.64

新課程標準適用

高中三角學

全一冊

編者 余介石

上海中華書局印行

編輯要旨

1.本書以教育部頒布的高中普通科課程標準爲依據,并加入其他適當教材,和本局出版的新課程標準適用初中算學教科書,程度緊相銜接,極適合高中之用.

2.本書共分七章,148頁,內有習題三六.按教育部課程標準,高中教授三角時間,約共有50小時之譜;每小時約授3頁,每週有習題二次,足資練習.

3.本書依據學習心理,排列教材,由淺入深,并將互相關聯的教材集於一處,反復申說,使學生的注意集中,增加練習的機會,而達到純熟的目標.

4.本書第一章論銳角三角函數的應用,將初中已習的數值三角,加以系統的複習,并爲全書作一總綱.以後六章,共分三段,第二,三兩章,研究廣義的三角函數,討論其性質以及公式的變化,是爲三角學的基礎.第四,五兩章,詳述三角形性質和實際應用問題,以明三角學的效用.第六,七兩章,以角的觀念爲中心;自弧度法入手,論及造表法,各表精密度,以及小角等的計算問題,是爲第六章;第七章則由函數值定角,以立

反函數的意義而論三角方程式的普遍解.故全書以角,函數,三角形性質三基本事項,分成三單元,爲中心編制,俾初學習畢後,對於三角學一科,易得一條理明晰的概念,并可了然於全部教材互相聯絡及闡發的關鍵.

5. 本書各習題,是書中極重要的一部份,選擇和分配,都經過愼重的考察,務使已習過的理論和方法,都在習題中遇着應用的機會,以爲理解的幫助.各題均按難易次序排列,由淺入深,其中難題,可引起學生向上探求的興趣,養成自動研究的習慣.

6. 三角與代數,幾何等科,關係頗爲密切,本書對各科聯絡的地方,極爲注意,力求與本局出版的新課程標準高中幾何,高中代數等書,互相貫通.如第四章三角形性質中,論三角形各相關圓半徑公式,足爲研究幾何的幫助.第三章中複角函數公式,多於習題中指示幾何的證法;其中論恆等式以及第七章論三角方程式,均可與代數恆等式方程式等問題比較.如此可助學生認識算學全體的和諧性,而易於融會.

7. 高一學生程度每不甚整齊,故本書編制,採取極有彈性的方法.如學生在初中時,不甚了解數值三角,則宜詳授第一章,而略去本書中附有星號各節,如此可省去全書五分之一,且均係較難部分的補充教材(即不在課程標準訂定各項

(天)

以內者),則學生自易了解,而全書不至有不及授完之虞.其補充教材,可指定班中程度優良學生,自行研習.如班中學生均甚優良,則第一章可作爲初中數值三角的複習,而詳授附有星號的各部分或一部分.故程度較劣的學生,習本書尙可循序漸進,高材生仍有發展才力的機會,建立優良的進修基礎.

8. 三角式的變化(即恆等式推演)在高等算學中,應用甚大,而初學對此,每感困難.本書就三角函數獨立性以揭示證法的主旨,并詳述各種基本證法,庶學生得明瞭本問題意義的所在,洞悉馭題的要領,不至有茫無頭緒的感想.

9. 反三角函數,也是初學極難了解的一部份,故列於最後一章,其中說理透澈,論證嚴謹,頗與一般坊本不同,讀者如能細心研習,大可助其精進.又本書除此一處外,編制次序,皆與江蘇省教育廳頒布的高中算學科進度表相同.如欲照該表教授,則只須將本書第六七兩章次序調換即可,對於教學上,毫無不便的地方.

10. 三角學的實際應用極廣,本書除第五章專論三角形解法和應用外,更於第一章第六章中,羅列許多相關的應用題,附以多數習題,以資練習.又因計算題繁而易誤,故詳述布算的方式和手續;并討論算表的精密程度的實際情形和其理論,以求學生有嫻熟整潔的計算技能,且知如何使結果精

(天)

密合度.

11. 三角計算,以對數爲最要工具,故著者另編五位算學用表一冊,與本書相輔而行,以便檢查.又對數原理屬於代數範圍,插入正文中,恐妨敎材的聯絡,故將對數原理和檢表方法,列於五位算學用表內,以作說明.敎師可斟酌學生的需要,而定敎學的方法.如因學生在初中學習過代數,已能熟嫻對數的計算,可就那表稍作練習後,卽令其用對數解習題二中各題.否則應在習題一前講授三角函數表檢查法,習題二各題以用眞數計算爲宜.對數計算,可待至第五章內講授.

12. 三角函數造表法,原以用無窮連級數計算爲便.但無窮連級數的斂散性,須學過高等代數的,方可明瞭.又展三角函數爲連級數的方法,不但高一學生不易了解,且須先講過二項式定理與棣美弗(De Moivre)定理,涉及的問題太多,故本書改用辛普孫(Simpson)方法.這法雖非實際上所用,但在高一敎授造表法的目標,不過是略示表的由來,並非要學生去自行造表.就這一方面看來,則辛氏方法較爲適宜.

13. 三角級數,對初學頗難求其領悟,且爲部頒課程標準所未載.本書不欲立異以爲高,故未論及.

14. 本書編輯時,深得下列各書的幫助:

(1) Hobson: Plane Trigonometry.

（六）

(2) Hall and Knight: Elementary Trigonometry.

(3) Lock and Child: A New Trigonometry.

(4) Brink: Plane Trigonometry.

(5) Granville: Plane Trigonometry.

(6) Chauvenent: Plane and Spherical Trigonometry.

(7) Todhunter: Plane Trigonometry.

(8) Loney: Elements of Trigonometry.

(9) C. Bourlet: Leçons de Trigonométrie rectiligne.

(10) E. Borel: Trigonométrie, Second Cycle.

(11) 武田建清: 三角問題解法及其着眼點.

(12) 林鶴一: 三角方程式.

(13) 長澤龜之助: 三角法辭典.

(14) Chamber: Seven Figures Mathematical Tables.

(15) Holman: Computation Rules and Logarithms.

又承友人李修睦先生等助編,并在南京市立第一中學,鍾英中學,匯文女中等校試教數次,合并附志,以表謝忱.

(15) 本書每頁皆自成起訖,以便初學研閱.

(16) 本書問題另編有解答,但只能售與教師,購閱者須由校中正式具函證明,方可發售.

(六)

(17) 本書編時,雖曾參考名著多種,并據友人在各校試

敎的結果,加以改訂,始行付梓,但恐疵謬仍所不免,切盼海內方家,各校教師嚴加指正,以便隨時改正.如蒙賜敎,請寄南京鍾英中學內中等算學研究會轉編者收,無任感謝.

民國二三年四月編者謹識,

時於國立中央大學算學系.

新課程標準適用高中三角學

目次

第三章

三角恆等式

第四章

三角形性質

第五章

三角形解法及應用問題

新課程標準適用

高中三角學

第一章

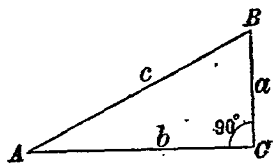
銳角的三角函數和應用

1. <u>銳角的三角函數</u> 設直角三角形 ABC 中,在 C 處的角爲 $rt.\angle$,則在他二角都是銳角.今以 a, b, c 記 $\angle A, \angle B, \angle C$ 各角對邊,則得定義如下:

$$\sin A=\frac{a}{c},\quad \csc A=\frac{c}{a},$$

$$\cos A=\frac{b}{c},\quad \sec A=\frac{c}{b},$$

$$\tan A=\frac{a}{b},\quad \cot A=\frac{b}{a},$$



這六個比值,叫做 $\angle A$ 的**三角函數**.注意上列六函數中,同一橫列者,兩兩互爲逆數.

註 sin, cos 等依次爲 *sine, cosine, tangent, cosecant, secant, cotangent* 的簡寫;譯名各爲**正弦,餘弦,正切,餘割,正割,餘切**,在此須緊記上面各式左端,是一整個符號,并非 sin 乘 A 等的意思.

注意 因直角三角形中,弦爲最長邊,故可知這裏所說的六函數中正餘弦的值必小於1,正餘割值必大於1,而正餘切值可以任意.

一銳角與各函數值,可由三角函數表*互求.

2. 餘角的函數　直角三角形中,二銳角互爲餘角.按上節所述定義,即可知

$$sinB=\frac{b}{c}=cosA,\qquad cosB=\frac{a}{c}=sinA$$

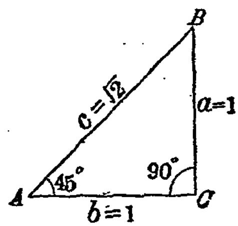
即　$\sin(90^\circ-A)=\cos A,\quad \cos(90^\circ-A)=\sin A.$

同理　$\tan(90^\circ-A)=\cot A,\quad \cot(90^\circ-A)=\tan A.$

$\sec(90^\circ-A)=\csc A,\quad \csc(90^\circ-A)=\sec A.$

所以一銳角餘角的三角函數,等於其相當餘函數.這理即餘弦等函數命名的原因.

3. 特殊角三角函數　在一般情形,銳角的三角函數,多不能由加,減,乘,除及開方算出;我們只能查表得其準到幾位小數的差近值.這種表的造法,容後述及.今先按幾何學的理,求能以有理數或根數表示的幾種特殊角三角函數值.



(一) **45°的三角函數**　作一等腰直角三角形 ABC,則 $a=b$;更設其長爲單位,則按畢氏定理.

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

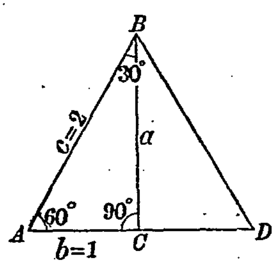
*銳角與其各函數值互求法,已在初中數值三角裏講過.初學如尚未十分熟嫻,可就本局出版的五位算學用表,按表中說明,稍作複習,即不難明白.

$$\therefore\quad \sin45^\circ=\frac{a}{c}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2},\quad \csc45^\circ=\frac{c}{a}=\sqrt{2},$$

$$\cos45^\circ=\frac{b}{c}=\frac{1}{2}\sqrt{2},\quad \sec45^\circ=\frac{c}{b}=\sqrt{2},$$

$$\tan45^\circ=\frac{a}{b}=1,\quad \cot45^\circ=\frac{b}{a}=1.$$

(二) **30° 和 60° 的三角函數**



作等邊三角形 ABD,使各邊長爲2單位.自 B 作 AD 的垂線 BC,則按幾何學易知在直角三角形 ABC 中,

$$\angle A=60^\circ,\quad \angle B=30^\circ,$$
$$c=2,\quad b=1,$$

且 $a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$,故

$$\sin60^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3},\quad \cos60^\circ=\frac{1}{2},\quad \tan60^\circ=\sqrt{3},$$

$$\sin30^\circ=\frac{1}{2},\quad \cos30^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3},\quad \tan30^\circ=\frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

註 其餘三個函數值,不難自求.

爲便於記憶起見,可將上面所得結果,列爲下表:

A	30°	45°	60°
$\sin A$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\cos A$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$
$\tan A$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$

注意 第一橫列各根號內數,依次爲1,2,3;第二橫列反之;以第二橫列內數除第一橫列內相當數,則得第三橫列各數.

習題一

求下列各角的正弦,餘弦,正切,餘切諸函數值:

1. $14°43'$. **2.** $51°46'$. **3.** $44°26'$.

4. $31°59'$. **5.** $58°17'$. **6.** $74°32'$.

7. $41°1'$. **8.** $8°6'$. **9.** $35°55'$.

已知下列各函數值,求 $\angle A$:

10. $\sin A=0.67666$. **11.** $\cos A=0.74002$.

12. $\tan A=0.18895$. **13.** $\cot A=0.78269$.

14. $\sin A=0.62083$. **15.** $\tan A=1.8006$.

16. $\cot A=40.436$. **17.** $\cos A=0.00495$.

18. 如何可以求已知角的正割和餘割?

19. 如何可由已知正割或餘割值求角?

20. $\sin(A+B)$與$\sin A+\sin B$是否相等? ≠

$2\tan A$等於$\tan 2A$麼? ≠

已知直角三角形 ABC 中二邊的值如下,求 $\angle A$ 的各三角函數:

21. $a=8,\ b=15$. **22.** $a=12,\ c=13$.

23. $c=m^2+n^2,\ b=m^2-n^2$.

24. 設 $\angle A$ 為銳角,而 $\sin A=\cos 4A$, 求 $\angle A$.

求下列各式的數值[式中 $\tan^3 45°$ 表 $(\tan 45°)^3$,餘做此]:

25. $\tan^3 45°+4\cos^3 60°$ **26.** $2\csc^2 45°-3\sec^2 30°$.

27. $\cot 60°\tan 30°+\sec^2 45°$. **28.** $2\sin 30°\cos 30°\cot 60°$.

29. $\cos 60°-\tan^2 45°+\frac{3}{4}\tan^2 30°+\cos^2 30°-\sin 30°$.

4. 直角三角形解法 一直角三角形除直角外，尙有其他五元素，卽二銳角與三邊，如已知一邊及他一元素，則其餘三元素都可算出。這種求定未知元素的方法，叫**解直角三角形**。解法所用的公式，爲

(一)三角函數定義(見 §1)，

(二)$A+B=90°$ (卽三角形內角和定理的特例)，

(三)畢氏定理: $c^2=a^2+b^2$.

例一 $rt.\triangle ABC$ 中，$c=21.33$, $A=32°20'$, 求 B, a, b.

解 (一)求 B. $B=90°-A=90°-32°20'=57°40'$.

(二)求 a. $a=c\sin A=21.33\times0.5348=11.41$.

(三)求 b. $b=c\cos A=21.33\times0.8450=18.02$.

例二 $rt.\triangle ABC$ 中，$a=10.2$, $b=18.3$, 求 A, B, c.

解 (一)求 A. $\tan A=\frac{a}{b}=\frac{10.2}{18.3}=0.5574$.

$\therefore\quad A=29°8'$

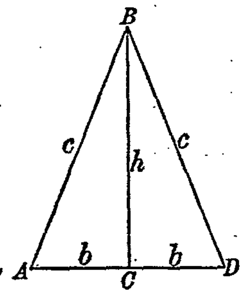
(二)求 B. $B=90°-A=90°-29°8'=60°52'$.

(三)求 c. $c=\frac{a}{\sin A}=\frac{10.2}{0.4869}=20.9$.

注意 如用五位表，對末位可用四捨五入的規約，略去末位。凡題中**已知長取四位有效數字時，角的值應準到每 1′**。這時用五位表，可省推值法的手續，這二種量相當準確度情形，由五位表卽可看出。因二個四位有效數字的數，末位相差爲 1 時，其五位對數值相差在末兩位，與 8° 到 81° 各角每差 1′ 時，五位函數值相差的情形相當。

由上述的理,又可知已知長取五位有效數字時,角的值應準到每$\frac{1'}{10}$.

5. 等腰三角形解法　自等腰三角形項點作底上的垂線,即可分成二個全等直角三角形,而得依上節方法求解.

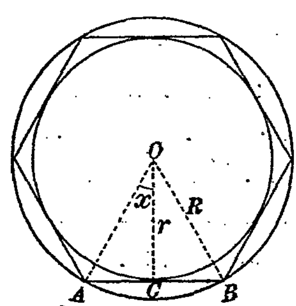


右圖中$BA=BD$, $BC\perp AD$,設$BC=h$, $AC=CD=b$, $BA=BD=c$.則有$\angle A+\frac{1}{2}\angle B=90^\circ$, $\cos A=\frac{b}{c}$,

$$h=\sqrt{c^2-b^2}.\ 或\ b\tan A\ 或\ c\sin A,$$

$$\triangle ABD=\frac{1}{2}h\cdot 2b=hb,\ 或\ b^2\tan A\ 等公式.$$

6. 正多角形解法　由幾何學的理,知正多角形有一外接圓與內切圓,且這兩圓同心,其心叫做正多角形的心.過各項點,作外接圓半徑(叫正多角形的項心距),分成若干全等等腰三角形.再作內切圓半徑,使過各切點,又分各等腰三角形爲直角三角形.所以正多角形可歸於直角三角形求解.



註　頂心距爲 R,邊心距爲 r,中心角 $\angle AOB$ 爲 $2x$,每邊長爲 s,邊數爲 n,周長(即各邊總和)爲 p,面積爲 S,則有下列各式:

$\because \tan x = \frac{\frac{s}{2}}{r} = \frac{s}{2} \times \frac{1}{r} = \frac{s}{2r}$

$$x=\frac{180^\circ}{n},\qquad p=ns,\qquad s=2r\tan x,$$

$$r=\frac{1}{2}s\cdot\cot\frac{180^\circ}{n},\qquad R=\frac{1}{2}s\cdot\csc\frac{180^\circ}{n}.$$

$S=\frac{1}{2}nrs$

or $S=\frac{pr}{2}$

習 題 二

解下列各直角三角形:

	A	B	a	b	c	面積
1.			27.46		38.82	
2.				50.46	84.23	
3.			81.48	72.19		
4.	65°3′		14.92			
5.	40°0′			1.927		
6.		21°16′			348.1	
7.			0.3014			0.06108
8.					8.887	2.404
9.		40°42′				725.5

提示　末二題須用聯立方程式,先求 a 和 b.

10. 已知等腰三角形頂角爲 55°24′,底長爲 16.48,求餘件.

11. 已知等腰三角形底長 30.17,面積爲 450.6,求餘件.

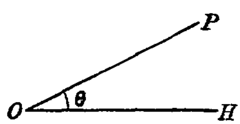
12. 已知正七角形周長 80.05,求餘件.

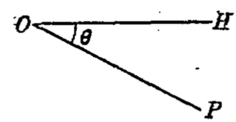
13. 已知正九角形頂心距長17.54,求餘件.

14. 已知一正十八角形面積爲307.7,邊長3.472,求餘件.

15. 已知一正多角形邊心距爲16.52,頂心距爲20.42,試求餘件.

7. 俯角與仰角　一人自 O 點望見 P 處的目標.在含視線 OP 的垂面(卽與水平面垂直的平面)內,作水平線 OH(卽與水平面平行的直線),則 $\angle HOP$,當 P 點高

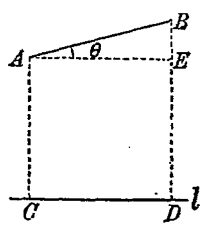




於0時,叫仰角;低於0時,叫俯角.

8. 射影　自線段 AB 二端作另一直線 l 上的垂線,交於 C 與 D,則 CD 叫做 AB 在 l 上的射影.設 AB 與 l 所成的角爲 θ,則有

$$CD=AE=AB\cos\theta$$



設 AC, BD 爲至一平面上的二垂線,C 與 D 爲垂線與平面交點,則 CD 叫做 AB 在這平面上的射影,AB 與這射影所成角,叫做 AB 與這平面的交角.

9. 傾斜度 一斜線或平面與水平面所成角,叫做這直線或平面的**傾斜度**.設循線前進,如漸次昇高,則記其傾斜度爲正;如漸次降低,則記之爲負.

10.線的距程與方位 自線段一端,到過他端直線(即水平面的垂線)上距離,叫**水平距離**或**距程**.由這定義,可知距程實即一線段在水平面上的射影.

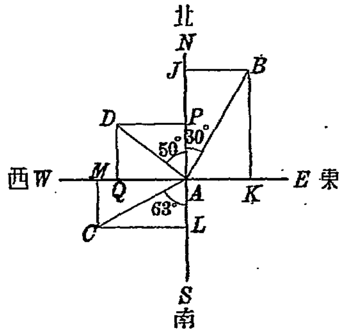
直線的**方位**,即指其與南北向直線所成角.記這角時,先記出南或北,再記度數.末後記偏東或偏西.

例 右圖中

AB 的方位,是北 $30°$ 東,

AC 的方位,是南 $63°$ 西,

AD 的方位是北 $50°$ 西.



11.線段橫距,與縱距,直程 一線段的東西向距離,叫**橫距**,南北向距離,叫**縱距**.橫距偏東爲正,偏西爲負.縱距北向爲正,南向爲負.

例 上圖中,AB 的橫距爲 AK,縱距爲 AJ,都是正的.
AD 的橫距 AQ 是負,縱距 AP 是正.

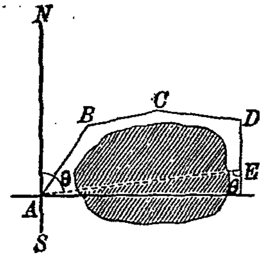
橫距和縱距的絕對值如下:

橫距長 = 線段長 × 方位的正弦

縱距長 = 線段長 × 方位的餘弦

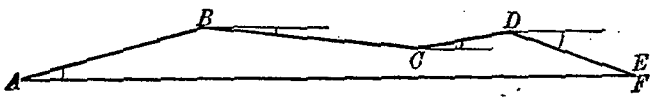
測量時如遇障物,則須繞道以達終點.聯始終二點的直線段,叫直程.

如右圖折線 $ABCDE$ 為繞道測得各段的長,AE 是這折線的直程.



已知各段長和傾斜度或縱橫距,則可求得直程,今舉二個例題如下:

例一　就下表中各段長和傾斜度,求直程 AE.



線　段	長(尺數)	傾斜度	距　程
AB	95.27	$+15°24'$	91.85
BC	109.32	$-5°16'$	108.86
CD	46.28	$+8°13'$	45.80
DE	62.84	$-18°43'$	59.52
AE			306.03尺

AB 線段的距程 $=95.27\cos 15°24'=91.85$. 其餘各距程求法倣此.

如分求各線段的縱距,而求其代數和,則可求得 E 點較 A 點高出 1.63 尺.

例二 就下表中各線段長和方位,求直程 AE 的縱距,橫距和方位(圖見 §11 中).

線段	長(尺數)	方位	縱距		橫距	
			+	−	+	−
AB	147.6	北33°12′東	123.5		80.8	
BC	101.5	北79°28′東	18.5		99.8	
CD	86.2	南72°34′東		28.8	91.8	
DE	81.6	南 8°14′東		80.7	11.7	
總線AE	285.9	北83°28′東	142.0 32.5	109.5	284.1 284.1	

就線段 AB 論,其縱距為 $147.6\times \cos 33°12'=123.5$,

橫距為 $147.6\times \sin 33°12'=80.8$

其他線段的縱橫距算法倣此.

AE 的縱距為 $142.0-109.5=32.5$

直程 AE 的方位 θ, 由 $\cot\theta=$ 縱距/橫距 $=\dfrac{32.5}{284.1}$ 求出,得

$\theta=83°28'$. 故 AE 的長是

$$l=\text{縱距}/\cos\theta=\frac{32.51}{\cos 83°28'}=285.9$$

習題三

1. 放紙鳶的繩長 625 尺,其仰角為 32°20′, 求其高.

2. 測量者所用儀器,高於地面 4.7 尺,又距一直立旗竿 187.3 尺.自這儀器測得竿頂仰角為 16°42′, 求竿長.

3. 塔頂上立一旗竿,自平面上距塔底 221 尺處,望見竿頂的仰角爲 $19°15'$, 塔頂的仰角爲 $15°40'$, 求竿長.

4. 自樓窗望一塔頂的仰角爲 $21°35'$, 望這塔底的俯角爲 $32°20'$. 如窗與塔的水平距離爲 123 尺,求塔高和窗高.

5. 水上二浮標與一懸崖同在一直線上,而崖高出水面 282 尺.自崖頂望見二浮標的俯角,各爲 $42°25'$ 與 $37°15'$, 求這浮標間距離.

6. 一鐘分針長4.5寸,在三點10分時,連時分二針尖的線,恰好與時針垂直,求時針的長.

7. 已知一等邊三角形,邊長 2 寸,求其內切圓與外接圓的半徑.如一等邊三角形面積爲 300 方寸,求其內切圓與外接圓面積.

8. 自飛機降落場內望見一下降飛機的仰角爲 $22°$, 歷 90 秒後,這機依直線斜飛,落在場內.如飛機的速度爲每小時 40 英里.求其初見時的高.

9. 一船泊於近橋處,自船上高出水面 15 尺處,望見橋頂的仰角爲 $39°12'$, 頂在水內倒影的俯角爲 $54°21'$, 求橋高出水面尺數,和船與橋的水平距離.

10. 一飛機在空中平飛離開一站,其速度爲每小時 80 英里.先在站中望見其仰角爲 $41°2'$, 過半小時後,望見其仰角爲 $24°58'$, 求飛機的高.

自下列各組已知件,求水平距離,并求終點高於或低於始點的尺數(各題均要繪圖):

11.

線段	AB	BC	CD	DE	EF
長(尺數)	76.39	28.24	53.67	102.31	37.59
傾斜度	+11°12′	−12°43′	+9°38′	−6°51′	−14°21′

12.

線段	AB	BC	CD	DE
長(尺數)	143.7	91.3	114.5	83.7
傾斜度	46°7′	49°24′	45°18′	−13°30′

13. 自下表求直程的縱距,橫距,長與方位(須繪圖):

線段	AB	BC	CD	DE
長(尺數)	123.4	179.6	153.9	215.2
方位	北73°6′東	北22°47′東	北84°11′東	南54°26′東

14. 自下表求直程的縱距,橫距,距程,方位,幷終點高(或低)於起點的尺數(須繪圖):

線段	長(尺數)	傾斜度	方位
AB	35.26	+10°14′	南61°10′東
BC	41.57	+6°27′	北81°41′東
CD	25.62	−5°10′	北28°18′東
DE	31.51	−8°49′	北32°30′西
EF	19.62	−11°37′	北10°18′東

12.三角函數間的基本關係　同角的各三角函數間有三種基本關係如下:

(一)逆數關係　按§1所述定義,即得

$$\sin A\ \csc A=1, \tag{1}$$

$$\cos A\ \sec A=1, \tag{2}$$

$$\tan A\ \cot A=1. \tag{3}$$

(二)商數關係　因$\frac{a}{c}\Big/\frac{b}{c}=\frac{a}{b}$,　$\frac{b}{c}\Big/\frac{a}{c}=\frac{b}{a}$,故

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A},\qquad \cot A=\frac{\cos A}{\sin A}. \tag{4}$$

同理倘可推得其他類似各式,茲不具列.

(三)平方關係　由畢氏定理,$a^2+b^2=c^2$;以c^2遍除,得

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1,$$

即

$$\sin^2A+\cos^2A=1. \tag{5}$$

以a^2遍除,得

$$1+\left(\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{c}{a}\right)^2$$

即

$$1+\cot^2A=\csc^2A. \tag{6}$$

以b^2遍除,得

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2+1=\left(\frac{c}{b}\right)^2$$

即

$$\tan^2A+1=\sec^2A. \tag{7}$$

13.簡易三角恆等式　上節所述各關係式,對於任何銳角A都能成立,這種等式叫**三角恆等式**.

註 這些等式,其實對於任何大小角,都能成立,待下章講過廣義角三角函數定義卽明.

證明只含一角的三角恆等式時,都係以上節各關係式爲根據,今舉幾個例題如下:

例一 求證 $\sin^2 A\cot^2 A+\cos^2 A\tan^2 A=1$

證 等式左端$=\cancel{\sin^2 A}\cdot\dfrac{\cos^2 A}{\cancel{\sin^2 A}}+\cancel{\cos^2 A}\cdot\dfrac{\sin^2 A}{\cancel{\cos^2 A}}$

$$=\cos^2 A+\sin^2 A=1.$$

例二 求證 $\sec^4 x-\sec^2 x=\tan^2 x+\tan^4 x.$

證 等式左端$=\sec^2 x(\sec^2 x-1)$

$$=(1+\tan^2 x)\tan^2 x=\tan^2 x+\tan^4 x.$$

有時宜將式的兩端,化爲相同的第三式.

例三 求證 $\sin^2 A\tan A+\cos^2 A\cot A+2\sin A\cos A$

$$=\tan A+\cot A.$$

證 在普通情形,宜化兩端爲祇含正餘弦之式.

$$左端=\sin^2 A\cdot\frac{\sin A}{\cos A}+\cos^2 A\cdot\frac{\cos A}{\sin A}+2\sin A\cos A$$

$$=\frac{\sin^4 A+\cos^4 A+2\sin^2 A\cos^2 A}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{(\sin^2 A+\cos^2 A)^2}{\sin A\cos A}=\frac{1}{\sin A\cos A},$$

$$右端=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}$$

$$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin A\cos A}=\frac{1}{\sin A\cos A}.$$

故題設的恆等式成立.

***14.** <u>基本關係式的獨立性</u> 將 §12 中(4)的第一式兩端各取逆數,再按(3)的關係,即得(4)的第二式.故(4)中第二式,可由其第一式與(3)推得.如一組式中,一式可由餘式推出,便稱諸式爲**相依**;否則叫做**獨立**.

在 §12 中(1),(2),(3)三式各含不同的函數,故不能由任二式推出餘一式.又因此可知不能從這三式消去一函數以推出(4)中二式.故與(4)中任一式(1),(2),(3),共爲獨立四式.

設取一非直角三角形三邊所成六比,則仍有(1)至(4)各關係式,但平方關係式(5),(6),(7)則决不能適合,因非直角三角形的三邊,不合於畢氏定理.由此可知(5),(6),(7)任一式對(1)至(4)各式,都爲獨立.**今取(1),(2),(3)和(4)中一式,以及平方關係中任一式,即爲五個獨立基本關係式.此外不能更有獨立者.**因如有六式,則可視爲六個聯立方程式,而解出各函數的值,均爲一定,不復成爲 $\angle A$ 的函數.

就上所得結果,便可知任何三角恆等式,都應該能從這些基本獨立式推證.

習 題 四

1. 試由 §14 所述的理,取定五個獨立基本關係式去證明其餘的基本關係式.

---

*凡遇節前有星號者,可酌量情形略去,不必講授,

試證下列各恆等式:

2. $(1-\cos^2 A)\sec^2 A=\tan^2 A.$ **3.** $\csc A\sqrt{1-\sin^2 A}=\cot A.$

4. $(1-\cos^2 A)(1+\tan^2 A)=\tan^2 A.$

5. $(1-\cos^2 A)(1+\cot^2 A)=1.$ **6.** $\sin^2 A\cot^2 A+\sin^2 A=1.$

7. $\sin A\sec A\sqrt{\csc^2 A-1}=1.$

8. $(1+\tan^2 A)(1-\sin^2 A)=1.$ **9.** $\csc^2 A\tan^2 A-1=\tan^2 A.$

10. $\dfrac{\sin A}{\csc A}+\dfrac{\cos A}{\sec A}=1.$ **11.** $\dfrac{\sec A}{\cos A}-\dfrac{\tan A}{\cot A}=1.$

12. $\sin^4 A-\cos^4 A=2\sin^2 A-1=1-2\cos^2 A.$

13. $\sec^4 A-1=2\tan^2 A+\tan^4 A.$

14. $(\tan A\csc A)^2-(\sin A\sec A)^2=1.$

15. $\sec^2 A+\csc^2 A=\sec^2 A\csc^2 A.$

16. $\tan(90°-A)+\cot(90°-A)=\csc A\csc(90°-A).$

17. $\dfrac{\csc^2 A\tan^2 A}{\cot(90°-A)}\cdot\dfrac{\cot A}{\sec^2 A}=\sec^2(90°-A)-1.$

18. $\dfrac{\cot^2 A\sin^2(90°-A)}{\cot A+\cos A}=\tan(90°-A)-\cos A.$

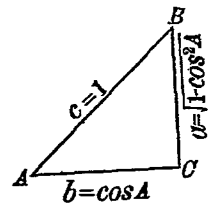
15. 以一三角函數表其餘五函數法 按 §14 所說明的理,可知如自五個獨立關係式中消去三個函數,只餘下二個函數,即得任一函數表他一函數.實際上這問題解法如下:

以任一边之長为單位

法則 作一直角三角形,以適宜爲單位長,使餘二邊中有一邊得表已知函數.則按三角函數定義,可求得以這已知函數表其餘五個函數的算式.

