヘヨ。

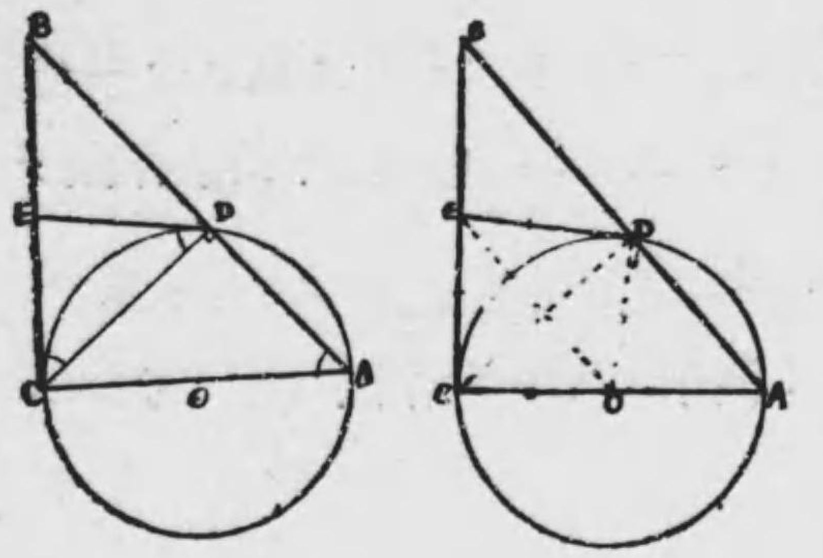
(24)



作圖 頂點ハ如何ナル圓周上ニ在ルカ。Bヨリ對邊ニ下ス垂線ノ足ハ如何ナル圓周上ニ在ルカ。

研究 $\triangle$ABCト$\triangle$ABC′トハ合同ナコトヲ證セヨ。$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AD'}$

25



(1) 左圖ニ於テ△CDB ハ如何ナル三角形カ。EガCB ノ中點ナルタメニハCE トDE トハ如何ナルベキカ。

CE＝DEナラバDE,EBハ如何。

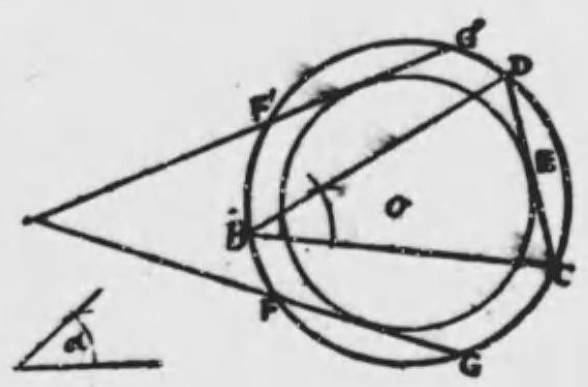
(2) 右ノ圖ニ於テ CEトDEトハ如何。COトDOトハ如何。

CDトOEトハ如何ニナルカ。

OE,ADハ共ニCDニ垂直デアル。

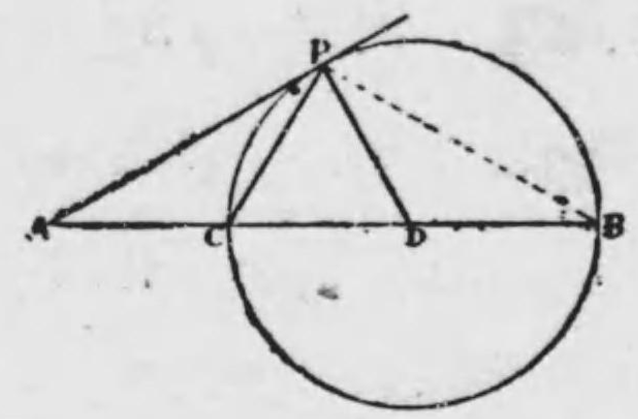
OE∥ABナラバCE EBハ如何。

26



作圖 與角ヲ含ム弓形ヲ截ル方法如何。圓周上ノ任意ノ點ヨリ與角αヲナス弦BC,BDヲ引ケバ弓形 CBD ハ如何。Aヨリ引ク割線ノ弦FGト弦CDト等シイタメニハ如何ナル距離ニアルベキカ。

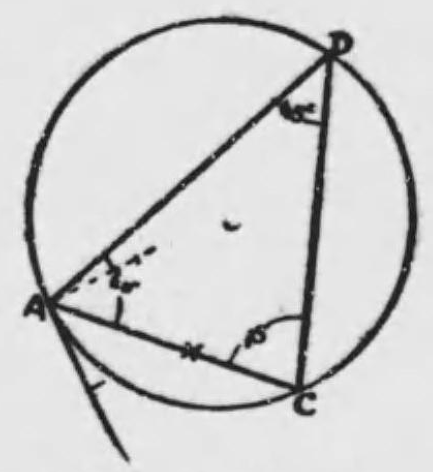
(25)



(1) APガ CPB ノ切線ナルタメニハ∠APCハ何ト等シカルベキカ。

(2) APガ圓 CPB ノ切線ナルタメニハAPトDPトハ如何ナル關係ニ在ルベキカ。

(26)



45° ヲ含ム弓形ノ弦ハソノ端ヨリ引ケル切線ト何度ノ角ヲナスベキカ。（**26**参照）

角ノ順序ガ逆ノ三角形モ作レ。

〔148頁(12)参照〕

43 二ツノ圓

問一 二ツノ圓ハ二點デ交ルコトハ26頁問六デ實驗的ニ承認シ，今マデニモソノコトヲ度々用ヒテ來タ。ココデハ出會フカト問ツテ出會フニハ二點ノコトト一點ノコトトアルコト二點ノトキヲ交ルト云ヒ，一點ノトキハ別ナ語ヲ用ヒルコトヲ敎ヘルノデアル。二點デ交ルコトハ容易ニ證明出來ル。

問二 二圓相互ノ距離ノ關係ト二圓ノ交點ノ距離トノ關係ヲ考ヘシメ，二圓ガ一點デ出會フトキガ二度アツテ二圓ノ出會フ點ハソノ中心線上ニ在ルコトヲ考ヘサセル。

相切ス Tangent to each other ｛ **外切** Tangent externally / **内切** Tangent internally

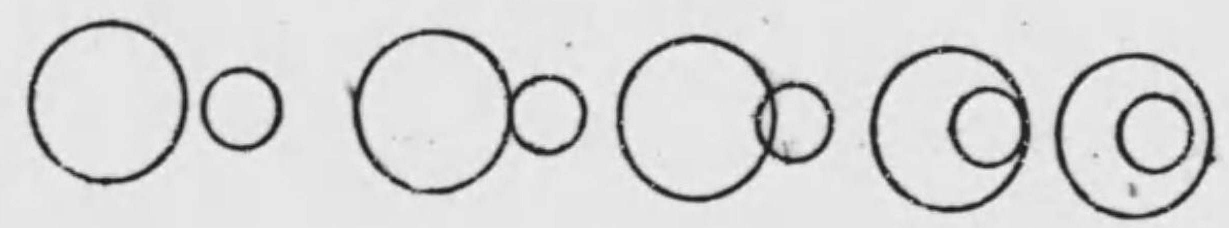
定理 相切スル二圓ノ切點ハ中心線上ニ在リ 内切ノ場合モ外切ノ場合モ考ヘタイ。尙此ノ定理ノ逆

二圓ガ中心線上ノ一點ヲ共有スルトキハ相切スモ考ヘシメタイ。

系一 逆トシテ同一直線上ノ同一點ニ於テ切スル二圓ハ互ニ相切ス。モ考ヘシメタイ。

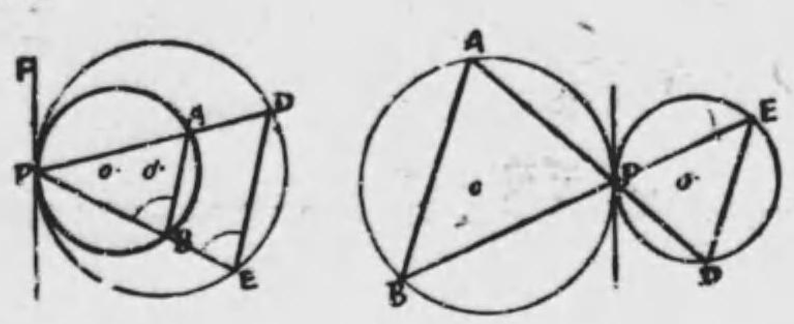
系二 二圓ト半徑ノ和及ビ差ト中心距離。トノ關係ノ證明ハ簡單デアルガ充分各場合ヲ研究セシメタイ。二圓ニ關スル問題ノ複雜ニナルノハ二圓ノ位置ノ關係ノ場合ガ多イカラデアル。

