ノ定理ニヨリ

$$\varphi(a+h)=\frac{h^m}{m!}\varphi^{(m)}(a+\theta h) \qquad 0<\theta<1,$$

$$\psi(a+h)=\frac{h^n}{n!}\psi^{(n)}(a+\theta' h) \qquad 0<\theta'<1.$$

ナルニヨリ

$$\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}=\frac{n!}{m!}\,\frac{\varphi^{(m)}(a+\theta h)}{\psi^{(n)}(a+\theta' h)}h^{m-n}.$$

故ニ $\displaystyle \lim_{x=a} f(x)=\lim_{h=0}\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}=\lim_{h=0}\frac{n!}{m!}\,\frac{\varphi^{(m)}(a+\theta h)}{\psi^{(n)}(a+\theta' h)}h^{m-n},$

依テ若シ (i) $m>n$ ノ片ハ

$$\lim_{x=a} f(x)=0,$$

(ii) 若シ $m=n$ ノ片ハ

$$\lim_{x=a} f(x)=\frac{\varphi^{(m)}(a)}{\psi^{(n)}(a)}.$$

(iii) 若シ $m<n$ ノ片ハ

$$\lim_{x=a} f(x)=\infty.$$

【注意】 $\displaystyle\lim_{x=a} f(x)$ ト書ク代リニ $[f(x)]_{x=a}$ 又ハ $[f(x)]_a$ ナル記號ヲ用フルコトアリ.

【例】1. $\displaystyle\lim_{x=0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ ヲ求ム.

$$\left[\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}\right]_{x=0}=\frac{0}{0}\text{ノ形}=\left[\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}\right]_{x=0}=2 \qquad (\text{公式}8,9)$$

【例】2. $\displaystyle\left[\frac{1-x+\log x}{1-\sqrt{2x-x^2}}\right]_{x=1}$ ヲ求ム.

$$\left[\frac{1-x+\log x}{1-\sqrt{2x-x^2}}\right]_{x=1}=\frac{0}{0}\text{ノ形}=\left[\frac{-1+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}}\right]_{x=1} \qquad (\text{公式}5,6,7)$$

$$=\left[\frac{-\sqrt{2x-x^2}}{x}\right]_{x=1}=-1.$$

【例】3. $\displaystyle\left[\frac{x^2}{1-\cos mx}\right]_{x=0}=\frac{0}{0}\text{形}=\left[\frac{2x}{m\sin mx}\right]_{x=0}=\frac{0}{0}\text{形} \quad \therefore$

(公式 6,10)

$$=\left[\frac{2}{m^2\cos mx}\right]_{x=0}=\frac{2}{m^2} \qquad (\text{公式 }6,9)$$

II. 不定形式 $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

ニ於テ $\varphi(a)=\infty,\ \psi(a)=\infty$ ナルトキハ

$$f(x)=\frac{\dfrac{1}{\psi(x)}}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}$$

ナルニヨリ I ノ場合ノ不定形式ニナル故ニ分母分子ヲ別々ニ微分シテ

$$\lim_{x=a} f(x)=\lim_{x=a}\frac{-\dfrac{\psi'(x)}{\{\psi(x)\}^2}}{-\dfrac{\varphi'(x)}{\{\varphi(x)\}^2}}=\lim_{x=a}\left\{\frac{\varphi(x)}{\psi(a)}\right\}^2\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}$$

$$\therefore \qquad \lim_{x=a} f(x)=\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

故ニ I ノ場合ノ如ク分母及分子ヲ別々ニ微分シテ $x=a$ ト置キテ求

メラル．是又不定形ナル時ハ **I** ト同法ニヨリテ分母及分子ヲ數回微分シテ $x=a$ ト置クベシ．

〔例　1.　$\lim\limits_{x=\infty}\left[\dfrac{x^n}{e^x}\right]$，　$n>0$　ヲ求ム．

故　$$\left[\frac{x^n}{e^x}\right]_{x=\infty}=\frac{\infty}{\infty}\text{形}=\left[\frac{nx^{n-1}}{e^x}\right]_{\infty}=\frac{\infty}{\infty}\text{形}=\cdots\cdots$$

∴　n ハ若シ正整數ナルトキハ

$$\left[\frac{x^n}{e^x}\right]_{x=\infty}=\left[\frac{n!}{e^x}\right]_{x=\infty}=0.$$

n ハ整數ナラザル時ハ之ヲ挾ム整數ヲ k 及 $k-1$ トセバ

$$k-1<n<k$$

$$\left[\frac{x^n}{e^x}\right]_{x=\infty}=\left[\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{x^{k-n}e^x}\right]_{x=\infty}=0.$$

∴　$$\lim_{x=\infty}\frac{x^n}{e^x}=0.$$

【例】2.　$$\left[\frac{\log\tan mx}{\log\tan nx}\right]_{x=0}=\frac{\infty}{\infty}\text{形}=\left[\frac{\log\sin mx-\log\cos mx}{\log\sin nx-\log\cos nx}\right]_{x=0}$$

$$=\left[\frac{\log\sin mx}{\log\sin nx}\right]_{x=0}=\frac{\infty}{\infty}\text{形}=\left[\frac{m\cot mx}{n\cot nx}\right]_{x=0}\qquad(\text{公式 }5,7,9)$$

$$=\left[\frac{m\cos mx\sin nx}{n\cos nx\sin mx}\right]_{x=0}=\frac{0}{0}\text{形}$$

$$=\left[\frac{mn\cos mx\cos nx-m^2\sin mx\sin nx}{mn\cos nx\cos mx-n^2\sin nx\sin mx}\right]_{x=0}\qquad(\text{公式 }9,10)$$

$$=1.$$

III.　不定形式　$0\times\infty$.

$$f(x)=\varphi(x)\psi(x)$$

ニ於テ　$\varphi(a)=0,\quad \psi(a)=\infty.$

ナル時ハ

$$\lim_{x=a}f(x)=\lim_{x=a}\frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{\psi(x)}}$$ ナルニヨリ **I** ノ不定形式トナル．

或ハ

$$\lim_{x=a}f(x)=\lim_{x=a}\frac{\psi(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}$$ ナルニヨリ **II** ノ不定形式トナル．

依テ此形ノ極限値ハ **I** 或ハ **II** ニヨリテ求メ得ベシ．

【例】1.　$$\left[(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}\right]_{x=1}=0\times\infty=\left[\frac{1-x}{\cot\dfrac{\pi x}{2}}\right]_{x=1}$$

分母子ヲ微分シテ　$$=\left[\frac{-1}{-\dfrac{\pi}{2}\operatorname{cosec}^2\dfrac{\pi x}{2}}\right]_{x=1}=\frac{2}{\pi}.$$

【例】2.　$$\left[(a^{\frac{1}{x}}-1)x\right]_{x=\infty}=0\times\infty=\left[\frac{a^{\frac{1}{x}}-1}{\dfrac{1}{x}}\right]_{x=\infty}$$

$$=\left[\frac{a^y-1}{y}\right]_{y=0}\quad\left(y=\frac{1}{x}\right).$$

$$=\left[\frac{a^y\log a}{1}\right]_{y=0}\qquad(\text{公式 }6,8)$$

$$=\log a.$$

VI.　不定形式　$\infty-\infty$.

$$f(x)=\varphi(x)-\psi(x),$$

ニ於テ　$\varphi(a)=\infty,\quad \psi(a)=\infty.$

ナルトキハ　$\varphi(x)=\dfrac{\varphi_1(x)}{\psi_2(x)},\qquad \psi(x)=\dfrac{\psi_1(x)}{\varphi_2(x)}$

ト置クトキハ　$\varphi_1(a),\ \psi_1(a)$　ハ有限ニシテ

$$\varphi_2(a)=0,\quad \psi_2'(a)=0$$

ナルカ或ハ $\varphi_2(a)$, $\psi_2(a)$ ハ有限ニシテ

$$\varphi_1(a)=0,\quad \psi_1(a)=\infty$$

ナルベシ, カクスル片ハ

$$f(x)=\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}-\frac{\psi_1(x)}{\psi_2(x)}=\frac{\varphi_1(x)\psi_2(x)-\varphi_2(x)\psi_1(x)}{\varphi_2(x)\cdot\psi_2(x)}.$$

ナルニヨリ I 或ハ II ノ場合ニ導クヲ得ベシ.

【例】 $$\left[xtanx-\frac{\pi}{2}secx\right]_{x=\frac{\pi}{2}}=\infty-\infty.$$

$$=\left[\frac{xsinx}{cosx}-\frac{\frac{\pi}{2}}{cosx}\right]_{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left[\frac{xsinx-\frac{\pi}{2}}{cosx}\right]_{\frac{\pi}{2}}=\frac{0}{0}$$

$$=\left[\frac{sinx+xcosx}{-sinx}\right]_{\frac{\pi}{2}}=-1,$$

V. 不定形式 0^0, ∞^0, 1^∞,

$$f(x)=[\varphi(x)]^{\psi(x)}$$

(i) $\varphi(a)=0$, $\psi(a)=0$, 0^0.

(ii) $\varphi(a)=\infty$, $\psi(a)=0$, ∞^0.

(iii) $\varphi(a)=1$, $\psi(a)=\infty$, 1^∞.

扨 $$f(x)=\{\varphi(x)\}^{\psi(x)}=e^{\psi(x)log\varphi(x)}$$

ナルニヨリ

$$\lim_{x=a}f(x)=\lim_{x=a}e^{\psi(x)log\varphi(x)}=e^{\lim_{x=a}\psi(x)log\varphi(x)}$$

故ニ此等ノ場合ニハ $\psi(x)log\varphi(x)$ ハ不定形式 $0\times\infty$ トナルニヨリ III ト同樣ニ其極限値ヲ求ムルヲ得ベシ.

【例】1. $$[x^x]_{x=0}=0^0=[e^{xlogx}]_{x=0}$$

$$[xlogx]_{x=0}=\left[\frac{logx}{\frac{1}{x}}\right]_0=\frac{\infty}{\infty}$$

$$=\left[\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right]_0=0 \qquad \text{(公式 6,7)}$$

$\therefore$ $$[x^x]_{x=0}=e^0=1.$$

【例】2. $$\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{sinx}\right]_{x=0}=\infty^0=[e^{-sinxlogx}]_0$$

$$[sinxlogx]_{x=0}=\left[\frac{sinx}{x}\cdot xlogx\right]_{x=0}=0 \qquad \text{(前題)}.$$

$\therefore$ $$\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{sinx}\right]_{x=0}=e^0=1.$$

【例】3. $$\left[(2-x)^{tan\frac{\pi x}{2}}\right]_{x=1}=1^\infty=\left[e^{tan\frac{\pi x}{2}log(2-x)}\right]_{x=1}$$

$$\left[tan\frac{\pi x}{2}log(2-x)\right]_{x=1}=\infty\times0=\left[\frac{log(2-x)}{cot\frac{\pi x}{2}}\right]_{x=1}=\frac{0}{0}$$

$$=\left[\frac{-\frac{1}{2-x}}{-\frac{\pi}{2}cosec^2\frac{\pi x}{2}}\right]_{x=1} \qquad \text{(公式 7,12)}$$

$$=\frac{2}{\pi}$$

$$\therefore \qquad \left[(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}\right]_{x=1}=e^{\frac{2}{\pi}}$$

53. 不定形式ヲ取ル微係數ノ値

若シ　$f(x,y)=0$

ナルトキハ　§ 36　ニヨリ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

故ニ若シ　$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=a}=0$ $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x=a}=0$　ナルトキハ　$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$　ハ

$\frac{0}{0}$ ナル不定形式ヲ取ル．故ニ前 § ニヨリ

$$\lim_{x=a}\frac{dy}{dx}=-\left[\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}\right]_{x=a}$$

然ルニ　§ 35　ニヨリ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_a=-\left[\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}}\right]_a$$

依テ　$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_a\left(\frac{dy}{dx}\right)_a^2+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_a\left(\frac{dy}{dx}\right)_a+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_a=0.$$

ニヨリテ　$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$　ノ二値ヲ得ベシ．

若シ又　$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=a}=0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x=a}=0$　ナル外ニ

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{x=a}=0,\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_{x=a}=0,\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{x=a}=0$$

ナルトキハ上ノ方法ニヨリテ見出セル $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$ ハ又 $\frac{0}{0}$ ノ形トナル故ニ又前 § ニヨリ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_a=-\left[\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right)}\right]_{x=a}$$

然ルニ　§ 35　ヨリ直ニ次ノ式ヲ導クヲ得

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+2\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\frac{dy}{dx}$$
$$+\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2},$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}+2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\frac{dy}{dx}$$
$$+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{d^2 y}{dx^2}.$$

故ニ　$\frac{d^2 y}{\partial x^2}$ ハ $x=a$ ニ於テ無限大ナラズト假定スルトキハ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=-\left[\frac{\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+2\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}+2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right]_{x=a}$$

依テ
$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0\left(\frac{dy}{dx}\right)_0^3+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right)_0\left(\frac{dy}{dx}\right)_0^2$$
$$+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right)_0\left(\frac{dy}{dx}\right)_0+\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0=0$$

ヨリ $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_0$ ノ三ツノ値ヲ得ベシ.

〔例〕1. $f(x,y)=y^4+2a^2y^2-3a^2xy+a^2x^2=0.$

ニ於テ $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=0}$ ヲ求ム.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-3a^2y+2a^2x \qquad \text{(公式 6)}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=4y^3+4a^2y-3a^2x. \qquad (\;,,\;)$$

$x=0$ ノトキハ $y=0$ ナルニヨリ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\left(\frac{3a^2y-2a^2x}{4y^3+4a^2y-3a^2x}\right)_{x=0}=\frac{0}{0}$$
$$=\left[\frac{3a^2\dfrac{dy}{dx}-2a^2}{4(3y^2+a^2)\dfrac{dy}{dx}-3a^2}\right]_{x=0}=\left[\frac{3a^2\dfrac{dy}{dx}-2a^2}{4a^2\dfrac{dy}{dx}-3a^2}\right]_0$$

$$\therefore \qquad 2\left(\frac{dy}{dx}\right)_0^2-3\left(\frac{dy}{dx}\right)_0+1=0$$
$$\left\{2\left(\frac{dy}{dx}\right)_0-1\right\}\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)_0-1\right\}=0$$

故ニ $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_0=\dfrac{1}{2}$,

及 $=1.$

〔例〕2. $f(x,y)=x^4+ax^2y-by^3$, $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=0}$ ヲ求ム.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3+2axy \qquad \text{(公式 6)}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=ax^2-3by^2 \qquad (\;,,\;)$$

$$\therefore \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\left[\frac{4x^3+2axy}{3by^2-ax^2}\right]_0=\frac{0}{0}\ (\because\ x=0\ \text{ノトキ}\ y=0).$$
$$=\left[\frac{12x^2+2ay+2ax\dfrac{dy}{dx}}{6by\dfrac{dy}{dx}-2ax}\right]_0=\frac{0}{0}$$
$$=\left[\frac{24x+4a\dfrac{dy}{dx}+2ax\dfrac{d^2y}{dx^2}}{6b\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-2a+6by\dfrac{d^2y}{dx^2}}\right]_0$$
$$=\frac{2a\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_0}{3b\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_0^2-a}$$

$$\therefore \quad b\left(\frac{dy}{dx}\right)_0^3-a\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=0$$

$$\therefore \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0=0 \quad \text{或ハ} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$$

〔例〕3. $y^4-y^2+3xy-2x^2=0$, $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_0$ ヲ求ム

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\left(\frac{4x-3y}{4y^3-2y+3x}\right)_0=\frac{0}{0}\quad \binom{x=0}{y=0}.$$
$$=\left(\frac{4-3\dfrac{dy}{dx}}{(12y^2-2)\dfrac{dy}{dx}+3}\right)_0=\frac{4-3\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_0}{-2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_0+3}$$

$$\therefore \qquad 2\left(\frac{dy}{dx}\right)_0^2-6\left(\frac{dy}{dx}\right)_0+4=0.$$

$$\therefore \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0=1 \quad \text{或ハ} \quad =2.$$

外＝ $x=0$ ノ時ハ $y=\pm1$ ナル値アリ.

$$\therefore \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\frac{\mp3}{\pm4\mp2}=\pm\frac{3}{2}$$

ナル不定形ヲ取ラザルモノアリ.

〔例〕4. $y^3-3axy+x^3=0.$ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ ヲ求ム,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\left[\frac{3ay-x^2}{y^2-3ax}\right]_0=\frac{0}{0}\ ,\ (x=0\ ,\ y=0).$$

$$=\left[\frac{3a\frac{dy}{dx}-2x}{2y\frac{dy}{dx}-3a}\right]_0=\frac{3a\left(\frac{dy}{dx}\right)_0}{-3a}=-\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$$

$$\therefore \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0=0.$$

然ル＝上ノ式ハ x 及 y ヲ交代スルモ少シノ變化ナシ. 故＝全ク同様＝シテ $\left(\frac{dx}{dy}\right)_0=0$ 即 $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\infty$

ナルコトヲ知ルベシ.

54. 不定形式ノ例題

1. $$\left[\frac{log(tanpx)}{log(tanx)}\right]_{x=0}=\frac{\infty}{\infty}=\left[\frac{\frac{1}{tanpx}psec^2px}{\frac{1}{tanx}sec^2x}\right]_0$$

$$=\left[\frac{pcos^2x.\,tanx}{cos^2px.\,tanpx}\right]_0=\left[\frac{sin2x}{2x}\,\frac{2px}{sin2px}\right]_0=1.$$

2. $[x^nlogx]_{x=0}$

$n>0$ $$[x^nlogx]_0=0\times-\infty=\left[\frac{log^x}{x^{-n}}\right]_0=\frac{-\infty}{\infty}$$

$$=\left[\frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}}\right]_0=\left[-\frac{1}{n}x^n\right]_0=0.$$

$n<0$ $$[x^nlogx]_0=\infty\times-\infty=-\infty.$$

3. $[x^{x^n}]_{x=0}=[e^{x^nlogx}]_0$

故＝前題＝ヨリ

$n>0$ ノ時ハ $[x^{x^n}]_0=e^0=1,$

$n<0$ ノ時ハ $\qquad =e^{-\infty}=0.$

4. $$\left[\frac{2sin^2x+sinx-1}{2sin^2x-3sinx+1}\right]_{x=\frac{\pi}{6}}=\frac{0}{0}$$

$sinx=y$ トセバ, $x=\frac{\pi}{6}$ ハ $y=\frac{1}{2}$ ＝ナル

上式 $$=\left[\frac{2y^2+y-1}{2y^2-3y+1}\right]_{y=\frac{1}{2}}=\frac{0}{0}$$

$$=\left[\frac{4y+1}{4y-3}\right]_{y=\frac{1}{2}}=-3.$$

5. $[(cosax)^{cosec^2bx}]_{x=0}=1^\infty=[e^{cosec^2bxlog(cosax)}]_0.$

$$[cosec^2bxlog(cosax)]_0=\infty\times0=\left[\frac{log(cosax)}{sin^2bx}\right]_0=\frac{0}{0}$$

$$=\left[\frac{\frac{-asinax}{cosax}}{2bsinbx.cosbx}\right]_0 \qquad \text{(公式5,7,9,10)}$$

$$=\left[-\frac{a}{b}\frac{\sin ax}{\cos ax.\cos bx.\sin bx}\right]_0$$

$$=-\left[\frac{a^2}{2b^2\cos ax.\cos bx}\frac{\frac{\sin ax}{ax}}{\frac{\sin bx}{bx}}\right]_0$$

$$=-\frac{a^2}{2b^2}$$

$\therefore$ $$\left[(\cos ax)^{\operatorname{cosec}^2 bx}\right]_{x=0}=e^{-\frac{a^2}{2b^2}}.$$

6. $$\left[\frac{\tan(a+x)-\tan(a-x)}{\tan^{-1}(a+x)-\tan^{-1}(a-x)}\right]_{x=0}=\frac{0}{0}$$

$$=\left[\frac{\sec^2(a+x)+\sec^2(a-x)}{\frac{1}{1+(a+x)^2}+\frac{1}{1+(a-x)^2}}\right]=\frac{1+a^2}{\cos^2 a}$$

7. $$\left[\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}\right]_0=\frac{0}{0}$$

$$=\left[\frac{e^x-\cos x e^{\sin x}}{1-\cos x}\right]_0=1.$$

8. $$\left[x-x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]_{x=\infty}=\infty-\infty\times 0$$

$x=\frac{1}{y}$ ト置ケバ $x=\infty$ ハ $y=0$ ニナル

$$\left[x-x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]_\infty=\left[\frac{1}{y}-\frac{\log(1+y)}{y^2}\right]_{y=0}$$

$$=\left[\frac{y-\log(1+y)}{y^2}\right]_0$$

$$=\left[\frac{1-\frac{1}{1+y}}{2y}\right]_0=\left[\frac{1}{2(1+y)}\right]_0=\frac{1}{2}.$$

9. $$u\sqrt{cx}=\tan^{-1}\frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{c}}+\log\left\{\frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{c}}+\sqrt{1+\frac{a^2x}{c}}\right\}$$ ニ於テ $x=0$, ノトキニ u 及 $\frac{du}{dx}$ ノ値ヲ求ム

$\frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{c}}=y,\ \frac{cu}{a}=v$ ト置ケバ

$$vy=\tan^{-1}y+\log(y+\sqrt{1+y^2})$$

$\therefore$ $$v_0=\left[\frac{\tan^{-1}y+\log(y+\sqrt{1+y^2})}{y}\right]_0=\frac{0}{0}$$

$$=\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}=2$$

$\therefore$ $$u_0=\frac{2a}{c}.$$

又 $$y\frac{dv}{dy}=\frac{c}{a}y\frac{du}{dx}\frac{dx}{dy}=\frac{c}{a}y\frac{du}{dx}\frac{2cy}{a^2}$$

$$=-v+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$\therefore$ $$\frac{2c^2}{a^3}\frac{du}{dx}y^3=-\tan^{-1}y-\log(y+\sqrt{1+y^2})$$

$$+\frac{y}{1+y^2}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

コレヨリ $\frac{du}{dx}$ ヲ求ムルトキハ $\frac{0}{0}$ ノ計算法ニ從テ易ク

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_0=-\frac{a^3}{2c^2}$$ ヲ得ベシ

55. 無限小數

變數或ハ函數ハ種々ノ値ヲ經テ 0 ニ限リナク近ヅクトキハ此變數

或ハ函數ハ無限小 (*Infinitesimal*) トナルト云フ.

函數 $f(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ連續ナリトス. 今 x ガ a ニ限リナク近ヅクトキニ $f(x)$ ハ 0 ニ限リナク近ヅクトスルトキハ其 0 ニ近ヅキ方ハ $f(x)$ ノ形ニヨリテ差アリ. 例バ

$$f(x)=x^2,$$

及 $$f(x)=x^3.$$

ニ就テ考フルニ

x	1	0.8	0.5	0.2	0.08	0.05
x^2	1	0.64	0.25	0.04	0.0064	0.0025
x^3	1	0.512	0.125	0.008	0.000512	0.000125

x	0.02	0.005	0.0005	…………
x^2	0.004	0.000025	0.00000025	…………
x^3	0.000008	0.000000125	0.000000000125	…………

斯クノ如ク x^2 ト x^3 トハ共ニ x ガ 0 ニ近ヅクニ從テ漸々 0 ニ近ヅクト雖モ x^3 ハ x^2 ヨリモ遙ニ急ニ減少シテ 0 ニ近ヅクヲ知ルベシ. 斯ルコトヲ x^3 ハ x^2 ヨリモ高次ノ無限小ナリト云フ. (無限大ニ就テモ同様ノコトヲ考フルヲ得).

$\varphi(x)$, $\psi(x)$ ナル二函數ノ共通領域内ノ $x=a$ ニ於テ

$$\lim_{x=a}\varphi(x)=0,\quad \lim_{x=a}\psi(x)=0 \quad ナルトキ$$

若シ $\lim\limits_{x=a}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ ガ有限ナルトキハ $x=a$ ニ於テ $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ ハ同次ノ無限小ト云フ

若シ $$\lim_{x=a}\frac{\varphi(x)}{\{\psi(x)\}^n} \quad ガ有限ニシテ$$

且ツ $$\lim_{x=a}\frac{\varphi(x)}{\{\psi(x)\}^p}=0,\qquad p<n,$$

$$\lim_{x=a}\frac{\varphi(x)}{\{\psi(x)\}^q}=\infty,\qquad q>n.$$

ナルトキハ $x=a$ ニ於テ $\varphi(x)$ ハ $\psi(x)$ ニ對シ n 次無限小ナリト云フ.

特ニ $$\lim_{x=0}f(x)=0 \qquad ニシテ$$

$$\lim_{x=0}\frac{f(x)}{x^n} \quad ガ有限ニシテ$$

$$\lim_{x=0}\frac{f(x)}{x^{n-1}}=0$$

$$\lim_{x=0}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\infty$$

ナルトキハ $f(x)$ ハ x ニ對シテ n 次ノ無限小ナリト云ヒ或ハ x ハ第一次ノ無限小ナルトキ $f(x)$ ハ第 n 次ノ無限小ナリト云フ.

〔例〕 x ガ第一次ノ無限小ナルトキ次ノ函數ハ第何次ノ無限小ナルカ.

1. $$f(x)=\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{a}$$

$$\lim_{x=0}\frac{\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{a}}{x^n}=\frac{1}{3}\lim\frac{1}{nx^{n-1}(x+a)^{\frac{2}{3}}}$$

$\therefore$ $n=1$ ノトキ此値有限ニシテ $n<1$ ノトキ 0 $n>1$ ノトキ ∞ ナリ故ニ $f(x)$ ハ第一次ノ無限小ナリ.

2. $$f(x)=1-\cos x$$

$$\lim_{x=0}\frac{1-\cos x}{x^n}=\frac{0}{0}=\left[\frac{\sin x}{nx^{n-1}}\right]_0=\frac{0}{0}=\left[\frac{\cos x}{n(n-1)x^{n-2}}\right]_0$$

之レ $n=2$ ノトキ有限ナリ故ニ $1-\cos x$ ハ第 2 次ノ無限小ナリ

3. $\sin x - \tan x$

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x - \tan x}{x^n} = \frac{0}{0} = \left[\frac{\cos x - \sec^2 x}{n x^{n-1}}\right]_0 = \frac{}{0}$$

(公式 6, 10, 11)

$$= \left[\frac{-\sin x - 2\sec^2 x \tan x}{n(n-1)x^{n-2}}\right]_0 = \frac{0}{0}$$ (公式 6,9,11,13)

$$= \left[\frac{-\cos x - 2\sec^2 x . \tan^2 x - 2\sec^3 x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}\right]_0$$ (〃)

$n=3$ ノトキニ有限ナリ. ∴ $\sin x - \tan x$ ハ第三次ノ無限小ナリ.

56. てーろるノ定理ノ擴張

§44 ニ於テハ一自變數ノ函數ニ關スルてーろるノ定理ヲ述ベタリ本節ニ於テハ之ヲ擴張シテ二以上ノ自變數ノ函數ニ及バントス.

$f(x,y)$ 及其諸導函數ハ x 及 y ナル二自變數ノ連續函數トス.

今 $\quad x = x_1 t, \quad y = y_1 t,$

$\quad h = x_1 \triangle t, \quad k = y_1 \triangle t.$

ト置クトキハ

$$f(x,y) = f(x_1 t, y_1 t),$$

$$f(x+h, y+k) = f(x_1(t+\triangle t), y_1(t+\triangle t)).$$

ナルニヨリ今 f ナル函數ヲ t ノ函數ト見做ストキハ

$$f(x,y) = \varphi(t)$$

$$f(x+h, y+k) = \varphi(t+\triangle t).$$

カク考フルトキハ §44 ニヨリ

$$\phi(t+\triangle t) = \varphi(t) + \frac{\varphi'(t)}{1!}\triangle t + \frac{\varphi''(t)}{2!}(\triangle t)^2 + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{\varphi^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(\triangle t)^{n-1} + R_n$$

$$R_n = \frac{(\triangle t)^n}{n!}\varphi^{(n)}(t+\theta\triangle t), \qquad 0<\theta<1,$$

或ハ
$$= \frac{(\triangle t)^n (1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n)}(t+\theta'\triangle t), \quad 0<\theta'<1.$$

然ルニ §35 ニヨリテ

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},$$

$$= x_1\frac{\partial f}{\partial x} + y_1\frac{\partial f}{\partial y}.$$

同様ニ
$$\varphi''(t) = x_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2x_1 y_1\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$= \left(x_1\frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f.$$

....

$$\varphi^{(n)}(t) = \left(x_1\frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f.$$

故ニ
$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y) + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} f(x,y) + R_n$$

此ニ
$$R_n = \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x+\theta h, y+\theta k), \qquad 0<\theta<1.$$

或ハ
$$= \frac{(1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x+\theta' h, y+\theta' k), \quad 0<\theta'<1,$$

此＝ $$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f(x,y)=h^p\frac{\partial^p f}{\partial x^p}+ph^{p-1}k\frac{\partial^p f}{\partial x^{p-1}\partial y}$$

$$+\frac{p(p-1)}{2!}h^{p-2}k^2\frac{\partial^p f}{\partial x^{p-2}\partial y^2}+\cdots+k^p\frac{\partial^p f}{\partial y^p},$$

ナル便宜上ノ記法ナリ.