例 求以 $\cos A$ 表其餘五函數.

解 如右圖,以斜邊爲單位,則 AC 的長與 $\cos A$ 的值相等,按畢氏定理,得 $BC=\sqrt{1-\cos^2 A}$



由三邊的值,即得

$$\sin A=\frac{a}{c}=\sqrt{1-\cos^2 A},\qquad \csc A=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 A}},$$

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A},\qquad \cot A=\frac{b}{a}=\frac{\cos A}{\sqrt{1-\cos^2 A}},$$

$$\sec A=\frac{c}{b}=\frac{1}{\cos A}.$$

16.簡易三角方程式 凡一切只含一角的三角恒等式,既然都不外由五個基本關係式中求出.若一只含一角的等式,不能如此推證,則按 §14 所述,可知其必非恒等式.這種等式,必須與所含角以特殊值,方能適合,而稱爲**三角方程式**.那特殊值叫做解.

例 $\tan x-1=0$ 爲三角方程式,其解爲 $x=45°$.

註 本章內所論的解,限於銳角.銳角以外者,暫不計及.

17.簡易三角方程式解法 三角方程式解法,在後將詳行討論,今先論幾個簡易的例題.

例一 解 $3\sec^2 x=8\tan x-2$.

解 因 $\sec^2 x=1+\tan^2 x$, 代入原題,得

$$3(1+\tan^2 x)=8\tan x-2.$$

化簡便有 $3\tan^2x-8\tan x+5=0$,

而為以 $\tan x$ 為未知數的一個二次方程式.分解因式得

$$(\tan x-1)(3\tan x-5)=0$$

$\therefore\ \tan x-1=0$, 卽 $\tan x=1$, $x=45°$,

或 $3\tan x-5=0$, 卽 $\tan x=\frac{5}{3}$, $x=59°2'$.

後面一解,須查表方能求得.

例二 解 $3\tan x+\cot x=5\sec x$. csc x

解 化各函數為正餘弦,卽得

$$\frac{3\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{5}{\sin x},$$

卽 $3\sin^2x+\cos^2x=5\cos x$.

再按 $\cos^2x+\sin^2x=1$ 的關係消去 $\sin x$, 幷化簡,得

$$2\cos^2x+5\cos x-3=0.$$

分解因式, $(2\cos x-1)(\cos x+3)=0$.

$\therefore\ 2\cos x-1=0$, 卽 $\cos x=\frac{1}{2}$, $x=60°$

而 $\cos x=-3$ 為不可能之事,故只得一解.

由上二例,可知三角方程式解法如下:

法則 先化方程式中各三角函數為一函數.再以這函數為未知數而解之.最後由函數值求角.

註 函數值為負時,在普通情形,角為大於 90° 的角;若不合於某種限制($\cos x=-3$ 的時候),則角為虛數.前面一種情形,在後討論;後面一種情形,本書不能講到.

習題五

1. 求以 $\sin A$ 表其餘五函數的值.

2. 求以 $\tan A$ 表其餘五函數的值.

3. 已知 $\sec A=\dfrac{m^2+1}{m}$, 求其餘五函數.

4. 已知 $\tan A=\dfrac{2pq}{p^2-q^2}$, 求其餘五函數.

5. 設 $\sin A-\cos A=0$, 求 $\csc A$.

解下列各三角方程式:

6. $2\sin^2 x=3\cos x$.

7. $\tan x=4-3\cot x$.

8. $\cot x+\tan x=2\sec x$.

9. $4\csc x+2\sin x=9$.

10. $\tan x-\cot x=\csc x$.

11. $2\cos x+2\sqrt{2}=3\sec x$.

12. $\cos^2 x-\sin^2 x=2-5\sin x$.

13. $2\sin x\tan x+1=\tan x+2\sin x$.

14. $6\tan x-5\sqrt{3}\sec x+12\cot x=0$.

15. $5\tan x+6\cot x=11$.

16. $\sec^2 x+\tan^2 x=3\tan x$.

第一章摘要

本章授下列各項:

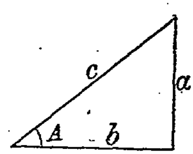
銳角三角函數
  (1)正弦,(2)餘弦,(3)正切,
  (4)餘切,(5)正割,(6)餘割
直角三角形解法
等腰三角形解法
正多角形解法
基本關係式
簡易恆等式

測量術語
  (1)俯角,(2)仰角,(3)射影,
  (4)傾斜度,(5)水平距離,
  (6)方位,(7)橫距,(8)縱距,
  (9)直程
特殊角函數值(30°,45°,60°)
簡易方程式

1. $sinA=\frac{a}{c}$, $cosA=\frac{b}{c}$,

$tanA=\frac{a}{b}$, $cotA=\frac{b}{a}$,

$secA=\frac{c}{b}$, $cscA=\frac{c}{a}$,



2. 餘角函數關係: $sin(90°-A)=cosA$ 等.

3. $sin30°=\frac{1}{2}$等, $sin45°=\frac{1}{2}\sqrt{2}$等, $sin60°=\frac{1}{3}\sqrt{3}$等.

4. 基本關係式有:(一)逆數關係 $sinAcscA=1$ 等三式.

(二)平方關係 $sin^2A+cos^2A=1$ 等三式.

(三)商數關係 $tanA=sinA/cosA$ 等.

5. 基本關係式中,只有五個獨立者(逆數關係三式,平方關係,商數關係各一式)而為證恆等式的根據.

6. 按基本關係式,可以任一函數表他任一函數.

7. 解只含一角的三角方程式可化為只含一函數的式子再解.

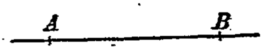
8. $rt.\triangle$ 解法,須用(一)函數定義,(二) $A+B=90°$, (三)畢氏定理.等腰三角形及正多角形,可化為 $rt.\triangle$ 去解.

第二章

廣義角三角函數

18.<u>有向線段</u> 在初等幾何學裏,所說的幾何量,只限於正者,好像算術中只言正數一樣.欲論廣義角的三角函數,須先擴充線段與角為有方向(即分別正負)的量.

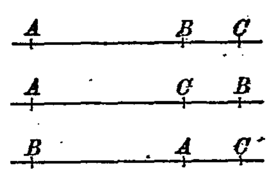
設 AB 是一直線上二點,我們以 $\overline{AB}$ 記從 A 到 B 的距離,$\overline{BA}$ 記從 B 到 A 的距離,這二距離,同值異號,即



$$\overline{AB}=-\overline{BA} \text{ 或 } \overline{AB}+\overline{BA}=0$$

這種分別正負向的線段,叫**有向線段**.

19.<u>沙耳(*Chales*)定理</u> 在一直線上取 A, B, C 三點.如就 AB, BC, CA 三線段的絕對值而論,則因三點位置的相異,可得各種的不同關係.若論有向線段 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 則恆有



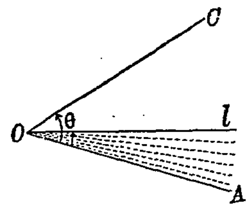
$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$$

這式叫**沙耳定理**,學生試自取各種不同位置,即可證明.

註 設想一人自 A 行到 B,次由 B 至 C,最後從 C 返 A,則所行路程依次為 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$,而總路程為 0.

Θ = Theta

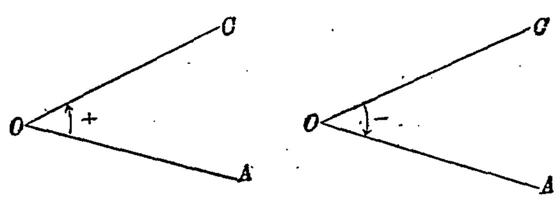
20.角的產生 設一直線 l,依其上一點 O,在一平面上旋轉,自原來的位置 OA,到新位置 OC,則產生 AOC 角. OA,OC 叫做這角的二邊,OA 叫始邊,OC 叫終邊.



註 如遇不至發生誤解情形時,可單寫出頂點記角,或單用一字母記角亦可,如上圖. $\angle AOC=\angle O=\theta$.

21.廣義角與有向角 在初等幾何學裏,角的大小,設為正量,而不得大於 $360°$. 現在須除去這種不必要的限制.

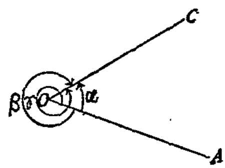
(一)設取一種旋轉方向為正,則其相反的方向為負.普通規定,用和時針旋轉相反的向為正向,而以時針旋轉方向為負.



α = alpha
β = Bèta
γ = gamma

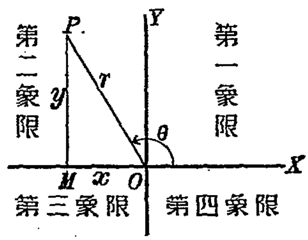
(二)一角的終邊旋轉經一週後,返於原來始邊的位置時(即 OC 復與 OA 相合),則歷 $0°$ 至 $360°$ 各值.但終邊還可繼續旋轉.第二週時,經歷自 $360°$ 至 $720°$ 各值.如此推去,角的大小無限制.

由上(一)(二)兩層,可知一角的值,不僅由其終邊位置斷定,而與旋轉的方向和分量有關.



例 上圖中: $\angle\alpha=30°$, $\angle\beta=-330°$, $\angle\gamma=390°$, 其始終兩邊位置均同.

22.<u>角的標準位置</u> 過一角的頂點,作其始邊的垂直線,與始邊所在的直線,分平面為四部分,稱為象限,并依正角旋轉向的次序,別為第一,第二,第三,第四.如一角終邊在某象限內,就叫做在那某象限內的角.



註 這二垂直線叫**坐標軸**,或**位標軸**,橫的為 OX 軸,縱的為 OY 軸,交點(即角的頂點)叫**原點**.

例 $120°$, $-210°$ 在第二象限內, $-50°$ 在第四象限內.

習 題 六

試作下列各角,并定其所在的象限:

1. 90°. 第1　**2.** $-90°$. 4　**3.** 135°.　**4.** $-135°$. 3

5. 180°. 2　**6.** $-180°$. 3　**7.** 225°. 3　**8.** $-225°$. 2

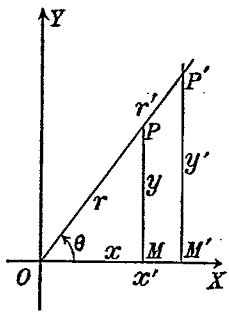
9. $-240°$. 2　**10.** 240°. 3　**11.** $-270°$. 2　**12.** 270°. 3

13. 300°. 4　**14.** $-300°$. 1　**15.** 360°. 4　**16.** $-360°$. 1

17. 600°. 3　**18.** 1035°. 2　**19.** 750°. 4　**20.** $-4000°$. 2

21. 求最小的正角,使與第 17—20 各題中角位置相同. 181. 71. 27 321

23. <u>平面上一點坐標</u>　自平面上一點 P,作 $PM \perp OX$,則 $\overline{OM}$ 叫 P 點的橫標,常以 x 記之,$\overline{MP}$ 叫 P 點的縱標,常以 y 記之.二者合稱坐標或位標,記爲 $P(x,y)$. 我們并且規定 $\overline{OM}$ 向右爲正,向左爲負; $\overline{MP}$ 向上爲正,向下爲負.



24. <u>廣義角三角函數</u>　在 θ 角終邊上,任取一點 P,則 $OP=r$, 叫做動徑,其值常約定爲正.以 x, y, r 所成六比,叫 θ 角的三角函數.

即
$$\sin\theta=\frac{y}{r},\quad \cos\theta=\frac{x}{r},\quad \tan\theta=\frac{y}{x},$$
$$\csc\theta=\frac{r}{y},\quad \sec\theta=\frac{r}{x},\quad \cot\theta=\frac{x}{y}.$$

於此可見下列三函數,仍各爲上列者的逆數.

注意 一角的各函數值,只與 θ 的終邊位置有關係,而與 P 點位置無涉,因如在 θ 角終邊另取一點 $P'(x', y')$,令 $OP' = r'$,則按相似形的理,顯有 $x':x=y':y=r':r$.
故所成六比值,仍與上同.

註 三角函數,除上述六個外,尚有

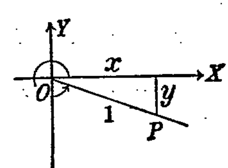
$$vers\theta=1-cos\theta, \quad covers\theta=1-sin\theta.$$

前者爲 *versine* 的簡寫,譯名爲**正矢**,後者爲 *coversine* 的簡寫,譯名爲**餘矢**.這二個函數,不甚十分常用.

25.各象限內角諸函數值的號 由縱橫標正負的規定,和動徑常爲正的假設,立即可斷各象限內角諸函數值的號如下表:

象限＼函數	x	y	$sin\theta$ 和 $csc\theta$	$cos\theta$ 和 $sec\theta$	$tan\theta$ 和 $cot\theta$
第一象限	+	+	+	+	+
第二象限	−	+	+	−	−
第三象限	−	−	−	−	+
第四象限	+	−	−	+	−

例一 求 330° 的各三角函數.



解 在終邊上取 $OP=1$,則

$$r=1, \quad x=\frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad y=-\frac{1}{2},$$

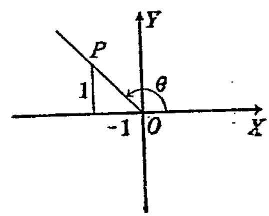
故得

$\sin 330° = -\frac{1}{2}$，　　$\cos 330° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$，

$\tan 330° = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$，　　$\csc 330° = -2$，

$\sec 330° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$，　　$\cot 330° = -\sqrt{3}$.

例二　設 θ 角上終邊一點 P 坐標為 $(-1, 1)$，求這角的各三角函數.



解　如右圖，可見

$$r = OP = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore\quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

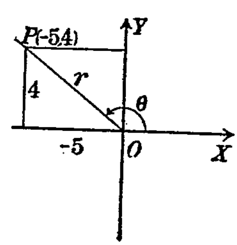
$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\tan\theta = \frac{1}{-1} = -1.$$

其他不難依定義求得.

26. <u>已知一函數值，求同角他函數值法</u>　如已知某角的一三角函數值，及這角所在象限，則可定其餘五函數的值，其法如下列各例所示.

例　已知 θ 在第二象限內，且 $\tan\theta = -\frac{4}{5}$，求其他各函數.



解　因角在第二象限內，故在終邊上所取的 P 點，也必在第二象限內.故如第二象限內一點 P 的坐標，合於 $\frac{y}{x} = \tan\theta = -\frac{4}{5}$，則 P 必在 θ 的終邊上.

由此即見$P(-5,4)$一點可以合用,而 $r=\sqrt{4^2+(-5)^2}=\sqrt{41}$.

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{4}{\sqrt{41}},\qquad \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-5}{\sqrt{41}},$$

$$\cot\theta=\frac{-5}{4},\qquad \sec\theta=\frac{\sqrt{41}}{-5},\qquad \csc\theta=\frac{\sqrt{41}}{4}.$$

註 如$\tan\theta=-\frac{4}{5}$,而θ在第四象限內,則應取$P(4,-5)$,所得其餘各函數值,除 $\cot\theta$ 外,不復與上面的結果相同.

習題七

已知某角終邊上一點P坐標如下各題,求其各函數值:

1. $(3,\ -4)$. **2.** $(-8,\ 6)$. **3.** $(2,\ 3)$.

4. $(-3,\ 4)$. **5.** $(-4,\ -3)$. **6.** $(-12,\ 5)$.

7. $(-5,\ 12)$. **8.** $(5,\ -12)$. **9.** $(a,\ b)$.

已知θ合於下列各題二條件,求其諸三角函數:

10. $\sin\theta=0.4$, 而θ在第二象限內.

11. $\cos\theta=\frac{6}{11}$, 而θ在第三象限內.

12. $\cos\theta=-\frac{2}{5}$, 而θ在第二象限內.

13. $\tan\theta=2$, 而θ在第三象限內.

14. $\sin\theta=-\frac{5}{13}$, 而θ在第四象限內.

15. $\sec\theta=\frac{18}{17}$, 而θ在第四象限內.

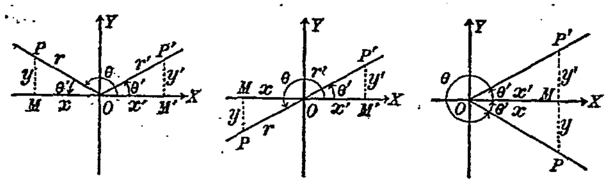
16. 設 $\sin\theta=\frac{4}{5}$, 而 $\cos\theta$ 爲負.

17. 設 $\cot\theta=\frac{15}{8}$, 而 $\cos\theta$ 爲負.

18. 如 $\cos\theta$ 爲正,求上列二題結果.

27.相關角 三角函數表(和三角對數表),只載有銳角的相當值.所以如欲求他種角的函數值,必須以銳角函數值表出,方能求得.為說理簡明計,先立相關角的定義如下:

定義 設 θ 為小於 $360°$ 的正角,定另一銳角 θ',使 $\theta \pm \theta'$ 為 $180°$,或 $360°$,則 θ' 叫做 θ 的**相關角**.



如 θ 在第二象限內,則取 $\theta'=180°-\theta$(上左圖);如 θ 在第三象限內,則取 $\theta'=\theta-180°$ (上中圖);如 θ 在第四象限內,則取 $\theta=360°-\theta'$ (上右圖).

28.相關角函數 設有一角 θ 在第一象限外,而欲求其各函數,可在同一坐標軸上,作其相關角 θ',使這二角均在標準位置(§22).今在這二角的邊上,各取一點 P 與 P',使 $OP=OP'$,則因 $rt.\triangle OMP \equiv rt.\triangle OM'P'$,故與 θ 角相當的 x, y, r 三量,與 θ' 角的相當 x', y', r' 三量,絕對值各各相等.由是得定理如下:

定理　任何角的三角函數與其相關角的同函數,二者有相等的絕對值.

(一)如 θ 在第二象限內,則 $\theta=180°-\theta'$, 又 θ' 既爲銳角,故各函數值均爲正,所以

$$|\sin(180°-\theta')|=\sin\theta',\qquad |\cos(180°-\theta')|=\cos\theta',$$

$$|\tan(180°-\theta')|=\tan\theta'\qquad \text{餘類推}$$

(二)如 θ 在第三象限內,則 $\theta=180°+\theta'$, 而有

$$|\sin(180°+\theta')|=\sin\theta',\qquad |\cos(180°+\theta')|=\cos\theta' \text{ 等.}$$

(三)如 θ 在第四象限內,則 $\theta=360°-\theta'$, 而有

$$|\sin(360°-\theta')|=\sin\theta',\qquad |\cos(360°-\theta')|=\cos\theta' \text{ 等.}$$

29.<u>號的決定</u>　由上節的理,雖能求任何角各函數絕對值,但不能決定其號.在 §25 中已經說過各象限內角諸函數值的正負,所以任何角各函數值的號,很容易斷定.

由上節與本節的理,可得公式如下表:

θ 在第二象限內	θ 在第三象限內	θ 在第四象限內
$\sin(180°-\theta')=\sin\theta'$ $\cos(180°-\theta')=-\cos\theta'$ $\tan(180°-\theta')=-\tan\theta'$	$\sin(180°+\theta')=-\sin\theta'$ $\cos(180°+\theta')=-\cos\theta'$ $\tan(180°+\theta')=\tan\theta'$	$\sin(360°-\theta')=-\sin\theta'$ $\cos(360°-\theta')=\cos\theta'$ $\tan(360°-\theta')=-\tan\theta'$.

在此雖假設 θ' 是銳角,實則上列各組公式,對於 θ' 爲任何角,也無不合,其理至後文卽明.

注意　將各式兩端取逆數,卽得他三函數的公式.

註 解題時宜明瞭這二節的理,不必呆記許多公式.

例一 求 $147°35'$ 的正弦與餘切.

解 $147°35'$ 在第二象限內,其相關角為 $180°-147°35'=32°25'$. 而其正弦值為正,餘切值為負.

$\therefore \sin 147°35'=\sin 32°25'=0.53607$

$\cot 147°35'=-\cot 32°25'=-1.5747$

最後的二數值,乃由表中查出的.

例二 求 $258°23'$ 的正弦與正切.

解 $258°23'$ 在第三象限內,其相關角為 $258°23'-180°=78°23'$, 而其正弦值為負,正切值為正.

$\therefore \sin 258°23'=-\sin 78°23'=-0.97952.$

$\tan 258°23'=\tan 78°23'=4.8644.$

習題八

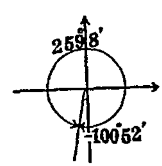
求下列各角的正弦,餘切,正切諸值:

1. $114°26'$. **2.** $172°51'$. **3.** $197°14'$.

4. $256°18'$. **5.** $583°46'$. **6.** $324°19'$.

7. $102°12'$. **8.** $283°11'$. **9.** $211°53'$.

10. $131°17'$. **11.** $-100°52'$.



提示 $-100°52'$ 與 $360°-100°52'=259°8'$ 的終邊相合.

12. $-267°54'$. **13.** $288°5'$.

14. 化簡: $\tan(180°+A)\sin(180°-A)\sec(180°-A)$.

15. 不查表,而求 $\tan 120°\sec 150°-\sin 135°\cos 315°$ 的值.

θ表鈍角 θ'表銳角 若 $\theta\pm\theta'=180^\circ$ 若 $\theta\pm\theta'=360^\circ$ 則 θ 與 θ' 之同名 (Same name function) 函數.

θ之函數符號根據θ所在之象限而決定.

若 $\theta\pm\theta'=90^\circ$ $\theta\pm\theta'=270^\circ$ 則 θ與θ' 為異名函數. name fu

30. 化任何角函數爲銳角相當函數的又一法

如§29中各公式內 θ' 大於 45°, 我們尚可化 θ (即以 θ' 爲相關角的角)的三角函數,爲小於 45° 的銳角的相當函數.

按 §2, 如 θ_1 爲一銳角,則其函數等於 $90^\circ-\theta_1$ 的餘函數.今設 $\theta'>45^\circ$, 書 $\theta_1=90^\circ-\theta'$, 則 $\theta_1<45^\circ$, 代入 §29 中各式,則得

$$\sin(180^\circ-\theta')=\sin[180^\circ-(90^\circ-\theta_1)]=\sin(90^\circ+\theta_1)$$
$$=\sin(90^\circ-\theta_1)=\cos\theta_1$$

依法可推算他式,則得公式如下表:

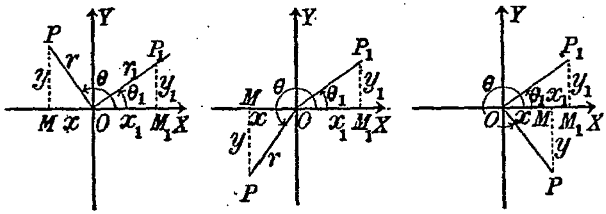
θ_1 在第二象限內	θ_1 在第三象限內	θ_1 在第四限象內
$\sin(90^\circ+\theta_1)=\cos\theta_1$	$\sin(270^\circ-\theta_1)=-\cos\theta_1$	$\sin(270^\circ+\theta_1)=-\cos\theta_1$
$\cos(90^\circ+\theta_1)=-\sin\theta_1$	$\cos(270^\circ-\theta_1)=-\sin\theta_1$	$\cos(270^\circ+\theta_1)=\sin\theta_1$
$\tan(90^\circ+\theta_1)=-\cot\theta_1$	$\tan(270^\circ-\theta_1)=\cot\theta_1$	$\tan(270+\theta_1)=-\cot\theta_1$

這些公式,以及 $\sin(90^\circ-\theta_1)=\cos\theta_1$ 等式,對於 θ_1 爲任何角,也依舊成立,其證明待後再述.

例一 $\sin 258^\circ 23'=\sin(270^\circ-11^\circ 37')=-\cos 11^\circ 37'$.

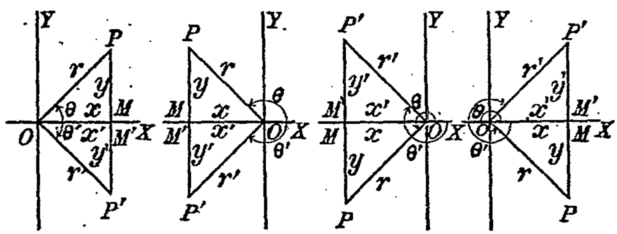
例二 $\tan 290^\circ 5'=\tan(270^\circ+20^\circ 5')=-\cot 20^\circ 5'$.

31. 化爲餘函數法的直接證明 上節各公式,也可依 §28 的方法,來用圖證明:



如上圖,取 $OP_1=OP$,則 $rt.\triangle OMP\equiv rt.\triangle OM_1P_1$,故 x,y,r 三量絕對值和 y_1, x_1, r_1 三量各別相同.由此便知 $90°+\theta_1$, $270°-\theta_1$, $270°+\theta_1$ 的函數,與 θ_1 的餘函數,二者有相等絕對值.再按角所在的象限,定函數值的符號,即可證明上節各公式.

32. 負角的各函數 如二角同值異號,則在標準位置時,必爲關於 OX 軸的軸對稱形如下:

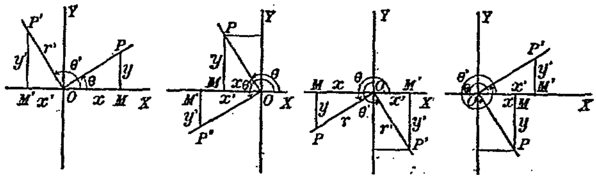


就圖即知如取 $OP'=OP$,則 $x'=x$, $y'=-y$, $r'=r$,而得負角函數公式如下:

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta,\ \cos(-\theta)=\cos\theta,\ \tan(-\theta)=-\tan\theta.$$

$f(\theta)$ = function of θ = θ 之函數。

33.化角法公式的普遍性 負角的公式,不論角在何象限內,都能成立. §§29—30 內各公式也如此.



(一)設 θ 為任意角,作 $\theta'=\theta+90^\circ$, 使均處同一標準位置如 §31 所述,則在各種情形中(如上圖),均有

$$x'=-y, \qquad y'=x, \qquad r'=r.$$

即可證明 $\sin(90^\circ+\theta)=\cos\theta$ 諸式普遍成立.

(二)命 $f(\theta)$ 表 θ 的任一三角函數.將 $90^\circ+\theta'$ 代上式中的 θ,則可推出 $f(180^\circ+\theta)$,陸續更可推出 $f(270^\circ+\theta)$ 均與 §§29—30 各公式同,由此又可證明 $f(360^\circ+\theta)=f(\theta)$.

(三)命 $90^\circ+\theta=\theta_1$, 則 $\theta=-(90^\circ-\theta_1)$, 代入上式,再依負角公式,便得 $f(90^\circ-\theta)$. 同法可自 $f(180^\circ+\theta)$, $f(270^\circ+\theta)$, $f(360^\circ+\theta)$, 推出 $f(180^\circ-\theta)$, $f(270^\circ-\theta)$, $f(360^\circ-\theta)$.

習題九

求化下列各函數為 θ 的函數:

1. $\cos(540^\circ+\theta)$. **2.** $\tan(\theta-630^\circ)$. **3.** $\sin(180^\circ+\theta)$.

4. $\cot(450^\circ-\theta)$. **5.** $\csc(900^\circ-\theta)$. **6.** $\sec(\theta-540^\circ)$.

***7.** 試依上節(二)(三)所述,詳細演出各式.

---

*本題及以下各題,可酌量略去.

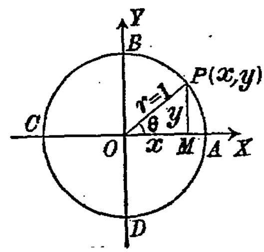
*8. 試按 §31 的方法直接證明 §§29—30 各式的普遍性.

*9. 如二角相差爲 $360°$ 的整倍數(正或負),則這二角在同一標準位置時有何關係?試由此證明 $f(\theta\pm360°)=f(\theta)$.

*10. 試證 $f(\theta+k\times360°)=f(\theta)$,$k$ 爲正或負整數.

34.三角函數的變值和變跡 一角的值變動時,其各三角函數值,也隨着變化.在平面上作一直交坐標軸,將角的變值作爲一動點 P 的橫標,函數變值作爲 P 的縱標,則 P 點所成軌跡,叫做這函數的變跡.

35.正弦餘弦的變值 設 θ 角在標準位置,令動徑長爲單位,而作一圓,這圓便叫做單位圓.當 θ 角變化時,P 點在這單位圓上移動,因 $r=1$,故

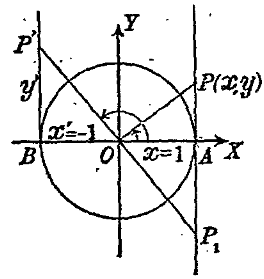


$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{y}{1}=y$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{x}{1}=x$$

由此即得變值表如下:

θ 角變值	P 點位置	$\sin\theta$ (即 y)	$\cos\theta$ (即 x)
從 $0°$ 到 $90°$	自 A 到 B	由0增加至1	由1減少至0
從 $90°$ 到 $180°$	自 B 到 C	由1減少至0	由0減少至-1
從 $180°$ 到 $270°$	自 C 到 D	由0減少至-1	由-1增加至0
從 $270°$ 到 $360°$	自 D 到 A	由-1增加至0	由0增加至1



36.正餘切的變值 仍作一單位圓,在 θ 角始邊與圓交點 A 處,作一切線.設 θ 角終邊,或延長線,與切線交於 P 或 P_1,則

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{y}{1}=y=\overline{AP}.$$

或 $$=\frac{y'}{x'}=\frac{y'}{-1}=-y'=\overline{AP_1}.$$

由此可知 θ 角的值由 0° 起漸增,則 P 點向上移動,所以 $\overline{AP}$ 的值,也漸次增大.如 $\theta=90^\circ$,則其終邊與在 A 點切線平行,而不相交.在這時 $\tan\theta$ 的值不能確定.但是如取 θ 值與 90° 相近,則可使 $\tan\theta$ 的值,大於任何大的數.這種情形,可用符號 $\tan 90^\circ\to\infty$ 來表示.這個算式,其實就是說 **"90° 的角,正切值不能確定,但如取 θ 值與 90° 非常接近,則可使 $\tan\theta$ 的值大到任何程度."**

註　符號 $\to$ 是趨近的意思,符號 ∞ 並非普通的數,故不能和普通的數一樣去運算,待到高中代數裏再討論(見著者編新課程標準高中代數學 §58 下注意一條).