二圓ノ相互ノ位置 ハ五種アツテソノ各場合ヲ簡單ニ分離，外切，相交，内切，包含トイフヤウニシタ。



問　題

27

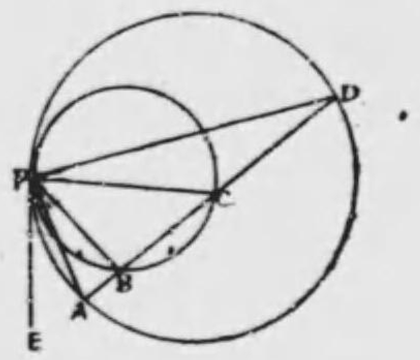


内切ノ場合. P ヲ通ル一圓ノ切線ヲ引ケバ如何ニナルカ。

何故AB,DEハ平行カ。

外切ノ場合ハ如何。

28

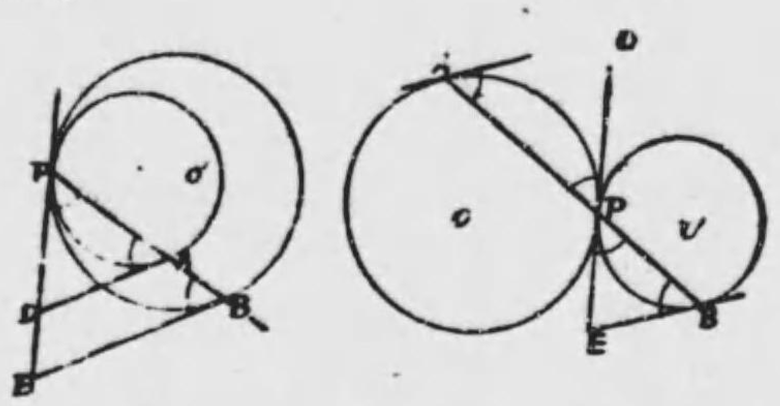


切線PEヲ引ケ。

∠EPA ト等シイ角ハ何カ。

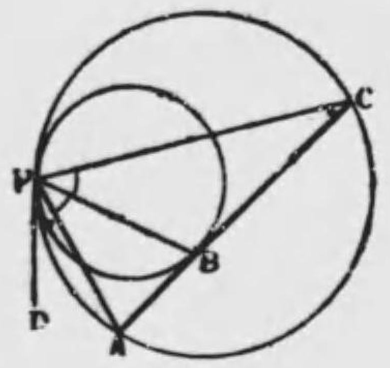
(∠EPA+∠APB)=∠EPB ト等シイ角ハ。

(27)



内切ノ場合　∠DPAト∠DAPトハドノ弓形内ノ角ト等シイカ。∠EPAト∠EBPトハドノ弓形内ノ角ト等シイカ。AD,BE ハ平行カ。外切ノ場合ハ如何。

(28)



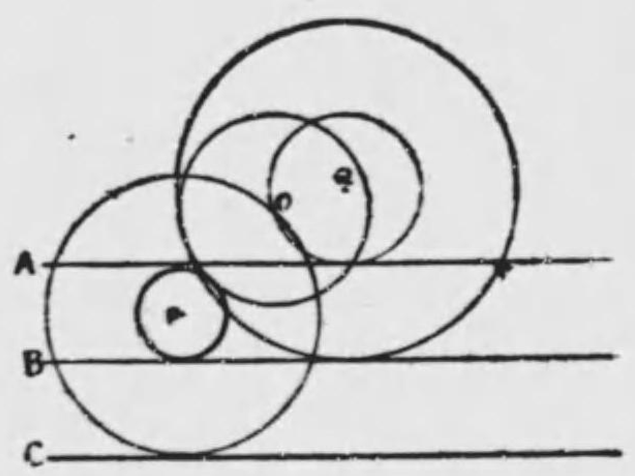
切線PDヲ引ケ。

∠DPAト等シイ角ハ何カ。

∠DPBト∠ABPトハ等シイカ。

29　圓Oノ中心ヲ通ル圓ト圓Oニ外切スル圓トガ同心圓ナラバ半徑ノ差ハ如何。

直線CトBトノ各ニ切スル同心圓ノ半徑ノ差如何。



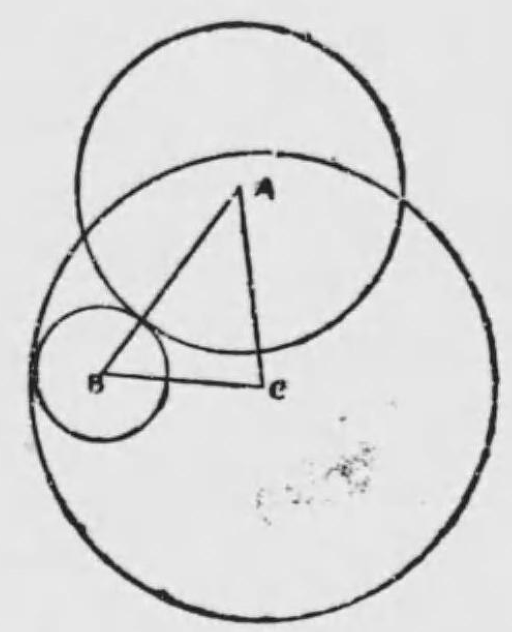
(29)　圓Oノ中心ヲ通ル圓ト圓Oニ外切スル圓トガ同心圓ナラバ半徑ノ差如何。小圓ガ直線Bニ切スレバ大圓ハ直線Cニ切スルカ。

30　圓 A,Bノ關係ハ何ニ依テ定ルカ。AB=7*cm*, 圓Aノ半徑5*cm*,圓Bノ半徑2*cm*ナラバ半徑ノ和又ハ差トABトノ關係如何。

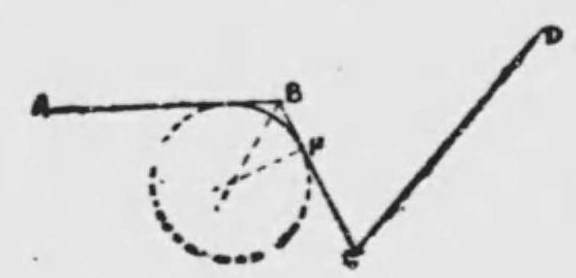
圓A,Bハ外切ス。

圓A,C　$(7-5)cm<6cm<(5+7)cm$
　交ル。

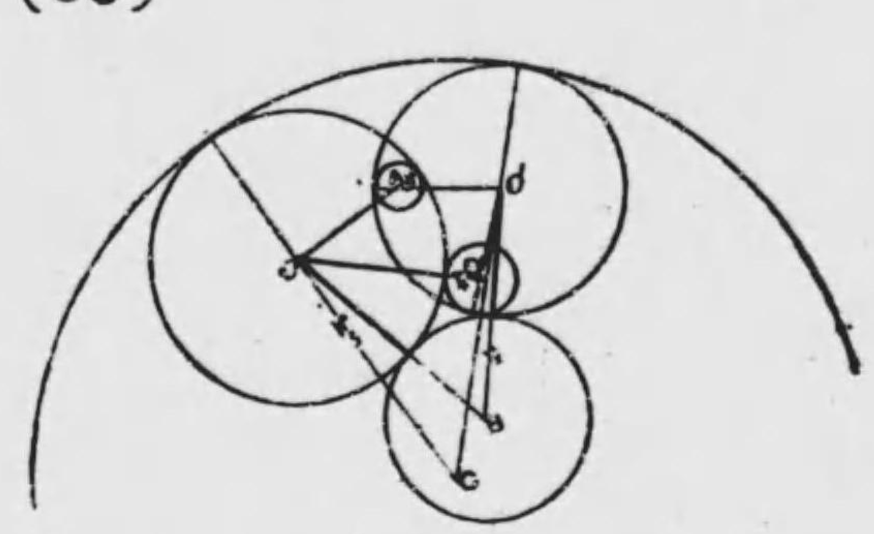
圓B,C　$(7-2)cm=5cm$
　内切スル。



31　點Pニ於テBCニ切スル圓ノ中心ハ如何ナル線上ニ在ルカ。又AB,BCニ切スル圓ノ中心ハ如何ナル線上ニ在ルカ。



(30)



(1)　圓 O,O′ ニ含マレテ内切スルトキ圓Aノ半徑ヲr糎トスレバ

$OA=7-r,\ O'A=6-r$

$O'A+OA\geqq10\qquad 7-r+6-r\geqq10$

$3\geqq2r\qquad r\leqq\frac{3}{2}$

圓Aノ最大ナルトキノ半徑ハ1.5糎デアル。

$O'A\sim OA=7-r+6-r=1$

圓Aガ圓 O,O′ ヨリノ中心距離ノ差ハ一定デアル。

(2)　圓O,O′ニ共ニ外切ノトキ

$7+r_2+6+r_2\geqq7+6\qquad 2r_2\geqq0$

$r_2\geqq0$　半徑r_2ノ大サハ任意。中心距離ノ差ハ一定。(1糎)

(3)　圓 O,O′ ヲ含ンデ共ニ外切スルトキ

$r_3-7+r_3-6\geqq10,\qquad r_3\geqq\frac{23}{2}$

最小圓ノ半徑11.5糎, 中心距離ノ和ハ一定。(13糎)

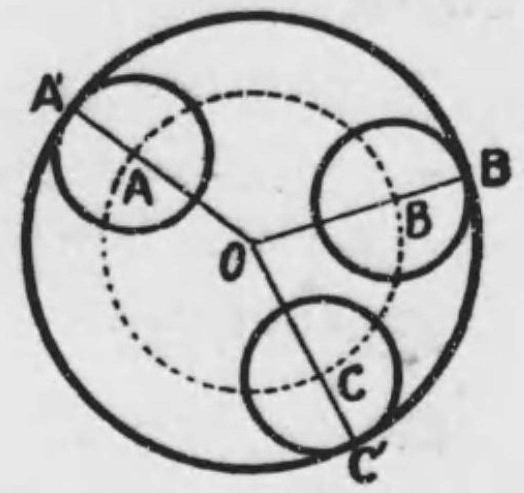
(4)　圓Oニ外切シ圓O′ニ内切ノトキ

$r_4+7-(6-r_4)\geqq10,\quad r_4\geqq\frac{9}{2}$, 最大圓ノ半徑4.5糎, 中心距離ノ和一定(13糎)

