263
132

始

山本孫一
古川正登 共著

算術教授に於ける 數理攻究の原據

東京 モナス 發兌

帝國圖書館藏
大正
15.10.16
内交

263.4-132

はしがき

〇最近算術教授の要求は

奈邊に存して居るであらうか、從來矢釜しく唱へられた新主義算術は各方面の欠陷を救濟したかの觀がある。けれども今一つ取殘された重大問題は「算術教材の數理的攻究」と云ふ事である。

〇文部省の要求は

「小數乘法に於て何故に其の結果に、乘數と被乘數の小數部分の桁數の和に等しい處に小數點を打たねばならないか。……直徑の二乘を〇・七八五倍（又は半徑の二乘を三・一四倍）すれば圓の面積を得るのは何故であるか」それ等の算法理由に心せずして徒らに求答をのみ急いだのでは到底文部省の要求は達せられないであらう。唯此間に介在せる「數理の攻究」に依て始めて編纂者の期待に副ふ事が出來るのである。さて

○從來の數理攻究は

實に難澁極まるものであつて、決して兒童の容易に理解し得る程度のものでなかつたのみならず、誠に無味極まるものであつた。爲に有耶無耶の内に葬り去られてゐたのである。然らば如何にして容易に理解せしめ、如何にして有趣味に取扱ふかが殘されて居る一大問題である。

○今後の數理攻究法は

理解を容易に、有趣味に取扱ふ事に依て、不知不識の間に、數理當體を好愛する傾向を作る事にある。これが卽ち算術敎授窮極の目的である。これに對して先づ無くてはならぬ根本的の要件は敎師の頭の底に祕めたる數理に關する知識其のものである。

○私共の希望は

動もすれば忘れられんとする數理の攻究を、容易なる理解と有趣味なる學習と兒童の數理の世界とを目標として復活させよう、發展させよう。そして所謂新算術の墮落を防止しようと念ずるものである。如上の考を系統的に具體化したものが卽ち本書である。けれども、固より淺學菲才或は魯魚の謬も免れぬことかと憂へて居るものである。唯多少なりとも多忙なる實際者に對して間に合ふ事が出來たならば、此の上も無い光榮と思ふのである。

大正十五年九月

著者識

目次

第一章 數

第二章　命數法及び記數法

第三章　數　字

第四章　計　算

第五章　四則の定則

第六章　小　數

第七章　整數の性質

第八章　分數

第九章　負數及び零

第十章　比及び比例

第十一章　空間、求積數理

目次（終り）

算術教授に於ける 數理攻究の原據

廣島高師訓導 山本孫一
廣島師範訓導 古川正登 共著

第一章 數

第一節 數の發生的考察

一、數量不必要の時代

人の生活に必要であるものを經濟學に於ては、財貨と云はれて居る。更に其の財貨は經濟財貨と自由財貨とに分類される。經濟財貨とは之を得るに勞力を要するもので、從つて其のものには所有權が各存して居る。之に反して自由財貨とは、之を得るに何等の勞力を要せず、自由に得られるものである。從つて其のものには所有權が存して居ない。例へば空氣・水（但し水は都市に於て、良水を得る

に不自由の爲上水道、水運人等より受ける時は多少の價を存し、自由財貨の域を脱して居る）等である。

殊に空氣は何よりも必要なもので、一分時と云へども其の供給を缺く時は、直に死を招く程重要なものである。然し是を得るに何等の勞力を要せず、全く自由である。從つて所有權は存在して居ない。依て空氣を一立程貸して呉れ、賣つて呉れとか、二立程借りて來た、買つて來たとか、又三立盗んだ盗まれた等の事件の起る理由が無い。卽ち貸借・賣買・盗難等の行爲は財貨の内、經濟的財貨が認められ、所有權なるものが社會に生じた後である事が理解される。

以上述べた事に依て自由財貨と經濟財貨との意義は大約理解されたであらう。然し實際のものに就て之を分類して見ると、時代に依て各異つて居るのである。太古米麥の山野に充滿し、之を得るに何等の勞力を要せず、自由であつた時代に於ては、米麥は自由財貨であつたに相違無い。此の樣に太古木の實其の他の食糧は山野を埋め、之に對するに人口の數少く生活程度の低い、衣食住に何等の不足を感じ無い時代には前記した樣に、總べてのものに所有權なく、從つて貸借・賣買・交換・盗難等の事は全く行はれて居なかつた。丁度現代の空氣の樣で、空氣の數量を知つて自分は一日何立の空氣を呼吸するから、何程節約せねばならない、一立の價は何程するであらうと、數的に量的に考察せないと同樣、此の時代の人は總べての財貨の數なり、量なりを知る必要は少しも無かつた。此の自由財貨に依て滿たされた時代を數量不必要の時代と云ふのである。

二、量必要の時代

以上の樣にして數量の不必要の時代は何代か、幾十・百・千・萬年か繰り返された。然し時代の進むにつれて、人口の增加は其の度を加へるに比し、衣食住に必要な財貨の增加は伴はない、生活程度は向上して新なる經濟財貨も發明發見されたが、尙ほ經濟財貨の不足は順次に其の度を增した。此處に於て經濟財貨（始めは主として食糧）の量の多い少いを知る必要を感じた。此處に於て生存競爭なるものの發生し、貸借・交換の行爲起り、食糧の多を得ようとする觀念が釀成されて來た。此の事に依て量の觀念の必要に迫まられ、漸次量の觀念が養はれて來た。此の時代を稱して量必要の時代と云ふ。

三、數必要の時代

前記した量必要の時代の連續に依て、自由財貨は順次經濟財貨となり、生存競爭は益劇甚を加へ食物に依て居を轉ずる遊牧時代も到來し、種族的觀念は次第に發達して、團體的の戰爭は度々繰り返される樣になつた。此處に於て敵より味方が多いとか少いとかの樣に量的の不正確のものでは、到底勝利を得る事が出來ない。量に測定を加へて數と化し、何倍、何人の樣に稍々正確に近い數を知る必要

となつて來た、武器の内弓の様な飛び道具を用ふる様になつてからは、矢の數、矢の到着距離を皆數と化さねば、戰に勝利を得る事が出來ないので、數の利用範圍は益々擴張された。更に遊牧に依て生計を維持する事が出來ない様になり、現代文明國人の採用して居る定住の時代は到來した。此の時代となつては一年中に於ける食糧の數を豫想して、下種も、貯藏もせねばならないので數は一段と必要となり、經濟生活の根本をなし數の利用は缺く事の出來ないものとなつた。卽ち現代の生活に於て、文字の知識は無くとも文字に變はる言語に依て不便の内に生計を維持する事が出來る。然し數を數へる事、計算する事の出來ない人は日給の算入も、支拂の算入も出來ないので、到底生計を持續する事は困難である。現在五十歳を越へた人の内一字だに知らない者は隨分あるが、數を知らない、日給や年貢米の計算の出來ない人は、一人もない所から見ても、生活上如何に數の必要であるかと云ふ事が理解される。此の様に時代の要求は數に對して其の度を加へ、量の時代より數の時代へと進歩した。

四、數取りの時代

以上數が如何にして發生したかと云ふ事に就て述べた。以下少しく數が始めて現はれてより如何にして現代の數となつたか、其の發達過程に就て述べて見よう。

以上述べた様に衣食住の物資の不足は甚しくなつて、木の實を五つ貸したら前通り五つ返してもらはんと思へば如何にしても、後日の記憶として數へ、其の數を何かの符號として記憶しておかねばならない。其の最初のものとして發明されたものは、實物を是等に對應させる事卽ち、數取りに依て數量を記號化する事である。其の卑近で最も多く利用されたものは身體の部分である。先づ手の指の十本ある事に氣付いて手指を數取りとし、十迄を確實に利用する様になつた。次に素足の温熱帶人は足指に氣付いて、二十迄を利用する様になり、少しく進んで頭・耳・目・鼻・腹・胸等身體各部に就て二十を越へた數を利用する様になつた。現代に於ても未だ野蕃人中には、手足の指數に依り二十迄を數へ其れに頭耳等の部分を加へ、ようやく三十迄くらいを數へ得る者も少くない。是等は果物を多さん取り集めて後、分配の場合には手足の指を數取として分配し、其れ以上は何時の場合に於ても「多さん」として、其の場で食ひ盡して終ふのである。

以上の時代を稱して數取りの時代と云ふのである。蓋し數觀念發生後其の第一楷段である。

五、數詞の時代

以上の様にして數取りの時代は幾十・百・千・萬年か繰り返された。然し丁度尋常一年や二年で計數器を用ふと同樣甚だ不便の點が多い。依て此の記憶又は發表法の指・小石・動作等の不便を除く爲に、始めて「ひとつ　ふたつ　みつつ」「いち　に　さん」「ワン　ツー　スリー」等の數詞卽ち言語に依る

記憶・發表法が考へ出された。直ほ其の詳細に至つては、第二章命數法及び記數法二に於て述べる事とするが、種々の條件のもとに十進法に依る數詞が最も廣く用ひられる樣になつた。蓋し何等の準備なく數を簡便に、記憶・發表する事の出來る方法で、第二楷段の數である。此の時代を稱して數詞の時代と云ふのである。

六、數字の時代

右の樣にして數詞の發明された後に於ては、數の記憶・發表が自由に出來る樣になり、數の發達に對して一新紀元を與へた。然し此の數詞は個人として一時的の記憶、個人相互相對しての數發表には何等の不便なく、最良のものである。然る處時と場所卽ち時間と空間を異にしては、數の發表として何等の效果が無い。又計算との連絡が無い爲、大數を取扱ふ事が極めて困難である。依て其の缺陷を除く爲數取りの小石・指（尋常一年の數字に入る前の數教授は、縮小した發生的考察として此の過程を繰り返して居るのである。）等を經、更に數詞を經て遂に、現代の樣な數字が發明され、數詞・數字二者混用の時代となり、數學としての一科學の基礎を作り得たのである。

七、自然單位に依る測定の時代

以上三項に依て一般的の數の發生に就て述べたが、本項以下四項に就て數の程度から見た發生考察に就て述べて見よう。

其の最も程度の低いものは自然單位其のものを、測定單位として數へ又計算するものである。例へば木の實の樣に自然的に一個の單位として區別されて居るものゝみに就て、數が取扱はれた時代である。

八、自然的の度量衡器に依る測定の時代

前項に述べた自然單位に依る測定では、水の樣に連續して居る量を數化する事が出來ない。又米の樣に粒の小いものは、一粒二粒と自然單位で數へれば、あまり數が多くなつて困難になる。以上の樣な缺陷を除く爲に考案されたものが、自然的の度量衡器である。

此の事に依て尋（兩手を張つた長さで長いものゝ測定單位）咫（拇指と食指を張つた長さで、短いものゝ測定單位とす）掬（兩手で水を汲んだ量）抱（一かゝへで一人の力でかゝへ得る重さ）の樣に自然單位に依て其の大略の數を知る事が出來る樣になつた。卽ち八尋殿、千尋殿の御殿、八咫の鏡と云へば其の大さの大樣が理解される。蓋し測定數として始めて生れた數で、連續量をよく數と化して利用する、第一歩である。

九、正確な・度量衡・計量器に依る測定の時代

右の様にして自然的の測定器を用ひた時代は、幾代となく久しく續いた。然し生存競爭の劇甚と文明の進歩は、大略の數値を以て滿足せず、或區域的に統一された、度量衡・計量器を制定して、現代の様な測定の正確な度量衡計量となつた。更に今日の日本の様に總べての點に於て不便な、尺貫法度量衡を廢し新にメートル法度量衡令を發布し、原器の正確、單位の十進、度量衡・計量關係の密接、世界共通等の點に於て長所を有する度量衡・計量を採用する機運が漲り始めた。

更に今一歩を進めて考へると、度量衡・計量器の正確・精密は、財貨の不足に依て順次其の度を加へる。例へば酒一立を買ふにも一滴や二滴の誤差は問題とされて居ない。又度量衡・計量其のものの檢定に於ても、使用に於ても一定の誤差を、公差として許し法定的のものである。然し酒に比し不足率の大な金剛石・白金は、一瓦や二瓦はと云つて決して誤差を許さない。從つて微量單位としてミクロン・カラットの様に特定單位が必要となり、度量衡・計量器其のもの及び使用に於て正確の度を加へるのである。

十、異種交換單位の測定時代

以上三項の様に連續量迄も測定が行はれる様になつて數は正確及び利用の度が、益々發展した。それにつれて異種類の財貨の交換價値即ち、價値測定單位が發明されて來た。此の事は經濟財貨の增加生活程度の向上、社會組織の自給經濟が分業組織へと移り、自己の慾望を滿足さす爲財貨の交換が頻繁に成つた事に依り、兩者を製產に要する原料・勞力・運搬等總べての指數を總合する指數、即ち價値測定單位（現在の圓錢厘）の測定數の發明で、異種財貨の交換を容易に行ふ事を得る様にしたのである。然し其の最初の時代に於ては、物々交換であつたものが、貨幣なる媒介物の制定に依て一層其の交換を容易ならしめたのである。

十一、程度高き數の時代

以上十項に渡つて一般的に、特殊的に數の發生的の考察を述べた、更に本項に於ては一層程度の高い數に就て述べて見よう。

數詞即ち數へる事の發明された時は、集合の意味の數（數を皆一の集合と見る）と、順序の意味の數（三丁目・五番目の様に順序を現はす數）とは同時に、又は相前後して生じたものである。次に數字の發明、された後は運算の意味の數（5×3　2^3　$\sqrt[3]{4}$ の三の様に計算の意味を現はす數）が發見され更に $3:2$ に於ては比の意味の數（三及び二は決して運算や順序の意味でなく、三あつて二、二あつて三が始めて效力のあるもので相關的のものである）….（詳細は本章第五節三數の四意味參照）が發明され更に程度の高い不盡數・對數等其他種々の數が、發明利用される様になつた。

十二、整・分・小數、正・負數共用の時代

自然數のみでは滿足する事の出來ない見地から、各整數間に整數の無限と同樣の意味の無限を分數の發明に依て、考察利用し、分數の缺陷を除く爲小數を發明し、次に上下に無限の意味よりして負數が發明されて、正數を區別した。直ほ是等の數に就ては章を變へて說明する事とする。

十三、要約

以上數の發生的考察を要約して見ると、次に示す樣に五種に分類考察する事になる。

1、數量の發生的考察

イ、數量不必要の時代

ロ、量必要の時代

ハ、數必要の時代

數が必要となつてからは、數は更に次々と進步し精細の度を加へた。

2、自然數の發生的考察

イ、數取り使用の時代

ロ、數詞使用の時代

ハ、數字・數詞共用の時代

3、測定數の發生的考察

イ、自然單位に依る測定の時代

ロ、自然的の度量衡器に依る測定の時代

ハ、普通度量衡計量器使用の時代

ニ、異種の交換單位使用の時代

4、程度高き數の發生的考察

イ、順序の意味の數使用の時代

ロ、集合の意味の數共用の時代

ハ、運算の意味の數共用の時代

ニ、比の意味の數共用の時代

ホ、無理數等共用の時代

5、整・分・小數、正負數の發生的考察

イ、整數使用の時代

ロ、分數共用の時代

ハ、小數共用の時代

ニ、負數共用の時代

第二節　數の無限

數は大小無限に存在し、小より大に之を順序的に整列する時は、無限に同樣連續するものである。

今整數に就て之を考察すると、一を基點として二・三・四・五と一宛順次大に整列して十に至り、十倍毎に百・千・萬に至り、更に萬倍毎に億・兆・京……と次に示す樣に順次整列して居るが、無限のもので名稱を無限につける事は不可能の事である。然し最大のものは思想上としては「より大のもの、更により大のもの」として存して居るが、實際に存して居るものでなく、又此の樣に大なものを一生の生活に使用する事は極めて不便で、到底使用を全ふする事は不可能の事である。

無限なる數の單位名稱

一(一位)　十(二位)　百(三位)　千(四位)

萬(五位)　億(九位)　兆(十三位)　京(十七位)　垓(二十一位)　秭(二十五位)

穰(二十九位)　溝(三十三位)　澗(三十七位)　正(四十一位)　載(四十五位)

極(四十九位)　恒(五十三位)　河沙阿僧祇(五十七位)　那由他(六十一位)

不可思議(六十五位)　無量(六十九位)　大數(七十三位)

次に整數のみの觀念よりしては、直に次の數は容易に發表される。例へば五の直に次の數は六又は四である。然し分數・小數の發明されてからは思想上に於ては、直に次の數を想像する事は出來るが發表する事は不可能の事である。例へば分數に於て考察すれば七分の四より次に大な數は、七分の五でもなく六分の四でも無い。唯思想として、四と五との間に存する無限の數の內、四に最も近いものを分子、七と六との間に同樣無限に存する數の內七に最も近い數を、分母とした分數である事が推理されるのである。

更に小數に於て考察すれば、分厘毛……の各桁間に於て整數の無限と同樣に存するもので、三・一の次に大な數は思想上として、一の次に無限に多くの零をつけた最後に一を記した數である事が想像される。然し數詞としての發表は實際に於ては不可能の事である。依て實用としては小數點四位以下は繁雜に依て用ひられて居ない。檢定證印を捺された一米の物指に於ても、各目盛の差はおろか、全長に於て正確に其の長さを有するものは絕無と云つて良い。要は一米一糎あるか、〇・〇〇〇……一糎の

過不足があるか無いか、現代の科學は之を測定する事が不可能である。其の意味に於て現代檢定濟とされて居る度量衡・計量器も嚴密の意味に於て正確のもので無い。又度量衡・計量器の使用卽ち實測に於ても其の測定が皆目測（目盛を讀むは目に依て大略の數値を讀む）であるから、嚴密の意味よりしては、概測である。度量衡法令の檢定及び使用に於て一定の公差の認められて居るは、前記した數の發生から眺めても本項の數の無限から眺めても無理からぬ事である。

更に負數の導入は其の無限の數をマイナスとしての無限を同樣に考察し、整數の無限は分數小數に依て一層無限を擴大し、負數に依て總べての量に無限を考察する事が出來るのである。

第三節　數へるの意義

數へると云ふ事の意義を述べる前に、量及び單位に就て一通り說明をする必要がある。依て以下少しく是等に就て說明して見よう。

一、量の意義

量とは物の嵩の意である。總べての物には輕重・大小・長短・高低・明暗・冷熱・强弱・遲速を有して居るが、是等が人の五感其他總べての部分に或感覺を與へる。是等を量と云ふのである。三歲くらいの小兒に菓子の四個より五個を選ぶ事は數は知らないが、其の菓子の量の多に依て選ぶのである。又與へた五個の菓子の內、幼兒の知らない內に一個を取り去れば、後其の菓子を見て、數の觀念が無いから何箇減つたかと云ふ事は知覺せないが、其の量の減じて居る事に氣付いて泣き始めるのである。更に小生は尋常一年の入學前に其の數觀念を調査した事がある。其の場合三糎立方の木片を一方に三個一方に二個積み重ねて何れが多いか、卽ち量の觀念に就て發問した處が、大部分の子供は正答した次に各何箇宛あるか、卽ち數に就て發問した所、又大部分の子供は正答せるも、前者に比して其の數を減じた。更に其の和差卽ち計算に就て發問した所、確答者の數を減づる事が極めて大であつた。此の事に依て考へて見ても、量は數發生の對照となるもので量・數・計算の順に成立するものである。

二、單位の意義

單位とは物の量を測定したり、數へたりする時のスタンダード（規範）であつて全體をなす部分の量である。然して此の單位は測定單位と自然單位との別がある。測定單位とは測定する量が連續量である爲、度量衡・計量器を用ひて、全量を若干の單位に區分する單位で法律又は習慣に依て一地方に共通に制定されたものと、各個人が隨意に定めたものとがあるが、何れも人爲的の單位である。自然單位とは自然的に區別の明示された單位で、林檎を一つ二つ米を一粒二粒と數へる時の單位である。

然して測定と云へば普通に、量に單位を働かせて數となす總べての過程を意味するものであるが、狹義に於ける測定とは前者卽ち測定器を用ゐる場合のみを意味するものである。

三、數へるの要件及び意義

1、二量の比較

二量の比較に依て一量が他の一量の何倍であるか、と云ふ事を見出す事が其の根本である。若し此の時量を離れて抽象的の數に依て、何倍なるかを比較する事は計算である。今二量ＡＢの存する時ＡはＢの何倍であるかを求める事はＢの量はＡの量に對して單位である。同樣ＢはＡの何倍であるかを求める事は、Ａの量はＢの量に對して單位である。

2、共通の類似點

二量卽ち單位と量との比較に於て、此の二量は共通の類似點に依て統一されて居るものでなくてはならない。例へば音の量と光の量とは如何にしても比較する事の出來ないのは、此等二量間に共通の類似點を見出す事が出來ないからである。然し音の量も光の量も方面を變更して此等の量の空氣中を進行する速力のみに就て、比較吟味すれば速力なる共通點に依て比較測定する事が出來る。又人と犬の量に就て考察すると、人數・匹數なる單位を以て數へれば不可能である。然し目方・生物の數・足の數の樣に共通單位に依て數へれば可能である。若し此の場合人數・匹數に就て强て數へようとすれば、人何人、犬何匹と別々に數へ觀念上の數として合計するより外はない。

此の意味よりして計數器の珠は色・形大いさ等の點に於て、出來だけ共通の類似點を多く有し、各單位の區別が明瞭なるものが適當である事は言を待たない。

3、數へるの意義

以上二項に依て數へる事の要件を述べたが、其の意義に就ては是等の要件を基礎として決せられるのである。卽ち數へると云ふ事は或量に對して共通の類似點を有する單位で、一宛單位と同一の區分を與へて量を順序立て、重複脫漏の無い樣に數系列を一般的に、觀念化された數詞に一宛配當し、最後に附した配當の順序の數を直に單位の集合と見る作業、卽ち順序の數と集合の數を得る過程を意味するのである。

第四節　數の分類

數は次の樣に各方面から考察して分類する事が出來る。

一、系列に依る分類

1、十進數

十毎に數系列の進行するもので、第二章二の2十進命數法の長所に於て記す樣に、最も多くの長所を有する事に依て、現代數系列の最大權威で他の數系列を順次侵略して今日に至つたのである。

2、不十進數

前十進に對するもので單位の數系列が不十進のものである。然して此の不十進數は二進數・六進數十二進數・二十四進數・六十進數等種々にあつたが、現在は十進數に壓倒されて、二進數は對・匹等筆や反物、十二進數は打・時等の鉛筆や時間・月數、二十四進數の日、六十進數の分・秒・角度の諸等數に其の遺物として存して居るのみである。然し何れも二・四・六・十二・二十四・六十等の樣に因數に分解し易い、計算に便な數の採用に苦心して決定した形蹟は十分認める事が出來る。

二、發表形式に依る分類

1、正・負數

發表形式に依て分類すれば中性の零を中心として、上下に正の數と負の數に分類して考察する事が出來る。負の數の發明された時同時に正の數も區別の爲に出來たもので、負の數の發明は最近のものである。温度・時間等の樣に上下に無限に發展して行く、測定數の考察された時に於て、必要觀からして發明されたものである。

2、整・分・小數

整數が最初に發明され、引續いて分數が發見され、十六世紀に至つて整數の十進記數法と一致さすべく小數が發明された。

三、抽象と實際に依る分類

數理の吟味、形式陶冶よりして抽象化された無名數と、事實其の物と關係あり實際の量を自然單位又は度量衡・計量單位で測定した測定數、即ち名數とに分類して考察する事が出來る。

1、無名數

イ、構成形式

數の構成形式よりして、素數、構成數、(倍數、約數更に倍數約數は其の特殊のものを公倍數、公約數又其の特殊のものを最大公約數、最小公倍數)として考察する事が出來る。

ロ、形式

運算形式の運算方法を現はす運算數として、乘數、除數、指數等が分類される。例へば 10錢×3　10錢÷3　30^3　$\sqrt[3]{10}$ 等の三は十が有つて始めて其の效果を現はすものであるから、運算數と名づけ

る事は本章一節の十一で記した通りである。

2、名數

イ、單位關係

單位の數よりして單名數と複名數（諸等數）とに分類して考察する事が出來る。總べての測定數を皆單名數とすれば便利の樣であるが、一面量の測定は科學の進步と共に極大・極小のもの迄も必要となつて來た。今若し長さの測定單位名數を粍のみとしたなれば、バクテリヤ等の微細の物は〇・〇〇〇……粍と隨分多くの零を要して書くにも讀むにも極めて不便である。又地球の周の樣に長大のものは數が大すぎて、本章第二節に記した樣な多くの名稱を要し、其の取扱が前同樣不便である。然して此の讀數上記數上の缺陷を數範圍の縮小に依て除いたものが諸等數である。社會に於ては間々此の缺陷を其の儘として用ひられて居るものがあるが、之れ等は量を相對して表現する事は困難である。例へば富士山の高さを尺貫にて、一萬二千四百六十九尺と云つた時は高さの想像全くつかないが、三十四町三十八間一尺と云へば大約一里だと實際の量の想像がつくのである。然しメートル法に於ては此の缺陷が除かれる理である。

ロ、單位の集合

單位の集合より考察すると、單素數と複素數とに分類することが出來る。卽ち人・本・枚等のつく數は單素數で、列・箱・班・組・帖等のつく數は單位が集合したものである。例へば一列と言へば其の列中に少くとも二人以上の人數、一帖と言へば二十枚等の樣に諸等數と同樣の意味より出でたもので複素數である。

ハ、測定數

測定の有無よりして自然單位名數と度量衡測定單位名數とに分類する事が出來る。又度量衡單位名數も法定的のものと、步測咫測的のものがある事は本節一節の八・九に於て述べた通りである。

ニ、單位の複合

單位の複合の程度からして單獨名數と複合名數とに分類する事が出來る。單獨名數とは枚・米等の樣な測定單位の單獨なもので、速力單位名數（單位時間內に運動する距離で、時間と距離との複合したもの）面積・體積單位名數（邊又は稜の復合したもの）貨幣單位名數（價値測定單位で財貨の需要供給の關係と製產に要する原料勞力運送費等の復合したもの）等である。

以上測定數に就て種々述べたが、是等には各々其の程度に於て高低の差のあるものである。試みに尋一の國定算術教科書を靜に調査して見ると、枚、本、匹、羽、人、冊、把、俵、袋、軒、艘、日、

箱、錢、字、組、列、帖等が提出してあるが、次に記す樣によく其の發生的の見地からして順進的に提出してある。

直觀出來るものより出來ないものへ、空間的のものより時間的のものへ、具體的のものより抽象的のものへ、單位の明なるものより不明のものへ、測定器を要しない自然單位かな、度量衡・計量單位へ、單名數より復名數へ、十進數より不十進數へ、單素より復素へ等の順。

四、實際と推理に依る分類

實際に於て我等は三、五分の四、二を三乘した數、三乘して八となる數は認め得るが、此の冪指數に推理を働かせて、二乘して三となる數、五をマイナス三乘せる數、マイナス三乘して七となる數を $\sqrt{3}$、5^{-3}、$\sqrt[3]{7}$ として認めて居るが、是等は前者の數に比較して推理方面に屬する數である。

