查理斯密

小代數學

陳文譯

商務印書館

8137號註册證

書號 59250

定價 1.67 元

改　訂
查理斯密
小代數學

陳文譯

商務印書館

Charles Smith

Elementary Algebra

查理斯密

小代數學

陳文譯

商務印書館出版
上海河南中路二一一號
(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號)
新華書店總經售
商務印書館印刷廠印刷
上海天通菴路一九〇號
⊕(59250)

1905年3月初版 1955年4月20版
印數81,601—86,000 定價一元六角七分

本書備用公式

(加　法)

$a+(+b)=a+b$

$a+(-b)=a-b$

(減　法)

$a-(+b)=a-b$

$a-(-b)=a+b$

(乘法及除法之符號定則)

同號二數之積或商爲正，異號二數之積或商爲負。

(乘法及除法之定理)

$ab=ba$

$a\div b\div c=a\div c\div b$

$a\times b\div c=a\div c\times b$

$a\times b\times c=a\times(bc)$

$a\div b\div c=a\div(bc)$

$(a+b)c=ac+bc$

$(a+b)\div d=a\div d+b\div d$

(緊要公式)

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

$x^3\pm a^3=(x\pm a)(x^2\mp ax+a^2)$

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$; $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$, $\dfrac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots\cdots+a^{n-1}$, $\dfrac{x^n\pm a^n}{x+a}=x^{n-1}-x^{n-2}a+x^{n-3}a^2-\cdots\cdots\pm a^{n-1}$.

(最高公因數與最低公倍數之關係)

$A=Ha$, $B=Hb$, 則 $L=H,a,b$.

$L\times H=A\times B$

(二次方程式)

二次之普通方程式爲

$ax^2+bx+c=0$

此普通方程式之根爲

$$-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}$$

$b^2-4ac=0$ 則此普通方程式之二根相等

$b^2-4ac=0$ 則 ax^2+bx+c 爲關於 x 之完全平方

b^2-4ac 非完全之平方，則此普通方程式之二根爲根數。

此普通方程式之二根爲 α,β 則

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$

$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

(指　數)

$a^m\times a^n=a^{m+n}$

$a^m\div a^n=a^{m-n}$

$(a^m)^n=a^{mn}$

$(a^xb^yc^z\cdots\cdots)^m=a^{xm}b^{ym}c^{zm}\cdots\cdots$

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(a^m)}=(\sqrt[n]{a})^m$

$a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}$

$a^0=1$

(比 例)

$a:b=c:d$ 則

$ad=bc$

又反之 $ad=bc$ 則

$a:b=c:d$

而 $a:b=c:d$

$a:c=b:d$

$b:a=d:c$

$b:d=a:c$

其一比例合理則他比例悉能合理

$a:b=c:d$ 則

$a+b:a-b$

$=c+d:c-d$

$a:b=b:c$ 則

$b^2=ac$

(級 數)

等差 $\begin{cases} l=a+(n-1)d \\ S=\frac{n}{2}(a+l) \end{cases}$

等比 $\begin{cases} l=ar^{n-1} \\ S=(a-rl)/(1-r) \end{cases}$

故 a,l,n,d (或 r) S 五者中知其三者,則他二者自能求得.故由是所生之公式,其數爲

$5!/3!=20$

(無窮等比級數之和)

$$S=\frac{a}{1-r}$$

等差級數

$a-b:b-c=a:a$

等比級數

$a-b:b-c=a:b$

調和級數

$a-b:b-c=a:c$

等差中項 $A=\frac{a+b}{2}$

等比中項 $G=\sqrt{ab}$

調和中項 $H=\frac{2ab}{a+b}$

$\therefore\ A.H.=G^2$

(排 列)

${}_nP_r=n!/(n-r)!$

${}_nP_n=n!$

$$P=\frac{n!}{p!q!r!\cdots}$$

(組 合)

${}_nC_r=n!/r!(n-r)!$

${}_nC_r={}_nC_{n-r}$

${}_nC_r+{}_nC_{r-1}={}_{n+1}C_r$

(二項式定理之公項)

${}_nC_ra^{n-r}b^r$

(多項式定理之公項)

$\frac{n!}{r!s!t!}a^rb^sc^t\cdots\cdots$

但 $r+s+t+\cdots\cdots=n$

(指數式定理)

$a^x=1+x\lambda+\frac{x^2\lambda^2}{2!}$

$+\frac{x^3\lambda^3}{3!}+\cdots\cdots$

但 $a=e^\lambda$

$\therefore\ e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}$

$+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$

$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots$

$=2.71828\cdots\cdots$

(對 數)

$\log_a(xy)=\log_ax+\log_ay$

$\log_a\frac{x}{y}=\log_ax-\log_ay$

$\log_ax^m=m\log_ax$

$\log_bx=\log_ax\times\log_ba$

(對數級數)

$\log_e(1+y)=y-\frac{y^2}{2}$

$+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\cdots\cdots$

(複利及年金)

$A=P(1+r)^n$

$P=A(1+r)^{-n}$

年金 $=\frac{A}{r}\{1-(1+r)^{-n}\}$

目次

第一編	定義	1
第二編	正量及負量	10
	加法	11
	減法	16
	括弧	21
第三編	乘法	24
第四編	除法	45
	雜題 I.	56
第五編	一次方程式	60
第六編	一次方程式之問題	68
第七編	一次之聯立方程式	77
第八編	一次聯立方程式之問題	90
	雜題 II.	96
第九編	因數	100
第十編	最高公因數	118
第十一編	最低公倍數	129
第十二編	分數	135
第十三編	分數方程式	165
	雜題 III.	172
第十四編	二次方程式	177
第十五編	三次以上之方程式	203
第十六編	二次之聯立方程式	210
第十七編	二次方程式之問題	224
	雜題 IV.	230
	方程式之雜題	235
第十八編	方乘及方根	243
	平方根	249
第十九編	分指數及負指數	256

第二十編 根數 ……235
第二十一編 比……274
比例 ……278
變數法 ……283
雜題V. ……291
第二十二編 等差級數……296
第二十三編 等比級數……307
第二十四編 調和級數及簡單之級數……319
雜題VI. ……329
第二十五編 排列及組合 ……335
第二十六編 二項式定理 ……345
第二十七編 對數 ……366
常用對數……371
複利及年金 ……374
第二十八編 雜定理及雜例 ……379
立方根 ……390
問題之答……399
附錄 希臘文字之發音……454

第一編

定義

1. 代數學 代數學者論數理之學科也.

算術以數字顯數.故一數字祇有一值.其意義以一種爲限.如1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. 其意義祇爲一,二,三,四,五,六,七,八,九.

代數學以數字及文字顯數.數字之值.與算術同.文字之值.可爲無論如何之數.

代數學所用之文字.爲小羅馬文字.卽

a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z 二十六字母. 然因便利起見.恆書其草體.卽

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z

又有時兼用大羅馬文字及小希臘字.

大羅馬文字.如 A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

小希臘文字.如 $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \zeta\ \eta\ \theta\ \iota\ \kappa\ \lambda\ \mu\ \nu\ \xi\ o\ \pi\ \rho\ \sigma\ \tau\ \upsilon\ \phi\ \chi\ \psi\ \omega$(此等字之發音.載於附錄).然常用者不過三十餘字.卽

$a,\ b,\ c\cdots\cdots\cdots l,\ m,\ n\cdots\cdots\cdots p,\ q,\ r\cdots\cdots\cdots x,\ y,\ z.$

A, B, C………L, M, N……… P, Q, R………X, Y, Z.

α, β, γ………θ, ι, μ………π, ρ, σ………χ, ψ, ω.

據算術理.凡二數相乘.無論用如何之次第.其結果恆等.然此二數.若以二文字代之.則上所述之性質.其式爲 $a\times b=b\times a$. 理尤易曉.故代數學較算術簡.

代數學之文字.雖爲任意之値.然在一演式中.其所代之數恆等. 如 a 加 a. 無論 a 爲如何之數.其數恆爲 a 之二倍.

2. 符號 代數學所用之符號.與算術所用之符號同.惟有時宜將算術之符號擴張其義者.則臨時說明.玆不先及.

3. 加號 卽 +〔讀爲「不拉式」(plus) 或讀爲加〕置於數字或文字所代之數左.示加此數於左邊之數內.

如 $6+3$, 加號在 3 左.故示將 3 加入左邊之 6 內.約言之.卽加 3 於 6.又 $6+3+2$,卽以 3 加於 6.其結果爲 $3+6$,再以 2 加於 $3+6$. 約言之.卽加 2 於其結果.

同理.$a+b$,卽以 a 所顯之數.加於 b 所顯之數.約言之.卽加 b 於 a.

4. 減號 卽 −〔讀爲「買那式」(minus) 或讀爲減〕置於某數左.示由左邊之數內減去某數.

如 $6-3$,示由 6 內減去 3,同理, $a-b$, 示由 a 內減去 b.又 $a-b+c$. 示由 a 內減去 b.更加 c 於其結果.

凡加減之運算.皆始於左而次及於右.

5. 乘號 卽 ×〔讀爲「因都」(into) 或讀爲乘〕置於兩數之間.示以右數乘左數.

如 6×3,示以 3 乘 6. 同理. $a\times b$,示以 b 乘 a. 又 $a\times b\times c$,

示以b乘a,更以c乘其結果.

乘法之符號.其在二文字間或數字與文字間者.往往省其號而並記之.又有以點代之者.

如ab或$a\cdot b$.其意義與$a\times b$同.又$2abc$或$2\cdot a\cdot b\cdot c$.其意義與$2\times a\times b\times c$同.

6. 除號　卽 $\div$〔讀爲「桿」(by)或讀被……除〕置於兩數之間.示左數被右數除.

如 $6\div 3$,示6被3除.同理.$a\div b$,示a被b除.又$a\div b\times c$,示a被b除.更以c乘其結果.

除法之演算.恆在被除數下畫一橫線.更書除數於其下.以顯之.

如$a\div b$.可代以$\frac{a}{b}$.

乘除之運算.亦始於左而次及於右.

7. 積及因數　諸數相乘.其結果謂之連乘積.或單稱爲積.此諸數謂之積之因數.

如$2abc$爲積.$2, a, b, c$,各爲積之因數.

8. 係數　分積之因數爲二項.其中之一項.各爲他一項之係數.

如$3abx$, 3爲abx之係數.又$3a$爲bx之係數.又$3ab$爲x之係數.

又積之因數中之數字.稱爲他諸因數之數字係數.如$3abx$, 3乃abx之數字係數.

問　題　I.

求以下各式之數值:

1. $7+6+4$. **2**. $5-3+4$. **3**. $11+7-12-6$.

4. $7\times6\times4$. **5**. $5\div3\times4$. **6** $11\times7\div12\div6$.

設 $a=1, b=2, c=3, d=4$. 求次之各式之數值.

7. $c-b$. **8**. $d-a$.

9. $7a-3b$. **10**. $10b-6c$.

11. $5a-2b+6c-4d$. **12**. $13a-6b+7c-5d$.

13. $18b-3c-4d+9a$. **14**. $20ab-3cd$.

15. $4da-2bc$. **16**. $abc+bcd+cda+dab$.

設 $a=6, b=2, c=5, d=0$. 求以下各式之數值.

17. $3ac+2bc+ca$. **18**. $7ad+9bc-3ca$.

19. $a\times c\div b$. **20**. $a\div c\times b$.

21. $2c\div a\div b$. **22**. $ad\div bc$.

23. 有 $3x, 4bx, 5bcx, 16abcx$. 問 x 之係數如何.

24. 有 $4xy, 5axy, 7abxy, 19abcxy$. 問 xy 之係數如何.又數字係數如何.

9. **乘方** 凡積由一因數幾次自乘而成者.不拘其次數如何.均謂之此數之乘方.或單謂之方.

如 aa 為 a 之2乘方.aaa 為 a 之3乘方. $aaaa$ 為 a 之4乘方.餘倣此.

又 aa 及 aaa 附以特名.即 aa 為 a 之平方.aaa 為 a 之立方.

10. **指數** aa, aaa 等.更有簡略之記法如次.即 aa 記為 a^2, aaa 記為 a^3, $aaaa$ 記為 a^4, $aaaa\cdots\cdots$ 記為 a (但 $aaaa\cdots\cdots$ 為因數 a 自乘 n 次之乘方). a 之右肩上所記之小數字或小文字.即示 a 之自乘之次數.

如 $aabb$ 記為 a^3b^2. 他準此.

小數字及小文字.乃指出因數次數之記號.故謂之指數.

如a^n乃指出因數a自乘n次（即a之n乘方）.故n為指數.

因數a為1次者.不必記為a^1.但記為a.

11. 方根　某數之平方等於a.則某數謂之a之平方根.用記號$\sqrt[2]{a}$記之.然$\sqrt[2]{a}$常略為$\sqrt{a}$而^{2}字從省.

如2之平方等於4.故2為$\sqrt{4}$.

某數之立方等於a.則某數謂之a之立方根.用記號$\sqrt[3]{a}$記之.

如$3=\sqrt[3]{27}$因$3^3=27$故.

括而言之.某數之n方（但n為任意之整數）等於任意之數a.則某數謂之a之n乘根.用$\sqrt[n]{a}$顯之.

符號$\surd$原由臘丁文Radix之首字r變化而成故謂之根號.

不能詳求之根.謂之根數.或謂之無理數.

如$\sqrt{7}$及$\sqrt[3]{4}$.即根數.或無理數.

如根數$\sqrt{7}$.依算術求平方之法.雖能求其略近值.然在代數學內.則無庸求其略近值.何則.因以$\sqrt{7}$自乘即為7故也.

12. 等號及不等號　符號$=$〔讀為「伊苛勒」(equal)或讀為等於〕置於兩數之間.示兩數相等.

如$5+7=12$,即5加7等於12.

符號$>$置於兩數之間.示左數較右數大.

如$a>b$即a較b大.

符號$<$置於兩數之間.示左數較右數小.

如 $a<b$ 卽 a 較 b 小.

又符號 ∵ 爲何則或因字之略號.

符號 ∴ 爲故字或所以之略號.

13. 代數式及項 以代數記號（卽文字,數字及符號）集合者謂之代數式,或單謂之式.

代數式中以 + 或 − 連結之各部分,謂之項.

如 $2a-3bx+5cy^2$ 爲 $2a, -3bx$, 及 $5cy^2$ 三項結合之代數式.

14. 同類項 兩項中所含之文字彼此相同,且各文字之乘方相等,此二項謂之同類項.

如 $3ab^2x^3$ 與 $5ab^2x^3$ 爲同類項.

又 $3a^2bx^3$ 與 $7a^2b^2x^3$, 其二項中所含之文字,雖彼此相同,然非同類項,何則,因二項中各文字之乘方,彼此不相同故也.

15. 單項式及多項式 僅含一項之式,謂之單項式,含二項以上之式,謂之多項式.

如 $5ab^3cx$ 爲單項式. $a+b$ 爲多項式.

由二項成之式,每謂之二項式,由三項成之式,每謂之三項式.

單項式及多項式,有時稱爲單式及複式.

16. 括弧 取一代數式爲一項則以括弧括之,而演算時,須先計括弧內諸項,然後計括弧外諸項.

括弧有（ ）,{ }, [ ] 三種.

如 $(a+b)c$ 爲加 b 於 a, 更以 c 乘其結果. 又 $(a+b)^3$ 爲加 b 於 a, 而作其結果之立方.

又 $(a+2b)(c+3d)$ 爲加 $2b$ 於 a, 並加 $3d$ 於 c, 而以第二

之結果,乘第一之結果.

有時在所括之數上,畫一線以代括弧,此線名爲括線.

如 $a+\overline{b-c}$ 與 $a+(b-c)$ 同,又 $\sqrt{\overline{a+b}}$ 與 $\sqrt{}(a+b)$ 同.若無括弧及括線,則根號單屬於緊接其號之第一數.

如 $\sqrt{}2a$ 爲 a, 乘 2 之平方根而 $\sqrt{2a}$ 則爲 $2a$ 之平方根.

又 $\sqrt{}a+x$ 爲加 x 於 a 之平方根.而 $\sqrt{a+x}$ 則爲 a 與 x 之和之平方根.

分數中在分子與分母間之線,其用與括線同.何則.因 $\frac{a+b}{12}$ 與 $\frac{1}{12}(a+b)$ 同故.

〔注意〕一代數式之各項,與在一括弧內之各項同,故以全體相加減,爲學者所當注意.

如 $a+bc-d\div e+f$ 式,在加法前當先以 c 乘 b. 在減法前,當先以 e 除 d. 故此式恰如 $a+(bc)-(d\div e)+f$

設 $a=4,\ b=3,\ c=1,\ d=0$. 求次之四式之數值.

(1) $2a-bc+cd-6b\div a+\frac{2c}{a}$, (2) $(a+b)^3(2b-3c)^2$,

(3) $a^b+b^c+c^a$, (4) $\sqrt[3]{\{7a^3+(b+c)^3+d^3\}}$.

此演算如次.

$$(1)\quad 2a-bc+cd-6b\div a+\frac{2c}{a}$$

$$=2\times4-3\times1+1\times0-6\times3\div4+\frac{2\times1}{4}$$

$$=8-3+0-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

$$(2)\quad (a+b)^3(2b-3c)^2=(4+3)^3(2\times3-3\times1)^2=7^3\times3^2$$

$$=343\times9=3087.$$

(3) $a^b+b^c+c^a=4^3+3^1+1^4=64+3+1=68.$

(4) $\sqrt[3]{\{7a^3+(b+c)^3+d^3\}}=\sqrt[3]{\{7\times4^3+4^3+0^3\}}$
$=\sqrt[3]{\{7\times64+64+0\}}=\sqrt[3]{(448+64)}$
$=\sqrt[3]{512}=8$

問 題 II.

1. 書 2^4, 3^3, 4^3, 4^4, $\sqrt{64}$, $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[4]{625}$, $\sqrt[5]{32}$ 之數值.

若 $a=2, b=3, c=4, d=5$. 求次之六式之數量.

2. a^2+b^2. **3.** c^2+d^2. **4.** $6a^2-2b^2$.

5. $4b^2-c^2+5d^2$. **6.** $a^2b^2+c^2d^2$. **7.** $ab^2c^2-a^2bc$.

若 $a=2, b=3, c=4, d=5$. 求次之五式之數值.

8. $\dfrac{d^3}{5}-\dfrac{c^3}{3}+\dfrac{a^2b^2}{27}$. **9.** $\dfrac{1}{9}bc+\dfrac{1}{8}ca+\dfrac{1}{7}ab$.

10. $10c^3d^3-16a^2b^2$. **11.** $\dfrac{1}{3}a^2b^2c^3-\dfrac{1}{9}ab^2c^2d$.

12. $\dfrac{ab^3c^4}{16}-\dfrac{a^4bc^2d}{20}$.

若 $a=5, b=3, c=1, d=0$. 求次之五式之數值.

13. $(2a+5b)(3b-6c)$. **14.** $(a+2b)(c+2d)$.

15. $(3a-4b)^3-2(3b-6c)^2+2(ad+bc)^2$.

16. $4a^3+4b^3+4c^3-3(b+c)(c+a)(a+b)$.

17. $5(a+c)^3(b-c)^2-\dfrac{1}{25}(a-2d)^3(b+3c)^2$.

18. 若 $x=2$ 又 $x=3$. 證 x^2-5x+6 等於零.

19. 若 $x=2$ 又 $x=3$ 又 $x=\frac{1}{2}$. 證 $2x^3-11x^2+17x-6$ 等於 0.

若 $a=5, b=4, c=\dfrac{1}{2}$. 求次之七式之數值.

20. $\sqrt{a^2-b^2}$.　　21. $\sqrt{5a}$.

22. $\sqrt{2bc+3a}$.　　23. $\sqrt[3]{bc+a^2}$.

24. $\sqrt[3]{(2a^2+b^2-8c^2)}$.　　25. $\sqrt[3]{\left(4a^2-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2-1\right)}$.

26. $\sqrt{(a+b)}\sqrt[3]{(3ab+2bc)}$.

27. 若 $x=5, y=8, a=6, b=4$.

求 $(a+b)^2(x+y)^2-4(ax+by)(bx+ay)$ 之數值.

28. 若 $a=9, b=12, c=15, s=18$. 問次式之數值幾何.

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

29. 若 $a=9, b=12, c=15$. 及 $2s=a+b+c$.

求 $\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$ 之數值.

30. 若 $a=8, b=5, c=3$. 問次式之數值幾何.

$$\sqrt{\{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4\}}.$$

31. (1) $a=6, b=3$, (2) $a=9, b=4$, (3) $a=12, b=7$.

證 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

32. (1) $a=3, b=2$, (2) $a=6, b=3$, (3) $a=5, b=2$.

證 a^3-b^3, $(a-b)(a^2+ab+b^2)$, $(a-b)^3+3ab(a-b)$, 及 $(a+b)^3-3ab(a+b)-2b^3$ 皆互相等.

第二編

正量及負量

17. 名數量 無論如何之量.皆以同類單位之倍數計算.其計算時.恆有種種區別.如計算金額有收入.支出.又有利益.損失.如計算運動.一直線上.有相反對之二向.又如計算時刻.有過去未來.又有特別之時前或時後.諸如此類.不遑枚舉.故凡量必有相反對之二種類.

18. 數之性質 凡名數量.無論爲如何種類.+4,俱顯其量增四單位.又 −4,俱顯其量減四單位.

如計算人之財産.則 +4,爲其財産增四圓.卽顯其人之所有金四圓.或貸金四圓.又 −4,爲其財産減四圓.卽顯其人之負債金四圓.反之.如計算人之負債.則 +4,爲增其負債.卽顯其人之借債金四圓.又 −4,爲減其負債.卽顯其人之所有金四圓.或貸金四圓.

又計算人之利益.則 +4,爲增其全利益.卽顯四單位之利益.又 −4,爲減其全利益.卽顯四單位之損失.反之.計算人之損失.則 +4,顯四單位之損失.又 −4,顯四單位之利益.

又由特別之點測方向之距離.則 +4,爲顯正方向四單位之距離.又 −4,顯反對方向四單位之距離.

19. 反對之種類 依以上諸例.+及−號.原用以區別量之正反對之種類者.卽 +4,無論顯如何之量.而

其 -4, 必與之相反對.故在代數學內.＋及－號.有全然相異之二意義.即一爲原來示加法,減法,演算之符號.一爲區別量之正反對之種類之符號是也.

20. 正符號及負符號　量前有＋符號者.謂之正量.量前有－符號者.謂之負量.又＋謂之正符號.－謂之負符號.

21. 性質之號　＋及－符號,置於量前,以示量之性質時.每謂之性質之符號.

又＋爲性質之符號時.往往從省.當某項之前無＋及－時.則＋從省.

〔注意〕代數學所用之符號雖多.然符號之名稱.多指＋及－二符號言.如言某量之符號.即指在某量前之＋或－.又言變某式之符號.即變某代數式中在各項前之符號＋爲－,－爲＋.

22. 絕對值　量之大小與符號＋及－無關係者.謂之絕對值.

如昇 4 尺,降四尺.若不論上下之性質.其絕對值相等.

同理 $+4$ 與 -4, 若不論其符號如何.其絕對值亦相等.

加法

23. 定義　求二量或諸量集合之結果.其法謂之加法.其結果謂之和.

正量生加.負量生減.故加一正量,則加其絕對值.加一負量,則減其絕對值.

如以 $+4$ 加於 $+6$　　得　　$+6+4=+10$

而以 -4 加於 $+6$, 則得　　$+6-4=+2$

同理以 $+b$ 加於 a　　得　　$a+b$

　　以 $-b$ 加於 a　　得　　$a-b$

即　$a+(+b)=a+b$,　　$a+(-b)=a-b$.

故任意之項相加,有次之法則.

〔法則〕 加任意之項,其符號不變,惟記此項於被加式之次.

〔例〕 如有人向前進65步,又由此向前進-37步(卽退後37步). 問此人距原處幾步?

所求之步數乃代數學所謂二次步數之和,因欲得所求之和故加 -37 於65,而此演算,以 $65+(-37)$ 顯之.由上文,得 $65-37=28$.

當 a 及 b 已有數時. $a+b$ 及 $a-b$ 之數值,自能求出,然必先知 a 及 b 之數,然後能求 $a+b$ 及 $a-b$ 之數,故 $a+b$ 與 $a-b$,不能先求,凡在代數學內,謂加 $+b$ 於 a,則單書爲 $a+b$,謂加 $-b$ 於 a,則單書爲 $a-b$,於是加法遂完全.

24. 負數之結果　如 b 較 a 大,則 $a-b$ 不能爲算術上之運算,何則,以無論如何之數,俱不能由較此數小之數減之故也.

設 $a=3$, $b=5$, 則 $a-b$ 爲 $3-5$. 而3原不能減去5,然減5與減3又減2同,故 $3-5=3-3-2=-2$. 此 -2 有二種之意義. (一)爲由他代數式中減去2之式. (二)爲表反對性質之二單位,然 -2 爲演算最後所得之結果,實屬於第二種.

然有時依量之種類,以得負結果爲無意義.

如計算邑之人口.若得負結果.則與人口之理不合.又得分數之結果亦然.

問題 III.

求次之各數之和

1. 4 與 -3　**2.** 3 與 -2　**3.** 6 與 -3

4. 7 與 -8　**5.** 3 與 -11　**6.** -3 與 -9

7. $6,-2$ 與 7　**8.** $-3,-2$ 與 5　**9.** $2a$ 與 $-3b$

10. $-3a$ 與 $-2b$　**11.** $5a,-6b$ 與 $-2c$　**12.** $-3a,-4b,$ 與 $7c.$

25. 法則　依加法之性質.二以上之代數式不關於正負如何.故知加法無論用如何之次第相加.其結果恆等.

如計算人之家產其家產之各種（負債可視爲負家產）.無論用如何之次第記之.其家產恆等.

又以代數式爲一全體加之.與區分各項各別加之.相同.而加任意之項.惟附記於式之次.其符號不變.

故得次之法則.

〔法則〕加二以上之代數式.惟將式之各項依次加之.其符號不變.

如 $a+b$ 與 $c+d$ 之和爲 $a+b+c+d.$

又 $a-b+c$ 與 $d-e+f$ 之和爲 $a-b+c+d-e+f.$

26. 運算　所加諸項中有同類項.則加法之演算終.當集爲一項.得三例如次.

〔第壹例〕諸同類項之符號相同.則其和與諸項同符號.且與諸項爲同類項.而其係數.爲諸項數字係數之算術和.

如以 $2a$ 與 $5a$ 次第相加,無論 a 爲如何之數,俱與加 $7a$ 同.

又以 $2ab$ 與 $5ab$ 次第相減,與減 $7ab$ 同,卽

$$-2ab-5ab=-7ab$$

〔第貳例〕兩同類項之符號相異,則其和與兩項爲同類項,其係數等於兩項數字係數之算術差,而其符號,與大項之符號同.

如 $\quad +5a-3a=+3a-3a+2a=+2a$

又 $\quad +3ab-5ab=+3ab-3ab-2ab=-2ab$

〔第叁例〕若爲正負種種之同類項,則將其中之正項悉依第壹例集爲一項,又負項亦悉依第壹例集爲一項,更由第貳例,集其所集得之兩項,則得所求之和.

如是,有數同類項均可集爲一項.

如 $2a+3b$ 與 $a-5b$ 相加,

其和爲 $2a+3b+a-5b$, 而此各項,可無論用如何之次第,故交換之,得 $2a+a+3b-5b$ 集其同類項,得

$$3a-2b$$

又如求 $6a^2-6ab+4b^2$, $2b^2-ab-a^2$, $5ab-9b^2-4a^2$ 之和.

其和爲 $6a^2-6ab+4b^2+2b^2-ab-a^2+5ab-9b^2-4a^2$
$$=6a^2-a^2-4a^2-6ab-ab+5ab+4b^2+2b^2-9b^2$$

玆將 $6a^2,-a^2,-4a^2$ 三項,以心算集之,得 a^2. 同樣集他二種之同類項,得 $-2ab$, $-3b^2$.

故所求之和爲 $a^2-2ab-3b^2$.

27. 初學運算法 初學者或將各種之同類項列爲縱行加之,亦可.

即如前例.可用下式記之.但 $2b^2$ 與 $5ab$ 之前無符號故須置＋號.與各種之同類項,以心算加之.

$$\begin{array}{r} 6a^2-6ab+4b^2 \\ -\ a^2-\ ab+2b^2 \\ -4a^2+5ab-9b^2 \\ \hline a^2-2ab-3b^2 \end{array}$$

問題 IV.

將次之各式.集其同類項.而單簡之〔1至6〕.

1. $2a+b+3c+2b+3a+2c+5a+c$.

2. $6a-3b+2c-4a-3c+2b$.

3. $5a^2-3a+6-4a^2+6a+3$.

4. $7a^3-4a+9-3a^2+2a+7-3a^3-16$.

5. $5a^3-4a^2b+3ab^2-5a^3-4a^2b-3b^3$.

6. $3a^2+6ab-4b^2-2a^2-4ab+3b^2-a^2-2ab+b^2$.

加次之各式〔7至28〕.

7. $a+b$ 與 $a-b$.　**8.** $2x-y$ 與 $2x+y$.

9. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$ 與 $-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$.　**10.** $\frac{1}{3}a+\frac{4}{3}b$ 與 $\frac{2}{3}b-\frac{1}{3}a$.

11. a^2-a 與 a^3+a.

12. $a+a^2+4a^3$ 與 $2a^3-a^2-4a$.

13. m^2+mn+n^2 與 m^2-mn-n^2.

14. $3p^2+5pq-6q^2$ 與 $5q^2-4pq-3p^2$.

15. $2a^2-2ab+b^2$ 與 $a^2-2ab-\frac{3}{2}b^2$.

16. $2a+b-3c$, $2b+c-3a$ 與 $2c+a-3b$.

17. $4a-3b-c$, $4b-3c-a$ 與 $4c-3a-b$.

18. $4a^2-3ab+b^2$, $4ab-3b^2+a^2$ 與 $4b^2-3a^2+ab$.

19. $a-\frac{1}{3}b+\frac{1}{4}c,\ b-\frac{1}{3}c+\frac{1}{4}a$ 與 $c-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b.$

20. $4x-2y+1,\ -3x+2-y$ 與 $x+3y-3.$

21. $-4a-b+2,\ 2+8a-5b$ 與 $-a-4b-2.$

22. $x^3-2x^2y-2xy^2,\ x^2y-3xy^2-y^3$ 與 $3xy^2-2y^3-x^3.$

23. $a^3+4b^3-5c^3+3abc,\ b^3+4c^3-5a^3+6abc$ 與
$c^3+4a^3-5b^3-9abc.$

24. $5a^3-2a^2b+9ab^2+17b^3,\ -2a^3+5a^2b-4ab^2-12b^3,$
$b^3-4ab^2-5a^2b-a^3$ 與 $2a^2b-2a^3-6b^3-ab^2.$

25. $\frac{2}{3}a^3-\frac{4}{5}a^2b+3b^3,\ a^3-\frac{2}{3}ab^2-\frac{3}{5}b^3$ 與 $\frac{1}{3}a^2b-\frac{2}{3}ab^2-\frac{1}{4}b^3.$

26. $3x^3-4x+5,\ 2x^2-6x+7,\ 6x^3-2x^2-2x$ 與 $3+8x-4x^3.$

27. $x^3-3ax^2+5a^2x-a^3,\ 2x^3+4ax^2-6a^2x,\ 6ax^2-3a^2x+a^3$
與 $-2x^3+4a^2x-5a^3.$

28. $3x^2+y^2-3yz-z^2,\ 2xy-3y^2+3yz$ 與
$-4x^2-2xy+y^2+z^2.$

29. 若 $x=b+2c-3a,\ y=c+2a-3b,\ z=a+2b-3c.$
證 $x+y+z=0.$

30. 若 $a=5x-3y-2z,\ b=5y-3z-2x,\ c=5z-3x-2y.$
證 $a+b+c=0.$

減 法

28. 定 義 減法者,與加法反對之運算也.故減正量則生減,減負量則生加.由是減一正量,則減其絕對值.減一負量,則加其絕對值.

故由 $+10$ 減 $+4$, 當減去四單位.

卽 $$+10-4=6$$

又由 $+10$ 減 -4, 當增加四單位.

即　　$+10+4=+14$

由是　　$+10-(+4)=+10-4=+6$

又　　$+10-(-4)=+10+4=+14$

同樣　　$+a-(+b)=+a-b$

$+a-(-b)=+a+b$

故減任意之項,有次之法則.

〔法則〕減任意之項,則變其符號,附記於被減式之次.

29. 證明　減法之法則,其證明如次.

減法者,與加法反對之運算也,故以同量同時相加減,原量無變更,即 a 與 $a-b+b$ 同.而由 $a-b+b$ 減 $+b$, 餘 $a-b$. 故由 a 減 $+b$, 餘 $a-b$.

又由 $a+b-b$ 減 $-b$, 餘 $a+b$. 故由 a 減 $-b$, 餘 $a+b$.

即　　$a-(-b)=a+b$

〔例〕(1) 由 -4 減 3　　(2) 由 3 減 -4

(3) 由 4 減 -6　　(4) 由 $-b$ 減 a

(5) 由 $-b$ 減 $-a$

(1) $-4-(+3)=-4-3=-7$

(2) $3-(-4)=3+4=7$　　(3) $4-(-6)=3+6=10$

(4) $-b-(+a)=-b-a$　　(5) $-b-(-a)=-b+a$

30. 法則　減法者,與加法反對之運算也,而以任意之代數式為一全體加之,與區分各項各別加之相同,故以一代數式為一全體減之,與依次減其各項同,因得次之法則.

〔法則〕由他之任意之代數式減任意之代數式,則變其減式之符號,依次附記之.

如由 $3a-4b+c$ 減 $2a+b-4c$,其結果為

$$3a-4b+c-2a-b+4c=3a-2a-4b-b+c+4c$$
$$=a-5b+5c$$

31. 運算 有時將減式置於被減式下.並將各同類項列成豎線.而以心算變下式之符號.然後組合其同類項.

如前款之例.其記法如次.

$$\begin{array}{r} 3a-4b+c \\ \underline{2a+b-4c} \\ a-5b+5c \end{array}$$

但此之結果諸項.原為以心算合 $3a$ 與 $-2a$, $-4b$ 與 $+b$, $+c$ 與 $-4c$ 而得者.

更舉其例如次.

由 $4a^3+a^2b-ab^2$ 減 $3a^3-4a^2b+2ab^2-b^3$

$$\begin{array}{r} 4a^3+a^2b-ab^2 \\ \underline{3a^3-4a^2b+2ab^2-b^3} \\ a^3+5a^2b-3ab^2+b^3 \end{array}$$

此結果之諸項.為合 $4a^3$ 與 $-3a^3$, 與 a^2b 與 $+4a^2b$, $-ab^2$ 與 $-2ab^2$, 0 與 $+b^3$ 而得者.

32. 正量或負量 以上顯量之文字原以正數值為限.然永存此制限.實不便利.故以後非言明以正量為限者.則各文字.可為無論正負之任意數值.

任意之文字.既可顯正量或負量.則前有 + 符號之項.其實不必為正量.前有 − 符號之項.其實不必為負量.

雖然.凡前有 + 符號者.仍稱為正項.凡前有 − 符號者.仍稱為負項.何則.蓋項之數值.雖不能定其為正.或

爲負.而由外形上觀之.其項固爲正項或爲負項故也.

33. 任意量之加減法 今加項或減項.其實不必爲正或爲負.則能爲加減之演算與否.不可不察.

設 b 爲正量.證23及28款之結果.即

$+(+b)=+b,\ +(-b)=-b,\ -(+b)=-b,\ -(-b)=+b.$

而 b 爲負量.此定則亦合理.

今設 b 爲負量等於 $-c$.但 c 爲正.則

$$+b=+(-c)=-c,\qquad -b=-(-c)=+c$$

何則.以 c 爲正故也.

由是.以 $-c$ 代 $+b$.以 $+c$ 代 $-b$.得

$+(-c)=-c,\ +(+c)=+c,\ -(-c)=+c,\ -(+c)=-c.$

而此四式無論 c 爲如何之正數值.俱合理.即 b 爲無論如何之負數值.俱合理.故上所述之定則合理.於是得次之定則.

項.無論爲正量或負量.可用全然相同之方法相加減.

34. 代數差 任意二量 a 與 b 之代數差云者.由 a 減 b 所得之結果也.

如 5 與 4 之代數差爲 $5-4=1$.

又 4 與 5 之代數差爲 $4-5=-1$.

二量之代數差.以二量之次序爲準.與算術差(即由大數減小數者)不同.

a 減 b 之算術差以記號 $a\sim b$ 顯之.

〔定義〕 a 與 b 之代數差 $a-b$ 爲正.則 a 較 b 大.

依此定義.則 1, 2, 3, 4 等數.次第大1. $-1, -2, -3, -4$ 等數.次第小1. 又 7. 5. 1. 0. -5, -7, 其大遞降.

問 題 V.

求次之各二式之差(1至18).

1. $a+b$ 與 $a-b$.　　**2.** $3a-2b$ 與 $2a-3b$.

3. $2x-y$ 與 $2x+y$.　　**4.** $\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y$ 與 $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y$.

5. $4x-3x^2$ 與 $3x-4x^2$.　　**6.** $1-2x^2$ 與 x^2-2.

7. $2c+4b-3a$ 與 $4a-2b+3c$.

8. $2b^2+4ab-3a^2$ 與 $4a^2-2ab+3b^2$.

9. x^2+6x-7 與 $3x^2-4x+2$.

10. $3x^3-2x+5$ 與 $3x^3-2x^2+5$.

11. $b-\frac{1}{2}c-\frac{1}{3}a$ 與 $a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{3}c$.

12. $\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{2}x^2$ 與 $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{2}y^2$.

13. $a+2b$ 與 $a-2b$.　　**14.** $3a-7b$ 與 $7a-3b$.

15. a^2+ab+b^2 與 a^2-ab+b^2.

16. x^2-3xy 與 $3x^2-4xy$.

17. $3x^3+5x^2y+4xy^2$ 與 $4x^2y+6xy^2+7y^3$.

18. $2x^3-7x^2y+9xy^2-4y^3$ 與 $4x^3-x^2y+9xy^2-4y^3$.

19. $2a-3b$ 加如何之式,則其和爲 $4a-6b$.

20. a^2+b^2 加如何之式,則其和爲 $2a^2-ab$.

21. $5ab-2bc+3ca$ 加如何之式,則其和爲 $7ab+2ca$.

22. $a^2+3b^2+2c^2$ 加如何之式,則其和爲 b^2-3a^2.

23. 由 $3a-4b$ 減 $a+7b$, $-4a-6b$ 與 $6a-5b$ 之和.

24. 由 $3x^2-2x+7$ 減 x^2-x+9, $2x^2+7x-6$ 及 $3x^2-4x-5$ 之和.

25. 以 $a^2-4ab-3b^2$, $ab-4b^2-3a^2$ 及 b^2-4a^2-3ab 之和由 $2a^2+2b^2+2c^2$ 減之.

括　弧

35. 加號括弧解法　欲示加一任意代數式之總體.則以此代數式置於括弧內,且置＋符號於括弧左.然依加法理,加任意之代數式,其符號不變,惟附記於被加式之次.於是括弧之前置有＋符號,其括弧可隨時解去.

如　$+(2a-b+c)=2a-b+c$

反之,一式中之若干項,可用前有＋號之括弧括之.

如　$a-2b+c+2d+3e+f$

可書爲　$a+(-2b+c)+(2d-3e+f)$

或　$a-2b+(c+2d)+(-3e+f)$

括弧內第一項之符號爲＋,則依前例,概從省.

36. 減號括弧解法　欲示減一代數式之總體,則以此代數式置於括弧內,且置－符號於括弧左.然依減法理,減任意之代數式,則變其符號,依次記於被減式之次.如是括弧前置有－符號,必悉變括弧內各項之符號,其括弧始可解去.

如　$-(2a-b+c)=-2a+b-c$

反之,一式中之各項,必悉變各項之符號,始可以前有－號之括弧括之.

如　$a-2b+c+2d-3e-f$

$$a-(2b-c)-(-2d+3e+f)$$

37. 複雜括弧解法　有時括弧之內,又有括弧,則此諸括弧須用種種之形,以免混雜.

如　$a-[b+\{c-(d+e)\}]$

乃示加{ }括弧內之全量於b,然後由a減之.而{ }括弧內之量.原d與e相加.而取其和以減c.

如括弧有數雙.可依35及36款.每次解其一雙.至解盡爲止.而初學者以由內面依次解之爲佳.

如 $a-[b+\{c-(d+e)\}]=a-[b+\{c-d-e\}]$

$=a-[b+c-d-e]=a-b-c+d+e$

問 題 VI.

解以下各式之括弧.並集其同類項而單簡之.

1. $(a+b)-(a-b)$.

2. $a-b-(a+b)$.

3. $a-(b+c)+(b-c-a)$.

4. $3x-(y-2x)+(z+y-5x)$.

5. $x-\{y-(z-x)\}$.

6. $a-[a-\{a-(2a-a)\}]$.

7. $1-[2-\{3-(4-5)\}]$.

8. $a+b-[a-b+\{a+b-(a-b)\}]$.

9. $5-[4+\{5-(4+\overline{5-4})\}]$.

10. $x-[y-\{z-(x-\overline{y-z})\}]$.

11. $3x-\{2y+5z-\overline{3x+y}\}$.

12. $\{2x-(5y-3z+7)\}-[4+\{x-(3y+2z+5)\}]$.

13. $[2a-\{3b+(4c-\overline{3b+2a})\}]$.

14. $x-(y-z)+\{2z-\overline{3y-5x}\}$.

15. $a-2b-\{3a-(b-c)-5c\}$.

16. $a-[3b+\{3c-(d-b)+a\}-2a]$.

17. $3a-[2b-\{4b-12a-(4b-8c)\}-(6b-12c)]$.

18. $\{2x-(3y-7z)+(3x-2y+9z)\}$
$$-\{(y-5z)-(3x-y-2z)+8z\}.$$

19. $a^2-(3ab-4b^2)-(2a^2-3ab+6b^2)$
$$-\{5b^2-(3ab-\overline{7a^2-b^2})\}.$$

20. $(m^2-n^2)-\{8mn-(5n^2-m^2)\}$
$$+[n^2-\{3mn-(5m^2-6n^2)\}+8mn]$$

第三編

乘法

38. 定義 在算術中.乘法之定義如次.
曰.求若干個某數之和(卽以一數爲他數所含諸單位之數).其算法謂之乘法.

如以 4 乘 5.乃求四個五之和(卽以五爲四之單位數).設乘數爲分數.則乘法之定義不得不變更.因原定義祇能乘整數故也.故更得乘法之定義如次.

〔定義〕以第二數乘第一數.則以第一數爲第二數之單位.

如 4爲 $1+1+1+1$

$\therefore$ 5×4爲 $5+5+5+5$

又以$\frac{3}{4}$乘$\frac{5}{7}$,則先分 1爲四等分.連取三次得$\frac{3}{4}$,再以$\frac{5}{7}$代此式中之一.卽分$\frac{5}{7}$爲四等分.得$\frac{5}{7\times4}$,連取三次.得$\frac{5\times3}{7\times4}$.

又依同理$(-5)\times4=(-5)+(-5)+(-5)+(-5)$

$$=-5-5-5-5=-20.$$

依上之定義.則乘負數亦無困難.

設以 -5 乘 4, 如下.

減 5 一次.與減 1 五次同.

故 $-5=-1-1-1-1-1$

$\therefore$ $4\times(-5)=-4-4-4-4-4=-20.$

又以　-4乘-5,則

$$-4=-1-1-1-1$$

$$\therefore\quad (-5)\times(-4)=-(-5)-(-5)-(-5)-(-5)$$
$$=+5+5+5+5=+20$$

此外無論整數,分數,正數,負數,其方法準此,故有次之法則.

〔法則〕求兩數量之積,可先乘其絕對值,然後察視因數之符號.

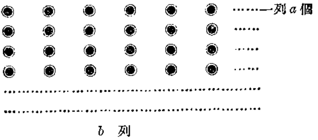
即
$$a\times b=+ab\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$(-a)\times b=-ab\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$a\times(-b)=-ab\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$
$$(-a)\times(-b)=+ab\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

決定積之符號之法,謂之符號之法則,如次

〔符號之法則〕同號得正,異號得負.

39. 積之因數　積中諸因數,無論用何次序,其結果恆等,又任取一數(無論整數,分數),以他數乘之,其結果與以任取之數乘他數之結果同,算術中已證明,今更證之如次.

先設二數為整數,以a及b表之.



如圖依次序排列諸黑點,而設每橫行中諸黑點之數爲 a,諸縱行之數爲 b.故計算此黑點之總計,先由橫行計之,則爲 b 倍 a,卽 $a\times b$.又由縱行計之,則爲 a 倍 b,卽 $b\times a$.

由是 a 及 b 俱爲整數,可證

$$a\times b=b\times a$$

次兩數爲分數,設爲 $\frac{5}{7}$ 與 $\frac{3}{4}$

則依38款,得 $\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}=\frac{5\times3}{7\times4}$

及 $\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}=\frac{3\times5}{4\times7}$

而依上之證明,得 $\frac{5\times3}{7\times4}=\frac{3\times5}{4\times7}$

由是 $\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}$

故 a 及 b 爲正數(無論整數分數),恆得 $ab=ba$.而 $ab=ba$ 無論 a 與 b 爲如何之數值,皆能證其合理.故此公式,無論 a 與 b 爲正數,爲負數,爲整數,爲分數,俱能證其合理.何則,依前款,凡積之絕對值,與符號無關.又積之符號,與因數之次序無關.

如是,a 及 b 無論爲如何之數,次之公式,恆能證其合理.

$$ab=ba\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

若於前圖黑點之位置置 c,則 c 之總計爲 ab.又第一列 c 之數爲 a.如是者有 b 列.故 a 與 b 爲整數,則 c 之 ab 倍,與將 c 之 a 倍取 b 次同.故以任意之二整數次第乘之,與以其積乘之同.而此理不獨 a 與 b 爲整數始

然.又不獨 a 與 b 爲正數始然.前已證明.茲不復贅.故 a, b, c 爲如何之數值.次之公式恆合理.

$$a\times b\times c=c\times(ab)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)及(2).無論因數若干個.其積之因數無論用何次第.結果俱無變更.

40. 單項式之積 積中諸因數既不拘次第如何.故依此理求積.可少簡約.

如 $$3a\times 4a=3\times 4\times a\times a=12a^2,$$

$$(-3a)\times(-4b)=+3a\times 4b=+3\times 4\times ab=12ab,$$

$$(ab)^2=ab\times ab=a\times a\times b\times b=a^2b^2,$$

$$(\sqrt{2a})^2=\sqrt{2a}\times\sqrt{2a}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times a\times a=2a^2.$$

積之因數雖不拘次第如何.然用數字所表之因數恆置諸積首.而文字依 A, B, C 之次序列之.

41. 指數之法則 由定義

$$a^2=aa,\ a^3=aaa,\ a^4=aaaa \text{ 等}$$

由是 $$a^2\times a^3=aa\times aaa=a^5=a^{2+3}$$

又 $$a^3\times a^5=aaa\times aaaaa=a^8=a^{3+5}$$

及 $$a\times a^4=a\times aaaa=a^5=a^{1+4}$$

依上數例.則同文字兩個乘方之積之指數.等於其因數兩指數之和可知.此理無論指數爲如何之整數.俱能合理.得證明如次.

由定義.得 $a^m=aaaa\cdots\cdots$ 至 m 因數止.

及 $a^n=aaaa\cdots\cdots$ 至 n 因數止.

$\therefore\ a^m\times a^n=(aaa\cdots$ 至 m 因數止$)\times(aaa\cdots$ 至 n 因數止$)$

$=aaa\cdots\cdots$ 至 $m+n$ 因數止.

由定義.得 $=a^{m+n}$

故 m 及 n,無論爲如何之正數值,必能得

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

此結果名爲指數之法則.

42. 單項式之積 依以上諸款所述之結果,則求任意之單項式與他單項式之積,得方法如次.

(1) 二量之符號俱正或俱負,則積之符號爲正,二量之符號一正,一負,則積之符號爲負.

(2) 積之因數無論用如何之次第,俱無差異.

(3) 同量任意兩個乘方之積之指數,等於其因數兩指數之和.

〔例1〕 以 $6a^2b^3$ 乘 $3a^2b^2$.

$$3a^2b^2 \times 6a^2b^3 = 3 \times 6 \times a^2 \times a^2 \times b^2 \times b^3 \qquad \text{由 (2)}$$

$$= 18a^{2+2}b^{2+3} = 18a^4b^5 \qquad \text{由 (3)}$$

〔例2〕 以 $-5ab^5$ 乘 $-3a^2b$.

$$(-3a^2b) \times (-5ab^5) = +3a^2b \times 5ab^5 \qquad \text{由 (1)}$$

$$= 3 \times 5 \times a^2 \times a \times b \times b \quad \text{由 (2)}$$

$$= 15a^{2+1}b^{1+5} = 15a^3b^6 \quad \text{由 (3)}$$

〔例3〕 以 $-5a^5b$ 乘 $2a^2b^3c^4$.

其二單項式之積,可用心算求之,故其結果,可直書出,即先書其結果之符號,次書數字係數之積,然後取二式中所含之各文字,令其指數爲二因數中同文字之指數之和.

故 $2a^2b^3c^4$ 與 $-5a^5b$ 之積爲 $-10a^7b^4c^4$.

〔例4〕 求 $2a^2b$ 之立方.

此立方爲 $2a^2b \times 2a^2b \times 2a^2b = 8a^6b^3$.

問　題　VII.

求以下各二式之積〔1乃至19〕.

1. $3a, 6a.$　**2.** $5a^2, 7a.$　**3.** $2a^3, 5a^2.$

4. $ab, a^2b^3.$　**5.** $3a^2b, 2ab^2.$　**6.** $4ab^3, 7a^4b^2.$

7. $3a^2bc^3, 6ab.$　**8.** $5ab^3c^2, 3ab^2.$　**9.** $2a^3b^2c, abc.$

10. $2a, -4b.$　**11.** $3b, -4a.$　**12.** $a^2, -a.$

13. $-6a^3b, 4ab.$　**14.** $-2ab^3, -7a^6b^2.$

15. $-3a^2bc^2, 6ab^2c^5.$　**16.** $-3ab^2c, 2ab^3c^2.$

17. $-2xy^4, -5x^4y^3.$　**18.** $2ax^2y^3z, -5a^2xy^4z^3.$

19. $6a^3b^2c^3x^5y^4z, -12ab^3c^4x^2y^3z^5.$

20. 求 $(-a)^2, (-a)^3, (-a)^4.$

21. 求 $(-x^2)^2, (-x^2)^3, (-x^2)^4.$

22. 求 $(-ab)^2, (-ab)^3, (-ab)^4.$

23. 求 $(a^2b^3)^2, (a^2b^3)^3, (a^2b^3)^4.$

24. 求 $(-2a^3b^4)^2, (-2a^3b^4)^3, (-2a^3b^4)^4.$

25. 求 $3ab^2c^3, -2a^3bc^4, -4a^2b^3c^5$ 之各平方.

26. 求 $a^2, -a^4, ab$ 及 $-a^2b$ 之各立方.

27. 求 $2ab^2, -3a^3b^2, -4ab^5, -7a^2b^5c^4$ 之各立方.

28. 求 $(-a)^2\times(-b)^3, (-2a)^3\times(a^2)^2, (-ab^2)^3\times(-a^2b)^3$

$(a^2b^2)^3\times(-ab^3)^4.$

若 $a=2, b=-3, c=-1, d=0$. 求以下各式之數值.

29. $6ab.$　**30.** $4abc.$

31. $8a^2b^2c^2.$　**32.** $ab+bc+ca.$

33. $a^3+b^3+c^3+d^3.$　**34.** $a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2.$

35. $3a^2b^2c^3+5b^2c^4.$　**36.** $2ab^2+3bc^2+4cd^2.$

37. $(a+b)(c+d)$.　　**38.** $(a-b)^2(c-d)^2$.

39. $(a^2+bc)(b^2+cd)$.　　**40.** $(a-b)^3(c-a)^3$.

43. 多項式　由是進言多項式之乘法.

先設任意之多項式為$a+b+c+\cdots\cdots$但a, b, c等為正或負之任意量.

如$3x^2y-\frac{2}{3}xy^2-7xyz$式.由23款知與$3x^2y-(-\frac{2}{3}xy^2)+(-7xyz)$同.故令$3x^2y$為$a$, $-\frac{2}{3}xy^2$為b, $-7xyz$為c.

則上式為所求之形明甚.

故欲就任意之代數式證明其定理.唯就$a+b+c+\cdots\cdots$式證明之可也(但$a, b, c, \cdots\cdots$為正或負之任意量).

44. 多項式與單項式之積　先以$(a+b)c$證之.但a, b, c為任意之數值.

若c為正整數.而a, b為任意之數值.則

$$(a+b)c=(a+b)+(a+b)+(a+b)+\cdots\cdots\text{至 }c\text{ 項止}$$
$$=a+b+a+b+a+b+\cdots\cdots$$
$$=a+a+a+\cdots\cdots\text{至 }c\text{ 項止}$$
$$+b+b+b+\cdots\cdots\text{至 }c\text{ 項止}$$
$$=ac+bc.$$

是故c為正整數.則

$$(a+b)c=ac+bc$$

除法為乘法之反對.故c為正整數.則

$$(a+b)\div c=a\div c+b\div c$$

而乘法與除法之運算.其可用以乘除$a+b$者俱可用以乘除a與b.故以$\frac{m}{n}$乘$a+b$.其結果與以$\frac{m}{n}$分乘a與b同.

故c無論為如何之正數值.恆能得

$$(a+b)c=ac+bc$$

而此式不獨 c 為正數值,始能合理,即 c 為負數值亦能合理.

何則,若　$(a+b)c=ac+bc$

$\therefore$　$-(a+b)c=-ac-bc$

$\therefore$　$(a-b)(-c)=a(-c)-b(-c)$

是故不拘 a, b, c 之數值如何,恆得

$$(a+b)c=ac+bc$$

45. 法則　不拘 a, b, c 之數值如何,恆得

$$(a+b)c=ac+bc$$

故以 $x+y$ 代 a,亦能合理.

是故　$\{(x+y)+b\}c=(x+y)c+bc=xc+yc+bc$

$\therefore$　$(x+y+b)c=xc+yc+bc$

同樣　$(x+y+z+p+\cdots\cdots)c=xc+yc+zc+pc+\cdots\cdots$

但此理無論 $x+y+z+p+\cdots\cdots$ 式中有若干項皆同.

〔法則〕單項式與多項式之積,為以單項式分乘多項式各項所得諸積之和.

〔例1〕　以 a 乘 a^2+a^3.

此結果為　$a^2\times a+a^3\times a=a^3+a^4$.

〔例2〕　以 c 乘 $a-b$.

此結果為　$a\times c+(-b)\times c=ac-bc$.

〔例3〕　以 $x-1$ 乘 $-3x^2$.

$$-3x^2\times(x-1)=(x-1)\times(-3x^2)=-3x^3+3x$$

問　題　VIII.

求以下各二式之積〔1至14〕.

1. $a+b$ 與 3. **2.** $2a-b$ 與 4.

3. $3a-4b$ 與 6. **4.** a^2+a 與 a.

5. a^2-a 與 a^3. **6.** a^2+1 與 $2a^3$.

7. $4a^2-5a+1$ 與 a^4. **8.** $2a^2-3a-4$ 與 $-3a^3$.

9. $2a^2-3ab+2b^2$ 與 a^2b^2. **10.** $bc+ca+ab$ 與 abc.

11. $2x^3-3x^2+5x-4$ 與 $-5x^2$.

12. $4-3x^2+3x^3-4x^4$ 與 $-6x^3$.

13. $-5ab$ 與 $3a^2-2ab+7b^2$.

14. $-6a^3b^4$ 與 $2a^3-3a^2b-5b^2$.

化以下各式為簡式(15至23).

15. $2(a-b)+4(a+b)$. **16.** $\frac{1}{2}(b-2c)-\frac{3}{2}(c-2b)$.

17. $c(a+b)-c(a-b)$. **18.** $7a(b-c)-2b(a-c)$.

19. $a^2b^2(c^2-d^2)+c^2d^2(a^2-b^2)+b^2c^2(d^2-a^2)$.

20. $2\{3ab-4a(c-2b)\}$.

21. $3a-2[b-\{2c-6a-2(b-2c)\}-3(b-2c)]$.

22. $4a^3-[(2b^3-3c^3)-6bc(b+c)+3c(c^2+2b^2)]$.

23. $7ac-2\{2c(a-3b)-3(5c-2b)a\}$.

46. 多項式之積 由是更求乘法之通例(即任意多項式之乘法)如次.

如求 $(a+b+c+\cdots\cdots)\times(x+y+z+\cdots\cdots)$

據43款,此積必能包含一切代數式之乘法.

今設 $x+y+z+\cdots\cdots$ 為M,則依前款,得

$$
\begin{aligned}
(a+b+c+\cdots\cdots)\mathrm{M} &= a\mathrm{M}+b\mathrm{M}+c\mathrm{M}+\cdots\cdots \\
&= \mathrm{M}a+\mathrm{M}b+\mathrm{M}c+\cdots\cdots\cdots\cdots(39\text{節}) \\
&= (x+y+z+\cdots\cdots)a+(x+y+z+\cdots) \\
&\qquad b+(x+y+z+\cdots\cdots)c+\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$$=ax+ay+az+\cdots\cdots+bx+by+bz+\cdots\cdots$$
$$+cx+cy+cz\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故 $(a+b+c+\cdots\cdots)(x+y+z+\cdots\cdots)=ax+ay+az+\cdots\cdots$
$+bx+by+bz+\cdots\cdots+cx+cy+cz+\cdots\cdots\cdots\cdots$

〔法則〕任意兩多項式之積,爲以乘數各項乘被乘數各項所得諸積之和.

〔例〕 如 $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$

又 $(2a+5b)(3a+2b)=2a\times3a+5b\times3a+2a\times2b+5b\times2b$
$$=6a^2+15ab+4ab+10b^2$$
$$=6a^2+19ab+10b^2$$

又求　$(a-b)(c-d)$

先記爲 $\{a+(-b)\}\{c+(-d)\}$. 則其積爲
$$ac+(-b)c+a(-d)+(-b)(-d)$$
而此積依38款等於 $ac-bc-ad+bd$

〔注意〕以上所舉兩代數式乘法之法則,其所謂項,均包括項前之符號在內.

47. 要例　以下三式,在代數學內,最爲緊要,學者宜熟記.

(1)　$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=aa+ba+ab+bb$

$\therefore\qquad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

〔定例〕任意兩數量和之平方,等於其平方和,加其積之二倍.

(2)　$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=aa+(-b)a+a(-b)$
$$+(-b)(-b)=a^2-ab-ab+b^2$$

$\therefore\qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

〔定例〕任意兩數量差之平方,等於由其平方和減

其積之二倍.

(3) $$(a+b)(a-b)=aa+ab+(-b)a+(-b)b$$
$$=a^2+ab-ab-b^2$$

$$\therefore\quad (a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

〔定例〕任意兩數量之和與差之積,等於其平方之差.

48. 演算 乘方之演算,以下式為便.

$$\begin{array}{r}
a^2+2ab-b^2\\
a^2-2ab+b^2\\
\hline
a^4+2a^3b-a^2b^2\\
-2a^3b-4a^2b^2+2ab^3\\
+\ a^2b^2+2ab^3-b^4\\
\hline
a^4-4a^2b^2+4ab^3-b^4
\end{array}$$

置乘數於被乘數之下,並在其下畫一橫線,以乘數之第一項 a^2,乘被乘數之各項 a^2, $+2ab$, $-b^2$. 其積為 a^4, $+2a^3b$, $-a^2b^2$. 記為一橫列.次以乘數之第二項 $-2ab$,乘被乘數之各項.其積又記為一橫列.但與前列同類之項,須記在一縱行.次又以乘數之末項 b^2,乘被乘數之各項.記其積為第三之橫列.其與前二列之同類項.須同在一縱行.如是加此三列諸部分之積.即得所求之結果.而此三列諸部分之同類項.俱同在一縱行.故易記其和.

49. 雜例 依前款之書法.更舉其例如次.

$$\begin{array}{r}
a+b\\
a+b\\
\hline
a^2+ab\\
+ab+b^2\\
\hline
a^2+2ab+b^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
a-b\\
a-b\\
\hline
a^2-ab\\
-ab+b^2\\
\hline
a^2-2ab+b^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
a+b\\
a-b\\
\hline
a^2+ab\\
-ab-b^2\\
\hline
a^2-b^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
a+\sqrt{2}b \\
\underline{a-\sqrt{2}b} \\
a^2+\sqrt{2}ba \\
\underline{\qquad -\sqrt{2}ba-2b^2} \\
a^2 \qquad\qquad -2b^2
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
a+b+c \\
\underline{a+b+c} \\
a^2+ab+ac \\
\quad +ab \qquad +b^2+bc \\
\underline{\qquad\quad +ac \qquad +bc+c^2} \\
a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2
\end{array}$$

問題 IX.

求以下各二式之積.

1. $x+2y$ 與 $x-2y$.　**2.** $a-3b$ 與 $a+3b$.

3. $2x+3y$ 與 $3x-2y$.　**4.** $5a+4b$ 與 $a-b$.

5. $x+7$ 與 $x+6$.　**6.** $x-7$ 與 $x-6$.

7. $x+7$ 與 $x-6$.　**8.** $a+9$ 與 $a-5$.

9. $2x-4$ 與 $2x+6$.　**10.** $3x-7$ 與 $2x-1$.

11. $2y+5b$ 與 $3y-4b$.　**12.** $3m^2-1$ 與 $3m^2+1$.

13. $2m^2+5n^2$ 與 $2m^2-5n^2$.　**14.** $a+\frac{1}{2}b$ 與 $a-\frac{1}{2}b$.

15. $2a+\frac{1}{3}b$ 與 $3a+\frac{1}{2}b$.　**16.** $\frac{1}{4}a-\frac{1}{3}b$ 與 $\frac{1}{3}a-\frac{1}{4}b$.

17. x^2+x+1 與 $x-1$.　**18.** x^2-x+1 與 $x+1$.

19. a^2+ab+b^2 與 $a-b$.　**20.** a^2-ab+b^2 與 $a+b$.

21. $4a^2+6ab+9b^2$ 與 $2a-3b$.

22. $16p^2+20pq+25q^2$ 與 $4p-5q$.

23. $x^3-3ax^2+2a^2x$ 與 $x+3a$.

24. $a^3-4a^2b+6ab^2$ 與 a^2+4ab.

25. x^3-3x^2+2x+1 與 x^2+3x+2.

26. x^3+x^2-2x+1 與 x^2-x+2.

27. x^2+xy+y^2 與 x^2-xy+y^2.

28. $a^4+a^2b^2+b^4$ 與 $a^4-a^2b^2+b^4$.

29. $2x^3-3x^2y+2xy^2+y^3$ 與 $x^2+3xy+2y^2$.

30. $x^3-4x^2y+6xy^2-3y^3$ 與 $3x^2-4xy+5y^2$.

50. 多項式之列法 於數項成立之式內.若諸項函有文字同而乘方異者.則以最高次乘方置爲第一項.而以次之高次乘方置爲第二項.以下依次置之.其不函文字者.置於最後.此全式謂之該文字之遞降乘方.

如 $a^3+a^2b+ab^2+b^3$ 式.爲 a 之遞降乘方.同理又謂之 b 之遞昇乘方.

51. 被乘數及乘數之列法 被乘數與乘數之各項.無論用如何之次序列之.雖能求其積.然必以兩者俱依遞降乘方或遞昇乘方列之爲便.不然.則各種之同類項.不能同在一縱行.故換列之.多費周折.而依上之方法列之.則同類項自同在一縱行.不生混雜.故求兩代數式之積.若非俱依遞降乘方或遞昇乘方列之者.則運算之前.須先如法列之.

52. 乘元 凡項爲 n 文字之積者.謂之 n 乘元.或謂之 n 次項.惟數字因數.不算入乘元之數.

如 abc 爲三乘元.或三次項.又 $5a^2b^2c$ 卽 $5aabbc$ 爲五乘元或五次項.

53. 次 代數式之次數.以其式中最高次項之次數計之.亦有僅取一特別文字計之者.

如 ax^2+bx+c 稱爲 x 之二次式.

又 ax^2y+bxy^2 爲 x 及 y 之三次式

一式之各項爲同次項者.其式謂之等次式.

如 $a^3+3a^2b+5b^3$ 爲三次之等次式.

問　題　X.

將以下各式依 a 之遞降方乘整列〔1至6〕.

1. a^2+b^2-2ab.　　**2.** $2-4a^2+5a-6a^3$.

3. $a^3+b^3+a^2b+ab^2$.　　**4.** $5a^2-4-6a^3-2a$.

5. $a^3+b^3+c^3-3abc$.

6. $a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2$.

7. 問以上各式之次數何如.又孰爲等次式.在次之各式內.將 x 各同方乘用括弧括之〔8至12〕.

8. $x^2+ax+bx+ab$.　　**9.** $x^2-ax-bx-ab$.

10. $x^3+ax^2+bx^2+cx^2+bcx+cax+abx+acb$.

11. $ax^2+bx^2+cx^2+bcx+cax+abx+acb$.

12. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$.

13. 化 $(b+c-a)x+(c+a-b)x+(a+b-c)x$ 爲簡式.

14. 化 $(b-c)x+(c-a)x+(a-b)x$ 爲簡式.

15. 化 $\{(b-a)x+(c-d)y\}+\{(a+b)x+(c+d)y\}$ 爲簡式.

54. 等次式之積　任意兩等次式之積,亦爲等次式.何則.凡積中諸項.乃以乘數內各項乘被乘數內各項而得.而在兩單項式之積內.其所含乘方之次數.原爲兩單次式內諸元次數之和.故乘式中之各項爲等次式.被乘式各項亦爲等次式.則其積內各項.不得不爲等次式.

相乘之兩式.其爲等次式與否.學者宜注意.若兩式俱爲等次式.則所得之積.亦必爲等次式.若兩等次式之積非等次式.則知其演算有誤.

55. 公式　今更揭乘法之三要例如次.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

〔定義〕用記號所表一般之結果,謂之公式.

前記之三公式,無論 a 及 b 爲如何之數,皆能合理.故以任意之代數量,或任意之代數式代 a 及 b,其結果亦復合理.

代入公式所得之結果,如下例.

先以 $-b$ 代(1)式之 b,則

$$\{a+(-b)\}^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2,$$

卽 $$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

故 (2)實含於(1)之中

又 以 $b+c$ 代(1)之 b,則

$$\{a+(b+c)\}^2=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2,$$
$$\therefore \quad (a+b+c)^2=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2.$$

故 $$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \cdots\cdots (4)$$

又以 $-c$ 代(4)之 c,則

$$\{a+b+(-c)\}^2=a^2+b^2+(-c)^2+2ab+2a(-c)+2b(-c);$$
$$\therefore \quad (a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc.$$

又以 $b+c$ 代(3)之 b 則,

$$\{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}=a^2-(b+c)^2.$$

以下所舉之積可直求出,

$$(a^2+b^2)(a^2-b^2)=(a^2)^2-(b^2)^2=a^4-b^4.$$
$$(a-b+c)(a+b-c)=\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}$$
$$=a^2-(b-c)^2=a^2-(b^2-2bc+c^2)=a^2-b^2+2bc-c^2,$$
$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=(\overline{a^2+b^2}+ab)(\overline{a^2+b^2}-ab)$$

$=(a^2+b^2)^2-a^2b^2=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2=a^4+a^2b^2+b^4.$

56. 任意各項式之平方 求數量和之平方,既示於前款及第49款,而三以上諸數量和之平方,可用相同之法求之.

如求 $(a+b+c+d+\cdots\cdots)(a+b+c+d+\cdots\cdots)$

依上之證明,則任意兩代數式之積,等於以乘數各項,乘被乘數各項,諸部分積之和,故以乘數之第一項 a,乘被乘數之第一項 a,得 a^2,同理得 $b^2, c^2, d^2\cdots\cdots\cdots\cdots$

又以乘數中之任意項 b,乘被乘數中與此項相異之項 d,則所得之項為 bd.而以乘數中之 d,乘被乘數中之 b,其所乘得亦為 bd,故有 $2bd$,同理得兩式中各異項之積,$2ab, 2ac\cdots\cdots$,由是所求之平方為

$$a^2+b^2+c^2+d^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+2ab+2ac+2ad\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+2bc+2bd+\cdots\cdots\cdots$$

〔法則〕 凡若干數量和之平方,等於各數量平方之和,加諸兩相異數量積之二倍.

〔例1〕 求 $a+b+c$ 之平方.

此式各項之平方為 a^2, b^2, c^2,而各相異二量之積為 ab, ac, bc.

故 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

〔例2〕 求 $a+2b-3c$ 之平方.

所求之平方 $=a^2+(2b)^2+(-3c)^2+2a(2b)+2a(-3c)$
$+2(2b)(-3c)=a^2+4b^2+9c^2+4ab-6ac-12bc.$

〔例3〕 求 $(a-b+c-d)^2$.

$(a-b+c-d)^2=a^2+(-b)^2+c^2+(-d)^2+2a(-b)+2ac$
$+2a(-d)+2(-b)c+2(-b)(-d)+2c(-d)$

$=a^2+b^2+c^2+d^2-2ab+2ac-2ad-2bc+2bd-2cd.$

以上諸例.學者苟能熟練.則演算時可省略中間諸算式.而直書其最後之結果.又使兩相異項盡括無遺.則以取式中之一項.與此項後之諸項連書之爲便

問題 XI.

書以下各式之平方〔1至24〕.

1. $2a+b.$ **2.** $4a+3b.$ **3.** $3a-b.$ **4.** $5a-6b.$

5. $a^2-5ab.$ **6.** $2a^2-3ab.$ **7.** $-3xy+2y^2.$ **8.** $4x^2-7y^2.$

9. $a-b-c.$ **10.** $2a+2b-c.$ **11.** $4a+2b-3c.$

12. $2a-5b-3c.$ **13.** $x^2+x+1.$ **14.** $x^2-x+1.$

15. $x^2-xy+y^2.$ **16.** $x^4+x^2y^2+y^4.$ **17.** $a-b-c+d.$

18 $a-2b-3c+3d.$ **19.** $3a+2b-4c+d.$

20. $5a+b-4c-3d.$ **21.** $x^3+x^2+x+1.$

22. $x^3-x^2+x-1.$ **23.** $2x^3-x^2y+xy^2-3y^3.$

24. $2x^3-x^2y+2xy^2-y^3.$

求以下各二式之積〔25至36〕.

25. $x-y+z$ 與 $x-y-z.$

26. $x-2y+4z$ 與 $x-2y-4z.$

27. $3x-y-5z$ 與 $3x+y-5z.$

28. $-x+2y-3z$ 與 $x+2y-3z.$

29. x^2+xy+y^2 與 $x^2-xy+y^2.$

30. $3x^2-xy+2y^2$ 與 $3x^2+xy+2y^2.$

31. x^2-x+7 與 $x^2-x-7.$

32. $2x^2-3x+7$ 與 $2x^2+3x+7.$

33. $a+b+c+d$ 與 $a+b-c-d.$

34. $2a-3b+2c-4d$ 與 $2a-3b-2c+4d$.

35. $2a+3b+c-2d$ 與 $2a-3b-c-2d$.

36. $a-3b-4c+d$ 與 $a+3b-4c-d$.

57. 連乘法 凡求諸代數式之連乘積.必先於諸式中任取其兩式.以求其積.所得之積.又以第三式乘之.以下依次屢乘.最後所得之結果.乃連乘積.

〔例一〕 求 $(x+a)(x+b)(x+c)$ 之連乘積.

此演算如次.

$$\begin{array}{l}
x+a \\
\underline{x+b} \\
x^2+ax \\
\underline{\quad\ bx \qquad +ab} \\
x^2+(a+b)x+ab \\
\underline{x+c} \\
x^3+(a+b)x^2+abx \\
\underline{\qquad\qquad cx^2+c(a+b)x+abc} \\
x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc
\end{array}$$

若 $a=b=c$, 則 $(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$.

上之結果.x 之相同方乘之係數.用括弧括之.又依 x 之遞降方乘整列.乃整列代數式之通法.

〔例二〕 求 $x^2+a^2, x+a, x-a$ 之連乘積.

因子無論用何次序.其積無變更.故

$$\text{所求之積}=(x+a)(x-a)(x^2+a)=(x^2-a^2)(x^2+a^2)$$
$$=x^4-a^4.$$

〔例三〕 求 $(x-a)^2(x+a)^2$.

因子無論用何次第.其積無變更.故

$$(x-a)^2(x+a)^2=(x-a)(x+a)(x-a)(x+a)$$
$$=\{(x-a)(x+a)\}^2$$

$$=(x^2-a^2)^2=x^4-2x^2a^2+a^4$$

58. 二項式之乘方 用公式求二項式任意之乘方.其法稱爲二項式之定理,詳於後編.今惟記二項式之平方及立方之公式.

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

問題 XII.

求以下各式之積〔1至26〕.

1. $3a^2+ab-b^2$ 與 $a^2-2ab-3b^2$.

2. $x^2-xy-3y^2$ 與 $3x^2+xy-y^2$.

3. $5x^3-4x^2y+3xy^2$ 與 $x^2+4xy+6y^2$.

4. $x^3-7x^2y+3xy^2$ 與 $x^4+7x^3y-3x^2y^2$.

5. $3x^3-7x^2+5x-3$ 與 $2x^3+7x^2-5x+4$.

6. a^3+3a^2-7a+6 與 $3a^3-a^2+5a-4$.

7. $\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{4}xy+y^2$ 與 $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}xy-y^2$.

8. $\frac{1}{4}x^2-\frac{2}{3}xy+12y^2$ 與 $12x^2+\frac{2}{3}xy-\frac{1}{4}y^2$.

9. $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$ 與 $a+b+c$.

10. $4a^2+9b^2+c^2-3bc-2ca-6ab$ 與 $2a+3b+c$.

11. $a^2+b^2+c^2+bc+ca-ab$ 與 $a+b-c$.

12. $9a^2+b^2+9c^2+3bc-9ca+3ab$ 與 $3a-b+3c$.

13. x^2+xy+y^2 與 y^2-xy+x^2.

14. $a^2-2ab+4b^2$ 與 $4b^2+2ab+a^3$.

15. $ax+a^2x^2+a^3x^3$ 與 a^2x^2-ax+1.

16. $x^2+1, x+1, x-1$.

17. $a^2+x^2, a+x, a-x$.

18. $x^2+4y^2, x+2y, x-2y.$

19. $9x^2+25y^2, 3x+5y, 3x-5y.$

20. $x^4+y^4, x^2+y^2, x+y, x-y.$

21. $(a^2+b^2)^2, (a+b)^2, (a-b)^2.$

22. $(x^2+x+1)^2$ 與 $(x^2-x+1)^2.$

23. x^2-xy+y^2, x^2+xy+y^2 與 $x^4-x^2y^2+y^4.$

24. $a^4-a^2b^2+b^4, a^2+ab+b^2, a^2-ab+b^2.$

25. $x^2-ax+a^2, x^2+ax+a^2, a+x, a-x.$

26. $x+y+z, -x+y+z, x-y+z, x+y-z.$

解以下諸括弧〔27至32〕.

27. $(2a+3b)^3.$　**28.** $(2a-3b)^3.$　**29.** $(3a-2b)^3.$

30. $(a+b+c)^3.$　**31.** $(a-b+c)^3.$　**32.** $(a-b-c)^3.$

33. 證次之三式.

(1) $(2x+1)^2+(x-1)^2=4x^2+(x+1)^2+1.$

(2) $(2x+1)^2+(x+2)^2=(x-2)^2+4x(x+3)+1.$

(3) $(x^2+x+1)^2+(x^2-x+1)^2=2(x^4+3x^2+1).$

34. 證 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=(a+b)^3-3ab(a+b)-2b^3.$

35. 證次之式.

$$(x+y)(x+z)+(y+z)(y+x)+(z+x)(z+y)-(x+y+z)^2=yz+zx+xy.$$

36. 證 $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3-3(b-c)(c-a)(a-b)=0.$

37. 化 $(x+y+z)^2-(-x+y+z)^2+(x-y+z)^2-(x+y-z)^2$ 爲簡式.

38. 化次式爲簡式.

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)-yz(y+z)-zx(z+x)$$
$$-xy(x+y).$$

證以下各式〔39至45〕.

39. $(b+c)(c+a)(a+b)+abc=(a+b+c)(bc+ca+ab)$.

40. 若 $x=2y+5z$ 則 $x^3=8y^3+125z^3+30xyz$.

41. 若 $x=b+c-2a,\ y=c+a-2b,\ z=a+b-2c$ 則

$$x^2+y^2+z^2+2yz+2zx+2xy=0.$$

42. $a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)=(a+b+c)^3$.

43. $a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2+2abc(a+b+c)$
$$=2(bc+ca+ab)^2.$$

44. $(a+b)^3+3c(a+b)^2+3c^2(a+b)+c^3$
$$=(b+c)^3+3a(b+c)^2+3a^2(b+c)+a^3.$$

45. $\{(a+b)x^2-(a^2+b^2)x+a^3+b^3\}$
$$\{(a-b)x^2-(a^2-b^2)x+a^3-b^3\}$$
$$=(a^2-b^2)x^4-2(a^3-b^3)x^3+3(a^4-b^4)x^2$$
$$-2(a^5-b^5)x+a^6-b^6.$$

第四編

除法

59. 除法 乘法者.知兩因數而求其積.除法者.知其兩因數之積及一因數而求他之一因數.故以 b 除 a.即求在 $b\times c=a$ 關係式內之 c.

60. 除法之法則 除法者.乘法之反對運算也.乘法連乘.可用任意之次第(39款).故除法連除.亦可用任意之次第.

如 $$a\div b\div c=a\div c\div b$$

又依第39款.以任意之諸量.依次除之.與一次以其積除之同.

如 $$a\div b\div c=a\div(bc)$$

61. 乘除之法則 以任意之次第連除其所得之式無異.則以任意之次第或乘或除.其所得式亦無異.

如 $$a\times b\div c=a\div c\times b$$

何則.因 $$a=a\div c\times c$$

$$\therefore\quad a\times b=a\div c\times c\times b$$

$$=a\div c\times b\times c \qquad (據39款)$$

故此各邊以 b 除之.則得 $a\times b\div c=a\div c\times b$ 由是二量之積.以第三量除之.與以第三量除其二量中之一量.而後以他一量乘之.其結果相同.

62. 分數式 除法之演算.每在被除式下畫一橫線.而書其除數於橫線下以示除.

如 $\frac{a}{b}=a\div b$, 又有時以 a/b 代 $\frac{a}{b}$

若以 $\frac{a}{b}$ 式示 $a\div b$ 之分數.則 a 稱爲分子, b 稱爲分母.

在 $a\times b\div c=a\div c\times b$ 式內.

設 $a=1$, 則 $1\times b\div c=1\div c\times b$

即 $$b\div c=\frac{1}{c}\times b=b\times\frac{1}{c}$$

故以任意之量 c 除.與以 $\frac{1}{c}$ 乘同.

63. 指數之除法 因 $a^3\times a^2=a^5$ 又 $a^7\times a^3=a^{10}$ 故依反對之理.得 $a^5\div a^2=a^3=a^{5-2}$ 又 $a^{10}\div a^3=a^{10-3}=a^7$ 其他仿此.

由是以某文字之低方乘.除同文字之高方乘.則其商之指數.等於被除數及除數上兩指數之差.

64. 除法之符號定則 在第38款.已證得

$$a\times(-b)=-ab$$

$$\therefore\ (-ab)\div(-b)=a \quad 又\ (-ab)\div a=-b$$

又已證得 $(-a)\times(-b)=+ab$ 又 $(+a)\times(+b)=+ab$

$$\therefore\ (+ab)\div(-a)=-b \quad 又\ (+ab)\div(+a)=+b$$

由是.被除數與除數之符號相同.則其商之符號爲正.被除數與除數之符號相異.則其商之符號爲負.故除法之符號定則.與乘法之符號定則同.

65. 單項式之除法 依以上諸款之結果.可用任意之單項式.除他之單項式.而其所謂結果蓋如次.

(1) 被除數與除數之符號相同.則商之符號爲正.

被除數與除數之符號不相同,則商之符號爲負.

(2)　乘法與除法之演算,可用任意之次第.

(3)　以某文字之低方乘除同文字之高方乘,則其商之指數,等於被除數與除數上兩指數之差.

〔例 1〕　以 $6a^2b^3$ 除 $18a^4b^5$

$$18a^4b^5 \div 6a^2b^3 = 18 \div 6 \times a^4 \div a^2 \times c^5 \div b^3$$

$$= 3a^{4-2}b^{5-3} \qquad \text{依 (2)}$$

$$= 3a^2b^2 \qquad \text{依 (2)}$$

〔例 2〕　以 $-5ab^5$ 除 $15a^3b^6$

$$15a^3b^6 \div (-5ab^5) = -15 \div 5 \times a^3 \div a \times b^6 \div b^5$$

$$= -3a^{3-1}b^{6-5} \qquad \text{依 (1) 與 (2)}$$

$$= -3a^2b$$

〔例 3〕　以 $-7a^3b^2c^4$ 除 $-5a^7b^5c^4$

以單項式除單項式,可用心算求之,而直書其結果.書結果時,當先書其結果之符號,次書以除數之數字係數,除被除數之數字係數所得之商,最後乃書被除數中之各文字,其指數等於被除數與除數各文字上指數之差.

如 $(-5a^7b^5c^4) \div (-7a^3b^2c^4) = +\frac{5}{7}a^4b^3$ 其所以不書 c 者

因 $c^4 \div c^4 = 1$ 故也.

若在上例求 $c^4 \div c^4$ 之商,則依第 63 款之定則,其結果爲 c^0 於此處多不知其意味如何,然 $c^4 \div c^4$ 稍知除法者,易知爲 1

66. 以單項式除多項式之法　以單項式除多項式,其所得之商,等於以單項式分除多項式中各項所得

諸商之和.

如 $(a+b+\cdots\cdots)\div x=a\div x+b\div x+\cdots\cdots$

因欲證明,故以 x 乘之,則

$$(a+b+\cdots\cdots)\div x\times x=a+b+\cdots\cdots,$$

$$\therefore\ (a\div x+b\div x+\cdots)\times x=a\div x\times x+b\div x\times x+\cdots\text{[44款]}$$
$$=a+b+\cdots\cdots$$

是故 $(a+b+\cdots\cdots)\div x=a\div x+b\div x+\cdots\cdots$

〔例 1〕 以 a 除 a^3+2a^2

此結果爲 $a^3\div a+2a^2\div a=a^2+2a.$

〔例 2〕 以 ax 除 a^2x^2-3ax

此結果爲 $a^2x^2\div ax+(-3ax)\div ax=ax-3,$

〔例 3〕 以 $3x$ 除 $12x^3-5ax^2-2a^2x$

此結果爲 $12x^3\div 3x+(-5ax^2)\div 3x+(-2a^2x)\div 3x$

$$=4x^2-\frac{5}{3}ax-\frac{2}{3}a^2$$

問題 XIII.

於次之各題,以後式除前式.

1. $10a,\ -5a.$ **2**. $-10b,\ 2b.$

3. $-2x,\ -3x.$ **4**. $a^2,\ -a.$

5. $8ab,\ -2b.$ **6**. $-4ab,\ 3a.$

7. $12a^2b^3,\ -ab^2$ **8**. $-6x^2y^3,\ -4xy.$

9. $-3x^4y^3,\ 2xy^2.$ **10**. $25a^7b^6c^4,\ -5a^6bc^4.$

11. $-27a^9b^{11}c^4,\ -6a^9b^8.$ **12**. $abcd,\ -ab.$

13. $a^2b^3c^4d^7,\ -2ab^2cd^5.$ **14**. $8a^4x^5y^7z,\ 6ax^3y^4.$

15. $-3a^2b^6cx^7y^9,\ -2abcx^3y^5$.　　**16.** $3x^2-5ax,\ x$.

17. $5y^4-6y^3,\ -y^2$.　　**18.** $4a^6-5a^5+2a^4,\ a^4$.

19. $12a^3+9a^4-6a^5,\ -3a^2$.

20. $15a^4b^6-7a^3b^7+9a^2b^4,\ -3a^2b^3$.

67. 多項式之除法　由是考究除法之通例.即以多項式除多項式之法.

除法之目的.原在求如何之代數式.以除數乘之.則生被除數.

如以 $2a+b$ 除 $8a^3+8a^2b+4ab^2+b^3$. 必先將被除數與除數之公共文字依遞降乘方或遞昇乘方列之.然後所得之商.乃亦依同樣之乘方序列.

如本式.乃依 a 之遞降乘方列之.而被除數 a 之最高次項.原爲除數與商中 a 之最高次項之積.由是 $8a^3\div 2a=4a^2$.是爲商之第一項.抑以 $4a^2$ 乘除數由被除數減之.則餘數爲 $4a^2b+4ab^2+b^3$. 又此餘數.原爲除數與其商之他諸項之積.故餘數之第一項 $4a^2b$. 必爲除數之第一項與其商之次項之積.由是 $4a^2b\div 2a=2ab$. 是爲商之第二項.又以 $2ab$ 乘除數.由前之餘數減其積.則第二之餘數爲 $2ab^2+b^3$. 同樣 $2ab^2\div 2a=b^2$. 是爲商之第三項.而以 b^2 乘除數.由第二之餘數減之.適盡無餘.是即經第三回減法之後.不復更有餘式.故被除式必等於以上諸減式之和.然今依次減三次.原爲以 $4a^2+2ab+b^2$ 乘除數之數.故合之則爲除數與 $4a^2+2ab+b^2$ 之積.即與被除數等.

故所求之商爲　　$4a^2+2ab+b^2$.

此演算如次

$$
\begin{array}{l}
2a+b)\,8a^3+8a^2b+4ab^2+b^3\,(4a^2+2ab+b^2\\
\qquad\quad 8a^3+4a^2b\\
\qquad\qquad\quad 4a^2b+4ab^2+b^3\\
\qquad\qquad\quad 4a^2b+2ab^2\\
\qquad\qquad\qquad\quad 2ab^2+b^3\\
\qquad\qquad\qquad\quad 2ab^2+b^3
\end{array}
$$

依上例,以多項式除多項式,其法如次.

(1) 被除數與除數,俱當依其公共文字之遞降或遞昇乘方整列.

(2) 以除數之第一項除被除數之第一項,其所得者爲商之第一項.

(3) 以商之第一項乘除式,由被除式減之.

(4) 以餘數爲新被除數,依前法屢求之.

68. 雜例 更舉二三例如次.

〔例1〕 以 $1-x$ 除 $3x^3-4x^2+2x-1$.

先將除數諸項之次序,換爲 $-x+1$.

$$
\begin{array}{l}
-x+1)\,3x^3-4x^2+2x-1\,(-3x^2+x-1\\
\qquad\quad 3x^3-3x^2\\
\qquad\quad\ \ -\ x^2+2x-1\\
\qquad\quad\ \ -\ x^2+x\\
\qquad\qquad\qquad\quad x-1\\
\qquad\qquad\qquad\quad x-1
\end{array}
$$

〔例2〕 以 a^2+b^2 除 $a^4-a^3b+2a^2b^2-ab^3+b^4$.

$$
\begin{array}{l}
a^2+b^2)\,a^4-a^3b+2a^2b^2-ab^3+b^4\,(a^2-ab+b^2\\
\qquad\quad a^2 \qquad\ +\ a^2b^2\\
\qquad\quad -a^3b+\ a^2b^2-ab^3+b^4\\
\qquad\quad -a^3b \qquad\quad -ab^3\\
\qquad\qquad\quad +a^2b^2 \qquad\ +b^4\\
\qquad\qquad\quad +a^2b^2 \qquad\ +b^4
\end{array}
$$

〔例3〕 以 a^2-ab+b^2 除 $a^4+a^2b^2+b^4$.

$$
\begin{array}{r}
a^2-ab+b^2)\;a^4 \qquad\quad +a^2b^2 \qquad\quad +b^4\;(a^2+ab+b^2 \\
\underline{a^4-a^3b+a^2b^2 \qquad\qquad\qquad} \\
+a^3b \qquad\qquad\qquad +b^4 \\
\underline{+a^3b-a^2b^2+ab^3 \qquad\quad} \\
+a^2b^2-ab^3+b^4 \\
\underline{+a^2b^2-ab^3+b^4}
\end{array}
$$

如是將被除數之各項離置者,因欲 a 之遞降乘方不變,且使同類項同在一縱行故也,然不如是,或將各除數依 a 之遞降乘方整列亦可.

69. 公式　次之公式,俱甚緊要,故宜熟記(但此等公式證之甚易).

$$(x^2+2ax+a^2)\div(x+a)=x+a,$$
$$(x^2-a^2)\div(x-a)=x+a,$$
$$(x^2-2ax+a^2)\div(x-a)=x-a,$$
$$(x^3-a^3)\div(x-a)=x^2+ax+a^2,$$
$$(x^3+a^3)\div(x+a)=x^2-ax+a^2,$$
$$(x^4-a^4)\div(x-a)=x^3+ax^2+a^2x+a^3,$$
$$(x^4-a^4)\div(x+a)=x^3-ax^2+a^2x-a^3.$$

問　題　XIV.

在以下各題內俱用後式除前式.

1. $x^2-5x+6,\ x-2.$　**2.** $x^2+5x-24,\ x+8.$

3. $x^2-23x+132,\ x-11.$　**4.** $x^2-4x-77,\ x+7.$

5. $3x^2-4x-4,\ x-2.$　**6.** $3x^2-11x+10,\ 3x-5.$

7. $a^2-b^2,\ a-b.$　**8.** $x^2-9y^2,\ x-3y.$

9. $x^2-16y^2,\ x+4y.$　**10.** $9x^2-64y^4,\ 3x+8y^2.$

11. $x^2-\frac{1}{4}y^4,\ x-\frac{1}{2}y^2.$　**12.** $\frac{1}{9}x^6-\frac{1}{16}a^6,\ \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}a^3.$

13. $3x^2+8x+4,\ 6x+12.$　**14.** $x^2-\frac{7}{12}x-1,\ 4x+3.$

15. $a^3-b^3,\ a-b.$　　**16.** $8a^3+27b^3,\ 2a+3b.$

17. $a^3x^3+b^3y^3,\ ax+by.$　　**18.** $8a^6x^6-125y^6,\ 2a^2x^2-5y^2.$

19. $x^3-8x-3,\ 3-x.$　　**20.** $2x^3-5x^2+4,\ 2-x.$

21. $2x^4-9x^3+10x^2-5x+6,\ 3-x.$

22. $x^4+2x^2+2,\ 1-x+x^2.$

70. 例解　式中諸項之整列法,最宜注意.今舉其例於次.