(5)　圓Oニ内切シ, 圓O′ニ外切スルトキ

最大圓ノ半徑5.5糎, 中心距離ノ和一定 (13糎)

(31) 切點ト三等圓ノ中心ヲ結ブ線ハ如何ニナルベキカ三等圓ノ中心ヲ通ル圓ト三圓ノ內切圓トノ關係如何。



44 圓ノ內接外接正多角形

正多角形ノ邊長ノ計算ヤ正多角形ノ畫キ方ニツイテハ第八篇ニ於テ學ブノデアルガコヽニハ圓ノ弧,弦,切線ノ性質ニ關スルモノヲ教授スルノデアル。

定理 內接正多角形。圓ニ邊數 n ノ正多角形ヲ內接セシメルコトハ圓周ヲ n 等分スルコトデ之ニハ 4 直角ヲ n 等分スルコトガ必要デアル。

四直角ヲ等分スル方法デ古來ヨリ知ラレテ居タモノハ2等分,3等分,5等分及ソノ 2^n 倍デアツタガ 1796年「ガウス」Gaus ガ更ニ17等分,257等分,65537等分シウルコト及是等ノ數ノ二ツ又ハ二ツヨリ多クノ積ヨリ成ル數ニ等分シウルコトヲ示シタ。例ヘバ

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3} \qquad 6\text{ 等分} \qquad \frac{1}{30}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6} \qquad 30\text{等分}$$

$$\frac{1}{65}=\frac{3}{5}-\frac{10}{17} \qquad 65\text{等分} \qquad \frac{1}{195}=\frac{2}{3}-\frac{43}{65} \qquad 195\text{等分}$$

ツマリ $\dfrac{1}{n}=\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{65}$ ノ式ヲ滿足スル整數 x,y,n ヲ求ムレバヨイ。

勿論此定理トシテハ n等分ノ幾何學的ノ方法ヲ必要トスルノデナイ。假設トシテハ方法ノ如何ヲ問ハズ三ツ以上ノ任意ノ數ニ等分スレバヨイノデアル。

問　　題

32 圓ニ內接スル正八邊形ノ一邊ガ中心ニ對スル角ノ大サ如何。

(32) 圓ニ內接スル正12邊形ノ一邊ガ中心ニ對スル角ノ大サ如何。

定理 外接正多角形。外接正多角形ヲ畫クニハ先ヅ內接正多角形ヲ畫クコトガ必要デアル。卽チ圓ノ內接正 n 邊形ノ各頂點ニ於テソノ圓ニ切線ヲ畫ケバ外接正 n 邊形ヲ得ルノデアル。

又內接正 n 邊形ノ各邊ニ對スル弧ノ中點ニ於テ圓ニ引ケル切線モ外接正 n 邊形ヲナスノデアル。

問　　題

33 圓ノ內接正五邊形ノ一邊ガ中心ニ對スル角ハ何度カ。
73頁問題29ノ方法ニ依ツテモ作圖シテ見ヨ。

(33) 圓ニ內接スル正十二邊形ヲ畫クニハ各邊ガ對スル中心角ノ大サヲ何度トスベキカ。

定理 正多角形ニ圓ヲ內接外接スルコト。

正多角形ノ中心 正多角形ニ內接及ビ外接スル圓ノ中心ヲ正多角形ノ中心トイヒ,外接圓ノ半徑ヲ正多角形ノ**半徑** Radius of the regnlar polygon トイヒ,內接圓ノ半徑ヲ**中徑** Apothem of the regular polygon トイフ。

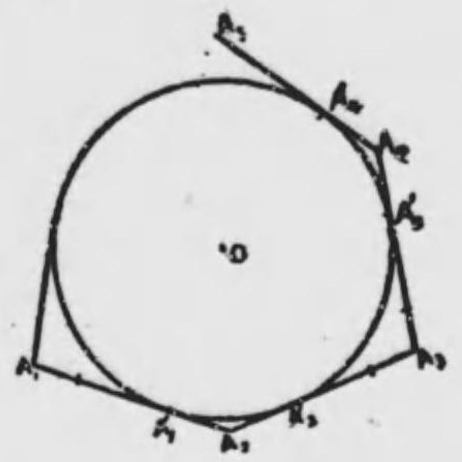
正多角形ノ中心ハ正多角形ノ各角ノ二等分線ノ交點,各邊ノ垂直二等分線ノ交點デアツテ各頂點又ハ各邊ヨリ等距離ニ在ル點デアル。

問　　題

34 圓ニ內接スル正多角形ノ各邊ガ等シケレバ各邊ニ對スル弧ノ大サハ如何。

(34) 切點ヲ順次ニ結ビ付ケタ圓ノ弦ト切線トデ出來タ二等邊三角形ノ底角ハ如何。各弦ニ對スル弧ノ大サ如何。之レ等ノ二等邊三角形ハ合同ナルカ。卽チ外接多角形ノ各邊ノ長サハ如何。又ハ之レ等ノ弦ハ內接正多角形ヲナスカ。

35



$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \cdots\cdots\cdots$ ノ

トキ各邊ガ圓ニ切スレバ

$A_1'A_2$ ト等シイ長サハドレカ。

A_1A_1' ト等シイ長サハドレカ。

$\angle A_1$. $\angle A_2$, $\angle A_3 \cdots\cdots$ ハ等シイカ。

(1) 邊數ガ偶數ノトキ

$\angle A_1 = \angle A_3 = \angle A_5 = \cdots\cdots$ 一ツ置。

$\angle A_2 = \angle A_4 = \angle A_6 = \cdots\cdots$ 一ツ置。

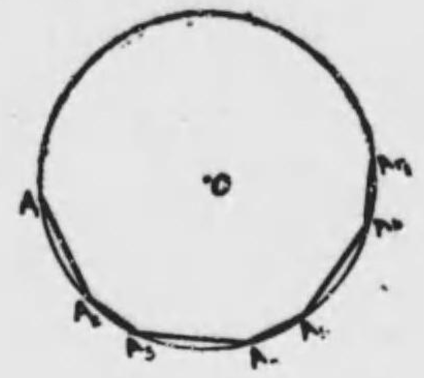
正多角形ノトキト正多角形デナイトキトアル。

(2) 邊數ガ偶數ノトキ

A_1A_1' ト A_3A_3', A_5A_5' トイフヤウニ一ツ置ニ切線ノ同ジ側ガ等シクナル故邊數ガ偶數ナレバ順次ニ周ツテモトノ部分ノ長サト等シクナルガ，奇數ノトキハ最後ノ奇數番目ノ邊ガ A_1A_1' ノ隣トナリ最後ノ A_nA_n' ガ A_2A_2' ト等シクナル。ソレ故各邊ガ皆切點デ二等分サレタコトトナツテ　$\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3 = \cdots\cdots$ トナル。

故ニ正多角形デアル。

(35)



$\angle A_1A_2A_3 = A_2A_3A_4 = \angle A_3A_4A_5 \cdots\cdots$

$\overset{\frown}{A_1A_3} = \overset{\frown}{A_2A_4} = \overset{\frown}{A_3A_5} = \cdots\cdots\cdots\cdots$

$\overset{\frown}{A_1A_2} = \overset{\frown}{A_3A_4} = \overset{\frown}{A_5A_6} = \cdots\cdots$ 一ツ置

$\overset{\frown}{A_2A_3} = \overset{\frown}{A_4A_5} = \overset{\frown}{A_6A_7} = \cdots\cdots$ 一ツ置

(1) 邊數ガ偶數ノトキ

一ツ置ニ邊ノ長サガ等シイカラ正多角形ノトキト正多角形デナイトキトアル。

(2) 邊數ガ奇數ノトキ

一ツ置ニ邊ノ長サガ等シイカラ一置ニトツテ行クト遂ニハ偶數番目ノモノト等シクナル。

$\overset{\frown}{1,2},\overset{\frown}{3,4},\overset{\frown}{5,6},\overset{\frown}{7,8},\overset{\frown}{9,1},\overset{\frown}{2,3},4 \cdots\cdots\cdots$

故ニスベテノ邊ガ相等シイ多角形トナツテ正多角形デアル。

摘　　要

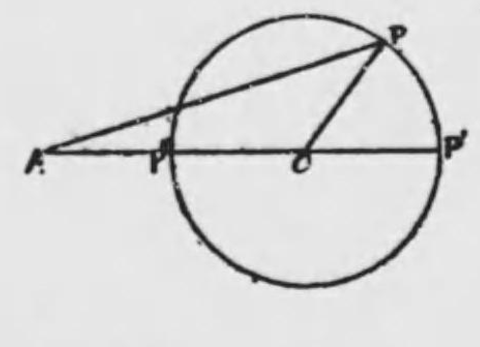
第二篇ニ於ケル摘要ト同様ナ取扱デヨイ。

圖ヲ見テソノ表ハス定理ヲ正逆落サズニ讀マシメルガヨイ。

證明ノ六ケシイヤウナノハコレガ復習ヲセシメルガヨイ。

雜　　題

36



PガOノ周リヲ廻ルトキPハ如何ナル線ヲ書クカ。

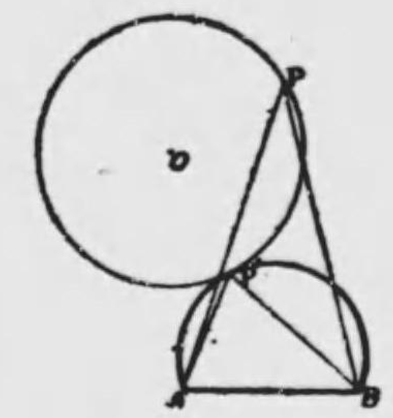
PガAOノ延長上ノ點P′ニ來タトキハAP′ノ長サハP′ノ他ノ任意ノ點ニ引イタAPトハ如何。

