

UNIVERSAL  
LIBRARY

**OU\_224561**

UNIVERSAL  
LIBRARY

**BROWN BOOK**





# فہرست مطالب

صفحہ	مطلب
۱	باب اول بیان حدود کا
۵	فصل اول قاعدہ جمع کا
۱۰	فصل دوسری قاعدہ تفریق کا
۱۲	فصل تیسری قاعدہ ضرب کا
۲۵	فصل چوتھی قاعدہ تقسیم کا
۲۶	باب دوسرا بیان کسور کا فصل اول جمع کسور کے
۳۰	دوسرے فصل تخریل کسور
۳۱	تیسری فصل قاعدہ جمع کسور کا
۳۴	چہتم فصل قاعدہ تفریق کسور کا
۳۶	باہون فصل قاعدہ ضرب کسور کا
۳۷	چہم فصل قاعدہ تقسیم کسور کا
۳۸	فصل قاعدہ کٹانی جذر کا
۴۴	فصل قاعدہ کٹانی کعب کا
۴۶	تیسرا باب بیان مساوات میں
۴۷	بیان مساوات اول درجہ کا
۸۹	بیان مساوات درجہ دوم کا
۱۴۶	بیان مقدار غیر ممکن کا
۱۴۷	بیان تناسب کا
۱۴۸	اعدہ سلسلہ جمع اور تفریق کا
۱۴۹	اعدہ سلسلہ ضرب اور تقسیم کا
۱۵۰	حوالات اول درجہ کی مساوات کی
۱۶۶	حوالات درجہ دوم کی مساوات کی
۱۷۶	بیان نئے قاعدہ ضرب اور تقسیم کا
۱۷۷	بیان دوسرا قاعدہ نقل کا
۱۷۸	فصل سوم بیج بیان تبدیل کرنی مساوات کے
۱۷۹	فصل چہارم بیج بیان دریافت کرنی قیمتوں غیر ممکن مساوات کے
۲۰۹	کے پرشیدہ قاعدہ شش بودن کے
۲۱۰	بیان دوسرا قاعدہ ہندس دیکو کا واسطی دریافت کرنی قیمتوں غیر ممکن مساوات کے
۲۱۱	فصل پنجم بیان قاعدہ ہندس کارڈن کا واسطی حل کرنے کے
۲۱۲	مساواتوں تیسری درجہ کے
۲۱۳	فصل ششم بیان قاعدہ ہندس مکملی کا واسطی تخریل کرنی مساواتوں چہتمی درجہ کی طرف مساواتوں تیسری درجہ کی
۲۱۵	فصل ہفتم بیان ان قواعد کا حلنی ذریعہ سی قوی قیمتوں میں
۲۱۹	درجہ کی مساواتوں کی معلوم ہو سکتی ہیں
۲۲۰	باب چہارم مطالب مختلفہ فصل اول ترتیب اور اجتماع
۲۲۵	بیان میں
۲۳۱	فصل دوسری ثبوت ضابطہ نیوٹن صاحب کا
۲۳۲	بیان طریق ثابت کرنی ضابطہ نیوٹن صاحب کا دوسری
۲۳۶	طرح بیسے
۲۳۷	بیان اثبات ضابطہ نیوٹن صاحب کا بغیر درجہ سلسلہ فرضی کے
۲۴۰	ضابطہ غیر مقررہ نشان توت کا
۲۴۹	فصل تیسری لوکارنم کی بائین
۲۵۰	لوکارنم کی کٹانی کی ترکیب
۲۵۲	

۳۹۶	سوالات مجذوروں کے	۲۵۳	ترکیب بنانی نوکار ترکیب کی
۴۱۴	مثلاث صحیحہ کی دریافت کرنی ترکیب		فضل کا بیان حل کرنی سوالات ہندی کا وسیلہ
۴۲۱	سوالات مختلفہ	۲۵۵	جبر و مقابہ کے
۴۳۵	ضمیمہ شکل مساواتوں کا	۲۵۶	سوالات مثلثوں کے
	ادراکلی جالیوں صفحوں میں تمام مطالب کی مثالیں بغیر حل	۲۶۹	فضل پانچویں حد زیادتی اور کمی کی بنا
	کی ہوئی و صاحب کی جبر و مقابہ سی نقل کی ہیں		چستی فضل سافت دائرہ اور محکم بائیں
۴۶۱	جمع کی مثالیں	۲۹۳	ساتویں فضل مقدار نزدیکی کا بیان
ایضا	تفریق کی مثالیں	۳۲۳	اٹھویں فضل سلسلوں کی بائیں قاعدہ فرق
۴۶۲	ضرب کی مثالیں	۳۰۹	نویں فضل قاعدہ سلسلہ زیادتیوں کا
۴۶۴	تقسیم کی مثالیں	۳۲۰	دسویں فضل مخلوس کرنا سلسلہ کا
۴۶۵	مقسوم علیہ اعظم کی مثالیں	۳۲۴	گیارہویں فضل سلسلہ متواتر
۴۶۷	صنف مشترک کی مثالیں	۳۲۸	ضابطہ کثیر الاجزاء
۴۶۸	کسور کی مثالیں	۳۳۴	بارہویں فضل احتمالات کا بیان
۴۶۹	کسور کی اختصار کی مثالیں	۳۴۲	تیرہویں فضل کسور بن
۴۷۱	ضرب کسور کی مثالیں	۳۴۶	مقادیر جبریہ کی عجیب نتیجی
۴۷۲	تقسیم کسور کی مثالیں	۳۴۷	کسور متسلل
۴۷۳	صعود اور نزول کی مثالیں	۳۵۲	ثبوت مقسوم علیہ اعظم
۴۷۵	مقادیر نزدیکی کی مثالیں	۳۵۶	سود اور تخواہوں کے بین
۴۷۷	مساویں بغیر حل کی ہوئی		دریافت کرنا زیادتی کسی ملک کا وسیلہ تعداد کرنے
		۳۵۹	اور پیدائش کے
		۳۶۰	ثبوت قواعد جذر و کعب اعداد
		۳۶۴	خواص اعداد کا بیان
		۳۷۱	سوالات غیر منقطع ایک ایات کی
		۳۷۵	سوالات غیر منقطع دو مساواتوں کے
			خاص ترکیب طے + اس کے صحیح مجذور ہوجاگی ۳۷۹

منت

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

بعد حمد خدا و نعت رسول مقبول محمد مصطفیٰ صلی اللہ علیہ وسلم کے ارباب علم پر واضح ہو کہ اس سے پہلے ایک جبر و مقابلہ مولفہ اوستادی مخدومی کرمی جناب ہائر اچنڈر صاحب کا چپا تھا چونکہ اولین مطالبہ بہت مفید اور دلچسپ ہے اس سبب سے لوگوں کو اس کے پڑھنے سے اس فن کی طرف بہت رغبت ہوئی اور جس قدر نسخہ جبر و مقابلہ کے چھپے تھے سب بک گئے اکثر آدمی اس کے مشتاق تھے اس واسطے جناب ہائر صاحب نے مجھ کو کترین کو کر نام میرا کریم بخش ہی اور میں اس نے کترین اور اسکے شاگردوں میں سے ہوں ارشاد فرمایا کہ ایک جبر و مقابلہ مرتب کرنا چاہئے جس میں صحیح مطالبہ پہلے جبر و مقابلہ کیسے ہوں اور شاہین ہر قاعدہ کے بہت بہت لکھی جائیں اور مضمر اور مطالبہ معینہ ہی اس میں زیادہ لکھے جائیں اس واسطے اس کترین نے یہ جبر و مقابلہ مرتب کیا اور جو مطالبہ معینہ تھے جناب ہائر صاحب کی اصلاح سے اس میں داخل کئے اس میں کسی جگہ غلطی ہوئی جو تو کترین کے قصور فہم کو معاف فرما کر درست کر دین اور اس جبر و مقابلہ میں مطالبہ ان کتابوں کے صحیح کئے ہیں۔ دو صاحب کا جبر و مقابلہ بلینہ صاحب کا جبر و مقابلہ بحیر اول و البحر اور اور کتابیں اس فن کی جو انگریزی زبان میں مشہور ہیں باب اول و اول حدود و واضح ہو کہ جبر و مقابلہ معنی علم ہائمی کی جس سے فزون یا غیرہ کے اکثر مسائل حل ہوتے ہیں اور اس علم میں جیسے اعداد کے عودت فرض کئے جاتے ہیں اور ان پر عمل ضرب تقسیم وغیرہ کئے جاتے ہیں اور جبر و حساب میں اعداد کے ضرب تقسیم وغیرہ پر معمول کے کائنات عودت ہی اس طرح بیان ہی ضرب تقسیم وغیرہ پر اعمال جبر یہ عودت ہیں

اب جانا چاہئے کہ جو دو مقابلہ میں بجائے اعداد معمول کے حروف لا و د و ر وغیرہ فرض کر لیں اور یہی کے  
مقادیر معلومہ کے حروف ح ق س ط ع وغیرہ فرض کرتے ہیں اور جو دو مقابلہ کے تمام علون میں علامتوں  
مقررہ کا استعمال ہوتا ہے اس واسطے ہم پہلے ان علامتوں کا بیان کرتے ہیں جانا چاہئے کہ صورت + جمع کی  
علامت ہے یعنی جن نقلوں کے درمیان میں یہ علامت آوے تو جانا چاہئے کہ وہ دونوں مقدار باہم جمع کی  
جائگی مثلاً ۳ + ۲ سے یہ مراد ہے کہ ۲ کو ۳ کے ساتھ جمع کر لیں یعنی ۲ + ۳ سے ۵ مراد ہے  
علیٰ بن القیاس لا + و سے یہی مراد ہے کہ لا کو و کے ساتھ جمع کر لیں یہی واضح ہو کہ جب بہت سی  
مقدار لکھیں اور اول مقدار کی علامت + ہو تو اس علامت کو چھوڑ کر اول مقدار کو لیے علامت لکھ دیتے  
ہیں پس جب کوئی مقدار اول میں ایسی ہو کہ اس کے پہلے کوئی علامت نہ ہو تو جانا چاہئے کہ اس کے اول میں علامت  
+ کی منوی تجویز مقدار کی اول علامت + کی لکھی ہوئی ہو یا مخدوف ہو اس مقدار کو مثبت کہتے ہیں  
- صورت - کی تفریق کی علامت ہے یعنی جن دو مقداروں کے درمیان میں علامت - کی واقع ہوتی  
جانا چاہئے کہ اول مقدار میں سے دوسری مقدار نکالی جاوے گی مثلاً ۴ - ۲ سے یہ مراد ہے کہ ۲ میں سے  
۲ کو نکال لیں یعنی ۴ - ۲ سے ۲ مراد ہے اس طرح لا - و سے یہ مراد ہے کہ لا میں سے و کو نکالنا  
چاہئے جس مقدار کے اول علامت تفریق ہوتی ہے اس مقدار کو منفی کہتے ہیں کیونکہ یہ مقدار منفی کی جاتی  
مثلاً ۴ - ۳ میں ۳ مثبت ہے اور ۳ منفی علیٰ بن القیاس لا - و میں لا مثبت اور و منفی  
- صورت + علامت ضرب کی ہے یعنی جن دو مقداروں میں علامت + واقع ہوا دیکھتے ہیں مراد  
ہوتی ہے کہ یہ دونوں مقدار باہم ضرب دئے گئے ہیں مثلاً ۵ x ۴ سے حاصل ضرب ۲۰ اور ۴ کا  
تغیر ہوتا ہے ۲۰ کو ۴ میں ضرب کرنا چاہئے پس ۵ x ۴ سے ۲۰ مراد ہے اس طرح لا x و سے  
یہ مراد ہے کہ لا کو و میں ضرب دینا چاہئے یعنی لا x و حاصل ضرب لا اور و کا ہے جو شیدہ ہے  
کہ جب دو حرف کو اس میں ضرب کرتے ہیں تو ان کے حاصل ضرب کو پہلے علامت ضرب کی لکھ دیتے ہیں  
یعنی حاصل ضرب لا اور و کا اسطور پر لا و لکھتے ہیں اس صورت میں لا اور و کے درمیان میں علامت  
x ضرب کی نہیں لکھی لیکن لا و سے وہی مراد ہے جو لا x و سے ہے جس طرح حرف کو حرف میں ضرب کر  
نے نشانی ضرب کے شامل کر دیتے ہیں اس طرح عدد کو حرف میں ضرب کرین تو بے نشانی ضرب  
کے لکھنا چاہئے مثلاً ۷ کو لا میں ضرب کرین تو ۷ لکھنا چاہئے اور اگر ۴ کو د میں ضرب کرین  
تو ۲۸ لکھنا چاہئے لیکن اس صورت میں اس بات کا لحاظ ضروری کہ عدد سینہ حرف کے پہلے لکھا  
جاوے جب کوئی عدد حرف میں ضرب کیا جاتا ہے تو اس عدد کو اس حرف کا سر کہتے ہیں ۷ لا میں

میں عدد ۷ کا سر لاکھا ہے اور ہم دین عدد ۶ کا سر دکھا ہی جان بالا سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر لاکھا کو لائین  
 ضرب کریں تو حاصل ضرب اس صورت سے لاکھا لکھا جاویگا یعنی لاکھ کو فی نفسہ ضرب کرے لاکھا حاصل ہوتا ہے  
 اور یہ بات ظاہری ہے کہ جب ایک مقدار کو فی نفسہ ضرب کرتے ہیں تو حاصل ضرب کو مجدد اور اس مقدار کا  
 کہتے ہیں مثلاً ہم کو ہم میں ضرب کریں تو حاصل ضرب ۱۶ ہوتا ہے پس ۱۶ کو مجدد و رقم کا کہتے ہیں اس سے معلوم  
 ہوگا کہ لاکھا کو لائین ضرب کیا تو حاصل ضرب لاکھا ہوا اور لاکھا مجدد در لاکھا ہی بعینہ اس طرح ط و مجدد و ط کا ہے  
 اب یہی ظاہری ہے کہ جو قوت لاکھا کو لائین ضرب کرے گی تو موافق بیان سابق کے لاکھا ہوگا اور جب کسی  
 مقدار کے مجدد کو اسی مقدار میں ضرب کریں تو حاصل ضرب کعب اس مقدار کا ہوتا ہے تو معلوم ہوگا کہ لاکھا  
 کعب لاکھا ہی کو وسطے کہ لاکھا مجدد در لاکھا تھا اور جب اس مجدد کو لائین ضرب کیا تو لاکھا ہوا پس لاکھا  
 کعب لاکھا ہی اب چونکہ مجدد در لاکھا لاکھا ہی اور اس میں لاکھا دود خدیا جاتا ہے اس واسطے جو در مقابلہ میں خصصار  
 کے واسطے لاکھا کو لاکھا کہتے ہیں یعنی بیجا سے دولا کہنے کے دو کا نہیں لاکھا کے اوپر لکھا دیتے ہیں  
 اور لاکھا کے دوسری قوت کہتے ہیں علیٰ ذہن القیاس لاکھا کو جو کعب لاکھا ہے لاکھا کہتے ہیں اور لاکھا کو  
 تیسری قوت کہتے ہیں اور اس طرح لاکھا اور لاکھا وغیرہ لکھے جاتے ہیں اور انکو چوتھی قوت اور پانچویں قوت  
 اور غیرہ سے تعبیر کرتے ہیں اور ان اعداد کو جو حروف کے اوپر لکھے جاتے ہیں نشان قوت کہتے ہیں جانا چاہئے  
 کہ سوائے ۷ کے علامت ضرب کی اور بی میں بیسے خطوط ( ) اور { } ہی علامتیں  
 ضرب کی ہیں اور ان خطوط کو خطوط وحدانی کہتے ہیں مگر ان علامتوں سے استعمال میں فرق ہے اور وہ یہ ہے  
 کہ جب کئی مقدارین اور کئی مقداروں میں ضرب کی جاوے یا کئی مقدارین ایک ہی مقدار میں ضرب کی جاوے  
 تو اول صورت میں مضروب اور مضروب فیہ کو ان خطوط کے اندر لکھا کر دو کو کو لے علامت ضرب کے شمال  
 کر دیتے ہیں مثلاً مجموعہ لاکھا اور دکھا حاصل تفریق ط اور تو میں ضرب کیا جاوے تو ظاہری ہے کہ مجموعہ لاکھا اور دکھا  
 اس طرح لاکھا + دکھا جاوے گا اور حاصل تفریق ط اور دکھا اس طرح ط - دکھا جاوے گا پس موافق بیان  
 بالا کے اس مجموعہ اور حاصل تفریق کا حاصل ضرب اس طرح (لا + د) (ط - ۷) یا اس طرح  
 { لا + د } { ط - ۷ } لکھا جاویگا اور دوسری صورت میں بیسے جو قوت کئی مقدارین ایک  
 مقدار میں ضرب دی جاوے تو انہی حاصل ضرب کو اس طرح کہتے ہیں (لا + د) ط یعنی مجموعہ لاکھا اور دکھا  
 ط میں ضرب کیا ہو یا اس طرح ط - دکھا جاتا ہے بیسے حاصل تفریق ط اور لاکھا دین ضرب  
 کیا ہو یا اگر مجموعہ لاکھا اور دینے لا + د کو حاصل تفریق ط - ۷ میں ضرب کریں تو حاصل ضرب کو  
 اس طرح ہی لا + د ط - ۷ کہتے ہیں اور علیٰ ذہن القیاس اور صورتیں ہی اس طرح لکھی جاتی ہیں یعنی

پہلے بیان کیے کہ جذور لا کا اسطرح لا<sup>۲</sup> لکھنا جاتا ہے اور کعب لا کا اسطرح لا<sup>۳</sup> اور علیٰ ذہ القیاس اب  
جانا چاہئے کہ کسی مقدار کے دوسری مرتبہ کے نزدیک کو جذور اس مقدار کا کہتے ہیں مثلاً ۱۶ کا جذور ۴ ہے  
یعنی عدد ۱۶ کا ۴ میں کا ایسا جز ہے کہ اگر اس کو فی نفسہ ضرب کریں تو حاصل ضرب ۱۶ ہوتا ہے اسطرح  
لا<sup>۲</sup> کا جذور لا ہے کیونکہ لا کو لا میں ضرب کریں تو حاصل ضرب لا<sup>۲</sup> ہی ہے جب معلوم ہوا کہ جذور دوسرے  
مرتبہ کا نزدیک ہوتا ہے تو ایسے جبر و مقابلہ میں جذور کی نشانی  $\frac{1}{2}$  ہے یعنی جس مقدار کا جذور لینا ہوتا ہے  
اوپر  $\frac{1}{2}$  لکھ دیتی ہے مثلاً لا کا جذور اسطرح لا<sup>1/2</sup> لکھتے ہیں اور ط کا جذور اسطرح ط<sup>1/2</sup> اور لا کا جذور اسطرح  
لا<sup>1/2</sup> اور لا اور ط کے مجموعہ کا جذور اسطرح (لا + ط)<sup>1/2</sup> لکھتے ہیں علیٰ ذہ القیاس (۱-د) سی  
جذور حاصل تفریق کو اور د کا تغیر ہوتا ہے اور (ط + لا + س) سے جذور میں مقداروں ط اور لا  
اور س کے مجموعہ کا تغیر ہوتا ہے اسطرح اور صورتیں لکھی جاتی ہیں واضح ہو کہ جذور کے واسطے سوا سے  
علامت مذکورہ بالا کے اور یہی ہوا اور وہ علامت بہ خط خاص صورت کا ہی پس جے لا سے  
جذور لا کا تغیر ہوتا ہے اور (لا + ط) سے جذور مجموعہ لا اور ط کا تغیر ہوتا ہے اگر ط اور لا کے مجموعہ کا  
جذور لکھیں تو اسطرح (لا + ط)<sup>1/2</sup> لکھنا چاہئے اور اگر ط اور لا کے حاصل تفریق کا جذور لکھنا  
منظور ہو تو اسطرح (لا - ط)<sup>1/2</sup> لکھنا چاہئے ظاہر ہے کہ کسر میں دو مقدار لکھی جاتے ہیں ایک تو شمار کنندہ  
اور ایک نسبت نما مثلاً  $\frac{1}{2}$  میں آ شمار کنندہ ہے اور ۲ نسبت نما اسطرح  $\frac{1}{2}$  میں لا شمار کنندہ ہے اور ط  
نسب نما اگر لا کی تہائی لکھتے ہو تو اسطرح  $\frac{1}{3}$  لکھنے چاہئے اور اگر لا کا پانچواں حصہ لکھیں تو  $\frac{1}{5}$  لکھنا  
چاہئے اور علیٰ ذہ القیاس کو لا تقسیم کیا ہوا ط پر لکھتے ہیں۔ یہ صورت = مساوات کی علامت  
ہو یعنی بن مقداروں کے درمیان میں یہ علامت ہوتی جانتا چاہئے کہ وہ مفادیر باہم برابر ہیں مثلاً  
۴ = ۴ سے مراد ہے کہ ۴ برابر ہے ۴ کے اور علیٰ ذہ القیاس لا = لا سے مراد ہے کہ لا برابر ہے  
لا کے اگر یہ لکھنا منظور ہو کہ مجموعہ لا اور د کا برابر ہے ۱۲ کے تو اسکو اسطرح لا + د = ۱۲  
لکھنا چاہئے اگر یہ لکھنا منظور ہو کہ دو چند لائن سے ۳ کا عدد نکال ڈالیں تو باقی برابر ۱۰ کے  
ہو تو اسطرح لا - ۲ = ۱۰ لکھنا چاہئے اگر یہ لکھنا منظور ہو کہ ایک عدد جھول لا ایسا ہے کہ  
اگر اسکو گننا کے اوسم سے ۵ نکال ڈالیں تو سات باقی رہی ہیں تو اسکو اسطرح  
لا - ۵ = ۵ لکھنا چاہئے اور علیٰ ذہ القیاس اور صورتیں لکھی جاتی ہیں اسکا بیان اشارہ اللہ تعالیٰ  
مساوات کے بیان میں بخوبی کیا جاویگا۔ اگر یہ لکھنا منظور ہو کہ عدد ۱ کا ۲ سے وہ نسبت  
لکھنا ہے عدد ۴ کا ۸ سے نسبت لکھنا ہے تو اسکو اسطرح لکھتے ہیں ۸ : ۴ :: ۲ : ۱ یعنی

یہ نقطہ : : : تناسب کی علامت میں پس اگر یہ صورت ہو لا : ط : : ص : : جس تو ہو کہ  
 الفاظ میں اس طرح تیسرے کرین گے کہ لا کو ط سے وہ نسبت ہو جو ص کو س سے ہے یعنی جب قدر مقدار  
 لا کے ط سے زیادہ ہو اور یہ قدر مقدار ص کی س سے زیادہ ہو جب قدر لا ط سے کم ہو اور یہ قدر  
 ص س سے کم ہو اگر یہ بات لکھنی منظور ہو کہ (لا اور آ) ایسے دو عدد ہیں کہ ان میں وہ نسبت ہو جو  
 س اور آ میں ہو تو ہر کو اس طرح لکھنا چاہئے لا : ک : : ۳ : ۴ - اگر یہ لکھنا ہو کہ  
 لا اور آ ایسے دو عدد ہیں کہ ان کے محذورون میں وہ نسبت ہو جو س اور ص میں ہو تو اس طرح  
 لکھنا چاہئے لا : ک : : ۲ : ۳ : ص سے اور علیٰ ذہ القیاس اور مثالیں ہو سکتے ہیں :  
 علامت تقسیم کی ہے مثلاً ک : لا سے یہ مراد ہو کہ کو لا پر تقسیم کرنا چاہئے اور اس طرح لا + و  
 لا سے یہ مراد ہو کہ مجموعہ لا اور و کو لا پر تقسیم کرنا چاہئے : یہ تین نقطہ ہی سے (ایسا  
 لکھے جاتے ہیں یعنی جس جگہ لفظ ایسا سے لکھنا ضرور ہوتا ہے وہ ان : یہ تین نقطہ لکھتے ہیں  
**فصل اول** قاعدہ جمع اب ہم جمع کا قاعدہ لکھتے ہیں لیکن چونکہ اس میں نقطہ متماثلہ کا مثل  
 ہوگا اس واسطے اس کے منہ بیان کرتے ہیں بنا چاہئے کہ مقادیر متماثلہ ان مقداروں کو کہتے ہیں  
 جو باہم جمع ہو سکیں یا ان میں باہم تفریق ہو سکے مثلاً ۴ لا اور ۲ لا مقادیر متماثلہ ہیں  
 کیونکہ ۴ لا اور ۲ لا کو جمع کریں تو ۶ لا ہوتے ہیں اور ۴ لا میں سے ۲ لا کو نکال ڈالیں تو ۲ لا  
 رہتے ہیں اس طرح ۷ لا اور ۳ لا مقادیر متماثلہ ہیں کیونکہ ۷ لا اور ۳ لا کے  
 حاصل ضرب کا سات گنا ہے اور ۳ لا اسی حاصل ضرب کا تین گنا ہے پس اگر ۷ لا کو ۳ لا  
 کے ساتھ جمع کریں تو ۱۰ لا ہوتے ہیں اور اگر ۷ لا میں سے ۳ لا نکال ڈالیں تو  
 ۴ لا رہتے ہیں یعنی اس طرح ۴ س اور ۲ س مقادیر متماثلہ ہیں اور ۴ س اور ۲ س  
 بھی مقادیر متماثلہ ہیں اور ۷ لا اور ۳ لا بھی مقادیر متماثلہ ہیں اور ۳ (لا + و) اور  
 ۴ (لا + و) مقادیر متماثلہ ہیں کیونکہ ۳ (لا + و) لا اور ۴ کے مجموعہ کا گنا ہے اور  
 ۲ (لا + و) لا اور و کے مجموعہ کا دو گنا ہے پس اگر ۳ (لا + و) کو ۲ (لا + و) کے ساتھ  
 جمع کریں تو ۵ (لا + و) ہوتے ہیں اس طرح ۳ لا اور ۲ لا مقادیر متماثلہ ہیں کیونکہ اول  
 مقدار لا کے جذر کا گنا ہے اور دوسری مقدار لا کے جذر کا دو گنا ہے پس اگر ۳ لا اور ۲ لا  
 کو باہم جمع کریں تو ۵ لا میں ہوتا ہے اور اگر باہم تفریق کریں تو ۱ لا رہتا ہے علیٰ ذہ القیاس  
 ۵ (لا + و) اور ۲ (لا + و) ۲ (لا + و) اور ۳ (لا + و) ۳ (لا + و) اور ۲ (لا + و) کے





شال (۴) $\frac{20}{10} - \frac{10}{5}$	شال (۶) $\frac{30}{15} - \frac{15}{7.5}$	شال (۸) $\frac{40}{20} - \frac{20}{10}$
$\frac{30}{15} - \frac{15}{7.5}$	$\frac{40}{20} - \frac{20}{10}$	$\frac{50}{25} - \frac{25}{12.5}$
$\frac{40}{20} - \frac{20}{10}$	$\frac{50}{25} - \frac{25}{12.5}$	$\frac{60}{30} - \frac{30}{15}$

شال (۹) $\frac{50}{25} - \frac{25}{12.5}$	شال (۸) $\frac{40}{20} - \frac{20}{10}$
$\frac{60}{30} - \frac{30}{15}$	$\frac{50}{25} - \frac{25}{12.5}$
$\frac{70}{35} - \frac{35}{17.5}$	$\frac{60}{30} - \frac{30}{15}$

شال (۱۱) $\frac{80}{40} - \frac{40}{20}$	شال (۱۰) $\frac{70}{35} - \frac{35}{17.5}$
$\frac{90}{45} - \frac{45}{22.5}$	$\frac{80}{40} - \frac{40}{20}$
$\frac{100}{50} - \frac{50}{25}$	$\frac{90}{45} - \frac{45}{22.5}$

صورت دوم  
 اب اگر متناوب جبر سے متاثر نہ ہوں اور علامتیں اونچی مختلف ہوں تو اس صورت میں یہ قاعدہ ہے کہ جبکی علامتیں  
 یکساں ہوں اور کو علامتہ علامتہ شمار کر لیں اور بعد اسکے جبکی تعداد زیادہ ہو اور نتیجے سے کم تعداد کو نکال کر جو باقی  
 رہی اس سے مثبت کر دین اور اس کے اول وہ علامت کہیں جو زیادہ رقم پر تھی پس یہ حاصل جمع ہو گا مثلاً  
 $\frac{20}{10} - \frac{10}{5} + \frac{30}{15} - \frac{15}{7.5} + \frac{40}{20} - \frac{20}{10} + \frac{50}{25} - \frac{25}{12.5} + \frac{60}{30} - \frac{30}{15} + \frac{70}{35} - \frac{35}{17.5} + \frac{80}{40} - \frac{40}{20} + \frac{90}{45} - \frac{45}{22.5} + \frac{100}{50} - \frac{50}{25}$   
 کو جمع کیا تو پتا ہے کہ اس میں ۵ لاکھتہ ہیں اور ۳ لاکھ منفی ہیں پس باقی میں سے تین کو  
 تفریق کیا تو ۲ لاکھ باقی اور چونکہ ۵ لاکھ کے اول میں علامت جمع کی تھی اس لیے ۲ لاکھ کے اول میں ہی علامت  
 جمع ہو گی پس معلوم ہوا کہ ۲ لاکھ حاصل جمع ہو گی

اس طرح  $\frac{20}{10} - \frac{10}{5} + \frac{30}{15} - \frac{15}{7.5} + \frac{40}{20} - \frac{20}{10} + \frac{50}{25} - \frac{25}{12.5} + \frac{60}{30} - \frac{30}{15} + \frac{70}{35} - \frac{35}{17.5} + \frac{80}{40} - \frac{40}{20} + \frac{90}{45} - \frac{45}{22.5} + \frac{100}{50} - \frac{50}{25}$   
 $\frac{20}{10} - \frac{10}{5} + \frac{30}{15} - \frac{15}{7.5} + \frac{40}{20} - \frac{20}{10} + \frac{50}{25} - \frac{25}{12.5} + \frac{60}{30} - \frac{30}{15} + \frac{70}{35} - \frac{35}{17.5} + \frac{80}{40} - \frac{40}{20} + \frac{90}{45} - \frac{45}{22.5} + \frac{100}{50} - \frac{50}{25}$   
 $\frac{20}{10} - \frac{10}{5} + \frac{30}{15} - \frac{15}{7.5} + \frac{40}{20} - \frac{20}{10} + \frac{50}{25} - \frac{25}{12.5} + \frac{60}{30} - \frac{30}{15} + \frac{70}{35} - \frac{35}{17.5} + \frac{80}{40} - \frac{40}{20} + \frac{90}{45} - \frac{45}{22.5} + \frac{100}{50} - \frac{50}{25}$

شال (۳) $\frac{20}{10} - \frac{10}{5} + \frac{30}{15} - \frac{15}{7.5}$	شال (۴) $\frac{40}{20} - \frac{20}{10} + \frac{50}{25} - \frac{25}{12.5}$
$\frac{60}{30} - \frac{30}{15} + \frac{70}{35} - \frac{35}{17.5}$	$\frac{80}{40} - \frac{40}{20} + \frac{90}{45} - \frac{45}{22.5}$
$\frac{100}{50} - \frac{50}{25} + \frac{110}{55} - \frac{55}{27.5}$	$\frac{120}{60} - \frac{60}{30} + \frac{130}{65} - \frac{65}{32.5}$

شال (۶)  $طص لا ۳ - ع ۳$  شال (۶)  $۱۰ ص لا + ۱۵ ط (ص + س)$

$ط ۵ - ع ۴$   $ط ۸ - ع ۴ ص لا - س م (ص + ل)$

$ط ۶ + ع ۱۰$   $ط ۹ + ص ۹ + س ۶ ط (ص + ل)$

$ط ۲$   $ط ۸ + ص ۲ م - س م ط (ص + ل)$

---

$ط ۲$   $ط ۱۳ + (ص + ل)$

شال (۷)  $۲ + ص لا ۵ - ل ۳$  شال (۸)  $۲۰ + ع ۵ - ص ۴$

$۴ - ص لا ۲$   $۱۳ - س ۶ + ط ۴ -$

$۲ + ص لا ۲ - ل ۴$   $۴ + س - ط ۵$

---

$۲ ص لا ۲ -$   $۱۳ + ط ۲$

شال (۹)  $۲۱ + ص لا ۱۵ - ل ۳$  شال (۱۰)  $۱۰ - (ص لا ۲) ۳$

$۱۵ - ل ۴ - ص لا ۲$   $۱۵ + (ص لا ۲) ۲$

$۶ - ل ۲۳ + ص لا ۵ -$   $۳ - (ص لا ۲) م -$

---

$ط ۲$   $ط ۲ + س - ل ۵$

شال (۱۱)  $ط ۱۴ - (ص ط م) ۲$  شال (۱۲)  $ط ۱۳ + ص لا ۲ + ط ۲$

$ط ۱۹ - (ص ط م) ۳$   $ط ۱۳ - ص لا ۲ + ط ۲$

$ط ۲ + (ص ط م) ۲$   $ط ۱۳ - ص لا ۲ + ط ۲$

---

$ط ۲ + (ص ط م) ۲$   $ط ۱۳ + ص لا ۲ + ط ۲$

صورت سوم  
جس صورت بین مقادیر جبریه غیر متماثلہ ہوں تو اس صورت میں بہ قاعدہ ہی کہ اوں سب مقداروں کو ایک  
سطر میں لکھ دیتے ہیں اور ان کے اولین جو علامت ہوتی ہے وہی لکھی جاتی ہے اور یہی حاصل جمع ہوتا ہے

مثلاً  $ط ۳ + ص لا ۲ - ل ۳$  کو جمع کریں تو ان سب کو ایک سطر میں لکھ دینے کے اور ترتیب کا لحاظ رکھ کر پھر  
 $۳ - ص لا -$   
 $ط ۳ + ص لا ۲ - ل ۳$   
 $ط ۳ + ص لا ۲ - ل ۳$   
 $ط ۳ + ص لا ۲ - ل ۳$   
 $ط ۳ + ص لا ۲ - ل ۳$   
 $ط ۳ + ص لا ۲ - ل ۳$

جس صورت میں مقدار جبریہ اس طرح واقع ہوں کہ اوہیں مقدار متناہی ہوں اور غیر متناہی ہوں تو اس صورت میں جہاں  
 کہ مقدار متناہی ہو اس طرح جمع کریں جس طرح صورت اول اور دوم میں جمع کیا ہے اور غیر متناہی کہ اس طرح جمع کریں جس طرح تیسری صورت میں

مثلاً ۴ لآ - ۲ ص ل + ۳ ط - ۵  
 اس صورت میں اول مقدار کی متناہی رد اور میں بیٹھے ۴ لآ  
 کے متناہی ۵ لآ اور - ۴ لآ میں پس ۹ لآ نسبت میں اور - ۴ لآ  
 منفی میں اسیر اسطی اسکا حاصل جمع ۳ لآ ہوا اس طرح  
 - ۳ لآ کی متناہی - ۳ لآ اور ۴ ص لآ میں پس اسکا

حاصل جمع ص لآ ہوا اور ۳ ط کی متناہی - ۴ ط اور ۴ ص لآ اور - ۴ ط کا حاصل جمع کچھ نہیں ہوتا  
 اسو اسطی انکی جگہ کچھ نہیں لکھا اب - ۵ اور ۴ کے متناہی کو ہی مقدار نہیں اسو اسطی انکو بعینہ اوتار کی پنجی سطر میں لکھ دیا

مثال ۳

مثال ۲

۴ لآ + ۲ ص ل - ۳ ط	۳ لآ + ۱ ص ل - ۲ ط
۵ لآ - ۴ ص ل + ۳ ط	۶ لآ - ۵ ص ل + ۴ ط
۲ لآ - ۳ ص ل + ۴ ط	۱ لآ - ۲ ص ل + ۳ ط
۵ لآ + ۳ ص ل - ۴ ط	۶ لآ + ۴ ص ل - ۵ ط

مثال ۶

مثال ۵

مثال ۴

۳ لآ - ۴ ص ل + ۵ ط	۴ لآ - ۵ ص ل + ۶ ط	۵ لآ - ۶ ص ل + ۷ ط
۵ لآ - ۴ ص ل + ۳ ط	۶ لآ - ۵ ص ل + ۴ ط	۷ لآ - ۶ ص ل + ۵ ط
۴ لآ - ۳ ص ل + ۲ ط	۵ لآ - ۴ ص ل + ۳ ط	۶ لآ - ۵ ص ل + ۴ ط
۸ لآ - ۷ ص ل + ۶ ط	۹ لآ - ۸ ص ل + ۷ ط	۱۰ لآ - ۹ ص ل + ۸ ط

مثال ۸

مثال ۷

۴ لآ + ۳ ص ل + ۲ ط	۵ لآ + ۴ ص ل + ۳ ط
۳ لآ - ۲ ص ل + ۱ ط	۴ لآ - ۳ ص ل + ۲ ط
۲ لآ - ۱ ص ل + ۰ ط	۳ لآ - ۲ ص ل + ۱ ط
۷ لآ - ۶ ص ل + ۵ ط	۸ لآ - ۷ ص ل + ۶ ط

مثال ۹

$$\begin{aligned} ۳ط + ص + ل + ۲\sqrt{ل} &= ۳ط + ص + ل + ۲\sqrt{ل} \\ ۲ط + ۳ص + ل + ۲\sqrt{ل} &= ۲ط + ۳ص + ل + ۲\sqrt{ل} \\ ۵ص + ۴ط - ۳ل - ۲\sqrt{ل} &= ۵ص + ۴ط - ۳ل - ۲\sqrt{ل} \\ ۵ص + ۴ط - ۳ل - ۲\sqrt{ل} &= ۵ص + ۴ط - ۳ل - ۲\sqrt{ل} \end{aligned}$$

مثال ۱۰

$$\begin{aligned} (ط + ص) + ل + ۳\sqrt{ل} - (ص + ط) ل &= (ط + ص) + ل + ۳\sqrt{ل} - (ص + ط) ل \\ ۳ - \sqrt{۳} ل - ۲(ط + ص) ل - ۲ &= ۳ - \sqrt{۳} ل - ۲(ط + ص) ل - ۲ \\ ۴\sqrt{ل} - ل - ۱۵ - ۱۸ &= ۴\sqrt{ل} - ل - ۱۵ - ۱۸ \end{aligned}$$

مثال ۱۱

$$\begin{aligned} ل + ط + ص &= ل + ط + ص \\ ل - ط - ص - ل &= ل - ط - ص - ل \\ ل - ط - ص - ل &= ل - ط - ص - ل \\ ۳ + ل - ۲ - ل - ط &= ۳ + ل - ۲ - ل - ط \end{aligned}$$

مثال ۱۲

$$\begin{aligned} ۱۸ط - ل - س + ل + \sqrt{ط} &= ۱۸ط - ل - س + ل + \sqrt{ط} \\ ۴ - ل + ط + س + ل + ۱۸ &= ۴ - ل + ط + س + ل + ۱۸ \\ ۳ - (ل - ط) + ۲۵ + ۹ط &= ۳ - (ل - ط) + ۲۵ + ۹ط \\ ۲ط - ۲\sqrt{ل} - ۲ + ۵ + ۳ &= ۲ط - ۲\sqrt{ل} - ۲ + ۵ + ۳ \end{aligned}$$

مثال ۱۳

$$\begin{aligned} ط + س - ل - ۹ &= ط + س - ل - ۹ \\ ۵ + ط - ۴ - س + ۲ &= ۵ + ط - ۴ - س + ۲ \\ ۱۵ - س - ۴ + ط + ۱ &= ۱۵ - س - ۴ + ط + ۱ \\ ۲ - ط + ۱۵ - ل - ۴ - ۲ &= ۲ - ط + ۱۵ - ل - ۴ - ۲ \end{aligned}$$

مثال ۱۴

$$\begin{aligned} ۳ط + ل + ۲ &= ۳ط + ل + ۲ \\ ۵ + ط + ل + ۲ &= ۵ + ط + ل + ۲ \\ ۴ + ط - ۵ + ۹ &= ۴ + ط - ۵ + ۹ \\ ۴ + ط - ۵ + ۹ &= ۴ + ط - ۵ + ۹ \end{aligned}$$

مثال ۱۵

$$\begin{aligned} \sqrt{ط} + ل - ط - ل + \sqrt{ل} &= \sqrt{ط} + ل - ط - ل + \sqrt{ل} \\ \sqrt{ط} + ل - ط - ل + \sqrt{ل} &= \sqrt{ط} + ل - ط - ل + \sqrt{ل} \\ ۱۰ - ل - ط - ل + \sqrt{ل} &= ۱۰ - ل - ط - ل + \sqrt{ل} \end{aligned}$$

مثال ۱۶

$$\begin{aligned} ۴ + ل + ۹ &= ۴ + ل + ۹ \\ ۵ - ل + ۲ + ۱۰ &= ۵ - ل + ۲ + ۱۰ \\ ۹ + ل + ۲ + ۴ &= ۹ + ل + ۲ + ۴ \end{aligned}$$

مثال ۱۷

$$\begin{aligned} ۹ + ل + ۳ &= ۹ + ل + ۳ \\ ۳ + ل - ۳ + ۱۰ &= ۳ + ل - ۳ + ۱۰ \\ ۴ + ل + ۱ + ۹ &= ۴ + ل + ۱ + ۹ \end{aligned}$$

مثال ۱۸

$$\begin{aligned} (ب + ۱) ل - ط + ل + ل &= (ب + ۱) ل - ط + ل + ل \\ ۴ + ل + (ب + ۱) ط &= ۴ + ل + (ب + ۱) ط \\ ۲ - (ب + ۱) ل + (ب + ۱) ل &= ۲ - (ب + ۱) ل + (ب + ۱) ل \end{aligned}$$

مثال ۱۹

$$\begin{aligned} ل + ۳ + ل + ل &= ل + ۳ + ل + ل \\ ل - ل + ل + ۱ &= ل - ل + ل + ۱ \\ ۵ + ل + ل - ۳ + ۴ &= ۵ + ل + ل - ۳ + ۴ \\ ۲ ل + ۳ - ۴ + ۵ + ۶ &= ۲ ل + ۳ - ۴ + ۵ + ۶ \end{aligned}$$

مثال ۲۰

$$\begin{aligned} ۲۵ + ط - ۴ - ل &= ۲۵ + ط - ۴ - ل \\ ۱۵ - ل + ۱ - ۴ &= ۱۵ - ل + ۱ - ۴ \\ ۸ - ط - ۵ - ۴ + &= ۸ - ط - ۵ - ۴ + \\ ۸ + ط - ۵ - ۴ - &= ۸ + ط - ۵ - ۴ - \end{aligned}$$

فصل دوم قواعد تفریق

جاننا جائیے کہ ایک مقدار میں سے دوسری مقدار کمال ڈالنی کو تفریق کہتے ہیں پس جو مقدار کمالی جاتی ہے اسکو مفروق کہتے ہیں اور جس میں سطحی قہین اور مفروق نہ کہتے مفروق نہ کو اکثر کہتے ہیں اور مفروق کو اور سطحی بھی کہتے ہیں پھر مفروق کی کسب مقداروں کی علامتیں بدل کر مفروق نہ کی ساتھ جمع کرتے ہیں جو کچھ حاصل ہوتا ہے وہ حاصل

تفریق اور علامتیں بدلنے سے یہ ہر ادھی کہ جس مقدار پر + کا نشان ہوا اسکو - کا بنا دینا چاہی اور جس قدر نفی کا نشان ہوا اسکو + کا بنا دینا چاہی اور تبدیل علامتوں کی اکثر لکھ کر نہیں کرتے بلکہ خیال میں رکھ کر مفروق کو مفروق منہ کے ساتھ جمع کر لیتے ہیں مثلاً ۵ لا میں سے ۳ لا کو تفریق کریں تو اس صورت پر  $5\text{ لا} - 3\text{ لا}$  لکھنا چاہئے پس تبدیل علامت کی یہ صورت ہوگی اسکی جمع موافق قاعدہ جمع کی ۳ لا ہی پس ۵ لا اور ۳ لا کا حاصل تفریق ۲ لا ہی سیطرہ ۵ لا میں سے - ۳ لا کو تفریق کریں تو اس طرح -  $5\text{ لا} - 3\text{ لا}$  لکھنا چاہئے اور بعد تبدیلی علامت مفروق کے یہ صورت ہوگی اسکی جمع ۱ لا ہی پس ۵ لا اور - ۳ لا کا حاصل تفریق ۱ لا ہی پس ۱ لا چاہئے کہ حیوت منفی مقدار پر علامت نفی لکھتے ہیں تو وہ مثبت ہو جاتی ہے اگر ہم ۱۰ میں ۳ کم ۷ میں ۲ کم ۷ کو تفریق کریں تو یہ ہوگا  $10 - 7 = 3$  کیونکہ جب مفروق کی علامتیں تبدیل کیں تو - ۷ - ۳ ہوگا  $10 - 7 = 3$  اور اسکو جمع کی ۱۰ لا ۷ لا اسکی ساتھ تو ظاہر ہوگا کہ  $10 - 7 = 3$  اگر

اگر چاہیں کہ ۵ لا میں سے ۲ لا تفریق کریں تو یہ حاصل ہوگا  $5 - 2 = 3$  اس صورت میں ۲ کسفی ہوگی اور جب انکو ۵ کی ساتھ جمع کریںگی تو ۳ حاصل ہوگی اور - ۲ علامت بدلنے کی بعد ۲ لا ہو جائیگی اور انکو ۵ لا کی ساتھ جمع کریںگی تو ۳ لا ہوگی

مثال ۵      مثال ۶      مثال ۷      مثال ۹

$5 + 2 = 7$	$3 + 7 = 10$	$5 - 2 = 3$	$5 + 2 + 7 = 14$
$5 - 2 = 3$	$3 + 7 = 10$	$3 + 7 = 10$	$5 + 2 + 7 = 14$
$5 - 2 = 3$	$3 + 7 = 10$	$3 + 7 = 10$	$5 + 2 + 7 = 14$

مثال ۱۰      مثال ۱۱      مثال ۱۲

$2 + 1 = 3$	$4 - 1 = 3$	$4 + 3 + 9 = 16$
$2 - 1 = 1$	$4 - 1 = 3$	$4 + 3 + 9 = 16$
$2 - 1 = 1$	$4 - 1 = 3$	$4 + 3 + 9 = 16$

مثال ۱۳      مثال ۱۴      مثال ۱۵

$2 + 3 = 5$	$12 + 3 + 5 = 20$	$10 + 2 + 5 = 17$
$2 - 3 = -1$	$12 + 3 + 5 = 20$	$10 + 2 + 5 = 17$
$2 - 3 = -1$	$12 + 3 + 5 = 20$	$10 + 2 + 5 = 17$

مثال ۱۷

$$\begin{aligned} & ۲(ص + ط) + ل + (ط - ل) \\ & (ص + ط) + ل + (ط - ل) \\ & ۲(ص + ط) + ل + (ط - ل) \end{aligned}$$

مثال ۱۸

$$\begin{aligned} & ۳ - (س + ل) + (س + ل) + ۳ \\ & ۳ - (س + ل) + (س + ل) + ۳ \\ & ۳ - (س + ل) + (س + ل) + ۳ \end{aligned}$$

مثال ۱۸

$$\begin{aligned} & ۴ - ۳ + ۲ - ۱ \\ & ۴ - ۳ + ۲ - ۱ \\ & ۴ - ۳ + ۲ - ۱ \end{aligned}$$

مثال ۱۹

$$\begin{aligned} & ۲ + ۳ + ۴ + ۵ \\ & ۲ + ۳ + ۴ + ۵ \\ & ۲ + ۳ + ۴ + ۵ \end{aligned}$$

مثال ۲۰

$$\begin{aligned} & (س - ل) + (س + ل) + (س - ل) + (س + ل) \\ & (س - ل) + (س + ل) + (س - ل) + (س + ل) \\ & (س - ل) + (س + ل) + (س - ل) + (س + ل) \end{aligned}$$

مثال ۲۱

$$\begin{aligned} & ۳ + ۴ + ۵ + ۶ \\ & ۳ + ۴ + ۵ + ۶ \\ & ۳ + ۴ + ۵ + ۶ \end{aligned}$$

مثال ۲۲

$$\begin{aligned} & ۵ + ۶ + ۷ + ۸ \\ & ۵ + ۶ + ۷ + ۸ \\ & ۵ + ۶ + ۷ + ۸ \end{aligned}$$

مثال ۲۳

$$\begin{aligned} & ۳(ط + ل) - ۲(ط - ل) \\ & ۳(ط + ل) - ۲(ط - ل) \\ & ۳(ط + ل) - ۲(ط - ل) \end{aligned}$$

مثال ۲۴

$$\begin{aligned} & ۲ + ۳ + ۴ + ۵ \\ & ۲ + ۳ + ۴ + ۵ \\ & ۲ + ۳ + ۴ + ۵ \end{aligned}$$

تیسری فصل ضرب کا قاعدہ

حدود میں یہ بات بیان کی گئی ہے کہ جب مقدار کی اول میں علامت جمع یعنی '+' ہوتی ہے اور اس مقدار کو مقدار مثبت کہتی ہیں اور جس مقدار کی اول میں علامت نفی یعنی '-' ہوتی ہے اور اس مقدار کو منفی کہتے ہیں پس ضرب کی قاعدہ میں ان تین باتوں کو ضرور یاد رکھنا چاہیے کہ اگر مقدار مثبت کو مثبت میں ضرب کریں تو حاصل ضرب ایک مقدار مثبت ہوتی ہے اور اگر منفی کو مثبت میں ضرب کریں یا مثبت کو منفی میں ضرب کریں تو حاصل ضرب ایک مقدار منفی ہوتی ہے اب جانا چاہئے کہ مغزوب اور مغزوب فیہ کی تین صورتیں ہر سکتی ہیں یا تو مغزوب اور مغزوب فیہ دو نوین ایک ایک رقم ہو یا ان میں سے ایک میں بہت رقمیں ہوں اور دوسری میں ایک رقم ہو یا دو نوین بہت بہت رقمیں ہوں صورت اول یعنی جس وقت مغزوب اور مغزوب فیہ میں ایک ایک رقم ہو تو اس صورت میں ضرب کا قاعدہ یہ ہے کہ اول مغزوب اور مغزوب فیہ کو اور پہنچی لکھ کر ایک خط عرضی کھینچا جائے پس اگر مغزوب اور مغزوب فیہ دو نوین ہوں تو اس خط عرضی

۶ نفی کے سچی علامت جمع کی لکھدی اور بعد اسکی مضروب کی سرکو مضروب نہ کی سریر و ضرب کر کی اوس علامت کی اکی ثبت کرنی در اسکی اکی حروت کو ملا کر لکھدین اور اگر مضروب اور مضروب نہ کی علامتین مختلف ہوں تو اول میں علامت نفی یعنی - لکھ کر اوسکی اکی حاصل ضرب امثالوں کا لکھ کر حروت کو ملا کر لکھدین مثلاً ۳ لا اور ۴ لا کو ضرب کرنا چاہتے ہیں تو انکو اس طرح ۳ لا لکھنا چاہئے اب چونکہ ان دونوں کی اول میں علامت

$$\frac{۳۴}{۵۱۲}$$

جمع کی ہے تو حاصل ضرب میں بھی علامت جمع چاہئے ہر اکی سر و نکو با ہم ضرب کرنا چاہی یعنی ۳ کو ۴ میں ضرب کرنا چاہئے پس ۱۲ ہوتے ہیں ۱۲ کی آگے لا کو لکھنا چاہئے پس حاصل ضرب ۵۱۲ ہوگا  
یعنیہ اس طرح - ۳ لا کو - ۴ میں ضرب کریں تو - ۳ لا سے ۱۲ لا ہوگی کیونکہ مضروب اور

$$\frac{۳۴}{۵۱۲}$$

اور مضروب نہ میں در نو کی علامت نفی تین اسیر وسطی علامت حاصل ضرب کی ثبت ہوگی اگر - ۳ لا کو ہم میں ضرب کریں تو - ۳ لا - ۵۱۲ و نفی ہوگی کیونکہ علامتین مضروب اور مضروب نہ کی مختلف ہیں اور اس طرح - ۳ لا سے

$$\frac{۳۴}{۵۱۲}$$

۴ اور - ۳ لا کا حاصل ضرب ہی - ۱۲ لا ہوگا یہاں جانا چاہئے کہ حروت کو با ہم ملا کر لکھ دیتی ہیں اس میں کچھ لحاظ قدیم اور تاخیر کا نہیں یعنی صورت بالا میں لا و لکھدین چاہیں گے لا لکھدین

مثال ۱	مثال ۲	مثال ۳	مثال ۴	مثال ۵	مثال ۶
۵۰+	۷	۳ ص ۵	۴ ط ۵	۳ لا	۱۵ - ۶
۶+	۳	۵ ط ۵	۷ ص ۵	۲ -	۳ - ۵
۳۰+	۲۱	۱۵ ص ۵	۲۲ ط ۵	۴	۱۵ ب ۵
۷	۸	۴	۱۰	۱۱	۱۳
۸ ص ۵	۳ لا	۷ لا ۵	۱۱ ص ۵	۱۱ ط ۵	۱۳ ص ۵
۷ ط ۵	۵	۱۵ ط ۵	۳ ط ۵	۲ -	۵ -
۵۶ ص ۵	۲۰ -	۱۳ ص ۵	۲۳ ص ۵	۱ ص ۵	۱۵ ص ۵
۱۳	۱۴	۱۵			
۵ ص ۵	۳ -	۷ -	۱۵ -	۱۳ -	۱۳ -
۵ ص ۵	۳ -	۷ -	۱۵ -	۱۳ -	۱۳ -



اگر کوئی حزن مضروب اور مضروب فیہ میں مشترک ہو تو اس کو حاصل ضرب میں ملا کر نہیں کہتے بلکہ اوہین سے  
 فقط ایک ہی حزن کہہ کر اس کی اوپر مجموعہ نشان قوتوں دو طرف کا لکھ دیتی ہیں مثلاً ۴ لاکو ۵ لاکو ۳ لاکو  
 تو ظاہر ہے کہ انہیں نشان قوت لاکے آ اور تین میں سے کسی ایک کے موافق ۵ لاکو حاصل ہوگا اور اگر کوئی کہہ کہ ۵ میں ضرب کیا تو ۲۰ ہو  
 گا

اور دونوں نشانوں کو جمع کر کے لاک نشان قوت لکھا تو ۵ لاکو حاصل ضرب ۲۰ لاکو ہوگا  
 اگر ۳ لاکو ۲ لاکو ۱ لاکو میں ضرب کریں تو بیحدہ مواجہان بالا کی حاصل ضرب ۳۳ ہوگا اگر ۲ لاکو  
 ۲۵۲

۳ لاکو میں ضرب کریں تو چونکہ اس صورت میں نشان قوت حزن مشترک لاکے آ اور آ ہی اس واسطے حاصل  
 ضرب ۲ لاکو ۴ لاکو ہوگا مثال ۴ مثال ۵ مثال ۶  

$$\begin{array}{r} ۲۰ \\ ۲۰ \\ \hline ۴۰ \\ ۲۰ \\ \hline ۴۰ \\ ۲۰ \\ \hline ۸۰ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۳۰ \\ ۳۰ \\ \hline ۶۰ \\ ۳۰ \\ \hline ۹۰ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۴۰ \\ ۴۰ \\ \hline ۸۰ \\ ۴۰ \\ \hline ۱۲۰ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۵۰ \\ ۵۰ \\ \hline ۱۰۰ \\ ۵۰ \\ \hline ۱۵۰ \end{array}$$

مثال ۸ مثال ۹ مثال ۱۰ مثال ۱۱  

$$\begin{array}{r} ۲۰ \\ ۲۰ \\ \hline ۴۰ \\ ۲۰ \\ \hline ۴۰ \\ ۲۰ \\ \hline ۸۰ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۳۰ \\ ۳۰ \\ \hline ۶۰ \\ ۳۰ \\ \hline ۹۰ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۴۰ \\ ۴۰ \\ \hline ۸۰ \\ ۴۰ \\ \hline ۱۲۰ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۵۰ \\ ۵۰ \\ \hline ۱۰۰ \\ ۵۰ \\ \hline ۱۵۰ \end{array}$$

مثال ۱۲ مثال ۱۳ مثال ۱۴ مثال ۱۵ مثال ۱۶  

$$\begin{array}{r} ۲۰ \\ ۲۰ \\ \hline ۴۰ \\ ۲۰ \\ \hline ۴۰ \\ ۲۰ \\ \hline ۸۰ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۳۰ \\ ۳۰ \\ \hline ۶۰ \\ ۳۰ \\ \hline ۹۰ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۴۰ \\ ۴۰ \\ \hline ۸۰ \\ ۴۰ \\ \hline ۱۲۰ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۵۰ \\ ۵۰ \\ \hline ۱۰۰ \\ ۵۰ \\ \hline ۱۵۰ \end{array}$$

مثال ۱۹ مثال ۲۰  

$$\begin{array}{r} ۲۰ \\ ۲۰ \\ \hline ۴۰ \\ ۲۰ \\ \hline ۴۰ \\ ۲۰ \\ \hline ۸۰ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۳۰ \\ ۳۰ \\ \hline ۶۰ \\ ۳۰ \\ \hline ۹۰ \end{array}$$

جب مضروب اور مضروب فیہ دو مقدار ایسی ہوں کہ اون دو نو پر جذر ہو تو جائے کہ جو مقدار میں جذر کی  
 اندر میں اون کو ضرب کریں اور حاصل ضرب پر نشان جذر کا بنا دیں

مثال ۵	مثال ۴	مثال ۳	مثال ۲	مثال ۱
$\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$	$\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$	$\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$	$\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$	$\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$
مثال ۹	مثال ۱	مثال ۷	مثال ۶	
$\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$	$\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$	$\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$	$\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$	
$\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$	$\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$	$\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$	$\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$	

دوسری صورت یعنی جسوت مضروب میں بہت رقمیں ہوں اور ضرب فیذ میں ایک رقم یا بالعکس پس ان دو نوحا تو نہیں بہت قاعدہ ہے کہ اس ایک رقم میں سب رقموں کو برافق صورت اول کی ضرب کر کے ایک سطر میں لکھنا چاہیے مثلاً ص لا + ط و + ر کو کم لائیں ضرب کریں تو ص لا + ط و + ر لائیں بقدر کم لائیں ضرب کرنا چاہیے

یہ ۱۶ ص لا + م ط لا + و ۸ ص لا حاصل ہوگا

مثال ۲	مثال ۳	مثال ۴	مثال ۵
$\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$	$\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$	$\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$	$\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$
مثال ۷	مثال ۸	مثال ۹	مثال ۱۰
$\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$	$\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$	$\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$	$\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$
$\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$	$\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$	$\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$	$\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$

مثال ۱۰

$$\begin{array}{r} ۵۰ + ۵۶ - ۵۲ \\ \hline ۵۴ \end{array}$$

مثال ۱۱

$$\begin{array}{r} ۵۲ - ۵۰ + ۵۴ \\ \hline ۵۶ \end{array}$$

مثال ۱۲

$$\begin{array}{r} ۵۳ - ۵۲ - ۵۱ \\ \hline ۵۰ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۵۳ - ۵۲ - ۵۱ - ۵۰ \\ \hline ۵۰ \end{array}$$

تیسری صورت یعنی جسوت مضروب اور مضروب فیہ دونوں بہت بہت سی رقمیں ہوں تو اسوقت بہت قاعدہ ہو کہ مضروب فیہ کی اول رقم کو مضروب کی ساری رقموں میں ضرب کر کے دوسری صورت کی موافق ایک سطح میں لکھیں اور پھر دوسری رقم کو مضروب فیہ کی ساری رقموں میں ضرب کر کے پہلی سطح کی نیچے ایک مرتبہ چھوڑ کر لکھتی چلے جائیں اور علیٰ ہذا القیاس حتیٰ رقمیں ہوں سب میں اس سطح ضرب کر کے لکھتے جائیں اور بعد عمل تمام ہونے کے سب حاصل ضرب ہوں کو جمع کر لیں یہ حاصل جمع حاصل ضرب مطلوب ہوگا

مثال ۱

$$۵۰ + ۵۲ - ۵۴$$

$$۵۲ - ۵۰$$

مثال ۲

$$۵۰ - ۵۲ + ۵۴$$

$$۵۴ - ۵۰$$

$$۵۴ - ۵۰ - ۵۲ + ۵۱$$

$$۵۴ - ۵۰ + ۵۱ - ۵۲$$

$$۵۲ + ۵۰ - ۵۴$$

$$۵۴ - ۵۲ + ۵۰$$

$$۵۲ - ۵۰ - ۵۳$$

$$۵۲ - ۵۰ - ۵۱ + ۵۳ + ۵۴$$

مثال ۵

$$۵ - ۵$$

$$۵ + ۵$$

$$۵ - ۵$$

$$۵ + ۵ - ۵$$

$$۵ - ۵$$

مثال ۸

$$۵ + ۵$$

$$۵ - ۵$$

$$۵ + ۵$$

$$۵ - ۵$$

$$۵ - ۵$$

مثال ۳

$$۵ - ۵$$

$$۵ - ۵$$

$$۵ - ۵$$

$$۵ + ۵ - ۵$$

$$۵ - ۵ + ۵$$

مثال ۷

$$۱ + ۵$$

$$۱ - ۵$$

$$۵ + ۵$$

$$۱ + ۵ - ۵$$

$$۱ - ۵$$

مثال ۴

$$۵ + ۵$$

$$۵ + ۵$$

$$۵ + ۵$$

$$۵ + ۵ - ۵$$

$$۵ + ۵ + ۵$$

مثال ۶

$$۵ + ۵$$

$$۵ - ۵$$

$$۵ + ۵$$

$$۵ - ۵$$

$$۵ - ۵$$

مثال ۹

$$۲ \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$۲ \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\frac{۲ \sqrt{a} - \sqrt{b}}{۲ \sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$+ ۲ \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$۳ \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

مثال ۱۰

$$\sqrt{a} - \sqrt{a+b}$$

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{a}$$

$$\frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{a+b}}$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a}$$

$$۲ \sqrt{a} - \sqrt{a+b}$$

مثال ۱۲

$$\sqrt{a} - ۱ + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a} + ۱ + \sqrt{b}$$

$$\frac{\sqrt{a} + ۱ + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - ۱ + \sqrt{b}}$$

$$۲ \sqrt{a} - ۱ - \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a} - ۱ + \sqrt{b}$$

$$۲ \sqrt{a} - ۱ - \sqrt{b}$$

مثال ۱۱

$$۱ + \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$۱ + \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\frac{۱ + \sqrt{a} - \sqrt{b}}{۱ + \sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$۲ + \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$۱ + \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$۱ + \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$- \sqrt{a} + ۱ + \sqrt{b}$$

مثال ۱۵

$$\sqrt{a} - \sqrt{a+b}$$

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{a}$$

$$\frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{a+b}}$$

$$+ \sqrt{a+b} - \sqrt{a}$$

$$۲ \sqrt{a} - \sqrt{a+b}$$

مثال ۱۴

$$\sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$+ \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$۳ \sqrt{a}$$

مثال ۱۳

$$۱ + \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$۱ + \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\frac{۱ + \sqrt{a} + \sqrt{b}}{۱ + \sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$۱ + \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$+ ۱ + \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$۱ + ۲ \sqrt{a} + ۳ \sqrt{b}$$

مثال ۱۴ ضرب کرد  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  و  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  جواب  $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{a} - \sqrt{b}$

مثال ۱۵ ضرب کرد  $\sqrt{a} - \sqrt{a+b}$  و  $\sqrt{a+b} + \sqrt{a}$  جواب  $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{a} - \sqrt{b}$

جواب  $\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{a} + \sqrt{b}$

مثال ۱۸ ضرب کرد  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$  کو  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$  کو  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$  کو

جواب لا - (ط + د + ۱) لا + ۱ د ط (ط + د) لا - ۱ د ۱ د

جس مقدار کوئی ضرب کرے تے ہن تو ظاہر ہے کہ حاصل ضرب اس مقدار کا مجذور ہوتا ہے مثلاً لا کو لا میں ضرب کریں تو لا مجذور لا کا ہے اس طرح لا د کو لا + د میں ضرب کریں تو (لا + د) لا + ۱ د + ۱ د

مجذور لا + د کا ہے اگر (لا + د) لا + ۱ د + ۱ د کو لا + د میں ضرب کریں تو ظاہر ہے کہ حاصل ضرب مکعب (لا + د) کا ہوگا اور اس طرح اگر اس مکعب کو پھر (لا + د) میں ضرب کریں تو چوتھی مرتبہ کا صعود

(لا + د) کا حاصل ہوگا اور علیٰ ہذا القیاس باخرین مرتبہ کا صعود اور چوتھی مرتبہ وغیرہ کا صعود ضرب دینی ہے حاصل ہو سکتا ہے لیکن یہ بات ظاہر ہے کہ اس طرح کی ضرب میں دشواری ہوتی ہے کیونکہ بہت سی مقداروں کے

ضرب کر کے نتیجہ میں واقع ہوتی ہے اس لیے واسطی بیرون صاحب نے ایک آسان قاعدہ ایسا لکھا ہے کہ چوتھی مرتبہ کا صعود جائیں تو ضرب کر کے حاصل ہو سکتا ہے پس ہم وہ قاعدہ لکھتے ہیں اور دلیل اس کی آگے بیان کر چکی وہ قاعدہ

یہ ہے کہ اگر وہ مقداروں کے مجموعہ یا حاصل تفریق کا صعود لینا ہو تو چوتھی مرتبہ کا صعود لینا ہے اور اس کی موافق مجموعہ یا حاصل تفریق پر عدد لکھیں مثلاً (لا + د) کا مجذور لکھا جاتا ہے اس کی دوسری مرتبہ کا صعود لیا جاتا ہے اس لیے

عدد (۲) کا اسپر اس طرح (لا + د) لکھنا چاہیے (لا + د) = لا + ۲ د + د اور اس کی اگلی مساوات کی علامت لکھ کر جو حرف کہ اول ہے اس کا نشان قوت دہی عدد لکھنا چاہیے جو کل پر ہے بعد اس کی دیکھنا چاہیے کہ

جن مقداروں کا صعود لینا ادنیٰ یجبین علامت + کی ہے یا علامت - کی ہے تو اول حرف کے بعد علامت + کی لکھ کر وہ عدد لکھیں جو نشان قوت ہے اور اس عدد کی اگلی اول حرف کو لکھیں مگر اس طرح پر نشان

قوت اول کی نسبت بقدر آ کی کم ہو بعد اس کی دوسرا حرف طاکر موافق ضرب کی لکھ دین یہ دوسرا حرف ہوگا پھر تیسری حرف کی واسطی یہ قاعدہ کریں کہ دوسرا حرف کی سر کو اول حرف کی نشان قوت میں ضرب کریں اور حاصل ضرب

کو جو حرف کی تعداد پر کہ اس صورت میں ہوگی تقسیم کریں اور خارج قسمت کو تیسری حرف کا سر بناویں بعد اس کی اول حرف کا نشان قوت پہلی کی نسبت بقدر ۲ کی کم کر لکھیں اور اس کی دوسری حرف کا نشان قوت پہلی سے بقدر

اکی زیادہ لکھیں اور علیٰ ہذا القیاس چوتھی حرف واسطی یہی قاعدہ کریں غرض اول حرف کی قوت لکھائی جاوین اور دوسری حرف کی قوت بڑھاتی جاوین اور اگر ادنیٰ یجبین علامت جمع ہو تو سب حرفوں کی اول میں علامت جمع ہوگی اور اگر ادنیٰ یجبین علامت منفی ہے تو اول پر + دوسری پر - تیسری پر + چوتھی پر - اور علیٰ ہذا القیاس

اب ہم اس قاعدہ کی مثالیں لکھتے ہیں مثلاً ہم چاہتے ہیں کہ اس قاعدہ کی موافق (لا + د) کا تین مرتبہ کا صعود لین تو اس طرح (لا + د) = لا + ۳ د + ۳ لا د + د

لکھنا چاہیے اس لیے علامت مساوات کی علامت نشان دہ لکھا جو کل پر تھا یعنی لا لکھا بعد اس کی + کی علامت

لکھ کر نشان قوت یعنی عدد ۳ کا لکھا اور اسکی الی لول چون نشان قوت اول سی ایک کم لکھا یعنی لا لکھا پھر ۳۰ کے ساتھ دو سکر حرف کو ضرب دی کر لکھ دیا ۶۰ جسرا جو ۳۰ لا د بعد اسکی علامت جکی لکھ کر دو تیسری جز کی سکر کو جو ۳۰ ہی لا کی نشان قوت میں جو ضرب کیا تو حاصل ضرب ۹۰ ہوا اسکو تعداد جزون پر کہ ۳ ہے تقسیم کیا خارج قسمت ۳ ہوا اس ۳ تیسری جز کا سبر بنایا اور اسکی الکی لا کے نشان قوت ایک کم کر کی لکھ یعنی ۳۰ لا لکھا اور پھر دو تیسری جز نشان قوت بقدر ایک زیادہ کر کی اسکی ساتھ لکھ دیا پس ۳۰ لا د ہوا بعد جو تیسری جز کی بیٹے پہی ہی قاعدہ کیا یعنی تیسری جز کی سکر کو جو ۳ ہے نشان قوت لایں جو آہر ضرب کیا تو حاصل ضرب ۳۰ ہوا اور اسکو تعداد جزون پر جو تین ہے تقسیم کیا خارج قسمت آہوا اور لا کا نشان قوت کم کیا تو لا بالکل زائل ہو گیا اور فقط دو نشان قوت بقدر آ کی زیادہ کر کے اور اسی آ میں ضرب کر کے لکھ دیا یہ قاعدہ بہت مفید ہے اسکو خوب یاد رکھنا چاہیے

مثال

$$(۱۰+۵) = ۱۰ + ۵ = ۱۵$$

مثال

$$(۱۰+۵) = ۱۰ + ۵ = ۱۵$$

مثال

$$(۱۰-۵) = ۱۰ - ۵ = ۵$$

مثال

$$(۱۰-۵) = ۱۰ - ۵ = ۵$$

مثال

$$(۱+۲) = ۱ + ۲ = ۳$$

مثال

$$(۱+۲) = ۱ + ۲ = ۳$$

مثال

$$(۱-۲) = ۱ - ۲ = -۱$$

مثال

$$(۱+۲) = ۱ + ۲ = ۳$$

### مثال

$$(1-12) = 14 - 2 - 2 + 2 + 2 - 1 + 1 + 1$$

### چوتھی فصل قاعدہ تقسیم

جانا جائیے کہ جس رقم کو تقسیم کرتے ہیں اسی مقسوم کہتے ہیں اور جس رقم پر تقسیم کرتے ہیں اسی مقسوم علیہ کہتے ہیں تقسیم میں کسی صورت میں پہلی صورت یہ ہے کہ مقسوم اور مقسوم علیہ دو نو ایک ایک رقم ہوں پس اس صورت میں یہ قاعدہ ہے کہ مقسوم کو دو خطوں مقوس (مثلاً) (انکی دریا میں لکھ دین اور مقسوم علیہ کو ایک طرف خط کی لکھ کر علامتوں کا لحاظ کریں اور خارج قسمت پر ایسی علامت لکھیں کہ اگر اس کو مقسوم علیہ میں ضرب کریں تو حاصل ضرب پر وہ علامت ہو جو مقسوم پر ہے بعد اسکے مقسوم کی سر کو مقسوم علیہ کی سر پر تقسیم کر کے خارج قسمت کو اس علامت کی انکی لکھ دین بعد اسکے جو حرف اس کو مقسوم میں ہے اور مقسوم علیہ میں نہیں اس کو خارج قسمت میں عدد کی آگے لکھ دین اور جو حرف مقسوم اور مقسوم علیہ دو نو میں مشترک ہو اس کو خارج قسمت میں نہ لکھیں بعد اسکے خارج قسمت کو مقسوم علیہ میں ضرب دی کہ مقسوم کی نیچے لکھیں اور دو نو میں تفریق کر دین اگر باقی نہ رہی تو تقسیم پوری اور جو کچھ باقی رہی اس کو مقسوم علیہ کی اوپر لکھ دین اور اگر کوئی ایسا حرف ہو کہ مقسوم علیہ میں ہے اور مقسوم میں نہیں تو اس صورت میں تقسیم نہیں ہو سکتی یہ صورت کسور میں داخل ہو جاتی ہے

### مثال ۱

$$\begin{array}{r} 20 \text{ ط } 20 \\ 20 \text{ ط } 20 \\ \hline 0 \end{array}$$

مثلاً ۲۰ ط ۲۰ کو ۲۰ پر تقسیم کیا جائیے میں تو اس کو اس طرح

لکھ دین جس طرح مثال (۱) ہے اب چونکہ علامتیں مقسوم اور مقسوم

علیہ دو نو کی ہیں اس لیے اسطی خارج قسمت پر بھی علامت + ہوگی بعد اسکی مقسوم کی سر کو جو ۲۰ ہے مقسوم علیہ کے سر پر جو ۲۰ ہے تقسیم کیا تو خارج قسمت ۱۰ ہو اور دیکھا کہ ۱۰ دو نو میں مشترک ہے اس کو خارج قسمت میں نہ لکھا اور لا ایسا حرف ہے کہ مقسوم میں ہے اور مقسوم علیہ میں نہیں اس لیے اسطی اس کو خارج قسمت میں لکھ دیا پھر ۱۰ کو ۲۰ میں ضرب کیا تو ۲۰ ط ۲۰ ہوئی اس کو مقسوم علیہ سے تفریق کیا تو کچھ باقی رہا

### مثال ۲

$$\begin{array}{r} 12 \text{ ط } 12 \\ 12 \text{ ط } 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

### مثال ۳

$$\begin{array}{r} 18 \text{ ط } 18 \\ 18 \text{ ط } 18 \\ \hline 0 \end{array}$$

### مثال ۴

$$\begin{array}{r} 25 \text{ ط } 25 \\ 25 \text{ ط } 25 \\ \hline 0 \end{array}$$

### مثال ۵

$$\begin{array}{r} 18 \text{ ط } 18 \\ 18 \text{ ط } 18 \\ \hline 0 \end{array}$$

### مثال ۶

$$\begin{array}{r} 30 \text{ ط } 30 \\ 30 \text{ ط } 30 \\ \hline 0 \end{array}$$

### مثال ۷

$$\begin{array}{r} 27 \text{ ط } 27 \\ 27 \text{ ط } 27 \\ \hline 0 \end{array}$$

اگر مقسوم اور مقسوم علیہ میں کوئی ایسا حرف مشترک ہو جس پر کچھ قوت یا یا جاوے اور جو حرف مقسوم میں ہی اور سکا نشان قوت زیادہ تو چاہیے کہ بڑی نشان قوت میں سے کم کو کمال کر باقی عدد کو نشان قوت اور سحر ت کا بنا کر

خارج قسمت میں لکھ دین

مثال ۸

اس صورت میں مقسوم ۸ کا نشان قوت ہی اور مقسوم علیہ میں ۸ کا ۲ نشان قوت ہی پس حاصل تفریق اسکا آہوا اور ادا کو نشان قوت ناکا بنا

پس ۸ ہوا اور ادا کو خارج قسمت میں ۸ کے آگے لکھا

مثال ۱۱

مثال ۱

مثال ۴

$\begin{array}{r} ۳۳۰ \\ ۳۰ \overline{) ۱۰۰۰} \\ \underline{۹۰} \phantom{۰} \\ ۱۰ \phantom{۰} \\ ۰ \phantom{۰} \end{array}$	$\begin{array}{r} ۵۰ \\ ۵ \overline{) ۲۵۰} \\ \underline{۱۰} \phantom{۰} \\ ۱۵ \phantom{۰} \\ ۰ \phantom{۰} \end{array}$	$\begin{array}{r} ۲۸ \\ ۲۸ \overline{) ۷۲۸} \\ \underline{۷۲} \phantom{۰} \\ ۰ \phantom{۰} \end{array}$
---	--	---

مثال ۱۲

مثال ۱۳

مثال ۱۲

$\begin{array}{r} ۳۳۰ \\ ۳۰ \overline{) ۱۰۰۰} \\ \underline{۹۰} \phantom{۰} \\ ۱۰ \phantom{۰} \\ ۰ \phantom{۰} \end{array}$	$\begin{array}{r} ۳۰ \\ ۳۰ \overline{) ۹۰۰} \\ \underline{۹۰} \phantom{۰} \\ ۰ \phantom{۰} \end{array}$	$\begin{array}{r} ۱ \\ ۱ \overline{) ۱} \\ \underline{۱} \\ ۰ \end{array}$
---	---	--

مثال ۱۷

مثال ۱۶

مثال ۱۵

$\begin{array}{r} ۱۰ \\ ۱۰ \overline{) ۱۰۰} \\ \underline{۱۰} \\ ۰ \end{array}$	$\begin{array}{r} ۲۰ \\ ۲۰ \overline{) ۴۰۰} \\ \underline{۴۰} \phantom{۰} \\ ۰ \phantom{۰} \end{array}$	$\begin{array}{r} ۳۰ \\ ۳۰ \overline{) ۹۰۰} \\ \underline{۹۰} \phantom{۰} \\ ۰ \phantom{۰} \end{array}$
---	---	---

مثال ۲۰

مثال ۱۹

مثال ۱۸

$\begin{array}{r} ۱۰ \\ ۱۰ \overline{) ۱۰۰} \\ \underline{۱۰} \\ ۰ \end{array}$	$\begin{array}{r} ۵ \\ ۵ \overline{) ۱۰۰} \\ \underline{۱۰} \phantom{۰} \\ ۰ \phantom{۰} \end{array}$	$\begin{array}{r} ۳ \\ ۳ \overline{) ۹۰} \\ \underline{۹۰} \\ ۰ \end{array}$
---	---	--

مثال ۲۳

مثال ۲۲

مثال ۲۱

$\begin{array}{r} ۳۳۰ \\ ۳۰ \overline{) ۱۰۰۰} \\ \underline{۹۰} \phantom{۰} \\ ۱۰ \phantom{۰} \\ ۰ \phantom{۰} \end{array}$	$\begin{array}{r} ۲۲ \\ ۲۲ \overline{) ۴۸۴} \\ \underline{۴۴} \phantom{۰} \\ ۴۴ \phantom{۰} \\ \underline{۴۴} \\ ۰ \end{array}$	$\begin{array}{r} ۴ \\ ۴ \overline{) ۱۶} \\ \underline{۱۶} \\ ۰ \end{array}$
---	---	--

مثال ۲۴

اس صورت میں ۱۶ باقی ہے اور اسکو بھی مقسوم علیہ کی لکھ کر سر کی موافق لکھ دیا



مثال ۲۵

$$\frac{(2 \text{ ص } 3 \text{ ص } 2 \text{ ص } 1 \text{ ص } 0) \text{ ص } 2 \text{ ص } 1 \text{ ص } 0}{\text{ص } 2 \text{ ص } 1 \text{ ص } 0}$$

مثال ۲۶

$$\frac{(2 \text{ ص } 2 \text{ ص } 1 \text{ ص } 0) \text{ ص } 2 \text{ ص } 1 \text{ ص } 0}{\text{ص } 2 \text{ ص } 1 \text{ ص } 0}$$

مثال ۲۷

$$\frac{(2 \text{ ص } 2 \text{ ص } 1 \text{ ص } 0) \text{ ص } 2 \text{ ص } 1 \text{ ص } 0}{\text{ص } 2 \text{ ص } 1 \text{ ص } 0}$$

اب اگر مقسوم میں بہت رقمیں ہوں اور مقسوم علیہ میں ایک رقم ہو تو چاہیے کہ موافق قاعدہ اول کے ہر رقم مقسوم کو مقسوم علیہ پر تقسیم کریں اور خارج قسمت دوسری طرف لکتے جاویں

مثال ۱

$$\frac{(2 \text{ ص } 4 \text{ ص } 2 \text{ ص } 1 \text{ ص } 0) \text{ ص } 2 \text{ ص } 1 \text{ ص } 0}{\text{ص } 2 \text{ ص } 1 \text{ ص } 0}$$

مثال ۲

$$\frac{(2 \text{ ص } 3 \text{ ص } 1 \text{ ص } 0) \text{ ص } 2 \text{ ص } 1 \text{ ص } 0}{\text{ص } 2 \text{ ص } 1 \text{ ص } 0}$$

مثال ۳

$$\frac{(2 \text{ ص } 4 \text{ ص } 2 \text{ ص } 1 \text{ ص } 0) \text{ ص } 2 \text{ ص } 1 \text{ ص } 0}{\text{ص } 2 \text{ ص } 1 \text{ ص } 0}$$

اگر مقسوم اور مقسوم علیہ دونوں میں بہت بہت رقمیں ہوں تو چاہیے کہ اول دو نو کو اس ترتیب سے لکھیں کہ جس چیز میں نشان تو سنگی حرف کا سب سے بڑا ہو اس جز کو اول اور جس چیز میں نشان تو تہ ہے

حرف کا پہلے جزسی ایک کم ہو اوسے دوسرا جز بنا دین اور علیٰ ہذا القیاس ترتیب نشان تو کسی حرف کی کہہیں اور یہ بھی رعایت رکھیں کہ جس حرف کی ترتیب کی موافق مقسوم لکھا ہو اوسے کی ترتیب کی موافق مقسوم علیہ بھی لکھا جاوے بعد اسکی موافق قواعد گذشتہ کی اول رقم مقسوم کو اول رقم مقسوم علیہ پر تقسیم کریں اور سفارح قسمت کو ایک جگہ لکھ کر تمام مقداروں مقسوم علیہ میں ضرب کریں اور حاصل ضرب کو مقسوم کی نیچے لکھ کر تفریق کر لیں جو باقی بچے اوسکی ساتھ ایک اور رقم مقسوم تین تار کر اس باقی کے اول کو مقسوم علیہ کی اول رقم پر تقسیم کریں اور سفارح قسمت کو تمام رقموں مقسوم علیہ میں ضرب کر کر اور حاصل ضرب کو مقسوم کی نیچے لکھ کر تفریق کریں اور اور اخیر تک یہی عمل جاری رکھیں خارج قسمت معلوم ہو جاوے گی

مثال ۲

$$\begin{array}{r} (x^2 + 2x - 1) \div (x - 1) \\ \underline{x^2 - x + 1} \phantom{-1} \\ x + 2 \phantom{-1} \\ \underline{x - 1} \\ 3 \phantom{-1} \end{array}$$

مثال ۱

$$\begin{array}{r} (x^2 + 2x + 1) \div (x + 1) \\ \underline{x^2 + x + 1} \\ x \phantom{+ 1} \\ \underline{x + 1} \\ 0 \end{array}$$

مثال ۴

$$\begin{array}{r} (x^3 + 2x^2 + 3x - 1) \div (x - 1) \\ \underline{x^3 - x^2 + 3x - 1} \\ 3x^2 + 4x \phantom{- 1} \\ \underline{3x^2 - 3x - 1} \\ 7x - 1 \end{array}$$

مثال ۳

$$\begin{array}{r} (x^3 + 3x^2 + 2x + 1) \div (x + 1) \\ \underline{x^3 + x^2 + 2x + 1} \\ 2x^2 + x \phantom{+ 1} \\ \underline{2x^2 + 2x + 1} \\ -x \phantom{+ 1} \\ \underline{-x - 1} \\ 0 \end{array}$$

مثال ۵

$$\begin{array}{r} (x^4 - 10x^3 + 25x^2 - 10x + 1) \div (x - 1) \\ \underline{x^4 - x^3 + 25x^2 - 10x + 1} \\ -9x^3 + 25x^2 - 10x + 1 \\ \underline{-9x^3 + 9x^2 - 10x + 1} \\ 16x^2 - 10x + 1 \\ \underline{16x^2 - 16x + 1} \\ 6x \phantom{+ 1} \\ \underline{6x - 6} \\ 7 \end{array}$$







تو  $\frac{10}{11}$  بجای ہر کسی شمار کنندہ کو نب نام پر تقسیم کریں تو ظاہر قسمت  $\frac{10}{11}$  ہو تا ہی یعنی  $\frac{10}{11} = \frac{10}{11}$  پس معلوم ہوا کہ  $\frac{10}{11}$  ایک کسر ہے جب اسکی شمار کنندہ اور نب نام کو ط میں ضرب کیا تو بعد ضرب کر نیکی ہی  $\frac{10}{11}$  کے برابر رہے یعنی ط میں ضرب کر نی ہی کچھ فرق نہ آیا اور یہی ثابت کرنا تھا

دوسری صورت فرض کر دو کہ  $\frac{10}{11}$  ایک کسر ہے اب اگر  $\frac{10}{11}$  کے شمار کنندہ اور نب نام کو عددہ علیہ ط پر تقسیم کریں تو  $\frac{10}{11}$  پر بربجادیک اور موافق (۱) کے بی تقسیم کر نی کے ط پر  $\frac{10}{11} = \frac{10}{11}$  کے ہر معلوم ہوا کہ جو کچھ مقدار  $\frac{10}{11}$  ہی ط پر تقسیم کر نی کے بعد رہتی ہے پس ثابت ہوا کہ کسی کسر کی شمار کنندہ اور نب نام کو ایک مقدار پر تقسیم کر نی سے کچھ فرق نہیں آتا اب ہم اسکی صورت کا فائدہ بیان کرتے ہیں جب یہ بات ثابت ہوئی کہ کسر کی شمار کنندہ اور نب نام کو ایک مقدار پر تقسیم کر نی سے کچھ فرق نہیں آتا تو ظاہر ہے کہ اس کسر کا اختصار ہو سکتا ہے یعنی اگر کوئی کسر ایسی ہو کہ اسکا شمار کنندہ اور نب نام علیہ عددہ کسی مقدار پر برا تقسیم ہو سکی تو زب کے تقسیم کر نی ہی کچھ فرق نہیں آتا اور مقدار شمار کنندہ اور نب نام کی توڑی ہو جاتی ہے تو وہ کسر بعد تقسیم کر نی کی مختصر ہو جاوے گی اور کسر کا مختصر کرنا مساوات کی حل کرنے میں نہایت مفید اور عمدہ ہوتا ہے اب ہم چند مثالیں اختصار کی کہتے ہیں

مثال ۱

$\frac{103}{63}$  اس کسر کا شمار کنندہ اور نب نام ۶۳ پر تقسیم ہو سکتا ہے اس لیے اسکی بعد تقسیم کر نیکی  $\frac{103}{63}$  ر بجا دیجئے یعنی  $\frac{103}{63} = \frac{103}{63}$  اور اسے ط

مثال ۲

اسو اسطی کہ لاپر شمار کنندہ اور نب نام کو تقسیم کر لیا پس جو مقدار شمار کنندہ اور نب نام میں مشترک ہوئی ہے اسے تقسیم کر دیتے ہیں

۳  $\frac{103}{63} = \frac{103}{63}$  ۴  $\frac{103}{63} = \frac{103}{63}$  ۵  $\frac{103}{63} = \frac{103}{63}$

۶  $\frac{103}{63} = \frac{103}{63}$  ۷  $\frac{103}{63} = \frac{103}{63}$  ۸  $\frac{103}{63} = \frac{103}{63}$

۹  $\frac{103}{63} = \frac{103}{63}$  ۱۰  $\frac{103}{63} = \frac{103}{63}$  ۱۱  $\frac{103}{63} = \frac{103}{63}$

۱۲  $\frac{103}{63} = \frac{103}{63}$  ۱۳  $\frac{103}{63} = \frac{103}{63}$  ۱۴  $\frac{103}{63} = \frac{103}{63}$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \quad 15$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{a}}}{\frac{1}{\sqrt{b}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{b}}{\frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \sqrt{b}} = \frac{\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}}{1} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \quad 16$$

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = \frac{\frac{1}{a} \cdot a}{1} = \frac{1 \cdot a}{1} = a \quad 17$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{a}}}{\frac{1}{\sqrt{b}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{b}}{\frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \sqrt{b}} = \frac{\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}}{1} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \quad 18$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1 \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \quad 19$$

$$\frac{1}{4} = \frac{(s+u)}{(s+u)^4} = \frac{(s+u)}{s^4+u^4} \quad 20$$

$$\frac{s^2+u^2}{(s+u)^3} = \frac{(s^2+u^2)s}{(s+u)^4} = \frac{s^3+u^3}{s^4+u^4} \quad 21$$

$$\frac{(s-1)}{(1+s)^b} = \frac{(s-1)u}{(1+s)u^b} = \frac{s-u}{u^b+s^b} \quad 22$$

$$\frac{(u+1)^a}{(b-1)^c} = \frac{(u+1)u^a}{(b-1)u^c} = \frac{u^a+u^{a+1}}{b^c-u^c} \quad 23$$

$$\frac{1+u^2-\sqrt{u}}{3+u^2-\sqrt{u}} = \frac{(1+u^2-\sqrt{u})u^5}{(3+u^2-\sqrt{u})u^5} = \frac{u^5+u^7-u^5}{3u^5+u^7-u^5} \quad 24$$

$$(s-u)^2 = \frac{(s-u)(s+u)^2 \times 3}{(s+u)^3} = \frac{(s-u)^2}{(s+u)^3} = \frac{s^2-u^2}{s^3+u^3} \quad 25$$

$$\frac{(u-1)^2}{3} = \frac{(u+1)(u-1)^2}{(s+1)^3} = \frac{(u-1)^2}{(u+1)^3} = \frac{u^2-u^2-2}{u^3+3} \quad 26$$

$$1-\sqrt{u} = \frac{(1-\sqrt{u})(1+\sqrt{u})}{(1+\sqrt{u})} = \frac{1-u}{1+\sqrt{u}} \quad 27$$

$$\frac{1-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} = \frac{1-\sqrt{a} \cdot 1+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} = \frac{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})}{1+\sqrt{a}} = \frac{1-a}{1+\sqrt{a}} \quad ۲۴$$

$$\frac{\sqrt{a-b}}{b+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a-b} \sqrt{a+b}}{b+\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b})}{b+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a^2-b}}{b+\sqrt{a}} \quad ۲۵$$

$$1-\sqrt{a^2} = \frac{(1-\sqrt{a^2})(1+\sqrt{a^2})}{1+\sqrt{a^2}} = \frac{1-a^2}{1+\sqrt{a^2}} \quad ۲۶$$

$$\frac{1}{1-\sqrt{a^3}} = \frac{1+\sqrt{a^3}}{(1-\sqrt{a^3})(1+\sqrt{a^3})} = \frac{1+\sqrt{a^3}}{1-a^3} \quad ۲۷$$

$$\frac{1}{a^2-1} = \frac{a^2+1}{(a^2-1)(a^2+1)} = \frac{a^2+1}{a^4-1} \quad ۲۸$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}-a} = \frac{\sqrt[3]{a}+a}{(\sqrt[3]{a}-a)(\sqrt[3]{a}+a)} = \frac{\sqrt[3]{a}+a}{a-\sqrt[3]{a}} \quad ۲۹$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}+1} = \frac{\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} = \frac{\sqrt{a}-1}{a-1} \quad ۳۰$$

$$\frac{1}{b\sqrt{a}+a} = \frac{b\sqrt{a}-a}{(b\sqrt{a}+a)(b\sqrt{a}-a)} = \frac{b\sqrt{a}-a}{b^2a-a^2} \quad ۳۱$$

$$\frac{(b-a)}{b+\sqrt{a}} = \frac{b-a}{b+\sqrt{a}} \cdot \frac{b-\sqrt{a}}{b-\sqrt{a}} = \frac{b^2-a}{b^2-\sqrt{a}b+b\sqrt{a}-a} = \frac{b^2-a}{b^2-\sqrt{a}b+b\sqrt{a}-a} \quad ۳۲$$

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a})^2 \sqrt[3]{a}}{(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a})^2 \sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^2}} \quad ۳۳$$

$$\frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}} \quad ۳۴$$

$$\frac{a+b}{a+b} = \frac{(a+b)(a+b)}{(a+b)(a+b)} = \frac{a^2+ab+ba+b^2}{a^2+ab+ba+b^2} = \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2+2ab+b^2} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2} = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2+c} = \frac{(a+b)(a+c)}{(a+b)(a+c)} = \frac{(a^2+ac+ba+bc)}{(a+b)(a+c)} = \frac{a^2+ac+ba+bc}{a^2+ac+ba+bc} = 1$$



$$۳۱ \quad \frac{۳۱-۳۱}{۱-۱} = \frac{۳۱(۱-۱)}{(۱-۱)} = ۳۱$$

جانا چاہیے کہ اختصار کی مشق سے اعمال جبریہ میں بڑی استعداد حاصل ہوتی ہے اس کی مشق بہت کرنی چاہیے یہاں فقط ان کیس مثالیں لکھی ہیں تاکہ طالب علم کو طریقہ حل کرنا صحیح معلوم ہو جاوے اس جبر و تقاضا کے آخرین مثالیں بہت ہیں ان کو حل کرنی سے بڑی استعداد ہوگی

### دوسری فصل تحویل کسور

بہت سی کسروں کے مخرج مشترک کرنی کو تحویل کہتے ہیں یعنی جن کسروں کی مخرج مختلف ہوں گے ان کی مخرج اس طرح یکساں کرنی کہ ان کی قیمت میں کچھ فرق نہ آوی تو اس عمل کو تحویل کسور کہتی ہیں قاعدہ تحویل کا یہ ہے کہ جب تک کسروں اور مخرجوں کے اول کی شمار کنندہ کو باقیوں کی نسبت نامین ضرب کر کر شمار کنندہ مقرر کریں در تمام نسبت نامیوں کے حاصل ضرب کو نسبت نامیوں کے دوسری کسروں کی شمار کنندہ کو باقیوں کے نسبت نامین ضرب کر کر شمار کنندہ مقرر کریں اور نسبت نامین کی حاصل ضرب کو نسبت نامیوں کے دوسری کسروں میں ہی عمل جاری رکھیں اس طرح جو کسریں حاصل ہونگی ان کے نسبت نامین ہونگی مثلاً  $\frac{۱}{۲}$  اور  $\frac{۱}{۳}$  اور  $\frac{۱}{۴}$  تین کسریں ہیں اور ان کی نسبت نامیوں مختلف ہیں پس نسبت نامین کرنی کہ ان کے شمار کنندہ یعنی لا کو باقیوں کے نسبت نامین یعنی ۱۲ اور ۱۲ میں ضرب کیا جائے اس طرح کہ لا کو ۱۲ میں ضرب کیا تو ۱۲ ہوا اور اس حاصل ضرب کو زمین ضرب کیا تو ۱۲ ہوا اس کو شمار کنندہ بنایا اب اول کی مخرج یعنی ۲ کو دوسری کسری کی مخرج میں یعنی ۱۲ میں ضرب کیا پس ۱۲ ہوا اس کو تیسری کسری کی مخرج یعنی ۱۲ میں ضرب کیا تو ۱۲ ہوا اس کو نسبت نامیوں کے حاصل ضرب یعنی ۱۲ کو زمین ضرب کیا اور ۳ کو تیسری کسری کی مخرج یعنی ۱۲ میں ضرب کیا اور ۳ کو زمین ضرب کیا اور ۳ کو نسبت نامین بنایا پس دوسری کسری  $\frac{۳}{۱۲}$  ہوئی اس طرح تیسری کسری کے شمار کنندہ یعنی ۱۲ کو پہلی اور دوسری کسری کی مخرج یعنی ۱۲ میں ضرب کیا یعنی ۱۲ کو زمین ضرب کیا تو ۱۲ ہوا اور اس کو زمین ضرب کیا تو ۱۲ ہوا اس کو شمار کنندہ بنایا اور سب مخرجوں کی حاصل ضرب کو نسبت نامین بنایا پس تیسری کسری  $\frac{۳}{۱۲}$  ہوئی پس ان تینوں کسروں  $\frac{۱}{۲}$  اور  $\frac{۱}{۳}$  اور  $\frac{۱}{۴}$  کی مخرج مشترک کے توین کسریں  $\frac{۳}{۱۲}$  اور  $\frac{۳}{۱۲}$  اور  $\frac{۳}{۱۲}$  ہوئیں اور ان تینوں کے مخرج یکساں ہیں یعنی سب کا مخرج ۱۲ ہے اور ان کا اختصار کریں تو وہی اصلی تینوں کسریں بن جائیں ہیں پس معلوم ہوا کہ اس عمل کرنی سے مخرج تو یکساں ہو گئی اور کسری کی قیمت میں کچھ فرق نہ آیا

مثال ۱  $\frac{۲}{۳}$  اور  $\frac{۱}{۲}$  کا مخرج مشترک کیا جاتے ہیں پس  $\frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۲} = \frac{۴}{۶} + \frac{۳}{۶} = \frac{۷}{۶}$  میں ضرب کیا پس  $۹ + ۰۴$  حاصل ضرب ہوا اور نسبت نامیوں کے حاصل ضرب یعنی ۶ کو نسبت نامین بنایا پس اول کسریہ ہوئی  $\frac{۹+۰۴}{۶}$  اور دوسری کسری شمار کنندہ کو یعنی ۶ کو زمین ضرب کیا تو ۶ حاصل ہوا اور اس کو زمین ضرب کیا تو ۶ ہوا اس کو نسبت نامین بنایا پس دوسری کسری  $\frac{۶}{۶}$  ہوئی

نسب بنایا تو دوسری کسر  $\frac{5+2a}{3}$  ہوئی یعنی دونوں کسریں  $\frac{4+2a}{3}$  اور  $\frac{5+2a}{3}$  میں ان دونوں کے نسب نامے یکساں ہیں

$$3 \frac{5+2}{3} \text{ اور } \frac{5+2a}{3} \text{ مشترک کر دو جواب } \frac{5+2a}{3} \text{ اور } \frac{5+2}{3}$$

$$4 \frac{1-2}{1+2} \text{ اور } \frac{2-2}{2+2} \text{ جواب } \frac{2-2}{2+2} \text{ اور } \frac{2+2}{2+2}$$

$$5 \frac{1-2}{1+2} \text{ اور } \frac{2-1}{2+2} \text{ جواب } \frac{2-1}{2+2} \text{ اور } \frac{1-2}{1+2}$$

$$6 \frac{2+2}{2-2} \text{ اور } \frac{2-2}{2+2} \text{ جواب } \frac{2-2}{2-2} \text{ اور } \frac{2+2}{2+2}$$

$$7 \frac{2-1}{2+2} \text{ اور } \frac{2-1}{2+2} \text{ جواب } \frac{2-1}{2+2} \text{ اور } \frac{2-1}{2+2}$$

$$8 \frac{2}{1+2} \frac{2}{1-2} \frac{2}{3} \text{ جواب } \frac{2}{(1-2)^2} \text{ اور } \frac{(1+2)^2}{(1-2)^2}$$

$$9 \frac{2}{2-2} \frac{2}{2+2} \frac{2}{3} \text{ جواب } \frac{2}{(2-2)^2} \text{ اور } \frac{2}{(2+2)^2}$$

$$10 \frac{2}{1+2} \frac{2}{1-2} \text{ جواب } \frac{2}{1-2} \text{ اور } \frac{2}{1+2}$$

$$11 \frac{2+2}{2-2} \frac{2-2}{2+2} \text{ جواب } \frac{2+2}{2-2} \text{ اور } \frac{2-2}{2+2}$$

### تیسری فصل قاعدہ جمع کرنی کسور کا

کسور کی جمع کرنی کا قاعدہ یہ ہے کہ جن کسروں کا جمع کرنا مطلوب ہے پہلی سب کا  
 ہمسائیگی میں کی شمار کنندہ کو جمع کر حاصل جمع کو شمار کنندہ بنانا چاہئے اور اس حاصل جمع کے  
 نیچے وہ نسب نامہ لکھنا چاہئے جو مشترک ہے پس یہ کسر حاصل کسروں کا ہر مثلہ  $\frac{2}{1}$  اور  $\frac{2}{2}$  کو  
 جمع کرنا چاہئے پس انہیں انہیں کے قاعدی کے موافق سب کا محض مشترک کیا تو  $\frac{2}{1}$  اور  $\frac{2}{2}$  رہا

ابن ابی شمار کنندون کو جمع کیا تو  $u + 3 - u + 3 - u$  ہو اسی  $u - 1$  لکھا تو حاصل جمع یہ کسر ہو

مثال ۳  $\frac{u^3}{u^2} + \frac{u^2}{u} + \frac{u^3}{u^2}$  پہلی اسکا خارج مشترک کیا تو یہ تین کسریں حاصل ہوئیں

ان کسروں کے شمار کنندون کو جمع کیا اور اسی کے لکھا  $\frac{u^3}{u^2} + \frac{u^2}{u} + \frac{u^3}{u^2}$

تو یہ  $\frac{u^3 + u^2 + u^3}{u^2}$  حاصل جمع ہوا

۳  $\frac{u+1}{u-1} + \frac{1-u}{1+u} + \frac{1+u}{1-u}$  خارج مشترک کیا

تو  $\frac{(u+1)(1-u)^2}{(u-1)(1-u)^2} + \frac{(1-u)^2(u-1)}{(1+u)(1-u)^2} + \frac{(1+u)^2(u-1)}{(u-1)(1-u)^2}$  شمار کنندون کو جمع کیا اور مشترک لکھا

تو حاصل جمع  $\frac{(u+1)(1-u)^2 + (1-u)^2(u-1) + (1+u)^2(u-1)}{(u-1)(1-u)^2}$

۴  $\frac{1+u^2}{1-u^2} + \frac{1-u^2}{u^2+1}$  خارج مشترک کیا تو یہ حاصل ہوا

شمار کنندون کو جمع کیا اور مشترک لکھا  $\frac{(1+u^2)^2}{1-u^4} + \frac{(1-u^2)^2}{1-u^4}$

جواب  $\frac{u^2(b-1) + (b+1)^2}{u^2-1}$  ۵  $\frac{b-1}{b+1} + \frac{2}{b-1}$

جواب  $\frac{u^2 + 5(u^2 - u^2) + 5u^2}{u^4}$  ۶  $\frac{u}{u} + \frac{u^2}{u^2} + \frac{u^2 - u}{u}$

جواب  $\frac{u^3}{1+u}$  ۷  $\frac{1+u}{1+u} + \frac{1-u^2}{1+u}$

جواب  $\frac{u-1}{u+(1+u)+u}$  ۸  $\frac{u-1}{u+1} + \frac{u-1}{u+1}$



$$\frac{(u-4\sqrt{u})^2}{u+u\sqrt{u}-u\sqrt{u}-4u} \quad \text{جواب} \quad \frac{\sqrt{u}+3\sqrt{u}}{\sqrt{u}-3\sqrt{u}} + \frac{\sqrt{u}+3\sqrt{u}}{\sqrt{u}+3\sqrt{u}}$$

$$\frac{(1+u)\sqrt{u}}{\sqrt{u}} \quad \text{جواب} \quad \frac{\sqrt{u}}{u} + \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}}$$

$$25 \quad \frac{1-u}{u} + 1 \quad \text{جواب} \quad \frac{1-u^2}{u} \quad 26 \quad \frac{u-v}{u} + \text{جواب} \quad \frac{v}{u}$$

### چوتھی فصل قاعدہ تفریق کسور کا

کسور کی تفریق کا قاعدہ یہ ہے کہ مغزوق اور مغزوق منہ کا مخزن مشترک کریں بعد اسکی مغزوق منہ کی شمار کنندہ سے مغزوق کی شمار کنندہ کو نکال کر باقی کو شمار کنندہ بناوین اور اسکی نیچی نسب نما جو مخزن مشترک کرنی سے حاصل ہوا ہے کہین یہ کسور حاصل تفریق مطلوب ہے

مثلاً  $\frac{3}{5} - \frac{2}{3}$  میں کسور  $\frac{2}{3}$  کو تفریق کریں پس بعد مخزن مشترک کرنی کی یہ دونوں کسریں یہ ہو جاتی ہیں  $\frac{4}{6} - \frac{4}{6}$  اب  $4$  و  $6$  میں سے  $6$  کو نکالا تو  $4$  رہی اسکے نیچی  $3$  لکھا تو حاصل تفریق یہ  $\frac{0}{6}$  حاصل ہوا

$$\text{مثال } 2 \quad \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \quad \text{بعد مخزن مشترک کرنی کے} \quad \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

شمار کنندہ و نین تفریق کی اور مخزن مشترک لکھا تو حاصل تفریق مطلوب یہ  $\frac{8}{4} - \frac{15}{4}$  ہوا

$$3 \quad \frac{u-v}{u} - \frac{u^2}{u+v} \quad \text{مخزن مشترک کیا تو یہ} \quad \frac{u^2 - (u-v)}{u(u+v)} = \frac{u^2 - u + v}{u(u+v)}$$

$$\frac{(u+v) - (u^2 - u + v)}{u(u+v)} = \frac{u - u^2 + u}{u(u+v)} = \frac{2u - u^2}{u(u+v)}$$

$$\frac{1-u}{u^3-u^2} \quad \text{جواب} \quad \frac{u+1}{u^3} - \frac{u^3}{u-1}$$

$$\frac{u^3 - u - 1}{(1+u)^5} \quad \text{جواب} \quad \frac{1+u^3}{1+u} - \frac{u^3}{5}$$

جواب  $\frac{1+b^2}{b^2}$

۷  $\frac{1-b^2}{b^2} - \frac{1+b^2}{b^2}$

جواب  $\frac{s^2}{s^2-1}$

۸  $\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}$

جواب  $\frac{24+11s}{54}$

۹  $\frac{s-1}{1} - \frac{11s}{2}$

جواب  $\frac{(1+b^2)-}{2+1}$

۱۰  $\frac{1+b^2}{2} - \frac{1+b^2}{1+1}$

جواب  $\frac{5s+1}{10}$

۱۱  $\frac{s+1}{5} - \frac{5s+1}{10}$

جواب  $\frac{1-s}{1-s}$

۱۲  $\frac{1+\sqrt{1-s}}{1-\sqrt{1-s}}$

جواب  $\frac{s-1}{s-1-\sqrt{1-s}}$

۱۳  $\frac{\sqrt{1-s}}{1-s-\sqrt{1-s}}$

جواب  $\frac{2-s}{s}$

۱۴  $\frac{2\sqrt{1-s}+1}{s} - \frac{1-2\sqrt{1-s}}{s}$

جواب  $\sqrt{1-s}-\sqrt{1-s}$

۱۵  $\frac{1-s^2}{1+\sqrt{1-s}} - \frac{1-s^2}{1+\sqrt{1-s}}$

جواب  $\frac{\sqrt{1-s}}{2-s}$

۱۶  $\frac{s}{\sqrt{1-s}+1} - \frac{s}{\sqrt{1-s}-1}$

۱۷  $\frac{s-1}{s-1} - \frac{s-1}{s-1}$  جواب  $\frac{s-1}{s-1}$

۱۸  $\frac{s+1}{s+1} - \frac{s+1}{s+1}$  جواب  $\frac{s+1}{s+1}$

۱۹  $\frac{s}{s} - \frac{s}{s}$  جواب  $\frac{s}{s}$

۲۰  $\frac{1+\sqrt{1-s}}{1-s}$  جواب  $\frac{1+\sqrt{1-s}}{1-s}$

## پانچویں فصل قاعدہ ضرب کسور کا

کسور کی ضرب کرنا قاعدہ یہ ہے جو کہ ضرب کسور کی شمار کنندہ کی شمار کنندہ کو ضرب کر کے حاصل ضرب کو شمار کنندہ مقرر کر کے اور ان کسور کی ضرب نامیوں کو باہم ضرب کر کے کسور کو ضرب کر کے حاصل ضرب کسور کی ہر گئی اور اگر کسی مقدار صحیح کو کسور میں ضرب کرنا مطلوب ہو تو اس صحیح کو صحیح عدد آکا فرض کریں بعد اس کی قاعدہ مذکورہ بالا جاری کریں

**مثال ۱**  $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6}$  سے  $\frac{15}{24}$  ان تین کسروں کو ضرب کرنا چاہتے ہیں پس ہر شمار کنندہ کو ضرب کیا لاؤ حاصل ہوا اسکو شمار کنندہ مقرر کر کے کسور نامیوں کی حاصل ضرب کو یعنی ۳، ۴، ۵ کو ضرب کر کے حاصل کیا پس حاصل ضرب کسور  $\frac{15}{24}$  ہوئے

**مثال ۲**  $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8}$  اسکی شمار کنندہ کو ضرب کیا تو ۳۰ لاؤ جو اور کسور نامیوں کو ضرب کیا تو ۲۴۰ لاؤ جو اور جب ۳۰ لاؤ کو شمار کنندہ مقرر کیا اور ۲۴۰ کو کسور نامیوں کو ضرب کیا تو حاصل ضرب کسور  $\frac{30}{240}$  ہوئی اور اسکا اختصار کیا تو یہ  $\frac{1}{8}$  حاصل ہوا

**مثال ۳**  $\frac{2+u^2}{1-u} \times \frac{1-u}{1+u}$  **جواب**  $\frac{(1-u)(1+u)^2}{(1-u)(1+u)}$

**مثال ۴**  $\frac{u}{1-u^2} \times \frac{1+u^3}{u}$  **جواب**  $\frac{u + u^3}{1-u^2}$

**مثال ۵**  $\frac{u^2}{b-u} \times \frac{b+u}{b+u}$  **جواب**  $\frac{u^2}{b-u}$

**مثال ۶**  $\frac{1+u}{u^2} \times \frac{1-u}{u^2} \times \frac{1+u}{u}$  **جواب**  $\frac{1+u}{u^2}$

**مثال ۷**  $\frac{u^2}{4+u^2} \times \frac{4-u^2}{u}$  **جواب**  $\frac{u^2 - u^4}{(2-u)}$

**مثال ۸**  $\frac{u^2}{u-u} \times \frac{u^2}{u}$  **جواب**  $\frac{u^2 + u^4}{u}$

$\frac{4a-18}{a+2}$	جواب	$\frac{30-10a}{a^2} \times \frac{2a}{10+a}$	9
$\frac{a+b}{1-a}$	جواب	$\frac{\sqrt{a+b}}{1+\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a+b}}{1-\sqrt{a}}$	10
$\frac{3a-1}{1-a}$	جواب	$\frac{3}{1-a} \times \frac{\sqrt{a}}{(1+a)\sqrt{a}}$	11
$\frac{\sqrt{3a}}{a}$	جواب	$\frac{\sqrt{3a}}{a+2} \times \frac{\sqrt{a+2}}{\sqrt{a}}$	12
$\frac{12}{1-a}$	جواب	$\frac{a^2}{1-a} \times \frac{1}{a}$	13
$\frac{3a^2}{a-2}$	جواب	$a^3 \times \frac{a}{a-2}$	14
$\frac{a}{2}$	جواب	$\frac{a-b}{2} \times \frac{a}{(b-a)^2}$	15

### چھٹی فصل کسور کی تقسیم کرنا کا قاعدہ

کسور کی تقسیم کرنی میں ضرب ہی کا قاعدہ کرنا پڑتا ہے صرف اتنا فرق ہے کہ مقسوم علیہ کو اولٹ کر عمل ضرب کا جاری کرتے ہیں یعنی جس کسر پر تقسیم کرنا ہوتا ہے اس کی شمار کنندہ کو نسب ناکر لیتے ہیں اور نسب ناکو شمار کنندہ بنا لیتے ہیں بعد اس کی مقسوم کی کسر کو اس دائی ہوئی کسر میں ضرب کر لیتے ہیں حاصل ضرب خارج قسمت مطلوب ہوتا ہے

مثال  $\frac{2}{3}$  کو  $\frac{3}{5}$  پر تقسیم کرنا چاہتے ہیں یعنی  $\frac{2}{3} \div \frac{3}{5}$  مطلوب ہے پس 3 کو نسب بنا لیا اور 3 کو شمار کنندہ تو بہ حاصل ہوا  $\frac{2}{3}$  اس کو  $\frac{2}{3}$  میں ضرب کیا اس طرح  $\frac{2}{3} \times \frac{5}{3}$  تو بہ  $\frac{10}{9}$  خارج قسمت ہوا

مثال  $\frac{12}{5}$   $\div$   $\frac{2}{3}$  اس پر اسطی مقسوم علیہ کو اولٹا اور عمل ضرب کیا تو یہ  $\frac{12}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{36}{10} = \frac{18}{5}$  حاصل ہوا

$$\frac{12}{5+2} = \frac{12}{7} = \frac{12}{7} \times \frac{1}{1} = \frac{12}{7} \div \frac{1}{1} \quad 3$$

$$\frac{12}{2(5-1)} = \frac{12}{8} = \frac{12}{8} \times \frac{1}{1} = \frac{12}{8} \div \frac{1}{1} \quad 4$$



$$\frac{1}{1-u} = \frac{1+u}{(-u)(1+u)} = \frac{1+u}{1-u} \times \frac{1}{1+u} = \frac{1-u}{1+u} \div \frac{1}{1+u} \quad 5$$

$$\frac{1r}{u-r} = \frac{1r}{(u-r)(u+r)} = \frac{r}{u-r} \times \frac{r}{u+r} = \frac{u-r}{r} \div \frac{r}{u+r} \quad 6$$

$$\frac{u^2 br}{1+ur+u^2} = \frac{ubr}{1+u} \times \frac{ubr}{1+u} = \frac{1+u}{ubr} \div \frac{ubr}{1+u} \quad 7$$

$$\frac{c-ur^2}{o+uio} = \frac{c}{1+ur} \times \frac{1-uc}{o} = \frac{1+ur}{c} \div \frac{1-uc}{o} \quad 8$$

$$\frac{o-u^2}{c} = \frac{(u-u)(1+u)}{(1+u)c} = \frac{o}{1+u} \times \frac{1-u}{c} = \frac{1+u}{o} \div \frac{1-u}{c} \quad 9$$

$$\frac{u+b}{r} = \frac{(u-b)(u+b)(u+b)}{(u-b)(u+b)r} = \frac{u-b}{(u+b)r} \times \frac{u+b}{u-b} = \frac{ur+br}{u-b} \div \frac{u+b}{u-b} \quad 10$$

$$\frac{\sqrt{u-b}}{1-u} = \frac{\sqrt{u-b} \sqrt{u-b}}{1-u} = \frac{\sqrt{u-b} \sqrt{u-b}}{1-u} = \frac{u-b}{1-u} \times \frac{\sqrt{u-b}}{u-b} = \frac{1-u}{b} \div \frac{u-b}{b} \quad 11$$

$$\frac{\sqrt{u-1}}{\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{u-1} \sqrt{u}}{\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{u-1} \sqrt{u}}{u} = \frac{u}{\sqrt{u-1}} \div \frac{\sqrt{u-1} \sqrt{u}}{u} \quad 12$$

$$\frac{(u-1)}{u+1} = \frac{(u-1)(u-1)(u+1)}{(u+1)(u+1)} = \frac{u-1}{u+1} \times \frac{u-1}{u+1} = \frac{u+1}{u-1} \div \frac{u-1}{u+1} \quad 13$$

$$\frac{ur}{o} = \frac{ur^2}{uo} = \frac{c}{uo} \times \frac{ur}{1} = \frac{uo}{c} \div \frac{1}{uo} \quad 14$$

$$\frac{1-u^2}{r} = \frac{1+u}{r} \times \frac{1-u}{1} = \frac{r}{1+u} \div \frac{1-u}{1} \quad 15$$

$$\frac{r}{ur} = \frac{ur^2}{ur^2} = \frac{o}{ur} \times \frac{ur}{c} = \frac{ur}{o} \div \frac{ur}{c} \quad 16$$

فصل جذور کاتاندره

یہ بات حدود میں بیان کی گئی ہے کہ اگر کسی مقدار کو فی لغز ضرب کرین تو حاصل ضرب کو مجذور اسی مقدار کا  
 کہتے ہیں اور وہ مقدار جذر ہوتی ہے اوس حاصل ضرب کی مثلہ لا کو لا میں ضرب کرین تو لا ہوتا ہے  
 پس لا مجذور لا کا ہے اور لا جذر ہے لا کا یہاں سے معلوم ہوا کہ جذر اسی مقدار ہے کہ اگر اوس کو اسی  
 میں ضرب کرین تو حاصل ضرب مجذور کی برابر ہو جاتا ہے اسی واسطے ما لا جذر لا کا ہے اسی واسطے کہ ما لا  
 کو ما لا میں ضرب کرین تو لا ہو جاتا ہے اور لا جذر لا کا ہے کیونکہ لا کو لا میں ضرب کرین تو لا ہوتی ہے اسی واسطے  
 ہذا القیاس لا جذر ہے لا کا اور لا جذر ہے لا کا اور لا جذر ہے لا کا اور لا جذر ہے لا کا اور  
 لا جذر ہے لا کا ان مثلوں کے دیکھنی سے یہ بات معلوم ہوتی ہے کہ جذر کا نشان توت مجذور کی نشان  
 توت سی نصف ہوتا ہے پس مفرد مقدار کی جذر لینے کا یہ قاعدہ مثلہ کہ اوسکی نشان توت کو نصف کر کے  
 اسی جوت کا نشان توت مقرر کرین پس یہ جذر ہوگا + یہ بات ظاہر ہے کہ لا + ط کو لا + ط میں ضرب  
 کرین تو لا + ط + ط + ط ہوتا ہے یعنی لا + ط + ط + ط مجذور لا + ط کا ہے اور لا + ط جذر ہے  
 لا + ط + ط + ط کا اب اگر کوئی ترکیب ایسی کرین کہ لا + ط + ط + ط سے لا + ط حاصل ہو جاوے  
 تو ظاہر ہے کہ یہی ترکیب قاعدہ جذر کا یعنی کا ہوگا اب جانا چاہیے کہ وہ ترکیب یہ ہے کہ جس مقدار کا جذر کا نشان  
 اوس کو ایک جگہ تریب نشان توت کسی جوت کی کہیں مثلہ لا + ط + ط + ط کا جذر کا نشان اوس کو تریب  
 نشان توت لا کی لکھا) لا + ط + ط + ط (لا + ط) بعد اسکے اول مقدار کا جذر کی کھنڈوسی کے

$$\begin{array}{r} \frac{لا}{ط} \\ \times (لا + ط) \\ \hline ط + ط + ط + ط \\ \hline ط + ط + ط \end{array}$$

اگلی دیا مثلہ اس صورت میں لا کا جذر لا لکھا اور اس جذر کا مجذور کر کے اول مقدار میں سی تفریق کیا  
 حاصل تفریق کچھ ہوا اور ہر صورت میں حاصل تفریق کچھ ہین ہونیکا بعد اسکی دوسرے اور تیسری مقدار کو بھی  
 اوتارا اور اوس کو مقسوم مقرر کیا اور اول مقدار کی جذر کو دو چند کر کے مقسوم علیہ بنایا مثلہ اس صورت  
 میں ط + لا کو بھی اوتارا اور لا کو مقسوم علیہ بنا کر تقسیم کیا تو خارج قسمت کھلا بعد اسکی جو خارج  
 قسمت کھلا اسکو مقسوم علیہ میں ضرب دیا اور خارج قسمت کا مجذور کیا اور اس حاصل ضرب کی ساتھ مجذور  
 کو جمع کر کے مقسوم کی نیچی لکھا اور تفریق کیا حاصل تفریق کچھ ہوگا مثلہ ط کو ط + لا میں ضرب کیا تو ط + لا ہوا  
 اور ط کا مجذور کیا تو ط + ط + ط + ط ہو اسی ط + ط + ط کو مقسوم کی نیچے لکھ کر تفریق کیا تو کچھ حاصل ہوا اگر اسی  
 عمل سی ساری مقدار میں مجذور کی تمام ہو جاوین تو مہا ہین تو یہی عمل جاری رکھیں جب تک ساری مقدار

مجزور کی تمام ہون بعد تمامی کے جو کچھ خط کی آگے ہو وہی جذر مطلوب ہے مثلاً اس صورت میں

خط قوسی آگے لا + ط ہے پس لا + ط جذر مطلوب ہے

مثال ۲ چاہتے ہیں کہ لا - ۲ + لا + ۲ کا جذر نکالیں پس موافق ترکیب گذشتہ کی سطح

عمل کرنا چاہئے ( لا - ۲ + لا + ۲ ) پس لا - جذر مطلوب ہے

$$\frac{\begin{array}{r} \text{لا} \\ \text{لا} - ۲ + \text{لا} + ۲ \\ \hline \text{لا} \end{array}}{\times}$$

۳

$$\frac{\begin{array}{r} \text{جذور} \\ \text{لا} - ۲ + \text{لا} + ۲ \\ \hline \text{لا} \end{array}}{\times}$$

جذر ( لا - ط پس لا - ط جذر مطلوب ہے

$$\frac{\begin{array}{r} \text{لا} \\ \text{لا} - ۲ + \text{لا} + ۲ \\ \hline \text{لا} \end{array}}{\times}$$

۴

$$\frac{\begin{array}{r} \text{جذور} \\ \text{لا} + ۲ + \text{لا} + ۲ \\ \hline \text{لا} \end{array}}{\times}$$

جذر مطلوب ہے

$$\frac{\begin{array}{r} \text{لا} \\ \text{لا} + ۲ + \text{لا} + ۲ \\ \hline \text{لا} \end{array}}{\times}$$

۵

$$\frac{\begin{array}{r} \text{جذور} \\ \text{لا} - ۲ + \text{لا} + ۲ \\ \hline \text{لا} \end{array}}{\times}$$

جذر مطلوب ہے

$$\frac{\begin{array}{r} \text{لا} \\ \text{لا} - ۲ + \text{لا} + ۲ \\ \hline \text{لا} \end{array}}{\times}$$

$$\begin{array}{r} \text{جزء} \\ b+s \end{array} \overline{) \begin{array}{r} \text{جزء} \\ b^2+s^2ur+s^2u \\ \underline{\phantom{b^2+s^2ur} s^2u} \\ b^2+s^2ur \end{array}} \quad 6$$

$$\begin{array}{r} \text{جزء} \\ b+s \end{array} \overline{) \begin{array}{r} \text{جزء} \\ b^2+s^2ur+s^2u \\ \underline{\phantom{b^2+s^2ur} s^2u} \\ b^2+s^2ur \end{array}} \quad 4$$

$$\begin{array}{r} \text{جزء} \\ s \end{array} \overline{) \begin{array}{r} \text{جزء} \\ s^2u+s^2u+9 \\ \underline{\phantom{s^2u+s^2u} 9} \\ s^2u+s^2u \end{array}} \quad 4$$

$$\begin{array}{r} \text{جزء} \\ u-r \end{array} \overline{) \begin{array}{r} \text{جزء} \\ u+ur-r \\ \underline{\phantom{u+ur} -r} \\ u+ur \end{array}} \quad 1$$

$$\begin{array}{r} \text{جزء} \\ s+u \end{array} \overline{) \begin{array}{r} \text{جزء} \\ s+usur+u \\ \underline{\phantom{s+usur} u} \\ s+usur \end{array}} \quad 12$$

$$\begin{array}{r} \text{جزء} \\ r-b \end{array} \overline{) \begin{array}{r} \text{جزء} \\ 9+b^2-b \\ \underline{\phantom{9+b^2} b} \\ 9+b^2 \end{array}} \quad 10$$

$$\begin{array}{r} \text{جزء} \\ b-u \end{array} \overline{) \begin{array}{r} \text{جزء} \\ b+b^2ur-u \\ \underline{\phantom{b+b^2ur} u} \\ b+b^2ur \end{array}} \quad 13$$

$$\begin{array}{r} \text{جزء} \\ b-u \end{array} \overline{) \begin{array}{r} \text{جزء} \\ b+u^2ur-u \\ \underline{\phantom{b+u^2ur} u} \\ b+u^2ur \end{array}} \quad 11$$

$$\begin{array}{r} \text{جزء} \\ \frac{r}{b}-\frac{r}{u} \end{array} \overline{) \begin{array}{r} \text{جزء} \\ \frac{r}{b}+\frac{r}{b}ur-\frac{r}{u} \\ \underline{\phantom{\frac{r}{b}+\frac{r}{b}ur} \frac{r}{u}} \\ \frac{r}{b}+\frac{r}{b}ur \end{array}} \quad 15$$

$$\begin{array}{r} \text{جزء} \\ \frac{r}{s}+\frac{r}{u} \end{array} \overline{) \begin{array}{r} \text{جزء} \\ \frac{r}{s}+\frac{r}{s}ur+\frac{r}{u} \\ \underline{\phantom{\frac{r}{s}+\frac{r}{s}ur} \frac{r}{u}} \\ \frac{r}{s}+\frac{r}{s}ur \end{array}} \quad 14$$

r

$$\frac{1}{s+(b+u)} \sqrt{s+(b+u)r} + \frac{1}{(b+u)} \sqrt{b^2 r^2 + b^2 + r} \quad 14$$

$$\frac{\sqrt{s+(b+u)r}}{s+(b+u)r} \cdot \frac{(b+u)}{(b+u)r}$$

$$\frac{\sqrt{s+(b+u)r}}{s+(b+u)r} \times$$

$$\frac{br + \sqrt{b^2 + r}}{br + \sqrt{b^2 + r}} \left( \frac{r}{r} \right)$$

$$\times$$

$$\frac{1}{(u+1) + (u-1)} \sqrt{(u+1) + (u-1)r} + \frac{1}{(u-1)} \sqrt{(u+1) + (u-1)r} \quad 18$$

$$\frac{\sqrt{(u+1) + (u-1)r}}{(u+1) + (u-1)r} \cdot \frac{(u-1)}{(u-1)r}$$

$$\frac{\sqrt{(u+1) + (u-1)r}}{(u+1) + (u-1)r} \times$$

$$\frac{1}{\sqrt{u+b} + \sqrt{u+b}} \sqrt{u + \sqrt{u+b}r} + \frac{1}{u+b} \sqrt{u+b} \quad 14$$

$$\frac{\sqrt{u + \sqrt{u+b}r}}{u + \sqrt{u+b}r} \cdot \frac{(u+b)}{(u+b)r}$$

$$\frac{\sqrt{u + \sqrt{u+b}r}}{u + \sqrt{u+b}r} \times$$

$$\frac{1}{1-u r} \sqrt{1-u r} - \frac{1}{1+u r} \sqrt{1+u r} \quad 1-u r + \frac{1}{1-u r} \sqrt{1-u r} - \frac{1}{1+u r} \sqrt{1+u r} \quad 19$$

$$\frac{1}{1-u r} + \frac{1}{1-u r} \sqrt{1-u r} - \frac{1}{1+u r} \sqrt{1+u r}$$

$$\frac{1}{1-u r} + \frac{1}{1-u r} \sqrt{1-u r} -$$

$$\times$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{0}{b+0} \overline{) \frac{0r^2}{b + b \overline{) \frac{0r}{r+0} + 0}} \\
 \underline{0r^2} \\
 0r + 0 \overline{) \frac{0r}{r}} \\
 \underline{0r} \\
 0r + 0 \overline{) \frac{0r}{r}} \\
 \underline{0r} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{0}{b+s+0} \overline{) \frac{0r^2}{b+sbr + b \overline{) \frac{0r}{r+0} + 0} + s+s \overline{) \frac{0r}{r}} + 0} \\
 \underline{0r^2} \\
 0r + s \overline{) \frac{0r}{r}} \\
 \underline{0r} \\
 s + s \overline{) \frac{0r}{r}} \\
 \underline{s} \\
 b+sbr + b \overline{) \frac{0r}{r}} \\
 \underline{b+sbr + b} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 b-b+s \overline{) \frac{0r^2}{b + b \overline{) \frac{0r}{r+0} - 0sr - b + sbr + s} + 0} \\
 \underline{0r^2} \\
 0r + b \overline{) \frac{0r}{r}} - 0sr - b + sbr + s \\
 \underline{0r + b \overline{) \frac{0r}{r}} - 0sr - b + sbr + s} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 s+0+0 \overline{) \frac{0r^2}{s+s \overline{) \frac{0r}{r+0} + s \overline{) \frac{0r}{r}} + 0 + 0 \overline{) \frac{0r}{r}} + r \overline{) \frac{0r}{r}} + 0} \\
 \underline{0r^2} \\
 0r + s \overline{) \frac{0r}{r}} + s \overline{) \frac{0r}{r}} + 0 + 0 \overline{) \frac{0r}{r}} + r \overline{) \frac{0r}{r}} + 0 \\
 \underline{0r + s \overline{) \frac{0r}{r}} + s \overline{) \frac{0r}{r}} + 0 + 0 \overline{) \frac{0r}{r}} + r \overline{) \frac{0r}{r}} + 0} \\
 0
 \end{array}$$

## فضل کعب کائناتی کا قاعدہ

جاننا چاہئے کہ تیسری مرتبہ کی صعود کو کعب کہتے ہیں اور تیسری مرتبہ کی نزول کو کعب کہتے ہیں مثلاً لاکعب  
لاکعب اور لاکعب لاکعب اور اس طرح لاکعب لاکعب اور لاکعب لاکعب اور لاکعب لاکعب اور لاکعب لاکعب اور  
لاکعب لاکعب اور لاکعب لاکعب اور لاکعب لاکعب اور لاکعب لاکعب اور لاکعب لاکعب اور لاکعب لاکعب اور لاکعب لاکعب اور  
یکے نشان قوت سی \* صعود کی قاعدہ سی ظاہر ہے کہ (لا + ط) کا تین مرتبہ کا صعود یعنی

$$(لا + ط)^3 = لا^3 + 3 لا^2 ط + 3 لا ط^2 + ط^3$$

لا + 3 لا ط + 3 لا ط^2 + ط^3 کا اب ہم کعب کائناتی کا قاعدہ بیان کرتے ہیں یعنی ایسا قاعدہ بیان  
کرتے ہیں کہ اگر اس کو لا + 3 لا ط + 3 لا ط^2 + ط^3 پر جاری کریں تو لا + ط حاصل ہو جائے  
قاعدہ یہ ہے کہ جس مقدار کا کعب لیا ہے پہلی اس کو ایک جگہ ترتیب نشان قوت کسی حرف کی لکھنا چاہئے بعد اسکے  
اول جز کا کعب نکال کر خط قوسی کے الگ لکھ دیں اس کعب کا کعب کر کے اول جز میں سے تفریق کریں باقی کچھ  
نہیں بچا بعد اس کی اگلی تین جزوں کو نیچے اوتار کر مقسوم بنا دیں اور اول جز کی کعب کو مجدد کریں اور اس مجدد کو  
3 مرتبہ ضرب کر کے مقسوم علیہ بنا دیں جو کچھ خارج قسمت ہو اس کو مقسوم علیہ میں ضرب کریں اور اس حاصل ضرب  
کو اول رقم مقسوم کی نیچے لکھیں اور پھر خارج قسمت کی مجدد کو نکال کر کے ضرب کریں اول جز کی کعب میں اور اس  
حاصل ضرب کو مقسوم کی دوسری مقدار کے نیچے لکھیں اور پھر خارج قسمت کا کعب کر کے مقسوم کی تیسری رقم کی نیچے  
لکھیں اور پھر تفریق کریں اگر عمل تمام ہو جائی تو بقیہ نہیں تو پھر اگلی رقموں کو اوتار کر عمل جاری رکھیں جب تک کہ عمل تمام  
ہو بعد اس کی جو کچھ خط قوسی کی آگے ہو وہی کعب مطلوب ہے مثلاً اس قاعدہ کو لا + 3 لا ط + 3 لا ط^2 + ط^3 پر جاری کریں

$لا^3 + 3 لا^2 ط + 3 لا ط^2 + ط^3$	$کعب$
$لا$	$کعب$
$3 لا ط$	$کعب$
$3 لا ط^2$	$کعب$
$ط^3$	$کعب$
$لا + ط$	$کعب$

×

کہ اول جز کا کعب لیا تو لا ہوا اس کو خط قوسی کی آگے لکھا پھر اس کا کعب کر کے اول جز میں سے تفریق کیا تو  
کچھ نہ بچا بعد اس کی تینوں باقی کو نیچے اوتار کر لکھا یعنی لا + 3 لا ط + 3 لا ط^2 + ط^3 کو نیچے اوتار کر لکھا







## مساوات اول درجہ کی

جانا جائیے کہ جب دو مقدار یا ہم برابر ہوں اور ان مقدار دین جن جن مہجول کا نشان قوت آ ہو تو اس صورت کو اول درجہ کی مساوات کہتی ہیں مثلاً  $۲ + ۳ = ۱۱$  اول درجہ کی مساوات ہے کیونکہ اس میں آ کا نشان قوت آ ہے اور معنی اسکی یہ ہے کہ آ ایک ایسا عدد مہجول ہے کہ اگر اسکی دو چند پر ۳ زیادہ کر دین تو مجموعہ آ کی اسطرح  $۵ - ۳ = ۲۲$  ہی اول درجہ کی مساوات ہے اور اسکی معنی یہ ہے کہ آ ایک ایسا عدد مہجول ہے کہ اگر اسکو بائیں ضرب کریں اور حاصل ضرب میں سے ۳ نکال ڈالیں تو باقی ۲۲ کی برابر رہی اور اسطرح  $۳ + ۲ = ۳۰$  اول درجہ کی مساوات ہے اسکی یہ معنی ہے کہ آ ایک ایسا مہجول عدد ہے کہ اگر اسکا گنا اور دو گنا جمع کریں تو ۳۰ ہو جائیے ہیں

علیٰ بن الفقیاس  $۸ - ۳ = ۲۵$  اول درجہ کی مساوات ہے اور اسکی معنی یہ ہے کہ آ کوئی ایسا عدد ہے کہ اگر اسکو ۸ میں ضرب کریں اور حاصل ضرب میں سے گنا اوس عدد کا نکال ڈالیں تو باقی ۲۵ رہ جائی ہیں اسطرح  $\frac{۱۱}{۲} + \frac{۱۱}{۳} = ۱۰$  مساوات اول درجہ کی ہے اور اسکی یہ معنی ہے کہ آ کوئی ایسا عدد ہے کہ اگر اسکی نصف اور تہائی کو جمع کریں تو ۱۰ ہو جائی ہیں اسطرح ہر ایک مساوات سی کوئی بھی سوال تعبیر ہوتا ہے اب ظاہر ہے کہ اگر اسطرح مساوات میں سے حرف مہجول کی مقدار معلوم ہو جاوے تو جو سوال اوس مساوات سی تعبیر ہوتا ہے وہ معلوم ہو جاوے گا پس بڑا مطلب مساوات سی یہ ہے کہ مہجول کی مقدار معلوم ہو جاوے گا اب جاننا چاہیے کہ ۶ علوم متعارف جو پہلی بیان کیے ہیں اگر اونکا خیال کریں تو مساوات سی مہجول کی مقدار معلوم ہو جاتی ہے مثلاً  $۲ + ۳ = ۱۱$  ایک مساوات ہے اور اس میں دو طرف میں بیضی علامت مساوات کی دو طرف دو مقدار ہیں جو اسپس میں برابر ہیں ان دو طرفوں کو مساوی در مساوی لکھتے ہیں اب اگر اس مساوات کی دو طرفوں میں سے ۳ کا عدد کم کریں تو موافق (۲) کے مساوات میں کچھ فرق پڑے گا لیکن یہ ظاہر ہے کہ جب ۳ کا عدد طرفین سے نفی کر دین تو یہ مساوات حاصل ہوگی  $۲ + ۳ = ۳ - ۱۱ = ۳$  اور چونکہ اول طرف میں ۲ لاکے اب یہ ۳ کا عدد جمع ہی ہے اور نفی ہی ہے تو موافق (۵) کی اول طرف میں سے ۳ کا عدد ذرا مل ہو جاوے گا اور ۲ لاکے ہر دو طرف میں سے یہ مساوات حاصل ہوگی  $۲ = ۱۱ - ۳$  اب ظاہر ہے کہ اگر اول مساوات یعنی  $۲ + ۳ = ۱۱$  میں ۳ کی عدد کو علامت بدل کر دوسری طرف لجا دین تو یہی  $۲ = ۱۱ - ۳$  مساوات حاصل ہوتی ہے اس سے معلوم ہوا کہ اگر ایک مساوات میں کسی عدد کو ایک طرف سے دوسری طرف علامت بدل کر لکھ دین تو مساوات میں کچھ فرق نہیں آتا اب مساوات  $۲ = ۱۱ - ۳$  سے یہ حاصل ہوتا ہے  $۲ = ۱۱ - ۳$  اس واسطے کہ ایں سے جس وقت ۳ کو نکال ڈالا تو باقی رہی پس اس مساوات  $۲ = ۱۱ - ۳$  کے دو طرفوں کو ۲ پر تقسیم کریں تو موافق

(۴) بعد تقسیم کی یہ مساوات میں کچھ زکوٰۃ نہیں لگتا اور یہ مساوات حاصل ہوگی  $۴ = ۳$  یعنی مقدار مجهول ۴  
 ہے پس میان بالاسی یہ قاعدہ نکلا کہ جو وقت مساوات میں کسور نہ ہوں تو اس وقت مقادیر معلومہ کو ایک طرف لے جا دیں  
 اور زمین مقدار مجهول ملی ہوئی ہے اور نیکو ایک طرف رہتی ہیں بعد اسکی زمین مقدار مجهول ملی ہوئی ہے اور نیکو اس طرح لکھیں کہ  
 مقدار معلوم سر پہچا دی مقدار مجهول کی بعد اسکی مقدار مجهول کے سر پہ زمین مساوات کو تقسیم کر دیں اس عمل سے  
 مجهول مقدار ایک طرف رہ جائیگی اور مقدار معلوم دوسری طرف یعنی مقدار مجهول مقدار معلوم کے برابر ہو جائیگی اور  
 یہی مقدار معلوم قیمت مقدار مجهول کی ہوگی

مثلاً  $۳ + ۵ + ۱۰ = ۳۰$  پس اس مساوات کی اول طرف سے ۱۰ کو علامت بدل کر دوسری طرف  
 لکھ دیا تاکہ مقدار مجهول ایک طرف ہو جاوے اور مقدار معلوم دوسری طرف پس یہ مساوات  $۳ + ۵ = ۳۰ - ۱۰$   
 حاصل ہوئے اور جب اول طرف مقدار دن کو جمع کیا تو  $۸$  لا ہوئی اور دوسری طرف کو جمع کیا تو  $۲۰$  ہو گئے اور  
 اسے واسطی یہ مساوات  $۸ = ۲۰$  حاصل ہوئی اور زمین مساوات کو  $۸$  کی سر پہ تقسیم کیا یعنی  $۸$  پر  
 $۸$  کو بھی تقسیم کیا اور  $۲۰$  کو بھی تقسیم کیا اب ظاہر ہے کہ جب  $۸$  کو  $۸$  پر تقسیم کریں تو فقط  $۲$  ہی لگا کیونکہ  
 موافق (۶) کے  $۸$  میں ضرب کیا ہوا ہے اور  $۲$  ہی پر تقسیم ہوگا تو عدد  $۴$  کا زایل ہو جائیگا اور فقط  $۲$  ہی لگا  
 اور دوسری طرف  $۲۰$  کو جو  $۸$  پر تقسیم کیا تو  $۵$  خارج قسمت ہوگا اسے واسطی طرفین مساوات کو مقدار مجهول  
 کے سر پہ تقسیم کر کے یہی ہے یہ مساوات حاصل ہوگی  $۵ = ۲$  یعنی مقدار مجهول  $۵$  ہو اور اسکے صحت اور غلطی  
 مساوات میں رکھنی ہے  $۳ + ۵ + ۱۰ = ۳۰$  کی یہ معنی ہیں کہ  $۳ + ۵ = ۳۰ - ۱۰$  کی یہ معنی ہیں کہ  $۳ + ۵$  عدد  
 ہو کہ اگر اسکی گنتی اور باقی گنتی کو جمع کریں اور اس حاصل جمع میں سے  $۱۰$  کم کریں تو باقی  $۳۰$  کی برابر ہوگا  
 اب یہی جو قیمت مجهول کی گنتی ہے وہ  $۵$  ہے پس  $۵$  کا لگنا لیا تو وہ  $۳۰$  اور باقی گنتی لگایا تو وہ  $۲۰$  ہو لہذا جمع کی  $۳۰$  ہوا اور ہم میں  
 $۱۰$  کم کیئے تو باقی  $۳۰$  رہی پس معلوم ہوا کہ یہی جو قیمت مجهول کی  $۵$  دریافت کی تھی صحیح ہے کیونکہ اس سے شہرہ  
 سوال کی پوری ہو گئی ہے چونکہ مساوات حل کرنے میں بہت عبارت لکھنی ہے ترتیب عمل کی بگڑ جاتی ہے اور زمین  
 ہوتا ہے اس واسطی مساوات حل کر زمین ہم فقط علامتوں کا استعمال کرینگے

مثال ۳  $۱۱ = ۴ - ۵ + ۳ + ۵ + ۶$  مثال ۴  $۲۴ = ۱ + ۵ - ۵ + ۷$

$۴ + ۱۱ = ۵ + ۳ + ۵ + ۶$   $۸ - ۲۴ = ۵ - ۵ + ۷$

$۱۸ =$   $۳۶ = ۵ - ۵ + ۷$

$۱۸ = ۵ + ۳ + ۵ + ۶$   $۶ = ۳ + ۳ = ۵$

$۱۸ = ۵ + ۶$   $۶ = ۵$

$۲ = ۵$  یعنی قیمت مجهول کی ۲ ہے

$$۶۲ = ۵۴ + ۱۳ - ۵ \quad ۴$$

$$۱۳ + ۶۲ = ۵۴ + ۵ \quad \therefore$$

$$۷۵ = ۵۹ \quad \therefore$$

$$۱۵ = \frac{۷۵}{۵} = ۱۵ \quad \therefore$$

$$۱۵ = ۱۵ \quad \therefore$$

$$۱۸ - ۷ + ۵۹ = ۵۷ + ۱۸ - ۵۳ \quad ۸$$

$$۱۸ - ۱۸ + ۷ = ۵۹ - ۵۷ + ۵۳ \quad \therefore$$

$$۷ = ۵۹ - ۵۱ \quad \therefore$$

$$۷ = ۷ \quad \therefore$$

$$۱۷ + ۵ = ۳ + ۵۲ \quad ۱۰$$

$$۳ - ۱۷ = ۵ - ۵۲ \quad \therefore$$

$$۱۴ = ۵ \quad \therefore$$

$$۲۵ + ۵۴ = ۴ - ۵۵ \quad ۱۱$$

$$۴ + ۲۵ = ۵۴ - ۵۵ \quad \therefore$$

$$۲۹ = ۵ \quad \therefore$$

$$۷ = ۴ + ۵۲ - ۵۵ \quad ۵$$

$$۵ - ۷ = ۵۲ - ۵۵ \quad \therefore$$

$$۲ = ۵۲ - ۵۵ \quad \therefore$$

$$۲ = ۵۲ \quad \therefore$$

$$۱ = \frac{۲}{۲} = ۱$$

$$۱ = ۱ \quad \therefore$$

$$۵ - ۱۵ = ۳ + ۵ \quad ۷$$

$$۳ - ۱۵ = ۵ + ۵ \quad \therefore$$

$$۱۲ = ۵۲ \quad \therefore$$

$$۶ = \frac{۱۲}{۲} = ۶ \quad \therefore$$

$$۶ = ۶ \quad \therefore$$

$$۱۳ + ۵۲ = ۷ - ۵۶ \quad ۹$$

$$۷ + ۱۳ = ۵۲ - ۵۶ \quad \therefore$$

$$۲۰ = ۵۴ \quad \therefore$$

$$۵ = \frac{۲۰}{۴} = ۵ \quad \therefore$$

$$۵ = ۵ \quad \therefore$$

اگر کوئی ایسی مساوات ہو کہ اوئیں بجای اعداد کی حرکت ہی ہون تو وہ بھی اس طرح حل ہو سکتی ہے جس طرح  
مساواتیں بالا حل ہوئی ہیں مثلاً  $ط + لا = ب - ص$  اوئیں سوائے لا کی اور حرفت مقدار معلوم ہیں  
یعنی  $ط$  اور  $ص$  اور  $ب$  معلوم ہیں پس موافق قواعد گذشتہ کی یہ مساوات اس طرح حل ہوتی ہے

$$ط + لا = ب - ص \quad ۲$$

$$\therefore ط + لا + ب = ص + ص$$

$$\therefore (ط + ب) + ص = ص + ص$$

$$\therefore \frac{ط + ب}{۲} = ص$$

$$ط + لا = ب - ص \quad ۱$$

$$\therefore ط - ص = ب - ص - ص$$

$$\therefore \frac{ط - ص}{۲} = ب - ص$$

۳  $ص - ل = ص - ل = ۳ + ۱ = ۳ + ۱ = ۴$   $ص + ل = ص + ل = ۳ + ۱ = ۳ + ۱ = ۴$

$ص - ل = ص - ل = ۳ - ۱ = ۳ - ۱ = ۲$   $ص + ل = ص + ل = ۳ + ۱ = ۳ + ۱ = ۴$

$ص - ل = ص - ل = ۳ - ۱ = ۳ - ۱ = ۲$   $ص + ل = ص + ل = ۳ + ۱ = ۳ + ۱ = ۴$

$ص - ل = ص - ل = ۳ - ۱ = ۳ - ۱ = ۲$   $ص + ل = ص + ل = ۳ + ۱ = ۳ + ۱ = ۴$

$ص - ل = ص - ل = ۳ - ۱ = ۳ - ۱ = ۲$   $ص + ل = ص + ل = ۳ + ۱ = ۳ + ۱ = ۴$

$۱ = ۱$

۵  $۶ + ۵ = ۶ + ۵ = ۱۱$   $۶ - ۵ = ۶ - ۵ = ۱$

$۶ + ۵ = ۶ + ۵ = ۱۱$   $۶ - ۵ = ۶ - ۵ = ۱$

$۱ + ۱ = ۱ + ۱ = ۲$

$۶ - ۵ = ۶ - ۵ = ۱$

$\frac{۱ + ۱}{۱} = ۲$

۶  $۱ + ۲ + ۳ = ۱ + ۲ + ۳ = ۶$   $۱ - ۲ = ۱ - ۲ = -۱$

$۱ + ۲ + ۳ = ۱ + ۲ + ۳ = ۶$   $۱ - ۲ = ۱ - ۲ = -۱$

$۱ + ۲ = ۱ + ۲ = ۳$

$۱ - ۲ = ۱ - ۲ = -۱$

$(۱ + ۲) = ۳$

۷  $۲ - ۱ = ۲ - ۱ = ۱$   $۲ + ۱ = ۲ + ۱ = ۳$

$۲ - ۱ = ۲ - ۱ = ۱$   $۲ + ۱ = ۲ + ۱ = ۳$

$۲ - ۱ = ۲ - ۱ = ۱$   $۲ + ۱ = ۲ + ۱ = ۳$

$۳ = \frac{(۱ + ۲) \cdot ۳}{(۲ + ۱)}$

$۰ = (ص + ل) = ۰$

$۳ = ۳$

$۰ = \frac{ص}{ص + ل} = ۰$

$۰ = ۰$

اگر مساوات میں گورجون تو جائیے کہ پہلی اول کے نسبت بنا کو طرفین مساوات میں ضرب کریں بعد اسکی دوسرے  
 کس کی نسبت بنا کو طرفین مساوات میں ضرب کریں اور اسطرح نتیجی کس میں ہوں گے نسبت بنائیں طرفین مساوات  
 کو ضرب کریں اس قاعدہ سے مساوات میں کس نہیں رہنی کی اور پھر اول قاعدہ کی موافق مساوات عمل ہو گئی ہے  
 اور یہی بات ظاہر ہے کہ اس قاعدہ سے مساوات میں کچھ ضل نہیں آتا اس واسطے سے کہ موافق (۳)  
 کے دو مقداروں متساوی کو ایک مقدار میں ضرب کریں تو بعد ضرب کرنے کی بھی باہم برابر رہتے ہیں

مثال ۱ طرفین کو ۳ میں ضرب کیا

$$10 = \frac{10}{3} - \frac{10^2}{3^2}$$

پھر طرفین کو ۳ میں ضرب کیا

$$30 = \frac{10^2}{3} - 10^2 \therefore$$

$$120 = 10^2 - 10^3 \therefore$$

$$120 = 10^3 \therefore$$

$$24 = \frac{120}{5} = 10 \therefore$$

$$24 = 10 \therefore$$

طرفین کو ۴ میں ضرب کیا

$$\frac{50}{4} = \frac{50}{4} - \frac{50^2}{4^2} \quad 2$$

پھر طرفین کو ۶ میں ضرب کیا

$$\frac{220}{6} = \frac{50^2}{6} - 10^2 \therefore$$

$$220 = 50^2 - 10^2 \therefore$$

$$220 = 10^2 \therefore$$

$$10 = \frac{220}{22} = 10 \therefore$$

$$10 = 10 \therefore$$

طرفین کو ۲ میں ضرب کیا

$$31 = \frac{10}{2} + \frac{10}{3} + \frac{10}{4} \quad 3$$

پھر طرفین کو ۳ میں ضرب کیا

$$62 = \frac{10^2}{3} + \frac{10^2}{3} + 10 \therefore$$

پھر طرفین کو ۵ میں ضرب کیا

$$184 = \frac{10^2}{5} + 10^2 + 10^3$$

$$920 = 10^2 + 10^2 + 10^3 \therefore$$

$$920 = 10^3 \therefore$$

$$30 = \frac{920}{31} = 10 \therefore$$

$$30 = 10 \therefore$$

طرفین کو ۲ میں ضرب کیا

$$110 = \frac{10}{2} + \frac{10}{3} + 10 \quad 4$$

پھر طرفین کو ۳ میں ضرب کیا

$$220 = \frac{10^2}{3} + 10^2 + 10^3 \therefore$$

$$660 = 10^2 + 10^2 + 10^3$$

$$660 = 10^3 \therefore$$

$$60 = \frac{660}{11} = 10 \therefore$$

$$60 = 10 \therefore$$

$\frac{10}{2} + \frac{13}{2} = 20 - 13$  *از ضرب یک*  
 $120 + 110 = 130 - 128$  *از ضرب یک*  
 $250 = 125$  *از ضرب یک*  
 $10 = \frac{250}{25} = 10$  *از ضرب یک*  
 $10 = 10$  *از ضرب یک*  
 $\frac{24 + 112}{5} = 10 + \frac{3 + 11}{3} - 129$  *از ضرب یک*  
 $\frac{48 + 112}{9} = 20 + 3 - 10 - 129$  *از ضرب یک*  
 $48 + 112 = 225 + 10 - 10 - 129$  *از ضرب یک*  
 $48 + 112 = 210 + 125$  *از ضرب یک*  
 $125 - 112 = 48 - 210$  *از ضرب یک*  
 $111 = 132$  *از ضرب یک*  
 $132 = 111$  *از ضرب یک*  
 $12 = \frac{132}{11} = 12$  *از ضرب یک*  
 $12 = 12$  *از ضرب یک*  
 $\frac{10}{3} + \frac{10}{5} = 2 - 10$  *از ضرب یک*  
 $\frac{10}{3} + 10 = 20 - 10$  *از ضرب یک*  
 $100 + 13 = 100 - 10$  *از ضرب یک*  
 $100 = 18 - 10$  *از ضرب یک*  
 $100 = 12$  *از ضرب یک*  
 $10 = \frac{100}{10} = 10$  *از ضرب یک*  
 $10 = 10$  *از ضرب یک*

$\frac{10}{3} + \frac{10}{5} = 2 - 10$  *از ضرب یک*  
 $100 + 13 = 100 - 10$  *از ضرب یک*  
 $100 = 18 - 10$  *از ضرب یک*  
 $100 = 12$  *از ضرب یک*  
 $10 = \frac{100}{10} = 10$  *از ضرب یک*  
 $10 = 10$  *از ضرب یک*  
 $\frac{1}{3} = \frac{10}{3} - \frac{10}{3} + \frac{10}{3}$  *از ضرب یک*  
 $1 = \frac{10}{3} - \frac{10}{3} + 10$  *از ضرب یک*  
 $3 = \frac{10}{3} - 10 + 10$  *از ضرب یک*  
 $4 = 13 - 10 + 10$  *از ضرب یک*  
 $4 = 13 - 10$  *از ضرب یک*  
 $4 = 12$  *از ضرب یک*  
 $\frac{4}{2} = 12$  *از ضرب یک*  
 $20 = 34 - 13 - 10$  *از ضرب یک*  
 $34 = 20 - 13 - 10$  *از ضرب یک*  
 $34 = 23 - 13$  *از ضرب یک*  
 $34 = 11$  *از ضرب یک*

بعضی مساواتیں ایسی ہوتی ہیں کہ اودین مرتبہ جھول کا نشان قوت آسی زیادہ ہوتا ہے لیکن اول درجہ کے مساوات کی صورت اودین سے قیمت جھول کی معلوم ہو جاتی ہے مثلاً یہ مساوات ہے

$$11 \quad 1 - 10 = 10 - 10 + 10 + 10 \text{ طرفین مساوات کو } \therefore 1 - 10 + 10 = 10 - 10 + 10 + 10$$

$$\therefore 1 - 10 + 10 = 10 - 10 + 10 + 10$$

$$\therefore 10 + 10 = 10 - 10$$

$$\therefore 18 = 10$$

$$\therefore 9 = 10$$

ضرب کیا  
طرفین کو ۲ سے

$$15 \quad 10 + 10 - 10 = \frac{10 - 10}{0} + \frac{10 - 10}{2}$$

$$\therefore 10 + 10 - 10 = \frac{10 - 10}{0} + \frac{10 - 10}{2}$$

طرفین کو ضرب کیا

$$\therefore 10 + 10 - 10 = \frac{10 - 10}{0} + \frac{10 - 10}{2}$$

طرفین کو ضرب کیا

$$\therefore 10 + 10 - 10 = \frac{10 - 10}{0} + \frac{10 - 10}{2}$$

$$\therefore 10 + 10 - 10 = \frac{10 - 10}{0} + \frac{10 - 10}{2}$$

$$\therefore 10 + 10 - 10 = \frac{10 - 10}{0} + \frac{10 - 10}{2}$$

$$\therefore 214 = 1024$$

$$\therefore \frac{214}{2} = 10$$

$$\therefore 8 = 10$$

مساوات میں جنی کسین ہوتی اگر اولیٰ نسب نایون کو

باہم ضرب کریں اور اس حاصل ضرب کو طرفین میں جز

کریں تو یہی کسر دور ہو جاتی ہے مثلاً (۱۶) نشان میں

$$14 \quad \frac{9 + 10}{2} = \frac{10 + 10}{0} - \frac{10 + 10}{3}$$

اسکے نسب نایون کا حاصل ضرب یعنی  $2 \times 3 \times 5 = 30$

ہوتا ہے جس جب ۳۰ کو طرفین مساوات میں ضرب کریں

ضرب کیا  
طرفین کو ۲ سے

$$13 \quad \frac{10 - 10}{0} = 10 + \frac{10 - 10}{2}$$

$$\therefore 10 - 10 = 10 + \frac{10 - 10}{2}$$

$$\therefore 10 - 10 = 10 + \frac{10 - 10}{2}$$

$$\therefore 10 - 10 = 10 + \frac{10 - 10}{2}$$

$$\therefore 10 - 10 = 10 + \frac{10 - 10}{2}$$

$$\therefore 10 - 10 = 10 + \frac{10 - 10}{2}$$

$$\therefore 10 - 10 = 10 + \frac{10 - 10}{2}$$

$$\therefore 10 - 10 = 10 + \frac{10 - 10}{2}$$

$$\therefore 10 - 10 = 10 + \frac{10 - 10}{2}$$

$$\therefore 10 - 10 = 10 + \frac{10 - 10}{2}$$

$$\therefore 10 - 10 = 10 + \frac{10 - 10}{2}$$

$$\therefore 10 - 10 = 10 + \frac{10 - 10}{2}$$

طرفین میں ضرب کیا



$$۱۳۵ + ۵۲۵ = ۱۸۰ + ۵۲۴ - ۹۴ - ۵۰ + ۵۴۰$$

$$۱۸۰ - ۵۰ - ۹۴ + ۱۳۵ = ۵۲۵ - ۵۲۴ - ۵۴۰ \therefore$$

$$۱ = ۵ \therefore$$

اس مساوات کی نسب نمایوں کا حاصل ضرب ۲۰ ہوتا ہے لیکن عدد ۲۰ کا ان سب نمایوں پر تقسیم ہو سکتا ہے پس اگر ۲۰ کو طرفین میں ضرب کریں تو یہی کسر مساوات میں نہیں رہنی کی اور ہمیشہ خیال کرنا چاہیے کہ وہ عدد چھوٹی سیسے چھوٹا کون ہے جو سب نسب نمایوں پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے پس جو عدد ان تمام دریافت ہوا سو کو طرفین میں ضرب کرنا چاہیے اس طرح مساوات میں کسر بھی نہیں رہنی کی اور عمل بھی مختصر رہیگا اب ہم (۱۷) مثال کو ۲۰ میں ضرب کر کے حل کرتے ہیں ظاہر ہے کہ بعد ضرب کوئی کی یہ حاصل ہوگا

$$\frac{۱۳۵}{۳} + ۵۲۵ - ۵ = \frac{۲ + ۵۲}{۵} - \frac{۱۳ - ۱۷}{۵} \quad | ۱۸ \quad ۸۰ - ۵۰ = ۳۰ + ۵۴۰ - ۱۴ + ۵۱۲$$

$$۴۰ + ۵۳۵ + ۵۴۰ - ۷۵ = ۱۰ - ۵۲۰ - ۵۹ - ۵۱ \therefore \quad * ۵۱۲ - ۵۰ + ۵۴۰ = ۸۰ + ۳۰ + ۱۴ \therefore$$

$$۵۴۳ = ۱۲۶ \therefore$$

$$۵۱ - ۱۰ + ۷۰ + ۷۵ = ۵۲۰ - ۵۹ - ۵۲۵ - ۵۴۰ \therefore$$

$$۱۲۶ = ۵۴۳ \text{ یا}$$

$$۱۰۴ = ۵۲۶ \therefore$$

$$۲ = \frac{۱۲۶}{۶۳} = ۵ \therefore$$

$$۴ = \frac{۱۰۴}{۲۶} = ۵ \therefore$$

$$۲ = ۵ \therefore$$

$$۴ = ۵ \therefore$$

$$\frac{۴ - ۵۲}{۵} + \frac{۸ - ۵۶}{۲} - \frac{۵ - ۲۰}{۲} = ۴ + \frac{۳ - ۵۳}{۵} - ۵ \quad | ۱۹$$

اس مساوات کی دو طرفوں کو ضرب کیا حاصل ضرب  $۵ \times ۲ \times ۷$  میں یعنی ۷۰ میں تو حاصل ہوا یہ

$$۵۶ - ۵۵۶ + ۸۰ + ۵۶۰ - ۵۳۵ - ۷۰۰ = ۲۸۰ + ۴۲ + ۵۴۲ - ۵۷۰$$

$$۴۰۲ = ۵۶۷ \therefore$$

$$۶ = \frac{۴۰۲}{۶۷} = ۵ \therefore$$

$$۶ = ۵ \therefore$$

$$۵۱۱ - \frac{۹۶ - ۵۵}{۱۲} - ۲۴۱ = \frac{۵۲ - ۵۷}{۴} + \frac{۳}{۴} + \frac{۲۱ - ۵۲}{۹} \quad | ۲۰$$

اس مساوات کو ضرب کیا  $۹ \times ۴$  یعنی ۳۶ میں تو حاصل ہوئی یہ مساوات

$$۵۳۹۴ - ۲۸۸ + ۵۱۵ - ۸۴۴ = ۵۲۴ - ۵۱۳ + ۱۳۵ + ۸۴ - ۵۱۴$$

$$۵۱۳ - ۱۳۵ - ۸۴ + ۲۸۸ + ۸۴۴ = ۵۲۴ - ۵۳۹۴ + ۵۱۵ + ۵۱۴$$

$$۸۴ \dots = ۵ \dots \therefore$$

$$۲۱ = \frac{۸۴ \dots}{۴ \dots} = ۵ \therefore$$

$$۲۱ = ۵ \therefore$$

$$\frac{ص۴ + لا۴}{۴} - \frac{ط۵ - لا۴}{۵} + ص لا = طص - \frac{ط۳ - ص۳}{۳} - \frac{ط۵ - لا۴}{۵}$$

طرفین کو ضرب کیا

$$۳(ص۴ + لا۴) - ۳(ط۵ - لا۴) + ۱۵ص لا = ۱۵(طص - \frac{ط۳ - ص۳}{۳}) - ۳(ط۵ - لا۴)$$

$$\therefore ۳ص۴ + ۳لا۴ - ۳ط۵ + ۳لا۴ = ۱۵طص - ۵(ط۳ - ص۳) - ۳ط۵ + ۳لا۴$$

$$\therefore ۳ص۴ + ۳لا۴ - ۳ط۵ + ۳لا۴ = ۱۵طص - ۵ط۳ + ۵ص۳ - ۳ط۵ + ۳لا۴$$

$$\therefore ۳ص۴ + ۳لا۴ - ۳ط۵ + ۳لا۴ = ۱۵طص - ۵ط۳ + ۵ص۳ - ۳ط۵ + ۳لا۴$$

$$\therefore \frac{۳ص۴ + ۳لا۴}{۳ - ۵ط۳} = \frac{۱۵طص - ۵ط۳ + ۵ص۳ - ۳ط۵ + ۳لا۴}{۳ - ۵ط۳}$$

طرفین کو ضرب کیا

$$\frac{۳(ص۴ + لا۴)}{۳ + ۵ط۳} = \frac{۱۳ - ۵ط۳ + ۴ + ۵ط۳}{۳ + ۵ط۳} + \frac{۴ + ۵ط۳}{۴}$$

طرفین کو ضرب کیا

$$\frac{۳(ص۴ + لا۴)}{۳ + ۵ط۳} = \frac{۸ + ۵ط۳}{۱۱ - ۵ط۳} - \frac{۱۴ + ۵ط۳}{۲۱}$$

طرفین کو ضرب کیا

$$\frac{۳(ص۴ + لا۴)}{۳ + ۵ط۳} = \frac{۳۹ - ۵ط۳}{۱ + ۵ط۳} + \frac{۴ + ۵ط۳}{۴}$$

طرفین کو ضرب کیا

$$\frac{۳(ص۴ + لا۴)}{۳ + ۵ط۳} = \frac{۱۶۸ + ۵ط۳}{۱۱ - ۵ط۳} - \frac{۱۴ + ۵ط۳}{۲۱}$$

طرفین کو ضرب کیا

$$۵ = \frac{۳۹ - ۵ط۳}{۱ + ۵ط۳}$$

$$= \frac{۱۶۸ + ۵ط۳}{۱۱ - ۵ط۳} - ۱۴$$

$$۵ + ۵۱۰ = ۳۹ - ۵ط۳$$

طرفین کو ضرب کیا

$$\frac{۱۶۸ + ۵ط۳}{۱۱ - ۵ط۳} = ۱۴$$

$$۵ + ۳۹ = ۵۱۰ - ۵ط۳$$

$$۱۶۸ + ۵ط۳ = ۱۴۴ - ۵ط۳$$

$$۴۴ = ۵۱۰$$

$$۱۶۸ + ۱۴۴ = ۵ط۳ - ۵ط۳$$

$$۴ = ۵$$

$$۱ = \frac{۳۳۳}{۳۳} = ۵$$

طرفین کو ضرب کیا

$$\frac{۳(ص۴ + لا۴)}{۳ + ۵ط۳} = \frac{۲۹ - ۵ط۳}{۱۲ - ۵ط۳} + \frac{۳ + ۵ط۳}{۹}$$

$$۱ = ۵$$









$$\frac{ur}{\sqrt{a}} - ur = 0 \quad \text{چونکہ } 0 = ur(1 - \frac{1}{\sqrt{a}})$$

$$(1 - \frac{1}{\sqrt{a}})ur = 0$$

$$\frac{ur}{\sqrt{a}} - ur = (1 - \frac{1}{\sqrt{a}})ur$$

$$\frac{ur - \sqrt{a}ur}{\sqrt{a}} =$$

$$\frac{(1 - \sqrt{a})ur}{\sqrt{a}}$$

$$(1 - \sqrt{a})ur = (1 - \sqrt{a})ur$$

طرفین کو (1 - \sqrt{a}) پر تقسیم کیا

$$\frac{ur}{\sqrt{a}} = 1 + \sqrt{a}$$

$$\sqrt{a}ur =$$

$$1 + \sqrt{a}ur =$$

$$\sqrt{a}ur =$$

$$1 + \sqrt{a}ur =$$

$$1 = ur$$

$$ur = \frac{1 - ur}{1 + \sqrt{a}ur}$$

$$(1 - \sqrt{a}ur)(1 + \sqrt{a}ur) = 1 - ur$$

$$(1 - \sqrt{a}ur)(1 + \sqrt{a}ur) =$$

$$1 + \sqrt{a}ur$$

بعد اختصار کی

$$1 - \sqrt{a}ur =$$

$$1 + \sqrt{a}ur =$$

$$\frac{(1 + \sqrt{a}ur)}{1} = 1 + \sqrt{a}ur$$

$$1 - \sqrt{a}ur = 1 - \sqrt{a}ur$$

$$(1 - \sqrt{a}ur) = (1 - \sqrt{a}ur)$$

$$1 - \sqrt{a}ur = 1 - \sqrt{a}ur$$

$$1 - \sqrt{a}ur = 1 - \sqrt{a}ur$$

$$1 - \sqrt{a}ur = 1 - \sqrt{a}ur$$

$$\frac{1 - \sqrt{a}ur}{1} = 1 - \sqrt{a}ur$$

$$ur = \frac{1 - \sqrt{a}ur}{1 + \sqrt{a}ur}$$

چونکہ (1 + \sqrt{a}ur)(1 - \sqrt{a}ur) یعنی (1 + \sqrt{a}ur)(1 - \sqrt{a}ur)

(1 - \sqrt{a}ur) میں ضرب کرتے ہیں تو (1 - \sqrt{a}ur) کا ہوتا ہے

اور (1 + \sqrt{a}ur) میں ضرب (1 - \sqrt{a}ur) کا ہوتا ہے

تو حاصل ہوا (1 + \sqrt{a}ur)(1 - \sqrt{a}ur) =

1 - \sqrt{a}ur بعد اختصار کی یہ ہوتا ہے

$$1 - \sqrt{a}ur =$$

$$1 + \sqrt{a}ur =$$

$$ur = \frac{1 - \sqrt{a}ur}{1 + \sqrt{a}ur}$$

چونکہ موافق صورت گذشتہ کی

$$(1 - \sqrt{a}ur)(1 + \sqrt{a}ur) = 1 - \sqrt{a}ur$$

$$(1 - \sqrt{a}ur)(1 + \sqrt{a}ur) =$$

$$1 + \sqrt{a}ur$$

$$1 - \sqrt{a}ur =$$

$$1 + \sqrt{a}ur =$$

$$(1 + \sqrt{a}ur) = 1 + \sqrt{a}ur$$

∴ (س-۱) ما ط ل = س + ص (س-۱) :

طرفین کو س + ص پر تقسیم کیا

∴ ما ط ل = س + ص

طرفین کا مجدد در کیا

∴ ط ل = (س + ص)

طرفین کو س پر تقسیم کیا

∴ ل = ط (س + ص)

۵۱ ل = ط + ل + ص + ل - ط

∴ ل + ط = ط + ل + ص + ل - ط

طرفین کا مجدد در کیا

ل + ط + ل = ط + ل + ص + ل - ط

ط طرفین سے کم کیا

∴ ل + ط ل = ل + ص + ل

طرفین کو ل پر تقسیم کیا

∴ ل + ط ل = ل + ص + ل

طرفین کا مجدد در کیا

∴ ل + ص ط ل + ل = ص + ل

طرفین سے ل کم کیا

∴ ص ط ل = ص - ط

∴ ل = ص - ط

۵۲ ∴ ل + ص ط ل + ل = ص + ل

طرفین کو ل + ص پر ضرب کیا

∴ ل + ص ط ل + ل = ص + ل

۴۹ ∴ ل + ص ط ل + ل = ص + ل

چونکہ ل - ص = (ل + ص)(ل - ص)

∴ ل + ص ط ل + ل = (ل + ص)(ل - ص)

اول طرف کا اختصار کیا

∴ ل - ص = ل - ص

طرفین کو س میں ضرب کیا

∴ ل - ص ل + ص = ل - ص ل + ص

∴ ل - ص ل + ص = ل - ص ل + ص

طرفین کا مجدد در کیا

∴ ل - ص ل + ص = ل - ص ل + ص

∴ ل - ص ل + ص = ل - ص ل + ص

∴ ل - ص ل + ص = ل - ص ل + ص

۵۰ ∴ ل - ص ل + ص = ل - ص ل + ص

چونکہ ل - ص = (ل + ص)(ل - ص)

∴ ل - ص ل + ص = (ل + ص)(ل - ص)

اول طرف کا اختصار کیا

∴ ل - ص ل + ص = ل - ص ل + ص

∴ ل - ص ل + ص = ل - ص ل + ص

طرفین کو س میں ضرب کیا

∴ ل - ص ل + ص = ل - ص ل + ص

∴ ل - ص ل + ص = ل - ص ل + ص

∴ ل - ص ل + ص = ل - ص ل + ص



طرفین کا مجذور کیا  $\sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}}$  ::

طرفین سے لاکم کیا  $1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}$  ::

$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}$  ::

$\sqrt{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{2}$  ::

طرفین کا مجذور کیا  $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2}$  ::

$\sqrt{1} = \frac{25}{16}$  ::

طرفین کا مجذور کیا  $\sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{16} \sqrt{1} + \frac{1}{16}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}$

طرفین کا مجذور کیا

$\sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{16} \sqrt{1} + \frac{1}{16}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}$  ::

$\sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{16} \sqrt{1} + \frac{1}{16}} = \frac{9}{16} + \frac{1}{16} \sqrt{1} = \frac{2}{16} + \frac{1}{16}$  ::