是レてーろるノ定理ノ擴張ナリ

全ク同様＝三自變數ノ函數＝付テモ下ノ式ヲ出スヲ得.

$$f(x+h,y+k,z+l)$$

$$=\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{p!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^p f(x,y,z)+R_n$$

此＝ $$R_n=\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(x+\theta h,y+\theta k,z+\theta l),$$

$$0<\theta<1.$$

$$=\frac{(1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^n$$

$$f(x+\theta' h,y+\theta' k,z+\theta' l),\qquad 0<\theta'<1.$$

てーろるノ定理ノ擴張＝於テ $x=0,\ y=0$ ト置キ後＝ h,k ノ代リ＝ x 及 y ト置ケバ

$$f(x,y)=\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{p!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f(0,0)+R_n$$

$$R_n=\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(\theta x,\theta y\quad,\qquad 0<\theta<1.$$

或ハ $$=\frac{(1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(\theta' x,\theta' y),$$

$$0<\theta'<1.$$

トナル之レまくろーらんノ定理ノ擴張ナリ.

同様＝

$$f(x,y,z)=\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{p!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{xy}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^p f(0,0,0)+R_n$$

$$R_n=\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(\theta x,\theta y,\theta z),$$

$$0<\theta<1.$$

$$=\frac{(1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(\theta' x,\theta' y,\theta' z)$$

$$0<\theta'<1.$$

四以上ノ自變數ノ函數＝付テモ同様ノ定理ヲ得ベシ.

若シ $\lim_{n=\infty} R_n=0$ ナルトキハ

$$f(x+h,y+k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y),$$

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0,0),$$

$$f(x+h,y+k,z+l)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(x,y,z),$$

$$f(x,y,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(0,0,0)$$

ナル展開式ヲ得ルコト §45 ＝於ケルガ如シ.

問 題 4.

てーろるノ定理＝ヨリ下ノ函數ヲ展開セヨ,

1. $\sin^2 x=\frac{2}{2!}x^4-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6+\cdots\cdots\cdots.$

2. $\cos^3 x=1-\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{8}x^4-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{3^{2n}+3}{4(2n)!}x^{2n}+\cdots\cdots$

次ノ展開ニ於ケル係數ヲ計算セヨ.

3. $\log(1+e^x)=\log 2+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^3}-\frac{x^4}{2^4 4!}+\cdots\cdots$

4. $e^{x\sin x}=1+x^2+\frac{x^4}{3}+\cdots\cdots$

5. $\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^n=1+\frac{n}{2!}x^2+\frac{3n^2-2n}{4!}x^4+\cdots\cdots$

6. $e^x\sec x=1+x+x^2+\frac{2x^3}{3}+\cdots\cdots,$

7. $\log(1+\sin x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\cdots\cdots,$

8. $e^x\sin x=x+x^2+\frac{2x^3}{3!}-\frac{2^2x^5}{5!}-\frac{2^3x^6}{6!}-\frac{2^3x^7}{7!}+\cdots\cdots$

9. $e^x\cos x=1+x-\frac{2x^3}{3!}-\frac{2^2x^4}{4!}-\frac{2^2x^5}{5!}+\frac{2^3x^7}{7!}+\cdots\cdots,$

10. $\sec x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{5x^4}{4!}+\frac{61x^6}{6!}+\cdots\cdots,$

11 $\log\sec x=\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{45}+\cdots\cdots,$

12. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n=1-\frac{n}{3!}x^2+\frac{n(5n-2)}{3\cdot 5!}x^4\cdots\cdots,$

13. $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+\cdots\cdots,$

14. $\frac{x}{\sin x}=1+\frac{x^2}{3!}+\frac{14x^4}{6!}+\cdots\cdots$

15. $(x+\sqrt{1+x^2})^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n^2}{2!}x^2$

$$+\frac{n(n^2-1^2)}{3!}x^3+\frac{n(n^2-2^2)}{4!}x^4+\cdots\cdots$$

次ノ不定式ノ極限値ヲ求ム.

16. $x=0$ ノ時 $\frac{a^x-b^x}{x}=\log\frac{a}{b},$

17. $x=0$ $\frac{\sin^2 x}{x-\frac{3}{2}\sin 2x}=-\frac{3}{2},$

18. $x=1$ $\frac{1}{\log x}-\frac{x}{\log x}=-1,$

19. $x=0$ $\frac{(x-2)e^x+x+2}{(e^x-1)^3}=\frac{1}{6},$

20. $x=1$ $\frac{x\sqrt{3x-2x^4}-x\sqrt[5]{x}}{1-x^{\frac{2}{3}}}=\frac{81}{20},$

21. $x=1$ $\frac{x^{\frac{3}{2}}-1+(x-1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}-(x-1)}=-\frac{3}{2},$

22. $x=b$ $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{b}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{x^2-b^2}}=\frac{1}{\sqrt{2b}},$

23. $x=\frac{\pi}{2}$ $\sqrt{\frac{2+\cos 2x-\sin x}{x\sin 2x+x\cos x}}-\left(\frac{\pi-2x}{2\sin 2x}\right)^2=-\frac{1}{4},$

24. $x=0$ $\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{3}},$

25. $x=0$ $(\cos ax)^{\frac{b^2}{x^2}}=e^{-\frac{a^2b^2}{2}},$

26. $x=1$ $\frac{(\log x)^{\frac{2}{3}}+(1-x^2)^{\frac{3}{4}}}{\sin^{\frac{2}{3}}(x-1)}=1,$

27. $x=a$, $\frac{a^n-x^n}{\log a^n-\log x^n}=a^n$

28. $x=\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\sin^2x+\sin x-1}{2\sin^2x-3\sin x+1}=-3,$

29. $x=a$, $\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}}=e^{\frac{2}{\pi}},$

30. $x=1$, $\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}=\frac{n(n+1)}{2}$

31. $x=0$, $\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=1.$

次ノ方程式ニ於テ $x=0$ ノトキ $\frac{dy}{dx}$ ノ値ヲ求ム,

32. $y^4-96a^2y^2+100a^2x^2-x^4=0,$ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\pm\frac{5}{\sqrt{24}},$

33. $(x^2+y^2)^2-6axy^2=ax^2(2x-a)$, ∞

34. $x^4+2ax^2y-ay^3=0$ ニ於テ $x=y=0$ ノトキハ $\frac{dy}{dx}=0$ 或ハ $\pm\sqrt{2}$ ナルコトヲ證セ.

35. $x^4-ay^3+2axy^2+3ax^2y=0$ ニ於テ $x=0, y=0$ ノトキハ $\frac{dy}{dx}=0$ 或ハ -1 或ハ 3 ナルコトヲ證セ,

36. $x^2y^2=(a^2-y^2)(b+y)^2$ ニ於テ $x=0, y=-b$ ノトキニ $\frac{dy}{dx}=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$ ナルコトヲ證セ.

37. $x^5+y^5-2a^2x^2y=0$ ニ於テ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=0$ 或ハ ∞ ナルコトヲ證セ.

第二章

極大及極小値

57. 一自變數ノ函數ノ極大極小

函數 $f(x)$ ノ領域内ニ於ケル x ノ或値ヲ a トス. 今任意ニ定メタル微小有限數 ω ヨリモ小ナル正數 h ヲ取リ $x=a$ 及 $x=a\pm h$ ナル二値ニ對スル $f(x)$ ノ値ヲ比較シテ若シカヽル h ノ總テノ値ニ對シテ

$$f(a+h)<f(a),$$

且 $$f(a-h)<f(a), \qquad h<\omega$$

ナルトキハ $f(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ $f(a)$ ナル極大値 (*Maximum*) ヲ有スト云ヒ, 若シ

$$f(a+h)>f(a),$$

且 $$f(a-h)>f(a), \qquad h<\omega$$

ナルトキハ $f(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ $f(a)$ ナル極小値 (*Minimum*) ヲ有スト云フ, 若シ

$$f(a+h)<f(a)<f(a-h),$$

或ハ $$f(a+h)>f(a)>f(a-h),$$

ナルトキハ $f(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ極大或ハ極小ナラズト云フ.

是ヨリ h ハ $|h|<\omega$ ナル正或ハ負ノ或ル數ヲ表ハストスベシ. 若シ $f(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ第二次微係數ヲ有スルトキハ §44 てーらるノ定理ニ從テ

$$f(a+h)-f(a)=h\left\{f'(a)+\frac{h}{2}f''(a+\theta h)\right\},\qquad 0<\theta<1.$$

若シ $f'(a)$ ガ 0 ナラザルトキハ h ヲ充分ニ小サク

$$|f'(a)|>\left|\frac{h}{2}f''(a+\theta h)\right|$$

ナル樣ニ取ルトキハ $f(a+h)-f(a)$ ノ値ハ h ト共ニ其符號ヲ變ズベシ. 故ニ h ノ正負ニ從テ $f(a+h)-f(a)$ モ亦符號ヲ變ズ.

例バ若シ　$f(a+|h|)>f(a)$.

ナラバ　$f(a-|h|)<f(a)$.

故ニ若シ $f'(a)$ ガ 0 ナラザルトキハ $f(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ極大或ハ極小ニアラズ. 依テ $f(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ極大或ハ極小ナル爲メニハ

$$\boxed{f'(a)=0}$$

ハ必要條件ナリ. (併レ𪜈之レ充分ナリトハ云ハズ).

次ニ若シ $f'(a)=0$ ナルトキハ §44 ニヨリ

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^2}{2}\left\{f''(a)+\frac{h}{3}f'''(a+\theta_1 h)\right\}$$

$$=\frac{h^2}{2}f''(a)\left\{1+\frac{h}{3}\frac{f'''(a+\theta_1 h)}{f''(a)}\right\},\quad 0<\theta_1<1.$$

ナルニヨリ若シ $f''(a)$ ハ 0 ナラザルトキハ

$$|f''(a)|>\left|\frac{h}{3}f'''(a+\theta h)\right|$$

ナル樣ニ h ヲ取レバ $f(a+h)-f(a)$ ハ h ノ正負ニヨリテ其符號ヲ變ズルコトナク, 却テカク取レル h ニ對シテ其符號ハ $f''(a)$ ノ符號ト全ク同一トナル. 故ニ若シ.

$f''(a)>0$ ノトキハ

$$f(a+|h|)>f(a),$$

且

$$f(a-|h|)>f(a)$$

トナル. 故ニコノトキハ $f(a)$ ハ極小値ナリ. 次ニ若シ

$f''(a)<0$ ノトキハ

$$f(a+|h|)<f(a),$$

且

$$f(a-|h|)<f(a)$$

トナル. 故ニ此ノトキハ $f(a)$ ハ極大値ナリ.

若シ $f'(a)=0,\ f''(a)=0$ ナルトキハ

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^3}{3!}\left\{f'''(a)+\frac{h}{4}f^{\mathrm{IV}}(a+\theta_2 h)\right\},\quad 0<\theta_2<1.$$

ナルニヨリ若シ $f'''(a)$ ガ 0 ナラザルトキハ h ヲ適當ニ小サク取ルトキハ $f(a+h)-f(a)$ ノ値ハ h ト共ニ符號ヲ變ズルガ故ニ前ニ論ジタルト同樣ニ若シ $f'(a), f''(a)$ ガ共ニ 0 ニシテ $f'''(a)$ ガ 0 ナラザルトキハ $f(a)$ ハ極大或ハ極小値ニアラズ. 故ニ此場合ニ若シ $f(a)$ ガ極大或ハ極小ナル爲メニハ $f'''(a)$ ガ 0 ナラザルベカラズ. 若シ $f'(a), f''(a), f'''(a)$ ガ 0 ニシテ $f^{\mathrm{IV}}(a)$ ガ 0 ナラザルトキハ $f^{\mathrm{IV}}(a)$ ノ正或ハ負ニヨリテ $f(a)$ ハ極小或ハ極大ナルコト前ト全ク同樣ニ論ズルコトヲ得.

一般ニ

$$f(a+h)-f(a)=\sum_{p=1}^{n}\frac{h^p}{p!}f^{(p)}(a)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h),\quad 0<\theta<1$$

ナルニヨリ, 若シ

$$f'(a)=0,\ f''(a)=0,\cdots\cdots f^{(n)}(a)=0$$

ニシテ　$f^{(n+1)}(a)\neq 0$　ナルトキハ

n ハ偶数ナルトキニハ $f(a)$ ハ極大或ハ極小ニアラズ. n ハ奇数ニシテ且

$$f^{(n+1)}(a)>0 \text{ ナル時ハ } f(a) \text{ ハ極小}$$

$$\text{〃}\quad <0 \cdots\cdots\cdots\cdots f(a) \text{ ハ極大}$$

ナリ

故ニ $f(x)$ ノ極大或ハ極小値ヲ求メントセバ

$$f'(x)=0$$

ト置ケル方程式ヨリ x ノ値ヲ定メ之ヲ $f''(x)$ ニ入レテ若シ此ハ正ナルトキハ其値ニ於テ $f(x)$ ハ極小, 若シ負ナルトキハ其値ニ於テ極大ナリ. 若シ此値ニ於テ $f''(x)$ ガ 0 ナルトキハ更ニ $f'''(x)$ ニ入レテ若シ之レ 0 ナラザルトキハ其 x ノ値ニ於テ極大極小ニアラズ若シ此レ 0 ナルトキハ更ニ $f^{\mathrm{IV}}(x)$ ニ入レテ其正負ニヨリテ $f(x)$ ノ極小或ハ極大ヲ定ム. 若シ $f^{\mathrm{IV}}(x)$ ガ此 x ノ値ニ於テ 0 ナルトキハ更ニ第五第六微係数ヲ検スルノ必要アリ. カクシテ初メテ0ナラザル微係数ハ偶数次ナル時ニ限リ其符號ニヨリテ極大或ハ極小ハ定マル.

【例】1.　$y=x(x+a)^2(a-x)^3$,　$a>0$.

$$y'=(a+x)^2(a-x)^3+2x(a+x)(a-x)^3$$
$$-3x(a+x)^2(a-x)^2.$$
$$=(a+x)(a-x)^2(a-3x)(a+2x)$$
$$y''=(a-x)^2(a-3x)(a+2x)$$
$$-2(a+x)(a-3x)(a+2x)(a-x)$$

$$-3(a+x)(a-x)^2(a+2x)+2(a+x)(a-x)^2(a-3x).$$
$$=2(a-x)(a+2x)^2(3x-2a)+2(a+x)(a-x)^2(a-3x).$$

$y'=0$　トオケバ

$$x=-a,\ \frac{a}{3},\ -\frac{a}{2},\ a$$

(i)　$x=-a$　　$y''<0$　$\therefore$　極大　$y=0$

(ii)　$x=\dfrac{a}{3}$　　$y''<0$　　極大　$y=\dfrac{128}{729}a^6$

(iii)　$x=\dfrac{a}{2}$　　$y''>0$　　極小　$y=-\dfrac{27}{64}a^6$

(iv)　$x=a$　　$y''=0$ ノ時ハ y''' ヲ検スル要アリ.

$$y'''=-2(a+2x)^2(3x-2a)+(x=a \text{ ノ時 } 0 \text{ トナル項}).$$

$\therefore$ $x=a$ ノ時　$y'''\neq 0$　　$\therefore$　コレ極大極小ナラズ.

【例】2.　定點 $P(a,b)$ ヲ過ギ其両端ガ x,y 軸ニ終ル直線ノ長サノ極小ヲ求ム.

$\angle PAO=\theta$ トセバ

$$l=AB=\frac{a}{\cos\theta}+\frac{b}{\sin\theta}$$

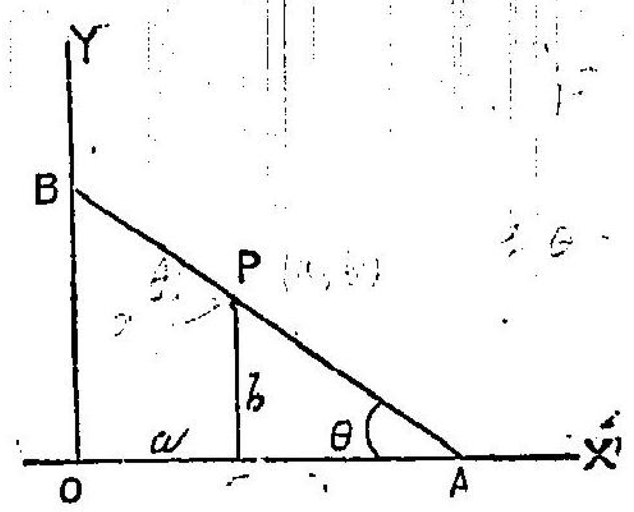
$$\frac{dl}{d\theta}=\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}-\frac{b\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$\dfrac{dl}{d\theta}=0$　ト置ケバ

$$\tan\theta=\sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

$$\therefore\quad l_{小}=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

第十六圖



斯ノ如キ問題ハ其性質上極大アルコトナク最小ハ直チニ其極小トナ

ル. 然レモ勿論$\frac{d^2l}{d\theta^2}$ヲ求メテ之ヲ吟味スルモ同一ノ結果ヲ得ベシ.

【例】3.　$x=0$ ナルキ $y=x^2+x\sin x+4\cos x$. ハ極小ナルコトヲ證セ.

$$y'=2x+x\cos x-3\sin x \qquad \text{(公式 6,9,10)}$$

∴　$x=0$ ノキ $y'=0$.

$$y''=2-2\cos x-x\sin x \qquad \therefore\ y_0''=0,$$

$$y'''=\sin x-x\cos x \qquad y_0'''=0,$$

$$y^{\mathrm{IV}}=x\sin x \qquad y_0^{\mathrm{IV}}=0,$$

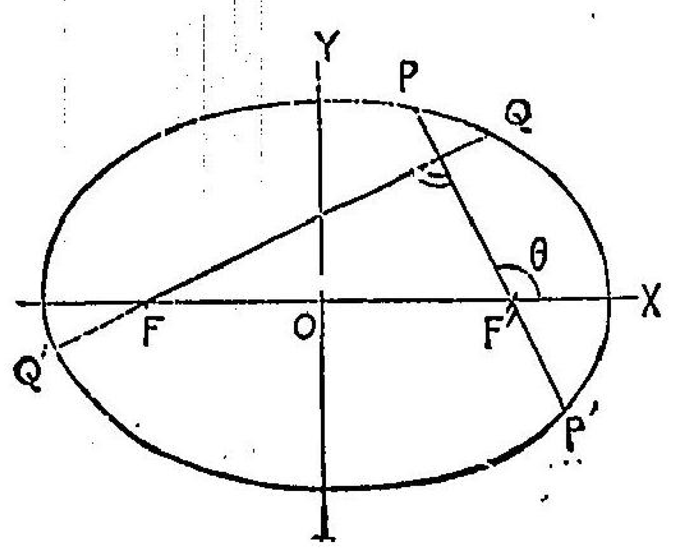
$$y^{\mathrm{V}}=\sin x+x\cos x \qquad y^{\mathrm{V}}=0,$$

$$y^{\mathrm{VI}}=2\cos x-x\sin x \qquad y^{\mathrm{VI}}=2>0.$$

∴　$y=0$, $y=4$ ハ其極小値ナリ.

【例】4.　楕圓ノ二焦點 F,F' ヲ通ジテ互ニ垂直ナル弦 PP', QQ' ヲ引クキ其弦ノ和ノ極大極小ヲ求ム.

第　十　七　圖



楕圓ノ半主軸ヲ a,b トシ其ノ離心率 (*Eccentricity*) ヲ e トセバ

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

$$F'P=\frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\theta},$$

$$F'P'=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta},$$

$$\therefore\quad PP'=\frac{2a(1-e^2)}{1-e^2\cos^2\theta}\ *$$

* *Salmon's Conic Section* p. 185. ヲ見ヨ

θ ヲ $\frac{\pi}{2}-\theta$ ニ變ズレバ

$$QQ'=\frac{2a(1-e^2)}{1-e^2\sin^2\theta}$$

$$\therefore\quad u=PP'+QQ'=\frac{2a(1-e^2)(2-e^2)}{(1-e^2\sin^2\theta)(1-e^2\cos^2\theta)}$$

今ノ　$z=(1-e^2\sin^2\theta)(1-e^2\cos^2\theta)$

ト置キ z ノ極大極小ヲ求ムレバ u ノ分子ハ常數ナルニヨリ所要ノ極小極大ヲ得ラルベシ. 故ニ

$$z=1-e^2+e^4\sin^2\theta\cos^2\theta.$$

$$\frac{dz}{d\theta}=2e^4\sin\theta\cos^3\theta-2e^4\sin^3\theta\cos\theta, \qquad \text{(公式 9,10)}$$

$$=\frac{1}{2}e^4\sin 4\theta.$$

$$\frac{d^2z}{d\theta^2}=2e^4\cos 4\theta.$$

$$\frac{dz}{d\theta}=0:\qquad 4\theta=m\pi.$$

$4\theta=2n\pi$:　$z''=2e^4>0$　∴ z 極小　∴ u 極大.

$4\theta=(2n+1)\pi$:　$z''=-2e^4<0$　z 極大　∴ u 極小.

即 u ノ極大ハ PP' 或ハ QQ' ハ長軸ニ垂直ニシテ

$$u_{大}=2a(2-e^2).$$

又 u ノ極小ハ PP',QQ' ハ長軸ト 45° ニ交リ

$$u_{小}=\frac{8a(1-e^2)}{2-e^2}.$$

トナル

58. 陰函數ノ極大極小

y ハ x ノ陰函數ニシテ

$$f(x,y)=0$$

ナルトキハ §36 ニヨリ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^3}$$

y ガ極大或ハ極小ナルベキ x ノ値ハ §57 ニヨリ

$$\frac{dy}{dx}=0$$

ナルベキニヨリ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ガ有限ナルトキハ

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

ナラザルベカラズ. 故ニ y ノ極大或ハ極小ヲ求ムルニハ

$$f(x,y)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

ナル二方程式ヨリ x 及 y ノ値ヲ求ムベシ. 次ニ此求メタル値ニ對シテノ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ノ符號ヲ檢スベシ. 然ルニ此場合ニハ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$$

トナルニヨリ上ニ求メタル x 及 y ノ値ニ對シテ此分數ノ符號ヲ檢シテ其極大ナルカ極小ナルカヲ知ルヲ得ベシ.

若シ第二次微係數ハ 0 トナルトキハ前 § ト同様ニ第三次以上ノ微係數ヲ檢スベシ.

【例】1. $f(x,y)=x^3-3axy+y^3=0 \qquad a>0.$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3(x^2-ay)\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=3(y^2-ax) \qquad \text{(公式 6)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x.$$

$$\therefore \qquad x^3-3axy+y^3=0.$$

$$x^2-ay=0$$

ヨリ x,y ヲ求ムレバ

$$\text{(i)}\quad \left.\begin{aligned}x&=a\sqrt[3]{2}\\ y&=a\sqrt[3]{4}\end{aligned}\right\}, \qquad \text{(ii)}\quad \left.\begin{aligned}x&=0\\ y&=0\end{aligned}\right\},$$

(i) ノ値ニヨリテハ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{2}{a}<0.$$

∴ 此ニ得タル y ノ値ハ其ノ極大値ナリ.

(ii) ニ依テ與ヘラルヽ x,y ノ値ニテハ $\dfrac{dy}{dx}$ ハ不定トナルニヨリ之ヲ論ズルコト次ノ如シ.

$$x^3-3axy+y^3=0$$

$$\therefore \qquad x^2-ay-(ax-y^2)\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x-2a\frac{dy}{dx}+2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y^2-ax)\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

$$2+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+\left(6y\frac{dy}{dx}-3a\right)\frac{d^2y}{dx^2}+(y^2-ax)\frac{d^3y}{dx^3}=0$$

最後ノ二式ヨリ $x=0, y=0$ ニ於テハ

$$\frac{dy}{dx}=0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{3a}>0,$$

$\therefore$ $y=0$ ハソノ極小値ナリ.

【例】2. $\qquad f(x,y)=y^4+x^4-4xy+2=0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4(x^3-y),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=4(y^3-x),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x^2.$$

$$\therefore \qquad y^4+x^4-4xy+2=0,$$
$$x^3-y=0,$$

ヨリ x,y ヲ求ムレバ

$$\text{(i)}\ \left.\begin{array}{l}x=1\\ y=1\end{array}\right\},\qquad \text{(ii)}\ \left.\begin{array}{l}x=-1\\ y=-1\end{array}\right\},$$

ヲ得. 然レ圧コノ値ニテハ $\dfrac{dy}{dx}$ ハ不定形トナルニヨリ §53 ニヨリ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1=\left[\frac{x^3-y}{x-y^3}\right]_1=\left[\frac{3x^2-\dfrac{dy}{dx}}{1-3y^2\dfrac{dy}{dx}}\right]_1.$$

$$\therefore \qquad 3\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^2-2\left(\frac{dy}{dx}\right)_1+3=0.$$

トナルニヨリカヽル x,y ノ値ニテハ $\dfrac{dy}{dx}$ ハ 0 トナラズ. 故ニ y ノコレ等ノ値ハ極大或ハ極小ニアラズ.

59. 二自變數ノ函數ノ極大極小

x,y ノ函數 z ハ

$$z=f(x,y)$$

ニ依テ表ハサルヽトス. 今 ω ヲ任意ニ定メ得ル小ナル正數トセバ

$$|h|<\omega,\quad |k|<\omega$$

ナル凡テノ h 及 k ノ値ニ對シ

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)<0$$

ナルトキハ z ハ $x=a, y=b$ ニ於テ極大ナリト云ヒ,

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)>0$$

ナルトキハ z ハ $x=a, y=b$ ニ於テ極小ナリト云フ.

今 $\qquad f(a+h,b+k)-f(a,b)=D(z)$

ト置クトキハ §56 ニヨリ

$$D(z)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+h\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a+\theta h,b+\theta k),\ |\theta|<1.$$

ナルニヨリ若シ $\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)f$ ハ 0 ナラザルトキハ h,k ヲ充分ニ小サク取リ $D(z)$ ノ符號ヲシテ $\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)f$ ト等シクスル

ヲ得ベシ. 之レ又 h,k ノ撰ミ方ニヨリテ正或ハ負ニナリ得ルニヨリ $x=a,y=b$ ニ於テ $D(z)$ ガ一定セル符號ヲ持ツタメニハ

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)=0$$

ナラザルベカラズ. 而シテ h 及 k ハ各獨立ナルニヨリ $f(a,b)$ ハ極大或ハ極小ナル爲メニハ $x=a,y=b$ ニ於テ

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \quad 及 \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0$$

ナラザルベカラズ.

次ニ $x=a,y=b$ ニ於テ此條件ガ滿足サレタリトスレバ是 z ノ極大ヲ與フルカ或ハ極小ヲ與フルカヲ吟味スルコト次ノ如シ

今便宜ノ爲メ $x=a,y=b$ ニ於ケル微係數ノ值ヲ夫々

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=A, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=B, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=C$$

ヲ以テ表ハストキハ §56 ニヨリ

$$D(z)=\frac{1}{2!}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)$$
$$+\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(a+\theta_1 h,b+\theta_1 k)$$

ナルニヨリ h,k ヲ充分ニ小サクスルトキハ $D(z)$ ノ符號ハ $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ ノ符號ト同一ニサスルヲ得ベシ.

A,B,C ハ同時ニ 0 ナラズト假定シ特ニ其中何レカ一ツガ 0 ナラズ他ノ二ツハ 0 ナルカ或ハ 0 ナラザル三ツノ場合ヲ研究スル代リニ A ガ 0 ナラズトシテ之ヲ論ジ B 或 C ハ 0 ナラザル場合ハ同樣ナルニヨリ此ニハ論ゼザルコトトス.

$A\neq 0$,

$$Ah^2+Bhk+Ck^2=\frac{k^2}{A}\left\{\left(A\frac{h}{k}+B\right)^2+AC-B^2\right\}.$$

今 $AC-B^2=H$ ト置ケバ

$$Ah^2+2Bhk+Ck^2=\frac{k^2}{A}\left\{\left(A\frac{h}{k}+B\right)^2+H\right\}.$$

故ニ若シ $H<0$ ナルトキハ h,k ヲ適當ニ取リ

$$\left(A\frac{h}{k}+B\right)^2+H=0$$

トナスヲ得ルニヨリ, カカルトキハ

$$D(z)=\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(a,b)$$
$$+\frac{1}{4!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f(a+\theta_2 h,b+\theta_2 k)$$

ナルニヨリ $D(z)$ ノ符號ハ h ト k トノ取リ方ニヨリ正或ハ負トナスヲ得ベシ. 依テ

$$H\geqq 0$$

ナラザレバ z ハ $x=a,y=b$ ニ於テ極大或ハ極小ナラズ.

若シ $H>0$ ナルトキハ h,k ヲ充分ニ小ニスルトキハ $D(z)$ ノ符號ハ A ノ符號ト相等シ. 同樣ニシテ C ハ 0 ナラザルトキハ $D(z)$ ハ C ト同符號ヲ有スベシ. 故ニ

$AC-B^2>0$ ニシテ

$A>0$ 或ハ $C>0$ ナルトキハ $f(a,b)$ ハ極小

$A<0$ 或ハ $C<0$ ナルトキハ $f(a,b)$ ハ極大.