$AP < AO + OP$

$AP < AP'$

AOガ圓ト交ル點P″ニ在ルトキノAP″ノ長サハ如何。

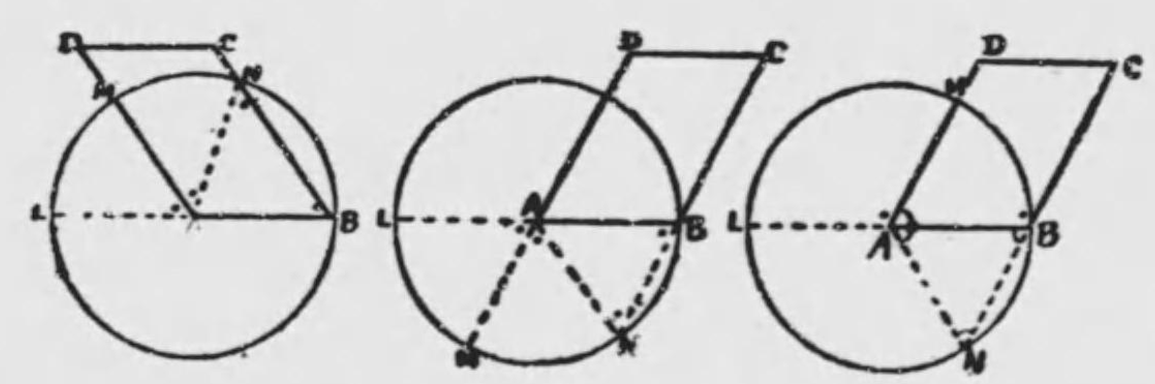
(36)



圓AP′Bガ圓Oト點P′ニ於テ外切スルトスレバ圓Oノ周上ノ點デP′ノ他ノ點ハAPBノ何處ニ在ルカ。

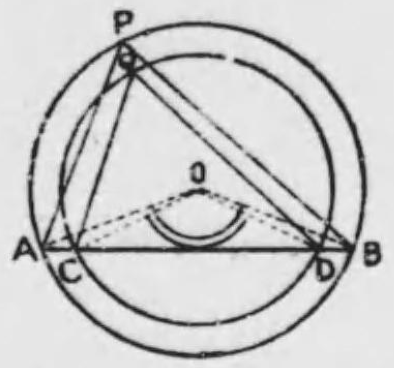
$\angle APB$ ト $\angle AP'B$ トハ何レガ大カ。

37



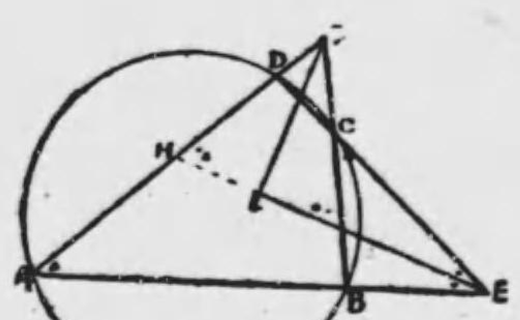
$\overset{\frown}{LM}$ ト $\overset{\frown}{MN}$ トガ等シイタメニハ $\angle LAM$ ト $\angle MAN$ トガ如何ニアルベキカ。

38



等圓ナラザル兩圓ニ於テ∠APB, ∠CQD ノ大サヲ比較スルニハ何ノ比較ヲナセバヨイカ。直徑ナラバ如何ニナルカ。

39



(1) △FHG ニ於テFLガ∠HFGヲ二等分シテFLトHGトガ垂直ナルタメニハ △FHG ハ如何ナル三角形ナラバヨイカ。∠FHGト∠FGHトハ如何。

∠FHB=∠A+∠AEH

∠FGH=∠BCE+∠CEG

(2) ∠FLE=∠LFH+∠FHL

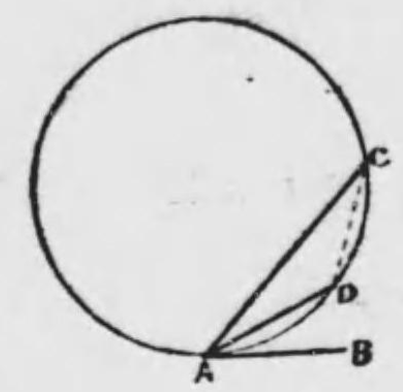
$$=\angle LFH+\angle A+\angle AEH$$

$$=\frac{\angle BFA}{2}+\frac{\angle A}{2}+\frac{\angle A}{2}+\frac{\angle DEA}{2}$$

$$=\frac{\angle ADE\text{ノ補角}}{2}+\frac{\angle ABC\text{ノ補角}}{2}$$

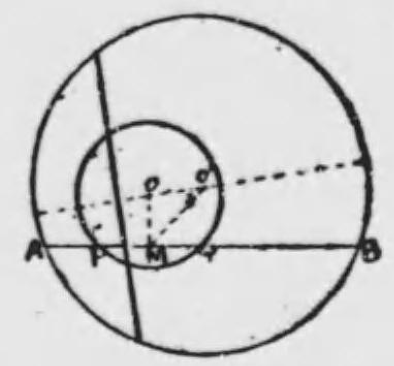
∠ADEト∠ABCトノ和ハ如何。

(37)



∠BADトADノ上ニ立ツ∠Cトハ如何。∠C, ∠DAC ガ等シケレバソノ立ツ弧ノ大サ如何。

(38)



AP,BQ ガ等シケレバPQノ中點ヲMトスレバOM,O'MハABニ對シテ如何ニナルベキカ。OM,O'Mハ如何ニナルベキカ。

中心線ニ垂直ナ弦ハ如何。又カヽル弦ノ數如何。

(39)

∠DEMト∠LEBノ各ノ餘角ノ∠ABF,∠MECトハ如何。∠ABDト∠ACDトハ如何。 EM=CM

EMトDMトハ如何。

ブラーマグプタ Brahmaguputa ハ紀元598年頃ニ生レ660年頃生存シテ居タ人デアツタ。Brahma-sputa-siddhanta トイフ天文ニ關スル百科全書ヲ書イタ。ソノ中ノ二章ニ於テ算術代數幾何ニ關スル事項ヲ述ベテ居ル。「ピタゴラス」數 Pythagorean numbers ヲ與ヘル式

$$\frac{1}{4}\left(\frac{p^2}{q}+q\right)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{p^2}{q}-q\right)^2+p^2$$

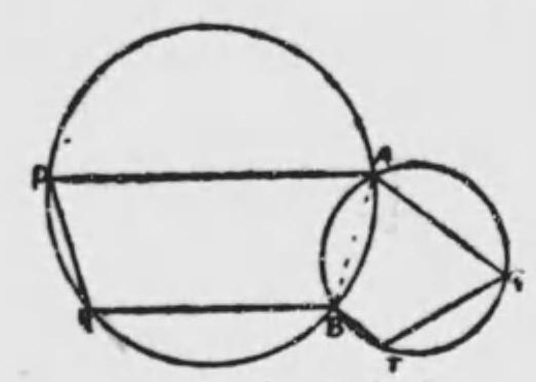
ハ彼ノ發見シタルモノデアルトイフ。彼ハ又三角形ノ面積ヲ三邊ヲ以テ表ス式ヲ四邊形ニ擴メテ圓ニ內接スル四邊形ノ四邊ヲ a,b,c,d, ソノ和ノ半分ヲ s トスレバソノ面積ハ

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

デ表ハシ得ルコトヲ發見シタ。

尙170頁(39), 279頁50等ハ「ブラーマグプタ」ノ發見セル定理ダトイハレテ居ル。

40



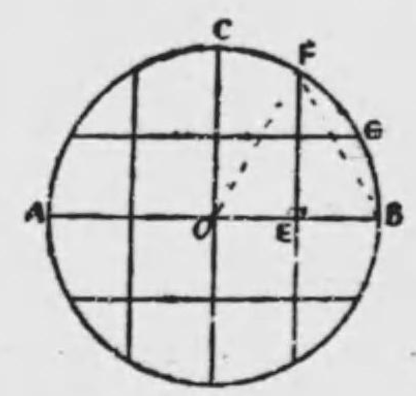
弧PRト等シイ弧ハドレカ。

$\overset{\frown}{PR}$ ト $\overset{\frown}{AB}$ トガ等シイタメニハソレ等ノ弧ニ對スル圓周角ハ如何。

ARヲ結ビテ見ヨ。

AB=PR=QT

(40)



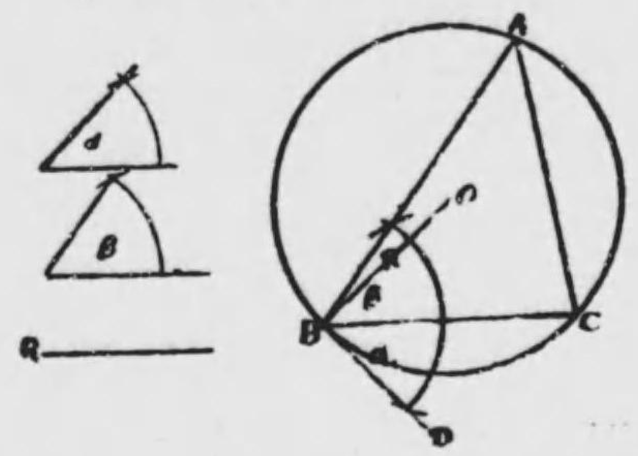
全圓周ガ12等分サレタトスレバ $\overset{\frown}{CF},\overset{\frown}{FG},\overset{\frown}{GB}$ ガ中心ニ對スル角ハ何度ナルベキカ。