طرفین کو  $\frac{1}{16}$  پر تقسیم کیا

طرفین کا مجذور کیا  $\sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{16} \sqrt{1} + \frac{1}{16}} = \frac{2}{16} + \frac{1}{16}$  ::

$\frac{9}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$  ::

طرفین کو لایین ضرب کیا  $\frac{9}{16} = \frac{2}{16} + \frac{1}{16}$  ::

$\frac{9}{16} = \frac{2}{16} + \frac{1}{16}$  ::

$\frac{1}{16} - \frac{9}{16} = \frac{2}{16}$  ::

$\frac{1}{16} = \frac{2}{16}$  ::

طرفین کو لایین ضرب کیا  $\frac{2}{16} = \frac{1}{16}$  ::

طرفین کو طین ضرب کیا  $2 = \frac{16}{16}$  ::

$2 = \frac{16}{16}$  ::

طرفین کا مجذور کیا  $\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}$  ::

طرفین سے لاکم کیا  $1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}}$  ::

طرفین کو  $\frac{1}{2}$  پر تقسیم کیا  $1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}}$  ::

$1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}}$  ::

$2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}}$  ::

$\frac{2}{1} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}}$  ::

طرفین  $\frac{15}{16} = \sqrt{1} + \sqrt{1 + 5} = 1 + \sqrt{6}$

$15 = \sqrt{1} + \sqrt{1 + 5} + 1 + 5$  ::

طرفین کا مجذور کیا  $\sqrt{1 - 10} = \sqrt{1} + \sqrt{1 + 5} = 1 + \sqrt{6}$  ::

طرفین سے لاکم کیا  $1 - 10 = \sqrt{1} + \sqrt{1 + 5} = 1 + \sqrt{6}$  ::

$1 - 10 = 1 + \sqrt{6}$  ::

$10 = 1 + \sqrt{6}$  ::

$10 = \frac{10}{1} = 1 + \sqrt{6}$  ::

$10 = 1 + \sqrt{6}$  ::

$\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} \sqrt{1} + \frac{1}{16}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}$

طرفین کو لایین ضرب کیا

$\frac{1}{2} \sqrt{1} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}}$  ::

$\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}$  ::

طرفین کو لایین تقسیم کیا  $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}$  ::

بعضی مساوات ایسی ہوتی ہیں کہ خاص ترکیب سے حل ہوتی ہیں اور انشاء اللہ تعالیٰ ایسی مساوات میں درج دوم کی مساوات میں بہت لکھی جاوے گی یہاں فقط دو مثالیں لکھی جاتی ہیں اور ان میں خاص ترکیب یہ ہے کہ عدد اکا زیادہ اور کم کیا جاتا ہے

بزرگ عدد کا طین

$$58 = \frac{b + \sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - b^2}}$$

مثلاً کی طرفین کا خارج عدد ۱

$$1 + \frac{1}{b} = 1 + \frac{\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$\frac{b+1}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$(1) \dots \dots \frac{b+1}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$$

اب ہر اصلی مساوات کی دو طرفوں سے عدد اکا کم کیا

یعنی

$$1 - \frac{1}{b} = 1 - \frac{\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - b^2}}$$

طرفین کا خارج عدد ۱

$$\frac{b-1}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$(1) \dots \dots \frac{b-1}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$$

اب اس مساوات کو جس پر نشان (۱) کا تقسیم کیا اور مساوات جس پر نشان (۱) کا ہی ثبوت ہو گا ان مساوات کو یک نوبت مانا لیکن ان میں تو ظاہر ہو کر نوبت مانا دو نوساواتوں کے

$$54 \quad \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\therefore \sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - b^2}$$

طرفین کا مجذور کیا

$$\therefore \sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$a^2 - b^2 - a^2 + b^2 = a^2 - b^2 + a^2 - b^2$$

$$\therefore -2b^2 = 2a^2 - 2b^2$$

$$\therefore a^2 = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\therefore a^2 = (a - b) \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\therefore a^2 = a^2 - b^2$$

$$\therefore \frac{b^2}{a} = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$56 \quad \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - b^2}$$

اس مساوات کو اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$(a + b) \sqrt{a^2 - b^2} = (a + b) \sqrt{a^2 - b^2} + (a + b) \sqrt{a^2 - b^2}$$

طرفین کا مربع کیا

$$\therefore (a + b)^2 (a^2 - b^2) = (a + b)^2 (a^2 - b^2) + (a + b)^2 (a^2 - b^2)$$

$$\therefore a^2 + b^2 = a^2 - b^2$$

$$\therefore a^2 - b^2 = a^2 - b^2$$

$$\therefore a^2 - b^2 = a^2 - b^2$$

$$۲۶ = ۱ - \frac{۱+۱}{۱-۱}$$

$$۲۶ = \frac{۱+۱-۱+۱}{۱-۱}$$

$$(ط) \dots ۲۶ = \frac{۲}{۱-۱}$$

اب مساوات (ط) کو مساوات (ط) پر تقسیم کیا

$$\frac{۲۸}{۲۶} = \frac{۱۲}{۲}$$

یعنی  $۱ = \frac{۲۸}{۲۶} = \frac{۱۴}{۱۳}$

اب تک ایک مجهول کی مساوات میں حل ہوئی ہیں یعنی ایک مقدار مجهول کی قیمت ایک مساوات کی وسیلہ سے معلوم کی جیسی اگر دو مقدار مجهول ہوں تو دو مساواتوں سے ان کی قیمتیں معلوم ہونگی اور اگر تین مجهول ہوں تو تین مساواتوں سے ان کی قیمتیں دریافت ہوگی اور علیٰ ہذا القیاس اب ہم دو مقداروں میں مجهول کے دریافت کرنا قاعدہ یہاں کرتے ہیں جانا چاہیے کہ اگر دو مساوات جن میں یہ دو مجهول ہیں ایسی ہوں کہ ان میں کوئی کسر نہ ہو تو اول ہر ایک کو اس طرح لکھنا چاہیے کہ مقدار معلومہ ایک طرف ہو جاوے اور مجهول کی قیمتیں ایک طرف ہو جاوے پھر دیکھنا چاہیے کہ کسی حرف مجهول کا سر دو مساواتوں میں یکساں ہو یا نہیں اگر ہو تو اسکی دو صورتیں ہیں ایک تو یہ کہ جن دو فوجوں میں یہ حرف مجهول پایا جاتا ہے ان کی علامتیں یکساں ہوں دوسری یہ کہ ان دو فوجوں کی علامتیں مختلف ہوں پس اگر علامتیں یکساں ہوں تو ہر دو مساواتوں میں سے چھوٹی کو تفریق کرنا چاہیے اور اگر علامتیں مختلف ہوں

زائد ہو جائیگی اور یہ مساوات حاصل ہوگی

$$\frac{۱+۱}{۱-۱} = \frac{۱+۱}{۱-۱} = \frac{۱+۱}{۱-۱}$$

$$\left(\frac{۱-۱}{۱+۱}\right) = \frac{۱-۱}{۱} = \frac{۱}{۱-۱}$$

$$\left(\frac{۱-۱}{۱+۱}\right) ۱ = ۱ - ۱ = ۰$$

$$۱ = \left(\frac{۱-۱}{۱+۱}\right) ۱ - ۱ = ۰$$

$$\frac{۱}{۲} = \frac{۱+۱}{۱-۱} - \frac{۱+۱}{۱+۱}$$

طرفین پر ازبانہ کیا

$$(۱) \dots \frac{۲}{۲} = \frac{۱+۱}{۱-۱} - \frac{۱+۱}{۱+۱}$$

پہر اصلی مساوات کی طرف سے آگے کیا

$$(۲) \dots \frac{۱}{۲} = \frac{۱-۱}{۱-۱} - \frac{۱+۱}{۱+۱}$$

مساوات (۱) کو مساوات (۲) پر تقسیم کیا

$$۳ = \frac{۱+۱}{۱-۱}$$

طرفین کا کعب کیا

$$۲۷ = \frac{۱+۱}{۱-۱} \quad (۱) \text{ طرفین پر آگے زیادہ کیا}$$

$$۲۸ = ۱ + \frac{۱+۱}{۱-۱}$$

$$۲۸ = \frac{۱-۱+۱+۱}{۱-۱}$$

$$(ط) \dots ۲۸ = \frac{۱۲}{۱-۱}$$

مساوات (۱) کی طرف سے آگے کیا

ہوت تو دونوں ساداتوں کو جمع کرنا چاہیے ان دونوں میں  
 سی دہ مجہول جبکہ سرد تو ساداتوں میں ایک ان ہر زائل  
 ہو جاویگا اور فقط ایک مجہول کی مساوات راجحہ دگی اور وہ  
 مساوات موافق اشد گذشتہ کی حل ہو سکتی ہے اور اگر  
 دونوں ساداتوں میں کسی حرف مجہول سر کیا نہ ہو تو  
 اس صورت میں چاہیے کہ کسی ایک سادات میں سے ایک  
 مجہول کے سر کو دوسری سادات کی دونوں طرف ضرب  
 کریں پھر دوسری سادات میں اسی حرف مجہول کے  
 سر کو اول سادات کی دونوں طرف ضرب کریں یہ دونوں  
 مساواتیں جو ضرب کرنی سے حاصل ہوگی ان دونوں  
 میں ایک مجہول کا سر کیا ہوگا اور یہ مجہول موافق  
 صورت بالا کی زائل ہو سکتا ہے نیز ان مساواتوں میں  
 تو تفریق کرنی ہے زائل ہو جاویگا اور اگر ساداتوں میں  
 کسور ہوں تو کتبہ کو دور کرنی کے ہی ترکیب کرنی چاہیے

**مثال ۱**  $لا = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$  (۱)  
 $۱۲ = ۱۹ - ۷$  (۲)  
 ان دونوں ساداتوں سے یہ دو مساوات حاصل ہوگی  
 $لا - ۱ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$  (۱)  
 $لا + ۱ = ۱۹$  (۲)  
 مساوات (۱) کو (۲) میں تفریق کیا تو یہ مساوات حاصل ہوگی  
 $۳ = ۱۹ - ۱۰ = ۹$   
 $۳ = ۱۰ - ۷ = ۳$   
 $۵ = ۳$   
 اور چونکہ  $لا = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$   
 یعنی  $لا = ۹$

**مثال ۲**

$۵ - ۱ = ۴$

$۴ + ۱ = ۵$

$۳ ل = ۱۲$

$۴ = ۱۲$

اور چونکہ  $لا + ۱ = ۵$  جب ہمیں  $لا$  کی قیمت لگنی تو

$۴ = ۱ + ۴$

$۱ - ۴ = ۳$

$۳ =$

$۳ = ۳$

**۳**  $ط + لا + ص = ۲$

$ط = ۲ - ص - ط$

ان دونوں ساداتوں سے یہ دو مساواتیں حاصل  
 ہوں گی

$ط + لا + ص = ۲$

$ط + لا + ص = ۲$

$ص - ۱ - ط = ۲$

$∴ (ص - ۱) = ۲ - ط$

$∴ ۱ = ۲ - ط$

اور اول مساوات سے یہ حاصل ہوتا ہے

$ط + لا = ۲ - ص = ۲ - ۱ = ۱$

$∴ ط + لا = ۲ - ۱ = ۱$

$∴ ط + لا = ۲ - ۱ - ۱ = ۰$

$∴ ط + لا = ۰$

$∴ ط + لا = ۰$

$∴ ط + لا = ۰$

$∴ ط + لا = ۰$

$∴ ط + لا = ۰$

$$1 = 2 - 1 = 3 - 2 = 4 - 3 = 5$$

$$\therefore 1 = 2$$

$$(1) \dots 21 = 5 \times 4 + 1 \times 1$$

$$(2) \dots 22 = 5 \times 4 + 2 \times 1$$

(۱) مساوات کو ۲ میں ضرب کیا اور (۲) کو ۱ میں ضرب کیا

$$92 = 5 \times 4 + 1 \times 2$$

$$\text{تفریق کی} \quad \underline{83 = 5 \times 4 + 1 \times 1}$$

$$9 = 1 \therefore$$

اور چونکہ مساوات (۱) سی

$$21 = 5 \times 4 + 1 \times 1$$

$$\therefore 21 = 5 \times 3 + 1 \times 6$$

$$\therefore 21 = 15 + 1 \times 6$$

$$\therefore 6 = 15 - 21 = 1 \times 6$$

$$\therefore 6 = 1$$

$$(1) \dots 20 = 5 \times 4 + 0 \times 1$$

$$(2) \dots 25 = 5 \times 5 + 0 \times 1$$

مساوات (۱) کو ۲ میں ضرب کیا اور مساوات (۲) کو ۱ میں ضرب کیا

$$\therefore 100 = 5 \times 4 + 0 \times 1$$

$$\text{تفریق کی} \quad \underline{80 = 5 \times 4 + 0 \times 1}$$

$$20 = 0$$

$$\therefore 0 = 0$$

اور ادا مساوات سی یہ حاصل ہوتا ہے

$$5 \times 2 - 20 = 5 \times 2 - 20 = 10 - 10 = 0$$

$$\therefore 2 = 2$$

$$\therefore 10 = 10$$

$$m - 5 - 3 = 2 = 1 = 0$$

دونوں کو جمع کیا

$$\therefore 2 - 1 - 2 = 0 + 0$$

$$\therefore 1 = (1 - 2) = 0 + 0$$

$$\therefore 1 = \frac{0 + 0}{1 - 2}$$

اور دوسری مساوات سی کی قیمت یہ حاصل ہو

$$5 - 3 = 2 = 1 = 0 \Rightarrow \frac{0 + 0}{1 - 2} = 0$$

$$\therefore 2 = \frac{0 + 0}{1 - 2} = 0$$

$$\frac{0 + 0 + 0 + 0 - 0}{1 - 2} = 0$$

$$\frac{0 + 0}{1 - 2} = 0$$

$$5 - 2 = 3 \dots (1)$$

$$(2) \dots 4 = 5 + 1$$

ان مساواتوں سی یہ حاصل ہوتا ہے

$$(1) \dots 2 - 3 = 0$$

$$(2) \dots 4 = 0 + 5$$

مساوات (۱) میں ۲ کا سر آہر ۳ کو (۲) مساوات میں ضرب کیا اور (۲) مساوات میں ۲ کا سر آہر ۱ کو (۱) مساوات میں ضرب کیا

$$12 = 0 + 5 + 5$$

$$\underline{3 - 5 = 0 + 5 - 5}$$

ایضاً تفریق کی

$$\therefore 15 = 0$$

$$\therefore 3 = 0$$

اور چونکہ (۲) مساوات سی یہ حاصل ہوتا ہے

(1)  $14 = u + \frac{u+5}{3}$

(2)  $5 = s + \frac{s-4}{2}$

در نوں مساواتوں کو سسٹر خالص کیا

$28 = 2u + s + 5$

$35 = 2s - u$

یا  $28 = s + 2u$

(1)  $35 = s + 4u$

بہنچھی مساوات کو ہم میں ضرب کر منفوق نہ بنایا اور اوپر کی مساوات

کو آئین ضرب کر کے منفوق مقرر کیا

$140 = 52u + 28s$

$28 = s + 2u$

$42 = 52s$

$s = 2$

اور چونکہ  $5 - 35 = 2 - 14$  موافق مساوات (1) کے

$28 - 35 =$

$11 =$

یعنی  $11 = 0$

$2 = 12 - \frac{s+u}{3}$

$\frac{12}{3} = s + \frac{s+u}{3}$

(2) مساوات کو آئین ضرب کر کے اور (1) کو 3 میں ضرب کر کے اور

$28 = 510 + 5s + u$

(2)  $6 = 54 - s + u$

یا  $28 = 513 + u$

$6 = 50 - u$

$18 = 518$

$1 = s$

تفریق کی

(1)  $14 = u + \frac{u+5}{3}$

(2)  $5 = s + \frac{s-4}{2}$

اول مساوات کو 3 میں ضرب کیا اور (2) کو 5 میں ضرب کیا تو

$70 = 5u + 15$

تفریق کا عمل کیا  $44 = 514 - 15u$

$102 = 524$

$u = \frac{102}{5} = 2$

اور مساوات (1) سے یہ حاصل ہوتا ہے

$35 = 14 + 14 = 14 + 5u = 10$

$4 = 11 \therefore 35 = 10$

(1)  $14 = u + \frac{u+5}{3}$

(2)  $9 = \frac{u}{2} - s$

دوسری مساوات کو سسٹر خالص کیا تو یہ حاصل ہوا

$18 = 2u - 2s$  پہر اول مساوات کو اس مساوات کی ساتھ

کو ہم میں ضرب کیا

اور پہر کی مساوات کو 2 میں ضرب کر کے بہنچھی لکھا اور دوسری مساوات

$49 = 12 + 2s$

$314 = 12 + 6s$

تفریق کے  $124 = 12 - 528$

$190 = 14$

$10 = u$

اور جو سید مساوات دوسری کے  $\frac{u}{2} + 4 = 2$

$0 + 4 =$

$12 = 52$

$4 = s$

اور موافق مساوات (ط) کے  $5 + 6 = 11$   
 $5 + 6 =$

یہی  $11 = 11$   
 $6 = 5 + \frac{3-11}{2} \quad | 2$

$\frac{64}{2} = 32 - 11 = 21$

دو نمساواتوں کو ۲ میں ضرب کر کے کسر دور کی

$12 = 52 + 3 - 11$

$64 = 52 - 11 = 41$

یا  $12 = 52 + 11 \dots (1)$  میں ضرب

$64 = 52 - 11 = 41$

اوپر کی مساوات کو ۱۰ میں ضرب کیا اور نیچے کی مساوات کو ۲

$120 = 520 + 110$

تفریق کی  $132 = 52 - 11$

$34 = 52 - 18$

$\frac{1}{2} = \frac{34}{22} = 1.545$

$\frac{1}{2} = 1$

اور مساوات (۱) کے  $52 - 11 = 41$

$1 - 11 =$

$14 =$

$1 = 11$

$\frac{14+5+11}{5} = \frac{30-11}{3} \quad | 3$

$6 = \frac{1-11}{5} - 8$

کے  
 اول مساوات کو ۵ میں ضرب دی اور دوسرے کو ۵ میں ضرب دیکر

$30 + 52 + 11 = 93 = 52 - 11 = 41$

$30 = 5 + 11 - 11$

مجموعہ ایک طرف کیے اور معلوم ایک طرف

$3 = 52 - 52 - 11 - 11 = 11$

اور  $10 = 5 - 11 = 11$

یا  $3 = 52 - 11 = 41$

نیا

کو

تفریق

کی

مساوات

اور  $10 = 5 - 11 = 11$

نیچے کی مساوات کو ۹ میں ضرب کر مفرود منہ مقرر کیا اور اوپر کی مساوات

$90 = 59 - 11 = 48$

$3 = 52 - 11 = 41$

$84 = 52 - 4$

$3 = \frac{84}{28} = 3$

اور یہ سیدھا مساوات (ن) کے  $13 = 5 + 10 = 15$

دو مساواتوں کی حل کر نیچے طریقہ سے کہ دو نمساواتوں

سے ایک ہی جز تفریق کی قیمت نکالیں اور ان دو نو قیمتوں

کو باہم مساوی کہیں اس مساوات میں فقط ایک مجموعہ

مثلاً  $5 + 11 = 16 \dots (1)$

اور  $5 - 11 = 16 \dots (2)$

مساوات (۱) سے  $10 = 16 - 5$

اور مساوات (۲) سے  $5 + 11 = 16$

$5 - 10 = 5 + 11$

$16 - 10 = 52$

$6 =$

$3 = 6$

اور چونکہ  $5 + 11 = 16$

$3 + 3 =$

$6 =$

یعنی  $6 = 6$

مثال ۲ لا-۳ = ۱ ..... (۱) مساوات (۱) سی لا = ۳ (۵-۳)

لا-۳ = ۱ ..... (۲) مساوات (۲) سی لا = ۳ + ۵

مساوات (۱) سی لا = ۳ + ۵

مساوات (۲) سی لا = ۳ + ۵

۳ + ۵ = ۱ + ۳ + ۲

۳ + ۵ = ۲ + ۳ + ۱

۳ + ۵ = ۳ + ۲ + ۱

۳ + ۵ = ۴ + ۱

۳ + ۵ = ۵ + ۰

۳ + ۵ = ۶ + (-۱)

۳ + ۵ = ۷ + (-۲)

۳ + ۵ = ۸ + (-۳)

۳ + ۵ = ۹ + (-۴)

۳ + ۵ = ۱۰ + (-۵)

۳ + ۵ = ۱۱ + (-۶)

۳ + ۵ = ۱۲ + (-۷)

۳ + ۵ = ۱۳ + (-۸)

۳ + ۵ = ۱۴ + (-۹)

۳ + ۵ = ۱۵ + (-۱۰)

۳ + ۵ = ۱۶ + (-۱۱)

۳ + ۵ = ۱۷ + (-۱۲)

۳ + ۵ = ۱۸ + (-۱۳)

۳ + ۵ = ۱۹ + (-۱۴)

۳ + ۵ = ۲۰ + (-۱۵)

در چوک لا = ۳ + ۵ = ۸  
یعنی لا = ۸

۵ لا - ص = ۳ + ۵ ..... (۱)

۵ لا - ص = ۳ + ۵ ..... (۲)

مساوات (۱) سی لا = ۳ + ۵

مساوات (۲) سی لا = ۳ + ۵

۳ + ۵ = ۳ + ۵

یا ۳ + ۵ = ۳ + ۵

پیرا - ۳ = ۳ - ۳

۳ - ۳ = ۳ - ۳

۳ - ۳ = ۳ - ۳

در چوک لا = ۳ + ۵ = ۸

۳ + ۵ = ۳ + ۵

یعنی لا = ۳ + ۵ = ۸

۵ - لا = ۳ + ۵ ..... (۱)

۵ - لا = ۳ + ۵ ..... (۲)



مثلاً ل - ۲ = ۳ ..... (۱)      ۶ ل + ۵ = ۲ ب ..... (۱)

۶ ل + ۳ = ۲ ..... (۲)      ل + ۲ = ۳ ب ..... (۲)

مساوات (۱) سی ل = ۳ + ۲  
جب پہ قیمت لاکھی دوسری مساوات میں لکھیں  
یعنی بجای لاکھی دوسری مساوات میں ۳ + ۲

مساوات (۱) سی ل = ۲ ب - ۲

مساوات (۲) سی ل = ۲ ب + ۲ - ۲

∴ ۲ ب + ۲ - ۲ = ۲ ب - ۲

۲ ب - ۲ = ۲ ب - ۲

یا ۲ - ۲ = ۲ - ۲

∴ ۱ = ۱

اور چونکہ ل = ۳ ب - ۲  
یعنی ل = ۲

رکھیں تو یہ حاصل ہوتا ہے

۳ + ۲ = ۲

∴ ۳ - ۲ = ۲

∴ ۱ = ۱

اور چونکہ ل = ۳ + ۲

۳ + ۲ =

۵ =

یعنی ل = ۵

۲ - ۱ = ۴ - ۱ ..... (۱)

۴ + ۱ = ۳ ..... (۲)

(۲) مساوات سی ل = ۳ - ۱ جب اول مساوات

میں بجای لاکھی ۳ - ۱ رکھا

۱ - ۱ = ۴ - ۳ - ۱

∴ ۱ - ۱ = ۴ - ۳

∴ ۱ - ۱ = ۴ - ۳

یعنی ۱ = ۱

اور چونکہ ل = ۳ - ۱ = ۱ - ۱ = ۱

یعنی ل = ۱

۳ = ۱

۵ = ۱

دو مساواتوں کی گسر دور کی

۶ ل + ۳ = ۲ ..... (۱)

۵ ل - ۱ = ۲ ..... (۲)

مساوات (۱) سی ل = ۲

مساوات (۲) سی ل = ۲

∴ ۲ = ۲

∴ ۲ = ۲

∴ ۲ = ۲

اور ل = ۲ = ۲ = ۲

سوائی دو قاعدوں گذشتہ کی تیسرے اور چہرے  
دو مقدار مجہول دریافت ہو سکتی ہیں اور وہ قاعدہ  
پہلے ہی کہ ایک مساوات کی وسیلہ سے ایک طرف مجہول کے  
قیمت معلوم کر کے دوسری مساوات میں رکھیں اور  
اس ترکیب سے ایسی مساوات حاصل ہوگی جس میں  
ایک ہی مجہول رہے گا

اور دوسری مساوات سے  $3 - 5 = 8$  (1)  $\dots \dots \dots 6 = 5 - 8$

$8 - 3 \times 2 = 8 - 6 = 2$  (2)  $\dots \dots \dots 10 = 5 + 5$

$8 - 9 =$

$1 =$

یعنی  $1 = 1$

مضدین

اب ہم چند مساوات اور طرح اہل کرتی ہیں تاکہ مشق کی آسانی

$31 = 58 + \frac{2+5}{3} 4$

$142 = 510 + \frac{5+5}{3}$

دونوں مساواتوں کو گسری سے خالص کیا

$43 = 522 + 2 + 5$

$448 = 520 + 5 + 5$

یا  $41 = 522 + 5$  (1)

$443 = 520$

اور ہر کی مساوات کو ۴۰ میں ضرب کر کے مفروق من

بنایا اور پہلی کی مساوات کو مفروق مقرر کیا

$3620 = 5940 + 200$

تفریق کیا  $\frac{443}{2824} = \frac{520}{5954}$

$2824 = 5954$

$3 = 5$

اور موافق مساوات (1) کی  $522 - 41 = 8$

$42 - 41 =$

$19 =$

یعنی  $19 = 19$

(1)  $\dots \dots \dots 18 = 12 + \frac{5-42}{3} 6$

(2)  $\dots \dots \dots 19 = 14 + \frac{4+52}{3}$

اور ہر کی مساوات سے یہ حاصل ہوتا ہے

$5 + 6 = 11$  یہ قیمت لاکھی دوسری مساوات لکھے

$10 = 5 + 5 + 5$

$2 = 6 - 10 = 5 - 8$

$2 = 5$

اور  $8 = 2 + 6 = 5 + 6 = 11$

(1)  $\dots \dots \dots 5 = 1 - 03$

(2)  $\dots \dots \dots 4 = 02 + 5$

مساوات (1) سے  $5 = 1 - 03$  اور (2) سے  $4 = 02 + 5$  لکھا جائے گا

$9 = (1 + \frac{1}{3}) 2 + 5$

$9 = \frac{2+52}{3} + 5$

طریقہ کو سر میں ضرب کیا

$24 = 2 + 52 + 5$

$20 = 50$

$0 = 5$

اور چونکہ  $2 = \frac{4}{3} = \frac{1+5}{3} = \frac{1+5}{3}$

یعنی  $2 = 11$

(1)  $\dots \dots \dots 1 = \frac{1}{1} + \frac{2}{3} 5$

(2)  $\dots \dots \dots 8 = 5 - 3$

(1) مساوات سے ظاہر ہو گا کہ  $\frac{1}{3} = \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3}$

$3 = 11$

اور  $۳۳ = ۲۸ - ۴$  لا موافق (ط) یکے

$$۲۴ - ۲۸ =$$

$$۲۴ =$$

$$۸ = \frac{۲۴}{۳} = ۸$$

$$۲۲ = \frac{۳۶}{۳} + ۳۳$$

$$۲۰ = \frac{۳۶}{۳} - ۱۱$$

لیکن  
صل  
جائے

دونوں مساواتوں کی گسرد کو یکین تو یہ دو مساوات

$$۴۴ = ۳۶ + ۸$$

$$۱۰۰ = ۵۲ - ۵۰$$

کیا

بچی کی مساوات کو ۶ میں ضرب کیا اور دوسرے مساوات کو ۳ میں ضرب کیا

$$۶۰۰ = ۳۳۳ - ۳۰۰$$

$$۸۸ = ۵۱۲ + ۵۱۴$$

دونوں کو جمع کیا

$$۶۸۸ = ۵۳۴$$

$$۲ = ۵$$

اور پوسیلہ اول مساوات کی سولہ

$$\frac{۳۶}{۳} - ۲۲ =$$

$$۲ - ۲۲ =$$

$$۱۵ =$$

$$۵ = ۵$$

$$۱۰ : ۱ : ۱ : ۵ : ۵ : ۳ \dots (۱)$$

$$اور \frac{۱۰ - ۵}{۳} - \frac{۱۱}{۱۳} = \frac{۵ - ۵}{۲} - \frac{۱۲}{۳}$$

(۲) مساوات کو ۱۲ میں ضرب کر کے گسرد کی تو یہ حاصل ہوا

$$۳ + ۵۶ - ۴۱ = ۵۶ + ۳۰ - ۵۸$$

$$۷۴ = ۵۶ + ۱۱۷$$

$$۴ = \frac{۳ - ۵۲}{۳}$$

$$۵ - ۵۲ = ۸ \dots (ط)$$

$$۳ = \frac{۵ + ۳۳}{۳}$$

$$۹ = ۵ + ۳۳$$

$$۱۸ = ۳ + ۵۲$$

طرفین کو ۲ میں ضرب کیا

$$۸ = ۳ - ۵$$

موافق (ط) کی  
تفریق کی

$$۱۰ = ۵۰$$

$$۲ = ۱$$

$$۱۰ = ۲ + ۸ = ۳ + ۸ = ۵$$

$$۵ = ۵$$

$$۸ = \frac{۵}{۳} + \frac{۳۳ + ۵۲}{۴} \dots (۱)$$

$$اور \frac{۳۳ - ۵۶}{۲} = ۱۱ \dots (۲)$$

(۱) مساوات کی گسرد کر کے

$$۴۸ = ۵۲ + ۳۳ + ۵۲$$

$$یا ۴۸ = ۳۳ + ۵۲ \dots (ط)$$

اور (۲) مساوات سے گسرد کر کے تو

$$۲۲ = ۵۳ - ۵۰$$

$$لیکن ۴۸ = ۵۲ + ۳۳$$

بچی کی مساوات کو ۵ میں ضرب کر کے مفروق منہ مقرر کیا

اور دوسرے مساوات کو ۳ میں ضرب کیا

$$۲۴۰ = ۵۲۰ + ۱۵۰$$

$$۶۶ = ۵۹ - ۱۵$$

$$۱۶۸ = ۵۲۹$$

$$۶ = ۵$$

$348 = 594 - 510$   
 $222 = 528 - 594$   


---

 $590 = 504$   
 $10 = 5$   
 اور موافق (۱) کے  
 $42 + 510 = 552$   
 $42 + 100 =$   
 $222 =$   
 $6 = 5$   
 $\frac{52-42}{0} + 6 = \frac{2+4}{2} - 52$  ۱۳  
 اور  $\frac{1+42}{2} - \frac{1}{2} 22 = \frac{5-8}{2} - 4$   
 اول مساوات کو ۲۰ میں ضرب کر کے گسر دورگی  
 $58 - 412 + 120 = 10 - 50 - 520$   
 $38 - 100 = 114 - 520$   
 اور دوسری مساوات کو ۶ میں ضرب کر کے گسر دورگی  
 $2 - 44 - 124 = 52 + 14 - 422$   
 $140 = 52 + 530$   
 اس مساوات کو ۲۴ میں ضرب کیا تو  
 $3820 = 528 + 420$   
 $100 = 528 + 416$  موافق (۱) کے  
 بعد تفریق کی  
 $3480 = 4436$   
 $5 = 4$   
 اور چونکہ  $140 = 52 + 430$   
 $430 - 140 = 52$   
 $10 - 140 =$   
 $10 =$   
 $5 = 1$

یا  $34 = 53 + 46$  کے  
 $3 = 50 - 47$  بوسیدہ تناسب (۱)  
 اور پہلی مساوات کو ۳ میں ضرب کر کے مفروق منہ بنایا  
 اور چھٹی کی مساوات کو ۷ میں ضرب کر کے مفروق بنایا  
 $111 = 59 + 421$   
 $21 = 530 - 421$  تفریق کی  


---

 $132 = 522$   
 $3 = 5$   
 اور موافق تناسب کی  $50 = 3 + 47$   
 $10 =$   
 $12 = 43$   
 $2 = 4$   
 $\frac{10-5}{2} = \frac{4-10}{2} - \frac{2-4}{0}$  ۱۱  
 اور  $\frac{13+4}{2} = \frac{5+42}{8} - \frac{2+52}{3}$   
 اول مساوات کو ۶۰ میں ضرب کر کے گسر دورگی  
 $100 - 510 = 200 + 200 - 42 - 412$   
 $100 - 42 = 510 - 422$   
 اور دوسری مساوات کو ۲۴ میں ضرب کر کے گسر دورگی  
 $48 + 44 = 528 - 42 - 422 + 514$   
 $64 = 512 - 416$   
 اور  $42 = 510 - 42$  موافق (۱) کے  
 اب یہ بات ظاہر ہے کہ اگر اوپر کی مساوات کو ۸ میں ضرب کر کے  
 اور چھٹی کی مساوات کو ۳ میں ضرب کر کے تو انساں لاس کے  
 دو نمبر آئیں یگان ہو جائیں گے چنانچہ عمل سے ظاہر ہے

اس مساوات کو ۹ میں ضرب کیا

$$1149 = 1241 - 95 = 1149$$

موافق (۱) کے  $1149 = 1241 - 95 = 1149$

$$1241 = 95 + 1146$$

اور چونکہ  $4 = r$

$$131 = 119 - 95 = 131$$

$$131 - 121 =$$

$$10 =$$

$$8 = 0 ::$$

$$\frac{1 - 2r + 5r}{2} - \frac{1}{3} \cdot 18 = \frac{13 + 8 \cdot 0}{10} \quad | 5$$

$$110 + 55 = \frac{35 - 0 \cdot 4}{5} + 51 \cdot 0$$

اول مساوات کو ۱۰ میں ضرب کر کے کسر دور کی

$$130 + 540 = 1190 - 940 = 1190 + 540 = 130$$

$$1380 = 540 + 1181$$

تقسیم کیا  $1380 = 540 + 1181$

دوسری مساوات کو ۵ میں ضرب کر کے کسر دور کی

$$150 + 240 = 350 - 114 + 500 = 150$$

تقسیم کیا  $150 = 350 - 114 + 500 = 150$

$$(2) \dots 150 = 350 - 114 + 500$$

اب اگر مساوات (۱) کو ۵ میں ضرب کریں تو

$$125 = 140 + 525$$

$$155 = 142 - 525$$

$$420 = 142$$

$$10 = 0 ::$$

$$\frac{5 - 0}{4} + \frac{5 + 2}{3} - 1 = \frac{3 - 0 \cdot 8}{34} - \frac{54}{18} \quad | 3$$

$$اور 0 : 5 : 3 :: 2 : 3$$

اول مساوات کو مختصر کر کے لکھا تو یہ حاصل ہوا

$$\frac{5 - 0}{4} + \frac{5 + 2}{3} - 1 = \frac{1 - 0 \cdot 2}{18} - \frac{5}{9}$$

طرفین کو ۱۸ میں ضرب کیا

$$53 - 0 \cdot 3 + 54 - 18 = 1 + 0 \cdot 2 - 18 = 53 - 0 \cdot 3 + 54 - 18 = 53$$

$$2 - 0 = 0 \quad 2 - 0 = 0$$

موافق تناسب کے  $512 = 0 \cdot 2$

$$بعد جمع کرنے کے  $2 - 512 = 5 \quad 11$$$

$$2 = 5 ::$$

$$اور 0 = \frac{512}{2}$$

$$\frac{2 \times 12}{2} =$$

$$12 =$$

$$یعنی 0 = 12$$

$$\frac{54}{3} + 0 + 1 = \frac{0 + 2 - 53}{11} \quad | 12$$

$$اور \frac{1 + 53}{2} - \frac{152 + 0 \cdot 11}{12} = 0 - 2 - \frac{52 + 0 \cdot 3}{4}$$

اول مساوات کو ۳ میں ضرب کیا

$$54 + 0 + 33 = 0 \cdot 3 - 4 + 59 - 0 \cdot 3 = 54 + 0 + 33 = 54$$

$$- \frac{54}{3} + 24 = 59 - 0 \cdot 10 = 54$$

$$54 + 81 = 524 - 0 \cdot 20 = 54$$

$$(1) \dots 81 = 531 - 0 \cdot 20 = 81$$

اور دوسری مساوات کو ۱۲ میں ضرب کر کے کسر دور کی

$$6 - 518 - 152 + 0 \cdot 11 = 15 + 53 - 52 + 0 \cdot 3 = 6 - 518 - 152 + 0 \cdot 11 = 6$$

$$131 = 0 \cdot 14 = 131$$

اور موازن مساوات (۱) کی  $4 - 140 = 4$

$$4 - 140 =$$

$$40 =$$

$$15 = 5 \quad \therefore$$

۱۶

$$5x - 12 + 10 = \frac{18 + 12 - 3x}{5} - \frac{52 + 45}{4}$$

$$\text{اور } \frac{17 - 52 + 10x}{3} - 52 = 4 + \frac{50 - 12 + 45}{4}$$

اول مساوات کو ۳ میں ضرب کر کے دوسرے

$$52 - 10 + 10x - 12 = 24 + 42 + 18 - 15 + 10 + 52 + 53 - 10$$

$$10x = 518 + 518 \quad \therefore$$

$$10x = 524 + 520 \quad \therefore$$

$$42 + 518 - 112 - 522 = 512 + 510 - 39 + 112 \quad \therefore$$

$$25 = 513 - 1120 \quad \therefore$$

$$\text{اور } \frac{1030 = 5240 + 1120}{10} \text{ موازن (۱) کے}$$

$$1505 = 5301 -$$

طرفین کی علامتیں

$$1505 = 5301 \quad \therefore$$

$$5 = 5 \quad \therefore$$

$$102 = 518 + 518 \quad \text{اور}$$

$$518 - 102 = 52 \quad \therefore$$

$$54 - 22 = 52$$

$$30 - 22 =$$

$$8 =$$

۱۷

$$\frac{44 + 10 - 12}{12} - 10 = \frac{7 - 14}{3} - \frac{50 + 20}{4} + 1$$

$$\text{اور } \frac{5 + 12}{3} - 10 = \frac{7 - 14}{3} - \frac{50 + 20}{4} + 1$$

اول مساوات کو ۱۲ میں ضرب کر کے دوسرے

$$52 - 10 + 12x - 12 = 24 + 42 + 18 - 15 + 10 + 52 + 53 - 10$$

$$52 - 10 + 12x = 52 - 10 + 12x$$

$$52 - 10 = 52 - 10 \quad \therefore$$

اور تناسبی ہم مساوات حاصل ہوئی

$$52 - 10 + 12x - 10 = 52 - 10 + 12x - 10$$

$$\frac{5 + 12}{3} - 10 = \frac{7 - 14}{3} - \frac{50 + 20}{4}$$

اس مساوات کو ۹ میں ضرب کر کے

$$52 - 10 + 12x - 10 = 52 - 10 + 12x - 10$$

$$52 - 10 + 12x = 52 - 10 + 12x \quad \therefore$$

$$52 - 10 + 12x = 52 - 10 + 12x \quad \therefore$$

$$52 - 10 + 12x = 52 - 10 + 12x \quad \therefore$$

$$52 - 10 + 12x = 52 - 10 + 12x$$

$$3 = 3 \quad \therefore$$

$$138 = 53 - 1053 \quad \text{اور}$$

$$138 - 1053 = 53 - 1053$$

$$138 - 1053 = 53 - 1053$$

$$138 - 1053 = 53 - 1053$$

$$21 =$$

$$4 = 5 \quad \therefore$$







$$\frac{140 + 130 + 20 + 18}{2 - 14} = \frac{104}{8} + 50 \therefore$$

ظرفین کو ۱۴ - ۲ میں ضرب کیا

$$130 - 104 = 26 \therefore$$

۱۳۰ کو ظرفین سے اوڑا دیا

$$20 + 140 + 18 = \frac{104 - 1321}{4} \therefore$$

$$80 + 1320 + 132 = 104 - 1321 \therefore$$

$$1320 - 1321 = -1 \therefore$$

اب اگر مساوات (۱) کو ۲۰ میں ضرب کریں اور مساوات

(۲) کو ۳ میں ضرب کریں تو دونوں مساوات کو تین اشکال

کی ایک ن ہو جائیگی اس پر اسطی بعد ضرب کر کے یہ دو مساوات حاصل ہونگی

$$400 = 1320 - 5120$$

$$\frac{540 = 1444 - 5120}{\text{تفریق کی}}$$

$$1321 = 1444$$

$$3 = 14 \therefore$$

اور موافق مساوات (۱)  $14 + 130 = 540$

$$54 + 130 =$$

$$104 =$$

$$2 = 5 \therefore$$

جانا چاہی کہ جب طرح دو حرفت جھول کی قیمت دو مساواتوں

سے معلوم ہو جاتی ہے اس طرح تین حرفت جھول کی قیمت تین

مساواتوں سے معلوم ہو جاتی ہے اور قاعدہ حل کر لیا یہ ہے کہ

کہ تینوں مساواتوں میں سے دو مساوات لین اور ان دونوں

مساواتوں سے موافق قواعد گذشتہ کی ایک حرفت جھول

دور کر دیں اور اس عمل سے ایک ایسی مساوات حاصل

ہوگی جس میں دو حرفت جھول ہونگی پھر ان تینوں مساواتوں

میں سے ایک تو وہ مساوات لین جو باقی رہتی ہے اور ایک مساوات

اوں دونوں مساواتوں میں سے لین خیر عمل کیا ہے اور ان

دونوں مساواتوں میں سے موافق قواعد گذشتہ کی وہی حرفت

جھول دور کریں جو پہلی دو مساواتوں میں سے دور کیا تھا

پس اس عمل سے ایک دوسری مساوات حاصل ہوگی

جس میں دو جھول ہونگی پس دو دو جھول کی مساوات

حاصل ہوگی اور ان دونوں مساواتوں میں سے دو مقدار

جھول موافق قواعد گذشتہ کی دریافت ہو سکتی ہیں اور

جب دو جھول معلوم ہو گئی تو تیسرے مساوات میں معلوم ہو سکتا ہے کہ

کیونکہ ان تینوں مساواتوں میں سے کسی ایک میں دو قیمتیں

دو حرفت جھول کی رکھیں اور اس عمل سے ایک ایسی مساوات

حاصل ہوگی جس میں فقط ایک حرفت جھول ہوگا اور وہ

نہایت آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے

### مثال ۱

$$1 + r = 3 \dots \dots \dots (1)$$

$$1 + s = 2 \dots \dots \dots (2)$$

$$1 + r + s = 4 \dots \dots \dots (3)$$

مساوات (۱) اور مساوات (۲) کو جمع کیا

$$5 + 2 = 5 + 1 \therefore$$

$$5 + 1 = 2 \dots \dots \dots (4)$$

پھر مساوات (۱) میں سے مساوات (۳) کو تفریق کر

$$2 = 5 - 1 \therefore$$

$$12 = 5 \therefore$$

اور  $\frac{28 = 5 + 1}{20 = 5}$  موافق (۴) سے

(۱) ..... ۹۰ = r + s + u    ۳

(۲) ..... ۲۰ + s + r = ۴۰ + u    ۲

(۳) ..... ۱۰ = r + s    ۱

(۲) کو تفریق کیا .....  
 $۲۰ + r + s = ۲۰$

∴ r + s = ۰

مساوات (۱) کو ۲ میں ضرب کر کے مفروق منہ بنایا  
 اور مساوات (۲) کو مفروق مقرر کر کے تفریق کی

$۱۸۰ = r + s + u$

$۲۰ = s + r + u$

$۲۰ = r + s + u$

اس مساوات کو ۲ میں ضرب کیا

$۴۰ = r + s + u$

اور مساوات (۳) کو تفریق کیا

$۳۰ = s + r$

∴ r = ۳۰

اور r + s = ۱۰

s = ۰

∴ r = ۲۵

اور r + s + u = ۹۰

∴ u = ۹۰ - r - s = ۶۵

۳۵ =

(۱) ..... ۵۳ = r + s + u    ۴

(۲) ..... ۱۰ = r + s + u    ۳

(۳) ..... ۱۳ = r + s + u    ۲

مساوات (۲) سی (۱) کو تفریق کیا

∴ u = ۲۰

اور r = ۲۸ - u = ۸

اور s = ۳۱ - r - u = ۳

∴ r = ۳۱ - u = ۱۱

∴ s = ۱۱ - ۲۰ = -۹

∴ u = ۲۸ - s = ۳۷

∴ r = ۳

یعنی r = ۳

(۱) ..... ۷ = r + s + u    ۲

(۲) ..... ۲ = r + s + u    ۱

(۳) ..... ۴ = r + s + u    ۰

مساوات (۱) کو اور مساوات (۲) کو جمع کیا

$۷ = r + s + u$

$۲ = r + s + u$

∴ u = ۵

∴ s = ۲

مساوات (۲) کو اور (۳) کو جمع کیا

$۳ = r + s + u$

$۴ = r + s + u$

$۷ = r + s + u$

∴ r = ۳

∴ s = ۳

∴ u = ۱

اور r + s + u = ۷

کی قیمت ہے

∴ u = ۷ - r - s = ۱

$$۶۲ = ۳۳ + ۲۹ + ۰$$

$$۲۹ = ۳۳ + ۰ + ۰$$

$$(۴) \dots ۳۳ = ۲۹ + ۰$$

مساوات (۳) کو ۱۲ میں ضرب کر کے مساوی کر کے

$$\therefore ۱۲ \times ۶۲ = ۱۲ \times ۳۳ + ۱۲ \times ۰ + ۱۲ \times ۰$$

$$۷۴۴ = ۳۹۶ + ۰ + ۰$$

$$۰ - ۳۹۶ = ۳۹۶ - ۰ - ۰$$

$$\text{یا } ۰ - ۳۹۶ = ۳۹۶ + ۰ + ۰$$

$$۰ - ۳۹۶ = ۳۹۶ + ۰ + ۰$$

$$۰ - ۳۹۶ = ۳۹۶ + ۰ + ۰$$

$$\text{یا } ۰ = ۳۹۶$$

$$۰ = ۳۹۶ + ۰ + ۰$$

$$\therefore ۰ - ۳۹۶ = ۰ - ۳۹۶$$

$$۰ - ۳۹۶ = ۰ - ۳۹۶$$

$$۰ = ۰$$

$$\text{یعنی } ۰ = ۰$$

$$\text{اور } ۰ - ۰ - ۰ = ۰ - ۰ - ۰$$

$$۰ - ۰ - ۰ = ۰ - ۰ - ۰$$

$$۰ - ۰ = ۰ - ۰$$

$$۰ = ۰$$

$$\text{یعنی } ۰ = ۰$$

حسب طرح تین مساواتوں سے تین مجهولوں کی قیمتیں معلوم ہوتی ہیں اس طرح چار مساواتوں سے چار مجهولوں کی قیمت دریافت ہوتی ہے اور پانچ مساواتوں سے پانچ مجهولوں کی قیمت دریافت ہوتی ہے اور علیٰ ہذا تعین

$$۱۰۵ = ۳۳ + ۲۹ + ۰$$

$$۵۳ = ۳۳ + ۰ + ۰$$

$$(۴) \dots ۵۳ = ۳۳ + ۰$$

پہر مساوات (۳) میں سی (۲) کو تفریق کیا

$$۱۳۴ = ۳۳ + ۲۹ + ۰$$

$$۱۰۵ = ۳۳ + ۲۹ + ۰$$

$$۲۹ = ۳۳ + ۰$$

$$\text{موافق (۴) کے } ۵۳ = ۳۳ + ۰$$

$$۰ - ۲۳ = ۰ - ۲۳$$

تفریق کی

$$\text{یا } ۲۳ = ۰$$

$$\text{اور } ۲۹ = ۰ + ۰$$

$$\therefore ۰ - ۲۹ = ۰ - ۲۹$$

$$۲۳ - ۲۹ = ۰ - ۲۹$$

$$۰ = ۰$$

$$\text{یعنی } ۰ = ۰$$

$$\text{اور } ۰ = ۰ + ۰ + ۰$$

$$\therefore ۲۳ - ۰ - ۰ = ۰ - ۰ - ۰$$

$$۲۹ - ۰ = ۰ - ۰$$

$$۲۳ = ۰$$

$$\text{یعنی } ۰ = ۰$$

$$(۱) \dots ۲۹ = ۰ + ۰ + ۰$$

$$(۲) \dots ۶۲ = ۳۳ + ۲۹ + ۰$$

$$(۳) \dots ۱۰ = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}$$

مساوات (۲) سے (۱) کو تفریق کیا

ہر صورت میں دو دو مساواتوں سے ایک ایک حرف مجهول دور کرنا چاہیے اور اس عمل سے ایسی مساواتیں حاصل ہونگی جنہیں ایک ایک مجهول کم ہوگا اور پھر ان مساواتوں میں سے دو مساوات لیکر ایک ایک حرف دور کرنا چاہیے اور اس عمل سے ایسی مساواتیں حاصل ہونگی جنہیں دو دو مجهول کم ہونگی اور علیٰ انہما فیہ اس عمل کی رعایت کریں یہاں تک کہ ایک مجهول کی مساواتیں حاصل ہوں پس ان سے سب مجهولوں کی قیمتیں دریافت ہو جائیں گی۔  
 اب ہم مشق کیے واسطی مساواتیں بغیر حل کی ہرے لکھتی ہیں

$$\text{جواب } u = 2 \quad 519 + 13 = 59 - 52 \quad 1$$

$$\text{جواب } u = 3 \quad 53 + 2 = 26 - 52 \quad 2$$

$$\text{جواب } u = 4 \quad 55 + 1 = 35 - 52 \quad 3$$

$$\text{جواب } u = 12 \quad 11 + \frac{u}{2} - \frac{u}{3} = 10 + \frac{u}{4} + \frac{u}{5} \quad 4$$

$$\text{جواب } u = 4 \quad \frac{3 - 52}{3} = 2 + \frac{1+u}{5} \quad 5$$

$$\text{جواب } u = 2 \quad \frac{4 - 50}{2} + \frac{2 + u}{3} = 50 + \frac{2 + u}{3} \quad 6$$

$$\text{جواب } u = 4 \quad 14 + \frac{u - 22}{5} = 52 + \frac{2 + 52}{5} \quad 7$$

$$\text{جواب } u = 2 \quad \frac{10 + 58}{4} + \frac{11 - 52}{2} = 2 + \frac{1 - 4}{2} \quad 8$$

$$\text{جواب } u = 4 \quad \frac{0}{2} - \frac{4 - 510}{9} = \frac{u - 19}{3} + \frac{5 - 52}{18} \quad 9$$

$$\text{جواب } u = 3 \quad \frac{2 + u}{3} = \frac{1 + 52}{3} - u \quad 10$$

$$\text{جواب } u = 4 \quad 50 - 29 = \frac{u + 21}{3} - \frac{5 + 52}{8} \quad 11$$

$$\text{جواب } u = 3 \quad \frac{11 + 56}{3} - 10 = \frac{52 + 19}{5} - 52 \quad 12$$

$$\text{جواب } u = 3 \quad \frac{1 + 50}{2} - 4 = \frac{4 + 52}{9} - \frac{52 - 21}{3} \quad 13$$

$$\text{جواب } u = 4 \quad \frac{19 + 51}{8} = \frac{2 + 56}{14} - \frac{1 - 52}{2} + \frac{5}{8} \quad 14$$

$$\text{جواب } u = 4 \quad \frac{9 + 52}{2} - \frac{52 - 24}{2} = \frac{2 + 50}{2} - \frac{1 + 56}{11} \quad 15$$

$$\text{جواب } u = 5 \quad \frac{52 + 29}{12} - \frac{5 + 52}{3} - \frac{41}{12} = \frac{2 + 50}{6} - \frac{59 - 24}{3} + u \quad 16$$

جواب ل = ۹  $\frac{u-31}{2} - u3 = \frac{1+u10}{13} + \frac{1-u4}{11}$  ۱۷

جواب ل = ۲  $\frac{u}{2} - \frac{3}{5}4 = \frac{2-u4}{10} - \frac{1-u0}{2}$  ۱۸

جواب ل = ۹  $\frac{u4+24}{4} - \frac{1}{3}0 = \frac{2-u3}{2} - \frac{2-u3}{2}$  ۱۹

جواب ل = ۵۱  $\frac{u-49}{2} = \frac{u0-208}{3} - \frac{22-u2}{14}$  ۲۰

جواب ل = ۷  $\frac{u8-4}{2} - \frac{11+u2}{5} = \frac{2-u2}{13} - u2$  ۲۱

جواب ل = ۷۲  $\frac{u4-261}{2} - 9 = \frac{u3-202}{12} - \frac{1+u2}{24}$  ۲۲

جواب ل = ۹  $\frac{u9-229}{13} - \frac{13-u9}{2} = \frac{1+u3}{2} - \frac{9+u4}{8}$  ۲۳

جواب ل = ۲  $\frac{20+u9}{8} - u + \frac{1}{3}2 = \frac{u4-12}{9} - \frac{20+u3}{2} - 0$  ۲۴

جواب ل = ۹۹  $\frac{12-u3}{9} - 204 = \frac{u4+0}{4} - \frac{1}{2}13 + \frac{22-u4}{12}$  ۲۵

جواب ل = ۱۵  $\frac{14-u11}{8} - \frac{u0+9}{10} - 22-u4 = \frac{u4+12}{9} - \frac{12-u3}{14} - \frac{1}{10}+u2$  ۲۶

جواب ل = ۱۷  $\frac{20+u0}{2} - \frac{u10-14}{11} + \frac{2}{3}22 = \frac{19-u3}{14} - \frac{24+u3}{8} - \frac{u2+21}{3}$  ۲۷

جواب ل = ۳  $\frac{6-3}{2} = \frac{6}{2} = 0 - \frac{u+3}{2}$  ۲۸

جواب ل =  $\frac{5}{4} طص + \frac{2}{5} طس - \frac{2}{3} طس = \frac{2}{3} طس + طص - ۲ طص - ۶ طس$  ۲۹

جواب ل = ۸  $\frac{2+u14}{21} - \frac{1}{2}28 = \frac{20-u0}{2} - \frac{3+u19}{2} + \frac{13-u11}{20}$  ۳۰

جواب ل = ۲  $\frac{2+u}{3} - 8 = \frac{u}{2} + \frac{4-u2}{9} - \frac{2-u3}{4}$  ۳۱

جواب ل = ۱۱  $\frac{u310}{2} - u0 - u = \frac{u4-2}{13} - \frac{20}{24} - u$  ۳۲

جواب ل =  $\frac{طص}{2} - \frac{طع}{3} + طص = طص - \frac{طع}{3} + طص = طص - \frac{طع}{3} + طص$  ۳۳

جواب لا = $(ل+ق)$ ط ع ن	$ق = ل - ط + ع + س$	۳۴
ط ع ن + ص س ن + ص ع ن		
جواب لا = $س(ص-ع-ط)$	$ص - لا = ط س - ع س$	۳۵
ط - ص + ص س		
جواب لا = ۶	$\frac{۱-ل}{۲} + \frac{ل}{۴} + \frac{۶}{۱۲} = \frac{۲-۱}{۲} - \frac{۲}{۳}$	۳۶
جواب لا = ۸	$\frac{ل}{۲} + \frac{۱۲-۲ل}{۴-۲۵} = \frac{۲۰+۲۹}{۳۶}$	۳۷
جواب لا = ۴	$\frac{۸۶}{۲۵} + \frac{۲۴}{۵} = \frac{۲۰+۲۵}{۱۶-۲۴} + \frac{۳۶+۲۴}{۲۵}$	۳۸
جواب لا = ۴	$\frac{۴-۲۵}{۹} = \frac{۲+۲۱۲}{۱۶-۲۱۳} - \frac{۱۷+۲۱۰}{۱۸}$	۳۹
جواب لا = ۷	$\frac{۱۵+۲۹}{۱۴} = \frac{۲۱+۲۱۱}{۱۴+۲۶} + \frac{۱۹-۲۱۸}{۲۸}$	۴۰
جواب لا = ۴	$\frac{۱۶+۲}{۳۶} - \frac{۲-۱۱}{۱۲} = \frac{۲-۲۱۳}{۳۲-۲۱۷} - \frac{۲۱+۲۲}{۹}$	۴۱
جواب لا = ۴	$\frac{۲-۲}{۴۲} - \frac{۲۱۱}{۲۱} = \frac{۲}{۳} + \frac{۲۲+۲۲}{۶-۲۲۳} - \frac{۶+۲۷}{۲۸}$	۴۲
جواب لا = ۴	$\frac{۱}{۱۰} + \frac{۲-۲۲}{۶} - \frac{۲۲+۱}{۲۱} = \frac{۲-۷}{(۱-۲)۱۴} - \frac{۲۵-۶}{۱۵}$	۴۳
جواب لا = $\frac{ص}{س}$	$ط(ص+ل) = ط س + ص ل$	۴۴
جواب لا = $\frac{ط ع س ی}{س ن ص ع}$	$س ل = ط + ص ل$	۴۵
جواب لا = ط ع ن + ص س ن + ص ع ن	$ل = ط + ع + س + ص$	۴۶
ص ع ن ل		
جواب لا = $\frac{ط س}{ص}$	$(ط+ل)(ص+س) = ط(ص+س) + ل(ص+س)$	۴۷
جواب لا = ۴	تساوی کے صورت میں طرفین کے صفر کو برابر رکھ کر مساوات بنائی جائے	۴۸
جواب لا = ۳	$۵ : ۱۴ :: \frac{۹-۲۲}{۲} : \frac{۲+۱۰}{۵}$	۴۹
	$۲ : ۵ :: ۲۲ - \frac{۲۲+۱۵}{۳} : \frac{۲۴-۱۷}{۴}$	

جواب ل = ۵

$$1 : 10 + 4 :: \frac{12 + 4}{3 + 4} : 5 + 4 \quad 50$$

جواب ل = ۸

$$19 - 4 :: 1 : \frac{2 + 4}{22 - 4} \quad 51$$

جواب ل = ۲

$$\frac{18 - 4}{3 + 4} + 4 = \frac{9 + 4}{2 + 4} + 5 \quad 52$$

جواب ل = ۹

$$2 = 1 - \sqrt{35 + 4} \quad 53$$

جواب ل = ۴

$$8 = 4 + 2 - 4 \quad 54$$

جواب ل = ۹

$$\sqrt{1} + 2 = \sqrt{14 + 4} \quad 55$$

جواب ل = ۱۱

$$\sqrt{11} - 14 = 22 - \sqrt{11} \quad 56$$

جواب ل = ۲۵

$$1 + \sqrt{2} = 21 + 4 \quad 57$$

جواب ل = ط س - ع ن

$$\sqrt{ص - ل} = س - ع = \sqrt{ص + ل} - ن \quad 58$$

ط آ ص - ع (ی و ن)

$$\frac{\sqrt{ط + س}}{\sqrt{ص + ط}} = \sqrt{ط + س} \quad 59$$

جواب ل = ع

$$\frac{\sqrt{ط + س}}{\sqrt{ص + ط}} = \sqrt{ط + س} \quad 60$$

جواب ل = ط - ص

جواب ل =  $\frac{س - ط}{ص} - ع$

$$س = ع + \sqrt{(ط + ص)} \quad 61$$

جواب ل = ۴

$$\frac{\sqrt{4} + 10}{20 + 4} = \frac{2 - \sqrt{4}}{2 + 4} \quad 62$$

جواب ل =  $\frac{ط + ص}{ط - ص}$

$$\frac{ط}{ص} = \frac{\sqrt{ط + ص}}{\sqrt{ط - ص}} \quad 63$$

جواب ل = ۶

$$\frac{9 - \sqrt{4}}{4 + \sqrt{4}} = \frac{2 - \sqrt{4}}{2 + \sqrt{4}} \quad 64$$

جواب ل = ۵

$$\frac{2 - \sqrt{5}}{2} = 1 - \frac{4 - 5}{3 + \sqrt{5}} \quad 65$$

جواب ل = ۲

$$4 + 1 = 13 + 4 + 4 \quad 66$$

جواب ل =  $\frac{\sqrt{51} - \sqrt{49}}{2}$

۶۷  $\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{51}} = \sqrt{49} + \sqrt{51} + \frac{2}{\sqrt{51}}$

جواب ل = ۲۵

$\frac{36}{4-l} = 4+l + \sqrt{4+l} + \sqrt{4-l}$

مسادات دو مجهولون کی

جواب  $\begin{cases} ۸ = ۵ \\ ۳ = ۱ \end{cases}$

۱  $\begin{cases} ۵۳ = ۵۱۵ + ۵ \\ ۲۶ = ۵۳ + ۳ \end{cases}$

جواب  $\begin{cases} ۶ = ۵ \\ ۲ = ۳ \end{cases}$

۲  $\begin{cases} ۵۱ = ۳۹ + ۵۳ \\ ۹ = ۳۳ - ۵۸ \end{cases}$

جواب  $\begin{cases} ۱۲ = ۵ \\ ۱۶ = ۳ \end{cases}$

۳  $\begin{cases} ۶ = \frac{۳}{۴} + \frac{۵}{۴} \\ \frac{۲۰}{۳} = \frac{۳}{۴} + \frac{۵}{۴} \end{cases}$

جواب  $\begin{cases} ۱۶ = ۵ \\ ۲۴ = ۳ \end{cases}$

۴  $\begin{cases} ۱۹۴ = ۳۸ + \frac{۵}{۸} \\ ۱۳۱ = ۵۸ + \frac{۳}{۸} \end{cases}$

جواب  $\begin{cases} ۷ = ۵ \\ ۵ = ۳ \end{cases}$

۵  $\begin{cases} ۱۵ = ۳ - ۳ + \frac{۱-۵۳}{۵} \\ \frac{۲}{۳} = ۸ - ۵۲ + \frac{۵-۳۳}{۴} \end{cases}$

جواب  $\begin{cases} ۶ = ۵ \\ ۱۰ = ۳ \end{cases}$

۶  $\begin{cases} ۷۰ = \frac{۳۸}{۵} + ۵۹ \\ ۲۳ = \frac{۵۱۳}{۲} - ۳۷ \end{cases}$

جواب  $\begin{cases} ۳ = ۵ \\ ۲ = ۳ \end{cases}$

۷  $\begin{cases} ۵ - ۳۳ = \frac{۳-۵۲}{۴} - \frac{۵+۷}{۵} \\ ۵۵ - ۱۸ = \frac{۳-۵۲}{۴} + \frac{۷-۳۵}{۲} \end{cases}$



$$\left\{ \begin{array}{l} 4 = 0 \\ 0 = 5 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{r^2 + s^2}{12} - 2 = \frac{ur + sr}{2} - 1 + u \\ \frac{19 - s^2}{2} - 0 = \frac{sr - us}{2} - r - s \end{array} \right\}$$

۸

$$\left\{ \begin{array}{l} r = 0 \\ r = 5 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{11 + u^2}{14} + 0 + sr = \frac{u - 10}{2} + ur \\ \frac{r + sr}{2} + ur = \frac{s + ur}{2} - sr \end{array} \right\}$$

۹

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = 0 \\ r = 5 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4 + ur}{2} + s^2 = 1 + \frac{s^2 + ur}{12} - u \\ \frac{0 + s^2}{12} - \frac{1 + u}{4} = \frac{2 - us}{11} - \frac{s^2 - r^2}{2} \end{array} \right\}$$

۱۰

$$\left\{ \begin{array}{l} 9 = 0 \\ r = 5 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{19 - ur}{2} + r = \frac{u - sr}{2} + \frac{r^2 - u^2}{4} \\ \frac{s^2 + ur}{14} - \frac{9 + sr}{2} = \frac{2 - us}{8} - \frac{s + ur}{2} \end{array} \right\}$$

۱۱

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{s + 6r - sr}{br} = u \\ \frac{s + sr - br}{sr} = s \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u}{u + br} = \frac{b}{s + u} \\ s = s + ur + bu \end{array} \right\}$$

۱۲

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 = 0 \\ 9 = 5 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u - sr}{5} - \frac{u - sr}{2} - ur = \frac{9 - sr}{2} + \frac{4 + u^2}{11} \\ r : 0 :: r - sr : r + ur \end{array} \right\}$$

۱۳

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = 0 \\ r = 5 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1 + sr - u^2}{2} + 9 = \frac{0 - ur - s^2}{4} - \frac{r^2 + us}{2} \\ r : r :: ur + \frac{1 - sr}{2} : \frac{2 + u}{2} \end{array} \right\}$$

۱۴

$$\left\{ \begin{array}{l} r = 0 \\ 4 = 5 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 : r :: s + ur : s + u \\ \frac{1}{4} - \frac{\frac{u}{2} + r}{2} = \frac{sr - r^2}{2} - \frac{ur - s^2}{4} \end{array} \right\}$$

۱۵

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ q = s \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda - s + 0}{0} = \frac{s - z + ur}{10} = \frac{r + sr + ur}{1} \\ \frac{y + uz}{11} = \frac{s + u}{r} = \frac{\lambda - u0 + s9}{1r} \end{array} \right\} \quad 17$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r = 0 \\ 11 = s \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{r\lambda + s\lambda + ur}{4} = \frac{11 + s1r}{r} = \frac{ur - 10}{r} = \frac{u + \lambda - sr + ur}{1r} + 01r \\ \frac{1 - s + uz}{10} = \frac{0 - sr - 010}{1} = \frac{u4 - s0 + 1r}{0} = \frac{1\lambda + u4}{r} \end{array} \right\} \quad 16$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ub}{u-b} = 0 \\ \frac{ub}{u+b} = s \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{ub(u-r-b\lambda)}{u-b} = s0 + ur \\ ub(u+r) + u\cancel{u} = s\cancel{u}(s+u+b) + \frac{us}{u+b} - u^2 \end{array} \right\} \quad 18$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ r = s \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{14 - u0}{4} - \frac{1}{r}9 = \frac{11 + u4 + s\lambda}{1\lambda} + \frac{s + ur}{9} \\ r : 1 :: \frac{y + s9}{r} : \frac{r + sr + u0}{\lambda} \end{array} \right\} \quad 14$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ r = s \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{s}{r} = \frac{9 - s\lambda - ur}{1r} = \frac{s0 - ur}{r} \\ r\frac{1}{r} : r\frac{1}{r} : s\frac{1}{r} - \frac{s}{\lambda} - ur : 1\frac{1}{r} + \frac{s}{r} + \frac{u}{\lambda} \end{array} \right\} \quad 20$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r = 0 \\ 0 = s \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 11r + (9 - s)(1 + u) = (z + s)(0 + u) \\ 1 + sr = 10 + ur \end{array} \right\} \quad 21$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ q = s \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{r + ur}{r} + \frac{1}{r}r = \frac{s0 + ur}{4 - ur} + \frac{9 + u4}{r} \\ \frac{9 - sr + n}{0} + n = \frac{sr - u4}{1 - sr} + \frac{z + s\lambda}{1} \end{array} \right\} \quad 22$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ 0 = s \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda + ur}{r} = \frac{ur + sr}{s4 - r\lambda} - \frac{1}{r}r - ur \\ \frac{1}{4}r - \frac{1r + u1\lambda}{4} = \frac{sr - r1}{1 - ur} + ur \end{array} \right\} \quad 23$$

$$\begin{cases} y = u \\ 0 = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{r14 + s1A - 0rA}{r + sP - 0A} = 1 - s4 + 0r4 \\ 0r = \frac{r0 - s1 + 0r}{r + sP + 0r} \end{cases}$$

rP

$$\begin{cases} r = u \\ r = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{rA + s0 + 0A - s0r + 0r4}{r - 0r} = \frac{\frac{11}{r} + rP}{1 + 0r} + sP + 0P \\ \frac{1 \cdot A + s1A - 0A}{r + s4 + 0r} + sP = r + 0r \end{cases}$$

rO

$$\begin{cases} q = u \\ r = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{sP - 1r + 0A}{r + sP - 0r} = 1 + s4 + 0P \\ \frac{11 - s0q}{r - sP} = \frac{0r4 - 0r}{1 - sP} - 0r \end{cases}$$

r4

$$\begin{cases} q = u \\ z = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{r + \frac{11}{r}}{sP4} - \frac{s + 1q}{r} = \frac{z - u}{4} - \frac{z + 0r}{r} + \frac{r - u}{s2} \\ \frac{1r - 0r4 + 0q - 0r}{0} = \frac{14}{r} + 0A - s1 = \frac{1r}{r} + s10 - 0r \end{cases}$$

r6

$$\begin{cases} r = u \\ r = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{u}{14} - 0 = \frac{r - 0r}{1} - \frac{z + sP}{0} - \frac{s4 + \frac{0z}{r}}{0} \\ \frac{1}{4} : \frac{1}{r} :: \frac{1}{4} + \frac{r}{r} - \frac{u}{r} : \frac{1}{r} r + \frac{sP}{r} + \frac{0r}{r} \end{cases}$$

rA

$$\begin{cases} 1A = u \\ rP = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\frac{z}{r} - \frac{1}{2} - \frac{s}{0} - \frac{u}{r}}{\frac{1}{r} + \frac{u}{r}} = \frac{\frac{z}{r} - \frac{1}{2} - \frac{s}{0} - \frac{u}{r}}{\frac{1}{r} + \frac{u}{r}} = \frac{s0 + 0 - 1A}{2} - \frac{r + sP - 0r}{r} \\ \frac{1}{r} + \frac{u}{r} = \frac{z}{r} : \frac{r}{r} + \frac{z}{r} - \frac{u}{r} :: 10 + 0r - s : 10 + s - 0r \end{cases}$$

r9

$$\begin{cases} z = u \\ r = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1r + 0r + \frac{r4 - s0r}{11}}{\frac{4r}{r} + s0r} + s = \frac{r + s4 - s1r}{11} r \\ \frac{\frac{16}{r} + s0r}{r2 + s4} = \frac{0 - 0r}{4 + s} - \frac{0r}{r} \end{cases}$$

rO

$$\begin{cases} 14 = u \\ r0 = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} u - r \cdot \sqrt{A} = u - s \sqrt{A} - s \sqrt{A} \\ r : r :: u - r \cdot \sqrt{A} : u - s \sqrt{A} \end{cases}$$

rI

## مساوات درجہ دوم کی

جاننا چاہیے کہ مساوات درجہ دوم کی دوسرے مساوات کو کہتی ہیں جس میں حرف مجہول کی دوسری قوت ہو یعنی  
 اوسمین مجذوبہ مجہول کا پایا جاوے لیکن بعضی دفعہ ایسی مساوات کو بھی درجہ دوم کی مساوات کہتی ہیں جس میں نشان تہ قوت  
 ۲ سی زیادہ ہو مگر اوسمیں ایک شرط ہے اور وہ اگی میان کی جاوے گی واضح ہو کہ درجہ دوم کی مساوات دو طرح کی ہوتی ہیں ایک  
 مفرد اور ایک مرکب مفرد مساوات درجہ دوم کی دو ہوتی ہیں حسین حرف مجہول کا مجذوبہ ہی پایا جاوے یعنی مساوات اس طرح  
 کی ہو کہ اوسمیں حرف مجہول کا مجذوبہ پہلی اور حرف مجہول اول قوت ہی ہو مثلاً  $لا + ۹ = ۱۸$  مفرد مساوات درجہ دوم  
 کی ہے اس واسطے کہ اوسمیں حرف مجہول کی اول قوت ہفتین بائی جالی فقط مجذوبہ در مجہول کا ہے اور اس مفرد مساوات کا حل  
 کرنا آسان ہے قاعدہ اسکی واسطے یہ ہے کہ حرف مجہول کے مجذوبہ کو ایک طرف رکھیں اور مقدار معلومہ کو دوسری طرف  
 مساوات کی بجا میں پہرا کر حرف مجہول کا کچھ سہ نہ تو طرفین کا جذر لیں اور ان جذر دن کو مساوی کہیں اس عمل سے  
 حرف مجہول ایک طرف رہے اور مقدار معلومہ دوسری طرف ہوگی اور قیمت مجہول کی دریافت ہو جاوے گی اور اگر حرف مجہول کے  
 مجذوبہ کا کچھ سہ نہ تو طرفین مساوات کو اوس سہ پر تقسیم کریں بعد اسکی جذر لیں مثلاً  $لا + ۹ = ۱۸$   
 اس مساوات میں عدد ۹ کو دوسری طرف لیکھٹی تو لا برابر رہا عدد ۹ کے  
 $۹ - ۱۸ = لا$   
 $۹ =$   
 $۳ = لا$

طرفین کا جذر لیا تو لا برابر ہوا ۳ کے یعنی لا کی قیمت ۳ ہے

اگر مساوات یہ  $لا - ۲۵ = ۰$  ہو تو اسکا حل یہ ہے

$$۲۵ = لا$$

$$۴ = لا$$

$$۳ = لا$$

یعنی اس صورت میں لا کا سہ رہا اس واسطے طرفین مساوات کو ۵ پر تقسیم کیا اور بقسیم کرنی کی طرفین کا جذر لیا  
 یہ بات ظاہر ہے کہ اگر  $۳$  میں ضرب کریں تو حاصل ضرب ۹ ہوتا ہے اور اگر  $۳$  کو  $۳$  میں ضرب کریں تو بھی  
 حاصل ضرب ۹ ہوتا ہے اسکی معلوم ہوا کہ ۹ کا جذر ۳ ہے اور  $۳$  ہی ہے اور اسکی طرح سی ہر عدد میں یہی  
 بات بائی جاتی ہے کہ  $۴$  میں ضرب کریں تو ۱۶ ہوتے ہیں اور  $۴$  کو  $۴$  میں ضرب کریں تو بھی ۱۶ ہوتے  
 ہیں پس معلوم ہوا کہ ہر مجذوبہ کی واسطے دو جذر ہوتی ہیں ایک مثبت اور ایک منفی پس اگر یہ مساوات ہو  $لا = ۹$   
 تو ظاہر ہے کہ  $لا = ۳$  اور  $لا = -۳$  کیونکہ  $۳$  کی جذر کی برابر ہے اور جذر ۹ کا  $۳$  ہی ہے اور  $-۳$  ہی ہے  
 اسکی واسطے لا کی دو قیمتیں ہوں ہیں ایک  $+۳$  اور ایک  $-۳$  چونکہ مساوات درجہ دوم میں جذر یعنی

قیمت جمہول کی معلوم ہوتی ہے تو موافق بیان بالا کی یہ بات عمر با بیان کیجاتی ہے کہ درجہ دوم کی مساوات میں  
 جمہول کی دو قیمتیں ہوتی ہیں اب جانا چاہیے کہ مرکب مساوات درجہ دوم کی وہ ہوتی ہے جس میں حرف جمہول کے  
 دوسری قوت ہی ہو اور اول قوت ہی ہو مثلاً  $\lambda + \mu = \nu$  مرکب مساوات درجہ دوم کی ہے کیونکہ  
 اس میں  $\lambda$  حرف جمہول کی دوسری قوت ہی اور  $\mu$  کی اول قوت ہی ہے اس مساوات کی دیکھنی یہ ہے  
 یہ بات معلوم ہوتی ہے کہ اس میں حرف جمہول اس طرح واقع ہیں کہ ایک کا نشان قوت دوسری سے دو چند ہے  
 پس جس مساوات میں یہ بات واقع ہوگی وہ درجہ دوم کی قاعدہ سے حل ہو سکتی ہے مثلاً  $\lambda + \mu = \nu$   
 یہ بھی درجہ دوم کی موافق حل ہو سکتی ہے اس لیے اس میں زیادہ درجہ کی مساوات میں جنہیں شرط مذکور باہمی جاوے  
 درجہ دوم میں داخل ہیں کیونکہ اسی قاعدہ سے حل ہو سکتی ہیں جس سے درجہ دوم کی مساوات حل ہو سکتی ہے  
 مثلاً  $\lambda + \mu = \nu$  جس درجہ دوم کی مساوات ہے کہ اس میں نشان قوت حرف جمہول کا ایک سے  
 بہ نسبت دوسری دو چند ہے اس لیے یہ مساوات  $(\lambda + \mu) + (\lambda + \mu) = \nu$  بھی درجہ دوم کی  
 مساوات ہے کیونکہ اس میں  $(\lambda + \mu)$  کی چوتھی قوت ہے اور پہر اسی  $(\lambda + \mu)$  کی دوسری قوت ہی ہے  
 یعنی پہلا نشان قوت ایک مقدار کا جس میں حرف جمہول پایا جاتا ہے دو چند ہے نشان قوت اسی مقدار کی ہے  
 اس لیے  $\lambda + \mu = \nu$  بھی مساوات درجہ دوم کی ہے کیونکہ اس میں  $\lambda$  کی اول قوت ہے اور  $\mu$  کے  
 نصف ہے یعنی اول کی قوت دو چند ہے نسبت دوسری کے اس لیے  $\lambda - \mu = \nu$  کی درجہ دوم کے  
 مساوات ہے اور نیز اس لیے  $\lambda + \mu = \nu$  -  $\lambda + \mu = \nu$  سے بھی درجہ دوم کی مساوات ہے  
 کیونکہ اول مقدار میں دوسری مرتبہ کا نزول ہے اور دوسری مقدار میں اسی مقدار چوتھی مرتبہ کا نزول  
 اور علیٰ ذہن العیاس  $\lambda + \mu = \nu$  -  $\lambda + \mu = \nu$  درجہ دوم کی مساوات ہے کیونکہ اس میں  $(\lambda + \mu)$   
 کی اول قوت ہے اور پہر اسی مقدار کا خبر ہے یعنی نصف قوت ہے علیٰ ذہن العیاس اور صورتیں جنہیں شرط  
 مذکورہ بالا باہمی جاویں گے درجہ دوم کی مساوات میں داخل ہونگی جانا چاہیے کہ مرکب مساوات  
 درجہ دوم کی کئی قاعدوں سے حل ہو سکتی ہے مگر اول ہم ایسی باتیں بیان کرتے ہیں جنہیں اصل اور حقیقت  
 قاعدہ کی طالب علم کی ذہن نشین ہو جاویں گے ظاہر ہے کہ اگر  $\lambda + \mu$  کا مجذور کریں تو یہ حاصل ہوگا  
 $\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu$  اس میں  $\lambda$  کا مجذور ہے اور  $\mu$  کا مجذور ہے اور دو چند حاصل ہے  $\lambda + \mu$  کا  
 اور اس لیے جب دو مقداروں کی مجموعہ کا مجذور کرتے ہیں تو دو مقداروں کے مجذور اور دونوں کا  
 دو چند حاصل ہے اور اگر دو مقداروں کے حاصل تفریق کا مجذور کریں مثلاً  $(\lambda - \mu)$  کا تو  
 یہ حاصل ہوتا ہے  $\lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu$  اس میں بھی دو مقداروں کے مجذور ہیں اور دو چند حاصل ہے

ہر لیکن علامت اور چند سطح کی منفی ہر پس مجموعہ اور حاصل تفریق کے مجذور کو اس طرح کہہ سکتی ہیں  

$$\pm 2 ط + ط$$
 اس صورت کی دیگر منفی سے یہ بات معلوم ہوتی ہے کہ دو چند سطح کا نصف کر کے باقی کے  
 دو نذر فون کے مجذور کریں تو وہی دو مجذور حاصل ہوتے ہیں جو اس صورت میں موجود ہیں پس اگر ان میں سے  
 ایک مجذور نہ ہو مثلاً یہ صورت رہ جاوے  $\pm 2 ط$  لا تو ظاہر ہے کہ اگر اس کو مجذور کامل بنانا چاہیں تو  
 مرقع بیان بالا کی سطح کو نصف کریں یعنی  $\pm 2 ط$  لا کو نصف کریں پس  $\pm ط$  لا ہوگا اور اس میں سے  $\pm ط$  کا مجذور  
 زیادہ کر دین تو یہ صورت کامل مجذور بن جاوے گی اس طرح یہ صورت ہو  $\pm ط$  لا تو اس میں ہی سطح  
 کو نصف کریں پس  $\pm ط$  لا ہوگا اور اس میں سے  $\pm ط$  کا مجذور زیادہ کر دین تو یہ صورت حاصل ہوگی  

$$\pm ط + ط$$
 اور یہ  $(\pm ط)$  کا مجذور ہی یہاں یہ معلوم ہوا کہ اگر کوئی صورت جبر اس طرح  
 کی ہو کہ اس میں ایک مقدار کا مجذور ہو اور دوسرے اور جس مقدار کا مجذور ہی اس کی قوت ہی ہو تو وہ کامل مجذور  
 بن سکتی ہے اگر یہ قاعدہ جاری کریں کہ جس مقدار کی اول قوت ہی اس کی سر کو نصف کریں اور اس نصف کا مجذور  
 زیادہ کریں وہ اب جانا چاہیے کہ یہ اول قاعدہ جس مساوات درجہ دوم کی حل ہوتی ہے اس واسطے کہ وہ  
 مساوات میں اس قاعدہ سے کسی ایک طرف کامل مجذور ہو جاتی ہے اور دوسری طرف مقادیر معلوم رہ جاتی ہے  
 پس دو طرفوں کا مجذور کرنے سے ایک اول درجہ کی مساوات حاصل ہوتی ہے اور یہ اتنی قیمت مچھول کی  
 دریافت ہو جاتی ہے مثلاً مساوات درجہ دوم کی یہ ہے  $\pm ط = ط$  اب اس مساوات کو اس طرح  
 تبدیل کرنا چاہیے کہ اس میں  $\pm ط$  کا سر نہ رہی یعنی بجایے  $\pm ط$  کے  $\pm ط$  لے کر مجاوی پس اس تبدیلی کے  
 واسطے طرفین مساوات کو  $\pm ط$  پر تقسیم کیا اور ظاہر ہے کہ اس عمل سے مساوات میں کچھ فرق نہیں آسکتا  
 اس واسطے کہ یہ مساوات حاصل ہوگی  $\pm ط = ط$  اب اگر  $\pm ط$  اور  $\pm ط$  کو اس کی واسطے  
 مساوات سے غیر کریں تو یہ مساوات حاصل ہوگی  $\pm ط = ط$  اور اس طرح ہر مساوات درجہ  
 دوم کی اسی شکل کی طرف تخیل ہو سکتی ہے اب اس مساوات میں حرف مچھول کی اول قوت کا سر ص ہے پس اگر  
 ص کے نصف کا مجذور طرفین مساوات پر زیادہ کریں تو ظاہر ہے کہ اول طرف اس مساوات کی کامل مجذور ہو جاوے  
 اور دوسری طرف مقادیر معلوم رہ سکی اور چونکہ طرفین برابر برابر مقدار زیادہ ہوگی تو مساوات میں ہی کچھ  
 فرق نہیں آئے گا اس واسطے کہ  $\pm ط$  کا مجذور یعنی  $\pm ط$  دو طرف زیادہ کیا تو یہ مساوات حاصل ہوگی  

$$\pm ط = ط + ط$$

$$\pm ط = ط$$
 اس واسطے کہ  $\pm ط = ط$  مساوات میں  $\pm ط$  کا سر ص ہے بہ قیمت حرف مچھول کی ہے  
 مثال (۲)  $\pm ط + ط = ط$  اس مساوات میں  $\pm ط$  کا سر  $\pm ط$  ہے اس کی نصف کا مجذور یعنی  $\pm ط$

$$4 = \frac{34}{3} = \frac{0}{3} + \frac{31}{3} = 0 \quad \therefore$$

$$4 = 0 \quad \therefore$$

$$200 + 0 = 80 - 0 - 0 \quad 5$$

$$280 = 200 + 80 = 0 - 0 - 0 \quad \therefore$$

طرفین کو 3 پر تقسیم کیا

$$\frac{280}{3} = 0 - \frac{2}{3} = 0 \quad \therefore$$

طرفین پر  $\frac{1}{3}$  کا مجذور زیادہ کیا

$$\frac{1}{9} + \frac{280}{3} = \frac{1}{9} + 0 - \frac{2}{3} = 0 \quad \therefore$$

$$\frac{1}{9} + \frac{840}{9} =$$

$$\frac{841}{9} =$$

طرفین کا جذور لیا

$$\frac{29}{3} = \frac{1}{3} - 0 \quad \therefore$$

$$\frac{1}{3} + \frac{29}{3} = 0 \quad \therefore$$

$$10 = \frac{30}{3} =$$

$$10 = 0 \quad \therefore$$

$$20 + 0 = 8 + 0 - 0 \quad 4$$

$$32 = 8 - 20 = 0 - 0 - 0 \quad \therefore$$

$$32 = 0 - 0 - 0 \quad \therefore$$

$$\frac{32}{2} = 0 - \frac{2}{2} = 0 \quad \therefore$$

طرفین پر  $\frac{1}{2}$  کا مجذور زیادہ کیا

$$\frac{1}{4} + \frac{32}{2} = \frac{1}{4} + 0 - \frac{2}{2} = 0 \quad \therefore$$

$$\frac{1}{4} + \frac{32}{4} =$$

$$\frac{325}{4} =$$

طرفین کا جذور لیا

$$\frac{18}{2} \pm = \frac{1}{2} - 0 \quad \therefore$$

زیادہ کیا تو یہ مساوات حاصل ہوئی

$$0 + 0 + 1 = 1 + 1 = 2 = 3 + 1 = 4 \quad \text{طرفین کا جذور لیا تو یہ مساوات}$$

حاصل ہوئی  $0 + 1 = 1 = 2 \therefore 1 = 0$  یعنی عدد 1

قیمت جدول کی ہر مثال 3  $0 + 0 + 0 = 0 = 141$

اس مساوات میں لا کاسر 3 ہی اسواسطی 3 پر

طرفین مساوات کو تقسیم کیا تاکہ یہ سب سزابل ہو جائے۔

پس یہ مساوات حاصل ہوئی

$$0 + \frac{2}{3} = 0 = \frac{141}{3} \quad \text{اس مساوات میں 3 سے جدول}$$

کی اول قوت کا سر  $\frac{2}{3}$  ہی اور اس کا نصف  $\frac{1}{3}$  ہوا

اور اس نصف کا مجذور  $\frac{1}{9}$  ہوا پس جب  $\frac{1}{9}$  کو

طرفین پر زیادہ کیا تو یہ مساوات حاصل ہوئی

$$0 + \frac{2}{3} = \frac{1}{9} + \frac{141}{3} = \frac{1}{9} + 0 = \frac{1}{9} + 0 = 0 \quad \therefore$$

$$\frac{29}{3} =$$

پس طرفین کا جذور لیا تو یہ حاصل ہوا

$$0 + \frac{1}{3} = \frac{29}{3} = 0 - \frac{2}{3} = 0 \quad \text{یعنی } 0 = 0$$

مثال 2  $0 - 0 = 0 = 116$  تقسیم کیا

طرفین مساوات کو 2 پر تقسیم کیا

$$0 - \frac{0}{2} = 0 - \frac{116}{2} = 0 \quad \therefore$$

طرفین پر  $\frac{0}{2}$  کا مجذور زیادہ کیا

$$0 - \frac{0}{2} + \frac{116}{2} = \frac{0}{2} + 0 - \frac{0}{2} = 0 \quad \therefore$$

$$\frac{0}{2} + \frac{58}{2} =$$

$$\frac{58}{2} =$$

طرفین کا جذور لیا

$$0 - \frac{0}{2} = \frac{58}{2} = 0 \quad \therefore$$

طرفین کا جذر کیا

$$\frac{5 + \sqrt{21} \sqrt{12}}{12} \pm = \frac{5}{12} + \sqrt{\dots} \therefore$$

$$\frac{5 + \sqrt{21} \sqrt{12}}{12} \pm = \sqrt{\dots} \therefore$$

$$4 \quad 12 = \sqrt{12} + \sqrt{12}$$

اس مساوات میں بجای لاکھی لاکھی اور سجلا لاکھی لاکھی  
اسی واسطی لاکھی سرکا نصف کیا پس حاصل ہوا اسکا

مخبر طرفین پر زیادہ کیا

$$14 = 12 + 2 = 12 + \sqrt{12} + \sqrt{12} \therefore$$

طرفین کا جذر کیا

$$\sqrt{12} \pm = 2 \therefore$$

$$\sqrt{12} \pm = 2 - 12 \therefore$$

پھر طرفین کا جذر کیا

$$\sqrt{12} \pm = 2 \therefore$$

$$10 \quad 12 - 12 = 12$$

طرفین پر ۸ کی نصف کا مخبر زیادہ کیا

$$1024 = 14 + 1014 = 14 + \sqrt{14} + \sqrt{14} \therefore$$

طرفین کا جذر کیا

$$\sqrt{14} \pm = 14 \therefore$$

$$19 \quad 14 - 14 = 14 \therefore$$

طرفین کا کب کیا

$$\sqrt{14} \pm = 19 \therefore$$

$$\frac{5}{2} - 12 = \frac{5}{2} + \frac{12}{2} \pm = \sqrt{\dots} \therefore$$

$$\frac{5}{2} - 12 = \sqrt{\dots} \therefore$$

$$5 + 12 - 120 = 243 + 150 \therefore$$

$$243 - 120 = 123 \therefore$$

$$98 - 123 = 25 \therefore$$

$$\frac{98}{5} - \frac{25}{5} = \sqrt{\dots} \therefore$$

طرفین پر مخبر  $\frac{29}{10}$  زیادہ کیا

$$\frac{48}{5} - \left(\frac{29}{10}\right)^2 = \left(\frac{29}{10}\right) + \sqrt{\frac{48}{5}} \therefore$$

$$\frac{48}{5} - \frac{241}{100} =$$

$$\frac{1940}{100} - \frac{241}{100} =$$

$$\frac{1699}{100} =$$

طرفین کا جذر کیا

$$\frac{21}{10} \pm = \frac{1699}{100} \therefore$$

$$\frac{12}{5} \pm = \frac{21}{10} \pm \frac{1699}{100} \therefore$$

$$\frac{12}{5} \pm = \sqrt{\dots} \therefore$$

$$8 \quad 12 = 12 - 12 + \sqrt{12} + \sqrt{12}$$

طرفین کو  $\frac{1}{10}$  پر تقسیم کیا

$$\frac{12}{10} = \frac{12}{10} + \sqrt{\dots} \therefore$$

طرفین پر  $\frac{1}{12}$  کا مخبر زیادہ کیا

$$\frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} + \sqrt{\dots} + \sqrt{\dots} \therefore$$

$$\frac{2}{12} + \frac{1}{12} =$$

$$\frac{2 + \sqrt{21}}{12} =$$





$۲ یا ۱۲ = ۵ ± ۷ = ۱۲$  ∴

$\frac{۱}{۲} یا ۳ = ۵$  ∴

$۹ = \frac{۲}{۲} - \frac{۵}{۲} ۵$

طرفین کو ۲ میں ضرب کیا

$۵۴ = ۱۰۳ - ۵۲$

طرفین کو ۲ × ۲ میں ضرب کیا

$۱۶ - ۱۰۳ = ۱۰۳ - ۵۲$  ∴

طرفین پر ۳ کا مجدد زیادہ کیا

$۱۴ - ۱۰۳ = ۹ + ۱۰۳ - ۵۲$  ∴

طرفین کا جذریا

$۲۱ ± ۳ = ۱۰۳$  ∴

$۱۸ - ۲۴ = ۲۱ ± ۳ = ۱۰۳$  ∴

$\frac{۹}{۲} - \frac{۱}{۲} ۴ = ۱۰۳$  ∴

$\frac{۲ ± ۱}{۲ - ۱} \sqrt{۱۰۳} = ۵$  ∴

$۳ = \frac{۲}{۵} + \frac{۴}{۱+۵}$  ۶

$(۱+۵)۵۳ = (۱+۵)۲ + ۵۴$  ∴

$۵۳ + ۵۳ = ۲ + ۵۲ + ۵۴$  یا

$۵۳ + ۵۳ = ۲ + ۵۸$  ∴

$۲ = ۵۸ - ۵۳ + ۵۳$  ∴

$۲ = ۵۵ - ۵۳$  ∴

طرفین کو ۳ × ۳ میں ضرب کیا

$۲۴ = ۵۴۰ - ۵۳۶$  ∴

طرفین پر ۲ کا مجدد زیادہ کیا

$۴۹ = ۲۵ + ۵۴۰ - ۵۳۶$  ∴

طرفین کو ۶ میں ضرب کیا

$۶۶ + ۵۶ = ۶ - ۱۰$  ∴

$۶۶ + ۶ = ۵۶ - ۱۰$  ∴

$۷۲ =$

طرفین کو ۳ میں ضرب کیا

$۲۸۸ = ۱۵۲۴$  ∴

طرفین پر ۶ کا مجدد زیادہ کیا

$۳۶ + ۲۸۸ = ۳۶ + ۱۵۲۴$  ∴

$۳۲۴ =$

طرفین کا جذریا

$۱۸ ± ۶ = ۱۵۲$  ∴

$۱۲ - ۲۴ = ۱۵۲$  ∴

$۶ - ۱۲ = ۱۵۲$  ∴

$\frac{۷}{۳} = \frac{۱}{۵} + \frac{۵۲}{۳} ۴$

طرفین کو ۳ میں ضرب کر کے

$۷ - ۱۰ = ۳ + ۱۵۲$  ∴

$۳ - ۱۰ = ۱۵۲$  ∴

۱۰ کی سر کو چوں کیا یعنی ۲ کو ۳ میں ضرب کیا پس ۱۰ ہو گئے

پھر ۱۰ کو طرفین مساوات میں ضرب کیا

$۲۴ - ۱۰ = ۱۵۶ - ۱۶$  ∴

طرفین پر ۲ کا مجدد زیادہ کیا

$۲۵ = ۲۴ - ۲۴ = ۲۹ + ۵۵۶ - ۱۶$  ∴

طرفین کا جذریا

$۵ = ۷ - ۱۴$  ∴

کو اول مجهول کی برابر فرض کر کر وہی عمل جاری کریں جو پہلی صورت میں کیا گیا لیکن اس قاعدہ میں حرف مجهول کی مجذور کا سر آ کی سوا اور کچھ ہو مثلا یہ مساوات ہو لاء - ط لا = ح (۱)

پس موافق قاعدہ کی لایکے سر کو نصف کیا تو ط ہو اور اس کو نئی مجهول مثلا د کی ساتھ جمع کر لاکے برابر لکھا تو نئی مساوات یہ حاصل ہوگی

$$لا = د + ط$$

اور اسے لاکے قیمت یہ حاصل ہو لاء = د + ط +  $\frac{ط}{۲}$

پس صورت یقین لاء اور لاکے مساوات مفروض (۱)

میں رکھیں تو یہ مساوات حاصل ہوگی

$$د + ط + \frac{ط}{۲} - ط = ح$$

$$د + ط + \frac{ط}{۲} - ط = ح$$

$$د + \frac{ط}{۲} = ح$$

$$د = ح - \frac{ط}{۲}$$

$$د + ح = \frac{ط}{۲}$$

$$د = \sqrt{\frac{ط}{۲} + ح}$$

اور چونکہ موافق نئی مساوات (۲) کے

$$لا = د + ط :: لا = \sqrt{\frac{ط}{۲} + ح} + ط$$

$$لا + ط = لا$$

اس صورت میں علامت ط لاکے قیمت ہی پس موافق قاعدہ کی ط کو نئی مجهول مثلا د میں تفریق کر کر حاصل

$$۷۶ = ۵ - ۴ ::$$

$$۷۶ = ۵ - ۴ :: ۱۲ - ۲$$

$$۷ = ۲ - ۱ ::$$

یہ بات ظاہر ہے کہ اگر مرکب مساوات میں سی اول قوت حرف مجهول کی زایل ہو جاوے تو مفروضات حاصل ہوگی اور مفروضات میں فقط جذور یعنی سے مجهول قیمت دریا ہو جاتی ہے اس سوا سواقی میرا قاعدہ مرکب مساوات کی حل کر نیکیا ایسا ہے کہ اول قوت مقدار مجهول کے زایل ہو جاتی ہے اور مفروضات رجحانی ہے قاعدہ تیسرا ظاہر ہے کہ مرکب مساوات میں علامت دوسرے جز کی یعنی اول مقدار کی جس میں اول قوت مقدار مجهول کے باقی جاتی ہے قیمت ہوگی یا منفی اگر منفی ہو تو جاہی کہ اول قوت مقدار مجهول کی سر کو نصف کریں اور اس نصف کی ساتھ ایک اور نیا حرف مجهول فرض کر کر جمع کریں اور اس مجموعہ کو اول حرف مجهول کی برابر فرض کریں جو مساوات مفروض میں ہے اور اسے مساوات سے اول مجهول کی قیمت اور اس کی مجذور کی قیمت جس میں نیا مجهول یا یا جاوے دریافت کریں اور مساوات مفروض میں بجائے اول مجهول اور اس کی مجذور کی لکھیں اس عمل سے نئی مجهول کا فقط مجذور رجحان ہوگا اور جذور یعنی سی اول کی قیمت دریافت ہو جاوے گی اور پہلی مساوات سے اول مجهول کی قیمت ہی معلوم ہو سکتی ہے اور اگر علامت اول مقدار کی جس میں اول قوت باقی جاتی ہے مثبت ہو تو مجهول اول کی قوت کے سر کو نصف کر کر نئی حرف مجهول میں سے تفریق کریں اور اس حاصل تفریق

تفریق کر لاکے برابر لکھا تو یہ مساوات حاصل ہوئے  
صاف

$$ل = س - \frac{ط}{۲} \dots (1)$$

$$\therefore ل = س - \frac{ط}{۲} + س + \frac{ط}{۲}$$

پس جب یہ یقین آ اور ل کی مساوات مفروض میں لکھیں تو

$$س - \frac{ط}{۲} + س + \frac{ط}{۲} = (س - \frac{ط}{۲}) + س$$

$$\therefore س - \frac{ط}{۲} + س + \frac{ط}{۲} = س + س$$

$$\therefore س = س$$

$$\therefore س + س = س$$

$$\therefore س = \sqrt{س + \frac{ط}{۲}}$$

اور موافق نئی مساوات (۱) کی ل = س - ط

$$\therefore ل = س - \sqrt{س + \frac{ط}{۲}}$$

$$۱۲ = ل - ۲$$

اس صورت میں لاکے سر آہی اور علامت منفی ہے

پس  $\frac{۱}{۲}$  کو رکھ کر کی ساتھ صحیح کر لاکے برابر فرض کیا

تو یہ حاصل ہوا ل = س + ط

$$\therefore ل = س + ط + س + \frac{ط}{۲}$$

$$\therefore ل - ۲ = ل = س + ط + س + \frac{ط}{۲} - ۲ = ۱۲$$

$$\therefore س - \frac{ط}{۲} = ۱۲$$

$$\therefore س = \frac{۲۹}{۲} = \frac{۱}{۲} + ۱۲$$

$$\therefore س = \frac{۲۵}{۲}$$

اور چونکہ ل = س + ط

$$\therefore ل = س + ط = \frac{۲۵}{۲} + \frac{۲}{۲} = ۱۳$$

$$۱۵ = ل - ۲$$

$$\therefore ل = ۱۷$$

فرض کیا کہ ل = س + ط

$$\therefore ل = س + ط + س + \frac{ط}{۲}$$

$$\therefore ل - ۲ = ل = س + ط + س + \frac{ط}{۲} - ۲ = ۱۵$$

$$\therefore س = \frac{۱۵}{۲} = ۷ \frac{۱}{۲}$$

$$\therefore س + ط = ۱۲ = \frac{۱۲}{۱} = \frac{۱۲}{۲} + \frac{۱۲}{۲}$$

$$= \frac{۱۲}{۲}$$

$$\therefore س = \frac{۱۱}{۲}$$

اور چونکہ ل = س + ط

$$۱۵ = س + ط$$

$$\therefore ل = ۱۵ = س + ط$$

$$۴۰ = ل + ۶$$

فرض کیا کہ ل = س - ط

$$\therefore ل = س - ط + س + ط = ۴$$

$$\therefore ل + ۶ = ل = س - ط + س + ط = ۴ + ۶ = ۱۰$$

$$\therefore ل = ۱۰ = س - ط$$

$$\therefore ل = ۹ = س - ط$$

$$\therefore س = ۷$$

اور چونکہ ل = س - ط

$$۱۰ = س - ط$$

یعنی ل = س - ط

$$۶ - ل = ل = ۰ \text{ اس صورت میں مجال کی ناہی}$$



پہر مساوات (۱) کی دو گنی کو (۲) مساوات سے تفریق کیا

$$8 - 2 = 5 + 2 + 2 - 2$$

$$6 - 2 = 5 - 2$$

لیکن  $6 - 2 = 5 + 2$

دو نو کو جمع کیا

$$6 - 2 = 5 + 2$$

$$\frac{6 - 2}{4} = 1$$

اور جن دو نو مساواتوں کو جمع کیا ہے اگر اوہیں کہ تفریق

$$\frac{6 - 2}{4} = 1$$

$$3 + 1 = 5 + 2 + 1 \dots (1)$$

$$4 + 2 = 5 + 2 + 2 \dots (2)$$

دو نو کو جمع کیا  $3 + 4 = 5 + 2 + 2$

$$6 = 5 + 2$$

طرفین کو لاین ضرب کیا  
طرفین سے تفریق کیا  
 $6 = 5 + 2$

$$2 = \frac{12}{6}$$

$$6 = 5 + 2$$

$$6 - 6 = 5$$

$$4 = 2 + 2$$

$$4 = 5 + 2 \dots (1)$$

$$4 = 5 + 2 \dots (2)$$

مساوات (۱) کا مجددور کیا اور اس مجددور سے

(۲) مساوات کا چرگنا تفریق کیا

$$8 - 2 = 5 + 2 + 2$$

$$6 - 2 = 5 + 2$$

جنر یا  $6 - 2 = 5 + 2$

$$6 - 2 = 5 + 2$$

لیکن  $6 = 5 + 2$  سبک (۱) مساوات کی پہر جمع کیا

$$6 - 2 = 5 + 2$$

$$\frac{6 - 2}{4} = 1$$

اور جن مساواتوں کو جمع کیا ہے اگر اوہیں تفریق کریں

$$\frac{6 - 2}{4} = 1$$

$$5 + 2 = 5 + 2 \dots (1)$$

$$6 + 2 = 5 + 2 \dots (2)$$

مساوات (۱) کے مجددور کو (۲) مساوات سے

دو جن میں سے تفریق کیا

$$6 - 2 = 5 + 2$$

$$6 - 2 = 5 + 2$$

$$6 - 2 = 5 + 2$$

طرفین کا جنر یا

$$6 - 2 = 5 + 2$$

لیکن  $6 = 5 + 2$  سبک (۱) کی کو جمع تفریق کر قیمت لا

$$6 - 2 = 5 + 2$$

$$\frac{6 - 2}{4} = 1$$

$$\frac{6 - 2}{4} = 1$$

$$\sqrt{\frac{p}{l}} - \sqrt{\frac{p}{l}} = 2 \sqrt{\frac{p}{l}} \quad \therefore$$

$$\sqrt{\frac{p}{l}} - \sqrt{\frac{p}{l}} = \frac{p}{2} \quad \text{طرفین کا مجذور کیا}$$

$$\frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p}{l}} - \sqrt{\frac{p}{l}} \quad \therefore$$

$$\frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p}{l}} + \sqrt{\frac{p}{l}} = \frac{p}{2} \quad \text{جذریا}$$

$$\frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p}{l}} \quad \therefore$$

$$\frac{p^2}{4} = \frac{p}{l} \quad \therefore$$

$$\frac{p}{2} = \frac{p}{l} + \frac{p}{l} \quad 4$$

لا کو جذور اندھ کیا

$$\frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p}{l}} + \frac{p}{2} \quad \therefore$$

$$\sqrt{\frac{p}{l}} - \frac{p}{2} = 1 - \sqrt{\frac{p}{l}} \quad \therefore$$

طرفین کا مجذور کیا

$$\frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} = 1 - \frac{p}{2} \quad \therefore$$

$$1 - \frac{p^2}{4} = \frac{p}{2} \quad \therefore$$

$$1 - \frac{p^2}{4} = \frac{p}{2} \quad \therefore$$

$$\sqrt{1 - \frac{p^2}{4}} = \frac{p}{2} \quad \therefore$$

$$1 - \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} \quad \therefore$$

$$\frac{4}{4} - \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} \quad \therefore$$

ساوات (1) سے دو چند (2) مساوات کا تفریق کیا

$$\frac{1}{4} = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} \quad \therefore$$

$$\frac{1}{4} = (p - p) \quad \text{یعنی}$$

$$5 = \sqrt{5} + \sqrt{5} \quad (1) \dots \dots$$

$$1 = \sqrt{1} - \sqrt{1} \quad (2) \dots \dots$$

دونوں مساواتوں کو جمع کیا

$$4 = \sqrt{5} + \sqrt{1} \quad \therefore$$

$$3 = \sqrt{5} - \sqrt{1} \quad \therefore$$

طرفین کا مربع کیا

$$16 = 5 + 1 \quad \therefore$$

اور مساوات (2) کو (1) سے

$$3 = \sqrt{5} + \sqrt{1} \quad \therefore$$

$$2 = \sqrt{5} - \sqrt{1} \quad \therefore$$

$$8 = 5 \quad \therefore$$

$$\frac{p^2}{4} = \sqrt{5} + \sqrt{1} + \sqrt{5} + \sqrt{1} \quad \therefore$$

$$p^2 = \sqrt{5} + \sqrt{1} + \sqrt{5} + \sqrt{1} \quad \therefore$$

$$p^2 - \sqrt{5} - \sqrt{1} = \sqrt{5} + \sqrt{1} \quad \therefore$$

طرفین کا مجذور کیا

$$p^2 + \sqrt{5} + \sqrt{1} = \sqrt{5} + \sqrt{1} + \sqrt{5} + \sqrt{1} \quad \therefore$$

$$p^2 = \sqrt{5} + \sqrt{1} \quad \therefore$$

$$\frac{p^2}{4} = \sqrt{5} + \sqrt{1} \quad \therefore$$

$$\frac{p^2}{4} = \sqrt{5} + \sqrt{1} \quad \therefore$$

$$\sqrt{\frac{p^2}{4}} = \sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{1}} \quad \therefore$$

$$\frac{p}{2} = \sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{1}} \quad \therefore$$

طرفین کا مجذور کیا

$$\frac{p^2}{4} = \sqrt{5} + \sqrt{1} = \sqrt{5} + \sqrt{1} \quad \therefore$$

∴ ۳ = ۵ - ل طرفین کا جذریا

∴ ل - ۵ = ۳ - ۵ یا - ۵

اور چونکہ ل - ۵ = ۳ - ۵ (۳ = ۵ - ل) یا - ۵ = ۳ - ۵

یعنی ۳ = ۵ - ل

∴ ۳ = ۵ - ل

اور ل = ۳ - ۵ = -۲

۲۸ =  $\frac{۵}{۲}$

۲۴ =  $\frac{۵}{۱۸}$

اول مساوات دوسری پر تقسیم کیا

∴  $\frac{۲۸}{۲۴} = \frac{۵}{۱۸} \times \frac{۱۸}{۵}$

∴ ۲ =  $\frac{۱۸}{۵}$

∴ ۲ = ۵

اور موافق دوسری مساوات کی  $\frac{۲۴}{۱۸} = \frac{۵}{۱۸}$

∴  $\frac{۲۴}{۱۸} = \frac{۲ \times ۵}{۱۸}$

∴ ۲۴ = ۲ × ۵

∴ ۱۲ = ۵

∴ ۱۲ = ۵

۱۳ =  $\frac{۶ - ۵۳ + ۱۸}{۱۸ + ۲ + ۵}$

کسر دور کی

∴  $\frac{۱۸}{۵} + ۲ + ۵ = ۶ - ۵۳ + ۱۸$

∴  $\frac{۱۸}{۵} + ۹ = ۵۲ + ۱۸$

∴ ۱ = (۵ - ل) طرفین کا کبڑیا

∴ ل - ۵ = ۱ - ۵

جب قیمت ل = ۱ (۱ مساوی اور (۲) میں

۱۳ = ۵ + ل

۱۲ = ۵ + ل

۲۵ = ۵ + ۵ + ل

طرفین کا جذریا

∴ ۵ = ۵ + ل

لیکن ل = ۵ - ۱

∴ ۲ - ۵ = ۵ - ۱

∴ ۲ - ۵ = ۵ - ۱

اور اگر ل + ۵ میں سے ل - ۵ کو تفریق کریں

تر ۴ - ۵ = ۵ - ۱

∴ ۳ - ۵ = ۵ - ۱

۱) ل - ۵ = ۵ - ۱ ..... (۱)

۲) ل - ۵ = ۳ - ۵ ..... (۲)

مساوات (۱) کو ل پر تقسیم کیا اور (۲) پر تقسیم کیا

تو یہ دو مساوات میں حاصل ہوئیں

∴  $\frac{۵۲ - ۵}{۵} = ۱ - ۵$

∴  $\frac{۵۲}{۵} = ۶ - ۵$

∴  $\frac{۵۲}{۵} = \frac{۵۲ - ۵}{۵}$

طرفین کو کسر دور کی

∴ ۲۳ = ۵۲ - ۵

∴ ل = ۲۳ طرفین کو ۳ پر تقسیم کیا



$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{p}{s}} \cdot u = u + p \quad \therefore \\ & u - \sqrt{\frac{p}{s}} \cdot u = p \quad \therefore \\ & u \left( 1 - \sqrt{\frac{p}{s}} \right) = p \quad \therefore \\ & u = \frac{p}{1 - \sqrt{\frac{p}{s}}} \quad \therefore \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \cdot u &= \frac{1}{u+p} + \frac{1}{p} \quad | \cdot u \\ \frac{1}{s} \cdot u &= \frac{1}{u+p} \left( \frac{1}{u} + \frac{1}{p} \right) \quad \therefore \\ \frac{1}{s} \cdot u &= \frac{1}{u+p} \left( \frac{u+p}{u \cdot p} \right) \quad \therefore \\ 1 + \frac{1}{u} &= \frac{1}{p} (u+p) \quad \text{یا} \end{aligned}$$

طرفین کا  $\frac{1}{u} + 1$  مرتبہ کا نزول یا

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+u} \left( \frac{p}{s} \right) \cdot u = u + p \quad \therefore \\ & \frac{1}{1+u} \left( \frac{p}{s} \right) \cdot u = p \quad \therefore \\ & u \left( \frac{p}{s} \right) \left( 1 - \frac{1}{1+u} \right) = p \quad \therefore \end{aligned}$$

$$u = \frac{p}{\frac{u}{1+u}} \quad \therefore$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+u} \cdot \frac{p}{s} &= \frac{1}{u} \cdot \frac{p}{s} \quad \text{یا} \\ \frac{1}{1+u} &= \frac{1}{u} \quad \therefore \end{aligned}$$

طرفین کو لاین ضرب کیا

$$\begin{aligned} & \frac{p}{s} \cdot u = (u+p) \cdot u \quad \therefore \\ & \frac{p}{s} = u \quad \therefore \\ & p = u \cdot s \quad \therefore \\ & p \pm u = u \quad \therefore \end{aligned}$$

$$\frac{u}{u+p} \sqrt{\frac{p}{s}} = \frac{p}{u+p} \sqrt{2 + \frac{p+u}{u}} \quad | \cdot u$$

طرفین مساوات کو لاین ضرب کیا

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{p}{s}} &= \sqrt{2 + \frac{p+u}{u}} \quad \therefore \\ \sqrt{\frac{p}{s}} &= \sqrt{2 + \frac{p}{u} + 1} \quad \text{یا} \\ \sqrt{\frac{p}{s}} &= \sqrt{\frac{p}{u} + 2 + 1} \quad \text{یا} \\ \sqrt{\frac{p}{s}} \pm \sqrt{2 + 1} &= \sqrt{\frac{p}{u}} \quad \therefore \\ \sqrt{\frac{p}{s}} \pm 1 &= \sqrt{\frac{p}{u}} \quad \therefore \end{aligned}$$

طرفین کا مجذور کیا

$$\begin{aligned} (1 \mp \sqrt{\frac{p}{s}})^2 &= \frac{p}{u} \quad \therefore \\ \frac{p}{(1 \mp \sqrt{\frac{p}{s}})^2} &= u \quad \therefore \end{aligned}$$

$$\frac{1}{s} \sqrt{\frac{p}{s}} = \frac{1}{p} \sqrt{2 + \frac{p+u}{u}} + \frac{1}{u} \sqrt{2 + \frac{p+u}{u}} \quad | \cdot u$$

اول طرف کو اس طرح لکھ سکتے ہیں  $(\frac{1}{p} + \frac{1}{u}) \sqrt{2 + \frac{p+u}{u}}$

$$\sqrt{\frac{p}{s}} = \sqrt{2 + \frac{p+u}{u}} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{u} \right) \quad \therefore$$

$$\sqrt{\frac{p}{s}} = \sqrt{2 + \frac{p+u}{u}} \left( \frac{u+p}{u \cdot p} \right) \quad \text{یا}$$

$$\frac{p}{s} = (u+p) \left( \frac{p}{u \cdot p} \right) \quad \therefore$$

طرفین مساوات کا  $\frac{p}{s}$  مرتبہ کا نزول یا

14  $ل + ک + و = ۲۱ \dots\dots (۱)$

$لآ + کآ = ۳۳۳ \dots\dots (۲)$

اول مساوات کا جذور کیا

$لآ + کآ = ۲ + لآ + کآ = ۲۳۱$

$لآ + کآ = ۲۳۳$  موافق (۲) کے

$۲ لآ = ۲۳۱ - ۲۳۳ = -۲$  تفریق کے

اس حاصل تفریق کو مساوات (۲) سے تفریق کیا

$لآ - کآ = ۲۲۵ - ۲۳۳ = -۸$

طرفین کا جذور کیا

$ل - ک = ۲ - ۸ = -۶$

لیکن  $ل + ک = ۲۱$  تفریق کی

$۳۶ یا ۶ = ۲۲$

$۱۸ یا ۳ = ۹$

اور جن مساواتوں میں تفریق کی گرائی تو

تو  $۳ ل + ۳ ک = ۶۶$

$ل + ک = ۲۱$  یا  $۱۸$

$ل = ۱۸/۴$  یا  $۳/۳۲$  یا  $۲/۱۰۸$

$۳ ل + ۳ ک = ۱۸۰ \dots\dots (۱)$

$لآ + کآ = ۱۸۹ \dots\dots (۲)$

مساوات (۱) کو ۳ میں ضرب کر کے (۲) مساوات

کے ساتھ جمع کیا تو یہ حاصل ہوا

$لآ + کآ + ۳ لآ + ۳ کآ = ۲۴۹$

طرفین کا کعب کیا

$ل + ک = ۹ \dots\dots (۳)$

اول مساوات سے یہ حاصل ہوتا ہے

$\frac{ل}{لآ} = \frac{ک}{کآ} = \frac{و}{وآ}$  یا  $\frac{ل}{لآ} = \frac{ک}{کآ} = \frac{و}{وآ}$

طرفین مساوات کا  $\frac{ل}{لآ} - \frac{ک}{کآ}$  طرفین کا جذور کیا

$\frac{ل - ک}{لآ - کآ} = \frac{ل - ک}{لآ - کآ}$

18  $ل + ک = ۱۳ \dots\dots (۱)$

$ل + ک = ۵ \dots\dots (۲)$

مساوات (۲) کا جذور کیا

$۲ ل + ۲ ک = ۱۰$

موافق (۱) کے  $ل + ک = ۱۳$

تفریق کے  $ل - ک = ۱۲$

مساوات (۱) میں  $ل + ک = ۱۲$  تفریق کیا

$ل - ک = ۱۲ - ۱۳ = -۱$

طرفین کا جذور کیا

$ل - ک = ۱$

موافق (۲) مساوات کے

لیکن  $ل + ک = ۵$

$ل + ک = ۴$  یا  $۳$

طرفین کا کعب کیا  $ل + ک = ۳$  یا  $۴$

اور جن مساواتوں کو جمع کیا ہے اگر وہ تفریق کر کے

$۶ ل + ۶ ک = ۲۴$

$۲ ل + ۲ ک = ۱۰$

$۲ ل + ۲ ک = ۱۰$

$(s+u) \approx 180$  کے  
 $180 = s + 9u$  بسید سادہ (۳)

$20 = s$   
 $20 = s$  ..... (۴)

اگر سادات (۳) کا مجدد کرین تو یہ حاصل ہوتا ہے

$81 = s + 2u$   
 $80 = s + 2u$  موافق (۴) کے

$1 = s + 2u$  طرفین کا جذریا

$1 = s + 2u$   
 $4 = s + u$  موافق ۳ کے

$2 = s + 10u$   
 $u = 5$  یا ۸

$10 = s + 2u$  اور  
 $s = 4$  یا ۶

$21 = s + 14u$  ..... (۱)

$33 = s + 13u$  ..... (۲)

سادات (۲) کو سادات (۱) پر تقسیم کیا

$4 = s + 14u$

$4 = s + 14u$  لیکن  $4 = s + 13u$  سادات (۱) سے  
 دو نو کو جمع کیا

$24 = s + 13u$

$24 = s + 13u$  ..... (۳)

$12 = s + 13u$  اور جن ساداتوں کو جمع کیا تو یہ نیا فرق

$4 = s + 13u$

$34 = s + u$

$108 = s + 3u$

اور سادات (۲) پر

$133 = s + 3u$

$108 = s + 3u$

تفریق کی

$25 = s + 2u$

$5 = s + 2u$  طرفین کا جذریا

$13 = s + u$  اور لہذا  $13 = s + u$  موافق (۳) کے

$18 = u$  یا ۸ جمع کیا

$9 = u$  یا ۹

جن ساداتوں کو جمع کیا ہو اور جن تفریق کے

$18 = s + 8u$  تو

$s = 9$  یا ۹

$\frac{a-b\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\sqrt{a^2-b^2}}$

کسو میں یہ بات ثابت کی گئی ہے کہ اگر کسی کسری کی شمار کنندہ اور نسب نامہ ایک ہی مقدار میں ضرب کرین تو قیمت کسری کہیں بہتقی یعنی اوپرین کہیں فرق نہیں آتا اگر اس سادہ میں شمار کنندہ اور نسب نامہ  $a^2 - b^2$  لایں فریقین سادات میں کہیں فرق نہیں آئیگا اور یہ سادہ حاصل ہوگا

$\frac{(a-b\sqrt{a^2-b^2})^2}{a^2}$  طرفین کا جذریا

$\frac{a-b\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

کجا

شمارکنده اوزب ناگو ما جا + ل + ما - ط - ل این

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

کجا

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

طرفین کا مجذور کیا

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

ط (۱ ± ۲) = ل (۱ ± ۲) ::

طرفین کا مجذور کیا

طرفین کا مجذور کیا

طرفین کو لایم

اس مساوات میں اول طرف کی شمارکنده اوزب نا

کو ما ل + ما ل - ط میں ضرب کیا

طرفین کا مجذور کیا

طرفین کا مجذور کیا

طرفین کا مجذور کیا





$$لا (۱+۷) = ۳۰$$

$$\therefore لا = \frac{۳۰}{۱+۷}$$

اور موافق (۳) کی  $لا = \frac{۳۰}{۸}$

$$\frac{۳۰}{۸} = \frac{۳۰}{۸}$$

$$\frac{۲۵}{۱+۷} =$$

$$\therefore (لا + ۷) = ۲۵ \dots (۵)$$

$$\therefore لا = ۱۸$$

اور  $لا = \frac{۳۰}{۱+۷}$  موافق (۴) کے

$$۱۸ = \frac{۳۰}{۸}$$

$$۱۸ \neq \frac{۳۰}{۸}$$

اور موافق (۵) کے  $لا + ۷ = ۲۵$

$$لا = ۱۸$$

$$\therefore لا - ۷ = ۱۱$$

$$\therefore لا = ۱۸$$

$$\text{لیکن } لا + ۷ = ۲۵$$

جمع کیا

$$\therefore لا = ۱۸$$

$$\therefore لا = ۱۸$$

اور چون مساواتوں کو جمع کیا گیا ہے اگر اوہنیں باہم تفریق کریں

$$۱۲ = ۴ یا ۲ یا ۱۲$$

$$\therefore لا = ۲ یا ۳ یا ۱۱ یا ۶$$

$$۱۳ = لا + لا = ۶ \dots (۱)$$

$$لا + لا = لا = ۱۲ \dots (۲)$$

مساوات (۲) کو مساوات (۱) پر تقسیم کیا

$$\frac{۱۲}{۴} = \frac{لا (لا + لا)}{لا + لا}$$

یعنی  $لا = ۲$  اور  $لا = ۳$  اور  $لا = ۱۱$  اور  $لا = ۶$  کے

$$۴ = (لا + ۷)$$

$$\therefore لا = ۲$$

$$\therefore لا + ۷ = ۳$$

$$\therefore لا + ۷ = ۱۱$$

اور  $لا = ۱۸$  اور  $لا = ۱۸$  مساوات (۳) کے

$$لا - ۷ = ۱۱$$

$$\therefore لا = ۱۸$$

$$لا = ۱۸$$

$$\therefore لا = ۱۸$$

$$\therefore لا = ۱۸$$

$$\text{اور } لا - ۷ = ۱۱$$

$$لا - ۷ = ۱۱$$

$$لا = ۱۸$$

$$۳ = (لا - ۷) : (لا - ۷) : ۱ : ۱$$

$$لا = ۳۲۰ \dots (۲)$$

جب چار مقدار متناسب ہوں تو اول اور دوسری

کا حاصل تفریق دوسری مقدار سے ہی نسبت رکھتا ہے

جو تیسری اور چوتھی کا حاصل تفریق چوتھی مقدار سے

نسبت رکھتا ہے اور ثبوت اس امر کا مساواتوں کے

بدلتنا کے بغیر میں لکھا جائیگا پس میان بالائی موافق

تناسب اول سے بدتناسب حاصل ہوتا ہے

$$(لا - ۷) - (لا - ۷) : (لا - ۷) : ۱ : ۱$$

یعنی  $5 - 3 = (5 - 3) - (3 - 5) = 5 - 3 + 3 - 5 = 0$  :  $(5 - 3) :: 1 : 40$

$(5 - 3) = 2 = 40 : 20$  (۳)

ان دونوں سواتوں سے پہلے دو مساواتیں حاصل ہوئیں

$5 + 3 + 5 = 13$

$5 - 3 = 2$

تفریق کی  $13 + 2 = 15$

اگر اسے حاصل تفریق کو اول سوات پر زیادہ کریں تو یہ حاصل ہوتا ہے

$13 + 2 = 15$

تفریق کا نتیجہ  $15 = 5 + 10$  (۳)

اور حاصل تفریق سے یہ حاصل ہوتا ہے

$13 - 2 = 11$

$13 = 11 + 2$

$11 = 5 + 6$

اور (۳)  $11 + 2 = 13$

تفریق کی  $11 - 2 = 9$

$9 = 5 + 4$

$4 = 5 - 1$

اور (۳)  $4 + 5 = 9$

$9 + 2 = 11$

$11 = 5 + 6$

اور  $11 + 2 = 13$

$13 = 5 + 8$

$3 - 5 = (3 - 5) : 40 :: 1 : 40$

$3 - 5 = -2 = 40 : -20$

اول اور چارم کی خاص تفریق دویم اور سویم کے صفر کے برابر ہے

$3 - 5 = -2 = 40 : -20$

تفریق کا  $3 - 5 = -2 = 40 : -20$

لیکن سوات (۳)  $3 - 5 = -2 = 40 : -20$

$3 - 5 = -2 = 40 : -20$

$3 - 5 = -2 = 40 : -20$

$3 - 5 = -2 = 40 : -20$

تفریق کا  $3 - 5 = -2 = 40 : -20$

اور  $3 - 5 = -2 = 40 : -20$

$3 - 5 = -2 = 40 : -20$

تفریق کا  $3 - 5 = -2 = 40 : -20$

$3 - 5 = -2 = 40 : -20$

لیکن  $3 - 5 = -2 = 40 : -20$

$3 - 5 = -2 = 40 : -20$

$3 - 5 = -2 = 40 : -20$

اور تفریق کرنی سے  $3 - 5 = -2 = 40 : -20$

$3 - 5 = -2 = 40 : -20$

$3 - 5 = -2 = 40 : -20$

(۱)  $3 - 5 = -2 = 40 : -20$





اور  $\frac{4}{2} = \frac{3+4}{1}$  یا  $2 = 7$  صحیح کیا  
 $2 \times 8 = 16$  یا  $16 = 2 \times 8$

$2 \times 8 = 16$  یا  $16 = 2 \times 8$

اور  $2 \times 8 = 16$  یا  $16 = 2 \times 8$

$2 \times 8 = 16$  یا  $16 = 2 \times 8$

یہاں سے مرکب مساوات درجہ دوم کی مثالیں حل کی جاتی ہیں

$\frac{22}{4} = \frac{12-12}{4} - \frac{10}{4}$  |  
 طرفین کو 4 سے ضرب کیا

$\frac{22}{4} = 12 - 12 - \frac{10}{4}$  یا  $10 = 22 - 12$

$10 = 22 - 12$  یا  $10 = 10$

طرفین کو 11 سے ضرب کیا  
 $\frac{22}{11} = \frac{10 \times 11}{11}$  یا  $2 = 10$

طرفین پر  $\frac{24}{11}$  کا منجہ در زیادہ کیا

$\frac{24}{11} - \frac{24}{11} = \frac{24}{11} + 10 - \frac{24}{11}$  یا  $10 = \frac{24}{11}$

$\frac{24}{11} - \frac{24}{11} = \frac{24}{11}$

$\frac{24}{11} = \frac{24}{11}$

$\frac{24}{11} \pm = \frac{24}{11} - 10$  یا  $10 = \frac{24}{11}$

$\frac{21}{11} \times 3 = \frac{33}{11} = \frac{24}{11} \pm = \frac{24}{11} = 10$  یا  $10 = \frac{24}{11}$

$\frac{2-10}{2} - 10 = 1 + \frac{2-10}{2}$  یا  $10 = \frac{2-10}{2}$

گسٹو در کی

$8-10+10-10-10+10=8-10+10-10+10$

$8-10=10-10$  یا  $10=10$

$9 = 8-10 + 10-10$  یا  $9 = 10-10$

$9 = 10-10$  یا  $9 = 10$

$9 \times 12 = 3 \times 9 = 10$  یا  $10 = 9$

$5 \times 10 = \frac{(5-10)(5+10)(5+10)}{5-10}$

$5 \times 10 = (5+10)(5+10)$  یا  $50 = (5+10)(5+10)$

یا  $50 = 5^2 + 10^2 + 5 \times 10 + 5 \times 10$

اور مساوات (1) سے  $50 = 5^2 + 10^2 + 5 \times 10 + 5 \times 10$

دونوں کو جمع کیا  
 $50 = 5^2 + 10^2 + 10 \times 5$

$50 = 5^2 + 10^2 + 10 \times 5$  یا  $50 = 5^2 + 10^2 + 50$

اور چونکہ مساوات کو جمع کیا ہے اگر اوئیں باہم تفریق کریں تو ہمیں

حاصل ہوتا ہے  $50 = 5^2 + 10^2 + 50$  یا  $50 = 5^2 + 10^2 + 50$

طرفین کو 5 سے تقسیم کیا  
 $10 = 5 + 10$  یا  $10 = 5 + 10$

اس مساوات کو گھمب کیا  
 $216 = 5^3 + 10^3 + 5 \times 10^2 + 5 \times 10^2$

یا  $216 = 5^3 + 10^3 + 100 \times 5 + 100 \times 5$

یا  $216 = 5^3 + 10^3 + 1000$  یا  $216 = 5^3 + 10^3 + 1000$

یا  $216 = 5^3 + 10^3 + 1000$  یا  $216 = 5^3 + 10^3 + 1000$

یا  $216 = 5^3 + 10^3 + 1000$  یا  $216 = 5^3 + 10^3 + 1000$

یا  $216 = 5^3 + 10^3 + 1000$  یا  $216 = 5^3 + 10^3 + 1000$

یا  $216 = 5^3 + 10^3 + 1000$  یا  $216 = 5^3 + 10^3 + 1000$

یا  $216 = 5^3 + 10^3 + 1000$  یا  $216 = 5^3 + 10^3 + 1000$

یا  $216 = 5^3 + 10^3 + 1000$  یا  $216 = 5^3 + 10^3 + 1000$

یا  $216 = 5^3 + 10^3 + 1000$  یا  $216 = 5^3 + 10^3 + 1000$

یا  $216 = 5^3 + 10^3 + 1000$  یا  $216 = 5^3 + 10^3 + 1000$

یا  $216 = 5^3 + 10^3 + 1000$  یا  $216 = 5^3 + 10^3 + 1000$

یا  $216 = 5^3 + 10^3 + 1000$  یا  $216 = 5^3 + 10^3 + 1000$

طرفین کو برہنہ قسم کی  

$$\frac{31}{2} - u = 0 \quad \therefore u = \frac{31}{2}$$
 طرفین پر  $\frac{31}{2}$  کا مخدو زیادہ  

$$27 - \frac{941}{14} = \left(\frac{31}{2}\right) + 23 \frac{1}{2} - u \quad \therefore$$

$$\frac{225}{14} =$$
 طرفین کا مخدو  

$$\frac{15}{14} \pm = \frac{31}{2} - u \quad \therefore$$

$$27 \frac{23}{2} = \frac{15}{14} \pm \frac{31}{2} = u \quad \therefore$$
 ضرب کیا  

$$\frac{u \ 11}{1 - u \ 11} = \frac{4}{u \ 4 - 4} + \frac{u}{u + 5}$$
 طرفین کو  $(u+5)$  میں  

$$\frac{u \ 11 + u \ 55}{1 - u \ 11} = \frac{u \ 4 + 35}{u \ 4 - 4} + u \quad \therefore$$
 ضرب کیا  

$$\frac{u \ 11 + u \ 55}{1 - u \ 11} = \frac{280 - u \ 44 + u \ 329}{u \ 4 - 4} + u \ 8 - u \ 11 \quad \therefore$$

$$u \ 43 = \frac{280 - u \ 44 + u \ 329}{u \ 4 - 4} \quad \therefore$$
 طرفین کو  $\frac{1}{4}$  پر تقسیم کیا  

$$u \ 9 = \frac{70 - u \ 11 + u \ 82.25}{u \ 4 - 4} \quad \therefore$$

$$u \ 34 - u \ 58 = 70 - u \ 11 + u \ 82.25 \quad \therefore$$

$$u \ 44 - u \ 48.25 = 0 \quad \therefore$$

$$u \ 5.75 = 0 \quad \therefore$$
 ضرب کیا  

$$\frac{u}{4} = u \ \frac{4}{4} - u \quad \therefore$$
 طرفین پر  $\frac{4}{9}$  کا مخدو زیادہ  

$$\frac{u}{9} + \frac{u \ 9}{81} = \left(\frac{4}{9}\right) + u \ \frac{4}{9} - u \quad \therefore$$

$$\frac{4049}{81} =$$
 طرفین کا مخدو  

$$\frac{14}{9} \pm = \frac{4}{9} - u \quad \therefore$$

3 
$$\frac{12 - u \ 4}{9 - u} = \frac{u \ 2 - 3}{9 - u} - \frac{u + u \ 3}{5}$$
 طرفین کو  $\frac{1}{10}$  میں ضرب کیا  

$$12 - u \ 4 = \frac{u \ 20 - 30}{9 - u} - 8 + u \ 4 \quad \therefore$$
 ضرب کیا  

$$\frac{u \ 20 - 30}{9 - u} = u - 22 \quad \therefore$$

$$u \ 20 - 30 = 182 - u - u \ 28 \quad \therefore$$

$$u \ 22 = u \ 28 + u \quad \therefore$$
 ضرب کیا  

$$u \ 22 = u \ 28 + u \quad \therefore$$

$$u \ 22 - (28) = (28) + u \ 28 - u \quad \therefore$$

$$u \ 22 - 56 =$$

$$128 =$$

$$12 \pm = 28 - u \quad \therefore$$

$$12 \pm 34 = 12 \pm 28 = u \quad \therefore$$

$$\frac{50 - u \ 4}{1 - u \ 2} + 2 = \frac{10 - u \ 2}{u \ 2 - 4} - u \ 3 \quad \therefore$$
 طرفین مساوات کو  $(1 - u \ 2)$  میں ضرب کیا  

$$50 - u \ 4 + 2(1 - u \ 2) = \frac{10 - u \ 2}{u \ 2 - 4} - u \ 3(1 - u \ 2) \quad \therefore$$

$$50 - u \ 4 + 2 - u \ 4 = \frac{10 - u \ 2}{u \ 2 - 4} - u \ 3 + u \ 6 \quad \therefore$$

$$52 - u \ 8 = \frac{10 - u \ 2}{u \ 2 - 4} + u \ 3 \quad \therefore$$
 طرفین کو  $u \ 2 - 4$  میں ضرب کیا  

$$u \ 82 - 428 = 10 - u \ 2 + u \ 4 + u \ 3(u \ 2 - 4) \quad \therefore$$

$$u \ 48 = u \ 8 - u \ 12 \quad \therefore$$

$$u \ 48 = u \ 12 - u \ 12 \quad \therefore$$

$$\frac{114}{9} + \frac{r9}{r^2r} = \left(\frac{r}{r}\right) + u \frac{r}{r} - u \therefore$$

$$\frac{r^2r0}{r^2r} =$$

$$\frac{40}{18} \pm = \frac{r}{18} - u \therefore$$

$$\frac{r9 - 6r}{9} = \frac{40}{18} \pm \frac{r}{18} = u \therefore$$

$$r - u = \frac{1 + u \cdot 1 - r^2}{4 + u4 - u} \quad \text{سر دورگی}$$

$$r^2 - ur^2 + u^2q - u = 1 + u \cdot 1 - u \therefore$$

$$r^2 = ur^2 + u \therefore$$

$$r^2 + \left(\frac{r^2}{r}\right) = \left(\frac{r^2}{r}\right) + ur^2 + u \therefore$$

$$\frac{r^2}{r} =$$

$$\frac{r9}{r} \pm = \frac{r^2}{r} + u \therefore$$

$$r^2 - u = \frac{r^2}{r} - \frac{r9}{r} \pm = u \therefore$$

$$\frac{9}{1} \cdot r = \frac{u - r}{u} + \frac{u}{u - r} \quad 9$$

$$\frac{r9}{1} = \frac{(u - r) + r^2}{u - ur}$$

$$\frac{ur9 - ur^2r}{1} = u + u \cdot 1 - r^2 + u \therefore$$

$$ur9 - ur^2r = u \cdot 1 - r^2 + u \therefore$$

$$r^2 - r^2 = ur^2r - u \cdot 1 - r^2 + u \therefore$$

$$1 - r^2 = ur^2r - u \therefore$$

$$1 - \frac{r9}{r} = \left(\frac{r}{r}\right) + ur^2r - u \therefore$$

$$\frac{9}{r} = r \pm = \frac{r}{r} - u \therefore$$

$$r^2 \cdot 0 = \frac{r}{r} \pm \frac{r}{r} = u \therefore$$

$$\frac{r^2}{r^2} - 1 = \frac{r^2}{r^2} + \frac{r}{r^2} = u \therefore$$

$$\frac{40}{1+u} = \frac{r^2}{r+u} - \frac{9}{u} \quad 4$$

$$\frac{10}{1+u} = \frac{r}{r+u} - \frac{1}{u} \therefore$$

$$u \cdot 10 = \frac{ur + u^2r}{r+u} - 1 + u \cdot 1 \therefore$$

$$10 = \frac{ur + u^2r}{r+u} \therefore$$

$$r + u \cdot 10 = ur + u^2r \therefore$$

$$r = ur + u^2r - u \therefore$$

$$\frac{r}{r} = u \frac{r}{r} - u \therefore$$

$$\frac{r}{r} + \frac{r9}{r^2} = \left(\frac{r}{r}\right) + \frac{r}{r} - u \therefore$$
  
$$\frac{r^2r9}{r^2} =$$

$$\frac{16}{4} \pm \frac{r}{4} = u \therefore \frac{16}{4} \pm = \frac{r}{4} - u \therefore$$

$$\frac{9}{r} - 6r =$$

$$\frac{9}{ur} = \frac{1}{ur+u} + \frac{1}{ur-u} \quad 6$$

$$\frac{9}{r} = \frac{1}{r+u} + \frac{1}{r-u} \therefore$$

سر دورگی

$$10r - ur + u^2r = r^2 - ur + r^2 + u \cdot 1 \therefore$$

$$10r - ur + u^2r = r + u \cdot 1 \therefore$$

$$114 = ur - r^2 + u \cdot 1 \therefore$$

$$\frac{114}{9} = u \frac{r}{9} - u \therefore$$

طرفین کو (1+u) سے تقسیم کیا

طرفین کو (1+u) سے ضرب کیا

طرفین کو (1+u) سے تقسیم کیا

$$\begin{aligned} \text{لأ-ض ل} + \frac{\sqrt{ص}}{۳} &= \frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳} \\ \frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳} &= \frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳} \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳} = \frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳}$$

$$\frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳} = \frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳}$$

$$\frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳} = \frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳}$$

$$\frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳} = \frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳}$$

$$\frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳} = \frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳}$$

$$\frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳} = \frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳}$$

$$\frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳} = \frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳}$$

طرفین کان مرتبہ کا زور لیا

$$\frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳} = \frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳}$$

$$\frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳} = \frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳}$$

$$\frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳} = \frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳}$$

$$\frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳} = \frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳}$$

$$\frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳} = \frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳}$$

۹ طرفین کا زور لیا

$$\frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳} = \frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳}$$

$$\frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳} = \frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳}$$

$$\frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳} = \frac{\sqrt{ص}}{۳} + \frac{\sqrt{ص}}{۳}$$

$$\frac{۱۱۰+۷۸}{۳} - \frac{۷}{۳} = \frac{۷۱۲-۷}{۳}$$

طرفین کو ۳ سے ضرب کیا

$$۱۱۰-۷۸-۷ = ۷۱۲-۷$$

$$۱۱۷ = ۷۱۲-۷$$

$$۱۱۷+۷ = ۷۱۲$$

$$۱۲۴ = ۷۱۲$$

$$۱۲۴ = ۷۱۲$$

$$۱۲۴-۷۱۲ = ۷۱۲-۷۱۲$$

$$۱۲ = \sqrt{۱۲+۷} \times \sqrt{۵+۷}$$

طرفین کا مجذور کیا

$$۱۴۴ = (۱۲+۷)(۵+۷)$$

$$۱۴۴ = ۶۰+۷۱+۷$$

$$۸۴ = ۷۱+۷$$

$$۸۴ + \frac{۲۸۹}{۳} = \left(\frac{۱۷}{۳}\right) + ۷۱ + ۷$$

$$\frac{۶۲۵}{۳} =$$

$$\frac{۶۲۵}{۳} = \frac{۱۷}{۳} + ۷$$

$$۲۱-۷۱۲ = \frac{۱۷}{۳} - \frac{۶۲۵}{۳} = ۷$$

$$۲۱-۷۱۲ = \frac{۱۷}{۳} - \frac{۶۲۵}{۳} = ۷$$

$$۲۱-۷۱۲ = \frac{۱۷}{۳} - \frac{۶۲۵}{۳} = ۷$$

طرفین کو ۳ سے ضرب کیا

$$\frac{۲۱-۷۱۲}{۳} = \frac{۱۷-۶۲۵}{۳}$$

طرفین کو ضرب کر کے تقسیم کرنا

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b} \quad 14$$

$$y = u + v \therefore$$

$$\frac{r^2}{r} = \frac{1}{r} + y = \frac{1}{r} + u + v \therefore$$

$$\frac{r}{r} = \frac{1}{r} + u \therefore$$

$$r - \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = 0 \therefore$$

$$\frac{\sqrt{a}}{r} + \frac{1}{4} r r = \frac{4}{r} \quad 18$$

$$\frac{1}{4} r r = \frac{\sqrt{a}}{r} - \frac{4}{r} \therefore$$

$$\frac{13r}{r} = \frac{1}{r} r r = \sqrt{a} - \frac{4}{r} \therefore$$

$$\frac{13r}{r} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \sqrt{a} - \frac{4}{r} \therefore$$

$$\frac{r}{9} = \frac{r}{r} \pm = \frac{1}{r} - \sqrt{a} \therefore$$

$$\frac{19}{r} - \frac{1}{r} = \frac{r}{r} \pm \frac{1}{r} = \sqrt{a} \therefore$$

$$\frac{r^2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{r}{r} = \sqrt{a} \therefore$$

$$\frac{r - \sqrt{a}}{9} \quad 14$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1 - \sqrt{a}}{9 - \sqrt{a}}$$

طرفین کو ضرب کر کے تقسیم کرنا

$$\frac{1}{r} = \frac{1 - \sqrt{a}}{9 - \sqrt{a}} \therefore$$

$$9 - \sqrt{a} = r(1 - \sqrt{a}) \therefore$$

$$r - r\sqrt{a} = 9 - \sqrt{a} \therefore$$

$$r - r\sqrt{a} = 9 - \sqrt{a} \therefore$$

$$r - 9 = r\sqrt{a} - \sqrt{a} \therefore$$

$$1 = r - 9 - \sqrt{a} \therefore$$

$$\frac{\sqrt{a} - b}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + b} \quad 15$$

طرفین کو ضرب کر کے تقسیم کرنا

$$\sqrt{a} - b = \sqrt{a} + \sqrt{b} \therefore$$

$$b = \sqrt{a} + \sqrt{b} \therefore$$

$$b = \sqrt{a} + \sqrt{b} (1 + b) \therefore$$

$$\frac{b}{1 + b} = \sqrt{a} \frac{1}{1 + b} + \sqrt{b} \therefore$$

$$\frac{b}{1 + b} + \frac{\sqrt{a}}{(1 + b)r} = \left(\frac{\sqrt{a}}{(1 + b)r}\right) + \sqrt{a} \frac{1}{1 + b} + \sqrt{b} \therefore$$

$$\frac{(1 + b)b}{(1 + b)r} + \frac{\sqrt{a}}{(1 + b)r} =$$

$$\frac{b + \sqrt{a} + \sqrt{a}}{(1 + b)r} =$$

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt{a}}{(1 + b)r} \pm = \frac{\sqrt{a}}{(1 + b)r} + \sqrt{a} \therefore$$

$$\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt{a}}{(1 + b)r}\right) = \sqrt{a} \therefore$$

طرفین کو ضرب کر کے تقسیم کرنا

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad 16$$

$$0 = \sqrt{a} - r - \sqrt{b} \therefore$$

$$r = \sqrt{a} - \sqrt{b} \therefore$$

$$\frac{9}{r} = \frac{1}{r} + r = \frac{1}{r} + \sqrt{a} - \sqrt{b} \therefore$$

طرفین کو ضرب کر کے تقسیم کرنا

$$\frac{r}{r} = \frac{1}{r} - \sqrt{b} \therefore$$

$$1 - r = \frac{r}{r} - \sqrt{b} \therefore$$

$$1 + r = \sqrt{b} \therefore$$

$$\frac{31.02}{3} + \frac{1}{34} = \frac{1}{34} + \frac{2}{3} \therefore$$

$$\frac{34224}{34} =$$

طرفین کا جذریا

$$\frac{192}{4} \pm = \frac{1}{4} + \frac{5}{4} \therefore$$

$$\frac{44}{3} - 1.32 = \frac{1}{4} - \frac{192}{4} \pm = \frac{5}{4} \therefore$$

طرفین کا مربع کا نزول

$$\frac{1}{5} \therefore$$

$$\left(\frac{44}{3}\right) \pm = \frac{1}{4} \therefore$$

طرفین کا مربع کا صعود

$$\left(\frac{44}{3}\right) \pm = 0 \therefore$$

$$23 \pm = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \pm = \frac{4}{3}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \pm = \frac{4}{3}$$

کیا  
زیادہ  
طرفین پر

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \pm = \frac{6}{3}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{3} \pm = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \pm = \frac{4}{3}$$

نہیں

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{3} \pm = \frac{4}{3}$$

طرفین کا مربع

$$\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{3}\right) \pm = 0 \therefore$$

$$206.24 = 1 \pm 4 = 5 \therefore$$

$$206.24 = 5 \therefore$$

$$204 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \pm = 2 \therefore$$

$$204 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \pm = 2 \therefore$$

$$\frac{2025}{3} =$$

$$\frac{55}{2} \pm = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} \pm = \frac{3}{2} \therefore$$

$$28 - 1.24 = \frac{1}{2} - \frac{55}{2} \pm = \frac{3}{2} \therefore$$

طرفین کا کبیا

$$28 - 1.24 = \frac{1}{2} \pm = \frac{3}{2}$$

طرفین کا مربع کا نزول

$$(28 - 1.24) \pm = 0 \therefore$$

$$54 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \pm = 0 \therefore$$

$$54 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \pm = 0 \therefore$$

$$\frac{225}{3} =$$

طرفین کا جذریا

$$\frac{15}{3} \pm = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \pm = -\frac{1}{3} \therefore$$

$$2 - 1.8 = \frac{1}{3} + \frac{15}{3} \pm = \frac{16}{3} \therefore$$

طرفین کا کبیا

$$2 - 1.8 = \frac{1}{3} \pm = \frac{16}{3}$$

طرفین کا جذریا

$$2 - 1.8 = 0 \therefore$$

$$31.02 = \frac{5}{3} + \frac{5}{3} \pm = \frac{10}{3} \therefore$$

$$\frac{31.02}{3} = \frac{5}{3} + \frac{5}{3} \pm = \frac{10}{3} \therefore$$

$$\frac{9}{r} \pm = \frac{1}{r} + \sqrt{1+u} \therefore$$

$$2 \pm r = \frac{1}{r} - \frac{9}{r} \pm = \sqrt{1+u} \therefore$$

$$8 \pm r = u \therefore 4 \pm r = 1+u \therefore$$

$$\frac{r1}{1+u \pm} = \sqrt{u \pm r + 1+u \pm} \therefore$$

طرفین کو ضرب کیا

$$r1 = u + u \pm \sqrt{u \pm r + 1+u \pm} \therefore$$

$$ur - r^2 = u + u \pm \sqrt{u \pm r} \therefore$$

$$u - 1 = u + u \pm \sqrt{u \pm r} \therefore$$

طرفین کا مخدور کیا

$$\sqrt{u + u \pm} - 1 = u + u \pm \sqrt{u \pm r} \therefore$$

$$1 = u \pm 1 + \sqrt{u \pm r} \therefore$$

$$\left(\frac{r1}{r}\right) + 1 = \left(\frac{r1}{r}\right) + u \pm 1 + \sqrt{u \pm r} \therefore$$

$$\frac{r1}{r} + 1 =$$

$$\frac{1 \pm 1}{r} =$$

$$\frac{r9}{r} \pm = \frac{r1}{r} + u \therefore$$

$$r0 - \pm r = \frac{r9}{r} \pm \frac{r1}{r} - u \therefore$$

$$\frac{u0 + b6}{u - u \pm} = \sqrt{u \pm r + b - u \pm} \sqrt{u \pm r} \therefore$$

مخدور کیا

$$u0 + b6 = \sqrt{u \pm r} \sqrt{u \pm r + b - u \pm} \therefore$$

$$ur + b9 = u \pm r - \sqrt{u \pm r} \sqrt{u \pm r} \therefore$$

$$u + b r = \sqrt{u \pm r} \sqrt{u \pm r} \therefore$$

$$\sqrt{u + u \pm} + b9 = u \pm r - \sqrt{u \pm r} \therefore$$

$$0.4r = \frac{r}{r} - \frac{r}{r} \pm r \therefore$$

طرفین کی علامتیں بدلیں

$$0.4r = \frac{r}{r} - \frac{r}{r} \pm r \therefore$$

طرفین کو  $\frac{r}{r}$  پر ضرب کیا

$$\frac{118r}{0} = \frac{r}{u} \frac{4}{0} - \frac{r}{u} \therefore$$

$$\frac{118r}{0} + \left(\frac{r}{0}\right) = \left(\frac{r}{0}\right) + \frac{r}{u} \frac{4}{0} - \frac{r}{u} \therefore$$

$$\frac{0.4r}{r0} + \frac{4}{r0} =$$

$$\frac{0.4r4}{r0} =$$

$$\frac{4}{0} \pm = \frac{r}{0} - \frac{r}{u} \therefore$$

$$u \frac{4r}{0} - 14 = \frac{4}{0} \pm \frac{r}{0} = \sqrt{\frac{r}{u}} \therefore$$

نزدک

$$\left(\frac{4r}{0}\right) \pm \left(\frac{r}{u}\right) = u \therefore$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{r}{u}}} \left(\frac{4r}{0}\right) =$$

$$\left(\frac{r}{r \times 8}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{r}{r \times 8}}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{r}{8}}} =$$

$$\left(\frac{4r}{0}\right) \pm 8 = u \therefore$$

$$4 = \sqrt{1+u} \pm \sqrt{1+u} \therefore$$



$$\frac{123}{2} - \frac{22 \cdot 9}{14} = \left(\frac{24}{2}\right) + u \frac{24}{2} - u \therefore$$

$$\frac{1230}{14} = \frac{20}{2} \pm \frac{24}{2} - u \therefore$$

$$3 \text{ یا } \frac{21}{2} = \frac{20}{2} \pm \frac{24}{2} = u \therefore$$

$$b^2 9 = u^2 b^2 - u^2 \therefore$$

$$b^2 20 = b^2 14 + b^2 9 = b^2 14 + u^2 b^2 - u^2 \therefore$$

$$b - u^2 b^2 9 = u^2 \therefore b^2 0 \pm = b^2 2 - u^2 \therefore$$

$$19 + 0 \cdot u^2 + u^2 4 + u^2 4 + u^2 2 = 9 + u^2 \sqrt{14 + 40 + u^2} 28$$

$$\frac{ص}{\sqrt{14}} = \frac{u}{u - b^2 - u^2} + \frac{u}{u - b^2 + u^2}$$

طرفین کو  $(u - b^2 - u^2)(u - b^2 + u^2)$  سے ضرب کیا

$$\frac{ص(u - u^2)}{\sqrt{14}} = (u - b^2 + u^2 + u - b^2 - u^2) u \therefore$$

یعنی  $\frac{ص(u - u^2)}{\sqrt{14}} = 2u - 2b^2 u$  کہ دور کی

$$2u^2 = 2ص - 2b^2 2$$

$$2u^2 - 2 = 2ص - 2b^2 2$$

$$\frac{ص}{2} - \frac{ص}{2} = \frac{ص}{2} + 2b^2 - 2 \therefore$$

$$\frac{ص - 2b^2 2}{2} =$$

$$\frac{\sqrt{14} - 2b^2 2}{2} = \frac{ص}{2} - u \therefore$$

$$\frac{\sqrt{14} - 2b^2 2 + 2}{2} = u \therefore$$

$$u = 2 + \sqrt{14} + 2b^2 2$$

اس مساوات کو اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$2 - 6 = 2 + \sqrt{14} + 2b^2 2$$

$$4 = 2 + \sqrt{14} + 2b^2 2 \therefore$$

کے طرفین پر  $\frac{1}{2}$  کا مجموعہ زیادہ

$$\frac{20}{2} = \frac{1}{2} + 2 + \sqrt{14} + 2b^2 2 \therefore$$

کہ دور کی

$$0 \cdot u^2 + u^2 4 + u^2 4 + u^2 2 = 9 + u^2 \sqrt{14 + 40 + u^2} 28$$

$$19 + 0 \cdot u^2 + u^2 4 + u^2 4 + u^2 2 =$$

$$20 = u + u^2 \therefore$$

$$\frac{11}{2} = 20 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + u + u^2 \therefore$$

$$\frac{9}{2} \pm = \frac{1}{2} + u \therefore$$

$$5 - u = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} \pm = u \therefore$$

$$\frac{2u^2}{(u - 2)(u - 10)} = \frac{u^2 + \sqrt{14} 20}{u^2 - 2} = \frac{u^2 + \sqrt{14} 20}{u - 10}$$

اس مساوات کو اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$\frac{2u^2}{(u - 2)(u - 10)} = \frac{(u + \sqrt{14}) 20}{u - 10}$$

کے طرفین مساوات کو  $(u - 2)(u - 10)$  سے ضرب کیا

$$2u^2 - (u^2 - 20u) 2 = (u - 10) 20 \therefore$$

$$2u^2 - u^2 + 20u = 20u - 200 \therefore$$

$$u^2 - u - 200 = 0 \therefore$$

طرفین کو  $\frac{1}{2}$  پر تقسیم کیا

$$\frac{123}{2} - u = \frac{24}{2} - u \therefore$$

کیا  
 طرفین پر یک طرفہ باد  
 $4 = 0 + \sqrt{1-0+0} \therefore$   
 $\frac{20}{2} = \frac{1}{2} + 0 + \sqrt{1-0+0} \therefore$   
 طرفین کا جذریا  
 $\frac{0}{2} \pm = \frac{1}{2} - 0 + \sqrt{1-0+0} \therefore$   
 $2 - 1/2 = \frac{0}{2} \pm \frac{1}{2} = 0 + \sqrt{1-0+0} \therefore$   
 $2 \pm 1/2 = 0 + \sqrt{1-0+0} \therefore$   
 $1 - 1/2 = 0 \therefore$

35  
 $14 + \sqrt{14+0} - 1 = 14 + \sqrt{14+0} - 14 + \sqrt{14+0} \therefore$   
 $10 = 14 + \sqrt{14+0} - 14 + \sqrt{14+0} \therefore$   
 $\frac{29}{2} = 14 + \sqrt{14+0} - 14 + \sqrt{14+0} \therefore$   
 طرفین کا جذریا  
 $\frac{2}{2} \pm = \frac{2}{2} - 14 + \sqrt{14+0} \therefore$   
 $2 - 1/2 = \frac{2}{2} \pm \frac{2}{2} = 14 + \sqrt{14+0} \therefore$   
 $2 \pm 1/2 = 14 + \sqrt{14+0} \therefore$   
 $12 - 1/2 = 0 \therefore$

34  
 طرفین پر یک طرفہ باد  
 $4 = 12 + \sqrt{12+0} + 12 + \sqrt{12+0} \therefore$   
 $\frac{20}{2} = \frac{1}{2} + 12 + \sqrt{12+0} + 12 + \sqrt{12+0} \therefore$   
 طرفین کا جذریا  
 $\frac{0}{2} \pm = \frac{1}{2} + 12 + \sqrt{12+0} \therefore$   
 $2 - 1/2 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} \pm = 12 + \sqrt{12+0} \therefore$

$\frac{0}{2} \pm = \frac{1}{2} + 12 + \sqrt{12+0} \therefore$   
 $2 - 1/2 = 12 + \sqrt{12+0} \therefore$   
 $4 \pm 1/2 = 12 + \sqrt{12+0} \therefore$   
 $2 \pm 1/2 = \sqrt{12+0} \therefore$   
 $2 \pm 1/2 = 0 \therefore$   
 $(2-0) = \frac{4-0}{4-0} \sqrt{12+0} \therefore$

اس مساوات کی شمار کنندہ اور ضرب نما کو  $4-0$  سے ضرب کیا  
 $(2-0) = \frac{(4-0)\sqrt{12+0}}{4} \therefore$   
 طرفین کا جذریا  
 $2-0 = \frac{4-0}{2} \sqrt{12+0} \therefore$   
 $4-0 = 4-0 \sqrt{12+0} \therefore$   
 $4-0 = 4-0 \sqrt{12+0} \therefore$   
 $24 + 0 = 4-0 \sqrt{12+0} \therefore$   
 $20 = 0 = 0 = 0 - 0 \sqrt{12+0} \therefore$   
 $10 = 0 = 0 - 0 \sqrt{12+0} \therefore$   
 $1 = 14 + 0 = 0 - 0 \sqrt{12+0} \therefore$   
 $1 \pm = 2 - 0 \therefore$   
 $2 \pm 1/2 = 1 \pm 2 = 0 \therefore$   
 $4 + 0 + \sqrt{12+0} = 0 + 0 \therefore$

$$\frac{50}{7} + 9 + 10r + 12r^2 \sqrt{5} - (4 + 10r + 12r^2) ::$$

$$\frac{4}{7} \pm = \frac{5}{7} - \sqrt{9 + 10r + 12r^2} ::$$

$$1 - 4 = \frac{4}{7} \pm \frac{5}{7} = \sqrt{9 + 10r + 12r^2} ::$$

$$1 - 3 = 4 + 10r + 12r^2 ::$$

$$8 - 1 - 2 = 4 + 10r + 12r^2 ::$$

$$r - 1 - \frac{24}{7} = 4 + 10r + 12r^2 ::$$

$$\frac{50}{14} - \frac{240}{14} = \frac{9}{14} + 10r + 12r^2 ::$$

$$\frac{50}{14} \sqrt{\pm} \pm \frac{10}{7} \pm = \frac{9}{14} + 10r + 12r^2 ::$$

$$\frac{3}{7} - \frac{50}{14} \sqrt{\pm} \pm \frac{9}{14} - 1 - 3 = 10r + 12r^2 ::$$

$$(r-1) - 11 = (r-1) - (1 - (r-1)) \pm 9$$

$$1 - 4 = 0$$

$$4 = (1 - (r-1)) - (1 - (r-1)) ::$$

طرفین پر  $\frac{1}{7}$  کا مجدد زیادہ

$$\frac{341}{7} = \frac{1}{7} + (1 - (r-1)) - (1 - (r-1)) ::$$

طرفین کا مجدد کیا

$$\frac{19}{7} \pm = \frac{1}{7} - 1 - (r-1) ::$$

$$4 - 1 = \frac{19}{7} \pm \frac{1}{7} = 1 - (r-1) ::$$

طرفین پر عدد ۲ زیادہ کیا

$$4 - 1 - 2 = (r-1) - (r-1) ::$$

طرفین پر  $\frac{1}{7}$  کا مجدد زیادہ کیا

$$\frac{26}{7} - 1 - \frac{24}{7} = \frac{1}{7} + (r-1) - (r-1) ::$$

$$11 \text{ یا } 14 = 12 + 10r ::$$

$$49 \text{ یا } 4 = 10r ::$$

$$11 = 5 + 10r - 10r \sqrt{4 + 10r + 12r^2}$$

ظاہر ہے کہ اگر اس مساوات میں عدد ۵ طرفین پر زیادہ

کیا جائے تو یہ مساوات درج دوم کی ہو سکتی ہے اور اس

طرفین مساوات پر عدد ۵ کا زیادہ کیا

$$14 = 5 + 10r - 10r \sqrt{4 + 10r + 12r^2} ::$$

کیا زیادہ  
طرفین پر ۳ کا مجدد

$$20 = 4 + 5 + 10r - 10r \sqrt{4 + 10r + 12r^2} ::$$

$$0 = 3 + 5 + 10r - 10r \sqrt{4 + 10r + 12r^2} ::$$

$$8 - 1 - 2 = 3 - 5 \pm = 5 + 10r - 10r \sqrt{4 + 10r + 12r^2} ::$$

$$7r \text{ یا } 7 = 5 + 10r - 10r \sqrt{4 + 10r + 12r^2} ::$$

$$69 \text{ یا } 1 = 10r - 10r \sqrt{4 + 10r + 12r^2} ::$$

$$40 \text{ یا } 0 = 1 + 10r - 10r \sqrt{4 + 10r + 12r^2} ::$$

$$70 \sqrt{\pm} \pm 10 = 1 - 10r ::$$

$$70 \sqrt{\pm} \pm 10 = 10r ::$$

$$r \times 10 \sqrt{\pm} \pm 1 =$$

$$r \times 10 \sqrt{\pm} \pm 1 =$$

$$10 \sqrt{\pm} r \pm 1 =$$

$$0 = 3 + 4 + 10r + 12r^2 \sqrt{5} - 10r + 12r^2 \sqrt{5} \pm 8$$

$$4 = 4 + 10r + 12r^2 \sqrt{5} - (4 + 10r + 12r^2) ::$$

$$\frac{1-4\sqrt{2}}{r} \pm 4\sqrt{2} - 4r = 0 \sqrt{2} ::$$

$$\frac{4\sqrt{2} - 4r - 4\sqrt{2}}{r} = \left( \frac{1-4\sqrt{2}}{r} \pm 4\sqrt{2} \right) 4\sqrt{2} = 0 ::$$

$$\frac{(1+\sqrt{2})r}{\sqrt{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}} + r = 1 - \sqrt{2} \quad (1)$$

$$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$$

$$\frac{(1+\sqrt{2})r}{\sqrt{2}} = (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) ::$$

قسم  
طرفین کو  $\sqrt{2}$  سے

$$\frac{r}{\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2} ::$$

$$r = \sqrt{2} - 2 ::$$

$$\frac{4}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 2 ::$$

$$\frac{r}{4} \pm = \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} ::$$

$$1 - 4r = \frac{r}{4} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} ::$$

$$1 - 4r = \sqrt{2} ::$$

$$132 = \sqrt{2} + 4r - 4r = 132$$

اس مساوات کی ادا طرف میں لاجج ہی کیا اور تفریق ہی

$$132 = (\sqrt{2} - 4) - 4r - 4r ::$$

$$132 = (\sqrt{2} - 4) - 4r - 4r ::$$

زیادہ  
طرفین پر  $\frac{1}{4}$  کا مجذور

$$\frac{132}{4} = \frac{1}{4} + (\sqrt{2} - 4) - 4r - 4r ::$$

$$\frac{r\sqrt{2}}{r} \pm 4\sqrt{2} \pm = \frac{1}{r} - (r - \sqrt{2}) ::$$

$$\frac{r\sqrt{2}}{r} \pm \frac{4\sqrt{2}}{r} \pm \frac{4\sqrt{2}}{r} = 0 ::$$

$$\frac{r\sqrt{2} \pm 4\sqrt{2}}{r} \pm 4\sqrt{2} =$$

$$\sqrt{2} + 132 = (4 + \sqrt{2})\sqrt{2} + (4 + \sqrt{2})r$$

اس مساوات میں  $\sqrt{2}$  کی نصف کا مجذور طرفین پر

زیادہ کریں تو ادا طرف کامل مجذور ہو جائیگا

$$\sqrt{2} + 132 = (4 + \sqrt{2})\sqrt{2} + (4 + \sqrt{2})r$$

طرفین کا جذریا

$$\sqrt{2} + 132 \pm = \sqrt{2} + (4 + \sqrt{2})r$$

$$\sqrt{2} + 132 \pm = 4 + (\sqrt{2} + 4)r$$

طرفین کا مجذور کیا

$$\sqrt{2} + 132 = 4 + (\sqrt{2} + 4)r + (\sqrt{2} + 4)r$$

$$1 - 2 = (\sqrt{2} + 4)r + (\sqrt{2} + 4)r$$

$$1 - 2 = \frac{132}{r} + (\sqrt{2} + 4)r + (\sqrt{2} + 4)r$$

طرفین کا جذریا

$$\frac{r}{r} \pm = \frac{132}{r} + \sqrt{2} + 4 ::$$

$$1 - 2 = \sqrt{2} + 4 + 4r + 4r ::$$

زیادہ  
طرفین پر  $\frac{1}{4}$  کا مجذور

$$\frac{r}{4} - 2 = \frac{1}{4} + \sqrt{2} + 4 + 4r + 4r ::$$

$$\frac{r\sqrt{2}}{r} \pm 4\sqrt{2} \pm = \frac{1}{r} + \sqrt{2} ::$$

$$\frac{\sqrt{m^2 - n^2} \pm m}{m} = \frac{p}{m} - \frac{q}{n} \therefore$$

$$\frac{\sqrt{m^2 - n^2} \pm m}{m} = \frac{p}{m} - \frac{q}{n} \therefore$$

$$\frac{\sqrt{m^2 - n^2} \pm m}{m} = \frac{p}{m} - \frac{q}{n} \therefore$$

$$\frac{\sqrt{m^2 - n^2} \pm m}{m} = \frac{p}{m} - \frac{q}{n} \therefore$$

$$\frac{\sqrt{m^2 - n^2} \pm m}{m} = \frac{p}{m} - \frac{q}{n} \therefore$$

$$\sqrt{m^2 - n^2} \pm m = \frac{p}{m} - \frac{q}{n} \therefore$$

طرفین پر لا زیادہ کیا

$$\sqrt{m^2 - n^2} \pm m = \frac{p}{m} - \frac{q}{n} \therefore$$

کا مجدد طرفین پر زیادہ کیا

$$\sqrt{m^2 - n^2} \pm m = \frac{p}{m} - \frac{q}{n} \therefore$$

طرفین کا جذر لیا

$$\sqrt{m^2 - n^2} \pm m = \frac{p}{m} - \frac{q}{n} \therefore$$

$$\sqrt{m^2 - n^2} \pm m = \frac{p}{m} - \frac{q}{n} \therefore$$

$$\sqrt{m^2 - n^2} \pm m = \frac{p}{m} - \frac{q}{n} \therefore$$

$$\sqrt{m^2 - n^2} \pm m = \frac{p}{m} - \frac{q}{n} \therefore$$

$$\sqrt{m^2 - n^2} \pm m = \frac{p}{m} - \frac{q}{n} \therefore$$

$$\sqrt{m^2 - n^2} \pm m = \frac{p}{m} - \frac{q}{n} \therefore$$

$$\sqrt{m^2 - n^2} \pm m = \frac{p}{m} - \frac{q}{n} \therefore$$

ظاہر ہے کہ اگر طرفین پر  $\frac{1}{m}$  زیادہ کیا جاوے تو طرفین مجدد ہوں گے

کا مین ہو جاوین

$$\frac{p}{m} \pm \frac{q}{n} = \frac{1}{m} - \left(\frac{p}{m} - \frac{q}{n}\right) \therefore$$

$$\frac{p}{m} \pm \frac{q}{n} = \frac{1}{m} - \left(\frac{p}{m} - \frac{q}{n}\right) \therefore$$

کا  
طرفین پر  $\frac{1}{m}$  کا مجدد زیادہ کیا

$$\frac{p}{m} \pm \frac{q}{n} = \frac{1}{m} - \left(\frac{p}{m} - \frac{q}{n}\right) \therefore$$

$$\frac{p}{m} \pm \frac{q}{n} = \frac{1}{m} - \left(\frac{p}{m} - \frac{q}{n}\right) \therefore$$

$$\frac{p}{m} \pm \frac{q}{n} = \frac{1}{m} - \left(\frac{p}{m} - \frac{q}{n}\right) \therefore$$

$$\frac{p}{m} \pm \frac{q}{n} = \frac{1}{m} - \left(\frac{p}{m} - \frac{q}{n}\right) \therefore$$

$$\frac{p}{m} \pm \frac{q}{n} = \frac{1}{m} - \left(\frac{p}{m} - \frac{q}{n}\right) \therefore$$

طرفین کو  $\frac{1}{m}$  پر ضرب کیا

$$\frac{p}{m} \pm \frac{q}{n} = \frac{1}{m} - \left(\frac{p}{m} - \frac{q}{n}\right) \therefore$$

$$\frac{p}{m} \pm \frac{q}{n} = \frac{1}{m} - \left(\frac{p}{m} - \frac{q}{n}\right) \therefore$$

$$\frac{p}{m} \pm \frac{q}{n} = \frac{1}{m} - \left(\frac{p}{m} - \frac{q}{n}\right) \therefore$$

$$\frac{p}{m} \pm \frac{q}{n} = \frac{1}{m} - \left(\frac{p}{m} - \frac{q}{n}\right) \therefore$$

$$\frac{p}{m} \pm \frac{q}{n} = \frac{1}{m} - \left(\frac{p}{m} - \frac{q}{n}\right) \therefore$$

$$\frac{p}{m} \pm \frac{q}{n} = \frac{1}{m} - \left(\frac{p}{m} - \frac{q}{n}\right) \therefore$$

