

Mathematik für Anwender I**Arbeitsblatt 27****Übungsaufgaben**

AUFGABE 27.1.*

Bestimme die Eigenvektoren der Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \pi x$.

AUFGABE 27.2. Überprüfe, ob der Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zur Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

ist und bestimme, falls ein Eigenvektor vorliegt, den zugehörigen Eigenwert.

AUFGABE 27.3. Bestimme die Eigenvektoren und die Eigenwerte zu einer linearen Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die durch eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ gegeben ist.

AUFGABE 27.4. Zeige, dass der erste Standardvektor ein Eigenvektor zu einer jeden oberen Dreiecksmatrix ist. Was ist der Eigenwert?

AUFGABE 27.5.*

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix. Zeige, dass ein Eigenwert zu M ein Diagonaleintrag von M sein muss.

AUFGABE 27.6.*

Bestimme die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume zu einer ebenen Drehung $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ zu einem Drehwinkel α , $0 \leq \alpha < 2\pi$, über \mathbb{R} .

AUFGABE 27.7. Zeige, dass jede Matrix

$$M \in \text{Mat}_2(\mathbb{C})$$

mindestens einen Eigenwert besitzt.

AUFGABE 27.8. Es seien

$$\varphi, \psi: V \longrightarrow V$$

Endomorphismen auf einem K -Vektorraum V und es sei $v \in V$ ein Eigenvektor von φ und von ψ . Zeige, dass v auch ein Eigenvektor von $\varphi \circ \psi$ ist. Was ist der Eigenwert?

AUFGABE 27.9. Es sei $\varphi: V \rightarrow V$ ein Isomorphismus auf einem K -Vektorraum V mit der Umkehrabbildung φ^{-1} . Zeige, dass $a \in K$ genau dann ein Eigenwert von φ ist, wenn a^{-1} ein Eigenwert von φ^{-1} ist.

AUFGABE 27.10. Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

derart, dass φ keine Eigenwerte besitzt, dass aber eine gewisse Potenz φ^n , $n \geq 2$, Eigenwerte besitzt.

AUFGABE 27.11. Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung mit

$$\varphi^n = \text{Id}_V$$

für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$.¹ Zeige, dass jeder Eigenwert λ von φ die Eigenschaft $\lambda^n = 1$ besitzt.

AUFGABE 27.12. Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von φ und $P \in K[X]$ ein Polynom. Zeige, dass $P(\lambda)$ ein Eigenwert von² $P(\varphi)$ ist.

AUFGABE 27.13. Es sei M eine quadratische Matrix, die man als Blockmatrix

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Matrizen A und B schreiben kann. Zeige, dass eine Zahl $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert von M ist, wenn λ ein Eigenwert von A oder von B ist.

¹Der Wert $n = 0$ ist hier erlaubt, aber aussageelos.

²Der Ausdruck $P(\varphi)$ bedeutet, dass man die lineare Abbildung φ in das Polynom P einsetzt. Dabei muss man X^n als φ^n , also als die n -fache Hintereinanderschaltung von φ mit sich selbst, interpretieren, die Addition wird zur Addition von linearen Abbildungen, u.s.w.

AUFGABE 27.14.*

Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $\lambda \in K$. Zeige folgende Aussagen.

- (1) Der Eigenraum

$$\text{Eig}_\lambda(\varphi)$$

ist ein Untervektorraum von V .

- (2) λ ist genau dann ein Eigenwert zu φ , wenn der Eigenraum $\text{Eig}_\lambda(\varphi)$ nicht der Nullraum ist.
 (3) Ein Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, ist genau dann ein Eigenvektor zu λ , wenn $v \in \text{Eig}_\lambda(\varphi)$ ist.

AUFGABE 27.15. Es bezeichne $V = \mathbb{R}[X]_{\leq d}$ die Menge aller reellen Polynome vom Grad $\leq d$. Bestimme die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume zum Ableitungsoperator

$$V \longrightarrow V, P \longmapsto P'.$$

Der Begriff des Eigenvektors ist auch für unendlichdimensionale Vektorräume definiert und wichtig, wie die folgende Aufgabe zeigt.

AUFGABE 27.16. Es sei V der reelle Vektorraum, der aus allen unendlich oft differenzierbaren Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} besteht.