次ニ若シ $H=0$ ナルトキハ

$$D(z)=\frac{k^2}{2!A}\left(A\frac{h}{k}+B\right)^2+\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(a+\theta_1 h,b+\theta_1 k)$$

故ニ h,k ヲ充分ニ小ニ取ルトキハ $D(z)$ ト A トハ同符號ヲ有スルニヨリ結果ハ前ノ場合ト同樣ノ如ク見ユレドモ，h,k ヲ

$$h'A+k'B=0$$

ナル樣ニ取ルトキハ

$$D(z)=\frac{1}{3!}\left(h'\frac{\partial}{\partial x}+k'\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(a,b)$$
$$+\frac{1}{4!}\left(h'\frac{\partial}{\partial x}+k'\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f(a+\theta_2'h',b+\theta_2'k')$$

ナルニヨリ　$\left(h'\frac{\partial}{\partial x}+k'\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(a,b)=0$

ナラザルベカラズ．之レ前ノ場合ト異ル點ノ一ナリ．若シ此條件ガ滿足セラレタリトセバ

$$D(z)=\frac{1}{4!}\left(h'\frac{\partial}{\partial x}+k'\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f(a,b)$$
$$+\frac{1}{5!}\left(h'\frac{\partial}{\partial x}+k'\frac{\partial}{\partial y}\right)^5 f(a+\theta'_3h',b+\theta'_3k')$$

ナルニヨリ $D(z)$ ハ $\left(h'\frac{\partial}{\partial x}+k'\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f$ ト同符號ヲ有ス．而シテ h',k' 以外ノ h,k ノ値ニ對シテハ $D(z)$ ハ A ト同符號ヲ有ス．依テ $\left(h'\frac{\partial}{\partial x}+k'\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f$ ハ A ト同符號ヲ有セザルベカラズ．之レ前ノ場合ト異ル第二ノ點ナリ．是等ノ二條件ハ滿足セラルヽトキハ A ノ符號ニ從テ $f(a,b)$ ハ z ノ極大或ハ極小ナリ．

若シ　$A=0$,　$B=0$,　$C\doteq 0$　ナルトキニハ

$$D(z)=\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(a,b)+$$
$$\frac{1}{4!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f(a+\theta_2 h,b+\theta_2 k)$$

ナルニヨリ三次以上ノ微係數ヲ吟味スベキコト一自變數ノ函數ノ極大極小ヲ研究スルト同樣ナリ．

【例】1.　　$z=\cos x.\cos a+\sin x.\sin a.\cos(y-\beta)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\sin x.\cos a+\cos x.\sin a.\cos(y-\beta),\qquad \text{(公式 9,10)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\sin a\ \sin x.\sin(y-\beta),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\cos x.\cos a-\sin x.\sin a.\cos(y-\beta),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\cos x.\sin a.\sin(y-\beta),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\sin a.\sin x.\cos(y-\beta).$$

$\frac{\partial z}{\partial x}=0$,　$\frac{\partial z}{\partial y}=0$　ヨリ

$$\text{(i)}\ \left.\begin{array}{l}x=a\\ y=\beta\end{array}\right\}\qquad \text{(ii)}\ \left.\begin{array}{l}x=0\\ y=\frac{\pi}{2}+\beta\end{array}\right\}\ \&c.$$

(i)　　$A=-1$,　$B=0$,　$C=-\sin^2 a$

∴　　$H>0$,　$A<0$

∴　　z ハ極大ニテ $z=1$

(ii)　　$A=-\cos a$,　$B=-\sin a$,　$C=0$

∴　　$H<0$

∴　　z ハ極大或ハ極小ニアラズ．

［例］2. $z=ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c.$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x}=ax+hy+g\ ,\quad \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=hx+by+f\ ,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a,\quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=h,\quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=b,$$

$\therefore$ $ab-h^2>0$ ナルトキハ $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ ヨリ得タル x,y ノ値

$$x=\frac{hf-bg}{ab-h^2}\ ,\qquad y=\frac{hg-af}{ab-h^2}$$

ニ於テ a,b ノ正負ニ從テ z ハ極小或ハ極大ナリ．而シテ a,b ハ同符ナラザレバ極大或ハ極小ナラズ．

$ab-h^2<0$ ナルトキハ極大或ハ極小ナラズ．

$ab-h^2=0$ ナルトキハ上ニ得タル x,y ノ値ハ無限大或ハ不定トナルニヨリ極大或ハ極小ニアラズ此問題ハ立體解析幾何學ノ初步ヲ知レル讀者ニハ圖形ノ上ヨリ其結果ヲ豫想シ得ベシ．

扨 $\quad ax+hy+g=0\ ,$

$\quad\quad hx+by+f=0\ ,$

ナルニヨリ $\quad z=gx+fy+c\ .$

依テ
$$\begin{vmatrix} a, & h, & g \\ h, & b, & f \\ g, & f, & c-z \end{vmatrix}=0,$$

即
$$z=\frac{1}{ab-h^2}\begin{vmatrix} a, & h, & g \\ h, & b, & f \\ g, & f, & c \end{vmatrix},$$

ハ z ノ極大或ハ極小値ナリ

60. 三自變數ノ函數ノ極大極小

$$u=f(x,y,z)\ ,$$

ノ領域內ニテハ §56 ニヨリ

$$f(x+h,y+k,z+l)-f(x,y,z)=\Sigma\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(x,y,z).$$

ナルニヨリ前§ト同樣ノ論法ニヨリ u ノ極大或ハ極小ナル點ニ於テハ

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=0$$

ナルヲ要ス．此三式ヨリ

$$x=a,\quad y=b,\quad z=c$$

ナル値ヲ得タリトス．便宜ノ爲メ $x=a,\ y=b,\ z=c$ ニ於テノ微係數ノ値ヲ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=A,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=B,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=C,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=L,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=M,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=N$$

ニテ表セバ u ハ $x=a,\ y=b,\ z=c$ ニ於テ極大或ハ極小ナルタメニハ $h,\ k,\ l$ ノ値ノ如何ニ拘ラズ

$$Ah^2+Bk^2+Cl^2+2Lkl+2Mlh+2Nhk$$

ハ一定ナル符號ヲ有セザルベカラザルコト前§ニ於ケルト同樣ナリ．

即 $$\frac{1}{A}\Big\{(Ah+Ml+Nk)^2+[(AB-N^2)k^2+2(AL-MN)kl$$
$$+(AC-M^2)l^2]\Big\}$$

ハ一定ナル符號ヲ有セザルベカラズ．故ニ

$$(AB-N^2)k^2+2(AL-MN)kl+(AC-M^2)l^2>0$$

ナラザルベカラズ．之レ $l=0$ ニ於テモ正ナラザルベカラザルニヨリ $l=0$ ト置ケバ

$$AB-N^2>0$$

ナラザルベカラザルコトヲ知ル．又上ノ不等式ハ

$$\frac{1}{AB-N^2}\Big\{[(AB-N^2)k+(AL-MN)l]^2$$
$$+[(AB-N^2)(AC-M^2)-(AL-MN)^2]l^2\Big\}>0$$

トナルニヨリ $AB-N^2>0$ ナルトキハ

$$(AB-N^2)(AC-M^2)-(AL-MN)^2>0$$

即 $$A\{ABC-BM^2-CN^2-AL^2+2LMN\}>0$$

ナラザルベカラズ．此二條件ヲ滿足スルトキハ

$$f(a+h,b+k,c+l)-f(a,b,c)$$

ハ A ト其符號ヲ等シクス．故ニ

$$\begin{vmatrix} A & N \\ N & B \end{vmatrix}>0,\qquad A\begin{vmatrix} A & N & M \\ N & B & L \\ M & L & C \end{vmatrix}>0$$

ナルトキハ $A<0$ ナルトキ $f(a,b,c)$ ハ u ノ極大ニシテ

$A>0$ ナルトキ $f(a,b,c)$ ハ u ノ極小ナリ．

全ク同樣ニシテ $\begin{vmatrix} A & M \\ M & C \end{vmatrix}>0$, $\begin{vmatrix} B & L \\ L & C \end{vmatrix}>0$ ，ニシテ A,B,C ハ同符

號ヲ有セザルベカラザルコトヲ證明シ得ベシ．

【例】 $$u=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy$$
$$+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}\cdots\cdots\cdots(1).$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x}=a_{11}x+a_{12}y+a_{31}z+a_{14}=0, & (2) \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y}=a_{12}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}=0, & (3) \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial z}=a_{31}x+a_{23}y+a_{33}z+a_{34}=0 & (4) \end{cases}$$

ヨリ x,y,z ヲ求ムベシ

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a_{11},\quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a_{22},\quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=a_{33},$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=a_{23},\quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=a_{31},\quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=a_{12},$$

$$\therefore\quad A=2a_{11},\quad B=2a_{22},\quad C=2a_{33},\quad L=2a_{23},\quad M=2a_{31},\quad N=2a_{12}.$$

故ニ u ハ極大或ハ極小ナル爲メニハ a_{11}, a_{22}, a_{33} ハ同符號ニシテ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}>0$$

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}>0$$ ナルヲ要ス．

此條件ヲ滿足スルトキハ a_{11} ハ正ナルトキハ u ハ極小，負ナルトキハ u ハ極大ナリ．

(2) (3) (4) ニ夫々 x,y,z ヲ乘ジ(1) ヨリ減ズルトキハ

$$u=a_{14}x+a_{24}y+a_{34}z+a_{44} \qquad (5)$$

(2),(3),(4),(5) ヨリ x,y,z ヲ消去スレバ

$$u=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{31} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

之レ u ノ極大或ハ極小値ナリ. (ててるみなんとヲ知ラザル讀者ハ普通ニ運算シテ同一ノ結果ニ達スベシ).

61. 條件アルトキノ極大極小

u ハ x 及 y ノ函數ニシテ

$$u=f(x,y)$$

又 x 及 y ハ　　$\varphi(x,y)=0$

ナル關係ニヨリ連結サルルトキ u ノ極大極小ハ如何ニシテ求メ得ルカヲ論ゼントス.

§ 35 ニヨリ

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

又 § 36 ニヨリ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}$$

ナルニヨリ

$$\frac{du}{dx}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}-\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}.$$

依テ u ノ極大或ハ極小値ヲ求ムルニハ

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\quad \left[\text{或ハ}\ \frac{\partial(f,\varphi)}{\partial(x,y)}=0\right]$$

$$\varphi(x,y)=0$$

ノ二方程式ヨリ x 及 y ノ値ヲ定メ, 之ヲ第二次微係數中ニ入レテ其正負ヲ吟味スベシ.

【例】　四邊ガ與ヘラレタル四邊形ハ圓ニ内切スルトキ最大面積ヲ有スルコトヲ證セ.

a,b,c,d ヲ四與邊トシ $\widehat{a,b}=x$,　$\widehat{c,d}=y$,　面積 $=\dfrac{f}{2}$ トス.

$$f=absinx+cdsiny$$

然ルニ　　$\varphi=(a^2+b^2-2abcosx)-(c^2+d^2-2cdcosy)=0$

$\therefore$　　$\dfrac{\partial f}{\partial x}=abcosx$,　　$\dfrac{\partial f}{\partial y}=cdcosy$,　　　(公式 9,10)

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=-2cdsiny$,　　$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=2absinx$.

$\therefore$　　$\dfrac{\partial(f,\varphi)}{\partial(x,y)}=2abcdsin(x+y)$,

$\therefore$　　$sin(x+y)=0$

$\therefore$　　$x+y=\pi$

即圓ニ内切ス.

$$y=\pi-x$$

トセバ　　$\phi=(a^2+b^2-c^2-d^2)-2(ab+cd)cosx=0.$

$\therefore$　　$x=cos^{-1}\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right).$

$$=\sin^{-1}\left(\frac{f_0}{8(ab+cd)}\right).\quad f_0 \text{ ハ極大或ハ極小値.}$$

次ニ f 及 φ ヨリ直ニ次ノ結果ヲ得ベシ.

$$f^2=4(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-4abcd\cos^2\frac{x+y}{2}.$$

ココニ $$2s=a+b+c+d.$$

∴ $\cos^2\dfrac{x+y}{2}$ ガ最小ナルトキ f ハ最大ナリ

即 $$\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$x+y=\pi$$

ナレバ最大ナリ. 而シテ f ノ最大値 f_0 ハ

$$f_0^2=4(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

トナル.

次ニ u ハ $x_1,x_2,\cdots\cdots x_n$ ナル n 個ノ變數ノ函數ニシテ又是等 n 個ノ變數中ニ m 個 $(m<n)$ ノ條件式アリトス

即 $$u=f(x_1,x_2,\cdots\cdots x_n),$$

$$\varphi_1(x_1,x_2,\cdots\cdots x_n)=0,$$

$$\varphi_2(x_1,x_2,\cdots\cdots x_n)=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_m(x_1,x_2,\cdots\cdots x_n)=0,$$

u ヲ極大或ハ極小トナス. $x_1,x_2,\cdots\cdots x_n$ ノ値ハ $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots\lambda_m$ ナル任意ノ常數ヲ $\varphi_1,\varphi_2\cdots\cdots\varphi_m$ ニ乘シテ f ニ加ヘタル

$$v=f+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\cdots\cdots+\lambda_m\varphi_m$$

ナル函數モ同時ニ極大或ハ極小トナス. 故ニ §59.60 ト同樣ナ

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x_2}=0,\cdots\cdots\quad \frac{\partial v}{\partial x_n}=0.$$ ナルベシ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}+\cdots\cdots+\lambda_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}+\cdots\cdots+\lambda_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n}+\cdots\cdots+\lambda_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}=0,$$

ナル條件ヲ滿足スベシ. 故ニ u ヲ極大極小トナス x ノ値ヲ求ムルニハ是等ノ n 個ノ式ノ中ノ任意ノ m 個ノ式ヲ取リテ $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots\lambda_m$ ナル m 個ノ不定係數ヲ定メ殘リノ $n-m$ 個ノ式中ノ λ ノ代ニ之ヲ入レ外ニ m 個ノ條件式トヲ用テ $x_1,x_2,\cdots\cdots x_n$ ヲ定ムレバ可ナリ.

即 u ヲ極大或ハ極小ニナス $x_1,x_2,\cdots\cdots x_n$ ノ値ヲ求ムルニハ

$$\varphi_1(x_1,x_2,\cdots\cdots x_n)=0,$$

$$\varphi_2(x_1,x_2,\cdots\cdots x_n)=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_m(x_1,x_2,\cdots\cdots x_n)=0.$$

及 $$\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}+\cdots\cdots+\lambda_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}+\cdots\cdots+\lambda_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n}+\cdots\cdots+\lambda_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}=0,$$

ノ $n+m$ 個ノ式ヨリ $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_m$; $x_1,x_2,\cdots\cdots x_n$ ノ $n+m$ 個ヲ決定セ

ハ可ナリ. 之レらぐらんぢゅ (*Lagrange*) ノ不定係數ノ法 (*Indeterminate multipliers*) ト云ヒ問題ノ性質上其極大ナルカ極小ナルカ明ナル場合ニ應用シテ便利ナリ.

【例】 (α,β,γ) ナル點ヨリ二平面

$$\varphi_1=ax+by+cz-1=0, \tag{1}$$

$$\varphi_2=a'x+b'y+c'z-1=0 \tag{2}$$

ノ交ニ至ル距離 r ノ極小ヲ求ム

$$r^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2. \tag{3}$$

$$u=r^2,$$

$$v=u+2\lambda_1\varphi_1+2\lambda_2\varphi_2$$

ト置キ $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial z}$ ヲ求メ之ヲ 0 ト置ケバ

$$\left.\begin{aligned} &x-\alpha+\lambda_1a+\lambda_2a'=0\\ &y-\beta+\lambda_1b+\lambda_1b'=0\\ &z-\gamma+\lambda_1c+\lambda_2c'=0 \end{aligned}\right. \tag{4}$$

コノ三式ヨリ λ_1,λ_2 ヲ消去セバ

$$\begin{vmatrix} x & a & a' \\ y & b & b' \\ z & c & c' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha & a & a' \\ \beta & b & b' \\ \gamma & c & c' \end{vmatrix}. \tag{5}$$

今 $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}=A,\ \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}=-B,\ \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}=C,\ \begin{vmatrix} \alpha & a & a' \\ \beta & b & b' \\ \gamma & c & c' \end{vmatrix}=D.$

ト置ケバ (5) 式ハ $Ax+By+Cz-D=0$ (6)

トナル (1),(2),(6) ヨリ x,y,z ヲ求ムルニ

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ A & B & C \end{vmatrix}=\triangle$$

ト置ケバ

$$x=\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b' & c' \\ D & B & C \end{vmatrix}\div\triangle,\quad y=\begin{vmatrix} a & 1 & c \\ a' & 1 & c' \\ A & D & C \end{vmatrix}\div\triangle,\quad z=\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ a' & b' & 1 \\ A & B & D \end{vmatrix}\div\triangle$$

ヲ得ベシ. コレ r ノ極小ヲ與フル x,y,z ノ値ナリ

(ててるみなんとヲ知ラザル讀者ハ (1),( ),(4) ノ五式ヨリ $\lambda_1,\lambda_2,x,y,z$ ヲ普通ニ求ムレバ所要ノ結果ヲ得ベシ)

62. 極大極小ノ例題

1. 正數 k ヲ二分シ其一部分ノ m 羃ト他ノ部分ノ n 羃トノ積ヲ極大ナラシメヨ. m,n ハ正整數トス.

x ヲ其一部分トセバ他ノ部分ハ $k-x$ ニテ

$$y=x^m(k-x)^n,$$

$$\frac{dy}{dx}=\{mk-(m+n)x\}x^{m-1}(k-x)^{n-1}$$

(i) $x=\dfrac{m}{m+n}k$ ノ時 $\dfrac{dy}{dx}=0$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-x^{m-1}(k-x)^{n-1}(m+n)$$

$$+\left(x=\frac{m}{m+n}k \text{ ノ時 0 トナルモノ}\right)$$

$$\therefore\quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=-\left(\frac{mk}{m+n}\right)^{m-1}\left(\frac{nk}{m+n}\right)^{-1}<0$$

$\therefore$ $x=\dfrac{m}{m+n}k$ ハ y ノ極大値 $\dfrac{m^m n^n}{(m+m)^{m+n}}k^{m+n}$ ヲ與フ.

(ii) $x=0$ ノトキノ $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=0.$

$$\frac{d^m y}{dx^m}=m(m-1)(m-2)\cdots\cdots 2\cdot 1(k-x)^n$$

$$+(x=0 \text{ ノトキ } 0 \text{ トナルモノ})$$

$\therefore$ $\left(\dfrac{d^m y}{dx^m}\right)_0=m(m-1)(m-2)\cdots\cdots 2\cdot 1.k^n \quad >0.$

$\therefore$ m ハ奇數ノトキハ $x=0$ ハ y ノ極大小ヲ與ヘズ. m ハ偶數ノトキハ n ノ如何ニ拘ラズ $x=0$ ハ y ノ極小値 0 ヲ與フ.

(iii) $x=k$ ノトキ $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=0.$

(ii) ノ場合ト同様ニ n ハ奇數ノトキハ $x=k$ ハ y ノ極大極小値ヲ與ヘズ. n ハ偶數ノトキニ其極小値ヲ與フ.

2. 三角形ノ周及一邊ガ與ヘラレタルトキハ二等邊三角形ハ最大面積ヲ有スルコトヲ證セ.

$2s, a$ ヲ夫々與ヘラレタル周及一邊トシ他ノ二邊ヲ x,y トセバ面積 A ハ

$$A^2=s(s-a)(s-x)(s-y),$$

此ニ $\qquad 2s=a+x+y. \qquad$ (1)

第二式ニ λ ナル不定係數ヲ乘ジ第一式ニ加フルトキハ

$$v=s(s-a)(s-x)(s-y)+\lambda(a+x+y-2s).$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-s(s-a)(s-y)+\lambda=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-s(s-a)(s-y)+\lambda=0 \qquad (3)$$

(1)(2)(3) ヨリ λ,x,y ヲ求ムレバ

$$\lambda=\frac{s(s-a)a}{2},\quad x=s-\frac{a}{2},\quad y=s-\frac{a}{2}.$$

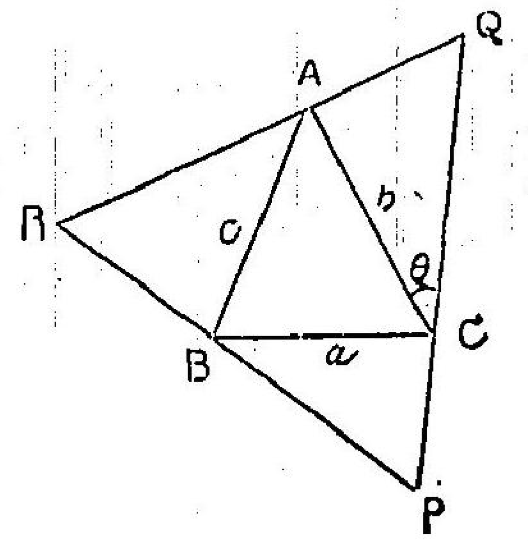
$\therefore$ $\qquad x=y.$

3. 與ヘラレタル三角形ニ外接スル最大正三角形ノ高ハ

$$\left\{a^2+b^2-2ab\cos\left(\frac{\pi}{3}+C\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

ナルコトヲ證セ.

第十八圖



$$\frac{CQ}{b}=\frac{\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)}{\sin\dfrac{\pi}{3}}$$

$$\frac{CP}{a}=\frac{\sin\left(\theta+C-\dfrac{\pi}{3}\right)}{\sin\dfrac{\pi}{3}}$$

h ヲ $\triangle PQR$ ノ高サトセバ

$$h=(CP+CQ)\sin\frac{\pi}{3}=b\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+a\sin\left(\theta+C-\frac{\pi}{3}\right) \qquad (1)$$

$$\frac{dh}{d\theta}=0=b\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+a\cos\left(\theta+C-\frac{\pi}{3}\right) \qquad (2)$$

(1) 及 (2) ヲ二乘シテ加フレバ

$$h^2=a^2+b^2+2ab\cos\left(C-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=a^2+b^2-2ab\cos\left(C+\frac{\pi}{3}\right).$$

又 $\qquad \dfrac{d^2h}{d\theta^2}=-b\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)-a\sin\left(\theta+C-\dfrac{\pi}{3}\right)=-h<0.$

ナルニヨリ上ニ得タル結果ハ極大ナリ.

4. 橢圓ノ切線ノ兩軸間ニ挾マレタル部分ガ最小ナルトキ切點ニ於テ半主軸ニ等シク分タルルコトヲ證セ.

P ニ於ケル切線ガ x, y 軸ト夫々 Q, R ニ於テ交ルトシ, 離心角 (eccentric angle) ヲ ϕ トセバ QR ノ方程式ハ

$$\frac{x\cos\phi}{a}+\frac{y\sin\phi}{b}=0$$

C ヲ中心トセバ

$$CQ=a\sec\phi,\quad CR=b\operatorname{cosec}\phi.$$

$$QR^2=a^2\sec^2\phi+b^2\operatorname{cosec}^2\phi$$

$$\frac{dQR^2}{d\phi}=2(a^2\sec^2\phi\tan\phi-b^2\operatorname{cosec}^2\phi\cot\phi)=0$$

(公式 13, 14)

$$\therefore\quad \frac{\sin^2\phi}{b}=\frac{\cos^2\phi}{a}=\frac{1}{a+b}$$

而シテ $QR^2=a(a+b)+b(a+b)=(a+b)^2$

又 $PR:PQ=a\cos\phi:a(\sec\phi-\cos\phi)$

$$=\cos^2\phi:\sin^2\phi=a:b.$$

$$\therefore\quad PR=a,\quad PQ=b.$$

5. 同一ノ周ヲ有スル扇形ハ其半徑ガ弧ノ半分ニ等シキトキ最大面積ヲ有スルコトヲ證セ.

周ヲ a, 半徑ヲ r, 扇形ノ開キヲ θ, 面積ヲ A トセバ

$$a=r\theta+2r.$$

$$A=\frac{r^2\theta}{2}=\frac{r}{2}(a-2r).$$

$$\frac{dA}{dr}=\frac{1}{2}(a-2r)-r=\frac{a}{2}-2r=0$$

$$\therefore\quad 2r=\frac{a}{2},\qquad r=\frac{a}{4}$$

$$r\theta=a-2r=2r$$

$\therefore$ 弧$=2r$.

6. 橢圓ノ焦點 F' ヲ通ル弦 $PF'P'$ ノ兩端 P, P' ヲ他ノ焦點 F ト結ブトキ三角形 PFP' ノ面積ヲ極大ナラシメヨ

$$PP'=\frac{2a(1-e^2)}{1-e^2\cos^2\theta},\quad e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$$ (§57 例 4, 第 17 圖)

面積$=\frac{1}{2}FF'.PP'.\sin\theta=\frac{FF'.2a(1-e^2)}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{1-e^2\cos^2\theta}$.

今 $u=\frac{\sin\theta}{1-e^2\cos^2\theta}$

$$\frac{du}{d\theta}=0=\frac{\cos\theta}{1-e^2\cos^2\theta}-\frac{\sin\theta.2e^2\sin\theta.\cos\theta}{(1-e^2\cos^2\theta)^2}$$

$$=\frac{\cos\theta(1+e^2\cos^2\theta-2e^2)}{(1-e^2\cos^2\theta)^2}$$

$\therefore\quad \pi=\frac{\pi}{2}$, 或ハ $\cos^2\theta=2-\frac{1}{e^2}\left(e^2>\frac{1}{2}\right.$ ノトキ$\left.\right)$.

θ ガ漸々増加シテ $\frac{\pi}{2}$ ヲ過グルトキニハ

$1-2e^2>0$ ナレバ $\frac{du}{d\theta}$ ハ正ヨリ負ニ變リ,

$1-2e^2<0$ ナレバ $\frac{du}{d\theta}$ ハ負ヨリ正ニ變ル.

$\therefore\quad \theta=\frac{\pi}{2}$ ノトキハ $e^2<\frac{1}{2}$ ナレバ極大ヲ與ヘ,

$$e^2>\frac{1}{2}$$ ナレバ極小ヲ與フ.

次ニ θ ガ漸々増加シテ

$$\cos^2\theta=2-\frac{1}{e^2} \qquad \left(勿論\ e^2>\frac{1}{2}\ ノ片トス\right).$$

ニヲ與ヘラルル最小正角ヲ過グル片ハ $\dfrac{du}{d\theta}$ ハ正ヨリ負ニ變ルニヨリ是レ極大ヲ與フ.

$$FF'=2ae.$$

ナルニヨリ　$$面積=2a^2e(1-e^2)\begin{cases} e^2<\dfrac{1}{2}\ ノ片ハ極大, \\ e^2>\dfrac{1}{2}\ ノ片ハ極小. \end{cases}$$

及ビ　$$=a^2\sqrt{1-e^2}\ :\ e^2>\frac{1}{2}\ ノ片極大,$$

7. $$z=x^3y^2(6-x-y).$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x^2y^2(18-4x-3y)\ ,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^3y(12-2x-3y)\ ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2(6-2x-y)\ ,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x^2y(36-8x-9y)\ ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^3(12-2x-6y).$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad トセバ\quad x=0,\quad y=0,\quad 18-4x-3y=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=0\quad トセバ\quad x=0,\quad y=0,\quad 12-2x-3y=0.$$

(i) $4x+3y=18,\quad 2x+3y=12$

ノ片ハ　$x=3,\quad y=2,$

ヿ片ハ $A<0,\quad AC-B^2>0.$

$\therefore$　z ハ極大.

(ii) 若シ x 或ハ y ガ 0 ナル片ハ A,B,C ハ悉ク 0 ナリ. 故ニ

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=36y^2-24xy^2-6y^3\ ,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=72xy-24x^2y-18xy^2,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=36x^2-8x^3-18x^2y\ ,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=-6x^3.$$

$\therefore$　$x=0,\quad y\neq 0$　ノ片ハ

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\neq 0,\qquad 他ノ三次微係數=0,$$

$y=0,\quad x\neq 0$　ノ片ハ

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=0,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=0,\quad ナレ𪜈\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\neq 0,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\neq 0,$$

ナルニヨリ此場合ニハ極大或ハ極小ナラズ.

(iii) 若シ　$x=y=0$　ノ片ハ　三次微係數悉ク $=0$.

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}=-24y^2,\quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^3\partial y}=72y-48xy,\quad \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}=0$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}=72x-24x^2-36xy,\quad \frac{\partial^4 z}{\partial x\partial y^3}=-18x^2,$$

然ル片　$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^3\partial y^2}=72\neq 0$$

ナルニヨリ此トキモ z ハ極大或ハ極小ナラズ.

8. $$u=\frac{a+bx+cy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\ ハ\ x=\frac{b}{a},\ y=\frac{c}{a}\ ノ片極大$$

$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$ ト置ケバ

$$u=\frac{a+r(b\cos\theta+c\sin\theta)}{\sqrt{1+r^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{-ar+(b\cos\theta+c\sin\theta)}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad\text{(公式 4,6)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{r(c\cos\theta-b\sin\theta)}{\sqrt{1+r^2}},$$

故ニ極大或ハ極小ニ對シテハ $\tan\theta=\frac{c}{b}$, $ar=\sqrt{b^2+c^2}$.

∴ $x=\frac{b}{a}$, $y=\frac{c}{a}$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{-3r(b\cos\theta+c\sin\theta)-a(1+r^2)+3ar^2}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$=\frac{-a}{\sqrt{1+r^2}}\left(\because\frac{\partial u}{\partial r}=0\right)=-\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}<0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=-\frac{r(c\sin\theta+b\cos\theta)}{\sqrt{1+r^2}}=-\frac{(b^2+c^2)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}<0.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r}=0,$$

∴ $x=\frac{b}{a}$, $y=\frac{c}{a}$ ノトキ u ハ極大ナリ

9. 與ヘラレタル球内ニ最大體積ヲ有スル直立方體ヲ内接セシメヨ. 次ニ最大表面積ヲ有スル直立方體ヲ内切セシメヨ.

