Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2023**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 50

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 50.1. Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Wie lautet das Ergebnis der Division mit Rest, wenn man ein Polynom P durch X^m teilt?

Übungsaufgaben

Aufgabe 50.2. Setze in das Polynom $2X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{2}{5}X + \frac{3}{4}$ die Zahl $\frac{2}{3}$ ein.

Aufgabe 50.3. Setze in das Polynom $2X^4 + X^3 - 3X^2 + X + 5$ die Zahl $\sqrt{2}$ ein.

Aufgabe 50.4. Schreibe das Polynom

$$X^3 + 2X^2 - 3X + 4$$

in der neuen Variablen $U = X + 2$.

Aufgabe 50.5.*

(1) Berechne das Produkt
$$\left(2 - 3X + X^2\right) \cdot \left(-5 + 4X - 3X^2\right)$$
im Polynomring $\mathbb{Q}[X]$.

(2) Berechne das Produkt
$$\left(2 - 3\sqrt{2} + \sqrt{2}^2\right) \cdot \left(-5 + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2}^2\right)$$
in $\mathbb{R}$ auf zwei verschiedene Arten.

Aufgabe 50.6. Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $a \in K$ ein fixiertes Element. Bestimme den Kern des Einsetzungshomomorphismus

$$K[X] \longrightarrow K,\, X \longmapsto a.$$

Aufgabe 50.7.*

Man gebe ein Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$ an, das nicht zu $\mathbb{Z}[X]$ gehört, aber die Eigenschaft besitzt, dass für jede ganze Zahl n gilt: $P(n) \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 50.8. Bestimme die Hintereinanderschaltungen $\varphi \circ \psi$ und $\psi \circ \varphi$ für die Abbildungen $\varphi, \psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$\varphi(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \text{ und } \psi(x) = x^2 + 5x - 3$$

definiert sind.

Aufgabe 50.9. Bestimme die Hintereinanderschaltungen $\varphi \circ \psi$ und $\psi \circ \varphi$ für die Abbildungen $\varphi, \psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$\varphi(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 5 \text{ und } \psi(x) = 2x^3 - x^2 + 6x - 1$$

definiert sind.

Aufgabe 50.10. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung (also das Einsetzen eines Polynoms in ein weiteres) von zwei Polynomen wieder ein Polynom ist.

Aufgabe 50.11.*

Es seien

$$f, g, h \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen.

a) Zeige die Gleichheit

$$(h \cdot g) \circ f \;=\; (h \circ f) \cdot (g \circ f).$$

b) Zeige durch ein Beispiel, dass die Gleichheit

$$(h \circ g) \cdot f \;=\; (h \cdot f) \circ (g \cdot f)$$

nicht gelten muss.

Aufgabe 50.12. Es sei K ein angeordneter Körper und es sei $P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ eine Polynomfunktion. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K mit Grenzwert x. Zeige durch Induktion über d, dass dann auch die durch

$$y_n \;:=\; P(x_n)$$

definierte Folge konvergiert, und zwar gegen $P(x)$.

Aufgabe 50.13. a) Für welche reellen Polynome $P \in \mathbb{R}[X]$ ist die zugehörige polynomiale Abbildung

$$(\mathbb{R}, 0, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0, +),\ x \longmapsto P(x),$$

ein Gruppenhomomorphismus?

b) Für welche reellen Polynome $Q \in \mathbb{R}[X]$ ist allenfalls 0 eine Nullstelle und die zugehörige polynomiale Abbildung

$$(\mathbb{R}^\times, 1, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^\times, 1, \cdot),\ x \longmapsto Q(x),$$

ein Gruppenhomomorphismus?

Aufgabe 50.14. Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 3X^4 + 7X^2 - 2X + 5$ und $T = 2X^2 + 3X - 1$ durch.

Aufgabe 50.15.*

Führe in $\mathbb{Z}/(5)[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = X^3 + 4X^2 + 3X + 4$ und $T = 3X^2 + 2X + 1$ durch.

Aufgabe 50.16. Führe in $\mathbb{Z}/(7)[X]$ folgende Polynomdivision aus.

$$X^4 + 5X^2 + 3 \text{ durch } 2X^2 + X + 6\,.$$

Aufgabe 50.17. Führe in $\mathbb{Z}/(7)[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 5X^4 + 3X^3 + 5X^2 + 3X + 6$ und $T = 3X^2 + 6X + 4$ durch.

Aufgabe 50.18. Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und seien $P, T \in K[X]$ Polynome. Zeige, dass es für die Division mit Rest „P durch T“ unerheblich ist, ob man sie in $K[X]$ oder in $L[X]$ durchführt.

Aufgabe 50.19. Vergleiche die Division mit Rest in $\mathbb{Z}$ und in $K[X]$ (K ein Körper).

Aufgabe 50.20.*

Zeige, dass

$$z = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{2}}$$

eine Nullstelle des Polynoms

$$X^3 + 3X + 2$$

ist.

Aufgabe 50.21.*

Es sei

$$P = X^3 + bX^2 + cX + d$$

ein normiertes Polynom über einem Körper K. Es seien u, v, w drei (verschiedene) Zahlen aus K. Zeige, dass diese drei Zahlen genau dann Nullstellen von P sind, wenn sie das Gleichungssystem

$$uvw = -d,$$

$$uv + uw + vw = c,$$

$$u + v + w = -b,$$

erfüllen.