五、發明如何に依る分類

更に數を發明の如何に依て分類する事が出來る。然し是は皆時代に依て變化するもので時代を對照として分類するものである。例へば電氣量や熱量の測定は最近までは不可能であつたが、電流計、寒暖計の發明は是等の量を數と化し得たのである。即ち不可測量を可測量と成し得たのである。心理學は進歩したけれども人の感情（苦・樂・憤怒）の量は測定し得ないのである。是等の量の測定は近き將來に於て其の測定法が發見されるか、又永久に發明し得ないかわからないが、現代としては未發明の數である。

六、一般的の分類

更に此の分類を吟味する爲に理學博士林鶴一、理學士柴山彌共著の數學叢書第十二編「數の概念」に發表されてゐる、數の分類を附記して見よう。

- 數
  - 單素數（一素數）
    - 實數（正負數）
      - 有理數
        - 整數
        - 分數
      - 無理數
        - 不盡根數
        - 多くの對數
        - π，e 等
    - 虛數
  - 複素數（二素數）

分數の内特殊のものを小數として考察すると更に次の樣に分類される。

- 小數
  - 有限小數
  - 無限小數
    - 循環小數
    - 普通小數……無理數

第五節　數の意義

數の意義を說明するとか、數を定義するとか等の事は極めて困難な問題で、古今東西の數學者は定義を與へる爲に種々苦心し研究もされたが、何れも完全のもの無く不成巧に終つた。種々の整數論を見ても、數に對して定義を與へる事が根本から誤まつて居ると、書かれてあるものが多い樣である。是に依て見ても小生等の樣な薄學淺才な者が、數の意義を說明する事は誤つて居るかも知れない、然し現在の自分として信ずる所を述べ其の意義を明にしたいと思ふ。

先づ第一に於て數の槪念と題して、數の抽象的の根本を述べ、第二に於て哲學的に於ける數の意味最後に於て數の四意味と題して、數の意義を決定して見ようと思ふ。

一、數の槪念

數の槪念を心理學的に考察して見ると、視覺、聽覺、臭覺、味覺、觸覺の五管等に對して或一定の刺戟が連續的に與へられる時は、神系抽樞に於て印象となつて殘される。此處に於て腦は同一の類似點に依て分類統一し、是れに對して自己の有する數詞を働かせて、順序數を認知即ち數の槪念を構成表現するのである。

今米・犬・鉛筆の量即ち集團に對して、各立・匹・本の單位を以て測定し三立・三匹・三本を得たとすると、何れも單位を三回繰り返した三回なるものが共通である。更に米・犬・鉛筆の各單位を相對應さす時は過不足なく對應するので、此の三量は等價のものである。

尋一の最初に於て三立と他の三立の等しいと云ふ事は、此の對應する抽象化された數の等しいと云ふ事で、是れが計算の根本となるのである。指を折つたり、計數器を用ひたりして、數を數へ又計算する事は、皆此の集團の單位を對應させて此の數量を理解するのである。依て數の槪念とは三立・三匹・三本に各一・二・三を對應させて得られる、其の共通の三が數である。換言すれば自己の有する數詞の觀念を共通な量に適用して得られたものである。

此の意味に於て甲の量が乙の量より大であるとは、乙の集團は甲の集團の部分集合であつて、乙の量が大であるとは其の反である。依て自然數の大小は數詞の系列に依て各一定の位置を有して居るから、大小は卽ち順序と同時に考察し得るのである。

二、哲學的意味に於ける數の意味

哲學者が數に對して如何なる意義を與へて居るか、極めて簡單に說明して見よう。西曆紀元前五百八十年ピタゴラスは、數は物の根元で物以外に存して居るのであつて、永久不滅に存在し萬物を支配

する根元であると述べて居る。西暦紀元前四百二十年プラトンも稍同様の說を述べて居る。次に西暦紀元前三百八十年のアリストテレスは、物の屬性として說明し、數は全く物と一致の形のもので、物あれば必ず形、色の有る樣に其の物に常に附隨して居る屬性である。又一面物に就て調査の度を進めると、度量衡・形・色・邊の關係・構成狀態と順次に數が增加する樣に認められるが、實は始めより實在せるものを人が順次發見したのみに止まつて、決して數が增加したもので無いと述べて居る。此の事は實際兒童の數觀念が、前節數の分類に於て述べ樣に順次發展して行く事に依て認められる。

更に數は物を知覺し認識する形式上の主觀であるとして、此の認識過程を時間的と空間的との二方面に考察されて居る。卽ち獨國人千七百八十年のショウペンハウエルは、物の認識の場合に起る時間的連續であると述べ、同國人千七百七十年のヘルバルトは物の認識の場合に起る空間的の同時的存在であると述べて居る。此の二說を現在の數敎授法から述べて見ると、前者の時間的連續說は數へ主義の數敎授法で、兒童に數の觀念を與へる爲唯數詞を抽象的に暗誦し、以て數の順序と集合の觀念を覺らしめ、然る後抽象的の加減乘除の計算のみを經て數字と連絡し終らふとする說である。もとより此の說は形式算の練習を極端まで行つて、數理の追究へ、數理の吟味へと遍した算術敎育を行ふ傾向がある。後者の空間的同時說は直觀主義の數敎授法で、量觀念に於てのみ數觀念を養成しようとする說で、數敎授に於て計數器其他各種直觀方便等の實物を極端まで使用する說である。此の說は現代の心理學上同時に三個くらいは認識し得ると發表されて居るが、嚴密の意味の同時的認識であるかは疑問である。又各人の經驗の程度に依て異る事は云ふ迄も無い。本說の短所とする處は數理で理解出來るもの迄も、直觀方便物を用ひ直觀過度の弊に陷らしめて、計算力を鈍らす憾がある。然し前者と共に各一理、一長所があつて何れも一方のみを以て成立するもので無く、二者相助け相待つて始めて、數觀念養成が完全に出來るものである。兩者の何れにも偏せず、初步の數取扱の場合は直觀主義を主として採用し、順次に數へ主義を採用して進行する方法が、最良の方法であると思ふ。

三、數の四意味

小生は以上に於て數の發生的考察、數の無限、數へるの意義等に就て種々に述べたが、最後に數の意味は如何なるものか定義的に整理して見たいと思ふ。然し數の定義意義は如何にしても一定的に述べる事は出來ないので、次の四意味に要約して述べる事にする。

1、整列觀念に於ける數の意味

尋常一年生の最初又は入學前に於て、未だ數觀念の十分發達して居ない兒童が、敎師に就て又父母兄姉に就て、一ッ二ッ三ッ……と無意識的に數詞の暗誦を强ひられて練習し、亦實物に就て數詞を暗

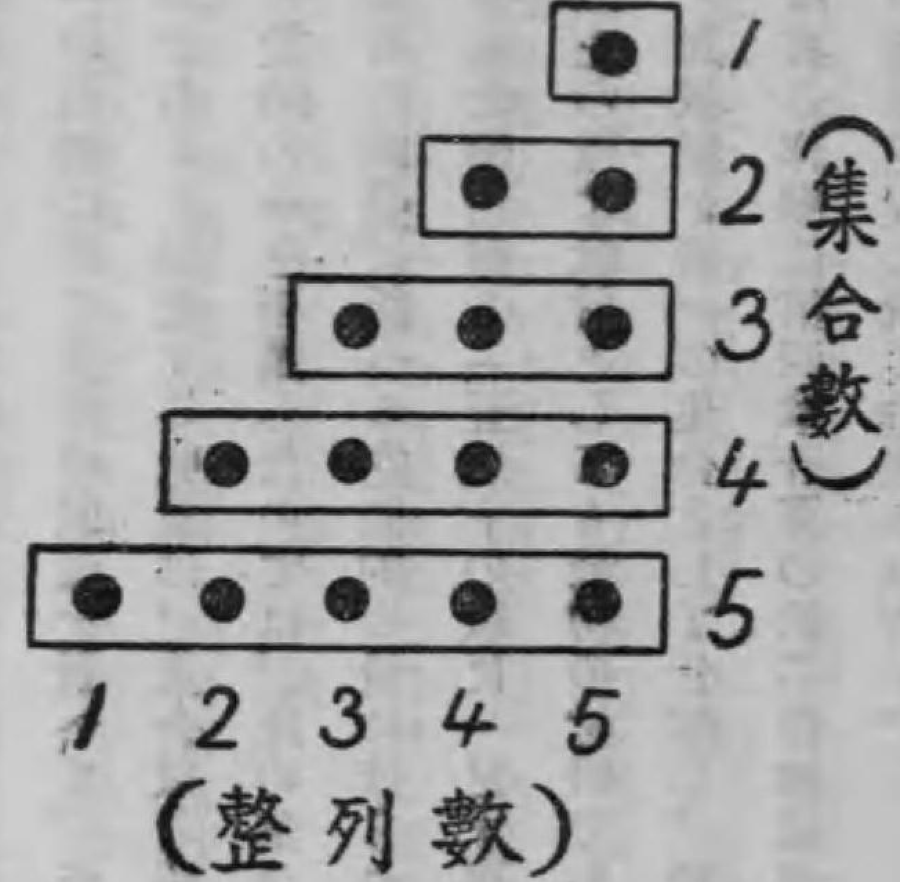
誦し（最初は數へるの意志無くして、實物に就て數詞を繰り反すのみ）更に十、九、八、七‥‥と逆に暗誦する時彼等兒童の頭腦の中に、最初閃く觀念は、即ち整列觀念に於ける數‥‥數詞の各々には又數へた物の各々には皆常に前後の關係があり、一宛整列して三は二の次の一つだ、四の一つ前の一つだ、更に進んで一の二つ目の一つだ等の樣に、數には順序が自然に決まつて居て、何れの數を拔き取つて見ても前後の關係が明瞭に存して居ると云ふ事である。依て小生は數の意味の第一として、此の整列觀念に於ける數の意味を擧げるのである。

此の觀念に於ける數の意味は、前記した樣に尋常一年に於て基礎となる數觀念であるから、最も注意して與へておかねばならない。是れに名をつけて、一丁目、十一聯隊、第五列、六番目、第三班、第五學級、第二號等の數の意味で、是等は數の順序のみを表はす數で決して第三班は第一班より二班程多いとか、三丁目は六丁目より三丁程短いとかの意味は無い。

此の觀念は數詞を抽象的に又實物と並列して順に、逆に、中途から何回も〳〵も數へて居る間に養成されるものである。依て數へると云ふ事が最も重大な位置を持つて居るものであるから、幾回も數へる內に數詞の前後關係の徹底に努めねばならない。我國の算術教科書を見ると最初に於てどうも此の方面の流れが、即ち數へ主義的の傾向が強大の樣に思ふ。

2、集合觀念に於ける數の意味

整列觀念に續いて起るものは集合觀念に於ける數である　種々の實物の量に就て幾回となく數へ、又比較して居る內に數詞の順序は其のまゝ、數へた結果の實物の數量の多少と一致して居る事を兒童は發見する。即ち實物を數へて四で終つたら四番目まで數へ終つた事で、過去の全量は一が四程集合



して居る四であると云ふ事を理解し、何時の場合に於ても、數へて最後に附した數詞の最後の一つが全量を表すものである事、五は一の五回集合、八は一の八回集合したものに等しいと云ふ事を了解する。蓋し量を數として考察する最低程度のもので、數觀念の基礎として重要なものである。

上圖は整列觀念にける數と集合觀念に於ける數とを圖示したものである。即ち右側の數字は集合數を意味するもので、四角形內の一の集合された數を現はし、下側の數字は整列觀念に於ける數即ち左より一番目の一つ、二

番目の一つ…を意味するもので、12345は皆一つ宛の順番を示したもののみに止まるのである尋一の最初に於て實際の數量を數へて、五つ程あつた場合には、最後に附した數詞の五番目の一つを五つであると知覺する兒童は、集合數と順序數を混合した兒童であるから注意せねばならない。抽象的の數詞のみを暗誦したのでは、此の集合觀念に於ける數は容易に出來るもので無い、如何にしても實物特に視覺に訴へる空間的の量に依らねばならない。又計算に入る最初の取扱とされるもので、我國算術敎師用書も「五以下の數に一足す事」より出發して居る。

以上の樣に敎材としても最初の材料であるが、加減の計算の總べては皆機械化推理化される迄は、被・加減數を皆一の集合として分解し、數取を用ひて數詞とし數へ足す事に依て計算するのである。直ほ其の詳細は第四章計算の第二節加減乘除の意義發達過程及び種類の二加法の發達過程、同五の減法の發達過程に就て參照されたい。

3、構成觀念に於ける數の意味

此の構成觀念に於ける數の意味は前二項の整列・集合觀念に引續いて起る數觀念であつて、第三段として起る數の意味で、數を分解的に、總合的に構成的に考察する意味である。

卽ち六なる數を與へられた時に、六番目の一であるとか、一の六回集合したものであるとかの以外に、二と四との和である。三と三の和である、十より四少い十二より五つと一つ小い、三の二倍である、二の三倍である、十三より一つ少いものの半分である、十八の三分の一である。二の五倍より四少い十より八少いものへ一加へて二倍したものである等、加減乘除別々に又各を複合して種々の數として分解總合的に老察する數の意味である。外國の小學校算術敎科書を見ると、主として此の方面に偏した數の取扱がしてある樣に思ふ。

十九以下の數の構成觀念に於ける數の意味の了解は、計算上最も重要なものであつて、實に計算の根本をなすものである。尋常一年生に敎授される加減の大部分は、此の意味の數の徹底に努めるものであつて、尋二に至つては數範圍を擴張して乘除を加へ、尋三に至つては筆算形式として尋一に逆戻りの取扱ひとなり、順次倍數・約數・素數・等數の性質上の取扱に至つては、數を消化した如何なる構成にもなし得る、此の構成觀念に於ける數の意味や極めて重大であると言はねばならない。

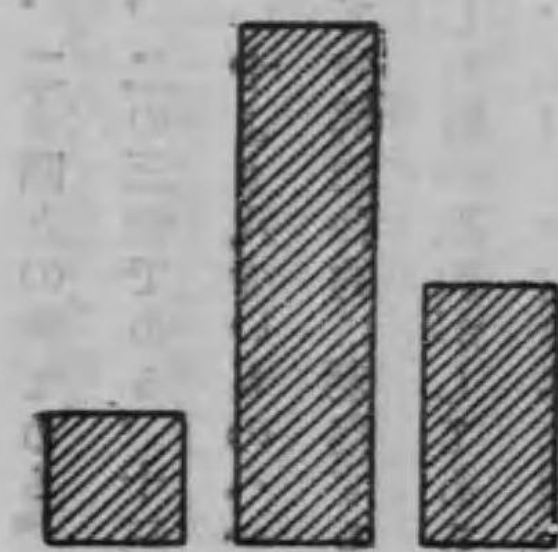
4、此の觀念に於ける數の意味

整列及び集合觀念に於ける數は皆直接に一を對照としておるのであつて、量との關係が深かつた。然し此の意味の數は二數以上の相對的のもので、一段と進歩した數である。

比に於て 3：2を考察すると三は決して、整列觀念の三番と云ふ事も、集合觀念の一と一と一との

和である事も、構成觀念の分解總合的の數の意味の何れをも有しない。二があつて始めて三は其の効力を有するもので、三のみでは決して其の効力を有するものでは無い。一方を三とすれば一方を二とするのであつて、6：4 の六と數の形式は異るが數値は一寸も變らない。然し整列・集合・構成觀念が基礎となつて居る事は言を待たない。

試みに兒童に對して一本の白墨を示すと一つと答へる。次に其の二分の一を示すと、やはり一つと答へる兒童もあるが又半分二分の一と答へる兒童もある。此の時前の白墨（半分にせない前の白墨）も一つで、此の白墨（半分にした白墨）も一つかと發問すれば、否前者を一とすれば後者は二分の一、後者を一とすれば前者は二であると答へる。此の一方の數値に依て變化する相關的の數が此の意味の數である。



更に圖に就て言へば上圖の樣にaを一とせばbは四、cは二で、bを一とせばaは四分の一、cは二分の一、cを一とせばaは二分の一、bは二である。依て此の意味の數は二者以上の割合的、即ち比の意味の數で、常に單位一を對照として又基礎觀念としては考察するが、直接に考察せない。前二項に就て述べた數の樣に運算數と

第六節　數の取扱

しては意味の無いものである。

數取扱の一部に就ては以上述べた各所に於て述べたが、更に一節を設けて其の取扱の要點を述べて見よう。以下各章に於ても同樣である。

一、數の發生的考察

第一節に述べた數の發生的考察に就て、尋六・一頁に於て其の大要を說話し、數の必要で無かつた時代から、今日の文明の全く數に依て左右されて居る。數と經濟文明の關係を知らしめて後、數の內容的知識の上に分數教授を行へばよい。

二、數の分類

尋六・三十二頁比、高二・三頁負數に於て數の種類は全部終るのである。依て此の二箇所に於て其の大要を問答的に說話整理して、數に對する分類的考察力を養成しておかねばならない。

三、測定數

高二・十四頁に於てミクロンなる特殊測定單位が提出されて居る。此の處に於ては其の特殊單位た

る利用に就て説明せねばならないが、更に第一節七・八・九の測定數に對する利用に就て述べ、直ほ三節四の2名數の大要に就て附説し、一般測定數に關する觀念を與へねばならない。

四、數の無限

整數に關する數の無限は尋一・一頁に於て十迄、同二十六頁に於て二十迄、同五十頁に於て百迄、尋二・二十四頁に於て千迄、尋三・三頁に於て九千九百九十九迄、尋四・三頁に於て一億未滿、尋五・一頁に於て兆迄と數範圍は兆位に止めてある。然し教科書に提出してある數範圍は命數上に於て、止むなく此處に止めたもので、精神に於ては數の無限を要求して居るのである。先づ此處に於て二節に述べた數の無限の、整數上方無限及び各整數間の小數・分數に就て命數上記數上の無限に就て、其の觀念を明確にせねばならない。更に高二・三頁負數提出に於ては整數下方の無限に就て前同樣に取扱ひ、以て零を中心として上下の整數無限及び、整數間の小數、分數の觀念上に於て、又命數上・記數上にに於て、神祕的の無限に觸れさせねばならない。

更に尋五・三十一頁には郵便に關する問題があるが、第一種郵便物料金は四匁又は端數毎に三錢を增すと記してある。此の問題に於て郵便料八錢を要する目方は何匁から何匁迄かと發問すれば「四匁から八匁迄、否四・一匁から八匁迄、否四・〇〇〇……一匁から八匁迄、卽ち四匁を越へた目方から八匁迄と、兒童は數量の無限を實際問題として、發見し解決するのである。又尋六・六十一頁の單利法グラフの斜線の各部分の數値に就て吟味すれば、數字で示す事の出來ない無限の數値を表はして居る事が同樣實際的に吟味される。

五、數へるの意義

第三節に於て量、單位、數へるの要件意義に就て述べたが、是等の事項は兒童に對して說話する必要は無い。唯教師の背景的知識として有する事に依て、其の取扱を完全に遂行する事が出來るのである。特に共通の類似點に就ては詳記して於たが、取扱上留意すべき點である。

數へると云ふ作業は算術科に於ける最初の取扱である事は言を待たないが、其の取扱を多方面的(種々の實物・圓・三角形・音・色)等として、彼等の數觀念が時間的に、空間的に、自然的に、測定的にと種々の方面の數詞として觀念として擴張する事が重要である。其の一般的取扱の過程として、數詞を抽象的に暗誦させる事、實物提出に依て其の數を數へて數詞に依て發表させる事、更に教師の數詞に依て發表した數を實物に依て發表させる事の三項は重要な取扱法で、尋一算術教師用書一頁にも注意として記してある。

六、數の概念

第五節一に於て述べた數の概念なる事項は、敎師の眞の理解を希望するのである。小生が或小學校で授業を參觀した場合、其の敎師はバットの煙草の實物を示して、「此のバットは一個が七錢である、それなら二つで何程であるか」と云ふ問題を提出した。然し出來ない兒童が隨分多かつた。靜かに其の根本である數に就て考察して見ると、バットの二個と、七錢を二倍する二とが數概念上其の共通なる事を、彼等兒童が考察して居るか、否かと云ふ事が問題である。依て問題の解說の場合徒に計算や算法の說明に走らず、數其のもの丶根本に對して吟味する事が重要である。

七、哲學的に於ける數の意味

第五節二哲學的の數の意味に就ても、前同樣敎師の內容的知識として重要である。殊に物其の物に就ても調査の進む（自己の數知識の向上）に隨つて、數の種類と關係とを增大する事や、時間的と空間的との考察力に就ては、高二・一頁に於て其の大要を問答說話して、其の根本に觸れさせたいものである。

八、數の四意味

第五節三數の四意味に就ては、兒童の數觀念範圍の擴張と、確實なる數の意味の適用として、尋六三十二頁比の學習後に於て十分徹底さ丶ねばならない。

此の事の理解は敎師方面に於て、尋一・二頁九以下の數に一足す事、同十四頁一引く事、同五十三頁に百未滿の數に一を加減する事が提出してあるが、此の事が如何に整列觀念に於ける數の意味から集合觀念に於ける數の意味へ發展し、更に尋一・二の計算の總べてが構成觀念に於ける數の意味の徹底に努めて居る事、換言すれば、約數倍數等の整數の性質の吟味と兼ねて、數の消化に努めて居るかが理解される。

兒童の方面から見れば此の意味の數に關しても其の理解は、分數を約したり、種々の形に變へても數値の變化せない事、比例の根本を味ふ事が出來る。

自分は兒童に此の數の四意味に就て說話してやつて後、次の事が起つたが全く數の四意味の數理からして解決する、美妙な點に驚いたのである。

「百粁の距離を每日三十五粁の速力で行けば、出發より何日目に到着するか」の問題に關して$100^{km} \div 35^{km} = 2\frac{6}{7}$（日）と答が出た時三日だ否二箇七分の六日だと、種々議論されて居る場合、或一名の兒童は決然立つて「問は何日目かと云ふのであるから、順序數卽ち整列觀念の意味の數で答へねばならない。依て其の答に分數等の端數の着く理由は無い、三日目が正答である」と述べた。實に是等は數本來の意味から說明したもので、根本に觸れて居る說明と云はねばならない。

更に「二百三十五人が四列を作れば列數は何程か」の問題に對して　235人÷4人＝58(列)…3人、235人÷4人＝$58\frac{3}{4}$(列) に就て答の正否が論じられた場合に、普通集合的の意味の數よりしては五十九列で可である。然し列なる單位は度量衡計量の測定で無いから、眞の意味よりして端數は認められないが、五十八箇四分の三列とせば其の實際が表現するから、前者に比して此の方が長所を有して居る。更に一歩を進めると列なる數は複素數であるが、打、對、帖の樣に數の一定して居る數で無いから、前者の五十八列餘り三人も完全の答で無い。問の前提として「四列が何列あるか」と云ふ事に依て、五十八箇四分の三列を先づ正確の答とせねばならないと兒童が論じた。以上の實例に就て見ても數の背景的知識として、種々の意味を敎へてをく事は答のみに止まらず其の總べてに於て、意義ある數的考察を行ふ事になるから、高學年の兒童に對しては「數とは何ぞや」なる數の意義に就て、其の大要の概念を與へておくことは重要な事である。

第二章　命數法及び記數法

第一節　命數法

一、數詞

1、數詞の意義

數詞とは文字の示す樣に數の言葉である。前章第一節數の發生的考察に於て述べた樣に數の必要からして數取りの時代を經て進化した。時間的に又空間的に制限は受けて居るけれども、數の外部的發表法としては最良の方法である。此の數を言語に依て符合とされ、或一定の區域に共通に使用されて居るものを數詞と云ふのである。換言すれば數の言語的符合である。依て數詞の最初に發明決定された時は、數詞に對して數觀念が伴つて居たものである。然し現代の樣に文明が進歩し、敎育が盛に成つて來ては尋常一年に入學せない、三歳の童兒も一つ、二つ、三つ、十、百、千等暗誦して居て、何等の數觀念の伴はない、抽象的のものでもやはり數詞である。

2、數詞の分類

イ、國語に依る分類

數詞は各國、各區域に依て分類する事が出來る。卽ち我國ではヒトツ、フタツ、ミツツ…　英國ではワン、ツー、スリー…　等の發音符合を以て共通に使用されて居る。然し其の種類極めて多く此の處に記す事は、何等の價値の無い事で略す事とする。

ロ、無限の數に通じて存するもの

本項以下我國のものに就て分類考察して見よう。

イチ、ニ、サン…の普通一般的の數詞は、前章二節に述べた樣に數の無限に對して各適用されるものである。

ハ、十迄の範圍を限つて用ひられて居るもの

ヒトツ、フタツ、ミツツ…ヒー、フー、ミー…の二種の唱へ方は普通十迄の範圍を限つて用ひられて居るものである。依て十以上の數に就ては致し方無く前者のジュウイチ、ジウュニを使用せねばならない。

ニ、上古の遺物として存するもの

上古に於ては十をトヲ、二十をハタ、三十をミソ、百をモヽ、千をチ、萬をヨロヅ、億を別名無き故萬の萬倍である事よりしてヨロヅヨロヅと云はれて居た。現代其の遺物として、次の樣なものが殘されて居る。

十重にも二十重にも圍む事をトヘ（ハタ）ヘに圍む。二十歳の事をハタチ、三十一文字の事をミソヒト文字、深い海の底をモ、ヒロチヒロ海の底、數の多い事を千五百萬（チイホヨロヅ）八百萬の神（ヤホヨロヅの神）永い事を千代八千代（チヨヤチヨ）千代萬代（チヨヨロヅヨ）等。

ホ、特殊のもの

以上の數詞に更に名稱を附してイチ枚、二極の名數として呼ばれて居るが、其の名數の內次に示す樣に句調等の爲に特殊的に讀まれて居るものがある。

一日（イチニチ）　二日（フツカ）　三日（ミツカ）　八日（ヤウカ）　九日（コヽノカ）
一人（イチニン）　二人（フタリ）　三人（サンニン）　四人（ヨニン）（シニンといはず）

更に以上は數詞の變化であるが、後尾の變化するものは次に示す樣に種々ある。

一俵（ピョウ）　二俵（ヒョウ）　三俵（ビヤウ）　一羽（ハ）　三羽（バ）　六羽（メ）
一匹（ピキ）　二匹（ヒキ）　一足（ソク）　三足（ゾク）　一本（ポン）・二本（ホン）

ヘ、誤聞除去より來るもの

人に話す時又聞く時誤りを除去する爲、特に珠算其他の金錢讀み上げ、電話番號等は、ナ、ヒャクゴンヂュウヨン圓バーヂウェキュウ錢也、フタ千ナ、百フタ十番の樣に特別の數詞として使用されて居る。

二、命數法

1、命數法の意義

命數法とは總べての數を無限に異る言語符合、即ち數詞で決定する事は不可能の事で、よし其の一部を決定したとしても、記憶に於て、數觀念の聯想表現に於て極めて不便である。依て如何にしても或一部の數詞を決定し、其の組合に依り數詞の記憶、數觀念の聯想表現に便利な方法が必要である。此の便利な數詞決定法を命數法と云ふのである。