$2x, 2y, 2z$ ヲ以テ直立方體ノ稜ノ長サヲ, a ヲ以テ球ノ半徑ヲ表ハセバ, 容積 $V=8xyz$,

又 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

∴ $8yz+2x\lambda=0$, $8zx+2y\lambda=0$, $8xy+2z\lambda=0$.

∴ $x=y=z$. 即正立方體

表面積 $S=8(yz+zx+xy)$

∴ $8(y+z)+2x\lambda=0$, $8(z+x)+2y\lambda=0$, $8(x+y)+2z\lambda=0$.

∴ $x=y=z$ 即正立方體

10. $u=\frac{xyz}{(a+x)(x+y)(y+z)(z+b)}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{yz(ay-x^2)}{(a+x)^2(x+y)^2(y+z)(z+b)}=\frac{u(ay-x^2)}{x(a+x)(x+y)}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u(xz-y^2)}{y(x+y)(y+z)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{u(by-z^2)}{z(y+z)(z+b)},$$

∴ $ay-x^2=0$, $xz-y^2=0$, $by-z^2=0$.

∴ $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{b}=\sqrt[4]{\frac{a}{x}\,\frac{x}{y}\,\frac{y}{z}\,\frac{z}{b}}=\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$

∴ $x=a\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$, $y=a\sqrt{\frac{b}{a}}$, $z=a\sqrt[4]{\left(\frac{b}{a}\right)^3}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2xu}{x(a+x)(x+y)}+\cdots\cdots$$

∴ 上ノ値ヲ入ルレバ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2}{a^3\sqrt{\frac{b}{a}}\left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2}<0.\qquad \&c.$$

∴ 上ノ値ハ u ノ極大ヲ與フ.

11. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, (1)

$lx+my+nz=p$, (2)

$l\alpha+m\beta+c\gamma=p$, (3)

$\frac{\alpha}{a^2l}=\frac{\beta}{b^2m}=\frac{\gamma}{c^2n}$ (4)

ナルキ　$r^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2$

ノ値大極小値ヲ求ム.

$$v=r^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)+2\lambda'(lx+my+nz-p)$$

ト置キ　$\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial z}=0,$

ト置クトキハ

$$x-\alpha+\lambda\frac{x}{a^2}+\lambda' l=0, \tag{5}$$

$$y-\beta+\lambda\frac{y}{b^2}+\lambda' m=0, \tag{6}$$

$$z-\gamma+\lambda\frac{z}{c^2}+\lambda' n=0. \tag{7}$$

之等ニ夫々 $x-\alpha$,　$y-\beta$　$z-\gamma$ ヲ乗ジテ加フレバ

$$r^2+\lambda\left\{\frac{x(x-\alpha)}{a^2}+\frac{y(y-\beta)}{b^2}+\frac{z(z-\gamma)}{c^2}\right\}=0$$

或ハ
$$r^2+\lambda\left\{1-\frac{x\alpha}{a^2}-\frac{y\beta}{b^2}-\frac{z\gamma}{c^2}\right\}=0. \tag{8}$$

(4) ヨリ
$$\frac{\alpha}{a^2l}=\frac{\beta}{b^2m}=\frac{\gamma}{c^2n}=\frac{\alpha l+\beta m+\gamma n}{a^2l^2+b^2m+c^2n}$$

$$=\frac{p}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2},$$

(8) 及 (2) ヨリ

$$r^2=\lambda\left\{\frac{p^2}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}-1\right\}=\lambda K\quad \text{ト置ク.}$$

(5) (6) (7) ハ又次ノ如ク書クヲ得.

$$x\left(1+\frac{r^2}{Ka^2}\right)=\alpha-\lambda' l,$$

$$y\left(1+\frac{r^2}{Kb^2}\right)=\beta-\lambda' m,$$

$$z\left(1+\frac{r^2}{Kc^2}\right)=\gamma-\lambda' n,$$

コレ等ヨリ夫々 x,y,z ヲ出シ (2) ニ入ルルトキハ

$$\frac{lKa^2(\alpha-\lambda' l)}{Ka^2+r^2}+\frac{mKb^2(\beta-\lambda' m)}{Kb^2+r^2}+\frac{nKc^2(\gamma-\lambda' n)}{Kc^2+r^2}=p, \tag{9}$$

(9) ヨリ (3) ヲ引キテ

$$\frac{a^2l^2\left(K\lambda'+\frac{r^2\alpha}{a^2l}\right)}{Ka^2+r^2}+\frac{b^2m^2\left(K\lambda'+\frac{r^2\beta}{b^2m}\right)}{Kb^2+r^2}+\frac{c^2n^2\left(K\lambda'+\frac{r^2\gamma}{c^2n}\right)}{Kc^2+r^2}=0$$

(4) ニヨリ
$$K\lambda'+\frac{r^2\alpha}{a^2l}=K\lambda'+\frac{r^2\beta}{b^2m}=K\lambda'+\frac{r^2\gamma}{c^2n},$$

$$\therefore\quad \frac{a^2l^2}{Ka^2+r^2}+\frac{b^2m^2}{Kb^2+r^2}+\frac{c^2n^2}{Kc^2+r^2}=0.$$

コレヨリ r^2 ノ二ツノ値ヲ得ベシ其一方ハ r^2 ノ極大ニシテ他方ハ極小ナルコトモ知ルコト難カラズ.

【注意】 $u=f(x,y,z)$

ナルキ §34 ニヨリ

$$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

ナルニヨリ u ノ極大或ハ極小ニ對シテハ

$$du=0$$

ナラザルベカラズ．是レ x,y,z ハ他ノ變數 t ノ函數ナリト考ヘ $\frac{du}{dt}=0$ ト置クト同樣ナリ．此方法ヲ以テ解キテ便ナル問題多シ．

12. x,y,z ハ三角形ノ三角ナルキ

$$u=\sin^m x.\sin^n y.\sin^p z \quad , \quad (m,n,p \text{ 正.})$$

ノ極大ヲ求ム．

$$x+y+z=2\pi.$$

$$du=m\sin^{m-1}x\cos x dx+n\sin^{n-1}y\cos y dy+p\sin^{p-1}z\cos z dz$$

$$\frac{du}{u}=mu\cot x dx+nu\cot y dy+pu\cot z dz=0$$

即 $$m\cot x dx+n\cot y dy+p\cot z dz=0.$$

又 $$dx+dy+dz=d(2\pi)=0.$$

$$\therefore\quad \frac{\tan x}{m}=\frac{\tan y}{n}=\frac{\tan z}{p}=\frac{\tan x+\tan y+\tan z}{m+n+p}=k \text{ トス.}$$

三角法ニヨリ $\tan x+\tan y+\tan z=\tan x.\tan y.\tan z.$

然ルニ $$\tan x.\tan y.\tan z=mnpk^3.$$

$$\therefore\quad \frac{\tan x}{m}=\frac{\tan y}{n}=\frac{\tan z}{p}=\sqrt{\frac{m+n+p}{mnp}}.$$

$$\therefore\quad x=\tan^{-1}\left\{m\sqrt{\frac{m+n+p}{mnp}}\right\}, \ \&c.$$ u ノ極大ヲ與フ．

13. $lx+my+nz=a$ ナルキ

$$u=x^p y^q z^r \qquad (p,q,r \text{ ハ正})$$

ノ極大極小值ヲ求ム．故ニ三稜ヲ x,y,z 軸トシ他ノ稜ハ與ヘラレタル平面トノ交線ヨリ成ル平行直立方體ノ容積ヲ最大ナラシメヨ．

$$\frac{pu}{x}dx+\frac{pu}{y}dy+\frac{ru}{z}dz=0$$

$$ldx+mdy+ndz=0$$

$$\therefore\quad \frac{lx}{p}=\frac{my}{q}=\frac{nz}{r}=\frac{a}{p+q+r}.$$

$$\therefore\quad u=\left(\frac{a}{p+q+r}\right)^{p+q+r}\left(\frac{p}{l}\right)^p\left(\frac{q}{m}\right)^q\left(\frac{r}{n}\right)^r \text{ 極大.}$$

直方體ノキニハ $p=q=r=1.$

$$\therefore\quad u=\left(\frac{a}{3}\right)^3\frac{1}{lmn}.$$

x,y,z ノ中何レカ一ツハ 0 ナレバ $u=0$ 之レ極小ナリ．

14. $$r^2=x^2+y^2+z^2$$

$$ax^2+by^2+c^2z+2a'yz+2b'zx+2c'xy=1,$$

$$lx+my+nz=0,$$

ナルトキ r^2 ノ極大或ハ極小值ハ

$$l^2\left(b-\frac{1}{r^2}\right)\left(c-\frac{1}{r^2}\right)+m^2\left(c-\frac{1}{r^2}\right)\left(a-\frac{1}{r^2}\right)$$
$$+n^2\left(a-\frac{1}{r^2}\right)\left(b-\frac{1}{r^2}\right)$$
$$-2mna'\left(a-\frac{1}{r^2}\right)-2nlb'\left(b-\frac{1}{r^2}\right)-2lmc'\left(c-\frac{1}{r^2}\right)$$
$$+2mnb'c'+2nlc'a'+2lma'b'$$
$$-l^2a'^2-m^2b'^2-n^2c'^2=0,$$

ニ依テ定メラルヽコトヲ證セ.

$$\frac{1}{2}dr^2=xdx+ydy+zdz=0\ ,$$

$$ldx+mdy+ndz=0\ ,$$

$$(ax+c'y+b'z)dx+(by+a'z+c'x)dy$$
$$+(cz+b'x+a'y)dz=0\ ;$$

$$\therefore\quad x=\lambda l+\lambda'(ax+c'y+b'z)\ ,$$
$$y=\lambda m+\lambda'(c'x+by+a'z)\ ,$$
$$z=\lambda n+\lambda'(b'x+a'y+cz).$$

各々夫々 x,y,z ヲ乘ジテ相加フレバ

$$r^2=\lambda'$$

ヲ得. 故ニ

$$x\left(a-\frac{1}{r^2}\right)+c'y+b'z+\frac{\lambda l}{r^2}=0\ ,$$

$$c'x+y\left(b-\frac{1}{r^2}\right)+a'z+\frac{\lambda m}{r^2}=0\ ,$$

$$b'x+a'y+z\left(c-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{\lambda n}{r^2}=0\ ,$$

及 $\qquad lx+my+nz=0\ ;$

此四式ヨリ x,y,z 及 λ ヲ消去セバ

$$\begin{vmatrix} l & m & n & 0 \\ a-\frac{1}{r^2} & c' & b' & l \\ c' & b-\frac{1}{r^2} & a' & m \\ b' & a' & c-\frac{1}{r^2} & n \end{vmatrix}=0\ ;$$

$$\therefore\quad l^2\left\{\left(b-\frac{1}{r^2}\right)\left(c-\frac{1}{r^2}\right)-a'^2\right\}+m^2\left\{\left(c-\frac{1}{r^2}\right)\left(a-\frac{1}{r^2}\right)+b'^2\right\}$$
$$+n^2\left\{\left(a-\frac{1}{r}\right)\left(b-\frac{1}{r}\right)-c'^2\right\}+2mn\left\{b'c'-a'\left(a-\frac{1}{r^2}\right)\right\}$$
$$+2nl\left\{c'a'-b'\left(b-\frac{1}{r^2}\right)\right\}+2lm\left\{a'b'-c'\left(c-\frac{1}{r^2}\right)\right\}=0.$$

ヲ得.

問　　題　　4.

次ノ函數 y ノ極大極小ヲ求ム.

1. $y=x^4-8x^3+22x^2-24x+12.$ 　答 $x=1$, y ハ極小,
   $x=2$ 　y ハ極大,
   $x=3$ 　y ハ極小.

2. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$, 　$x=1$ 　ノ時 y ハ極大,
   $x=-1$ ノ時 y ハ極小.

3. $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x-1}$ 　$x=0$ ノ時 y ハ極大,
   $x=2$ ノ時 y ハ極小.

4. $y=\dfrac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, 　$x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ ノ時 y ハ極大.

5. $y=\dfrac{\log x}{x^n}$, 　$x=e^{\frac{1}{n}}$ ノ時 y ハ極大.

6. $y=(1+x^{\frac{2}{3}})(7-x)^2$, 　$x=0$ ノ時 y ハ極小,
   $x=1$ 　極大,
   $x=7$ 　極小.

7.　$y^2+2yx^2+4x-3=0$,　　$x=-\dfrac{1}{2}$ ノ𪜈 y ハ極大.

8.　$y^2-2mxy+x^2-a^2=0$,　　$x=\dfrac{ma}{\sqrt{1-m^2}}$ ノ𪜈 y ハ極大.

9.　$z=a\cos^2x+b\cos^2y$,　　$x-y+\dfrac{\pi}{4}=0$ ナル𪜈ニ, z ノ

極大極小ハ $\sin 2y=\cos 2x$ ノ𪜈ニシテ,

$$z=\frac{1}{2}(a+b+\sqrt{a^2+b^2})$$ ハ z ノ極大ニシテ,

$$z=\frac{1}{2}(a+b-\sqrt{a^2+b^2})$$ ハ z ノ極小ナリ.

10.　$y^4-4c^2yx+x^4=0$　　$x=c3^{\frac{1}{8}}$ ノ𪜈 y ハ極大,

$x=-c3^{\frac{1}{8}}$ ノ𪜈 y ハ極小.

11.　$u=x^2+y^2+z^2+x-2z-xy$ ナルトキ u ノ極小ハ

$x=-\dfrac{2}{3}$, $y=-\dfrac{1}{3}$, $z=1$, ノ𪜈ナリ.

12.　第16圖ニ於テ次ノ極小ヲ證セ.

(i)　$\tan\theta=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ ナル𪜈　$OA+OB$ ハ極小.

(ii)　$\tan\theta=\dfrac{b}{a}$ ナル𪜈　$OA.OB$ ハ極小.

(iii)　$\tan\theta=\dfrac{b+\sqrt{2ab}}{a+\sqrt{2ab}}$ ナル𪜈 $OA+OB+AB$ ハ極小.

(iv)　$2a\tan^3\theta-b\tan^2\theta+a\tan\theta-2b=0$, ナル𪜈

$OA.OB.AB$ ハ極小.

13.　與ヘラレタル平行四邊形ニ外切スル最小楕圓ノ面積ハ四邊

形ノ面積ノ $\dfrac{\pi}{2}$ 倍ナルコトヲ證セ.

14.　與ヘラレタル直線ノ一方ニアル二點 A,B ノ直線上ニ於ケル點 P トヲ直線ヲ以テ連結シ, $AP+PB$ ヲ最小ナラシメヨ.

15.　或平面ノ一方ニアル點 A ヨリ u ナル速度ヲ以テ直線運動ヲナシ, 其平面ニ達シテ之ヲ通過セル後ハ更ニ或方向ニ v ナル速度ヲ以テ進ミ定點 B ニ成ルベク少キ時間內ニ達セントスルニハ如何ナル徑路ヲ取ルベキカ.

16.　三角形ノ各頂點ト或點ヲ連結スル直線ノ和ガ極小ナル點ヲ定メヨ.

17.　三角形內ノ點ヨリ各邊ニ平行ナル直線ヲ引キ之ヲ三平行四邊形及三角形ニ分ツ𪜈三角形ノ面積ノ和ガ最小ナルニハ其等ノ直線ハ重心ヲ過ルコトヲ證明セヨ.

17.　三角形內ノ點ヨリ頂點ニ引ケル直線上ノ正方形ノ和ガ最小ナルハ其點ガ重心ナルトキナリ.

19.　直立方體ノ三稜ノ和ガ一定スルトキ其表面積ガ最小ナルトキハ正立方體ナルコトヲ證セ.

20.　$xe^{y+x\sin y}$ ハ極大極小ヲ有セザルコトヲ證セ.

21.　與ヘラレタル三角形ニ外接スル最小楕圓ヲ求ム.

第三編

平面曲線論

第一章

平面曲線ノ性質

63. 方程式ノ表ハス曲線

§5 ニ於テ示セルガ如ク O ニ於テ直交スル二直線 OX, OY ヲ縦横軸トスルトキハ方程式

$$f(x,y)=0$$

ニ依テ連結サルル x,y ナル値ヲ坐標トスル點ノ軌跡ハ曲線トナリテ表ハサル. 然レ形逆ニ任意ノ曲線アルトキニ之ヲ直ニ方程式トシテ表ハサルヽモノニアラズ. 故ニ曲線其物ヲ取リテ之ヲ論ズルハ現今ノ數學ニ於テハ到底不可能ナラン. 故ニ此ニ論ズルハ二變數ヲ含ム等式ヲ以テ定義サレタル函數ガ表ハス曲線ニ就テ其性質及形等ヲ論ズベシ.

本書ニ用フル坐標ハ普通最多ク用キラルヽ直交坐標及極坐標ノ二トス. 直交坐標ニ就テ

$$f(x,y)=0$$

ガ表ス曲線上ノ或點ノ坐標ヲ x,y トス. 今此直交軸ノ原點ヲ極トシ x 軸ヲ原線トスル極坐標ニ於テ其點ノ極坐標ヲ r,θ トセバ

$$x=r\cos\theta\ ,\quad y=r\sin\theta\ ,$$

ナルニヨリ上ノ曲線ハ

$$f(r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta)=0\ ,$$

或ハ

$$\varphi(r,\theta)=0$$

ニ依テ表ハス. 即同一曲線ト雖モ異レル坐標軸ヲ用テ表ハスキハ異レル方程式ヲ得ベシ. 逆ニ極坐標ニ就テ

$$\varphi(r,\theta)=0$$

ナル式アルトキ

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\quad \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}\ ,$$

ニ依テ直交坐標ニ改ムルトキハ

$$\varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ \tan^{-1}\frac{y}{x}\right)=0\ ,$$

或ハ

$$f(x,y)=0$$

トナル. 依テ曲線ノ性質ヲ吟味スルニハ直交坐標或ハ極坐標ヲ用キテ之ヲ研究スルモ可ナリ. 只問題ノ性質上何レニテモ簡單ナル方ヲ選ブベキモノトス.

代數函數ニ依テ表ハサルヽ曲線ヲ代數曲線 (*Algebraic Curve*) 超越函數ニ依テ表ハサルヽモノヲ超越曲線 (*Transcendental C.*) ト云フ. 代數曲線ニ於テ一次式ハ直線ニシテ二次式ハ一般ニ圓錐曲線 (*Conic section*) トナルコト解析幾何ニ於テ已ニ知レル處ナリ.

64. 切線及法線

曲線 AB ハ方程式

$$y=f(x)$$

ニヨリテ表ハサルヽトス．曲線上ノ一點 $P(x_1,y_1)$ ニ於ケル y ノ x ニ關スル微係數ノ値ハ P ニ於ケル切線(*Tangent*) ガ x 軸トナス角 φ_1 ノ正切ニ等シ(§19)．即 $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$ ヲ以テ $x=x_1$, $y=y_1$ ナルトキノ $\frac{dy}{dx}$ ノ値トセバ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1=\tan\varphi_1.$$

P ニ於ケル切線 PT 上ノ任意ノ點 Q ノ坐標ヲ (x,y) トセバ

$$\tan\varphi_1=\frac{y-y_1}{x-x_1},$$

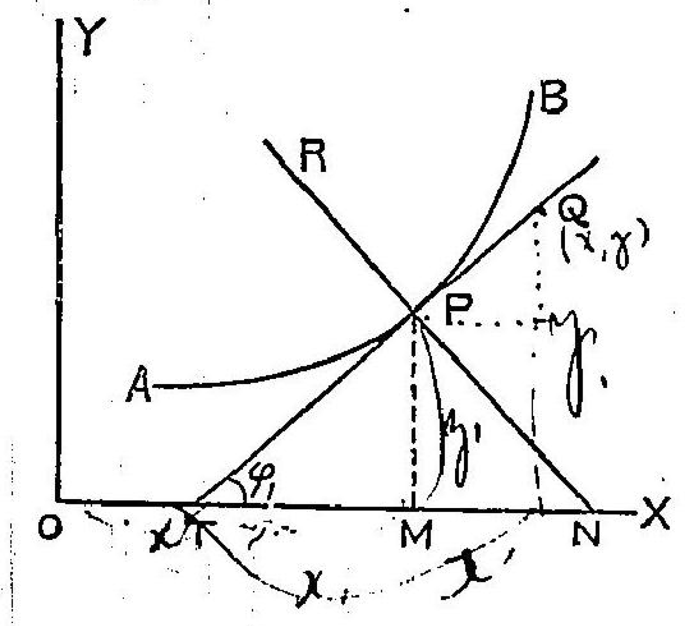
ナルニヨリ

$$y-y_1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_1(x-x_1)$$

コヽニ　$y_1=f(x_1)$.

コレ P 點ニ於ケル切線ノ方程式ナリ．

第十九圖



切點ニ於テ切線ト直交スル直線ヲ其點ニ於ケル法線(*Normal*)ト云フ．P 點ニ於ケル法線 PN 上ノ任意ノ點 R ノ坐標ヲ (x,y) トセバ

$$y-y_1=(x_1-x)\cot\varphi_1$$

ナルニヨリ

$$y-y_1=-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_1}(x-x_1)$$

ハ P 點ニ於ケル法線ノ方程式ナリ．

若シ曲線ハ陰函數ニヨリテ定メラレ

$$f(x,y)=0$$

ナルトキハ §36 ニヨリ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

ナルニヨリ

$$(y-y_1)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1+(x-x_1)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1=0,$$

ハ點 $P(x_1,y_1)$ ニ於ケル切線ノ方程式ニシテ

$$\frac{y-y_1}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1}=\frac{x-x_1}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1},$$

ハ點 $P(x_1,y_1)$ ニ於ケル法線ノ方程式ナリ．

切線及法線ガ x 軸ト交ル點ヲ夫々 T,N トシ PM ヲ x 軸ニ垂線トセバ MT ヲ次切線 (*Subtangent*), MN ヲ次法線 (*Subnormal*) ト云フ．而シテ

$$MP=y_1=MT\tan\varphi_1,$$

ナルニヨリ

$$MT=\frac{y_1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_1},$$

コレ $P(x_1,y_1)$ ニ於ケル次切線ノ長サナリ．又

$$MN=MP\tan N\hat{P}M=MP\tan\varphi_1,$$

ナルニヨリ

$$MN=y_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_1,$$

コレ P =於ケル次法線ノ長サナリ.

次=若シ AB ナル曲線ハ

$$r=\phi(\theta)$$

=ヨリテ表ハサルヽトキハ §39, I 例1 =ヨリ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta\frac{dr}{d\theta}+r\cos\theta}{\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\sin\theta},$$

ナル=ヨリ P ノ坐標ヲ r_1,θ_1 トセバ

$$x_1=r_1\cos\theta_1\ ,\quad y_1=r_1\sin\theta_1$$

∴ P =於ケル切線ノ方程式ハ

$$r\sin\theta-r_1\sin\theta_1=\frac{\sin\theta_1\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_1+r_1\cos\theta_1}{\cos\theta_1\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_1-r_1\sin\theta_1}(r\cos\theta-r_1\cos\theta_1),$$

即 $$r\left\{(\sin\theta\cos\theta_1-\sin\theta_1\cos\theta)\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_1-(\sin\theta\sin\theta_1+\cos\theta\cos\theta_1)r_1\right\}+r_1^2=0,$$

即 $$r\sin(\theta-\theta_1)\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_1-r_1\cos(\theta-\theta_1)+r_1^2=0.$$

或ハ $$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}\cos(\theta-\theta_1)+\left\{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}_1\sin(\theta-\theta_1).$$

同樣= $P(r_1,\theta_1)$ =於ケル法線ノ方程式ハ

$$r\sin\theta-r_1\sin\theta_1=\frac{r_1\sin\theta_1-\cos\theta_1\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_1}{r_1\cos\theta_1+\sin\theta_1\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_1}(r\cos\theta-r_1\sin\theta_1),$$

或ハ $$r\left\{(\sin\theta\sin\theta_1+\cos\theta\cos\theta_1)\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_1+(\sin\theta\cos\theta_1-\cos\theta\sin\theta_1)r_1\right\}=r_1\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_1,$$

$$r\left\{\cos(\theta-\theta_1)\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_1+\sin(\theta-\theta_1)r_1\right\}=r_1\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_1,$$

即 $$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}\cos(\theta-\theta_1)+\frac{1}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_1}\sin(\theta-\theta_1).$$

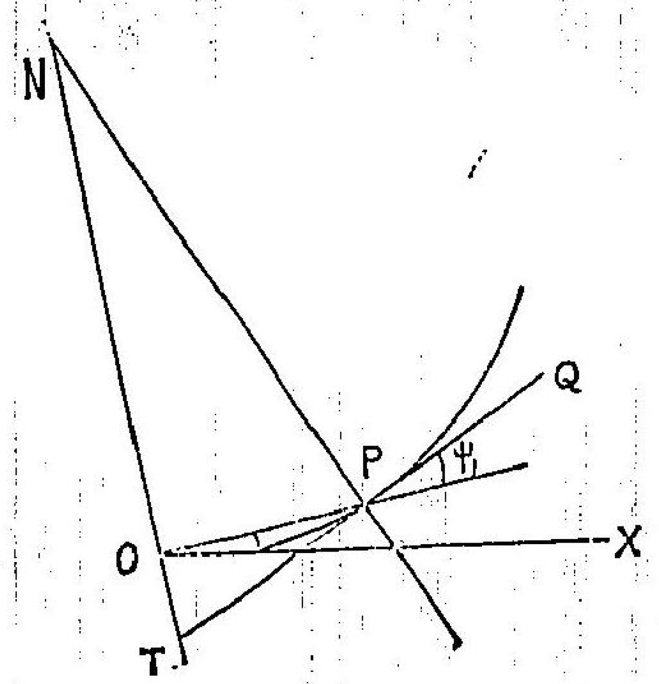
PT ヲ切線, PN ヲ法線トシ, 動徑 OP ト切線トノナス角ヲ ψ_1 トセバ

$$\psi_1=\varphi_1-\theta_1,$$

∴ $$\tan\psi_1=\frac{\tan\varphi_1-\tan\theta_1}{1+\tan\varphi.\tan\theta_1},$$

又 $$\tan\varphi_1=\frac{\sin\theta_1\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_1+r_1\cos\theta_1}{\cos\theta_1\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_1-r_1\sin\theta_1},$$

第 二 十 圖



コノ二式ヨリ $\tan\varphi_1$ ヲ消去セバ直=

$$\tan\psi_1=\frac{r_1}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_1},$$

ナル結果ヲ得ベシ.

極 O ヲ過キ動徑 OP =垂直ナル直線ヲ引キ切線及法線ト夫々 T 及 N =於テ交ルトセバ OT ヲ極次切線 (*Polar subtangent*) ト云ヒ, ON ヲ極次法線 (*Polar subnormal*) ト云フ.

$$OT=r_1 tan\phi_1=\frac{r_1^2}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_1},$$

$$ON=r_1 cot\phi_1=\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_1.$$

直交坐標ト極坐標トニ於ケル次切線及次法線ハ定義ニ於テ大差アルコトヲ注意スルヲ要ス.

〔例〕1.　　$y^2=2ax$,　　(1)

$y^3-3axy+x^3=0$,　　(2)

ナル二曲線ノ交角ヲ求ム.

二曲線ノ交點ノ坐標ヲ求ムレバ

(i) $\left.\begin{aligned}x&=a\sqrt[3]{2}\\ y&=a\sqrt[3]{4}\end{aligned}\right\}$　　(ii) $\left.\begin{aligned}x&=0\\ y&=0\end{aligned}\right\}$

而シテ曲線 (1) ノ切線ト x 軸トノナス角ヲ φ_1, (2) ノ切線ト x 軸トノナス角ヲ φ_2 トセバ曲線ノ交角ハ交點ニ於ケル切線間ノ角ニテ計ルニヨリ之ヲ α トセバ

$$tan\alpha=tan(\varphi_1-\varphi_2)$$

(i)　$tan\varphi_1=\frac{a}{y}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$　　$tan\varphi_2=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}=0$

$\therefore$　$tan\alpha=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$　　$\therefore$　$\alpha=tan^{-1}\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

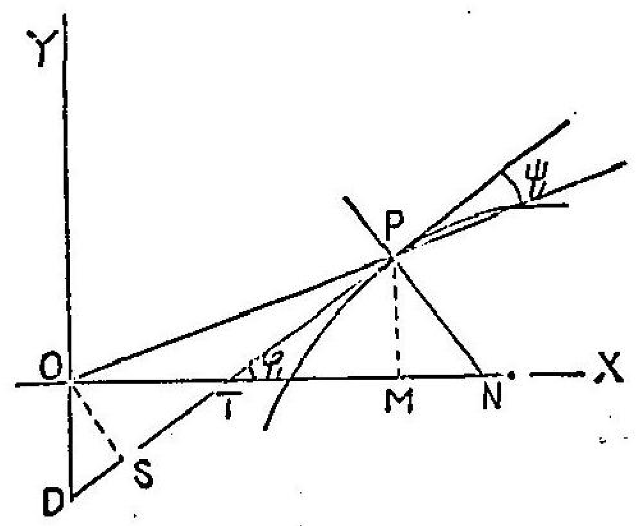
(ii)　$tan\varphi_1=\infty$,　$\varphi_1=\frac{\pi}{2}$,

$tan\varphi_2=0$ 或ハ ∞,　$\varphi_2=0$ 或ハ $\frac{\pi}{2}$　　(§53, 例 4),

$\therefore$　$\alpha=0$, 或ハ $\alpha=\frac{\pi}{2}$

〔例〕2.　P 點ニ於ケル切線ガ x 軸及 y 軸ト夫々 T 及 D ニテ交リ, O ヨリ垂線 OS ヲ引クヤ OT, OD, PT, OS 及 PN ノ長サヲ求ム.