〔例 1〕　以 $a-2b-3c$ 除 $2a^2-2b^2-3c^2-5bc-5ca-3ab.$

如本例,凡含二文字以上之式,不獨當依 a 之遞降乘方列之,更當依他文字列之,如 b 皆置於 c 前,是也.故列得諸項如次.

$$
\begin{array}{l}
a-2b-3c)\,2a^2-3ab-5ac-2b^2-5bc-3c^2\,(2a+b+c \\
\qquad\qquad\ \ \underline{2a^2-4ab-6ac} \\
\qquad\qquad\qquad\quad ab+ac-2b^2-5bc-3c^2 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{ab\qquad\ -2b^2-3bc} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad +ac\qquad -2bc-3c^2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+ac\qquad -2bc-3c^2}
\end{array}
$$

〔例 2〕　以 $a+b+c$ 除 $a^3+b^3+c^3-3abc.$

先將被除數依 a 之遞降乘方整列且 b 皆在 c 前.

$$
\begin{array}{l}
a+b+c)\,a^3-3abc+b^3+c^3\,(a^2-ab-ac+b^2-bc+c^2 \\
\qquad\qquad\ \underline{a^3+a^2b+a^2c} \\
\qquad\qquad\quad -a^2b-a^2c-3abc+b^3+c^3 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-a^2b-ab^2-abc} \\
\qquad\qquad\qquad\quad -a^2c+ab^2-2abc+b^3+c^3 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-a^2c\qquad\quad -abc-ac^2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +ab^2-abc+ac^2+b^3+c^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+ab^2\qquad\qquad\quad +b^3+b^2c} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -abc+ac^2-b^2c+c^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-abc\qquad\ -b^2c-bc^2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad ac^2+bc^2+c^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{ac^2+bc^2+c^3}
\end{array}
$$

如用括弧括之,上之演算,尤覺簡便,如次

$$
\begin{array}{r|l}
a+b+c & a^3-3abc+b^3+c^3 \;\big(\, a^2-a(b+c)+(b^2-bc+c^2) \\
 & \underline{a^3+a^2(b+c)\qquad\qquad} \\
 & -a^2(b+c)-3abc+b^3+c^3 \\
 & \underline{-a^2(b+c)-\;a(b+c)^2\qquad} \\
 & \qquad a(b^2-bc+c^2)+b^3+c^3 \\
 & \qquad \underline{a(b^2-bc+c^2)+(b+c)(b^2-bc+c^2)}
\end{array}
$$

〔例3〕　以 $a-b$ 除 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$,先將被除數依 a 之遞降乘方整列如次

$$
\begin{array}{r|l}
a-b & a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+b^2c-bc^2 \;\big(\, a(b-c)-a(b-c) \\
 & \underline{a^2(b-c)-ab(b-c)\qquad\qquad\qquad} \\
 & \qquad -a(bc-c^2)+bc(b-c) \\
 & \qquad \underline{-a(bc-c^2)+bc(b-c)}
\end{array}
$$

71. 除法定義之擴張　依第67款所述除法之演算,其用第一回之減法時,減式中所含 a 之最高次項,必與被除數中所含 a 之最高次項相同,故第一回減得之餘數,其式中 a 之最高次數必較被除數中 a 之最高次數低,由是每一餘數,其式中 a 之最高次數,必較前一餘數中 a 之最高次數低,依是屢除,必至無餘數而後已,即有餘數,其餘數中 a 之最高次數,必較除數中 a 之最高次數低,則被除式之 a 必至不能整除.

故除法之定義,必擴張然後便.

〔定義〕 以B除A云者,求B×C=A代數式之C.或A與B×C之差,其特別文字之次數較除數B內此特別文字之次數低時,而求其C也.

〔例1〕　若以 $x+a$ 除 $x^2+3ax+a^2$,則如次.

$$
\begin{array}{r}
x+a)\,x^2+3ax+a^2\,(x+2a \\
\underline{x^2+\ ax\qquad} \\
\qquad+2ax+\ a^2 \\
\qquad\underline{+2ax+2a^2} \\
-\ a^2
\end{array}
$$

故 $(x^2+3ax+a^2)\div(x+a)=x+2a$ 餘數爲 $-a^2$ 記之如次:

$$x^2+3ax+a^2=(x+2a)(x+a)-a^2$$

又改換被除數與除數之次序,則

$$
\begin{array}{r}
a+x\ \ a^2+3ax+x^2(a+2x \\
\underline{a^2+\ ax\qquad} \\
\qquad 2ax+\ x^2 \\
\qquad\underline{2ax+2x^2} \\
-\ x^2
\end{array}
$$

故除法有餘數者,若變其被除數與除數之次序,則其結果恆不相同.是無他,第一式之所求,蓋爲以如何之式乘除數至含 x 之項止,乃能與被除數相合.而第二式之所求,乃爲以如何之式乘除數,至含 a 之項止,乃能與被除數相合,故也.

是故以一式除他式,苟兩式俱依相同之次序整列,則其求得之商恆有一定可知.

問 題 XV.

以下各題俱以後式除前式.

1. $x^4+x^2+1,\ x^2+x+1.$

2. $1+x^4+x^8,\ 1-x^2+x^4.$

3. $x^4+4x^2+16,\ x^2+2x+4.$

4. $16x^4+36x^2+81,\ 4x^2-6x+9.$

5. $x^4+2x^2+x+2,\ x^2+x+1.$

6. $2x^4-x^3+2x^2+1,\ 1-x+x^2.$

7. $x^5-4x^3+2x-4,\ 2-x.$

8. $x^6-3x^2-52,\ 2-x.$

9. $1-x+5x^3-3x^4,\ 1-2x+3x^2.$

10. $x^6+2x^5-4x^4-2x^3+12x^2-2x-1,\ x^2+2x-1.$

11. $1-4x^3+3x^4,\ (1-x)^2.$

12. $1-5x^4+4x^5,\ (x-1)^2.$

13. $35+4x-16x^2+19x^3-6x^4,\ 7+5x-3x^2.$

14. $3x^5-12x^4+17x^3-9x^2+1,\ (1-x)^3.$

15. $x^5-5x^2+5x-1,\ 1+x^2-2x.$

16. $16x^5-97x^4-84x^2+77x+8,\ 4x^2+11x+1.$

17. $1+2x^5+x^6+2x^7,\ 1+x+x^2.$

18. $x^{10}+x^5+1,\ x^2+x+1.$

19. $6x^5-7x^4y+x^3y^2+20x^2y^3-22xy^4+8y^5,\ 2x^2-3xy+4y^2.$

20. $8y^5-22xy^4+20x^2y^3+x^3y^2-7x^4y+6x^5,\ 4y^2-3xy+2x^2.$

21. $x^2-y^2-xz+yz,\ x-y.$

22. $x^2-y^2+2xz-2yz,\ x-y.$

23. $a^2-b^2+ac-bc,\ a+b+c.$

24. $x^2-y^2-z^2+2yz,\ y-z-x.$

25. $a^2-4b^2-c^2-4bc,\ 2b+c-a.$

26. $a^2+4b^2+9c^2-12bc-6ca+4ab,\ 3c-2b-a.$

27. $2a^2-2b^2-2c^2-4bc+3ca+3ab,\ a+2b+2c.$

28. $3a^2-16b^2-4c^2+20bc-11ca+8ab,\ a+4b-4c.$

29. $x^3+y^3-z^3+3xyz,\ x+y-z.$

30. $8x^3-y^3+z^3+6xyz,\ y-z-2x.$

31. $27a^3-8b^3+c^3+18abc,\ 3a-2b+c.$

32. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-c^3,\ a+b+c.$

33. $a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2,\ a+b+c.$

34. $(x+1)^3+y^3,\ x+y+1.$

35. $(x^2-yz)^3+8y^3z^3,\ x^2+yz.$

36. $(x^2-2yz)^3-27y^3z^3,\ x^2-5yz.$

37. $9a^2+6ab+b^2-4c^2-4cd-d^2,\ 3a+b-2c-d.$

38. $x^3+(4ab-b^2)x-(a-2b)(a^2+3b^2),\ x-a+2b.$

39. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b),\ a^2(b-c)+b^2(c-a)$
$+c^2(a-b).$

40. $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b),\ a^2(b-c)+b^2(c-a)$
$+c^2(a-b).$

雜 題 I.

(A) **1.** 設 $x=-1, y=0, z=1$. 問次式之數值幾何.
$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2.$

2. $3a^2-2ca-2ab,\ 2b^2+3bc+3ba,\ c^2-2ac-2bc$ 相加.

3. 證 $a^3+b^3+c^3-3abc-a(a^2-bc)-b(b^2-ca)-$
$c(c^2-ab)=0.$

4. 以 $\frac{1}{2}x+3$ 乘 $2x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$.
以 $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}xy+y^2$ 乘 $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}xy+y^2$.

5. 化 $(x+1)(x+2)(x+3)-(x-1)(x-2)(x-3)$ 爲簡式.

6. 以 $1-2x+x^2$ 除 $2-12x^5+10x^6$.

(B) **1.** 設 $a=11, b=3, c=6$ 問 $c^2+b(c+a)$ 及 $\sqrt{2bc}-a$ 之數值幾何.

2. 由 $5b^4-3ab^3+4a^2b^2$ 減 $5a^4-3a^3b+4a^2b^2$.

3. 化 $x-(1-\overline{1-x})$, $3x-\overline{7-4x}$ 及 $b-2a-\{c-a-(b-a+c)\}$ 為簡式.

4. 以 $x^2+\frac{1}{9}$ 乘 $9x^2-1$, 以 $a+b-c$ 乘 $a+b+c$.

5. 證 $2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$.

6. 以 $x+y-1$ 除 $x^3-3x^2+3x+y^3-1$.

(C) **1.** 設 $a=4$, $b=3$, $c=-2$.

求 $\dfrac{\sqrt{a^2+2bc}}{a}+\dfrac{\sqrt{b^2+ca}}{b}+\dfrac{\sqrt{c^2+ab}}{c}$ 之數值幾何.

2. $3a^2b-5ab^2+7b^3$, $2a^3-\frac{1}{2}a^2b+5ab^2-\frac{4}{5}b^3$ 相加.

3. 以 ax^2+x+a 乘 ax^2-x+a 又求 $2a+b-3c$ 之平方.

4. 化 $(x+y)^2-(x+y)(x-y)-\{x(2y-x)-y(2x-y)\}$ 為簡式.

5. 二代數式之積為 $x^6+x^5y+x^4y^2-x^3y^3+y^5$ 其一為 x^2+xy+y^2 求他之一式.

6. 證以下二式.

(1)　$a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$,

(2)　$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)+(b-c)(c-a)(a-b)=0$.

(D) **1.** 設 $a=1$, $b=2$, $c=-3$ 求以下二式之數值 $6a+3b+4c$, $a^3+b^3+c^3-3abc$.

2. 化 $3\{x-2(y-z)\}-[4y+\{2y-(z-x)\}]$ 為簡式.

3. 加如何之式於 $(a+b+c)^2$ 則其和為 $(a-b-c)^2$.

4. 以 $a-b$ 乘 a^3+b^3 而以 $a+b$ 除其結果.

5. 以 $x+z$ 除 x^3+z^3 之結果.而求以 $x+y+z$ 除 $(x+y)^3+z^3$ 之商.

6. 證

(1) $(x+y)(x-y)+(y+z)(y-z)+(z+x)(z-x)=0,$

(2) $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2(x-y)(x-z)+2(y-z)(y-x)+2(z-x)(z-y).$

(E) 1. 設 $a=3, b=4, c=5, d=6.$

求 $\dfrac{2\sqrt{(a^2+b^2)}+\sqrt[3]{(a^2+b^2-c^2+6d^2)}}{d-c+b-a}$ 之數值.

2. 化以下二式爲簡式.且以其兩結果相乘.

$4x-(y-x)-3\{2y-3(x+y)\},$

$2x-3y-4(x-2y)+5\{3x-2(x-y)\}.$

3. 證 $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ 且設 $a=1, b=-2$ 時該結果合理否.

4. 求在 $x^2-(a-b)x-ab$ 與 $x^2+(a+b)x+ab$ 之積內 x^2 之係數.

5. 以 $a+b$ 除 $(2a+3b)^2$ 及 $(3a+2b)^2$ 之差.

又以 $a-b$ 除 $(2a-3b)^3$ 及 $(3a-2b)^3$ 之和.

6. 證 $(a+b+c-d)(a+b-c+d)+(a-b+c+d)(-a+b+c+d)=4(ad+cd).$

(F) 1. 設 $a=3, b=4, c=5, d=-4.$

求 $\dfrac{(a+b)(c+d)-(b+c)(d+a)}{ab+bc-cd-da}$ 之數值.

2. 求 $(a-x)(a-\frac{1}{2}y)(a-\frac{1}{4}z)$.

3. 設以 $x+4$ 能除盡 x^2+7x+c 問 c 之數值幾何.

4. 以 $x+y-z$ 除 $x^2-y^2-z^2+2yz$ 且求在以 $x-\frac{1}{2}y$ 除 $8x^4+xy^3-y^4$ 所得之商中 x 之係數.

5. 證 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$.

6. 證 $(b-c)^2+(a-b)(a-c)=(c-a)^2+(b-c)(b-a)=(a-b)^2+(c-a)(c-b)$.

(G) 1. 化 $5x-3[2x+9y-2\{3x-4(y-x)\}]$ 爲簡式.

2. 由 $2a^2-4ab+2b^2$ 減 $6a^2-4ab+7b^2$ 並由其餘數減 $4a^2-6ab+5b^2$.

3. 以 $a+b+1$ 乘 $a^2+b^2+1-ab-a-b$.

4. 以 $a+b-2c$ 除 $a^3+b^3-8c^3+3a^2b+3ab^2$.

5. 二代數式之積爲 x^7-64x 其一爲 x^2-2x+4. 問他一式如何.

6. 證

$(1+x+x^2)(1-x+x^2)(1-x^2+x^4)(1-x^4+x^8)=1+x^8+x^{16}$,

$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)+(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)=0$.

第五編

一次方程式

72. 方程式 書等號於兩代數式之間,以表兩代數式相等,謂之方程式.相等之兩式,謂之方程式之兩節,或謂之兩邊.

方程式無論文字之值如何,其兩邊恆相等,此方程式謂之恆等方程式.然恆等方程式,通稱為恆等式.而兩式相等以文字之特別值為限者,始謂之方程式.

如 $a+a=2a$, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. 無論 a 與 b 數值如何,其式恆相等,故為恆等式.

而 $5a+2=12$, 惟 a 之值為 2 始相等,故為方程式.

〔注意〕 方程式內,有已知量及未知量二種.已知量,倘不知其算術上之數值,則以羅馬字最初之文字 a, b, c 等顯之.未知量原為所求之量,恆以羅馬字最終之文字 x, y, z 中之一顯之(倘此三者不足,可用 u, v, w 等).

73. 方程式解法 凡解方程式云者,求其能使方程式合理之未知量之值也.未知量之此等值,其合於方程式者,謂之方程式根.

74. 一次方程式 在僅有一未知量 x 之方程式內,其 x 僅為一乘方者,謂之一次方程式,x 之最高乘方為 x^2 者,謂之二次方程式.餘仿此.

本編專考究含一未知量之一次方程式.

75. 公理　解方程式須依次之公理.

(1)　加等量於等量(或同量).其和相等.

如 $a=b$ 則 $a+c=b+c$.

(2)　由等量減等量(或同量).其差相等.

如 $a=b$ 則 $a-c=b-c$.

(3)　以等量乘等量(或同量).其積相等.

如 $a=b$ 則 $ac=bc$

(4)　以等量除等量(或同量).其商相等.

如 $a=b$ 則 $a\div c=b\div c$.

在第(4)公理內.其等量不得為 0.如 $2\times0=3\times0$ 然以0除其兩邊.不得謂之 $2=3$.

76. 移項　如 $a+b=c-d$ 依公理(2).加 $-b$ 於兩邊.其式仍相等.

$$\therefore\qquad a+b-b=c-d-b,$$

$$\text{即}\qquad a=c-d-b.$$

是即將 b 項由方程式之一邊消却.同時顯於他邊.其符號由正變為負.

又加 d 於最後所得之方程式之兩邊.則依公理(1).得

$$a+d=c-d-b+d,$$

$$\therefore\qquad a+d=c-b.$$

是又將 d 項由方程式之一邊消却.同時顯於他邊.其符號由負變為正.

其他準此.由是方程式之任意項.若變其符號.則可由此邊移於彼邊.

以此邊之項移於彼邊.謂之移項.

77. 各項符號之變更 方程式中各項之符號,可悉變更,何則,依公理(3),兩邊以 -1 乘之,其式仍相等,然以 -1 乘其兩邊,與以 -1 乘其各項同,而依此乘法,則各項之符號,皆已變更故也.

78. 解法 解一次方程式之法,觀以下數例,易於明瞭.

〔例1〕 解 $8x+7=4x+27$,

移 $4x$ 與 7,則 $8x-4x=27-7$,

合其同類項,則 $4x=20$,

此兩邊以 x 之係數 4 除之,則 $x=5$.

〔例2〕 解 $5x-7=7x-15$,

移項則 $5x-7x=-15+7$,

合其同類項,則 $-2x=-8$,

此兩邊以 x 之係數 -2 除之,則 $x=4$.

〔例3〕 解 $\frac{x}{2}+2=\frac{x}{4}+\frac{5}{2}$,

以分母之最小公倍數 4 乘各項,卽通去分母得

$$2x+8=x+10,$$

移項則 $\qquad 2x-x=10-8,$

$$\therefore \qquad x=2.$$

〔例4〕 解 $\frac{1}{4}(x+1)-\frac{1}{3}(x-1)=1$,

因欲去分母,故以 12 乘之,得

$$\frac{12}{4}(x+1)-\frac{12}{3}(x-1)=12,$$

卽 $\qquad 3(x+1)-4(x-1)=12,$

$$\therefore \qquad 3x+3-4x+4=12,$$

移項,則　$3x-4x=12-3-4,$

$\therefore$　$-x=5,$

變其符號,即　$x=-5.$

〔例5〕　解　$ax+b^2=bx+a^2,$

移項,則　$ax-bx=a^2-b^2,$

即　$(a-b)x=a^2-b^2,$

以x之係數$a-b$除之,則$x=(a^2-b^2)\div(a-b)=a+b.$

〔注意〕解方程式既得其結果,而欲驗其結果之正否,則以此結果代原方程式之未知量試之.

如以5代例(1)之x,則

$$8\times5+7=4\times5+27,$$

即　$40+7=20+27.$

易知其合理.

又以$a+b$代例(5)之x,則

$$a(a+b)+b^2=b(a+b)+a^2,$$

即　$a^2+ab+b^2=ba+b^2+a^2.$

是爲恆等式.

79. 解法之次序　由以上諸例,得解一次方程式之次序如次.

先去方程式之分母,或他之用代數記號所示之運算(如第4例解括弧之類).

次凡含未知量之項,悉移於方程式之一邊,而其他之諸項,悉移於他邊.

次凡含未知量之項,悉合爲一項,而以未知量之係數除其兩邊.

如是,則得所求之根.

〔注意〕因欲學者明瞭解式,且養成其精密之思想,故宜如前例,示原方程式之變形,而明其方法.

又學者於解式各行之始,往往記以等號,欲與前行之變化連續,是大不合理,宜警戒.

80. 雜例 更舉其例如次.

〔例1〕 解 $(x-1)(x-2)+5=(x+1)^2$,

去括弧,則 $x^2-3x+2+5=x^2+2x+1$,

移項,則 $x^2-3x-x^2-2x=1-2-5$,

$\therefore$ $-5x=-6$,

以 -5除之,則 $x=\dfrac{6}{5}$.

〔例2〕 解 $3(x-1)-\{3x-(2-x)\}=5$,

去括弧,則 $3x-3-3x+2-x=5$,

$\therefore$ $3x-3x-x=5+3-2$,

$\therefore$ $-x=6$,

即 $x=-6$.

〔例3〕 解 $3x^2-1=(3x+2)(x-5)$,

去括弧,則 $3x^2-1=3x^2-13x-10$,

移項,則 $3x^2-3x^2+13x=-10+1$,

是故 $13x=-9$,

$\therefore$ $x=-\dfrac{9}{13}$.

〔例4〕 解 $a(x-a)+b(x-b)=2ab$,

去括弧,則 $ax-a^2+bx-b^2=2ab$,

移項,則 $ax+bx=a^2+2ab+b^2$,

即 $(a+b)x=(a+b)^2$,

$\therefore$ $x=(a+b)^2\div(a+b)=a+b$.

問　題　XVI.

解以下各方程式.

1. $3x+4=x+10$.

2. $x+7=4x+4$.

3. $5x-12=6x-8$.

4. $7x+19=5x+7$.

5. $3(x-2)=2(x-3)$.

6. $5(x+2)=3(x+3)+1$.

7. $x-(4-2x)=7(x-1)$.

8. $5(4-3x)=7(3-4x)$.

9. $2(x-3)=5(x+1)+2x-1$.

10. $4(1-x)+3(2+x)=13$.

11. $2(x-2)+3(x-3)+4(x-4)-20=0$.

12. $2(x-1)-3(x-2)+4(x-3)+2=0$.

13. $5x+6(x+1)-7(x+2)-8(x+3)=0$.

14. $x+\frac{2}{3}x=10$.

15. $\dfrac{x}{5}-\dfrac{x}{4}=1$.

16. $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{x-2}{3}=3$.

17. $\frac{1}{4}(x+1)-\frac{2}{3}(x-1)=3$.

18. $\frac{1}{2}(2-x)-\frac{1}{5}(5x+21)=x+3$.

19. $\frac{1}{2}(x-2)+\frac{1}{3}(x-3)+\frac{1}{4}(x-4)=10$.

20. $\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{x+2}{3}+\dfrac{x+4}{4}+8=0$.

21. $\frac{x-5}{2}-\frac{x-4}{3}=\frac{x-3}{2}-(x-2)$.

22. $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\frac{x+3}{4}=16$.

23. $2x-[3-\{4x+(x-1)\}-5]=8$.

24. $1-2\{x-3(1+x)\}=0$.

25. $(x+1)(x+2)=(x-2)(x-4)$.

26. $(x-1)(x-2)=(x-3)(x-4)$.

27. $2x^2=(x+1)^2+(x+3)^2$.

28. $3x^2=(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2$.

29. $(x-2)(x-5)+(x-3)(x-4)=2(x-4)(x-5)$.

30. $(x-1)^2+4(x-3)^2=5(x+5)^2$.

31. $5(x+1)^2+7(x+3)^2=12(x+2)^2$.

32. $(x-1)(x-4)=2x+(x-2)(x-3)$.

33. $(x-1)^3+(x-2)^3+(x-3)^3=3(x-1)(x-2)(x-3)$.

34. $\frac{x+\frac{1}{2}}{2}-\frac{2x-\frac{1}{3}}{5}+1\frac{1}{4}=0$.

35. $\frac{3x+5}{8}-\frac{21+x}{2}=5x-15$.

36. $.5x+3.75=5.25x-1$.

37. $.25x+4-.375x=.2x-9$.

38. $.15x+1.2-.875x+.375=.0625x$.

39. $1.2x-\frac{1}{5}(18x-.5)=4x+8.9$.

40. $a(x-a)=b(x-b)$.

41. $2(x-a)+3(x-2a)=2a$.

42. $\frac{1}{2}(x+a+b)+\frac{1}{3}(x+a-b)=b$.

43. $(a+b)x+(a-b)x=a^2$.

44. $(a+b)x+(b-a)x=b^2$.

45. $\frac{1}{2}(a+x)+\frac{1}{3}(2a+x)+\frac{1}{4}(3a+x)=3a$.

46. $\frac{xa}{b}+\frac{xb}{a}=a^2+b^2$.

47. $(a+bx)(b+ax)=ab(x^2-1)$.

48. $(a^2+x)(b^2+x)=(ab+x)^2$.

49. $a(x+a)+b(b-x)=2ab$.

50. $(x+a+b)^2+(x+a-b)^2=2x^2$.

51. $(x-a)(x-b)+(a+b)^2=(x+a)(x+b)$.

52. $(x+a+b+c)(x+a-b-c)=(x-a-b+c)(x-a+b-c)$.

53. $ax(x+a)+bx(x+b)=(a+b)(x+a)(x+b)$.

54. $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c)$.

第六編

一次方程式之問題

81. 問題 本編專考究一次方程式之問題.

問題之中,有已知量與未知量兩種,以其所固有之關係連絡,則未知量之數值,即可由此等關係求出.

解問題之法,在將已知量與未知量之關係,用代數記號表之(即方程式).如是,其所得方程式之根,即爲所求未知量之值.

82. 一次方程式之問題 本編之問題,單爲僅有一未知量,且其已知量與未知量之關係,在代數上宜以一次方程式顯者.

舉其問題之例如次,

〔例1〕 有某數,其數之二倍,較其數之二分之一多27,問某數幾何.

設x爲某數,則其二倍爲$2x$,其二分之一爲$\frac{x}{2}$.

依題意. $2x$較$\frac{x}{2}$大27

故得方程式. $$2x=\frac{x}{2}+27$$

去分母,即 $$4x=x+54$$

移項,則 $$4x-x=54$$

即 $$3x=54$$

$$\therefore\quad x=18$$

故所求之數爲18.

〔例2〕 有甲乙二人.甲有銀 400 圓.乙有銀 75 圓.問甲與乙若干.則甲所有爲乙所有之四倍.

設 x 爲甲與乙之圓數.如是,則甲所有爲 $400-x$ 圓.乙之所有爲$75+x$圓.而比較其所有數,則甲爲乙之四倍.故得次之方程式.

$$400-x=4(75+x)$$

即 $$400-x=300+4x$$

移項,則 $$-x-4x=300-400$$

即 $$-5x=-100$$

以 -5 除之,則 $$x=20$$

故甲與乙之數爲20圓.

〔注意〕 x 常顯某數量.而一問題之各量,皆以同一之單位顯之.如本例銀皆以圓計是也.

〔例3〕 有一綫長20尺.分爲二部分.其一部分爲他部分之二倍.問各部長幾何.

設小部分之尺數爲 x.而合二部分爲20尺.故大部分之尺數爲 $20-x$.依題意,大部分爲小部分之二倍.故得方程式.

$$20-x=2x$$

$\therefore$ $$20=3x$$

即 $$3x=20$$

是故 $$x=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}$$

故一部分爲 $6\frac{2}{3}$.他之一部分爲 $13\frac{1}{3}$.

〔例4〕 某人有貨幣十二個.此貨幣中,有五圓金貨

若干.壹圓銀貨若干.而此貨幣之價.合計28圓.問各種貨幣之數幾何.

設x為五圓金貨之數.則$12-x$為壹圓銀貨之數.五圓金貨之價為$5x$圓.壹圓銀貨之價.為$12-x$圓而二種貨幣之價.合計28圓.故得次之方程式.

$$5x+(12-x)=28$$

即 $$5x-x=28-12$$

故 $$4x=16$$

$$\therefore \quad x=4$$

故為五圓金貨四個.壹圓銀貨八個.

〔例5〕 有父子.父之年六倍於子之年.而自今四年之後.父之年四倍於子之年.問父子之年各幾何.

設x為子之年數.則父之年數為$6x$.又自今四年之後.子之年為$x+4$,父之年為$6x+4$.

茲按題意. $$6x+4=4(x+4)$$

即 $$6x+4=4x+16$$

是故 $$6x-4x=16-4$$

即 $$2x=12$$

$$\therefore \quad x=6$$

由是子為6年.父為36年.

〔例6〕 有甲乙二工.若個人獨做一工程.甲12時間完成.乙4時間完成.今甲做此工程.經若干時以乙代之.共6時間完成.問甲做工之時間幾何.

設x為甲做工時間之數.則$6-x$為乙做工時間之數.

甲做此工程12時間完成.故一時間.祇做其工程之

$\frac{1}{12}$.

故甲所做之工,為此工程之$\frac{x}{12}$.

又乙做此工程4時間完成,故一時間祇做其工程之$\frac{1}{4}$,

故乙所做之工程為此工程之$\frac{1}{4}(6-x)$,

然甲與乙共,始完成此工程,故得次之方程式.

$$\frac{1}{12}x+\frac{1}{4}(6-x)=1$$

以12乘之,則得　$x+3(6-x)=12$

即　$x+18-3x=12$

移項,　$-2x=-6$

$\therefore$　$x=3$

故甲之做工時間為3時間.

〔例7〕　求鐘之兩針,在三時與四時間相重之時刻.

設三時後經 x 分,為兩針相重之時刻.

兩針在三時上,時針在分針前15分.

故分針轉至 x 分時,時針漸漸至 $x-15$ 分.

然分針之速度,為時針速度之十二倍,故無論何時,分針迴轉之間隔,恆為時針迴轉間隔之十二倍.

故　$x=12(x-15)$

即　$x=12x-180$

$\therefore$　$11x=180$

即　$x=\frac{180}{11}=16\frac{4}{11}$

故所求之時間為3時$16\frac{4}{11}$分.

問題 XVII.

(1) 有二數,其和為200,其差為2,問二數各幾何.

(2) 有二數,其和為56,其差為20,問二數各幾何.

(3) 分25為二部分,使其差為5.

(4) 分100為二部分,使其差為45.

(5) 問加40於何數,其和為原數之三倍.

(6) 問由何數減14,其差為原數之三分之一.

(7) 有二數,其差為15,其一數為他數之四倍,問二數各幾何.

(8) 二數之差為10,其一數為他數之三倍,問二數各幾何.

(9) 二數之和為38,其一數較他數之二倍多2,問二數各幾何.

(10) 二數之和為31,其一數較他數之半少2,問二數各幾何.

(11) 某數之四分之一,較其五分之一多2,問某數幾何.

(12) 某數之三分之一,較其七分之一多80,問某數幾何.

(13) 有某數,由其四倍減85,其餘數與由35減某數之餘數等,問某數幾何.

(14) 有某數,由其八倍減7,其餘數與由27減去某數之餘數等,問某數幾何.

(15) 某數之四分之一與五分之一之差之四倍,較其三分之一與七分之一之差多4,問某數幾何.

(16) 某數之七分之一與八分之一之差之五十倍.較某數之半分多44.問某數幾何.

(17) 分 100 爲二部分.使其一部分之三倍與他一部分之五倍之和.爲410.

(18) 分 100 爲二部分.使其一部分之二倍.等於他部分之三倍.

(19) 二數之差爲20.其一數之半分.等於他一數之五分之一.問二數各幾何.

(20) 二數之和爲86.其差爲大數之半分.問二數各幾何.

(21) 有甲乙二人.甲有銀 100 圓.乙有銀20圓.問甲與乙若干圓.則乙所有爲甲所有之半.

(22) 有一壇.長比廣長八丈.若長與廣各增二丈.則其面積增六十方丈.問此壇之長與廣各幾丈.

(23) 甲乙二人.共有金80圓.若甲由乙再取其原有金之一倍.則甲之所有金.爲乙之所有金之三倍.問甲原有金幾何.

(24) 有甲,乙,丙三人.共有金若干圓.甲之所有金.爲總額之半.乙之所有金.爲總額之三分之一.丙之所有金爲50圓.問甲與乙之所有金各幾何.

(25) 有甲乙二人.共有銀75圓.甲之所有較乙之所有多 5 圓.問各銀幾何.

(26) 甲,乙,丙三人之所有金.合計360圓.甲較乙多5圓.乙較丙多20圓.問三人之所有金各幾何.

(27) 甲,乙,丙三人之所有金.合計65圓.甲較乙多15圓.乙較丙少 5 圓.問三人之所有金各幾何.

(28) 甲,乙,丙三人之所有金,合計 100 圓.甲之所有金,較乙之所有金少 5 圓.丙之所有金,等於甲,乙二人所有金之和.問三人之所有金各幾何.

(29) 有銀 300 圓.分給男子 10 人,女子 20 人,兒童 40 人.男子一人之所得,較兒童一人之所得多 7 角 5 分.女子一人之所得,等於兒童二人之所得.問當各得幾何.

(30) 有銀 15 圓.分給男子三人,女子五人,兒童二十人.男子一人之所得,較女子一人之所得多壹圓.兒童一人之所得,爲女子一人所得之半.問當各得幾何.

(31) 有父子二人.父之年爲 40,子之年爲 10.問父年爲子年之三倍時,爲今後若干年.

(32) 有甲乙二人.甲之年爲 70,乙之年爲 50.求甲年二倍於乙年之時.

(33) 有父子二人.問其年齡.父年當子年之三倍而今後 10 年.父年當子年之二倍.問父子之年各幾何.

(34) 或問年歲於某.某答曰.我有一女.今後五年.我年四倍於我女之年.今後十年.我年三倍於我女之年.問某之年幾何.

(35) 有金若干圓.分給於甲,乙,丙三人.甲與乙之所得,合計 60 圓.甲與丙之所得,合計 65 圓.乙與丙之所得,合計 75 圓.問三人之所得各幾何.

(36) 甲,乙,丙,丁四人.各有金若干圓.而甲與乙之所有金之和爲 49 圓.甲與丙之所有金之和爲 51 圓.乙與丙之所有金之和爲 53 圓.甲與丁之所有金之和爲 47 圓.問四人之所有金各幾何.

(37)　以銀二圓四角買牛肉.若牛肉之價廉二成.則能多買六斤.問牛肉每斤之價幾何.

(38)　以銀四圓八角買鷄卵.若其價貴二成.則鷄之之數較前少80個.問鷄卵二十個之價幾何.

(39)　某人臨終時.遺其財產於妻及兒及女.仍從遺命.妻取其遺產之半分.兒取其三分之一.女取其餘.但知女之所得.爲金2000圓.問遺產之額幾何.

(40)　某人臨終時.遺其財產於長子次子末子三人.仍從遺命分配.長子之所得.爲次子所得之二倍.次子之所得.爲末子所得之二倍.而長子所得與末子所得之差爲750圓.問所得各幾何.

(41)　銀包中入銀貨28個.其價合計22.20圓.其中若干個爲壹圓銀貨.而半圓之銀貨之數.爲壹圓銀貨數之五分之一.其餘爲五仙銀貨.問各貨幣之數幾何.

(42)　銀包中入銀貨36個.其價合計11圓.其中若干個.爲壹圓銀貨.而半圓銀貨之數.爲壹圓銀貨數之三倍.其餘爲五仙銀貨.問各貨幣之數幾何.

(43)　問鐘之兩針.在五時與六時間相重之時.

(44)　問鐘之兩針.在九時與十時間成直角之時.

(45)　二數之差爲3.其平方之差爲99.問二數各幾何.

(46)　酒精與水混合.酒爲全量之半分加25升.水爲全量三分之一減5升.問酒與水各幾升.

(47)　有兵一千人.屯在某地.備60日間之糧.然10日後.急增屯駐之兵.故所備之糧僅支20日.問所增之兵數幾何.

(48) 有一工作.做36日.豫約做工之日給洋 5 角.停工之日轉罰洋 3 角.至期日之終.共得洋11.60圓.問工之日數幾何.

(49) 有金若干圓.分給甲,乙,丙三人.甲取較全數之三分之一多10圓.乙取較甲取後餘數之半分多15圓而丙取其餘.得金70圓.問金若干圓爲幾何.

(50) 一銀包中存銀貨若干圓.今分給甲,乙,丙三人.甲取較全數之半分多一.乙取較餘數之半分多一.丙取其餘爲六.問銀包中所存之銀貨幾何.

(51) 有金若干圓.今取比半額多20圓.次取出比殘額三分之一多30圓.次又取出比殘額五分之一多40圓.更無殘餘.問金若干圓爲幾何.

(52) 某酒館.因宴會備每人每份二十四人之筵席而筵席之定價.每份當得利一成二分五釐.然其中有 4 人不到其餘20人.依通常之定價支給.故某酒館尚虧本一圓.問每份筵席之定價幾何.

(53) 有甲乙二工.做一工程甲30日完成乙20日完成今甲先做此工程.若干日之後.以乙代之然全體工程.始終25日完成.問甲做工之日數幾何.

(54) 有甲乙二工.甲20日完成之工程.乙30日完成.今甲先做此工程.若干日之後.以乙代之.乙比甲多做10日.此工程始完成.問甲做工之日幾何.

(55) 有兵士一隊.擺中空之方陣二個.但一爲三列.一爲五列.而其一方陣.恰能容他之一方陣.且兩方陣之人數相等.問兵士之人數幾何.

第七編

一次之聯立方程式

（卽一次之多元方程式）

83. 聯立方程式 一方程式有兩未知量,則適合其方程式之兩未知量之值,俱無定限.

如在 $x-3y=24$ 式內,設 $y=0$,則 $x=24$,設 $y=1$,則 $x=27$,設 $y=2$,則 $x=30$,此等數値俱合於此方程式.故設 y 等於 k,則 $x=24+3k$,而 k 爲任意之數,故 y 及 x 亦可爲任意之數.故無定限.

適合於各方程式之兩未知量之値,雖無定限,然有兩方程式時,則此兩未知量之値,必適合於兩方程式然後可.詳而言之,卽兩未知量之值,當各有限.

〔定義〕 未知量之數値,適合於二以上諸方程式,則此等方程式謂之聯立方程式.

84. 二元方程式之次數 含兩未知量 x 及 y 之方程式,其次數以式中 x 及 y 之最高次項之次數爲準.

同樣,含三未知量之方程式,其次數以式中 x, y, z 之最高次項之次數爲準.

如 $4x+5y=20$ 爲一次方程式.$3x^2-2xy=7$ 爲二次方程式.又 $ax^2+by^2+c=0$ 與 $x+y=xy$ 亦爲二次方程式.

85. 一次聯立方程式之解法 本編專論解一次聯立方程式之法.

如聯立方程式爲含兩未知量之任意兩聯立方程

式.則由此兩聯立方程式消去一未知量,得僅含一未知量之第三方程式.更由第三方程式求其所含一未知量之數值.

86. 加減消去法 解一次之兩聯立方程式之法如次.

設含兩未知量之兩聯立方程式爲

$$3x+5y=22 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$7x-4y=20 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以 7 乘第 (1) 方程式之兩邊, 3 乘第 (2) 方程式之兩邊,則此兩方程式變爲

$$21x+35y=154$$

$$21x-12y=60$$

因此兩方程式內, x 之係數相等,故若由第一方程式之各邊減第二方程式中相當之邊,則消去 x 得僅有 y 之第三方程式.

即 $$47y=94$$

由是 $$y=2$$

以 y 所得之數值,代入第 (1) 方程式,則得

$$3x+10=22$$

故 $$3x=22-10$$

即 $$x=4$$

上法爲先求 y, 後求 x 者,若欲先求 x, 後求 y. 則以 4 乘第 (1) 方程式, 5 乘第 (2) 方程式,則兩方程式變爲

$$12x+20y=88$$

$$35x-20y=100$$

因此兩方程式內, y 之係數,其絕對值相等而符號

相反.故以第二方程式之各邊加於第一方程式相當之邊.則消去 y.得僅含 x 之第三方程式.

即　$47x=188$

故　$x=4$

以 x 所得之數值代入兩方程式中之(1)式.即得 y 之數值.

依前例.得解兩一次聯立方程式之法如次.

〔解法〕因欲兩方程式內有一未知量係數之絕對值相等.故以適宜之數乘各方程式.並將兩方程式依加法或減法.去其一未知量.得僅含一未知量之第三方程式.此第三方程式.可用第五編之法解之.

依上法去其未知量.謂之消法.

87. 例解　更舉數例如次.

〔例1〕解　$3x+2y=13, 7x+3y=27$

以 3 與 2 乘此兩方程式.則變爲

$$9x+6y=39,$$

及　$14x+6y=54$

由第一減第二則

$$-5x=-15,$$

$\therefore$　$x=3$

以 x 之此數值代入方程式之第一式內.

則　$9+2y=13,$

$\therefore$　$y=2.$

故 $x=3, y=2$ 爲所求之數值.

〔例2〕解　$2x-3y+14=0, -4x+5y=$

茲移爲　$2x-3y=-14,$

及 $$-4x+5y=26.$$

以2乘第一方程式,則

$$4x-6y=-28.$$

加於第二方程式內,則

$$-y=-2,$$

即 $$y=2.$$

然由第一方程式得

$$2x-6=-14,$$

即 $$2x=-14+6=-8,$$

$\therefore$ $$x=-4.$$

由是所求之數値爲

$$x=-4,\ y=2.$$

〔例3〕 解 $\frac{5x}{3}-\frac{y}{4}=9,\ 6x-\frac{7y}{4}=29,$

因欲去此兩方程式之分母,故以12與4乘之得

$$20x-3y=108,$$
$$24x-7y=116.$$

在此方程式內以7乘第一式,以3乘第二式,則得

$$140x-21y=756,$$
$$72x-21y=348.$$

依減法 $$68x=408;$$

$\therefore$ $$x=6.$$

然 $$120-3y=108,$$

故 $$y=4.$$

問題 XVIII.

解以下各方程式.

1. $7x+4y=1,\ 9x+4y=3.$

2. $3x+5y=19,\ 5x-4y=7.$

3. $x-11y=1,\ 111y-9x=99.$

4. $8x-21y=5,\ 6x+14y=-26.$

5. $34x-15y=4,\ 51x+25y=101.$

6. $36x-15y=93,\ 65x+17y=113.$

7. $19x+85y=350,\ 17x+119y=442.$

8. $8x-11y=0,\ 25x-17y=139.$

9. $3x-11y=0,\ 19x-19y=8.$

10. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1,\ \frac{x}{4}-\frac{2y}{3}=3.$

11. $\frac{x}{3}-\frac{y}{6}=\frac{1}{2},\ \frac{x}{5}-\frac{3y}{10}=\frac{1}{2}.$

12. $\frac{x}{3}+3y+14=0,\ \frac{x}{5}+5y+4=0.$

13. $\frac{x}{5}+5y=-4,\ \frac{y}{5}+5x=4.$

14. $\frac{x+2}{3}+4y=2,\ \frac{y+11}{11}-\frac{x+1}{2}=1.$

15. $\frac{2x+3y}{5}+\frac{y+6}{7}=2,\ \frac{2x-5y}{3}+\frac{x+7}{4}=1.$

16. $4x-\frac{1}{3}(y+3)=5x-3,\ 2y+\frac{1}{3}(2x-5)=\frac{21y+37}{6}.$

17. $\frac{x}{2}-\frac{1}{3}(y-2)-\frac{1}{4}(x-3)=0,$

$x-\frac{1}{2}(y-1)-\frac{1}{3}(x-2)=0.$

18. $\frac{x-2}{3}-\frac{y+2}{4}=0,\ \frac{2x-5}{5}-\frac{11-2y}{7}=0.$

19. $\frac{x-2}{3}-\frac{y+5}{2}=0,\ \frac{2x-7}{3}-\frac{13-y}{16}=0.$

88. 代入消去法 86款解兩方程式之法,可代以次之方法.

〔例〕解 $3x-5y=2,\ 5x-2y=16.$

由第一方程式得 $3x=5y+2.$

故 $$x=\frac{1}{3}(5y+2)$$

以x之比值,代入第二方程式.

$$\frac{5}{3}(5y+2)-2y=16.$$

是爲僅含一未知量之一次方程式.

解之則得$y=2$. 因$y=2$.

故 $$x=\frac{1}{3}(5y+2)=\frac{1}{3}(10+2)=4.$$

比較消去法 本例亦可依次方解之.

由第一方程式得$3x=5y+2$. 即$x=\frac{1}{3}(5y+2)$.

又由第二方程式得$5x=2y+16$. 即$x=\frac{1}{5}(2y+16)$.

故令此兩x之値相等,則得

$$\frac{1}{3}(5y+2)=\frac{1}{5}(2y+16).$$

由是得$y=2$. 如前可得$x=4$.

89. 雜例 以下所示,雖爲聯立方程式之特例,然代數式中,時時遇之.

〔例1〕 解 $57x+25y=3772,\ 25x+57y=1148.$

在本例如用86款之法直計其數未免繁雜故因此兩方程式其 x 與 y 之係數原爲彼此互換者故將此兩方程式相加或相減其 x 與 y 之係數恆相等卽如次.

兩方程式相加 $82x+82y=4920.$

$\therefore \quad x+y=60.$

兩方程式相減 $82x-32y=2624.$

$x-y=82$

而由 $x+y=60,\ x-y=82$ 兩方程式可直得 $x=71,\ y=-11.$

〔例2〕 解 $(x-1)(y-2)-(x-2)(y-1)=-2$

$(x+2)(y+2)-(x-2)(y-2)=32$

解括弧則第一方程式爲

$$xy-y-2x+2-xy+2y+x-2=-2,$$

卽 $$-x+y=-2 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

第二方程式爲

$$xy+2x+2y+4-xy+2x+2y-4=32$$

卽 $$4x+4y=32 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以4除此方程式之各項則

$$x+y=8 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1)與(3)相加 $2y=6 \quad \therefore \quad y=3.$

由(3)減(1) $2x=10, \quad \therefore \quad x=5.$

〔例3〕 解 $\frac{3}{x}+\frac{4}{y}=8,\ \frac{5}{x}+\frac{6}{y}=13.$

此兩方程式可視爲含未知量 $\frac{1}{x}$ 與 $\frac{1}{y}$ 之一次聯立方程式.

故此兩方程式以5與3乘之,則得

$$\frac{15}{x}+\frac{20}{y}=40,$$

及
$$\frac{15}{x}+\frac{18}{y}=39.$$

故依減法 $\frac{2}{y}=1,\quad \therefore\quad y=2.$

然後依第一方程式 $\frac{3}{x}+\frac{4}{2}=8,$

$$\frac{3}{x}=8-2=6,$$

$$\therefore\qquad 3=6x,\ 即\ x=\frac{1}{2}.$$

故 $x=\frac{1}{2}$, $y=2$ 爲所求之數值.

〔例4〕 解 $ax+by=2ab$, $bx-ay=b^2-a^2$.

以 a 乘第一方程式,b 乘第二方程式,則得

$$a^2x+aby=2a^2b,$$

及
$$b^2x-aby=b^3-a^2b.$$

由是依加法 $a^2x+b^2x=a^2b+b^3,$

即
$$(a^2+b^2)x=b(a^2+b^2)$$

$$\therefore\qquad x=b.$$

以 x 之數值代入原方程式之第一式,得

$$ab+by=2ab.$$

$$\therefore\qquad y=a$$

故 $x=b$, $y=a$ 爲所求之值.

〔例5〕 解 $5x+3y-13=3x-2y+7=2x+6y-4$

$$5x+3y-13=3x-2y+7$$

故
$$2x+5y=20\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又　　$3x-2y+7=2x+6y-4$

故　　$x-8y=-11$ ……………………(2)

依86款之法解(1)與(2),則得$x=5, y=2$.

問　題　XIX.

解以下各方程式

1. $17x+23y=86,\ 23x+17y=74.$

2. $15x+19y=18,\ 19x+15y=50.$

3. $51x-14y=287,\ 14x-51y=-157.$

4. $29x+85y=31,\ 13x-43y=95.$

5. $x+2y=3,\ 1.7x+.01y=.345.$

6. $5x+y=2.75,\ 3.4x+.02y=1.75.$

7. $3x-4y+2=5x-6y-2=7x+2y+4.$

8. $4x-6y-3=7x+2y-4=-2x+3y+24.$

9. $3x+\frac{7}{2}y-2=11y-\frac{2x}{5}=20.$

10. $5x+\frac{y}{5}-1=3y+\frac{x}{3}-2=4.$

11. $\frac{7+x}{3}=\frac{9+y}{5}=\frac{11+x+y}{7}.$

12. $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{x+y}{4}.$

13. $(x+1)(y+5)=(x+5)(y+1).$
$xy+x+y=(x+2)(y+2).$

14. $xy-(x-1)(y-1)=6(y-1),\ x-y=1.$

15. $\frac{9}{x}-\frac{4}{y}=2,\ \frac{18}{x}+\frac{8}{y}=10.$

16. $\frac{2}{x}+\frac{5}{y}=7,\ \frac{3}{x}-\frac{2}{y}=11.$

17. $\frac{3}{x}+\frac{4}{y}=3,\ \frac{6}{x}-\frac{2}{y}=1.$

18. $\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=9,\ \frac{7}{x}-\frac{2}{y}=5.$

19. $x+\frac{3}{y}=\frac{7}{2},\ 3x-\frac{2}{y}=\frac{26}{3}.$

20. $2x-\frac{3}{y}=3,\ 8x+\frac{15}{y}+6=0.$

21. $\frac{3}{x}-3y=8,\ \frac{7}{x}+y=5.$

22. $\frac{7}{x}-9y=57,\ \frac{5}{x}+2y=7.$

23. $x+y=2a,\ x-y=2b.$

24. $x-\frac{5}{y}+7=3x-\frac{9}{y}-11=7x+21.$

25. $ax+by=(a+b)^2,\ ax-by=a^2-b^2.$

26. $ax+by=a^2+b^2,\ bx+ay=2ab.$

27. $x-y=a-b,\ ax-by=2a^2-b^2.$

28. $ax+by=a^2-b^2,\ bx+ay=a^2-b^2.$

29. $b^2x-a^2y=0,\ bx+ay=a+b.$

30. $x+y=a+b,\ ax-by=b^2-a^2.$

31. $bx-ay=b^3,\ ax-by=a^3.$

32. $ax-by=a^2+b^2,\ x+y=2a.$

33. $a^2x+b^2y=c^2,\ a^3y+b^3y=c^3.$

34. $ax+by=1,\ bx+ay=1$

35. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1,\ \frac{b}{x}+\frac{a}{y}=1.$

36. $(a+b)x+(a+c)y=a+b,\ (a+c)x+(a+b)y=a+c.$

37. $(a+b)x-(a-b)y=3ab,\ (a+b)y-(a-b)x=ab.$

90. 含三未知量以上之聯立方程式 有含三未知量之三聯立方程式,則於三方程式中由各相異兩方程式之二組(第一與第二,及第一與第三,或第一與第二,及第二與第三,或第一與第三,及第二與第三).消去其中之一未知量.由是得含兩未知量之兩方程式.更由含兩未知量之兩方程式.消去其第二之未知量.

同樣,有含四未知量以上之四以上諸方程式.則由各相異兩方程式之三以上諸組.消去其中之一未知量.更由所生之方程式.取其兩兩相異之組.消去其第二之未知量.以下如法逐次消去其未知量.

〔例1〕 解以下三方程式.

$$2x+4y+z=7 \cdots\cdots(1)$$
$$3x+2y+2z=8 \cdots\cdots(2)$$
$$5x-4y+4z=9 \cdots\cdots(3)$$

由此三方程式之(1)與(2)及(1)與(3)兩組消去z.

則 $$x+6y=6 \cdots\cdots(4)$$
$$3x+20y=19 \cdots\cdots(5)$$

由(4)與(5)得$x=3,\ y=\frac{1}{2}$.以是代入原方程式之第一式.則

$$6+2+z=7, \qquad z=-1.$$

故$x=3,\ y=\frac{1}{2},\ z=-1$爲所求之數值.

〔例2〕 解以下三方程式.

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=5,$$

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3,$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=1.$$

第一及第二兩方程式相加,則

$$\frac{2}{z}=8, \quad \therefore \quad z=\frac{1}{4}.$$

第一與第三兩方程式相加,則

$$\frac{2}{y}=6, \quad \therefore \quad y=\frac{1}{3}.$$

第二與第三兩方程式相加,則

$$\frac{2}{x}=4, \quad \therefore \quad x=\frac{1}{2}.$$

〔例3〕 解以下四方程式.

$$u+x+y+z=10 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$u+2x+3y+4z=30 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$5u-4x+3y-2z=-2 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$2u+3x-5y-z=-11 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

由此四方程式之(1)與(2),(1)與(3),及(1)與(4)三組消去z,則

$$3u+2x+y=10,$$

$$7u-2x+5y=18,$$

$$3u+4x-4y=-1.$$

如前解之,即得

問題 XX.

1. $y+z=14, z+x=18, x+y=24.$
2. $y+z=2a, z+x=2b, x+y=2c.$

3. $x+y+z=1,\ 2x+3y+z=4,\ 4x+9y+z=16.$

4. $5x+3y+7z=2,\ 2x-4y+9z=7,\ 3x+2y+6z=3.$

5. $2x-y+z=4,\ 5x+y+3z=5,\ 2x-3y+4z=20.$

6. $x+2y-3z=6,\ 2x+4y-7z=9,\ 3x-y-5z=8.$

7. $x+2y+3z=4,\ 2x+3y+4z=6,\ 3x+4y+4z=8.$

8. $3x+2y+5z=21,\ 2x-3y+4z=11,\ x+3y+7z=20.$

9. $3x-2y+4z=5,\ 3x+5y-3z=7,\ x+3y-2z=2.$

10. $x+y+z=1,\ \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+4z=1,\ \frac{5x}{3}+\frac{3y}{4}-\frac{z}{2}=0.$

11. $ax+by=1,\ by+cz=1,\ cz+ax=1.$

12. $cy+bz=bc,\ az+cx=ca,\ bx+ay=ab.$

13. $u+x+y+z=4,\ u+2x+3y+4z=10,$

$4u-3x+2y-z=2,\ u+\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=2\frac{1}{12}.$

14. $z-y-x-u=2,\ u+\frac{x}{2}+\frac{y}{5}+\frac{z}{10}=4,$

$x-u+\frac{z}{2}-y=1,\ 10u+5x+2y-z=20.$

第八編

一次聯立方程式之問題

91. 問題 本編專論一次聯立方程式之問題,含二以上諸未知量,且已知量與未知量之關係,宜用一次方程式顯者,其問題之例如次.

第六編所載之問題雖多含兩未知量,然其所得之關係,極其單簡,故其中之一未知量易由他一未知量求出,故但作含一未知量之方程式,由是求得一未知量,則他未知量自易於求.本編則有兩方程式始能求.

今舉一次聯立方程式之問題如次.

〔例1〕 有二數,其大者較小者之二倍多3,其大者之二倍較小者多27,問二數各幾何.

設 x 爲大數,y 爲小數,依題意

$$x-2y=3 \text{ 及 } 2x-y=27.$$

以2乘第一方程式,則

$$2x-4y=6.$$

由第二方程式之兩邊減此方程相當之兩邊,則

$$3y=21 \qquad \therefore\ y=7$$

然依第一方程式,

$$x=3+2y=3+14=17$$

故二數爲17與7.

〔例2〕 有兩位數,其數等於兩數字和之七倍,而十位數較單位數多4,問此數幾何.

設 x 爲十位之數字.y 爲單位之數字.則此數等於 $10x+y$, 因十位之 x, 原爲 10 之 x 倍故也.

又數字之和爲 $x+y$

$$10x+y=7(x+y)$$

卽 $$10x+y=7x+7y$$

$\therefore$ $$3x=6y \qquad \text{卽} \quad x=2y$$

又 $$x=y+4$$

是故 $$2y=y+4 \qquad \text{卽} \quad y=4$$

$\therefore$ $$x=8$$

故所求之數爲 84.

〔例 3〕 某分數之分子加 1.則等於 $\frac{1}{2}$.其分母增 1.則等於 $\frac{1}{3}$.然則其分數如何.

設分數之分子爲 x.分母爲 y.按題意得

$$\frac{x+1}{y}=\frac{1}{2} \text{ 及 } \frac{x}{y+1}=\frac{1}{3}$$

以 y 乘第一方程式得　$x+1=\frac{y}{2}$

以 $y+1$ 乘第二方程式得　$x=\frac{1}{3}(y+1)$

將此兩方程式相當之兩邊相減得

$$1=\frac{y}{2}-\frac{1}{3}(y+1)$$

由是得 $y=8$. 而因 $y=8$. 故

$$x=\frac{y}{2}-1=4-1=3$$

故分數爲 $\frac{3}{8}$.

〔例 4〕 有一工程.男子一人,與兒童一人共做.15 日

完成.男子七人兒童九人共做2日完成.然則男子一人獨做.幾日完成.

設x爲男子一人完成之日數.y爲兒童一人完成之日數.

如是.男子一人.每日做其工程之$\frac{1}{x}$,兒童一人每日做其工程之$\frac{1}{y}$.

按題意.男子一人.兒童一人.每日做其工程之$\frac{1}{15}$.

故 $$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{15}$$

又男子七人.兒童九人.每日做其工程之$\frac{1}{2}$

故 $$\frac{7}{x}+\frac{9}{y}=\frac{1}{2}$$

以9乘第一方程式.用第二方程式減之.得

$$\frac{9}{x}-\frac{7}{x}=\frac{9}{15}-\frac{1}{2}$$

即 $$\frac{2}{x}=\frac{1}{10}\quad 即\quad \frac{1}{x}=\frac{1}{20}$$

$$\therefore\qquad x=20$$

即男子一人獨做此工程.20日當完成.

問題 XXI.

(1) 有甲,乙二人,共有銀50圓.而甲費其所有之半分.乙費其所有之三分之二.則共有銀20圓.然則各有銀幾何.

(2) 有兩位之數.若以9加之其數字適相反.則兩數字之差必爲1.求證.

(3) 某人買牝牛8匹,羊50匹,共費銀225圓.今賣之,牝牛獲利二成,羊獲利一成,共成得銀$257\frac{1}{2}$圓.然則牝牛與羊各一匹之價幾何.

(4) 有貨物28000斤,以荷車與運送車二種載之.需荷車15輛與運送車12輛,或荷車24輛,運送車8輛.然則荷車與運送車之載量各幾何.

(5) 有甲,乙二工共做一工程,30日成就.今甲,乙共做,12日後,乙因他事休業,僅甲一人獨做,後經24日成就.然則一人獨做各幾日成就.

(6) 某分數之分子增1,並由分母減1,則其分數之數值爲1.又分子增分母,並由分母減分子,則其分數之數值爲4.問此分數如何.

(7) 有某分數,四倍其分子,並增3於分母,其分數爲原分數之二倍.又增2於分子,並四倍其分母,則其分數爲原分數之半.問原分數如何.

(8) 某書之第一版紙數600頁,分爲上下兩册.然其第二版下册之紙數省去四分之一,上册之紙數增30頁,於是上下兩册之紙數相等.然則第一版上下各册之紙數如何.

(9) 有甲,乙二人,各有金若干圓.今甲由乙受取10圓,則其所有金甲二倍於乙.又乙由甲受取10圓,則其所有金乙三倍於甲.然則甲乙之所有金各幾何.

(10) 某農夫賣其收穫之小麥3斗,燕麥5斗,得銀18.75圓.又在相同之市場,賣小麥5斗,燕麥3斗,得銀19.25圓.然則小麥1升之價幾何.

(11) 有三矩形,其面積皆相等,第二較第一之長長

6 步.幅狹 4 步.又第三較第一之長長 8 步.幅狹 5 步.然則其面積如何.

(12) 有甲,乙二工.共做一工程.15 日成就.今甲,乙共做.6 日後.甲因他事休業.僅乙一人獨做.其後更經 24 日成就.然則甲一人獨做此工程當幾日成就.

(13) 某人有股票二種共若干枚.每枚之額面.俱爲百圓.一種年息三分五釐.一種年息四分.而依此兩種股票.一年間獲利 120 圓.今年息三分五釐者每股賣 108 圓.年息四分者.每股賣 120 圓.共得 3672 圓.問各種股票之金額.

(14) 有兩位之數.若其數等於兩數和之七倍.則其兩數字中之一字.必等於他一字之二倍.求證.

(15) 有兩位之數.其數等於兩數字和之四倍.求其一切相當之數.

(16) 有銀 1000 圓.分配甲,乙,丙,丁四人.乙之所得爲甲所得之半.丙之所得.較丁之所得多甲所得之三分之一.又乙之所得增 100 圓.等於丙丁二人所得之和.然則四人之所得各幾何.

(17) 有兩位之數.其數字之一.等於他數字之兩倍.若倒轉其數字之位置.則其所得之數較原數多 36.問此數如何.

(18) 有兩個兩位之數.其一數之兩數字.爲他一數兩數字之倒置者.而此兩數之和爲 99.其差爲 45.問各數字如何.

(19) 有某分數.其分母與分子之差爲 12.而分子分母各增 5.則其分數等於 $\frac{3}{4}$.問某分數如何.

(20) 技工十人助手八人每日之工錢為4.44圓.而技工四人之工錢較助手六人之工錢多12分.然則助手一人之工錢如何.

(21) 某人有銀貨十個.其價為一圓.而其種類為二角,一角,五仙.今以五仙之銀貨與一仙之銅貨換.以一角之銀貨與五仙之銀貨換.則其數為三十個.問各貨幾何.

(22) 法國鐵道票之價.以旅行之距離為比例.且旅人所攜之行李以25「啓羅克蘭」為限.踰限則每一「啓羅克蘭」須支運費若干.其運費以距離為比例.今某旅人攜行李50「啓羅克蘭」.旅行200哩.車費及運費.共支25「佛郎」.其後又攜行李35「啓羅克蘭」.旅行150哩.車費及運費.共支$16\frac{1}{2}$「佛郎」.然則攜行李100「啓羅克蘭」.旅行100哩.須支車費及運費若干.

(23) 有甲,乙二人.甲所有「邊士」之數.二倍於「先令」之數.乙所有「先令」之數.二倍於「邊士」之數.而乙較甲多8「邊士」.若合此二人之所有金.則「邊士」之數.較「先令」之數多1.問二人之所有金各幾何.

但　　　1「先令」= 12「邊士」

(24) 某學校試驗.其落第者占受驗生之四分之一.而及第點之最下限.較受驗生總數之平均點少2.又較及第生之平均點少11.而二倍於落第生之平均點數.問及第點之最下限如何.

雜　題　II.

(A) 1. 設$a=1, b=2, c=-3, d=0$.求次式之數值.

$$\frac{ab+2bc-3cd}{b+c+d}+\frac{a^3+b^3-c^3}{a^2+b^2-c^2}$$

2. 由 $2b-3(b-\overline{a-c})$ 減 $2a-3(a-\overline{b-a})$

3. 證以下二式.

$(x+3)(y+3)-3(x+1)(y+1)+3(x-1)(y-1)-(x-3)(y-3)=0.$

$(x+2)(y+2)-4(x+1)(y+1)+6xy-4(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)=0.$

4. 有 $x^5-5x^4+7x^3-x^2-4x+2$. 以 x^3-3x^2+3x-1 除之.

5. 解次之方程式.

(1) $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{3}+\frac{x+2}{4}+\frac{x+3}{5}=4.$

(2) $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=5,\ 2x+\frac{y}{3}-17=0.$

(3) $\left.\begin{array}{l} ax-by=a^2-b^2 \\ bx-ay=b^2-a^2 \end{array}\right\}$

6. 有橙若干個,分給甲,乙,丙三童子.甲得總數之半多10,乙得較甲取後四分之一多10,丙取其餘.而丙所得之數爲20.然則橙之總數幾何.

(B) **1.** 設 $a=1,\ b=2,\ c=\frac{1}{2}$, 求次式之數值.

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+(b-c)(c-a)(a-b).$

2. 由 $(2a-b)^2$ 與 $(a-2b)^2$ 之和,減 $2(a-b)$ 之平方.

3. 證下兩式.

$n^3=n(n-1)(n-2)+3n(n-1)\times n,$

$n^4=n(n-1)(n-2)(n-3)+6n(n-1)(n-2)+7n(n-1)+n$

4. 以 x^2-2x+1 除某代數式,得商數 x^2+2x+1,餘數 $x+1$,問某代數式如何.

5. 解次之方程式.

(1) $3(x+3)^2+5(x+5)^2=8(x+8)^2$.

(2) $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}(x+y)-\frac{1}{3}(x-y)=8\\ \frac{1}{3}(x+y)-\frac{1}{4}(x-y)=11\end{array}\right\}$.

(3) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=1,\ \dfrac{7}{x}-\dfrac{8}{y}=\dfrac{1}{6}$.

6. 某人有銀票 100 圓,僅要一圓銀貨與半圓銀貨兩種,而其總數為 110 個,然則各銀貨之數幾何.

(C) **1.** 化 $a-[a+b-\{a+b+c-\overline{a+b+c+d}\}]$ 為簡式.

2. 求 $a+b$ 與 $\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{2}$ 之和,差及積.

3. 證次之二式

$ab-3(a-1)(b-1)+3(a-2)(b-2)-(a-3)(b-3)=0$,

$ab-1(a-1)(b-1)+6(a-2)(b-2)-4(a-3)(b-3)$

$+(a-4)(b-4)=0$.

4. 以 $a+b+c$ 除 $a^3+b^3+c^3-3abc$,而依其結果不須更用除法,直書以 $2x+2y+z$ 除 $8x^3+8y^3+z^3-12xyz$ 所得之商.

5. 解次之方程式.

(1) $x=\dfrac{1}{3}(5y+2),\ \ y=\dfrac{1}{2}(x-1)$.

(2) $ax+by=a^3 \qquad bx+ay=b^3$

6. 甲,乙二人,各射三十箭,其中的之數,乙二倍於甲,又不中的之數,甲三倍於乙,然則中的與不中的之數各幾何.

(D) **1.** 設 $a=1, b=3, c=-5, d=0$. 求次式之數值.
$abc(ab+bc+cd+da)\div(a+b)(a+c)(a+d)$

2. 化 $(a+b)^2-[2a^2-\{(a-b)(a+2b)-b(a-b)\}]$ 爲簡式.

3. 求 $x+a, x+b, x+c$ 之連乘積.而依其結果書 $a-x, a-y, a-z$ 之連乘積.

4. 以 $5a^2bc^2$ 除 $75a^2b^3c^5-15a^3b^4c^3$. 又以 $a+b+2c$ 除 $a^2-2b^2-6c^2+ab-ac+7bc$.

5. 解次之方程式.

(1) $\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{3}(x-2)+\frac{1}{4}(x-3)=0$.

(2) $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{x+y}{9}$.

(3) $\frac{3}{x}+\frac{5}{y}=22,\ \frac{7}{x}-\frac{4}{y}=20$.

6. 有花壇.其形爲正方形.若每邊短一尺.則其面積減 69 平方尺.然則此花壇爲幾平方尺.

(E) **1.** 化 $b^2+\{b(a-c)+ac\}-a(b-\overline{a-c})+b(c-\overline{b-a})-ab$ 爲簡式.

2. 由何數減 $3a^2+2ab-ac$, $3b^2+2bc-ab$, 及 $3c^2+2ca-bc$ 之和.則其餘數爲 $a^2+b^2+c^2$.

3. 證 $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2+2(x+y)(x+z)+2(y+z)(y+x)+2(z+x)(z+y)=4(x+y+z)^2$.

4. 有 $\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{6}x^2-\frac{7}{3}x+\frac{4}{3}$ 以 $\frac{1}{3}x+2$ 除之.
又有 $acx^3+(ad-bc)x^2-(ac+bd)x+bc$ 以 $ax-b$ 除之.

5. 解以下三方程式.

(1) $(x-1)(x+2)=x^2+3$.

(2) $2x+.4y=1.2,\ 5x+.2y=1.8.$

(3) $(a-b)x=(a+b)y,\ x+y=2a.$

6. 二數差之二倍,較其小數多 1.而較其大數少 2.然則此二數如何.

(F) **1.** 設 $x=3, y=-5, z=7$. 求 $3(x+y+z)^2-(x^3+y^3+z^3)$ 之數値.

2. 求 $a^4+x^4, a^2+x^2, a+x, a-x$ 之連乘積.

3. 證 $(1-a)(1-b)+a(1-b)+b=1$ 又

$(1-a)(1-b)(1-c)+a(1-b)(1-c)+b(1-c)+c=1$

4. 以 $2y^2+3y-1$ 除 $4y^4-9y^2+6y-1$.又以 $a+b-c$ 除 $a^2+2b^2-3c^2+bc+2ac+3ab$.

5. 解次之方程式.

(1) $(a+x)(b+x)=(c+x)(d+x)$

(2) $3x-7y=4,\ 7x-9y=2$

6. 茶 12 斤,咖啡 3 斤,其價合計 420 圓,咖啡 12 斤,茶 3 斤,其價合計 3.30 圓,問各一斤之價幾何.

第九編

因數

92. 定義 代數式中,其各項之分母無文字者,謂之整式.

如 $a+b$ 及 $\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}b^2$ 俱爲整式.

式中任意項之分母,不含任意之特別文字,則此式在此文字爲整式.

如 $\frac{x^2}{a}+\frac{x}{a+b}$, 在 x 爲整式.

式中之任何項,不含平方根或他根,謂之有理式.

93. 因數分割法 本編專詳求有理整式諸因數之法,而示其單簡之例.

算術所謂數之因數,單指整數之因數而言,同樣所謂代數式之因數,卽單指能除盡本代數式之有理整式而言.

94. 單項因數 任意之文字(或文字之集合體),苟爲代數式諸項所共有,則其式之各項必能以此文字或文字之集合體除盡,故其式之全體,亦必能以此文字(或文字之集合體)除盡.

如
$$ab+ac=a(b+c)$$
$$a^2b+ab^2=ab(a+b)$$
$$3ax^3y+6ax^2y^3=3ax^2y(x+2y^2)$$

觀以上諸式.則單項因數之有無.可一望而知.故有單項因數.則全式可直書或單項因數與他因數之積(如前例).因而以下所論之式.其單項因數俱從省.

問　題　XXII.

求以下各式之因數.

1. $x^2+x.$　　**2.** $a^2-ab.$　　**3.** $ab-bc.$

4. $2ax+\frac{1}{2}x^2.$　　**5.** $4x^3-3x^2.$　　**6.** $a^3-3a^2b.$

7. $x^4-5x^3y+20x^2y^2.$　　**8.** $a^6-a^4x+a^2x^2.$

9. $6ax^4-5a^3x^2+20a^2x^3.$　　**10.** $3a^3x^4y^2-\frac{1}{3}a^2x^3y^3.$

11. $11a^2bc^2-\frac{1}{5}ab^2c^3.$　　**12.** $p^2q^3r^6-7p^6q^5.$

95. 用公式求因數之法　代數式與乘法已知之結果同形.則其同數.可直求出.今舉其最緊要之例如次.

96. 緊要公式之用法　如已知.

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

由是任意二量各平方之和.並加其積之二倍而成之三項式.等於二量和之平方.而由二量各平方之和.減其積之二倍而成之三項式.等於二量差之平方.

是故三項式爲完全之平方與否.不難知之.何則.卽觀其中之二項爲平方.而他之一項.爲前二項積之平方根之二倍與否.定之可也.但平方之二項.須俱爲正.又中項無論爲正爲負俱可.

如 $a^2+6ab+9b^2$ 卽 $a^2+2a(3b)+(3b)^2$ 原爲 a 與 $3b$ 之各平方.及 a 與 $3b$ 之積二倍而成者.

故　　$$a^2+6ab+9b^2=(a+3b)^2$$

又 $$4ab-a^2-4b^2=-(a^2-4ab+4b^2)$$
$$=-\{a^2-2a(2b)+(2b)^2\}$$
$$=-(a-2b)^2$$

今舉其例如次.

$$16a^4+8a^2+1=(4a^2)^2+2(4a^2)+1=(4a^2+1)^2,$$
$$x^3-4x^2y^2+4xy^4=x(x^2-4xy^2+4y^4)$$
$$=x\{x^2-2x(2y^2)+(2y^2)^2\}$$
$$=x(x-2y^2)^2$$

〔注意〕 $a^2-2ab+b^2$, 原等於 $(a-b)^2$, 亦可視爲等於 $(b-a)^2$.何則依符號之定則,$(b-a)^2$,可變爲$\{-(a-b)\}^2$,卽等於$(a-b)^2$故也.

由是,一式等於兩因數之積.此式必更等於符號相反之原兩因數之積.

問題 XXIII.

求以下各式之因數.

1. $4x^2+4x+1.$ **2.** $9x^2-6x+1.$

3. $1-8x^2+16x^4.$ **4.** $4a^2-12ab+9b^2.$

5. $9a^4+24a^2b^2+16b^4.$ **6.** $x^2+xy+\frac{1}{4}y^2.$

7. $4a^2x^2+4abxy+b^2y^2.$ **8.** $25a^4x^2-30a^2b^2xy+9b^4y^2.$

9. $3a^2+6ab+3b^2.$ **10.** $5a^4-10a^2b+5b^2.$

11. $a^3-6a^2b+9ab^2.$ **12.** $3a^5-30a^4b^3+75a^3b^6.$

13. $4x^2y^2-x^4-4y^4.$ **14.** $8x^2-4x^4-4.$

15. $4xy^3-4x^2y^2+x^3y.$ **16.** $x^2y^2+x^3y+\frac{1}{4}xy^3.$

17. $(a+b)^2+4c(a+b)+4c^2.$

18. $(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)z^2+z^4.$

19. $4x^2y^2+4(a+b)xy+(a+b)^2$.

20. $9(a+b)^2-6c(a+b)+c^2$.

97. 兩平方差之公式　爲 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 由是知任意二量之平方差,等於二量之和與差之積.

如 a^2-4b^2 卽 $a^2-(2b)^2$, 故等於 $(a+2b)(a-2b)$

又 $9x^3-4xy^2$ 卽 $x\{(3x)^2-(2y)^2\}$ 故等於 $x(3x+2y)(3x-2y)$

今舉其例如次.

$$8axy-18a^3x^3y^3=2axy(4-9a^2x^2y^2)=2axy\{2^2-(3axy)^2\}$$
$$=2axy(2-3axy)(2+3axy),$$
$$a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)=(a^2+b^2)(a+b)(a-b),$$

及　$79^2-71^2=(79+71)(79-71)=150\times 8=1200$,

多項式之差,亦可用單項式之平方差之法求之.

如　$(a+b)^2-c^2=\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$
$$=(a+b+c)(a+b-c).$$

$$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+b^2)^2-(ab)^2=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab),$$

及　$(2a-b+2c)^2-(a+4b+c)^2$
$$=\{(2a-b+2c)+(a+4b+c)\}\{(2a-b+2c)-(a+4b+c)\}$$
$$=(3a+3b+3c)(a-5b+c)=3(a+b+c)(a-5b+c).$$

問　題　XXIV.

求以下各式之因數.

1. a^2-9.　　**2.** $16-b^2$.

3. $25a^2-b^2$.　　**4.** x^2-9y^2.

5. $16x^2-9y^2$.　　**6.** $64a^2-49b^2$.

7. $4a^2-81b^2$.　　**8.** x^2-9y^4.

9. $36a^4-49b^2$.　　**10.** $4a^2b^2-9c^2$.

11. $9a^2x^2-49b^2y^2$.　　**12.** $49a^2b^2c^2-36x^2y^2z^2$.

13. $4xy^2-9x^3$.　　**14.** $8ab^2-18a^3$.

15. $3a^5-108a^3$.　　**16.** $7a^5-28a^3$.

17. $8x^3y-32xy^3$.　　**18.** $7abc^2-7a^3b^3$.

19. x^4-y^4.　　**20.** x^4-16y^4.

21. $81a^4-16b^4$.　　**22.** $625a^4-256x^4$.

23. $x^4y^4-a^4b^4$.　　**24.** $a^4b^4-81c^4d^4$.

25. $81x^4y^4-1$.　　**26.** $16a^4b^4c^4-1$.

27. $16-81x^4y^4$.　　**28.** x^8-y^8.

29. $a^8-b^8c^8$.　　**30.** $a^{10}-a^2$.

31. $(a+b)^2-c^2$.　　**32.** $(a+b)^2-4c^2$.

33. $4(x+y)^2-1$.　　**34.** $9(x-y)^2-4$.

35. $(x+y)^2-(x-y)^2$.　　**36.** $(2a+b)^2-(2b+a)^2$.

37. $x^2-(x-y)^2$.　　**38.** $a^2-(2b-a)^2$.

39. $4(a+b)^2-(a-b)^2$.　　**40.** $9(x+y)^2-4(x-y)^2$.

41. $(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$.　　**42.** $(a+b+c)^2-(a-b-c)^2$.

43. $(3a+b-2c)^2-(a+3b-c)^2$.

44. $(a-2b+3c)^2-(a-c)^2$.

45. $(3x^2+x-2)^2-(x^2-x-2)^2$.

98. 立方之和及差之公式

旣　　$\underline{x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)}$

及　　$\underline{x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)}$　　[69 款]

由是知任意二量之立方和能以二量之和除盡.

又任意二量之立方差能以二量之差除盡.

如 $8a^3+27b^3$ 卽 $(2a)^3+(3b)^3$, 能以 $2a+3b$ 除盡.而其商

爲 $(2a)^2-(2a)(3b)+(3b)^2$, 即 $4a^2-6ab+9b^2$.

又 $27x^3-8$ 即 $(3x)^3-2^3$. 等於次式.

$$(3x-2)\{(3x)^2+2(3x)+2^2\}=(3x-2)(9x^2+6x+4).$$

他例如次.

$$a^3b^3-\tfrac{1}{8}c^3=(ab-\tfrac{1}{2}c)(a^2b^2+\tfrac{1}{2}abc+\tfrac{1}{4}c^2),$$

及
$$\begin{aligned}a^6-b^6&=(a^3+b^3)(a^3-b^3)\\&=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2).\end{aligned}$$

多項式之立方和或差亦可用同樣之法解之.

例如 $(a+b)^3-c^3=\{(a+b)-c\}\{(a+b)^2+(a+b)c+c^2\}$

及 $(x-2y)^3-(y-2x)^3$

$$\begin{aligned}&=(\overline{x-2y}-\overline{y-2x})\{(x-2y)^2+(x-2y)(y-2x)+(y-2x)^2\}\\&=(3x-3y)(3x^2-3xy+3y^2)\\&=9(x-y)(x^2-xy+y^2).\end{aligned}$$

問題 XXV

求以下各式之因數.

1. a^3-8b^3.　　**2**. $8a^3+b^3$.

3. $8a^3-125x^3$.　　**4**. a^3-125x^6.

5. $4a^3+32b^3$.　　**6**. $27x^3-\frac{1}{8}y^3$.

7. $x^3y^3+\frac{1}{27}a^3b^3$.　　**8**. $8a^6b^6+x^6$.

9. $2xy^3-\frac{1}{4}x^4$.　　**10**. $9a^4b^2-\frac{1}{3}ab^5$.

11. $3a^4b+24ab^4$.　　**12**. $40a^3bc-5b^4c^4$.

13. a^6-64.　　**14**. $64a^6-729b^6$.

15. $x^{12}-a^6b^6$.　　**16**. $(x+2y)^3-y^3$.

17. $(x+2y)^3+(y+2x)^3$.　　**18**. $(2y-x)^3-(2x-y)^3$.

19. $(x-3y)^3-(y-3x)^3$.　　**20**. $(2y-x)^3+(2x-y)^3$.

99 三項式之兩因數 由乘法得.

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$$

由是,推上式之理,若有 x^2+px+q 形之式,其為 $x+a$ 與 $x+b$ 二因數之積者,則其所得之式,必與 $x^2+(a+b)x+ab$ 同.

故 $$p=a+b,\ q=ab$$

由是知 a 與 b 之和為 p. 而其積為 q.

如求 $x^2+7x+12$ 之因數.

設此因數為 $x+a, x+b$. 則 $ab=12, a+b=7$. 由是依二數之積為 12. 其和為 7 者求之.

分解 12 為諸因子,則得 12 與 1, 6 與 2, 4 與 3, 而 4 與 3 之和為 7. 故

$$x^2+7x+12=(x+4)(x+3)$$

又 $x^2-7x+10$ 亦可分解為因數,因可依數之積為 10. 而其和為 -7 者求之故也.

此二數之積為 $+10$. 故二數俱為正,或俱為負.

然二數之積為 -7. 故知此二數俱為負.

分解 10 為兩負因數,則為 -10 與 -1 又 -5 與 -2, 而 -5 與 -2 之和為 -7. 故

$$x^2-7x+10=(x-5)(x-2)$$

又分解 $x^2+3x-18$ 為因數,當依二數之積為 -18 而其和為 3 以求之.

今二數之積為 -18. 故二數必一為正,一為負.

分解 -18 為因數,則為 -18 與 1, -9 與 2, -6 與 3, -3 與 6, -2 與 9, -1 與 18. 而此中 6 與 -3 之和為 3 故.

$$x^2+3x-18=(x+6)(x-3)$$

問題 XXVI.

求以下各式之因數.

1. x^2+4x+3. **2.** x^2-4x+3.

3. x^2-6x+8. **4.** $x^2-8x+15$.

5. $x^2-11x+18$. **6.** $x^2+9x+20$.

7. x^2+2x-3. **8.** x^2+4x-5.

9. x^2+x-6. **10.** x^2-x-6.

11. $x^2+2x-35$. **12.** $x^2-3x-10$.

13. $x^2+5x-14$. **14.** $x^2-x-132$.

15. $x^2+18x+72$. **16.** $x^2-5x-84$.

17. $x^2-25x+150$. **18.** $x^2+5x-150$.

19. $x^2+11x-180$. **20.** $x^2-x-156$.

21. $x^2-31x+240$. **22.** $x^2-17x-200$.

23. $x^2-34x+288$. **24.** $x^2-35x-200$.

100. 三項式因子之係數 由乘法得

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+cb)x+bd$$

由是,推上式之理,若 px^2+qx+r 形之式,其為 $ax+b$, $cx+d$ 兩因數之積者,則其式必與 $acx^2+(ad+bc)x+bd$ 同.

是故 $ac=p$, $bd=r$, $ad+bc=q$. 故在單簡之式內,可由視察求得適當於此等關係之 a, b, c, d 之數值.

如求 $3x^2-16x+5$ 之因數.

$3x^2$, 僅為 $3x$ 與 x 相乘而得者,又 5, 僅為 5 與 1, 或 -5 與 -1, 相乘而得者,而中央之項為負,故宜用 -5 與 -1.

於是當於 $(3x-5)(x-1)$ 與 $(3x-1)(x-5)$ 兩式中而

選其一而積中x之係數爲-16,故當取$(3x-1)(x-5)$.故所求之因數爲$3x-1$與$x-5$.

又,求$5x^2+32x-21$之因數.

$5x^2$,僅爲$5x$與x相乘而得者.解末項-21爲因數,有-21與1,-7與3,-3與7,-1與21四種,故分解初項與末項而得之因數爲$(5x\mp21)(x\pm1)$,$(5x\mp7)(x\pm3)$,$(5x\mp3)(x\pm7)$,$(5x\mp1)(x\pm21)$,就中其中央之項爲$32x$者,惟$(5x-3)(x+7)$.

101. 二次之三項式 求$x^2-5xy+4y^2$之因數.其法與求x^2-5x+4之因數之法同.

何則,因求$x^2-5xy+4y^2$之因數,必覓依二數之積爲$4y^2$,其和爲$-5y$求之故也.如是,知其二量爲$-4y$與$-y$,

$$\therefore\quad x^2-5xy+4y^2=(x-4y)(x-y)$$

同樣,求$3x^2-16xy+5y^2$之因數.其法與求$3x^2-16x+5$之因數之法同.如是,此兩式中,若已知其一式之因數.則他式之因數,可直書出.

如已知 $3x^2+32x-21=(5x-3)(x+7)$

則 $5x^2+32xy-21y^2=(5x-3y)(x+7y)$ 可直書出.

問 題 XXVII.

求以下各式之因數.

1. $3x^2-10x+3$.

2. $3x^2-17x+10$.

3. $2x^2+11x+12$.

4. $2x^2+3x-2$.

5. $3x^2+7x-6$.

6. $4x^2+x-3$.

7. $5x^2-38x+21$.

8. $3x^2+11x-20$.

9. $7x^2-33x-54.$ **10.** $5x^2-38x+48.$

11. $7x^2+75x-108.$ **12.** $9x^2+130x-75.$

13. $4x^2+21x-18.$ **14.** $4x^2+4x-15.$

15. $6x^2+55x-50.$ **16.** $10x^2+3x-1.$

17. $132x^2+x-1.$ **18.** $4x^2-5x+1.$

19. $12x^2+50x-50.$ **20.** $7x^2+123x-54.$

21. $24x^2-30x-75.$ **22.** $x^2+4xy+3y^2.$

23. $x^2-6xy+8y^2.$ **24.** $x^2-11xy+18y^2.$

25. $x^2+5xy-14y^2.$ **26.** $x^2-25xy+150y^2.$

27. $x^2-35xy-200y^2.$ **28.** $3x^2-17xy+10y^2.$

29. $7x^2-33xy-54y^2.$ **30.** $24x^2-70xy-75y^2.$

31. $x^4-13x^2+36.$ **32.** $x^4-25x^2y^2+144y^4.$

33. $36x^4-97x^2y^2+36y^4.$ **34.** $x^3-3x^2-18x.$

35. $x^3y-x^2y^2-2xy^3.$ **36.** $15x^4y-4x^3y^2-4x^2y^3.$

37. $75xy^3-130x^2y^4-9x^3y^5.$

102. 普通二次式之因數　有px^2+qx+r形之式(但p, q, r俱爲已知數).其因數雖可視察求得,然分解p與r爲因數,其分法有種種,極其繁雜.

何則,分解p與r爲兩因數,若其分法有種種,則分解初項與末項所得之因數,恆有數組.如是,由此數組中,選擇其適於中央之項者,良非易易.

如用此法求$2310x^2-2419x-9009$之因數,殆不可得.

又如x^2+6x+7,原爲不能分解有理因數之式,而代數式中往往遇之,故如此例,殆依視察求其因數,實所不能.

故求二次式之因數之法,必須於無論如何之式皆

能適用.然後始足稱爲通法.今示於次.

103. 配隅法 如 $x^2+2ax+a^2$ 爲完全之平方.卽 $(x+a)^2$.故某式祗有首次兩項.則因欲配此式爲完全平方.須加 a 之平方(卽加 x 之係數之半之平方).

〔增〕配成完全平方之法.謂之配隅法.

如 x^2+6x,欲配成完全平方.則加 $\left(\frac{6}{2}\right)^2$.其所加得之式爲 x^2+6x+9.卽 $(x+3)^2$.

同樣.如 x^2+5x 欲配成完全平方.則加 $\left(\frac{5}{2}\right)^2$.其所加得之式爲 $x^2+5x+\frac{25}{4}$,卽 $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$.

又 x^2-7x.欲配成完全平方.則加 $\left(-\frac{7}{2}\right)^2$.其所加得之式爲 $x^2-7x+\frac{49}{4}$,卽 $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2$.

又 x^2+ax,無論 a 爲如何之數.欲配成完全平方.則加 $\left(\frac{a}{2}\right)^2$.其所加得之式爲 $x^2+ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2$.

因 $$x^2+ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2$$ 故也.

104. 例解 由是求 ax^2+bx+c 之因數.則其法無論如何之式.皆能適用.

此問題.在將 a 之有理整式之兩因數求出.故在求 x 之兩一次因數.雖然.其算術的之數.或其式中所含之他文字.不必爲有理數式.

先舉其例如次.

〔例1〕 求 x^2+6x+8 之因數.

依前款.x^2+6x 加 3^2 則得完全之平方.

由是加3^2,且同時減之,得

$$x^2+6x+8=x^2+6x+9-9+8$$
$$=(x+3)^2-1$$

此式最後之形,原爲兩平方之差,故其因數爲$x+3+1$及$x+3-1$,卽$x+4$及$x+2$.

故x^2+6x+8之因數,爲$x+4$及$x+2$.

〔例2〕 求$x^2-3x-28$之因數.

x^2-3x加$\left(-\frac{3}{2}\right)^2$卽$\frac{9}{4}$,則得完全之平方.

由是加$\frac{9}{4}$且同時減之,則

$$x^2-3x-28=x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}-28$$
$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{121}{4}$$
$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{11}{2}\right)^2$$

此末式之因數爲$x-\frac{3}{2}+\frac{11}{2}$與$x-\frac{3}{2}-\frac{11}{2}$

故所求之因數爲$x+4$與$x-7$.

〔例3〕 求x^2+6x+7之因數.

x^2+6x加3^2,則得完全之平方.

由是
$$x^2+6x+7=x^2+6x+9-9+7.$$
$$=(x+3)^2-2$$
$$=(x+3)^2-(\sqrt{2})^2$$

此末式之因數爲$x+3+\sqrt{2}$與$x+3-\sqrt{2}$,是卽所求之因數.

〔例4〕 求$3x^2-10x+3$之因數.

$$3x^2-10x+3=3\left(x^2-\frac{10}{3}x+1\right)$$

$x^2-\frac{10}{3}x$，加$\left(-\frac{5}{3}\right)^2$，卽$\frac{25}{9}$，則得完全之平方。

由是

$$x^2-\frac{10}{3}x+1=x^2-\frac{10}{3}x+\frac{25}{9}-\frac{25}{9}+1$$
$$=\left(x-\frac{5}{3}\right)^2-\frac{16}{9}$$
$$=\left(x-\frac{5}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2$$

此末式之因數爲$x-\frac{5}{3}+\frac{4}{3}$與$x-\frac{5}{3}-\frac{4}{3}$卽$x-\frac{1}{3}$與$x-3$。

由是$3x^2-10x+3=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-3)$或$(3x-1)(x-3)$。

依上所說諸例，則求二次式之因數，須先變其式爲兩平方之差。

故求ax^2+bx+c之因數，其法如次。

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$x^2+\frac{b}{a}x$，加$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$卽$\frac{b^2}{4a^2}$，則成完全之平方，卽$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$。

因而加$\frac{b^2}{4a^2}$於括弧內之式，且同時減之，得

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right\}$$
$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)\right\}$$
$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left\{\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}\right\}^2\right]$$

括弧〔 〕內之式之因數.依第97款.為

$$x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}\text{ 及 }x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}$$

由是得公式 ax^2+bx+c

$$=a\left\{x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}\right\}\left\{x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}\right\}$$

105. 公式用法 以前款所求得之公式.代各題之演算.則以各題特別之數值.代入 a, b, c 卽得.

〔例1〕 求 $x^2+7x+12$ 之因數.

茲 $a=1, b=7, c=12$.

是故

$$x^2+7x+12=\{x+\tfrac{7}{2}+\sqrt{(\tfrac{49}{4}-12)}\}\{x+\tfrac{7}{2}-\sqrt{(\tfrac{49}{4}-12)}$$

$$=(x+\tfrac{7}{2}+\tfrac{1}{2})(x+\tfrac{7}{2}-\tfrac{1}{2})$$

$$=(x+4)(x+3).$$

〔例2〕 求 $5x^2+32xy-21y^2$ 之因數.

茲 $a=5, b=32y, c=-21y^2$

是故 $$\frac{b}{2a}=\frac{32y}{10}=\frac{16y}{5},$$

及 $$\sqrt{\left\{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}\right\}}=\sqrt{\left\{\left(\frac{16y}{5}\right)^2+\frac{21y^2}{5}\right\}}$$

$$=\sqrt{\left\{\frac{256y^2+105y^2}{5}\right\}}=\frac{19y}{5}$$

故

$$5x^2+32xy-21y^2=5\left\{x+\frac{16y}{5}+\frac{19y}{5}\right\}\left\{x+\frac{16y}{5}-\frac{19y}{5}\right\}$$

$$=5(x+7y)\left(x-\frac{3y}{5}\right)$$

$$=(x+7y)(5x-3y).$$

106. 虛因數　於104款之公式.以1代a,2代b,4代c,則得x^2+2x+4之因數.

是等之因式爲$x+1+\sqrt{(1-4)}$與$x+1-\sqrt{(1-4)}$即

$$x+1+\sqrt{(-3)}\text{ 與 }x+1-\sqrt{(-3)}.$$

然無論正數,負數.其平方皆爲正.由是.問何數之平方爲-3.則無以答之.因其不能爲正數.亦不能爲負數.故也.

雖然.如$\sqrt{-3}$式.代數學屢用之.而問$\sqrt{-3}$之意味.則但答以$\sqrt{-3}\times\sqrt{-3}=-3$而已.

負數之平方根.謂之虛數.故$x+1+\sqrt{-3}$與$x+1-\sqrt{-3}$,謂之x^2+2x+4之虛因數.

回顧104款.則ax^2+bx+c之因數.如$\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$爲負.則可視爲虛數.

107. 將諸項整列.集合而求得之因數　有許多代數式.可將諸項整列集合.而求其因數.

整列,集合.雖無定法.然依式中所有文字之方乘整列.多能看出其因數.若有僅爲單次項之文字.則直括之爲因數.

〔例1〕　求x^3-3x^2+x-3之因數.

$$x^3-3x^2+x-3=x^2(x-3)+(x-3)=(x-3)(x^2+1)$$

〔例2〕　求$ax+by+bx+ay$之因數.

依x之方乘整列如次.

$$x(a+b)+ay+by=x(a+b)+y(a+b)=(a+b)(x+y).$$

〔例3〕　求$ax^3-x+a-1$之因數.

依 a 之方乘整列,則得 $a(x^3+1)-(x+1)$

而 $x+1$ 爲此式之一因數.

〔例4〕　求 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 之因數.

依 a 之乘方整列,則得

$$a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$$

則 $b-c$ 爲一因數.因而所得之式爲

$$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$$
$$=(b-c)(a-b)(a-c)$$

〔例5〕　求 $a^2-3b^2-c^2-2ab+4bc$ 之因數.

此式爲 a, 或 b, 或 c, 之二次式.

故依104款推求,則其所得之式,

$$=a^2-2ab-3b^2-c^2+4bc$$

其含 a 之項惟 a^2-2ab, 若加 b^2 則成完全之平方.故此式變爲.

$$a^2-2ab+b^2-4b^2-c^2+4bc=(a-b)^2-4b^2-c^2+4bc$$
$$=(a-b)^2-(2b-c)^2=\{(a-b)-(2b-c)\}\{(a-b)+(2b-c)\}$$
$$=(a-3b+c)(a+b-c).$$

108. 雜公式　又 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 式,亦屢應用於他例.故須知其因數.即

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$

容易證明.

再 x^4+x^2+1 式亦屢應用於他項.而求之.則先變爲 $(x^2+1)^2-x^2$. 易知其兩因數爲 x^2+1+x, 與 x^2+1-x, 而 x^2+x+1, 及 x^2-x+1, 原可更分解爲兩一次因數.而因一次因數中,含有虛數.故不復分解.蓋通例然也.