今若し一から十迄の樣に何等の關係無い數詞に依て、千迄の數詞を作つたとすれば、其の記憶や實に困難である。然し五百三十五は直に百・十・五の組合せに依て、百の五倍と十の三倍と五との和である事を、構成的にも順序的にも其の數觀念を表現する事が出來る。依て此の命數法に依れば如何なる大數でも、十迄の基數詞と十及び其の二・三乘の百千其の萬倍毎の萬・億・兆……を記憶すれば、直に何れの數詞をも見出し、又數詞の數觀念を發見し得るのである。

然し現在の十進命數法は眞の意味に於て、前章二節數の無限に記した樣に七十三位迄の數詞しか決定して無いから（若し決定するとしても無限の數に人力に依て無限の單位名をつける事は困難である）無限の數を呼ぶ事は出來無い。前記した樣に此の意味の缺陷を除去する爲の一部面の目的を有するものが諸等數である。

2、十進命數法の長所

命數法には二・六・十二・二十四・六十進等種々の命數法が在來用ひられた事に就ては、前章四節一に於て略記したが、次に記す樣な長所を有する事に依て、十進數に壓倒され、現在は十進數以外の命數法は其の影を見せない。

イ、數系列と數系統の一致

此の點は極めて重要な點であつて、若し此の二點が不一致なれば、前記した樣に數詞の記憶數觀念の表現に極めて困難である。例を英語の數詞に取れば次の樣である。

十をテン二をツーと云ふのであるから、日本の命數法で言へば「テンツー」にて十二を意味するのであるが「ツエルブ」なる全く數の系列と系統の關係を無視した事に依て甚だ不便である。又二十に於ても同樣「ツーテン」と言へば可なるを「ツエンチイ」と云ふ事に依て、全く基礎と關係の無い新數詞として導入する樣である。

ロ、循環する基礎數詞の適度なる事

此の點も又數詞の記憶上から見て、數觀念の表現上から見て極めて重要な事である。今若し百進法や、千進法であつたなれば、其の百・千迄の順序的・構成的の觀念の記憶に隨分の勞力を費さねばならない。然し記憶後の極めて便利である事は言を待たない。

又二進命數法の樣に繰り返される基礎數詞が、僅に二個の場合は大數の決定が極めて、繁雜で、基礎數詞より十・百・千・萬・億等の單位名數の決定に困難する事となる。依て十くらいの循環基礎數詞が適度である理である。

ハ、卑近なる計數器の系列に一致する事

數觀念養成の初步に於ては、計數器を用ひて具體より抽象の域へ導く事が最良の方法とされて居る此の場合手・足の指が卑近の計數器である事は言を待たない。依て此の十本ある事に一致さす事は又必要なる要件である。更に此の事は發生的に考へて、前章一節四に記した數取りの時代を、歷史的に眺めても斯く無けらねばならない。

ニ、現在の測定數單位に一致さす事

現在用ひられて居る種々の測定數單位と一致して居る事は前同樣重要な事である。然して此の方面に長所を有するメートル法度量衡の採用は、此の意味よりしても結構な事である。

三、讀數法

1、讀數法の意義

讀數法とは數字を讀む方法である。依て讀數法は數字及び記數法を知つた後、其の數字に對して數詞及び命數法を應用して、始めて成立するものである。此の意味よりして、數詞・數字・命數法・記數法の後に引續いて發生したものである。

2、讀數法の種類

讀數法には普通の讀み方と、棒讀法との二種がある。普通の讀み方は各單位名を正く唱へ、何千何百何十何萬何千何百何十何と讀むのであるから、讀者方面から見ればアラビヤ數字又は邦字等で書いてある時は、位取りをせねば讀む事が不可能なばかりで無く、讀數其のものに多くの時間を要す缺陷がある。然し聽者方面から見れば、數の大小構成が直に認識されて極めて便利である。

次に棒讀み讀數法は讀者方面より見れば、高位より順次十個の數字を用ひて讀めばよいのであるから極めて簡單である。然し前者に比して、零を除いては全く其の數值を表す事不可能である。聽者方面よりすれば、桁數の少ない數の外は數量の認識が困難であるに依て、異桁に於ては桁數の少い聽記

數の外は採用困難である。

第二節　記　數　法

一、記數法の意義

記數法の意義は廣狹の二意義として考察する事が出來る。廣義に於ては數詞以外に於て數を符合として記す方法で、木の長さ、紐の結び方、指の數、數圖、計數器、算盤等或一定の符合を以て數を具體的に表現した總べてを云ふのである。

然し狹義に於ける意味はアラビヤ記數法に於ては0より9迄の十個の數字を種々に組合せ、各數字に場所の價値を與へて、十以上總べての數を記す方法を意味するのである。依て一般的に言へば際限ある數字に於て其の組合せ法に種々の約束を設けて、際限無き總べての數を記す方法である。普通記數法と云へば此の狹義の記數法を意味するもので、本書に於ても記數法と云へば此の後者の狹義を意味するものである。

二、記數法の具備すべき條件

最良なる記數法とは、次に示す樣な條件を質及び量に於て、最も多く具備した記數法である。

1、基本數字の數の適度なる事

若し此の基本數字が多ほ過ぎれば記數に於ては便利な點がある。然し基本數字の記憶に多くの時間を費す。又少な過ぎる時は數字の記憶に於ては便利であるかも知れないが、記數及び命數に於て不便の點が多い。依て基本數字の數の適度である事は、前節二のロに於て述べた「循環する基礎數詞の適度なる事」と同樣である。

2、命數法と構成の一致する事

十進法であるなれば十個の基本數字を有して、其の構成の一致する事である。若し命數法と異る記數法であつたなれば、記數法の記憶に餘程の時間を用する理である。

3、場所の價値に依て無限の大數の記數し得る事

詳細は本節四場所の價値を參照されたい。

4、小數・分數等の記數法とよく類似點・共通點を有し、然して混同せざる事。

5、計算記數形式と一致する事

此の計算記數形式と一致する事は筆算として、直に其の記數が利用出來る事である。若し一致せざるものは致し方なく我國の漢邦字記數の樣に、算盤其他の計算機械を用ひねば無らない。

6、記數に速力の大なる事

記數速力の大である爲には各基本數字の簡略である事と、其の組合せ方が繁雜で無い事が重要である。

7、記數後訂正の不可能である事

此の事は重要書類の訂正僞造を防ぐ方面より見ての價値である。然し一面計算等の場合は誤りを訂正する事の容易の形式が簡便かも知れない。

8、縱書・横書何れにも適用の出來る事

我等の日常使つて居る漢字及び假名は縱横書の何れにも適用し得る文字である。依て此の樣に縱横書の何れにも適用を成し得る形式を具備する事が重用である。

9、全世界を通じて他の記數法より廣く用ひられ、又廣く用ひられる傾向を有す事。

此の點は現代思潮よりして世界共通の文語・言語・貨幣・度量衡・計量等の機運と同樣望ましい點である。

10、一目して其の數値の認知し得る事

如何なる大數も下位より位を取る事なくして、直に數値を認知し、又讀み始め得る事は極めて重要な事で漢字記數法は此の方面に長所を有して居る。

11、句節を附する必要なき事

前項と關係する事で詳細は本節五及び、次節五を參照されたい。

12、見誤り難きものなる事

見誤り難き點に就ては、各基本數字の各が著しく異る形態を有する事と、組合せ後に於て類似形態を發生しない事に歸着するのである。

三、記數法の種類と其の適用

以上記數法の具備すべき條件に就て述べたが、此の條件を多く有する記數法だけ完全なものであつて、其の長所に依て各適用の範圍が次に記す樣に限定される理である。

1、漢字記數法

壹貳參肆伍陸柒捌玖拾百千萬億兆京……の漢字を用ひて行ふ記數法であつて、數値の一目瞭然・訂正困難の二大長所に依て、主として證書等の重要な記數に用ひられる。然し記數に多くの時間を要する事は最大の缺點である。依て現在では壹貳參拾及び百千萬……の外は餘り用ひられて居ない。

2、邦字記數法

〇一二三四五六七八九の十個の數字を組合せて記す記數法であつて、アラビヤ記數法の短所を行ふ爲に、縱書の外あまり多く用ひられて居ない。

3、邦漢字混合記數法

二千三百五十七等の樣に〇より十迄の邦字と百千萬億……の漢字を混合して記す方法であつて、前項の漢字記數法の時間上の缺點、前項の數値一目瞭然上の缺點を除去した折衷記數法で廣く用ひられて居る。

4、ローマ數字記數法

I V X L C D M の數字を組合はして、場所の價値に依らず、集合又は差の價値に依て無限に多くの數を記數するものである。漢字記數法と同樣無限に大な數の記數の不可能である事と、記數に多くの時間と紙面を要す缺陷に依て、現代は時計面の數字(然し順次アラビヤ數字に浸略されつゝあり)として、骨董的に殘つて居るのみで早晚廢滅の運命にあるものである。

5、アラビヤ數字記數法

前四種の記數法に比して最も長所の多い記數法であるから、順次他の記數法を壓倒するの傾向がある。卽ち0より九迄の十種の數字の組合せに場所の價値を與へた記數法であつて、記數法の具備すべき條件の內場所の價値・小數分數記數と類似共通・數字運算適用（他の數字は此の點に缺陷があるから數字運算に用ふる事が出來ない）記數速力大・世界共通の五點は他の記數法に見出し得ない最良の長所である。此の意味よりして算用數字とも稱せられて、筆算數字橫書數字として最も廣く用ひられて居る。然し大數になると句節を附するも直ほ數値の一目し得ない事、縱書の困難な事及び中途又は最後の零を略し得ない事は其の缺陷である。

四、場所の價値

場所の價値に依る記數法は億萬等の大單位名を記す必要の無い事、隨つて數字の數が少くして濟む故記數速力が大である。今次にローマ數字に依る集合・差の記數法と、アラビヤ數字に依る場所の價値記數法とを、比較例示して見よう。

アラビヤンシステムに於て 53 は五十三を意味し、ローマンシステムに於て VIII は五と三との和の八を意味して、記載された數字の場所には何の意味も無い。卽ち此の事に依て記數の根本が異つて居る事が判る。次に大數になると記數速力に重大な關係を持つ、アラビヤンシステムに於ては三千八百八十四を 3884 と三・八・八・四の數字を並記したに止まるが、ローマンシステムに於ては千のM三個、五百のD一個百のC三個五十のL一個十のX三個五のV一個一のI一個を並記して、MMM DCCC

LXXX IV と記さねば無らない事に依て、邦漢混用記數法に比して一層繁雜である。

尋一の記數法教授の初歩に於て十三を 10 と3を結合して 103 等誤記するは、全く此の點に於ける場所の價値の理解不十分の點から來るのである。尙は取扱に就ては次節四に於て詳記する事とする。

五、句節

度々前記した樣にアラビヤ數字及び邦字の記數法は、大數の場合數値の一目瞭然で無い事、卽ち場所の價値の裏面として最大の缺點を有して居るから、多少なりとも其の缺陷を補はん爲に考察されたものが句節である。

1、句節の種類

アラビヤ數字の句節の方法にはコンマ(,)及び縱棒(|)を用ひるものと、或間隔をおくものとの三種がある。然し邦字の縱書記數法にはコンマの代りに批點(、)を用ひられて居る。例示すれば次の通りである。

1,234 5,678 9（コンマに依る句節）　1234 | 5678 | 9123（棒に依る句節）

123 4567 8901（間隔に依る句節）　一二三、四五六七、八九〇一（批點に依る句節）

此處に於て注意すべき事はコンマと小數點を混同せない事である。由來文部省は大正七年以前の算術教科書に於ては是を混用して居つた。然し現在の教科書は明に是を區別し、區別せねば教授する事が不可能である。例へば〇・二四三を零點二四三又は零小數點二四三と讀むべきを眠つて居る敎師は平氣でレイコンマ二四三と敎授して居るのを時に見る事がある。尋六・二十五頁の五番を見ると、$\left(\frac{2}{9}, 0.24\right)$ を比較せよ。尋五・二十五頁七番を見ると 6,753,018.5 を讀めよとの問題があるが、小數點とコンマとを區別せねば如何にしても取扱ふ事が出來ないのである。

2、數字以外の記號

前項に述べた事に續いて小學校に用ひられて居る、數字以外の記事に就て略述して見よう。

（1）●……點又は小數點で小數と整數の區別の意

（2）・……ピリオッドで休止又は終りの意

（3）,……コンマでアラビヤ數字記數法の句節の區切の意

（4）、……批點で邦字記數法の句節の區切の意

（5）ノ……ダッシュで類似のものを區別するに用ひられワンダッシュ、ツーダッシュ等あり

（6）右の外コンマに變はる ―、溫度、角度に用ひる 。 角度の分秒に用ふる ′ ″、加減乘除記號の ＋ － × ÷、等號の ＝、大小記號の ＜ ＞、差を求める記號の 〜、括弧の（ ）｛ ｝［ ］等がある。

3、内外句節の比較

由來我が國の命數法は大單位四桁每卽ち萬每に萬億兆……と發展して行くものであるから、句節のコンマは四桁每に打たねばならない。然るに現今に於ては外國出版物の多い故か、其れとも外國崇拜の故か政府其他地方廳又は新聞紙の數字は皆三桁每に句節が附してある。是は外國の命數法の大單位は三桁每卽ち千每（units, tens, hundreds, thousands, ten-thousands, hundred-thousands, millions と小單位の units tens, hundreds が就て、大單位が千每に thousands, millions と連續する）に發展して行くのである。然し此の三桁每の句節は數の比較に於ては極めて便利であるが、我等の日常使用して居る四桁每に大單位の進む命數法から見れば、句節を附した爲に讀數に困難となるのである。實例に就て內外句節を比較して見れば次の樣である。

兆單位	億單位	萬單位	一單位
1 2 3 4	5 6 7 8	9 0 1 2	3 4 5 6
千百十兆 兆兆兆	千百十億 億億億	千百十萬 萬萬萬	千百十一

quadrillions	1,	quadrillion period
hundred-trillons ten-trillions trillions	2 3 4,	trillion period
hundred-biliions ten-billions billions	5 6 7,	billion period
hundred-millions ten-millions millions	8 9 1,	million period
hundred-thousands ten-thousands thousands	2 3 4,	thousand period
handreds tens units	5 6 7	unit period

第三節　命數法及び記數法の取扱

一、數觀念の伴つた命數法

命數法は記數法・計算等總べての基礎であるから、明確な命數法を徹底させる事は根本として、極めて重大な事である。然し文明の進歩せる現代の兒童多くは、何等數觀念の伴はない、數詞の暗誦を家庭で强ひられて登校する。然して是等の兒童は數詞を抽象的に數へ、又實物に就て數へるの能はあ

るが、さて計算となると全く出來ないのである。依て敎師は數詞の抽象的記憶に卽して數觀念と數詞の確立をはかる事が重要な事項である。

二、命數法の取扱

或部面は數詞の敎順とも考へられるが、國定算術書に於ても始めヒトツ、フタツの數詞を授け後七頁に於て一二三の數詞を敎へる樣になつて居る。依て或程度迄は數詞の種類と範圍、命數法の範圍を豫定して敎授せねばならない。著者は或時尋一・五頁の授業を參觀した時、敎師は實際問題として2人+4人　の計算をやらせようとした。前記した樣に人の數へ方は最も困難な數へ方で、ヒトツ、フタツの次にイチ、ニの數詞を敎へ、其の餘程後にヒトリ、フタリと數へる樣な困難な名數は取扱ふべきである。敎師は此の點に考慮せずフタツ足せのヨッツの計算が出來るからとて邦語及び名數詞を敎へない前に二タスの四、又二人タスの四人の問題を提出するから、兒童は困つて終ふのである。

尋一・二十六頁に於て十九迄、尋一・五十頁に於て百迄、尋二・二十四頁に於て千迄、尋三・三頁に於て一萬未滿の命數法を敎へて、命數法に於ける小循環を知らしめ、尋四・三頁に於て億未滿、尋五・一頁に於て命數法の大循環を知らしめる樣になつて居るが、是等各所に於て前回學習の命數法と比較し共通の類似點（記數法に於ても同樣）に於て統一されて居る、其の根本に就て取扱はねばならない。

三、讀數法の適用

本章第一節三讀數法に就て述べた樣に、敎師はよく各讀數法の長短を理解して、大數の檢答、小數の檢答、中途又は最後に零のある場合、聞取りの場合等各其の適用をはかるべく指導せねばならない

四、場所の價値の取扱

本章第二節四に於て述べた樣に、場所の價値はアラビヤシステムの記數に於て最も重大なものである。外國の算術敎科書に於ては大變此の點に留意し、place value と稱へられて、場所の價値徹底の爲獨特の問題を提出されて居る。今次に其の問題を略記して見よう。我國算術書の尋一・五十二頁の注意として僅に「數を數字にて示し、其の各數字の表はす數を別々に問ふこと」と述べられた事に比して大變の差のある事に驚かざるを得ないのである。

場所の價値徹底の獨特問題

1、25, 36, 48 の各數は十が幾つと一が幾つか

2、304, 539, 745, 300, 520 の各數は百が幾つと十が幾つか、又十が幾つと一が幾つか。

3、59 に於ける 5 の値から 95 に於ける 5 の値を引け

4、38 の 3 は 53 の 3 の何倍の値を有すか

5、35 の數字を入れ換へるとどんな新數が出來るか

6、次の數を大小に順に並べよ　39, 20, 41, 18,

7、3, 7, 1 の三數字を用ひて出來るだけ大きな數を作れ、又小な數を作れ

五、句節の取扱

アラビヤ數字又は邦字に依て大數を示し、今是を讀む場合には如何にしても毎度位取りを行ふ不便(前記した樣に三個又は四個以上の數は同時に直觀すること不可)からして、句節の必要を認めさせ、次に句節の桁數は我國命數の萬毎、即ち四桁毎に大循環して居る所からして、四桁毎にコンマ又は批點を打つ事の便なる事を彼等に發見さす樣取扱はねばならない。國定算術書に於ては尋四・三頁に於て「一萬以上の數を讀むには 1234|5678 の如く千位と萬の位との間に區切をなして讀むも可なる事を授くべし」と注意書して其のヒントを與へ、尋五及び高一の一頁に於ては「右端より四桁毎に區切りて讀むの便なる事を注意すべし」と記して別に問題としては提出されて居ない。然し此處に於て特別に其の練習を問題に就て行ひ、其の方法に於ても本章第二節五の句節の種類に就て述べた樣に、各種類の長短を吟味し其の適用を問答する事は極めて重要な事である。

次に三桁毎の句節に就ては、其の根本からして、外國のシステムである事に就て教師は本章第二節五の3 に於て述べた事項を理解し、種々の統計其他印刷物の三桁毎に區切られて居る實物に就て説話し、練習し其の依て來る根本を知らしめればよい。國定算術教科書に於ては尋五・二十五頁に提出し高一・二十六頁に復習として提出してある。

次に句節とは何等の關係を持たないが、本章第二節五の數字以外の記號に就て、兒童の知識を高一一頁に於て整理しておく事は又重要な事である。

第三章　數　字

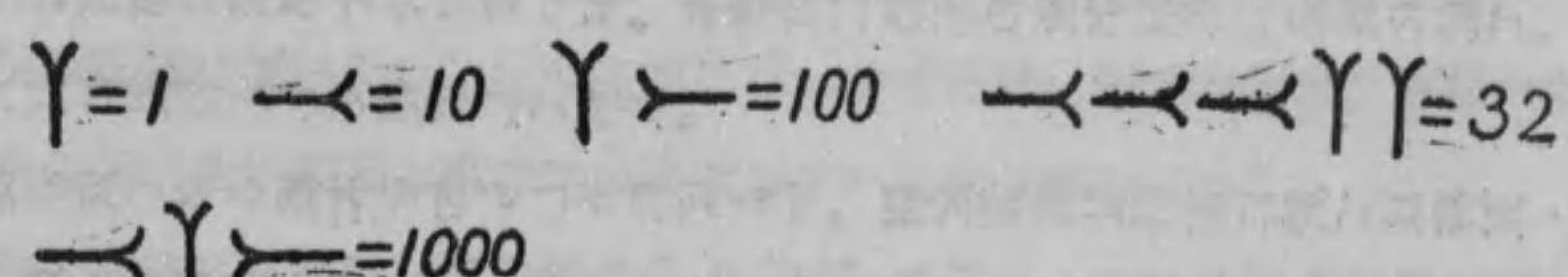
第一節　數字の種類及びアラビヤ數字

一、數字の種類

數字の意義に就ては前章第二節記數法、發生的の考察に就ては第一章一節一の數の發生的考察に於て述べたから、本項に於ては數字の種類に就て述べて見よう。然し普通文字と同樣多種多樣のもので其の全部を述べる事は極めて困難である。依て其の主要のもののみに就て述べる事とする。

1、バビロニヤ數字

往時バビロニヤに於ては次に示す樣な楔形の數字を作つて、加法的・乘法的の記數法に依て百萬以下の記數を完成した。次に數種を例示して見よう。



2、ギリシヤ數字

往時ギリシヤに於ても前同樣、次に示す樣な一定の數字を加法的乘法的に組合して記數を完成し、

上圖に示す五種の數字を用ひて、三千七百五十九を記すには次の樣にした。

3、ローマ數字

バビロニヤ、ギリシャの文明は以上の樣な數字を生んだが、又ローマの文明も種々の變遷後今日殘つて居るローマ數字及び其の記數法を形成した。

然しローマ數字は五千以上の記數が出來ない爲、ローマの文明は此處に支障を來たして、$\overline{\mathrm{M}}$・$\overline{\overline{\mathrm{M}}}$の樣に種々の記數法を制定して五千以上の記數を成し得たが、何れも集合的・差的の記數法に缺點を有して居るので、無限な大數の記數が極めて繁雜となり、遂に今日の滅亡の機運を招いた。

4、アラビヤ數字

我等の最も多く使用して居る１２３…の十個のアラビヤ數字は、印度バラモン教僧徒の創造したもので、後アラビヤ人マホメットに依てアラビヤに傳へられ、更に歐洲に傳へられたものである。歐洲人は此の數字がアラビヤを經て傳へられた事に依て、アラビヤに創造されたものと思ひ、アラビヤ數字として呼ぶに至つたのである。其の後度々の修正を加へられたが、前章二節三の５に記した樣な種々の長所は、在來の數字を壓倒し、明治の初年に至つては、西洋文明の一として我が國に輸入され從來用ひられて居た和算數字をして滅亡の域を近からしめたのである。直ほアラビヤ數字に就ては項を改めて詳説する事とする。

5、漢邦數字

漢邦數字に就ては前章に略記したから略す事とする。

二、アラビヤ數字

1、立體數字・斜體數字の長短所

アラビヤ數字には其の角度からして立體と斜體とがある。然して其の長短良否は久しい間の論爭であるが今に至る迄甲乙を見出す事が出來ない。

斜體に於ては其の角度は十五度を適當とし、十五度の角度ある事に依て記數速力が大であり、隨つて實用的である事が最大の長所である。然し立體に於ては下學年に於て平假名より始めず片假名より始めると同樣平易である事に依て下學年向であり、又歷然と記數される事よりして數字其のもの及び運算形式よりして誤算が少く、亂雜に記數される心配が少い。隨つて嚴密なる習慣を養成する事が出來る。依て一概に其の長短を決定する事が出來兼ねるのである。

2、直線體數字・曲線體數字の長短所

數字に於て立・斜體と相對して起る問題は直・曲線體である、此の兩者の何れが良いか否かに就ては久しい問題で、次に示す樣に各長短所を有して居るので、立斜體と同樣一概に其の良否を決定する事は出來ない。

曲線體は數字の自然であつて、記數速力の增大につれて此の傾向を强く有して居る。此の事は普通文字と同樣で楷書文字の速力の增加は、行書・草書と變化する卽ち曲線の部分の多く成る如きである依て此の曲線體は記數に於て、自然的である事と、速力の大である事は長所であるが、其の裏面に於て誤謬及び亂雜の起り易いのは其の短所である。

直線體に於ては前者と長短が相反するもので、數字の確實で記數の整調は運算數字として極めて好都合である。

然し1のみは直線體專用、0 3 6 8 9は曲線體專用で、殘りの2 4 5 7が直・曲線體の問題となるのである。今次に其の兩者を比較して見よう。

直線體

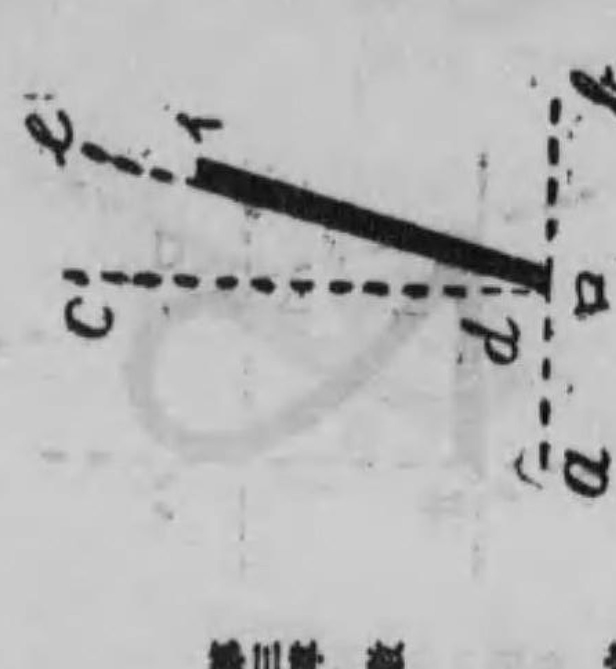
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

曲線體

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

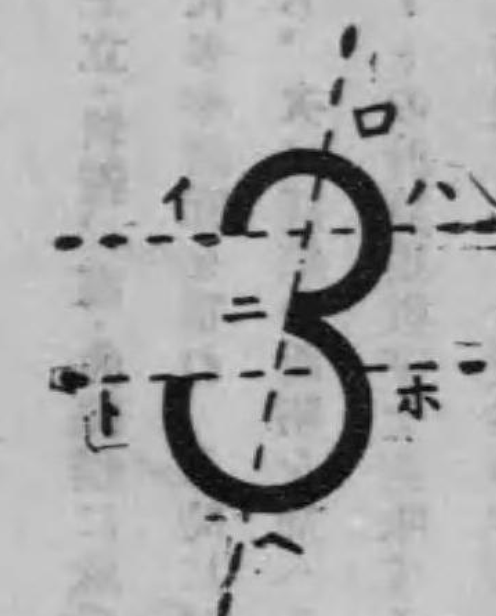
以上立・斜體、直・曲線體に就て述べたが、是等の長所が最もよく現はれるべく字形・筆順・間架・結構等に多年研究を重ね、又時には畫家の批評を請つて美的と調和に苦心して、稍理想に近いものを得たから、次に詳細の說明を加へて述べる事とする。依て自己の好む方を採用されたい。然し何れも算術ノートの計算用數字を意味するもので、廣告や大文字の數字は又趣を異にする點が多い。

3、斜體アラビヤ數字の字形・筆順・間架・結構



(1)角度は十五度（水平面に對して七十五度の角度で、直線abに垂直に交はるcdこれに對して角cdeを意味す）(2)線は同大で筆順はイロハ…の順、(3)以下の數字も角度・筆順・線の同大は何れも同樣であるから以下略す。

(1)ロニが十五度　(2)ハホは一直線をなして兩端に出入なきこと　(3)ニホは一直線　(4)イの出發の高さは全長の三分の二　(5)イロハは圓形以下曲線の部に別に注意の書いて無い場合は圓形とす。