第二十一圖



切線ノ方程式ニ $y=0$ ト置ケバ $x=OT$ トナルニヨリ

$$-y_1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_1(OT-x_1)$$

$$\therefore\quad OT=x_1-\frac{y_1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_1}.$$

$x=0$ ト置ケバ $y=OD$,

$$\therefore\quad OD=y_1-x_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_1.$$

又　$PT=\sqrt{MP^2+MT^2}$　(之ヲ切線ノ長サト云フコトアリ)

$$=\sqrt{y_1^2+\frac{y_1^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^2}}=y_1\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)_1}$$

$PN=\sqrt{MP^2+MN^2}$　(之ヲ法線ノ長サト云フコトアリ)

$$=\sqrt{y_1^2+y_1^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=y_1\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^2}$$

次ニ　$OS=OT sin\widehat{MTP}=OT\cdot\frac{tan\widehat{MTP}}{\sqrt{1+tan^2\widehat{MTP}}}$,

$$=\left\{x_1-\frac{y_1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_1}\right\}\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^2}},=\frac{x_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_1-y_1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^2}}.$$

又 P ノ坐標ヲ r_1, θ_1 トセバ

$$OS = r_1 \sin O\hat{P}T = r_1 \sin\psi_1 = r_1 \frac{\tan\psi_1}{\sqrt{1+\tan^2\psi_1}},$$

然ルニ　$$\tan\psi_1 = \frac{r_1}{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)_1}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_1^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_1^2,$$

$$= u_1^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)_1^2, \quad u = \frac{1}{r}$$

【例】3. 切線ト兩軸間トニ包マルヽ面積 A ガ極大或ハ極小ナルベキ切點ヲ定メヨ. 但 $\dfrac{d^2y}{dx^2} \neq 0$ トス

$$2A = OT.OD.$$

所要ノ點 P ノ坐標ヲ x, y トセバ前例ニヨリ

$$2A = \left(x - y\frac{dx}{dy}\right)\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\left(y - x\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\dfrac{dy}{dx}}.$$

$$\therefore \quad 2\frac{dA}{dx} = \frac{-2\left(y - x\dfrac{dy}{dx}\right)x\dfrac{dy}{dx}\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{d^2y}{dx^2}\left(y - x\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}.$$

$$= -\frac{\left(y - x\dfrac{dy}{dx}\right)\left(y + x\dfrac{dy}{dx}\right)\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}.$$

假定ニヨリ $\dfrac{d^2y}{dx^2} \neq 0$,

$\therefore$ $\dfrac{dA}{dx} = 0$ ナルトキハ

(i) $y - x\dfrac{dy}{dx} = 0$,　(ii) $y + x\dfrac{dy}{dx} = 0$.

(i) ニ於テハ切線ハ原點ヲ通過スベキニヨリ面積ハ 0 トナル.

(ii) $y + x\dfrac{dy}{dx} = 0$ トセバ

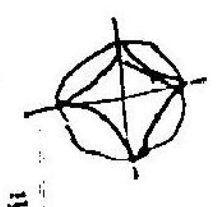
$$OT = x - y\frac{dx}{dy}, \quad OD = y - x\frac{dy}{dx} \qquad (\text{前例}).$$

ナルニヨリ

$$x = 2.OT, \quad y = 2.OD$$

即一般ニ面積ガ極大或ハ極小ナルトキハ兩軸間ニ挾マルヽ切線ガ切點ニ於テ二等分サル.

【例】4. 曲線 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$



ノ切線ガ兩軸間ニ挾マレタル部分ノ長サハ a ニシテ原點ヨリ切線ニ引ケル垂線ノ長サハ $\sqrt[3]{axy}$ ナルコトヲ證セ.

例 2. ニヨリ

$$OT = x + y\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad OD = y + x\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \because \quad \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

$$\therefore \quad OT = x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) = a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}, \quad OD = y^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) = a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}.$$

$\therefore$ 兩軸間ニ挾マレタル切線ノ長サ

$$= \sqrt{OT^2 + OD^2} = a^{\frac{2}{3}}\sqrt{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}} = a.$$

又 原點ヨリ切線ニ引ケル垂線ノ長サ OS ハ

$$OS=\frac{x\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}+y}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}}}=(axy)^{\frac{1}{3}}$$

〔例〕5.　拋物線 $y^2=4ax$ 上ノ一點 P ＝於ケル法線ガ準線 (*Directrix*) ト Q ＝於テ交リ，切線ガ R ＝於テ交ルトキ (i) QR ノ極小，(ii) 三角形 PQR ノ極小ヲ求ム．

P ノ坐標ヲ x,y トシ，切線或ハ法線上ノ任意ノ點ノ坐標ヲ ξ,η トセバ

$$y\eta=2a(x+\xi)\ ,\qquad \text{切線}$$

$$2a(\eta-y)+(\xi-x)y=0.\qquad \text{法線}$$

Q ＝於テハ $\xi=-a$，$2a\eta=y(x+3a)$，

R ＝於テハ $y\eta=2a(x-a)$，

$$\therefore\qquad QR=\frac{1}{y}.2(x+a)^2=\frac{(x+a)^2}{\sqrt{ax}}\ ,$$

$$\therefore\qquad \frac{dQR}{dx}=\frac{2(a+x)}{\sqrt{ax}}-\frac{(a+x)^2}{2x\sqrt{ax}}=0$$

$\therefore$　QR ノ極小＝對シテハ $x=\dfrac{a}{3}$.

次＝　$\overset{\triangle}{PQR}=\dfrac{1}{2}QR.(x+a)=\dfrac{(x+a)^3}{2\sqrt{ax}}$

$\therefore$　極小＝對シテハ $3(x+a)^2=\dfrac{(x+a)^2}{2x}$　$\therefore$　$x=\dfrac{a}{5}$.

〔例〕6.　楕圓＝於テ切線ト動徑トノ間ノ角ヲ求メヨ．(i) 焦點ガ極ナルトキ，(ii) 中心ガ極ナルトキ，(iii) 其角ノ極大ヲ求ム．

(i)　$\dfrac{l}{r}=1+e\cos\theta$，　$l=a(1-e^2)$.

$$\tan\psi=\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}=\frac{l}{re\sin\theta}=\frac{1+e\cos\theta}{e\sin\theta}=\frac{1}{e}(\operatorname{cosec}\theta+e\cot\theta).$$

又　$$\frac{d\tan\psi}{d\theta}=\sec^2\psi\frac{d\psi}{d\theta}=\frac{1}{e}(-\operatorname{cosec}\theta\cot\theta-e\operatorname{cosec}^2\theta)\ ,$$

$\therefore$　ψ ノ極大＝對シテハ $\cos\theta=-e$，

然ルトキハ　$$e\sec^2\psi\frac{d^2\psi}{d\theta^2}=\operatorname{cosec}\theta.\cot^2\theta+\operatorname{cosec}^3\theta+2e\operatorname{cosec}^2\theta.\cot\theta\ ,$$

$$=\frac{e^2+1-2e^2}{\sin^3\theta}$$

$\therefore$　ψ ノ極大＝對シテハ $\sin\theta<0$，故＝　$\theta=\pi+\cos^{-1}e$，

而シテ　$\tan\psi=-\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e}$　或ハ　$\psi=\pi-\cos^{-1}e$，

$$r=\frac{l}{1-e^2}=a\ ,$$

故＝短軸ノ負ノ終點ナリ．

(ii)　楕圓ノ方程式ハ

$$a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta=\frac{a^2b^2}{r^2}\ ,$$

$$\therefore\qquad (a^2-b^2)\sin\theta.\cos\theta\frac{d\theta}{dr}=-\frac{a^2b^2}{r^3}\ ;$$

$$\therefore\qquad (a^2-b^2)\tan\psi=-\frac{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}{\sin\theta.\cos\theta}=-(a^2\tan\theta+b^2\cot\theta)\ ,$$

$\therefore$　ψ ノ極大＝對シテハ

$$(a^2-b^2)\sec^2\psi\frac{d\psi}{d\theta}=-a^2\sec^2\theta+b^2\operatorname{cosec}^2\theta=0$$

$$\therefore\qquad \tan\theta=\pm\frac{b}{a}\ ,$$

然ルヰニハ

$$(a^2-b^2)\sec^2\psi\frac{d^2\psi}{d\theta^2}=-2a^2\sec^2\theta\tan\theta-2b^2\mathrm{cosec}^2\theta\cot\theta$$

∴ ψ ノ極大ニ對シテハ

$$\tan\theta=\frac{b}{a}\ ,\quad \frac{\sin\theta}{b}=\frac{\cos\theta}{a}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ,$$

$$\therefore \qquad r^2=\frac{a^2+b^2}{2}\ ,$$

即等共軛徑ノ尖端ナリ.

【例】7. $r=a(1+\cos\theta)$ ナルトキ S ノ軌跡ヲ求ム.

S ノ坐標ヲ r,θ トシ, P ノ坐標ヲ r_1,θ_1 トセバ (第 21 圖).

$$\theta+\theta_1=\frac{\pi}{2}-\psi_1\ ,\quad r=r_1\sin\psi_1$$

又 $$1=-a\sin\theta\frac{d\theta}{dr}\ \therefore\ \tan\psi_1=-\cot\frac{\theta_1}{2}\ \therefore\ \psi_1=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta_1}{2}\ ,$$

$$\therefore\quad \theta=-\frac{3\theta_1}{2}\ ,\ r=r_1\cos\frac{\theta_1}{2}=2a\cos^3\frac{\theta_1}{2}=2a\cos^3\frac{\theta}{3}\ ,$$

$$\therefore\quad r=2a\left(\cos\frac{\theta}{3}\right)^3$$

ハ S 點ノ軌跡トナル.

65. 漸近線

$$y=f(x) \qquad (1)$$

ハ無限大マデ延長セル曲線ヲ表ハストス. 此曲線上ノ點ヨリ直線

$$y=\alpha x+\beta \qquad (2)$$

ニ引ケル垂線ノ長サハ其點ガ原點ヨリ曲線上ヲ無限ニ遠ザカルニ從

ヒ無限ニ小ニナルトキハ直線(2)ヲ曲線(1)ノ漸近線 (*Asymptote*) ト云フ.

I. y 軸ニ平行ナル直線

$$x=a$$

ハ曲線 (1) ノ漸近線ナリト假定セバ

$$\lim_{x=a} f(x)=\infty$$

ナラザルベカラズ. 故ニ斯ノ如キ數 a ヲ見出シ得タルヰハ y 軸ニ平行ナル漸近線ノ方程式ヲ求メ得ベシ.

【例】1. $x(x^2+y^2)=a(x^2-y^2)$. $a>0$ (*Strophoide*).

コノ式ヲ書キ直セバ

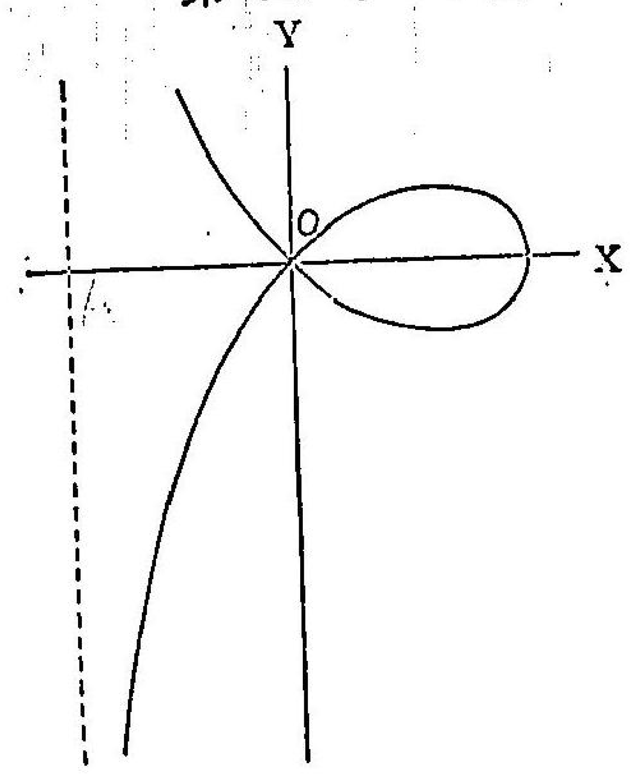
$$y=\pm x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\ .$$

$$\therefore \qquad x=-a \quad ノヰ$$

$$y=\infty$$

ナルニヨリ

第二十二圖



$$x+a=0$$

ハ漸近線ナリ.（第22圖參照).

【例】2.　$(x^2-1)y^2+2x^2y+(x^2-1)=0.$

$$y=\frac{-x^2\pm\sqrt{x^2-(x^2-1)^2}}{x^2-1}$$

ナルニヨリ

$$x=\pm1$$

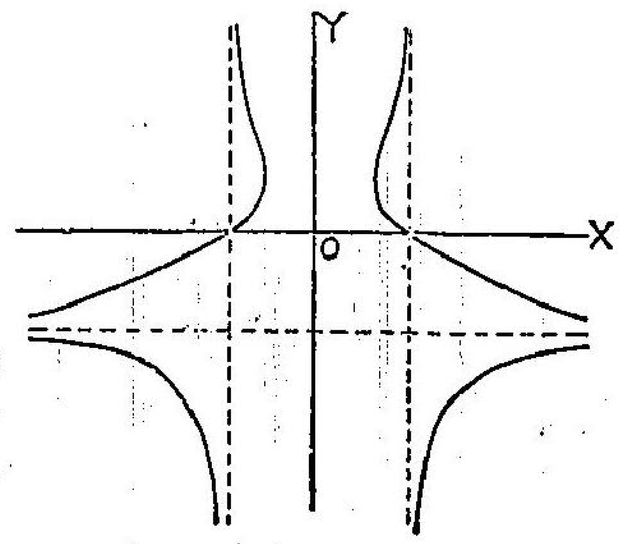
ナル二漸近線アリ

又　$x^2=\dfrac{y^2+1}{(y+1)^2}$

トナルニヨリ　$y+1=0$

ハ x 軸ニ平行ナル漸近線ナリ.

第二十三圖



II.　次ニ坐標軸ニ平行ナラザル直線

$$y=\alpha x+\beta,$$

ハ　$y=f(x)$

ノ漸近線ナリト假定セバ漸近線ノ定義ヨリ直ニ同一ノ x ノ値ニ對スル曲線上ノ點ノ縱坐標ト直線上ノ點ノ縱坐標トノ差ハ x ガ無限大ナルニ從テ無限ニ小サクナルベシ. 故ニ

$$\lim_{x=\infty}\{f(x)-(\alpha x+\beta)\}=0,$$

依テ　$\alpha=\lim\limits_{x=\infty}\left\{\dfrac{f(x)-\beta}{x}\right\}=\lim\limits_{x=\infty}\dfrac{f(x)}{x},$

即　$\alpha=\lim\limits_{x=\infty}\dfrac{f(x)}{x},$

∴　$\beta=\lim\limits_{x=\infty}\{f(x)-\alpha x\}$

ニヨリテ α,β ノ値ヲ求ムレバ漸近線ノ方程式ハ書クヲ得.

【例】1.　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,$　　双曲線.

即　$y=\pm\dfrac{b}{a}x\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{x}\right)^2}$

$$=\pm\frac{b}{a}x\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{a}{x}\right)^4-\cdots\cdots\right\},\quad x>a,$$

(§48, 例).

∴　$\alpha=\lim\limits_{x=\infty}\left\{\pm\dfrac{b}{a}\left(1-\dfrac{1}{2}\dfrac{a^2}{x^2}-\dfrac{1}{8}\dfrac{a^4}{x^4}-\cdots\cdots\right)\right\}=\pm\dfrac{b}{a},$

$\beta=\lim\limits_{x=\infty}\left\{\pm\dfrac{b}{a}x\left(1-\dfrac{1}{2}\dfrac{a^2}{x^2}-\cdots\cdots\right)\mp\dfrac{b}{a}x\right\}=0.$

∴　$y=\pm\dfrac{b}{a}x$

ハ二漸近線ナリ. 之レ解析幾何學ニテ已ニ知レル所ナリ.

【例】2.　$x^3-x^2y+y=0,$

$$y=\frac{x^3}{x^2-1}=x+\frac{x}{x^2-1},$$

∴ 第一ニ　$x^2-1=0$ ノ時　$y=\infty$　ナリ

∴　$x=\pm1,$ ハ二漸近線ナリ.

又　$\alpha=\lim\limits_{x=\infty}\left\{1+\dfrac{1}{x^2-1}\right\}=1,$

$\beta=\lim\limits_{x=\infty}\left\{x+\dfrac{x}{x^2-1}-x\right\}=0.$

∴　$y=x$　ハ漸近線ナリ

III. 代數曲線 $y=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_m}=\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$,

ノ漸近線ハ特別ノ方法ニヨリテ求メ得ベシ. 即

(i) $n<m$ ナルトキニハ若シ

$$y=\alpha x+\beta$$

ナル漸近線アリト假定スルトキハ262頁ニヨリ

$$\alpha=\lim_{x=\infty}\left(\frac{\varphi(x)}{x\psi(x)}\right)=0,$$

$$\beta=\lim_{x=\infty}\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}-0\right)=0,$$

依テ此場合ニハ

$$y=0$$

ハ一漸近線ナリ.

(ii) $n=m$ ナルトキハ

$$y=\frac{a_0}{b_0}+\frac{\varphi_1(x)}{\psi(x)}$$ ノ φ_1 ハ $n-1$ 次

ナルニヨリ

$$y=\frac{a_0}{b_0}$$ ハ一漸近線ナリ

(iii) $n=m+1$ ノトキニハ實際除法ヲ行ヘバ

$$y=\frac{a_0}{b_0}x+\frac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0^2}+\frac{\varphi_2(x)}{\psi(x)},\ \varphi_2 \text{ ハ } n-2 \text{ 次}.$$

ナルニヨリ

$$\alpha=\lim_{x=\infty}\left\{\frac{a_0}{b_0}+\frac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0^2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{\varphi_2(x)}{x\psi(x)}\right\}=\frac{a_0}{b_0}$$

$$\beta=\lim_{x=\infty}\left\{\frac{a_0}{b_0}x+\frac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0^2}+\frac{\varphi_2(x)}{\psi(x)}-\frac{a_0}{b_0}x\right\}=\frac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0^2},$$

∴ $y=\dfrac{a_0}{b_0}x+\dfrac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0^2}$, ハ一漸近線ナリ.

(iv) $n=m+p$, (p ハ正整數) ナルトキハ

$$y=c_0x^p+c_1x^{p-1}+\cdots+c_p+\frac{\varphi_p(x)}{\psi(x)},\quad \varphi_p \text{ ハ } n-p-1 \text{ 次}$$

トナル. 今別ニ

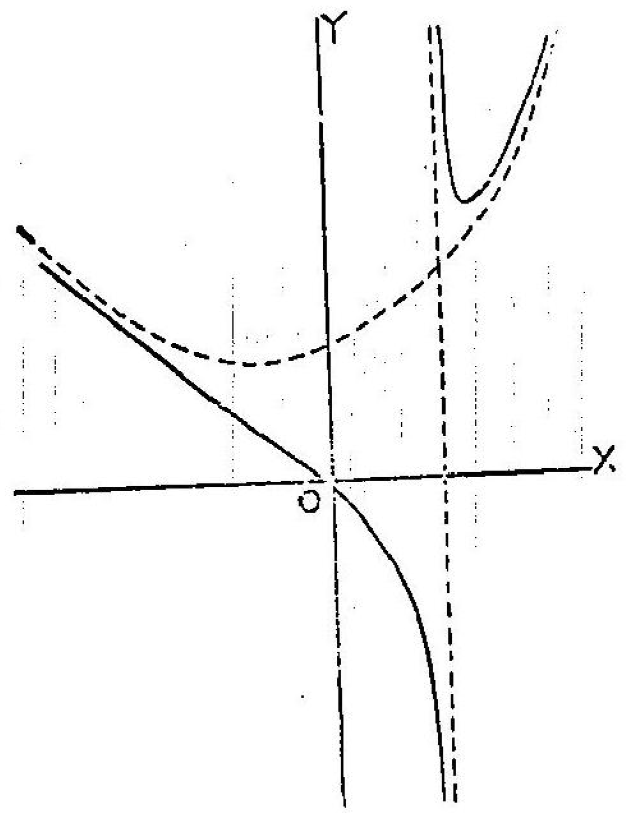
$$y_1=c_0x^p+c_1x^{p-1}+\cdots\cdots+c_p,$$

ナル曲線ヲ考フルニ

$$\lim_{x=\infty}(y-y_1)=\lim_{x=\infty}\left(\frac{\varphi_p(x)}{\psi(x)}\right)=0$$

ナルニヨリ, 與ヘラレタル曲線ト y_1 ナル他ノ曲線トハ同ジ x ノ値ニ對スル y ノ差ハ x ガ無限大ニナルニ從テ無限ニ小トナル. 斯クノ如キ曲線 y_1 ヲ與ヘラレタル曲線ノ漸近曲線 (*Curvilinear Asymptote*) ト云フ.

第二十四圖



【例】 $x^3-xy+y=0$,

即 $y=x^2+x+1+\dfrac{1}{x-1}$,

∴ $y=x^2+x+1$

ハ一漸近線ナリ. 又

$x-1=0$ ハ他ノ漸近線ナルコト明ナリ. (右圖)

IV. $\psi_p(x,y)$ ハ x 及 y ノ p 次ノ同時式ヲ表ハストキ, 代數曲線

$$\psi_n(x,y)+\psi_{n-1}(x,y)+\cdots+\psi_0(x,y)=0$$

ノ漸近線ハ $y=\alpha x+\beta$ ナリト假定ス

今 $\dfrac{y}{x}=z$

ト置クキハ

$$\psi_p(x,y)=x^p\psi_p(1,z)=x^pf_p(z).$$

ナルニヨリ上ノ曲線ノ方程式ハ

$$x^nf_n(z)+x^{n-1}f_{n-1}(z)+\cdots\cdots+f_0(z)=0,$$

トナル. 或ハ

$$f_n(z)+\frac{1}{x}f_{n-1}(z)+\cdots\cdots+\frac{1}{x^n}f_0(z)=0.$$

トナル. 故ニ $x=\infty$ ノキ z ハ有限ナル極限値ヲ有スルトキハ

$$\alpha=\lim_{x=\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x=\infty}z,$$

ナルニヨリ

$$f_n(\lim z)=0,$$

即 $$f_n(\alpha)=0.$$

トナル. 故ニ α ハ最高次ノ同次式ヲ x^n ニテ除シテ得タル式ヲ $\frac{y}{x}$ 即 z ニ付テ解クキハ得ラルベシ. 今斯クシテ求メ得タル α ノ値ニ付テハ

$$z=\frac{y}{x}=\frac{\alpha x+\beta}{x}=\alpha+\frac{\beta}{\alpha},$$

ナルニヨリ $x=\infty$ ナル所ニテハ

$$f_n\left(\alpha+\frac{\beta}{x}\right)+\frac{1}{x}f_{n-1}\left(\alpha+\frac{\beta}{x}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{x^n}f_0\left(\alpha+\frac{\beta}{x}\right)=0$$

ト置クヲ得ベシ. §44 てーらるノ定理ヲ各項ニ應用シテ之ヲ $\frac{1}{x}$ ノ昇冪ニ列ブルトキハ

$$f_n(\alpha)+\frac{\beta}{x}f_n'(\alpha)+\frac{1}{2!}\left(\frac{\beta}{x}\right)^2f_n''(\alpha)+\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{x}f_{n-1}(\alpha)+\frac{\beta}{x^2}f'_{n-1}(\alpha)+\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{x^2}f_{n-2}(\alpha)+\cdots\cdots\cdots$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots=0,$$

然ルニ $f_n(\alpha)=0$ ナルニヨリ $x=\infty$ ニ於テ

$$\frac{1}{x}\{\beta f_n'(\alpha)+f_{n-1}(\alpha)\}+\frac{1}{x^2}\left\{\frac{\beta^2}{2}f''_n(\alpha)+\beta f''_{n-1}(\alpha)+f_{n-2}(\alpha)\right\}+\cdots\cdots\cdots=0.$$

即 $$\beta f_n'(\alpha)+f_{n-1}(\alpha)=0,$$

或ハ $$\beta=-\frac{f_{n-1}(\alpha)}{f_n'(\alpha)}.$$

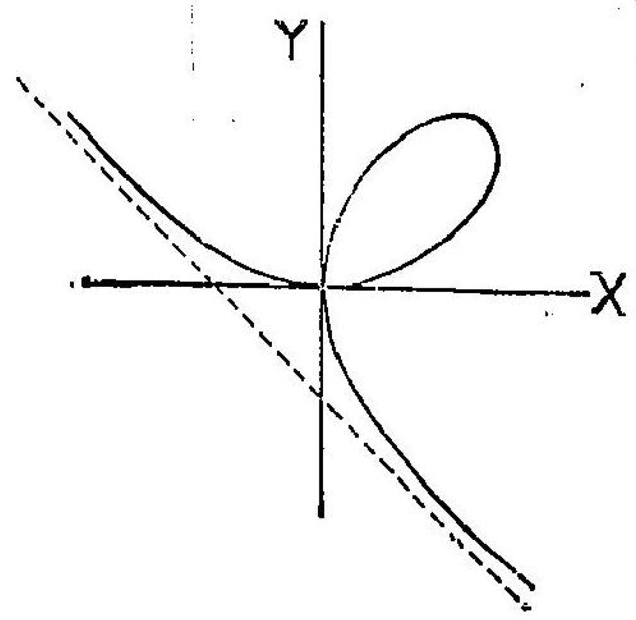
ニヨリテ β ハ定マル. 若シ $f_n'(\alpha)$, $f_{n-1}(\alpha)$ ハ共ニ 0 ナルトキハ

$$\beta^2f_n''(\alpha)+2\beta f'_{n-1}(\alpha)+2f_{n-2}(\alpha)=0,$$

ヨリ β ノ二ツノ値ヲ得ベシ.

【例】1. $x^3-3axy+y^3=0$, $a>0$. (Cartesian Blatt.)

第二十五圖



$$\psi_3=x^3+y^3=x^3(1+z^3)$$

$$\therefore\quad f_3=1+z^3$$

$$\psi_2=-3axy=x^2(-3az)$$

$$\therefore\quad f_2=-3az$$

$$\therefore\quad f_3=1+z^3=0$$

ト置クトキハ $z=-1$.

∴ $\alpha=-1$,

又 $f_3'=3z^2$ ∴ $f_3'(\alpha)=3$,

$f_2(\alpha)=3a$,

∴ $\beta=-a$,

∴ $x+y+a=0$ ハ漸近線ナリ

【例】2. $(x+a)y^2=(y+b)x^2$,

$\varphi_3=xy^2-yx^2$, $f_3(z)=z^2-z$;

$\varphi_2=ay^2-bx^2$, $f_2(z)=az^2-b$,

∴ $f_3=z^2-z=0$ ト置ケバ $z=0$, $z=1$.

∴ $\alpha=0$ 或ハ $\alpha=1$.

又 $f_3'(0)=-1$, $f_2(0)=-b$ ナルニヨリ

$\beta=-b$

∴ $y+b=0$ ハ一漸近線ナリ.

又 x ト y ト及同時ニ a ト b トヲ交換スルトキハ同勢ノ式ヲ得ルニヨリ

$x+a=0$ モ一漸近線ナリ.

次ニ $f_3'(1)=1$, $f_2(1)=a-b$,

∴ $\beta=b-a$,

∴ $y=x+b-a$ ハ一漸近線ナリ.

【例】3. $x^5+y^5-2c^2x^2y=0$,

$\varphi_5=x^5+y^5$, $f_5(z)=z^5+1$,

$\varphi_3=-2c^2x^2y$, $f_3(z)=-2c^2z$.

ナルニヨリ, $f_5(z)=z^5+1=0$ ト置ケバ

$z=-1$ 即 $\alpha=-1$.

又 $f_5'(z)=5z^4$

∴ $f_5'(-1)=5$,

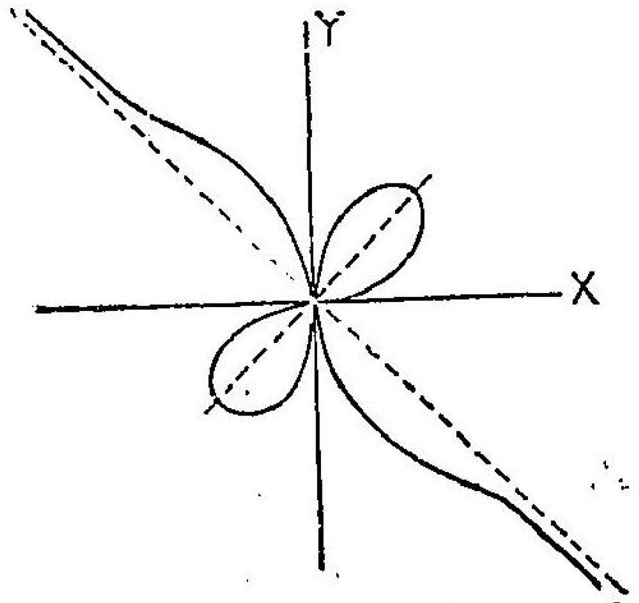
而シテ $f_4=0$ ナルニヨリ

$\beta=0$,

∴ $y+x=0$ ハ

漸近線ナリ. (第26圖)

第二十六圖



V. 次ニ曲線ハ極方程式

$r=\phi(\theta)$

ニ依テ表ハサルヽトス. TS ハ其漸近線トス. P ノ坐標ヲ (r,θ) トス. $x\hat{TS}=\alpha$ トス

極ヨリ漸近線ニ平行線 OQ ヲ引キ P ヨリ OQ ニ垂線ヲ引キ之ヲ PQ トスレバ

$PQ=r\sin(\alpha-\theta)$.