揭因數之雜題於次.即爲本編之結局.

問題 XXVIII.

求以下各式之因數.

1. $16x^4-625y^4$. **2.** $81a^4-16b^4$.

3. x^5-81x. **4.** $1+27a^3$.

5. $27+8x^3$. **6.** $27x^4+8x$.

7. $(a+b)^2-(c-d)^2$. **8.** $(a+b)^2-4(c-d)^2$.

9. $(a+b)^2-(a+c)^2$. **10.** $(x+y)^4-(x-y)^4$.

11. $(a+b+c)^2-4c^2$. **12.** $(a+b-3c)^2-9c^2$.

13. $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-b^2)^2$.

14. $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2$.

15. $(x^3+3x)^2-(3x^2+1)^2$.

16. $(x^2+5xy+y^2)^2-(x^2-xy+y^2)^2$.

17. $(a+b+c+d)^2-(a-b+c-d)^2$.

18. $(3a+2b+c)^2-(a+2b+3c)^2$.

19. $(2x+3y)^3+(3x+2y)^3$.

20. $(a+3b)^3-(3a+b)^3$. **21.** $x^2-\frac{3}{4}xy-\frac{1}{4}y^2$.

22. $x^2+\left(a+\dfrac{1}{a}\right)xy+y^2$. **23.** $x^3+\frac{13}{6}x^2+x$.

24. $6x^2-5xy-6y^2$. **25.** $x^4-\frac{5}{6}x^3y-x^2y^2$.

26. $72(x^2-1)-17x$. **27.** x^4-5x^2+4.

28. $x^4-13x^2y^2+36y^4$. **29.** $ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$.

30. $ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)$.

31. $(a+b)^2-5c(a+b)+6c^2$.

32. $(x+y)^2-7z(x+y)+10z^2$.

33. $(a+b)^2-8(a+b)(c+d)+15(c+d)^2$.

34. $x(x+2)-y(y+2)$. **35.** $x(x+4)-y(y+4)$.

36. x^3-5x^2+x-5. **37.** x^3+x^2-4x-4.

38. $2x^3-3x^2-2x+3$. **39.** $5x^3-x^2-5x+1$.

40. $ax^3+x+a+1$. **41.** $ax^3+bx+a+b$.

42. $x^3+bx^2+a^2x-a^2b$. **43.** bx^3+ax^2+bx+a.

44. $ax^2+by^2+(a+b)xy$. **45.** $a^2b^2+a^2+b^2+1$.

46. $a^2b^2-a^2-b^2+1$. **47.** $ac+bd-ad-bc$.

48. $ac^2+bd^2-ad^2-bc^2$. **49.** $x^2-y^2+xz-yz$.

50. $a^2-b^2-(a-b)^2$. **51.** $a^4+a^2b^2-b^2c^2-c$

52. $a^2-b^2+bc-ca$. **53.** a^2-a-c^2+c.

54. $1+bx-(a^2+ab)x^2$. **55.** $1-abx^3+(b-a^2)x^2$.

56. $a^2c^2+acd+abc+bd$.

57. $a^2x+abx+ac+b^2y+aby+bc$.

58. $a^2-b^2+c^2-d^2-2(ac-bd)$.

59. $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$.

60. $(a^2-b^2+c^2-d^2)^2-(2ac-2bd)^2$.

61. x^4-23x^2+1. **62.** $x^4-7x^2y^2+y^4$.

63. $x^4-11x^2y^2+y^4$. **64.** x^4-3x^2+1.

65. $(x^2+4x)^2-2(x^2+4x)-15$.

66. $(x^2+7x+6)(x^2+7x+12)-280$.

第十編

最高公因數

109. 公因數　凡一代數式能除盡他二以上諸代數式.則此一代數式.謂之他二以上諸代數式之公因數.

如 a 爲 ab 與 ac 之公因數.

最高公因數.公因數中之最高次者.謂之最高公因數.

如 a 與 a^2, 俱爲 a^2b, 與 a^3c 之公因數.而 a^2 爲 a^2b 與 a^3c 之最高公因數.

最高公因數.通例略爲 H. C. F.

由是求某式之 H. C. F. 其法如次.

110. 單項式之最高公因數　二以上諸單項式之 H. C. F. 可由視察求得.

如求 a^3b^2c. 與 $a^2b^3c^4$ 之 H. C. F.

其第一式能用 a, 或 a^2, 或 a^3, 除盡.而高於 a^3 之方乘不能除盡.又第二式.能用 a, 或 a^2, 除盡.而高於 a^2 之方乘不能除盡.故 a 之方乘.其能除盡此兩式且其方乘爲最高次者.惟 a^2. 又 b 之方乘.其能除盡此兩式者惟 b^2. 而高於 b^2 之方乘不能除盡.又 c 之方乘.其能除盡此兩式者惟 c. 而高於 c 之方乘不能除盡.

由是 a^3b^2c 與 $a^2b^3c^4$ 之 H. C. F. 爲 a^2b^2c

又求 $ab^3c^3d^3$ 與 $a^3c^5d^3$ 之 H. C. F.

a之最高方乘，其能除盡此兩式者惟a，而b之方乘，俱不能除盡此兩式。又c之最高方乘，其除盡此兩式者惟c^3。又d之最高方乘其能除盡此兩式者惟d^2。

由是所求之H. C. F. 爲ac^3d^2。

又$a^3bc^4, a^2b^3c^6d, a^4bc^4d^2$，皆能以$a^2, b, c^4$除盡，故此三式之H. C. F. 爲$a^2bc^4$。

依上諸例，凡二以上諸單項式之最高公因數，乃取諸式中公有之各文字，附以各文字最低方乘之指數而得。

若各式有數字係數，則求其算術上之最大公約數，即代數上H. C. F. 之數字係數。

問題 XXIX.

求以下各題之H. C. F.

1. a^3b^2 與 a^2b^3.　　**2.** abc^2 與 a^2bc^3.

3. $9ab^3$ 與 $6a^2b$.　　**4.** $4x^3y$ 與 $10xy^3$.

5. $24a^3b^3x^4$ 與 $60a^2b^4x^6$.　　**6.** $a^2b^3x^5$ 與 $3b^5x$.

7. $9a^2b^3x^4y^5$ 與 $8x^3y^3$.　　**8.** $\frac{3}{2}a^3b^3c^3$ 與 $2b^3c^3$.

9. $42axy^2z^3$ 與 $77b^3y^4$.　　**10.** ab^3, a^2bc 與 abc^3.

11. $3x^2yz^3, 15xy^3z^3$ 與 $10x^2y^2z^2$.

12. $ab^2cx^4, a^4bc^2x^3$ 與 $a^3b^2cx^3$.

111. 知多項式之因數即知其H. C. F.　知二以上諸多項式之因數，則其H. C. F. 可直求出。

其H. C. F. 乃取諸多項式中公有之因數，附以各因數最低方乘之指數而得。

如求$(x-a)^3(x+b)^3$與$(x-a)^2(x+b)^4$之H. C. F.

此兩式俱能以$(x-a)^2$除盡.而高於$(x-a)^2$之方乘俱不能盡.又此兩式俱能以$(x+b)^3$除盡.而高於$(x+b)^3$之方乘不能除盡.

由是H. C. F.爲 $(x-a)^2(x+b)^3$.

又$a^2b(a-b)^2(a+b)^3$與$ab^2(a-b)^3(a+b)^4$,俱能以a,又b,又$(a-b)^2$,又$(a+b)^3$除盡.

故其H. C. F.爲$ab(a-b)^2(a+b)^3$.

以下諸例.其因數可由視察求得.故其H. C. F.可直書出.

〔例1〕 求$a^4b^2-a^2b^4$與$a^4b^3+a^3b^4$之H. C. F.

$$a^4b^2-a^2b^4=a^2b^2(a^2-b^2)=a^2b^2(a+b)(a-b)$$

又 $$a^4b^3+a^3b^4=a^3b^3(a+b).$$

故其H. C. F.爲$a^2b^2(a+b)$.

〔例2〕 求$a^3+3a^2b+2ab^2$與$a^4+4a^3b+3a^2b^2$之H. C. F.

$$a^3+3a^2b+2ab^2=a(a^2+3ab+2b^2)=a(a+b)(a+2b),$$

及 $$a^4+4a^3b+3a^2b^2=a^2(a^2+4ab+3b^2)=a^2(a+b)(a+3b).$$

故其H. C. F.爲$a(a+b)$.

〔例3〕 求$3a^3+2a^2-a$與$5a^4+3a^3-2a^2$之H. C. F.

$$3a^3+2a^2-a=a(3a^2+2a-1)=a(3a-1)(a+1),$$

及 $$5a^4+3a^3-2a^2=a^2(5a^2+3a-2)=a^2(5a-2)(a+1).$$

由是H. C. F.爲$a(a+1)$.

問題 XXX.

求以下各題中兩式之H. C. F.

1. $x^2(x-a)^3$與$x^3(x-a)^2$. **2.** a^2-b^2與$(a+b)^2$.

3. $3ab(a+b)^2$與$2(a-b)(a+b)^3$.

4. $b^4c^4(b+c)^2$ 與 $b^6c^3(b+c)^3$.

5. $a^5b^3+ab^5$ 與 $a^6-a^2b^4$.　　**6.** a^2b+3b^3 與 $a^4-9a^2b^4$.

7. $a^2x^3+2a^3x^2$ 與 $a^2x^4-4a^4x^2$.

8. $a^6x^2-4a^4x^4$ 與 $a^6x^2-16a^2x^6$.

9. x^2+3x+2 與 x^2+6x+8.

10. $x^3+3x^2y+2xy^2$ 與 $x^4+6x^3y+8x^2y^2$.

11. $3x^2-4x+1$ 與 $4x^3-5x+1$.

12. $3a^2-4ab+b^2$ 與 $4a^4-5a^3b+a^2b^3$.

112. 兩多項式之最高公因數　高於二次之多項式之因數,雖非普通之法所能求,然任意二式之最高公因數,可用次之方法求之,即求二數之最大公約數,與算術上之方法同.

〔法則〕將兩式俱依某公有文字之遞降方乘整列,而以本文字之低次式除其高次式(若兩式爲同次式,則無論以何爲除數均可),若有餘數,則命之爲新除數,而以前之除數爲被除數,依此方法次第除之,至無餘數然後止,如是,最後之除式,即爲兩式之H. C. F.

如求 x^3+x^2-2 與 x^3+2x^2-3 之H. C. F.

$$
\begin{array}{l}
x^3+x^2-2)\,x^3+2x^2-3\,(1 \\
\qquad\qquad\quad \underline{x^3+\ x^2-2} \\
\qquad\qquad\qquad\quad x^2-1)\,x^3+x^2-2\,(x+1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{x^3\quad\ -x\quad\ \ } \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x^2+x-2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{x^2\quad\ -1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x-1)\,x^2-1\,(x+1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{x^2-x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x-1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{x-1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

故所求之 H. C. F. 爲 $x-1$.

〔注意〕上之法則惟用以求多項之 H. C. F. 故單項之 H. C. F. 宜依視察求之.

如求 $a^2x^4+a^2x^3-2a^2x$ 與 $abx^5+2abx^4-3abx^2$ 之 H. C. F.

$$a^2x^4+a^2x^3-2a^2x=a^2x(x^3+x^2-2),$$

及 $$abx^5+2abx^4-3abx^2=abx^2(x^3+2x^2-3)$$

故單項因數之 H. C. F. 爲 ax, 又已知 x^3+x^2-2, 與 x^3+2x^2-3 之 H. C. F. 爲 $x-1$.

故所求之 H. C. F. 爲 $ax(x-1)$.

113. 證明 兩代數式不含單項因數,則其 H. C. F. 可依前款之法則求之.今得證明如次.

設 A 及 B 爲兩多項式.各依某公有文字之遞降方乘整列.且依此公有文字.B 之次數恆較 A 之次數高又以 A 除 B.設其所得之商爲 Q.餘數爲 R.則求 A 與 B 之 H. C. F. 其演算之第一段如次.

$$\begin{array}{l} A)B(Q \\ \underline{\ \ AQ\ \ } \\ \ \ \ R \end{array}$$

則 $$B=AQ+R\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$R=B-AQ\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

而任意之代數式.其各項能以他式除盡.則其全體亦能以他式除盡.由是從 (1) 式.知 B 能以 A 與 R 之任一公因數除盡.

故 A 與 R 之任一公因數.恆爲 B 與 A 之公因數.

又 B 與 A 之任一公因數.恆爲 $B-AQ$ 之一因數.而由 (2) 式.又爲 R 之一因數.

故B與A之任一公因數,恆爲A與R之公因數.
由是B與A之H.C.F.恆與A與R之H.C.F.同.

又以R除A.設其餘數爲S.則依同理.R與S之H.C.F.恆與A與R之H.C.F.同.故卽爲所求之H.C.F.餘倣此.

故任一除數與其相當被除數之H.C.F.俱得爲所求之H.C.F.

若依此方法.至某階段.除至更無餘數.則最後之除數.必爲相當被除數之一因數.而此除數.卽爲此除數與其相當被除數之H.C.F.可知.故卽爲所求之H.C.F.

依除法之性質.次第除得之餘數.必次第爲低次式.故依前法求至某階段.若除至無餘.則其H.C.F.固已求得.若次第求之.至得無公有文字之除數.是卽所求之兩式原無公有文字之H.C.F.

上法惟用以求多項之H.C.F.旣說於前.故演算中所顯之任一式.無論以如何之單項式乘之,或除之.其所求之H.C.F.俱不變.因其乘法或除法.不及影響於多項因數故也.

〔例1〕　求 $x^3+4x^2-8x+24$ 與 x^4-x^3+8x-8 之H.C.F.

此兩式中俱無單項因數.故可依112款求之.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+4x^2-8x+24) & x^4-x^3+8x-8\ (x-5 \\
& \underline{x^4+4x^3-8x^2+24x} \\
& -5x^3+8x^2-16x-8 \\
& \underline{-5x^3-20x^2+40x-120} \\
& 28x^2-56x+112
\end{array}
$$

其餘數 $28x^2-56x+112=28(x^2-2x+4)$.而數字因數

28. 非所求二式之因數,學者易知,故棄之,以 x^2-2x+4 爲新除數,續行其演算.

$$
\begin{array}{l}
x^2-2x+4)\,x^3+4x^2-8x+24\,(x+6 \\
\qquad\qquad\quad \underline{x^3-2x^2+4x} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 6x^2-12x+24 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{6x^2-12x+24}
\end{array}
$$

故其 H. C. F. 爲 x^2-2x+4.

〔例 2〕　求 $x^3-4a^2x+15a^3$ 與 $x^4+a^2x^2+25a^4$ 之 H. C. F.

$$
\begin{array}{l}
x^3-4a^2x+15a^3)\,x^4+\ a^2x^2+25a^4\ (x \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{x^4-4a^2x^2+15a^3x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 5a^2x^2-15a^3x+25a^4
\end{array}
$$

令　$5a^2x^2-15a^3x+25a^4=5a^2(x^2-3ax+5a^2)$.

棄單項因數 $5a^2$, 以 $x^2-3ax+5a^2$ 爲新除數,續行演算.

$$
\begin{array}{l}
x^2-3ax+5a^2)\,x^3-4a^2x+15a^3\,(x+3a \\
\qquad\qquad\qquad \underline{x^3-3ax^2+5a^2x} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 3ax^2-9a^2x+15a^3 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{3ax^2-9a^2x+15a^3}
\end{array}
$$

故 $x^2-3ax+5a^2$ 爲所求之 H. C. F.

〔例 3〕　求 x^5-y^5 與 x^7-y^7 之 H. C. F.

$$
\begin{array}{l}
x^5-y^5)\,x^7-y^7\,(x^2 \\
\qquad\quad\ \underline{x^7-x^2y^5} \\
\qquad\qquad\ x^2y^5-y^7
\end{array}
$$

用此餘數爲除數之前,先棄其單項因數 y^5. 故除數爲 x^2-y^2.

$$
\begin{array}{l}
x^2-y^2)\,x^5-\ y^5\,(x^3+xy^3 \\
\qquad\quad\ \underline{x^5-x^3y^2} \\
\qquad\qquad\ x^3y^2-y^5 \\
\qquad\qquad\ \underline{x^3y^2-xy^4} \\
\qquad\qquad\qquad xy^4-y^5
\end{array}
$$

棄此餘數之單項因數y^4.則

$$\begin{array}{r@{\,}l}
x-y) & x^2-y^2\,(x+y \\
& \underline{x^2-xy} \\
& \phantom{x^2-{}}xy-y^2 \\
& \phantom{x^2-{}}\underline{xy-y^2}
\end{array}$$

故$x-y$爲所求之H.C.F.

〔例4〕　求$2x^2-5x+2$與$x^3+4x^2-4x-16$之H.C.F.

依此照除.則商得分數.殊屬不便.故以2乘$x^3+4x^2-4x-16$.而以單項因數乘除絕不及影響於多項之公因數.前款旣證明.又此演算之中途.復有用爲乘者.其理亦同.而此演算.概記爲次形.

$$\begin{array}{r@{\,}l}
2x^2-5x+2) & x^3+4x^2-4x-16 \\
& \underline{2} \\
& 2x^3+8x^2-8x-32\,(x \\
& \underline{2x^3-5x^2+2x} \\
& \phantom{2x^3+{}}13x^2-10x-32 \\
& \underline{2} \\
& \phantom{2x^3+{}}26x^2-20x-64\,(13 \\
& \phantom{2x^3+{}}\underline{26x^2-65x+26} \\
& \phantom{2x^3+{}}45\,|\,\underline{45x-90} \\
& \phantom{2x^3+26x^2-{}}x-2)\,2x^2-5x+2\,(2x-1 \\
& \underline{2x^2-4x} \\
& -x+2 \\
& \underline{-x+2}
\end{array}$$

故$x-2$爲所求之H.C.F.

114. 諸多項式之H.C.F.　求三以上諸式之H.C.F.其因數不能由視察求得者.代數式中.時時有之.然三以上諸式.其各公有之一因數.恆爲任意二式之H.C.F.之一因數.由是.於諸式中先求其任意兩式之H.C.F.次求此結果(卽兩式之H.C.F.)與第三式之H.

C.F.逐次如此.其最後所得之H.C.F.卽爲所求之H.C.F..

如求 x^3+x^2-x-1, x^3+3x^2-x-3, x^3+x^2-2 之H.C.F.

首次兩式之H.C.F.爲 x^2-1.

x^2-1 與第三式之H.C.F.爲 $x-1$.

故 $x-1$ 爲所求之H.C.F..

115. 簡法 若兩式首項之數字係數過大.則將兩式依遞昇方乘整列.可直求其H.C.F.

如求 $7x^4+2x^3-x^2+8x+1$ 與 $9x^4-2x^3+3x^2+6x+1$ 之H.C.F.則變化此兩式爲

$$1+8x-x^2+2x^3+7x^4 \text{ 及 } 1+6x+3x^2-2x^3+9x^4$$

可直求其H.C.F..

116. 稱名 兩式之最高公因數.亦有稱爲最大公約數(G.C.M.)者.然此名稱.殊不適當.

今舉一例.卽足證其不當.如 a^2 爲兩式之因數.則 a 亦爲兩式之因數.自不待言.而以 a^2 與 a 較.a^2 原爲高次.然 a 乃顯無論如何之數.故絕不能謂 a^2 大於 a.蓋 a 如爲正眞小於一.則 a^2 轉恆小於 a 故也.

由是.以一式與他式比.就文字論.祇能見其高.不能見其大.故祇能謂之高.不能謂之大.

又兩式之最高公因數.亦不能稱兩式之數値(以數代其文字)之最大公約數.

又以所選特別之數値.代式中之文字.而使其數爲整數者.亦然.

如 $2x^2+15x+13$ 及 $6x^2+17x+11$ 之H.C.F.爲 $x+1$.然設 x 爲 $\frac{1}{2}$.則此二式之數値俱爲21.故其G.C.M.(最大

公約數)之數值,亦爲21.然H.C.F.之數值,卻爲[illegible].

問　題　XXXI.

求以下各題中兩式之H.C.F.

1. x^2-5x+4 與 x^3-5x^2+4.

2. $x^2-5xy+4y^2$ 與 $x^4-5x^3y+4xy^3$.

3. $2x^2-5x+2$ 與 $4x^3+12x^2-x-3$.

4. $2x^2-5xy+2y^2$ 與 $4x^3+12x^2y-xy^2-3y^3$.

5. x^4+3x^2-10 與 x^4-3x^2+2.

6. $x^6+3x^4y-10x^2y^2$ 與 $x^4-3x^2y+2y^2$.

7. $2a^2-5a+2$ 與 $2a^3-3a^2-8a+12$.

8. $2b^2-5b+2$ 與 $12b^3-8b^2-3b+2$.

9. x^2-3x+2 與 x^3-3x+2.

10. $x^4y^4-3x^2y^2+2$ 與 $x^6y^6-3x^2y^2+2$.

11. $x^3-3a^2x-2a^3$ 與 $x^3-ax^2-4a^3$.

12. $2a^3+3a^2b-b^3$ 與 $4a^3+ab^2-b^3$.

13. a^3+b^3 與 $a^4+a^2b^2+b^4$.

14. $8a^3+1$ 與 $16a^4+4a^2+1$.

15. $x^3+2x^2y-xy^2-2y^3$ 與 $x^3-2x^2y-xy^2+2y^3$.

16. $2x^3+5x^2+x-8$ 與 $3x^3-4x^2+9x-8$.

17. $3x^3+x^2+x-2$ 與 $2x^3-x^2-x-3$.

18. $x^3-4x+15$ 與 x^4+x^2+25.

19. $3x^2-38x+119$ 與 $x^3-19x^2+119x-245$.

20. $3x^3-3x^2y+xy^2-y^3$ 與 $4x^2y-5xy^2+y^3$.

21. $12x^2-15xy+3y^2$ 與 $6x^3-6x^2y+2xy^2-2y^3$.

22. $2x^2-14x+20$ 與 $4x(x^2+5)-25(x+1)(x-1)$.

23. $16x^4+4x^2+1$ 與 $8x^4-16x^3+x-2$.

24. $a^2-4x^2+12x-9$ 與 $a^2+2a-4x^2+8x-3$.

25. $21-7x+3x^2-x^3$ 與 $35+19x^2+2x^4$.

26. $2x+9x^3+14x+3$ 與 $2+9x+14x^3+3x^4$.

27. x^3+3x^2-x-3 與 $x^4+4x^3-12x-9$.

28. $3x^4+5x^3-7x^2+2x+2$ 與 $2x^4+3x^3-2x^2+12x+5$.

29. y^3-2y^2+3y-6 與 $y^4-y^3-y^2-2y$.

30. $y^4-3yz^3+20z^4$ 與 $5y^4-3y^3z+64z^4$.

31. $2x^3-11x^2+11x+4$ 與 $2x^4-3x^3+7x^2-12x-4$.

32. $2x^4+4x^3+3x^2-2x-2$ 與 $3x^4+6x^3+7x+2x+2$.

33. $x^4-x^3+2x^2-x-1$ 與 $2x^4-2x^2+x-1$.

34. $2x^4-6x^3+3x^2-3x+1$ 與 $x^7-3x^6+x^5-4x^2+12x-4$.

35. $x^3+(m-3)x^2-m(2m+3)x+6m^2$ 與

$$x^3+(5m-3)x^2+2m(2m-5)x-18m^2.$$

36. $mn(x^2+y^2)+xy(m^2+n^2)$ 與

$$mn(x^3+y^3)+xy(m^2y+n^2x).$$

第十一編

最低公倍數

117. 公倍數　凡一代數式用他二以上諸代數式除之各能除盡,則此一代數式謂之他二以上諸代數式之公倍數.

最低公倍數諸公倍數中之最低次者,謂之最低公倍數.

最低公倍數通例略爲L. C. M.

由是求諸式之L. C. M.其法如次.

118. 單項式L. C. M.　二以上諸單項式之最低公倍數,可由視察求得.

如求a^3b^2c與$a^2b^3c^4$之L. C. M.此兩式中,a之最高方乘爲a^3,由是兩式之任一公倍數必含因數a^3,又同理,兩式之任一公倍數必含因數b^3,又必含因數c^4,故任一公倍數,必含因數$a^3b^3c^4$,由是,最低次方之公倍數爲$a^3b^3c^4$.

又求a^3bc^4, $a^2b^3c^6d$, $a^4bc^3d^2$之L. C. M.此三式中,a之最高方乘爲a^4,由是此三式之任一公倍數,必含因數a^4,又同理,此三式之任一公倍數,必含因數b^3, c^6, d^2,故任一公倍數必含因數$a^4b^3c^6d^2$.由是所求之L. C. M.爲$a^4b^3c^6d^2$.

依上諸例,凡二以上諸單項式之L. C. M.乃悉取諸式中所用之各文字,附以各文字之最高方乘之指數

而得.

若各式有數字係數,則求其算術上之最小公倍數,即得代數上L. C. M.之係數.

問 題 XXXII.

求以下各題中諸式之L. C. M.

1. a^3b^2 與 a^2b^3　　2. abc^2 與 a^2bc^3.

3. $9ab^3$ 與 $6a^2b$.　　4. $4x^3y$ 與 $10xy^3$.

5. $24a^3b^3x^4$ 與 $60a^2b^4x^6$.　　6. $a^2b^3x^5$ 與 $3b^5x$.

7. $9a^2b^3x^4y^5$ 與 $8x^3y^6$　　8. $\frac{3}{2}a^3b^3c^3$ 與 $2b^3c^6$.

9. $42axy^2z^3$ 與 $77b^3y^4$.　　10. ab^3, a^2bc 與 abc^2.

11. $3x^2yz^3$, $15xy^3z^2$ 與 $20x^2y^2z^2$.

12. $ab^2c^3x^4$, $a^4bc^2x^3$ 與 $a^3b^2cx^2$.

119. 知多項式之因數,即知其L. C. M. 二以上諸多項式之因數,則其L. C. M.可直求出.

其L. C. M.乃悉取各式中所用之各因數,附以各數最高方乘之指數而得.

如求 $(x-a)(x-b)^2(x-c)^3$ 與 $(x-a)^4(x-b)(x-c)$ 之L. C. M.,則此兩式之任一公倍數,必含因數 $(x-a)^4$.又同理,此兩式之任一公倍數必含因數 $(x-b)^2$, $(x-c)^3$.故任一公倍數,必含因數 $(x-a)^4(x-b)^2(x-c)^3$ 由是,最低次方之公倍數爲 $(x-a)^4(x-b)^2(x-c)^3$.

〔例 1〕 求 $a^4b^2-a^2b^4$ 與 $a^4b^3+a^3b^4$ 之L. C. M.

因　$$a^4b^2-a^2b^4=a^2b^2(a^2-b^2),$$
$$=a^2b^2(a+b)(a-b).$$

又　$$a^4b^3+a^3b^4=a^3b^3(a+b).$$

故其L. C. M. 爲 $a^3b^3(a+b)(a-b)$.

〔例2〕　求 $a^3+3a^2b+2ab^2$ 與 $a^4+4a^3b+3a^2b^2$ 之 L. C. M.

$$a^3+3a^2b+2ab^2=a(a+b)(a+2b),$$

及　$$a^4+4a^3b+3a^2b^2=a^2(a+b)(a+3b).$$

故 L. C. M. 爲 $a^2(a+b)(a+2b)(a+3b)$.

如上例,L. C. M. 用因數之積顯之,最爲便利,故不須解去括弧.

〔例3〕　求 x^2+2x+1, x^2-2x-3, x^2+4x+3 之 L. C. M.

$$x^2+2x+1=(x+1)^2,$$

$$x^2-2x-3=(x+1)(x-3),$$

及　$$x^2+4x+3=(x+1)(x+3).$$

故 L. C. M. 爲　$(x+1)^2(x-3)(x+3)$.

問題 XXXIII.

求以下各題中諸式之 L. C. M.

1. $(1-x)(a-2x)$ 與 $(a-2x)(a-3x)$.

2. $ax^3(a-x)(a-2x)$ 與 $a^3x(a-2x)(a-3x)$.

3. a^2-b^2 與 $(a+b)^2$.

4. $6ab(a+b)^2$ 與 $4a^2(a^2-b^2)$.

5. x^2+3x+2 與 x^2+5x+4.

6. $x^2+3xy+2y^2$ 與 $x^2+5xy+4y^2$.

7. x^2-4x+3 與 x^2-5x+6.

8. $3x^2-4xy^2+y^4$ 與 $6x^2-5xy^2+y^4$.

9. $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ 與 a^2-b^2.

10. $(x+2y)^2$, $(x-2y)^2$ 與 x^2-4y^2.

11. $x^2+7x+12$, x^2+6x+8, 及 x^2+5x+6.

12. $x^2-7xy+12y^2$, $x^2-6xy+8y^2$, 及 $x^2-5xy+6y^2$.

120. 多項式之L.C.M. 若多項之因數,不能由觀察求得,則欲求其L.C.M.不可不用求H.C.F.之法則(見112款).

如求 x^3+x^2-2 與 x^3+2x^2-3 之L.C.M.兩式之H.C.F.為 $x-1$.

而由除法知 $x^3+x^2-2=(x-1)(x^2+2x+2)$,

及 $x^3+2x^2-3=(x-1)(x^2+3x+3)$.

然 x^2+2x+2 與 x^2+3x+3,不復有公因數,故所求之L.C.M.為 $(x-1)(x^2+2x+2)(x^2+3x+3)$.

121. 最低公倍數之定理 設A與B為任意之兩代數式,H為其H.C.F.,L.為其L.C.M.

又設以H除A,B所得之商為 a, b,則得.

$$A=H\times a$$

$$B=H\times b$$

因H為A與B之最高公因數,故 a 與 b 決不復有公因數,由是A與B之L.C.M.為 $H\times a\times b$.

則 $$L=H.a.b \cdots\cdots(1)$$

從(1)式,得 $$L=Ha\times\frac{Hb}{H}=A\times\frac{B}{H}\cdots\cdots(2)$$

又 $$L\times H=Ha\times Hb=A\times B\cdots\cdots(3)$$

從(2)式知求任意兩代數式之L.C.M.,則以其H.C.F.除其一式,而以他式乘之,即得.

又從(3)式,知任意兩式之積,等於其H.C.F.與L.C.M.之積.

122. 諸多項式之L.C.M. 求三以上諸式之L.C.

M.若其因數不能由視察求得,則於諸式中,先求其兩式之L.C.M.,次求其結果與第三式之L.C.M.,逐次求之,最後所得之L.C.M.卽爲諸式之L.C.M.

問題 XXXIV.

求以下各題中諸式之L.C.M.

1. $3a^2bc,\ 27a^3b^2c^2,\ 6ab^2c.$

2. $a^4b^2,\ b^3c,\ a^2c^3.$

3. $4a^3,\ 6a^3b,\ 8ab^2.$

4. $2a^2,\ 6ab^3,\ 4a^3b^2.$

5. $x^3(x-y)^2,\ y^3(x+y)^2,\ xy(x^2-y^2).$

6. $a^3+a^2b,\ a(a-b),\ a^2-b^2.$

7. $xy^2-y^2,\ x^2y^2+xy^2,\ x^2y-y.$

8. $2axy(x-y),\ 3ax^2(x^2-y^2),\ 4y^2(x+y)^2.$

9. $6(x^2-9),\ 9(x+3),\ 15(x-4),\ 10(x^2-x-12).$

10. $4a+4b,\ 6a^2-24b^2,\ a^2-3ab+2b^2.$

11. $4ab^3+4b^3d,\ a^2b^2-b^2d^2,\ 8a^2bd-8abd^2.$

12. $x^2-10x+24,\ x^2-8x+12,\ x^2-6x+8.$

13. $x^2-9x-10,\ x^2-7x-30,\ x^2+4x+3.$

14. $2x^2-8,\ 3x^2-9x+6,\ 6x^2+18x+12.$

15. $x^2-3x+2,\ 2x^2-x-6,\ 3x^2-2x-1.$

16. $6x^2+x-2,\ 21x^2+17x+2,\ 14x^2-5x-1.$

17. $3x^2-10xy+3y^2,\ 3x^2-4xy+y^2,\ x^2-4xy+3y^2.$

18. $x^3+2x^2-3x,\ 2x^3+5x^2-3x.$

19. $x^2y^2-9y^2,\ x^2y-xy-6y,\ x^3+x^2-6x.$

20. $x^3-a^3,\ x^3+a^3,\ x^4+a^2x^2+a^4.$

21. $x^2-1,\ x^3+x^2+x+1,\ x^3-x^2+x-1.$

22. $9x^3-x-2$ 與 $3x^3-10x^3-7x-4.$

23. $x^3-ax^2-a^2x+a^3$ 與 $x^3+ax^2-a^2x-a^3.$

24. x^3+x^2-4x-4 與 $x^3+6x^2+11x+6.$

25. x^4-x^3+8x-8 與 $x^3+4x^2-8x+24.$

26. $a^3+6a^2+11a+6$ 與 $a^3+10a^2+28a+20.$

第十二編

分數

123. 分數 依算術之定義,分數$\frac{5}{7}$者,分單位爲 7 等分,而取其部分 5 次也,同樣,分數$\frac{a}{b}$(但a與b俱爲正整數)者,分單位爲b等分而取其部分a次也.

124. 代數分數 依前款之定義,其分子,分母,必俱爲正整數,由是決不能有如$\frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{2}{5}}$之分數,何則,以不能謂爲分單位爲$-\frac{2}{5}$分而取其部分$\frac{3}{4}$次故也.

如是,必分數$\frac{a}{b}$之文字,俱以正整數值爲限,或變更$\frac{a}{b}$之定義然後可,而文字之數值,原不能以整數爲限,故必不用分數之形,或變更分數之定義然後可,然分數之形,終不能不用,故變更分數之定義爲必要焉.

依前款之定義,則以b乘$\frac{a}{b}$,必爲將所取之a部更取b次,如是得ab部而此各部集至b倍,必復成爲單位,故ab部,可爲a單位,

故 $$\frac{a}{b}\times b=a \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

以b除其各邊,則得

$$\frac{a}{b}=a\div b \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

而分數$\frac{a}{b}$,以b乘之,則得a.卽可立爲定義.何則因此新定義.若a與b爲正整數.卽與前款之定義符合.故也.又用此定義.則文字更不必以正整數値爲限.

同樣.則分數$\frac{a}{b}$,爲以b除a所得之商.亦可立爲定義.

由是.前款之定義.不適用於代數分數.可代以次之定義.

〔定義1〕 代數分數$\frac{a}{b}$者.以b乘之則得a,之量也.但a與b得爲任意之數値.

〔定義2〕 代數分數$\frac{a}{b}$者.以b除a所得之商也.前會證分數之形$\frac{a}{b}$,可作$a\div b$之意味用.

125. 餘論 推究代數分數之性質.更不可不知者一事.卽代數分數之加減乘除.或化爲單簡之式.其法全與算術分數同.

126. 定理 分數之分子與分母以相同之數乘之.其値不變.

今不拘a, b, m之數値如何.

求證 $$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm},$$

設 $$x=\frac{a}{b},\quad \text{則}\quad x\times b=\frac{a}{b}\times b,$$

依定義得 $$\frac{a}{b}\times b=a,$$

$$\therefore \qquad xb=a.$$

兩邊以m乘之得 $$xbm=am,$$

以bm除之.則　　$x=am\div bm$,

即　　$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$$

即分數之分子與分母各以相同之數乘之.其值不變.

127. 定理　依前款分數之分子與分母.各以相同之數乘之其值不變.故反推其理.分數之分子與分母.各以相同之數除之.其值亦不變.

由是.分數之分子與分母中.去其公有之因數.可化爲簡式.

如$\frac{a^2y}{x^2y}$之分子與分母中.各去其公有之因數y.則得最簡之分數$\frac{a^2}{x^2}$,

分數之分子與分母中.更無公因數者.其分數謂之最簡項.又謂之簡式.

128. 化分數爲最簡項　欲化某分數爲最簡項.則將某分數之分子與分母.各以其最高公因數除之.何則.因如是則與原分數等值.且分子與分母更不含公因數.故也.

〔例1〕　化$\frac{3ax^2y}{6a^2xy}$爲最簡項.

此分子與分母H. C. F. 爲$3axy$,

因而　　$$\frac{3ax^2y}{6a^2xy}=\frac{3ax^2y\div 3axy}{6a^2xy\div 3axy}=\frac{x}{2a}.$$

〔例2〕　化$\frac{a^2b^3}{a^5b^4}$爲最簡項.

此分子分母之H. C. F. 爲a^2b^3,

因而　$$\frac{a^2b^3}{a^5b^4}=\frac{a^2b^3\div a^2b^3}{a^5b^4\div a^2b^3}=\frac{1}{a^3b}.$$

〔例 3〕　化 $\frac{2a^3b^2xy^4}{3ab^3x^3y^2}$ 爲最簡項.

此分子與分母之H.C.F.爲 ab^2xy^2,

因而　$$\frac{2a^3b^2xy^4}{3ab^3x^3y^2}=\frac{2a^3b^2xy^4\div ab^2xy^2}{3ab^3x^3y^2\div ab^2xy^2}=\frac{2a^2y^2}{3bx^2}.$$

129. 别法　欲化分數爲最簡項,則以分數之分子與分母,各以其最高公因數除之,固已,然亦可代以用任意之公因數屢次除之,至分數化爲最簡項,然後止.

如　$$\frac{a^4b^3c^3}{a^2b^4c^4}=\frac{a^2b^3c^3}{b^4c^4}=\frac{a^2c^3}{bc^4}=\frac{a^2}{bc}.$$

上之演算,更得簡式如下.

$$\frac{\overset{a^2}{\cancel{a^4}}\cancel{b^3}\cancel{c^3}}{\cancel{a^2}\underset{bc}{\cancel{b^4}\cancel{c^4}}}=\frac{a^2}{bc}.$$

問　題　XXXV.

化以下諸分數爲最簡項.

1. $\frac{a^2b}{ab^2}$.　　2. $\frac{x^3y^2}{x^2y^3}$.　　3. $\frac{2a^2bc^2}{4a^4b^3c}$.

4. $\frac{6a^5b^8c^4}{4a^7b^3c^4}$.　　5. $\frac{x^4y^3z^2}{x^6y^2z^2}$.　　6. $\frac{12x^7y^2z^{10}}{16x^2y^2z^2}$.

7. $\frac{15a^8b^4c^7x^5}{25a^2b^4c^5x^3}$.　　8. $\frac{12ab^2c^3d^4}{150a^4b^3c^2d}$.　　9. $\frac{3a^5x\,yz^4}{5ab^4xy^3z}$.

10. $\frac{5a^3b^4c^6xy^2}{7b^4c^8xy^3}$.　　11. $\frac{14ab^2c^6xy^2z^5}{21a^6b^2cx\,y^2z}$.　　12. $\frac{8a^3bc^4x^5y^2z}{4a^2b^3cx^8y^4z^3}$.

130. 化多項式之分數爲簡式　多項式之分數,若

其分子與分母可由視察而知其因數,則分解其分子與分母為最低次之因數,使各公有之因數,一望即知,則可直去之而化為簡式.

〔例1〕 化$\frac{a^2-ax}{a^2-x^2}$為簡式.

$$\frac{a^2-ax}{a^2-x^2}=\frac{a(a-x)}{(a-x)(a+x)}=\frac{a}{a+x}.$$

〔例2〕 化$\frac{x^4-x^2}{x^4-1}$為簡式.

$$\frac{x^4-x^2}{x^4-1}=\frac{x^2(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{x^2}{x^2+1}.$$

〔例3〕 化$\frac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$為簡式.

$$\frac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}=\frac{(x-5)(x-2)}{(x-3)(x-2)}=\frac{x-5}{x-3}.$$

〔例4〕 化$\frac{x^2-ax}{a^2-x^2}$為簡式.

$$\frac{x^2-ax}{a^2-x^2}=\frac{x(x-a)}{(a-x)(a+x)}.$$

而$x-a=-(a-x)$由是,分子及分母,各以$a-x$除之,則得等值之分數$\frac{-x}{a+x}$.

又,或分子與分母,各以$x-a$除之,則得

$\frac{x}{-(a+x)}$依除法符號之定法,$\frac{-x}{a+x}$及$\frac{x}{-(a+x)}$俱等於$-\frac{x}{a+x}$,故分子或分母為負符號,通例記為$-\frac{x}{a+x}$.

〔注意〕 變分子各項,與分母各項之符號,其值不變.

何則,因此同於以 -1 乘其分子與分母,故也.

問　題　XXXVI.

化以下各式爲簡式.

1. $\dfrac{2ab}{a^2+ab}$.　　2. $\dfrac{x^2y^2}{x^2-x^2y^2}$.

3. $\dfrac{a^2-ab}{a^2+ab}$.　　4. $\dfrac{x^2+ax}{x^2-a^2}$.

5 $\dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}$.　　6. $\dfrac{x^2-x^2y^2}{(x+xy)^2}$.

7. $\dfrac{x^2+2x}{x^2-4}$.　　8. $\dfrac{x^4+x^2}{x^4-1}$.

9. $\dfrac{4x-16}{x^2-16}$.　　10. $\dfrac{2x^3-4x^4}{x^2-4x^4}$.

11. $\dfrac{x-2}{4-x^2}$.　　12. $\dfrac{a-3}{9-a^2}$.

13. $\dfrac{a^2x^2-x^4}{x^4-a^4}$.　　14. $\dfrac{x^4-a^2}{a^2-ax^2}$.

15. $\dfrac{x^5-a^2x^3}{x^4-a^4}$.　　16. $\dfrac{a^2x^2y^2-x^4y^4}{x^4y^4-a^4}$.

17. $\dfrac{5ax-15a^2}{a^2-9a^2}$.　　18. $\dfrac{3x^2-12ax}{48a^2-3x^2}$.

19. $\dfrac{a^2-2ax+x^2}{a^2-x^2}$.　　20. $\dfrac{a^4+2a^2b^2+b^4}{a^4-b^4}$.

21. $\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$.　　22 $\dfrac{x^4-1}{x^5-1}$.

23. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}$.　　24. $\dfrac{1-5a+6a^2}{1-7a+12a^2}$.

25. $\dfrac{x^2-9x+20}{x^2+6x-55}$.　　26. $\dfrac{1-9y^2+20y^4}{1+6y^2-55y^4}$.

27. $\dfrac{x^2-8xy+7y^2}{x^2-3xy-28y^2}$.　　28. $\dfrac{1-8a^2b^2+7a^4b^4}{1-3a^2b^2-28a^4b^4}$.

29. $\dfrac{(a^3-x^3)(a+x)}{(a^3+x^3)(a-x)}$.　　30. $\dfrac{(a^3-b^3)(a^2-ab+b^2)}{(a^3+b^3)(a^2+ab+b^2)}$.

31. $\dfrac{a^4-b^4}{(a^3-b^3)(a+b)}$.　　32. $\dfrac{(a^6-b^6)(a-b)}{(a^3-b^3)(a^4-b^4)}$.

131. **最高公因數之應用**　若分數中分子與分母之因數,不能由視察求得,則依第十編,求其最高公因數,因而以此最高公因數,除其分子與分母,則分數亦能化爲簡式.

如化 $\dfrac{x^3-23x+10}{5x^3-23x^2+4}$ 爲簡式.

分子及分母之H. C. F. 爲 x^2-5x+2.

因得　$x^3-23x+10=(x^2-5x+2)(x+5)$,

及　$5x^3-23x^2+4=(x^2-5x+2)(5x+2)$.

由是原分數等於　$\dfrac{x+5}{5x+2}$.

問題 XXXVII.

化以下各式爲最簡項.

1. $\dfrac{x^3-3x+2}{2x^3-3x^2+1}$.　　2. $\dfrac{3x^2-8x+5}{x^3-4x^2+5x-2}$.

3. $\dfrac{x^3+3x^2-20}{x^4-x^2-12}$.　　4. $\dfrac{x^3+6x^2+11x+6}{x^3+5x^2+6x}$.

5. $\dfrac{2x^3+ax^2+4a^2x-7a^3}{x^3-7ax^2+8a^2x-2a^3}$. **6.** $\dfrac{2x^3+3x^2+4x-3}{6x^3+x^2-1}$.

7. $\dfrac{x^3-3x-2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$. **8.** $\dfrac{x^4-x^3-x+1}{x^4-2x^3-x^2-2x+1}$.

9. $\dfrac{x^4+2x^3-3x^2-7x-2}{2x^4+x^3-6x^2-5x-1}$. **10.** $\dfrac{x^4-20x^2-15x+4}{x^4+9x^3+19x^2-9x-20}$.

132. 化分數爲公分母（卽通分） 分數之分子與分母,以相同之數乘之,其值不變（126款）,故若干個異分母之分數,各可化爲同分母等値之分數.

此演算全與算術同,如次

先求諸分母之L.C.M.次以諸分數中之一分母除之,並以所得之商乘其分子與分母,卽得,又他之分數,其法相同,如是,則各分數,與原分數等值,且俱以諸分母之L.C.M.爲分母.

化分數爲公分母之法,謂之通分.

如化 $\dfrac{x}{a^2b(x+a)}$, $\dfrac{y}{ab^2(x-a)}$, $\dfrac{z}{ab(x^2-a^2)}$. 爲公分母.

分母之L.C.M.爲 $a^2b^2(x^2-a^2)$, 此L.C.M. $a^2b(x+a)$, $ab^2(x-a)$, $ab(x^2-a^2)$, 各式除之,則其商以 $b(x-a)$, $a(x+a)$, ab.

故
$$\frac{x}{a^2b(x+a)}=\frac{x\times b(x-a)}{a^2b(x+a)\times b(x-a)}=\frac{bx(x-a)}{a^2b^2(x^2-a^2)}$$
$$\frac{y}{ab^2(x-a)}=\frac{y\times a(x+a)}{ab^2(x-a)\times a(x+a)}=\frac{ay(x+a)}{a^2b^2(x^2-a^2)}$$
$$\frac{z}{ab(x^2-a^2)}=\frac{z\times ab}{ab(x^2-a^2)\times ab}=\frac{abz}{a^2b^2(x^2-a^2)}$$

〔注意〕上之演算,不獨可取諸分母之最低公倍數

爲公分母.亦可取諸分母之任意公倍數爲公分母.然取其最低公倍數.則甚簡便云.

133. **分數之加法及減法**　同分母兩分數之和(或差),恆以兩分子之和(或差)爲分子.而以公分母爲分母.此理易由66款推得.

若兩分數爲異分母.則先依前款通分之法.化爲同分母等值之分數.然後依上法求其和(或差).卽以所通得之兩分子之和(或差)爲分子.而以所通得之公分母爲分母.

如
$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x}=\frac{a+b}{x},$$
$$\frac{a}{x}-\frac{b}{x}=\frac{a-b}{x}.$$

又
$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{a\times y}{y\times x}+\frac{b\times x}{y\times x}=\frac{ay}{xy}+\frac{bx}{xy}=\frac{ay+bx}{xy}$$

及
$$a+\frac{b}{y}=\frac{ay}{y}+\frac{b}{y}=\frac{ay+b}{y}$$

三以上諸分數相加.或幾個分數.其中或加或減者.亦可依前法求之.卽先化各分數爲公分母.然後以化得之分子或加或減.卽得.

如
$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x}-\frac{c}{x}=\frac{a+b-c}{x},$$

及
$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}-\frac{c}{z}=\frac{a\times yz}{x\times yz}+\frac{b\times xz}{y\times xz}-\frac{c\times xy}{z\times xy}$$
$$=\frac{ayz}{xyz}+\frac{bxz}{xyz}-\frac{cxy}{xyz}=\frac{ayz+bxz-cxy}{xyz}.$$

〔注意〕分數與文字或數字之間.其不復更用符號

者.當知爲省略乘法之符號而然.如$2\frac{a}{b}$,原與$2\times\frac{a}{b}$同,然非$2+\frac{a}{b}$.因與算術之$2\frac{1}{2}$異故也.

〔例1〕 求$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}$之值.

分母之L. C. M.爲$(x-a)(x+a)$

因而 $$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{x+a}{(x-a)(x+a)}+\frac{x-a}{(x+a)(x-a)}$$
$$=\frac{x+a+(x-a)}{x^2-a^2}=\frac{2x}{x^2-a^2}.$$

〔例2〕 求$\frac{a}{a-x}+\frac{ax}{x^2-a^2}$之值.

凡用爲加減之分數.其諸分母.皆當依其特別文字之遞降方乘或遞昇方乘整列.如本例依x之遞降方乘整列.則

$$\frac{ax}{x^2-a^2}=\frac{ax}{-(a^2-x^2)}=\frac{-ax}{a^2-x^2}$$

故 $$\frac{a}{a-x}+\frac{-ax}{a^2-a^2}=\frac{a(a+x)}{a^2-x^2}+\frac{-ax}{a^2-x^2}$$
$$=\frac{a(a+x)-ax}{a^2-x^2}=\frac{a^2}{a^2-x^2}.$$

〔例3〕 化$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}$爲簡式.

分數所以難於一次相加者.多以分母悉非同次式故.如本例.其諸分母.實難於一次通分.然

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}=\frac{(1+x)+(1-x)}{(1-x)(1+x)}=\frac{2}{1-x^2}$$

則 $\dfrac{2}{1-x^2}+\dfrac{2}{1+x^2}=\dfrac{2(1+x^2)+2(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)}=\dfrac{4}{1-x^4}$

終得 $\dfrac{4}{1-x^4}+\dfrac{4}{1+x^4}=\dfrac{4(1+x^4)+4(1-x^4)}{(1-x^4)(1+x^4)}=\dfrac{8}{1-x^8}$

〔例 4〕 求 $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}$ 之值.

在本例.不宜化諸分母爲公分母.但用二分數依次求之.其演算乃便.如次.

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2}{x^2-1},$$

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{4}{x^2-4},$$

$$\frac{2}{x^2-1}+\frac{4}{x^2-4}=\frac{2(x^2-4)+4(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2-4)}=\frac{6x^2-12}{x^4-5x^2+4}.$$

〔例 5〕 求 $\dfrac{1}{x^2-5x+6}-\dfrac{1}{x^2-7x+12}$ 之值.

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{(x-2)(x-3)},$$

$$\frac{1}{x^2-7x+12}=\frac{1}{(x-3)(x-4)},$$

故分母之 L. C. M. 爲 $(x-2)(x-3)(x-4)$.

由是 $\dfrac{x-4}{(x-2)(x-3)(x-4)}-\dfrac{x-2}{(x-2)(x-3)(x-4)}$

$$=\frac{(x-4)-(x-2)}{(x-2)(x-3)(x-4)}=\frac{-2}{(x-2)(x-3)(x-4)}$$

$$=-\frac{2}{(x-2)(x-3)(x-4)}.$$

〔例 6〕 求 $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}$

$+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$ 之值.

此種問題,必將諸分母之因數 a 悉移於 b 前或移於 c 前,又 b 悉移於 c 前,似此更換,然後初學者易求.

故換 $b-a$ 爲 $-(a-b)$,換 $c-a$ 爲 $-(a-c)$.又換 $c-b$ 爲 $-(b-c)$.則

$$\frac{1}{(b-a)(b-c)}=\frac{1}{-(a-b)(b-c)}=\frac{-1}{(a-b)(b-c)}$$

$$\frac{1}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{\{-(a-c)\}\{-(b-c)\}}=\frac{1}{(a-c)(b-c)}.$$

由是化次式爲簡式,卽

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{-1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(a-c)(b-c)}.$$

分母之 L. C. M. 爲 $(a-b)\ (a-c)\ (b-c)$.

因而 $$\frac{1}{(a-b)(a-c)}=\frac{b-c}{(a-b)(a-c)(b-c)},$$

$$\frac{-1}{(a-b)(b-c)}=\frac{-(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)},$$

$$\frac{1}{(a-c)(b-c)}=\frac{a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)},$$

由是

$$\frac{b-c-(a-c)+a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{b-c-a+c+a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{0}{(a-b)(a-c)(b-c)}=0.$$

問題 XXXVIII.

化以下各分數為最低公分母〔1至14〕.

1. $\dfrac{2}{3x}, \dfrac{4}{5x}, \dfrac{7}{30x}$　　**2.** $\dfrac{1}{2ax}, \dfrac{1}{6bx}, \dfrac{1}{8cx}$.

3. $\dfrac{a}{bc}, \dfrac{b}{ac}, \dfrac{c}{ab}$.　　**4.** $\dfrac{bc}{a}, \dfrac{ca}{b}, \dfrac{ab}{c}$.

5. $\dfrac{1}{x+1}, \dfrac{5}{2x+2}$.　　**6.** $\dfrac{3}{2x-2}, \dfrac{4}{3x-3}$.

7. $\dfrac{5}{6x+12}, \dfrac{3}{8x+16}$.　　**8.** $\dfrac{1}{x+1}, \dfrac{3}{2x+2}, \dfrac{5}{x^2-1}$.

9. $\dfrac{6}{5x-5}, \dfrac{2}{3x+3}, \dfrac{4}{x^2-1}$.

10. $\dfrac{a}{x-a}, \dfrac{x}{a-x}, \dfrac{a^2}{x^2-a^2}, \dfrac{x^2}{a^2-x^2}$.

11. $\dfrac{2a}{a-b}, \dfrac{b}{2b-2a}, \dfrac{3a^2}{4(a^2-b^2)}, \dfrac{5b^2}{6(b^2-a^2)}$.

12. $\dfrac{1}{x+1}, \dfrac{2x}{(x+1)^2}, \dfrac{3x^2}{(x+1)^3}$.

13. $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}, \dfrac{1}{(b-x)(c-x)}, \dfrac{1}{(x-c)(x-a)}$.

14. $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}, \dfrac{1}{(b-c)(b-a)}, \dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$.

化以下各式為單項〔15至25〕.

15. $a-1+\dfrac{2}{a+1}$.　　**16.** $a+x+\dfrac{x^2}{a-x}$.

17. $x+2y+\dfrac{4y^2}{x-2y}$.　　**18.** $\dfrac{a-b}{a^2b}+\dfrac{a-b}{ab^2}$.

19. $\frac{a-5b}{5}-\frac{a-3b}{3}$.　　**20.** $\frac{6a-5b}{3}-\frac{4a-7b}{2}$.

21. $\frac{a-3b}{4}+\frac{3a-b}{5}$.　　**22.** $2\frac{x-y}{3}-3\frac{x+y}{4}$.

23. $5\frac{x-2y}{6}-3\frac{y-2x}{4}$.　　**24.** $\frac{x}{4}-\frac{x-4}{3}+\frac{x-5}{6}$.

25. $\frac{2x-3y}{3}+\frac{x+2y}{4}-\frac{3x-2y}{6}$.

化以下各式爲簡式〔26至65〕.

26. $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-a}$.　　**27.** $\frac{x}{x-a}+\frac{a}{a-x}$.

28. $\frac{x}{x^2-a^2}+\frac{a}{a^2-x^2}$.　　**29.** $\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}$.

30. $\frac{1}{2-x}-\frac{4}{4-x^2}$.　　**31.** $\frac{1}{3+x}+\frac{6}{x^2-9}$.

32. $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}$.　　**33.** $\frac{1}{x-4y}-\frac{1}{x-5y}$.

34. $\frac{1}{3x-2y}-\frac{1}{x-2y}$.　　**35.** $\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}$.

36. $\frac{a+2b}{a-2b}-\frac{a-2b}{a+2b}$.　　**37.** $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}$.

38. $\frac{a}{a-2b}+\frac{2ab}{(a-2b)^2}$.　　**39.** $\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}+\frac{4y^2}{x^2-y^2}$.

40. $\frac{2a}{a+b}+\frac{2b}{a-b}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

41. $\frac{a}{a-1}-1-\frac{1}{a(a-1)}$.

42. $\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x+2}-\frac{x+6}{x^2+4}$.

43. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{x+3}{2(x^2+1)}$.

44. $\frac{3-x}{1-3x}-\frac{3+x}{1+3x}-\frac{1-16x}{9x^2-1}$.

45. $\frac{a}{a-x}+\frac{a}{a+x}+\frac{2a^2}{a^2+x^2}$.

46. $\frac{a}{a-x}+\frac{a}{a+x}+\frac{2a^2}{a^2+x^2}+\frac{4a^2}{a^4+x^4}$.

47. $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}$.

48. $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}$.

49. $\frac{1}{a}-\frac{2}{a+1}+\frac{1}{a+2}$.

50. $\frac{1}{x-3}-\frac{3}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x+3}$.

51. $\frac{1}{a}-\frac{3}{a+1}+\frac{3}{a+2}-\frac{1}{a+3}$.

52. $\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x-1}+\frac{6}{x}-\frac{4}{x+1}+\frac{1}{x+2}$.

53. $\frac{1}{a}-\frac{4}{a+1}+\frac{6}{a+2}-\frac{4}{a+3}+\frac{1}{a+4}$.

54. $\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{2}{x^2-4x+3}+\frac{1}{x^2-3x+2}$.

55. $\frac{1}{x^2+5ax+6a^2}-\frac{2}{x^2+4ax+3a^2}+\frac{1}{x^2+3ax+2a^2}$.

56. $\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}-\frac{2(x-2)}{(x-3)(x-1)}+\frac{x-3}{(x-1)(x-2)}$.

57. $\dfrac{1}{x(x-1)}+\dfrac{2}{1-x^2}+\dfrac{1}{x(x+1)}$.

58. $\dfrac{2a}{(x-2a)^2}-\dfrac{x-a}{x^2-5ax+6a^2}+\dfrac{2}{x-3a}$.

59. $\dfrac{3+2a}{2-a}-\dfrac{2-3a}{2+a}+\dfrac{16a-a^2}{a^2-4}$.

60. $\dfrac{x+ay}{x-ay}-\dfrac{x-ay}{x+ay}+2\dfrac{x^2+a^2y^2}{x^2-a^2y^2}$.

61. $\dfrac{x^2-2x}{x^2-1}-\dfrac{x+3}{x+1}-\dfrac{4x}{1-x}$.

62. $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1+2x-x^2}{1-x^2}$.

63. $\dfrac{1}{x+3y}+\dfrac{6y}{x^2-9y^2}-\dfrac{1}{3y-x}$.

64. $\dfrac{x^2-(y-z)^2}{(x+y)^2-z^2}+\dfrac{y^2-(z-x)^2}{(y+z)^2-x^2}+\dfrac{z^2-(x-y)^2}{(z+x)^2-y^2}$.

65. $\dfrac{a^2-(b+c)^2}{(a+b)^2-c^2}+\dfrac{b^2-(c+a)^2}{(b-c)^2-a^2}+\dfrac{c^2-(a-b)^2}{(c-a)^2-b^2}$.

124. 分數之乘法　任意之兩代數分數相乘,其法如次.

設兩分數為 $\dfrac{a}{b}$ 及 $\dfrac{c}{d}$,則

$$x=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}.$$

以 $b\times d$ 乘之,則

$$x\times b\times d=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times b\times d$$

$$=\frac{a}{b}\times b\times\frac{c}{d}\times d.\qquad\text{〔據 39 款〕}$$

然　$\frac{a}{b}\times b=a$, 及 $\frac{c}{d}\times d=c$,

$\therefore$　$xbd=ac$,

以 bd 除之,則　$x=\frac{ac}{bd}$.

即　$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

故求任意兩代數分數之積,則以兩分子之積爲分子,兩分母之積爲分母.

數分數之積,亦可依此法求之.

如　$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{ac}{bd}\times\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}$.

又　$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{d}{a}=\frac{acd}{bda}=\frac{c}{b}$.

又　$\frac{x+1}{x+2}\times\frac{x+2}{x+3}\times\frac{x+3}{x+1}=\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+1)}=1$.

〔定義〕有兩分數,其一分數之分子,各爲他一分數之分母,互謂之反數.

如 $\frac{b}{a}$ 爲 $\frac{a}{b}$ 之反數,又 $\frac{1}{a}$ 爲 $\frac{a}{1}$ (即 a) 之反數.

135. 分數之數法　設 $\frac{a}{b}$ 及 $\frac{c}{d}$ 爲任意兩分數,如

$$x=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}.$$

則　$x\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$.

$\therefore$　$x\times\frac{c}{d}\times\frac{d}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$.

然　　$$x\times\frac{c}{d}\times\frac{d}{c}=x,$$

$$\therefore\qquad x=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}.$$

故以任意之分數除者,恆與乘其反數同.

〔例1〕 以 $\frac{x}{a}$ 除 $\frac{x^2}{a^2}$.

$$\frac{x^2}{a^2}\div\frac{x}{a}=\frac{x^2}{a^2}\times\frac{a}{x}=\frac{x}{a}.$$

〔例2〕 以 ab 除 $\frac{a}{b}$.

$$\frac{a}{b}\div ab=\frac{a}{b}\times\frac{1}{ab}=\frac{1}{b^2}.$$

〔例3〕 以 $\frac{x^3-a^3}{x+a}$ 除 $\frac{x-a}{x^3+a^3}$.

$$\frac{x-a}{x^3+a^3}\div\frac{x^3-a^3}{x+a}=\frac{x-a}{x^3+a^3}\times\frac{x+a}{x^3-a^3},$$

$$=\frac{1}{(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)}=\frac{1}{x^4+a^2x^2+a^4}.$$

問　題　XXXIX.

化以下各分數爲最簡之形〔1至12〕.

1. $\frac{2a}{3c}\times\frac{3c}{4a}$.　　**2.** $\frac{5a^2}{6bc}\times\frac{3b^2}{10ca}$.

3. $\frac{a}{c}\div\frac{c}{d}$.　　**4.** $\frac{2a^2}{bc}\div\frac{3ab}{c^2}$.

5. $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{bd}{ac}$.　　**6.** $\frac{a^2}{bc}\times\frac{b^2}{ca}\times\frac{c^2}{ab}$.

7. $\frac{b}{a}\times\frac{b}{c}\div\frac{c}{a}$.　　8. $\frac{a^2}{b^2}\times\frac{b^2}{c^2}\div\frac{c^2}{a^2}$.

9. $\frac{2a}{bc}\times\frac{2b}{ca}\times\frac{2c}{ab}$.　　10. $\frac{2x^3}{3yz}\times\frac{3y^3}{5zx}\times\frac{5z^3}{2xy}$.

11. $\frac{3axy^3}{5b^2}\div\frac{6ay^3}{10b^2x}$.　　12. $\frac{5a^2bc}{3b^2c^2a}\div\frac{5a^2bc^2}{3ab^2c^3}$.

13. $\frac{3a^2b}{5x^2y}$ 以何式乘之,則其積為 $\frac{2a}{5x}$.

14. $\frac{x^2y}{a^2z^2}$ 以何式除之,則其商為 $\frac{b^2x}{c^2z}$.

以下各式用最簡之形顯之〔15至32〕.

15. $\frac{x-y}{x^2+xy}\times\frac{x+y}{xy-y^2}$.　　16. $\frac{a+b}{a^3-a^2b}\times\frac{ab-b^2}{ab+a^2}$.

17. $\frac{x^2+2x}{x^2-9}\times\frac{x^2-3x}{x^2-4}$.　　18. $\frac{x^2-y^2}{x^2-4y^2}\times\frac{x-2y}{x+y}$.

19. $\frac{x^3+3x^2}{x+4}\div\frac{x+3}{x^2+4x}$.　　20. $\frac{a+4b}{a^2+5ab}\div\frac{ab+4b^2}{a^3+5a^2b}$.

21. $\frac{x-1}{x-2}\times\frac{x-2}{x-3}\times\frac{x-3}{x-4}$.

22. $\frac{x+1}{(x+2)^2}\times\frac{x+2}{(x+3)^2}\times\frac{x+3}{(x+1)^2}$.

23. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}\times\frac{x^2-7x+12}{x^2-5x+4}$.

24. $\frac{x^2-1}{x^2+3x-10}\times\frac{x^2-25}{x^2-3x-4}$.

25. $\frac{x^3-a^3}{x^2-4a^2}\times\frac{x+2a}{x-a}$.　　26. $\frac{a^3-x^3}{a^3+x^3}\div\frac{(a-x)^2}{a^2-x^2}$.

27. $\frac{a+x}{(a-x)^2}\times\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}\times\frac{a^4-x^4}{(a+x)^3}$.

28. $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^3}\times\frac{(a^2-b^2)^2}{a^4-b^4}\div\frac{(a+b)^3}{a^2+b^2}$.

29. $\frac{(a-b)^2-c^2}{(a-c)^2-b^2}\times\frac{b^2-(c-a)^2}{c^2-(a-b)^2}$.

30. $\frac{x^2-(y+z)^2}{x^2-(y-z)^2}\div\frac{y^2-(x+z)^2}{y^2-(x-z)^2}$.

31. $\frac{x^6+y^6}{x^6-y^6}\times\frac{x-y}{x+y}\div\frac{x^4-x^2y^2+y^4}{x^4+x^2y^2+y^4}$.

32 $\left(1-\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)\div\left(\frac{x^3-y^3}{x-y}-3xy\right)$.

136. 繁分數 由是更舉繁分數之例,如次.

〔例 1〕 化 $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ 爲簡式.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

〔例 2〕 化 $\dfrac{\frac{a+x}{a-x}-\frac{a-x}{a+x}}{\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}}$ 爲簡式.

$$\frac{a+x}{a-x}-\frac{a-x}{a+x}=\frac{(a+x)(a+x)-(a-x)(a-x)}{(a-x)(a+x)}=\frac{4ax}{a^2-x^2}.$$

及

$$\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}=\frac{(a+x)(a+x)+(a-x)(a-x)}{(a-x)(a+x)}=\frac{2a^2+2x^2}{a^2-x^2},$$

由是所設之分數等於下式.

$$\frac{4ax}{a^2-x^2}\div\frac{2a^2+2x^2}{a^2-x^2}=\frac{4ax}{a^2-x^2}\times\frac{a^2-x^2}{2a^2+2x^2}=\frac{2ax}{a^2+x^2}.$$

〔例 3〕 化 $\dfrac{x}{x-\dfrac{x+2}{x+2-\dfrac{x+1}{x}}}$ 爲簡式.

$$\frac{x}{x-\dfrac{x+2}{x+2-\dfrac{x+1}{x}}}=\frac{x}{x-\dfrac{(x+2)x}{(x+2)x-(x+1)}}=\frac{x}{x-\dfrac{x^2+2x}{x^2+x-1}}$$

$$=\frac{x(x^2+x-1)}{x(x^2+x-1)-(x^2+2x)}=\frac{x(x^2+x-1)}{x^3-3x}=\frac{x^2+x-1}{x^2-3}.$$

〔例 4〕 化 $\dfrac{\dfrac{a-b}{1+ab}+\dfrac{b-c}{1+bc}}{1-\dfrac{(a-b)(b-c)}{(1+ab)(1+bc)}}$ 爲簡式.

$$\frac{a-b}{1+ab}+\frac{b-c}{1+bc}=\frac{(a-b)(1+bc)+(b-c)(1+ab)}{(1+ab)(1+bc)}$$

$$=\frac{a-b+abc-b^2c+b-c+ab^2-abc}{(1+ab)(1+bc)}=\frac{a-c+ab^2-cb^2}{(1+ab)(1+bc)}$$

$$1-\frac{(a-b)(b-c)}{(1+ab)(1+bc)}=\frac{(1+ab)(1+bc)-(a-b)(b-c)}{(1+ab)(1+bc)}$$

$$=\frac{1+ab+bc+ab^2c-ab+b^2+ac-bc}{(1+ab)(1+bc)}=\frac{1+ac+b^2+ab^2c}{(1+ab)(1+bc)}$$

由是所設之分數等於下式.

$$\frac{a-c+ab^2-cb^2}{(1+ab)(1+bc)}\div\frac{1+ac+b^2+ab^2c}{(1+ab)(1+bc)}$$

$$=\frac{a-c+ab^2-cb^2}{1+ac+b^2+ab^2c}=\frac{(a-c)(1+b^2)}{(1+ac)(1+b^2)}=\frac{a-c}{1+ac}.$$

問題 XL.

化以下各式爲簡式.

1. $\left\{\frac{x+2a}{a-2x}-\frac{a+2x}{x-2a}\right\}\times\left\{\frac{3}{2a-x}-\frac{1}{a-x}\right\}.$

2. $\left\{\frac{x}{1+x}+\frac{1-x}{x}\right\}\div\left\{\frac{x}{1+x}-\frac{1-x}{x}\right\}.$

3. $\left(\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}\right)\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\right)\div\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\right)\left(\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}\right).$

4. $\frac{2}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}+\frac{y}{1-\frac{y}{x}}-\frac{x}{1-\frac{x}{y}}.$

5. $\frac{x}{1+\frac{x}{y}}+\frac{y}{1+\frac{y}{x}}-\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}.$

6. $\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2}{x+y}+\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2}{x-y}.$

7. $\frac{\frac{a+b}{a+2b}+\frac{b}{a}}{\frac{a+b}{a}-\frac{b}{a+2b}}.$

8. $\frac{x^2-x+\frac{x-1}{x+1}}{x+\frac{1}{x+1}}.$

9. $\frac{\frac{x+2}{2x+3}-\frac{4x+5}{5x+6}}{\frac{2x+3}{3x+4}-\frac{3x+4}{4x+5}}.$

10. $\frac{\frac{1+x}{1+x^2}-\frac{1+x^2}{1+x^3}}{\frac{1+x^2}{1+x^3}-\frac{1+x^3}{1+x^4}}.$

11. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\frac{1}{3x-\frac{1}{x}}}.$

12. $x^3-\frac{x^2}{1+\frac{1-x}{x+\frac{1}{x}}}.$

13. $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{1+\dfrac{a+1}{3-a}}}$ **14.** $\dfrac{1}{x^2-\dfrac{x^3+1}{x+\dfrac{1}{x-1}}}$

137. 要例　次所證明之定理,極其緊要.

〔定理1〕 若$\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$, $\dfrac{e}{f}$……諸分數互相等,則諸分數各等於次之分數,即

$$\frac{pa+qc+re+\cdots\cdots}{pb+qd+rf+\cdots\cdots}$$

設相等之各分數等於x,則得

$$\frac{a}{b}=x,\ \frac{c}{d}=x,\ \frac{e}{f}=x\text{ 等等}$$

因而 $a=bx$, $c=dx$, $e=fx$, 等等

$\therefore\quad pa=pbx,\ qc=qdx,\ re=rfx$ 等等

故依加法

$$pa+qc+re+\cdots\cdots=pbx+qdx+rfx+\cdots\cdots$$
$$=(pb+qd+rf+\cdots\cdots)x$$

$$\frac{pa+qc+re+\cdots\cdots}{pb+qd+rf+\cdots\cdots}=x=\frac{a}{b}=\cdots\cdots$$

又特別之例,相等之分數$\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$, $\dfrac{e}{f}$等,各等於

$$\frac{a+c+e+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots}$$

〔定理2〕 不等之諸分數 $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$, $\dfrac{e}{f}$, 若分母俱為正,則分數 $\dfrac{a+c+e+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots}$ 較 $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$, $\dfrac{e}{f}$, ……諸分數中之最

小者大,而較其最大者小.

設 $\frac{a}{b}$ 爲諸分數中之最大者,令 $\frac{a}{b}=x$,則

$$\frac{c}{d}<x,\ \frac{e}{f}<x \text{ 等等}$$

故 $b, d, f\cdots\cdots$ 皆爲正,則得

$$a=bx,\ c<dx,\ e<fx \text{ 等等}$$

故依加法

$$a+c+e+\cdots\cdots<bx+dx+fx+\cdots\cdots \text{ 即 } (b+d+f+\cdots\cdots)x$$

$$\frac{a+c+e+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots}<x$$

由是 $\frac{a+c+e+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots}$ 較諸分數中之最大者小.

依同樣之理,可證 $\frac{a+c+e+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots}$,較諸分數中之最小者大.

〔例 1〕 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 求證 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

設 $\frac{a}{b}=x$ 則 $\frac{c}{d}=x$.

由是 $\qquad a=bx$ 又 $c=dx$.

由是 $\qquad \frac{a+b}{a-b}=\frac{bx+b}{bx-b}=\frac{b(x+1)}{b(x-1)}=\frac{x+1}{x-1}$.

又 $\qquad \frac{c+d}{c-d}=\frac{dx+d}{dx-d}=\frac{d(x+1)}{d(x-1)}=\frac{x+1}{x-1}$.

因而 $\frac{a+b}{a-b}$ 與 $\frac{c+d}{c-d}$ 俱等於 $\frac{x+1}{x-1}$,自不得不互相等.

〔例 2〕 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 求證 $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$.

令 $\frac{a}{b}=x$ 則 $\frac{c}{d}=x$, 由是 $a=bx$, $c=dx$.

故 $$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\frac{b^2x^2+b^2}{d^2x^2+d^2}=\frac{b^2(x^2+1)}{d^2(x^2+1)}=\frac{b^2}{d^2}.$$

又 $$\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}=\frac{b^2x^2-b^2}{d^2x^2-d^2}=\frac{b^2(x^2-1)}{d^2(x^2-1)}=\frac{b^2}{d^2}.$$

由是 $$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}.$$

〔例3〕 設 $\frac{cy+bz}{l}=\frac{az+cx}{m}=\frac{bx+ay}{n}$.

求證 $\frac{bcx}{-al+bm+cn}=\frac{cay}{al-bm+cn}=\frac{abz}{al+bm-cn}$.

依定理1.其所設之分數各等於.

$$\frac{-a(cy+bz)+b(az+cx)+c(bx+ay)}{-al+bm+cn}=\frac{2bcx}{-al+bm+cn}.$$

同法證得各分數等於.

$$\frac{2cay}{al-bm+cn}\text{或}\frac{2abz}{al+bm-cn}.$$

問題 XLI.

化以下各式爲簡式(1至56).

1. $\frac{6x^4y^6z^7}{9x^2y^8z^9}$.

2. $\frac{18a^2b^6c^7x}{24ab^6c^8x^2}$.

3. $\frac{a^7b^7c^9x^8y^5z^7}{a^8b^5c^7x^6y^7z^9}$.

4. $\frac{x^3-6xy+5y^2}{x^3-5x^2y+4xy^2}$.

5. $\frac{x^3-10x^2y-11xy^2}{x^2y-8xy^2-9y^3}$.

6. $\frac{(a^2-b^2)(a^3-b^3)}{(a-b)(a^4-b^4)}$.

7. $\dfrac{(a^2-b^2)(a^6-b^6)}{(a+b)^2(a-b)^2}$. **8.** $\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^4+4x^3-12x-9}$.

9. $\dfrac{3x^4+5x^3-7x^2+2x+2}{2x^4+3x^3-2x^2+12x+5}$. **10.** $\dfrac{2x^4+9x^3y+14xy^3+3y^4}{3x^4+14x^3y+9xy^3+2y^4}$.

11. $\dfrac{2x^3-11x^2y+11xy^2+4y^3}{2x^4-3x^3y+7x^2y^2-12xy^3-4y^4}$.

12. $2\dfrac{x+y}{3}-3\dfrac{x-y}{5}$. **13.** $5\dfrac{x-2y}{4}-4\dfrac{y-2x}{5}$.

14. $\dfrac{1}{4-x}+\dfrac{4}{x^2-16}$. **15.** $\dfrac{1}{3-x}+\dfrac{3}{x^2-9}$.

16. $\dfrac{x}{x-2y}-\dfrac{x^2}{(2y-x)^2}$. **17.** $\dfrac{a}{a-4b}+\dfrac{4ab}{(4b-a)^2}$.

18. $\dfrac{1}{a+4}-\dfrac{1}{a+5}+\dfrac{1}{a+6}-\dfrac{1}{a+7}$.

19. $\dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{a+3}+\dfrac{3}{a+6}-\dfrac{1}{a+9}$.

20. $\dfrac{x^3-y^3}{x^2-9y^2}\times\dfrac{x+3y}{x-y}$. **21.** $\dfrac{x^2-y^2}{x^2-4y^2}\div\dfrac{y-x}{2y-x}$.

22. $\left\{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^2-\dfrac{1}{ab}-\dfrac{4}{(a-b)^2}\right\}\div\left\{\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)^2-\dfrac{1}{ab}\right\}$.

23. $\left(\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{5}{x-8}\right)\times\left(\dfrac{x-3}{3x-8}-\dfrac{2}{x+2}\right)$.

24. $\dfrac{(x-y)^4-xy(x-y)^2-2x^2y^2}{(x-y)(x^3-y^3)+2x^2y^2}$.

25. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}-\dfrac{3}{x}$.

26. $\dfrac{1}{6a-2b}+\dfrac{1}{3a+2b}-\dfrac{3}{6a+2b}$.

27. $\dfrac{1}{8a+2b}-\dfrac{1}{2b-8a}+\dfrac{b}{16a^2-b^2}$.

28. $\dfrac{a^6+b^6}{a^6-b^6}\times\dfrac{a-b}{a^2+b^2}\div\dfrac{a^4-a^2b^2+b^4}{a^4+a^2b^2+b^4}$.

29. $\dfrac{\dfrac{m^2+n^2}{n}-m}{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{m}}\times\dfrac{m^2-n^2}{m^3+n^3}$.

30. $\dfrac{\left\{1+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{c^2}{(a+b)^2}\right\}\left\{1-\dfrac{c^2}{(a+b)^2}\right\}}{\left\{1-\dfrac{c^3}{(a+b)^3}\right\}\left\{1+\dfrac{c}{a+b}\right\}}$.

31. $\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{4y^2}{x^2-y^2}$.

32. $\left\{1+\dfrac{2b^2}{a(a-3b)}\right\}\left\{1+\dfrac{b}{2b-a}\right\}$.

33. $\dfrac{x^3+y^3}{xy(y^2-x^2)}-\dfrac{y}{x^2+xy}+\dfrac{x}{xy-y^2}$.

34. $\dfrac{a+b}{a+5b}+\dfrac{a^2-b^2}{25b^2-a^2}-\dfrac{b-a}{a-5b}$.

35. $\dfrac{a-b}{a-3b}+\dfrac{a+b}{a+3b}-\dfrac{b^2-a^2}{9b^2-a^2}$.

36. $\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{x-5}{x^2-7x+10}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{x-6}{x^2-9x+18}$.

37. $\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{2}{x-4}-\dfrac{x-6}{(x-2)(x-5)}$.

38. $\dfrac{3}{x-4}-\dfrac{2}{x-5}-\dfrac{x-7}{(x-6)(x-3)}$.

39. $\left\{x-y-\dfrac{1}{x-y+\dfrac{xy}{x-y}}\right\}\times\dfrac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$.

40. $\left\{x+y-\dfrac{1}{x+y-\dfrac{xy}{x+y}}\right\}\times\dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$.

41. $\left\{1-\dfrac{1-x}{1+x}+\dfrac{1+2x^2}{1-x^2}\right\}\times\dfrac{x+1}{2x+1}$.

42. $\dfrac{x-2-\dfrac{1}{x-2}}{x-2-\dfrac{4}{x-5}}\times\dfrac{x-4-\dfrac{4}{x-4}}{x-4-\dfrac{1}{x-4}}$.

43. $\dfrac{6}{x^2+2x-8}-\dfrac{7}{x^2+x-12}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}$.

44. $(x^3+y^3)\left\{\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right\}\times\dfrac{1}{x^2-xy+y^2}$

$$\div\left\{\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right\}.$$

45. $\left(\dfrac{a^2+b^2}{2ab}-1\right)\dfrac{ab^2}{a^3+b^3}\div\dfrac{4ab(a+b)}{a^2-ab+b^2}$.

46. $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\right)^2+\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}\right)^2$

$$-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right).$$

47. $\left\{\dfrac{1}{3x^2-14xy+15y^2}+\dfrac{2}{3x^2-2xy-5y^2}\right\}$

$$\div\left\{\frac{x+y}{x-3y}-\frac{x-y}{x+3y}\right\}.$$

48. $\dfrac{b-c}{a+x}+\dfrac{c-a}{b+x}+\dfrac{a-b}{c+x}+\dfrac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(a+x)(b+x)(c+x)}$.

49. $\left\{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2-2\frac{a-b}{a+b}+1\right\}\div\left\{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2-2\frac{a+b}{a-b}+1\right\}.$

50. $\left\{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3+3\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2+3\left(\frac{a-b}{a+b}+1\right\}$

$\div\left\{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^3+3\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2+3\frac{a+b}{a-b}+1\right\}.$

51. $\frac{16}{x-17}-\frac{21}{x-9}-\frac{16}{x+4}+\frac{21}{x+7}.$

52. $\frac{11}{x-5}-\frac{7}{x-7}-\frac{11}{x+2}+\frac{7}{x+4}.$

53. $\frac{x+7}{x+1}+\frac{x+8}{x+2}-\frac{x+9}{x+3}-\frac{x+10}{x+4}.$

54. $\frac{(a+b-c)^2-d^2}{(a+b)^2-(c+d)^2}+\frac{(b+c-a)^2-d^2}{(b+c)^2-(a+d)^2}$

$+\frac{(c+a-b)^2-d^2}{(c+a)^2-(b+d)^2}.$

55. $\frac{1}{axy}-\frac{1}{a(x-a)(y-a)}+\frac{1}{y(x-a)(y-a)}.$

56. $\frac{a+x}{x(x-y)(x-z)}+\frac{a+y}{y(y-z)(y-x)}+\frac{a+z}{z(z-x)(z-y)}.$

57. $x=\frac{ab}{a+b}$ 求 $\frac{a-2x}{b-2x}$ 之値.

58. $a+b=\frac{4cd}{c+d}$ 求次式之値.

$$\frac{a+b+2c}{a+b-2c}+\frac{a+b+2d}{a+b-2d}.$$

59. 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 則

(1) $\dfrac{a-b}{a-2b}=\dfrac{c-d}{c-2d}$.

(2) $\dfrac{a^2}{(a+b)^2}=\dfrac{c^2}{(c+d)^2}$.

(3) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{c^2-d^2}{c^2+d^2}$.

(4) $\dfrac{pa^2+qab+rb^2}{la^2+mab+nb^2}=\dfrac{pc^2+qcd+rd^2}{lc^2+mcd+nd^2}$.

60. 若 $\dfrac{x}{a-b}=\dfrac{y}{b-c}=\dfrac{z}{c-a}$,則 $x+y+z=0$.

61. 若 $\dfrac{y+z}{ay+bz}=\dfrac{z+x}{az+bx}=\dfrac{x+y}{ax+by}$,則各分數

$$=\frac{2}{a+b}.$$

62. 設 a, b, c, 不等,而 $\dfrac{b-c}{x}=\dfrac{c-a}{y}=\dfrac{a-b}{z}$.

求證 $x+y+z=0$ 及 $ax+by+cz=0$.

63. 若 $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{b+c}{2(b-c)}=\dfrac{c+a}{3(c-a)}$ 求證 $8a+9b+5c=0$.

64. 若 $\dfrac{bz-cy}{b-c}=\dfrac{cx-az}{c-a}$ 求證各等於 $\dfrac{ay-bx}{a-b}$.

65. 若 $\dfrac{a}{2y+2z-3x}=\dfrac{b}{2z+2x-3y}=\dfrac{c}{2x+2y-3z}$.

求證 $\dfrac{x}{a+2b+2c}=\dfrac{y}{b+2c+2a}=\dfrac{z}{c+2a+2b}$.

第十三編

分數方程式

138. 分數方程 本編專解有分數式之方程式.

〔例1〕 解 $\frac{x-1}{5}-\frac{3x-1}{8}=\frac{43-5x}{6}$.

以諸分母L. C. M. 120. 乘此方程式之兩邊而方程式仍不失其相等.如是.去分母.則得

$$24(x-1)-15(3x-1)=20(43-5x),$$

$$\therefore\ 24x-24-45x+15=860-100x.$$

移項.則 $$24x-45x+100x=860+24-15,$$

$$\therefore\qquad 79x=869.$$

由是 $$x=\frac{869}{79}=11.$$

〔例2〕 解 $\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x+3}=\frac{3}{x+5}$.

諸分母之L. C. M. 爲 $(x-3)(x+3)(x+5)$.

以此L. C. M. 乘方程式之兩邊.則〔見148款〕.

$$(x+3)(x+5)+2(x-3)(x+5)=3(x-3)(x+3).$$

$$\therefore\ x^2+8x+15+2x^2+4x-30=3x^2-27.$$

移項.則 $$x^2+2x^2-3x^2+8x+4x=-27-15+30.$$

$$\therefore\qquad 12x=-12,$$

卽 $$x=-1.$$

〔例3〕 解 $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+5}$.

本例不宜以諸分母之L. C. M.乘之,故得便法如次。

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+5}=0,$$

$$\therefore\ \frac{x+3-(x+1)}{(x+1)(x+3)}+\frac{x+5-(x+7)}{(x+5)(x+7)}=0,$$

即 $$\frac{2}{(x+1)(x+3)}-\frac{2}{(x+5)(x+7)}=0,$$

$$\therefore\quad (x+1)(x+3)=(x+5)(x+7),$$

即 $$x^2+4x+3=x^2+12x+35,$$

$$\therefore\quad 4x-12x=35-3,$$

即 $$-8x=32,$$

$$\therefore\quad x=32\div(-8)=-4.$$

〔例4〕 解次之方程式。

$$\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+5}{x+7}=\frac{x+1}{x+3}+\frac{x+3}{x+5}.$$

而 $$\frac{x-1}{x+1}=1-\frac{2}{x+1},\ \frac{x+5}{x+7}=1-\frac{2}{x+7},$$

$$\frac{x+1}{x+3}=1-\frac{2}{x+3},\ \frac{x+3}{x+5}=1-\frac{2}{x+5}.$$

故 $$1-\frac{2}{x+1}+1-\frac{2}{x+7}=1-\frac{2}{x+3}+1-\frac{2}{x+5},$$

$$\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x+7}=\frac{2}{x+3}+\frac{2}{x+5}.$$

此方程式與前例同。

〔例5〕 解方程式

$$\frac{4x+5}{x+1}+\frac{x+5}{x+4}=\frac{2x+5}{x+2}-\frac{x^2-10}{x+3}+x.$$

依除法 $\frac{4x+5}{x+1}=4+\frac{1}{x+1}$, $\frac{x+5}{x+4}=1+\frac{1}{x+4}$.

$$\frac{2x+5}{x+2}=2+\frac{1}{x+2}\text{ 及 }\frac{x^2-10}{x+3}=x-3-\frac{1}{x+3}.$$

由是 $$4+\frac{1}{x+1}+1+\frac{1}{x+4}=2+\frac{1}{x+2}$$

$$-\left(x-3-\frac{1}{x+3}\right)+x,$$

$$\therefore\quad \frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4},$$

$$\therefore\quad \frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{(x+4)-(x+3)}{(x+3)(x+4)},$$

即 $$\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{(x+3)(x+4)},$$

$$\therefore\quad (x+1)(x+2)=(x+3)(x+4),$$

即 $$x^2+3x+2=x^2+7x+12,$$

$$\therefore\quad x^2+3x-x^2-7x=12-2,$$

$$\therefore\quad -4x=10,$$

$$\therefore\quad x=-\frac{10}{4}=-\frac{5}{2}.$$

問題 XLII.

解以下各方程式

1. $\frac{x-2}{5}-\frac{x-3}{4}=\frac{x-7}{10}$.

2. $\frac{3x-1}{11}-2\frac{x-1}{5}=\frac{2-x}{10}$.

3. $\frac{y}{6}-\frac{x-2}{5}=\frac{y}{5}-3\frac{x-3}{4}$.

4. $\frac{x-2}{3}-3\frac{x-1}{5}=x-5\frac{x-2}{6}$.

5. $\frac{1-3x}{2}+\frac{3x+1}{2}=\frac{2}{1-3x}$.

6. $\frac{3-4x}{6}-\frac{5-8x}{12}=\frac{1-x}{1+x}$.

7. $\frac{3x-1}{4}-2\frac{x+1}{x-3}=2-\frac{3-6x}{8}$.

8. $\frac{2x}{5}-3\frac{x-1}{x+1}=3-\frac{1-4x}{10}$.

9. $\frac{1}{4x+6}+\frac{1}{6x+4}=\frac{2}{2x+3}$.

10. $\frac{1}{3x+9}+\frac{2}{5x+1}=\frac{2}{x+3}$.

11. $\frac{1}{4x+12}-\frac{3}{4x+1}=\frac{4}{2x+6}$.

12. $\frac{3}{2x+3}+\frac{5}{4x+6}=\frac{7}{6x+8}$.

13. $\frac{4x}{x+1}-\frac{x}{x-2}=3$.

14. $\frac{3x}{x+6}-\frac{x}{x+5}=2$.

15. $\frac{6x}{x-7}-\frac{x}{x-6}=5$.

16. $\frac{2x}{x+3}-\frac{4x}{x+7}+2=0.$

17. $\frac{1}{x+4}+\frac{2}{x+6}=\frac{3}{x+5}.$

18. $\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x+2}=\frac{1}{x+3}.$

19. $\frac{5}{2}\,\frac{1}{x+4}-\frac{3}{2}\,\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+6}.$

20. $\frac{3}{2}\,\frac{1}{x+2}-\frac{5}{4}\,\frac{1}{x+3}-\frac{1}{4x}=0.$

21. $\frac{2x+5}{3x-7}=\frac{2x-7}{3x-5}.$

22. $\frac{6x-2}{8x-5}=\frac{3x+7}{4x+8}.$

23. $\frac{x-9}{3x-7}=\frac{2x-5}{6x-4}.$

24. $\frac{3-2x}{x-5}=\frac{2x-7}{4-x}.$

25. $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-3}{x+3}=\frac{8}{x}.$

26. $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{8}{x+1}.$

27. $\frac{x-1}{x+3}-\frac{x+2}{x-4}+\frac{10}{x}=0.$

28. $\frac{3x}{x+2}-3\frac{x-1}{x-2}+\frac{9}{x+1}=0.$

29. $3\frac{x-1}{x+1}+2\frac{x+1}{x-1}=5.$

30. $5\dfrac{x-2}{x+2}-2\dfrac{x-3}{x+3}=3.$

31. $\dfrac{8x}{x^3-1}=\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x+4}.$

32. $\dfrac{12x}{x^3-9}+\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{2}{x-3}.$

33. $\dfrac{4}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{1-x}.$

34. $\dfrac{3}{x^2-9}+\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{2}{3-x}.$

35. $\dfrac{2x+1}{2x-1}-\dfrac{8}{4x^2+1}=\dfrac{2x-1}{1+2x}.$

36. $\dfrac{3x+5}{3x-1}+\dfrac{5}{1-9x^2}=\dfrac{8+3x}{1+3x}.$

37. $\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{3}{2x-6}=\dfrac{5}{(x-3)(x-5)}.$

38. $\dfrac{1}{2x-4}+\dfrac{3}{x-5}=\dfrac{7x+1}{(x-2)(x-5)}.$

39. $\dfrac{6}{2-3x}+\dfrac{10}{6-5x}+\dfrac{4}{10+x}=0.$

40. $\dfrac{6}{3x-1}+\dfrac{7}{3-7x}-\dfrac{1}{5+x}=0.$

41. $\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{x+6}=\dfrac{1}{x+6}-\dfrac{1}{x+8}.$

42. $\dfrac{1}{x+7}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}.$

43. $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+10}=\dfrac{1}{x+4}+\dfrac{1}{x+8}.$

44. $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-6}=\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-8}$.

45. $\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x+1}$.

46. $\frac{x}{x-2}+\frac{x-9}{x-7}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-8}{x-6}$.

47. $\frac{2x+1}{x+1}+\frac{2x+9}{x+5}=\frac{2x+3}{x+2}+\frac{2x+7}{x+4}$.

48. $\frac{2x-3}{2x-4}-\frac{2x-4}{2x-5}=\frac{2x-7}{2x-8}-\frac{2x-8}{2x-9}$.

49. $\frac{x+7}{x+5}+\frac{x+9}{x+7}=\frac{x+6}{x+4}+\frac{x+10}{x+8}$.

50. $\frac{16x-13}{4x-3}+\frac{40x-43}{8x-9}=\frac{32x-30}{8x-7}+\frac{20x-24}{4x-5}$.

51. $\frac{x-7}{x-5}-\frac{x-8}{x-6}=\frac{2x-7}{2x-5}-\frac{2x-11}{2x-9}$.

52. $\frac{7}{x-9}-\frac{11}{x-4}=\frac{7}{x+2}-\frac{11}{x+3}$.

53. $\frac{16}{x-17}-\frac{21}{x-9}=\frac{16}{x+4}-\frac{21}{x+7}$.

54. $\frac{x+a}{x-b}+\frac{x+b}{x-a}=2$.