طرفین کو  $\frac{p}{m} - \frac{q}{n}$  میں ضرب کیا

$$\frac{p}{m} \pm \frac{q}{n} = \frac{1}{m} - \left(\frac{p}{m} - \frac{q}{n}\right) \therefore$$

$$\frac{p}{m} \pm \frac{q}{n} = \frac{1}{m} - \left(\frac{p}{m} - \frac{q}{n}\right) \therefore$$

$$\frac{p}{m} \pm \frac{q}{n} = \frac{1}{m} - \left(\frac{p}{m} - \frac{q}{n}\right) \therefore$$

$$1 - \frac{1}{r} = u \therefore$$

$$5 + \frac{1}{u^3} - \frac{232}{u^3} = \frac{16}{u} + \frac{831}{u^3} - 32 \quad \text{طرفین کو سہین ضرب کیا}$$

$$\frac{232}{10 + \frac{1}{u}} - \frac{232}{u} = 16 + \frac{831}{u} - 32 \therefore$$

$$10 + \frac{232}{u} + \frac{831}{u} = \frac{1}{u} + 16 + 32 \therefore$$

ظاہر ہے کہ اگر عدد آکا طرفین پر زیادہ کیا جاو تو طرفین  
مجذور ہو جاویں

$$14 + \frac{232}{u} + \frac{831}{u} = \frac{1}{u} + 16 + 32 \therefore$$

$$\text{طرفین کا جذور لیا} \quad (u + \frac{24}{u}) \pm = \frac{1}{u} + u \quad \text{کیا}$$

$$u + \frac{24}{u} = \frac{1}{u} + u \quad \text{پس اگر}$$

$$u^2 + 24 = 1 + \frac{1}{u} \quad \text{تو}$$

$$21 = u - \frac{1}{u} \therefore$$

$$\frac{21}{9} = u - \frac{1}{u} \therefore$$

$$\frac{254}{81} = \frac{21}{9} + \frac{u}{u} = (\frac{21}{9}) + u - \frac{1}{u} \therefore$$

$$\frac{14}{9} \pm = \frac{2}{9} - u \therefore$$

$$\frac{14}{9} - \frac{2}{9} = u \therefore$$

$$u - \frac{24}{u} = \frac{1}{u} + u \quad \text{اور اگر}$$

$$u^2 - 24 = 1 + \frac{1}{u} \quad \text{تو}$$

$$30 = u + \frac{1}{u} \therefore$$

مجذور پورا کیا

$$\frac{232}{4} = 30 - \frac{u}{u} = \frac{3}{4} + u + \frac{1}{u} \therefore$$

$$\frac{1}{u} + \frac{4}{u} + 4 = \frac{24}{u} + 4 - \frac{24}{u} \therefore$$

طرفین کا جذور لیا

$$\frac{1}{u} + 4 = \frac{4}{u} - \frac{4}{u} \therefore$$

طرفین کو ۲ لایین ضرب کیا

$$2 + u^4 = 12 - \frac{4}{u} \therefore$$

$$14 = u^4 - \frac{4}{u} \therefore$$

$$\frac{14}{2} = u - \frac{2}{u} \therefore$$

$$\frac{121}{144} = \frac{14}{2} + \frac{4}{144} = (\frac{2}{2}) + u - \frac{2}{u} \therefore$$

$$\frac{11}{2} - \frac{1}{2} = u - \frac{2}{u} \therefore$$

$$1 = u - \frac{2}{u} + \frac{2}{u} \quad \text{کیا}$$

طرفین کو ۲ میں ضرب کیا

$$14 = u^2 - \frac{2}{u} + \frac{2}{u} \therefore$$

$$14 + u^2 = \frac{2}{u} + \frac{2}{u} \therefore$$

طرفین پر ۱۶ کا مجذور زیادہ کیا

$$14 + u^2 + (\frac{16}{u^2}) = (\frac{16}{u}) + \frac{2}{u} + \frac{2}{u} \therefore$$

$$\text{طرفین کا جذور لیا} \quad (u + \frac{16}{u}) \pm = \frac{16}{u} + \frac{2}{u} \therefore$$

$$u + \frac{16}{u} = \frac{16}{u} + \frac{2}{u} \quad \text{اگر}$$

$$u \pm = 0 \quad \text{تو}$$

$$u - \frac{16}{u} = \frac{16}{u} + \frac{2}{u} \quad \text{اور اگر}$$

$$u - = \frac{16}{u} + \frac{2}{u} \quad \text{تو}$$

$$u - \frac{24}{u} = (\frac{16}{u}) + \frac{16}{u} + \frac{2}{u} \therefore$$

$$\frac{24}{u} = \text{طرفین کا جذور لیا}$$

$$\frac{10}{u} \pm = \frac{16}{u} + u \therefore$$

یہاں دو مجهول کی مرکب مساواتیں حل کیجاتی ہیں

(۱) ..... ۱۵ = ۶ - ۷

(۲) ..... ۳ = ۱۱/۲

مساوات (۲) کو ۲ پر تقسیم کیا تو ۶ = ۳

اور یہ قیمت لاکھ مساوات (۱) میں لکھی

تو ۱۵ = ۶ - ۳

∴ ۱۵ = ۶ - ۳

طرفین پر ۱/۲ کا مجذور زیادہ کیا

∴ ۱۲۱ = ۱۴ + ۶ - ۳

∴ ۱۱ = ۱ - ۳

∴ ۵ - ۳ = ۱۱ = ۱ - ۳

اور ۱۸ = ۳ = ۲

(۱) ..... ۳ = ۵ + ۱۰

(۲) ..... ۱۸ = ۷ - ۴

مساوات (۲) کو ۴ پر

∴ ۲ = ۷ - ۴

(۳) ..... ۲ + ۷ = ۵

اور مساوات (۲) سے یہ حاصل ہوتا ہے

۳ + ۷ = ۵ + ۱۰

اسی قیمت دیکھی جو مساوات (۳) حاصل ہوئی

∴ ۷ + ۳ = ۲ + ۷ + ۱۰

∴ ۲ = ۱۰ - ۷

∴ ۲ = ۱۰ - ۷

طرفین کا مجذور کیا

∴ ۲۶۴ - ۷ ± = ۲ + ۷

∴ ۲ - ۲۶۴ - ۷ ± = ۷

۲/۷ = (۲/۷ - ۷) + (۲/۷ - ۷)

(۲/۷ - ۷) - = ۲/۷ - (۲/۷ - ۷)

طرفین کا مجذور کیا

۲/۷ - ۷ = (۲/۷ - ۷) ۲/۷ - ۷ + ۲/۷ - ۷

= ۲ - ۷/۷ + (۲/۷ - ۷) ۲/۷ - ۷

= ۲ - ۷/۷ + (۲/۷ - ۷) ۲/۷ - ۷

∴ ۲ - ۷/۷ = ۲ - ۷

∴ ۲ - ۷/۷ = ۲ - ۷

∴ ۲ - ۷/۷ = ۲ - ۷

∴ ۲ - ۷/۷ = ۲ - ۷

∴ ۲ - ۷/۷ = ۲ - ۷

∴ ۲ - ۷/۷ = ۲ - ۷

∴ ۲ - ۷/۷ = ۲ - ۷

∴ ۲ - ۷/۷ = ۲ - ۷

∴ ۲ - ۷/۷ = ۲ - ۷

$$\frac{20}{n} - 1 = \frac{4}{n} - \frac{21}{n} = s \quad \therefore$$

$$\frac{220}{14} - 1 = \frac{19}{n} = \text{اور } n$$

$$(1) \dots \dots \dots 4 = s + 4$$

$$(2) \dots \dots \dots 4 = s + 4$$

سات (۱) سی یہ مساوات مرکب بعد دویم کی حاصل کی ہے

$$44 = s + 4$$

$$100 = n + s + 4$$

$$10 = s + 2$$

$$12 - 1 = s$$

$$28 - 1 = s$$

مساوات (۲) کا محذور کیا

$$34 = s + 4$$

$$n - 1 = s + 4$$

$$n - 1 = s + 4 \quad \text{تفریق کی}$$

$$n - 1 = s + 4$$

$$4 = s + 4$$

$$n - 1 = s + 4$$

$$\frac{n \times 21}{n} = s + 4$$

$$\frac{21}{n} = s + 4$$

$$29 = s + 4$$

اور تفریق کرنی سی  $s = 28 - 1 = 27$

$$21 = s + 4$$

$$\frac{29}{n} = \frac{20}{n} + \frac{2}{n} = \left(\frac{20}{n}\right) + \frac{2}{n} = 0$$

$$\frac{2}{n} = 0$$

$$\frac{1}{n} - 1 = \frac{2}{n} = 0$$

اور مساوات (۳) سی  $s = 2 + 4 = 6$

$$(1) \dots \dots \dots 5 = 13$$

$$(2) \dots \dots \dots 20 = 25$$

تانب (۱) سی یہ حاصل ہوتا ہے

$$5 = (s + 4) = 13$$

$$(3) \dots \dots \dots \frac{13}{5} = \frac{s + 4}{s - 4}$$

طرفین پر عدد آکا زیادہ کیا

$$\frac{5 + 13}{5} = \frac{s - 4 + s + 4}{s - 4}$$

$$(4) \dots \dots \dots \frac{18}{5} = \frac{2s}{s - 4}$$

اور یہ مساوات (۳) طرفین سی عدد آکا تفریق

$$(5) \dots \dots \dots \frac{1}{5} = \frac{2s}{s - 4}$$

مساوات (۴) کو مساوات (۵) پر تقسیم کیا

$$\frac{9}{n} = \frac{18}{n} = \frac{4}{s}$$

$$\frac{19}{n} = 0$$

$$20 = \frac{19}{n} + 2$$

$$\frac{141}{4n} = 20 + \frac{11}{4n} = \left(\frac{4}{n}\right) + \frac{19}{n} + 2$$

$$\frac{21}{n} = \frac{4}{n} + s$$



$$\frac{121}{9} = \frac{1}{9} + 30 = \frac{1}{9} + (s+u) + (s+u) \therefore$$

$$\frac{11}{3} \pm = \frac{1}{3} + s + u \therefore$$

$$4 - 15 = s + u \therefore$$

یہ قیمت ل + س کی مساوات (۱) میں لکھی

$$22 \text{ یا } 13 = s + u \therefore$$

$$12 = s + u \text{ مساوات (۲)}$$

$$12 - 2 = s + u \text{ تقریب کی} \therefore$$

$$\sqrt{12} \pm 1 \pm = s + u \text{ طرفین کا جذریا} \therefore$$

$$4 - 15 = s + u$$

$$3 \times \sqrt{12} \pm 4 \text{ یا } 3 \text{ یا } 4 = s + u \text{ جمع کیا}$$

$$3 \sqrt{12} \pm 3 \text{ یا } 3 \text{ یا } 3 = s + u \therefore$$

$$3 \times \sqrt{12} \pm 4 \text{ یا } 4 \text{ یا } 4 = s + u \text{ اور تفریق سے}$$

$$3 \sqrt{12} \pm 3 \text{ یا } 3 \text{ یا } 3 = s + u \therefore$$

$$(1) \dots s + u = 120 = 120 + s + u \text{ کے}$$

$$(2) \dots \dots \dots 8 = s + u$$

$$120 = (s+u) + (s+u) \text{ مساوات (۱)}$$

$$120 = 1 + (s+u) + (s+u) \therefore$$

$$11 \pm = 1 + (s+u) \therefore$$

$$(ط) \dots \dots 12 - 10 = s + u \therefore$$

$$\frac{1}{3} = s - u \text{ مساوات (۲)}$$

$$12 - \frac{1}{3} \text{ یا } 10 + \frac{1}{3} = s + u \therefore$$

$$(1) \dots \dots \dots s + u = 120$$

$$(2) \dots \dots \dots s = 11$$

مساوات (۲) سے  $\frac{s}{3} = s - u$  کلے  
 مساوات (۱) میں  $\frac{s}{3} = s - u$  سے  
 $\frac{s}{3} = s - u$  سے

$$\therefore s + u = \frac{s}{3} + s$$

$$\therefore s + u = s + \frac{s}{3}$$

$$\therefore s + u = \frac{4s}{3}$$

$$\therefore s + u = \frac{4s}{3}$$

طرفین پر ۳ کا مجذور زیادہ کیا

$$\therefore 3s + 3u = 4s$$

$$\therefore 3u = s$$

$$\therefore 3u = s$$

$$\therefore 3u = s$$

$$\therefore 3u = s$$

$$\therefore 3u = s$$

$$\therefore 3u = s$$

$$\therefore 3u = s$$

$$\therefore 3u = s$$

$$\therefore 3u = s$$

$$\therefore 3u = s$$

$$\therefore 3u = s$$

$$\therefore 3u = s$$

$$\therefore 3u = s$$

$$\therefore 3u = s$$

$$\therefore 3u = s$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ سے } 0 = 5\sqrt{x} + 4\sqrt{x} \text{ (۲)}$$

جمع کیا  $5\sqrt{x} + 4\sqrt{x} = 0$

$$\frac{0}{5} \sqrt{x} = 0$$

$$\frac{20}{5} \sqrt{x} = 0$$

اور تفریق کرنی سے  $5\sqrt{x} = 0$  یا  $0$

$$\frac{0}{5} \sqrt{x} = 0$$

$$\frac{20}{5} \sqrt{x} = 0$$

$$(۱) \dots \frac{10}{4} = \frac{0}{5} + \frac{0}{5} \quad 4$$

$$(۲) \dots \dots \dots 2 = 5 - 4$$

مساوات (۱) میں مجددیوں پر ایک مینی ۲ کا مجددیوں پر زیادہ کیا

$$\frac{121}{4} = 2 + \frac{10}{4} = 2 + \frac{0}{5} + \frac{0}{5} \therefore$$

$$\frac{11}{4} \pm = 2 + \frac{0}{5} \therefore$$

$$\frac{11}{4} - \frac{0}{5} = 2 - \frac{11}{4} \pm = \frac{0}{5} \therefore$$

$$\frac{11}{4} - \frac{0}{5} = 2 - \frac{11}{4} \therefore$$

مساوات (۲) سے  $2 + 5 = 0$

$$\frac{11}{4} - \frac{0}{5} = 2 + 5 \therefore$$

$$11 - 0 = 8 + 5 \therefore$$

$$4 = 5 \therefore$$

$$3 = 6 \text{ اور } 6$$

$$4 - \frac{0}{5} + \frac{0}{5} = 0 \therefore$$

$$5 - \frac{0}{5} + \frac{0}{5} = 0 \therefore$$

مساوات (۲) سے  $1 + 5 = 0$

$$1 + 5 = 0 + 5 - 4 \therefore$$

صورت اولیٰ سے  $5 + 0 = 1 + 5 = 0$  سی اس طرح قیمت دگی

$$1 - 5 = 0 - 5$$

$$\frac{4}{5} = 1 - \frac{0}{5} = \frac{0}{5} + 0 - 5 \therefore$$

$$\frac{4}{5} \pm = \frac{0}{5} - 5 \therefore$$

$$(۱) \dots \frac{4}{5} = \frac{0}{5} \pm = \frac{0}{5} - 5 \therefore$$

صورت دوسری سے  $4 - 0 = 1 + 5 = 0$  سی اس طرح قیمت دگی

$$1 - 5 = 0 + 5$$

$$0 = 4 + 5 + 5 \therefore$$

$$0 \sqrt{x} \pm = 2 + 5 \therefore$$

$$3 - 0 \sqrt{x} \pm = 5 \therefore$$

$$4 \pm 0 = 0 + \frac{0}{5} \pm 0 + \frac{0}{5} = 0 + \frac{0}{5} = 0$$

اور یوں مساوات (ط) سے  $0 \sqrt{x} + 4 = 12 - 5 = 0$

$$(۱) \dots 0 = \sqrt{x} + 0 \sqrt{x} - 5 + 5 \sqrt{x} - 0 \sqrt{x} \dots$$

$$(۲) \dots \dots 0 = 5 \sqrt{x} + 0 \sqrt{x}$$

مساوات (۱) میں  $\frac{1}{5}$  کا مجددیوں پر زیادہ کیا

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{5} + (\sqrt{x} - 0) - 5 + 5 \sqrt{x} - 0 \sqrt{x} \therefore$$

$$\frac{1}{5} \pm = \frac{1}{5} - 5 \sqrt{x} - 0 \sqrt{x} \therefore$$

مساوات (۱) سی ل  $\frac{۱۲}{(s+1)s}$

مساوات (۲) سی ل  $\frac{۱۸}{۳s+1}$

$\frac{۳ \times ۴}{(s+1)(s-۲)} = \frac{۱۸}{(۳s+1)} = \frac{۱۲}{(s+1)s}$

طرفین کا اختصار کیا  $\frac{۳}{1+s-۲s} = \frac{۲}{s}$

$۳s = ۲ + s - ۲s$

$۲ - = ۵s - ۲s$

$۱ - = ۳ \frac{۵}{۲} - ۲$

$\frac{۹}{۱۴} = ۱ - \frac{۲۵}{۱۴} = \frac{۲۵}{۱۴} \pm ۳ \frac{۵}{۲} - ۲$

$\frac{۳}{۲} \pm = \frac{۵}{۲} - ۱$

$\frac{۱}{۲} یا ۲ = \frac{۳}{۲} \pm \frac{۵}{۲} = ۱$

اور ل  $۱۴ یا ۲ = \frac{۱۲}{۳s+1}$

(۱) .....  $s - ۳ = \frac{1}{s} - ۱$

(۲) .....  $\frac{1}{s} - s = ۱ - ۳$   
دو طرف کو  $\frac{1}{s} - ۳ = \frac{1}{s} - ۳$

میں کبھی مساوات (۱) یہ قیمت کی  $1 - \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$

$\frac{1}{s} - ۳ + ۳ = \frac{1}{s} - ۳ + ۳ = \frac{1}{s} - ۱$

$۲ = \frac{1}{s} - ۱$

$۱ = \frac{1}{s} - ۲$

$\frac{۲۵}{۱۴} = ۱ + \frac{۹}{۱۴} = \frac{۲}{۳} + \frac{1}{۲} - ۱$

یا  $۶ - = ۳۰$

$\frac{۳}{۱۰} - = ۱$

اور ل  $\frac{۱۶}{۱۰} یا ۵ = ۲ + s$

(۱)  $۲ = \frac{s+۱}{۳} \sqrt{۱} + \frac{۱۳}{s+۱} \sqrt{۱}$

(۲)  $۵ = (s+۱) - ۱$

مساوات (۱) میں ضرب کیا تو یہ حاصل ہوا

$s+۱ \sqrt{۱۳} \sqrt{۲} = s+۱+۱۳$

$- = s+۱ + s+۱ \sqrt{۱۳} \sqrt{۲} - ۱۳$

طرفین کا جذریا  $0 = s+۱ \sqrt{۱۳} \sqrt{۲} - ۱۳$

$s+۱ \sqrt{۱۳} \sqrt{۲} = ۱۳$

طرفین کا مجذور کیا  $s+۱ = ۱۳$   
میں (۲)  $s+۱ = ۱۳$   
یہ قیمت کی مساوات  $= ۱۳$

$۵ = (۱۳+۱) - ۱۳$

$۵ = ۱۳ - ۱۳$

$۲۴ = ۱۳ - ۱۳$

$\frac{۲۱}{۱۴} = ۲۴ + \frac{۹}{۱۴} = \frac{۹}{۱۴} + ۱۳ - ۱۳$

$\frac{۲۱}{۲} \pm = \frac{۳}{۲} - ۱$

$\frac{۹}{۲} - ۱۴ = \frac{۲۱}{۲} \pm \frac{۳}{۲} = ۱$

$4 - ۱۳ = ۱۳ = ۱$

(۱) .....  $۱۳ = ۳s+۱$

(۲) .....  $۱۸ = ۳s+۱$



اور چونکہ  $u = x + y$  اور  $v = x - y$  ... (۵)

سادات (۱) کو مساوی (۲) پر تقسیم کیا

$$\frac{1}{1+x} = u$$

$$1+x+u = u$$

اور مساوی (۲) لے کر

$$3+x = 1+x+u$$

$$2 = 1+u$$

$$\frac{4}{v} = \frac{1}{u} + u + x$$

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{u} + u$$

$$2 - u = \frac{1}{u} - \frac{3}{2} = x$$

$$اور لے کر  $1+x = u$$$

$$u = 2$$

$$(1) \frac{2}{v} - \frac{3}{2} = \frac{1}{u} + \frac{1}{u} + \frac{1}{u} \dots (1)$$

اور لے کر  $2 = x - y$  ... (۲)

$$سادات (1) \frac{24}{v} = \frac{x}{u} + \frac{u}{3} + \frac{2}{u} + \frac{u}{3}$$

طرف پر عدد ۲ کا زیادہ کیا

$$\frac{30}{v} = \frac{x}{u} + \frac{u}{3} + \frac{2}{u} + 2 + \frac{u}{3}$$

$$\frac{30}{v} = \left(\frac{x}{u} + \frac{u}{3}\right) + \left(\frac{2}{u} + \frac{u}{3}\right)$$

$$\frac{34}{v} = \frac{1}{u} + \left(\frac{x}{u} + \frac{u}{3}\right) + \left(\frac{1}{u} + \frac{u}{3}\right)$$

$$\frac{4}{2} = \frac{1}{u} + \frac{x}{u} + \frac{u}{3}$$

$$\frac{4}{v} - \frac{0}{v} = \frac{4}{u} + \frac{0}{u}$$

کسر دور کی  $u = x + y$

دوسری مساوی کی مجددور لے کر

$$\frac{4x}{v} - \frac{0x}{v} = 4 + 0$$

$$4 = 4 + 0$$

$$4 = 4 + 0$$

(۲) مساوی کی مجددور لے کر

$$(3) \frac{3x}{v} - \frac{0x}{v} = 3 + 0$$

جمع کرنی سی

$$\frac{3x}{v} + \frac{4x}{v} = \frac{7x}{v} = 7$$

$$\frac{3x}{v} + \frac{4x}{v} = 7$$

$$\frac{3x}{v} + \frac{4x}{v} = 7$$

$$\frac{3x}{v} + \frac{4x}{v} = 7$$

$$\frac{3x}{v} + \frac{4x}{v} = 7$$

$$\frac{3x}{v} + \frac{4x}{v} = 7$$

$$\frac{3x}{v} + \frac{4x}{v} = 7$$

$$\frac{3x}{v} + \frac{4x}{v} = 7$$

جب چار مقدار متناسب ہوں تو اول دوسری سے مجموعہ

کو اول اور دوسری سے حاصل تفریق کی نسبت وہ نسبت

ہوتی ہے جو تیسری اور چوتھی مقدار کی مجموعہ اور تیسری اور چوتھی

کی حاصل تفریق سے ہے اور نسبت اسکا بعد مساوی ہوتا ہے

مسوات (۱) میں مجذور پر ایک نئے کا  
مجذور ظفرین پر زیادہ کیا

$$\frac{149}{100} = \frac{1}{100} + \frac{22}{100} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s \dots$$

ضرب کر کے

$$\frac{149}{100} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

مسوا (۲)

$$\frac{149}{100} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

مسوا (۳)

$$\frac{149}{100} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

مسوا (۴)

$$\frac{149}{100} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

مجذور پر ایک یعنی  $\frac{3}{100}$  کا مجذور ظفرین پر زیادہ کیا

$$\frac{149}{100} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

ضرب کر کے

$$\frac{149}{100} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

$$\frac{149}{100} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

لیکن مسوا (۳)

$$\frac{149}{100} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

$$\frac{149}{100} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

$$\frac{149}{100} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

$$\frac{149}{100} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

اور  $s = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$  مسوات (۴)

$$\frac{149 \times 100}{100} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

جو کہ پس برائے میان بلائی تناسب (۱) کے  
حاصل ہوتا ہے

$$1 + \sqrt{14} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

$$1 + \sqrt{14} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

$$1 + \sqrt{14} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

مسوا (۲)

$$1 + \sqrt{14} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

$$1 + \sqrt{14} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

اور (۳) مسوا

$$1 + \sqrt{14} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

$$1 + \sqrt{14} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

مجذور آگایا

$$1 + \sqrt{14} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

ضرب کر کے

$$1 + \sqrt{14} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

پس اگر قیمت لین تو یہ حاصل ہوتا ہے

$$1 + \sqrt{14} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

$$1 + \sqrt{14} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

$$1 + \sqrt{14} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

$$1 + \sqrt{14} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

$$1 + \sqrt{14} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

$$1 + \sqrt{14} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

$$1 + \sqrt{14} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$$

(۱)  $\frac{149}{100} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$

(۲)  $\frac{149}{100} = \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \sqrt{14} + s$



$$\frac{29}{20n} = \frac{1n}{5} + \frac{1}{20n} = \frac{1}{20n} + \frac{1}{5} - \frac{1}{20n} \therefore$$

$$\frac{2}{20} \pm = \frac{1}{20} - \frac{1}{5} \therefore \text{خبریں}$$

$$\frac{3}{10} - \frac{1n}{20} = \frac{1}{20} + \frac{2}{20} \pm = \frac{3}{20} \therefore$$

$$\text{ما } \frac{3}{20} \therefore \dots \dots \dots 3 - 1n = \frac{3}{20} \dots \dots \dots (2)$$

اور سادہ (3)  $\sqrt{1n} = 5$  یا  $1n = 25$  کی  
ہر قیمت  $n$  کی مساوات (2) میں لکھی

$$\frac{3}{20} \pm = \frac{1}{20} - \frac{1}{5} \therefore$$

$$\frac{3}{20} \pm = \frac{1}{20} - \frac{1}{5} \therefore$$

$$\frac{3}{20} \pm = \frac{1}{20} - \frac{1}{5} \therefore$$

$$\frac{3}{20} \pm = \frac{1}{20} - \frac{1}{5} \therefore$$

$$\frac{3}{20} \pm = \frac{1}{20} - \frac{1}{5} \therefore$$

$$\frac{3}{20} \pm = \frac{1}{20} - \frac{1}{5} \therefore$$

$$\frac{3}{20} \pm = \frac{1}{20} - \frac{1}{5} \therefore$$

مجذور پورا کیا یعنی  $\frac{1}{20}$  کا مجذور طرفین پر زیادہ کیا

$$\frac{3}{20} \pm = \frac{1}{20} - \frac{1}{5} \therefore$$

$$\frac{3}{20} \pm = \frac{1}{20} - \frac{1}{5} \therefore$$

$$\frac{3}{20} \pm = \frac{1}{20} - \frac{1}{5} \therefore$$

$$\frac{3}{20} \pm = \frac{1}{20} - \frac{1}{5} \therefore$$

$$\frac{3}{20} \pm = \frac{1}{20} - \frac{1}{5} \therefore$$

$$\frac{3}{20} \pm = \frac{1}{20} - \frac{1}{5} \therefore$$

لیکن (2) مساواتی  $\frac{2-10}{20} = \frac{1}{20}$

$$\frac{1}{14+9} = \frac{2-10}{20} \therefore$$

$$20 = 14 - 9 - 10 \therefore$$

$$14 = 20 - 10 - 10 \therefore$$

$$\frac{1n}{20} = 20 - \frac{1n}{20} \therefore$$

$$\frac{1n}{140} = \frac{1n}{20} + \frac{1n}{140} = \left(\frac{1n}{20}\right) + 20 - \frac{1n}{20} \therefore$$

$$\frac{29}{20} \pm = \frac{1n}{20} - 10 \therefore$$

$$\frac{9}{20} - 10 = \frac{29}{20} \pm \frac{1n}{20} = 10 \therefore$$

$$\frac{1}{20} - 10 = \frac{2-10}{20} = \frac{1}{20} \therefore$$

$$\left(\frac{1}{20}\right) \pm = \left(\frac{1}{20}\right) \pm \sqrt{10} \therefore$$

$$\frac{1}{20} \pm = \frac{1}{20} - 10 \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{1}{20} \pm = \frac{1}{20} - 10 \dots \dots \dots (2)$$

$$\frac{1}{20} \pm = \frac{1}{20} - 10 \dots \dots \dots (1)$$

طرفین پر  $\frac{1}{20}$  کا مجذور زیادہ کیا

$$14 + \frac{1}{20} \pm = 20 - \frac{1}{20} \pm = 20 \therefore$$

$$\frac{1}{20} \pm + \frac{1}{20} \pm = \sqrt{10} \pm \therefore$$

$$\frac{1}{20} \pm - 10 = \frac{1}{20} \pm \therefore$$

$$\frac{1}{20} \pm = \frac{1}{20} - 10 \dots \dots \dots (3)$$

$$\frac{1n}{20} = \frac{1n}{20} - \frac{1n}{20} \therefore$$

مجذور پورا کیا یعنی  $\frac{1}{20}$  کا مجذور طرفین پر زیادہ کیا



$$\frac{1 + \sqrt{13} \sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad \therefore$$

$$\frac{\sqrt{13} \sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{2} = \frac{(1 + \sqrt{13} \sqrt{2})}{2} = \sqrt{2} \quad \therefore$$

$$2\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \quad \therefore$$

عدد ۲ کا طرفین پر زیادہ کیا

$$4 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \quad \therefore$$

$$4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) \quad \text{یعنی}$$

$$\frac{20}{2} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) \quad \therefore$$

$$\frac{0}{2} \pm = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \quad \therefore$$

$$2 - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \quad \therefore$$

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \quad \therefore$$

پس اگر  $\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = 1$

$$1 = \sqrt{2} - 1 \quad \text{تو}$$

$$0 = 1 + \sqrt{2} - 1 \quad \therefore$$

$$0 = 1 - \sqrt{2} \quad \therefore$$

$$1 = \sqrt{2} \quad \therefore$$

اور اگر  $\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = 1$

$$1 = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{تو}$$

$$\frac{0}{2} = 1 - \frac{4}{2} = \frac{4}{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} \quad \therefore$$

$$\frac{0}{2} \sqrt{2} \pm = \frac{4}{2} + \sqrt{2} \quad \therefore$$

$$\frac{0 \sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad \therefore$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{2} - \sqrt{2} \sqrt{2} - \sqrt{2} - \sqrt{2} \quad \therefore$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} \sqrt{2} \pm = \sqrt{2} - \sqrt{2} \sqrt{2} - \sqrt{2} \sqrt{2} \quad \therefore$$

طرفین کو ہم میں ضرب کیا

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} \sqrt{2} \pm = \sqrt{2} - \sqrt{2} \sqrt{2} - \sqrt{2} \sqrt{2} \quad \therefore$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} \sqrt{2} \pm = \sqrt{2} - \sqrt{2} \sqrt{2} - \sqrt{2} \sqrt{2} \quad \therefore$$

بوسیدہ اس مساوات کے اور (۳) مساوات کے

$$\sqrt{2} \sqrt{2} = 2$$

$$2 = \sqrt{2} \quad \therefore$$

$$14 = 2 \quad \therefore$$

$$\frac{2}{2} = \frac{12}{2} = \frac{2-2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{اور مساوات (۲)}$$

$$\frac{4}{2} = 2 \quad \therefore$$

$$\frac{\sqrt{2} \sqrt{2} + 2}{2} = 2 - \sqrt{2} \quad \therefore$$

طرفین پر  $\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$  زیادہ کیا

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} \sqrt{2} + 2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - \sqrt{2} \quad \therefore$$

$$\left(\frac{\sqrt{2} + 2}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right) \quad \text{یعنی}$$

$$\frac{\sqrt{2} + 2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \quad \therefore$$

$$\frac{\sqrt{2} + 2}{2\sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \quad \therefore$$

$$\sqrt{2} + 2 = 1 - \sqrt{2} \quad \therefore$$

$$2 = \sqrt{2} - \sqrt{2} \quad \therefore$$

$$\frac{12}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2} \quad \therefore$$

$$\frac{\sqrt{2} \sqrt{2} \pm}{2} = \frac{1}{2} - \sqrt{2} \quad \therefore$$

$$(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \parallel - = (2 - \frac{1}{\sqrt{2}}) (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}) \text{ یا}$$

$$\parallel - = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \text{ ::}$$

$$1 \cdot - = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$1 \cdot - \sqrt{2} \pm 1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ::}$$

$$\sqrt{2} (1 - \sqrt{2} \pm 1) = \parallel -$$

اور موافق خواص مساوات کی  $\frac{1}{\sqrt{2}} - 2 = 0$

$$2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ::}$$

$$2 = \sqrt{2} \text{ ::}$$

$$(1) \dots \dots \dots 12 = 2 + 2 \text{ کے}$$

$$(2) \dots \dots \dots 1 = 2 - 2$$

فرض کیا کہ  $2 = 0$

$$(3) \dots \dots \dots 12 = 2 + 2 = 2 + 2 = 2 + 2 \text{ ::}$$

$$(4) \dots \dots \dots 1 = 2 - 2 = 2 - 2 = 2 - 2 \text{ ::}$$

مساوات (3) سے  $2 = (2 + 2) = 12$

$$\frac{12}{2+2} = 2 \text{ ::}$$

$$\frac{1}{2-2} = 2 \text{ مساوات (4)}$$

$$\frac{1}{2-2} = \frac{12}{2+2} \text{ ::}$$

$$2 + 2 = 22 - 22 \text{ ::}$$

$$22 - = 11 - 11 \text{ ::}$$

$$\frac{20}{2} = 22 - \frac{121}{2} = \frac{121}{2} + 11 - 11 \text{ ::}$$

$$1 + \sqrt{2} - 1 \sqrt{2} = \frac{1}{2} - 0 - 0 \text{ ::}$$

$$1 - 1 - 1 + \sqrt{2} - 1 \sqrt{2} = \frac{1}{2} - 0 - 0 \text{ ::}$$

یا  $1 - 1 - 1 + \sqrt{2} - 1 \sqrt{2} = \frac{1}{2} - 0 - 0$  کی  
اس مساوات کی دوسری طرف عدد آ زیادہ بھی کیا

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - 0 - 0 - 0 = 1 - 1 - 1 + \sqrt{2} - 1 \sqrt{2} = \frac{1}{2} - 0 - 0 \text{ ::}$$

$$1 + \frac{1}{2} - 0 - 1 - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2} + 0 + (1 - 1) = 0$$

$$\frac{1}{2} + 0 = 1 - 1 + \sqrt{2} - 1 \sqrt{2} + (1 - 1) \text{ ::}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - = 1 - 1 + \sqrt{2} - 1 \sqrt{2} + (1 - 1) \text{ ::}$$

مجبور پورا کیا یعنی  $\frac{1}{2}$  کا مجبور طرفین پر زیادہ کیا

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \sqrt{2} - 1 \sqrt{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ ::}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{2} - 1 \sqrt{2} + (1 - 1) \text{ ::}$$

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + \sqrt{2} - 1 \sqrt{2} \text{ ::}$$

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 \text{ ::}$$

$$\frac{3}{2} = 2 \text{ ::}$$

$$\frac{3 \sqrt{2}}{2} = 0 \text{ ::}$$

$$22 = \frac{1}{2} + 0 + 0 \text{ ۲۶}$$

طرفین مساوات سے  $11$  کا تقزین کے

$$11 + 0 + 0 = \frac{1}{2} \parallel - \frac{1}{2} \parallel - 22 = 11 - 22 \text{ ::}$$

$$(11 - 22) \parallel - = \frac{1}{2} \parallel - \frac{1}{2} \parallel - \text{ ::}$$

$$(2 - \frac{1}{2}) \parallel - =$$

$$(2 - \frac{1}{2}) \parallel - = \frac{1}{2} \parallel - \text{ ::}$$

$$\therefore r = \frac{11}{3} - \frac{5}{3} = \frac{6}{3} = 2 \text{ یا } -\frac{14}{3}$$

$$\therefore r = \frac{14}{3} \text{ یا } -\frac{11}{3}$$

$$\text{اور } l = s + r = 3$$

$$\text{اور } s = r - 1$$

وضیح ہو کہ مساوات درجہ دوم میں خاص ترکیبیں اکثر کام آتی ہیں اور ان ترکیبوں میں خواص مساوات سی بہت مدد ہوتی ہے اس واسطے بیان چند ہی مثالیں حل کی گئی ہیں تاکہ طریقہ خاص ترکیبوں کا کچھ معلوم ہو جاوے اس جو مقابلہ کے آخ میں ایک ضمیر  $r$  دیا تو نکال ہو گا جس میں بہت سی مساوات خاص ترکیبوں سے حل کھی جانی جائے گی کہ مقادیر نزولی کے اعمال ہی مساوات حل کرنے میں مدد ہوتی ہیں اس واسطے مقادیر نزولی کا بیان ایک فصل میں اچھی طرح لکھا جاوے گا بیان تجویزی سی مثالیں لکھی جاتی ہیں تاکہ طالب علم کو کچھ واقفیت ہو جاوے

مثالیں مقادیر نزولی کے

$$\text{ثبات کرو کہ } \sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3}$$

$$\text{جواب ظاہر ہو گا } \sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3} = 2 \times 3 = 6$$

$$\text{ثبات کرو کہ } \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3 \times 3 \times 3} = 3$$

$$\text{ظاہر ہو گا کہ } \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3 \times 3 \times 3} = 3$$

$$\sqrt[3]{12} \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{12 \times 6} = \sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3}$$

$$\sqrt[3]{12} \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 3} \sqrt[3]{2 \times 3} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3}$$

$$\therefore r = \frac{11}{3} - \frac{5}{3} = 2 \text{ یا } -\frac{14}{3}$$

$$\therefore r = \frac{11}{3} - \frac{5}{3} = 2 \text{ یا } -\frac{14}{3}$$

$$\text{اور } l = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ یا } 1$$

$$\therefore r = \frac{1}{3} \text{ یا } 1$$

$$\text{اور } l = r = \frac{1}{3} \text{ یا } 1$$

$$28 = l + s + r = \dots \dots \dots (1)$$

$$(2) \dots \dots \dots = (r + l)(r + s)$$

$$\text{فرض کیا کہ } l = s + r$$

$$\text{اور } r = s - r$$

$$\therefore l = s + r = s + s - r = 2s - r$$

$$\therefore r = s$$

$$\text{اور } l + s = (r + s) + (r + s) = 2r + 2s = 2(2s) = 4s$$

$$\text{اور } l + s = (r + s) + (r + s) = 2r + 2s = 2(2s) = 4s$$

$$\therefore (l + s)(r + s) = (2s + 2s)(2s + 2s) = (4s)(4s) = 16s^2 = 28$$

$$\text{یا } 280 = (2s + 2s)(2s + 2s) = 16s^2$$

$$\therefore 35 = (2s + 2s)(2s + 2s) = 16s^2$$

$$35 = 5 \times 7 = 5 \times 7 + 14 + 14 = 5 \times 7 + 2 \times 7 + 2 \times 7$$

$$\therefore \frac{14}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{14}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{14}{3}$$

$$\frac{14}{3} = \frac{14}{3} + \frac{14}{3} = \left(\frac{14}{3}\right) + \frac{2}{3} \times \frac{14}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{14}{3}$$

$$\therefore \frac{14}{3} = \frac{14}{3} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{3}}{18\sqrt{2}}$$

اسو اسطی کہ  $\frac{1}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{3}}{18\sqrt{2}}$    
 یہاں مشتق کی دوا بغیر حل کی ہوئی مساؤں میں درج ہو چکی ہے

۱  $12 - 11 = 0$  جواب  $0 = 12 - 11$   $12 = 11 + 0$

۲  $4 - 1 = 0$   $10 = 1 + 0 + 4 - 0$

۳  $2 - 1 = 0$   $1 = 1 + 0 + 1 - 0$

۴  $12 - 11 = 0$   $12 = 11 - 0 - 0$

۵  $12 - 1 = 0$   $10 = 12 - 0 - 9 - 0$

۶  $0 - 1 = 0$   $24 = 12 + 0 + 12 - 0$

۷  $\frac{06}{0} - 6 = 0$   $\frac{1}{0} 10 = 19 - \frac{0r}{0} + \frac{0}{r}$

۸  $\frac{9}{r} - 1 = 0$   $1 + \frac{0}{r} = \frac{1}{r} r + \frac{0r}{r}$

۹  $r - 1 = 0$   $12 = \frac{12 - 0}{0} + r + 0$

۱۰  $\frac{r}{r} - 1 = 0$   $r = \frac{0 - r}{0} - 0 - r$

۱۱  $\frac{12}{0} - 1 = 0$   $0r + \frac{0r + 9}{0} = \frac{0 - 0}{r} - 14$

۱۲  $\frac{44}{10} - 6 = 0$   $\frac{1}{0} 0 = \frac{0r - 14}{0 - 0r} + \frac{r + 0}{r}$

$$\frac{0r + 9}{r} + 0r = \frac{4 + 0}{2 - 0} - 0r + 12$$

$$r - 1 = 0$$

اور  $\sqrt{2} \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 18} = \sqrt{36} = 6$    
  $\sqrt{2} \sqrt{10} = \sqrt{2 \times 10} = \sqrt{20}$

بس  $\sqrt{18} = \sqrt{2} \sqrt{9} = \sqrt{2} \times 3 = 3\sqrt{2}$    
  $\sqrt{10} = \sqrt{2} \sqrt{5} = \sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2} \sqrt{5}$

اسو اسطی کہ  $\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{10\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{10\sqrt{5}}$    
  $\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{10\sqrt{5}}$

$\frac{\sqrt{2}}{10\sqrt{5}} \sqrt{10} = \frac{\sqrt{2}}{10\sqrt{5}} \sqrt{2 \times 5} = \frac{0 \times 2}{0 \times 10} = \frac{0}{10}$

$\sqrt{10} \frac{1}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$

$\sqrt{18} \sqrt{12} = \frac{1 \times 18 \sqrt{12}}{4\sqrt{12}}$

اسو اسطی کہ  $\frac{1 \times 18 \sqrt{12}}{4\sqrt{12}} = \frac{1 \times 18 \sqrt{12}}{4\sqrt{12}}$

$\sqrt{12} = \sqrt{2} \sqrt{6} \times \sqrt{2} = \sqrt{2 \times 4} \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

۷ ثابت کرو کہ  $\sqrt{10} = 6$

ظاہر ہے کہ  $\sqrt{10} = 6$

$\sqrt{10} = \frac{10}{\sqrt{10}}$

اسو اسطی کہ  $\frac{0 \times r}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1 \times r}{\sqrt{10} r} = \frac{r}{10}$

$\sqrt{10} = \frac{0 \times r \sqrt{10} \times \sqrt{10}}{\sqrt{10}}$

$\sqrt{10} = \frac{r \sqrt{10}}{r \sqrt{10}}$

اسو اسطی کہ  $\sqrt{10} = \frac{r \times 0 \sqrt{10}}{0 \sqrt{10}} = \frac{r \times 0 \sqrt{10}}{0 \sqrt{10}} = \frac{1 \times r \sqrt{10}}{0 \times r \sqrt{10}} = \frac{r \sqrt{10}}{r \sqrt{10}}$

$\frac{r}{r} \sqrt{10} = \frac{0 \times r \sqrt{10}}{4}$

اسو اسطی کہ  $\frac{r \times r \times 4 \sqrt{10}}{4} = \frac{r \times r \times 4 \sqrt{10}}{4} = \frac{0 \times r \sqrt{10}}{4}$

$\frac{r}{r} \sqrt{10} = \frac{r \times r \sqrt{10}}{r \times r \sqrt{10}} = \frac{r \times r \sqrt{10}}{r \times r \sqrt{10}} = \frac{r \times r \sqrt{10}}{r \times r \sqrt{10}}$

$$\frac{r+uq}{ur} = \frac{4-u^2}{4+ur} - \frac{0-u^2}{u} \quad P4$$

$$\frac{10r}{r^2} - \underline{L}r = 0$$

$$\frac{11-u^2}{r-u^2} - r^2 = \frac{14+u^2}{4+ur} - 11+ur \quad P6$$

$$\frac{r+u}{\lambda+u} - u = \frac{0}{11+ur} + \frac{u}{4+u} \quad P8$$

$$\frac{00}{4} - \underline{L}r = 0$$

$$\frac{4+ur}{r+ur} = \frac{0}{r+ur} + \frac{r+u}{4+u} \quad P9$$

$$\frac{r}{r} - \underline{L}\lambda = 0$$

$$\frac{0+ur}{u^2} = \frac{4+ur}{11+u^2} + \frac{r}{r+ur} \quad P10$$

$$\frac{r^2}{r} - \underline{L}y = 0$$

$$\frac{r+ur}{11+ur} = \frac{14-u^2}{ur+r} + \frac{\lambda}{u^2+4} \quad P11$$

$$\frac{r\lambda r}{1r} - \underline{L}r = 0$$

$$\frac{r^2}{r+u} = \frac{\lambda}{u-r} + \frac{1r}{u-0} \quad P12$$

$$\frac{0\lambda}{1r} - \underline{L}r = 0$$

$$\frac{u}{r} + \frac{u-\lambda}{r-u^2} = \frac{1-u^2}{u-r} \quad P13$$

$$\frac{u}{r} - \underline{L}r = 0$$

$$\frac{u}{u^2} = \frac{4}{ur+u} + \frac{r}{u-u^2} \quad P14$$

$$\frac{r^4}{u} - \underline{L}r = 0$$

$$1 - \frac{4+ur}{9} = \frac{u-4}{r-u} - \frac{r+u}{r} \quad P15$$

$$0 \underline{L} r = 0$$

$$\frac{7+ur}{2} - 0^2 = \frac{ur-r}{0-u^2} - \frac{u-10}{r} \quad P16$$

$$\frac{r^2 q}{1r\lambda} - \underline{L}r = 0$$

$$\frac{1}{r} - \underline{L}r = 0 \iff \frac{ur+q}{u} + \frac{11+u}{u} \quad P17$$

$$\frac{14-ur}{1\lambda} + r = \frac{r-ur}{r+ur} + \frac{4+ur}{4} \quad P18$$

$$\frac{14}{r} - \underline{L}y = 0$$

$$1 - \underline{L}r = 0 \quad \frac{4}{0-u^2} = \frac{u}{4+u} \quad P19$$

$$\frac{1}{2} - \underline{L}z = 0 \quad \frac{1}{r} r = \frac{1-u^2}{0+u} + \frac{4-ur}{u} \quad P20$$

$$\frac{r}{3} - \underline{L}w = 0 \quad \frac{1}{r} r = \frac{u-r}{ur} - \frac{r+u}{1-u} \quad P21$$

$$\frac{r}{r} - \underline{L}1 = 0 \quad \frac{r^2}{ur} = 4 - \frac{u\lambda}{r+u} \quad P22$$

$$\frac{10}{1r} - \underline{L}q = 0 \quad 1r = \frac{r^2}{u} + \frac{r^2}{0-u} \quad P23$$

$$\frac{r^2-0^2}{10} - 9 = \frac{r^2-ur}{1r-0^2} + \frac{1r-0^2}{9} \quad P24$$

$$\frac{r^2 z}{1r} - \underline{L}r = 0$$

$$\frac{r^2}{1r} - \underline{L}y = 0 \quad \frac{1}{r} \lambda = \frac{0-ur}{r-u} + \frac{ur}{r-u} \quad P25$$

$$\frac{1}{r} y - \frac{ur}{ur-r^2} = \frac{r+ur}{u-1} \quad P26$$

$$\frac{r^2}{r^2} - \underline{L}\lambda = 0$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{z} + \sqrt{w}$$

$$(11-) \pm \sqrt{z} = 0$$

$$r^2 = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \quad r^2 \quad 20$$

$$\left(\frac{r}{x}\right) \pm \sqrt{z} = 0$$

$$r^2 + 1 = \sqrt{z} + \sqrt{w} \quad r^2 \quad 21$$

$$\sqrt{r^2 + 1} - \sqrt{z} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + 1}} \sqrt{z} = 0 \quad \frac{1}{\sqrt{z}} = r + \frac{1}{\sqrt{z}} \quad r^2 \quad 22$$

$$\frac{0}{\sqrt{z}} + \frac{r^2}{\sqrt{z}} = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \quad r^2 \quad 23$$

$$\sqrt{z} (-) \sqrt{z} = 0$$

$$\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z}} - r = \frac{1}{\sqrt{z}} \sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}} \sqrt{z} \quad r^2 \quad 24$$

$$\frac{r^2}{\sqrt{z}} - \sqrt{z} = 0$$

$$r = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z}} - \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z}} \sqrt{z} \quad 25$$

$$\frac{1}{\sqrt{z}} \left(\frac{1}{r^2} - \right) \sqrt{z} = 0$$

$$\frac{\sqrt{z} - \sqrt{z}}{r - \sqrt{z}} + \frac{r}{r+1} = \frac{\sqrt{z} - \sqrt{z}}{r+1} \quad 26$$

$$\frac{1}{r^2} \sqrt{z} = 0$$

$$(b-u) \pm (b+u) \sqrt{r} = (\sqrt{b} + \sqrt{u}) \sqrt{r} \quad 27$$

$$b - \frac{1}{r} \frac{b}{r} = 0$$

$$e \pm b - u = \sqrt{b} \pm \sqrt{u} \quad 28$$

$$\frac{e}{b} - \frac{1}{b} \frac{e}{r} = 0$$

$$\frac{\sqrt{z}}{q} = \frac{\sqrt{z} - u}{u+r} + \frac{u+z+\sqrt{z}}{1q} \quad r^2 \quad 20$$

$$\frac{1}{1} \sqrt{z} - \sqrt{z} = 0$$

$$1 + u + \sqrt{z} = \frac{1 + \sqrt{z} + \sqrt{z}}{1 - u + \sqrt{z}} \quad r^2 \quad 21$$

$$\frac{1}{r} - \sqrt{z} = 0$$

$$\frac{r}{10} 0 = \frac{u}{1r+u} + \frac{1r+u}{u} \quad r^2 \quad 22$$

$$10 - \sqrt{z} = 0$$

$$r = 1 + u \sqrt{z} \times 0 + u \sqrt{z} \quad r^2 \quad 23$$

$$\frac{12q}{r} - \sqrt{z} = 0$$

$$\frac{r^2 - u^2}{\sqrt{z} - u} = \frac{q + u}{\sqrt{z}} \quad r^2 \quad 24$$

$$\frac{40 \pm 1}{r} \sqrt{z} = 0$$

$$\frac{u - \sqrt{z}}{r} = \frac{\sqrt{z} + u}{\sqrt{z} - u} \quad r^2 \quad 25$$

$$\frac{z - u \pm r - \sqrt{z}}{r} = 0$$

$$\frac{0}{11} = \frac{1 + \sqrt{z} - u}{1 + u \sqrt{z} + u} \quad r^2 \quad 26$$

$$\frac{1}{q} - \sqrt{z} = 0$$

$$\frac{\sqrt{z}}{u} = \frac{r}{\sqrt{z}} + \frac{1 - u^2}{u(1+u)} \times 0 \quad r^2 \quad 27$$

$$\frac{1}{q} \sqrt{z} = 0$$

$$u \sqrt{z} = \frac{r}{\sqrt{z}} - u \sqrt{z} \quad r^2 \quad 28$$

$$\sqrt{z} (0 -) \sqrt{z} = 0$$

$$r^2 = 11 + \sqrt{11} + 1 + \sqrt{1} \quad 43$$

$$r^2 \sqrt{11} \pm 1 \cdot 0 = 0$$

$$r^2 = (0 - \sqrt{11})r - (0 - \sqrt{1}) \quad 44$$

$$0 + (0 - \sqrt{1}) \cdot 1 = 0$$

$$\sqrt{4+11} \sqrt{11} + 1 = \sqrt{4+11} \sqrt{1} + 1 \quad 45$$

$$r - 1 = 0$$

$$1 - 1 = \sqrt{11}r - (0 + \sqrt{1}) \quad 46$$

$$10 - \sqrt{11} \pm \sqrt{1} = 0$$

$$r^2 = 11 + 10\sqrt{11} - \sqrt{11} \sqrt{1} + 10\sqrt{11} - \sqrt{1} \quad 47$$

$$\frac{11r^2 \sqrt{11} \pm 10\sqrt{11}r - 10\sqrt{11}}{r} = 0$$

$$0 = 11 + 10\sqrt{11} - \sqrt{11}r \sqrt{1} + \sqrt{11}r - 10\sqrt{11} \quad 48$$

$$\frac{r^2 \sqrt{11} \pm 10\sqrt{11}r - 10\sqrt{11}}{r} = 0$$

$$100 - r^2 = \sqrt{11} + 100 \sqrt{1} + \sqrt{1} \quad 49$$

$$\frac{r^2 \sqrt{11} \pm 10\sqrt{11}r - 10\sqrt{11}}{r} = 0$$

$$\frac{11}{r + \sqrt{11}r} = \frac{r + \sqrt{11}r}{r} + \frac{r}{r(r + \sqrt{11}r)} \quad 50$$

$$\frac{r}{r} - 11 = 0$$

$$\frac{r}{r} = \frac{r}{r + \sqrt{11}r} + \frac{r}{r + \sqrt{11}r} \quad 51$$

$$\frac{r^2 \sqrt{11} \pm 10\sqrt{11}r - 10\sqrt{11}}{r} = 0$$

$$= \frac{r}{r} + \frac{10\sqrt{11}r}{r} - \frac{10\sqrt{11}}{r} \quad 52$$

$$\frac{r^2 \sqrt{11} \pm 10\sqrt{11}r - 10\sqrt{11}}{r} \times \frac{r}{r} = 0$$

$$r^2 \sqrt{11} \pm 10\sqrt{11}r - 10\sqrt{11} = 0 \quad 53$$

$$\frac{r^2 \sqrt{11} \pm 10\sqrt{11}r - 10\sqrt{11}}{r^2 \sqrt{11}} = 0$$

$$\frac{r^2 \sqrt{11}}{r^2 \sqrt{11}} + 10\sqrt{11}r - 10\sqrt{11} = 0 \quad 54$$

$$\frac{r^2 \sqrt{11} \pm 10\sqrt{11}r - 10\sqrt{11}}{(r + \sqrt{11}r)^2} = 0$$

$$\sqrt{4+11} \sqrt{11} + 1 = \sqrt{4+11} \sqrt{1} + 1 \quad 55$$

$$\frac{4+11}{4+11} \sqrt{11} = 0$$

$$\sqrt{1+11} \sqrt{11} = \sqrt{1+11} \sqrt{1} + \sqrt{1+11} \sqrt{11} \quad 56$$

$$\frac{11}{11} - 11 = 0$$

$$0 + 11 \cdot \frac{r}{r} = r + \frac{r}{r} \sqrt{11} - 0 - \frac{r}{r} \sqrt{11} \quad 57$$

$$\frac{110 + 11r - 11r - 11r}{11r + 11r} = 0$$

$$\frac{11 + 10\sqrt{11} - \sqrt{11}}{(\sqrt{11} + r)(\sqrt{11} - r)} + \frac{\sqrt{11}r + 11}{\sqrt{11}r + r} = \frac{\sqrt{11}r - 11}{\sqrt{11}r - r} \quad 58$$

$$11 - 11 = 0$$

$$\frac{r + 10\sqrt{11} - \sqrt{11}}{(\sqrt{11} + r)(\sqrt{11} + r)} + \frac{\sqrt{11}r + 11}{\sqrt{11} + r} = \frac{\sqrt{11}r - 11}{\sqrt{11} + r} \quad 59$$

$$\frac{r^2 - 11}{11} = 0$$

$$\sqrt{11}r + 10\sqrt{11}r - 10\sqrt{11}r - 10\sqrt{11}r = 0 \quad 60$$

$$r - 11 = 0$$

$$\frac{19}{0r} = \frac{4-\sqrt{0}}{0a} + \frac{\frac{1}{2}r \cdot \Delta}{\sqrt{4-0} \Delta}$$

$$\frac{1044 \Delta}{r} \pm 60 \pm 0$$

$$(1-0)r + r \Delta = 0r + (0 - (1-0))r \Delta r$$

$$\frac{1 \cdot 9 \Delta = \sqrt{0} r \Delta r - 60 \pm 0}{r \Delta r}$$

$$y = \sqrt{0} \Delta - 0r + \sqrt{0} r - 0 \Delta r$$

$$\frac{0 - \sqrt{0} \pm 0 - 60 \pm 0}{r} = 0$$

$$11 = 0r \Delta - \frac{\sqrt{0} r}{r} + \sqrt{0} \Delta r$$

$$\frac{100 - \sqrt{0} \pm 0 - 60 \pm 0}{r} = 0$$

$$\frac{\frac{r}{0} - 0}{r} = \frac{4+0 \Delta}{0} + \frac{1+\sqrt{0}}{4} \Delta 0$$

$$r - \sqrt{0} \pm 0 - 60 \pm 0 = 0$$

$$16 \pm 0 = 0 \quad \frac{-}{r-\sqrt{0} \Delta} = \frac{0}{0} - \sqrt{0} \Delta \Delta 4$$

$$r r + \sqrt{0} r = \frac{0}{r} + \sqrt{0} r \Delta \Delta$$

$$\frac{r r - \sqrt{0} \pm 0}{r} - \frac{r}{r} - 60 = 0$$

$$\frac{1}{0} 10 + 0r - r = (r-0) \frac{0}{0} 4 - (r-0) \Delta \Delta$$

$$\frac{1-11-\sqrt{0} r}{r} \pm 60 \pm 0 \Delta 4$$

$$\frac{1}{0} (0r + 0r) - 0r = (1+0r) \frac{0}{0} r + (1+0r)$$

$$\frac{111 - \sqrt{0} \pm 0 - 60 \pm 0}{r} = 0$$

$$\frac{\sqrt{0} r + \sqrt{0} \Delta + 0r}{r} = 1r - 0 \Delta 4 \cdot$$

$$\frac{r r \pm 0 \Delta + 0r}{4r} - \frac{0}{r} - 60 = 0$$

$$\frac{r \Delta}{1} = \frac{0-0}{0+0} + \frac{0+0}{0-0} \Delta r$$

$$r \pm 0$$

$$\frac{100}{124} = \frac{0-0r}{0+0r} - \frac{0+0r}{0-0r} \Delta r$$

$$\frac{r \Delta}{11} - 60 = 0$$

$$\frac{r-0+\sqrt{0}}{0 \Delta} = r + \sqrt{0} \Delta + 0 \Delta r$$

$$16 r = 0$$

$$\frac{r \Delta}{0 r \Delta} = \frac{4}{r-0} + r \frac{0}{(r-0)} \Delta 0$$

$$\frac{r \Delta}{11} \Delta \pm 60 \pm 0$$

$$\frac{1}{0} - r r = 0 + \left( \frac{1}{0} + 0 \right) \Delta 4$$

$$\frac{16 \Delta \pm 0 - 60 \pm 0}{r} = 0$$

$$\frac{r}{r-0} = \frac{r+0}{r-0} \Delta \times r - r + 0 \Delta \Delta$$

$$16 \Delta \pm 0 \pm 0 = 0$$

$$0 = \frac{1r}{0} - \sqrt{0} \Delta + \frac{1r}{0} - 1r \Delta \Delta$$

$$r - \sqrt{0} \pm 60 \pm 0 = 0$$

$$+ \cdot = (0 + \sqrt{0} r) - \left( \frac{1}{0} + 1 \right) 0 \Delta 4$$

$$\frac{r \Delta - \sqrt{0} \pm 0 - 60 \pm 0}{4} = 0$$

$$\frac{4r}{0} - \frac{0 r \Delta}{14} = 10 + \frac{0}{r} - 0 \Delta \cdot$$

$$\frac{21 - \sqrt{0} \pm 0 - 60 \pm 0}{9} = 0$$



$$\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - y^2} = 0$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - y^2} = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} 4 : 9 :: s - u : s + u \\ s^2 : 4 + s^2 :: s + u : u + 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{19} \sqrt{x^2 \pm y^2} = 0 \\ \frac{12}{19} - \sqrt{y^2} = s \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sqrt{s^2 - 2} - \sqrt{2} = s + u \\ u + s = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{14 - \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - y^2}}{2} = 0 \\ \frac{14 - \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - y^2}}{2} = s \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} s + u - 204 = 3s + u \\ 39 = u - 3s \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} 1 - 2 \pm \sqrt{y^2} = 0 \\ 0.4 \pm \sqrt{y^2} = s \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} u + 28 = s - (s + u) \\ 30 = u + s + u \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}{2} = 0 \quad 41$$

$$\frac{\sqrt{64 - y^2} - \sqrt{64 + y^2}}{2} = 0$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 - y^2}} \quad 42$$

$$\frac{29}{14} \sqrt{y^2} = 0$$

بیان سے دو جملوں کی مساواتیں شروع ہیں

$$\left\{ \begin{aligned} 24 - \sqrt{y^2} = 0 \\ 3\sqrt{y^2} - 10 = s \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} 13 = s + u \\ 11 + s = u + 3 \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{289}{12} - \sqrt{y^2} = 0 \\ \frac{248}{12} - \sqrt{y^2} = s \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} 118 = s + u \\ 223 = 3s - 30 \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{04}{2} - \sqrt{y^2} = 0 \\ \frac{420}{201} - \sqrt{y^2} = s \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} \frac{u + 01}{10} - s = \frac{s + u}{u} \\ s - s = \frac{s + u}{14} \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{4 - 18}{2} - \sqrt{y^2} + s = 1 - \frac{3 - 3 + 3 + 0}{0} \\ s + \frac{50 - u}{2} = \frac{s + u}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{3}{244} - \sqrt{y^2} = 0 \\ \frac{2283}{2022} - \sqrt{y^2} = s \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sqrt{y^2} = \sqrt{s^2 - u^2} \\ \sqrt{y^2} = (\sqrt{s^2 - u^2}) + (\sqrt{s^2 + u^2}) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{cases} s + u - 4 = s + u + \sqrt{1} \\ r r = u + \cdot s r + s \end{cases} \quad 17$$

$$\begin{cases} 0.8 \sqrt{1} \pm 1 r - 6.14 \sqrt{1} r = u \\ 0.8 \sqrt{1} \pm 1 - 6.4 - 6.0 = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} u - 14 = \frac{1}{r} s - s \\ \frac{1}{r} u r + u = s - r a \end{cases} \quad 10$$

$$\begin{cases} \left(\frac{0.8}{12}\right) \sqrt{1} r = u \\ \frac{4.8 r}{r 14} \sqrt{1} = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 z = s + \sqrt{1} \\ 0 = s + u \end{cases} \quad 14$$

$$\begin{cases} \frac{101 - \sqrt{1} \pm 0 - 6.1 r \sqrt{1} r = u}{r} \\ \frac{101 - \sqrt{1} \pm 0}{r} \sqrt{1} r \sqrt{1} = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = s + u \\ r 00 = (s + \sqrt{1})(s + \sqrt{1}) \end{cases} \quad 16$$

$$\begin{cases} \frac{1.2}{r} \sqrt{1} \pm \frac{0.6}{r} \sqrt{1} r \sqrt{1} r = u \\ \frac{1.2}{r} \sqrt{1} \pm \frac{0.6}{r} \sqrt{1} r \sqrt{1} r = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{7}{s-u} = \frac{s+u}{s-u} \sqrt{1} - 1 + u \\ r 1 = s + \sqrt{1} \end{cases} \quad 18$$

$$\begin{cases} r 00 - \sqrt{1} \pm 0 - 6.1 \sqrt{1} r = u \\ \frac{r}{r 00 - \sqrt{1} \pm 11 - 6.1 \sqrt{1} r} = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = s r - u + (s r - u r) \\ a = s - \sqrt{1} \end{cases} \quad 10$$

$$\begin{cases} \frac{r r \sqrt{1}}{1 r \sqrt{1}} \sqrt{1} r = u \\ \frac{r 9}{9} \sqrt{1} = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{s-u} + 1 = s - u \sqrt{1} \frac{r}{r} \\ 0 = s - u \sqrt{1} + s + u \sqrt{1} \end{cases} \quad 11$$

$$\begin{cases} \frac{1 r}{r} = u \\ \frac{0}{r} = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 = s + u \sqrt{1} + s + u \\ 1. = s + \sqrt{1} \end{cases} \quad 17$$

$$\begin{cases} \frac{41 - \sqrt{1} \pm 9 \sqrt{1} \sqrt{1} r = u}{r} \\ \frac{41 - \sqrt{1} \pm 9}{r} \sqrt{1} r \sqrt{1} = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} s r - 00 = 0 + s r + \sqrt{1} \sqrt{1} r + \sqrt{1} \\ 14 = s z - u y \end{cases} \quad 17$$

$$\begin{cases} \frac{r 190 \sqrt{1} \pm 4 - 6.0 r - 6.0 = u}{r} \\ \frac{r 190 \sqrt{1} \pm 4 - 6.0 r - 6.0}{r 9} = s \end{cases}$$



$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{s+u}{r} \sqrt{\frac{q}{s}} + \frac{s+u}{r} \sqrt{\frac{q}{s}} \\ \frac{1}{4} &= \frac{s-u}{u} \sqrt{\frac{q}{s}} - \frac{s-u}{s} \sqrt{\frac{q}{s}} \end{aligned} \right\} P7$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{q}{r} &= s \text{ اور } \frac{q}{r} = u \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &\neq u \\ r &\neq s \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} 349 &= s - u \\ q &= s - u \end{aligned} \right\} P8$$

$$\left\{ \begin{aligned} r - \frac{1}{2}r &= u \\ r - \frac{1}{2}r &= s \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} 04 &= s - u \\ \frac{14}{5u} &= s - u \end{aligned} \right\} P9$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sqrt{u} \pm \sqrt{s} &= 0 \\ 1 - r \pm r &= s \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} r &= \frac{s}{2} + \frac{r}{2} \\ y &= \frac{1}{s} + \frac{r}{2} \end{aligned} \right\} P10$$

$$\frac{r}{u} = \frac{1}{\sqrt{u} - 1} = \frac{1}{\sqrt{u} - 1} P11$$

$$\left\{ \begin{aligned} (s+u+u) \sqrt{u} - 124 &= s + s \sqrt{u} + u \\ r &= s - u \end{aligned} \right\} P12$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{r}{s} \sqrt{u} &= 0 \\ 1 - \frac{1}{2}r &= s \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} 114 &= s + s \sqrt{u} \\ 12 &= s + \frac{1}{2}r \sqrt{u} \end{aligned} \right\} P13$$

$$\left\{ \begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} &= 0 \\ 0 - \frac{1}{2} &= s \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sqrt{u} \pm \sqrt{u} &= 0 \\ 4r \pm 1 &= s \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} y &= s \sqrt{u} + u \\ 4r &= s + u \end{aligned} \right\} P14$$

$$\frac{r}{(s+u)} = 0 \quad b = \frac{u - \sqrt{u} - \sqrt{u}}{u - \sqrt{u} + \sqrt{u}} P15$$

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &\neq u \\ 1 &= s \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} s1 + \frac{u}{s} &= \frac{u}{s} + \sqrt{u} \\ 00 &= s + u \end{aligned} \right\} P16$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{4r}{14} &= 0 \\ r &= s \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} r &= \frac{s - \sqrt{u} + \sqrt{u}}{s - \sqrt{u} - \sqrt{u}} \\ \sqrt{s} &:: \sqrt{u} \end{aligned} \right\} P17$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{u} - 2\sqrt{u} - u} + \frac{1}{\sqrt{u} - 2\sqrt{u} + u} P18$$

$$\frac{1+u}{u} \sqrt{u} \neq u$$

$$\left\{ \begin{aligned} r - \frac{1}{2}r &= u \\ r - \frac{1}{2}r &= s \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \\ 14 &= s \sqrt{u} - s \sqrt{u} \end{aligned} \right\} P19$$

$$\frac{u}{1+u} \sqrt{u} \neq u \quad v = \frac{u}{u - \sqrt{u} + \sqrt{u}} P20$$

$$\frac{r}{q} = 0 \quad q = \frac{u\sqrt{u} + 1 + u\sqrt{u}}{u\sqrt{u} - 1 + u\sqrt{u}} P21$$

$$\left\{ \begin{aligned} u - s \sqrt{u} &= 0 - s \sqrt{\frac{1}{r}} + u - s \sqrt{\frac{1}{r}} \\ \frac{r}{u} &:: s - \sqrt{u} \cdot \sqrt{u} - s \sqrt{u} + s \sqrt{u} \end{aligned} \right\} P22$$

$$\left\{ \begin{aligned} a &= s \text{ اور } a = u \end{aligned} \right\}$$



## متناسب کا بیان

اگر دو مقداریں ہوں اور اول مقدار دوسری مقدار پر تقسیم کیجادی تو خارج قسمت ہی نسبت جو مقدار  
 اول دویم سی رکھتی ہے یعنی نسبت ۴ کی ۲ کو  $\frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$  یعنی ۲ سے دو چند کی نسبت رکھتا ہے اور  
 $\frac{۱}{۲}$  = نسبت جو ح ط سے رکھتی ہے چار مقداریں متناسب کہلاتی ہیں جب نسبت اول کی دوسری  
 سے اور تیسری کی چوتھی سے مساوی ہوتی ہے مثلاً ح اور ط اور س اور ص مقدار متناسب کہلاتے  
 ہیں اگر  $\frac{ح}{ط} = \frac{س}{ص}$  اور چار مقدار متناسبہ کو موافق حدود کی اسطور پر ثبت کرتے ہیں  
 ح : ط :: س : ص اور ص یعنی اول اور چوتھی کو اطراف کہتے ہیں اور ط اور س یعنی دوسری  
 اور تیسری کو اوسط کہتے ہیں اگر چار مقدار متناسب میں سے اطراف کو اسپین ضرب کریں اور پھر ارقام  
 اوسط کو اسپین ضرب کریں تو حاصل ضرب دونوں حالتوں میں مساوی ہوتا ہے یہ ظاہر ہی کیوں کہ اگر  
 ح : ط :: س : ص تو  $\frac{ح}{ط} = \frac{س}{ص}$  اور اگر دونوں طرف اس مساوات کی طرف میں ضرب کی جائیں تو

$$ح ص = س ط \text{ اور یہی مراد ہے}$$

اس عمل سے ظاہر ہے کہ اگر تین مقداریں ہوں اور اول مقدار دوسری سے وہی نسبت رکھتی ہے جو دوسری  
 رکھتی ہے تیسری کو تو حاصل ضرب اطراف کا مساوی ہوتا ہے مجھ در رقم اوسط کی اس سے یہی ظاہر ہے کہ اگر  
 تین ارقام چار ارقام متناسب میں سے معلوم ہوں تو چوتھی ہی معلوم ہو سکتی ہے جو سیدہ مساوات ح = س ط  
 ۳۔ جانتے ہیں ہم ثابت کرنا اس بات کا کہ اگر ح : ی :: ص : س تو ح + ی : ی :: ص + س : س  
 کو اسطی کے  $\frac{ح}{ی} = \frac{ص}{س}$  عدد ایک کو دونوں طرف اس مساوات کی زیادہ کر دو تو  $\frac{ح}{ی} + 1 = \frac{ص}{س} + 1$   
 یعنی  $\frac{ح+ی}{ی} = \frac{ص+س}{س}$  یعنی ح + ی : ی :: ص + س : س

۳۔ جانتے ہیں ہم ثابت کرنا اس امر کا کہ اگر ح : ی :: ص : س تو ح - ی : ی :: ص - س : س  
 موافق فرض کیے  $\frac{ح}{ی} = \frac{ص}{س}$  تفریق کر دو ہر دو طرف اس مساوات سے عدد آ کو تو  
 $\frac{ح}{ی} - 1 = \frac{ص}{س} - 1$  یا  $\frac{ح-ی}{ی} = \frac{ص-س}{س}$  یعنی  
 ح - ی : ی :: ص - س : س لیکن بموجب دعویٰ (۲) یکے

$$ح + ی : ی :: ص + س : س \text{ اور } ح - ی : ی :: ص - س : س$$

۴۔ جانتے ہیں ہم ثابت کرنا اسکا کہ اگر ح : ی :: ص : س تو

$$ح : ط :: ی : ص \text{ اور } ح : ص :: ی : ط$$

$$\text{اور } \frac{ح}{س} = \frac{ص}{ط} \text{ تو } \frac{ح}{س} = \frac{ص}{ط} \text{ یعنی } ح : ط :: ص : س$$

اور اسپٹورسی یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ ط : ح :: دہی : دس :: ط : ص :: دس

اور  $\frac{ط}{ح} :: \frac{ط}{ص} :: \frac{ط}{دس} :: \frac{ط}{دس} :: \frac{ط}{دس} :: \frac{ط}{دس}$   
 اور  $\frac{ط}{ح} :: \frac{ط}{ص} :: \frac{ط}{دس} :: \frac{ط}{دس} :: \frac{ط}{دس} :: \frac{ط}{دس}$

۵ اگر ح : ص :: ی : س :: ل : اوری : ص :: ل : ع تو

ح : ص :: ی : س :: ل : اوری : ص :: ل : ع تو

ح : ص :: ی : ل یعنی  $\frac{ح}{ص} = \frac{ح}{ل}$  اور نسبت دویم یہ ہے چونکہ

ی : ص :: ل : ع تو ی : ل :: ص : ع یعنی  $\frac{ی}{ل} = \frac{ص}{ع}$

اور  $\frac{ح}{ص} = \frac{ح}{ل}$  یعنی ح : ص :: ل : ع یعنی ح : ص :: ل : ع

۶ اگر ح : ص :: ی : ل :: ل : اوری : ص :: ل : ع تو ح : ص :: ی : ل :: ل : اوری : ص :: ل : ع

ح : ص :: ی : ل :: ل : اوری : ص :: ل : ع تو ح : ص :: ی : ل :: ل : اوری : ص :: ل : ع

۷ اگر ح : ص :: ی : ل :: ل : اوری : ص :: ل : ع تو ح : ص :: ی : ل :: ل : اوری : ص :: ل : ع

تو ح : ص :: ی : ل :: ل : اوری : ص :: ل : ع تو ح : ص :: ی : ل :: ل : اوری : ص :: ل : ع

چونکہ  $\frac{ح}{ص} = \frac{ح}{ل}$  اور  $\frac{ط}{دس} = \frac{ط}{دس}$  اور  $\frac{ط}{دس} = \frac{ط}{دس}$  ان سب مساوات کو اس میں ضرب کر دو تو

$$\frac{ح \times ل \times ح}{ی \times ع \times ح} = \frac{ص \times ط \times م}{س \times د \times ن}$$
 یعنی ح : ص :: ی : ل :: ل : اوری : ص :: ل : ع تو ح : ص :: ی : ل :: ل : اوری : ص :: ل : ع

### سلسلہ جمع اور تفریق

اگر ہم کوئی مقدار فرض کریں اور اسی ایک جہتی ثابت کریں اور اس پر ایک خاص مقدار زیادہ کریں اور بعد ازاں اس جمع کو ایک اور جہتی ثابت کریں اور پھر اس جمع پر اسی خاص مقدار کو کہ او کو فرق عام کہتے ہیں زیادہ کریں اور اس نئی جمع کو ایک اور جہتی ثابت کریں اور یہی عمل کتنے جہتوں تک جاریں تو ظاہر ہے کہ ایک یا سلسلہ مقدار پیدا ہوگا کہ او میں کی دوسری مقدار اول سے اتنا ہی فرق رکھے گی جتنا تیسری دوسری اور چوتھی تیسری سے اور پانچویں چوتھی سے اور علیٰ ہذا القیاس اگر ساری مقادیر اس سلسلہ کو جمع کریں تو اس عمل کو سلسلہ جمع کہتے ہیں مثلاً  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$  ایک اعداد کا ہے اول رقم ایک ہے اور فرق عام ہے کبھی ہی اسپٹورس پر

اس صورت میں اس تو اول رقم ہے اور فرق عام اور مقدار اول کی ہے اگر فرق عام ایک مقدار منفی ہو تو ظاہر ہے کہ رقم دوسری رقم اول سے اتنی کم ہوگی جتنی تیسری دوسری اور چوتھی تیسری اور اسی قیاس پر

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ایک سلسلہ عدد ۱۰ کا ہر آئین اول رقم ۸ ہر اور فرق عام ۱ اور تعداد رقموں

۸ ہر اور ہر سلسلہ تفریق کا ہر اسپر پر ۳ س - ط - س - ۲ ط - س - ۳ ط ... س - ع - ا ط  
 فرض کرو کہ ایک سلسلہ کی اول رقم ۳ ہر اور فرق عام مثبت نواہ منفی ط ہر اور تعداد رقموں کی ع ہر اور مجموعہ اس

سلسلہ کا ج ہر تو رقموں کے س + س + ۲ ط + س + ۳ ط + ... س + ع - ا ط = ج  
 س + ع - ا ط + س + ع - ۲ ط + س + ع - ۳ ط + ... س + ع - ۳ ط = ج

حاصل جمع (س + س + ع - ا ط) + (س + س + ع - ا ط) + (س + س + ع - ا ط) = ج

لیکن ظاہر ہو کہ (س + س + ع - ا ط) کی مانع کتنی رقمیں تعداد میں ہیں یعنی

ان کی جمع = (س + س + ع - ا ط) × ع ہر اور اسی سبب سے

$$(س - س - ع - ا ط) × ع = ج$$

$$ج = (س + س + ع - ا ط) × \frac{ع}{۲}$$

مثال اول ایک ایسا سلسلہ ہو کہ اولی رقم اول = ۴ اور فرق عام = ۴ اور تعداد رقموں کی = ۱۲ اجاب  
 میں ہم معلوم کرنا چاہتے ہیں اس سلسلہ کی قواعد اور صورت میں

$$ج = (۴ + ۴ + ۴ - ۱۲) × \frac{۱۲}{۲} = ۶ × ۵۲ = ۳۱۲$$

مثال دوم ایک ایسا سلسلہ ہو کہ اولی رقم اول = ۲۲ اور فرق عام = ۲ اور تعداد رقموں کی = ۹  
 ج = (۲۲ + ۲۲ + ۲۲ - ۹) × \frac{۹}{۲} = ۹ × ۴۳ = ۳۹۶

### سلسلہ ضرب اور تقسیم

اگر ایک رقم کو ضرب کر کے ایک جا بنت کرین اور اس کا نام رقم اول رکھیں اور ایک اور رقم فرض کریں اور اس کا  
 نام مضروب فی عام رکھیں اور ضرب دین دسی رقم اول میں اور حاصل ضرب کو ایک اور جا بنت کرین اور بعد ازان  
 اسے حاصل ضرب کو ہی مضروب فی عام میں ضرب کریں اور اسے حاصل ضرب کو ایک جا بنت کرین اور یہی عمل کیجئے  
 جائیں جب تک چاہیں تو ظاہر ہو کہ ایک سلسلہ متاثر کا پیدا ہوگا اور اس سلسلہ کو سلسلہ ضرب اور تقسیم کہتے  
 ہیں اگر مضروب فی عام ایک عدد صحیح تو سلسلہ ضرب کہلا تاہی اور اگر کسر ہو تو وہ سلسلہ تقسیم کہلا تاہی

مثلاً ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ایک سلسلہ ضرب ہی اور آ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ایک  
 سلسلہ تقسیم کہ ہر سلسلہ اول میں رقم اول ۱ ہر اور مضروب فی عام ۲ ہر اور تعداد رقموں کی ۱۰ ہر اور سلسلہ  
 دوم میں رقم اول ۱ ہر اور مضروب فی عام ۱ ۲ ہر اور تعداد رقموں کی ۱۰ ہر اور قاعدہ واسطی میں کہینے



ایسی سلسلہ کے استوارسی دریافت ہو سکتا ہے فرض کرو کہ ایک ایسا سلسلہ ہے کہ اس کی رقم اول = س اور

مضروب فی عام = ط اور تعداد رقموں کی = ع اور جمع اس سلسلہ کی = ح تب

$$ح = س + س ط + س ط^2 + س ط^3 + \dots + س ط^{ع-1}$$

ضرب کر دو طرفت اس مساوات کو ط میں بحاصل ضرب ہم یہی

$$ح ط = س ط + س ط^2 + س ط^3 + \dots + س ط^ع$$

اس مساوات میں تفریق کر دو مساوات اول کو توح ط - ح = - س + س ط

$$س ط - س = س ط - ح = س ط - س اور ح = \frac{س ط - س}{ط - 1}$$

= جمع کی مثال اول فرض کرو کہ ایک ایسا سلسلہ ہے کہ اس کی رقم اول = ۱ اور مضروب فی عام = ۲ اور

تعداد رقموں کی = ۸ تب  $ح = \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = \frac{255}{1} = 255$  مثال دوم فرض کرو کہ ایک ایسا سلسلہ

ہے کہ اس کی رقم اول = ۱ اور مضروب فی عام =  $\frac{1}{2}$  اور تعداد رقموں کی = ۶

$$توح = \frac{1 - \frac{1}{2^6}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{64}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{63}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{63}{32}$$

### سوالات اول درجہ کی مساوات کے سوالات

۱ ایک شخص ۳۰۰ روپیہ کا قرض دار ہے جس میں کچھ روپیہ تو ادسی زید کو دینا ہے اور اسی سے دو چند عمر کو اور مجموعہ اون دونوں قرض کا بیکر کو دینا ہے بناو شخص نہ کو بیکر کو کتنا زید کو دینا ہے اور کتنا عمر کو اور کتنا بیکر کو قرض کرو  
 ۲ زید کو دینا ہے تب بموجب سوال کے ظاہر ہے کہ ۳۰۰ روپیہ کا قرض اور ۱۰۰ روپیہ سے سوا بیکر کو دینا ہے لیکن کل قرض ۳۰۰ روپیہ ہی تو  $۳۰۰ = ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰$  اور  $۱۰۰ = ۵۰ + ۵۰$  یعنی

زید کا روپیہ = ۵۰ اور عمر کا روپیہ =  $۵۰ \times ۲ = ۱۰۰$  اور بیکر کا روپیہ =  $۱۰۰ + ۵۰ = ۱۵۰$

۳ دو عدد کون سے من جنکا حاصل تفریق ۹ ہے اور اگر کٹنا بڑا عدد دیا جائے گئی چھوٹے عدد بڑا ہو گیا جائے تو مجموعہ ۳۵ ہوتا ہے فرض کرو کہ چھوٹا عدد = لا تو بموجب شرائط سوال کے بڑا عدد =  $۹ + لا$  اور کٹ

بڑا عدد =  $۳ = (۹ + لا)$  اور بیاچ گئی چھوٹا عدد =  $۵۵ = ۳(۹ + لا) + ۵ = ۲۷ + ۳لا + ۵ = ۳۲ + ۳لا$  یعنی

$۳۲ + ۳لا = ۵۵ + ۲۷ + ۳لا$  یعنی  $۳۵ = ۲۷ + ۳لا$  اور  $۳۵ - ۲۷ = ۸ = ۳لا$  اور  $لا = ۱ =$  عدد چھوٹے

اور  $۹ + لا = ۹ + ۱ = ۱۰ =$  عدد بڑے کے

۴ ایک لڑکا یا لڑکی چھ توڑین میں گرا ہو ہے اور تین ساترین حصے بانی میں ہیں اور سوا گرا ہو بانی کی

اوس طرح کا طول جو فرض کر دو کہ لکڑی = ۵ تو ہم اپنی مشر ایسا سوال کے  $۵ - \frac{۵}{۲} - \frac{۵}{۲} = ۱۳$  ضرب کر دو  
 ہر دو طرف اس مساوات کو ۵ میں تو ۵ لا - ۵ =  $\frac{۵۱۵}{۵} = ۱۰۳$

ایسا ..... میں تو ۵ لا - ۵ =  $\frac{۵۵۵}{۵} = ۱۱۱$  .....  
 یعنی  $۱۱۳ = ۵۵۵$  اور  $\frac{۵۵۵}{۱۳} = ۴۲$  = طول لکڑی کے

۴ ایک شخص کے پاس ایک تیلی روپیوں کی تھی اور اوس روپیوں میں سے جو تہائی تو ایک شخص کو دی جی اور  
 اس تو ان حصہ دو سے شخص کو پہر جو اسی روپیے شمار کیے تو ۸۵ بچے تا ادا کے پاس کتنے روپیے تھے  
 فرض کر دو کہ تعداد روپیوں کی کہ تیلی ادا کی تھی = ۸۵ تو ہم جیسا مشر ایسا سوال کے  $\frac{۸۵}{۲} + \frac{۸۵}{۲} =$  روپیے جو  
 خرچ ہو گئے اور اسی واسطی لا -  $\frac{۸۵}{۲} = \frac{۸۵}{۲}$  ضرب کر دو ہر دو طرف اس مساوات کو ۴ میں اور صاف کرنا  
 ۴ میں تو  $۲۸ - ۲۸ = ۸۰ = ۸۰$  یعنی  $۲۳۸۰ = ۸۰$  اور  $\frac{۲۳۸۰}{۱۲} = ۱۹۸$  روپیے منظر ہو گئے

۵ ایک بلٹن سپاہیوں کی جو اوسین تین جو تہائی تو کام برہے ہوئی میں درد سوان حصہ چارہ اور کچھ باقی رہا  
 اوس باقی کے تین یا پانچ حصے غیر حاضرین بعد اسکے ۸ سپاہی حاضر بائے بنا گئے آدمی اس بلٹن میں  
 فرض کر دو کہ تعداد مردان بلٹن = ۸۵ تو ہم جیسا مشر ایسا سوال کے تین جو تہائی لائی یعنی  $\frac{۸۵}{۳}$  کام برہے میں اور  
 حصہ آ کا یعنی  $\frac{۸۵}{۳}$  چار میں اور مجموعہ  $\frac{۸۵}{۳} + \frac{۸۵}{۳}$  یعنی  $\frac{۱۷۰}{۳}$  مردان کام پر اور ہمار  
 تو لا -  $\frac{۱۷۰}{۳} = \frac{۱۷۰}{۳}$  = مردان جو باقی رہے اور تین یا پانچ حصے باقی کے یعنی  $\frac{۱۷۰}{۳}$  = مردان غیر حاضر  
 تو  $\frac{۱۷۰}{۳} + \frac{۱۷۰}{۳} = ۱۷۰$  = کل مردان بلٹن اور

$۱۷۰ + \frac{۱۷۰}{۳} = ۲۶۰ = ۴۲۰ + \frac{۱۷۰}{۳}$  اور  $۱۷۰ + ۱۷۰ = ۳۴۰ = ۴۲۰$   
 یعنی  $۱۱۰ - ۱۸۵ - ۱۷۰ = ۱۷۰ = ۳۴۰$  اور  $\frac{۳۴۰}{۲} = ۱۷۰$

۶ ایک ایسی سڑک اگر ہم اوسکی شمار کنندہ پر سہ زیادہ کریں تو کسر  $\frac{۱}{۲}$  ہو جاتی ہے اور اگر اوسکی کسر  
 نب نامی آ کو تفریق کریں تو وہ کسر =  $\frac{۱}{۵}$  وہ کسر کیا جو فرض کر دو کہ لا = شمار کنندہ اور  $\frac{۱}{۵}$  = تفریق سیکے  
 تو  $\frac{۳}{۵} = \frac{۱}{۲}$  اور  $\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۵}$  یعنی

$$\left\{ \begin{array}{l} -d - 3 = 4 - (l) \\ -d - 5 = 1 - (m) \end{array} \right\} \text{ یعنی } \left\{ \begin{array}{l} d = 4 + 3 \\ 1 - d = 5 \end{array} \right.$$

مسلمات (م) کو تفریق کر دو تو حاصل تفریق  $۲ = ۸ - x$  اور  $۳ = x$  اور  $۳ = ۲ + ۱ = ۳$   
 $۳ = ۳ + ۱ = ۴ = ۲ + ۱ = ۳$

کے آ اور ت نامی دو شخص کچھ روپیہ الگ الگ رکھتے ہیں آ نے ت سے یہ لگا کر تم مجھے ۵ روپیے اپنے روپیوں میں سے دو تو میری باس باس بائیں گئے روپیے اوس روپی سے جو بائیں لگی جو تمہاری باس باقی رہی بعد از ان ت سے کہہ لگا کر تم مجھے بائیں روپیے تو ہماری تمہاری باس رو برابر جو بائیں تاد کے لئے رو پیے ہر شخص کے باس ہے

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{تولا} + 15 = \text{روپیہ جو ت باس ہو گیا بعد} \\ \text{وصول 15 روپیہ کے ت سے اور} \\ \text{اور د = ب کے روپیہ کے} \end{array} \right. \therefore \text{د} - 15 = \text{روپیے جو ت باس باقی با}$$

اور د + ۵ = روپیہ جو ت باس ہو گیا بعد وصول ۵ روپیہ کے آ سے اور ل - ۵ = روپیہ جو آ باس باقی رہے تو موافق شرائط سوال کے

$$15 + 5 = 20 = (15 - 5) 5 = 10 \times 2 = 20 \text{ اور } 5 - 5 = 0 = 5 - 5$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{یعنی } 5 - 5 = 0 = (ل) ۹۰ \\ \text{د} - ۱۰ = ۰ = (م) ۱۰ \end{array} \right. \text{تفریق کردات (ل) مساوات (م) کو}$$

تو حاصل تفریق یہ ہو گا  $100 = ۱۰۰$  اور  $۲۵ = ۲۵$  روپیہ ت کے اور سات (۲) سے  $۱۰ + ۲۵ = ۳۵ = ۱۰ + ۲۵ = ۳۵$  روپی آ کے

۸ ایک عدد ہر کو خواہ اوس دو ساتی خصوصیت خواہ تین ساتی خصوصیت تقسیم کر دو تو دونوں صورتوں میں حاصل ضرب ات م کا ایک ہی مقدار ہوتا ہے فرض کر دو کہ  $۱ =$  عدد مظهر کی تو ہر چیز شرائط سوال کے

$$\begin{aligned} \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} &= \text{حاصل ضرب دو ساتی ات م کی اور} \\ \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} &= \text{حاصل ضرب تین ساتی ات م کے اور موافق شرائط سوال کے} \\ \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} &= \frac{۱}{۲۷} \text{ یعنی} \\ \frac{۱}{۳} &= \frac{۱}{۲۷} \text{ اور ہم } ۱ = ۲۷ \text{ لہذا اور } ۳ = ۲۷ \end{aligned}$$

$$\text{اور } ۱ = \frac{۲۷}{۳} = 9 = \text{عدد مظهر کے}$$

۹ ایک عدد دو مرتبہ کا ہر اور مجموعہ اس کی دو مرتبہ کے ارقام کا = ۵ اور اگر ۹ کو عدد مذکور پر زیادہ کریں ارقام مرتبہ کے اوسے ہو جائیے جن میں سے جو رقم اکائی کے مرتبہ پر تھی وہ دہائی کے مرتبہ پر آجاتی ہے اور بالعکس فرض کر دو کہ  $۱ =$  رقم دہائی کے مرتبہ کے اور  $۱ =$  رقم اکائی کے مرتبہ کی تو عام ہر کو عدد =  $۱۰ + ۱ = ۱۱$  اور  $۱۰ + ۱ = ۱۱ =$  عدد کے اوس حالت میں جب اس کی ارقام مجامد مرتبہ کے اولیٰ دو میں سے تو موافق شرائط

سوال کے لاء = ۵ (ل)

۱۰ + ۱ + ۱ = ۱۰ + ۱ + ۱ یا ۱۰ + ۱ + ۱ = ۱۲ یا ۱۰ + ۱ + ۱ = ۱۲ (م)

تقریباً کی مساوات (م) کو مساوات (ل) سے تو ۱۰ = ۱۲ اور ۱۰ = ۱۲ اور ۱۰ = ۱۲

اور عدد مطلوبہ = ۱۰ + ۱ + ۱ = ۱۲ زیادہ کرو ۱۲ اس عدد پر تو مجموعہ

۱۰ + ۱ + ۱ = ۱۲ = ۱۲ + ۱ = ۱۳ عدد کی اور اس حالت میں جب اس کے مرتبہ کے ارقام اول گئے ہیں

۱۰ وہ عدد کون ہے اگر اس کے ضعف پر ۸ زیادہ کیے جائیں تو مجموعہ مساوی ہو ۱۲ کے اب فرض

کر دو عدد مطلوبہ = ل کے تو مرتبہ شرط سوال کے یہ مساوات حاصل ہوتی ہے ۱۲ + ل = ۱۸ اور ۸۲

بعد علامت ابدال کے ۱۲ = ل = ۳۲ تو معلوم ہوا کہ عدد مطلوبہ ۳۲ ہے

۱۱ وہ عدد کون ہے جس کے ضعف پر (۴۳) زیادہ کیے جائیں تو مجموعہ مساوی ہو جو گئے عدد مطلوبہ کے

اب فرض کر دو ل = عدد مطلوبہ کے تو مرتبہ شرط سوال کے ۱۲ + ل = ۴۳ یا بعد ابدال ۱۲ = ۴۳

∴ ل = ۳۱

۱۲ وہ کون سا عدد ہے کہ جب اس کا ضعف زیادہ ہو نصف اسی عدد سے بقدر چھ کیے گئے نصف عدد مطلوبہ کم ہو

ضعف عدد مطلوبہ سے بقدر چھ کے فرض کر دو ل = عدد مطلوبہ کے تو مرتبہ شرط سوال کے

۱۲ - ل = ۶ بعد دو رکرنی گئے ل = ۱۲ - ل یا ۱۲ = ل = ۶ = عدد مطلوبہ کے

۱۳ دو افراد شہر ہون کے بعد ۸۷ کو کس کے ہیں واسطے ملاقات کی ایک ہی وقت میں گئے

اور ایک اون میں سے ایک دین ۸ کو کس کرتا تھا اور دوسرا ۹ کو کس اب دریافت کیا جانتے ہیں ہم

یہ بات کہ گئے دنوں کے بعد وہ ایک دوسرے ملین گئے اور ہر ایک اون میں سے کتنی مسافت طے کر کے گئے

ل = تعداد دنوں مطلوبہ کے تو ظاہر ہے کہ ۸ ل = اس مسافت کے جو ایک نے اون میں طے کی اور

۹ ل = اس مسافت کے جو دوسری طے کی اور چونکہ مرتبہ فرض کے بعد طے گئے انہی مسافت کے وہ ملتی ہیں

تو ظاہر ہے کہ مسافت دونوں کی مل کر مساوی ہوگی ۸ ل = ۹ ل کے

یعنی ۸ ل + ل = ۹ ل + ل = ۸ ل + ل = ۹ ل ∴ ل = ۱۱ دنوں کے چھین وہ دونوں ایک

دوسری ملین گئے اور ۸ کو کس دی اس مسافت کے جو ۸ کو کس نے طے کی اور ۹ کو کس

مساوی اس مسافت کی جو ۹ کو کس نے طے کی

۱۴ ایک شخص بارادہ قسم ۶ روپیہ کی گھر سے باہر نکلا چار غیر اس کو بیٹے اور سنی دوسرے کو رو

اور تیسری کو ملنا اور چوتھی کو جو گنا دیا اول سے تاؤ اور سنی ہر ایک کو کیا دیا پس فرض کر دو کہ ل = اون میں

جو ادسی اول کو دیئے

اور ۲۱ = اون روپیوں جو دوسرے کو دیئے

اور ۳۱ = اون کے جو تیسری کو دیئے

اور ۵۴ = اون کے جو چوتھے کو دیئے

$$۶۰ = ۲۱ + ۳۱ + ۵۴$$

$$۶۰ = ۱۰۱$$

$$۶ = ۱$$

یعنی ادسی نے ۶ اور ۱۲ اور ۱۸ اور ۲۴ روپیے علیحدہ علیحدہ ہر ایک کو دیئے

۱۵ ایک کتاب فروش نے دس کتابیں کسی خاص قیمت کو فروخت کیں اور بعد ازاں ۵ کتابیں اسی نرخ سے فروخت کیں لیکن بہ نسبت پہلے کے ۳ روپیے ادسی زیادہ بیٹے بنا دیا ہر قیمت ہر ایک کتاب کے فرض کر دیا = قیمت کتاب کے ۱۰ = اون روپیوں کے جو ادسی اول دفعہ چھٹی سے پاس

اور ۱۵ = اون روپیوں کے جو دوسری دفعہ حاصل کیے لیکن موافق شرط سوال کے

$$۱۵ + ۳۵ = ۱۵۰$$

۱۶ تین شخص (۱) اور (۲) اور (۳) اور (۴) روپیہ میں اپنا اپنا حصہ بکھیر رہے تھے اس طرح کہ روپیہ

(۱) کا نصف روپیہ (۲) کا اور روپیہ (۳) کا چھ روپیہ (۴) کا پانچ روپیہ کا روپیہ گنتا ہوا فرض کر دیا = حصہ (۳) تو بموجب فرض کے

اور ۶ = حصہ (۱) کے

اور یہی مجموعہ انکس ادسی ہر ایک کے تو لا = ۳۱ + ۵۴ = ۱۲۰ یعنی ۱۰ = ۱۲۰ : ۱۲ =

یعنی حصہ (۳) کا ۱۲ اور حصہ (۴) کا ۲۲ اور حصہ (۱) کا ۶

۱۷ چار سوداگر مثلاً ۱، ۲، ۳، ۴ نے بار بار وہ سوداگری کے ۴۵۵ روپیہ جمع کیا اس تقصیل

یسے کہ ۱ نے سہ چنڈا سے دیا اور ۲ نے مجموعہ اون روپیوں کو کٹا اور آئے دیا اور ۳

نے مجموعہ اون روپیوں کو جو ۳ اور ۴ نے دیا اب اس کو کٹا روپیہ دیا فرض کر دیا = تعداد ادسی

روپیہ کے جو آئے دیا تو ۳۱ = ادسی روپیہ کے جو ۴ نے دیا

اور ۴ = ادسی روپیہ کے جو ۳ نے دیا

اور ۶ = ادسی روپیہ کے جو ۱ نے دیا

لیکن مجموعہ ان سب روپیوں کا = ۳۷۵۵ روپے

$$۳۷۵۵ = ۷ + ۷۲ + ۷۳ + ۷۷$$

$$۳۷۵۵ = ۷۱۵$$

$$\therefore ۷ = ۲۱۷ = \text{اوس روپیہ کی جو آئینے دیا}$$

$$\text{اور } ۹۵۱ = \text{اوس روپیہ کے جو آئینے دیا}$$

$$\text{اور } ۱۲۷۸ = \text{روپیوں کے اور } ۲۲۱۹ = \text{روپیہ آدھے کے}$$

۱۸ ایک سو دو اگر تین تہاں خریدے اس تفصیل سے کہ طول دوسرے کا نسبت اول کے ۵ اگر

اور طول تیسری کا نسبت دوسرے کے ۲۴ گز زیادہ تھا لیکن مجموعہ گزوں تینوں تہاں ان کا مساوی ۱۵۹ گز

تو بتاؤ طول ہر ایک تہاں کا کیا ہے فرض کرو لا = تعداد گزوں طول تہاں اول کے تو بموجب شرط سوال کے

$$۷ + ۱۵ = \text{تعداد گزوں طول تہاں دوسرے کے اور}$$

$$۷ + ۳۹ = \text{تعداد گزوں طول تہاں تیسرے کے}$$

لیکن مجموعہ گزوں تینوں تہاں ان کا = ۱۵۹ تو معلوم ہوا کہ

$$۷ + ۷ + ۱۵ + ۳۹ = ۱۵۹ \text{ یعنی } ۷ + ۳۲ = ۱۵۹$$

$$\text{یا } ۷۳ = ۱۰۵ \therefore ۷ = ۳۵ = \text{طول تہاں اول کے}$$

$$\text{اور } ۵ = \text{گزوں طول تہاں دوسرے کے اور } ۷۳ = \text{طول تہاں تیسرے کے}$$

۱۹ ایک بوٹن کپڑے کے اور کپڑے شہد اور کپڑے بانی تھا اس تفصیل سے کہ سرکہ نسبت شہد کی ۱۵ سیر زیادہ

تھا اور بانی مساوی تھا مجموعہ شہد اور سرکہ کے لیکن مجموعہ ان تینوں چیزوں کا ۱۴۶ سیر تھا تو بتاؤ کتنی

کتنی چیز اوس میں تھی + فرض کرو لا = سیروں شہد کی تو بموجب سوال کے

$$۱۵ + ۷ = \text{سیروں سرکہ کے}$$

$$\text{اور } ۱۵ + ۷۲ = \text{سیروں بانی کے}$$

لیکن ۱۴۶ = ۳۰ + ۷ + ۱۴۶ = ۱۱۷ \therefore ۷ = ۲۹ تو معلوم ہوا کہ شہد (۲۹) سیر تھا اور سرکہ

(۲۴) سیر اور بانی ۷۳ سیر

۲۰ ایک شخص نے ۴۴ روپوں کو اس تفصیل سے روپے دیئے کہ اول کوڑو پیر زیادہ نسبت

دوسری کے اور دیم کو تین روپے زیادہ نسبت تیسری کے اور تیسرے کو چار روپے زیادہ نسبت

چوتھے کے لیکن کل روپے جو اسی نے چاروں کو دیئے مساوی (۴۲) روپے کے من بتاؤ اسی ہر ایک کو کیا کیا دیا



۵ = حصہ اول کے بموجب سوال کے

۱۰ - ۵ = حصہ دوسرے کے

اور لا - ۱۴ = حصہ تیسرے کے

اور لا - ۲۵ = حصہ چوتھے کے

اور لا - ۲۸ = حصہ پانچویں کے

اور لا - ۳۳ = حصہ چھٹے کے

تو اب جو کہ مجموعہ ان سب کے حصوں کا مساوی ہے یعنی حصہ اول سے ۱۰ کو تو معلوم ہوا کہ

$$۱۰ - ۵ = ۱۱۰ - ۵۳ + ۱۰ = ۱۱۰ - ۵۳ = ۱۲۰$$

$$\therefore ۱۰ = ۴۰ = حصہ اول کے اور ۳۰ = حصہ دوم کے$$

$$اور ۲۰ = حصہ سوم کے اور ۱۵ = حصہ چہارم کے اور$$

$$۱۲ = حصہ پنجم کے اور ۷ = حصہ ششم کے$$

۲۳۴ قسیم کرو عدد ۹۹ کو ایسی پانچ حصوں میں کہ اول زیادہ ہو دوسرے سے ۳ اور کم ہو نسبت تیسری کے ۱۰ اور زیادہ ہو نسبت چوتھی کے ۹ اور کم ہو نسبت پانچویں کے ۱۶ فرض کرو

۵ = حصہ اول کے بموجب سوال کے

۳ - ۵ = حصہ دوم کے

اور لا + ۱۰ = حصہ سوم کے

اور لا - ۹ = حصہ چہارم کے

اور لا + ۱۶ = حصہ پنجم کے

$$\therefore ۹۹ = ۱۶ + ۵ + ۹ - ۵ + ۱۰ + ۵ + ۳ - ۵ + ۵ = ۹۹$$

$$\therefore ۹۹ = ۱۴ + ۵۵$$

$\therefore$  بعد ابرال کے ۵ = ۸۵

اور لا = ۱۷ = حصہ اول کے اور باقی حصہ ۳۳ اور ۱۴ اور ۲۷ اور ۸

۲۲ دو عدد کو فرض ہیں کہ جب تک مجموعہ ۵۹ ہی اور حاصل تفریق ۱۷ فرض کرو

۵ = چھوٹے عدد کے بموجب سوال کے

۱۷ + ۵ = بڑے عدد کے



$۵۴ = ۱۰ + ۴۴$  یا بعد ابدال کے  $۵۲ = ۵۲$

$\therefore ۲۱ = ۷ =$  چھوٹے عدد کی

اور  $۳۸ =$  بڑے عدد کے

۲۵ کون عدد ہے کہ سہ چند اس کا مو ۱۲ کے ۵۴ سے اتنا زیادہ ہے جیسا کہ سہ چند اس کا کم ہے

ایک سو چالیس کے فرض کر دو  $\therefore$  عدد مطلوبہ کی تو بموجب سوال کے  $۱۲ + ۱۲ = ۵۴ - ۱۲ = ۴۲$

یا بعد ابدال کے  $۷ = ۷ = ۱۸۶ \therefore ۷ = ۳۱ =$  عدد مطلوبہ کے

۳۶ دو شخص تمہارا باز کسوسی روپیہ رکھتے تھے جو اکیلے لگے تو اول شخص ۱۴ ہارا اور دوسرا

شخص ۲۴ جیتا اور بعد اکیلے کے معلوم ہوا کہ باس دوسری کے دو چند تھا اوس روپیہ کا جو اول پاس

تھا ہر ایک باس کساروپیہ تھا فرض کر دو  $\therefore$  ان روپیوں جو دو نو باس تھے اور  $۱۴ =$  اوس

روپیے کے جو ایک باس تھے اور  $۲۴ =$  اوس روپیہ کے جو دو نو باس تھے لیکن بموجب سوال

کے  $۲۴ = ۷ = ۲۸ - ۷ =$  تو بعد ابدال کے  $۵۲ =$  برابر اوس روپیے کے جو ہر ایک باس تھے

۳۷ دو فریق آدمیوں کے مجموعہ اور کھا ۹۴ تھا ایک امرین بخت کئی تھی اوس کے ہونے اور ہونے

میں لیکن چونکہ اقرار ہونیکا کہتے تھے ۷۵ زیادہ تھے بہ نسبت دوسرے کے تو بناؤ گئے ایک طرف تھے

اور کتنے ایک طرف فرض کر دو  $\therefore$  تعداد آدمیوں دس فریق کے جو اٹھا کریتے تھے بموجب سوال

$۷۵ - ۷ =$  تعداد ان آدمیوں کے چونکہ اقرار امر مذکور کا کرتے تھے لیکن مجموعہ ان دو نو کھا ۹۴ دی

کے یعنی  $۷ + ۷ = ۹۴$  یا  $۷ + ۷ = ۹۴$  یا بعد ابدال کے  $۷ = ۸۷$

$\therefore ۷ = ۹۴ =$  تعداد اوس فریق کے جو اٹھا کریتے تھے اور  $۵۰ =$  تعداد اوس فریق کے

جو اقرار کرتے تھے

۳۸ دو چورون نے لوٹ میں ۳۵ روپے لوٹے اگر ایک باس اوٹین سے چار روپیہ ہی زیادہ

ہوتے تو اوٹینس دو گنے روپیہ ہوتی بہ نسبت دوسرے کے بناؤ گئے تھے روپیہ ہر ایک باس تھے فرض کر دو

$\therefore$  حصہ ایک چور کے بموجب سوال کے  $۳۵ - ۳ =$  حصہ دوسرے چور کے اور  $۳۵ - ۳ = ۳۲$

اور بعد ابدال کے  $۳ = ۷ = ۶۶ \therefore ۲۲ =$  حصہ ایک چور کے اور  $۳ =$  حصہ دوسرے چور کے

۳۹ چار لڑکیے ریشم کے مت دی تھے جبکہ کال ڈاے تین میں سے ۱۹ اگر اور چوتھے میں سے

۱۷ اگر اور باقی کو صحیح کیا مجموعہ = ہوا ۱۴۲ اتنا دھول بھارون کا لیا تھا فرض کر دو ہر ایک لڑکیے کا

ادین سے =  $\therefore$  تو اس واسطی بموجب سوال کے  $۷ - ۷ = ۱۹ - ۷ = ۱۲ =$

پسے ۵۳ - ۵۳ = ۰۲۲ یا بعد ابدال کے ۲۱۶ = ۵۳ :: ۵۳ = ۵۳ سے چھوٹا  
 گزرا جاز گزرنے کا ۵۳ = ۵۳ گز تھا

۳۰ دور پورٹ وی بکریوں میں سے صاحب ریوڑ نے کچھ بکریاں بچیں اس طرح کہ ایک میں سے  
 ۳۹ اور دوسرے میں سے ۹۳ لیکن بعد زحمت کی معلوم ہوا کہ جن میں ۹۳ بچی گئی ہیں وہ دو گنا ہی نسبت  
 دوسرے کے تو بتاؤ کتنی بکریاں ہر ایک میں اون دونوں سے ہتی فرض کرو لا = تعداد ایک کے اون دونوں  
 میں سے تو بموجب سوال کے لا - ۳۹ = ۱۸۶ - ۱۸۶ یا بعد ابدال کے لا = ۱۳۴ = تعداد ایک کے  
 ۳۱ ایک سو اکر سینے ۱۲ گز پکڑا لکھو اون میں سے فی گز ۱۹ روپیہ کے نرخ سے اور باقی فی گز ۱۷ روپیہ کے  
 نرخ سے خریدا لیکن کل گز ۲۱۴ روپیہ کا خریدنا دیکھنے گز او میں سے فی گز ۱۹ روپیہ کے نرخ سے  
 اور کتنے فی گز ۱۷ روپیہ کے نرخ سے خریدا فرض کرو لا = اون گزوں کے جو فی گز ۱۹ روپیہ کے  
 نرخ سے خریدا اور اس پر اسطی ۱۲ - لا = اون گزوں کے جو فی گز ۱۷ روپیہ کے نرخ سے خریدا اور  
 ۱۵ = قیمت اون گزوں کی جو فی گز ۱۹ روپیہ کے نرخ سے خریدا اور ۱۷ × (۱۲ - لا) = قیمت اون  
 گزوں کے جو ۱۷ روپیہ کے نرخ سے خریدا گیا لا + ۲۰۴ - ۱۷۴ = ۲۱۴ اور بعد ابدال کے  
 لا = ۱۰ اور لا = ۵ = سادی اون گزوں کے جو ۱۷ روپیہ کے نرخ سے خریدا اور ۱۷  
 اون گزوں کے جو فی گز ۱۷ روپیہ کے نرخ سے خریدا گیا

۳۲ تقسیم کر دو عدد ۱۹۷ کو ایسی دو حصہ غیر سادی میں کہ چھار چند بڑے حصہ کا باقی کتے چھوٹے سے  
 ۵۰ زیادہ ہر فرض کرو لا = چھوٹے عدد کے تو بموجب سوال کے لا - ۱۹۷ = لا = بڑے عدد کے  
 اور ۸۸ - لا = ۵۵ + ۵۰ اور بعد ابدال کے لا = ۳۸ :: لا = ۸۲ = چھوٹے  
 قسم اور ۱۱۵ = بڑے قسم کے

۳۳ ایک شخص قاصد کو ۶۰ میل ایک روز میں چلنا ہے ایک جاں رواں کیا گیا تھا لیکن بعد یاخ روز کے  
 ایک اور قاصد اسطی اسکے بھائی کے بھیجا گیا اور قاصد دویم ۵۰ کو سس روز چلنا ہی تو بتاؤ کتنی روز  
 میں قاصد اول کو پکڑ لیا فرض کرو لا = تعداد دنوں کے جس میں قاصد دویم قاصد اول کو پکڑ لیا  
 اور لا + ۵ = تعداد اون دنوں کے جو قاصد اول نے اون میں سفر طی کی لا = ۵۵ = اوس سفر  
 کے جو قاصد دویم نے طی کی اور لا + ۶۰ = ۳۰۰ = اوس سفر کے جو قاصد اول نے طی کی  
 لیکن چونکہ بعد اپنی مسافت کی دونوں بھی ٹینگلی تو معلوم ہوا لا = ۵۵ + ۶۰ = ۳۰۰ اور بعد ابدال کے  
 لا = ۳۰ = ۲۰ = سادی تعداد دنوں پکڑنے کے

۳۴ دو شخص آ اورب کے پاس ۶۰ روپیہ تھے آئینے ب کو دس روپے دیئے اور بعد اسکے آ پاس اتنے روپے رہی کہ اگر ۸ روپیہ اور اسکے پاس ہوں تو وہ برابر گدن روپیہ کے جو ب پاس ہو گئے فرض کرو  $\lambda =$  اون روپیوں کے جو آ پاس تھے تو  $40 - \lambda =$  اون روپیوں کے جو ب پاس تھے اور  $\lambda - 10 =$  اون روپیوں کے جو آ پاس کر اور  $40 - \lambda =$  اون روپیوں کے جو ب پاس ہو گئے لیکن بموجب سوال کے

$\lambda - 10 + 10 = 8 - 40 = \lambda$  یا  $\lambda - 2 = 40 - \lambda$  یا  $2\lambda = 42$   $\therefore \lambda = 21$   $\therefore 40 - 21 = 19$  روپیوں کے جو آ پاس تھے اور ۲۴ مادی اون روپیوں کے جو ب پاس تھے

۳۵ دو شخصوں آ اورب نے ک مادی روپیہ ملا کر تجارت کی تھی اس تفصیل سے فائدہ حاصل کیا کہ آ نے سیدہ اپنی مال م ۲۰ کے اورب نے دو چند اپنی مال کا م ۱۵ کے لیکن کل نفع = ہر پانچ گئے نصف ایک کو اونین سے بنا حصہ ادا کیا گیا تھا یعنی اونوں نے کتنا کن روپیہ ملا کر تجارت کی تھی فرض کرو  $\lambda =$  حصہ آ کے یا ب کے تو اسیرا سطلی فائدہ جو کہ آ نے حاصل کیا م او کے مال کے  $24 + \lambda =$  اور فائدہ جو ب نے حاصل کیا م او کی مال کے  $15 + \lambda =$  اور چونکہ مال دونوں کا  $2 =$  اور حاصل صحیح فائدہ لکھا  $5 =$  تو معلوم ہوا  $180 + \lambda = 180 + \lambda$   $\therefore \lambda = 90$  تو معلوم ہوا کہ اونوں نے  $90 - 40 = 50$  روپی ملا کر تجارت کی تھی

۳۶ دو کا ٹیگر مثلاً آ اورب کو ۶۰ بیسی روز مزدوری پائے تھے بچاس دن تک مزدوری کرتے رہے اور خرچ بھی کرتے رہے لیکن آ نسبت ب کے چوبیسویں روز کم خرچ کرتا تھا تو بعد بچاس دن کی معلوم ہوا کہ آ پاس پیسے دو چند ب کے بیسوں سے مودا کی دو ڈکی خوراک کے جمع ہوئے بنا ہر روز ہر ایک اونین سے لیا گیا خرچ کرتا تھا فرض کرو  $\lambda =$  اون بیسوں کے جو آ ہمیشہ خرچ کرتا تھا اور  $40 - \lambda =$  اوس پیسے کے جو ہر روزہ اوسکی پاس بچتا تھا اور  $\lambda + 4 =$  اون بیسوں کے جو ب ہر روزہ خرچ کرتا تھا اور  $5 - \lambda =$  اون بیسوں کے جو ب ہر روز بچتا تھا اور  $3000 - 50 = \lambda$  تمام بحت کے جو کہ آ نے جمع کیا اور  $2400 - 50 = \lambda$  اون بیسوں کے جو ب پاس جمع ہوئے لیکن بموجب سوال کے

$3000 - 50 = 2400 - 50$  اور بعد ابدال کے  $2400 - 50 = 2400$   $\therefore \lambda = 50$  اور

اسک معلوم ہوا کہ آ ہر روزہ بچاس پیسے خرچ کرتا تھا اورب ۵۶ پیسے

۳۷ آ اورب نے مساوی روپیہ سے تجارت کرنی شروع کی آ نے اول سال میں ۴۰ روپیے حاصل کیئے اورب نے اوسی سال ۴۰ کہوئے بعد ہ دو سال میں آ نے تہائی اوس روپیہ کے

جو اس کے پاس ہو گئے ہوتے اور بتیئے حاصل کیا جو کہ آسینے ہو یا تھا اگر اس کو دو چند کر کے  
 ۴۰ نکل لیں لیکن پہر معلوم ہوا کہ بتیئے پاس دو چند روپیہ ہی نسبت آ کے فرض کرو لا = اوس مال کے  
 کہ ہر ایک نے اویسین سے تجارت کرنی شروع کی تھی :: لا + ۴۰ = روپیئے اول سال آ کے

اور لا - ۴۰ = روپیئے اول سال بتی کی اور لا + ۴۰ = لا + ۴۰ = روپیہ سال دوم بتی کے  
 اور لا - ۴۰ + لا + ۴۰ = ۸۰ = روپیہ سال دوم بتی کے

:: لا - ۴۰ + ۴۰ = ۸۰ = روپیہ سال دوم بتی کے

سوال - ۱۲۰ + ۵۲ + ۸۰ = ۲۴۰ + ۵۲ = ۲۹۲ اور بعد ابدال کے

۵ = ۳۲۰ مساوی اوس سٹجے کے جس سے ہر ایک نے تجارت کرنی شروع کی تھی

۸ = ۳۳ تقسیم کر دو عدد ۸ کو ایسے دو اوقات مختلف میں کہ حاصل تفریق بڑیے کا ۸۴ سے مساوی ہو  
 سہ چند حاصل تفریق چھوٹیے کو ۴۰ میں سے فرض کرو لا = چھوٹے عدد کے :: لا - ۴۸ = بڑی

عدد کے اور بوجہ سوال ایک کے ۸۴ - (۵ - ۴۸) = ۱۲۰ = ۳ × ۵ =

۸۴ - ۴۸ = ۵ + ۱۲۰ = ۱۲۵ اور بعد ابدال کے ۵۴ = لا = ۱۰۴ :: لا = ۲۶ = چھوٹیے  
 عدد کے اور ۴۲ = بڑیے عدد کے

۹ = ۳ وہ کون عدد ہے جس کی جو تہائی پر ۶ زیادہ کریں تو تہائی اوس عدد کی ہو لا = عدد مطلوب کے  
 جواب بوجہ سوال کے  $\frac{۳}{۵} = ۱۶ + \frac{۳}{۵}$  :: ۱۹۲ = لا = بعد ابدال کے لا = ۱۹۲

۱۰ = ایک شخص نے کچھ انج بویا تھا جب وہ تیار ہوا تو معلوم ہوا کہ ۴۸ من انج پیدا ہوا اور پہلے  
 انج بوی چھوٹے سے ایک تہائی زیادہ ہر تہائی انج کتا پہلے بویا تھا فرض لا = انج پہلے بوسے

ہونے کے :: لا + ۵۳ = لا = ۱۲ = انج جو اس نے پہلی بویا تھا ۳۶ من تھا

۱۱ = ایک شخص نے اپنی ایک گٹھے گھاس کو تہائی در نصف کوچ ڈال کا مجموعہ = ۹۶ من کے تھا  
 پس بناؤب گٹھا گھاس کا کتنے من کا تھا فرض کرو لا = تعداد من گٹھے کے :: لا + ۵۲ = ۹۶

نے ۹۶ = لا :: ۳۲ = لا اور ۱۲۸ = تعداد من گٹھے کے

۱۲ = ایک شخص نے دو نوکر کو ۲۱۰ روپیہ اس تفصیل سے دیئے کہ ایک کو بربستہ دوسرے  
 کے آدھا دیا تو بتا دم ہر ایک کو کتا کتا دیا پویدیا فرض کرو لا = اوس آدمی کے روپیہ کے جس پاس

کم ہیں تو بوجہ سوال کے لا = حصہ اوس نوکر کے جس پاس روپیہ نصف ہیں بربستہ دوسرے کے  
 لیکن لا + لا = ۲۱۰ یا لا = ۲۱۰ :: لا = حصہ ایک نوکر کے اور ۴۲۰ = حصہ نوکر دوسرے کے

۳۴ دو عدد کو کسی میں کو اوئین وہ نسبت ہی جو ۲ کو ۳ کیے اور اگر ہر واحد پر اون دو وزن میں سے  
 چار چار بھائی جلیوں تو مجموعوں کو اسپین وہی نسبت ہوگی جو ۲ رکھتا ہے۔ یہ تو بموجب شرائط سوال کے

۳۵ = ایک عدد کی اور ۳ = دو دیگر عدد کی اور ۲ + ۴ = ۴ + ۳ = ۷ :: ۵ : ۷ :: ۷ : ۷  
 اور ۱۴ + ۱۱ = ۲۵ = ۲۰ + ۵ :: بعد ابدال کے ۷ = ۸ اور ۱۶ = ایک عدد کے اور ۲۴ = دو دیگر

۳۶ ایک تنھ کو کچھ گوشت دیکار تھا وہ بازار کو کچھ مگر خریدنے گیا اور دین سو جا کہ اگر ہرن کا گوشت  
 جو چار بیسی سیر ہی بچے تو کچھ نہیں بچتا اور اگر بہتر کا گوشت جو ساڑھی تین بیسے سیر ہی بچے تو ۲۴ بیسی بچتے  
 ہیں بناؤ گا گوشت اوسکو درکار تھا فرض کرو ۲ = سیر دن گوشت کی :: ۷ = قیمت گوشت ہرن کے  
 اور ۷ = قیمت گوشت بہتر کے اور بموجب سوال کے ۸ - ۷ = ۱ = ۲۴ یا ۱ = ۲۴ = نصف  
 تعداد سیر دن گوشت کی اور کل تعداد = ۴۸

۳۷ ایک چھیلی ہو کہ اوسکی دم ہی ۹ سیر کی اور دہرہم اتنا جتنا اوسکا سر اور دم اور سر دیکر اتنا  
 ذرنی ہی صغنی ساری دم اور آدہرہم تا وہ چھیلی گنتی ذرنی ہی فرض کرو ۲ = تعداد سیر دن دہرہم کے  
 تو ۷ = ۹ = سر چھیلی کے لیکن بموجب فرض کے ۷ = ۹ + ۹ = ۱۸ = اصل تعداد  
 سیر دن دہرہم چھیلی کے اور ۲۶ + ۱۸ + ۹ + ۹ = ۶۲ = تعداد سیر دن چھیلی کے

۳۸ ایک سیدہ میں چار مقام آت س دہن کسی خاص فاصلہ پر یعنی آسے دیک ۳۴ میل اور  
 فاصلہ آ کات تک : فاصلہ آس سے دیک :: ۲ : ۳ اور ایک برع فاصلہ آ کات تک منہ نصف فاصلہ  
 آس کے دیک تکنا ہی فاصلہ آس سے نہ تک بنا دویے فاصلہ گنتی ہیں فرض کرو ۲ = فاصلہ کے  
 جو درمیان آ اور دیک کے ہوتے ۳ = اوس فاصلہ کے جو درمیان آس اور دیک کے ہی  
 اور  $(\frac{۳}{۲} + \frac{۳}{۲}) = ۳ = ۳$  فٹ میں یعنی فاصلہ کے جو درمیان آ اور آس کے ہی  
 :: فٹ ۳ =  $\frac{۳}{۲}$  اور بموجب سوال کے  $(\frac{۳}{۲} + ۳ + ۳) = \frac{۱۵}{۲} = ۷.۵ = ۳۴$   
 ::  $\frac{۳}{۲} = ۳$  اور ۷ = ۱۲ میل = فاصلہ آ اور دیک کے اور ۱۸ = فاصلہ آ اور دیک کے  
 اور ۳ میل = فاصلہ آ اور آس کے

۳۹ وہ کون عدد جس پر اگر علیحدہ علیحدہ زیادہ کریں آ ۵ آ ۳  
 تو مجموعہ اول : مجموعہ ثانی : مجموعہ ثانی : مجموعہ ثالث سے فرض کرو ۷ = عدد مطلوبہ کے  
 تو ۱ + ۷ : ۷ + ۷ : ۷ + ۷ + ۷ :: ۱ + ۷ : ۷ + ۷ : ۷ + ۷ + ۷ :: اور بعد ابدال  
 نسبت کے ۱ : ۷ : ۱ : ۷ :: ۱ : ۷ :: ۱ : ۷ :: اور بموجب قاعدہ تناسب کے



وقت پڑھنے تک لیگا :۔ ۴ = تعداد جو کریون کے جو خرگوش اسی وقت میں لیگا

:۔ ۵۰ + ۷۴ = تمام جو کریون خرگوش کے اور ۲ : ۳ : ۵۳ : ۷۴ : ۵۰

:۔ ۵۹ = ۱۰۰ + ۷۸ :۔ ۱۰۰ اور اسیرا سلی ۲۰۰ = جو کریون کے جنین کے گن خرگوش کے

۵۲ سیب اور انار اس طرح سے فروخت ہوئی کہ دس سیب ایک پیسی کے اور ۲۵ انار دو پیسی کے اگر ہم خریدنا چاہیں مجموعہ ۱۰۰ سیبوں اور انار کو  $\frac{19}{2}$  پیسے کی بدلی تو بنا دے سکتے انار ہوگی اور

کتنے سیب فرض کرو = تعداد سیبوں کے :۔ ۱۰۰ - ۷ = تعداد اناروں کے

اور ۱۰ : ۱ : ۱۰ : ۱ : قیمت لاکھتی سیب کی سے :۔ قیمت لاکھتی سیب کی =  $\frac{۷}{۱۰}$  اور اس طرح

ثابت کر سکتے ہیں ہم کہ ۱۰۰ - لاکھتی انار کی قیمت =  $\frac{۷۲ - ۲۰۰}{۲۵}$  :۔  $\frac{۷۲ - ۲۰۰}{۲۵} = \frac{۷۲ - ۲۰۰}{۲۵} + \frac{۷}{۲۵}$

اور بعد دور کرنے کسر اور اخصاریہ کے ۷۵ = ۷۴ - ۲۰۰ + ۷۵ = ۴۵ اور ابدال کے قس

۷۵ = تعداد سیبوں کے اور ۲۵ = تعداد اناروں کے

۵۳ ایک شخص جو اکھینے لگا اول دفعہ جتنے روپے ہی اکھینا شروع کیا تھا اوس سے دو چیزیں

اور پھر ۴ روپے ہارا اور بعد اوس کے باقی کا  $\frac{۱۱}{۱۰}$  ہارا تب جتنی روپے سے اکھینا شروع کیا تھا اوتنے

جتنا پھر بدشمار کے معلوم ہوا کہ ۸۰ روپے اوسکی پاس سے بنا دے کئے روپے ہی اکھینا شروع کیا تھا پھر

۷۵ = اون روپیوں کے جتنی اکھینا شروع کیا تھا تو ۷۲ = اون روپیوں کے جو اول دفعہ جتا اور پھر بموجب

سوال کے ۷۳ - ۱۶ -  $\frac{۷۲ - ۷۵}{۱۰} + ۷ = ۸۰$  اور بعد دور کرنے لے کر

۷۵ - ۸۰ - ۷۱۲ + ۷۴ + ۷۵ = ۲۰۰ اور ابدال کے ۷۸ = ۷۱۶ - ۷۵ = ۵۲

۵۴ تقسیم کر دے ۳۶ کو ایسے تین حصوں میں کہ اول کا اور ثلث دوسرے کا اور چوتھائی تیسرے کا

سادی ہو ایک دوسری کے فرض کرو ۷۲ = حصہ اول کے اسیرا سلی ۷۵ = حصہ دوسرے

کے اور :۔ ۷۳ = حصہ دوسرے کے اور چونکہ ۷۵ = حصہ تیسری کے تو :۔ حصہ تیسرا = ۷۴

اور (۷۲ + ۷۳ + ۷۴) = ۷۹ = ۳۶ :۔ ۷ = اور حصہ مطلوبہ ۸ ۱۶ ۱۲

۵۵ تین ذین نے سبایمونی کے ایک ریوڑ لٹا اس طرح سے کہ ذین اول نے لٹا جو تہائی تمام

ریوڑ کا اور چوتھائی ایک بکری کا اور ذین دوم نے ثلث باقی کا اور ثلث ایک بکری کا اور ذین سوم

نے ادھارچھ ہونے کا اور آدھا ایک بکری کا لٹا اور بعد اسکے ریوڑ میں چیس بکریاں بچیں تاویل بکریاں

کتنی تھیں ریوڑ نہ کر میں فرض کرو ۷۵ = تعداد بکریوں ریوڑ کے تو بموجب کم ہونے بکریوں کے

دفعہ اول ذین حاصل ہوئے ۷۵ -  $\frac{۷۵}{۳} = \frac{۱۶}{۳}$  اور پھر بموجب دفعہ ثانی کے

$$\frac{1-13}{3} = \frac{1-13}{12} = \frac{1-13}{3} = \frac{1-13}{12} = \frac{1-13}{3} = \frac{1-13}{12}$$

$$\frac{1-13}{3} = \frac{1-13}{12} = \frac{1-13}{3} = \frac{1-13}{12} = \frac{1-13}{3} = \frac{1-13}{12}$$

۵۶ ایک شخص نے پید شراب کا واسطی ۸ روپیہ کے خرید اور تین چوتھائی اوسین سے سجا بنے  
 صدی ۲۵ روپیہ فائدہ کے محدود سیر زیادہ کے بیج ڈالا اور بانی کو ایسی قیمت سے سجا کہ کل شراب میں  
 اوس کوئی صدی ۶۰ روپیہ فائدہ حاصل ہوا لیکن اگر وہ کل کو ایسی قیمت سے سجا تو اوس کوئی صدی ۱۰۰  
 روپیہ فائدہ حاصل ہوتا تو بتاؤ شراب کتنی سیر ہی فرض کرو ۱۱ = قدا اسیروں شراب کے اور چونکہ کل  
 سیر شراب کے اوسنی ۸ روپیہ کو خریدی تھے تو  $\frac{11}{11} =$  قیمت ایک سیر شراب کی اور

۱۰۰ : ۱۲۵ :  $\frac{11}{11}$  : اوس قیمت سیر جو ذرا اول میں اوسے متور کی تھی تو اسیروں اسطی قیمت اول دفعہ  
 کی =  $\frac{11}{11}$  اور اسی طرح سے ۱۰۰ : ۲۴۵ :  $\frac{11}{11}$  اوس قیمت سیر سے جو دوسری دفعہ اوسنے  
 سجا تو : قیمت دوسری دفعہ کی =  $\frac{33}{11} :: (2+13) \cdot \frac{11}{11} + (2-11) \cdot \frac{33}{11} = 38$   
 = تمام فائدہ کے =  $30 - \frac{33}{11}$  اور  $100 : 60 : 38 :: 38 - 30$  اور موازن قاعدہ تاکہ  
 $5 : 3 :: 8 : 5 - 4 :: 22 = 25 - \frac{33}{11}$  اور بعد ابدال کے  $\frac{33}{11} = 3 :: 30$  اور  
 اور عدد مطلوب = ۱۲۰ کے یعنی شراب مذکور ۲۰ سیر ہی

۵۷ ایک فرض ہو کہ اوسین ایک ایک ایک ان جاری ہو اور بانی اوسین تھا ۲۰ من اور یہ ایک پب جسکے  
 وسیلہ کتین آدمی ایک من میں ۴ دفعہ کی صدر سے پکھانے تھی لگا ہوا گٹھن ترکیب سے چھ گٹھن میں بانی  
 تو اسیروں اسطی آدمی مذکور ایک اور پب کہ کھن بانی اوسکی کا ایک صدر سے دوسرے پب کی کھن بانی سے جو ایک  
 صدر سے ہو ہی نسبت رکھتا ہے جو ۲ گٹھن میں سے لگایا اور بعد انی اسی پب کے ایک آدمی پب اول سے متور  
 لگایا تو اوسین صرف تین من میں ۱۰ صدر ہوتی تھے اور دوسرے پب میں ۲ من میں پانچ صدر تو اس ترکیب سے  
 فرض مذکور ۲ گٹھن میں خالی ہوا تو باہر ایک پب میں ایک صدر سے کٹا بانی گٹھن اور یکے میں سے کٹا جاری ہو  
 فرض کرو ۵۳ = قدا اوسنوں بانی کے جو ایک صدر سے پب اول سے گٹھن اور ۱۲ = قدا اوسنوں بانی کے  
 جو ایک صدر سے دوسرے پب میں سے لگتا ہے اور ۱۲ = تمام بانی نکلے ہوئے ایک منٹ کی پب اول سے  
 جب کہ تین آدمی اور پب تر تھے اور بانی جو ۹ گٹھن میں لگتا ہے =  $6 \times 6 \times 6 = 216$

کوتھن میں لگتا ہے



دو پانی جو کل کی میں سے آیا =  $420 + 512 \times 40 \times 4 = 420 + 81920 = 82340$  اور  $1 + 54$  مقدار

اورس پانی کے جو کھا گیا ایک صد سے اول سے اور  $50 =$  مقدار اورس پانی کے جو کھا گیا صد سے

پ سے ایک صد سے  $\therefore 40 \times 12 \times 512 =$  مقدار کے جو ۱۲ گنتہ میں کھا

$$\therefore 420 \times 512 = 420 \times 2 + (1 + 54) \times 420 = 840 + 23520 = 24360$$

اور  $1 =$  تو معلوم ہوا کہ اول پ میں ایک صد سے ۳ من پانی اور دوسری ۲ من پانی کھتا تھا اور

$$\text{پانی جو کہ میں سے ایک منٹ میں آتا تھا} = \frac{(1 + 54) \times 420}{40 \times 4} = (1 + 54) \times 2 =$$

$$= 112 + 2 = 114 = \text{قعد اور منوں کے}$$

۵۸ وہ کوئی دو عدد ہیں جن کا حاصل تفریق = ۱۰ اور اگر ۱۵ زیادہ کئے جائیں انکی مجموعہ پر مثل

$$= 23 \text{ جواب } 4 \text{ اور } 14$$

۵۹ وہ دو اعداد ایک ہیں جن کا حاصل تفریق = ۱۳ اور اگر نوگ چہرہ چمکنے سے بڑی سے تفریق

$$\text{کیا جائے تو حاصل} = 33 \text{ جواب } 14 \text{ اور } 3$$

۶۰ وہ عدد کیا ہے جسے اگر ۲۰ زیادہ کریں اور اس جس کی دو تہائی میں سے ۱۲ تفریق کریں تو حاصل

$$\text{تفریق} = 10 \text{ ہوتا ہے جواب } 13$$

۶۱ آ اور تے میں برابر دو بیہ تجارت میں لگایا ہے اگر ۱۲۰ روپیہ کا فائدہ ہوا اور تے کو ۸۰ روپیہ

نقصان ہوا بعد ازان دریافت ہوا کہ آ کی پاس جو روپے باقی رہے وہ تے کی تین دن میں بیوں سے جو

تے کے پاس باقی رہے تاکہ آ کو تے پر شخص کے پاس اول میں تھا جواب ۱۸۰

۶۲ وہ عدد کون ہے جسکی تہائی اور پانچویں حصی میں ۷۳ کا فرق ہے جواب ۵۴۰

۶۳ ایک تھانے نے اول بیہ تے ہی یا چھان حصہ اپنی روپیوں کا ہار دیا اور بعد اسکے دس روپے

جتا اور پھر کھلا اور جو کچھ اسکے پاس تھا اسکا تہائی ہارا اور بعد اسکے تین روپے جتا اور بعد ازان اسکے

روپیوں کی شمار کی تو دریافت ہوا کہ اوس پاس ۶۳ روپے رکھی تادکنے روپیہ کے پاس آ جا ۱۰۰ روپیہ

۶۴ عدد ۹ کو ایسے چار حصوں میں تقسیم کرو کہ اگر اول حصہ پر ۲ زیادہ کریں اور دوسرے ہی ۲ تفریق کریں

اور تیسری کو ۲ میں ضرب کریں اور چوتھے کو ۲ پر قیمت کریں تو مجموعہ اور حاصل تفریق اور حاصل ضرب اور خارج

$$\text{قیمت ب اسیں ملوی ہوتے ہیں جواب } 18 \text{ اور } 23 \text{ اور } 10 \text{ اور } 7$$

سوالات دیہ و دیہ کی مساوی کے



۵ ایک درخت بر حسب کھیاں بیٹی ہوی تین ایک دفع تو اولی نصف کا جذر اور گیا اور دوسری دفع  
 ادنی آبدنوزین حصہ اور گئے اور باقی رہیں در کھیاں جاو گئی کھیاں درخت بر بیٹی تین فرض کرو کہ تعداد  
 کھیاں کی =  $\frac{1}{4} \sqrt{18}$  اور  $\frac{1}{4} \sqrt{18}$  =  $\frac{1}{4} \sqrt{18}$  اور گئیں اور  $\frac{1}{4} \sqrt{18}$  =  $\frac{1}{4} \sqrt{18}$  اور گئیں اور  $\frac{1}{4} \sqrt{18}$  =  $\frac{1}{4} \sqrt{18}$   
 بار اور گئیں اور اب ظاہر ہو کہ  $18 = \frac{1}{4} \sqrt{18} - \frac{1}{4} \sqrt{18} = 2 = \frac{1}{4} \sqrt{18} - \frac{1}{4} \sqrt{18}$   
 یعنی  $18 = \frac{1}{4} \sqrt{18} - \frac{1}{4} \sqrt{18}$  اور  $18 = \frac{1}{4} \sqrt{18} - \frac{1}{4} \sqrt{18}$

اور  $18 = \frac{1}{4} \sqrt{18} - \frac{1}{4} \sqrt{18} = 322 + 18 = 322$  اور  $18 = \frac{1}{4} \sqrt{18} - \frac{1}{4} \sqrt{18} = 322$   
 اور بموجب قاعدہ کی زیادہ کر دو مجذور نصف  $\frac{153}{4}$  کا دو نوظ مسادات پر تو حاصل ہوتا ہے  
 $\frac{18225}{14} = \frac{5187}{14} - \frac{23209}{14} = 322 - \frac{23209}{14} = \frac{23209}{14} + \frac{1153}{2}$   
 اور جذر نکالنے سے دو نوظ حاصل ہوتا ہے  $135 = \frac{153}{4}$  اور  $135 = \frac{153}{4}$

$18 = \frac{1}{4} \sqrt{18} + \frac{135}{4} = \frac{288}{4} = 72$  = تعداد کھیاں کے ایک اور ترکیب دا سیٹ  
 حل کرنے سوال فرم کرہ بالا کے یہی فرض کرو تعداد کھیاں کے  $2$  ا تو ظاہر ہے کہ  $18 = \frac{1}{4} \sqrt{18}$  کے  
 جو اول دفع اور گئیں اور  $\frac{1}{4} \sqrt{18} = \frac{1}{4} \sqrt{18}$  کھیاں کے جو دوسری دفع اور گئیں اور بموجب سوال کے  
 $18 = \frac{1}{4} \sqrt{18} - \frac{1}{4} \sqrt{18} = 2$  اور  $18 = \frac{1}{4} \sqrt{18} - \frac{1}{4} \sqrt{18} = 14$  اور  $18 = \frac{1}{4} \sqrt{18} - \frac{1}{4} \sqrt{18} = 14$

۶ اور بموجب قاعدہ دوسری مساوات درج دوم کے چوگنی سر لائن میں دو نوظ مسادات کو ضرب دو  
 تو حاصل ہوتا ہے  $14 - 18 = 42 = 14$  اور زیادہ کر دو مجذور  $9$  کا دو نوظ پر تو  
 $14 - 18 = 42 = 14 + 14 = 14 + 14 = 225$  اور جذر نکالو دو نوظ کا تو  
 $14 - 18 = 9 = 15$  اور  $14 - 18 = 27 = 4 + 15 = 14$  اور  $14 - 18 = 27 = 14$   
 اور  $14 - 18 = 27 = 14$  اور  $14 - 18 = 27 = 14$

۷ چار اعداد جمع کے سلسلہ کے ہیں اور حاصل ضرب اول کا جو تہی میں  $5 = 5$  اور حاصل ضرب  
 دوم کا سوہی میں  $4 = 4$  چار اعداد کو نشی میں فرض کرو کہ اول سے چھوٹا عدد  $= 1$  اور فرق عام  
 $= 1$  تو  $1 + 1 = 2$  عدد دوم اور  $1 + 2 = 3$  عدد سوم اور  $1 + 3 = 4$  عدد چہارم اور موافق تیرا  
 سوال کے  $14 \times (1 + 2 + 3 + 4) = 14 \times 10 = 140$  اور

$14 \times (1 + 2 + 3 + 4) = 14 \times 10 = 140$   
 $14 \times (1 + 2 + 3 + 4) = 14 \times 10 = 140$   
 اب تفریق کر اس مساوات میں  $44 = 14 + 14 + 14 + 14 = 56$  سے  
 اس مساوات



ایک ضلع ایک چبوترے کا زیادہ ہر ایک ضلع دو سکر چبوترے سے بقدر ۱۲ گز کے اور کل دو فوجی تو زمین ۲۱۲ پتھرین بنا دیا اس طرز پر ایک چبوترے کا فرض کر دو ضلع اول چبوترے کا = لا تو موافق شرائط سوال کے  
 لا + ۱۲ = ضلع دو سکر چبوترے کے اور لا = قعدا پتھروں اول چبوترے کے اور (۱۲ + لا) = قعدا  
 پتھروں دو سکر چبوترے کے اور لا + لا + لا + لا + لا = ۱۲۲۰ اور لا + لا + لا + لا + لا = ۱۹۷۶  
 ∴ لا + لا = ۱۹۸۸ اور ∴ لا = ۲۶۶ - ۳۸

۱۲ ایک مزدور نے ۳۵۶ روپیہ بطریق مزدوری کے لیکر دو کوئیے ایسے کو دیے کہ ایک کا عمق ۶ گز زیادہ تھا نسبت دوسرے کی عمق کے اور کہوڑی ہر ایک کے ان کو دینے سے اتنی روپیے کی گز خرچ ہوئے جتنی ہر دو کے عمق میں گز تھے بنا دیا تھا عمق ہر ایک کا فرض کر دو کہ لا اور لا + ۶ میں عمق تب موافق شرائط سوال کے  
 لا + (لا + ۶) = ۳۵۶ ∴ لا + لا + ۶ = ۳۵۶ یا لا + لا = ۳۵۰ اور لا = ۱۷۹ گز <sup>مطلوبہ</sup>  
 ۱۳ چند بھائی ایک شخص کے ۱۷۵ روپیے کے قرضدار تھے لیکن قبل از او ہونی قرض کے دو دینے سے مر گئے اور باقیوں کو مری ہوئے بھائیوں کے عیوض میں دس دس روپیے زیادہ ادا کرنے پڑے بناؤ گئے  
 بھائی تھے فرض کر دو کہ لا = قعدا بھائیوں کے تو  $\frac{۱۷۵}{۲} =$  روپیوں کے جبکہ ادا کرنا ہر واحد پر قبل از مرنے  
 دو بھائیوں کے واجب تھا اور اس طرح سے  $\frac{۱۷۵}{۲} =$  روپیوں کے جبکہ ادا کرنا بعد مرنے دو بھائیوں کے  
 ہر واحد یا توں پر واجب تھا پس موافق شرائط سوال کے  $۱۰ = \frac{۱۷۵}{۲} - \frac{۱۷۵}{۲} =$

$۱۷۵ \left( \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \right)$  اور ∴  $۱۷۵ = (۲ - ۱) \times ۱۷۵ = ۱۷۵$  یا لا - لا = ۳۵ ∴ لا = ۷۷ - ۵  
 ۱۴ ایک شخص نے چند بیٹریں واسطی ۶۰ روپیے کے خریدیں اور انہیں سے ۱۵ بیٹریں کر اپنی باس  
 رکھ کر باقی کو واسطی ۵۴ روپیہ کے بیچ دین اور اس فروخت سے اسیسے فی بیٹری ایک روپیے کی دسویں حصہ کا  
 فائدہ حاصل کیا بناؤ بیٹریوں کے قعدا کیا تھی اور ہر بیٹری کی قیمت کیا تھی فرض کر دو کہ لا = قعدا مطلوبہ کی

∴  $\frac{۶۰}{۲} =$  قیمت ہر بیٹری کے ∴  $(۱۵ - لا) \left( \frac{۶۰}{۲} + \frac{۶۰}{۲} \right) = ۱۵ \times (۱۵ - لا) \times (۱۵ + ۶۰) = ۱۵ \times ۷۵ = ۱۱۲۵$  اور  
 لا + لا = ۱۱۲۵ - ۱۱۲۵ = ۰ ∴ لا + لا = ۱۱۲۵ - ۱۱۲۵ = ۰ ∴ لا = ۱۱۲۵ - ۱۱۲۵ = ۰  
 ۱۵ دو شخص آ اور ب دو شہروں سے کہ فاصلہ ۲۴۷ کوس کے واقع تھے طرف ایک دوسرے کے چلی اور ایک  
 خاص مقام پر آئی آجاتا تھا ۹ کوس ہر روز اور ب ہر روز اتنے کوس چلتا تھا جتنے دنوں کے بعد وہ پہلے آتا  
 ہے اگر دنوں کی قعدا دین سے تین کا لین تو باقی رہتے ہی بقیارتب کی بناؤ ہر ایک شخص کتنے کتنے کوس چلا  
 فرض کر دو کہ لا = قعدا دنوں کے ∴ لا = کوسوں کے جو آچلا اور ۲۴۷ - لا = کوسوں کے ب چلا اور  
 $\frac{۲۴۷ - لا}{۲} =$  کوسوں کے جو ب ہر روز چلا ∴ لا - ۲ =  $\frac{۲۴۷ - لا}{۲}$  اور



۱۴ اگلے پے ایک رتہ کی نیے ۱۲۰ گز کی مسافت طر کر نیے میں چہ گردن میں بہ نسبت پچھ کے پے کے زیادہ کن لیکن اگر محیط ہر واحد ان پہر کا قدر عدد آ کے زیادہ کیا جاوے تو اگلا پہا صرف چار گردن بہ نسبت پچھ کے پے کی زیادہ کر لگا بتاؤ گی محیط ہر پے کا فرض کر دو کہ لا = تعداد گردن محیط بڑے پے کے اور فرض کر دو کہ س = تعداد گردن محیط چھوٹے پے کے

$$۲۰ - \frac{۱۲۰}{۳} = \frac{۱۲۰}{۳} \quad \therefore$$

$$۲۰ - \frac{۱۲۰}{۱+۳} = \frac{۱۲۰}{۱+۳} \quad \text{لیکن } ۲۰ - ۳۰ = ۱۰ \text{ یا } ۱۰ - ۲۰ = ۱۰$$

$$۳۰ - (۱+۳) = (۳-۲۹)(۱+۳) = ۳۰ + ۳۰ - ۲۹ - ۲۹ = ۱۰ - ۱۰ = ۰$$

$$۳۰ - ۱۰ - ۲۹ = ۳۱ - ۱ - ۲۹ \quad \therefore ۳۱ - ۱ - ۲۹ = ۱۰ - ۱۰ = ۰$$

$$۱۰ - ۱۱ = ۱۱ - ۱۱ = ۰ \quad \therefore \frac{۱+۱۱}{۱۱} = \frac{۱+۱۱}{۱۱} \quad \therefore \frac{۲۰+۳۲۰}{۴} = \frac{۳۲۰}{۴} \quad \therefore ۲۰ - ۳۰ = ۱۰ \text{ یا } ۳۰ - ۲۰ = ۱۰$$

$$۳۰ + ۳۲۰ = ۳۵۰ \quad \therefore ۳۰ + ۳۲۰ = ۳۵۰ \quad \therefore ۳۰ + ۳۲۰ = ۳۵۰ \quad \therefore ۳۰ + ۳۲۰ = ۳۵۰$$

۴۰ ایک شخص نے وہ گناہاں کس گئے کعب کی شکل کے قیمت ۸۲۰ روپیہ کے خریدیے اور ایک گز کعبی کی این سے اتنی روپیہ قیمت تھی جسے گز تہہ ایک ایک ضلع دوسری کے من اور این جو بڑا گناہاں کے نیچے ۹ گز مکس زیادہ زمین تھے نیچے وہ ۹ گز زمین زیادہ گہریے ہوئے تہا بہ نسبت دوسرے بتاؤ کیا تھی قیمت ہر گز کی فرض کر دو کہ لا = تعداد گردن ایک ضلع بڑے کعبے کی اور فرض کر دو

کہ س = تعداد گردن ایک ضلع چھوٹے کعبے کی اور اب ظاہر ہے کہ لا اور س جو مکی تعداد اور گہوں کے

علیحدہ علیحدہ قاعدوں کے لا - س = ۹ اور موافق شرایع سوال کے یہ بھی ظاہر ہے کہ

$$لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰$$

$$لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰$$

$$لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰$$

$$\therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰$$

$$\therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰$$

$$\therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰$$

$$\therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰$$

$$\therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰$$

$$\therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰$$

$$\therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰$$

$$\therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰ \quad \therefore لا + س = ۸۲۰$$







**۲۸** حل کردہ مساوات  $(\frac{1}{2} - \frac{x}{10}) + (\frac{1}{2} - \frac{x}{10}) = \frac{1}{2}$  کو نئے قیمت لاکھ دریافت  
 کرد اب اگر اولین قسم علامتین تو  $(\frac{1}{2} - \frac{x}{10}) = \frac{1}{4}$  اور اگر مجدد  
 کریں دو نظرت اسل وقت کو تو حاصل ہوگا یہ  $\frac{1}{2} - \frac{x}{10} = \frac{1}{4}$  اور  $\frac{x}{10} = \frac{1}{4}$  اور اگر  
 اور اگر دو کریں مشترک  $\frac{x}{10}$  کو دو نظرت سے اور  $\frac{x}{10}$  کی علامت بدل کے اول طرف مساوات کے  
 لائن تو حاصل ہوگا یہ  $\frac{x}{10} = \frac{1}{4}$  اور  $\frac{x}{10} = \frac{1}{4}$  اور اگر  
 $\frac{x}{10} = \frac{1}{4}$  اور اگر جذریوں دو نظرتوں کو

$$\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x}{10}} = \frac{1}{4} \implies \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x}{10}} = \frac{1}{4}$$

$\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x}{10}} = \frac{1}{4}$  اور اگر مجدد کریں دو نظرتوں کو تو حاصل ہوگا یہ  
 $\frac{1}{2} - \frac{x}{10} = \frac{1}{16}$  اور اگر کامل کریں قسم مربع کو تو حاصل ہوگا  
 یہ  $\frac{1}{2} - \frac{x}{10} = \frac{1}{16}$  اور اگر  $\frac{x}{10} = \frac{1}{4}$  اور اگر  
 $\frac{x}{10} = \frac{1}{4}$  اور اگر  $\frac{x}{10} = \frac{1}{4}$  اور اگر

$$\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x}{10}} = \frac{1}{4}$$

**۲۹** ایک شخص ایک کام کو ایک دن میں کرتا ہے اور دوسرا دو دن میں اور تیسرا تین دن میں اور  
 چوتھا چار دن میں اور اگر چاروں اکٹھا ہر کام کریں تو بتا دیے کہ کتنے دن میں کام کو پورا کریں گے  
 فرض کر دو کہ وقت مطلوبہ =  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$  اور اگر  
 اول شخص  $\frac{1}{2}$  حصہ کام کا کریں اور دوسرا  $\frac{1}{3}$  حصہ کام کا کریں اور تیسرا  $\frac{1}{4}$  حصہ کام کا کریں  
 لیکن تمام یہ حصے مادی ایک کام کے ہونگے تو معلوم ہوا  $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$   
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{12}{20} + \frac{8}{20} + \frac{5}{20} + \frac{4}{20} = \frac{29}{20}$  اور  $\frac{20}{29}$  دن

**۳۰** دو کاریے ایسی ہیں کہ حاصل جمع ادنیٰ سطح کا = ط گز کے ہے اور حاصل جمع اون کے نصف  
 قطر کا = ع گز کے بتا دو ان کے نصف قطر کیا ہیں فرض کر دو کہ لا اور دہین نصف قطر مطلوبہ آگے ایک  
 ثابت کیا ہے کہ سطح اون کردن کی جبکہ نصف قطر لا اور دہین بہہ  $\frac{1}{2}$  کہ لا اور تم کہ  $\frac{1}{2}$  ہوتے ہیں اور اس  
 جای واضح ہوا کہ بتیر کرتا ہے محیط اوس دائرہ کو جبکہ نصف قطر ایک ہے پس موافق شرایط سوال کے

ل + س = ع اور م ک ل ا + م ک و = ط اور ل ا + و = م ک

لیکن چونکہ ل + س = ع ∴ ل = ع - س ∴ ل ا = (ع - س) ا = ع ا - س ا

∴ ع ا - س ا + و ا + م ک و = م ک ل ا ∴ م ک ل ا - م ک و = ع ا - س ا + و ا + م ک و  
 ∴ و ا - س ا + م ک و = م ک ل ا - م ک و اور و ا - س ا + م ک و = م ک ل ا - م ک و  
 = م ک ل ا - م ک و ∴ و ا - س ا = م ک ل ا - م ک و

$\sqrt{\frac{ط - م ک و}{م ک}} = \frac{ع}{س} = و ∴ \sqrt{\frac{ط - م ک و}{م ک}} = \frac{ع}{س}$

### باب سوم

جاننا چاہیے کہ بعض قاعدے ضرب اور تقسیم جبریہ کے ایسی ہیں کہ اورین فقط امثال اور علامتوں پر عمل کیا جاتا ہے اور اس واسطے عمل میں آسانی ہی ہوتی ہے اور چونکہ خواص مساوات میں اعمال ضرب اور تقسیم سے بہت کام پڑتا ہے اس واسطے اول اورچ لکھنا ضروری اور بعد اسکے خواص مساوات اور سطریں تیسے لکھی جائیں گے جس طرح فضلا دیورب سے زمانہ حال میں ثابت کیے ہیں

مضل اول بیح بیان اوس قاعدہ ضرب اور تقسیم جبریہ کے  
 حسین امثال مقادیر جبریہ یعنی حروف کی علیحدہ کئی جاتی ہیں

### بیان اول قاعدہ ضرب

اکثر اوقات قوای مقداروں جبریہ کی بتدیرج زیادہ ہوتی ہیں اور ایسی صورتوں میں عمل ضرب کا بہت سہل مرحلہ  
 اگرچہ اورین ہم قوای مختلف حروف یعنی مقادیر جبریہ کی اور عمل کرین اور امثال اول کی کے اور بعد ازان  
 حاصل ضرب میں قوای مقداروں مذکور کو چھوڑ دین گئی ہیں اور اولی امثال کے الی لکھ دین جیسکہ مثالوں  
 اندہ سے واضح ہوتا ہے

مثال ضرب کرد ل ا + س + ل ا + و + ل ا - م ک ل ا - م ک و میں صورت عمل کی یہ ہوگی

امثال مضروب کی یہ ہیں

$$\begin{array}{r} 1+1+1+1 \\ 1- \\ \hline 1+1+1+1 \\ 1-1-1-1- \\ \hline 1-0+0+0+1 \end{array}$$





ہوگا ضرب دینی سے مقسوم علیہ کو کسی بز خارج قسمت کی میں جمع کیا جائیگا اور تقوین کیا جائیگا اس صورت  
 میں ظاہر ہر مقسوم دوم دی ہوگا جیسی کہ ہوتا ہے جس وقت جاری کیا جاتا ہے قاعدہ مروج لیکن چونکہ دوسرا بز  
 خارج قسمت کا حاصل ہوتا ہے تقسیم کرنی سے اول بز مقسوم دوم کو اول بز مقسوم علیہ پر اور اول بز مقسوم علیہ کے  
 علامت تبدیل کی گئی تو ظاہر ہو کہ علامت دوسری بز خارج قسمت کی وہ نہیں ہوگی جو جائے تیس واسطی دور  
 کرینے اس وقت کی قسم نہیں بنتی بن علامت اول بز مقسوم علیہ کی اور نہیں بہکتے بن اور حاصل ضربوں کو  
 جو حاصل ہوتی ہیں ضرب دینی سے ہر بز خارج قسمت کو اول بز مقسوم علیہ میں کو واسطی موافق قاعدہ مروج سے کے  
 وسیلہ حاصل ضرب مذکور کے اول اجزای تمام مقسوموں متواتر کے زائل ہو جاتے ہیں پس جس وقت پہنچا دیا جتنے  
 ان حاصل ضربوں کو تیسے امثال اول بز کسی مقسوم کی چونکہ امثال اول بز خارج قسمت کی کو واسطی کے امثال اول  
 بز مقسوم علیہ کا عدد آگاہی اور بہتات عمل میں لے سکتی ہے تقسیم کرنی سے مقسوم اور مقسوم علیہ کو امثال اول بز مقسوم  
 علیہ اب ظاہر ہے کہ امثال بزوں خارج قسمت کی ہونگی امثال اول بزوں مقسوموں کے عمل مذکور اور یہی عمل ہو سکتا ہے اگر  
 جمع نکورین ہم سب اجزای کو ملکہ اوستینہ اجزاء کو جتنی لغات کرن واسطی بنا دینے اول بز مقسوم کے اور کہیں ہم  
 اور حاصل ضربوں کو جو حاصل ہوں ضرب دینی سے ایک کم اجزای مقسوم علیہ کو اجزای خارج قسمت میں خوں یا  
 قطاروں تریہی بن در خوں عرضی میں ہر ایک موافق قواعد مروج کی ہوتا ہے بیان سے بہت قاعدہ نکلتا ہے

قاعدہ

اول قسمت کرد مقسوم اور مقسوم علیہ کو سر اول بز مقسوم علیہ پر اور اس عمل سے سر اول بز مقسوم علیہ کا آ  
 ہو جائیگا اور اول بز خارج قسمت اور مقسوم کا ایک ہو جائیگا دوم تبدیل کرد علامتین تمام اجزای الام ایک مقسوم علیہ کو اور  
 ضرب کرد و تمام اجزاء کو جسکی علامتین تبدیل کی گئی ہیں اول بز خارج قسمت میں در حاصل ضرب کو اول سطرسی ابتدا کر کے ایک  
 قطار تریہی میں لکھو سویم جمع کرد اور ان اجزاء کو جو واقع ہوں اول قطار عمودی میں در ضرب کرد اور اجزای بیدہ مقسوم علیہ کو  
 اس حاصل جمع میں در بطور بن یکے لکھو حاصل ضرب کو ایک تریہی قطار میں چہارم جمع کرد اور اجزای دوم قطار عمودی  
 کو اور حاصل جمع ہوگا دوسرا بز خارج قسمت کا اور ضرب کرد اور اجزای بیدہ مقسوم علیہ کو اس حاصل جمع اور حاصل ضرب  
 کو بطور بن یکے لکھو اور یہی عمل کئے جاوے تک کہ اجزای مقسوم کے تمام ہو جائیں جیسیکہ ہوتا ہے موافق قاعدہ مروج کے  
 ظاہر ہے کہ قاعدہ مروج قسمت کی کو دیکھ کر ہندس ہر زینے اس قاعدہ کو قیاس فیضے استنباط کر لیا ہے اور ایسا عمل  
 اس قاعدہ کو قاعدہ قیاسی کہتے ہیں

مثال ۱ جاہتے ہیں قسم تقسیم کرنا ط ۷ + ۱۰ ط ۱۰ - ۱۰ ط ۱۰ + ۵ ط ۱۰ - ۱۰  
 کو ط - ۲ ط ۱۰ + ۱۰ ط ۱۰ موافق قاعدہ گذشتہ کی صورت عمل کی یہ ہوگی

۱-۵+۱۰-۱۰+۵-۱	۱
۲-۶+۶-۲+	۲+
۱+۲-۲+۱-	۱-

$\times \times ۱-۲+۲-۱$

اور یہاں سے معلوم ہوا کہ خارج قسمت مطلوب یہ ہے  
 ط - ۳ ط + ۳ ط - ۱ ظاہر ہے کہ اس مثالین امثال اجزای مقسوم کے خط یا قطار عرضی میں  
 لکھے گئے ہیں اور امثال اجزای مقسوم علیہ قطار عمود میں اور تمام اجزاء ال ایک مقسوم علیہ کی تبدیل کی گئے ہیں  
 اور بعد ازاں ۲+ اور - ۱ کو کہ تبدیل کیے ہوئے اجزای مقسوم علیہ کے ضرب کیا ہے آئینہ کو اول جز  
 مقسوم با خارج قسمت کا ہی اور حاصل ضربوں ۲+ اور - ۱ کو خط ترقی میں نیچے - ۵ اور ۱۰ کے  
 لکھا ہے کہ یہ متماثل ہیں ۲+ اور - ۱ ایک بعد ازاں جمع کیا ہے جسے دوسرے قطار عمود کو اور اس عمل سے  
 حاصل ہوا ہے ۳ کہ دوسرا جز خارج قسمت کا اور حیوت ضرب کریتے ہیں ۳- کو ۲+ اور  
 - ۱ میں اور سوت حاصل ضرب - ۶ اور ۲+ ہوتی ہیں اور انکو ترقی قطار میں نیچے + ۱۰ اور - ۱۰  
 کے لکھا ہے اور حاصل جمع تیسری قطار عمود کا + ۳ ہے اور یہ تیسرا جز خارج قسمت کا پس ضرب کیا  
 جسے اس حاصل جمع کو اجزای تبدیل کیے ہوئے مقسوم علیہ پر تو حاصل ضرب سے ہونگی ۲+ اور  
 - ۳ پس حاصل جمع چوتھی قطار عمود کا - ۵ ہے اور اس سے حاصل ہوتی ہے اخیر قطار ترقی - ۲+ اور بعد ازاں تمام متماثل  
 ۳ قسمت کروا - ۵ + ۵ - ۱۵ + ۱۵ - ۲۴ + ۲۴ - ۱۳ + ۱۳ - ۵ کو اوپر  
 - ۱۲ + ۱۲ - ۱۲ + ۱۲ - ۱۱ کے اب ظاہر ہے کہ صورت عمل کی یہ ہونگی

۵+۱۳-۲۴+۲۴-۱۵+۵-۱	۱
۱۰+۶-۲+	۲+
۲۰-۱۲+۲-	۲-
۱۰+۶-۲+	۲+
۵-۳+۱-	۱-

$\cdot + \cdot + \cdot + \cdot + ۵ + ۳ - ۱$







معلوم ہوا کہ  $b = 0$  اور یہاں سے معلوم ہوا کہ مساوات مفروض پوری تقسیم ہو سکتی ہے۔  $a = 0$  ط پر اس  
 شکل کے برعکس یہ ثابت ہو سکتی ہے کہ اگر مساوات  $a = 0$  ط پر پوری قسمت ہو سکتی تو  $a$  بھی ایک قیمت اس مساوات  
 کی ہوگی اس صورت میں حاصل یہ مساوات

ج (  $a = 0$  ) ع (  $a - 0$  ) اور حیوت  $a = 0$  ط اور سوقت ج (  $a = 0$  ) اور یہاں سے یہ معلوم ہوا  
 کہ اگر کہیں ہم  $a$  بجای  $a$  کی مساوات ج (  $a = 0$  ) مفروض میں تو شرط مساوات کی پوری ہو جاتی ہے اور  
 اسے واسطی  $a$  ہی ایک قیمت اس مساوات کی

**شکل ۳** ہر مساوات کی کہ جس میں فقط ایک مقدار مجهول ہوتی ہے اور تین ہی قیمتیں ہوتی ہیں جتنے

احاد ہوتے ہیں سب سے بڑی نشان قوت مقدار مجهول نہ کر کے میں فرض کر دو کہ ج (  $a = 0$  ) ہر مساوات  
 مفروض  $a$  درجہ کی اور  $a$  ہی ایک اس کی قیمت تو موافق شکل گذشتہ کی حاصل ہوگی یہ مساوات

(  $a - 0$  ) ج (  $a = 0$  ) اور اسکا ج (  $a = 0$  ) بقیر کرتا ہے اور اس خارج قسمت کو جو  
 پیدا ہوتا ہے تقسیم کرنی ہے ج (  $a = 0$  ) کو  $a$  پر اب اگر  $a = 0$  ایک قیمت ج (  $a = 0$  ) کے ہو  
 تو  $a$  ہی کہ ج (  $a = 0$  ) پورا قسمت ہونا چاہیے  $a = 0$  پر کسو واسطی کہ  $a = 0$  ط نہیں قسمت ہو سکتی ہے  
 $a = 0$  ط پر اور اسے واسطی حاصل ہوگی یہ مساوات (  $a - 0$  ) ج (  $a = 0$  ) اور اسکا ج (  $a = 0$  )

اور اسکا ج (  $a = 0$  ) بقیر کرتا ہے اور اس خارج قسمت کو جو پیدا ہوتا ہے تقسیم کرنی ہے  
 ج (  $a = 0$  ) کو  $a = 0$  ط پر اس کے واسطی سے ہو دین

$a = 0$  اور  $a = 0$  ط اور  $a = 0$  ط ..... قیمتیں مساوات مفروض کی تو ضرور ہی کہ صورت ج (  $a = 0$  )  
 پوری قسمت ہو سکتی ہے اور واحد پران خود نہیں ہے  $a = 0$  ط اور

$a = 0$  ط اور  $a = 0$  ط اور  $a = 0$  ط .....  $a = 0$  ط پر اور اسے واسطی مساوات مفروض

کی یہ شکل ہو جائے گی (  $a - 0$  ) ج (  $a = 0$  ) اور اسکا ج (  $a = 0$  ) بقیر کرتا ہے اور اس خارج قسمت کو جو پیدا ہوتا ہے تقسیم کرنی ہے  
 اور یہاں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ جتنے اجزای فرضی اس مساوات میں ہیں اتنی ہی قیمتیں ہیں اس مساوات کی ہیں  
 یعنی جتنے احاد سب سے بڑی نشان قوت لایعنی مقدار مجهول کی ہیں اتنی ہی قیمتیں ہیں کسو واسطی کہ مساوات  
 گذشتہ پوری ہو سکتی ہے جو سید کسی ایک کے  $a = 0$  ط اور  $a = 0$  ط مشروطی مرقوم الزیل سے

$a = 0$  ط اور  $a = 0$  ط اور  $a = 0$  ط ..... اور  $a = 0$  ط اور  $a = 0$  ط .....  $a = 0$  ط اور  $a = 0$  ط .....  
 حکم شکل مذکورہ بالا یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر معلوم ہو میں ایک قیمت کسی مساوات کی تو بوسیله عمل تقسیم قیاسی کے  
 ہم گنا سکتے ہیں ایک مقدار مساوات مذکورہ کا اور اس نئی مساوات میں باقی قیمتیں مساوات مفروض کی ہوگی

ہونگی اور اس طرح سے اگر ایک سے زیادہ قیمتیں کسی مساوات مفروض کی معلوم ہوں تو دریافت کر سکتے ہیں اور تنہی ہی کم درجہ کی مساوات جتنی قیمتیں ہیں معلوم ہیں اور اس نئی مساوات میں ہونگی باقیہ قیمتیں اب قسم لگتے ہیں چند مثالیں واسطی مشق کے

### مثالیں

۱ ایک قیمت مساوات لآ - ۲۵ لآ + ۶۰ لآ - ۳۶ = ۰ کے سہ چھ چاہتے ہیں ہم دریافت کرنے وہ مساوات حسین باقی جاویں باقی قیمتیں مساوات مفروض کی

$$۳۶ - ۶۰ + ۲۵ - ۰ + ۱ (۳$$

$$۳۶ + ۲۸ - ۹ + ۳$$

$$۱۲ + ۱۶ - ۳ + ۱$$

پس معلوم ہوا کہ مساوات مطلوبہ یہ ہے لآ + ۳ لآ - ۱۶ لآ + ۱۲ = ۰

۲ دو قیمتیں مساوات لآ - ۱۲ لآ + ۴۸ لآ - ۱۵ = ۰ کے ۳ اور ۵ ہیں اور چاہتے ہیں دریافت کرنی وہ مساوات درجہ دوم کی حسین باقی قیمتیں ہونگی

$$۱۵ + ۴۸ - ۴۸ + ۱۲ - ۱ (۳$$

$$۱۵ - ۴۳ + ۲۷ - ۳ +$$

$$۵ - ۲۱ + ۹ - ۱ (۵$$

$$۵ + ۲۰ - ۵ +$$

$$۱ + ۲ - ۱$$

اور یہاں سے معلوم ہوا کہ مساوات درجہ دوم مطلوبہ یہ ہے لآ - ۱۲ لآ + ۱۵ = ۰

۳ ایک قیمت مساوات کبھی لآ - ۶ لآ + ۱۱ لآ - ۶ = ۰ کی آ ہی

اور چاہتے ہیں ہم دریافت کرنی مساوات درجہ دوم کی کہ اوس میں باقی قیمتیں ہونگی

$$۰ = ۶ + ۱۱ - ۶ + ۱ (۵$$

۴ دو قیمتیں مساوات مالی مالی یعنی چوتھے مرتبہ

۴ لآ - ۱۲ لآ - ۵ لآ + ۳۱ لآ - ۶ = ۰ کی ۲ اور ۳ میں بنا دیکھا ہوگی مساوات باقی قیمتوں کی

$$۰ = ۱ + ۱۱ + ۶ +$$

۵ ایک قیمت مساوات کبھی لآ + ۳ لآ - ۱۶ لآ + ۱۲ = ۰ کے آ کی ہی بنا دیکھا ہوگی قیمتیں

جواب ۲ اور ۶

۶ دو قیمتیں مساوات چوتھے درجے کی  $۱۶ - ۱۱ + ۱۶ = ۰$  کی ۲ اور ۳ میں دریافت کر دیا جاتی قیمتوں کو

جواب  $۳ \pm \sqrt{۱۷}$

شکل ۴ چاہتے ہیں ہم بنانی ایک ایسی مساوات جسکی قیمتیں یہ ہیں

ط اور ط اور ط ..... ط ن موافق شکل گذشتہ کے یہ ظاہر ہے کہ اول طرف اس مساوات مطلوبہ کے یہ ہوگی (۱-ط) (۱-ط) (۲-ط) (۱-ط) (۱-ط) (۱-ط) ..... (۱-ط) اور اس پر اسطی مساوات مطلوبہ یہ ہے (۱-ط) (۱-ط) (۲-ط) (۱-ط) (۱-ط) ..... (۱-ط) = ۰ اب جسوقت جاری کریں ہم عمل ضرب کا کہ تغیر کیا جاتا ہے متصل ہونے خطوط دھانی کی سے تو حاصل ہونگی یہ مساواتیں

جبکہ	$۲ = ۱ - ط$	$۱ + ط = ۲$
	$ط -$	

اور جبکہ	$۳ = ۱ - ط$	$۱ + ط = ۳$
	$ط -$	$ط +$
	$ط -$	$ط +$

جبکہ  $۴ = ۱ - ط$  اور سوقت حاصل ہوگی یہ مساوات

$۱ - ط$	$۱ + ط = ۲$	$۱ - ط = ۲$	$۱ + ط = ۳$
$ط$	$ط +$	$ط -$	$ط +$
$ط$	$ط +$	$ط -$	$ط +$
$ط$	$ط +$	$ط -$	$ط +$
	$ط +$		$ط +$

اور اسی قیاس پر اور مساواتیں بھی نکل سکتی ہیں جسوقت  $۵$  زیادہ ہو دے  $۴$  سے اور مساواتوں گذشتہ سے یہ باتیں حاصل ہوتی ہیں

- ۱ سر دوسری جز حاصل ضرب کا ہوتا ہے حاصل جمع تمام قیمتوں کا اونکی علامتیں برلی گئی ہوں
- ۲ سر تیسری جز اسی حاصل ضرب کا ہوتا ہے حاصل جمع دو قیمتوں حاصل فرود کا انکی ہے

علامتین بدلی ہوئی ہوں

۳۔ سر جو تہی جڑ کا ہوتا ہے حاصل جمع تین تین قیمتوں کے حاصل ضربوں کا کہ ہر واحد ان میں علامتیں تبدیل کر کے  
 ۴۔ سر با پنجون جڑ کا ہوتا ہے حاصل جمع چار قیمتوں کے حاصل ضربوں کا لیکن انکی علامتیں تبدیل  
 ہوئی ہوں در علی ہذا القیاس اخیر جز ہوتا ہے حاصل ضرب تمام قیمتوں کا لیکن انکی علامتیں بدلی ہوئی ہوں یعنی  
 ان تمام قیمتوں کی اصلی علامتوں کو تبدیل کر کے انکو اسپین ضرب دیا ہو سوا ان باتوں کی باخ احکام  
 اس شکل سے نکلتے ہیں

حکم ۱۔ اگر سردی جڑ کسی مساوات کا صف ہو یعنی مساوات مذکور میں دوسرا جز ہنو تو بالفرض حاصل جمع قیمتوں  
 علامت کا مساوی ہوگا حاصل جمع قیمتوں منفی کی حکم ۲۔ اگر علامتیں تمام اجزا کسی مساوات کی قیمت ہوں تو تمام قیمتیں مساوات  
 منفی ہونگی اور اگر علامتیں متواتر قیمت اور منفی ہوں تو تمام قیمتیں مثبت ہوں  
 حکم تیسرا قیمت کسی مساوات پر پورا مہم ہو سکتا ہے مساوات مذکور کا اخیر جز اسکو ضرب مطلق کہتی ہیں