OQ ト TS トノ垂線距離ヲ c トセバ

$$\lim_{\theta=\alpha}\{r\sin(\alpha-\theta)\}=c$$

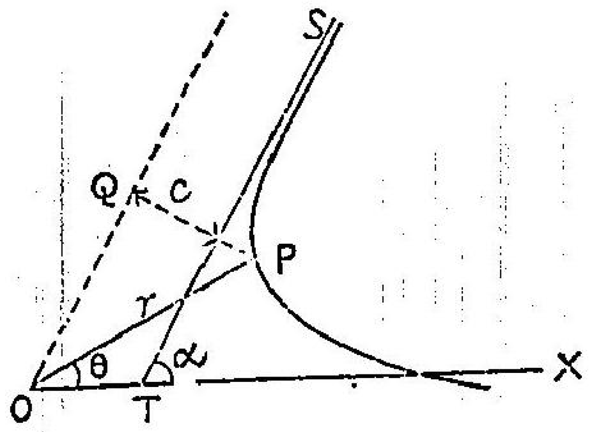
ナルニヨリ

$$\lim_{\theta=\alpha}\phi(\theta)=\infty,$$

ヨリ α ヲ求メ次ニ

$$c=\lim_{\theta=\alpha}\{\phi(\theta)\sin(\alpha-\theta)\},$$

第二十七圖



ニヨリテ c ヲ定ムルトキハ

$$r\sin(\alpha-\theta)=c,$$

ハ漸近線ノ方程式ナリ.

【例】 $r=\dfrac{a}{\theta}$, 双曲螺線. (*Hyperbolic spiral*).

$\theta=0$ ノ𪜈 $r=\infty$,

∴ $\alpha=0$.

$$\lim_{\theta=0}\frac{a}{\theta}\sin(0-\theta)=-\lim_{\theta=0}\frac{a\sin\theta}{\theta}=-a.$$

∴ $r\sin\theta=-a$

ハ漸近線ノ方程式ナリ.

66. 曲線上ノ特別點

坐標軸ノ位置及方向ノ如何ニ關セズ, 曲線ニ固有ナル特別ノ形ヲ取ル點アルトキ, コノ點ヲ其曲線ノ特別點 (*Singular points*) ト云フ.

I. 彎點. (*Point of Inflexion*).

曲線 $y=f(x)$

上ノ點 $P(x_1,y_1)$ ニ於ケル切線ノ方程式ハ §64 ニヨリ

$$y=y_1+f'(x_1)(x-x_1).$$

次ニ上ノ曲線上ノ他ノ點 Q ヲ取リ, 其坐標ヲ (x_1+h, y_c) トセバ §44 ニヨリ

$$y_c=y_1+hf'(x_1)+\frac{h^2}{2}f''(x_1+\theta h)\quad,\quad 0<\theta<1$$

又 P ニ於ケル切線ノ $x=x_1+h$ ナル點ノ縦線ヲ y_t トセバ上ノ切線

ノ式ヨリ直ニ

$$y_t=y_1+hf'(x_1).$$

$$\therefore\quad y_c-y_t=\frac{h^2}{2}f''(x_1+\theta h).$$

極大極小ノ𪜈ト全ク同一論法ニヨリ, h ヲ充分ニ小サク取ルコトニヨリテ y_c-y_t ノ符號ハ $f''(x_1)$ ニヨリテ定マルヲ知ル.

∴ 若シ $f''(x_1)>0$ ナル𪜈ハ

$$y_c>y_t$$

ニシテ P 點ニ於ケル曲線ハ其點ニ於ケル切線ノ上方ニアリ. 之ヲ上方ニ凹 (*Concave upwards*) 或ハ下方ニ凸 (*Convex downwards*) ト云フ.

若シ $f''(x_1)<0$ ナル𪜈ハ

$$y_c<y_t$$

ニシテ P 點ニ於ケル曲線ハ切線ノ下方ニアリ. 即下方ニ凹或ハ上方ニ凸ナリ.

曲線ガ其凹凸ヲ急ニ變ズル點アル𪜈, 換言スレバ曲線上ノ或點ニ於ケル切線ハ其點ニ於テ曲線ヲ切ルトキハ其點ヲ彎點ト云フ.

テーラーノ定理ニヨリ y_c-y_t ヲ展開スルトキハ直ニ

$$y_c-y_t=\frac{h^2}{2!}f''(x_1)+\frac{h^3}{3!}f'''(x_1+\theta' h)\quad,\quad 0<\theta'<1.$$

トナル. h ヲ充分ニ小サク取ル𪜈ハ其正負ニ關セズ, y_c-y_t ノ符號ハ $f''(x_1)$ ニヨリテ定マルコト前ノ如シ. 故ニ若シ $f''(x_1)$ ガ 0 ナラザルトキハ $x=x_1$ ニ於テ y_c-y_t ノ値ハ h ノ正負ニ從テ其符號ヲ變ズル能ハズ. 故ニ若シ y_c-y_t ハ h ノ正負ニ從テ其符號ヲ變ズル

トキ即 $x=x_1$ ナル點ハ彎點ナルタメニハ

$$f''(x_1)=0\,,$$

ナラザルベカラズ. 若シ此條件ガ滿足サルヽトキハ

$$y_c-y_t=\frac{h^3}{3!}f'''(x_1+\theta' h)$$

ナルニヨリ若シ $f'''(x_1)$ ガ 0 ナラザルトキハ h ノ正負ニヨリ y_c-y ノ符號ヲ變ズベシ. 故ニ

$$\boldsymbol{f''(x_1)=0} \quad \text{ニシテ} \quad \boldsymbol{f'''(x_1)\neq 0}\,,$$

ナルトキハ (x_1,y_1) ハ彎點ナリ.

若シ $f''(x_1), f'''(x_1)$ ガ共ニ 0 ナルトキハ $x=x_1$ ナル點ハ彎點ナルタメニハ極大極小ノ時ニ論ゼル如ク $f^{\text{IV}}(x_1)$ ハ亦 0 ナラザルベカラザルコトヲ証シ得ベシ. 一般ニ第二次微係數以上ハ漸次ニ 0 ニシテ最初ニ 0 ナラザル微係數ハ奇數次ナルトキハ其點ハ彎點ナリ.

若シ曲線ノ式ハ極坐標ニ依テ表ハサルヽトキ

$$r=\phi(\theta)\,,$$

此上ノ一點 $P(r_1,\theta_1)$ ニ於ケル切線ノ方程式ハ §64 ニヨリ

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\theta_1}\cos(\theta-\theta_1)+\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)_1\sin(\theta-\theta_1)\,,$$

今 $\theta=\theta_1+h$ ナル方向ニ於ケル此切線ノ動徑ヲ r_t 曲線ノ動徑ヲ r_c トセバ §44 ニヨリ

$$\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r_1}+h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)_1+\frac{h^2}{2!}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)_1$$
$$+\frac{h^3}{3!}\frac{d^3}{d\theta^3}\left(\frac{1}{r}\right)_1+\cdots\cdots,$$

又 $$\frac{1}{r_t}=\frac{1}{r_1}\cosh+\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)_1\sinh.$$

然ルニ §49 ニヨリ

$$\cos h=1-\frac{h^2}{2!}+\frac{h^4}{4!}-\cdots\cdots,$$

$$\sin h=h-\frac{h^3}{3!}+\frac{h^5}{5!}-\cdots\cdots.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{r_t}=\frac{1}{r_1}+h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)_1-\frac{h^2}{2!}\frac{1}{r_1}$$
$$-\frac{h^3}{3!}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)_1+\cdots\cdots,$$

故ニ $$\frac{1}{r_c}-\frac{1}{r_t}=\frac{h^2}{2!}\left\{\frac{1}{r_1}+\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)_1\right\}$$
$$+\frac{h^3}{3!}\left\{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)_1+\frac{d^3}{d\theta^3}\left(\frac{1}{r}\right)_1\right\}+\cdots\cdots,$$

故ニ h ヲ充分ニ小サク取ルトキハ此式ノ右邊ハ第一項ニヨリテ其符號ハ定マル. 依テ

$$\frac{1}{r_1}+\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)_1 \gtrless 0\,,$$

ニ從テ $\frac{1}{r_c} \gtrless \frac{1}{r_t}$ 即 $r_t \gtrless r_c$.

即曲線ハ極ニ向テ夫々凹或ハ凸ナリ.

若シ $$\boldsymbol{\frac{1}{r_1}+\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)_1=0}\,,$$

即 $$\boldsymbol{r_1^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_1-r_1\left(\frac{d^2r}{d\theta^2}\right)_1=0}\,,$$

ニシテ $$\boldsymbol{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)_1+\frac{d^3}{d\theta^3}\left(\frac{1}{r}\right)_1\neq 0}$$

ナルトキハ點(r_1,θ_1)ハ一彎點ナリ.

是又同時ニ0ナルトキハ尚高次ノ微係數ヲ作リテ吟味スベキコト直交坐標ノ場合ト異ラズ. 一般ニ如何ナル結果ヲ得ルカハ直ニ豫想シ得ベキコトナレバ讀者自ラ之ヲ試ムルモ決シテ徒勞ニアラザルベシ.

【例】1. $y=\dfrac{x^3}{a^2+x^2}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x^2}{a^2+x^2}-\frac{2x^4}{(a^2+x^2)^2},$$

$\therefore$ $$(a^2+x^2)^2\frac{dy}{dx}=x^2(3a^2+x^2)\ ;$$

$\therefore$ $$(a^2+x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x(a^2+x^2)\frac{dy}{dx}=6a^2x+4x^3,$$

故ニ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ ナルトキハ

$$(a^2+x^2)^2\frac{d^3y}{dx^3}+(4a^2+12x^2)\frac{dy}{dx}=6a^2+12x^2,$$

$\therefore$ 彎點ニ對シテハ

(i) $x=0\ ;\quad y=0\qquad a^4\dfrac{d^3y}{dx^3}=6a^2$,

$\therefore$ 原點ハ一彎點ナリ.

(ii) $$x\left\{6a^2+4x^2-\frac{4x^2(3a^2+x^2)}{a^2+x^2}\right\}=0,$$

$\therefore$ $6a^4=2a^2x^2$, 即 $x=\pm\sqrt{3a^2}$,

コノトキハ $$(4a^2)^2\frac{d^3y}{dx^3}=42a^2-40a^2\frac{18}{16}=-3a^2,$$

故ニ $\left.\begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}\right\}$ 及 $\left.\begin{matrix}x=\pm a\sqrt{3}\\y=\pm\frac{3}{4}a\sqrt{3}\end{matrix}\right\}$ ノ三點ハ彎點ナリ.

【例】2. $y(a^4-b^4)=x(x-a)^4-xb^4,\qquad a\neq b.$

コノトキハ $$(a^4-b^4)\frac{d^2y}{dx^2}=8(x-a)^3+12x(x-a)^2,$$
$$=(x-a)^2(20x-8a),$$

$\therefore$ 彎點ニテハ $x=\dfrac{2a}{5}$ 或ハ $x=a$.

而シテ $$(a^4-b^4)\frac{d^3y}{dx^3}=36(x-a)^2+24x(x-a),$$

$\therefore$ $x=a$ ノトキ $\dfrac{d^3y}{dx^3}=0$,

$x=\dfrac{2a}{5}$ ノトキ $$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{a^2}{a^4-b^4}\left(36\times\frac{9}{25}-24\times\frac{6}{25}\right)$$

故ニ $x=\dfrac{2a}{5}$ ハ一彎點ナリ. $x=a$ ノ所ハ別ニ吟味スベシ.

即 $x=a$ ノトキハ

$$(a^4-b^4)\frac{d^4y}{dx^4}=96(x-a)+24x$$

ナルニヨリ$x=a$ノトキコレ0トナラズ故ニ $x=a$ ハ一彎點ニアラズ

【例】3. $y(x^2+a^2)=a^2(a-x)$ ニハ三彎點アリテ一直線上ニアルコトヲ証セ.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{a^2}{x^2+a^2}+\frac{2x(x-a)a^2}{(x^2+a^2)^2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(6x-2a)a^2}{(x^2+a^2)^2}-\frac{8x^2(x-a)a^2}{(x^2+a^2)^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{6a^2}{(x^2+a^2)^2}-\frac{(48x^2-24ax)a^2}{(x^2+a^2)^3}+\frac{48x^3(x-a)a^2}{(x^2+a^2)^4};$$

∴ 彎點=對シテハ

$$(x^2+a^2)(3x-a)=4x^2(x-a),$$

即 $$(x+a)(x^2-4ax+a^2)=0,$$

∴ $$x=-a\ ,\quad x=a(2\pm\sqrt{3}).$$

コレ等ノ x 別値=付テ $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ ハ 0 ナラザルコトハ直=知リ得ベシ

故=

$$\left.\begin{array}{l}x=-a\\ y\;=\;a\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=a(2+\sqrt{3})\\ y=-\dfrac{a(1+\sqrt{3})}{8+4\sqrt{3}}\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=a(2-\sqrt{3})\\ y=-\dfrac{a(1-\sqrt{3})}{8-4\sqrt{3}}\end{array}\right\},$$

ノ三點ハ彎點ナリ.

後ノ二點ヲ連結スル直線ハ

$$\frac{x-a(2+\sqrt{3})}{2a\sqrt{3}}=\frac{y-\dfrac{a}{4}(1-\sqrt{3})}{-\dfrac{a}{2}\sqrt{3}},$$

即 $$x-a(2+\sqrt{3})+4y-a(1-\sqrt{3})=0,$$

或ハ $$x+4y=3a,$$

是又 $x=a$, $y=-a$ =依テ滿足サル. 故=三點一直線上=アリ.

(一般=三次ノ代數曲線ガ三ツノ彎點ヲ有スルトキハ之等ハ一直線上=アリト云フ定理アリ. 例1 =於テモ三彎點ハ一直線上=アルコトヲ檢スベシ).

〔例〕4. $$r=\frac{\theta^2}{\theta^2-1},$$

$$\frac{1}{r}=1-\frac{1}{\theta^2},$$

∴ $$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{2}{\theta^3},\qquad \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{6}{\theta^4},$$

$$\frac{d^3}{d\theta^3}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{24}{\theta^5};$$

∴ $$\frac{1}{r}+\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{(\theta^2-3)(\theta^2+\ \ )}{\theta^4},$$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{d^3}{d\theta^3}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{2}{\theta^3}\left(1+\frac{12}{\theta^2}\right).$$

∴ $\theta^2=3$, $r=\dfrac{3}{2}$ ハ一彎點ナリ.

II. 重複點 (*Multiple points*).

曲線ハ同一點ヲ二度或ハ二度以上通過スルトキハ其點ヲ其曲線ノ重複點(或ハ倍點)ト云フ.

今特=整代數式=ヨリテ表ハサレタル曲線

$$f(x,y)=0,$$

=就テ論ゼントス. 今 $P(x_1,y_1)$ ナル點ハ重複點ナリトセバ P =於テ此曲線=二ツ以上ノ切線ヲ引クヲ得ベシ, 依テ $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_1$ ノ値ハ二ツ以上アルベシ. 然ル= §36 =ヨリ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1=-\frac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_1}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_1},$$

此=假定=ヨリテ $f(x,y)$ ハ整式ナル=ヨリ $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_1$, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_1$ ハ夫

夫確定ナル値ヲ有ス從テ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$ ノ値ハ一定シテ二ツアルコトナシ. 然レ圧若シ

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1=0,\quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1=0,$$

ナルトキハ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$ ハ不定形式トナルニヨリ §53 ニヨリ二ツ以上ノ値ヲ持チ得ベシ.

若シ $x=x_1$, $y=y_1$ ニ於テコノ二條件ガ滿足セラルヽトキハ §53 ニヨリ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$ ノ値ハ次ノ式ニヨリテ定マル,

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^2+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_1+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_1=0,$$

今

$$H=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2,$$

ト置クトキニ, 若シ

$$H_1<0,$$

ナルトキハ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$ ノ二ツノ値ハ共ニ實ニシテ等シカラズ, 故ニ此場合ニハ P ニ於テ此曲線ニ二ツノ切線ヲ引クヲ得ベシ. カヽル點 P ヲ此曲線ノ二重點 (*Double point*) 或ハ節點 (*Node*) ト云フ.

若シ $H_1=0$,

ナルトキハ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$ ノ二ツノ値ハ合シテ一トナル. 即 P ニ於ケル二切線ハ合シテ一トナル. 此時ニ若シ曲線ハ P ニ於テ終止シテ元ノ方向ニ戻ルトキニハ P ヲ尖點 (*Cusp*) ト云ヒ, 若シ P ニ於ケル曲線ノ二枝ハ切線ノ兩側ニアルトキニハ之ヲ第一種ノ尖點ト云ヒ, 若シ同側ニアルトキハ之ヲ第二種ノ尖點ト云フ.

又 $H_1=0$ ナル場合ニ曲線ハ P ニ於テ終止セザルトキハ曲線ノ二枝ハ P ニ於テ互ニ觸接ス. カヽル點 P ヲ切觸點 (*Point of Osculation*) ト云フ.

若シ $H_1>0$,

ナルトキハ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$ ノ値ハ全ク虛數ニシテ P 點ニ於テ實際切線ヲ引クヲ得ズ, 然レ圧假定ニヨリテ曲線ハ P ヲ過グ. カヽル點ヲ孤立點 (*Isolated point*) 或ハ共軛點 (*Conjugate point*) ト云フ.

若シ $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_1=0,\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_1=0,\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_1=0,$

ナルトキハ §53 ニヨリテ

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^3+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right)_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^2+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right)_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_1+\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_1=0,$$

ヨリ一般ニ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$ ノ三ツノ値ヲ得ベシ. カヽル點ヲ特ニ三重點 (*Triple point*) ト云フ.

【例】1. $f=y^2-x^2+x^4=0,$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-2x+4x^3,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2+12x^2,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0,$$

$x=0$, $y=0$ ノ時 $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, $f=0$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2.$$

∴ $$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0^2-1=0,$$

即 $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\pm 1$ ∴ 原點ハ二重點ナリ.

【例】2. $y^3-3axy+x^3=0$. (第25圖).

§53, 例4ニヨリ原點ニ於テ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=0,\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\infty.$$

∴ 原點ハ二重點ナリ

【例】3. $x^4-a^2yx^2+b^2y^3=0$ (第28圖)

§53. 例2ニヨリ原點ニ於テ

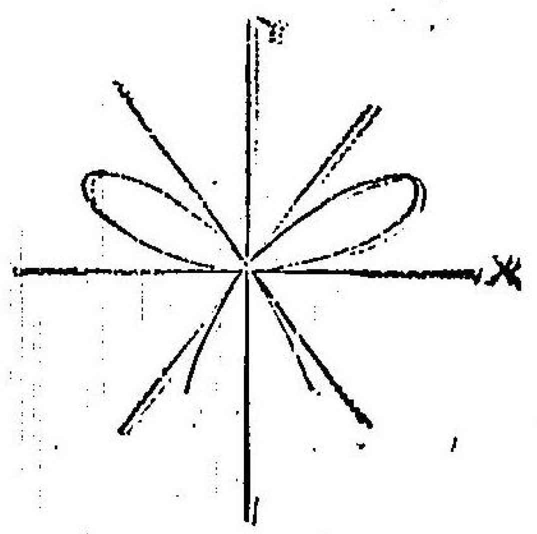
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=0,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\frac{a}{b},$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=-\frac{a}{b},$$

ナルニヨリ原點ハ三重點ナリ.

第 二 十 八 圖



【例】4. $(x-y)^2=(x-a)^3$. $a>0$.

$x=a,\ y=a$ ニ於テ $\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=0$ ニシテ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_a=1$$

ナルコトハ直ニ計算シ得ラル.

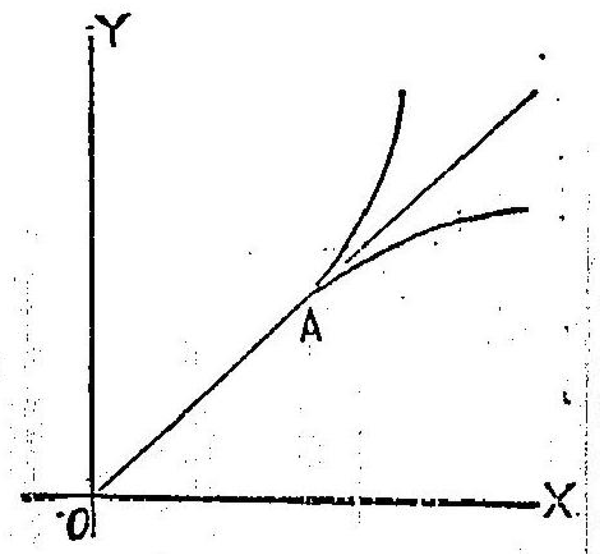
扨テ上式ヲ書キ直ストキハ

$$y=x\pm\sqrt{(x-a)^3},$$

トナルニヨリ $x<a$ ノトキハ y ハ虚數トナル. $x>a$ ナルトキハ y ノ二ツノ値アリ. 而シテ $x=a$ ニ於テ $\frac{dy}{dx}=1$ ナリ.

故ニ $x=a,\ y=a$ ハ一尖點ナリ.

第 二 十 九 圖



第29圖ニ於テ A ハ尖點ナリトス. OA ナル直線ノ式ハ $y=x$ 而シテ曲線ノ y ノ値ハ此直線ノ y ノ値ニ比シテ一ハ大ニ一ハ小ナリ 故ニ A ナル點ハ第一種ノ尖點ナリ.

一般ニ第一種ノ尖點ニテハ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ハ其二枝ニ付テ符號ヲ異ニシ, 第二種ノ尖點ニテハ同符號ヲ有スベシ

【例】5. $y^2=x^2(x^2-a^2)$.

原點ハ此曲線上ニアリテ又 $\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=0$. ナリ. 然レドモ

$$y=\pm x\sqrt{x^2-a^2}$$

ナルニヨリ $x<a$ ナルトキハ y ハ虚數ナリ. 故ニ原點ハ一ノ孤立點ナリ.

III. 其他ノ特別點.

曲線ノ一枝ハ急ニ終止スル點ヲ終止點 (*Points d'arrêt*) ト云フ.

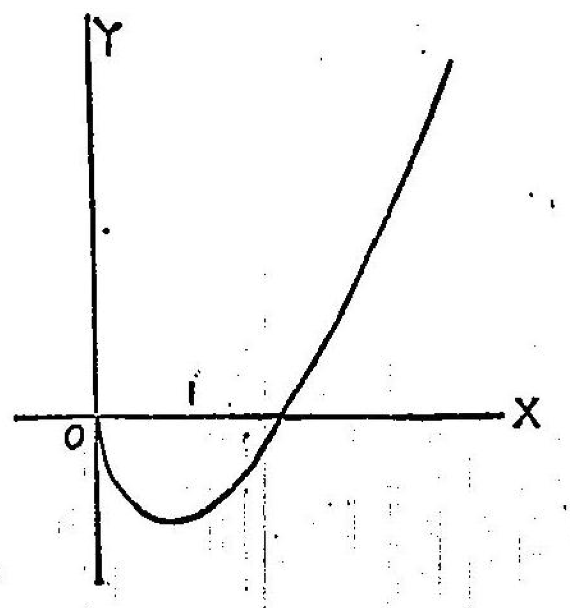
【例】1. $y=x\log x$.

コレ $x<0$ ナルトキハ曲線アルコトナク, $x>0$ ナル凡テノ値ニ對シテ曲線アリ. (第30圖).

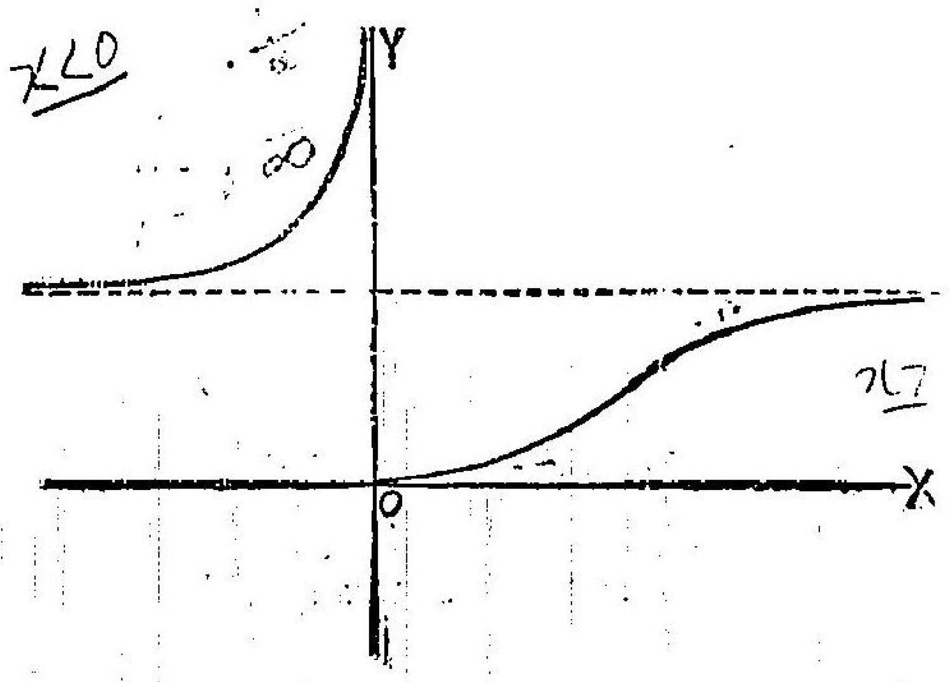
【例】2. $y=e^{-\frac{1}{x}}$. (第31圖).

原點ハ終止點ナリ

第三十圖



第三十一圖



曲線ノ二枝ハ一點ニ於テ終止シ且ツ其點ニ於ケル二枝ハ異レル切線ヲ有スル如キ點ヲ凸點 (*Point saillant*) ト云フ.

【例】 $y=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x(1+e^{\frac{1}{x}})^2}$$

$x>0$ ノ時ハ $\lim\limits_{x=0} y=0$,

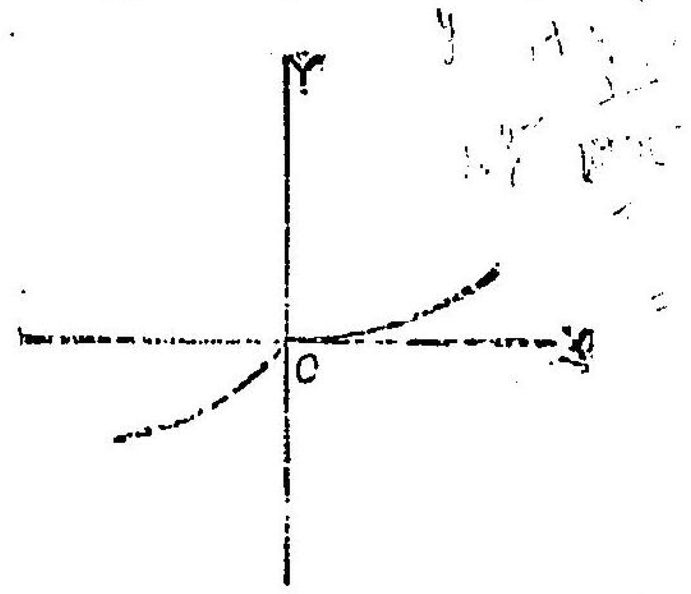
$$\lim_{x=0}\frac{dy}{dx}=0,$$

$x<0$ ノ時ハ $\lim\limits_{x=0} y=0$,

$$\lim_{x=0}\left(\frac{dy}{dx}\right)=1.$$

∴ 原點ハ凸點ナリ.

第三十二圖



孤立點ハ無限ニアルトキハ此等ノ群ヲ列孤枝 (*Branches Pointillée*) ト云フ.

【例】 $y^2=x\sin^2x$.

コノ曲線ハ $x>0$ ナラザレバアルベキ筈ナシ. 然レモ

$$x=-n\pi,\quad y=0,\quad (n \text{ ハ正整數})$$

ナルトキハ $x<0$ ナルモ此式ヲ滿足ス. 即 x 軸上ニ π ヅヽ離レタル一群ノ孤立點アリ.

67. 二曲線ノ切觸

$$y=f_1(x),$$
$$y=f_2(x),$$

ナル二曲線アリトス. 今 x 軸上 $x=x_0$ ナル點ヲ取リ. h ヲ或任意ニ小ナラシムルコトヲ得ル數トシ, $x=x_0+h$ ナル他ノ點ヲ取リ之ニ對應スル二曲線ノ縱線ノ差ヲ $\triangle$ トセバ

$$\triangle=f_1(x_0+h)-f_2(x_0+h).$$

然ルニ §44 てーろるノ定理ニヨリ

$$f_1(x_0+h)=f_1(x_0)+\frac{h}{1!}f_1'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f_1''(x_0)+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+\frac{h^n}{n!}f_1^{(n)}(x_0+\theta_1 h),\qquad 0<\theta_1<1,$$

$$f_2(x_0+h)=f_2(x_0)+\frac{h}{1!}f_2'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f_2''(x_0)+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+\frac{h^n}{n!}f_2^{(n)}(x_0+\theta_2 h),\qquad 0<\theta_2<1,$$

$$\therefore \quad \triangle=\{f_1(x_0)-f_2(x_0)\}+\frac{h}{1!}\{f_1'(x_0)-f_2'(x_0)\}$$
$$+\frac{h^2}{2!}\{f_1''(x_0)-f_2''(x_0)\}+\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{h^n}{n!}\{f_1^{(n)}(x_0+\theta_1h)-f_2^{(n)}(x,+\theta_2h)\}.$$

若シ　$f_1(x_0)=f_2(x_2)$，

ニシテ其ノ微係數ノ $x=x_0$ ナル點ニ於ケル値ハ相異ルトキハ h ヲ充分ニ小サク取ルコトニヨリテ $\triangle$ ノ符號ハ h ノ正負ニヨリテ變ズルニヨリ二曲線ハ $x=x_0$ ナル横坐標ヲ有スル點ニ於テ相交ル.