55. $\frac{x+a}{x-a}-\frac{x-b}{x+b}=\frac{2(a+b)}{x}$.

56. $\frac{ax}{a+x}+\frac{bx}{b+x}=a+b$.

57. $\frac{a+c}{x+2b}+\frac{b+c}{x+2a}=\frac{a+b+2c}{x+a+b}$.

58. $\frac{x-b}{x-a}-\frac{x-a}{x-b}=\frac{2(a-b)}{x-a-b}$.

雜題 III.

(A) **1.** 問 $x^3-3x^2y+3xy^2$ 以何式加之,則其和爲 $3x^2y-3xy^2+y^3$.

2. 證下式

$$x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$$
$$=(y+z)(z+x)(x+y).$$

3. 求 (1) x^4-y^4, (2) $a^2-b^2+2a-2b$,

(3) $x^2-3x-28$ 之因數.

4. 求 $x^4+9x-20$ 及 $5x^4+9x^3-64$ 之最高公因數.

又 化 $\frac{x^4+9x-20}{5x^5+9x^4-64x}$ 爲簡式

5. 解以下各方程式

(1) $\frac{x-1}{2}+\frac{2x-7}{3}=x-2$,

(2) $3x-4y+2=5x-6y-2$
$=7x+2y+4$,

(3) $\frac{a}{x+b}+\frac{b}{x+a}=\frac{a+b}{x}$.

6 有甲,乙二人,甲由其所有金中與乙拾圓,則甲之所有金,爲乙之三倍,若乙由其所有金中與甲五圓,則甲之所有金,爲乙之四倍,問甲乙之所有金各幾何.

(B) **1.** 設 $a=5$, $b=3$, $c=-6$ 或 $a=-3$, $b=-2$, $c=4$,

求 $a(a+b)(a+b+c)-a(a-b)(a-b-c)$ 之數値.

2. 證以下二式

$$a^2+3(a-2b)^2=3(a-b)^2+(a-3b)^2,$$

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-\left(b+\frac{1}{b}\right)^2=\left(ab-\frac{1}{ab}\right)\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$$

3. 求 (1) x^3-4x^2+4x, (2) $2x^2-5x+2$,

(3) x^3-x^2+x-1 之因數.

4. 化 $\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+3}-\frac{6}{x^2-9}$ 爲簡式,且證次式

$$\left(y-\frac{a^2-xy}{y-x}\right)\left(x+\frac{a^2-xy}{y-x}\right)+\left(\frac{a^2-xy}{y-x}\right)^2=a^2.$$

5. 解次之各方程式

(1) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{3}{x-3}$,

(2) $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1,\ \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=\frac{a}{b}$.

6. 有分數,其分子加 2,則爲 $\frac{1}{5}$,由其分母減 2,則爲 $\frac{1}{6}$ 問原分數如何.

(C) **1.** 證次之二式

$$(x-1)^2(y^2+1)-(x^2+1)(y-1)^2=2(x-y)(xy-1),$$

$$(x+y)(x+z)-x^2=(y+z)(y+x)-y^2=(z+x)(z+y)-z^2.$$

2. 任意兩數之積,恆等於其和之平方與其差之平方之差之四分之一,求證.

3. (1) $1+18x-63x^2$, (2) $3x^3y-24y^4$,

(3) $(x^3+3x)^2-(3x^2+1)^2$ 之因數如何.

4. 化以下二式爲簡式

$$\frac{x^2-10x+21}{x^3-46x-21}$$

及 $\dfrac{1}{(x-3)(x-2)}-\dfrac{x-4}{(x-1)(x-3)}+\dfrac{x-3}{(x-1)(x-2)}$.

5. 解次之各方程式

(1) $\dfrac{x-3}{2}-\dfrac{x-1}{4}+\dfrac{x+1}{6}-\dfrac{x-3}{8}=0$,

(2) $ax+by=c,\ a^2x+b^2y=c^2$.

6. 甲,乙二人,共有銀 100 圓.甲費其所自有之半,乙費其所有之三分之一,則二人之所有合計55圓.然則各有銀幾何.

(D) **1.** 設 $a=3, b=-3, c=4$ 求次式之數值

$$\sqrt{a^3+b^3+c^3}-(a-b-c)^2.$$

2. 證次之二式

$$(x-5)(x-4)-3(x-2)(x-1)+3(x+1)(x+2)$$
$$-(x+4)(x+5)=0$$

及
$$1+n+\tfrac{1}{2}n(n+1)+\tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$
$$=\tfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3).$$

3. 求次之三式之因數

(1) $x^3+x^2y-6xy^2$,

(2) $x^3+ax^2-a^2x-a^3$,

(3) $x^2y^2-x^2-y^2+1$.

4. 化

(1) $\dfrac{a-x}{a+x}+\dfrac{4ax}{a^2-x^2}+\dfrac{a+x}{a-x}$.

(2) $\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{2}{x-5}+\dfrac{1}{x-6}$ 爲簡式

5. 解次之各方程式

(1)　$\frac{3x+1}{4}-2(6-x)=\frac{5x-4}{7}-\frac{x-2}{3}$.

(2)　$3y+\frac{9}{x}+6=0, y+\frac{5}{x}=8$.

6. 有狐被犬追者.狐在犬前60步.狐每行三步犬行二步.而犬行三步之距離.等於狐行七步之距離.問犬行若干步.始能捕得此狐.

(E)　**1.** 證次之二式

$$(m+n)(m+n-1)=m(m-1)+2mn+n(n-1),$$

及
$$(m+n)(m+n-1)(m+n-2)$$
$$=m(m-1)(m-2)+3m(m-1)n$$
$$+3mn(n-1)+n(n-1)(n-2).$$

2. 以 $x-y$ 除 x^4-y^4, 而依其結果.直記以 $x+y-2z$ 除 $(x+y)^4-16z^4$ 所得之商.

3. 求 $5x^2+24x-5$ 及 $a^3-2abc-ab^2-ac^2$ 之因數.

4. 求以下三式之 L. C. M.

$8a^3-18ab^2, 8a^3+8a^2b-6ab^2$ 及 $4a^2-8ab+3b^2$.

5. 證次之二式

(1)　$$1+\frac{a}{x-a}+\frac{bx}{(x-a)(x-b)}$$
$$=\frac{x^2}{(x-a)(x-b)},$$

(2)　$$1+\frac{a}{x-a}+\frac{bx}{(x-a)(x-b)}$$
$$+\frac{cx^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

6. 某債戶儘其財產償還欠債,每 100 圓僅償 25 圓.若其財產五倍於前,其欠債之額爲前之三分之二,則償完欠債,尙餘 140 圓.問欠債之額幾何.

(F) 1. 設 $a=-1, b=-3, c=-5$ 問次式之數値幾何.

$$\{a-(b-c)\}^2+\{b-(c-a)\}^2+\{c-(a-b)\}^2.$$

2. 有 $x^8-2a^4x^4+a^8$, 以 $x^3+ax^2+a^2x+a^3$ 除之.

3. 求 $x^2-1,(x-1)^2,(x+1)^2,x^3-1,x^3+1$ 之L.C.M.

4. $\dfrac{1}{2x+y},\ \dfrac{1}{2x-y},\ \dfrac{3x}{y^2-4x^2}$ 相加.

又證

$$\frac{(x-a)(y-a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-b)(y-b)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-c)(y-c)}{(c-a)(c-b)}=1.$$

5. 解次之各方程式

(1) $$\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{2}{x+a+b},$$

(2) $$\left.\begin{aligned}5x+2y+3z&=13\\3x+7y-z&=2\\x-2y+z&=5\end{aligned}\right\}$$

第十四編

二次方程式

139. 方程式之因數 積中有壹因數爲零(卽0),其積始能爲零,積中無壹因數爲零,其積決不能爲零.

如 ab, 必 a 爲零,或 b 爲零, ab 始能爲零,故知 ab 爲零,則知 a, 或 b 必爲零.

又 abc, 必 a 爲零,或 b 爲零,或 c 爲零. abc 始能爲零,故知 abc 爲零,則知 a, 或 b, 或 c 必爲零.

因數之數,無論若干,俱準此.

同樣,有 $(x-2)(x-4)$ 式,必 $x-2$ 爲零,或 $x-4$ 爲零,其式始能爲零,而因此積爲零,知必有壹因數爲零.

如方程式 $\qquad (x-2)(x-4)=0.$

必 $x-2=0$ 或 $x-4=0$ 卽 $x=2$ 或 $x=4$, 始能適合,其他決不能適合.

故此方程式之根爲2與4.

又方程式, $\quad (x-3)(x-4)(x-5)=0.$

必 $x-3=0$, 或 $x-4=0$, 或 $x-5=0$, 始能適合,其他決不能適合.

故欲此方程式合理,必 x 爲3,或4,或5.

卽3,4,5爲方程式 $(x-3)(x-4)(x-5)=0$.

之根.

故方程式 $(x-a)(x-b)(x-c)\cdots\cdots\cdots\cdots=0.$

必 $x-a=0$, 或 $x-b=0$, 或 $x-c=0$ 等等.

140. 應用 依前款諸例,任何次之方程式,若其一邊,為壹次因數之積,而他之一邊為零,則其方程式立解.

今舉其例如次

〔例1〕 解 $(x-1)(x+1)=0$.

此方程式,必 $x-1=0$ 或 $x+1=0$, 始能適合,其他決不能適合.

由是 $x-1=0$ 或 $x+1=0$.

即 $x=1$ 或 $x=-1$.

故此方程式之根為 1 或 -1.

〔例2〕 解 $x(x+1)(x+2)=0$.

此方程式,必 $x=0$, 或 $x+1=0$, 或 $x+2=0$ 始能適合,其他決不能適合.

由是 $x=0$, 或 $x+1=0$, 或 $x+2=0$.

即 $x=0$, 或 $x=-1$, 或 $x=-2$.

故此方程式之根為 $0, -1, -2$.

〔例3〕 解 $x(2x-1)(2x+3)=0$.

此方程式,必 $x=0$, 或 $2x-1=0$, 或 $2x+3=0$, 始能適合,其他決不能適合.

由是 $x=0$, 或 $2x-1=0$, 或 $2x+3=0$.

即 $x=0$, 或 $x=\frac{1}{2}$, 或 $x=-\frac{3}{2}$.

故此方程式之根為 $0, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$.

141. 因數分割法之應用 依移項例,任何方程式,其各項可悉移於一邊,故方程式恆將各項記於等號之一邊,其他之一邊書零.

故依前款,則知解任何次方程式之問題,與求同次

式之因數之問題同.

由是,解僅含一未知量之方程式,其法如次.

即,先將方程式之各項,悉書於等號＝之一邊,其他之一邊書零.

次分解全式爲因數,並令此等因數,各等於零,而所得之值,即爲所求之根.

下示諸例,其因數分解,可由觀察求得.

〔例1〕　解方程式 $x^2-3x=0$.

$$x^2-3x=x(x-3)$$

故　$$x(x-3)=0,$$

由是　$$x=0 \text{ 或 } x-3=0,$$

故所求之根爲0與3.

〔例2〕　解方程式 $x^2-9=0$.

$$x^2-9=(x-3)(x+3),$$

故　$$(x-3)(x+3)=0,$$

由是　$$x-3=0, \text{ 或 } x+3=0,$$

故所求之根爲3與 -3.

〔例3〕　解方程式 $x^2-2=0$.

$$x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}).$$

故　$$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0.$$

由是　$$x-\sqrt{2}=0, \text{ 或 } x+\sqrt{2}=0,$$

故 $\sqrt{2}$ 與 $-\sqrt{2}$ 爲此方程式所求之根.

〔例4〕　解方程式 $x^3-4x=0$.

$$x^3-4x=x(x^2-4)=x(x-2)(x+2).$$

故　$$x(x-2)(x+2)=0,$$

由是　$$x=0, \text{ 或 } x-2=0, \text{ 或 } x+2=0.$$

故 $0, 2, -2$ 爲此方程式所求之根.

〔例5〕 解方程式 $9x^3=4x$.

移項,則 $9x^3-4x=0$,

卽 $x(9x^2-4)=0$ 卽 $x(3x-2)(3x+2)=0$.

由是 $x=0$ 或 $3x-2=0$ 或 $3x+2=0$,

卽 $x=0$, 或 $x=\frac{2}{3}$, 或 $x=-\frac{2}{3}$.

〔例6〕 解 $x^2+6=5x$.

移項,則 $x^2-5x+6=0$,

卽 $(x-2)(x-3)=0$.

由是 $x-2=0$, 又 $x-3=0$.

故 2 與 3 爲所求之根.

問題 XLIII.

解以下各方程式

1. $(x-1)(x+2)=0$. **2.** $(x-3)(x+4)=0$.

3. $(x+1)(x+2)=0$. **4.** $(2x+1)(2x-1)=0$.

5. $(3x-1)(3x+1)=0$. **6.** $(2x-5)(x-4)=0$.

7. $x(x-2)(x+3)=0$. **8.** $x(x+2)(x-4)=0$.

9. $x(x-3)(x+4)=0$. **10.** $x(2x-1)(3x+4)=0$.

11. $x(5x-2)(6x-7)=0$. **12.** $x(x-3)(3x+7)=0$.

13. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)=0$.

14. $(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)=0$.

15. $(3x-1)(5x+1)(5x-2)(2x+7)=0$.

16. $(2x-3)(3x-4)(4x-5)(5x+6)=0$.

17. $x^2-x=0$. **18.** $x^2-2x=0$.

19. $x^2+3x=0$. **20.** $2x^2-3x=0$.

21. $2x^2-5x=0$.　　**22**. $3x^2+x=0$.

23. $x^2=5x$.　　**24**. $2x^2=x$.

25. $3x^2=5x$.　　**26**. $5x^2=-6x$.

27. $x^2=bx$.　　**28**. $ax^2=bx$.

29. $6x^2=x^2+5$.　　**30**. $5(x^2+5)=3(x^2+25)$.

31. $5(x^2+4)=4(x^2+9)$　　**32**. $2(x^2+7)=7(x^2+2)$.

33. $5(x^2+3)-(x-5)(x+5)=76$.

34. $7(x^2-1)-(x+3)(x-3)=56$.

35. $3x^2+(5x+2)^2=20x+32$.

36. $17+3x=\frac{1}{2}(x+3)^2-28$.

37. $x^2-5x+6=0$.　　**38**. $x^2-7x+12=0$.

39. $x^2-12x+20=0$.　　**40**. $x^2-9x+20=0$.

41. $x^2-11x+28=0$.　　**42**. $x^2-25x+150=0$.

43. $x^2-5x-84=0$.　　**44**. $x^2-x-156=0$.

45. $x^2+5x-150=0$.　　**46**. $x^2+2x=3$.

47. $x^2+4x=45$.　　**48**. $x^2-3x=10$.

49. $x^3+11x^2-180x=0$.　　**50**. $x^3-x^2=132x$.

142. 二次方程式　式中所含之未知量,其最高方乘爲二乘方者,謂之二次方程式.

如 $x^2=4$, $3x^2+4x=7$, $ax^2+bx+c=0$. 各爲二次方程式.

將二次方程式之諸項,悉移於等號之一邊,則其形爲.

$$ax^2+bx+c=0.$$

但 a, b, c, 俱顯已知數.

由是,解任意之二次方程式,其法爲何,不難舉出.解如上所舉之二次方程式,其難事,在求左邊之因數,而

欲求此因數,則依第 104 款所載求因數之法,變此式爲兩平方之差,卽能求得.

此法可依某例示之.惟讀此等諸例之前,不可不翻104款一讀.

〔例 1〕 解 $x^2+12x+35=0$.

x^2+12x 加 x 之係數之半之平方(卽 6 之平方),卽成完全平方.故加 6^2,且同時減之,則其方程式爲

$$x^2+12x+6^2-6^2+35=0.$$

卽 $$(x+6)^2-1=0.$$

$$\therefore \quad \{(x+6)+1\}\{(x+6)-1\}=0.$$

由是 $x+7=0$, 或 $x+5=0$,

故 $x=-7$, 或 $x=-5$.

〔例 2〕 解 $3x^2=10x-3$.

移項,則 $$3x^2-10x+3=0.$$

以 x^2 之係數 3 除之,則 $x^2-\frac{10}{3}x+1=0$.

x 之係數之半爲 $-\frac{5}{3}$ 故 $x^2-\frac{10}{3}x$ 加 $\left(-\frac{5}{3}\right)^2$ 則成完全之平方.

因而加 $\left(-\frac{5}{3}\right)^2$ 卽 $\frac{25}{9}$,且同時減之,則得

$$x^2-\frac{10}{3}x+\frac{25}{9}-\frac{25}{9}+1=0.$$

$$\therefore \quad \left(x-\frac{5}{3}\right)^2-\frac{16}{9}=0.$$

卽 $$\left(x-\frac{5}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=0.$$

$$\therefore\quad \left\{x-\frac{5}{3}+\frac{4}{3}\right\}\left\{x-\frac{5}{3}-\frac{4}{3}\right\}=0.$$

$$\therefore\quad \left(x-\frac{1}{3}\right)(x-3)=0.$$

由是 $x-\frac{1}{3}=0$ 或 $x-3=0$. 故 $x=\frac{1}{3}$ 或 $x=3$.

〔注意〕有許多方程式,雖非完全平方,然其因數,往往可依 99 款及 100 款之法徑然求出.學者苟能遇題檢查,則習久自精,大得便宜.

〔例 3〕 解 $4x-x^2=2$.

移項,則 $$4x-x^2-2=0.$$

變各項之符號,使 x^2 之係數爲 1. 則

$$x^2-4x+2=0.$$

加 x 之係數之半之平方 4 且同時減之,則

$$x^2-4x+4-4+2=0,$$

$$\therefore\quad (x-2)^2-2=0,$$

即 $$(x-2)^2-(\sqrt{2})^2=0,$$

$$(x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2})=0.$$

由是 $x-2+\sqrt{2}=0$, 又 $x-2-\sqrt{2}=0$.

故 $x=2-\sqrt{2}$, 又 $x=2+\sqrt{2}$.

問　題　XLIV

解以下各方程式

1. $x^2-4x=45$.
2. $x^2-6x=91$.
3. $(x-3)^2=x+3$.
4. $(x-4)^2=x-2$.
5. $(x-1)(x-2)=20$.
6. $(x+1)(x+3)=2(x+3)$.
7. $4x+3=x(x+2)$.
8. $4x-3=x(2-x)$.

9. $(x+1)^3=(x-1)^3+26.$

10. $(x-1)^3=(x+1)^3-56.$

11. $9x^2+6x+1=0.$

12. $9x^2+16=24x.$

13. $x^2+150=53x.$

14. $x^2=2x+99.$

15. $3x^2+3=10x.$

16. $3x^2+11x=20.$

17. $4x^2+21x=18.$

18. $6x^2+55x=50.$

19. $24x^2=30x+75.$

20. $x^2-200=35x.$

21. $19x^2-39x+2=0.$

22. $17x^2+8=70x.$

23. $51x^2+19x=10.$

24. $110x^2-21x+1=0.$

25. $21x^2-13x=20.$

26. $21x^2+23x=20.$

27. $6x^2+6=13x.$

28. $6x^2=5x+1.$

29. $9x^2-63x+68=0.$

30. $16x^2+3=16x.$

31. $29x^2-41x-138=0.$

32. $29x^2+11x=138.$

33. $x^2-16=215-10x.$

34. $(x+2)^2=4(x-1)^2.$

35. $(x+6)^2=16(x-6)^2.$

36. $(x+8)^2=9x^2.$

37. $(x-7)^2=49(x+2)^2.$

38. $x^2-3ax+2a^2=0.$

39. $x^2+3a^2=4ax.$

40. $x^2+2ab=b^2+2ax.$

41. $4x^2+4ax=b^2-a^2.$

42. $x^2+2ax=b^2+2ab.$

143. 普通解法 解方程式$\underline{ax^2+bx+c=0}$.

先以x^2之係數a除此方程式,則

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

加x之係數之半之平方.$\left(卽\frac{1}{2}\times\frac{b}{a}之平方\right)$且同時減之,則

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$$

首三項爲完全平方即$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$.

由是 $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)=0.$$

即 $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left\{\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}\right\}^2=0.$$

由97節

$$\left\{x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}\right\}\left\{x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}\right\}=0.$$

故 $$x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}=0.$$

或 $$x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}=0.$$

即 $$x=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}.$$

或 $$x=-\frac{b}{4a}-\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}.$$

由是二次方程式祇有二根.

144. 公式用法 一切問題,俱可用前款之公式,以代演算.即以特別方程式之數值,代其a, b, c是也.

如 方程式$ax^2+bx+c=0$之根爲

$$-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}.$$

故欲求$3x^2-10x+3=0$之二根,則用此公式.以3代a, -10代b, 3代c,即得.

由是$3x^2-10x+3=0$之二根爲

$$-\frac{-10}{8}\pm\sqrt{\left(\frac{100}{36}-\frac{3}{3}\right)}.$$

即 $\frac{10}{6}\pm\frac{8}{6}$ 由是二根爲3與$\frac{1}{3}$.

145. 等根 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$, 據143款,恆有

$$-\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}\text{及}\ -\frac{b}{2a}-\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}.$$

若 $\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=0$ 則二根俱爲 $-\frac{b}{2a}$,故互相等.

然在本款,此二次方程式不宜謂爲祇有一根,宜謂爲有二等根.

$\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$ 非零,則易知二根不等.

由是 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根互相等,其關係在

$\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=0$ 即 $\quad b^2-4ac=0.$

$b^2-4ac=0$, 則 $ax^2+bx+c=0$ 式,就 x 論,恆爲完全平方.何則,因 ax^2+bx+c 即 $a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$, 苟 $\frac{b^2}{4a^2}=\frac{c}{a}$, 則原式爲 $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$,故也.

146. 無理根 依143款之公式,方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根,若 $\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$ 非完全平方則爲無理數.

又二次方程式之兩根中,若其一根爲無理數,則兩根俱爲無理數.

147. 虛根 若 $\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$ 爲負,則 $\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}$ 爲虛數(依106款).

由是$\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$爲負,卽$b^2-4ac$爲負,則$ax^2+bx+c=0$之兩根爲虛數.

又二次方程式之兩根中若其一根爲虛數,則兩根俱爲虛數.

148. 增根及欠根　方程式之兩邊,各以相同之數乘之,不失其相等,故合於原方程式之一切數值,俱合於所生之方程式.然以含未知量之任意整式乘原方程式,則其乘得之新方程式,其合於原方程式之未知量之數值固合於新方程式,而令乘式爲零之任意數值,亦合於新方程式,故有乘式之增根.

如方程式$x^2=9$,其合理之數值爲$x=3$或$x=-3$若此方程式之兩邊,各以$x-2$乘之,則得新方程式如次.

卽　$$x^2(x-2)=9(x-2)$$

則此新方程式,於合理之數值$x=3$, $x=-3$外,別增一合理之數值$x=2$.

由是,方程式之兩邊爲整式,若以含未知量之任意整式乘之,必生增根.

方程式中有分數者,若其分母含未知量,則以諸分母之最低公倍數乘此方程式,決不生增根,何則,因此方程式之兩邊,各以其最低公倍數之任一因數除之,則復爲分數,故也.

雖然,以諸分母之最低公倍數乘時,最當注意,否則所生之方程式,必含所謂增根(卽非原方程式所有之根).

如方程式　$$\frac{2x}{x-1}-\frac{10}{x^2-1}=\frac{7}{x+1}$$

以諸分母之L.C.M. x^2-1乘其兩邊,則得

$$2x(x-1)-10=7(x-1).$$

而令乘式爲零之數值,不合於此新方程式,故雖以x^2-1乘,仍不生增根.

然方程式 $\dfrac{x^2-3x}{x^2-1}+2+\dfrac{1}{x-1}=0.$

若以諸分母之L.C.M. x^2-1乘之,則得

$$x^2-3x+2(x^2-1)+x+1=0.$$

即 $$(3x+1)(x^2-1)=0.$$

故此根爲$-\frac{1}{3}$與1.然此第二之根1,實非原方程式之根,乃以x^2-1乘之所生之增根也.

何則,因 $\dfrac{x^2-3x}{x^2-1}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x^2-3x+x+1}{x^2-1}$

$$=\frac{(x-1)^2}{x^2-1}=\frac{x-1}{x+1}.$$

故此方程式與$\dfrac{x-1}{x+1}+2=0$爲等值.

而此最後之方程式,祇有一根,即$x=-\frac{1}{3}$,故也.

〔注意〕方程式之兩邊,以含未知量之任意因數除之,其所生之方程式,恆缺原方程式所應有之根,是謂欠根,宜令用爲除數之式等於零求之.

如方程式$(x^2-4)(x+2)=(x^2-4)(2x-1)$.

以x^2-4除其兩邊,則$x+2=2x-1$.

由是得$x=3$而原方程式之根不獨爲$x=3$.

故其欠根,宜令x^2-4等於零求之.

問　題　XLV.

解以下各方程式

1. $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$.　　**2.** $x+\frac{1}{x}=\frac{13}{6}$.

3. $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=\frac{10}{3}$.　　**4.** $\frac{x+5}{4}-\frac{4}{x+5}=\frac{3}{2}$.

5. $\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}=\frac{13}{6}$.　　**6.** $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{29}{10}$.

7. $\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+2}=\frac{3}{5}$.　　**8.** $\frac{7}{x+4}+\frac{1}{4-x}=\frac{5}{3}$.

9. $\frac{x}{x-2}+\frac{4}{x+1}=3$.　　**10.** $\frac{5}{x+1}-\frac{10}{x+10}=\frac{2}{3x-3}$.

11. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3+x}+\frac{1}{2+3x}=0$.

12. $\frac{1}{3}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+11}=0$.

13. $3\frac{x-1}{x+1}-2\frac{x+1}{x-1}=5$.　　**14.** $\frac{3}{x-1}+\frac{4}{x-3}=\frac{15}{x+3}$.

15. $\frac{4x+3}{9}=\frac{6x-13}{18}-\frac{7x-46}{5x+3}$.

16. $\frac{2x-3}{4}=\frac{x-5}{12}+\frac{5x-16}{x-1}$.

17. $\frac{2x-1}{2x+1}+\frac{13}{11}=\frac{3x+5}{3x-5}$.

18. $\frac{2x-2}{2x-3}+\frac{3-3x}{3x-2}=\frac{5}{8x-12}$.

19. $\frac{3x}{x-2}-\frac{4}{x+3}+\frac{4}{2-x}=0.$

20. $\frac{5x}{x-3}-\frac{6}{x+2}+\frac{19}{3-x}=0.$

21. $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}=\frac{5x}{x^2-1}.$

22. $\frac{1}{x^2-3x}+\frac{1}{x^2+4x}=\frac{9}{2x^2}.$

23. $\frac{1}{x^2-3x}-\frac{1}{9-x^2}=\frac{13}{16x}.$

24. $\frac{1}{3x-6}+\frac{5}{4-x^2}+\frac{7x}{72(x+2)}=0.$

25. $\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{1-x}=\frac{7}{8}-\frac{1}{x+1}.$

26 $\frac{1}{x^2-4}-\frac{3}{2-x}=1+\frac{1}{3x+6}.$

27. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}.$

28. $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}=\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}.$

29. $\frac{x}{x-3}-\frac{x-3}{x}+\frac{x}{x+3}-\frac{x+3}{x}=\frac{2}{3}.$

30. $\frac{x+3}{x+1}+\frac{x-6}{x-4}=\frac{x+4}{x+2}+\frac{x-5}{x-3}.$

31. $\frac{x-3}{x-4}-\frac{x-4}{x-5}=\frac{x-6}{x-7}-\frac{x-7}{x-8}.$

32. $x^2+2a^2=3ax.$　　　**33.** $9x^2-6ax=a^2-b^2.$

34. $a(x^2-1)+x(a^2-1)=0.$

35 $a(x^2+1)=x(a^2+1)$.　**36.** $x^2-2(a-b)x+b^2=2ab.$

37. $x^2+2(b-c)x+c^2=2bc.$

38. $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0.$

39. $(a+b)x^2+cx-a-b-c=0.$

40. $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0.$

41. $bcx^2+(b^2+c^2)x+bc=0.$

42. $(a^2-b^2)(x^2-1)=4abc.$

43. $(b^2-a^2)(x^2+1)=2(a^2+b^2)x.$

44. $x+\frac{1}{a}=a+\frac{1}{x}.$　**45.** $\frac{a}{a+x}+\frac{a}{a-x}=4.$

46. $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$

47. $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}.$

48. $\frac{a^2}{x-b}+\frac{b^2}{x-a}=a+b.$

49. $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}.$　**50.** $\frac{1}{x+a+b}=\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$

51. $\frac{1}{x-a-b}=\frac{1}{x}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$

52. $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{c+a}+\frac{1}{c+b}.$

53. $\frac{x}{x+a}+\frac{x}{x+b}=\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}.$

54. $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}=\frac{x-a}{x+a}+\frac{x-b}{x+b}.$

55. $\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=\frac{a-c}{x+a-c}+\frac{b+c}{x+b+c}$.

149. 無理方程式　凡方程式含有未知量之平方根,或他之方根者,謂之無理方程式.

欲化無理方程式爲有理方程式,則移其無理項於等號之一邊,然後將方程式之兩邊各自乘,若其所得之式,仍含有無理項,則依此方法,幾度解之,至無理項悉變爲有理項然後止.

〔例1〕 解方程式 $\sqrt{(x^2-9)}+x=9$.

移項,則 $\sqrt{(x^2-9)}=9-x$.

兩邊各自乘,則 $x^2-9=(9-x)^2$.

$$\therefore\ 18x=90,\qquad \therefore\ x=5.$$

〔例2〕 解方程式 $\sqrt{(2x+8)}-2\sqrt{(x+5)}=2$.

兩邊各自乘,則

$$2x+8+4(x+5)-4\sqrt{(2x+8)}\times\sqrt{(x+5)}=4,$$

即 $6x+24-4\sqrt{(2x+8)}\sqrt{(x+5)}=0$;

$$\therefore\ 3x+12=2\sqrt{(2x+8)}\sqrt{(x+5)};$$

將最後之方程式兩邊各自乘,則

$$9x^2+72x+144=4(2x+8)(x+5);$$

$$\therefore\ x^2-16=0.$$

由是 $x=4$, 或 $x=-4$.

〔注意〕 以4代原方程式之 x, 則

$$\sqrt{16}-2\sqrt{9}=2,\quad 即\quad 4-6=2.$$

自不合理.

又以 -4 代 x, 則 $\sqrt{0}-2\sqrt{1}=2$.

亦不合理.

即 x 之兩根之數值,俱不合於命題之方程式.雖然,此不過由外形上視之耳.其中蓋別有原因也.此錯誤之原因有二.凡各代數量,皆有正負兩平方根.而$\sqrt{(2x+8)}$ 與 $\sqrt{(x-5)}$,今皆設爲正.一也.根號不能指其僅爲正,或僅爲負.故所求方程式之根號,正負俱難定.二也.

能解此理,則知 $x=4$,實合於所求之方程式.

何則,因 $\qquad \pm\sqrt{16}-2(\pm\sqrt{9})=2,$

即 $\qquad \pm4-(\pm6)=2.$

而取下層之符號,即能合理,故也.

解無理方程式時,其中所含之根號,或用其正號,或用其負號,各當申明.

〔例3〕 解方程式

$$\sqrt{(2x+7)}+\sqrt{(3x-18)}+\sqrt{(7x+1)}=0.$$

移項,則 $\sqrt{(2x+7)}+\sqrt{(3x-18)}=-\sqrt{(7x+1)}.$

兩邊各自乘,則

$$2x+7+2\sqrt{(2x+7)}\sqrt{(3x-18)}+3x-18=7x+1.$$

移項且以2除之,則

$$\sqrt{(2x+7)}\sqrt{(3x-18)}=x+6.$$

兩邊各自乘,則

$$(2x+7)(3x-18)=(x+6)^2;$$

$$\therefore\quad 5x^2-27x-162=0.$$

由是 $\qquad x=9$ 或 $x=\frac{18}{5}.$

問 題 XLVI.

解以下各方程式

1. $\sqrt{(x-3)}=3.$ **2.** $\sqrt{(x-7)}=4.$

3. $\sqrt{(3x+1)}=4.$ **4.** $5\sqrt{(x+7)}=4\sqrt{(3x-2)}.$

5. $3\sqrt{(x+3)}=2\sqrt{(3x+6)}.$

6. $\sqrt{(x+5)}=2\sqrt{(3x+4)}.$ **7.** $3\sqrt{(x+7)}=5\sqrt{(3x-2)}.$

8. $\sqrt{(x+2)}=x.$ **9.** $\sqrt{(x+20)}=x.$

10. $x+\sqrt{(x+1)}=5.$ **11.** $x-\sqrt{(x+2)}=4.$

12. $x-2+3\sqrt{(x-2)}=0.$ **13.** $x-5+2\sqrt{(x-5)}=0.$

14. $\sqrt{(9+4x)}=2x-3.$ **15.** $3x=5+\sqrt{(30x-71)}.$

16. $2x-5\sqrt{x}=3.$ **17.** $x+3+\sqrt{(x+3)}=6.$

18. $2x+1=\sqrt{(6x+3)}.$ **19.** $7x=\sqrt{(3x-11)}+33.$

20. $\sqrt{(x+10)}+\sqrt{(x+1)}=1.$

21. $\sqrt{x}+\sqrt{(5x+1)}=3.$ **22.** $\sqrt{x}+\sqrt{(5x+1)}=2.$

23. $\sqrt{(2x+9)}-\sqrt{(x+4)}=1.$

24. $\sqrt{(7x+1)}-\sqrt{(3x+10)}=1.$

25. $\sqrt{(2x+11)}-\sqrt{(2x-5)}=2.$

26. $\sqrt{(4x+1)}-\sqrt{(x+3)}=2.$

27. $\sqrt{(8x+5)}-2\sqrt{(2x+1)}=1.$

28. $\sqrt{(x+4)}+\sqrt{(x+20)}-2\sqrt{(x+11)}=0.$

29. $\sqrt{(4x+1)}-\sqrt{(x+3)}=\sqrt{(x-2)}.$

30. $\sqrt{(2x+4)}+\sqrt{(3x+7)}=\sqrt{(12x+9)}.$

31. $\sqrt{(6x+1)}+\sqrt{2(1-x)}=\sqrt{(7x+6)}.$

32. $2\sqrt{(2x+3)}-\sqrt{(5x+1)}=\sqrt{2(x-1)}.$

33. $\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-3)(x-4)}=\sqrt{2}.$

34. $\sqrt{(x+1)}+\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)}}=2.$

35. $\sqrt{(x+1)}+\sqrt{x}=\dfrac{3}{\sqrt{(1+x)}}$.

36. $\sqrt{(3+x)}+\sqrt{x}=\dfrac{5}{\sqrt{x}}$.

37. $\sqrt{\left(6x+\dfrac{3}{2}\right)}=\sqrt{(x+4)}+\dfrac{3}{\sqrt{(x+4)}}$.

38. $\sqrt{(a-x)}+\sqrt{(b-x)}=\sqrt{(a+b-2x)}$.

39. $\sqrt{(ax+b^2)}+\sqrt{(bx+a^2)}=a-b$.

40. $\sqrt{(a+x)}+\sqrt{(b+x)}=\sqrt{(a+b+2x)}$.

41. $\sqrt{(a-x)}+\sqrt{(b-x)}=\sqrt{(2a+2b)}$.

150. 二次方程式之根與其係數之關係 x^2+px+q 恆以 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 顯之,前旣詳言之矣(見104款).

又若　　$x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta)$.

則 α 與 β 爲方程式 $x^2+px+q=0$ 之根(見139款).

然若 $x^2+px+b=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

則　　$\alpha+\beta=-p,\ \alpha\beta=q,$

由是於原方程式 $x^2+px+q=0$.

其二根之和爲 $-p$ 二根之積爲 q.

方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之兩邊各以 a 除之如次,

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

由是方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根爲 α,β, 則

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\ 及\ \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

上述之二次方程式,其根與其未知量各乘方諸係數之關係,極其緊要.

三次或三次以上之方程式亦有相似之關係(參

考大代數學129款).

〔別法〕143款,已求得$ax^2+bx+c=0$之二根爲

$$-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left\{\frac{b^2}{4c^2}-\frac{c}{a}\right\}}.$$

設此二根爲α,β,則

$$\alpha=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\left\{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right\}},$$

$$\beta=-\frac{b}{2a}-\sqrt{\left\{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right\}}.$$

相加得 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}.$

相乘得 $\alpha\beta=\left(-\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)=\frac{c}{a}.$

151. 已知根之方程式 就通例論,所設之方程式,雖有不能求其根者,然依反面之理推之,已有根而作其方程式,實甚易易.

如,求作以4與5爲根之方程式.

其所求之方程式,必爲令$x=4$,或$x=5$,則其方程式合理,即其所求之方程式惟$x-4=0$,或$x-5=0$,始能適合,其他決不能適合.

由是,所求之方程式,必爲$(x-4)(x-5)=0$.何則,因此方程式,惟$x-4=0$,或$x-5=0$,始能合理,其他決不能合理故也.

相乘而去其括弧,則得方程式如次.

$$x^2-9x+20=0.$$

〔注〕方程式$x^2-9x+20=0$,爲有4及5兩根之方程式固已,然欲證明此方程式,除所與之兩根4及5外

別無他根.且證明除所與之兩根 4 及 5 外別無他根者,惟本方程式.不得不設方程式必有根之說爲合理(不加證明故曰設).

設 $x^5+7x^2-2=0$ 爲無根之方程式.則

$$(x^2-9x+20)(x^5+7x^2-2)=0.$$

即 $$(x-4)(x-5)(x^5+7x^2-2)=0.$$

此方程式.亦除所與之兩根 4 及 5 外別無他根.而與 $x^2-9x+20=0$ 方程式同.於理不合.

「方程式必有根」之理.可用理論方程式證明之.而理論方程式.屬於高等數學之部分非初等之書所宜兹.

又求作以 $2, 3, -4$ 爲根之方程式.

其所求之方式.惟 $x-2=0$, 或 $x-3=0$, 或 $x+4=0$, 始能合理.其他決不能合理.故其方程式如次.

$$(x-2)(x-3)(x+4)=0.$$

即 $$x^3-x^2-14x+24=0.$$

同樣.以 $0, -1, -\frac{1}{2}$ 爲根之方程式為

$$x(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0.$$

即 $$x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x=0.$$

152. **雜例**　更解二三要例.以爲本論之結局.

〔例 1〕 問以方程式 $x^2+5x-7=0$ 之根之平方爲根之方程式如何.

設 α, β 爲所設方程式之根.則 α^2, β^2 爲所求之方程式之根.

由是所求之方程式爲

$$(x-\alpha^2)(x-\beta^2)=0.$$

即 $$x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

故求 $\alpha^2+\beta^2$ 與 $\alpha^2\beta^2$ 可也.

依 15 款 $$\alpha+\beta=-5.$$

又 $$\alpha\beta=-7.$$

由是. $$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-5)^2-2(-7)$$
$$=25+14=39.$$

又 $$\alpha^2\beta^2=49.$$

代入 (1) 式,則得所求之方程式如次.

$$x^2-39x+49=0.$$

〔注意〕先求所設方程式之根,然後作其根之平方,亦可得所求之方程式,然以用150款之法爲最當.

〔例2〕 設 α, β 爲方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根,求作以 $\frac{\alpha}{\beta}$ 與 $\frac{\beta}{\alpha}$ 爲根之方程式.

所求之方程式爲 $\left(x-\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(x-\frac{\beta}{\alpha}\right)=0,$

即 $$x^2-\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)x+1=0.$$

而 $$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta},$$

依 150 款 $$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a},$$

由是 $$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a},$$

$$\therefore \quad \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{b^2}{ac}-2.$$

由是所求之方程式爲$x^2-\left(\frac{b^2}{ac}-2\right)x+1=0$,

或以ac乘之,則$acx^2-(b^2-2ac)x+ac=0$,

〔例3〕 證無論x爲如何之數值,x^2-4x+5俱不能爲零,並求此式之最小數值.

$$x^2-4x+5=(x-2)^2+1.$$

$(x-2)^2$恆爲正,故$1+(x-2)^2$式除$x-2=0$外,其值恆大於1,而$x-2=0$,則此式等於1.

故x^2-4x+5,決不能爲零,而其最小數值爲**1**.

問題 XLVII.

求作下記各根之方程式〔1至15〕.

1. 2與-2. **2.** 3與-4.

3. -3與-2. **4.** $\frac{1}{2}$與$-\frac{1}{2}$.

5. $\frac{1}{3}$與$-\frac{1}{4}$. **6.** $-\frac{1}{3}$與$-\frac{1}{5}$.

7. 0與3. **8.** 0與-4.

9. $5, -3, 0$. **10.** $\sqrt{2}$與$-\sqrt{2}$.

11. $\sqrt{5}$與$-\sqrt{5}$. **12.** $0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$.

13. $2-\sqrt{3}$與$2+\sqrt{3}$. **14.** $5-\sqrt{7}$與$5+\sqrt{7}$.

15. $a-\sqrt{b}$與$a+\sqrt{b}$.

16. 求以下各方程式兩根之積.

(1) $x^2+4x+1=0$, (2) $x^2+7x-2=1$,

(3) $2x^2+5x-7=0$, (4) $5x^2-x-1=0$,

(5) $9ax^2+3bx+4c=0$.

17. 求以下各方程式兩根之和

(1) $x^2-4a^2=0$, (2) $x^2+3x-5=0$,

(3) $x^2-5x+3=0$, (4) $2x^2-x-7=0$,

(5) $6ax^2+7bx+8=0$.

18. 設 $ax^2+bx+c=0$, 之根為 α, β, 證.

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{b}{c}=0.$$

19. 設方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根為 α, β, 證以下諸式

(1) $\alpha^2+\beta^2=\frac{b^2+2ac}{a^2}$, (2) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{b^2-2ac}{ac}$,

(3) $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}$.

20. 有方程式 $x^2+4x+2=0$ 求其根之平方之和.

21. 有方程式 $x^2+4px+p^2=0$ 求其根之平方之和.

22. 證方程式 $x^2+ax+b=0$ 兩根之平方和等於方程式 $x^2+3ax+b+4a^2=0$ 兩根之平方和.

23. 有方程式 $3x^2+4x+a=0$,問 a 為何數,其二根始互相等.

24. 有方程式 $4x^2+(1+a)x+1=0$,問 a 為何數,其二根始互相等.

25. 方程式 $100x^2+60x+a=0$, 其一根為他根之二倍,問 a 之値數幾何.

26. 方程式 $x^2+px+q=0$, 若 $9q=2p^2$, 則其一根為他根之二倍,求證.

27. $2x^2-5x+3=0$ 之根為 α, β, 則以 $\frac{\alpha}{\beta}$ 與 $\frac{\beta}{\alpha}$ 為根之方

程式必爲$6x^2-13x+6=0$,求證.

28. $2x^2-15x+4=0$之根爲α,β,則以$\frac{\alpha}{\beta}$與$\frac{\beta}{\alpha}$爲根之方程式必爲$8x^2-209x+8=0$,求證.

29. $x^2-11x+22=0$之根爲α,β,問以$\alpha+\beta$與$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$爲根之方程式如何.

30. $x^2+7x+9=0$之根爲α,β,問以$\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$與$\frac{\alpha+\beta}{\beta}$爲根之方程式如何.

31. $x^2-(p^2-2q)x+q^2=0$之根,各爲$x^2+px+q=0$之根之平方,求證.

32. $a^2x^2+b^2x+c^2=0$之根,爲$ax^2+bx+c=0$之根之平方,其關係如何.

33. $px^2+qx+r=0$之根爲α,β,則以$\alpha+\beta$與$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$爲根之方程式必爲$pqx^2+(pr+q^2)x+qr=0$求證.

34. $ax^2+bx+c=0$之根爲α,β,則以$\alpha\beta$與$\frac{1}{\alpha\beta}$爲根之方程式必爲$acx^2-(a^2+c^2)x+ac=0$,又以$\alpha+\beta$與$\frac{1}{\alpha+\beta}$爲根之方程式必爲$abx^2+(a^2+b^2)x+ab=0$,求證.

35. 設$x^2+ax+b=0$之兩根之差,等於$x^2+px+q=0$之兩根之差,證$a^2-4b=p^2-4q$.

36. $x^2+px+q=0$之根爲α,β,則以$(\alpha+\beta)^2$與$(\alpha-\beta)^2$爲根之方程式,必爲$x^2-2(p^2-2q)x+p^2(p^2-4q)=0$,求證.

37. $x^2+px+q=0$之根爲α,β,則以$\alpha+\frac{1}{\beta}$與$\beta+\frac{1}{\alpha}$爲根

之方程式,必爲 $qx^2+p(1+q)x+(1+q)^2=0$, 求證.

38. $ax^2+bx+c=0$ 之根爲 α, β, 則方程式 $(2b^2+ac)x^2+3abx+a^2=0$ 之根爲 $\frac{1}{\alpha+2\beta}$ 及 $\frac{1}{\beta+2\alpha}$, 求證.

第十五編

三次以上之方程式

153. 高次方程式 高於二次之方程式.其普通之解法.非學者所能暸識.原在本書之範圍外.故本編惟解其特別之例.

〔例1〕 解 $x^4-6x^2+8=0$.

此方程式.其所含未知量之相異乘方.祇有兩根.且其一種為他一種之平方.故可依 142 款解二次方程式之法解之.

$$x^4-6x^2+9-9+8=0.$$

即 $(x^2-3)^2-1=0.$

由是 $\{(x^2-3)-1\}\{(x^2-3)+1\}=0,$

$\therefore\ x^2-4=0$, 由是得 $x=\pm2$.

又 $x^2-2=0$, 由是得 $x=\pm\sqrt{2}$.

故此方程式之四根.為 $\pm2, \pm\sqrt{2}$.

〔例2〕 解 $(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12=0$.

本例亦與前例同.其含未知量者.祇有兩項.且其一項為他一項之平方.

解此種方程式.宜將式中諸項.悉移於等號之左邊.而此左邊之式.更依前編之法.分解為兩因數.

本例之因數.可由視察求得.

何則.因 $A^2+4A-12=(A+6)(A-2)$ 故所設之方程式.宜變為下式.即

$$\{(x^2+x)+6\}\{(x^2+x)-2\}=0.$$

由是 $x^2+x+6=0$ 或 $x^2+x-2=0$.

而 $x^2+x+6=0$ 之根爲 $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{-23}}{2}$

$x^2+x-2=0$ 之根爲 1 與 -2.

由是,所設之方程式,有次之四根.

$$1,\ -2,\ -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{-23}}{2}$$

〔例 3〕 解 $\frac{x^2}{x+2}+\frac{x+2}{x^2}=\frac{37}{6}$.

本例含 x 之二項,其一項爲他一項之反數.

若設 $y=\frac{x^2}{x+2}$ 則 $\frac{x+2}{x^2}=\frac{1}{y}$, 故

$$y+\frac{1}{y}=\frac{37}{6}.$$

以 $6y$ 乘之,則 $6y^2-37y+6=0$.

卽 $(6y-1)(y-6)=0$.

由是 $y=\frac{1}{6}$ 或 $y=6$.

卽 $\frac{x^2}{x+2}=\frac{1}{6}$ 或 $\frac{x^2}{x+2}=6$.

於第一式得 $6x^2-x-2=0$, 此根爲 $\frac{2}{3}$ 與 $-\frac{1}{2}$.

於第二式得 $x^2-6x-12=0$, 此根爲 $3\pm\sqrt{21}$.

由是,所設之方程式,有次之四根.

$$\tfrac{2}{3},\ -\tfrac{1}{2},\ 3\pm\sqrt{21}.$$

〔例 4〕 解 $4x^2-6x+3\sqrt{(2x^2-3x+7)}=30$.

此等方程式,根號內 x^2 與 x 之係數比,等於根號外

x^2 與 x 之係數比.故其解法如次.

解此方程式.宜設 $\sqrt{2x^2-3x+7}=y$.

如是 $$2x^2-3x+7=y^2.$$

$$2x^2-3x=y^2-7.$$

而 $$4x^2-6x=2y^2-14.$$

由是.據所設之方程式.得

$$2y^2-14+3y=30.$$

即 $$2y^2+3y-44=0,$$

即 $$(y-4)(2y+11)=0,$$

由是 $$y=4,\ 或\ y=-\tfrac{11}{2}.$$

$$y^2=16,\ 或\ y^2=\tfrac{121}{4}.$$

$$y^2=2x^2-3x+7.$$

1. $$2x^2-3x+7=16,$$

即 $$2x^2-3x-9=0,$$

即 $$(2x+3)(x-3)=0,$$

$$x=3,\ 又\ x=-\tfrac{3}{2}.$$

2. $$2x^2-3x+7=\tfrac{121}{4},$$

即 $$2x^2-3x-\tfrac{93}{4}=0,$$

此根爲 $$\frac{3}{4}\pm\frac{\sqrt{195}}{4}.$$

154. 視察法　含 x 之有理整式.若以任意之特別數值 a 代 x,而其式爲零.則 $x-a$ 爲其式之一因數.證見後編(267款).

如 x^3-7x+6, 以 2 代 x, 而其式爲零.故據上之定理 $x-2$ 爲其一因數.而由除法得

$$x^3-7x+6=(x-2)(x^2+2x-3)$$

又 x^3-4x^2+2x+1，設 $x=1$，則其式爲零.故 $x-1$ 爲其一因數.而由除法得

$$x^3-4x^2+2x+1=(x-1)(x^2-3x-1)$$

155. 應用　依前款所述之定理.已知方程式之一根.則能令其方程式爲低次式.

〔例1〕 有方程式 $x^3-7x+6=0$，已知其一根爲2.求其他根.

x^3-7x+6，設 $x=2$，而其式爲零.故 $x-2$ 爲其一因數.

而由除法.知 $x^3-7x+6=(x-2)(x^2+2x-3)$.

由是　　$(x-2)(x^2+2x-3)=0$.

故所設方程式之他根，可由

$$x^2+2x-3=0.$$

即　　$(x+3)(x-1)=0$.　求得.

故三次方程式 $x^3-7x+6=0$，其三根 $2, -3, 1$，而 $-3, 1$ 卽所求之他根.

〔例2〕 解方程式 $x^3-1=0$.

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).$$

故　　$(x-1)(x^2+x+1)=0$.

由是　　$x=1$ 及 $x^2+x+1=0$.

此根爲　　$-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)}$.

由是方程式 x^3-1 有三根.其一根爲實數.而他之二根爲虛數.

故 1，$-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)}$，$-\frac{1}{2}-\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)}$ 三量之立方等於1.卽1之立方根，爲上所述之三量.

〔注意〕a^3 之三立方根為

$$a, \left\{-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)}\right\}a, \left\{-\frac{1}{2}-\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)}\right\}a.$$

〔例 3〕 $x^4-25x^2+30x-9$ 與 $x^4-8x^3+19x^2-14x+3$ 俱為零.問 x 之數值幾何.

此兩式若 x 為相同之數值.(卽 $x=a$)而其式俱為零.則 $x-a$ 為此兩式之因數.

而任意二式之公因數.可用求 H. C. F.(卽最高公因數)之常法求得.

在本例.其 H. C. F. 如次.

$$x^2-5x+3.$$

而 x^2-5x+3,為此式之因數.卽其最高公因數.由是惟由

$$x^2-5x+3=0.$$

所求得 x 之數值.能使兩式俱為零.其他決不能使兩式俱為零.故所求之數值.卽 $x^2-5x+3=0$ 之根.其根差如次 $\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$

問　題　XLVIII.

求以下各方程式之根〔1至27〕.

1. $x^4-5x^2+4=0$.　　**2**. $x^4-2x^2-8=0$.

3. $x^4-10x^2+9=0$.　　**4**. $x^4-7x^2-18=0$.

5. $\frac{x^2-1}{9}+\frac{1}{x^2}-1=0$.　　**6**. $x^2+\frac{100}{x^2}=29$.

7. $x^2+\frac{1}{x^2}=a^2+\frac{1}{a^2}$.　　**8**. $x^2-\frac{1}{x^2}=a^2-\frac{1}{a^2}$.

9. $x^4+\frac{1}{x^4}=a^4+\frac{1}{a^4}$.

10. $(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12=0$.

11. $(x^2+x)^2-22(x^2+x)+40=0$.

12. $(x^2+x)(x^2+x+1)=42$.

13. $\frac{x^2}{x+1}+\frac{x+1}{x^2}=2$.　　**14**. $\frac{x}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x}=\frac{5}{2}$.

15. $\frac{x^2}{x-1}+\frac{x-1}{x^2}=\frac{17}{4}$.

16. $(x^2+x+1)(x^2+x-\frac{3}{2})+1=0$.

17. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$.

18. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)=12$.

19. $\frac{x^2+2}{x^2+4x+1}+\frac{x^2+4x+1}{x^2+2}=\frac{5}{2}$.

20. $x^2+x+1=\frac{42}{x^2+x}$.

21. $2x^2-4x-\sqrt{x^2-2x-3}=9$.

22. $x^2+\sqrt{x^2+3x+7}=23-3x$.

23. $2x^2+6x=1-\sqrt{(x^2+3x+1)}$.

24. $x^2+\sqrt{(4x^2+24x)}=24-6x$.

25. $2(2x-3)(x-4)-\sqrt{2x^2-(11x-15)}=60$.

26. $x^2+(x-2)(x-3)+\sqrt{2x^2-5x+6}=6$.

27. $(x+5)(x-2)-36=\sqrt{(x+4)(x-1)}$.

解下記之各三次方程式.但各已知其一根.

〔28 至 33〕

28. $x^3-2x+1=0$, $[x=1]$.

29. $x^3-5x+4=0$, $[x=1]$.

30. $x^3-49x+120=0$, $[x=3]$.

31. $x^3-3x^2-7x+21=0$, $[x=3]$.

32. $x^3-2x^2-7x-4=0$, $[x=-1]$.

33. $5x^3-15x^2+3x+14=0$, $[x=2]$.

34. 問 x 之數值幾何,則 x^3+2x^2+9 與 $x^3-4x+15$ 俱爲零.

35. 方程式 $2x^3+21x^2+34x-105=0$ 與 $2x^3-x^2-76x-105=0$ 有共通之一根試證之.

36. 解次之各方程式

(1) $x^3-21x+20=0$, (2) $x^3+2x^2-9x-18=0$,

(3) $x^3-x^2-22x+40=0$, (4) $x^3-3x^2-60x-100=0$,

(5) $x^3-19x+30=0$, (6) $2x^3+7x^2-5x-4=0$,

(7) $4x^3+4x^2-9x-9=0$.

第十六編

二次之聯立方程式

156. 二次聯立方程式 今解說二次聯立方程式.

二次聯立方程式.至少必有一式爲二次式.

第一類. 含二未知量之兩方程式.其一爲一次式.其一爲二次式者.

如解方程式 $x+2y=5,\ x^2+3y^2=0.$

由第一方程式.得 $x=5-2y.$

以x之比值.代入第二方程式.得

$$(5-2y)^2+2y^2=9.$$

$$\therefore\qquad 6y^2-20y+16=0.$$

$$\therefore\qquad 3y^2-10y+8=0.$$

即 $$(3y-4)(y-2)=0.$$

由是 $$y=\frac{4}{3}\ \text{或}\ y=2.$$

若 $$y=\frac{4}{3}\ \text{則}\ x=5-2y=5-\frac{8}{3}=\frac{7}{3}.$$

若 $$y=2,\ \text{則}\ x=5-2y=5-4=1.$$

故 $$x=\frac{7}{3},\ y=\frac{4}{3},\ \text{又}\ x=1,\ y=2.$$

「但此結果.不宜記爲$x=\frac{7}{3}$,或$1.\ y=\frac{4}{3}$,或2.因此書法.甚易混亂故也.」

依上例,則兩聯立方程式一爲一次方程式,一爲二次方程式者,其解法如次.

先由一次方程式,用他之未知量與已知量之項,表其一未知量之數值,然後以此數值,代入二次方程式,卽得一未知量之二次方程式,而求一未知量之二次方程式之根,卽爲所求之未知量之值.

〔例 1〕　解方程式 $3x+4y=5,\ 2x^2-xy+y^2=22.$

由第一方程式得 $x=\dfrac{5-4y}{3}$,

以此代入第二方程式,則

$$2\left(\frac{5-4y}{3}\right)^2-y\left(\frac{5-4y}{3}\right)+y^2=22.$$

$$\therefore\qquad 53y^2-95y-148=0,$$

卽　$(y+1)(53y-148)=0,$

由是　$y=-1$, 或 $y=\dfrac{148}{53}$.

若　$y=-1$ 則 $x=\dfrac{5-4y}{3}=3.$

若　$y=\dfrac{148}{53}$ 則 $x=\dfrac{5-4y}{3}=-\dfrac{109}{53}$

故　$y=-1,\ x=3$ 或 $y=\dfrac{148}{53},\ x=\dfrac{109}{53}.$

〔例 2〕　解 $xy+x=25,\ 2xy-3y=28.$

以 2 乘第一方程式,而以第二方程式減之,則

$$2x+3y=50-28=22.$$

由是　$y=\dfrac{22-2x}{3}.$

以此代入第一方程式則

$$x\left(\frac{22-2x}{3}\right)+x=25.$$

$$\therefore\qquad 2x^2-25x+75=0.$$

由是 $x=5$, 或 $x=\frac{15}{2}$,而與此相當之 y 之數值爲 4 與 $\frac{7}{3}$.

〔例 3〕 解 $2x^2-3x-4y=47,\ 3x^2+4x+2y=89.$

以2乘第二方程式則

$$6x^2+8x+4y=178.$$

加此於第一方程式則 $8x^2+5x=225$.

由是 $x=5$ 或 $x=-\frac{45}{8}$. y 之數値以此代入所設之一方程式卽得.

問題 XLIX.

解以下各方程式

1. $x+y=6,\ x^2-y^2=24.$
2. $x-y=10,\ x^2+y^2=58.$
3. $3x+3y=10,\ xy=1.$
4. $2x+3y=0,\ 4x^2+9xy+9y^2=72.$
5. $2x-5y=0,\ x^2-3y^2=13.$
6. $x+y=15,\ 4x-4y=xy.$
7. $2x-y=5,\ x+3y=2xy.$
8. $3x-31=5y,\ x^2+5xy+25=y^2.$
9. $3x+2y=5,\ x^2-4xy+5y^2=2.$

10. $2x-7y=25, 5x^2+4xy+3y^2=23.$

11. $x+y=2, \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=6.$

12. $x+2y=7, \frac{3}{x}+\frac{6}{y}=5.$

13. $x+y=5, \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}.$

14. $x-y=1, \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{5}{6}.$

15. $2x-y=4, \frac{3}{x}+\frac{4}{y}=1.$

16. $7x-3y+7=0, \frac{5}{x}-\frac{14}{y}=6.$

17. $xy+x=15,\ xy-x=8.$

18. $xy+2x=5,\ 2xy-y=3.$

19. $x^2-y=29,\ x^2+x+y=49.$

20. $x^2+3x-2y=4,\ 2x^2-5x+3y+2=0.$

157. 兩二次聯立方程式　第二類,兩式俱爲二次式者.

兩方程式俱爲二次式,則有能解者,有不能解者,何則,因消去一未知量,求其他未知量之方程式多高於二次,而高於二次之方程式,除特別之例外,恆不能解故也.

如欲由方程式 $x^2+x+y=3$ 與 $x^2+y^2=5$ 求其 x, y, 由第一方程式, $y=3-x-x^2$ 以 y 之比值代入第二方程式,則

$$x^2+(3-x-x^2)^2=5.$$

即 $$x^4+2x^3-4x^2-6x+4=0.$$

而此方程式為四次式.故本書中無解此之方法.

158. 等次方程式 兩方程式.雖俱為二次式而含未知量之項.若悉為二次項.則恆能解之.舉其例如次.

〔例 1〕 解方程式 $x^2+3xy=28$, $xy+4y^2=8$ 以第二方程式之兩邊.除第一方程式相當之兩邊.則

$$\frac{x^2+3xy}{xy+4y^2}=\frac{28}{8}=\frac{7}{2}.$$

由是 $$2(x^2+3xy)=7(xy+4y^2).$$

$$\therefore \quad 2x^2-xy-28y^2=0.$$

即 $$(2x+7y)(x-4y)=0.$$

由是 $$x=4y, \text{ 又 } x=-\frac{7}{2}y.$$

1. $x=4y$ 則由第二方程式

$$4y^2+4y^2=8, \qquad y=\pm 1.$$

故 $$x=4y=\pm 4.$$

2. $x=-\frac{7}{2}y$ 則由第二方程式

$$-\frac{7}{2}y^2+4y^2=8, \qquad \therefore \quad y=\pm 4.$$

故 $$x=-\frac{7}{2}y=\mp 14.$$

故根有四種數值.即

$$x=4, y=1, x=-4, y=-1, x=14, y=-4,$$
$$x=-14, y=4.$$

以上,$2x^2-xy-28y^2$ 之因數.可由視察求得.若為不能由視察求者.則宜用104款求因數之法求之.

〔例 2〕　解 $x^2-3xy=0,\ 5x^2+3y^2=48.$

第一方程式爲 $x(x-3y)=0.$

由是　　　　　$x=0$, 或 $x=3y.$

若　$x=0$, 則由第二方程式 $3y^2=48.$　$\therefore\ y=\pm 4.$

若　$x=3y$ 則由第二方程式 $45y^2+3y^2=48.$

$\therefore\quad y=\pm 1$, 然則 $x=\pm 3.$

159. 別法　含等次項之兩式,固可用前款之法解之.然此種方程式,有時以用特別之法解之爲便.

如解 $x^2+y^2=74,\ 2xy=70.$

由加法得　　　$x^2+2xy+y^2=144,$

即　　　　　　$(x+y)^2-12^2=0.$

$\therefore\quad (x+y-12)(x+y+12)=0.$

由是　　　　　$x+y=12\cdots\cdots(1)$

又　　　　　　$x+y=-12\cdots\cdots(2)$

又依所設之方程式由減法得

$x^2-2xy+y^2=4,$

即　　　　　　$(x-y)^2-2^2=0,$

$\therefore\quad (x-y-2)(x-y+2)=0.$

由是　　　　　$x-y=2\cdots\cdots(3)$

又　　　　　　$x-y=-2\cdots\cdots(4)$

由 (1) 與 (3), 得　　$x=7,\ y=5.$

由 (1) 與 (4), 得　　$x=5,\ y=7.$

由 (2) 與 (3), 得　　$x=-5,\ y=-7.$

由 (2) 與 (4), 得　　$x=-7,\ y=-5.$

故其根有四種數值.其兩種爲 $x=\pm 7,\ y=\pm 5$, 又兩種爲 $x=\pm 5,\ y=\pm 7$, 然無論何種,其所取之上下符號

俱各相應,卽 x, y 之數值或俱取正號或俱取負號,是也.

又取前款之方程式,卽 $x^2+3xy=23$, $xy+4y^2=8$, 相加,則

$$x^2+4xy+4y^2=36,$$

卽 $$(x+2y)^2-6^2=0,$$

$\therefore$ $$x+2y=6 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

或 $$x+2y=-6 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1)與(2)爲一次聯立方程式.可取其一式配以所設方程式中之一式合爲一組,依156款之法解之.

問題 L.

解以下各方程式

1. $x^2-2xy=0$, $4x^2+9y^2=225$.

2. $2x^2-3xy=0$, $y^2+5xy=34$.

3. $x^2+3xy=45$, $y^2-xy=4$.

4. $x^2-xy=63$, $y^2+xy=22$.

5. $x^2+xy=24$, $2y^2+3xy=32$.

6. $x^2-3xy=10$, $4y^2-xy=-1$.

7. $x^2+xy-2y^2=-44$, $xy+3y^2=80$.

8. $x^2+3xy=7$, $y^2+xy=6$.

9. $x^2-3y^2=13$, $3x^2-y^2=71$.

10. $3xy+x^2=10$, $5xy-2x^2=2$.

11. $x^2+3xy=54$, $xy+4y^2=115$.

12. $x(x+y)=40$, $y(x-y)=6$.

13. $x^2-3xy+2y^2=3$, $2x^2+y^2=6$.

14. $x^2-2xy+5=0,\ (x-y)^2-4=0.$

15. $x^2+5y^2=84,\ 3x^2+17xy-y^2=-84.$

16. $x^2-7xy-9y^2=9,\ x^2+5xy+11y^2=5.$

17. $4x^2-3xy=10,\ y^2-xy=6.$

18. $x^2+3xy=40,\ 4y^2+xy=9.$

19. $x^2+xy+y^2=7,\ 6x^2-3xy+y^2=6.$

20. $2x^2-2xy+3y^2=18,\ 3x^2-2y^2=19.$

21. $x+y+1=0,\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12}.$

22. $x+y+3=0,\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{6}=0.$

23. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=0.$

24. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{5}=5,\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}=\dfrac{5}{6}.$

25. $(x+1)(y+1)=10,\ xy=3.$

26. $(x+3)(y+1)=4,\ xy+1=0.$

160. 雜例　以下所舉諸例,乃各就其方程式,示以相當之解法.

〔例1〕 解次之兩方程式

$$x-y=2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$x^3-y^3=386 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

由 (1)　$x=y+2.$

以此代入 (2) 式,則

$$(y+2)^3-y^3=386.$$

即　$6y^2+12y+8-386=0.$

$$\therefore \qquad y^2+2y-63=0.$$

由是 $\qquad y=7$, 又 $y=-9$.

若 $\qquad y=7$ 則 $x=y+2=9$.

若 $\qquad x=-9$ 則 $x=y+2=-7$.

故 $\qquad x=9, y=7$ 或 $x=-7, y=-9$.

別法 以(1)式之兩邊除(2)式相當之兩邊,則

$$x^2+xy+y^2=193\cdots\cdots\cdots(3)$$

作(1)式之平方,則 $x^2-2xy+y^2=4$.

由減法得 $\qquad 3xy=189$,

$$\therefore \qquad xy=63\cdots\cdots\cdots(4)$$

(3) (4) 兩式相加,得 $(x+y)^2-16^2=0$,

$$\therefore \qquad x+y=\pm 16\cdots\cdots\cdots(5)$$

故由(1)式與(5)式,易求得 x, y.

〔例2〕 解 $x-3y=2, x^2-9y^2=8$.

以第一方程式除第二方程式相當之兩邊,則

$$x+3y=4,$$

而由 $\qquad x+3y=4$ 及 $x-3y=2$,

得 $\qquad x=3, y=\frac{1}{3}$.

〔例3〕 解次之兩方程式

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=7\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=25\cdots\cdots\cdots(2)$$

依89款〔例3〕視 $\frac{1}{x}$ 與 $\frac{1}{y}$ 爲未知量.

作(1)之兩邊之平方.

$$\frac{1}{x^2}+\frac{2}{xy}+\frac{1}{y^2}=49\cdots\cdots(3)$$

由 (2) 與 (3)　$\frac{2}{xy}=49-25=24\cdots\cdots(4)$

由 (2) 與 (4)　$\frac{1}{x^2}-\frac{2}{xy}+\frac{1}{y^2}=25-24=1,$

即　$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2=1,$

$\therefore$　$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\pm1\cdots\cdots(5)$

由 (1) 與 (5) 求 $\frac{1}{x}$ 與 $\frac{1}{y}$ 之數値.

〔例4〕 解次之二方程式

$$x^2-xy+y^2=61\cdots\cdots(1)$$

$$x^4+x^2y^2+y^4=1281\cdots\cdots(2)$$

以 (1) 之兩邊除 (2) 之相當邊,則

$$x^2+xy+y^2=21\cdots\cdots(3)$$

依 (1) 與 (3) 由減法得

$$2xy=-40,$$

即　$xy=-20\cdots\cdots(4)$

由 (1) 與 (4)　$x^2-2xy+y^2=81,$

$\therefore$　$x-y=9\cdots\cdots(5)$

或　$x-y=-9\cdots\cdots(6)$

由 (3) 與 (4)　$x^2+2xy+y^2=1,$

$\therefore$　$x+y=1\cdots\cdots(7)$

又或　$x+y=-1\cdots\cdots(8)$

以方程式 (5) 與 (6) 中之一式與方程式 (7) 與 (8)

中之一式合爲一組則得四種數值如次

$$x=\pm5,\ y=\mp4,\ x=\pm4,\ y=\mp5.$$

〔例5〕 解次之兩方程式

$$x^2-2xy=3y\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2x^2-xy^2=9y\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以3乘(1)式之兩邊.卽

$$3x^2-6xy=9y\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由是 $\qquad 2x^2-9y^2=3x^2-6xy,$

$\therefore \qquad x^2-6xy+9y^2=0,$

卽 $\qquad (x-3y)^2=0.$

$\therefore \qquad x=3y.$

以此代入(2)式.則

$$2(3y)^2-9y^2=9y.$$

卽 $\qquad 9y^2-9y=0,$

$\therefore \qquad y(y-1)=0,$

由是 $\qquad y=0$, 又 $y=1$,

若 $y=0$ 則 $\qquad x=3y=0,$

若 $y=1$ 則 $\qquad x=3y=3.$

故 $\qquad x=0,\quad y=0,$

或 $\qquad x=3,\quad y=1.$

〔例6〕 解 $x-y=2,\ x^5-y^5=242.$

設 $x=z+1$ 卽 $\qquad y=z-1.$

由是

$$x^5-y^5=(z+1)^5-(z-1)^5=z^5+5z^4+10z^3+10z^2$$
$$+5z+1-(z^5-5z^4+10z^3-10z^2+5z-1)$$
$$=10z^4+20z^2+2.$$

由是　$10z^4+20z^2+2=242,$

$\therefore\quad z^4+2z^2=24,$

$\therefore\quad (z^2-4)(z^2+6)=0.$

由是　$z=\pm2$, 或 $z=\pm\sqrt{-6}$.

若 $z=\pm2$, 則 $x=3$ 或 $x=-1$, 而 $y=1$ 或 $y=-3$.

若 $z=\pm\sqrt{-6}$, 則 $x-1\pm\sqrt{-6}$, $y=-1\pm\sqrt{-6}$.

〔例7〕 解次之三方程式

$$xy+xz=27\cdots\cdots(1)$$

$$yz+yx=32\cdots\cdots(2)$$

$$zx+zy=35\cdots\cdots(3)$$

(1) 式與 (2) 式相加,得 $2xy+xz+yz=59\cdots\cdots(4)$

(3) 式與 (4) 式相減,得 $2xy=24$,

$\therefore\quad xy=12\cdots\cdots(5)$

由是,由 (1) 式　$xz=15\cdots\cdots(6)$

而由 (2) 式　$yz=20\cdots\cdots(7)$

(5) 式與 (6) 式相乘,得 $x^2yz=180\cdots\cdots(8)$

(7) 式與 (8) 式相除,得 $x^2=180\div20=9$,

$\therefore\quad x=\pm3.$

由是,由 (5) 式　$y=12\div(\pm3)=\pm4.$

而由 (6) 式　$z=15\div(\pm3)=\pm5$

故　$x=\pm3,\ y=\pm4,\ z=\pm5.$

但此結果,其所取之符號,宜各相當,即悉取正號,或悉取負號.

別法　(1), (2), (3) 相加

$$2xy+2xz+2yz=94.$$

$$xy+xz+yz=47\cdots\cdots(4)$$

依 (4) 與 (3), 由減法,得 $xy=12$ ……………………(5)

依 (4) 與 (2), 由減法,得 $xz=15$ ……………………(6)

依 (4) 與 (1), 由減法,得 $yz=20$ ……………………(7)

作 (5), (6), (7) 之連乘積,則

$$x^2y^2z^2=12\times15\times20=3^2.4^2.5^2.$$

由是 $xyz=\pm3.4.5.$ ……………………(8)

以 (7), (6), (5), 各式除 (8) 式依次得,

$$x=\pm3,\ y=\pm4,\ z=\pm5.$$

問 題 LI.

1. $x-y=3,\ x^3-y^3=270.$ **2.** $x-y=2,\ x^3-y^3=98.$

3. $x+y=7,\ x^3+y^3=91.$ **4.** $x+y=1,\ x^3+y^3=61.$

5. $x^2+xy+y^2=13,\ x^4+x^2y^2+y^4=91.$

6. $x^2-xy+y^2=9,\ x^4+x^2y^2+y^4=243.$

7. $xy(x+y)=240,\ x^3+y^3=280.$

8. $xy(x-y)=12,\ x^3-y^3=63.$

9. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2,\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=20.$

10. $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1,\ \frac{2}{x^2}+\frac{3}{xy}+\frac{1}{y^2}=5.$

11. $\frac{3}{x^2}-\frac{1}{y^2}=1,\ \frac{5}{x^2}-\frac{1}{xy}+\frac{2}{y^2}=3.$

12. $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4y^2}=3,\ \frac{1}{x^2}-\frac{1}{xy}+\frac{1}{4y^2}=9.$

13. $x+y=1,\ x^2y^2+13xy+12=0.$

14. $x+y=5,\ 4xy=12-x^2y^2.$

15. $x^2-xy+y=-6,\ y^2-xy-x=12.$

16. $x^2+xy-y=9,\ y^2+xy-x=-3.$

17. $x+\frac{1}{y}=3,\ y+\frac{1}{x}=\frac{4}{3}.$

18. $x+\frac{1}{y}=\frac{18}{7},\ y+\frac{1}{x}=\frac{7}{4}.$

19. $2x^2-xy+y=2y,\ 2x^2+4xy=5x.$

20. $x^3+1=9y,\ x^2+x=6y.$

21. $2x^3+5y^3=115,\ 3x^3+7y^3=186.$

22. $x^2y+xy^2=180,\ x^2y^2=400.$

23. $x^4+x^2y^2+y^4=91,\ (x^2-xy+y^2)(x-y)^2=28.$

24. $x^2+3xy+y^2+4(x+y)=13,\ 3x^2-xy+3y^2+2(x+y)=9.$

25. $xy+\frac{x}{y}=\frac{5}{3},\ xy+\frac{y}{x}=\frac{5}{6}.$

26. $\frac{y}{x}+\frac{1}{xy}=\frac{20}{3},\ xy+\frac{x}{y}=\frac{5}{3}.$

27. $ax=by,\ (x-a)(y-b)=ab.$

28. $a(x-a)=b(y-b),\ xy=ax+by.$

29. $x-\frac{b^2}{y}=\frac{a^2}{x}-y=a-b.$

30. $yz=4,\ zx=9,\ xy=16.$

31. $x^2yz=6,\ y^2zx=12,\ z^2xy=18.$

32. $x(x+y+z)=8,\ y(x+y+z)=12,\ z(x+y+z)=5.$

33. $x(y+z)=6,\ y(z+x)=12,\ z(x+y)=10.$

34. $(x+y)(x+z)=2,\ (y+z)(y+x)=3,\ (z+x)(z+y)=6.$

第十七編

二次方程式之問題

161. 問題 本編所舉之問題,俱爲二次方程式之問題(卽已知量與未知量之關係,在代數上,宜用二次方程式顯之者).

解問題時,已知量與未知量之代數的關係(卽方程式中之關係),其不合於問題之本意者,往往有之.

抑考其理,則方程式之根單爲數,其數苟合於此方程式,則無論爲正,爲負,爲整數,爲分數,皆無差謬.然在問題中,其數實各有制度,而其制限或明言,或暗含不能一定,要非演式布算時所能顯.如求人數之問題,此數自不得不爲整數.然在方程式中,要不能顯其制限也.

由是,解問題時,宜依〔初〕〔次〕〔終〕三次序.

〔初〕將已知量與未知量之關係,用代數記號顯之,立爲方程式.

〔次〕解所立之方程式,而求其未知量之數值.

〔終〕檢定所得之數值,取其合於命題之本意者,去其不合於命題之本意者.

今舉二次方程式諸問題之例,如次.

〔例1〕 今有兒童一羣,不知其數,但云其數之11倍,較其數之平方之2倍多5,問兒童之數幾何.

令兒童之數爲x,則 $11x=2x^2+5$,

$\therefore \quad 2x^2-11x+5=0.$

即　$(2x-1)(x-5)=0,$

由是　$x=5$ 或 $x=\frac{1}{2}.$

即兒童之數爲5.而$\frac{1}{2}$之數值爲不合理.

〔例2〕 有棒長若干尺.但知其長之11倍.較其長之平方之2倍多5.問棒長幾尺.

本題之數.可由前方程式求得.然在本例決不能棄其分數之結果.因棒長可爲五尺.亦可爲一尺之半(即五寸)也.

〔例3〕 有兩位之數.其數等於兩數字之積之二倍.而十位之數字.較其單位之數字少3.問此數如何.

設十位之數字爲x.則單位之數字爲$x+3$.故此數等於$10x+(x+3)$.由是.依題意

$$10x+(x+3)=2x(x+3),$$

$\therefore \quad 2x^2-5x-3=0.$

即　$(x-3)(2x+1)=0,$

由是　$x=3$ 或 $x=-\frac{1}{2}.$

然數字必爲正整數.由是其第二之數值(即$-\frac{1}{2}$)不合於理.

故數字爲3與6.而所求之數爲36.

〔例4〕 某人有銀若干圓.其圓數之平方.較其圓數之三十倍多1000,問所有之圓數幾何.

設所有之圓數爲x,則由題意

$$x^2=30x+1000,$$

$\therefore \quad x^2-30x-1000=0.$

即　$(x-50)(x+20)=0,$

由是 $x=50$ 或 $x=-20$.

負數爲負債之意.故此二數値.均爲合理.

由是某人所有爲五十元.或負債二十元.

〔例5〕 某數與其平方根之和爲42,問某數幾何.

設此數爲 x.則

$$x+\sqrt{x}=42,$$

即 $\sqrt{x}=42-x$.

兩邊各自乘,且移項,則

$$x^2-85x+1764=0.$$

此根爲36與49.

然數之平方根,宜視爲算術上之平方根,故49,不合於問題之本意.

〔例6〕 有父子二人,其年數之和爲100,而其年數之積之十分之一,較父之年多180.問父子之年各幾何.

設父之年數爲 x.則子之年數爲 $100-x$.

由是,按題意

$$\frac{1}{10}x(100-x)=x+180,$$

$$\therefore\quad x^2-90x+1800=0.$$

由是 $x=60$ 或 $x=30$.

其第二之數値,雖爲正整數,然不合理,何則,以子年較父年多故也.

由是父爲60歲,子爲40歲.

問題 LII.

1. 有二數.其一數為他數之三倍.其積為 243. 問二數如何.

2. 二數之和為 18,其積為 77.問二數如何.

3. 二數之差為 20,其平方之和為 650. 問二數如何.

4. 分 25 為二部分.但其積須為 156.

5. 分 80 為二部分.但其積須為 1596.

6. 由 36 減某數所得之餘數.與由 30 減某數所得之餘數.其積為 891. 問某數如何.

7. 矩形之地.長較闊多 10 丈.其面積為 1131 丈.問其長闊各幾何.

8. 某數及反數之和.與某數及反數之差.其積為 $3\frac{3}{4}$. 問某數幾何.

9. 某人買球.以金 20 圓所買之球數.等於買球 125 個之圓數.問金 20 圓所買之球數幾何.

10. 某人買卵.12 仙所買之卵數.等於買卵 27 個之仙數.問 12 仙所買之卵數幾何.

11. 有二桶.一容水若干升.一容酒若干升.其升數酒為水之半.今由各桶汲出六升.以汲出之水入諸盛酒之桶.汲出之酒入諸盛水之桶.則酒與水之比相等.問酒與水之升數各幾何.

12. 會費 80 圓.須若干人均派.今因四人不出會費.故其餘之人.每人須多派一圓.問會員總數幾何.

13. 某人以銀二百四十圓.進某物若干件.除兩件不賣外.其餘賣出時每件獲利二圓.共得銀二百五十二圓.問所進之物若干件.

14. 某人以 1875 圓.買商店股票若干股.其中除 15 股

不留外.其餘賣出時每股獲利 4 圓.共得洋 1740 圓.問原買股票若干紙.

15. 今有船逆流而上.撐至某處.需 $8\frac{4}{7}$ 分.而依水力流至原處之鐘數.較撐於靜水中.行相同距離之鐘數多 7 分.問順流而下.撐至原處.需時幾何.

16. 今有船.在靜水中.每點鐘行八里.今有某河八里間.一上一下共費二點鐘四十分.求水流之速度.

17. 有火車甲乙二列.甲列比乙列.每點鐘之速度多 15 英里.如行 36 英里.甲列比乙列先 12 分鐘到.問甲乙兩列之速度各幾何.

18. 設有人赴七里遠之某處.既行一里後.其每時之定速增一里.可比預定之鐘數快半點鐘到.問所費之時幾何.

19. 甲,乙二工.共做一工程.須若干日完成.若令此二工各做此工程之半.則甲比前早一日完成.乙比前遲二日完成.問甲乙共做此工程須幾日完成.

20. 像片每「打」之原價若干.今每「打」貴 3 角.故洋 2 圓 1 角所買之枚數.比前少 7 枚.問原價幾何.

但一「打」爲十二.

21. 雞卵每「打」之價若干.今以 1 角 2 分所買之個數比前多兩個.則每「打」減洋 1 分.問雞卵每「打」之價幾何.

22. 某婦人以洋 3 角 6 分買雞卵.不知其個數.但云若所買之雞卵少一「打」.則每「打」之價貴洋 3 分.問此婦人所買之雞卵幾何.

23. 有砂糖甲,乙兩種.其每 14 斤之價.甲種比乙種貴

2角1分.而以洋2.40圓所買得各種之斤之數.甲種比乙種少8斤.問各種14斤之價幾何.

24. 十二個蘋果之價之分數.比洋12分所買蘋果個數二倍多2.問洋1.08圓.能買蘋果若干個.

25. 有二分數.其和為$\frac{5}{6}$,其差與其積等.問二分數如何.

26. 有甲,乙兩城.相距25里.今有二人.同時由此兩城相向而行.其一人每行一里.較他一人快18分.而二人行後.經五點鐘始相會.問每點鐘之速度各幾何.

27. 以兵一聯隊.作為矩形之陣.其長為幅之二倍若由此兵數中減去206名.則能作為厚三列之空中方陣.且其外面一列之兵數.與原矩形陣之長之兵數等.問一聯隊之兵數幾何.

28. 有矩形及正方形.其面積相等.且正方形之一邊.較矩形之一邊短六寸.若矩形之闊增一寸.其長減二寸.則與原面積相等.問矩形之長及幅各幾何.

29. 矩形之一對角線與長邊.合為短邊之五倍.而長邊較短邊長35尺.問矩形之面積幾何.

30. 有一矩形.若由其長邊減三尺.其短邊減一尺.則其面積為原面積之半.又其長邊增九尺.其短邊減二尺.則其面積與原面積等.問長邊,短邊各幾何.

31. 有A,B兩列車.由P驛向Q驛發.同時又有C,D兩列車.由Q驛向P驛發.A列在距P驛120英里之處與C列會.又在距P驛140英里之處與D列會.B列在距Q驛126英里之處與C列會.又在P,Q兩驛之中央與D列會.然則P,Q兩驛間之距離幾何.

雜題 IV.

(A) **1.** 化 $2x-[3x-9y-\{2x-3y-(x+5y)\}]$ 爲簡式.

2. 以 $a-5b+2c$ 乘.

$a^2+25b^2+4c^2+5ab-2ac+10bc.$

3. 以 $x-a+2b$ 除.

$x^3+(4ab-b^2)x-(a-2b)(a^2+3b^2).$

4. 求以下各式之因數.

(1) $(2x+y-z)^2-(x+2y+4z)^2,$

(2) $x^2y^2-x^2-y^2+1,$

(3) $x^2y^2z^2-x^2z-y^2z+1.$

5. 化次之二式爲簡式.

(1) $\dfrac{x^3+4x^2-8x+24}{8-8x+x^3-x^4},$

(2) $\dfrac{x-1}{(x-2)(x-3)}-2\dfrac{x-2}{(x-3)(x-1)}+\dfrac{x-3}{(x-1)(x-2)}.$

6. 解次之方程式.

(1) $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{2}{x-b}=\dfrac{3}{x-c},$

(2) $4x^2-25x-21=0,$

(3) $x+y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{2}.$

7. 證 x^2-5x+7 決不小於 $\frac{3}{4}$.

8. 依次兩數之立方,其差爲919,問各數幾何.

(B) **1.** 化 $(x+3)^3-3(x+2)^3+3(x+1)^3-x^3$ 爲簡式.

2. 證 $(x-a)^2+(y-b)^2+(a^2+b^2-1)(x^2+y^2-1)$
$=(xa+by-1)^2+(bx-ay)^2$.

3. 以 $x^2-2ax+a^2$ 除 $x^6-2a^3x^3+a^6$.

4. 求 $8x^3+27$, $16x^4+36x^2+81$, $6x^2-5x-6$ 之最低公倍數.

5. 化次之二式爲簡式.

(1) $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x+3}{x^2+1}$,

(2) $\dfrac{\{(a+b)(a+b+c)+c^2\}\{(a+b)^2-c^2\}}{\{(a+b)^3-c^3\}(a+b+c)}$.

6. 解次之各方程式.

(1) $(6-x)(1+2x)+3x(x+5)=(x+1)^2-x$,

(2) $5x^2+7x=160$,

(3) $x^2+xy=10$, $y^2-xy=3$.

7. 方程式 $x^2-5x+2=0$, 其兩根之平方之和爲 21 求證.

8. 某音樂會,設通常位與特別位兩種,其所賣之票,各得洋60圓,而特別票之價較通常票之價貴1角5分,通常票之額較特別票之額,多360枚,然則所賣之票數統計幾何.

(C) **1.** 化 $12a-3\{b-2(a-3b)-2a\}$ 爲簡式.

2. 以 $a^3-2a^2b-ab^2-2b^3$ 乘 $a^3+2a^2b-ab^2+2b^3$.

3. 以 $2y^2-xy-4x^2$ 除
$24x^4-10x^3y-8x^2y^2+10xy^3-4y^4$.

4. 求 $9x^2+9x+2$ 及 $4(ab-cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$ 之因數.

5. 化 $\dfrac{x+\dfrac{y-x}{1+xy}}{1-\dfrac{x(y-x)}{1+xy}}$ 爲簡式.

又證 $\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}+\dfrac{a-b}{c}$

$$+\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{abc}=0.$$

6. 解次之各方程式.

(1) $\dfrac{x-1}{3}-\dfrac{x-3}{5}=7+\dfrac{x+2}{6}$,

(2) $x+y=2a,\ x^2+y^2=2a^2$.

7. 求 $x^2+6x+12$ 之最小數值,及 $6x-x^2-4$ 之最大數值.

8. 甲,乙二人,共有貨幣十八個,然僅爲一角銀貨與一仙銅貨兩種,而甲所有之銀貨數,三倍於銅貨數,乙所有之銀貨數與所有之銅貨數相等,又甲比乙多 7 仙,然則二人之所有各幾何.

(D) 1. 證 $(b+c)^2-a^2+(c+a)^2-b^2+(a+b)^2-c^2$

$$=(a+b+c)^2.$$

2. 將 $(1+x)^4+2(1-x+x^2)$ 依 x 之遞昇方乘整列.

3. 順次之兩數,其兩平方之差,恆較小數之二倍多 1.

4. 設 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$. 求證.

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$.

5. 求以下三式之最低公倍數.

$x^2-5x-14,\ x^2-4x-21,\ x^3-3x^2-25x-21.$

又此三式同時爲零.x之數值如何.

6. 解以下各方程式.

(1) $\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{y}+5=\dfrac{6}{x}+\dfrac{3}{y}=10,$

(2) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{x-a-b},$

(3) $x+y=3,\ 3x^2-11y^2=1.$

7. 設$ax^2+bx+c=0$之二根爲x_1, x_2.

求證 $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{b^2-2ac}{ac}.$

8. 桶盛火酒 6 斗.汲出若干升.以水入之使補其虛處.又汲出較前所汲出之量多 1 斗 4 升.又以水入之.使補其虛處.是時桶中所載.火酒與水之量相等.然則初次所汲出之升數如何.

(E) 1. $x=4\frac{1}{8}$求次式之數值.

$$\frac{x}{2}-\left\{\frac{2x-3}{3}-\frac{3x-1}{4}\right\}\div\frac{x-1}{2}.$$

2. 證次之二式.

$$(a+b)^4-(a^2-b^2)^2=4ab(a+b)^2,$$

$$2(a-b)(a-c)+2(b-c)(b-a)+2(c-a)(c-b)$$
$$=(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2.$$

3. 以$a+b$除$(a+2b-3c+d)^2-(2a+b+3c-d)^2$.

4. 求$6x^2-5ax-6a^2$及$4x^3-2ax^2-9a^3$之 L. C. M..

5. 化$\left(\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{x^2}{y}\right)\dfrac{1}{y^2-x^2}+\dfrac{x}{xy-y^2}-\dfrac{y}{x^2+xy}$爲簡式.

6. 解次之各方程式.

(1)　$\dfrac{x+a}{x-b}+\dfrac{x+b}{x-a}=2,$

(2)　$(x-1)(x-2)+(x-2)(x-3)$
$\qquad\qquad +(x-3)(x-1)=11,$

(3)　$x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{21}{10},y+\dfrac{1}{x}=\dfrac{7}{3}.$

7. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x}$ 與 $\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}$ 相等,問 x 之值幾何.

8. 有人乘三輪車行 180 里,其速度每點鐘相等,若每時之速度少三里,須多費三點鐘,問每時之速度幾何.

(F)　1. 加以下四式.

$3a^2-4a^2b+2ab^2,\ 3a^2b-4ab^2+2b^3,$

$3ab^2-4b^3+3a^3,\ 3b^3-4a^3+2a^2b.$

2. 證 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$
$\qquad =(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2.$

3. 以 x^2+3x+2 除 $2+11x+11x^2+x^3-x^4.$

4. 求 x^3-x^2-2x+2 與 $x^4-3x^3+2x^2+x-1$ 之最高公因數.

又問使兩式爲零,x 之數值幾何.

5. 化次之二式爲簡式.

(1)　$\dfrac{2}{x(x-2)}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}+\dfrac{3}{x(3-x)},$

(2)　$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}}.$

6. 解次之各方程式.

(1) $\frac{x+3}{5}-\frac{6-x}{10}=x-\frac{7}{10}$,

(2) $\frac{x+y}{a+b}+\frac{x-y}{a-b}=2, ax+by=a^2+b^2$,

(3) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}=2\frac{x+3}{x-3}$.

7. 求方程式$x^2-7x+9=0$兩根之平方差.

8. 有某數.其數較其平方根多 156. 問其數如何.

方程式之雜題

1. $(x-1)(x-4)+(x-3)(x-5)=2(x-3)^2$.

2. $\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{3}(x-4)+\frac{1}{4}(x-5)=0$.

3. $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-4}$.

4. $15x+17y=79, 17x+15y=81$.

5. 某人騎行至某地.每點鐘之速為 8 里.而歸時因繞道至他處.其路較往路遠 3 里.其每時之速為 9 里.而歸路所費之時.較往路所費之時多$7\frac{1}{2}$分,然則往路及歸路之長各幾里.

6. $\frac{1}{3}(x-2)-\frac{1}{9}(x-5)+\frac{5}{8}(x-1)=0$.

7. $3(x+1)(x-3)+(x+7)(3x-13)=3(2x-5)(x-1)$.

8. $\frac{2x+9}{x+2}+\frac{3x-2}{x+3}=\frac{5x+14}{x+4}$.

9. $\frac{x}{7}+\frac{y}{8}=82, \frac{x}{8}+\frac{y}{7}=83$.

10. 茶 1 斤砂糖 5 斤.其價合計 4 角 5 分.若茶價貴二成.砂糖價貴二成五分.則前之斤數.其價總計 5 角 5 分.然則茶價幾何.

11. $\frac{1}{9}(8x+3)+\frac{1}{11}(7x+6)+\frac{1}{13}(9x+2)=2x+1.$

12. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{a}{b}-\frac{b}{a}.$

13. $\frac{x+3}{x+1}+\frac{x-6}{x-4}=\frac{x+4}{x+2}+\frac{x-5}{x-3}.$

14. $x+y=2,\ (a+b)x+(b-a)y=2b.$

15. 某人養雞一羣.五月中所得之卵.比四月中所得之卵多 100 個.而五月中每日平均所得之卵數.比四月每日平均所得之卵數多 3.然則某人五月中得卵幾何（西曆四月爲30日.五月爲31日）.