حکم ۴۔ جس مساوات میں سر بڑا دل کا عدد ایک ہو اور سرباقی اجزایک اعداد صحیح ہوں اور سین کوئی  
 قیمت کسی قیمت سے نہیں ہو سکتی ایسے بات ثابت ہو جائیگی جسوقت لیجا بیگی ہم ضرب مطلق کو دوسری طرف مساوات کے  
 اور کہتے ہیں کہ کوئی کسی شق پر کیونکہ اس صورت میں یہ لازم آجائے گا کہ ایک مساوی ہے ایک عدد صحیح کی اور یہ  
 حکم ۵۔ جس مساوات میں تمام قیمتیں ممکن ہوں اور جز اخیر بہت چھوٹا یعنی کم ہو تو ضرور ہر قیمتیں  
 اس مساوات کی بہت چھوٹی ہوں

### مثالین

بناو ایک ایسی مساوات جسکی قیمتیں ۲ اور ۳ اور ۴ اور ۶ ہوں پس اس صورت میں فقط یہ بات  
 لازم ہے کہ جاری کریں ہم عمل ضرب کا کہ بغیر کیا جاتا ہے مساوات اٹنڈہ میں (۲-۵)(۳-۵)(۴-۵)(۶-۵) = ۰  
 اب اگر علیحدہ کریں ہم سردوں کو صورت سے تو صورت عمل کی یہ ہوگی

$$\begin{array}{r}
 ۲ - ۱ \\
 ۶ + ۳ - \\
 \hline
 ۵ - | ۶ + ۵ - ۱ \\
 ۳ - | ۲۵ + ۵ - \\
 \hline
 ۴ | ۳۰ - ۳۱ + ۱۰ - ۱
 \end{array}$$

$$1۸۰ - ۱۸۶ + ۶۰ - ۶$$

$$1۸۰ - ۱۵۶ + ۲۹ - ۳ - ۱$$

۱ اور بیان سے معلوم ہوا کہ مساوات مطلوبہ یہ ہے  $0 = 10 - 5x + 2y - 3z$

۲ بناؤ ایک ایسی مساوات جسکی قیمتیں یہ ہیں  $3$  اور  $2$  اور  $3$ ۔

۳ بناؤ ایک ایسی مساوات جسکی قیمتیں یہ ہیں  $3$  اور  $3$  اور  $2$  اور  $3$  اور  $2$ ۔

۴ بناؤ ایک ایسی مساوات جسکی قیمتیں یہ ہیں  $3$  اور  $5$  اور  $3$  اور  $5$  اور  $4$ ۔

۵ بناؤ ایک ایسی مساوات جسکی قیمتیں یہ ہیں  $3$  اور  $2$  اور  $3$  اور  $3$  اور  $4$  اور  $4$ ۔

۶ بناؤ ایک ایسی مساوات جسکی قیمتیں یہ ہیں  $3$  اور  $2$  اور  $3$  اور  $3$  اور  $1$  اور  $3$ ۔

۷ بناؤ ایک ایسی مساوات جسکی قیمتیں یہ ہیں  $3$  اور  $3$  اور  $3$  اور  $3$  اور  $3$  اور  $3$ ۔

اجوبہ

۲  $0 = 4 + 5z - 3x$

۳  $0 = 12 - 5x + 2y - 3z$

۴  $0 = 2x + 5y - 3z$

۵  $0 = 4x - 5y - 3z + 20$

۶  $0 = 15 - 3x - 5y + 2z$

۷  $0 = 8 + 5x - 3y + 2z - 10$

شکل ۵ اگر کسی مساوات کی اجزاء کی ایک ایک چھوڑ کر علامتیں بدلی جائیں تو علامتیں تمام قیمتوں

اس مساوات کی بھی بدل جائیں گی فرض کرو کہ یہ مساوات

(۱)  $0 = 1x + 2y + 3z - 4$

اب اگر علامتیں اجزایں اس مساوات کی ایک ایک جھین چھوڑ کر بدلیں تو حاصل یہ ہوگی مساواتیں

(۲)  $0 = 1x - 2y + 3z - 4$

(۳)  $0 = 1x + 2y - 3z - 4$

اس جابجا ہر دو مساواتیں (۲) اور (۳) ایک سی ہیں کیونکہ ان دونوں میں حاصل جمع مثبت اجزاء کا سادی ہی حاصل جمع منفی اجزایں کے اب اگر کہیں ایک قیمت ط مساوات اول اور ط کا مساوات دوم میں بجایے لائے تو جو کچھ ان دونوں مساواتوں سے اس وقت حاصل ہوگا وہ یکساں ہوا اور جو کچھ

اور چونکہ مسا (۱) قیمت ط سے پوری ہوتی ہے تو ضرور ہر ک - ط اسی مساوات (۲) پوری ہوئے  
 ہی اور یہاں سے معلوم ہوا کہ - ط اسی ایک قیمت مساوات (۲) یا (۳) کی حکم اگر علامتین نام اجزا  
 کسی مساوات کی تبدیل کی جائیں تو علامتین قیمتوں اس مساوات کی تبدیل نہیں ہونگی

مثالین

۱ قیمتین مساوات لآ - لآ + لآ - لآ = ۰ کے آ اور ۲ اور ۳ میں بنا دیا میں قیمتین

اس مساوات کی لآ + لآ + لآ = ۰ جواب ۱ - اور ۲ - اور ۳ -

۲ قیمتین مساوات لآ - لآ + لآ = ۰ کی ۲ اور ۳ اور ۳ ± ۵ میں بناؤ وہ

کو فی مساوات ہی جسکی قیمتین سے ہیں - ۲ اور - ۳ اور - (۳ ± ۵)

جواب - لآ - لآ - لآ = ۰

شکل ۶ مقدارین نزدیکی اور قیمتین غیر ممکن کی مساواتوں میں جوڑی ہوتی ہیں یعنی بے مقدارین

دو دو اسپین ضرب پاکر مساوات میں نمودار ہوتی ہیں فرض کرو کہ یہ مساوات ہی

$$لآ + لآ + لآ + \dots + لآ + لآ + لآ = ۰ \text{ اور اسکی ایک قیمت یہ ہے}$$

ط + ص م - ۱ تو ہم دعویٰ کرتے ہیں کہ ط - ص م - ۱ ہی ایک قیمت اسی مساوات کی ہے  
 اس واسطے کہ اگر لکھیں ہم ط + ص م - ۱ کو مساوات مفروض میں بجای لاکے تو حاصل ہوگی یہ مساوات

$$۰ = ۱ + (ط + ص م - ۱) + ۱ + (ط + ص م - ۱) + \dots + ۱ + (ط + ص م - ۱) + ۱$$

اب اگر دریافت ہم صورت مفصلہ اجزای اس مساوات کی تو حاصل ہونگی دو مجموعی مختلف قسم کی اجزای کے

ایک تو این کا ہوگا مجموعہ جفت قوتوں ص م - ۱ کا یعنی مقادیر ممکن کا اور اسکو تعبیر کرتے ہیں ت

سے اور دوسرا ہوگا مجموعہ مقادیر غیر ممکن کا اور اسکو ہم تعبیر کرتے ہیں ت م - ۱ اسی پس حاصل

$$۰ = ت م - ۱ + ت + ت م - ۱ = ۰$$

اور چونکہ ت اور ت ایک دوسرے کے پھر علامتین نہیں رکھتے ہیں تو ضرور ہر ک ت = ۰ اور ت = ۰

آب لکھو ط - ص م - ۱ واسطے لاکے مساوات مفروض میں اب چونکہ طاق قوتین - ص م - ۱ کی  
 منفی ہونگی تو ضرور ہی اب حاصل ہو ویسے یہ صورت ت - ت م - ۱ اور چونکہ پہلے ثابت ہو چکا ہے کہ  
 ت = ۰ اور ت = ۰ تو معلوم ہوا کہ ۰ = ت م - ۱ اور یہاں سے یہ بات معلوم ہوئی کہ جس وقت لکھتے

لکھتے ہیں ہم  $\tau - \nu - \mu - \alpha$  بجای آ کے مساوات مفروض میں تو شرط مساوات کی پوری ہو جاتی ہے اور اسی واسطی ثابت ہو کہ  $\tau - \mu - \alpha$  بھی ایک قیمت مساوات مفروض کی ہے یعنی ہمیں یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر  $\tau + \mu - \alpha$  مساوی ہو دی ایک قیمت کسی مساوات مفروض کے تو بالضرور  $\tau - \mu - \alpha$  بھی ایک قیمت اسی کی ہوگی

حکم ۱ وہ مساوات جسکی بعضی یا تمام قیمتیں غیر ممکن ہوں ضرور ہر قسم تقسیم ہو سکی

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha - (\tau + \mu - \alpha) \\ \alpha - (\tau - \mu - \alpha) \end{array} \right\} \text{ پر سینے اسپر}$$

۱-  $\tau + \mu + \alpha$  ص اور یہاں یہ معلوم ہوا کہ تمام مساوات میں نزدیکی حل ہو سکتی ہیں غیر نزول اجزائی میں اور یہی نیا نیا اولیٰ درجہ کی ہونگی یا دوم درجہ کی اور قیمتیں غیر ممکن ممکن ہو سکتی ہوں شریطہ کو رکھ کر حکم ۲ ممکن ہے کہ تمام قیمتیں ایک جہت درجہ کی مساوات کی غیر ممکن ہوں اور اگر ایسے سب قیمتیں غیر ممکن نہ ہوں گی تو بالضرور کم سے کم دو قیمتیں ممکن ہونگی

حکم ۳ چونکہ حاصل ضرب ہر جزوہ غیر ممکن قیمتوں کا  $\tau + \mu$  کے شکل کا ہوتا ہے اور  $\tau + \mu$  ص اپنی ذات سے ایک مقدار مثبت ہے تو معلوم ہوا کہ اخیر جزاؤں مساوات کا جسکی سب قیمتیں غیر ممکن ہیں مثبت ہوتا ہے

حکم ۴ ہر مساوات طاق درجہ کی میں بالضرور کم سے کم ایک قیمت ممکن ہوتی ہے اور علامت اس ایک قیمت کے مخالف ہوتی ہے علامت اخیر جزاؤں مساوات کی سے

حکم ۵ ہر مساوات جہت درجہ کی میں کہ جسکا اخیر جزاؤں منفی ہو کم سے کم دو قیمتیں ممکن ہیں اصلی ہونی چاہئیں ایک اینٹ کے مثبت اور دوسری اینٹ کی منفی ہوتی ہے

شکل ۷ کسی مساوات میں تعداد قیمتوں مثبت کی نہیں زیادہ ہو سکتی ہے تعداد تہہ بیوں علامتوں کے

+ سے - میں یا - سے + میں اور تعداد منفی قیمتوں کی نہیں زیادہ ہو سکتی ہے تعداد متواتر ایسے ایک ہی علامت کی سے فرض کر دو کہ کسی مساوات میں اس ترتیب سے علامتیں نمودار ہیں

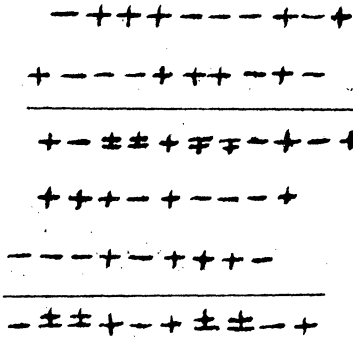
$$+ - - - + + + - + - - - + + +$$

اب اگر پیدا کیا جائے میں ایک اور قیمت مساوات مفروض میں تو ظاہر ہے کہ ضرب کرنا جائے ہیں مساوات مفروض کو  $\alpha - \tau$  میں اور اب ظاہر ہے کہ حاصل ضرب میں اس صورت سے علامتیں نمودار ہوسکتی



اور دوسری صورت میں

اس طرح نمودار ہوگی



اور اجماعی علامت مشکوک  $\pm$  سے یہ بات تفسیر ہوتی ہے کہ علامت یا تو + یا - ہوگی اور یہاں سے ظاہر ہوا کہ علامتیں متواتر تبدیل ہو گئی ہیں لیکن یہ بات ظاہر ہے کہ عمل ضرب مذکورہ بالا سے تعدد متواتر علامتوں کی نہیں زیادہ ہوئی گو کہ دو سے مشکوک ہو گئیں ہیں اور یہ اختیار ہے کہ خواہ کیسی علامت دراصل مشکوک علامتوں کے فرض کر دیں لیکن یہ ظاہر ہے کہ ایک علامت زیادہ ہوئے اور اس پر تعدد تبدیلوں کے بقدر ایک کے زیادہ ہوئے اور یہاں سے یہ معلوم ہوا کہ جبکہ ایک نئی قیمت کسی مساوات میں پیدا ہوتی ہے اور سوت تعدد تبدیلوں کی علامتوں کی بقدر ایک کے زیادہ ہوتی ہے اور اس پر اسے یہ بات ہوا کہ تعدد قیمتوں مثبت کی نہیں زیادہ ہو سکتی ہے تعدد تبدیلوں مذکور سے جسوقت علامتوں ایک جز کو کہ چھوڑ کر کسی مساوات کی اجزائے تبدیل کیے جاتے ہیں اور سوت موافق شکل (۵) کے علامتیں تمام قیمتوں اس مساوات کی تبدیل ہو جاتی ہیں اور یہاں سے یہ معلوم ہوا کہ متواتر علامتیں کہ مساوات مفروض میں ہونگی تبدیل ہو جائیگی تبدیلیوں علامت کی سے مساوات تبدیل میں اور تبدیلی میں مساوات مفروض کی تبدیل ہو جائیگی علامتوں متواتر سے مساوات تبدیل میں اور چونکہ مساوات تبدیل میں تعدد مثبت قیمتوں کی نہیں زیادہ ہو سکتی ہے تعدد تبدیلوں علامتوں کے سے تو معلوم ہوا کہ تعدد قیمتوں منفی کی مساوات مفروض میں نہیں زیادہ ہو سکتی ہے تعدد متواتر علامتوں کی سے

### مثالین

- ۱ مساوات  $3x + 2y - 4z = 10$  اور  $4x + 5y - 3z = 20$  میں چہ اصلی فیض ممکن قیمتیں ہیں بتاؤ کتنی ان میں سے مثبت ہوگی
- ۲ مساوات  $2x - 3y + 4z = 15$  اور  $5x - 4y + 3z = 12$  میں چہ اصل قیمتیں ہیں بتاؤ کتنی ان میں سے منفی ہوگی

فصل سویم بیچ بیان تبدیل کی مساواتوں کے

**مشکل** اچاہتے ہیں ہم تبدیل کرنا ایک مساوات مفروض کو ایک اور ایسی مساوات سی کہ اس میں جملی مساوات کے قیمتیں مساوات مفروض کی سیستے علیحدہ علیحدہ بقدر ایک خاص مقدار کی زیادہ یا کم ہوں مثلاً فرض کرو کہ مساوات آئندہ مساوات مفروض ہے

$$ط\lambda + 1, \lambda - 1, \lambda - 2, \dots, \lambda - n, -\lambda + 1, \lambda - n = 0$$

اچاہتے ہیں ہم تبدیل کرنا اس مساوات کو ایک اور ایسی مساوات سی کہ اس کی قیمتیں قیمتوں مساوات مفروض کی سیستے بقدر مقدار دیکے کم ہوں یہ تبدیلی عمل میں آسکتی ہے اگر کہیں ہم مساوات میں  $\pm d$  واسطے لائے اور جو کچھ حاصل ہوگا وہ مساوات مطلوبہ ہوگی لیکن یہ عمل بہت طول طویل ہوتا ہے اور ایسا واسطے ہم کوئی اور سہل طریقہ کی طرف رجوع کریں گی ظاہر ہے کہ اگر مساوات مفروض میں کہیں ہم  $\pm d$  واسطے لائے تو حاصل ہوگی ایک ایسی درجہ کی مساوات اور شکل بھی اس وقت کے وہی ہوگی جو مساوات مفروض کے پس فرض کرو کہ مساوات مذکور یہ ہے

$$ط\lambda + 1, \lambda - 1, \lambda - 2, \dots, \lambda - n, -\lambda + 1, \lambda - n = 0 \quad (1) \text{ لیکن چونکہ}$$

$$= 0 \text{ تو مساوات } (1) \text{ اس شکل کی ہو جائیگی}$$

$$ط(\lambda - d) + 1, \lambda - d, \lambda - d - 1, \dots, \lambda - d - n, -\lambda + d + 1, \lambda - d - n = 0 \quad (2)$$

اور اسجای یہ بات ظاہر ہے کہ اگر دریافت کریں ہم صورت مفصلہ ہر جزا مساوات کی تو جو مساوات حاصل ہو وہ مساوات اور مساوات مفروض ایک سی ہونگی اس واسطے کہ مساوات مفروض میں بجا لائی  $\pm d$  دکھائی ہے اور جو مساوات اس طرح کہنی سے حاصل ہوئی ہے اس میں تبدیل کیا ہے  $\pm d$  کو  $\lambda - d$  سی اور ایسا واسطے ظاہر ہے کہ مباحث کی سہنے طرف مساوات مفروض کے پس اب حاصل ہوگی یہ مساوات

$$ط(\lambda - d) + 1, \lambda - d, \lambda - d - 1, \dots, \lambda - d - n, -\lambda + d + 1, \lambda - d - n = 0$$

$$ط\lambda + 1, \lambda - 1, \lambda - 2, \dots, \lambda - n, -\lambda + 1, \lambda - n$$

اب اگر قسمت کریں اول طرف اس مساوات کو  $\lambda - d$  پر تو ظاہر ہے کہ باقی رہیگا  $-n$  اور خارج قسمت ہوگا یہ

$$ط(\lambda - d) + 1, \lambda - d, \lambda - d - 1, \dots, \lambda - d - n, -\lambda + d + 1, \lambda - d - n - 1$$

اور چونکہ دوسری طرف مساوات گذشتہ کی معینہ وہی ہے جو اول طرف ہے تو ضرور ہے کہ اگر اس کو  $\lambda - d$  پر

قسمت کریں تو یہی خارجی قسمت اور باقیات پیدا ہونگی اور یہاں سے یہ بات معلوم ہوئی کہ اگر اول طرف مساوات مفروض کو  $\lambda - d$  پر قسمت کریں تو باقی رہیگا اخیر جزا مساوات مطلوبہ کا اب اگر قسمت کریں خارج



$$15 + 0.8 + 0.5 \times 2 + 0 - 0.2 - 0.5 \times 2$$

$$\frac{0.5 - 0.5}{0.5 - 0.5}$$

$$0.8 - 0.5$$

$$0.14 - 0.5$$

$$2 + 0.15 +$$

$$\frac{30 - 0.15}{}$$

$$22 + = \text{باقی دویم کی}$$

$$0.5 \times 18 + 0.5 \times 2$$

$$18 + 0.5 \times 15 + 0.8 + 0.5 \times 2$$

$$\frac{10 - 0.5}{}$$

$$\frac{0.5 - 0.5}{}$$

$$21 = \text{چارم}$$

$$\frac{15 + 0.8 + 0.18}{26 - 0.18}$$

$$51 + = \text{باقی سویم}$$

یہاں سے معلوم ہوا کہ مساوات مطلوبہ یہ ہے  $0.5x^2 + 2.8x + 0.5x - 0.2 - 0.5 \times 2 = 1$   
 ظاہر ہے کہ عمل گزشتہ بہت طویل ہے لیکن یہ مختصر ہو سکتا ہے اگر رجوع کریں جس طرف قاعدہ قیاسی تقسیم ہندس  
 جو درجہ کی پس اگر حل کریں مثال گزشتہ کو اس قاعدہ سے تصویرت عمل کی یہ ہے

$$0.5x^2 - 0.2 + 2.8x + 0.5x - 0.5 \times 2 = 1$$

$$0.5x^2 + 3.3x - 1.2 = 1$$

$$0.5x^2 + 3.3x - 2.2 = 0$$

$$22 = \frac{30 + 14 + 1}{22 + 15 + 8 + 0}$$

$$01 = \frac{34 + 1}{01 + 18 + 0}$$

$$21 = \frac{1}{28 + 0}$$

پس معلوم ہوا کہ مساوات مطلوبہ یہ ہے  $0.5x^2 + 2.8x + 0.5x - 0.2 - 0.5 \times 2 = 1$

۲۔ چاہئے ہیں جس میں تبدیل کرنا مساوات  $0.5x^2 + 2.8x + 0.5x - 0.2 - 0.5 \times 2 = 1$

ایک ایسی مساوات سی کہ اس کی قیمتیں متوازن مساوات مفروض کی سے عینہہ علیحدہ قدر ۲ کے زیادہ ہو

اس صورت میں ظاہر ہے کہ اگر عمل کریں ہم پوسیدہ قاعدہ تقسیم جو درجہ صابیک کے تصویرت عمل سیکے

یہ ہو سیکے

$$\begin{array}{r}
 1 - 22 + 51 + 21 + 5 \quad (2- \\
 \hline
 2 - 30 - 27 - 10 - \\
 \hline
 5 - 2 + 15 + 18 + \\
 \hline
 2 + 14 - 10 - \\
 \hline
 2 + 1 - 8 + \\
 \hline
 2 + 10 - \\
 \hline
 2 + 2 - \\
 \hline
 10 - \\
 \hline
 12 -
 \end{array}$$

پس معلوم ہوا کہ مطلوبہ یہ ہے  $0 = 5 - 5x + 3x^2 + 12x^3 - 10x^4$ ۔  
 ۳ جانتے ہیں ہم تبدیل کرنا مساوات  $5 - 5x + 3x^2 + 12x^3 - 10x^4 = 0$  کو ایک ایسی مساوات سے جسکی قیمتیں نسبت قیمتوں مساوات مفروضہ کے بقدر  $5x$  کے کم ہوں

$$\begin{array}{r}
 2 - 2 + 2 - 1 \quad (1) \\
 \hline
 2 + 1 - 1 \\
 \hline
 2 - 2 + 1 - \\
 \hline
 1 + \\
 \hline
 2 + \\
 \hline
 1 \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

پس معلوم ہوا کہ وہ مساوات جسکی قیمتیں نسبت قیمتوں مساوات مفروضہ کے بقدر  $5x$  کے کم ہیں یہ ہے  $0 = 2 - 5x + 12x^2 + 10x^3$  اور اگر یہی عمل کریں اس مساوات پر واسیٹے لگی  $5x$  کے تصور عمل کی یہ ہو

$$\begin{array}{r}
 2 - 2 + 1 + 1 \quad (56) \\
 5233 \quad 1519 \quad 54+ \\
 \hline
 5233 \quad 3519 \quad 154 \\
 \hline
 1548 \quad 54 \\
 \hline
 2584 \quad 254 \\
 \hline
 54 \\
 \hline
 351
 \end{array}$$

\* یہاں سے معلوم ہوا کہ مساوات مطلوبہ یہ ہے  $0 = 5233 + 5233x + 3519x^2 + 154x^3 + 54x^4 + 2584x^5 + 254x^6 + 54x^7 + 351x^8$ ۔  
 مثال گذشتہ میں بننے دو دفع عمل تقسیم کا کیا لیکن واضح ہو کہ عمل مذکور ایک ہی دفعہ ہو سکتا ہے جیسے کہ واضح ہو گا ان دو طرح کی صورتوں معلوم کی سے

\* اچھے 3 دو قسم کی ہیں ایک تو نشان کم اور اشاریہ کا اور دوسرا علامت مقدار جبریہ کا

۴ - ۳ + ۲ - ۱ | ۱۵۷      ۴ - ۳ + ۲ - ۱ | ۱۵۷

$$\begin{array}{r} ۴۵۲۳۳ \\ ۵۲۳۳ \\ \hline ۵۰۱-۱۵۷ \\ ۲۵۲۹+۵۳- \\ \hline ۲۱۳۸ \quad ۱۵۷ \\ ۲۵۸۷ \quad ۱۵۷ \\ \hline ۱۵۷ \\ ۳۵۱ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۱-۱+ \\ ۲-۲+۱ \\ \hline ۲۱۳۳۳ \\ ۲۲۳۳ \\ \hline ۱۵۱۹ \quad ۱۷ \\ ۳۵۱۹ \quad ۱۰۵۷ \\ ۱۵۶۸ \quad ۱۵۷ \\ \hline ۲۵۸۷ \quad ۲۵۳ \\ \hline ۵۷ \\ ۳۵۱ \end{array}$$

یہ بات ظاہر ہے کہ ان دو صورتوں سے اول صورت میں ہونے والی صورتوں کو ایک جاتی لکھ دیا ہے اور دوسری صورت میں ہونے والی کو جدا کر کے عمل نہیں کیا ہے بلکہ ایک ہی بار لکھا گیا ہے کہہ کر عمل جاری کیا ہے

۴ جانتے ہیں ہم تبدیل کرنا مساوات  $۱۰ - ۷ + ۷ = ۰$  کو ایک ایسی مساوات ہے جسکی قیمتیں نسبت اس مساوات سے بقدر ایک کے کم ہوں

۵ جانتے ہیں دریافت کرینے ایک ایسی مساوات جسکی قیمتیں کم ہوں بقدر آئیے کے قیمتوں اس مساوات  $۱۰ - ۷ + ۷ = ۰$  سے

اور تبدیل کرو اس مساوات کو جو حاصل ہو ایک اور ایسی مساوات سے جسکی قیمتیں اس مساوات کی سی بقدر آئیے کے زیادہ ہوں

۶ بتاؤ وہ کونسی مساوات ہے جسکی قیمتیں کم ہوں بقدر آئیے کے نسبت قیمتوں اس مساوات کی  $۱۰ - ۷ + ۷ = ۰$

۷ بتاؤ وہ کونسی مساوات ہے جسکی قیمتیں کم ہوں بقدر آئیے کے قیمتوں اس مساوات کی جیسے  $۱۰ - ۷ + ۷ = ۰$

۸ بتاؤ وہ کونسی مساوات ہے جسکی قیمتیں کم ہوں بقدر آئیے کے قیمتوں اس مساوات کی  $۱۰ - ۷ + ۷ = ۰$

اجوبہ

۴  $۱۰ - ۷ + ۷ = ۰$  اور اس جابجیہ  $۱۰ - ۷ + ۷ = ۰$

$$\begin{aligned}
 5 \quad & 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{ایضاً} \quad 0 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\
 \text{اور} \quad & 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \quad \text{ایضاً} \quad 0 = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + n \\
 4 \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{اور} \quad 0 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\
 6 \quad & 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{ایضاً} \quad 0 = 1 + 2 + 3 + \dots + n \\
 8 \quad & 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{ایضاً} \quad 0 = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + n^2
 \end{aligned}$$

### شکل ۲

جاہتے ہیں ہم تبدیل کرنا ایک مساوات مفروضہ کو ایک ایسی مساوات سے کہ اس میں دوسرا جز ازل میں ہوتا ہے فرض کر دو کہ مساوات مفروضہ یہ ہے

$$1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n \quad \text{یا} \quad 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n$$

شکل ۲م فصل گذشتہ سے یہ بات ظاہر ہے کہ حاصل جمع تمام قیمتوں اس مساوات کا - ۱ ہو اور یہاں سے یہ معلوم ہوا کہ تاکہ دوسرا جز اس مساوات کا زائل ہو جاوے لہذا ہم یہ کہ حاصل جمع تمام قیمتوں پر مقدار ۱ نوادہ کریں لیکن مقدار قیمتوں کے - ۱ ہو اور اس واسطی لازم ہے کہ زیادہ کریں ہم قیمت پر مقدار ۱ تاکہ دوسرا جز مساوات مفروضہ کا زائل ہو جاوے اگر علامت دوسرے جز کی منفی ہو تو ظاہر ہے کہ حاصل جمع تمام قیمتوں کا + ۱ ہو گا اور اس صورت میں ظاہر ہے کہ کم کرنا چاہیے ہمیں قیمت کو بقدر ۱ کے تاکہ دوسرا جز زائل ہو جاوے پس بیان سے یہ قاعدہ نکلتا ہے

### قاعدہ

قسمت کو دوسرے جز مساوات کو سب سے بڑے نشان قوت مقدار معمول پر اور بعد ازاں اگر علامت دوسرے جز کی منفی ہو تو قیمت مساوات کو بقدر خالص قیمت مذکور کے کم کر دو اور اگر علامت جز کو مثبت ہو قیمت مذکور کو زیادہ کرنا چاہیے بقدر اسی خانہ قیمت کے

### مثالین

۱۔ جاہتے ہیں تبدیل کرنا مساوات  $0 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$  ایک اور ایسی مساوات سے کہ اس میں دوسرا جز ازل ہو جاوے ظاہر ہے کہ  $1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$  اور  $1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$  معلوم ہوا کہ کم کرنی چاہیے ہمیں قیمت اس مساوات کی بقدر ۱ کے تاکہ دوسرا جز ازل ہو جاوے

$$\begin{array}{r} ۲ - ۸ + ۶ - ۱۲ \\ \hline ۰ + \frac{۸ - ۲۴}{۲ -} \\ \hline \frac{۲ -}{۲ -} \frac{۲۴}{۲ - ۱} \\ \hline \frac{۲ +}{۲ - ۱} \end{array}$$

پس معلوم ہوا کہ مساوات مطلوبہ یہ ہے  $۲ - ۸ + ۶ - ۱۲ = ۰$  اور اسجای  $۲ + ۸ = ۰$  تبدیل کر دو مساوات  $۲ - ۸ + ۶ - ۱۲ = ۰$  کو ایک ایسی مساوات سے جس میں دوسرا جز اہل ہو جائے

۳ تبدیل کر دو مساوات  $۲ + ۸ + ۱۲ = ۰$  کو ایک ایسی مساوات سے جس میں دوسرا جز اہل ہو جائے

۴ تبدیل کر دو مساوات  $۲ + ۸ + ۱۲ = ۰$  کو ایک ایسی مساوات سے جس میں دوسرا جز اہل ہو جائے

۵ تبدیل کر دو مساوات  $۲ + ۸ + ۱۲ = ۰$  کو ایک ایسی مساوات سے جس میں دوسرا جز اہل ہو جائے

اجوبہ

$$۲ - ۸ + ۶ - ۱۲ = ۰ \quad (۱)$$

$$۲ + ۸ + ۱۲ = ۰ \quad (۲)$$

$$۲ + ۸ + ۱۲ = ۰ \quad (۳)$$

شکل ۳

چاہتے ہیں ہم تبدیل کرنا ایک مساوات مفروضہ کو ایک ایسی مساوات سے کہ قیمتیں اس مساوات کی منتگانی ہوں واسطے قیمتوں مساوات مفروضہ کے فرض کر دو کہ مساوات مفروضہ یہ ہے

$$۲ - ۸ + ۶ - ۱۲ = ۰$$

اب فرض کر دو کہ  $۲ = ۸ - ۶ + ۱۲$  اور اس سے حاصل ہوتا ہے یہ  $۲ = ۸ - ۶ + ۱۲$  پس صورت لکھیں ہم بجائے  $۲ = ۸ - ۶ + ۱۲$  کے مساوات گذر سقند میں اور بعد ازاں ضرب کریں اس مساوات کو  $۲$  میں تو ظاہر ہے اس عمل سے پیدا ہوگی ایک نئی مساوات جسکی اجزائی سب سے بڑی ترتیب بدل جاگی یعنی مساوات نئی یہ ہوگی

$$۲ = ۸ - ۶ + ۱۲$$



**حکم ۱** بیان سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ کوئی مساوات مفروض تبدیل ہو سکتی ہے ایک مساوات سے کہ اسکی قیمتیں زیادہ یا کم ہوں بہ نسبت متکافون قیمتوں مساوات مفروض کے کیونکہ اس صورت میں خطا یہ بات محظوظ رہنے چاہیے کہ محسوس کر کے ترتیب سے درجہ مساوات مفروض کے جاری کریں جسم عمل موافق شکل (۱) فصل ہذا کی

**حکم ۲** اگر سر اجزای مساوات مفروض کے ایک سے رہن خواہ اوہین تریب سے لکھیں تو ظاہر ہے کہ مساوات مفروض اور مساوات نئی ایک سی ہوگی اور قیمتیں ان مساواتوں کی اس شکل کی ہوگی

$$ق_۱، ادر ق_۲، ق_۳ اور ق_۴ اور علیٰ ہذا القیاس$$

**حکم ۳** اگر سر اجزای مساوات طاق درجہ کی ایک سی رہن خواہ اوہین کسی تریب سے لین یعنی سر نہ کو رتب دی ہوں لیکن اوکی مختلف علامتیں ہوں تو یہی قیمتیں مساوات مفروض اور مساوات نئی کی ایک سی ہوگی کیونکہ اسطرح کہ اگر بد لین ہمہ علامتیں تمام اجزای نئی مساوات کی تو ظاہر ہے کہ اس صورت میں قیمتوں میں توزق نہیں آئے لیکن دونوں و اتین ایسی ہو جائیگی یہی حال ہوگا جبکہ مساوات مفروض جفت درجہ کی ہوگی بشرطیکہ جز وسطا مساوات کا ہونا کہ مساوات نئی کہ تمام اسکی علامتیں تبدیل کی جائیں گی اور مساوات مفروض ایک سی ہو سکتی ہیں ان مساواتوں کو جسکی اجزا اسکے سر ایک سے رہتے ہیں خواہ اوہین کے تریب سے مساوات متواتر کہتے ہیں اور بجا ط اوکی قیمتوں کے اوہین مساواتوں کو مساواتین متکافی کہتی ہیں

**حکم ۴** اگر علامت کسی اخیر جزئی کے مساوات متکافی کی طاق ترتیب کی + ہو تو ایک اس مساوات کی قیمتوں سے - آ ہوگی اور اگر اخیر جزئی کو ر پر علامت نفی سے - ہوگی زیہ تو ایک قیمت + آ ہوگی دلیل اسکی یہ ہے کہ مساوات مفروض اور اسکی مساوات متکافی کی ایک قیمت ایکسی ہوگی اور یہ ظاہر ہے

کہ عدد آ کا ہی ایسی مقدار ہے کہ وہ اور اسکا متکافی ایک سے ہوتے ہیں اب چونکہ مساوات متکافی قیمتیں سواہی مساوات مفروض کے قیمتوں کے متکافون کے اس مساوات کی قیمتیں بھی ہوتی ہیں تو معلوم ہوا کہ اخیر جزئی مساوات متکافی کا ہوگا حاصل ضرب قیمتوں مساوات مفروض اور انکی متکافیوں کا جسوقت کہ تبدیل کی جائیں ان سب کی علامتیں اور چونکہ علامت ہر قیمت اور اسکی متکافی کی ایک سی ہوتی ہے تو معلوم ہوا کہ حاصل ضرب کسی قیمت اور اسکی متکافی کا مثبت ہوگا پس اب ضرور ہے کہ علامت اخیر جزئی کو ر اور قیمت مشترک آ کی مختلف ہوگی بیان سے یہ معلوم ہوا کہ اگر کوئی مساوات طاق درجہ کی ہو اور قیمت کریں اوسی ل + ا پر اوس صورت میں جبکہ علامت اسکی اخیر جزئی مثبت ہو اور ل - ا پر اوس صورت میں



۱: ۷ع + ۱۲ع + ۷ع + ۱ = ۰ مساوات مطلوبہ ہو اور اس میں

$$1 + \frac{1}{\lambda} = 1 + \frac{1}{\lambda} \text{ یا } \frac{1}{1 + \lambda} = \frac{1}{1 + \lambda}$$

۲ دریافت کیا جاتے ہیں ہم قیمتیں اس مساوات مکانی کی

$$\lambda^4 - \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

حکم (۴) سے واضح ہے کہ اس مساوات کی ایک یہ قیمت ہے  $\lambda = 1$  اب اگر سمت کرین اس مساوات

کو  $\lambda + 1$  پر تو حاصل ہوگی یہ مساوات  $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$  اب اگر سمت کرین اس پچھلی مساوات کو  $\lambda + 1$  پر اور مرتب کرین اجزاء کو اور سطر سے جس طرح کہ حکم (۵) میں کیا ہے

$$\text{تو حاصل ہوگی یہ مساوات } \lambda^2 + \frac{1}{\lambda} - 1 = 0 \text{ یا } \lambda^3 + 1 - \lambda = 0$$

اب فرض کر دو کہ  $\lambda + 1 = 0$  تو ظاہر ہے کہ  $\lambda = -1$  پس اب اگر کہیں یہ قیمتیں تو

$$\lambda = -1 \text{ یا } \lambda = 1 \text{ یا } \lambda = 10 + \lambda = 0$$

اور جو بت حل کریں گے ہم ان مساوات درج دوم کو تو حاصل ہوگا یہ

$$10 - \frac{24}{\lambda} \sqrt{\lambda} = \frac{4}{\lambda} = \lambda$$

$$\lambda = 5 \text{ یا } \lambda = 2$$

یہاں سے حاصل ہوتی ہیں یہ دو مساواتیں درج دوم کی  $\lambda = 5$  اور  $\lambda = 2$  اور ان کے حل کرنے سے حاصل ہوتی ہیں یہ قیمتیں لاکھی

$\lambda = \frac{21 \pm \sqrt{21^2 - 5}}{2}$  اور  $\lambda = \frac{21 \pm \sqrt{21^2 - 5}}{2}$  ایسے معلوم ہوا کہ پانچ قیمتیں مساوات مفروضہ کی ہیں  $\lambda = 1$  اور  $\lambda = 1$  اور  $\lambda = 1$  اور  $\lambda = \frac{21 \pm \sqrt{21^2 - 5}}{2}$  اور  $\lambda = \frac{21 \pm \sqrt{21^2 - 5}}{2}$

$$\frac{21 - 20}{(21 \pm \sqrt{21^2 - 5})^2} = \frac{(21 \pm \sqrt{21^2 - 5}) \cdot (21 \pm \sqrt{21^2 - 5})}{(21 \pm \sqrt{21^2 - 5})^2} = \frac{21 \pm \sqrt{21^2 - 5}}{(21 \pm \sqrt{21^2 - 5})^2}$$

$$\frac{21 \pm \sqrt{21^2 - 5}}{(21 \pm \sqrt{21^2 - 5})^2} = \frac{21 \pm \sqrt{21^2 - 5}}{(21 \pm \sqrt{21^2 - 5})^2}$$

۳ جاتے ہیں ہم دریافت کرنی ایک ایسی مساوات جسکی قیمتیں مکانی ہوں واسطے قیمتوں اس مساوات کے

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

۴ جاتے ہیں دریافت کرنی قیمتیں اس مساوات مکانی کے

۵ دریافت کیا جاتے ہیں ہم قیمتیں مساوات آئندہ کی  $\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + \lambda^5 + \dots = 0$

اجوبہ

$$3 \quad \lambda^8 - \lambda^{10} - \lambda^{12} - \lambda^{14} + \lambda^{16} + \lambda^{18} + \lambda^{20} - 1 = 0$$

$$4 \quad \text{اور } \frac{3 - \sqrt{\lambda + 1}}{2} \quad \text{اور } \frac{3 - \sqrt{\lambda - 1}}{2} \quad \text{اور } \frac{1 - \sqrt{\lambda^2 + 2}}{5} \quad \text{اور } \frac{1 - \sqrt{\lambda^2 - 2}}{5}$$

$$5 \quad 1 - \lambda \quad \text{اور } \frac{3 - \sqrt{\lambda + 1}}{2} \quad \frac{3 - \sqrt{\lambda - 1}}{2} \quad \frac{1 - \sqrt{\lambda^2 + 2}}{5} \quad \frac{1 - \sqrt{\lambda^2 - 2}}{5}$$

شکل ۳

چاہتے ہیں ہم تبدیل کرنا کسی مساوات مفروض کو ایک اور ایسی مساوات سے جسکی قیمتیں علیحدہ علیحدہ کوئی صنف یا کوئی جز مقررہ قیمتوں مساوات مفروضہ کی ہوں فرض کرو کہ یہ مساوات

$$\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-1} + \lambda^n = 0$$

پس اب اگر فرض کریں کہ  $m$  لا تو حاصل ہوگی یہ مساوات  $\lambda = \frac{m}{m}$  اور جو بت کہیں ہم یہ قیمت لاکھی سجاؤ اسکی مساوات مفروض میں اور ضرب کریں جز اول اسکی کو  $\lambda^n$  میں تو حاصل ہوگی یہ مساوات

$$\lambda^n + \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \dots + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

اور یہ ایک ایسی مساوات ہے کہ اسکی قیمتیں علیحدہ علیحدہ  $m$  گنی قیمتوں مساوات مفروض کے ہیں پس بیان سے واسطی عمل میں لائیے تبدیلی کی کہ اس شکل میں مطلوب ہے ضرب کر دو دوسری

جز مساوات مفروض کو  $m$  میں اور تیسری جز کو  $m$  میں اور چوتھے کو  $m$  میں اور علی ہذا القیاس

حکم ۱ مرقومہ بالا سے ظاہر ہے کہ اگر اول جز مساوات مفروض کا سر  $m$  ہو تو اس صورت میں یہ قاعدہ برتنا چاہیے دہر کر دوسرے اول جز کو اور دوسرے جز میں کچھ تبدیل کرو اور تیسرے جز کو

$m$  میں ضرب کرو اور چوتھے کو  $m$  میں ضرب کرو اور باقیوں جز کو  $m$  میں اور علی ہذا القیاس

حکم ۲ مرقومہ بالا سے یہ بھی معلوم ہوتا ہے کہ اگر مساوات مفروض کے اجزاء کی مثال کسو ہر جز

تو ہم اس مساوات کو ایک ایسی مساوات سے تبدیل کر سکتے ہیں کہ امثال اجزا اس پچھلی مساوات کی اعداد صحیح ہوں اور ترکیب کی یہ ہے کہ مساوات مفروض کی امثال کے (کہ کسور میں) نسب نایون کو ابسین ضرب کر کے حاصل ضرب معلوم کر دو اور بعد ازاں مساوات مفروض ایک ایسی مساوات سے تبدیل کر دو کہ اسکی قیمتیں ایسی ہوں کہ پیدا ہوں ضرب دینی سے قیمتوں مساوات مفروض کو حاصل ضرب مذکورہ بالا میں حکم ۳ اگر امثال دوسری اور تیسری اور چوتھی وغیرہ جنوں کسی مساوات کی پوری قیمت ہو سکتی ہوں علیحدہ تم اور م اور غیرہ پر تو ضرور یہ کہ تم ہو ویسے مقسوم علیہ مشترک سب قیمتوں مساوات مذکور کا

### مثالیں

۱ چاہتے ہیں ہم تبدیل کرنا مساوات  $2x - 4y + 3z = 0$  کو ایک ایسی مساوات سے کہ اسکی قیمتیں علیحدہ علیحدہ متن گنی ہوں قیمتوں مساوات مفروض کی سے

۲ چاہتے ہیں ہم تبدیل کرنا مساوات  $2x - 3y - 4z = 1$  کو ایک ایسی مساوات سے جسکی قیمتیں علیحدہ علیحدہ چار گنی ہوں قیمتوں مساوات مفروض کی سے

۳ چاہتے ہیں ہم تبدیل کرنا مساوات  $2x + 3y - 4z = 1$  کو ایک ایسی مساوات سے جسکی قیمتیں علیحدہ علیحدہ ۲ گنی ہوں قیمتوں مساوات مفروض کی سے

### اجوبہ

$$\begin{aligned} 1 & \quad 2x - 4y + 3z = 0 \\ 2 & \quad 2x - 3y - 4z = 1 \\ 3 & \quad 2x + 3y - 4z = 1 \end{aligned}$$

### شکلہ

چاہتے ہیں تبدیل کرنا کسی مساوات مفروض کو ایک ایسی مساوات سے جسکی قیمتیں ہوں جن مفروضوں مساوات مفروض کے فرض کر دو کہ یہ مساوات  $1 + 2x - 3y + 4z = 1$  اور  $1 + 2x - 3y + 4z = 1$  اور  $1 + 2x - 3y + 4z = 1$  پس اب مواضع شکل یا جوین سیکے باب گذشتہ سے ظاہر ہو کہ مساوات

$$1 - 2x + 3y - 4z = 1 \quad 1 - 2x + 3y - 4z = 1 \quad 1 - 2x + 3y - 4z = 1$$

ایسی ہوگی کہ اسکی قیمتیں

قیمتوں مساوات مفروض کی سے فقط علامتوں میں مختلف ہوں گی فرض کر دو کہ  $1 - 2x + 3y - 4z = 1$  اور  $1 - 2x + 3y - 4z = 1$  اور  $1 - 2x + 3y - 4z = 1$  قیمتیں مساوات مفروض کی ہیں اور  $1 - 2x + 3y - 4z = 1$  اور  $1 - 2x + 3y - 4z = 1$  اور  $1 - 2x + 3y - 4z = 1$  کی ہیں پس اب















(۳) ایک ہی تین تو معلوم ہوگا کہ  $۱ - ۵$  ایک جز ضربی مشترک مساوات صدی اور مساوات مفروض

میں یا یا جائیگا

حکم ۲ اگر  $۳ = ۲ = ۱$  تو جز  $(۱ - ۵)$   $(۲ - ۵)$  واقع ہوگا بطریق ایک جز ضربی کے  
ہر مجموعہ اجزائی ضربی مساوات (۲) کے تکلفی مساوات (۳) پوری قسم ہو سکتی ہے  $(۱ - ۵)$   
پر اور اس واسطے کہ مساوات صدی اور مساوات مفروض میں جز  $(۱ - ۵)$  مشترک ہوگا

حکم ۳ اگر مساوات مفروض میں یہی مساوات ہو  $۳ = ۲ = ۱$  تو مساوات صدی اور مساوات مفروض  
میں یہ جز مشترک ہوگا  $(۱ - ۵)$   $(۲ - ۵)$  بیان سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر ہم کسی مساوات  
کی صدی قیمتوں کی تعداد دریافت کیا جائے تو اول ہمیں یہ لازم ہے کہ دریافت کر لیں مساوات صدی  
اس مساوات کی اور یہ از ان دریافت کر لیں مقسوم علیہ اعظم اول طرفوں دونوں مساوات کا ارحصہ  
اعظم اس شکل کا ہو  $(۱ - ۵)$   $(۲ - ۵)$   $(۱ - ۵)$  وغیرہ تو مساوات مفروض میں  
(ق + ۱) قیمتیں تو صدی  $۱$  کے ہونگی اور (ق + ۱) قیمتیں صدی  $۲$  کے اور (ق + ۱)  
قیمتیں صدی  $۳$  کے اور علیٰ ہذا ہفتاس بعد از ان مساوات مفروض کو کم درجہ کا کر سکتے ہیں

## فصل چہارم بیج بیان قاعدہ و کج واسطی در یافت کنی قیمتوں غیر ممکن کسی مساوات مفروض کے

### اول قاعدہ مهندس بودن کا

اگر اصل قیمتیں کسی مساوات مفروض کی یہ ہوں  $۱$  اور  $۲$  اور  $۳$  وغیرہ کہ موافق اپنی  
اپنی مقدار کے مرتبہ میں در ان میں سے  $۱$  سے  $۲$  سے  $۳$  سے کم ہے اب اگر کم کریم ہم بہ قیمت نہ کو کہ قدر ہے  
کہ ایک اب عدد ہی کو زیادہ ہے نسبت  $۱$  کے اور کم نسبت  $۲$  کے تو قیمتیں نہ کو اس شکل کی ہو جائے  
 $۱ - ۵$   $۲ - ۵$   $۳ - ۵$  اور  $۲ - ۵$  وغیرہ  $۱ - ۵$  اور ظاہر ہے کہ اول ان میں کی منفی ہوگی لیکن  
جبکہ تمام قیمتیں اصلی ہوتی ہیں + اور سو تو قدر قیمتوں مثبتہ کی قیمتوں ہی تعداد مثبتہ بیوں علامت کی کہ واقع  
ہوتی ہیں مساوات مفروض کے اجزائیں اور چونکہ ہم نے تبدیل کیا ہے ایک قیمت مثبتہ کو ایک قیمت منفی سے  
تو مساوات اس تبدیلی کے بعد حاصل ہوگی اور ہمیں ایک تبدیلی علامت کی نسبت مساوات مفروض کے  
کم ہوگی اگر کم کریم ہم قیمتوں مساوات مفروض کو بقدر کہ کے کہ زیادہ ہے نسبت  $۲$  کے لیکن کم نسبت

طہ کے ذرا صورت میں ظاہر ہے کہ جو مساوات بعد گئی مذکور کی حاصل ہوگی اوس میں دو منفی قیمتیں  $1 - 1$  اور  $7 - 7$  کہ ہو گئی اور اس واسطے اس مساوات میں دو تبدیلی علامت کی نسبت مساوات مفروض کیے گئے ہوں گے اس واسطے کہ دو قیمتیں مثبتہ دو قیمتوں منفیہ سے تبدیل کی گئی ہیں یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر گناہوں میں ہر قیمت مساوات مفروض کو بقدر ایک ایسی مقدار کے جو زیادہ ہی نسبت ملے کہ تو ظاہر ہے کہ تمام قیمتیں مثبتہ منفی ہو جائیں اور اس واسطے جو مساوات باقی اس کی کے حاصل ہوگی اوس میں سب اجزاء مثبت ہوں گے کہ کو سب قیمتیں اس کی منفی ہیں (موافقہ شکل (۱۶) باب گذشتہ کے) اور اس صورت میں ظاہر ہے کہ تمام تبدیلیں علامت کی جاتی رہیں گی یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر قیمتیں مساوات مفروض کو یہاں تک کم کریں کہ تمام قیمتیں اوس مساوات کی جو بعد از ان حاصل ہوتی ہر منفی ہو جائیں یعنی تمام اجزاء اوس کی مثبت ہو جائیں تو ظاہر ہے کہ وہ عدد جس کا ہم اس صورت میں استعمال کر رہے ہیں زیادہ ہوگا نسبت سے بڑی قیمت مثبتہ مساوات مفروض کی اور اس واسطے مکانی اس عدد کا کم ہوگا نسبت سے چھوٹی قیمت مساوات مفروض کے مساوات مکانی کی سے اب اگر دریافت کر کے مساوات مفروض کی مساوات مکانی کو کم کریں ہم اوس کی قیمتوں کو بقدر مکانی عدد مذکور کے تو ضرور ہے کہ مساوات مکانی میں اوتی ہی قیمتیں منفیہ رہیں گی جتنی قیمتیں مثبتہ مساوات اصلی میں پہلی قیمتیں الہ اوس صورت میں جبکہ مساوات میں قیمتیں غیر ممکن بھی ہوں یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ تعداد اداون تبدیلیوں کی جو مساوات اول میں سے زائل ہو گئی ہیں بافروض مساوی اداون تبدیلیوں کے جو جاتی رہیں مساوات دوم میں بشرطیکہ تمام قیمتیں مساوات مفروض کی اصلی ہوں نہ کہ غیر ممکن پس اگر یہ شرط پوری نہ ہو تو ضرور ہے کہ حاصل فرق اداون اعداد کا جس میں تعداد تبدیلیوں مذکور کی قبضہ ہوتی ہے مساوی ہو۔ تعداد قیمتوں غیر ممکن کی واسطے توضیح مرقوم اعداد کے ہم فرض کر رہے ہیں کہ کوئی ایسی مساوات ہے جس میں قیمتیں ہیں مثلاً  $1 - 1$  سے  $1 - 1$  اور  $7 - 7$  اور  $3 - 3$  اب اگر ہر واحد کو ان قیمتوں میں سے بقدر عدد  $1$  کے جو زیادہ ہے سے  $1$  سے بڑی قیمت مساوات مفروض کی ہر یک کم کریں تو ظاہر ہے کہ قیمتوں قیمتیں منفی ہو جائیں گی اور اسی سبب سے قیمتیں تبدیلیں علامت کی مساوات تبدیل کی ہوئی ہیں زائل ہو جائیں گی یہی ظاہر ہے کہ مساوات مفروض کی مساوات مکانی کی قیمتیں یہ ہو گئی  $1 - 1$  اور  $7 - 7$  اور اگر ہر واحد کو ان قیمتوں مساوات مکانی کی میں سے بقدر  $1$  کے کہ مکانی ہے  $3 - 3$  کا کم کریں تو ظاہر ہے کہ علامت قیمتوں کی تبدیل نہیں ہو جائیں گی اس واسطے کہ قیمتیں کم کی گئی سے ہو گئی  $1 - 1$  اور  $7 - 7$  اور  $3 - 3$  اعداد مثبت ہیں اور یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ کوئی تبدیلیوں میں سے مساوات مکانی تبدیل کی ہوئی میں زائل نہیں ہوئی اور چونکہ قیمتیں ہی تبدیلیں علامت کی مساوات مفروض تبدیل کی ہوئی میں زائل ہو گئی ہیں تو معلوم ہوتا

کہ مساوات مفروض میں کوئی قیمت غیر ممکن نہیں ہے یہاں سے پیدا ہوتا ہے دوسری آئندہ اگر کسی مساوات مفروض کی قیمتوں کو بقدر کسی عدد کم کی کہ کم ترین اور تبدیل کی ہوئی مساوات میں تبدیلیں علامات یکے زائل ہو جائیں اور بعد ازاں ہر واحد کو قیمتوں مساوات مفروض کی مساوات متکافی میں سے بقدر اس کے کہ متکافی نام کا کچھ کرنا اور اس تبدیل کی ہوئی مساوات متکافی میں آگئی تبدیلیں علامات باقی رہیں تو ضرور ہی کہ مابین صفحہ اور ہم کے ن۔ آگئی قیمتیں غیر ممکن ہوں

## مثال

چاہتے ہیں دریافت کرنا تعداد قیمتوں غیر ممکن اس مساوات  $10x + 2y + 3z = 10$  کے مساوات مفروض

$$10x + 2y + 3z = 10$$

$$\frac{10x}{10} = \frac{10 - 2y - 3z}{10}$$

$$\frac{10x}{10} = \frac{10}{10} - \frac{2y}{10} - \frac{3z}{10}$$

$$\frac{10x}{10} = \frac{10}{10} - \frac{2y}{10} - \frac{3z}{10}$$

$$\frac{10x}{10} = \frac{10}{10} - \frac{2y}{10} - \frac{3z}{10}$$

$$10x + 2y + 3z = 10$$

$$\frac{10x}{10} = \frac{10 - 2y - 3z}{10}$$

$$\frac{10x}{10} = \frac{10}{10} - \frac{2y}{10} - \frac{3z}{10}$$

$$\frac{10x}{10} = \frac{10}{10} - \frac{2y}{10} - \frac{3z}{10}$$

$$\frac{10x}{10} = \frac{10}{10} - \frac{2y}{10} - \frac{3z}{10}$$

اس مثال میں ظاہر ہے کہ مساوات مفروض کی تبدیل کرینے میں دو تبدیلیں علامات کی زائل ہو گئی ہیں اور مساوات مفروض کی مساوات متکافی تبدیل کی ہوئی میں کوئی تبدیلیں علامات کی باقی نہیں رہیں ہیں تو معلوم ہوا کہ مساوات مفروض میں کم سے کم دو قیمتیں غیر ممکن ہیں لیکن غلط وہی ایسی قیمتیں ہیں کہ مساوات مفروض کے اخیر جز منفی ہونے سے یہ بات معلوم ہوتی ہے کہ اوپر دی گئی دو قیمتیں اصلی ہی میں ایک تو ادین سے مثبت اور دوسری منفی کہ مساوات میں تو قیمتیں غیر ممکن نہیں ہو سکتی ہیں کہ مساوات کے اگر ایسا ہوتا تو اخیر جز مذکور میں کوئی مقدار غیر ممکن ہی ہوتی اور قیمتیں غیر ممکن اس واسطے نہیں ہیں کہ اگر ایسا ہوتا تو اخیر جز مذکور مثبت ہوتا اور حالانکہ وہ منفی ہے

## بیان دوسرا

یہ ایک قاعدہ ہے دیگوانے کے واسطے دریافت کرینے قیمتوں

غیر ممکن مساواتوں کے

اگر کسی مساوات مفروض میں کتنی کا سر صفر ہو یعنی کوئی جز اس مساوات میں پایا نہ جاوے اور ہم صفری  
 مابین ایسی دو اجزاء کے واقع ہو کہ اوکئی علامتیں یکساں ہوں تو ہم کہتے ہیں کہ اس مساوات میں دو قیمتیں غیر ممکن  
 ہو گئی فرض کرو کہ مساوات مفروض میں علامات اس ترتیب سی ہوں اور ہیں + + - - + - - + - - اور اگر  
 واسطے - کے + یا - لکھیں تو حاصل ہو گی یہے ترتیبین علامات کی

+ + - - + - - + - - اور + - - + - - + - - + - -

صورت اول میں ہم باقی ہیں کہ تعداد متواتر آئے ایک ہی علامت کی دو ہیں اور پانچ تبدیلیں علامات کی ہیں  
 اور صورت دوم میں یہ نظر ہے کہ تعداد متواتر آئے ایک ہی علامت کی آہ ہیں اور تبدیلیں علامات کی تین ہیں  
 پس معلوم ہوا کہ اگر تمام قیمتیں مساوات مفروض کی ممکن ہوں تو صورت اول میں پانچ تو مثبت قیمتیں  
 ہوں اور دو منفی اور صورت دوم میں تین تو مثبت قیمتیں ہوں اور چار منفی اور اس سے یہ بات لازم آتی  
 ہے کہ کوئی دو ایسی قیمتیں ہیں کہ منفی ہی ہیں اور مثبت ہی اور اس واسطے یہے دو قیمتیں اصلی قیمتیں نہیں ہو سکتی  
 ہیں پس ضرور ہے کہ یہے قیمتیں غیر ممکن ہوں تریب اسطر حسی سے دو دعویٰ آئندہ ہی ثابت ہو سکتی ہیں  
 اگر مابین ایسی جنہوں کے جنکی علامات متماثل ہیں ۲ یا ۲ - ایشال صفری واقع ہوں تو ہم

کہتے ہیں کہ انکی ہونی سے یہ بات معلوم ہو گی کہ مساوات مفروض میں ۲ کتنی قیمتیں غیر ممکن ہیں

۲ اگر مابین ایسے اجزاء کی جو علامات غیر متماثل رہ سکتے ہیں ۲ + یا ۲ - ایشال صفری واقع ہوں تو  
 ہم کہتے ہیں کہ انکی واقع ہونی سے یہ بات معلوم ہو گی کہ مساوات مفروض میں ۲ قیمتیں غیر ممکن ہیں  
 مثال مساوات ۱ - ۲ + ۳ + ۴ + ۵ = ۰ میں دو قیمتیں غیر ممکن ہیں کسو اسطی علامات اور دو اجزاء  
 کی جنکی مابین وہ جو جنکا سر صفر واقع ہے متماثل ہیں اور اسطرح سی مساوات ۱ = ۲ + ۳ + ۴ + ۵  
 کے ایشال ۱ = ۰ = ۰ = ۰ = ۰ ہیں دو قیمتیں غیر ممکن ہیں

## مثالین واسطی مشتق کے

۱ بناو کتنی قیمتیں غیر ممکن مساوات آئندہ میں باقی جاتی ہیں - ۵ + ۳ - ۲ + ۱ = ۰  
 ۲ مساوات ۱ - ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ = ۰ میں کوئی قیمت غیر ممکن ہے یا نہیں  
 فصل چہم بیچ بیان قاعدہ ہر مشر کا رڈن کے واسطی حل کرنے

مساواتوں میں سری مرتبہ کی





اسجا بیات واضح ہو کہ جسوقت ایک خورد درستی مساوات میں علامت  
 مثبت ہے اور دوسری منفی ہوتی ہے اور ہم مساوات ہوتی ہے

$$\sqrt{\frac{2}{3} - \frac{2}{24}} - \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{2}{24}} = 0$$

چونکہ ص =  $\frac{2}{3}$  تو ظاہر ہے کہ مساوات آئندہ بھی پیدا ہو سکتی ہے

$$\sqrt{\frac{2}{3} - \frac{2}{24}} + \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{2}{24}} = 0$$

### مثال

فرض کر دو کہ ہم یہ مساوات تیسری درجہ کی  $4x^2 + 20x - 20 = 0$  اور چاہتے ہیں دریافت

کرنی قیمت مقدار مجہول لاکھی اسجا ظاہر ہے  $-4$  اور  $20$  اور اسجو اسطی

$$2 = 5 \pm \sqrt{25 - 20} = 5 \pm \sqrt{5} = 5 + \sqrt{5} \text{ اور } 5 - \sqrt{5}$$

جسوقت معلوم ہوئی ایک قیمت مساوات مفروض کی ادسوت او مسلوات کو ہم ایک مرتبہ کم کی مساوات یعنی درجہ دوم  
 کی مساوات سے تبدیل کر سکتے ہیں اور حل کرنے سے اس مساوات درجہ دوم کو ہم دریافت کر سکتے ہیں دو اور  
 قیمتیں واضح ہو کہ جسوقت  $\frac{2}{24}$  ہودی اپنی ذات سے مثبت اور زیادہ ہو  $\frac{2}{24}$  سے تو اس صورت میں ظاہر  
 ہے کہ مقدار  $\sqrt{\frac{2}{3} - \frac{2}{24}}$  غیر ممکن ہو جائیگی اور اسجو اسطی اس حالت میں قاعدہ ہندسہ کے مطابق  
 کا جاری نہیں ہو سکیگا اس صورت میں واسطی حل کرنے سے مساوات مفروض کے استغانت جدول مشتمل کی  
 ضرور ہوتی ہے لیکن چونکہ اس حساب میں علم ثلث کا کام پڑتا ہے تو ہم اس مختصر میں طریقہ حل کرنے ایسی مساواتوں

### مثالین واسطی کے

- ۱ فرض کر دو کہ ہم یہ مساوات  $4x^2 + 20x - 20 = 0$  اور چاہتے ہیں دریافت کرنی قیمت لاکھی
- ۲ فرض کر دو کہ ہم یہ مساوات  $4x^2 + 20x + 20 = 0$  اور چاہتے ہیں دریافت کرنی قیمت لاکھی
- ۳ فرض کر دو کہ ہم یہ مساوات  $4x^2 - 20x + 20 = 0$  اور چاہتے ہیں دریافت کرنی قیمت لاکھی

- ۴ فرض کرو کہ ہر بیہ مساوات ۳ - ۶ = ۱۸ اور چاہتے ہیں ہم دریافت کرنی قیمت تو کی
- ۵ فرض کرو کہ ہر بیہ مساوات ۳ + ۶ = ۲۵ اور چاہتے ہیں دریافت کرنی قیمت تو کی
- ۶ فرض کرو کہ ہر بیہ مساوات ۳ - ۶ - ۳ - ۲ - ۵ = ۸ کیا ہر قیمت تو کی

### اجوبہ

(۱) ۴ = ۶ (۲) ۳ = ۶ (۳) ۴ = ۶ (۴) ۳ = ۶

(۵) ۵ = ۶ (۶) ۲ = ۶ یہ بات ظاہر ہے کہ جسوقت مساوات مفروض تیسری درجہ کی میں کوئی ایسی مقدار مچھول ہی باقی جاتی ہو کہ او سین دوسرے درجہ کا صود ہو تو اسوقت قاعدہ مندر کارڈن کا جائز ہی ہو سکتا ہے لیکن ہم اس خبر کو سمجھیں دوسرے مرتبہ کا صود مقدار مچھول کا ہی دور کر سکتے ہیں پیدا اس قاعدہ کے جو (۲) شکل تبدیلی اور بعد ازان قاعدہ مهندس مذکور کا جاری ہو سکتا ہے فقط

## فصل ششم بیچ بیان قاعدہ مهندس بمبلی کے واسطی تحویل

### کرنی مساواتوں چوتھی درجہ کی طرف مساواتوں تیسری درجہ کے

فصل گذشتہ میں ہے ترکیب حل کرنے مساواتوں تیسری درجہ کی موافق قاعدہ مهندس کارڈن کے ملکی ہے پس اب اگر ہم تحویل کر سکیں مساواتوں چوتھے درجہ کو طرف مساواتوں درجہ کی تو ہماری غرض حاصل ہو جاگی یعنی ہم مقدار مچھول جو ہے درجہ کی مساواتوں کی قیمت دریافت کر لیں گے سو اسی کے یہ بات غیر ممکن ہے کہ بغیر قاعدہ تیسری درجہ کے مساواتوں کے مساواتوں چوتھی درجہ کی حل ہو سکیں کہ واسطی کہ جسوقت ایک قیمت مساوات چوتھی درجہ کی معلوم ہو جاتی ہے اسوقت معلوم ہوتا ہے تو ہم جانتا ہے اور قاعدہ تیسری درجہ کی مساواتوں کے اور یہی حال ہے سب درجوں کی مساواتوں کا پس بیان یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ حل ہونا کسی درجہ کی مساوات کا موقوف ہے اور یہ حل ہو سب ادن مساواتوں کے جو اس سے کم درجہ کی میں چند سو برس گذریے ہیں کہ مهندس بمبلی نے ایک قاعدہ واسطی حل کرنے مساواتوں چوتھے درجہ کے ایجاد کیا اور اس قاعدہ کو ہم اس فصل میں بیان کرینگے فرض کرو کہ مساوات مفروض چوتھے درجہ کی ہے یہ

۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ = ۰ اور اس میں ۱ اور ۲ اور ۳ اور ۴ اور ۵ مقدار میں ممکن ہیں اور یہ بات بھی فرض کرو کہ مساوات مفروض اس شکل کی ہے (۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵) - (۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵) = ۰

پس اب چاہئے ہیں دریافت کرنا اور قاعدہ کو تاکہ مساوات مفروض حل ہو سکے اب اگر عمل مجبور کارڈن کرین اور تو ایسا متاثر آئی مقدار میں ثبت کرین تو حاصل ہو گا یہ

$$= \begin{cases} ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ - ۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ \\ ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ - ۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ \end{cases}$$



اور اس کے حاصل ہوتی ہیں دو قیمتیں اور دوسری مساوات سے حاصل ہوتی ہیں یہ مساوات  
 $\text{ن} = - (ق + ۱) - ۱ - ۱ - ۱$  اور اس کے حاصل ہونگی دو قیمتیں ہم اب توضیح کرتے ہیں  
 اس قاعدہ کی وسیلہ مثال آئندہ کے فرض کرو کہ مساوات آئندہ چوتھے مرتبہ کی مساوات مفروضہ ہے اور  
 چاہتے ہیں ہم دریافت کرنی چار اسکی قیمتیں وسیلہ قاعدہ مذکور کے

ن = ۱۰ - ۱۰ + ۳۵ - ۱۰ = ۲۴ - ۵۰ + ۱۰ = ۰ اگر مطابق کریں ہم مساوات عام مذکورہ بالا کو  
 اس مساوات سے دریافت ہوگا کہ اس صورت میں  $۱ - ۱۰ = ۱۰$  اور  $۱۰ = ۳۵$  اور  $۳۵ = ۵۰$   
 اور  $۲۴ = ۲۴$  اور اس پر اسطرح وہ مساوات جسکی ذریعہ سی قیمت  $۱۰$  کی معلوم ہو جائیگی یہ ہے  
 $۸ - ۱۰ + ۱۰ + ۸۰۸ - ۱۵۴۰ = ۰$  یا یہ

$$۲ - ۲۵ + ۲۰۲ - ۳۸۵ = ۰$$

اور پھر جو اس مساوات کا قیمت ہو سکتا ہے ان اعداد پر  $۱۰$   $۱۰$   $۱۰$   $۱۰$  وغیرہ اول عدد سے تو مطلب نہیں  
 حاصل ہوتا ہے نیز جو شرط اس مساوات سے تیسرے ہوتی ہو وہ شرط اس عدد سے پوری نہیں ہوتی ہے پس  
 $۱۰$  کو مساوی  $۱۰$  کے اور موازنہ اس عدد کی مساوات گذشتہ پوری ہو جائیگی یعنی ہم پائینگے یہ

$۲۵۰ - ۲۵۰ + ۱۰۱۰ - ۳۸۵ = ۰$  پس معلوم ہوگا کہ  $۵$  اور یہ قیمت مساوات تیسری درجہ  
 مرتبہ بالا کی ہے بعد ازاں مان لو کہ  $۱۰ = ۱۰$  اور موازنہ اس فرض کے مساوات گذشتہ پوری ہوتی ہے یعنی  
 حاصل ہوتی ہے مساوات  $۱۰ - ۱۰ + ۱۰ - ۱۰ = ۰$  یہاں سے ثابت ہوتا ہے

کہ  $۱۰ = ۱۰$  اور یہ دوسری قیمت مساوات مذکور کی ہے اب دریافت کرنا چاہتے ہیں قیمت مساوات تیسری  
 درجہ مذکورہ بالا کا واسطی اس مطلب کے قیمت کرو مساوات مذکورہ کو  $۲$  پر تو حاصل ہوگی یہ مساوات  
 $۲۵ - ۱۰ + ۱۰ - ۲۹۵ = ۰$  اب چونکہ سب سے بڑا اس مساوات کا مساوی ہے

حاصل صحیح تمام قیمتوں اس مساوات کی اور چونکہ حاصل صحیح دو قیمتوں اس مساوات کا  $۱۰$  ہے تو بالضرور باقی تیسری  
 قیمت اس مساوات کی  $\frac{۱۰}{۲}$  ہوگی پس معلوم ہوئے ہیں اب تین قیمتیں تیسری درجہ کی مساوات کی لیکن  
 یہ بات اسباب واضح ہو کہ ایک ہی قیمت واسطی ہماری مطلب کے کنفیٹ کرتی ہے کس واسطی کے بذریعہ  
 ہر واحد کے ان تین قیمتوں سے وہی چار قیمتیں مساوات مفروضہ کی حاصل ہوتی ہیں یہ بات اس طرح سے  
 ثابت ہوتی ہے جو قیمت  $۱۰ = ۱۰$  اور سوقت بذریعہ مساوات

$$ق = \sqrt[۱۰]{۱۰ + ۱۰ - ۲۰} \text{ کے حاصل ہوگی یہ مساوات}$$

$$ق = \sqrt[۱۰]{۱۰ + ۲۵ - ۱۰} \text{ اور اس پر واسطی حاصل ہوگی یہ مساوات}$$



دریافت کرنی ہے چار قیمتیں اس کی

جواب

$$\begin{aligned} ۳ = ۳ \text{ اور } ۲ = ۲ \text{ اور } ۱ = ۱ \text{ اور } ۱ = ۱ \text{ اور } ۱ = ۱ \\ ۳ - \sqrt{۳} - ۱ = ۱ \text{ اور } ۳ - \sqrt{۳} - ۱ = ۱ \\ ۳ - \sqrt{۳} - ۱ = ۱ \text{ اور } ۳ - \sqrt{۳} - ۱ = ۱ \\ ۳ - \sqrt{۳} - ۱ = ۱ \text{ اور } ۳ - \sqrt{۳} - ۱ = ۱ \end{aligned}$$

۴ فرض کر دو کہ ہی ہم مساوات چوتھی درجہ کی

اور دریافت کیا جاتے ہیں ہم چار قیمتیں مقدار مجہول لاک

جواب

$$\begin{aligned} ۱۳ = ۱۳ \text{ اور } ۱۳ = ۱۳ \\ ۱۳ - \sqrt{۱۳} - ۱ = ۱ \text{ اور } ۱۳ - \sqrt{۱۳} - ۱ = ۱ \\ ۱۳ - \sqrt{۱۳} - ۱ = ۱ \text{ اور } ۱۳ - \sqrt{۱۳} - ۱ = ۱ \end{aligned}$$

فصل منقسم چہ بیان اوقاع کی جنکی ذریعہ سی تقریبی قیمتیں

سب درجہ کے مساواتوں کی دریافت ہو سکتی ہیں

حسوت کہ قیمتیں کسی مساوات مفروض کی مقداریں غیر نزدیکی نہیں ہوتی ہیں بلکہ نزدیکی یا حسوت کہ مساوات میں مفروض جنکو محل کرنا منظور ہوتا ہے جو تھے درجہ سی ہی زیادہ کی ہوتی ہیں اور اس صورت میں ہم قیمتیں حقیقی مقداروں مجہول کی نہیں دریافت کر سکتے ہیں اور فقط قیمتیں تقریبی دریافت کر کی قناعت کرنی پڑتی ہے لیکن ہندسوں نے ایسی قاعدے نکالی ہیں کہ یہ تقریبی قیمتیں اتنی قریب قیمتوں حقیقی کے ہو سکتی ہیں جتنی ہم چاہیں اور جبکہ بہت فرق ان قیمتوں میں ہے اور سوقت ہر جاتی ہیں اور قیمت تقریبی پر قناعت کر سکتے ہیں اول قاعدہ یہ ہے جو وسیلہ قیاس یا امتحان کے ایک تقریبی قیمت جو بہت قریب قیمت حقیقی کے نہیں ہے دریافت کرو اور بعد ازاں ایک ایسی مقدار مثل طے کے فرض کر دو کہ اگر اسی قیمت مذکور پر زیادہ یا سہا کرین تو مجموعہ مساوی قیمت حقیقی کا ہو دے لیکن چونکہ وہ قیمت تقریبی جو قیاس سے معز کی گئی ہے ایسی فرض کی جاتی ہے کہ اوس میں اور قیمت حقیقی میں فقط بقدر کسی کسر فرق ہوتا ہے اور چونکہ مجدد اور ایک وغیرہ کسور کی کم ہوتی جایا کرتی ہیں تو قاعدہ یہ ہے کہ اگر عمل مساوات مفروض کی میں طے یا طے وغیرہ واقع ہوں تو انہیں دور کر سکتے ہیں اور جو قیمت بعد دور کرنی چاہیے واسطی مقدار مجہول کے دریافت ہوگی اسی قیمت قیاسی قرار دیکر ہر ایک مقدار مثل طے کے ایسی فرض کر دو کہ اگر اسی قیمت مذکور میں سے نکالیں یا اس پر زیادہ کرین تو مجموعہ قیمت حقیقی ہو جائی اور پھر عمل مذکورہ بالا کرین تو اس سے ایک اور قیمت قریب تر قیمت حقیقی کے حاصل ہوگی اور اس ترکیب سی قیمت تقریبی کو اتنا قریب تر قیمت حقیقی کے لا سکتی ہیں

جتنا ہم چاہیں بہ قاعدہ مثال آئندہ سے خوب واضح ہو جائیگا چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا خبر ۲۰ کا معنی حل کیا جاتے ہیں ہم اس مساوات درجہ دوم کو  $\lambda = 20$  اسجای ظاہر ہے کہ لا زیادہ ہے تم سے اور کم ہے تم سے پس لازم ہے کہ فرض کریں ہم  $\lambda = 0$  +  $\mu$  ط اور اس پر اسطی حاصل ہوگی یہ مساوات  $\lambda = 14 + 8 + 20 = 42$  اور اسجای یہ حاصل ہوتا ہے  $8 + 20 = 28$  اور چونکہ  $\lambda$  ایک گسہ ہے تو موافق قاعدہ مرقومہ بالا کی ط کو ہم دور کر سکتے ہیں اور اس پر اسطی حاصل ہوگی یہ مساوات

$8 + 20 = 28$  اور یہاں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ  $\lambda = 28 + \mu = 28 + 14 = 42$  اور یہ قیمت تقریبی بہت قریب قیمت حقیقی کے ہے یعنی یہ نسبت تم کے قریب تر قیمت حقیقی کے ہے اب اگر ہم قیمت تقریبی کو اور قریب تر قیمت حقیقی کے لایا جائے تو لازم ہے کہ بطور سابق کے فرض کرنا  $\lambda = 28 + \mu$  ص اور چونکہ یہ بات تحقیق ہے کہ ص ایک چھوٹی سی گسہ ہے تو دور کر سکتے ہیں ہم مجذور اسکے کو پس مساوات  $\lambda = 20 + 9 + 20 = 49$  ص سے حاصل ہوگی یہ مساوات

$\lambda = 20 + 4 + 20 = 44$  ص  $\lambda = 20 + 4 + 20 = 44$  ص اور  $\lambda = 20 + 4 + 20 = 44$  ص پس معلوم ہوا کہ  $\lambda = 28 + \mu = 28 + 14 = 42$  ص اب اگر اور زیادہ قریب تر قیمت حقیقی کے قیمت تقریبی کو لایا جائے تو لازم ہے کہ فرض کریں ہم  $\lambda = 28 + \mu = 28 + 14 = 42$  ص اور اس سے حاصل ہوگی یہ مساوات  $\lambda = 20 + \frac{24}{12} + 20 = 44$  ص اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  $\lambda = 20 + \frac{24}{12} + 20 = 44$  ص اور یہاں سے حاصل ہوتا ہے یہ

$$\frac{24}{1244} = 8 \text{ ص} = \frac{1}{1244} \therefore 322 \text{ ص} = \frac{1}{1244}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{24}{1244 \times 322} = \frac{1}{11042} \text{ اس پر اسطی حاصل ہوتی ہے}$$

$$\text{یہ مساوات } \lambda = 28 + \frac{14}{34} = \frac{1}{11042} = \frac{5243}{11042}$$

اور یہ قیمت اتنی قریب قیمت حقیقی کے ہے کہ جو غلطی اس صورت میں رہتی ہے وہ قابل لحاظ کے نہیں اب ہم کہتے ہیں ایک عام قاعدہ جسکی مثال گذشتہ ایک خاص صورت ہے اور اسطی اس مطلب کے فرض کر دو کہ مساوات مفروض  $\lambda = 28$  ہے اور یہ مان لو کہ ہم جانتے ہیں کہ لا زیادہ ہے تم سے اور کم + ایسے پس اب اگر فرض کریں ہم کہ  $\lambda = 0$  + ص تو بالافرد ص کم ہوگا عدد آ کے سے یعنی وہ گسہ ہوگا اور اس پر اسطی اسکے مجذور اور کعب وغیرہ کو دور کر سکتے ہیں کیونکہ ویسے نسبت ص کی بہت چھوٹی مقدار میں ہوگی اور

اور ایسا وسطی حاصل ہوگی یہ مساوات  $\lambda = \frac{2n}{n} + \frac{n}{n} = 2 + 1 = 3$  اور ایسا وسطی  $\mu = \frac{n}{n} = 1$

اور ایسا وسطی  $\lambda = n + 1 = 3 + 1 = 4$  اور  $\mu = \frac{n}{n} = 1$

اب اگر  $n$  ہووے ایک قیمت تقریبی قریب قیمت حقیقی کے تو  $\frac{n}{n} + \frac{n}{n} = 2$  ایک قیمت تقریبی قریب قیمت حقیقی کے ہوگی اور جو بت

جس جگہ  $n$  کے کہا  $\frac{n}{n} + \frac{n}{n}$  کو تو ایک قیمت اور قریب قیمت حقیقی کے حاصل ہوگی اور اگر یہی عمل کئے جائیں تو قیمت تقریبی کو اتنا قریب قیمت حقیقی کے لاسکتے ہیں جتنا ہم چاہیں مثلاً فرض کرو کہ جانتے ہیں ہم حل کرنا اس مساوات  $\lambda = 2$  کو یعنی دریافت کیا جانتے ہیں ہم جذر  $\lambda$  کا اب اگر جان لیں کہ عدد آکا فرض کریں کہ ایک قیمت تقریبی  $\lambda$  کے جذر کی ایسی ہو کہ وہ کم سے نسبت قیمت حقیقی کے فقط بقدر ایک سر ہوگی تو  $\frac{n}{n} + \frac{n}{n}$  ایک اور قیمت قریب قیمت حقیقی جذر مذکور کے ہوگی اور اگر یہی عمل متواتر کرتے جائیں گی تو صورت اس کی یہ ہوگی

(۱)  $n = 1$  اور اس صورت میں حاصل ہوگی قیمت  $\frac{3}{2} = \lambda$

(۲)  $n = 2$  ایضاً ایضاً  $\frac{3}{2} = \lambda$

(۳)  $n = \frac{16}{12}$  ایضاً ایضاً  $\frac{5.44}{3.08} = \lambda$

اور قیمت اجزئہ  $\lambda$  کی اتنی قریب قیمت حقیقی کے ہوگی کہ اس کے جذور یعنی  $\frac{3.32429}{1.64442}$  میں اور

۳ میں فقط یہ فرق ہی  $\frac{1}{144444}$  اور یہ ایک ایسی چھوٹی کسر ہے کہ قابل لحاظ کے نہیں ہے یہی

قاعدہ جاری ہو سکتا ہے جو بت کہ مطلوب جو ہمیں چاہتی یا زیادہ مرتبہ کا نزدیک کسی مقدار کا مثلاً فرض

کرو کہ جانتے ہیں ہم حل کرنا اس مساوات تیسری درجہ کو  $\lambda = 2$  یعنی دریافت کیا جانتے ہیں ہم

قیمت  $\lambda$  کی چونکہ ہم جانتے ہیں کہ  $\lambda$  سے زیادہ اور  $n + 1$  سے کم ہی تو فرض کر سکتے ہیں

ہم  $\lambda = n + 1$  اور اس جگہ  $\mu$  بالعموم ایک سر ہوگی اور ایسا وسطی  $\mu$  اور  $\mu$  نسبت  $\mu$  کے

بہت چھوٹی چھوٹی مقدار میں ہوگی اور موافق مرقوم بالا کی نحو دور کر سکتے ہیں پس اب حاصل ہوگی یہ مساوات

$$\lambda = \frac{2n}{n} + \frac{n}{n} = 2 + 1 = 3$$

$$\lambda = n + 1 = 3 + 1 = 4$$

اب اگر  $n$  ہووے قریب  $\lambda$  کے تو مقدار  $\frac{n}{n} + \frac{n}{n} = 2$  کے قریب قیمت حقیقی کے ہوگی اور

اگر اس قیمت کو بجای  $n$  کے کھو تو قیمت  $\frac{n}{n} + \frac{n}{n}$  اور قریب قیمت حقیقی کے ہوگی اور علیٰ ہذا ایسا

مثلاً فرض کرو کہ یہ مساوات  $\lambda = 2$  یعنی جانتے ہیں ہم دریافت کرنا کہ  $\lambda$  کا پسر







کے = لآ میں تو حاصل ہوگا یہ  $\frac{ل}{ل} = لآ$  اور چونکہ  $\frac{ل}{ل} = لآ$  اور  $\frac{ل}{ل} = لآ$  اور  
 علیٰ ہذا القیاس بیان تک بیان کر کے ہم لیتی ہیں ایک خاص مساوات جسے ماہیت اس قاعدہ کی معلوم ہو جاوے  
 فرض کرو کہ ہم یہ مساوات دوسری درجہ کی  $لآ = ل + آ$  اب چونکہ یہ بات ثابت ہو چکی ہے کہ  
 $\frac{ل}{ل} = لآ$  اور  $\frac{ق}{ق} = لآ$  پس جسوقت کہ میں یہ یقین بن جاؤں اور لآ کے تو حاصل ہوگی ہم  
 مساوات  $\frac{ل}{ل} = \frac{ق}{ق} = لآ + آ$  اور اس میں اسطوریہ سے یہ بھی ثابت ہو گیا ہے  
 کہ  $ق + ل = ل$  اور کہ  $ل + م = م$  اور علیٰ ہذا القیاس اور بیان سے یہ بات معلوم ہوئی کہ وہ سلسلہ  
 اعداد کا جس کا دریافت کرنا منظور ہے ایسا ہے کہ ہر جز او کا مساوی ہوتا ہے حاصل جمع اسکی مابقی کے دو  
 اجزاء کے اور بیان سے یہ بات ظاہر ہے کہ جسوقت معلوم ہو جائیں ہمیں دو اعداد کے جزو تساری اجزاء  
 سلسلہ کی معلوم ہو سکتی ہیں لیکن اول دو اجزاء کا متحر کرنا ایک امر اضیاری ہے کیونکہ گومی دو اجزاء بہت  
 دور قیمت حقیقی کے ہوں لیکن عمل کرنے سے یہ موافق اور شرط کی جو مساوات مذکور میں ثابت ہوئی ہے ہر جز  
 اس سلسلہ کا جو پیدا ہوا ہے قیمت کرنی سے ہر جز سلسلہ مذکورہ بالا کو اسکی مابقی پر اور قیمت کرنی اسکی خارج  
 کو کو ایک نظر میں یہ ترتیب صحیح ہے فرض کرو کہ اول دو اجزاء  $ق$  اور  $آ$  ہیں پس موافق اس کے پہلی ثابت ہوا  
 ہے سلسلہ قیمتوں لاکاہ یہ ہوگا

$$\frac{۱۴۴}{۸۹} \frac{۱۹}{۵۵} \frac{۵۵}{۳۸} \frac{۳۸}{۲۱} \frac{۲۱}{۱۳} \frac{۱۳}{۸} \frac{۸}{۵} \frac{۵}{۳} \frac{۳}{۲} \frac{۲}{۱} \frac{۱}{۱} = ل$$

اور علیٰ ہذا القیاس مثلاً اگر فرض کریں ہم کہ  $ل = \frac{۲۱}{۱۳}$  تو  $\frac{۳۸}{۱۴۹} = ۱ + \frac{۲۱}{۱۳} = \frac{۴۲۲}{۱۴۹}$

اور اسکا ظاہر ہے کہ غلطی فقط  $\frac{۱}{۱۴۹}$  ہے اور اگر مویں ہم ایک اور آگے کا جزو اس سے بھی کم غلطی وقوع میں  
 آئے گی اب فرض کرو کہ دریافت کرنی ہے ہمیں قیمت لآ کی اس مساوات میں  $لآ = ل + آ$  اب چونکہ ہر صورت میں  
 $ل = \frac{ق}{ق}$  اور  $لآ = \frac{ق}{ق}$  تو حاصل ہوگی یہ مساوات  $\frac{ق}{ق} = \frac{ق}{ق} + آ$  یا کہ  $ق + ق = ق + آ$   
 اور بیان سے معلوم ہوتا ہے کہ ہر جز سلسلہ قیمتوں لاکا مساوی ہوتا ہے حاصل جمع دو گنی اسکی پہلے کے  
 جز کے کہ اوپر زیادہ کریں اس جز کی پہلے جز کو اب اگر فرض کریں کہ اول دو جز  $ق$  اور  $آ$  ہیں تو حاصل ہوگا یہ  
 $\frac{۳۰۸}{۱۴۹} \frac{۱۹}{۵۵} \frac{۵۵}{۳۸} \frac{۳۸}{۲۱} \frac{۲۱}{۱۳} \frac{۱۳}{۸} \frac{۸}{۵} \frac{۵}{۳} \frac{۳}{۲} \frac{۲}{۱} = ل$  وغیرہ

یہ یقین نوبت بنوے قریب ترتیب لآ کی جو اس مساوات سے تفسیر ہوتی ہے  $لآ = ل + آ$  آتی جاتی  
 ہیں اور اگر تعزین کریں ہم ہر جز اس سلسلہ میں سے عدد ایک کو تو حاصل ہوگا سلسلہ آئندہ کہ اس میں  
 ہر جز تفسیر کرنا قیمت تقریبی حذر  $۲$  کی بننے اسکے  $\sqrt{۲}$



قی = و اور ۲ = کج اور ان مساواتوں کے وسیلہ سے یہ قیمت تقریبی جذر آ کی حاصل ہوگی جو پہلے دریافت کی گئی ہے اعتراض مذکورہ بالا اس مساوات لآ = ۲ کے حل کرنی عین ہی ہو سکتا ہے یعنی اس صورت میں یہی قاعدہ مذکورہ بالا جاری نہیں ہو سکتا ہے لیکن اگر جڑوں میں ان کے فرض کریں

ہم ل = ۵ - ۱ تو حاصل ہوگی ہم یہ مساوات لآ - ۳ + ۲ + ۱ = ۲ یا یہ مساوات لآ = ۳ - ۲ + ۱ اور جسوقت فرض کریں ہم قی = و اور کج = و اور ل = ۳ تو حاصل ہوگی یہ مساوات ل = ۳ - ۳ + ۱ = ۱ اور اس مساوات سے یہ بات ظاہر ہے کہ جسوقت معلوم ہوں تین اجزاء اور وقت معلوم ہو سکتے ہیں انکی لگے کی جڑ سند مطلوب میں اگر فرض کریں ہم کہ اول تین اجزاء اس سلسلہ کی ۱۰۰ میں تیریدہ اجزاء کا سند آئندہ

۱۰۰ ۳ ۶ ۱۲ ۲۴ ۴۳ ۶۳ ۱۲۲ ۲۲۲ وغیرہ اخیر جز اس سلسلہ سے حاصل ہوتی ہے یہ قیمت آ کی و =  $\frac{۲۲۲}{۱۲۲}$  اور اسے واسطی ل = ۱ - و = ۱ -  $\frac{۲۲۲}{۱۲۲}$  =  $\frac{۱۲۲}{۱۲۲}$  = ۱ یہ قیمت تریک آ کے ہے کسواسطے کہ کجب  $\frac{۵}{۴}$  کا  $\frac{۱۲۵}{۴۳}$  ہے اور ۲ =  $\frac{۱۳۸}{۴۵}$  پس غلطی فقط  $\frac{۳}{۴۳}$  ہے

### مثالین واسطی مشق کی

- ۱ فرض کرو کہ لآ = ۲ - ۱ = ۱ کیا یہ قیمت لآ کی جواب ل = ۵، ۱۳، ۲۵، ۴۰ = ۵
- ۲ فرض کرو کہ لآ = ۱۵ - ۱۱ + ۱۳ - ۵ = ۵ کیا یہ قیمت لآ کی جواب ل = ۱۵، ۲۸، ۴۰، ۴۹ = ۵
- ۳ فرض کرو کہ لآ = ۳ - ۱۱ - ۵ = ۵ کیا یہ قیمت لآ کی جواب ل = ۱۰، ۲۴، ۱۵ = ۵
- ۴ فرض کرو کہ لآ = ۵ + ۲ + ۳ + ۱۲ + ۵۵ = ۵ کیا یہ قیمت لآ کی جواب ل = ۵، ۲۱، ۲۳ = ۵
- ۵ فرض کرو کہ لآ = ۱۲۰ + ۳۴۵ + ۵۸۰۵۹ = ۵ کیا یہ قیمت لآ کی جواب ل = ۲۲، ۴۵، ۲۲ = ۵

## باب حارم مطالب مختلفہ فضل اول ترتیب و اجتماع کی بیان

۱ اگر کئی مقدار میں مختلف ترتیب سے نبت کی جاوے تو بے مختلف ترتیب میں مقدار دن مذکور کی ترتیب میں  
کہا ہی میں مثلاً سب مختلف ترتیب میں حروف آ اور ب اور س کی کہ دو دو الگ نبت کیجاوے میں  
ہوگی آت اور ب آ اور آس اور س آ اور ب س اور س ب

۲ اگر کئی مقدار میں ہوں اور ضمیر لحاظ ترتیب کے اولیٰ مختلف مجموعے بناکر الگ الگ نبت کریں  
تو ان مجموعوں کو اجتماع مقدار دن مذکور کا کہتے ہیں مثلاً آ ب اور ب س اور آس میں مختلف اجتماع  
مقدار دن آ اور ب اور س سے کہ کبھی جاوے دو دو اکٹھے اور یہاں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ  
آ ب اور ب آ اگرچہ دو ترتیب ہیں لیکن ان دونوں کا اجتماع ایک جہاں ہے

۳ اگر ن کئی تعداد میں مقدار میں ہوں اور اگر او میں سے دو دو کو اکٹھا کریں تو تعداد ترتیبوں کی  
تصیر کی جاگیں ن (ن-۱) سے اور اگر تین تین اکٹھے لکھی جاوے تو تعداد مختلف ترتیبوں کی ہوگی  
یہ ن (ن-۱) (ن-۲) دیں اسکی یہ ہے اگر ن کئی تہ ہوں مثلاً آ ب س دو عشرہ  
ہوں اور اگر آ کو پہلے ہر ایک کی باقی حروف میں سے نبت کریں تو ظاہر ہے کہ (ن-۱) کئی مختلف ترتیبیں  
پیدا ہوں گی لیکن اگر ب کو پہلے سب حروف کی کہیں تو بھی اتنی ہی ہوں گے (ن-۱) کئی مختلف ترتیبیں حروف  
مذکور کی پیدا ہوں گی اور علیٰ ہذا القیاس میں کل تعداد ترتیبوں کی تصیر کیجاگیں سب ن (ن-۱) سے  
اور ترتیبیں مذکور اس شکل کی ہوگی آ ب آ س س آ وغیرہ اگر (ن-۱) کئی شے  
تعداد میں ہوں اور آ کو دو دو لیکر اکٹھا کریں تو موافق گذشتہ کے تعداد مختلف ترتیبوں کے یہ  
(ن-۱) (ن-۲) ہوگی اور اگر ان سب ترتیبوں کے پہلے آ کو لکھ دیں تو ظاہر ہے کہ تین تین حروف  
کی ترتیبیں تعداد میں (ن-۱) (ن-۲) کئی ہوگی اور ان سب میں آ اول ہوگا لیکن اتنی ہی ترتیبیں  
ہوگی جنہیں ب اول ہوگی اور یہی قیاس کرنا چاہیے واسطی باقی حروف کی پس کل تعداد ترتیبوں حروف  
مذکور کے کہ تین تین نبت کی جاوے یہ ہوگی ن (ن-۱) (ن-۲)

۴ اگر جاری کریں ترکیب مرقومہ بالا کہ تو ظاہر ہو جاگا کہ اگر ن کئی شے میں سے ر کئی کو اکٹھا  
الگ الگ کہیں تو کل تعداد ترتیبوں کے

ن (ن-۱) (ن-۲) (ن-۳) ... (ن-۴) ہوگی

۵ اگر ن گنتے حرف تعداد میں ہوں اور انکو دو دو کو الگ الگ لکھیں تو تعداد اجتماعوں کی  
 ن  $\frac{(1-n)(2-n)}{1 \times 2 \times 3}$  ہوگی اور اگر تین تین الگ الگ لکھیں تو تعداد مذکورہ  $\frac{(1-n)(2-n)(3-n)}{1 \times 2 \times 3}$  ہوگی دلیل  
 اسکی یہ ہے صورت اول میں تعداد ترتیبوں کے ن (ن-۱) ہوگی لیکن ہر ایک اجتماع مثلا اب  
 میں ہوتے ہیں دو ترتیبیں مثلا اب اور ب اس معلوم ہوا کہ تعداد ترتیبوں کی دو چند ہوتی ہے  
 تعداد اجتماعوں کی سے یہ ن  $\frac{(1-n)(2-n)}{1 \times 2 \times 3}$  ہوگی اب ظاہر ہے کہ اگر ن گنتے شے ہوں اور ان میں سے  
 تین تین الگ الگ لکھیں تو تعداد ترتیبوں کی ن (ن-۱) (ن-۲) ہوگی اور یہ بھی ظاہر ہے کہ ہر  
 اجتماع تین چیزوں کی میں  $1 \times 2 \times 3$  ترتیبیں ہوتی ہیں تو معلوم ہوا کہ ترتیبیں نسبت اجتماعوں  
 کے  $1 \times 2 \times 3$  دفع زیادہ ہیں اور اسے واسطی تعداد کل اجتماعوں کے یہ ہوگی

$$\frac{(1-n)(2-n)}{1 \times 2 \times 3}$$

۶ اسپر سی یہ بھی ظاہر ہوتا ہے کہ اگر ن گنتے شے ہوں اور ان میں سے ر گنتی الگ الگ  
 لکھی جاویں تو کل تعداد اجتماعوں کی یہ ہوگی  $\frac{(1-n)(2-n) \dots (n-r)}{1 \times 2 \times 3 \dots r}$

مثال ۱ بناو گنتی میں ترتیبیں حروف لفظ حمد کی دو دو لکھی جاسکتی ہیں یہاں ظاہر ہے کہ

$$ن = ۳ \text{ اور } ر = ۲ \text{ پس تعداد ترتیبوں کی ہوگی } = ۳ \times (۳-۱) = ۳ \times ۲ = ۶$$

مثال ۲ ایک شخص کے پاس سات رنگ تھی اور اسنے دو دو رنگ ملا کر اونکو بنائے

بناو کل تعداد رنگوں کی کیا ہے یہاں ظاہر ہے کہ ن = ۷ اور ر = ۲

$$\text{اور } \therefore \text{تعداد مطلوب} = \frac{۷ \times ۶}{۲} = ۲۱ = ۷ \times ۳$$

۷ اگر ن گنتی چیزیں ہوں اور انسی ر گنتی الگ الگ لکھی جاویں تو تعداد اجتماعوں کو مستقدر

ہوگی مستقدر (ن-۱) الگ الگ لکھتے ہی ہوتی ہے واسطی کہ جو گنتی الگ الگ لکھی جاویں

تو صاف (۶) کے تعداد اجتماعوں کے یہ ہوتی ہے  $\frac{(1-n)(2-n) \dots (n-r)}{1 \times 2 \times 3 \dots r}$

$$(1-n) \dots (2-n) \dots (n-r)$$

اب اگر اس صورت میں سجا ترکی ن۔ ر لکھیں تو یہ حاصل ہوتا ہے  $\frac{(1-n) \dots (2-n) \dots (n-r)}{1 \times 2 \times 3 \dots r}$

اور ظاہر ہے کہ جو گنتی ر کم ہو دیے ن۔ ر سے اسوقت صورت گذشتہ اسطر کی ہو جاوے گی

$$\frac{n(n-1)\dots(n-r+1)(n-r)\dots(1+r)\dots(1)}{(n-r)\dots(1+r)\dots r \dots 3 \times 2 \times 1} \quad (۱) \text{ کو چونکہ اجزاء ضربی شمار کنندہ میں کسی خاصے میں اور بننا}$$

میں کچھ ہو جاتی ہیں اس سبب سے اگر زیادہ ہوں - یہی صورت گذشتہ اس شکل کی ہو جاوے گی

$$\frac{n(n-1)\dots(1+r)\dots r(1-r)\dots(1+n-r)}{(n-r)\dots(1+r)\dots r} \dots (۲)$$

اور اختصار کرنی سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ صورت (۱) اور (۲) مساوی ہیں اس مقدار کے

$$\frac{n(n-1)\dots(1+n-r)\dots(1+r)}{3 \times 2 \times 1} \text{ اور یہی مطلب تھا}$$

۸ اگر کتنی چیزیں ہوں اور ادینین کی ایک چیز کی کئی بار شمار کی گئی ہو اور ن ہی کتنے کو اگھا کر کر الگ الگ لکھیں تو بتاؤ کہ تعداد ترتیبوں کی کیا ہوگی فرض کرو کہ چیزیں نہ کو آ ب ۶ وغیرہ میں اور انہیں سے آ ت دفعہ شمار کیا جاتا ہے اور ت ق دفعہ شمار کیا جاتا ہے اور ح کہ دفعہ اور علی ہذا فی س اور فرض کرو کہ ط بقیر کرتا ہے کئی تعداد ترتیبوں مطلوب کو اب اگر ہم یہ بات فرض کریں کہ آ جوف دفعہ شمار ہوتے تھے جبکہ س مختلف حروف ہو گئی تو ظاہر ہے کہ فقط انہیں حروف کے ترتیبوں جو کل تعداد یعنی ن کے موافق ہیں اس صورت سے بقیر ہوگی  $3 \times 2 \times 1 \dots$  ن سے اور اس سوا سہی لازم آتا ہے کہ ط ترتیبوں مطلوب میں سے ہر واحد میں موافق فرض نہ کر کے  $3 \times 2 \times 1 \dots$  ترتیبیں پیدا ہوگی اور اسی سبب سے تعداد ط ترتیبوں مطلوب کی زیادہ ہو کر اس صورت سے بقیر ہوگی  $3 \times 2 \times 1 \dots$  ن) اب اگر ہم یہ فرض کریں کہ ب سے جوق دفعہ شمار کیا جاتا تھا مختلف حروف ہو گئے تو موافق بیان بالا کی تعداد انہیں حروف کی ترتیبوں کے جو کل ق کو اگھا کر کر لیا دین بقیر ہوگی  $3 \times 2 \times 1 \dots$  ق سے اور اسی سبب سے تعداد ط ترتیبوں کی اس صورت میں زیادہ ہو کر اس صورت سے بقیر ہوگی  $3 \times 2 \times 1 \dots$  ن)  $3 \times 2 \times 1 \dots$  ق) اب اگر اس سبب سے حروف کو جو کئی کئی بار شمار کی جاتے تھے مختلف حروف فرض کریں تو تعداد ترتیبوں ط کی زیادہ ہو کر اس صورت سے بقیر ہوگی  $3 \times 2 \times 1 \dots$  ن)  $3 \times 2 \times 1 \dots$  ق)  $3 \times 2 \times 1 \dots$  ن) وغیرہ لیکن یہ بات ظاہر ہے کہ صورت ن کتنی چیزیں مختلف ہوں تو ن کے کو اگھا کر کر الگ الگ لکھیں تو تعداد ترتیبوں کی یہ ہوتی ہے  $3 \times 2 \times 1 \dots$  ن اس سبب اس سبب





اور ایک ایک لڑکے کو جمع کر کر الگ الگ بٹلہ دین تو تعداد اجتماعوں کی کیا ہوگی اس صورت میں ظاہر ہے کہ

$$ن = ۴ \text{ اور } ق = ۵ \text{ اور } ک = ۳ \quad \therefore \text{تعداد مطلوب} = ۴ \times ۵ \times ۳ = ۱۰۵$$

۱۰۔ دو قسم کی چیزیں ہیں اور ہر قسم میں تعداد چیزوں کی علیحدہ علیحدہ ت اور ق ہیں اور دونوں قسم کی چیزوں سے ہم ایسی مجموعیے بنائیں کہ ان ہر واحد میں ت تو ایک قسم کی چیزوں سے اور ن دوسری قسم کی چیزوں سے پائی جائیں تو بناو کہ تعداد ان مجموعوں یا اجتماعوں کی کیا ہوگی۔  
اس کا ظاہر ہے کہ اگر اول قسم میں سے م کتنی چیزوں کے مختلف مجموعی بناویں تو تعداد اجتماعوں کے

ت (ت - ۱) ... (ت - م + ۱) ہوگی اور دوسری قسم کی چیزوں کے مجموعی کم کن کتنی علیحدہ

$$\frac{۱ \times ۲ \times ۳ \times \dots \times (ت - ۱) \times (ت - ۲) \times \dots \times (ت - م + ۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \dots \times ن}$$

علیحدہ کہیں جائیں یہ ہوگی

چاہیں کہ ہر مجموعہ پہلی قسم میں ت مل ہو جائے ہر مجموعہ دوسری قسم کا تو ضرور ہے کہ تعداد ایسی اجتماعوں کی مساوی حاصل ضرب دو صورتوں مذکورہ کی ہوگی یعنی یہ

$$\frac{ت (ت - ۱) \dots (ت - م + ۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \dots \times ن} \times \frac{۱ \times ۲ \times ۳ \times \dots \times (ت - ۱) \times (ت - ۲) \times \dots \times (ت - م + ۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \dots \times ن}$$

اور اسی قیاس

سے یہ بھی معلوم ہوتا ہے کہ اگر سب دو قسم کے زیادہ اقسام اشیاء کی ہوں تو تعداد کل اجتماعوں کی مساوی حاصل ضرب تعداد اجتماعوں سابقہ کی ہوگی

مثال اگر دو قسم گہوڑے ہوں اور تین آتی ہوں اور چار جاگہ گہوڑوں اور دو دو ہتھوں کو علیحدہ

علیحدہ اکٹھا کریں تو ان مجموعوں کی تعداد کیا ہوگی اس کا ظاہر ہے کہ ت = ۱۰ اور ق = ۳ اور م = ۲

$$۲ = ۲ \quad \therefore \text{تعداد مطلوب} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}{۳ \times ۲ \times ۱} \times \frac{۳ \times ۲ \times ۱}{۱ \times ۲ \times ۱} = ۶۳۰$$

### فصل دوسری ثبوت ضابطہ میٹرن صا۔

خیزہ باتیں ایسی ہیں کہ ان پر ثبوت ضابطہ کا موقوف ہے اس واسطے اول اونکا لکھنا ضروری معلوم ہوتا ہے قاعدہ

تقسیم کے بیان میں یہ بات لکھی گئی ہے کہ مقسوم اور مقسوم علیہ میں جو مقدار میں متماثل ایسی ہوں کہ اونہیں نشان

توتیایا جاوے تو خارج قسمت کا نشان تو سو مقدار ہوتی ہے جو مقسوم کے نشان قوت میں سے

مقسوم علیہ کے نشان قوت کو تقزین کرتی ہے باقی رہتی ہے اس کے  $۲ = ۳ - ۱$  اور  $۱ = ۳ - ۲$   $۱ = ۳ - ۲$



اور اس طرح  $b = a$  اور  $s = c$  جاہتے ہیں دریا ت کرنا  $(n+1)$  کا مجموعہ انہی  $m$  کی مقدار کی ایک سلسلہ میں خواہ  $m$  ایک مقدار صحیح ہو خواہ کسر اور خواہ مثبت ہو خواہ منفی

چونکہ  $(n+1) = \left\{ \left( \frac{n}{1} + 1 \right) \right\} = 1 \left( \frac{n}{1} + 1 \right)$

اگر  $(s+1) = 1 + s + s + s + \dots + s + s + s + \dots$  وغیرہ

تو  $(n+1) = 1 \left( \frac{n}{1} + 1 \right)$

$= 1 \left( 1 + s + s + \dots + s + \frac{n}{1} + \dots + \frac{n}{1} + \dots \right)$  وغیرہ

$= 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 1 + \dots$  وغیرہ

صورت اول میں فرض کرو کہ  $m$  ایک مقدار مثبت اور صحیح ہے

تو  $(s+1)^m = (s+1) \times (s+1) \times (s+1) \times \dots \times (s+1)$  .....  $m$  تک

اور ضرب دینی سے چند ان مساوی مفرد اور مفرد نیو کی معلوم ہو جائیگا جنہیں کہ پہلے دو درتین حاصل ہوتے ہیں

سلسلہ میں  $1 + m$  اور باقی کی رتین اس شکل کی ہیں یعنی  $s + s + s + \dots + s + s + s + \dots$  وغیرہ اور یہاں  $s + s + s + \dots$  وغیرہ سے غیر معلوم ہیں اور کچھ علاوہ لڑتے ہیں دیکھنے اگر زیادہ یا کم ہو تو اولی قیمت میں ہتین فرق اسکتی اور اس پر اسطی معلوم ہو اگر  $b = m$  کے صورت دوسرے

اگر فرض کریں  $m$  کو ایک مقدار منفی لیکن صحیح تو فرض کرو  $m = -n$  تو

$(s+1)^{-n} = \frac{1}{(s+1)^n} = \frac{1}{s+s+s+\dots+s+s+s+\dots}$  وغیرہ \*

∴  $b = -n = m$  صورت تیسری اگر فرض کریں  $m$  کو ایک مقدار مثبت لیکن کسر تو فرض کرو  $m = \frac{1}{d}$  تب

$(s+1)^{\frac{1}{d}} = 1 + s + s + s + \dots + s + s + s + \dots$  وغیرہ

∴  $(s+1)^d = (1 + s + s + s + \dots + s + s + s + \dots)$  وغیرہ

∴  $1 + s + s + s + \dots + s + s + s + \dots = \left\{ (1 + s + s + s + \dots + s + s + s + \dots) \right\}^{\frac{1}{d}}$  وغیرہ

$= 1 + s + s + s + \dots + s + s + s + \dots$  وغیرہ

خاص ہو کہ  $(1 + s + s + s + \dots + s + s + s + \dots)$  میں کہ مادی  $(s+1)^{\frac{1}{d}}$  کی قیمت  $n$  وقت دکا کہ نہیں ہو سکتا کہ اسطی کہ اگر  $s$  یا  $1$  ہو تو سب سے  $(s+1)$  کو کہ اسی وقت کہ صودہ کہیں جس وقت کا وہ جذری کہ اس حاصل صودہ بنی تان وقت دکا کہ ہوگا جو بظاہر فرض کی کہ چونکہ  $(s+1)$  میں دکا وقت کا نشان آہی جو ایک مقدار صحیح ہے



ان دونوں میں سے قوی شمار لانا اور وہ ایک اس میں مساوی ہیں موجب مرقوم بالا کے اور اس پر اسے  

$$m = (1 - r) \dots \dots \dots = s \dots \dots \dots \frac{m(1 - r)}{r}$$

$$s = (1 - r)m = \frac{m(1 - r)}{r} \dots \dots \dots = s \dots \dots \dots \frac{m(1 - r)}{r}$$

$$s = (1 - r)m = \frac{m(1 - r)}{r} \dots \dots \dots = s \dots \dots \dots \frac{m(1 - r)}{r}$$

اور  $s = (1 - r)m = \frac{m(1 - r)}{r} \dots \dots \dots = s \dots \dots \dots \frac{m(1 - r)}{r}$   
 وغیرہ = وغیرہ = وغیرہ اب حاصل ہوتا ہے

$$(1 + l) = 1 + m^{-1} + l + \frac{(1 - r)m}{r \times 1} + \dots \dots \dots + \frac{(1 - r)m}{r \times 2 \times 1} + \dots \dots \dots + \frac{(1 - r)m}{r \times 3 \times 2 \times 1} + \dots \dots \dots$$

$$+ \frac{(1 - r)m}{r \times 3 \times 2 \times 1} + \dots \dots \dots + \dots \dots \dots$$

یہی ہر ضابطہ میں صاحب کا ادراک اس پر بھی حاصل ہوتا ہے  $(1 - l)$

$$1 - m^{-1} + l + \frac{(1 - r)m}{r \times 1} - \frac{(1 - r)m}{r \times 2 \times 1} + \dots \dots \dots + \dots \dots \dots$$

ہم ترکیب واسطی کائنی کے جذری اور جذری وغیرہ یعنی نزدیکی مرتبہ کا بیشتر فارمولہ میں سے  
 جو ضابطہ میں صاحب سے حاصل ہوئے ہیں ایک فائدہ عظیم یہ ہے کہ نکال سکتے ہیں ہم کسی عدد کا  
 نزدیک کسی مرتبہ کا واضح ہو کہ تعبیر کر سکتے ہیں ہم ہر عدد کو جو زیادہ ہی آئے ساتھ اس  $1 + l$  کے  
 اور ہر عدد کو جو کم ہی آئے ساتھ اس  $1 - l$  کے اور اس جائز کر سکتے ہیں تاکہ واسطی ایک عدد  
 صحیح یا کسر ضابطہ میں صاحب کے سے واضح ہو کہ

$$(1 + l) = 1 + m + \frac{(1 - r)m}{r \times 1} + \frac{(1 - r)m}{r \times 2 \times 1} + \dots \dots \dots$$

$$+ \frac{(1 - r)m}{r \times 2 \times 1} + \dots \dots \dots + \dots \dots \dots$$

اب فرض کروم  $\frac{1}{r}$  یعنی کائنی میں ہم جذری  $(1 + l)$  کا تو

$$(1+p) = \frac{1}{p} + \frac{p}{2} + \frac{p^2}{8} + \frac{p^3}{24} + \frac{p^4}{64} + \dots \text{ وغیرہ}$$

اسی طرح سی اگر فرض کریں ہم  $\frac{1}{p} =$  معلوم ہو جائیگا ہمیں کب  $(1+p)$  کا اور اگر  $\frac{1}{q} =$  مرتبہ کا نزولی  $(1+p)$  کا معلوم ہو جائیگا جاسیے ہم دریافت کرنا کب اس کا بوسیدہ ضابطہ نیوٹن صاف کے ظاہر ہو کہ  $\sqrt[3]{21} = \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{24 + 1} = \sqrt[3]{\left(\frac{24}{p} + 1\right)}$

$$3 \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{14}{24} \times \frac{1}{p} \times \frac{1}{p} - \frac{2}{24} \times \frac{1}{p} + \dots\right) \text{ وغیرہ}$$

$$3 = \frac{2540}{33044221} - \frac{320}{531221} + \frac{14}{2182} - \frac{2}{24} + 3 = \text{وغیرہ}$$

لیکن

$$35158860 = \begin{cases} 35 \dots \dots = 3 \\ 0.5 \dots 15 = \frac{2}{24} \\ 0.5 \dots 40 = \frac{320}{531221} \\ 0.5 \dots 31 = \frac{14}{2182} \\ 0.5 \dots 4 = \frac{2540}{33044221} \end{cases}$$

بیس معلوم ہوا کہ کب اس کا فیض  $\sqrt[3]{21}$

### ایک اور طریق ثابت کرنی ضابطہ نیوٹن صاف کا

دافع ہو کہ اس طریق میں تین صورتیں مذکورہ بالا ایک ہی صورت عام سے نکل آتی ہیں اور اسی واسطے ہم اس صورت عام کو دریافت کر سکتے ہیں

فرض کر دو کہ  $p = \frac{p(1-p)}{2 \times 1}$   $\therefore 2p = p(1-p)$

$\therefore 3p = p(1-p)(1-p) = \frac{p(1-p)(1-p)}{3 \times 2 \times 1}$

$\therefore 3p = \frac{p(1-p)(1-p)(1-p)(1-p)}{3 \times 2 \times 1}$

$\therefore 2p = \frac{p(1-p)(1-p)(1-p)(1-p)(1-p)}{2 \times 1}$

$\therefore 3p = \frac{p(1-p)(1-p)(1-p)(1-p)(1-p)(1-p)}{3 \times 2 \times 1}$

$$\text{ص} = \frac{\text{ص}(\text{ص}-1)(\text{ص}-2)\dots(\text{ص}-\text{ح}+1)}{\text{ح}} = \text{ص}(\text{ص}-\text{ح}+1) \dots \text{ص}(\text{ص}-1)$$

ابتدا ہم یہ کہ حاصل ضرب دو سلسلوں  $1 + ط + ط^2 + ط^3 + \dots + ط^{r-1}$  اور  $1 + ص + ص^2 + \dots + ص^{c-1}$  کو ضرب کریں گے اور پھر اسے  $(1 + ط + ص + طص + \dots)$  سے ضرب کریں گے۔

$$\begin{aligned} & (1 + ط + ط^2 + \dots + ط^{r-1})(1 + ص + ص^2 + \dots + ص^{c-1}) \\ &= (1 + ط + ط^2 + \dots + ط^{r-1}) + (ص + طص + ط^2ص + \dots + ط^{r-1}ص) + \dots \\ &= (1 + ط + ط^2 + \dots + ط^{r-1}) + (ص + طص + ط^2ص + \dots + ط^{r-1}ص) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (1 + ط + ط^2 + \dots + ط^{r-1}) + (ص + طص + ط^2ص + \dots + ط^{r-1}ص) + \dots \\ &= (1 + ط + ط^2 + \dots + ط^{r-1}) + (ص + طص + ط^2ص + \dots + ط^{r-1}ص) + \dots \\ &= (1 + ط + ط^2 + \dots + ط^{r-1}) + (ص + طص + ط^2ص + \dots + ط^{r-1}ص) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (1 + ط + ط^2 + \dots + ط^{r-1}) + (ص + طص + ط^2ص + \dots + ط^{r-1}ص) + \dots \\ &= (1 + ط + ط^2 + \dots + ط^{r-1}) + (ص + طص + ط^2ص + \dots + ط^{r-1}ص) + \dots \end{aligned}$$

جسوقت صحیح کریں ہم ان سب اجزا کو اور یہ بھی خیال رکھیں کہ ہر دو سطر درمیان ایک جوڑا اجزایں متشابہ ہوتی ہیں جو حاصل ہونگی یہ مساوات

$$\begin{aligned} & (1 + ط + ط^2 + \dots + ط^{r-1})(1 + ص + ص^2 + \dots + ص^{c-1}) \\ &= (1 + ط + ط^2 + \dots + ط^{r-1}) + (ص + طص + ط^2ص + \dots + ط^{r-1}ص) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (1 + ط + ط^2 + \dots + ط^{r-1}) + (ص + طص + ط^2ص + \dots + ط^{r-1}ص) + \dots \\ &= (1 + ط + ط^2 + \dots + ط^{r-1}) + (ص + طص + ط^2ص + \dots + ط^{r-1}ص) + \dots \end{aligned}$$

اب اگر کہیں ہم عدد ۲ ۳ ۴ وغیرہ متواتر بجائی رکھیں تو حاصل ضرب سلسلوں (۱) اور (۲) کا یہ ہوگا



$$1 + (ط + ص) + (ط + ص)^2 + \dots + (ط + ص)^{n-1} = \frac{(ط + ص)^n - 1}{ط + ص - 1}$$

اب اگر ط کو نشان فی سلسلہ اول کی مقرر کرین اور ص کو سلسلہ دوم کی مقرر کرین تو ظاہر ہے کہ یہ بہت ثابت ہوگی کہ حاصل ضرب دو ایسوں سلسلوں کا ایک ایسا سلسلہ ہوتا ہے کہ اس کے تالیقی حاصل جمع اون دو سلسلوں کی نشانیوں کی ہوتی ہے اور یہی ظاہر ہے کہ اگر اس حاصل ضرب کو ایک اور ایسی ہی سلسلہ کے ضرب کرین یعنی حاصل ضرب تین ایسے سلسلوں کا لیون تو تالیقی اس حاصل ضرب کی حاصل جمع میںون سلسلوں کی نشانیوں کی ہوگی اور یہی قیاس کرنا چاہئے اور زیادہ سلسلوں کا۔ اور فرض کرو کہ تعداد سلسلوں کی  $n$  ہے اور تالیقی ہر واحد کی این سے عدد ایک کا ہے تب چونکہ تمام سلسلہ ایک ہی ہیں اور حاصل جمع اون کی نشانیوں کا ان ہی تو ظاہر ہے کہ حاصل ہوگی یہ مساوات

$$(1 + 1 + 1 + \dots + 1) \times 1 = \frac{1 - (1 - 1)^n}{1 - 1} = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 \text{ وغیرہ یعنی } n$$

$$(1 + 1 + 1 + \dots + 1) \times 1 = \frac{1 - (1 - 1)^n}{1 - 1} = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 \text{ وغیرہ یعنی } n$$

پس ثابت ہوا اضابطہ نمونہ صاحب کاج کوشان قوت ایک عدد صحیح مثبت ہے یہ بات بیان یاد رکھنی چاہئے کہ اول طرف اس مساوات میں بجائے  $\frac{1}{2}$  اور  $\frac{1}{3}$  وغیرہ کی اون کی قیمتیں  $\frac{1}{2}$  اور  $\frac{1}{3}$  اور  $\frac{1}{4}$  وغیرہ لکھیں ان صورت دوم میں فرض کرو کہ تعداد سلسلوں کی بطور کد کے  $n$  ہی لیکن تالیقی ہر واحد کی این سے  $\frac{1}{2}$  ہے پس اب چونکہ  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}$  وغیرہ  $n$  عدد تک  $n$

$$\therefore (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}) \times \frac{1}{2} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

مساوات اول کے  $(1 + 1 + 1 + \dots + 1) \times 1 = \frac{1 - (1 - 1)^n}{1 - 1} = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$  وغیرہ  
 یہ ثابت ہوا اضابطہ جیکشن قوت ایک کسبر ہو

صورت سوم میں فرض کرو کہ دو سلسلی ایسے ہیں کہ اون کی نشانیوں  $m$  اور  $m - 1$  ہیں

$$(1 + 1 + 1 + \dots + 1) \times \frac{1}{2} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 1 - \frac{1}{(b+1)^2} \text{ یعنی } (b+1)^2 = 1 - m + 5m - \frac{m^2}{2 \times 1} + \dots \text{ وغیرہ}$$

پس ثابت ہوا ضابطہ یک نشان قوت ایک عدد منی ہو خواہ صحیح خواہ کسر

اگر ان ایک عدد مثبت اور صحیح ہو دیے اور سلسلہ ضربی اور سلسلہ ضربی  $\dots \times 3 \times 2 \times 1$  ن کو ن سے بغیر کرین تو ضابطہ نیولن صاحب اسطور پر لکھا جاسکتا ہے

$$(b+1)^n = n \left\{ \frac{1}{1} + \frac{1-n}{2} + \frac{1-n}{2} \frac{1-n}{2} + \dots + \frac{1-n}{n} \right\}$$

جبکہ ہم ضابطہ کو کام میں لادین اسوقت مناسب ہے کہ اس بات کو یاد رکھیں کہ جس حالت میں اول طرف دو ڈوڑز ہو سکتے ہوں دس حالت میں ہر جز صورت مفصل میں مجموعہ نشان قوت کا ن ہوگا اور جس صورت میں کہ دو ڈوڑز نہ ہو دو دو قوت رسکتے ہوں دس صورت میں ہر جز صورت مفصل میں مجموعہ نشان قوت کا ن ہوگا اور علیٰ ہذا فیض اس سلسلے آسانی کے لازم ہے کہ ہمیشہ (ط + ص) کو ط (ص + 1) ہی تبدیل کرین اور بعد از ان (ط + 1) کی صورت مفصل دریافت کر کی اسکی ہر جز میں ط کو ضرب کرین

$$\text{مثال (۱)} \quad (ط + 1)^n = \left\{ (ط + 1)^2 \right\}^n = ط^n \times (1 + \frac{1}{ط})^n$$

$$= ط^n (1 + \frac{1}{ط})^n + \frac{1-n}{ط} \times \frac{1-n}{2} \frac{(1-n)(1-n)}{3 \times 2 \times 1} + \frac{1-n}{2} \times \frac{1-n}{2} \frac{(1-n)(1-n)}{3 \times 2 \times 1} + \dots \text{ وغیرہ}$$

$$= ط^n + \frac{1-n}{ط} \times \frac{1-n}{2} \frac{(1-n)(1-n)}{3 \times 2 \times 1} + \frac{1-n}{2} \times \frac{1-n}{2} \frac{(1-n)(1-n)}{3 \times 2 \times 1} + \dots \text{ وغیرہ}$$

دفع ہو کر ہر عام کسی سلسلہ کا ہر جز ہوتا ہے کہ اس کے ذریعہ کسی سا جز اسکا دریافت ہو سکتا ہے جاتے ہیں ہم دریافت کرنا ہر عام صورت مفصل (ط + 1) کا ظاہر ہے کہ جز اول ن ہی جز دوم ن ط لے ۱ جز سوم ن (1-n) ط لے ۲ جز چہارم ن (1-n)(1-n) ط لے ۳

ان جزاؤ کی گنت ہر کہ فی یہ معلوم ہوتا ہے کہ ہر کسی جز کا مرکب ہوتا ہے اجزا و ضربی ہے اور ن اور  $\frac{1-n}{2}$  وغیرہ سے اور انکی تعداد اس عدد ہی جو مرتبہ اس جز کے ہے جیسا کہ ہم دریافت کریتے ہیں تعداد کی کم ہوتی ہے جس معلوم ہوا کہ سب سے پہلے جز کا یہ ہے

اور یہ ہے ظاہر ہے کہ نشان قوت کا

$$\frac{(1-n)(1-2n) \dots (1-2n)}{(1-r) \dots 2 \times 1}$$

ساوی اخیر فرضی نسبت نامی ہوتا ہے اور نشان قوت کا مساوی حاصل تقریباً اور نشان قوت کا  
 کی ہوتا ہے جس میں ہوا کہ وہ ان فرضیے جو عام مطلوب ہیں

$$\frac{(1-n)(1-2n) \dots (1-2n)}{(1-r) \dots 2 \times 1}$$

اور ظاہر ہے کہ اگر اس صورت جبر میں کوئی عدد مطابق کسی چیز کے مرتبہ کے بجای رکھی دیکھیں  
 تو وہ چیز نیک معلوم ہو جائیگا

مثال کی یہ پانچواں جز (ط-ص) کا بیان ظاہر ہے کہ  $5 = 12$

∴ جز مطلوب =  $\frac{9 \times 10 \times 11 \times 12}{2 \times 3 \times 4 \times 1} - (ص) \times (ط) = 240 - 16$

### اثبات ضابطہ نیوٹن صفا کا بغیر دراصل فرضی کے

اس ضابطہ میں تین مرتبہ بن صورت اول وہ جس میں نشان قوت ان اہل صحیح اور نسبت ہوتا ہے صورت دوم  
 وہ ہے جس میں نشان قوت ایک مرتبہ ہو صورت سوم وہ ہے جس میں نشان قوت منفی ہو خواہ عرصہ صحیح خواہ کہ اس میں اول صورت کا اشارہ کی میں عمل ضرب

یہ معلوم ہوتا ہے کہ  $(1+a)(1+b) = 1 + (a+b) + ab$

اور  $(1+a)(1+b)(1+c) = 1 + (a+b+c) + (ab+ac+bc) + abc$

$1 - 1 + (1+a)(1+b)(1+c)(1+d) = (1+a)(1+b)(1+c)(1+d) + (ab+ac+ad+bc+bd+cd) + abc + abd + acd + bcd$

$1 + (1+a)(1+b)(1+c)(1+d)(1+e) = 1 + (a+b+c+d+e) + (ab+ac+ad+bc+bd+cd) + (abc+abd+acd+bcd) + abcde$

$(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)(1+e) + (1+a)(1+b)(1+c)(1+d)(1+e)(1+f) = 1 + (a+b+c+d+e+f) + (ab+ac+ad+bc+bd+cd) + (abc+abd+acd+bcd) + (abcd+abcde) + abcdef$

جاری رکھیں تو متاثر جاری رکھیں تو متاثر یہ معلوم ہو جائیگا کہ بطور گزشتہ کی اجزاء حاصل ضرب کے  
 زیادہ ہوتی جائیگی خواہ تعداد اجزاء فرضی مثل  $(1+a)$  اور  $(1+b)$  وغیرہ کی مقدار ہو یعنی  
 یہ انتظام یا قانون حاصل ضرب کا دریافت ہو گا کہ اسی میں قوی لاکھی ہر جز میں کم ہوتی جاتی ہیں اور یہ  
 بڑا نشان قوت مساوی تعداد اجزاء فرضی کے ہے اور ائمہ کی اجزاء حاصل ضرب میں نشان قوت کا بقدر  
 عدد لاکھی بتدریج کم ہوتا جاتا ہے اور یہ بھی معلوم ہو گا کہ عدد لاکھی جز حاصل ضرب کا عدد لاکھی اور عدد لاکھی  
 چیز کا حاصل جمع مقداروں اور ب اور س وغیرہ کا ہے اور بتدریج جز کا حاصل جمع حاصل ضربوں







قوت سی بنتا ہی ایک عدد صحیح مثبت ہوگا اس واسطے کہ ظاہر ہے کہ  $(1+r)$  دین جز کا یہ ہے  
 $n(1-n) \dots (2-n) \dots (n-r)$  اور موافق قاعدوں اجتماع کے ظاہر ہے کہ یہی قاعدہ

$$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times r$$

اجتماعوں آن چیزوں کے کہ ردیف اکٹھی کی جاوین اب موافق تعین اجتماع کی لازم ہے کہ صورت جبریہ  
 مذکور ایک عدد صحیح عدد مثبت ہووی اگر ہم  $n$  اور  $r$  کو صحیح اور مثبت مانی تو ثابت ہوادی  
 دریافت کیا جاتے ہیں ہم قاعدہ اجزاء صورت مفصلہ کسی صورت ثنائی کی پہلے ثابت ہو چکا ہے کہ  $r+n$  اور

$$(1+n) \dots (2+n) \dots (1+r+n) \times (1+n) \dots (r+n)$$

بیس اب ظاہر ہے کہ اگر اس صورت میں  $r$  ایسا ہووی کہ  $n-r+1 = 0$  یعنی اگر  $n$  ہووی  
 ایک مثبت عدد صحیح اور  $r$  ایسا ہووی کہ  $r+n+1$  ایسے نسبت نشان قوت  $n$  کے بقدر عدد  
 ایک کی زیادہ ہووی تو ظاہر ہے اس صورت میں کہ بعد  $r$  دین جز کے کوئی اور جز باقی نہیں رہتا  
 یعنی صورت مفصلہ تمام ہو جاتی ہے اور اس واسطے معلوم ہوا کہ قاعدہ مطلوبہ اجزاء کی  $n+r$  ہے

یعنی قاعدہ مذکور نسبت نشان قوت کی بقدر عدد ایک کی زیادہ ہو چکا ہے اگر  $n$  ہووی ایک عدد منفی  
 یا ایک سر تو ظاہر ہے کہ  $n-r+1$  صفر نہیں ہو سکتا ہے گو کچھ ہی قیمت واسطے  $r$  کی فرض کریں معلوم  
 ہوا کہ ان صورتوں میں قاعدہ اجزاء کی غیر نہایت ہوگی مثلاً قاعدہ اجزاء صورتوں مفصلہ  $(1+n)^2$   
 اور  $(1+n)^3$  کی  $r$  اور  $r$  ہی لیکن قاعدہ اجزاء صورتوں مفصلہ  $(1+n)^4$  یا  $(1+n)^5$  کی

غیر نہایت ہے جب کہ  $(1+n)$  کی کوئی قوت لیکن اور نشان قوت ایک عدد صحیح اور مثبت ہوادی  
 ثابت کر دو کہ اسکی صورت مفصلہ کی شروع اور اخیر سی کوئی دو جز مساوی فاصلوں پر لین تو ان جزوں  
 میں سرودی ہونگی دلیل اسکی یہ ہے جو کہ کل قاعدہ اجزاء کی  $n+r$  ہے تو ظاہر ہے کہ  $r+n$  اور  $n$  جز  
 اخیر سلسلے سے  $(n+r)$  اور  $(n-r)$  یعنی  $(n-r+1)$  اور  $(n-r)$  جز شروع سے ہی ہوگا پس جسوقت  
 لکھا ہے یعنی  $n-r+1$  بجای  $r$  کے تو سر جز مذکور کا موافق مضامین گذشتہ کی یہ ہوگا

$$\frac{n(1-n) \dots (2-n) \dots (1-n-r) \dots (1-n)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-r)}$$

$$= \frac{n(1-n) \dots (2-n) \dots (1+n)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (1-n)}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)(n-r)}{(1+r)\dots(n-r)} = \text{اور یہ اس وقت تک رہے گا جب تک}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)(n-r)}{(1+r)\dots(n-r)} = \text{اور یہ اس وقت تک رہے گا جب تک}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r\dots\dots\dots r} = \text{اور یہ دو صورتیں ہو سکتی ہیں}$$

= سر (1+r) دین جزئی شرح سے واضح ہو کہ یہ بات ثابت ہو سکتی ہے جبکہ کہیں ہم ط بجای

لا کے اور لاجباً ط کے یعنی صورتیں مفصل (لا+ط) اور (ط+لا) کے لیکر ان کو مساوی ایک دوسری کے  
 کہیں اور بعد از ان اون اجزاء کی سر و کونجمن تو ہی متماثل اور ط کی باقی جا دین مساوی ایک دوسری کے کہیں  
 حکم یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر (لا+ط) کی صورت مفصل لین اور ن ایک مقدار صحیح اور مثبت فرض کریں  
 تو فقط اول سے ادبی سلسلہ کو دریا ت کر کے باقی اجزاء پہلی اجزاء سے یا کسے جا سکتی ہیں مثلاً

$$(ط+ص) = ط + ۴طص + ۲۱طص^۲ + ۳۵طص^۳ + ۳۵طص^۴ + ۲۱طص^۵ + ۴طص^۶ + ص$$

دریا ت کیا جاتے ہیں نہایت بڑا یعنی سے اعظم جز اجزاء صورت مفصل (ط+ص) میں سے ظاہر ہو کہ  
 $\frac{r+1}{r}$  ادا ن جز اس صورت مفصل کا (ن-1) ..... (ن-1+r) ط ص اور سب دان

$$r \dots\dots\dots r \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\frac{n(n-1)\dots(n-r+1)(n-r)}{(1+r)\dots(n-r)} = \text{اور یہاں سے معلوم ہوا کہ } r+1 \text{ ادا ن}$$

جز ر دین جز سے نکل سکتا ہے اگر ضرب کریں ر دین جز کو  $\frac{n-r+1}{r}$  جبکہ ر کہ ایک عدد صحیح  
 ہی نہایت کم ہو مگر یہ نہ  $\frac{1+r}{r}$  نہایت زیادہ ہو اور اس وقت  $\frac{1+r}{r}$  صحیح ہے۔

ہو تو ظاہر ہے کہ اس صورت میں ر دان جز سے بڑا جز تمام اجزاء صورت مفصل میں سے ہو گا تو اتنی اس  
 فرض کیے  $\frac{n-r+1}{r}$  صحیح ہے اور  $\frac{1}{r} = (n-r+1) \times (ط+ص) = (n+1) \times ص$

ر کے (1+n) صحیح ہے پس فرض کر دو اسے ر کی اول ہی عدد صحیح ایک کدہ زیادہ ہو  
 (ن+1) صحیح ہے اور اس صورت میں بیشک ر دان جز سے زیادہ ہو گا اگر (ن+1) صحیح  
 ایک عدد صحیح ہو تو ظاہر ہو کہ  $\frac{1}{r} = \frac{n-r+1}{r}$  اور ر دان جز مساوی ر+1



کے جو کا یعنی دو جز صورت معضد کی ایسی ہونگی کہ ہر واحد ان میں سے سب باقی اجزاء یعنی زیادہ ہوگا حکم جب ہم دریافت کرتے ہیں اس طور سے بڑا جزا و صورت ہم دریافت کرتے ہیں اس مقام یا نقطہ کو جہاں اجزاء اسلئے کی ترتیب ہوئی ہے کہ ان میں یا مواضع اصطلاح کجیاں سے سلسلہ مایل بہ اختتام ہوا۔

شروع کرتا ہے

**مثال** دریافت کیا جاتے ہیں ہم سب سے بڑا جزا و صورت معضد  $(50 + 3)$  کا جبکہ  $\frac{1}{p} = \frac{1}{11}$  اگر جہاں  $(n + 1)$   $\frac{1}{p} = \frac{1}{11} = \frac{5}{11} \times 9 = \frac{9}{11+3} \cdot (1+8) = \frac{9}{14} = \frac{1}{1.57}$  اور اس سے زیادہ عدد ہے پس معلوم ہوا کہ سب سے بڑا جزوہ وان جزوی دریافت کیا جاتے ہیں ہم حاصل جمع سرورن کا جو حاصل جمع کسی دو مقداروں کی کسی ترتیب کی صورت معضد میں باقی جاوین چونکہ

$$(1+n) = (1+n) + 1 + n + \frac{n(n-1)}{3 \times 1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} + \dots + \text{دیگرہ}$$

خواہ واسطی لاکے کوئی قیمت فرض کریں تو فرض کر لے  $1 = 1$

$$(1+n) = (1+n) + 1 + n + \frac{n(n-1)}{1 \times 1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} + \dots + \text{دیگرہ}$$

$\therefore$  حاصل جمع تمام سرورن

**مثال**  $(1+p) = 1 + p + 1 + p + 1 + p + \dots + 1 + p + 1 + p + 1 + p + \dots$

$$p = 32 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 =$$

جانتے ہیں ہم دریافت کوئی مختلف ترتیب کی منزل تقریباً عددی بزرگہ ضابطہ نمونہ کی ظاہر ہو کر

$$n \pm 1 = (n \pm 1) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \pm \dots$$

مفروضہ جہاں مرتبہ کا نزول دریافت کیا جاتے ہیں تو فرض کر دو کہ  $n$  کی نسبت ترتیب قوت کے فرض کر دو  $n \pm 1 = n$  اور اس جہاں قوت بہت کم ہے نسبت  $n$  کے اور علامت  $+$  یا  $-$  کی

مواضع صورتوں  $n$   $n \pm 1$  اور  $n$  کی یعنی جہاں سے اس صورت میں ظاہر ہو کر

$$n = n \pm 1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \pm \dots$$

$$\left\{ n \pm 1 = n \pm \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \pm \dots \right\}$$



یعنی  $1 = 1 - (r+1) + (r+1) + 1 + \dots + (1-1) + 1 = (1+r) + (1+r) + \dots + (1+r) + 1$   
 اسی طرحی باقیات بعد از اجزاء کی صورتوں میں مفصل (1-1) اور (1-1) کی دریا ہوگی۔  
 واضح ہو کہ ہم جنس حاصل ضرب وہ حاصل ضرب مقداروں کی کہلاتی ہیں جنہیں اجزاء ضربی خواہ اکیسے خواہ  
 مختلف ہوتی ہوں مثلاً  $1^3$  اور  $1^2$  حاصل ضرب ہم جنس ہیں اس واسطے کہ دو اجزاء ضربی میں ہیں جنہیں  
 $1^3 + 1^2 + 1^1$  اور  $1^2 + 1^1 + 1^0$  میں اب فرض کرو کہ ان مقداروں میں  $1$   $2$   $3$  وغیرہ ہیں  
 اور  $r$  مرتبہ کی حاصل ضرب ہم جنس کی تعداد دریافت کیا جاسکتی ہے میں اب بذریعہ عمل نقشہ یا ضابطہ  
 نیوٹن صاحب کے یہ مساواتیں حاصل ہوگی

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n + \dots$$

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n + \dots$$

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n + \dots$$

وغیرہ = وغیرہ

$$\therefore \frac{1}{1-r} \cdot \frac{1}{1-r} \cdot \frac{1}{1-r} = \dots + 1 + (1+r) + (1+r)^2 + (1+r)^3 + \dots$$

$$(1 + 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n + \dots)$$

وغیرہ اور یہاں ظاہر کہ سر لاکا حاصل جمع مرتبہ کی حاصل ضربوں ہم جنس مقداروں  
 $1 - r$  وغیرہ کا ہی  $1$  واسطی دریافت کرنے حاصل جمع ان حاصل ضربوں کی فرض کرو کہ  
 $1 = r = 1 = 2 = 3 = \dots = n$  اور اس صورت میں سر لاکا کی عدد مطلوب ہوگا  
 لیکن موافق اس فرض میثالی ہر نے سب مقداروں کے ذہنی طرف مساوات گذشتہ کے  
 (1-1) ہو جائیگی اور یہ موافق ضابطہ نیوٹن صاحب کے اس صورت کی ہوتی ہے

$$1 + n + n^2 + n^3 + \dots + n^n + \dots$$

$$+ \frac{n(n+1)(2+n) \dots (n+r-1)}{r}$$

$$\text{عدد مطلوبہ} = \frac{n(n+1)(2+n) \dots (n+r-1)}{r}$$

حکم یہاں سے ہم دریافت کر سکتے ہیں کہ تعداد اجزا کسی کثیرالاجزاء مثل  $(1 + m + m^2 + m^3 + \dots + m^{n-1})$  کی  
 اسوائے کہ یہ تعداد مطلوبہ اور تعداد  $n$  میں کسی حاضف یوں  $r$  مقداروں کی انکیسی ہوتی ہے جسے تعداد مطلوبہ  
 یہ ہے  $r(1+r)(1+r^2) \dots (1+r^{n-1})$  اگر  $r=2$  یعنی صورت  $(1+r)$  ہو تو تعداد مطلوبہ

$$1+n = \frac{(1+n) \dots 2 \times 3 \times 2}{n \dots \dots \times 3 \times 2 \times 1} \text{ یہ ہوگی}$$

اگر  $r=3$  یعنی صورت  $(1+r)$  ہو تو تعداد مطلوبہ یہ ہوگی

$$\frac{(1+n)(2+n)}{2 \times 1} = \frac{(1+n) \dots \times 5 \times 4 \times 3}{n \dots \dots \times 3 \times 2 \times 1}$$

اگر  $r=4$  یعنی صورت  $(1+r)$  ہو تو تعداد اجزا کی ہوگی یہ

$$\frac{(1+n)(2+n)(3+n)}{3 \times 2 \times 1} = \frac{(1+n) \dots \times 6 \times 5 \times 4}{n \dots \dots \times 3 \times 2 \times 1}$$

اور یہی قیاس کرنا چاہئے اور نسبت  $r$  کی یہ  
**ضابطہ غیر متوازن قوت کا**  
 چاہتے ہیں دریافت کرنا صورت مفصل ط ل کی جسمین کہ تو ای مختلف ل کی بائے جاوین  
 واسطی انبات اس سلسلہ باضابطہ ہم ایک اور طریق ہلکتے ہیں  
 اور نیز یہ ضابطہ نیوٹن صاحب کے یہ

$$\left\{ 1 + n(1-p) + n \frac{1-p}{2} + n(1-p) + n \frac{1-p}{4} + n \frac{1-p}{8} + \dots + n \frac{1-p}{2^{n-1}} + \dots \right\} =$$

$$\left\{ 1 + (1-p) - (1-p) \frac{1-p}{2} + (1-p) \frac{1-p}{4} - (1-p) \frac{1-p}{8} + \dots + n \frac{1-p}{2^{n-1}} + \dots \right\} =$$

اور اس جاسیے اردن  $(1-p)$  کی شامل ہیں



فرض کر سکتی ہیں ہم دیئے ان  $10, 20, 30, 40, 50$  کے ایسی مقدار کہ سلسلہ  $\tau, \tau^2, \tau^3, \tau^4, \tau^5, \tau^6, \tau^7, \tau^8, \tau^9, \tau^{10}$  متعلق ہو کے سلسلہ عددوں  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$  وغیرہ کے کہینی  $\tau^2 = 2$  اور  $\tau^3 = 3$  اور اسی قیاس پر منکر فرض کر دو  $\tau = 10$  اور چونکہ  $10 = 10$  اور  $10 = 10$  تو معلوم ہوا کہ دیئے نشان قوت میں  $10$  کے جو کہ  $10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8, 10^9, 10^{10}$  وغیرہ کو مساوی  $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$  تک ضرور ہیں کہ واقع ہوں باہر اور آ کے منکر فرض کر دو کہ جائے ہیں ہم دریافت کرنا لوکار سم عددہ کی اب  $10^1 = 10, 10^2 = 100, 10^3 = 1000$  اور ایسے یہ نتیجہ نکاتی ہیں ہم فرض کر ہم نشان قوت  $10$  کا ایک سر کچھ زیادہ  $\frac{1}{2}$  ( $= 49494949$  وغیرہ) ہی تو حاصل ہوا  $10^{\frac{1}{2}} = 49494949$  حساب معلوم ہوا ہی کہ سر نہ کر یہ  $49494949$  بہت قریب اور اسی سبب سے  $10^{\frac{1}{2}} = 49494949$  یعنی بصورت  $\tau = 10$  لوکار سم  $10$  کی ہی  $49494949$  مرقوم ہوا سے واضح ہے کہ مختلف قسم کے لوکار سم ہو سکتے ہیں یعنی اگر  $\tau = 10$  تو لوکار سم جو اس فرض سے حاصل ہونگی وہ ایک قسم کی ہونگی اور اگر  $\tau = 20$  تو لوکار سم جو اب حاصل ہونگی وہ ایک اور قسم کی ہونگی لیکن چونکہ  $\tau = 10$  سے معلوم ہوا کہ ہر قسم کی لوکار سم میں لوکار سم آ کی صفر ہوتی ہے عدد  $\tau$  کہلاتا ہے عدد بنیادی اور قسم کی لوکار سم کا جبکہ تعلق رکھتا ہے چونکہ موجب مرقوم گذشتہ کی کے  $\tau^1 \times \tau^2 = \tau^3$  تو معلوم ہوا کہ دو یا زیادہ عددوں کے حاصل ہونگی لوکار سم مساوی ہوتی ہے حاصل جمع اون عددوں کے الگ الگ لوکار سم کے چونکہ  $\tau^1 + \tau^2 = \tau^3$  تو معلوم ہوا کہ دو عددوں کے خارج قسمت کی لوکار سم مساوی ہوتی ہے اگر  $\tau = 10$  لوکار سم کی حاصل تفریق کی اور یہ بھی معلوم ہوتا ہے کہ لوکار سم ایک سر کی مساوی ہے اور کسی جو حاصل تفریق کرنی سے لوکار سم نیک ناک کی لوکار سم شمار کنندہ ہی اور اس سے یہ نظر ہوا کہ لوکار سم

ایک سر مناب کی ہمیشہ منفی ہوتی ہے

چونکہ  $\tau^1 \times \tau^2 = \tau^3$  ..... لاکت  $\tau^1 + \tau^2 = \tau^3$  ..... لاکت  
 $\tau^1$  اور اسی طرح چونکہ  $\tau^1 + \tau^2 = \tau^3$  تو معلوم ہوا کہ لوکار سم لاکت قوت کسی عدد کی دریافت ہو سکتی ہے ضرب دینی سے اس عدد کی لوکار سم کو  $\tau$  میں اور لوکار سم نزل کسی عدد کی لاکت مرتبہ دریافت ہو سکتی ہے تقسیم کرنی سے اس عدد کی لوکار سم کو  $\tau$  لایر اگر سلسلہ (1) مشتمل ہو مقداروں اس صورت کی سے  $\tau^1, \tau^2, \tau^3, \tau^4, \tau^5, \tau^6, \tau^7, \tau^8, \tau^9, \tau^{10}$  تو انکی مطابق مقدار سلسلہ (ب) کی ہونگی  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$  ..... م

یعنی وہ کہہ چکا شمار کنندہ نیک ناک کی ہم



جو حاصل ہوا اسے واسطی قیمت آ کی تمام ایسی جلدی سی بنیں ہوگا کہ مجموعہ چند قیمتوں سلسلہ نرگور کا کافی ہو جاوے واسطی قیمت آ دکھو کے \*

خزاسی واسطی فرض کر دو کم =  $\frac{1}{1-ل}$  بیان ل = ہر ایک عدد کے جو زیادہ ہے آ سے ب

$$\frac{ل}{۲-ل} = \frac{\frac{1}{1-ل} + 1}{\frac{1}{1-ل} - 1} = \frac{۲+۱}{۲-۱}$$

$$= \text{لوگ ل} - \text{لوگ (۲-ل)} \quad \text{اب لوگ (۲+۱)} = \text{لوگ (۲-۱)}$$

ع (۲-۱)  $\frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴} + \dots$  وغیرہ بجای آ کے مندرج کیا یعنی - م

اس مساوات میں تو لوگ (۲-۱) = ع (۲-۱)  $\frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴} + \dots$  وغیرہ تفویض کیا یعنی مساوات اول سے دوسری کو تو

$$\text{لوگ (۲+۱)} - \text{لوگ (۲-۱)} = ع (۲) \frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴} + \dots \text{ (وغیرہ)}$$

$$\text{لوگ ل} - \text{لوگ (۲-ل)} = ع (۲) \frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴} + \dots \text{ (وغیرہ)}$$

$$\text{اور لوگ ل} = ع (۲) \frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴} + \dots \text{ (وغیرہ)} + \text{لوگ (۲-ل)}$$

جسوقت کوئی قیمت واسطی ع کے مقرر ہو تو سلسلہ بالا بہت خوب سلسلہ ہو جاتا ہے واسطی بنانی ایک کتاب لوگا رسم کی

## ترکیب بنا لوگا رسم کی کتاب کی

جو کہ ط کو کبھی فرض کر سکتے ہیں تو اول فرض کر دو ایسے ایسا

کہ (ط-۱)  $\frac{1}{۲} - \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴} - \frac{1}{۵} + \dots$  وغیرہ یعنی  $\frac{1}{۲} - \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴} - \frac{1}{۵} + \dots$  ہو اور اس صورت میں مساوات مرقومہ بالا ہو جائیگی اس شکل کی

$$\text{لوگ ل} = ۲ \left( \frac{1}{۲-ل} + \frac{1}{۳(۱-ل)} + \frac{1}{۴(۱-ل)^۲} + \dots \right) + \text{لوگ (ل-۲)}$$

لیکن چونکہ ل کا زیادہ ہونا ضروری ہے تو اول لازم ہے کہ دریا ت کرنا لوگا رسم آ کا پہلے بنانے

\* اگر ایک سلسلہ اس صورت کا ہو  $\frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴} + \frac{1}{۵} + \dots$  وغیرہ تو ظاہر ہو کہ یہ سلسلہ اختتام کی پہلیں مایل ہے

اور چونکہ سلسلہ آ انتہائی تو اس کی جمع نہیں ہو سکتی اس سلسلہ کو سلسلہ وار لگتی ہیں اور اگر ایک سلسلہ اس شکل کا ہو

$\frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴} + \frac{1}{۵} + \dots$  وغیرہ تو ظاہر ہے کہ یہ سلسلہ مایل ہے اختتام ہے کہ اگر اس کی چند قیمتیں جمع کرتے ہیں اور اس مقدار کی جو مساوی

ہے اس سلسلہ کی بہت قریب معلوم ہو سکتی ہے اور اس سلسلہ کو سلسلہ کو تہ کہتے ہیں



کتاب لوکارٹم کی اسیسا سطحی فرض کرو

ل = ۱ = ۲ لوگ ۲ = ۲ لوگ ۲ = ۲ (۱/۲ + ۱/۳ + ۱/۴ + ۱/۵ + وغیرہ)

+ لوگ ۲ کجا لو دو نو طرت اسل دات کی سی لوگ ۲ کو تو

لوگ ۲ = ۲ (۱/۲ + ۱/۳ + ۱/۴ + ۱/۵ + وغیرہ ۴ رقم تک) = ۲ ۴ ۳ ۱۳ ۴۲

اس طرح سے حاصل کیے لوکارٹم ۲ کی اگر فرض کریں ہم بی در پی واسطے ل کی تمام اعداد اصلی سے اعداد جو ہنیں پورے قسمت ہو سکتے ہیں کسی عدد پر سوائی اپنی اور عدد ایک کی تو معلوم ہو جائیگی کہ جن لوکارٹم ادوں ب اعداد کی اور جو سید خواص لوکارٹم کے دریافت کر سکتے ہیں ہم لوکارٹم اور عدد دون کی بہت سہولت سے مثلاً

لوگ

..... = ۱

..... = ۲

۱۵۰۹۸۶۱۲۳ = ۳ (۱/۲ + ۱/۳ + ۱/۴ + ۱/۵ + وغیرہ ۱۰ رقم تک) + لوگ آ (۰) = ۳

۱۵۳۸۶۲۹۴۳ = ۲ لوگ ۲ = ۲

لوگ

۱۵۶۰۹۸۳۴۹ = ۵ لوگ ۲ = ۵ (۱/۲ + ۱/۳ + ۱/۴ + ۱/۵ + وغیرہ ۶ رقم تک) + لوگ ۳ = ۵

۱۵۷۹۱۴۵۹۵ = ۴ لوگ ۲ = ۴

۱۵۹۸۵۹۱۰۱ = ۶ لوگ ۲ = ۶ (۱/۲ + ۱/۳ + ۱/۴ + ۱/۵ + ۱/۶ + ۱/۷ + وغیرہ ۷ رقم تک) + لوگ ۵ = ۶

۲۵۰۷۹۴۴۱۵ = ۳ لوگ ۲ = ۳ لوگ ۳ = ۵

۲۵۱۹۷۲۲۶ = ۲ لوگ ۲ = ۲

۲۵۳۰۷۵۸۵۱ = ۱۰ لوگ ۲ = ۱۰

وغیرہ = وغیرہ .....