(1)ロニヘは各丸の中心を通過する線で十五度　(2)上下の圓の比は四對五　(3)イハはロニの中央　(4)トホはニヘの三分の二

(1)イロが十五度　(2)　イロとロハのなす角は七十五度　(3)ロハは一直線　(4)イハを連結した中點ニよりロハの中點ホを通りて、ニヘを引く　(5)イロとニヘは平行　(6)イロとロハは等長。

(1)イロニは一直で十五度　(2)ヘは全長の中央　(3)ロニは圓の四分の一　(4)圓の高さは全長の二分の一　(5)イホは一直線でイロの先端より發しロヘに等長　(6)圓は長短徑五對四の比

(1)イロは少しく曲線にて連結點線は三十度　(2)ニハは圓の中央を通りイニハが十五度　(3)圓の高さは全長の二分の一　(4)圓の長短徑の此は三對二。

(1)イロは十五度でハニに平行　(2)イロはロハに等長ハニの二分の一の長さ。

(1)イロハは丸の中央を通りて十五度　(2)上下の圓の比四對五
(3)各圓の長短徑の比四對三　(4)各圓は尖つた楕圓形で状

(1)ロハは一直線で十五度　(2)圓の長短徑の比は三對二　(3)圓の長さは全長の五分の三　(4)圓の長徑はロハに平行。

(1)圓長徑の線が十五度で長徑と短徑の比は五對三　(2)他の數字と等しき高さ。

4、立體アラビヤ數字の筆順・字形・間架・結構

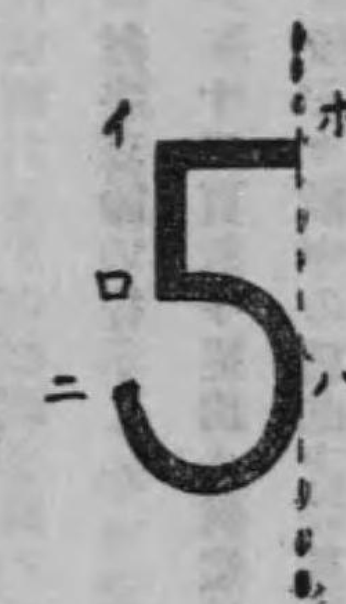
前項の通りイロハ……の順に從つて書き、各部分とも同大の線で、立體であるから部分的に又全體的に垂直であることは言を待たない。

(1)最も簡單であつて同大の線で、イロの筆順に從ふ事は前記した通りである。

(1)イロの弧は2の高さを半徑とする圓の弧　(2)イロを通過する直線はハニと等長　(2)イハロニは一直線　(4)ロハは始めの五分の一迄は稍曲線として、其の他の部分は一直線。

(1)イロはハイを半徑とせる圓の弧　(2)ロハはホニを通過する直線を直徑とせる圓の弧　(3)ハは上下の弧の中央を垂直に通る直線の中央と結び弧に達する直線の二分の一の處　(5)ハニホは下圓のホニの直線を直徑とする圓の四分の三の弧。

(1)イロはホハの三倍　(2)ロニはイロの三分の二　(3)ロハはロニの八分の五　(4)ハニはロニの八分の三　(4)ハヘはハニに等長。

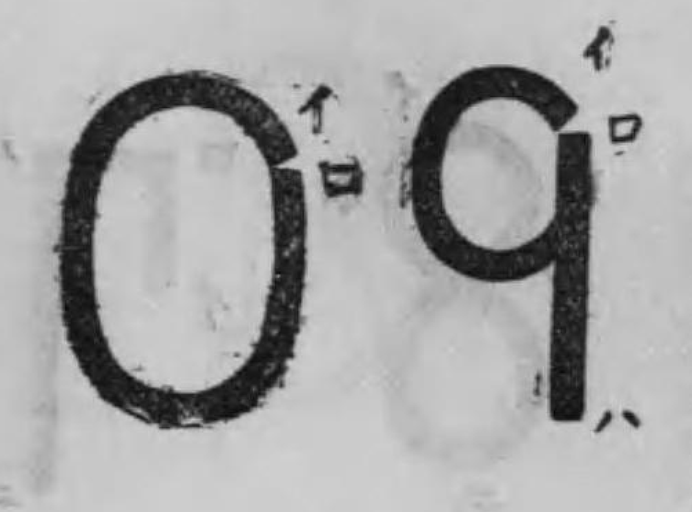


(1)イホの長さを二とすればイロは一・五で下圓の長徑は三短徑は二・五　(2)ホハは一直線　(3)ニの位置は長徑の中央。

(1)イロのロ點は圓の眞左にてイロは直線　(2)イロは圓の長徑の一倍半　(3)圓の長短徑の比は五對四

(1)各線は皆直角に交はる　(2)イロとロハは等長　(3)イロとハニは三對八の比

(1)上圓は正圓　(2)下圓は長徑五短徑四の狀の圓として短徑は上圓の直徑と等長　(3)特に書き始める點に注意。



（1）圓の長短徑の比は五對四　（2）ロハは短徑の一倍半　（3）ロの位置は長徑の四分の三の處

（1）長短徑三對二の比　（2）イの位置は長徑の四分の三の處

以上前項及び本項の數字の說明は其の理想とする數字であるから、唯記數上心して書けばよいのである。數字の高さに就ては、次節二各學年に於ける數字の高さの處を參照されたい。

第二節　數字の取扱

一、數字理論の提示

尋一・十二頁數字提出の處迄は數詞や數圖と並記して、數字の形の看取に努め、此處に至つて前節二、アラビヤ數字の構成上の理論の大要を授けて、立・斜體の何れかを一定して提示練習せばよい。

邦字に就ては尋一・二十三頁に於て字形・筆順・間架・結構に就て授け漢字に對しても同樣尋六・六十頁に於て授ければよい。然し邦字に就ては讀本の提出と一致させてもよい。

尋四・四十八頁にローマ字が提出してあるが、此處に至ては前節一・二に就て詳しく說明し、數字の理論的方面に就ての知識を與へねばならない。然し如何樣に數字の理論に詳しく通ずるとも、數字を立派に書く事が出來ねば本末を轉倒して居ると云はねばならない。依て本節三に示す樣な方法に依て尋一より常に練習に努力する事が重要である。

二、各學年の於ける數字の高さ

兒童の日常算術練習帳に記載する數字の高さ、卽ち太さと云ふ事は、記載の體裁上・速力上・紙面の經濟上・學年の程度上極めて重大な關係を有するものである。是等の方面より眺めて次に記す樣な高さが、學年相應であると思ふ。

尋　一……一糎二粍　　尋　二……九粍

尋　三……七粍　　尋四・五……六粍

尋六以上……四粍

三、數字成績の向上法

其の學級の算術教授成績が何の程度にあるかと云ふ、或部面の大様は其の學級兒童の算術ノートの使用法、卽ち數字と其の筆記帳の良否に依て、決定されると云はれて居る。實際に於て數字やノートの使用に努力して居る教師は、實際の教授に於ても熱心で研究的の態度である。又數字及びノートの亂雜は計算に誤算を來たして、著しく算術能力（主として計算能力）を阻害し、延いては綿密整頓の德性を失つて、訓練上にも惡影響を及ぼすのである。今次に數字成績向上方法に就て述べて見よう。

1、數字の理論を教授し正確に書くこと

前記した様に各數字の角度・筆順・字形・間架・結構等に注意して、常に正確なる數字を書く事に努力せねばならない。由來書方等に於ては各文字に就て種々の筆順・筆法・間架・結構等が研究もされ、又實際の練習に於ても喧ましく論ぜられて居る。然し數字に於てはあまり是等の事が論じられて居無かつた傾向がある。立派な數字を書かうと思へば是等の研究の必要な事は論を待たない。

2、算術ノートの上欄に練習する事

廣島縣教育會編の算術ノートには各頁毎に模範數字を示し、練習欄を特設して居るが、書方の清書等の意味で練習しておくのも確に效果がある。

3、數字練習帳を特設する事

平時學校に於て時間に餘裕をつけ、又家庭作業として數字の確實な練習をなす爲には、數字練習帳を特設して時々練習せしめ、教師の檢閲をなす方法は極めて效果が大である。數字練習帳の形式に就ては次項四に詳記する。

4、數字成績の公開をなす事

多くの小學校には書方・圖畫・綴方の優良なものを、教室の後壁に學級的として、又廊下の壁等に全校的として貼り出してあるが、數字の貼り出してあるものは極めて小い様に思ふ。書畫と等しく數字成績を貼り出す事は兒童及び學級相互の競爭的に向上する意味に於て、極めて有意義である。

5、机間巡視間に於ける個人指導批正

6、兒童の板書數字の批評をなす事

教授時間に於て問題解答を兒童に板書さした場合、其の數字に就て兒童相互に又教師相互に批評して、正確に綺麗に板書さす事は極めて效果が大である。

7、兒童の板上數字練習會を開く事

教授時間に餘裕を作り數名宛板上に數字を練習せしめて、批評會を開き確實な數字の練習に努める事は又效果が大である。

8、算術ノート檢査を行ふ事

敎授時間外に兒童の算術ノートを集めて檢査する事は、兒童に對し平時ノート使用に留意せしめる所以である。更に全校的に此の檢査を行ふ事は兒童ばかりでなく、敎師の刺戟となつて一層有意義である。其の簡略で效果の大な方法は次の通りである。

先づ晝食に兒童の歸る前、各兒童の机上に算術ノート又は數字練習帳を開いておかす、全校職員は晝食を濟まし直に此の晝食休憩時間を利用して、全校を巡視し後批評反省會を開いて、自己學級の反省と向上及び全校の統一に努めるのである。更に次日の朝會の場合に學校長は全兒童の反省と向上を訓辭するのである。次に此の檢査は毎月一回の割合に行ひ第何週の何曜とか、何日とか月中行事として定期的に行ふ方法と、毎月一回校長の意見に依り不時に行ふ方法とがある。不時に行ふ方法は忘れ勝ちで不平等の起る場合があるので、定期的に行ふ方がよいと思ふ。

9、敎師の板書數字の正確である事

敎師の善良模範の效果が大である事は言を待たない。如何に練習批正を行つても日常の板書數字に於て破壞しては其の效果や不安心である。

10、敎師の數字練習會を開く事

善良の模範を示す爲には敎師方面に於て、數字練習が必要である。然し單獨では仲々實行する事が困難であるから、全職員が會合して數字練習會を開くのである。實際鉛筆を取つて西洋紙に書いて見ると、高學年の兒童に劣る場合の多いのに驚くの外ないのである。又兒童の數字練習の場合は共に書き示範を示す事は極めて重要である。

11、各敎室の黒板上の壁上に模範大數字の黒書せるものを掲示する事は練習上から見ても、全校の統一上から見ても極めて效果が大である。

四、數字練習帳の形式

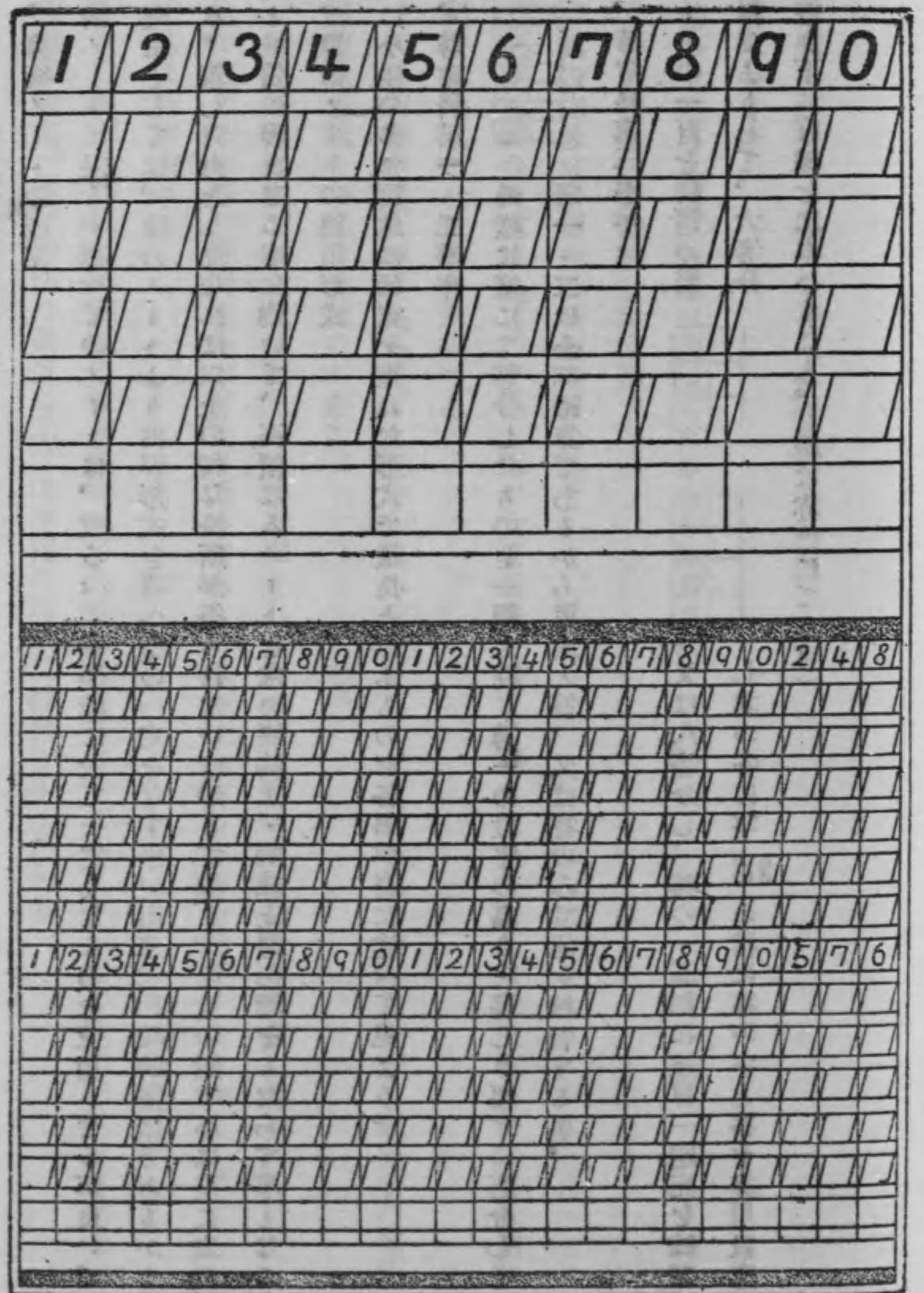
先づ數字練習帳は西洋紙の良いものを二つ折りとして菊版型のノートとし、表紙には適當の模樣を謄寫刷として印刷するのである。然して表紙の裏面には前章に述べた各數字の字形・筆順・間架・結構及び本節に述べた、數字の各學年に於ける高さを印刷して練習を理論化し、實際の練習に於ては下敷を敷いて書くのである。

下敷は西洋紙二つ折の菊版の間に入れて書き得る太さで、一度西洋紙に印刷したものをボール紙に貼りつけるのである。次に一例として尋六以上用を示して見よう。最上欄及び細字卽ち、其の學年に用ふる數字の高さと等しい欄中の二個所には、模範數字を示して模寫の便宜を與へ、次に大部分の欄

には高き・位置・角度を印刷し、其の内一部には高さと位置のみ與へたもの（大小字共に下より二段目の欄）と、高さのみを與へたもの（大小字共に最下欄）との三種を作つて、練習を順進的ならしめるのである。更に大小二種の欄を特設した事は、書方に於ける大字練習と同樣の目的である。

尋一用の數字下敷は全部六年以上の大字だけ、尋二・尋三・尋四・尋五用は上段の大字を尋六以上用と等しくし、下段の細字は自己の學年用の數字と等しき高さとして、尋六以上の樣な形式とするのである。

尋六以上用



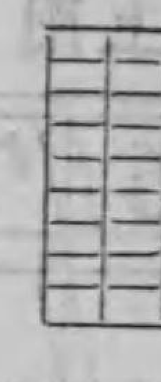
五、算術ノートの制定

算術ノートに限らず總べてのノートは、成るべく各學校に於て一定したものを使用させるが良い。其の理由としては、他のノートより內容形式を考へ型の一定をなす事が出來、比較的廉價であるからである。若し自由としたなれば以上の樣な長所が得られないばかりで無く、兒童の競爭心は徒に表紙模樣と紙質の善良なる事に働いて、高價なるノートを求め經濟上・訓練上惡影響をもたらす事となる

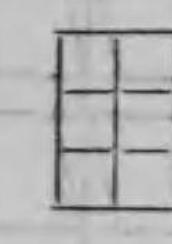
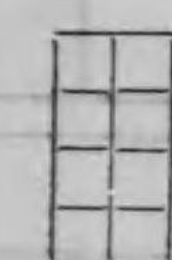
六、算術ノートの使用形式

次に小生の多年實地に研究を重ねた形式で最良と思ふものを各學年別に述べて見よう。

1、尋常科第一・二學年

 の樣に縱に二等分したものを一糎二粍（尋一の數字の高さと等しき幅）に等分して尋一・二は全部暗算であるから算式と答、又は答のみ其他を練習する事。

2、尋常科第三學年

ノートの一頁を問題の繁*雜*の程度よりして、六等分×   又×は八等分し、其の一區劃に運算一題宛を練習し其の各に答 32 の樣に答の字と答を算用數字で書き下に直線を二本ひくこと。（線は赤色にても可）應用問題にあつても運算と答のみ記すのである。

番號のつけ方

番號のつけ方は尋三以上は共通であるから注意されたい。

イ、各問題毎に頁番號を記す事。

ロ、其の位置は區劃內の最上の行の事。

ハ、兒童用書の問題は P 36.（5）と三十六頁五番を記す。五に括弧を附した理は教科書の兒童用問題番號形式と一致させたのである。

ニ、教師用書の補充題は P 36.5 と三十六頁の五番を記す、五に括弧を附しない理は教科書の補充題番號形式と一致させたのである。

ホ、教科書外に教師が作つて板上又は謄寫刷として與へた問題は單に番號のみ書くこと。

其他作圖グラフ等で特別に此の形式の用ひられない場合は適宜の方法を採用するものとす。

3、尋常科第四年

ノートの區劃は尋三と同樣其の繁簡に依て、六等分又は八等分であるが、其の區劃中に計算問題は尋三同樣に記し、應用問題は番號・算式・答運算の順序に練習するものとす。

其他番號の附け方答の書き方及び作圖グラフ等で此の形式採用困難の場合の形式は皆尋三と同樣である。

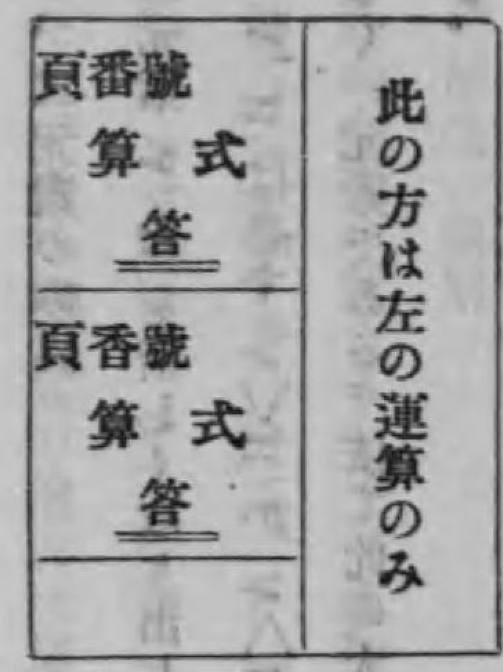
4、尋常科五學年以上

尋五以上の形式は三種として考察する事が出來る。

其の一は番號及び算式と答のみ書いて別紙に運算を書く方法である。然し此の方法は筆記の結果が奇麗ではあるが、運算を後から吟味するに不便ばかりで無く、別紙にやる運算が極めて亂雜となり易い點に依て、採用したくない。

其の二は番號を書き其の下に算式及び答を書き、更に其の下に其の運算を明記する方法である。此の方法は其の算式運算を吟味する時は便利である。然し算式を書いた後運算の場所が現はれるのであるから、困難な問題等の場合作圖したり、假りに運算して思考する場所が無いから、自然に此の思考過程を別紙に書く事に依て、運算が亂雜になり易く、又紙面を大變多く費す事の缺陷があるので、又採用したくない。

其の三の方法は次圖の樣に一頁の中央に縦線を引き左に一題毎に番號・算式・答を記しては横線を縦線までして區劃を設けて、順次に行ひ、右には其の運算を順次にやり、餘白が出來れば、次頁の運算をやり、不足すれば次頁の其の場所へ運算するのである。次に一つ注意せねばならない點は此の縦線である。此の縦線は左右の距離が一定せず其の位置が自由な事である。其れ故運算其他解題の場合の作圖が多くて、右の運算欄の幅を少しく廣く要するか又前頁の此の欄に餘白のある時は、其の幅を狹くして調節するのである。



此の方法は奇麗に書け、解題の思考過程である作圖運算を記すに便、其の問題の運算を見出す事が出來、運算が亂雜にならず、ノートが經濟的に使用される等種々の便があるので自分は此の方法を採用して居る。

其他番號の附け方、答の書き方グラフ等の爲特別に此の形式を用ふる事の出來ない場合等は尋三に於て述べた事と同樣である。

第四章　計　算

第一節　計算の發生的考察

一、計算の意義

計算とは新らしく與へられた數其れ自身又は、數相互の總合分解に依つて、更に新しき他の數を導き出す過程を意味するものであつて、其の根元となるものは加減で乘除其他開平開立等總べての計算は皆加減の特殊の場合に過ぎないのである。

然して此の計算を滿足さす根本元則の計算哲學として、次の樣な條件が必要である。

1、二元素の變異

二元素 A, B を新しく取り出し、又一元素 S を分解して A, B なる二元素を導き出した場合に於て、A, B は必ず $A>B$ か $A<B$ かの關係がある。若し此の場合に二元素が相等しい時は、二元素でなく一元素である。依て此の大小の數關係を根本として、種々の計算を發生さし、又發生するのである。

2、加法の原則

集合的意味の數よりして、或數元素の和に等しい他の元素を認める事が加法の最も根本の原則である。即ち $A+B=S$ に於て、A, B の和に等しい新なる S 元素の成立する事である。然して其れに附隨して $A+B>A$　$A+B>B$ が決定され、又 $A>B$ の時は $C+A>C+B$ で加へれば以前より增大した數が得られ、其の增大は加數の大小に關係する事である。

3、減法の原則

加法と同樣集合的意味の數よりして、二元素 A, B に於て $A>B$ の關係がある時は A, B の二元素外に B に加へて A に等しくなる他の元素の存在する事を認め、是に附隨して加法原則と同樣減じた結果は減じ無い以前の元素より小である事及び、其の減少の度は減數の大小に關係する事である。

4、乘除の原則

$A+A+A\cdots\cdots$ と A を n 個集めれば、其の結果に等しい B なる新しい原素の存在する事を認めて乘法が成立するのである。次に B の $\frac{1}{n}$ 即ち B に對して、n なる新しい數の作用を認め、A を反對に考察する事に依て、除法を決定するのである。加減と同樣に A, B, n の大小の結果に或函數としての關係のある事は、又根本の原則である。

二、計算の必要

計算の我等日常生活に如何に重要であるかは、言を待たない事である。廣い意味に解すれば實物卽ち數取りを用ふる場合も計算の一部分である。然し狹義に於ける計算卽ち、數理を働かせて行ふ計算を取り去つたなれば、我等の文明は事皆終れりで、總べての文化は消滅して終ふのである。此の計算を外にしては科學の發見進步も、何物も不可能の事である。然して其の計算の實用は順次に能力經濟へと進步して行く、次に其の計算の發生的過程の考察に就て述べて見よう。

三、計算の發生的過程

計算の發生過程卽ち太古人より現代人迄進化的に繰り返された、又現代の幼年者より成人迄の間に繰り返される過程は大略次の樣に七つの楷段として考察される。

1、實物に依る計算

計算の基礎として、最も重要のものは數詞であつて數詞の記憶の無いものは如何なる方法にても、計算は餘程困難である。

數詞を記憶して後計算に入る最初の楷段は實物に依て計算を行ふ方法である。卽ち加法の總べては實物を用ひて數へ足し、減法の總べては數へ引いて結果を得る方法で尋一の初步の算術教授に計數器を用ひて計算を行ふ場合である。此の場合は數へ足し、又數へ引くので何千、何萬の大數は取扱ふ事が不可能である。此の實物に依る計算では文明は何時迄しても進步しない。又乘除は累加減で行ふので是の利用も大數になると出來ない。

2、構成數に於ける計算

尋二に於いて行ふ計算法で指、計數器等の實物を離れて、數を前者の樣に集合數と見ず、構成的觀念に於ける數として考察する計算で、頭腦に依り抽象的に其の計算を表現して行ふ方法である。然し最初は基數にて取扱はれるが、此の計算數理は五百加へるの三百の時五加へるの三の過程を表現さして實物に依り經驗することの困難な計算迄も遂行され、數計算に一新紀元を作るのである。

3、反射的暗算に於ける計算

我等文明國成人の日常生活に用ひて居る暗算法である、前項の樣に構成的に數を考察して計算するには隨分の時間が掛つた。然し度々の計算練習は遂に其の計算結果を記憶し、二と三、と言へば直に五、九引く三、と言へば直に六、と實物に依たり數を總合、分解せなくとも直に結果が得らる樣になつた。殊に乘法に至つては八の八倍はと言へば聯想的に八八、六十四と云ふ結果が表現される樣に計算は機械化され、反射化されて取扱はれる樣になつた。次に大數計算に於ても同桁の數を皆基數と同

様に取扱ふから、僅な種類の記憶に於て其の總べてを機械的に行ふ事が出來るのである。

4、數字及び計算具に於ける計算

第二章記數法・命數法で述べた様に數を言語外の記號として表はす方法で、最も簡單で完全なものはアラビヤ數字記數法である。此の數字で計算を行へば如何なる大數も、又復雜な數も各部分相互の結果を皆簡略に記數して行ふから、暗算に比べて計算途中の經過記憶に心力を要せず、部分相互の計算にのみ心力を傾注する事が出來る。依て極めて容易に計算が出來て暗算に比して、繁雜な大數の取扱が出來る點に於て一段の復歩と言はねばならない。又此の數字算計は計算中途の經過が總べて明記されるので、他の計算を重復してする事が出來るばかりでなく、檢算・算法説明に便利な事は言を待たない。

次に計算具に依る計算であるが、數字に比して早くから用ひられたらしい。歐洲に於ては計算器で記數を行つて計算をなし又支那に於ては算盤を用ひて記數を極めて容易に行ひ計算を機械化、反射化し、計算經過の殘らない點から見れば、數字計算に劣るが結果のみを得る點に於ては、心力を要する事が小で極めて便利である。此の算盤は三百年前に我が國に輸入されて、我國の數學に一段の進歩を與へ德川時代に於ては唯一の計算具であつた。然し明治初年歐米文化の一として、アラビヤ數字は輸入され、應用問題の解題の様に思考を要しない、單なる計算としては數字以上の能率を有して居るので、民間の日常復雜な計算及び銀行會社には何時迄も全然捨て難いものである。