Aufgabe 50.22.*

Bestimme die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der beiden reellen Polynome

$$P = X^3 + 4X^2 - 7X + 1$$

und

$$Q = X^3 - 2X^2 + 5X + 3.$$

Aufgabe 50.23. Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass jedes Polynom $P \in K[X]$, $P \neq 0$, eine Produktzerlegung

$$P = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k} \cdot Q$$

mit $\mu_j \geq 1$ und einem nullstellenfreien Polynom Q besitzt, wobei die auftretenden verschiedenen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und die zugehörigen Exponenten $\mu_1, \ldots, \mu_k$ bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 50.24.*

Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K und sei $P \in K[X]$ ein Polynom, das eine Zerlegung in Linearfaktoren besitze. Es sei T ein Teiler von P. Zeige, dass T ebenfalls eine Zerlegung in Linearfaktoren besitzt, wobei die Vielfachheit eines Linearfaktors $X - a$ in T durch seine Vielfachheit in P beschränkt ist.

Aufgabe 50.25.*

Es seien P und Q verschiedene normierte Polynome vom Grad d über einem Körper K. Wie viele Schnittpunkte besitzen die beiden Graphen maximal?

Aufgabe 50.26.*

Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(-1) = 2,\ f(1) = 0,\ f(3) = 5\,.$$

Aufgabe 50.27. Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2 + dX^3$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(0) = 1,\ f(1) = 2,\ f(2) = 0,\ f(-1) = 1\,.$$

Aufgabe 50.28.*

(1) Bestimme ein Polynom P vom Grad ≤ 3 mit

$$P(-1) = -4,$$

$$P(0) = 2,$$

$$P(1) = 2$$

und

$$P(2) = 3$$

(2) Bestimme ein normiertes Polynom Q vom Grad 3 mit

$$Q(0) = 1,$$

$$Q(2) = 3$$

und

$$Q(3) = 10.$$

(3) Bestimme die Schnittpunkte der Graphen zu P und zu Q.

Aufgabe 50.29. Es sei $K[X]$ der Polynomring über einem Körper K. Zeige, dass die Menge

$$\left\{ \frac{P}{Q} \mid P, Q \in K[X],\ Q \neq 0 \right\},$$

wobei zwei Brüche $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P'}{Q'}$ genau dann als gleich gelten, wenn $PQ' = P'Q$ ist, mit einer geeigneten Addition und Multiplikation ein Körper ist.

Den in der vorstehenden Aufgabe eingeführten Körper nennt man den *Körper der rationalen Funktionen.*

Aufgabe 50.30. Es sei K ein angeordneter Körper, $K[X]$ der Polynomring und

$$Q = K(X)$$

der Körper der rationalen Funktionen über K. Zeige unter Verwendung von Aufgabe 49.8, dass man Q zu einem angeordneten Körper machen kann, der *nicht* archimedisch angeordnet ist.

Aufgabe 50.31. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung von zwei rationalen Funktionen wieder rational ist.

Aufgabe 50.32. Berechne die Hintereinanderschaltungen $f \circ g$ und $g \circ f$ der beiden rationalen Funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 3}{x - 2} \text{ und } g(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 4}\,.$$

Aufgabe 50.33. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und seien $P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ und $Q(x) = \sum_{i=0}^{e} b_i x^i$ Polynome mit $a_d, b_e \neq 0$. Man bestimme in Abhängigkeit von d und e, ob die durch

$$z_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$$

(für n hinreichend groß) definierte Folge konvergiert oder nicht, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 50.34. (3 (1+2) Punkte)

(1) Berechne das Produkt

$$\left(1 - \frac{5}{3}X + \frac{1}{2}X^2\right) \cdot \left(2 - \frac{3}{4}X + \frac{1}{3}X^2 - X^3\right)$$

im Polynomring $\mathbb{Q}[X]$.

(2) Berechne das Produkt

$$\left(1 - \frac{5}{3}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{5}^2\right) \cdot \left(2 - \frac{3}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{3}\sqrt{5}^2 - \sqrt{5}^3\right)$$

in $\mathbb{R}$ auf zwei verschiedene Arten.

Aufgabe 50.35. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „P durch T" für die beiden Polynome $P = 5X^4 - 6X^3 + \frac{3}{5}X^2 - \frac{1}{2}X + 5$ und $T = \frac{1}{7}X^2 + \frac{3}{7}X - 1$ durch.

Aufgabe 50.36. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{Z}/(7)[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 6X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2X + 5$ und $T = 5X^2 + 3X + 2$ durch.

Aufgabe 50.37. (2 Punkte)

Beweise die Formel

$$X^u + 1 = (X+1)\left(X^{u-1} - X^{u-2} + X^{u-3} - \cdots + X^2 - X + 1\right)$$

für u ungerade.

Aufgabe 50.38. (4 Punkte)

Man finde ein Polynom f vom Grad ≤ 3, für welches

$$f(0) = -1,\ f(-1) = -3,\ f(1) = 7,\ f(2) = 21$$

gilt.

Abbildungsverzeichnis