اس قسم کی لوکارٹم کہ جو بنی بن فرض کرنی سے ع = اسکے لوکارٹم نیبری لگاتی ہیں کیونکہ نیبری صاحب نے ادبین ایجاد کیا تھا اس قسم کی لوکارٹم کو لوکارٹم بعید البیضوی بھی کہتے ہیں کیونکہ وہ غلط رسکتے ہیں ساحت بعید البیضوی مساوی القطرین کی سی ہے سوائی لوکارٹم نیبری کی ایک اور قسم کہ بھی لوکارٹم ہوتی ہیں جبکہ لوکارٹم زوج کہتے ہیں اس قسم کی لوکارٹم میں ط فرض کیا گیا ہے = ۱۰

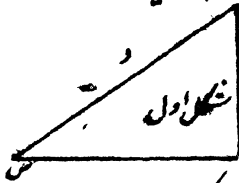


حصہ ۹

مثلث قائم الزاویہ کی طرفوں کا ریاضی والوں نے علیحدہ علیحدہ نام رکھا ہے جو طرف کہ واقع ہوتی ہے اسے قائم کے اسیے دتر کہتے ہیں اور باقی وہ طرفوں میں سے ایک کو قاعدہ اور دوسری کو عمود کہتے ہیں اگر ایک شکل جابضی کی ہو اور اسکے سامنے کے دو گوشوں میں ایک خط مستقیم وصل کیا جائے تو اس خط کو قطر سہ کہتے ہیں اگر ایک مثلث کی ایک طرف کو ہم قاعدہ مقرر کریں تو جس نقطہ پر باقی دو ضلعے الماسین قاطع کریں اس نقطہ کو اس مثلث کی کہتے ہیں اور اگر خط عمود اس قاعدہ پر کھینچا جاوے اس خط کو ارتفاع مثلث کہتے ہیں ظاہر ہے کہ یہ عمود تقسیم کرتا ہی قاعدہ کو دو حصوں میں اور ہر دو ان حصوں کو بازو کہتے ہیں جو چھوٹے ہی اوس سے بازو خود کہتے ہیں اور جھڑ بڑا ہی اوس سے بازو کلان کہتے ہیں

سوالات مثلثوں کے

سوال ۱۔ اس ایک مثلث قائم الزاویہ پر فرض کرو کہ معلوم ہے سین قاعدہ ب س اور مجموعہ وتر



اس اور مجموعہ ب کا دریافت کرنا چاہتے ہیں ہم علیحدہ علیحدہ مقدار عمود اور وتر کی سوال سے واضح ہے کہ عمود اور وتر مقدار میں جمول ہیں اور اسی واسطی فرض کرو عمود ا ب = ل اور وتر ب

اس = د لیکن مجموعہ عمود اور وتر کا اور مقدار قاعدہ کی معلوم ہے فرض کرو مجموعہ = ح اور قاعدہ = ط ب

$ل + د = ح$  لیکن حکم ۷ ہ شکل اول مقدار اول کے  $ل + ط = د$  لیکن  $ل = ح - د$

اور  $ق = ح - ۲ ح د + ڈ$  اور یہی  $ل = ڈ - ط$  تو  $ح - ۲ ح د + ڈ = ڈ - ط$

اور  $ح - ۲ ح د = د - ط$  اور  $۲ ح د = د + ح$  اور  $د = \frac{ح + ط}{۲}$  لیکن

ل = ح - د = ح -  $\frac{ح + ط}{۲}$  =  $\frac{۲ ح - ح - ط}{۲}$  =  $\frac{ح - ط}{۲}$  اگر ایک مثلث قائم الزاویہ کا قاعدہ = ط اور فرض

اوس کے وتر اور عمود کا = ص لہذا اسکے وتر اور عمود کے اگلے اگلے کیا ہی فرض کرو کہ عمود = ل ب وتر

$ل + ص = ل + ل + ط = (ل + ص) = ل + ۲ ل + ل = ۲ ل + ل = ل + ۲ ص$

ایک مربع ہے کہ فرض اوس کے ایک طرف اور قطر کا = ط اور ہم دریافت کرنا چاہتے ہیں سب اضلاع

مربع کی فرض کرو کہ ایک ضلع مربع کا = ل ب موافق شرایط سوال کے قطر مربع کا = ل + ط کے اور

$ل + ل = ل + ۲ ل = ل + ۲ ل + ل = ل + ۲ ط + ط$  اور

$ل - ل = ل ط = ط اور ل = ط + ط = ۲ ط اور ل = ط + ل = ط + ل اور ل = ط + ل + ل = ط + ل + ل$

۳۳ ایک ایسا مستطیل ہو کہ نصف مجہولہ اور اس کی اضلاع کا = س اور قطر اوسکا = ط ہم جانا چاہتے ہیں مقدار فرض کی علیحدہ علیحدہ فرض کر کے اوسکا عرض = لا تو یہی صیغہ شریط سوال کے

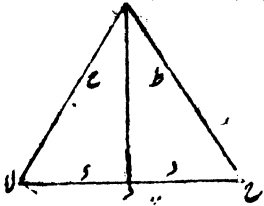
$$\begin{aligned} \text{س} - \text{لا} &= \text{طول اور (س - لا)} + \text{لا} = \text{ط} \text{ اور } \text{س} - ۲ \text{س لا} + \text{لا} + \text{لا} = \text{ط} \\ \therefore ۲ \text{لا} - ۲ \text{س لا} &= \text{ط} - \text{س} \text{ تقسیم کر دو پر ہم دو طرف اس مساوات کو بت} \\ \text{لا} - \text{س لا} &= \frac{\text{ط} - \text{س}}{۲} \text{ اور حل کرنے سے اس درجہ دوم کی مساوات سے ہم پاتے ہیں} \end{aligned}$$

$$\text{لا} - \text{س لا} + \text{س لا} = \frac{\text{س}}{۲} + \frac{\text{ط} - \text{س}}{۲} = \frac{\text{س}}{۲} \text{ اور } \frac{\text{س}}{۲} - \text{ط} = \frac{\text{س}}{۲}$$

$$\text{لا} - \frac{\text{س}}{۲} = \sqrt{\frac{۱}{۲} (\text{ط} - \text{س})} \text{ اور}$$

$$\text{لا} = \frac{\text{س}}{۲} + \sqrt{\frac{۱}{۲} (\text{ط} - \text{س})}$$

۳۴ معلوم ہیں ہمیں سب اضلاع ایک مثلث کی اور جانتے ہیں ہم دریافت کرنا مقدار ارتفاع مثلث



کی مثلث فرض کر دو مثلث یہ 'ح' لا کا  
خط 'ب' 'ج' معلوم ہے = ط اور ب' 'ج' لا = ح  
اور قاعدہ 'ح' لا = س کیا ہی مقدار عمود  
ب' 'د' کے فرض کر دو مجہول مقدار ب' 'د' = لا اور مجہول 'ح' 'د' = د اور دلا = و تب

$$\begin{cases} \text{د} + \text{س} = \text{س} \\ \text{لا} + \text{د} = \text{ط} \\ \text{ح} = \text{لا} + \text{د} \end{cases}$$

اور تقریب کر دو تیسری مساوات کو دوسری مساوات سے اور حاصل یہ ہو گا -  $\text{د} = \text{ط} - \text{ح}$

لیکن چونکہ  $\text{د} + \text{س} = \text{س}$  تو  $\text{د} = \text{س} - \text{س}$  اور

$$\text{د} = (\text{س} - \text{س}) = \text{س} - ۲ \text{س} + \text{س} + \text{د} \text{ اور اس قیمت } \text{د} \text{ کو مساوات}$$

$$\text{د} = \text{ط} - \text{ح} \text{ میں لکھو تب } \text{س} - ۲ \text{س} + \text{س} + \text{د} = \text{ط} - \text{س} - ۲ \text{س} + \text{س} = \text{ط} - \text{ح}$$

$$\text{اور } \text{س} + \text{ح} - \text{ط} = ۲ \text{س} - \text{س} + \text{د} = \frac{\text{س} + \text{ح} - \text{ط}}{۲} \text{ اور}$$

$$د = س - و = س - (س + ح - ط) = \frac{س + ح - ط}{س} = \frac{س + ح - ط}{س} \text{ لیکن}$$

$$ط - د = ط - (س + ح - ط) = \frac{س + ح - ط}{س} = \frac{س + ح - ط}{س} \text{ لہذا اور لہذا } \sqrt{\frac{س + ح - ط}{س} - ط} = \sqrt{\frac{س + ح - ط}{س} - ط}$$

مثلاً ایک ایسے مثلث ہے کہ مقدار ایک اوسکی ضلع کی ۱۰ ہے اور دوسری کی ۱۷ اور مقدار قاعدہ کی ۲۱ بنا دیا مقدار ہی ارتفاع مثلث کی اور قاعدہ اور دو بازو اس صورت میں  
 ط = ۱۰ اور ح = ۱۷ اور س = ۲۱ تو

$$ل = \sqrt{\frac{س + ح - ط}{س} - ط} = \sqrt{\frac{۲۱ + ۱۷ - ۱۰}{۲۱} - ۱۰} = \sqrt{\frac{۲۸ - ۱۰}{۲۱} - ۱۰} = \sqrt{\frac{۱۸}{۲۱} - ۱۰} = ۶$$

$$ارتفاع اور د = \frac{س + ح - ط}{س} = \frac{۲۱ + ۱۷ - ۱۰}{۲۱} = \frac{۲۸ - ۱۰}{۲۱} = \frac{۱۸}{۲۱}$$

اور د = ۲۱ - ۱۰ = ۱۱ شکل ۴۱ اول مقدار سی ثابت ہو رہی ہے کہ اگر ایک مثلث کی قاعدہ اور ارتفاع کو اسپین ضرب دو نصف حاصل ضرب مساحت مثلث کی ہوتی ہے اور چونکہ بموجب قاعدہ مرقومہ بالا کی جب تین ضلعے ایک مثلث کی معلوم ہوں تو اوسکی ارتفاع معلوم ہو سکتی ہے تو یہ ظاہر ہے کہ اگر اس ارتفاع کو قاعدہ میں ضرب دین تو مساحت ہی اس مثلث کی معلوم ہو جائیگی مثلاً مثال مرقومہ بالا میں ارتفاع اوس مثلث کی جسکی دو طرف تو ۱۰ اور ۱۷ ہیں اور قاعدہ ۲۱ ہے معلوم ہوئی ہے اور اگر ارتفاع کو یعنی ۸ کو قاعدہ میں یعنی ۲۱ میں ضرب دین تو حاصل ضرب ۱۶۸ ہوتا ہے اور نصف اسکا یعنی ۸۴ مثلث کی ہے چونکہ ہر شکل کیسی بھی قاعدہ ہو مثلث نہیں تقسیم ہو سکتی ہے تو بوسیلہ مساحت مثلث کی ہم مثلثوں مستقیم الا ضلع کی مساحت معلوم کر سکتے ہیں مرقومہ بالا سی ظاہر ہے کہ ارتفاع مثلث کی یعنی

$$ل = \sqrt{\frac{س + ح - ط}{س} - ط} \text{ تو}$$

$$ل = \frac{س + ح - ط}{س} - ط = \frac{س + ح - ط}{س} - ط$$

$$= \frac{(س + ح - ط)(س + ح - ط - س)}{س} = \frac{(س + ح - ط)(س - ط)}{س}$$

$$\frac{(س+ط-ع)(ع-ط-س)}{(س-ط-ع)(ع-ط-س)}$$

س

$$\frac{(ط+ب+س)(ع+ب+س)(س-ط+ع)(ع-ط+س)}{(ط-س+ع)(س-ط+ع)(ع-ط+س)(ع+ب+س)}$$

س

$$\frac{(ط-س+ع)(س-ط+ع)(ع-ط+س)(ع+ب+س)}{س} = \frac{1}{س} = \frac{س}{س}$$

$$\frac{(ط-س+ع)(س-ط+ع)(ع-ط+س)(ع+ب+س)}{س} =$$

اور اگر فرض کریں کہ  $\frac{س+ط+ع}{س} =$  ص تو سطح مثلث

$$= \frac{س}{س} \times \sqrt{ص(ص-س)(ص-ط)(ص-ع)} \dots (1)$$

مثال ۱ ایک شخص ایک مکان کی چت پرجانی کی لئے نردبان کہ اس کا طول ۱۰ گز تھا لگایا جا رہا تھا

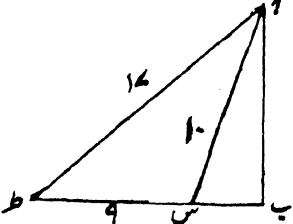
لیکن اتفاقاً نردبان سے گز کم چلی گروہ سے گز زیادہ ہوتی تو چت تک پہنچتی اب

شخص مذکور مکان کی طرف ۹ گز گیا تب نردبان

چت تک پہنچی بنا مکان کی کیا بندی یہی

اور شخص مذکور اول دفع مکان مذکور سے

کتنے فاصلہ پر تھا اور دوسری دفع کتنے



فاصلہ پر تھا فرض کر دو کہ ۱ ب ہی مکان اور ۱ ط ایک خطا دی ہی نردبان سے گز کے یعنی کل ۱۴

گزی اور ۱ س = نردبان = ۱۰ اور ۱ ط = ۹ اب ظاہر ہو کہ معلوم ہیں ہمیں متون ضمنی مثلث

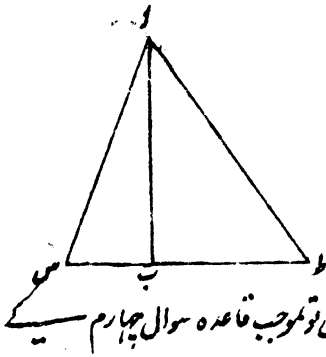
۱ س ط کے تو بموجب قاعدہ سوال چارم کے بازو

$$ب = ط = \frac{۱۰^۲ - ۹^۲ + ۱۴^۲}{۹ \times ۲} = \frac{۱۰۰ - ۸۱ + ۱۹۶}{۹ \times ۲} = \frac{۲۱۵}{۱۸}$$

$$اور بندی ۱ ب = \sqrt{۱۵^۲ - ۱۴^۲} = ۷ = ۹ - ۱۵ = ۶$$

مثال ۲ دو شخص دو مخالف طرفوں ایک مینار کی فاصلہ ۲۱ گز کے ساتھ ایک فی تو ۱۰ گز

کی نزدیکان لگائی اور دوسرے گز کی اور دونوں کی نزدیکان جو فی میاں تک پہنچیں بناؤ بندھی میاں کی اور

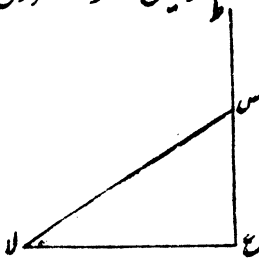


فاصلہ ہر شخص کا میاں سے ۱۰۰ میاں ہو اور ۱۰۰ اور ۱۰۰  
 دو شخص بن اور نزدیکان ۱۰۰ = ۱۰۰ گز اور نزدیکان  
 ۹ ط = ۱۰۰ گز کے اور فاصلہ درمیان ط اور ۱۰۰  
 کے = ۲۱ اب ظاہر ہے کہ معلوم ہیں ہمیں تین منہی  
 ۱ ط اور ۱۰۰ اور ط اس اور ط اس مثل ط ۱۰۰ کے  
 اور معلوم ہو سکتی ہے بندھی ۱۰۰ اور بازو ط ۱۰۰ اور ۱۰۰ کے

$$ب س = \frac{۲۱ - ۱۰۰ + ۱۰۰}{۲۱ \times ۲} = \frac{۲۱۹ - ۱۰۰ + ۱۰۰}{۴۲} = \frac{۲۱۹}{۴۲} = ۵$$

$$اور ط ب = ۶ - ۲۱ = ۱۵ اور ۱۰۰ = ۱۰۰ - ۱۰۰ = ۱۰۰$$

۳ ایک بانس کہ او کا طول ۸ گز تھا زمین میں گڑا ہوا تھا انہی جو چلی وہ کسی جہی سے گڑے  
 اور او کا اوپر لاسر زمین سے آنگھ بھاسکی دریافت ہوا کہ فاصلہ درمیان دو نو سرور کے

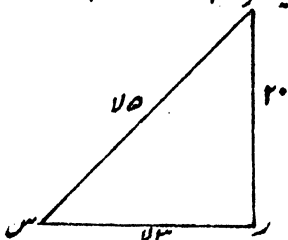


۴ گز تھا بناؤ بانس کس جہی سے گڑا ہو کہ معلوم ہے ہمیں  
 کہ ط ع یعنی س ع + س لا کہ حاصل عمود اور وتر کا وتر  
 مساوی آئے ہے اور ع لا یعنی س لا - س ع کہ  
 حاصل تقوین مجہد دون عمود اور وتر کا ہے مساوی ہے ۱۴

$$س ع = ۵ = \frac{۱۴ - ۸}{۲} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

$$اور س ع = ۵ = \frac{۱۴ - ۸}{۲} = ۳$$

۴ ایک میاں پر ایک مور بیٹھا ہوا تھا او سے میاں کی بڑ میں ایک سانپ دیکھا اور سانپ نے اوسے دیکھا  
 اور پہلا اور مور او کی بڑ نی کے واسطی اوڑا رفتار ۵ گز فی ثانی اور سانپ کی رفتار ۳ گز فی ثانی اور بٹھا



۵ میاں کی ۲۰ گز اور مور سانپ کو کتنی دیر میں بکری لگا اور کتنی  
 مسافت سانپ اور مور طی کرے گی ذمہ کر دو کہ لا =  
 وقت مطلوب کی اور ۱۰۰ = ۲۰ = ۲۰ تو ظاہر ہے کہ

$$رس = ۳ لا اور اس = ۷۵$$

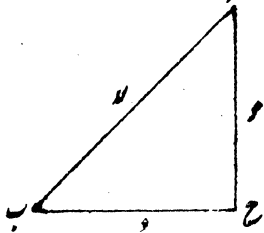
$$(۵۰) - (۳۰) = (۳۰) - (۲۰) = ۱۰ \quad ۱۰ = ۱۰ \quad ۱۰ = ۱۰ \quad ۱۰ = ۱۰ \quad ۱۰ = ۱۰ \quad ۱۰ = ۱۰ \quad ۱۰ = ۱۰ \quad ۱۰ = ۱۰$$

$$\sqrt{۱۰} = \sqrt{۳۰} - \sqrt{۲۰} \quad \text{یعنی } ۳۰ = ۱۰ \quad ۲۰ = ۱۰ \quad \text{اور } ۱۰ = \frac{۲۰}{۲} = ۱۰ \quad \text{وقت مطلوب کے}$$

$$۳۰ = ۱۰ \times ۳ = ۱۰ \times ۳ = ۳۰ \quad \text{سے مسافت سانب کے اور}$$

$$۵۰ = ۱۰ \times ۵ = ۵۰ \quad \text{مسافت مور کے}$$

۵ معلوم ہے بین حاصل جمع اور حاصل تفریق وتر اور عمود ایک مثلث قائمہ الزاویہ کا چاہتے ہیں



ہم دریافت کرنا قیمت عمود اور قاعدہ اور وتر کی

الک فرض کرو قاعدہ ح ب = د اور عمود

ا ح = د اور وتر ا ب = لا تو بموجب

شہرا یہ سوال کے لا + ا = ط = مقدار

معلوم کی اور لا - د = س = مقدار معلوم کے تو ظاہر ہے کہ ۲ لا = ط + س اور لا =  $\frac{ط + س}{۲}$

اور اسے طور سے د = ط - س اور اگر ضرب دین ہم لا + د = ط کو لا - د = س میں تو حاصل

ہو تا ہے لا - د = ط - س لیکن لا - د = ط تو معلوم ہوا کہ

$$د = لا - د = ط - س \quad \text{مثلاً اگر حاصل } ۸ = ۲ \text{ اور حاصل تفریق}$$

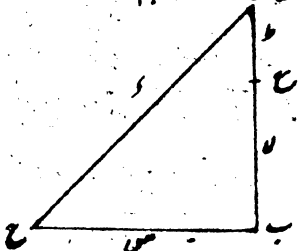
$$۲ = ۲ \text{ تو } لا = \frac{ط + س}{۲} = \frac{۲ + ۸}{۲} = \frac{۱۰}{۲} = ۵ \quad \text{اور}$$

$$د = \frac{ط - س}{۲} = \frac{۲ - ۸}{۲} = \frac{-۶}{۲} = -۳ \quad \text{اور}$$

$$د = \sqrt{۱۰} - \sqrt{۲} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲} = \sqrt{۱۶} = ۴$$

۶ معلوم ہے بین ایک مثلث قائمہ الزاویہ کے عمود کا ٹکڑا اور اس کا قاعدہ اور جانتے ہیں ہم

کہ حاصل جمع قاعدہ اور باقی ٹکڑیے عمود مذکور کا مساوی ہے حاصل جمع وتر اور پہلے ٹکڑیے عمود کی جانتے



ہم دریافت کرنا وتر کو اور دوسری ٹکڑیے عمود کو

معلوم ہے بین ا ح = ط اور قاعدہ ب ح = س

اور جانتے ہیں ہم کہ ح ا + ح ب = ح ا + ح ب + ب ح

فرض کر دو کہ ح ب اور ا ح کے مقدار مجہول ہیں

$$س د = \sqrt{س^2 + (ط + لا)^2} \quad \text{اب ظاہر ہے کہ}$$



اور بموجب شرطوں سوال کے

$$\sqrt{8} \sqrt{(ط + لا)^2 + س^2} = لا + س$$

یعنی  $\sqrt{(ط + لا)^2 + س^2} = لا + س$  - ط مجذور کرو دو طرف اس مساوات کو

تو  $(ط + لا)^2 + س^2 = (لا + س)^2$

$لا^2 + ۲لاط + ط^2 + س^2 = لا^2 + ۲لا س + س^2$  یعنی

$ط + ۲لا = ۲س$  اور  $لا + س = ۲س$  اور  $لا = س$

$ط = لا = س$  اور  $ط = لا = س$  اور  $ط = لا = س$

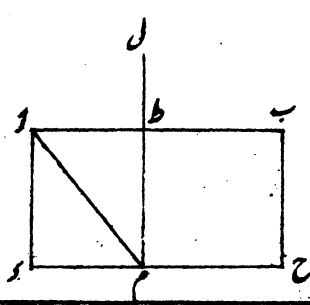
اور  $\sqrt{(ط + \frac{س}{ط-س})^2 + س^2} = س$  مفروض کرو کہ

$ط = ۲$  اور  $س = ۴$  تو  $۴ = \frac{۲ \times ۴}{۲ - ۴} = \frac{۸}{-۲} = -۴$

$۱۰ = ۱۰۰ = \sqrt{۳۶ + ۶۴} = \sqrt{۶^2 + (۴ \times ۲)^2} = ۱۰$

**مثال ۵** فرض کرتے ہیں کہ آبی ایک مکان ہے اور مقام جہ بر ایک درجہ ہے اور آج ایک زمین ہے درجہ جہ بر  
 ایک شخص ہے اور مقام جہ بر ایک درخت ہے اس شخص نے پہلی شخص سے کہا کہ آج درخت سے آج آجی ایسی جوائی کہ خواہ  
 اور جو کہ زمین کی رستہ آؤں خواہ کئی زمین سے آؤں جی آؤں مجھے دو صورتوں میں مسافت ایک جی طے  
 کرنی پڑے گی آبی فرض کرو کہ معلوم ہے زمین فاصلہ آجہ اور جہ کا تو بنا دو درجہ زمین گتائے ہے  
 اور زمین کا کیا طول ہے ظاہر ہے کہ یہ سوال حل ہو سکتا ہے زمین بطور مرقوم بالا کے

**مثال ۶** آج و ایک تالاب ہے اور ایک درخت ل م کا ہے ایک حصہ او سے درخت کا ط م تو  
 بانی کے اندر ہے اور دوسرا حصہ ل ط باہر بانی کے اگر درخت ل م کو چھادیں طرف کنارہ کے تو فقط ل کا



منطق ہوتا ہے آج اور درخت ل م خط آ م پر  
 جاتے ہیں ہم متوال ل ط اور ط ایک بناؤ  
 درخت کا کتہ طول ہے اور وہ کتہ بانی کے  
 اندر ہے فرض کرو ط ل اور ط آ کہ مقدار میں معلوم  
 ہیں مادی ط اور س کے اور فرض کرو ط م

کہ مقدار مجہول ہی مساوی لآ کے تو ظاہری کہ خط م ل یعنی

$$1 \text{ م} = ل + ط = ل + لآ = س = (ل + ط) = لآ + ل + لآ + ط = ط + لآ$$

$$2 \text{ ل} + ط = ط = س \text{ اور ل} = س - ط = \frac{س - ط}{ط} \text{ اور طول درخت کا کہ مساوی}$$

$$\text{آ م کے ہی} = ل + ط = ل + ط = ط + \frac{ط^2}{ط} = ط + \frac{ط^2}{ط}$$

پانی کے = ۲ اور فاصلہ درخت کا گذارہ سے = ۶ تو ظاہری کہ جز درخت کا کہ پانی کے اندر ہی

$$8 = \frac{۳۲}{۴} = \frac{(۲-۶)(۶+۲)}{۴} =$$

$$\text{اور طول درخت} = \frac{۲ \times ۲}{۲ \times ۲} = \frac{۲ + ۲}{۲} = \frac{۴}{۲} = 2$$

### ضابطہ

۱ اگر فرض کریں ہم قاعدہ بڑی مثلث کا = س اور اوس کے ارتفاع = ط اور قاعدہ چھوٹی مثلث

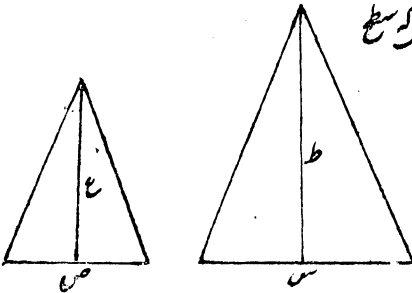
کا = ص اور اوس کے ارتفاع = ع تو ظاہری کہ سطح

بڑیے مثلث کی =  $\frac{ط \times س}{۲}$  اور سطح

چوٹے مثلث کی =  $\frac{ع \times ص}{۲}$

اور اگر فرض کریں ہم بڑیے

مثلث کی سطح = ۱ اور چوٹے



مثلث کی = ب تو ظاہری کہ ۱ : ب ::  $\frac{ط \times س}{۲}$  :  $\frac{ع \times ص}{۲}$  یعنی ۱ : ب :: ط : س :: ع : ص اس سے یہ معلوم

ہو کہ ایک مثلث دوسرے مثلث سے وہ نسبت رکھتا ہے جو حاصل ضرب ارتفاع ایک مثلث کا اوس کی قاعدہ میں

نسبت رکھتا ہے حاصل ضرب ارتفاع دوسرے مثلث کی اوس کی ارتفاع میں اگر فرض کریں ہم کہ ط = ع تو مقررہ

بالا سے ظاہری کہ ۱ : ب :: ط : س :: ع : ص یعنی ۱ : ب :: س : س :: ص : ص اس سے یہ معلوم ہو کہ اگر دو

مثلث ایسے ہوں کہ اوس کی ارتفاع برابر ہوں تو وہ ایک دوسری سے وہ نسبت رکھتے ہیں جو اوس کی

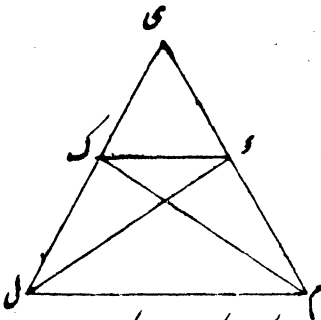
قاعدہ سے اسپین رکھتے ہیں یہ شکل ۶ مقلد اقلیدس میں لکھی گئی ہے اور چونکہ ہم بہت فائدہ مند ہو اور اس

پر علم مثلث ہی موقوف ہے تو مستی سے جو سید دلائل جبریہ کی ثبات کیا تاکہ بڑی ہنی دالون اس کتاب کو ضرورت

مختصیل ساری اقلیدس کی نہ بڑیے

### ضابطہ

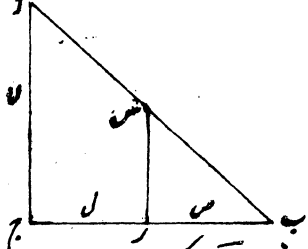
۲ مثلثی ل م فرض کرتے ہیں ہم کہ خط اوک متوازی ہے ل م سے کہ قاعدہ ہی مثلث کا تو ظاہری



کہ مثلث د ک م = مثلث و ک ل۔ یہ کم اور بقیر  
 کریتے ہیں ہم ہر ایک کو ان مثلثوں میں سے 1  
 اور مثلث ی د ک = ب کی اب بموجب ضابطہ  
 پہلی کے ظاہر ہو کہ

ی د : د م :: ب : ب 1 اور ی ک : ک ل : ب : ب 1  
 :: ی د : د م :: ی ک : ک ل + ک م : ی ک : ی ک

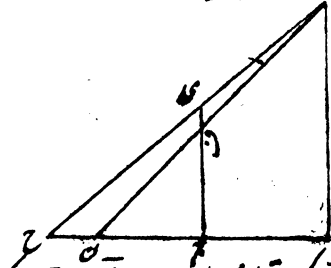
یعنی ی م : ی د :: ی ل : ی ک اور اگر منطبق کرین زاویہ ی ک کو اوپر زاویہ ی م ل کے قوتاً  
 ہوگا کہ ی م : م ل :: ی د : د ک اور اسے پیرسی ثابت ہو سکتا ہے کہ ی ک : ک و :: ی ل : ل م  
 اس سے یہ معلوم ہوا کہ خط ی د اور ی ک چھوٹی مثلث ی د ک کے متناسب ہیں بخون ی م اور ی ل  
 بڑی مثلث کی اور چونکہ نسبت متوازی ہوئی خط د ک کی خط م ل کو یہ د دونوں مثلثوں میں متساوی  
 الزوایا ہیں تو ظاہر ہوا کہ ہر مثلث متساوی الزوایا کی اہلہ متناسب ہوتی ہیں ہم اب بیان کرتے ہیں  
 سینہ فوارہ ضابطہ ۲ کے فہم کر دو کہ جس ایک لکڑی بقعدہ معلوم سطح زمین پر عمود ہو اور متوازی ہو ایک منارہ



کے کہ قہ ہی اور بقعہ ار خط ج ب معلوم ہو اور بقیر  
 قائم ہو کر جس اور لہ کار اس نمودار ہوتا ہے اور خط  
 کہ اب ایک خط م ر تہم وصل ہو سکتا ہے اور میان  
 نقطہ ب اور ر اسون فر کو یہ کے قہ کو معلوم کو د

فرض کرو ب ر = ص اور ر ج = ل کے پس سبب اسکی کہ بحکم ضابطہ ۲ کے  
 ص : س :: ص + ل : ل :: معلوم ہوا کہ  $\frac{ص}{ص+ل} = \frac{ل}{ص}$  لاد ہوا اسے بطور

ی ج ایک لکڑی متوازی منارہ آہ کے ہو اور ق ایک سوراخ لکڑی میں ہو اور اس منارہ کا مقامون  
 اور ج سے دکھائی دیتا ہے چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا  
 مندی منارہ کی اور اسکا فاصلہ مقامون ج اور ج  
 سے پیمائش کر دو خط ج ح اور ج ن اور ج ت



اور ج ی کو اور فرض کر دو ج ح = س اور ج ن = ط  
 اور ج ت = ص اور ی ج = ع اور فرض کر دو کہ آہ اور ج ہ کہ مقدار مجہول ہیں = ل اور ج ح  
 تو ظاہر ہو کہ بحکم ضابطہ (۲) کے

$$ط : ص :: ط + ر : لا یعنی ص ر + ص ط = لا اور$$

$$ص ز ع : ب : س + : لا کو یعنی ع س + ع ر = لا پس$$

$$ص ر + ط ص = ع س + ع ر اور حاصل ضرب دونوں کا مین یہ$$

$$ص ر + ص ط = ع س + ع ر اور حاصل ضرب ان دونوں کا$$

$$مین ص ر س + ص ط س = ط ع س + ط ع ر اور$$

$$ص س ر - ط ع ر = ط ع س - ص ط س یعنی (ص س - ط ع) ر = س ط × (ع - ص)$$

$$اور بعد قسمت کی ص س - ط ع پر خارج قسمت ر =  $\frac{س ط (ع - ص)}{ص س - ط ع}$  اور$$

اور واسطی اختصار کی فرض کرو اس قیمت ر کو = ل کے چونکہ

$$ط : ص :: ط + ر : لا تو ط لا = ص ر + ص ط یعنی$$

$$ط لا - ط ص = ص ر اور  $\frac{ط لا - ط ص}{ص} = ر$  اور چونکہ$$

$$س ز ع : ب : س + : لا تو س لا = ع س + ع ر یعنی$$

$$س لا - ع س = ع ر اور  $\frac{س لا - ع س}{ع} = ر$  پس ظاہر ہوا کہ$$

$$\frac{ط لا - ط ص}{ص} = \frac{س لا - ع س}{ع} اور حاصل ضرب دونوں کا ص مین$$

$$یہ ط لا - ط ص =  $\frac{س ص لا - ص ع س}{ع}$  ہی اور حاصل ضرب ادون دونوں کا$$

$$ع مین یہ ط ع لا - ط ص ع = س ص لا - ص ع س یعنی$$

$$ط ع لا - س ص لا = ط ص ع - ص ع س یعنی$$

$$(ط ع - س ص) لا = (ط - س) ص ع پس لا =  $\frac{(ط - س) ص ع}{ط ع - س ص}$$$

اور واسطی اختصار کی فرض کرو اس قیمت لا کو = م کے تو

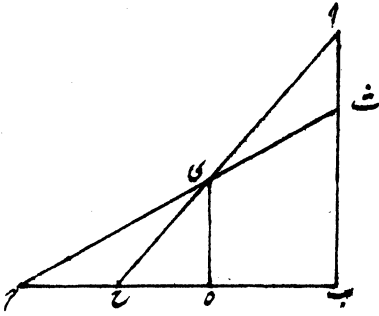
$$\sqrt{(ل + ط) + م} = ۱ اور اسطرح  $\sqrt{(ر + س) + م} = ۱$  ح دو افراد$$

اب ایک منارہ ہی اور یہ ایک لکڑی متوازی آسکے ہی اور مقام ح سی سیدہ مین تی کے

اس منارہ کے دکھائی دیے تی ہی اور مقام ح سے تی کی سیدہ مین نقطہ

ث کا دکھائی دیتا ہی اور معلوم یہ ہمیں مقدار اث کے = ع اور پچائش سے

معلوم ہوا کہ



$\overline{ا ح} = \overline{ب ح} = \overline{ب ا}$   
 اور  $\overline{ب ی} = \overline{ب ا}$  چاہتے ہیں ہم دریافت  
 کرنا  $\overline{ب ی}$  اور  $\overline{ب ح}$  کو فرض کرو  
 $\overline{ب ی} = \overline{ب ا}$  اور  $\overline{ب ح} = \overline{ب ا}$   
 دو مقدار مچول ہیں تو یکجہ مضابطہ (۶) کی

$ط : ص :: ط + لا : ر + ع$  یعنی  $ص ط + ص لا = ط ر + ط ع$  اور  
 $ص ط + ص لا - ط ع = ط ر$

اور  $س : ص :: س + لا : ر$  یعنی  $ص س + ص لا = س ر$  اور

$ر = \frac{ص س + ص لا}{س} = \frac{ص ط + ص لا - ط ع}{ط}$

اور حاصل ضرب دونوں کا  $\frac{ص س + ص لا}{س} \times \frac{ص ط + ص لا - ط ع}{ط} =$

اور حاصل ضرب ان دونوں کا طین

$ص س ط + ص لا س - ط ع س = ص س ط + ص لا اور بعد ابدال علامت کے حاصل$

ہوتا ہے  $س ط ع - ط ص لا = ص س ط + ص لا$  یعنی

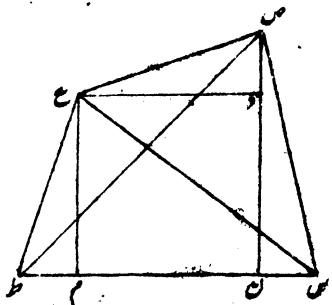
$ص ص لا - ط ص لا = (ص س - ط ع) س$  اور

$لا = \frac{س ط ع}{ص ص لا - ط ص لا} اور ر = \frac{ص س + ص لا}{س}$

$ص س + \frac{س ط ع}{ص - ط}$

$\frac{ص س ط + ص لا س - ط ع س}{ص س - ط ع} =$

$\frac{ص س ط + ص لا س - ط ع س}{ص س - ط ع}$



اور چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا اس ضلع کا  
 جو جب قواعد مرقومہ بالا کے چونکہ تینوں  
 ضلعی مثلث  $\overline{ص ط س}$  کے معلوم  
 ہیں تو دریافت ہو سکتے ہیں مقدار عمود  
 $\overline{ص ن}$  کی اور اسے پوری عمود  $\overline{ص م}$



سب مقادیر معمول کی قیمت اس فہرست میں مندرج کریتے ہیں

$$\sqrt{ص + ط} \times \frac{ص}{ص + ط} = \frac{ص(ص + ط)}{ص + ط} = ل = ع ح$$

$$\sqrt{ص + ط} \times \frac{ط}{ص + ط} = \frac{ط(ص + ط)}{ص + ط} = د = ح ل$$

$$ح ط = ر = ط \frac{ص}{ص + ط} = ع = ح = ط \frac{ص}{ص + ط} \text{ اور } \frac{ص}{ص + ط}$$

$$ط ل = ن = ط \frac{ط}{ص + ط} \text{ مثلاً اگر فرض کریں مہم}$$

$$\left. \begin{array}{l} ۱۵ = ط \\ ۸ = ص \\ ۶ = ص \end{array} \right\} \text{ کہ } \text{تو حاصل ہوتی ہیں یہ مساواتیں}$$

$$\sqrt{۸ + ۱۵} \times \frac{۶}{۲۱} = \sqrt{۸ + ۱۵} \times \frac{۶}{۶ + ۱۵} = \sqrt{۲۳} \times \frac{۶}{۲۱} = ل$$

$$\text{اور } ۲ \frac{۶}{۲} = \frac{۱۲}{۲} = \frac{۱۲ \times ۲}{۲} = \frac{۲۴}{۲} =$$

$$\sqrt{۸ + ۶} \times \frac{۱۵}{۶ + ۱۵} = \sqrt{۱۴} \times \frac{۱۵}{۲۱} = د$$

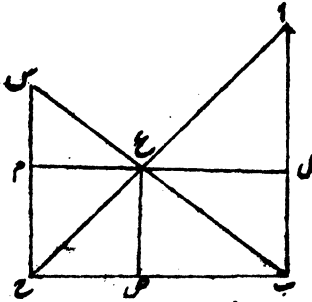
$$۲ \frac{۱}{۲} = \frac{۵۰}{۲} = \frac{۱۰۰ \sqrt{۱۴} \times ۵}{۲} = \frac{۵۰۰ \sqrt{۱۴}}{۲} =$$

$$۲ \frac{۲}{۲} = \frac{۹۰}{۲۱} = \frac{۶ \times ۱۵}{۱۵ + ۶} = \frac{ط ص}{ص + ط} \text{ اور } ر =$$

$$۲ \frac{۲}{۲} = \frac{۲۸}{۲۱} = \frac{۸ \times ۶}{۱۵ + ۶} = \frac{ص ص}{ص + ط} = ح$$

$$۵ \frac{۵}{۲} = \frac{۱۲۰}{۲۱} = \frac{۱۵ \times ۸}{۱۵ + ۶} = \frac{ط س}{ص + ط} = ن$$

ایک شخص مینار آ ب پر کہ او کی بلندی ۵ اگر ہی دور بین لگائی ہوئی طرف فقط ح کی دیکھ رہا تھا اور اس دور  
ایک اور شخص مقام س سے دور بین میں سے طرف فقط ر کے دیکھ رہا تھا اور بلندی س ح کی ۶  
اور آ ب = ۱۵ اور فاصلہ درمیان دو میناروں کے یعنی خط س ب = ۸ گز کے اتفاقاً دونوں  
شخصوں نے ایک ہی وقت ایک کبوتر کو دور بین میں سے دیکھا بناؤ کبوتر کس جانیے دیکھا اور فاصلہ



فاصلہ اوجھای کا دو نون بنا روں سے اور خط سب سے اور نقطہ اور ح سے بوج فاصلہ گز

کے ظاہر ہی کہ جائے کہوتر کی ح ہی اور اوسکا فاصلہ خط سب سے یعنی ص ح =  $\frac{۲}{۲}$  م اور اوسکا فاصلہ مینار آبی سے یعنی ح ل یا ص ب =  $\frac{۵}{۲}$

اور اوسکا فاصلہ مینار س ح سے یعنی خط ح م یا ص ح =  $\frac{۲}{۲}$  اور اوسکا فاصلہ نقطہ ح سے یعنی ح ع =  $\frac{۲}{۲}$  م اور نقطہ چ سے یعنی خط س ح =  $\frac{۲}{۲}$  ایسے ایسے یوں کہے کہ ہر ماہا کہ اوسے صرف جوئی ایک مینار لگنا ہوتی اور شخص دو دیواروں کے

کا فاصلہ تھا اور وہ شخص ۱۶ گز کے فاصلہ پر مینار سے تھا اور دیوار ۵ گز بلند تھی تا دیکھا گیا ہی بندہ ہی مینار کی پر جب گذشتہ کی بندہ ہی مینار =  $\frac{۵ \times ۱۶}{۱} = ۸۰$

ایک دیوار اگر بلند ہو اور ایک شخص اسی کے نیچے فاصلہ ۱۵ گز کے کھڑا ہو اور اسی طرف جوئی ایک مینار کی نظر آتی تھی بعد اسکے شخص مذکور ۱۰ گز دیوار سے اور ثبات ہو سکو ایک کھن کہ اوسکی بندہ ہی ۸ گز نظر آتی تھی تا دیکھا گیا ہی بندہ ہی مینار کی اور فاصلہ اوس مینار کا شخص پر جب شکل گذشتہ کی ظاہر ہو کہ بندہ ہی مینار

$$۳۲ = \frac{۶۰ - ۳۰۰}{۱} + ۸ = \frac{(۱۲ - ۸)۱۵ + ۲۵ \times ۱۲}{۱۵ - ۲۵} + ۸ =$$

اور فاصلہ شخص کا مینار سے

$$۵۰ = \frac{۳۰۰}{۱۲} + ۲۵ = \frac{۸ \times ۱۵ \times ۲۵}{(۱۵ \times ۱۲) - (۱۲ \times ۲۵)} - ۲۵ =$$

ایک دیوار ۲۰ گز بلند تھی اور اوس میں ایک سوراخ ۵ گز کی بلند پر تھا ایک شخص نے ۵ گز کی فاصلہ پر دیوار سے جوئی ایک مینار کی سوراخ دیکھی اور بعد اسکے وہ ۱۲ گز دیوار سے اور مینا اور پھر دیوار کی سیدہ ۵ مین جوئی مینار مذکور کی اسیے نظر آئی تا دیکھا گیا ہی بندہ ہی مینار کی اور فاصلہ شخص مذکور کا اوس پر جب شکل گذشتہ کے

$$\frac{۴۲۰}{۳۱} = \frac{۳۶۰۰}{۱۵۵} = \frac{۳۶۰۰ - ۳۶۰۰}{۱۵۵ - ۱۰۰} = \frac{۲۰ \times ۱۵ \times (۱۴ - ۵)}{۱۴ \times ۱۵ - ۲۰ \times ۵}$$

$$\frac{۵۸}{۱۶} = \frac{۱۵ \times ۵}{۱۵۵} = \frac{(۱۵ - ۲۰) ۵ \times ۱۴}{۲۰ \times ۵ - ۱۴ \times ۱۵}$$

معلوم ہوا ہے ظاہر ہو کہ اگر بجای دیوار کے فرض کریں ہم ایک تختہ لکڑیا اور اوس میں ایک سوراخ کریں تو بندہ ہی مینار کی اور فاصلہ اوس سے ہر بجای سے معلوم ہو سکتا ہے خواہ وہاں دیوار ہو یا نہیں

فصل پانچون حد زیادتی اور کمی کے بیان میں



بعضی ایسی مقدارین ہوتی ہیں کہ اونکی زیادتی یا کمی کے واسطی ایک حد ہر مثلہ کے در ایک دائرہ کا ایک مقدار ہو کہ اوسکی زیادتی کے واسطی ایک حد یعنی وہ نہیں زیادہ ہو سکتی قطر دائرہ سے اور خط جو کہنیا جاد ایک فقط مفروض سے (کہ دایع ہی باہر ایک خط مفروض کے) خط نہ کو تک نہیں کم ہو سکتا ہی عمود سے کہ اگر ایجا خط مفروض سے خط مفروض یعنی چوٹی سے چوٹا خط جو ایک فقط مفروض سے ایک خط مفروض تک کہنیا جاد عمود خط نہ کو پر ہوتا ہی

علم ہندسہ میں بہت سی ایسی مقدارین ہیں کہ اونکی زیادتی یا کمی کے واسطی ایک حد مقررہ ہے اور دریافت کرنا اس حد کا اکثر نہایت مشکل ہوتا ہی اور بہت سی سوالات در باب اس حد کی نہیں حل ہو سکتے الا بعد حکیم لا انتہا کے کہ اوسکو زبان انگریزی میں دز نشل کیل کیوس کہتے ہیں اس کتاب میں ایسے سوالات اس قسم کی مذکور کیئے جاتی ہیں جو حل ہو سکتے ہیں برسید علم جبر و مقابلی کے

سوال ۱ تقسیم کر دایک خط مفروض کو اسطور پر کہ اسکی دو اقسام کی بڑی سے بڑی ہو یعنی اگر خط مفروض کسی در طرح سے تقسیم کیا جاد تو وسط و داخلی اقسام کی ہمیشہ کم ہو وسط نہ کو زاہد سے فرض کرو کہ خط مفروض = ط اور ایک اوسکی قسم = لا تو ظاہر ہے کہ دوسری قسم خط نہ کو کی مساوی ہوگی ط۔ لا کے اور سطح یعنی حاصل ضرب ان دونوں کا = ط لا۔ لا اب یہ ظاہر ہے کہ ط ایک مقدار منقطع ہے یعنی اوسکی قیمت نہیں بدل سکتی لیکن لا ایک مقدار غیر منقطع ہے کیونکہ معلوم نہیں ہے کہ لا کو کتنا بڑا فرض کرنا چاہتا کہ ط لا۔ لا ایک مقدار اعظم ہو جاو اس بات کی دریافت کرنی کی لئے فرض کرتے ہیں کہ ط لا۔ لا = س یعنی لا۔ ط لا۔ = س اور حل کرینے اس مساوات درجہ دویم سے حاصل ہوتا ہی

$$لا - ط = \frac{ط}{س} \sqrt{س^2 - ط^2}$$

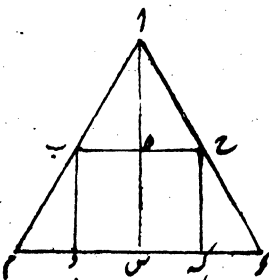
اب ظاہر ہے کہ س نہیں زیادہ ہو سکتا  $\frac{ط}{س}$  سے کیونکہ اگر ایسا ہو تو مقدار  $\sqrt{س^2 - ط^2}$  غیر ممکن ہو جاو تو معلوم ہوا کہ اگر س کو نہات بڑا فرض کریں تو وہ مساوی ہوتا ہی  $\frac{ط}{س}$  کے اور اس صورت میں لا۔ ط = ۰ یعنی لا = ط اور اس حالت ہوا کہ واسطی حاصل کرنی سب سے بڑی سطح کے تقسیم کرنا چاہیے خط مفروض کو دو مساوی اقسام میں

۲ وہ کو منسی کسر ہے کہ اگر اوس میں سے تفریق کریں اوسکا مجددوہ حاصل تفریق ایک مقدار نہایت بڑی ہوتی ہی فرض کر دے کہ س مطلوب = لا اور لا۔ ط اب معلوم کیا جاتے ہیں ہم کیا ہی بڑی سے قیمت ط کی چونکہ لا۔ ط = ط تو لا۔ لا = ط اور حل کرنی اس مساوات کی سے

حاصل ہوتا ہے  $لا = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \sqrt{۳} = \frac{1}{3} \times ۱.۷۳۲ = ۰.۵۷۷$  اب معلوم ہوا کہ بڑی سیڑھی قیمت ط کی  $\frac{1}{3}$  ہے اور

اس صورت میں  $لا = \frac{1}{3}$  = کسر مطلوبہ کی یہ سوال علم لانتہاسی باسانی حل ہو سکتا ہے لیکن حل کرنا اس سوال کا دو سیلڈ جبر و مقابلہ کی تحقیق میں مشکل ہے نیز یہ دیکھنا کہ یہ مقررہ کہ بعد صل ہونے کے وہ بہت سہل معلوم ہوتا ہے اس سوال کی دوسری سوال (۱) بھی حل کیا گیا ہے اور سوال (۲) حل کیا جاتا ہے

۳ بناو ایک بڑی سیڑھی مستطیل بیچ ایک مثلث مفروض کی فرض کرو کہ مثلث ۱ دوم کا مثلث مفروض ہے اور مستطیل کہ مستطیل مطلوبہ ہے اب ہم دریافت کیا جاسکتے ہیں کہ کیا شرط ضرور ہے واسطے اس بات کی کہ مقدار مستطیل مذکور کی بڑی سیڑھی ہو معلوم ہو جائے کہ دوم جو کہ قاعدہ مثلث



مفروض کا ہر سادی ہر طیکے اور ۱ اس کے ارتفاع مثلث مفروض کا ہر سادی ہر ص کے اور فرض کرو کہ  $لا =$  ایک ایسی کسر کے ہے کہ اگر ضرب دین او سمین ص کو تو حاصل ضرب سادی ہو خط ۵ کے یعنی فرض کریں  $ہم ۵ = ص$  لاص کے تو ظاہر ہے کہ

ص - لاص سادی ہو گا خط ۱ کی اب ظاہر ہے کہ مثلث ۱ ح ب کا مثلاً بہ ہے مثلث ۱ م د کے

تو اس : ۵ : ۱ :: ۵ م : ح ب یا کہ دینے ص : ط :: ص - لاص : کہ دینے

کہ  $د = \frac{ص - ط}{ص}$  اور مستطیل کہ  $د = ۵ \times ص = لاص \times \frac{ص - ط}{ص} = ط - لاص$  ط ص ل

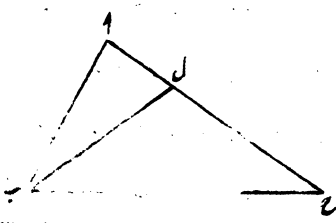
$= ط ص (لا - لا)$  اور اب یہ ظاہر ہے کہ جتنی مقدار (لا - لا) بڑی ہو اتنا ہی زیادہ

ص (لا - لا) یعنی مستطیل کہ ب ہو گا اور چونکہ یہ سوال (۲) میں ثابت ہوا ہے کہ بڑی سیڑھی قیمت

(لا - لا) کی  $\frac{1}{3}$  اور لا کی  $\frac{1}{3}$  ہے تو معلوم ہوا کہ  $اس = ۵۲$  سے ارتفاع مثلث کی دو چند ہے

ارتفاع مستطیل مطلوبہ سے

۴ معلوم ہیں ہیں دو طرفین ایک مثلث کی جاسکتے ہیں ہم دریافت کرنا اس بات کا کہ مقدار



قاعدہ مثلث کی کتنی فرض کریں تاکہ مثلث مذکور کی مساحت

نہایت بڑی ہو مثلاً معلوم ہیں دو طرفین ۱ ح اور ۱ ب

مثلث ۱ ح ب کی جاسکتے ہیں ہم دریافت کرنا ایسی قیمت

دواسطے ح ب کے کہ مثلث ۱ ح ب نہایت بڑا ہو

خطبہ سی گرا عمود ب ل کا خط آح پر فرض کرو ا ح = ط اور ا ب = س اور

ا ل = لا اب ظاہری کہ س میں - لا = بال اور مساحت اس مثلث کی

$$= \frac{1}{2} \times 21 \times 12 = \frac{1}{2} \times 252 = 126$$

ہو اتنی ہی زیادہ مساحت مثلث کی ہوگی لیکن زیادہ ہونا س میں - لا کا موقوف اور یہ کم ہونے

لا کی ہی تو معلوم ہوا کہ مساحت بڑی ہوگی اگر فرض کریں ہم لا = یعنی اگر خط ب ل ا - پر منطبق ہو جاوے

یعنی جب دو ضلعون ط اور س کے مابین ایک قائمہ بنے تو اس سے یہ ثابت ہوا کہ مجبوراً دونوں طرفون

معلوم کا لیکر اونے کے حاصل جمع کا جذریوں تو یہ جذریہ ایسی مقدار ہوتی ہے کہ اگر فرض کریں مساوی

اسکے قاعدہ مثلث کا تو مساحت اس مثلث کی نہایت بڑی ہوگی

۵ معلوم ہے یہ قاعدہ ایک مثلث قائمہ الزاویہ کا اور مجموعہ اوسکی دو طرفوں کا چاہتے ہیں ہم

دریافت کرنا اس بات کا کہ کیا نسبت دو طرفون مثلث مذکور میں ضرور ہے

تاکہ مثلث نہایت بڑا ہو معلوم ہے یہ کہ ا ب + 21 = س اور

فرض کر دو کہ ا ب - 21 = لا = ایک مقدار مجہول سیکے

جمع کر دو دونوں مساوات کو تو ا ب =  $\frac{س + لا}{2}$  بعد ازان تقویٰ

کر دو ان دونوں مساوات کو تو ا ب =  $\frac{س - لا}{2}$  اور ظاہری کہ مساحت اس مثلث کی

$$= \frac{1}{2} \times 21 \times 12 = \frac{1}{2} \times 252 = 126$$

۶ معلوم ہے یہ قاعدہ ایک مثلث کا اور حاصل جمع اوسکی دو باقی ضلعون کا بتاوان دو

ضلعون میں کیا نسبت چاہیے تاکہ مساحت مثلث کی نہایت بڑی ہو فرض کر دو کہ حاصل جمع دو ضلعون

مسااحت مثلث کی نہایت بڑی ہوگی اور اس سے یہ ثابت ہوا کہ مساحت مثلث کی نہایت بڑی ہوتی ہے جس وقت

کہ دو سابقہ مثلث کی اسی نسبت برابری کی رکھتے ہیں

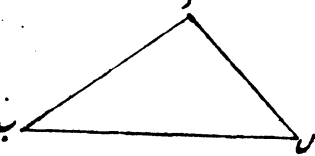
۷ معلوم ہے یہ قاعدہ ایک مثلث کا اور حاصل جمع اوسکی دو باقی ضلعون کا بتاوان دو

ضلعون میں کیا نسبت چاہیے تاکہ مساحت مثلث کی نہایت بڑی ہو فرض کر دو کہ حاصل جمع دو ضلعون

= ط اور قاعدہ = س اور ط اور س مقدار معلوم ہیں

اور فرض کر دو کہ فرق دو ضلعون = لا کہ ایک مقدار مجہول ہے

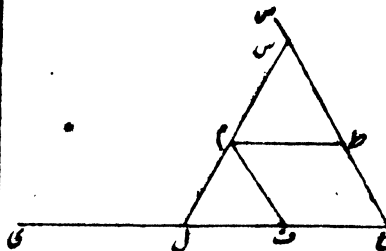
تو معلوم ہوا کہ ا ب + 1 = س = ط اور





ایک خط مثل س م ل کی ایب کہ وہ گزری نقطہ م میں آمد علی خطون ع ص ل ص ع صی منور ضیہ اسطرح

کہ س ع + ل ع ایک مقدار نہایت چھوٹی ہو نقطہ م سے  
 کہیں خط م ط کا متوازی صی ع کے اور خط م ن کا  
 متوازی ص ع اور پیمائش کرد خطون ط م اور م ن  
 کو فرض کرد کہ ط م اور م ن کے مقدارین معلوم ہیں مساوی



جہ اور ص کے اور خط ن ل کے مقدار مجہول ہے مساوی ع  
 ل کی تو اب ظاہر ہے کہ مثلث م ن ل اور ط س م کے متشابه ہیں اور اسبواسیطے

لا : ص :: ۷ : ط س :: ط س =  $\frac{ص ۷}{ط}$  :: س ع + ل ع =  $\frac{ص ۷}{ط} + ص + ۷ + لا$   
 اب جانتے ہیں ہم دریافت کرنا ایسی ایک مقدار داسیطے مجہول ل کی کہ مقدار  $(\frac{ص ۷}{ط} + ص + ۷ + لا)$  نہایت  
 کم ہو فرض کرد  $\frac{ص ۷}{ط} + ص + ۷ + لا = ل$  ::  $ص + ۷ + لا + لا = لا$  ::  $ل = لا$

اور  $لا = ص - ۷ + (ل - ص - ۷) - لا$  یعنی  $لا = ص - ۷ + (ل - ص - ۷) - لا$  اور بوجہ قاعدہ مساوات کی

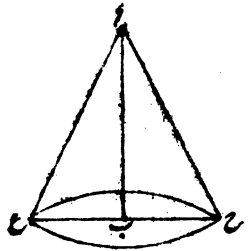
$$لا - (ص - ۷) - لا + (ص - ۷) = \frac{(ل - ص - ۷)^2}{۲} - ص ۷$$

$$اور لا - (ص - ۷) - لا = \frac{(ل - ص - ۷)^2}{۲} - ص ۷$$

یہاں ظاہر ہے کہ اگر ل کو نہایت کم فرض کریں تو

$$\frac{(ل - ص - ۷)^2}{۲} = ص ۷$$

اور یہی  $لا = \frac{(ل - ص - ۷)^2}{۲} = ص ۷$  تو معلوم ہوا کہ اگر خط ن ل مساوی  $\sqrt{ص ۷}$  کے  
 تو خط جو گزری نقطون ل اور م میں خطون صی ع اور ع ص کو اسطرحی تقاطع کریگا کہ ع ل + ع س



ایک نہایت کم مقدار ہوگی  
 ۹ دریافت کرد کہ ایک ایسے مخروط مستدیر کہ اوسکی  
 باہر کی سطح تو ایک مقدار متقرہ ہے اور اوسکی مساحت جسم کی  
 نہایت بڑی ہی فرض کرد ج کہ نصف قطر قاعدہ مخروط  
 کا ہے  $لا$  اور تر جہا خط  $ع ۱ = د$  اور کہ  $=$  محیط

اوس دائرہ کی جس قطر عدد ایک کا ہو تو ظاہر ہے کہ سطح قاعدہ = ک × لا × لا = ک لا<sup>۲</sup> لیکن سطح مشترک = و × ک لا = ک لا<sup>۲</sup> و لا تو کل باہر کی سطح مخروط = ک لا + ک لا اور فرض کر دو کہ ک لا + ک لا = س تو =  $\frac{س}{۲}$  لا اور ارتفاع اب مخروط کی =

$$\sqrt{(اع - پ ع)^۲} = \sqrt{\left(ک لا - \frac{س}{۲}\right)^۲}$$

$$\sqrt{\frac{س^۲}{۴} - \frac{س}{۲} لا} = \sqrt{\frac{س^۲}{۴} - ک لا لا}$$

اور اس کی ہم نہایت بڑی قیمت معلوم کیا جاسکتے ہیں تو اول اوس کی مجدد کی نہایت بڑی قیمت دریافت کریں اور بعد ازاں اوس کے خود فرض کر دو کہ  $\frac{۱}{۲} (س لا - ۲ ک س لا) = \frac{ط}{۲}$  تو س لا - ۲ ک س لا = ط اور ۲ ک س لا - س لا = ط اور

$$لا - \frac{س لا}{۲ ک} = \frac{ط}{۲ ک س} \text{ اور } لا + \frac{س لا}{۲ ک} = \frac{س}{۲ ک س}$$

$$\text{اور } لا - \frac{س}{۲ ک} = \sqrt{\frac{س^۲}{۴ ک^۲} - \frac{ط}{۲ ک س}} \text{ اب اگر ط کو نہایت بڑا فرض کریں تو}$$

$$\frac{س}{۲ ک} = \frac{ط}{۲ ک س} \text{ اور } لا = \frac{س}{۲ ک} \text{ اور } لا = \sqrt{\frac{س^۲}{۴ ک^۲} - \frac{ط}{۲ ک س}} \text{ اور}$$

$$س = \frac{س}{ک لا} - لا = \frac{س}{ک لا} - \frac{س}{ک لا} = \frac{س - ک لا}{ک لا} = \frac{س ک لا - ک لا^۲}{ک لا}$$

$$س لا = \sqrt{\frac{س^۲}{۴ ک^۲} - \frac{ط}{۲ ک س}} \text{ اور ارتفاع} = \sqrt{\frac{س^۲}{۴ ک^۲} - \frac{س}{۲ ک}}$$

$$\sqrt{\frac{س^۲}{۴ ک^۲} - \frac{س}{۲ ک}} = \sqrt{\frac{س^۲}{۴ ک^۲} - \frac{س}{۲ ک}} = \sqrt{\frac{س^۲}{۴ ک^۲} - \frac{س}{۲ ک}}$$

مردود بالا سے معلوم ہوا کہ نصف قطر قاعدہ کا ترچہ خط سی وہی نسبت رکھتا ہے جو آرکٹا ہی سی سے اور مجدد کل قاعدہ مخروط کا ارتفاع کے مجدد سے وہی نسبت رکھتا ہے جو آرکٹا ہی سی سے۔  
۱۰ اگر دو جسم حرکت کریں ایک ہی دقت نقطون مفروض آ اور ب سے بیچ سمتوں آ اور سی



$$\frac{(۲مئی ط + مئی ط + ۲م س مئی ط) لا}{مئی ط} +$$

$$= \frac{(۲م س مئی ط + ۲م س مئی ط) لا + مئی ط ع}{مئی ط} \text{ فرض کرو کہ سر لا}$$

$$\text{ف اور سر لا} = \text{کہ تو ظاہر ہے کہ م} = \frac{\text{ف لا} - \text{کہ لا} + \text{مئی ط ع}}{\text{مئی ط}} \text{ اور}$$

$$\text{فرض کرو} \text{ف لا} - \text{کہ لا} + \text{مئی ط ع} = \text{ل اور}$$

$$\text{ف لا} - \text{کہ لا} + \text{مئی ط ع} = \text{مئی ط ل اور ف لا} - \text{کہ لا} = \text{مئی ط ل} \cdot \text{مئی ط ع} =$$

$$(ل - ع) مئی ط اور لا - \frac{\text{کہ لا}}{\text{ف}} = (ل - ع) مئی ط = (ل - ع) \times \frac{\text{مئی ل}}{\text{ف}}$$

$$\text{اور لا} - \frac{\text{کہ لا}}{\text{ف}} = \frac{\text{کہ لا}}{\text{ف}} + (ل - ع) \times \frac{\text{مئی ط}}{\text{ف}} = \frac{\text{کہ لا}}{\text{ف}}$$

$$\text{اور لا} - \frac{\text{کہ لا}}{\text{ف}} = (ل - ع) \times \frac{\text{مئی ط}}{\text{ف}} + \frac{\text{کہ لا}}{\text{ف}}$$

اب ظاہر ہے کہ مقدار منفی کم ہوتی ہے صفر سے کسواسیطے کہ اگر ایک تو بڑی اور دوسری چھوٹی مقدار ہو اور ان دونوں مقداروں پر ایک اور مقدار زیادہ کریں تو حاصل جمع اس مقدار اور بڑی مقدار کا زیادہ ہو گا حاصل جمع اسی مقدار اور چھوٹی مقدار کی ہے اب ہم دعویٰ کرتے ہیں کہ صفر زیادہ ہے۔ ۹ سے کیونکہ ۱۰ + ۰ = ۱۰ اور ۱۰ + ۹ = ۱۰ اب یہ ظاہر ہے کہ ل کو ہم اتنا کم فیضے - ل کو اتنا زیادہ فرض کر سکتے ہیں کہ (ل - ع) × مئی ط ایک ایسی مقدار منفی ہو سکتی ہے کہ وہ زیادہ ہو مثبت مقدار کے سے لیکن ہم زیادہ فرض نہیں کر سکتے تو صد کی کی مساوی ہونا ان دو منفی اور مثبت مقداروں کی اور لا - کہ لا = ۰ یعنی لا = کہ لا یعنی

$$\frac{ع م ی ط + ع س مئی}{م ط + مئی ط + ۲م س مئی} = \frac{ع م ی ط + ع س مئی ط}{۲(مئی ط + مئی ط + ۲م س مئی ط)}$$

جس وقت معلوم ہو ہی ہمیں مقدار ل کی تب معلوم ہو سکتی ہے ہمیں مقدار خطون با ح اور ا م بوسیلہ

$$\text{از مساواتوں کے با ح} = \text{لا} - \text{ط اور ا م} = \frac{\text{لا} - \text{ط}}{\text{مئی}}$$



$$2c = \sqrt{(e - \frac{c}{a})^2 + a^2} - (e - \frac{c}{a}) \times \frac{a^2}{p}$$

جو شخص ذرا ہی غور کر لگا اوسی معلوم ہو جائیگا کہ شکل گذشتہ بہت فائدہ مند ہے بہر شکل محکمہ میں صاحب نے  
کہ بڑے ریاضی دان انگلستان کی تھے بوسیدہ علم لا انتہا کے ثابت کی ہے

۱۱ ایک شخص نے ایک راجہ سی زمین مالکی راجہ فی ایک بانس کو توڑ کر کہا کہ جتنی زمین بشکل مثلث  
اس بانس کے دو ٹکڑوں میں آہو جاؤ اوتنی زمین تو بیٹے اب شخص بن کر بیٹھنے والی اس کتاب سے اتنا س کٹا کر  
کہ وہ ٹکڑوں بانس کو کٹا ہیلا یعنی تیسری طرف مثلث کی کسی مقدار پر فرض کرے کہ زمین اوسی نہایت زیادہ  
ہات لگی جواب تیسری طرف مساوی ہو جند حاصل جمع مجذ ورون و دساتون کے جیسا کہ سوال چہارم  
میں ثابت ہو چکا ہے

۱۲ ایک گاجر و کچا ڈبیر لگا ہوا ہے اور اگر کسی ایک گاجر کا اینٹن سے چھلکا اوتارن تو مساحت ہر  
گاجر کی چھلکے کی یکساں ہوتی ہے تاؤ کوئی گاجر اینٹن سے نہایت درزی ہوگی

۱۳ تصنیف کرد ایک مثلث مفروض کو ایک نہایت چوٹی خط سے حل کر داس سوال کو صرف  
بجد و جبر و مقابلہ کے اوز بوسیدہ علم مثلث یا علم لا انتہا کی فقط

د واضح ہو کہ انگلستان کے ریاضی دانوں نے جبر و مقابلہ سے فقط وہ مثالیں حد زیادتی اور کمی کی حل کی  
ہیں جو مساوات درجہ دوم سے متعلق ہیں اور جن مثالوں میں مساواتیں تیسری درجہ یا چوتھے درجہ یا زیادہ کی حل کرنی  
پڑتی ہیں اور مثالوں گاجر و مقابلہ سے حل کرنا اب تک کسی ریاضی دان انگلستان نے نہیں لکھا بلکہ ایسی مثالیں  
علم جزئیات دکھاتے ہیں جیکو زبان انگریزی میں درشتی گئی کوئی کس کہتے ہیں حل کی ہیں سو اب جاب مخدومی لکھی  
ہاں شتر انچہ رنی ایک طریقہ ایجاد کیا ہے کہ جس سے تیسری چوتھے مرتبہ کی مثالیں سب جبر و مقابلہ سے  
حل ہو سکتی ہیں اور اس طریقہ سے ہر طرح کی مثالیں لکھا کر زبان انگریزی میں ایک کتاب تصنیف کی ہے اور اس کتاب  
کی جاباب ہیں اول باب میں فقط وہ لکھی ہیں جو مساوات درجہ دوم اور اول سے متعلق ہیں اور ایسی  
مثالیں انگریزی جبر و مقابلہ میں ہی ہوتی ہیں اور دوسرے باب میں وہ مثالیں لکھی ہیں جو مساوات تیسری درجہ  
سے متعلق ہیں اور تیسری باب میں وہ مثالیں لکھی ہیں جنہیں چوتھی درجہ اور پانچویں درجہ اور چھٹی درجہ کی  
مساواتیں حل کرنی پڑتی ہیں اور چوتھی باب میں ایسی مثالیں ہیں جنہیں دو مقدار غیر متورہ یا لکھی مقدار غیر متورہ  
مساوات میں شامل ہوں اس کتاب کی دیکھنی سے ایسی نکات اور جو تہ طبع مصنف کی معلوم ہوتی ہے  
کہ میں اسکا بیان نہیں کر سکتا دل بی اختیار چاہتا ہوں اسکی اکثر مثالیں اس جبر و مقابلہ میں لکھوں لیکن کتاب

کتاب کی بڑھ جانی سے قیمت کی زیادہ ہونیکا اندیشہ ہوا سو اسطرح ہر باب میں سی ایک یا دو مثالیں بطریق  
مشتملے نمونہ از خورداری لکھ کر خوبی اس کتاب کی تائیدین بظاہر کرتا ہوں

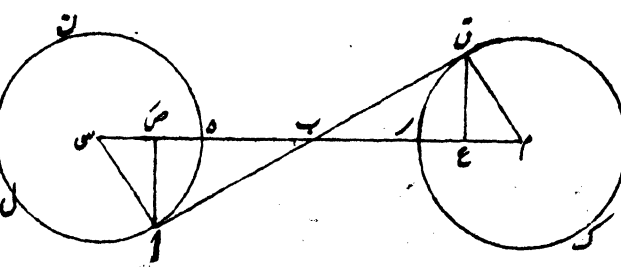
دو مثالیں اول باب کی

۱ جاتے ہیں ہم دریافت کرنی ایسی قیمت لاکھی کہ جس سے  $\frac{1}{1-l}$  ایک نہایت بڑی  
مقدار ہو چونکہ اس صورت میں  $\frac{1}{1-l}$  ایک مقدار مقررہ ہوا سو اسطرح زیادتی اور کمی میں کچھ خلل واقع نہیں ہو سکتا  
پس معلوم ہوا کہ  $\frac{1}{1-l}$  نہایت بڑی مقدار ہونی چاہیے پس اسکو  $\frac{1}{1-l}$  کی برابر فرض کیا یعنی

$$\frac{1}{1-l} = \frac{1}{1-l} \Rightarrow 1-l = 1-l \Rightarrow l = 1-l \Rightarrow 2l = 1 \Rightarrow l = \frac{1}{2}$$

۲  $\frac{1}{1-l} = \frac{1}{1-l} \Rightarrow 1-l = 1-l \Rightarrow l = 1-l \Rightarrow 2l = 1 \Rightarrow l = \frac{1}{2}$

دوکرہ اسطرح رکھی ہیں کہ اونکی درمیان کچھ فاصلہ ہو اور اون دونوں کے مرکزوں میں خط طابوا  
تو اب ہم یہ دیکھتے ہیں کہ اوس خط میں ایسا مقام کہاں ہے کہ اوسپر کھڑی ہو کر دو نوکرہ نہایت بڑی سے



نظر ادرین مثلا دو نوکرہ  
کے دو دایرہ عظیمہ  
ال ن اور ق حرکت  
ایک سطح میں ہیں اور خط  
آق دو نو دایرون کا

محاسس ہی اور س اور م دو نوکرہ کے مرکز ہیں اور فرض کر دو کہ خط س م س اور س = ط  
اور ر م = ص اور س ب = ل اور مقام مطلوب یہ ہے پس اب چھٹی مثال کی اٹھویں شکل سے  
ظاہر ہے کہ س ب : س ا : س ص یا ل : ط :: س ص : ط  
۳ ص = ط = س = س = ط = ط اور اسطرح ر م = م = م = ص = س = ل  
اب قواعد مساحت سے ظاہر ہے کہ سطح اوس تراش کردی کی جسکی بندی ص ہے یہ ہوتی ہے  
۲ کہ ط × ص = ۲ کہ (ط - ط) اور اسطرح سطح اوس تراش کردی کی جسکی بندی ص ر  
ہی ہے ہوتی ہے ۲ کہ ص × ع = ۲ کہ (ص - ص) پس معلوم ہوا کہ مجموعہ سطحوں تاشہای  
کردی کا جو نہایت زیادہ ہونا چاہیے یہ ہے کہ (ط - ط) + ۲ کہ (ص - ص)



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2 = 1 - 1 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

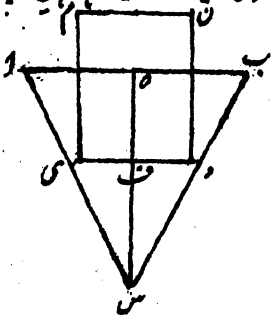
$$(x^2 - y^2) = (x+y)(x-y)$$

اسیواسطی فردہی کس =  $x^2 - y^2 = 1 - 1 = 0$  اور اسیواسطی بوسید مادات (۱) یہ حاصل ہوتا ہے  $0 = \frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2}$  اور اب صاف ظاہر ہے کہ بڑی سی بڑی قیمت کی

اوسوت ہوگی جب کہ  $x^2 = 1$  اور  $y^2 = 1$   $x = 1$  اور  $y = 1$   $x = -1$  اور  $y = -1$

$x = 1$  اور  $y = 1$  اور  $x = -1$  اور  $y = -1$  اور  $x = 1$  اور  $y = -1$  اور  $x = -1$  اور  $y = 1$   $x = 1$  اور  $y = 1$  اور  $x = -1$  اور  $y = -1$

۳ ایک گلاس میں پانی پہا ہوا ہے اور اوس میں ایک جسم کبھی ایسا رکھا جاتے ہیں کہ پانی اوس گلاس کا نہایت زیادہ گڑھی — فرض کرو کہ



۱ — س گلاس اور اوسکی دہانے کا قطر = ۲۰ اور عرض

اس گلاس کا یعنی ۵ = ط اور ن دیم

بسم کبھی ہی جکی رکھنی سے نہایت زیادہ پانی

گڑھی پانی اور فرض کرو کہ ن = ۱۵ اور کثرت ۱۵

اور کثرت ۱۵ سے متساوی ہے کہ چونکہ خط ۱۵ توازی ہوتی ہے کہ تو ۵ : ۱۵ : ۱۰ : ۱۵ : ۱۰ : ۱۵

یا ط : ص : ۱۰ : ۱۵ : ۱۰ : ۱۵ : ۱۰ : ۱۵ اور  $\frac{10}{15} = \frac{10}{15}$  اور  $\frac{10}{15} = \frac{10}{15}$  اور  $\frac{10}{15} = \frac{10}{15}$

پہا ہوا ہے اور اگر اوس سطح کو بندی ہت میں ضرب میں تو ص ضرب ۱۰ ہے اور  $\frac{10}{15} = \frac{10}{15}$  اور  $\frac{10}{15} = \frac{10}{15}$

پہا ہوا ہے اور  $\frac{10}{15} = \frac{10}{15}$  اور  $\frac{10}{15} = \frac{10}{15}$  اور  $\frac{10}{15} = \frac{10}{15}$  اور  $\frac{10}{15} = \frac{10}{15}$

اس صورت میں  $\frac{10}{15} = \frac{10}{15}$  اور  $\frac{10}{15} = \frac{10}{15}$  اور  $\frac{10}{15} = \frac{10}{15}$  اور  $\frac{10}{15} = \frac{10}{15}$

حد زیادتی کے =  $x = 1 - 1 = 0$  اور  $x = 1 - 1 = 0$  اور  $x = 1 - 1 = 0$  اور  $x = 1 - 1 = 0$

میں سے ایک تھی قیمت — س ہی س اب فردہی کہ یہ مادات ۱۰ س پر پوری تقسیم ہو جای اور کچھ ہاتھ

نہی اسیواسطی تقسیم کیا





$$\therefore \text{ط لا } \frac{3}{5} \text{ د} - \frac{3}{5} \text{ لا} - \frac{3}{5} \text{ د} - \frac{3}{5} \text{ لا} - \frac{3}{5} \text{ د} = \frac{3}{5} \text{ لا} \left\{ \frac{3}{5} \text{ د} - \frac{3}{5} \text{ لا} - \frac{3}{5} \text{ د} - \frac{3}{5} \text{ لا} \right\}$$

حد زیادتی کے اور اسے واسطی (ط-لا-د) دے دے = حد زیادتی کے اور موافق (۱) سوال

$$\text{اسی کتاب کی د} = \frac{3}{5} \text{ (ط-لا-د)} \text{ یا } 3 \text{ لا} + 3 \text{ د} = 3 \text{ ط} \dots \dots \dots (۱)$$

اور اب فرض کر دو کہ لا اور د منقطع ہیں اور غیر منقطع اسے واسطی موافق بیان بالا کی

$$\frac{3}{5} \text{ (ط-لا-د)} = \frac{3}{5} \text{ د} = \text{حد زیادتی کے اور اسے واسطی حکم سابق د} = \frac{3}{5} \text{ (ط-لا-د)}$$

$$\therefore 3 \text{ لا} + 3 \text{ د} = 3 \text{ ط} \dots \dots \dots (۲)$$

اب فرض کر دو کہ لا اور د منقطع ہیں اور لا غیر منقطع اسے واسطی حکم بیان بالا کے

$$\frac{3}{5} \text{ (ط-د-لا)} = \frac{3}{5} \text{ لا} = \text{حد زیادتی کے اور موافق حل سوال (۲) باب دوم اسی کتاب کے}$$

$$\frac{3}{5} \text{ (ط-د-لا)} = \frac{3}{5} \text{ لا} \text{ اور } 3 \text{ لا} + 3 \text{ د} = 3 \text{ ط} \dots \dots \dots (۳)$$

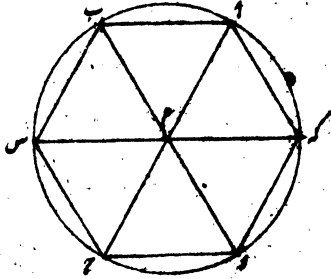
اور اب پر سید مساواتوں (۱) اور (۲) اور (۳) کی قیمتیں مطلوب لا د کے یہ حاصل

$$\frac{3}{5} = \text{لا} \text{ اور } \frac{3}{10} = \text{د} \text{ اور } \frac{3}{5} = \text{ط}$$

فصل چہمی ماحت دائرہ اور

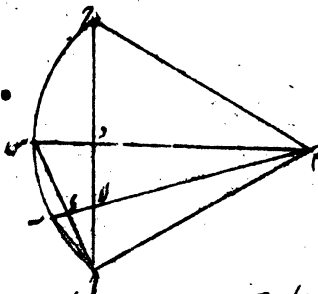
# اور شکل مجسم کی بیان میں

۱ ب س م و کہ ایک دائرہ ہے اور اس میں ایک شکل چھ ضلعوں کی بنی ہوئی ہے اور ہر ضلع اس شکل کا مساوی



نصف قطر کی ہی کہو کہ قوس ب س نصف دائرہ کا ہے اور اس واسطے مجموعہ باقی دو زاویوں کا ۱۳۰ درجہ ہے اور چونکہ سب مساوی ہونے سے ۲ اور م س کے یہی دو زاویے ہیں مساوی ہیں تو معلوم ہوا کہ ہر زاویہ مثلث ب س م

کا ۶۰ درجہ کا ہے اور اس واسطے مثلث مذکور ایک مثلث مساوی الاضلاع ہے یعنی ب س مساوی نصف قطر ہے ہی فرض کر دو کہ قوس ۱۶ ملاحظہ



ایک ایسی دائرہ کا ہے کہ اس کا ایک ہی اب ظاہر ہے کہ چونکہ معلوم ہے کہ ۱ ہے یعنی نصف اس کا ۱ د اور خط ۱ م وتر قائمہ کا تو معلوم ہو جائیگا کہ ۱ م د اور د س

اور جب معلوم ہو اس میں خط ۱ د اور د س تو معلوم ہو جائیگا کہ ۱ م د وتر قائمہ کا ۱ م س یعنی نصف اس کا خط ۱ د اور معلوم ہونی خط ۱ م اور ۱ د سے معلوم ہو جائیگا کہ ۱ م د خط ۱ د اور ب اور بد ازان خط ۱ ب جو وتر ہے جو ہے حصہ قوس ۱ کا یعنی ۱/۱۶ کل دائرہ کا اور اس طرح سے معلوم ہو سکتی ہیں ۱ م د تر

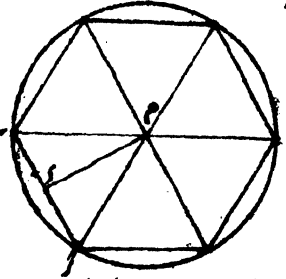
$$\frac{1}{1536} \text{ اور } \frac{1}{248} \text{ اور } \frac{1}{38} \text{ اور } \frac{1}{142} \text{ اور } \frac{1}{94} \text{ اور } \frac{1}{8}$$

دائرہ کا اور اس وتر کو حساب دالون بجای قوس کے فرض کیا ہے اور ۱۵۳۶ میں ضرب دیکر دیانت کیا ہے کہ اگر قطر ایک دائرہ کا آ ہو تو محیط اس کا نہایت قریب اسکے ۱۵۹۱ ۱۳۳ و ۳۵ ہوتا ہے اس کو ہم قیور کرینگے سہ تہ حوت کہ کے اب فرض کر دو کہ ایک دائرہ ایسا ہے کہ اس کا قطر = ط ہے اور محیط = م تو

۱ : م :: ط : م یعنی ۱ × م = ط × م = کہ ط قوس سے یہ معلوم ہوا کہ اگر معلوم کیا جائے ہم محیط کسی دائرہ کا جبکہ جانتے ہوں ہم قطر اس کا تو قریب دینا چاہئے ہیں قطر کو کہ ۱ م اور حاصل ضرب محیط ہوتا ہے دائرہ میں کہ اس کا مرکز م ہی ہوتا ہے اس لیے ایک شکل کثیر الاضلاع کہ اس کی سب ضلعی مساوی ہیں اور ہر

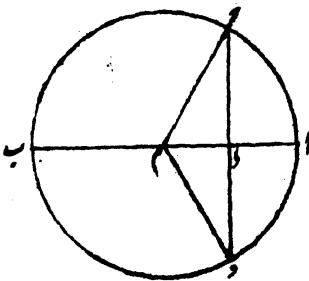


کیا ہستی اور بیسے مشکوئین اور مرکز م سے گرایا ہنئے عمود م و  
 کا اور خط ا ب کے آب فرض کرو کہ تقاد ضلعون اس کثیر  
 الاضلاع کے = لا اور ایک ضلع = و اور عمود جو مرکز سے گرایا  
 جاویے او س ایک ضلع پر = د تو مساحت ایک مثلث  
 کی =  $\frac{1}{2} \times د$  اور کل کثیر الاضلاع کی =  $\frac{1}{2} \times د$



یعنی نصف حاصل جمع ضلعوں کا عمود میں = مساحت کثیر الاضلاع کے آب ظاہر ہی کہ جتنا لا کو  
 زیادہ فرض کرو اور پھر لا کے حاصل جمع ضلعون کثیر الاضلاع کا ہی اور محیط دائرہ میں کم فرق رہیگا یعنی  
 دائرہ میں ایک آب کثیر الاضلاع بنایا جاسکتا ہی کہ فرق اسکی ضلعون کے مجموعہ اور محیط میں اور  
 عمود و اور نصف قطر میں کم ہووی بہ نسبت کسی مقدار مفروض کے اور چونکہ قاعدہ واسطی دریافت کرنی  
 مساحت کثیر الاضلاع کے اس کثیر الاضلاع کی صورت میں ہی جا رہی ہو سکتا ہی تو معلوم ہوا کہ مساحت  
 دائرہ = نصف قطر  $\times$  نصف محیط اب فرض کرو کہ دو دائرہ بیسے آ اور ب ہیں اور قطر آ کا

= ط اور قطر ب کا = ص تو  $1 = \frac{ط}{2} \times \frac{ص}{2} = \frac{ط \times ص}{4}$  اور  $\frac{ط}{2} = \frac{ص}{2}$  یعنی  
 ب =  $\frac{ط}{2} \times \frac{ص}{2} = \frac{ط \times ص}{4}$  اور اب ظاہر ہی کہ ا : ب ::  $\frac{ط}{2} : \frac{ص}{2}$  یعنی



ا : ب :: ط : ص اور اس سے یہ معلوم ہوا کہ  
 دائرہ بیسے ایک دوسرے سے وہ نسبت رکھتی ہیں  
 جو محیط اور ان کے قطرون کے رکھتی ہیں خط ا د کو  
 تیرے کہتے ہیں اور جہ دکو وتر تو س کہتے ہیں اگر  
 معلوم ہو جائیں وتر اور قطر تو معلوم کر سکتے ہیں قسم

تیر کو اس طور سے فرض کرو کہ نصف قطر جہ م یا ا م = ط اور نصف وتر د = ص اور  
 او = ل جو مجموعہ ہی تو ص + (ط - ل) = ط یعنی ص + ط - ل = ط ل + ل = ط یعنی  
 ل - ط ل = ص اور ل - ط ل + ل = ط - ص اور ل - ط ل = ص اور

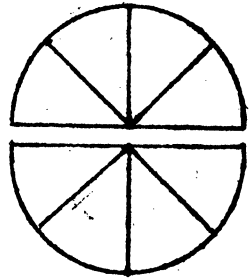
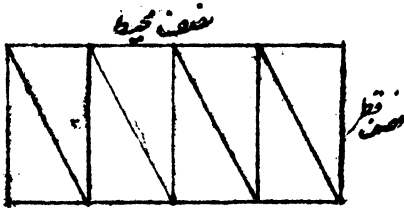
$$ل - ط = \sqrt{ط^2 - ص^2} \quad \text{اور} \quad ل = \sqrt{ط^2 - ص^2} + ط$$

اور معلوم ہو سکتا ہی و تجرب معلوم ہو قطر اور تیر مثلاً فرض کرو کہ تیر = ص اور نصف وتر = ل تو  
 ل + (ط - ص) = ط یعنی ل + ط - ص = ط ل + ل = ط

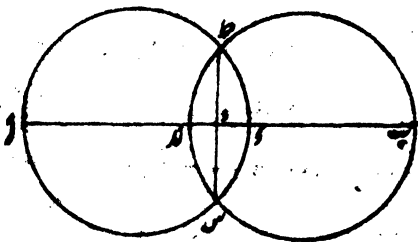
اور لا = ص + ۲ ط ص اور لا = \* - ص + ۲ ط ص (ج) جسوقت معلوم ہو دتر  
 اور تیر تو معلوم ہو سکتا ہے قطر مثلاً فرض کرو کہ نصف دتر = ص اور یک = ط اور نصف قطر = ۵ تو

$$لا = ص + (لا - ط) = ص + لا - ۲ ط = ص + ط$$

پس معلوم ہوا کہ جب قطر اور دتر اور تیر میں سے دو چیزیں معلوم ہوتی ہیں تو  
 تیسری معلوم ہو سکتی ہے سطح قطع ۱ م = قوس ۲ م × ۳ م دلیل اسکے واسطی ہی ہے جو  
 واسطی مساحت دائرہ کے ہے سوای مرقوم بالا کے ایک اور دلیل واسطی مساحت دائرہ کی یہ ہے  
 تقسیم کرو ہر نصف دائرہ کو مساوی تعداد قطع میں اور قطر کی سیدہ میں دو نصف دائروں کو  
 چہ اگر دو اور بعد اسکے قطع کو پہلا کر ایک نصف دائرہ کے قطع کو دوسرے نصف دائرہ کے  
 قطع کی ساتھ شامل کر دو اور دیکھنی سے معلوم ہوگا کہ مجموعہ ان قطع کا یعنی سطح دائرہ کے



مساوی ہے سطح نصف محیط کی نصف قطر میں جیسے شکل سی واضح ہے چنانچہ ہم ایک مربع کہ او سکا ایک  
 ضلع = ط کی ہے اور دریافت کیا جائے ہم ایک ایسا دائرہ کہ او سکا مساحت مربع سی مساوی ہو  
 فرض کرو کہ نصف قطر دائرہ مطلوبہ کا = لا کی ہے تو او سکا مساحت = کہ لایکے ہوگی اور یوں بشرط  
 سوال کے کہ لا = ط تو لا =  $\frac{ط^2}{۲}$  اور جسوقت معلوم ہو چھین دائرہ کا تو دائرہ فوراً معلوم ہو سکتا  
 ہے دو دائرے ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں



جیسے شکل سی واضح ہے  
 معلوم ہو چھین قطر دو دائرہ کا  
 اور خط ۱ و ۲ یعنی قطر  
 ب = لا = ۲ ط اور قطر  
 ۱ = ۲ ص اور خط

اور (۳) - (۲) =  $b + c + s = 14$  ..... (۷)

اور (۶) - (۵) =  $s + 2 = 5$  ..... (۸)

اور (۷) - (۶) =  $s + 1 = 4$  ..... (۹)

اور (۸) - (۷) =  $2 = 4$  اور  $\frac{1}{s} = 1$  اور مساوات (۸) سے

$s = 2 + 2 = 4$  اور  $s = 4$  اور مساوات (۵) سے  $b + \frac{2}{4} = 5$

∴  $b = 5 - \frac{2}{4} = \frac{23}{4}$  اور مساوات (۱) سے  $1 = \frac{1}{s} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} + 1$

$1 = \frac{1}{4} + 1 = 1$  ∴ معلوم ہوا کہ  $1 + 4 + 4 + 2 = 11$  وغیرہ

$$\frac{n}{4} + \frac{n}{4} + \frac{n}{4} = \frac{n + n + n}{4} = \frac{3n}{4} = \frac{n(1+n)(1+2n)}{4}$$

اب فرض کریں = مقدار لا انتہا تو  $n = 1$

$$\therefore \frac{n}{4} = \frac{n^2}{4} = \frac{(1+n)(1+2n)}{4}$$

اب ہم کہتے ہیں کہ مشابہ مثلث ایک دوسرے سے وہی نسبت رکھتی ہیں جو محدود اور کئی ایک ایسے ضلع کے کہ محاذی ہوں اور دونوں مساوی کے آؤں کہتے ہیں

فرض کر دو کہ اب س اور د ل ا ب دو مثلث

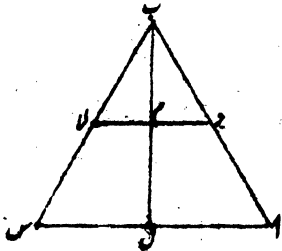
مشابہ ہیں اور ایک مثلث کو دوسرے پر پہلاؤ

جیسا کہ شکل سے واضح ہے اب ظاہر ہو کہ

د ل : ا ب :: ۱ : س

د ل : ا ب :: ۱ : س :: ۱ : س :: ۱ : س

د ل : ا ب :: ۱ : س :: ۱ : س :: ۱ : س



اور حاصل ضرب اس نسبت کا یہ ہے

د ل : ا ب :: ۱ : س :: ۱ : س :: ۱ : س

د ل : ا ب :: ۱ : س :: ۱ : س :: ۱ : س

د ل : ا ب :: ۱ : س :: ۱ : س :: ۱ : س

ہو اور ایسی ہی ایک مقابل اسکی متوازی ہو اور گہری ہو تو یہی س طرف سے انشمال متوازی الاضلاع سے اگر قاعدہ

منشور کا مثلث ہو تو اسکی منشور مثلثی کہتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس خود وضع وہ شکل محکم ہے جسکا قاعدہ ایک

مثلث مستقیم الاضلاع ہو تاہی اور جو گہری ہوتی ہے منشور سے جو سب ایک لفظ پر سے ہیں اور اس

اور (۳) - (۲) = (۲) = ب + س + ۳ + ۳ = ۱۴ ..... (۷)

اور (۶) - (۵) = (۵) = س + ۲ + ۱۲ = ۱۵ ..... (۸)

اور (۷) - (۶) = (۶) = س + ۲ + ۱۸ = ۲۰ ..... (۹)

اور (۹) - (۸) = (۸) = ۲ + ۶ = ۸ اور (۸) اور سات (۸) سے  
 $۲ + س = ۵$  اور  $۲ + س = ۵$  اور سات (۵) سے  $ب + س = ۲$  اور  $۲ + س = ۵$   
 $۲ + س = ۵$  اور  $۲ + س = ۵$

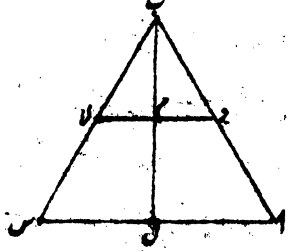
ب : ب = ۲ - ۲ = ۰ اور سات (۱) سے  $۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۴$   
 $۱ + ۱ = ۲$  اور  $۱ + ۱ = ۲$  اور  $۱ + ۱ = ۲$  اور  $۱ + ۱ = ۲$   
 تو معلوم ہوا کہ  $۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۴$  وغیرہ

$\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴}$

اب فرض کروں = مقدار لا اتمہا تو  $۱ + ۱ = ۲$

$\frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۴}$

اب ہم کہتے ہیں کہ شہنت ایک دوسرے سے ہی نسبت رکھتی ہیں جو مجبوراً کوئی ایک ایک ضلع کے  
 کہ محاذی ہونے اور ہر ضلع کے ایک ایک ضلع کے



فرض کرو کہ اب س اور د لا ب دو شہنت  
 مشابہ ہیں اور ایک شہنت کہ وہ دوسرے کے برابر  
 جیسے کہ شکل سے واضح ہے اب ظاہر ہے کہ  
 د لا : ا س :: د لا : ا س

اور حاصل ضرب اب نسبت کا یہ ہے

د لا : ا س :: د لا : ا س :: د لا : ا س :: د لا : ا س

د ب : ل : شہنت ا ب س : د لا : ا س :: د لا : ا س :: د لا : ا س :: د لا : ا س

د ب : ل : شہنت ا ب س : د لا : ا س :: د لا : ا س :: د لا : ا س :: د لا : ا س

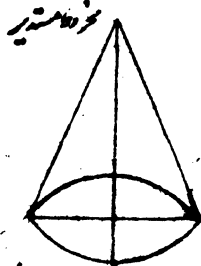
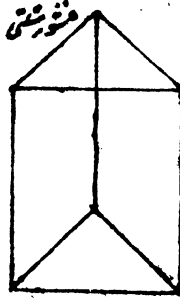
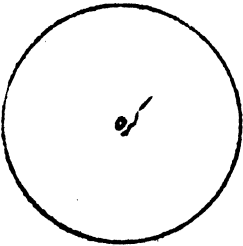
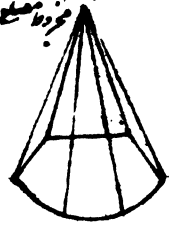
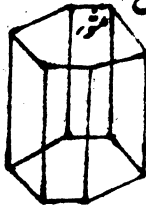
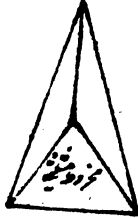
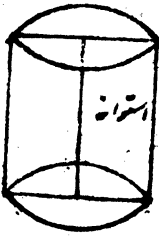
ہی اور ایسی ہی ایک مقابلہ کی متوازی ہوا کہ گہری ہوتی ہے طرف سے اشکال متوازی الاضلاع سے اگر قاعدہ

مشور کا شہنت ہر تو اس میں مشور شہنت کہتے ہیں اور علیٰ ہر القیاس خود وضع وہ شکل مجسم ہے جس کا قاعدہ ایک

شکل مستقیم الاضلاع ہو تا ہی اور جو گہری ہوتی ہے مشور سے جو ب ایک لفظ ہے جس سے ہن اور اس

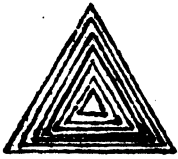
کو مخروط کی راس کہتے ہیں استوائی وہ شکل جسم ہے جو پیدا ہوتی ہے گردش ایک سیدیل کی سی ہے  
 گرد ایک اور کی ضلعوں میں سے مخروط مستردہ شکل جسم ہے جو پیدا ہوتی ہے گردش ایک مثلث  
 قائم الزاویہ کی سی ہے گرد بوسلی ارتفاع کی تہہ ہے ظاہر ہے کہ ہر منشور یک ہوتا ہے منشوروں مثلثی

سے اور ہر مخروط منضلع  
 مخروط منضلع

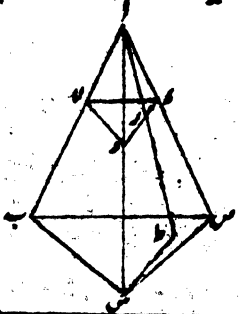


رکب ہوتا ہے مخروطوں مثلثی سے اب جسم کہتی ہیں کہ اگر دو یکہین جسم ایک مخروط مثلثی کو راس  
 کی طرف سے تو وہ اس شکل کا معلوم ہوگا تو اس سے یہ معلوم ہوگا کہ مخروط مثلثی میں سب مثلث جو  
 متوازی قاعدہ کے ہوتی ہیں وہ یہ اسپین مشابہ ہوتی ہیں لیکن مشابہ مثلث ایک دوسرے

سے دی نسبت رکھتی ہیں جو مجذور ادا ہے  
 ایک ایک منضلع کی راس کہتے ہیں فرض کرو  
 کہ ا ب س ص مخروط مثلثی ہے اور فرض



کو د کہ مثلث و لاد متوازی ہے مثلث ص س ب کے کہ قاعدہ مخروط کا ہے اور فرض  
 کر دو کہ ا ط ارتفاع مخروط کی ہے اور وہ ملتی ہے  
 مثلث و د لاسے نقطہ ترین آب ظاہر ہے کہ

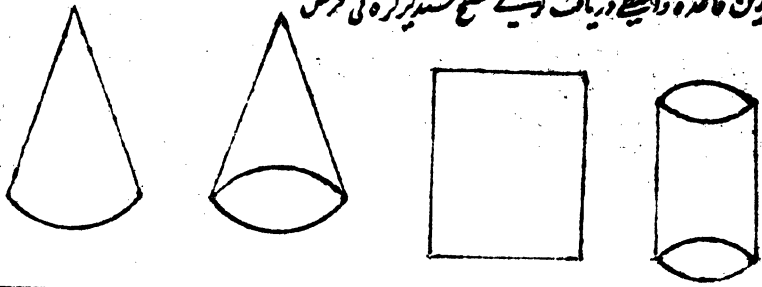


س ص : و د : : ا س : د ا  
 : ص س : و د : : ا س : د ا  
 لیکن ا س : د ا : : ا ط : د ا

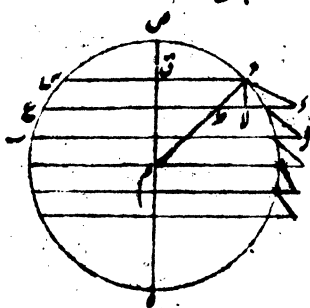
تو مثلت ص ب س : مثلت و د لا :: ل ط : ا ک اب فرض کر دو کہ مثلت ص ب س = ط اور  
 مثلت و د لا = ل اور ا ط = ص اور ا ر = و ق و ط : لا :: ص : د ا تو لا =  $\frac{ط}{ص} \times \frac{و د لا}{ل}$   
 اب فرض کر دو کہ وہی ایک جزاؤں جزوں لا انتہا سے جنسی خط ا ط بنا جو ا ہر از تعمیر  
 کرتے ہیں ہم اوس جز کو ساتھ آیکے تو اب ظاہر ہو کہ تعمیر کر سکتے ہیں مجموعہ ب منحنون  
 بیضے مخروط کو ساتھ اس سلسلہ کے  $\frac{ط}{ص} (1 + ۲ + ۹ + ۱۶ + ۲۵ + \dots + \text{غیرہ لا انتہا کی})$   
 لیکن یہی ثابت کیا ہے کہ  $1 + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + \dots + \text{غیرہ لا انتہا} = \frac{ن^۲}{۲}$  اور ا س ج اے ن ہر  
 قدر اور منحنون کی تو ضرور ہو کہ ن = ا ط اور

$$\frac{ن^۲}{۲} = \frac{ا ط^۲}{۲} = \frac{ص}{۲} \text{ اور مساحت مخروط} = \frac{ط}{۳} \times \frac{ص}{۳} = \frac{ص}{۳} \times \frac{ط}{۳}$$

تو معلوم ہوا قاعدہ واسطے دریافت کرنی مساحت مخروط کی یہہ ہر ضرب دو ایک تہائی ارتفاع  
 کو مساحت قاعدہ میں اور حاصل ضرب مساحت مخروط ہوتا ہے لیکن منثور کہ حکما قاعدہ = ط اور  
 ارتفاع = ص مساوی ہوتا ہے ط ص کے تو معلوم ہوا کہ ہر مخروط تہائی ہوتا ہے ایک منثور کا جسکا  
 قاعدہ اور ارتفاع قاعدہ اور ارتفاع مخروط نہ گور کی سے مساوی ہے یہہ ظاہر ہو کہ ہر شکل  
 یا قاعدہ تقسیم ہو سکتی ہے منثنون تو اس سے یہہ معلوم ہوا کہ قاعدہ ہر مخروط کا تہائی ہی منثنون کا ہوا قاعدہ  
 مرقوبہ بالا ہمیشہ جاری ہو سکتا ہے تو اس سے یہہ معلوم ہوا کہ استوانہ اور مخروط مستدیر کی مساحت کی دو ا س  
 ہی جاری ہو سکتا ہے کیونکہ استوانہ ایک منثور ہے یا کہ اوسکی قاعدہ کی ضلعی قعدا میں لا انتہا میں جہی اوسکا  
 قاعدہ دائرہ ہے اور اسیطور سے مخروط مستدیر ایک مخروط مضلع ہے کہ اوسکی قاعدہ کے ضلعے ہر شمار میں  
 سطح مستدیر ایک استوانہ کی حاصل ہوتی ہے ضرب دینی سے محیط قاعدہ کو ارتفاع میں کیونکہ سطح مذکور ایک مستطیل  
 ہے جیسکے شکل سے واضح ہے اور سطح مستدیر ایک مخروط مستدیر کی حاصل ہوتی ہے ضرب دینی سے تہیہ خط کو  
 نصف محیط قاعدہ کی میں کیونکہ سطح مذکور ایک قطاع دائرہ کا ہے جیسکے پہلانی سے واضح ہو گا اب ہم ثابت  
 کریں گے قاعدہ واسطے دریافت کریں سطح مستدیر کرہ کی فرض



کر دے کہ دو دس س ع ایک کرہ ہی اور در ایک چھوٹا مس اور دس ع ایک نہایت باریک دہاری  
سطح مستدیر کرہ کی اور دلا ایک نہایت چھوٹا قطر ص ہ کا اب ظاہر ہو کہ بیش بہا ہونی مثلثوں کو دلا اور



عق م کے دق : دم :: دلا : دو =  $\frac{دلا \times دق}{دق}$

اب فرض کر دے کہ جو نصف قطر ص = ط اور دق = لا

اور دلا = س تو دس =  $\frac{ط \times س}{لا}$  لیکن سطح

دس ع = دس  $\times$  کہ  $\times$  دس =  $۲$  کہ  $۲$  کہ  $لا \times ط$  =

$۲$  کہ  $ط$  و اور اس قطر سی پہ پی دریافت ہو سکتا ہے کہ سطح

س ع بہی =  $۲$  کہ  $ط$  کے ہی اور مجموعہ ان سب مثلثوں کا کہ دے سطح کرہ کے یہ

=  $۲$  کہ  $ط$  ( $س + س + س + س + \dots$  لا انتہا) =  $۲$  کہ  $ط \times ۲$  =  $۴$  کہ  $ط$  کہ

=  $۲$  کہ  $ط \times ۲$  کہ = محیط قطر = چونکہ سطح ایک دائرہ فطیر کی اب ہم ثبات کر سکی قاعدہ سطح مساحت جسم

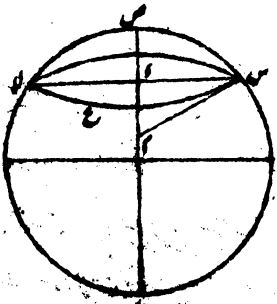
کرہ کے فرض کر دے کہ سطح کرہ کو تقسیم کیا ہمیں لا انتہا ساری برجون میں اور بران مریون جو ایک مخروط وضع جانی جائے

ایسی کہ ان سب و بیکھ اس مرکز کرہ بر جو اب ظاہر ہے کہ مجموعہ ان سب مخروطوں کا مساوی مساحت کرہ کی ہی فرض کر دے

کہ ایک برن مذکور = ص تو مجموعہ ان سب مخروطوں کا = ص  $\times$  سطح + ص  $\times$  سطح + لا انتہا =

سطح (ص + ص + ص + لا انتہا) =  $\frac{ط}{۲} \times ۲$  کہ =  $۲$  کہ  $ط$  کہ اور اگر فرض کریں جسم

$۲$  کہ  $ط$  = ع تو  $\frac{۲$  کہ  $ط$  کہ =  $\frac{۲$  کہ  $ط$  کہ ایک اور نئی ترکیب ثبات کنی قاعدہ مساحت کرہ



کے یہ ہی فرض کر دے دائرے ص لا ط س اور

س ع لا ایک دوسرے کو تقاطع کرتے ہیں چہ خط س لا

کے اور ایک دوسری برمود ہیں اب فرض کر دے

ص = س = لا = ایک نہایت چھوٹی جز قطر کے اور

س = س = لا = س لا =  $۱$  اور قطر ص = ط

∴  $س$  =  $ط$  -  $لا$  اور  $ط$   $\times$   $ص$  =  $لا$  ( $ط$  -  $لا$ ) =  $ط$  -  $لا$  =  $لا$  تو مساحت دائرہ

س ع لا =  $لا$  کہ کہ ( $ط$  لا -  $لا$ ) اب ظاہر ہے کہ مقدار کہ ( $ط$  لا -  $لا$ ) بڑھتی ہی مساحت ایک

دائرہ کی جو متوازی ہی دائرہ س ع لا کے اور مجموعہ ان سب دائروں کا مساوی مساحت کرہ کے

اور مجموعہ ان سب دائروں کا یہ ہے

$$= \left\{ \text{ط} (u + u_2 + u_3 + u_4) - (u + u_2 + u_3 + u_4) \right\} \text{ک}$$

$$\left\{ \frac{\text{ط} (\text{ط} + 1)}{۲} - \frac{\text{ط} (\text{ط} + ۱ + \text{ط} + ۲)}{۴} \right\} \text{ک}$$

ط کو لا انتہا نسبت لاکي تو  $\text{ط} + ۱ = \text{ط}$

$$\therefore \text{مساحت کرہ} = \text{ک} \left( \frac{\text{ط}^۲}{۲} - \frac{\text{ط}^۲}{۴} \right) = \text{ک} \left( \frac{\text{ط}^۲}{۴} \right) = \frac{\text{ک} \text{ط}^۲}{۴}$$

اب فرض کرو کہ ایک اور کرہ ایسا ہے کہ اس کا قطر = ص تو بموجب قاعدہ مرقوم بالا لاکي اس کی مساحت =  $\frac{\text{ک} \text{ص}^۲}{۴}$  اب نہایت ظاہر ہے کہ  $\frac{\text{ک} \text{ط}^۲}{۴} : \frac{\text{ک} \text{ص}^۲}{۴} :: \text{ط} : \text{ص}$  اس سے معلوم ہوا کہ کرے ایک دوسری سے وہی نسبت رکھتے ہیں جو کعبہ او کی قطروں کے اسپین رکھتے ہیں مرقوم بالا سی ظاہر ہے کہ مساحت سطح ایک کرہ کی جب نصف قطر = ط کیے ہی مساوی ہوتی ہے  $\text{ط}^۲$  کہ اور اگر ایک کرہ جو مساحت نصف قطر = ص تو اس کی سطح کی مساحت =  $\text{ص}^۲$  کہ ص تو معلوم ہوا کہ  $\text{ط}^۲ : \text{ص}^۲ :: \text{ط} : \text{ص}$  اور اس سے یہ ثابت ہوا کہ سطحین کرہ کی اسپین وہی نسبت رکھتی ہیں جو او کی قطروں کے اسپین رکھتی ہیں

**فصل ساتویں مقداروں نزولی کے میانین اسپین رکھتی ہیں**  
 اوس مقدار جس پر کوسیکے اوپر علامت کسی تریزہ نزول کے ہوا درجہ کا پورا نہیں نکل سکتا ہو اوس مقدار کو مقدار نزولی کہتی ہیں چند مثالوں سے اس قسم کی مقداروں کے صفحہ ۳۶۶ میں ہتھے لکھی ہیں اور وہ ان اوہن کہتے سے فقط یہ مطلب تھا کہ اگر اس قسم کے مقدار کسی حساب میں واقع ہو تو طالب علم اوس پر یہی عمل ضروری جاری کر سکے لیکن ہم ان سے بہت کام نہیں لیتا ہے جیسے اونکو ابواب گذشتہ میں نہیں لکھا کیونکہ چار مطالب یہ ہیں جو مطالب ضروری اور موجب ہیں وہ اول ہے جاوین اور جو اسے ضرور نہیں ہیں وہ بعد از ان آئے جائیں اب ہم کہتے ہیں تو اے جو در باب مقداروں نزولی کے وضع کئے گئی ہیں تبدیل کر سکتے ہیں ہم کسی مقدار کو مقدار نزولی سے

اگر کوئی ہم مقدار نزولی کا اوس مرتبہ کا صعود جس مرتبہ کا نزول تیسرے علامت نزول مقدار نزولی مطلوب کی مثلًا اگر ہم چاہیں کہ مقدار ط کو شکل جذر سے تبدیل کریں تو لازم ہے کہ ہم اوس کا مجدد در لین تو ظاہر ہے کہ  $\text{ط}^۲$  ہوتا ہے اور چونکہ  $\text{ط}^۲ = \text{ط} \times \text{ط}$  تو معلوم ہوا کہ مقدار نزولی مطلوب یہ ہے  $\text{ط}^۲$  کہ مساوی ہے مقدار مفروضہ کے اسی مقدار کو اور



مقداروں نزدیک جیسے ہی تقبیر کر سکتی ہیں مثلاً  $\sqrt{3}$  اور  $\sqrt{7}$  اور  $\sqrt{5}$  اور  $\sqrt{11}$  وغیرہ اور  $\sqrt{2} = \sqrt{4} = \sqrt{16}$  اور  $\sqrt{3} = \sqrt{9} = \sqrt{36}$  اور  $\sqrt{5} = \sqrt{25} = \sqrt{100}$  اور  $\sqrt{7} = \sqrt{49} = \sqrt{196}$  اور  $\sqrt{11} = \sqrt{121} = \sqrt{1584}$  اور  $\sqrt{13} = \sqrt{169} = \sqrt{441}$  اور  $\sqrt{17} = \sqrt{289} = \sqrt{576}$  اور  $\sqrt{19} = \sqrt{361} = \sqrt{1444}$  اور  $\sqrt{23} = \sqrt{529} = \sqrt{2916}$  اور  $\sqrt{29} = \sqrt{841} = \sqrt{5924}$  اور  $\sqrt{37} = \sqrt{1369} = \sqrt{10321}$  اور  $\sqrt{41} = \sqrt{1681} = \sqrt{13824}$  اور  $\sqrt{43} = \sqrt{1849} = \sqrt{15129}$  اور  $\sqrt{47} = \sqrt{2209} = \sqrt{17649}$  اور  $\sqrt{53} = \sqrt{2809} = \sqrt{23044}$  اور  $\sqrt{59} = \sqrt{3481} = \sqrt{28241}$  اور  $\sqrt{67} = \sqrt{4489} = \sqrt{37649}$  اور  $\sqrt{71} = \sqrt{5041} = \sqrt{42256}$  اور  $\sqrt{73} = \sqrt{5329} = \sqrt{44784}$  اور  $\sqrt{79} = \sqrt{6241} = \sqrt{51529}$  اور  $\sqrt{83} = \sqrt{6889} = \sqrt{57124}$  اور  $\sqrt{89} = \sqrt{7921} = \sqrt{65344}$  اور  $\sqrt{97} = \sqrt{9409} = \sqrt{77449}$  اور  $\sqrt{101} = \sqrt{10201} = \sqrt{82084}$  اور  $\sqrt{103} = \sqrt{10609} = \sqrt{85444}$  اور  $\sqrt{107} = \sqrt{11449} = \sqrt{90724}$  اور  $\sqrt{113} = \sqrt{12769} = \sqrt{99744}$  اور  $\sqrt{127} = \sqrt{16129} = \sqrt{129649}$  اور  $\sqrt{131} = \sqrt{17161} = \sqrt{139724}$  اور  $\sqrt{137} = \sqrt{18769} = \sqrt{152049}$  اور  $\sqrt{139} = \sqrt{19321} = \sqrt{156324}$  اور  $\sqrt{149} = \sqrt{22201} = \sqrt{180949}$  اور  $\sqrt{151} = \sqrt{22801} = \sqrt{185824}$  اور  $\sqrt{157} = \sqrt{24649} = \sqrt{199249}$  اور  $\sqrt{163} = \sqrt{26569} = \sqrt{213244}$  اور  $\sqrt{167} = \sqrt{27889} = \sqrt{223724}$  اور  $\sqrt{173} = \sqrt{29929} = \sqrt{239749}$  اور  $\sqrt{179} = \sqrt{32041} = \sqrt{256849}$  اور  $\sqrt{181} = \sqrt{32761} = \sqrt{262024}$  اور  $\sqrt{187} = \sqrt{34969} = \sqrt{279749}$  اور  $\sqrt{191} = \sqrt{36481} = \sqrt{291724}$  اور  $\sqrt{193} = \sqrt{37321} = \sqrt{297649}$  اور  $\sqrt{197} = \sqrt{38809} = \sqrt{311724}$  اور  $\sqrt{199} = \sqrt{39601} = \sqrt{317649}$  اور  $\sqrt{211} = \sqrt{44521} = \sqrt{368049}$  اور  $\sqrt{223} = \sqrt{49729} = \sqrt{415724}$  اور  $\sqrt{227} = \sqrt{51489} = \sqrt{429749}$  اور  $\sqrt{229} = \sqrt{52441} = \sqrt{436724}$  اور  $\sqrt{233} = \sqrt{54329} = \sqrt{452749}$  اور  $\sqrt{239} = \sqrt{57121} = \sqrt{474724}$  اور  $\sqrt{241} = \sqrt{58561} = \sqrt{482749}$  اور  $\sqrt{247} = \sqrt{61209} = \sqrt{506749}$  اور  $\sqrt{251} = \sqrt{63001} = \sqrt{516724}$  اور  $\sqrt{257} = \sqrt{66049} = \sqrt{537749}$  اور  $\sqrt{263} = \sqrt{69169} = \sqrt{559724}$  اور  $\sqrt{269} = \sqrt{72721} = \sqrt{586749}$  اور  $\sqrt{271} = \sqrt{73641} = \sqrt{593724}$  اور  $\sqrt{277} = \sqrt{76809} = \sqrt{618749}$  اور  $\sqrt{281} = \sqrt{78961} = \sqrt{632724}$  اور  $\sqrt{283} = \sqrt{80089} = \sqrt{640749}$  اور  $\sqrt{287} = \sqrt{82329} = \sqrt{658749}$  اور  $\sqrt{293} = \sqrt{85841} = \sqrt{692724}$  اور  $\sqrt{299} = \sqrt{89401} = \sqrt{726749}$  اور  $\sqrt{307} = \sqrt{94249} = \sqrt{760749}$  اور  $\sqrt{311} = \sqrt{96721} = \sqrt{778724}$  اور  $\sqrt{313} = \sqrt{97969} = \sqrt{786749}$  اور  $\sqrt{317} = \sqrt{100489} = \sqrt{804749}$  اور  $\sqrt{323} = \sqrt{104401} = \sqrt{838724}$  اور  $\sqrt{329} = \sqrt{108241} = \sqrt{866749}$  اور  $\sqrt{331} = \sqrt{109681} = \sqrt{874724}$  اور  $\sqrt{337} = \sqrt{113769} = \sqrt{908749}$  اور  $\sqrt{347} = \sqrt{120409} = \sqrt{952749}$  اور  $\sqrt{353} = \sqrt{124609} = \sqrt{986749}$  اور  $\sqrt{359} = \sqrt{128809} = \sqrt{1020749}$  اور  $\sqrt{367} = \sqrt{134689} = \sqrt{1068749}$  اور  $\sqrt{371} = \sqrt{138721} = \sqrt{1102724}$  اور  $\sqrt{373} = \sqrt{139761} = \sqrt{1110749}$  اور  $\sqrt{377} = \sqrt{142609} = \sqrt{1130749}$  اور  $\sqrt{383} = \sqrt{146641} = \sqrt{1164724}$  اور  $\sqrt{389} = \sqrt{151321} = \sqrt{1208749}$  اور  $\sqrt{391} = \sqrt{152881} = \sqrt{1220724}$  اور  $\sqrt{397} = \sqrt{157609} = \sqrt{1254749}$  اور  $\sqrt{401} = \sqrt{160801} = \sqrt{1276724}$  اور  $\sqrt{407} = \sqrt{165649} = \sqrt{1310749}$  اور  $\sqrt{413} = \sqrt{170609} = \sqrt{1344749}$  اور  $\sqrt{419} = \sqrt{175489} = \sqrt{1388749}$  اور  $\sqrt{421} = \sqrt{176961} = \sqrt{1400724}$  اور  $\sqrt{427} = \sqrt{181929} = \sqrt{1442749}$  اور  $\sqrt{431} = \sqrt{185281} = \sqrt{1464724}$  اور  $\sqrt{433} = \sqrt{186761} = \sqrt{1472749}$  اور  $\sqrt{437} = \sqrt{189689} = \sqrt{1494749}$  اور  $\sqrt{443} = \sqrt{196249} = \sqrt{1552749}$  اور  $\sqrt{449} = \sqrt{201721} = \sqrt{1606749}$  اور  $\sqrt{451} = \sqrt{203881} = \sqrt{1620724}$  اور  $\sqrt{457} = \sqrt{208369} = \sqrt{1664749}$  اور  $\sqrt{463} = \sqrt{213969} = \sqrt{1708749}$  اور  $\sqrt{469} = \sqrt{219481} = \sqrt{1752749}$  اور  $\sqrt{471} = \sqrt{222161} = \sqrt{1774724}$  اور  $\sqrt{473} = \sqrt{224641} = \sqrt{1786749}$  اور  $\sqrt{477} = \sqrt{228409} = \sqrt{1808749}$  اور  $\sqrt{483} = \sqrt{233089} = \sqrt{1852749}$  اور  $\sqrt{489} = \sqrt{238521} = \sqrt{1906749}$  اور  $\sqrt{491} = \sqrt{240881} = \sqrt{1920724}$  اور  $\sqrt{497} = \sqrt{248009} = \sqrt{1974749}$  اور  $\sqrt{503} = \sqrt{254049} = \sqrt{2018749}$  اور  $\sqrt{509} = \sqrt{259129} = \sqrt{2062749}$  اور  $\sqrt{511} = \sqrt{261481} = \sqrt{2084724}$  اور  $\sqrt{517} = \sqrt{266689} = \sqrt{2126749}$  اور  $\sqrt{523} = \sqrt{272009} = \sqrt{2170749}$  اور  $\sqrt{529} = \sqrt{277329} = \sqrt{2214749}$  اور  $\sqrt{531} = \sqrt{279881} = \sqrt{2236724}$  اور  $\sqrt{537} = \sqrt{285369} = \sqrt{2278749}$  اور  $\sqrt{543} = \sqrt{291009} = \sqrt{2322749}$  اور  $\sqrt{549} = \sqrt{296721} = \sqrt{2366749}$  اور  $\sqrt{551} = \sqrt{300081} = \sqrt{2388724}$  اور  $\sqrt{557} = \sqrt{306049} = \sqrt{2430749}$  اور  $\sqrt{563} = \sqrt{312209} = \sqrt{2474749}$  اور  $\sqrt{569} = \sqrt{318489} = \sqrt{2518749}$  اور  $\sqrt{571} = \sqrt{321841} = \sqrt{2540724}$  اور  $\sqrt{573} = \sqrt{324361} = \sqrt{2552749}$  اور  $\sqrt{577} = \sqrt{328609} = \sqrt{2574749}$  اور  $\sqrt{583} = \sqrt{335289} = \sqrt{2618749}$  اور  $\sqrt{589} = \sqrt{341921} = \sqrt{2662749}$  اور  $\sqrt{591} = \sqrt{345281} = \sqrt{2684724}$  اور  $\sqrt{597} = \sqrt{352809} = \sqrt{2738749}$  اور  $\sqrt{603} = \sqrt{359969} = \sqrt{2782749}$  اور  $\sqrt{609} = \sqrt{367129} = \sqrt{2826749}$  اور  $\sqrt{611} = \sqrt{370481} = \sqrt{2848724}$  اور  $\sqrt{617} = \sqrt{377889} = \sqrt{2890749}$  اور  $\sqrt{623} = \sqrt{385409} = \sqrt{2934749}$  اور  $\sqrt{629} = \sqrt{393049} = \sqrt{2978749}$  اور  $\sqrt{631} = \sqrt{396561} = \sqrt{2996724}$  اور  $\sqrt{637} = \sqrt{404409} = \sqrt{3038749}$  اور  $\sqrt{643} = \sqrt{412489} = \sqrt{3082749}$  اور  $\sqrt{649} = \sqrt{420729} = \sqrt{3126749}$  اور  $\sqrt{651} = \sqrt{424381} = \sqrt{3148724}$  اور  $\sqrt{657} = \sqrt{432849} = \sqrt{3190749}$  اور  $\sqrt{663} = \sqrt{441409} = \sqrt{3234749}$  اور  $\sqrt{669} = \sqrt{449989} = \sqrt{3278749}$  اور  $\sqrt{671} = \sqrt{453681} = \sqrt{3296724}$  اور  $\sqrt{673} = \sqrt{456361} = \sqrt{3308749}$  اور  $\sqrt{677} = \sqrt{458609} = \sqrt{3330749}$  اور  $\sqrt{683} = \sqrt{465689} = \sqrt{3374749}$  اور  $\sqrt{689} = \sqrt{473529} = \sqrt{3418749}$  اور  $\sqrt{691} = \sqrt{477281} = \sqrt{3440724}$  اور  $\sqrt{697} = \sqrt{485609} = \sqrt{3462749}$  اور  $\sqrt{703} = \sqrt{494049} = \sqrt{3506749}$  اور  $\sqrt{709} = \sqrt{502529} = \sqrt{3550749}$  اور  $\sqrt{711} = \sqrt{506281} = \sqrt{3572724}$  اور  $\sqrt{717} = \sqrt{514969} = \sqrt{3614749}$  اور  $\sqrt{723} = \sqrt{523809} = \sqrt{3658749}$  اور  $\sqrt{729} = \sqrt{532809} = \sqrt{3702749}$  اور  $\sqrt{731} = \sqrt{536561} = \sqrt{3724724}$  اور  $\sqrt{737} = \sqrt{545889} = \sqrt{3766749}$  اور  $\sqrt{743} = \sqrt{555409} = \sqrt{3810749}$  اور  $\sqrt{749} = \sqrt{565049} = \sqrt{3854749}$  اور  $\sqrt{751} = \sqrt{568881} = \sqrt{3876724}$  اور  $\sqrt{757} = \sqrt{578769} = \sqrt{3918749}$  اور  $\sqrt{763} = \sqrt{588809} = \sqrt{3962749}$  اور  $\sqrt{769} = \sqrt{598929} = \sqrt{4006749}$  اور  $\sqrt{771} = \sqrt{603161} = \sqrt{4028724}$  اور  $\sqrt{773} = \sqrt{605841} = \sqrt{4040749}$  اور  $\sqrt{777} = \sqrt{610609} = \sqrt{4062749}$  اور  $\sqrt{783} = \sqrt{620689} = \sqrt{4106749}$  اور  $\sqrt{789} = \sqrt{630929} = \sqrt{4150749}$  اور  $\sqrt{791} = \sqrt{635381} = \sqrt{4172724}$  اور  $\sqrt{797} = \sqrt{641369} = \sqrt{4214749}$  اور  $\sqrt{803} = \sqrt{647609} = \sqrt{4258749}$  اور  $\sqrt{809} = \sqrt{654209} = \sqrt{4302749}$  اور  $\sqrt{811} = \sqrt{658081} = \sqrt{4324724}$  اور  $\sqrt{817} = \sqrt{665489} = \sqrt{4366749}$  اور  $\sqrt{823} = \sqrt{673009} = \sqrt{4410749}$  اور  $\sqrt{829} = \sqrt{680729} = \sqrt{4454749}$  اور  $\sqrt{831} = \sqrt{684561} = \sqrt{4476724}$  اور  $\sqrt{837} = \sqrt{692689} = \sqrt{4518749}$  اور  $\sqrt{843} = \sqrt{701009} = \sqrt{4562749}$  اور  $\sqrt{849} = \sqrt{719529} = \sqrt{4606749}$  اور  $\sqrt{851} = \sqrt{724381} = \sqrt{4628724}$  اور  $\sqrt{857} = \sqrt{733369} = \sqrt{4670749}$  اور  $\sqrt{863} = \sqrt{742609} = \sqrt{4714749}$  اور  $\sqrt{869} = \sqrt{752089} = \sqrt{4758749}$  اور  $\sqrt{871} = \sqrt{756881} = \sqrt{4780724}$  اور  $\sqrt{873} = \sqrt{760361} = \sqrt{4792749}$  اور  $\sqrt{877} = \sqrt{765609} = \sqrt{4814749}$  اور  $\sqrt{883} = \sqrt{775689} = \sqrt{4858749}$  اور  $\sqrt{889} = \sqrt{785929} = \sqrt{4902749}$  اور  $\sqrt{891} = \sqrt{790781} = \sqrt{4924724}$  اور  $\sqrt{897} = \sqrt{801369} = \sqrt{4946749}$  اور  $\sqrt{903} = \sqrt{812209} = \sqrt{4990749}$  اور  $\sqrt{909} = \sqrt{823329} = \sqrt{5034749}$  اور  $\sqrt{911} = \sqrt{827281} = \sqrt{5056724}$  اور  $\sqrt{917} = \sqrt{838569} = \sqrt{5098749}$  اور  $\sqrt{923} = \sqrt{850009} = \sqrt{5142749}$  اور  $\sqrt{929} = \sqrt{861689} = \sqrt{5186749}$  اور  $\sqrt{931} = \sqrt{865561} = \sqrt{5208724}$  اور  $\sqrt{937} = \sqrt{873529} = \sqrt{5248749}$  اور  $\sqrt{943} = \sqrt{885609} = \sqrt{5292749}$  اور  $\sqrt{949} = \sqrt{897889} = \sqrt{5336749}$  اور  $\sqrt{951} = \sqrt{902481} = \sqrt{5358724}$  اور  $\sqrt{957} = \sqrt{916469} = \sqrt{5400749}$  اور  $\sqrt{963} = \sqrt{930809} = \sqrt{5444749}$  اور  $\sqrt{969} = \sqrt{935489} = \sqrt{5466749}$  اور  $\sqrt{971} = \sqrt{940381} = \sqrt{5488724}$  اور  $\sqrt{973} = \sqrt{943861} = \sqrt{5496749}$  اور  $\sqrt{977} = \sqrt{949609} = \sqrt{5518749}$  اور  $\sqrt{983} = \sqrt{964689} = \sqrt{5562749}$  اور  $\sqrt{989} = \sqrt{979929} = \sqrt{5606749}$  اور  $\sqrt{991} = \sqrt{984881} = \sqrt{5628724}$  اور  $\sqrt{997} = \sqrt{999569} = \sqrt{5670749}$

اور علیٰ ہذا القیاس دلیل قاعدہ مذکور کی بنیاد ظاہر ہے اور وہ یہ ہے کہ جس مرتبہ کا صعود یا جاتا ہے اسی مرتبہ کا نزول یا جاتا ہے اور اس واسطے جو مقدار عمل سے حاصل ہوتی ہے یا مفروضہ ہی مقدار مفروضہ کی اور اس واسطے ہم کہہ سکتے ہیں ایک کو بجای دوسرے کی اگر دو مقداروں نزدیک کا ایک ہی نشان قوت ہو تو حاصل ضرب ان کا دریاقت ہو سکتا ہے اگر ضرب کریں ہم ان مقداروں کو جو علامات یکے سے واقع ہیں اور حاصل ضرب پر لکھیں علامت مذکورہ کو مثلاً

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ اور } \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

فرب کو پہلے حاصل ضرب مقداروں نزدیک کے لگانا چاہیے مثلاً

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6} \text{ اور } \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 3 + 2\sqrt{6} = 5 + 2\sqrt{6} \text{ اور } (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = 2 + 3 - 2\sqrt{6} = 5 - 2\sqrt{6}$$

اگر نشان قوت دو مقداروں نزدیک کی مخرج ایک سے ہوں تو لازم کہ ان مقداروں نزدیک کی اوستہ ہی مرتبہ کا صعود لے کر جنے احاد ہوں ان کی نشان قوت کے شمار کنندہ میں اور بعد ازاں ان مقداروں نزدیک کا حاصل ضرب بطریق گذشتہ کی دریافت ہو سکتا ہے

مثال  $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$  اور اس طرح سے حاصل ہوتا ہے حاصل ضرب آئندہ

اوپر نشان قوت کے نسب نامہ ایک سے ہونا اور بعد ازاں اونکا حاصل ضرب بطریق گذشتہ کی معلوم ہو سکتا ہے

مثال  $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) \times (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) = (\frac{1}{6} - \frac{1}{20}) \times (\frac{1}{20} - \frac{1}{100})$  اور اسی واسطے حاصل ضرب مطلوبہ

یہ ہوگا  $\left\{ (\frac{1}{6} - \frac{1}{20}) \times (\frac{1}{20} - \frac{1}{100}) \right\}$  اور اسی طور سے حاصل ہوتا ہے حاصل ضرب آئندہ

اگر دو مقداریں غیر نزولی ہو جیسے علامت نزدیکی کے  $(42) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{2}{4} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$

واقع ہیں ایک سے بڑھ کر حاصل ضرب اتحاد و انطباق ہو سکتا ہے اگر جب کریں جسم ان نشان قوت یا نزولی کو اور بناؤ اس حاصل جمع کو نشان قوت حاصل ضرب کا مثلاً

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$  اور یہ مطابق ہے اس کی جواب اب گذشتہ میں بیان کیا گیا ہے

مثال  $\frac{5}{4} + \frac{2}{4} = \frac{7}{4} = 2 \sqrt{1} \times 2 \sqrt{1}$  اگر نشان قوت دو مقداروں نزولی کے

مخرج ایک سے ہوں اور ایک کو ان میں سے دوسرے پر قسمت کیا جائے تو خارج قسمت انکا معلوم ہو سکتا ہے اگر لیون جسم ان دو مقداروں نزولی کا علیحدہ علیحدہ اسی مرتبہ کا صعود جتنے اعداد میں اونکے نشان قوت کی شمار کنند و نہیں علیحدہ علیحدہ اور بعد ازاں قسمت کریں ان حاصل صعودوں کو ایک دوسری پر اور لیون اس خارج قسمت کا اسی مرتبہ کا وقتے اعداد میں مخرج مشترک نشان قوت

قوت مذکور میں اور دلیل اسکی یہ ہے  $(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1}$  اور  $(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1}$

مثال  $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{1}$  اور اسی طور سے حاصل ہوتا ہے حاصل ضرب آئندہ

$(\frac{1}{2}) \div (\frac{1}{3}) = \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{1}$

اگر مخرج نشان قوت کی ایک سے یعنی ہوں تو اس صورت میں لازم ہے کہ ان مخرجوں کو

ایک کر لینے میں مقداروں نرولی مفروض کو ایسی مقداروں میں تبدیل کریں کہ اولیٰ نسبت انون قوت یکے  
نسب نما ایک ہوں اور بعد ازان عمل کرین بطریق گذشتہ کی اور اس عمل خارج قسمت مطلوب معلوم ہو جاوے گا

$$\text{مثال } (ط - ل) \div (ل - ل) = \frac{1}{4} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{4}{3}$$

$$\left( \frac{ط^{\frac{3}{4}} - ل^{\frac{3}{4}}}{(ط - ل)^{\frac{3}{4}}} \right) = \frac{ط^{\frac{3}{4}} - ل^{\frac{3}{4}}}{(ط - ل)^{\frac{3}{4}}}$$

اگر دو مقداروں نرولی یکے نسبت انون قوت کی نیچے ایک ہی مقدار غیر نرولی یا بی جا تو خارج قسمت نکالو دریافت ہو سکتا  
ہے اگر تفریق کرین ہم ان نسبت انون قوت کو ایک دو سر میں سے اور معر کرین اس حاصل تفریق کو نشان قوت  
خارج قسمت کا مثلاً اگر قسم کرین  $\frac{1}{4}$  کو  $\frac{1}{4}$  پر یا  $\frac{1}{4}$  کو  $\frac{1}{4}$  پر تو خارج قسمت یعنی

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{1} \text{ اور یہ بات بہت ظاہری}$$

مثال  $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{1}$  مثال یعنی کسی مقدار نرولی کو اندر نشان نرولی کے  
لا سکتے ہیں اگر اول اس کو شکل مقدار نرولی کے تبدیل کریں اور بعد ازان عمل ضرب کا کریں جس کے میان کیا گیا

سابق میں مثلاً  $\sqrt[4]{ط} = \sqrt[4]{ل} \times \sqrt[4]{ط} = \sqrt[4]{ل \times ط}$  اور  
 $\sqrt[4]{ط} = \sqrt[4]{(ط^2)} = \sqrt[4]{ل \times ل} = \sqrt[4]{ل^2}$  اور

$$\sqrt[4]{ط} = \sqrt[4]{(ط - ل)} = \sqrt[4]{ط} \times \sqrt[4]{(ط - ل)} = \sqrt[4]{ط(ط - ل)}$$

اگر مطلوب ہو میں کہ کوئی خاص مقدار مثال کسی مقدار نرولی مفروض کی ہو جاوے تو لازم ہے کہ یوں ہم اتنی مرتبہ کام  
نرولی مقدار نرولی مفروض کا کیا گیا ہے اور بعد ازان قسمت کریں ہر جز اس مقدار کو جو صحیحے علامت نرولی کے واقع  
ہو خاص میں مقرر کر کے برادر اس عمل سے ہمارا مطلب حاصل ہو جاوے گا مثلاً

$$\sqrt[4]{ط - ل} = \sqrt[4]{ط} \times \sqrt[4]{ط - ل} = \sqrt[4]{ط(ط - ل)}$$

۲  
نرولی خاص مقدار کا نتیجہ مرتبہ کا

اور  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = \frac{1}{a} \times \left( \frac{1}{b} - 1 \right)$  اور  $\sqrt{10} = 40$  اور  $\sqrt{10} = 10 \times 2 = 10 \sqrt{2}$

اور  $\left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{c}$  اور  $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{1}{c}$

جیکے کسی مقداروں نزدیک کی مثال ایک سی ہے۔ یعنی مساوی تو حاصل جمع یا حاصل تفریق انکا دربان ہر سمت ہے۔ اگر کجا بن ہم حاصل جمع یا حاصل تفریق انکی مثال کا ساتھ مشترک مقداروں نزدیک کے

مثلاً  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a \pm b}$  اور

$\sqrt{3} \pm \sqrt{10} = \sqrt{3 \pm 10} = \sqrt{13}$  یا  $\sqrt{3} \pm \sqrt{10} = \sqrt{3 \pm 10} = \sqrt{13}$

جنر کسی مقدار کا نہیں ہر سمت ہے حاصل جمع ایسی دو مقدار دیکھا کہ ایک تو دین میں مقدار غیر نزدیک اور دوسرے مقدار نزدیک دو کے برابر یعنی جنر ہو کر نہ لگایا ممکن ہو تو فرض کر دو کہ  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{m}$

اب اگر وہ جنر دور دونوں طرف سے مساوات کا تو حاصل ہوگی یہ مساوات

$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{m}$  اور  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{m}$  اور  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{m}$

اور یہ ایک مقدار غیر نزدیک ہے جس لازم یا اختلاف فرض کیونکہ  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{m}$

یعنی ایک مقدار نزدیک مانا تھا اور وہ اب ثابت ہوئی مقدار غیر نزدیک اگر کوئی ایسی مساوات ہو کہ ایک طرف اس کے حاصل جمع ہو کسی مقدار غیر نزدیک اور کسی مقدار نزدیک کا اور دوسری طرف ایسی حاصل جمع ہو کسی اور مقدار غیر نزدیک

اور کسی اور مقدار نزدیک کا اور دونوں طرف مقداریں نزدیک نقطہ دوسری رتبہ کی ہوں تو ہم کہتے ہیں کہ مقدار نزدیک اول طرف کی مساوی ہوگی مقدار غیر نزدیک دوسری طرف کی اور اس کے مقدار نزدیک اول طرف کی مساوی ہوگی

مقدار نزدیک دوسری طرف کی مثلاً اگر وہ یہ مساوات  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$  اور  $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{d}$  اور  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$  اور  $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{d}$  اور  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$  اور  $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{d}$

اور اس کے حاصل جمع یہ مساوات  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$  اور  $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{d}$  اور  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$  اور  $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{d}$  اور  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$  اور  $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{d}$

مقدار نزدیک اور دوسرے مقدار غیر نزدیک دوسرے رتبہ کی ہے اور یہ محال ہے موافق اس کے کہ ثابت کیا گیا ہے کہ  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$  اور  $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{d}$

لا = ط اور سیو  $\sqrt{a} = \sqrt{b}$  اور اگر وہ مقدار نزدیک دوسرے رتبہ کی مثل  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{c}$  اور  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{c}$  اور  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{c}$  اور  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{c}$

کے ایسی ہوں کہ وہی نہیں تو محال ہو سکتی ہوں طرف اور دیکھیں جنر نزدیک ایک ہو تو حاصل جمع ایسی مقداروں نزدیک کا نزدیک ہوتا ہے اگر ایسا ہو یعنی حاصل ضرب فرک مساوی ایک مقدار غیر نزدیک

یکے ہو تو فرض کر دو کہ  $\sqrt{a} = \sqrt{b}$  اور اسجای ری یا تو ایک عدد صحیح یا ایک سر کو تعبیر کرنا ہی  
 اب ظاہر ہے کہ جس وقت لیون کے ہم مجذور دو نو طرفوں اس مساوات کا تو حاصل ہوگی یہ مساوات  
 $\sqrt{a} = \sqrt{b}$  اور  $\sqrt{c} = \sqrt{d}$  اور اسسید اسطی  $\sqrt{a} = \sqrt{b}$  اور یہاں سے یہ بات ثابت ہوتی  
 ہے کہ  $\sqrt{a} = \sqrt{b}$  اور  $\sqrt{c} = \sqrt{d}$  ایسی مقدارین نزدلی ہیں کہ تجویل کی جاسکتی ہیں طرف ایسی دو مقداروں  
 نزدلی کے جنہیں ہر فرضی نزدلی ایک ہو یعنی وہی دو نو میں پایا جاوے اور یہ خلاف فرض کی ہے ایک مقدار  
 نزدلی دو سکرم تہ کی مثل  $\sqrt{a} = \sqrt{b}$  کی نہیں ہو سکتی ہے حاصل جمع دو اور ایسی ہی مقداروں نزدلی مثل  
 $\sqrt{a} = \sqrt{b}$  اور  $\sqrt{c} = \sqrt{d}$  کی اگر انہیں ایک ہی فرضی نزدلی نہیں پایا جاوے اگر آپ ہو سکتا ہے تو فرض کر دو کہ  
 $\sqrt{a} = \sqrt{b} = \sqrt{c} = \sqrt{d}$  اور جس وقت مجذور کرتے ہیں دو نو طرفوں اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہے کہ  
 یہ مساوات  $\sqrt{a} = \sqrt{b} = \sqrt{c} = \sqrt{d}$  اور  $\sqrt{a} = \sqrt{b} = \sqrt{c} = \sqrt{d}$  اور یہاں سے یہ معلوم ہوتا ہے  
 کہ ایک مقدار غیر نزدلی مساوی ہوتی ہے ایک مقدار نزدلی کے اور یہ بات محال ہے اگر جو دی یہ مساوات  
 (ط + ص)  $\sqrt{a} = \sqrt{b}$  اور اسجای سے ہو دی کوئی عدد جفت اور ط ایک مقدار غیر نزدلی اور ص ایک  
 مقدار نزدلی دو سکرم تہ کی اور  $\sqrt{a} = \sqrt{b}$  سے یا تو ایک یا دو نو طرفوں نزدلی دو سکرم تہ کی ہوں تو ہم  
 دعویٰ کرتے ہیں کہ ہوگی یہ مساوات (ط - ص)  $\sqrt{a} = \sqrt{b}$  اور اب اگر لیا جاوے دو نو طرفوں  
 اس مساوات کا س مرتبہ کا صعود تو حاصل ہوگی یہ مساوات

$$\sqrt{a} = \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

+ وغیرہ اور چونکہ س ایک عدد جفت ہے تو ضرور ہے کہ طاق اجزاء اس سلسلہ کی مقدارین غیر نزدلی ہوں  
 اور جفت اجزاء نزدلی اور یہاں سے معلوم ہوا کہ  $\sqrt{a} = \sqrt{b}$  اور  $\sqrt{c} = \sqrt{d}$  وغیرہ اور

$$\sqrt{a} = \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

اور اسسید اسطی اگر تعین کریں ہم مساوات دوم کو مساوات اول میں تو حاصل ہوگی یہ مساوات

$$\sqrt{a} = \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

+ وغیرہ اور یہاں سے معلوم ہوا کہ (ط - ص)  $\sqrt{a} = \sqrt{b}$  اور اگر س ہو دی ایک طاق عدد اور ط اور ص  
 یا تو ایک یا دو نو طرفوں مقدارین نزدلی دو سکرم تہ کی ہوں اور  $\sqrt{a} = \sqrt{b}$  اور  $\sqrt{c} = \sqrt{d}$  اور یہاں سے





یا دو وزن امین سے بھی دوم مرتبہ کی مقدار میں نزولی ہوں یہ بات اس طرح سے ثابت ہو سکتی ہے  
 کہ اگر  $a + b$  ہی مجموعہ مفروضہ سین دونوں ممکن ہیں یعنی امین کوئی مقدار غیر ممکن نہیں باقی جاتی ہے  
 اور حقیقی مقدار میں کہ نیچے علامت نزول کے واقع ہیں تو یہ سب اعداد صحیح ہیں اور  $a$  زیادہ ہے نسبت  
 $b$  کے اور یہ بھی فرض کرو کہ  $\sqrt{a^2 + b^2} = c$  اور  $b$  و  $c$  متوافق اور  $a$  کی جڑ کو  $b$  میں  
 ثابت ہو اور یہ بات ظاہر ہے کہ  $(b - 1) \sqrt{a^2 + b^2} = c - a$  اور جو تہ ضرب کریں ہم ان دونوں  
 مساواتوں کو آپس میں تو حاصل ہوگی یہ مساوات  $(b - 1) \sqrt{a^2 + b^2} = c - a$  اور  $b$  فرض کرو  
 واسطی کی گویا اس عدد کو مقدار  $(b - 1) \sqrt{a^2 + b^2}$  ایک کامل س مرتبہ کا صعود ہو جائے یعنی پیدا ہو جائے  
 ایک مساوات مثل اسکے  $(b - 1) \sqrt{a^2 + b^2} = c - a$  پس اب حاصل ہوگی یہ مساوات  $a^2 - c^2 = -2ac + 2ab$   
 آپ مجھ در کر دو دونوں مساواتوں گذشتہ کو تو حاصل ہوگی یہ مساواتیں

$$\sqrt{a^2 + b^2} (b - 1) = c - a$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} (b - 1) = c - a$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} (b - 1) + c = a$$

اور یہ ہم ہمیشہ صحیح ہوتا ہے جبکہ مقدار نزولی دوسرے مرتبہ کی ہوتی ہے اب فرض کرو کہ  $a$  اور  $b$  نہایت  
 قریب ترین اعداد صحیح مقداروں  $\sqrt{a^2 + b^2}$  اور  $\sqrt{a^2 + b^2} (b - 1)$  کے ہیں

اور ایک امین قیمت اصلی سے زیادہ ہے اور دوسرے کم اب چونکہ حاصل جمع ان مقداروں نزولی کا  
 مساوی ایک عدد صحیح کی ہوتا ہے تو ضرور ہے کہ جو کسوہر واحد میں امین سے باقی جاتی ہوں وہ زائل ہو جائے

جو قیمت اولیٰ جمع کرینگی اور اس واسطی لازم آتا ہے کہ ہر دو یہ مساوات  $a^2 - c^2 = -2ac + 2ab$  و بالکل  
 درست اور سوت جسوقت کہ  $a$  و  $b$  میں مرتبہ کا نزول مقدار نزولی مفروضہ کا دریافت ہو سکتا ہے پس اب

حاصل ہوتی ہیں ہمیں یہ مساواتیں  $a^2 - c^2 = -2ac + 2ab$  اور  $a^2 - c^2 = -2ac + 2ab$  اور اس واسطی  
 حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  $a^2 - c^2 = -2ac + 2ab$  اور یہاں سے یہ معلوم

$$\sqrt{a^2 + b^2} (b - 1) = c - a$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} (b - 1) = c - a$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} (b - 1) = c - a$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} (b - 1) = c - a$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} (b - 1) = c - a$$



اور اسے اسطی سے مرتبہ کا نزول  $1 + b$  کا یہ ہے

$$\frac{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1} + 1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1} + 1}{2}$$

مثال

مثال (۱) گیارہ دیانت کرنا کب  $10.8 \sqrt{10.8} + 10$  کا اس صورت میں ظاہر ہے کہ  $10.8 \sqrt{10.8} = 10$   
 اور  $b = 10$  اور  $a = 10$  اور  $1 - b = 10 - 10 = 0$  اور  $1 - a = 10 - 10 = 0$   
 پس اگر فرض کیا جائے کہ  $10 = 10$  اور  $10 = 10$  اور  $10 = 10$  اور  $10 = 10$   
 $\sqrt{10.8} = 10$  اور اسماقت تعبیر کرتا ہے ایک سیر کو جو کم سے عدد دیانت کی سیسے پس معلوم ہوا کہ  
 $10 = 10$  اور  $10 = 10$  اور اسماقت تعبیر کرتا ہے ایک سیر کو جو کم سے عدد دیانت کی سیسے پس معلوم ہوا کہ  
 $10 = 10$  اور  $10 = 10$  اور اسماقت تعبیر کرتا ہے ایک سیر کو جو کم سے عدد دیانت کی سیسے پس معلوم ہوا کہ

$$10 + 10 \sqrt{10.8} = 10 + 10 \sqrt{10.8}$$

تعبیر اس کے بیچ شکل مطلوب کی تفسیر ہے کہ وہ شکل  $10 + 10 \sqrt{10.8}$  اور امتحان کرنی سے یہی معلوم ہوتا ہے  
 کہ کتب مذکورہ کی شکل یہی  $10 + 10 \sqrt{10.8}$  ہے

مثال (۲) چاہتے ہیں دریافت کرنا کب  $10 + 10 \sqrt{10.8} = 10 + 10 \sqrt{10.8}$  اس صورت میں ظاہر ہے کہ  
 $10 = 10$  اور  $10 = 10$  اور  $10 = 10$  اور  $10 = 10$  اور  $10 = 10$  اور  $10 = 10$  اور  $10 = 10$   
 اور یہاں معلوم ہوا کہ  $10 = 10$  اور  $10 = 10$  اور  $10 = 10$  اور  $10 = 10$  اور  $10 = 10$  اور  $10 = 10$   
 سے صحیح شکل کی ہی بطور قومیہ بالائی سے مرتبہ کا نزول  $1 - b$  کا دریافت ہو سکتا ہے اور وہ یہ ہے  
 اور اس صورت جبر نہ میں ظاہر ہے کہ جبر نہ

اسی کے نسبت  $10$  کی تون بھی ہو گا اسواطی کہ حاصل تفرق  $10 - 10$  منفی یعنی  $10 - 10$  ہو جائیگا  
 اور حاصل ضرب  $10 - 10$  بھی ہو جائیگا اور اسکا مساوی نہ نہیں ہے چونکہ منفی ہو جائیگا مگر تون نہ  
 میں یہ بات مطلوب ہوتی ہے کہ کوئی یا عدد وہ اسواطی ہی کے دریافت کیا جائے کہ اگر اسکو  $(10 - 10)$   
 میں ضرب کریں تو حاصل ضرب ایک کامل سے مرتبہ کا عدد ہو یعنی  $(10 - 10) \times 10$  ہو دیکھ

ایک کامل صورتہ کا صعود ظاہر ہے کہ یہ بات حاصل ہو سکتی ہے اگر فرض کریں کہ مساوی (۱-۲) ہے  
 کے کیونکہ اس صورت میں

$$(1-2) \times (2-1) = (2-1) \times (1-2) = (2-1)^2$$

عدد کو دریافت کیا جائے گا کہ اس سے بھی شرط مطلوب پوری ہوتی ہے تو فرض کر دو کہ ۱-۲ = ۲ قسمت  
 ہو سکتا ہے متواتر کئی بار یعنی ۴ بار یا ۶ بار اور ۲ بار یا ۳ بار اور علیٰ بنہ القاس میں فرض کر دو  
 ۱-۲ = ۲ = ۲ حصے وغیرہ اور اب فرض کر دو کہ ۲ = ۲ حصے وغیرہ اور اس صورت میں ظاہر ہے کہ

$$(1-2) \times (2-1) = 2 \times 2 = 4$$

لا اور ۲ اور ۳ اس طرح سے فرض کیے جائیں گے کہ لا + م اور ن + و اور د + ح علیحدہ علیحدہ مساوی  
 ہوں گے یا کسی ضعف اسکی کے مثلاً اگر دریافت کیا جائے کہ کوئی ایسا عدد کہ اگر اسی ۸۰ میں ضرب کریں تو حاصل  
 ضرب ایک کامل کعب ہوگی پس اس صورت میں لازم ہے کہ قسمت کریں ہم اس عدد کو چھانٹ کر لکھنا

ہو اعداد ۵ ۳ ۲ وغیرہ پر اور یہاں یہ ظاہر ہوتا ہے کہ ۲ × ۲ × ۲ × ۳ × ۳ × ۵ = ۸۰ پس اب اگر  
 ضرب کریں ایسے ۵ × ۳ × ۲ سے تو حاصل ضرب ہوتا ہے ۲ × ۳ × ۵ یعنی

(۵ × ۳ × ۲) جو ایک کامل کعب ہے بیان تمام کرتے ہیں اس فصل کو گواہین یہی مطالب باقی رہتے  
 ہیں لیکن یہ توقع ہے کہ جو کچھ لکھا گیا ہے وہ کفایت کرے گا

## فصل اہون سلسلوں کے بیان میں

### پہلا قاعدہ فرق کے بیان میں

اگر ایک سلسلہ مقداروں مثل آوریہ اور ح اور د اور س وغیرہ کا ہو اور ہر واحد ان مقداروں میں  
 سے مقدار با بعد اپنی کی سے تفریق کی جا تو ظاہر ہوگی ایک نیا سلسلہ حاصل تفریقوں کا پیدا ہوگا اور ہر جز  
 اس سلسلہ کو فرق اول کہتے ہیں اور اگر تفریق کریں ہم ہر جز اس سلسلہ کو ایک پہلی ترین سے تو  
 قیما ہوگا ایک تیسرا سلسلہ حاصل تفریقوں کا اور ہر جز اس سلسلہ کا فرق مرتبہ دوم کا کہلاتا ہے اور علیٰ بنہ القاس  
 مثلاً اگر جاری کریں ہم عمل مذکور تو حاصل ہوگی ایسے مساویان

زن اول ب - ۱ اور ج - ۲ اور د - ۳ وغیرہ

زن دوم ج - ۲ + ب + ۱ اور د - ۳ + ۲ + ب وغیرہ

زن سوم د - ۳ + ج + ۲ + ب - ۱ اور س - ۴ + ۳ + ۲ + ب وغیرہ

زن چہارم س - ۴ + د + ۳ - ۲ + ب + ۱ وغیرہ

زن پنجم ص - ۵ + س + ۴ - ۳ + ۲ + ب - ۱ وغیرہ

وغیرہ وغیرہ

یہاں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ انماں سے ہر مقدار دن ۱ اور ب ج وغیرہ کے اول جز سلسلہ ن کئے ترتیب کے دیسی ہی میں جیسک ہوتے ہیں رابطہ نیز تن صاحب کے میں اور ان مقدار کے علامتین پی در پی مثبت اور منفی ہوتی ہیں پس جس وقت کہ ن ایک عدد جفت ہو وی اس وقت اول جز مذکور یہ ہوگا

$$1 - ن + ب + ن(ن-۱) - ج - \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳ \times ۲} + د + وغیرہ$$

مگر جس وقت ن ایک عدد طاق ہوگا اس وقت جز مذکور اس شکل کا ہوگا

$$-1 + ن - ب - \frac{ن(ن-۱)}{۲} + ج + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳ \times ۲} - د - وغیرہ$$

فرض کرو کہ علامتین ۱ اور ۲ اور ۳ وغیرہ کی تیسرے کی میں اول جز دن سلسلہ اول اور دوم اور سوم وغیرہ فرقوں کو پس اب حاصل ہونگی یہ مساواتین

$$1 - ب = 1$$

$$2 - ج = 2 + ب$$

$$3 - د = 3 + ج + 2 + ب - 1$$

$$4 - س = 4 + د + 3 + 2 + ب - 1$$

وغیرہ = وغیرہ اور اب اگر بدین اہم علامتین قویہ راہوں کے مساواتین

$$ب + 1 = 1$$

$$ج + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1$$

$$د + 1 = 3 + 1 + 2 + 1 = 3 + 1 + 2 + 1$$

$$س = ۴ - د + ۶ - ۴ + ۱ - ۳$$

$$= ۱ + ۴ - ۶ + ۴ - ۳ + ۳$$

وغیرہ = وغیرہ

اب اگر نظر کریں ہم ان مساواتوں پر تو ہم دریافت کریں گے ایک عام قاعدہ مثل قاعدہ نیوٹن صاحب کے اور اس قاعدہ سے یہ بات معلوم ہو جاگی کہ  $n + 1$  دان جز سلسلہ  $1 + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ + ۲۱ + ۲۲ + ۲۳ + ۲۴ + ۲۵ + ۲۶ + ۲۷ + ۲۸ + ۲۹ + ۳۰ + ۳۱ + ۳۲ + ۳۳ + ۳۴ + ۳۵ + ۳۶ + ۳۷ + ۳۸ + ۳۹ + ۴۰ + ۴۱ + ۴۲ + ۴۳ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۶ + ۴۷ + ۴۸ + ۴۹ + ۵۰ + ۵۱ + ۵۲ + ۵۳ + ۵۴ + ۵۵ + ۵۶ + ۵۷ + ۵۸ + ۵۹ + ۶۰ + ۶۱ + ۶۲ + ۶۳ + ۶۴ + ۶۵ + ۶۶ + ۶۷ + ۶۸ + ۶۹ + ۷۰ + ۷۱ + ۷۲ + ۷۳ + ۷۴ + ۷۵ + ۷۶ + ۷۷ + ۷۸ + ۷۹ + ۸۰ + ۸۱ + ۸۲ + ۸۳ + ۸۴ + ۸۵ + ۸۶ + ۸۷ + ۸۸ + ۸۹ + ۹۰ + ۹۱ + ۹۲ + ۹۳ + ۹۴ + ۹۵ + ۹۶ + ۹۷ + ۹۸ + ۹۹ + ۱۰۰$  کا یہ ہوگا

$$1 + n + n^2 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2} + \dots + \text{وغیرہ}$$

اور یہاں یہ بھی معلوم ہوتا ہے کہ  $n$  دان جز سلسلہ مذکورہ کا یہ ہوگا

$$1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3 \times 2} + \dots + \text{وغیرہ} \quad (۱)$$

### مثال

جاستے ہیں دریافت کرنا  $n$  دان جز اس سلسلہ کا  $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10 + 11 - 12 + 13 - 14 + 15 - 16 + 17 - 18 + 19 - 20 + 21 - 22 + 23 - 24 + 25 - 26 + 27 - 28 + 29 - 30 + 31 - 32 + 33 - 34 + 35 - 36 + 37 - 38 + 39 - 40 + 41 - 42 + 43 - 44 + 45 - 46 + 47 - 48 + 49 - 50 + 51 - 52 + 53 - 54 + 55 - 56 + 57 - 58 + 59 - 60 + 61 - 62 + 63 - 64 + 65 - 66 + 67 - 68 + 69 - 70 + 71 - 72 + 73 - 74 + 75 - 76 + 77 - 78 + 79 - 80 + 81 - 82 + 83 - 84 + 85 - 86 + 87 - 88 + 89 - 90 + 91 - 92 + 93 - 94 + 95 - 96 + 97 - 98 + 99 - 100$  وغیرہ

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۹ ۲۰ ۲۱ ۲۲ ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰ ۳۱ ۳۲ ۳۳ ۳۴ ۳۵ ۳۶ ۳۷ ۳۸ ۳۹ ۴۰ ۴۱ ۴۲ ۴۳ ۴۴ ۴۵ ۴۶ ۴۷ ۴۸ ۴۹ ۵۰ ۵۱ ۵۲ ۵۳ ۵۴ ۵۵ ۵۶ ۵۷ ۵۸ ۵۹ ۶۰ ۶۱ ۶۲ ۶۳ ۶۴ ۶۵ ۶۶ ۶۷ ۶۸ ۶۹ ۷۰ ۷۱ ۷۲ ۷۳ ۷۴ ۷۵ ۷۶ ۷۷ ۷۸ ۷۹ ۸۰ ۸۱ ۸۲ ۸۳ ۸۴ ۸۵ ۸۶ ۸۷ ۸۸ ۸۹ ۹۰ ۹۱ ۹۲ ۹۳ ۹۴ ۹۵ ۹۶ ۹۷ ۹۸ ۹۹ ۱۰۰

پس بجای معلوم ہو اگر  $1 = ۱$  اور  $۲ = ۲$  اور  $۳ = ۰$  پس  $n$  دان جز مطلوبہ

$$\text{یہ ہوگا } 1 + (n-1) = ۲ - n - ۱$$

اگر  $n$  جز آخر کو سادی صفر کی ہو جاوے تو  $n$  دین جز کی قیمت حقیقی معلوم ہو سکتی ہے لیکن اگر  $n$  جز نہ صفر کے سادی نہیں ہوں تو جیسے  $n$  جز نہ  $n$  جز پہلی  $n$  جز کے اور نسبت  $n$  کی کہ ہوتی ہے وہی نسبت  $n$  کی قیمت جو  $n$  جز کی نسبت سادی ہوتی ہے کہ قیمت حقیقی کے آتی جاگی واضح ہو کہ سلسلہ (۱) ہی قیمت  $n$  دین جز سلسلہ  $1 + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ + ۲۱ + ۲۲ + ۲۳ + ۲۴ + ۲۵ + ۲۶ + ۲۷ + ۲۸ + ۲۹ + ۳۰ + ۳۱ + ۳۲ + ۳۳ + ۳۴ + ۳۵ + ۳۶ + ۳۷ + ۳۸ + ۳۹ + ۴۰ + ۴۱ + ۴۲ + ۴۳ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۶ + ۴۷ + ۴۸ + ۴۹ + ۵۰ + ۵۱ + ۵۲ + ۵۳ + ۵۴ + ۵۵ + ۵۶ + ۵۷ + ۵۸ + ۵۹ + ۶۰ + ۶۱ + ۶۲ + ۶۳ + ۶۴ + ۶۵ + ۶۶ + ۶۷ + ۶۸ + ۶۹ + ۷۰ + ۷۱ + ۷۲ + ۷۳ + ۷۴ + ۷۵ + ۷۶ + ۷۷ + ۷۸ + ۷۹ + ۸۰ + ۸۱ + ۸۲ + ۸۳ + ۸۴ + ۸۵ + ۸۶ + ۸۷ + ۸۸ + ۸۹ + ۹۰ + ۹۱ + ۹۲ + ۹۳ + ۹۴ + ۹۵ + ۹۶ + ۹۷ + ۹۸ + ۹۹ + ۱۰۰$  دین جز سلسلہ مذکورہ کی قیمت ہے

$$1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3 \times 2} + \dots + \text{وغیرہ}$$

اور اسی قیاس پر اور جزوں کی قیمتیں دریافت ہو سکتی ہیں اب فرض کریں کہ یہ ایک سلسلہ کا اس کی اجزا بتدریج زیادہ ہوتی جاستے ہیں مثل اسکے یعنی اجزای مذکورہ سے  $n$  اور  $1 + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ + ۲۱ + ۲۲ + ۲۳ + ۲۴ + ۲۵ + ۲۶ + ۲۷ + ۲۸ + ۲۹ + ۳۰ + ۳۱ + ۳۲ + ۳۳ + ۳۴ + ۳۵ + ۳۶ + ۳۷ + ۳۸ + ۳۹ + ۴۰ + ۴۱ + ۴۲ + ۴۳ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۶ + ۴۷ + ۴۸ + ۴۹ + ۵۰ + ۵۱ + ۵۲ + ۵۳ + ۵۴ + ۵۵ + ۵۶ + ۵۷ + ۵۸ + ۵۹ + ۶۰ + ۶۱ + ۶۲ + ۶۳ + ۶۴ + ۶۵ + ۶۶ + ۶۷ + ۶۸ + ۶۹ + ۷۰ + ۷۱ + ۷۲ + ۷۳ + ۷۴ + ۷۵ + ۷۶ + ۷۷ + ۷۸ + ۷۹ + ۸۰ + ۸۱ + ۸۲ + ۸۳ + ۸۴ + ۸۵ + ۸۶ + ۸۷ + ۸۸ + ۸۹ + ۹۰ + ۹۱ + ۹۲ + ۹۳ + ۹۴ + ۹۵ + ۹۶ + ۹۷ + ۹۸ + ۹۹ + ۱۰۰$

پس موافق ہر دو گزشتہ کی یہ بات ظاہر ہے کہ حاصل تفرق انہی کی اسپین سے ہونگی

تفرق اول

$$\begin{array}{r} \text{ا} \text{ اور } \text{ب} \text{ اور } \text{ج} \text{ اور } \text{د} \text{ وغیرہ} \\ \text{ب} \text{ - } \text{ا} \text{ اور } \text{ج} \text{ - } \text{ب} \text{ اور } \text{د} \text{ - } \text{ج} \text{ وغیرہ} \end{array}$$

تفرق دوم

$$\text{ج} - \text{ب} + \text{ب} - \text{ا} \text{ اور } \text{د} - \text{ج} + \text{ج} - \text{ب} + \text{ب} - \text{ا} \text{ وغیرہ}$$

تفرق سوم

$$\text{د} - \text{ج} + \text{ج} - \text{ب} + \text{ب} - \text{ا} \text{ وغیرہ}$$

اور ظاہر ہے کہ اب حاصل ہونگی یہ مساواتیں

$$\begin{aligned} \text{ب} - \text{ا} &= \text{ف} \\ \text{ج} - \text{ب} + \text{ب} - \text{ا} &= \text{ف} \\ \text{د} - \text{ج} + \text{ج} - \text{ب} + \text{ب} - \text{ا} &= \text{ف} \\ \text{س} - \text{د} + \text{د} - \text{ج} + \text{ج} - \text{ب} + \text{ب} - \text{ا} &= \text{ف} \\ \text{وغیرہ} &= \text{وغیرہ} \end{aligned}$$

اور ان مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں یہ مساواتیں

$$\begin{aligned} \text{ب} - \text{ا} &= \text{ف} + 1 \\ \text{ج} - \text{ب} + \text{ب} - \text{ا} + 1 &= \text{ف} + 1 \\ \text{د} - \text{ج} + \text{ج} - \text{ب} + \text{ب} - \text{ا} + 1 &= \text{ف} + 1 \\ \text{وغیرہ} &= \text{وغیرہ} \end{aligned}$$

اور ان مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں یہ مساواتیں

$$\begin{aligned} \text{ب} + 1 &= \text{ف} + 1 + 1 \\ \text{ب} + 1 + \text{ج} + 1 &= \text{ف} + 1 + 1 + 1 \\ \text{ب} + 1 + \text{ج} + 1 + \text{د} + 1 &= \text{ف} + 1 + 1 + 1 + 1 \\ \text{ب} + 1 + \text{ج} + 1 + \text{د} + 1 + \text{س} + 1 &= \text{ف} + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ \text{وغیرہ} &= \text{وغیرہ} \end{aligned}$$

پس کوم ہوا کہ ان دنوں جہاں مندرجہ کا تفسیر ہوتا ہے اس سلسلہ سے

$$1 + \frac{(1-n)}{p} + \frac{(1-n)(1-n)}{2 \times 2} + \frac{(1-n)(1-n)(1-n)}{3 \times 2} + \text{وغیرہ}$$

پہاں سے وہ ہم قاعدہ نکلا کہ اگر ہر دی کوئی سلسلہ مثل اسکی  
 ۱ + ب + ج + د + س + وغیرہ ن جزدن تک اور فرق مختلف اس سلسلہ کی تعبیر کی جائیں  
 آ اور ۲ وغیرہ تو حاصل جمع اس سلسلہ کا یہ ہوگا

$$ن + ۱ + \frac{ن(ن-۱)}{۲} + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳ \times ۲} + \dots + \text{وغیرہ}$$

مثال چاہتے ہیں دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا کہ او سیمین ن کتے اجزای ہیں

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + \dots + \text{وغیرہ}$$

$$\begin{matrix} ۱ & ۳ & ۵ & ۷ \\ ۲ & ۲ & ۲ & ۲ \end{matrix}$$

اس صورت میں ظاہر ہے کہ ۱ = ۱ اور ۲ = ۲ اور ۳ = ۳ پس اس سلسلہ حاصل جمع مطلوبہ ہے

$$ن(ن+۱) = ۱$$

۲ چاہتے ہیں دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا کہ او سیمین ن اجزای ہیں

$$۱ + ۲ + ۲ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + \dots + \text{وغیرہ}$$

$$\begin{matrix} ۱ & ۳ & ۹ & ۱۶ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} ۳ & ۵ & ۷ \\ ۲ & & \end{matrix}$$

پس معلوم ہوا کہ اس صورت میں ۱ = ۱ اور ۲ = ۲ اور ۳ = ۳ اور ۳ = ۳ پس معلوم ہوا  
 کہ حاصل جمع مطلوبہ

$$= ن + ۳ \times \frac{ن(ن-۱)}{۲} + ۲ \times \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳ \times ۲}$$

$$= \frac{ن(۱+۲+۳)}{۳ \times ۲ \times ۱} = \frac{ن(۱+ن+۲)}{۳ \times ۲ \times ۱}$$

مثال ۳ چاہتے ہیں دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کے جو کجا کہ او سیمین ن اجزای ہیں

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + n$$

|     |    |    |    |   |
|-----|----|----|----|---|
| ۱۲۵ | ۴۴ | ۲۲ | ۸  | ۱ |
|     | ۶۱ | ۳۷ | ۱۹ | ۷ |
|     | ۲۴ | ۱۸ | ۱۲ |   |
|     | ۶  | ۶  |    |   |

پس اسجای ظاہر ہے کہ ۱ = ۱ اور ۱ = ۷ اور ۲ = ۱۲ اور ۳ = ۶ اور ۴ = ۱۰ اور ۵ = ۱۵  
پس حاصل جمع مطلوب یہ ہوگا

$$n + 4 \times \frac{n(n-1)}{2} + 12 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \times 3 \times 4} = \frac{n^4}{24} + \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{24}$$

بعضی اوقات حاصل جمع سلسلہ کو بہت معلوم ہو سکتا ہے اگر شروع کریں یعنی ابتدا اگر سلسلہ کی ایک یا زیادہ صفوں کی مشابہت اسطی دریافت کرنی حاصل جمع سلسلہ ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ + ۲۱ + ۲۲ + ۲۳ + ۲۴ + ۲۵ + ۲۶ + ۲۷ + ۲۸ + ۲۹ + ۳۰ + ۳۱ + ۳۲ + ۳۳ + ۳۴ + ۳۵ + ۳۶ + ۳۷ + ۳۸ + ۳۹ + ۴۰ + ۴۱ + ۴۲ + ۴۳ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۶ + ۴۷ + ۴۸ + ۴۹ + ۵۰ + ۵۱ + ۵۲ + ۵۳ + ۵۴ + ۵۵ + ۵۶ + ۵۷ + ۵۸ + ۵۹ + ۶۰ + ۶۱ + ۶۲ + ۶۳ + ۶۴ + ۶۵ + ۶۶ + ۶۷ + ۶۸ + ۶۹ + ۷۰ + ۷۱ + ۷۲ + ۷۳ + ۷۴ + ۷۵ + ۷۶ + ۷۷ + ۷۸ + ۷۹ + ۸۰ + ۸۱ + ۸۲ + ۸۳ + ۸۴ + ۸۵ + ۸۶ + ۸۷ + ۸۸ + ۸۹ + ۹۰ + ۹۱ + ۹۲ + ۹۳ + ۹۴ + ۹۵ + ۹۶ + ۹۷ + ۹۸ + ۹۹ + ۱۰۰

|    |    |    |   |   |
|----|----|----|---|---|
| ۶۴ | ۲۷ | ۸  | ۱ | ۱ |
|    | ۳۷ | ۱۹ | ۷ | ۱ |
|    | ۱۸ | ۱۲ | ۶ |   |
|    | ۶  | ۶  |   |   |

پس اسجای ظاہر ہے کہ ۱ = ۱ اور ۱ = ۷ اور ۲ = ۱۲ اور ۳ = ۶ اور ۴ = ۱۰ اور ۵ = ۱۵ اور ۶ = ۲۱ اور ۷ = ۲۸ اور ۸ = ۳۶ اور ۹ = ۴۵ اور ۱۰ = ۵۵ اور ۱۱ = ۶۶ اور ۱۲ = ۷۸ اور ۱۳ = ۹۱ اور ۱۴ = ۱۰۵ اور ۱۵ = ۱۲۰ اور ۱۶ = ۱۳۶ اور ۱۷ = ۱۵۳ اور ۱۸ = ۱۷۱ اور ۱۹ = ۱۹۰ اور ۲۰ = ۲۱۰ اور ۲۱ = ۲۳۱ اور ۲۲ = ۲۵۳ اور ۲۳ = ۲۷۶ اور ۲۴ = ۳۰۰ اور ۲۵ = ۳۲۵ اور ۲۶ = ۳۵۱ اور ۲۷ = ۳۷۸ اور ۲۸ = ۴۰۶ اور ۲۹ = ۴۳۵ اور ۳۰ = ۴۶۵ اور ۳۱ = ۴۹۶ اور ۳۲ = ۵۲۸ اور ۳۳ = ۵۶۱ اور ۳۴ = ۵۹۵ اور ۳۵ = ۶۳۰ اور ۳۶ = ۶۶۰ اور ۳۷ = ۶۹۱ اور ۳۸ = ۷۲۳ اور ۳۹ = ۷۵۶ اور ۴۰ = ۷۹۰ اور ۴۱ = ۸۲۵ اور ۴۲ = ۸۶۱ اور ۴۳ = ۸۹۸ اور ۴۴ = ۹۳۶ اور ۴۵ = ۹۷۵ اور ۴۶ = ۱۰۱۵ اور ۴۷ = ۱۰۵۶ اور ۴۸ = ۱۰۹۷ اور ۴۹ = ۱۱۳۹ اور ۵۰ = ۱۱۸۰ اور ۵۱ = ۱۲۲۳ اور ۵۲ = ۱۲۶۶ اور ۵۳ = ۱۳۱۰ اور ۵۴ = ۱۳۵۵ اور ۵۵ = ۱۴۰۰ اور ۵۶ = ۱۴۴۶ اور ۵۷ = ۱۴۹۳ اور ۵۸ = ۱۵۴۰ اور ۵۹ = ۱۵۸۸ اور ۶۰ = ۱۶۳۶ اور ۶۱ = ۱۶۸۵ اور ۶۲ = ۱۷۳۵ اور ۶۳ = ۱۷۸۵ اور ۶۴ = ۱۸۳۶ اور ۶۵ = ۱۸۸۷ اور ۶۶ = ۱۹۳۹ اور ۶۷ = ۱۹۹۱ اور ۶۸ = ۲۰۴۴ اور ۶۹ = ۲۰۹۷ اور ۷۰ = ۲۱۵۰ اور ۷۱ = ۲۲۰۵ اور ۷۲ = ۲۲۶۰ اور ۷۳ = ۲۳۱۶ اور ۷۴ = ۲۳۷۳ اور ۷۵ = ۲۴۳۰ اور ۷۶ = ۲۴۸۷ اور ۷۷ = ۲۵۴۵ اور ۷۸ = ۲۶۰۴ اور ۷۹ = ۲۶۶۴ اور ۸۰ = ۲۷۲۵ اور ۸۱ = ۲۷۸۷ اور ۸۲ = ۲۸۴۹ اور ۸۳ = ۲۹۱۲ اور ۸۴ = ۲۹۷۵ اور ۸۵ = ۳۰۳۹ اور ۸۶ = ۳۱۰۴ اور ۸۷ = ۳۱۶۹ اور ۸۸ = ۳۲۳۵ اور ۸۹ = ۳۳۰۰ اور ۹۰ = ۳۳۶۶ اور ۹۱ = ۳۴۳۳ اور ۹۲ = ۳۵۰۰ اور ۹۳ = ۳۵۶۸ اور ۹۴ = ۳۶۳۶ اور ۹۵ = ۳۷۰۵ اور ۹۶ = ۳۷۷۵ اور ۹۷ = ۳۸۴۵ اور ۹۸ = ۳۹۱۶ اور ۹۹ = ۳۹۸۷ اور ۱۰۰ = ۴۰۵۹

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} + \frac{n(n+1)(n+2)}{3 \times 2 \times 1} + \frac{n(n+1)}{2} + 1$$





$$ن \times (س + م) (س + م) (س + م) \dots \dots \dots (س + م) (س + م) (س + م) + م (ن - ۱) س$$

کسو اسطی کہ قیمت اصلی مقدار کلی کی بہ ہے

$$م (س + م) (س + م) (س + م) \dots \dots \dots (س + م) (س + م) (س + م) + م (ن - ۱) س$$

اور عید اسکی قیمت اوسی مقدار کلی کی بہ ہے

$$س (س + م) (س + م) (س + م) \dots \dots \dots (س + م) (س + م) (س + م) + م ن س$$

اور اسید واسطی حاصل تفریق ان دو قیمتوں کا بہ ہوگا

$$م (س + م) (س + م) (س + م) \dots \dots \dots (س + م) (س + م) (س + م) + م ن س$$

$$م (س + م) (س + م) (س + م) \dots \dots \dots (س + م) (س + م) (س + م) + م (ن - ۱) س$$

$$= (س + م) (س + م) (س + م) \dots \dots \dots (س + م) (س + م) (س + م) + م (ن - ۱) س$$

$$= ن س (س + م) (س + م) (س + م) \dots \dots \dots (س + م) (س + م) (س + م) + م (ن - ۱) س$$

بیان سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ چونکہ مقدار مقررہ کوئی زیادتی نہیں حاصل ہوتی ہے تو زیادتی

$$م (س + م) (س + م) (س + م) \dots \dots \dots (س + م) (س + م) (س + م) + م (ن - ۱) س \neq ن$$

(اسیجاق ایک مقدار مقررہ ہے) کی بہ ہوگی

$$ن س (س + م) (س + م) (س + م) \dots \dots \dots (س + م) (س + م) (س + م) + م (ن - ۱) س$$

بیان سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر زیادتی کسی مقدار کلی کی تعمیر کیجائیے اس صورت سے

$$ن س (س + م) (س + م) (س + م) \dots \dots \dots (س + م) (س + م) (س + م) + م (ن - ۱) س$$

تو مقدار کلی اسکی بان ضرور بہ ہوگی

$$م (س + م) (س + م) (س + م) \dots \dots \dots (س + م) (س + م) (س + م) + م (ن - ۱) س \neq ن$$

اور اس جا مقدار مقررہ ق در یافت کیجاتی ہے جو سید شرايط اوس سوال کے حکم حل کرتے ہوں

بیان سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر زیادتی بہ ہو

$$۱ \times (س + م) (س + م) (س + م) \dots \dots \dots (س + م) (س + م) (س + م) + م (ن - ۱) س$$

اور اسجای آ ایک مقدار مقررہ ہوتی مقدار کلی اس زیادتی کی بہ ہوگی

$$\frac{1}{ن} \times (س + م) (س + م) (س + م) \dots \dots \dots (س + م) (س + م) (س + م) + م (ن - ۱) س$$

اگر زیادتی ایک مقدار تفریق مثل آ کی ہو دیے اور وہ م دغ کی جاوے تو مقدار کلی یہ ہوگی  $1 + م$  م ق مرقومہ  
 بالاسی یہ عام قاعدہ نکلتی ہے اگر دریافت کیا جائے ہم مقدار کلی کسی زیادتی کو تو لازم ہے کہ زیادتی مذکورہ کو تحویل  
 کریں ہوتی ایک ایسی صورت کی کہ وہ مرکب ہو اجزای ضربی سلسلہ جمع کی سیے اور ان میں فرق وہ مقدار ہو جس قدر  
 مقدار غیر مرقومہ زیادہ ہوتی ہے لیکن مقدار کلی زیادتی کی حاصل ہو جائیگی اگر ضرب کریں ہم تحویل کی ہوئی زیادتی  
 اولیٰ ضربی سلسلہ کے میں در بعد از ان سمت کریں اس حاصل ضرب کو وہ مقدار دن برابرکے تو قدرہ اور اجزا  
 سلسلہ پر اور دوم فرق عام مذکورہ پر مقدار مرقومہ سلسلہ کی معلوم ہوتی ہے یہ سلسلہ شرط او اس سوال  
 کی حیثیت ہم حل کر رہے ہوں جس وقت کہ مقدار کلی آ ہو دیے ط اور سوت یہ بات معلوم ہو کہ مقدار کلی کامل  
 میں ہی تو ظاہر ہے کہ  $ط + ق = ص$  اور  $ق = ص - ط$  اور اسیرا  $لا + ق = لا + ص - ط$

مثال ۱ جاتے ہم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$  وغیرہ ان جزو تک چونکہ اس مثال میں  $ق$  دان جزو سلسلہ کا  $ق$  ہی  
 تو معلوم ہوا کہ زیادتی اس جزو کی یہ ہوگی  $ق + ۱$  اور اسیرا سلسلہ موافق مرقومہ الصد کے حاصل جمع مطلوب  
 یہ ہوگا  $\frac{ق(ق+۱)}{۲}$

مثال ۲ کیا ہے  $ق$  دان جزو اس سلسلہ اعدادی کا کہ اس میں  $ق$  کتے اجزا ہیں

$۵ + ۹ + ۱۶ + ۲۶ + ۳۹ + \dots$  وغیرہ  
 پس اب اگر لیویں ہم متواتر حاصل تفریق اجزای اس سلسلہ تو حاصل ہوگا یہ  

|   |   |    |    |    |
|---|---|----|----|----|
| ۵ | ۹ | ۱۶ | ۲۶ | ۳۹ |
|   | ۴ | ۷  | ۱۰ | ۱۳ |
|   |   | ۳  | ۳  | ۳  |

اور اب یہ بات ظاہر ہے کہ  $ق$  دان جزو کسی مرتبہ کی حاصل تفریقوں یا فرقوں کا مساوی ہوگا ہی زیادتی  $ق$  دین  
 جزو اس سلسلہ پہلی مرتبہ کی حاصل تفریقوں کے پس معلوم ہوا کہ  $۳$  ہی زیادتی  $ق$  دین جزو اول مرتبہ کی حاصل تفریقوں کے  
 اور اسیرا سلسلہ  $۳ق + ۱$  ہی  $ق$  دان جزو اور صورت  $ق = ۱$  اور سوت

$۳ق = ۳$  اور  $ق = ۱$  پس معلوم ہوا کہ  $۳ق + ۱$  ہی  $ق$  دان جزو اول مرتبہ کی حاصل تفریقوں کا  
 اور اسیرا سلسلہ یہ ہی زیادتی  $ق$  دین جزو سلسلہ اصلی مفروض کی اور اسیرا سلسلہ موافق قاعدہ گذشتہ سیکے

یہ بات ظاہر کرتی ہے کہ ان جزو اصلی کا  $\frac{3(n-1)}{2} + n + n$  اور  $n$  کی مجموعہ

کہ  $n = 1$  اور اسیرا سیٹے حاصل ہو گا یہ  $1 + n = 5$  اور  $n = 4$  پس معلوم

ہوگا کہ ان جزو اصلی مفروض کا  $\frac{3(n-1)}{2} + n + n$  ہے

مثال ۳ چاہتے ہیں دریافت کرنا حاصل جمع سلسلہ آئندہ کا کہ مرکب ہے مجذورون اعداد

کی سے  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + \dots$  وغیرہ ان

جزون تک ظاہر ہے کہ زیادتی اس حاصل جمع کی  $(n+1)$  ہے اور یہ مساوی ہے

$n(n+1) + 1 + n$  اور اسیرا سیٹے حاصل جمع مطلوبہ یہ ہے

$$\frac{(n-1)n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{4}$$

اور ظاہر ہے کہ اسپر کوئی مقدار مقررہ کا زیادہ کرنا ضرور نہیں ہے

مثال ۴ چاہتے ہیں دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا کہ مرکب ہے مجذورون عددون ۲

کی فرق سے  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + \dots$  وغیرہ ان جزون تک

ظاہر ہے کہ زیادتی اس سلسلہ کی حاصل جمع کی یہ ہے  $(n+1)$  اور یہ مساوی ہے اس کے

$n^2 + 2n + 1 = n(n+1) + 1$  اور اسیرا سیٹے حاصل جمع مطلوبہ یہ ہے

$$\frac{(n-1)n(n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{3}$$

مثال ۵ چاہتے ہیں دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا کہ مرکب ہے مکعبون اعداد کی سے

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + \dots$  وغیرہ ان جزون تک ظاہر ہے کہ زیادتی

حاصل جمع اس سلسلہ کی  $(n+1)$  اور یہ مساوی ہے اس کے

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = 1 + n + (n+1) + (n+2) + \dots + n$$

اور اسیرا سیٹے حاصل جمع اس سلسلہ کا موافق قاعدہ گذشتہ یہ ہے

$$\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2}$$

اور ظاہر ہے کہ اس حاصل جمع پر کوئی مقدار مقررہ زیادہ کرنا ضرور نہیں ہے سلسلہ آئندہ اس طرح سے

بنے ہیں ان جزو کسی کا اور نہیں سے مساوی حاصل جمع ن کتوں جزون اس سلسلہ کی جو اتنے

جودت سے باقی اوسکی واضح ہو کہ ان سلسلوں کے اجزائی کو اعداد اشکلی کہتے ہیں اول سلسلہ کی اعداد  
 کو اعداد اشکلی اول مرتبہ کی کہتے ہیں اور دوم سلسلہ کی اعداد کو دوم مرتبہ کی اعداد اشکلی کہتے ہیں اور تیسری مرتبہ کی اعداد

|                          |   |   |    |    |    |     |     |       |
|--------------------------|---|---|----|----|----|-----|-----|-------|
| اول مرتبہ کی اعداد اشکلی | ۱ | ۱ | ۱  | ۱  | ۱  | ۱   | ۱   | وغیرہ |
| دوم                      | ۱ | ۲ | ۳  | ۴  | ۵  | ۶   | ۷   | وغیرہ |
| سوم                      | ۱ | ۳ | ۶  | ۱۰ | ۱۵ | ۲۱  | ۲۸  | وغیرہ |
| چارم                     | ۱ | ۴ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۵ | ۵۶  | ۸۴  | وغیرہ |
| پنجم                     | ۱ | ۵ | ۱۵ | ۳۵ | ۷۰ | ۱۲۶ | ۲۱۰ | وغیرہ |

مثال ۶ چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا حاصل جمع ن جزون م دین مرتبہ کی اعداد اشکلی کا  
 ظاہر ہے کہ اول مرتبہ کی اعداد اشکلی کے ن جزون کا حاصل جمع ن ہے اور اسی واسطے اس کا  
 دوم مرتبہ کی اعداد اشکلی کے حاصل جمع کی (ن+۱) ہے اور اسی واسطے اس کا حاصل جمع دو سر مرتبہ کی اعداد  
 کے ن جزون کا  $\frac{ن(ن+۱)}{۲}$  ہے اور یہاں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ  $\frac{ن(ن+۱)}{۲}$  (ن+۱) (ن+۲)

ہی زیادتی سوم مرتبہ کی اعداد اشکلی کے حاصل جمع کی  $\frac{ن(ن+۱)(ن+۲)}{۶}$  ہے اور اس سے  
 ن جزون سوم مرتبہ کی اعداد اشکلی کا اور ظاہر ہے کہ اسی طرح سے چارم اور پانچویں مرتبہ کی ن جزون  
 اعداد اشکلی کا حاصل جمع معلوم ہو سکتا ہے پس ظاہر ہے کہ م دین مرتبہ کی اعداد اشکلی کے ن جزون  
 کا حاصل جمع یہ ہوگا  $\frac{ن(ن+۱)(ن+۲) \dots (ن+م-۱)(ن+م)}{م!}$

مثال ۷ چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا حاصل جمع ن جزون اس سلسلہ کا  
 $۱ \times ۲ + ۲ \times ۳ + ۳ \times ۴ + ۴ \times ۵ + ۵ \times ۶ + ۶ \times ۷ + ۷ \times ۸ + ۸ \times ۹ + ۹ \times ۱۰ + \dots + (ن-۱) \times ن$   
 جزاں سلسلہ کا یعنی زیادتی حاصل جمع اس سلسلہ کی یہ ہے  $\frac{ن(ن+۱)(ن+۲)}{۶}$  اور اسی واسطے مقدار  
 کلی یعنی حاصل جمع مطلوبہ یہ ہوگا  $\frac{ن(ن+۱)(ن+۲)}{۶}$  اور ظاہر ہے کہ اس پر کوئی

مقدار مقررہ زیادہ کرنی ضرور نہیں ہے  
 مثال ۸ چاہتے ہیں دریافت کرنا حاصل جمع ن جزون ایک ایسی سلسلہ کا جس کا  
 ن وان جز یہ ہے  $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + \dots + (ن-۱) + ن$   
 مقدار مفروضہ ن جز کو کہ ۱ (ن+۱) (ن+۲) + ۲ (ن+۱) + ۳ (ن+۱) + ۴ (ن+۱) + ۵ (ن+۱) + ۶ (ن+۱) + ۷ (ن+۱) + ۸ (ن+۱) + ۹ (ن+۱) + ۱۰ (ن+۱) + \dots + (ن+۱) =

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ ن} + 2 \text{ ن} + 3 \text{ ن} + \dots + \text{ن} \\ 1 \text{ ب} + 2 \text{ ب} + 3 \text{ ب} + \dots + \text{ب} \\ 1 \text{ ع} + 2 \text{ ع} + 3 \text{ ع} + \dots + \text{ع} \\ 1 \text{ ف} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ ن} + 2 \text{ ن} + 3 \text{ ن} + \dots + \text{ن} \\ 1 \text{ ب} + 2 \text{ ب} + 3 \text{ ب} + \dots + \text{ب} \\ 1 \text{ ع} + 2 \text{ ع} + 3 \text{ ع} + \dots + \text{ع} \\ 1 \text{ ف} \end{array} \right.$$

پس معلوم ہوا کہ  $1 = \text{ط اور } 13 + \text{ب} = 3 + \text{ط} + \text{ص اور } 2 = \text{ب} = \text{ص اور}$

$$12 + \text{ب} + \text{ج} = 3 + \text{ط} + 2 + \text{ص} + \text{ع اور اس پر اسطی}$$

$$12 + \text{ب} + \text{ج} = 3 + \text{ط} + 2 + \text{ص} + \text{ع اور یہاں سے یہ معلوم ہوا کہ}$$

$$\text{ج} = \text{ط} + \text{ص} + \text{ع اور } 3 = \text{ط} + \text{ص} + \text{ع} + \text{ف پس معلوم ہوا کہ}$$

زیادتی حاصل جمع مطلوبہ کی یہ ہے

$$\text{ط} (1 + \text{ن}) + (2 + \text{ن}) \text{ص} + \text{ن} (1 + \text{ن}) + (\text{ط} + \text{ص} + \text{ع}) \text{ن} +$$

$\text{ط} + \text{ص} + \text{ع} + \text{ف}$  اور اس پر اسطی مقدار کلی یعنی حاصل جمع مطلوبہ یہ ہے

$$\frac{\text{ط} (1 - \text{ن}) \text{ن} (1 + \text{ن}) (2 + \text{ن})}{2} + \frac{\text{ص} (1 - \text{ن}) \text{ن} (1 + \text{ن})}{3}$$

$$+ \frac{(\text{ط} + \text{ص} + \text{ع}) (1 - \text{ن}) \text{ن}}{2} + (\text{ط} + \text{ص} + \text{ع} + \text{ف}) \text{ن اور ظاہر ہو کہ}$$