16. $3x-3[4x-2(2x-5)]=9-2[3x-5(x-5)].$

17. $\frac{5}{x}-\frac{6}{y}=2,\ \frac{4}{x}+\frac{12}{y}=3.$

18. $15x^2+34x+15=0.$

19. $\frac{x+2}{x-4}-\frac{x-3}{x-5}=1.$

20. 父子三人.父年爲次子之三倍.而七年之後.父年爲長子之二倍.又長子比次子長五歲.然則父子三人現在之年各幾何.

21. $\frac{1}{2}(x+1)(x+3)=\frac{1}{3}(x+5)(x+2)+\frac{1}{6}(x-1)(x-4).$

22. $(b+c)(x-a)-(c+a)(x-b)=(a+b)(x-c).$

23. $17x-19y=4,\ 27x-29y=24.$

24. $\frac{2x-3}{x-3}+\frac{3x+8}{2x+1}=5.$

25. 有客二人同搭火車共帶行李 360 斤.依鐵路規則,每人許行李若干斤,不取運費,若踰此限,則每斤須取運費若干.今此二人共收運費 4 角,若一人攜帶,則須繳運費 6 角 5 分.問不取運費者爲若干斤.

26. $\frac{3x-1}{5}+\frac{5x+1}{6}=\frac{9x+1}{8}-\frac{1-x}{3}$.

27. $\frac{x+y}{3}=2x-y-2,\ \frac{2y-x}{2}=y-x+5$.

28. $(a+b)x+(a-b)y=a^2-b^2,\ (a-b)x+(a+b)y=a^2+b^2$.

29. $\frac{3}{3-x}+\frac{8}{8-x}=3$.

30. 某人有子五人,其年等於諸子之年之和,而五年之前,等於諸子之年之和之二倍,問某人現年幾何.

31. $\frac{2x}{x+1}+\frac{x+3}{x+1}=\frac{8x+15}{x+5}$.

32. $\frac{1}{5}(x-2)=\frac{1}{4}(1-y),\ 36x+3y+9=0$.

33. $\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{1-x}=\frac{7}{8}-\frac{1}{x+1}$.

34. $\sqrt{x}+\sqrt{5x+1}=2$.

35. 兩人乘腳踏車,同時由 A, B 兩地起行,一人由 B 地至 A 地,他一人依同路由 A 地至 B 地,兩人在途中相會後,一人經 3 點鐘,一人經 1 點鐘 20 分,各達其地.問起行後經幾何時相會.

36. $\frac{5x+8}{5x-1}+\frac{9}{1-25x^2}=\frac{1+10x}{1+5x}$.

37. $3y-\frac{2}{x}=5y-\frac{3}{x}+9=4y-\frac{7}{x}$.

38. $\dfrac{4x-7}{3x-4}+\dfrac{2x+1}{x-7}=18\frac{1}{4}$.

39. $\sqrt{4x+4}-\sqrt{x+8}=\sqrt{x-4}$.

40. 有金若干圓.分給 A, B, C 三人. A 之所得.等於 B, C 二人所得之和之九分之一. B 之所得.等於 C, A 二人所得之和之三分之一. C 之所得.比 A, B 二人所得之和多 6 圓.問三人之所得各幾何.

41. $\dfrac{x}{4}\left(3-\dfrac{8}{x}\right)-\left(7-\dfrac{3x}{4}\right)=5-\dfrac{15}{64}x$.

42. $\dfrac{x+3}{x-3}-\dfrac{x-2}{x-4}=1$.

43. $x+2=\sqrt{\{4+x\sqrt{8-x}\}}$.

44. $3x-2y=12,\ 9x^2-4y^2=576$.

45. 某人以所有金買股票.得息 $2\frac{2}{3}$ 分.若每股價低 $7\frac{1}{2}$ 圓.則息比前多 $\frac{2}{5}$ 分.問每股之賣價幾何.但每股之額面爲 100 圓.

46. $\dfrac{4x^3+4x^2+8x+1}{2x^2+2x+3}=\dfrac{2x^2+2x+1}{x+1}$.

47. $\dfrac{1}{10}(5x+6)-\dfrac{1}{21}(11y-5)=11,$

$$\frac{1}{25}(55y-12)=\frac{7x}{5}-37.$$

48. $\dfrac{12}{x}+\dfrac{10}{x-1}=6\frac{1}{3}$.

49. $\sqrt{x}+\sqrt{x+4}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

50. 某鐵路.有急行車一隊.由甲地向乙地發.又同時

有緩行車一隊由乙地向甲地發.而此兩車隊.在途中相遇後.一經45分.一經 1 點鐘20分.各達其地.求各車隊通過兩地間之時.

51. $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{x-1}-\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{23}{10(x-1)}$.

52. $5x+2y-1=3x-y+14=x+19y+6$.

53. $\sqrt{(x^2-a^2)}=2-\dfrac{1}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$.

54. $3x^2-2xy+4y^2=36,\ 4x^2-y^2=7$.

55. 有依次連續之三整數.其最大數與最小數兩立方之和.較中數之立方之二倍多42.問三數各幾何.

56. $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{3}-\dfrac{\frac{x}{3}-12}{5}=\dfrac{2x-1}{3}+\dfrac{9\frac{1}{2}-x}{21}$.

57. $\dfrac{x-3}{2}+\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{3}{x-2}$.

58. $ax-by=a^2-b^2-2ab,\ bx+ay=2ab+a^2-b^2$.

59 $x^2+xy+y^2=9,\ x^4+x^2y^2+y^4=243$.

60. 某人進物品若干件.以五分之息賣其半.又以一成之息賣其三分之一.其餘每件賣洋 2 角 7 分.其全利益為 $1\frac{2}{3}$ 分,問每件之進價幾何.

61. $(a+b)(x+a-b)+(a-b)(x-a-b)+2a(x-2c)=0$.

62. $\dfrac{3x-2}{2x-5}-\dfrac{2x-3}{3x-2}=\dfrac{2}{3}$.

63. $2x^2-3\sqrt{(x^2+2x+14)}+4x-49=0$.

64. $2x^2+3xy=8,\ y^2-2xy=20$.

65 某人以58圓.買羊若干頭.其中失去五頭.以12圓

賣其餘之四分之一.獲利盆五分.問某人共買羊若干頭.

66. $\frac{1}{5x-1}-\frac{x+5}{1-25x^2}=\frac{3}{1+5x}$.

67. $(a+b)x+by=ax+(a+b)y=a^3+b^3$.

68. $\sqrt{(x-a)}+\sqrt{(x-b)}=\frac{b}{\sqrt{(x-a)}}+\frac{a}{\sqrt{(x-b)}}$.

69. $x^2+y^2=xy+7, x^2-y^2=xy-1$.

70. 某人以12圓.進物品若干件.除十件不賣外.其餘每件獲利6仙.共賣銀12圓.問所進之物品若干件(但一圓爲100仙).

71. $\frac{1}{5}(3x+1)-\frac{1}{3}(2x-3)=\frac{1}{10}(6x-1)-\frac{1}{6}(7x-3)$.

72. $\frac{x}{c}-\frac{c}{x}=\frac{c}{a}-\frac{a}{c}$.

73. $\sqrt{(x+1)}+\sqrt{2x}=\sqrt{(6x+1)}$.

74. $x^2-xy+3y=11, y^2-xy-3x+1=0$.

75. 某人有幣 150 個.其價合計19圓.其中有二角銀貨,一角銀貨,五仙白銅貨三種.若五仙白銅貨之數.爲原數之二倍.二角銀貨之數.爲原數之半.一角銀貨之數.爲原數之三倍.則其價合計29.80圓.問三種貨幣之價各幾何.

76. $\frac{3x+1}{5}-\frac{1-5x}{3}=\frac{x+1}{3}-\frac{2-9x}{7}$.

77. $\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x+1}=\frac{29}{10}$.

78. $(x-a)(y-b)=ab, bx=ay$.

79. $x^2=2y+24, y^2=2x+24$.

80. 有紙若干枚其面積合計 1120 平方尺.以之糊室之四壁適足.但室縱比橫多 8 尺.若此室較前高四尺.則前之紙僅能糊二小壁.一大壁.問此室縱橫各若干尺.

81. $\dfrac{x+4a+b}{x+a+b}+\dfrac{4x+a+2b}{x+a-b}=5.$

82. $(a-x)^3+(b-x)^3=(a+b-2x)^3.$

83. $(x-5)^2+(y-6)^2=2(xy-40),\ x=y+1.$

84. $4xy=96-x^2y^2,\ x+y=6.$

85. 有一兩輪車.行 78 丈時.小輪比大輪多轉 135 次.若兩輪之圓周各增一尺.則行 21 丈時.小輪比大輪多轉 27 次.問兩輪之周圍各若干尺.

86. $\dfrac{2x-3}{2x-4}-\dfrac{2x-4}{2x-5}=\dfrac{2x-6}{2x-7}-\dfrac{2x-7}{2x-8}.$

87. $2x(a-b-2x)+(a-1)(b-1)=0.$

88. $\sqrt{(6x+1)}+\sqrt{2(1-x)}=\sqrt{7x+6}.$

89. $xy(x+y)=30,\ x^3+y^3=-91.$

90. 矩形之田.其面積 2420 方尺.其周圍 198 尺.問各邊之長幾何.

91. $\dfrac{x+3}{2x+1}+\dfrac{3x+7}{2x-2}=\dfrac{2x+1}{x-2}.$

92. $x+2y+3z=4,\ x+3y+2=4z,\ x+2z+3=4y.$

93. $\sqrt[3]{(a-x)}+\sqrt[3]{(x-b)}=\sqrt[3]{(a-b)}.$

94. $(x-3)^2+(y-3)^2=34,\ xy-3(x+y)=6.$

95. 某鐵路.有車兩隊.同時由 A, B 兩地開行.一由 A 地至 B 地.一由 B 地至 A 地.而 A, B 兩地之距離爲 100

英里.此兩車隊.在開行後一點鐘15分相會.且一車隊比他車隊快一點鐘20分到.問兩車隊之速度各幾何.

96. $\frac{ax-by}{3}=\frac{(2a+b)x-(a+2b)y}{7}=a^2-b^2$.

97. $13x^2+12=80x$.

98. $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=4$.

99. $x^2(y+1)+y^2(x+1)=109,\ xy=12$.

100. 有 A, B 二人. A 於早間10點鐘由P地向Q地行. B 於早間10點鐘24分.由Q地向P地行.此二人在距Q地6里處相會. B 至P地留一點鐘. A 至Q地留2點鐘54分.各就歸途.於晚間6點鐘54分.在P地與Q地之中央相會.問由P至Q之距離幾何.

第十八編

方乘及方根

162. 累乘法及開方法 求量之方乘,謂之累乘法.又,求量之方根,謂之開方法.開方法爲累乘法之還原.本編專示累乘法及開方法之例.

163. 乘法之指數法則 設 m 及 n 爲任意之正整數,則

依定義. $a^m=aaaa\cdots\cdots$至 m 因數止.

$a^n=aaaa\cdots\cdots$至 n 因數止.

$\therefore$ $a^m\times a^n=(aaaa\cdots\cdots$至 m 因數止.)

$\times(aaaa\cdots\cdots$至 n 因數止.)

$=aaaa\cdots\cdots$至 $m+n$ 因數止.

$=a^{m+n}$ (據定義)

由是 m 及 n 爲正整數,則

$$\underline{a^m\times a^n=a^{m+n}}$$

即同量之任意兩方乘,其積之指數,爲其因數兩指數之和.此結果謂之指數之法則.

依指數之法則,得

$$a^m\times a^n\times a^p=a^{m+n+p}$$

無論因數若干,俱準此.

由是 $\underline{a^m\times a^n\times a^p\times\cdots\cdots=a^{m+n+p+\cdots}}$

即同量之任意諸方乘,其積之指數,爲其因數諸指數之和.

164. 除法之指數法則

$$a^m \div a^n = \frac{a \times a \times a \times a \times \cdots\cdots \text{至 } m \text{ 因數止}}{a \times a \times a \times a \times \cdots\cdots \text{至 } n \text{ 因數止}}$$

此式若m較n大,則分母之n因數,與分子之n因數相消,而分子餘$m-n$因數.

故m較n大,則

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

若n較m大,則分子之m因數,與分母之m因數相消,而分母餘$n-m$因數.

故m較n小,則　$a^m \div a^n = \dfrac{1}{a^{n-m}}$.

165. 自乘法之指數法則　設m及n爲正整數,試求$(a^m)^n$.

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \cdots\cdots \text{至 } n \text{ 因數止.}$$

$$= a^{m+m+m+\cdots \text{至 } n \text{ 項}}.$$

$$= a^{mn}.$$

由是　　$(a^m)^n = a^{mn}$.

即將某方乘之量作新方乘,當以新指數乘原指數爲其指數.

166 因數之方乘　求$(ab)^m$.

據定義,得　$(ab)^m = ab \times ab \times ab \times \cdots\cdots$至$m$因數.

$= (aaa\cdots\cdots \text{至 } m \text{ 因數}) \times (bbb\cdots\cdots \text{至 } m \text{ 因數})$　[39款]

$= a^m \times b^m$.　　依定義

由是　　$(ab)^m = a^m b^m$.

同樣　　$(abc)^m = abc \times abc \times abc \times \cdots\cdots$至$m$因數.

$$=(aaa\cdots\cdots\text{至 } m \text{ 因數})\times(bbb\cdots\cdots\text{至 } m \text{ 因數})$$
$$\times(ccc\cdots\cdots\text{至 } m \text{ 因數})$$
$$=a^m\times b^m\times c^m.$$

由是　$(abc)^m=a^mb^mc^m.$

凡作m方乘之式,無論其因數若干,皆準此.

即積之m方乘為其因數諸m方乘之積.

167. 單項式之方乘　單項式最普通之形為$a^xb^yc^z$ ……………

今求$(a^xb^yc^z\cdots\cdots\cdots\cdots)^m$　則

$$(a^xb^yc^z\cdots\cdots)^m=(a^x)^m(b^y)^m(c^z)^m\cdots\cdots[166\text{ 款}]$$
$$=a^{xm}b^{ym}c^{zm}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots[165\text{ 款}]$$

即任意單項式之方乘,惟將式中諸因數之指數,各以新指數乘之.

168. 分數之方乘　次所示者,尤為緊要之例.

求　$\left(\frac{a}{b}\right)^m$.

據定義　$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\cdots\cdots\text{至 } m \text{ 因數}.$

$$=\frac{a\times a\times a\cdots\cdots\text{至 } m \text{ 因數}}{b\times b\times b\cdots\cdots\text{至 } m \text{ 因數}}[134\text{ 款}]$$
$$=\frac{a^m}{b^m}.$$
$$\therefore\quad\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}.$$

169. 負數量之方乘　正量之各方乘皆為正,負量之各方乘,遞為正負.

此理依符號之法則,易知其然.

因 $(-a^2)=(-a)(-a)(-a)=+a^2.$

$(-a)^3=(-a)^2(-a)=(+a^2)(-a)=-a^3.$

$(-a)^4=(-a)^3(-a)=(-a^3)(-a)=+a^4.$

以下仿此.

故得 $(-a)^{2n}=+a^{2n}$ 及 $(-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}.$

由是.無論正量,負量.其各偶數方乘之符號皆爲正.而各奇數方乘之符號.皆與原量之符號同.

170. 二項式之方乘 在乘法中.已證得

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

及 $$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

若再以 $a+b$ 乘之.得

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

又以 $a+b$ 乘之.則得 $(a+b)^5$.而依此累乘.自可得 $a+b$ 之任何方乘.然此方法.用於高次方乘〔如 $(a+b)^{20}$〕時.則演算甚煩.故後編別立二項式之定理一編證明之.依此定理.則二項式之任何方乘.可直書出.故本款但言求平方及立方之法.

上之公式.無論 a 及 b 之值如何.恆合乎理.故任意二項式之平方及立方.可直書出.

如 $$(a^4-b^4)^2=(a^4)^2+2(a^4)(-b^4)+(-b^4)^2$$
$$=a^8-2a^4b^4+b^8.$$

及 $$(5a^2-3b^2)^3=(5a^2)^3+3(5a^2)^2(-3b^2)+3(5a^2)(-3b^2)^2$$
$$+(-3b^2)^3=125b^6-225a^4b^2+135a^2b^4-27b^6.$$

又 $$(a+b+c)^3=\{a+(b+c)\}^3$$
$$=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3.$$

171. 多項式之方乘 累乘法更有一要件.卽求多

項式之平方.然已述於第56款.

問題 LIII.

書以下各式之值.

1. $(a^3)^5$.
2. $(a^5)^3$.
3. $(-a^2)^3$.
4. $(-a^3)^2$.
5. $(-2a^5)^4$.
6. $(-3a^4)^5$.
7. $(-ab^2)^4$.
8. $(a^3b^4)^5$.
9. $(-ab^4)^7$.
10. $(-3a^2b^5c)^3$.
11. $(-ab^2c^5)^4$.
12. $(-5a^2b^2c^4)^3$.
13. $\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^3$.
14. $\left(-\frac{a^2}{bc^2}\right)^5$.
15. $\left(-\frac{a^3}{b^2c^3}\right)^6$.
16. $(2a^4+3b^3)^2$.
17. $(a^5-2b^4)^2$.
18. $(-ax^4+by^3)^2$.
19. $(-a^2+2ab)^2$.
20. $(a^2+b^2)^3$.
21. $(a^3+b^3)^2$.
22. $(2a^2-3b^2)^3$.
23. $(3a^2-2b^2)^3$.
24. $(a^2+b^2+c^2)^2$.
25. $(a^3-2b^3+3c^3)^2$.
26. $(a^2-4b^2-3c^2)^2$.
27. $(x^2-3x-6)^2$.
28. $(3x^2-x-5)^2$.
29. $(2x^2+5x-1)^2$.
30. $(3x^2-6x-6)^2$.
31. $(1+x+x^2+x^3)^2$.
32. $(x^3-x^2+x-1)^2$.
33. $(x^3+x^2-2x-2)^2$.
34. $(a+2b+3c+4d)^2$.
35. $(2a-b+c-2d)^2$.
36. $(x^2+x+1)^3$.
37. $(x^2-x+2)^3$.
38. $(3x^2-5x+1)^3$.

172. 方根　由是舉開方法之例.

已知 a^2 之兩平方根爲 $\pm a$. 又 a^3 之立方根有三個[見155款]. 卽一根爲 a. 而他二根爲虛數.

由是.方乘與方根之間.有一極異之點.卽用作 n 方乘之式.祇有一個.而求其 n 方根.則必多於一個是也.

173. 方根之法則 一代數式之 n 方乘(但 n 爲任意之正整數). 等於某已知代數式.則此一代數式.謂之已知代數式之 n 方根.

於166款.已證得積之 m 方乘爲其因數諸 m 方乘之積.依此理反推之.則積之 m 方根爲其因數諸 m 方根之積.

(註) 積之因數.無論用何次第.俱無變更.於39款.已證其合理.然所證明.其因數以整數或分數爲限.而根數未能確定 (卽 $\sqrt{a}$ 及 $\sqrt{b}$ 根數恆得 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{b}\times\sqrt{a}$, 未嘗確定).欲確定根數.宜從代數學之本則證之.見大代數學162款.)

如 $\qquad \sqrt{abc}=\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}.$

及 $\qquad \sqrt[m]{ab}=\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}.$

又於167款.已證得單項式之 n 方乘.惟將式中諸因數之指數.各以 n 乘之.

依此理反推之.則將式中諸因數之指數.各以 n 除之.卽得該式之 n 方根.何則.因以除其指數後所得之結果.再作 n 方乘.則仍爲原式故也.

如 $\sqrt[2]{a^4}$ 之一值爲 a^2, $\sqrt[3]{a^6b^{12}c^6}$ 之一值爲 $a^2b^4c^2$, 又 $\sqrt[n]{a^{np}b^{nq}}$ 之一值爲 a^pb^q.

非完全平方式之平方根.又,非完全立方式之立方根.俱不能運算.

如 a 之平方根,惟記以 $\sqrt{a}$, 又 a^2 之立方根,惟記以 $\sqrt[3]{a^2}$,餘倣此.

平　方　根

174. 平方根　由是論多項式平方根之求法.完全平方之任何三項式,其平方根之求法,已詳於96款.

卽,欲求三項式之平方根,則先將全式依某文字之遞降方乘,或遞昇方乘,整列.然後取其首尾兩項之平方根.若原式之中項爲正,則附以相同之符號.若原式之中項爲負,則附以相異之符號.

如求 $4a^8-12a^4b^3+9b^6$ 之平方根.

其首尾之兩方根爲 $\pm 2a^4$ 及 $\pm 3b^3$,

而原式之中項爲負,故所求之平方根,爲

$$\pm(2a^4-3b^3).$$

〔注意〕此後各式之平方根,僅取第一項爲正號者.而欲求他一根,則悉變各項之符號卽得.

$$\sqrt{(49a^{10}+28a^5+4)}=7a^5+2,$$

$$\sqrt{(1+5xy^3+\tfrac{25}{4}x^2y^6)}=1+\tfrac{5}{2}xy^3,$$

$$\sqrt{\{a^2+2a(b+c)+(b+c)^2\}}=a+b+c.$$

175. 視察法　某式所含特別文字之方乘,若祇有二種,則依文字之遞昇方乘或遞降方乘列之,可變爲三項式.

如 $c^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab$ 式 a^2 與 a 之外,更無 a 之他方乘,故依 a 之遞降方乘整列,則

$$a^2+2a(b+c)+(b^2+c^2+2bc).$$

由是,任意之方程式,若特別文字之異方乘祇有兩

種,則可變爲三項式,而完全平方之任何三項式,其平方根可直書出,故完全平方之多項式,若某特別文字之異方乘祇有兩種,則其平方根,可由視察求得.

如求 $a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab$ 之平方根.

此式依 a 之遞降方乘整列,則變爲

$$a^2+2a(b+c)+(b^2+2bc+c^2),$$

即 $$a^2+2a(b+c)+(b+c)^2,$$

即 $$\{a+(b+c)\}^2.$$

故 $\sqrt{(a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab)}=a+b+c.$

又求 $x^4+4y^4+9z^4+4x^2y^2-6x^2z^2-12y^2z^2$ 之平方根.

此式依 x 之遞降方乘整列,則變爲

$$x^4+2x^2(2y^2-3z^2)+4y^4+9z^4-12y^2z^2,$$

即 $$x^4+2x^2(2y^2-3z^2)+(2y^2-3z^2)^2,$$

即 $$\{x^2+(2y^2-3z^2)\}^2,$$

故 $$\sqrt{(x^4+4y^4+9z^4+4x^2y^2-6x^2z^2-12y^2z^2)}$$
$$=x^2+2y^2-3z^2.$$

又求 $a^2+2abx+(b^2+2ca)x^2+2bcx^3+c^2x^4$ 之平方根,依 a 之方乘列此式,則

$$a^2+2a(bx+cx^2)+b^2x^2+2bcx^3+c^2x^4,$$

即 $$a^2+2a(bx+cx^2)+(bx+cx^2)^2,$$

即 $$\{a+(bx+cx^2)\}^2.$$

故所求之平方根爲 $a+bx+cx^2$.

又求下式之平方根.

$$x^6-2x^5+3x^4+2x^3(y-1)+x^2(1-2y)+2xy+y^2.$$

此式唯含 y^2 及 y,故依 y 之方乘整列,得

$$y^2+2y(x^3-x^2+x)+(x^6-2x^5+3x^4-2x^3+x^2).$$

今此式若爲完全平方.則其末項當爲 y 之係數之半之平方.

而 $$x^6-2x^5+3x^4-2x^3+x^2=(x^3-x^2+x)^2.$$

容易證明.故所設之式.等於

$$y^2+2y(x^3-x^2+x)+(x^3-x^2+x)^2.$$

故所求平方根爲 $y+x^3-x^2+x$.

依上所述凡完全平方之式.無論其項數若干.若此式某特別文字之異方乘.祇有兩種.則其平方根.可由視察求得.

問題 LIV.

書以下各式之平方根.

1. $9x^2-30xy+25y^2$.　**2**. $25x^4-30x^2y^2+9y^4$.

3. $4x^4-12x^2y^2+9^4$.　**4**. $4x^{10}-12x^5y^3+9y^6$.

5. $x^8-6x^4y^7+9y^8$.　**6**. $9x^{12}-6x^6y^3+y^6$.

7. $\frac{1}{4}x^6-\frac{1}{3}x^3y^3+\frac{1}{9}y^6$.　**8**. $\frac{1}{9}x^8y^6-\frac{1}{3}x^4y^3+\frac{1}{4}$.

9. $25x^8y^6-40a^2b^3x^4y^3+16a^4b^6$.

10. $\dfrac{x^4}{a^2}+8x^2y^3+16a^2y^6$.　**11**. $9\dfrac{b^2x^4}{a^2}-24x^2y^2+16\dfrac{a^2y^4}{b^2}$.

12. $\dfrac{9}{x^6}-42\dfrac{a^5}{x^3}+49a^{10}$.

13. $a^2+4b^2+9c^2+12bc+6ca+4ab$.

14. $4a^2+b^2+9c^2+6bc-12ca-4ab$.

15. $4a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-4c^2a^2+4a^2b^2$.

16. $25a^4+9b^4+4c^4-12b^2c^2+20c^2a^2-30a^2b^2$.

176. 多項式之平方根 因示任何代數式之平方

根之求法.故先取一代數式.作平方.然後依反面之運算.以釋其法.

如 $$x^2+2xy+3y^2\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

其平方爲 $$x^4+4x^3y+10x^2y^2+12xy^3+9y^4\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

但此兩式.爲依 x 之遞降方乘整列者.而 $x^2+2xy+3y^2$ 之平方.可記爲下式

$$\{x^2+(2xy+3y^2)\}^2=x^4+2x^2(2xy+3y^2)+(2xy+3y^2)^2\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\{(x^2+2xy)+3y^2\}^2=(x^2+2xy)^2+2(x^2+2xy)3y^2+(3y^2)^2\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(2) 式之第一項.原爲 (1) 式第一項之平方.

由是.欲求(2)式平方根內之第一項.則取其第一項之平方根卽得.卽 x^2.

又由 (3) 式減 x^4 (卽根之第一項之平方).則餘式內含 x 最高方乘之項爲 $2x^2\times2xy$. 是卽根之第一項與第二項之積之二倍.

如是.由 (2) 式減根之第一項之平方.復以根之第一項之二倍.除其餘式之第一項.卽得根之第二項.

又由 (4) 式減 $(x^2+2xy)^2$ 〔卽根中已求得之部分之平方.〕則餘式內含 x 最高方乘之項爲 $2x^2\times3y^2$. 是卽根之第一項與第三項之積之二倍.

故根中已求得之部分之平方.由 (2) 式減之.復以根之第一項之二倍.除餘式之第一項.可得根之次項.

今由所設之式.減 $x^2+2xy+3y^2$ 之平方.適盡無餘.故 $x^2+2xy+3y^2$ 爲所求之根.

由是.更考究其通法.

如求 $(A+B)^2$ 之平方根.A 顯根之若干項,B 顯其餘之部分.而 A 及 B 之諸項,俱依其文字之遞降方乘或遞昇方乘整列.從而 A 內各項,較 B 內之任意項,恆爲高次項或爲低次項.

今已知 A 之諸項,欲求 B 之諸項.

則由 $(A+B)^2$ 減 A^2 其餘式爲 $(2A+B)B$.

而依代數式之列法,則餘式中之最高次項,或最低次項,必爲 A 之第一項與 B 之第一項之積之二倍.

由是,欲求根之次項（即 B 中最高次或最低次之項）,則由全式減根中已求得之部分之平方,再以根之第一項之二倍,除其餘式之第一項,即得.

根之第一項,恆爲所設式之第一項之平方根,理極易明.因而求得根之第一項時,依次用上法求之,即得根之他項.

如求 $x^4+4x^3y+10x^2y^2+12xy^3+9y^4$ 之平方根.

$$\begin{array}{l}
x^4+4x^3y+10x^2y^2+12xy^3+9y^4\,(x^2+2xy+3y^2 \\
(x^2)^2=x^4 \\
(x^2+2xy)^2=x^4+4x^3y+4x^2y^2 \\
(x^2+2xy+3y^2)^2=x^4+4x^3y+10x^2y^2+12xy^3+9y^4.
\end{array}$$

先將所設之式依某文字之遞降方乘或遞昇方乘整列.

由是,取所設式之第一項之平方根,可得根之第一項 x^2.次由所設式減 x^2 之平方,再以 $2x^2$ 除其餘式之第一項.如是可得根之第二項 $2xy$.又將 x^2+2xy 之平方（即 $x^4+4x^3y+4x^2y^2$）.由所設式減之,再以 $2x^2$ 除其餘式之第一項 $6x^2y^2$.則得根之第三項 $3y^2$.

今將 $x^2+2xy+3y^2$ 之平方由所設式減之適盡無餘故 $x^2+2xy+3y^2$ 為所求之根.

以 x^2, x^2+2xy, 等之平方置於所設式之下使同類項同在一縱行則由所設式減此等之平方其餘式可一望而知.

177. 簡法　前款之法須各作平方未免煩雜故代以簡法即求代數式之平方根咸以下法為通例今取前例解之如次.

$$x^4+4x^3y+10x^2y^2+12xy^3+9y^4(x^2+2xy+3y^2.$$

$$\begin{array}{rl}
 & \underline{x^4} \\
2x^2+2xy) & 4x^3y \\
 & \underline{4x^3y+4x^2y^2} \\
2x^2+4xy+3y^2) & 6x^2y^2 \\
 & \underline{6x^2y^2+12xy^3+9y^4.}
\end{array}$$

根之第一項為 x^2. 由所設式減 x^2 之平方則其餘式之第一項為 $4x^3y$.

將根中已求得之部分二倍之而以其第一項除餘式之第一項則得根之第二項 $2xy$ 加此第二項於 $2x^2$ 而將其和置於除數之位置上並以根之第二項 $2xy$ 乘其和而以其積減餘式 $4x^3y+\cdots\cdots\cdots$ 則更得餘式 $6x^2y^2+\cdots\cdots\cdots$

依此方法累求可以次得根之各項.

依上之演算在第二級之終始合減 $(x^2+2xy)^2$ 何則因 $(x^2+2xy)^2=(x^2)^2+(2x^2+2xy)2xy$ 故也.

同樣在各階級之終即為根中所求得至某項止之部分之平方可知.

問　題　LV.

求以下各式之平方根.

1. $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$.

2. $4x^4-8x^3+4x+1$.

3. $9x^4-36x^3+72x+36$.

4. $1-xy-\frac{15}{4}x^2y^2+2x^3y^3+4x^4y^4$.

5. $4x^4+4x^3-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$.

6. $x^4-2x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$.

7. $x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4$.

8. $16-96x+216x^2-216x^3+81x^4$.

9. $1+4x+10x^2+12x^3-9x^4$.

10. $4x^4-4x^3+3x^2-x+\frac{1}{4}$.

11. $(1+2x^2)^2-4x(1-x)(1+2x)$.

12. $x^6-4x^5+6x^4-8x^3+9x^2-4x+4$.

13. $9x^6-12x^5+22x^4+x^2+12x+4$.

14. $x^6-22x^4+34x^3+121x^2-374x+289$.

15 $a^2-ax+\frac{1}{4}x^2+8a-4x+16$.

16. $x^8+2x^7+x^6-4x^5-12x^4-8x^3+4x^2+16x+16$.

17. $16x^2-96x+216-\frac{216}{x}+\frac{81}{x^2}$.

18. $x^6-6x^4+15x^2-20+\frac{15}{x^2}-\frac{6}{x^4}+\frac{1}{x^6}$.

19. $x^4+2x^3(y+z)+x^2(y^2+z^2+4yz)+2xyz(y+z)+y^2z^2$.

20. $2x^2(y+z)^2+2y^2(z+x)^2+2z^2(x+y)^2+4xyz(x+y+z)$.

第十九編

分指數及負指數

178. 總論 以上所論之指數.恆設之爲正整數.蓋依第10款之定義.原不得不然.何則.因從其定義爲$a^{\frac{3}{2}}$式.即全無意義故也.

然擴張a^n之意義.則n宜包含分數及負數在內.

代數記號.無論其數值如何.恆以從同一之定則爲要.故n非正整數時.亦不須別加解釋.即a^n於任何例.其指數之本則.恆能使$a^m\times a^n=a^{m+n}$合理.

且此爲有意義之制限.而此制限.於任何例.皆足定a^n之意義無庸選擇.

如問$a^{\frac{1}{2}}$合於指數法則.其意義若何.

今 $$a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^1=a.$$

故$a^{\frac{1}{2}}$爲其平方爲a之量.即$a^{\frac{1}{2}}$之意義恆爲$\sqrt{a}$.

又問a^{-1}合於指數法則.其意義若何.

今 $$a^3\times a^{-1}=a^{3-1}=a^2 \qquad \therefore\ a^{-1}=a^2\div a^3=\frac{1}{a}.$$

故a^{-1}之意義爲$\frac{1}{a}$,

由是考其通例.

179. 分指數之例 n爲任意之正整數.問$a^{\frac{1}{n}}$之意義若何.

由指數法則.

$$a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times\cdots\cdots\cdots\cdots\text{至}\,n\,\text{因數},$$
$$=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{至}\,n\,\text{項},$$
$$=a^{\frac{n}{n}}=a^1=a.$$

由是,$a^{\frac{1}{n}}$為其n方乘為a之量.

即　$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}.$$

180. 分指數之第二例　m及n為任意之正整數.問$a^{\frac{m}{n}}$之意義如何.

依指數法則

$$a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times\cdots\cdots\cdots\cdots\text{至}\,n\,\text{因數},$$
$$=a^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{至}\,n\,\text{項},$$
$$=a^{\frac{mn}{n}}=a^m.$$

故$a^{\frac{m}{n}}$為a^m之n方根.

即　$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},$$

又　$$a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times\cdots\cdots\cdots\cdots\text{至}\,m\,\text{因數},$$
$$=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{至}\,n\,\text{項},$$
$$=a^{\frac{m}{n}}.$$

故$a^{\frac{m}{n}}$可視為$a^{\frac{1}{n}}$之m方乘.而依179款.

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}.$$

故$a^{\frac{m}{n}}$可視為a之m方乘之n方根.又可視為a之n

方根之m方乘.以式顯之.如次

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(a^m)}=(\sqrt[n]{a})^m.$$

〔注意〕精言之.則某量之 n 方根.若非算術上之方根.不能言 $\sqrt[n]{(a^m)}=(\sqrt[n]{a})^m$ 如 $\sqrt[2]{(a^4)}$ 有二值爲 $\pm a^2$ 而 $(\sqrt[2]{a})^4$ 祇有一值爲 $+a^2$. 是也.

181. 零指數 問 a^0 之意義如何.

由指數法則 $\quad a^0\times a^m=a^{0+m}=a^m,$

$\therefore \qquad a^0a^m\div a^m=1.$

故 a 之值不拘如何. a^0 恆等於 1.

182. 負指數 m 爲任意之正整數.問 a^{-m} 之意義如何.

由指數法則 $\quad a^m\times a^{-m}=a^{m-m}=a^0,$

而由前款 $\quad a^0=1,$

$\therefore \qquad a^m\times a^{-m}=1,$

故 $\qquad a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}$ 及 $a^m=\dfrac{1}{a^{-m}}.$

由是變任意量指數之符號.則可由分數之分子變爲分母.或由分數之分母變爲分子.

如 $\qquad 2^{-2}=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4},\ \dfrac{a}{b}=ab^{-1}=\dfrac{1}{a^{-1}b},$

及 $\qquad \dfrac{a^3b^2}{x^3y}=a^3b^2x^{-3}y^{-1}=\dfrac{1}{a^{-3}b^{-2}x^3y},$

183. 指數雜例 以上諸款.因指數之本則 $a^m\times a^n=a^{m+n}$, 恆能合理.故 n 設以任意之正負數值時.a 恆應之有一定之意義.據此所得之意義.故不論 m 及 n 之數值如何.恆能證明.

$$a^m \times a^n = a^{m+n},\ (a^m)^n = a^{mn}.$$

及 $(ab)^n = a^n b^n$ 均為合理（見大代數學163款）.

由是指數為分數或負數者.可與指數為正整數者同法求得.

如
$$(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})^2 = a^{\frac{2}{3}\times 2}\, b^{\frac{1}{2}\times 2} = a^{\frac{4}{3}}b.$$

$$a^{\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}.$$

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{6}} \times a^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{2}{3}} = a^0 = 1.$$

$$(a^{-\frac{2}{3}})^6 = a^{-\frac{2}{3}\times 6} = a^{-4} = \frac{1}{a^4}.$$

$$a^{-2} \div a^{-4} = a^{-2-(-4)} = a^2.$$

$$\sqrt[3]{(a^3b^{-3}c^4)} = \sqrt[3]{(a^3)}\cdot\sqrt[3]{(b^{-3})}\cdot\sqrt[3]{(c^4)}$$
$$= a^{\frac{3}{3}}b^{-\frac{3}{3}}c^{\frac{4}{3}} = ab^{-1}c^{\frac{4}{3}}.$$

問　題　LVI.

求以下各式之值〔1至10〕.

1. $8^{\frac{2}{3}}$.　　**2.** $4^{-\frac{3}{2}}$.

3. $16^{-\frac{1}{2}}$.　　**4.** $(\frac{1}{25})^{-\frac{1}{2}}$.

5. $(\frac{4}{25})^{-\frac{3}{2}}$.　　**6.** $(\frac{27}{64})^{-\frac{2}{3}}$.

7. $(27)^{-\frac{4}{3}}$.　　**8.** $(100)^{-\frac{5}{2}}$.

9. $(\frac{1}{10000})^{-\frac{3}{4}}$.　　**10.** $(\frac{27}{125})^{-\frac{4}{3}}$.

化以下各式為簡式〔11至35〕.

11. $a^{\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{1}{3}}$.　　**12.** $a^{\frac{4}{3}} \times a^{\frac{2}{3}}$.

13. $a^{-\frac{2}{3}}\times a.$ **14.** $a\times a^{-\frac{3}{5}}.$

15. $a^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\times a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{4}{3}}.$ **16.** $(a^{\frac{1}{2}}b)^2.$

17. $(a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}})^2.$ **18.** $(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{2}{3}})^3.$

19. $(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{6}})^{\frac{3}{2}}.$ **20.** $(a^4b^{-\frac{8}{3}})^{\frac{3}{2}}.$

21. $\{(a^{-2})^2\}^{\frac{3}{4}}.$ **22.** $\{(a^{-\frac{1}{3}})^2\}^{-\frac{3}{2}}.$

23. $\{(a^{-\frac{5}{6}})^2\}^{-\frac{1}{5}}.$ **24.** $a^{\frac{1}{3}}\times a^{-\frac{3}{4}}\times a^{\frac{5}{12}}.$

25. $a^{\frac{2}{3}}\times a^{-\frac{3}{4}}\times (a^2)^{-\frac{1}{6}}(a^{\frac{1}{12}})^5.$

26. $x^{p+q}\times x^{p-q}\div x^{2p}.$

27. $(x^{q-r})^p\times (x^{r-p})^q\times (x^{p-q})^r.$

28. $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}}\div\dfrac{x^{\frac{1}{6}}}{y^{\frac{1}{6}}}.$ **29.** $\dfrac{(xy)^{x+y}}{x^yy^x}.$

30. $\dfrac{(xyz)^{x+y+z}}{x^{y+z}y^{z+x}z^{x+y}}.$ **31.** $\dfrac{(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}(b^{\frac{1}{2}})^6}{(b^{\frac{1}{4}})^8a^{\frac{1}{3}}}\div\dfrac{(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{12}}}{(b^6)^{\frac{1}{4}}}.$

32. $a^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}\times\left\{\dfrac{y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{6}}}\right\}^2\div\dfrac{y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}.$

33. $x^{3p+q}\times x^{p-4r}\times (x^2)^{q-2r}\div x^{4p-3r}.$

34. $\left\{x^{\frac{p-q}{pq}}\right\}^r\left\{x^{\frac{q-r}{qr}}\right\}^p\left\{x^{\frac{r-p}{rp}}\right\}^q\div x^{\frac{p-q}{r}+\frac{q-r}{p}+\frac{r-p}{q}}.$

35. $\left[\left\{x^{\frac{p-q}{r}}\right\}^{\frac{q-r}{p}}\right]^{\frac{r-p}{q}}\times x^{\frac{p-q}{r}+\frac{q-r}{p}+\frac{r-p}{q}}.$

將以下各式用分數指數顯之.且化之爲簡式（36至44）.

36. $\sqrt[3]{a}\times\sqrt{n}\times\sqrt[6]{a}.$ **37.** $\sqrt[3]{(a^2y)}\sqrt[3]{(ay^2)}.$

38. $\sqrt[3]{(a^2x^5)}\times\sqrt{(a^3x)}$.　　39. $\sqrt[7]{a^3}\times\sqrt[6]{a^7}\times a^{-\frac{1}{2}}\div a^{\frac{2}{21}}$.

40. $\sqrt[3]{a^7}\times\sqrt[5]{a^7}\times a^{-\frac{1}{3}}\div a^{\frac{4}{5}}$.　41. $\sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{\{a^6\sqrt{(a^{-28})}\}}}$.

42. $\sqrt[5]{(a^2b^{10}c^5)}\div\sqrt[3]{(ab^3c^3)}$.　43. $\sqrt{(a^8b^{-2})}\div\sqrt[3]{(a^{-4}b^5)}$.

44. $\sqrt[3]{(a^6b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}})}\times b^{-\frac{9}{2}}\times(c^{\frac{1}{3}}a^4)^{-\frac{1}{2}}$.

以根號與正指數顯以下各式〔45至48〕.

45. $a^{\frac{1}{2}}-a^{-2}$.　　46. $a^{-4}b^{-\frac{1}{4}}$.

47. $a^{\frac{2}{3}}b^{-1}-a^{-\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}$.　　48. $a^{-3}b^{-\frac{1}{2}}+3^{-2}a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{2}{3}}$.

184. 多項式之應用　以下諸例雖適用前述之原理,然指數之加減等,實可用心算求之.

〔例1〕　以 $a^{\frac{1}{3}}-1+a^{-\frac{1}{3}}$ 乘 $a^{\frac{1}{3}}+1+a^{-\frac{1}{3}}$.

$$
\begin{array}{rrr}
a^{\frac{1}{3}}+1+a^{-\frac{1}{3}} & & \\
a^{\frac{1}{3}}-1+a^{-\frac{1}{3}} & & \\
\hline
a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+1 & & \\
-a^{\frac{1}{3}}-1-a^{-\frac{1}{3}} & & \\
 & 1+a^{-\frac{1}{3}}-a^{-\frac{2}{3}} & \\
\hline
a^{\frac{2}{3}}\qquad +1 & & +a^{-\frac{2}{3}}
\end{array}
$$

〔例2〕　以 $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}$ 除 $a+b+c-3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}$.

$$a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}})a-3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+b+c(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}})(b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}})$$

$$+b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}}.$$

$$\underline{a+a^{\frac{2}{3}}(b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}})}$$

$$-a^{\frac{2}{3}}(b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}})-3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+b+c$$

$$\underline{-a^{\frac{2}{3}}(b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}})-a^{\frac{1}{3}}(b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}})^2}$$

$$a^{\frac{1}{3}}(b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}})+b+c$$

$$\underline{a^{\frac{1}{3}}(b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}})+(b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}})(b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}})}$$

〔例3〕　求 $x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}+4x-4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}}$ 之平方根.

$$x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}+4x-4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}$$

$$(x^{\frac{5}{6}})^2 \underline{=x^{\frac{5}{3}}}$$

$$(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{3}})^2 \underline{=x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+4x}$$

$$(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}})^2 \underline{=x^{\frac{5}{6}}-4x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}+4x-4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}}}$$

問　題　LVII.

求以下各題中兩式之積〔1至15〕.

1. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$.　　**2.** $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}, x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}$.

3. $x^{\frac{1}{4}}+1, x^{\frac{1}{4}}-1$.　　**4.** $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}$.

5. $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1, x^{\frac{1}{3}}-1$.　　**6.** $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}, x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}$.

7. $a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}}, a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}$.

8. $a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}}, a^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}}$.

9. $x^{\frac{5}{4}}-x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{4}}, x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{4}}$.

10. $x^{\frac{7}{4}}-x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{4}}-x, x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}$.

11. $x^n+x^{\frac{n}{2}}+1,\ x^{-n}+x^{-\frac{n}{2}}+1$.

12. $x^{2n}+x^ny^n+y^{2n}, x^{-2n}+x^{-n}y^{-n}+y^{-2n}$.

13. $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}},\ a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}.$

14. $\frac{1}{8}a^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{12}ab^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{18}a^{\frac{1}{2}}b-\frac{1}{27}b^{\frac{3}{2}},\ \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}b^{\frac{1}{2}}.$

15. $81x^{\frac{4}{3}}-27x^{\frac{3}{3}}y^{\frac{1}{3}}+9x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}y+y^{\frac{4}{3}},\ 3x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}.$

將以下各題用後式除前式〔16至26〕.

16. $a-b,\ a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}.$　　17. $x^3-y^3,\ x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}.$

18. $x^{-\frac{3n}{2}}-y^{-\frac{3n}{2}},\ x^{-\frac{n}{2}}-y^{-\frac{n}{2}}.$

19. $x^2+y^2,\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}.$　　20. $x-243y^{\frac{5}{4}},\ x^{\frac{1}{5}}-3y^{\frac{1}{4}}.$

21. $y^4+b^2y^2+b^4,\ y-b^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+b.$

22. $x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}+2+x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}},\ x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}-1+x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}.$

23. $a^{\frac{5}{2}}+a^2b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}-ab+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{5}{3}},\ a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}.$

24. $a^{\frac{4}{3}}-2+a^{-\frac{4}{3}},\ a^{\frac{2}{3}}-a^{-\frac{2}{3}}.$

25. $(x-x^{-1})-2(x^{\frac{1}{6}}-x^{-\frac{1}{6}})+2(x^{\frac{5}{6}}-x^{-\frac{5}{6}}),\ x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}.$

26. $x^{\frac{7}{3}}y^{-\frac{14}{5}}+y^{\frac{14}{5}}x^{-\frac{7}{3}},\ x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{5}}+y^{\frac{2}{5}}x^{-\frac{1}{3}}.$

27. 化 $(ab^{-3}c^5)^{\frac{1}{2}}\times(a^7b^4c^{-1})^{\frac{1}{3}}\times(a^{-5}bc^2)^{\frac{1}{6}}$. 爲簡式.

28. 化 $(a-4b^{\frac{2}{3}})(a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}})(a-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}})$. 爲簡式.

29. 證　$1-\dfrac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}=\dfrac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}.$

30. 證　$\dfrac{x}{x^{\frac{1}{3}}+1}-\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}-\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}-1}+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}+1}=2+x^{\frac{2}{3}}.$

31. 將 $4x^2-5x-4-7x^{-1}+6x^{-2}$ 與 $3x-4+2x^{-1}$ 之積用

$3x-10+10x^{-1}-4x^{-2}$除之.

32. 化 $\dfrac{1}{1-x^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{1}{1+x^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{2}{1+x^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{4}{1+x}$ 為簡式.

33. 以 $(a+b)^{\frac{1}{3}}-(a-b)^{\frac{1}{3}}$乘$(a+b)^{\frac{2}{3}}+(a^2-b^2)^{\frac{1}{3}}+(a-b)^{\frac{2}{3}}$.

34. 書以下三式之平方根.

(1) $x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+1$, (2) $4x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$,

(3) $ax^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{5}{6}}x^{\frac{5}{6}}+a^{\frac{2}{3}}x$.

35. 求 $4x^2a^{-2}-12xa^{-1}+25-24x^{-1}a+16x^{-2}a^2$ 之平方根.

36. 求 $25x^2y^{-2}+\frac{1}{4}y^2x^{-2}-20xy^{-1}-2yx^{-1}+9$ 之平方根.

37. 求次之平方根.

$$x^{\frac{8}{5}}-2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{11}{5}}+2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}}+a^{-\frac{6}{5}}x^{\frac{14}{5}}-2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}}+a^{\frac{8}{5}}.$$

38. 求 $x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{5}{6}}+4x+2x^{\frac{7}{6}}-4x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{5}{3}}$ 之平方根.

39. 解次之各方程式.

(1) $x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{3}{4}}+1=0$, (2) $x-8x^{\frac{1}{2}}+12=0$,

(3) $x^{\frac{3}{2}}-26x^{\frac{3}{4}}-27=0$, (4) $x^{\frac{1}{3}}+3x^{-\frac{1}{3}}=4$,

(5) $4x^{\frac{1}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}=4$.

第二十編

根 數

185. 定義 根數云者.不能開盡之算術的根數也.如 $\sqrt{2}$ 及 $\sqrt[3]{4}$, 俱爲根數.

如 $\sqrt{a}$ 代數式. a 爲能開盡之數值（即其實非根數）.亦往往稱爲根數.

同根號之根數.名爲同次根數.

如 $\sqrt{2}$ 與 $6^{\frac{1}{2}}$,稱爲二次根數.又 $\sqrt[3]{4}$, 與 $5^{\frac{2}{3}}$,稱爲三次根數.故如 $\sqrt[n]{5}$,稱爲 n 次根數.

化兩根數爲同次之無理因數.謂之相似之根數.

如 $2\sqrt{2}$ 及 $5\sqrt{2}$ 爲相似之根數.

演算根數之法則.可由已證明之原理推得.

〔注意〕算術的數前有根號者.唯顯算術上之根.代數式前有根號者.恆顯諸根中任意之一根.

如 $\sqrt{a}$ 雖有二值.然 $\sqrt{2}$ 唯顯算術上之根.若欲顯正負兩根.則不可不記爲 $\pm\sqrt{2}$.

186. 根數之變化 任意之有理數.俱可變爲根數之形.

如 $\qquad a=\sqrt{a^2}=\sqrt[3]{a^3}=\sqrt[n]{a^n}$,

及 $\qquad 2=\sqrt{2^2}=\sqrt[3]{2^3}=\sqrt[n]{2^n}$,

又 $\qquad \sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{(\sqrt{2^2})}=\sqrt[6]{2^2}$,

又 $\qquad \sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$,

故其式如次.

$$3\sqrt{2}=\sqrt{3^2}\times\sqrt{2}=\sqrt{(3^2\times2)}=\sqrt{18},$$

$$2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{(2^3\times5)}=\sqrt[3]{40},$$

及 $$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}.$$

反之 $$\sqrt{18}=\sqrt{(9\times2)}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=3\sqrt{2},$$

$$\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{40}=\sqrt[3]{(3^3\times5)}+\sqrt[3]{(2^3\times5)}$$

$$=3\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{5}=5\sqrt[3]{5},$$

及 $$\sqrt{a^3}+\sqrt{ab^2}=a\sqrt{a}+b\sqrt{a}=(a+b)\sqrt{a}.$$

187. 化二根爲同次根數 任意之根數可化爲同次根數.

此理可直由 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nm]{a^m}$ 推得.

如化 $\sqrt{2}$ 及 $\sqrt[3]{5}$ 爲同次根數.

因 $\sqrt{2}=\sqrt{\{\sqrt[3]{2^3}\}}=\sqrt[6]{2^3}$ 及 $\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{\{\sqrt{5^2}\}}=\sqrt[6]{5^2}$ 故仍與 $\sqrt{2}$ 及 $\sqrt[3]{5}$ 等值.且成同次之根數.爲 $\sqrt[6]{8}$ 及 $\sqrt[6]{25}$.

又化 $\sqrt[n]{a}$ 及 $\sqrt[m]{b}$ 爲同次根數.

因 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{\{\sqrt[m]{a^m}\}}=\sqrt[mn]{a^m}$ 及 $\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{\{\sqrt[n]{b^n}\}}=\sqrt[mn]{b^n}$.

由是.所求之根數.爲 $\sqrt[mn]{a^m}$ 及 $\sqrt[mn]{b^n}$.

〔例1〕 化 $\sqrt[4]{3}$ 及 $\sqrt[6]{5}$ 爲同次根數.

4 與 6 之最小公倍數爲 12.

由是 $\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{\{\sqrt[3]{3^3}\}}=\sqrt[12]{27}$ 及 $\sqrt[6]{5}=\sqrt[6]{\{\sqrt{5^2}\}}=\sqrt[12]{25}$.

故 $\sqrt[12]{27}$ 及 $\sqrt[12]{25}$ 爲所求之根數.

〔例2〕 問 $\sqrt[3]{14}$ 與 $\sqrt{6}$ 孰大.

先化此二根數爲與此等值.且爲同次之根數.

卽 $\sqrt[3]{14}=\sqrt[6]{14^2}=\sqrt[6]{196}$ 及 $\sqrt{6}=\sqrt[6]{6^3}=\sqrt[6]{216}$.

故 $\sqrt{6}$ 較 $\sqrt[3]{14}$ 大.

188. 根數之乘除 依次之公式.可直記同次兩根數之積.

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}.$$

若根數之次數不同,則先化為同次根數,然後單簡其積.

〔例 1〕 以 $\sqrt{20}$ 乘 $\sqrt{5}$.

$$\sqrt{5}\times\sqrt{20}=\sqrt{(5\times20)}=\sqrt{100}=10.$$

〔例 2〕 以 $\sqrt[3]{3}$ 乘 $\sqrt{2}$.

$$\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{2^3}\times\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{(2^3\times3^2)}=\sqrt[6]{72}.$$

〔例 3〕 以 $\sqrt{6}$ 除 $\sqrt[3]{2}$.

$$\sqrt[3]{2}\div\sqrt{6}=\sqrt[6]{2^2}\div\sqrt[6]{6^3}=\sqrt[6]{(2^2\div6^3)}=\sqrt[6]{\tfrac{1}{54}}.$$

〔例 4〕 以 $2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ 乘 $4\sqrt{3}+4\sqrt{2}$.

此演算如次.

$$\begin{array}{l}4\sqrt{3}+4\sqrt{2}\\ 2\sqrt{3}-2\sqrt{2}\\ \hline 8\times3+8\sqrt{6}\\ \quad\ \ -8\sqrt{6}-8\times2\\ \hline 24\qquad\quad -16\ =8.\end{array}$$

問 題 LVIII.

化以下各式為簡式〔1 至 27〕.

1. $\sqrt{27}+\sqrt{48}$.　　**2.** $\sqrt{50}+\sqrt{98}$.

3. $\sqrt{45}+2\sqrt{125}$.　　**4.** $2\sqrt{180}-\sqrt{405}$.

5. $2\sqrt{28}-\sqrt{63}$.　　**6.** $5\sqrt{208}-3\sqrt{325}$.

7. $3\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{625}$.　　**8.** $3\sqrt[3]{72}-2\sqrt[3]{243}$.

9. $4\sqrt[3]{448}-15\sqrt[3]{7}$.　　**10.** $\sqrt{512}-\sqrt{50}-\sqrt{98}$.

11. $3\sqrt{12}-\sqrt{27}+2\sqrt{75}$.　　**12.** $\sqrt{147}-2\sqrt{27}-\sqrt{3}$.

13. $5\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{8}+\dfrac{1}{\sqrt{18}}$.　　**14.** $\sqrt{15}\times\sqrt{60}$.

15. $\sqrt{12}\times\sqrt{24}$.　16. $2\sqrt{\frac{2}{3}}\times 3\sqrt{\frac{3}{2}}$.

17. $\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{36}$.　18. $\sqrt{12}\times\sqrt{27}\times\sqrt{75}$.

19. $\sqrt[3]{16}\times\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{9}$.　20. $\sqrt[3]{12}\times\sqrt[3]{75}\times\sqrt[3]{30}$.

21. $\sqrt[4]{6}\times\sqrt[4]{12}\times\sqrt[4]{18}$.　22. $\sqrt{10}\times\sqrt[3]{200}$.

23. $\sqrt[3]{4}\times\sqrt{8}$.　24. $\sqrt{18}\div\sqrt{50}$.

25. $\sqrt{63}\div\sqrt{112}$.　26. $\sqrt{20}\times\sqrt{96}\div\sqrt{30}$.

27. $\sqrt[3]{147}\div\sqrt[3]{35}\times\sqrt[3]{735}$.　28. $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{(5\frac{1}{3})}$, 孰大.

29. 將 $\sqrt{50}$, $\sqrt[3]{344}$, $\sqrt[4]{2402}$, 依大小之次序排列.

30. 以 $\sqrt{6}+\sqrt{3}$ 乘 $\sqrt{6}-\sqrt{3}$.

31. 以 $3\sqrt{5}-4\sqrt{3}$ 乘 $2\sqrt{5}+3\sqrt{3}$.

32. 以 $2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\sqrt{6}$ 乘 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

33. 以 $1+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}$ 乘 $1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}$.

34. 求 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 之平方.

35. 問 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$, 之連乘積如何.

189. 化無理分母　分數之分母有根數,可去之化爲有理分母.今舉數例明之.如次.

$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{3}{5}\sqrt{5},$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{2}\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\frac{3}{7}\sqrt{14},$$

$$\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=\frac{(2+\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\frac{2\sqrt{5}+5+2+\sqrt{5}}{5-1}$$

$$=\frac{1}{4}(7+3\sqrt{5}),$$

$$\frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}=\frac{(a-\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}=\frac{a^2-2a\sqrt{b}+b}{a^2-b}.$$

$a\pm\sqrt{b}$ 式.以 $a\mp\sqrt{b}$ 乘之.則成有理式.又 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$.以 $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$ 乘之.則成有理式.學者最宜注意.

使分數之分毋爲有理.則求其數値甚便.

190. 定理 下所示者.皆緊要之命題.

若 $a+\sqrt{b}=\alpha+\sqrt{\beta}$ 而 a 與 α 爲有理數.$\sqrt{b}$ 與 $\sqrt{\beta}$ 爲無理數.則 $a=\alpha,\ b=\beta$.

何則 $$a-\alpha+\sqrt{b}=\sqrt{\beta},$$

作兩邊之平方且移項.則

$$2(a-\alpha)\sqrt{b}=\beta-b-(a-\alpha)^2.$$

由是.若 $\sqrt{b}$ 之係數非零.則無理式與有理式相等.於理不合.

故上之方程式.其 $\sqrt{b}$ 之係數必爲零.故 $a=\alpha$ 而 $a=\alpha$,則由所設之關係.得 $\sqrt{b}=\sqrt{\beta}$,即 $b=\beta$.

由是.有理數與二次根數之和(或差).等於他有理數與二次根數之和(或差).則兩有理數.兩無理數各互相等(即兩有理數相等.又兩無理數相等.)

〔注意〕$a+\sqrt{b}=\alpha+\sqrt{\beta}$.唯 $\sqrt{b}$ 與 $\sqrt{\beta}$,實際爲無理數.始能決定 $a=\alpha$ 及 $b=\beta$.如由 $3+\sqrt{4}=2+\sqrt{9}$ 之關係.必不能決定 $3=2$,及 $4=9$.

191. 無理數之平方根 二項式由有理數與二次根數而成.則其平方根.可記爲較前稍簡之形.其演算如次.

設 $\sqrt{b}$ 爲根數.求 $\sqrt{(a+\sqrt{b})}$,

$$\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

作兩邊之平方則

$$a+\sqrt{b}=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}.$$

而 $\surd b$ 爲根數,故兩邊之有理部及無理部各相等〔190 款〕.

由是
$$\left.\begin{array}{l}a=\alpha+\beta\\ b=4\alpha\beta\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

是故〔150 款〕,α 與 β 爲方程式 $x^2-ax+\frac{b}{4}=0$ 之兩根.

而是等之二根爲
$$\left\{\frac{a+\surd(a^2-b)}{2}\right\} \text{ 及 } \left\{\frac{a-\surd(a^2-b)}{2}\right\}$$

故
$$\surd(a\times\surd b)=\sqrt{\left\{\frac{a+\surd(a^2-b)}{2}\right\}}+\sqrt{\left\{\frac{a-\surd(a^2-b)}{2}\right\}}\cdots\cdots\cdots(3)$$

若 $\surd(a^2+b)$ 非有理,則(3)式之右邊比左邊繁,故 a^2-b 非完全平方,則上方之演算失其效力,而能合於此關係者蓋鮮,故此法之用,亦甚隘狹.

如求 $a+\surd b$ 之平方根,由(2)式,知二數之和爲 a. 其積 $\frac{b}{4}$. 如法求之,固可得其平方根,然有理之二數合於此關係,則此二數,概可由視察求得.

〔例 1〕 求 $\surd(15+2\surd 56)$,
$$\surd(15+2\surd 56)=\surd\alpha+\surd\beta.$$

作兩邊之平方,則
$$15+2\surd 56=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}.$$

令有理之項及無理之項各相等,則
$$\alpha+\beta=15,\ \alpha\beta=56.$$

易知適合於此關係之二數爲7及8.

故　$$\sqrt{(15+2\sqrt{56})}=\sqrt{7}+\sqrt{8}.$$

〔例 2〕 求 $\sqrt{(6-\sqrt{35})}$.

$$\sqrt{(6-\sqrt{35})}=\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}.$$

兩邊自乘,則 $6-\sqrt{35}=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}$.

故令有理之項與無理之項各自相等,則

$$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=\frac{35}{4}.$$

由視察或解此兩方程式,得

$$\alpha=\tfrac{7}{2},\ \beta=\tfrac{5}{2}.$$

故　$$\sqrt{(6-\sqrt{35})}=\tfrac{7}{2}\sqrt{}-\sqrt{\tfrac{5}{2}}.$$

問　題　LIX.

化以下各式分母為有理式〔1 至 14〕。

1. $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$.　**2.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

3. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$.　**4.** $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$.

5. $\dfrac{2}{1+\sqrt{2}}$.　**6.** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.

7. $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.　**8.** $\dfrac{15+14\sqrt{3}}{15-2\sqrt{3}}$.

9. $\dfrac{\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.　**10.** $\dfrac{\sqrt{6}-3\sqrt{12}}{2\sqrt{6}+\sqrt{12}}$.

11. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.　**12.** $\dfrac{3}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

13. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}+1}$.　**14.** $\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-1}+\dfrac{5}{\sqrt[3]{9}+1}$.

化以下各式爲簡式〔15至20〕.

15. $\dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^2}+\dfrac{1}{(2+\sqrt{3})^2}$.

16. $\dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^3}+\dfrac{1}{(2+\sqrt{3})^3}$.

17. $\dfrac{(3+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(5+\sqrt{2})}$.　**18.** $\dfrac{2\sqrt{15}-3\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{\sqrt{15}+\sqrt{2}}$.

19. $\dfrac{(7-2\sqrt{5})(5+\sqrt{7})(31+13\sqrt{5})}{(6-2\sqrt{7})(3+\sqrt{5})(11+4\sqrt{7})}$.

20. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2$.

21. 證 $\dfrac{1-\sqrt{3}+\sqrt{6}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

22. 化 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{-1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$$+\frac{1}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$ 爲簡式.

23. 化 $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ 爲簡式.

24. 證 $\left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}-\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=7\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{3}\right)^3$.

25. 化 $\dfrac{2\sqrt{(a+b)}+3\sqrt{(a-b)}}{2\sqrt{(a+b)}-\sqrt{(a-b)}}$ 爲簡式.

26. 求 $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ 之值至小數三位止.

27. 求 $\dfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ 之值至小數三位.

求以下各式之平方根〔28至35〕.

28. $6+\sqrt{20}$.　**29.** $16+6\sqrt{7}$.

30. $12+6\sqrt{3}$.　**31.** $28-5\sqrt{12}$.

32. $101-28\sqrt{13}$.　**33.** $117+36\sqrt{10}$.

34. $280+56\sqrt{11}$.　**35.** $4\frac{1}{3}+1\sqrt{2}$.

36. 化 $3\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{(7+2\sqrt{10})}$ 爲簡式.

37. 化 $6-4\sqrt{3}+\sqrt{(16-8\sqrt{3})}$ 爲簡式.

求以下各式之平方根〔38至41〕.

38. $11+2(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{7})$.

39. $2x+2\sqrt{(x^2-1)}$.　**40.** $2a+2\sqrt{(a^2-x^2)}$.

41. $3x-1+2\sqrt{(2x^2+x-6)}$.

化以下各式爲簡式〔42至46〕.

42. $\dfrac{1}{\sqrt{(16+6\sqrt{7})}}$.　**43.** $\dfrac{1}{\sqrt{(15+2\sqrt{56})}}$.

44. $\sqrt{(7+2\sqrt{10})}+\sqrt{(7-2\sqrt{10})}$.

45. $\dfrac{\sqrt{(3+2\sqrt{2})}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{(3-2\sqrt{2})}}$.

46. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{(2+\sqrt{3})}}-\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{(2-\sqrt{3})}}$.

47. 證 $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{45}}{\sqrt{2}+\sqrt{(7-2\sqrt{10})}}=3.632\cdots\cdots$

48. 設 $x=2+\sqrt{5}$ 求 x^2-4x+5 之數值.

49. 設 $x^2=x+1$ 證 $x^3=2x+1$ 及 $x^5=5x+3$.

50. 設 $x^2=3x+5$ 證 $x^3=14x+15$ 及 $x^4=57x+70$.

第二十一編

比,比例（變數法）

192. 定義 二量大小之關係,以一量所含他量之倍數測之,名爲二量之比.

異種之名數,不能相比,如里與斤,錢與時,其大小不能相比較,是也.

欲顯 a 與 b 之比,則以 $a:b$ 記之,而 a 稱爲比之第一項,b 稱爲比之第二項.

又比之第一項及第二項,或稱爲前率及後率.比之第一項大於第二項,則其比大於一.第一項小於第二項,則其比小於一.第一項等於第二項,則其比等於一.

有時大於一之比,謂之伸比.小於一之比,謂之縮比.又等於一之比,有時謂之等比.

193. 比之值 量之大小,恆以數顯之,而欲求某數含他數之幾倍,則以他數除某數卽得.

故 $$a:b \text{ 等於 } \frac{a}{b}.$$

由是比可用分數顯之.

194. 比之性質 以相同之數乘分數之分子與分母,其值不變〔126款〕.

由是,以相同之數乘比之兩項,其值亦不變.

如 $2:3$, $6:9$, 及 $2m:3m$ 皆互相等.又 $4:5$, $7:9$, $11:15$, 各等於 $36:45$, $35:45$, $33:45$.

由是4:5,7:9,11:15,其比之大遞降.

195. 比之性質　加相同之數於比之兩項.其值恆變.

如4:5之兩項各加1,10,100,則得

$$5:6,\ 14:15,\ 104:105.$$

此等新比,與所設之比異且各比互相異.

何則.因

$$\frac{4}{5}=1-\frac{1}{5},\ \frac{5}{6}=1-\frac{1}{6},\ \frac{14}{15}=1-\frac{1}{15},\ \frac{104}{105}=1-\frac{1}{105}.$$

故加相同之數於比之兩項.其所加之數愈大.則所得之新比愈近於1.是卽以下一般命題之特例也.

196. 定理　任意之比.其兩項各加相同之數.則數值較近於一.

如加x於$a:b$之兩項.則得$a+x:b+x$.

今求證$\frac{a+x}{b+x}$較$\frac{a}{b}$之數值近於1.

因　$$\frac{a}{b}-1=\frac{a-b}{b},$$

又　$$\frac{a+x}{b+x}-1=\frac{a-b}{b+x}.$$

而$\frac{a-b}{b+x}$之絕對值.恆較$\frac{a-b}{b}$之絕對值小.何則.因此兩分數之分子相同.而第一之分母.大於第二之分母.故也.以上卽本命題之證.

又a大於b.則$\frac{a}{b}$,$\frac{a+x}{b+x}$俱大於1.而$\frac{a+x}{b+x}$較$\frac{a}{b}$近於1.故$\frac{a+x}{b+x}$較$\frac{a}{b}$小.

由是.大於一之比之兩項.各加相同之數.則其值減小.

若 a 小於 b.則 $\frac{a}{b}$, $\frac{a+x}{b+x}$ 俱小於1.然 $\frac{a+x}{b+x}$ 較 $\frac{a}{b}$ 近於1.故 $\frac{a+x}{b+x}$ 較 $\frac{a}{b}$ 大.

由是.小於一之比之兩項.各加相同之數.則其值增大.

又若 x 甚大.則分數 $\frac{a-b}{b+x}$ 甚小.故 $\frac{a+x}{b+x}$ 與1之差 $\frac{a-b}{b+x}$ 若 x 變至極大.則其值可變至極小.卽 x 極大.則 $\frac{a+x}{b+x}$ 之極限值為1.

197. 複比　有時須用次之定義.

有諸比.其諸前項之積與諸後項之積之比.謂之諸比之複比.

如 $ac:bd$ 為 $a:b$ 及 $c:d$ 之複比.

又 $a^2:b^2$, 謂之 $a:b$ 之二乘比.或謂 $a:b$ 之平方比.

$a^3:b^3$, 謂之 $a:b$ 之三乘比.或謂 $a:b$ 之立方比.

$\sqrt{a}:\sqrt{b}$ 謂之 $a:b$ 之平方根比.

198. 不可通約數　二量之比.恆有不能以二整數之比顯之者.如正方形之對角線與其一邊之比是也.何則.此比之值為 $\sqrt{2}$.而 $\sqrt{2}$ 固不能求相等之分數.故也.

二量之比.不能用二整數之比顯之者.謂之不可通約數.

兩不可通約數之比.雖不能求其精密之值.然亦可

依所欲求得之程度.求其近似之值.故就可通約數所證明之諸定理.就不可通約數.亦能證明其合理.

問題 LX.

1. 將 5:6, 7:8, 41:48, 31:36 諸比.依大之遞降列之.

2. $3+x:4+x$ 等於 5:6, 問 x 之數值幾何.

3. $15+x:17+x$ 等於 $\frac{1}{5}$, 問 x 之數值幾何.

4. 問 3:4 之兩項,各加何數.其比始等於 25:32.

5. 有二數.其比為 5:6, 其和為 121, 問二數各幾何.

6. 有二數.其比為 3:8, 其平方之和為 3577, 問二數各幾何.

7. 設 $\dfrac{4x+5y}{3x-y}=2$, 求 x 與 y 之比.

8. 設 $4x^2+y^2=4xy$, 求 $x:y$.

9. 設 $x^2+6y^2=5xy$, 求 $x:y$.

10. 某比之兩項各加 2, 則為 2:3, 又其兩項各減 1, 則為 1:2. 問某比幾何.

11. 有二數.其和,與其差,與其平方之和.為 7:1:75 問二數各幾何.

12. 問 9:23 之兩項.各加如何之最小整數.其比始為 7:11.

13. 書 2:3 及 15:16 之複比.又書 5:6 及 18:25 之複比.

14. 試書 $2x:3y$ 之平方比.

15. 設 $x+1:x+4$ 為 3:5 之平方比.求 x.

16. 有二人.其年齡之比為 3:4. 而在三十年前.其比為 1:3. 問此二人現在之年齡幾何.

17. 比之一項,各減他一項之反數,則其兩餘數之比,與原比等,求證.

18. 若 a 及 x 為正,且 $a>x$. 則 $a^2-x^2:a^2+x^2$ 較 $a-x:a+x$ 大,求證.

比例

199. **定義** 有四量,其第一與第二之比,等於第三與第四之比,名為比例量.

如 $a:b=c:d$, 即 a, b, c, d 為比例量.

比例量之記法為 $a:b::c:d$. 宜讀為「a 比 b 若 c 比 d.」

成比例之四量中,其第一及第四,謂之外項,第二及第三謂之內項.

200. **定理** 四量 a, b, c, d 成比例,則

由定義 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

兩邊各以 bd 乘之,則

$$ad=bc.$$

即兩外項之積等於兩內項之積.

依此理反推之,若 $ad=bc$, 則 a, b, c, d 為比例量.

何則,若 $$ad=bc,$$

則 $$\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}, \quad \therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

即 $$a:b=c:d,$$

故 $a:b=c:d$, 則 $ad=bc$.

又反之 $ad=bc$, 則 $a:b=c:d$.

201. 推論　若$ad=bc$,則有四個比例式.

$$a:b=c:d,$$
$$a:c=b:d,$$
$$b:a=d:c,$$
$$b:d=a:c.$$

皆能合理.由前款易知.

由是.上之四個比例式中.若任取其一式能合理.則四個比例式皆能合理.

202. 定理　若$a:b=c:d$.

則　$a+b:a-b=c+d:c-d$,

何則.因　$(a+b)(c-d)=(a-b)(c+d)$,

卽　$ac+bc-ad-bd=ac-bc+ad-bd$,

卽　$bc=ad$,

所以　$a+b:a-b=c+d:c-d$.

而$a:b=c:d$,原適於$bc=ad$之關係.故可證本定理.

又本定理亦可用137款例1之理證之.

203. 連比例　有諸量.其第一與第二之比.等於第二與第三之比.又等於第三與第四之比.以次如是.則此諸量.謂之成連比例之量.

如　$a:b=b:c=c:d$ 等等.

卽　$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\cdots\cdots$$

則a,b,c,d成連比例.

若$a:b=b:c$,則b謂之a與c之比例中項.c謂之a與b之比例末項.

204. 連比例之性質　若a,b,c爲連比例.則

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c},$$

$$\therefore\quad b^2=ac,\quad 即\quad b=\sqrt{ac}.$$

即有所設之二量,其比例中項,恆等於其積之平方根.

又　$$\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\times\frac{a}{b},$$

即　$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{a}{c},$$

故　$$a:c=a^2:b^2.$$

即三量成連比例,則第一與第三之比,等於第一與第二之平方比.

205. 雜例　依 137 款,二量之比,用一文字題之,尤爲便利.

〔例1〕 若 $a:b=c:d$,

則　$$a^2+ab:c^2+cd=b^2-2ab:d^2-2cd,$$

令　$$\frac{a}{b}=x\ 又\ \frac{c}{d}=x,$$

由是得　$$a=bx\ 及\ c=dx,$$

$$\therefore\quad \frac{a^2+ab}{c^2+cd}=\frac{b^2x^2+b^2x}{d^2x^2+d^2x}=\frac{b^2(x^2+x)}{d^2(x^2+x)}=\frac{b^2}{d^2},$$

又　$$\frac{b^2-2ab}{d^2-2cd}=\frac{b^2-2b^2x}{d^2-2d^2x}=\frac{b^2(1-2x)}{d^2(1-2x)}=\frac{b^2}{d^2},$$

由是　$$\frac{a^2+ab}{c^2+cd}=\frac{b^2-2ab}{d^2-2cd},$$

即　$$a^2+ab:c^2+cd=b^2-2ab:d^2-2cd.$$

〔例2〕 若 $a:b=c:d=e:f$,

證 $a^3+c^3+e^3:b^3+d^3+f^3=ace:bdf$,

設 $\frac{a}{b}=x$ 則得 $\frac{c}{d}=x$, 及 $\frac{e}{f}=x$,

故 $a=bx,\ c=dx$ 及 $e=fx$,

$$\therefore\quad \frac{a^3+c^3+e^3}{b^3+d^3+f^3}=\frac{b^3x^3+d^3x^3+f^3x^3}{b^3+d^3+f^3}=x^3.$$

又 $$\frac{ace}{bdf}=\frac{bx.dx.fx}{bdf}=x^3,$$

故 $$\frac{a^3+c^3+e^3}{b^3+d^3+f^3}=\frac{ace}{bdf},$$

則 $a^3+c^3+e^3:b^3+d^3+f^3=ace:bdf$.

〔例 3〕 若 $x:2b+2c-a=y:2c+2a-b=z:2a+2b-c$,
則 $a:2y+2z-x=b:2z+2x-y=c:2x+2y-z$. 求證.

令 $$\frac{x}{2b+2c-a}=\frac{y}{2c+2a-b}=\frac{z}{2a+2b-c}.$$

令此等之各分數爲λ 則

$$x=\lambda(2b+2c-a),\ y=\lambda(2c+2a-b),$$
$$z=\lambda(2a+2b-c),$$

故 $2y+2z-x=9a\lambda$.

同樣 $2z+2x-y=9b\lambda$ 及 $2x+2y-z=9c\lambda$,

由是 $$\frac{a}{2y+2z-x}=\frac{b}{2z+2x-y}=\frac{c}{2x+2y-z}.$$

206. 幾何學之定義 幾何學之比例定義.如次.
有四量.取第一與第三.以任意之等倍數倍之.又取第二與第四.以任意之等倍數倍之.若第一之倍數.較第二之倍數.或大,或等,或小.從而第三之倍數.恆較第

四之倍數或大,或等,或小,則四量可爲比例.

若四量a,b,c,d適合於比例之代數學的定義,則

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

故無論m及n之數值如何,恆得

$$\frac{ma}{nb}=\frac{mc}{nd},$$

由是 $$ma \gtreqless nb \text{ 從而 } mc \gtreqless nd.$$

故a,b,c,d亦適合於比例之幾何學的定義.

其次a,b,c,d適合於比例之幾何學的定義.

若a與b爲可通約之數時,故$a:b=m:n$(但m與n爲整數,)則

$$\frac{a}{b}=\frac{m}{n},$$

$$\therefore \quad na=mb.$$

然據定義 $$na \gtreqless mb \text{ 從而 } nc \gtreqless md,$$

由是 $$na=mb,$$

故 $$nc=md,$$

$$\therefore \quad \frac{c}{d}=\frac{m}{n}=\frac{a}{b}.$$

故a,b,c,d亦適合於比例之代數學的定義.

若a與b爲不可通約之數,則不能求得有二整數m與n之$a:b=m:n$(卽a與b不能通約,則m與n不能成

整數.如 m 與 n 必為整數,則不能得 $a:b=m:n$).

然若取 a 之任意倍數 na. 則 na 當在 b 之以次連續之倍數 mb 與 $(m+1)b$ 之間,

$$na>mb \text{ 及 } na<(m+1)b,$$

由是依定義得 $nc:md$. 及 $nc<(m+1)d$,

$$\therefore\quad \frac{c}{d}>\frac{m}{n} \text{ 及 } \frac{c}{d}<\frac{m+1}{n}.$$

由是 $\frac{a}{b}$ 與 $\frac{c}{d}$,俱在 $\frac{m}{n}$ 與 $\frac{m+1}{n}$ 之間,

故 $\frac{a}{b}$ 與 $\frac{c}{d}$ 之差小於 $\frac{1}{n}$,而 n 可為任何大.故 $\frac{a}{b}$ 不得不等於 $\frac{c}{d}$.

問題 LXI.

1. 若 $a:b::c:d$ 求證以下各式.

(1) $ac:bd::c^2:d^2$,　(2) $ab:cd::a^2:c^2$,

(3) $a^2:c^2::a^2-b^2:c^2-d^2$.

2. 若 $a:b=c:d$ 求證次式.

$2a+3c:2a+2c=2b+3d:3b+2d$.

3. 若 $a:b::a+c:b+d$ 則 $c:d::c+a:d+b$. 求證.

4. 若 $a:b=c:d$ 則.

$la+mb:pa+qb=lc+md:pc+qd$. 求證.

5. 若 $2a-5b:3c-5d=5a+3b:5c+3d$ 則

$a:b=c:d$ 求證.

6. 求 a^3b 與 ab^3 之比例中項.

7. 求 $(a+b)^2$ 與 $(a-b)^2$ 之比例中項.

8. 求 a 與 a^2 之比例末項又求 $(a-b)^2$ 與 a^2-b^2 之比例末項.

9. 若 $a:b::c:d$ 則 $ab+cd$ 爲 a^2+c^2 與 a^2+d^2 之比例中項求證.

10. 若 $a:b::c:d$ 求證次式.

(1) $a:a+c::a+b:a+b+c+d$,

(2) $a^2+ab+b^2:a^2-ab+b^2::c^2+cd+d^2:c^2-cd+d^2$,

(3) $a+b:c+d::\sqrt{a^2+b^2}:\sqrt{c^2+d^2}$,

(4) $\sqrt{a^2+b^2}:\sqrt{c^2+d^2}::\sqrt[3]{a^3+b^3}:\sqrt[3]{c^3+d^3}$,

(5) $a^2c+ac^2:b^2d+bd^2::(a+c)^3:(b+d)^3$,

(6) $\sqrt[n]{a^n+b^n}.\sqrt[n]{c^n+d^n}::\sqrt[r]{a^r-b^r}:\sqrt[r]{c^r-d^r}$.

11. 若 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ 求證 $\dfrac{x+y}{a+b}=\dfrac{y+z}{b+c}=\dfrac{z+x}{b+a}$.

及 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$.

12. 若 $\dfrac{bz-cy}{a}=\dfrac{cx-az}{b}=\dfrac{ay-bx}{c}$ 求證 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$.

13. 若 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+\left(\dfrac{c}{d}\right)^2=2\dfrac{ac}{bd}$ 求證 $a:b=c:d$.

14. 若 $lx(ny-mz)$, $my(lz-nx)$, $nz(mx-ly)$ 相等而非零求證 $mn+nl+lm=0$ 及 $yz+zx+xy=0$.

15. 若 $\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}$ 求證

$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$.

16. 若 $a:b=c:d=e:f$ 求證

$a^3+a^2c+ace:b^3+b^2d+bdf::ace+ac^2+c^3:bdf+bd^2+d^3$.

17. 若 $a:x::b:y::c:z$ 求證

$a^4+a^2b^2+b^4:x^4+x^2y^2+y^4::b^4+b^2c^2+c^4:y^4+y^2z^2+z^4.$

18. 若 $a:b=pa-qc:pb-qd$ 求證
$c:d=pa+qc:pb+qd.$

19. 若 $a:b=c:d$ 求證 $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}:\frac{c^3}{d}+\frac{d^3}{c}=ab:cd.$

20. 若 $4a-b:4a+b::4:2$ 求 $7a+3b:7a-3b$ 之數值.

21. 若 $xy+3:xz+1=y^2+3:yz+1$ 求證 $x=y$ 又 $y=3z$.

22. 若 $a+b-c:c+d+a=a-c:2d$ 求證
$b:a-c=a+c-d:2d.$

23. 若 $x-z:y-z=x^2:y^2$ 求證
$x+z:y+z=x^2+2xy:y^2+2xy.$

24. 若 $a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0$ 求證
$y-z:b-c=z-x:c-a=x-y:a-b.$

25. $a:b::c:d$ 求證 $a^2+b^2+c^2+d^2:(a+b)^2+(c+d)^2::$
$(a+c)^2+(b+d)^2:(a+b+c+d)^2.$

變數法

207. 變數　如賣某物品,每斤價若干,則其價與其重量之關係,必重量為二倍,其價亦為二倍,重量為半分,其價亦為半分,逐次如此,其任意兩價之比,必恆等於相當兩重量之比.

二量有此關係,則二量中之一量,謂之因他一量變.

定義　有二量,其一量之任意兩數值之比,等於他一量之相當數值之比,則謂之第一量,因他一量變.

如設一量中所度得之兩數為 a_1, a_2 之比,他量中所度得相當之兩數為 b_1, b_2 之比,則

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\ 從而\ \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}.$$

由是,二量之相當數值,恆為常比.

208. 記號 〔因變〕一語,可用記號 $\propto$ 代之.

如 $A \propto B$,宜讀為〔A 因 B 變〕.

若 $a \propto b$,則 $a:b$ 為常數,而此常數之比為 m.

則 $\frac{a}{b}=m \quad \therefore \quad a=mb.$

欲求常數 m.則於任何例,知 a 與 b 相當之一對數值可也.

如 $a \propto b$ 若知 $b=2$ 時, $a=10$. 則

$$a=mb \quad 卽 \quad 10=m\times 2 \quad \therefore \quad m=5.$$

由是 $a=5b.$

209. 反變數 有二量,其一量從他一量之反數而變,則謂之第一量,因第二量反變.

如 $a \propto \frac{1}{b}$ 卽 $a=m\frac{1}{b}$ 卽 $ab=m$ 則 a 因 b 反變.

一量從他二量之積而變,則謂之第一量,因後二量合變.

如 $a \propto bc$ 卽 $a=mbc$ 則 a 為與 bc 合變.

有第一量與「第二量,及第三量之反數之積」之比,若其比為常數,則謂之第一量,因第二量正變,因第三量反變.

如 $a \cdots b\times\frac{1}{c}$ 為常數,卽 $a=m\frac{b}{c}$ 但 m 為常數,如是,則 a 因 b 正變,因 c 反變.

依上所示之定義,變數法雖有種種不同,而其常數

m.苟知其任意之一對數值,恆能決定.

如 a 因 b 正變,因 c 反變.設 b 為 2, c 為 9, a 為 6 則其式如次.

$$a=m\frac{b}{c} \quad \therefore \quad 6=m\frac{2}{9},$$

如是 $$m=27 \quad \therefore \quad a=27\frac{b}{c}.$$

210. 定理 如 a 唯與 b 及 c 有關係.若 c 為常數,則 a 因 b 變.又 b 為常數,則 a 因 c 變.若 b 與 c 俱為變數,則 a 因 bc 變.

設 $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ 為相當之三種數值.

然 c 在第一種與第二種中相同.故

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

又 b' 在第二種與第三種相同.故

$$\frac{a'}{a''}=\frac{c}{c'} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

由是,從 (1) 式與 (2) 式,

$$\frac{a}{a'}\times\frac{a'}{a''}=\frac{bc}{b'c'},$$

即 $$\frac{a}{a''}=\frac{bc}{b'c'}.$$

此即證明本定理之式.

今舉其命題之例如次.

如買牛肉一方.若其重量〔W〕為常數,則牛肉之價〔C〕,因每斤之價〔P〕變.若每斤之價〔P〕為常數,則牛肉之價〔C〕,因重量〔W〕變.由是,依上之定理,若重量

〔W〕與每斤之價〔P〕俱爲變數.則牛肉之價〔C〕因重量〔W〕與每斤之價〔P〕,之積變.

卽若 W 爲常數.則　　$C\propto P$.

而 P 爲常數.則　　$C\propto W$.

若 P 與 W 俱爲變數.則 $C\propto PW$.

又有三角形.若其高〔H〕爲常數.則其面積〔A〕,因其底〔B〕變.若其底〔B〕爲常數.則其面積〔A〕,因其高〔H〕變.又若其底〔B〕與其高〔H〕俱爲變數.則其面積〔A〕因其底〔B〕與高〔H〕之積變.

卽 H 爲常數.則　　$A\propto B$.

B 爲常數.則　　$A\propto H$.

而 B 與 H 俱爲變數.則 $A\propto BH$.

又如氣體之壓力.若絕對溫度〔T〕爲常數.則氣體之壓力〔P〕.因密度〔D〕變.若密度〔D〕爲常數.則氣體之壓力〔P〕因絕對溫度〔T〕變.若密度〔D〕與絕對溫度〔T〕俱爲變數.則氣體之壓力〔P〕因密度〔D〕與絕對溫度〔T〕之積變.

卽　　$P\propto DT$.

〔例1〕若 $A\propto B$ 又 $A\propto C$,則 $B\propto C$.

何則.因 $A\propto B$ 故 $A=mB$ 但 m 爲常數.

而 $A\propto C$ 故 $A=nC$ 但 n 爲常數.

由是 $B=\frac{n}{m}C$ 但 $\frac{n}{m}$ 爲常數.故 $B\propto C$.

〔例2〕若 $C\propto WP$ 則 $W\propto\frac{C}{P}$.

何則.因 $C\propto WP$,故 $C=mWP$ 但 m 爲常數.

由是 $W=\frac{1}{m}\frac{C}{P}$ 但 $\frac{1}{m}$ 爲常數故 $W\propto\frac{C}{P}$.

〔例3〕 氣體之壓力,恆與密度及絕對溫度合變而密度爲 1. 溫度爲 300. 則壓力爲 15. 今密度爲 3. 溫度爲 320. 問其壓力幾何.

$$P\propto TD,$$

故 $$P=mTD.$$

但 m 爲常數

故按題意 $$15=m\times300\times1,$$

$$m=\frac{1}{20},$$

$\therefore$ $$P=\frac{1}{20}TD.$$

由是 $D=3$. $T=320$ 則

$$P=\frac{1}{20}\times320\times3=48.$$

問 題 LXII.

1. A 因 B 變.而 B=3, 則 A=5. 今 B=5. 問 A 爲幾何.

2. W 因 P 反變.而 P=15, 則 W=4, 今 P=12. 問 W 爲幾何.

3. 若 $x\propto y$, 又 $y\propto z$ 則 $xz\propto y^2$, 求證.

4. 若 $x^2\propto y$, 又 $z^3\propto y$, 則 $xz\propto y$, 求證.

5. 若 $x\propto\frac{1}{y}$, $y\propto\frac{1}{z}$, 則 $x\propto z$, 求證.

6. A 與 B, C 合變.而 B=2, C=6, 則 A=4, 今 B=2, C=9, 問 A 爲幾何.

7. A 因 B 正變,因 C 反變,而 $B=3$, $C=4$, 則 $A=2$, 今 $A=6$, $C=3$, 求 B 之數值.

8. 圓之面積因其半徑之平方變,而半徑 10 尺其圓之面積爲 314.159 平方尺,然則半徑 12 尺之圓面積幾何.

9. 球之體積,因其半徑立方變,而球之半徑 1 尺,則其體積爲 4,188 立方尺,問球之半徑 3 尺,其體積幾何.

10. 墜體由靜止墜落,因墜落之時間變,而在二秒末之速度爲 64 尺,問在五秒末之速度幾何.

11. 物體墜落之距離,因墜落時間之平方變,而某物體三秒間落 144 尺,然則二秒間墜落幾尺.

12. 已知圓之面積,因其半徑之平方變,求證半徑 5 尺之圓,等於半徑 3 尺與半徑 4 尺兩圓之和.

13. 氣體之體積,因絕對溫度正變,因壓力反變,而壓力爲 15,溫度爲 260, 則體積爲 1 立方尺,問壓力爲 20, 溫度爲 300. 則其體積幾何.

14. a^2-b^2 因 c^2 變,而 $a=5$, $b=3$, 則 $c=2$, 然則 a, b, c, 間之方程式如何,又求證 b 爲 $a-2c$ 與 $a+2c$ 之比例中項.

15. 直圓錐之體積,與其高及底半徑之平方合變,而高 7 尺,底之半徑 3 尺,則體積 66 立方尺,問高 9 尺,底半徑 14 尺,其體積幾何.

16. 球之體積,因其半徑之立方變,今有三個球彈其半徑爲 6, 8, 10, 寸,若熔之爲一球其半徑幾何.

17. 海中望遠,目力所及之距離,因眼高之平方根變,而眼高 9 尺,所望見之距離爲 27 里,今眼高 49 尺,問所望見之距離幾何.

雜題 V.

(A) **1.** 若 $\frac{2a}{3}=\frac{3b}{4}=\frac{c}{2}=1$ 求 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ 之數值.

2. 以 $3b^3+4a^3-2ab^2$ 除 $9a^2b^3-12a^4b+3b^5+2a^3b^2+4a^5-11ab^4$.

3. 求 $1-x-x^3+x^5$ 與 $1-x^4-x^6-x^7$ 之 H. C. F..

4. 化 $\frac{a^2-a^2b^{-2}-1+b^{-2}}{a+ab^{-1}+1+b^{-1}}$ 爲簡式.

5. 某人以 10.5 圓.買鴨 15 羽.鵝 12 羽.而問其價則 1.8 圓所買之鴨數.較 2 圓所買之鵝數多 2,然則鴨一羽之價幾何.

6. 方程式 $x^2-px+q=0$ 之兩根差.等於方程式 $x^2-3px+2p^2+q=0$ 之兩根差.求證.

7. 問 3:4 之兩項加如何之最小整數,則能使此比較 19:21 大.

8. 若 $a+b, b+c, c+a$ 爲連比例則

$b+c:c+a::c-a:a-b$ 求證.

(B) **1.** $x=\frac{4}{5}, y=\frac{3}{5}$, 求次式之數值.

$(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})\div(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{a-x^2})$.

2. 以 $(a-1)x-a^2-a-1$ 乘 $x^2+(a-1)x+a+1$.

3. 求以下三式之因數.

(1) $x^3-13x^2y+42xy^2$,

(2) $(a+2b+3c)^2-4(a+b-c)^2$,

(3) $x^2-4xy+4y^2-9$.

4. 化 $\dfrac{x}{x-2y}+\dfrac{3x}{x+2y}+\dfrac{4xy}{4y^2-x^2}$ 爲簡式.

5. 解以下各方程式.

(1) $\dfrac{10}{x}-\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{10}{x+1}$,

(2) $\left.\begin{array}{l}x+y+\sqrt{(x+y)}=12\\ x^2-y^2\qquad\qquad=21\end{array}\right\}$.

6. 設 $x+\dfrac{1}{y}=1, y+\dfrac{1}{z}=1$, 求證 $z+\dfrac{1}{x}=1$ 及 $xyz+1=0$.