若シ之ニ加フルニ

$$f_1'(x_0)=f_2'(x_0),$$

ニシテ他ノ微係數ハ相異ルトキハ充分ニ小ナル h ノ値ニ對シ $\triangle$ ハ h ノ正負ニヨリテ其符號ヲ變ゼズ. 二曲線ハ x_0 ニ於テ共通ナル切線ヲ有ス. 而シテ

$$f_1''(x_0)>\text{或ハ}<f_2''(x)$$

ナルニ從テ f_1 ナル曲線ハ f_2 ナル曲線ノ上或ハ下ニアリ. 此時ニハ特ニ二曲線ハ第一次ノ切觸 (*Contact of the first order*) ヲナスト云フ.

更ニ之ニ加フルニ

$$f_1''(x_0)=f_2''(x_0)$$

ニシテ, ヨリ高キ微係數ハ相異ルトキハ二曲線ハ勿論共通ナル切線ヲ有シ, $\triangle$ ノ最低次ハ h^3 トナルニヨリ $\triangle$ ノ符號ハ h ノ符號ノ變ズルコトニヨリテ變ズ. 此時ニハ二曲線ハ $x=x_0$ ニ於テ第二次ノ切觸ヲナスト云フ.

一般ニ　$f_1(x_0)=f_2(x_0)$，

$$f_1'(x_0)=f_2'(x_0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$f_1^{(p)}(x_0)=f_2^{(p)}(x_0),$$

ニシテ第 $p+1$ 次ノ微係數ハ相異ルトキハ二曲線ハ $x=x_0$ ニ於テ第 p 次ノ切觸ヲナスト云フ.

今二曲線ハ $x_0,x_1,x_2,\cdots\cdots x_p$ ナル横坐標ヲ有スル $p+1$ 個ノ點ヲ共通ニ過グルトキハ

$$f_1(x_n)=f_2(x_n), \qquad n=0,1,2,\cdots\cdots p.$$

今　$\psi(x)=f_1(x)-f_2(x)$，

ト置ケバ　$\psi(x_n)=0, \qquad n=0,1,2,\cdots\cdots p.$

即 ψ ナル函數ハ $x_0,x_1,x_2\cdots\cdots x_p$, ナル値ニ對シテ相等シキ値 0 ヲ取ルニヨリ其微係數 $\psi'(x)$ ハ x_0 ト x_1, x_1 ト x_2,……等ノ間ニ於ケル或 x ノ或値ニ對シテ 0 トナル. カヽル x ノ値ヲ一般ニ ξ ヲ以テ表ハセバ (§21 ニヨリ).

$$\psi'(\xi_n^{(1)})=0, \qquad n=0,1,2,\cdots\cdots p-1,$$

即　$f_1'(\xi_n^{(1)})=f_2'(\xi_n^{(1)})$. $\quad n=0,1,2,\cdots\cdots p-1,$

此ニ　$x_n<\xi_n^{(1)}<x_{n+1}$, $\quad n=0,1,2,\cdots\cdots p-1,$

全ク同樣ナル論法ニヨリテ次ノ式ヲ得ベシ.

$$f_1''(\xi_n^{(2)})=f_2''(\xi_n^{(2)}), \quad n=0,1,2,\cdots\cdots p-2.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_1^{(p-1)}(\xi_n^{(p-1)})=f_2^{(p-1)}(\xi_n^{(p-1)}), \qquad n=0,1.$$
$$f_1^{(p)}(\xi_n^{(p)})=f_2^{(p)}(\xi_n^{(p)}), \qquad n=0.$$

今 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_p$ ノ p 個ノ點ハ悉ク x_0 ニ無限ニ近クトキハ ξ ヲ以テ表セル凡テノ點モ亦 x_0 ニ無限ニ近ヅクベシ. 故ニ上ノ式ハ此時ニハ夫々次ノ式ニナル,

$$f_1(x_0)=f_2(x_0),$$

$$f_1'(x_0)=f_2'(x_0),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_1^{(p)}(x_0)=f_2^{(p)}(x_0).$$

即二曲線ハ極メテ接近セル $p+1$ 個ノ點ヲ共有スルトキハ二曲線ハ第 p 次ノ切觸ヲナスヲ知ルベシ.

【例】1. $x=a$ ニ於テ曲線

$$a^2y=x^3 \quad 即 \quad f_1(x)=\frac{x^3}{a^2}$$

ト第二次ノ切觸ヲナシ且 y 軸ニ平行ナル軸ヲ有スル拋物線ノ方程式ヲ作レ.

所求ノ拋物線ノ頂點ノ坐標ヲ ξ, η トセバ其軸ハ y 軸ニ平行スルニヨリ其方程式ハ次ノ形ニナル.

$$y-\eta=A(x-\xi)^2 \quad 即 \quad f_2(x)=\eta+A(x-\xi)^2.$$

f_1 及 f_2 ハ $x=a$ ニ於テ第二次ノ切觸ヲナスニヨリ

$$f_1(a)=f_2(a), \quad f_1'(a)=f_2'(a), \quad f_1''(a)=f_2''(a).$$

ナリ即

$$a=\eta+A(a-\xi)^2,$$

$$3=2A(a-\xi),$$

$$\frac{6}{a}=2A$$

$$\therefore \quad A=\frac{3}{a}, \quad \xi=\frac{a}{2}, \quad \eta=\frac{a}{4}.$$

故ニ $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a}{3}\left(y-\frac{a}{4}\right)$ ハ所求ノ拋物線ノ式ナリ.

【例】2. $(x-3)^2+(y-3)^2=8$,

及 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$,

ノ二曲線ハ $x=y=1$ ニ於テ第三次ノ切觸ヲナスヲ證セ.

第一ノ曲線ニ付テハ

$$x-3+(y-3)\frac{dy}{dx}=0, \quad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-3)\frac{d^2y}{dx^2}=0, \quad \therefore$$

$$3\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+(y-3)\frac{d^3y}{dx^3}=0.$$

∴ $x=y=1$ ニ對シテハ

$$\frac{dy}{dx}=-1, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=1, \quad \frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{3}{2};$$

第二ノ曲線ニ付テハ

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=0, \quad 或ハ \quad \frac{dy}{dx}=1-\frac{2}{\sqrt{x}},$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{3}{2}\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$$

∴ $x=y=1$ ニ對シテハ

$$\frac{dy}{dx}=-1, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=1, \quad \frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{3}{2}$$

依テ第三次ノ切觸ヲナス.

【例】3. $x=5a$, $y=10a$ ニ於テ圓 $x^2+y^2=125a^2$ ニ第二次ノ切觸ヲナシ. 且ツ坐標軸ニ平行ナル軸ヲ有スル二ツノ拋物線ヲ求ム

圓ニ付テ $x+y\frac{dy}{dx}=0, \quad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\frac{d^2y}{dx^2}=0;$

$\therefore$ $(x=5a,\ \ y=10a)$ ニ於テハ $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{1}{8a}$,

$$(y-k)^2+A(x-h)=0\ ,$$
$$(x-f)^2+B(y-g)=0.$$

ヲ二拋物線ノ式トス. 第一ノ拋物線ニ付テハ

$$2(y-k)\frac{dy}{dx}+A=0\ ,\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-k)\frac{d^2y}{dx^2}=0\ ;$$

$$\therefore\qquad x=5a,\ y=10a\ :\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{A}{2(10a-k)}\ ,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{A^2}{4(10a-k)^3}\ ,$$

圓ト拋物線トノ $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ヲ等シト置ケバ

$$A=2a\ ,\quad k=8a.\quad \therefore\ h=7a.$$

第二ノ拋物線ニ付テハ

$$2(x-f)+B\frac{dy}{dx}=0\ ,\quad 2+B\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

$$x=5a\ ,\ \ y=10a:\frac{dy}{dx}=-\frac{2(5a-f)}{B}\ ,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2}{B}\ ,$$

是等ヲ夫々圓ノ $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ト等シト置ケバ

$$B=16a\ ,\quad f=a.\quad \therefore\ g=11a$$

$\therefore$ 所求ノ式ハ

$$(y-8a)^2=2a(7a-x)\ ,$$
$$(x-a)^2=16a(11a-y).$$

68. 切觸曲線

與ヘラレタル曲線上ノ與ヘラレタル任意ノ點ニ於テ最高次ノ切觸ヲナス曲線ヲ特ニ其與曲線ノ其點ニ於ケル切觸曲線 (*Osculating Curve*) ト云フ. 直線ハ他ノ曲線ト接觸スルトキ最高次ハ一次ニシテ圓ハ二次ナリ.

與ヘラレタル曲線ノ式ヲ

$$y=f(x)$$

トシ $x=x_0$, ニ於テ之ニ切觸スル直線ノ方程式ヲ

$$y=ax+b$$

トセバ $x=x_0$ ニ於テ上二線ノ y 及 $\dfrac{dy}{dx}$ ノ値ハ相等シ.

$$\therefore\qquad f(x_0)=ax_0+b\ ,$$
$$f'(x_0)=a.$$

若シ直線ト曲線トガ二次ノ切觸ヲナスト假定スルトキニハ

$$f''(x_0)=0$$

トナルニヨリ x_0 ナル點ハ $f''(x)$ ガ 0 トナル特別ナル點ナラザルベカラズ即 x_0 ハ任意ニ與フル能ハズ. 故ニ曲線ト直線トハ一般ニ一次ノ切觸ハ最高次ノ切觸ナリ.

上ニ得タル關係式ヨリ a,b ヲ與ヘラレタル數量ニテ表ハセバ

$$a=f'(x_0)\ ,$$
$$b=f(x_0)-x_0f'(x_0)\ ;$$
$$\therefore\qquad y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\ ,$$

ハ $x=x_0$ ニ於ケル切觸直線ノ式ナリ, 是レ其曲線ノ切線ニ外ナラズ

次ニ $y=f(x)$ ナル曲線ノ $x=x_0$ ナル點ノ切觸圓ノ式ヲ

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$$

トス. 之ヲ二度微分スルトキハ

$$x-\alpha+(y-\beta)\frac{dy}{dx}=0,$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

之等ニ於ケル $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2x}{dx^2}$ ノ値ヲ曲線ノモノト等シク置クトキハ

$$(x_0-\alpha)+(f(x_0)-\beta)^2=\rho^2,$$

$$x_0-\alpha+(f(x_0)-\beta)f'(x_0)=0.$$

$$1+\{f'(x_0)\}^2+(f(x_0)-\beta)f''(x_0)=0$$

故ニ切觸圓ノ中心ノ坐標 (α,β) 及半徑 ρ ハ

$$\alpha=x_0-\frac{1+\{f'(x_0)\}^2}{f''(x_0)}f'(x_0),$$

$$\beta=y_0+\frac{1+\{f'(x_0)\}^2}{f''(x_0)},$$

$$\rho=\frac{\left[1+\{f'(x_0)\}^2\right]^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)};$$

ニヨリテ定メラル.

若シ $f'''(x_0)$ ト圓ノ $\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=x_0}$ トガ等シト置クトキハ

$$3f'(x_0)\{f''(x_0)\}^2-\{1+[f'(x_0)]^2\}f'''(x_0)=0,$$

ナル式ヲ得, 故ニ直線ノ場合ト同ジク x_0 ハ此ノ方程式ヲ滿足スル特別ナル値ナラザルベカラズ. 故ニ圓ハ他ノ曲線ト切觸シ得ル最高次ハ二次ナリ.

【例】1. 曲線 $y=\dfrac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right)$, (垂鏈線 *Catenary*)

上ノ任意ノ點ニ於ケル縱線ハ其點ニ於ケル切觸圓ノ半徑及最下ノ點ニ於ケル其半徑トノ比例中項ナルヲ證シ, 又切觸ノ中心ノ坐標ヲ求ム.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}-e^{-\frac{x}{c}}\right)=\sqrt{\frac{y^2}{c^2}-1}, \qquad (\text{公式 } 5,8)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2c}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right)=\frac{y}{c^2}$$

$$\therefore \qquad \rho=\left(1+\frac{y^2}{c^2}-1\right)^{\frac{3}{2}}\div\frac{y}{c^2}=\frac{y^2}{c},$$

最下ノ點ニテハ $x=0, y=c$ ナリ $\therefore$ $\rho_0=c$,

$\therefore$ $y^2=\rho_0\rho$ 即 $\rho:y=y:\rho_0$.

又 $\alpha=x-y\sqrt{\dfrac{y^2}{c^2}-1}$, $\beta=y+\dfrac{y^2}{c^2}\div\dfrac{y}{c^2}=2y$

【例】2. 拋物線 $y^2=4mx$ ニ於テハ

$$\alpha=2m+3x,\quad \beta=-\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m}},\quad \rho=\frac{2(m+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m}},$$

又其上ノ任意ノ點 (頂ヲ除キ) ニ於ケル切觸圓ハ頂ノ兩側ニ於テ軸ヲ二點ニテ切リ, 又其半徑ハ法線ガ切觸點及準線ノ間ニ挾マレタル部分ノ二倍ナルコトヲ示セ.

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2 \qquad \text{切觸圓}$$

$$\therefore \quad (x-\alpha)\frac{dx}{dy}+y-\beta=0,\quad (x-\alpha)\frac{d^2x}{dy^2}+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1=0.$$

又 $y^2=4mx$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y}{2m}=\sqrt{\frac{x}{m}}\,, \quad \frac{d^2x}{dy^2}=\frac{1}{2m}\,,$$

$$\therefore \quad (x-\alpha)\frac{1}{2m}+\frac{x}{m}+1=0\,, \quad 即 \quad \alpha=2m+3x\,,$$

及 $$(x-\alpha)\frac{y}{2m}+y-\beta=0 \quad \therefore \quad \beta=-\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m}}\,,$$

$$\therefore \quad \rho^2=(x-\alpha)^2\left(1+\frac{y^2}{4m^2}\right)=4(m+x)^2\frac{m+x}{m}$$

$$\therefore \quad \rho=\frac{2(m+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m}}\,.$$

故ニ (x,y) ニ於ケル切觸圓ヲ

$$(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2=\rho^2$$

トセバコレ x 軸ヲ切ル點ハ $y'=0$ 即

$$x'^2-2\alpha x'+\alpha^2+\beta^2-\rho^2=0$$

ニヨリテ與ヘラル. 然ルニ

$$\alpha^2+\beta^2-\rho^2=(2m+3x)^2+\frac{4x^3}{m}-\frac{4(m+x)^3}{m}=-\frac{3mx^2}{m}$$

コレ $x>0$ ノ時ハ負ナルニヨリ x 軸ヲ切ル點ハ頂點ノ兩側ニ於ケル二點ナリ.

n ヲ問題ニ云ヘル如キ法線ノ長サトセバ

$$\alpha-x=2x+2m \quad ナルニヨリ$$

$$\rho:n=2x+2m:x+m=2:1.$$

【例】3. $y^3=a^2x$ ノ切觸圓ノ中心ノ坐標ヲ求ム.

$$3y^2=a^2\frac{dx}{dy}\,, \quad 6y=a^2\frac{d^2x}{dy^2}\,.$$

$$\therefore \quad \alpha=x+\frac{1+\frac{9y^4}{a^4}}{\frac{6y}{a^2}}=\frac{y^3}{a^2}+\frac{9y^2+a^4}{6a^2y}=\frac{a^4+15y^4}{6a^2y}\,,$$

$$\beta=y-\frac{3y^2}{a^2}\left(\frac{a^4+9y^4}{6a^2y}\right)=\frac{y}{2a^4}(a^4-9y^4).$$

【例】4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, ノ時

$$\rho=\frac{(a^2-e^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}\,, \quad e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$$

【例】5. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, ノ時

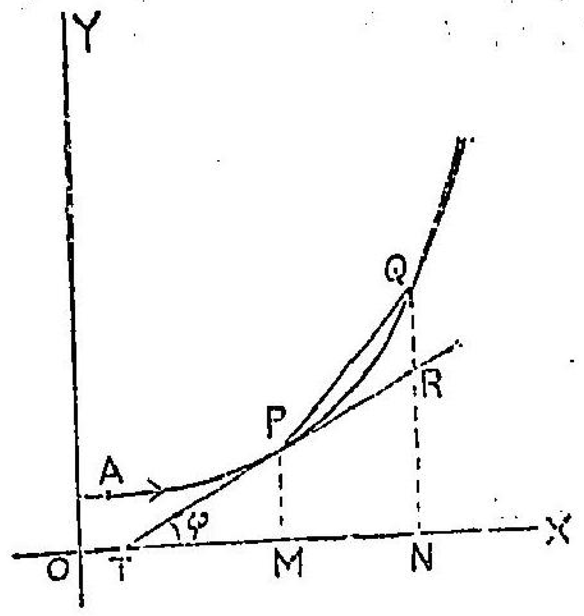
$$\rho=\frac{(e^2x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}\,, \quad e^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}$$

69. 孤ノ微分

$$y=f(x)$$

ガ表ハス曲線上ノ一定點 A ヨリ其曲線上ニ一定ノ方向ニ計レル孤ノ長サ s ナル點ヲ $P(x,y)$ トス. $Q(x+\triangle x, y+\triangle y)$ ヲ曲線上ノ他ノ點トシ孤 AQ ヲ $s+\triangle s$ トス. P ニ於ケル切線ガ x 軸ト T ニ於テ交リ Q 點ノ縱線ト R ニ於テ交ルトス.

第三十三圖



$$\overline{PQ}=\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}$$

$$=\triangle x\sqrt{1+\left(\frac{\triangle y}{\triangle x}\right)^2}\,.$$

$$\therefore \quad \frac{\overline{PQ}}{\triangle x}=\sqrt{1+\left(\frac{\triangle y}{\triangle x}\right)^2}\,.$$

又 $$\overline{PR}=\overline{MN}\sec P\hat{T}M,$$

$$=\triangle x\sqrt{1+\tan^2\varphi}$$

$$\tan\varphi=\frac{dy}{dx} \qquad (\S\ 19)$$

∴ $$\frac{\overline{PR}}{\triangle x}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

又 $$\overline{RQ}=\overline{NQ}-\overline{NR}=\overline{NQ}-(\overline{MP}+\overline{MN}\tan P\hat{T}M),$$

$$=y+\triangle y-\left(y+\triangle x\frac{dy}{dx}\right),$$

$$=\triangle y-\triangle x\frac{dy}{dx}.$$

∴ $$\frac{\overline{RQ}}{\triangle x}=\frac{\triangle y}{\triangle x}-\frac{dy}{dx}.$$

∴ $$\frac{\overline{PR}+\overline{RQ}}{\triangle x}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}+\frac{\triangle y}{\triangle x}-\frac{dy}{dx}.$$

然ルニ $$\overline{PR}+\overline{RQ}>\triangle s>\overline{PQ}$$

∴ $$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}+\frac{\triangle y}{\triangle x}-\frac{dy}{dx}>\frac{\triangle s}{\triangle x}>\sqrt{1+\left(\frac{\triangle y}{\triangle x}\right)^2}.$$

故ニ極限ニ於テ

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

同樣ニ $$\frac{ds}{dy}=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2},$$

若シ x 及 y ハ第三ノ變數 t ニ依テ表サルヽトキハ

$$x=\varphi_1(t), \qquad y=\varphi_2(t),$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \qquad \frac{ds}{dt}=\frac{ds}{dx}\frac{dx}{dt},$$

ナルニヨリ

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

若シ曲線ノ方程式ハ

$$f(x,y)=0,$$

ナルトキハ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}, \qquad (\S 36 \text{ ニヨル}).$$

ナルニヨリ

$$\frac{ds}{dx}=\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

$$\frac{ds}{dy}=\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial x}},$$

若シ曲線ハ極方程式ニヨリテ表ハサルヽトキ

$$r=\phi(\theta),$$

$$\frac{ds}{d\theta}=\frac{ds}{dx}\frac{dx}{d\theta}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\frac{dx}{d\theta}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2},$$

然ルニ　$x=r\cos\theta$,　$y=r\sin\theta$,

ナルニヨリ　公式 9,10 ニヨリテ

$$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\sin\theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta\frac{dr}{d\theta}+r\cos\theta.$$

之ヲ二乘シテ相加フレバ

$$\frac{ds}{d\theta}=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}.$$

又　$$\frac{ds}{dr}=\frac{ds}{d\theta}\frac{d\theta}{dr}=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\frac{d\theta}{dr},$$

$\therefore$　$$\frac{ds}{dr}=\sqrt{1+\left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2}.$$

次ニ切線ト動經トノナス角ヲ ψ トセバ §64 ニヨリ

$$\tan\psi=r\frac{d\theta}{dr},$$

$\therefore$　$$\sin\psi=\frac{r\dfrac{d\theta}{dr}}{\sqrt{1+\left(r\dfrac{d\theta}{dr}\right)^2}}=\frac{r\dfrac{d\theta}{dr}}{\dfrac{ds}{dr}}=r\frac{d\theta}{ds},$$

$$\cos\psi=\frac{1}{\sqrt{1+\left(r\dfrac{d\theta}{dr}\right)^2}}=\frac{1}{\dfrac{ds}{dr}}=\frac{dr}{ds},$$

$\therefore$　$$\sin\psi=r\frac{d\theta}{ds},$$

$$\cos\psi=\frac{dr}{ds}.$$

之ニ似タル式ハ直交坐標ニ於テ切線ト x 軸トノナス角 φ ニ關シテ

作リ得ルモノナリ.

$$\sec\varphi=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{ds}{dx},$$

$\therefore$　$$\sin\varphi=\frac{\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}=\frac{\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{ds}{dx}}=\frac{dy}{ds},$$

$\therefore$　$$\sin\varphi=\frac{dy}{ds},$$

$$\cos\varphi=\frac{dx}{ds}.$$

【例】1.　楕圓　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ニ於テ　$\dfrac{ds}{dx}=\sqrt{\dfrac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}$.

若シ　$x=a\sin t$ ト置ケバ $\dfrac{ds}{dt}=a\sqrt{1-e^2\sin^2t}$ ヲ證セ.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y},$$

$\therefore$　$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{\frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^4y^2}}=\sqrt{\frac{a^2b^2(a^2-x^2)+b^4x^2}{a^2b^2(a^2-x^2)}}.$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-x^2+(1-e^2)x^2}{a^2-x^2}}=\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}.$$

又　$x=a\sin t$ ナレバ $y=\pm b\cos t$,

$\therefore$　$\dfrac{dx}{dt}=a\cos t$,　$\dfrac{dy}{dt}=\mp b\sin t$.　(公式 9, 10)

$\therefore$　$\dfrac{ds}{dt}=\sqrt{a^2\cos^2t+b^2\sin^2t}=a\sqrt{1-e^2\sin^2t}$.

【例】2.　$r=a(1+\cos\theta)$,

$$\frac{dr}{d\theta}=-a\sin\theta, \quad \therefore \quad \frac{ds}{d\theta}=a\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta},$$
$$=a\sqrt{2(1+\cos\theta)},$$
$$=2a\cos\frac{\theta}{2},$$

70. 曲線ノ曲度

曲線上ノ一點 P ニ於ケル切線ガ或ル定直線トナス角ヲ φ トシ曲線上ノ定點ヨリ計レル P マデノ弧ノ長サヲ s トス．今 s ニ $\triangle s$ ノ增分アルトキニ φ ニ $\triangle\varphi$ ナル增分アリトスレバ增分 $\triangle\varphi$ ト $\triangle s$ トノ比ノ極限値 ($\triangle s=0$ ノトキノ) ヲ P ニ於ケル曲度 (*Curvature*) ト云フ．之ヲ K ト置クトキハ

$$K=\frac{d\varphi}{ds}.$$

若シ定直線ヲ x 軸ニ取ルトキハ §19 ニヨリ

$$\frac{dy}{dx}=\tan\varphi,$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\sec^2\varphi\frac{d\varphi}{dx}=\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\frac{d\varphi}{dx}$$

§69 ニヨリ $\quad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\left(\frac{ds}{dx}\right)^2,$

又 $\quad \frac{d\varphi}{dx}=\frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dx},$

ナルニヨリ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{ds}{dx}\right)^3\frac{d\varphi}{ds}=\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}K,$$

$$\therefore \quad K=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

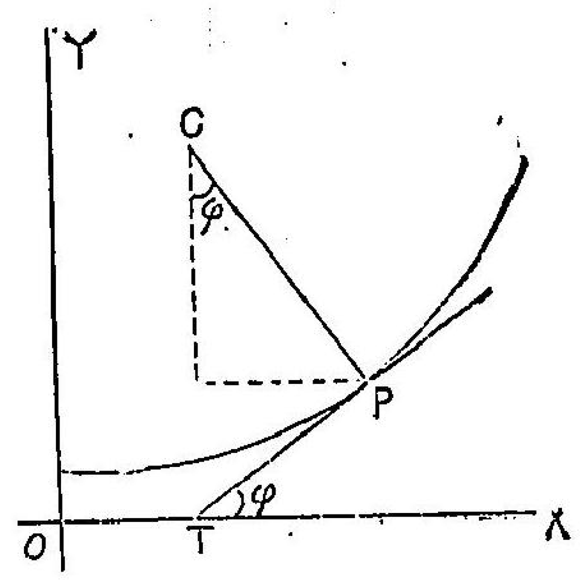
K ノ逆數ヲ ρ ト置クキハ

$$\rho=\frac{1}{K},$$

$$\rho=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

§69 ニ於ケル ρ ト比較スルトキハ ρ ハ P 點ニオケル切觸圓ノ半徑ニ等シ．此意味ヨリ ρ ヲ曲線半徑 (*Radius of curvature*) ト稱ス．曲度ノ正負ハ分子ノ平方根ヲ正ト取ルニヨリ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ノ符號ニヨル．故ニ上方ニ凹ナル點ニ於ケル曲度ハ正ニシテ下方ニ凹ナル點ニ於ケル曲度ハ負ナリ．此約束ニ從フトキハ弧ノ長サヲ計ルニハ左ヨリ右ニ計ル方ハ正トナル．

第三十四圖



P 點ニ於ケル法線上ニ P 點ヨリ ρ ノ正ノ方ニ ρ 丈ケノ距離ニ C ナル點ヲ取リ其坐標ヲ (α,β) トセバ (34 圖) ヨリ

$$x-\alpha=\rho\sin\varphi,$$
$$\beta-y=\rho\cos\varphi,$$

然ルニ $\quad \sin\varphi=\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},$

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},$$

ナル＝上ノ ρ ノ式ヲ用キテ

$$\alpha=x-\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\frac{dy}{dx}$$

$$\beta=y+\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

即 §69 ニヨリ C ハ P ニ於ケル切觸圓ノ中心ト一致ス，故ニ C ヲ中心トシテ ρ ナル半徑ヲ以テ畫ケル圓ハ P 點ニ於ケル切觸圓ニシテ P 點ニ於テ曲線ト第二次ノ切觸ヲナシ三隣接點ヲ共有ス．故ニ C ヲ P 點ニ於ケル曲度中心 (*Center of Curvature*) ト稱シ斯ル圓ヲ曲度圓 (*Circle of Curvature*) ト云フ．

曲度半徑ノ式ノ形ハ曲線ノ方程式ノ形ニ從テ種々ノ形ヲ取ルモノナリ．次ニ其主ナルモノヲ述ブベシ．

曲線ノ式ハ第三ノ變數 t ニヨリテ

$$x=f_1(t),$$

$$y=f_2(t),$$

ナル形ニ表ハサルヽトキハ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f_2'(t)}{f_1'(t)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{f_1'(t)f_2''(t)-f_2'(t)f_1''(t)}{\{f_1'(t)\}^3},$$

$$\therefore\quad \rho=\frac{\left[\{f_1'(t)\}^2+\{f_2'(t)\}^2\right]^{\frac{3}{2}}}{f_1'(t)f_2''(t)-f_1''(t)f_2'(t)}.$$

又 §69 ヨリシテ

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2-\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2=\{f_1''(t)\}^2+\{f_2''(t)\}^2$$

$$-\frac{\{f_1'(t)f_1''(t)+f_2'(t)f_2''(t)\}^2}{\{f_1'(t)\}^2+\{f_2'(t)\}^2},$$

$$=\frac{\{f_1'(t)f_2''(t)-f_1''(t)f_2'(t)\}^2}{\{f_1'(t)\}^2+\{f_2'(t)\}^2}.$$

及 $\quad \{f_1'(t)\}^2+\{f_2'(t)\}^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$

$$\therefore\quad \rho=\frac{\frac{ds}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2-\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}}.$$

特ニ $t=s$ ト置クトキハ

$$\frac{ds}{dt}=1,\quad \frac{d^2s}{dt^2}=0,$$

$$\therefore\quad \rho=\frac{1}{\sqrt{\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{d^2y}{ds^2}}}.$$

次ニ曲線ノ式ハ

$$f(x,y)=0,$$

ナルキハ §36 ニヨリ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^3},$$

コレヨリ直ニ

$$\rho=\frac{\left\{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2-\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2}.$$

若シ曲線ノ切線ヲ x 軸トシ法線ヲ y 軸トスルトキ原點キ於ケル曲度半徑ハ簡單ニ求メ得ベシ. 曲線ノ式ハ

$$y=f(x),$$

ナルキ, x 軸ハ原點ニ於ケル切線ナルニヨリ

$$f(0)=0,$$

$$f'(0)=0,$$

§44 ニヨリ　$f(x)=f(0)+xf'(0)+\dfrac{x^2}{2}f''(\theta x)$,　$0<\theta<1$.

$$\therefore \quad y=\frac{x^2}{2}f''(\theta x).$$

然ルニ　$\rho=\dfrac{\left[1+\{f'(0)\}^2\right]^{\frac{3}{2}}}{f''(0)}=\dfrac{1}{f''(0)}$.

$$\therefore \quad \rho=\lim_{x=0}\frac{x^2}{2y}.$$

之レにうとんノ式ト云ヒ, 或點ニ於ケル曲度ヲ求メンニ原點ヲ其點ニ移シ其點ニ於ケル切線ヲ x 軸トナシテ曲線ノ方程式ヲ書キ直ストキハ此式ニヨリテ其點ニ於ケル曲度半徑ヲ求メ得ベシ.