5、四則定則に依る計算

此の方法は前項の數字計算の或特殊の場合に於て計算を簡略にする爲に考案されたものである。即ち或數に引き續いて或數を加へても其の値は不變であるから、和を加へた方が計算能力の經濟になる場合には此の法則を應用して計算をするのである。其他減・乘・除及び是等の混交式に於ても同様である。

6、種々の表に依る計算

我等の日常行ふ計算の內其の特殊のものに於ては、同一の經路を全部に於て又一部に於て繰り返へすものが多い。此の様な場合に於ては始めの第一回だけ精密な計算を行つて表示しおき、以後の計算の全部又は一部を皆此の表に依て行ひ計算の重復を避け以て計算能力經濟を測らうとするのである。例へば銀行等に用ふ貯金表・復利表其の他計算表及び度量衡換算グラフ、一覽表、對數表、平立方及び其の根表等である。

7、計算器・滑尺等に依る計算

以上述べた樣に計算其のものを簡略にする事に努力し、其の時間と勞力を出來るだけ短小にするべく漸次に進化して來た。更に近代に於ては計算器なるものが發明され、如何に困難な計算でも機械に依て、計算する樣になつた。若し此の事が簡略に利用、即ち機械の代價の低減と、携帶の輕便との二點に於て成功すれば、計算は全く機械の力に依て行はれる樣になり、小學校に於て行ふ算術の大半は失はれ、六ケ年の義務教育期間中に中等學校數學の大半を學修するであらふ、滑尺等の利用も特殊の場合の計算に於て同樣に行はれる。

第二節　加減乘除の意味發達過程及び種類

一、加法の意味

一群 a と他の一群 b とを別々に數へて得た數の在る時、a を數へてより引き續いて b を數へ、新しく得た數 c を得る過程、即ち二數量以上の和に等しい數を見出す過程を加法と云ふのである。順序數の意味よりして $a+b=c$ は a より數へて b 番目の數 c を知る事となり、集合の意味よりして $a+d=c$ は a と b との和に等しい一數 c を見出す過程を意味するのである。

二、加法の發達過程

加法を計算するには、大略次の八楷段が順次に行はれて完成するのである。

1、全然實物に依る時代

此の時代は最も初歩のもので、數詞の記憶が終つて計算に移る第一楷段である。$2+3$ に就て考察すると實物を數へて二個出し一群としておき、更に數へて三個を一群として出す、次に始めの一群を數へ引き續いて、他の一群三を數へて五なる結果を得るのである。此の時代は未だ兒童の數觀念が順序數として働いて居る時代で、其の總べてを一宛數へる事のみに依つて總和を知るのである、換言すれば二群を合せて新に數へる事に依て總和の數を知るのである。

2、半ば實物に依る時代

此の時代は前時代の繁雜を脱すべく稍進歩した時代で加數のみを實物に依て結果を得るのである。$2+3$ に就て考察すれば、二なる集團を數へて出して二なる事を確め次に二なる數を抽象的に頭の中に入れて、出された集團の三を、三・四・五と數へ以て五の結果を得るのである。前項の計算に比して加數のみの取扱を簡略にしたものである。然し兩者何れも實物に依らねば、計算が出來ないので、何萬の樣な大數になると數へる事に大變な時間を要し、結局計算不可能に陷り大數に依る文明は建設不能になつて、文明に或制限を加へられる。野蕃人の文明の進歩せないのは、數計算なるものが此の第

二段の「半ば實物に依る計算時代」に有る點に於て、缺點を有して居る事に原因して居る事は前記した通りである。

大人に於て今年十六歳であるから五年の後にはと、指を出して十七・十八・十九・二十・二十一と折り屈げて二十一歳なる結果を得又、今五時であるから十一時迄はと、指を出して六時・七時・八時・九時・十時・十一時と折り屈げて折り屈げた指の數にて、六時間と結果を得る等の如きは加法の第二段を卽ち、繰り方に依る計算を行ふもので極めて數觀念の幼稚な劣等國民と云ふ事が出來る。

3、結果記憶に依る時代

以上二項の樣な計算を幾回となく繰り返す場合に於て、簡單なるものに於ては全く其の結果を記憶し、三足す四は七と直に結果が記憶の表現に依て得られるのである。我等成人に於ては $3+4$ に於て實物に依たり、考へたるする事無く直に結果の得られるのは全く前章三の3と同樣結果を記憶して居るからである。

然して此の結果記憶の必要な數範圍及び種類は次の三加法の種類に就いて詳說するが、和の二十以下の數十種のものゝみを記憶すれば其の應用に依て、總べての加法を遂行する事が出來るのである。

4、構成數に依る時代

以上の樣な計算を繰り返す內に構成觀念に於ける數、卽ち六は二を三つ加へた數だ五より一大、三より三大、十より四少い、十二の半分だと云ふ樣な數の觀念が出來た。是は既知の構成數觀念にて種々の計算を行ふので、例へば $12+5=2+5+10$, $27+8=7+8+20=7+3+5+20$ 等の樣に數を分解總合して、困難なるべき計算を心力を減づる樣簡略に取扱ふのである。

5、數理に依る時代

數理に依る時代の加法とは經驗した加法の計算法其の物を自己の經驗せない數迄、數理に依て計算を行ひ結果を得る方法の事である。例へば $3+2=5$ は實物に就ても何回か計算を行ひ十分結果五の確實である事を經驗確證したであらう。然し $30000+20000=50000$ に就ては三萬の樣な大數は且つて數へた事も無く、又此の樣な計算は實物に就て實驗した事が無い理であるが、構成數の考へからして三萬二萬の數は十分構成を理解し $3+2=5$ の數理を應用して直ちに五萬なる結果を得るのである此の數理に依る計算は經驗せない大數も全く自己の經驗を超越して存在し、推理へ〳〵と導かれよく極大極小の數迄も取扱ふ事を得るのである。

6、數字に依る時代

數字なるものを對照として、數象、數觀念を想起して以上五項迄に述べた計算で結果を得るのであ

る。

7、數字に數理を働かせる時代

前項は主として基數の加法を意味したものであるが、本項に於ては　234＋549＝783　の様に數字其の物に場所の價値を與へて、何十・何百の意味を持たせ基數加法の數理を應用して結果を得るのである。數字に依る計算は計算を幾つもの部分に分解して、各部分毎に結果を記し暗算に比して、心力を要する事が小で如何なる大數も容易に行ふことが出來る。此の事は、前節三の4數字及び計算具に於ける計算の項に於て述べた通りである。

8、加法定則に依る時代

加法の定則は特殊の場合に用ひられるものであるが、加法計算の一段の進歩である。定則に就ては次章に依て加減乘除の總べてに就て詳述する事とする。

三、加法の種類

加法は取扱ふ數其の物が無限で、其の組合せが又無限であるから、種類も又無限である。然し是等の計算は數理化され、數字化されて行はれるものであるから實際の計算に於ては次に述べる様に基數相互の組合せで、其の種類も自ら限定される。

$$\begin{array}{r} 134 \\ 58 \\ +296 \\ \hline 488 \end{array}$$

例へば上の例に就て見ても　4+8,　2+6,　3+1,　4+5,　9+9,　1+1,　2+2　の七種の基數加法を行ふに外ならないのである。次に此の基數加法の種類に就て述べて見よう。

1、和の繰り上らない場合

8+1	7+1	6+1	5+1	4+1	3+1	2+1	1+1
7+2	6+2	5+2	4+2	3+2	2+2	1+2	
6+3	5+3	4+3	3+3	2+3	1+3		
5+4	4+4	3+4	2+4	1+4			
4+5	3+5	2+5	1+5				
3+6	2+6	1+6					
2+7	1+7						
1+8							

以上計三十六種

2、和の繰り上る場合

1+9	2+9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9	8+9	9+9
2+8	3+8	4+8	5+8	6+8	7+8	8+8	9+8	
3+7	4+7	5+7	6+7	7+7	8+7	9+7		
4+6	5+6	6+6	7+6	8+6	9+6			
5+5	6+5	7+5	8+5	9+5				
6+4	7+4	8+4	9+4					
7+3	8+3	9+3						
8+2	9+2							
9+1								

以上計　四十五種

3、特殊の場合

1+0	2+0	3+0	4+0	5+0	6+0	7+0	8+0	9+0	0+0
0+1	0+2	0+3	0+4	0+5	0+6	0+7	0+8	0+9	

以上計　十九種

總計百種程ある理である。然し2和の繰り上る場合の算法を考察すると $8+7=8+2+5$ の様に加數を十の補數として考察すると、繰り上る場合の内二基數の和の十となるもの十種と、特殊の場合の終りの九種で足るから、總計六十五種の算法がある理である。直は加法の交換定則を應用し $3+5=5+3$ として結果を求めれば、2和の繰り上る場合に於て二基數の和の十となるもの十種の内四種減じて六種となり、1和の繰り上らない場合に於て、三十六種の内十六種減じて、二十種となり、3特殊の場合に於て十九種の内、九種減じて十種となる。依て總計三十六種の算法を記憶すれば足りる事となる。

以上は算法よりして、三十六種の算法記憶で足りる事を述べたのであるが、本節二の3結果記憶の時代の項に就て述べた樣に、加法が第三楷段に達し結果記憶として能率ある計算を行ふ時には、3特別の場合を除く外1、2の二基數の和八十一種の總べての結果を記憶せねばならない。

加法の種類の加數被加數共に零の場合、又は何れか一方の零の場合は實際問題としては容易に有り得ないものである。然し筆算の計算途中に於ては、實際問題として $\begin{array}{r}30\\27\\+20\\\hline\end{array}$ の様に零加へる七加へる零として存するものである。更に此等の事を減乘除の場合として見ると、皆同様の意味に於て存するものである。次に此の事を結果方面から眺めると、加法に於ては答は常に零でない方の

數、減法に於ては減數の零の場合は被減數に等しいが、被減數の零の場合は、正數の範圍に於て不可能である。乘法に於ては常に零、除法に於ては除數の零の時は無限大（六章三節三參照）被除數の零なる時は無限小の數である理であるが、特に零と約束されて居る。同樣法・實共に零の場合は零と約束されて居る。以下六・九・十二項の減・乘・除の零の場合に就ては此の事を再記せない事とする。

四、減法の意味

加法と同樣に種々の意味に考察される、第一に於て加法の逆なりとも考へられる。第二には順序數の意味よりして a, b 二數量があつて $a > b$ の場合は b の內 a に等しい原素だけ數へ去つて、殘りの原素を數へて其の數を知る過程である。第三には構成數の意味よりして、a, b 二數の關係が $a > b$ の場合に於ては b を a と他の一數 c とに分解することが出來る、此の分解の過程を減法と云ふのである。又此の第三の意味の分解の過程は a に加へて b に等しくなる他の新しき一數卽ち a, b 二數の差を見出す過程である。

五、減法の發達過程

減法の發達過程も大略加法の發達過程と同樣である。其の簡略なるものに就ては單に項目のみを記す事にする。發生的の見地から考察すれば如何にしても加法に引き續いて減法の行はれるものである然し加法の後、新に減法の生まれるものでなく出發點は加法であつても、互に相對立して行はれるものである。依て此の意味よりしては加法、減法の單進主義でなく、其の併進主義でなくてはならない

1、加法の逆として取扱ふ時代

加法の逆として取扱ふ時代に就て更に二樣に考察される。其の一つは結果卽ち差の數を集合數として考察する場合と、全く機械的に加法の逆として考察する場合とである。例へば $5-2=3$ に就て說明すれば二に一足せば三、二足せば四、三足せば五、依て結果は三であると、推斷する場合と $2+3=5$ 卽ち加法の結果を機械的に記憶して居る爲二足す三は五であるから結果は五であると推斷する場合とがある。

2、實物に依る時代

加法に餘り關係なく實物に依て、減法を行ふ時代は減法の最も初步のものである。卽ち $5-3=2$ に於ては五つを數へ出し、次に其の五つの集團から三つを數へ去り、殘りの集團を數へて二なる結果を知るのである。

次に發展する過程は加法と同樣で、3、結果記憶に依る時代　4、構成數に依る時代　5、數理に依る時代　6、數字に數理を働かせる時代　7、減法定則に依る時代である。

六、減法の種類

減法も加法と同樣に取扱ふ數と、數の組合せに際限が無いものであるから、もとより限りのあるものでは無い。然し數字計算に依れば自然に相對する數字も限定されて、次の樣な種類となる。

1、上位より借り來る場合

18−9　17−9　16−9　15−9　14−9　13−9　12−9　11−9
17−8　16−8　15−8　14−8　13−8　12−8　11−8
16−7　15−7　14−7　13−7　12−7　11−7
15−6　14−6　13−6　12−6　11−6
14−5　13−5　12−5　11−5
13−4　12−4　11−4
12−3　11−3
11−2

以上計　三十六種

2、上位より借り來る處の缺位の場合

10−9　10−8　10−7　10−6　10−5　10−4　10−3　10−2　10−1

以上計　九種

3、上位より借る必要の無い場合

9−8
9−7　8−7
9−6　8−6　7−6
9−5　8−5　7−5　6−5
9−4　8−4　7−4　6−4　5−4
9−3　8−3　7−3　6−3　5−3　4−3
9−2　8−2　7−2　6−2　5−2　4−2　3−2
9−1　8−1　7−1　6−1　5−1　4−1　3−1　2−1

以上計　三十六種

4、特殊の場合

9−9　8−8　7−7　6−6　5−5　4−4　3−3　2−2　1−1

以上計　十種

9−0　8−0　7−0　6−0　5−0　4−0　3−0　2−0　1−0

以上計　九種

依て總計百種ある理である。然し1の場合卽ち上位より借り來る場合の算法は $13-5=10-5+3$ の樣な方法を取れば全然不必要となつて、2の上位より借り來る處の缺位の場合、3の上位より借り來る必要の無い場合、4の特殊の場合とで總計六十四種あれば足りる。次に $13-5=13-3-2$ としても同樣六十四種程必要である。然し特殊の場合は容易で結局算法としては特殊の場合を除いて六十四種、反射的の結果記憶としては八十一種の記憶を要求せねばならない。

更に若し埃國式の減法（本章第四節二減法運算形式の項參照）を採用すれば、以上八十一種の減法は全く不必要となつて全然加法に移讓される理である。

七、乘法の意義

乘法は加法の特殊の場合卽ち、同數を數多く引き續いて加へる（累加）場合に加法の簡便法として加法外に九九を用ひて機械的に結果を求める過程を意味するものである。

依て加法であつたなれば加數を次々と始めから終り迄加へて結果を求めねばならないが、乘法なれば累加する數と其の回數を知れば、以前經驗した結果記憶卽ち九九の呼聲に依て、反射的に結果を求める事が出來る。更に數理の進歩した見地からして、因數を與へて積を求める過程である。故に被乘數は無名數、名數等如何なる意味の數でもよいのであるが、乘數は被乘數あつて始めて効力を有するもので、被乘數に對する作用を現はす運算數である。

八、乘法の發達過程

乘法は加法の基礎として發達したものであるから、加法に比して一段の進歩を有し加法の了解されない者は如何にしても、理解する事が出來ない。今次に其の發達の過程に就て述べて見よう。

1、形式のみ乘法の時代

此の時代は最も初歩の時代で形式のみ乘法で、內容は全く加法を行つて居る時代である。例へば二の三倍は何程かと發問すると形式は全く乘法であるが、兒童の計算過程は、二を二つ集めれば四、三つ集めれば六、依て結果は六と加法の經路を繰り返す時代である。

2、九九發見の時代

我等の生活の內には一本二錢の鉛筆を十本買つた。一立二十錢の米を八立買つたの樣に、累加の計算は大變に多い、然し是を累加に依て毎度結果を求める事は、大變の時間と勞力を要するので何とか

計算を簡略に取扱ふ事は出來まいかと種々に考察の末、次項九乘法の種類で述べる樣に、乘法に於いても加減と同樣其の種類は限定されるものであるから、此處に氣付いて遂に其の結果を記憶する結果記憶時代に到達するのである。

乘法結果記憶の最初に於ては三を四回集めたものが十二、六回集めたものが十八と記憶するであらう、然し記憶及び記憶の表現を一層容易にする爲には、三四、十二、三六、十八即ち九々として行ふ事が有利であるから、遂に乘算九九なるものが發見されるに至つたのである。

乘法の發達過程から見て前項1の時は眞の乘法と云ふ事は出來ないが、本項2九九發見の時代に至り、九九を用ひて乘法を行ふ樣になつて、始めて乘法としての價値が認められ、眞の乘法と言ひ得るのである。

以下の發達過程は加減の發達過程と大差が無いから單に其の項目及び略說を記する事とする。

3、九九の機械的使用に依る時代

前項の樣に九九を發見し、之を記憶して機械的に使用する時代、即ち前記した樣に眞の乘法の時代である。

4、數理に依る時代

五十の五倍は五を五倍する數理を以て二百五十の結果を得るのである。此の時代に入つて乘數、被乘數共に基數で無い場合迄も乘法を行ひ得るのである。

5、數字・計算具に依る時代

以上の四期は皆暗算であるから、大數の取扱ひは困難である、然し數字に依る運算、算盤、乘法計算機械等に依る運算で如何なる大數でも容易に計算の出來る時代は加減と同樣である。

6、乘法定則に依る時代

加減同樣計算及び思考の能力經濟から考察されたもので特殊の場合に應用される。尙ほ詳細は次章に述べる事とする。

九、乘法の種類

1、乘數の被乘數と等しき場合

1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9

以上計　九種

2、乘數の被乘數より大なる場合

1×2	1×3	1×4	1×5	1×6	1×7	1×8	1×9

2×3　2×4　2×5　2×6　2×7　2×8　2×9

3×4　3×5　3×6　3×7　3×8　3×9

4×5　4×6　4×7　4×8　4×9

5×6　5×7　5×8　5×9

6×7　6×8　6×9

7×8　7×9

8×9

以上計　三十六種

3、乘數の被乘數より小なる場合

2×1

3×1　3×2

4×1　4×2　4×3

5×1　5×2　5×3　5×4

6×1　6×2　6×3　6×4　6×5

7×1　7×2　7×3　7×4　7×5　7×6

8×1　8×2　8×3　8×4　8×5　8×6　8×7

9×1　9×2　9×3　9×4　9×5　9×6　9×7　9×8

以上計　三十六種

4、特殊の場合

0×0　0×1　0×2　0×3　0×4　0×5　0×6　0×7　0×8　0×9

1×0　2×0　3×0　4×0　5×0　6×0　7×0　8×0　9×0

以上計　十九種

總計百種ある理である、然し最後の十九種は特殊の場合であるから、總計八十一種を結果記憶、即ち乘法九九として記憶すれば良いのである。更に交換定則を應用すれば1の乘數の被乘數と等しき場合、2の乘數の被乘數より大なる場合の二種合計四十五種の九九を記憶すれば良いのである。

大正十四年尋二算術教科書の再修正は從來四十五種の九九（普通九九）を用ひて來たものを、交換の定則を許さず新に三十六種を増して八十一種（總九九又は逆九九）の九九に修正した。此の再者は何れも長短が有つて、長い間の論爭で何時迄立つても、解決の着かないものであると思ふ。今次に此

の再者の長所を比較して見よう。

十、逆・普通九九の比較

逆・普通九九の比較に關しては一方の長所は一方の短所となるものであるから、再者の長所のみを示して比較して見よう。

1、逆九九の長所

イ、合理的　交換の定理を許さないのであるから合理的である事は、長所の最大なものである。卽ち 3×2 と 2×3 とを明に區別される。

ロ、呼聲で乘數、被乘數を區別　3×2 は二三、六、2×3 は三二、六と呼ぶのであるから、人の呼聲を聞いても明に乘數と被乘數を區別する事が出來る。

ハ、九九を呼ぶ方向の一定　次の例で理解される樣に逆九九なれば常に五から呼び始めて、五九四十五．五二、十と呼ぶので呼ぶ方向は常に下から上である。然し普通九九であると、下から上へ五九、四十五、今度は上から下へ二五、十と呼ばねばならないので、呼ぶ方向が不定である。

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times\ 5 \\ \hline \end{array}$$

ニ、除法に便　除法に於て除數を記憶して順次に割って行けばよいので極めて便利である。

ホ、珠算乘法に便　筆算乘法と同樣に乘數を記憶して頭掛にして行けばよいので極めて便利である。

ヘ、等分除・包含除の區別　15錢÷3錢=5・・3錢×5=15錢 で除す時五三、十五 15錢÷3=5錢 5錢×3=15錢 で除す時三五、十五と呼ぶから明に等分除と包含除を區別する事が出來る。

ト、兒童の心理に適合　交換定則の樣な數理を敎へずして取扱ふ事が出來るので兒童の心理に適合する。

2、普通九九の長所

イ、九九記憶に勞力小　逆九九なれば八十一種も記憶せねばならないが、四十五種で足りる故九九の記憶に要する勞力が小で濟む事になる。

ロ、珠算除法九九と混合する事が無い。

ハ、交換定則の理解　交換して結果の等しい事を容易に理解して應用する事が出來る、實際上に於て交換定則の理解が困難な樣な兒童では困る。

ニ、記憶容易　常に小な方から九九を呼ぶのであるから自然的で、記憶が容易である。

ホ、敎師殊に父兄の指導に便　敎師は直に逆九九を理解して敎授する事が出來ても、因襲の久い

普通九九を逆九九に變更して指導する事が父兄に對しては大變困難である。依て折角學校で逆九九を敎へても家庭の指導が困難ばかりでなく、父兄に依て自然的に破壞される事が多い。

へ、其他　計算は最後に於ては機械化すべきもので理窟はあまり必要は無い、又發生的の立場から考察すれば逆九九も經過せねばならない過程であらう。次に乘數と被乘數の相等しい場合に於ては逆九九としても等分、包含を區別する事が出來ない。

十一、除法の意義

除法は減法の特殊の場合で、或數より或一定の同種の數を何回引き續いて引く（累減）事が出來るか、又如何なる數を一定回數だけ引く事が出來るかを知る爲に減法の簡略法として、（此の事を逆に考へれば或數に等しい數を得るには如何る數を、一定回數だけ加へねばならないか）九九を用ひて機械的に結果を求める過程を意味するものである。

例へば $s > a$ の場合に於て s より a を何回引けば s が盡きるかと云ふ時其の累減回數を九九を用ひて求めるもので、普通此の場合を包含除と云はれて居る。依て此の場合に於ては s より a を引き去るのであるから、同一種類の數でなくてはならない、記號としては $6^{人}\div 2^{人}$　$8^{円}\div 2^{円}$ として現はされ $10^{R}\div 2^{m}$　$12^{R}\div 2$ に於ては其の意味をなさない。

次に s なる一群のある時 s に等しい種類の如何る數を a 回引けば s が盡きるかと云ふ事（前同様此の事を逆に考へれば、或一數に等しい數を得る爲には如何る數を一定の回數だけ引き續いて加へねばならないか）を九九を用ひて求めるもので、普通此の場合を等分除と云はれて居る。

依て此の場合に於ては a は累減する回數で常に運算數、結果は s と同一種の數でなくてはならない、記號としては $8^{本}\div 4 = 2^{本}$　$100^{m}\div 5 = 20^{m}$ として現はされ、$20^{R}\div 2 = 10$　$15\div 3^{本} = 5^{本}$　$16^{箇}\div 8^{箇} = 2^{箇}$ に於ては其の意味をなさない。

更に構成數の見地からしては、一因數と積を與へて他の因數を求める過程である。

十二、除法の發達過程

1、加法に依る時代

$6\div 2$ に於て若し結果を一とすれば一を二回集めて二、二を二回集めて四、三回集めて六となるから正しき結果は三であると加法を逆に使つて結果を求める時代で除法の最も初歩の時代である。

2、減法に依る時代

前例に於て若し一を二回引けば殘り四、二を二回引けば殘り二、三を二回引けば殘り無く引く事が出來る。依て正しき結果は三と推定する時代で包含除の最も初歩の時代である。

3、乘法に依る時代

前例に於て若し一とせば二倍して二、二とせば四、三とせば六であるから、正しき結果は三と推定する場合で、自然的に無意識的に九九を用ひて行つて居る時代である。計算心理としては此の時代から眞の除法と言つて良い。

4、九九を用ひる時代

數を構成數として九九を用ひ、因數に分解して結可を求める時代で計算を機械化され、内容形式共に眞の除法に達した時代である。

次に5、數理に依る時代　6、數字形式に依る時代　7、定則に依る時代

十三、除法の種類

除法の計算經路を分解して見ると、第一に於て除數の最高位の數（但し最高位の次の數が九・八の樣に十に近い數の時は最高の數を一程增した數）を以て、被除數の最高位の數（若し其の數が除數より小な場合は次位迄の數）を除す、即ち其の數が何倍にあたるかと云ふ事を見て商發見を行ひ、第二に於ては乘法、第三に於ては減法と此の三つの過程を常に繰り返すものであるから、眞の除法の種類として考察される所は第一の商發見の處だけで基數又は二位數を基數除する、總九九の八十一種類である。故に除法に於ては八十一種の商發見が根本である、直は商發見の場合に於て商の桁數は除數と被除數との桁數の差（但し被除數の最高位の數が除數の最高位の數より小の時は一桁だけ減ず、又同數の時は次位を見て小なる時は同樣一桁だけ減ず）に等しい事が附隨的に考察される。

第三節　數・數字に於ける計算經路の考察

以上前節に於て計算其のものが如何に發達して行くべきものかと云ふ事に就て、詳細に述べたが本節に於ては四則の其の計算に用ひる數が如何に組合はされ、數及び暗算が如何に發展して行くか、又數字としての計算形式が如何に發展して行くかと云ふ事に就て述べて見よう。

一、加法に於ける暗算の發達過程

第一段　二基數の和の繰上らない場合…・3＋4　の樣な場合で計算に入る第一步である、然して其の内加數の小な場合が程度が低い。

第二段　二位數に基數を足して繰り上らない場合…・14＋5　の樣な場合。

第三段　基數に二位數を足して繰り上らない場合…・7＋21　の樣な場合で前の二位數に基數を足すものよりか程度が高い。

第四段　二基數の和の繰り上る場合……7＋8　の様な場合で數は前項より小であるが、計算經路の點に於て困難である。

第五段　不完全二位數相互の繰り上らない場合……20＋30　の様な場合で計算は二基數の和の繰り上らない場合と同様であるが、數範圍の擴張と計算數理の點に於て困難である。目的としては此の計算練習外に百以下の不完全二位數の構成的觀念に於ける數の意味の吟味である。

第六段　基數の累加……基數の累加は第五段迄の計算過程内に於て、簡易な數を取扱はねばならない。心力を要する事が大であるが計算力向上に極めて効果の大なるものである。

第七段　不完全二位數に基數を足す場合……30＋4　の様な場合。

第八段　二位數に基數を足す場合……二位數に基數を足す場合は更に其の和の繰り上らない場合、丁度十として繰り上る場合、更に完全に繰り上る場合の三段に考察する事が出來る。即ち　31＋4,　37＋3,　54＋8　の三部面であるが、最後のものは以上の總べての場合を總合的に練習する事が出來、極めて効果ある場合で第八段として効果のあるものである。