OF,BFヲ結ベバOF=BF何故カ。

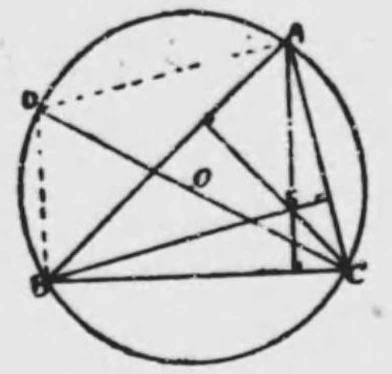
△OBFハ正三角形デアル。

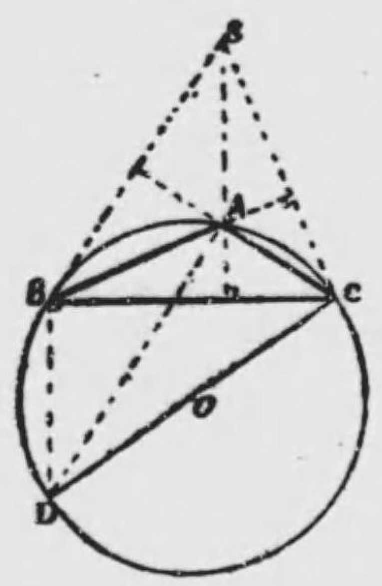
∠COFハ何度カ。同様ニシテ∠BOGハ何度カ。

41 與ヘラレタ圓ヘ二角ノ定マツタ三角形ヲ內接スレバヨイ。



42





ASトBCトハドウナルカ。

BDトBCトハドウナルカ。

AS∥BD

ADヲ結ベ。

ADトACトハドウナルカ。

BSトACトハドウナルカ。

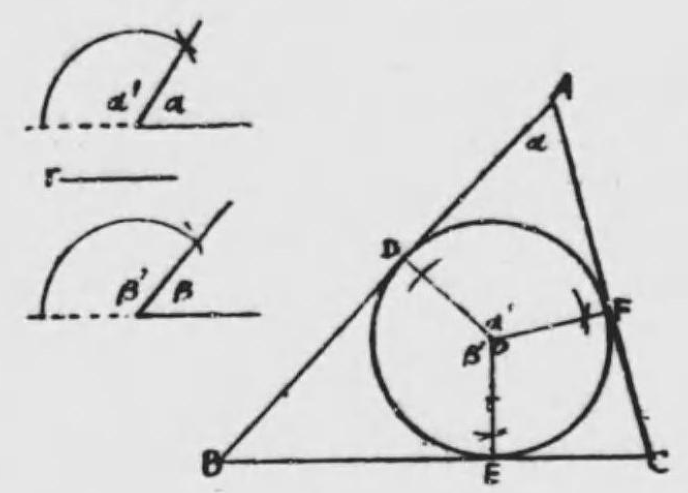
AD∥BS

ASBDハ如何ナル形カ。

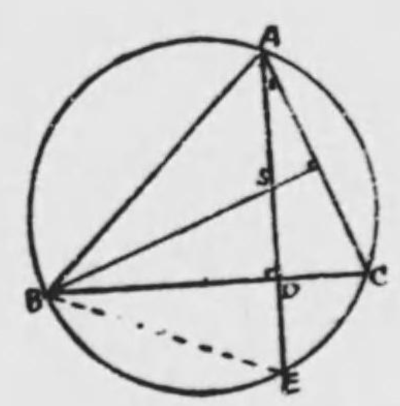
AS=BD

(41) △ABCヲ求メル三角形トシ內接圓ノ中心カラAB,BC,CAニ垂線OD,OE,OFヲ引ケ。

∠DOF,∠DOEハ∠α,∠β′ト如何ナル關係ニ在ルカ。



(42)



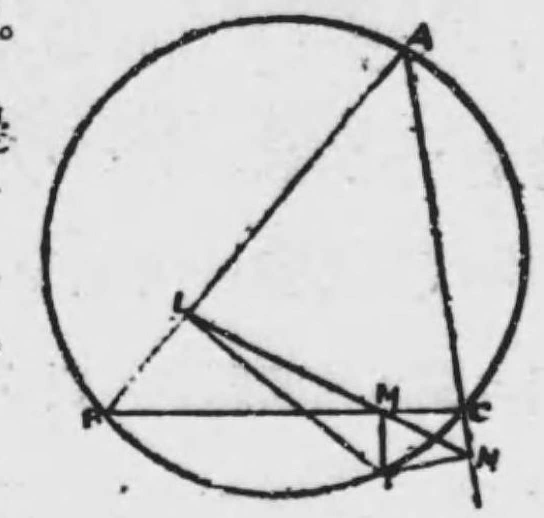
SD=DEナルタメニハ△BDSト△BDEトハ如何ナルベキカ。

∠EBDト∠DBSトハ如何ナルベキカ。

∠EBCト等シイ角ハ何カ。

∠CAEト∠DBSトハ等シイカ。

43 LBPMハ如何ナル四邊形カ。



∠ABPトLMPトハ如何。

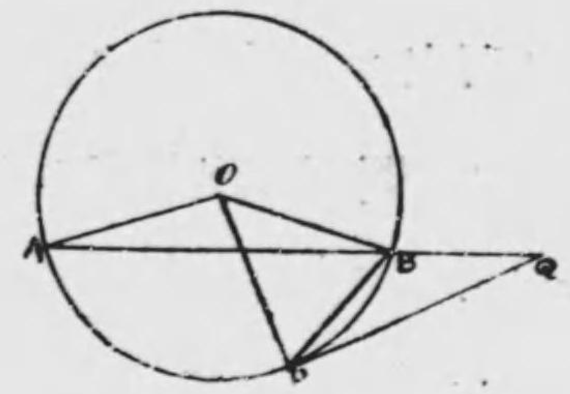
PMCNハ如何ナル四邊形カ。

∠PMN, ∠PCN, ∠ABPノ三ツガ等シイコトヲ證セヨ。

∠LMPト∠PMNトガ補角ヲナスコトヲ證セヨ。

LM,MNハ如何ニナルカ。

44



∠ABPト∠BPQトノ關係如何。

∠BPQト$\overset{\frown}{BP}$ノ上ニ立ツ圓周角ト∠POBノ關係如何。

∠ABPト∠AOPトノ關係如何。

∠AOP=2∠POB

∠POBハ∠AOBノ$\frac{1}{3}$

(43) LMNガ一直線ナラバ∠LMPト∠PMNトハ如何ナル關係カ。

∠LMPト∠LBPトノ關係如何。

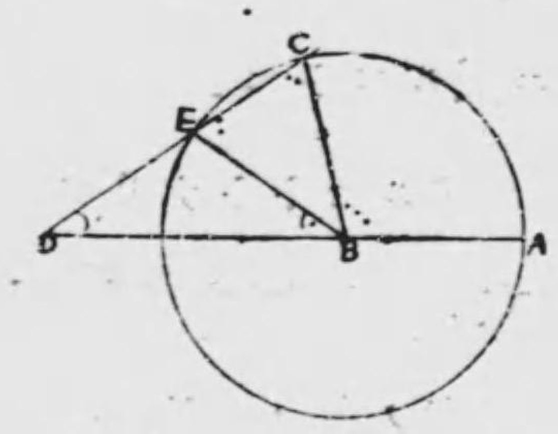
∠PMN=∠PCNカ。

∠ABPト∠PCNトハ如何。

∠ABPト∠PCNガ等シケレバ四邊形ABPCノ相對スル角ハ如何。

ABPCハ圓ニ內接スルカ。

(44)



∠ABCハ何ト何トノ和カ。

∠D+∠BEC

=∠D+∠EBD+∠D

=3∠D

作圖不能問題

希臘古代ノ數學者「アナキサゴラス」Anaxagoras (紀元前500—428年頃)ハ獄中ニ在ツテ圓ヲ之レト等積ノ正方形ニ化スル方法ヲ研究シタトイフ。又「ヒポクロテイーズ」Hippocrates (紀元前440年頃)ハ圓ヲ正方形ニ化ススルコトヲ研究シ二ツノ月形ノ面積ニ關スル問題(304頁17)ヲ發見シ，「デイノストラツス」Dinostratus ハ圓ヲ正方形ニ化スルコト及角ノ三等分ニ關スルコトヲ研究シ「クヲドラトリークス」Quadratrix トイフ曲線ヲ發見シ之ヲ角ノ三等分及圓ヲ正方形ニ化スルコトニ利用セントシ，「アルキタス」Archytas (B.C.400年頃) ハ一ツノ立方體ノ體積ノ二倍ノ體積ヲ有スル立方體ヲ作ル方法ノ研究ヲナシタトイフ。「プラトー」Plato (B.C.429—348)ガ學校(Academy) ヲ開キ一派ノ學ヲ立テルニ當ツテ初等幾何學ニ於テ使用スル器具ハ定規ト「コンパス」トニ限ルコトニシタ。ソコデ以上多クノ人々ノ研究セル所ハ全ク作圖不能ノ問題デアルコトトナリコヽデ古來ヨリ有名ナ三ツノ問題ガ出ル事トナツタ。

(1) 立方倍積問題 The duplication of the cube.