اس پر کوئی مقدار مقررہ زیادہ کرنی ضرور نہیں ہے سو اسی قواعد مذکورہ بالا کے اور یہی قواعد خاص درباب سلسلوں کے ہندسوں نے نکالی ہیں اور انہیں بعضی اوقات بہت سہولت سے عمل ہوتا جیسے کہ مثالوں آئندہ سے واضح ہوگا

مثال 4 چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا ان جزوں سلسلہ آئندہ کا حاصل

$$0 + 4 + 4 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + \dots \text{ وغیرہ}$$

رض کر دکھ حاصل جمع مطلوبہ کی اس سلسلہ کی ہے

$$1 \text{ ن} + 2 \text{ ب} + 3 \text{ ج} + 4 \text{ د} + 5 \text{ س} + \dots \text{ وغیرہ}$$

اب ظاہر ہو کہ زیادتی اس سلسلہ کی یہ ہوگی

$$1 (1 + \text{ن}) + \text{ب} (1 + \text{ن}) + \text{ج} (1 + \text{ن}) + \text{د} (1 + \text{ن}) + \text{س} (1 + \text{ن}) + \dots \text{ وغیرہ}$$

یعنی یہ زیادتی ہوگی  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + \text{ن} + \text{ن} + \text{ن} + \dots + \text{ن} + \text{ن} + \text{ن} + \dots$  وغیرہ

لیکن زیادتی سلسلہ مفروض کی یہ صورت + ۵ پس معلوم ہوا کہ

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = 3 + 2 + 1 + \dots + n = 0 \text{ وغیرہ } = n + 5 \text{ پس معلوم ہوا کہ } 2 = 1 \text{ اور}$$

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{4} = \frac{1}{1} = 1 \dots 5 = 1 \text{ اور } 1 + 1 = 2 \text{ اور } \frac{1}{4} = \frac{1}{9}$$

$$\text{اور یہاں سے معلوم ہوا کہ حاصل جمع مطلوبہ یہ ہے } \frac{9n}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n}{2} (9n + 1)$$

اس مثال کے ملاحظہ کرنی سے ظاہر ہوا کہ ایک بہت خوب قاعدہ واسطے دریافت کرنی حاصل جمع سلسلوں کے معلوم ہو جائیگا لہذا قاعدہ یہ ہے جو صورت کسی سلسلہ کا حاصل جمع مطلوب ہو اور صورت سچا حاصل جمع مطلوب کی فرض کرو ایک ایسا سلسلہ کہ اوپر میں تواریح کے باقی جائیں اور استعمال ان صورتوں کے مقدار غیر منقطع مثل آ اور ب وغیرہ کی ہوں بعد ازاں اس سلسلہ کی زیادتی کو لکھو مساوی زیادتی اور سلسلہ کی سچا حاصل جمع مطلوب ہو اور اس مساوات سے معلوم ہو جائیگی یہیں ہمیشہ مقداروں غیر منقطع کی اور بعد ازاں حاصل جمع مطلوب ہی معلوم ہو جائیگا

**مثال ۱۰** فرض کرو کہ ایک ڈیمر گویہ لکھا اس طرح سے لکھا ہوا ہے کہ اوپر ڈیمر کی شکل مخروط

مضلع کی اور اس کا قاعدہ ایک مربع ہے اور اس مربع کی ایک ضلع میں  $n$  گولی ہیں متساوی گولی ہیں سارے ڈیمر یعنی مخروط مضلع مذکور میں اب چونکہ مواضع فرض کے ایک ضلع قاعدہ مخروط کی میں  $n$  گولی ہیں تو ساری قاعدہ یعنی کل مربع میں  $n$  گولی ہوں گی اب چونکہ اس مربع کی جو مربع اوپر ہو گا اس کی ایک ضلع میں

$$(n-1) \text{ گولی ہوں گی تو ظاہر ہو کہ دو سر مربع میں } (n-1) \text{ گولی ہوں گی اور اس طرح سے یہ ساری مربع میں } (n-2) \text{ گولی ہوں گی اور علیٰ ہذا لہذا اس میں معلوم ہوا کہ ساری گولی کل مخروط میں مساوی ہوں گی اب اس سلسلہ مجذوروں کے } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 \text{ وغیرہ یا}$$

اب ظاہر ہے کہ حاصل جمع اس سلسلہ کا دریافت ہو سکتا ہے سلسلہ قاعدہ زیادتیوں کے لیکن ہم اس کا حاصل جمع اس طریقہ سے دریافت کر سکتے ہیں جس سے دریافت کیا ہے جسے حاصل جمع جو مطلوب تھا مثال (۹) میں واسطے اس سلسلہ کی فرض کرو کہ  $1n + 2n + 3n + \dots + 9n$  حاصل جمع مطلوب ہے اور اس واسطے زیادتی اس صورت کی یہ ہوگی

$$1(1+n) + 2(1+n) + 3(1+n) + \dots + 9(1+n) = 1n - 2n - 3n \dots$$

اور سلسلہ کی سچا حاصل جمع مطلوب ہی یہ ہے

$$(1+n) \text{ یا } 2 + 3 + \dots + 9 \text{ اس سلسلہ کا حاصل جمع یہ مساوات}$$

$$1 + n^2 + n = \begin{cases} 2 + 2n + 1 \\ 7 + n \end{cases}$$

اور اسید اسطی حاصل ہوگی یہ مساواتیں ۲ ج = ۱ اور ۱ ج =  $\frac{1}{2}$  اور

۲ ج = ۲ + ۱ یا ۲ = ۲ + ۱ :: ۲ = ۲ + ۱ لیکن ۱ + ۲ + ۱ = ۱

∴  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 1$  ایس معلوم ہوا کہ  $\frac{1}{2}$  اور ۱ سے معلوم ہوا کہ حاصل جمع مطلوب یہ ہے  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1$  اور اسپر کوئی مقدار مقررہ زیادہ کرنی ضرور نہیں ہے اگر کہتے ہم اسطی حاصل جمع مطلوب کی یہ سلسلہ ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ وغیرہ تو دریافت ہوتا ہے کہ ۰ = ۰ اور ۰ = ۰ اور علیٰ ہذا القیاس

اب تک ہم نے بیان کیا ہے وہ قاعدہ زیادتیوں کا جسکی وسیلہ سے فقط وہی سلسلے جسکی اجزای اعداد صحیح ہیں جمع ہو سکتی ہیں انجسہم کہیں گے وہ قاعدہ زیادتیوں کا جسکی وسیلہ سے حاصل جمع اوں سلسلون کا یہی نہیں یا جزای کسری ہوں معلوم ہو جاتا ہے قاعدہ مذکور یہ ہے

اگر  $\frac{1}{s} = \frac{1}{(s+1)(s+2)\dots(s+n-1)}$  ہو دی کوئی مقدار کلی اور اس میں

تو ہو دی کوئی مقدار مقررہ کہ اسی قدر م متواتر زیادہ ہوتا ہے تو زیادتی اس مقدار کلی کی یہ ہوگی

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{(s+1)(s+2)\dots(s+n-1)}$$

اسو اسطی جسوقت  $n$  ہو جاتا ہے  $n+1$  اور وقت قیمت مقدار کلی کی یہ ہوتی ہے

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{(s+1)(s+2)\dots(s+n-1)}$$

اور اگر اس میں سے تفریق کریں ہم قیمت اصلی مقدار کلی تو حاصل تفریق یہ ہوتا ہے

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s(s+1)}$$

اور یہی جز زیادتی مرقوم بالا بیان سے یہ ہے معلوم ہوتا ہے کہ اگر ہو دی

$m(m+1) \dots (m+n+1)$  .....  $m(m+1) \dots (m+n)$   
 کوئی زیادتی تو مقدار کلی اسکی یہ ہوگی

$m(m+1) \dots (m+n)$  .....  $m(m+1) \dots (m+n)$   
 اور یہ بھی معلوم ہوتا ہے کہ اگر ہو دیکھ

$m(m+1) \dots (m+n)$  .....  $m(m+1) \dots (m+n)$   
 کوئی زیادتی تو مقدار کلی اسکی یہ ہوگی

سن ۵ .....  $m(m+1) \dots (m+n)$   
 یعنی بیان سے یہ قاعدہ نکلتا ہے اگر کوئی زیادتی اس

$m(m+1) \dots (m+n)$  .....  $m(m+1) \dots (m+n)$   
 شکل کی ہو تو اسکی مقدار کلی دریافت ہو سکتی ہے اگر دور کریں ہم اخیر جزو ضربی اسکی  
 نسبت نکالو اور بعد ازان قسمت کریں باقی کو متواتر اذن اجزای پر جو باقی رہی ہیں اور فرق عام پر  
 اور جو کچھ حاصل ہوا دیکھتے ہیں یہ قاعدہ خوب واضح ہو جائیگا مثالوں ائمہ سے  
 مثال ۱ چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا ان جزوں اس سلسلہ کا

$$\frac{1}{5 \times 4 \times 3} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2} + \frac{1}{3 \times 2 \times 1}$$

اسکا ظاہر ہے کہ ان جزا اس سلسلہ کا  $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$  ہے

پس معلوم ہوا کہ  $(n+1)$  دان جزا اس سلسلہ کا یعنی زیادتی حاصل جمع اس سلسلہ کی یہ ہے

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \text{ اور اس کی مقدار کلی یہ ہے } \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

اور جسوقت  $n=1$  اسوقت ظاہر ہو کہ

$$\frac{1}{3 \times 2 \times 1} + \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{3 \times 2 \times 1}$$



$$\frac{1}{2} = \frac{2}{1 \times 2} = \frac{1}{2} \text{ اور یہاں سے معلوم ہوا کہ حاصل جمع مطلوبہ یہ ہے}$$

$$\frac{1}{(2+n)(1+n)} - \frac{1}{2}$$

مثال ۲ چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا

$$\frac{9}{4 \times 5 \times 2 \times 3} + \frac{4}{5 \times 2 \times 2 \times 2} + \frac{5}{2 \times 3 \times 2 \times 1}$$

اجزای ظاہر ہر  $(n+1)$  دان جز اس سلسلہ کا یعنی زیادتی اسکی یہ ہے

$$\frac{2 + (1+n)}{(n+1)(2+n)(1+n)} = \frac{5+n}{(n+1)(2+n)(1+n)}$$

$$\frac{3}{(n+1)(2+n)(1+n)} + \frac{2}{(n+1)(2+n)(1+n)} =$$

اور ظاہر ہر کے مقدار کلی یعنی حاصل جمع مطلوب

$$1 - \frac{1}{(3+n)(2+n)(1+n)} + \frac{1}{(3+n)(2+n)(1+n)}$$

اور جو بنت  $n = 1$  اور سوقت ظاہر ہر کے حاصل جمع مطلوب

$$= 1 - \frac{1}{4 \times 3 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{5}{2 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1+2+5}{2 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{8}{24} \text{ اور اس سے اسطرح حاصل}$$

$$\frac{1}{(3+n)(2+n)(1+n)} - \frac{1}{(3+n)(2+n)} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{(3+n)(1+n)} - \frac{1}{2}$$

مثال ۳ چاہتے ہیں دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا موافق قاعدہ زیادتیوں کے

۱/۱×۲ + ۱/۲×۳ + ۱/۳×۴ + ۱/۴×۵ + ... وغیرہ ن جزون تک ظاہر ہے  
 کہ زیادتی حاصل جمع اس سلسلہ کی پہلی ہے

$$\frac{1}{(1+n)(2+n)(3+n)} = \frac{1}{(2+n)(3+n)} - \frac{1}{(1+n)(3+n)} + \frac{1}{(1+n)(2+n)}$$

پس معلوم ہوا کہ مقدار کلی یہ ہے  
 حاصل جمع مطلوبہ پہلی ہے  $\frac{1}{2+n} - \frac{1}{(1+n)(3+n)} + \frac{1}{(1+n)(2+n)}$  ق اب فرض کرد

$$\text{کہ } n = 1 \text{ تو } \frac{1}{3 \times 1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2+1} - \frac{1}{(1+1)(3+1)} + \frac{1}{(1+1)(2+1)}$$

اور:  $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{6}{12} - \frac{1}{12} + \frac{2}{12} = \frac{7}{12}$  پس معلوم ہوا کہ حاصل جمع مذکور

$$\frac{1}{(2+n)(1+n)2} - \frac{1}{2+n} - \frac{1}{3}$$

مثال ۴ چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کے ق جزون کا

۱/۲×۳ + ۱/۳×۴ + ۱/۴×۵ + ۱/۵×۶ + ... وغیرہ ن جزون تک اسجای ظاہر ہے

کہ زیادتی حاصل جمع اس سلسلہ کی پہلی ہے  $\frac{1}{(2+n)(1+n)}$  فرض کر دو کہ  
 $d = 2+n$  اور اسی فرض کے موافق پہلی بات ظاہر ہے کہ د زیادہ ہوگا اور سیدر  
 جس قدر ن زیادہ ہوتا ہے جیسے د زیادہ ہوتا ہے متواتر بقدر آیکے اور

$$\frac{1}{(1+d)(2+d)} \times \frac{1}{d} = \frac{1}{(2+d)2} - \frac{1}{(2+d)(1+d)}$$

اور اس مقدار کلی پہلی ہے  $\frac{1}{2+d} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2+d} - \frac{1}{3}$  ق

اور جو نشان = اور سوت =  $\frac{1}{p} + q = \frac{1}{p}$  اور :  $q = \frac{1}{p}$

پس معلوم ہوا کہ حاصل جمع مطلوبہ یہ ہے  $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p} - p = \frac{1 - p^2}{p}$   
 مثالین اور قواعد واسطی دریافت کرنے حاصل جمع سلون متناہی اور غیر متناہی کے دو پر بیان لگی  
 ہیں دی کافی ہوگی اور امید ہے کہ طاب علم اونکی پڑھنے سے ایسی استفاد حاصل کریگا کہ اگر کوئی ادرسم کا  
 ہی سلسلہ اسکی آگے آویگا اور کو بہی وجہ جمع کر سکیگا نتیجہ کی کہ بہت سی اور دلچسپ اور مفید مطالعہ  
 جبر و مقابلہ میں باقی ہیں تو میں کہہ کر اور زیادہ درباب سلون کے استیحا نہیں کہہ سکتا ہوں چونکہ یہہا  
 سلون کے بیانین ہی تو میں اس میں مندرج کرتا ہوں تاکہ اور فضل کو حسین بیان ہوگا معلوم کنی سلون کا

### اور سلسلہ متواتر کا فصل سومین بیچ یا معلوم کنی سلون

اگر ہر وی ایک مساوات اس شکل کے

$$(1) \dots\dots\dots = s + t + u + v + \dots + x + y + z + \dots + \text{دیگرہ}$$

اور چاہتے ہوں ہم دریافت کرنا ایک سلسلہ

$$(2) \dots\dots\dots = a + b + c + d + e + f + g + h + \dots + \text{دیگرہ}$$

تو اس عمل کو معکوس کرنا سلسلہ کا کہتے ہیں کہ اس واسطی کہ اول مساوات میں مساوی ہی ایک سلسلہ کے  
 جسمین لاکھی تو ہی بتدریج زیادہ ہوتی جاتی ہیں اور اون تو ہی کے سر خاص مقدار میں مثل ط اور ص وغیرہ  
 کی ہیں بر خلاف اسکے سلسلی دو سر میں آہر مساوی ایک سلسلہ کی جسمین آہر تو ہی بتدریج زیادہ ہوتی جاتی  
 ہیں اور اونکی امثال خاص مقدار میں مثل آ اور ب وغیرہ کی ہیں پس لازم ہے ہمیں دریافت کرنی قیمتین  
 آ اور ب وغیرہ کی نسبت ط اور ص وغیرہ کے اور واسطی اس مطلب کے دریافت کر دیتین مختلف

تو ہی کو جو سید سلسلہ اول کے

$$\begin{aligned} \therefore \quad & \left. \begin{matrix} \text{آ} + \text{ط} = \text{آ} + \text{ط} + 2\text{ص} \\ \text{ب} + \text{ط} = \text{آ} + \text{ط} + 2\text{ص} + \text{ط} \\ \text{ج} + \text{ط} = \text{آ} + \text{ط} + 2\text{ص} + 2\text{ط} \\ \text{د} + \text{ط} = \text{آ} + \text{ط} + 2\text{ص} + 3\text{ط} \\ \text{ہ} + \text{ط} = \text{آ} + \text{ط} + 2\text{ص} + 4\text{ط} \\ \text{و} + \text{ط} = \text{آ} + \text{ط} + 2\text{ص} + 5\text{ط} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{آ} + 2\text{ص} \\ \text{آ} + 2\text{ص} + \text{ط} \\ \text{آ} + 2\text{ص} + 2\text{ط} \\ \text{آ} + 2\text{ص} + 3\text{ط} \\ \text{آ} + 2\text{ص} + 4\text{ط} \\ \text{آ} + 2\text{ص} + 5\text{ط} \end{matrix} \end{aligned}$$

پس جبوقت کہین ہم ان قیمتوں کو سلسلہ (۲) میں اور نسبت کریں تو ای لا کو علی الترتیب تو

|         |            |            |            |                |
|---------|------------|------------|------------|----------------|
| $1 = ط$ | $لا + 1 ص$ | $لا + 2 ع$ | $لا + 3 ف$ | $لا + 4 وغیرہ$ |
| $1 -$   | $ب + 2 ط$  | $2 + 3 طص$ | $ب + 3 ص$  |                |
|         |            | $س + 3 ط$  | $2 + 3 طع$ |                |
|         |            |            | $3 + 3 طص$ |                |
|         |            |            | $4 + 3 ط$  |                |

اب جبوقت کہین ہم ہر واحد سر تو ای لا کو ساری صفوں کی تو حاصل ہونگی یہ مساواتیں

$$1 - ط = 1 - اور 1 ص + ب ط = 0 اور 2 ع + 3 طص + 4 وغیرہ = 0$$

$$اور 1 ف + ب ص + 2 ب طع + 3 س طص + 4 د ط = 0 وغیرہ$$

اور ان مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں یہ قیمتیں آ اور ب وغیرہ کی

$$1 = \frac{1}{ط} اور ب = \frac{1}{ط} = \frac{1}{ط} اور 3 س طص = 3 اور 4 وغیرہ کی$$

$$س = \frac{ط - 2 ص}{ط} اور د = \frac{ط - 5 طص + 5 ص}{ط}$$

پس جبوقت کہین ہم یہ قیمتیں آ اور ب وغیرہ کی سلسلہ (۲) میں تو حاصل ہوگا سلسلہ

$$لا = \frac{1}{ط} - 1 - \frac{2}{ط} - \frac{3}{ط} - \frac{4}{ط} - 5 طص + 5 ص - 6 وغیرہ$$

اگر سلسلہ مفروض میں کوئی مقدار منقطع بھی ہوتی تو وہ سلسلہ اس شکل کا ہوتا

$$و = ط + لا + ص لا + ع لا + ف لا + وغیرہ اب فرض کر دو کہ  $ط = 1$  و$$

اور اس سلسلہ کو حاصل ہوگی یہ مساوات کہ  $و = ط لا + ص لا + ع لا + ف لا + وغیرہ$

اب موافق گذشتہ کی فرض کر دو کہ یہ سلسلہ واسطی قیمت لایکے نسبت و کے

$$لا = 1 - 1 - 1 - 1 - 1 + 2 + 3 + 4 + 5 وغیرہ پس موافق گذشتہ کی حاصل ہوگی یہ مساوات$$

$$لا = \frac{1}{ط} - 1 - \frac{2}{ط} - \frac{3}{ط} - \frac{4}{ط} - 5 طص + 5 ص - 6 وغیرہ$$

اور جبروت کھین کے ہم بجای تو کی اوسکی قیمت و - ط تو اسوقت حاصل ہوگی یہ مساوات پسند

$$لا = \frac{ا}{ط} (س - ط) - \frac{ص}{ط} (س - ط) - \frac{ط - ع - ۲}{ط} (س - ط) \quad (۱)$$

$$\frac{ط - ۵ ط ص ع + ۵ ص}{ط} (س - ط) - وغیرہ جبروت سلسلہ مفروضہ میں$$

قوای طاق ہی لاکھی ہوں اسوقت فرض کر دو اسطی لاکھی کے ایک ایسا سلسلہ کہ اوسین ہی قوای و کے  
نقطہ طاق ہی ہوں منسوخ فرض کر دو کہ یہ مساوات

$$س = ط + ص + لا + ع + لا + ت + لا + وغیرہ پس ب فرض کر دو کہ$$

لا = ۱ + س + ب + ۳ + س + ۵ + د + ۳ + وغیرہ اب اگر عمل کریں ہم بطور سابق کے  
کہ اسوقت سلسلہ مفروضہ میں قوای لاکھی طاق اور جبروت در فوطحکی تین تو حاصل ہوگی یہ مساوات میں

$$۱ = \frac{ا}{ط} اور ب = \frac{ص}{ط} اور س = \frac{ط - ع - ۳ ص}{ط}$$

$$اور ۵ = \frac{ط - ۸ ط ص ع + ۱۲ ص}{ط} اور علیٰ ہذا القیاس$$

پس اگر کھین ہم ان قیمتوں کو قیمت لاکھی میں کہ ایک سلسلہ ہو تو حاصل ہوگی یہ مساوات

$$لا = \frac{ا}{ط} - س - \frac{ص}{ط} - \frac{ط - ع - ۳ ص}{ط} - ۵$$

$$\frac{ط - ۸ ط ص ع + ۱۲ ص}{ط} - وغیرہ اب ہم لکھتی ہیں چند مثالیں$$

کرنے سلسلہ کی تاکہ طالب علم کو مشتق ہو جاوے

**مثال ۱** فرض کر دو کہ یہ سلسلہ  $س = ۱ + لا + لا + لا + \frac{ا}{ط} لا + وغیرہ$   
اور چاہتے ہیں ہم دریافت کرنی قیمت لاکھی بوسیلا ایک سلسلہ کی کہ اوسین قوای و کی علی الترتیب

لکھی ہوئی ہوں استجما ظاہر ہے کہ  $ط = ۱$  اور  $ط = ۱$  اور  $ص = ۱$

اور  $ع = \frac{۳}{۲}$  اور  $ف = \frac{۱}{۲}$  وغیرہ اور اسبواسطی قیمتیں آ اور ب  
اور س وغیرہ کی بیٹے ہیں



جواب =  $\frac{لا}{ک} + \frac{(ط-ک-ط)}{ک} + \frac{(ص-ک-ص)}{ک} + \frac{(ط-ک-ط)}{ک} + لا$  وغیرہ

واضح ہو کہ سلسلہ محکوس کرنا بہت مفید ہے مثلاً اگر معلوم کر لین ہم بوسیله ایک سلسلہ کی قیمت جس لا یا جم لا وغیرہ کی اور اس سلسلہ میں قوای لا کی باقی جاتی ہوں تو معلوم ہو سکتا ہے کہ یہ سلسلہ یا جم لا وغیرہ کی اور اس میں باقی جائیں تو قوای جس لا یا جم لا وغیرہ کی اور ظاہر ہے کہ اس سے معلوم ہو سکتا ہے کہ یہ سلسلہ ایک دایرہ کا

### فصل دہم در بیان قواعد سلسلون متواتر کے

اگر ایک سلسلہ میں اجزای پس پڑا کرتے جاستے ہوں اور ہر واحد ان اجزای میں کا اپنی ما قبل کے کئی جزو حاصل جمع سے کوئی خاص نسبت رکھتا ہو تو ایسی سلسلہ کو سلسلہ متواتر کہتے ہیں ایسی سلسلہ کا حاصل جمع ہمیشہ معلوم ہو سکتا ہے اور طریقہ دریافت کرنی حاصل جمع مذکور کا یہ ہے فرض کرو کہ

ط + ص لا + ع لا + وغیرہ سلسلہ مفروضہ ہے اور تعمیر کرو جو دن اسکی کو حرکت آ اور ب اور س اور د اور ج وغیرہ سے اور یہ بھی فرض کرو کہ س = ف لا ب + ک لا ۱ اور د = ف لا س + ک لا ب وغیرہ اور اسجای مقدار ت + ک کو میزان نسبت کی کہتے ہیں کیونکہ اجزای متواتر کی اپنی نسبت اس مقدار پر موقوف ہے پس اب حاصل ہونگی یہ مساواتیں

1 = 1

ب = ب

س = ف لا ب + ک لا ۱

د = ف لا س + ک لا ب

ی = ف لا د + ک لا س

وغیرہ = وغیرہ

اور اگر ۱ + ب + ص + د + ی + وغیرہ لا نہایت ج =

تو حاصل ہونگی یہ مساوات ج = ۱ + ب + ف لا (ج - ۱) + ک لا × ج

یا ج - ف لا ج - ک لا ج = ۱ + ب - ف لا ۱ اور اسی سے حاصل ہوتی ہے مساوات

$$ج = \frac{۱ + ب - ف لا ۱}{۱ - ف لا - ک لا}$$

اور اگر پہلی میزان نسبت کی ایک دو سی زیادہ جزوں سے یعنی ہو دیکھ وہ پہلے ۱۰۰۰ سے زیادہ ہو جائے  
 ن جزوں تک تو بطور گذشتہ کی بہ نسبت ہو سکتا ہے کہ حاصل جمع سلسلہ مفروض کا یہ ہو گا  
 ۱ + ب + س + ... + ن جزوں تک (۱ + ب + ... + ن - ایک کے لے کر) (۱ + ... + ن - ایک کے لے کر) (۱ + ... + ن - ایک کے لے کر)

۱ - ن لا - کہ لا - ہ لا ..... ن + ۱ جزوں تک

مثال ۱ جانتے ہیں ہم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ لا نہایت کا

۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰

ظاہری کثرت = ۲۰ پس حاصل جمع مطلوبہ =  $\frac{20(20+1)}{2} = 210$

مثال ۲ جانتے ہیں دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ لا نہایت کا

۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰

اور کہ = ۱ اور حاصل جمع مطلوبہ

اگر لہو دیکھ سادی آئیے کہ تو ظاہری کثرت

$$\frac{1}{(n-1)} = \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n - 1}$$

لا نہایت ہو جاوے گا حاصل جمع ن کتے جزوں سلسلہ گذشتہ کا اس طرح سے معلوم ہونا می ظاہری  
 کہ بعد ن کتے جزوں کے پہلے سلسلہ ہو گا (۱ + ن) لا + (۲ + ن) لا + ۱ + (ن + ۳) لا + ... + (ن + ۲۰) لا  
 اور جو کہ اس سلسلے میں یہ میزان نسبت کی ۲ - ۱ ہو تو اسی گذشتہ کی حاصل جمع اس سلسلہ کا یہ ہو گا

$$\frac{(1+n)la + (2+n)la + \dots + (n+20)la}{n^2 + n - 1}$$

پس معلوم ہوا کہ حاصل جمع اس سلسلہ کا

$$\frac{(1+n)la - la - nla}{(n-1)^2}$$

= ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰

$$\frac{1 + (1+n)la - nla}{(n-1)^2} = \frac{(1+n)la - nla + 1}{(n-1)^2}$$

ہر حالت لاکے تبدیل ہو جاوے تو ظاہری کثرت حاصل ہو گا یہ سلسلہ

۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰  
 گذشتہ کے یہ حاصل ہو گا



۱۲  $\frac{(1+n) \cdot n}{(n+1)}$  اور اس صورت میں علامت فوقانی کا استعمال کرنا جائز ہے

صورت میں ایک ضعف ہو اور علامت تحتانی کا بصورت ایک عدد طاق ہو

مثال ۳ جاتے ہیں ہم دریائے کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots$  وغیرہ فرض کر دو کہ  $n$  کی یہ میزان نسبت کے پس اس حاصل ہوئی ہے دوسرا تین  $n$  ف  $n$  + ک = ۵ اور ۵ ف  $n$  + ک = ۷ اور اسی حاصل ہوتی ہیں یہ قیمتیں  $n = 2$  اور  $n = 1$  اور یہاں سے معلوم ہوا کہ

$$7 = \frac{u^2 - u^2 + 1}{u + u^2 - 1} = \frac{u + 1}{(u - 1)^2}$$

ظاہر ہے کہ بعد از  $n$  کے پہلے سلسلہ شکل کا ہو گا

$$(1+n)u + (2+n)u + \dots + (n+2)u + \dots$$

صحیح کا یہ ہے

$$\frac{(1+n)u + (2+n)u + \dots + (n+2)u}{u + u^2 - 1} = \frac{(1+n)u^2 - 1 + (2+n)u - 1 + \dots + (n+2)u - 1}{(u-1)^2}$$

پس معلوم ہوا کہ حاصل جمع  $n$  کتنے  $n$  اس سلسلہ کا  $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots$  وغیرہ

$$\frac{(1+n)u + (2+n)u - u + 1}{(u-1)^2}$$

یہی

مثال ۴ جاتے ہیں ہم دریائے کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا بصورت کہ یہ مایل ہوا ختم کر پیر

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + \dots$$

اور ایسا اعلیٰ حاصل جمع سلسلہ مفروض کا یہ ہے

$$\frac{u + 1}{u - u - 1} = \frac{u - u^2 + 1}{u - u - 1}$$

اور اگر  $u$  ہو دیکھتے منفی تو

$$\frac{u - 1}{u - u + 1} = \dots + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

مثال ۵ جاتے ہیں ہم دریائے کرنا حاصل جمع اس سلسلہ لانا

$$(1-n)u + (2-n)u + (3-n)u + \dots$$

اس صورت میں ظاہر ہو کہ میزان نسبت کی ۲-۱ ہے تو حاصل جمع سلسلہ نہایت مفروض کا یہ ہوگا

$$\frac{(1-n) \cdot 1 + (2-n) \cdot 2 + \dots + (n-1) \cdot 1}{2(1-n)} = \frac{(1-n) \cdot 1 + (2-n) \cdot 2 + \dots + (n-1) \cdot 1}{2(1-n)}$$

ظاہر ہو کہ بعد از جردن یہ سلسلہ مفروض اس شکل کا ہو جاتا ہے

$$1 + 2 + 3 + \dots + n - 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + n - 1$$

$$\frac{1 + n}{2(1-n)} \text{ پس معلوم ہوا کہ یہ سلسلہ}$$

اصل جمع

$$(1-n) + (2-n) + (3-n) + \dots + (n-1) + n$$

$$\frac{(1-n) \cdot 1 + (2-n) \cdot 2 + \dots + (n-1) \cdot 1}{2(1-n)}$$

یہاں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ حاصل جمع جردن اس سلسلہ کا

$$\frac{(1-n) \cdot 1 + (2-n) \cdot 2 + \dots + (n-1) \cdot 1}{2(1-n)} = \text{غیرہ} + \frac{(2-n) \cdot 2}{2} + \frac{(1-n) \cdot 1}{2}$$

**مثال ۶**  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$  وغیرہ نہ جردن تک کیا ہے

فرض کر دو میزان نسبت کی یہ ہو  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  اور  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$  کے مساوی

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

اور ان مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں یہ قیمتیں  $1 = 1$  اور  $3 = 3$  اور  $6 = 6$

پس جس وقت کہیں ہم ان قیمتوں کو متواتر سلسلہ مفروض میں تو حاصل ہوگی یہ مساوات

$$\frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{2(1-n)} = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{2(1-n)}$$

اور یہی حاصل جمع سلسلہ غیر نہایت مفروض کا جس وقت کہ آئیے بعد از جردن یہ سلسلہ

مفروض اس شکل کا ہو جائیگا

$$(n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (n+2)^2 + (n+1)^2 + 2^2 + 1^2$$

$$(n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (n+2)^2 + (n+1)^2 + 2^2 + 1^2$$

$$-1 - 3 - 5 - \dots - n^2$$

$$-1 - 3 - 5 - \dots - n^2$$

$$-1 - 3 - 5 - \dots - n^2$$

$$\frac{(n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2 - (n+4)^2 + \dots + (n-1)^2 - n^2}{(n-1)}$$

۱۲  
معلوم

نزدیک  
کلی

$$\frac{1 + n - (n+1)^2 + (n+2)^2 - (n+3)^2 + \dots + (n-1)^2 - n^2}{(n-1)}$$

### ضابطہ کثیر الاجزاء کا

یہ ضابطہ اسلی دریافت کرنی صورت مفصل مجموعہ دو سے زیادہ اجزاء کی کسی قوت کے کلام میں آتا ہے۔  
ظاہر ہے کہ بزرگ ضابطہ جو پہلے کے صورت مفصل کثیر الاجزاء کی مجموعہ کی کسی قوت کی دریافت ہو سکتی ہے۔  
یہ کہ صورت میں بجز ن کی میں پہلے متناہوں میں لکھا گیا ہے اس اسلی کہ صورت مفصل

$$(1 + b + j + s + \text{ذمیرہ})$$

اگر چند اجزاء اسکو ایک جہت میں کرن اور باقی اجزاء کے مجموعہ کو دوسرا اجزاء لیکن ایک عام قاعدہ وہ ہے  
جس میں کہ جہت عام صورت مفصل کا دریافت ہو گئی ہے اس جہت سے ساری صورت مفصل نکل سکتی

ہے اور اسکی ترکیب الی لکھی جاتی ہے

دریافت کیا جاتا ہے ہم جہت عام صورت مفصل (1 + b + j + s + ذمیرہ) کا

$$j + s + b + 1 + \text{ذمیرہ} = d : (1 + b + j + s + \text{ذمیرہ}) = (d + 1)$$

اور اسکا جہت عام کہ تعبیر کیا جاوے 1 + b + j + s + ذمیرہ سے یہ ہوگا

$$\frac{(1-m)^2 \dots (1-m)^2}{b \dots \times 3 \times 2 \times 1} \cdot 1$$

یہ ہوگا (1-m) (1-m) (1-m) ... (1-m) اور اس جہت ایک عدد صحیح اور مثبت ہے

اب فرض کر دو کہ ج + س + وغیرہ = ر : د = (ا + ب) اور اسکا جز عام کہ بغیر کیا جاوے  
 ق + ا دین جز سے یہ ہوگا  $\frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (1 - ط)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (1 - ق)}$  اور اس جاوے

ق + ص = ط یعنی ق + ص = م یا یہ ہے

$\frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (1 - ط) (1 + ص) (1 + م) \dots}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (1 + ق)}$  (کیونکہ ص ایک عدد صحیح اور مثبت ہے) یا ط  $\frac{1}{1}$  پس اس صورت میں جز عام صورت کثیر الاجزہ کا اس صورت کا ہو جائیگا م (1 - م)  $\dots$  (1 + ن)  $\dots$   $\frac{1}{1}$  اب فرض کر دو کہ

س + وغیرہ = لا : ک = (ا + ج) اور جز عام کہ بغیر کیا جاوے کہ + ا سی یہ ہوگا  
 ص (ص - 1)  $\dots$  (ص - 1 + ک) ک لا (اور اس جاگ مع = ص)

یا ن (ق + ک + ع = م) یا یہ ہوگا

$\frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (1 - ع) (1 + ع) \dots}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (1 - ص)}$  ک لا (اس جاگ مع = ص)

ایک عدد صحیح اور مثبت ہی یا یہ ہو گا  $\frac{1}{1}$  پس اس صورت میں صورت مفسد جز عام صورت مفسد کثیر الاجزہ کا ہوگا

م (1 - م)  $\dots$  (1 + ن)  $\dots$   $\frac{1}{1}$   $\frac{1}{1}$  اور اگر اسطوریہ

عمل کریں جائیں جب تک تمام اجزاء تمام ہو جائیں تو جز عام مسطور یہ ہوگا

م (1 - م)  $\dots$  (ن + 1)  $\dots$   $\frac{1}{1}$   $\frac{1}{1}$   $\frac{1}{1}$  وغیرہ اور اس جاگ مع = ص

ن + ق + ک + ل + وغیرہ = م اور واضح ہو کہ ن کہ باقی بچتا ہے جو کہ م ایک کثیر الاجزہ ہوتا ہے لیکن ق اور ک اور ل وغیرہ ہمیشہ مثبت اور صحیح اعداد ہوتے ہیں حکم اگر تم ہوویے ایک عدد صحیح اور مثبت صورت جز عام کی اسطور پر لکھی جاسکتی ہیں

م (1 - م)  $\dots$  (ن + 1)  $\dots$  (ن - 1)  $\dots$   $\frac{1}{1}$   $\frac{1}{1}$   $\frac{1}{1}$  وغیرہ





اور اسکا خرم ط + ا دان خرم ہوگا  $(1-m) \dots (1+n) \dots$

اور اس جای ف + ط = م اور چونکہ ط ایک عدد صحیح اور وقت ہی تو موافق اسکے جو پہلے ثابت ہو چکا ہے ظاہر ہی کہ خرم ط کا سینے (ب + ج + س + دغیرہ) کا یہ ہوگا

ط =  $\frac{ن}{رک}$  . دغیرہ = خرم مطلوب =  $m(1-m) \dots (1+n) \dots$  .  $\frac{ن}{رک}$  .  $\frac{ن}{رک}$  .  $\frac{ن}{رک}$  .

**مثال ۱** صورت معضد (۱-ب-ج) کا وہ جز دریافت کیا جاتے ہیں کہ اوسمین ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ پایا جای اسس جای م = ۷ اور م = ۷ - ۲ = ۵ اور ق = ۲ اور ک = ۲

جز مطلوب =  $\frac{۳ \times ۲ \times ۵ \times ۴ \times ۷}{۲ \times ۱ \times ۳ \times ۲ \times ۱} \cdot ۱ \cdot (-) \cdot (-) \cdot (-) \cdot (-) \cdot (-)$

= ۲۱۰ = ۲۱۰

**مثال ۲** دریافت کیا جاتے ہیں ہم وہ جز صورت معضد

(۱ + ب + ل + ج + ن + ل) کا حسین لاکھ قوت پایا جاوے اسس جای ظاہر ہی

کوت + ق + ک + ل = م اور ق + ۲ + ک + ۳ = ۸ اور یہ بات باقی ہے کہ دریافت

کرن ہم تمام قیمتیں واسطے ق ک دغیرہ کے ایسی کہ اونہیں شرائط دو مساواتوں

مذمتہ کی پوری ہو جائیں اسس مطلب کے لئے یہ مناسب معلوم ہوتا ہے کہ مشرودہ ق ک سی کم یا زیادہ

یہ زیادہ واسطے ق ک دغیرہ کرن ایسی کہ اونہیں مساوات دوم بوزی ہوو اور تمام اون

قیمتوں کو خارج کرن جو مساوات اول کی موافق نہیں متکام ہاتے ہیں کہ ق نہیں زیادہ ہو سکتا ہے

اہم سے جانچو جب آرماتی ہیں تو اسسے شرائط پوری نہیں ہوتی ہیں اب فرض کرو کہ ق = ۳

اسسے شرائط پوری نہیں ہوتی اب فرض کرو کہ ق = ۲ اسکے موافق شرائط پوری ہوتی

ہیں جبکہ ک = ۰ اور ک = ۰ اور ل = ۲ اب فرض کرو کہ ق = ۱ اور یہی درست ہے جب

ق = ۰ اور ک = ۲ اور ل = ۱ اب ق = ۰ یہ درست ہے جبکہ ک = ۱ اور ک = ۱

اور ل = ۲ اب فرض کرو کہ ک = ۱ یہ مناسب ہے جبکہ ق = ۰ اور ق = ۰ اور ل = ۰

ک = ۳ درست نہیں ہے اور مساواتین ک = ۲ اور ک = ۱ اور ک = ۰ سوائی اون صورتوں کے

جو پہلے بیان ہو چکی ہیں اور صورتین درست نہیں ہیں اب امتحان کرو ل = ۳ یا سوا یا یا

کو ترتیب وار اور اسس صورت میں دریافت ہوگا کہ سوائی قیمتوں مرقومہ بالا کی اور قیمتوں سے کام





اس جہاں ن + ق + ک + ل =  $\frac{1}{4}$  اور ک + م + ل =  $\frac{1}{2}$  مساویہ مشرقی ہیں۔

| ن               | ق | ک | ل |
|-----------------|---|---|---|
| $\frac{5}{4}$ - | ۳ | ۰ | ۰ |
| $\frac{۳}{۲}$ - | ۱ | ۱ | ۰ |
| $\frac{۱}{۲}$ - | ۰ | ۰ | ۱ |

یہ سہ مطلوبہ =  $\frac{1}{4} (1 - \frac{1}{4}) (1 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{4}) (1 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4} (1 - \frac{1}{4}) (1 - \frac{1}{2})$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$  اس  $\frac{3}{4}$  =  $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$

### فصل بارہم میں احتمالات کے بیان میں

اگر ایک بات ق مختلف طریقوں سے ہو سکتی ہو اور احتمال واسطی واقع ہونی اوسکی ہر طریقہ سے مساوی ہو تو ظاہر ہے کہ یہ احتمال کہ بات مذکور کسی ایک خاص طریقہ سے واقع ہوگی تعبیر کیا جائیگا اس سے کہ  $\frac{1}{n}$  اور اسجہاں عدد آکا تعبیر کرتا ہے یقین کو یعنی م تو مہ بالاسی یہ مہ مادی کہ اگر عدد آ کا تعبیر کرے یقین کو تو ضرور ہی کہ قیمت اس توقع کی کہ بات مذکور ایک خاص طریقہ سے واقع ہوگی  $\frac{1}{n}$  ہوتی ہے۔ دلیل اسکی یہ ہے کہ حاصل جمع تمام احتمالوں کا یقین ہوتا ہے جو عبارت ہے اس سے کہ اگر کوئی بات سو طرح سے ہو سکتی ہو تو یہ بات تحقیق ہی کہ وہ بات کسی نہ کسی ان سو طریقہ میں سے ہوگی اور چونکہ احتمال واقع ہونی اس بات کا کسی خاص طریقہ سے مساوی ہے تو بالضرور یہ احتمال کہ بات مذکور کسی ایک طریقہ سے ہوگی یہ ہے  $\frac{1}{n}$  م تو مہ بالاسی یہ بھی معلوم ہوتا ہے کہ اگر یقین تعبیر کیا جائے طے سے تو قیمت ایک خاص احتمال کی یعنی توقع کی کہ بات مذکور کسی خاص طریقہ سے واقع ہوگی تعبیر کیا جائیگا اس سے کہ  $\frac{1}{n}$  لیکن واضح ہو کہ جو کچھ آنگے لکھا جاتا ہے اس میں ہم یقین کو نقطہ عدد ایک سے تعبیر کرتے ہیں اگر ایک بات ق مختلف طریقوں سے واقع ہوتی ہے تو اس طریقوں سے کہ ہر احتمال ہونی ہر واحد ان طریقوں کا مساوی ہے تو ہم کہتے ہیں کہ احتمال اس بات کا واقع ہونیکا تعبیر کیا جائیگا  $\frac{1}{n}$  سے اور احتمال اوسکی نہ واقع ہونیکا تعبیر کیا جائیگا  $\frac{n-1}{n}$  سے۔ دلیل اسکی یہ ہے کہ موازنہ فرض کے یہ بات ظاہر ہو کہ احتمال واقع ہونی بات مذکور کا احتمال اوسکے نہ واقع ہونی سے وہی نسبت رکھتا ہے جو خطہ کہتا ہے جس سے کہ احتمال ہوا کہ احتمال اوسکی واقع ہونیکا

کا وہی نسبت رکھتا ہے احتمال اسکی واقع ہونی مسئلہ واقع ہونی سے جو ط رکھتا ہے ط + ص سے ملکر  
 احتمال واقع ہونی اور نہ واقع ہونی کے ملکر مساوی یقین کے ہوتی ہیں تو معلوم ہوا کہ احتمال واقع ہونیکا  
 یقین :: ط : ط + ص لیکن موازنہ فرض کے یقین = ۱ تو معلوم ہوا کہ احتمال واقع ہونے  
 کا : ا : ط :: ط + ص اور ایسا وسطی حاصل ہوگی یہ مساوات احتمال واقع ہونے  
 کا =  $\frac{ط}{ط+ص}$  اگر اس احتمال کو یقین میں سے ملکا لیں تو باقی رہیگا احتمال نہ واقع ہونیکا تو معلوم  
 ہوا کہ احتمال نہ واقع ہونیکا =  $1 - \frac{ط}{ط+ص} = \frac{ص}{ط+ص}$

**مثال ۱** واضح ہو کہ ایک پانسی کی چھ طرفین یا سطحیں ہوتی ہیں اور ان طرفوں کی مختلف  
 نام ہوتے ہیں مسئلہ اور کھانا نام ا ب ۶ د س ص رکھ سکتی ہیں اب اگر سوال کریے  
 کہ کیا احتمال ہے کہ ایک دفعہ پانسی کے پہنکنے میں طرف ب اسکی اوپر آوی تو جواب اس سوال کا اس طرح  
 لکنا چاہیے ظاہر ہے کہ یہ بات تحقیق ہے کہ چھ طرفوں میں سے ایک نہ ایک اور واقع ہوگی اور احتمال ہر  
 کے اور واقع ہونیکا مساوی ہے پس معلوم ہوا کہ احتمال کسی خاص طرف ب کی اوپر واقع ہونیکا  $\frac{1}{6}$  ہے  
 اور احتمال اسکی نہ واقع ہونیکا =  $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$  اگر یہ سوال ہو دے کہ کیا ہی احتمال آیا ہے  
 کے اوپر لکنا تو اس صورت میں ظاہر ہے کہ یہ احتمال بہ نسبت پہلے کے دو گنا ہے کیونکہ دو صورتیں اسکی  
 پر سے ہوتی ہیں کی میں ایک تو واقع ہونا آ کا اوپر کی طرف اور دوسرا ب کا واقع ہونا اوپر کی طرف پس معلوم ہوا  
 کہ اس صورت میں احتمال =  $\frac{1}{6}$  اور اسے اس طرح یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ احتمال آیا ب یا ج کے اوپر واقع  
 ہونیکا مساوی ہے  $\frac{1}{6}$  اور علی ہذا القیاس اور صورتوں میں

**مثال ۲** اگر ایک ہتلی میں ن کتنی گویاں مثل آ اور ب اور ج اور د وغیرہ کی ڈالیں اور ایک شخص  
 بغیر دیکھنے کے ہتلی میں سے ایک گولی نکالی تو ہم سوال کرتے ہیں کہ کیا ہی قیمت اس احتمال کی کہ گولی نکالی گئی  
 آ ہوگی یہ سوال بہت ہی سہل ہے اور طریقہ حل کرنے اسکی کام تو نہ الصدقہ عیان ہی یہ بات تحقیق ہے کہ ایک  
 نہ ایک گولیوں میں سے نکلی گی اور احتمال ہر واحد کی ممکنہ کا مساوی ہے تو ضرور ہے کہ احتمال آ کے نکلی کا  
 =  $\frac{1}{6}$  اور احتمال آیا ب کے نکلی کا =  $\frac{1}{6}$  اور علی ہذا القیاس

**مثال ۳** اگر ان گولیوں میں سے جنکا ذکر مثال گذشتہ میں ہے دو گویاں ابھی وقت نکالی جائیں  
 تو احتمال اس بات کا کہ یہ دو گویاں آ اور ب ہوگی بغیر کیا جائیگا  $\frac{2}{6}$  کیونکہ یہ بات مسئلہ  
 ترتیب اور اجتماع سے ظاہر ہے کہ اگر ن گولیوں میں سے دو جردن کو اکٹھا کریں اس طرح سے کہ ہر اجتماع میں  
 دو گویاں مختلف ہوں یعنی جو دو گویاں ایک اجتماع میں ہوں وہی دوسرے اجتماع میں ہوں

تو قدر اور اجتناب عن کی تیسری جاتی ہر (ن-۱) اور احتمال واسطی نکل آتی ہتیلی سے کسی ایک ان  
 اجتماعوں دو دو کو یوں کے سہی مساوی ہر تو معلوم ہوگا کہ احتمال واسطی نکلنے کو یوں آ اور  
 کے ایک ہی وقت تیسری جاتی کا  $\frac{ن(ن-۱)}{۲}$  اور یہی ثابث لری ہی

**مثال ۴** اگرچہ سفید گویان اور باغ کالی گویان ایک ہتیلی میں ڈالکر ملائی جائیں اور کوئی شخص ایک  
 گولی ان میں سے ایک وقت نکالی تو ہم بوجہی ہیں کہ کیا ہر قیمت اس احتمال کی کہ گولی نکالی گئی سیاہ  
 ہوگی اور کیا ہر قیمت اس احتمال کی کہ گولی نہ کو سفید ہوگی یہ بات اسجای تحقیق ہر کہ گولی نکالی گئی یا تو کالی  
 یا سفید ہوگی اور چونکہ گویان سفید تو چہ اوکالی باغ میں تو اس سے جو پہلی لکھا گیا ہے بہت ظاہر ہے  
 کہ احتمال سفید گولی نکلنے کا ہوگا  $\frac{۶}{۱۱}$  اور احتمال کالی گولی نکلنے کا  $\frac{۵}{۱۱}$  ہوگا مگر اس کوئی فہرستوں میں  
 کی سے ایسی فہرستیں یا فہرستی تیار کیے گئے ہیں کہ اونس یہ بات معلوم ہو جاتی ہے کہ کتنے شخص اپنے پیدا  
 ہوؤ یوں سے بعد گذرئی ہر سال کی زندگی انہما کی کو بوجہ میں ان فہرستوں کے وسیلہ سے قیمت احتمال  
 اس بات کی کہ ملانا شخص فلانی عمر تک زندہ رہے معلوم ہو جاتی ہے

**مثال ۵** چاہتے ہیں ہم دریافت کرنی قیمت احتمال اس بات کی کہ کوئی شخص کسی عمر مفروض کا ایک  
 برس اور چھٹا فرض کر دو کہ فہرست مذکورہ بالا میں آہر قدر اور ان میں ان کی جنکی عمر کسی عمر مفروض کے ہر  
 اور بے قدر اور ان میں ان کے جو بعد ایک سال کی باقی رہتے ہیں بس اس صورت میں ظاہر ہے کہ احتمال اس  
 بات کا کہ شخص مذکور ایک سال تک جیگا تیسری جاتی کا  $\frac{۱}{۲}$  سے اور احتمال اس بات کا کہ اس میں رہے  
 تیسری جاتی کا  $\frac{۱}{۲}$  سے مثلاً فہرست ڈاکٹر اسی صاحب کسی واضح ہوتا ہے کہ ۵۸۶ ادیوں  
 ۲۲ برس کی عمر میں ۵۷۹ آدمی ۲۳ برس کی عمر حاصل کرتے ہیں اور یہاں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ  
 احتمال اس بات کا کہ کوئی شخص ۲۲ برس کی عمر کا ایک سال تک جیگا تیسری جاتی کا  $\frac{۵۷۹}{۵۸۶}$   
 سے یعنی قریب قریب اس  $\frac{۸۳}{۸۴}$  سے اور احتمال اس بات کا کہ یہی شخص اسی سال میں جیگا تیسری  
 جاتی کا  $\frac{۷}{۸۴}$  سے یعنی قریب قریب اس  $\frac{۱}{۸۴}$  سے ظاہر ہے کہ یہ مثال دلچسپ ہے اور اسی تیسری  
 کی مثالوں سے بہت فائدہ ہی منظور ہے

**مثال ۶** چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا احتمال اس بات کا کہ کوئی شخص کسی عمر مفروض کا جسے گا  
 اتنی برسوں مفروض تک فرض کر دو کہ فہرستوں میں قدر اور ادیوں عمر مفروض کی آہر اور بے قدر اور  
 ادنی جو بعد ایک سال کی باقی رہتے ہیں جہاں کی جو بعد دو سال کے باقی رہتے ہیں جہاں کی

اور علیٰ ہذا القیاس آل سے تعداد اون دمیون کی جو باقی رہتے ہیں بعد آساں کے اس صورت ظاہر ہے کہ  
 احتمال اسبات کا کہ شخص مذکور ایک برس تک جیسا کہ بقیر کیا جائیگا ۱۔ سے اور احتمال اسکا کہ وہی شخص  
 آریس تک جیسا کہ بقیر کیا جائیگا ۲۔ سے اور احتمال اسکا کہ وہی شخص آس سال تک جیسا کہ  
 بقیر کیا جائیگا ۳۔ سے اور احتمال اسکا کہ وہی آدمی ل برس تک جیسا کہ بقیر کیا جائیگا ۴۔ سے  
 اور علیٰ ہذا القیاس یہاں سے یہ بھی خوب واضح ہے کہ احتمال اسبات کا کہ شخص مذکور ایک سالین مر جائیگا  
 بقیر کیا جائیگا ۱۔ سے اور آساں لین مر جائیگا ۲۔ ہوگا اور آساں لین مر جائیگا ۱۔ د  
 ہوگا اور آساں لین مر جائیگا ۱۔ ل ہوگا اور علیٰ القیاس واضح ہو کہ یہ مثالین سا ہو کار دن  
 اور روپیہ قرض دینے والوں کو اور بہت سی کارخانہ والوں کو کہ جو دلائیون فرنگ میں کثرت سے  
 پائی جاتی ہیں بہت مفید ہوتے ہیں اگر دو باتیں ایک دوسرے سے کچھ تعلق نہیں رکھتے ہوں اور احتمال  
 ایک کے واقع ہونیکا ۱۔ ہو اور دوسرے کی واقع ہونیکا ۱۔ ہو تو ہم کہتے ہیں کہ اس بات کا  
 کہ یہ ۱۔ دونوں باتیں اکٹھی واقع ہونگی بقیر کیا جائیگا ۱۔ سے کسو اسٹی کہ ہر واحد کو م طریقوں  
 سے کہ جنہیں اول بات واقع ہوتی ہے یا نہیں واقع ہوتی ہے طانی سے ان طریقوں سے کہ جنہیں دوسری  
 بات واقع ہوتی ہے یا نہیں واقع ہوتی ہے حاصل ہونگی ن م اجتماع اور چونکہ فقط ایک ایسا اجتماع ہے کہ کو  
 دونوں باتوں سے کہ واقع ہونیکا احتمال ہے تو ضرور ہے کہ احتمال مذکور سادی ہو  
 م ن کے مرتوبہ بالا سی ظاہر ہے کہ احتمال اس کا کہ دونوں باتیں مذکور اکٹھی نہیں واقع ہونگی

یہ ہوگا ۱۔  $\frac{1}{m}$  یا  $\frac{1}{n}$  اس واسطے کہ احتمال اسبات کا کہ یہ دونوں

باتیں واقع ہونگی اور احتمال اسکا کہ دیے دونوں باتیں واقع ہونگی مساوی ہیں یقین کہ بقیر کیا جائے  
 عدد ایک سے تو معلوم ہوا کہ جس وقت تفریق کر لی ہم عدد ایک میں سے احتمال دونوں کی واقع ہونیکو  
 تو حاصل تفریق ہوگا مساوی احتمال دونوں باتوں مذکورہ بالا کی نہ واقع ہونیکا ایک ہی وقت میں مرتوبہ بالا سے  
 یہ بھی واضح ہوگا کہ احتمال اسکا کہ دونوں باتیں مذکورہ بالا علیحدہ علیحدہ واقع ہونگی بقیر کیا جائے اس سے

$(1 - n)(1 - m)$  کسو اسٹی کہ احتمال اس بات کا کہ اول بات نہیں واقع ہوگی مساوی

ہے  $\frac{1}{m}$  کے اور احتمال اسبات کا کہ دوسری باتیں واقع ہوگی مساوی ہے  $\frac{1}{n}$  کے پس معلوم  
 ہوا کہ احتمال اسبات کا کہ دونوں باتیں مذکور علیحدہ علیحدہ واقع ہونگی مساوی ہوگا اس کے

$$\frac{1-m}{m} \times \frac{1-n}{n} = \frac{(1-m)(1-n)}{mn}$$

مرفوعہ بالا سی یہی ظاہر ہوتا ہے کہ احتمال اسکا کہ فقط ایک سرگرمین سے واقع ہوگی اور دوسری  
 نہیں واقع ہوگی بغیر کیا جائے اس کے  $\frac{1-n}{n} + \frac{1-m}{m}$  کس واسطی کہ احتمال اس بات کا کہ اول بات واقع ہوگی  
 اور دوسری نہیں واقع ہوگی بغیر کیا جائے  $\frac{1-n}{n} \times \frac{1-m}{m}$  اور احتمال اس بات کا کہ اول بات  
 نہیں واقع ہوگی اور دوسری واقع ہوگی بغیر کیا جائے  $\frac{1-m}{m} \times \frac{1-n}{n}$  سی پس حاصل جمع ان دو  
 احتمال کا جو ہم  $\frac{1-n}{n} + \frac{1-m}{m}$  جو مساوی ہے احتمال فقط ایک کی واقع ہونے کی مرفوعہ بالا سے یہی واضح  
 ہے کہ اگر کئی باتیں ایسی ہوں کہ وہ ایک سے تعلق نہ رکھتی ہوں اور احتمال ان کے علیحدہ علیحدہ  
 واقع ہونے کا بغیر کیا جائے علیحدہ علیحدہ  $\frac{1-n}{n} + \frac{1-m}{m}$  وغیرہ سی تو ہم کہتے ہیں کہ احتمال اس بات  
 کا کہ یہ سب باتیں ایک ہی واقع ہوگی بغیر کیا جائے اس کے  $\frac{1-n}{n} + \frac{1-m}{m}$  وغیرہ اس واسطی کہ یہ بات پہلی  
 ثابت ہو چکی ہے کہ احتمال اول دو باتوں کی ایک واقع ہونے کا مساوی ہے  $\frac{1-n}{n} + \frac{1-m}{m}$  کے اور اس واسطی احتمال  
 اسکا کہ یہ دو فونے باتیں اور تیسری بات ایک ہی واقع ہوں یہ ہوگا  $\frac{1-n}{n} + \frac{1-m}{m}$  اور یہی دلیل ہے اس واسطی  
 زیادہ باتوں کے جس وقت  $m = n =$  وغیرہ اور تفسیر کرتا ہوں کہ احتمال ان باتوں کو تو ظاہر ہے کہ احتمال ان باتوں  
 ایک ہی سے متواتر واقع ہونے کا بغیر کیا جائے اس کے  $\frac{1-n}{n} + \frac{1-m}{m}$  سے

مثال ۱ ایک بانسی کے چھ پھولوں پر حرورت ۱ اور ب اور ج اور د اور س اور ص  
 ختم کے ہونے میں چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا احتمال اس بات کا کہ اگر بانسی نہ گزیرے تو آ  
 اوپر واقع ہو اور دوسری بار پہلے تو ب اوپر واقع ہو ظاہر ہے کہ احتمال اس بات کا کہ آ اوپر واقع  
 ہوگا مساوی ہے  $\frac{1}{6}$  کے اور احتمال اس بات کا کہ دوسری بار پہلے سے ب اوپر واقع ہوگا مساوی  
 ہے  $\frac{1}{6}$  کے تو موافق اس کی جو پہلی ثابت ہوا ہے یہ بات عیان ہے کہ احتمال دو فونے ۱ اور ب کے اوپر  
 واقع ہونے کا مساوی ہوگا  $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$

مثال ۲ فرض کر دو کہ ایک تیلی چمچہ تو سفید گویان اور باغ سیاہ گویان ڈاکر اور نہیں خوب ملاوین  
 اور ایک شخص اس تیلی میں سے اول تو ایک گولی نکالتا ہے اور دوسری بار ایک اور گولی بغیر وہ کہنے کے پس  
 اب ہم سوال کرتے ہیں کہ کیا ہے احتمال اس بات کا کہ اول بار تو ایک سفید گولی نکلی گی اور دوسری بار ایک سیاہ گولی  
 نکلی گی ظاہر ہے کہ احتمال اس کا کہ اول دن ایک سفید گولی نکلی مساوی ہے  $\frac{1}{6}$  اور احتمال اس کا کہ دوسری بار ایک  
 سفید گولی نکلی گی مساوی ہے  $\frac{1}{6}$  کی (کیونکہ اس صورت میں کل تعداد گویوں کی فقط دو ہے ایک سفید اور ایک سیاہ کے

سب سے معلوم ہوا کہ احتمال مطلوبہ مساوی ہوگا  $\frac{3}{11} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{11}$ ۔  
**مثال ۳** اگر فرض کیے گئے تو ہمیں سب باتیں جو شکل گذشتہ میں مانی گئی تھیں تو جانتے ہیں ہم وہ بات  
 کرنا احتمال اس بات کہ اول بار تو ایک سفید گولی نکلی اور دوسری بار ایک کالی گولی اور تیسری بار ایک کالی  
 گولی نکلی مثال گذشتہ سے یہ بات بیان ہے کہ احتمال اس بات کا کہ اول بار ایک سفید گولی نکلی اور دوسری بار  
 ایک کالی گولی نکلی مساوی ہے  $\frac{3}{11}$  کے لیکن بعد نکلتی ان دونوں گولیوں کے ہر سفید اور ہم کالی گولیاں  
 باقی رہی اور اس پر اس احتمال اس بات کا کہ تیسری بار ایک کالی گولی نکلتی مساوی ہوگا  $\frac{3}{11}$  پس  
 ہوا کہ احتمال مطلوبہ مساوی ہوگا  $\frac{3}{11} \times \frac{3}{11} = \frac{9}{121}$ ۔

**مثال ۴** جانتے ہیں دریافت کرنا احتمال اس بات کا کہ اگر بانسی نہ کوڑھ لے کر دو دفع متواتر بیکنیز  
 تو متواتر دو دفع میں کم سے کم ایک بار حوت آکا اور بد واقع ہو ظاہر ہے کہ احتمال اس بات کا کہ اول بار  
 آ اور بد واقع ہونے ہوگا مساوی ہے  $\frac{1}{2}$  کے اور اس پر اس احتمال اس بات کا کہ دوسری بار بھی  
 آ اور بد واقع ہونے ہوگا مساوی ہے  $\frac{1}{2}$  کے پس احتمال اس بات کا کہ آ دو بار متواتر اور بد واقع ہونے ہوگا  
 مساوی ہوگا  $\frac{25}{100}$  اور اس پر اس احتمال اس بات کا کہ کسی نہ کسی دو بار میں سے آ اور بد واقع ہوگا  
 مساوی ہے  $1 - \frac{25}{100} = \frac{75}{100}$ ۔

**مثال ۵** دو شخص برابر کی شرط بدتی ہیں اس طرح ہر کہ ایک تو آ کی اور بد واقع ہونی سے جیتتا  
 اور دوسرا دوبر واقع ہونی سے جیتتا ہے پس اب ہم سوال کرتے ہیں کہ کتنی بار بانسی کو بیکنیا جاسکتی ہے  
 تاکہ دو شخصوں کو جو کچھ ہون مساوی ہو اور مساوی رقم ہارنا یا جیتنا موافق انصاف کی ہو فرض کر کے تعداد دفعوں  
 بیکنی بانسی کی مساوی ہے تاکہ اب موافق مثال گذشتہ کی یہ بات ظاہر ہے کہ احتمال اس بات کا کہ آ  
 دفع متواتر آ اور بد واقع ہونے ہوگا مساوی ہے  $(\frac{1}{4})$  اور چونکہ احتمال واقع ہونی اور نہ ہونی کا موافق شرط  
 اس سوال کے مساوی ہے یعنی ہر واحد میں سے مساوی نصف یقین کے ہے جو عدد ایک سے تعبیر کیا جاتا  
 ہے تو معلوم ہوا کہ  $(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$  اور اس پر اسطرح حاصل ہوگی یہ مساوات لاکھ لوگ  $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$  لوگ  
 یا لاکھ  $(لوگ ۵ - لوگ ۶) = لوگ ۱ - لوگ ۲$  اور  
 $لا = \frac{لوگ ۱ - لوگ ۲}{لوگ ۵ - لوگ ۶}$  اور چونکہ لوگ ۱ = ۰ تو معلوم ہوا کہ لا =  $\frac{لوگ ۲}{لوگ ۵ - لوگ ۶}$  اور  
 اس سے حاصل ہوتی ہے یہ قیمت لاکھ  $لا = ۸$  و ۳ قریب قریب

**مثال ۶** جانتے ہیں دریافت کرنا احتمال اس بات کا کہ دو شخص ق اور ق جنکی عمریں معلوم  
 ہیں ایک سال تک جیتی رہیں گے فرض کر کے کہ ہر فرد روزانہ خود غیرہ کی سے کہ جس کا پہلی ذکر ہو چکا ہے

یہ بات معلوم ہوتی ہے کہ احتمال ایک کے دو شخصوں نہ کر میں سے ایک برس تک جینی کا  $\frac{1}{m}$  ہو اور اسے  $\frac{1}{n}$  سے احتمال دوسرے شخص یعنی ق کے جینی کا ایک برس تک  $\frac{1}{n}$  ہی تو اب ظاہر ہے کہ احتمال اس بات کا کہ دو شخص ایک برس تک جتنے رہیں گے مادی ہوگا اس حاصل ضرب  $\frac{1}{m} \times \frac{1}{n}$  یا  $\frac{1}{mn}$  کے مثال کے چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا احتمال اس بات کا کہ کے برسوں میں کم سے کم ایک شخصوں نہ کر وہ مثال گذشتہ میں سے جتنا رہے گا مرقومہ بالا ہی ظاہر ہے کہ احتمال اس بات کا کہ شخص ق ایک سال میں رہ جائے مادی  $\frac{1-m}{m}$  ہی اور احتمال اس بات کا کہ ق اسی عرصہ میں رہ جائے مادی  $\frac{1-n}{n}$  کے پس احتمال اس بات کا کہ دو شخص ایک سال میں رہ جائیں گے مادی ہوگا  $\frac{(1-m)(1-n)}{mn}$  کے اور اسے اصلی احتمال اس بات کا کہ دونوں شخص نہ کر رہیں رہیں گے مادی ہوگا

$$1 - \frac{(1-m)(1-n)}{mn} = \frac{1-n+m}{mn}$$

یہ ہی ظاہر ہے کہ اگر احتمال اس بات کا کہ شخص ق سال تک جینے کا بقیر کیا جائے  $\frac{1}{m}$  ہی اور احتمال شخص ق کے جینی کا اسی عرصہ تک بقیر کیا جائے  $\frac{1}{n}$  سے تو موافق اس کی کہ پہلی لکھا گیا ہے احتمال اس بات کا کہ کم سے کم ایک شخص انہیں کا وقت نہ کرے تک جینے کا مادی ہوگا

$$1 - \frac{(1-m)(1-n)}{mn} = \frac{1-n+m}{mn}$$

اگر احتمال ایک بات کی واقع ہو نیچا ایک شخص ق سے بقیر کیا جائے  $\frac{1}{m}$  سے تو چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا احتمال اسی کام کی واقع ہو نیچا ایک دفع یا دو دفع یا تین دفع اور علیٰ ہذا العناس  $\frac{1}{n}$  بار امتحان کرتے ہیں چونکہ احتمال اس بات کی واقع ہو نیچا کسی خاص امتحان میں  $\frac{1}{m}$  ہی تو موافق اس کی جو پہلی بیان کیا گیا ہے یہ بات ظاہر ہے کہ احتمال اسی بات کی ہونے کا  $(1-n)$  بار امتحان میں بقیر کیا جائے

یہ اور بیان معلوم ہوتا ہے کہ احتمال واقع ہو نیچا کسی خاص امتحان میں  $\frac{1}{m}$  اور نہ ہونے کا  $\frac{1-n}{m}$  ہی بقیر کیا جائے  $\frac{1-n}{m}$  سے اور چونکہ تعداد امتحانوں کی  $n$  ہے تو ضرور ہے کہ احتمال اس بات کا کہ بات نہ کر واقع ہوگی کسی ایک میں ان امتحانوں میں سے اور نہ واقع ہوگی باقی امتحانوں میں بقیر کیا جائے  $\frac{1-n}{m}$  سے اور چونکہ اس صورت میں تعداد ان مختلف طریقوں کی جنہیں وہ دو دفع  $\frac{1-n}{m}$  سے اور چونکہ اس صورت میں تعداد ان مختلف طریقوں کی جنہیں وہ دو دفع  $\frac{1-n}{m}$  سے

کئے امتحانوں میں واقع ہوتا ہے اور باقی امتحانوں میں نہیں واقع ہوتا ہے۔  $\frac{(n-1)}{2}$  جو تو ضرور ہے  
 کہ احتمال اس کی واقع ہونیکا دو دفع  $n$  امتحانوں میں تیسرا کیا جائے گا  
 $\frac{(n-1)}{2}$  ط  $n-2$

یہ اس طرح احتمال اسکا کہ بات مذکور میں دفع  $n$  امتحانوں میں واقع ہوگی  
 $(n + ط) \times n$

$\frac{(n-1)(n-2)}{2 \times 2}$  ط  $n-3$   
 اور احتمال اس کی  $n$  دفع واقع ہونیکا  $n$  امتحانوں میں یہ ہرگز  
 $(n + ط) \times n$

$n(n-1)(n-2) \dots \dots \dots \frac{n-1+n}{2}$  ط  $n-ع$   
 $(n + ط) \times n$

بیشہ تر تو مبالغہ آلودی یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ احتمال بات مذکور کی نہ واقع ہونیکا  $n$  دفع  $n$  امتحانوں میں تیسرا  
 کیا جائیکا اس صورت جبریہ سے

$n(n-1)(n-2) \dots \dots \dots \frac{n-1+n}{2}$  ط  $n-ع$   
 $(n + ط) \times n$

مرقومہ بالاسی یہ بھی واضح ہوتا ہے کہ احتمال سببات کا کہ بات مذکور کم سی کم  $n$  دفع  $n$  امتحانوں میں  
 واقع ہو تیسرا کیا جائیکا اس صورت جبریہ سے

$n + n ط + n - 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \dots \dots \dots \frac{n-1+n}{2}$  ط  $n-ع$  اور  $n$  تک  
 $(n + ط) \times n$

دلیل اس کی یہ ہے کہ اگر ایک بات  $n$  دفع واقع ہوتی ہے تو ایک دفع یا دو دفع یا تین دفع یا  $n-ع$  دفع تو ضرور ہے کہ وہ  
 اس صورت میں کم سے کم  $n$  دفع واقع ہوگی اور اس پر اسطی یہ معلوم ہوتا ہے کہ احتمال واقع ہونیکا بات مذکور  
 کا کم سے کم  $n$  دفع  $n$  امتحانوں میں ہی حاصل جمع احتمالوں اس کی ہر دفع واقع ہونیکا اور نہ واقع ہونیکا  
 ایک دفع یا دو دفع  $n-ع$  دفع اور ظاہر ہے کہ حاصل جمع ان احتمالوں کا یہ ہے

$n + n ط + n - 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \dots \dots \dots \frac{n-1+n}{2}$  ط  $n-ع$  اور  $n$  تک  
 $(n + ط) \times n$

مثال ۱ اگر ایک پانسی کو کہ اس کی چھ ضلعوں پر حروف  $A$  اور  $B$  اور  $C$  اور  $D$  اور  
 $E$  اور  $F$  کے کبھی ہونے میں تین دفع متواتر بسکیں تو ہم سوال کرتے ہیں کہ کیا ہی احتمال اسکا  
 کہ حرف  $A$  کا کم سے کم دو دفع اوپر کی طرف واقع ہو اس صورت میں ظاہر ہے کہ



ن = ۳ اور ع = ۴ اور ط = ۱ اور ص = ۵ اور اس میں واسطی ظاہر ہے کہ احتمال مطلوبہ یہ ہوگا

$$\frac{2}{24} = \frac{14}{214} = \frac{5 \times 3 + 1}{4 \times 4 \times 4}$$

مثال ۲۔ بتو کیا ہی احتمال اسکا کہ پانچ شخصوں میں سے جسکی عمر کچھ زرخ کی گئی ہے کسی سے کم تین آدمی ایک وقت مفروض میں درجائیلگی زرخ کر دے کہ احتمال اسبات کا کہ کوئی سا ایک ان شخصوں میں سے وقت مفروض میں درجائیلگی اس صورت میں معلوم ہے کہ احتمال ایک بات کے ایک دفع واقع ہونیکا اور دریافت کرنا ہے کہ احتمال اسکا کہ بات مذکورہ سے کم تین دفع پانچ امتحانوں میں واقع ہوا اس صورت میں ظاہر ہے کہ ط = ۱ اور ص = ۲ = ۱ اور ن = ۵ اور ع = ۳ پس معلوم ہوا کہ احتمال مطلوبہ یہ ہے

$$\frac{1 + 5(1-2) + 10(1-2)^2}{2}$$

۵

واضح ہو کہ مطالب اس فصل کے بہت مشکل اور دلچسپ اور مفید ہیں لیکن اس کتاب میں ساری سیلے اس ذرع کی نہیں لکھے جاسکتی ہیں لیکن امید ہے جو مطالب علم اوسکو جو مرقوم اوپر ہوا ہے تو جہ سے بڑھی گا اوسے بہت کچھ درباب اس مطلب کے معلوم ہو جائیگا یہ بھی واضح ہو کہ مسئلوں مذکورہ بالا کی حل کرنے میں اکثر ہم سے غلطی ہو جاتی ہے کیونکہ بعض اوقات ایسا ہوتا ہے کہ جن باتوں کو نہایت ظاہر اور صحیح تصور کرتے ہیں حقیقت میں بالکل غلط ہوتی ہیں واسطی توضیح کرنے اس بات کی ایک مثال اس جا کفایت کریگی اور وہ مثال یہ ہے ظاہر ہے کہ احتمال اسبات کا کہ ایک دفع بانسی کے پینکلے سے حرف آکا اور پیر کی طرف واقع ہو تبیر کیا جاتا ہے۔

یہ اور چونکہ دوسری دفع پینکلے میں ہی آتا ہے احتمال واسطی واقع ہونی آکے اور پیر کی طرف ہوتو اب معلوم ہوتا ہے کہ اگر دو دفع بانسی نہ کر کو پینکلے تو احتمال دوگنا ہوگا یعنی تبیر کیا جائیگا۔ یہ سے لیکن اوس سے جو ہم نے بیان کیا ہے یہ آجائے کہ پینکلے کو غلط نہ کر کو نہ کر کہ ہے ہوتا اس سے تبیر ہو چکا کہ بہت دفع بانسی کو پینکلے یا غیر حرف آکا پر واقع ہوتا باعث اس غلطی کا جو اس صورت میں ذرا بوسیدہ ہے یہ ہے کہ فرض کریں ہی ہم کہ باضر درپانہ دوسری دفع ہی پینکلے جائیگا اور یہ نہیں ہوتا ہے جبکہ واقع ہو حرف آکا اور پیر کی طرف اول سے پینکلے سے

فصل پیر ہو میں بیچ بیان ایسی کسور کی حسب کی نسبت نما اور شمار کنندہ صفر ہو جائے جس وقت فرض کجائی واسطی مقدار غیر مقررہ کہ او پیر باجائی کوئی خاص قیمت

مطالب اس فصل بخت عجیب اور دلچسپ ہیں اور جو شخص انکو تیار و اتمی سمجھ لے اسی بہت ثروت سمجھنی اوس مشکل فرع  
 علم ریاضی کے حکموں حساب جزیات و کلیات کہتے ہیں حاصل ہوتی ہے واضح ہو کہ مختلف ہندسوں کی مختلف  
 طریقہ اس فرع ریاضی میں نکالی ہیں چنانچہ ایک ہندسہ انگریزی کی کہ او سکال نام لیندین تھا اس علم کو ایک  
 ایسی قاعدہ پر بنایا گیا تھا کہ جو ان کسور کی سنگھ پر موقوف ہے پس اسطی سمجھنے اس ہندسہ کے رسا کہ کہ علم حساب جزیات  
 میں ہے (گو اس کتاب کا رد و لغو نہیں) ضروری ہے کہ پہلی واقعہ ہو جائیں ان کسوری سواری اس قاعدہ کی ایک اور بڑا  
 فائدہ یہ ہے کہ اولی ذریعہ سے پہلے میں ہم بہت سی غلطیوں سے بچاؤ کرتے ہیں جو سدا ان کسور کی سے آگاہ نہیں وہ ہم  
 جانتے ہیں کہ اگر صفر کو صفر تقسیم کریں تو خارج قسمت صفر ہوگا یا کوئی خاص مقدار ہوگی واسطے توضیح اس

بات کی لیتے ہیں ہم ایک بہت سہل شکل فرض کر دو کہ صفر فرض ہے  $\frac{0}{0} = 2$   
 اس صورت میں ظاہر ہے کہ آگے کو کبھی فرض کریں کسر  $\frac{0}{0}$  ہمیشہ مساوی آگے کی ہوگی جو کہ لفظ بھیجی میں ط  
 ہی داخل ہے تو لازم آتا ہے اس کے یہ کہ بجز  $0 = 0$  کی ہوا سوت ہی قیمت کسر فرض کی آگے نہیں اس صورت  
 $0 = 0$  اور اسے بطور  $0 = 0$  لکھیں کہ صفر فرض اس شکل کی ہو جائیگی نہ اور یہاں تک یہ بات ثابت

ہوتی ہے کہ  $2 = 0$  اگر فرض فرض  $\frac{0}{0} = 2$  ہوتی تو اس صورت میں حاصل ہوتی ہیں یہ مساوات  
 $2 = 0$  اور اگر کسر فرض ہے  $\frac{0}{0} = 2$  ہوتی تو حاصل ہوتی ہیں مساوات  $2 = 0$  ان دونوں

کرتا ہے کسی عدد کو تو معلوم ہوا کہ کسر نہ مساوی کسی عدد کی ہو سکتی ہے بعض اشخاص جو علم ریاضی سے خوب  
 واقف نہیں ہوتے ہیں یہ بات سن کر حیران ہوتے ہیں اور یہ اعتراض کر دیتے ہیں کہ چونکہ  $2 = 0$  ہے اور  $0$  کی بھی  
 تو لازم آتا ہے اس کے یہ  $2 = 0$  اور یہ بات صریح محال ہے لیکن ہمیں اسباب اور نہیں یہ جواب دینا چاہئے کہ جس وقت  
 یا جس صورت میں  $2 = 0$  کی ہے اوس صورت میں وہ مساوی آگے کے نہیں ہوتی ہے یعنی معنی  $2 = 0$  کے

صورتوں مختلف ہوتی ہیں لہذا اس کے ایک مقدار بغیر کجائی ہے اور دوسری وقت کوئی اور مقدار  
 چند سو برس گذرتے کہ ان کسور کی درباب فاضلین بہت تکرار ہوئی تھی برکلی نامی ایک بڑا فاضل اپنی زمانہ کا  
 الحکام تائین تھا لیکن اس سے ایسی حلومات علم ریاضی میں نہ تھی کہ اس کی قول کو اس علم میں بہت ہی لحاظ کریں یہ

بی شک اسی بڑے دستگاہ و منطق اور علم الہیات میں تھی اور اور محاط نہیں وہ بہت زمین در عاقل تھا لیکن سٹون ریاضی  
 کو خوب نہیں سمجھتا تھا وہ کہا کرتا تھا کہ علامت  $2 = 0$  کی معنی ہے اور نہیں ہو سکتی کہ یہ کسی مقدار محدود کی مساوی ہو  
 اور یہی بافت تھا کہ وہ علم حساب جزیات و کلیات کو کہ اسحاق نیوٹن نے ایجاد کیا تھا غلط بتاتا تھا قاعدہ  $2 = 0$  کی قسم  
 ہے کہ کسی خاص صورت فرض میں یہ ہے کہ اوس خاص مقدار پر کہ جس کی مساوی فرض کرنے سے مقدار غیر متفرقہ  
 کو کسر فرض نہ ہو جاتی ہے ایک ایسی مقدار غیر متفرقہ زیادہ کرتے ہیں کہ حاصل جمع مساوی ہو جائے مقدار غیر متفرقہ

مفروض کے اور بعد ازان کہتے ہیں اس حاصل جمع کو بجای مقدار غیر مقررہ مفروض کی کسر مفروض میں اور  
 بعد جاری کرنے عمل ضروری فرض کرتے ہیں مقدار غیر مقررہ زیادہ کی گئی کو ساوی صفر کی اور اس عمل سے قیمت  
 اصلی کسر بن کے معلوم ہو جاتی ہے مثلاً فرض کرو کہ یہ کسر  $\frac{\text{لا} - \text{ط}}{\text{ط} - \text{لا}}$  کہ ہو جاتی ہے جس وقت فرض کرتے ہیں  
 ایک خاص قیمت مثل ط کی بجای مقدار غیر مقررہ لآ کے اب موافق قاعدہ سے گئے گرد کہ  $\text{ط} + \text{د} = \text{لا}$   
 اور یہ  $\text{لا} = \text{ط} + ۲ + \text{د}$  اور  $\frac{\text{لا} - \text{ط}}{\text{ط} - \text{لا}} = \frac{۲ + \text{د} + \text{د}}{۲ + \text{د} + \text{د}}$  اور جس وقت  
 $\text{د} = ۰$  اس وقت  $\frac{\text{لا} - \text{ط}}{\text{ط} - \text{لا}} = ۱$  اور مثال اس کی یہ ہے فرض کرو کہ جاستہ میں ہم قیمت  $\frac{\text{ط} - \text{لا}}{\text{ط} - \text{لا}}$  کی  
 کہ ساوی بن کی ہو جاتی ہے جس وقت ہو  $\text{د} = ۰$  کی یہ مثال خوبی حل ہو سکتے ہیں اگر جا کرین ہم عمل تقسیم کا اور  
 بعد ازان فرض کریں کہ  $\text{لا} = ۱$  صورت عمل کے یہ ہو سیکے جو کہ

$$\frac{\text{ط} - \text{لا}}{\text{ط} - \text{لا}} = \frac{\text{ط} (\text{لا} - ۱)}{۱ - \text{لا}}$$

$$\frac{\text{لا} - ۱}{\text{لا} - ۱} = \frac{\text{لا} - ۱}{\text{لا} - ۱} + \frac{\text{لا} - ۲}{\text{لا} - ۱} + \frac{\text{لا} - ۳}{\text{لا} - ۱} + \dots + \text{دیگرہ}$$

$$\frac{\text{لا} - ۱}{\text{لا} - ۱} = ۱$$

$$\frac{\text{لا} - ۱}{\text{لا} - ۱} = ۱$$

$$\frac{\text{لا} - ۲}{\text{لا} - ۱} = ۱ - \frac{۱}{\text{لا}}$$

$$\frac{\text{لا} - ۳}{\text{لا} - ۱} = ۱ - \frac{۲}{\text{لا}}$$

$$\frac{\text{لا} - ۴}{\text{لا} - ۱} = ۱ - \frac{۳}{\text{لا}}$$

پس معلوم ہوا کہ  $\frac{\text{ط} (\text{لا} - ۱)}{\text{ط} - \text{لا}} = \frac{\text{ط} (\text{لا} - ۱)}{\text{ط} - \text{لا}} + \frac{\text{ط} (\text{لا} - ۲)}{\text{ط} - \text{لا}} + \frac{\text{ط} (\text{لا} - ۳)}{\text{ط} - \text{لا}} + \dots + \text{دیگرہ}$

اور  $\text{لا} = ۱$  اس وقت  $\frac{\text{ط} - ۱}{\text{ط} - ۱} = ۱$  اور یہی قیمت مطلوبہ یہی قیمت حاصل ہوتی اگر عمل کرتے ہیں

موافق قاعدہ نہ کو الیہدہ کے یعنی فرض کرتے ہیں اول

$$\text{ط} + \text{د} = \text{لا} \quad \text{یعنی} \quad \frac{\text{ط} - \text{لا}}{\text{ط} - \text{لا}} = ۰$$

واضح ہو کہ جس کی شمار کنندہ اور نوب نام کی خاص قیمت مثلاً تاکہ فرض کرنی سے علیحدہ علیحدہ مساوی صفی  
 ہو جاوے تو باغور اوکس کی شمار کنندہ اور نوب نام کی جو فرضی مثلاً (لا-ط) یا (لا-ط)؟  
 مثال ہوتا ہے جس سے وہ کسر بنے ہو جائے پس اب ظاہر ہے کہ اگر یہ فرضی زائل ہو جاوے تو اصلی قیمت کسر  
 مفروض کی دریافت ہو سکتی ہے مثلاً اول مثال اس طرح حل ہو سکتی ہے

$$p = u + v = \frac{(u-p)(u+p)}{u-p} = \frac{u^2 - p^2}{u-p}$$

اگر فرض کریں ہم  $u = p$

۲ کیا قیمت ہو کس کی  $\frac{u^2 - 1}{(u-1)}$  جو قیمت  $u = 1$

ظاہر ہے کہ  $\frac{u^2 - 1}{(u-1)} = \frac{u^2 - u + u - 1}{u-1} = \frac{u(u-1) + (u-1)}{(u-1)} = \frac{u^2 - u + u - 1}{u-1}$

$u + u + 1 = 1$  جو قیمت  $u = 1$

۳ کیا قیمت اس کس کی  $\frac{u^2 - 1}{u-1}$  جب کہ  $u = p$  ظاہر ہے کہ

$$\frac{u^2 - 1}{u-1} = \frac{u^2 - u + u - 1}{u-1} = \frac{u(u-1) + (u-1)}{u-1} = \frac{u^2 - u + u - 1}{u-1}$$

۴ کیا قیمت اس کس کی  $\frac{u^2 - 1}{u-1}$  جو قیمت کہ دے۔ ظاہر ہے کہ

$$\frac{u^2 - 1}{u-1} = \frac{u^2 - u + u - 1}{u-1} = \frac{u(u-1) + (u-1)}{u-1} = \frac{u^2 - u + u - 1}{u-1}$$

$$\frac{u^2 - 1}{u-1} = \frac{u^2 - u + u - 1}{u-1} = \frac{u(u-1) + (u-1)}{u-1} = \frac{u^2 - u + u - 1}{u-1}$$

$$\frac{u^2 - 1}{u-1} = \frac{u^2 - u + u - 1}{u-1} = \frac{u(u-1) + (u-1)}{u-1} = \frac{u^2 - u + u - 1}{u-1}$$

$$\frac{u^2 - 1}{u-1} = \frac{u^2 - u + u - 1}{u-1} = \frac{u(u-1) + (u-1)}{u-1} = \frac{u^2 - u + u - 1}{u-1}$$



۳ = ایسے صنفی قوت صورت کین تو حاصل صود آہوتا ہی دلیل اسکی یہ ہے کہ خاصا بطریق صاحب کے  
 ثبوت سے پہلی نایت ہوا ہے کہ  $1 = 1$  اور آ عام مقدار ہی جو چاہیں سو فرض کریں پس اگر  $1 = 1 - 1 = 0$   
 تو  $(1 - 1) = 0$  اب فرض کرو کہ  $1 = 1 - 1 = 0$  =

۴ جانا چاہیے کہ صفر یعنی - کوئی خاص مقدار نہیں ہے جسے منطرح ای ۲ یا ۳ یا ۵ یا ۶ وغیرہ  
 خاص مقدار میں صفر کوئی خاص مقدار نہیں اور اسی سبب قیمت اس کسر  $\frac{1}{2}$  کی کوئی خاص مقدار نہیں ہے  
 صفر کو خاص مقدار خیال کی جبری غلطی لازم آتی ہے مثلاً  $2 = 1$  اور  $1 = 2$  = جو جملہ  $1$  اور  $2$  غلطی اسو سبب کہ  
 $2 = 1$  = لاپرواہی کیا ہے اور یہ قیاس غلط ہے کیونکہ  $1$  ایک خاص مقدار ہے اور اسکی قیمت ہرگز نہیں  
 بدل سکتی اور صفر کی قیمت بدل سکتی ہے مثلاً  $2 = 1$  اور  $1 = 2$  = اور علی ہذا القیاس  $3 = 2$  =  
 سے اور غلطیان لازم آتی ہیں مثلاً  $1 = 1 - 1 = 0$  ::  $1 = 1 - 1 = 0$  = (۱)  
 اور چونکہ  $1 = 1 - 1 = 0$  ::  $1 = 1 - 1 = 0$  = جو سید (۱) کے  
 $(1 + 1) = 1 - 1 = 0$  ::  $1 = 1 - 1 = 0$  = اور یہ محال ہے

اور اسے  $1 = 1 - 1 = 0$  ::  $1 = 1 - 1 = 0$  = اور یہ محال ہے

### فصل پندرہویں کسور متسل کی بیان میں

کسر متسل اس کسر کو کہتے ہیں کہ جسکی نسب نامہ سوا عدد صحیح کی ایک کسر ہی ہوتی ہے اور اس کسر کے  
 نسب نامہ میں ہی سوا عدد صحیح کی ایک کسر ہوتی ہے اور اسے حسی اس تیسری کسر نسب نامہ میں ہی سوا عدد صحیح  
 کے ایک اور کسر ہوتی ہے اور علی ہذا القیاس مثلاً کسر  $\frac{1}{1+1}$

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$$

۵ وغیرہ  
 اگر تبدیل کیا جائے کسی کسر محدود کو ایسی تو طریقہ واسطی حاصل ہوا اس طلبک یہ ہے کہ تقسیم کر دنا کہ سزا کسر محدود  
 کو اسکی نسب نامہ اور اگر کوئی عدد صحیح کلانی اسی ایک جا بخت کر داور بعد ازان باقیات کو مقسوم علیہ قرار دیکر  
 ضمیمہ کر داور سپر مقسوم علیہ سابق کو اور بعد ازان جو کچھ باقی رہی اسے مقسوم علیہ مقرر کر داور اسکی پہلے  
 مقسوم علیہ کو مقسوم اور عمل قسمت کا جاری کر داور یہی عمل کیے جا دجہان تک کہ تمام ہوا اور اگر تمام ہوا

تو جہاں تک جاہو وہاں تک اس عمل کو جاری رکھو بس اب ہم کہتی ہیں کہ متواتر کی خارج قسمت جو اس متواتر کی تقسیم حاصل ہوتی ہیں ہو گئی اعداد صحیح متواتر کی نسبت نایون کسر مطلوبہ کی واسطی ثبوت اس دعویٰ کے لازم ہے کہ اگر ہم عمل مذکور اعداد کو کہ اسکی صورت مثال اثنہ میں مندرج ہی جاسکتے ہیں تبدیل کرنا کسر پانچ کو ایک کسر مسلسل سے

اس عمل سے ظاہر ہے کہ حاصل ہو گئی یہ مساواتیں

(۱) ا ط

ب ط  
—————  
ص ب ا ص

۱ = ب ط + ج

ص ج

ب = ج ص + د

د ا ج ا ع

ج = د ع + ر

د ع

دیگرہ = دیگرہ

ر ا د ا ق

ق ر

اس دیگرہ اور مساوی اسطی ہوتی ہے یہ مساوات

ب ا = ط + ج

ط + ج ص + د = ط + ج ص + د = ط + ج ص + د

ط + ج = ط + ج ص + د

ط + ج = ط + ج ص + د

اور یہی کسر مسلسل مطلوبہ

مرقومہ بالاسی یہ بات ظاہر ہے کہ جو سید کسر مسلسل کے ہم کسی ایسی کسر کو کہ اسکا شمار کنندہ اور نسبت بڑی بڑی عدد ہوں ایک ایسی کسر تبدیل کر سکتے ہیں جو کسر مفروضی ہے توڑا ہی اس فرق رکھتی ہو اور نسبت بڑی اور شمار کنندہ چھوٹی چھوٹی عدد ہوں اور یہی ظاہر ہے کہ جتنا زیادہ دو رنگ عمل تقسیم کا جاری کر دوں اور نسبتی زیادہ درست قیمت کسر مفروضی کی حاصل ہوگی اور سوای اسکی یہ بھی بیان ہے کہ جو قیمتیں متواتر حاصل ہو گئی

دیے ایلکار زیادہ اور دوسری بار کم قیمت حقیقی سے ہوگی اس طرح سی ۱/۲ زیادہ ہے نسبت طاس کے  
 لیکن کم ہے نسبت طاس کے اس قسم کی کسور اگر حسابوں ریاضیات میں بہت مفید ہوتی ہیں اور یہ  
 بات انہی ہی ذریعہ سے حاصل ہوتی ہے کہ بڑی کسور کو ایک چھوٹی کسور سے بدل دیتے ہیں اور قیمت میں کچھ بہت  
 فرق نہیں آتا اور مثلاً اگر چاہیں دریافت کرنی ایک چھوٹی کسور جو تیسری نسبت قطر ایک دائرہ کی طرف  
 اس کی محیط کی ہم چاہتے ہیں کہ اگر ہودی قطر کسی دائرہ کا ۱۰۰۰۰۰ تو ہو دیکھ محیط اس دائرہ کا

۳۱۴۱۵۹ نسبت درمیان اس قطر اور محیط کی یہ ہے  $\frac{314159}{100000}$  ظاہر ہے کہ یہ ایک بڑی کسور ہے اور  
 ہم ایک چھوٹی کسور دریافت کیا جاسکتے ہیں ترکیب کی دریافت کرنی کے معائنہ قاعدہ مرقوم الصدر کے

$$\begin{array}{r} 314159 \quad (100000 \\ \underline{300000} \\ 14159 \end{array}$$

$$\frac{14159}{100000}$$

$$99113$$

$$10 \overline{) 14159} \begin{array}{l} 1415 \\ \underline{1415} \\ 9 \end{array}$$

$$884$$

$$5284$$

$$2220$$

$$11884 \quad (100000$$

$$852$$

$$2 \overline{) 852} \begin{array}{l} 426 \\ \underline{852} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{426}{149000} \text{ وغیرہ}$$

اسجای ظاہر ہے کہ ط = ۳ اور ص = ۷ اور ع = ۱۵ اور علی ہذا القیاس پس حاصل ہوگی یہ

$$\frac{1}{100000} + 3 = \frac{314159}{100000}$$

۱۵ وغیرہ

اس صورت میں ظاہر ہے کہ اول تقریب قیمت کسور مفروض کی ۳ ہے کہ یہ بہت کم ہے اور دوسری قیمت تقریبی

۳ +  $\frac{1}{100000}$  یعنی  $\frac{300001}{100000}$  کہ وہاں زیادہ نسبت قیمت حقیقی کے ہے اور تیسری تقریبی قیمت

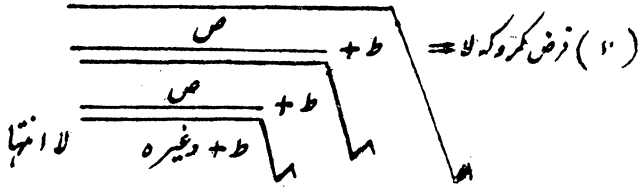


$$\frac{۳۳۳}{۱۰۶} = \frac{۱۵}{۱۰۶} + ۳ = \frac{۱}{\frac{۱}{۱۵} + ۴}$$

اور یہ ایک تقریبی قیمت کے مفروض کی اداسکی بہت ہی قریب ہی اور تھوڑا ہی مساوی اور اس کم ہر حساب سے  
 ہم لکھتے چند مثالیں جنہیں لکھے گئی ہیں عجیب سی جہتوں پر مشتمل ہیں

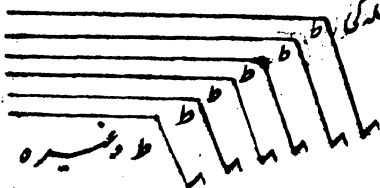
(۱) فرض کرو کہ  $ق = \frac{۱}{\frac{۱}{۱۵} + ۴}$  لہذا تو ظاہر ہے کہ  $ق = \frac{۱}{\frac{۱}{۱۵} + ۴}$  اور  $ق + ع = \frac{۱}{\frac{۱}{۱۵} + ۴}$  وغیرہ لہذا

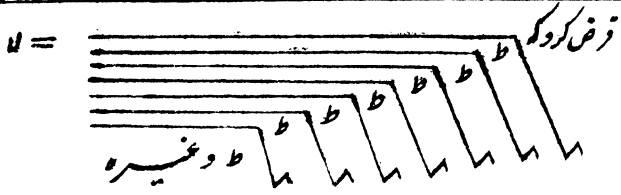
اور اس میں واسطی حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  $ق + ع = \frac{۱}{\frac{۱}{۱۵} + ۴}$  لہذا اور اس میں واسطی یہ مساوات  
 حاصل ہوتی ہے  $ق + ع = \frac{۱}{\frac{۱}{۱۵} + ۴}$  اور  $ق + ع = \frac{۱}{\frac{۱}{۱۵} + ۴}$  اور  $ق + ع = \frac{۱}{\frac{۱}{۱۵} + ۴}$  اور  
 جسوقت حل کریں گی ہم اس مساوات درجہ دوم کی کہ تو حاصل ہوگی یہ قیمت لاکھی



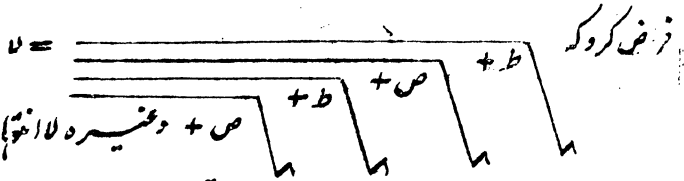
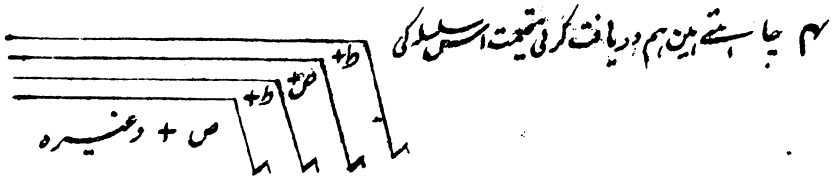
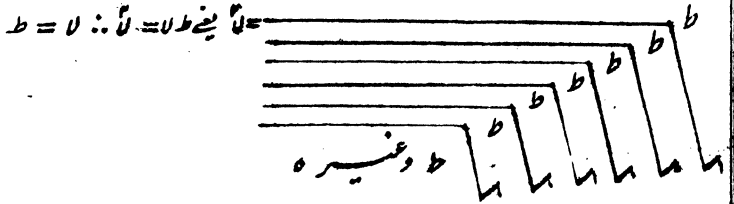
اور جسوقت مجدد کریں ہم دو نظرتوں اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہ مساوات  
 $ق + ط = \frac{ص}{\frac{ص}{ط} + ۴}$  اور اس میں واسطی

حاصل ہوتی ہے یہ مساوات تیسری درجہ کی  $ق + ط = \frac{ص}{\frac{ص}{ط} + ۴}$  اور اسکی حل کرنی سی قیمت لاکھی  
 معلوم ہو سکتی ہے  
 ۳ چاہتے ہیں دریافت کرنی قیمت اس عجیب مسئلہ کی

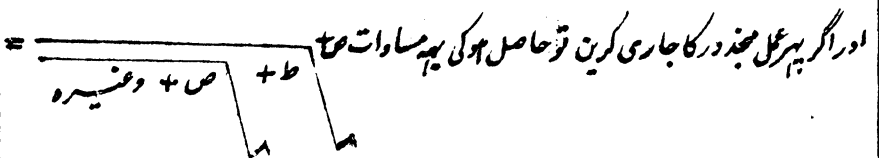
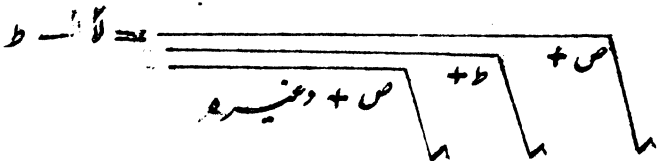
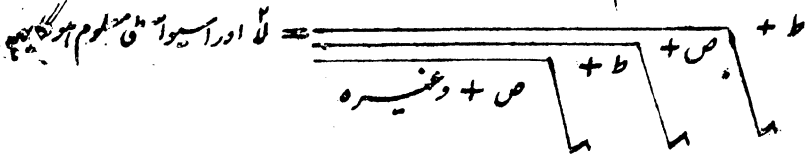




اور حیوت مجذوب کرین ہم دونوں طرفوں اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہ مساوات



اور حیوت مجذوب کرین ہم دونوں طرفوں اس مساوات کو حاصل ہوگی یہ مساوات





یہ دے اور تقسیم پوری ہو گئی اب ہم پہلے پیربات ثابت کریتے ہیں کہ آ اور ب دونوں کا مقسوم علیہ مشترک  
 ہو یعنی آ اور ب دونوں پر پوری پوری تقسیم ہو سکتی ہیں عمل تقسیم سے جسکی ساختن (ط) ہو  
 ظاہر ہو کہ

$$\left. \begin{aligned} 1 &= ب + س \dots\dots\dots (1) \\ 2 &= س + ق \dots\dots\dots (2) \\ 3 &= س + ح \dots\dots\dots (3) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & مساوات (۲) اور (۳) سے ظاہر ہو کہ \\ & ب = س + ق = ح + د = (ق + ح) + د \\ & \therefore ق = ح + ا پس ثابت ہوا کہ ب مقسوم علیہ$$

آ پر پوری تقسیم ہوتا ہے اور تینوں مساواتوں سے ظاہر ہو کہ

$$\begin{aligned} 1 &= ب + س = ن (س + ق + د) + س = ن (ق + د) + ح + د = (ق + ح + ن) + د \\ \therefore 1 &= ن + ق + ح + د = اس سے ثابت ہوا کہ آ بھی آ پر پوری تقسیم ہوتا ہے پس اول بات تو ثابت  
 ہو گئی یعنی اخیر مقسوم علیہ آ اور ب کا ہی اب رہی دوسری بات پس ہم دعویٰ کرتے  
 ہیں کہ آ ہی مقسوم علیہ اعظم آ اور ب کا ہی اور اگر یہ نہ ہو تو فرض کر دو کہ آ ہی مقسوم علیہ اعظم اور ب آ کو آ پر  
 تقسیم کریتے ہیں تو خارج قسمت آ ہوتا ہے اور ب آ تقسیم کرتی ہیں تو خارج قسمت ن ہوتا ہے اور اسے  
 (م) لاد اور ب = ن لاد اور ب سے ملے عمل تقسیم (ط) کی س = ۱ - ب = م - ل = ن - ل = (م - ن) ل$$

اور د = ب - س = ق = ن - ل = ن (م - ن) ل = (م - ق + ق ن) ل  
 $\therefore \frac{د}{ل} = ن - م + ق + ق ن$  اس سے معلوم ہوا کہ د مقسوم علیہ مشترک ہے آ پر پوری تقسیم ہوتا ہے پس ضرور  
 ہو کہ لاسی آ برابر ہو اور سطحوں سے آ کی لاسی ثابت ہوئی اس لیے ہر مقسوم علیہ مشترک سے ثابت ہو سکتی ہے  
 تو لازم آیا کہ آ ہی مقسوم علیہ اعظم ہے۔ آ کا مقسوم علیہ اعظم ہونا ایک اور طرح سے ثابت ہوتا ہے لیکن اس طرح  
 کے اثبات میں دو باتیں جاننی چاہئیں ایک تو یہ کہ جب دو مقدار ایک اور مقدار پر پوری تقسیم ہو جاویں  
 تو ان دونوں مقداروں کا مجموعہ اور حاصل بھی دوسری مقدار پر پوری تقسیم ہو جاویگا مثلاً آ اور ب آ پر  
 پوری تقسیم ہوتی ہیں اور خارج الخ ط اور ن ہوتا ہے تو ظاہر ہے  $\frac{1}{ط} = ط$  اور  $\frac{1}{ح} = ح$  = ن

$$\therefore \frac{1}{ح} \pm \frac{1}{ط} = ط \pm ن \text{ یا } \frac{1}{ح} = ط \pm ن \text{ اور دوسری یہ کہ اگر ایک مقدار دوسری}$$

پر پوری تقسیم ہو جاوے تو پہلی مقدار کا دو گنا لگنا اور علیٰ ذہن انقیاس لگانا بھی دوسری مقدار پر پوری تقسیم  
 ہو سکتا ہے یعنی پہلی مقدار کا ضعف صحیح ہے دوسری مقدار پر پوری تقسیم ہو سکتا ہے مثلاً اگر

$$\frac{1}{ح} = ط \text{ تو } \frac{1}{ح} = س ط \text{ اب عمل تقسیم (ط) کو دیکھیں تو } 1 - ب = ن = س$$

اور ب - س = ق = د اور یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ جس مقدار پر آ اور ب پوری تقسیم ہو سکتے ہیں  
 اسے مقدار پر ب ن اور ۱ - ب ن یعنی س بھی پوری تقسیم ہو سکتا ہے اور اسے آ اسی مقدار پر

ب - س ق یعنی دو ہی پورا تقسیم ہو سکتا ہے یعنی جس مقدار پر ۱ اور ۲ چوکہ تقسیم ہو سکتے ہیں اسی مقدار پر دو ہی پورا تقسیم ہو سکتا ہے پس اس بیان لازم آیا کہ حتمی مقسوم علیہ مشترک ۱ اور ۲ کی ہیں اور جس سے ڈبڑا ہی کیونکہ اور ۲ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے اب ڈکڑا عظمت تو ثابت ہوئی لیکن یہ بات ہی ثابت ہو جاوے کہ آ اور ۲ دونو ڈپر پوری پوری تقسیم ہو جاتی ہیں تو ڈکڑا مقسوم علیہ اعظم ہونا بخوبی ثابت ہے اب مساوات (۳) سے ظاہر ہے کہ س ڈپر پورا تقسیم ہوتا ہے اور اس میں اسطی س ق اور س ق + د یعنی ب (بوسیدل مساوات (۲) کے) یہی ڈپر پورا تقسیم ہو سکتا ہے اور اسی چہت سی ب ن + س یعنی آ (بوسیدل (۱) کے) یہی ڈپر پورا تقسیم ہو سکتا ہے یعنی آ اور ۲ دونو ڈپر پوریے پوریے تقسیم ہو سکتی ہیں پس معلوم ہو کہ آ اور ۲ دونو ڈپر پورا تقسیم ہی ہو سکتی ہیں اور جتنے مقسوم علیہ مشترک آ اور ۲ کے فرض کیے جائیں جسے ڈبڑا ہی ہی تو صاف ظاہر ہے کہ ڈ مقسوم علیہ اعظم آ اور ۲ کا ہی واضح ہو کہ مقسوم علیہ اعظم کی مثالوں میں بعض اوقات تقسیم کا عمل جاری نہیں ہو پس اسی صورتوں میں یا تو کسی جزئی کو جو دونوں میں مشترک نہیں ہوتا ہے دور کر دیتے ہیں یا کسی مقدار کو ضرب کرتے ہیں اور اس کے کچھ جزائی نہیں ہوتی اس واسطی کہ مقسوم علیہ ڈکڑا ثابت کرنی سے یہ فرض ہوتی ہے کہ شمارہ اور ۲ کا مشترک جزئی وہی ثابت ہو جاوے پس ظاہر ہے کہ اگر شمارہ کتنہ ہاںب ناچھی مقدار میں ضرب کریں تو جزئی نہ ہو کہ مشترک ہی رہے گا یا کسی اور مقدار پر جو دونوں میں مشترک نہ ہو تو ہی جزئی مشترک کے جزئی ہونی میں خلل نہ آوے گا پس بعد اس عمل کے یہی جزئی مشترک یعنی مقسوم علیہ اعظم دریافت ہو سکتا ہے اور پورے بات مثالوں سے بخوبی معلوم ہو جاوے گی

مثال ۱ کیا مقسوم علیہ اعظم ۵۲ + ۵۹ + ۵۳ - ۵۹ - ۱۸ اور ۱۱ + ۲۰ + ۲۰ کا

$$\begin{aligned} & ۱۱ + ۲۰ + ۲۰ \quad (۲۰ + ۵۹ + ۵۳ - ۵۹ - ۱۸) \\ & \quad \quad \quad ۵۲ + ۵۹ + ۵۳ \\ & \quad \quad \quad \hline & \quad \quad \quad ۵۲۶۰ + ۵۹۹ + ۵۹ \\ & \quad \quad \quad \hline & \quad \quad \quad ۱۸ - ۵۲۶۹ - ۵۲۶ - \\ & \quad \quad \quad \hline & \quad \quad \quad ۱۳۸۰ - ۵۰۶ - ۵۲۶ - \\ & \quad \quad \quad \hline \end{aligned}$$

چونکہ اس صورت میں ۲۶۶ مشترک ہے اس واسطی اسکو عدد کیا اور ۱۱ + ۲۰ مقسوم علیہ متور کر کے یہی مقسوم علیہ مشترک بنا





$$1 = \frac{1}{n+1} = \frac{1}{500} = \frac{1}{50 \times 10} = \frac{1}{50} \times \frac{1}{10}$$

۲ ایک ہوگا کہ ہنسی کچھ روپیہ دیا اس شرط پر کہ ہین مرت مقررہ تک ہر سال باہر مہینہ کچھ روپیہ بطور تنخواہ کے دیا کرے اور فرض کر دو کہ قے کتنے سال تک ہم یہ تنخواہ سا ہوگا رسی نہ لین اور اوپر سود لگتا جاوے تو بنا کہ بعد ن برس کے اگر ہم سا ہوگا سب تنخواہ قے سال کی مالکین تو اسی ہین کتا روپیہ دینا چاہئے فرض کر دو کہ ۱ تبصر کرتا ہر ایک برس کی تنخواہ کو تو ظاہر ہے کہ سود اس تنخواہ کا بعد دو سال کے س ۱ ہو جائیگا (موافق فقرہ آئیے) لیکن بعد اختتام دو سال کے اصل ۱۲ ہو جائیگا تو بعد گزرنے تیسری سال کے سود ۲ س ۱ ہوگا اور اسے بطور بعد چوتھی برس کے سود ۳ س ۱ ہوگا اور علیٰ ہذا لیا س بس کل سود بعد گزرنے قے سال کے یہ ہوگا

$$س ۱ + ۲ س ۱ + ۳ س ۱ + ۴ س ۱ + \dots + (n-1) س ۱ = ۱ س \frac{n-1}{۲} + ۱$$

لیکن مجموعہ تمام تنخواہوں کا سو اسی سود کے یہ ن ۱ ہوگا نہ مجموعہ سود کے یہ ہوگا

$$۱ = ۱ + n \frac{n-1}{۲} + ۱$$

۳ فرض کر دو کہ قبل از تمام ہین نے عیاد مقررہ کی حیثیت کی واسطی سا ہوگا رسی بہ اقرار تھا کہ وہ ہین تنخواہ دیا کری باہن ہمارا اور سا ہوگا رسی کچھ نا اتفاقی ہو گئی اور سا ہوگا رسی نہ کو ہمارا روپیہ ہین دے بس کیا جاتا ہے لیکن چونکہ اوپر سے اقرار ہو چکا ہے تو لازم ہے کہ وہ ہین اتنا روپیہ دیوی جتا وہ ہین دیتا بعد انقضای وقت نہ کو رسی کے اب بنا اور سس حال ہن کتا روپیہ لینا چاہئے تاکہ او سس وقت تک اوپر سود لگتے ہین اتنا ہی روپیہ حاصل ہو جاوے فرض کر دو کہ روپیہ مطلوبہ = ہر بعد قے سال کے روپیہ عیاد کی سود کو اسوی ہوگا ۱ + ۲ س ۱ + ۳ س ۱ + ۴ س ۱ + \dots + (n-1) س ۱ کے اور چونکہ یہ مجموعہ مساوی ہونا چاہئے اس مجموعہ کی جو سا ہوگا ہین گورینے قے سال کے دیتا اگر باہن ہمارا اور اسکی رینج نہ واقع ہوتا تو معلوم ہوا کہ

$$۱ + ۲ س ۱ + ۳ س ۱ + \dots + (n-1) س ۱ + ۱$$

$$\frac{۱ + ۲ س ۱ + ۳ س ۱ + \dots + (n-1) س ۱ + ۱}{۱ + ۲ س ۱ + ۳ س ۱ + \dots + (n-1) س ۱ + ۱} = ۱$$

۴ چاہئے ہین دریافت کرنا مجموعہ اصل اور سود کسی خاص رقم روپیہ کا اس شرط پر کہ سود ہر سو روپیہ کے فرض کر دو کہ تبصر کرتا ہر حاصل ہجے ایک روپیہ اور اسکی ایک سال کی سود کو تو ظاہر ہے کہ بعد گزرنے اول سال کے ہجے ہو جائیگا اصل اور



۱ : ص :: ص : ص جو مجموعہ دو سال کا ہوگا  
 ۱ : ص :: ص : ص جو مجموعہ تین سال کا ہوگا اور کسی طرح سی  
 ۱ : ص :: ص : ص جو مجموعہ تین سال کا ہوگا

اور اگر ہودی اصل تو ظاہر ہے کہ مجموعہ آگنٹا ضعف مجموعہ گذشتہ کا ہوگا یعنی  $m = 1$  ص  
 ۵ مرقوم بالا سے ظاہر ہے کہ  $1 = \frac{1}{ص}$  مثال کتنا روپیہ ہمیں سا ہوگا کہ دینا چاہیے تاکہ بعد  
 تین سال کی بعین ۱۰ روپیہ حاصل ہوں موافق نرخ ۵ روپیہ سینکڑہ سو فی سال کے اور بحساب  
 سود دوسرے کی اس صورت میں ظاہر ہے کہ  $ص = 100$  اور  $۳ = ۳$

اور  $m = 100$  تو  $1 = \frac{100}{ص}$  اور  $۳۰۲ = 100$  روپیہ  
 ۶ مرقوم بالا سے ظاہر ہے کہ اگر  $1$  اور  $ص$  اور  $m$  معلوم ہوں اور  $n$  مطلوب تو لکھنا چاہیے  
 ہمیں  $1 + n \times \text{لوگ } ص = \text{لوگ } m$

$$n = \frac{\text{لوگ } m - \text{لوگ } 1}{\text{لوگ } ص}$$

۷ اگر ب باتین دی فرض کریں جس کے فرقہ (۲) میں الایہ کہ سود پر سود لگایا جاوے تو بتا دو سا ہوگا  
 کہ ہمیں کتنا روپیہ بعد سال کے دینا چاہیے فرض کر دو کہ  $1$  بغیر کو تا ہی ایک سال کی نخوا کہ اور اس پر ایسے  
 بعد دو سال کی خواہ دو سال کے سود کی یہ ہوگی  $1 + ص$  اور بعد تین سال کے مجموعہ کو جو کہ  $1 + ص + ص^2$   
 آئیے قیصر کرتے ہیں سادی ہوگا  $(1 + ص + ص^2 + \dots + ص^{n-1})$  کے یعنی موافق قاعدہ  
 $س = \frac{ص^n - 1}{ص - 1} = 1 \times \frac{ص^n - 1}{ص - 1}$  اور یہاں ظاہر ہے کہ اس صورت میں اگر  $n$  مقدار  $n$  معلوم  
 ہوں تو  $ج$  ہی معلوم ہو سکتی ہے

۸ اگر ب باتین دی فرض کریں جس کے فرقہ (۳) میں الایہ کہ سود پر سود لگایا جاوے تو بتا دو سا ہوگا  
 ہمیں کتنا روپیہ دینا چاہیے اس صورت میں ظاہر ہے کہ اگر قیصر کریں مجموعہ مطلوبہ کو  $ج$  ہی تو حاصل قیصر دات  

$$ج = \frac{ص^n - 1}{ص - 1} = 1 \times \frac{ص^n - 1}{ص - 1}$$

اگر تعداد برسوں کی لا نہایت ہرے نے اگر  $n = 1$  ایک مقدار لا نہایت کی تو ظاہر ہے

$$\frac{1}{ص} = 0 \text{ اور } ج = \frac{1}{ص - 1}$$

مثال ایک خاص زمین پر اور اچھا خراج ایک روپیہ یا تہہ بنیاد اوسکی کیا قیمت ہی اگر فرض کریں ہم کہ سود  
پر سود لگایا جاوے اور اسکا نرخ ۵ روپیہ سیکنڈہ سالیانہ ہو اس صورت میں ظاہر ہے کہ  $1 = 1$  اور

$$\text{ص} - 1 = 1 = 0.5 \text{ اور } 20 = \frac{1}{0.5} = 20$$

## فصل اٹھارویں دریافت کرنی زیادتی آبادی کسی ملک کے جسوقت کہ معلوم ہو تعداد مرئی اور پیدائش کے

۱ فرض کر دو کہ آ تبصر کر تا ہے آبادی کسی خاص ملک کو بیچ کسی وقت مفروض کے اور  $\frac{1}{b}$  کر تا ہے اوس حصہ  
آبادی کو جو ایک لین مر جاتا ہے اور  $\frac{1}{a}$  اوس حصہ کو جو پیدا ہوتا ہے آب ظاہر ہے کہ اندازہ زیادتی آبادی  
کا  $= \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$  کے ہوگا اور  $1 : 1 + \frac{a-b}{ab} :: 1 : 1 + \frac{a-b}{ab} =$   
آبادی کے بعد اول سال اور جو کہ آبادی ہر سال سی اندازہ سے زیادہ ہوتی ہے تو

$1 : 1 + \frac{a-b}{ab} :: 1 : 1 + \frac{a-b}{ab}$  آبادی بعد دو سال اور  
آبادی بعد ن سال کے یہ  $1 + \frac{a-b}{ab}$  ہوگی تبصر کر اس مجموعہ کو ساتھ ساتھ کے تو حاصل ہوگا  
یہ مساوات  $1 + \frac{a-b}{ab}$  اور اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے یہ

لوگ  $1 + \frac{a-b}{ab}$  اور اس مساوات سے حاصل ہوتی ہیں یہ مساواتیں  
لوگ  $1 = \text{لوگ } 1 + \frac{a-b}{ab}$

$$n = \frac{\text{لوگ } 1 + \frac{a-b}{ab}}{\text{لوگ } 1 + \frac{a-b}{ab}}$$

$$\text{لوگ } \left( 1 + \frac{a-b}{ab} \right)$$

لوگ  $\left( 1 + \frac{a-b}{ab} \right) = \frac{\text{لوگ } 1 + \frac{a-b}{ab}}{n}$  ظاہر ہے کہ اگر مقدار دن  $n$  اور  $a$  اور  $b$  اور  $\frac{a-b}{ab}$  اور

تین گوی سی چار مقدار میں معلوم ہوں تو باقی تین معلوم ہو سکتی ہے مثال فرض کر دو کہ آبادی انگلستان کے

سنہ ۱۸۰۰ میں ایک کر در ہے اور  $\frac{1}{b}$  حصہ آبادی کا ہر سال مر جاتا ہے اور نسبت پیدائش کی طرقت یہی

ہی جو تہہ کے ہر طرف ۲۰ تہہ کے اور یہ ہی فرض کر دو کہ اس صدی میں کوئی شخص رعایا انگلستان میں

ارٹھونین بسنے اپن جاتا ہے تو بتاؤ سنہ ۱۹۰۰ میں آبادی انگلستان کی کتنی ہوگی بیان ظاہر ہے کہ

$$1 = 1000000 \text{ اور } 100 = 10000000 \text{ اور } 20 = 20000000$$

$$b = 30 \text{ نیز } a + \frac{b-2}{b} = \frac{131}{130} \text{ اور لوگ } c = \text{لوگ } a$$

$$+ n \times \text{لوگ } (1 + \frac{b-2}{b}) = \text{لوگ } 1000 + 1000000 + 10000000 + \dots$$

$$\text{لوگ } \frac{131}{130} = 0.007692307692 \dots = \text{لوگ } 100000000000$$

$$n = 22931000$$

## فصل اوٹیسویں ثبوت قواعد جزرا اور کتب دن بیان کے

جانبے کے نظر کریں ہم اعداد و حساب کے نظم پر پہلی بیان کریںے اور قواعد دن جن سے نکتہ جزرا مالی اور کئی عدد کا نظام عدوی (جیسی کہ متقدم حساب میں) زیادہ ہوتا ہے جس سے دس کے ساتھ دہائی طرف سے یا نین طرف سے پہلے ہر ایک مرتبہ جو اس نظام میں ہوتا ہے دس امثال اس مرتبہ کا جو پہلی آدھی سطح دہائی کی یاد سو ان اس مرتبہ کا جو دہائی کے طرف بائیں کی ہے بس ممکن ہے تغیر کرنا ہر ایک عدد کا ساتھ جمع اکائیوں اور دہائیوں در سیکڑوں اور ہزاروں وغیرہ کی جیسی کہ تغیر ہوتا ہے عدد ۱۲۳۴۵۶۷۸۹ کے پہلے

$$0 + 1 + 2 + \dots + 9 + 10 + 11 + 12 + \dots + 90 + 91 + 92 + \dots + 990 + 991 + 992 + \dots + 999$$

۱۲۳۴۵۶۷۸۹ کے ساتھ حرکت آبی + ۱۰۰ وغیرہ کے اور اگوستا حرکت آبی کے قواعد در دو طرف کی

ممكن ہے کہ تغیر کیا جاوے اسطرح ۱ + ۱۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰۰ + ۱۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰

نظام عدوی سے ممکن ہے کہ تغیر کیا جاوے دین مرتبہ کا اسطرح ۱۰۰ + ۱۰۰۰ + ۱۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰

$$\begin{aligned} & 100 + 1000 + 10000 + 100000 + 1000000 + 10000000 + 100000000 + 1000000000 \\ & 1000 + 10000 + 100000 + 1000000 + 10000000 + 100000000 + 1000000000 \\ & 10000 + 100000 + 1000000 + 10000000 + 100000000 + 1000000000 \end{aligned}$$

\* \* \*

چاہئے کہ ہر وی ۱ = ۲ اور ب = ۳ اور ۶ = ا پس اب تمام ہوتا ہی عمل مذکور اس طرح ہے

$$1 + 3 + 200 \quad | \quad 1 + 40 + 2000 + 400 + 12000 + 20000$$

$$400 + 12000 + \frac{20000}{*} \quad | \quad 200 + 2000$$

$$1 + 40 + 2000 + \frac{400 + 12000}{*} \quad | \quad 1 + 40 + 2000$$

$$\frac{1 + 40 + 2000}{* * *}$$

چاہئے کہ جمع کیے جاویں ب عدد کو واقع ہیں تہہ بعض کی ایک سطر من اسطر حسی

$$5 \ 3 \ 3 \ 4 \ 1 \ (2 \ 3 \ 1)$$

$$\begin{array}{r} 20000 \\ 23 \ ) \ 13341 \\ \underline{124} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 124 \\ 241 \ ) \ 241 \\ \underline{241} \end{array}$$

$$\frac{241}{*}$$

\*

چاہئے کہ کس قطے کے جاویں صفحہ بنیں دخل رکھتے تمام کیے عمل میں بیچ عمل کے اور نقل کیجاویں بیچ

ن صرف دو صورتیں ایک دن تو عمل کیا جاوے گی اسطر حسی

$$5 \ 3 \ 3 \ 4 \ 1 \ (2 \ 3 \ 1)$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 23 \ ) \ 133 \\ \underline{124} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 124 \\ 241 \ ) \ 241 \\ \underline{241} \end{array}$$

$$\frac{241}{*}$$

\*

بیان سی واضح ہوتا ہی یہ کہ خذرمالی واسطی اس عدد کی ۵۳۳۴۱ کے یہ ۲۳۱ ہے

دوہر تقسیم عدد کی جسکا خذرمالی مطلوب ہے درمیان دور دن کے ساتھ کہہنی نقطہ کی اوپر ایک دوسری مرتبہ کی



$$1 + 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

.....

$$0994021$$

تین صورتوں پر  
 باوجود فرق کرنے کی

$$0994021 = \begin{cases} 2^8 \dots = (2^0) \times (2^0) \times 2 = 2^1 \times 2 \\ 94 \dots = (2^1) \times (2^0) \times 2 = 2^1 \times 2 \\ 4 \dots = (2^0) = 2^0 = 1 \end{cases}$$

حاصل فرق = 142021

حاصل فرق  
 142021  
 142021  
 حاصل فرق بالا  
 معین کیا کرتے ہیں

$$142021 = 1 \times (2^0) \times 2 = 2^1 (1+1) \times 2$$

$$42 = 1 \times (2^1) \times 2 = 2^2 (1+1) \times 2$$

$$1 = 2^0 = 2^0$$

جیسے کہ حذف کریں ہم صفوں زیادہ کو اور نقل کریں ہم تین صورتیں برآوردہ پس عمل مذکور پر  
 اس صورت آئندہ پر

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad 1 \\ 13992021 \\ \hline 0994 \\ 2822 \\ \hline 142021 \\ 142021 \\ \hline \times \end{array}$$

$$- 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2^1 (1+1) \times 2 = 2^2 (1+1) \times 2$$



|               |   |   |    |    |   |
|---------------|---|---|----|----|---|
| باقی اول = ۱  | ۲ | ۱ | ۸  | ۲۰ | ۶ |
| باقی دوم = ۱  | ۲ | ۲ | ۱۰ | ۲۰ | ۶ |
| باقی سوم = ۱  | ۲ | ۳ | ۵  | ۱۰ | ۶ |
| ایضاً (۲) = ۲ | ۲ | ۲ | ۸  | ۲۰ | ۶ |
| ایضاً (۵) = ۱ | ۲ | ۱ | ۲  | ۱  | ۱ |

پس معلوم ہوا کہ عدد مطلوب ۲۲۲۲۲۲۲۲ ہے اور اس کا تقاضا یہی ہو سکتا ہے جو اس مسئلے کی نتیجہ درست ہو تو باصغر درجہ مساوات یعنی جائے

$2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

ایضاً (۲) = ۲  
ایضاً (۵) = ۱

اور اس مساوات کی اول جینے کرنی سے ہی ۱۸۲۰ حاصل ہے جو بتائی تو معلوم ہوا کہ عدد مذکور صحیح ہے۔ اگر تہ ادراب اور عدد جناب ہی معلوم ہو تو دریافت کر دو کہ ایسے تعداد مراتب کی موافق نہایت بڑا عدد اور نہایت چھوٹا عدد دیکھا ہوگا فرض کر دو کہ وہ عدد چھوٹی ہے اور تہ تعداد مراتب ہی تو ظاہر ہوگی کہ عدد نہایت بڑا اور تہ ہوگا جو صرف ایک مرتبہ اس کا مراتب بڑا اور کوئی مرتبہ اس سے بڑا نہیں ہو سکتا یعنی نہایت بڑا مرتبہ۔ اس مرتبہ میں ہم جو کہ جو تہ ہر ایک مرتبہ اس کے برابر اور تہ عدد نہایت بڑا ہوگا یعنی عدد مطلوب اس صورت سے تعمیر ہوگا۔

$$1 + 10 + 100 + 1000 + \dots + (10^n) = \frac{1 - 10^{n+1}}{1 - 10} = 10^{n+1} - 1$$

عدد مطلوب نہایت

تعداد کی۔ اور ہر مرتبہ ظاہر ہوگی کہ نہایت چھوٹا عدد بے اعداد میں آ رہی اور جو صلی دور تہ کا نہایت چھوٹا عدد ہوگا اور تہ تہ کا نہایت چھوٹا عدد ہوگا اور علی ہذا تقاسم یعنی نہایت چھوٹا عدد وہ ہر مرتبہ جو کجا اخیر تہ آ رہی اور تہ مراتب ہوں اور اس صورت میں نہایت چھوٹا عدد =  $10^n - 1$  ہوتا ہے

مثال اگر عدد دیادی ۱۰ فرض کیا جی تو چار مرتبہ کا عدد نہایت چھوٹا ہوگا۔  $10^4 - 1 = 9999$

انہ نہایت چھوٹا عدد = ۱۰۰۰۰ اور عدد مفروضہ کہ باہم ضرب کرین تو دریافت کر دو کہ تہ ادراب حاصل خوب کی کیا ہوگی فرض کر دو کہ عدد مفروضہ تہ اور تہ میں اور تہ اور تہ ان دونوں کی تعداد ادراب میں اور تہ عدد بنا رہی ہو تو  $1 + 10 + 100 + 1000 + \dots + 10^n = 10^{n+1} - 1$  اور تہ ص  $10^7 - 1$  سید اسلی تہ = ایک ایسی مسئلہ کی بڑا جس میں نہایت بڑی تہ تہ کی یہ ہوگی کہ  $10^{7+1} - 1$  اور نہایت بڑی تہ تہ اس کی یہ ہے  $(10^7 - 1)$  اور نہایت کم تہ تہ تہ میں یہ ہوگی کہ  $10^{7+1} - 1$  پس معلوم ہوا کہ نہایت بڑی تہ تہ کی حاصل ضرب تہ تہ میں کم اس کے  $10^{7+1} - 1$  یا  $10^7 - 1$  سے ہوگی اور نہایت کم  $10^7 - 1$  ہے تو موافق بیان فقہ (۱) کی تہ ادراب کی حاصل ضرب تہ تہ میں  $10^7 + 1$  سے زیادہ نہیں ہو سکتی اور تہ  $10^7 - 1$  سے کم ہو سکتی ہے



(۵) چاہتی ہیں کہ تعدد مراتب خارج قسمت بنی ق کی کیا ہوگی اور صورت میں جبکہ

ق برت پر تقسیم ہو جائی فرض کر دو کہ  $ق = د : ن = ق$  اور چونکہ  $ق$  میں  $آ$  مرتبہ  
 فرض کیے تو باقی فرق  $د$  میں بھی  $آ$  مرتبہ ہوگی اور فرض کر دو کہ تعدد مراتب  $د$  کی =  $لا$  تو موافق فقرہ گذشتہ  
 کے  $م$  زیادہ  $(۷+لا)$  سی اور کم  $(۷-لا)$  سی نہیں ہونگا اور اس پر اسطی حد مطلوب  $لا$  کم  
 $(۷-م)$  سی اور زیادہ  $(م-۷)$  سی ہوگا

حکم یہاں سے معلوم ہوا کہ تعدد مرتبوں کے  $ق$  میں  $۲$  یا  $۳$  م ہو اور  $ق$  میں  $۳$  یا  $۴$  م  
 یا  $۳$  م -  $۱$  یا  $۳$  م -  $۲$  م اور علی ہذا القیاس - (۶) اگر مجموعہ مراتب کو ہر ایک قسم کی اعداد  
 میں جگہ عدد بنیادی رہے اور  $ر$  -  $آ$  پر تقسیم کریں تو باقی اوسبقہ  $د$  کی حسب قدر کل عدد کو  $ر$  -  $آ$  پر  
 تقسیم کرنی سے رہتا ہے انبات دعویٰ کی لئے فرض کرتے ہیں  $م$  کہ  
 $۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱$  (ن عدد) کو تقسیم کرنا ہے اس پر اسطی

$$ن = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱ + (۱-۲) + \dots + ۱ + (۱-۳)$$

$$\therefore \frac{ن}{۱-۲} = \frac{۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱ + (۱+۲) + \dots + ۱ + (۱-۳)}{۱-۲}$$

لیکن یہ بات ظاہر ہے کہ اگر  $ن$  کی واسطی کو مثبت قیمت فرض کیا جادی ہر صورت میں  $\frac{ن}{۱-۲} - \frac{۱}{۱-۲}$  ایک صحیح  
 ہوگا جس اگر کل عدد صحیح کو  $ع$  سے تعبیر کریں تو  $\frac{ن}{۱-۲} = ۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱$  اور اس سادات سی  
 صاف ظاہر ہے کہ عدد  $ن$  کو  $ر$  -  $آ$  پر تقسیم کرنی سے رہی باقی رہتا ہے جو مجموعہ مراتب  $۱ + ۱$  وغیرہ کو  $ر$  -  $آ$  پر  
 تقسیم کرنی سے باقی رہتا ہے کیونکہ  $ع$  تو عدد صحیح ہے اور میں باقی ہو ہی نہیں سکتی

حکم یہاں سے ثابت ہوا کہ اگر ایک عدد  $ر$  -  $آ$  پر تقسیم ہو سکی تو اسکی مجموعہ مراتب کا بھی  $ر$  -  $آ$   
 پر تقسیم ہو سکتا ہے اور یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر حاصل تفریق  $د$  مراتب کا جو طاق اور جفت متعلق  
 پر واقع ہوں  $ر$  -  $آ$  پر تقسیم ہو سکی تو وہ عدد بھی  $ر$  -  $آ$  پر تقسیم ہو سکی گا

مثال دریافت کیا جاتے ہیں  $م$  کہ وہ اعداد کونسی ہیں جو  $۳$  اور  $۹$  پر تقسیم ہو سکتے  
 ہیں فرض کر کہ  $۱$  -  $۲$  -  $۳$  وغیرہ مراتب کسی عدد کی ہیں تو ظاہر ہے کہ وہ عدد اس صورت سی تقسیم ہو سکتا ہے  
 $۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱$  وغیرہ اب اگر اسکو  $۳$  پر تقسیم کریں تو یہ حاصل ہوگا

$$\frac{۱}{۳} + ۳ + \frac{۲}{۳} + ۳ + ۳ + \frac{۱}{۳} + ۳ + ۳ + \dots + ۳ + ۳ + \frac{۲}{۳} + ۳ + ۳ + \frac{۱}{۳}$$



صورت  $۳ \times ۲ \times ۱$  پر تقسیم ہر جا کی بس ثابت ہوگا کہ تمام صورتوں میں حاصل ضرب تریب کی تین عددوں کا

$۳ \times ۱ \times ۱$  پر پورا تقسیم ہو جائیگا۔ ثابت کر کے متلسلہ حاصل ضرب تریب تریب کی عددوں کا  $۳ \times ۲ \times ۱ \dots$  پر تقسیم ہو جائیگا فرض کرو کہ  $m$  (م اور  $r$ ) تیسرا ہی  $\frac{۱-۲}{۳} \frac{۱-۳}{۲} \dots \frac{۱-n}{۲}$  کو توڑ (م اور  $r$ ) =

$$m = \frac{1-2}{2} \cdot \frac{1-3}{3} \cdot \dots \cdot \frac{1-r}{r} \cdot \frac{1-r-1}{1+r} = \frac{1-2}{1+r} (m \text{ اور } r)$$

$$\frac{(1+m) \cdot (1+m-1) \cdot \dots \cdot (1-m)}{(1+r) \cdot \dots \cdot 3 \times 2 \times 1} = \frac{1+m}{1+r} (m \text{ اور } r) - (m \text{ اور } r)$$

$$= (1+m \text{ اور } 1+r) - (1+r \text{ اور } 1+m) = (m \text{ اور } r) - (m \text{ اور } r) = 1 \text{ اور } 1$$

$$(1+r \text{ اور } 2+r) - (1+r \text{ اور } 1) = (1+r \text{ اور } 1+r) - (1+r \text{ اور } 1) = 1 \text{ اور } 1$$

$$(1+r \text{ اور } 3+r) - (1+r \text{ اور } 2+r) = (1+r \text{ اور } 2+r) - (1+r \text{ اور } 2+r) = 1 \text{ اور } 1$$

..... = .....

$$(1+m \text{ اور } 1+r) - (1+r \text{ اور } 1-m) = (1+r \text{ اور } 1-m) - (1+r \text{ اور } 1-m) = 1 \text{ اور } 1$$

$$\therefore (1+m \text{ اور } 1+r) = 1 + (1+r \text{ اور } 1) + (1+r \text{ اور } 2) + \dots + (1-m \text{ اور } 1) \text{ اور } 1$$

$$\text{اب اگر } r = 1 \text{ تو } (1+m \text{ اور } 2) = 1 + (1+r \text{ اور } 1) + (1+r \text{ اور } 2) + \dots + (1-m \text{ اور } 1) \text{ اور } 1$$

$$= 1 + 1 + 2 + 3 + \dots + m = 1 + \text{ایک عدد صحیح کے}$$

$$\text{اور اگر } r = 2 \text{ تو } (1+m \text{ اور } 3) = 1 + (1+r \text{ اور } 2) + (1+r \text{ اور } 3) + \dots + (1-m \text{ اور } 2) \text{ اور } 1 = \text{ایک صحیح}$$

$$\text{اور اگر } r = 3 \text{ تو } (1+m \text{ اور } 4) = 1 + (1+r \text{ اور } 3) + (1+r \text{ اور } 4) + \dots + (1-m \text{ اور } 3) \text{ اور } 1 = \text{ایک صحیح}$$

$$\text{و غیرہ} = \text{و غیرہ} = \text{و غیرہ} = \text{و غیرہ}$$

$$\text{اور } (1+m \text{ اور } r) = 1 + (1+r \text{ اور } 1) + (1+r \text{ اور } 2) + \dots + (1-m \text{ اور } 1) \text{ اور } 1 = \text{ایک صحیح}$$

یعنی متلسلہ حاصل ضرب تریب تریب کے اعداد تریب کے  $۳ \times ۲ \times ۱ \dots$  پر پورا تقسیم ہو جائیگا۔ مثال (۱) اگر ایک عدد

صحیح ہو تو ثابت کرو کہ  $(n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$  پر تقسیم ہو جائیگا جو کہ  $(n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots = (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots$

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (2-n) \cdot (1-n) \cdot (1+n) \cdot (2+n) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots$$

$۳ \times ۲ \times ۱$  یا  $۳۰$  پر پورا تقسیم ہو جائیگا



لیکن یہ ظاہر ہے کہ پہلی اور تیسری اور چوتھی اور بائیسویں صورت سی پر ہم عدد قبیر

۱-۲۶۷۱-۱۰ (۱+۲)۴=۵+۴+۳ سے قبیر ہو سکتا ہے لیکن ۴+۳+۲+۱=۱۰

کی صورت کا ہر جس جو عدد پر ہم تین زیادہ ہو ۴+۳+۲+۱ سے قبیر ہو سکتا ہے اور م کی طاق اور جفت ہونی کی صورت  
عدد کو ۱۲ اور ۱۱ اور ۱۰ سے قبیر ہوگا

(۱۱) ایک عدد کی تمام مقسوم علیہ دریافت کرو فرض کرو کہ ۱۰۔ ۶۔ وغیرہ اس میں سے کون سی ہیں اور فرض کرو

کہ آ سے دفعہ واقع ہو اور ب ق دفعہ اور ج دفعہ... علیٰ ہذا پس وہ عدد سادی ہوگا ۱ ص ۱ ج

|                     |   |   |   |   |
|---------------------|---|---|---|---|
| ۱ اور ۱ اور ۱ اور ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۱ اور ۱ اور ۱ اور ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۱ اور ۱ اور ۱ اور ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۱ اور ۱ اور ۱ اور ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ |

اور ان عدد کی دو یا زیادہ کی حاصل ضرب سے قبیر ہو سکتا ہے یعنی ہر ایک ضرب مسلسل (۱+۲+۳+۴+۵)

۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰+۱۱+۱۲+۱۳+۱۴+۱۵+۱۶+۱۷+۱۸+۱۹+۲۰+۲۱+۲۲+۲۳+۲۴+۲۵+۲۶+۲۷+۲۸+۲۹+۳۰

جو کہ مختلف مقسوم علیہ ۱ ص کی ہیں اور ان میں مقسوم علیہ ایک ہی ہے

اسی طرح اگر ہم اسکو (۱+۲+۳+۴+۵) سے ضرب دین تو حاصل  
ضرب سادی ہوگا تمام مقسوم علیہ ۱ ص کی اس لیے اس صورت میں حاصل ہو سکتا

ہے اور اگر ہم فرض کیں کہ اس ضرب سے زیادہ ہوں تب ظاہر ہے کہ تعداد ان مقسوم علیہ  
۱ ص میں سے ہے اور ۱ ص میں تعداد سادی ہوگی (۱+۲) (۱+۳) (۱+۴) اور اگر زیادہ

ہوں تو یہی ہی قاعدہ جاری ہو سکتا ہے تمام مقسوم علیہ ۱ ص کی ۱۰۰۰

(۱+۲) (۱+۳) (۱+۴) (وغیرہ) ان مقسوم علیہ میں سے ایک اور وہ خود عدد ہی

مثلاً دریافت کرو تمام مقسوم علیہ ۲۱۶۰ کے ۲۱۶۰ × ۲ = ۱۰۸۰ × ۲ = ۵۴۰ × ۲ =

۲۸۰ × ۲ = ۱۴۰ × ۲ = ۷۰ × ۲ = ۳۵ × ۲ = ۱۷ × ۲ = ۸ × ۲ = ۴ × ۲ = ۲ × ۲ = ۱

مقسوم علیہ ۲۱۶۰ کی سادی ہو (۱+۲) (۱+۳) (۱+۴) = ۲۱۶۰

# باب پنجم سوالات غیر منقطع کی بیان میں

## فصل ۱

اوس سوال کو جس میں مساوات میں جو شرط سوال کی سی پیدا ہوتی ہیں کم میں نسبت تعداد مقداروں میں سوال کی سوال غیر منقطع کہتے ہیں گو کہ ایسی مساواتوں کے جواب بی شمار ہو سکتے ہیں پھر یہی جواب انکی اعداد صحیح میں اکثر تہوڑی سی ہوتی ہیں اور انکی دریافت کو نیکی ترکیبیں عزوم الوزین سے معلوم ہو جائیں گی

### شکل اول

جاہتے ہیں ہم دریافت کرنی تمہیں تا اور ہر کی مساوات  $\text{طا} = \text{ص} + \text{س}$  سے جس میں  $\text{ط}$  اور  $\text{ص}$  اور  $\text{س}$  تیرے کہتے ہیں اعداد منفرد کو کہہ کر اور انکی عدد ضربی مختصر نہیں ہو

### قاعدہ

(۱) غیر کردہ صہ کسی عدد صحیح کو اور جو کم مساوات منفرد سے حاصل ہوتا ہے یہ  $\text{لا} = \text{ص} + \text{س}$  توجہ نہ لیا جائے کی صحیح کی اعداد کو جو  $\frac{\text{ص} + \text{س}}{\text{ط}}$  میں نکل سکتی ہیں فرض کر کہ حاصل ہوتا ہے یہ  $\frac{\text{ص} + \text{س}}{\text{ط}}$  اب تفریق کر دو  $\frac{\text{ص} + \text{س}}{\text{ط}}$  کو  $\frac{\text{ط}}{\text{ط}}$  یا  $\frac{\text{ط}}{\text{ط}}$  یا  $\frac{\text{ط}}{\text{ط}}$  یا کسی اور صحیح

کی آئی میں سی کہ جو دی ہے ثابت فریب  $\frac{\text{ص} + \text{س}}{\text{ط}}$  کی اور لازم ہے کہ جو دی باقی ایک عدد صحیح اور یہی عمل کری جاو جب تک کہ سرور کا مساوی آسکے ہو جاو اور اوس صورت میں حاصل ہوگی یہ مقدار شکل ایک سے کہ  $\frac{\text{ص} + \text{س}}{\text{ط}}$  اور اسکو لکھو مساوی ایک عدد صحیح کی معنی ثابت کر داسطرح سے  $\frac{\text{ص} + \text{س}}{\text{ط}} = \text{ص}$  اور  $\text{س} = \text{ط} - \text{ص}$  کہ اب صورت فرض کریں گے کوئی عدد صحیح واسطی صہ کی قیمت آ کی معلوم ہو جائیگی اور بعد ازین قیمت لاکھی ہی قاعدہ نمبر بالا معنی ہے ان معلوم متعارفہر (۱) حاصل جمع اور حاصل تفریق اور حاصل ضرب اعداد صحیح کا صحیح ہوتا ہے (۲) اگر ایک عدد فاکتار ہے کسی اور عدد کو اور اسکی کسی ایک جز کو تو ضرور ہے کہ پہلا عدد ہی فاکتار ہے پھلی عدد کی باقی جز کو

### مثالین

۱ ۱۹ = ۳۰ - ۱۱ بنا دیا ہے قیمت تا اور کو کی ظاہر ہے کہ  $\text{لا} = \frac{\text{ص} + \text{س}}{\text{ط}}$  = صہ

$$\text{اور چونکہ } \frac{119}{14} = \text{صہ تو معلوم ہوا کہ } \frac{119}{14} = \frac{119}{14} - \frac{119}{14} = \frac{11+10}{14} = \text{صہ اور اب}$$

$$\text{صہ} = ۲ + \frac{4+5۲۰}{14} = \frac{۲۸+5۲۰}{14} = \frac{۱۱+10}{14} \times ۲$$

$$\therefore \text{صہ اور اب} = \frac{4+5۲۰}{14} = \frac{514}{14} = \frac{4+1}{14}$$

$$\therefore 4+5 = 9 = 14 \text{ صہ} \therefore 5 = 14 \text{ صہ} - 4 = 10 \text{ اب اگر کم سی کم قیمت وہ سہلی دکی دریافت کی جائے}$$

تو لازم ہو کہ فرض کریں ہم صہ = 1 اور اب = 4 - 14 = 13 اور اب = 4 اور اگر صہ = 2 تو  
 1 = 4 - 38 = 34 اور اس طرح سی اور بی شمار قیمتیں واسطے آ کی معلوم ہوا اور ان قیمتوں کے  
 موافق آ کی قیمتیں شمار ہوگی

(۲) مثال معلوم ہر مین یہ مساوات 14 - 58 = 44 اور چاہتے ہیں ہم دریافت کرنی لا اور دکی

کہ اعداد صحیح ہوں سبھی ظاہر ہو کہ 14 - 58 = 44 + 0 - 52 = 1 - 52 اب فرض ہو کہ

$$\frac{1-52}{۲} = \text{صہ لیکن ظاہر ہو کہ } \frac{1-52}{۲} \text{ ایک صحیح ہے اور چونکہ}$$

$$= \frac{1-52}{۲} \times ۲ = \frac{۲-۱۰۴}{۲} = \text{صہ تو فرض ہو کہ } \frac{۲-۱۰۴}{۲} = \frac{۱-52}{۲}$$

$$\frac{۲-۱۰۴}{۲} = \text{صہ اور } ۲ = ۲ \text{ صہ اور } ۱ = ۲ + ۳ = ۳ \text{ صہ اور } ۲ + ۳ = ۵ \text{ صہ اور اگر } ۳ = ۲ \text{ تو اور قیمتیں } ۲ \text{ اور } ۱ \text{ کی معلوم}$$

ہیں

(۳) مثال معلوم ہر مین مساوات 14 + 58 = 72 اور چاہتے ہیں ہم دریافت کرینے

قیمتیں لا اور دکی کہ اعداد صحیح ہوں اب ظاہر ہو کہ

$$72 = \frac{58-2}{9} = 622 - 1 + \frac{58-2}{9} = \text{صہ اور } \therefore \frac{58-2}{9} = \text{صہ}$$

$$\text{اور چونکہ } \frac{58-2}{9} = 2 \times \frac{58-2}{9} = \frac{58-2}{9} = \text{صہ اور } \frac{58}{9} = \text{ہی صہ}$$

$$\text{تو معلوم ہوا کہ } \frac{58-2}{9} = \frac{58}{9} + \frac{58-2}{9} = \text{صہ اور } \therefore 9 = ۲ + ۷ \text{ صہ}$$

اور 9 = ۲ - ۱ اور اگر صہ = 1 تو 9 = ۲ - 9 = 5 اور لا = 215 اور اس طور سے







لیکن جسوقت قسمت کرین ہم اسی ۲۸ پر تو باقی رہتا ہے عدد ۱۳۰ کا جواب عدد مطلوبہ ۳۷۴ ہے  
 ۲۷ وہ کوٹنا چھوٹے سے چھوٹا عدد صحیح ہے کہ اگر قسمت کرین ہم اسی سے علیحدہ علیحدہ  
 ۲۱ ۲۰ ۱۹ ۱۸ ۱۷ ۱۶ ۱۵ ۱۴ ۱۳ ۱۲ ۱۱ ۱۰

فصل دوسری بیچ بیان ایسی سوالات غیر منقطع کے جنہیں بوسیدہ

دوسرا نون کے دریافت کرنا ہوتا ہے تین یا زیادہ مقداروں میں مہول کا

سوال ۱ ایک شخص نے تیس فقیروں کو کہ اذین عورتیں اور مرد اور بچی تھی ۵۰ روپیہ دیے  
 ساتھ اس شرط کی کہ ہر مرد کا حصہ تین روپیہ ہو اور ہر عورت کا حصہ ۲ روپیہ اور ہر بچہ کا حصہ ۱ روپیہ  
 بتاؤ ان بقیہ روپیہ کتنے مرد اور کتنی عورتیں اور کتنے بچے تھے فرض کرو کہ تعداد مردوں کی = لا اور  
 عورتوں کی = د اور بچوں کی = ہ اور اب ظاہر ہے کہ حاصل ہوگی یہ دو مساواتیں

لا + د + ہ = ۳۰ ..... (۱)

۳لا + ۲د + ۵ہ = ۵۰ ..... (۲)

مساوات (۱) کو ۳ میں ضرب کرو اور حاصل ضرب میں سے مساوات (۲) کو تفریق کر دو تو حاصل  
 ہوگی یہ مساوات د + ہ = ۲۰ اور ظاہر ہے کہ اس مساوات سے موافق قاعدہ گذشتہ کی حاصل  
 ہو جائیگی یہ تین قیمتیں د اور د کی اور بعد ازاں لا قیمت بھی معلوم ہو جائیگی یہ سوال اور طرحی ہی  
 حل ہو سکتا ہے اور وہ طرح یہ ہے مساوات اول سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات د = ۳۰ - لا - ہ  
 اور یہاں سے یہ بات معلوم ہوتی ہے کہ لا + ہ کم ہے ۳۰ سے اور جسوقت کہیں یہ قیمت د کی مساوات

(۲) میں تو حاصل ہوگی یہ مساوات ۳لا + ۲د + ۵ہ = ۵۰ اور د = ۳۰ - لا - ہ اور

۳لا + ۲(۳۰ - لا - ہ) + ۵ہ = ۵۰ لاپس معلوم ہوا کہ ۳۰ - لا - ہ = ۳۰ سے کم ہے پس ہم فرض کر سکتے ہیں کہ  
 لا کی کوئی عدد بشرطیکہ وہ کم از کم ۱۰ سے اور اسے اس طرح حاصل ہوتی ہیں کیا یہ جواب آئندہ

$$\begin{array}{r} ۱۰۹۸۷۶۵۴۳۲۱۰ = ۷ \\ - ۰۳۴۶۸۱۰۱۲۱۴۱۶۱۸۲۰ = ۶ \\ \hline ۲۰۱۹۱۸۱۷۱۶۱۵۱۴۱۳۱۲۱۱۱۰ = ۵ \end{array}$$

اور اگر چھوڑیں اول اور آخر جواب کو تو باقی رہیں گے ۹ جواب



دویم فرض کر دو کہ ط = ا تو حاصل ہوگی یہ مساواتین لا = م = س = د = ۷ = ۸ - ۳ = ۵  
 ر = ۸ + ۸ = ۱۶ لیکن ہم نہیں فرض کر سکتے ہیں ط = ۲ کیونکہ اس صورت میں د ہو جاتی ہے منفی آج  
 ظاہر ہے کہ صورت اول میں تو نہیں زیادہ ہو سکتا ۹ سی اور صورت دوسری میں وہ نہیں زیادہ ہو سکتا  
 آج سی پس صورت اول سی حاصل ہوتی ہیں جو جواب آئندہ

$$\begin{array}{r} 109 \\ 104 \\ 844 \\ 522 \\ 331 \end{array}$$

$$11111111 = ل$$

$$984452210 = س$$

$$03491212224 = د$$

$$9088848280444242 = ر$$

اور صورت دوسری سی سے تین جواب حاصل ہوتے ہیں

|                             |   |       |    |    |   |   |  |
|-----------------------------|---|-------|----|----|---|---|--|
| سب سے کچھ جواب تھے ادین     | } | اجوبہ | ۳  | ۲  | ۱ |   |  |
| ۳۱ ہیں اور اگر انہیں سے     |   | ۳     | ۲  | ۲  | = | ل |  |
| خارج کریں ہم اوں جوابوں     |   | ۲     | ۱  | ۰  | = | س |  |
| کو جو صف میں تو باقی رہینگے |   | ۲     | ۵  | ۸  | = | د |  |
| دس جواب                     |   | 42    | 90 | 88 | = | ر |  |

جو شخص مہارت مساواتوں غیر منقطع کی حل کرنے میں پید کیا جائے اسی لازم ہے کہ سوالات گذشتہ  
 کو اور ان ترکیبوں جن میں وہ حل ہوتی ہیں اور دوسروں مشارفہ کو کہ پہلی مذکور ہوئی ہیں خوب توجہ  
 سے ملاحظہ کریں آج ہم حل کریں گے چند مساواتیں غیر منقطع جنہیں حاصل ضرب اور جذور وغیرہ مقداروں  
 جھول کے دخل رکھتی ہیں مثلاً حل کرنا مساوات کو لا + س = ۷ اور ۷ = ۹ ظاہر ہے کہ اس مساوات  
 سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات لا + س = ۷ اور ۷ = ۹ اور

$$\therefore س = \frac{۷-۹}{۱+لا} = ۱ + \frac{۸-۹}{۱+لا}$$

اور اب ضرور ہے کہ ہودی لا + ۱ کوئی ایسا  
 عد صحیح کہ اوپر ۸۰ قسمت ہوگی ظاہر ہے کہ دیے اعداد جن پر ۸۰ قسمت بہت ہیں اور

اسیواسطی قیمتیں لاکھی بہت ہوگی جیسکے جدول آئندہ سے ۲۱ ۲۰ ۱۹ ۱۸ ۱۷ ۱۶ ۱۵ ۱۴ ۱۳ ۱۲ ۱۱ ۱۰ ۹ ۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱

$$\begin{array}{r} 109 \\ 104 \\ 844 \\ 522 \\ 331 \end{array} = ل$$

$$\begin{array}{r} 9088848280444242 \\ 9088848280444242 \\ 9088848280444242 \end{array} = س$$

واضح ہوگا مقسوم علیہ ۸۰ کی اوپر اسطی  
 اور اسیواسطی

لیکن چونکہ آ اور و کی قیمتیں یک ہی ہیں صرف فرق یہ ہے کہ ایک ترتیب برعکس ہے تو ظاہر ہے کہ حقیقت میں جواب

$$۹۱۵۱۹ \quad ۳۹ \quad ۷۹ = ۱ \quad اور \quad ۱۰ \quad ۳ \quad ۷ = ۱$$

مسادات گذشتہ ہر ایک خاص صورت اس مسائل عام کی لا + ط + ص = و سے اور یہ اس طرح سے حاصل ہوتی ہے لا + ص = و سے - ط لا اور

$$\therefore ۱ = \frac{س - ط لا}{لا + ص} = ط + \frac{ط ص + س}{لا + ص}$$

چاہئے کہ وہ پورا کرے اور شرط کو جو تیسری لگی ہے اس میں مسادات سے جاہتے ہیں ہم دریافت کرنی ایسی قیمت واسطی لائی کہ صورت ط + ص لا کا جذر نکل سکے فرض کر دو کہ ط + ص لا = و اور

لا = و - ط اب اگر مطلوب ہو میں قیمت لائی اعداد صحیح میں تو لازم ہے کہ فرض کریں ہم واسطی لائی ایسی قیمت کہ اگر اسکے مجذور میں سی تفریق لگی عدد ط کو قسمت کریں ہم حاصل تفریق کو ص پر تو خانہ قسمت ایک عدد صحیح ہو لیکن اگر کسب ہی مطلوب ہو تو عرف بہ شرط ط جو ط ہوتی چاہئے کہ و زیادہ ہو ط سے مثلاً وہ گن عدد ہے

کہ اگر اسی آ میں ضرب کریں اور حاصل ضرب پر عدد ۳ کا زیادہ کریں تو مجموعہ ایک مجذور ہوتا ہے اب ظاہر ہے کہ یہ مسادات ہوگی والا = ۳ = و اور لا =  $\frac{۳ - و}{۱۱}$  اب اگر و = ۵ تو لا =  $\frac{۳ - ۵}{۱۱}$

$$\frac{۲۲}{۱۱} = ۲ \quad اور \quad اگر \quad و = ۳ \quad تو \quad لا = \frac{۳ - ۳}{۱۱} = ۰ \quad ا = \frac{۳}{۱۱} \quad دریافت کیا$$

چاہتے ہیں ہم ایسی قیمت واسطی لائی کہ صورت (ط + لا) کا جذر نکل سکے فرض کر دو کہ

$$\sqrt{ط + لا} = و + لا \quad اور \quad لا + ط = لا + و + ۲ + لا + لا \quad اور \quad و + ۲ + لا = ط$$

$$اور \quad لا = \frac{ط - و}{۲} \quad اگر \quad و = ۱۰ \quad اور \quad و = ۲ \quad تو \quad لا = \frac{۱۰ - ۲}{۲} = ۴$$

واقع ہو کہ اگر ط اس شکل کا ہو و + ۲ + لا جہاں کہ و کوئی عدد ہو سکتا ہے تو خواہ لائی واسطی کبھی قیمت فرض کریں ط + لا ہمیشہ مجذور ہوتا ہے چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا ایسی دو مجذور کا کہ اولیٰ حاصل جمع ہی مجذور ہو و فرض کر دو کہ لا اور آ دو مجذور مطلوب ہیں اور یہ فرض کر دو کہ لا + و = (لا - و) اور

$$لا + و = و - لا \quad ۲ - لا + و + و = لا \quad لا = لا - ۳ \quad اور \quad لا = لا - ۳ - ۲ = لا - ۵$$

$$۵ (لا - ۱) = ۲ - لا اور لا = \frac{۲ - ۵(لا - ۱)}{۱ - ۵} \quad اب فرض کر دو کہ و = لا - ۱ اور لا = ۲$$

اب جس وقت کوئی قیمت واسطی لائیے کہ فرض کریں گے اس وقت قیمتیں آ اور و کی معلوم ہو جائیں گی مثلاً  $۲ = ۲ \quad تو \quad و = ۳ \quad اور \quad لا = ۴$  اور  $۲ = ۴ + ۱۴ = ۲۵ = ۵$  چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا دو ایسی مجذور کا کہ اولیٰ حاصل تفریق ہی ایک عدد مجذور ہوتا ہے فرض کر دو کہ لا اور و

مخبر در مطلوب بین اور یہ بھی مان لو کہ  $لا = و = (لا - رو) = ۲ = لا = ۲$  اور  $لا = ۲$  اور  $اسی واسطے$   
 $۳ = ۲ + لا = ۲ + ۲ = ۴$  اور  $۴ = (۲ + ۱) = ۲$  اور  $لا = \frac{(۲+۱) \times ۲}{۲}$  اور  $۲ = ۲$  اور  $۲ = ۲$   
 $لا = ۲ + ۱$  مثلاً اگر  $۲ = ۲$  تو  $و = ۲$  اور  $لا = ۵$  اور  $اسی واسطے ہو گا یہ حاصل$   
 $لا = ۲ = ۲ = ۱۶ - ۲۵ = ۹ = ۳$

## فصل تیسرے بیچ بیان ایک خاص ترکیب کی جسکی ذریعہ سی صورت

طن + ۱ ایک مجذورات اعداد صحیح میں ہو جائیے

بنا صورت جبرية  $طن + ۱$  کو ایک کامل مربع کو ہی امر مشکل نہوتا اگر دریافت کرنی ہوتی ہیں فقط کسور  
 واسطے مقدار ان کے کیونکہ اس صورت میں ہمیں فقط یہ بات ضرور ہوتی کہ فرض کر بیٹے ہم

$$\sqrt{طن + ۱} = ۱ + \frac{ن}{ق} \text{ اور اس سے حاصل یہ مساوات } طن + ۱ = ۱ + \frac{۲ن}{ق} + \frac{ن^۲}{ق^۲}$$

اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  $طن = \frac{۲ن}{ق} + \frac{ن^۲}{ق^۲}$  اور جس وقت قسمت  
 کرتے ہم دونوں طرف اس مساوات کو ن پر تو حاصل ہوتی ہے مساوات  $طن = \frac{۲ن}{ق} + \frac{ن^۲}{ق^۲}$  یا

$$طن = \frac{ن}{ق} = \frac{۲}{ق} \text{ یا } \frac{ن}{ق} = \frac{(طن - ن)}{ق} \text{ یا } \frac{۲}{ق} = \frac{ن}{ق} = \frac{۲}{طن - ن}$$

اور اس مساوات سے ہر شمار قیمتین واسطے ان کے معلوم ہو جائیں لیکن یہ سب کسور ہیں اور نہ اعداد  
 صحیح پس ظاہر ہے کہ یہ ترکیب نہیں جاری ہو سکتی ہے جس وقت دریافت کیا جائے قیمتین کی اعداد صحیح میں  
 اور اسے واسطے لازم ہے کہ مجموعہ کرین  $\frac{۲}{ق}$  اور ترکیبوں کے جنہی مطلب ہمارا حاصل ہو واسطے اس مطلب کے  
 لازم ہے کہ کمال ڈالین ہم تمام اون صورتوں کو جنہیں  $طن$  ایک مقدار مثبت ہو اور تمام اون صورتوں کو بھی جنہیں  $ق$   
 ایک مجذورات ہو کسور واسطے اس صورت میں  $طن$  ایک عدد مجذورات ہوگا اور  $ق$  کوئی مجذورات جس وقت کہ اسکی  
 اوپر عدد ایک کا زیادہ کیا جاتا ہے مجذورات اعداد صحیح کا نہیں رہتا ہی تو لازم آتا ہے اس سے یہ کہ اگر  $طن$  ایک  
 عدد مجذورات ہو تو  $طن + ۱$  ایک مجذورات صحیح اعداد کا نہیں ہو سکتا ہی اسباب واضح ہو کہ جس وقت معلوم ہو جائیگی  
 ہمیں کوئی ترکیب دریافت کرنی کم کئی قیمتین کی ایسی کہ اسکی ذریعہ سی  $طن + ۱$  ایک کامل مجذورات اعداد  
 صحیح کا ہوگا اور وقت معلوم ہو سکتی ہیں ہمیں ہر شمار اور قیمتین ان کی پس اب لکھیں گے ترکیب دریافت

کونی کم کسی قیمت ن کی اور یہ ترکیب مہندس میں لی کہ ایک مخصوص انگریزی میں سے تھا ایجاد کی تھی واضح ہو کہ یہ ترکیب ایسی نہیں ہے کہ تبسم کی مثلون اس فیصل کی برابری طریقہ سے جاری ہو سکے بلکہ وہ مختلف طریقوں سے اور مختلف درجہ سہولت سے مختلف مثلون کی حل کرنی میں جاری ہو سکتی ہے اول یہ کہ قیمت میں ہم ایک بہت سہل مثال یعنی چاہتی ہیں دریافت کرنی کوئی ایسی قیمت واسطی آن کے کہ صورت جبریہ  $۲ن + ۱$  ایک مخدور کامل اعداد صحیح کا ہو جائے اس جہاں  $۲ن + ۱$  کا زیادہ ہون سے اور کم ہو  $۲ن$  سے پس اگر تبسم کریں اس مخدور کو  $۲ن + ۱$  سے تو ضرور یہ کہتے کم ہوں گے اور اس صورت میں حاصل ہوگی یہ مساوات  $۲ن + ۱ = ۲ن + ۱$  اور جسوقت مخدور کریں ہم دو طرف اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہ مساوات  $۲ن + ۱ = ۲ن + ۱$

اور جسوقت دور کریں  $۲ن$  کو دو طرفوں اس مساوات سے اور لائن تمام اجزاء کو ضمن آن پایا جاتا ہے ایک طرف مساوات کی اور باقی اجزاء کو دوسری طرف مساوات کی تو حاصل ہوگی یہ مساوات  $۲ن - ۱ = ۲ن - ۱$  اور جسوقت کامل کریں ہم مبرہ کو موانق قاعدہ مساوات درجہ  $۲ن + ۱ = ۲ن - ۱$  اور جسوقت مخدور نکالیں دو طرفوں اس مساوات کا تو حاصل ہوگی یہ مساوات  $۲ن - ۱ = ۲ن - ۱$  اور  $۲ن + ۱ = ۲ن + ۱$  اب ظاہر ہے کہ تاکہ  $۲ن$  ایک کامل مخدور ہو لیکن ظاہر ہے کہ قضا شکل دریافت کرنا کسی ایسی قیمت کا واسطی آن کے کہ  $۲ن + ۱$  ایک کامل مخدور ہو جائے اور تاہی شکل یہ دریافت کرنا کسی ایسی قیمت کا واسطی آن کے کہ  $۲ن - ۱$  ایک کامل مخدور ہو جائے پس ہمیں لازم ہے کہ ہر کوئی ایسا عمل کریں کہ اوسکی رسید سے کچھ سہولت حاصل کرنی مطلب میں پیدا ہو اب چونکہ  $۲ن - ۱$  زیادہ ہوتے ہی اور اسے سب سے  $۲ن$  زیادہ ہوتے سے تو ہم فرض کریں گے کہ  $۲ن + ۱ = ۲ن + ۱$  اور موانق فرض کیے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  $۲ن + ۱ = ۲ن + ۱$  اور اس مساوات درجہ دوم میں کو مقدار مجہول فرض کر کے حل کرنی سے حاصل ہوتی ہے یہ قیمت  $۲ن$  کی  $۲ن + ۱ = ۲ن + ۱$  پس یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ تاکہ  $۲ن$  ایک ایسا عدد ہو جاوے کہ مقدار  $۲ن - ۱$  ایک کامل مخدور ہو جاوے لازم ہے کہ  $۲ن + ۱$  ایک کامل مخدور ہو اور اس صورت میں ظاہر ہے کہ اگر  $۲ن + ۱ = ۲ن + ۱$  اور  $۲ن - ۱ = ۲ن - ۱$  اور





اور اس کے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  $۲ + ۱ = \sqrt{۵ - ۱}$  اور جس وقت مجدد درجہ  
 دو نظر فون اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  $۵ - ۱ = ۴ = ۲ + ۲$  اور جس وقت  
 اور اس کے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  $۲ - ۱ = ۱ = ۱ + ۰$  اور جس وقت فرض کر لی کہ  
 مقدار پھول کے حل کرتے ہیں ہم اس مساوات درجہ دوم کو تو حاصل ہوتی ہے یہ قیمت ن کی  
 $۲ = ۱ + \sqrt{۵ - ۱}$  اور چونکہ ہم سے قیمت ن کی حاصل ہوتی ہے جس وقت  $۰ =$  تو حاصل  
 ہوگی ہمیں یہ قیمت ن کی  $۱ =$  اور اس کے حاصل ہوتی ہے یہ قیمت واسطی ن کے

$۲ = ۱ + \sqrt{۵ - ۱}$  اور اس مساوی  
 $\sqrt{۵ - ۱} + ۲ = ۱ + \sqrt{۵ - ۱} + ۲ = ۳$  اور اس مساوی  
 $\sqrt{۵ - ۱} + ۲ = ۱ + \sqrt{۵ - ۱} + ۲ = ۳$  اور اس مساوی  
 اب عدد واسطی ن کے  $۱ + ۲ = ۳$  ایک کامل مربع ہو جاوے اسے جانتا ہے کہ  $۱ + ۲ = ۳$   
 کا زیادہ ہے  $۳$  سے اور کم  $۳$  سے اور اس مساوی فرض ہیں ہم کہ  $\sqrt{۵ - ۱} + ۲ = ۳$  اور  
 جس وقت مجدد درجہ دوم کو قیمتہ ہیں ہم دو نظر فون اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہے یہ مساوات

$۱ + ۲ = ۳$  اور اس مساوی حاصل ہوتی ہے یہ مساوات درجہ دوم کی  
 $۲ - ۱ = ۱ = \frac{۱}{۲}$  اور اس کو حل کرنی سے حاصل ہوتی ہے یہ قیمت ن کی

$$\frac{\sqrt{۵ - ۱} + ۲}{۲} = \frac{\sqrt{۵ - ۱} + ۲}{۲} + ۱ = ۲$$

اور یہاں پہ معلوم ہوتا ہے کہ  $۲$  سے زیادہ ہے  $۲$  سے اور اس مساوی ہم فرض کریں گے کہ  $۲ + ۱ = ۳$   
 اور اس مساوی حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  $۲ + ۱ = ۳$  اور جس وقت مجدد درجہ  
 ہم دو نظر فون اس مساوات میں  $۲$  کو تو حاصل ہوگی یہ مساوات  $۲ + ۱ = ۳$   
 اور جس وقت مجدد درجہ دوم کو قیمتہ ہیں ہم دو نظر فون اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  
 $۳ + ۱ = ۴ = ۲ + ۲$  اور اس مساوی حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  
 $۲ - ۱ = ۱ = ۱ + ۰$  اور اس مساوی حاصل ہوتی ہے یہ مساوات درجہ  
 دوم سے حاصل ہوتی ہے یہ قیمت واسطی ن کے  $۲ = ۱ + \sqrt{۵ - ۱}$  اور اس مساوی  
 آخر کی وہی شکل ہے جو صورت مفروض کی ہے تو واسطی حاصل کرنی کم سے کم قیمت ن کی مفروضی کو فرض کرنا  
 ہم  $۰ =$  اور اس مساوی حاصل ہوگی یہ مساوات  $۱ =$  اور اس مساوی

$$ن = \frac{۲ + \sqrt{۲ + ۲}}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱ \text{ اور اس سے } ۲ = \frac{۲}{۲} = ۱$$

یہ یعنی  $۵ = \sqrt{۲۵} = \sqrt{۱ + ۲۴} = \sqrt{۱ + ۲ \times ۶} = \sqrt{۱ + ۶ \times ۲}$   
 ان کے دریافت کرین کہ صورت  $۱ + ۲$  ایک کامل مجذور ہو جائے اب چونکہ جذر  $۱ + ۲$  کا زیادہ  
 ہے ان سے تو فرض کرتے ہیں  $۲ = ۱ + ۲$  اور اگر دو نون اس وقت  
 کا مجذور لین تو حاصل ہوگی یہ مساوات  $۱ + ۲ = ۱ + ۲$  اور اس سے حاصل  
 ہوتی ہے یہ مساوات  $۲ - ۱ = ۱$  اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات

$$ن = \frac{۲ - ۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \text{ اور حل کرنی سے اس وقت درج دوم کی حاصل ہوگی یہی قیمت}$$

داسطی ن کے  $ن = \frac{۲ + \sqrt{۲ + ۲}}{۲}$  اور یہاں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ

ن زیادہ ہے  $\frac{۲}{۲} = ۱$  اور اس سے اسطی ن زیادہ ہے  $\frac{۲}{۲} = ۱$  اور اس سے اسطی ن زیادہ ہے

$$۱ + ۲ = ۳ + ۲ = ۵ \text{ اور اس سے معلوم ہوتا ہے کہ } ۳ + ۲ = ۵$$

یا  $۳ + ۲ = ۵$  اور اس سے معلوم ہوتا ہے کہ  $۳ + ۲ = ۵$  اور اس سے حاصل ہوتا ہے یہ

$$۲ - ۱ = ۱ \text{ اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات}$$

مساوات  $ن = \frac{۲ + \sqrt{۲ + ۲}}{۲}$  اور یہاں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ زیادہ ہے  $\frac{۲}{۲} = ۱$  سے

اور اس سے اسطی ق سے پس فرض کرتے ہیں ہم کہ  $ن = ۱$  اور اس سے اسطی  $۲ + ۱ = ۳$

$$۲ + ۱ = ۳ \text{ اور اس سے معلوم ہوتا ہے کہ } ۲ + ۱ = ۳$$

اس مساوات کو اس وقت حاصل ہوگی یہاں  $۲ + ۱ = ۳$  اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ

$$۲ - ۱ = ۱ \text{ اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات}$$

$$۲ - ۱ = ۱ \text{ اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات}$$

اور جس وقت حل برین ہم اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہ قیمت ق کی ق =  $\frac{ک + ۴س - ک}{۲}$  اور بیان سے معلوم ہوتا ہے کہ ق زیادہ ہے کہ سی اور اس مساوی ہم فرض کرتی ہیں کہ ق = ک + س اور بیان سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ۲ + ۳ = س =  $\sqrt{۴ - ک}$  اور ۴ + ۱۲ = ک + ۳ اور ۴ + ۳ = ۴ - ک = ۳ یا ۴ - ک = ۱۲ = ک = ۴ + ۳ اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات کہ ۲ - ۳ = ک = ۲ + ۱ اور حل کرتی سی اسکو حاصل ہوتا ہے کہ ۲ = س +  $\sqrt{۴ - س}$  اور پس جس وقت فرض کریں ہم س = ۰ = اوسوقت حاصل ہوگی یہ مساوات کہ ۱ = اور اس مساوی ق = ۱ اور ن = ۲ اور ن = ۳ یا  $\sqrt{۴ + ن} + ۱ = ۸$  عمل مذکورہ بالا کا بہت اختصار ہو سکتا ہے بوسیلہ ترکیب مذکورہ کی اور یہ ترکیب اور مثالوں پہی جاری ہو سکتی ہے چونکہ  $\sqrt{۴ + ن} + ۱$  کم ہے ۳۲ سے تو اسی واسطی ہم فرض کرتے ہیں کہ  $\sqrt{۴ + ن} + ۱ = ۳۲ - ن$  اور جس وقت مجذور کرتے ہیں ہم دونوں طرفوں اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہ مساوات  $۴ + ن + ۱ = ۱۲۸ - ۶ن + ن + ۱۰۲۴$  اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  $۶ن - ۱۰۲۴ = ۱۲۸ - ۶ن + ۱۰۲۴$  اور جس وقت حل کریں گے اس مساوات درجہ دوم کو اوسوقت حاصل ہوگی قیمت واسطی ق کے

اور بیان سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ن کم ہے ۳۲ سے 
$$ن = \frac{۲ + ۳ + \sqrt{۴ + ۲}}{۲}$$

فرض کریں گے کہ ن = ۳ - ق اور جس وقت مجذور کرتی ہیں ہم دونوں طرفوں اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہ مساوات  $۹ - ۱۲ق + ق + ۱۲ق + ق = ۴ + ن + ۱۰۲۴$  اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  $۲ق - ۱۲ق + ق = ۲ - ۱۰۲۴ + ۱۲۸ - ۶ن + ۱۰۲۴$  اور جس وقت حل کریں گے اس مساوات درجہ دوم کو واسطی حل کریں گے قیمت ق کی تو حاصل ہوگی یہ قیمت ن کی ن =  $\sqrt{۴ + ق} + ۱$  اور جس وقت فرض کرتے ہیں ہم ق = ۰ = اوسوقت ق = ۱ اور اس مساوی ن = ۳ اور  $\sqrt{۴ + ن} + ۱ = ۸$  جبکہ یہی اب فرض کریں گے  $۸ =$  یعنی جانتے ہیں ہم دریافت کرنی کوئی ایسی قیمت واسطی ق کے کہ صورت  $\sqrt{۴ + ن} + ۱$  کی ایک کامل مجذور ہو جائی اس صورت میں ظاہر ہو کہ  $\sqrt{۴ + ن} + ۱$  کم ہے نسبت ۳۲ کی اور اس مساوی ہم فرض کرتی ہیں کہ  $\sqrt{۴ + ن} + ۱ = ۳۲ - ن$  اور جس وقت مجذور کرتے ہیں ہم دونوں طرفوں اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  $۴ + ن + ۱ = ۱۰۲۴ - ۶ن + ن + ۱۰۲۴$  اور اس سے حاصل ہوگی یہ مساوات  $۶ن - ۱۰۲۴ = ۱۰۲۴ - ۶ن + ۱۰۲۴$  اور جس وقت حل کریں گے اس مساوات

درج دوم کو واسطی حل کرنی قیمت آن کے تو حاصل ہوگی یہ قیمت آن کی  $n = ۳ + ۸n + ۱۴$   
 اور جسوقت  $n = ۰$  اوستون = ۱ اور اسید واسطی حاصل ہوتی ہے یہ قیمت واسطی

$\sqrt{۱ + ۸n}$  کے  $\sqrt{۱ + ۸n} = ۳$  اس طرح سی ہم اور صورتوں میں عمل کر سکتے ہیں بشرطیکہ  
 عدد واسطی اور مجدد رہو اور اخیر کو ہم حاصل کرنیگی ایک ایسی صورت جبریہ  $\sqrt{۱ + ۶n}$  مثلاً بہ  
 صورت مفروضہ کے اور اس صورت میں تاکہ جذر کی علامت دور ہو جایا ہم فرض کریں گے کہ  $۶ = ۰$  اور  
 بعد از ان ہم بہ اولیٰ حلین گے اور قیمتیں تمام اون حروف کی جو ہم متواتر فرض کرتے گئے تھے دریافت  
 کرنیگی اور اخیر کو قیمت آن کی معلوم ہو جائیگی اور عمل تمام ہو جائیگا یعنی بذریعہ اس قیمت آن کی صورت جبریہ  
 (ط  $n + ۱$ ) ایک کامل مجدد ہو جائیگی اسجای واضح ہو کہ بعض اوقات ہمارا مطلب بہت سہولت سے  
 حاصل ہو جاتا ہے لیکن اکثر ہمیں بہت سی عمل کرنی پڑتے ہیں علوئاً زیادہ یا کم ہونا سوتوں ہی اور خواص  
 عدد واسطی کی لیکن ہمیں ایک ایسی اصول اور فوائد دریافت نہیں ہوئے ہیں کہ اونکی ذریعہ سی بہ بات  
 پہلی سے معلوم ہو جایا کری کہ اس مثالیں اتنی عمل کرنی ہوگی واسطی اعداد کی حکم میں  $۳۳$  سی بہت عمل  
 ضرور نہیں ہوتی ہیں لیکن جسوقت  $n = ۱۳$  اوستوت حساب بہت مشکل اور طریس ہو جاتا ہے اور واسطی  
 مثال کے اسباب کو ہم اسجای لکھتے ہیں فرض کرو  $n = ۱۳$  یعنی چاہے ہم  $n$  دریافت کرنی ایسی  
 قیمت واسطی آن کے صورت جبریہ  $\sqrt{۱ + ۸n} = ۱۳$  ایک کامل مجدد ہو جایا اس صورت میں ظاہر ہے

کہ  $\sqrt{۱ + ۸n} = ۱۳$  زیادہ ہے  $n = ۳۳$  سی اور اسید واسطی ہم فرض کرتی ہیں کہ  $\sqrt{۱ + ۸n} = ۱۳$   
 اور جسوقت مجدد کرتے ہیں ہم دونوں طرف اس مساوات کو اوستوت حاصل ہوتے ہیں مساوات  $n + ۱ = ۱۳$   
 $4n + 4 + n + ۱ = ۱۳$  اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  $n - ۶ = ۱۳ - ۱$   
 اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  $n - ۶ = ۱۳ - ۱$  اور جسوقت حل کرتے ہیں  
 مساوات درج دوم کو اوستوت حاصل ہوگی یہ مساوات  $n = ۳ + ۸n + ۱۴ = ۱۳$

اور بیان سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ  $n$  زیادہ ہے  $n = ۱۳$  سی یعنی  $n$  زیادہ ہے  $n = ۱۳$  سی اور اسید واسطی  
 ہم فرض کرتے ہیں کہ  $n = ۱۳$  اور بیان سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  $n + ۱ = ۱۳$   
 $۳n + ۱۳ = ۱۳$  اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  $n + ۱ = ۱۳$   
 اور جسوقت مجدد کرتے ہیں ہم دونوں طرف اس مساوات کو حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  
 $n + ۱ = ۱۳$  اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  
 $۱۳ - ۱ = ۱۳$  اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات

اوسوت حاصل ہوگی بہ مساوات ۳ق - ۲ق = ۱ + ۱ اور جبوت حل کرتے ہیں اس مساوات درجہ  
 دوم کو تو حاصل ہوگی بہ قیمت ق کی ت =  $\frac{ق + \sqrt{۳ق + ۳}}{۳}$  اور یہاں سے یہ معلوم ہوتا ہے

کہ ق زیادہ ہے  $\frac{۳ق}{۳}$  یعنی ق سے تو فرض کرتے ہیں ہم کہ ت = ق + ک اور اس واسطے حاصل ہوگی یہ  
 مساوات ۳ق + ۳ک = ق +  $\sqrt{۳ق + ۳}$  اور اس واسطے حاصل ہوگی یہ مساوات

۲ق + ۳ک =  $\sqrt{۳ق + ۳}$  اور جبوت مجذور کرتے ہیں ہم دونوں طرفوں اس مساوات کو اوسوت  
 حاصل ہوگی یہ مساوات ۳ق + ۳ = ۳ق + ۱۲ + ۱۲ک + ۹ک<sup>۲</sup> اور اس سے یہ حاصل ہوتا ہے

۹ق - ۱۲ک = ۹ک<sup>۲</sup> - ۳ اور اس سے یہ حاصل ہوتا ہے ۳ق - ۴ک = ۳ک<sup>۲</sup> - ۱ اور جبوت  
 حل کرتے ہیں ہم اس مساوات درجہ دوم کو تو حاصل ہوتی ہے بہ قیمت ق کے

ق =  $\frac{۳ک + \sqrt{۳ک - ۳}}{۳}$  اور یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ ق زیادہ ہے

۲ک + ۳ک سے یعنی ق زیادہ ہے کہ سے تو فرض کرتے ہیں ہم کہ ق = ک + س اور اس واسطے  
 حاصل ہوگی یہ مساوات ۳ک + ۳س = ۳ک +  $\sqrt{۳ک - ۳}$  اور اس سے حاصل ہوتی

ہے یہ مساوات ک + س =  $\sqrt{۳ک - ۳}$  اور جبوت مجذور کرتے ہیں ہم دونوں طرفوں اس  
 مساوات کا تو حاصل ہوگی یہ مساوات ک + ۴س + ۳س<sup>۲</sup> = ۳ک - ۳ اور اس سے

حاصل ہوتی ہے یہ مساوات ۲ک - ۳س = ۳س<sup>۲</sup> + ۳ اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  
 ۴ک - ۳س = ۳س<sup>۲</sup> + ۱ اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات

۴ک - ۳س =  $\frac{۳س + ۱}{۳}$  اور جبوت حل کرتے ہیں اس مساوات درجہ دوم کو تو حاصل  
 ہوگی بہ قیمت ک کی کہ =  $\frac{۳س + \sqrt{۳س + ۱}}{۳}$  اور یہاں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ

زیادہ ہے  $\frac{۳س + ۱}{۳}$  یعنی زیادہ ہے سے تو ہم اس واسطے فرض کرتے ہیں کہ ک = س + ع  
 اور اس واسطے حاصل ہوگی یہ مساوات ۴س + ۱ = ۳س + ۳ع +  $\sqrt{۳س + ۱}$  اور اس سے

حاصل ہوتی ہے یہ مساوات ۳س + ۱ = ۳س + ۳ع +  $\sqrt{۳س + ۱}$  اور جبوت مجذور کریں ہم  
 دونوں طرفوں اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہ مساوات ۴س + ۱ = ۳س + ۳ع + ۳ع<sup>۲</sup> =

۳س + ۳ع + ۳ع<sup>۲</sup> اور اس سے حاصل ہوتا ہے یہ ۳س - ۳ع = ۳ع<sup>۲</sup> - ۱ اور اس سے  
 یہ ۳س - ۳ع = ۳ع<sup>۲</sup> - ۱ اور جبوت حل کرتے ہیں اس مساوات درجہ دوم کو اوسوت

حاصل ہوگی یہ مساوات  $س = ۳ع + \sqrt{۱۳ع - ۱}$  اور یہاں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ  $س$  زیادہ  
 ہے  $۳ع + ۳$  یعنی  $۳ع$  سے اور اسے واسطی ہم فرض کر لیں  $س = ۳ع + ۱$  اور اب  
 حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  $ل + ۳ = ۳ع + ۱$  اور اس سے حاصل ہوتی  
 ہے یہ مساوات  $ل = ۳ع - ۱$  اور اگر مجدد در کین ہم دو طرفوں اس مساوات  
 کو تو حاصل ہوگی یہ مساوات  $۹ع + ۶ل + ۱ = ۳ع - ۱$  اور اس سے حاصل  
 ہوتی ہے یہ مساوات  $۳ع - ۶ل = ۱$  اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات

$$ع - \frac{۲}{۳} ل = \frac{۱ + ل}{۳}$$

اور جو فرض کر کے  $ع$  کو بطور مقدار چھوٹی کے

حل کرتے ہیں ہم اس مساوات درجہ دوم کو تو حاصل ہوتی ہے یہ مساوات

$$ع = \frac{۳ + \sqrt{۱۳ل + ۴}}{۳}$$

اور یہاں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ  $ع$  زیادہ ہے

$\frac{۴}{۳} ل$  سے یعنی  $ل$  سے اور اسے واسطی ہم فرض کرتے ہیں کہ  $ع = ل + م$  اور اسے واسطی حاصل  
 ہوگی یہ مساوات  $۳ل + ۳ = ۳ل + م + \sqrt{۱۳ل + ۴}$  اور جو سمت نکال ڈالیں دونوں  
 طرفوں اس مساوات سے  $۳ل$  کو تو حاصل ہوگی یہ مساوات  $ل + م = \sqrt{۱۳ل + ۴}$  اور  
 جو سمت مجدد کرتی ہیں ہم دو طرفوں اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہے یہ مساوات

$$ل + م + ل + م = ۱۳ل + ۴$$

اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات

$۱۲ل - ۸م = ۱۳ل - ۴$  اور جو سمت قسمت کرتی ہیں دونوں طرفوں اس مساوات  
 کو عدد  $۴$  پر تو حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  $۳ل - ۲م = ۱$  اور جو سمت مقرر کریں  
 ل کو بطور مقدار چھوٹی کے جاری کریں ہم اس مساوات پر قاعدہ مساوات درجہ دوم کا تو حاصل

$$ہوگی یہ قیمت واسطی کے  $ل = \frac{۳ + \sqrt{۱۳م - ۳}}{۳}$  اور یہاں سے یہ معلوم ہوتا$$

ہے کہ  $ل$  زیادہ ہے  $\frac{۳}{۳}$  سے یعنی زیادہ ہے  $م$  سے اور اسے واسطی ہم فرض کرتے ہیں کہ

$ل = م + ۱$  اور اسے واسطی حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  $۳م + ۳ = م + ۱ + \sqrt{۱۳م - ۳}$   
 اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات جو سمت نکال ڈالیں  $۲م + ۲ = \sqrt{۱۳م - ۳}$   
 $۲م + ۲ = ۱۳م - ۳$  اور جو سمت مجدد در کین دونوں طرفوں اس مساوات کو تو حاصل

ہوگی یہ مساوات ۴م + ۱۲ لام + ۵۹ = ۲۱۳ - ۳ اور اس کے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  
 ۴م - ۱۲ لام = ۹ لآ + ۳ اور جس سمت کرتی ہیں دونوں طرف اس مساوات کو عدد ۳ پر تو حاصل

ہوتی ہے یہ مساوات ۴م - ۱۲ لام = ۳ لآ + ۱ اور اس کے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات

۴م - ۱۲ لام =  $\frac{۳ لآ + ۱}{۳}$  اور جس وقت حل کرتے ہیں اس مساوات درجہ دوم کو تو حاصل ہوتی ہے  
 یہ قیمت واسطی تمہیکے م =  $\frac{۳ لآ + ۱}{۳}$  اور یہاں سے یہ بات معلوم ہوگی

ہر کہ م زیادہ ہے  $\frac{۵}{۳}$  لایسے یعنی لآ سے اور اس پر واسطی ہم فرض کرتے ہیں کہ م = لآ + ۱  
 اور اس پر واسطی حاصل ہوتی ہے یہ مساوات ۳ لآ + ۳ = ۳ لآ + ۳ اور اس کے

حاصل ہوتی ہے یہ مساوات لآ + ۳ =  $\sqrt{۳ لآ + ۳}$  اور جس وقت مجدد کرتے ہیں ہم  
 دونوں طرف اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہے یہ مساوات لآ + ۶ لآ + ۹ = ۳ لآ + ۳ اور

اس کے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات ۱۲ لآ - ۶ لآ = ۹ لآ - ۳ لآ یا ۶ لآ = ۳ لآ - ۳ اور  
 اور اس کے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات لآ - ۱ =  $\frac{۳ لآ - ۳}{۳}$  اور جس وقت مقرر کرگیں گے

بطور مقدار مچھول کے حل کرتی ہیں ہم اس مساوات درجہ دوم کو تو حاصل ہوتی ہے یہ مساوات

لآ =  $\frac{۳ لآ - ۳}{۳}$  اور یہاں ہی یہ معلوم ہوتا ہے کہ لآ زیادہ ہو سکتی ہے اور اس پر واسطی

فرض کرتی ہیں ہم کہ لآ = ۳ + ۲ اور اس پر واسطی حاصل ہوگی یہ مساوات ۳ + ۲ = ۳ + ۲ اور  
 اور جس وقت دور کرتے ہیں ہم دونوں طرف اس مساوات میں سی مقدار کو تو حاصل ہوگی یہ مساوات

۳ + ۲ = ۳ + ۲ اور جس وقت مجدد کرتے ہیں ہم دونوں طرف اس مساوات کو تو  
 حاصل ہوگی یہ مساوات ۴ لآ + ۲ لآ + ۳ لآ = ۳ لآ + ۳ اور اس کے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات

۴ لآ - ۲ لآ = ۳ لآ + ۳ اور جس وقت سمت کرنے ہیں ہم دونوں طرف اس مساوات کو عدد ۲ پر  
 تو حاصل ہوگی یہ مساوات لآ - ۲ لآ = ۳ لآ + ۳ اور جس وقت حل کرتے ہیں اس مساوات درجہ دوم

کو تو حاصل ہوگی یہ مساوات لآ =  $\sqrt{۳ لآ + ۳}$  اب ظاہر ہے کہ یہ صورت اخیر متساوی ہے  
 صورت مفروضہ کے اور اس پر واسطی ہم فرض کرتے ہیں کہ لآ = ۰ اور اس پر واسطی حاصل ہوگی یہ مساوات

لآ = ۰ اس لیے اب لکھتی ہیں ہم تینوں مساواتوں کی جو کہ متواتر فرض کی گئی ہیں نقشہ ذیل میں





جس وقت کہ ط = ی - ۱ اگر اور سمت فرض کریں جسم ن = ی تو حاصل ہوگی ہمیں یہ مساوات ط + ۱ = ی  
 ی - ۲ + ۱ اور مجذور ہوئی - ۱ کا اب فرض کر دو کہ ط = ی - ۱ ایسے فرض کر دو ط کو گاہ نسبت ایک عدد مجذور  
 کے بقدر عدد آئے کہ نسبت اب ضرور ہوگی کہ ہو دو یہ مساوات (ی - ۱) ن + ۱ = م اور بطور گزشتہ سے  
 یہ بات ظاہر ہے کہ م کم ہی نسبت ہی ن کے اور اس واسطے ہم فرض کریتے ہیں کہ م = ی - ن - ۱ اور  
 اس واسطے حاصل ہوگی یہ مساوات (ی - ۱) ن + ۱ = ی ن - ۲ مساوات  
 اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات ۲ - ی ن = ۱ - ن اور اگر مقرر کر لی ن کو بطور مفروضہ مجبور کے حل  
 کریں ہم یہ مساوات درج دوم کو تو حاصل ہوگی یہ قیمت ن کی ن = ی ن + م  $\sqrt{ن^2 - ۱}$  مساوات  
 اور یہ جہاں ظاہر ہے کہ علامت جذور کی دور ہو جاوے گی اگر فرض کریں ہم ن = ۱ اور اس صورت میں حاصل ہوگی یہ  
 مساوات ن = ۲ ی اور م = ۲ ی - ۱ ایسی بات اس طرح ہی ظاہر ہو چو کہ ن = ۲ ی اور  
 م = ۲ ی - ۱ اتو ط ن + ۱ = م ی - م ی + ۱ = (۲ ی - ۱) ایسے مجذور ہوئی - ۱ کا مثلاً فرض کر دو  
 کہ ط = ۲ م اور اس واسطے م = ۵ اور اس سے حاصل ہوگی یہ قیمت ن کی ن = ۱۰ اور م = ۲۱ اور  
 = (۹ م) اب فرض کر دو کہ ط = ی + ۱ ایسے یہ کہ ط زیادہ ہے کسی عدد مجذور سے بقدر عدد آئی اور اس میں  
 ہی یہ بات ضرور ہے کہ (ی + ۱) ن + ۱ = م اور چونکہ اس صورت میں زیادہ ہے ی ن سے تو فرض کرتے ہیں  
 ہم کہ م = ی ن + ن اور اس واسطے حاصل ہوگی یہ مساوات (ی + ۱) ن + ۱ = ی ن + ن + ۱  
 یہ مساوات ی ن + ن + ۱ = ی ن + ۲ ی ن + ن اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  
 ی ن - ۲ ی ن = ن - ۱ اور جس وقت حل کرتے ہیں اسلئے ن کو اور سمت حاصل ہوتی ہے یہ قیمت ن  
 کی ن = ی ن + م  $\sqrt{ن^2 + ۱}$  اب فرض کر لیں م = ۱ اور موافق اس فرض کی حاصل ہوتی  
 ہے یہ مساوات ن = ۲ ی اور م = ۲ ی + ۱ اور یہی بات ظاہر ہوتی ہے اس سے کہ جس وقت ط = ی + ۱  
 اور ن = ۲ ی اور سمت ط ن + ۱ = م ی + م ی + ۱ = (۲ ی + ۱) = ایک مجذور کے مثلاً فرض  
 کر دو کہ ط = ۱۰ اور یہاں ہم معلوم ہوا کہ ی = ۲ اور اس واسطے حاصل ہوگی یہ مساوات  
 ی ن + ۱ = م اور اس واسطے ن = ۸ اور م = ۲۳ اب فرض کر دو کہ ط = ی + ۲ سے فرض  
 کر دو ط زیادہ ہے نسبت کسی عدد مجذور کی بقدر عدد ۲ کی نسبت اس عدد میں حاصل ہوگی یہ مساوات  
 (ی + ۲) ن + ۱ = م اور اس واسطے معلوم ہوا کہ م زیادہ ہے ی ن اور اس واسطے ہم فرض کرتے ہیں کہ  
 م = ی ن + ن اور اس سے حاصل ہوگی یہ مساوات م ن - ۲ ی ن = ن - ۱ اور اس سے حاصل  
 ہوتی ہے یہ مساوات

ن = ی + ن + ۱ = ی + ن + ۲ = ۲

ابن ذریعہ کی روکوت = ۱ اور ہم اس سے اسطی صورت

کر لیکن کن = ی اور م = ی + ۱ یہی بات اور طرحی یہی ظاہر ہے کسوا اسطی کہ صورت  
 ط ۱ + ۱ = ۱ + ۲ = ۳ + ۱ = ۴ اور ن = ی + ۱ اور م = ی + ۲ = ۳ + ۱ = ۴ اور ن = ی + ۱ = ۲ + ۱ = ۳  
 مجددی کی مندرجہ ذیل صورت = ۱ پس اس صورت میں ظاہر ہے کہ ی = ۳ اور اس سے اسطی صورت جبر

۱ + ۱ = ۲ اور اس صورت میں ن = ۳ اور م = ۱۰ اگر ط = ۸۳ تو ضروری ہے کہ ی = ۹  
 اور اب یہی ۳ اور ن = ۱ = ۴ اور اس صورت میں ن = ۹ اور م = ۸۲ سوای خاص صورتوں مذکورہ بالا

ایک اور یہی خاص صورتیں بارنوبی یعنی ۱ اور ۲ ہیں جو صورت کہ ہو وی ط اس شکل کی ی = ۱ + ۱ = ۲  
 کیونکہ اس صورت میں اگر فرض کریں م = ن = ۳ تو صورت جبر ط ۱ + ۱ ہو جاتی ہے

ی = ۱ + ۱ = ۲ (ی + ۱) = ۳ = ایک مجددی کے مثلاً اگر ی = ۳ اور م = ۱ تو

ی + ۱ = ۲ + ۱ = ۳ = ۱ + ۱ = ۲ = ۱۵ : ط = ۱۵ اور اس صورت میں اگر فرض کریں م = ن = ۱  
 تو حاصل ہوگی یہ مساوات ط ۱ + ۱ = ۱ + ۱ = ۲ اور م = ۱۶ = ۱ + ۱ = ۲ = ایک عدد مجددی کے  
 اگر ی = ۴ اور م = ۳ اور ن = ۲ تو حاصل ہوگی یہ مساوات ط = ۲ + ۱ = ۳ = ۱ + ۱ = ۲

۳ + ۳ = ۶ + ۳ = ۹ = ۲ + ۳ = ۵ اور اس سے اسطی حاصل ہوگی یہ مساوات

ط ۱ + ۱ = ۲ + ۱ = ۳ = ۱ + ۱ = ۲ = ۳۶ = ۱ + ۱ = ۲ = ۱۹ = ایک عدد کی مجددی اور اس سے اسطی

اور مثالیں یہی مل سکتی ہیں اب ہم کہتے ہیں وہ صورت جسکی کلنے کا حصہ پہلی اڑا کہ آتا اور اس صورت  
 میں قیمتیں ط اور ن اور م ط ۱ + ۱ یعنی م کی گہی ہو وی میں صورت ویل میں مذکور ہیں مطابق برتیب  
 ط کے چوتھی قیمتیں عدد ن کی ایسی کہ اولی ذریعہ سی ط ۱ + ۱ کامل رہے ہو جاوے

| ط | ن | م | ط   | ن  | م   |
|---|---|---|-----|----|-----|
| ۲ | ۲ | ۳ | ۱۸۰ | ۱۰ | ۷۲۹ |
| ۳ | ۱ | ۲ | ۱۴  | ۴  | ۱۵  |
| ۵ | ۲ | ۴ | ۱۵  | ۱  | ۴   |
| ۶ | ۲ | ۵ | ۱۶  | ۸  | ۳۲  |
| ۷ | ۲ | ۸ | ۱۸  | ۴  | ۱۷  |
| ۸ | ۱ | ۲ | ۱۹  | ۳۹ | ۱۷۰ |

| ୧     | ୨    | ୩  | ୧          | ୨        | ୩  |
|-------|------|----|------------|----------|----|
| ୧     | ୧    | ୧  | ୧୧         | ୧        | ୧  |
| ୦୦    | ୧୧   | ୧୧ | ୧୦         | ୧        | ୧୧ |
| ୧୧୧   | ୧୧   | ୧୧ | ୧          | ୧        | ୧୧ |
| ୧୧    | ୧    | ୧୧ | ୧୧         | ୦        | ୧୧ |
| ୧୧୧୧  | ୦୧୧  | ୧୧ | ୦          | ୧        | ୧  |
| ୧୧୧   | ୧୦   | ୧୧ | ୦୧         | ୧୦       | ୧୧ |
| ୧୧୧   | ୧୧   | ୧୦ | ୧୧         | ୦        | ୧୧ |
| ୧୧୧୧୦ | ୧୦୧୧ | ୧୧ | ୧୧୧        | ୧୧       | ୧୧ |
| ୧୧    | ୧    | ୧୧ | ୧୧୧୧       | ୧୧୧      | ୧୧ |
| ୧     | ୧    | ୧୧ | ୧୧         | ୧        | ୧୦ |
| ୧୧    | ୧୧   | ୦  | ୧୦୧        | ୧୧୧      | ୧୧ |
| ୦     | ୧    | ୦୧ | ୧୧         | ୧        | ୧୧ |
| ୧୧୧   | ୧୦   | ୦୧ | ୧୧         | ୧        | ୧୧ |
| ୧୧୧୧୧ | ୧୧୧  | ୦୧ | ୧୦         | ୧        | ୧୧ |
| ୧୧୧୦  | ୧୧   | ୦୧ | ୧          | ୧        | ୧୦ |
| ୧୧    | ୧୧   | ୦୦ | ୧୧         | ୧୧       | ୧୧ |
| ୧୦    | ୧    | ୦୧ | ୧୧         | ୧        | ୧୧ |
| ୧୦୧   | ୧୦   | ୦୧ | ୧୦         | ୧        | ୧୧ |
| ୧୧୧୧୧ | ୧୦୧୧ | ୦୧ | ୧୧         | ୧        | ୧୦ |
| ୦୧    | ୧୧   | ୦୧ | ୧୦୧୧       | ୧୧       | ୧୧ |
| ୦୧    | ୧    | ୧୧ | ୧୧         | ୧        | ୧୧ |
| ୧     | ୧    | ୧୧ | ୧୧୧୧୧୧୧୧୧୧ | ୧୧୧୧୧୧୧୧ | ୧୧ |
| ୧     | ୧    | ୧୦ | ୧୧         | ୧        | ୧୧ |
| ୧୧୧   | ୧୧   | ୧୧ | ୧          | ୧        | ୧୧ |

| ۲       | ن      | ط  | م        | ن      | ط  |
|---------|--------|----|----------|--------|----|
| ۸۲      | ۹      | ۸۳ | ۱۲۹      | ۱۶     | ۶۵ |
| ۵۵      | ۶      | ۸۴ | ۶۵       | ۸      | ۶۶ |
| ۲۸۵۷۹   | ۳۰۹۹۶  | ۸۵ | ۲۸۸۴۲    | ۵۹۶۷   | ۶۷ |
| ۱۰۴۰۵   | ۱۱۴۲   | ۸۶ | ۳۳       | ۳      | ۶۸ |
| ۲۸      | ۳      | ۸۷ | ۷۷۷۵     | ۹۳۶    | ۶۹ |
| ۱۹۷     | ۲۱     | ۸۸ | ۲۵۱      | ۳۰     | ۷۰ |
| ۵۰۰۰۰۱  | ۵۳۰۰۰  | ۸۹ | ۳۳۸۰     | ۳۱۳    | ۷۱ |
| ۱۹      | ۲      | ۹۰ | ۱۷       | ۲      | ۷۲ |
| ۱۵۷۴    | ۱۶۵    | ۹۱ | ۲۲۸۱۲۴۹  | ۲۶۷۰۰۰ | ۷۳ |
| ۱۱۵۱    | ۱۳۰    | ۹۲ | ۳۶۹۹     | ۴۳۰    | ۷۴ |
| ۱۲۱۵۱   | ۱۲۶۰   | ۹۳ | ۲۶       | ۲      | ۷۵ |
| ۲۱۴۳۲۹۵ | ۲۳۱۰۶۳ | ۹۴ | ۵۷۷۹۹    | ۶۶۳۰   | ۷۶ |
| ۳۹      | ۴      | ۹۵ | ۳۰۵۱     | ۴۰     | ۷۷ |
| ۹۹      | ۵۰     | ۹۸ | ۴۹       | ۵      | ۹۶ |
| ۱۰      | ۱      | ۹۹ | ۶۲۸۰۹۶۳۳ | ۶۳۷۷۵۲ | ۹۷ |

واضح ہو کہ اب تک ہم نے چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں واسطی ن کے دریافت کی ہیں کہ جبکی ذریعہ سی صورت ہوتی  
 ط ۱ + ایک کامل مجذور ہو جائی لیکن اس جا یہ بھی واضح ہو کہ بذریعہ ان چھوٹے قیمتوں کی ہم دریافت  
 کر سکتے اور قیمتیں بھی متلاشہ نہیں پہلی دریافت کیا ہو کہ اگر ن مساوی فرض کیا جائی تو صورت ط ۱ +  
 ایک کامل مجذور ہو جاتی ہے اور یہ بات ہمیں بعد فرض کرنے دو مقداروں ن اور ن کے دریافت کی تھی  
 اور اخیر کی یہ مساوات حاصل ہوتی تھی  $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$  اور اس میں ن کو صفر فرض کیا تھا اور  
 اس ترکیب سے ہم قیمت واسطی ن کے حاصل کی تھی پس اگر ہم ن کو صفر تو فرض کریں لیکن کوئی اور مقدار  
 جو ایسی ہو کہ کامل مربع ہو جاوے تو ہمیں ایک اہمیت واسطی ن کے حاصل ہو جائیگی ایسی کہ اسکی ذریعہ سے  
 صورت ط ۱ + ایک کامل مجذور ہو جائیگی لیکن یہ بات ظاہر ہو کر چلی و سیدھی صورت ط ۱ +  
 کامل مجذور ہو جاتی ہے اور اسی قیمت ن کی ذریعہ سے صورت ط ۱ + کامل مجذور ہو جائیگی کیونکہ دو ن



ہو سکتی ہیں ہم کہیں گے ایک اور مثال سمجھ جاتے ہیں دریا نٹ کرنی ایک اور قیمت ن کی سوا یہ  
۱۸۰ کے پوس بن میں دریافت کی گئی جس سے کہ صورت ۱۳ ان + ایکامل مجذور ہو جای واسطی اس طلب  
کی ہم کہتی ہیں اسجا تمام مساوتین جو پہلی نیا ت کی گئی ہیں دیے مساوتین یہ ہیں

$$۱ + ۵۱۳\sqrt{۸} + ۵۲ = ۱ \text{ اور } ۱۳\sqrt{۸} + ۵۲ = ۱ \text{ اور } ۱۳\sqrt{۸} + ۵۲ = ۱$$

$$\text{اور } ۱ = \frac{۱ + ۵۱۳\sqrt{۸} + ۵۲}{۳} \text{ اور } ۱ = \frac{۱۳\sqrt{۸} + ۵۲}{۳}$$

$$۱ = \frac{۱۳\sqrt{۸} + ۵۲}{۳} \text{ اور } ۱ = \frac{۱۳\sqrt{۸} + ۵۲}{۳}$$

$$۱ = \frac{۱۳\sqrt{۸} + ۵۲}{۳} \text{ اور } ۱ = \frac{۱۳\sqrt{۸} + ۵۲}{۳}$$

$$۱ = \frac{۱۳\sqrt{۸} + ۵۲}{۳} \text{ اور } ۱ = \frac{۱۳\sqrt{۸} + ۵۲}{۳}$$

قیمت د کی مساوات اول میں تو حاصل ہوگی یہ مساوات و = ۴۰ + ۱۳(۱۸۰) = ۵۲۰ + ۲۳۴ = ۷۵۴ اور قیمت و کو مساوات دوسری  
میں تو حاصل ہوگی یہ قیمت لاکھی

$$۱ = \frac{۱۳\sqrt{۸} + ۵۲}{۳} \text{ اور قیمت لاکھی مساوات}$$

سی حاصل ہوگی کہیں گے ہم اسی مساوات تیسری میں تو اس وقت حاصل ہوگی ہم قیمت لاکھی اور قیمت  
کہیں گے ہم اس قیمت لاکھی کو مساوات چوتھی میں تو اس وقت حاصل ہوگی ہم قیمت لاکھی اور قیمت لاکھی  
ہم اس قیمت لاکھی کو مساوات باخون میں تو اس وقت حاصل ہوگی ہم قیمت لاکھی اور قیمت لاکھی ہم اس قیمت  
ع کو مساوات چہم میں تو اس وقت حاصل ہوگی ہم قیمت لاکھی اور قیمت لاکھی ہم اس قیمت لاکھی کو  
مساوات سون میں تو حاصل ہوگی ہم قیمت لاکھی اور قیمت لاکھی ہم اس قیمت لاکھی کو مساوات  
اٹھویں میں تو اس وقت حاصل ہوگی ہم قیمت لاکھی اور قیمت لاکھی ہم اس قیمت لاکھی کو مساوات  
نویں میں تو اس وقت حاصل ہوگی ہم قیمت لاکھی اور قیمت لاکھی ہم اس قیمت لاکھی کو مساوات

دوسرے میں تو اس وقت حاصل ہوگی بہین قیمت  $ق$  کی پس ان کی عملوں سے حاصل ہوتی ہے دوسری  $ق$  کی اور اگر یہ کہی جائیں اتنی عمل تو حاصل ہوگی بہین شہری  $ق$  کی اور علی نہ الیقاس اور قیمتیں ہی اس کے  
 سی حاصل ہو سکتی ہیں اسجای یعنی ساری عمل بہین ہلکے کسو اسلی کہ اوہین کچھ مشکل بات بہین ہر  
 سواہی کچھ شقت کی جو عملوں ضرب اور قسیم اور جذر کی میں ضرور ہوتی ہر

### فصل چوتھے پہچ بیان موالات مجذورون کے

سوال آئندہ بہت دلچسپ اور مفید ہیں اونکی حل کرنی سے بڑی قوت عملوں خبر بہین حاصل ہوتی ہر اور  
 ہر واحد اوہین کا بطور ایہ شکل تحریر ایہدے کے ہر کہ او سکی حل کرنی یا ثابت کرنی کی واسطی کوئی قاعدہ عام  
 وضع نہین ہر بلکہ ہر صورتیں عقلی اور ذہن کو کام میں لانا ہوتا ہر واضح ہو کہ یہ سوال غیر منقطع ہوتے  
 بہین کسو اسلی کہ اونکی واسطی کی جواب ہو سکتی ہیں

سوال ۱ جاسے بہین ہم در بات کرنا ایک ایسا عدد کہ خواہ او سپر عدد ایک زیادہ کر  
 خواہ اوہین سی اوسی عدد کو تقزوت حاصل صیح اور حاصل تقزوت دونو اعداد مجذور ہوتے ہیں پس  
 فرض کر دکہ  $ق$  ایہ عدد مطلوبہ اور موافق شرط سوال کی یہہ ہی فرض کر دکہ  $ق + ۱ = ق$  اور  
 اسکے حاصل ہوتی ہے یہہ مساوات  $ق = ۱$ ۔ اور اس مساوات سی حاصل ہوتی ہے یہہ مساوات

$ق - ۱ = ق$ ۔  $۲$  لیکن موافق دوسری شرط سوال کی  $ق - ۱$  یعنی اوسکا مساوی  $ق - ۲$   
 ایک مجذور ہونا چاہئی چونکہ اسجای یہہ بات ظاہر ہے کہ جذر  $ق - ۲$  کات سی کم ہی تو فرض کر دکہ  
 $ق - ۲ = ۲$ ۔  $ق$  اور جسوقت مجذور کرین دونو طرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات  
 $ق - ۲ = ۲$ ۔  $ق + ۲ = ق$  اور اس مساوات سی حاصل ہوتی ہے یہہ قیمت  $ق$  کے  
 $ق = \frac{ق + ۲}{۲}$  اور چونکہ  $ق = ۱$  اور

$$ق = \frac{ق + ۲}{۲} = \frac{ق + ۲ + ۲ + ۲}{۲} = \frac{ق + ۲ + ۲ + ۲}{۲} = \frac{ق + ۲ + ۲ + ۲}{۲}$$

$$ق = ۱ = \frac{ق + ۲ + ۲ + ۲}{۲} = \frac{ق + ۲ + ۲ + ۲}{۲} = \frac{ق + ۲ + ۲ + ۲}{۲}$$

$ق$  کی کچھ فرض کی جاسکتی ہے خواہ اعداد صحیح خواہ کسور لیکن چونکہ کسور بہ نسبت اعداد صحیح کی عام ہیں  
 یعنی عدد صحیح ایک کسور کی شکل سی تفسیر ہو سکتا ہے اور عکس اسکا بہین ہوتا ہے یعنی ایک کسور کی شکل عدد

صحیح کی نہیں لکھی جاسکتی ہیں تو ہم فرض کرینگے کہ  $\frac{r}{s} = \frac{r}{s}$  اور اس مساوات سے حاصل ہوتی ہیں یہ مساواتیں

$$ق^2 = \frac{r^2}{s^2} \text{ اور } م^2 = \frac{r^2 م^2}{s^2} \text{ اور } ق = \frac{r}{s} \text{ پس جسوقت کہیں گے}$$

ہم یہ قیمتیں مساوات لاکھی میں تو حاصل ہونگی یہ مساوات

$$= \frac{\frac{r^2}{s^2} + \frac{r^2 م^2 + r^2}{s^2}}{\frac{r^2 م^2}{s^2}} = \frac{r^2 + r^2 م^2 + r^2}{r^2 م^2} = \frac{r^2 + r^2 م^2 + r^2}{r^2 م^2}$$

اب اگر فرض کئے جائیں کوئی اعداد واسطی حوت  $r$  اور  $s$  کے تو حاصل

ہونگی ایسی قیمتیں واسطی لاکھی کہ اولیٰ ذریعہ سے جو قیمتیں لاکھی حاصل ہونگی ویسے ایسی ہونگی کہ اگر اون پر عدد ایک کا زیادہ کریں یا اون میں سے اسی عدد کو تفریق کریں تو دونوں اعداد مجدد حاصل ہونگی مثلاً فرض کر کے  $\frac{r}{s} = \frac{r}{s}$  مساوی ہے متوازن قیمتوں یا اعداد کے

|                             |               |                 |                 |                 |
|-----------------------------|---------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $\frac{r}{s} = \frac{1}{1}$ | $\frac{2}{1}$ | $\frac{1}{2}$   | $\frac{3}{1}$   | $\frac{4}{1}$   |
| $\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{40}{14}$ | $\frac{15}{24}$ | $\frac{40}{14}$ |

اور امتحان اس بات کا کہ یہ قیمتیں لاکھی مجدد ہو جاتی ہیں جسوقت کہ اون پر عدد آ کا زیادہ کیا جاتا ہے یا جسوقت کہ اون میں سے عدد ایک تفریق کیا جاتا ہے یوں ہوتا ہے

$$\frac{4}{2} = 1 + \frac{5}{2} \text{ اور } \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{2} = 1 + \frac{5}{2}$$

$$\left(\frac{11}{4}\right) = \frac{121}{34} = 1 + \frac{15}{34} \text{ اور } \left(\frac{4}{2}\right) = \frac{11}{14} = 1 + \frac{40}{14}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{29}{14} = 1 - \frac{65}{14} \text{ اور } \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = 1 - \frac{5}{2}$$

اور اسے یہ طرح سے



$$\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{39}{34} = 1 - \frac{15}{34}$$

۲ جانتے ہیں ہم دریافت کرنا ایک ایسا عدد کہ اگر اسے کوئی سی عدد مثل ۴ اور ۷ کے زیادہ کریں تو حاصل سب سے دو خصوصیتیں جنڈور ہوتا ہے پس برائن شرط سوال کے لیے دو خصوصیتیں لا ۴ اور لا ۷ جنڈور ہونی چاہئیں اور اسے واسطی فرض کر کے لا ۴ = ۴ اور اسے حاصل ہوتا ہے یہ

لا = ۴ - ۴ اور اسے واسطی حاصل ہوگی یہ مساوات لا ۷ = ۴ - ۴ = ۴ + ۴ = ۸ اور چونکہ یہ صورت اخیر ہی جنڈور ہونی چاہئے تو فرض کر کے اسکا خذرت + ۴ ہے اور اسے واسطی حاصل ہوگی یہ مساوات  $\sqrt{۴ + ۲} = ۴ + ۴ = ۸$  اور اسے واسطی حاصل ہوگی یہ قیمت ۴ کی ۴ =  $\frac{۴ - ۴}{۴}$  اور چونکہ لا ۴ = ۴ + ۴ = ۴ اور اسے واسطی لا = ۴ - ۴ اور چونکہ

$$۴ = \left(\frac{۴ - ۴}{۴}\right) = \frac{۴ + ۴ - ۴}{۴} = \frac{۴ + ۴ - ۴}{۴} = ۴ - ۴ = ۴$$

اور اگر فرض کریں کوئی کسر واسطی ۴ کے مثل ۴ کی تو حاصل ہوگی یہ مساوات

$$۴ = \frac{\frac{۴}{۴} + \frac{۴}{۴} - ۴}{\frac{۴}{۴}} = \frac{۴ - ۴ - ۴}{۴} = \frac{۴ - ۴ - ۴}{۴} = ۴ - ۴ = ۴$$

اور اس مساوات میں کوئی اعداد واسطی ۴ اور ۴ کے فرض کیے جاسکتے ہیں مثلاً اگر فرض کریں ہم ۴ = ۱

اور ۴ = ۱ تو حاصل ہوگی یہ قیمت واسطی ۴ کے لا = ۴ - ۴ اور اسے واسطی لا ۴ = ۱ = ۱ عدد

جنڈور کے اور لا ۴ = ۴ = ۴ جنڈور کی لیکن اگر چاہیں ہم دریافت کرنی اعداد مثبت واسطی ۴ کی تو لازم ہے

کہ فرض کریں ہم کس = ۲ اور ۴ = ۱ اور اسے واسطی حاصل ہوگی یہ مساوات لا =  $\frac{۵۴}{۱۴}$  اور اس

یے حاصل ہوتی ہیں یہ مساواتیں لا ۴ =  $\frac{۵۴}{۱۴} = ۴ + \frac{۵۴}{۱۴} = ۴ + \frac{۱۱}{۱۱} = \left(\frac{۱۱}{۱۱}\right) = ۱$  ایک عدد

جنڈور کے اور لا ۴ =  $\frac{۵۴}{۱۴} = ۴ + \frac{۵۴}{۱۴} = \left(\frac{۱۳}{۱۴}\right) = ۱$  ایک عدد جنڈور کی اور اگر فرض کریں ہم

۴ = ۱ اور ۴ = ۱ تو اسے واسطی حاصل ہوتی ہیں یہ مساوات لا =  $\frac{۱۳۳}{۹}$  اور اسے واسطی حاصل ہوتا ہے

۲ + ۲ = ۴ +  $\frac{۱۳۲}{۹}$  = ۴ +  $\frac{۱۶۹}{۹}$  =  $\left(\frac{۱۳}{۳}\right)^۲$  = عدد مجذور کے اور

۲ + ۲ = ۴ +  $\frac{۱۳۳}{۹}$  = ۴ +  $\frac{۱۶۶}{۹}$  =  $\left(\frac{۱۴}{۳}\right)^۲$  = عدد مجذور کے اگر ہم چاہیں کہ اینجی طرح

اوس صورت جبریہ کا جو قیمت لاکو تیسر کرتی ہے زیادہ ہو جاوے گی وسط کی فرضی تو لازم ہے کہ فرض کرین ہم کہ ۵ = ۵  
س = ۱ اور اس صورت میں حاصل ہوگی یہ قیمت لاکو ل =  $\frac{۲۱}{۲۵}$  اور اس سے حاصل ہوتی ہیں یہ مساوات

۲ + ۲ = ۴ +  $\frac{۲۱}{۲۵}$  =  $\left(\frac{۱۱}{۵}\right)^۲$  = ایک عدد مجذور کے اور

۲ + ۲ = ۴ +  $\frac{۲۱}{۲۵}$  =  $\left(\frac{۱۲}{۵}\right)^۲$  = ایک عدد مجذور کے

۳ دریافت کیا جاتے ہیں ایک ایسی سرکہ اگر اوسے زیادہ کرین عدد آدیر یا اوسے تقریبی کو اسی عدد  
آین سے تو حاصل جمع اور حاصل تقریبی دو نو مجذور ہو دین فرض کر کے سر مطلوبہ لاکو اس سے موافق شرائط  
سوال کے ضروری کہ ہو دین صورتین جبریہ ۱ + لا اور ۱ - لا دونوں مجذور اور اسی واسطی فرض کر کے  
۱ + لا = ق اور اس سے حاصل ہوتی ہیں مساوات لا = ق - ۱ اور ۱ - لا = ق - ۲ اور موافق  
شرط سوال کے لازم ہے کہ ۲ - ق بھی ایک مجذور ہو اس لیے کہ یہ بات ظاہر ہے کہ جذر ہر واحد دو جذران  
اس صورت جبریہ کا نہیں نکل سکتا ہے تو لازم ہے کہ دریافت کرین ہم ایک ایسی صورت جس میں کہ صورت مفروض مجذور  
ہو جائی اور یہ بات حاصل ہوتی ہے جس وقت کہ ہو دین ق = ایک کو کہ اس حالت میں ۲ - ق = ۱ - ۲ = ۱  
تو فرض کر سکتے ہیں ہم کہ ق = ۱ - ق اور اسی واسطی حاصل کیے مساوات لا = ق - ۲ اور  
۲ - ق = ۱ + ق - ۲ اور فرض کر کے جذر اس صورت کا یہ ہے ۱ - ق اور اسی واسطی حاصل  
ہوگی یہ مساوات ۱ + ق - ۲ = ق - ۱ = ۲ - ق + ق اور اس سے حاصل ہوتی ہیں مساوات  
۲ - ق = ۲ - ق + ق اور اس سے حاصل ہوتی ہیں یہ قیمت ق کی

ق =  $\frac{۲ + ۲}{۱ + ۲}$  اور اسی واسطی لا =  $\frac{۲ - ۲}{۱ + ۲}$  اور چونکہ ہر ایک سر ہے تو فرض کر کے کہ ر = ط

اور اب حاصل ہوگی یہ مساوات لا =  $\frac{۴ ط - ۴ ط}{(ط + ط)}$  =  $\frac{۴ ط (ع - ط)}{(ط + ط)}$  اور یہاں سے یہ معلوم ہوتا ہے

کہ آج زیادہ ہو نسبت لاکھی پس اسو اسطی فرض کرو کہ ع = ۲ اور ط = ۱ اور اسصورت میں حاصل ہو گئے  
 یہ قیمت لاکھی لا =  $\frac{۲۲}{۲۵}$  اب فرض کرو کہ ع = ۳ اور ط = ۲ اور اس کے حاصل ہوگی یہ مساوات  
 لا =  $\frac{۱۲۰}{۱۶۹}$  اور اسو اسطی حاصل ہوگی یہ مساوات میں

$$۱ + ۱ = ۵ = \frac{۲۸۹}{۱۶۹} \text{ اور } ۱ - ۱ = ۰ = \frac{۴۹}{۱۶۹} \text{ اور یہ دونوں محذور میں کسوا یہ طے}$$

$$\text{کہ } \left(\frac{۱۴}{۱۳}\right)^۲ = \frac{۲۸۹}{۱۶۹} \text{ اور } \left(\frac{۴}{۱۳}\right)^۲ = \frac{۴۹}{۱۶۹}$$

۴ ہم دریافت کیا جاتے ہیں ایک عدد مثل لاکھی اب کہ خواہ اسی سے عدد ۱۰ پر زیادہ کریں  
 اور خواہ اسی عدد ۱۰ میں سے تفریق کریں دو تصور تو نہیں حاصل جسے اور حاصل تفریق اعداد محذور ہو گئے  
 ہیں پس اس صورت میں ضروری کہ کوئی ایسا عدد لاکھی واسطی مقرر کریں کہ صورتیں ۱۰ + لا اور ۱۰ - لا دو  
 محذور ہو جائیں یہ سوال حل ہو سکتا ہے نیز یہ اس ترکیب کے سوال گذشتہ میں لکھی گئے ہیں لیکن اسجا یہ  
 ہم ایک اور ترکیب اسکی حل کرنی سیکے ہیں کہ مثل تبدلات بہت ظاہر ہے کہ حاصل ضرب دو محذور و لاکھی محذور ہوتا  
 ہے اور اگر ۱۰ + لا اور ۱۰ - لا محذور ہوں تو ضروری کہ حاصل ضرب لاکھی یعنی (۱۰ + لا) (۱۰ - لا)  
 یعنی ۱۰ - لا محذور ہونا چاہئے اب چونکہ اول جز اس صورت کا محذور ہے تو ہم فرض کر سکتے ہیں کہ محذور  
 ۱۰ - لاکھی ۱۰ - لا ہے اور موازن اس فرض کے حاصل ہوگی یہ مساوات

$$\sqrt{۱۰۰ - لا} = ۱۰ - لا \text{ اور جو وقت محذور کریں گے دو نون طرفوں اس مساوات کو تو حاصل}$$

$$\text{ہوگی یہ مساوات } ۱۰۰ - لا = ۱۰۰ - ۲۰ لا + لا^۲ \text{ اور اس کے حاصل ہوگی یہ مساوات}$$

$$لا + لا = ۲۰ \text{ اور میان سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ } لا = \frac{۲۰}{۱ + لا} \text{ اور میان سے یہ بات ثابت}$$

ہوتی ہے کہ اگر فرض کیجای واسطی لاکھی کے ایک ایسی قیمت جو اس مساوات سے حاصل ہوتی ہے تو حاصل ضرب  
 ۱۰۰ - لا ایک عدد محذور ہو جائیگا لیکن یہ بات ظاہر ہے کہ اگر ایک جزا حاصل ضرب مذکور کا محذور کا مثل ہو  
 تو ضروری کہ دوسرا جز بھی محذور ہو جاسکے اور میں واسطی لاکھی ایک ایسی قیمت دریافت کرنی ہے کہ جسکے  
 فریب سے دو نون صورتیں ۱۰ + لا اور ۱۰ - لا محذور ہو جائیں پس اب دریافت کرنی ہے ایک ایسی قیمت  
 واسطی لاکھی کہ ایک ان صورتوں میں سے مثل ۱۰ + لاکھی محذور ہو جائی اب ظاہر ہے کہ

$$۱۰ + لا = ۱۰ + \frac{۲۰}{۱ + لا} = \frac{۱۰(۱ + لا) + ۲۰}{۱ + لا} = \frac{۱۰ + ۲۰ + ۱۰ لا}{۱ + لا}$$

اور چونکہ  $۲ + ۲ + ۱ = ۵$  ایک مجذور ہی تو باقی رہا ہمیں یہ کہ دریافت کریں ہم کو ایسی قیمت دے

لا کہ جس کے ذریعہ سے صورت  $\frac{۱۰}{۱ + ۲}$  یا  $\frac{۱۰ + ۲ + ۱۰}{(۱ + ۲)}$  ایک مجذور ہو جائے

اور چونکہ  $۲ + ۲ + ۱ = ۵$  ایک مجذور ہی تو باقی رہا ہمیں مجذور بنانا  $۱۰ + ۲ + ۱۰$  کا اسکا جذور دے  
کہ دریافت کریں ہم ایک خاص ایسی صورت جس میں  $۱۰ + ۲ + ۱۰$  ایک عدد مجذور ہو جا اور یہ اس وقت  
ہوتا ہی جب کہ  $۳ = ۱۰۰ = ۱۰ + ۹۰ = ۱۰ + ۴۰ = ۱۰ + ۱۰۰ = ۱۰۰ = (۱۰)$  فرض کر سکتی ہیں ہم  $۳ = ۱۰ + ۲ + ۱۰$  اور اسکا

حاصل ہوگی یہ مساوات  $۱۰۰ + ۴۰ + ۱۰ = ۱۵۰$  اور اسکا جذور  $۱۰ + ۲ + ۱۰ = ۱۵۰$  اور اسکا جذور

$۱۰۰ + ۴۰ + ۱۰ = ۱۵۰$  اور اسکا جذور  $۱۰ + ۲ + ۱۰ = ۱۵۰$  اور اسکا جذور

$۱۰۰ + ۴۰ + ۱۰ = ۱۵۰$  اور اسکا جذور  $۱۰ + ۲ + ۱۰ = ۱۵۰$  اور اسکا جذور

$۱۰۰ + ۴۰ + ۱۰ = ۱۵۰$  اور اسکا جذور  $۱۰ + ۲ + ۱۰ = ۱۵۰$  اور اسکا جذور

$۱۰۰ + ۴۰ + ۱۰ = ۱۵۰$  اور اسکا جذور  $۱۰ + ۲ + ۱۰ = ۱۵۰$  اور اسکا جذور

$۱۰۰ + ۴۰ + ۱۰ = ۱۵۰$  اور اسکا جذور  $۱۰ + ۲ + ۱۰ = ۱۵۰$  اور اسکا جذور

$۱۰۰ + ۴۰ + ۱۰ = ۱۵۰$  اور اسکا جذور  $۱۰ + ۲ + ۱۰ = ۱۵۰$  اور اسکا جذور

$۱۰۰ + ۴۰ + ۱۰ = ۱۵۰$  اور اسکا جذور  $۱۰ + ۲ + ۱۰ = ۱۵۰$  اور اسکا جذور

$۱۰۰ + ۴۰ + ۱۰ = ۱۵۰$  اور اسکا جذور  $۱۰ + ۲ + ۱۰ = ۱۵۰$  اور اسکا جذور

$$۱۰ + ۲ + ۱۰ = ۱۵۰ \text{ اور } \left(\frac{۲۲}{۵}\right) = \frac{۴۸۴}{۲۵} = \frac{۲۳۴}{۲۵} + ۱۰ = ۱۰ + ۱۰$$

$$۱۰ + ۲ + ۱۰ = ۱۵۰ \text{ اور } \left(\frac{۴}{۵}\right) = \frac{۱۶}{۲۵} = \frac{۲۳۴}{۲۵} - ۱۰ = ۱۰ - ۱۰$$

صورتیں مجذور ہیں

۵ جاتے ہیں ہم دریافت کرنا ایک ایسا عدد کہ جو اس کے خواہ اسکی مجذور پر عدد

ایک کا زیادہ کریں تو دونوں صورتوں میں حاصل جمع مجذور ہوتا ہی فرض کر دو کہ لا عدد مطلوبہ ہے

بیس موافق شرائط سوال کے ضروری کہ ہو دے یہ مساوات  $۱۰ + ۲ + ۱۰ = ۱۵۰$  اور اسکا حاصل

ہوئی ہی یہ مساوات  $۱۰ + ۲ + ۱۰ = ۱۵۰$  اور اسکا حاصل ہوئی ہی یہ مساوات  $۱۰ + ۲ + ۱۰ = ۱۵۰$  اور اسکا حاصل

لا + ۱ = ف - ۲ + ۲ = ف اور چونکہ موافق شرط سوال کے ضروری ہے کہ ہو ہی لا + ۱ ایک کامل مربع تو  
 ضروری کہ ف - ۲ + ۲ = ف ایک کامل مجذور ہو اور اسجای یہ بات ظاہر ہے کہ اگر ہو ہی ف = اتو صورت  
 ف - ۲ + ۲ = ف مجذور ہو جائیگی پس فرض کرو کہ ف = ۱ + ق اور جو بقوت لکھیں گے ہم یہ قیمت ف  
 کی سجایاؤں کی صورت مذکورہ صیغہ تو حاصل ہوگی یہ مساوات لا + ۱ = ف - ۲ + ۲ = ف + ۲ =

۱ + ۱ + ۲ ق + ۲ ق + ۲ ق پس اب ضروری کہ صورت اخیر مجذور ہو اور اس کو مجذور کرنی کی سیکے  
 ترکیبیں ہیں مثلاً فرض کرو کہ جذر اس صورت کا ۱ + ق ہے اور اسی واسطی حاصل ہوگی یہ مساوات  
 $\sqrt{1 + 1 + 2ق + 2ق + 2ق} = 1 + ق$  اور جو بقوت مجذور کرتے ہیں ہم دونوں طرف اس مساوات کو  
 اوسوقت حاصل ہوتی ہے یہ مساوات ۱ + ۱ + ۲ ق + ۲ ق + ۲ ق = ۱ + ۲ ق + ۲ ق + ۲ ق اور اس سے حاصل ہو

ہی یہ مساوات ۲ ق + ۲ ق = ۰ یعنی ۲ ق = - ۱ اور ق = - ۱/۲ اور اسی واسطی  
 ف = ۱ + ۱ = ۲ اور لا = ۱ - ۱/۲ = ۱/۲ اور لا = ۱ - ۱/۲ = ۱/۲

مذ لا + ۱ = ۱ = ۱ - ۱/۲ = ۱/۲ اور لا + ۱ = ۱ + (۱ - ۱/۲) = ۱ + ۱/۲ = ۳/۲  
 اور ۱ + ۱/۲ = ۳/۲ = ۱ + ۱/۲ = ۳/۲

۱ + ۱ + ۲ ق + ۲ ق + ۲ ق یہ ہے ۱ - ق اور موافق اس فرض کے حاصل ہوگی یہ مساوات  
 $\sqrt{1 + 1 + 2ق + 2ق + 2ق} = 1 - ق$  اور جو بقوت مجذور کرتے ہیں ہم دونوں طرف اس مساوات  
 کو تو حاصل ہوتی ہے یہ مساوات ۱ + ۱ + ۲ ق + ۲ ق + ۲ ق = ۱ - ۲ ق + ۲ ق + ۲ ق اور اس سے حاصل ہو  
 ہی یہ مساوات ۲ ق + ۲ ق = ۰ اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات ۲ ق = ۰ اور ق = ۰ اور  
 اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات ق = - ۱/۲ اور اسی واسطی

ف = ۱ + ۱ = ۲ اور لا = ۱ - ۱/۲ = ۱/۲ اور لا = ۱ - ۱/۲ = ۱/۲  
 جیسکے پیشتر اب فرض کرو کہ جذر صورت مذکور کا ۱ + ق + ۲ ق ہے اور موافق اس فرض کے ظاہر ہے کہ

اول در دو اخیر کی اخذ صورت مذکور کی زائل ہو جائیگی پس اب حاصل ہوگی یہ مساوات

$\sqrt{1 + 1 + 2ق + 2ق + 2ق} = 1 + ق + ۲ ق$  اور جو بقوت مجذور کرتے ہیں ہم دونوں طرف اس  
 مساوات کو تو حاصل ہوتی ہے یہ مساوات ۱ + ۱ + ۲ ق + ۲ ق + ۲ ق = ۱ + ۲ ق + ۲ ق + ۲ ق =

(۱ + ۲ ق) + ۲ ق + ۲ ق = ۱ + ۲ ق + ۲ ق + ۲ ق اور یہاں حاصل  
 ہوتی ہے یہ مساوات ۲ ق + ۲ ق = ۰ اور یہاں معلوم ہوتا ہے کہ ق = - ۱/۲ اور ف = ۱ اور

لا = ۱ - ۱/۲ = ۱/۲ اور اس صورت مذکور کا ۱ - ق = ۱ - (- ۱/۲) = ۳/۲ اور اس صورت میں حاصل ہوگی یہ

سوات  $1 + ۲ق + ۳ق^۲ + ۴ق^۳ = 1 - ۱ق + ۲ق^۲ + ۳ق^۳ + ۴ق^۴$  اور اس سے حاصل ہوتی ہے  
یہ مساوات  $ق = ۲$  جس کے پہلی آپ فرض کرو کہ جذر صورت مذکور کا  $۱ + ۲ق + ۳ق^۲ + ۴ق^۳$  اور اب حاصل ہوتے  
یہ مساوات  $۱ + ۲ق + ۳ق^۲ + ۴ق^۳ = ۱ + ۲ق + ۳ق^۲ + ۴ق^۳$  اور یہاں سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات

$$ق = \frac{۴}{۳} \text{ اور } ۲ق = \frac{۸}{۳} \text{ اور } ۳ق^۲ = \frac{۴۸}{۳} = ۱۶ \text{ اور } ۴ق^۳ = \frac{۱۲۸}{۳} = ۴۲ \frac{۲}{۳} = ۱۴ \frac{۲}{۳}$$

$$۱ + ۲ق + ۳ق^۲ + ۴ق^۳ = ۱ + ۲ \left( \frac{۴}{۳} \right) + ۳ \left( \frac{۱۶}{۹} \right) + ۴ \left( \frac{۶۴}{۲۷} \right) = \frac{۱۶۸۱}{۲۷} = ۱ + \frac{۱۶۰۰}{۲۷} + \frac{۶۴}{۹}$$

۶ جانتے ہیں ہم دریافت کرنا ایسی اعداد کا کہ اگر دو دو کو ان میں سے کسی ضرب کریں  
اور حاصل ضربوں پر عدد ایک کا علیحدہ علیحدہ زیادہ کریں تو تینوں صورتوں میں اعداد مجذور حاصل ہوں فرض  
کر دو اعداد مطلوبہ  $۱$  اور  $۲$  اور  $۳$  ہیں پس شرائط سوال کے ہر صورت میں  $۱ + ۲$  اور  
 $۱ + ۳$  اور  $۲ + ۳$  اعداد مجذور ہوں فرض کریں یہ دو مساواتیں  $۱ + ۲ = ۱ + ۳$  اور  
 $۱ + ۳ = ۲ + ۳$  سے حاصل ہوتی ہیں یہ مساواتیں  $۱ = ۲$  اور  $۱ = ۳$  اور  
جس وقت ضرب کرتی ہیں ہم ان دونوں مساواتوں کو یکساں تو حاصل ہوگی یہ مساوات

$$۱ = ۲ = ۳ \text{ اور اس سے واسطی حاصل ہوگی یہ مساوات}$$

$$۱ + ۲ = ۱ + ۳ + \frac{(۱-۲)(۱-۳)}{۲} + \frac{(۱-۲)(۱-۳)}{۲} = ۱ + ۲ + ۳ + \frac{(۱-۲)(۱-۳)}{۲}$$

لیکن یہ بات ظاہر ہے کہ حاصل ضرب دو مجذور کا مجذور ہوتا تو اگر ضرب کریں ہم اس صورت اخیر کو  $۱ + ۲$  میں تو  
حاصل ضرب یعنی  $(۱-۲)(۱-۳) = ۱ + ۲ + ۳$  بھی مجذور ہونا چاہیے اب فرض کرو کہ جذر اس مجذور کا  
 $۱ + ۲$  اور اس سے واسطی حاصل ہوگی یہ مساوات  $(۱-۲)(۱-۳) = ۱ + ۲ + ۳$  اور اس سے حاصل  
ہوگی یہ قیمت  $۱ + ۲ = ۳$  اور اس سے واسطی حاصل ہوگی یہ مساوات  $(۱-۲)(۱-۳) = ۱ + ۲ + ۳$  اور اس سے  
اعداد واسطی  $۱ + ۲$  اور  $۱ + ۳$  اور  $۲ + ۳$  کے فرض کیے جاسکتے ہیں مثلاً اگر ہو  $۱ + ۲ = ۳$  تو حاصل ہوگی

$$۱ + ۲ = ۳ \text{ اور } ۱ + ۳ = ۲ + ۳ \text{ اور } ۲ + ۳ = ۱ + ۲ + ۳$$













اس صورت میں بیہ ظاہر ہے کہ جو صورتیں جبریہ واسطی میں عدد دن مطلوبہ کی فرض کیے گئے ہیں ویسے ایسی ہیں کہ ہر شخص کے یکایک خیال میں نہیں آتی ہیں پس اس جا بہ بات کہی جاسکتی ہے کہ گو فرض میں کوئی بات محال نہیں یا فی الحقیقت نہیں ہے لیکن ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ جو صورتیں فرض کرنی جائیں تاکہ سوال آسانی حاصل ہو سکے اسکا جواب یہ ہے کہ اگر کوئی شخص ذرا ہی غور کر لے گا اسی یہ معلوم ہوسکتا ہے کہ یہ صورتیں ایسی ہیں کہ انکی فرض کرنی سے تین شرطیں سوال کی ایک ہی بار پوری ہوجاتی ہیں اور باقی رہ جاتی ہے فقط جو تہی شرط اور اسکا پورا کرنا ہوتا ہے جو وسیلہ اور غلطوں کے بیان سے طالب علم کو ایک نئی بات یہ معلوم ہوگی کہ فرض کرنی میں ہی طریقہ اس فن کی عقل ظاہر ہوتی ہے کہ جو کہ سکول زیادہ عقل ہونگی وہ ایسی ایسی فرض کر لے گا کہ انکی رسیدی سوال سمجھتے حل ہوجائے

۱۱ جاسے میں ہم دریافت کرنا دو ایسی عدد متحدہ رکھنا کہ حاصل تفریق انکی کوئی خاص عدد مثل ۴ کے ہو فرض کر دو کہ ۲ اور ۳ غیر سادی عدد ایسی ہیں کہ انکی حاصل ضرب ۶ ہوتا ہے اب فرض کر دو کہ جذر اول عدد متحدہ رکھا ہے اور جذر دوسرے عدد متحدہ رکھا سادی ہے لہذا ۳ کے پس اب حاصل ہوگی یہ مساوات (۲+۳) - ۲ = ۲ + ۳ - ۲ = ۳ - ۲ = ۱ اور اس مساوات ۲ + ۳ = ۵ اور اس مساوات سے حاصل ہوتی ہے یہ قیمت ۱ = ۵ - ۲ = ۳ اور اسی واسطی حاصل ہوتی ہے یہ قیمت ۲ = ۳ - ۱ = ۲

۱ + ۳ = ۴ = ۲ - ۳ = -۱ اور یہاں یہ معلوم ہوا کہ وہ اعداد متحدہ مطلوبہ

یے ہیں  $\left(\frac{۲-۳}{۲}\right)$  اور  $\left(\frac{۲+۳}{۲}\right)$  مثلاً فرض کر دو کہ ۴ = ۲۰ اور اسی واسطی

۲ × ۳۰ = ۶۰ اور اسی واسطی حاصل ہونگی یہ مساواتیں

$$۱۶ = \frac{۳۲}{۲} = \frac{۲+۳۰}{۲} = ۱۴ \text{ اور } ۱۴ = \frac{۲۸}{۲} = \frac{۲-۳۰}{۲} = \frac{۳-۲}{۲}$$

اور یہ ۱۶ = ۲ + ۱۴ اور (۱۴) = ۲ - ۳۰ = ۲۸ = ۲ × ۱۴ = ۲۸

۲۵۶ میں جسوقت فرض کیا جائے واسطی ۴ کے عدد ۶۰ کا

۱۲ دریافت کیا جاتے ہیں ہم ایسی دو عدد رکھنا جو حاصل جمع اور حاصل تفریق انکا دونوں متحدہ ہوں فرض کر دو کہ اعداد مطلوبہ ۱۴ اور ۱۶ - ۱۴ = ۲ ہیں بیہ ظاہر ہے کہ حاصل جمع ان دو عددوں کا یعنی

لا + لا - لا یا لا ایک مجذور ہی اور یہاں سے معلوم ہوا کہ اول شرط سوال کی تو پوری ہوتی  
پس اب باقی رہی دوسری شرط یعنی اب لازم ہے کہ دریافت کرن ہم کوئی ایسی قیمت واسطی لایکے  
کہ صورت جبریہ لا - لا ایک مجذور ہو جا آب فرض کر دو کہ جذر لا = ۲ لا کا لا = ۲ ہے اور دوسرا واسطی  
حاصل ہوگی یہ مساوات لا - لا = (۲ - لا) = لا = لا + لا اور اس مساوات سے  
حاصل ہوتی ہے یہ مساوات لا - لا = لا = لا اور اس مساوات سے حاصل ہوتی ہے یہ قیمت واسطی لا

$$\text{کے لا} = \frac{۲}{۲-۵۲} \text{ اور لا} = \frac{۲}{۲-۵۲} = \frac{۲}{۲-۵۲} \text{ اور یہاں یہ مساوات معلوم}$$

ہوتی کہ اعداد مطلوبہ یہ ہیں  $\frac{۲}{۲-۵۲}$  اور  $\frac{۲}{۲-۵۲}$  اور اسجائے

واسطی کی کوئی قیمت فرض کیجا سکتی ہے بشرطیکہ وہ زیادہ ہو عدد آسی مثلاً اگر ہو  $۲ = ۲ - ۲$

تو اعداد مطلوبہ ان مساواتوں سے معلوم ہو جا دیگی لا =  $\frac{۲}{۲-۵۲} = \frac{۲}{۲-۵۲} = \frac{۲}{۲-۵۲}$  اور

$$\text{لا} = \frac{۲}{۲-۵۲} = \frac{۲}{۲-۵۲} = \frac{۲}{۲-۵۲} = \frac{۲}{۲-۵۲} = \frac{۲}{۲-۵۲} = \frac{۲}{۲-۵۲}$$

حاصل جمع دو عددوں مطلوبہ کا یعنی آ ایک مجذور ہی لیکن حاصل تفریق الخفا صفر ہی کہ وہ پہلی ایک صفر کا

مجذور کیا جا سکتا ہے لیکن ہم نیکی ایک اور مثال مثلاً فرض کر دو کہ  $۳ = ۳$  اور اس صورت میں حاصل

$$\text{ہونگی یہ مساواتیں لا} = \frac{۳}{۳-۴} = \frac{۳}{۳-۴} = \frac{۳}{۳-۴} \text{ اور}$$

$$\text{لا} = \frac{۳}{۳-۴} = \frac{۳}{۳-۴} = \frac{۳}{۳-۴} = \frac{۳}{۳-۴} = \frac{۳}{۳-۴} = \frac{۳}{۳-۴}$$

$$= \frac{۳۵}{۱۴} \text{ اور اس صورت میں ظاہر ہے کہ حاصل جمع دو نوع عددوں مطلوبہ کا یعنی یہ}$$

$$\frac{۳۵}{۱۴} = \frac{۳۵}{۱۴} + \frac{۳۶}{۱۴} = \frac{۳۵}{۱۴} + \frac{۳۶}{۱۴} = \frac{۳۵}{۱۴} + \frac{۳۶}{۱۴} = \frac{۳۵}{۱۴} + \frac{۳۶}{۱۴}$$

اسی طرح حاصل تفریق الخفا یہ ہے  $\frac{۳۵}{۱۴} = \frac{۳۵}{۱۴} = \frac{۳۶}{۱۴} = \frac{۳۵}{۱۴} = \frac{۳۶}{۱۴} = \frac{۳۵}{۱۴}$  جو ایک مجذور

۱۳ جانتے ہیں ہم دریافت کرنا ایسی اعداد مجذور کہ جو فرق درمیان اول در دو اسکے ہی وہی فرق

درمیان دو اسکے اور تیسری کی ہر فرض کر دو کہ اول عدد مطلوب ط ہے اور فرق آسین اور دو اسکے اور

دوسری اور تیسری میں ۲ ط ص + ص ایس اس صورت کے اعداد مطلوبہ سے ہونگی ط اور

$$ط + ۲ ط ص + ص اور ط + ۴ ط ص + ۲ ص ایسی صورتیں ہیں کہ اول دو اعداد تو مجذور$$

میں ایس اتی رہی صورت اخیر کہ اس کو بھی مجذور بنانا چاہئے یہ بات ظاہر ہے کہ جذر

$$ط + ۲ ط ص + ۲ ص کا زیادہ ط + ص کو اور اس پر اسطی فرض کر دو کہ ۲ ط ص + ص + ص$$

$$اور واقعی اس فرض کے حاصل ہونگی یہ مساوات  $\sqrt{ط + ۲ ط ص + ۲ ص} = ۲ ص + ط$$$

اور جو وقت مجذور کر لینی ہم دونوں طرف مساوات کو تو حاصل ہونگی یہ مساوات  $ط + ۲ ط ص + ۲ ص = ۲ ص + ط$

$$(ط + ص + ص) = (ط + ص) + ۲(ط + ص) + ص + ص اور یہ بیان معلوم ہوا کہ$$

$$۲ ط ص + ص = ۲(ط + ص) + ص + ص = ۲ ط ص + ۲ ص + ص + ص اور اس کے$$

$$حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  $۲ ط ص - ۲ ط ص = ۲ ص + ص - ص + ص$  یا$$

$$ط (۲ ص - ۲ ص) = (۲ ص + ص) - (ص + ص) اور اس کے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات$$

$$ط = \frac{۲ ص + ص - ص - ص}{۲ ص - ۲ ص}$$

اسی طرح فرض کر کے کوئی سی قیمتیں واسطی ص اور ص

کے لیکن ظاہر ہے کہ ط کی قیمتیں اکثر کسور دریافت ہونگی بس اگر ہم دریافت کیا جاہن اعداد مجذور صحیح تو یہ

بات بیانہ جاسکتے کہ اگر کوئی مجذور ہو تو اس کی نسبت تمام ایسی ہوں تو اول کو اس نسبت تمام ضرب دے

سی اعداد مجذور صحیح بنا سکتے ہیں مثلاً اگر ہو تو یہ مجذور  $\frac{۱۶}{۹}$  اور  $\frac{۲۵}{۹}$  اور  $\frac{۳۶}{۹}$

ضرب کریں ہم ان سے ہونکو ۹ میں تو جو ہمیں حاصل ضرب حاصل ہونگی ویسے اعداد مجذور صحیح ہونگی اس کے

یہ بات بھی ظاہر ہے کہ اگر ط کے واسطے کوئی کسریں فرض کے معانی کہ اس کا نسبت تمام عدد ۲ کا ہو

تو فرض عام یعنی  $ط = ۲ ص + ص$  ایک عدد صحیح ہوگا ایس اس صورت میں بیوں مجذوروں کا نسبت تمام ایک

$$ہونگی مثلاً فرض کر دو کہ  $ط = \frac{۲ ص + ص - ص - ص}{۲ ص - ۲ ص}$  میں  $۲ = ۲ اور ۲ = ۲$  اس کے$$

ہونگی یہ مساواتیں  $۲ ص + ص - ص = ۲ - ۲ = ۲ - ۱ + ۲ = ۲ - ۱ = ۱$

$$۲ ص - ۲ ص = ۲ - ۲ = ۱ \times ۲ - ۲ \times ۲ = ۲$$
 پس معلوم ہوا کہ  $ط = \frac{۱}{۲}$  اور اس پر واسطے

$$حاصل ہونگی یہ مساواتیں  $ط = \frac{۱}{۲}$  اور  $ط + ۲ ط ص + ۲ ص = ۲ ص + ط = \frac{۲۵}{۲}$$$

$$اور  $ط + ۴ ط ص + ۴ ص = ۲ ص + ط = \frac{۲۵}{۲} = ۴ + \frac{۲۵}{۲} = ۴ + \frac{۲۵}{۲}$  پس معلوم ہوا کہ$$

کہ تین اعداد مطلوبہ سے ہیں  $\frac{۱}{۲}$  اور  $\frac{۲۵}{۲}$  اور  $\frac{۲۵}{۲}$  اور اگر اعداد صحیح مطلوب ہوں تو لازم

ک ضرب کریں ہم ان اعداد کو عدد جارین تو حاصل ہوگی یہ اعداد مجذور ۱ اور ۲۵ اور ۴۹ کہ امین  
 $۲۳$  کا فرق عام ہے کیونکہ  $۱ + ۲۳ = ۲۴$  اور  $۲۵ + ۲۳ = ۴۸$  اب فرض کرو کہ  $س = ۲$  اور  
 $ص = ۳$  اور موافق اس فرض کے حاصل ہوگی یہ مساواتیں

$$ط = \frac{۲صس + س^۲ - ص^۲}{ص۲ - س۲} = \frac{۹ - ۴ + ۱۲}{۴ - ۲} = \frac{۷}{۲} \text{ اور}$$

$$۲طص + ص^۲ = ۹ + ۲۱ = ۳۰ \text{ اور اسی واسطی حاصل ہوگی یہ مساواتیں}$$

$$ط^۲ = \left(\frac{۷}{۲}\right)^۲ = \frac{۴۹}{۴} \text{ اور } ۲طص + ص^۲ = ۳۰ + \frac{۴۹}{۴} =$$

$$= \frac{۲۸۹}{۴} = \left(\frac{۱۷}{۲}\right)^۲ \text{ اور } ۲طص + ص^۲ = ۳۰ + \frac{۱۷۹}{۴} =$$

بیس معلوم ہوا کہ تین اعداد مجذور مطلوبہ یہ ہیں  $\frac{۴۹}{۴}$  اور  $\frac{۱۷۹}{۴}$  اور اگر

اعداد صحیح مطلوب ہوں تو لازم میں کہ ضرب کریں ہم انکو عدد  $۴$  کے میں اور اسی واسطی اعداد مجذور صحیح  
 ہونگے  $۴$  اور  $۱۷۹$  اور  $۲۸۹$  اور امین فرق عام  $۱۲۰$  ہے کیونکہ  $۱۲۰ + ۴۹ = ۱۶۹$  اور  
 $۱۲۰ + ۱۶۹ = ۲۸۹$  اب فرض کرو کہ  $س = ۴$  اور  $ص = ۳$  اور اسی واسطی حاصل ہوگی یہ

$$\text{مساواتیں } ط = \frac{۲صس + س^۲ - ص^۲}{ص۲ - س۲} = \frac{۱۷ - ۹ + ۲۴}{۹ - ۱۶} = \frac{۱۷}{۲} \text{ اور}$$

$$۲طص = ۴ \times ۱۷ = ۶۸ = ۱۷ + ۴۸ = ص^۲ + ۴۸ \text{ اور اسی واسطی}$$

$$\text{حاصل ہوگی یہ مساواتیں } ط^۲ = \left(\frac{۱۷}{۲}\right)^۲ = \frac{۲۸۹}{۴} \text{ اور } ۲طص + ص^۲ =$$

$$۸۲ + \frac{۲۸۹}{۴} = \frac{۴۲۵}{۴} = \frac{۳۳۶}{۴} + \frac{۲۸۹}{۴} = ۸۲ + \frac{۲۸۹}{۴}$$

$$\text{بیس معلوم ہوا کہ } \left(\frac{۳۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۹۶۱}{۴} = \frac{۳۳۶}{۴} + \frac{۴۲۵}{۴} = ۸۲ + \frac{۴۲۵}{۴}$$

تین اعداد مجذور مطلوبہ ہیں  $\frac{۲۸۹}{۴}$  اور  $\frac{۴۲۵}{۴}$  اور اگر اعداد صحیح مطلوب ہوں تو

یہ ہونگی  $۲۸۹$  اور  $۴۲۵$  اور  $۹۶۱$  اور امین فرق عام  $۳۳۶$  ہے کیونکہ





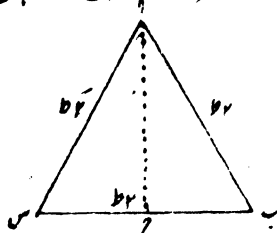




ضلعوں اس شکل کی ۱ ب = ۲ = ۲ × ۲ = ۴ اور ب س = ۴ = ۱ - ۲ = ۱ - ۴ = ۱ - ۳ اور  
 ۱ س = ۴ = ۱ + ۲ = ۱ + ۴ = ۵ اور امتحان اس مثال خاص کا اسطرسی ہوتا ہے ۳ + ۲ = ۵  
 ۱ ب = ۲ = ۱ + ۲ = ۳ اور موافق اس فرض کے حاصل ہونگی بے مساواتیں  
 ۱ ب = ۲ = ۳ × ۲ = ۶ اور ب س = ۶ = ۱ - ۲ = ۱ - ۴ = ۱ - ۸ اور  
 ۱ س = ۴ = ۱ + ۲ = ۱ + ۴ = ۱۰ اور امتحان اس مثال کا اسطرسی ہوتا ہے  
 ۱ ب = ۲ = ۳ × ۲ = ۶ اور موافق اس فرض کے حاصل  
 ہونگی بے مساواتیں ۱ ب = ۲ = ۴ × ۲ = ۸ اور ب س = ۸ = ۱ - ۲ = ۱ - ۴ = ۱ - ۱۶ اور  
 ۱ س = ۴ = ۱ + ۲ = ۱ + ۴ = ۱۰ اور امتحان اس شکل کا یوں ہوتا ہے ۱۰ + ۵ = ۱۵  
 ۱ ب = ۲ = ۳ × ۲ = ۶ اور موافق اس فرض کے حاصل ہونگی  
 بے مساواتیں ۱ ب = ۲ = ۵ × ۲ = ۱۰ اور ب س = ۱۰ = ۱ - ۲ = ۱ - ۴ = ۱ - ۲۵ اور  
 ۱ س = ۴ = ۱ + ۲ = ۱ + ۴ = ۱۰ اور امتحان اس مثال کا یہ ہے ۱۰ + ۲۴ = ۳۴  
 ۱ ب = ۲ = ۳ × ۲ = ۶ اور موافق اس فرض کے حاصل ہونگی بے  
 مساواتیں ۱ ب = ۲ = ۱۲ × ۲ = ۲۴ اور ب س = ۲۴ = ۱ - ۲ = ۱ - ۴ = ۱ - ۳۵ اور  
 ۱ س = ۴ = ۱ + ۲ = ۱ + ۴ = ۱۰ اور امتحان اس مثال کا اسطرسی ہوتا ہے ۱۰ + ۲۴ = ۳۴  
 صحیح ہونگی اگر صحیح کریم تمہیں گزشتہ حرف ز اور ۲ اور ز اور ۱ اور ۱ کو ایک جائز تیب سے  
 بنایا گئے اندہ کہ اسکی ذریعہ سے بغیر علون جبر مقابہ کی بے ملت فائدہ اور یہ ایسی معلوم ہو سکتے  
 ہیں کہ اولیٰ اضلاع اعداد صحیح ہوں

| فتمین ز کی | فتمین ۲ کی | فتمین ۳ کی | فتمین ۴ کی |
|------------|------------|------------|------------|
| ۲          | ۴          | ۶          | ۱۰         |
| ۳          | ۶          | ۱۲         | ۲۰         |
| ۴          | ۸          | ۲۴         | ۴۰         |
| ۵          | ۱۰         | ۳۰         | ۵۰         |
| ۶          | ۱۲         | ۳۶         | ۶۰         |

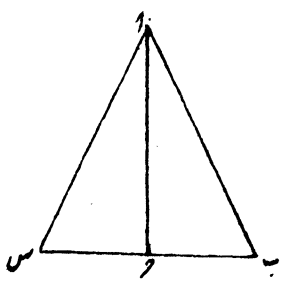
یہ بات بہت ظاہری ہے جب ضلعی کسی مثلث قائمہ الزاویہ کی اعداد صحیح ہوتے ہیں تو اسکی مساحت بیشک ایک عدد صحیح ہوگی کیونکہ کسی مثلث قائمہ الزاویہ کی مساوی نصف اوس حاصل ضرب کی ہوتی ہے جو حاصل ہوتا ہے ضرب دینی سے دو ضلعوں کو جو مساوی و ترقائمہ کی ہیں اور چونکہ یہ ضلعی اعداد صحیح ہیں تو حاصل ضرب لگاتار یعنی مساحت مثلث عدد صحیح ہوگی اب ہم دریافت کریں گے اعداد صحیح اور مقدارین غیر نزولی واسطی اور قسم کی مثلثوں کے مساوی مثلث قائمہ الزاویہ کے اب ہم دریافت کیا جاسکتی ہے کہ ایسی مثلثیں مساوی الاضلاع کہ اولی الاضلاع اور عمود اولی قاعدہ در برابر اجزا ان قاعدہ کے پیدا ہوتی ہیں سبب سے عمودوں مذکور کی مقدارین غیر نزولی اور اعداد صحیح ہوں فرض کر دو کہ مثلث ۱-۳-۴ ایک مثلث مساوی الاضلاع ہے کہ ہر ضلع اسکا ۲ ط ہے اسکا ظاہر ہے کہ واسطی ط کے کوئی عدد صحیح اور نصف فرض کیا جا تو اجزای قاعدہ کے اعداد صحیح ہوں گی لیکن اب دیکھا جاسے کہ ارتفاع ۱-۴-۲ بھی اس قسم کی مثلثوں میں مقدار غیر نزولی اور صحیح ہوتی ہے یہ بات



$$۱-۴-۲ = (۲ط) - ط = ۳ط - ط = ۲ط = ۲$$

$$۳ط اور بیان سے یہ معلوم ہوتا ہے ۱-۴-۲ = ۳ ط$$
 اور سیواسطی حاصل ہوتی ہے یہ مساوات ۱-۴-۲ یعنی ارتفاع =  $\sqrt{۳ط}$  سے معلوم ہوتا ہے مساوات

۱-۴-۲ =  $\sqrt{۳ط}$  سے کہ جسوقت ضلعی کسی مثلث مساوی الاضلاع کے اعداد صحیح ہوں تو بہتین ہی ممکن کہ ارتفاع اس مثلث کی کوئی مقدار غیر نزولی ہو اور سیواسطی اس قسم کی مثلثوں کی مساحت بھی مقدار غیر نزولی نہیں ہو سکتی اور پوری نہیں دریافت ہو سکتی کیونکہ جذر عدد ۳ کا کوئی پورا نہیں نکال سکتا ہے پس جو اعداد صحیح ہم چاہتی ہیں وہ غیر ممکن ہیں اب دریافت کیا جاسکتے ہیں ہم ایسی مثلث مساوی الاضلاع کہ اولی الاضلاع اور ارتفاع اور اجزا قاعدہ کی اعداد صحیح ہوں واضح ہو کہ یہ بات بسبب اولت عمل میں آسکتی ہے نیز یہ قاعدہ مثلثوں قائمہ الزاویہ کی کہ اوسکا پہلی بیان ہو چکا کیونکہ ہم خیال کر سکتے ہیں کہ ہر مثلث مساوی الاضلاع میں مرکب ہے دو مثلثوں قائمہ الزاویہ سے کہ ارتفاع مشترک ان دو کو اور ارتفاع اوس مثلث مساوی اساتین ہے مثلاً فرض کر دو کہ ۱-۳-۴ ایک مثلث مساوی الاضلاع میں ہے



اور ۱-۴-۲ اوسکا ارتفاع ہے اور ۱-۳-۴ اور ۱-۴-۲  
 مثلث قائمہ الزاویہ اوس میں واقع ہیں اور ان مثلثوں قائمہ الزاویہ کے قاعدی اور ارتفاع مساوی ہیں پس اب موافق قاعدہ مثلثوں قائمہ الزاویہ کی فرض کر دو کہ ۱-۴-۲ یا ۱-۳-۴ کو مساوی ۳-۴ کے



$$\begin{aligned}
 ۱ \text{ ب } &= ۱ \text{ ب } + ۱ \text{ ب } = (۱-۱) \text{ ن } + (۱-۱) \text{ ن } = ۲ \text{ ن } - ۲ \text{ ن } + ۲ \text{ ن } + ۲ \text{ ن } = ۴ \text{ ن } \\
 ۲ \text{ ب } &= ۲ \text{ ب } + ۲ \text{ ب } = (۲-۱) \text{ ن } + (۲-۱) \text{ ن } = ۴ \text{ ن } - ۲ \text{ ن } + ۲ \text{ ن } + ۲ \text{ ن } = ۶ \text{ ن } \\
 ۳ \text{ ب } &= ۳ \text{ ب } + ۳ \text{ ب } = (۳-۱) \text{ ن } + (۳-۱) \text{ ن } = ۶ \text{ ن } - ۲ \text{ ن } + ۲ \text{ ن } + ۲ \text{ ن } + ۲ \text{ ن } = ۸ \text{ ن } \\
 ۴ \text{ ب } &= ۴ \text{ ب } + ۴ \text{ ب } = (۴-۱) \text{ ن } + (۴-۱) \text{ ن } = ۸ \text{ ن } - ۲ \text{ ن } + ۲ \text{ ن } + ۲ \text{ ن } + ۲ \text{ ن } + ۲ \text{ ن } = ۱۰ \text{ ن } \\
 ۵ \text{ ب } &= ۵ \text{ ب } + ۵ \text{ ب } = (۵-۱) \text{ ن } + (۵-۱) \text{ ن } = ۱۰ \text{ ن } - ۲ \text{ ن } + ۲ \text{ ن } + ۲ \text{ ن } + ۲ \text{ ن } + ۲ \text{ ن } = ۱۲ \text{ ن }
 \end{aligned}$$

۱ س = ۱ س + ۱ س = (۱+۱) ن = ۲ ن اور چونکہ ۲ ب = ۲ ن اور ۳ س = ۳ ن اور ۴ ب = ۴ ن اور ۵ س = ۵ ن تو معلوم ہوا کہ ۲ س جو مادی ہے حاصل صحیح ہے اور ۳ س کے ساتھ ساتھ ۴ س حاصل صحیح کی (۱-۱) ن + (۱-۱) ن اب اگر اکٹھا کریں ہم ۲ ن مساویوں کو تو بن جائیگی فہرست مندرجہ

|                     |                     |
|---------------------|---------------------|
| (۱) ۱ ب = ۱ (۱+۱) ن | (۴) ۲ ب = ۲ (۱-۱) ن |
| (۲) ۱ س = ۱ (۱+۱) ن | (۵) ۳ س = ۳ (۱-۱) ن |
| (۳) ۱ س = ۱ (۱+۱) ن | (۶) ۴ س = ۴ (۱-۱) ن |

اب فرض کر دو کہ ۲ = ۳ اور ۳ = ۴ اور اسے واسطی حاصل ہوگی یہی مساویاتین

$$(۱) ۱ ب = ۱ (۱+۱) ن = ۲ (۱+۱) ن = ۲ \times ۲ = ۴ = ۳ \times ۱ = ۳$$

$$(۲) ۱ س = ۱ (۱+۱) ن = ۲ (۱+۱) ن = ۲ \times ۲ = ۴ = ۲ \times ۲ = ۴$$

$$(۳) ۱ س = ۱ (۱+۱) ن = ۲ (۱+۱) ن = ۲ \times ۲ = ۴ = ۳ \times ۱ = ۳$$

$$(۴) ۲ ب = ۲ (۱-۱) ن = ۲ (۱-۱) ن = ۲ \times ۱ = ۲ = ۳ \times ۱ = ۳$$

$$(۵) ۳ س = ۳ (۱-۱) ن = ۲ (۱-۱) ن = ۲ \times ۱ = ۲ = ۲ \times ۱ = ۲$$

$$(۶) ۴ س = ۴ (۱-۱) ن = ۲ (۱-۱) ن = ۲ \times ۱ = ۲ = ۲ \times ۱ = ۲$$

$$۱۵۰ = ۶ \times ۲۵ = \frac{۱۲ \times ۲۵}{۲} = \frac{۲۱ \times ۲۵}{۲}$$

اب فرض کر دو کہ ۲ = ۳ اور ۳ = ۴ اور موازنہ اس فرض کی حاصل ہوگی یہی مساویاتین

$$(۱) ۱ ب = ۱ (۱+۱) ن = ۲ (۱+۱) ن = ۲ \times ۱ = ۲ = ۳ \times ۱ = ۳$$

$$(۲) ۱ س = ۱ (۱+۱) ن = ۲ (۱+۱) ن = ۲ \times ۱ = ۲ = ۳ \times ۱ = ۳$$

$$(۳) ۱ س = ۱ (۱+۱) ن = ۲ (۱+۱) ن = ۲ \times ۱ = ۲ = ۳ \times ۱ = ۳$$

$$(۴) ۲ ب = ۲ (۱-۱) ن = ۲ (۱-۱) ن = ۲ \times ۱ = ۲ = ۳ \times ۱ = ۳$$

$$(۵) ۳ س = ۳ (۱-۱) ن = ۲ (۱-۱) ن = ۲ \times ۱ = ۲ = ۳ \times ۱ = ۳$$

(۶) ب س = (ن - ۱) ن + (ن - ۱) ن = ۲۵ × ۳۲ = ۸۰۰ اور مساحت

مثلث کی ۶۱ × ب س = ۴۴ × ۲۲ = ۹۶۸

اس مثال میں تین مثلث مفروض کیے گئے اور صحیح مثلثی میں ۳۰ ۵۱ ۴۴ اور اگر دریافت کیا جائے کہ ہم مساحت اس مثلث کی بذریعہ اون مثلثوں کے مطابق اس قاعدہ کی تعبیر ہوتا ہے مساوات (۱) سے کہ واقعہ میں کمال بندی میں تو یہی یہ بات دریافت ہو جائیگی کہ مساحت مثلث کی ایک صحیح عدد اور مقدار غیر زولی ہوگی مثلاً فرض کرو کہ ۷ = ۴۰ اور ۵۱ اور

۷ = ۴۴ اور ۵۱ = ۱۶۸ =  $\frac{۴۴+۵۱+۴۰}{۲} = \frac{۱۳۵}{۲} = ۶۷.۵$

اور اسے حاصل ہوگی یہ مساوات میں ۷ - ۸۴ = ۴۰ - ۸۴ اور

۷ - ۵۱ = ۸۴ - ۵۱ = ۳۳ اور ۷ - ۴۴ = ۳۳

اور اسے اسطرح مساحت مثلث کی  $\sqrt{(ص-ص)(ص-س)(ص-ب)}$

$= \sqrt{۲۳۱ \times ۳۶۹۶} = \sqrt{۸۵۳۷۷۶} = ۹۲۴$

یہ ہمیشہ مثلث مختلف الاضلاع دریافت کر سکتی ہیں کہ انکی ضلعے اور ارتفاع اور اجزای یعنی بازو انکی قاعدوں کے اور مساحت انکی اعداد صحیح اور مقدارین غیر زولی ہوں الفاظ میں اسطرح سے بیان ہو سکتا ہے قاعدہ فرض کرو کوئی دو ایسی عدد کہ ہر واحد او میں کا زیادہ ہو عدد ایک کی سے اور دو چیز حاصل ضرب انکا ارتفاع مثلث مطلوب کی ہوگی اور اگر ایک عدد در مفروض میں مجذور کر کے او میں سے عدد ایک نکالیں اور حاصل تفریق کو دو عدد مفروضین ضرب کریں تو حاصل ضرب ایک جز قاعدہ مثلث مفروض کا ہوگا اگر اسی مجذور پر زیادہ کر کے ہم عدد ایک اور حاصل جمع کو دو سے عدد مذکور میں ضرب کریں تو حاصل ضرب وہ ضلع ہوگا جو طو ہوا ہے اور باقی بازو قاعدہ مثلث سے جو باقی دریافت ہوا ہے اب اگر مجذور کریں ہم دو سے عدد کو اور او میں سے عدد ایک تفریق کریں اور حاصل تفریق کو عدد اول میں ضرب کریں تو حاصل ضرب ہوگا دوسرا جز با بازو قاعدہ مثلث مفروض کا اور اگر مجذور عدد دو سے پر زیادہ کریں عدد ایک اور حاصل جمع کو ضرب کریں عدد اول میں تو حاصل ضرب ہوگا وہ ضلع جو طو ہوا ہے بازو دو سے کسی اور ظاہر ہے کہ حاصل جمع دو بازو انکا ہوگا قاعدہ مثلث کا یہ قاعدہ کلیہ کسی جبر مقابله یا کسی حساب کی کتاب میں سینٹی تک نہیں پایا ہے بلکہ یہ جدیدی متحدی ہستہ مجذور کا





سوال ۴ = ۱۲ ل = ۶ ل اور موافق شرط سوال کے ضرور ہے کہ جو مساحت اس مثلث کی یعنی ۶ ل مساوی وتر قائدہ یعنی ۱۲ ل کے لیس حاصل ہوگی یہ مساوات ۵ = ۶ ل اور اس کے حاصل ہوگی یہ مساوات ۵ = ۶ ل ہے اس سے سب ضلعی مثلث کی معلوم ہو جائیگی

سوال ۴ جانتے ہیں ہم دریافت کرنا اضلاع ایک ایسی مثلث قائدہ الزاویہ کی کہ مساحت اس کی مساوی ہو حاصل ضرب اس کی تینوں ضلعوں کے متفاضل کر دو کہ وتر قائدہ الزاویہ مثلث کا ۵ ل اور دو باقی اس کی ضلعی ۴ ل اور ۳ ل ہیں پس موافق شرط سوال کے ضرور ہے کہ جو مساحت ۶ ل = ۶ ل اور اس میں اس کی قیمت لاکھی ل = ۱ اور اس میں اس کی ضلعی مثلث مطلوب کے لیے ہیں ۳ اور ۱ اور ۳ سے دو سوال اخیر بیچ گنت میں لئی گئے ہیں

سوال ۵ اگر کبھی کبھی حساب آتا ہو تو بآسانی بھی جلد دو اعداد ایسی کہ حاصل جمع اور حاصل تفریق اور کلا علیحدہ علیحدہ اعداد مجذور ہوں اور اگر اعداد ایسی ہیں ضرب کرین تو حاصل ضرب ہو دو اعداد مطلوبہ ۴ اور ۵ ل ہیں اور اس میں اس کی ۵ ل + ۴ ل = ۹ ل = ایک عدد مجذور کی اور ۵ ل - ۴ ل = ۱ ل = ایک عدد مجذور کے پس پوری ہوئیں دو شرطیں اور باقی رہی تیسری شرط جو یہ ہے کہ حاصل ضرب دو تو اعداد مطلوب کا ایک عدد مکعب ہو یعنی ۲۰ ل ایک عدد مکعب ہو دی فرض کر دو کہ جذر کبھی یعنی تیسری مرتبہ کا نزول ۲۰ ل کا ۱۰ ل ہے اور موافق اس فرض کی حاصل ہوگی یہ مساوات ۲۰ ل = (۱۰ ل)³ = ۱۰۰۰ ل اور اس میں اس کی ۵۰ ل اور یہاں معلوم ہوا کہ دو عدد مطلوبہ سے ہیں ۱۰۰۰ اور ۱۲۵۰ (سوال بیچ گنت)

سوال ۶ اسی دوست اگر تو بتا دیکھا بھی ایسی دو عدد کہ حاصل جمع اون کی مکعبوں کا ایک مجذور اور حاصل جمع اون کی مجذوروں ایک عدد مکعب ہو تو تین تہی برابر یا ضعی دان جانوں کا فرض کر دو اعداد مطلوبہ ۴ اور ۳ ل ہیں ظاہر ہے کہ حاصل جمع ان کی مکعبوں کا ۹ ل ہے اور یہ ایک عدد مجذور ہے جب تک منظور ہے اور اور اس کا جذر ۳ ل ہے اب حاصل جمع مجذوروں اعداد مفروض کا ۵ ل ہے اور موافق دوسری شرط سوال کی ضرور ہے کہ ۵ ل ایک مکعب ہو پس اس میں اس کی ضلعی فرض کر دو کہ ۵ ل کا ۵ ل ہے اس میں اس کی ضلعی ہوگی یہ مساوات ۵ ل = ۱۲۵ ل اور اس میں اس کی ضلعی فرض کر دو کہ ۵ ل کا ۵ ل ہے اور یہاں سے معلوم ہوا کہ اعداد مطلوبہ سے ہیں ۶۲۵ اور ۱۲۵ (سوال بیچ گنت)

سوال ۷ جانتے ہیں ہم دریافت کرنا دو ایسی اعداد کہ حاصل جمع اون کی مساوی ہو اور ان کی حاصل تفریق کے مجذور کی اسے چونکہ حاصل جمع دو اعداد مطلوب کا موافق شرط سوال کے مجذور ہونا چاہیے

تو فرض کرو کہ  $لا = ۲$  اور چونکہ  $لا = (لا - ۲) + ۲$  تو معلوم ہوا کہ  $لا = ۲$  اور اس سے  
 اگر جمع کریں ہم ان دو نمبروں کو جو حاصل ہوگی یہ مساوات  $۲ = ط + ط$  اور اس سے  
 $لا = \frac{ط + ۲}{۲} = \frac{ط}{۲} + ۱$  اور اگر تفریق کریں اور ہمیں دو مساواتوں کو ایک دوسرے میں سے  
 جو حاصل ہوگا یہ  $۲ = ط - ط$  اور اس سے یہ  $۲ = \frac{ط(۱-۲)}{۲}$  اب فرض کرو کہ  $ط = ۲$  فرض  
 اور اس سے واسطی حاصل ہوگی یہ مساواتیں  $لا = ص(۲+۱)$  اور  $ص(۲-۱) = ص(۲-۱)$   
 مثلاً فرض کرو کہ  $ص = ۱$  اس سے حاصل ہوگی یہ قیمتیں  $لا = ۳$  اور  $ص = ۱$  اور  
 اور امتحان اس کا یوں ہوتا ہے کہ  $لا = ۳ = ۱ + ۲$  اور  $ص = ۱$  اور اگر  $ص = ۲$  اور اگر  $ص = ۲$   
 تو  $لا = ۲ = ۲ \times (۱ + ۲) = ۲ \times ۳ = ۶$  اور  $۱۰ = ۵ \times ۲ = ۱۰$  اور  $۷ = ۲ \times (۱ - ۲) = ۲ \times (-۱) = -۲$   
 اور امتحان اس طرحی ہوتا ہے  $لا = ۱۰ = ۵ + ۵$  اور  $ص = ۱۰ = ۱۰$  اور یہ طریقہ عمل کرنے  
 سوال گذشتہ کا بہت خوب ہے

**سوال ۸** جانتے ہیں ہم دریافت کرنا ایسی دو اعداد کہ اگر ایک کو اور دوسرے سے ملکیں اور زیادہ کریں  
 اسی مجددی کے بر تو حاصل جمع ایک عدد بخود رہے جو فرض کرو کہ اعداد مطلوبہ  $م$  اور  $ن$  ہیں اور موافق شرط  
 سوال کے ضروری کہ حاصل جمع  $م + ن$  کا ایک مجددی ہونا چاہیے اس فرض کرو کہ  $م = ۲$  اور اس سے حاصل  
 ہوتی ہے یہ مساوات  $م = لا - ۲ = (لا - ۲) + ۲ = (لا - ۲) + ۲$  اور چونکہ موافق سوال گذشتہ کی ہم فرض  
 کر سکتے ہیں کہ  $لا = ۲$  اور  $ص = ۱$  تو حاصل ہوگی یہ مساوات  $م = ۲ = (لا - ۲) + ۲$  اب موافق  
 سوال گذشتہ کی ضروری کہ ہمیں یہ مساواتیں  $لا = \frac{ط - ۲}{۲}$  اور  $لا = \frac{ط + ۲}{۲}$  اور  
 چونکہ  $م = (لا - ۲) + ۲$  تو معلوم ہوا کہ  $م = لا - ۲$  اور اس سے

$$م = \frac{ط + ۲}{۲} = \frac{ط - ۲}{۲} = \frac{ط}{۲} = ط$$

$$ط = ۲$$

$$م = ۲$$

$$ن = ۲$$

$$م = ۲$$

$$ن = ۲$$

مثلاً فرض کرو کہ  $ط = ۲$  تو اعداد مطلوبہ یہ ہوگی  $۲$  اور  $۲$  اور امتحان اس مثال کا یوں ہوتا ہے  
 $۲ + ۲ = ۴ = ۲ + ۲$  اور اگر  $ط = ۳$  تو دو عدد یہ ہوگی  $۳$  اور  $۳$  اور اس سے  
 $۳ + ۳ = ۶ = ۳ + ۳$  اور اگر  $ط = ۴$  تو دو عدد مطلوبہ یہ ہوگی  $۴$  اور  $۴$  اور

اسیواسطی ۴ + ۲ = ۶ = ۳۶ + ۴۴ = ۱۰۰ = ۱۰ اور اسطیور اور خالین ہی حل ہو سکتی ہیں اور اونکا امتحان ہو سکتا ہے

سوال 4 ایک گہرین سے چار چورون ستر موتی اور پانچ الماس اور دس باقوت اور ۸ لعل چورائے اور پانچ اسکے کہ ہر چور کو برابر مال حاصل ہوا نہون نے اس جوہرات کو اسین اسطی تقسیم کیا کہ ایک چور کو پانچ لعل اور آباقوت اور آالاس اور آموتی ہاتھ لگی اور دوسرے کو آعلی اور باقوت اور آالاس اور آموتی اور تیسری چور کو آعلی اور آباقوت اور آالاس اور آموتی ہاتھ لگی اور چوتھی چور کو آعلی اور آباقوت اور آالاس اور ۹ موتی ہاتھ لگی تھن کر دکھائی قیمت ایک لعل کی اور ۲ ایک باقوت کی اور ۳ ایک الماس کی اور ۴ ایک موتی کی پس موافق شرائط سوال کے حاصل ہوئی سے مساواتین کہ ہر داہن میں سے چار مقدارین چھول پائی جاتی ہیں

$$۵ ل + ۱ ع + ۱ س + ۱ ن = ۵ ل + ۱ ع + ۱ س + ۱ ن = ۵ ل + ۱ ع + ۱ س + ۱ ن = ۵ ل + ۱ ع + ۱ س + ۱ ن$$

اب ظاہر ہے کہ اول اور دوسری مساواتین حاصل ہوتی ہیں مساوات ۳ = ۵ ل + ۱ ع + ۱ س + ۱ ن اور دوسری اور تیسری مساوات سے یہ مساوات حاصل ہوتی ہے ۶ = ۳ ل + ۱ ع + ۱ س + ۱ ن اور چوتھی مساوات سے یہ مساوات حاصل ہوتی ہے ۹ = ۲ ل + ۱ ع + ۱ س + ۱ ن اب تا کہ قیمتین جوہرات نہ کر کے اعداد صحیح ہون ضروری ہے کہ کسی کم ۹۶ ہو پس جو قیمت ۹۶ تو حاصل ہوگی یہ مساوات ۶ = ۳ ل + ۱ ع + ۱ س + ۱ ن اور اسواسطی ہوگی یہ مساوات

۱ =  $\frac{۹۶}{۶} = ۱۶$  اور اسوا ۳ = ۵ ل + ۱ ع + ۱ س + ۱ ن اور ۱ = ۲ ل + ۱ ع + ۱ س + ۱ ن پس یہاں سے معلوم ہوا کہ قیمت ہر موتی کی آروپیہی اور ہر باقوت کی ۱۶ روپیے اور ہر الماس کے ۹۶ اور ہر لعل کی ۲۴ روپیے اور امتحان

$$۲۳۳ = ۱ + ۹۶ + ۱۶ + ۱۲۰ = ۵ ل + ۱ ع + ۱ س + ۱ ن$$

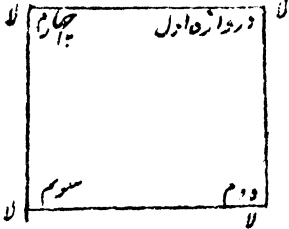
$$۲۳۳ = ۱ + ۹۶ + ۱۱۲ + ۲۴ = ۵ ل + ۱ ع + ۱ س + ۱ ن$$

$$۲۳۳ = ۱ + ۹۲ + ۱۶ + ۲۴ = ۵ ل + ۱ ع + ۱ س + ۱ ن$$

$$۲۳۳ = ۹۲ + ۹۶ + ۱۶ + ۲۴ = ۵ ل + ۱ ع + ۱ س + ۱ ن$$

سوال ۱۰ ایک شہر کی ۴ چار دروازے ہیں اور چاروں دروازوں پر کچھ کچھ فوج یا مقابلہ غنیمت کے موجود ہیں جو قیمت غنیمت دروازہ اول پر آیا تو اوس دروازہ کی فوج کے حاکم نے یہ بات دیا کہ اسے کہ میری فوج واسطی مقابلہ دشمن کے کفایت نہیں کرگی اتنی اتنی فوج ہر دروازہ سے واسطی اپنی عود کے ملگوالی جتنی فوج اسکی پاس موجود تھی پس اس ترکیت سے دشمن نے دروازہ اول پر شکست کھائی اور اوسے حملہ دوسرے دروازہ پر کیا اور اوس دروازہ کی حاکم نے یہی یہ بات دیا ت

کر کی کہ اس کی فوج دو اسٹی مقابلا کی کفایت نہیں کرتی تھی اس لئے آدھی ہر دروازہ سے بلوای جتنی آدمی اس کے پاس تھے پس بلانسی ہی دشمن نے شکست کھائی اور یہی حال دو نو باقی دروازوں پر ہوا اور اسطور سی چاروں دروازوں پر دشمن نے شکست کھا کر اپنی ملک کی طرف مراجعت کی اور بعد اس کی چوتھا فوج کی چاروں دروازوں پر کی گئی تو معلوم ہوا کہ ہر دروازہ پر فوج مساکو چار باب بناؤ کہ اول میں ہر دروازہ پر کتنی کتنی فوج تھی حل کرنی اس سوال کے کئی ترکیبیں ہیں اول ترکیب یہ ہے فرض کرو کہ بعد مراجعت دشمن کے ہر واحد پر چار دروازوں میں سے



لا آدمی ہو اب اگر دروازہ اول کا حاکم جتنے جتنے آدمیوں کو ایسے تین باقی دروازوں سے بلوایا تھا اور نہیں پہنچا پس اپنے اپنی مقام پر کہیے اظہار ہو کہ اس صورت میں دروازہ اول پر یہ فوج  $\frac{1}{4}$  ہوگی اور دروازہ دوم پر اور سوم پر اور

چہارم پر یہ فوجیں ہونگی  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$  اور  $\frac{1}{4}$  اور  $\frac{1}{4}$  یعنی اب چاروں دروازوں پر اتنے اتنی آدمی ہونگی  $\frac{1}{4}$  اور  $\frac{1}{4}$  اور  $\frac{1}{4}$  اور  $\frac{1}{4}$  اب دروازہ دوم کی حاکم نے بھی باقی تین دروازوں کے آدمیوں کو اپنی مقام پر واپس کیا اس صورت میں ظاہر ہو کہ چار دروازوں مذکور براتی اتنی آدمی ہونگی

$$\text{دروازہ اول } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad \text{اور دروازہ دوم } \frac{1}{4} \quad \text{دروازہ سوم } \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\text{اور دروازہ چہارم } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad \text{یعنی اتنی اتنی آدمی دروازوں مذکور پر ہیں گے } \frac{1}{4} \text{ اور } \frac{1}{4}$$

اور  $\frac{1}{4}$  اور  $\frac{1}{4}$  اب فرض کرو کہ تیسری دروازہ کی حاکم نے بھی باقی تین دروازوں کی سب آدمیوں کو واپس اپنے اپنی مقاموں کو کیا پس بعد اس کے چار دروازوں براتی اتنے آدمی رہیں گے

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad \text{اور } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad \text{اور } \frac{1}{4} \quad \text{اور } \frac{1}{4} \quad \text{اور } \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

یعنی اتنی اتنی  $\frac{1}{4}$  اور  $\frac{1}{4}$  اور  $\frac{1}{4}$  اور  $\frac{1}{4}$  اب فرض کرو کہ چوتھی دروازہ کی حاکم نے بھی باقی تین دروازوں کے آدمیوں کو اپنی مقاموں پر واپس کیا پس اس صورت میں چار دروازوں مذکور

$$\text{براتی آدمی رہیں گے } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad \text{اور } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad \text{اور } \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\text{اور } \frac{1}{4} \quad \text{یعنی اتنی اتنی } \frac{1}{4} \quad \text{اور } \frac{1}{4} \quad \text{اور } \frac{1}{4} \quad \text{اور } \frac{1}{4}$$



$$9 = 5 + 4 \text{ اور چونکہ } 4 = \frac{15}{4} \text{ تو حاصل ہوگی مساوات } 9 = 5 + \frac{15}{4} \text{ یا } 4 = 5 + \frac{15}{4}$$

اور اس کے حاصل ہونے پر یہ مساوات  $9 = 5 + \frac{15}{4}$  اور تیسری اور چوتھی صورتوں سے یہ مساوات حاصل ہوتی ہے

$$5 - 6 = 7 - 8 \text{ اور اس کے مساوات سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات } 5 - 6 = 7 - 8$$

$$\text{لیکن } 5 = \frac{15}{4} \text{ تو } 9 = \frac{15}{4} - 6 = \frac{15 - 24}{4} = \frac{-9}{4}$$

$$9 = 5 - 6 \text{ یا } 9 = 5 - 6 \text{ اور } 9 = 5 - 6 \text{ یا } 9 = 5 - 6$$

$$\text{تو اس کی یہ } 9 = 5 - 6 \text{ اور اس کے مساوات سے } 9 = 5 - 6 \text{ تو معلوم ہوا کہ}$$

$$= \frac{25 \times 5}{9} = \frac{125}{9} = 13.88 \text{ اور } 5 \times 25 = 125 = \frac{25 \times 25}{1} = 625$$

$$25 \times 5 = 125 \text{ اس میں معلوم ہوا کہ جا رہا ہے یہ } 125 \text{ اور } 25 \text{ اور } 5 \text{ اور } 349$$

اور یہ دیکھیں جو ہیں ثابت ہوئی ہے

سوال ۱۱ جانتے ہیں ہم دریافت کرنا چاہتے ہیں اسی عدد صحیح مجددوں کا کہ اگر کوئی ہے تو اوہین سے

عدد مجدد  $125$  پر زیادہ کریں تو ہر صورت میں حاصل صحیح ایک مجدد ہوتا ہے پس فرض کر دو کہ لا قیصر کتابی متواتر

جاوے اور اعداد مجددوں کی ضرورت کو اور اس کے مساوی لازم ہے کہ ہر دو  $125 + 1$  کا ایک کامل مجدد ہر صورت

میں فرض کر دو کہ جذور اس صورت کا  $125 + 1$  ہے اس کے حاصل ہونے پر یہ مساوات

$$125 + 1 = (125 + 1) = 125 + 1 = 125 + 1$$

$$125 = 125 - 125 = 125 - 125 = 125 - 125$$

ایسی کہ  $125$  اور سب پر علیحدہ علیحدہ تقسیم ہو سکی اور ظاہر ہے اعداد  $125$  اور  $125$  اور  $125$  میں

$$\text{پس یہ حاصل ہونگی متواتر یہ یقین دہاسی لائی } 125 = 125 - 125 = 125 - 125$$

$$125 = 125 - 125 = 125 - 125 = 125 - 125$$

پس معلوم ہوا کہ تین اعداد صحیح مجددوں کے لیے ہیں  $125$  اور  $125$  اور  $125$  اور امتحان اس

اس سوال میں اس طرح سے ہو سکتا ہے

$$125 + 125 = 250 = 125 + 125 = 125 + 125$$

$$125 + 125 = 250 = 125 + 125 = 125 + 125$$

$$125 + 125 = 250 = 125 + 125 = 125 + 125$$

$$125 = 125 = 125 = 125 = 125 = 125$$



سوال ۱۴

چار مسافر چند روٹیان بانڈہ کر سڑ کو چلی اور ایک خاص جا پہنچ کر تمام کیا اور وہاں سورجی قوتوں  
 دیر کی ایک کی اپ دو ٹکٹے لکھد کہیں گئے اور اوسنی روٹیاں مذکور کی چار صدی حصہ کنی اور ایک روٹی بھی اوس روٹی کوئی  
 دیا اور پنا حصہ روٹیوں کا کہا گیا اور ہر دوسرا مسافر اوشا اور اسے طرح یعنی روٹیاں تینوں کی چار صدی حصہ کنے  
 اور ایک روٹی جو باقی تھی اوسنی کنی کو دیا اور اپنا ایک حصہ کہا گیا اور اسے طوری تیسرا اور چوتھا مسافر بھی اوشا اور ہر  
 کو اسے طوری تقسیم کیا اور ایک ایک روٹی کنی کو دی پس اتنی میں صبح ہو گئی اور چاروں مسافروں نے روٹیاں روٹیاں کو  
 چار صدی حصہ تقسیم کیا کوئی روٹی تینوں کوئی روٹی زائد نہ نکلی کہ اوسکی ٹھری کرنی پرین یادہ کنی کو دی چنانچہ  
 پس بتاد کنی روٹیاں مسافروں کو راہی ہر دن سے لیکر چلی تھے فرض کر کے کہ لاکھ روٹیاں کی پس موافق شرائط کو  
 یکے ظاہر ہر کی صورت ایک روٹی کنی کو دی گئی تو باقی روٹیاں  $\frac{1}{4}$  چوتھائی یعنی  $\frac{1}{4}$  وہ حصہ ہو گا جو اول مسافر  
 نے اوشا کہہ لیا پس اب باقی رہنے کی اتنی روٹیاں  $\frac{1}{4}$  اب ظاہر ہر کی صورت مسافروں کو اوشا کہہ لیا اتنی روٹیاں کہا میں ہو گئی

$$\frac{3-1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2-0}{2} = 1 - \frac{0}{2} = 1$$

اور چونکہ ایک روٹی کنی کو اب بھی دیکھی تھی تو باقی رہنے کی  
 اتنی روٹیاں  $\frac{3-1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$\frac{21-9}{16} = 1 - \frac{9-21}{16} = 1 - \frac{-9}{16} = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

اب ظاہر ہر کی صورت مسافروں کی اتنی روٹیاں کہا میں ہو گئے

$$\frac{34-9}{48} = 1 - \frac{9-34}{48} = 1 - \frac{-25}{48} = 1 + \frac{25}{48} = \frac{73}{48}$$

اور چونکہ کنی کو اس صورت میں بھی ایک روٹی ہی تو باقی رہیں گی اتنی روٹیاں

$$\frac{82-53}{48} = 1 - \frac{53-82}{48} = 1 - \frac{-29}{48} = 1 + \frac{29}{48} = \frac{111}{48}$$

اب ظاہر ہر کی صورت میں مسافروں کی اتنی روٹیاں

$$\frac{145-53}{254} = 1 - \frac{53-145}{254} = 1 - \frac{-92}{254} = 1 + \frac{92}{254} = \frac{346}{254}$$

کہانی ہو گئی اور بعد ازاں باقی رہنے کی اتنی روٹیاں

$$\frac{111-53}{48} = 1 - \frac{53-111}{48} = 1 - \frac{-58}{48} = 1 + \frac{58}{48} = \frac{169}{48}$$

اور چونکہ سوال سے یہ بات ظاہر ہو کہ ان باقی روٹیاں کو چاروں مسافروں نے برابر بانٹ کر  
 کہا اور کوئی روٹی توئی نہیں اور نہ کوئی کتے کو دی گئی تو ضرور ہر کی چوتھائی اس باقیات کی ایک عدد صحیح ہونے  
 صورت  $\frac{525-81}{1024}$  ایک عدد صحیح ہو واسطی دریافت کرنی کے کوئی ایسی قیمت لاکھ کی صورت



تذکرہ ایک عدد صحیح ہو جائی تو فرض کر دو اس صورت کو سادی اور موافق اس فرض کی حاصل ہوگی یہ  
 مساوات ۵۲۵ - ۱۰۲۴ = ۱۰۲۴ اور اسے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات

$$ع \quad \frac{۳۹+۵۵۲}{۸۱} \text{ اب فرض کر دو کہ } \frac{۳۹+۵۵۲}{۸۱} + ۶ + ۵۱۲ = \frac{۵۲۵+۱۰۲۴}{۸۱} = ۱۷$$

اب فرض کر دو کہ اور اس مساویے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات

$$\frac{۳۹-۶۲۹}{۵۲} + ۷ = \frac{۳۹-۶۸۱}{۵۲} = ۱۲$$

$$\frac{۱۰+۲۲۳}{۲۹} + ۱ + ۷ = \frac{۳۹+۷۵۲}{۲۹} = ۲۵ \text{ اور اسے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات}$$

اب فرض کر دو کہ

$$\frac{۱۰-۱۷}{۲۳} + ۱ = \frac{۱۰-۱۲۹}{۲۳} = ۱۲$$

اب فرض کر دو کہ

$$\frac{۴+۲۵}{۴} + ۱ + ۲۳ = \frac{۱۰+۲۲۳}{۴} = ۵۷$$

اب فرض کر دو کہ

$$\frac{۴-۱۷}{۵} = \frac{۴-۱۲۹}{۵} = ۱۲$$

ن اور اسے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  
 اور اسے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  
 سوال کی پوری ہوجائیں تو فرض کر دو کہ = اور موافق اس فرض کے حاصل ہونگی یہ مساوات

$$۱۷ = \frac{۱۰۲}{۴} = \frac{۱۰+۹۲}{۴} = \frac{۱۰+۲۲۳}{۴} = ۱۷$$

$$۱۲ = \frac{۳۹-۶۸۱}{۵۲} = ۱۲ \text{ اور } ۳۹ = \frac{۳۹+۷۵۲}{۲۹} = ۲۵ \text{ اور } ۲۱ = \frac{۱۰-۱۲۹}{۲۳} = ۱۲$$

$$\text{اور لا } ۷۵ = \frac{۵۲۵+۴۱۴۴۰}{۸۱} = \frac{۵۲۵+۱۰۲۴}{۸۱} = ۱۷$$

اس مثال کا اس طرح ہونا ہے

$$۱۹۱ = \frac{۷۴۷}{۴} = \frac{۱-۷۴۵}{۴}$$

$$۱۲۳ = \frac{۵۴۲}{۴} = \frac{۱-۵۴۲}{۴} \text{ اور } ۵۴۲ = ۱-۱۹۱-۷۴۵$$

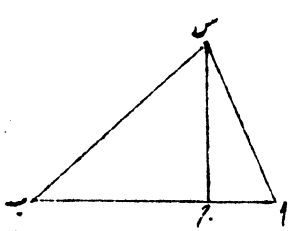
$$۱۰۷ = \frac{۲۲۸}{۴} = \frac{۱-۲۲۹}{۴} = ۲۲۹ = ۱-۱۲۳-۵۴۲$$

$$\text{اور } ۲۲۹ = ۱-۱۰۷-۲۲۸ = ۲۲۸ = ۱-۲۲۹$$

$$\text{اور } ۲۲۸ = ۱-۱۰۷-۲۲۹ = ۲۲۸ = ۱-۲۲۹$$

سوال ۱۵ جاتے ہیں یہ ثابت کرنا مشکل عدسی وسیلہ جبر و مقابلہ کے بطور منہاس بہا کو اجاگر

زفرض کہ آ ب س ایک مثلث فاب الزاویہ ہر اور س قائمہ خیر اور آ ب وتر قائمہ اور س ج عمود وتر قائمہ پر

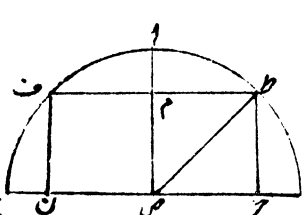


اور یہی فرض کر کے کہ اس = ط اور ب س = ص اور آ ب = سر  
 اور آ ب = لا اور ج ب = س - لا اور چونکہ دو چوٹی مثلث  
 آ ج س اور ب ج س اور بڑا مثلث ب س آ متشابه یعنی مثلث  
 میں یکساں ہیں لہذا انکی مساحت اور اضلاع میں فرق ہوگی نیز ہر دو کونجی

اضلاع متناسب ہوں اور اسبدا سطحی حاصل ہوگا یہ متناسب س : ص :: ص : س - لا اور اس کے  
 حاصل ہوتی ہے یہ مساوات ص = س (س - لا) = س - س لا ..... (۱)  
 اور اسے طوری حاصل ہو ماسی یہ متناسب س : ط :: ط : لا اور اس کے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات  
 ط = س لا ..... (۲)

اور اگر جمع کریں ہم مساواتوں (۱) اور (۲) کو تو حاصل ہوگی یہ مساوات ط + ص =  
 س - س لا + س لا = س یعنی ط + ص = س اور یہی ثابت کرنا تھا آج ہی پڑنی والا اقلیدس  
 کا یہ اعتراض کر سکتا ہے کہ متشابه ہونا مثلثوں کا سبب دی ہوئی اونکی زوا یا کی جیسی مقدار اقلیدس کی یہ  
 ثابت ہوتا ہے پس یہ پھر ثبوت ثابت کرنی شکل عروس کا بذریعہ حرد و مقابلہ کی کچھ کام کا نہیں کیونکہ وہ معروف  
 ہے اور جیسی مقدار اقلیدس کے لیکن وجواب اسکی یہ کہ ہا جا سکتا ہے کہ متشابه ہونا مثلث کا اس صورت  
 میں ترتیب پڑتی ہے اور چندان محتاج دلیل کا نہیں ہے لیکن مساوی ہونا حاصل جمع نجد درون دو مثلثوں مثلث  
 قائمہ الزاویہ کا نجد وتر قائمہ کے بالکل خیا میں نہیں آتا ہے

سوال ۱۶ جاسیے میں ہم مانا ایک ٹریسی بڑا مستطیل در میان ایک نصف



دائرہ مغروض کے مثلث زفرض کہ نصف دائرہ مغروض ب ۹ د  
 ج اور اوس میں ف ج مستطیل مطلوب ہے اور یہی فرض کر دو  
 کہ ص مرکز نصف دائرہ کا ہے آ ب تعبیر کر نصف قطر ط ص کو ط  
 سے اور ج ص کو لاسی اور ساحت مستطیل ف ج کو تو

سے پس ہوگی یہ مساواتیں ط = ر - ط - لا اور ج ن = لا اور اسبدا سطحی حاصل  
 ط ج × ن = ف ج ساحت مستطیل مطلوب مساوی ہوگی لا ط - لا کے یعنی حاصل ہوگی یہ  
 مساوات = م لا ط - ط - لا اور اسبدا سطحی جو نت نجد در کرتے ہیں ہم دونوں طرف  
 اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہے یہ مساوات م لا - م ط لا = م - م

اور اس سے حاصل ہوتی ہے مساوات  $لا - ط \times لا = \frac{ک}{۴}$

اور جو بت جاری کرتی ہیں اس مساوات پر قاعدہ مساوات درجہ دوم کا قواعد سونت حاصل ہوتی ہے یہ مساوات

$$لا - ط لا + ۲ لا = \frac{ط}{۴} = \frac{ط}{۴} - \frac{ط}{۴} = \frac{ط - ۲}{۴}$$

اور اس میں وسطی لا =  $\frac{ط}{۲} + \sqrt{\frac{ط - ۲}{۴}}$  اب ظاہر ہے کہ اگر بڑے سے بڑا فرض کریں تو وہ

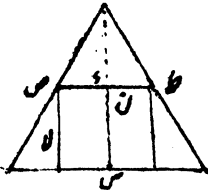
ساوی ط کے ہونا چاہیے اور اس میں وسطی حاصل ہوگی یہ مساوات لا =  $\frac{ط}{۲}$  اور اس میں وسطی

$$لا = \sqrt{\frac{ط}{۲}} \text{ اور } ۲ = ط$$

**سوال ۱۷** ایک مثلث مفروض میں ایک مستطیل بنا ہوا ہے اور مساحت اس مستطیل کی معلوم ہے

پس جاہتی ہیں ہم دریافت کرنا ضلعوں اس مستطیل کو علیحدہ علیحدہ فرض کر دو کہ مثلث مفروض کے تین ضلعی

ط اور ض اور س ہیں اور ان مساحت مستطیل کی ہے اور ہمہ موافق شرط سوال کی معلوم ہے اب فرض کر دو کہ دو ضلعی



مستطیل کے کہ متقدیر این جہول ہیں لا اور وہ ہیں اب چونکہ متون

ضلعی اس مثلث کے معلوم ہیں تو موافق سوال چہارم شکل بند سحر یکے

کے ہم دریافت کر سکتے ہیں اس مثلث کا ارتفاع پس فرض کر دو کہ

یہ ارتفاع معلوم ہے پس اب متناہ ہونی مثلثوں کی سی حاصل ہوگا

یہ متناہ س : ک : م : م - لا اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات م = س - م - س لا

اور موافق شرط سوال کے یہ بات ظاہر ہے کہ لا = ن پس اس سے حاصل ہوگی یہ مساوات و =  $\frac{ن}{لا}$  اور جو بت

لیکن ہم اس قیمت کو مساوات م = س - م - س لا میں تو حاصل ہوگی یہ مساوات

$$\frac{م ن}{لا} = س - م - س لا \text{ اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات } م ن = س م لا - س لا$$

اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات س لا - س م لا = م ن اور اس سے یہ لا - م لا =  $\frac{م ن}{س}$

اور جو بت موافق قاعدہ مساوات درجہ دوم کی زیادہ کرن ہم دو نظریوں اس مساوات پر بخیر و پر کا

تو حاصل ہوگی یہ مساوات لا - م لا +  $\frac{م}{س} = \frac{م}{س} - \frac{م ن}{س} = \frac{م - م ن}{س}$  اور اس سے

$$\sqrt{\frac{س - م ن}{س}} \pm \frac{م}{س} = \frac{س - م ن}{س} \text{ اور } لا = \frac{س - م ن}{س} \pm \frac{م}{س}$$

اور و =  $\frac{ن}{س - م ن - م س}$  شکل فرض کر دو کہ تین ضلعی مثلث مفروض کی سیہ ہیں

۳ = ۲۱ اور ۲ = ۱۰ اور ۱ = ۷ اس ظاہر ہے کہ ارتفاع اس مثلث کی ۸ ہوگی اور

$$\frac{40\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = \sqrt{2} = \frac{20 \times 8 \times \sqrt{2} - 8 \times 21}{21 \times \sqrt{2}} = \sqrt{2} = 8$$

**سوال ۱۸** معلوم ہیں زمین ارتفاع اور قاعدہ ایک مثلث کا اور نسبت اوسی دو باقی کی ضلعوں میں

اور چاہتی ہیں ہم دریافت کرنا ہر ضلع اس مثلث کو علیحدہ علیحدہ فرض کرو کہ قاعدہ مثلث مذکور کا = ق  
اور ارتفاع اوسی = ۱ اور دو باقی اوسی ضلعے اسپن وہی نسبت رکھتی ہیں جو عدد اکا رکھتا ہیں

یہ سے ایس صورت میں ضروری ہے کہ اگر فرض کیا جا ایک ضلع بقدر لائے تو دوسرا ضلع لہا ہوگا اب فرض کرو کہ  
ایک باقی مثلث مذکور کا ہے اور اسے اسطی دوسرا بازو اور سکا ق۔ دہوگا ایس موافق شکل عروسی کے

حاصل ہوگی یہ مساواتیں لہا = ق + ۱ اور لہا = (ق - ۱) + ۱ اور اس مساوات میں حاصل ہوگی یہ مساوات  
لہا = (ق - ۱) + ۱ اور اس مساوات میں حاصل ہوگی یہ مساوات لہا = (ق - ۱) + ۱

اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہ مساوات لہا = ق + ۱ اور اس سے یہ  
(ق - ۱) + ۱ = ق + ۱ اور اس سے یہ (ق - ۱) + ۱ = ق + ۱ اور اس سے یہ  
اور اگر حل کریں ہم اس مساوات درج دوم کو موافق قاعدہ حاصل ہوگی یہ

$$= \frac{ق}{ق-1} + \frac{ق}{ق-1} = \frac{ق}{ق-1}$$

اور جو ہر معلوم ہو قیمت کی اور ہر معلوم ہو چاہی زمین قیمت لہا کی مساوات لہا = ق + ۱ اور جو ہر معلوم ہو

قیمت لہا کی یعنی ایک ضلع کی تو معلوم ہو چاہی زمین قیمت لہا کی کہ دوسرا ضلع یہ مثلاً فرض کرو کہ قاعدہ مثلث مذکور کا  
= ۲۱ اور ارتفاع اوسی = ۸ اور نسبت درمیان ضلعوں مطلوبہ کی وہ ہے جو آ رہتا ہے طرف  $\frac{۱۶}{۱۰}$  کی یعنی  $\frac{۱۶}{۱۰}$

ایس حاصل ہوگی قیمت کی اس مساوات سے =  $\frac{ق}{ق-1} = \frac{ق}{ق-1} + \frac{ق}{ق-1}$   
 $۶ = \frac{۱۱۳۲}{۱۸۹} = \frac{۳۲۳۲}{۱۸۹} + \frac{۲۱۰۰}{۱۸۹}$

اور اس سے لہا = ق + ۱ = ۸ + ۶ = ۱۴ اور اس سے اسطی حاصل ہوتی ہے یہ قیمت لہا کی  
لہا = ۱۰ جو ایک ضلع مثلث کا ہے اور ظاہر ہے کہ دوسرا ضلع =

سوال ۱۹ جاتے ہیں ہم دریافت کرنا دو ایسی اعداد کہ اگر ان کی مجذور و مکمل ایک دوسرے کے تقرب کرین اور دوسری بار ان دو کو صحیح کرین اور حاصل تقرب اور حاصل تقرب کو عدد اکا علیحدہ علیحدہ کر کے تو یہ دونوں

مجموعی اعداد مجذور ہو دیں فرض کرو کہ  $m$  اور  $n$  آ - ۱ دوسرا عدد ہے اس صورت میں ظاہر ہے کہ

$$m^2 + n^2 - 1 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow m^2 + n^2 = 3$$

مجذور کے پس پورے دو نوشتہ ہیں سوال کے مشق فرض کرو کہ  $m = 2$  تو اعداد مطلوبہ یہ ہوں گی ۱۶ اور ۱۹ امتحان

$$اس مثال کا اسلوبی ہو سکتا ہے  $16 + 19 = 35 = 1 + 34 = 4 = 2^2$  ایک عدد مجذور کے عدد اور  $16 - 19 = -3$$$

$$3 = 2^2 = 4 = 1 + 3 = 4 = 2^2$$

ہو سکتا ہے  $3 = 2^2 = 4 = 1 + 3 = 4 = 2^2$  ایک عدد مجذور اور  $3 - 4 = -1$  ایک عدد مجذور کے

سوال ۲۰ تا دہ کوٹ عدد ہے کہ اگر کسی مجذور کے عدد  $m$  کا تقرب کرین اور حاصل تقرب کو عدد  $n$  پر نسبت کرین تو حاصل

$$ایک عدد صحیح ہوتا ہے فرض کرو کہ  $m$  اور  $n$  اسطوریہ حاصل ہو گیا ہے کہ  $m^2 + n^2 = 2$  ایک عدد صحیح فرض کرو کہ$$

$$\frac{m^2 + n^2}{2} = 1 \Rightarrow m^2 + n^2 = 2$$

$$اور اسطوریہ حاصل ہو گیا ہے کہ  $m^2 + n^2 = 2$  اور  $m + n = 2$  اور  $m - n = 0$  اب فرض کرو کہ$$

$$m + n = 2 \Rightarrow m = 2 - n$$

$$اور اسطوریہ حاصل ہو گیا ہے کہ  $m^2 + n^2 = 2$  اور  $m + n = 2$  اور  $m - n = 0$  اب فرض کرو کہ$$

$$m^2 + n^2 = 2 \Rightarrow (2 - n)^2 + n^2 = 2 \Rightarrow 4 - 4n + n^2 + n^2 = 2 \Rightarrow 2n^2 - 4n + 2 = 0 \Rightarrow n^2 - 2n + 1 = 0 \Rightarrow (n - 1)^2 = 0 \Rightarrow n = 1$$

$$اور  $m = 2 - n = 2 - 1 = 1$  اور  $m + n = 1 + 1 = 2$  اور  $m - n = 1 - 1 = 0$$$

$$اور  $m^2 + n^2 = 1^2 + 1^2 = 2$  اور  $m + n = 1 + 1 = 2$  اور  $m - n = 1 - 1 = 0$$$

$$اور  $m^2 + n^2 = 1^2 + 1^2 = 2$  اور  $m + n = 1 + 1 = 2$  اور  $m - n = 1 - 1 = 0$$$

$$اور  $m^2 + n^2 = 1^2 + 1^2 = 2$  اور  $m + n = 1 + 1 = 2$  اور  $m - n = 1 - 1 = 0$$$

$$اور  $m^2 + n^2 = 1^2 + 1^2 = 2$  اور  $m + n = 1 + 1 = 2$  اور  $m - n = 1 - 1 = 0$$$

# غنیہ مساواتوں کا اسٹین نہایت مشکل مساواتیں حل کی گئی ہیں

$$\frac{u^2 - 3u + 1 - u^2}{2} \times \frac{r}{r+u} = \frac{r}{2} - u^2 = \frac{4 - 11u}{(r+u)(1-u^2)} \times \frac{ur}{2}$$

$$\frac{ur}{2} + \frac{5u}{2} - \frac{r}{r+u} - u^2 = \frac{(r+u)4}{r+u} \times \frac{ur}{2}$$

$$\frac{19ur}{2} - u^2 = \frac{(1+u^2)4 - (1-u^2)ur}{r+u}$$

$$\frac{1}{2} 4 - u = \frac{r - u^2 - \frac{1}{2} - u}{r+u}$$

$$\frac{1}{2} 4 - u = \frac{r - u^2 - \frac{1}{2} - u}{r+u}$$

$$3 \left( \frac{r}{ur} - 1 \right) \frac{r}{u} - u = \frac{ur^2 - \frac{r}{2} - r}{2ur} = \frac{14 - ur}{9}$$

$$\frac{u}{4} + \frac{r}{u} - u = \frac{ur}{r} + \frac{1}{4} - \frac{14}{9} - \frac{ur}{9} \therefore$$

$$\frac{14}{9} + \frac{r}{u} - u = u \left( \frac{1}{4} - \frac{r}{4} + \frac{r}{9} \right) \therefore$$

$$r + \frac{r}{u} - u = 0 \quad \frac{ur}{9} \therefore$$

$$r = \frac{r}{u} \therefore$$

$$r = u \therefore$$

$$\frac{1}{2} 4 - u = \frac{r - u^2 - \frac{1}{2} - u}{r+u} \quad \frac{r-u}{1-u} + \frac{r-u}{2-u} = \frac{r-u}{r-u} + \frac{14-u}{r-u}$$

$$\frac{1 - (1-u)}{1-u} + \frac{r - (2-u)^2}{-2u} = \frac{r + (r-u)^2}{r-u} + \frac{1 - (r-u)}{r-u}$$

$$r = 0 \quad \frac{1}{r} = 2 \therefore$$

$$1 = 0 \quad \frac{1}{1-u} + 0 + \frac{r}{2-u} - r = \frac{r}{r-u} + 0 + \frac{1}{r-u} - r \therefore$$

$$\frac{r}{2-u} - \frac{1}{1-u} = \frac{1}{r-u} - \frac{r}{r-u} \therefore$$

$$\frac{0}{2+u^2 - ur} = \frac{0}{r+u^2 - ur} \therefore$$

$$14 + u^2 - ur = 2 + u^2 - ur \therefore$$

$$0 = ur \therefore$$

$$\frac{1}{r} r = \frac{0}{r} = 0$$

$$\frac{ur+u}{12+u} \sqrt{12+u} = \frac{(0+ur+u) \sqrt{12+u} - (ur+u) \sqrt{12+u}}{19}$$

$$\frac{0+ur+u}{12+u} \sqrt{12+u} = \frac{ur+u}{12+u} \times \frac{19}{r} - \frac{ur+u}{12+u} \sqrt{12+u}$$

جہاں  $(12+u)(ur+u) = ur+u$  اور  $ur+u$  کی

$$\frac{0+ur+u}{12+u} = \frac{ur+u}{12+u} \times \frac{19}{r} + (ur+u) \frac{19}{r} - \frac{ur+u}{12+u} \sqrt{12+u}$$

$$\frac{r}{(1-v)^2} = \frac{v}{1+v} = 1 - \frac{v}{1+v} \therefore 95 = 22 \times (14 - 19) + 51 = \frac{22+v}{14+v} \times \frac{341}{3}$$

$$\frac{r}{(1-v)} \cdot \frac{b}{v} = v \therefore$$

$$v = \frac{\sqrt{v^2 - v^2 r} \sqrt{1+v} - v}{v - b}$$

$$v = \frac{\sqrt{v^2 - v^2 r} \sqrt{1+v} + 1}{v - b} \therefore$$

$$\frac{r}{(1-v)} = \frac{\sqrt{v^2 - v^2 r} \sqrt{1+v}}{v - b} \therefore v = \frac{\sqrt{v^2 - v^2 r} \sqrt{1+v}}{v - b}$$

$$\frac{r}{(1-v)} = \frac{\sqrt{v^2 - v^2 r} \sqrt{1+v}}{v^2 + v^2 r - v^2}$$

$$1 + \frac{r}{(1-v)} = \frac{r}{(1-v)} \therefore 1 - \frac{r}{(1-v)} = 1 - \frac{r}{(1-v)} \therefore$$

$$\frac{1}{1 + \frac{r}{(1-v)}} \sqrt{1+v} = \frac{v-b}{b} \therefore 1 + \frac{r}{(1-v)} \sqrt{1+v} = \frac{b}{v-b}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{r}{(1-v)}} \sqrt{1+v} = \frac{b}{v-b} \therefore$$

$$\frac{b}{1 + \frac{r}{(1-v)}} \sqrt{1+v} - b = v \therefore$$

$$(\sqrt{1+v} - v) \sqrt{1+v} = \frac{v^2 + v^2 r + v^2 r}{v - v^2 r}$$

$$(\sqrt{1+v} - v) \sqrt{1+v} = \frac{(v^2 + v^2 r) \sqrt{1+v}}{(v^2 + v^2 r) (\sqrt{1+v} + v) \sqrt{1+v}}$$

$$\frac{r}{19} = 95 \times \frac{r}{341} = \frac{22+v}{14+v} \therefore$$

طریقہ سادہ آبرآ زیادہ کیا اور پھر آکر کیا اور ان دونوں مساواتوں میں سے اول کو دوسرے سے تقسیم کیا اور اس عمل کو اشدہ کی مساواتوں میں ہم اس طرح (جگمگ) تکرار کی

$$\frac{39}{1} = \frac{29+12r}{5}$$

$$39 \times 5 = 12r \therefore$$

$$195 = 12r \therefore$$

$$v = \frac{\sqrt{v^2 + v^2 r} \sqrt{1+v} + v}{v^2 + v^2 r - v^2}$$

$$\frac{1+v}{1-v} = \frac{v+b}{\sqrt{v^2 + v^2 r} \sqrt{1+v}}$$

$$\left( \frac{1+v}{1-v} \right) = \frac{v^2 + v^2 r + v^2}{v^2 + v^2 r}$$

$$\left( \frac{1+v}{1-v} \right) = 1 + \frac{v^2}{v^2 + v^2 r}$$

$$\frac{r}{(1-v)} = 1 - \left( \frac{1+v}{1-v} \right) = \frac{v^2}{v^2 + v^2 r}$$

$$\frac{r}{(1-v)} = \frac{v^2}{v^2 + v^2 r}$$

$$\frac{r(1+v)}{r(1-v)} = 1 + \frac{r}{v} = \frac{(v+b)}{v} = \frac{v^2 + v^2 r + v^2}{v^2}$$

$$u^2 + v = 0 \Rightarrow u = -v^2$$

$$(1+u)^2 = (1-v^2) \Rightarrow u = -v^2$$

$$(1+u)^2 = (1+u)(1-u) \Rightarrow u = -v^2$$

چونکہ ہم مساوات  $(1+u)$  پر تقسیم ہو سکتی ہے تو دونوں طرف تقسیم کر کے  $1+u$  مساوات کی  $1+u = 0$  اور  $1-u = 0$  اور تقسیم کر کے  $1+u$

$$v = (1-u)$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{1-u} + u \Rightarrow v = 1-u$$

$$1 - \frac{1}{v} = u \Rightarrow \frac{1}{v} = 1 - u$$

$$\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$\sqrt{a^2 - b^2} = a^2 - b^2$$

$$\sqrt{a^2 - b^2} = a^2 - b^2$$

$$\sqrt{a^2 - b^2} = a^2 - b^2$$

$$v = u$$

$$v = \sqrt{a^2 - b^2} + u + v$$

یہ بات ظاہر ہے کہ

$$\left( \sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - b^2} \right) \sqrt{a^2 - b^2} = \left( \sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - b^2} \right) \sqrt{a^2 - b^2}$$

اور  $\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - b^2} = 0$  سے  $\sqrt{a^2 - b^2} = 0$  اور  $\sqrt{a^2 - b^2} = 0$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{u^2} - 1$$

$$\left( \frac{1}{u^2} + 1 \right) \frac{1}{v} = \frac{1}{u^2} + 1 = \frac{1}{v}$$

$$\left( \frac{1}{u^2} + 1 \right) \frac{1}{v} = \left( \frac{1}{u^2} + 1 \right) \left( \frac{1}{u} - v \right)$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{u} + v$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{u} + v$$

$$1 = \frac{u}{v} + uv$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{u} + \frac{uv}{v}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{u} + uv$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{u} + uv$$

$$\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - b^2} + v$$

$$\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - b^2} + v$$

$$\frac{b^2}{v} - \frac{v}{v} = \frac{a^2 - b^2}{v}$$

$$\left( \frac{b^2}{v} - \frac{v}{v} \right) = \frac{a^2 - b^2}{v}$$

$$\left( \frac{b^2}{v} - \frac{v}{v} \right) - \frac{v}{v} = \frac{a^2 - b^2}{v}$$

$$\left( \frac{b^2}{v} - \frac{v}{v} \right) - \frac{v}{v} = \frac{a^2 - b^2}{v}$$

$$v = \frac{a^2 - b^2}{v}$$



$$1 - \frac{p}{n} = \frac{p}{n} + u - l \therefore$$

$$\sqrt{1 - \frac{p}{n}} \pm \frac{p}{n} = \frac{p}{n} - u \therefore$$

$$\sqrt{1 - \frac{p}{n}} \pm \frac{p}{n} = u$$

$$p - \frac{p}{u} = \left(1 + \frac{p}{u}\right) \left(1 + \frac{p}{u}\right) \text{ ص}$$

$$\therefore \text{ص} (p - \frac{p}{u}) = (u + p)(u + p) \therefore p - \frac{p}{u} = (u + p)^2$$

$$\therefore (p + \text{ص}) (p - \frac{p}{u}) = (u + p)^2$$

$$\text{ص} (p - \frac{p}{u}) = (u + p)^2$$

$$\therefore (p + \text{ص}) (p - \frac{p}{u}) = (u + p)^2$$

$$\text{ص} (p - \frac{p}{u}) = (u + p)^2$$

$$\therefore (p + \text{ص}) (p - \frac{p}{u}) = (u + p)^2$$

$$\text{ص} (p + \text{ص}) (p - \frac{p}{u}) = (u + p)^2$$

$$\therefore \text{ص} (p + \text{ص}) (p - \frac{p}{u}) = (u + p)^2$$

$$\therefore \frac{p - \frac{p}{u}}{p + \text{ص}} = (u + p)^2$$

اور یہی لا = ص نسبت تقسیم کرنی کی جز مشترک پر

$$1 = \frac{p - \frac{p}{u}}{(p + \text{ص})^2} \quad ۱۴$$

$$\therefore \frac{(p - \frac{p}{u})}{(p + \text{ص})^2} + \frac{p - \frac{p}{u}}{p + \text{ص}} + 1 = \frac{p + u}{p + \text{ص}}$$

$$\therefore \frac{(p - \frac{p}{u})}{(p + \text{ص})^2} + \frac{p - \frac{p}{u}}{p + \text{ص}} = 1 - \frac{p + u}{p + \text{ص}}$$

$$\sqrt{(u+p)^2 + 4p} + \sqrt{(u+p)^2 + 4p} = \dots$$

حاصل ہوا  
سطح  
چونکہ (ب+۱) + (ب-۱) = ۲ب  
۱ + ۱ = ۲  
۱ + ۱ = ۲

$$\therefore (u+p)^2 + 4p = (u+p)^2 + 4p$$

$$\therefore (u+p)^2 + 4p = (u+p)^2 + 4p$$

$$\therefore (u+p)^2 + 4p = (u+p)^2 + 4p$$

$$\therefore (u+p)^2 + 4p = (u+p)^2 + 4p$$

$$\therefore (u+p)^2 + 4p = (u+p)^2 + 4p$$

$$\therefore (u+p)^2 + 4p = (u+p)^2 + 4p$$

$$\therefore (u+p)^2 + 4p = (u+p)^2 + 4p$$

$$\therefore (u+p)^2 + 4p = (u+p)^2 + 4p$$

$$\therefore (u+p)^2 + 4p = (u+p)^2 + 4p$$

$$\therefore (u+p)^2 + 4p = (u+p)^2 + 4p$$

$$\therefore (u+p)^2 + 4p = (u+p)^2 + 4p$$

$$\therefore (u+p)^2 + 4p = (u+p)^2 + 4p$$

$$\therefore (u+p)^2 + 4p = (u+p)^2 + 4p$$

$$\therefore (u+p)^2 + 4p = (u+p)^2 + 4p$$

$$\therefore (u+p)^2 + 4p = (u+p)^2 + 4p$$

$$\therefore (u+p)^2 + 4p = (u+p)^2 + 4p$$

$$\therefore (u+p)^2 + 4p = (u+p)^2 + 4p$$

$$\therefore (u+p)^2 + 4p = (u+p)^2 + 4p$$

$$\sqrt{u-1} = \sqrt{u-1} - \sqrt{u+1}$$

اس مساوات کو اس طرحی کہہ سکتے ہیں

$$\frac{1}{\sqrt{u-1}} = \frac{1}{\sqrt{u-1}} - \frac{1}{\sqrt{u+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{u+1}} = \frac{1}{\sqrt{u-1}}$$

طرفین کو  $\frac{1}{\sqrt{u-1}}$  پر تقسیم کیا

$$\frac{1}{\sqrt{u+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{u-1}}$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{u-1}} - \frac{1}{\sqrt{u+1}} \right\} = 1$$

$$1 = \frac{1}{\sqrt{u-1}} - \frac{1}{\sqrt{u+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{u-1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{u+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{u-1}} \pm 1 = \frac{1}{\sqrt{u+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{u-1}} = \frac{1}{\sqrt{u+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{u-1}} = \frac{1}{\sqrt{u+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{u-1}} - \frac{1}{\sqrt{u+1}} = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{u-1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{u+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{u-1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{u+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{u-1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{u+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{u-1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{u+1}}$$

طرفین کو  $\frac{1}{\sqrt{u-1}}$  پر تقسیم کیا

$$\frac{1}{\sqrt{u-1}} + \frac{1}{\sqrt{u+1}} = \frac{1}{\sqrt{u-1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{u-1}} + \frac{1}{\sqrt{u+1}} = \frac{1}{\sqrt{u-1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{u-1}} = \frac{1}{\sqrt{u+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{u-1}} = \frac{1}{\sqrt{u+1}}$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{u-1}} - \frac{1}{\sqrt{u+1}} \right\} = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{u-1}} - \frac{1}{\sqrt{u+1}} = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{u-1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{u+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{u-1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{u+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{u-1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{u+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{u-1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{u+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{u-1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{u+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{u-1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{u+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{u-1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{u+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{u-1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{u+1}}$$

$$\sqrt[3]{b^4} - \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{a^3} \therefore$$

$$(\sqrt[3]{b^4} - \sqrt[3]{a^3}) = 0 \therefore$$

$$= 1 - \sqrt[3]{14} \quad 14 \frac{b^4}{b-1} + r = (\frac{1}{b} + u) \frac{b^4}{b-1} - (\frac{1}{b} + u^2) \therefore$$

$$\therefore = (1+u+u^2)(1-u) = 1 - u^3$$

$$1 = u^3 \therefore u = 1 \text{ اور } 1 = u^3 \therefore u = 1$$

$$\therefore = 1 + u + u^2 \text{ اور } \frac{(b+1)r}{(b-1)^2} = (\frac{br}{b-1}) + (\frac{1}{b} + u) \frac{b^4}{b-1} - (\frac{1}{b} + u^2) \therefore$$

$$1 = u + u^2 \therefore$$

$$\frac{r}{r} = 1 - \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + u + u^2 \therefore$$

$$\frac{\sqrt[3]{r} - \sqrt[3]{1}}{r} \pm = \frac{1}{r} + u \therefore$$

$$20 \text{ طرفین کو لایہ تقسیم کیا } 0 = 1 + u^3$$

$$\therefore u + \frac{1}{u} = 0 \text{ طرفین پر } \pm \text{ زیادہ کئے}$$

$$2 = \frac{1}{u} + r + u^2 \therefore$$

$$\sqrt[3]{r} \pm = \frac{1}{u} + u \therefore$$

$$1 = u \sqrt[3]{r} \neq u \therefore$$

$$\frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + u \sqrt[3]{r} \neq u \therefore$$

$$\frac{1 - \sqrt[3]{r}}{\sqrt[3]{r}} = \frac{1}{\sqrt[3]{r}} \neq u \therefore$$

$$\frac{1 - \sqrt[3]{r} \pm}{\sqrt[3]{r}} = u \therefore$$

دافع ہو کر جس طرح 14 اور 20 مثالیں ص کی گئی ہیں اس طرح  
 $1 = u^3$  اور  $1 = u^3 + 1 = 0$  اور  $1 = u^3 + 1 = 0$

$$b^4 + (\frac{1}{b} + u) = (\frac{1}{b} + u^2)(b-1)$$

$$\frac{b^4}{b-1} = (\frac{1}{b} + u) \frac{b^4}{b-1} - (\frac{1}{b} + u^2) \therefore$$

$$\frac{b^4}{b-1} + r = (\frac{1}{b} + u) \frac{b^4}{b-1} - (\frac{1}{b} + r + u^2) \therefore$$

$$\frac{b^4 + r}{b-1} = (\frac{1}{b} + u) \frac{b^4}{b-1} - (\frac{1}{b} + u^2)$$

$$\frac{(b+1)r}{(b-1)^2} = (\frac{br}{b-1}) + (\frac{1}{b} + u) \frac{b^4}{b-1} - (\frac{1}{b} + u^2) \therefore$$

$$\frac{(b+1)r \sqrt[3]{r} \pm}{b-1} = \frac{br}{b-1} - \frac{1}{u} + u \therefore$$

$$\text{تسبیلا } \frac{(b+1)r \sqrt[3]{r} \pm br}{b-1} = \frac{1}{u} + u \therefore$$

$$1 - u = u^3 \therefore$$

$$1 - u^3 = u^3 + u^2 = 0 \therefore$$

$$1 - u^3 = 0 \therefore$$

$$1 - u^3 = 0 \therefore$$

$$18 \text{ } u = \sqrt[3]{b^3 + b + u^3}$$

رض کر کے  $u = \sqrt[3]{b^3 + b + u^3}$  اور  $u = \sqrt[3]{b^3 + b + u^3}$

$$s = (\sqrt[3]{s} + \sqrt[3]{b}) \sqrt[3]{b^3 + b + u^3}$$

$$s = \sqrt[3]{s} + \sqrt[3]{b} \therefore$$

اب اگر مساوات کو مساوات مفروضہ سے متبادل کریں تو

$$s = \sqrt[3]{s} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b}$$

اور مثالیں باسانی حل ہو سکتی ہیں

۲۱

$$\frac{ur}{14} = \frac{u}{1} - \frac{u}{u} = \frac{u}{u} + u - u$$

$$\sqrt{u} \frac{u}{u} \pm = \frac{u}{u} - u \therefore$$

$$(u - u) \sqrt{u} = (u + u) \sqrt{u} - (u - u) \sqrt{u}$$

$$u \sqrt{u} - u \sqrt{u} = u \sqrt{u} - u \sqrt{u} + u \sqrt{u} - u \sqrt{u}$$

اور بیشتر کے لیے کی

$$u + u \sqrt{u} (u - u) = u \sqrt{u} (u + u) + u$$

$$u + u \sqrt{u} = u \sqrt{u} + u \sqrt{u} + u$$

$$(u - u + u \sqrt{u}) \sqrt{u} = u \sqrt{u} + u \sqrt{u} + u$$

اور بقسیم کرنا کی چیز مشترک پر

$$(u + u \sqrt{u} \sqrt{u} - u \sqrt{u} + u \sqrt{u}) \sqrt{u} = (u + u \sqrt{u} \sqrt{u} + u + u) \sqrt{u}$$

$$u \sqrt{u} = u \sqrt{u} + u \sqrt{u} + u$$

$$r \sqrt{u} = (u + u \sqrt{u} \sqrt{u} - u \sqrt{u} + u \sqrt{u})$$

۲۲

$$(u + u \sqrt{u}) - (u + u) \sqrt{u} = (u + u \sqrt{u} \sqrt{u} + u + u) \sqrt{u}$$

$$r \sqrt{u} =$$

$$u + u \sqrt{u} \sqrt{u} - u \sqrt{u} - u \sqrt{u} = u - u \sqrt{u} - u + u$$

$$r \sqrt{u} \sqrt{u} = u + u \sqrt{u} \sqrt{u} + u + u \sqrt{u} \sqrt{u} =$$

$$= u - u \sqrt{u} (u + u) \sqrt{u} - u \sqrt{u} + u$$

$$(u + u) - r \sqrt{u} \sqrt{u} = u + u \sqrt{u} \sqrt{u}$$

$$(u - u \sqrt{u} \sqrt{u} - u) (u + u \sqrt{u})$$

$$+ (u + u) \sqrt{u} \sqrt{u} - u \sqrt{u} \sqrt{u} = u + u \sqrt{u} \sqrt{u}$$

$$u + u \sqrt{u} \sqrt{u} + u$$

$$u \sqrt{u} - u = u - u \sqrt{u} \sqrt{u} \sqrt{u} \therefore$$

$$\frac{u}{u \sqrt{u}} + \frac{u}{u \sqrt{u}} = u + u \therefore$$

$$u \sqrt{u} - u = u - u \sqrt{u} \sqrt{u} \sqrt{u} \therefore$$

$$u - \frac{u}{u \sqrt{u}} + \frac{u}{u \sqrt{u}} = u \therefore$$

$$u \sqrt{u} + u \sqrt{u} \sqrt{u} - u = u \sqrt{u} - u \sqrt{u} \sqrt{u} \sqrt{u} \therefore$$

$$u - u \sqrt{u} \sqrt{u} = u \sqrt{u} \sqrt{u} \sqrt{u} \therefore$$

$$\therefore \frac{u}{u} = u - u \sqrt{u} \sqrt{u} \therefore$$

$$\frac{(\sqrt{b-u} - u) \sqrt{r} \times \sqrt{b-u}}{\sqrt{b-u} \sqrt{r} + u} = \frac{(\sqrt{b-u} \sqrt{r} - u)}{\sqrt{b-u} \sqrt{r} + u}$$

$$\frac{\sqrt{b-u} \sqrt{r}}{\sqrt{b-u} \sqrt{r} + u} = \frac{\sqrt{b-u} \sqrt{r} - u}{\sqrt{b-u} \sqrt{r} + u} \therefore$$

شماره کننده هر کس که نوشته کمی

$$\frac{\sqrt{b-u} \sqrt{r}}{\sqrt{b-u} \sqrt{r}} = \frac{(\sqrt{b-u} \sqrt{r} - u)}{u} \therefore$$

$$\sqrt{b-u} \sqrt{r} = \sqrt{b-u} \sqrt{r} - u - \sqrt{r} \therefore$$

$$\sqrt{b-u} \sqrt{r} (1 + \sqrt{r}) = u - \sqrt{r} \therefore$$

اب اگر چنین کا بنجد در کین تو به حاصل میرا می

$$= \sqrt{b} + \sqrt{r} \sqrt{r} - \sqrt{r}$$

$$\sqrt{b} \sqrt{r} - \sqrt{r} \sqrt{r} - \sqrt{r} \sqrt{r} + \sqrt{r} \sqrt{r} + \sqrt{r} \sqrt{r} = \sqrt{b} \sqrt{r} - \sqrt{r}$$

$$\sqrt{b} \sqrt{r} - \sqrt{r} \sqrt{r} - \sqrt{r} \sqrt{r} + \sqrt{r} \sqrt{r} = \sqrt{b} \sqrt{r} - \sqrt{r}$$

اب اگر چنین بر عدد آ کا زیاده کین آ کیم می کین طرفه ط

$$\frac{\sqrt{b}}{(r+b)\sqrt{r}} = \frac{\sqrt{b} \sqrt{r} - \sqrt{r}}{\sqrt{b} \sqrt{r} - \sqrt{r}} \therefore \frac{\sqrt{b}}{(r+b)\sqrt{r}} = \frac{\sqrt{b} \sqrt{r} + (\sqrt{r} - \sqrt{r})}{\sqrt{b} \sqrt{r} - \sqrt{r}} = \frac{\sqrt{b} \sqrt{r} + \sqrt{r}}{\sqrt{b} \sqrt{r} - \sqrt{r}}$$

$$\frac{1 + \sqrt{b} + \sqrt{r}}{r + \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{r}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{r}} + \sqrt{b} - \sqrt{r} \therefore$$

$$\left( \frac{1 + \sqrt{b}}{r + \sqrt{b}} \pm \sqrt{r} \right) \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{r}} = \sqrt{b} \therefore$$

$$\left( \frac{1 + \sqrt{b}}{r + \sqrt{b}} \pm \sqrt{r} \right) \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{r}} \sqrt{r} = \sqrt{b} \sqrt{r} \therefore$$

۲۴

$$\sqrt{u} + \sqrt{v} = \frac{\sqrt{u+1} \sqrt{v} + \sqrt{u+1} \sqrt{v} - 1}{\sqrt{u+1} \sqrt{v} + 1}$$

$$\sqrt{u+1} (\sqrt{u} + \sqrt{v}) + (\sqrt{u}-1) (\sqrt{u} + \sqrt{v}) = \sqrt{u+1} \sqrt{v} \therefore$$

$$(\sqrt{u}-1) (\sqrt{u} + \sqrt{v}) = \sqrt{u+1} \sqrt{v} (\sqrt{u}-1) \therefore$$

$$\frac{\sqrt{u} + \sqrt{v}}{\sqrt{u}-1} = \frac{\sqrt{u+1} \sqrt{v}}{\sqrt{u}-1} \therefore$$

$$\left( \frac{\sqrt{u}-\sqrt{v}}{\sqrt{u}+\sqrt{v}} \right) = \frac{\sqrt{u}-\sqrt{u+1}}{\sqrt{u+1}} \therefore$$

$$\frac{\sqrt{u} \sqrt{v}}{(\sqrt{u}+\sqrt{v})} = \frac{(\sqrt{u}-\sqrt{v})}{(\sqrt{u}+\sqrt{v})} - 1 = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u+1}} \therefore$$

$$\frac{\sqrt{u} \sqrt{v}}{\sqrt{u}(\sqrt{u}-\sqrt{v})} + 1 = \frac{\sqrt{u+1}}{\sqrt{u}-1} \therefore$$

$$\left( \frac{\sqrt{u} \sqrt{v}}{\sqrt{u}(\sqrt{u}-\sqrt{v})} + 1 \right) \sqrt{u} (\sqrt{u}-\sqrt{v}) = \frac{1 - \sqrt{\frac{u \sqrt{v}}{u} + 1}}{\sqrt{u}(\sqrt{u}-\sqrt{v})} \sqrt{u} = \frac{1 - \sqrt{\frac{u \sqrt{v}}{u} + 1}}{\sqrt{u}(\sqrt{u}-\sqrt{v})} \sqrt{u}$$

۲۴

$$\sqrt{r+u} - \sqrt{r-u} \sqrt{r+1} = \sqrt{r+u} \sqrt{r-u}$$

$$\frac{1}{\sqrt{r+u}} - \frac{1}{\sqrt{r-u}} = \sqrt{r+u} \sqrt{r-u} - 1 - \sqrt{r-u} \therefore$$

$$\sqrt{r+u} (1 - \sqrt{r-u}) =$$

$$\left( \frac{\sqrt{r+u} - \sqrt{r-u}}{\sqrt{r+u} + \sqrt{r-u}} \right) \sqrt{r+u} \sqrt{r-u} = \frac{\sqrt{r+u} \sqrt{r-u}}{\sqrt{r+u} + \sqrt{r-u}}$$

طرفین کو عدد آسانی کر کے

$$\sqrt{r+u} \sqrt{r+u} = r+u$$

$$\frac{r+u \sqrt{r+u} + 1 + r}{r+u \sqrt{r+u} + r+u} = 1$$

اب جو طرفین مساوی (r+u) پر تقسیم ہوگی اس واسطے موافق خواص سے باقی سپرد و این حاصل ہوگی

$$b-1 = \frac{r}{r+u \sqrt{r+u} + r+u}$$

$$(1) \dots = r+u \sqrt{r+u} + 1 - u \sqrt{r+u}$$

$$\frac{r}{b-1} = r+u \sqrt{r+u} + r+u$$

$$(2) \dots r+u \sqrt{r+u} = r+u \sqrt{r+u} - 1 - u \sqrt{r+u}$$

$$\sqrt{r} - \frac{1-b}{b-1} = \sqrt{r} - \frac{r}{b-1} = r+u \sqrt{r+u}$$

اب ہم مساوات (1) سے لاکھی قیمت دیا ہے کہ

$$r+u \sqrt{r+u} = 1 - u \sqrt{r+u}$$

$$\sqrt{r} + u \frac{1-b}{b-1} \times r - \left( \frac{1-b}{b-1} \right) = \sqrt{r} + u \sqrt{r+u}$$

$$r+u = (1-u)$$

$$\left( \frac{1-b}{b-1} \right) = \sqrt{r} + \frac{r-b}{b-1}$$

$$r+u = 1 + u r - u$$

$$\frac{(1-b)}{b-1} = \sqrt{r} (1-b)$$

$$\frac{r}{r} = \left( \frac{r}{r} \right) + u r - u$$

$$\frac{1-b}{(1-b)(b-1) \sqrt{r}} = \sqrt{r}$$

$$\frac{r \sqrt{r}}{r} \pm = \frac{r}{r} - u$$

$$\frac{1-b}{(1-b)(b-1) \sqrt{r}} = \sqrt{r}$$

$$\frac{r \sqrt{r} \pm r}{r} = \sqrt{r}$$

$$\frac{1-b}{(1-b)(b-1) \sqrt{r}} = \sqrt{r}$$

اب مساوات (2) کو حل کریں تو ظاہر ہوگی

$$r+u \sqrt{r+u} = 1 - u \sqrt{r+u}$$

$$\frac{1-b}{(1-b)(b-1) \sqrt{r}} = \sqrt{r}$$

$$r+u \sqrt{r+u} = 1 + u r - u$$

$$\frac{1-b}{(1-b)(b-1) \sqrt{r}} = \sqrt{r}$$

$$1+r = 1 \pm u \sqrt{r+u}$$

$$\frac{1-b}{(1-b)(b-1) \sqrt{r}} = \sqrt{r}$$

$$\sqrt{r} \pm = 9 - u$$

$$\frac{1-b}{(1-b)(b-1) \sqrt{r}} = \sqrt{r}$$

$$\sqrt{r} \pm 9 = u$$

$$\frac{1-b}{(1-b)(b-1) \sqrt{r}} = \sqrt{r}$$

$$b = \frac{r+u \sqrt{r+u} + 1 + r}{r+u \sqrt{r+u} + r+u}$$

$$\frac{1-b}{(1-b)(b-1) \sqrt{r}} = \sqrt{r}$$

$$r+u \sqrt{r+u} + r+u$$

$$\frac{1-b}{(1-b)(b-1) \sqrt{r}} = \sqrt{r}$$



$$\sqrt{\frac{1}{b} \pm u} = \frac{1}{b} \pm u \quad \therefore \sqrt{\frac{1}{b} \pm u} = \frac{1}{b} \pm u$$