第九段　不完全二位數と完全二位數の和で二位の繰り上らない場合……30＋27,　27＋30　の場合で二位數相互の和を求める基礎となる場合である。

第十段　完全二位數相互の和を求める場合……此の場合は　24＋31,　36＋14,　36＋15　の様に各桁の繰り上らない場合、丁度十に繰り上る場合、一位だけ繰り上る場合の三段に考察される。更に二桁共に繰り上つて結果の百以上となる場合があるが是は程度が極めて高いから暗算として要求せなくともよい。

第十一段　百以上に和のなる場合……大體に於て兒童に要求する暗算の範圍は和の百以下になる場合であるが、不完全三位以上、二位、基數相互即ち　300＋500,　300＋26,　300＋50＋3　等の場合は例外として暗算を要求せねばならない。

二、加法に於ける數字運算形式の發達過程

以上に依て大要暗算（構成觀念の數）の發達即ち學習さす過程が理解された樣に思ふ、本項に於ては百以上即ち暗算で出來難い總べての數の計算に必要な數字運算形式の發達過程に就て逃べて見よう。

$$\begin{array}{r} 32 \\ +14 \\ \hline \end{array}$$

第一段　各桁の繰り上らない場合……上の例に示す様に加法運算形式の最も初歩のもので、上位から加へても下位から加へてもよい場合である。

$$\begin{array}{r} 345 \\ +128 \\ \hline \end{array}$$

第二段　何れの桁か一桁だけ繰り上る場合……上の例に示す様に何れの桁か一桁繰り上る場合で、繰り上る算法を理解さす最初の材料である。又暗算と異なり和は下位より

求めねばならない點に注意さす事が重要である。

第三段　引續いて繰り上る場合：：此の場合は上の例で示す樣に第二段を基礎として取り扱はれる

$$\begin{array}{r}328\\+893\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}127\\+175\\\hline\end{array}$$

教材で、上例の樣に各桁の完全に繰り上る場合と、特殊の場合として上の下例の樣に下位より繰り上る爲に引續いて上位に繰り上る場合とがある。

第四段　以上の外加ふる數の桁數の小のものより大なるものへ、段數の少いものより多いものへ、無名數より名數へ、單名數より複名數へ、十進單名數より不十進複名數へ、整數より小數、分數への楷段は加法のみでなく四則一般的ものである、以下此の段は略す事にする。

三、減法に於ける暗算の發達過程

以上加法の暗算發達過程に於て詳細に說明を加へたから以下減乘除の暗算發達過程に就ては、簡單に列記しておく事とする。

1、基數より基數を引く場合　2、二位數より基數を引く場合（18－5 の樣に上位より借る必要の無い場合と 30－7　23－8 の樣に借る場合との二楷段がある）3、二位數より二位數を引く場合（35－10, 35－23, 35－18 の樣に三階段がある）4、不完全數相互の減法、5、不完全數より完全數を引く場合（以上五項卽ち百迄の數範圍を減法の暗算として要求するのであるが、特殊の場合として 500－300, 18億－12億, 1000－567 の樣な場合は最後に要求せねばならない。）

四、減法に於ける數字運算形式の發達運程

前項と同樣加法の數字運算形式の發達過程に就て詳述したから、本項以下減乘除の數字運算形式の發達過程に就ては簡單に列記しておく事とする。

$$\begin{array}{r}324\\-108\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}342\\-243\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}305\\-138\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}3000\\-1724\\\hline\end{array}\;\downarrow\;\begin{array}{r}299\ 10\\-172\ 4\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}30105\\-29756\\\hline\end{array}$$

1、上位より借り來らずして各桁の引き得る場合　2、一桁だけ借り來る場合（上の例の樣に何れの桁か一だけ借り來る場合の算法は以後二桁以上借り來る場合の算法の根本となるもので、最も重要な取扱ひである）3、二桁以上借り來る場合　4、下位より借りた爲に引き得ぬ樣になる場合（上例に示す樣な場合で、貸した事を記憶して更に借らねばならないので心力を要する事が大で、隨って程度が高い）4、借らんとする所の缺位の場合上の例に示す樣に二桁以上卽ち百位の數値の處から借らねばならないので、餘程の思考を要する理である　5、次々に借りる場合（上例に示す樣に借りる場合に餘程の心力を要するもので最も程度の高いものである）

6、最後に程度の高いものは加法の場合と同樣である。

五、乘法に於ける暗算の發達過程

1、基數の基數倍（乘數及び被乘數の小のものより順次大のものへ）2、不完全二位數の基數倍 3、完全二位數の基數倍（各桁の繰り上ら無い場合又は一位のみ繰り上る場合）4、二位以上の不完全數の基數倍及び其の逆 5、二位數以上を基數倍して各桁の繰り上らない場合。

六、乘法に於ける數字運算形式の發達過程

1、三位以上の數を基數倍して各桁の繰り上らぬ場合 2、同前に於て一箇所又は二箇所以上繰り上る場合 3、同前に於て下位より繰り上る爲に其の桁の繰り上る場合（上例に示す樣に一箇程繰上るべき計算であるが下位より繰り上る爲に二位繰り上るのである。以上の三階段に於て大要計算の基礎が養はれた後次項の樣に乘數の二位數以上の場合に移るのである）4、乘數及び被乘數共に二位以上の場合（此の處に於て計算法としては完成するのである）5、最後に程度の高いものは加法の場合と同樣である。

$$\begin{array}{r} 237 \\ \times\ \ 3 \\ \hline \end{array}$$

七、除法に於ける暗算の發達過程

1、基數を基數除する場合 2、二位數を基數除して一位の商の立つ場合 3、不完全數相互の除法 4、二位數を基數除して二位の商の立つ場合 5、三位以上の數を基數除但し各桁の整除の場合 6、第一・二・四階段の場合で除餘のある場合（除法に於ては大略以上を暗算として要求されたい）

八、除法に於ける數字運算形式の發達過程

1、基數除の場合（基數除は更に三階段に發達する、第一の場合は各桁の整除されるもので最も程度が低い次は最後の桁のみ整除不可能の場合、次は中途と最後の二箇所以上に整除不可能の場合で最後の不整除の場合は中途不整除の場に比して程度が低い）2、二位數除の場合（此の場合は種々の方面がある、商の桁數の小のものは大のものに比して程度が低い、除數の最高位の數の次の數が九を遠ざかる程商發見が容易である。更に計算の中途に於て商に零を有するものは有しないものより程度が高い、又零を有するものも商の中途にあるものは最後にあるものより程度が高い）3、其他の場合（除數の桁數の順次增に從つて程度が高い、其の外最高程度のものは加法の場合と同樣である。）

第四節　運算形式

一、加法運算形式

加法の運算形式は次の樣に三種あるが眞の意味よりしては 1の場合が最も合理的である、然し計算を機械的となし出來得るだけ心力を勞する事を減じ、正しき結果のみ得れば良い計算能力經濟から

して　3の場合が最良で現在多く採用されて居る。

幾段も重ねてある加法は外國に於ては皆下から順次上に加へて行き、日本は其の反對の經路を通るが何れでも良い。次に三つの例に依て各桁を揃へて記す事が最も重大な要件である事が理解され、更に　3の例に依つて常に下位より計算せねばならない事が發見される。

（1）

```
  369
  275
+431
―――
   15 ………一位の和
  160 ………十位の和
+900 ………百位の和
―――
 1075 ………總　和
```

（2）

```
  369
  275
+431
―――
    9 ……百倍すべき數
   16……十倍すべき數
+  15 ……其のまゝ
―――
 1075 ……總　和
```

（3）

```
  369
  275
+431
―――
 1075 ……總　和
```

二、減法運算形式

減法も3の運算形式で下位より引かねばならない事が發見され又便利な事が思はれる。次に4は3の理解を與へる方法として面白い。

例

365−189＝176

（1）

```
  365
−   9
―――
  356
−  80
―――
  276
− 100
―――
  176
```

（2）

```
  365
− 100
―――
  265
−  80
―――
  185
−   9
―――
  176
```

（3）

```
  365
− 189
―――
  176
```

（4）

```
  200＋150＋15
− 100＋ 80＋ 9
――――――――
  100＋ 70＋ 6
```

次に塊國式として結果を得る過程を皆加法の逆として行ふ算法があるが、あまり多く採用されて居ない。次に例示して説明して見よう。

```
  2348
−  165
―――
  2183
```

五足す三が八であるから一位の數は三、六足すの八が十四であるから二位の數は八、次の三は一繰り下つて居るのであるから實際は二、依て一足すの一は二であるから三位の數一、四位の數は二として結果を求めるのである。第二節六減法の種類で述べた樣に此の算法を用ふれば全く減法として計算法は不用となる理である。

三、乘法運算形式

次の例に依て何れも發生的に考察され、最後の例が簡便法で、下位より計算を始めねばならない事が理解される。

(1)

```
   542
×    4
──────
     8……2×4
   16 ……4×4×10
+20 ……5×4×100
──────
  2168……542×4
```

(2)

```
   542
×    4
──────
  2000……500×4
   160……40×4
+    8……2×4
──────
  2168……542×4
```

(3)

```
   542
×    4
──────
  2168……542×4
```


四、除法運算形式

(1)

```
    587
×    76
───────
     42 ‥7×6
    48…‥8×6×10
   30 ‥‥5×6×100
    49…‥7×7×20
   56 ‥‥8×7×10×10
+35 ‥‥5×7×100×10
───────
  44512 ‥587×76
```

(2)

```
    587
×    76
───────
   3000 ‥‥500×6
    840 ‥‥80×6
  48 42 ‥‥7×6
  35000 ‥‥500×70
   5600 ‥‥80×70
    490 ‥‥7×70
───────
  44512 ‥‥587×76
```

(3)

2

```
    587
×    76
───────
   3522 ‥‥587×6
+4109 ‥‥587×70
───────
  44512 ‥‥587×76
```


除法には短除法と長除法とがある。短除法は主として除數の基數の場合に用ひて⌐) 式と ⌐) 式との二種あるが紙面の經濟よりして⌐) 式が可良である。次に其の運算形式の楷段を示して見よう。

例　342÷3

(1)

```
3) 300+30+12
   ─────────────
   100+10+4=114
```

(2)

```
3) 342
   ───
   114
    ↓
   114
3) 342
```

例　7182÷21

(1)

```
        2
       40
      300
21) 7182
    6300……21×300
    ────
     882
     840……21×40
     ───
      42
      42……21×2
      ──
       0
```

(2)

```
     342
21) 7182
    63 ‥‥21×3×100
    ──
     88
     84 ‥21×4×10
     ──
      42
      42‥21×2
      ──
       0
```

右の外伊國法と稱して次例に示す樣に前例の次の楷段卽ち更に簡略に計算される形式がある。此の形式は商と除數との積を記せずして暗算にて順次に引き殘數のみ記す方法である。然しあまり心力を要する事が大で困難であるから一般に用ひられて居ない。

4594÷32

```
      143
32) 4594
     139
      114
       18….殘り
```

除法運算形式に附設として除餘に就て少しく述べて見よう。除餘は整數のみでは殘り何程と記したものが、分數の導入に依て其の全部を解決する事が出來た。然し分數の除餘は數値の認識上極めて不便の點があるので、小數に依て表記する樣になつた。此の場合永久に又小數二位以下に於て、除し得ないものは其の處置法として、切捨法・切上法・四捨五入法との三つの方法がある。切捨法は「長さ一米の紐より三十糎の紐を何本切取る事が出來るか。」切上法は「一枚の紙に四百八十文字かけば五千文字を書くに何枚の紙を要するか」四捨五入法は「或試驗に算術を九十一點讀方を八十五點綴方を七十一點取つた、平均點は何程か」の場合各々實際問題として適用されるものである。

第五節　計算の取扱

一、計算の根本

最近算術教授の叫として、事實的知識の授與、實驗實測、空間教授と隨分論じられるが、何れも其の根元となるものは計算である。假に兒童を分類して見ると次の樣に五種に考察する事が出來る。

1、計算だに出來ない兒童…此の部に屬する兒童は劣等兒視されるもので、全く根本から指導し餘程努力せねば救濟する事が出來ない。

2、計算だけ出來る兒童…教師の少しの努力に依て救濟の出來る兒童である。

3、教科書問題の出來る兒童…教科書の問題が出來る兒童であるから、普通の學校では優兒の方に屬して居る。

4、實驗實測と實際的空間方面迄力の發展して居る兒童…學校方面に度量衡・計量器其他種々の面積體積說明器の準備が必要で、解題に止まらず其の實際に觸れた取扱で、一段進步した取扱の出來た兒童である。

5、事實的知識の練磨された兒童　：餘程教師方面に於て、時間・貨幣・通信・租稅・銀行預金・賣買・貸借・公債・株式・社債・度量衡方面を實地に就て研究した、優良の教師の指導を受けて居る、幸福な兒童で教科書の解題は問題外として實際の知識と共に數的考察の練磨された兒童である。

此の樣に第五段の最後迄兒童を指導してやらねばならないが其の根元は計算である。又一箇の機械に就て考察するに、其の構成運轉の硏究は理科、產地は地理、變化發達は歷史、是等の事項を言語、文章に現はすのは國語に屬すのである。扨て算術の考察となると、機械のなす仕事の數量・時間・價等の數的方面の考察であるが、此の數的考察を經濟的に完全に、研究・考察・調査する根元はやはり計算に待たねばならない。

要するに計算は算術の根本となるものである事を理解して、基礎として練磨する事が重要である。

二、計算發生的考察の重要

第一節三及び第二節の發達過程に於て、計算の一般的及び四則の各に就て發生的の考察を詳說したが、教師は此の計算發生的考察が、自然的順序の教授であることを理解して、計算教授の系統を作り兒童の環境を數的に順次向上し、計算の教授、練磨に無理の無い樣に取扱はねばならない。

三、四則の意味

數的に順次向上し、計算教授練磨に無理の無い樣に計算を續行して行くのであるから、何等支障は無いが實際的應用問題の解題となると、本章第二節に於て述べ樣な四則其のもの丶本來の意味が理解され居らねば學習能率の向上する事は困難である。更に其の四則の意味と實社會の事實發表との連絡を知つて、十分計算の適用力を養成する事が重大な任務である。例へば買ふ、戴く、得る、取る、足す、重ねる、積む、持て來る、增す、加へる、入れる、上る、進む等の術語と加法（減乘除に於ても同樣）と計算の適用は低學年としての重大な任務である樣に、四則の意味と其れ等の關係方面の取扱に留意せねばならない。

四、暗算、筆算

尋一・二の主要敎材は暗算であるが、第三節に於て述べた樣に、數の範圍と計算の適用を理解し實用として又筆算計算の豫備基礎としての暗算の練磨は重大な事項である。次に尋三・四は筆算計算の練磨熟達期である事に留意して筆算敎授の徹底に努力せねばならない。

殊に第四節で述べた樣に運算形式其のものに十分の理解と批評を與へて、徒に機械的に走らない事である。從來は運算形式等の如きものは全く計算法として、何等の說明理解を與へない傾向があつたが、總べて計算方法其の物に十分の理解と批判を涵養し、第七節、計算に於ける能力經濟として、述

べる様な方面迄彼等兒童の指導の發展を行はねばならない。

世界各國の算術教科書の種類多種多様其の極に達するの感があるが、其れ等教科書の我が國教科書に遠く及ばない所は、計算其のものに實に嚴密なる縦の連絡の存して居る事である、本日の教材中前回に於て基礎知識として如何る事項を學習して居るか、又次回の基礎となる部面は何處であるか、即ち過去の材料を基礎とし、今後の學習の手引となる様に日々の教授を續行し、第三節に述べた計算經路を教師の腦中に納め、順進的の指導に依て、計算法を教授し練磨せねばならない。

四、計算力向上の施設

以上種々の方面に就て述べたが、眞の計算力の完成は其の練磨に待たねばならない。理論を經とし實行を緯として計算力の向上に努めねばならないのである。以下第六節の一節を特設して、計算力向上の實際的方面に就て述べて見よう。

第六節　計算力の向上法

一、計算力向上の二方面

由來我が國は珠算に依て計算を行つたものであるが、明治初年西洋文物の直輸入の一つである、筆算は時に依て盛衰はあつたが、現在小學校算術科の計算は皆筆算に依て行はれて居る。一面實社會に於ける計算の狀態を見ると全く珠算の全盛で、我等小學校教師の筆算教授者は多少不安の念を起さゞるを得ないのである。此の意味よりして今回高等科珠算を正課とされた事は有意義である。

外國に於ては算盤の様な計算器が無いから、全部暗算と筆算で行ふものである。依て此の計算力の向上方法に就ては随分研究を積まれて居るが、我が國に於いては随分後れて居る様に思ふ。例へば此の計算力査定に就て考察して見ても、一題の計算を行ふ場合黒板より雜記帳に數字を寫す場合に寫し誤りをして、計算は正確に出來て居ても、零點、寫し誤りも無く數字は確實に轉寫されて居るが途中一箇所だけ、誤算をした場合も、零點、二箇所、三箇所、誤算があつても等しく零點である。又計算の少しも出來ない兒童も、計算どころか數字の讀み書も不十分な兒童でもやはり零點である。依て是等の場合を考へて見ると計算力の有るものも、無いものも一様に零點で、零點の意義が極めて不徹底である。

以上の樣に確度方面からのみ見ても、不安定な採點が行はれて居るが、速度即ち時間的方面から見ても同様な採點が行はれて居る。例へば十題の計算に對して、甲は二十分、乙は三十分、丙は六十分で何れも正答したとすると何れも百點と採點されて居るが、是は確度方面のみの採點で速度の採點が

皆無である。若し是に速度の採點を加味すれば甲は三百點、乙は二百點、丙は百點の理である。

米國は殊に此の方面の研究が進歩して Measurment of Arithmetical abilities educatinol tests and mesurments. 等の著書が多く出版されて、兒童の學習量換言すれば教師の教授能率を如何にして、測定するかと云ふ事が隨分稱へられ從つて、測定の準備としての教授方法が眞劍味を帶びて研究されて居るのである。

以上記した計算力査定方面と同樣に其の向上法に於ても、確定と速度の二方面に就て養成せねばならない。然し此の二者は全然別物でなく、或部分は同一のものである。今次に此の二方面に就て述べて見よう。

二、確度の向上法

1、基本數の組合

本章第二節に於て、加減乘除の基本となる種類に就て述べた樣に其の基本となるものは僅か數十種に止まるのであるから、時間と勞力を費して多くの計算問題を練習しても、其れ等の問題に系統が無く、基數の組合はせに於て、同一種類のものに偏して、居たなれば計算力養成として極めて、能率の低い方法と言はねばならない。依て問題は選擇に於て最も留意を要するもので教師に於て短時間に作られるものでない。隨て系統的に考案された國定算術書其他の參考書に依る方が便である。

2、數字の轉寫練習

兒童の誤算の原因を調査して見ると、數字の寫し誤りより來るものが大變多い。運算形式を謄寫刷で與へた場合に於て誤りの少いのも此の處に基因して居る。依て數字を轉寫して後讀み合はして見る、轉寫練習が必要である。

直ほ此の轉寫練習は速度の向上に於て極めて效果の大なものである、即ち計算其の物の誤謬や、時間よりも黑板又は教科書等より、自己の雜記帳に運算形式として、轉寫する場合多くの誤謬と時間を要すものである。若し一字見ては一字書く尋一の始めに於て見られる樣な轉寫であつたなれば極めて能率が低い。此の練習方法としては、謄寫刷の數字の寫し取りの競爭を行ふ事も效果があるが、又五・六桁の數を重ねて板書し、一目見せては消し去るか又は厚紙等で覆ふて、二回見る事の出來ない樣にして練習すれば視轉寫の練習としての效果が大である。

3．數字練習

正確な數字を記す事は誤算を防ぐ上に最も重大の事である。劣等兒童の計算を調査して見ると、數字の不正確より來る場合の誤りが極めて多いのに驚くのである。第三章第一節二アラビヤ數字、同第

二節三數字成績の向上法に就て參照後練習せねばならない。

4、運算形式の整調

縱橫の桁行を揃へる事の運算形式の一般的形式に於て又局部に於ての整調不完全からも誤算が起るから、此の點にも注意せねばならない。

5、檢算の奬勵

檢算は誤算の訂正に唯一の效果があるものであるが、其の方法は三種の形式がある。第一は同一の經路を他の紙に再び繰り返すもので計算力向上から見れば極めて效果が大である。第二は計算した經路を始めから、終り迄點檢する方法で誤點を發見訂正する方面から見れば又效果が大である、第三は加法は減法で、乘法は除法卽ち逆の方法で結果を檢して見る方法で第一の場合と同樣計算力向上に效果が大である。

6、計算中誤り易い點の練習

計算中個人的に學級的に、最も兒童の誤り易い點を調査して特に其の箇所の練習を厚くせねばならない。よく調査して見ると、四則中特に加法、加法中特に七と八との結合に誤點が多いとか、寫し誤り、小數點の打ち方、最小公倍數の發見等特に誤り易い點を早く發見して、其の箇所の發展に努め以て全體に於ける計算力の向上を測らねばならない。

7、試驗

練習が單調に陷ると能率が無くなるから、時々方法を變更する事が大切である。小生は試驗として行ふ事が極めて效果がある樣に思ふ。學級として行へば個人相互の競爭となつて、受持敎師は自己の學級の計算力を練り、從つて學校全般の計算力の向上となつて效果が大である。

8、謄寫刷として課す

運算形式として謄寫刷の課題として課す事は極めて效果が大である。殊に每回謄寫する事は勞力を要する事が大であるから、一時に同樣のものを學級兒童數の數倍謄寫しておき、同種のものを數日經過の後行へば、兒童は答を記憶して居るものでないから、敎師の勞力を要する事が少くて效果が大である。

9、暗算の勵行

每算術の時間の始め數分を取つて暗算を勵行する事は、筆算の豫備的暗算として效果があるばかりで無く、暗算獨特としての價値がある。

10、算盤の利用

高學年に至つては教師算盤、兒童筆算で行へば檢答に便で簡單な方法として效果が大である。

11、級數式の問題として提出

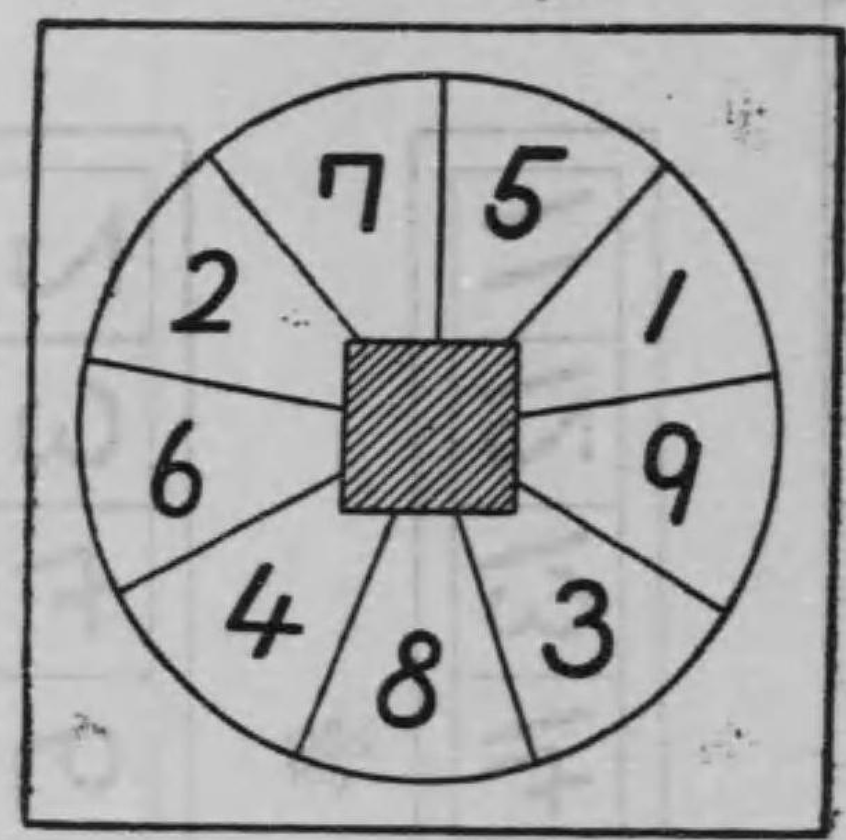
$$\begin{array}{r} 234 \\ +\ 567 \\ \hline 801 \\ +\ 890 \\ \hline 1691 \\ +\ 123 \\ \hline 1814 \\ +\ 456 \\ \hline 1270 \\ +\ 789 \\ \hline 2059 \end{array}$$

右例の樣に加減乘除に於て一より九迄の數字を順に又逆に、一つ飛び二つ飛び等級數として課せば問題の提出が容易に行はれて效果が大である。

12、種々の練習表

種々の練習表として行ふ事は、問題提出と檢答の簡便である點に於て能率が高い。低學年に於ては教師用の大練習表（從來の練習表の樣に、一つの數字を中にして多くの數字を外に書き内外の數の計算のみに止まらず、種々の繪畫練習表として提出すれば一層效果が大である。繪畫練習表に就ては小生等二人の著作「グラフ並に空間算術教授用掛圖　尋一・二年用　大阪市西區新町通り三丁目四八受驗研究社版」に就て參照されたい。）兒童用練習表としては完全なものが各所で販賣されて居る。然し是等高價なものより寧ろ教師の勞力に依て作られた、回轉式・被覆式・個定式等種々の練習表を紙質の良い鉛筆畫用紙に謄寫刷として與へた方が良い。今次に其の數例を示して見よう。

第一表



第一表内部の正方形は切拔いた穴で其一邊は第二・三表の正方形の一邊と等長である。又各表は印刷後切取つて別々のものとするのである。

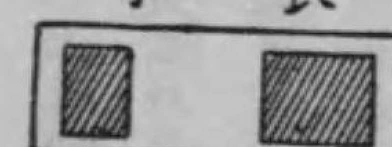
練習法としては第二表又は第三表の數字を第一表の正方形の穴より現はして、加減乘を行ふもので、此の表一つで尋一の始めから、尋二の二期末迄の教材の全部が練習される理である。

第一表

4×8=32
4×2= 8
4×5=20
4×9=36
4×7=28
4×1= 4
4×6=24
4×3=12
4×4=16
5×7=35
5×1= 5
5×3=15
5×9=45
5×5=25
5×8=40
5×2=10
5×4=20
5×6=30