θ 在第二象限內時,$\tan\theta$ 爲負,同上可知如 $\theta\to 90^\circ$,則 $\tan\theta$ 的絕對值,可大到任何程度,而可簡記其值爲 $\to\infty$.

在 §§29,33 知 $\tan(180^\circ+\theta)=\tan\theta$,所以 θ 在第三第四兩象限情形與在第一第二兩象限時一樣

至於 $\cot\theta$ 是 $\tan\theta$ 的逆數,而一數愈小時,其逆數愈大,愈大時,其逆數愈小.用算式來表示,可書

$$x\to 0,\quad 則\ \frac{1}{x}\to\infty;\qquad x\to\infty,\quad 則\ \frac{1}{x}\to 0.$$

由上所述,便得下表:

θ 角變值	從0°到90°	從90°到180°	從180°到270°	從270°到360°
$\tan\theta$ 變值	由0增到∞	由−∞增到0	由0增到∞	由−∞增到0
$\cot\theta$ 變值	由∞減到0	由0減到−∞	由∞減到0	由0減到−∞

37.正餘割的變值 正餘割既各爲餘正弦的逆數,故按上節的理,即得其變值如下:

θ 角變值	從0°到90°	從90°到180°	從180°到270°	從270°到360°
$\csc\theta$ 變值	由∞減到1	由1增到∞	由−∞增到−1	由−1減到−∞
$\sec\theta$ 變值	由1增到∞	由−∞增到−1	由−1減到−∞	由∞減到1

注意 將上面幾節所述合成一表如下:

θ 的變值	0°—90°	90°—180°	180°—270°	270°—360°
$\sin\theta$	$0 \nearrow 1$	$1 \searrow 0$	$0 \searrow -1$	$-1 \nearrow 0$
$\cos\theta$	$1 \searrow 0$	$0 \searrow -1$	$-1 \nearrow 0$	$0 \nearrow 1$
$\tan\theta$	$0 \nearrow \infty$	$-\infty \nearrow 0$	$0 \nearrow \infty$	$-\infty \nearrow 0$
$\cot\theta$	$\infty \searrow 0$	$0 \searrow -\infty$	$\infty \searrow 0$	$0 \searrow -\infty$
$\sec\theta$	$1 \nearrow \infty$	$-\infty \nearrow -1$	$-1 \searrow -\infty$	$\infty \searrow 1$
$\csc\theta$	$\infty \searrow 1$	$1 \nearrow \infty$	$-\infty \nearrow -1$	$-1 \searrow -\infty$

註 向上的箭頭↗,表示變數漸增,向下的箭頭↘,表示變數漸減.

習題十

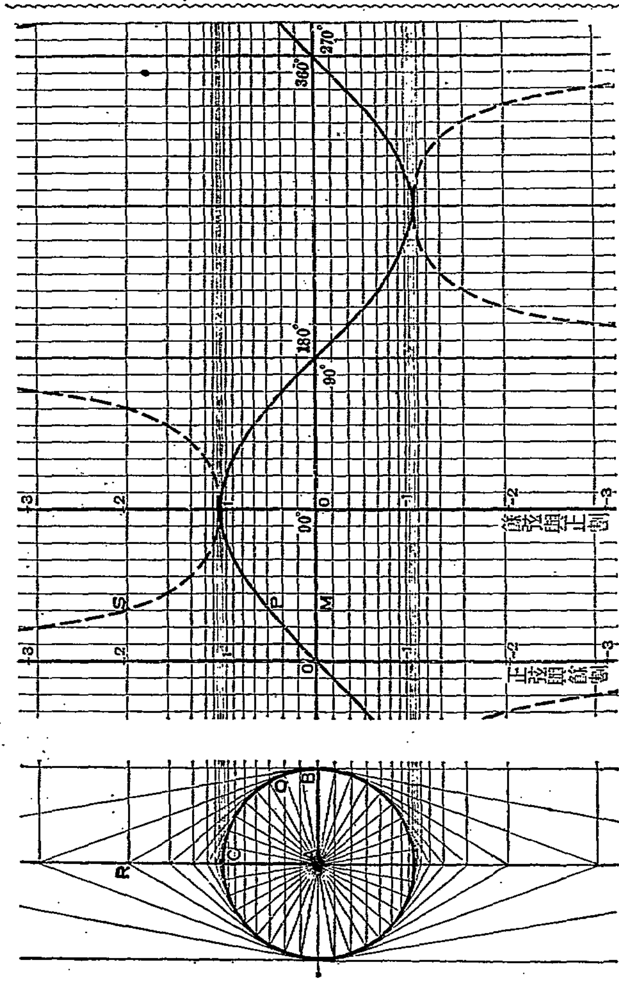
已知$\sqrt{2}=1.414$, $\sqrt{3}=1.732$,試按§§3,29,35−36,填明下表各函數值,求出二位小數:

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin\theta$																	
$\cos\theta$																	
$\tan\theta$																	
$\cot\theta$																	
$\sec\theta$																	
$\csc\theta$																	

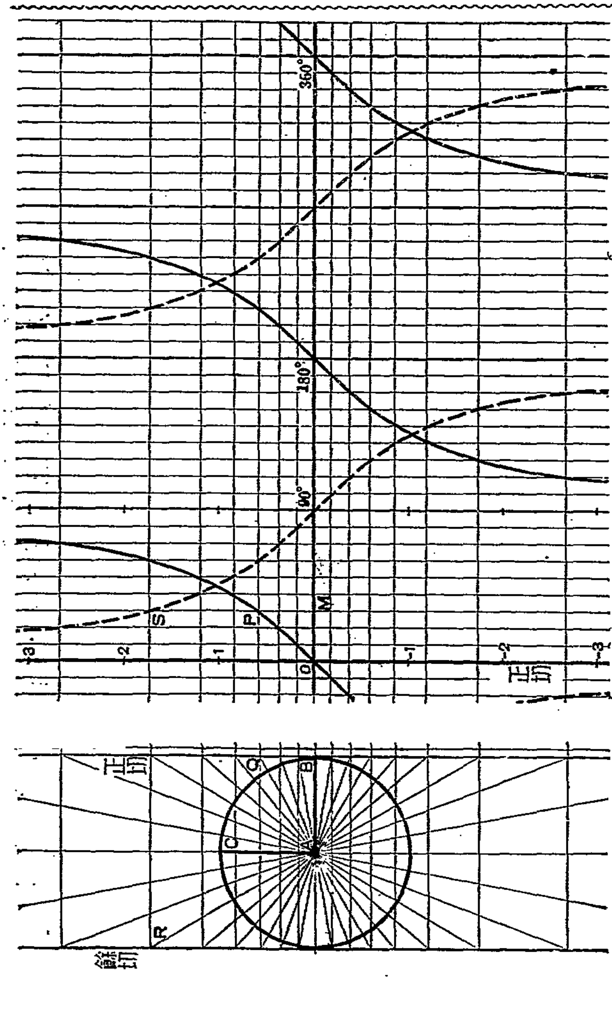
再按各值,畫在方格紙上,畫出各函數的變跡來.

38.各函數變跡的直接作法 按上面的習題即可作出各函數變跡,但不如下述直接作法的便利.

(一)在OX軸上,O點左一點A為心,作一單位圓.作$\angle BAR=x$,又以適宜單位長表角單位,即可用線段長短,記角的大小,如此即可取$OM=x$,(例如$x=3°$時,則OM長3單位).過Q作OX軸平行線與過M點的OX垂線交於P,即為正弦變跡上的點.又自Q點作單位圓切線,與過A的AB垂線交於R.自R作OX平行線,與MP延長線交於S,即得餘割變跡上的點,如此求得若干點,便能聯成曲線.



圖中實線爲$\left\{\begin{array}{l}\text{正弦}\\\text{餘弦,}\end{array}\right.$虛線爲$\left\{\begin{array}{l}\text{餘割(用左邊的 0 爲原點)}\\\text{正割(用右邊的 0 爲原點)}\end{array}\right.$



圖中實線爲正切,虛線爲餘切.

如將原點O向右移至90°處,正弦與餘割的二變跡,各變爲餘弦與正割的變跡.

(二)作單位圓和二垂直直徑如上,又在合於OX軸的一直徑二端,作二切線,作$\angle BAQ=x$,同上法,即可得正切變跡,又作$\angle BAR=90^\circ+x$,則可得餘切變跡.

39. 三角函數的週期性: 在§33(一)中已證明任何三角函數,$f(\theta)=f(\theta+360^\circ)$.就上節所說變跡作圖法看來,這結果也甚明顯.如函數$f(\theta)$,不論θ值如何,總有$f(\theta+p)=f(\theta)$的關係,而p爲一定數,則$f(\theta)$便叫週期函數.若p爲合於這個關係式的最小正值,則叫做函數的週期.

正餘切週期爲180°,正餘弦正餘割的,則爲360°

習題十一

1. 證明§38所述正弦變跡的作法.

2. 證明§38所述餘割變跡的作法.

2. 何以將0點向右移90°,則正弦與餘割二變跡各變爲餘弦與正割的變跡?

4. 證明§38所述正切變跡的作法.

5. 證明§38所述餘切變跡的作法.

6. 自正餘弦變跡,直接作出正餘矢變跡.

第二章摘要

本章授下列各項:

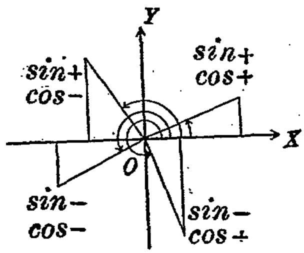
有向線段,沙耳定理	廣義角函數定義
有向角,廣義角	相關角
角的標準位置	週期函數,週期
坐標軸,原點,象限	三角函數變值
橫標(x),縱標(y),動徑(r)	三角函數變跡

1. $\sin\theta=\frac{x}{r}$, $\cos\theta=\frac{y}{r}$,

$\tan\theta=\frac{y}{x}$, $\cot\theta=\frac{x}{y}$,

$\sec\theta=\frac{r}{y}$, $\csc\theta=\frac{r}{x}$,

2. 各象限內函數值的號如右圖.



3. 已知一角函數值及這角所在象限(或另一函數值的號)則可求他五函數值.

4. 化各象限內角為銳角同函數公式如下:

$\sin(180°\mp A)=\pm\sin A$, $\cos(180°\mp A)=-\cos A$ 等,

$\sin(360°-A)=-\sin A$, $\cos(360°-A)=\cos A$ 等.

5. 化各象限內角為銳角餘函數公式如下:

$\sin(90°+A)=\cos A$, $\cos(90°+A)=-\sin A$ 等,

$\sin(270°\mp A)=-\cos A$, $\cos(270°\mp A)=\mp\sin A$ 等.

6. 負角函數: $\sin(-\theta)=-\sin\theta$, $\cos(-\theta)=\cos\theta$ 等.

7. 在 4,5,6 中各式對任何角都成立.

8. 正餘弦,正餘割的週期為 360°,正餘切的為 180°.

第三章

三角恆等式

40. <u>恆等式證明</u>　含三角函數的等式,如對任何角都能成立,便叫**三角恆等式**.按 §24 所述定義,便知**§12 中的三種基本關係式,對於廣義角仍舊成立**.所以這些關係式就是恆等式,且只含一角的三角恆等式都可由基本關係推證(參看 §14).第一章中已舉過簡易恆等式證法的例子(§13),今再詳論其重要證法如下:

(一)最普通的證法,爲自一端逐自變到他端.變化時,常自繁雜的一端變到簡易的一端.

例一　證明 $\sin^6\theta+\cos^6\theta=1-3\sin^2\theta+3\sin^4\theta$

證　左端 $=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta)$

$$=\sin^4\theta-\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)+(1-\sin^2\theta)^2$$

∴=1

$$=\sin^4\theta-\sin^2\theta+\sin^4\theta+1-2\sin^2\theta+\sin^4\theta$$

$$=1-3\sin^2\theta+3\sin^4\theta$$

(二)利用基本關係式,或已證明恆等式,作適宜的變化,推出求證的恆等式.

例二　用這法證明例一.

證 取平方關係 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，兩端乘立方，得

$$\sin^6\theta+3\sin^4\theta\cos^2\theta+3\sin^2\theta\cos^4\theta+\cos^6\theta=1$$

$$\therefore \quad \sin^6\theta+\cos^6\theta=1-3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$

$$=1-3\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)=1-3\sin^2\theta+3\sin^4\theta$$

(三)求證的式中兩端，如能證明都和另一式恆等，則必爲恆等式.

例三 證明 $\sin^2\theta\tan\theta+\cos^2\theta\cot\theta+2\sin\theta\cos\theta=\tan\theta+\cot\theta$

證 左邊 $=\sin^2\theta\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\cos^2\theta\cdot\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}+2\sin\theta\cos\theta$

通分得

$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}(\sin^4\theta+\cos^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta)$$

$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

右邊 $=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

(四)逆證法 假設求證的恆等式成立，依法運算化簡後，如得一已知的恆等式，且運算手續均可逆推，則自可反證題設的等式.

註 關於逆證法的討論，可參看著者編高中代數學§12. 用逆證法時，可察運算手續，是否可逆，不必實行逆推.

例四 證明 $\dfrac{1-\sin A}{\cos A}=\dfrac{\cos A}{1+\sin A}$

證 由原式逆推，得 $\cos^2 A=(1-\sin A)(1+\sin A)$

即 $\qquad\qquad = 1-\sin^2 A.$

故知求證的恆等式成立.

41.<u>恆等式又一證法</u> 三角恆等式中各函數,也可依定義化為比值再證.這法實與上述各法相同,但對初學,因其中無三角函數出現,故每覺簡易.

例一 證上節的例三.

證 左端$=\left(\frac{y}{r}\right)^2\cdot\frac{y}{x}+\left(\frac{x}{r}\right)^2\cdot\frac{x}{y}+2\frac{y}{r}\cdot\frac{x}{r}$

$$=\frac{1}{r^2xy}[y^4+x^4+2x^2y^2]=\frac{1}{r^2xy}(x^2+y^2)^2$$

$$=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\text{右端}$$

42.<u>雜例</u> 有時求證的恆等式中,雖有二角或數角,但各函數只含單角,則證法仍舊與上述的相同.

例 證 $\dfrac{tanA-cotB}{tanB-cotA}=tanAcotB$

證 左端$=(tanA-cotB)\Big/\left[\frac{1}{cotB}-\frac{1}{tanA}\right]$

$$=(tanA-cotB)\Big/\frac{tanA-cotB}{tanAcotB}=\text{右端}$$

又證 用§41的方法化各函數為比,則得

左端$=\left(\frac{y_1}{x_1}-\frac{x_2}{y_2}\right)\Big/\left(\frac{y_2}{x_2}-\frac{x_1}{y_1}\right)$

$$=\frac{y_1y_2-x_1x_2}{x_1y_2}\Big/\frac{y_1y_2-x_1x_2}{x_2y_1}$$

$$=\frac{x_2y_1}{x_1y_2}=\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{x_2}{y_2}=\text{右端}$$

習題十二

證下列各恆等式:

1. $(\cos\theta+\sin\theta)^2+(\cos\theta-\sin\theta)^2=2.$

2. $\dfrac{1}{1-\sin A}+\dfrac{1}{1+\cos A}=2\sec^2 A.$

SinA

3. $\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\csc\theta-\cot\theta$

4. $(\sec\theta+\csc\theta)(\sin\theta+\cos\theta)=\sec\theta\csc\theta+2.$

5. $\dfrac{1+\cot\theta+\csc\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2\csc\theta}{1+\cot\theta-\csc\theta}.$

6. $(\sin A+\csc A)^2+(\cos A+\sec A)^2=\tan^2 A+\cot^2 A+7.$

7. $(\sec^2 A+\tan^2 A)(\csc^2 A+\cot^2 A)=1+2\sec^2 A\csc^2 A.$

8. $\dfrac{1-\sin A+\cos A}{1-\sin A}=\dfrac{2(1+\cos A)}{1-\sin A+\cos A}.$

9. $\sin A(1+\tan A)+\cos A(1+\cot A)=\sec A+\csc A.$

10. $(\tan\theta+\sec\theta)^2=\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}.$

11. $\cot^2\theta\dfrac{\sec\theta-1}{1+\sin\theta}+\sec^2\theta\dfrac{\sin\theta-1}{1+\sec\theta}=0.$

12. $\sin^6\theta-\cos^6\theta=(2\sin^2\theta-1)(1-\sin^2\theta\cos^2\theta)$

13. $\sin^8 A-\cos^8 A=1-2\cos^2 A-2\sin^2 A\cos^2 A+4\sin^2 A\cos^4 A.$

14 $\dfrac{\tan A+\cot B}{\tan B+\cot A}=\dfrac{\tan A-\cot B}{\tan B-\cot A}=\dfrac{\tan A}{\tan B}.$

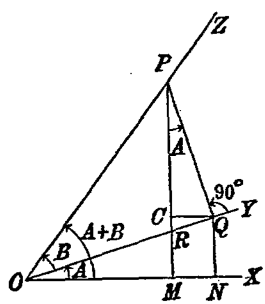
15. $\sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B=\sin^2 A-\sin^2 B.$

16. $(\sin A\cos B+\cos A\sin B)^2+(\cos A\cos B-\sin A\sin B)^2=1.$

17. 試證如 A 在第一第三兩象限內,則 $\tan A+\cot A\geqq 2$;如 A 在第二第四兩象限內,則如何?

43.和較公式 二角和差的函數,或一角兩倍或其半的函數,可以化作單角的函數表示式.這類問題,以前者爲基本公式,稱爲和較公式.

44.兩銳角和的正餘弦 設 A,B 與 $A+B$ 都是銳角,今作 $\angle XOY=A$, $\angle ZOY=B$, 自 OZ 上任取一點 P, 作 $PM\perp OX$, $PQ\perp OY$, 又過 Q 作 $QN\perp OX$, 及 OX 的平行線,與 MP 交於 C, 則 $\angle CPQ=90^\circ-\angle PRQ=90^\circ-\angle ORM=A$



在 $rt.\triangle ONQ$ 中, $NQ=OQ\sin A$, $ON=OQ\cos A$,

在 $rt.\triangle PCQ$ 中, $CQ=QP\sin A$, $CP=QP\cos A$,

在 $rt.\triangle OQP$ 中, $\dfrac{QP}{OP}=\sin B$, $\dfrac{OQ}{OP}=\cos B$,

則 $$\sin(A+B)=\frac{MP}{OP}=\frac{MC+CP}{OP}=\frac{NQ+CP}{OP}$$
$$=\frac{NQ}{OP}+\frac{CP}{OP}=\frac{OQ}{OP}\sin A+\frac{QP}{OP}\cos A.$$

即 $$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B. \qquad \text{(I)}$$

又 $$\cos(A+B)=\frac{OM}{OP}=\frac{ON-MN}{OP}=\frac{ON-CQ}{OP}$$
$$=\frac{ON}{OP}-\frac{CQ}{OP}=\frac{OQ}{OP}\cos A-\frac{QP}{OP}\sin A.$$

即 $$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B. \qquad \text{(II)}$$

例 $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$$

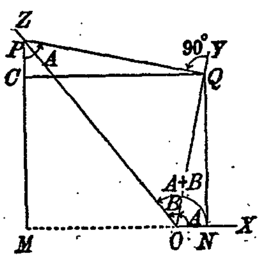
$$= \frac{1}{4} \times 1.414 \times 2.732 = 0.966$$

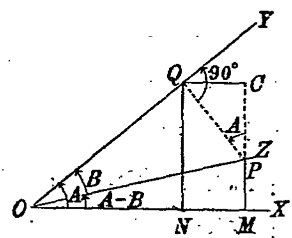
$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$$

$$= \frac{1}{4} \times 1.414 \times 0.732 = 0.259.$$

學生試察下左圖,卽知$A+B$爲鈍角時,證法仍同.





45.<u>兩銳角差的正餘弦</u>:設A,B爲二銳角,而A大於B,卽$A-B$爲正,則可就上右圖證明

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \qquad \text{(III)}$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \qquad \text{(IV)}$$

證法和上節相倣,學生試自補出.

例 $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$$

$$= \frac{1}{4} \times 1.414 \times 0.732 = 0.259$$

習題十三

1. 設 A 爲銳角,求 $\sin(30°+A)$, $\cos(45°+A)$.

2. 設 $A<B$, 試利用 §32 公式,證明 (III), (IV) 仍成立.

3. 設 $A'=A+90°$, 而 A, B 皆是銳角,試證 (I), (II) 依舊成立.

提示　$\sin(A'+B)=\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$
$=\sin(90°+A)\cos B+\cos(90°+A)\sin B=\sin A'\cos B+\cos A'\sin B$

4. 試用上題陸續推證,如 A 爲第三式第四象限內的角, $\sin(A+B)$, $\cos(A+B)$ 的展式仍與 A 爲銳角時一樣.

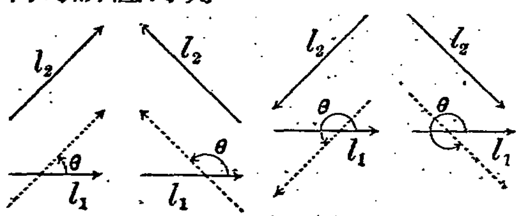
5. 試證 $\sin(A+B)$, $\cos(A+B)$ 展式,不論 A, B 是不是銳角,均無不合.

6. 如一正角與一負角始終邊各相合,試求二角間的關係.這兩種角的各函數是不是相同?

7. 設 $A+B=A'$, 則 $A=A'-B$, 代入 $\sin(A+B)$, $\cos(A+B)$ 展式,再由這二等式解出 $\sin(A'-B)$, $\cos(A'-B)$.

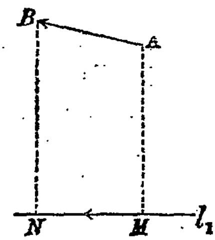
*46. 有向線段射影

定義一　取二有向直線或線段 l_1 與 l_2, 則自 l_1 至 l_2 的角,乃指 l_1 依其上一點作正向旋轉,至與 l_2 平行且同向時,所經的角.



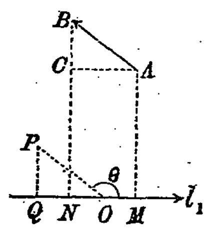
*自 §46 至 §48 以及習題十四,都可酌量情形略去.

定義二　自有向線段$\overline{AB}$兩端點,作至直線l_1上的垂線AM, BN,則有向線段$\overline{MN}$叫做$\overline{AB}$在l_1上的射影,記爲$Proj.\overline{AB}$.



*47.射影定理

定理一　**一有向直線l_1與他一有向線段AB的角爲θ,而$AB=l$,則AB在l_1上的射影爲$l\cos\theta$.**

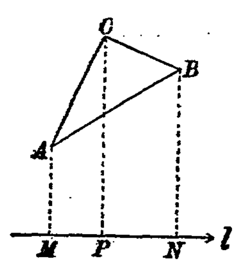


證　在l_1上任取一點O,作$\overline{OP}\parallel\overline{AB}$且相等(等值而同向),則$\angle MOP=\theta$,作$l_1$上的垂線$AM$, BN, PQ,又作$AC\parallel l_1$,便有$Proj.\overline{AB}=\overline{MN}=\overline{AC}=\overline{OQ}=l\cos\theta$.

定理二　**A, B, C爲三任意點,對於任何直線l,均有**

$$Proj.\overline{AB}+Proj.\overline{BC}=proj.\overline{AC}$$

證　自A, B, C,作l的垂線AM, BN, CP,則按§19的沙耳定理



有　$\overline{MN}+\overline{NP}+\overline{PM}=0$

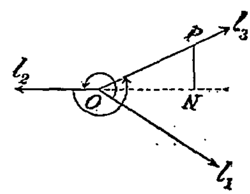
或　$\overline{MN}+\overline{NP}=-\overline{PM}=\overline{MP}$

但　$Proj.\overline{AB}=\overline{MN}$, $Proj.\overline{BC}=\overline{NP}$,

$Proj.\overline{CA}=\overline{PM}$.

$\therefore$　$Proj.\overline{AB}+Proj.\overline{BC}=Proj.\overline{AC}$.

*48.和較公式的普遍性　就習題十三各題,可知和較公式對任何角皆眞,但照此推廣,未免覺得煩瑣,今利用射影定理,作普遍證明如下:



自一點 O, 作 l_1, l_2, l_3 三有向線,令自 l_1 至 l_2 的角爲 A, l_2 至 l_3 的角爲 B, 則自 l_1 至 l_3 的角必爲 $A+B$. 在 l_3 上任取一點 P, 作 $PN\perp l_2$, 察 $\triangle ONP$ 在 l_1 的射影,按上節定理二,得 $Proj.\overline{OP}=Proj.\overline{ON}+Proj.\overline{NP}$

即　$\overline{OP}\cos(A+B)=\overline{ON}\cos A+\overline{NP}\cos(90^\circ+A)$

$$=\overline{OP}\cos A\cos B+\overline{OP}\sin B\cos(90^\circ+A)$$

$$\therefore\quad \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

對於負角,可以始終邊各相合的正角來代替(即以 $k\times360^\circ-\theta$ 代 $-\theta$),則上式可適合負角的情形.

以 $90^\circ-A'$ 代 A, $-B'$ 代 B, 則得

$$\cos(90^\circ-A'-B')=\cos(90^\circ-A')\cos(-B')$$
$$-\sin(90^\circ-A')\sin(-B')$$

即　$$\sin(A'+B')=\sin A'\cos B'+\cos A'\sin B'.$$

又將 B 與 B' 改爲負角,可得

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B,$$

$$\sin(A'-B')=\sin A'\cos B'-\cos A'\sin B'.$$

*習題十四

1. 試推廣沙耳定理如下:設$A_1, A_2 \cdots\cdots A_{n-1}, A_n$爲一直線上的$n$點,次序任意排列,皆有$\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\cdots\cdots+\overline{A_{n-1}A_n}=\overline{A_1A_n}$.

2. 試推廣射影定理二如下: $A_1, A_2, \cdots\cdots A_{n-1}, A_n$,爲任意$n$點,$l$爲任意直線,則在$l$上的射影合於

$$Proj.\overline{A_1A_2}+Proj.\overline{A_2A_3}+\cdots\cdots+Proj.\overline{A_{n-1}A_n}=Proj.\overline{A_1A_n}.$$

3. 設 $\cos A=\frac{4}{5}$, $\cos B=\frac{3}{5}$, 試求 $\sin(A+B)$, $\cos(A-B)$.

註 由$\cos A$求$\sin A$,暫只取正值,對於B,亦如此(下同).

4. 設 $\sec A=\frac{17}{8}$, $\csc B=\frac{5}{4}$, 試求 $\sec(A+B)$.

試證下列各恆等式:

5. $\sin(A+45°)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin A+\cos A)$. 又 $\cos(A+45°)$ 如何?

6. $2\sin(A+45°)\sin(A-45°)=\sin^2 A-\cos^2 A$.

7. $2\sin(A+45°)\cos(B+45°)=\cos(A+B)+\sin(A-B)$.

8. $\sin(A+B)\sin(A-B)=\cos^2 B-\cos^2 A=\sin^2 A-\sin^2 B$.

9. $\cos(A+B)+\sin(A-B)=(\cos A+\sin A)(\cos B-\sin B)$.

試利用和較公式化簡下列各式:

10. $\cos(A-B)\cos(A+B)-\sin(A-B)\sin(A+B)$.

11. $\sin A\sin(B-C)+\sin B\sin(C-A)+\sin C\sin(A-B)$.

提示 先證 $\sin(B-C)/\sin B\sin C=\tan C-\tan B$.

12. 求以單角函數表 $\sin(A-B+C)$, $\cos(A-B-C)$.

13. 求證 $1+\tan 2\theta\tan\theta=\sec 2\theta$.

14. 求證 $\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta=\sin 4\theta\cos\theta-\cos 4\theta\sin\theta$.

49. 兩角和差的正餘切　按商數關係與§48,即得

$$\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$$ 上下以 cosA.cosB 除

$$=\frac{\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}}{1-\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\sin B}{\cos B}}=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B} \qquad \text{(V)}$$

依同法或將上式中 B 換爲 $-B$, 皆得

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B} \qquad \text{(VI)}$$

又取所得公式兩端的逆數,更得

$$\cot(A\pm B)=\frac{\cot A\cot B\mp 1}{\cot B\pm\cot A}.$$

註　用疊號 $\pm$ 及 $\mp$ 記和差各函數公式甚便,但須注意兩端須同取上號,或同取下號.

注意　這種公式既係根據正餘弦和差公式求出,所以對於 A, B 爲任何角,都普遍成立,以下各節的公式亦同.

50. 倍角公式　設 $A=B$, 則由 $(I)(II)$ 二式得

重要

$$\sin 2A=2\sin A\cos A. \qquad \text{(VII)}$$

$$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A \qquad \text{(VIII)}$$

或 $$=\cos^2A-(1-\cos^2A)=2\cos^2A-1 \qquad (IX)$$

或 $$=(1-\sin^2A)-\sin^2A=1-2\sin^2A \qquad (X)$$

同法,由(V)可得

$$\tan 2A=2\tan A/(1-\tan^2A) \qquad (XI)$$

51.半角公式 設 $2A=\alpha$,則 $A=\frac{\alpha}{2}$,(IX)式變為

$$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1,\quad 2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha$$

$$\therefore\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad (XII)$$

同法由(X)得 $$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad (XIII)$$

SinA=

(XIII)÷(XII) $$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \qquad (XIV)$$

又 $$=\pm\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (XV)$$

又 $$=\pm\sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad (XVI)$$

注意 由(XIV)知由 $\cos\alpha$ 求 $\tan\frac{\alpha}{2}$,可得正負二值,其號,須由 α 角所在象限決定.如 α 在第一第二兩象限內,則應取正號,而 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$,如 α 在第三第四兩象限內,則應取負號,而 $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}$;所以($XV$),($XVI$)二式無疊號.

52.非單角函數的恆等式 凡含兩角和較,或倍角,半角函數的恆等式,可用上述(I)至(XVI)各式來證.

例一　證 $tan(45°+A)-tan(45°-A)=2tan2A$.

證　$tan(45°+A)=\dfrac{tan45°+tanA}{1-tan45°tanA}=\dfrac{1+tanA}{1-tanA}$

$tan(45°-A)=\dfrac{tan45°-tanA}{1+tan45°tanA}=\dfrac{1-tanA}{1+tanA}$

$\therefore\ tan(45°+A)-tan(45°-A)=\dfrac{(1+tanA)^2-(1-tanA)^2}{1-tan^2A}$

$=\dfrac{4tanA}{1-tan^2A}=2tan2A.$

$2\dfrac{tanA+tanA}{1-tanA\cdot tanA}=2tan2A$ //

例二　求以單角函數表三倍角函數.

解　$\mathbf{sin3A}=sin(2A+A)=sin2AcosA+cos2AsinA$

$=2sinAcos^2A+(1-2sin^2A)sinA$

$\mathbf{=3sinA-4sin^3A.}$

同理可證　$\mathbf{cos3A=4cos^3A-3cosA.}$

$\mathbf{tan3A=(3tanA-tan^3A)/(1-3tan^2A).}$

例三　求以 $tan\dfrac{\alpha}{2}$ 表 $sin\alpha$ 及 $cos\alpha$.