(2) 任意ノ角ノ三等分 The trisection of an arbitrary angle.

(3) 圓ノ正方化問題 The quadrature of the circle.

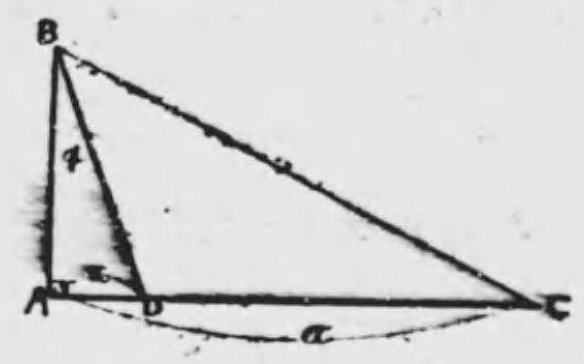
尙「ニコメデス」Nichomedes (B.C.180年頃) ハ角ノ三等分ヲナシ得ル線トシテ「コンコイド」Conchoid 螺蜁線ヲ發見シ「デイオクレス」Diocles(B.C.180年頃)ハ「キツソイド」Cissoid 木蔦形曲線ヲ發見シ立方倍積ノ問題ヲ解カントシタガコレ等ノ曲線ハ何レモ定規ト「コンパス」トデハ畫キ得ナイモノノミデアツタ。

(1) 立方倍積問題 ハ所謂「デリアン」問題 Delian problem ト稱セラレタモノデ「デリアン」人ガ疫病ニ苦シンダ際「アポロ」ノ神ニ祈ツタトコロガソノ神前ニアル立方體ノ神棚ヲ體積ノ 2 倍ナルモノニ作リカヘタナラバ病ハ息ムデアロウトノ神託ヲ得タ。然シ誰シモ其方法ヲ知ルモノガナイノデ「プラトー」ニ敎ヲ乞フタトコロ之ハ到底不可解ノ問題デアルト敎ヘラレタトイフ。神話ノ殘ツテ居ル問題デアル。一ツノ立方體ノ稜ヲ a トシ求ムベキ立方體ノ稜ヲ x トスレバ

$x^3=2a^3$ ノ式即 $x^3-2a^3=0$ ヲ解カナクテハナラナイ。

此ノ方程式ハ 2^n 次ノモノデナイノデソノ根ハ定規ト「コンパス」トヲ以テ畫キ得ナイモノデアル。

(2) 角ノ三等分問題 モ亦同様不能ノ問題デアル。今 AB ヲ單位ノ長サトシ AC$=a$ ヲ直角ニ立テ $\angle$ABD ガ $\angle$ABC ノ $\frac{1}{3}$ デアルトスルト



$$\tan ABC = a,\qquad \tan\alpha = x$$

$$\tan ABC = \tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

$$a = \frac{3x-x^3}{1-3x^2}$$

故ニ $$x^3-3ax^2-3x+a=0$$

此ノ式ハ又 a ノ如何ナル整數値ニ對シテモ因數分解シ得ナイ式デアツテソノ根トシテ 2^n 乘根以外ノ無理數ヲ含ム故ソノ根ヲ定規ト「コンパス」トノミデ作圖シ得ナイノデアル。

(3) 圓ノ正方化問題 ハ圓ノ周ニ等シイ直線ヲ作圖スルト等シイコトデコレハ又定規ト「コンパス」トデハ作圖不可能ノコトデアル。コレニツイテハ315頁ニ詳記スル。

第四編

軌跡及作圖題

第一章　軌　　跡

45 軌跡　Locus

A 軌跡教授ノ困難

幾何學ノ中デ最モ生徒ガ學習ニ困難ヲ感ズル部ハ軌跡デアラウ。生徒ノ學習ニ困難ヲ感ズルトコロハ又教授ニ困難ヲ感ズルトコロデアツテ此ノ部ノ教授ヲ如何ニスベキカハ幾何學ノ中デ最モ研究ヲ要スルトコロデアル。サテソノ學習並ニ教授ノ困難ハ何處ニアルカヲ調ベテ見ルト

(1) 軌跡ノ何物タルカヲ理解セシムルニ困難ナルコトガ第一デアラウ。即チ軌跡ノ定義ヲ充分理解シテソノ定義ニ添フガタメニハ如何ナル證明法ヲトルベキカヲ充分了得セシメルコトガ最モ困難ヲ感ズルトコロデアル。而シテ又

(2) 二段ノ證明法ヲ採ルコト及證明スベキ定理ヲ問題ヨリ作出セシムルコトガ生徒ニハ面倒ナコトデ又理解シ悪イコトデアル。普通ノ問題ハソレヲ證明スレバヨイノデアルガ，軌跡ノ問題ハ「何々ノ軌跡ヲ求ム」トアルバカリデ證明スベキ定理ハソノ問題ヨリ作製シナクテハナラナイノデアル。本書デハ是等ノ困難ヲ考ヘ機會アル毎ニ本逆二定理ヲ對照シテ證明シヲ居ル。50頁問題4ト56頁問題7ノ如キハソノ一例デアル。次ニ

(3) 軌跡ガ如何ナル圖形ニナルカヲ檢出スルコトモ中々易イコトデハナイノデアル。直チニ圖形ガ知ラレルヤウナ問題ハ比較的少クテ多クノ問題ニ於テハ之ヲ見出スマデノ仕事ガ隨分困難ナ事デアル。

B 軌跡トイフ語ノ意義

軌ハ轍（わだち），迹（あと）デアツテ車輪ノ通ツタ跡デアル。軌道ニ用フル軌ノ意味デアル。又みち即一定ノ法則ヲモ軌トイフ。「一軌」ノ軌ハ其ノ意味デアル。一定ノ法則ニヨツテ動イタ點ノ跡トイフノニ適シタ文字トシテ軌ヲ用ヒタノデ之ニ跡ノ字ヲ添ヘテ一層跡トイフ意味ヲ明ニシタノデアラウ。英語デハ Locus（複數=Loci）デアル。羅典語カラ來タモノデ場所トイフ意味デアル。Locomotive（場所ヲ動ク器械即機關車）ハソノ結合語デアル。

C 軌跡ノ定義

軌跡ノ定義ニハ種々アルガ之ヲ二種類ニ分ケルコトガ出來ル。

(1) 軌跡ノ概念ヲ表ハスコトヲ主トスルモノ。例ヘバ

(一)「或ル幾何學的條件ニ從ツテ動イタ點ノ跡ヲソノ條件ニ從ツテ動イタ點ノ軌跡トイフ」ノ如キデ同樣ナ意味デ云表ハシノ少々異ツテ居ルモノモアル。

(二)「一定ノ條件ニ適スル總テノ點ノ集合ヨリ成ル圖形ヲソノ條件ニ適スル點ノ軌跡トイフ」トイフノモソレデアル。

(2) 必要ニシテ充分ナル條件ヲ述ベタルモノ。例ヘバ

(一)「一ツノ條件ニ適スル點ハ悉ク或線上ニ在リ，而シテ逆ニ此ノ線上ノ點ハスベテソノ條件ニ適スルトキハ此ノ線ヲソノ條件ニ適スル點ノ軌跡トイフ。」

(二)「圖形中ノ總テノ點ガ或性質ヲ有シ，其ノ他ノ點ハ皆此性質ヲ有スルコトナケレバ，該圖形ハ此ノ性質ヲ有スル點ノ軌跡トイフ。」

(三)「一ツノ圖形ガ或條件ヲ滿足スルスベテノ點ヲ含ミ，ソノ條件ヲ滿足セザル點ハ決シテ含マヌトキハソノ圖形ヲソノ條件ヲ滿足スル點ノ軌跡トイフ。」

性質トイフモ**條件**トイフモ同一意義デアル，又**滿足スル**トイフモ**適スル**トイフモ別ニ變リハナイ。又**圖形**トイフ中ニモ平面幾何學ニテ取扱フ軌跡ハ多クハ線デアルカラ一般的ノ語ヲ用ヒズニ線トイフノモアリ，又菊池博士ノ如キハ極メテ嚴密ニ「一ツノ線，或ハ線ノ一部分，或ハ線ノ一群（如何ナル線ニテモ)」トイフヤウニ書イテ居ラレルノモアル。是等ノコトヲ考ヘタリ又平面幾何ニ於テ軌跡ニ平面ノモノガアツタリ，尙此ノ定義ヲ立體幾何ニデモ及ボスヤウニスル爲ニハ**圖形**トイフ語ガ最モ適當ナヤウニ考ヘル。此等使用スル語ニハ多少異ツテ居テモ大シタ違ハナイノデアルガ，全體トシテノ云表ハシ方ノ相違ハ敎授ノ方法ニ大ナル相違ヲ來スモノデアル。