第二表

第三表



第四表

第二表

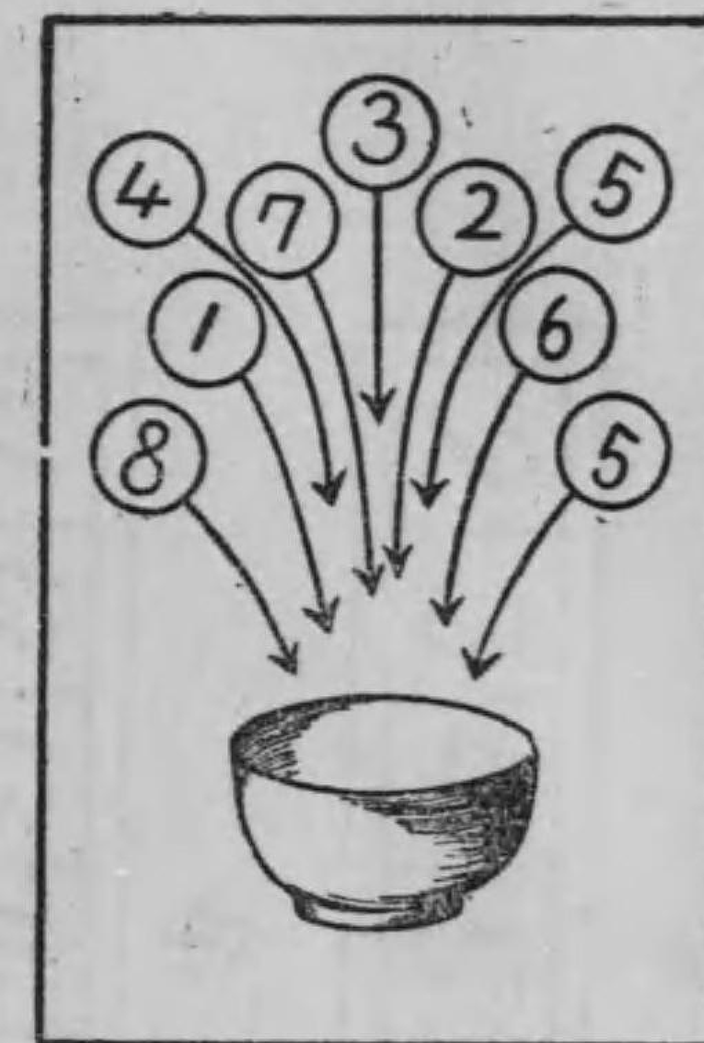
2	3	4	5	6	7	8	9	10

第三表

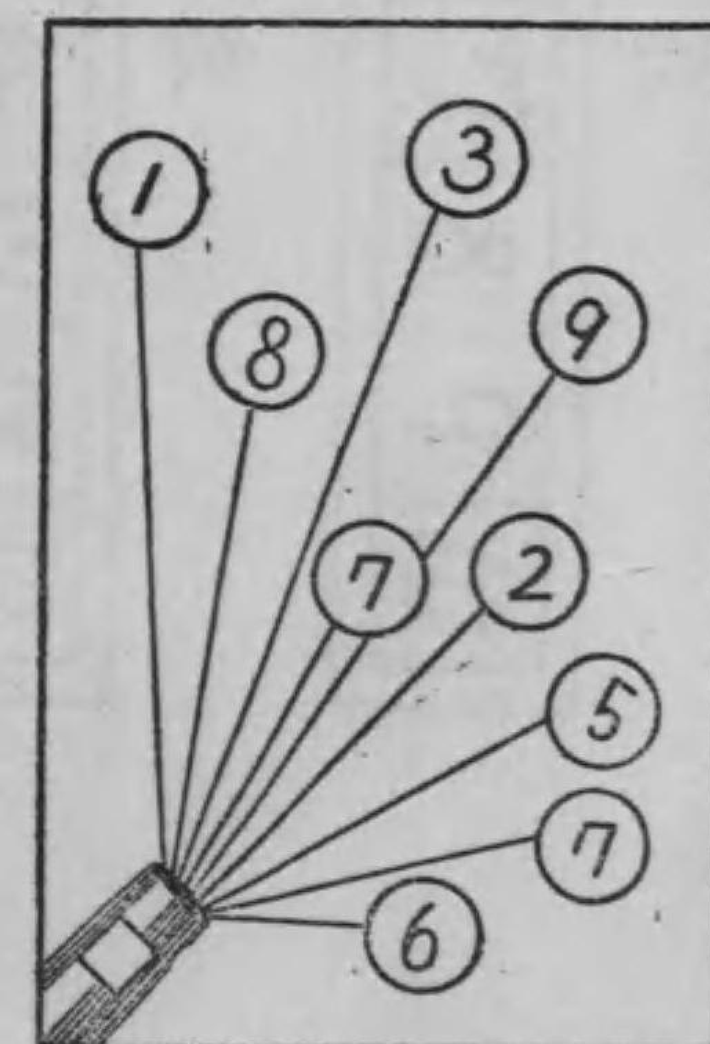
11	12	13	14	15	16	17	18	19

前表中第二・三・四表は帶布の樣にして、第一表を第二表で覆へば答のみ、第三表で覆へば乘數のみ第四表で覆へば被乘數のみ現はれないから、其の現はれない所を發見さし後、結果のみ正否を檢して練習するのである。此の形式は加減乘除何れにても採用され、結果の正否を檢する事の出來る點に於て長所を有して居る。

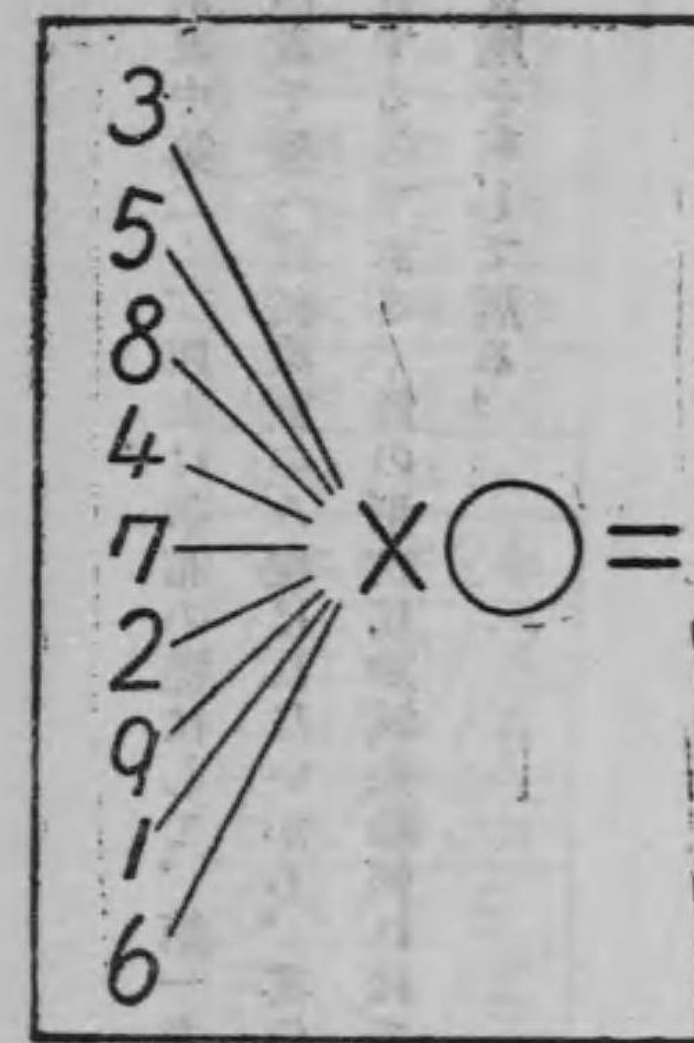
第一表



第二表



第三表



第四表

右の四表は兒童數の數倍程西洋紙に謄寫刷として、各表の空所（第一表は井中の數へ上の數の落下によつて加法に用ひ、第二表は大砲中の數より擊ち出された彈丸の數を引き去つて、減法に用ふ）に敎師の隨意の數を各兒に記入さして、計算練習を行ふのである。各表の數が兒童數の數倍あるから、種々の數を各兒に記入さして計算練習が行はれる。

謄寫する時は此の四表を西洋紙半枚に謄寫し、後各表の間を切れば一時に四枚取れて、勢力が減じ永く使用する事が出來る。

次に高學年の練習表は低學年の樣に暗算で出來る樣な簡單なるものでなく、筆算の計算であるから次に示す樣な計算カードとして練習すれば極めて能率が高い。

整數加法	第一號
(10)	(1)
(9)	(2)
(8)	(3)
(7)	(4)
(6)	(5)

右の例は加法の一例を示したのであるが、此の樣な表を整小分數加減乘除數種に就て兒童數だけ作つておき、循環的に行へば永久に使用する事が出來る。

小生の現在受持つて居る學級に此の表を用ひて居るが、其の製作法及び練習法に就いて以下少しく述べ見よう。

先づ端書型として紙質の良い鉛筆畫用紙の裏に謄寫すれば一枚の畫用紙で二枚取れるから表裏で四面程取れる。謄寫後は女兒の裁縫の時間に鋏で外緣を切り取らせば完全な練習表となる。

練習法としては前日放課後第一號と枚書しておき。練習表を表を教師机の上に出しておく。兒童は始業前數十分前に來て、此の練習表を雜記帳の上に載せて一番より五番迄の答を計算して答のみ書き次に練習表を轉倒して六番より十番迄の答を同樣に書き、全部終つたら練習表を致師机上に提出後他の學課を學習するか、出て遊ぶかするのである。次に始業十數分前又は第一時の約十分を取つて檢答するのであるが、何回も同一練習表を使用するのであるから、答を教師が讀誦すれば數分の時間を要さない內に檢答は終るのである。先づ高學年の計算力練磨としては、此の方法が時間外に出來て教師の勞力を要する事が少く最良と思ふ。

三、速度の向上法

1、確度の向上は速度に對して自信の念を與ふるもので、速度向上の第一步である。

2、計算能力は經濟をはかる

本事項に對しては新に一節を設け、第七節として詳記する。

3、速力向上表

兒童をして經過を回顧さす事は重要の事である。依て同一種類の問題に對して、速力の經過表を作つて向上を知らせば其の效果や極めて大である。

4、容易の問題に就き練習回數の增加

練習する問題が大變困難で、一題に十分も十五分も要し、又全體の練習時間が一時間も二時間も要する樣では永久に持續する事は如何しても出來ない、依て練習する問題は簡單なものでなくてはならない。分數の計算問題に至つては約す事に依て數を消化し興味を覺へるものでなくてはならない。次に重要な事は一回の練習時間が一時間を越へない事で、每回の時間を減少して回數を增加する事が重要である。

5、時間的の要求

十分間に出來るだけ計算せよ、計算し終つた時間を記入せよの樣に、一定時間に行ふ問題數、一定

の問題數を行ふに要する時間を取つて採點に時間の點數を導入する事は極めて效果が大である。

6、點讀練習

數字の讀み方を練習するもので、轉字練習の基礎となるものである。從來我國に於ては點讀練習の如き事は顧られて居なかつたが、計算速度の向上に於て重要の位置を占むるものである。

7、數字の大小

數字の大小は記數速力に重大な關係を持つものである。第三章第二節二各學年に於ける數字の高さの項に於て述べた樣に適當の數字で記數せねばならない。

8、數字の種類

速力方面から考へて、第三章第一節二の1、2で述べた樣に斜體の曲線體數字を採用する方が良い

9、方陣練習表

方陣練習表とは次に示す樣に各行・桁の數の和の一定な練習表である。是は敎師用として、又兒童用（紙質の良い紙に謄寫）として難易のもの數種を作つて、何回となく自學的に練習さすもので、自個の力相應に練習するから、速度の向上としては極めて良い。

又時には一見に對して加法として、各方眼の數字の和を順次に稱へしめ、又減法として和より各方眼の數を順次に引いた結果を稱へしめれば、程度の高い視暗算で極めて效果が大である。

6	1	8
7	5	3
2	9	4

6	8	5	7	9
7	9	6	8	5
8	5	7	9	6
9	6	8	5	7
5	7	9	6	8

2	4	1	3	5
3	5	2	4	1
4	1	3	5	2
5	2	4	1	3
1	3	5	2	4

4	6	3	5	7
5	7	4	6	3
6	3	5	7	4
7	4	6	3	5
3	5	7	4	6

四、檢答

以上計算力の確度に於て、速度に於て其の向上練習方法に就て述べた。然し今一歩重要である事は結果の整理、即ち檢答の方法である。此の檢答方法の適不適は、兒童今後の練習效果に甚大の影響を及ぼすものであるから、最も留意して行はねばならない。計算の結果をグラフに現はすとか、順位を決めるとか、自己の向上の經過を眺めさすとか、種々の方法に依て、彼等の競爭心、又は興味を利用し變化をつけて、日々の計算を練習さゝねばならないが、其の根元である檢答の方法に就て少しく述べて見よう。

1、板上檢答

此の方法は主として、新提示の場合の形式算應用問題の時行ふ方法であるが、形式算の練習の場合

に於ても、共通の缺點を訂正、算法の復習劣等兒の救濟の點に於ては效果が大である。

2、口唱檢答

結果の正否のみを檢する點に於ては最も簡便で、時間を要する事が小であるから、形式算の大部分の檢答は此の檢答に依らねばならない。然して此の檢答は教師の行ふ場合（答の準備必要）と兒童の口唱する（机の順に行ふ場合と指名口唱に依る場合）と二種ある。

3、簿上檢答

教師の行ふ簿上檢答は試驗と稍等しい效果のあるもので、兒童各自の能力、學級能力、共通の缺點長所を知る事が出來、此の爲に兒童は數字を正確に雜記帳を奇麗に書く等最も效果の大な方法である然し机間巡視の場合行ふ外は全部教授時間外に行ふ方法で、教師の勞力を要する事が極めて大である又粗略な簿上檢答は何の效果なく反對に害の伴ふものであるから、注意せねばならない。

次に兒童の行ふ簿上檢答は、優兒をして教師に代らしめて行ふ方法で、口唱檢答に比して極めて良結果を得るものである。然し兒童をして教師の位置に立たすのであるから、父兄又は兒童間に不信任等の事件の起る場合は絶體に行ふ事は出來ない。

4、自己檢答

此の方法は自己自身に於て行ふのであるから、特定の時間を要せず、文部省の算術教科書末に答を附した趣旨にも合して、自學自習の訓練が養はれ復式教授等に於ては最も良い方法である。殊に既成の答にたよらず檢算に依る自己檢答は最も效果の大な方法である。然し一面劣兒は行ふ場合に困難の箇所起り、檢答が不正確となり、兒童は自己の結果を教師に知られる機會が無いから、惰氣を生じて能率を減退する缺點がある。

5、相互檢答

此の方法は出來た兒童が二人以上數名自己の計算を持寄つて、互に檢答し合ふ方法で、相互競爭心を増發し、時間は經濟的となつて教師の勞力を要する事の少い、極めて良い方法である。然し一面劣等兒には出來兼ねる點と喧噪に陷り易い點に於て缺點を有して居る。

以上述べた檢答方法の適用を誤らない樣に行へば整理の方法に就て確に成功する理である。

第七節　計算に於ける能力經濟

一、社會組織と能力經濟

現代の生産社會を考察して見ると、少しでも勞力を少くして廉價な成品を作り、少しでも時間を短

縮して其の能率を高める事に努力して居る。此の意味よりして種々の機械器具の發明・發見、方法の變化改良は其の度を加へ教育を進めて、能率ある人を造るべく、時間に於て、勞力に於て、場所に於て作業の經濟的方面へと順次進歩して行きつゝある。

二、計算に於ける能力經濟の機械化されて居るもの

以上述べた事に依て見ると文明の進歩する事は、一定時間の能率を高める事に外ならない。我等の日々行つて居る計算も、本章第一節三計算に於ける發生的過程の項に於て説明した樣に、結果記憶に依る加法や、乘法九九、其の他面積・體積の求積公式等に依る計算は皆能力經濟の點からして、機械化されて居るものである。然し本節に於ては是以上の能力經濟は如何る點に存して居るかと云ふ事に就て述べて見よう。

三、直ほ一歩の能力經濟

由來此の點に就て、我が國の算術教科書は著しく缺點を有して居るものである。外國の教科書を見ると特別に簡便法（short mesod）の章が設けてあつて此の點に就て詳細に述べてある。今次に少しく述べて見よう。

1、加法計算途中十に補加

次例に依て示す樣に上より順次計算せず、十に補加する樣に計算を進行する。

$$\begin{array}{r}7\\2\\3\\8\\5\\4\\+\,6\\\hline\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{r}3\\3\\3\\4\\8\\9\\+\,2\\\hline\end{array}$$

2、乘除に於ける十、百、千、一分、一厘

乘法に於て一方何れか、除法に於て除數が十百千又は一分、一厘の樣な數である時は、零を加減し又小數點の位置を變動する事に依て、其の結果を求める事は尋四算術教科書五頁に於て注意書としてある通りである。

3、暗算區域の擴張

計算の中途に於て暗算の範圍を出來るだけ擴張するのである。殊に低學年に於て $3+4=7$ の樣な場合には算式を書さず答のみ筆答、中學年の加減に於て黑板又は教科書の運算形式として提出されたものは、前同樣に答のみ筆答する樣にせねばならない。

4、計算形式の變更

次に示す樣に暗算に依て、容易に出來難い計算も、其の形式を變更する事に依て、暗算で行ふ事が

出來るのである。

$25\times28=50\times14$　　$36\times15=36\times10+36\times10\div2$

$57\times50=57\times100\div2$　　$37\div25=37\times4\div100$

$18\div50=18\times2\div100$　　$29\div33\frac{1}{3}=29\div100\times3$

$33\times12\frac{1}{2}=33\times100\div8$

5、十・百・千……に近い數の乘除

$\begin{array}{r}24\times9\\-24\\\hline\end{array}$　二十四の九倍の時は直ち二十四より一桁下げて二十四を引けばよい。次の例も同樣である。

$567\times999=\begin{array}{r}567000\\-\ 567\\\hline\end{array}$　　$78\times11=\begin{array}{r}780\\+78\\\hline\end{array}$

$36\times98=\begin{array}{r}3600\\-\ 72\\\hline\end{array}$

6、何十・百・千……に近い數の加減

$399+241=400+241-1$　∴三百九十九に二百四十一を加へる事は暗算でやれば隨分困難である、然し四百に二百四十一を加へて後一を減せば何の造作なく出來るのである。次の例に於ても同樣である

$443+897=443+900-3$　　$7854-5982=7854-6000+18$

7、等差級數の和

等差級數の和は中數と項數の積に等しい事を利用し、順次に加へて結果を得る樣ではならない。

8、加減乘除の交換・結合・分解

次例に例す樣に交換・結合・分解（次章參照）の法則に從つて不完全數となる樣に計算すれば、容易に結果を求める事が出來る。

$24-6-4=24-4-6=24-(6+4)=24-4-2-4$

$32+2+18=32+18+2=32+(18+2)=32+(2+8)+10$

$125\times5\times8=125\times(5\times8)=125\times10\times8\div2$

$7\times5\times8\times4\times2=(8\times5)\times(4\times2)\times7=(5\times2)\times(8\times7)\times4\cdots$　此の場合の計算は分數計算の場合最も多く經驗する事であるが、順次に積を求めればとても暗算では出來ない、然し其の順序の交換は容易に暗算で解決することを得るのである。兒童の計算經路に就て委細に調査して見ると此の樣な場合に於て能力を不經濟に使用して居る事に驚くのである。

$35+12\div5=35\div5+12=35+(5\times12)=35+6+10$

又次に示す樣に分數の計算に於ては順序を変換すれば容易に出來るが、其のまゝで行ふと整數より借りて來たり、假分數を帶分數に直したりせねばならないから、時間を多く要する。

$3\frac{1}{5}-1\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=2\frac{1}{5}+\left(\frac{5}{5}-\frac{2}{5}\right)-1+\frac{3}{5}=2\frac{1}{5}+\frac{3}{5}-1+\frac{3}{5}=2\frac{4}{5}-1+\frac{3}{5}$

$=1\frac{4}{5}+\frac{3}{5}=1\frac{7}{5}=2\frac{2}{5}$… 順序を變へない場合

$3\frac{1}{5}-1\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=3\frac{1}{5}+\frac{3}{5}-1\frac{2}{5}=3\frac{4}{5}-1\frac{2}{5}=2\frac{2}{5}$…. 順序を變へた場合

本例の如きものは計算速力に甚大の影響を與へるものであるが、中以下の兒童に有つては仲々留意せないものである。

9、定理の理解ある取扱

三角形面積＝底邊×高さ÷2＝底邊÷2×高さ＝高さ÷2×底邊

梯形面積＝(上底＋下底)×高さ÷2＝(上底×高さ＋下底×高さ)÷2

＝上底÷2×高さ＋下底÷2×高さ＝(上底＋下底)÷2×高さ

圓の面積＝直徑×直徑×0.785＝半徑×半徑×3.14

以上示した樣に三角形・梯形・圓形の面積の求め方は種々に考察される。若し兒童が是等の求積をする場合に邊・高さ・直徑を現はす數が如何る數でも常に、最初に示した公式の外理解ある取扱を行は無かつたなれば、計算能力經濟を考へた計算と云ふ事は出來ない。例へば圓の面積を求める場合、直徑一米の時、直徑の二乘を〇・七八五倍する公式を用ふれば、何の造作なく出來るが、半徑の二乘を三・一四倍する公式を用ふれば計算能力に於て極めて不經濟である。

10、簡略なる運算形式

次例に示す樣に二日十五時三十六分十秒を秒の單名數に直す場合に眞の意義よりすれば、次の上例の樣に計算せねばならない。然し計算能力經濟からして常に下例の樣計算すべきものである。

自分は常に「兒童を早く型に入れよ、然して早く型を脱せしめよ」と云ふ事を、標語として、此の樣な教材を取扱つて居る。卽ち最初兒童に此の計算方法を敎授する時は、其の繁雜を顧みず計算の眞理に立脚して、敎科書に示された樣な、又次の上例の樣な型に兒童を引き入れるのである。次に一度型に入れた後は何時迄も此の型に盲從を許さず、早く型を脫す卽ち計算に於て能方經濟になる樣な運算形式を、兒童に考案さし下例を用ふ域に到達さすのである。

時	分	秒
24	60	60
× 2	× 63	× 3816
48	3780	228960
+15	+ 36	+ 10
63	3816	228970

答 228970秒

$$
\begin{array}{r}
2 \\
\times 24 \\
\hline
48 \\
\times 15 \\
\hline
63 \\
\times \quad 60 \\
\hline
3780 \\
+ \quad 36 \\
\hline
3816 \\
\times \quad 60 \\
\hline
228960 \\
10 \\
\hline\hline
228970
\end{array}
$$

答　228970秒

11、多角形の求積

一つの多角形を與へられ、其の面積を求める事を要求された場合に於て、直に幾つかの三角形に區分して求積する樣では計算能力經濟に着眼して解題したとは言ひ得ない。正方形・矩形・平行四邊形・梯形の求積法の長所を利用して、如何る形に區分すれば、測定に於て、計算に於て最も能力經濟であるかと云ふ事に着眼して取り掛る樣でなくてはならない。高二算術教科書十七頁七番は全く是を意味して提出されたものである。

第五章　四則の定則

第一節　四則の定則

一、四則定則の普遍

前章第一節三計算の發生的考察の6に於て述べた樣に、幾種もの計算を幾回となく繰り返へす内に、此の經驗は遂に四則定則を發見せしめたのである。然して此の經驗から生まれた定則は、經驗を超越した、如何なる數に適用しても可能である不易の法則卽ち四則定則の普遍として、計算に又計算推理に或一新生命を與へたのである。

二、四則定則の種類

四則の定則を分類して見ると、次表の樣に三定則となる。

1、加法交換定則
2、減法交換定則
3、加減法交換定則

四則三定則

- **交換定則**
  - 4、乘法交換定則
  - 5、除法交換定則
  - 6、乘除法交換定則
  - 7、特殊の場合の交換定則
- **結合定則**
  - 1、加法結合定則
  - 2、減法結合定則
  - 3、乘法結合定則
  - 4、除法結合定則
  - 5、特殊の場合の結合定則
- **配分定則**
  - 1、加乘法の配分定則
  - 2、減乘法の配分定則
  - 3、加減乘法の配分定則
  - 4、加除法の配分定則
  - 5、減除法の配分定則
  - 6、加減除法の配分定則

右表に示した樣に十八種の種類に分類して、考察する事が出來る。今次に其の各に就て、說明を略記して見よう。

三、加法の交換定則

定則：：二つ以上の數の和は其れ等の數の順序を、如何樣に換へても、其の結果は不變である。

加法の交換定則は加數・被加數共に交換する場合と、加數のみの交換の二種の場合がある。

1、加數・被加數相互の交換

$a+b=b+a$ の場合で此の定則の理解は極めて容易である。即ち二數なれば、a を b に加へても、b を a に加へても結果は不變である。又三數以上であれば、其の順序を如何樣に換へて集合を作つても結果は不變である。

2、加數のみの交換の場合

$a+b+c=a+c+b$ の場合で、或數に或幾つかの數を續けて加へる時は、其の順序を換へても結果は不變である。即ち或數に次々或數を加へる場合には、加數の總べてを加へ終れば、順序の如何に關はらず結果は等しい。又新に作られた一數即ち和を s とすれば、s 中には加數・被加數の總べてを含み加數被加數外には何物も含まない事は、構成的の數の意味からして明である。

四、減法の交換定則

定則：：：或數より二つ以上の數を順次に引く場合には、引く順序を如何様に換へても結果は不變である。

$a-b-c=a-c-b$ の場合である。前項の加法は被加數加數何れを變換しても結果は不變であつたが減法に於ては減數の外交換を許さない。然し負數の導入は被減數前に加號があるものとして、前部の記號と共に交換すれば次項に述べる様な加減法の交換定則となつて成立する。

今此の減法の定則に於て殘數を d として a 集團を分解すれば、b, c, d の集團の集合である事は明である。依て a 集團より b を先に取り去つても、又 c を先に取り去つても殘りは常に d であるから、此の交換定則に誤りの無い事は十分理解される。

五、加減法の交換定則

定則：：或數に幾つかの數を加減する場合、計算不能にならない限り、其の順序を如何様に換へても結果は不變である。

$a+b-c=a-c+b$ の場合である。今此の正である事に就て吟味して見るに $b=c$ なれば等しい二數であるから結果の不變の事は眞である。更に b, c の關係 $b=c$ の外は常に $b>c$ 又は $b<c$ である故に $b=c+x$ 又は $c=b+x$ である。今 $b>c$ とすれば

$$\left.\begin{array}{l} a+b-c=a+c+x-c \\ a-c+b=a-c+c+x \end{array}\right\}=a+x$$

で結果の不變は明である。次に $c>b$ とすれば

$$\left.\begin{array}{l} a+b-c=a+b-(b+x) \\ a-c+b=a-(b+x)+b \end{array}\right\}=a-x$$

で何れも相等しい數を加減する事は、結果に何等の變化を與へない數理から考へて、結果の不變の事は明である。

負數を導入すれば被加減數の前に加號を附して、加減數の前の符合と共に交換すれば、其の總べてを如何様に交換しても結果は不變である。

六、乘法の交換定則

定則：：：二つ以上の數の積は其の順序を如何様に交換しても、其の結果は不變である。

$a\times b\times c=a\times c\times b=b\times c\times a=b\times a\times c=c\times a\times b=c\times b\times a$ の場合である。加法交換定則と同様に其の被乘數乘數の總べてを、如何様に交換しても結果は不變である。然し數本來の意味よりすれば被乘數と乘數の交換は不可能である。即ち加法に於ては被加數・加數共に同一種類の數であるが、乘法に於

ては全く趣きを異にする。乘數は運算數で被乘數に對し、運算法を意味する數であるから、交換する事其の事が不合理である。唯結果として抽象された數概念のみが等いのである。例へば $4人\times5=5人\times4$ に於ては整列した人數の計算に於て一列の人數を伍の數で掛ける事と、一伍の人數を列數で掛ける事に歸着するであらうが、其れは數本來の意味を變化し推理せねばならない。