解　$sin\alpha=2sin\dfrac{\alpha}{2}cos\dfrac{\alpha}{2}=2\cdot\dfrac{sin\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}}\cdot cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2tan\frac{\alpha}{2}}{sec^2\frac{\alpha}{2}}$

右端×$cos\frac{\alpha}{2}$　　$\therefore$　$tan\frac{\alpha}{2}$　　$\frac{1}{sec^2\frac{\alpha}{2}}$

$=\dfrac{2tan\frac{\alpha}{2}}{1+tan^2\frac{\alpha}{2}}$

$cos\alpha=cos^2\dfrac{\alpha}{2}-sin^2\dfrac{\alpha}{2}=cos^2\dfrac{\alpha}{2}\left(1-sin^2\dfrac{\alpha}{2}\Big/cos^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$

$=\dfrac{1-tan^2\frac{\alpha}{2}}{sec^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+tan^2\frac{\alpha}{2}}$

$tan^2\frac{\alpha}{2}$

53.特殊角的函數　在§3中已求得 $30°$, $45°$, $60°$ 等角函數值,由和較公式,更可推 $15°$, $75°$ 等角函數.現在利用倍角半角等公式,來求另外幾種特殊角函數.

(一)半角公式的應用　　由 (XII), $(XIII)$ 即得

$$sin15°=\sqrt{\frac{1-cos30°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

$$sin22\frac{1}{2}°=\sqrt{\frac{1-cos45°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

他種函數,與 $7\frac{1}{2}°$, $11\frac{1}{4}°$ 等角各函數,可做此推求.

(二)上節例二的應用　設 $A=18°$, 則 $5A=90°$, 故

$$2A=90°-3A \text{ 而 } sin2A=sin(90°-3A)=cos3A.$$

$$\therefore\ 2sinAcosA=4cos^3A-3cosA.$$

因 $A=18°$, $cosA\neq0$, 所以有 $2sinA=4cos^2A-3$,

即 $$4sin^2A+2sinA-1=0.$$

即得 $sinA=\frac{1}{4}(-1\pm\sqrt{5})$

但 $sin18°$ 應爲正,　$\therefore$　$sin18°=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$.

用這結果不難求 $36°$, $72°$, $9°$ 等角各函數.

註　據此能推得圓內接正十五角形的作圖法,可參看著者編新課程標準適用高中幾何學.

習　題　十　五

求證下列各恆等式:

1. $\dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A.$ **2.** $\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot 2\alpha.$

3. $\left(\sin\dfrac{A}{2}\pm\cos\dfrac{A}{2}\right)^2=1\pm\sin A.$ **4.** $\cos 4A=8\cos^4 A-8\cos^2 A+1.$

5. $\dfrac{\sin 3\alpha+\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}=\cot\alpha.$ **6.** $\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=\tan^2\left(45^\circ+\dfrac{\theta}{2}\right).$

7. $\dfrac{1-\cos 2\theta+\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta+\sin 2\theta}=\tan\theta.$ **8.** $\dfrac{\cos 3\alpha-\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=1-2\sin 2\alpha.$

9. $\dfrac{\cos\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}-\sin\dfrac{A}{2}}=\tan A+\sec A.$

10. $4\sin^3 a\cos 3\alpha+4\cos^3\alpha\sin 3\alpha=3\sin 4\alpha.$

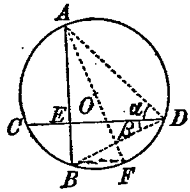
11. $\tan 3A-\tan 2A-\tan A=\tan 3A\tan 2A\tan A.$

12. 求以 $\tan 2A$ 表 $\sin A$ 與 $\cos A$.

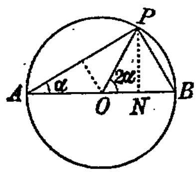
13. 已知 $\tan\dfrac{A}{2}=t$, 求 $\sin A+\tan A$, 與 $\sec A+\tan A$.

14. 求證(一) $\cos^2 36^\circ+\sin^2 18^\circ=\dfrac{3}{4}$, (二)$4\sin 18^\circ\cos 36^\circ=1$.

15. 右圖中,AB 與 CD 爲 ⊙O 內二垂直弦,AF 爲其直徑,試由 $AE\cdot EB=CE\cdot ED$ 的關係以求出 $\tan(\alpha+\beta)$.



16. 右圖中, AB 是 ⊙O 的直徑,且 $PN\perp AB$, 試由 $PN\cdot AB=AP\cdot PB$ 的關係,以求倍角各函數公式.



54.<u>化和爲積法</u> 將(I)與(III)相加減得

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B \qquad (XVII)$$

$$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B \qquad (XVIII)$$

同法,取(II)與(IV)式相加減,即有

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B \qquad (XIX)$$

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B \qquad (XX)$$

如命 $A+B=x$, $A-B=y$, 則甚易求得$A=\frac{1}{2}(x+y)$, $B=\frac{1}{2}(x-y)$, 上面四公式便變爲下形:

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}. \qquad (XXI)$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}. \qquad (XXII)$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad (XXIII)$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}. \qquad (XXIV)$$

例一 $\sin 9A-\sin 7A=2\cos\frac{9A+7A}{2}\sin\frac{9A-7A}{2}=2\cos 8A\sin A.$

例二 $\cos 70^\circ-\cos 10^\circ=-2\sin\frac{70^\circ+10^\circ}{2}\sin\frac{70^\circ-10^\circ}{2}=-\sin 40^\circ.$

例三 試證 $\cos 2\theta\cos\theta-\sin 4\theta\sin\theta=\cos 3\theta\cos 2\theta.$

證 左邊$=\frac{1}{2}(\cos 3\theta+\cos\theta)-\frac{1}{2}(\cos 3\theta-\cos 5\theta)$

$=\frac{1}{2}(\cos\theta+\cos 5\theta)=\cos 3\theta\cos 2\theta.$

例四 求 $\cos 20^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ$ 的值.

解 原式$=\cos 20^\circ+(\cos 100^\circ+\cos 140^\circ)$

$=\cos 20^\circ+2\cos 120^\circ\cos 20^\circ=\cos 20^\circ+2\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 20^\circ=0$

55.化積爲和法　用(XVII)至(XX)可化積爲和.

例一　$2\sin75^\circ\sin15^\circ=\cos(75^\circ-15^\circ)-\cos(75^\circ+15^\circ)=\frac{1}{2}$.

例二　$2\cos(45^\circ+\theta)\cos(45^\circ-\theta)=\cos90^\circ+\cos2\theta=\cos2\theta$.

56.和積式變化雜例

例一　$\dfrac{\sin a+\sin b}{\sin a-\sin b}=\dfrac{2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}}=\dfrac{\tan\frac{a+b}{2}}{\tan\frac{a-b}{2}}$.

例二　$\sin a+\cos b=\sin a+\sin(90^\circ-b)$

$$=2\sin\left(\frac{a-b}{2}+45^\circ\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}-45^\circ\right).$$

例三　$\tan a\pm\tan b=\dfrac{\sin a}{\cos a}\pm\dfrac{\sin b}{\cos b}$

$$=\frac{\sin a\cos b\pm\cos a\sin b}{\cos a\cos b}=\frac{\sin(a\pm b)}{\cos a\cos b}.$$

例四　$1\pm\tan a=\tan45^\circ\pm\tan a=\sqrt{2}\sin(45^\circ\pm a)/\cos a$.

例五　化 $\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ 爲三個正弦的和.

解　原式 $=2\sin\gamma\cos(\beta-\alpha)+2\cos(\alpha+\beta)\sin(-\gamma)$

$$=2\sin\gamma[\cos(\beta-\alpha)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$=2\sin\gamma(2\sin\beta\sin\alpha)=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

註　由此例知函數連乘積往往可化成和數.

例六　求證 $\sin^2 5x-\sin^2 3x=\sin8x\sin2x$.

證　左端 $=(\sin5x+\sin3x)(\sin5x-\sin3x)$

$$=(2\sin4x\cos x)(2\cos4x\sin x)$$

$$=(2\sin4x\cos4x)(2\sin x\cos x)=$$ 右端.

又證 右端 $=\frac{1}{2}(\cos 6x-\cos 10x)$ 由積化和 由積化和公式

$$=\frac{1}{2}[\underbrace{1-2\sin^2 3x}_{\cos 6x}-(\underbrace{1-2\sin^2 5x}_{\cos 10x})]=\text{左端}.$$

例七 求 $p=\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$ 的值.

解 以 $2^3\sin 20^\circ$ 乘兩端,得

$=2\sin 20^\circ\cos 20^\circ=\sin(20^\circ+20^\circ)+\sin(20^\circ-20^\circ)$
$=\sin 40^\circ$

$$(2^3\sin 20^\circ)p=2^3\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$$

$$=2^2\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=2\sin 80^\circ\cos 80^\circ=\sin 160^\circ=\sin 20^\circ.$$

但 $\sin 20^\circ\neq 0$, 故 $8p=1$; 即 $p=1/8$.

習題十六

1. 化 $2\sin(2\theta+\gamma)\cos(\theta-2\gamma)$ 與 $\cos(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)$ 為和.
2. 化 $\sin 3A-\sin 11A$ 與 $\cos 10^\circ-\cos 50^\circ$ 為積.
3. 試化商式 $(1-\tan A)/(1+\tan A)$ 為 $\tan(45^\circ-A)$.

試證下列恆等式:

4. $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos 2\alpha-\underset{\cos}{\sin 3\alpha}}=\cot\dfrac{\alpha}{2}.$
5. $\sin(60^\circ+A)-\sin(60^\circ-A)=\sin A.$
6. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin 4\beta}{\cos(\alpha+\beta)+\cos 4\beta}=\tan\dfrac{1}{2}(\alpha-3\beta).$
7. $\cos 3A+\sin 2A-\sin 4A=\cos 3A(1-2\sin A).$
8. $\sin 3\alpha+\sin 7\alpha+\sin 10\alpha=4\sin 5\alpha\cos\dfrac{7\alpha}{2}\cos\dfrac{3\alpha}{2}.$
9. $\dfrac{\cos 7\theta+\cos 3\theta-\cos 5\theta-\cos\theta}{\sin 7\theta-\sin 3\theta-\sin 5\theta+\sin\theta}=\cot 2\theta.$
10. $\cos 3A\sin 2A-\cos 4A\sin A=\cos 2A\sin A.$
11. $\cos 5^\circ-\sin 25^\circ=\sin 35^\circ.$

12. $\sin78^\circ - \sin18^\circ + \sin132^\circ = 0.$

13. $\cos2A\cos5A = \cos^2\dfrac{7A}{2} - \sin^2\dfrac{3A}{2}.$

14. $\cos(\beta+\gamma-\alpha) - \cos(\gamma+\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta-\gamma) - \cos(\alpha+\beta+\gamma)$

$$= 4\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma$$

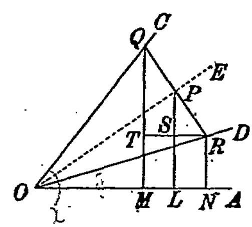
15. $\cos(A+B)\sin(A-B) + \cos(B+C)\sin(B-C) +$

$$\cos(C+D)\sin(C-D) + \cos(D+A)\sin(D-A) = 0.$$

16. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma) = 4\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\gamma+\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}.$

17. $\cos^2A + \cos^2(60^\circ + A) +$

$$\cos^2(60^\circ - A) = \frac{3}{2}.$$



18. 求 $\sin20^\circ\sin40^\circ\sin80^\circ$ 的值.

19. 右圖中 $\angle AOC = x$, $\angle AOD = y$, OE 是 $\angle DOC$ 的分角線,又 $OR = OQ$; QM, PL, RN, 都與 OA 垂直, $RT \perp MQ$. 試由這圖證明公式(XXI)至(XXIV).

提示 $\sin x + \sin y = \dfrac{MQ}{OQ} + \dfrac{NR}{OR} = \dfrac{2LP}{OR} = 2\dfrac{LP}{OP}\cdot\dfrac{OP}{OR}.$

57. <u>補助角</u> 應用化和爲積各公式,可化代數式和差爲積,以便於用對數計算.變化時須由已知數值定一相當角,這角叫補助角.今舉重要各例如下諸節.

58. <u>化 $x = a \pm b$ 爲積</u> 取補助角 θ,使

$$\frac{b}{a} = \tan\theta, \quad 則 \quad a \pm b = a(1 \pm \tan\theta).$$

$= a \pm a\frac{b}{a} = a(1 \pm \frac{b}{a}) = a(1+\tan\theta)$

按§56例四,便得 $a \pm b = a\sqrt{2}\sin(45^\circ \pm \theta)/\cos\theta.$

如遇多項式 $a\pm b\pm c\pm d\pm\cdots\cdots$，則可先化二項爲積,再依法與第三項合併,如此逐漸推求即得.

59.化 $x=\sqrt{a^2\pm b^2}$ 爲積

取 $\frac{b}{a}=\tan\theta$，則 $x=\sqrt{a^2+b^2}=a\sqrt{1+\tan^2\theta}=a\sec\theta$.

取 $\frac{b}{a}=\cos\theta$，則 $x=\sqrt{a^2-b^2}=a\sqrt{1-\cos^2\theta}=a\sin\theta$.

註 原式中 a, b 可視爲正數,則可取 θ 爲銳角,如此得根式的主值(即正根).又在 $\sqrt{a^2-b^2}$ 中,必須 $a>b$，以免虛值,故可設 $\frac{b}{a}=\cos\theta$，以定補助角 θ.

60.化 $x=a\sin\alpha\pm b\cos\alpha$ 爲積 令 $\frac{b}{a}=\tan\theta$，

則 $$x=a(\sin\alpha\pm\tan\theta\cos\alpha)$$
$$=\frac{a}{\cos\theta}(\sin\alpha\cos\theta\pm\cos\alpha\sin\theta)=\frac{a\sin(\alpha\pm\theta)}{\cos\theta}.$$

***61.**特殊關係角的恆等式 如 A, B, C 三角爲三角形各內角,則 $A+B+C=180°$，這種關係角間,有許多有趣味的恆等式證這種恆等式時,常須用及補角函數關係,即在 $A+B+C=180°$ 時,有

$$\sin(B+C)=\sin A,\quad \cos(B+C)=-\cos A,\quad \tan(B+C)=-\tan A.$$

注意 這種恆等式中,不論 A, B, C 諸角的正負大小,只要合 $A+B+C=180°$ 的關係時,都能成立.

例一 如 $A+B+C=180°$，試證

$$\underbrace{\sin 2A}_{x}+\underbrace{\sin 2B}_{y}+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C. \qquad (1)$$

*本節和下節以及習題十七,可酌量刪去.

$= 2\sin C \cos C$

證　左端 $=2sin(A+B)cos(A-B)+2sinC\,cosC=$

$=2sinC\,cos(A-B)+2sinC\,cosC$

$=2sinC[cos(A-B)-cos(A+B)]$

$=2sinC\cdot 2sinA\,sinB=$ 右端.　依和差公式得

註　令 $180°-A'$ 代 $2A$, $180°-B'$ 代 $2B$, $180°-C'$ 代 $2C$, 則因 $A+B+C=180°$ 的條件,變為 $A'+B'+C'=180°$, 而(1)式化為

$$sinA'+sinB'+sinC'=4cos\frac{A'}{2}\ cos\frac{B'}{2}\ cos\frac{C'}{2} \qquad (2)$$

用這種變化方法,往往可從一式推出許多他式.

例二　如 $A+B+C=180°$ 試證

$$cosA+cosB+cosC=1+4sin\frac{A}{2}\ sin\frac{B}{2}\ sin\frac{C}{2} \qquad (3)$$

證　左端 $=2cos\frac{A+B}{2}\ cos\frac{A-B}{2}+cosC$

$=2sin\frac{C}{2}\ cos\frac{A-B}{2}+1-2sin^2\frac{C}{2}$

$=1+2sin\frac{C}{2}\left(cos\frac{A-B}{2}-sin\frac{C}{2}\right)$

$=1+2\,sin\frac{C}{2}\left(cos\frac{A-B}{2}-cos\frac{A+B}{2}\right)$

$=1+2\,sin\frac{C}{2}\left(2\,sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}\right)=$ 右端.

註　令 $180°-2A'$ 代 A, $180°-2B'$ 代 B, $180°-2C'$ 代 C,則由 $A+B+C=180°$ 得 $A'+B'+C'=180°$, 而(3)式變為

$$cos2A'+cos2B'+cos2C'=-1-4cosA'cosB'cosC' \qquad (4)$$

例三　如 $A+B+C=180°$,試證

$$tanA+tanB+tanC=tanA\,tanB\,tanC \qquad (5)$$

證 因 $\tan A=-\tan(B+C)=-\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}$.

兩端去分母化簡即得(又 $A+B+C=0$ 時(5)式也成立).

註 以 $\tan A\tan B\tan C$ 除兩端,得

$$\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1. \tag{6}$$

令 $90^\circ-\dfrac{A'}{2}$ 代 A, $90^\circ-\dfrac{B'}{2}$ 代 B, $90^\circ-\dfrac{C'}{2}$ 代 C, 則由

$A+B+C=180^\circ$ 得 $A'+B'+C'=180^\circ$, 而(6)式變為

$$\tan\frac{B'}{2}\tan\frac{C'}{2}+\tan\frac{C'}{2}\tan\frac{A'}{2}+\tan\frac{A'}{2}\tan\frac{B'}{2}=1. \tag{7}$$

又因 $\dfrac{\cot B+\cot C}{\tan B+\tan C}=\cot B\cdot\cot C$, 故由(6)可得

$$\frac{\cot B+\cot C}{\tan B+\tan C}+\frac{\cot C+\cot A}{\tan C+\tan A}+\frac{\cot A+\cot B}{\tan A+\tan B}=1. \tag{8}$$

***62.三角等式的推演** 利用三角恆等式,尙可化一三角等式為他種三角等式,舉例如下:

例一 設 $\tan A=2\tan B$, 求證 $\sin(A+B)=3\sin(A-B)$.

證 按題設, $\sin A/\cos A=2\sin B/\cos B$, 即

上式等号两边相乘 $\sin A\cos B=2\cos A\sin B$.

兩端各加 $\cos A\sin B$, $\sin(A+B)=3\cos A\sin B$.

兩端各減 $\cos A\sin B$, $\sin(A-B)=\cos A\sin B$.

$\therefore \quad \sin(A+B)=3\sin(A-B)$

註 按和較公式展開求證式兩端,化簡可得 $\tan A=2\tan B$. 這種逆證法,可助初學的人構思(參看§40(四)).

例二　設 $\cos\theta+\sin\theta=\frac{5}{4}$，求 $\cos^3\theta+\sin^3\theta$ 的值.

解　$\cos^3\theta+\sin^3\theta=(\cos\theta+\sin\theta)(\cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta)$.

在此須求第二因式的值,而應求其與 $\cos\theta+\sin\theta$ 的關係.

$$(\cos\theta+\sin\theta)^2=\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta$$
$$=-2(\cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta)+3(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$

卽
$$\frac{25}{16}=-2(\cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta)+3.$$

$$\therefore\ \cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta=-\frac{1}{2}\left[\frac{25}{16}-3\right]=\frac{23}{32}$$

$$\therefore\ \cos^3\theta+\sin^3\theta=\frac{5}{4}\cdot\frac{23}{32}=\frac{115}{128}.$$

*習題十七

1. 令 $\frac{b}{a}=\tan^2\theta$ 以化 $a+b$ 爲積.

2. 如 $\frac{b}{a}<1$，試令 $\frac{b}{a}=\sin^2\theta$ 以化 $a-b$ 爲積.

3. 在 $x=a\cos(\alpha t+A)+b\cos(\beta t+B)$ 一式中,令

$$\alpha t+A=u+v,\quad \beta t+B=u-v,\quad \frac{a-b}{a+b}\tan u=\tan\theta$$

則
$$x=\frac{1}{\cos\theta}(a+b)\cos u\cos(v+\theta),$$ 試加證明.

4. 試直接證明 §61 中(2),(4),(6),(7),四式.

5. 試由 §61 中(4)式與 $2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$ 的關係,證

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C=1 \qquad (9)$$

6. 以 $180°-A'$ 代 A，$180°-B'$ 代 B，$-C'$ 代 C，則 $A'+B'+C'$ 如何,又(1),(2),(3)各化爲那一種等式?

7. 作(7)式後的變換則(2)和上面(9),各化爲何式?

8. 試由(5)式化 $\tan(B-C)+\tan(C-A)+\tan(A-B)$ 爲積.

9. 設 $\sin\theta+\sin\alpha=a$，$\cos\theta+\cos\alpha=b$，求 $\cos(\theta-\alpha)$，$\tan\frac{\theta-\alpha}{2}$.

10. 設 $\frac{\sin A+\sin B}{\sin(A+B)}=m$，$\frac{\cos A-\cos B}{\cos(A-B)}=n$，求 $\sin\frac{A\pm B}{2}$，$\cos\frac{A\pm B}{2}$.

第三章摘要

本章授下列各項:

恆等式證法	自一有向線至他有向線的角
有向線段射影	射影諸定理
兩角和較公式	倍角半角等公式
和積式變化	代數式變形
特殊關係角恆等式	三角等式推演

1. 證三角恆等式,有(一)逐步推證,(二)利用基本關係式(三)化兩端為同式,(四)逆證法,等方法.

2. 射影定理: (一) $proj.\overline{AB}=\overline{AB}\cos\theta$.

(二) $proj.\overline{AB}+proj.\overline{BC}+proj.\overline{CA}=0$

3. 和較公式: $\sin(A\pm B)=\cos A\sin B\pm\sin A\cos B$

$\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B$

$\tan(A\pm B)=(\tan A\pm\tan B)/(1\mp\tan A\tan B)$

對於 A, B 為任何角都成立.

4. 倍角公式: $\sin 2A=2\sin A\cos A$,

$\cos 2A=\cos^2A-\sin^2A=2\cos^2A-1=1-2\sin^2A$.

5. 半角公式: $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)}$.

6. 用兩角和較,倍角,半角等式可求 15°, 75°, 18° 等角函數.

7. 化和為積公式: $\sin x\pm\sin y=2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\mp y}{2}$,

$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$.

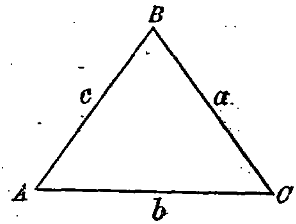
8. $a\pm b$, $\sqrt{a^2\pm b^2}$, $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ 等式,可用輔助角化為積.

9. 特殊關係角恆等式,每須利用輔角關係去證.

第四章

三角形性質

63.<u>邊角間關係</u>　任意三角形有三邊和三角六元素,通常用大小寫同文字記相對邊角如右圖,按幾何學的理,可知:(一)三內角合於



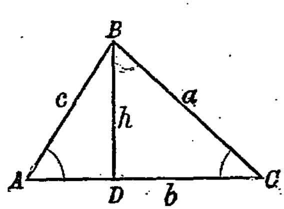
$$A+B+C=180^\circ \tag{1}$$

的關係;(二)如已知三元素,而含有一邊,則該三角形可定(除已知二邊和對角時可有二解外),但幾何學未嘗說及由已知元素值求未知元素的方法;本章目的,首在求這種基本關係式,再論一三角形的相關圓(如外接內切傍切諸圓)半徑.至於計算方法,待下章再說.

64.<u>正弦定律</u>　**任何三角形中,各邊與其對角的正弦成比例,即**

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}. \tag{2}$$

證　(一)設三角都是銳角,則作 $BD\perp AC$ 如右圖,而得



$$h=a\sin C=c\sin A$$

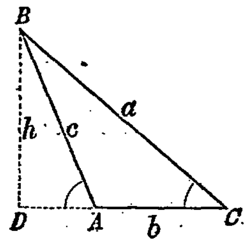
$$\therefore\ \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

同理即得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

(二)如有一鈍角設爲A，則垂趾 D 在 AC 邊延線上，這時有 $h=a\sin C$

$$=c\sin(180^\circ-A)=c\sin A$$

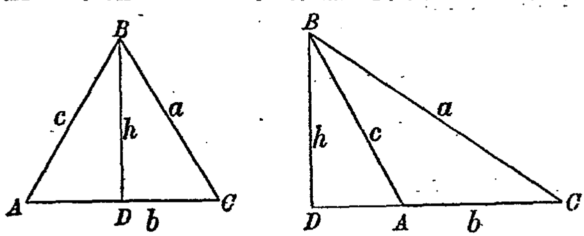
所以結果仍與上同.



65.<u>餘弦定律</u> 任何三角形中，一邊的平方等於他二邊平方和，減去兩倍二邊與對角餘弦乘積，

即 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$
或 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$ (3)
或 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$

證 不論 $\triangle ABC$ 中有無鈍角，依下圖作出垂線



BD，則得 $rt.\triangle ADB$ 和 $rt.\triangle CDB$.按畢氏定理，

得 $c^2=h^2+AD^2,$ $a^2=h^2+CD^2=h^2+(b-AD)^2$[左圖]

$h^2=c^2-AD^2$

或 $=h^2+(b+AD)^2$[右圖]

‖

$c^2-\cancel{AD^2}+b^2-2bAD+\cancel{AD^2}$

消去 h, 即得　$a^2=b^2+c^2-2b\cdot AD$　(左圖)

$=b^2+c^2+2b\cdot AD$　(右圖)

這便是推廣的畢氏定理,但左圖中 $AD=c\cos A$,

右圖中　$AD=c\cos(180°-A)=-c\cos A$.

所以代入後,二種形式相同,都變成

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A. /\!/$$

依同法即可證明他二式,其理甚明.

*66.邊角關係式的獨立性　上面所述的各種邊角間關係式中,(1)與(2)合成獨立三式.因(2)只含二個獨立關係式,不能消去三邊,而得一含三角的(1)式.又按§63(二),即知由三已知元素(即爲三個等式)與這三式,即可視含六元素的聯立方程式,而解出他元素,且可明三已知元素,不能盡爲角,否則與(1)不爲獨立.

至於這種獨立關係式,只能有三個,否則不必由三已知元素即可求其他元素.

同理,餘弦定律(3)中三式,或任取其二與(1),也成一組獨立三式.我們并可由任一組獨立三式推出他一組(見習題十九內第2,3各題,和§66註).

注意　如已知一三角形六元素間三個獨立方程式,也可解出各元素的值.又所得的解,或已知元素值,須合於某種限制.容後論三角形解法時再說.

---

*本節如初學不易了解,可以略去.

習題十八

1.試由正餘弦定律的圖證明 $a=c\cos B+b\cos C$,

與 $b=c\cos A+a\cos C$, $c=a\cos B+b\cos A$.

2.試由兩角和公式與正弦定律,證明上題.

提示 $\sin A=\sin(B+C)$,展開後再按正弦定律,以邊代各正弦.

3.從第 1 題三式消去二角,以證明餘弦定律.

註 由第 2, 3 兩題,便知由內角和關係與正弦定律,可推出餘弦定律(參看§66).

4.已知 $a=\sqrt{3}+1$, $b=2$, $c=\sqrt{6}$, 求 B, C 與 A 三角.

5.已知 $a=3$, $c=5$, $B=120°$, 求 b.

6.設 $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$, 求 A.

7.設 $a:b:c=\cos\frac{A}{2}:\cos\frac{B}{2}:\cos\frac{C}{2}$,求這三角形諸角.

試證明下列各三角形邊角關係式:

8. $2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C)=a^2+b^2+c^2$.

9. $(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=a+b+c$.

10. $\tan A=\dfrac{a\sin C}{b-a\cos C}$.　　11. $\dfrac{c\sin(A-B)}{b\sin(C-A)}=\dfrac{a^2-b^2}{c^2-a^2}$.

12. $(b+c)\sin\dfrac{A}{2}=a\cos\dfrac{B-C}{2}$

提示 設 $a/\sin A=b/\sin B=c/\sin C$ 的共同比值為 k.

>13 $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$.

14.如 $c^4-2(a^2+b^2)c^2+a^4+a^2b^2+b^4=0$,試證 $C=60°$或$120°$.

提示 分解題設式為兩個 c 的二次因式,再和餘弦定律比較.

67.<u>以三邊表各角正弦</u> 按餘弦定律,則

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A=(1-\cos A)(1+\cos A)$$
$$=\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$
$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$
$$=\frac{1}{4b^2c^2}(b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)$$

設 $a+b+c=2s$, 則 $b+c-a=2(s-a)$, $(a-b+c)=2(s-b)$, $a+b-c=2(s-c)$, 代入上式,而兩端開方,得

$$\boldsymbol{\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}},$$

同理 $$\boldsymbol{\sin B=\frac{2}{ca}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}},$$

$$\boldsymbol{\sin C=\frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

註 由上三式,立可推出正弦定律.

68.<u>三角形解法</u> 按 §66 所述,由三已知元素(含有一邊)即可求他三元素,求法便叫爲**解三角形**,因已知的元素情形,而分四類如下表:

<table>
<tr><th>解法＼元素
已知</th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>a</th><th>b</th><th>c</th></tr>
<tr><td>二角一邊</td><td>(一)用內角和公式求</td><td colspan="3">已知</td><td colspan="2">(二)用正弦定律求</td></tr>
<tr><td>二邊對角(疑款)</td><td>已知</td><td>(一)用正弦定律求</td><td>(二)用內角和公式求</td><td colspan="2">已知</td><td>(三)用正弦定律求</td></tr>
<tr><td>二邊夾角</td><td colspan="2">(二)用正弦定律求</td><td colspan="3">已知</td><td>(一)用餘弦定律求</td></tr>
<tr><td>三邊</td><td colspan="3">用餘弦定律求</td><td colspan="3">已知</td></tr>
</table>

註 解法中(一),(二)等,表示求解的次序.

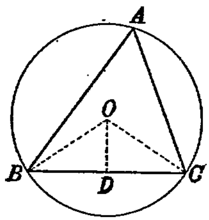
但餘弦定律,不便用對數計算,須改用他種公式,各種情形實際的算法,詳見下章.

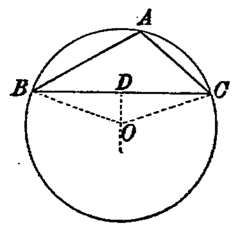
69.外接圓半徑　設 O 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓心,按幾何理,有 $\angle BOC=2\angle BAC$, 作 $OD\perp BC$, 則 $BD=\frac{a}{2}$,

$\angle BOD=A$ (左圖), 或 $\angle BOD=180°-A$ (右圖).

$\therefore\quad \frac{a}{2}=R\sin A,$　即 $\frac{a}{\sin A}=2R.$

同理可證 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$



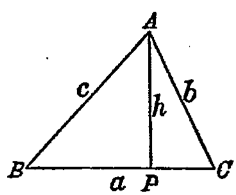


70.三角形面積　(一)設 $\triangle ABC$ 面積爲 Δ(後同),則

$$\Delta=\left(\frac{1}{2}ah_a=\right)\frac{1}{2}a.b.\sin C.$$

如 C 是鈍角,結果仍相同,做此

$$\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B.$$



註　由本節和上節的公式,都可推出正弦定律.