- a) Zeige, dass die Ableitung $f \mapsto f'$ eine lineare Abbildung von V nach V ist.
 b) Bestimme die Eigenwerte der Ableitung und zu jedem Eigenwert mindestens einen Eigenvektor.³
 c) Bestimme zu jeder reellen Zahl die Eigenräume und deren Dimension.

AUFGABE 27.17. Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass

$$\text{kern } \varphi = \text{Eig}_0(\varphi)$$

gilt.

AUFGABE 27.18. Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Sei $\lambda \in K$ und sei

$$U = \text{Eig}_\lambda(\varphi)$$

³In diesem Zusammenhang spricht man auch von *Eigenfunktionen*.

der zugehörige Eigenraum. Zeige, dass sich φ zu einer linearen Abbildung

$$\varphi|_U: U \longrightarrow U, v \longmapsto \varphi(v),$$

einschränken lässt, und dass diese Abbildung die Streckung um den Streckungsfaktor λ ist.

AUFGABE 27.19.*

Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und seien $\lambda_1 \neq \lambda_2$ Elemente in K . Zeige, dass

$$\text{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \cap \text{Eig}_{\lambda_2}(\varphi) = 0$$

ist.

AUFGABE 27.20.*

Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass es maximal $\dim(V)$ viele Eigenwerte zu φ gibt.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 27.21. (1 Punkt)

Überprüfe, ob der Vektor $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zur Matrix

$$\begin{pmatrix} -8 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

ist und bestimme, falls ein Eigenvektor vorliegt, den zugehörigen Eigenwert.

AUFGABE 27.22. (1 Punkt)

Überprüfe, ob der Vektor $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -9 \\ -2 & 7 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

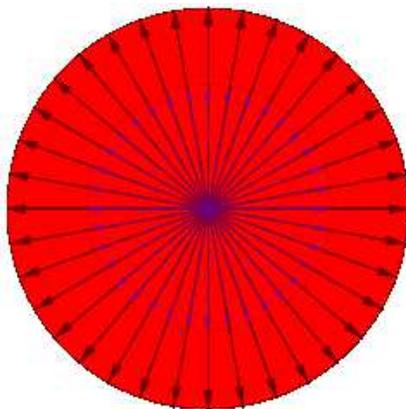
ist und bestimme, falls ein Eigenvektor vorliegt, den zugehörigen Eigenwert.

AUFGABE 27.23. (4 (1+3) Punkte)

Das Nachtleben im Dorf Kleineisenstein besteht aus folgenden Möglichkeiten: dem Bett (bzw. zuhause), der Kneipe „Nachteule“ und dem Tanzclub „Pirouette“. In der Nacht kann man innerhalb einer Stunde folgende Bewegungen beobachten:

- a) Von den Leuten im Bett gehen $1/10$ in dieachteule, $1/12$ gehen in die Pirouette und der Rest bleibt im Bett.
- b) Von den Leuten in derachteule gehen $1/3$ in die Pirouette, $1/5$ gehen ins Bett und der Rest bleibt in derachteule.
- c) Von den Leuten in der Pirouette bleiben $3/5$ in die Pirouette, 8 Prozent gehen in derachteule, der Rest geht ins Bett.

- (1) Erstelle eine Matrix, die die Bewegungen innerhalb einer Stunde beschreibt.
- (2) Kleineisenstein hat 500 Einwohner. Bei welcher Verteilung der Einwohner auf die drei Möglichkeiten ändert sich die Verteilung innerhalb einer Stunde nicht?



AUFGABE 27.24. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann eine Streckung ist, wenn jeder Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, ein Eigenvektor von φ ist.

AUFGABE 27.25. (4 Punkte)

Betrachte die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass M als reelle Matrix keine Eigenwerte besitzt. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume von M als komplexer Matrix.

AUFGABE 27.26. (6 Punkte)

Betrachte die reellen Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

Man charakterisiere in Abhängigkeit von a, b, c, d , wann eine solche Matrix

- (1) zwei verschiedene Eigenwerte,
- (2) einen Eigenwert mit einem zweidimensionalen Eigenraum,
- (3) einen Eigenwert mit einem eindimensionalen Eigenraum,
- (4) keinen Eigenwert,

besitzt.

Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Homothety in two dim.svg , Autor = Benutzer Lantonov auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 5
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7