7. 求 $9x^6-12x^4y^2+30x^3y^3+4x^2y^4-20xy^5+25y^6$ 之平方根.

8. 二數之和與其差與其平方之和,爲 3:1:15, 問此二數各幾何.

9. 若 $a:b::c:d$, 求證
$la+mb:lc+md::\sqrt{a^3+b^2d}:\sqrt{ac^2+d^3}$.

(C) 1. 由 $3\{b+2(a-c)-5(a-b)\}$ 減 $a-2(b-c)$.

2. 以 $a-b+\dfrac{b^2}{a}-\dfrac{a^2}{b}$ 乘 $a+b+\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}$.

3 以 $27(a-b)$ 乘 $\dfrac{a^2+b^2}{9(a^2-b^2)}$, 而以 $\dfrac{3a-4b}{a^2-b^2}$ 除 $\dfrac{9a^2-16b^2}{a+b}$.

4. 若 $a=y+z, b=z+x, c=x+y$, 求證
$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$.

5. 求 $a^{\frac{4}{3}}+4ay^{\frac{1}{5}}+10a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{5}}+12a^{\frac{1}{3}}y^{\frac{3}{5}}+9y^{\frac{4}{5}}$ 之平方根.

6. 若 $x=2+\sqrt{2}$, 求證 $(x-1)(x-2)=x$.

7. A，B 同時由兩地起程.相向而行.七點鐘相會.但 A 較 B 每點鐘速行二里.又 B 較前每點鐘速行一里.A 每點鐘行前速之半.當九點鐘相會.問兩地之距離幾何.

8. 若 $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$，求證

$$\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}.$$

(D)　**1.** 求證 $\left(\frac{a^3-b^3}{a-b}\right)^2-\left(\frac{a^3+b^3}{a+b}\right)^2=4ab(a^2+b^2)$.

2. 以 $x^2-(a+b)x+ab$ 除

$x^4-2bx^3-(a^2-b^2)x^2+2a^2bx-a^2b^2$.

3. 求 $x^2-7x+12$，$3x^2-6x-9$，$2x^3-6x^2-8x$ 之 L. C. M..

4. 化 $\dfrac{\dfrac{y}{x}-\dfrac{y}{y+z}}{\dfrac{1}{xz}+\dfrac{1}{zy+z^2}}\left\{1+\dfrac{y^2+z^2-x^2}{2yz}\right\}$ 爲簡式.

5. 解以下各方程式.

(1)　$\dfrac{5x+7}{2}-\dfrac{2x-7}{3}=3x+14$,

(2)　$\left.\begin{array}{l}y^2-xy=15\\x^2+xy=14\end{array}\right\}$.

6. 有馬車.行 2 里 336 步.前輪較後輪多回轉 64 回.而行 29 里 120 步.前後兩輪回轉數之和爲 7010. 問輪周各幾何.

7. 以 $2x^{\frac{1}{2}}-15y^{\frac{1}{2}}$ 除 $2x^{\frac{3}{2}}-15xy^{\frac{1}{2}}+17x^{\frac{1}{2}}y-15y^{\frac{3}{2}}$.

8. a:α, b:β, c:γ 皆相等.則此各比等於 $a+b+c$:

$\alpha+\beta+\gamma$ 求證.

(E) **1.** 化 $2\{x-2a-\frac{2}{3}(x-a)+a\}-\frac{1}{3}\{(x-a)-(a-b)+y-b\}$ 爲簡式.

2. 以 $ax+2(b-c)y$ 除

$$2a^2x^2-2(3b-4c)(b-c)y^2+abxy.$$

3. 求以下各式之因數.

(1) $4a^2b^4-16a^4b^2$,

(2) $x^2-26x-87$,

(3) $3x^2-xy-10y^2$.

4. 證 $\dfrac{1}{(y-z)^2}+\dfrac{1}{(z-x)^2}+\dfrac{1}{(x-y)^2}$

$$=\left(\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}+\frac{1}{x-y}\right)^2.$$

5. 某人買某物品若干個,共金額50.40圓,若以此金額,能較前多買六個,則每個廉1角5分,問買物品幾何.

6. 以 $\sqrt{(x-a)}-\sqrt{a}+\sqrt{x}$ 乘 $\sqrt{(x-a)}+\sqrt{a}-\sqrt{x}$.

7. 證 $x^2-\dfrac{1}{y^2}$ 與 $y^2-\dfrac{1}{x^2}$ 之比例中項爲 $xy-\dfrac{1}{xy}$.

8. 若 $a:b::c:d$, 證 $a^2+b^2:c^2+d^2::(a+b)^2:(c+d)^2$.

(F) **1.** 以 $a+b-c+d$ 乘 $a-b+c-d$.

2. 以 $a+b+c$ 除 $a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$.

3. 求 $x^3-19x+30$ 與 $5x^3-19x^2+36$ 之 H. C. F. 又問此二式以何數代 x 則俱爲零.

4. 證 $\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2-\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2=\dfrac{8ab(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)^2}$.

5. 解次之各方程式.

(1)　$\dfrac{6x-7}{9x+6}-\dfrac{5(x-1)}{12x+8}=\dfrac{1}{2}$，

(2)　$\left.\begin{array}{r}4x+6y=3\\4x^2+9xy+9y^2=11\end{array}\right\}$.

6. 化 $\dfrac{2\sqrt{(\frac{1}{3})}+3\sqrt{(\frac{1}{2})}}{\frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{3})}-\frac{1}{3}\sqrt{(\frac{1}{2})}}$ 及

$$\left\{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}\times\left(\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{y}\right)\div x^{-\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{4}}\right\}$$ 爲簡式.

7. 求 $x^{12}-6x^{10}+13x^8-14x^6+10x^4-4x^2+1$ 之平方根.

8. 若 $a:b::c:d$, 求證 $a^3c^2:b^3d^2::a^5+c^5:b^5+d^5$.

第二十二編

等差級數

211. 定義 諸數量之級數其任意一項與其前項之差恆相等.謂之等差級數.

如 $b-a=c-b=d-c$ 則 a, b, c, d……等爲等差級數(恆略記爲A.P.).

等差級數其各項與其前項之差.謂之公差.次所示者.爲等差級數之例.

1,	3,	5,	7	等
2,	6,	10,	14	等
9,	8,	7,	6	等
3,	-1,	-5,	-9	等

此等差級數之公差.在第一列爲 2,第二列爲 4,第三列爲 -1,第四列爲 -4.

212. 等差之項 令等差級數之初項爲 a,公差爲 d,則

第二項爲 $a+d$,
第三項爲 $a+2d$,
第四項爲 $a+3d$.

逐次如此.d 之係數.較項之係數恆少1.

由是.第 n 項爲 $a+(n-1)d$.

故知A.P.之初項與公差.則能求其任意之項.

如A.P.之初項爲 5,公差爲 3,則

第 9 項爲　　$5+(9-1)3=29$.

第 27 項爲　　$5+(27-1)3=83$.

213. 各項及公差　如 A. P. 任意之二項,則能求其初項與公差,故能決定此級數.

如 A. P. 之第 10 項爲 25,第 15 項爲 5,求決定此級數.

設初項爲 a,公差爲 d,則第 10 項爲 $a+9d$ 第 15 項爲 $a+14d$.

由是得　　$a+9d=25$,

及　　$a+14d=5$,

由減法得　　$5d=-20$,　$\therefore\ d=-4$.

而　　$a=25-9d=25-9(-4)=61$,

故此級數爲　　61, 57, 53,……等

〔例〕 A. P. 之第 12 項爲 15,第 19 項爲 36,求第 30 項.

設初項爲 a,公差爲 d.

然第 12 項爲 $a+11d$ 第 19 項爲 $a+18d$.

由是按題意　　$a+11d=15$,

及　　$a+18d=36$,

由減法　　$7d=21$,　$\therefore\ d=3$.

然　　$a=15-11d=15-33=-18$.

由是第 30 項 $a+29d=-18+29\times3=69$.

214. 等差中項　三量爲等差級數,則其中央之量謂之他二量之等差中項.

如 a, b, c, 爲 A. P. 則 b 爲 a 與 c 之等差中項.

由等差級數之定義. $b-a=c-b$.

$\therefore$　　$b=\frac{1}{2}(a+c)$.

即任意二量之等差中項,爲二量和之半.

215. 諸等差中項 若干數量成等差級數則除首尾兩項外.其他之各項.皆爲首尾兩項之等差中項.

所設任意兩數量之間.可插入等差中項若干.

如 10 與 25 之間.欲插入四個等差中項.此例題.乃求 10 與 25 間.有四項之等差級數.故 10 爲 A. P. 之初項.25 爲其第六項.

設公差爲 d 則第 6 項爲 $10+5d$,

$$\therefore\ 10+5d=25,\quad \therefore\ d=3.$$

故此級數爲 10, 13, 16, 19, 22, 25, 而所求 10 與 25 間之四個等差中項.如次

$$13,\ 16,\ 19,\ 22.$$

由是.更究其通例(卽 a 與 b 間插入等差中項 n 個之法).

此例乃求 a 與 b 間有 n 項之等差級數(卽 A. P.),

故 a 爲 A. P. 之初項.b 爲其第 $(n+2)$ 項.

設 d 爲公差則第 $(n+2)$ 項爲 $a+(n+1)d$.

$$\therefore\qquad a+(n+1)d=b,$$

$$\therefore\qquad (n+1)d=b-a,$$

$$\therefore\qquad d=\frac{b-a}{n+1}.$$

故此級數.如次

$$a,\ a+\frac{b-a}{n+1},\ a+2\frac{b-a}{n+1},\ \cdots\cdots a+n\frac{b-a}{n+1},\ b.$$

而所求之等差中項.如次

$$a+\frac{b-a}{n+1},\ a+2\frac{b-a}{n+1},\ a+3\frac{b-a}{n+1},\ \cdots\cdots,\ a+n\frac{b-a}{n+1}.$$

即 $\frac{na+b}{n+1}, \frac{(n-1)a+2b}{n+1}, \frac{(n-2)a+3b}{n+1}, \ldots\ldots, \frac{a+nb}{n+1}$.

問 題 LXIII.

1. 求以下各等差級數之第30項.

(1) $3, 5, 7$ 等, (2) $1, 5, 9$ 等,

(3) $12, 9, 6$ 等, (4) $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{5}{9}$ 等,

(5) $a+b, a, a-b$ 等.

2. 求以下各級數之末項.

(1) $3, 6, 9$ 等.至 24 項止,

(2) $5, 9, 13$ 等.至 30 項止,

(3) $6, 5, 4$ 等.至 10 項止,

(4) $14, 46, 78$ 等.至 12 項止,

(5) $6, 8\frac{2}{3}, 11\frac{1}{3}$ 等.至 14 項止,

(6) $\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}$ 等.至 25 項止.

3. A.P. 之第10項爲 6 第 6 項爲10求其初項.

4. A.P. 之第12項爲15第20項爲25求其公差.

5. A.P. 之第 7 項爲 5 第12項爲30求其公差.

6. A.P. 之第 3 項爲40第13項爲25求其初項.

7. A.P. 之初項爲 7 第 3 項爲13問第10項幾何.

8. A.P. 之初項爲20第 6 項爲10問第12項幾何.

9. A.P. 之第 3 項爲10第14項爲54求其第20項.

10. A.P. 之第 7 項爲 5 第 5 項爲 7 求其第12項.

11. 問級數 $5, 8, 11$ 等之第幾項爲65.

12. 問級數 $\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}$ 等之第幾項爲18.

13. 問級數 $9, 13, 17$ 等之第幾項爲229.

14. 問級數 $16a-8b$, $15a-7b$, $14a-6b$ 等之第幾項爲 $8a$.

15. 書 (1)7 與 13, (2)9 與 -9, (3) $a+b$ 與 $a-b$ 之等差中項.

16. 求於 8 與 29 間插入六個等差中項.

17. 求於 50 與 80 間插入八個等差中項.

18. 求於 269 與 295 間插入七個等差中項.

19. 求於 67 與 43 間插入十五個等差中項.

20. 求於 84 與 $40\frac{2}{3}$ 間插入二十五個等差中項.

21. 求於 $5a-6b$ 與 $5b-6a$ 間插入十個等差中項.

22. 求於 $a-5b$ 與 $b-5a$ 間插入八個等差中項.

23. a, b, c, d, 爲 A. P. 求證 $a+d=b+c$.

24. A. P. 之初項與第四項之和爲 19 又第三項與第六項之和爲 31 問初項幾何.

25. A. P. 之第二項與第五項之和爲 32 又第三項與第八項之和爲 48 問初項幾何.

26. A. P. 之第三項與第四項之和爲 187 又第七項與第八項之和爲 147 問第二項幾何.

27. A. P. 之第二項與第二十項之和爲 2 又第九項與十五項之和爲 8 問第六項與第七項之和幾何.

28. A. P. 之各項,以相同之數加之,其各和仍爲 A. P. 求證.

29. A. P. 之各項,以相同之數乘之,其各積仍爲 A. P. 求證.

30. 於 A. P. 之各項,每間一項取去一項,則其餘之各項仍爲 A. P. 求證.

31. A. P. 之相連續兩項間,各插入其等差中項則全部仍爲 A. P. 求證.

32. 四數爲 A. P. 其第一與第二之積,恆較第二與第三之積小.

216. 等差級數若干項之和　設初項爲 a,公差爲 d,項數爲 n,末項爲 l,則

爲第 n 項,故　$l=a+(n-1)d.$

由是若 S 爲所求之和,則

$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-2d)+(l-d)+l.$

逆推之,則

$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+2d)+(a+d)+a.$

$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots$ 至 n 項 $=n(a+l).$

$$\therefore \quad S=\frac{n}{2}(a+l) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

然　$a+l=a+\{a+(n-1)d\}=2a+(n-1)d,$

$$\therefore \quad S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1) 與 (2) 兩公式,俱極緊要,故宜熟記.又 a, d, n, S 中,任知其三數,則由公式 (2),可求其他一數.

〔例 1〕 求級數 $5+8+11+\cdots\cdots\cdots$ 至 20 項之和.

此題　$a=5, d=3, n=20,$

$$\therefore \quad S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=\frac{20}{2}(10+19\times 3)=670.$$

〔例 2〕 由 1 起,連續各奇數之和,爲項數之平方數.求證.

奇數之級數爲 $1+3+5+7+\cdots\cdots\cdots$

此題 $a=1, d=2$, 由是 n 項之和如次.

$$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=\frac{n}{2}\{2+(n-1)2\}=\frac{n}{2}\times 2n=n^2.$$

卽由一起,n個連續奇數之和為n^2.

〔例3〕 有等差級數20項之和爲410,而初項爲30,問公差幾何.

$$S=410,\ a=30,\ n=20 \text{ 代入 } S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

$$410=\frac{20}{2}\{60+19d\},$$

由是得 $\qquad d=-1.$

〔例4〕 級數$11+12+13+\cdots\cdots$之和爲410,其項數如何.

以 $\quad a=11,\ d=1,\ S=410,$ 代入 $S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}.$

則 $\qquad 410=\frac{n}{2}\{22+(n-1)\},$

$$\therefore \qquad n^2+21n-820=0,$$

卽 $\qquad (n-20)(n+41)=0.$

$$\therefore \qquad n=20, \text{ 或 } n=-41.$$

知a, S, d,求n.須解二次方程式.而n爲項數,必爲正整數.且祇爲一數,故所解得之二根,必有一根不合理.

在本例,宜棄去-41,唯以20爲n之數值.

〔注意〕 $n=-41$,可說明其理如次.有某級數,由初項順次取之,其項數n常爲正整數.又由末項逆次取之,其項數n常爲負整數.故n爲負數,有時亦合理.

〔例5〕 級數$24+21+18+\cdots\cdots$之和爲105,問項數幾何.

以 $a=24, d=-3, S=105$ 代入 $S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$,

$$105=\frac{n}{2}\{48+(n-1)(-3)\}.$$

$$\therefore \quad 210=n\{48-3n+3\}.$$

$$\therefore \quad n^2-17n+70=0.$$

由是　　　$n=7$ 或 $n=10$.

n 之兩數值,俱為正整數,故俱合於題意.

n 雖為兩種數值,而 A.P. 之和仍相同,故用 n 之大數值較用 n 之小數值時,其所增加諸項之和恆等於零,於本例,其所增加之項為 $3, 0, -3$, 其和原等於零.

問題 LXIV.

求以下各級數之和(1至17).

1. $2+4+6+\cdots\cdots$至 20 項止.

2. $15+14\frac{1}{2}+14+\cdots\cdots$至 16 項止.

3. $1+2\frac{1}{4}+3\frac{1}{2}+\cdots\cdots$至 12 項止.

4. $-5-1+3+\cdots\cdots$至 20 項止.

5. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots\cdots$至 7 項止.

6. $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}-\frac{11}{6}-\cdots\cdots$至 61 項止.

7. $10+\frac{29}{3}+\frac{28}{3}+\cdots\cdots$至 7 項止.

8. $\frac{7}{6}+1+\frac{5}{6}+\cdots\cdots$至 15 項止.

9. $3\frac{1}{3}+2\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}+\cdots\cdots$至 n 項止.

10. $1\frac{1}{7}+1\frac{17}{21}+2\frac{10}{21}+\cdots\cdots$至 n 項止.

11. $8+7\frac{1}{9}+6\frac{2}{9}+\cdots\cdots$至 19 項止.

12. $4\frac{1}{2}+4\frac{1}{5}+3\frac{9}{10}+\cdots\cdots$至 31 項止.

13. $5+6.2+7.4+\cdots\cdots$至 21 項止.

14. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\cdots\cdots$至 7 項止.

15. $\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\frac{n-3}{n}+\cdots\cdots$至 n 項止.

16. $n+1+(2n+3)+(3n+5)+\cdots\cdots$至 n 項止.

17. $(a+b)^2+(a^2+b^2)+(a-b)^2+\cdots\cdots$至 n 項止.

18. A. P. 之第三項爲15而第二十項爲 $23\frac{1}{2}$ 求由第一項至二十項之和.

19. A. P. 之第五項爲37,而第十三項爲81.求由第一項至二十四項之和.

20. 有由25起之連續奇數.試求其二十項之和.

21. 至99止之連續奇數.試求其四十項之和.

22. 於 5 與50間.插入等差中項29個.試求其和.

23 於10與 100 間.插入等差中項40個.試求其和.

24. A. P. 之初項爲 3.末項爲 107 而項數爲27,求其中央之項及各項之和.

25. A. P. 之初項爲 7,末項爲1015,而項數爲71.求其中央之項及各項之和.

26. A. P. 之初項爲8,末項爲-4.而項數爲19,求其級數之和.

27. 級數3, 5, 7,……,試求由第七項至二十項之和.

28. 級數 6, 9, 12,……, 試求其由第五項至三十五項之和.

29. A. P. 之初項爲 2,其前十項之和爲 155. 問公差幾何.

30. A. P. 之初項爲 6,其前二十五項之和爲25.求其

公差.

31. A.P. 前十項之和爲 100, 其第六項爲 11, 問初項幾何.

32. A.P. 前二十八項之和爲 133, 而第五項爲 0, 問公差幾何.

33. 級數 3, 8, 13, ……, 其連續十項之和爲 705, 問初項幾何.

34. 級數 5, 8, 11, ……, 其連續二十五項之和爲 1025. 問初項幾何.

35. 級數 $\frac{4}{3}, 1, \frac{2}{3}, \cdots\cdots$ 之和爲零.問項數如何.

36. 級數 15, 12, 9, …… 之和爲 45. 問項數如何.

37. $1-\frac{1}{a}, 1-\frac{3}{a}, 1-\frac{5}{a}, \cdots\cdots\cdots\cdots$ 之和爲 $-6a$. 問項數如何.

38. 級數 $-8, -7, -6, \cdots\cdots$ 之和爲 42.問項數如何.

39. A.P. 之初項爲 1, 末項爲 99, 而各項之和爲 450. 問項數幾何.

40. A.P. 之項數爲 20, 末項爲 62, 而和爲 670, 問公差幾何.

41. A.P. 之第九項爲 136, 由第一項至十九項之和爲 2527, 求由第一項至四十項之和.

42. A.P. 之第八項爲 6. 問十五項之和幾何.

43. A.P. 之第十八項爲 15. 問三十五項之和幾何.

44. A.P. 之第 $n+1$ 項爲 100, 求 $2n+1$ 項之和.

45. 若 A.P. 之項數爲任意之奇數, 則其初項, 中項, 末項亦爲 A.P. 求證.

46. 級數 8, 16, 24 等若干項之和加 1. 其結果為奇數之平方.求證.

47. 求 100 與 200 間一切奇數之和.

48. 求 101 與 999 間一切偶數之和.

49. 求 100 與 500 間一切 3 之倍數之和.

50. 某人初年蓄金 20 圓.由次年起.遞次多蓄 10 圓.問經過幾年.則此人之蓄金為 1700 圓.

51. A.P. 十項之和為 145. 其第四項與第九項之和為第三項之五倍.求決定其級數.

52. A.P. 之項數為 $2n+1$, 則其奇數項之和與偶數項之和之比.為 $n+1:n$, 求證.

53. A.P. 之項數為 21,末三項之和為 117. 中央三項之和為 90,求此級數.

54. 等差級數 87, 85, 83 等 n 項之和.等於等差級數 3, 5, 7 等 n 項之和.求 n 之數值.

55. 等差級數 43, 45, 47 等 n 項之和,等於 45, 43, 41 等 $2n$ 項之和.求 n.

56. 分 80 為四部分.但其四部為 A.P. 而第一與第四之積須等於第二與第三之積之三分之二.

57. 有數四為 A.P. 其平方之和為 120, 而第一與第四之積.較第二與第三之積少 8. 問此四數幾何.

58. $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$, 為 A.P. 則 $(s-a)^2, (s-b)^2, (s-c)^2$, 亦 A.P. 求證.但 $2s=a+b+c$.

59. a, b, c, 為 A.P. 則 $a^2(b+c), b^2(c+a), c^2(a+b)$ 亦為 A.P. 求證.

第二十三編

等比級數

217. 定義 諸數量之級數,其任意一項與其前項之比恆相等,謂之等比級數.

例若 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}$ 等等,則 a, b, c, d 等為等比級數〔略記為G.P.〕

等比級數其各項與其前項之比,謂之公比.

以下所示,為等比級數之例.

$$1,\quad 3,\quad 9,\quad 27\quad \text{等}$$
$$4,\quad 2,\quad 1,\quad \tfrac{1}{2}\quad \text{等}$$
$$\tfrac{2}{3},\quad -1,\quad \tfrac{3}{2},\quad -\tfrac{9}{4}\quad \text{等}$$

此等比級數之公比,在第一列為3,第二列為 $\frac{1}{2}$,第三列為 $-\frac{3}{2}$.

218. 等比之項 設等比級數之初項為 a,公比為 r,則

第二項為 ar,
第三項為 ar^2,
第四項為 ar^3.

逐次如此,r 之指數,其數恆較項數少1.

由是第 n 項為 ar^{n-1}.

故知G.P.之初項與公比,則能求其任意之.

如G.P.之初項為5,公比為3,則

第四項為　　$5\times3^{4-1}=5\times3^3$,

第十項為　　$5\times3^{10-1}=5\times3^9$

219. 各項及公比　知G.P.之任意兩項,則能求其初項與公比,故能決定此級數.

如G.P.之第5項為$\frac{8}{9}$,第7項為$\frac{32}{81}$,求決定此級數.

設初項為a,公比為r.則第5項與第7項為ar^4與ar^6.

由是得　　$ar^4=\frac{8}{9}$,

及　　$ar^6=\frac{32}{81}$,

由除法　　$r^2=\frac{4}{9}$,

$\therefore$　　$r=\pm\frac{2}{3}$.

然　　$a\times\frac{16}{81}=\frac{8}{9}$ 故 $a=\frac{9}{2}$.

故此級數為　$\frac{9}{2},\ \pm3,\ 2,\ \pm\frac{4}{3}$等等

〔例〕G.P.之第4項為189,而第6項為1701,求第8項.

設初項為a,公比為r.

然第4項為ar^3,第6項為ar^5.

由是,按題意得

$$ar^3=189\quad 及\quad ar^5=1701,$$

由除法　　$r^2=9$　　$\therefore$　　$r=\pm3$.

然　　$a=189\div(\pm3)^3=\pm7$.

由是,第8項為 $ar^7=\pm7(\pm3)^7=15309$.

220. 等比中項　三量為等比級數,則其中央之量,謂之他二量之等比中項.

如a,b,c為G.P.則b為a與c之等比中項.

由等比級數之定義$\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$,

$$\therefore \quad b^2=ac,$$
$$\therefore \quad b=\pm\sqrt{ac}.$$

即任意二量之等比中項爲其積之平方根.

成連比例之諸量(203款)亦爲等比級數,宜注意.

221. 諸等比中項 若干數量爲等比級數則除首尾兩項外,其他之各項,謂之首尾兩項之等比諸中項.

所設二量之間,可插入等比中項若干.

如欲在 5 與 80 間,插入三個等比中項,此題乃求 5 與 80 間有三個等比中項之等比級數(卽 G. P.),故 5 爲 G. P. 之初項,80 爲其第五項.

設公比爲 r,則第五項爲 ar^4.

故 $5r^4=80$, $\therefore\ r^4=16$, $\therefore\ r=\pm 2$.

因而此級數爲 $5, \pm 10, 20, \pm 40, 80$.

故所求之中項爲 $\pm 10, 20, \pm 40$.

由是究其通法(卽於 a 與 b 間插入等比中項 n 個之法).

此例乃求 a 與 b 間有 n 項之 G. P. 故 a 爲 G. P. 之初項,b 爲其第 $n+2$ 項.

設 r 爲公比,則第 $n+2$ 項爲 ar^{n+1}.

$$\therefore \quad ar^{n+1}=b,$$
$$\therefore \quad r^{n+1}=\frac{b}{a},$$
$$\therefore \quad r=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}},$$

由是所求之中項爲 $ar, ar^2, ar^3\cdots\cdots ar^n$.

但 $$r=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}.$$

問題 LXV.

1. 求以下各等比級數之第六項.

(1) $9, 3, 1$ 等, (2) $2, -3, \frac{9}{2}$ 等,

(3) a^2, ab, b^2 等.

2. G.P. 之初項為 3,第三項為 4,問第五項幾何.

3. G.P. 之第三項為 1,第六項為 $-\frac{1}{8}$,問第十項幾何.

4. G.P. 之第四項為.016,第七項為.000128,問初項幾何.

5. G.P. 之第六項為 156,第八項為7644,問第七項幾何.

6. G.P. 之第三項為 2.25,第七項為 11.390625,問第五項幾何.

7. G.P. 之第三項為4,第六項為$-\frac{1}{2}$,問第十項幾何.

8. G.P. 之第四項為$\frac{1}{18}$,第七項為$-\frac{1}{486}$,問第六項幾何.

9. 求 (1)4 與 9,(2 7 與 252. (3) a^3b 與 ab^3, 之等比中項.

10. 於1與 -8 間插入兩個等比中項,又於 12 與 $\frac{3}{4}$ 間插入三個等比中項.又於 $\frac{2}{3}$ 與 $\frac{81}{16}$ 間插入四個等比中項.

11. 於 3 與.000192 間插入五個等比中項.

12. 於 a^3b^{-6} 與 $a^{-2}b^4$ 間插入四個等比中項.

13. G.P. 之第三項與第四項之和為40,而第六項與第七項之和為2560,問初項幾何.

14. G.P. 之第一項與第二項之和為72,而第三項與

第四項之和爲 8,問第一項幾何.

15. a, b, c, d 爲 G. P. 求證 $ad=bc$.

16. G. P. 之各項,各以相同之數乘之,其積亦爲 G. P. 求證.

17. G. P. 各項之反數亦爲 G. P. 求證.

18. G. P. 之各項每間一項取去一項,則其餘之各項亦爲 G. P. 求證.

19. G. P. 之相連續兩項間,各插入其等比中項,則全體亦爲 G. P. 求證.

20. 距 G. P. 之初項與末項爲等距離之任意二項,其積等於初項與末項之積,求證.

222. 級數之和 求等比級數若干項之和.

設初項爲 a,公比爲 r,項數爲 n,末項爲 l,則 l 爲第 n 項,故 $$l=ar^{n-1}.$$

由是設 S 爲所求之和,則

$$S=a+ar+ar^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1},$$

以 r 乘之,則

$$Sr=ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+ar^{n-1}+ar^n,$$

故由減法 $$S-Sr=a-ar^n,$$

即 $$S(1-r)=a(1-r^n),$$

$$\therefore \quad \underline{S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}}.$$

上之公式亦可用他之記法.

何則, $$l=ar^{n-1},$$

故 $$\underline{S=\frac{a-rl}{1-r}}.$$

〔例1〕 求級數1, 2, 4 等十項之和.

今 $a=1,\ r=2,\ n=10,$

$$\therefore\quad S=a\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{1-2^{10}}{1-2}=2^{10}-1=1023.$$

〔例2〕 求級數 $2-3+\frac{9}{2}-\cdots\cdots\cdots$ 六項之和.

今 $a=2,\ r=\frac{-3}{2},\ n=6,$

$$\therefore\quad S=a\frac{1-r^n}{1-r}=2\frac{1-\left(-\frac{3}{2}\right)^6}{1-\left(-\frac{3}{2}\right)},$$

$$=2\frac{1-\frac{3^6}{2^6}}{1+\frac{3}{2}}=\frac{4}{5}\left(1-\frac{3^6}{2^6}\right)=-8\frac{5}{16}.$$

223. 無窮級數之和 任意之等比級數.取其項數極多時.其和似極大.然實不然.可舉一例以明之.

今有長二寸之線.分之爲二等分.去其一部分.又分其一部分爲二等分.去其一部分.逐次如此.如是依次所取去之寸數爲 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}$ 等等.然取去各部分之和.決不能過於2寸.而所餘之部分.分爲二等分.愈多次.則其限愈小.故所取去各部之和.其與二寸之差.可爲不可思議之小.

由是 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$ 之和.取至無窮限.可設爲等於2.

依222款. $S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r},$

若 r 爲眞分數.則其正負無論如何.其 r^n 之絕對值.

必從 n 之增加而減少.且 n 之數值增至無窮大,則 r^n 可爲不可思議小.

由是,r 之絕對值小於一,則級數之和與 $\frac{a}{1-r}$ 之差,必因項數增加而減小,故限數取至極多,則可爲不可思議小.故等比級數 $a+ar+ar^2+\cdots\cdots$ 若 r 之絕對值小於一,則其無窮項數之和爲 $\frac{a}{1-r}$.

〔例1〕　求 (1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$ 與 (2) $9-6+4-\cdots\cdots$ 之無窮項數之和.

於(1)式　　$a=1,\ r=\frac{1}{2}$,

$$\therefore\quad S=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

於(2)式　　$a=9,\ r=\frac{-6}{9}=-\frac{2}{3}$,

$$\therefore\quad S=\frac{a}{1-r}=\frac{9}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{9}{\frac{5}{3}}=\frac{27}{5}.$$

〔例2〕　求 $.23\dot{4}$ 之數值.

$$.23\dot{4}=.23444\cdots\cdots=\frac{2}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{4}{10^3}+\frac{4}{10^4}+\frac{4}{10^5}\cdots\cdots\frac{4}{10^8}+$$

$$\frac{4}{10^4}\text{至無窮項}=\frac{\frac{4}{10^3}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10}{9}\times\frac{4}{10^3}=\frac{4}{900}.$$

由是　　$.23\dot{4}=\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{4}{900}=\frac{211}{900}$.

〔例3〕　等比級數之第二項爲 -8 而至無窮項之

和為18求此級數.

設初項為a,公比為r則第二項為ar而至無窮項之和為$\frac{a}{1-r}$.

由是得 $$ar=-8,$$

及 $$\frac{a}{1-r}=18,$$

故由除法 $$r(1-r)=\frac{-8}{18},$$

$$\therefore \quad r^2-r=\frac{4}{9},$$

$$\therefore \quad r=-\tfrac{1}{3},\text{ 或 } r=\tfrac{4}{3}.$$

若 $$r=-\frac{1}{3}\text{ 則 }a=\frac{-8}{r}=24,$$

故此級數為 $24,\ -8,\ \frac{8}{3}$.

$r=\frac{4}{3}$之數值為不合理.何則.因r之絕對值非小於一.則不能用公式$S=\frac{a}{1-r}$求其等比級數之和故也.

問 題 LXVI.

求以下各級數之和〔1至10〕.

1. $8+12+18+27+\cdots\cdots$至n項.

2. $12+9+6\frac{3}{4}+\cdots\cdots$至6項.

3. $a+\frac{a}{r}+\frac{a}{r^2}+\cdots\cdots$至$n$項.

4. $1\frac{1}{2}+1\frac{1}{3}+1\frac{5}{27}+\cdots\cdots$至8項.

5. $\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots$至6項.

6. $12-9+6\frac{3}{4}-\cdots\cdots$至無窮項.

7. $4+1.2+.36-.108+\cdots\cdots\cdots$至無窮項.

8. $4+.8+.16+\cdots\cdots\cdots$至無窮項.

9. $a^2+ab+b^2+\cdots\cdots\cdots$至$n$項.

10. $3-2+\frac{4}{3}-\cdots\cdots\cdots$至無窮項.

11. 求自2至4096,2之各連續方乘之和.

12. 求級數 $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}+\cdots\cdots\cdots$ 至無窮項之和至小數四位止.

13. 求$4x^2-12x+9$與$9x^2+12x+4$之等比中項.

14. 設G.P.之項數為n而n為任意之奇數,則此n項之積,等於中項之n乘方.求證.

15. G.P.之第二項為$\frac{3}{4}$,而至無窮項之和為4求其G.P..

16. G.P.之第二項為-4,而至無窮項,其和為9求其G.P..

17. 某G.P.之前十項之和等於前五項之和之33倍.求其公比.

18. 等比級數至無窮項之和為初項之n倍,則公比為$1-\dfrac{1}{n}$求證.

19. G.P.之公比為正,而小於$\frac{1}{2}$則任意一項較以下之各項之和大.求證.

20. G.P.之第六項為第三項之8倍,而前二項之和為24求此級數.

21. 求級數 $\dfrac{a}{a+b}+\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^2+\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^3+\cdots\cdots\cdots$至無窮項之和.

22. 求級數 $1+\left(1-\frac{1}{a}\right)+\left(1-\frac{1}{a}\right)^2+\left(1-\frac{1}{a}\right)^3+\cdots\cdots\cdots$ 至無窮項之和.

23. 若 $S_1=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+ar^{2n}$.

及 $S_2=a-ar+ar^2-ar^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+ar^{2n}$.

則 $S_1S_2=a^2+a^2r^2+a^2r^4+\cdots\cdots\cdots\cdots+a^2r^{4n}$ 求證.

24. 求級數 $\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{2}+\frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}+\cdots\cdots\cdots\cdots$ 至無窮項之和.

25. G. P. 之第六項為 $\frac{1}{3356}\frac{1}{14}$ 而第二項為 $\frac{1}{14}$ 求其至無窮項之和.

26. 三數為 G. P. 且其和為 14 而其平方之和為 84 問三數幾何.

27. G. P. 之第一,第二,第三,三項之和為 42 而第四項較第一項多 126, 問此級數如何.

28. G. P. 之第一,第二,第三,三項之和與第三,第四,第五,三項和之比為 1:4 而第五項為 8,問此級數如何.

29. a, b, c, d 為 G. P. 則 $a+b$, $b+c$, $c+d$, 又 a^2+b^2, b^2+c^2, c^2+d^2 亦為 G. P. 求證.

30. a, b, c, 為 G. P. 之第 p, 第 q, 第 r, 三項則 $a^{q-r}b^{r-p}c^{p-q}=1$ 求證.

31. 若 $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(ab+bc)^2$ 則 a, b, c, 為 G. P..

224. 餘論 級數不著明諸項之關係者(即不詳其種類者往往有之.然知其若干項.卽於單簡之例.便能定其關係.

如於級數 3, 9, 15 等, $9-3=6$, $15-9=6$, 故此級數為等差級數.

又於級數 3, 9, 27 等, $9-3=6$, $27-9=18$,故此級數非

等差級數.而欲試此級數爲等比級數與否.則 $\frac{9}{3}=\frac{27}{9}$,
故此級數爲等比級數.其公比爲3.

問　題　LXVII.

求以下各級數之和〔1至10〕.

1. 2, 2.4, 2.88 等至5項.

2. 2, 18, 162 等至7項.

3. 1, .2, .04 等至無窮項.

4. $a, b, \frac{b^2}{a}$ 等至 n 項.

5. .3, .03 .003 等至無窮項.

6. $3+4.3+5.6+\cdots\cdots$至11項.

7. $a+\frac{4a+b}{3}+\frac{5a+2b}{3}+\cdots\cdots$至19項.

8. $\frac{2}{4}-\frac{1}{3}+\frac{4}{9}-\cdots\cdots$至8項.

9. $3\frac{1}{8}+1\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots$至無窮項.

10. $2\frac{1}{3}+6\frac{1}{4}+15\frac{5}{8}+\cdots\cdots$至5項.

11. 試將以下各級數加至六項而求其和.又加至無窮項而求其和.

(1) $2\frac{1}{2}+6\frac{1}{4}+10+\cdots\cdots$　(2) $9+5+1+\cdots\cdots$

(3) $4-3+\frac{9}{4}-\cdots\cdots$　(4) $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\cdots\cdots$

(5) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\cdots\cdots$

12. 等比級數之項數爲奇數.則其初項與中項與末項亦爲等比級數.求證.

13. A. P. 之前七項之和爲 49. 而次之八項之和爲 176. 問此級數如何.

14. 有等比級數其第一項與第三項之等差中項爲第二項之五倍.求其公比.

15. 等差級數之第四項爲第二項與第七項之等比中項.則第六項爲第二項與第十四項之等比中項.求證.

16. 等比級數之初項爲 a. 末項爲 l. 而其 n 項之連乘積爲 P 求證 $P^2=(al)^n$.

17. 成 G. P. 之三數.其連乘積爲 216. 而各兩數之積之和爲 156. 求此三數.

18. 求分 25 爲五部.但其五部爲 A. P. 其最小者與最大者兩平方之和.較他之三平方之和少一.

19. 求於 6 與 16 之間插入二數.而使前三數爲 A. P. 後三數爲 G. P..

20. 設 a, b, c 爲等比級數. x, y 爲 a, b 及 b, c 間之等差中項.求證.

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \text{ 及 } 2=\frac{a}{x}+\frac{c}{y}.$$

第二十四編

調和級數及簡單之級數

225. 定義 諸數量之級數,任意取其連續之三項,其第一與第二,及第二與第三,兩差之比,等於第一與第三之比,謂之調和級數.

〔例〕若 $a-b:b-c::a:c,$

$b-c:c-d::b:d$ 等等

則 a, b, c, d 等爲調和級數(略記爲H. P.).

226. 調和反商 a, b, c 爲調和級數,則

$$a-b:b-c::a:c,$$

由是 $c(a-b)=a(b-c),$

卽 $ca-bc=ab-ac.$

兩邊以 abc 除之,則

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}.$$

而 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$, 原爲等差級數.

故成調和級數諸量之反商恆爲等差級數.

由是調和級數諸量之關係,可由等差級數之關係推得.

227. 調和中項 三量成調和級數,則其中央之量,爲他二量之調和中項.

若 a, b, c, 爲調和級數,則 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$, 爲等差級數.

$$\therefore \qquad \frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b},$$

$$\therefore \qquad \frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c},$$

$$\therefore \qquad b=\frac{2ac}{a+c}.$$

即任意二量之調和中項爲其和除其積之二倍.

228. 三種級數之中項 設任意二量 a 與 b 之等差中項,等比中項,調和中項,爲 A, G, H.,

則 $\quad \mathrm{A}=\frac{1}{2}(a+b),\ \mathrm{G}=\sqrt{ab},\ \mathrm{H}=\frac{2ab}{a+b}.$

由是 $\mathrm{A}\times\mathrm{H}=\frac{1}{2}(a+b)\times\frac{2ab}{a+b}=ab.\ \therefore\ \mathrm{AH}=\mathrm{G}^2.$

由是 G 爲 A 與 H 之等比中項.

故任意二量之等比中項,又爲二量之等差中項與調和中項之等比中項.

229. 諸調和中項 調和級數之問題,多可用此調和級數諸反數之等差級數解之.

如欲於任意二量 a 與 b 間,插入 n 個調和中項.

此不可不於 $\frac{1}{a}$ 與 $\frac{1}{b}$ 間,先插入 n 個等差中項,而由 215 款,如次

$$\frac{1}{a}+\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{n+1},\ \frac{1}{a}+2\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{n+1}\ 等$$

故 $$\frac{1}{a},\ \frac{1}{a}+\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{n+1},\ \frac{1}{a}+2\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{n+1},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{b}.$$

即　$\frac{1}{a}, \frac{(nb+a)}{(n+1)ab}, \frac{(n-1)b+2a}{(n+1)ab}, \cdots\cdots, \frac{1}{b}$.

為 A. P. 由是此反數為 H. P.

故所求之調和中項如下.

$$\frac{(n+1)ab}{nb+a}, \frac{(n+1)ab}{(n-1)b+2a} \text{等等}$$

〔注意〕求調和級數若干項之和,無一定之公式是宜注意.

230. 三種級數之關係

$a, b, c,$ 為 A. P. 則 $a-b:b-c::a:a,$

$a, b, c,$ 為 G. P. 則 $a-b:b-c::a:b,$

$a, b, c,$ 為 H. P. 則 $a-b:b-c::a:c.$

第一與第三,由 A. P. 及 H. P. 之定義易證明,而第二由乘法易證明.

〔例 1〕 調和級數之第二項為 2. 第四項為 6. 求此級數.

於此調和級數,其相當等差級數之第二項為 $\frac{1}{2}$, 第四項為 $\frac{1}{6}$.

由是設 a 為初項 d 為公差,則

$$a+d=\tfrac{1}{2} \text{ 及 } a+3d=\tfrac{1}{6},$$

故　$$a=\tfrac{2}{3} \text{ 及 } d=-\tfrac{1}{6}.$$

因得等差級數如次.

$$\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{6} \text{ 等}$$

故調和級數如次.

$$\tfrac{3}{2}, 2, 3, 6 \text{ 等}$$

〔例 2〕 設 $a, b, c,$ 為 G. P. 求證 $a+b, 2b, b+c$ 為 H. P.

若 $$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{2}{2b},$$

則 $$b(b+c)+b(a+b)=(a+b)(b+c),$$

即 $$b^2+bc+ab+b^2=ab+b^2+ac+bc,$$

$$\therefore\quad b^2=ac$$

故 $a+b, 2b, b+c$ 當爲 H. P. 而 $b^2=ac$, 即 a, b, c 爲 G. P.

問 題 LXVIII.

1. 調和級數之各項,以相同之數乘之,則其各積亦爲調和級數.

2. 求於 1 與 7 之間插入五個調和中項.

3. 求於 $\frac{2}{3}$ 與 $\frac{3}{2}$ 之間插入四個調和中項.

4. 二量之等差中項爲 1. 則其調和中項爲等比中項之平方,求證.

5. 設 a^2, b^2, c^2 爲等差級數,求證 $b+c, c+a, a+b$ 爲調和級數.

6. 設 x, y, z, 爲 H. P. 求證 $(y+z-x)^2, (z+x-y)^2, (x+y-z)^2$ 爲 A. P.

7. 設 x, y, z 爲 H. P. 求證

$$\frac{x}{y+z},\ \frac{y}{z+x},\ \frac{z}{x+y}\text{ 亦爲 H. P.}$$

8. x, y, z, 爲 H. P. 求證

$$\frac{x}{y+z-x},\ \frac{y}{z+x-y},\ \frac{z}{x+y-z}\text{ 亦爲 H. P.}$$

9. a, b, c, d 爲 H. P. 求證

$$\frac{a}{b+c+d},\ \frac{b}{c+d+a},\ \frac{c}{d+a+b},\ \frac{d}{a+b+c}\text{ 亦爲 H. P.}$$

10. a, b, c, 爲 H. P. 則 $2a-b, b, 2c-b$ 當爲 G. P. 求證.

11. a, b, c, 爲 H. P. 求證 $a, a-c, a-b$ 亦爲 H. P..

12. $(a^2+b^2), (a^2+ab+b^2), (a^4+a^2b^2+b^4), (a^2+b^2), (a^2-ab+b^2)$ 求證此三式爲 H. P..

13. 設 x, a_1, a_2, y, 爲 A. P. x, g_1, g_2, y, 爲 G. P. x, h_1, h_2, y 爲 H. P. 求證次式,

$$\frac{g_1g_2}{h_1h_2}=\frac{a_1+a_2}{h_1+h_2}.$$

14. $a, b\ c$ 爲 H. P. 求證.

$$\frac{b+a}{b-a}+\frac{b+c}{b-c}=2.$$

15. a, b, c, 爲 G. P. 則 $\frac{2}{a+b}, \frac{1}{b}, \frac{2}{b+c}$ 當爲 A. P. 求證.

16. 證 a, b, c 爲 A. P. 又 b, c, d, 爲 H. P. 則 $a:b=c:d$.

17. 若 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}$ 證 $b=a+c$ 又證 a, b, c, 爲調和級數.

18. a, b, c, d 爲 H. P. 證

$$3(b-a)(d-c)=(c-b)(d-a).$$

19. a, b, c, 爲 H. P. 證

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}.$$

20. 三數爲 A. P. 而兩外項之積爲中項之五倍,又兩大數之和爲小數之三倍求此各數.

21. $\frac{a+b}{1-ab}, b, \frac{b+c}{1-bc}$, 爲 A. P. 則 $a, \frac{1}{b}, c$ 爲 H. P. 求證.

22. a, b, c 爲 A. P. a^2, b^2, c^2, 爲 H. P. 求證. $-\frac{a}{2}\ b, c$, 爲 G.

P. 又證 $a=b=c$.

23. 三數為 A. P. 而最大數加 1 為 G. P. 則最小數等於公差之平方求證.

24. x a, b, y, 為 A. P. x, u, v, y, 為 H. P. 求證 $av=bu=xy$.

25. a_1, a_2, a_3, a_4 為 H. P. 求證.

$$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4=3a_1a_4.$$

26. a, b, c, 為 A. P. a, c, b 為 G. P. 求證 b, a, c, 為 H. P..

231. 簡單之級數　上所舉三種級數之外更有他種級數,其諸項可用簡單之法則求之.

舉其二三例如次.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+n^2,$$

$$1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots\cdots\cdots+n(n+1),$$

及　$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

232. 解法　求簡單級數 n 項之和,其法如次.

級數 n 項之和,常以 S_n 示之,又至無窮項之和,常以 S_∞ 示之.

〔例 1〕 求級數 $1.2+2.3+3.4+4.5+\cdots\cdots\cdots n$ 項之和.

令　$S_n=1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots\cdots\cdots+(n-1)n+n(n+1)$.

設　$\Sigma=1.23+2.3.4+3.45+\cdots\cdots\cdots$

$$+(n-1)n(n+1)+n(n+1)(n+2).$$

(但 Σ 為總數之號)

將各項退一項列之則

$\Sigma=$　$1.2.3+2.3.4+\cdots\cdots\cdots+(n-2)(n-1)n$

$$+(n-1)n(n+1)+n(n+1)(n+2).$$

由前式減後式,而各項依所列之位置減之則

$$0=1.2.3+3.2.3+3.3.4+\cdots\cdots$$
$$+3(n-1)n+3n(n+1)-n(n+1)(n+2).$$

因而　$3\{1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots$
$$+(n-1)n+n(n+1)\}=n(n+1)(n+2),$$
$$\therefore\quad S_n=\tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

〔例 2〕 求級數 $1.2.3+234+345+\cdots\cdots n$ 項之和.

今　$S_n=12.3+2.3.4+34.5+\cdots\cdots$
$$+(n-1)n(n+1)+n(n+1)(n+2).$$

設　$\Sigma=123.4+2345+3.4.5.6+\cdots\cdots$
$$+(n-1)n(n+1)(n+2)+n(n+1)(n+2)(n+3).$$

如前法則

$$\Sigma=\ 1.2.3.4+2345+\cdots\cdots+(n-2)(n-1)n(n+1)$$
$$+(n-1)n(n+1)(n+2)+n(n+1)(n+2)(n+3).$$

由是用減法將各項依所列之位置減之則

$$0=1.2.3.4+4.2.3.4+4.3.4\,5+\cdots\cdots+4(n-1)n(n+1)$$
$$+4n(n+1)(n+2)-n(n+1)(n+2)(n+3),$$
$$\therefore\quad 4\{1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)\}$$
$$=n(n+1)(n+2)(n+3),$$
$$\therefore\quad S_n=\tfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

〔注意〕 此級數與前之級數皆為級數中緊要之例.其性質分為三項,即 (1) 各項中因數之數相同.(2 任意一項之因數皆為 A. P. (3) 各項之第一因數以次為 A. P..

又上法因欲得所求之和,故先用「Σ」級數,但此 Σ 級數,雖與原級數同形,然各項之末,皆多附一因數.

〔例 3〕 求級數 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots n$ 項之和.

今 $S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2,$

然 $n^2=n(n+1)-n,$

$\therefore$ $S_n=1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots+n(n+1)$
$-1-2-3-\cdots\cdots-n.$

由例1

$1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2),$

又 $1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1),$

由是 $S_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1)$
$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$

〔例4〕 求級數$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3$之$n$項之和.

今 $S=1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3.$

而n爲任何數 $4n^3=\{n(n+1)\}^2-\{(n-1)n\}^2.$

由是 $4.1^3=(1.2)^2.$

$4.2^3=(2.3)^2-(1.2)^2,$

$4.3^3=(3.4)^2-(2.3)^2,$

$\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots$

$4(n-1)^3=\{(n-1)n\}^2-\{(n-2)(n-1)n\}^2.$

$4n^3=\{n(n+1)\}^2-\{(n-1)n\}^2.$

由是用加法得

$4\{1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n\}^3=\{n(n+1)\}^2.$

$\therefore$ $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$

此結果亦可用相異之形記之.

何則.因 $1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1).$

故 $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2.$

卽由一起連續之n整數.其各立方之和.等於其和之平方.

〔例5〕 求級數$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}\cdots\cdots n$項之和

$$S_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}.$$

$$\Sigma=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}.$$

然　$$\Sigma=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}.$$

故由減法

$$0=1-\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{n+1}.$$

由是 $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}.$

n 爲無窮大則$\frac{1}{n+1}$爲零.

由是級數$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}\cdots\cdots$之無窮項之和爲1.

〔例6〕 求級數$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\cdots\cdots n$項之和.

試作Σ級數,但此Σ級數,與原級數同形而各分母之末皆省去一因數,如前法得其n項之和爲

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1.2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}.$$

〔例7〕 求級數$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots\cdots n$項之和.

$$S=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots+nx^{n-1}+(n+1)x^n.$$

然 $$Sx=x+2x^2+3x^3+\cdots\cdots+nx^n+(n+1)x^{n+1}.$$

故由減法

$$S(1-x)=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^n-(n+1)x^{n+1}.$$

然 $$1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1+x}.$$

故 $$S(1-x)=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}-(n+1)x^{n+1},$$

∴ $$S=\frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}-(n+1)\frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

問題 LXIX.

求以下各級數至 n 項之和而能求無窮項之和者則須求其無窮項之和.

1. $2.4+4.6+6.8+\cdots\cdots$

2. $3.5+5.7+7.9+\cdots\cdots$

3. $1.4+4.7+7.10+\cdots\cdots$

4. $2.5+5.8+8.11+\cdots\cdots$

5. $1.3.5+3.5.7+5.7.9+\cdots\cdots$

6. $2.7.12+7.12.17+12.17.22+\cdots\cdots$

7. $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots\cdots$

8. $\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\frac{1}{8.11}+\cdots\cdots$

9. $\frac{1}{1.3.5}+\frac{1}{3.5.7}+\frac{1}{5.7.9}+\cdots\cdots$

10. $\frac{1}{2.5.8}+\frac{1}{5.8.11}+\frac{1}{8.11.14}+\cdots\cdots\cdots$

11. $\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\cdots\cdots$

12. $\frac{1}{(1+x)(1+2x)}+\frac{1}{(1+2x)(1+3x)}$

$$+\frac{1}{(1+3x)(1+4x)}+\cdots\cdots\cdots$$

13. $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots\cdots\cdots$

14. $1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots\cdots$

15. $1^3+3^3+5^3+\cdots\cdots\cdots$

16. $aa+b+(a+b)(a+2b)+(a+2b)(a+3b)+\cdots\cdots\cdots$

雜　題　VI.

(A)　**1.** 化 $(y+3)(y^2-1)-3(y+1)(y^2-9)$
$+3(y-1)(y^2-9)-(y-3)(y^2-1)$ 爲簡式.

2. 證次式.

$$\frac{(2y-x)^3-(2x-y)^3}{3(y-x)}+\frac{(2y-x)^3+(2x-y)^3}{x+y}$$
$$=10x^2-16xy+10y^2.$$

3. 求 $3x^3-13x^2+23x-21$ 與 $6x^3+x^2-44x+21$ H. C. F. 又問此二式 x 爲何數則俱爲零.

4. 解以下各方程式.

(1)　$3x+\frac{2}{y}-1=12x+\frac{5}{y}+14=\frac{1}{y}-2x-14,$

(2)　$x^2-(a+b+2c)x+(a+b+c)c=0.$

5. 某人買牛9匹,羊20匹,費洋239圓.賣時牛獲利2成五分,羊獲利2成,共得利洋35圓,問每匹之原價各幾何.

6. 方程式$x^2+4x+3=0$之根爲α, β今以$\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$與$\frac{\alpha+\beta}{\beta}$爲根之方程式,爲$3x^2-16x+16=0$求證.

7. 以$a^{\frac{1}{3}}+2b^{\frac{1}{2}}$乘$a^{\frac{2}{3}}b^{-1}-2a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{2}}+4-8a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}+16a^{-\frac{2}{3}}b$.

8. 化$\frac{5+4\sqrt{3}}{5-4\sqrt{3}}$之分母爲有理之數,並化$\sqrt{25+4\sqrt{34}}$爲簡式.

9. 求級數$5-3\frac{3}{4}+2\frac{13}{16}-\cdots\cdots$至八項之和,又求無窮項之極限.

10. 於100與300間插入等差中項二十個而求其和.

(B) 1. 化$3\{x-2(y-z)\}-[4y+2\{x-\overline{y-z}\}]$爲簡式.

2. 求以下二式之因數.

$mnx^2+m^2xy+n^2xy+mny^2$及$x^3-x^2y+xy^2-y^3$.

3. 二數之和等於4則其差爲其平方差之四分之一求證.

4. 解以下各方程式.

(1)　$\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=1$,

(2)　$\sqrt{12x-3}+\sqrt{x+2}+\sqrt{7x-13}=0$.

5. $x^2-8x+22$決不小於6求證.

6. 求$a^6+2a^3b^2-2a^3c+b^4-2b^2c+c^2$之平方根.

7. $a:b::c:d$ 求證

$a^2+b^2:c^2+d^2::(a+b)^2:(c+d)^2$.

8. 求以下各級數之和.

(1)　$5-1-7-\cdots\cdots$至20項,

(2)　$2\frac{1}{2}+1+\frac{2}{5}+\cdots\cdots$至無窮項.

9. 求小於1000能以7除盡之一切數之和.

10. 有一路,與鐵道平行.火車之速為每點鐘37.5 英里.而人與火車同方向進行.則見火車六秒鐘經過.又此人以同速由反對之方向進行.則見火車四秒鐘經過.問此火車之長幾何.

(C)　**1.** $x=0,\ y=1,\ z=1\frac{1}{2}$ 求 $\frac{\sqrt{(y^2+z)}}{\sqrt{(z+y)}}-\frac{z-x(y-z)}{x-z(y-z)}$ 之數值.

2. 以 $2x^2+3xy-2y^2$ 除 $4x^4-9x^2y^2+12xy^3-4y^4$.

3. 連續二整數之和之平方,較其積之四倍多一.試證明之.

4. 求 $x^2-6ax+9a^2$, $x^2-ax-6a^2$ 及 $3x^2-12a^2$ 之 L. C. M..

5. 化 $\frac{2}{a-2}+\frac{1}{1-a}+\frac{1}{a+1}-\frac{2}{a+2}$ 為簡式.

6. 有火車駛行若干英里.若每點鐘之速增 5 英里.則省時40分.又每點鐘之速減 5 英里.則多費一點鐘.問火車行幾英里.又其速度幾何.

7. 化 $2+\sqrt{8}+\sqrt{2}-\sqrt{27}-\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{(16+6\sqrt{2})}$ 為簡式.

8. 任意之比.其兩項以相同之數加之.則較前

比近於一.求證.又證 $ma+nc:mb+nd$ 在 $a:b$ 與 $c:d$ 之間.

9. 求以下各級數之和.

(1) $21+15+9+\cdots\cdots$至 8 項.

(2) $5+2+8+\cdots\cdots$至無窮項.

10. 有二數其等差中項爲 17,其等比中項爲 15.問二數各幾何.

(D) 1. 化 $\{x(x+a)-ax-a)\}\{x(x-a)-a(a-x)\}$ 爲簡式.

2. 證以下二式.

$$(n+1)^4-n^4=(2n+1)(2n^2+2n+1),$$

及 $$(a+b)^4-a^4-b^4=4ab(a+b)^2-2a^2b^2.$$

3. 化 $\left\{1-\dfrac{3x-20}{x^2-6x}\right\}\left\{1-\dfrac{8x-42}{x^2-5x}\right\}$ 爲簡式.

4. 解以下各方程式.

(1) $\dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{y}=21,\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{7}{y}=-11,$

(2) $3x^2-4xy+2y^2=33,\ x^2-y^2=16.$

5. 有兩位之數,其單位之數字較十位之數字大,而兩數字之平方之差等於本數,又將兩數字倒置,其所生之數爲數字之和之七倍,問本數幾何.

6. 有方程式 $x^2-4x+2=0$.求作以此方程兩根之立方爲兩根之方程式.

7. 求 $x^6-2x^2+8+x^{-2}-8x^{-4}+16x^{-6}$ 之平方根.

8. $a:b::c:d$ 求證 $\dfrac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\left(\dfrac{a-b}{c-d}\right)^2$.

9 求以下各級數之和.

(1)　$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-$………至10項，

(2)　$9-6+4-$………至無窮項.

10. 將連續之奇數分爲若干組即1; 3, 5; 7, 9, 11; 13, 15, 17, 19 等逐次如此.求證第n組諸數之和爲n^3.

(E)　**1.** 化 $x^2-2xy+y^2-(x^2+xy+y^2)-\{x(-2y+x)+y^2\}$ 爲簡式.

2. 以$2a^2+4b^2-3ab$除$6a^4+4b^4-a^3b+13ab^3+2a^2b^2$.

3. $3a^3-3a^2b+ab^2-b^3$, $4a^2-5ab+b^2$ 之 H. C. F. 及 L. C. M..

4. 化 $\dfrac{\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}$ 爲簡式.

5. $x^2+mx+n=0$ 之兩根爲α及β.求以m及n之項.作$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$.

又以$x^2-3x+2=0$驗其結果.

6. 使 $3x^2+5x+3$ 爲最小數求x之數值.又證此式之最小數值爲$\frac{11}{12}$.

7. a, b, c, d, 爲連比例.求證 $\left(\dfrac{a-b}{b-c}\right)^3=\dfrac{a}{d}$.

8. 求 $4x^{\frac{4}{3}}-12xy^{\frac{1}{2}}-7x^{\frac{2}{3}}y+24x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{3}{2}}+16y^2$之平方根.

9. 求以下各級數之和.

(1)　$-3-2-1$………至n項，

(2)　$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$………至無窮項.

10. 有二列車.其一長72碼.他之一長60碼.此二列車由平行道相向而行.則相會至全通過費時4秒又第一列車之速爲原速之二倍.則經過祇需3秒.問

各列車每時之速幾何.

(F)　**1.** 化 $(x+y+z)^2-(-x+y+z)^2+(x-y+z)^2-(x+y-z)^2$ 爲簡式.

2. 以 $a-b-c$ 除 $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3-c^3$.

3. $x=a+d, y=b+d, z=c+d$ 求證次式.

$$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab.$$

4. 化 $\dfrac{1}{a-2x}+\dfrac{2a}{4x^2-a^2}-\dfrac{1}{a+2x}$ 爲簡式.

5. 解以下各方程式.

(1)　$2x+4y-3z=22, 4x-2y+5z=18,$
$5x+y-2z=14,$

(2)　$\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x-2}{x-3}=\dfrac{x-5}{x-6}-\dfrac{x-6}{x-7},$

(3)　$\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{5}{2}, x^2+y^2=90.$

6. 證 $x^6-4x^5+14x^4-32x^3+49x^2-60x+36$.
式,其 x 無論以如何之整數代入,其結果恆爲平方數.

7. 化 $\dfrac{1}{\sqrt{(12-\sqrt{140})}}$ 爲數之計算中最便之形而其値求至小數四位.

8. $x:a$ 較一大或小從而 $a-x:a+x$ 恆較 $a^2-x^2:a^2+x^2$ 大或小求證.

9. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 因 $x+y$ 反變,則 x^2+y^2 因 xy 變,求證.

10. 設等比級數之 n 項, $2n$ 項, $3n$ 項之和爲 a, b, c, 求證 $a^2+b^2=a(b+c)$.

第二十五編

排列及組合

233. 定義 由 n 物中每次取其 r 個,依種種之次序列之,其列法,謂之由 n 物中每次取 r 個之排列.

由是,每兩列中,非物同而所列之次序亦同者,則兩排列相異.

如有四物以 a, b, c, d, 四文字顯之.

若由此等四物中,每次取其一個,則其排列有四種.

卽 $\qquad a,\ b,\ c,\ d,$

若由此等四物中,每次取其兩個,則其排列有十二種.

卽 $\qquad cb, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc,$

由是,求每次取三個之排列全數,如次.

於每次取兩個之排列中,取其任意之一排列(如 ab),附以各本排列中所無之一文字(如 c 或 d),以次附迄,則所生之各排列皆相異,何則,因所取每次取兩個之排列,旣各不同,而所附之一文字,又各相異,故也.

又每次取兩個之排列,旣各附以相異之文字,則三文字之排列,更無遺漏.

由是,由四物中每次取三個之排列數,等於由四物中每次取兩個之排列數之二倍. $12\times2=24$.

同樣,由 n 物每次取 r 個之排列數,亦能求得.

由 n 物中每次取 r 個之排列數恆以 ${}_nP_r$ 記號顯之.

234. 排列之公式 由相異之 n 物中每次取 r 個求其排列數(但 n 與 r 俱爲任意之整數而 n 大於 r).

相異之 n 物以 a, b, c………顯之.

今由 n 物中每次取其一個則其排列數爲 n.

即 $${}_nP_1=n.$$

又若於由 n 文字每次取 $r-1$ 文字之排列中取其任意之一排列附以各本排列中所無之一文字〔即本排列所無 $n-(r-1)$ 文字中之任意一文字〕則得由 n 物每次取 r 個之排列.

如是可由每次取 $r-1$ 個之排列得每次取 r 個之排列 $n-(r-1)$ 種即 $n-r+1$ 種.

由是 $${}_nP_r={}_nP_{r-1}\times(n-r+1).$$

上之關係無論 r 爲如何之值恆能合理故以次得.

$$ {}_nP_{r-1}={}_nP_{r-2}\times(n-r+2),$$
$$ {}_nP_{r-2}={}_nP_{r-3}\times(n-r+3),$$
$$\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots$$
$$ {}_nP_3={}_nP_2\times(n-2),$$
$$ {}_nP_2={}_nP_1\times(n-1),$$

又 $${}_nP_1=\quad n$$

將上記各式上相當邊連乘而消去兩邊公有之因數則得 $\underline{{}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}.$

但右邊因數之數爲 r.

若每次取 n 個則 r 等於 n.

因而 $${}_nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3.2.1.$$

定義.連乘積 $n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3.2.1.$ 以 $n!$ 或 $\underline{n|}$ 顯之讀爲「階乘 n」.

如 4! 卽 $\underline{|4}=4.3.2.1.$

〔例1〕　童子六人立爲一列.其立法有幾種.

所求之數 $={}_6P_6=6.5.4.3.2.1=720.$

〔例2〕　於數目字 1, 2, 3, 4, 5 中.任取三字爲一數.可成幾種數.

所求之數 $={}_5P_3=5.4.3=60.$

〔例3〕　證 ${}_{10}P_4={}_7P_7.$

${}_{10}P_4=10.9.8.7$ 及 ${}_7P_7=7.6.5.4.3.2.1.$

235. 問題　n 物中有若干同種類之物.求其每次悉取之排列數.

設此 n 文字中.a 字有 p 個.b 字有 q 個.c 字有 r 個.……

所求之排列中.其任意之一排列.當有 p 個 a 字.若變此 p 個 a 字爲 p 個相異文字.則此 p 個相異文字.其排列有 $p!$ 種.

由是.設所求之排列數爲 P. 若於其每排列中變其 p 個 a 字爲 p 個相異文字（但不變爲 b, c. 而每排列中之 b, c 亦不變爲他字）.

則每排列之新排列.當有 $p!$ 種.故排列之全數.當變爲 $P\times p!$ 種.

同樣.於此等之新排列中.其任意之一排列.當有 q 個 b 字.若變此 q 個 b 字爲 q 個相異文字.則此 b 個相異文字.其排列當有 $q!$ 種.

由是.諸新排列中之每排列.其排列當各變爲 $q!$ 種.故排列之全數.當變爲 $P\times p!\times q!$ 種

逐次變更.至無相同之文字時.則排列之全數.當變爲　　$P\times p!\times q!\times r!\times\cdots\cdots$

然相異n物之排列數為$n!$

由是 $$P\times p!\times q!\times r!\times\cdots\cdots\cdots=n!$$

$$\therefore\quad P=\frac{n!}{p!q!r!\times\cdots\cdots\cdots}.$$

〔例1〕 問a,a,a,b,b,c六字.其排列法有幾種.

所要之數$=\frac{6!}{3!2!1!}=60.$

〔例2〕 問以數目字2,3,3,4,4,4,4可作之數有幾種.

所求之數$=\frac{7!}{4!2!}=105.$

236. 定義 由n物每次取其r個.不拘排列之次序如何.單以湊合為主.其列法,謂之「由n物中每次取r個」之組合.

由是.每兩組中.非由全然相同之物成者.則兩組合相異.

如有四物.以a,b,c,d四文字顯之.若由此等四物中.每次取其一個.則其組合有四種.即a,b,c,d.又每次取其兩個.則其組合有六種.即ab,ac,ad,bc,bd,cd.又每次取其三個.則其組合有四種.即abc,abd,acd,bcd.又四物悉取.則其組合祇有一種.即$abcd$.

由n物中每次取r個之組合數.恆以${}_nC_r$記號顯之.

237. 組合之公式 由相異之n物中.每次取其r個.求其組合數.

於相異r物之組合中.其排列當有$r!$種.故依文字之次序變換.則

$$ {}_nC_r\times r!={}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1). $$

由是　$${}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{1.2.3.\cdots\cdots r}.$$

依下所示之法,則由n物中每次取r個其組合數可不依排列之數求得.

相異之n物以$a,b,c,d\cdots\cdots$等n個文字顯之.

於由n文字每次取r個之組合中,其所含一特別文字之組合數,必等於由所餘$n-1$文字每次取$r-1$文字之組合數.

〔註〕如由a,b,c,d四文字中每次取三個,其組合爲abc, abd, acd, bcd,於此組合中,其所含一特別文字之組合數,皆爲三,然由a,b,c,三(卽$4-1$)文字每次取兩(卽$3-1$)個,其組合數亦爲三,卽ab, ac, bc,故兩相等,以下仿此.

由是,每次取r個之組合全數中,當含有各文字${}_{n-1}C_{r-1}$回,故文字之總數爲${}_{n-1}C_{r-1}\times n$.然在${}_nC_r$之各組中,其文字之數爲r.故文字之總數爲${}_nC_r\times r$.

由是.　$$r\times{}_nC_r=n\times{}_{n-1}C_{r-1}.$$

上之關係,無論n與r爲如何之值,恆能合理,故

$$(r-1)\times{}_{n-1}C_{r-1}=(n-1)\times{}_{n-2}C_{r-2},$$
$$(r-2)\times{}_{n-2}C_{r-2}=(n-2)\times{}_{n-3}C_{r-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2\times{}_{n-r+2}C_2=(n-r+2)\times{}_{n-r+1}C_1,$$
$${}_{n-r+1}C_1=n-r+1.$$

由是,將上記各式之相當邊連乘,而消去兩邊公有之因數,則

$$r! \times {}_nC_r = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1).$$

即 $${}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}.$$

以$(n-r)!$乘上式右邊之分子與分母,則

$${}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)(n-r)!}{r!(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

〔例1〕 由15名學生中選出3名,其方法有幾種.

所求之數 $= {}_{15}C_3 = \dfrac{15.14.13}{1.2.3} = 455.$

〔例2〕 某團體缺委員四人,而有候補者六人,其選舉法可每次選一人或二人,或三人,或四人,問選舉法有幾種.

每次選舉四人,其法有${}_6C_4$種.

每次選舉三人,其法有${}_6C_3$種.

每次選舉二人,其法有${}_6C_2$種.

每次選舉一人,其法有${}_6C_1$種.

故其選舉法之全數,爲

$${}_6C_4 + {}_6C_3 + {}_6C_2 + {}_6C_1 = 15 + 20 + 15 + 6 = 56.$$

238. 推論 依前款所得之公式,

$${}_nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad \therefore \ {}_nC_{n-r} = {}_nC_r.$$

故由n物中每次取r個,其所得之組合數,等於由n物每次取$n-r$個之組合數.

然上之命題,依次說解之,理尤易明.

卽由n物中取去r物,則所餘者爲$n-r$物,而由n物

中取互相異之r物,則所餘之$n-r$物當亦各互相異.由是,相異r物之組合數,必與相異$n-r$物之組合數等.

239. 定理　證 ${}_nC_r+{}_nC_{r-1}={}_{n+1}C_r$.

先由$n+1$物每次取r物,分其所得組合之全數為二部分一部分為含有特別之一物者一部分為非含有特別之一物者.其非含有特別物者之組合數,恆等於由所餘n物中每次取r物之組合數,即${}_nC_r$,而含有特別物者之組合數必為由所餘n物中每次取$r-1$物之組合數,即${}_nC_{r-1}$.

由是,　$${}_{n+1}C_r={}_nC_r+{}_nC_{r-1}.$$

上之定理,亦可由公式證之,如次.

$${}_nC_r+{}_nC_{r-1}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{1.2.3\cdots\cdots r}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)}{1.2.3\cdots\cdots(r-1)}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)}{1.2.3\cdots\cdots r}\{(n-r+1)+r\}$$

$$=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)}{1.2.3\cdots\cdots r}={}_{n+1}C_r.$$

240. ${}_nC_r$ 之最大值　由237款

$${}_nC_r=\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\cdots\cdots\times\frac{n-r+1}{r},$$

$$\therefore\quad {}_nC_r={}_nC_{r-1}\times\frac{n-r+1}{r}.$$

由是 $\frac{n-r+1}{r}\gtrless 1$ 即 $r\lessgtr\frac{1}{2}(n+1)$,從而${}_nC_r\gtrless{}_nC_{r-1}$.

故若$r<\frac{1}{2}(n+1)$,則n物之組合數,恆從r之增加而加

大.

若$r=\frac{1}{2}(n+1)$,則${}_nC_r={}_nC_{r-1}$然n非奇數,則r不能等於$\frac{1}{2}(n+1)$.

若$r>\frac{1}{2}(n+1)$,則n物之組合數,恆從r之增加而減少.

故n爲偶數,則${}_nC_r$在$r=\frac{1}{2}n$時爲最大,而n爲奇數,則$r=\frac{1}{2}(n+1)$時${}_nC_r={}_nC_{r-1}$而此等兩值俱爲最大.

〔例1〕 求${}_8C_r$之最大值.

其最大值在$r=\frac{1}{2}n=4$時,而此值爲

$$\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}=70.$$

〔例2〕 求${}_{11}C_r$之最大值.

其最大值在$r=\frac{1}{2}(n+1)=6$,或$r-1=6-1=5$時而此等值爲$\frac{11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5}=462$.

問題 LXX.

1. 求${}_{16}P_3$之排列數.

2. 求${}_{10}P_4$.

3. 求${}_8P_8$.

4. 問用1, 2, 3, 4, 5五個數目字,能作成幾種數.

5. 於數目字1, 2, 3, 4, 5, 6中,任取一字或二字乃至六字作數,能作成幾種數.

6. 試將兒童十人列爲一行,但中有特別二人不許並立,問不同之列法有幾種.

7. 將相異之物若干個每次悉取,其排列數爲 720. 問物若干個.

8. 將英語 *success*, *mississippi* 及 *algebraic* 之文字,每次悉取,其所生之排列數各幾何.

9. 並 $a,a,a,a,\ b,b,b,\ c,c$ 九個文字為一列,其法有幾種.

10. 英語 *essences* 之文字,每次悉取,其所生之排列幾何.

11. 又前題以 e 爲始,以 s 爲終,其排列幾何.

12. ${}_nP_5={}_nP_4\times 2$ 問 ${}_nP_n$ 幾何

13. ${}_nP_6={}_nP_4\times 12$ 問 n 之值幾何.

14. 求 ${}_{16}C_4$, ${}_{15}C_{12}$, ${}_{20}C_{13}$.

15. ${}_nC_5={}_nC_{10}$ 求 ${}_nC_2$.

16. ${}_nC_{10}={}_nC_{11}$ 求 ${}_nC_3$.

17. 於數目字 $0,1,2,3,4$ 中,每次取三個,問能作三位之數幾何.

18. ${}_{2n}C_3={}_nC_2\times 12$ 求 n.

19. ${}_{2n}C_3={}_nC_4\times 24$ 求 n.

20. 以 $1,2,3,4,5$ 五個數目字,依種種之次序列之,問較 23000 大之數有幾.

21. 某街有郵便箱五個,問以三封信投之,其投法有幾種.

22. 一仙銅貨二枚,一角銀貨三枚,五圓金貨四枚,問能作相異之金額幾種.

23. 一仙銅貨四枚,一角銀貨六枚,半元銀貨五枚,問能得幾種相異之金額.

24. 證 ${}_{n+2}C_{r+1}={}_nC_{r+1}+2{}_nC_r+{}_nC_{r-1}$.

25. 於 ${}_8C_4$, 其含有特別一物之組合數,與不含有特

別一物之組合數同.求證.

26. 於 ${}_{12}C_4$, 其含有特別一物之組合數.爲其組合全數之三分之一.求證.

27. 於 ${}_{3n}C_n$, 其含有特別一物之組合數.爲其組合全數之三分之一.求證.

28. 某地方.缺委員六人.而有候補者十人.由此等候補者中選出六人.其方法有幾種.

29. 某選舉.有候補者五人.欲於其中選舉三人.其投票時.可選舉一人,或二人,或三人.問選舉之法有幾種.

30. 有兵一哨.兵士八十名.長官三名.欲於其中選出兵士三名,長官一名.其選法有幾種.

31. 某蹴球會欲於三十人中選出十一人打球.其法有幾種.又欲同時選出兩組.每組十一人對打.其選法有幾種.

32. 某跳舞會.欲於男子五人女子四人中.選出男子二人,女子二人,共跳舞.其選法有幾種.

33. 某蹴球會.男子六人,女子四人,欲選出男子二人女子二人共蹴.其方法有幾種.

34. 八人共坐一圓桌.其坐法有幾種.

35. 一平面上有 n 點.無三點同在一直線內者.今將此諸點.各二點聯爲一直線.問直線之數幾何.

又將各直線引長.能生三角形若干.

第二十六編

二項式定理

241. 連乘積 任意兩多項式之積,爲以一式之各項,乘他一式之各項,所得諸積之和,已證明於第46款.

如是,欲求三式之連乘積,必以一式之各項,乘他兩式之積之各項,故所求之連乘積,爲第一式各項,與第二式各項,與第三式各項,相乘所得諸積之和.

同樣,若干式之連乘積,爲第一式各項,第二式各項,第三式各項,……等,相乘所得諸積之和.

如由$(a+b)(a+b)(a+b)$之各因數中,各取其一個文字,以此三文字相乘,可得連乘積之一項,而遞次如此,可得連乘積之一切項.

今各因數中,皆可取a一次,而其方法,祇有一種,故a^3爲連乘積之一項.

又可取a二次,取b一次,而其取法有三種,何則,因三個因數中皆有b,由一個因數內取b,而由他兩個因數內取a,總共取得三次故也,故得$3a^2b$.

又可取a一次,取b二次,而其方法有三種,故得$3ab$.

終可由各因數取b,而其方法祇有一種,故得b^3.

由是,所求之連乘積爲$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$故$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

242. 二項式定理 今設因數$a+b$有n個,卽$(a+b)(a+b)(a+b)$………

若由此各因數中各取其一文字以此諸文字相乘可得連乘積之一項逐次如此可得連乘積之一切項.

今由各因數取 a 其方法祇有一種故 a^n 爲連乘積之一項.

又由一因數取 b, 由所餘之 $n-1$ 因數取 a. 而能取一個 b 之數與由 n 物中取 1 物之組合數等故其方法爲 ${}_nC_1$ 種.

由是 ${}_nC_1a^{n-1}b$ 爲連乘積之一項.

又由任意之二因數取 b. 由所餘之 $n-2$ 因數取 a, 而由二因數中取 b 之次數與由 n 物中取 2 物之組合數等故其方法爲 ${}_nC_2$ 種.

由是 ${}_nC_2a^{n-2}b^2$ 爲連乘積之一項.

又由一般任意之 r 因數〔r 爲不大於 n 之任意正整數〕取 b. 由所餘之 $n-r$ 因數取 a. 而由 r 因數取 b 之次數與由 n 物中取 r 物之組合數等故其方法有 ${}_nC_r$ 種.

由是 ${}_nC_ra^{n-r}b^r$ 爲連乘積之一項.

又由各因數取 b 而其取法祇有一種故 b^n 爲連乘積之一項而此項與在 ${}_nC_ra^{n-r}b^r$ 中, $n=r$ 所得之結果同蓋以 ${}_nC_n=1$ 故也.

故 $(a+b)(a+b)(a+b)\cdots\cdots$ 至 n 因數.

$$=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots\cdots$$
$$+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots\cdots+b^n.$$

由是 n 爲任意之正整數則

$$(a+b)^n=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots\cdots$$
$$+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n.$$

此公式名爲二項式定理右邊之級數名爲 $(a+b)^n$

之展開式.

若將右邊之 ${}_nC_1, {}_nC_2 \cdots\cdots$, 以其值〔237 款〕代入, 則得

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{n!}{r!(n-r)!}a^{n-r}b^r + \cdots\cdots + b^n$$

是爲二項式定理之通例.

243. 公項　欲於 $(a+b)^n$ 之展開式,求其任意之項則於

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r$$

設其 r 爲適當之數值,可得其任意之項,故上式名爲展開公項,而此項爲距首第 $(r+1)$ 項

244. 公式用法　於二項式之展開公式

設 $n=2$ 則　$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

若設 $n=3$ 則

$$(a+b)^3 = a^3 + \frac{3}{1}a^2b + \frac{3.2}{1.2}ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

若設 $n=4$ 則

$$(a+b)^4 = a^4 + \frac{4}{1}a^3b + \frac{4.3}{1.2}a^2b^2 + \frac{4.3.2}{1.2.3}ab^3 - b^4$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

以 $2x$ 代 a, 以 $-3y$ 代 b, 且設 $n=5$ 則

$$(2x-3y)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^4(-3y) + \frac{5.4}{1.2}(2x)^3(-3y)^2$$

$$\frac{5.4.3}{1.2.3}(2x)^2(-3y)^3 + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}(2x)(-3y)^4 + (-3y)$$

$=32x^5-240x^4y+720x^3y^2-1080x^2y^3+810xy^4-243y^5.$

245. 歸納的證明法　二項式定理亦可依次法證明之.

設n為任意之正整數,求證

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n!}{r!(n-r)!}a^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n,$$

即　$$(a+b)^n=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots$$

$$+{}_nC_{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1}+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n.$$

先設此式為合理,而以他之因數$a+b$乘之,並於其積中集其含有a及b同方乘之諸項,則

$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+(1+{}_nC_1)a^nb+({}_nC_1+{}_nC_2)a^{n-1}b^2+\cdots\cdots$$

$$+({}_nC_{r-1}+{}_nC_r)a^{n-r+1}b^r+\cdots\cdots+b^{n+1}.$$

今　$$1+{}_nC_1=1+n={}_{n+1}C_1,$$

$${}_nC_1+{}_nC_2=n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n+1)n}{2}={}_{n+1}C_2,$$

又不論r之值如何,

$${}_nC_{r-1}+{}_nC_r={}_{n+1}C_r \qquad [239款]$$

由是,$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+{}_{n+1}C_1\cdot a^nb+{}_{n+1}C_2a^{n-1}b^2+\cdots\cdots$$

$$+{}_{n+1}C_ra^{n+1-r}b^r+\cdots\cdots+b^{n+1}.$$

故若此定理於n之任意值能合理,則於n多1之數值亦能合理.

如$n=1$,此定理合理,由是$n=2$,此定理亦合理,而$n=2$合理,則$n=3$此定理亦合理,餘倣此,故n為正整數此定理恆合理.

上之證明法,代數學屢用之,稱為歸納法.

246. 相等係數　依二項式定理展開 $(a+b)^n$.則距首第 $r+1$ 項,與距末第 $r+1$ 項為

$${}_nC_r a^{n-r}b^r \text{ 及 } {}_nC_{n-r}a^r b^{n-r}.$$

然無論 r 之值如何,恆能得

$${}_nC_r = {}_nC_{n-r} \qquad \text{〔238 款〕}$$

由是,於 $(a+b)^n$ 之展開式,其任意兩項若一項與首項之距離,等於他一項與末項之距離,則兩項之係數相等.故此展開式中各項之係數由首項順讀,與由末項逆讀,全然相同.

247. 別記法　於 242 款之公式,設 $a=1, b=x$,則

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n!}{r!(n-r)!}x^r+\cdots\cdots+x^n$$

是乃二項式定理中最通用之式.又上之定理,能包括一切二項式,故宜注意.

如欲求 $(a+b)^n$ 則

$$(a+b)^n = \left\{a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right\}^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$$

$$= a^n\left(1+n\frac{b}{a}+\cdots\cdots\right) = a^n+na^{n-1}b+\cdots\cdots$$

248. 最大項　依二項式定理展開 $(c+b)^n$.則其第 $r+1$ 項,為以 $\frac{n-r+1}{r}x$ 乘其第 r 項.

令 $\frac{n-r+1}{r}x=\left(\frac{n+1}{r}-1\right)x$ 而 $\frac{n+1}{r}$ 從 r 之增加而減少.由是若 r 增加,從而 $\frac{n-r+1}{r}x$ 當減少.若無論 r 之

數值如何,其 $\frac{n-r+1}{r}x$ 恆小於1.則其第 $r+1$ 項當較第 r 項小.故展開式之第 r 項爲最大.必

$$\frac{n-r+1}{r}x<1 \text{ 及 } \frac{n-\overline{r-1}+1}{r-1}x>1,$$

由是　$r>\frac{(n+1)x}{x+1}$ 及 $r<\frac{(n+1)x}{x+1}+1$.

若　$r=\frac{(n+1)x}{x+1}$,則 $\frac{n-r+1}{r}x=1$,而在此例,其最大者雖不祇一項,然第 r 項與第 $r+1$ 項相等,且較他之任意項大.

於 $(1+x)^n$ 之展開式,其諸項之絕對值,不因 x 之符號變更.由是 $(1+x)^n$ 之第 r 項爲最大,則 $(1-x)^n$ 之第 r 項亦爲最大.

〔例1〕 設 $x=\frac{1}{3}$ 試於 $(1+x)^{10}$ 之展開式中求其最大項.

$r>\frac{11}{4}$ 及 $r<\frac{11}{4}+1$,則第 r 項爲最大.由是第三項爲最大.

〔例2〕 設 $x=\frac{1}{2}$,試於 $(2+3x)^{12}$ 之展開式中,求其最大項.

$$(2+3x)^{12}=\{2(1+\tfrac{3}{2}x)\}^{12}=2^{12}(1+\tfrac{3}{2}x)^{12}.$$

故 $r>\frac{39}{7}$ 及 $r<\frac{39}{7}+1$,則第 r 項爲最大.

故最大爲第六項.

二項展開式之最大係數,其求法詳於〔240款〕.

問　題　LXXI.

書以下各式之展開式〔1至6〕.

1. $(x+a)^6$.　　2. $(1-x^2)^5$.

3. $(3x-2y)^4$.　　4. $(2a+3a^2)^4$.

5. $(2x^2-1)^6$.　　6. $(y-x)^7$.

7. 求 $(a-3b)^{10}$ 之第三項.

8. 求 $(2x-x^2)^{12}$ 之第五項.

9. 求 $(2a-\frac{1}{2})^8$ 之第六項.

10. 求 $(1-x)^{10}$ 之第七項.

11. 求 $(1+x)^{20}$ 之第十八項.

12. 求 $(1-x)^{22}$ 之第二十一項.

13. 展開 $(a+\sqrt{b})^4+(a-\sqrt{b})$.

14. 展開 $(a+\sqrt{b})^6+(a-\sqrt{b})^6$.

15. 展開 $(a+\sqrt{b})^8+(a-\sqrt{b})^8$.

16. 求 $(1+x)^8$ 之中央項.

17. 求 $(1+x)^{10}$ 之中央項.

18. 求 $(2x-3y)^8$ 之中央項.

19. 於 $(1+x)^{m+n}$ 之展開式,證 x^m 及 x^n 之係數相等.

20. 展開 $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^8$.

21. 求 $\left(4x-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{15}$ 展開式中之第十一項.

22. 求 $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^{20}$ 展開式中之第十七項.

23. 求 $\left(x^2-\dfrac{a^3}{x}\right)^{2n}$ 展開式中 x^n 之係數.

24. 書 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{2n+1}$ 展開式中之中央二項.

25. 問 $(a+x)^8$ 展開式中有最大係數之項否.

26. 求 $(a+x)^9$ 展開式中最大係數之項.

27. 設 $x=\frac{1}{3}$ 求 $(1+2x)^{20}$ 展開式中之最大項.

28. 設 $x=\frac{2}{3}$ 求 $(1+3x)^{15}$ 展開式中之最大項.

29. 設 $x=\frac{1}{2}$ 求 $(3+4x)^{12}$ 展開式中之最大項.

30. 於 $(5x+7)^{23}$ 之展開式中,有同係數連接之二項試舉之.

31. 書 $(ax-b)^n$ 展開式中 x^r 之係數.

32. 證 $(1+x)^{2n}$ 展開式中 x^n 之係數爲 $(1-x)^{2x-1}$. 展開式中 x^n 之係數之二倍.

33. 證 $(1+x)^{2n}$ 之中央項爲 $\dfrac{1.3.5\cdots\cdots(2n-1)}{n!}2^nx^n$.

34. 用二項式定理求 99^4 及 999^3.

249. 係數之性質 由是考究二項展開式中係數之性質.

先將二項式定理,記如下.

$$(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_rx^r+\cdots\cdots+c_nx_n,$$

但 $\quad c_0=c_n=1,\ c_1=c_{n-1}=n,\ c_r=c_{n-r}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}.$

(I) 於上之公式設 $x=1$ 則

$$2^n=c_0+c_1+c_2+\cdots\cdots+c_r+\cdots\cdots+c_n.$$

故 $(1+x)^n$ 展開式中諸係數之和爲 2^n.

(II) 又設 $x=-1$ 則

$$(1-1)^n=c_0-c_1+c_2-c_3+\cdots\cdots,$$

$$\therefore\quad 0=(c_0+c_2+c_4+\cdots\cdots)-(c_1+c_3+c_5+\cdots\cdots).$$

故二項展開式中奇數項諸係數之和等於偶數項

諸係數之和.

〔III〕 因 $c_r=c_{n-r}$ 〔246 款〕 故二項式定理可記爲次之二式.

$$(1+x)^n=c_0+cx+c_2x^2+\cdots\cdots+c_rx^r+\cdots\cdots+c_nx^n,$$

又 $$(1+x)^n=c_n+c_{n-1}x+c_{n-2}x^2+\cdots\cdots$$
$$+c_{n-r}x^r+\cdots\cdots+c_1x^{n-1}+c_0x^n.$$

將兩式之相當邊相乘,而右邊兩級數之積中,其 x^n 之係數等於

$$c_0^2+c_1^2+c_2^2+\cdots\cdots+c_n^2.$$

由是 $$c_0^2+c_1^2+\cdots\cdots+c_r^2+\cdots\cdots+c_n^2.$$

即等於 $$(1+x)^n\times(1+x)^n$$ 〔見 272 款〕

即 $(1+x)^{2n}$ 中 x^n 之係數,而此係數爲 $\frac{(2n)!}{n!n!}$.

故 $(1+x)^n$ 展開式中諸係數之平方之和等於 $\frac{(2n)!}{n!n!}$.

〔例 1〕 證 $c_1+2c_2+3c_3+\cdots\cdots+rc_r+\cdots\cdots+nc_n=n2^{n-1}$,

$$c_1+2c_2+3c_3+\cdots\cdots+rc_r+\cdots\cdots+nc_n$$

$$=n+2.\frac{n(n-1)}{1.2}+3.\frac{n(n+1)(n-2)}{1.2.3}+\cdots\cdots$$

$$+r.\frac{n!}{r!(n-r)!}+\cdots\cdots+n=n\Big\{1+(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}+\cdots$$

$$+\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}+\cdots\cdots+1\Big\}=n(1+1)^{n-1}=n2^{n-1}.$$

〔例 2〕 證 $c_0-\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{3}c_2-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{c_n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$,

$$c_0-\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{3}c_2-\frac{1}{4}c_3+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{c_n}{n+1}.$$

$$=1-\frac{1}{2}n+\frac{1}{3}\frac{n(n-1)}{1.2}-\frac{1}{4}\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\cdots\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n+1}\left\{(n+1)-\frac{(n+1)n}{1.2}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\right.$$

$$\left.-\cdots\cdots+(-1)^n\right\}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\left\{1-(n+1)+\frac{(n+1)n}{1.2}\right.$$

$$\left.-\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\right\}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}(1-1)^{n+1}=\frac{1}{n+1}.$$

250. 異因數之連乘積 求n個二項因數$x+a,x+b,x+c$等之連乘積.

此例以用次之記法為便.

每次取一個文字.其所得之和為 $a+b+c+\cdots\cdots$.以S_1記之.

又每次取兩個文字.其所得一切積之和為 $ab+ac+bc+\cdots\cdots$.以S_2記之.

又括言之.每次取r個文字.其所得一切積之和.以S_r記之.

今由$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\cdots\cdots$之諸二項因數中各取其一個文字相乘.可得連乘積之一項.逐次如此.可得連乘積之一切項.

今由各因數取x.其方法祇有一種.故x^n為連乘積之一項.

又由$a,b,c\cdots\cdots$取其任意之一文字.而由所餘$n-1$因數取x.如是得$ax^{n-1},bx^{n-1},cx^{n-1}\cdots\cdots$諸項.集之則為$S_1x^{n-1}$.

又由$a,b,c\cdots\cdots$取其任意之二文字.而由所餘$n-2$因

數取 x.如是,得 abx^{n-2}, acx^{n-2}……諸項,集之則爲 S_2x^{n-2}.

又括言之,由 a, b, c……取其任意之 r 文字,而由所餘 $n-r$ 因數取 x.如是得 S_rx^{n-r}.

由是 $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\cdots\cdots$

$$=x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+\cdots\cdots+S_rx^{n-r}+\cdots\cdots$$

但末項爲 a, b, c……等一切文字之積,卽 $abcd$……

若 a, b, c 等之符號變,則 S_1, S_3, S_5……之符號恆從之而變,然 S_2, S_4, S_6……之符號仍不變.

由是 $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\cdots\cdots$

$$=x-S_1x^{n-1}+Sx^{n-2}-S_3x^{n-3}+\cdots\cdots$$

$$+(-1)^rS_rx^{n-r}+\cdots\cdots+(-1)^nabcd\cdots\cdots$$

251. 多項式定理 依 22 款之法,求 $(a+b+c+\cdots\cdots)^n$ 之展開式.