(二)將 §67 公式代入上面結果,則

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

71. <u>三角形各高</u>　以 h_a, h_b, h_c, 表 a, b, c 諸邊上的高,則

$$\triangle=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$$

$$\therefore\ h_a=\frac{2\triangle}{a}=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

h_b, h_c 不難照此求出.

習題十九

1. 試證 $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$, $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$.

2. 試求以二角及夾邊表一三角形面積的公式.

試求下列各題:

3. $\triangle=2R^2\sin A\sin B\sin C$.

4. $\triangle=s(s-a)\tan\frac{A}{2}$,　**5.** $\triangle=\frac{1}{4}(b^2\sin 2C+c^2\sin 2B)$.

6. $\triangle=\frac{1}{2}(a^2-b^2)\sin A\sin B/\sin(A-B)$.

7. $a^2-b^2=2Rc\sin(A-B)$.　**8.** $4R\cos\frac{C}{2}=(a+b)\sec\frac{(A-B)}{2}$.

9. $a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C$.

提示　須用 §61 中(1)式.

10. $a^2b^2c^2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=32\triangle^3$.

11. 設 $\triangle ABC$ 中 BC 邊中點爲 M,試證

$$\cot AMC=\frac{1}{2}(\cot B-\cot C).$$

12. 設 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的內外分角線與 BC 邊和其延線各交於 P, Q, 試證 $AP=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{1}{2}A$, $AQ=\frac{2bc}{c-b}\sin\frac{1}{2}A$,

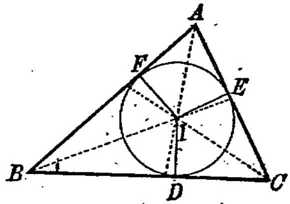
(式中設 $c>b$, 如其不然則分母取 $b-c$).

提示　先求分角線分 BC 邊所成二段的長.

72. <u>以面積表外接圓半徑</u>　按 §§69, 70 即得

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{abc}{2bc\sin A}=\frac{abc}{4\triangle}.$$

73. <u>內切圓半徑</u>　如下圖 $\triangle ABC$ 的內切圓心為 I; ID 等是半徑,設長為 r, 則



$$\triangle ABC=\triangle BIC+\triangle CIA+\triangle AIB=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)r=sr$$

$$\therefore\quad r=\triangle/s$$

***74.** <u>內切圓半徑的又一公式</u>　因內切圓心為三內分角線交點,故　$\angle IBD=\frac{1}{2}B$,　$\angle ICD=\frac{1}{2}C$.

$$\therefore\quad BD=r\cot\frac{B}{2},\qquad CD=r\cot\frac{C}{2}.$$

$$\therefore\quad a=BC=BD+CD=r\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right),$$ 以 $\cos\frac{B}{2}$, 以 $\sin\frac{B}{2}$ 變成 $\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$

即　$$r\sin\frac{B+C}{2}=a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\therefore\quad r=\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

***75.** <u>外接內切二圓半徑關係</u>　按上節結果

$$r=\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}a\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},\quad\text{又 } R=\frac{a}{2\sin A}.$$

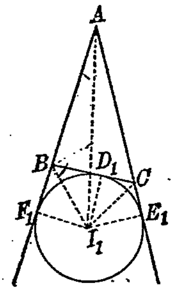
$$\therefore\quad r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

---

*本節以下至 §83 止,可斟酌情形刪去.

$\frac{a}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$　上下×2, $\frac{2a}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{2a}{\sin A}$　但 $\sin 2A=2\sin A\cdot\cos A$, 則 $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$　但 $4R=\frac{4a}{2\sin A}=\frac{2a}{\sin A}$.

*76.旁切圓半徑　設I_1爲$\angle A$內的旁切圓心,切BC於D_1,AB與AC的延線,各於F_1與E_1,半徑I_1D_1等爲r_1.則



$$\Delta = \Delta BI_1A + \Delta CI_1A - \Delta BI_1C$$
$$= \frac{1}{2}cr_1 + \frac{1}{2}br_1 - \frac{1}{2}ar_1$$
$$= \frac{1}{2}r_1(c+b-a) = r_1(s-a)$$

$\therefore\ r_1 = \dfrac{\Delta}{s-a}$. 同理,可得他二旁切圓半徑.

*77.旁切圓半徑的又一公式　因旁切圓心爲二外分角線與餘一角內分角線交點,故

$$\angle I_1BD_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}B, \qquad \angle I_1CD_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}C.$$

$$\therefore\ BD_1 = r_1\cot\left(90^\circ - \frac{1}{2}B\right) = r_1\tan\frac{B}{2}, CD_1 = r_1\tan\frac{C}{2}.$$

$$\therefore\ a = BC = BD_1 + CD_1 = r_1\left(\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right).$$

即 $$r_1\sin\frac{B+C}{2} = a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$ 变 $\dfrac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}} + \dfrac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$

$$\therefore\ r_1 = \frac{1}{\cos\frac{A}{2}}\,a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

同理 $$r_2 = \frac{1}{\cos\frac{B}{2}}\,b\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2},$$

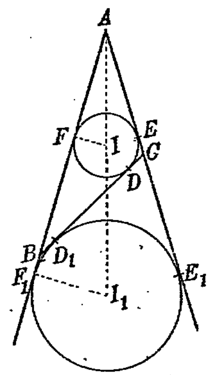
$$r_3 = \frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\,c\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}.$$

*78.外接旁切諸圓半徑關係　如 §75, 可得

$r_1=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},\quad r_2=4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$r_3=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

*79.諸切圓半徑與一角和三邊關係．因自圓外一點到圓上的二切線長相等．



故　$AF=AE,\ BD=BF,\ CD=CE.$

令其長依次爲 x, y, z, 則有

$$x+y=c,\ y+z=a,\ z+x=b.$$

相加得 $2(x+y+z)=2s$

$$\therefore\quad AF=AE=x=s-a,$$

$$BD=BF=y=s-b,$$

$$CD=CE=z=s-c,$$

$$\therefore\quad r=AF\tan\frac{A}{2}=(s-a)\tan\frac{A}{2}.$$

同理　$=(s-b)\tan\frac{B}{2}=(s-c)\tan\frac{C}{2}.$

又因 $2AF_1=2AE_1=AF_1+AE_1=AE+BD_1+AC+CD_1$

$$=AB+BC+CA=2s,$$

卽　$AF_1=AE_1=s$

$$\therefore\quad r_1=AF_1\tan\frac{A}{2}=s\tan\frac{A}{2}$$

同理　$r_2=s\tan\frac{B}{2},\quad r_3=s\tan\frac{C}{2}.$

習題二十

試證下列各關係式:

1. $\sqrt{rr_1r_2r_3}=\triangle$　　**2.** $4Rrs=abc.$

3. $r_1r_2r_3=rs^2.$　　**4.** $r_1r_2+rr_3=ab.$

5. $Rr(\sin A+\sin B+\sin C)=\triangle.$　　**6.** $r_1+r_2=c\cot\frac{C}{2}.$

7. $r_1-r=4R\sin\frac{A}{2}.$?　　**8.** $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r}.$

9. $r_1+r_2+r_3-r=4R.$　　**10.** $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}.$

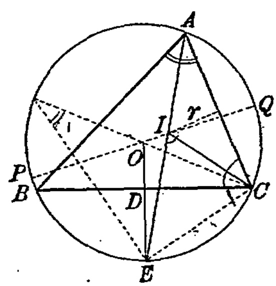
11. $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r_3}.$　　**12.** $(r_1-r)(r_2-r)(r_3-r)=4Rr^2.$

13. $\frac{b-c}{r_1}+\frac{c-a}{r_2}+\frac{a-b}{r_3}=0.$

14. $a\cot A+b\cot B+c\cot C=4R\sin A\sin B\sin C.$

15. $r(\sin A+\sin B+\sin C)=2(R+r).$

*80. 外接內切圓心距離



設 $\triangle ABC$ 的外接內切二圓心各為 O, I 如右圖，又 $OD\perp BC$. 因 $\angle EIC=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}C,$

$$\angle ECI=\angle BCE+\angle ICB$$

$$=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}C,$$

$\angle = \frac{A}{2}$

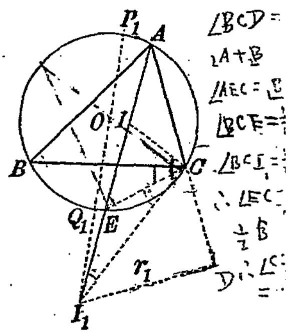
$= \sin\frac{A}{2}2R$

$\therefore\quad EI=EC=2R\sin\frac{A}{2}.\qquad$ 又 $r=IA\sin\frac{A}{2},$

$\therefore\quad 2Rr=EI\cdot IA=IP\cdot IQ=(R+OI)(R-OI),$

$\therefore\quad \mathbf{OI^2=R^2-2Rr.}$

***81.**<u>外接旁切圓心距離</u>



設 I_1 爲對 $\angle A$ 的旁切圓心,則 CI, CI_1 爲 $\angle C$ 的內外分角線,故 $\angle ICI_1 = rt.\angle$. 但 $EI=EC$, 因而

$$EI_1 = EC = 2R\sin\frac{A}{2}.$$

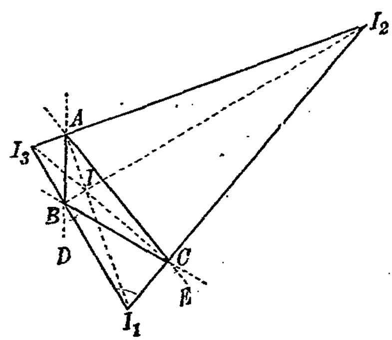
又 $r_1 = I_1A\sin\frac{A}{2}$,

$$\because \quad 2Rr_1 = EI_1 \cdot I_1A$$

$$= I_1P_1 \cdot I_1Q_1 = (OI_1+R)(OI_1-R),$$

$$\therefore \quad OI_1^2 = R^2 + 2Rr_1.$$

***82.**<u>旁心三角形</u>　設 $\triangle ABC$ 的三旁切圓心爲 I_1, I_2, I_3, 則 $\triangle I_1I_2I_3$ 叫做 $\triangle ABC$ 的旁心三角形.



今求旁心 $\triangle$ 的三角及三邊(卽各旁切圓心距離).

$$\angle BI_1C=180^\circ-\frac{1}{2}\angle DBC-\frac{1}{2}\angle ECB$$

$$=180^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle B)-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle C)$$

$$=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=90^\circ-\frac{A}{2}.$$

同理 $\angle CI_2A=90^\circ-\frac{B}{2}$,　$\angle AI_3B=90^\circ-\frac{C}{2}$.

$\therefore$　$\triangle I_1I_2I_3 \backsim \triangle I_1BC$,　且 $\angle I_1CI_3=rt.\angle$.

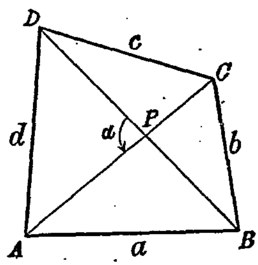
$\therefore$　$I_2I_3:BC=I_3I_1:I_1C=\sec\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)=\csc\frac{A}{2}$.

$= a\cdot\frac{1}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{a}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{2a\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}}$

$\therefore$　$I_2I_3=BC\csc\frac{A}{2}=a\csc\frac{A}{2}=4R\cos\frac{A}{2}$.

同理 $I_3I_1=4R\cos\frac{B}{2}$,　$I_1I_2=4R\cos\frac{C}{2}$.

***83.** <u>四邊形面積</u>　設四邊形 $ABCD$ 的兩對角線交於 P, 並令 $\angle DPA=\alpha$, 則



$$\triangle DAC=\triangle APD+\triangle CPD$$

依面積公式 $=\frac{1}{2}DP\cdot AP\sin\alpha+$

$A=\frac{1}{2}ab\sin C$ $\frac{1}{2}DP\cdot PC\sin(180^\circ-\alpha)$

$$=\frac{1}{2}DP(AP+PC)\sin\alpha$$

$$=\frac{1}{2}DP\cdot AC\sin\alpha.\quad ①$$

同理 $\triangle ABC=\frac{1}{2}BP\cdot AC\sin\alpha.$ ②

①+②

故如以 S 記 $ABCD$ 的面積,則 $S=\frac{1}{2}DB\cdot AC\sin\alpha$

註　如欲以四邊和兩對角表四邊形面積,則易得

$$S=\frac{1}{2}(ad\sin A+bc\sin C).$$

習題二十一

1. 設 §82 的圖中,I 爲內切圓心,試證

$IA=4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, 並求 IB, IC.

2. 求證 §82 的圖中, $I_1A=4R\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$,

$I_1B=4R\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}$, $I_1C=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$.

3. 求證旁心三角形面積爲 $2RS$.

4. 試證 $r\cdot II_1\cdot II_2\cdot II_3=4R\cdot IA\cdot IB\cdot IC$.

5. 任何三角形的邊角關係式內,以

$a\csc\frac{A}{2}$, $b\csc\frac{B}{2}$, $c\csc\frac{C}{2}$, $90°-\frac{A}{2}$, $90°-\frac{B}{2}$, $90°-\frac{C}{2}$

依次代 a, b, c, A, B, C

所得的關係式,必定也成立,何故?

6. 試證一三角形的外接圓半徑 R,決不能小於其內切圓半徑 r. 并問在何種情形下二者相等?

7. 試證下列二關係式:

(一) $OI^2+OI_1^2+OI_2^2+OI_3^2=12R^2$

(二) $a\cdot AI^2+b\cdot BI^2+c\cdot CI^2=a\cdot AI_1^2-b\cdot BI_1^2-c\cdot CI_1^2$

$=-a\cdot AI_2^2+b\cdot BI_2^2-c\cdot CI_2^2$

$=-a\cdot AI_3^2-b\cdot BI_3^2+c\cdot CI_3^2$

$=abc$.

8. 設一內接四邊形的周界爲 $2s$,面積爲 S,外接圓半徑爲 R,求證 $R=S/s$.

9. 如四邊形 $ABCD$ 有一外接圓,求證

$$a^2+d^2-b^2-c^2=2(ad+bc)\cos A.$$

10. 如四邊形 $ABCD$ 有一外接圓及一內切圓,求證

$$\cos A=\frac{ad-bc}{ad+bc},\qquad \tan^2\frac{A}{2}=\frac{ad-bc}{bd+ac}.$$

11. 試證上題中四邊形面積為 $\sqrt{abcd}$, 而內切圓半徑則為 $\sqrt{abcd}/s$.

12. 設 $ABCD$ 為一內接四邊形, $AC=x$, $BD=y$, 試由餘弦定律證明:

(一) $AC=\sqrt{\dfrac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}$.

(二) $BC=\sqrt{\dfrac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$.

註 由此易得

$$AC\cdot BD=ac+bd,$$

$$\frac{AC}{BD}=\frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

是為托勒密 Ptolemy 定理(參看著者編新課程標準適用高中幾何學 §52).

第四章摘要

本章授下列各項:

三角形邊角間關係　　三角形解法基本公式
求三角形面積　　求三角形各高
外接圓半徑　　內切圓半徑
旁切圓半徑　　各切圓半徑關係
各切圓心距離　　四邊形面積

(以下各式以 a, b, c 各表 $\triangle ABC$ 中 $\angle A, \angle B, \angle C$ 對邊, s 表半周, $\triangle$ 表面積, h_a, h_b, h_c 為各邊上的高.外接內切及各旁切圓心,依次為 O, I, I_1, I_2, I_3; 半徑依次為 R, r, r_1, r_2, r_3).

1. 正弦定律: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R.$

2. 餘弦定律: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 等三式.

3. 三角和定理與正弦定律或與餘弦定律二式為一組獨立的基本邊角關係式.

4. 由三邊求角公式: $\sin A=\dfrac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 等.

5. 三角形面積: $\triangle=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$

6. 三角形各高: $h_a=\dfrac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 等.

7. 各半徑公式: $R=\dfrac{abc}{4\triangle}$, $r=\dfrac{\triangle}{s}$, $r_1=\dfrac{\triangle}{s-a}$ 等.

或 $r=a\sec\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$, $r_1=a\sec\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ 等;

又 $r=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$, $r_1=4R\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ 等;

8. 各心距離: $OI^2=R^2-2Rr$, $OI_1{}^2=R^2+2Rr_1$ 等.

9. 旁心三角形: $\angle I_3I_1I_2=90^\circ-\dfrac{A}{2}$ 等, $I_2I_3=4R\cos\dfrac{A}{2}$ 等.

10. 四邊形 $ABCD$ 面積: $S=\dfrac{1}{2}DB\cdot AC\sin\alpha$, α 為 DB, AC 交角.

第五章

三角形解法及應用問題

84.<u>對數解法</u> 在上章§§65, 67已述及三角形解法的意義,和解四類問題應用的公式,但遇餘弦定律時,不能以對數計算,甚爲不便.本章即論如何化爲可用對數計算的解法公式,以及運算的布式與實際應用問題.

在對數計算中,三角函數也需用其對數入算.如由角檢出函數值,再檢對數;或反而行之,由某函數值的對數求角,都要經兩次手續,未免麻煩.故應備三角函數對數表,即可逕行直接求出.

註 三角函數對數表檢查法和推值法,都與對數表及三角函數表相同,學生稍加練習,即不難明瞭.*

三角函數值未知時,其對數的定位部,無由推出,所以也要載入表中,這是三角函數對數表與普通對數表不同的地方.又三角函數如正弦等,其值常小於1,故對數的定位部應爲負,不便排印,故常取定位部爲負的各對數加10,稱爲表對數.即

函數對數＝表對數－10.

例如 $\cos 41°35'$ 的表對數查出爲 9.87390, 即得

$$\log\cos 41°35'=9.87390-10=\bar{1}.87390.$$

注意 五位算學用表第二表的第三欄中各對數定位部原爲正,故未加10.

---

*本局刊行的五位算學用表,與本書相輔而行,該表內附有說明一篇,解釋各表用法,如學生對於檢表法尚不甚熟嫻,宜就表先行多加練習.

$\log \frac{1}{\sin A} = \operatorname{colog} \sin A$

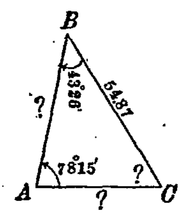
$\log 1 - \log \sin A = \operatorname{colog} \sin A$

85.已知一邊與任兩角的情形 §65 中所載的解法,可用對數計算.設已知 A, B 與 a, 則:

$$C=180^\circ-(A+B),\quad b=\frac{a}{\sin A}\sin B,\quad c=\frac{a}{\sin A}\sin C.$$

例 已知 $a=54.87$, $A=78^\circ15'$, $B=43^\circ26'$, 解 $\triangle ABC$.

解	$a=54.87.$	$\log a=1.73933$
	$A=78^\circ15'$	$\operatorname{colog}\sin A=0.00920$
	$B=43^\circ26'$	$\log\sin B=\bar{1}.83723$
	$A+B=121^\circ41'$	$\log b=1.58576$
	$\therefore C=58^\circ19'$	$\log a=1.73933$
	$b=38.53$	$\operatorname{colog}\sin A=0.00920$
	$c=47.69$	$\log\sin C=\bar{1}.92991$
		$\log c=1.67844$



注意 計算以前,應先準備二事:

(一)按已知元素,用有度尺與量角器作一正確的比例圖如右,則可免計算上不幸的重大錯誤,且易瞭然計算中各步意義.

(二)將算式先列好,寫出各等式左端與等號,再一齊查表,逐項填入檢得的各值.

註 欲這類問題可解,必需已知兩角的和小於180°,因三角形內角和爲 180° 也.如已知條件合於這限制,則必可解.

習題二十二

解下列各斜三角形:

	A	B	C	a	b	c
1.	51°51′	87°43′				3.57
2.	72°19′	83°17′				92.93
3.		24°18′	32°24′		27.36	
4.		73°29′	36°52′	64.25		
5.		68°22.7′	29°26.3′			14.327
6.	36°16.8′	42°24.6′		4327.4		

7. 一飛機在相距2000尺的二船上平飛,自二船測得飛機的仰角,各爲 24° 及 18°,試求飛機的高度.

8. 一旗杆直立於傾斜18°的山頂上,自山頂下行 250 尺處,測得杆頂的仰角爲 27°,求這旗杆的高.

9. 在河的一岸,量得一線長 620 尺,自此線兩端,視對岸一點,各成 47°20′ 及 63°40′ 的角度,問河寬多少尺?

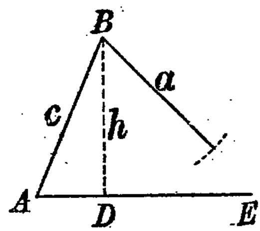
10. 河邊懸崖上,有一高 100 尺的寶塔,若自對岸一點測得塔頂及塔足的仰角各爲 38°30′ 及 26°30′,問這河寬爲多少尺?

11. 一飛機以每時 120 哩的速度,向前平飛,現有一人,恰在飛機下面,測得飛機的仰角爲 82°30′. 一分鐘後,又測得飛機的仰角爲 20°20′,試求飛機的高度.

12. 一戰艦停泊於坐南向北的岸邊,自岸上相距3哩的二點,測得該艦的方位,一爲北38°30′東,一爲北61°30′東,問這艦離岸多少遠?

86.<u>疑款</u> 已知二邊和一對角的情形,叫做疑款.因爲這種問題解數的多寡有無,條件較爲複雜.

設已知 $\triangle ABC$ 中 a 與 c 二邊,和 a 邊對角 A,可作 $\angle BAE$ 等於已知角,且 AB 等於隣邊 c,再以 B 爲心,對邊 a 爲半徑作弧與 AE 相交,而察其交點與 A, B 所成的三角形是否合用.



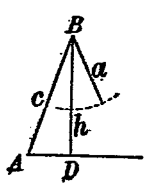
作 $BD \perp AE$, 則 $BD=h=c\sin A$

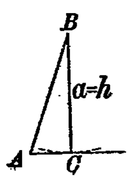
(甲)如 A 是銳角:

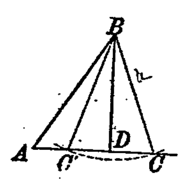
(一) $c<c\sin A$, 則弧不與 AE 相交,故無解.

(二) $a=c\sin A$, 則弧與 AE 相切,得一 rt.$\triangle$.

(三) $c>a>c\sin A$, 則弧與 AE 相交於二點,且均在已知角的邊 AE 上,而得 $\triangle ABC$, $\triangle ABC'$ 兩解.







(四) $a=c$, 則 C' 與 A 相合,只得 $\triangle ABC$ 一解.

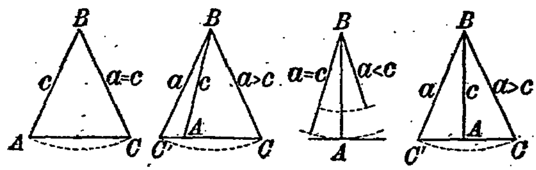
(五) $a>c$, 則 C'一交點移至已知角一邊的延線上故在 $\triangle ABC'$ 中, $\angle BAC'$ 是已知角的補角所以這解不合用,只可取 $\triangle ABC$ 一解,而爲一銳角三角形.

(乙) A是直角

(六) $a<c$, 則弧仍不與 AE 相交,故無解(見(一)).

(七) $a=c$, 則 AE 切這弧於 A 點,也不成三角形.

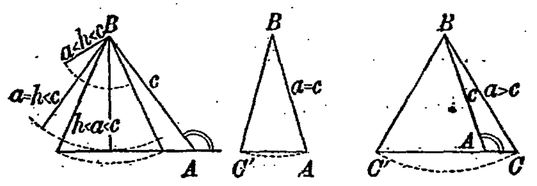
(八) $a>c$, 則, AE 及其延線,與弧各有一交點,但所成的二個 rt. $\triangle$s 爲全等形,只可視爲一解.



(丙) A是鈍角

(九) $a\leqq c$, 則弧不與 AE 相交,或所成 $\triangle$ 不合用.

(十) $a>c$, 所成二 $\triangle$s 只有鈍角的合用(與(五)相仿).



註 本頁和上頁的十圖,依次說明上述十種情形.

綜上述各結果,列表如下:

解＼邊 角	$a<h<c$	$h=a<c$	$h<a<c$	$a=c$	$a>c$
A 為銳角	無解	一 $rt.\triangle$	一銳△ 一鈍△	一等腰△	二解中只銳角△合用
A 為直角	無解			不成△	二相合 $rt.\triangle s$
A 為鈍角	無解	一 $rt.\triangle$ 不合用	二△s均不合用	一等腰△不合用	二解中只銳角△合用

87.疑款解法公式 先由 $\sin C=\frac{c\sin A}{a}$ 正弦定律 求 C,但因 $\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$,故可得互補的二角 C, C',再由△內角和公式得 B,由 $b=\frac{a\sin B}{\sin A}$ 得 b.

由解法公式,也可見上節所討論的情形.

(一)若 $a<h=c\sin A$,則 $\sin C>1$,所以不論 A 角為銳或為鈍,均不能得 C 值,而為無解.

註 如用對數計算,則這時 $\log\sin C>0$,而無解.

(二)若 $a=h=c\sin A$,則 $\sin C=1$,只得 $C=90^\circ$ 一解.故在 $A<90^\circ$ 時,得一 $rt.\triangle$;但如 $A\geqq 90^\circ$,則因一三角形不能含二直角,所以結果不合用.

(三)若 $h=c\sin A<a$,則 $\sin C<1$,而得銳角 C 與鈍角 $C'=180^\circ-C$,故如 $A<90^\circ$,則二解均合用,否則只銳角 C 一解合用,(與(二)同理).

(四)若 $a=c$, 則 $\sin C=\sin A$, 因得 $C=A$ 與 $C'=180°-A$. 但 $B'=180°-(A+C')=0$, 故不成三角形,而 $C=A$ 一解,在 $A<90°$ 時可用,爲一等腰 $\triangle$,在 $A\geqq 90°$ 時,均不可用(與(二)同理).

(五)若 $a>c$, 則 $\sin C<\sin A\leqq 1$, 可得銳角 C 與鈍角 C', 按三角函數變值情形(§35)知 $A<90°$ 時,$C<A$;而 $A\geqq 90°$ 時,$C'>A$. 在第一種情形 $A+C'=A+180°-C>180°$, 在第二種情形,$C'>A\geqq 90°$,所以 C' 一解,均不能用.

例一　已知 $a=3$, $c=8$, $A=30°$, 解 $\triangle ABC$.

解　$c\sin A=8\sin 30°=8\cdot\frac{1}{2}=4>3=a$, 故無解.

例二　已知 $a=5.632$, $c=7.254$, $A=64°18'$, 解 $\triangle ABC$.

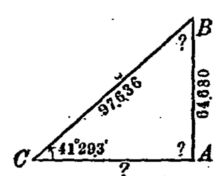
解

$$\begin{aligned} \log c &= 0.86058 \\ \operatorname{colog} a &= \bar{1}.24934 \\ \log\sin A &= \bar{1}.95476 \\ \hline \log\sin C &= 0.06468>0, \text{ 故無解.} \end{aligned}$$

例三　已知 $a=97.636$, $c=64.680$, $C=41°29.3'$,解 $\triangle ABC$.

解

$$\begin{aligned} \log a &= 1.98961 \\ \operatorname{colog} c &= \bar{2}.18923 \\ \log\sin C &= \bar{1}.82116 \\ \hline \log\sin A &= 0.00000 \end{aligned}$$

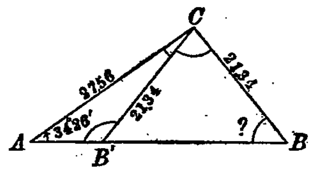


$$\begin{array}{lll} & A=90^\circ & \log a=1.98961 \\ 但 & C=41^\circ29.3' & \underline{\log\cos C=\bar{1}.87454} \\ 故 & B=48^\circ30.7' & \log b=1.86415 \\ & b=73.140 & \end{array}$$

例四　已知 $a=21.34$, $b=27.56$, $A=34^\circ26'$, 解 $\triangle ABC$.

解

$$\begin{array}{r} \log b=1.44028 \\ \operatorname{colog} a=\bar{2}.67081 \\ \underline{\log\sin A=\bar{1}.75239} \\ \log\sin B=\bar{1}.86348 \end{array}$$



$$\begin{array}{rr} B=46^\circ54' & B'=133^\circ6'\ (=180^\circ-B) \\ \underline{A+B=81^\circ20'} & \underline{A+B'=167^\circ32'} \\ C=98^\circ40' & C'=12^\circ28' \\ \log b=1.44028 & \log b=1.44028 \\ \operatorname{colog} B=0.13652 & \operatorname{colog} B=0.13652 \\ \underline{\log\sin C=\bar{1}.99501} & \underline{\log\sin C'=\bar{1}.33420} \\ \log c=1.57181 & \log c'=0.91100 \\ \therefore\quad c=37.31 & \therefore\quad c'=8.15 \end{array}$$

注意　三角函數表與對數表,只載銳角,求鈍角正弦時,可檢其補角者,例如 $\log\sin 98^\circ40'=\log\sin 81^\circ20'$.

註　如已知件中 $A=175^\circ34'$, 則第一步計算仍同上,但 B 只能取銳角值,而僅得左邊的一組解.

習 題 二 十 三

察下列各三角形,解數的多寡有無: 無

直△ **1.** $a=50,\ c=100,\ A=30°$; **2.** $a=40,\ c=100,\ A=30°$;

2解 鈍1, $A>C$, $A<c\sin A$ 不合用

3. $a=13,\ c=11,\ A=69°$; **4.** $a=77,\ c=65,\ A=140°$; 二解, 鈍1.

鈍1合用, 2解 鈍1合用,

2解 **5.** $a=70,\ c=75,\ A=60°$; **6.** $a=70,\ c=75,\ A=120°$;

7. $a=22,\ b=15,\ A=135°$; **8.** $a=134,\ b=84,\ B=52°$.

解下列各三角形或示其無解:

	A	B	C	a	b	c
9.	20°41′			115		137
10.	40°01′			94.2	141.3	
11.			34°58′	324.7		421.7
12.			72°12.3′		68.479	41.623
13.		59°27.8′			707.32	7836.5
14.	109°44.6′			976.34	602.57	

15. 二浮標相隔 64.2 碼,一船距較近浮標的遠爲 74.1 碼,由船望二標的視線所成角爲 27°18′,求他一浮標與船的距離.

16. 一高 102 尺的塔,直立於山頂,自山頂下行 631 尺,測得這塔在此點所張的角爲 8°27′,問山的斜度如何?

17. 有平行四邊形地面,一邊長 10 丈 5 尺,一對角線長 18 丈 9 尺,二對角線夾角爲 21°37′,求他一對角線.

88.<u>正切定律</u> 已知二邊和夾角的三角形解法,須先用餘弦定律求第三邊§68),而不便運用對數.今由正弦定律化出一可以對數計算的公式.