（1）ニ於テハ軌跡ノ觀念ヲ通俗的ノ意味ト連絡ヲ付ケテ授ケルコトニヨリ甚ダ容易ニ了解セシメ得レドモソノ證明法ト關係ヲ付ケルトキニ尠ナカラズ困難ヲ來ス懼ガアル。

(2)ノ方ハ證明ハ定義ニ合フヤウニスレバヨイノダカラ比較的容易ニ證明ノ二階段ヲ知ルコトガ出來ルガ餘リ形式的ニ流レテ軌跡ソノモノノ觀念ヲ與ヘルコトガ困難デアル。

此兩者何レモ長短相半シテ居ルノデソノ取扱如何ニヨツテソノ結果ノ良否ガ分レルカラ容易ニ何レガヨイト云ヒ難イノデアル。

當校デハ五年間(2)ノ(一)ニヨツテ敎授シテ見タガ餘リヨイ結果ガ見ラレナイノデ近年ハ(1)ノ(一)ニヨツテ敎授ヲ進メテ居ル。尤モ他ニモ餘程改良シタ點ガアルカラ一概ニハイヘナイガ可ナリ成績ガヨイヤウニ思フ。

D 幾何學的條件ニ從ツテ動ク點

定義ノ(1)ノ方法ニヨレバ先ヅ幾何學的條件ニ從ツテ動ク點(Variable Point)ノ意味ヲ知ラシメナクテハナラナイ。之ヲ充分明ニスルコトガ出來タナラバソレヨリ出發シテ一定理トソノ逆ノ兩方面ノ證明ノ必要ヲ感知セシムル所マデ進マナクテハナラナイノデアル。之レガ軌跡敎授ニ於テ最モ困難ヲ感ズルトコロデアツテ吾々モ此ノ敎授ニツイテ種々工夫ヲ凝シテ見タ。ソシテ此ノ初步ノ徹底ヲ計ルタメニハ時間ヲ惜シマズ學習セシメルコトニシタ。問一カラ問七マデハソレデアル。

問一 點ガ何等條件モナク勝手ニ動クトキハ何等特徵ノ現レナイ線(圖ニヨレバPQ)ノ畫カレルコトヲ知ラシム。

問二 一平面上ヲ一定點ヨリ一定ノ距離ニ在ツテ動クトキハ圓ヲ畫クコトヲ注意セシム。(24頁圓ノ定義參照)

問三 動キタル點ガ圓トナル條件ハ點ガ

(1) 同一平面上ヲ動クコト(コレハ平面幾何ダカラ省イテモヨイ)

(2) 一定點ノ周リヲ動クコト

(3) ソノ距離ガ一定ナルベキコト

此ノ(1),(2),(3)ノ何レカ一ツヲ欠イタナラバ如何ナル線ガ出來ルカヲ考ヘシメテ見ルガヨイ。

問四 楕(楕ノ略字)圓ハ二定點ヨリノ距離ノ和ガ一定ナリトイフ條件ヲ滿足シツヽ動イタ點ノ跡デアルコトハ圖ノ畫キ方カラ考ヘテワカル。(楕圓ハx, yノ坐標ガ方程式$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ヲ滿足シツヽ動イタ點ノ跡デアル)楕圓ヲ簡便ニ畫キ得ル器械トシテ**楕圓製圖器**ヲ考案シテ見タ。器具說明ヲゴ覽下サイ。

問五 A, B 二點ニ「ピン」ヲ打チ定規ノ線ヲ「ピン」ノ脚ニ當テ、定規ヲ動シソノ移動シテ行ク頂點ノ跡ニ印ヲ付ケテ行ケバ弧ガ出來ル。

(147頁系一及149頁系四參照)

又此ノ圓弧ノ上ノ點ハ A, B ト結付ケレバ一定ノ角デアルコトモワカル。

問六 カーデイオイド Cardioid 心臟形曲線ハ一定圓周上ノ一定點 A ヲ通リ圓周上ノ他ノ任意ノ點 P ヲ通ル直線 AP 上ニ於テ P ヨリソノ圓ノ直徑ダケノ距離ニ在ル點ノ跡デアル。コノ作圖ヲナサシメルコトニヨリ條件ヲ滿足シツヽ動ク點ハ如何ナル線ヲ畫クカヾワカル。

心臟形曲線ハ楕圓ト共ニ普通平面幾何學ノ範圍外ノモノデアルガ面白クテ簡單ニ點ノ跡ヲタドリ得ルカラコヽニ取ツタノデアル。

($x^2+y^2+ax=a\sqrt{x^2+y^2}$ ハ此ノ曲線ノ方程式デアル)

問七 固定セル定規ノ線ヲ他ノ三角定規ノ線ヲ辷ラストソノ一頂點ハ一定直線ヨリ一定ノ距離ニ在ル點ノ動キタル跡トシテ平行線ヲ示シ逆ニ此ノ平行線上ノ點ハ一定直線ヨリ一定ノ距離ニ在ルコトガワカル。

E 軌跡ノ證明ニトルベキ定理トソノ逆

幾何學的條件ニ從ツテ動イタ點ノ跡トイフ意味ガワカツタナラバ次ニ證明ニハ一ツノ定理トソノ逆トヲトツテ證明スベキ必要ヲ感ゼシメ且ソノ定理ヲ作リ出スコトガ出來ルヤウニシナクテハナラナイ。

幾何學的條件ニ從ツテ**動クトキ**ハ一ツノ連續セル線ヲナスノデ

條件ヲ滿足スル點ガ悉ク此線上ニ集リ，ソノ線上ノ點ハ悉ク條件ヲ滿足スベキコトハ明デアル。

然ルニ**點ガ動イタ跡トイフコトガ明カナラザルトキ**ニハヨシ

或條件ニ適スル點ガ悉ク或線上ニ在リトイフコトガ明ニナツタトシテモソノ**逆**タル

ソノ線上ノ點ハ悉クソノ條件ニ適ストハ斷定シガタイコトデアル。又之レヲ前後シテ

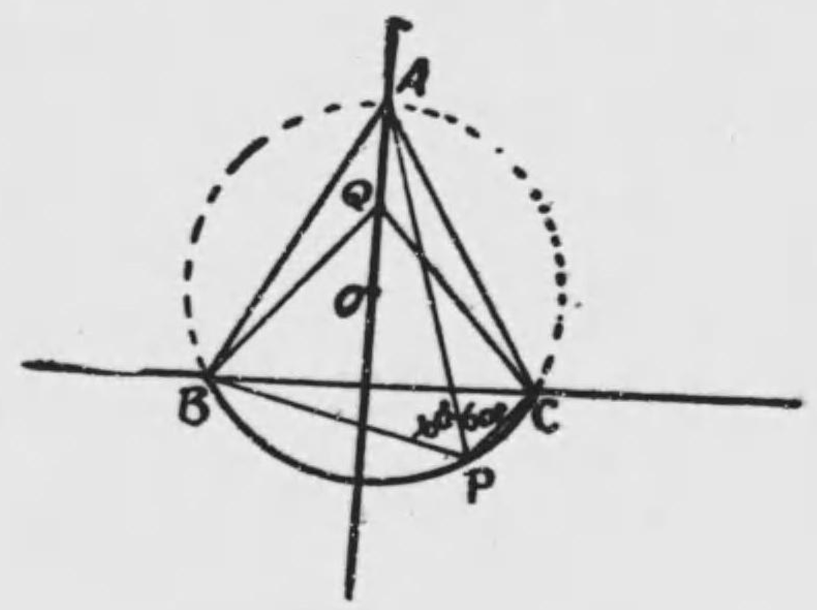
或線上ノ點ガ悉ク或條件ニ適ストイフコトガ明デアツテモソノ條件ニ適シツヽ**動イテ出來タトイフコトガ明デナイ**ナラバ

ソノ條件ニ適スル點ガ悉ク線上ニ在リトハ斷定出來ナイノデアル。

幾何學的條件デハナイガ此ノコトガ明トナル一例ヲ示サウ。

螢ノ光ツタ點ハスベテ螢ノ通ツタ線上ニ在リトイフコトハ眞デアルガ,

螢ノ通ツタ線上ノ點ハ悉ク螢ノ光ツタ點ナリトイフコトハ眞デハナイ。



△ABC ガ正三角形ナルトキ

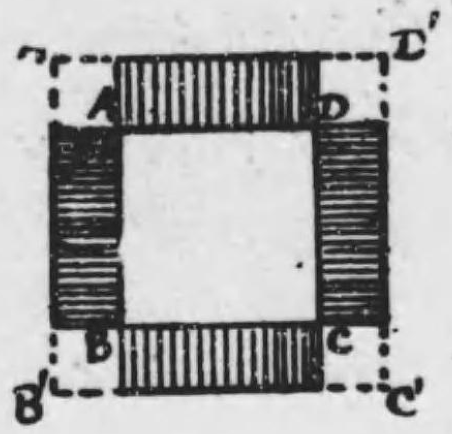
∠APB＝∠APC ガ 60^0 ナル點ハ悉ク△ABC ノ外接圓周上ニ在リトイフコトハ明デアツテモ

△ABC ノ外接圓周上ノ點ハ悉ク∠APB ト ∠APC トガ 60^0 ノ點デハナイ。

又同樣ナ場合ニ

∠BAC ノ二等分線上ノ點ハ悉ク ∠AQB＝∠AQC ノ點デアルコトガ明デアツテモ

∠AQB＝∠AQC ナル點ハ悉ク ∠BAC ノ二等分線上ニ在リトハイヘナイ。BC ヲ双方ニ延長シタ線上ノ點モ亦 ∠AQB＝∠AQC ヲ滿足スルカラデアル。

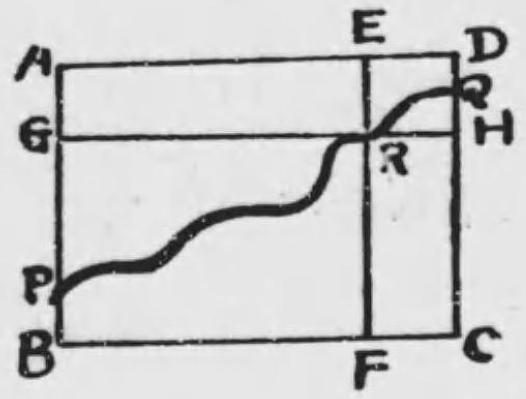


倘178頁ノ問題3モソノ例デアル。

又正方形 ABCD ノ各邊ノ外方ニ各邊ヨリ2糎ノ距離ニ在ル點ハ悉ク正方形 ABCD ノ各邊ヨリ2糎ノ距離ニアル直線ニテナル正方形 A′B′C′D′ ノ周上ニ在ルモ逆ニ