$(a+b+c+\cdots\cdots)(a+b+c+\cdots\cdots)(a+b+c+\cdots\cdots)\cdots\cdots$ 之連乘積,爲第一因數之各項,與第二因數之各項,與第三因數之各項,等相乘所得諸積之和,若因數之數爲 n,則所求展開式之各項當爲 n 次,故各項不得不爲 $a^rb^sc^t$……之形,但 r, s, t……爲零或正整數,且 $r+s+t+\cdots\cdots=n$.

然欲作 $a^r\,b^s\,c^t$……項,可由 n 因數之任意之 r 因數取 a.再由所餘 $n-r$ 因數中任意之 s 因數取 b 又由所餘之 $n-r-s$ 因數中任意之 t 因數取 c.逐次如此,可取得全項.而由 n 因數中任意之 r 因數取 a.其所能取之次數爲 ${}_nC_r$ 種.又由 $n-r$ 因數中任意之 s 因數取 b.其所能取之次數爲 ${}_{n-r}C_s$ 種.又由 $n-r-s$ 因數中任意之 t 因數取 c.其所能取之次數爲 ${}_{n-r-s}C_t$ 種.餘倣此.由是.

可得 $a^rb^sc^t\cdots\cdots$ 項之係數,卽在所求之展開式內此項之係數爲

$$ {}_nC_r\times{}_{n-r}C_s\times{}_{n-r-s}C_t\times\cdots\cdots\cdots\cdots $$

卽 $$\frac{n!}{r!(n-r)!}\times\frac{(n-r)!}{s!(n-r-s)!}\times\frac{(n-r-s)!}{t!(n-r-s-t)!}\times\cdots\cdots$$

$$=\frac{n!}{r!s!t!\cdots\cdots}.$$

由是在 $(a+b+c+\cdots\cdots\cdots\cdots)^n$.

展開式中之公項爲

$$\frac{n!}{r!s!t!\cdots\cdots}a^rb^sc^t\cdots\cdots\cdots\cdots$$

但 $r, s, t\cdots\cdots$ 爲零,或爲正整數,而 $r+s+t+\cdots\cdots=n$.

〔例 1〕 求 $(a+b+c)^3$ 中 abc 之係數.

今 $n=3, r=s=t=1$. 故所求之係數爲 $\frac{3!}{1!1!1!}=6$.

〔例 2〕 求 $(a+b+c)^5$ 中 a^4b, a^3b^2 及 a^2b^2c 之係數.

所求之係數爲 $\frac{5!}{4!1!}a^4b$, $\frac{5!}{3!2!}a^3b^2$ 及 $\frac{5!}{2!2!1!}a^2b^2c$ 之係數,卽 5, 10 及 30.

問題 LXXII.

證以下各題,但 $c_0, c_1, c_2\cdots\cdots\cdots$ 爲在 $(1+x)^n$ 展開式中 $x^0, x^1, x^2,\cdots\cdots\cdots$ 之係數.

1. $c_1-2c_2+3c_3-\cdots\cdots\cdots+(-1)^{n-1}nc_n=0$.

2. $c_0-2c_1+3c_2-\cdots\cdots\cdots+(-1)^n(n+1)c_n=0$.

3. $c_0+\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{3}c_2+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n+1}c_n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

4. $\dfrac{c_1}{c_0}+2\dfrac{c_2}{c_1}+3\dfrac{c_3}{c_2}+\cdots\cdots+n\dfrac{c_n}{c_{n-1}}=\dfrac{1}{2}n(n+1).$

5. $\dfrac{c_0}{1}+\dfrac{c_2}{3}+\dfrac{c_4}{5}+\dfrac{c_6}{7}+\cdots\cdots=\dfrac{2^n}{n+1}.$

6. $c_0+c_1x+2c_2x^2+\cdots\cdots\cdots+rc_rx^r\cdots\cdots\cdots+nc_nx^n$

$$=1+nx(1+x)^{n-1}.$$

7. $c_0c_1+c_1c_2+c_2c_3+\cdots\cdots+c_{n-1}c_n=\dfrac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}.$

8. $c_0c_2+c_1c_3+c_2c_4+\cdots\cdots+c_{n-2}c_n=\dfrac{(2n)!}{(n+2)!(n-2)!}.$

9. 證 $c_0^2-c_1^2+c_2^2-\cdots\cdots+(-1)^nc_n^2$, 若 n 爲奇數則等於0. 若 n 爲偶數則等於 $\dfrac{n!}{(\frac{1}{2}n)!(\frac{1}{2}n)!}$.

10. $c_0^2+2c_1^2+3c_2^2+\cdots\cdots+(n+1)c_n^2=\dfrac{(n+2)(2n-1)!}{(n-1)!n!}.$

11. $c_1^2+2c_2^2+2c_3^2+\cdots\cdots+nc_n^2=\dfrac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}.$

12. $c_1-\dfrac{1}{2}c_2+\dfrac{1}{3}c-\cdots\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}c_n$

$$=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n}.$$

13. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{c_1}{x+1}+\dfrac{c_2}{x+2}-\cdots\cdots\cdots+(-1)^n\dfrac{c_n}{x+n}$

$$=\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\cdots\cdots(x+n)}.$$

14. 證若 $(1+x)^n$ 之展開式中有中央之一項則其係數爲偶數.

252. 就任意之指數證二項式定理　在247款設 n 爲任意之正整數,已證得,

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}x^r+\cdots\cdots\cdots$$

上之結果,惟 x 小於一時,n 之數值,始無論如何皆能合理。

又 n 爲正整數,其右邊之級數,雖至第 $n+1$ 項止,然 n 非正整數,則此級數決無底止,何則,因 n 非正整數則 $n, n-1, n-2\cdots\cdots$ 等,無一數爲零故也。

253. 分指數及負指數之例　指數非正整數,則在證二項式定理之前,當舉其應用之二三例。

〔例1〕 依二項式定理展開 $(1+x)^{-1}$ 於公式,設 $n=-1$,則

$$(1+x)^{-1}=1+(-1)x+\frac{(-1)(-2)}{1.2}x^2$$

$$+\frac{(-1)(-2)(-3)}{1.2.3}x^3+\cdots+\frac{(-1)(-2)\cdots(-r)}{r!}x^r+\cdots\cdots$$

$$=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots\cdots+(-1)^rx^r+\cdots\cdots\cdots$$

〔例2〕 展開 $(1+x)^{-2}$.

$$(1+x)^{-2}=1+(-2)x+\frac{(-2)(-3)}{1.2}x^2$$

$$+\frac{(-2)(-3)(-4)}{1.2.3}x^3+\cdots+\frac{(-2)(-3)(-4)\cdots(-r-1)}{r!}x^r$$

$$+\cdots\cdots=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots\cdots+(-1)^r(r+1)x^r+\cdots\cdots\cdots$$

〔例3〕 展開 $(1+x)^{-3}$

$$(1+x)^{-3}=1+(-3)x+\frac{(-3)(-4)}{1.2}x^2+\frac{(-3)(-4)(-5)}{1.2.3}x^3$$

$$+\cdots\cdots+\frac{(-3)(-4)(-5)\cdots\cdots(-r-2)}{r!}x^r+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{1.2}\{1.2-2.3x+3.4x^2-4.5x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^r(r+1)(r+2)x^r+\cdots\cdots\cdots\cdots\}.$$

〔例4〕　展開$(1-x)^{-\frac{1}{2}}$

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+(-\tfrac{1}{2})(-x)+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1.2}(-x)^2$$

$$+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{1.2.3}(-x)^3\cdots+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{1}{2}-r+1)}{r!}$$

$$(-x)^r+\cdots\cdots=1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+\frac{1.3.5}{2.3.6}x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{1.3.5\cdots\cdots(2r-1)}{2.4.6\cdots\cdots2r}x^r+\cdots\cdots$$

254. 阿列爾(Euler)氏之證明　二項式定理,更有Euler氏之證明.

因欲使二項式之級數單簡,故將

$1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$之級數,以$f(n)$顯之.

因而　$$f(n)=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(1)$$

$$f(m)=1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

及 $$f(m+n)=1+(m+n)x+\frac{(m+n)(m+n-1)}{1.2}x^2+\cdots(3)$$

將(1)式及(2)式右邊之級數相乘,而將其積依x之遞升方乘列之,則其結果,無論m及n之值如何,而式中所含之m及n,皆爲同樣之形,然m及n爲正整數,則知$f(m)$爲$(1+x)^m$, $f(n)$爲$(1+x)^n$. 故在此例,$f(m)$與$f(n)$之積爲$(1+x)^{m+n}$. 又因$m+n$爲正整數,故$(1+x)^{m+n}$爲$f(m+n)$. 是故m與n爲正整數,則$f(m)\times f(n)$之積爲$f(m+n)$. 而積之形無論m與n之值如何,恆相同,故m及n之值,無論爲何種數,恆知

$$f(m)\times f(n)=f(m+n)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

而將(a)式屢代之,得

$$f(m)\times f(n)\times f(p)\times\cdots\cdots=f(m+n)\times f(p)\times\cdots\cdots$$
$$=f(m+n+p+\cdots\cdots)$$

令$m=n=p=\cdots\cdots=\frac{r}{s}$,但$r$及$s$爲正整數

$$f\left(\frac{r}{s}\right)\times f\left(\frac{r}{s}\right)\times \text{至 } n \text{ 因數}=f\left(\frac{r}{s}+\frac{r}{s}+\cdots\cdots\text{至 } s \text{ 項}\right)$$

$$\therefore\qquad \left\{f\left(\frac{r}{s}\right)\right\}^s=f(r).$$

然因r爲正整數,故$f(r)=(1+x)^r$.

$$\therefore\quad (1+x)^r=\left\{f\left(\frac{r}{s}\right)\right\}^s\qquad\therefore\quad (1+x)^{\frac{r}{s}}=f\left(\frac{r}{s}\right).$$

此指數原爲任意之正分數,是即就分指數證明二項式之定理也.

今二項式之定理,對於任意之正指數合理,故此定理,對於負指數亦合理,何則,由(a)式,

$$f(-n)\times f(n)=f(-n+n)=f(0).$$

由是易知$f(0)$爲1.故

$$f(-n)=\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{(1+x)^n}[n\text{爲正故}]=(1+x)^{-n}$$

是故 $(1+x)^{-n}=f(-n)$ 是卽就任意之負指數證明二項式之定理也.

〔例1〕 n爲任意之正整數,求證在$(1-x)^{-n}$及$(1+x)^{2n-2}$展開式中兩x^{n-1}之係數相等.

是等之項爲

$$\frac{(-n)(-n-1)\cdots\cdots(-n-n+2)}{(n-1)!}(-x)^{n-1}$$

$$\text{及}\ \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}x^{n-1}.$$

而前者爲

$$\frac{n(n+1)\cdots\cdots(2n-2)}{(n-1)!}x^{n-1}=\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}x^{n-1}.$$

〔例2〕 依二項式定理求$\sqrt{101}$.

$$\sqrt{101}=\sqrt{\{100(1+\tfrac{1}{100})\}}=10(1+\tfrac{1}{100})^{\frac{1}{2}}$$

$$=10\left\{1+\frac{1}{2}\times.01+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{1.2}\times.0001+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1.2.3}\times.000001+\cdots\cdots\right\}$$

$$=10\{1+.005-.0000125-.0000000625\}=10.04987462\cdots\cdots$$

〔例3〕 將$(1-2x+4x^2)^{-2}$之展開式依x之遞昇方乘列之,求x^3之係數.

$$\because\quad (1-2x+4x^2)^{-2}=\{1-2x(1-2x)\}^{-2}.$$

$$=1+(-2)\{-2x(1-2x)\}+\frac{(-2)(-3)}{1.2}\{-2x(1-2x)\}^2$$

$$+\frac{(-2)(-3)(-4)}{1.2.3}\{-2x(1-2x)\}^3+\cdots\cdots\cdots$$

$$=1+4x(1-2x)+12x^2(1-2x)^2+32x^3(1-2x)^3+\cdots\cdots\cdots$$

$$=1+4x+4x^2-16x^3+\cdots\cdots\cdots$$

〔例 4〕 展開 $(1+x+x^2+x^3)^{-2}$ 爲 x 遞昇方乘之數.則 x^3 及 x^7 之係數爲零.求證.

$$(1+x+x^2+x^3)^{-2}=\left(\frac{1-x^4}{1-x}\right)^{-2}=(1-x)^2(1-x^4)^{-2}$$

$$=(1-2x+x^2)(1+2x^4+3x^8+4x^{12}+\cdots\cdots).$$

255. 指數式之定理 指數式之定理者.將 a^x 展開爲 x 之遞昇方乘之級數之理也.

以 $f(m)$ 顯級數 $1+\frac{m}{1!}+\frac{m^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{m^r}{r!}+\cdots\cdots\cdots$

則 $f(1)=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots\cdots$

此級數之右邊常以 e 顯之.然易知 e 在 2 與 3 之間.何則.因 e 大於 2. 而小於

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots\cdots\cdots$$

卽小於 3 故也.

e 之實值.可求得 2.71828…………

可從下記三個級數

$$f(m)=1+m+\frac{m^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{m^r}{r!}+\cdots\cdots\cdots$$

$$f(n)=1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{n^s}{s!}+\cdots\cdots\cdots$$

及 $f(m+n)=1+(m+n)+\frac{(m+n)^2}{2!}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$+\frac{(m+n)^p}{p!}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$ 察之.

於 $f(m)\times f(n)$ 中 $m^r n^s$ 之係數為 $\frac{1}{r!s!}$ 於 $f(m+n)$ 中 $m^r n^s$ 之項唯在 $\frac{(m+n)^{r+s}}{(r+s)!}$ 之間.依指數為正整數之二項式定理.其係數為 $\frac{1}{(r+s)!}\cdot\frac{(r+s)!}{r!s!}$ 卽 $\frac{1}{r!s!}$.

由是 m 及 n 無論為如何數.其在 $f(m)\times f(n)$, 及 $f(m+n)$ 內兩 $m^r n^s$ 之係數.無論 r 與 s 之值如何皆相同.故 m 與 n 之值不拘如何.恆得

$$f(m)\times f(n)=f(m+n)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (a)$$

以 (a) 式屢代之則

$$f(m)\times f(n)\times f(p)\times\cdots\cdots=f(m+n)\times f(p)\times\cdots\cdots$$
$$=f(m+n+p+\cdots\cdots\cdots\cdots)$$

由是 x 為任意之正整數.由是

$f(1)\times f(1)\times f(1)$ 至 x 因數 $=f(1+1+1+$ 至 x 項)

$\therefore\ \{f(1)\}^x=f(x)$ 卽 $e^x=f(x)$.

次設 x 為正分數 $\frac{p}{q}$,但 p 與 q 為正整數.

然 $f\left(\frac{p}{q}\right)\times f\left(\frac{p}{q}\right)\times f\left(\frac{p}{q}\right)\times\cdots\cdots$ 至 q 因數.

$=f\left(\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\cdots\cdots\right.$ 至 q 項$\left.\right)$,

$\therefore\ \left\{f\left(\frac{p}{q}\right)\right\}^q=f(p)=e^p$　〔p 為正整數〕,

$$\therefore \qquad f\left(\frac{p}{q}\right)=e^{\frac{p}{q}}.$$

由是x爲正恆得$e^x=f(x)$.

終設x爲負令等於$-y$.

然由(a)式$f(-y)\times f(y)=f(0)$,

而$f(0)$等於1.

由是 $f(-y)=\dfrac{1}{f(y)}=\dfrac{1}{e^y}$ [y爲正,故]$=e^{-y}$.

故x之値不拘如何.

$$e^x=f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\cdots$$

而 $a=e^\lambda$ 時 $a^x=e^{\lambda x}$

$$\therefore \quad a^x=1+x\lambda+\frac{x^2\lambda^2}{2!}+\frac{x^3\lambda^3}{3!}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

但λ爲$a=e^\lambda$.

問題 LXXIII.

1. 展開$(1-x)^{-4}$至五項.

2. 展開$(1+2x)^{-4}$至五項.

3. 展開$(2-x)^{-3}$至六項.

4. 展開$(1-3x)^{-\frac{2}{3}}$至五項.

5. 展開$(1-5x)^{\frac{3}{5}}$至五項.

求下記各式展開之公項[6至12].

6. $(1-x)^{-5}$. **7.** $(1-x)^{-n}$. **8.** $(1-x)^{-\frac{3}{2}}$.

9. $(1+x)^{\frac{3}{2}}$. **10.** $(1+x)^{-\frac{2}{3}}$. **11.** $(1-2x)^{-\frac{5}{3}}$.

12. $(1+3x)^{-\frac{4}{3}}$.

13. 從 x 之遞昇方乘展開 $\dfrac{a}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ 求 x^6 之係數.

14. 展開 $(1-3x)^{\frac{2}{3}}$ 至五項.並用簡式書其公項.

於下二式之展開內.求 x^3 及 x^4 之係數.

15. $(1-2x+3x^2)^{-1}$.　　**16.** $(1-x+3x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

17. 求 $(1+3x)^{\frac{7}{2}}$ 之第一負項.

18. 求 $(1+3x)^{\frac{19}{6}}$ 之第一負項.

19. 依二項式定理.求次之各式至小數四位.

(1) $\sqrt{100}$,　(2) $\sqrt[3]{13}$,　(3) $\sqrt[4]{630}$.

20. 於次式之展開內.求 x^6 及 x^8 之係數.

$$(1+x+x^2+x^3)^3.$$

21. 從 x 之遞昇方乘展開 $(1+x+x^2)^{-1}$ 證 x^2 及 x^6 之係數爲零.

22. 從 x 之遞昇方乘展開 $(1+x+x^2+x^3+x^4)^{-2}$ 證 x^4 及 x^9 之係數爲零.

第二十七編

對數

256. 定義 作某數之若干乘方,使等於他一數,則指若干乘方之指數謂之他一數之某底對數(即以某數爲底之對數).

如 $a^x=y$ 則 x 爲 y 之 a 底對數,以 $x=\log_a y$ 顯之.

(按,依舊譯諸書用 $x=$對$_a y$ 顯之亦可,log 即 logarithm 之略,譯爲對數.)

由是推究對數之基本性質,並考對數之求法,因欲使其計算簡便,故多用近似法,今示如次.

257. 對數之性質 下所示者爲對數之基本性質.

(1) 無論 a 之數值如何,恆得 $a^0=1$,故知 $\log_a 1=0$ 即無論對數之底如何,1 之對數皆爲 0.

(2) 若 $\log_a x=p$ 及 $\log_a y=q$.

則 $x=a^p$ 及 $y=a^q$.

$\therefore\quad x\times y=a^p\times a^q=a^{p+q}$,

$\therefore\ \log_a(xy)=p+q=\log_a x+\log_a y$.

同樣可證明 $\log_a(xyz\cdots)=\log_a x+\log_a y+\log_a z+\cdots\cdots$

即積之對數爲其因數之對數之和.

(3) 若 $\log_a x=p$ 及 $\log_a y=q$.

則 $x=a^p$ 及 $y=a^q$,

$\therefore\quad x\div y=a^p\div a^q=a^{p-q}$,

$\therefore\ \log_a(x\div y)=p-q=\log_a x-\log_a y$.

即商之對數爲被除數及除數之對數之代數差.

(4) 若 $x=a^p$ 則無論 m 之數值如何.

$$x^m=a^{pm}.$$

是故 $\log_a x^m=\log_a a^{pm}=p\times m=\log_a x\times m.$

即某數任意之乘方.其對數爲某數之對數與其方指數之積.

(5) $\log_a x=p$ 及 $\log_b x=q,$

然 $x=a^p,$ 及 $x=b^q,$

由是 $a^p=b^q,$

故 $a=b^{\frac{q}{p}}$ 及 $b=a^{\frac{p}{q}},$

是故 $\log_b a=\frac{q}{p},$ 及 $\log_a b=\frac{p}{q},$

$$\therefore\quad \log_b a\times\log_a b=\frac{q}{p}\times\frac{p}{q}=1.$$

又由 $q=p\log_b a$

得 $\log_b x=\log_a x\times\log_b a.$

由是任意數之 b 底對數.等於以常乘數 $\log_b a$ 乘本數之 a 底對數.

〔例 1〕 求 $\log_2 8$, $\log_8 2$, $\log_{10}1000$, $\log_{10}\sqrt[3]{100}$

$8=2^3,\ 2=8^{\frac{1}{3}},\ 1000=10^3,\ \sqrt[3]{100}=10^{\frac{2}{3}}.$

故 $\log_2 8=3,\ \log_8 2=\frac{1}{3},\ \log_{10}1000=3,\ \log_{10}\sqrt[3]{100}=\frac{2}{3}.$

〔例 2〕 知 $\log_{10}2=.3010300$ 及 $\log_{10}3=.4771213$

求 $\log_{10}6$, $\log_{10}40$, $\log_{10}12$, $\log_{10}15$, $\log_{10}\sqrt[3]{2880}$

$\log_{10}6=\log_{10}(2\times3)=\log_{10}2+\log_{10}3$

$=.3010300+.4771213=.7781513.$

$$\log_{10}40=\log_{10}(4\times10)=\log_{10}2^2+\log_{10}10$$
$$=2\times.3010300+1=1.6020600.$$
$$\log_{10}12=\log_{10}(2^2\times3)=2\log_{10}2+\log_{10}3$$
$$=2\times.3010300+.4771213=1.0791813.$$
$$\log_{10}15=\log_{10}\left(\frac{3\times10}{2}\right)=\log_{10}10+\log_{10}3-\log_{10}2$$
$$=1+.4771213-.3010300=1.1760913.$$
$$\log_{10}\sqrt[3]{2880}=\tfrac{1}{3}\log_{10}2880=\tfrac{1}{3}\log_{10}(10\times2^5\times3^2)$$
$$=\tfrac{1}{3}(\log_{10}10+5\log_{10}2+2\log_{10}3)$$
$$=\tfrac{1}{3}(1+1.5051500+.9542426)=1.1531308.$$

問題 LXXIV.

求以下各對數(1至2).

1. $\log_{10}1$. **2.** $\log_{10}10000$.

3. $\log_{10}.01$. **4.** $\log_{10}.001$.

5. $\log_{10}\sqrt[2]{.01}$. **6.** $\log_{10}\sqrt[5]{100}$.

7. $\log_2 32$. **8.** $\log_4 32$.

9. $\log_{\sqrt{2}}2$. **10.** $\log_4 8\sqrt{2}$.

11. $\log_9 3\sqrt{3}$. **12.** $\log_4\sqrt[7]{64}$.

13. 知 $\log_{10}2=.3010300$ 及 $\log_{10}3=.4771213$ 求 $\log_{10}\frac{2}{3}$, $\log_{10}60$, $\log_{10}4500$ 及 $\log_{10}\sqrt[5]{25}$

14. 知 $\log_{10}3=.4771213$ 及 $\log_{10}5=.6989700$ 求 $\log_{10}3.75$, $\log_{10}1.28$ 及 $\log_{10}\frac{3^3\times5^3}{2^7}$

15. 知 $\log_{10}5=.6989700$ 及 $\log_{10}6=.7781513$ 求 $\log_{10}324$, $\log_{10}1.458$ 及 $\log_{10}.00432$.

16. 知 $\log_{10}5=.6989700$ 及 $\log_{10}7=.8450980$ 求 $\log_{10}1.25$, $\log_{10}1.28$ 及 $\log_{10}\frac{2^3\times7^4}{5^5}$.

17. 知 $\log_{10}12=1.0791813$ 及 $\log_{10}18=1.2552726$ 求 $\log_{10}8$ 及 $\log_{10}9$.

18. 知 $\log_{10}24=1.3802113$ 及 $\log_{10}36=1.5563026$ 求 $\log_{10}72$ 及 $\log_{10}5/432$.

258. 對數級數　$a=e\lambda$ 卽 $\lambda=\log_e a$　$a^x=e\lambda^x=e^{x\log_e a}$.

故依 255 款

$$a^x=e^{x\log_e a}=1+x\log_e a+\frac{1}{2!}(x\log_e a)^2+\frac{1}{3!}(x\log_e a)^3+\cdots\cdots$$

今設　$a=1+y$　則

$$(1+y)^x=1+x\log_e(1+y)+\frac{1}{2!}\{x\log_e(1+y)\}^2+\cdots\cdots\cdots$$

y之絕對值小於1則可由二項式定理展開$(1+y)^x$

然　$$1+xy+\frac{x(x-1)}{1.2}y^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}y^3+\cdots\cdots$$

$$=1+x\log_e(1+y)+\frac{1}{2!}\{x\log_e(1+y)\}^2+\cdots\cdots\cdots$$

故使在方程式兩邊中x之係數等.則得

$$\log_e(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\cdots\cdots\cdots$$

是名爲對數級數.

259. 對數之算法　凡求任意數之對數略近值.若欲簡便.則不用前款之對數級數.須求其速斂之級數.

於對數級數

$$\log_e(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

變y之符號,則得

$$\log_e(1-y)=-y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}-\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

故 $\log_e\frac{1+y}{1-y}=\log_e(1+y)-\log_e(1-y)$[257 款 III]

$$=\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\cdots\cdots\right)+\left(y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4}+\cdots\cdots\right)$$

$$\therefore\quad \log_e\frac{1+y}{1-y}=2\left(y+\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+\cdots\cdots\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

設 $\frac{1+y}{1-y}$ 爲 $\frac{m}{n}$ 則 $\frac{m-n}{m+n}$ 爲 y. 從(3)式得

$$\log_e\frac{m}{n}=2\left\{\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\right\}\cdots\cdots\cdots(4)$$

於是計算e底對數較爲簡便,卽如次

於公式(4).設 $m=2$, $n=1$. 則

$$\log_e 2=2\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\cdots\cdots\cdots\right\},$$

由是易得 $\log_e 2=.693147\cdots\cdots\cdots$

由旣求得 $\log_e 2$ 故

由(4)式得 $\log_e\frac{3}{2}=2\left\{\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\ \frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\ \frac{1}{5^5}+\cdots\right\},$

$$\therefore\quad \log_e 3-\log_e 2=.405465\cdots\cdots\cdots$$

由是 $\log_e 3=\log_e 2+.405465\cdots\cdots\cdots$

$$=.693147\cdots\cdots+.405465\cdots\cdots=1.09861.$$

逐次如此,則任意數之e底對數能依所求程度求

其稍精密之數.

260. 「納白爾」(Napierian)對數　e底對數.謂之「納白爾」對數.

凡高等數理所用之對數.皆爲「納白爾」對數.然計算近似數所用之對數恆爲10底對數.其理則10底對數同於常數進位之底.故此對數較他對數稍密.因而10底對數名爲常用對數.

求e底對數之法.旣示於前.而e底對數旣能求得.則以一定不易之因數 $\log_{10}e$, 卽$\frac{1}{\log_e 10}$, 乘之.則得10底對數.此一定不易之因數.名爲對數率.其值爲.43429………

常用對數

261. 常用對數　以下所論之對數.皆爲常用對數.故 $\log_{10}a$ 單記爲 $\log a$. 其10底從省.

若兩數之數目字全然相同.惟小數點之數目字異.則其一數.必等於以10之某乘方乘他數.由是由275款II.知此等兩數之對數差.恆爲整數.

如　$\log 421.5=\log 4.215+\log 100=2+\log 4.215.$

又已知　　$\log 2=.30103$ 則

$$\log .02=\log(2\div 100)=.30103-2.$$

依上之性質.常用對數之小數部分.恆以正數記之.如 $\log .02$ 不記爲 -1.69897 而記爲 $\bar{2}.30103$

卽此(−)符號.唯屬於對數之整數部分.故以此記於其數字之上.

定義　記對數之法,在令其小數部分爲正,故此對數之小數部分,稱爲假數,而整數部分名爲指標.

262. 指標　任何數之對數指標,皆可由觀察書出.

先設此數大於一,且其整數部分之位數爲 n,則易知此數雖小於 10^n,然必不小於 10^{n-1},故此數之對數,在 n 與 $n-1$ 之間,從而此對數,爲加小數若干於 $n-1$,所得之數.

由是,大於一諸任意數之對數指標,恆較其整數部分之數字少1.

如 235 雖大於 10^2,然必小於 10^3,是故 $\log 235$ 爲 $2+$ 小數,故指標爲2.

次設此數小於一,且其第一有效數字前之零(卽0)數爲 n,則易知此數雖小於 10^{-n},然不小於 10^{-n-1}.

由是對數之小數部分須爲正,故此數之對數爲 $-(n+1)+$ 小數,則其指標爲 $-(n+1)$.

由是,小於一之諸數,若以小數顯之,則其對數之指標爲負,且較在第一有效數字前之零數多一.

如 .02 雖大於 10^{-2},然必小於 10^{-1}.

由是 $\log .02=-2+$ 小數,故其指標爲 -2.

又 .00042 雖大於 10^{-4},然必小於 10^{-3}.

故 $\log .00042=-4+$ 小數,故指標爲 -4.

263. 反證　依前款之法反之,若已知任意數之對數指標假數,及其次序,則由指標可知小數點之位置.

如知 $\log 1.1467=.0594498$ 則知以 3.0594498 爲對數之數爲 1146.7 又可知以 $\overline{4}.0594498$ 爲對數之數爲 .00011467.

264. 對數表　將由 1 至 99999各數之對數計算至小數七位,謂之「七位對數表」.然計算上,多用五位之對數表已足.

凡對數表,均祇載假數.因如前款所述之指標,均能由視察求出故也.

對數之用法有二.一爲有眞數求對數.一爲有對數求眞數.

I. 有眞數求對數.

若眞數之位數不多於五,則其對數俱載在表中.故能徑然檢得.若爲六位數且皆爲有效數字,則欲求其對數不得不依比例差之原理.所謂比例差之原理云者,卽二數之差與其各數比較,極其微小,此二數之差,殆與其對數之差成比例,是也.

欲利用比例差之原理,故先舉一例以示其方法如何.

〔例〕求 1.14673 之對數.

檢表得 log 1.1467＝.0594498 及 log 1.1468＝.0594877 因知兩對數之差爲.0000379 而 1.14673 與 1.1467 之差爲 1.1468 與 1.1467 之差之 $\frac{3}{10}$.

由是欲求 log1.14673 則在 log1.1467 上,加 log 1.1467 與 log1.1468 之差之十分之三,卽

$$.0000379\times\tfrac{3}{10}=.0000113$$

由是　log1.14673＝.0594498＋.0000113＝.0594611

II. 有對數求眞數.

如有對數 2.0594611 求其眞數.

檢表得 log1.1467＝.0594498 及 log1.1468＝.0594877 而

所設對數中之假數.在是等二個假數之間.

而.0594498 與所設對數之差爲.0000113 而 1.1467 及 1.1468 之對數之差爲.0000379.

由是依比例差之原理.則以 .0594611 爲對數之數.如次.

$$1.1467+\frac{113}{379}\times.0001=1.1467+.00003=1.14673.$$

〔注意〕於比例差之近似法.其所取得之數字唯有一個.

如是 .0594611 爲 log 1.14673 故 2.0594611 爲 log 114.673.

〔例〕求 $\sqrt[3]{100}$ 但已知 $\log 4.6415=.6666584$, $\log 4.6416=.6666677$.

$$\log\sqrt[3]{100}=\tfrac{1}{3}\log 100=\tfrac{2}{3}=.6666666,$$

今 $$\log 4.6416=.6666677,$$

$$\log 4.6415=.6666584.$$

由是 $$\log\sqrt[3]{100}-\log 4.6415=.0000082,$$

及 $$\log 4.6416-\log 4.6415=.0000093.$$

故 $$\sqrt[3]{100}=4.6415+\tfrac{82}{93}\div.0001=4.64159.$$

複利及年金

265. 複利法及年金法 長時間之複利及有定期之年金.苟用對數.皆易求其近似值.

此種問題.不外下記三種(學者於算術之利息及扣算中.已經學習.最易通曉).

I. 於複利中.知本金與利率與年數.求其本利合計

設 P 爲本金, n 爲年數, r 爲一年間一圓之利息, A

爲所求之本利合計.

然一年間P之利息當爲 Pr. 故在第一年之末,其本利合計當爲 $P(1+r)$.

此 $P(1+r)$,爲第二年當附利息之本利,故在第二年之末,其本利合計爲 $[P(1+r)](1+r)$ 卽 $P(1+r)^2$.

同樣,在第三年之末,其本利合計當爲 $P(1+r)^3$.

而在第 n 年之末,其本利合計當爲 $P(1+r)^n$.

故 $A=P(1+r)^n$.

〔例〕若利息以半年算入本金,則易知在第 n 年之末,其本利合計爲 $P\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}$.

〔例〕年息五分,求25年間本金 100 圓之本利合計

100圓之利息爲 5 圓,故 1 圓之利息爲 $\frac{1}{20}$ 圓.

由是,在第一年之末,每圓之本利合計爲 $(1+\frac{1}{20})$.

故在25年之末,每圓之本利合計爲 $(1+\frac{1}{20})^{25}$ 圓.

由是,所求之本利合計A,當爲 $100(1+\frac{1}{20})^{25}$ 圓.

是故　$\log A=\log 100+25\log\frac{21}{20}$.

而檢表得　$\log 21=1.3222193,\ \log 20=1.3010300$.

由是　$\log A=2+25(1.3222193-1.3010300)$

$=2.5297325$.

而檢表得　$\log 338.63=2.5297254$,

及　$\log 338.64=2.5297383$.

由是　$\log A-\log 333.63=.0000071$,

及　$\log 338.64-\log 338.63=.0000129$.

由是　$A=338.63+\frac{71}{129}\times .01$,

$=338.63+.005=338.635$.

故所求之本利合計爲 338.635 圓.

II. 知滿年限時所應支之金額,求其現價.

設 A 爲在第 n 年末所應支之金額, P 爲其現價,又每年一圓之利息爲 r 圓.然在第 n 年末, P 之本利合計當等於 A.

由是,依 I, $P=A(1+r)^{-n}$.

〔例〕以每年 5 分之利率計算,問滿百年時可支之金 1000 圓,其現價幾何.

$$P=1000(1+\tfrac{1}{20})^{-100}=1000(\tfrac{21}{20})^{-100},$$

是故 $\log P=\log 1000-100(\log 21-\log 20)$

$$=3-100(1.3222193-1.3010300)$$

$$=3-2.11893=.88107.$$

而檢表得 $\log 7.6045=.8810707.$

故所求之現價爲 7.6045 圓.

III. n 年間,每年終可支年金 A 圓,求其現價.設 1 圓之利息爲 r 圓,則依 II.

第一年年金之現價爲 $A(1+r)^{-1}$,

第二年年金之現價爲 $A(1+r)^{-2}$,

....

第 n 年年金之現價爲 $(1+r)^{-n}$,

由是年金全額之現價,如次

$$P.=A\{(1+r)^{-1}+(1+r)^{-2}+\cdots\cdots\cdots+(1+r)^{-n}\}$$

$$=A(1+r)^{-1}\frac{1-(1+r)^{-n}}{1-(1+r)^{-1}}=\frac{A}{r}\{1-(1+r)^{-n}\}.$$

〔例〕問 30 年間每年支年金 100 圓,其現價幾何,但利息爲四分.

1 圓之利息為$\frac{4}{100}$圓,故 $1+r=1.04$.

故 $P=\frac{100}{\frac{4}{100}}\{1-(1.04)^{-30}\}=2500\{1-(1.04)^{-30}\}$.

而 $\log(1.04)^{-30}=-30\log(1.04)=-30\times.0170333$
$=-.510999=\bar{1}.489001$.

檢表得 $\log 3.0832=.4890017$,故 $\bar{1}.489001$ 為 $\log .30832$.

故 $P=2500(1-.30832)=2500\times.69168=1729.2$ 圓.

問題 LXXV.

1. 已知 $\log 2=.3010300$ 書以 5.3010300 及 $\bar{5}.3010300$ 為對數之二數.

2. 知 $\log 1.9911=.2990931$ 書以 3.2990931 及 $\bar{4}.2990931$ 為對數之二數.

3. 知 $\log 46854=4.6707467$ 及 $\log 46855=4.6707559$ 求 $\log .0468546$.

4. 知 $\log 58961=4.7705648$ 及 $\log 58.962=1.7705722$ 求 $\log .00589614$.

5. 知 $\log 29=1.4623980$, $\log 19611=4.2924776$ 及 $\log 19612=4.2924997$ 求 $\sqrt[5]{29}$.

6. 知 $\log 1.9307=.2857148$ 及 $\log 1.9308=.2857373$ 求 $\sqrt[7]{100}$.

7. 知 $\log 2=.3010300$, $\log 3=.4771213$.
$\log 17187=4.2352001$ 及 $\log 17188=4.2352253$ 求 $\sqrt[5]{15}$ 至小數五位.

8. 知 $\log 3.4277=.5350028$, $\log 32483=4.5116561$ 及 $\log 32484=4.5116695$ 求 $\sqrt[3]{.034277}$ 至小數六位.

9. 知 $\log 1.05=.0211893$, $\log 1.3150=.1189258$, 及 $\log 1.3151=.1189588$. 求複利中100年間,年息五分,1圓之本利合計.

10. 知 $\log 1.04=.0170333$ 及 $\log 2=.3010300$. 以金若干圓,依複利18年間,四分之利息計算,則利息爲本金二倍以上之金額,試證明之.

11. 知 $\log 1.02=.0086002$, $\log 1.4859=.1719896$, 及 $\log 1.4860=.1720188$. 以10年間,四分之複利,利息每半年算入本金,問500圓之本利合計幾何.

12. 知 $\log 1.03=.0128372$, $\log 64186=4.8074403$ 及 $\log 64187=4.8074471$. 問在15年末可支之金1000圓,其現價若何,但以三分之複利算.

第二十八編

雜定理及雜例(立方根)

266. 定理 有 x^n-a^n 無論 n 為如何之正整數,皆能以 $x-a$ 除盡.

$x-a$, x^2-a^2, x^3-a^3,皆能以 $x-a$ 除盡,既詳於前.

蓋 $$x^n-a^n=x^n-ax^{n-1}+ax^{n-1}-a^n$$
$$=x^{n-1}(x-a)+a(x^{n-1}-a^{n-1}).$$

$x-a$ 若能除盡 $x^{n-1}-a^{n-1}$ 則此式亦能除盡
$$x^{n-1}(x-a)+a(x^{n-1}-a^{n-1}),\text{ 即 }x^n-a^n.$$

由是,若 $x-a$ 能除盡 $x^{n-1}-a^{n-1}$ 則此式亦能除盡 x^n-a^n.

然已知 $x-a$ 必能除盡 x^3-a^3.

故 $x-a$ 亦能除盡 x^4-a^4.

而 $x-a$ 能除盡 x^4-a^4 故亦能除盡 x^5-a^5.

餘倣此.

由是,如 x^n-a^n, 其 n 為任意之正整數,恆能以 $x-a$ 除盡.

$x^n+a^n=x^n-a^n+2a^n$ 故以 $x-a$ 除 x^n+a^n 則知其餘數為 $2a^n$.

故 x^n+a^n 不能以 $x-a$ 除盡.

若變 a 為 $-a$ 則 $x-a$ 為 $x-(-a)=x+a$.

又 x^n-a^n 為 $x^n-(-a)^n$ 而 $x^n-(-a)^n$,如 n 為奇數,則成 x^n+a^n,n 為偶數,則成 x^n-a^n.

由是 n 爲奇數,則

x^n+a^n 能以 $x+a$ 除盡.

而 n 爲偶數,則

x^n-a^n 能以 $x+a$ 除盡.

故 n 爲正整數,則

$x-a$ 恆能除盡 x^n-a^n.

$x-a$ 決不能除盡 x^n+a^n.

$x+a$, n 爲偶數時能除盡 x^n-a^n.

$x+a$, n 爲奇數時能除盡 x^n+a^n.

以上所述之四例,皆含於第一例,而將此諸例各加證明,學者可自試之,以資練習.

上之結果,可示其商如次

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots\cdots\cdots+a^{n-1},$$

$$\frac{x^n\pm a^n}{x+a}=x^{n-1}-x^{n-2}a+x^{n-3}a^2-\cdots\cdots\cdots\pm a^{n-1}.$$

於第二公式之兩邊,若 n 爲奇數,則取上之符號, n 爲偶數,則取下之符號.

問題 LXXVI.

求以下各式之因數〔1至8〕.

1. x^3-x^2-x+1. **2.** $x^6-x^4-x^2+1$.

3. $1-x-x^4+x^5$. **4.** $1-x^2-x^8+x^{10}$.

5. $x^2-y^2-2ax-2by+a^2-b^2$.

6. $x^2-y^2-3x-y+2$.

7. $x^2-2xy-8y^2-2x+20y-8$.

8. $a^2-b^2+c^2-f^2-2ac-2bf$.

9. 書以下各除法之商.

(1) $(x^5-y^5)\div(x-y)$,　(2) $(x^7+y^7)\div(x+y)$,

(3) $(x^3-y^3)\div(x+y)$.

10. n 為任意之正整數,則 7^n-1 能以6除盡.又 $35^{2n+1}+1$ 能以36除盡.求證.

11. 求證 $(3x^2-2x+1)^3-(2x^2+3x-5)^3$ 能以 x^2-5x+6 除盡.但不許用除法.

12. 書以 $5a+5b$ 除 $(2a+3b)^3+(3a+2b)^3$ 所得之商.

13. 以 $a+b+c$ 除 $(2a+4b-4c)^3+(a-b+7c)^3$ 所得之商.

14. 證 $(1-x)^2$ 為 $1-x-x^5+x^6$ 之一因數.

15. 證 $(1-x)^2$ 為 $1-x-x^n+x^{n+1}$ 之一因數.但 n 為任意之正整數.

16. 證 $(x-1)^2$ 為 $nx^{n+1}-(x+1)x^n+1$ 及 $x^n-nx+n-1$ 之一因數.但 n 為任意之正整數.

267. 定理　由是證明緊要之命題.

定理.於含 x 之任意有理整式.若以 f 代 x 而其式為零.則 $x-f$ 為此式之因數.

其式依 x 乘方之次序列之.

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots$$

依假設　$af^n+bf^{n-1}+cf^{n-2}+\cdots\cdots=0.$

由是　$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots$

$$=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots-(af^n+bf^{n-1}+cf^{n-2}+\cdots)$$

$$=a(x^n-f^n)+b(x^{n-1}-f^{n-1})+c(x^{n-2}-f^{n-2})+\cdots\cdots$$

然依前款 x^n-f^n, $x^{n-1}-f^{n-1}$, $x^{n-2}-f^{n-2}$ 等皆能以 $x-f$ 除盡.

是故.又 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots$能以 $x-f$ 除盡.

268. 別證　前款證明之問題,亦可得證明如次.

以$x-f$除$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}\cdots\cdots$若得不含$x$之餘數,則不能更用除法,而令其商爲Q,餘數爲R,則依除法之性質.

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots=Q(x-f)+R$$

而此式之兩邊爲恆等式.

因R不含x,故x之值變而R不變,然則$x=f$.

則$af^n+bf^{n-1}+cf^{n-2}+\cdots\cdots=Q(f-f)+R=R$.

由是,以$x-f$除含x任意之式,其餘數,與以f代x所得之餘數同.

由是前款之定理,即以f代任意式中之x,而其式爲零,則$x-f$爲其式之因數,原包含於此中.

〔例1〕　求以$x-3$除x^3-4x^2+2x+1所得之餘數.

$$餘數=3^3-4.3^2+2.3+1=-2.$$

〔例2〕　證$x-2$爲x^4-3x^2+2x-8之一因數,此要件在合於$2^4-3.2^2+2.2-8=0$.

〔例3〕　求x^2-3x+2與$x^3-13x+12$之L. C. M.

x^2-3x+2之因數爲$x-1$與$x-2$,而此二因數之中,$x-1$合於爲$x^3-12x+12$之因數之要件,而$x-2$不合,

故所求之L. C. M.爲$(x-2)(x^3-13x+12)$.

〔例4〕　任意之有理整式,若其x各乘方之係數之和爲零,則能以$x-1$除盡,試證明之.

何則,因式之係數爲零,故以1代其式中之x,則其式爲零.

故$x-1$爲其式之因數.

269. 公因數　以a代$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots\cdots$

式中之 x 時而其式爲零.則 $x-a$ 爲此式之一因數.既證於前.

若實際行除法.則易知其商之第一項.爲 x 之最高方乘 ax^{n-1}.

由是所設之式等於 $(x-a)(ax^{n-1}+\cdots\cdots\cdots)$

又 $x=\beta$ 時爲零.則 $x-a$ 與 $ax^{n-1}+\cdots\cdots$ 之積.必在 $x=\beta$ 時爲零.而 $x=\beta$ 時.$x-\alpha$ 原不能爲零.故 $ax^{n-1}+\cdots\cdots$ 必在 $x=\beta$ 時爲零.由是,$x-\beta$ 爲 $ax^{n-1}+\cdots\cdots$ 之一因數.若用除法.易知商之第一項爲 ax^{n-2}.

由是,原式$=(x-\alpha)(x-\beta)(ax^{n-2}+\cdots\cdots)$

同樣.若原式以 $\gamma\delta$ 等代 x 能爲零.則

原式$=(x-\alpha)\,(x-\beta)\,(x-\gamma)\,(x-\delta)\cdots\cdots\cdots(ax^{n-r}+\cdots\cdots)$

但 r 爲因數 $x-a$, $x-\beta$ 等之數.

故所設之式.若以 α,β,γ 等 n 個數值代 x 而其式爲零.則其式當爲 $x-a$ 等 n 個因數.而他之因數 $ax^{n-r}+\cdots$ 爲 a.

故原式$=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdots\cdots$

270. 定理　凡 x 之 n 次式.其以數代 x 而使其式爲零者不能多於 n 個.

何則.凡 x 之 n 次式.其含有 x 之因數.不能多於 n 個.故以數代 x 而使其式爲零者.亦祇有 n 個.n 個之外.別以他字代 x.其式必不復爲零.

如 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots$ 式.若以 n 個數值 α,β,γ 等代其式之 x 能爲零.則

原式$=a(x-\alpha)(x-\beta)\,(x-\gamma)\cdots\cdots$

若又於 α,β,γ 等之外.設 k 爲任意之數.惟與 α,β,γ 等

之數值不同.而以k代此式之x.則$k-\alpha, k-\beta$等.原不復爲零.故其連乘積亦不能爲零.如是.則所設之式亦不能爲零.若必謂所設之式能爲零.則必a爲0然後可.

然a爲零.則原式爲$bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots$是爲$x$之$n-1$次式.則原式祇能以$n-1$個數值代$x$爲零.而以$n$個數值代$x$.必有一個數值不能使原式爲零.若必謂能使原式爲零.則必b爲零然後可.餘倣此.

由是.凡x之n次式.苟非x之一切係數皆爲零.則以數代x而使其式爲零者不能多於n個.而一切係數皆爲零.則易知此式無論以如何之數值代x皆爲零.

271. 方程式之根 能使$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots$等於零之$x$之數值.必爲方程式$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots=0$之根.

故依270款.凡n次之方程式.其根不能多於n個.但未知量之一切係數皆爲零者.不在此限.

又未知量之一切係數皆爲零.則其方程式.無論以如何之數代x.皆能合理.

272. 定理 有x之兩n次式.

$$ax^n+ba^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots$$

$$px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\cdots\cdots$$

若以數代x而彼此之值相等者,多於n個.則知$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots=px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}\cdots\cdots$

卽方程式

$$(a-p)x^n+(b-q)x^{n-1}+(c-r)x^{n-2}+\cdots\cdots=0.$$

其根多於n個.

是故依前款.x各方乘之係數必爲零.

故 $a=p \quad b=q \quad c=r$ 等等

由是,凡 x 之兩 n 次式,若以數代 x 而彼此之值相等者多於 n 個,則一式中 x 任意乘方之係數,必等於他一式中 x 同乘方之係數.

273. 推論 有限項之任意兩式,若以一切數值代其所含之 x 而彼此之值相等,則此兩式合於前款之關係.何則,因 x 數值之數,大於其最高次之指數故也.

由是,有限項之任意兩式,若以一切數值代其所含之文字,而彼此之值相等,則其文字之係數恆相等.

此定理於無窮項之兩式,亦能合理,然考究無窮項,在本書之範圍外.

274. 對稱式 將一式中所含任意之二文字互換其值無變更,則其式稱爲此二文字之對稱式.

如 $a+b$ 與 a^2+b^2, 爲 a,b 之對稱式,何以故,因此二式,各變 a 爲 b,變 b 爲 a,其值皆不變故也.

又 $a+b+c$ 及 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 爲 a,b,c 三文字中任意二文字之對稱式.

三文字之一次對稱式,唯 $pa+pb+pc$,但 p 爲數字係數.

275. 輪換次序 式中諸項排列之次序,學者最宜注意.

如 $lc+ca+ab$ 式之列法,乃依 a,b,c 之輪換次序排列者,卽將不含 a 之項置爲第一項,其他諸項,可依輪換次序變其文字得之,卽變 a 爲 b,變 b 爲 c,變 c 爲 a,依次得以下諸項.

又 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 式,亦爲依輪換次序

列者.何則.因將$a^2(b-c)$之文字變換.則得$b^2(c-a)$.又將$b^2(c-a)$之文字變換.則得$c^2(a-b)$.故也.

同樣.$(b-c)(c-a)(a-b)$式其第二與第三兩因數.俱由第一因數.以次依輪換次序變得.

276. 雜例 由是.依前諸款所證明之定理.示其例如次.

〔例1〕 證$(b-c)^5+(c-a)^5+(a-b)^5$能以

$(b-c)(c-a)(a-b)$除盡.

若於$(b-c)^5+(c-a)^5+(a-b)^5$.式.設$b=c$則

$$(c-a)^5+(a-c)^5=0$$

由是$b-c$為一因數.而同樣可證得$c-a,a-b$亦為此式之因數.

〔例2〕 證次式

$$(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3=24abc.$$

若於 $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3$

$$-(a+b-c)^3\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

設$a=0$則b與c無論為如何之數值.易知此式為零.

由是a為(1)之一因數.

同樣b,c亦為(1)之因數.

而(1)為三次式.故此式唯有三個一次因數.由是此式等於abc或等於以某數乘abc所得之數.

故$(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$

$$=\mathrm{L}abc\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

但L無論a,b,c如何.其值恆相同.故設a,b,c為特別之數值.可求得L之數值.

設$a=b=c=1$則(2)式為

$3^3-1^3-1^3-1^3=\mathrm{L}$,　　$\therefore\ \mathrm{L}=24$.

又求 (2) 式左邊 abc 之係數.亦能求出L之數值.依251款.在$(a+b+c)^3$中 abc 之係數爲$\frac{3!}{1!1!1!}=6$. 而同樣.於他之各立方中.其abc之係數爲 -6. 故 abc之全係數爲24. 而右邊之係數爲L. 故如前得L=24.

〔例 3〕 求 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 之因數

若於$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 式設 $b=c$ 則

$$c^3(c-a)+c^3(a-c)=0$$

由是 $b-c$ 爲原式之因數.

同樣.可證明 $c-a$, $a-b$ 亦爲此式之因數.

然所設之式爲四次式.故今求得之三個因數外.當更有一個一次因數.而此因數爲a, b, c之對稱式.故必爲$a+b+c$.

由是.所設之式等於

$$\mathrm{L}(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$$

但L爲常數.

設a,b,c爲特別之數值.可求得L.

或比較a^3之係數.則

$$b-c=-\mathrm{L}(b-c)$$

由是　　$\mathrm{L}=-1$.

故　　$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).$$

〔例 4〕 化次式爲簡式

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

分母之L. C. M. 爲 $(b-c)(c-a)(a-c)$

由是所設之式等於

$$\frac{-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$

於是,分母之因數,其能爲分子之因數與否,不可不察,察得分子與分母全然相同,故所設之式等於 -1.

277. 恆等式 下所示者爲緊要之恆等式.

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$

即當注意 $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$

$$=\tfrac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$$

然 $a+b+c$ 爲 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 之一因數,故若 $a+b+c=0$ 則知 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ 由是唯 $a+b+c=0$ 始無論 a, b, c 之值如何,恆得 $a^3+b^3+c^3=3abc$.

即任意三量之和爲零,則其立方之和等於其連乘積之三倍.

如 $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(b-c)(c-a)(a-b)$.

$$(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3+(a+b-2c)^3$$
$$=3(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c),$$

又 $(x-a)(b-c)+(x-b)(c-a)+(x-c)(a-b)=0$

故 $(x-a)^3(b-c)^3+(x-b)^3(b-a)^3+(x-c)^3(a-b)^3$

$$=3(x-a)(x-b)(x-c)(b-c)(c-a)(a-b).$$

278. 制限值之求法 欲決定二以上諸未知量之數值須有與未知量同數之方程式.然未知量之數值有制限者則不然.

如祇有一個方程式 $3x+4y=10$, 求 x 及 y 之數值.其數值以正整數爲限,則此方程式唯有兩數值適合.即

$$x=2,\ y=1.$$

又由 $(x-a)^2+(y-b)^2=0$ 之關係.求其兩未知量.其數值以實數爲限.則知 $x=a,\ y=b$ 何則.因實數之平方必爲正.故二正數非各爲零.其和決不能爲零.

此種要例.已述於190款.

〔例1〕 a, b, c, d 皆爲實數.且

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2=4(ab+bc+cd)$$

求證 $a=b=c=d.$

試將 $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2-4(ab+bc+cd)$ 式記爲二以上諸平方之和.則

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2=0$$

然 $a-b,\ b-c,\ c-d$,皆爲實數.故

$$a=b,\qquad b=c,\qquad c=d.$$

279. 最大值及最小值　更舉二三要例如次.

〔例1〕 有二正量之和求其積之最大值.

設二正量之和爲 $2a$.然其二量必一爲 $a+x$.又一爲 $a-x$.故其積當爲 a^2-x^2.

因 a 爲定數.故欲 a^2-x^2 爲最大.必 $x=0$,故在此例.其二量互相等.

即有二正量之和若此二量互相等.則其積爲最大.

〔例2〕 有二正量之積.求其和之最小值.

因 $(x+y)^2=4xy+(x-y)^2$ 故 $(x+y)^2$ 決不小於 $4xy$,而 $x=y$,則 $(x+y)^2=4xy.$

由是.有二正量之積.若此二量互相等.則其和爲最小.

〔例3〕 任意二正量之等差中項.恆較其等比中項

太.

設二量為 a, b. 則其等差中項為 $\frac{1}{2}(a+b)$, 其等比中項為 $\sqrt{ab}$.

故欲證 $\frac{1}{2}(a+b)>\sqrt{ab}$

則 $(a+b)^2> ab$

則 $(a-b)^2>0$

而 $(a-b)^2$ 必為正.故此理易曉.

立 方 根

280. 立方根 由是求任意代數式之立方根.

既知 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

即二項式之立方有四項.又將二項式之立方,從某文字之方乘列之.則其首末兩項之立方根.即為原式之二項.

依此理逆推之,則完全立方之式,若其式祇有四項而依某文字乘方之次序列之.則此式之立方根,即首末兩項之立方根之和.故完全立方之式唯有四項.則其立方根可由視察求得.

如求 $27a^6-54a^5b+36a^4b^2-8a^3b^3$ 之立方根.則此式首末兩項之立方根.為 $3a^2$ 及 $-2ab$.

由是所求之立方根.為 $3a^2-2ab$.

又求 $a^9-6a^6b^2+12a^3b^4-8b^6$ 之立方根.則為 a^3-2b^2.

281. 應用 某式所含特別文字之乘方.祇有三種.則依其文字之乘方列之.可得祇有四項之式.

如 $a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+6abc+3b^2c+3bc^2$. 式,$a$ 之相異乘方祇有三種.即 a, a^2, a^3,故依 a 之乘方之

次序列之.即

$$a^3+3a^2(b+c)+3a(b^2+c^2+2bc)+(b^3-c^3+3b^2c+3bc^2),$$

即 $$a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3$$

故此式合於前款所述之例.而其立方根可直知爲

$$a+b+c.$$

282. 通例 由是述其通例.

今求 $(A+B)^3$ 之立方根.但 A 顯根之若干項, B 顯其餘之各項.將 A, B 之各項.依某文字之遞降乘方或遞昇乘方列之.即 A 之各項.皆較 B 之任意項爲高次或低次.

又已知 A 之諸項求 B 之諸項.則由 $(A+B)^3$ 減 A^3.其餘數爲

$$(3A^2+3AB+B^2)B.$$

而依此列法.可知在餘數中之最高次或最低次之項.爲

3×(A之第一項之平方)×(B之第一項)

由是.既得立方根之若干項.欲求其次項(即B之最高次或最低次之項).當由全式減根之已知部分之立方.將其餘數之第一項.以根之第一項之平方之三倍除之.

是即由根之第一項求以後各項之法也.而根之第一項.即爲所設式之第一項之立方根.理尤易明.

〔例〕 求 $x^6-6x^5y+21x^4y^2-44x^3y^3+63x^2y^4-54xy^5+27y^6$ 之立方根.

$$x^6-6x^5y+21x^4y^2-44x^3y^3+63x^2y^4-54xy^5+27y^6$$

$$(x^2)^3=\underline{x^6}$$

$$(x^2-2xy)^3\underline{=x^6-6x^5y+12x^4y^2-8x^3y^3}$$
$$(x^2-2xy+3y^2)^3\underline{=x^6-6x^5y+21x^4y^2-44x^3y^3+63x^2y^4}$$
$$\underline{-54xy^5+27y^6.}$$

先取所設式之第一項之立方根.郎 x^2 郎爲所求根之第一項.

然由所設之式減 x^2 之立方.其餘數之第一項爲 $-6x^5y$. 以 $3\times(x^2)^2$ 除之.則得 $-2xy$ 郎爲根之第二項.

又由所設之式減 x^2-2xy 之立方.則其餘數之第一項爲 $9x^4y^2$. 以 $3\times(x^2)^2$ 除之則得 $3y^2$ 郎爲根之第三項.

又由所設之式減 $x^2-2xy+3y^2$ 之立方.適盡無餘.

由是所設之式爲 $(x^2-2xy+3y^2)^3$

故所求之立方根爲 $x^2-2xy+3y^2$

x^2,x^2-2xy 等之立方.置於所設式之下.使同類項成一豎線.則減此等式所得之餘數.容易看出.

不必求屢次之立方.而即用上之立方.較可省略.然較之前法.不過省略.仍非特別之良法.

283. 多乘根之特例　求某式之四乘根,可取其平方根之平方根.又求其六乘根.可取其平方根之立方根.或取其立方根之平方根.然以取平方根之立方根爲宜.

求某代數式之任意乘根.亦不甚難.

郎求任意式之 n 乘根.有次之定則.但此定則.本於二項式定理.

將其式依某文字之遞降乘方列之.取第一項之 n 乘根.郎爲所求根之第一項.

又既得根之若干項.欲求其次項.則由全式減根之

已知部分之 n 乘方,將其餘式之第一項,以根之第一項之 $n-1$ 乘方之 n 倍除之,則其商卽根之次項.

〔注意〕　平方根以上之根,除能由視察求得者外,用時甚少.

問　題　LXXVII.

證以下各式[1至8].

1. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c(a-b)=bc(b-c)+ca(c-a)$
$$+ab(a-b)=-(b-c)(c-a)(a-b).$$

2. $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b).$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab).$$

3. $(b-c)^5+(c-a)^5+(a-b)^5$
$$=5(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab).$$

4. $(a+b+c)^4-(b+c)^4-(c+a)^4-(a+b)^4+a^4+b^4+c^4$
$$=12abc(a+b+c).$$

5. $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$
$$=(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).$$

6. $b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab).$$

7. $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab).$$

8. $a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$
$$=-(b+c)(c+a)(a+b)(b-c)(c-a)(a-b).$$

求以下各式之因數[9至20].

9. $bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)+ab(a^2-b^2).$

10. $a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2$

$$+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

11. $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)$
$$-(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

12. $a(b+c)(b^2+c^2-a^2)+b(c+a)(c^2+a^2-b^2)$
$$+c(a+b)(a^2+b^2-c^2).$$

13. 證 $(x+y+z)^{2n+1}-x^{2n+1}-y^{2n+1}-z^{2n+1}$ 能以 $(y+z)(z+x)(x+y)$ 除盡.而設 $n=1$ 又 $n=2$ 各求其商.

14. 證 $(x+y)^3-x^3-y^3=3xy(x+y)$ 又證次式
$$(x+y)^5-x^5-y^5=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2).$$

化以下各式爲簡式 [15 至 20].

15. $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$.

16. $\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab}{(c-a)(c-b)}$.

17. $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$.

18. $\dfrac{1}{a^2(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b^2(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{c^2(c-a)(c-b)}$.

19. $\dfrac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c+a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)}$.

20. $\dfrac{b+c}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{c+a}{b(b-c)(b-a)}+\dfrac{a+b}{c(c-a)(c-b)}$.

證次之各式 [21 至 24].

21. $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)(x+b)}$
$$+\frac{1}{(c-a)(c-b)(x+c)}=\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}.$$

22. $$\frac{a}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)(x+b)}$$
$$+\frac{a}{(c-a)(c-b)(x+c)}=\frac{-x}{(x+a)(x+b)(x+c)}.$$

23. $$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)(x+b)}$$
$$+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)(x+c)}=\frac{x^2}{(x+a)(x+b)(x+c)}.$$

24. 化 $\frac{(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3+(a^2-b^2)^3}{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}$ 爲簡式.

證以下各式〔25至34〕.

25. (1) $a+b=\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-a}.$

(2) $$a+b+c=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}$$
$$+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}.$$

(3) $$a+b+c+d=\frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)}$$
$$+\frac{b^4}{(b-c)(b-d)(b-a)}+\frac{c^4}{(c-d)(c-a)(c-b)}$$
$$+\frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)}.$$

26. $$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-d)(b-a)}$$
$$+\frac{c^3}{(c-d)(c-a)(c-b)}+\frac{d^3}{(d-a)(d-b)(d-c)}=1.$$

27. $\frac{bcd}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{cda}{(b-c)(b-d)(b-a)}$

$+\frac{dab}{(c-d)(c-a)(c-b)}+\frac{abc}{(d-a)(d-b)(d-c)}=-1.$

28. $\frac{bc}{(a-b)(a-c)}(x-a)^2+\frac{ca}{(b-c)(b-a)}(x-b)^2$

$+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}(x-c)^2=x^2.$

29. $(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2-(c+a)(a+b)$

$-(a+b)(b+c)-(b+c)(c+a)=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$

30. $(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3-3(b+c)(c+a)(a+b)$

$=2(a^3+b^3+c^3-3abc).$

31. $(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+(a+b-c)^3$

$-3(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=4(a^3+b^3+c^3-3abc).$

32. $(x^2+2yz)^3+(y^2+2zx)^3+(z^2+2xy)^3$

$-3(x^2+2yz)(y^2+2zx)(z^2+2xy)=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2.$

33. $x^2+y^2+z^2=(yz+zx+xy)$ 則 $x=y=z.$

34. (1) $2(a^2+b^2)=(a+b)^2$ 則 $a=b.$

(2) $3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2$ 則 $a=b=c.$

(3) $4(a^2+b^2+c^2+d^2)=(a+b+c+d)^2$ 則 $a=b=c=d.$

(4) $n(a^2+b^2+c^2+\cdots\cdots)=(a+b+c+\cdots\cdots)^2$

則 $a=b=c=\cdots\cdots$ 但 n 爲文字之數.

35. 設 x 爲實數且爲正.則 $x+\frac{1}{x}$ 之最小數值爲 2, $x+\frac{4}{x}$ 之最小數值爲 4, $x+\frac{9}{x}$ 之最小數值爲 6 試證之.

36. x 爲實數則 $\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$ 不能大於 7.又不能小於 $\frac{1}{7}$

求證.

37. 若干正量之和爲一定,則是等之量皆相等時,其連乘積始爲最大.

38. 若干正量之連乘積爲一定,則是等之量皆相等時,其和始爲最小.

39. 若 $\frac{yz-x^2}{y+z}=\frac{zx-y^2}{z+x}$ 則此各分數等於 $\frac{xy-z^2}{x+y}$ 或等於 $x+y+z$ 求證.

40. 若 $\frac{ad-bc}{a-b-c+d}=\frac{ac-bd}{a-b-d+c}$ 則 $a=b$, 又 $c=d$, 又 $a+b=c+d$.

41. x, y, z 可用次之三方程式決定.

$$(a-\alpha)^2x+(a-\beta)^2y+(a-\gamma)^2z=(a-\delta)^2,$$
$$(b-\alpha)^2x+(b-\beta)^2y+(b-\gamma)^2z=(b-\delta)^2,$$
$$(c-\alpha)^2x+(c-\beta)^2y+(c-\gamma)^2z=(c-\delta)^2,$$

則　$(d-\alpha)^2x+(d-\beta)^2y+(d-\gamma)^2z=(d-\delta)^2$.

但 d 爲任意之數.

42. 方程式 $\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=\frac{c}{x+c}+\frac{d}{x+d}$

有相等根一雙,證 a 或 b 之一,等於 c 或 d 之一,或證 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$, 又證根爲 $-a, -a, 0$, 或 $-b, -b, 0$, 或 $0, 0, -\frac{2ab}{a+b}$.

43. 若 $2(x^2+x'^2-xx')(y^2+y'^2-yy')=x^2y^2+x'^2y'^2$ 則 $x=x'$ 及 $y=y'$.

44. 證 $a(a+d)(a+2d)(a+3d)+d^4$ 爲完全之平方.

45. 求以下各式之立方根.

(1) $x^3-24x^2y+192xy^2-512y^3$,

(2) $1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$,

(3) $x^6-9x^5+33x^4-63x^3+66x^2-36x+8$,

(4) $8x^6-36x^5+102x^4-171x^3+204x^2-144x+64$.

46. 證次式.

$$(y+z)(z+x)(x+y)+xyz=xyz(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

47. a, b, c, x 皆爲實數.

若 $(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+b^2+c^2=0$ 則 a, b, c 爲等比級數而 x 爲其公比.試證之.

48. 證 $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots\cdots$ 至 n 因數 $=\dfrac{1-x^{2^n}}{1-x}$.

49. $s=a+b+c$ 求證

$$(as+bc)(bs+ca)(cs+ab)=(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2.$$

50. 若 $a+b+c+d=0$ 求證

$$\begin{aligned}(a^3+b^3+c^3+d^3)^2&=9(bcd+cda+dab+abc)^2\\&=9(bc-ad)(ca-bd)(ab-cd)\\&=9(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2.\end{aligned}$$

問題之答

I. **1.** 17. **2.** 6. **3.** 0. **4.** 168. **5.** $6\frac{1}{3}$.
6. $2\frac{5}{72}$. **7.** 1. **8.** 3. **9.** 1. **10.** 2.
11. 3. **12.** 2. **13.** 20. **14.** 4. **15.** 4.
16. 30. **17.** 140. **18.** 0. **19.** 15. **20.** $2\frac{2}{3}$.
21. $\frac{5}{6}$. **22.** 0. **23.** $3, 4b, 5bc, 16abc$.
24. $4, 5a, 7ab, 19abc, 4, 5, 7, 19$.

II. **1.** 16, 27, 64, 256, 8, 4, 2, 5, 5, 2. **2.** 13. **3.** 41.
4. 6. **5.** 145. **6.** 436. **7.** 240. **8.** 5.
9. $3\frac{4}{27}$. **10.** 79424. **11.** 608. **12.** 672. **13.** 75.
14. 11. **15.** 27. **16.** 36. **17.** 4140. **20.** 3.
21. 5. **22.** 17. **23.** 3. **24.** 4. **25.** $4\frac{1}{2}$.
26. 12. **27.** 36. **28.** 54. **29.** 3. **30.** 0.

III. **1.** 1. **2.** 1. **3.** 3. **4.** -1. **5.** -8.
6. -12. **7.** 11. **8.** 0. **9.** $2a-3b$.
10. $-3a-2b$. **11.** $5a-6b-2c$. **12.** $-3a-4b+7c$.

IV. **1.** $12a+3b+6c$. **2.** $2a-b-c$.
3. a^2+3a+9. **4.** $4a^3-3a^2-2a$.
5. $-8a^2b+3ab^2-3b^3$. **6.** 0. **7.** $2a$. **8.** $4a$.
9. b. **10.** $2b$. **11.** a^3+a^2. **12.** $-3a+6a^2$.
13. $2m^2$. **14.** $pq-q^2$. **15.** $4a^2-4ab-\frac{1}{4}b^2$.

16. 0. **17.** 0. **18.** $2a^2+2ab+2b^2$.
19. $a+b+c$. **20.** $2x$. **21.** $3a-10b+2$.
22. $-x^2y-2xy^2-3y^3$. **23** 0. **24.** 0.
25. $\frac{5}{3}a^3-\frac{7}{15}a^2b-\frac{16}{15}ab^2+\frac{4}{3}b^3$. **26.** $5x^3-4x+15$.
27. $x^3+7ax^2-5a^3$. **28.** $-x^2-y^2$.

V. **1.** $2b$. **2.** $a+b$. **3.** $-2y$. **4.** $-\frac{1}{5}x-\frac{1}{6}y$.
5. $x+x^2$. **6.** $3-3x^2$. **7.** $-7a+6b-c$. **8.** $-b^2+6ab-7a^2$.
9. $-2x^2+10x-9$. **10.** $2x^2-2x$. **11.** $-\frac{4}{3}a+\frac{3}{2}b-\frac{1}{6}c$.
12. $-\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{4}x^2$. **13.** $4b$. **14.** $-4a-4b$.
15. $2ab$. **16.** $-2x^2+xy$. **17.** $3x^3+x^2y-2xy^2-7y^3$.
18. $-2x^3-6x^2y$. **19.** $2a-3b$. **20.** a^2-ab-b^2.
21. $2ab-ca+2bc$. **22.** $-4a^2-2b^2-2c^2$. **23.** $-a$.
24. $-3x^2-4x+9$. **25.** $8a^2+8b^2+2c^2+6ab$.

VI. **1.** $2b$. **2.** $-2b$. **3.** $-2c$. **4.** z. **5.** $-y+z$.
6. 0. **7.** 3. **8.** 0. **9.** 1. **10.** 0.
11. $6x-y-5z$. **12.** $x-2y+5z+8$. **13.** $4a-4c$.
14. $6x-4y+3z$. **15.** $-2a-b+4c$. **16.** $2a-4b-3c+d$.
17. $-9a$. **18.** $8x-7y+11z$. **19.** $-8a^2+3ab-6b^2$
20. $5m^2-n^2+mn$.

VII. **1.** $18a^2$. **2.** $35a^3$. **3.** 10^5. **4.** a^3b^4.
5. $6a^3b^3$. **6.** $28a^5b^5$. **7.** $18a^3b^2c^3$. **8.** $15a^2b^5c^2$.
9. $2a^4b^3c^2$. **10.** $-8ab$. **11.** $-12ab$. **12.** $-a^3$.
13. $-24a^4b^3$. **14.** $14a^7b^5$. **15.** $-18a^3b^3c^7$. **16.** $-6a^2b^5c^3$.

17. $10x^5y^7$. **18**. $-10a^3x^3y^7z^2$. **19**. $-72a^4b^5c^7x^7y^7z^6$.
20. $a^2, -a^3, a^4$. **21**. $x^4, -x^6, x^5$. **22**. $a^2b^2, -a^3b^3, a^4b^4$.
23. $a^4b^6, a^6b^9, a^8b^{12}$. **24**. $4a^6b^8, -8a^9b^{12}, 16a^{12}b^{16}$.
25. $9a^2b^4c^6, 4a^6b^2c^8, 17a^5b^6c^{10}$. **26**. $a^6, -a^{12}, a^3b^3, -a^6b^3$.
27. $8a^3b^6, -27a^9b^6, -64a^3b^{15}, -343a^6b^{15}c^{12}$.
28. $-a^2b^3, -8a^7, a^9b^9, a^{10}b^{18}$. **29**. -36. **30**. 21.
31. 288. **32**. -5. **33**. -20. **34**. 45.
35. -63. **36**. 27. **37**. 1. **38**. 25.
39. 63. **40**. -3375.

VIII. **1**. $3a+3b$. **2**. $8a-4b$ **3**. $18a-24b$.
4. a^3+a^2. **5**. a^5-a^4. **6**. $3a^5+3a^3$.
7. $4a^6-5a^5+a^4$. **8**. $-6a^5+9a^4+12a^3$.
9. $2a^4b^2-3a^3b^3+2a^2b^4$. **10**. $ab^2c^2+a^2bc^2+a^2b^2c$.
11. $-10x^5+15x^4-25x^3+20x^2$.
12. $-24x^3+18x^5-18x^6+24x^7$.
13. $-15a^3b+10a^2b^2-35ab^3$.
14. $-12a^6b^4+18a^5b^5+30a^3b^6$.
15. $6a+2b$. **16**. $2b-\frac{7}{4}c$. **17**. $2bc$.
18. $5ab-7ac+2bc$. **19**. $-a^2b^2d^2+a^2c^2d^2$. **20**. $22ab-8ac$.
21. $-9a$. **22**. $4a^3-2b^3+6bc^2$. **23**. $33ac+12bc-12ab$.

IX. **1**. x^2-4y^2. **2**. a^2-9b^2. **3**. $6x^2+5xy-6y^2$.
4. $5a^2-ab-4b^2$. **5**. $x^2+13x+42$. **6**. $x^2-13x+42$.
7. x^2+x-42. **8**. $a^2+4a-45$. **9**. $4x^2+4x-24$.
10. $6x^2-17x+7$. **11**. $6y^2+7by-20b^2$. **12**. $9m^4-1$.

13. $4m^4-25n^4$. **14**. $-\frac{1}{4}b^2$. **15**. $6a^2+2ab+\frac{1}{6}b^2$.

16. $\frac{1}{12}a^2-\frac{25}{144}ab+\frac{1}{12}b^2$. **17**. x^3-1. **18**. x^3+1.

19. a^3-b^3. **20**. a^3+b^3. **21**. $8a^3-27b^3$.

22. $64p^3-125q^3$. **23**. $x^4-7a^2x^2+6a^3x$.

24. $a^5-10x^3b^2+24a^2b^3$. **25**. $x^5-5x^3+x^2+7x+2$.

26. $x^5-x^3+5x^2-5x+2$. **27**. $x^4+x^2y^2+y^4$.

28. $a^8+a^4b^4+b^8$.

29. $2x^5+3x^4y-3x^3y^2+x^2y^3+7xy^4+2y^5$.

30. $3x^5-16x^4y+39x^3y^2-53x^2y^3+42xy^4-15y^5$.

X. **1**. $a^2-2ab+b^2$. **2**. $-6a^3-4a^2+5a+2$.

3. $a^3+a^2b+ab^2+b^3$. **4**. $-6a^3+5a^2-2a-4$.

5. $a^3-3abc+b^3+c^3$.

6. $a^3+a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^3+b^2c+bc^2+c^3$.

7. 二次,三次,三次,三次,三次,三次. 又 1, 3, 5, 及 6, 爲等次式.

8. $x^2+(a+b)x+ab$. **9**. $x^2-(a+b)x-ab$.

10. $x^3+(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x+abc$.

11. $(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x+abc$.

12. $x^2(y-z)-x(y^2-z^2)+yz(y-z)$.

13. $(a+b+c)x$. **14**. 0. **15**. $2bx+2cy$.

XI. **1**. $4a^2+b^2+4ab$. **2**. $16a^2+9b^2+24ab$.

3. $9a^2+b^2-6ab$. **4**. $25a^2+36b^2-60ab$.

5. $a^4+25a^2b^2-10a^3b$. **6**. $4a^4+9a^2b^2-12a^3b$.

7. $9x^2y^2+4y^4-12xy^3$. **8**. $16x^4+49y^4-56x^2y^2$

9. $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc.$

10. $4a^2+4b^2+c^2+8ab-4ac-4bc.$

11. $16a^2+4b^2+9c^2+16ab-24ac-12bc.$

12. $4a^2+25b^2+9c^2-20ab-12ac+30bc.$

13. $x^4+2x^3x+3x^2+2x+1.$ **14.** $x^4-2x^3+3x^2-2x+1.$

15. $x^4-2x^3y+3x^2y^2-2xy^3+y^4.$

16. $x^8+2x^6y^2+3x^4y^4+2x^2y^6+y^8.$

17. $a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2ac+2ad+2bc-2bd-2cd.$

18. $4a^2+4b^2+9c^2+9d^2-8ab-12ac$
$+12ad+12bc-12bd-18cd.$

19. $9a^2+4b^2+16c^2+d^2+12ab-24ac$
$+6ad-16bc+4bd-8cd.$

20. $25a^2+b^2+16c^2+9d^2+10ab$
$-40ac-30ad-8bc-6bd+24cd.$

21. $x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1.$

22. $x^6-2x^5+3x^4-4x^3+3x^2-2x+1.$

23. $4x^6-4x^5y+5x^4y^2-14x^3y^3+7x^2y^4-6xy^5+9y^6.$

24. $4x^6-4x^5y+9x^4y^2-8x^3y^3+6x^2y^4-4xy^5+y^6.$

25. $x^2+y^2-2xy-z^2.$ **26.** $x^2+4y^2-4xy-16z^2.$

27. $9x^2+25z^2-30xz-y^2.$ **28.** $4y^2+9z^2-12yz-x^2.$

29. $x^4+x^2y^2+y^4.$ **30.** $9x^4+11x^2y^2+4y^4.$

31. $x^4-2x^3+x^2-49.$ **32.** $4x^4+19x^2+49.$

33. $a^2+2ab+b^2-c^2-2cd-d^2.$

34. $4a^2-12ab+9b^2-4c^2+16cd+16d^2.$

35. $4a^2-8ad+4d^2-9b^2-6bc-c^2.$

36. $a^2-8ac+16c^2-9b^2+6bd-d^2.$

XII. **1.** $3a^4-5a^3b-12a^2b^2-ab^3+3b^4$.

2. $2x^4-2x^3y-11x^2y^2-2xy^3+3y^4$.

3. $5x^5+16x^4y+17x^3y^2-12x^2y^3+18xy^4$.

4. $x^7-49x^5y^2+42x^4y^3-9x^3y^4$.

5. $6x^6+7x^5-54x^4+76x^3-74x^2+35x-12$.

6. $3a^6+8a^5-19a^4+36a^3-53a^2+58a-24$.

7. $\frac{3}{4}x^4-x^3y-1\frac{1}{6}x^2y^2+xy^3-y^4$.

8. $3x^4-7\frac{5}{6}x^3y+143\frac{71}{144}x^2y^2+8\frac{1}{6}xy^3-8y^4$.

9. $a^3-3abc+b^3+c^3$. **10.** $8a^3-18abc+27b^3+c^3$.

11. $a^3+3abc+b^3-c^3$. **12.** $72a^3+27abc-b^3+27c^3$.

13. $x^4+x^2y^2+y^4$. **14.** $a^4+4a^2b^2+16b^4$.

15. $a^5x^5+a^3x^3+ax$. **16.** x^4-1. **17.** a^4-x^4.

18. x^4-16y^4. **19.** $81x^4-625y^4$. **20.** x^8-y^8.

21. $a^8-2a^4b^4+b^8$. **22.** $x^8+2x^6+3x^4+2x^2+1$.

23. $x^8+x^4y^4+y^8$. **24.** $a^8+a^4b^4+b^8$.

25. a^6-x^6. **26.** $2y^2z^2+2z^2x^2+2x^2y^2-x^4-y^4-z$

27 $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$.

28. $8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$.

29. $27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$.

30. $a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)+6abc$.

31. $a^3-b^3+c^3+3(-a^2b+ab^2+b^2c-bc^2+c^2a+ca^2)-6abc$.

32. $a^3-b^3-c^3+3(-a^2b+ab^2-b^2c-bc^2+c^2a-ca^2)+6abc$.

37. $8xz$ **38.** $x^3+y^3+z^3$.

XIII. **1.** -2. **2.** -5. **3.** $\frac{2}{3}$. **4.** $-a$.

5. $-4a$. **6.** $-\frac{4}{3}b$. **7.** $-12ab$. **8.** $\frac{8}{9}xy^2$.

9. $-\frac{3}{2}x^3y$. **10.** $-5ab^5$. **11.** $\frac{9}{2}b^3c^4$. **12.** $-cd$.
13. $-\frac{1}{2}abc^3d^2$. **14.** $\frac{4}{3}a^3x^2y^3z$. **15.** $\frac{3}{2}ab^5x^4y^4$. **16.** $3x-5a$.
17. $-5y^2+6y$. **18.** $4a^2-5a+2$.
19. $-4a-3a^2+2a^3$. **20.** $-5a^2b^3+\frac{7}{3}ab^4-3b$.

XIV. **1.** $x-3$. **2.** $x-3$. **3.** $x-12$. **4.** $x-11$.
5. $3x+2$. **6.** $x-2$. **7.** $a+b$. **8.** $x+3y$.
9. $x-4y$. **10.** $3x-8y^2$. **11.** $x+\frac{1}{2}y^2$.
12. $\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{4}a^8$. **13.** $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$. **14.** $\frac{1}{4}x-y$.
15. a^2+ab+b^2. **16.** $4a^2-6ab+9b^2$.
17. $a^2x^2-abxy+b^2y^2$. **18.** $4a^4x^4+10a^2x^2y^2+25y^4$.
19. $-x^2-3x-1$. **20.** $-2x^2+x+2$.
21. $-2x^3+3x^2-x+2$. **22.** x^2+x+2.

XV. **1.** x^2-x+1. **2.** x^4+x^2+1. **3.** x^2-2x+4.
4. $4x^2+6x+9$. **5.** x^2-x+2. **6.** $2x^2+x+1$.
7. $-x^4-2x^3-2$. **8.** $-x^5-2x^4-4x^3-8x^2-13x-26$.
9. $-x^2+x+1$. **10.** x^4-3x^2+4x+1.
11. $3x^2+2x+1$. **12.** $4x^3+3x^2+2x+1$.
13. $2x^2-3x+5$. **14.** $-3x^2+2x+1$.
15. x^3+2x^2+3x-1. **16.** $4x^4-11x^3+5x^2-11x+8$.
17. $2x^5-x^4+x^3-x+1$. **18.** $x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1$.
19. $3x^3+x^2y-4xy^2+2y^3$. **20.** $2y^3-4xy^2+x^2y+3x^3$.
21. $x+y-z$. **22.** $x+y+2z$.
23. $a-b$. **24.** $-x-y+z$. **25.** $-a-2b-c$.
26. $-a-2b+3c$. **27.** $2a-b-c$. **28.** $3a-4b+c$

29. $x^2-xy+xz+y^2+yz+z^2$.

30. $-4x^2-2xy+2xz-y^2-yz-z^2$.

31. $9a^2+6ab-2ac+4b^2+2bc+c^2$.

32. $a^2+2ab-ac+b^2-bc+c^2$.

33. $a^3-a^2b-a^2c-ab^2+2abc-ac^2+b^3-b^2c-bc^2+c^3$.

34. $(x+1)^2-y(x+1)+y^2$. **35.** $x^4-4x^2yz+7y^2z^2$.

36. $x^4-x^2yz+7y^2z^2$. **37.** $3a+b+2c+d$.

38. $x^2+(a-2b)x+a^2+3b^2$. **39.** $a+b+c$.

40. $a^2+a(b+c)+b^2+bc+c^2$.

雜題 I. A. **1.** 6. **2.** $3a^3+ab-4ac+2b^2+bc+c^2$.

4. $x^3+\frac{23}{4}x^2-\frac{4}{3}x+1$, $\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{4}x^2y^2+y^4$.

5. $12x^2+12$. **6.** $2+4x+6x^2+8x^3+10x^4$.

B. **1.** 87, -5. **2.** $5b^4-3b^3a+3ba^3-a^4$.

3. 0, $7x-7$, $2b-2a$. **4.** $9x^4-\frac{1}{9}$, $a^2+2ab+b^2-c^2$.

5. $x^2-(y+2)x+y^2+y+1$.

C. **1.** $-1\frac{1}{6}$. **2.** $2a^3+\frac{5}{2}a^2b+\frac{31}{5}b^3$.

3. $a^2x^4+(2a^2-1)x^2+a^2$, $4a^2+b^2+9c^2+4ab-12ac-6bc$.

4. $x^2+2xy+y^2$. **5.** $x^4-xy^3+y^4$.

D. **1.** 0, 0. **2.** $2x-12y+7z$.

3. $-4ab-4ac$. **4.** $a^3-2a^2b+2ab^2-b^3$.

5. x^2-xz+z^2, $(x+y)^2-(x+y)z+z^2$.

E. **1.** 8. **2.** $14x+2y$, $3x+15y$, $42x^2+216xy+30y^2$.

4. b^2-a^2. **5.** $5(b-a)$, $5(7a^2-11ab+7b^2)$.

F. **1.** $\frac{1}{4}$. **2.** $a^3-a^2(x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}z)+a(\frac{1}{2}xy+\frac{1}{4}xz+\frac{1}{8}yz)-\frac{1}{8}xyz$.

3. 12. **4.** $x-y+z$, $2y^2$.

G. **1.** $41x-51y$. **2.** $-8a^2+6ab+10b^2$.
3. $a^3-3ab+b^3+1$. **4.** $a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+4c^2$.
5. $x^5+2x^4-8x^2-16x$.

XVI. **1.** 3. **2.** 1. **3.** -4. **4.** -6.
5. 0. **6.** 0. **7.** $\frac{3}{4}$. **8.** $\frac{1}{13}$. **9.** -2.
10. -3. **11.** $5\frac{4}{9}$. **12.** 2. **13.** -8.
14. 6. **15.** -20. **16.** 5. **17.** -5.
18. $-2\frac{13}{25}$. **19.** 12. **20.** $-9\frac{5}{13}$. **21.** $2\frac{1}{2}$.
22. 13. **23.** 1. **24.** $-1\frac{3}{4}$. **25.** $\frac{2}{3}$.
26. $2\frac{1}{2}$. **27.** $-1\frac{1}{4}$. **28.** $-1\frac{1}{8}$. **29.** $4\frac{1}{2}$.
30. $-1\frac{3}{19}$. **31.** -5. **32.** -1. **33.** 2.
34. -16. **35.** 1. **36.** 1. **37.** 40.
38. 2. **39.** 20. **40.** $a+b$. **41.** $2a$.
42. $b-a$. **43.** $\frac{a}{2}$. **44.** $\frac{b}{2}$. **45.** a.
46. ab. **47.** $-\frac{2ab}{a^2+b^2}$. **48.** 0. **49.** $b-a$.
50. $-\frac{a^2+b^2}{2a}$. **51.** $\frac{1}{2}(a+b)$. **52.** $\frac{bc}{a}$.
53. $-\frac{1}{2}(a+b)$. **54.** $\frac{1}{3}(a+b+c)$.

XVII. **1.** 99, 101. **2.** 18, 38. **3.** 10, 15.
4. $27\frac{1}{2}$, $72\frac{1}{2}$. **5.** 20. **6.** 21. **7.** 20, 5.
8. 15, 5. **9.** 12, 26. **10.** 9, 22. **11.** 40.
12. 420. **13.** 14. **14.** 6. **15.** 420.
16. 112. **17.** 45, 55. **18.** 60, 40. **19.** $13\frac{1}{3}$, $33\frac{1}{3}$.

20. 24, 12. **21.** 20 圓. **22.** 18 步, 10 步.
23. 30 圓. **24.** A150 圓, B100 圓.
25. A40 圓, B35 圓. **26.** A130 圓, B125 圓, C105 圓.
27. A30 圓, B15 圓, C20 圓.
28. A$22\frac{1}{2}$ 圓, B$27\frac{1}{2}$ 圓, C50 圓.
29. 男子 1 圓, 女子 5 角, 童子 2.5 角.
30. 男子 $1\frac{2}{3}$ 圓, 女子 $\frac{2}{3}$ 圓, 童子 $\frac{1}{3}$ 圓.
31. 5 年. **32.** 30 年前. **33.** 父 30 年, 子 10 年.
34. 35 年. **35.** A25 圓, B35 圓, C40 圓.
36. A$23\frac{1}{2}$ 圓, B$25\frac{1}{2}$ 圓, C$27\frac{1}{2}$ 圓, D$23\frac{1}{2}$ 圓.
37. 1 角. **38.** 2 角. **39.** 12000 圓.
40. 1000 圓, 500 圓, 250 圓.
41. 壹圓銀貨 20 個, 五角銀貨 4 個, 五仙銀貨 4 個.
42. 壹圓銀貨 4 個, 五角銀貨 12 個, 五仙銀貨 20 個.
43. 5 時 $27\frac{8}{11}$ 分. **44.** 9 時 $32\frac{8}{11}$ 分.
45. 18, 15. **46.** 酒精 85 升, 水 35 升.
47. 1500 人. **48.** 28 日. **49.** 270 圓.
50. 30. **51.** 280 圓. **52.** 1 圓.
53. 15 日. **54.** 8 日. **55.** 480 人.

XVIII. **1.** $1, -\frac{3}{5}$. **2.** 3, 2. **3.** 100, 9.
4. $-2, -1$. **5.** 1, 2. **6.** $2, -1$. **7.** 5, 3.
8. 11, 8. **9.** $\frac{11}{19}, \frac{3}{17}$. **10.** $4, -3$. **11.** $1, -1$.
12. $-\frac{435}{8}, \frac{11}{8}$. **13.** $\frac{5}{6}, -\frac{5}{6}$. **14.** $-\frac{63}{67}, \frac{55}{134}$. **15.** 1, 1.
16. $5, -3$. **17.** $\frac{23}{7}, \frac{47}{7}$. **18.** 5, 2. **19.** $5, -3$.

XIX. **1.** 1, 3. **2.** 5, −3. **3.** 7, 5.

4. 4, −1. **5.** $\frac{1}{5}, \frac{1}{2}$. **6.** $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}$. **7.** 1, −1.

8. 3, −1. **9.** 5, 2. **10.** $\frac{207}{224}, \frac{425}{224}$. **11.** 8, 16.

12. 5, 7. **13.** −2, −2. **14.** $\frac{5}{2}, \frac{3}{2}$. **15.** $\frac{18}{7}, \frac{8}{8}$.

16. $\frac{13}{69}$, −19. **17.** 3, 2. **18.** $\frac{23}{7}, -\frac{23}{33}$. **19.** 3, 6.

20. $\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$. **21.** $\frac{24}{23}, -\frac{41}{24}$. **22.** $\frac{1}{3}$, −4. **23.** $a+b, a-b$.

24. $1, -\frac{1}{4}$. **25.** $a+b, a+b$. **26.** a, b.

27. $2a+b, a+2b$. **28.** $a-b, a-b$.

29. $\frac{a}{b}, \frac{b}{a}$. **30.** $2b-a, 2a-b$.

31. a^2+b^2, ab. **32.** $a+b, a-b$.

33. $\frac{c^2(c-b)}{a^2(a-b)}, \frac{c^2(c-a)}{b^2(b-a)}$. **34.** $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+b}$.

35. $a+b, a+b$. **36.** 1, 0. **37.** $a+\frac{b}{2}, a-\frac{b}{2}$.

XX. **1.** 14, 10, 4. **2.** $b+c-a, c+a-b, a+b-c$.

3. −3, 3, 1. **4.** −1, 0, 1.

5. −1, −2, 4. **6.** $\frac{61}{7}, \frac{22}{7}$, 3.

7. 0, 2, 0. **8.** 3, 1, 2.

9. $\frac{23}{7}, -\frac{13}{7}, -\frac{15}{7}$. **10.** $-\frac{1}{2}, \frac{19}{15}, \frac{7}{30}$.

11. $\frac{1}{2a}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{2c}$. **12.** $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$.

13. $u=x=y=1$. **14.** $u=1, x=2, y=5, z=10$.

XXI. **1.** 20 圓, 30 圓. **3.** $12\frac{1}{2}$ 圓, $2\frac{1}{2}$ 圓.
4. $666\frac{2}{3}$ 斤, 1500 斤. **5.** A40 日, B120 日.
6. $\frac{3}{5}$. **7.** $\frac{2}{3}$. **8.** 240, 360. **9.** 22 圓, 26 圓.
10. 2 角 5 分. **11.** 480 方步. **12.** 24 日.
13. 2400 圓, 900 圓. **15.** 12, 24, 36, 48.
16. A450 圓, B225 圓, C$237\frac{1}{2}$ 圓, D$37\frac{1}{2}$ 圓.
17. 48. **18.** 7, 2. **19.** $\frac{31}{43}$. **20.** 18 分.
22. 貳角銀貨 1 個,壹角銀貨 7 個,五仙銀貨 2 個.
23. $17\frac{1}{2}$「佛朗」.
24. 3「先令」6「辨士」, 1「先令」2「辨士」. **25.** 59.