因 $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$,按比例的分合定理,得

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)} \quad (\S 54)$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\Big/\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)},$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}}.$$

同理 $\boldsymbol{\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(B+C)}{\tan\frac{1}{2}(B-C)}}$, $\boldsymbol{\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{1}{2}(C+A)}{\tan\frac{1}{2}(C-A)}}$.

是爲正切定律.

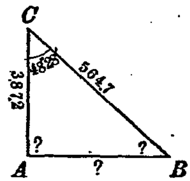
89.<u>正切定律的應用</u> 如已知$\triangle ABC$中a, b二邊和夾角C,爲避免計算中的負數起見,設以a記大邊,b記小邊(如此則$A>B$).按三角形內角和的理,得$\frac{1}{2}(A+B)=90^\circ-\frac{1}{2}C$.再由正切定律,求$\frac{1}{2}(A-B)$,由這二結果解出$A$, B,即不難更由正弦定律得

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

例　已知 $a=564.7,\ b=387.2,\ C=48°28'$, 解 $\triangle ABC$.

解

$$a=564.7$$
$$\underline{b=387.2}$$
$$\left.\begin{aligned}a-b&=177.5\\ a+b&=951.9\end{aligned}\right\}$$
$$\underline{\tfrac{1}{2}C=24°14'}$$
$$\tfrac{1}{2}(A+B)=65°46' \quad = 90° - \tfrac{1}{2}C$$



$$\log(a-b)=2.24920$$
$$\operatorname{colog}(a+b)=\bar{3}.02141$$
$$\underline{\log\tan\tfrac{1}{2}(A+B)=0.34667}$$
$$\log\tan\tfrac{1}{2}(A-B)=\bar{1}.61728$$
$$\therefore\ \tfrac{1}{2}(A-B)=22°30'$$
$$\therefore\ A=88°16',\ B=43°16'.$$

$$\log a=2.75182$$
$$\log\sin C=\bar{1}.87423$$
$$\underline{\operatorname{colog}\sin A=0.00020}$$
$$\log c\ =2.62625$$
$$\therefore\ c\ =422.9$$

註　本問題只須 $C<180°$, 則必可求解.

***90.** <u>用輔助角法</u>　如解上述情形的三角形,而只需直接求 c, 則宜用輔助角,以入對數計算.

按正弦定律易得 $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a-b}{\sin A-\sin B}$

$$\therefore \frac{c}{a-b}=\frac{\sin C}{\sin A-\sin B}=\frac{\cancel{2\sin\frac{1}{2}C}\cos\frac{1}{2}C}{2\sin\frac{1}{2}(A-B)\cancel{\cos\frac{1}{2}(A+B)}}=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}.$$

故如取 $\theta=\dfrac{1}{2}(A-B)$, 由正切定律求出,代入後,即可由對數式逕求 c, 而不必先定 A, B 二角.

*本節可酌量略去.

例　在上節例中,已得 $\theta=\frac{1}{2}(A-B)=22°30'$.

$$\log(a-b)=2.24920$$
$$\log\cos\tfrac{1}{2}C=\bar{1}.95994$$
$$\operatorname{colog}\sin\tfrac{1}{2}\theta=0.41716$$
$$\log c=2.62630 \qquad \therefore\ c=423.0$$

註　如用 $\cos C=\cos^2\frac{1}{2}C-\sin^2\frac{1}{2}C$. 代入餘弦定律,得

$$c^2=(a^2+b^2)(\cos^2\tfrac{1}{2}C+\sin^2\tfrac{1}{2}C)-2ab(\cos^2\tfrac{1}{2}C-\sin^2\tfrac{1}{2}C)$$
$$=(a-b)^2\cos^2\tfrac{1}{2}C+(a+b)^2\sin^2\tfrac{1}{2}C$$

再用輔助角 θ 如上,則化簡的結果,也是一樣.

習題二十四

解下列各三角形,幷求面積△.

	A	B	C	a	b	c	△
1.	45°7′				82.9	25.1	
2.			121°38′	17.6	24.03		
3.		39°27′		5968		7034	
4.			129°24.6′	536.8	1124.4		
5.	78°13.8′				6842.3	8967.7	

6. 一點距湖的一端3.6里,另一端5.4里,而該湖在這點所張的角為 104°, 問這湖多少長?

7. 一水雷艇停泊於敵港北 62° 西 11 哩處,封鎖該港,現有一商船欲自該港向南 22° 西的方向行駛,每小時 14 哩.若水雷艇欲於距海港 8 哩處,截得此船,問水雷艇的速度應如何?並求其駛行的方向.

8. 一旗杆,長11尺,斜立於一台上,其杆頂較杆足前伸9尺,今在旗杆正面一點,測得杆頂及杆足的仰角各爲 $28°11'$ 及 $19°24'$,試求台高,及這台去測量點的水平距離.

9. A 及 B 爲二島上的二點,現在欲自岸上測量這兩點的距離,在岸上取兩點 C 及 D,量得各角如下: $\angle ACB=79°34'$, $\angle ACD=24°42'$, $\angle ADB=82°14'$, $\angle BDC=38°21'$, 如 $CD=10$ 丈,試求 AB 的長.

10. 一戰艦由北南駛,自正南正北相距離3哩的兩點,測得此艦的方位各爲北 $36°40'$ 東,及北 $17°30'$ 東;12分鐘後,該艦的方位爲南 $68°10'$ 東,及北 $57°40'$ 東.試求這艦的速度.

11. 從一點 C 可望見 A, B 二處,自一可望見 A 處的 D 點,聯 DC 而延長之,過 C 點至一點 E,可望見 B 處.今測得 $\angle DCA=48°10'$, $\angle CDA=74°40'$, $\angle BCE=58°10'$, $\angle BEC=80°20'$, $DC=643$ 尺, $CE=897$ 尺. 求 AB 長,及 AB 與 DC 二方向間的角.

91. 已知三邊的情形　已知一三角形三邊,而求各角,可用內切圓半徑關係計算,最爲便利.

按§§70, 73, 79有 $$\frac{\Delta}{s}=r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$=(s-a)\tan\frac{A}{2}=(s-b)\tan\frac{B}{2}=(s-c)\tan\frac{C}{2}.$$

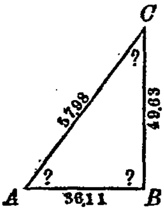
$$\therefore\quad \tan\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\tan\frac{B}{2}=\frac{r}{s-b},\quad \tan\frac{C}{2}=\frac{r}{s-c}.$$

註 就餘弦定律(§65)解出一角與三角關係,代入半角公式(§51中 *XII* 與 *XIII*),即可得半角的正餘弦(算式與§67相仿),相除即得上式.正切各式用對數計算,手續較正餘弦各式爲省,且較精密.(可參看§111中(二)).

例 已知 $a=49.63$, $b=57.98$, $c=36.11$, 解 $\triangle ABC$

解



$$\left.\begin{aligned} a&=49.63\\ b&=57.98\\ c&=36.11\end{aligned}\right\}$$

$$2s=14372\,|\,2$$

$$s=71.86$$

$$s-a=22.23$$

$$s-b=13.88$$

$$s-c=35.75$$

$$\log(s-a)=1.34694$$

$$\log(s-b)=1.14239$$

$$\log(s-c)=1.55328$$

$$\operatorname{colog} s=\bar{2}.14351$$

$$\log r^2=1.18612\,|\,2$$

$$\log r=1.09306$$

$$A=58°16'$$

$$B=83°30'$$

$$C=38°14'$$

$$A+B+C=180°0'$$

$$\log r=1.09306$$

$$\operatorname{colog}(s-a)=\bar{2}.65306$$

$$\log\tan\frac{A}{2}=\bar{1}.74612$$

$$\frac{A}{2}=29°8'$$

$$\log r=1.09306$$

$$\operatorname{colog}(s-b)=\bar{2}.85761$$

$$\log\tan\frac{B}{2}=\bar{1}.95067$$

$$\frac{B}{2}=41°45'$$

$$\log r=1.09306$$

$$\operatorname{colog}(s-c)=\bar{2}.44672$$

$$\log\tan\frac{C}{2}=\bar{1}.53978$$

$$\frac{C}{2}=19°7'$$

注意 因三角形各角均小於180°,故$\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$皆是銳角其正切應爲正數所以開方時取 r 的正值.

92.已知三邊情形的討論 $\triangle ABC$ 中各邊皆取正值,故 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$爲正,又設 a 爲最長邊,則

$$s-b=\frac{1}{2}(c+a-b)>0,\ s-c=\frac{1}{2}(b+a-c)>0$$

故如$s-a>0$, 則 r 爲實值,反之,如欲 r 爲實值,非 $s-a$ 爲正不可.但 $s-a=\frac{1}{2}(b+c-a)$,故這條件實即 $a<b+c$.

同理,由 $s-b>0$, $s-c>0$, 知 $b<a+c$, $c<a+b$, 將這三不等式遷項,又可知任二邊差必小於第三邊,這些不等關係,都已在幾何中證明.

93.解法與核算 三角形解法,計算頗繁,很易致誤,除作圖以驗有無重大錯誤外,宜更以解法中所未用的邊角關係式來核算.

例如前節例題中解法,並未用三角形內角和定理,故可用以核算.又§90中與習題十九第12題的

$$\frac{c}{a-b}=\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}(A-B)},\quad \frac{c}{a+b}=\frac{\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}$$

二式,均盡含有各邊與各角,也常可供核算之需.

習題二十五

解下列各三角形幷求其面積:

1. $a=31.54$, $b=46.5$, $c=63.4$.

2. $a=33.4$, $b=71.6$, $c=14.75$.

3. $a=1694$, $b=2043$, $c=2907$.

4. $a=67.274$, $b=38.665$, $c=40.229$.

5. $a=7439.5$, $b=9026.4$, $c=6174.3$.

6. 甲城在乙城正南方,相距50.5里,丙城在二城間大道東旁,距甲城27.4里,乙城39.6里,求自甲乙二城至丙城的方位.

7. 一平行四邊形二邊長723.4與529.5,一對角線長633.7.求這形各角及他一對角線的長.

8. 試求上題中二對角線的交角.

9. A,B二點間爲物所阻,而測量者無測角的儀器.今自另一點C,測得$CA=269$尺,$CB=362$尺,在AC上取一點D,BC上取一點E,測得$CD=101$尺,$CE=93$尺,$DE=121$尺,試求AB的長.

10. 三圓相外切,半徑各爲25.8, 276.1, 397,求各切點間弧三角形周界的長.

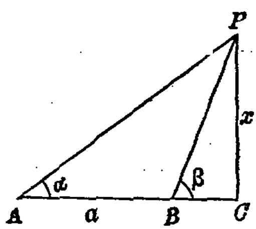
11. 四邊形$ABCD$中,$AB=33.14$, $BC=60.08$, $CD=34.47$, $AC=79.09$, $BD=84.53$,試求AD.

12. 如$c^2=a^2+b^2$,試由$\tan\frac{C}{2}$的公式證明必$C=90°$.

13. 試證如$c^2>a^2+b^2$.則$C>90°$;如$c^2<a^2+b^2$,必$C<90°$.

94.高與距離的測量 在各種三角形解法後,都各附有應用問題.茲再於下二節中,略論幾種較複雜的測量問題,以明三角學的效用.

95.在同一平面內的測量問題 求一不可達物件的高及距測量者的距離,可用下法.



設PC爲求測的一直立物件,A爲測量者所在地.可先測仰角$\angle PAC$,再沿AC方向前進到B點,再測AB的長和仰角$\angle PBC$.

令$\angle PAC=\alpha$, $\angle PBC=\beta$, $AB=a$, 由 rt.$\triangle PCB$, 得

$$PC=PB\sin\beta. \text{ 但由 } \triangle PAB, \text{ 有}$$

$$PB=\frac{AB\sin\angle PAB}{\sin\angle APB}=\frac{a\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

$$\therefore\quad PC=a\sin\alpha\sin\beta\csc(\beta-\alpha).$$

又 $$AC=PC\cot\alpha=a\cos\alpha\sin\beta\csc(\beta-\alpha).$$

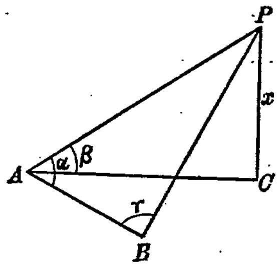
例 某甲在一地測得對山仰角爲$30°$,直向山行前進一哩後,測得仰角爲$75°$.試求山的高.

解 在上圖中 $\alpha=30°$, $\beta=75°$, $a=1$ 哩 $=1760$ 碼,則

$$x=PC=(1760\sin 30°\sin 75°\csc 45°)\text{碼}$$

$$=1760\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\times\sqrt{2}\text{ 碼}=3606.2\text{ 呎}.$$

96. <u>不在同一平面內的測量</u> 如上節中,我們不能直向求測物件前進,則可在水平面內,測一適宜的距離 $AB=a$,并在 A 點處測得 $\angle PAB=\alpha$, 仰角 $\angle PAC=\beta$, 又在 B 點測得 $\angle PBA=\gamma$. 由 $rt\triangle ACP$, 得 $x=PA\sin\beta$.

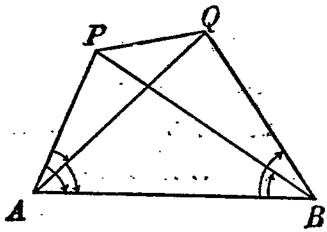


$$\text{又自 } \triangle PAB, \quad PA=\frac{AB\sin\angle PBA}{\sin\angle APB}=\frac{a\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)},$$

$$\therefore \quad x=\frac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}.$$

97. <u>求二不可達點間的距離</u> 設 P, Q 二點,均不可達到,且不與我們共在一水平面上.

取水平面上二適宜點 A, B, 測 AB, $\angle PAQ$, $\angle QAB$, $\angle PAB$, 與 $\angle ABP$, $\angle ABQ$.



在 $\triangle PAB$ 中,已知 AB, $\angle PAB$, $\angle PBA$, 可求 AP.

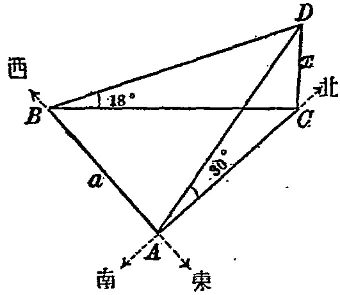
在 $\triangle QAB$ 中,已知 AB, $\angle QAB$, $\angle QBA$, 可求 AQ.

在 $\triangle PAQ$ 中,已知 AP, AQ, $\angle PAQ$,故終得 PQ.

註 這種測量問題,每因條件稍變,所得結果的形式便不同,但均不外各類三角形解法的應用.故解題時,宜因題布式運算,不必求其普遍解式.

98.測量問題雜例

例一 A 點在 CD 塔正南方,測得塔的仰角爲 $30°$,另在 A 點西方的 B 點,測量得塔的仰角爲 $18°$. 今設 $AB=a$, 試求 CD.



解 由 $rt.\triangle DCA$,

$$AC=x\cot 30°.$$

又由 $rt.\triangle DCB$,

$$BC=x\cot 18°.$$

但 $\angle BAC=90°$,

$$\therefore\quad a^2=BC^2-AC^2=x^2(\cot^2 18°-\cot^2 30°).$$

但 $\sin 30°=\frac{1}{2}$, 又 $\sin 18°=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$. (§53)

$$\therefore\quad \csc 30°=2,\quad \csc 18°=\frac{4}{\sqrt{5}-1}=\frac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$$

$$=\frac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1}=\sqrt{5}+1.$$

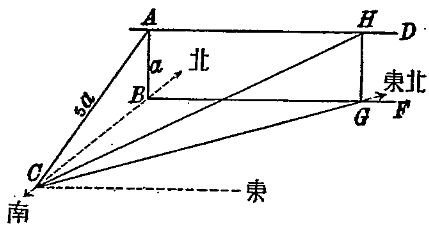
$$\therefore\quad \cot^2 18°-\cot^2 30°=\csc^2 18°-\csc^2 30°$$

$$=\left(\frac{4}{\sqrt{5}-1}\right)^2-4=(\sqrt{5}+1)^2-4=2+2\sqrt{5}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{a}{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}.$$

例二　正北向一山坡,傾斜度為 1:5 (卽斜坡上升五尺時,高增一尺).坡上有東北向道路一條,求其傾斜度.

解　下圖中 CBG 為水平面, ABG 為垂直面, CA 為坡上正北向道路, CH 為其上東北向道路.



令 $AB=a$. 則依題設 $CA=5a$, $\therefore BC^2=24a^2$.

又因 $\angle BCG=45^\circ$, 故 $rt.\triangle CBG$ 為等腰,卽

$$CG^2=2.CB^2=48a^2.$$

再就 $rt.\triangle CGH$ 來看,得　$CH^2=48a^2+a^2=49a^2$.

$$\therefore CH=7a=7.GH, \text{ 卽 } CH:GH=7a:a=7:1.$$

習題二十六

1. 一塔高 h 尺, A, B 二目標與塔底成一直線.今在塔上望這二目標的俯角為 $45^\circ-A$, $45^\circ+A$, 試求 A, B 間距離.

2. 海上一船,望岸上 A, B 二砲壘的視角為 30°, 船向 A 前駛行 4 哩後,視角為 48°, 問在這時距 B 多少遠?

3. 某甲測得塔的仰角為 A, 向塔前進 a 尺,測得仰角為 45°, 再前進 b 尺,測得仰角為 $90^\circ-A$, 求塔的高.

4. 一人望見目標 A 在其正北,目標 B 在北 30° 西,向西北行一里後,則 A 在東北方, B 在正東方,求 A, B 間距離.

5. 平地上望見一塔的仰角爲 α,塔上長 c 尺的旗竿視角爲 β,求證塔高爲 $c\sin\alpha\csc\beta\cos(\alpha+\beta)$.

6. 人在岸上望一船桅頂與桅上他一點,其視角的正切爲 0.6, 今知他點距桅頂的長,爲全桅的 $\frac{3}{4}$. 求這人望全桅的視角正切值.

7. 台高 2 丈 5 尺,上有一銅像,在地上距台 6 丈處,望見這銅像的視角正切爲 0.125, 求銅像的高.

8. 自 C 與 D 兩地望見 A, B 兩站的視角相等,求證

$$AB\sin\angle CBD = CD\sin\angle ADB.$$

提示 A, B, C, D 四點在一圓上.

9. 某處有烟囱,自正南一點 A 測得仰角爲 45°, 自正西一點 B, 測得其仰角爲 15°, 設 AB 長 20 丈,求烟囱的高.

10. 一人在某燈塔正南方,見本身影長 2 丈 4 尺,向正東行 30 丈後,見影長 3 丈.如這人身長 6 尺,求燈塔的高.

11. 二人相距 500 碼,一人測得仰角爲 60°, 方位爲西南,他一人則測得仰角 45°, 方位爲正西,求汽球的高.

12. 一山坡向南下傾,其與水平面所成角爲 α, 坡上一路與水平面所成角爲 β. 如這條道路的方位爲北 x° 東,求 x 與 α 和 β 的關係.

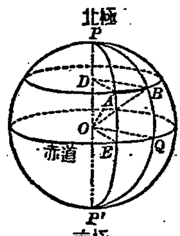
註 過二平面交線上一點,向二平面內,各作一線與交線垂直,其交角卽爲二平面的角.又如一直線與平面相交,則過交點的平面垂線,與這直線所成角的餘角,叫做直線與平面的角.(如 §98 例二圖中 $\angle ACB$ 卽 α, $\angle HCG$ 卽 β, 又 $\angle BCG$ 卽 x).

99.航海應用問題 關於陸地上各種測量問題,已略於 §§7−11, 95−98 中說及,茲再於下數節內舉航海方面的一二重要問題.

100.平行航海 如一船常向正東或正西航駛,換句話說,就是總在同一緯度航行,便叫做平行航海.所航行的距離,叫做經距,常以海里(或簡作浬)為單位.

註一 1浬為地球上大圓弧一分的弧長(故在赤道上,1浬的弧為1分),美國以6080.3呎為1浬(我國算術書多據日人長澤龜之助辭典作6086呎,實誤)英以6080呎為1浬.

註二 所謂經距,指二經線間所含某緯度圈的弧(也就是在赤道平行面上的一小圓弧),故同二經線間經距,當緯度圈距赤道愈遠時,其值愈小.



如右圖 AB 弧即 A, B 二地間經距.A 與 B 二地同一緯度,即大圓弧 AE = 大圓弧 BQ,或 $\angle EOA = \angle QOB$.而 A, B 兩地的經差為赤道上的大圓弧 EQ.

緯度,經距,經差三者關係如下:按幾何理知

$$\text{經距}:\text{經差}=AB\text{弧}:EQ\text{弧}=DA:OE$$

$$=DA:OA=\cos\angle OAD=\cos\angle AOE=\cos(\text{緯度})$$

$$\therefore\ \text{經差}=\text{經距}/\cos(\text{緯度}).$$

例 一船自北緯25°20′,西經36°10′處啓程,向西作平行航程140浬,求所到地點的經度.

解 經距$=140$,緯度$=25°20'$北.

$$經差=\frac{140}{\cos 25°20'}=154.9浬$$

$$=154.9'=2°34.9'$$

故所達地點經度爲西經

$$36°10'+2°34.9'=38°44.9'$$

對數計算式如下:

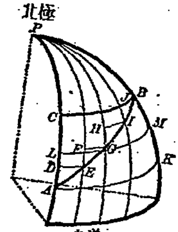
$$\log 140=2.14613$$

$$\operatorname{colog}\cos 25°20'=0.04391$$

$$\log(經差)=2.19004$$

註 如向東航行,則爲西經$36°10'-2°34.9'=33°35.1'$.

***101.** <u>平面航海</u> 如一船駛行,所經路程,與各經線相交於定角,就叫做**定位航線**,定角叫做**航路**.而沿這航線上兩地間的長,叫做**距離**.



如右圖 AB 弧爲距離,

$\angle CAB$ 爲航路,

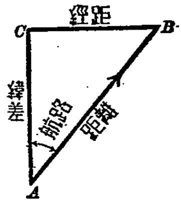
小圓弧 BC 爲經距,

大圓弧 AC 爲 A 與 B 二地的緯差.

地球本爲球面,但在相當區域內,可視爲平面.據此計算,便爲**平面航海**,而可得上述各量的差近略值.依這假設,可將 ACB 當做一直角三角形,稱爲**平面航海三角形**.

*本節,下節及習題二十七中一部份問題,可酌量略去.

由平面航海三角形得



$$CB = AB\sin A,$$

$$AC = AB\cos A,$$

即 **經距 = 距離 × *sin* (航路)**

緯差 = 距離 × *cos* (航路)

註 如遇 AB 過長,則結果不能準確合用.這時應分距離 AB 爲若干部份(如上頁圖中的 AE, EG, GI, IB 等),使各部分甚小,可用差近略值爲止.

例 一船自南緯 8°45′ 依航路北 36° 東駛行 345 浬,求所達地點的緯度,和所行的經距.

解 距離 =345, 航路 =36°,

經距 $=345\sin 36°$,	緯度 $=345\cos 36°$
$\log 345 = 2.53782$	$\log 345 = 2.53782$
$\log\sin 36° = \bar{1}.76922$	$\log\cos 36° = \bar{1}.90796$
$\log$(經距)$=2.30704$	$\log$(緯度)$=2.44578$
∴ 經距 $=202.8$ 浬	緯度 $=279.1' = 4°39.1'$

因船向偏北行,所以達到地點的緯度爲南緯

$$8°45' - 4°39.1' = 4°5.9'.$$

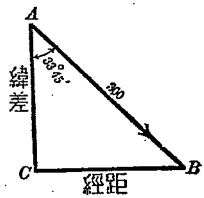
***102.** <u>中緯航海</u> 在此就兩地緯線間正中的緯線上,量得兩地經距,例如上節圖中,A 與 B 間經距爲 LM,係在過 A,B 兩緯線正中上量得.

所謂中緯,乃指A與B緯度的平均數,按§100得

經差＝經距／cos(中緯)

注意　如行程不過長,且距赤道不甚遠,則這種計算法所得略值,已能達合用的精密度.

例　一船自北緯42°30′,西經58°51′處啓程,向方位南33°45′東,行300浬,求達到地點的經緯度.



解　按§101的第二公式,有

緯差$=(300\cos 33°45')$浬

$=249.4'=4°9.4'$.

因船向偏南航行,故所達地點的緯度爲北緯$42°30'-4°9.4'=38°20.6'$.

次求經距,用§101第一公式,得

經距$=300\sin 33°45'=166.7$浬.

且　　中緯$=\frac{1}{2}(42°30'+38°20.6')=40°25.3'$,代入本節公式,

經差$=(166.7/\cos 40°25.3')$浬$=219'=3°39'$.

因船航行方向偏東,故所達地點的經度爲西經$58°51'-3°39'=55°12'$.

註　本例中對數算式略去,學生不難自行補出.

習題二十七

1. 一船自北緯42°16′,西經72°16′處,向正東方駛行149浬,求所達地點的經度.

2. 一船自南緯 44°49′ 東經 119°42′ 處,向正西方駛行,達到東經 117°16′ 的地方,求兩地的經距.

3. 一船自北緯 32°18′ 處,在西北兩方向間駛行 344 浬,又知前後兩地經距爲 103 浬,求航路與所達地點緯度.

4. 一船自南緯 43°45′ 處,依北 11°15′ 東的方向駛行 2345 浬,求所達地點的緯度和兩地間經距.

5. 一船離南緯 2°52′ 處向東南兩方向間駛行,達到南緯 5°8′ 的地方,求航路與兩地經距.

6. 一船自北緯 26°15′, 西經 61°43′ 處,向西北駛行 253 浬,求所達地點的經緯度.

7. 一船自北緯 42°30′, 西經 58°51′ 處,向南 33°45′ 東的方位駛行 300 浬,求所達地點的經緯度.

8. 一船自北緯 49°56′, 西經 15°16′ 處,航行到北緯 47°18′ 西經 20°10′ 處,求航路與距離.

提示 在此已知經差,緯差及中緯.

9. 一魚雷艇由北緯 37° 西經 32°16′ 處出發,依着北 36°56′ 西的方向駛到北緯 41° 的地方,求所行的距離,以及達到地點的經度.

10. 一船自北緯 42°30′, 西經 58°51′ 處,向東南駛行,至北緯 38°22′ 的一處,且知兩地的經距爲 163 浬,求航路,距離,以及所達地點的經度.

11. 一巡洋艦自北緯 $47°44'$，西經 $32°44'$ 處，向東北方駛行 171 浬，而達於一北緯 $50°2'$ 的地方，試求其航路，及所達地點的經度．

12. 一船自北緯 $47°15'$，西經 $20°48'$ 處，向西南方駛行 162 浬，求航路及所達地點的經緯度．

第五章摘要

本章授以下各項:

三角形對數解法:
(1)已知一邊,兩角;
(2)已知兩邊,對角(疑款);
(3)已知兩邊,夾角;
(4)已知三邊.

高與距離的測量:
(1)在同一平面內;
(2)不在同一平面內;
(3)二不可達點距離;

航海方面的應用

1. 三角形解法中(1),(2)二款,可按正弦定律等,用對數算.

2. 疑款討論: 已知 a, c, A 則

(一)如 $A<90°$, $c\sin A<a<c$ 時,有兩解;

(二)如 $A<90°$, $a<c\sin A$, 或 $A\geqq 90°$, $a\leqq c$, 則無解;

(三)如 $a>c$, 或 $A<90°$,而 $a=c\sin A$ 或 $a=c$, 有一解.

3. 疑款可按正弦定律等,用對數計算.

4. 已知兩邊夾角一款的對數解法,需用正切定律.

$a+b:a-b=\tan\frac{1}{2}(A+B):\tan\frac{1}{2}(A-B)$ 等式,先求 $A-B$,再用正弦定律等式求 C.

或用輔助角,則可直接求 C.

5. 已知三邊一款的對數解法,需用公式

$\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a}$ 等式,而 $r=\sqrt{\frac{1}{s}(s-a)(s-b)(s-c)}$.

6. 各種解法,宜作圖核驗,以免重大錯誤,并宜再以解法中未用及的公式來核算.

7. 測量各問題不外將三角形解法各款合併應用.

8. 航海方面應用,係依略值去計算.

第六章

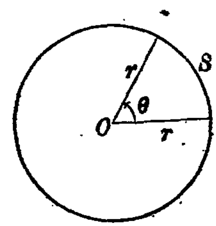
弧度法 造表法略論

103. 弧度法 普通量角,以周角的 $\frac{1}{360}$ 做單位,叫做1度,記爲1°,度以下的低級單位爲分($'$)與秒($''$).這種度角的方法,叫**六十進制**,已在初中講過.此外低級單位,也可用十進制.如$63^\circ15'36''=63^\circ15.6'=63.26^\circ$.這種制度和化法,學生必已熟習,不必細述.現在要研究一種在理論上很重要的量角法,叫**弧度法**.

定義 一角的弧度,即以其爲圓心角時,截取對弧s與圓半徑r的比值,用公式表示,即得

$$\theta=s/r.$$

故在$s=r$時,$\theta=1$弧度,而爲弧度法單位.換句話說,當一圓心角截取對弧的長等於半徑時,取做單位,即爲弧度法.



注意 由幾何理,知圓心角被其對弧所度,即圓心角度數與對弧度數(即分全圓周爲360等份,每份叫1度,也記爲1°)相同,又在大小不同的圓上,每1°弧長與圓周成比例,而圓周又和半徑成比例,故等角的對弧與半徑成比例.

由上所述,即可知一角的弧度法度量,與所作圓的大小無關,在任何種度量制中,單位自應爲定量,是宜注意.

104. 度與弧度的換算　求將一角角度與弧度互化,必先求兩種單位的當量(即這兩種單位量比值).

由幾何理,知圓周 c 與半徑 r 的比爲 2π, π 爲圓周率,以 $\frac{22}{7}$ 或 3.1416 爲略値,取長爲 $\frac{1}{4}c$ 弧叫**四分弧**,則所對的圓心角爲直角,而等於 $90°$;所以

$$直角=90°=\frac{s}{r}=\frac{1}{4}c/r=\frac{\pi}{2}弧度.$$

或簡記爲　$$90°=\frac{\pi}{2}.$$

注意一角度量後,不附 °, ′, ″ 符號時,即指弧度.

由這基本換算式,可得

$$1\ 弧度=\frac{180°}{\pi}=57.2957°^{+}=57°17'45'',$$

$$1°=\frac{\pi}{180}=\frac{3.1416}{180}=0.01745^{+}弧度.$$

例一　$18°=18\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{10}$ 弧度.