正方形A′B′C′D′ 上ノスベテノ點ハ正方形 ABCD ノ各邊ヨリ外方ニ2糎ノ距離ニ在ル點デハナイ。

又矩形 ABCD 內ノ曲線 PRQ 上ノ點ハスベテソノ點ヨリ矩形ノ各邊ニ平行ニ引ケル直線ノ兩邊ニ終ル線分ノ和ガ(AB+BC)ニ等シイ點デアルガ,



□ABCD 內ノ點ヲ通リ二邊ニ平行ニシテ兩端ガ矩形ノ邊ノ上ニ在ル線分ノ和ガ (AB+BC) ニ等シイ點ハ悉ク曲線 PRQ 上ニハナイ。 矩形ABCD 內ノ點ハ悉ク條件ヲ滿足スル點デアル。

以上ノ如ク教授シテ

(a) 定理　或條件ニ適スル點ハ悉ク或線上ニ在リ

(b) 定理ノ逆　此ノ線上ノ點ハ悉ク其ノ條件ニ適ス

ノ二定理ノ必要トソノ定理ノ型トヲ知ラシメルコトガ出來ル。

注意　初等數學ニ於テ取扱フ軌跡ハ

直線　(線分)
圓　　(圓弧)

デアツテ平面幾何ニ於テモ軌跡ガ平面ノ部分トナル場合（正三角形內ノ一點ヨリ各邊ニ下ス垂線ノ和ガソノ高サニ等シキ點ノ軌跡）ノ如キハ省クコトトスル。

F 既知ノ軌跡

種々ノ複雜ナ條件ヲ供ヘテ居ル軌跡モ結局ハ圓ト直線トニナルノデアルカラソノ條件ヲ簡單ナモノニ置キ換ヘテ來タナラバ極メテ基本的ノ性質ニナッテシマウモノデアル。既ニ生徒ニ教授サレテ居ルモノヲ總括的ニ述ベタナラバコヽニ擧ゲタ五種トナル。本書デハ是等ノモノニツイテハ既ニ機會アル每ニ相對應シテ證明ヲ試ミテアル。ソレ故コヽニテハ只既習ノ箇所ニツイテ復習ヲナシ，證明ニ重キヲ置クヨリモ

幾何學的ノ條件
一定理トソノ逆　ノ研究ヲ充分ナラシメタイ。

1　一定點ヨリ一定距離ニ在ル點ハソノ點ヲ中心トシソノ距離ヲ半徑トセル圓周上ニ在リ。

一定點ヲ中心トシ一定ノ距離ヲ半徑トセル圓周上ノ點ハ一定點ヨリ一定ノ距離ニ在リ。

軌跡ハ**圓**

2　二定點ヨリ等距離ニ在ル點ハ二定點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線上ニ在リ。〔56頁問題7〕

二定點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線上ノ點ハ二定點ヨリ等距離ニ在リ。〔50頁問題4〕

軌跡ハ二定點ヲ結ブ線分ノ**垂直二等分線**

3　定直線Lヨリ一定距離dニアル點ハLヨリdノ距離ニ在ツテLニ平行ナル二直線上ニ在リ。

定直線Lヨリdナル距離ニアル二平行線上ノ點ハ直線Lヨリdナル距離ニ在リ。

軌跡ハ定直線ヨリdノ距離ニ在ル**二平行線**

4　一與線分 AB ニ一定角ヲ張ル點ハ AB ノ上ニ立チ一定角ヲ含ム二ツノ弓形ノ上ニ在リ。〔149頁系四〕

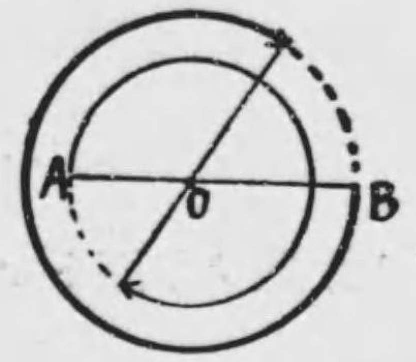
AB ノ上ニ立チ一定角ヲ含ム弓形ノ弧ノ上ノ點ハ線分 AB ニ一定ノ角ヲ張ル。(147頁系一)　軌跡ハ線分ノ上ニ立チ一定角ヲ含ムニツノ**圓弧**

5 相交ル二直線ヨリ等距離ニ在ル點ハソノ二直線ノナス角ノ二等分線上ニ在リ。〔97頁問題44〕

相交ル二直線ノナス角ヲ二等分スル線上ノ點ハソノ二直線ヨリ等距離ニ在リ。〔97頁問題(44)〕 軌跡ハ二直線ノナス**角ヲ二等分スル二直線**

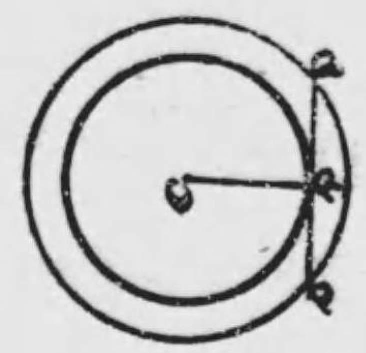
問　題

1 細長イ板ヲ取リ點0ニ釘ヲ通シテ板ヲ廻轉シテ見レバワカル。



0ヲ固定シ點Aヲ動カセバ點Aハ何ヲ畫クカ。點Bハ何ヲ畫クカ。點0ノ位置ニヨリテ兩圓ハ如何ニ變ズルカ。

(1)

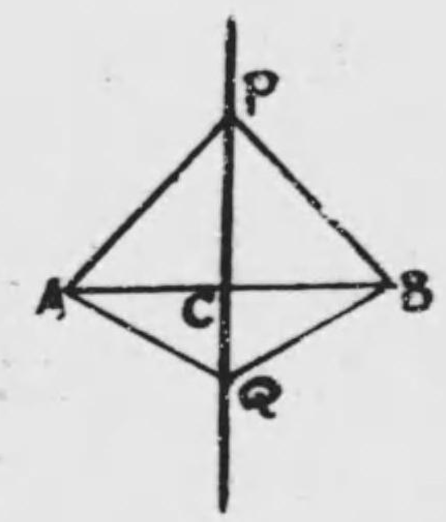


定長弦PQガ動ケバソノ中點Rハ如何ニ動クカ。

本 定長弦ノ中點ハソノ弦マデノ距離ヲ半徑トシソノ中心ヲ中心トスル圓周上ニアリ。

逆 ………圓周上ノ點ハ定圓ノ定弦ノ中點ナリ。

2



本 ABノ上ニ立ツ二等邊三角形ABPノ頂點Pハ…………

逆 ABノ垂直二等分線上ノ點ハ。

(2)

本 二定點A, Bヲ通ル圓ノ中心ハ…………

逆 ABノ垂直二等分線上ノ點ハ。

3 **本** L, Mニ下シタル垂線ノ和ガ1cmナル點ハ悉ク直線N上ニ在リトイヒ得ルカ。

逆 線N上ノ點ハ悉クL, Mニ下ス垂線ノ和ガ1cmナル點ナリトイヒ得ルカ。

(3) L, Mヨリ等距離ニ在ル點ハ悉ク如何ナル線上ニ在ルカ。L, Mノ共通垂線ノ垂直二等分線上ノ點ハ悉クL, Mヨリ等距離ニ在ル點ナリトイヒ得ルカ。

例題一 コヽニ初メテ證明法ヲ敎ヘルノデアル。從テ證明ソノモノハ極メテ簡易ナモノヲ採ツタ。

證明 1, 2 トイフヤウニ區別シタ方ガ生徒ニ理解シ易イ。

點Aハ中點トナルベキ弦ガナイノデアルカラ條件ニ適スル點トハイヒガタイガ，併シ弦ガ次第ニ小トナリタル極限ノ場合ト考ヘ之ヲ特別點トシテ軌跡ノ中ニ入レ全圓ヲ軌跡トスル。

注意 (一) 生徒ハ本逆ノ證明ノ終ラナイ中ニ卽チ證明ノ途中ニ於テモ軌跡トナルベキ線ノコトヲ軌跡ト呼ビタガルモノデアル。之ハマダ軌跡ノ意味ノ徹底シナイ證據デアル。ソレ故1, 2ノ證明ガ完了スレバソノ線ハ軌跡トイヒ得ル資格ガアルモノト考ヘサセテソノ線ヲ色「チョーク」ナドデ着色スルトヨイ。

(二) 逆ノ證明ヲスルトキニ線上ノ點トイフノヲ新ニ取ラズシテ本定理ノ證明ノトキ用ヒタ圖ヲソノマヽ用ヒルコトガアル。之ハ甚ダヨクナイ。之ガ爲ニ誤ヲ生ズルコトガアル。丁寧ニスルナラバ新ニ別ナ圖ヲ書イタ方ガヨイ。