اسم ۲

$$\frac{\frac{1}{b} + u}{\frac{1}{b} - u} = \frac{25}{9} - \left(\frac{1}{b} - u\right)$$

اس مسائل کی دوسری طرف کو (یعنی شمار کنندہ اور مخرج کو) ضرب نما میں ضرب کیا علامت بدلی کہ جو علامت کو

$$\frac{\frac{1}{b} + u}{\frac{1}{b} - u} = \frac{25}{9} - \left(\frac{1}{b} - u\right)$$

$$\frac{\frac{1}{b} + u}{\frac{1}{b} - u} = \frac{25}{9} - \left(\frac{1}{b} - u\right)$$

$$r = \frac{1}{b} - u + \frac{1}{b} - u$$

$$\frac{9}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{b} - u + \frac{1}{b} - u$$

$$r - 1 = \frac{1}{b} - u + \frac{1}{b} - u$$

اسی واسطی دو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

$$(1) \dots 1 = \frac{1}{b} - u \quad (2) \dots r - 1 = \frac{1}{b} - u$$

ادل مساواتی قیمت لاکھی اس طرح معلوم ہوتی ہے

$$\frac{25}{9} = \frac{14}{9} + \frac{1}{b} - u$$

$$\frac{1}{b} - u = \frac{11}{9}$$

اور دوسری مساواتی اس طرح لاکھی

$$\frac{5r}{9} = \frac{14}{9} + \frac{1}{b} - u$$

$$\frac{1}{b} \left\{ (1-b) \sqrt{\frac{1}{b} - u} + \sqrt{\frac{1}{b} - u} \right\} = \frac{1}{b} - u$$

سم ۲۲  $\sqrt{\frac{1}{b} - u} = \frac{1}{b} - u$  (مخبر کی)

$$\frac{1}{b} - u = \frac{1}{b} - u$$

طرفین کو ط لا پر تقسیم کیا

$$\frac{1}{b} - u = \frac{1}{b} - u$$

$$\left(\frac{1}{b} - u\right) = \left(\frac{1}{b} - u\right)$$

$$\frac{1}{b} - u = \left(\frac{1}{b} - u\right)$$

$$\frac{1}{b} - u = \left(\frac{1}{b} - u\right)$$

$$\frac{1}{b} - u = \left(\frac{1}{b} - u\right)$$

$$\frac{1}{b} - u = \frac{1}{b} - u$$

$$\frac{1}{b} - u = \frac{1}{b} - u$$

$$\frac{1}{b} - u = \frac{1}{b} - u$$

$$\frac{1}{b} - u = \frac{1}{b} - u$$

$$\frac{1}{b} - u = \frac{1}{b} - u$$

$$\frac{1}{b} - u = \frac{1}{b} - u$$

$$\frac{1}{b} - u = \frac{1}{b} - u$$

$$\frac{1}{b} - u = \frac{1}{b} - u$$

$$\frac{1}{b} - u = \frac{1}{b} - u$$



$$\frac{q+\sqrt{r}}{q-\sqrt{r}} \times \frac{1}{13} = \left(\frac{r-\sqrt{r}}{r+\sqrt{r}}\right) + \left(\frac{r+\sqrt{r}}{r-\sqrt{r}}\right)$$

طرفین مساوات کا کتب یکا اسیرا سطحی یہ حاصل ہوا

$$\frac{\sqrt{13}\sqrt{r}}{r} \pm = \frac{\sqrt{r}}{r} \pm = \frac{r}{r} \pm \therefore$$

$$\frac{\sqrt{13}\sqrt{r} \pm r}{r} = \pm \therefore$$

$$\frac{q+\sqrt{r}}{q-\sqrt{r}} \times \frac{1}{13} + \frac{r-\sqrt{r}}{r+\sqrt{r}} + \frac{r+\sqrt{r}}{r-\sqrt{r}} = \left(\frac{q+\sqrt{r}}{q-\sqrt{r}}\right) \left(\frac{1}{13}\right)$$

$$(q+\sqrt{r}) \frac{r}{13} + (q+\sqrt{r})r =$$

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(p+\sqrt{q}+\sqrt{p})^2(1-n)}{(p+\sqrt{q}-\sqrt{p})(1+n)}$$

$$q - \sqrt{r}$$

$$\frac{q+\sqrt{r}}{q-\sqrt{r}} \frac{0}{13} =$$

$$\frac{1+n}{1-n} \times \frac{1-n}{n} = \left(\frac{p}{q}\right) \frac{p+\sqrt{q}+\sqrt{p}}{p+\sqrt{q}-\sqrt{p}}$$

$$\frac{(13)r}{13} = \frac{(13)0}{13} = \left(\frac{q+\sqrt{r}}{q-\sqrt{r}}\right) \therefore$$

$$\frac{1+n}{1-n} \times \frac{1-n}{n} = \left(\frac{p}{q}\right) \frac{\frac{p}{q} + 1 + \frac{p}{q}}{\frac{p}{q} + 1 - \frac{p}{q}}$$

$$\frac{40}{13} = \frac{(13)0}{13} = \frac{q+\sqrt{r}}{q-\sqrt{r}} \therefore$$

$$ص = \left(\frac{p}{q} - \frac{p}{q}\right) \frac{p+\sqrt{q}+\sqrt{p}}{1+\left(\frac{p}{q} - \frac{p}{q}\right)}$$

$$\frac{4}{2} \pm = \frac{0}{3} \therefore \frac{1}{9} = \frac{\sqrt{r}}{q}$$

اب فرض کر دو کہ  $\frac{p}{q} = \frac{p}{q}$  اسیرا حاصل ہوتی ہے

$$\frac{13}{13} \pm = \frac{r}{13} \pm = \pm \therefore$$

$$\sqrt{\frac{p-\sqrt{q}}{p+1} + \frac{p-\sqrt{q}}{p-1}} \sqrt{p-\sqrt{q}-p}$$

$$ص = \frac{r}{1+r} \times \frac{r}{r}$$

$$\therefore r = r = r = r$$

$$\frac{p+\sqrt{q}}{p-1} + \frac{p-\sqrt{q}}{p-1} = \frac{p}{p-1} + \frac{p}{p-1}$$

$$p^2 - (p-1) - (p-1) - (p-1) + (p-1) + (p-1) - (p-1) + (p-1)$$

نہ اس سے  $r = r = r$  اس اور یہ سادہ درجہ دوم کی ہے اس سے قیمت کی معلوم ہو سکتی ہے اب فرض کر دو کہ قیمت کی جو معلوم ہوئی اس سے اسیرا سطحی

$$p^2 - (p-1) - (p-1) - (p-1) + (p-1) + (p-1) - (p-1) + (p-1)$$

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{q} \therefore p = p = p = p$$

$$\frac{p-\sqrt{q}}{p-1} + \frac{p-\sqrt{q}}{p-1} + \frac{p-\sqrt{q}}{p-1} + \frac{p-\sqrt{q}}{p-1}$$

قیمت لاکھی دریافت ہو سکتی ہے

۳۵

$$\sqrt{1-u^2} \sqrt{1+u} = 2 - \left(\frac{1}{u} + 1\right) \sqrt{u(u-1)}$$

$$\sqrt{1-u^2} \sqrt{1+u} = 2 - \left(\frac{1}{u} + 1\right) \sqrt{u(u-1)}$$

طرفین کا مجذور کیا اسیرا اسطی

$$-(u-1) \left(\frac{1}{u} + 1\right)^2 = 2 - \left(\frac{1}{u} + 1\right) \sqrt{u(u-1)}$$

$$2 \sqrt{u(u-1)} + 2 - \left(\frac{1}{u} + 1\right) \sqrt{u(u-1)}$$

۱+۱-۱۳=۱ اور کس سے بیہ مساوات حاصل ہوتی ہے

$$-(u-1) \left(\frac{1}{u} + 1\right)^2$$

$$2 \sqrt{u(u-1)} + 2 - \left(\frac{1}{u} + 1\right) \sqrt{u(u-1)}$$

طرفین مساوات کو (u-1) پر تقسیم کیا اسیرا اسطی

$$-(u-1) \left(\frac{1}{u} + 1\right) = 2 - \left(\frac{1}{u} + 1\right) \sqrt{u(u-1)}$$

$$2 \sqrt{u(u-1)} + 2 - \left(\frac{1}{u} + 1\right) \sqrt{u(u-1)}$$

$$2 \sqrt{u(u-1)} + 2 - \left(\frac{1}{u} + 1\right) \sqrt{u(u-1)}$$

$$2 \sqrt{u(u-1)} + 2 - \left(\frac{1}{u} + 1\right) \sqrt{u(u-1)}$$

$$2 \sqrt{u(u-1)} + 2 - \left(\frac{1}{u} + 1\right) \sqrt{u(u-1)}$$

$$2 \sqrt{u(u-1)} + 2 - \left(\frac{1}{u} + 1\right) \sqrt{u(u-1)}$$

$$2 \sqrt{u(u-1)} + 2 - \left(\frac{1}{u} + 1\right) \sqrt{u(u-1)}$$

$$2 \sqrt{u(u-1)} + 2 - \left(\frac{1}{u} + 1\right) \sqrt{u(u-1)}$$

$$2 \sqrt{u(u-1)} + 2 - \left(\frac{1}{u} + 1\right) \sqrt{u(u-1)}$$

$$\sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)} = \sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)}$$

$$\sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)} = \sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)}$$

$$\sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)} = \sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)}$$

$$\sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)} = \sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)}$$

$$\sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)} = \sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)}$$

$$\sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)} = \sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)}$$

$$\sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)} = \sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)}$$

$$\sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)} = \sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)}$$

$$\sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)} = \sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)}$$

$$\sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)} = \sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)}$$

$$\sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)} = \sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)}$$

$$\sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)} = \sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)}$$

$$\sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)} = \sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)}$$

$$\sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)} = \sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)}$$

$$\sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)} = \sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)}$$

$$\sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)} = \sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)}$$

$$\sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)} = \sqrt{u(u-1)} \sqrt{u(u-1)}$$

اسی واسطی ل - ۸ = ۲ = ۳ - ۲ = ۱

اور ل + ۲ = (۲ - ۲) + (۲ + ۲) = ۲ + ۲ = ۴

اور ل - ۲ = (۲ - ۲) - (۲ + ۲) = ۲ - ۲ = ۰

۲ - ۲ = (۲ - ۲) (۲ + ۲) = ۰

۱۴ × (۳۲ + ۲) =

۱۲۵۶۰ =

∴ ۱۴ + ۳ = ۱۷ = ۲۵۵ طرفین دین فریب کیا:

۲۴ × ۴۵ = ۱۰۸۰ = ۱۴ + ۳

طرفین پر ۲۴ زیادہ کیے اسی واسطی

( $\frac{40}{2}$ ) + ۲۴ × ۴۵ + ۲۴ = ( $\frac{40}{2}$ ) + ۴۵ + ۲

$\frac{40}{2} + ۲۴ = \frac{40}{2} + ۲$  ∴

۴ = ۲ ∴ ۲ = ۲

۱۱ = ۲ + ۲ = ۴

۳ = ۲ - ۲ = ۰

۳۶

لا (ص س - لا) = ک (لا - ط س) ... (۱)

لا و (ط س + ص ل - لا) = ط (ص ل + س - لا) ... (۲)

مسادات (۱) سے یہ مساوات حاصل ہوتی ہے

س (ص ل + ط) = لا (س + ل) طرفین سے لا

$\sqrt{1+b}\sqrt{1-b} = \sqrt{(r-b)+b}$

$= (b+1)\sqrt{1-b} = \sqrt{(r-b)+b}$

$\sqrt{1+b}\sqrt{1-b} = \sqrt{(r-b)+b}$

$\sqrt{1+b}\sqrt{1-b} = \sqrt{(r-b)+b}$

$\sqrt{1+b}\sqrt{1-b} = \sqrt{(r-b)+b}$

$\sqrt{1+b}\sqrt{1-b} = \sqrt{(r-b)+b}$

$\sqrt{1+b}\sqrt{1-b} = \sqrt{(r-b)+b}$

$\sqrt{1+b}\sqrt{1-b} = \sqrt{(r-b)+b}$

$\sqrt{1+b}\sqrt{1-b} = \sqrt{(r-b)+b}$

$\sqrt{1+b}\sqrt{1-b} = \sqrt{(r-b)+b}$

$\sqrt{1+b}\sqrt{1-b} = \sqrt{(r-b)+b}$

$\sqrt{1+b}\sqrt{1-b} = \sqrt{(r-b)+b}$

$\sqrt{1+b}\sqrt{1-b} = \sqrt{(r-b)+b}$

۳۶

۸ = ۳ - ۲

۱۲۵۶۰ = ۳ - ۲

رض کر کے لا = ۱ + ۲

۳ - ۲ = ۱

اسیروا  $\sqrt{2} = \sqrt{1+1}$

اسیروا  $\sqrt{3} = \sqrt{1+2}$

اسیروا  $\sqrt{4} = \sqrt{1+3}$  ..... (۱)

اسیروا  $\sqrt{5} = \sqrt{1+4}$

اور پھر مساوات (۱) کو مساوات (۲) پر تقسیم کرنی ہے۔

$$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = \frac{4}{5}$$

(۱)

$$\sqrt{5}-1 = \frac{4}{5}(\sqrt{5}+1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-5}$$

$$\frac{1}{1-\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5} \times \sqrt{5}$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5} \times \sqrt{5}$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{1-\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

۳۹

(۱) .....  $\sqrt{5} = \sqrt{1+4}$

(۲) .....  $\sqrt{4} = \sqrt{1+3}$

(۳) .....  $\sqrt{3} = \sqrt{1+2}$

مساوات (۱) سی  $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1+4}{5}$

یعنی  $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$

(۲) س (ص+ط+س) = (لا+س) (۱)

مساوات (۲) کو مساوات (۳) پر تقسیم کیا:

$$\frac{ص}{س} = \frac{لا+س}{ص+ط+س}$$

∴ لا+س = ص+ط اور مساوات (۱) ظاہر ہو کر

$$\frac{لا+س}{ص+ط+س} = \frac{ص}{ص+ط+س}$$

$$\frac{ص+ط-ص}{ص+ط+س} = \frac{ص-ص}{ص+ط+س}$$

$$\frac{ط}{ص+ط+س} = \frac{0}{ص+ط+س}$$

$$\frac{ط}{ص+ط+س} = \frac{0}{ص+ط+س}$$

یعنی لا = س

∴ لا ± س اور ص ± س

۳۸

(۱) .....  $\sqrt{5} = \sqrt{1+4}$

(۲) .....  $\sqrt{4} = \sqrt{1+3}$

مساوات (۱)  $\sqrt{5} = \sqrt{1+4}$

مساوات (۲)  $\sqrt{4} = \sqrt{1+3}$

اسیروا  $\sqrt{5} = \sqrt{1+4}$

اسیروا  $\sqrt{5} = \sqrt{1+4}$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = s \text{ مساوات (۲)}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = d \text{ مساوات (۳)}$$

(۱) ..... لا  $\sqrt{a} = (d+s)$

(۲) ..... لا  $d + \frac{a}{d} = s + \frac{a}{s}$

(۳) ..... لا  $\frac{a}{d} = s$

$$\frac{\sqrt{a+1}}{a} = (d+s) \text{ مساوات (۱)}$$

$$\frac{a}{d} - \frac{\sqrt{a+1}}{a} = s \text{ ..... لا}$$

$$\frac{a}{d} - \frac{\sqrt{a+1}}{a} = (d-s) \text{ ..... لا}$$

$$\frac{a}{d} + \frac{a}{s} - \frac{4}{a} = \frac{a}{d} - \frac{\sqrt{a+1}}{a} \text{ ..... لا}$$

$$\frac{a}{s} + \frac{a}{d} = \frac{\sqrt{a+1}}{a} \text{ ..... لا}$$

$$\frac{a}{s} + \frac{a}{d} - \frac{\sqrt{a+1}}{a} = \frac{\sqrt{a+1}}{a} \text{ ..... لا}$$

$$\frac{a}{s} + \frac{a}{d} - \frac{\sqrt{a+1}}{a} = \frac{\sqrt{a+1}}{a} \text{ ..... لا}$$

$$\frac{a}{s} + \frac{a}{d} = \frac{\sqrt{a+1}}{a} \text{ ..... لا}$$

لا  $a + b = 1$  جب یہ قیمت مساوی (۱) میں لکھیں

تو مساوات (۱) سی  $(1+b)(1+s) = a + 1$

$$1 + b - \frac{a}{s} = (d+s)$$

$$\sqrt{a+(1-b)} = \sqrt{1+b} - \frac{a}{s} = d+s$$

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{d} + \frac{1}{s} \text{ مساوات (۲) سی}$$

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{d} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \text{ ..... لا}$$

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{d} + \frac{1}{s} \text{ مساوات (۳) سی}$$

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s} + \frac{1}{d} = \frac{2}{d} \text{ ..... لا}$$

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{2}{d} \text{ اور اس طرح}$$

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s} + \frac{1}{d} = \frac{2}{d} \text{ اور لا}$$

$$\frac{2}{d} = \frac{2}{s} \text{ ..... لا}$$

$$\frac{2}{d} = \frac{2}{s} \text{ ..... لا}$$

$$\frac{2}{d} = \frac{2}{s} \text{ ..... لا}$$

(۱) ..... لا  $\sqrt{a} = (d+s)$

(۲) ..... لا  $\sqrt{a} = (d+s)$

(۳) ..... لا  $\sqrt{a} = (d+s)$

ب مساواتوں کو جمع کیا اس پر اسطی

$$\sqrt{a} + \sqrt{a} = (d+s) + (d+s)$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{a} = d+s+d+s$$

$$\frac{\sqrt{a}}{d+s} = \frac{\sqrt{a}}{d+s} \text{ مساوات (۱) سی}$$

$$\sqrt{\frac{(s+b)(s-b)}{(s-b)^2}} = \pm s$$

$$\sqrt{\frac{(s+b)(b-s)}{(s-b)^2}} = \pm d$$

۴۳

لا + س = (س + ل) ن ..... (۱)

لا + د = (ل + د) ن ..... (۲)

ر + د = (د + ر) ن ..... (۳)

$$n^2 + b = (n+s)(n+l) \quad (۱)$$

$$n^2 + c = (n+d)(n+l) \quad (۲)$$

$$n^2 + s = (n+d)(n+r) \quad (۳)$$

مساوات (۱) اور (۲) کو باہم ضرب کر کے (۲) پر تقسیم کیا

$$\frac{(n+l)(n+d)(n+r)}{(n+l)(n+d)} = \frac{(n+l)(n+r)}{(n+l)(n+d)}$$

$$\frac{(n+l)(n+r)}{(n+l)(n+d)} = \frac{(n+l)(n+r)}{(n+l)(n+d)}$$

$$\frac{(n+l)(n+r)}{(n+l)(n+d)} = \frac{(n+l)(n+r)}{(n+l)(n+d)}$$

$$\sqrt{\frac{(n+l)(n+r)}{(n+l)(n+d)}} = \pm n + ل$$

$$\sqrt{\frac{(n+l)(n+r)}{n^2 + س}} = \pm n + ل$$

اب اگر مساوات (۱) اور (۳) کو باہم ضرب کر کے

(۲) پر تقسیم کریں

اور  $s - d = \frac{b}{r} - \frac{1}{r}$  بوسیله مساوات (۲) کے

$$s^2 - d^2 = \frac{b^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} = s^2 - d^2$$

$$\sqrt{\frac{b^2}{r^2} - \frac{1}{r^2}} = \frac{b}{r} - \frac{1}{r} = s - d$$

اور  $\sqrt{\frac{b^2}{r^2} - \frac{1}{r^2}} = \frac{b}{r} - \frac{1}{r} = s - d$

۴۳

لا + س = (د + ل) ن ..... (۱)

س + د = (ل + د) ن ..... (۲)

د + ل = (ل + د) ن ..... (۳)

ان تین مساواتوں پر تین مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

لا + س = ل + د

لا + س = د + س

لا + د = د + س

جمع کیا

$2s + 2d + 2l = 2d + 2s + 2l$  اور  $2d + 2s + 2l = 2d + 2s + 2l$

$2s + 2d = 2d + 2s$

اسی طرح  $2s + 2d = 2d + 2s$

اور  $2d + 2s = 2d + 2s$

$$\frac{(s+b)(s-b)}{(s-b)^2} = \frac{(s+b)(s-b)}{(s-b)^2}$$

$$\frac{(s+b)(s-b)}{(s-b)^2} = \frac{(s+b)(s-b)}{(s-b)^2}$$

$$\frac{(s+b)(s-b)}{(s-b)^2} = \frac{(s+b)(s-b)}{(s-b)^2}$$

$$\sqrt{\frac{(s+b)(s-b)}{(s-b)^2}} = \pm ل$$

$$\sqrt{\frac{(s+b)(s-b)}{(s-b)^2}} = \pm ل$$

سوات (۲)  $s = \frac{p}{s+l}$

$\frac{s+l}{p} = \frac{p}{s+l}$

$p^2 = (s+l)^2 \therefore \frac{s+l}{p} = \frac{p}{s+l}$

$p^2 = s+l \dots (۲)$

بوسیله مساوات (۱)  $\frac{p^2}{s} = l$

$l = s^2$  اور اس پر اسطی بوسیله مساوات (۲)

$p^2 = s+l$  اور اس مساوات سے قیاسی نتیجہ نکالیے

$s = \frac{1}{p} \sqrt{1+p^2}$  اور اس پر

$l = \frac{1}{p} \sqrt{1+p^2}$

(۱)  $\frac{p+4+l}{\sqrt{l}} = \frac{1+\sqrt{1+p^2}}{s}$

(۲)  $l(1+s) = 3p$

مساوات (۱) میں اول طرف کی شمار کنندہ اور نوبت ناکو

$\sqrt{1+p^2} - 1$  میں ضرب کیا اور دوسری طرف کی

شمار کنندہ اور نوبت ناکو  $\sqrt{1+p^2} - 9 + 3$  میں ضرب

کیا تو یہ مساوات حاصل ہوئی

اور اس مساوات  $\frac{\sqrt{l}}{p-9+l} = \frac{s}{1-\sqrt{1+p^2}}$

تو  $\sqrt{\frac{(p+n)(s+n)}{p+n}} = n$

اور اگر مساوات (۲) اور (۱) کو باہم ضرب کریں (۱) پر تقسیم کریں تو

$\sqrt{\frac{(p+n)(s+n)}{p+n}} = n$

(۱)  $l = s$

(۲)  $l = s$

مساوات (۱) کا مع مرتبہ کا صودیا اور (۲) کا مع مرتبہ کا صودیا

طع ص ع  
لا = س

س ص ع  
لا = س

$\frac{ع}{س} = \frac{طع - س}{لا} = \frac{ع}{س}$

$\left(\frac{ع}{س}\right) = لا$  اور اس طرح  $s = \left(\frac{ع}{س}\right)$

(۱)  $l = s+l$

(۲)  $l = s+l$

مساوات (۱)  $s = \frac{s+l}{p}$

اسیوا  $\sqrt{2} = \sqrt{1+1}$

اسیواسطی  $\sqrt{2} = \sqrt{1-1}$

اسیواسطی  $\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ..... (۱)

اسیواسطی  $\sqrt{2} = \frac{1}{1-\sqrt{2}}$

اور پھر مساوات (۱) کو مساوات (۲) پر تقسیم کرنی۔

$\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

لے (۱)

$\sqrt{2} - \sqrt{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

$\frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{1}{1-\sqrt{2}}$

یعنی  $\frac{1-\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1-\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$  اور

$\frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{1}{1-\sqrt{2}}$

۳۹

(۱) .....  $\sqrt{2} = \sqrt{1+1}$

(۲) .....  $\sqrt{2} = \sqrt{1-1}$

(۳) .....  $\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

مساوات (۱) سے  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

یعنی  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

س (۱)  $\sqrt{2} = \sqrt{1+1}$

مساوات (۲) کو مساوات (۱) پر تقسیم کیا:

$\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

س (۱)  $\sqrt{2} = \sqrt{1+1}$  سے ظاہر ہے کہ

$\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

$\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

$\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

$\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

یعنی  $\sqrt{2} = \sqrt{2}$

س (۱)  $\sqrt{2} = \sqrt{1+1}$

(۱) .....  $\sqrt{2} = \sqrt{1+1}$

(۲) .....  $\sqrt{2} = \sqrt{1-1}$

مساوات (۱) سے  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

مساوات (۲) سے  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

اسیوا  $\sqrt{2} = \sqrt{1+1}$

اسیواسطی  $\sqrt{2} = \sqrt{1-1}$



ساوات (۲) سے  $\frac{ص}{\sqrt{۲+ص+ص^۲}} = د$

ساوات (۳) سے  $\frac{س}{\sqrt{۲+ص+ص^۲}} = د$

(۱) .....  $\sqrt{۲+ص} = د + د$

(۲) .....  $د + \frac{۳}{۲} = د + د$

(۳) .....  $\frac{۳}{۱۶} = د + د$

ساوات (۱) سے  $\frac{\sqrt{۲+ص}}{۱} = د + د$

$\frac{۳}{۴} - \frac{\sqrt{۲+ص}}{۱} = د + د$  اور  $\frac{\sqrt{۲+ص}}{۱} = د - د$

اور ساوات (۲) سے  $(د - د) = (د - \frac{۳}{۲})$

$\frac{\sqrt{۲+ص}}{۱} = \frac{۳}{۴} - \frac{۳}{۲} = \frac{۳}{۴} - \frac{۶}{۴} = -\frac{۳}{۴}$

$\frac{\sqrt{۲+ص}}{۱} = \frac{۳}{۴}$

$\sqrt{۲+ص} = \frac{۳}{۴}$

$\sqrt{۲+ص} = \frac{۳}{۴}$

$\sqrt{۲+ص} = \frac{۳}{۴}$

∴  $۲+ص = \frac{۹}{۱۶}$  جب یہ قیمت مساوی (۱) میں لکھیں

تو ساوات (۱) سے  $(د + د) = د + د$

$د + د - د = د$

$\sqrt{۲+ص} = د + د$

ساوات (۲) سے  $\frac{۱}{ص} = \frac{۱}{د} + \frac{۱}{د}$

$\frac{۱}{ص} - \frac{۱}{د} = \frac{۱}{د} - \frac{۱}{د} ∴$

ساوات (۳) سے  $\frac{۱}{س} = \frac{۱}{د} + \frac{۱}{د}$

$\frac{۱}{ص} - \frac{۱}{س} + \frac{۱}{د} = \frac{۲}{د} ∴$

اور اس طرح  $\frac{۱}{د} - \frac{۱}{س} + \frac{۱}{ص} = \frac{۲}{د}$

اور  $\frac{۱}{س} - \frac{۱}{ص} + \frac{۱}{د} = \frac{۲}{د}$

$\frac{۲طصس}{طص + صس - طص} = د$

$\frac{۲طصس}{طص + صس - طص} = د$

$\frac{۲طصس}{طص + صس - طص} = د$

(۱) .....  $\sqrt{۲+ص} = د + د$

(۲) .....  $ص = د + د + د$

(۳) .....  $س = د + د + د$

سب مساواتوں کو جمع کیا گیا اس پر اسطی

$\sqrt{۲+ص+ص^۲} = د + د + د$

$\sqrt{۲+ص+ص^۲} = د + د + د$

ساوات (۱) سے  $\frac{\sqrt{۲+ص+ص^۲}}{۱} = د + د + د$

$$\sqrt{\frac{(ص+ب)(س-ص)}{(ص-ب)^2}} \pm = س$$

$$\sqrt{\frac{(ص+ب)(ب-ص)}{(س-ص)^2}} \pm = د$$

۴۳

(۱)..... ب = (س+د) ن

(۲)..... ص = (د+د) ن

(۳)..... س = (د+د) ن

$$س^2 = (س+د)(ن+د) \quad (۱)$$

$$ص^2 = (د+د)(ن+د) \quad (۲)$$

$$س^2 + ن^2 = (د+د)(ن+د) \quad (۳)$$

مساوات (۱) اور (۲) کو باہم ضرب کر کے (۳) پر تقسیم کیا جائیگا۔

$$\frac{(ن+د)^2 (س+د)(ن+د)}{(س+د)(ن+د)(د+د)} = \frac{(ن+د)^2 (ص+د)(ن+د)}{(س+د)(ن+د)}$$

$$\frac{(ن+د)^2 (ص+د)}{(س+د)} = (ن+د)^2$$

$$\sqrt{\frac{(ن+د)(ص+د)}{(س+د)}} \pm = ن + د$$

$$\sqrt{\frac{(ن+د)(ص+د)}{س+د}} \pm = ن$$

اب اگر مساوات (۱) اور (۳) کو باہم ضرب کر کے

(۲) پر تقسیم کریں

اور  $د = \frac{1}{ر} - ب$  پس مساوات (۲) کے

$$\pm = س \quad \sqrt{ب+^2(1-ب)} \pm = ب - \frac{1}{ر} = س$$

$$\pm = س \quad \sqrt{ب+^2(1-ب)} \pm = \frac{1}{ر} \pm \frac{ب}{ر} - \frac{1}{ر} = س$$

اور  $\sqrt{ب+^2(1-ب)} \pm = \frac{1}{ر} \pm \frac{1}{ر} - \frac{ب}{ر} = س$

۴۳

(۱)..... ب = (د+د) ن

(۲)..... س = (د+د) ن

(۳)..... د = (د+د) ن

ان تین مساواتوں پر تین مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

ب + د = د

ب + د = د

ب + د = د

جمع کیا

۲ ب + د + د + د = د + د + د + د

$$۲ ب + د = د + د + د + د$$

اسی طرح ۲ د + د = د + د + د + د

اور ۲ د + د = د + د + د + د

$$\frac{(ص+ب)(س-ص)}{(س+د)(ن+د)} = \frac{۲ ب + د}{د + د + د + د}$$

$$\frac{(ص+ب)(س-ص)}{(س+د)(ن+د)} = \frac{۲ ب + د}{د + د + د + د}$$

$$\frac{(ص+ب)(س-ص)}{(س+د)(ن+د)} = \frac{۲ ب + د}{د + د + د + د}$$

$$\sqrt{\frac{(ص+ب)(س-ص)}{(س+د)^2}} \pm = د$$

سادات (۲)  $s = \frac{p}{s+u}$

$\frac{s+u}{p^2 u} = \frac{p}{s+u} \therefore$

$p^2 = (s+u)^2 \therefore \frac{s+u}{p^2} = \frac{p}{s+u} \therefore$

$(2) \dots \dots \dots p^2 = s+u \therefore$

بوسیله سادات (۱)  $\frac{p^2}{s} = \frac{p^2}{u}$

$\therefore u = s^2$  اور اس ساداتی بوسیله سادات (۲)

$p^2 = s+u$  اور اس سادات سے قیاس کی پیروی

$\frac{1}{p} = s \sqrt{1+u^2}$  اور اس ساداتی

$\frac{1}{p} = u \sqrt{1+u^2}$

(۱)  $\dots \dots \dots \frac{\sqrt{3+4+u}}{u} = \frac{\sqrt{1+u^2}}{s}$

(۲)  $\dots \dots \dots (1+u)^2 = 3+4+u$

سادات (۱) میں اول طرف کی شمار کنندہ اوڑب ناگو

طرح سے  $\sqrt{1+u^2} - 1 - u$  میں ضرب کیا اور دوسری طرف کی

شمار کنندہ اوڑب ناگو  $\sqrt{3+4+u} - 3$  میں ضرب

کیا تو یہ سادات حاصل ہوئی

اور اس ساداتی  $\frac{\sqrt{3+4+u}}{3-4+u} = \frac{s}{\sqrt{1+u^2}}$

تو  $\sqrt{\frac{(p+u)(s+u)}{p+u}} = s - u$

اور اس سادات (۲) اور (۳) کو باہم ضرب کر کے  
(۱) پر تقسیم کریں تو

$\sqrt{\frac{(p+u)(s+u)}{p+u}} = s - u$

(۱)  $\dots \dots \dots \frac{p}{s} = \frac{p}{u}$

(۲)  $\dots \dots \dots \frac{s}{p} = \frac{s}{u}$

ساداتی (۱) کا مرتبہ کا صعود یا اور (۲) کا  
ص مرتبہ کا صعود یا

طرح سے  $\frac{p}{s} = \frac{p}{u}$

س سے  $\frac{s}{p} = \frac{s}{u}$

$\frac{p}{s} = \frac{p}{u} \therefore \frac{u}{s} = \frac{p}{s} - \frac{p}{u}$

$\therefore \frac{u}{s} = \frac{p}{s} - \frac{p}{u}$  اور اس طرح  $s = \frac{p}{u}$

(۱)  $\dots \dots \dots \frac{s+u}{s} = \frac{p^2}{s}$

(۲)  $\dots \dots \dots \frac{p}{s} = \frac{s+u}{s}$

ساداتی (۱)  $s = \frac{s+u}{p^2}$



$$u - \frac{1}{s} - \frac{1}{s} = 2 - \frac{2}{s} \text{ اور اس سے } \frac{2}{s}$$

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s} = \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \right) \frac{1}{s} \text{ اور اس سے } \frac{2}{s}$$

$$3 - \frac{2}{s} = \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \right) \frac{1}{s}$$

$$\frac{2}{s} - 2 = 3 - \frac{2}{s}$$

$$\dots \dots \dots 1 = \frac{2}{s} + \frac{2}{s} \dots \dots \dots (3)$$

اگر مساوی (۲) کو ۳ میں ضرب کریں تو

$$4 - \frac{2}{s} = \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \right) \frac{1}{s}$$

$$\frac{2}{s} - \frac{2}{s} = \dots$$

$$1 - \dots = \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \right) \frac{1}{s}$$

طرفین کا کوپ یا اسیرا سٹی

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s} = 1 - \dots \dots \dots (4)$$

یہ قیمت کے مساوی (۳) میں لکھی اسیرا سٹی

$$1 = \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \right) \frac{1}{s}$$

$$4 = \dots + \dots + \dots$$

$$3 = \dots + \dots$$

$$0 = (1 - \frac{1}{s}) + (1 - \frac{1}{s}) \dots$$

$$\dots = \left\{ \dots + \dots \right\} \left( 1 - \frac{1}{s} \right) \dots$$

$$1 - \sqrt{u} \pm u = u^2 - 2$$

$$1 - \sqrt{u} \pm u = u^2 = 2$$

$$1 - u + 1 - \sqrt{u} \pm u = \dots$$

$$\dots \dots \dots (1 - \sqrt{u} \pm u) \dots = 2$$

جبوت مثبت قیمت کی مساوی (۱) میں لکھی تو

$$\frac{1 + \sqrt{u}}{u} = \frac{1 + \sqrt{u}}{u^2} + \frac{1 - \sqrt{u}}{u^2} + \frac{1 + \sqrt{u}}{u^2}$$

$$1 - \sqrt{u} = 1 + \sqrt{u} \dots$$

$$1 + u = 4 - u^2$$

$$1 + u = 10 = u^2 \text{ اور } u = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

$$2 = 1 - \sqrt{u} + 1 + \sqrt{u} = \dots$$

اگر مساوی (۳) سے منفی قیمت کی لکھی جاوے تو اور قیمتیں لآ اور تو کی دریافت ہو سکتی ہیں

۴ ۹

$$(1) \dots \dots \dots \frac{1}{s} - \frac{1}{s} = \dots$$

$$(2) \dots \dots \dots \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \right) \frac{1}{s} = \dots$$

$$\dots = \left( \frac{2}{s} - \frac{1}{s} \right) \frac{1}{s}$$

اس مساوی کی طرفین پر لآ زیادہ کیا اسیرا سٹی

$$\dots = \left( \frac{2}{s} - \frac{1}{s} \right) \frac{1}{s} + \dots$$

$$\dots = \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \right) \frac{1}{s} \dots$$

اگر مساوی (۱) میں علامت کا استعمال کریں تو

$$\sqrt{u+1} \cdot \frac{u-1}{\frac{u}{\sqrt{u+1}}+1} = \frac{u-1}{\frac{u}{\sqrt{u+1}}+1}$$

چونکہ یہ مساوات لاپرواہ  $\frac{u-1}{\frac{u}{\sqrt{u+1}}+1}$  تقسیم ہو سکتی ہے

$$\therefore u-1 = 0 \text{ اور } u = 1$$

تین

$$\text{اور } (u+1)\sqrt{u} = (u+1)\sqrt{u} \text{ اور اس سے مساوات}$$

حاصل ہونے ہیں

$$\sqrt{u+1} = 0 \dots \dots \dots \text{ اول}$$

$$\therefore u+1 = 0 \therefore u = -1$$

$$\text{اور } u = \sqrt{u+1} \dots \dots \dots \text{ دوسری}$$

$$\therefore u^2 = u + 1$$

$$\therefore u^2 - u = 1$$

$$\frac{u^2}{u} + \frac{u}{u} = \frac{u+1}{u} \therefore u - 1 = \frac{u+1}{u}$$

$$\therefore u = \frac{u+1}{u} \pm \sqrt{\frac{u+1}{u}}$$

اور اس طرح کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں

$$u = \frac{1-u}{1+u} \pm \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}$$

$$\frac{u^2}{u+1} = \frac{u^2}{u+1} - 1 = \frac{u^2 - u - 1}{u+1}$$

۵۱

$$u^2 = (u-1) \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{یعنی } (u+1) \left(1 - \frac{1}{u}\right) = (u+1) \left(1 - \frac{1}{u}\right)$$

$$\therefore 1 - \frac{1}{u} = 0 \dots \dots \dots (5)$$

$$\text{اور } u+1 = u+1 \dots \dots \dots (4)$$

$$\text{مساوات (5) } u+1 = u+1 \text{ اور } u+1 = u+1$$

$$\text{اور مساوات (6) } u+1 = u+1$$

$$\therefore u+1 = 1 + \frac{1}{u}$$

$$\therefore \sqrt{u+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{u+1}}$$

$$\therefore u - \sqrt{u+1} = 1$$

$$\text{اور } u = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^2$$

$$(1) \dots \dots \dots \sqrt{u-1} = (u-1)$$

$$(2) \dots \dots \dots u - s = (u-1)$$

$$\text{مساوات (2) } u - s = \frac{u}{u} - \frac{1}{u} = \frac{u-1}{u}$$

$$\therefore \frac{u+1}{\frac{u}{u}+1} = s$$

$$\therefore u-1 = \frac{u-1}{\frac{u}{u}+1} = \frac{u-1}{\frac{u}{u}+1}$$

$$\text{اور } u-1 = \frac{u-1}{\frac{u}{u}+1} = \frac{u-1}{\frac{u}{u}+1}$$

$$\frac{(u+1)(u-1)}{u^2 \left(\frac{u}{u}+1\right)} = \frac{u^2+u-1}{u^2 \left(\frac{u}{u}+1\right)}$$

مساوات (۱) میں قیمتیں لکھیں تو یہ مساوات حاصل ہوتی ہے

(۲) لا = ط لا - ص د

ساوات (۱) سے  $\frac{۲}{لا} = ط و - ص لا$

ساوات (۲) لا = ط لا - ص د

تقسیم کے بعد  $\frac{۲}{لا} = \frac{ط و - ص لا}{ط لا - ص د}$

رض کر کے  $\frac{۲}{لا} = \frac{ط و - ص لا}{ط لا - ص د}$

$\frac{۲}{لا} = \frac{ط و - ص لا}{ط لا - ص د}$  اور سرور کر کے

ط د - ص د = ط و - ص لا

ط د (د - ۱) - ص د (د - ۱) = ۰

طرفین کو د پر تقسیم کیا اس پر اسطے

ط د (د + ۱) - ص د (د + ۱) = ۰

چونکہ د پر تقسیم کیا ہے  $د = ۱$  اور  $د = ۱$  اور  $د = ۱$

یہ مساوات حاصل ہوتی ہے

ص د + (ص - ط) د + (ص - ط) د + (ص - ط) د = ص د

طرفین کو د پر تقسیم کیا اس پر اسطے

ص (د + ۱) - (ط - ص) (د + ۱) = ص د

اول طرف پر ص زیادہ ہے کئے اور کم ہے کئے اس پر اسطے

ص (د + ۱) - (ط - ص) (د + ۱) = ص د

$\frac{ص}{ص} (د + ۱) - \frac{ط - ص}{ص} (د + ۱) = \frac{ص د}{ص}$

$د + ۱ = \frac{ط - ص}{ص} (د + ۱)$

$\frac{ط + ص}{ص} \pm \sqrt{\frac{(ط - ص)^2}{ص^2}} = \frac{ط - ص}{ص} = \frac{۱}{د} + د$

$\frac{ط + ص}{ص} \pm \sqrt{\frac{(ط - ص)^2}{ص^2}} = \frac{ط - ص}{ص} = \frac{۱}{د} + د$

د = د - ۱ اور اس کے حل کرنی سے ظاہر ہے کہ

$د = \frac{۲}{ص} \pm \sqrt{\frac{۴}{ص^2} - ۱}$  اور اب پسندیدہ  $\frac{۲}{ص} = د$  کی

قیمتیں اور ان کے باقیانی معلوم ہو سکتی ہیں

۵۳

لا + د = لا د (لا + د) ... (۱)

لا + د = لا د (لا + د) ... (۲)

مساوات (۱) کو لا پر تقسیم کیا اس پر اسطے

لا + د = لا د (لا + د) ... (۱)

لا + د = لا د (لا + د) ... (۱)

لا + د = لا د (لا + د) ... (۱)

طرفین کو لا پر تقسیم کیا اس پر اسطے

لا + د = لا د (لا + د) ... (۱)

لا + د = لا د (لا + د) ... (۱)

لا + د = لا د (لا + د) ... (۱)

طرفین پر د کا زیادہ کیا

لا + د = لا د (لا + د) ... (۱)

لا + د = لا د (لا + د) ... (۱)

لا + د = لا د (لا + د) ... (۱)

یعنی  $\frac{1}{s} = (\frac{1}{s} + \frac{1}{s}) = (\frac{1}{s} + \frac{1}{s})$   
 اس مساوات پر مساوات (۲) کو جمع کیا اس سے  
 $\frac{1}{s} + (\frac{1}{s} + \frac{1}{s}) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s}$   
 $(\frac{1}{s} + \frac{1}{s}) =$   
 $(\frac{1}{s} + \frac{1}{s}) = (\frac{1}{s} + \frac{1}{s}) + \frac{1}{s} + \frac{1}{s}$   
 یعنی  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}$   
 اور  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}$   
 اور یہ مساوات  $(\frac{1}{s} + \frac{1}{s})$  پر تقسیم ہو سکتی ہے اس سے  
 $\frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}$   
 اور یہ تقسیم کرنی کے لیے  $(\frac{1}{s} + \frac{1}{s})$  پر یہ حاصل ہوتا ہے  
 $\frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}$   
 $\frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}$   
 اور  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}$   
 اور  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}$

$\frac{1}{s} + \frac{1}{s} = 2 \pm 1 = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}$   
 اب اگر اصل قیمت لیکر مساوات بلا کو  $\frac{1}{s}$  میں ضرب کریں تو  
 $\frac{1}{s} = 1 + \frac{1}{s}$   
 $\frac{1}{s} = 1 - \frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}$   
 $\frac{\sqrt{5} \pm 1}{2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}$   
 $\frac{\sqrt{5} \pm 1}{2} = \frac{1}{s}$   
 اور مساوات (۲) کو مجددی لائی تو  
 $\frac{\sqrt{5} \pm 1}{2} = \frac{1}{s} \times \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$   
 $\frac{\sqrt{5} \pm 1}{2} =$   
 $\frac{\sqrt{5} \pm 1}{2} = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$   
 $\frac{\sqrt{5} \pm 1}{2} =$

$(1 - \sqrt{5}) \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$   
 $\sqrt{5} (\frac{1}{s} + \frac{1}{s}) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}$   
 $\frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}$   
 $(1 - 4\sqrt{5}) \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$   
 $\frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}$

$\frac{\sqrt{5} \pm 1}{2} = \frac{1}{s}$   
 $(1) \dots \dots \dots \sqrt{5} (1 + \frac{1}{s}) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}$   
 $(2) \dots \dots \dots \sqrt{5} (1 + \frac{1}{s}) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}$   
 مساوات (۱) سے  $(\frac{1}{s} + \frac{1}{s}) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}$   
 $(3) \dots \dots \dots \frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}$   
 مساوات (۲) سے  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}$

$a + b = \frac{1}{s}$





اور جب یہ قیمت لائی مساوات (۴) میں لپی تو

$$\frac{2}{3} \sqrt{1+5x} = 5x - 2$$

$$\frac{2}{3} \sqrt{1+5x} - 2 = \frac{2}{3} \sqrt{1+5x} - 2 = 5x - 2 \therefore$$

$$\sqrt{1+5x} - 1 = 3 \therefore$$

۵۴

$$(1) \dots \frac{2}{3} \sqrt{1+5x} = \frac{1-5x}{\frac{2}{3} \sqrt{1+5x} - 2} \sqrt{1+5x}$$

$$3\sqrt{1+5x} = 2\sqrt{1+5x} + 5\sqrt{1+5x} - 2\sqrt{1+5x} + 2\sqrt{1+5x}$$

مساوات (۲) کے چند در کرنی سے اور اجزا کا طرف لائی یہ حاصل ہوتا ہے

$$0 = 2\sqrt{1+5x} + 5\sqrt{1+5x} - 2\sqrt{1+5x} + 2\sqrt{1+5x}$$

حرفین مساوات کو لایہ بر تقسیم کیا

$$0 = \frac{2}{3}\sqrt{1+5x} + \frac{5}{3}\sqrt{1+5x} - \frac{2}{3}\sqrt{1+5x} + \frac{2}{3}\sqrt{1+5x}$$

ضرب کر کے  $\frac{2}{3} = 2\sqrt{1+5x} + 5\sqrt{1+5x} - 2\sqrt{1+5x} + 2\sqrt{1+5x}$

$$0 = \frac{14}{3} + \frac{5x}{3} - 2x + 2x - 2x + 2x$$

$$0 = 14 + 5x - 2x + 2x - 2x + 2x$$

$$\therefore (2-3) - 3(2-3) - 3(2-3) + 3(2-3) = 0$$

$$0 = 8(2-3) \text{ اور اس سے اسطی}$$

$$0 = (2-3)(2-3)(2-3) = (2-3)^3$$

اور اس مساوات کی دو اجزا از بری دو مساوات حاصل ہوتی ہیں

$$2-3 = 0 \therefore 2 = 3$$

$$0 = 8 - 10 + 5 - 3 + 4 - 2 + 1 = 0$$

یعنی (د)  $(2-3)(2-3) = 0$  اور اس سے

$$2-3 = 0 \therefore 2 = 3$$

$$0 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8 \therefore (1-2) = 1$$

غیر ممکن ہے

پس اگر اول قیمت دہی یعنی  $\frac{2}{3}$  مساوات (۱) میں لپی تو

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{2x}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{2x}{1 - \frac{2}{3}} \implies \frac{1}{3} = \frac{2x}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{2x}{1 - \frac{2}{3}} \implies \frac{1}{3} = \frac{2x}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{2x}{1 - \frac{2}{3}} \implies \frac{1}{3} = \frac{2x}{1 - \frac{2}{3}}$$

طرفین کا کتب یا اس سے اسطی

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{2x}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2x}{1 - \frac{2}{3}} \implies \frac{1}{3} = \frac{2x}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2x}{1 - \frac{2}{3}} \implies \frac{1}{3} = \frac{2x}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2x}{1 - \frac{2}{3}} \implies \frac{1}{3} = \frac{2x}{1 - \frac{2}{3}}$$

۵۶

$$(1) \dots \frac{2}{3} = \frac{2x}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$(2) \dots 3 = (1 - \frac{2}{3})(1 - \frac{2}{3})$$

اگر لائی جبکہ دیکھیں اور دہی کی جبکہ دیکھیں تو مساوات (۲)

$$3 = (1 - \frac{2}{3})(1 - \frac{2}{3})$$

$$3 = (1 - \frac{2}{3})(1 - \frac{2}{3})$$

$$3 = (1 - \frac{2}{3})(1 - \frac{2}{3})$$

اور مساوات (۱) سے  $m^2 - d^2 = 3 - r(1-r)$

$$r(1+r) = (3-d^2)$$

$$r(1-r) =$$

$$r^2 - r =$$

پوسید (ط) کے ...

$$m^2 - d^2 = 3 - (r+d)^2$$

$$m^2 - d^2 - r^2 - 2rd - d^2 = 3 - r^2 - 2rd - d^2$$

$$m^2 - d^2 - r^2 = 3 - 2rd - d^2$$

$$m^2 - d^2 = 3 - 2rd - d^2 + r^2$$

اس قیمت کو فوقانی علامت کی موافق مساوات (ط) میں لکھا تو

$$m^2 - d^2 - r^2 = 3 - 2rd - d^2 + r^2$$

$$m^2 - d^2 = 3 - 2rd - d^2 + r^2 + r^2$$

اب اگر  $r$  کے قیمت تحتانی علامت کی موافق (ط) میں لکھیں تو

$$m^2 - d^2 - r^2 = 3 - 2rd - d^2 - r^2$$

$$m^2 - d^2 = 3 - 2rd - d^2 - r^2 + r^2$$

$$m^2 - d^2 = 3 - 2rd - d^2 - r^2 + r^2$$

$$m^2 - d^2 = 3 - 2rd - d^2 - r^2 + r^2$$

$$m^2 - d^2 = 3 - 2rd - d^2 - r^2 + r^2$$

اول قیمت دہی قیمت لا اور اس کے یہ ہوتی ہے

$$m = \frac{1}{2} \sqrt{5} \pm 1$$

$$m = \frac{1}{2} \sqrt{4} \pm 1$$

اور دہی دوسری قیمت ہی لا اور تو کی یہ ہوتی ہے

$$m = \frac{1}{2} \sqrt{3 \pm 1}$$

$$m = \frac{1}{2} \sqrt{5 \pm 3}$$

ضمیمہ نام ہوا

# مشالین جمع کی

- (۱) جمع کروں ۲-۵+۱ اور ۶-۲+۲ اور ۷-۱+۳ اور ۹-۱+۴ اور ۱۰-۱+۵
- (۲) جمع کروں ۳-۲+۳-۲ اور ۴-۳+۳ اور ۵-۳+۳ اور ۶-۳+۳ اور ۷-۳+۳ اور ۸-۳+۳ اور ۹-۳+۳ اور ۱۰-۳+۳
- (۳) جمع کروں ۳-۲+۳-۲ اور ۴-۳+۳ اور ۵-۳+۳ اور ۶-۳+۳ اور ۷-۳+۳ اور ۸-۳+۳ اور ۹-۳+۳ اور ۱۰-۳+۳
- (۴) جمع کروں ۲-۲+۲ اور ۳-۲+۲ اور ۴-۲+۲ اور ۵-۲+۲ اور ۶-۲+۲ اور ۷-۲+۲ اور ۸-۲+۲ اور ۹-۲+۲ اور ۱۰-۲+۲
- (۵) جمع کروں ۳-۲+۳ اور ۴-۲+۳ اور ۵-۲+۳ اور ۶-۲+۳ اور ۷-۲+۳ اور ۸-۲+۳ اور ۹-۲+۳ اور ۱۰-۲+۳
- (۶) جمع کروں ۲-۲+۲ اور ۳-۲+۲ اور ۴-۲+۲ اور ۵-۲+۲ اور ۶-۲+۲ اور ۷-۲+۲ اور ۸-۲+۲ اور ۹-۲+۲ اور ۱۰-۲+۲
- (۷) جمع کروں ۲-۲+۲ اور ۳-۲+۲ اور ۴-۲+۲ اور ۵-۲+۲ اور ۶-۲+۲ اور ۷-۲+۲ اور ۸-۲+۲ اور ۹-۲+۲ اور ۱۰-۲+۲
- (۸) جمع کروں ۲-۲+۲ اور ۳-۲+۲ اور ۴-۲+۲ اور ۵-۲+۲ اور ۶-۲+۲ اور ۷-۲+۲ اور ۸-۲+۲ اور ۹-۲+۲ اور ۱۰-۲+۲
- (۹) جمع کروں ۲-۲+۲ اور ۳-۲+۲ اور ۴-۲+۲ اور ۵-۲+۲ اور ۶-۲+۲ اور ۷-۲+۲ اور ۸-۲+۲ اور ۹-۲+۲ اور ۱۰-۲+۲
- (۱۰) جمع کروں ۲-۲+۲ اور ۳-۲+۲ اور ۴-۲+۲ اور ۵-۲+۲ اور ۶-۲+۲ اور ۷-۲+۲ اور ۸-۲+۲ اور ۹-۲+۲ اور ۱۰-۲+۲
- (۱۱) جمع کروں ۲-۲+۲ اور ۳-۲+۲ اور ۴-۲+۲ اور ۵-۲+۲ اور ۶-۲+۲ اور ۷-۲+۲ اور ۸-۲+۲ اور ۹-۲+۲ اور ۱۰-۲+۲
- (۱۲) جمع کروں ۱-۱+۱ اور ۲-۱+۱ اور ۳-۱+۱ اور ۴-۱+۱ اور ۵-۱+۱ اور ۶-۱+۱ اور ۷-۱+۱ اور ۸-۱+۱ اور ۹-۱+۱ اور ۱۰-۱+۱
- (۱۳) تفریق کروں ۲-۳ اور ۳-۴ اور ۴-۵ اور ۵-۶ اور ۶-۷ اور ۷-۸ اور ۸-۹ اور ۹-۱۰
- (۱۴) تفریق کروں ۲-۳ اور ۳-۴ اور ۴-۵ اور ۵-۶ اور ۶-۷ اور ۷-۸ اور ۸-۹ اور ۹-۱۰
- (۱۵) تفریق کروں ۲-۳ اور ۳-۴ اور ۴-۵ اور ۵-۶ اور ۶-۷ اور ۷-۸ اور ۸-۹ اور ۹-۱۰
- (۱۶) تفریق کروں ۲-۳ اور ۳-۴ اور ۴-۵ اور ۵-۶ اور ۶-۷ اور ۷-۸ اور ۸-۹ اور ۹-۱۰
- (۱۷) تفریق کروں ۲-۳ اور ۳-۴ اور ۴-۵ اور ۵-۶ اور ۶-۷ اور ۷-۸ اور ۸-۹ اور ۹-۱۰
- (۱۸) تفریق کروں ۲-۳ اور ۳-۴ اور ۴-۵ اور ۵-۶ اور ۶-۷ اور ۷-۸ اور ۸-۹ اور ۹-۱۰
- (۱۹) تفریق کروں ۲-۳ اور ۳-۴ اور ۴-۵ اور ۵-۶ اور ۶-۷ اور ۷-۸ اور ۸-۹ اور ۹-۱۰
- (۲۰) ۲-۳ اور ۳-۴ اور ۴-۵ اور ۵-۶ اور ۶-۷ اور ۷-۸ اور ۸-۹ اور ۹-۱۰

(۲۱)  $نخاوط - لا - (لا - ط) + (ط - لا) - لا - لا - لا - لا - لا - لا + (لا - ط) + (ط - لا) - لا - لا$  جواب ۵۸ - ۲۳

اختصار کروائندہ مقدار دیکھا

(۱)  $ط - (ص) - (ص + لا) + (ص) - (لا - ص) + (ص) + ص$  جواب ۴ + ۴

(۲)  $ط + (ص + س) - (ط - س) + س - (ط + ص) + (ص) + ص$  جواب ۳ - ۳ - ۳

(۳)  $ط - (ص + ط) + (ص) - (ط + ص + س) - (ط + ص + س + ن) + (ص) - ص - ن$

(۴)  $ط + (ص - ط - ص) - (ط + ص) - (ص + ط + ص) + (ص) - ص$  جواب ۷ - ۵

مثالین ضرب کے

(۱) ضرب کرو ۴ ط - ۳ ط + ۲ کو ۵ ط لایں جواب ۲۰ ط ۱۵ - ۱۵ ط ۱۰ + ۱۰ ط ۱

(۲) ضرب کرو ۵ ط - ۲ ط + ۱ کو ۹ ط لایں جواب ۴۵ ط ۱۸ + ۱۸ ط ۹ - ۹ ط ۹

(۳) ضرب کرو ۲ لا + ۳ کو ۲ ص - ۳ لایں جواب ۴ لا - ۶ ص

(۴) ضرب کرو ۴ ص - ۵ ط + ۶ کو ۲ ص + ۳ لایں جواب ۸ ص + ۳ ط

(۵)  $ط + ط + ص + ط + ص + ص + ص + ص$  جواب ۵ - ۵

(۶) ضرب کرو ۲ ص + ص - ۳ ص کو ۲ ص + ص لایں جواب ۴ ص + ۲ ص + ۲ ص

(۷) ضرب کرو ۲ ص + ۳ ط + ۴ ص کو ۳ ص کو ۳ ص لایں جواب ۶ ص + ۹ ط + ۱۲ ص

(۸) ضرب کرو ۴ ص - ۲ ط کو ۳ ص + ۲ ط لایں جواب ۱۲ ص - ۸ ط

(۹) دریافت کرو حاصل ضرب ط - ص + س - ن اور ط - ص + س - ن کا جواب ط - ص + س + ن

(۱۰) ضرب کرو ط + ص لا کو ط + س لایں جواب ط + (ط + ص) لا + ص س

(۱۱) ضرب کرو لا - ط + ص لا - س کو لا - ن لایں جواب لا + (ط + ن) لا + (ص + ط ن) لا

(س + ن + ص) لا + (ص + س) ن - لا - کس

(۱۲) دریافت کرو حاصل ضرب (لا - ط) (لا - ص) (لا - ن) کا جواب لا - (ط + ص + ن) لا +

ط ن + ص ن + ص ص

(۱۳) دریافت کرو حاصل ضرب (لا - ۱۰) (لا + ۱) (لا + ۲) کا جواب لا - ۵ - لا - ۴ - لا - ۳

(۱۴) دریافت کرو حاصل ضرب (لا - ۵) (لا + ۴) (لا - ۳) (لا + ۲) کا جواب لا - ۱۵ - لا - ۱۴ - لا - ۱۳ + ۱۴۸۰

(۱۵) دریافت کرو حاصل ضرب لا + اور لا + ۲ اور لا + ۳ اور لا + ۴ کا جواب لا + ۱۰ + لا + ۲۵ + لا + ۵۰ + لا + ۲۴





(۲۱) تقسیم کرو -  $5x^2 + 14x + 3 = (x+2)(5x+1) + 1$   
 -  $5x^2 + 14x + 3 = 5x^2 + 10x + 2x + 4 + 1 = 5x^2 + 12x + 5$  جواب

(۲۲) تقسیم کرو  $(x-2)(x+5) = x^2 + 3x - 10$   
 $x^2 + 14x + 2 = (x^2 + 3x - 10) + 11x + 12 = (x+2)(11x+6) + 4$   
 جواب  $(x+2)$  لاکو  $(11x+6) + 4$

(۲۳) تقسیم کرو  $(3s-4)(s+2) = 3s^2 + 2s - 8$   
 $3s^2 + 12s + 13 = (3s^2 + 2s - 8) + 10s + 21 = (s+2)(3s+10) + 5$   
 جواب  $(s+2)$  لاکو  $(3s+10) + 5$

(۲۴) تقسیم کرو  $(x^2 - 1)(x+4) = x^3 + 3x^2 - 4$   
 $x^3 + 14x^2 + 22x + 4 = (x^3 + 3x^2 - 4) + 11x^2 + 22x + 8 = (x+4)(11x+2) + 4$   
 جواب  $(x+4)$  لاکو  $(11x+2) + 4$

(۲۵) تقسیم کرو  $(x^2 - 2)(x+2) = x^3 + 0x^2 - 4$   
 $x^3 + 13x^2 + 22x + 4 = (x^3 + 0x^2 - 4) + 13x^2 + 22x + 8 = (x+2)(13x+6) + 4$   
 جواب  $(x+2)$  لاکو  $(13x+6) + 4$

(۲۶) تقسیم کرو  $(x^2 - 2)(x+2) = x^3 + 0x^2 - 4$   
 $x^3 + 13x^2 + 22x + 4 = (x^3 + 0x^2 - 4) + 13x^2 + 22x + 8 = (x+2)(13x+6) + 4$   
 جواب  $(x+2)$  لاکو  $(13x+6) + 4$

(۲۷) تقسیم کرو  $(x^2 - 2)(x+2) = x^3 + 0x^2 - 4$   
 $x^3 + 13x^2 + 22x + 4 = (x^3 + 0x^2 - 4) + 13x^2 + 22x + 8 = (x+2)(13x+6) + 4$   
 جواب  $(x+2)$  لاکو  $(13x+6) + 4$

(۲۸) تقسیم کرو  $(x^2 - 2)(x+2) = x^3 + 0x^2 - 4$   
 $x^3 + 13x^2 + 22x + 4 = (x^3 + 0x^2 - 4) + 13x^2 + 22x + 8 = (x+2)(13x+6) + 4$   
 جواب  $(x+2)$  لاکو  $(13x+6) + 4$

(۲۹) تقسیم کرو  $(x^2 - 2)(x+2) = x^3 + 0x^2 - 4$   
 $x^3 + 13x^2 + 22x + 4 = (x^3 + 0x^2 - 4) + 13x^2 + 22x + 8 = (x+2)(13x+6) + 4$   
 جواب  $(x+2)$  لاکو  $(13x+6) + 4$

مثالین مقسوم علیہ اعظم کی

دریافت کرو مقسوم علیہ اعظم استندہ مقداروں کا

(۱)  $3x^2 + 5x + 7$  اور  $4x^2 + 3x - 2$  لاکو جواب  $3x^2 + 5x + 7$

(۲)  $x^2 + 7x + 2$  لاکو اور  $3x^2 + 17x + 12$  لاکو جواب  $x^2 + 7x + 2$

(۳)  $x^2 + 7x + 2$  لاکو اور  $3x^2 + 17x + 12$  لاکو جواب  $x^2 + 7x + 2$



(۴)  $۶ط + ۴ط - ۳ط$  اور  $۶ط + ۱۱ط + ۳ط$  کا جواب  $۲ط + ۳ط$

(۵)  $۶ط + ۳ط + ۲ط$  اور  $۶ط - ۳ط - ۲ط$  کا جواب  $۳ط + ۲ط$

(۶)  $۳ط + ۱ط - ۲ط$  اور  $۵ط + ۲ط - ۱ط$  کا جواب  $۵ط - ۱ط$

(۷)  $۶ط - ۴ط + ۲ط - ۲ط$  اور  $۵ط + ۱ط + ۳ط$  کا جواب  $۲ط - ۱ط$

(۸)  $۴ط + ۱ط - ۱ط$  اور  $۲ط - ۱ط + ۵ط$  کا جواب  $۵ط - ۱ط$

(۹)  $۴ط - ۳ط - ۱ط - ۱ط$  اور  $۲ط + ۱ط - ۱ط + ۳ط$  کا جواب  $۲ط - ۱ط + ۳ط - ۱ط$

جواب  $۲ط - ۱ط + ۳ط - ۱ط$

(۱۰)  $۶ط - ۴ط + ۲ط + ۱ط$  اور  $۶ط - ۳ط + ۲ط + ۱ط$  کا جواب  $(۳ط - ۱ط)$

(۱۱)  $۶ط - ۳ط + ۱ط - ۱ط$  اور  $۶ط - ۳ط + ۱ط - ۱ط$  کا جواب  $(۳ط - ۱ط)$

(۱۲)  $۳ط - (۲ط + ۲ط)$  اور  $۲ط - (۲ط + ۲ط)$  کا جواب  $(۲ط - ۲ط) - (۲ط - ۲ط)$

جواب  $(۲ط - ۲ط)$

(۱۳)  $۲ط + (۲ط + ۲ط) + (۲ط + ۲ط)$  اور  $۳ط + ۲ط$

$۲ط + (۲ط + ۲ط) + (۲ط + ۲ط)$  اور  $۳ط + ۲ط$

(۱۴)  $۵ط + ۲ط - ۲ط$  اور  $۴ط + ۲ط - ۲ط$  کا جواب  $۲ط + ۲ط$

(۱۵)  $۱۵ط + ۱۰ط - ۱۰ط + ۳ط$  اور  $۴ط + ۱۹ط + ۸ط - ۵ط$  کا جواب  $۲ط - ۲ط$

جواب  $۲ط - ۲ط$

(۱۶)  $۱ط + ۲ط - ۲ط - ۳ط$  اور  $۹ط + ۲ط - ۵ط + ۳ط$

$۱ط + ۲ط - ۲ط - ۳ط$  اور  $۹ط + ۲ط - ۵ط + ۳ط$

(۱۷)  $۳ط + ۳ط - ۳ط$  اور  $۲ط - ۳ط - ۳ط$  کا جواب  $۳ط - ۳ط$

$۳ط + ۳ط - ۳ط$  اور  $۲ط - ۳ط - ۳ط$

(۱۸)  $۶ط + ۳ط - ۳ط$  اور  $۶ط + ۱۱ط + ۲ط - ۹ط + ۴ط + ۲ط - ۲ط - ۴ط$

$۶ط + ۳ط - ۳ط$  اور  $۶ط + ۱۱ط + ۲ط - ۹ط + ۴ط + ۲ط - ۲ط - ۴ط$

(۱۹)  $۲ط + ۲ط + (۲ط + ۲ط)$  اور  $۲ط + (۲ط + ۲ط)$  کا جواب  $(۲ط + ۲ط) + (۲ط + ۲ط)$

(۲۰)  $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}$  اور  $\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}$  کا جواب  $\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}$

(۲۱)  $۶ط + ۳ط - ۲ط + ۲ط - ۲ط + ۲ط$  اور  $۵ط + ۳ط$

۲- ص لآ + ۵ ص ح لآ - ۳ ط ص ح لآ جواب (ط - ص) (ل + ط)

(۲۲) ۲ (۲ - ۲ - ۲ - ۲ - ۲ - ۲) لآ + ۳ (۱ - ۱) لآ - (۲ - ۲ - ۲ - ۲ - ۲ - ۲) لآ + ۱ اور

۳ (۲ - ۲ - ۲ - ۲ - ۲ - ۲) لآ + ۴ (۱ - ۱) لآ - (۳ - ۳ - ۳ - ۳ - ۳ - ۳) لآ + ۵ - لآ - ۱ + ۲

(۲۳) (ص - س) لآ + (ط - ۲ ط) لآ + ط ص اور (ط ص + ص - ط ص + ص - ص) لآ

+ ط ص + ط ص - ط ص - ط ص جواب ص - س

(۲۴) دریافت کر قیمت کی جیکہ فرض کریں ۲ (۲ + ۲) لآ + (۲ - ۱۱) لآ + ۴ اور

۲ (۲ + ۲) لآ + (۱۱ - ۲) لآ + (۲ + ۲) لآ + ۵ - ۱ اور کئی ہوں ایک مقسوم علیہ عظم جواب = ۵

(۲۵) ۲۵ لآ - ۲۵ ط ص - ۲۵ لآ + ۲۱ ص + ۱۸۹ اور ۲۵ لآ + ۲۵ ط ص - ۲۵ لآ - ۲۱ اور

۲۵ لآ - ۲۵ ط ص - ۲۵ لآ + ۲۱ ص + ۱۸۹ اور ۲۵ لآ + ۲۵ ط ص - ۲۵ لآ - ۲۱ اور

(۲۶) ۲۵ لآ + ۲۵ ط ص - ۲۵ لآ - ۲۱ اور ۲۵ لآ + ۲۵ ط ص - ۲۵ لآ - ۲۱ اور

۲۵ لآ + ۲۵ ط ص - ۲۵ لآ - ۲۱ اور ۲۵ لآ + ۲۵ ط ص - ۲۵ لآ - ۲۱ اور

۲۵ لآ + ۲۵ ط ص - ۲۵ لآ - ۲۱ اور ۲۵ لآ + ۲۵ ط ص - ۲۵ لآ - ۲۱ اور

### مثالین صنیف مشترک کی

دریافت کر و صنیف مشترک ان مقداروں کا

(۱) ۸ ط اور ۲ ط اور ۲۰ ط کا جواب ۱۲۰ ط

(۲) ۱ - ط اور ۱ + ط اور ۱ - ط کا جواب ۱ - ط

(۳) ۲ - لآ اور لآ اور ط + لآ اور لآ - ط اور لآ

(۴) ۲ - لآ اور لآ اور لآ + لآ اور لآ - لآ

(۵) لآ + ۵ لآ + ۴ لآ اور لآ + ۸ لآ اور لآ + ۱۲ لآ اور لآ + ۱۶ لآ اور لآ + ۲۰ لآ اور

(۶) ط - ص اور ط + ص اور (ط - ص) اور (ط + ص) اور ط - ص اور ط + ص اور

جواب ط - ط - ط + ص

(۷) لآ - لآ اور لآ - لآ اور لآ - لآ اور لآ - لآ اور لآ - لآ اور

(۸) ۴ (۱ - لآ) اور ۸ (۱ - لآ) اور ۱۶ (۱ - لآ) اور ۳۲ (۱ - لآ) اور ۶۴ (۱ - لآ) اور

(۹) ۳ لآ - ۱۱ لآ + ۶ اور ۲ لآ - ۷ لآ + ۳ اور ۱ لآ - ۴ لآ + ۲ اور ۱ لآ - ۵ لآ + ۳ اور

(۱۰) لآ - ۳ لآ + ۳ لآ اور لآ - ۱ لآ + ۱ لآ اور لآ - ۲ لآ + ۲ لآ اور



$$(۱۳) \frac{(۱+u)(۱+u)u}{۳} - \frac{(۲+u)(۱+u)u}{۳} - \frac{(۱+u)u}{۲} \text{ جواب}$$

$$(۱۵) \frac{۳+u}{۱-u} \text{ جواب} \frac{۳+u}{(۱+u)^۲} - \frac{۱}{(۱+u)^۲} - \frac{۱}{۱-u}$$

$$(۱۴) \frac{u+u+۱}{u^۲+u-۱-u} \text{ جواب} \frac{u-۱}{(u+۱)^۲} - \frac{۱}{(u+۱)^۲} + \frac{۳}{(u-۱)^۲} + \frac{۲}{(u-۱)^۲}$$

$$(۱۲) \frac{۲u^۲-ub^۲}{(u^۲-b)(u+b)} \text{ جواب} \frac{۵}{u+b} - \frac{u+b^۲}{(u^۲-b)(u+b)} + \frac{b^۲}{(u^۲-b)^۲}$$

$$(۱۸) \frac{۱}{u^۲-u^۲} \text{ جواب} \frac{۱}{(u+b)^۲} + \frac{۱}{(u-b)^۲} + \frac{۱}{(u+b)^۲}$$

$$(۱۹) \frac{۱}{۲+u} \text{ جواب} \frac{۱}{۱+u} + \frac{۱}{۱-u} - \frac{u^۲}{۱+u} - \frac{u^۲}{۱-u}$$

$$(۲۰) \frac{\frac{۱}{b}}{(b-u)(c-u)} \text{ جواب} \frac{\frac{۱}{b}}{(b-u)(c-u)} - \frac{u^۲+u+c}{(\frac{۱}{b}-u)(c-u)}$$

$$(۲۱) \frac{u+u}{(۳+u)(۲-u)(۱-u)} \text{ جواب} \frac{۲۳}{(۱-u)^۲} - \frac{۵}{(۱-u)^۲} - \frac{۱۳}{(۳+u)^۲} - \frac{۱}{(۲-u)^۲}$$

$$(۲۲) \frac{۱}{(u+s)(s-u)(s-u)} + \frac{۱}{(u+s)(s-u)(s-u)} - \frac{۱}{(u+s)(s-u)(s-u)}$$

جواب  $\frac{۱}{(u+s)(s-u)(s-u)}$

$$(۲۳) \frac{u+c}{u^۲} + \frac{u+c}{u^۲} + \frac{u+c}{u^۲} + \frac{u+c}{u^۲}$$

جواب  $(u+c+s)$

$$(۲۴) \frac{u^۲-(s-u)^۲}{(u+s)^۲} + \frac{u^۲-(s-u)^۲}{(u+s)^۲} + \frac{u^۲-(s-u)^۲}{(u+s)^۲}$$

$$(۲۵) \frac{۱}{u+s} \text{ اور } (۲) \frac{۱}{u+۱} + \frac{۱}{u-۱} \text{ جواب اول } \frac{۱}{u+s} + \frac{۱}{u+s}$$

اختصار کرو ایندہ کی گسرو نجا

(۲۶) اختصار کرد  $\frac{ط\lambda}{ط\lambda}$  اور  $\frac{۲ن-۲م}{۳ن-۳م}$  جواب  $\frac{۱}{۳}$  اور  $\frac{۴}{۳}$

(۲۷)  $\frac{۳ط۲-۲طص}{۵ط۲-۵طص}$  اور  $\frac{ط\lambda+لا}{۳ص\lambda-۳صلا}$  اور  $\frac{۱۲ط۲-۷طص}{۱۰طص-۵صص}$  اور  $\frac{۱۲ط۲+۳ط\lambda}{۱۸طص\lambda+۳ص\lambda}$

اور  $\frac{۵ط+۵ط\lambda}{۲لا}$  جواب  $\frac{۲}{۳}$  اور  $\frac{ط+لا}{۳ص-صس}$  اور  $\frac{ط۷}{۵ص}$  اور  $\frac{۳ط\lambda}{۳ص}$  اور  $\frac{ط۵}{ط-لا}$

(۲۸)  $\frac{لا^۲+(ط+ص)لا+طص}{لا^۲+(ص+س)لا+صص}$  جواب  $\frac{ط+لا}{ط+ص}$

(۲۹)  $\frac{طس+صص+س+ط+صص}{طع+صص+لا+ط۲+لا+صع}$  جواب  $\frac{س+ص}{ع+ط۲+لا}$

(۳۰)  $\frac{۶طس+۱۰صس+۹ط\lambda+۱۵ص\lambda}{۶س+۲ص+۹ص\lambda-۳س\lambda}$  جواب  $\frac{۳ط+۵ص}{۱-ص}$

(۳۱)  $\frac{ط+ص+س+ط+ص+ص}{ط-ص-ص-ص}$  جواب  $\frac{ط+ص+ص}{ط-ص-ص}$

(۳۲)  $\frac{لا+لا^۲+لا^۳+لا^۴+لا^۵+لا^۶}{لا^۳-لا^۲}$  جواب  $\frac{لا+۶}{لا^۲}$

(۳۳)  $\frac{ط^۲+طص-ط^۳-ص^۲}{۴ط^۲-۲طص-۴ص+صص}$  جواب  $\frac{ط+ص}{(ط-ص)}$

(۳۴)  $\frac{ط^۲+طص-ص^۲}{ط^۲+طص-ص-ص}$  جواب  $\frac{ط-ص}{ط-۱}$

(۳۵)  $\frac{۶لا+۱۵لا^۲-۴لا^۳+۱۰لا^۴}{۹لا^۲-۲لا^۳-۲لا^۴+۱۸ط\lambda}$  جواب  $\frac{لا}{ص}$

(۳۶)  $\frac{طس\lambda+(ط+ص)لا+ص\lambda}{ط\lambda+ص}$  جواب  $\frac{س+لا}{ط-لا-ص}$

(۳۷)  $\frac{ط+(ط+ص)لا+ص\lambda}{ط-ص-ص\lambda}$  جواب  $\frac{ط+لا}{ط-ص\lambda}$

(۳۸)  $\frac{۴ط\lambda+۱۲ط\lambda+۲لا^۲}{۳لا^۲-۲ط\lambda}$  جواب  $\frac{۲ط-۷ط}{۳لا+۲ط\lambda+۹ط\lambda}$

(۳۹)  $\frac{ط\lambda-ص\lambda+۱}{طص\lambda-ص\lambda+۳}$  جواب  $\frac{۱-ص}{ص}$

(۴۰)  $\frac{۳طص-۲ص-۱}{۳طص-۲ص-۱}$  جواب  $\frac{۳طص-۲ص-۱}{۳طص-۲ص-۱}$

$$(۴۱) \frac{ط^۲ (ص-س) - (ص+س) ط (ص+س) + (ص+س) (ص+س) (ص+س)}{ط^۲ (ص+س) - (ص+س) ط (ص+س) + (ص+س) (ص+س) (ص+س)}$$

$$\text{جواب } \frac{ط (ص-س) - (ص+س) ط (ص+س)}{ط^۲ (ص+س) - (ص+س) ط (ص+س) + (ص+س) (ص+س) (ص+س)}$$

$$(۴۲) \frac{ط (ص-س) - (ص+س) ط (ص+س)}{ط^۲ (ص+س) - (ص+س) ط (ص+س) + (ص+س) (ص+س) (ص+س)}$$

$$\text{جواب } \frac{ط+ص}{ط+ص} = 1$$

$$(۴۳) \frac{ط^۲ ص+ص}{ط^۲ ص+ص} = 1$$

$$(۴۴) \frac{ط^۲ ص+ص}{ط^۲ ص+ص} = 1$$

مثالین ضرب کی

$$(۱) \text{ ضرب کرد } \frac{ط}{ط} \text{ کو } \frac{ط}{ط} \text{ میں جواب } \frac{ط}{ط} = 1$$

$$(۲) \text{ ضرب کرد } \frac{ط}{ط} + \frac{ط}{ط} \text{ میں جواب } 1 + 1 = 2$$

$$(۳) \text{ ضرب کرد } \frac{ط}{ط} + \frac{ط}{ط} \text{ میں جواب } 1 + 1 = 2$$

$$(۴) \text{ ضرب کرد } \frac{ط}{ط} - \frac{ط}{ط} \text{ میں جواب } 1 - 1 = 0$$

$$(۵) \text{ ضرب کرد } \frac{ط}{ط} + 1 \text{ میں جواب } 1 + 1 = 2$$

$$(۶) \text{ ضرب کرد } \frac{ط}{ط} + 1 \text{ میں جواب } 1 + 1 = 2$$

$$(۷) \frac{ط}{ط} + \frac{ط}{ط} = 2$$

$$(۸) \frac{ط}{ط} - \frac{ط}{ط} = 0$$

$$(۹) \text{ ضرب کرد } \frac{ط}{ط} + \frac{ط}{ط} = 2$$

$$\frac{ط}{ط} + \frac{ط}{ط} = 2$$

$$(۱۰) \text{ ضرب کرد } \frac{ط}{ط} + \frac{ط}{ط} = 2$$

$$\frac{۴}{ص} - \frac{۴سٹ}{صا} + \frac{۴سٹ}{صا} - \frac{۴سٹ}{صا}$$

### مشالیں تقسیم کی

(۱۱) تقسیم کر دو  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱}$  کو  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱}$  پر جواب  $\frac{۳}{۲}$  (۱۲) تقسیم کر دو  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱}$  کو  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱}$  پر جواب  $\frac{۳}{۲}$

(۱۳) تقسیم کر دو  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱}$  کو  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱}$  پر جواب  $\frac{۳}{۲}$

(۱۴) تقسیم کر دو  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱}$  کو  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱}$  پر جواب  $\frac{۳}{۲}$

(۱۵) تقسیم کر دو  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱}$  کو  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱}$  پر جواب  $\frac{۳}{۲}$

(۱۶) تقسیم کر دو  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱}$  کو  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱}$  پر جواب  $\frac{۳}{۲}$

(۱۷) تقسیم کر دو  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱}$  کو  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱}$  پر جواب  $\frac{۳}{۲}$

(۱۸) تقسیم کر دو  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱}$  کو  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱}$  پر جواب  $\frac{۳}{۲}$

کو  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱}$  پر جواب  $\frac{۳}{۲}$  اس سوال کا یہ جواب ہے جواب  $\frac{۳}{۲}$

(۱۹) تقسیم کر دو  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱}$  کو  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱}$  پر جواب  $\frac{۳}{۲}$

(۲۰) تقسیم کر دو  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱}$  کو  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱}$  پر جواب  $\frac{۳}{۲}$

$\frac{۳۳}{۲۰-۱۱}$  پر جواب  $\frac{۳}{۲}$

(۱) دریافت کر قیمت  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱}$  جبکہ  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱} = ۵$  جواب  $\frac{۳}{۲}$

(۲) دریافت کر قیمت  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱}$  جبکہ  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱} = ۴$  جواب  $\frac{۳}{۲}$

(۳) دریافت کر قیمت  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱}$  جبکہ  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱} = ۳$  اور  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱} = ۲$  جواب  $\frac{۳}{۲}$

(۴) دریافت کر قیمت  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱}$  جبکہ  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱} = ۱$  اور  $\frac{۳۳}{۲۰-۱۱} = ۰$  جواب  $\frac{۳}{۲}$

جواب (۱) جواب (۲)

- (۵) دریافت کر قیمت  $\frac{طن}{۲نط} + \frac{ص}{۲نص}$  کی جگہ لاء  $\frac{ص}{ن+ط}$  جواب ہے
- (۶) اگر دو کسروں کا مجموعہ ایک ہو تو ثابت کرو کہ اون کا حاصل تفریق برابر اون کی مجموعہ کا حاصل تفریق کے
- (۷) اگر حاصل تفریق دو کسروں کا مجموعہ تو ثابت کرو کہ فو اون کا مجموعہ کا فو اون کا حاصل تفریق کے
- (۸) دو کسروں کا مجموعہ برابر  $\frac{ط}{۲}$  (۹) تقسیم کرو  $\frac{۸۲}{۸۹}$  ایسی دو حصوں میں کہ اون کا حاصل تفریق  $\frac{۱۷}{۱۹}$  جواب  $\frac{۲۸۲۲}{۳۳۸۲}$  اور  $\frac{۳۳۱}{۳۳۸۲}$

**صعود**

- (۱) دریافت کرو کہ مربع اور کعب  $۳ط$  ص  $۳$  کا جواب  $۹ط$  ص  $۳$  اور  $۲ط$  ص  $۳$
- (۲) دریافت کرو مربع اور کعب  $\frac{۲}{۵} ط$  ص  $۲$  کا جواب (۱)  $\frac{۴}{۲۵} ط$  ص  $۲$
- (۳) دریافت کرو کعب  $\frac{۱}{۴} ط$  ص  $\frac{۲}{۳}$
- جواب  $\frac{۱}{۸} ط$  ص  $\frac{۹}{۲۴}$  -  $\frac{۱}{۴} ط$  ص  $\frac{۲}{۳}$  +  $\frac{۲}{۳} ط$  ص (۴) دریافت کرو کعب
- $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵$

**مشالین صعود و نزول کی**

- (۵) دریافت کرو کعب  $۱ط$  -  $۱ص$  کا جواب  $(ط+ص)$   $۱ط$  -  $(ص+ط)$   $۱ص$
- (۶) دریافت کرو کعب  $\frac{۱}{۳} ط$  -  $\frac{۱}{۳} ص$  کا جواب  $\frac{۱}{۳} (ط-ص)$
- (۷) دریافت کرو کعب  $\frac{۱}{۳} ط$  -  $\frac{۱}{۳} ص$  کا جواب  $\frac{۱}{۳} (ط-ص)$
- (۸) دریافت کرو کعب  $\frac{۱}{۳} ط$  -  $\frac{۱}{۳} ص$  کا جواب  $\frac{۱}{۳} (ط-ص)$
- (۹) دریافت کرو مربع  $\frac{۲}{۳} ط$  -  $\frac{۲}{۳} ص$  کا جواب  $\frac{۲}{۳} (ط-ص)$
- (۱۰) دریافت کرو کعب  $\frac{۲}{۳} ط$  -  $\frac{۲}{۳} ص$  کا جواب  $\frac{۲}{۳} (ط-ص)$
- (۱۱) دریافت کرو کعب  $\frac{۲}{۳} ط$  -  $\frac{۲}{۳} ص$  کا جواب  $\frac{۲}{۳} (ط-ص)$
- (۱۲) دریافت کرو کعب  $\frac{۲}{۳} ط$  -  $\frac{۲}{۳} ص$  کا جواب  $\frac{۲}{۳} (ط-ص)$
- (۱۳)  $\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$  ثابت کرو لاء  $\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۳} = ۰$
- (۱۴) دریافت کرو مربع  $\frac{۱}{۳} ط$  -  $\frac{۱}{۳} ص$  کا جواب  $\frac{۱}{۳} (ط-ص)$
- جواب  $۱ - ۱ + \frac{۱۹}{۱۲} ط - \frac{۱۳}{۴} ط$  وغیرہ



(۱۵) ثابت کرو ال-  $\frac{ط}{۵} + \frac{ط}{۳} - ۱$  اور  $۲ - \frac{ط}{۵} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \dots$  برابر ایک ہی ہو

(۱۶) دریانت کرو جذر ۹ ط ص ص ص اور ۱۶ لآ ص ص ص جواب ۳ ط ص ص اور ۴ ص ص لآ ط ص

(۱۷) دریانت کرو جذر ۴ لآ - ۱۲ لآ + ۲۵ لآ - ۱۶ لآ + ۳ لآ + ۴ لآ

(۱۸) دریانت کرو جذر ۹ ط ص ص ص + ۳ ط ص ص - ۲۰ ط ص ص + ۵ ط ص ص جواب ۳ ط ص ص + ۲ ط ص ص

(۱۹) دریانت کرو جذر لآ + ۹ لآ + ۱۰ لآ + ۲۰ لآ + ۲۵ لآ + ۱۶ لآ + ۳ لآ + ۴ لآ + ۳ لآ + ۴ لآ

دریانت کرو جذر ایشدہ کی مقدار دیکھا

(۲۰)  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} - ۱$  اور  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \dots$  (۲۱)  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} - ۱$

(۲۲)  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} - ۱$  اور  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \dots$

(۲۳)  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} - ۱$  اور  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \dots$

(۲۴)  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} - ۱$  اور  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \dots$

(۲۵)  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} - ۱$  اور  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \dots$

(۲۶)  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} - ۱$  اور  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \dots$

(۲۷) دریانت کرو جذر ۲ ط ص ص + ۴ ط ص ص + ۲ ط ص ص جواب ۲ ط ص ص

(۲۸)  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} - ۱$  اور  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \dots$

(۲۹) دریانت کرو جذر  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} - ۱$  اور  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \dots$

(۳۰) دریانت کرو کب ط - ۴ ط + ۵ ط - ۲ ط + ۳ ط - ۱ جواب (ط + ۲ ط + ۱)

دریانت کرو کب ایشدہ کی مقدار دیکھا

(۳۱)  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} - ۱$  اور  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \dots$

(۳۲)  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} - ۱$  اور  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \dots$

(۳۳)  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} - ۱$  اور  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \dots$  دریانت کرو جذر ۹ ط ص ص +

(۳۴)  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} - ۱$  اور  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \dots$

(۳۵) دریانت کرو کب (ط + ۱) اور (ط + ۱) س ص ص + ۴ س ص ص + ۲ س ص ص

(۳۶)  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} - ۱$  اور  $\frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \frac{ط}{۳} + \dots$



$$(۱۲) (\sqrt{2h} + \sqrt{3h})(\sqrt{5h} + \sqrt{9h} + \sqrt{14h}) \text{ جواب } \sqrt{2h} + \sqrt{3h} + \sqrt{5h} + \sqrt{14h}$$

$$(۱۳) \frac{1+\sqrt{2h}}{\sqrt{2h}-2} \text{ اور } \frac{\sqrt{2h}-1}{\sqrt{2h}-2} \text{ جواب } \sqrt{2h} + 5 \text{ اور } \sqrt{2h} + 3$$

$$(۱۴) \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \text{ جواب } \sqrt[3]{\frac{1}{5h}}$$

$$(۱۷) \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \text{ جواب } \sqrt[3]{\frac{1}{5h}}$$

$$(۱۸) \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \text{ جواب } \sqrt[3]{\frac{1}{5h}}$$

$$(۱۹) \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \text{ جواب } \sqrt[3]{\frac{1}{5h}}$$

$$(۲۰) \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \text{ جواب } \sqrt[3]{\frac{1}{5h}}$$

$$(۲۱) \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \text{ جواب } \sqrt[3]{\frac{1}{5h}}$$

$$(۲۲) \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \text{ جواب } \sqrt[3]{\frac{1}{5h}}$$

$$(۲۳) \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \text{ جواب } \sqrt[3]{\frac{1}{5h}}$$

$$(۲۴) \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \text{ جواب } \sqrt[3]{\frac{1}{5h}}$$

$$(۲۵) \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \text{ جواب } \sqrt[3]{\frac{1}{5h}}$$

$$(۲۶) \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \text{ جواب } \sqrt[3]{\frac{1}{5h}}$$

$$(۲۷) \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{5h}} \text{ جواب } \sqrt[3]{\frac{1}{5h}}$$

بے مساواتیں دیکھنا جبکہ جو مقابلہ کی ہیں اور ان میں بعضی مساوات کی تکریر بھی ہو گئی ہے مگر ترتیب کے لحاظ سے اوپر لکھ رہی دیا ہے

$$(۱) 10 + 5 = 1 + 5 = 20 - 20 = 0 \text{ جواب } 2 = 5$$

$$(۲) 12 - 5 = 7 = 44 + 5 = 49 - 30 = 19 \text{ جواب } 12 = 5$$

$$(۳) 14 + 5 = 19 = 5 = 50 - 5 = 45 \text{ جواب } 1 = 1$$

جواب  $u = \frac{1}{r}$

$$u \ 10 + r \ \frac{1}{r} = \frac{1}{r} r - u \ (3)$$

جواب  $u = 4$

$$\frac{r}{r} r - ur = \frac{u}{r} - \frac{r}{r} r \ (5)$$

جواب  $u = 120$

$$r \ 44 = \frac{u \ 11}{4} + \frac{u \ 6}{10} + \frac{u \ r}{r} \ (4)$$

جواب  $u = 10$

$$\frac{5}{4} r = \frac{u}{0} + \frac{u}{r} - \frac{u}{r} + \frac{u}{r} \ (2)$$

جواب  $u = \frac{r^2}{r^8}$

$$\frac{r}{r} = r - \frac{9}{ur} \ (8)$$

جواب  $u = \frac{11}{13}$

$$\frac{r}{r} = \frac{1}{ur} + \frac{1}{ur} + \frac{1}{r} \ (9)$$

جواب  $u = 12$

$$\frac{1-u}{4} + 10 = \frac{ur}{r} - \frac{1+ur}{r} \ (10)$$

جواب  $u = 5$

$$r + \frac{1-u}{r} = \frac{r-u}{r} + u \ (11)$$

جواب  $u = 4$

$$r - u = \frac{1-u}{4} + \frac{ur}{r} \ (12)$$

جواب  $u = 2$

$$\frac{u-r}{r} + ur = \frac{r-u}{r} + \frac{r-ur}{r} \ (13)$$

جواب  $u = 4$

$$\frac{r+u}{r} + \frac{r-u}{r} = \frac{1}{\frac{1}{r}} + \frac{u}{r} \ (14)$$

جواب  $u = \frac{r}{12}$

$$\frac{u \ 5 - r \ 4}{r} + \frac{9 - ur}{r} = \frac{r \ 4 - u}{r} \ (15)$$

جواب  $u = 5$

$$\frac{u}{r} + \frac{r-u}{r} = \frac{r}{r} \ 5 - \frac{u+10}{5} + u \ (14)$$

جواب  $u = 2$

$$\frac{5-ur}{r} - r = \frac{r-ur}{5} - u \ (12)$$

جواب  $u = \frac{r}{2} \ 3$

$$r+u = \frac{ur-18}{r} - \frac{r-ur}{4} \ (18)$$

جواب  $u = 1$

$$r + \frac{r+u}{r} + ur = 1 + \frac{1-ur}{r} - u \ 0 \ (19)$$

جواب  $u = 8$

$$\frac{r \ 5}{4} = \frac{ur \ 3 - 14}{r} - \frac{4+u}{r} \ (20)$$

جواب  $u = 1$

$$\frac{9+ur}{r} = \frac{r+ur+14}{5} - \frac{5+ur}{r} \ (21)$$

جواب  $u = 8$

$$\frac{u \ 5 - 10}{8} + \frac{5+ur}{r} = \frac{r}{r} \ 5 - \frac{4+u}{r} \ (22)$$

جواب  $u = 4$

$$\frac{11-u}{r} = \frac{1-ur}{r} - \frac{4+ur}{r} \ (23)$$

جواب  $u = 5$

$$\frac{r+u}{r} - r = \frac{r-ur}{r} - \frac{u-5}{r} + \frac{1-ur}{r} \ (24)$$

$$9 = 0 \quad \text{جواب} \quad \frac{uq-22q}{12} - \frac{12-uq}{2} = \frac{1+u2}{2} - \frac{q+u2}{8} \quad (20)$$

$$4 = 0 \quad \text{جواب} \quad r = \frac{1+u2}{2} - \frac{2-u2}{10} + \frac{2+u2}{14} \quad (24)$$

$$8 = 0 \quad \text{جواب} \quad \frac{28}{11} = \frac{u}{2} + \frac{u-12}{\frac{1}{10}} - \frac{1}{2} r - \frac{u}{2} \quad (22)$$

$$19 = 0 \quad \text{جواب} \quad \frac{1}{3} r = \frac{2-u2}{10} + \frac{q-u}{5} - \frac{1-uq}{1} + \frac{5+u2}{22} \quad (21)$$

$$42 = 0 \quad \text{جواب} \quad \frac{u4-u21-q}{2} = \frac{u2-u2}{12} - \frac{1+u2}{24} \quad (29)$$

$$3 = 0 \quad \text{جواب} \quad r2 = (1-u2) 5 - 52 \quad (30)$$

$$5 = 0 \quad \text{جواب} \quad u-4 = (2-u) 2 - (2-u) r \quad (31)$$

$$3 = 0 \quad \text{جواب} \quad 5 \cdot (2-u2) - (5-u2) 2 - 20 = (2-u2) 5 - u2 \quad (32)$$

$$4 = 0 \quad \text{جواب} \quad 94 = (2-u2) 2 - (u-2) 42 - (2-u5) r \quad (33)$$

$$2 = 0 \quad \text{جواب} \quad r3 = \left(\frac{1}{2} - \frac{u}{5}\right) u4 - \left(\frac{1}{2} + u\right) 10 \quad (34)$$

$$20 = 0 \quad \text{جواب} \quad (1+u2) \frac{1}{4} = 12 + u \frac{5}{2} - u \frac{5}{5} \quad (35)$$

$$12 = 0 \quad \text{جواب} \quad (u-54) \frac{1}{5} - 10 = (2-u2) \frac{1}{10} - (1-u2) \frac{1}{2} \quad (36)$$

$$12 = 0 \quad \text{جواب} \quad = \frac{u}{5} + (u+5) \frac{1}{5} - (u-2) \frac{1}{2} - u \frac{1}{12} \quad (37)$$

$$\frac{2}{9} = 0 \quad \text{جواب} \quad \frac{2}{9} = (u - \frac{2}{2}) \frac{1}{5} - (\frac{1}{2} - u) \frac{1}{2} \quad (38)$$

$$\frac{2}{2} = 0 \quad \text{جواب} \quad \frac{21}{2} = \left(\frac{1}{2} - u2\right) \frac{1}{2} - (u \frac{2}{2} + 2) \frac{1}{2} \quad (39)$$

$$\frac{2}{5} = 0 \quad \text{جواب} \quad (4-55) \frac{1}{2} = \left(\frac{2}{2} 4 - u2\right) \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{2} + u2\right) \frac{1}{12} \quad (40)$$

$$\frac{1}{12} = 0 \quad \text{جواب} \quad \left(\frac{1-u}{2} + 4\right) \frac{5}{5} = \frac{9-u2}{2} \times \frac{5}{5} - u2 \quad (41)$$

$$2 = 0 \quad \text{جواب} \quad \left(1 - \frac{u}{5}\right) \frac{u}{2} = \frac{u - \frac{1}{2}}{2} - (2 + u \frac{2}{2}) \frac{1}{2} \quad (42)$$

$$2 = 0 \quad \text{جواب} \quad \left(\frac{u}{5} + \frac{1}{2} 2\right) \frac{1}{2} 2 = \left\{ (22 + \frac{u}{2}) - 22 \right\} \frac{1}{2} 2 \quad (43)$$

یہاں سے کچھ خاص ترکیب استعمال کرنا پڑتی ہے

تاکہ خروج میں سے جرن مجموعہ زائل ہو جاوی

جواب لا = ۲۰

$$\frac{۲-۵۵}{۹} = \frac{۲+۵۱۲}{۱-۵۱۱} - \frac{۱۴+۵۱۰}{۱۸} \quad (۴۴)$$

جواب لا = ۲۰

$$\frac{۵۲}{۵} = \frac{۵+۵۲}{۲۵-۵۵} - \frac{۱۳+۵۴}{۱۵} \quad (۴۵)$$

جواب لا = ۲۰

$$\frac{۱۵}{۵} = \frac{۵۲-۲۰}{۵} - \frac{۵۷}{۵-۵} \quad (۴۶)$$

جواب لا = ۲

$$۹ = \frac{۲-۵۲}{۲-۵۲} + \frac{۲+۵۵}{۱-۵} \quad (۴۷)$$

جواب لا = ۲

$$\frac{۵۸}{۱+۵} + ۱۲ = \frac{۵۸+۴۰}{۲+۵} + \frac{۵۴+۲۰}{۱+۵} \quad (۴۸)$$

جواب لا = ۷

$$\frac{۱}{(۱-۵)۷} = \frac{۲}{۷+۵} - \frac{۱}{۱-۵} \quad (۴۹)$$

جواب لا = ۲

$$۲ = \frac{۵۲}{۲+۵} - \frac{۵}{۱+۵} \quad (۵۰)$$

جواب لا = ۲

$$۱ = \frac{۳۸+۵۲}{۱۲+۵} - \frac{۸+۵۴}{۱+۵۲} \quad (۵۱)$$

جواب لا = ۳

$$\frac{۹-۵۲-۲}{۱۰-۵۷} = \frac{۲-۵+۵}{۲-۵۵} \quad (۵۲)$$

جواب لا = ۲

$$\frac{۲}{۵۳} - ۱ = \frac{۵۲۲ - \frac{۲}{۳}}{۳۳} - \frac{۱۴-۵۲}{۹} \quad (۵۳)$$

جواب لا = ۲

$$\frac{۲-۵۵}{۱-۵} + \frac{۲۰-۵۸}{۷-۵۲} = \frac{۱۳-۵۱۰}{۲-۵۲} + \frac{۱۴-۵۲}{۵-۵} \quad (۵۴)$$

جواب لا = ۴

$$\frac{۸-۵}{۴-۵} + \frac{۱+۵}{۱-۵} = \frac{۹-۵}{۷-۵} + \frac{۵}{۲-۵} \quad (۵۵)$$

جواب لا = ۱

$$\frac{\frac{۱}{۲}-۵}{۲-۵} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱-۵}{۵۲-\frac{۱}{۲}} \times \frac{۱}{۲} \quad (۵۶)$$

جواب لا = ۳

$$\frac{۲+۵}{۱-۵۲} \times \frac{۲}{۲} = \frac{(۱-۵۲) \frac{۱}{۲} - (۲-۵۲) \frac{۱}{۲}}{(۱-۵) \frac{۱}{۲}} - \frac{۵}{۲} \quad (۵۷)$$

جواب لا = ۱۰

$$\frac{۳-۵۴}{۲} - \frac{۱-۵}{۳+۵} \times \frac{۲}{۲} - ۵ = \frac{۹-۵۸}{(۳+۵)(۱-۵)} - \frac{۵}{۲} \quad (۵۸)$$

جواب لا = ۲

$$س = \frac{۵}{ص} + \frac{۵}{ط} \quad (۵۹)$$

جواب لا = ۷

$$\frac{ط}{ص} + \frac{ص}{ط} + ج = ذ + \frac{س}{ک} + ن \quad (۶۰)$$

جواب لا = ۱

$$\frac{۱}{ص} = \frac{ص}{ط} + \frac{ط}{ص} \quad (۶۱)$$

جواب لا = ۲

$$\frac{۱}{ط-ص} = \frac{۱}{ص-ص} + \frac{۱}{ط-ص} \quad (۶۲)$$

جواب لا = ۲

$$ص = \sqrt{۸+۵+۵+۵} \quad (۶۳)$$

جواب ل =  $\frac{ص}{۲} = (۱ - \frac{ط}{ص})$

جواب ل =  $\frac{ط ۹}{۱۴}$

جواب ل =  $\frac{ص ۲ - ص ۲}{ص ۲ - ص ۲} \times ص$

جواب ل =  $\frac{ط ۴۴}{۱۰۲۵}$

جواب ل =  $\frac{(ط - ص)^۲}{ص - ط ۲}$

جواب ل =  $\frac{ط}{۲} \sqrt{\frac{۳}{۱-ط}}$

جواب ل =  $\frac{ط ۳}{ص ۲} \times \sqrt{ص - ۴}$

جواب ل =  $\sqrt{\frac{ط ۲}{ص}}$

جواب ل =  $\frac{۲}{۳} ط ص$

جواب ل =  $\sqrt{\frac{ط}{۲} - \frac{ط}{ص}}$

جواب ل =  $\frac{۱۴}{۲۵}$

جواب ل =  $\frac{۲۴}{۲۵}$

جواب ل =  $\frac{۱-۲}{۱-۲۲} \times ط$

جواب ل =  $\frac{ط ۱۶}{۸}$

جواب ل =  $\frac{۲۴}{۲۵}$

جواب ل =  $\frac{۱}{ط} (۱ - \frac{ط}{ص})$

جواب ل =  $\frac{ط ۸}{ط ۳ - ۱}$

جواب ل =  $\frac{ط}{ص - ط} \sqrt{\frac{۲}{ص}}$

جواب ل =  $\frac{۱}{ط} (ص - \frac{ط ۲}{۱-ط})$

جواب ل =  $\frac{۲}{ط} \sqrt{\frac{۱-ط}{ص - ط}}$

(۴۳)  $ص = ط + ۵ + ط + ط + ط$

(۴۵)  $\sqrt{ط} = \sqrt{ط + ط + ط} - ط + ط + ط$

(۴۶)  $ص = ط + ط + ط + ط + ط + ط + ط$

(۴۷)  $\sqrt{ط + ط + ط} - ط = ط + ط + ط + ط + ط + ط + ط$

(۴۸)  $\sqrt{ط} - ط + ط + ط = ط + ط + ط + ط$

(۴۹)  $\sqrt{ط + ط + ط} - ط = ط + ط + ط + ط$

(۵۰)  $\frac{۱}{ط} (ط - ط) = ط + ط + ط + ط + ط + ط + ط$

(۵۱)  $ص = \frac{ط}{ص - ط} + \frac{ط}{ط + ط}$

(۵۲)  $\sqrt{ط} \frac{۱}{ص} = \frac{ط}{ط} + ط + ط + ط + ط + ط + ط$

(۵۳)  $ص = ط + ط + ط + ط + ط + ط + ط$

(۵۴)  $۱ = ط - ط + ط + ط + ط + ط + ط$

(۵۵)  $۰ = ط - ط + ط + ط + ط + ط + ط$

(۵۶)  $\frac{ط ۲}{ط + ط} = ط + ط + ط + ط + ط + ط + ط$

(۵۷)  $ط ۲ - ط = ط + ط + ط + ط + ط + ط + ط$

(۵۸)  $ط - ط = ط - ط + ط + ط + ط + ط + ط$

(۵۹)  $\frac{ط}{ط + ط} = ط - ط - ط + ط + ط + ط + ط$

(۶۰)  $ط + ط = ط + ط + ط + ط + ط + ط + ط$

(۶۱)  $ص - ط + ط = \frac{ط - ط}{ط + ط + ط}$

(۶۲)  $ص - \frac{ط - ط}{ط} = \frac{ط - ط}{ط + ط + ط}$

(۶۳)  $ط = ط + ط + ط + ط + ط + ط + ط$

$$\frac{1-\sqrt{b}}{r+\sqrt{b}} = 0 \text{ جواب } \sqrt{u-1} \sqrt{b} = \sqrt{r^2 b} \sqrt{u+\sqrt{u-b}} \sqrt{r^2} \quad (13)$$

$$\frac{r-\sqrt{b}}{r+\sqrt{b}} = 0 \text{ جواب } \frac{1}{r^2} (\sqrt{u+\sqrt{u-b}} + \sqrt{u}) = \frac{1}{r} (\sqrt{u+b}) \quad (15)$$

$$\frac{r-\sqrt{b}}{r+\sqrt{b}} = 0 \text{ جواب } \frac{u b r}{\sqrt{u b r + u}} = \frac{u b r - \sqrt{u}}{\sqrt{u b r + u}} + \frac{\sqrt{u b r + u}}{\sqrt{u b r + u}} \quad (14)$$

$$\frac{1}{b} = 0 \text{ جواب } \frac{1-\sqrt{b}}{r} \sqrt{u} + r = \frac{1-\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}} \quad (16)$$

$$\frac{r+\sqrt{b}}{r+\sqrt{b}} = 0 \text{ جواب } b r = \sqrt{u+b} + \sqrt{u-b} \sqrt{u} + \sqrt{u+b} \sqrt{u} \quad (17)$$

$$\frac{r-\sqrt{b}}{r+\sqrt{b}} = 0 \text{ جواب } \frac{u+b}{\sqrt{u-b} + \sqrt{u}} = \sqrt{u-b} \sqrt{u} - b \sqrt{u} + \sqrt{u-b} \sqrt{u+b} \sqrt{u} \quad (18)$$

$$\frac{1-b r}{r} = \frac{1}{b} = 0 \text{ جواب } 1 = \frac{\sqrt{u+1}}{\sqrt{u-1}} \sqrt{u} \times \frac{u b - 1}{u b + 1} \quad (90)$$

$$\frac{1}{0} = 0 \text{ جواب } \frac{u+1}{u-1} \times \frac{4r}{4r} = \frac{\sqrt{u+1}}{\sqrt{u-1}} \quad (91)$$

$$\left( \frac{\sqrt{u}}{r} \sqrt{u \pm 1} \right) = 0 \text{ جواب } \frac{u}{\sqrt{u}} + 1 = \sqrt{\frac{u+b}{u-b}} \quad (92)$$

$$\frac{r-b}{r+b} = 0 \text{ جواب } b = \frac{r u - 1}{r(u-1)} + \frac{r u + 1}{r(u+1)} \quad (93)$$

$$\frac{(r-b)(1-b)}{r} = 0 \text{ جواب } u = \sqrt{u b + \sqrt{u-1}} + \sqrt{u b - \sqrt{u+1}} \quad (94)$$

$$r \sqrt{u} = \frac{1}{r} = 0 \text{ جواب } \frac{1}{u} = \frac{1}{1-\sqrt{u+1}} + \frac{1}{1+\sqrt{u-1}} \quad (95)$$

$$\left( \frac{\sqrt{u}}{b} \sqrt{u} - \frac{b}{\sqrt{u}} \sqrt{u} \right) = \frac{1}{r} = 0 \text{ جواب } \frac{\sqrt{u+1} \sqrt{b r}}{\sqrt{u+1} \sqrt{u} + u} = u + b \quad (96)$$

$$\frac{b+1}{b r} \sqrt{u b + r b - 1} \times \sqrt{b+1} = 0 \text{ جواب } \sqrt{u+1} \sqrt{b} = \sqrt{b+1} \sqrt{u} + (u-1) b \quad (97)$$

$$\sqrt{(1-b) r + 1} = 0 \text{ جواب } \frac{1-\sqrt{u}}{r-\sqrt{u}} = \frac{1-\sqrt{u}}{1-\sqrt{u}} \sqrt{b r + 1} \quad (98)$$

$$r \sqrt{u} = 0 \text{ جواب } \frac{u r}{r} \sqrt{u} = r - \frac{u}{r} \sqrt{u} - r + \frac{u}{r} \sqrt{u} \quad (99)$$



جواب ل =  $\frac{1-b^2}{1+b} \times \frac{1}{a}$

(۱۰۰)  $\sqrt{a^2-1} \sqrt{\frac{b^2}{a}} = \sqrt{a-b^2} \sqrt{a} + \sqrt{a-\frac{b^2}{a}}$

جواب ل = ۱

(۱۰۱)  $\sqrt{a} = \sqrt{a-1} \sqrt{a} + \sqrt{a+1} \sqrt{a}$  ضمیمه دیگر

جواب ل =  $\sqrt{1-(a-2)}$

(۱۰۲)  $a = \frac{a-1}{\sqrt{a+1}\sqrt{a-1}} + \frac{a+1}{\sqrt{a+1}\sqrt{a+1}}$

جواب ل = ۵

(۱۰۳)  $\sqrt{a^2+a} + \sqrt{a} = \sqrt{4-a} \sqrt{a} + \sqrt{a+9} \sqrt{a}$

(۱۰۴)  $\sqrt{a^2+a} + \sqrt{a} + \sqrt{a^2+a} + \sqrt{a} + \sqrt{a^2+a} + \sqrt{a} + \sqrt{a^2+a} + \sqrt{a} = \sqrt{a^2+a} + \sqrt{a}$  جواب ل =  $\frac{a}{a^2}$

جواب ل =  $\frac{a^2(2+a)}{(1+a)a^2}$

(۱۰۵)  $a-1 = \frac{\sqrt{a+2} \sqrt{a+1}}{\sqrt{a+2} \sqrt{a-1}}$

(۱۰۶)  $\sqrt{a-1} = \left(\frac{a-1}{a+1}\right) \sqrt{a-1} + \left(\frac{a+1}{a-1}\right) \sqrt{a+1}$  جواب ل =  $\frac{1}{a}$

جواب ل = ۸

(۱۰۷)  $\sqrt{a^2+a} + \sqrt{a} = \sqrt{a+1} \sqrt{a} + \sqrt{a-1} \sqrt{a}$

جواب ل =  $\frac{1}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\right) \frac{1}{a}}$

(۱۰۸)  $\frac{\sqrt{a} \sqrt{a+2} \sqrt{a}}{\sqrt{a} \sqrt{a-2} \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a+2} \sqrt{a+1}}{\sqrt{a+2} \sqrt{a+1}}$

جواب ل =  $\frac{a}{(a-1)a}$

(۱۰۹)  $\sqrt{a+2} \sqrt{a+1} = \sqrt{a+2} \sqrt{a} + \sqrt{a+1}$  ضمیمه دیگر

جواب ل =  $a - a$

(۱۱۰)  $\sqrt{a-2} \sqrt{a+1} = \sqrt{a-2} \sqrt{a} + \sqrt{a+1}$  ضمیمه دیگر

جواب ل =  $\frac{a}{(1+a) + (1-a)}$

(۱۱۱)  $\sqrt{a-2} \sqrt{a+1} = \sqrt{a-2} \sqrt{a} + \sqrt{a+1}$

جواب ل =  $\left\{ \frac{a^2}{1+a} \right\} - 1$

(۱۱۲)  $\sqrt{a^2+a} + \sqrt{a} = \sqrt{a^2+a} + \sqrt{a}$

جواب ل =  $\frac{a^2 \sqrt{a^2+a}}{a+1} \sqrt{a-1}$

(۱۱۳)  $\sqrt{a^2+a} + \sqrt{a} = \frac{a - \sqrt{a+1} \sqrt{a}}{b + \sqrt{a-2} \sqrt{a}}$

(۱۱۴)  $\sqrt{a^2+a} + \sqrt{a} = \sqrt{a-2} \sqrt{a} + \sqrt{a+1} \sqrt{a} = \sqrt{a-2} \sqrt{a} + \sqrt{a+1} \sqrt{a}$

جواب ل =  $\frac{p}{r} \sqrt{\frac{p}{r}}$  یا  $\sqrt{\frac{p}{r}}$  (۱۱۵)  $\sqrt{b} = \frac{u-p}{u-b\sqrt{a+b}} + \frac{u+p}{u+b\sqrt{a+b}}$

جواب ل =  $\frac{r}{p} \sqrt{\frac{r}{p}}$  یا  $\sqrt{\frac{r}{p}}$  (۱۱۶)  $b = \frac{1+u-1\sqrt{a}}{1-u+1\sqrt{a}} + \frac{1-u+1\sqrt{a}}{1+u-1\sqrt{a}}$  (۱۱۷)

جواب ل =  $\frac{14}{25}$  (۱۱۸)  $\frac{1}{u-1\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a-1}\sqrt{a-1} + \sqrt{a-1}\sqrt{a-1}}{u-1\sqrt{a} \cdot u-1\sqrt{a}}$  (۱۱۹)

(۱۱۸)  $1 - \left(\frac{1}{p}\right)\sqrt{a} - \frac{1}{p} = \text{جواب ل} = \sqrt{a+1} \sqrt{r} = b-1\sqrt{a} (u-1) + \sqrt{a+1} \sqrt{r} (u+1)$

جواب ل =  $\sqrt{a} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \sqrt{a}$  (۱۱۹)  $\sqrt{r} = 1 - \sqrt{a} \sqrt{u} + 1 - \sqrt{a} \sqrt{u}$

(۱۲۰)  $\frac{p+q}{1025} = \text{جواب ل} = \sqrt{u-2r} \sqrt{r} + \sqrt{u} \sqrt{r} = \sqrt{u-2r} \sqrt{r} + \sqrt{u} \sqrt{r}$

(۱۲۱)  $\frac{r}{19} \sqrt{\frac{r}{19}} = \sqrt{a^2 + u^2 + 20 + u} \sqrt{a} - \sqrt{34r + u^2 + 39} + \sqrt{a} \sqrt{\frac{r}{19}}$

(۱۲۲)  $\sqrt{3a-a} - \sqrt{a} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{a^2+20} + \sqrt{a^2+20}}{3-u-14}$

(۱۲۳)  $\sqrt{a+u} + \sqrt{a+u} = \sqrt{a+u} + \sqrt{a+u} = \sqrt{a+u} + \sqrt{a+u}$

جواب ل = ط یا لا =  $\sqrt{a} \sqrt{u} - \sqrt{a} \sqrt{u} - \sqrt{a} \sqrt{u}$  ضمیمه میں دیگر

(۱۲۴)  $\sqrt{\frac{p-u}{u}} (1 + \frac{p-2r}{u}) = \frac{p}{u} - \text{جواب ل} = \sqrt{\frac{p-u}{u}} (1 + \frac{p-2r}{u})$

(۱۲۵)  $1 = \frac{\sqrt{\frac{p+u}{u}}}{(\frac{p+u}{u})^2} - \frac{\sqrt{\frac{p+u}{u}}}{(\frac{p+u}{u})^2} = \frac{p+u}{p+u} - \frac{p+u}{p+u}$

(۱۲۶)  $\frac{p+u}{u} = \frac{p+u}{u} = \frac{p+u}{u}$  دیگر ضمیمه کو جواب ل =  $\frac{p+u}{p+u}$

(۱۲۷)  $\frac{p}{p+u} = \frac{u+p}{u} + \frac{(u+p)\sqrt{a}}{(u+p)\sqrt{a}}$  جواب ل =  $\frac{p}{p+u} \times \frac{p}{p+u}$

(۱۲۸)  $\frac{p+u}{p} = \frac{p+u}{p} = \frac{p+u}{p}$  جواب ل =  $\frac{p+u}{p}$

(۱۲۹)  $\sqrt{a+u} + \sqrt{a+u} = \sqrt{a+u} + \sqrt{a+u} = \sqrt{a+u} + \sqrt{a+u}$  دیگر ضمیمه جواب ل =  $\sqrt{a+u} + \sqrt{a+u}$

دیگر ضمیمه جواب لا = ص یا (ص+ص) (۱۳۰)  $(u-v)\sqrt{a} - \sqrt{a}(u+v) = \sqrt{a}v - \sqrt{a}(u+v)$

دیگر ضمیمه  $\frac{u}{\sqrt{a}} - \frac{v}{\sqrt{a}} = \frac{u+v}{\sqrt{a}}$  جواب لا = ص یا (ص+ص)  $\sqrt{a}(u+v) = \sqrt{a}(u+v) + \sqrt{a}v$  (۱۳۱)

دیگر ضمیمه  $\left\{ 1 - \frac{\sqrt{a}v}{\sqrt{a}(u+v)} \right\}^2 = \frac{u+v}{\sqrt{a}(u+v) - 1}$  جواب لا = ص یا (ص+ص) (۱۳۲)

دیگر ضمیمه  $\frac{1-b^2}{(1-b^2)(u-1)\sqrt{a}} = \frac{u}{\sqrt{a}}$  جواب لا = ص یا (ص+ص)  $\frac{u}{\sqrt{a}} = \frac{u}{\sqrt{a}}$  (۱۳۳)

دیگر ضمیمه  $\frac{u}{\sqrt{a}} - 1 = \frac{u}{\sqrt{a}}$  جواب لا = ص یا (ص+ص)  $\frac{u}{\sqrt{a}} - 1 = \frac{u}{\sqrt{a}}$  (۱۳۴)

دیگر ضمیمه  $\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$  جواب لا = ص یا (ص+ص)  $\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$  (۱۳۵)

دیگر ضمیمه  $\frac{13}{12} = \frac{4+u}{9-u} \times \frac{1}{13} = \left( \frac{3-u}{3+u} \right) + \left( \frac{3+u}{3-u} \right)$  (۱۳۶)

(۱۳۷)  $\left\{ \frac{u}{\sqrt{a}}(u+v) + (u+v) \right\} \sqrt{a} = \frac{u}{\sqrt{a}}(u+v) + (u+v)$

$\left\{ \frac{u}{\sqrt{a}}(u+v) - (u+v) \right\} \sqrt{a} = \frac{u}{\sqrt{a}}(u+v) - (u+v)$  جواب لا = ص یا (ص+ص)

جواب  $\begin{cases} u=1 \\ v=1 \end{cases}$

(۱)  $\begin{cases} 1 = 50 + u \\ 1 = 53 + v \end{cases}$

جواب  $\begin{cases} \frac{1}{7} = u \\ v=1 \end{cases}$

(۲)  $\begin{cases} 2 = 53 - u \\ \frac{1}{7} = 52 - v \end{cases}$

جواب  $\begin{cases} u=1 \\ v=1 \end{cases}$

(۳)  $\begin{cases} 1 = 52 - u \\ 1 = 54 + v \end{cases}$

جواب  $\begin{cases} u=1 \\ v=1 \end{cases}$

(۴)  $\begin{cases} 350 = 51 + u \\ 132 = 51 - v \end{cases}$

جواب  $\begin{cases} 144 = u \\ 214 = v \end{cases}$

(۵)  $\begin{cases} 22 = 5 \frac{1}{4} + u \\ 22 = 5 \frac{1}{4} + v \end{cases}$

۸ = ۰ جواب

۹ = ۵

$$۸۸ = ۵ \frac{1}{۲} ۲ + ۰ \frac{1}{۲} ۲ (۷)$$

$$۱۲۷ = ۵۱۰ + ۰ \frac{1}{۲} ۲$$

۲ = ۰ جواب

۳ = ۵

$$\frac{۲-۰۰}{۲} = \frac{۳-۵}{۰} - ۰۲ (۷)$$

$$\frac{۷-۵۷}{۲} = \frac{۰-۰}{۳} - ۵۲$$

۹ = ۰ جواب

۸ = ۵

$$۷-۰ = \frac{۸-۵}{۴} + \frac{۱۱+۰}{۱} (۸)$$

$$۰-۵۲ = \frac{۷-۵}{۲} - \frac{۰+۰}{۷}$$

۰ = ۰ جواب

۹ = ۵

$$۸-۰۲ = \frac{۰-۵}{۲} + \frac{۲+۰}{۷} (۹)$$

$$۸+۰۲ = ۵۲ + \frac{۰۲-۵۲}{۲}$$

۳ = ۰ جواب

۰ = ۵

$$۱۱۲ + (۹-۵)(۱+۰) = (۷+۵)(۰+۰) (۱۰)$$

$$۱+۵۲ = ۱۰+۰۲$$

۷ = ۰ جواب

۸ = ۵

$$\frac{۷-۰۰}{۴} - \frac{۱۹}{۲} = \frac{۱۱+۰۴+۵۷}{۱۸} + \frac{۵+۰۲}{۹} (۱۱)$$

$$(۴+۵۹) \frac{1}{۲} = (۲+۵۲+۰۰) \frac{۲}{۷}$$

$$\frac{1}{۲} + \frac{1}{۲} + \frac{۵}{۲} = \frac{۹-۵۸-۰۲}{۱۲} - \frac{۵۰-۰۲}{۳} (۱۲)$$

$$۷ = ۰ \text{ جواب } (۲۲ - \frac{۵}{۸} - ۰۲) \frac{1}{۲} ۲ = (\frac{1}{۲} ۱ + \frac{۵}{۲} + \frac{۰}{۷}) \frac{1}{۲} ۲$$

۱۰ = ۰ جواب

۱۱ = ۵

$$\frac{۵۱۲+۰۲}{۱} - \frac{1}{۰} ۲۸ = ۵+۰ (۱۳)$$

$$\frac{۲۰۲}{۵۰۸۴۲} = \frac{1}{۵۲۲} + \frac{1}{۰۲۱}$$

۶ = ۰ جواب

۰ = ۵

$$\frac{۲۱۷+۳۱۸-۰۱۲۸}{۲+۵۲-۰۸} = ۱-۵۴+۰۱۴ (۱۴)$$

$$\frac{۰۲}{۱-۵۲+۰۲} - ۰ = \frac{۲۰-۵۱۰+۰۱۰}{۳+۵۵+۰۲}$$

$$۳ = ل \quad \left( (s-l) - \frac{۲-s}{۴} \right) \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} = \frac{s}{۴} + ل + (s - \frac{۳}{۵} - ل) \frac{۲}{۳} \quad (۱۵)$$

$$\frac{۱}{۳} ۲ - = ل \quad (s-l) ۲ + (s+l) \frac{۱۱}{۲} = \frac{۵s - ۳۲}{۲} - ۳۲ - ل$$

$$\times \frac{۵}{۱۰۰} \frac{۴}{۱۰} ۲ + ل \frac{۱}{۱۰} = \frac{۵}{۱۰۰} - ل \frac{۳۴}{۱۰۰} - s \frac{۳۲}{۱۰۰} + ل \frac{۳۲}{۱۰} \quad (۱۶)$$

جواب لا = ۱۰ اور s = ۵

$$\frac{\frac{۱}{۱۰} - ل \frac{۳۴}{۱۰۰}}{\frac{۴}{۱۰}} = \frac{\frac{۱}{۱۰} + s \frac{۳۲}{۱۰۰}}{\frac{۳}{۱۰}}$$

جواب لا =  $\frac{ص}{ط+ص}$  و  $\frac{ط}{ص}$

(۱۷)  $ط = لا + ص$  و  $ص = ۴ + لا$

جواب لا =  $\frac{ص-م}{ط-ص}$  و  $\frac{ص-م}{ط-ص}$

(۱۸)  $م = ص + ل$  و  $ط = ل + ص$

جواب لا =  $\frac{ص}{ط+ص}$  و  $\frac{ط}{ص}$

(۱۹)  $ط = لا + ص$  و  $ص = لا + ط$

جواب لا =  $\frac{ن-۲}{م-ن}$  و  $\frac{ن-۲}{م-ن}$

(۲۰)  $ط = \frac{۵}{s} + \frac{۴}{ل}$  و  $ص = \frac{۴}{s} + \frac{۵}{ل}$

(۲۱)  $ط (لا + ص) + ص (s - ل) = س (s + ل) + ک (s - ل) = ل (s - ل) = ط (ص - ل) - ص (س - ل) = (س - ل) (ص - ل) - (س - ل) (ص - ل) = ۲ (س - ل) (ص - ل)$

(۲۲)  $لا (ص + ل) = س (ص + ل) = (ص + ل) \frac{۱}{۲} = س (ص + ل) = (ص + ل) (ص + ل) = (ص + ل) (ص + ل) = (ص + ل) (ص + ل)$

جواب لا =  $\frac{ص + ط}{ص - ط}$  و  $\frac{ط + ص}{ص}$

(۲۳)  $ط لا = س (ص + ل)$  و  $ص لا = س (ط - ل)$

جواب لا =  $\sqrt{\frac{ص+ط}{ص-ط}}$  و  $\sqrt{\frac{ط-ص}{ص+ط}}$

(۲۴)  $ط (ن + ل) - ص (ن - ل) = ۲$  و  $ط (ص) = (ن - ل) (ص)$

جواب لا =  $\frac{ص}{۵}$  و  $\frac{ط}{۴}$

(۲۵)  $\sqrt{لا - س} = \sqrt{لا - ط} - \sqrt{لا - ل}$  و  $\sqrt{لا - ط} = \sqrt{لا - ل} + \sqrt{لا - س}$

$$\frac{(طص + طس - صس) طص س}{طص س + طس س - صس س} = ل \quad \text{جواب ل}$$

$$\frac{(طص - طس - صس) طص س}{طص س + طس س - صس س} = س$$

$$(۲۶) \quad \frac{ل}{س} - ۱ = \frac{ل}{س} + \frac{ل}{ط}$$

$$\frac{ل}{س} + ۱ = \frac{ل}{ط} + \frac{ل}{س}$$

$$(۲۷) \quad (ط - ص) (ص + ط) = (ص + ط) (ص - ط)$$

$$\frac{طص}{ط + ص} - ل = \frac{طص س}{ط + ص} + (ط + ص + س) (ص + ط) = س$$

$$(۲۸) \quad ل (صس - ل) = س (ل - طس)$$

$$ل (ط + ص - ل) = ط (صس - ل)$$

$$(۲۹) \quad ل + س = (ل - س)$$

$$ل - س = (ل + س)$$

$$(۳۰) \quad ط = \sqrt{س - ل} \sqrt{ل - س} + \sqrt{ل + س} \sqrt{ل - س}$$

$$ص = \sqrt{س - ل} \sqrt{ل + س} + \sqrt{ل + س} \sqrt{ل - س}$$

$$(۳۱) \quad ۹۱ = (ل + س) (ل - س)$$

$$۳ - ۲ = ل \quad \text{جواب}$$

$$۲ - ۱ = س$$

$$(۳۲) \quad \sqrt{ل + س} \sqrt{ل - س} = \sqrt{ل + س} \sqrt{ل - س} + \sqrt{ل + س} \sqrt{ل - س}$$

$$\sqrt{ل + س} \sqrt{ل - س} = \frac{\sqrt{ل + س} \sqrt{ل - س} + \sqrt{ل + س} \sqrt{ل - س}}{\sqrt{ل + س} - \sqrt{ل - س}}$$

جواب

$$۱۲ = ع + س - ل$$

$$۱۰ = ع - س + ل$$

$$۳ = ع - س + ل$$

$$۵۴ = ع + ل$$

$$۴۵ = س + ل$$

$$۱۱ = ع - س$$

$$\begin{aligned} 18 &= u \\ 32 &= s \quad \text{جواب} \\ 10 &= e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 42 &= u \quad \text{جواب} \\ 24 &= s \\ 32 &= e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 128 &= u \quad \text{جواب} \\ 28 &= s \\ 48 &= e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 &= u \quad \text{جواب} \quad 2 = e + s + u = e + 11 + u = e + 12 + s - u \quad (4) \\ 1 &= s \\ 0 &= e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 &= u \quad \text{جواب} \\ 4 &= s \\ 2 &= e \end{aligned} \quad 1 = \frac{e2-s}{u2-s2} = \frac{u-e0}{e2-s2} = \frac{u2-s4}{4-e2} \quad (2)$$

$$10 = u \quad \text{جواب} \quad 10 - e + s + u = (s+u) \frac{2+s}{2} = (e+u) \frac{2}{2} + s = (e+s) \frac{1}{2} + u \quad (8)$$

$$\begin{aligned} 4 &= s \\ 2 &= e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= u \quad \text{جواب} \\ 2 &= s \\ 3 &= e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 &= u \\ 9 &= s \quad \text{جواب} \\ \frac{1}{3} &= e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 &= u \quad \text{جواب} \\ 1 &= s \\ 3 &= e \end{aligned}$$

$$21 = u \frac{1}{2} + s \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} 20 = e \frac{1}{2} + u$$

$$20 = e + 2s$$

$$102 = (e+s) \frac{1}{2} + u \quad (6)$$

$$28 = (u+e) \frac{1}{2} + s$$

$$41 = (s+u) \frac{1}{2} + e$$

$$\frac{22}{12} = \frac{s+u}{e} \quad (5)$$

$$\frac{20}{12} = \frac{s-u}{e}$$

$$\frac{2020}{12} = \frac{2s-u}{e} \quad (7)$$

$$\frac{2}{2} = \frac{1}{s} + \frac{2}{u} \quad (9)$$

$$2 = \frac{2}{s} - \frac{2}{e}$$

$$\frac{2}{2} = \frac{1}{e} + \frac{1}{u}$$

$$\frac{2}{222} = \frac{1}{e} + \frac{0}{22} - \frac{2}{u} \quad (10)$$

$$\frac{11}{22} 4 = \frac{2}{e} + \frac{1}{s} + \frac{1}{u2}$$

$$\frac{1}{24} 12 = \frac{2}{e} \cdot \frac{1}{s} - \frac{0}{42}$$

$$\frac{s-u2}{0} = \frac{24+s2}{s2+u2} \quad (11)$$

$$\frac{s-u}{2} = \frac{24+s2}{e2+u}$$

$$\frac{e2+s}{2} = \frac{1}{2} \frac{24+s2}{e+2s}$$

$$\frac{1}{p} = ل$$

$$\frac{1}{q} = س$$

$$\frac{1}{r} = ع$$

جواب

جواب ل = ۲۵

س = ۱۶

ع = ۶

$$\frac{3}{5} - 2 = \frac{1}{ع} + \frac{2}{س} - \frac{3}{ل} \quad (۱۲)$$

$$\frac{1}{4} - 10 = \frac{1}{ع} + \frac{1}{س} + \frac{1}{ل}$$

$$\frac{1}{10} - 16 = \frac{1}{ع} + \frac{1}{س} - \frac{3}{ل}$$

$$\frac{ل-۱۰}{۲} = \frac{۵+ع-۳س}{۴} + \frac{۲-ع+ل}{۱۳} \quad (۱۳)$$

$$\frac{۵-ع+۳س}{۳} = \frac{۱+ع+س-۱۳}{۱۱} + \frac{ع+۳ل-۱۵}{۲}$$

$$۱۲-ع+۳س = \frac{۵+ع+س-۱۱}{۴} - \frac{۴+ع-۳ل-۳۵}{۱۲}$$

$$۰ = ع + س + ل \quad (۱۴)$$

$$۰ = ع(ص) + س(ط) + ل(ص+ط)$$

$$طص + ل = ع + س + ص$$

جواب ل =  $\frac{1}{(ط-ص) \times (ص-س)}$

س =  $\frac{1}{(ط-ص)(ص-س)}$

ع =  $\frac{1}{(ط-ص)(ص-س)}$

جواب ل = طصس

$$س = طص + طس + صس$$

$$ع = طص + صس + ص$$

جواب ل = ۱

س = ۴

ع = ۲۴

$$۰ = ل - ط + س - ع \quad (۱۵)$$

$$۰ = ل - ص + س + ع - ص$$

$$۰ = ل - ص + س + ع - س$$

$$۲۲ = \sqrt{ع} + \sqrt{س} + \sqrt{ل} \quad (۱۶)$$

$$۳۱ = \sqrt{ع} + \sqrt{س} + \sqrt{ل}$$

$$۲ = \sqrt{ع} + \sqrt{س} + \sqrt{ل}$$

$$ط = س + ل \quad (۱۷)$$

$$ل = ع + ل$$

$$س = ع + ل$$

$$ط = (ع + س + ل) \quad (۱۸)$$

$$س = (ع + ل)$$

$$ع = (ع + ل)$$

$$ط = (ع + س) \quad (۱۹)$$

$$س = (ع + ل)$$

$$ع = (ع + ل)$$

جواب ل =  $\frac{۲۲ طصس}{طص + طس + صس - طس}$

س =  $\frac{۲۲ طصس}{طص + طس + صس - طس}$

ع =  $\frac{۲۲ طصس}{طص + طس + صس - طس}$

جواب ل =  $\frac{ط}{ط + س + ل}$

س =  $\frac{ط + س + ل}{س}$

جواب ل =  $\frac{(ط+ص-س)(ص+س-س)}{2(ط+ص-س)}$

س =  $\frac{(ط+ص-س)(ص+س-ط)}{2(ط+ص-س)}$

ع =  $\frac{(ط+ص-س)(ط+س-ص)}{2(ط+ص-س)}$



جواب  $z = u$   
 $y = s$   
 $o = e$

$$1 = e + s + u \sqrt{12} - e - s + u \sqrt{12} + e + s + u \sqrt{12} + u \sqrt{12} \quad (20)$$

$$r = e + s + u \sqrt{12} + e - s + u \sqrt{12} - e + s + u \sqrt{12} + u \sqrt{12}$$

$$r \sqrt{12} = e + s + u \sqrt{12} - e - s + u \sqrt{12} + e + s + u \sqrt{12} + u \sqrt{12}$$

جواب  $r = u$   
 $o = s$   
 $z = e$

$$\frac{1}{(1-o)} = \frac{1-1-1}{(1-o)} = \frac{1}{e} \quad (21)$$

$$\frac{1}{(r-o)} = \frac{1-1}{(r-o)} = \frac{1}{e} \quad (22)$$

$$\frac{1}{2} r = \frac{1}{e} \quad (23)$$

جواب  $r = u$   
 $z = s$   
 $o = e$   
 $11 = e$   
 $20 = e$

$$r \sqrt{12} = e + s + u \sqrt{12} \quad (24)$$

$$r \sqrt{12} = e + s + u \sqrt{12} \quad (25)$$

$$10r = e + s + u \sqrt{12} \quad (26)$$

$$40 = e + s + u \sqrt{12} \quad (27)$$

جواب  $r = u$   
 $r = s$   
 $r = e$

جواب  $\frac{r}{12} = e + s + \frac{r}{2} = s + u + 1 = (e + s) u \quad (28)$

جواب  $z = u$   
 $r = s$   
 $r = e$   
 $r = s$   
 $1 = r$

$$12 = e + s + u \sqrt{12} \quad (29)$$

$$11 = r + e + s + u \sqrt{12} \quad (30)$$

$$8 = e + s + u \sqrt{12} \quad (31)$$

$$9 = r + e + s + u \sqrt{12} \quad (32)$$

$$33 = e + s + u \sqrt{12} \quad (33)$$

$12 = e + s + u \sqrt{12} \quad (34)$   
 $10 = e + s + u \sqrt{12} \quad (35)$   
 $10 = e + s + u \sqrt{12} \quad (36)$   
 $38 = e + s + u \sqrt{12} \quad (37)$

جواب  $z = u$   
 $z = e$   
 $z = u$   
 $z = e$   
 $z = u$

$$10 = e + s + u \sqrt{12} \quad (38)$$

$$10 = e + s + u \sqrt{12} \quad (39)$$

$$10 = e + s + u \sqrt{12} \quad (40)$$

$$10 = e + s + u \sqrt{12} \quad (41)$$

جواب  $z = u$   
 $z = e$   
 $z = u$   
 $z = e$   
 $z = u$

$$10 = e + s + u \sqrt{12} \quad (42)$$

$$10 = e + s + u \sqrt{12} \quad (43)$$

$$10 = e + s + u \sqrt{12} \quad (44)$$

$$10 = e + s + u \sqrt{12} \quad (45)$$

جواب  $z = u$   
 $z = e$   
 $z = u$   
 $z = e$   
 $z = u$

$$10 = e + s + u \sqrt{12} \quad (46)$$

$$10 = e + s + u \sqrt{12} \quad (47)$$

$$10 = e + s + u \sqrt{12} \quad (48)$$

$$10 = e + s + u \sqrt{12} \quad (49)$$

$\frac{r}{r_0} r \pm 1 = u$  جواب  $r - u r \sqrt{r+9} = \pm + u r \sqrt{r}$  (۱۸)  
 $\frac{1}{10} 11 - 1 \cdot 0 = u$   $1 + u = (\sqrt{144r+9} \sqrt{\frac{1}{r} + 9})$  (۱۹)  
 $r \pm r = u$   $r \sqrt{r} = (r-u)(r-u) \sqrt{r} + (r-u)(1-u) \sqrt{r}$  (۲۰)  
 $r - 1 = u$  جواب  $\frac{r}{r+u} - r + u (r) \pm = u$  جواب  $0 - \sqrt{u} \sqrt{r+9}$  (۲۱)  
 $\frac{1}{r} - 1 \cdot \frac{1}{r} = u$  جواب  $r - u = 9 \sqrt{u r + 9} (r) r - 1 r = u$  جواب  $\frac{r}{r+u} = 1 + u + \sqrt{r}$  (۲۲)  
 $\frac{1}{r} - 1 \cdot r = u$   $\frac{r+u}{r} = r + u + \sqrt{u r + 9} (r) \pm = u$  (۲۳)  
 $9 = u$   $20 < 4 - (\sqrt{u} \sqrt{r+9})$   $10 \pm r = (1 + \sqrt{u} \sqrt{r+9})$  (۲۴)  
 $r \sqrt{r} - r \pm r \sqrt{r} - r \pm = u + \sqrt{r \sqrt{r+9} + 10} - \sqrt{r \sqrt{r+9} + 9}$  (۲۵)  
 $\frac{1}{r} r = u$  جواب  $r_1 = 00 - \frac{r}{r} 90 \sqrt{r} - u r + 4 r \sqrt{r_0}$  (۲۶)  
 $\frac{1}{r_0} r = u$   $\frac{u r - \sqrt{u} \sqrt{r+9} + 1}{r - \sqrt{u} \sqrt{r+9}} = \frac{r_0 - \sqrt{u} \sqrt{r+9}}{r+u}$  (۲۷)  
 $1 \pm \frac{1}{r} r \pm = u$   $\frac{r_1}{r_0} = \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1-u}$  (۲۸)  
 $\frac{b}{r} r \pm \frac{b}{r} r = u$   $\frac{r_1}{r_0} - 1 \cdot \frac{r_1}{r_0} = u$  جواب  $\frac{r_1}{r_0} r = \frac{u}{r} + \frac{u}{r}$  (۲۹)  
 $\frac{r}{b} r \pm \frac{r}{b} r = u$   $\frac{b}{r} = \frac{(u-b) \sqrt{r}}{u r - b r}$  (۳۰)  
 $\frac{u r}{b} r \pm \frac{u r}{b} r = u$   $\frac{u+b}{b} = \frac{u+b}{u}$  (۳۱)  
 $11 - \sqrt{r} \sqrt{r} \pm = u$   $\frac{b r}{u+b} = \sqrt{u-b} \sqrt{u+b} \sqrt{r}$  (۳۲)  
 $\frac{u}{b-n} r \pm \frac{u}{1-n} r = u$   $b \sqrt{r} = \frac{u-b}{u+b} + \frac{u+b}{u-b}$  (۳۳)  
 $\frac{u}{b-n} r \pm \frac{u}{1-n} r = u$   $u(1-u r) = \sqrt{u+b} \sqrt{u+b} \sqrt{r+u}$  (۳۴)  
 $\frac{u}{b-n} r \pm \frac{u}{1-n} r = u$   $u + \frac{u}{b} = \sqrt{u+u b - \sqrt{u}} \sqrt{r+u}$  (۳۵)  
 $\frac{r_1}{1+n} r \pm \frac{r_1}{1-n} r = u$   $(1-n) n = \left(\frac{u}{1+u}\right) + \left(\frac{u}{1-u}\right)$  (۳۶)  
 $\frac{b r}{r} - 1 \cdot b r = u$   $\frac{b}{r} - \frac{r_0}{r} + \frac{r_0}{b r} \sqrt{r} = \frac{u r}{r} + \frac{r_0}{b r}$  (۳۷)  
 $(\sqrt{r} \sqrt{r} \pm r) = u$   $\frac{u}{r} r = \frac{r}{r} - \frac{r}{r} (r+u)$  (۳۸)  
 $u r (1 - \sqrt{r} \frac{r}{r}) \pm \frac{u}{b} r = u$  جواب  $\frac{u b r - \sqrt{u} r}{u + u b r \sqrt{r}} = \sqrt{u+u b r} \sqrt{r+u+b}$  (۳۹)

$$\frac{p}{r} \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{r^2 - a^2} = 0 \quad \left(\frac{r^2}{p^2} + 1\right) (p + r) \frac{p}{r} = \left(\frac{r^2}{p^2} - 1\right) (r^2) \quad (۴۲)$$

$$\frac{p}{r} - 1 - \frac{r}{p} = 0 \quad = 0 \quad (۴۳)$$

$$\frac{p}{r} \frac{1}{r} = 0 \quad \frac{p}{1 - ur + u} \sqrt{r^2} = \sqrt{1 - ur} \sqrt{r^2} - \sqrt{1 - ur} \sqrt{r^2} + u \sqrt{r^2} \quad (۴۴)$$

$$\frac{1}{p} \cdot 1 - \frac{r}{p} \sqrt{r^2} \pm \frac{1}{p} + ur = 0 \quad \sqrt{r^2} + b = (p - u) \sqrt{r^2} + (p - u) \quad (۴۵)$$

$$\frac{p}{r} - 1 - \frac{r}{p} \sqrt{r^2} \pm \frac{1}{p} + ur = 0 \quad (r + u) - r = (u + p) \sqrt{r^2} + (u + p) \sqrt{r^2} \quad (۴۶)$$

$$\left(\frac{r}{p} + u \sqrt{r^2} \pm \frac{1}{p}\right) - \frac{r}{p} \sqrt{r^2} \pm u = 0 \quad r = \sqrt{u - p} \sqrt{r^2} + \sqrt{u + p} \sqrt{r^2} \quad (۴۷)$$

$$\sqrt{\frac{1}{r^2} (1 - b)^2 r^2 + 4 - b^2} = 0 \quad u p = \sqrt{u - 1} \sqrt{b - 1} \sqrt{r^2} + \sqrt{1 - ur} \sqrt{r^2} \quad (۴۸)$$

$$\frac{1}{r} \sqrt{r^2} \pm \frac{1}{r} = 0 \quad \frac{1}{r} = \sqrt{u - 1} \sqrt{r^2} \times \sqrt{u - 1} - \sqrt{u - 1} \sqrt{r^2} \quad (۴۹)$$

$$\left(\frac{r}{p} - \frac{r}{p} \sqrt{r^2} \pm \frac{1}{p} - \frac{p}{r}\right) = 0 \quad b = \frac{r(u - 1)}{p(u - 1)} + \frac{r(u + 1)}{p(u + 1)} \quad (۵۰)$$

$$\sqrt{\frac{1}{r^2} (1 + b)^2 r^2 + r + b} = 0 \quad b = \frac{r^2 u - 1}{r(u - 1)} + \frac{r^2 u + 1}{r(u + 1)} \quad (۵۱)$$

$$\frac{1}{r} \pm u = 0 \quad r + u \sqrt{r^2} = \frac{r}{r + u} + \sqrt{r + u} \sqrt{r^2} \quad (۵۲)$$

$$\frac{1}{r} - 1 - \frac{1}{r} = 0 \quad (1 + u) \sqrt{r^2} = (r + u) \sqrt{r^2} - (r + u) \sqrt{r^2} \quad (۵۳)$$

$$p - 1 - \frac{1}{p} (p - r) = 0 \quad br = \sqrt{u + 1} \sqrt{p - 1} \sqrt{r^2} - \sqrt{u - 1} \sqrt{p + 1} \sqrt{r^2} \quad (۵۴)$$

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} \sqrt{r^2} \pm \frac{1}{p} + \frac{1}{p}\right) = 0 \quad \frac{p - 1 - \frac{1}{p} (p - r)}{p} \sqrt{r^2} = \sqrt{u - 1} \sqrt{r^2} (u + 1) - \sqrt{u + 1} \sqrt{r^2} (u - 1) \quad (۵۵)$$

$$\frac{p}{r} (r + u) = 0 \quad \text{جواب } (u - b) = \sqrt{u + 1} \sqrt{r^2} (u + b) \quad (۵۶) \quad \frac{p - 1 - \frac{1}{p} (p - r)}{r - b} \frac{1}{b} = 0 \quad \text{جواب } b = \frac{\sqrt{u + 1} \sqrt{p - r + b} \sqrt{r^2}}{\sqrt{u + 1} \sqrt{u - r + 1} \sqrt{r^2}} \quad (۵۷)$$

$$\sqrt{r^2} \frac{1}{r} \pm \frac{1}{r} = 0 \quad \text{جواب } \frac{u}{r - b} = \sqrt{u - 1} \sqrt{r^2} - \sqrt{u + 1} \sqrt{r^2} \quad (۵۸) \quad \frac{p}{r} \pm b = 0 \quad \text{جواب } \frac{p}{r - b} = \frac{\sqrt{u - ur} \sqrt{r^2} - b}{\sqrt{u - ur} \sqrt{r^2} + b} \quad (۵۹)$$

$$\left(\frac{1}{r} \sqrt{r^2} (1 - n) \pm n\right) \sqrt{r^2} = 0 \quad 1 - nr = \sqrt{p} (1 - n) \sqrt{r^2} - \sqrt{p} \sqrt{r^2} (1 - n) + \sqrt{u + p} \sqrt{r^2} n \quad (۶۰)$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{p}{r} + \frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\right) \sqrt{r^2} \pm \frac{1}{r} - \left(\frac{p}{r} + \frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\right) = 0 \quad \text{جواب } n = \frac{p \sqrt{r^2} n + p n}{p n + 1} \quad (۶۱)$$

$$1 - \frac{p}{r} + \frac{p}{r} = 0 \quad (u + u + 1) \frac{1 + p}{1 - b} = (r + u + 1) \quad (۶۲)$$

$$\frac{p}{r} \left(\frac{1}{r} \sqrt{r^2} \pm 1\right) = 0 \quad \text{جواب } \sqrt{u - ur} \sqrt{r^2} + \sqrt{u - ur} \sqrt{r^2} = \sqrt{u + p} \sqrt{r^2} \sqrt{u + p} \sqrt{r^2} \quad (۶۳)$$

$$\sqrt{\frac{1 + p}{r + b} \pm p} \frac{p}{r} \sqrt{r^2} \pm 1 = 0 \quad \text{جواب } \sqrt{u - ur} \sqrt{r^2} - \sqrt{u - ur} \sqrt{r^2} = \frac{\sqrt{u - ur} \sqrt{r^2} - u}{\sqrt{u - ur} \sqrt{r^2} + u} \quad (۶۴)$$

$$\frac{p}{r} + \frac{p}{r} = 0 \quad \frac{1}{b} + p = \frac{(u + 1) \sqrt{r^2} + u \sqrt{r^2}}{u - 1} \quad (۶۵)$$

$$(۶۶) \quad (x + y) \sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}}$$

$$b(\sqrt{a + \sqrt{b}}) = 0$$

$$\frac{x \times 1 - \sqrt{a + \sqrt{b}}}{x} = 0$$

$$\frac{x \times 1 - \sqrt{a + \sqrt{b}}}{x} = 0$$

$$\frac{1}{x} + \sqrt{a + \sqrt{b}} = 0$$

$$bx \frac{r - \sqrt{a + \sqrt{b}}}{r + \sqrt{a + \sqrt{b}}} = 0$$

$$\frac{r(\sqrt{a + \sqrt{b}})}{r} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{b}}} + \frac{1}{\sqrt{a - \sqrt{b}}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{b}}} - \frac{1}{\sqrt{a - \sqrt{b}}} = 0$$

$$\frac{r(\sqrt{a + \sqrt{b}})}{r + \sqrt{a + \sqrt{b}}} = 0$$

$$\frac{r - \sqrt{a + \sqrt{b}}}{r + \sqrt{a + \sqrt{b}}} = 0$$

$$\frac{r + \sqrt{a + \sqrt{b}}}{r + \sqrt{a + \sqrt{b}}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{b}}} = \left(\frac{a + \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{a + \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{a - \sqrt{b}}} \quad (۶۷)$$

$$(۶۸) \quad n(\sqrt{a + \sqrt{b}}) = (\sqrt{a + \sqrt{b}}) + (\sqrt{a - \sqrt{b}})$$

$$\frac{b}{\sqrt{a + \sqrt{b}}} + b = 1 - \frac{b}{\sqrt{a - \sqrt{b}}} \quad (۶۹)$$

$$\sqrt{a - \sqrt{b}} \sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{a - \sqrt{b}} \sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a + \sqrt{b}} \sqrt{a - \sqrt{b}} \quad (۷۰)$$

$$\frac{a}{\sqrt{a + \sqrt{b}}} = \frac{a}{\sqrt{a + \sqrt{b}}} + \frac{a + \sqrt{b}}{\sqrt{a + \sqrt{b}}} \quad (۷۱)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{b}}} = \frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{b}}} + \frac{a + \sqrt{b}}{\sqrt{a + \sqrt{b}}} \quad (۷۲)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{b}}} - \frac{1}{\sqrt{a - \sqrt{b}}} = 0 \quad (۷۳)$$

$$(1 + \sqrt{b})^2 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{b}}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{b}}}\right) \quad (۷۴)$$

$$\sqrt{a - \sqrt{b}} - \sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{a - \sqrt{b}} - \sqrt{a + \sqrt{b}} \quad (۷۵)$$

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}} = 1 - \sqrt{a - \sqrt{b}} \quad (۷۶)$$

$$1 - \sqrt{a - \sqrt{b}} = 0 \quad (۷۷) \quad \sqrt{a - \sqrt{b}} = 1 - \sqrt{a - \sqrt{b}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{b}}} + \frac{1}{\sqrt{a - \sqrt{b}}} = 0 \quad (۷۸) \quad \frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{b}}} = -\frac{1}{\sqrt{a - \sqrt{b}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{b}}} = -\frac{1}{\sqrt{a - \sqrt{b}}} \quad (۷۹)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{b}}} = -\frac{1}{\sqrt{a - \sqrt{b}}} \quad (۸۰)$$

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}} = 0 \quad (۸۱)$$

$$r - \sqrt{a - \sqrt{b}} = 0 \quad (۸۲)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{b}}} - \frac{1}{\sqrt{a - \sqrt{b}}} = 0 \quad (۸۳)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{b}}} - \frac{1}{\sqrt{a - \sqrt{b}}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{b}}} - \frac{1}{\sqrt{a - \sqrt{b}}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{b}}} - \frac{1}{\sqrt{a - \sqrt{b}}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{b}}} - \frac{1}{\sqrt{a - \sqrt{b}}} = 0$$

$$x \times \frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{b}}} + 2 \times 0 = (r + \sqrt{a + \sqrt{b}}) \frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{b}}} \quad (۸۴)$$

$$(1 + \sqrt{b}) \sqrt{a - \sqrt{b}} = (r + \sqrt{a + \sqrt{b}}) \sqrt{a - \sqrt{b}} \quad (۸۵)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{b}}} = \frac{1}{\sqrt{a - \sqrt{b}}} \quad (۸۶)$$

$$4 \times 9 = (r - \sqrt{a - \sqrt{b}}) \sqrt{a - \sqrt{b}} - (r + \sqrt{a + \sqrt{b}}) \sqrt{a - \sqrt{b}} \quad (۸۷)$$

$$(b - \sqrt{b}) \sqrt{a + \sqrt{b}} + (b + \sqrt{b}) \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{a + \sqrt{b}} \sqrt{a - \sqrt{b}} \quad (۸۸)$$

$$(1 + \sqrt{b}) + (r - \sqrt{b}) = \sqrt{a - \sqrt{b}} \quad (۸۹)$$

$$\frac{\sqrt{r^2 \pm 4} + r}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{r^2 - 4} = u \quad 11q + -\sqrt{11}q + \frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{q}{\sqrt{11}} + \frac{u}{1} \quad (9)$$

$$\frac{r - u \sqrt{r^2 \pm br + 1}}{(b-1)r} = u \quad b = \frac{\sqrt{u+1}}{\sqrt{u+1}} \quad (91)$$

اور زمین  $\frac{1 - \sqrt{1 \pm 4}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 \pm 4} = u$

$$b = \frac{\sqrt{u+1}}{\sqrt{u+1}} \quad (92)$$

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{1 - \sqrt{1 \pm 4}}{(b-1)r} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 \pm 4} \right\} + \frac{1}{2} \sqrt{1 \pm 4} = u \frac{\sqrt{u+1}}{\sqrt{u+1}} \quad (93)$$

$$\frac{\sqrt{r^2 \pm 4} + r}{1} \pm \frac{1}{r} = u \quad (b-1)r$$

$$\sqrt{r^2 \pm 4} + r = u \sqrt{r^2 \pm 4} + u \sqrt{r^2 \pm 4} \quad (94)$$

$$\sqrt{r^2 \pm 4} + r = u \sqrt{r^2 \pm 4} + u \sqrt{r^2 \pm 4} \quad (95)$$

$$\frac{\sqrt{r^2 \pm 4} + r}{1} \pm \frac{1}{r} = u \quad (96)$$

$$\frac{\sqrt{r^2 \pm 4} + r}{1} \pm \frac{1}{r} = u \quad (97)$$

$$\frac{\sqrt{r^2 \pm 4} + r}{1} \pm \frac{1}{r} = u \quad (98)$$

$$\frac{\sqrt{r^2 \pm 4} + r}{1} \pm \frac{1}{r} = u \quad (99)$$

$$\frac{\sqrt{r^2 \pm 4} + r}{1} \pm \frac{1}{r} = u \quad (100)$$

سوات درجه اول کی

$$0 = u \quad 9 = \sqrt{3} - u \quad r = r = u \quad 13 = \sqrt{3} + u \quad 0 = u \quad 10 = \sqrt{3} - u$$

$$n = s \quad n = \sqrt{3} - u \quad r = r = s \quad 0 = s + u \quad r = s \quad n = (\sqrt{3} - u)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{r} = u \quad 14 = \sqrt{3} - u \quad 17 = \sqrt{3} + u \quad r = u \quad r = \sqrt{3} + u \quad r = \sqrt{3} + u$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{r} = s \quad u = \sqrt{3} - u \quad \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{r} = s \quad 18 = \sqrt{3} + u \quad r = s \quad r = \sqrt{3} + u$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{r} = u \quad 10 = \sqrt{3} - u \quad 13 = \sqrt{3} + u \quad r = u \quad r = \sqrt{3} + u \quad r = \sqrt{3} + u$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{r} = s \quad 14 = \sqrt{3} - u \quad 17 = \sqrt{3} + u \quad r = s \quad r = \sqrt{3} + u \quad r = \sqrt{3} + u$$

$$1 - \frac{1}{r} = u \quad 1 = s - u \quad 1 = \sqrt{3} + u \quad r = u \quad r = \sqrt{3} + u \quad r = \sqrt{3} + u$$

$$1 - \frac{1}{r} = s \quad 1 = s - u \quad 1 = \sqrt{3} + u \quad r = s \quad r = \sqrt{3} + u \quad r = \sqrt{3} + u$$

$$r = u \quad 5 = s + u \quad 1 = u \quad r = \frac{1}{s} + \frac{1}{u} \quad r = \frac{1}{s} + \frac{1}{u}$$

$$r = s \quad 100 = (\sqrt{3} + u)(\sqrt{3} - u) \quad 1 = s \quad 9 = s + u$$

$$0 = u \quad 14 = \sqrt{3} - u \quad 17 = \sqrt{3} + u \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{u} + \frac{1}{r} \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{u} + \frac{1}{r}$$

$$r = s \quad 14 = \sqrt{3} + u \quad 17 = \sqrt{3} + u \quad 41 = \sqrt{3} + u \quad 41 = \sqrt{3} + u$$

(14)  $11 = s - u$  ضرب دیکھو  $13040 = 5^2 - u^2$   
 $11 = s - u$  جواب  $u = 5$   
 $13 = s$   
 $(1 + \sqrt{13}) \frac{p}{q} = u = s + u$  (14)  
 $(1 + \sqrt{13}) \frac{p}{q} = 1$   $5^2 - u^2 = 13040$

$\frac{1}{2} r = u$  جواب  $\frac{r}{2} = u$   
 $\frac{1}{2} r = s$   
 $\frac{r}{2} = u = \frac{s+u}{\sqrt{10}} + \frac{s+u}{\sqrt{10}}$  (18)  
 $\frac{r}{2} = \frac{s}{\sqrt{5-u} \sqrt{3}} - \frac{u}{\sqrt{5-u} \sqrt{3}}$

9.  $1 = u$  جواب  $r = (s-u-e)(e+u)$  اور  $r = e + s + u$  (19)

$7 - \frac{1}{2} r = s$   
 $r = e$   
 $4 = (s-u-e)(e+s+u)$

$120 = u$  جواب  $12 = \frac{1}{r} e + \frac{1}{r} s + \frac{1}{r} u$  اور  $214 = e + s + u$  (20)

$4r = s$   
 $24 = e$   
 $12 - \frac{1}{r} e + \frac{1}{r} s + \frac{1}{r} u = \frac{e}{r} + \frac{s}{r}$

$2r = (1-e) + (r-s) + (r-u)$  (21)

$4 = u$  جواب

$5 = s$

$3 = e$

$r = u$

$3 = s$

$2 = e$

$30 = e + s + u$  اور  $43 = e + u + s + u$

جواب  $28 = r + e + u$  اور  $34 = s + u + u$  (22)

$19 = 2u + e + s$

$13 = (s+u) + u + s + u$  (23)

$48 = s + u$  (24)

$\frac{s-u}{s} = \frac{u}{s+u} - \frac{s}{u}$  (25)

$\frac{s}{u} = \frac{s+u}{u} - \frac{u}{s}$

$\frac{s+u}{s+u} = \frac{s}{u} - \frac{u}{s}$  (26)

$\frac{s-u}{s} = \frac{s}{u} - \frac{u}{s}$

$\frac{u+1}{s-1} = \frac{u}{s}$  اور  $u = \frac{s^2 - u^2}{s^2 - u^2} \sqrt{s+u}$  (27)

$24 = s + u \sqrt{4-u}$  (28)

$r = s + u \sqrt{2-u}$

$s^2 + s^2 u + u^2 = (s+u)^2$  (29)

$(s^2 - s^2) + s^2 u = (s^2 + u^2)$

$(s-u) \sqrt{s+u} = \frac{1}{s} = \frac{s-u}{s} \sqrt{s+u}$  (30)

$24 = \frac{r}{s}(s-u) - \frac{r}{s}(s+u)$

$4 = u$  جواب  $\frac{\sqrt{13r \pm 1}}{13} = u$

$1 = s$   
 $\frac{\sqrt{13r \pm 11}}{13} = s$

$5 = u$  جواب

$r = s$

$x \frac{\sqrt{r^2(r+1)}}{r^2} = u$  جواب

$\left\{ \left( \frac{1+r}{1+r} \right) + 1 \right\}$   
 $\frac{r}{r+1} = s$

$\frac{br+ص}{br^2} = u$  جواب

$\frac{b-r}{r} \sqrt{b^2 r^2} = s$   
 جواب  $\frac{b}{10r^2} = s$

$\frac{b}{10r^2} = s$

جواب  $10r = u$

جواب  $10r = s$

جواب  $r = u$

$\frac{1}{r} = s$

جواب  $r = u$   
 $1 = s$

$\frac{10}{5r^2} = u$  جواب  $5r = s + u$  (۳۸)  
 $5 = s$  اور  $4 = u$

$\frac{10}{5r^2} = s$

جواب  $\frac{1}{r} = s + u$

جواب  $\frac{1}{r} = s$

جواب  $\left\{ \frac{5r}{4} \pm \frac{1}{r} \right\} = u$

$\left\{ \frac{5r}{4} \pm \frac{1}{r} \right\} = s$

جواب  $\frac{5r}{4} = s$  اور  $\frac{1}{r} = u$

جواب  $1 = u$   
 $2 = s$

دیکھو ضمیمہ

( $\sqrt{s-u} \sqrt{r} + \sqrt{s+u} \sqrt{r}$ )  $\frac{4}{s} = \sqrt{s-u} \sqrt{r} + u$  (۳۰)

$s = \sqrt{s-u} \sqrt{r} + \sqrt{s+u} \sqrt{r}$

جواب  $b < u$   
 $b = s$   
 $\sqrt{s-br} \sqrt{u+r} + \sqrt{s+br} \sqrt{u-r} = \sqrt{s-u} \sqrt{r}$  (۳۱)

$(\sqrt{s-br} \sqrt{u} - \sqrt{s+br} \sqrt{u}) \cdot \sqrt{r} = \sqrt{s-u} \sqrt{r}$

( $\sqrt{s-u} \sqrt{r} + \sqrt{s+u} \sqrt{r}$ )  $\frac{4}{s} = \sqrt{s-u} \sqrt{r} - u$  (۳۲)

ص  $\frac{r}{(s-u)} - \frac{r}{(s+u)} = \frac{u}{b}$   
 $\frac{2r}{s^2 - u^2} = \frac{u}{b}$  (۳۳)

$\frac{u+b}{s-b} = \frac{u}{s}$

$210 = \sqrt{s} \sqrt{r} + \sqrt{s+u} \sqrt{r} + \sqrt{s-u} \sqrt{r} + u$  (۳۴)

$124 = \sqrt{s} \sqrt{r} + \sqrt{s+u} \sqrt{r} - \sqrt{s-u} \sqrt{r} - u$

$\sqrt{r+s} \sqrt{r} = \sqrt{s-u} \sqrt{r}$  (۳۵)

$\sqrt{r+s} \sqrt{r} = r + u$

$\sqrt{s} \sqrt{r} + \sqrt{s+u} \sqrt{r} + 1 = \sqrt{s-u} \sqrt{r}$  (۳۶)

$1 + u + \sqrt{s+u} \sqrt{r} = \sqrt{s-u} \sqrt{r}$

جواب  $s \sqrt{r} = s + u$  (۳۷)

$r = s + u$

$\frac{u}{s} = \frac{s+u}{u}$  (۳۸)

$\frac{u}{s} = \frac{s+u}{s}$

$\frac{r}{(s)} = \frac{\sqrt{r} + \sqrt{u}}{(\sqrt{r})}$  (۳۹)

$\frac{r}{(s)} = \frac{\sqrt{r} + \sqrt{u}}{(\sqrt{r})}$

$\cdot = (u-b) s r + u \sqrt{b}$  (۴۰)

$\cdot = r b + s - u$

$\frac{r}{s} - \frac{r}{s} = r - u$  (۴۱)

$(s-u) s u = r - u$

$$\left\{ \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + \frac{1}{xy} \right\} \frac{1}{x} = u \text{ جواب } u = \sqrt{\frac{x}{y}} \sqrt{y} + \sqrt{\frac{y}{x}} \sqrt{x} \quad (۴۲)$$

$$\left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \right\} \frac{1}{x} = s \quad v = s \sqrt{xy} \sqrt{xy} + s + u$$

جواب  $u = 3$

$v = 5$

جواب  $r = u$  یا  $r = s$

$r = 3$  یا  $r = 5$

$$\frac{r}{s} = \frac{1}{s} (3 + u) \quad (۴۳)$$

$$\frac{1}{s} = \frac{u}{3} (3 - u)$$

$$u(3-u) = 3 \quad (۴۴)$$

$$3u - u^2 = 3 \Rightarrow u^2 - 3u + 3 = 0$$

جواب  $u = 3 - r$  یا  $u = r - 3$   $u - r = (1 - 3) \sqrt{\frac{x}{y}} - s(r - u) \quad (۴۵)$

جواب  $r = s$

$$\frac{r - s \sqrt{\frac{x}{y}}}{1 - 3 \sqrt{\frac{x}{y}}} = \frac{r - s}{3}$$

جواب  $r = u$

$\frac{1}{s} = s$

$$\left( \sqrt{\frac{x}{y}} \sqrt{y} - \sqrt{\frac{y}{x}} \sqrt{x} \right) - \frac{r - s}{3} = r + s \sqrt{\frac{x}{y}} - s \quad (۴۶)$$

$$14 - u = \frac{u}{3} \sqrt{\frac{x}{y}} \left( 1 - \frac{1}{s} \right)$$

جواب  $u = 14$   $\frac{1}{s} = \frac{u}{3} \sqrt{\frac{x}{y}} \left( 1 - \frac{1}{s} \right)$   $\frac{1}{s} = \frac{14}{3} \sqrt{\frac{x}{y}} \left( 1 - \frac{1}{s} \right) \quad (۴۷)$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s} \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{1}{s} \sqrt{\frac{x}{y}} + \frac{1}{s}$$

$$v = \frac{1}{s} (3 - u) + \frac{1}{s} (s + u)$$

$$s \sqrt{\frac{x}{y}} \sqrt{y} - s \sqrt{\frac{y}{x}} \sqrt{x} - (s + u) = s + u + (u + s) \quad (۴۸)$$

جواب  $u = 14$   $\frac{1}{s} = \frac{u}{3} \sqrt{\frac{x}{y}} \left( 1 - \frac{1}{s} \right)$   $\frac{1}{s} = \frac{14}{3} \sqrt{\frac{x}{y}} \left( 1 - \frac{1}{s} \right)$

$$1 + s \sqrt{\frac{x}{y}} - s \sqrt{\frac{y}{x}} - \frac{1}{s} \sqrt{\frac{x}{y}} \pm \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \pm \frac{1}{s} \text{ جواب } \frac{1}{s} + u = 3 + 3 \quad (۵۰)$$

$$1 + s \sqrt{\frac{x}{y}} - s \sqrt{\frac{y}{x}} - \frac{1}{s} \sqrt{\frac{x}{y}} \pm \frac{1}{s} = s$$

$$u - \frac{v}{s} = 3 + (1 - u) \sqrt{\frac{x}{y}} + (r - u) \sqrt{\frac{y}{x}}$$

جواب  $u = 3$   $(s - v) \sqrt{\frac{x}{y}} + (u - v) \sqrt{\frac{y}{x}} = (s - v) \sqrt{\frac{x}{y}} + (u - v) \sqrt{\frac{y}{x}} \quad (۵۱)$

جواب  $u = 3$   $u = 3$   $\frac{1}{s} = \frac{u}{3} \sqrt{\frac{x}{y}} \left( 1 - \frac{1}{s} \right)$   $\frac{1}{s} = \frac{3}{3} \sqrt{\frac{x}{y}} \left( 1 - \frac{1}{s} \right)$

جواب  $u = 3$   $\frac{1}{s} = \frac{u}{3} \sqrt{\frac{x}{y}} \left( 1 - \frac{1}{s} \right)$   $\frac{1}{s} = \frac{3}{3} \sqrt{\frac{x}{y}} \left( 1 - \frac{1}{s} \right)$

جواب  $u = 3$   $\frac{1}{s} = \frac{u}{3} \sqrt{\frac{x}{y}} \left( 1 - \frac{1}{s} \right)$   $\frac{1}{s} = \frac{3}{3} \sqrt{\frac{x}{y}} \left( 1 - \frac{1}{s} \right)$

$\frac{1}{s} = \frac{u}{3} \sqrt{\frac{x}{y}} \left( 1 - \frac{1}{s} \right)$   $\frac{1}{s} = \frac{3}{3} \sqrt{\frac{x}{y}} \left( 1 - \frac{1}{s} \right)$

$$\frac{r + 9 + u}{\sqrt{\frac{x}{y}}} = \frac{1 + 1 + 3}{s} \quad (۵۲)$$

$$\left( \frac{14}{3} + 3 \right) \sqrt{\frac{x}{y}} = (1 + s) \sqrt{\frac{x}{y}}$$



جواب  $\frac{1}{s} = 1$   $r = s$

$$\frac{1+u}{u} = \frac{1-u}{1-u} \times \frac{1}{r} + \frac{s}{ur} \quad (52)$$

جواب  $\frac{1}{r} = 1$   $r = s$

$$r - \sqrt{u} = (s-1)u \quad (55)$$

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{r} + \frac{s}{ur} \quad (54)$$

$$r + \frac{sr}{u} + \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{r}\right) \frac{1}{r} = \left(1 - \frac{r}{u}\right) \frac{1}{r} + \left(1 - \frac{r}{u}\right) \frac{1}{r} \quad (56)$$

جواب  $1 - r = 0$   $r = 1$

$$(r - \sqrt{u})^2 = s^2 \quad (58)$$

جواب  $1 + r = s$

$$r + u = s \quad (59)$$

$$r + u = s \quad (60)$$

$$r(1+u) = s(1+u) \quad (61)$$

$$r(1+u) = s(1+u) \quad (62)$$

$$r + \frac{sr}{u} - r = (u - s)r + r \quad (63)$$

جواب  $\frac{1}{r} - 1 = s$

$$\frac{1}{r} + \frac{s}{ur} = \frac{1}{r} + \frac{s}{ur} = \frac{1}{r} + \frac{s}{ur} \quad (64)$$

$$\frac{1}{r} + \frac{s}{ur} = s \quad (65)$$

مت کتاب بیرون الملک الباب