次に乘數相互の交換は數の意味を變化せずして推理される。即ち $4\times3\times2=4\times2\times3$ に於て四を三回累加したものを二回累加する事及び四を二回累加したものを三回累加する事は何れも四を六回累加する事に相當するに依て結果は不變である。

七、除法の交換定則

定則……或數を二つ以上ので割る時は、其の順序を交換しても結果は不變である。

$a\div b\div c=a\div c\div b$ の場合で、以上述べた四種の交換定則に比して、最も單純なものである。$75人\div3\div5$ に於ては三等分したものを更に五等分する事は結局、十五等分 $75人\div5\div3$ に於ても同樣十五等分であるから、除法の結合定則の理からして、前項の乘法結合定則と同樣に結果は不變である。

又分數學習後に於ては $75\div3\div5=75\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=75\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}$ の乘法の交換定則として理解される。

八、乘除法の交換定則

定則……或數を二つ以上の數で乘除する時、其の順序を如何樣に交換しても結果は不變である。

$a\div b\times c=a\times c\div b$ の場合で此の交換定則の數理としての理解は、兒童に取つては極めて困難である依て此の樣に困難のものは、實物に依て實驗、圖解に依て經驗、數字に依て計算して結果の等しくなる結果からして說明するより外はない。以上述べ定則は大略數理として理解されたが、數字計算に依て結果を比較して見る事は必要である。以下述べる種々の定則に就ても數理として理解の困難のものは、實物、圖解、計算等に依て說明又理解を與へるより外はない。

九、特殊の場合の交換定則

特殊の場合の交換定則とは、加減と乘減の混合した算式に於て交換定則の成立を意味するものである。

其の結合の種類に於て八種程あるが、要約すれば皆加減の交換定則となるものである。例へば $15+4\times3+10-6\div3$ に於て三は常に運算數で四と六に對する作用を意味するもので、四と六があつて始めて生命のある數であるから、四と六から分離する事は出來ない。換言すれば乘數・除數は皆被乘數・被除數に對してのみ、乘除の意味を有すものである。若し交換すれば此の意味に反し、異る數の

意味として計算されるから、交換不可能である。依て是等のものは皆加減法の交換定則に歸着するのである。

十、加法の結合定則

定則：．．或數に幾つかの數を加へる時是等の數の和、又幾つかの數の一つに殘りの幾つかの數と或數との和を加へても結果は不變である。

$a+b+c=a+(b+c)=b+(a+c)=c+(a+b)$の場合で加法の交換定則と同樣に結果を分解して a, b, c の集合依り成つて居る事に依て、結果の不變は明である。又幾つかの數を順次に加へる過程を考察すれば、交換の定則よりして、和に對しては次々の數を加へるのであるから三數以上の和は、結合の定則として考察する事が出來るのである。

更に此の定則は「加號のみの算式に於ては何處に括弧を入れても結果不變」の事に歸着するのである。

十一、減法の結合定則

定則：．．或數より幾つかの數を續けて引く時は、是等の數の和を引いても結果は不變である。

$a-b-c=a-(b+c)$ の場合であつて、a 集團より b と c との集團を失ふことは、b, c の和に等しい一集團を失ふ事に等しい理は容易に理解される。

更に此の定則は「減號のみの算式に於ては括弧の內部の減號を加號とすれば何處に括弧を入れても結果不變」の事に歸着するのである。

十二、乘法の結合定則

定則：．．或數に幾つかの數を乘づる時、是等の數の積を乘じても、又是等の數の一數に殘りの幾つかの數と或數の積を乘じても結果は不變である。

$a\times b\times c=a\times(b\times c)$ の場合は始めの場合で a を b 個集めたものを更に c 個集める事は、b, c の積だけ集める事に等しい理は容易に理解される。次に $a\times b\times c=b\times(a\times c)=c\times(a\times b)$ の場合は第二の場合であるが、乘法の交換定則の項に於て述べた樣に、數の意味の變化に於て、矛盾はあるが數概念の等しい事に依て結果の等しい事も、前同樣容易に理解される。

更に此の事を逆に推理して見ると、$3\times 20=3\times(4\times 5)=3\times 4\times 5$ の樣に乘數を因數に分解して、乘じても結果の不變で乘號のみの算式に於て括弧の取捨は結果に影響せない事に歸着する。

以上の事は乘法計算能力經濟として、極めて有效である事は、前章三の8に於て述べた通りである。

十三、除法の結合定則

定則：：或數を二つ以上の數で割る時、其の積で割つても結果は不變である。

$a\div b\div c=a\div(b\times c)$ の場合で a を b で割つた商を、更に c で割つた商は全體卽ち a に對して bc 分の一で始めより a を b, c の積で割つた商に等しい事は容易に理解される。

次に此の事を逆に推理すると $75\div15=75\div(3\times5)=75\div3\div5$ の樣に除數の因數分解が行はれ「除號のみの算式に於ては括弧の中を乘號とすれば何處に括弧を入れても結果不變」である。此の事は前項と同樣に前章三の8に於て述べた樣に計算能力經濟に有效である。

我等は日々分數を約す時、最大公約で約すべきを幾つもの公約數で約す事は、此の處に根據を有して居る。

十四、特殊の場合の結合定則

特殊の場合の結合定則とは、以上述べた四種の結合定則が混合されて、行はれる場合である。卽ち加減相互、乘除相互の混合式に於ては、加減乘除の交換定則に依て、各同種のものを集めて結合定則を應用するもので括弧の取捨は前同樣である。

次に加減乘除の相互混合式に於ては、本節九に於いて述べたと同樣乘數と除數は他の數と同樣に、結合定則を適用する事は出來ない。

十五、加乘法の配分定則

定則：：幾つかの數の和に或數を掛ける時、其れ等の數に或數を別々に掛けて後和を求めても、結果は不變である。

$(a+b)\times m=a\times m+b\times m$ の場合で a, b の和を m 倍した結果を分解すれば a, b は各 m 個ある事は理解され、又 a の m 倍に b の m 倍を加へた集團も同樣 a, b を各 m 個有して居る事に依て此の兩結果は相等しい。

次に交換定則を適用して見れば $m\times(a+b)=m\times a+m\times b$ 卽ち或數に幾つかの數の和を掛ける時、或數に其れ等の數を別々に掛けた總和を求めても結果は不變である。此の事は前同樣結果を分解して原素 a, b の集合狀態に依て結果の等しい事は理解される。

十六、減乘法の配分定則

定則：：或一箇の數より幾つかの數を引いた結果を或數倍する時、或一箇の被減數を或數倍した結果より、幾つかの減數を或數倍した結果を順次に引いても結果は不變である。

$(a-b-c)\times m=a\times m-b\times m-c\times m$ の場合で $(a-b-c)\times m$ は減法の結合の定則よりして、a より b, c の和を引いたものを m 倍した物に等しい、更に $a\times m-b\times m-c\times m$ は同樣減法の結合定則よりして

$a\times m-(b\times m+c\times m)$となり前同樣に a より b, c の和を引いたものを m 倍したものに等しい故に兩結果は不變である。然し兒童としては此の數理の理解は困難であるから、實物・圖解・計算に依て理解さす方が良いと思ふ。

次に乘法の交換定則は $m\times(a-b-c)=m\times a-m\times b-m\times c$ で或數を幾つかの數の差で掛ける時は、或數に幾つかの數を掛けて差を求めた結果の等しい事は、前項の理解に依て自然に理解される。然し乘法の交換定則は數の意味を變更して考察する事は前同樣である。

十七、加減乘法の配分定則

定則…或一箇の數に幾つかの數を加減した數を或數倍する時は、或一個の數を或數倍した數に、其れ等の幾つかの數と或數との積を加減しても結果は不變である。

$(a+b-c)\times m=a\times m+b\times m-c\times m$ の場合で、加乘法・減乘法の組合であるから兒童の理解は容易である。

此の逆は推理として、或數を或一個の數へ幾つかの數を、加減した數で掛ける時は、或數へ其れ等の數を掛けた數を、或數へ或一個の數を掛けた數へ加減しても結果の不變である事卽ち $m\times(a+b-c)=m\times a+m\times b-m\times c$ の場合の兩結果は交換定則よりして、相等しい事は容易に理解される。

十八、加除法の配分定則

定則…或幾つかの數の和を或數で割る時、其れ等の數を或數で割つたものゝ和を求めても、結果は不變である。

$(a+b)\div c=a\div c+b\div c$ の場合で兒童は數理として一般的に理解する事は極めて困難であるから、實測・圖解・計算の證明に依らねばならない。

十九、減除法の配分定則

定則…或一個の數より幾つかの數を引いた數を、或數で割る時、或一個の數を或數で除したるのから、其れ等幾つかの數を或數で除した數を引いても、結果は不變である。

$(a-b)\div c=a\div c-b\div c$ の場合で數理としての理解は困難であるから、前項と同樣の方法に依らねばならない。

二十、加減除法の配分定則

定則…或一個の數へ幾つかの數を加減した數を、或數で割る時、或一個の數を或數で除した數へ其れ等幾つかの數を或數で除した數を、加減しても、結果は不變である。

$(a+b-c)\div d=a\div d+b\div d-c\div d$ の場合で、前二項の加除・減除法の配分定則が理解された兒童に

於ては容易に理解される。

第二節　四則定則の取扱

一、四則定則の利用

四則の定則を利用方面から考察すると、次に述べる樣に二方面がある。

一は是れ迄度々述べた樣に計算に於ける能力經濟方面へ大いに利用せねばならない事で、二は問題解法に對して實用する事である。問題解法は更に二樣に考察される。其の一は「二錢の鉛筆と五錢の筆を買つて、十錢銀貨を出せば何程の釣錢があるか」の問題に對して、尋二頃迄は $10^{錢}-2^{錢}=8^{錢}$　$8^{錢}-5^{錢}=3^{錢}$ の思考經路を辿るものであるが、尋三頃より算式が $10^{錢}-(2^{錢}+5^{錢})=3$錢 となり、更に總べての場合に減法の結合定則を自然的に、無意識的に利用して、定則として意識的に應用し、思考程度の高い問題解法を行ふ樣になるのである。

其の二は問題解法の鍵、思考經濟として代數解法が算式の上に於て數字の遊技として行はれるのである。例へば「甲數は十八である、今甲乙二數の和を五除せば三十となる、乙數は何程なるか」の問題に對して直に $(18+x)\div5=30$ の算式を組み立て、何等の思考を要する事無くして、加除法の配分定則を應用し $(18+x)\div5=30=\frac{18}{5}+\frac{x}{5}$　$\therefore 18+x=150$, $x=150-18=132$ と解題する場合である。

二、教授の方法

以上既成となつた定則の利用に就て述べたが、本項に於ては、定則教授の過程に就いて述べて見よう。

先づ國定算術書に就て見ると、尋四・十三頁に於て加法及び減法の結合定則、尋四・二十七頁に於て特殊の場合の交換定則及び乘法・除法の結合定則、尋四・七十五頁に於て加減法の交換定則、高二・六頁に於て配分定則が提出してあるが、教師は是等の總べてに於て定則として教へず資料と機會を與へて定則を導出す樣に取扱はねばならない。

尋四・二十七頁の特殊の場合の交換定則は普通、無條件に乘除を先にやるのだ、乘除が力が強いのだ（何故に強いか其の理由は不明）とか、又實際問題を作つて、（二錢の鉛筆を三本買つて十錢銀貨を出せば何程釣錢があるか」さあ一つの算式として答を出して御覽、乘法を先にやらねば答が誤るでせう類題を作つて算式を示して御覽、皆乘除を先にやらねばならないでせう。依て加減より乘除を先にするのです。」等の取扱を以て行はれるが、幼稚な兒童を對照として時には良いかも知れないけれども、前節九に於て述べた樣に先にやらねばならない、數理として根本からの理解を與へねばならない。

尋四・七十五頁に於ては交換結合定則の全部を、高二・六頁に於ては交換・結合定則を復習して配分定則の總べてを敎授せねばならない。

敎科書の提出は計算結果方面から、其の不變である事を説明する樣に成つて居るが、前節に於て述べた樣に經驗は普遍的でないから出來るだけ數の意味、數理から導出して實演・圖解・計算を附帶の説明證明とする樣に取扱ひたい。

次に注意する事は、兒童の毎日取扱つて居る計算の中に行はれて居る定則に理解を與へる事である例へば加法に於て被加數と加數の交換は、尋一・三頁よりして何等の造作無くして、三錢と五錢の鉛筆を買つても、五錢と三錢の鉛筆を買つても常に八錢を支拂ふ事として日常の計算中に行はれ、尋二・三十三頁からして 被乘數と乘數の 交換定則は 乘法九九の二三　六、三二　六として、二の三倍も三の二倍も相等しく、乘法交換定則は自然的に行はれて居る。尋一・三十五頁よりしては加法の分配定則が、減法の結合定則の逆として、基數相互の和の十一以上の場合即ち、$8+5=8+(2+3)=8+2+3=10+3=13$　又　$8+2=10$　$5-2=3$　$10+3=8+5$　として 無意識的の内に行はれて居る。又暗算形式としては尋二・五十六頁に加乘の分配定則が　$23\times3=(20+3)\times3=20\times3+3\times3=60+9=69$　として二十を三倍した數と三を三倍した數との和を求める樣に出來て居る。即ち我等日常の乘法暗算經路を心理的に考察すれば、自然の内無意識の内に、此の加乘の分配定則が行はれて居る。次に筆算としては尋三・八頁に於て $\begin{array}{r}35\\+42\\\hline\end{array}$ を機械的に行ふて居る。即ち $35+42=(30+5)+(40+2)=30+5+40+2=5+2+30+40=(5+2)+(30+40)=7+70=77$　として、一位と二位に分解して加法を行つて居る。以上の樣に、第一節に述べた種々の定則は、機械的無意識的として我等の生活に橫はつて居るものが多いから、其の最初に於てよく其の數理を考察し、理解し利用する樣に取扱ふ事が重要である。

第六章　小數

第一節　小數の發生的考察

一、小數の必要

大部分の發明・發見は其の必要に迫られて行はれるものである。小數の發生的考察を行ふにも其の必要である、根元を吟味する事が重要な一大要件である。今次に小數の必要に迫られて發見された四要件に就て述べて見よう。

1、分割の要求

第一章一節數の發生的考察七・八・九に於て述べた樣に數が測定數として、卽ち一單位を分割する必要が起り、分割後端數の處理は整數のみでは不足を告げ、此處に於て小數（分數）發明機運の第一步が現はれた。次に除法の計算の行はれる樣になつてからは、自然單位の集合を分割する時除餘の處理も前同樣に小數（分數）の必要に迫らせたのである。依て其の取扱に於ても最初小數分數取扱の第一步は此處にある事は言を待たない。

2、計算簡便の要求

前項の分割を兒童に經驗して見ると三回半、四回と三つ一の樣に分數形として（然し單數が五分の三、七分六の樣に程度の高い分數であると小數として現はれる）現はれ易いものである、又實際に於て分數から小數は發生したものである。

此の樣に端數の處理には分數を久しく利用された。然し分數は三分の二と五分の三に於て暗算では數の大小を見出す事が困難である。更に數字の發明後數字計算の利用される樣になつては、通分を要する繁雜な分數計算は不便の點が多いので、計算法の整數と一致して居る、取扱に便な小數が必要として要求された。

3、近似値の實用的要求

分數は分數其のものに於て、又其の計算に於て極めて正確なものである。然し我等人生の生活に於ては特別の場合の外は皆近似値で事が足りるので、分數の如きものより少しは不正確な數でも總べてに簡略で濟む數卽ち小數が要求された。

4、敏速、正確な數象表現の要求

數象を敏速、正確に表現しようと思へば、其の數に多くの經驗をする事が大切である。十進數の利

用されて居る場合には十、百、千…の様な數が最も多く經驗されるので、五分の二より十分の四即ち十・百・千…を分母として居る分數の方が數象を容易に表現する事が出來る。次に命數法、記數法も多く經驗する數の命數法・記數法と一致すれば、又數象を容易に表現する事が出來る。此の意味より して百分の三百五十四と分數型で示すより、〇・三五四、三分五厘四毛と整數記數法と類似點の多い小數型で示す事が便利である。

二、小數の發明

1、觀念上の發明

以上述べた分割、計算、近似値、數象等の要求から數系列系統の觀念的に一致した、即ち整數の一以上順次十進として發展行くに對して、一を十退分割とした觀念の數即ち小數觀念が發生した。此の觀念と一致して又引き續いて起るものは、此の觀念の言語的表現及び記號的表現で、該觀念に一致さす爲に命數法、記數法が考案發明されたのである。

2、命數法・記數法の發見

記數法に比して命數法は先に發生する事は二章に記したと同樣である。前項に述べた觀念時代の小數は命數法に依る言語的發表に依て始めて、小數の眞意義をなすものであるから命數法の發明の時を以て小數の發生時と認めねばならない。此の觀念は十六世紀に入つて成立したもので、西暦一五八五年 the disme と云ふ本が始めて小數の命・記數法及び其の運用に就て述べて居る事に依て、小數の起原は此の時代らしく極めて近代の事である。然して其の原祖はベルギー人のシモン、ステブアン（一五四八—一六二〇）と云はれて居る。

3、記數法の轉變

記數形式が整數形式と一致して、區別し易く計算に便利な事を目標として次に示す樣に順次轉變したものである。然し此の小數記數の發明は從來の繁雜な分數計算に一大革新を與へるもので、最初は「分數を知らずして出來る算術」等の標題のもとに隨分重大視されたものである。

$\overset{0}{5}\ \overset{1}{6}\ \overset{2}{8}\ \overset{3}{5}$　　$\underset{0}{5}\ \underset{1}{6}\ \underset{2}{8}\ \underset{3}{5}$　　$5^{\circ}6'8''5'''$　　5.6.8.5

$\underline{5|6\ 8\ 5}$　　$5|6\ 8\ 5$　　5,6 8 5　　5,3 8 5

4、國別に依る記數形式

記數の形式は以上の樣に種々轉變して來たが、現代各國に用ひて居るものも各異つて一定的のもので無い、英國に於ては 5·685 佛國及び獨國に於ては 5,635 日本及び米國に於ては 5.685 として記數して居る。然し何れに於ても最も簡易な點に依て、小數と整數を簡易に區別する樣にして居る事は共

通である。我が國に於ても小數點とコンマを混同して居た事は第二章二節記數法五の1句節の種類の項に於て述べた通りである。

5、我國に於ける小數の發生的考察

以上民族的の小數發生的考察に就て述べたが、狹い日本に就て見ると最初は秀吉の時代に明より輸入されたもので、圓周率、圓積率の樣なものも小數で表されて居た。又命數法として分厘毛……記數法として漢字に依る分厘毛……が爾後用ひられ、明治に至つてはアラビヤ數字記數法が輸入され、てより在來の珠算に依る計算を順次壓迫し、整數の筆算計算と共に發展して、小數に於ける筆算計算に一新紀元を作つた。

第二節　小數の意義

一、小數の觀念

小數とは分數の特殊の場合で、$10, 10^2, 10^3 \cdots$ を分母とした分數で、此の觀念を記數上命數上一の分割十退觀念として表現され、第一節一に於て述べた樣に分割・計算の簡略と近似値・數象表現の實用上發明された數である。

二、小數命・記數法

分割十退觀念を容易に表現する爲に各數字に場所の價値を與へた記數法である。此の記數法が數象を簡易に表現し計算を容易にする小數獨特の長所で多く利用される根元をなすものである。

卽ち 4325 と記數すれば數字の場所的に $10^3\times4+10^2\times3+10\times2+5$ を表現し、又命數的には四千(千の四倍)三百(百の三倍)二十(十の二倍)五の數觀念を表すと同樣、小數で 0.4325 と記數すれば數字の場所的に $\frac{1}{10}\times4+\frac{1}{10^2}\times3+\frac{1}{10^3}\times2+\frac{1}{10^4}\times5$ を表現し、又命數的には四分(一分の四倍)三厘(一厘の三倍)二毛(一毛の二倍)五糸(一糸の五倍)の數觀念を表現する。

次に小數命數法に就て今一歩完全を要求すれば整數命數と一致を望むのである、例へば四分と言へば一分の四倍である事は容易に表現されるが、十分の一の四倍と云ふ事は其れに伴つて表現し兼ねるのである。然し我等成人に於ては隨分經驗されて居るから其の樣の事は無いが、初學者に於ては困難である。例へば成人でも糊(次項參照)はあまり經驗しないから直に一兆分の一と云ふ事は認識し兼ねる、又「いろは」に於て「い」と云へば一番「は」と云へば三番と云ふ事は理解されるが「め」と云はれ時は分厘毛……と同樣數系統に何等の關係が無いから、繰つて見ねば二十九番と云ふ事は認識し兼ねるのである。此處に於て米法の樣に十進諸等數でもバクテリヤ的の長さを表すに、十萬分の一

粍、三千萬分の一粍と云へば數觀念として數象表現が出來るが、一微粍、三沙粍では數觀念として數象表現が出來ない依て糎等の單位が必要となるのである。此の事が小數命數法の最大缺陷で第三位の毛、第四位の糸くらい迄の單位の外は實用されない理は此の處に一大原因を有するのである。

外國の命數法は此の點に着眼して制定されて居る、即ち十百千は二章末に記した樣に制定されて、分厘毛は命數法上に於て又文字記數法上に於て單に th を附加する事に依て區別されて居る。表示すれば次の通りである。

……千　thousands
百　hundreds
十　tens
一　units
(小數點)・(decimal point)
分　tenths
厘　hundredths
毛　thousandths
糸　ten-thousandths……

0.015

三、讀數法

讀數法に就ては敎師用書等四・六十四頁にも注意書として「帶小數は四と二分五厘の如く唱へ又は小數部を棒讀として四點二五の如く唱へ又小數も零點二五の如く唱ふる事あるを授くべし」と記してあるが、其の通りで良い。一つ注意せねばならない事はコンマと小數點の混同（第二章二節五の1參照）と整數讀數法との混同である。例へば三・五二を三點五十二と云へば唯一個の時は何等の支障は無い。然し三・一二五の時は三點百二十五と讀まねばならないから數値の單位の不定からして數象が聽覺的觀念として三・五二より大な觀念が起る、依て整數の數値は末位の大なるもの、小數は一位の大なるものが數値の大なものである根本に立脚して整數讀數法と混同せない事が重大である。

四、小數の無限

1、觀念上の無限

一の分割十退數として何處迄も連續するものであるから微分的の觀念として無限のものである。

2、命數上の無限

命數上の觀念から云へば無限であるが、此の樣な無限の單位名數は實際に於て制定も出來ず實用も出來ない。今次に現在制定されて居る十六位を示して見よう。

分(一位)　厘(二位)　毛(三位)　糸(四位)　忽(五位)　微(六位)

纎(七位)　沙(八位)　塵(九位)　埃(十位)　渺(十一位)　塲(十二位)
糊(十三位)　淸(十四位)　淨(十五位)　空虛(十六位)

3、記數上の無限

記數上に於ける無限の點を考察すれば整數と全く同樣である。卽ち漢字記數は無限の觀念を有限の(前記の十六位迄)漢字でするのであるから際限がある。然し邦字及びアラビヤ數字記數は整數記數法と同樣場所の價値に依るものであるから際限無く出來る理である。

五、小數の種類

小數の種類は整數の有無よりして異小數 (0.25) と帶小數 (3.25) とに分類し、循環の有無より普通小數(0.34)と循環小數 (0.3434‥‥=0.3̇4̇) 更に循環小數は循環部分に依て純循環小數(0.3̇, 0.3̇4̇)と混循環小數 (0.345̇, 0.35̇69̇) に分類し、次に普通と無理數の關係よりして普通小數と無理數の小數 ($\sqrt{2}=1.41\cdots\cdots$) とに分類考察する事が出來るのである。

第三節　小數の計算數理

一、加減

加法及び減法に於ては整數と同樣に各桁を揃へて行へばよいので、別に述べる程の事が無いから略す事にする。

二、乘數

1、乘數が整數の場合

イ、累加に依る説明

3.4×3 の場合で累加に依て説明すれば三倍して一〇・二となる事の眞の理解・換言すれば小數點の打ち所の理解は直につく。

$$\begin{array}{r} 3.4 \\ 3.4 \\ +3.4 \\ \hline 10.2 \end{array} \quad = \quad \begin{array}{r} 3.4 \\ \times\ 3 \\ \hline 10.2 \end{array}$$

ロ、運算分解に依る説明

$$\begin{array}{r} 3.2 \\ \times\ 3 \\ \hline 0.6 \\ +9 \\ \hline 9.6 \end{array}$$

上例の樣に乘法の運算を分解して見れば何の造作も無く理解される。

ハ、整數化に依る説明

$3.2=32^{分}$ であるから $32^{分}\times3=96^{分}=9.6$ と小數の計算を一單位又は數單位程下げ整數化して、乘法

を行へば結果の正しい事は直に理解される。

ニ、假定に依る説明

3.2×3 を今 32×3=96 と假定して計算を行へば、出た結果は三・二を三倍するべきを其の十倍の三十二を三倍したのであるから、正しき結果の十倍である事は正として推理される。依て其の結果を十除すれば九・六なる正しき結果を得る事が出來る。

以上四種の説明を要約すれば、乘數が整數で被乘數が小數である場合の乘法は整數して計算した結果に被乘數の小數部と等しい桁數だけの所に小數點を打てば良い事が必然的に理解される。

2、被乘數が整數の場合

イ、交換定則利用に依る説明

13×0.2=0.2×13 と前章一節六に記した樣に交換定則に依て説明すれば、前項と同樣となる事に依て理解される。

ロ、小數の意義に依る説明

13×0.2 は小數の意義よりして、十三の十分の一を二倍、又十三を〇・二だけ集める等の小數の意義よりして其の計算數理を説明する事が出來る。

2.6

ハ、假定に依る説明

前項のニと同樣に乘數を其の小數部の一桁二桁なるに從つて十倍百倍の數に假定して、計算後其の結果を十除百除して正しき結果を求めるのである。もとより計算法の思考經路の説明として行ふので此の十除百除する事は結果の小數點の位置を乘數と等しく取ればよい説明としては最良の方法である

ニ、小數の分解に依る説明

$$13\times0.245=13\times\left(\frac{1}{10}\times2+\frac{1}{100}\times4+\frac{1}{1000}\times5\right)=13\times\left(\frac{1}{1000}\times200+\frac{1}{1000}\times40+\frac{1}{1000}\times5\right)=13\times\left(\frac{1}{1000}\times245\right)=13\times245\times\frac{1}{1000}=13\times245\div1000$$

と分解すれば小數點の位置の理解は直につく。

ホ、計算推理に依る説明

計算經路は整數と等しいから其の結果に小數點の位置を何處に決定するかと云ふ事を計算推理に依て決するのである。卽ち 394×8.24 に於て整數として計算すれば 394×824=324656 となる。今此の結果の小數點の位置を見るに三百九十四の一倍は三百九十四、十倍は三千九百四十である。依て正しき結果は三百九十四の八倍餘であるから三百九十四と三千九百四十との間の數である事が理解される。故に正しき結果は三千二百四十六と五分六厘で小數點の位置は自然に理解される。