例二　$\frac{2\pi}{3}$ 弧度 $=\left(\frac{2\pi}{3}\times\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}=120°.$

105. 幾個重要角和函數關係　幾個重要角的弧度度量,學生必須熟嫻,茲列舉如下:

$$360°=2\pi,\qquad 270°=\frac{3\pi}{2},\qquad 180°=\pi,$$

$$60°=\frac{\pi}{3},\qquad 45°=\frac{\pi}{4},\qquad 30°=\frac{\pi}{6}.$$

又§§2, 29, 30內的各種公式,可列出如下:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta,\quad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta,\quad \tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta;$$

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta,\quad \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta,\quad \tan(\pi-\theta)=-\tan\theta;$$

$$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta,\quad \cos(\pi+\theta)=-\cos\theta,\quad \tan(\pi+\theta)=\tan\theta;$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta,\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\sin\theta,\quad \tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta;$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cos\theta,\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=\sin\theta,\quad \tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta;$$

$$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta,\quad \cos(2\pi-\theta)=\cos\theta,\quad \tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta.$$

在§39中述及三角函數週期性,寫成公式得

$$\sin(2k\pi+\theta)=\sin\theta,\qquad \cos(2k\pi+\theta)=\cos\theta,$$

而

$$\tan(k\pi+\theta)=\tan\theta.$$

106. <u>應用問題</u>　關於θ, r, s三量,如知其二,則可求得第三量.今舉應用問題為例於下:

例一　一時計上,分針長2公分,求行6分鐘時,針尖所經過的距離.

解　分針行一週為60分,故行6分鐘,經過36°,而

$$36^\circ=36\times\frac{\pi}{180}=\frac{\overset{\pi=3.1416}{\pi}}{5},\quad\therefore\ s=r\theta=2\times\frac{\pi}{5}=1.26\text{公分}.$$

例二　輪上長16.1寸的周沿,對圓心角25°,求半徑.

解　$r=\dfrac{s}{\theta}=16.1\Big/\dfrac{25\pi}{180}=\dfrac{16.1\times180}{25\pi}=36.9$寸.

例三　一滑車直徑長1尺,每分旋轉500次,求每秒鐘時旋轉經過的角,及繞滑車上皮帶所經的長.

解 每旋轉一週,滑車繞過 2π 弧度,故每分鐘經過 $500\times 2\pi$ 弧度,每秒鐘經過 $\frac{1000\pi}{60}=52.36$ 弧度.

又因 $r=\frac{1}{2}$, 故皮帶每秒鐘經過 $\frac{1}{2}\times 52.36=26.18$ 尺.

習題二十八

求化下列各角弧度爲度數:

1. $2\pi/5$. **2.** $4\pi/3$. **3.** $3\pi/4$. **4.** $5\pi/4$.

5. $-5\pi/3$. **6.** 0.2967. **7.** -1.5097. **8.** 0.4235.

求化下列各角度數爲弧度:

9. $330°$. $\frac{11\pi}{6}$ **10.** $150°$. $=\frac{5\pi}{6}$ **11.** $1035°$. **12.** $3795°$.

13. $49°49'$. **14.** $45°36'$. **15.** $243.87°$. **16.** $125°23'19''$.

求下列各函數的值:

17. $\sin\frac{\pi}{6}$. $=30°$ **18.** $\tan\frac{\pi}{4}$. $45°$ **19.** $\cos\frac{3\pi}{4}$. $120°$

20. 一鐘上分針,在39分 $22\frac{1}{2}$ 秒時經過的角是多少弧度?又時針經過多少弧度?

如角的方向也計入,上面二角的號應如何?

21. 一車輪每秒旋轉10次,問經過 2 弧度需時多少?

22. 鐵道上一段弧,在半徑爲 723 尺的圓上,如所對圓心角爲 $23°17'$,求這段鐵道的長.

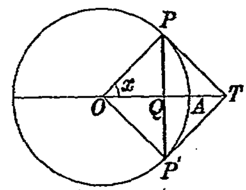
23. 一大鐘擺長37.46寸,擺動所經的弧長3.63寸,求其所經過角的弧度數與度數.

24. 一飛機推進器每分鐘旋轉 1975 次,而從一端到他端長 7 尺 9 寸,求每秒鐘時,一端所歷尺數.

107. 小角的正弦與正切

定理　如一小角的弧度 x,漸小而趨近於 0,則 $x/\sin x$ 由大於 1 的數值漸減而趨近於 1, $x/\tan x$ 則由小於 1 的數值漸增而趨近於 1.

證　設 O 爲單位圓心, AP 弧 $=x$(即其弧度值爲 x,下同).取 AP' 弧 $=x$, 聯弦線 PP',幷作 P,P' 二點的切線交於 T 點,則按圓周爲內接外切兩種正多角形周界所同趨的公共極限之理,知



$$PQP' < PAP' \text{ 弧 } < PTP' \text{ 折線}. \tag{1}$$

但就數值論,有 $PQP' = PQ + QP' = 2\sin x$,

$$PAP' \text{ 弧 } = PA \text{ 弧 } + AP' \text{ 弧 } = 2x,$$

$$PTP' \text{ 折線 } = PT + TP' = 2\tan x,$$

代入 (1),以 2 遍除,得 $\sin x < x < \tan x$.

(一)以 $\sin x$ 遍除,即得　$1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$.

但 x 漸小時, $\dfrac{1}{\cos x}$ 由大於 1 的值趨近於 1,故由上式,知 $\dfrac{x}{\sin x}$ 也由大於 1 的值趨近於 1.

(二)以 $\tan x$ 遍除,便有　$\cos x < \dfrac{x}{\tan x} < 1$.

與上同理,即知 $\dfrac{x}{\tan x}$ 由小於 1 的值趨近於 1.

註 關於極限的詳細討論,可參看著者編新課程標準適用高中代數學§§114—5,高中幾何學第二章.

注意 上述的理,可用符號記之於下.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1.$$

108. 求 $\sin 1'$ 與 $\cos 1'$ 化 $1'$ 為弧度,得

$$1'=\left(\frac{1}{60}\right)^\circ=\frac{1}{60}\times\frac{\pi}{180}=0.000\,29088^+,$$

$$\therefore\quad 0<\sin 1'<0.00029089.$$

但 $\cos 1'=\sqrt{1-\sin^2 1'}>\sqrt{1-(0.0003)^2}>0.99999.$

按上節知一角的弧度 x 甚小時, $x<\tan x.$

用 $\cos x$ 遍乘,得 $\sin x>x\cos x.$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \sin 1'&>0.00029088\times 0.99999\\&=0.00029088(1-0.00001)\\&=0.00029088-0.0000000029\\&>0.00029087,\end{aligned}$$

$$\therefore\quad 0.00029089>\sin 1'>0.00029087.$$

所以求到七位小數時, $\sin 1'=0.0002908$

又 $\cos 1'<\sqrt{1-(0.00029)^2}=\sqrt{1.00029\times 0.99971}$

$$=\sqrt{0.9999999159}<0.99999999,$$

所以求到七位小數時, $\cos 1'=0.9999999.$

注意 用這法求到九位小數,可得

$sin1'=0.000290888^{+}$, $cos1'=0.999999957^{+}$

109. 辛普孫(Simpson)造表法 三角函數表,係按無窮連級數的理造出,但初學對該法所用的理,不易明瞭,故在此只能述辛氏造表法.

在§54的(XVII)(XVIII)中,令$B=1'$而遷項,即得

$$sin(A+1')=2sinAcos1'-sin(A-1'),$$

$$cos(A+1')=2cosAcos1'-cos(A-1').$$

再令A依次爲$1'$, $2'$, $3'$,……,即得

$$sin2'=2cos1'sin1'-sin0'=0.0005817^{+},$$

$$sin3'=2cos1'sin2'-sin1'=0.0008726^{+},$$

$$sin4'=2cos1'sin3'-sin2'=0.0011635^{+},$$

……………………………………………………

$$cos2'=2cos1'cos1'-cos0'=0.9999998^{+},$$

$$cos3'=2cos1'cos2'-cos1'=0.9999996^{+},$$

$$cos4'=2cos1'cos3'-cos2'=0.9999993^{+},$$

……………………………………………………

註 計算時須用九位小數的值,再割去末二位.

注意 每用$2cos1'$相乘時,可令$2cos1'=1.999999914=2-0.000000086$入算,則手續大爲簡易.

又就§54 (XVII), (XVIII)兩式中,令 $A=30^\circ$,則

$$\sin(30^\circ+B)+\sin(30^\circ-B)=2\sin30^\circ\cos B=\cos B,$$

$$\therefore\quad \sin(30^\circ+B)=\cos B-\sin(30^\circ-B).$$

同理有 $$\cos(30^\circ+B)=-\sin B+\cos(30^\circ-B).$$

例 $$\sin30^\circ1'=\cos1'-\sin29^\circ59',$$

$$\cos30^\circ1'=\cos29^\circ59'-\sin1'.$$

故依前法求到30°的正餘弦後,即可改用上法計算較爲便利.如此只須求到 45°, 再照餘角關係,可化大於45°角的函數,爲其餘角(小於45°)的餘函數.

正餘弦值既得,即可由相除求得正餘切,由逆數求得正餘割.

習題二十九

1. 設一小角的弧度數爲 x, 且 x 漸小而趨近於 0, 試求 $\sin x/x$ 與 $\tan x/x$ 所趨近的值.

2. 設一小角的度數爲 x, 求證 x 漸小而趨近於 0 時, $\frac{x}{\sin x}$ 與 $\frac{x}{\tan x}$ 的值趨近於 $\frac{\pi}{180}$.

3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{\theta}{n}\right)$.　　**4.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{m}}{x}\right)$

5. 試由 $\cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$, 推證 $\cos\theta>1-\frac{\theta^2}{2}$.

6. 試求 $\tan 1'$ 的值到第七位小數.

7. 設 x(角的弧度)與 $\sin x$ 的五位小數都相同,求 x 的最大值,并化爲角度(須用五位算學用表所附的化秒爲弧度表).

8. 如易 $\sin x$ 爲 $\tan x$, 則上題結果如何?

9. 設 $\log x$(x 指角的弧度)與 $\log\sin x$ 有五位小數都相同,求 x 的最大值,并化爲角度.

10. 已知 $\sin 1^\circ=0.0174524$, $\cos 1^\circ=0.9998477$, 試做辛氏造表法,求 2°, 3°, 4° 的正餘弦,到五位小數.

11. 試求 $\tan 2^\circ$, $\cot 2^\circ$, $\sec 2^\circ$, $\csc 2^\circ$, 到五位小數.

12. 設已知 $\cos 5^\circ=0.9961947$, $\sin 25^\circ=0.4226183$, 試求 $\sin 35^\circ$ 的值到五位小數.

110. 推值法略論 普通五位對數表與三角函數表,眞數常含四位有效數字,角度間隔,則爲每 $1'$. 對於第五位有效數字的眞值,或準到秒數的角,則需用推值法(或稱補算法).普通皆據比例部份法推求.

比例部份法 **相差甚微二對數(或三角函數或函數對數)的差,與其相當眞數(或角)的差,約成比例.**

注意 學生對於這種推值法,當已能運用,如覺尙未十分熟習,可看五位算學用表中附表前的說明,并多加練習.表中爲省去比例式的手續起見,另有比例部份表,附載正表的傍面.其用法也在表前的說明中解釋.

至於遇眞數首兩位的有效數字爲10時,則其對數的變化每不合上法,甚小角的正弦,正餘切,或近於直角者的餘弦,正餘切亦然.這種情形叫做**不規則性.**

又如在 $89°$ 左近的角,相差 $1'$ 時,其餘弦值每無差異,試一查表即明,這種情形,叫做麻痺性,根本上無應用推值法的可能.

註　關於比例部分法的證明和運用時的限制,情形頗為複雜,高一程度,尚難明瞭,只好略而不論.關於對數表的情形,在著者所編高中代數學§190中,略有論及.欲知其詳,可參攷 *Lock & Child: A New Trigonometry* 末章.

111. 各表精密度略論　算表中各值末位,皆係據四捨五入法截取.今略論由此而生的誤差,以明各表精密度的大概情形.

(一)五位對數表.　因 $0.000005=\log 1.0000115$,

$$\therefore \log A\pm 0.000005=\log[A(1\pm 0.0000115)],$$

可見查表所得眞數 A 的誤差,必小於 $0.0000115A$.

(二)五位函數對數表.　有二角相差為 $1'$,設其同函數值對數值相差為 d,按比例部份法的理,即知對數值第六位差5時,相當角 α 所生誤差,應為 $\left(\frac{1}{2d}\right)'=\left(\frac{30}{d}\right)''$.即所求得的值為 $\alpha\pm\left(\frac{30}{d}\right)''$,故知最大誤差為 $\left(\frac{60}{d}\right)''$.

例　取 $\log\sin 40°$ 論,則因 $d=15$,故 $\left(\frac{60}{d}\right)''=4''$.如在 $\log\tan 40°$,則 $d=26$,故 $\left(\frac{60}{d}\right)''=2.3''$.由此可知用正切入算,結果必較用正弦者為更精密.

(三)五位函數表.　精密情形與(二)相同,故不再論.

112. 近於0°或90°的角的函數　求三角函數值,遇不規則性(§110),不能用比例部份法推值時,可依據§107的定理,得一法則如下:

(一)遇甚小的角時,如其弧度為x,則可以x來代$\sin x$與$\tan x$.

例　因 $42'=\left(\frac{42}{60}\right)^\circ=\frac{42}{60}\times\frac{\pi}{180}=0.01222.$

又因 $\cot x=\frac{1}{\tan x}$, 故

(二)設x為甚小角的弧度,則可以$\frac{1}{x}$代$\cot x$.

例　$\cot 42'=\frac{1}{0.01222}=81.833.$

如θ近於直角,則$90°-\theta$為一甚小的角,按餘角關係 $\cos\theta=\sin(90°-\theta)$等式,卽得

(三)如θ近於直角,則可以其餘角的弧度值來代$\cos\theta$與$\cot\theta$,以這值的逆數代$\tan\theta$.

例　因 $89°34.6'$ 的餘角為 $90°-89°34.6'=25.4'$

$$=\left(\frac{25.4}{60}\right)^\circ=\frac{25.4}{60}\times\frac{\pi}{180}=0.00739,\text{故}$$

$$\cos 89°34.6'=\cot 89°34.6'=0.00739,$$

$$\tan 89°34.6'=\frac{1}{0.00739}=135.32.$$

習題三十

1. 已知 $\log 1.010=0.00432$, $\log 1.011=0.00475$. 試用比例部份法求 $\log 1.0107$.

註　由七位表查出的值是 $\log 1.0107=0.0046223$.

2. 設 k 爲 $1'$ 以內某角的弧度,則 $\cos\left(\theta+\frac{k}{2}\right)$ 與 $\cos\theta$, 以及 $\sin\frac{k}{2}$ 與 $\frac{k}{2}$, 相差都很微細.試據這理和 §54 的(XXII)式,證明 $\sin(\theta+k)-\sin\theta$ 的差近值爲 $k\cos\theta$.

3. 試由上題說明比例部份法在正弦函數得以應用的緣故.

註　這例不過指示比例部份原理的概略,而不能作爲嚴密的證明,因上題中差近的精密度不易討論也.

求下列各角的正弦對數與正切對數二者精密度:

4. $5°$.　　**5.** $18°$.　　**6.** $32°$.　　**7.** $75°$.

8. 試求上列各角的餘弦餘切兩種對數精密度.

9. 甚小角的餘弦與近於直角者的正弦,能否應用 §113 的方法求出數值?何故?

求下列各函數值:

10. $\sin 45.4'$　　**11.** $\tan 37.6'$　　**12.** $\cot 53.5'$

13. $\cos 89°20.3'$　　**14.** $\cot 89°32.3'$　　**15.** $\tan 89°15.8'$

***113. 論 S. T. 表**　小於 $3°$(或大於 $87°$)的角,其正弦(或餘弦)與正切(或餘切)的對數,都不適用比例部份法推值.上節所述方法,固然可用,但不如用 S. T. 表的較爲精密.

茲先舉一例,以說明 S. T. 表的意義.

---

*自本節起至 §115, 以及習題三十一,都可酌量略去.

例 求 $\log\sin 22'$.

解 因 $22'=\left(\frac{22}{60}\right)^{\circ}=\frac{22}{60}\times\frac{\pi}{180}$, 故按上節得

$$\log\sin 22'=\log\left(\frac{22}{60}\times\frac{\pi}{180}\right)$$
$$=\log 22+\log\frac{\pi}{60\times 180}$$
$$=\log 22+\bar{4}.46373$$

或 $$=\log 22+6.46373-10$$

$$\log\pi=0.49715$$
$$\mathrm{colog}\,60=\bar{2}.22185$$
$$\mathrm{colog}\,180=\bar{3}.74472$$
$$=\bar{4}.46373$$

但以 N 表一小角 θ 的分數時,化 N' 爲弧度,雖與 $\sin\theta$, $\tan\theta$ 極相近,究非相等;按 §107, 應有

$$\sin\theta<N'\times\frac{\pi}{60\times 180}<\tan\theta$$

即 $$\sin\theta=N'\left(\frac{\pi}{60\times 180}-\epsilon\right),\quad \tan\theta=N'\left(\frac{\pi}{60\times 180}+\epsilon'\right).$$

且易明 N 稍增時, ϵ 與 ϵ' 的值也漸大,設

$$S=\log\left(\frac{\pi}{60\times 180}-\epsilon\right)+10,\quad T=\log\left(\frac{\pi}{60\times 180}+\epsilon'\right)+10.$$

則 N 漸增時, S 較 6.46373 漸小, T 較 6.46373 漸大.

註 五位算學用表的 p.22 載有 3° 以內諸角的 $S.\ T.$ 值,* 以便檢查,至於求 $S.\ T.$ 的方法,非本書所能論.

由 $S.\ T.$ 表意義和 §112 的理,即得這表用法如下:

(一)設 N 爲一小角 θ 的分數,則

$$\log\sin\theta=\log N+S-10,\quad \log\tan\theta=\log N+T-10.$$

*五位算學用表所附 $S.\ T.$ 表,係依分數計算,與蓋氏對數表所附係依秒數計算者不同.其理見習題二十三中第 7 題.

(二)如 θ 近於 $90°$,以 N 記餘角 $90°-\theta$ 的分數,則

$$\log\cos\theta=\log N+S-10,\ \log\cot\theta=\log N+T-10.$$

例一 求 $\log\tan 1°37.7'$.

解 $\log\tan 1°37.7'=\log\tan 97.7'=\log 97.7+T-10$

$=1.98989+6.46387-10=\bar{2}.45373.$

例二 求 $\log\cos 88°14'8''$.

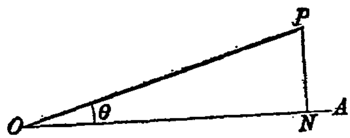
解 $90°-88°14'8''=1°45'52''=105.9'=N,$

$\therefore\ \log\cos 88°14'8''=\log 105.9+S-10$

$=2.02490+6.46365-10=\bar{2}.48855.$

*114. 實際上的應用問題

例一 一鐵道對水平面的傾斜度爲 $52'30''$,問長1哩的鐵道首尾兩處,高低相差多少呎?



解 設右圖中,OP 爲1哩長的鐵道.$\angle PON=52'30''$,作 $PN\perp OA$,即爲所求的高,則

$PN/OP=\sin\theta$

$PN=5280\times\sin 52'30''$

$=80.63$ 呎

$\log 5280=3.77263$

$\log 52.5=1.72016$

$S=6.46371$

$\log PN=11.90650-10$

例二 一樹高6呎,自距離122丈5尺處望去,其仰角爲若干?

解　設上題圖中，$PN=6$，$ON=1225$，則

$$\tan\theta=6/1225$$

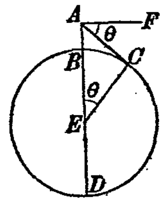
即　$$\log N=\log\tan\theta-T+10$$

$$\theta=N'=16.84'$$

註　自函數對數反求其角時，只能酌量取定適宜的 S 或 T.

$$\log 6=0.77815$$
$$\mathrm{colog}\,1225=\bar{4}.91186$$
$$\log\tan\theta=\bar{3}.69001$$
$$T=6.46373(-$$
$$\log N=\bar{9}.22628+10$$
$$=1.22628$$

*115. <u>可望見的地平距離與俯角</u>　設 A 爲高出地面上一點，BCD 爲過地球中心 E 的一截面，命 AE 與截圓交於 B，D；又作 AC，與圓相切於 C，AF 與 AD 垂直，則 AC 叫做地平線距離，$\angle CAF$ 叫做地平線俯角.



(一)設地球半徑爲 r（取 3960 哩爲約值），$AB=h$（以哩爲單位），則按幾何理　$AC^2=AB\cdot AD$，

$$AC^2=h(2r+h)=2hr+h^2=2hr\left(1+\frac{h}{2r}\right),$$

但 h/r 常爲甚小的數，故得差近等式　$AC^2\doteq 2hr$.

如化 h 哩爲 a 呎，則 $a=1760\times3\times h$，

$$\therefore\ AC^2\doteq\frac{2\times3960\times a}{1760\times3}=\frac{3a}{2}.$$

(二)　$$\cos\theta=\cos\angle AEC=\frac{r}{r+h},$$

用除法求出右端商式若干項,並以半角公式化左端,即得 $1-2sin^2\frac{\theta}{2}=1-\frac{h}{r}+\frac{h^2}{r^2}-\cdots\cdots$,

$$\therefore\quad 2sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{h}{r}-\frac{h^2}{r^2}+\cdots\cdots.$$

設式中 θ 為弧度,則因俯角常甚小,故 $sin\frac{\theta}{2}$ 可以 $\frac{\theta}{2}$ 代之.且 $\frac{h}{r}$ 甚小,故 $\frac{h^2}{r^2}$ 等項可略去,由此得差近的等式

$$\frac{\theta^2}{2}=\frac{h}{r},\qquad \therefore\ \theta=\sqrt{\frac{2h}{r}}.$$

化弧度 θ 為 $D°$,則 $D=\frac{180}{\pi}$, $\theta=\frac{180}{\pi}\sqrt{\frac{2h}{r}}$.取略值 $\sqrt{r}\doteq 63$, $\pi\doteq\frac{22}{7}$, 更得 $D=\frac{180\times 7\times\sqrt{2h}}{22\times 63}=\frac{10}{11}\sqrt{2h}$.

*習題三十一

用 S. T. 表求下列諸角的正弦對數與正切對數:

1. 16.6′. **2.** 1°3′21″. **3.** 2°21′42″.

用 S. T. 表求下列諸角的餘弦對數與餘切對數:

4. 89°3.4′. **5.** 87°10′35″. **6.** 86°42′5″.

7. 設 N 為一小角的秒數,試證 S 值較 4.68558 稍小,而 T 則較其稍大.

8. 設 N 為一小角的度數,則 S. T. 值應與何數相近?

9. 一塔高4丈4尺,在地面上 A 處望去,得仰角 35′15″, 求 A 處與塔的距離.

10. 竿高1呎1吋,在相距1哩處測之,其仰角應如何?

11. 設在地面上望月球直徑的視角為 $\frac{1}{2}^\circ$，今銅幣的直徑 3 公分,置於一人眼前某處,適可蔽月,使不得見,求銅幣與這人的距離.

12. 設地面為一球面,而二平行緯度(對球心成 1° 的角)為 $69\frac{1}{9}$ 哩,求地球半徑.

13. 設自地球到太陽的平均距離為 92500000 哩,而地面上望見太陽的視角為 $32'$,求太陽的半徑.

14. 設普通眼力所能見的字,其視角為 $5'$,問在距 12 呎處能見的字應若干?在 $\frac{1}{4}$ 哩處的應如何?

15. 一燈塔高出海面 96 呎,求能望見燈光的最遠距離(即燈光能達地面上的最遠距離).

16. 如 15 哩為能望見一燈塔的最遠距離,求燈塔的高.

17. 二船的桅各高 32 呎 8 吋與 42 呎 8 吋(即桅頂高出海面的長),如二船能互相望見,求其最遠距離.

18. 一山高 264 丈,求以分秒表其地平線俯角.

19. 在一山頂的地平線俯角為 $1\frac{9}{10}^\circ$，求其高.

20. 一山頂可得望見的最遠距離為 30.25 哩,求山的高和其地平線俯角.

第六章摘要

本章授下列各項:

弧度角法	各表精密度
小角的正弦與正切	近於0°或90°的角的函數
辛氏造表法	S. T. 表
推值法(比例部份法)	應用問題

1. 弧度法定義 $\theta=s/r$ (s表對弧, r爲半徑)

2. 換算公式 $90^\circ=\frac{\pi}{2}$ 弧度.

3. 設 x 爲一小角弧度,則 $\sin x<x<\tan x$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1,\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1.$

4. 辛氏造表法乃先由(3)定 $1'$ 的正餘弦,再用

$\sin(A+1')=2\sin A\cos 1'-\sin(A-1')$ 等式繼續推求.

5. 普通都用比例部份法推值,即:相差甚微二對數(或三角函數等)的差,與其相當真數(或角)的差,約成比例.

但遇不規則性時不能用遇麻痺性時,根本無用.

6. 近於 0° 或 90° 的角的函數,不能應用(5)法推值時,可按(3)的理,求得較精密的差近值.

7. 設 N 爲小角 θ 的分數,則

$\log\sin\theta=\log N+S-10,\quad \log\tan\theta=\log N+T-10$

設 N 爲近於90°的角 θ 的餘角分數,則

$\log\cos\theta=\log N+S-10,\quad \log\cot\theta=\log N+T-10$

8. 設視點距地面的高爲 h 哩($=a$ 呎),AC 爲地平線距離,地平線俯角 θ 的度數爲 D,則有下列差近公式:

$$AC^2=\frac{3}{2}a,\qquad D=\frac{10}{11}\sqrt{2h}.$$

第七章

反三角函數,三角方程式

重要 **116.** 有等函數值的角 能滿足方程式 $\sin\theta=\frac{1}{2}$ 的角,有 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 與 $\pi-\frac{\pi}{6}$. 按廣義角函數的定義(§24), 即可知二角在標準位置(§22)時,始終邊如各相合,則諸函數必定各相等,由這例即可知角的正弦,能等於一已知量(絕對值小於1)者,其數為無限.茲依據§§29, 33, 39的理列為一表如下:

角 函數 根據	有等正弦值	有等餘弦值	有等正切值
函數定義	$\theta,\quad \pi-\theta$	$\theta,\quad 2\pi-\theta$	$\theta,\ \pi+\theta$
週期性	$2k\pi+\theta, 2k\pi+(\pi-\theta)$	$2k\pi+\theta, 2k\pi+(2\pi-\theta)$	$k\pi+\theta$

其中 θ 為合於函數值的最小正角, k 可為任何正或負整數.由此可知.

(一)有等正弦(或餘割)值的普遍角為 $2k\pi+\theta$, 或 $(2k+1)\pi-\theta$; 併成一式,得 $n\pi+(-1)^n\theta$.

(二)有等餘弦(或正割)值的普遍角為 $2n\pi\pm\theta$.

(三)有等正切(或餘切)值的普遍角為 $n\pi+\theta$.

(天) 各式中 n 均為任何正或負整數.

例一　求滿足 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的普遍角.

解　因 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin\dfrac{\pi}{3}$，　$\therefore\ \theta=n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{3}$.

例二　求滿足 $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ 的普遍角.

解　因 $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{2\pi}{3}$，　$\therefore\ \theta=2n\pi\pm\dfrac{2\pi}{3}$.

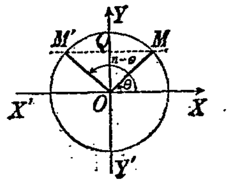
例三　求滿足 $\cot\theta=-\sqrt{3}$ 的普遍角.

解　因 $\cot\theta=-\sqrt{3}=\cot\dfrac{5\pi}{6}$，　$\therefore\ \theta=n\pi+\dfrac{5\pi}{6}$，

或　$n\pi-\dfrac{\pi}{6}$.

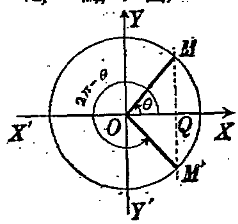
117. 已知函數值,求作其角的方法　已知一三角函數值,即可由作圖法求角.就此並可助我們明瞭上節的理.

以 O 爲心,作一單位圓,設 OX 軸爲所求角的邊,作 $OY\perp OX$.



(一)如 $\sin\theta=k$，在 OY 上取 Q 點,使其縱標爲 k.過 Q 作 OX 軸的平行線,交單位圓於 M, M' 二點,則 $\angle XOM=\theta$ 或 $2k\pi+\theta$，$\angle XOM'=\pi-\theta$ 或 $(2k+1)\pi-\theta$，爲所求的角.

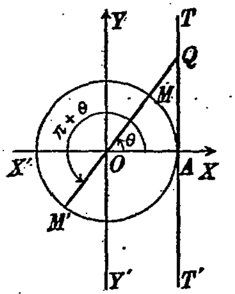
註　如 k 爲負值,則 Q 點應在 OY' 上(即 O 點下面).



(二)如 $\cos\theta=k$，在 OX 上取 Q 點,使其橫標爲 k，過 Q 作 OY 軸的平行線,交單位圓於 M, M'，則 $\angle XOM=\theta$ 或 $2k\pi+\theta$，$\angle XOM'=2\pi-\theta$ 或 $2k\pi-\theta$，爲所求的角.

註 如 k 爲負值,則 Q 點應在 OX' 上(即 O 點左邊).

(三)如 $\tan\theta=k$, 在 OX 軸與單位圓的交點 A, 作這圓切線 TT', 而於其上取一點 Q, 使其縱標爲 k. 聯 QO 并延長之,與圓交於 M, M' 二點,則 $\angle XOM=\theta$ 或 $2k\pi+\theta$, 及 $\angle XOM'=\pi+\theta$ 或 $(2k+1)\pi+\theta$ 爲所求的角,而可合爲 $n\pi+\theta$ 一式.



註 如 k 爲負值,則 Q 點應在 AT' 上(即 A 點下面).

習題三十二

1. 已知 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 θ 的普遍值,及其中四個最小的正值,并試按§117 的方法作圖.

2. 已知 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, 求 θ 的普遍值,及其中絕對值小於 2π 的各角,并試按§117 的方法作圖.

3. 已知 $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 θ 的普遍值,及其中絕對值小於 4π 的各角,并試按§117 的方法作圖.

求 θ 的普遍角,使各合於下列各方程式:

4. $\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.** $\tan\theta=\pm\sqrt{3}$. **6.** $\cot\theta=\pm 1$.

7. $\sec\theta=2$. **8.** $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **9.** $\csc\theta=\pm 2$.

10. 求第 4 至 9 題中小於 2π 的各角.

11. 已知 $\sin\theta=-\frac{1}{2}$, $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$, 求 θ 的普遍值.

(天)

12. 問 k 的值如何，§117 中各種情形的兩個角相合.

重要 **118. 反三角函數** 已知一角的大小，則其各三角函數值均決定；反之，已知某三角函數值，亦可決定其角，如上二節所述．有須注意者，即已知一角，其某函數值爲唯一確定，換言之，即一角不能有二個不同的某函數值；但已知某函數值，則適合的角，多至無限.

視一角爲其某函數值的函數，則稱爲**反三角函數**，例如以角爲其正弦的函數，則正弦值等於 $\frac{1}{2}$ 時，角的無限個值，可以普遍式 $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$ 表出．或記爲

$$n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}=\sin^{-1}\frac{1}{2}.$$

$\sin^{-1}$ 即反正弦的符號，但也有寫作 $\arcsin$ 的.