雜題 II. A. **1.** 1. **2.** $7a-7b$. **4.** x^2-2x-2.
5. (1) 2. (2) $x=6, y=15$. (3) $x=y=a+b$. **6.** 60.
B. **1.** $4\frac{1}{4}$. **2.** a^2+b^2. **4.** x^4-2x^2+x+2.
5. (1) -6. (2) $x=-162, y=42$. (3) $x=\frac{54}{13}, y=\frac{216}{41}$.
6. 壹圓銀貨 90 個,五角銀貨 20 個.
C. **1.** $-b-d$.
4. $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$, $4x^2+4y^2+z^2-2yz-2zx-4xy$.
5. (1) $x=-1$ $y=-1$. (2) $x=a^2+b^2, y=-ab$.
6. A, 中的之數 12. 不中的之數 18.
B, 中的之數 24. 不中的之數 6.
D. **1.** $-11\frac{1}{4}$. **2.** $2ab$. **4.** $15a^2c^3-3ab^3c$, $a+2b-3c$.
5. (1) $\frac{7}{5}$, (2) $x=5, y=4$. (3) $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{2}$. **6.** 1225.
E. **1.** a^2. **2.** $4a^2+ab+ac+4b^2+bc+4c^2$.
4. $x^2-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}$, cx^2+dx-c.
5. (1) 5. (2) $x=\frac{3}{10}, y=\frac{3}{2}$. (3) $x=a+b, y=a-b$.

6. 8, 5.

F. **1.** 130. **2.** a^3-x^3. **4.** $2y^2-3y+1, a+2b+3c$.

5. (1) $\dfrac{cd-ab}{a+b-c-d}$. (2) $x=-1, y=-1$.

6. 茶3角,咖啡2角.

XXII. **1.** $x(x+1)$. **2.** $a(a-b)$. **3.** $b(a-c)$.

4. $x(2a+\frac{1}{2}x)$. **5.** $x^2(4x-3)$. **6.** $a^2(a-3b)$.

7. $x^2(x^2-5xy+20y^2)$. **8.** $a^2(a^4-a^2x+x^2)$.

9. $ax^2(6x^2-5a^2+20ax)$. **10.** $a^2x^3y^2(3ax-\frac{1}{3}y)$.

11. $abc^2(11a-\frac{1}{5}bc)$. **12.** $p^2q^3(r^6-7p^4q^2)$.

XXIII. **1.** $(2x+1)^2$. **2.** $(3x-1)^2$. **3.** $(1-4x^2)^2$.

4. $(2a-3b)^2$. **5.** $(3a^2+4b^2)^2$. **6.** $(x+\frac{1}{2}y)^2$.

7. $(2ax+by)^2$. **8.** $(5a^2x-3b^2y)^2$. **9.** $3(a+b)^2$.

10. $5(a^2-b)^2$. **11.** $a(a-3b)^2$. **12.** $3a^3(a-5b^3)^2$.

13. $-(x^2-2y^2)^2$. **14.** $-(2x^2-2)^2$.

15. $xy(2y-x)^2$. **16.** $xy(x+\frac{1}{2}y)^2$.

17. $(a+b+2c)^2$. **18.** $(x^2+y^2-z^2)^2$.

19. $(2xy+a+b)^2$. **20.** $\{3(a+b)-c\}^2$.

XXIV. **1.** $(a-3)(a+3)$. **2.** $(4-b)(4+b)$.

3. $(5a-b)(5a+b)$. **4.** $(x-3y)(x+3y)$.

5. $(4x-3y)(4x+3y)$. **6.** $(8a-7b)(8a+7b)$.

7. $(7a-9b)(2a+9b)$. **8.** $(x-3y^2)(x+3y^2)$.

9. $(6a^2-7b^2)(6a^2+7b^2)$. **10.** $(2ab-3c)(2ab+3c)$.

11. $(3ax-7by)(3ax+7by)$.

12 $(7abc-6xyz)(7abc+6xyz)$.

13. $x(2y-3x)(2y+3x)$. **14.** $2a(2b-3a)(2b+3a)$.

15. $3a^3(a-6)(a+6)$. **16.** $7a^5(1-2a^2)(1+2a^2)$.

17. $8xy(x-2y)(x+2y)$. **18.** $7ab(c-ab)(c+ab)$.

19. $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$.

20. $(x^2+4y^2)(x+2y)(x-2y)$.

21. $(9a^2+4b^2)(3a+2b)(3a-2b)$.

22. $(25a^2+16x^2)(5a+4x)(5a-4x)$.

23. $(x^2y^2+a^2b^2)(xy+ab)(xy-ab)$.

24. $(a^2b^2+9c^2d^2)(ab+3cd)(ab-3cd)$.

25. $(9x^2y^2+1)(3xy+1)(3xy-1)$.

26. $(4a^2b^2c^2+1)(2abc+1)(2abc-1)$.

27. $(4+9x^2y^2)(2+3xy)(2-3xy)$.

28. $(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$.

29. $(a^4+b^4c^4)(a^2+b^2c^2)(a+bc)(a-bc)$.

30. $a^2(a^4+1)(a^2+1)(a+1)(a-1)$.

31. $(a+b+c)(a+b-c)$. **32.** $(a+b+2c)(a+b-2c)$.

33. $(2x+2y+1)(2x+2y-1)$.

34. $\{3(x-y)+2\}\{3(x-y)-2\}$. **35.** $4xy$.

36. $3(a+b)(a-b)$. **37.** $y(2x-y)$.

38. $4b(a-b)$. **39.** $(3a+b)(a+3b)$.

40. $(5x+y)(x+5y)$. **41.** $(a+b)^2(a-b)^2$.

42. $4a(b+c)$. **43.** $(4a+4b-3c)(2a-2b-c)$.

44. $4(a-b+c)(2a-b)$. **45.** $8x(x+1)^2(x-1)$.

XXV. **1.** $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$.

2. $(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$.

3. $(2a-5x)(4a^2+10ax+25x^2)$.

4. $(a-5x^2)(a^2+5ax^2+25x^4)$.

5. $4(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$.

6 $(3x-\frac{1}{2}y)(9x^2+\frac{3}{2}xy+\frac{1}{4}y^2)$.

7. $(xy+\frac{1}{3}ab)(x^2y^2-\frac{1}{3}abxy+\frac{1}{9}a^2b^2)$.

8. $(2a^2b^2+x^2)(4a^4b^4-2a^2b^2x^2+x^4)$.

9. $2x(y-\frac{1}{2}x)(y^2+\frac{1}{2}xy+\frac{1}{4}x^2)$.

10. $9ab^2(a-\frac{1}{3}b)(a^2+\frac{1}{3}ab+\frac{1}{9}b^2)$.

11. $3ab(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$.

12. $5bc(2a-bc)(4a^2+2abc+b^2c^2)$.

13. $(a^3+8)(a^3-8)$

$$=(a+2)(a-2)(a^2+2a+4)(a^2-2a+4).$$

14. $(8a^3+27b^3)(8a^3-27b^3)$

$$=(2a+3b)(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)(4a^2-6ab+9b^2).$$

15. $(x^6-a^3b^3)(x^6+a^3b^3)$

$$=(x^2-ab)(x^2+ab)(x^4-abx^2+a^2b^2)(x^4+aby^2+a^2b^2).$$

16. $(x+y)(x^2+5xy+7y^2)$.

17. $3(x+y)\{(x+2y)^2-(x+2y)(2x+y)+(2x+y)^2\}$

$$=9(x+y)(x^2+xy+y^2).$$

18. $3(y-x)\{(2y-x)^2+(2y-x)(2x-y)+(2x-y)^2\}$

$$=9(y-x)(x^2-xy+y^2).$$

19. $4(y-x)\{(x-3y)^2+(x-3y)(y-3x)+(y-3x)^2\}$

$$=4(x-y)(7x^2-2xy+7y^2).$$

20. $(x+y)\{(2y-x)^2-(2y-x)(2x-y)+(2x-y)^2\}$

$=(x+y)(7x^2-13xy+7y^2)$.

XXVI. **1.** $(x+1)(x+3)$. **2.** $(x-1)(x-3)$.
3. $(x-2)(x-4)$. **4.** $(x-3)(x-5)$
5. $(x-2)(x-9)$. **6.** $(x+4)(x+5)$.
7. $(x+3)(x-1)$. **8.** $(x+5)(x-1)$.
9. $(x+3)(x-2)$. **10.** $(x-3)(x+2)$.
11. $(x+7)(x-5)$. **12.** $(x-5)(x+2)$.
13. $(x+7)(x-2)$. **14.** $(x-12)(x+11)$.
15. $(x+12)(x+6)$. **16.** $(x-12)(x+7)$.
17. $(x-10)(x-15)$. **18.** $(x+15)(x-10)$.
19. $(x+20)(x-9)$. **20.** $(x+12)(x-13)$.
21. $(x-15)(x-16)$. **22.** $(x-25)(x+8)$.
23. $(x-16)(x-18)$. **24.** $(x-40)(x+5)$.

XXVII. **1.** $(3x-1)(x-3)$. **2.** $(3x-2)(x-5)$.
3. $(2x+3)(x+4)$. **4.** $(2x-1)(x+2)$.
5. $(3x-2)(x+3)$. **6.** $(4x-3)(x+1)$.
7. $(5x+3)(x-7)$. **8.** $(3x-4)(x+5)$.
9. $(7x+7)(x-6)$. **10.** $(5x-8)(x-6)$.
11. $(7x-9)(x+12)$. **12.** $(9x-5)(x+15)$.
13. $(4x-3)(x+6)$. **14.** $(2x+5)(2x-3)$.
15. $(6x-5)(x+10)$. **16.** $(5x-1)(2x+1)$.
17. $(13x-1)(11x+1)$. **18.** $(x-1)(4x-1)$.
19. $2(6x-5)(x+5)$. **20.** $(7x-3)(x+18)$.
21. $3(4x+5)(2x-5)$. **22.** $(x+y)(x+3y)$.

23. $(x-2y)(x-4y)$. **24.** $(x-2y)(x-9y)$.

25. $(x+7y)(x-2y)$. **26.** $(x-10y)(x-15y)$.

27. $(x+5y)(x-40y)$. **28.** $(3x-2y)(x-5y)$.

29. $(7x+9y)(x-6y)$. **30.** $(6x+5y)(4x-15y)$.

31. $(x^2-4)(x^2-9)=(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$.

32. $(x^2-16y^2)(x^2-9y^2)$

$=(x-4y)(x+4y)(x-3y)(x+3y)$.

33. $(9x^2-4y^2)(4x^2-9y^2)$

$=(3x-2y)(3x+2y)(2x-3y)(2x+3y)$.

34. $x(x-6)(x+3)$. **35.** $xy(x+y)(x-2y)$.

36. $x^2y(5x+2y)(3x-2y)$. **37.** $xy^3(15+xy)(5-9xy)$.

XXVIII. **1.** $(2x-5y)(2x+5y)(4x^2+25y^2)$.

2. $(3a-2b)(2a+2b)(9a^2+4b^2)$.

3. $x(x-3)(x+3)(x^2+9)$. **4.** $(1+3a)(1-3a+9a^2)$.

5. $(3+2x)(9-6x+9x^2)$. **6.** $x(3x+2)(9x^2-6x+4)$.

7. $(a+b+c-d)(a+b-c+d)$.

8. $(a+b+2c-2d)(a+b-2c+2d)$.

9. $(b-c)(2a+b+c)$. **10.** $8xy(x^2+y^2)$.

11. $(a+b+3c)(a+b-c)$. **12.** $(a+b)(a+b-6c)$.

13. $ab(a+2b)(2a+b)$. **14.** $4ab(a^2+b^2)$.

15. $(x+1)^3(x-1)^3$. **16.** $12xy(x+y)^2$.

17. $4(a+c)(b+d)$. **18.** $8(a-c)(a+b+c)$.

19. $5(x+y)(7x^2+11xy+7y^2)$.

20. $2(b-a)(13a^2+22ab+13b^2)$.

21. $(x-y)(x+\frac{1}{4}y)$. **22.** $(x+ay)\left(x+\frac{1}{a}y\right)$.

23. $x(x+\frac{2}{3})(x+\frac{3}{2})$. **24.** $(3x+2y)(2x-3y)$.

25. $x^2(x+\frac{2}{3}y)(x-\frac{3}{2}y)$. **26.** $(9x+8)(8x-9)$.

27. $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$.

28. $(x-2y)(x+2y)(x-3y)(x+3y)$.

29. $(ax+by)(bx+ay)$. **30.** $(ax-by)(bx+ay)$.

31. $(a+b-2c)(a+b-3c)$. **32.** $(x+y-5z)(x+y-2z)$.

33. $\{a+b-3(c+d)\}\{a+b-5(c+d)\}$.

34. $(x-y)(x+y+2)$. **35.** $(x-y)(x+y+4)$.

36. $(x^2+1)(x-5)$. **37.** $(x+1)(x-2)(x+2)$.

38. $(x-1)(x+1)(2x-2)$. **39.** $(5x-1)(x-1)(x+1)$.

40. $(x+1)\{a(x^2-x+1)+1\}$.

41. $(x+1)\{a(x^2-x+1)+b\}$.

42. $(x+b)(x-a)(x+a)$. **43.** $(bx+a)(x^2+1)$.

44. $(x+y)(ax+by)$. **45.** $(a^2+1)(b^2+1)$.

46. $(a-1)(a+1)(b-1)(b+1)$.

47. $(a-b)(c-d)$. **48.** $(a-b)(c-d)(c+d)$.

49. $(x-y)(x+y+z)$. **50.** $2b(a-b)$.

51. $(a-c)(a+c)(a^2+b^2+c^2)$.

52. $(a-b)(a+b-c)$. **53.** $(a-c)(a+c-1)$.

54. $(1-ax)(1+ax+bx)$. **55.** $(1-ax)(1+ax+bx^2)$.

56. $(ac+b)(ac+d)$. **57.** $(a+b)(ax+by+c)$.

58. $(a-c+b-d)(a-c-b+d)$.

59. $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$.

60. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a+c-b-d)(a-b-c+d)$.

61. $(x^2+5x+1)(x^2-5x+1)$.

62. $(x^2+3xy+y^2)(x^2-3xy+y^2)$.

63. $(x^2+3xy-y^2)(x^2-3xy-y^2)$.

64. $(x^2+x-1)(x^2-x-1)$.

65. $(x^2+4x+3)(x^2+4x-5)=(x+1)(x+3)(x+5)(x-1)$.

66. $(x^2+7x+26)(x^2+7x-8)$

$=(x^2+7x+26)(x-1)(x+8)$.

XXIX. **1.** a^2b^2. **2.** abc^2. **3.** $3ab$. **4.** $2xy$.
5. $12a^2b^3x^4$. **6.** b^5x. **7.** x^3y^5. **8.** b^3c^6.
9. $7y^2$. **10.** ab. **11.** xyz^2. **12.** $abcx^2$.

XXX. **1.** $x^2(x-a)^3$. **2.** $a+b$. **3.** $(a+b)^2$.
4. $b^4c^3(b+c)^2$. **5.** $a(a^2+b^2)$. **6.** a^2+3b^2.
7. $a^2x^2(x+2a)$. **8.** $a^2x^2(a^2-4x^2)$. **9.** $x+2$.
10. $x(x+2y)$. **11.** $x-1$. **12.** $a-b$.

XXXI. **1.** $x-1$. **2.** $x-y$. **3.** $2x-1$.
4. $2x-y$. **5.** x^2-2. **6.** x^2-2y.
7. $a-2$. **8.** $2b-1$. **9.** $x-1$.
10. x^2y^2-1. **11.** $x-2a$. **12.** $2a-b$.
13. a^2-ab+b^2. **14.** $4a^2-2a+1$. **15.** x^2-y^2.
16. $x-1$. **17.** x^2+x+1. **18.** x^2-3x+5
19. $x-7$. **20.** $x-y$. **21.** $x-y$. **22.** $x-5$.
23. $4x^2-2x+1$. **24.** $a-2x+3$. **25.** x^2+7.
26. x^2+5x+1. **27.** x^2+4x+3. **28.** x^2+3x+1.
29. $y-2$. **30.** $y^2-3yz+4z^2$. **31.** $2x^2-3x-1$.
32. x^2+2x+2. **33.** $x-1$. **34.** x^2-3x+1.
35. $x^2+(2m-3)x-6m$. **36.** $mx+ny$.

XXXII. **1.** a^3b^3. **2.** a^2bc^3. **3.** $18a^2b^3$.
4. $20x^3y^3$. **5.** $120a^3b^4x^4$. **6.** $3a^2b^5x^5$.
7. $72a^2b^3x^4y^6$. **8.** $6a^3b^3c^3$. **9.** $462ab^3xy^4z^3$.
10. $a^2b^3c^2$. **11.** $30x^2y^3z^3$. **12.** $a^4b^2c^3x^4$.

XXXIII. **1.** $(a-x)(a-2x)(a-3x)$.
2. $a^3x^3(a-x)(a-2x)(a-3x)$.
3. $(a-b)(a+b)^2$. **4.** $12a^2b(a-b)(x+b)^2$.
5. $(x+1)(x+2)(x+4)$. **6.** $(x+y)(x+2y)(x+4y)$.
7. $(x-1)(x-2)(x-3)$ **8.** $(3x-y^2)(2x-y^2)(x-y^2)$.
9. $(a^2-b^2)^2$. **10.** $(x^2-4y^2)^2$.
11. $(x+2)(x+3)(x+4)$. **12** $(x-2y)(x-3y)(x-4y)$

XXXIV. **1.** $54a^3b^2c^2$. **2.** $a^4b^3a^3$. **3.** $24a^3b^2$.
4. $12a^3b^3$. **5.** $x^3y^3(x^2-y^2)^2$. **6.** $a^2(a^2-b^2)$.
7. $xy^2(x^2-1)$. **8.** $12ax^2y^2(x-y)(x+y)^2$.
9. $90(x-3)(x+3)(x-4)$. **10.** $12(a^2-b^2)(a^2-4b^2)$.
11. $8ab^3d(a^2-d^2)$. **12.** $(x-2)(x-4)(x-6)$.
13. $(x+1)(x+2)(x-10)$. **14.** $6(x^2-1)(x^2-4)$.
15. $(x-1)(x-2)(2x+3)(3x+1)$.
16. $(2x-1)(3x+2)(7x+1)$.
17. $(x-3y)(x-y)(3x-y)$. **18.** $x(x-1)(x+3)(2x-1)$.
19. $xy^2(x^2-4)(x^2-9)$. **20.** x^6-a^6. **21.** x^4-1.
22. $(x-4)(3x-2)(3x^2+2x+1)$.
23. $(x^2-a^2)^2$. **24.** $(x+1)(x+3)(x^2-4)$.
25. $(x-1)(x+2)(x+6)(x^2-2x+4)$.

26. $(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)(a+5)$.

XXXV. 1. $\frac{a}{b}$. 2. $\frac{x}{y}$. 3. $\frac{c}{2a^2b^2}$.

4. $\frac{3}{2a^2b^2}$. 5. $\frac{y^4}{x^2}$. 6. $\frac{3}{4}x^5z^3$.

7. $\frac{3ac^4}{5b^2x^3}$. 8. $\frac{5cd^3}{6a^3b}$. 9. $\frac{3a^4x^2z^3}{5b^4y^2}$.

10. $\frac{5a^3c^3}{7y}$. 11. $\frac{2c^4z^4}{3a^4x^4}$. 12. $\frac{3ac^3x^2}{4b^2y^2z^2}$.

XXXVI. 1. $\frac{2b}{a+b}$. 2. $\frac{y^2}{1-y^2}$. 3. $\frac{a-b}{a+b}$.

4. $\frac{x}{x-a}$. 5. $\frac{x-1}{x+1}$. 6. $\frac{1-y}{1+y}$.

7. $\frac{x}{x-2}$. 8. $\frac{x^2}{x^2-1}$. 9. $\frac{4}{x+4}$.

10. $\frac{2x}{1+2x}$. 11. $-\frac{1}{x+2}$. 12. $-\frac{1}{a+3}$.

13. $-\frac{x^2}{x^2+a^2}$. 14. $-\frac{x^2+a}{a}$. 15. $\frac{x^3}{x^2+a^2}$.

16. $-\frac{x^2y^2}{x^2y^2+a^2}$. 17. $\frac{5a}{x+3a}$. 18. $\frac{-x}{x+4a}$.

19. $\frac{a-x}{a+x}$. 20. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$. 21. $\frac{x+1}{x^2+x+1}$.

22. $\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$. 23. $\frac{x-2}{x-4}$. 24. $\frac{1-2a}{1-4a}$.

25. $\frac{x-4}{x+11}$. 26. $\frac{1-4y^2}{1+11y^2}$. 27. $\frac{x-y}{x+4y}$.

28. $\frac{1-a^2b^2}{1+4a^2b^2}$. **29.** $\frac{a^2+ax+x^2}{a^2-ax+x^2}$. **30.** $\frac{a-b}{a+b}$.

31. $\frac{a^2+b^2}{a^2+ab+b^2}$. **32.** $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+b^2}$.

XXXVII **1.** $\frac{x+2}{2x+1}$. **2.** $\frac{3x-5}{x^2-3x+2}$.

3. $\frac{x^2+5x+10}{x^3+2x^2+3x+6}$. **4.** $\frac{x+1}{x}$.

5. $\frac{2x^2+3ax+7a^2}{x^2-6ax+2a^2}$. **6.** $\frac{x^2+2x+3}{3x^2+2x+1}$.

7. $\frac{x-2}{x^2+1}$. **8.** $\frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+1}$.

9. $\frac{x+2}{2x+1}$. **10.** $\frac{x^2-5x+1}{x^2+4x-5}$.

XXXVIII. **1.** $\frac{20}{30x}, \frac{24}{30x}, \frac{7}{30x}$.

2. $\frac{12bc}{24abcx}, \frac{4ca}{24abcx}, \frac{3ab}{24abcx}$.

3. $\frac{a^2}{abc}, \frac{b^2}{abc}, \frac{c^2}{abc}$. **4.** $\frac{b^2c^2}{abc}, \frac{c^2a^2}{abc}, \frac{a^2b^2}{abc}$.

5. $\frac{2}{2(x+1)}, \frac{5}{2(x+1)}$. **6.** $\frac{9}{6(x-1)}, \frac{8}{6(x-1)}$.

7. $\frac{20}{24(x+2)}, \frac{9}{24(x+2)}$.

8. $\frac{2(x-1)}{2(x^2-1)}, \frac{3(x-1)}{2(x^2-1)}, \frac{10}{2(x^2-1)}$.

9. $\frac{18(x+1)}{15(x^2-1)}, \frac{10(x-1)}{15(x^2-1)}, \frac{60}{15(x^2-1)}$.

10. $\frac{a(x+a)}{x^2-a^2}$, $\frac{-x(x+a}{x^2-a^2}$, $\frac{a^2}{x^2-a^2}$, $\frac{-x^2}{x^2-a^2}$.

11. $\frac{24a(a+b)}{12(a^2-b)^2}$, $\frac{-6b(a+b)}{12(a^2-b^2)}$, $\frac{9a^2}{12(a^2-b^2)}$, $\frac{-10b^2}{12(a^2-b^2)}$.

12. $\frac{(x+1)^2}{(x+1)^3}$, $\frac{2x(x+1)}{(x+1)^3}$, $\frac{3x^2}{(x+1)^3}$.

13. $\frac{x-c}{(x+a)(x-b)(x-c)}$,

$\frac{x-a}{(x-a)(x-b)(x-c)}$, $\frac{x-b}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

14. $\frac{b-c}{(a-b)(a-c)(b-c)}$,

$\frac{-(a-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$, $\frac{a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)}$.

15. $\frac{a^2+1}{a+1}$. **16.** $\frac{a^2}{a-x}$. **17.** $\frac{x^2}{x-2y}$.

18. $\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}$. **19.** $-\frac{2a}{15}$. **20.** $\frac{11b}{6}$.

21. $\frac{17a-19b}{20}$. **22.** $-\frac{x+17y}{12}$. **23.** $\frac{28x-29y}{12}$.

24. $\frac{x+6}{12}$. **25.** $\frac{5x-2y}{12}$. **26.** 1.

27. 1. **28.** $\frac{1}{x+a}$. **29.** $-\frac{1}{1+x}$.

30. $-\frac{1}{2+x}$. **31.** $\frac{1}{x-3}$. **32.** $\frac{1}{(x-3)(x-2)}$.

33. $-\frac{y}{(x-4x)(a-5y)}$. **34.** $\frac{2x}{(3x-2y)(5x-2y)}$.

35. $\frac{4x}{1-x^2}$. **36.** $\frac{8ab}{a^2-4b^2}$. **37.** $\frac{x}{(x-2)^2}$.

38. $\frac{a^2}{(a-2b)^2}$. **39.** $\frac{4y}{x-y}$. **40.** $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

41. $\frac{1}{a}$. **42.** $\frac{3(x+6)}{x^4-16}$. **43.** $\frac{x+3}{x^4-1}$.

44. $\frac{1}{1-9x^2}$. **45.** $\frac{4a^4}{a^4-x^4}$. **46.** $\frac{8a^8}{a^8-x^8}$.

47. $\frac{2x^2+10x+14}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$.

48. $\frac{2}{x(x^2-1)}$. **49.** $\frac{2}{a(a+1)(a+2)}$.

50. $\frac{48}{(x^2-1)(x^2-9)}$. **51.** $\frac{6}{a(a+1)(a+2)(a+3)}$.

52. $\frac{24}{x(x^2-1)(x^2-4)}$.

53. $\frac{24}{a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)}$.

54. 0. **55.** 0. **56.** $\frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

57. 0. **58.** $\frac{x}{(x-2a)^2}$. **59.** $\frac{1}{a+2}$.

60. $2\frac{x+ay}{x-ay}$. **61.** $\frac{4x^2+3}{x^2-1}$. **62.** $\frac{4-x}{1-x}$.

63. $\frac{2}{x-3y}$. **64.** 1. **65.** 1.

XXXIX. **1.** $\frac{1}{2}$. **2.** $\frac{ab}{4c^2}$. **3.** $\frac{ab}{c^2}$.

4. $\frac{2ac}{3b^2}$. **5**. 1. **6**. 1.

7. $\frac{b^2}{c^2}$. **8**. $\frac{a^4}{c^4}$. **9**. $\frac{8}{abc}$.

10. xyz. **11**. x^2. **12**. 1.

13. $\frac{2xy}{3ab}$. **14**. $\frac{xy}{b^2z}$. **15**. $\frac{1}{xy}$.

16. $\frac{b}{a^3}$. **17**. $\frac{x^2}{(x+3)(x-2)}$. **18**. $\frac{x-y}{x+2y}$.

19. x^3. **20**. $\frac{a}{b}$. **21**. $\frac{x-1}{x-4}$.

22. $\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$. **23**. 1.

24. $\frac{(x-1)(x-5)}{(x-2)(x-4)}$. **25**. $\frac{x^2+ax+a^2}{x-2a}$.

26. $\frac{a^2+ax+x^2}{a^2-ax+x^2}$. **27**. 1. **28**. $\frac{1}{(a-b)^2}$.

29. 1. **30**. $\frac{(y+z-x)^2}{(z+x-y)^2}$. **31**. $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}$.

32 $\frac{1}{x^2+y^2}$.

XL. **1**. $\frac{5(x+a)}{(x-2a)^2}$. **2**. $\frac{1}{2x^2-1}$. **3**. 1.

4. 0. **5** 0. **6**. $\frac{2}{y}$. **7**. 1. **8**. $x-1$.

9. $\frac{3(4x+5)(3x+4)}{(2x+3)(5x+6)}$ **10**. $\frac{1+x^4}{x(1+x^2)}$. **11**. $\frac{1}{3x^2}$.

12. $\dfrac{x^2(x-1)}{x+1}$. **13.** $\dfrac{4}{4x-a+3}$. **14.** 1.

XLI. **1.** $\dfrac{2x^2}{3z^2}$. **2.** $\dfrac{3a}{4cx}$. **3.** $\dfrac{a^2b^2c^2}{x^2y^2z^2}$.

4. $\dfrac{x-5y}{x(x-4y)}$. **5.** $\dfrac{x(x-11y)}{y(x-9y)}$. **6.** $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2+b^2}$.

7. $a^4+a^2b^2+b^4$. **8** $\dfrac{x-1}{x^2-3}$. **9.** $\dfrac{3x^2-4x+2}{2x^2-3x+5}$.

10. $\dfrac{2x^2-xy+3y^2}{3x^2-xy+2y^2}$. **11** $\dfrac{x-4y}{x^2+4y^2}$. **12.** $\dfrac{x+19y}{15}$.

13. $\dfrac{57x-66y}{20}$ **14.** $\dfrac{x}{16-x^2}$. **15.** $\dfrac{x}{9-x^2}$.

16. $\dfrac{2xy}{(x-2y)^2}$. **17.** $\dfrac{a^2}{(a-4b)^2}$.

18. $\dfrac{2a^2+22a+62}{(a+4)(a+5)(a+6)(a+7)}$.

19. $\dfrac{162}{a(a+3)(a+6)(a+9)}$. **20** $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x-3y}$.

21 $\dfrac{x+y}{x+2y}$. **22.** $-\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$.

23. $\dfrac{(x-5)^2}{(x-8)(3x-8)}$. **24.** $\dfrac{x^2-4xy+y^2}{x^2+y^2}$.

25. $\dfrac{3}{x(x^3-1)}$. **26.** $\dfrac{3b^2}{(3a+b)(3a-b)(3a+2b)}$.

27. $\dfrac{1}{4a-b}$. **28** $\dfrac{1}{a+b}$. **29.** m.

30. 1. **31.** $\dfrac{4y}{x+y}$. **32.** $\dfrac{a-b}{a}$.

33. $\frac{1}{x+y}$.　　**34.** $\frac{a^2-9b^2}{a^2-25b^2}$.　　**35.** $\frac{a^2-5b^2}{a^2-9b^2}$.

36. $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

37. $\frac{12-2x}{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}$.

38. $\frac{14-2x}{(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}$.

39. x^2-xy+y^2-1.　　**40.** x^2+xy+y^2-1.

41 $\frac{1}{1-x}$.　　**42.** 1.　　**43.** 0.

44. $\frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$.　　**45.** $\frac{(a-b)^2}{8a(a+b)^2}$.　　**46.** 4.

47. $\frac{x+3y}{8xy(x+y)}$.　　**48.** 0.　　**49.** $\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$.

50. $\frac{(a-b)^3}{(a+b)^3}$.　　**51.** $\frac{336(11x+5)}{(x-17)(x-9)(x+4)(x+7)}$.

52. $\frac{1386}{(x-5)(x-7)(x+2)(x+4)}$.

53. $12\frac{2x^2+10x+11}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$.

54. $\frac{a+b+c+3d}{a+b+c+d}$.　　**55.** $\frac{1}{xy(a-x)}$.

56. $\frac{a}{xyz}$.　　**57.** $-\frac{a}{b}$.　　**58.** 2.

XLII. **1** 7.　　**2.** 4.　　**3.** $\frac{111}{31}$.　　**4.** -4.

5. $-\frac{1}{3}$　　**6.** $\frac{11}{13}$.　　**7.** $\frac{29}{31}$.

8. $\frac{1}{50}$.	**9**. $-\frac{3}{7}$.	**10**. $\frac{13}{19}$.
11. $-\frac{43}{40}$.	**12**. $-\frac{33}{10}$.	**13**. 1.
14. $-\frac{60}{13}$.	**15**. $\frac{35}{6}$.	**16**. $-\frac{21}{11}$.
17. -2.	**18**. $-\frac{5}{2}$.	**19**. -14.
20. 2.	**21**. $\frac{37}{20}$.	**22**. 19.
23. $\frac{1}{20}$.	**24**. $\frac{23}{6}$.	**25**. $\frac{3}{2}$.
26. -4.	**27**. -10.	**28**. -10.
29. 5.	**30**. $-\frac{9}{2}$.	**31**. $\frac{1}{10}$.
32. 1.	**33**. -2.	**34**. -2.
35. 1.	**36**. $\frac{8}{3}$.	**37**. $\frac{31}{5}$.
38. $-\frac{19}{7}$.	**39**. $\frac{38}{41}$.	**40**. $\frac{29}{55}$.
41. -2.	**42**. -4.	**43**. -6.
44. 5.	**45**. $\frac{3}{2}$.	**46**. 4.
47. -3.	**48**. $\frac{13}{4}$.	**49**. -6.
50. 1.	**51**. $\frac{75}{16}$.	**52**. -1.
53. $-\frac{5}{11}$.	**54**. $\frac{1}{2}(a+b)$.	**55**. $\frac{ab}{b-a}$.
56. $-\frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}$.	**57**. $-2(a+b+c)$.	**58**. $\frac{a^2+b^2}{a+b}$.

雜題 III. A. **1**. $y^3-6xy^2+6x^2y-x^3$.

3. (1) $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$, (2) $(a-b)(a+b+2)$, (3) $(x-7)(x+4)$.

4. $x^2+x-4, \frac{x^2-x+5}{x(5x^2+4x+16)}$.

5. (1) 5, (2) $x=1, y=-1$, (3) $x=-\frac{a+b}{2}$.

6. A 235 圓, B 65 圓.

B. **1.** 0, 0. **3.** (1) $x(x-2)^2$, (2) $(2x-1)(x-2)$,

(3) $(x^2+1)(x-1)$. **4.** $\frac{2}{x+3}$.

5. (1) $\frac{3}{2}$. (2) $x=a, y=0$. **6.** $\frac{8}{50}$.

C. **3.** (1) $(1-2x)(1+21x)$, (2) $3y(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$,

(3) $(x+1)^3(x-1)^3$.

4. $\frac{x-3}{x^2+7x+3}$, $\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

5. (1) $\frac{17}{7}$, (2) $x=\frac{c(b-c)}{a(b-a)}$, $y=\frac{c(a-c)}{b(a-b)}$.

6. A 70 圓, B 30 圓.

D. **1.** 4. **3.** (1) $x(x+3y)(x-2y)$,

(2) $(x-a)(x+a)^2$, (3) $(x-1)(x+1)(y-1)(y+1)$.

4. (1) $\frac{2(a+x)}{a-x}$, (2) $\frac{2}{(x-4)(x-5)(x-6)}$.

5. (1) $x=5$, (2) $x=\frac{1}{5}, y=-17$. **6.** 72.

E. **2.** $x^3+x^2y+xy^2+y^3$,

$(x+y)^3+2z(x+y)^2+4z^2(x+y)+8z^3$.

3. $(x+5)(5x-1)$, $a(a+b+c)(a-b-c)$.

4. $2a(2a-3b)(2a+3b)(2a-b)$. **6.** 240 圓.

F. **1.** 59. **2.** $x^5-ax^4-a^4x+a^5$.

3. $(x+1)^2(x-1)^2(x^2+x+1)^2(x-x+1)$.

4. $\frac{x}{4x^2-y^2}$. **5.** (1) $-\frac{a^2+b^2}{a+b}$,

(2) $x=3, y=-1, z=0$. **6.** 350 畝.

XLIII. 1. 1, −2.	**2.** 3, 4.	**3.** −1, −2.
4. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.	**5.** $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$.	**6.** $\frac{5}{2}$, 4.
7. 5, 2, − 3.	**8.** 0, −2, 4.	**9.** 0, 3, −4.
10. $0, \frac{1}{2}, -\frac{4}{3}$.	**11.** $0, \frac{2}{5}, \frac{7}{6}$.	**12.** $0, 3, -\frac{7}{3}$.
13. 1, 2, 3, 5.	**14.** 2, 1, −1, −2.	**15.** $\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, -\frac{7}{2}$.
16. $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}$.	**17.** 0, 1.	**18.** 0, 2.
19. 0, −3.	**20.** $0, \frac{3}{2}$.	**21.** $0, \frac{5}{2}$.
22. $0, -\frac{1}{3}$.	**23.** 0, 5.	**24.** $0, \frac{1}{2}$.
25. $0, \frac{5}{3}$.	**26.** $0, -\frac{6}{5}$.	**27.** 0, b.
28. $0, \frac{b}{a}$.	**29.** ± 1.	**30.** ± 5.
31. ± 4.	**32.** 0, 0.	**33.** ± 3.
34. ± 3.	**35.** ± 1.	**36.** ± 9.
37. 2, 3.	**38.** 3, 4.	**39.** 2, 10.
40. 4, 5.	**41.** 4, 7.	**42.** 10, 15.
43. 12, −7.	**44.** 13, −12.	**45.** 10, −15.
46. −3, 1.	**47.** 5, −9.	**48.** 5, −2.
49. 0, 9, −20.	**50.** 0, 12, −11.	

XLIV. 1. 9, −5.	**2.** 13, −7.	**3.** 2, 6.
4. 3, 6.	**5.** 6, −3.	**6.** 1, −3.
7. 3, −1.	**8.** 1, −3.	**9.** ± 2.
10. ± 3.	**11.** $-\frac{1}{3}$.	**12** $\frac{4}{3}$.
13. 3, 50.	**14.** 11, −9.	**15.** $3, \frac{1}{3}$.
16. $\frac{4}{3}, -5$.	**17.** $\frac{3}{4}, -6$.	**18.** $\frac{5}{6}, -10$.
19. $\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}$.	**20.** 40, −5.	**21.** $2, \frac{1}{19}$.

22. $4, \frac{2}{17}$. **23.** $\frac{5}{17}, -\frac{2}{3}$. **24.** $\frac{1}{10}, \frac{1}{11}$.

25. $\frac{4}{3}, -\frac{5}{7}$. **26.** $\frac{4}{7}, -\frac{5}{8}$. **27.** $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}$.

28. $1, -\frac{1}{6}$. **29.** $\frac{4}{3}, \frac{17}{3}$. **30.** $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$.

31. $3, -\frac{46}{29}$. **32.** $2, -\frac{69}{29}$. **33.** $11, -21$.

34. $0, 4$. **35.** $10, \frac{18}{9}$. **36.** $4, -2$.

37. $-\frac{7}{2}, -\frac{7}{8}$. **38.** $a, 2a$. **39.** $a, 3a$.

40. $b, 2a-b$. **41.** $-\frac{1}{2}(a-b), -\frac{1}{2}(a+b)$.

42. $b, -2a-b$.

XLV. **1.** $2, \frac{1}{2}$. **2.** $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}$. **3.** $6, \frac{2}{3}$.

4. $3, -7$. **5.** $3, -2$. **6.** $-\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}$.

7. $3, -\frac{14}{3}$. **8.** $2, \frac{8}{5}$. **9.** $2\pm\sqrt{3}$.

10. $5, \frac{28}{11}$. **11.** $-1, -\frac{16}{3}$. **12.** $-5, -15$.

13. $-3, \frac{1}{2}$. **14.** $7, \frac{3}{2}$. **15.** $3, -25.7$.

16. $4, \frac{49}{5}$. **17.** $5, -\frac{1}{6}$. **18.** 2.

19. $1, -\frac{4}{3}$. **20.** $4, -1$. **21.** $2, \frac{1}{2}$.

22. $4, -\frac{27}{5}$. **23.** $5, -\frac{33}{13}$. **24.** $6, -\frac{32}{7}$.

25. $3, -\frac{5}{7}$. **26.** $5, -\frac{7}{3}$. **27.** $2\pm 2\sqrt{3}$.

28. $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3})$. **29.** ± 6. **30.** 1.

31. 6. **32.** $a, 2a$. **33.** $\frac{1}{2}\{a\pm\sqrt{(2a^2-b^2)}\}$.

34. $-a, \frac{1}{a}$. **35.** $a, \frac{1}{a}$. **36.** $-b, 2a-b$.

37. $c, c-2b$. **38.** $1, \frac{a-b}{b-c}$. **39.** $1, -\frac{a+b+c}{a+b}$.

40. $\frac{a}{b}, \frac{b}{a}$. **41.** $-\frac{b}{c}, -\frac{c}{b}$. **42.** $\frac{a+b}{a-b}, \frac{b-a}{b+a}$.

43. $\frac{b+a}{b-a}, \frac{b-a}{b+a}$.　**44.** $a, -\frac{1}{a}$.　**45.** $\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$.

46. $a+b, \frac{2ab}{a+b}$.　**47.** $a+b, \frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}$.　**48.** $a+b, \frac{a^2+b^2}{a+b}$.

49. $b, \frac{a^2}{b}$.　**50.** $-a, -b$.　**51.** a, b.

52. $c, -\frac{a^2+b^2+ac+bc}{a+b+2c}$.　**53.** $c, -\frac{ab(2c+a+b)}{ac+bc+2ab}$.

54. $0, \pm\sqrt{ab}$.　**55.** $0, -\frac{1}{2}(a+b)$.

XLVI. **1.** 12.　**2.** 23.　**3.** 5.　**4.** 9.

5. 1.　**6.** -1.　**7.** $\frac{113}{66}$.

8. $2, -1$.　**9.** $5, -4$.　**10.** $3, 8$.

11. $7, 2$.　**12.** $2, 11$.　**13.** $5, 9$.

14. $4, 0$.　**15.** $4, \frac{8}{3}$.　**16.** $9, \frac{1}{4}$.

17. $1, 6$.　**18.** $1, -\frac{1}{7}$.　**19.** $5\frac{220}{49}$.

20. 15.　**21.** $16, \frac{9}{4}$.　**22.** $\frac{1}{4}, \frac{9}{4}$.

23. $0, -4$.　**24.** $5, \frac{5}{4}$.　**25.** 7.

26. $6, -\frac{2}{9}$.　**27.** $-\frac{1}{2}$.　**28.** 5.

29. 6.　**30.** $6, -\frac{18}{25}$.　**31.** $\frac{1}{3}, \frac{1}{15}$.

32. $3, -\frac{59}{39}$.　**33.** $2, 3$.　**34.** 0.

35. $\frac{4}{5}$.　**36.** $\frac{25}{13}$.　**37.** $2, -\frac{43}{10}$.

38. a, b.　**39.** $0, 4(a+b)$.　**40.** $-a, -b$.

41. $\frac{(a-b)^2}{8(a+b)}$.

XLVII. **1.** $x^2-4=0$.　**2.** $x^2+x-12=0$.

3. $x^2+5x+6=0$。 **4.** $x^2-\frac{1}{4}=0$.

5. $12x^2-x-1=0$. **6.** $6x^2+5x+1=0$.

7. $x^2-3x=0$. **8.** $x^2+4x=0$.

9. $x^3-2x^2-15x=0$. **10.** $x^2-2=0$.

11. $x^2-5=0$. **12.** $x^3-3x=0$.

13. $x^2-4x+1=0$. **14.** $x^2-10x+18=0$.

15. $x^2-2ax+a^2-b=0$.

16. (1) 1. (2) -2. (3) $-\frac{7}{3}$. (4) $-\frac{1}{5}$. (5) $\frac{4c}{9a}$.

17. (1) 0. (2) -3. (3) 5. (4) $\frac{1}{2}$. (5) $-\frac{7b}{6a}$.

20. 12. **21.** $14p^2$. **23.** $a=\frac{4}{3}$.

24. $a=3$ 或 $a=-5$. **25.** $a=8$.

29. $2x^2-23x+11=0$. **30.** $9x^2-49x+49=0$.

32. $ac-b^2=0$.

XLVIII. **1.** $\pm1, \pm2$. **2.** $\pm2, \pm\sqrt{-2}$.

3. $\pm1, \pm3$. **4.** $\pm3, \pm\sqrt{-2}$.

5. $\pm1, \pm3$. **6.** $\pm5, \pm2$.

7. $\pm a, \pm\frac{1}{a}$. **8.** $\pm a, \pm\frac{\sqrt{-1}}{a}$.

9. $\pm a, \pm a\sqrt{-1}, \pm\frac{1}{a}, \pm\frac{\sqrt{-1}}{a}$.

10. $2, -1, 3, -2$. **11.** $-2, 1, 4, -5$.

12. $-3, 2, -\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-27}$. **13.** $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

14. $1, \frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{-15}$. **15.** $2, \frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{-15}$.

16 $-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5},\ -\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-1}.$

17. $1,\ -2,\ -\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-19}.$

18. $1,\ -3\pm2\sqrt{2}.$

19. $0,\ -8,\ 1,\ 3.$

20. $-3,\ 2,\ -\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-27}.$

21. $\frac{7}{2},\ -\frac{3}{2},\ 1\pm\sqrt{5}.$

22. $3,\ -6,\ -\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{125}.$

23. $0,\ -3.$

24. $2,\ -8,\ -3\pm\sqrt{45}.$

25. $7,\ -\frac{3}{2},\ \frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{243}.$

26. $\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 2,\ 3.$

27. $-8,\ 5,\ -\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{221}.$

28. $1,\ -\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}.$

29. $1,\ -\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{17}.$

30. $3,\ 5,\ -8.$

31. $3,\ \pm\sqrt{7}.$

32. $-1,\ 4,\ -1.$

33. $2,\ \frac{1}{2}\pm\frac{1}{10}\sqrt{165}.$

34. $x=-3.$

35. $x=-5.$

36. (1) $1,\ 4,\ -5.$ (2) $3,\ -3,\ -2.$

(3) $2,\ 4,\ -5.$ (4) $10,\ -2,\ -5.$

(5) $2,\ 3,\ -5.$ (6) $1,\ -4,\ -\frac{1}{2}.$

(7) $-1,\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}.$

XLIX. **1.** $5,\ 1.$

2. $3,\ -7,\ 7,\ -3.$

3. $3,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 3.$

4. $6,\ -4,\ -6,\ 4.$

5. $5,\ 2,\ -5,\ -2.$

6. $12,\ 3,\ -5,\ 20.$

7. $3,\ 1,\ \frac{5}{4},\ -\frac{5}{2}.$

8. $7,\ -2,\ -\frac{48}{91},\ -\frac{593}{91}.$

9. $1,\ 1,\ \frac{217}{73},\ \frac{7}{73}.$

10. $2,\ -3,\ \frac{374}{313},\ -\frac{1011}{313}.$

11. $\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}.$

12. $1,\ 3,\ \frac{21}{5},\ \frac{7}{5}.$

13. $2,\ 3,\ 3,\ 2.$

14. $3,\ 2,\ \frac{2}{5},\ -\frac{3}{5}.$

15. $1,\ -2,\ 6,\ 8.$

16. $\frac{1}{2},\ \frac{7}{2},\ -\frac{5}{3},\ -\frac{14}{9}.$

17. $\frac{7}{3},\ \frac{23}{7}.$

18. $1,\ 3,\ \frac{5}{4},\ 2.$

19. $6,\ 7,\ -\frac{13}{2},\ \frac{58}{4}.$

20. $-1,\ -3,\ \frac{8}{7},\ \frac{18}{49}.$

L. **1.** $0, \pm 5, \pm 6, \pm 3$*.

2. $\pm 3, \pm 2, 0, \pm\sqrt{34}$. **3.** $\pm 3, \pm 4, \pm 7\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}$.

4. $\pm 9, \pm 2, \pm\dfrac{7}{\sqrt{2}}, \mp\dfrac{11}{\sqrt{2}}$.

5. $\pm 4, \pm 2, \pm 6\sqrt{-2}, \mp 8\sqrt{-2}$.

6. $\pm 5, \pm 1, \pm 4, \pm\frac{1}{2}$. **7.** $\pm 14, \pm 8, \pm 1, \pm 5$.

8. $\pm 1, \pm 2, \pm 7\sqrt{-\frac{1}{2}}, \pm 3\sqrt{-\frac{1}{2}}$.

9. $\pm 5, \pm 2$. **10.** $\pm 2, \pm 1$.

11. $\pm 3, \pm 5, \pm 36, \mp\frac{23}{2}$. **12.** $\pm 5, \pm 3, \pm 4\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}$.

13. $\pm 1, \pm 2, \pm\sqrt{3}, 0$. **14.** $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 3$.

15. $\pm 8, \mp 2, \pm\frac{2}{9}\sqrt{21}, \mp\frac{3}{4}\sqrt{21}$.

16. $\pm 2, \mp 1, \pm\frac{6}{7}, \mp\frac{1}{7}$. **17.** $\pm 1, \mp 2, \pm 5, \pm 6$.

18. $\pm 5, \pm 1, \pm 16, \mp\frac{3}{2}$. **19.** $\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{7}, \pm\frac{18}{7}$.

20. $\pm 3, \pm 2, \pm\dfrac{31}{\sqrt{145}}, \mp\dfrac{8}{\sqrt{145}}$.

21. $3, -4, -4, 3$. **22.** $3, -6, -6, 3$.

23. $-4, 6$. **24.** $4, 15, 6, 10$.

25. $3\pm\sqrt{6}, 3\mp\sqrt{6}$. **26.** $3, -\frac{1}{3}, -1, 1$.

* 俱取上符號或又可取下符號

LI. **1.** $7, 4, -4, -7$. **2.** $5, 3, -3, -5$.

3. $4, 3, 3, 4$. **4.** $5, -4, -4, 5$.

5. $\pm 3, \pm 1, \pm 1, \pm 3$. **6.** $\pm 3, \pm 3$.

7. $6, 4, 4, 6$. **8.** $4, 1, -1, -4$.

9. $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$. **10.** $-\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$.

11. $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, \pm\frac{1}{4}\sqrt{59}, \mp\frac{1}{4}\sqrt{59}$.

12. $\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{3}$.

13. $-3, 4, 4, -3, \frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}, \frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

14. $-1, 6, 6, -1, \frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{17}, \frac{5}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{17}$.

15. $-\frac{3}{4}, -\frac{15}{4}, 8, 10$. **16.** $3, 0, -7, 5$.

17. $\frac{3}{2}, \frac{2}{3}$. **18.** $\frac{5}{7}, \frac{7}{12}, \frac{12}{7}, \frac{7}{5}$.

19. $0, 0, 1, 2. \frac{15}{22}, \frac{9}{22}$. **20.** $-1, 0, 2, 1. \frac{1}{6}$.

21. $5, -3$.

22. $5, 4, 4, 5, \frac{1}{2}(-9\pm\sqrt{161}), \frac{1}{2}(-9\mp\sqrt{161})$.

23. $\pm3, \pm1, \pm1, \pm3, \pm3\sqrt{-1}, \pm\sqrt{-1},$
$\pm\sqrt{-1}, \pm3\sqrt{-1}$.

24. $1, 1. -\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-7}, -\frac{5}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{-7}$.

25. $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{8}. \pm\frac{1}{8}\sqrt{-14}, \mp\frac{1}{2}\sqrt{-14}$.

26. $\pm\frac{1}{2}, \pm3. \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{8}$. **27.** $0, 0, \frac{a^2+b^2}{a}, \frac{a^2+b^2}{b}$.

28. $a+b, a+b, \frac{b}{a}(a-b), \frac{a}{b}(b-a)$.

29. a, b. **30.** $\pm6, \pm\frac{8}{3}, \pm\frac{3}{2}$.

31. $\pm1, \pm2, \pm3. \pm\sqrt{-1}, \pm2\sqrt{-1}, \pm3\sqrt{-1}$.

32. $\pm\frac{8}{5}, \pm\frac{12}{5}, \pm1$. **33.** $\pm1, \pm4, \pm2$.

34. $0, \pm1, \pm2$.

LII. **1.** $\pm27, \pm9$. **2.** 7, 11.

3. $\pm$ 25 與 $\pm$5. **4.** 12 與 13.

5. 38, 42. **6.** 3 或 63. **7.** 39 丈, 29 丈.

8. ±2. **9.** 50. **10.** 18.

11. 水 18 升,酒 9 升. **12.** 20.

13. 20. **14.** 75. **15.** $3\frac{9}{17}$.

16. 每時 4 里. **17.** 5 與 60. **18.** $1\frac{5}{6}$ 時.

19. 4日. **20.** 9角. **21.** 9分.
22. 48. **23.** 105分與48分. **24.** 72.
25. 10圓, 5圓, 1000圓. **26.** $\frac{1}{2}$與$\frac{1}{3}$, 又$\frac{5}{2}$與$-\frac{5}{3}$.
27. 每時$3\frac{1}{3}$里及$1\frac{2}{3}$里. **28.** 578.
29. 18寸, 8寸. **30.** 1500平方尺.
31. 9與4. **32.** 210哩或144哩.

雜題 IV. A. **1.** y. **2.** $a^3-125b^3+8c^3+30abc$.

3. $x^2+x(a-2b)+(a^2+3b^2)$.

4. (1) $3(x+y+z)(x-y-5z)$,

(2) $(x-1)(x+1)(y-1)(y+1)$,

(3) $(x^2z-1)(y^2z-1)$.

5. (1) $\dfrac{x+6}{2-x-x^2}$, (2) $\dfrac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

6. (1) $x=\dfrac{3ab-2ac-bc}{a+2b-3c}$, (2) $x=7$ 又 $-\frac{3}{4}$.

(3) $x=2$ 又 $\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$ 又 2. **8.** 17與18.

B. **1.** (1) 6. **3.** $x^4+2ax^3+3a^2x^2+2a^3x+a^4$.

4. $(64x^6-729)(3x+2)$.

5. (1) $\dfrac{2(x+3)}{x^4-1}$, (2) 1.

6. (1) $x=-\frac{1}{5}$, (2) $x=5$ 又 $-6\frac{2}{3}$,

(3) $x=\pm2, y=\pm3$ 又 $x=\pm\dfrac{5}{\sqrt{2}}, y=\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

8. 840券.

C. **1.** (1) $24a-21b$. (2) $a^6-6a^4b^2-7a^2b^4-4b^6$.

3. $4xy-6x^2-2y^2$. **4.** (1) $(3x+2)(3x+1)$,

(2) $(a+b+c+d)(a-b+c-d)$

$(a+b-c-d)(-a+b+c-d)$.

5. y. **6.** (1) $x=-212$, (2) $x=y=a$.

7. 3 與 5. **8.** 6 角 2 仙, 5 角 5 仙.

D. **2.** $3+2x+8x^2+4x^3+x^4$.

5. $(x+1)(x+2)(x+3)(x-7)$, $x=7$.

6. (1) $x=\frac{2}{3}$, $y=3$, (2) $x=a$ 又 b,

(3) $x=2$, $y=1$, $x=6\frac{1}{4}$, $y=-3\frac{1}{4}$. **8.** 1 斗.

E. **1.** $2\frac{5}{6}$. **3.** $-3a+3b-18c+6d$.

4. $(6x-5ax-6a^2)(2x^2+2ax+3a^2)$. **5.** $\dfrac{1}{x+y}$.

6. (1) $x=\dfrac{a+b}{2}$, (2) $x=0$ 又 4,

(3) $x=\frac{3}{5}$, $y=\frac{2}{3}$. $x=1\frac{1}{2}$, $y=1\frac{2}{3}$.

7. $x=c$ 或 $\dfrac{a^2}{c}$. **8.** 每時 15 里.

F. **1.** $a^3+a^2b+ab^2+b^3$. **3.** $1+4x-x^2$.

4. $x-1$, 1. **5.** (1) 0, (2) x.

6. (1) $x=1$, (2) $x=a$ 與 $y=b$,

(3) $x=0$ 或 $\frac{5}{3}$. **7.** $7\sqrt{13}$.

8. 169 或 144.

方程式之雜題 **1.** 1. **2.** $\frac{11}{5}$. **3.** $\frac{7}{3}$. **4.** 3, 2.

5. 15 里, 18 里. **6.** $\frac{3}{2}\frac{3}{2}$. **7.** 5.

8. 8. **9.** 280, 336. **10.** 25 分.

11. 7. **12.** $a-b$. **13.** 1.

14. $x=y=1$. **15.** 310. **16.** 11.

17. 2, 12. **18.** $-\frac{3}{5}$, $-\frac{5}{3}$. **19.** 6, 7.

20. 51, 22, 17. **21.** 5. **22.** $\frac{bc}{a}$.

23. 17, 15. **24.** $\frac{2}{3}$ 又 6. **25.** 100 斤.

26. 7. **27.** 10, 11.

28. $\frac{1}{2}(a-b), \frac{1}{2}(a+b)$. **29.** 6, $\frac{4}{3}$. **30.** 45 年.

31. $-\frac{1}{5}$. **32.** $-\frac{1}{2}, 3$. **33.** $3, -\frac{5}{7}$.

34. $\frac{1}{4}, \frac{9}{4}$. **35.** 2 時. **36.** 0, 又 2.

37. $-1, -5$. **38.** $8, \frac{233}{179}$. **39.** 8.

40. 2 圓, 5 圓, 13 圓. **41.** $\frac{896}{111}$. **42.** 5, 6.

43. $0, -1, -8$. **44.** 10, 9. **45.** 99.

46. 2. **47.** $\frac{44}{5}, -11$. **48.** $4, \frac{9}{17}$.

49. $\frac{1}{2}$. **50.** 1 時, 45 分, 2 時, 20 分.

51. 3. **52.** 6. 1. **53.** $\pm\sqrt{a^2+1}$.

54. $\pm 2, \pm 3, \mp\frac{32}{\sqrt{345}}, \pm\frac{41}{\sqrt{345}}$. **55.** 6, 7 及 8.

56. 6. **57.** $0, 5, \frac{13}{6}$. **58.** $a-b, a+b$.

59. $\pm 3, \mp 3$. **60.** 36 分. **61.** c.

62. $1. -\frac{53}{3}$. **63.** $5, -7, -1\pm\frac{1}{2}\sqrt{69}$.

64. $\pm 4, \mp 2, \pm\frac{1}{2}\pm 5$. **65.** 29. **66.** 1.

67. $a\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}, b\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}$. **68.** $a+b$.

69. $\pm 1, \mp 2, \pm 3, \pm 2$. **70.** 50. **71.** $-\frac{8}{5}$.

72. $-a, \frac{c^2}{a}$. **73.** 0, 8. **74.** $4, 7. \frac{13}{4}, -\frac{7}{4}$.

75. 貳角銀貨52個,壹角銀貨74個,五仙白銅貨24個.

76. $\frac{19}{65}$. **77.** $3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{-14}$.

78. $0, 0. 2a, 2b$.

79. $6, 6. -4, -4. -1\pm\sqrt{21}, -1\mp\sqrt{21}.$

80. 縱 32 尺,橫 24 尺,高 10 尺. **81.** $-b.$

82. $a, b, \frac{1}{2}(a+b).$ **83.** $7, 6.$

84. $4, 2. 2, 4. 3\pm\sqrt{21}, 3\mp\sqrt{21}.$ **85.** $13.4.$

86. $3.$ **87.** $\frac{1}{2}(a-1), \frac{1}{2}(1-b).$

88. $\frac{1}{3}, \frac{1}{19}.$ **89.** $5, -6, -6, 5.$ **90.** 44 尺, 55 尺.

91. $0, 7.$ **92.** $-1, 1, 1.$ **93.** $a, b.$

94. $8, 6. 6, 8. 0, -2. -2, 0.$ **95.** 每時50里及每時30里

96. $3a-b, 3b-a$ **97.** $6, \frac{2}{13}.$ **98.** $-3, -1\pm\sqrt{5}.$

99. $4, 3. 3, 4. -\frac{19}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{313}, -\frac{19}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{313}.$ **100.** 15 里.

LIII. **1.** $a^{15}.$ **2.** $a^{15}.$ **3.** $-a^{6}.$ **4.** $a^{6}.$

5. $16a^{20}.$ **6.** $-243a^{30}.$ **7.** $a^4b^8.$

8. $a^{15}b^{20}.$ **9.** $-a^7b^{28}.$ **10.** $-27a^{21}b^{15}c^3.$

11. $a^4b^8c^{20}.$ **12.** $-125a^6b^9c^{12}.$ **13.** $\frac{a^6}{b^6}.$

14. $-\frac{a^{15}}{b^5c^{10}}.$ **15.** $\frac{a^6}{b^{12}c^{18}}.$

16. $4a^8+12a^4b^3+9b^6.$ **17.** $a^{10}-4a^5b^3+4b^6.$

18. $a^2x^8-2abx^4y^3+b^2y^6.$ **19.** $a^4-4a^3b+4a^2b^2.$

20. $a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6.$ **21.** $a^9+3a^6b^3+3a^3b^6+b^9.$

22. $8a^6-36a^4b^2+54a^2b^4-27b^6.$

23. $27a^6-54a^4b^2+36a^2b^4-8b^6.$

24. $a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2.$

25. $a^6+4b^6+9c^6-4a^3b^3+6a^3c^3-12b^3c^3.$

26. $a^4+16b^4+9c^4-8a^2b^2-6a^2c^2+24b^2c^2.$

27. $x^4-6x^3-3x^2+36x+36$

28. $9x^4-6x^3-29x^2+10x+25.$

29. $4x^4+20x^3+21x^2-10x+1.$

30. $9x^4-35x^3+72x+36.$

31. $1+2x+3x^2+4x^3+3x^4+2x^5+x^6.$

32. $x^6-2x^5+3x^4-4x^3+3x^2-2x+1.$

33. $x^6+2x^5-3x^4-8x^3+8x+4.$

34. $a^2+4b^2+9c^2+16d^2+4ab+6ac+8ad$
$+12bc+16bd+24cd.$

35. $4a^2+b^2+c^2+4d^2-4ab+4ac-8ad-2bc+4bd-4cd.$

36. $x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1.$

37. $x^6-3x^5+9x^4-13x^3+18x^2-12x+8.$

38. $27x^6-135x^5+252x^4-215x^3+84x^2-15x+1.$

LIV. **1.** $3x-5y.$ **2.** $5x^2-3y^2.$ **3.** $2x^2-3y^3.$

4. $2x^5-3y^3.$ **5.** $x^4-3y^4.$ **6.** $3x^5-y^3.$

7. $\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{3}y^3.$ **8.** $\frac{1}{3}x^4y^3-\frac{1}{2}.$ **9.** $5x^4y^3-4a^2b.$

10. $\dfrac{x^2}{a}+4ay^3.$ **11.** $3\dfrac{bx^2}{a}-4\dfrac{ay^2}{b}.$ **12.** $\dfrac{3}{x^3}-7a^5.$

13. $a+2b+3c.$ **14.** $-2a+b+3c.$

15. $2a^2+b^2-c^2.$ **16.** $5a^2-3b^2+2c^2.$

LV. **1.** $x^2+x+1.$ **2.** $2x^2-2x-1.$

3. $3x^2-6x-6.$ **4.** $1-\frac{1}{2}xy-2x^2y^2.$

5. $2x^2+x-\frac{1}{4}.$ **6.** $x^2-x+\frac{1}{4}.$

7. $x^2+xy+y^2.$ **8.** $4-12x+9x^2.$

9. $1+2x+3x^2.$ **10.** $2x^2-x+\frac{1}{2}.$

11. $1-2x-2x^2$. **12.** x^3-2x^2+x-2.

13. $3x^3-2x^2+3x+2$. **14.** $x^3-11x+17$.

15. $a-\frac{1}{2}x+4$. **16.** x^4+x^3-2x-4.

17. $4x-12+\dfrac{9}{x}$. **18.** $x^3-3x+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^3}$.

19. $x^2+x(y+z)+yz$. **20.** $2(yz+zx+xy)$.

LVI. **1.** 4. **2.** $\frac{1}{8}$. **3.** $\frac{1}{4}$. **4.** 5. **5.** $\frac{125}{8}$.

6. $\frac{16}{9}$. **7.** $\frac{1}{81}$. **8.** $\frac{1}{1000000}$.

9. 1000. **10.** $\frac{625}{81}$. **11.** $a^{\frac{1}{3}}$.

12. a^2. **13.** $a^{\frac{1}{3}}$. **14** $a^{\frac{3}{5}}$.

15. $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$. **16.** ab^2. **17.** a^3b^{-1}.

18. ab^{-2}. **19.** $a^{-1}b^{\frac{1}{4}}$. **20.** a^6b^{-1}.

21. a^{-3}. **22.** a. **23.** $a^{\frac{1}{2}}$.

24. 1. **25.** 1. **26.** 1.

27. 1. **28.** $y^{\frac{1}{3}}$. **29.** x^xy^y.

30. $x^xy^yz^z$. **31.** $a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{127}{42}}$. **32.** $a^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{12}}y^{\frac{13}{12}}$.

33. x^{6q}. **34.** 1. **35.** 1.

36. a. **37.** ay. **38.** $a^{\frac{13}{6}}x^{\frac{13}{6}}$

39. a. **40.** $a^{\frac{18}{5}}$. **41.** $a^{\frac{1}{24}}$.

42. $a^{\frac{1}{15}}$. **43.** $a^{\frac{17}{6}}b^{-\frac{8}{3}}$. **44.** b^{-4}.

45 $\sqrt{a}-\dfrac{1}{a^2}$. **46.** $\dfrac{1}{a^4\sqrt[4]{b}}$.

47. $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{b}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b}}$. **48.** $\dfrac{1}{a^6\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt[4]{a^2}}{9\sqrt[3]{b^2}}$.

LVII. **1.** $x-y$. **2.** x^3-y^3. **3.** $x^{\frac{1}{2}}-1$.

4. $x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}$. **5.** $x-1$. **6.** $x+y$.

7. a^2-b^2. **8.** $a^{\frac{8}{3}}+a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{8}{3}}$.

9. x^2-1. **10.** $x^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{3}{2}}$.

11. $x^n+2x^{\frac{n}{2}}+3+2x^{-\frac{n}{2}}+x^{-n}$.

12. $x^{2n}y^{-2n}+2x^ny^{-n}+3+2x^{-n}y^n+x^{-2n}y^{2n}$.

13. $a+b+c-3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}$. **14.** $\frac{1}{16}a-\frac{31}{81}b^2$.

15. $243a+y^{\frac{5}{3}}$. **16.** $a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}}$. **17.** $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}$.

18. $x^n+x^{\frac{n}{2}}y^{\frac{n}{2}}+y^n$. **19.** $x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{4}{3}}$.

20. $x^{\frac{4}{5}}+3x^{\frac{3}{5}}y^{\frac{1}{3}}+9x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{2}{3}}+27x^{\frac{1}{5}}y+81y^{\frac{4}{3}}$.

21. $y^3+b^{\frac{1}{2}}y^{\frac{5}{2}}-b^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{5}{2}}y^{\frac{1}{2}}+b^3$.

22. $x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$. **23.** $a^2-ab^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}}$.

24. $a^{\frac{2}{3}}-a^{-\frac{2}{3}}$. **25.** $x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+1+2x^{-\frac{1}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}$.

26. $x^2y^{-\frac{12}{5}}-x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{8}{5}}+x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{4}{5}}-1+x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{5}}-x^{-\frac{4}{3}}y^{\frac{8}{5}}+x^{-2}y^{\frac{12}{5}}$.

27. $a^2c^{\frac{5}{2}}$. **28.** a^3-64b^2.

31. $4x^2+3x+2-3x^{-1}$. **32.** $\frac{8}{1-x^2}$.

33. $2b$. **34.** (1) $x^{\frac{1}{3}}+1$, (2) $2x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}$,

(3) $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{2}}$. **35.** $2xa^{-1}-3+4x^{-1}a$.

36. $5xy^{-1}-2+\frac{1}{2}x^{-1}y$. **37.** $x^{\frac{4}{5}}-a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}}+a^{\frac{4}{5}}$.

38. $x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{6}}$. **39.** (1) $1, \frac{1}{2}\{-1\pm\sqrt{-3}\}$.

(2) $36, 4.$ (3) $81.$ (4) $1, 27.$

(5) $\frac{243}{32}, -\frac{1}{32}.$

LVIII. **1.** $7\sqrt{3}.$ **2.** $12\sqrt{2}.$ **3.** $13\sqrt{5}.$

4. $3\sqrt{5}.$ **5.** $\sqrt{7}.$ **6.** $5\sqrt{13}.$

7. $8\sqrt[3]{5}.$ **8.** $0.$ **9.** $\sqrt[3]{7}.$

10. $4\sqrt{2}.$ **11.** $13\sqrt{3}.$ **12.** $0.$

13. $\frac{2}{3}\sqrt{2}.$ **14.** $30.$ **15.** $12\sqrt{2}.$

16. $6.$ **17.** $6.$ **18.** $90\sqrt{3}.$

19. $6\sqrt[3]{4}.$ **20.** $30.$ **21.** $6.$

22. $10\sqrt[6]{40}.$ **23.** $4\sqrt[6]{3}.$ **24.** $\frac{3}{5}.$

25. $\frac{3}{4}.$ **26.** $8.$ **27.** $7\sqrt[3]{9}.$

28. $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}.$ **29.** $\sqrt{50}, \sqrt[3]{344}, \sqrt[4]{2402}.$

30. $3.$ **31.** $\sqrt{15}-6.$

32. $19+5\sqrt{6}+6\sqrt{3}+12\sqrt{2}.$

33. $1+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{25}.$

34. $10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}.$ **35.** $24.$

LIX. **1.** $\frac{3}{7}\sqrt{7}.$ **2.** $\frac{2}{5}\sqrt{5}.$ **3.** $\frac{1}{2}\sqrt{6}.$

4. $\frac{1}{5}\sqrt{30}.$ **5.** $2\sqrt{2}-2.$ **6.** $3-2\sqrt{2}.$

7. $5-\sqrt{15}.$ **8.** $\frac{103+80\sqrt{3}}{71}.$ **9.** $\frac{19+7\sqrt{15}}{17}.$

10. $\frac{8-7\sqrt{2}}{2}.$ **11.** $\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$

12. $\frac{12+9\sqrt{3}+3\sqrt{5}-6\sqrt{15}}{22}.$ **13.** $2\sqrt[3]{4}+2.$

14. $\sqrt[3]{81}+1.$ **15.** $14.$ **16.** $52.$

17. $\frac{177+52\sqrt{2}}{161}$. **18.** $\frac{26-15\sqrt{3}+3\sqrt{10}}{13}$.

19. $\frac{29}{2}$. **20.** 98. **21.** $\frac{2+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

23. 0. **25.** $\frac{7a+b+8\sqrt{(a^2-b^2)}}{3a+5b}$.

26. 5.828. **27.** 6.636. **28.** $\sqrt{5}+1$.

29. $3+\sqrt{7}$. **30.** $3-\sqrt{3}$. **31.** $5-\sqrt{3}$.

32. $2\sqrt{13}-7$. **33.** $6\sqrt{2}+3\sqrt{5}$. **34.** $14+2\sqrt{21}$.

35. $2+\frac{1}{\sqrt{2}}$. **36.** $4\sqrt{5}$. **37.** $4-2\sqrt{3}$.

38. $1+\sqrt{5}+\sqrt{7}$. **39.** $\sqrt{(x+1)}+\sqrt{(x-1)}$.

40. $\sqrt{(a+x)}+\sqrt{(a-x)}$. **41.** $\sqrt{(2x-3)}+\sqrt{(x+2)}$.

42. $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$. **43.** $\sqrt{8}-\sqrt{7}$. **44.** $2\sqrt{5}$.

45. $\frac{2\sqrt{2}+1}{7}$. **46.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **48.** 6.

LX. **1.** 7:8, 31:36, 41:48, 5:6. **2.** 2.

3. -13. **4.** $\frac{4}{7}$. **5.** 55, 66.

6. 21, 56. **7.** $x:y=7:2$. **8.** $x:y=1:2$.

9. $\frac{x}{y}=\frac{2}{1}$ 又 $\frac{3}{1}$. **10.** 4:7. **11.** 12 與 9.

12. 16. **13.** 5:8, 3:5. **14.** $4x^2:9y^2$.

15. $\frac{11}{16}$. **16.** 36, 48.

LXI. **6.** a^2b^2. **7.** a^2-b^2. **8.** $a^3(a+b)^3$.

20. $\frac{11}{3}$.

LXII. **1.** $8\frac{1}{3}$ **2.** 5. **6.** 6. **7.** $6\frac{3}{4}$.

8. 452.38934 平方尺. **9.** 113.076.

10. 160. **11.** 64 尺. **13.** $\frac{45}{56}$ 立方尺.

14. $a^2-b^2=4c^2$. **15.** 1848 立方尺.

16. 12 寸 **17.** 63 里.

雜題 V. A. **1.** $\frac{13}{18}$. **2.** $a^2-3ab+b^2$.

3. $1-x^3-x^4$. **4.** $\dfrac{(a-1)(b-1)}{b}$.

5. 3 角. **7.** 7.

B. **1.** $3\frac{3}{7}$.

2. $(a-1)x^3-3ax^2+(a^2-a^3)x-(a^3+2a^2+2a+1)$.

3. (1) $x(x-7y)(x-6y)$, (2) $(5c-a)(3a+4b+c)$,

(3) $(x-2y+3)(x-2y-3)$. **4.** $\dfrac{4y}{x+2y}$.

5. (1) 4 又 $-\frac{5}{3}$, (2) $x=\frac{17}{3}, y=\frac{10}{3}$.

7. $3x^3-2xy^2+5y^3$. **8.** 6 與 3.

C. **1.** $20b-10a-8c$. **2.** $b^2-a^2+\dfrac{b^4}{a^2}-\dfrac{a^4}{b^2}$.

8. $3\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$, $3a^2+ab-4b^2$.

5. $a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+3y^{\frac{2}{3}}$. **7.** 378 里.

D. **2.** $x^2+(a-b)x-ab$. **3.** $6x(x+1)(x-3)(x-4)$.

4. $\frac{1}{2}(y+z-x)^2$.

5. (1) $x=-7$, (2) $\pm 2, \pm 5$. $\pm\frac{7}{2}\sqrt{2}, \mp\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

$16\frac{1}{2}$ 尺, 與 $13\frac{3}{4}$ 尺. **7.** $x-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y$.

E. **1.** $\frac{1}{3}(x-y)$. **2.** $2ax-(3b-4c)y$.

3. (1) $4a^2b^2(b+2a)(b-2a)$, (2) $(x+3)(x-29)$,
(3) $(3x+5y)(x-2y)$. **5.** 42. **6.** $2\sqrt{ax}-2a$.

F. **1.** $a^2-b^2-c^2-d^2+2bc+2cd-2bd$.

2. $(a+b+c)^2$. **3.** $x^2-5x+6.3$ 又 2.

5. (1) $x=-\frac{25}{9}$, (2)$x=2\frac{1}{2}, y=-1\frac{1}{5}. x=-1\frac{3}{4}, y=1\frac{2}{3}$.

6. $30+13\sqrt{6}, y^{-\frac{5}{12}}$. **7.** $x^6-3x^4+2x^2-1$.

LXIII. **1.** (1) 61, (2) 117, (3) -75, (4) $6\frac{5}{9}$,
(5) $a-28b$. **2.** (1) 72, (2) 121, (3) -3,
(4) 366, (5) $40\frac{2}{3}$, (6) $-19\frac{2}{3}$. **3.** 15.

4. $\frac{5}{4}$. **5.** 5. **6.** 43.

7. 34. **8.** -2. **9.** 78.

10. 0. **11.** 第21項. **12.** 第102項.

13. 第56項. **14.** 第9項.

15. (1) 10, (2) 0, (3) a. **16.** 11, 14 等.

17. $53\frac{1}{3}, 56\frac{2}{3}$ 等. **18.** $272\frac{1}{4}, 275\frac{1}{3}$ 等.

19. $65\frac{1}{2}, 64, 62\frac{1}{2}$ 等. **20.** $82\frac{1}{3}, 80\frac{2}{3}, 79$ 等.

21. $4a-5b, 3a-5b, 2a-3b$ 等.

22. $\frac{1}{3}a-4\frac{1}{3}b, -\frac{1}{3}a-3\frac{2}{3}b, -a-3b$ 等.

24. 5. **25.** 6. **26.** 101. **27.** -25.

LXIV. **1.** 420. **2.** 180. **3.** $94\frac{1}{2}$.

4. 660. **5.** 0. **6.** $-2104\frac{1}{2}$. **7.** 63.

8. 0. **9.** $\frac{1}{12}(45n-5n^2)$. **10.** $\frac{1}{21}(7n^2+177n)$.

11. 0. **12.** 0. **13.** 357.

14. $7\sqrt{2}+14$. **15.** $\frac{1}{2}(n-1)$. **16.** $\frac{1}{3}(n^3+3n^2)$.

17. $n(a+b)^2-n(n-1)ab$.　　**18.** 375

19. 1878.　　**20.** 880.　　**21.** 2400.

22. $6\frac{1}{2}$, 8 等,和 $852\frac{1}{2}$.　　**23.** $12\frac{8}{41}$, $14\frac{16}{41}$ 等,和 2310.

24. 55. 1485.　　**25.** 511. 36281.　　**26.** 38.

27. 392.　　**28** 1953.　　**29.** 3.

30. $-\frac{5}{12}$.　　**31.** 1.　　**32.** $\frac{1}{2}$.

33. 48.　　**34.** 5.　　**35.** 9.

36. 5 又 6.　　**37.** $3a$,若各項爲正整數則爲 $-2a$.

38. 21.　　**39.** 9.　　**40.** 3.

41. 4060.　　**42.** 90.　　**43.** 525.

44. $200n+100$.　　**47.** 7500.　　**48.** 246950.

49. 39900.　　**50.** 17.　　**51.** 1, 4, 7 等.

53. 20, 21, 22 等.　　**54.** 43.　　**55.** 10.

56. 8, 16, 24, 32.　　**57.** ±2, ±4, ±6, ±8.

LXV.　**1.** (1) $\frac{1}{27}$,　(2) $-\frac{243}{16}$,　(3) $\frac{b^5}{a^3}$.

2. $\frac{16}{3}$.　　**3.** $-\frac{1}{128}$.　　**4.** 2.

5. ±1092.　　**6.** 5.0625.　　**7.** $-\frac{1}{32}$.

8. $\frac{1}{162}$.　　**9.** (1) ±6, (2) ±42, (3) $\pm a^2b^2$.

10. $-2, 4.\ 6, 3, \frac{3}{2}.\ 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}$.

11. .6, .12, .024, .0048, .00096.

12. $a^2b^{-4}, ab^{-2}, 1, a^{-1}b^2$.　　**13.** $\frac{1}{2}$.　　**14.** 54 又 108.

LXVI.　**1.** $16\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right\}$.　　**2.** $48\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^6\right\}$.

3 $\frac{a(r^n-1)}{r^{n-1}(r-1)}$.　　**4.** $\frac{27}{2}\left\{1-\left(\frac{8}{9}\right)^8\right\}$.

5. $\frac{4}{9}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^6-1\right\}$. **6.** $\frac{48}{7}$. **7.** $\frac{40}{7}$.

8. 5. **9.** $\frac{a^n-b^n}{a^{n-3}(a-b)}$. **10.** $\frac{9}{5}$.

11. 8190. **12.** 3.4142. **13.** $6x^2-5x-6$.

15. $1, \frac{3}{4}, \frac{9}{16}$ 等,又 $3, \frac{3}{4}, \frac{3}{16}$ 等. **16.** $12, -4, \frac{3}{4}$ 等.

17. 2. **20.** $8, 16, 32, \cdots\cdots$ **21.** $\frac{a}{b}$.

22. a. **24.** $\frac{9}{46}(3\sqrt{6}+2\sqrt{2})$. **25.** $\frac{7}{12}$ 又 $-\frac{7}{16}$.

26. 2, 4, 8. **27.** $2, 8, 32, \cdots\cdots$ **28.** $\frac{1}{2}, \pm1, 2, \cdots\cdots$

LXVII. **1.** 14.8832. **2.** $\frac{1}{4}(9^7-1)$. **3.** $\frac{5}{4}$.

4. $\frac{b^n-a^n}{a^{n-2}(b-a)}$. **5.** $\frac{1}{3}$. **6.** $104\frac{1}{2}$.

7. $76a+57b$. **8** $\frac{3}{23}\{1-(\frac{4}{3})^8\}$. **9.** $5\frac{5}{24}$.

10. $\frac{5}{3}\{(\frac{5}{2})^5-1\}$. **11.** (1) $71\frac{1}{4}$, (2) -6,

(3) $\frac{16}{7}\{1-(\frac{3}{4})^6\}, \frac{16}{7}$, (4) $\frac{2}{3}\{(\frac{3}{2})^6-1\}$,

(5) $\frac{2}{3}\{1-(\frac{2}{3})^6\}, \frac{3}{2}$.

13. $1, 3, 5, \cdots\cdots$ **14.** $5\pm\sqrt{24}$. **17.** 2, 6, 18.

18. 1, 3, 5, 7, 9. **19.** 6, 9, 12, 16, 又 6, 1, -4, 16.

LXVIII. **2.** $\frac{7}{6}, \frac{7}{5}, \frac{7}{4}, \frac{7}{3}, \frac{7}{2}$. **3.** $\frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1, \frac{6}{5}$.

20. $6\frac{2}{3}, 5\frac{1}{3}, 4$.

LXIX. **1.** $\frac{4}{3}n(n+1)(n+2)$.

2. $\frac{1}{6}\{(2n+1)(2n+3)(2n+5)-15\}$.

3. $\frac{1}{9}\{(3n-2)(3n+1)(3n+4)+8\}$.

4. $\frac{1}{9}\{(3n-1)(3n+2)(3n+5)+10\}$.

5. $\frac{1}{8}\{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)+15\}$.

6. $\frac{1}{20}\{(5n-3)(5n+2)(5n+7)(5n+12)+3.2.7.12\}$.

7. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}, \frac{1}{2}$.　　**8.** $\frac{1}{6}-\frac{1}{2(3n+2)}, \frac{1}{6}$.

9. $\frac{1}{12}-\frac{1}{4(2n+1)(2n+3)}, \frac{1}{12}$.

10. $\frac{1}{60}-\frac{1}{6(3n+2)(3n+5)}, \frac{1}{60}$.

11. $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+n+1}, \frac{1}{x+1}$.

12. $\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+n+1)x}, \frac{1}{x(x+1)}\right.$.

13. $2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)2$.　　**14.** $\frac{1}{3}n(4n^2-1)$.

15. $n^2(2n^2-1)$.

16. $\frac{1}{3b}\{(a+\overline{n-1}b)(a+nb)(a+\overline{n+1}b)-(a-b)a(a+b)\}$.

雜題 VI. A. **1.** 48.　　**2.** $3x-7, x=\frac{7}{3}$.

4. (1) $x=-4, y=\frac{1}{7}$,　　(2) $x=c$, 又 $x=a+b+c$.

5. 牛 20 圓, 羊 2.50 圓.　　**7.** $ab^{-1}+32a^{-3}b^{\frac{3}{2}}$.

8. $-\frac{1}{23}(73+40\sqrt{3}), \sqrt{8}+\sqrt{17}$.　**9.** $\frac{20}{7}\{1-(\frac{3}{4})^8\}, \frac{20}{7}$.

10. $109\frac{11}{21}, 119\frac{1}{21}\cdots\cdots, 290\frac{10}{21}$, 和 4400.

B. **1.** $x-8y+4z$.

2. $(nx+my)(mx+ny), (x-y)(x^2+y^2)$.

4. (1) $x=\sqrt{ab}$, (2) $x=7$ 又 -2.　**6.** a^3+b^2-c.

8. (1) -1040, (2) $4\frac{1}{6}$.　**9.** 71071.　**10.** 88 碼.

C. **1.** -1.　　**2.** $2x^2-3xy+2y^2$.

4. $3(x-3a)^2(x^2-4a^2)$. **5**. $\dfrac{6a^2}{(a^2-4)(a^2-1)}$.

6. 每時25哩, 100哩. **7**. 1.

9. (1) 0, (2) $8\frac{1}{3}$. **10**. 9與25.

D. **1**. x^4-a^4. **3**. $\dfrac{(x-4)(x-7)}{x^2}$.

4. (1) $x=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{3}$,

(2) $x=\pm 5, y=\pm 3, x=\pm\frac{13}{3}, y=\pm\frac{5}{3}$.

5. 48. **6**. $x^2-40x+8=0$.

7. $x^3-x^{-1}+4x^{-8}$. **9**. (1) $-7\frac{852}{1536}$, (2) $5\frac{2}{5}$.

E. **1**. $-x^2-xy-y^2$. **2**. $3a^2+4ab+b^2$.

3. $a-b, (a-b)(4a-b)(3a^2+b^2)$.

4. $(x+1)^2$. **5**. $-mn$.

6. $x=-\frac{5}{6}$. **8**. $2x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}-4y$.

9. (1) $\frac{1}{2}n(n-7)$, (2) $\frac{2}{3}$. **10**. $18\frac{1}{3}$ 與 $36\frac{2}{3}$.

F. **1**. $8xz$. **2**. $a^2+b^2+c^2-2ab+ac-bc$.

4. $-\dfrac{1}{a+2x}$. **5**. (1) $x=3, y=7, z=4$,

(2) $x=4\frac{1}{2}$, (3) $x=\pm 9, y=\pm 3$.

6. 式 $(x^3-2x^2+5x-6)^2$. **7**. $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+\sqrt{7})=2.4409$.

LXX. **1**. 2730. **2**. 5040. **3**. 40320.

4. 120. **5**. 1956. **6**. $8\times 9!$.

7. 6. **8**. 420, 34650, $\frac{1}{2}\times 9!$.

9. 1260. **10**. 210. **11**. 1120, 180.

12. 720. **13**. 8. **14**. 1820, 455, 190.

15. 105. **16**. 1330. **17**. 48.

18. 5. **19**. 5. **20**. 90.

21. 125. **22**. 59. **23**. 209.

28. 210. **29**. 25. **30**. 246480.

31. $\frac{30!}{11!\,19!}$, $\frac{1}{2}\frac{30!}{11!\,11!\,8!}$. **32**. 60.

33. 180. **34**. 7!.

35. $\frac{1}{2}n(n-1)$, $\frac{1}{48}n(n+1)(n-1)(n-2)(n^2-n-4)$.

LXXI. **1**. $x^6+6ax^5+15a^2x^4+20a^3x^3+15a^4x^2+6a^5x+a^6$.

2. $1-5x^2+10x^4-10x^6+5x^8-x^{10}$.

3. $81x^4-216x^3y+216x^2y^2-96ay^3+16y^4$

4. $16a^4+96a^5+216a^6+216a^7+81a^8$.

5. $64x^{12}-192x^{10}+240x^8-160x^6+60x^4-12x^2+1$.

6. $y^7-7xy^6+21x^2y^5-35x^3y^4+35x^4y^3-21x^5y^2+7x^6y-x^7$.

7. $405a^8b^2$. **8**. $126720x^{16}$. **9**. $-14a^3$.

10. $210x^6$. **11**. $1140x^{17}$. **12**. $231x^{20}$.

13. $2a^4+12a^2b+2b^2$. **14**. $2a^6+30a^4b+30a^2b^2+2b^3$.

15. $2a^8+56a^6b+140a^4b^2+56a^2b^3+2b^4$.

16. $70x^4$. **17**. $252x^5$. **18**. $90720x^4y^4$.

20. $x^{16}+8x^{12}+28x^8+56x^4+70+56x^{-4}$

$+28x^{-8}+8x^{-12}+x^{-16}$.

21. 3003. **22**. $\frac{\underline{|20}}{\underline{|16}\,\underline{|4}}\frac{1}{x^8}$. **23**. $(-1)^n\frac{(2n)!}{n!\,n!}a^{8n}$,

24 $\frac{(2n+1)!}{n!\,(n+1)!}x$ $\frac{(2n+1)!}{n!\,(n+1)!}\frac{1}{x}$ **25**. 第五項.

26. 第五項與第六項. **27**. 第九項.

28. 第十一項. **29.** 第六項.

30. 第十四項與第十五項.

31. $(-1)^{n-r}\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}a^r b^{n-r}$.

34. 96059601, 997002999.

LXXIII. **1.** $1+4x+10x^2+20x^3+35x^4+\cdots\cdots$

2. $1-8x+40x^2-160x^3+560x^4-\cdots\cdots$

3. $\frac{1}{8}\{1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{4}x^3+\frac{15}{16}x^4+\frac{21}{32}x^5+\cdots\cdots\}$.

4. $1+2x+5x^2+\frac{40}{3}x^3+\frac{110}{3}x^4+\cdots\cdots$

5. $1-3x-3x^2-7x^3-21x^4-\cdots\cdots$

6. $\dfrac{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}{4!}x^r$.

7. $\dfrac{n(n+1)\cdots\cdots(n+r-1)}{r!}x^r$.

8. $\dfrac{3.5.7.\cdots\cdots(2r+1)}{2^r r!}x^r$.

9. $(-1)^r\dfrac{3.1.3.\cdots\cdots(2r-5)}{2^r r!}x^r$.

10. $(-1)^r\dfrac{2.5.8.\cdots\cdots(3r-1)}{3^r r!}x^r$.

11. $\dfrac{5.7.9.\cdots\cdots(2r+3)}{r!}x^r$.

12. $(-1)^r\dfrac{4.7.10.\cdots\cdots(3r+1)}{r!}x^r$. **13.** $\dfrac{5}{16a^6}$.

14. $1-2x-x^2-\dfrac{4}{3}x^3-\dfrac{7}{3}x^4-\cdots\cdots-2\dfrac{1.4.7.\cdots\cdots(3r-5)}{r!}x^r$.

15. -4. -11.   16. $-\frac{31}{16}$, $\frac{107}{128}$.

17. $-\frac{1701}{256}$.   18. $-\frac{1729}{768}x^5$.

19. 10.4880……, 5.0657……, 5.0099……   20. 10. 3.

LXXIV. 1. 0. 2. 4. 3. -2. 4. -3.
5. -1. 6. $\frac{2}{5}$. 7. 5. 8. $\frac{5}{2}$.
9. 2. 10. $\frac{7}{4}$. 11. $\frac{3}{4}$. 12. $\frac{3}{7}$.
13. $-.1760913$, 1.7781513, 3.6532126, .2795880.
14. .5740313, .1072100, 1.4210639.
15. 2.5105452, .1637578, -2.3645161.
16. .0969100, .1072100, .7886320.
17. .9030900, .9542426. 18. 1.8573326, .5270968.

LXXV. 1. 200000, .00002. 2. 1991.1, .00019911.
3. $\bar{2}.6707522$. 4. $\bar{3}.7705677$. 5. 1961109.
6. 1.93070. 7. 1.71877. 8. .324838.
9. 131.50 圓. 11. 742.975 圓. 12. 641.862 圓.

LXXVI. 1. $(x+1)(x-1)^2$.
2. $(x^2+1)(x+1)^2(x-1)^2$.
3. $(1-x)^2(1+x)(1+x^2)$.
4. $(1-x)^2(1+x)^2(1+x^2)(1+x^4)$.
5. $(x-y-a-b)(x+y-a+b)$.
6. $(x+y-1)(x-y-2)$.
7. $(x+2y-4)(x-4y+2)$.

8. $(a+b-c+f)(a-b-c-f)$.

9. (1) $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$,

(2) $x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6$,

(3) $x^7-x^6y+x^5y^2-x^4y^3+x^3y^4-x^2y^5+xy^6-y^7$.

12. $(2a+3b)^2-(2a+3b)(3a+2b)(3a+2b)^2$.

13. $3(2a+4b-4c)^2-3(2a+4b-4c)(a-b+7c)$
$+3(a-b+7c)^2$.

LXXVII. **9**. $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

10. $4abc$. **11**. $2abc$. **12**. $2abc(a+b+c)$.

13. $3.5(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)$. **15**. $a+b+c$.

16. 1. **17**. $\frac{1}{abc}$. **18**. $\frac{bc+ca+ab}{a^2b^2c^2}$.

19. 0. **20**. $\frac{a+b+c}{abc}$. **24**. $(b+c)(c+a)(a+b)$.

25. (1) $x-8y$, (2) $1+x+x^2$, (3) x^2-3x+2,

(4) $2x^2-3x+4$.

附　錄

希臘文字之發音

A α Alpha「阿華」
B β Beta「比達」
Γ γ Gamma「敢痲」
Δ δ Delta「典達」
E ε Epsilon「耶西倫」
Z ζ Zata「者達」
H η Eta「耶達」
Θ θ Theta「底達」
I ι Iota「愛阿達」
K $\varkappa$ Kappa「卡扒」
Λ λ Lambda「郎塔」
M μ Mu「緲」
N ν Nu「栁」
Ξ ξ Xi「爾格習」
O o Omicron「阿米可倫」
Π π Pi「拍」
P ρ Rho「羅」
Σ σ Sigma「西格馬」
T τ Tau「犒」
Y υ Upsilon「西亞倫」
Φ ϕ Phi「腓」
X χ Chi「喀」
Ψ ψ Psi「撲洗」
Ω ω Omega「阿蔑嘉」