註 $\sin^{-1}a$ 中的 -1，並非指數，即 $\sin^{-1}a$ 非 $\frac{1}{\sin a}$ 的意思．後者須記爲 $(\sin a)^{-1}$.

注意 三角函數的比值，爲不名數，而反三角函數則指角的大小，故爲名數，其單位爲度或弧度(本書用弧度).

初學宜特別留意 $\sin\theta=a$ 與 $\sin^{-1}a=\theta$ **二式的意義相同**．前式謂 θ 角的正弦爲 a，後式則說明 θ 乃一以 a 爲其正弦的角.

其他三角函數，亦各有反函數，記爲 $\cos^{-1}$，$\tan^{-1}$，$\cot^{-1}$，$\sec^{-1}$，$\csc^{-1}$，或 $\arccos$，$\arctan$，arccot，arcsec，arccsc. （天）

例 以反函數符號記§116各例題結果,則有

$$\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3},\quad \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3},$$

$$\cot^{-1}(-\sqrt{3})=n\pi+\frac{5\pi}{6},\ 或\ n\pi-\frac{\pi}{6}.$$

119. 反函數的限制 任何角均有相當各函數值,但在反三角函數,則已知值有相當限制.因任何角正餘弦的絕對值必小於1,正餘割的必大於1,故知 $a<-1$ 或 $a>1$ 時,$\sin^{-1}a$ 與 $\cos^{-1}a$ 都無意義; $-1<a<1$ 時,$\sec^{-1}a$ 與 $\csc^{-1}a$ 都無意義;但在反函數 $\tan^{-1}a$ 與 $\cot^{-1}a$ 中,a 的值毫無限制.

註 如推廣角的意義到虛量,則上述限制,可以撤去.這理在高中程度,尚講不到.

120. 主值 因反函數符號記§116的結果,便得

(一)如 $\sin\theta=a$, 則 $\sin^{-1}a=n\pi+(-1)^n\theta$,

(二)如 $\cos\theta=a$, 則 $\cos^{-1}a=2n\pi\pm\theta$,

(三)如 $\tan\theta=a$, 則 $\tan^{-1}a=n\pi+\theta$.

反函數值的個數,既多至無限,故應擇定一值,以免混淆.

定義 合於 $\sin\theta=a$, 且與 a 同號,而絕對值又最小的角 θ,叫做 $\sin^{-1}a$ 的主值. $\tan^{-1}a$, $\cot^{-1}a$, $\csc^{-1}a$ 亦同.合於 $\cos\theta=a$, 且值最小的正角 θ, 叫做 $\cos^{-1}a$ 的主值, $\sec^{-1}a$ 亦同.

(天)

按上述定義,則 $\sin^{-1}a$, $\csc^{-1}a$, $\tan^{-1}a$, $\cot^{-1}a$ 四者主值,在 $-\frac{\pi}{2}$ 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間, $\cos^{-1}a$, $\sec^{-1}a$ 的主值在 0 與 π 之間.

例 $\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的主值為 $\frac{\pi}{3}$, $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ 的主值為 $-\frac{\pi}{6}$, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ 的主值為 $\frac{2\pi}{3}$, $\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ 的主值為 $-\frac{\pi}{6}$.

121. 正反三角函數的相消性 在代數裏,我們已習知加與減,或乘與除,是相反的運算,而可相消,即設 a, b 為任意二數,均有 $a+b-b=a$, $a\times b\div b=a$ (在後式中,須 $b\neq 0$). 正反三角函數,也有相類的情形.

設 $\sin\theta=a$, 則 $\sin^{-1}a=n\pi+(-1)^n\theta$, 故有

$$\sin(\sin^{-1}a)=\sin(n\pi+(-1)^n\theta)=\sin\theta=a,$$

$$\sin^{-1}(\sin\theta)=\sin^{-1}a=n\pi+(-1)^n\theta.$$

如限定 θ 為主值,則第二式化簡為 $\sin^{-1}(\sin\theta)=\theta$.

習題三十三

求下列各反函數的普遍值和主值:

1. $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.　2. $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.　3. $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$.

4. $\cot^{-1}1$.　5. $\csc^{-1}(-2)$.　6. $\sec^{-1}(-2)$.

7. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.　8. $\sin^{-1}0$.　9. $\sin^{-1}1$.

10. $\cos^{-1}0$.　11. $\cos^{-1}1$.　12. $\cos^{-1}(-1)$.

13. 如 $\cot\theta=a$, 求 $\cot^{-1}a$ 的普遍值.

14. 如 $\sec\theta=a$, 求 $\sec^{-1}a$ 的普遍值.

122. 反函數關係式 含三角函數的恆等式,可改成反函數的關係式,舉例如下:

例一 證明 $\sin^{-1}a+\cos^{-1}a=\frac{\pi}{2}$, 但此處的反函數,指主值而言.

證 設 $\sin^{-1}a=\alpha$, $\cos^{-1}a=\beta$; 則

$$a=\sin\alpha=\cos\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right). \qquad \text{(恆等式)}$$

但按主值規定, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\beta\leqslant\pi$, 故 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}-\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$.

$$\therefore\ \alpha=\frac{\pi}{2}-\beta, \qquad \alpha+\beta=\frac{\pi}{2},$$

即 $$\sin^{-1}a+\cos^{-1}a=\frac{\pi}{2}.$$

例二 設 $a>0$, 求證 $\tan^{-1}\frac{1}{a}=\cot^{-1}a$, 但此處的反函數,指主值而言.

證 設 $\tan^{-1}\frac{1}{a}=\alpha$, $\cot^{-1}a=\beta$, 則

$$\frac{1}{a}=\tan\alpha=\frac{1}{\cot\beta}=\tan\beta. \qquad \text{(恆等式)}$$

按主值規定, $0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$, 故 $\alpha=\beta$,

即 $$\tan^{-1}\frac{1}{a}=\cot^{-1}a.$$

例三 求證 $\tan^{-1}a+\tan^{-1}b=\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}$.

證 設 $\tan^{-1}a=\alpha$, $\tan^{-1}b=\beta$, $\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}=\gamma$, 則

$$\tan\alpha=a, \quad \tan\beta=b, \quad \tan\gamma=\frac{a+b}{1-ab}$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\tan(\alpha+\beta). \qquad \text{(恆等式)}$$

$\therefore\ \alpha+\beta=\gamma$, 即 $\tan^{-1}a+\tan^{-1}b=\tan^{-1}\dfrac{a+b}{1-ab}$.

注意 本例中的反函數,不能指主值言,譬如取

$$a=1,\quad b=\sqrt{3},\quad \frac{a+b}{1-ab}=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}},$$ 則以主值論時,

$$\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4},\quad \tan^{-1}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3},\quad \tan^{-1}\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=-\frac{5\pi}{12},$$

而不合於求證的關係.這理就證明中可以看出,因如 α, β, γ 指主值,則 $0\leqq\alpha\leqq\pi$, $0\leqq\beta\leqq\pi$, $0\leqq\gamma\leqq\pi$, 而 $\alpha+\beta$ 未必能小於 π,所以不能由 $\tan\gamma=\tan(\alpha+\beta)$ 推出結論 $\alpha+\beta=\gamma$.

***123. 反三角函數關係式的意義** 反三角函數關係式,係由含三角函數的恆等式推出,已如上述,所以這等關係式,也是一種恆等情形(即不論式中所含文字的值如何,皆有相等關係).但其意義,却與普通恆等式稍有不同.

因一反三角函數,如無主值的限制,則所表爲一組無限個值.含此等反函數的關係式,乃指在諸組內,必可各取一相當值,使關係式成立;由此可知一關係式含 n 個反函數,則對 $n-1$ 個反函數,可任意選取,而其餘一個反函數,必隨之固定,不能再任意.換句話說,即不能在各組中盡行任意取定,而使合於關係式.

例 在 $\tan^{-1}1+\tan^{-1}\sqrt{3}=\tan^{-1}\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ 中,取兩函數主值,如 $\tan^{-1}1=\dfrac{\pi}{4}$, $\tan^{-1}\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}$, 則對 $\tan^{-1}\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ 應取 $\dfrac{7\pi}{12}$; 如 $\tan^{-1}1=\dfrac{\pi}{4}$, $\tan^{-1}\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=-\dfrac{5\pi}{12}$, 則對 $\tan^{-1}\sqrt{3}$ 應取 $-\dfrac{2\pi}{3}$.

*初學對於本節,如感困難,可斟酌情形略去.

124. 反函數雜例

例一 求證 $\tan^{-1}\frac{1}{239}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\frac{\pi}{4}$.

證 設 $\theta=\tan^{-1}\frac{1}{5}$, 則 $\tan\theta=\frac{1}{5}$, 由此可得

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{\frac{2}{5}}{1-(\frac{1}{5})^2}=\frac{5}{12},\ \tan 4\theta=\frac{120}{119}.$$

$$\therefore\ \tan\left(4\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan 4\theta-1}{1+\tan 4\theta}=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}=\frac{1}{239},$$

即 $$\tan^{-1}\frac{1}{239}=4\theta-\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\frac{\pi}{4}.$$

例二 求證 $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\cos^{-1}\frac{15}{17}=\sin^{-1}\frac{77}{85}$, 此處諸反函數,皆指主值而言.

證 設 $\sin^{-1}\frac{3}{5}=\alpha$, $\cos^{-1}\frac{15}{17}=\beta$, 則

$\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{15}{17}$, 又因 α,β 指主值,故在第一象限內,而各函數皆為正, $\therefore\ \cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\beta=\frac{8}{17}$.

我們求證的關係式,可書為 $\alpha+\beta=\sin^{-1}\frac{77}{85}$, 試取

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{17}+\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{17}=\frac{77}{85}$, 即示明其成立.

例三 求 $\sin\left(\tan^{-1}\frac{5}{12}\right)$.

解 設 $\tan^{-1}\frac{5}{12}=\alpha$, 則 $\tan\alpha=\frac{5}{12}$.

$$\therefore\ \sin\left(\tan^{-1}\frac{5}{12}\right)=\sin\alpha=\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{\frac{5}{12}}{\sqrt{1+(\frac{5}{12})^2}}=\pm\frac{5}{13}.$$

$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\cos\alpha=\tan\alpha\cdot\cos\alpha=\tan\alpha\frac{1}{\sec\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\sec\alpha}$

習題三十四

1. 求證 $\tan^{-1}a+\cot^{-1}a=\frac{\pi}{2}$ (反函數指主值).

考

2. 設 $a<0$, 求證 $\tan^{-1}\frac{1}{a}=\cot^{-1}a-\pi$ (反函數指主值).

求證下列各關係式,并指出那幾題能合於取主值的限制?那幾題須加某種限制?

3. $\sin^{-1}a+\cos^{-1}b=\cos^{-1}[b\sqrt{1-a^2}\mp a\sqrt{1-b^2}]$.

4. $2\tan^{-1}a=\tan^{-1}\frac{2a}{1-a^2}=\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}$.

5. $\sin^{-1}a=\cos^{-1}\sqrt{1-a^2}=\frac{1}{2}\cos^{-1}(1-2a^2)$.

6. $\tan^{-1}a=\sin^{-1}\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$.

7. $\tan^{-1}\frac{a}{b}-\tan^{-1}\frac{a-b}{a+b}=\frac{\pi}{4}$.

8. $\tan^{-1}a=\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}c$.

9. $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}=\cos^{-1}\frac{33}{65}$.

10. $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\tan^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{27}{11}$.

11. 求 $\cot\left(2\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)$.　　12. 求 $\tan(2\tan^{-1}a)$.

13. 求 $\cos(2\tan^{-1}a)$.　　14. 求 $\sin\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$.

125. <u>三角方程式</u>　簡單的三角方程式解法,已在 §16 中講過,但其中所含函數,以單角者爲限,解答也限於銳角,而非廣義角.本章就較複雜的方程式,討論廣義的解答.

126. 三角方程式解法通則

(一)化求解方程式中各函數,爲單角的同函數.

(二)視該函數爲未知數,解出其值.

(三)按反函數理,求普遍解(但須合§119的限制).

例一 解方程式 $1+\cos x\tan x=2\cos^2 x$.

解 化全式使只含 $\sin x$, 得

$$1+\sin x=2\cos^2 x=2(1-\sin^2 x).$$

即 $$2\sin^2 x+\sin x-1=(2\sin x-1)(\sin x+1)=0.$$

故 $\sin x=\frac{1}{2}$, 而 $x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$, //

或 $\sin x=-1$, 而 $x=n\pi+(-1)^n\frac{3\pi}{2}$ 或 $=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$. //

例二 解方程式 $\sin 2\theta=\sqrt{2}\sin\theta$.

解 $\sin 2\theta-\sqrt{2}\sin\theta=2\cos\theta\sin\theta-\sqrt{2}\sin\theta=\sin\theta(2\cos\theta-\sqrt{2})=0$.

取 $\sin\theta=0$, 則 $\theta=n\pi$,

$2\cos\theta-\sqrt{2}=0$, 則 $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$.

注意 如書原題爲 $2\cos\theta\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$, 消去兩端 $\sin\theta$, 則失去因 $\sin\theta=0$ 而得的 $\theta=n\pi$ 各解.故**解時宜留意,勿使失去某根**.又解得結果,亦應代入原方程式核算,以防解法中所引入不合用的根(參看§128 例下注意).

*127. 特殊解法

有時我們須先按恆等式,化題設方程式爲適宜形狀再解.

例一 解方程式 $\sin x+\sin 5x=\sin 3x$.

解 按§54的(XXI)式,化左端爲 $2\sin 3x\cos 2x$.

即 $$\sin 3x(2\cos 2x-1)=0.$$

(天)

*如教授時間不敷,自本節以後,都可斟酌情形略去.

取 $\sin 3x=0$, 則 $3x=n\pi$, $\therefore x=\frac{n\pi}{3}$.

$2\cos 2x-1=0$, 則 $2x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$, $\therefore x=n\pi\pm\frac{\pi}{6}$.

例二 解方程式 $\cos p\theta=\sin q\theta$.

解 在此 $\cos p\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-q\theta\right)$, 故

$p\theta=2n\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}-q\theta\right)$, 而得

$(p+q)\theta=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi$, 或 $(p-q)\theta=\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi$.

又解 取 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-p\theta\right)=\sin q\theta$, 則有

$\frac{\pi}{2}-p\theta=m\pi+(-1)^m q\theta$, 而得 $[p+(-1)^m q]\theta=\left(\frac{1}{2}-m\right)\pi$.

註 令 $m=-2n$,及 $-(2n+1)$,則又解中結果與第一解法中者相同.**凡用不同方法所得解答,如形式表面相異,當留心其實皆相同.**

注意 這裏所舉兩例,如用通則,頗不易解.

***128. 用輔助角法** 物理學中常遇呈

$$a\sin x+b\cos x=c$$

形狀的方程式,今論用輔助角的解法.

(一)設 $a=k\cos\theta$, $b=k\sin\theta$, 則 $a^2+b^2=k^2$. 代入原方程式,而以 k 遍除,即得

$$\cos\theta\sin x+\sin\theta\cos x=\sin(x+\theta)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

如 $c^2\leqq a^2+b^2$, 則可命 $\sin\alpha=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 而得

$x+\theta=n\pi+(-1)^n\alpha$, $\therefore x=n\pi+(-1)^n\alpha-\theta$.

如 $c^2>a^2+b^2$, 則本題無解.

註 也可設 $a=k\sin\theta, b=k\cos\theta$ 代入,依同法解得,結果形式表面似相異,實仍相同(看上節例二下的註).

(二)又一解法如次:設 $t=\tan\frac{x}{2}$, 則

$$\sin x=2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\therefore\ a\sin x+b\cos x=a\frac{2t}{1+t^2}+b\frac{1-t^2}{1+t^2}=c,$$

即 $$t^2(b+c)-2at+(c-b)=0.$$

欲這二次方程式有二實根,必 $a^2+(b+c)(b-c)=a^2+b^2-c^2\geqq 0$, 即 $c^2\leqq a^2+b^2$. 如合於此條件,則可得 $t=\tan\frac{x}{2}$的兩實值: $\tan\frac{x}{2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}$.

命 $c/\sqrt{a^2+b^2}=\sin\alpha,\ a/\sqrt{a^2+b^2}=\cos\theta$, 則 $b/\sqrt{a^2+b^2}=\sin\theta$. 代入所得兩解中,便有

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\pm\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2+b^2}}}{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}}=\frac{\cos\theta\pm\cos\alpha}{\sin\theta+\sin\alpha}$$

$$=\frac{2\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\cos\frac{\theta-\alpha}{2}}{2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\cos\frac{\theta-\alpha}{2}}=\cot\frac{\theta+\alpha}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta+\alpha}{2}\right).$$

或 $$=\frac{2\sin\frac{\alpha+\theta}{2}\sin\frac{\alpha-\theta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\theta}{2}\cos\frac{\theta-\alpha}{2}}=\tan\frac{\alpha-\theta}{2}.$$

$\therefore\quad \dfrac{x}{2}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta+\alpha}{2}$，而 $x=(2k+1)\pi-\alpha-\theta$，

或　　$\dfrac{x}{2}=k\pi+\dfrac{\alpha-\theta}{2}$，　　而 $x=2k\pi+\alpha-\theta$.

例　解方程式 $5\cos x-2\sin x=2$.

解　因 $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$，故應以 $\sqrt{29}$ 遍除.

又 $-\dfrac{2}{\sqrt{29}}=\cos\theta$，$\dfrac{5}{\sqrt{29}}=\sin\theta$，　　$\therefore\quad \theta=111°48'$.

化原方程式爲 $\sin(x+111°48')=\dfrac{2}{\sqrt{29}}=\sin 21°48'$，卽得

$x+111°48'=n\times180°+(-1)^n 21°48'$，$x=n\times180°+(-1)^n 21°48'-111°48'$.

令 $n=2k$，則 $x=k\times360°-90°$；$n=2k+1$，則 $x=k\times360°+46°24'$.

又解　設 $\tan\dfrac{x}{2}=t$ 代入化簡，卽得 $7t^2+4t-3=0$.

$\therefore\quad t=-1=\tan(-45°)$ 或 $t=\dfrac{3}{7}=0.42857=\tan23°12'$.

$\therefore\quad \dfrac{x}{2}=k\times180°-45°$　或 $\dfrac{x}{2}=k\times180°+23°12'$.

卽　　$x=k\times360°-90°$　或　$x=k\times360°+46°24'$.

注意　如照§126的通則，卽得解法如下：

$5\cos x=2(1+\sin x)$，　$25(1-\sin^2 x)=4(1+\sin x)^2$，

$\therefore\quad (1+\sin x)[25(1-\sin x)-4(1+\sin x)]=0$.

卽　　$(1+\sin x)(29\sin x-21)=0$.

取　$1+\sin x=0$，則 $\sin x=-1$，而 $x=n\times180°+(-1)^n 270°$.

$29\sin x-21=0$，則 $\sin x=\dfrac{21}{29}$，而 $x=n\times180°+(-1)^n 46°24'$.

令 $n=2k$ 與 $2k+1$，合之共得四組解如下：

$k\times360°+270°$，$k\times360°-90°$，$k\times360°+46°24'$，$k\times360°+133°36'$.

其中增出的第一第四兩組，實爲 $5\cos x+2\sin x+2=0$ 的根，在兩端平方時加入，而不合於原方程式. 由此可知解三角方程式所得的解，宜代入原方程式核算(看§125注意).

習題三十五

解下列各三角方程式:

1. $\cos^2 x+\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cos x\sin x+\sin^2 x=0.$

2. $\tan^2 x+\cot^2 x=2.$　　**3.** $\csc x+\cot x=\sqrt{3}.$

4. $\cot\theta-ab\tan\theta=(a-b).$　　**5.** $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}.$

6. $\sin\frac{x}{2}=\csc x-\cot x.$　　**7.** $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1+\sin 2x.$

8. $\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

9. $\cos 2x=\cos^2 x.$　　**10.** $2\cos x=\cos 2x.$

11. $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}=2\cos x.$

12. $\sin 2x-\cos 2x-\sin x+\cos x=0.$

13. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0.$

14. $\tan x+\tan 2x=\tan 3x.$　　**15.** $\sin x+\sin 3x=\cos x-\cos 3x.$

16. $\tan p\theta=\cot q\theta.$　　**17.** $2\sin\theta\sin 3\theta=1.$

18. $\sin(x+\alpha)=a\sin x.$　　**19.** $\tan(x+\alpha)=a\tan x.$

20. 令 $\alpha=65°21'$, $a=3$, 解第18和19兩題.

21. 用各種方法解 $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=1,$

并討論由§126通則求解所生的增根(即不合原方程式的解).

22. 設 $\tan\frac{x}{2}=t$ 以解 $a\tan x+b\cot x=c,$

討論其有解條件,并另設法求解,而比較所得結果.

23. 說明 $\left(2n+\frac{1}{4}\right)\pi\pm\alpha$, $\left(n-\frac{1}{4}\right)\pi+(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

所表的兩組角相同,并以圖釋明其理.

***129.** 含反函數的方程式　含反函數的方程式，應化爲其中未知數的代數方程式再解.

例一　解 $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x=n\pi+\frac{3\pi}{4}$.

解　設 $\tan^{-1}2x=\alpha$, $\tan^{-1}3x=\beta$; 則 $\tan\alpha=2x$, $\tan\beta=3x$.

又 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$, $\tan\left(n\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=-1$, 故將原方程式兩端取正切,即得 $\frac{2x+3x}{1-6x^2}=-1$. 化簡有

$$6x^2-5x-1=(6x+1)(x-1)=0,\qquad \therefore x=1 \text{ 或 } -\frac{1}{6}.$$

例二　解 $\sin^{-1}x+\sin^{-1}(1-x)=\cos^{-1}x$.

解　設 $\cos^{-1}x=\alpha$, $\sin^{-1}x=\beta$, 則 $\alpha-\beta=\sin^{-1}(1-x)$.

$\therefore$　$1-x=\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$.

又因 $\cos\alpha=x=\sin\beta$, 故 $\sin\alpha=\sqrt{1-x^2}=\cos\beta$, 代入得

$1-x=(1-x^2)-x^2=1-2x^2$,　$\therefore 2x^2-x=0$,　而 $x=0$ 或 $\frac{1}{2}$.

***130.** 聯立三角方程式　聯立三角方程式解法很難,無通則可言,今舉數例如下:

例一　解聯立方程式 $x+y=a$, $\sin x+\sin y=a$.

解　用化和爲積法化第二式,得

$$2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}=2\cos\frac{a}{2}\sin\frac{x-y}{2}=a.$$

如 $-1\leqslant a/2\cos\frac{a}{2}\leqslant 1$, 則可定 θ, 使 $a/2\cos\frac{a}{2}=\cos\theta$.

$$\therefore\ \frac{1}{2}(x-y)=2n\pi\pm\theta,\qquad x-y=4n\pi\pm2\theta.$$

$$\therefore\ x,\ y=\frac{a}{2}+2n\pi\pm\theta,\quad \frac{a}{2}-2n\pi\mp\theta.$$

例二 解聯立方程式 $x+y=\alpha,\ \tan x\ \tan y=a.$

解 用化和爲積法,得 $\tan x\ \tan y=\dfrac{\sin x\ \sin y}{\cos x\ \cos y}$

$$=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{\cos(x-y)+\cos(x+y)}=\frac{\cos(x-y)-\cos\alpha}{\cos(x-y)+\cos\alpha}=a.$$

$\therefore\quad \cos(x-y)=\dfrac{1+a}{1-a}\cos\alpha=\cos\theta$, 而 $x-y=2n\pi\pm\theta$. 只須 $-1\leqslant\dfrac{1+a}{1-a}\cos\alpha\leqslant1$, 則 θ 常可求得.

$$\therefore\quad x,y=\frac{\alpha}{2}+2n\pi\pm\theta,\quad \frac{\alpha}{2}-2n\pi\mp\theta.$$

例三 解聯立方程式 $x+y=\alpha,\ \cos x/\cos y=a.$

解 按比例理化第二式,而以 α 代 $x+y$, 則得

$$\frac{\cos x+\cos y}{\cos x-\cos y}=\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\ \cos\frac{x-y}{2}}{-2\sin\frac{x+y}{2}\ \sin\frac{x-y}{2}}=-\cot\frac{\alpha}{2}\ \cot\frac{x-y}{2}=\frac{a+1}{a-1},$$

$$\therefore\quad \cot\frac{x-y}{2}=\frac{1+a}{1-a}\tan\frac{\alpha}{2}=\cot\theta,\ \text{而}\ \frac{x-y}{2}=k\pi+\theta.$$

$$\therefore\quad x,y=\frac{\alpha}{2}+k\pi+\theta,\quad \frac{\alpha}{2}-k\pi-\theta.$$

***131.** 消去法 解一組聯立方程式,乃設各方程式中未知角能表同值,而求出這值.如取解得的值代入另一含未知角的方程式中,便得一不含未知角的關係式,稱爲從該組方程式和那另一式,消去未知角,所得的關係式,叫做**結式**.

注意 結式實卽表某組方程式中未知數有公解的條件,可參看著者編新課程標準高中代數學§78.

消去法也無通則,故求結式頗不易.

(天)

例一 求自 $r\cos\theta=a$, $r\sin\theta=b$ 中消去 θ.

解 $a^2+b^2=r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r^2$.

例二 求自 $\tan(\alpha+x)=m$, $\tan(\alpha-x)=n$ 中消去 x.

解 書爲反函數,得 $\alpha+x=\tan^{-1}m$, $\alpha-x=\tan^{-1}n$, 故得 $2\alpha=\tan^{-1}m+\tan^{-1}n$, 故 $\tan 2\alpha=\tan(\tan^{-1}m+\tan^{-1}n)$

$$=\frac{\tan(\tan^{-1}m)+\tan(\tan^{-1}n)}{1-\tan(\tan^{-1}m)\tan(\tan^{-1}n)}=\frac{m+n}{1-mn}.$$

例三 求自 $x=\sin\theta+\cos\theta$, $y=\tan\theta+\cot\theta$ 中,消去 θ.

解 將第一方程式兩端平方,得

$$x^2=1+2\sin\theta\cos\theta,\text{ 故 }\sin\theta\cos\theta=\frac{x^2-1}{2},$$

$$\therefore\ y=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{2}{x^2-1}.$$

例四 求自 $\tan x+\tan y=a$, $\cot x+\cot y=b$, $x+y=c$ 中,消去 x 與 y.

解 $\tan c=\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1+\tan x\tan y}$ (A)

但 $\cot x+\cot y=\dfrac{\tan x+\tan y}{\tan x\tan y}=b$,

而 $\tan x+\tan y=a$, $\therefore$ $\tan x\tan y=\dfrac{a}{b}$.

代入(A)中,得 $\tan c=a/\left(1-\dfrac{a}{b}\right)=\dfrac{b-a}{ab}=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$.

習題三十六

解下列各方程式:

1. $\sin^{-1}x=\cos^{-1}x$. **2.** $\sin^{-1}x-\cos^{-1}x=\sin^{-1}(3x-2)$. (天)

3. $tan^{-1}(x+1)-tan^{-1}(x-1)=cot^{-1}2.$

4. $tan^{-1}x+tan^{-1}(1-x)=2tan^{-1}\sqrt{x-x^2}.$

5. $sin^{-1}\dfrac{2a}{1+a^2}+tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}=cos^{-1}\dfrac{1-b^2}{1+b^2}.$

6. 如 $sin\{2cos^{-1}[cot(2tan^{-1}x)]\}=0$, 求 x.

7. 如 $sin(\pi cos\theta)=cos(\pi sin\theta)$, 求證 $2\theta=\pm sin^{-1}\dfrac{3}{4}.$

解下列各聯立方程式:

8. $tan(x+y)=\sqrt{3}$, $tan(x-y)=1.$

9. $x+y=\alpha$, $tanx+tany=a.$

10. $x+y=\alpha$, $cosx cosy=a.$

11. $x+y=\alpha$, $sinx/siny=a.$

12. $sinx+siny=1$, $cosx+cosy=1.$

13. $2(sin2\theta+sin2\alpha)=2sin(\theta+\alpha)=1.$

從下列各式中消去未知角 θ(及 ϕ):

14. $x=acos^3\theta$, $y=bsin^3\theta.$

15. $cos(\theta-\alpha)=a$, $sin(\theta-\beta)=b.$

16. $asin\theta+bcos\theta=a'$, $acos\theta-bsin\theta=b'.$

17. $asec\,\theta-x\tan\theta=y$, $bsec\,\theta+y\tan\theta=x.$

18. $x=\sin\theta+\cos\theta\sin 2\theta$, $y=\cos\theta+\sin\theta\sin 2\theta.$

19. $x=x'\cos\phi+y'\sin\phi\cos\theta$, $y=x'\sin\phi-y'\cos\phi\cos\theta$, $z=y'\sin\theta.$

20. $x=a\sin\phi\cos\theta$, $y=b\sin\phi\sin\theta$, $z=c\cos\phi.$

21. $\sin\theta+\sin\phi=a$, $\cos\theta+\cos\phi=b$, $\cos(\theta-\phi)=c.$

第七章摘要

本章授下列各項:

反三角函數	三角方程式
主值	聯立三角方程式
反三角函數關係式	消去法

1. 如 $\cos\theta=a$, 則 $\sin^{-1}a=n\pi+(-1)^n\theta$ (餘割同),
   如 $\cos\theta=a$, 則 $\cos^{-1}a=2n\pi\pm\theta$ (正割同),
   如 $\tan\theta=a$, 則 $\tan^{-1}a=n\pi+\theta$ (餘切同).

2. 就反函數的主值論,則 $0\leqq\cos^{-1}a,\ \sec^{-1}a\leqq\pi$,
$-\frac{\pi}{2}\leqq\sin^{-1}a,\ \csc^{-1}a,\ \tan^{-1}a,\ \cot^{-1}a\leqq\frac{\pi}{2}$.

3. 反三角函數關係式,應改為三角函數,再按恆等式關係推證.

4. 反三角函數關係式意義,乃指若干組角中,各取一相當值間的一定關係,並非對組中任何角均合.

5. 三角方程式解法通則,為(一)化各函數為單角同函數,(二)視該函數為未知數,解得其值,(三)由反函數求普遍解.

6. 三角方程式,可按化和為積式,或用輔助角,改為適當形式再解,這法對聯立方程式也常用.

7. 用不同方法解三角方程式,如解答形式表面似相異,應說明實則相同.

8. 解三角方程式,應留意勿使應有的根失去,或引入不合用的根.欲免第二種錯誤,可將解答代入原式核驗.

9. 消去法乃求一組方程式中未知角有公解的條件.

(天)

索 引

(附英文原名)

〔後面第一數碼,指所在頁數;第二數碼指節數,如係中文字碼,則係第幾習題;註一表字,附以數碼,則爲五位算學用表節數〕

中0541(全)　23,11.

民國二十三年八月發行
民國二十四年二月再版

版權所有

新課程標準適用
高中三角學（全一冊）
◎定價銀六角五分

編者　余介石
發行者　中華書局有限公司　代表人陸費逵
印刷者　上海靜安寺路　中華書局印刷所
總發行所　上海棋盤街　中華書局總店
分發行所　各埠中華書局

（七九七一）