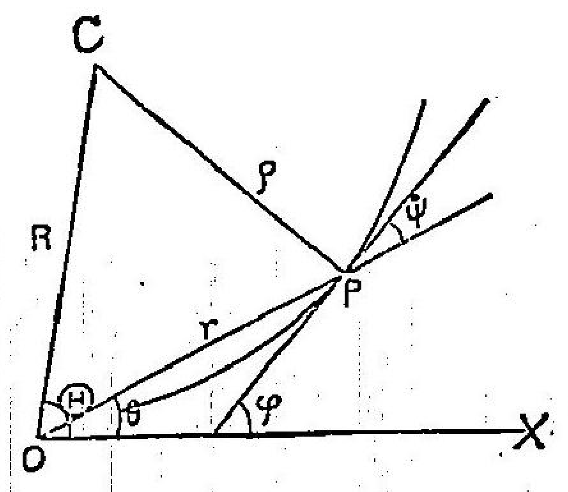
次ニ曲線ハ極方程式ニヨリテ表ハサルヽトキ

$$r=\phi(\theta),$$

曲線上ノ一點 P ノ坐標ヲ (r,θ) トシ, P ニ於ケル切線ガ原線ト φ ナル角ヲナシ, 動徑ト ψ ナル角ヲナストスレバ

$$\varphi=\theta+\psi$$

第三十五圖



$$\therefore \quad K=\frac{d\varphi}{ds}=\frac{d\theta}{ds}+\frac{d\psi}{ds},$$

§69 ニヨリ

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{\sqrt{r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}},$$

§64 ニヨリ

$$\tan\psi=\frac{r}{\dfrac{dr}{d\theta}},$$

$$\therefore \quad \sec^2\psi\frac{d\psi}{d\theta}=\frac{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2},$$

$$\therefore \quad \frac{d\psi}{d\theta}=\frac{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}\cdot\frac{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}{r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2},$$

故ニ　$\dfrac{d\psi}{ds}=\dfrac{d\psi}{d\theta}\dfrac{d\theta}{ds}=\dfrac{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}}$,

$$\therefore \qquad K=\frac{1}{\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}\left\{1+\frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\right\}$$

$$=\frac{r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left\{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}=r^3\left(\frac{1}{r}+\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right),$$

$$\therefore \qquad \rho=\frac{\left\{1+\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{r}+\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)}.$$

曲度中心 C ノ坐標ヲ R,Θ トセバ

$$R\cos(\Theta-\theta)=r-\rho\sin\psi,$$

$$R\sin(\Theta-\theta)=\rho\cos\psi,$$

§69 ニヨリ

$$\sin\psi=r\frac{d\theta}{ds}=\frac{r}{\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}},$$

$$\cos\psi=\frac{dr}{ds}=\frac{\frac{dr}{d\theta}}{\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}},$$

$$\therefore \qquad R\cos(\Theta-\theta)=\frac{\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\right)^2-\frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\frac{1}{r}+\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)},$$

$$R\sin(\Theta-\theta)=\frac{\frac{1}{r}\left\{1+\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}\frac{dr}{d\theta}}{\frac{1}{r}+\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)},$$

ニヨリ R,Θ ハ求ムルコトヲ得ベシ.

最後ニ他ノ形ヲ導カンニ, §64, 例2, 第21圖ニ於テ P 點ノ坐標ヲ (x,y) トシ原點ト P ト距離ヲ r トシ, 原點ヨリ P 點ニ於ケル切線ヘ引ケル垂線ノ長サ OS ヲ p ニテ表ハセバ

$$p=\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},$$

$$\therefore \qquad \frac{dp}{dx}=\frac{x\frac{d^2y}{dx^2}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}-\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)}{\left\{1+\left(\frac{dy}{dy}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$=\frac{\left(x+y\frac{y}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}},$$

然ルニ $\qquad r^2=x^2+y^2,$

$$\therefore \qquad r\frac{dr}{dx}=x+y\frac{dy}{dx},$$

ナルニヨリ

$$\frac{dp}{dx}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\,r\frac{dr}{dx}=\frac{r}{\rho}\frac{dr}{dx}$$

$$\rho=r\frac{dr}{dp}$$

次ニ重要ナル定理トシテ曲度中心ハ曲線上ノ二隣接點ニ於ケル二法線ノ交點ナルコトヲ證シテ此§ヲ終ルベシ.

曲線上ノ二點 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ ニ於ケル法線ノ方程式ハ §64 ニヨリ $y=f(x)$ ハ曲線ノ式トセバ

$$\{y-f(x_1)\}f'(x_1)+x-x_1=0,$$

$$\{y-f(x_2)\}f'(x_2)+x-x_2=0,$$

是ヨリ $$y\{f'(x_2)-f'(x_1)\}=f(x_2)f'(x_2)-f(x_1)f'(x_1)+x_2-x_1,$$

及 $$x\{f'(x_2)-f'(x_1)\}=f(x_1)f'(x_2)-f(x_2)f'(x_1)+x_1f'(x_2)-x_2f'(x_1),$$

ナル二式ヲ得ベシ. 之レ二法線ノ交點ノ坐標ヲ與フ

今 $$x_2=x_1+h,$$

トセバ §21 ニヨリ

$$f(x_2)=f(x_1)+hf'(x_1+\theta h), \qquad 0<\theta<1,$$

$$f'(x_2)=f'(x_1)+hf''(x_1+\theta' h), \qquad 0<\theta'<1,$$

$$\therefore\quad yf''(x_1+\theta' h).h=\{f'(x_1)f'(x_1+\theta h)+f(x_1)f''(x_1+\theta' h)\}h$$
$$+f'(x_1+\theta h)f''(x_1+\theta' h).h^2+h,$$

P_1,P_2 ハ二隣接點ナルトキハ $h=0$, 故ニ此式ニ於テ $h=0$ トセル片ノ x,y ノ値ヲ α,β トセバ直ニ

$$\beta=f(x_1)+\frac{1+\{f'(x_1)\}^2}{f''(x_1)},$$

$$\alpha=f(x_1)-\frac{1+\{f'(x_1)\}^2}{f''(x_1)}\cdot f'(x_1),$$

コレ曲度圓ノ中心ノ坐標ノ式ト同様ナリ. 故ニ曲度圓ノ中心ハ曲線上ノ二隣接點ヲ過グル法線ノ交點ナリ.

【例】1. 曲度半徑ノ極大或ハ極小ナル點ニテハ曲線ト曲度圓トハ三次ノ切觸ヲナスコトヲ證セ.

$$\rho=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

$\dfrac{d\rho}{dx}=0$ ト置ケバ ρ ノ極大或ハ極小ニシテ

$$3y'y''-y'''(1+y'^2)=0, \tag{1}$$

曲度圓ノ式ヲ $(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2=\rho^2$, トシ之ヲ三回微分スルトキハ

$$3Y'Y''+(Y-\beta)Y'''=0. \tag{2}$$

然ルニ
$$Y'=y',$$
$$Y''=y'',$$
$$Y-\beta=-\frac{1+y'^2}{y''},$$

之等ヲ式 (2) ニ入ルレバ

$$3y'y''-\frac{1+y'^2}{y''}Y'''=0$$

即 $$3y'y''^2-Y'''(1+y'^2)=0, \tag{3}$$

(1) ト (3) トヲ比較スルトキハ

$$y'''=Y'''.$$

即 ρ ノ極大或ハ極小ナル點ニ於テ曲度圓ト曲線トガ三次ノ切觸ヲナス.

【例】2. $r^2=x^2+y^2$ ト置ケバ曲度圓ノ中心 α,β ハ

$$2\alpha\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d^2r^2}{dy^2}, \qquad 2\beta\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2r^2}{dx^2}.$$

ニテ定メラルヽコトヲ證セ.

曲度圓ノ方程式ヲ二回微分シテ

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\frac{d^2y}{dx^2}=\beta\frac{d^2y}{dx^2}$$

又 $$\frac{dr^2}{dx}=2\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)\quad\therefore\quad\frac{d^2r^2}{dx^2}=2\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\frac{d^2y}{dx^2}\right\}$$

此二式ヲ比較スルトキハ

$$2\beta\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2r^2}{dx^2};$$

同様ニ $$2a\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d^2r^2}{dy^2}.$$

【例】3. $2a\dfrac{dx}{ds}=\dfrac{b^2}{y}+y$ ナルトキ $\rho=\dfrac{2ay^2}{b^2-y^2}$,

又法線ノ長サヲ n トセバ $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{1}{a}$ ヲ證セ.

$$2a\frac{dx}{ds}=\frac{b^2}{y}+y \text{ ナルニヨリ}$$

$$\frac{2a}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=\frac{b^2+y^2}{y},$$

微分シテ $$-\frac{2a\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}=\left(\frac{y^2-b^2}{y^2}\right)\frac{dy}{dx}$$

$\therefore$ $$\rho=\frac{2ay^2}{b^2-y^2}.$$

又 §64 例2 ニヨリ

$$n=y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

$\therefore$ $$\frac{2ay}{n}=\frac{b^2}{y}+y,$$

$$\frac{a}{n}=\frac{1}{2y^2}(b^2+y^2),$$

又 $$\frac{a}{\rho}=\frac{1}{2y^2}(b^2-y^2),$$

$\therefore$ $$\frac{1}{n}-\frac{1}{\rho}=\frac{1}{a}.$$

【例】4. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a}{s}$ ナルトキ $\rho=\dfrac{a^2+s^2}{a}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{a}{s^2}\frac{ds}{dx}=-\frac{a}{s^2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

$\therefore$ $$\rho=\frac{\left(\frac{a^2+s^2}{s^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{a}{s^2}\left(\frac{a^2+s^2}{s^2}\right)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{a^2+s^2}{a}.$$

【例】5. 曲線 $y^2=\dfrac{ax(x-3a)}{x-4a}$, ニ於テ $y=0$ ナル所ノ ρ ヲ求ム. $y=0$ ノトキハ $x=0$ 或ハ $x=3a$.

$$y^2(x-4a)=ax(x-3a)$$

$\therefore$ $$2y\frac{dy}{dx}(x-4a)+y^2=2ax-3a^2$$

$\therefore$ $y=0$ ノトキハ $\dfrac{dy}{dx}=\infty$ 或ハ $\dfrac{dx}{dy}=0$, 即 y 軸ハ切線ナリ.

$\therefore$ 原點ニ於テ $\rho=lim\dfrac{y^2}{2x}=\dfrac{3a^2}{8a}=\dfrac{3a}{8}$.

原點ヲ $(3a,0)$ ニ移ストキハ上ノ式ハ

$$y^2(a-x)=ax(3a+x)$$

トナル．此新原點ニ於テ

$$\rho=lim\frac{y^2}{2x}=\frac{3a^2}{2a}=\frac{3a}{2}.$$

〔例〕6．　曲線 $y^4+x^4-4a^2x^2=0$, ニ於テ原點ニ於ケル曲度圓ノ方程式ヲ求ム．

$$y^4+x^4-4a^2x^2=0,$$

$$\therefore\qquad y^3+(x^3-2a^2x)\frac{dx}{dy}=0,\qquad\text{(公式 6)}$$

$$3y^2+(x^3-2a^2x)\frac{d^2x}{dy^2}+(3x^2-2a^2)\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=0,$$

∴　原點ニ於テハ $\frac{dx}{dy}=0$ ニシテ y 軸ハ二枝

$$y^2=\pm x\sqrt{4a^2-x^2},$$

ノ切線ナリ．

$$\therefore\qquad \rho=lim\frac{y^2}{2x}=\pm a,$$

∴　原點ニ於ケル二ツノ曲度圓ノ式ハ

$$x^2\mp 2ax+y^2=0.$$

71. 重複點附近ノ曲線ノ形

代數曲線　$f(x,y)=0$,

ニ於テ便宜ノ爲メ特ニ原點ハ重複點ナリトス．扨テ §56 ニヨリ

$$f(x,y)=f(0,0)+x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$$

$$+\frac{1}{2!}\left\{x^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0+2xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0+y^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0\right\}$$

$$+\frac{1}{3!}\left\{x^3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0+3x^2y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^3\partial y}\right)_0+3xy^2\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right)_0+y^3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0\right\}$$

$$+\varphi_4+\varphi_5+\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

コヽニ φ_p ハ一般ニ x 及 y ノ第 p 次ノ同次函數ナリ．

今　$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0=2A,\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0=2B,\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0=2C,$

$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0=6D,\quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right)_0=6E,\quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right)_0=6F,$

$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0=6G,$

ト置クトキハ原點ハ重複點ナルニヨリ §66 ニ從テ

$$f(0,0)=0\ ,\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0=0\ ,\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0=0$$

∴　曲線ノ式ハ次ノ如クナル

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx^3+3Ex^2y+3Fxy^2+Gy^3+\varphi_4+\cdots\cdots=0,$$

原點ニ於ケル切線ハ $f(x,y)$ ノ最低次式ヲ 0 ト置ケル

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=0,$$

ニ依テ表ハサル．今

$$AC-B^2=H$$

ト置クトキハ $H<0$ ナル𪜈ハ原點ハ二重點或ハ節點ニシテ，$H>0$ ナル𪜈ハ原點ハ孤立點ナリ．若 $H=0$ ナル𪜈ハ原點ハ尖點或ハ切觸點ナリ．即最後ノ場合ニハ上ノ式ニテ表ハサルヽ二切線ハ合シテ一トナル．此場合ニハ坐標ヲ廻轉シテ其切線ヲ x 軸トスル𪜈ハ曲線ノ方程式ハ y^2 ハ最低次トナルベキニヨヲ

$$C'y^2+D'x^3+E'x^2y+F'xy^2+G'y^3+\varphi'_4+\varphi'_5+\cdots\cdots=0,$$

トナル. 原點ノ附近ニ於テハ x,y ハ共ニ無限小ナリ然レㇳ x 軸ハ切線ナルニヨリ y ハ x ヨリモ高次ノ無限小ナリト考フルヲ得ベシ. 故ニ y^2 ト x^3 トヲ同次ノ無限小ト考フルトキハ $x^2y, xy^2, y^3, \cdots\cdots$ ハ y^2, 或ハ x^3 ニ比シテ更ニ高次ノ無限小ナルニヨリ原點ノ近傍ニノミ着目スルトキハ曲線ノ式ハ

$$C'y^2+D'x^3=0,$$

ト同樣ナリト見做シ得ベシ. 是レ §66, II 例 3 ト同樣ニシテ第一種ノ尖點アルコトヲ示シ得ベシ.

次ニ若シ $D'=0$ ナルトキハ曲線ノ式ハ

$$C'y^2+E'x^2y+F'xy^2+G'y^3+A'x^4+B'x^3y+\cdots\cdots\cdots=0,$$

トナル. 今 y ト x^2 ト同次ノ無限小ト考フルトキハ x^4 ト y^2 ト同次ノ無限小ニシテ, xy^2, y^3, x^3y 等ハ y^2 比シテ高次ノ無限小ナルニヨリ原點ノ附近ニテハ曲線ノ式ハ

$$C'y^2+E'x^2y+A'x^4=0,$$

即 $$2C'y=-(E\pm\sqrt{E'^2-4A'C'})x^2,$$

トナル. 故ニ若シ $E'^2-4A'C'>0$ ナルトキハ曲線ハ原點ニ於テ y 軸ヲ軸トスル二ツノ拋物線ト同樣ナル形ヲ取ル. 即原點ハ切觸點ナリ $E'^2-4A'C'<0$ ナルトキハ原點ハ孤立點ナリ.

$E'^2-4A'C'=0$ ナルトキハ二拋物線ハ合シテ一トナル此場合ニハ y^2 ト x^5 ト同次ノ無限小ナリト考フルトキハ $xy^2, y^3, x^3y\cdots\cdots$ ハ y^2 ヨリ高次ノ無限小ナルニヨリ曲線ノ式 原點ノ附近ニ於テハ

$$C'y^2+E'x^2y+A'x^4+B''x^5=0,$$

即 $$2C'y=-E'x^2\pm\sqrt{(E'^2-4A'C')x^4+4B''C'x^5},$$

$$=-E'x^2\pm\sqrt{4B''C'x^5},$$

トナリ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ハ原點ニ於テ二枝共 $-E'$ ナル値ニナル. 即原點ハ第二種ノ尖點ナリ.

若シ原點ハ三重點ナルトキハ

$$A=0.\quad B=0,\quad C=0,$$

∴ 曲線ノ式ハ

$$Dx^3+3Ex^2y+3Fxy^2+Gy^3+\varphi_4+\varphi_5+\cdots\cdots\cdots=0,$$

トナリ, 原點ニ於ケル切線ハ

$$Dx^3+3Ex^2y+3Fxy^2+Gy^3=0,$$

ニヨリテ與ヘラル. 此場合ニモ亦前記ノ方法ヲ適用シテ原點ノ附近ニ於ケル曲線ノ形ヲ知ルヲ得ベシ.

【例】1. $x^4-x^2y+4y^3=0,$ ノ原點ニ於ケル曲線ノ形ヲ求ム.

原點附近ニ於テ y ト x^2 ト同次ノ無限小ト考フルトキハ y^3 ハ x^4 ニ對シテ捨ツルヲ得ルニヨリ

$$x^4-x^2y=0$$

或ハ $$x^2=y.$$

即原點ニテハ y 軸ヲ軸トスル拋物線ト同樣ナリ.

次ニ x 及 y ヲ同次ノ無限小ト考フルトキハ x^4 ハ他ノ二項ニ比シテ高次ノ無限小ナルニヨリ之ヲ捨ツルトキハ

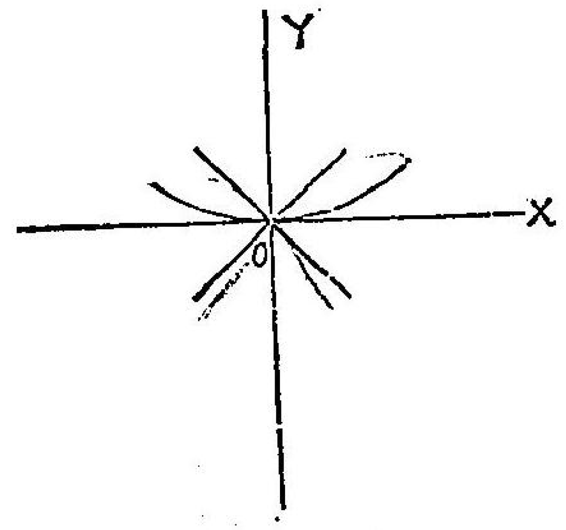
$$-x^2y+4y^3=0,$$

或ハ $$4y^2=x^2,$$

即 $$2y=\pm x,$$

即原點ニテハ此等二直線ト同樣ノ形トナル.

第三十六圖



次ニ前ト同樣ノ考ニヨリテ x^2y ナル項ヲ捨ツルヲ得ルカト云フニコノ時ニハ x^4 ト y^3 ト同次ト考ヘザルベカラズ, 故ニ x^2y ハ是等ヨリ低次トナルニヨリ之ヲ捨ツルヲ得ズ. 故ニ曲線ノ原點附近ノ形ハ (36) 圖ノ如クナル實際ノ曲線形ハ第 28 圖ト似タルモノナリ,

【例】2. $y^4-2cy^2x+x^4=0,$ $c>0,$

ノ原點ニ於ケル形ヲ定メヨ.

x ト y^2 ト同次ノ無限小ト考フルトキハ x^4 ハ他ノ二項ヨリ高次ノ無限小ナルニヨリ之ヲ捨ツルトキハ曲線ノ式ハ

$$y^4-2cy^2x=0,$$

即 $$y^2=2cx,$$

ナル拋物線トナル.

次ニ y^2 ト x^3 トヲ同次ノ無限小ト考フルトキハ y^4 ハ他ノ二項ヨリ高次ノ無限小ナルニヨリ之ヲ捨ツルトキハ曲線ノ式ハ

$$-2cy^2x+x^4=0$$

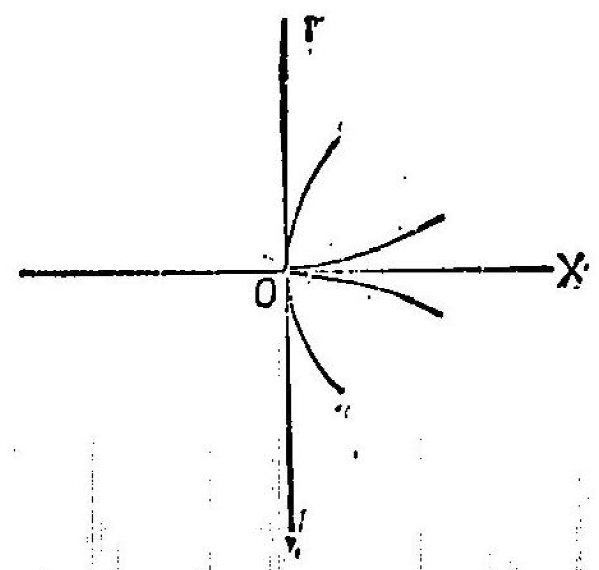
即 $$y^2=\frac{x^3}{2c},$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{1}{2c}}\,x^{\frac{3}{2}}.$$

トナリ $x<0$ ナル所ニハ y ノ値ハナシ. 故ニ原點ハ此曲線ノ終點

ニシテ $x>0$ ナル x ノ値ニ對シテ二ツノ y ノ値アリ而シテ x 軸ハ其切線ナリ. 故ニ原點ハ第一種ノ尖點ナリ. 即圖ノ如シ.

第三十七圖



附　$y^2=ax^3$ ナル曲線ハ半立方拋物線 (*Semi cubic parabola*) ト云フモノニテ第一種ノ尖點ヲ有スル曲線ノ引合ニ出ルコト多シ.

72. 直交軸ニ關シテ曲線ノ畫法

是迄ノ§ニ於テ論ゼル種々ノ曲線ノ性質ヲ參酌シテ方程式ガ與ヘラレタル場合ニ其表ハス曲線ノ大勢ヲ畫クヲ得ベシ. 第一ニ直交軸ニ關シテ曲線ノ畫法ハ如何ナル順序ニ之ヲナスカヲ述ベンニ,

I. 定直線或ハ定曲線トノ交點ヲ定ム.

II. 定點, 或ハ定直線ニ對スル對稱ヲ檢ス.

III. 曲線ノアル區域ヲ定ム.

IV. $\frac{dy}{dx}$ ヲ求メ, 各點ニ於ケル其値及符號ヲ檢ス,

$\frac{dy}{dx}>0$ ナル時ハ y ハ x ト共ニ增減ス,

$\frac{dy}{dx}<0$ ナル時ハ y ハ x ト增減ヲ反對ニス,

$\frac{dy}{dx}=0$, ナルトキハ一般ニ y ノ極大或ハ極小値アリ.

V.　$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ヲ求メ其符號ヲ檢ス,

$\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$ ナルトキハ曲線ハ上方ニ凹,

$\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$ ナルトキハ曲線ハ上方ニ凸,

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ ナルトキハ一般ニ彎點アリ.

VI.　漸近線ヲ求メ之ニ對應スル曲線ノ枝ノ位置ヲ定ム.

VII.　重複點ヲ求メ其近方ニ於ケル曲線ノ形ヲ檢ス.

VIII.　曲度ヲ求ム.

IX.　x 又ハ y ニ種々ノ値ヲ與ヘテ之ニ對應スル y 或ハ x ノ値ヲ求メテ曲線上ノ點ヲ定ム.

何レノ場合ニモ方程式ノ形ヲ便宜ノ形ニ變化スベキハ勿論, x 及 y ノ外ニ第三ノ變數ヲ導キテ論ズルコトヲ便トスルトキハカクスルモ妨ゲナク或ハ極坐標ニ一時變ジテ其性質ヲ吟味スルモ可ナリ.

【例】　$2xy^2+y^2+x^2-2x^3=0$,

$x=0$　ナルトキ　$y=0$,

$x=\dfrac{1}{2}$　ナルトキ　$y=0$,

即 x 軸ト原點及ビ $x=\dfrac{1}{2}$ ノ二點ニテ交ル.

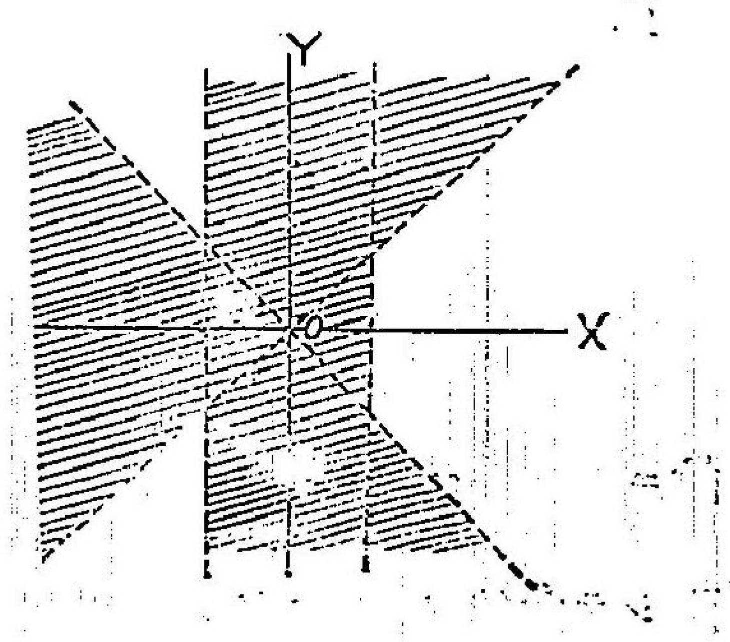
此式ハ y ノ偶數冪ノミヲ含ムニヨリ曲線ハ x 軸ニ關シテ對稱ナルニヨリ $y>0$ ノミヲシラブレバヨシ.

又此方程式ヲ

$$2x(y^2-x^2)+(x^2+y^2)=0$$

ト書クトキハ $x>0$ ノトキハ $y^2<x^2$,　$x<0$ ノトキハ $y^2>x^2$ ナラザルベカラズ. 即 $y>0$ ナル處ニテハ y 軸ノ右ニテハ曲線ハ $y-x=0$ ナル直線ノ上ニ出ヅルコトナク. 又左ニテハ曲線ハ $y+x=0$ ナル直線ノ下ニアルコトナシ.

第三十八圖



又之ヲ　$y=\pm x\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}}$,

ト置ケバ $x>\dfrac{1}{2}$ 或ハ $x<-\dfrac{1}{2}$ ナラザレバ ($x=0$ ヲ除キ) 曲線アルコトナシ. 故ニ曲線ノナキ場所ヲ斜線ニテ抹消スルトキハ右圖ノ如クナル.

$$\frac{dy}{dx}=\pm 4\frac{(4x^2+2x-1)}{(2x-1)^{\frac{1}{2}}(2x+1)^{\frac{3}{2}}},$$

$4x^2+\ x-1=0$　ヲ解キテ　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$,

x 及 y (>0) 及 y' ノ値ヲ表示セバ

x	$-\infty$		$-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
y'	-1	負	0	正	$+\infty$		$+\infty$	正	1
y	∞	減	極小	增		虚		增	∞

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\pm\frac{4(x-1)}{(2x-1)^{\frac{3}{2}}(2x+1)^{\frac{5}{2}}},$$

$x=1$,　$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　ノトキ　$y''=0$,

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y''	0	正	∞		$-\infty$	負	0	正	0
曲線		上ニ凹		虚		上ニ凸	彎點	凹	

又　$$y=\pm x\sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}},$$

$$=\pm x\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$=\pm\left\{x-\frac{1}{2}+\frac{1}{8x}-\cdots\cdots\right\},$$

故ニ　$y-x=-\frac{1}{2}$,　$y+x=\frac{1}{2}$　ハ二漸近線ナリ,

而シテ曲線ノ y ノ値ハ漸近線ノ y ノ値ヨリ大ナルニヨリ何レノ漸近線ニ對シテモ曲線ハ其上方ニアリ. 又

$$x=-\frac{1}{2}\quad ナルキ\quad y=\infty$$

ナルニヨリコレ又一漸近線ナリ. 而シテ曲線ハ其ノ左方ニアルコト前ニ述ベタルガ如シ.

次ニ重複點ヲ求ムルニ　$\frac{\partial f}{\partial x}=0$,　$\frac{\partial f}{\partial y}=0$,　$f=0$.　ノ三式ヲ滿足スル點ハ原點ノミナルヲ知リ得ベシ. 而シテ原點ハ孤立點ナルコト前述ノ如シ.

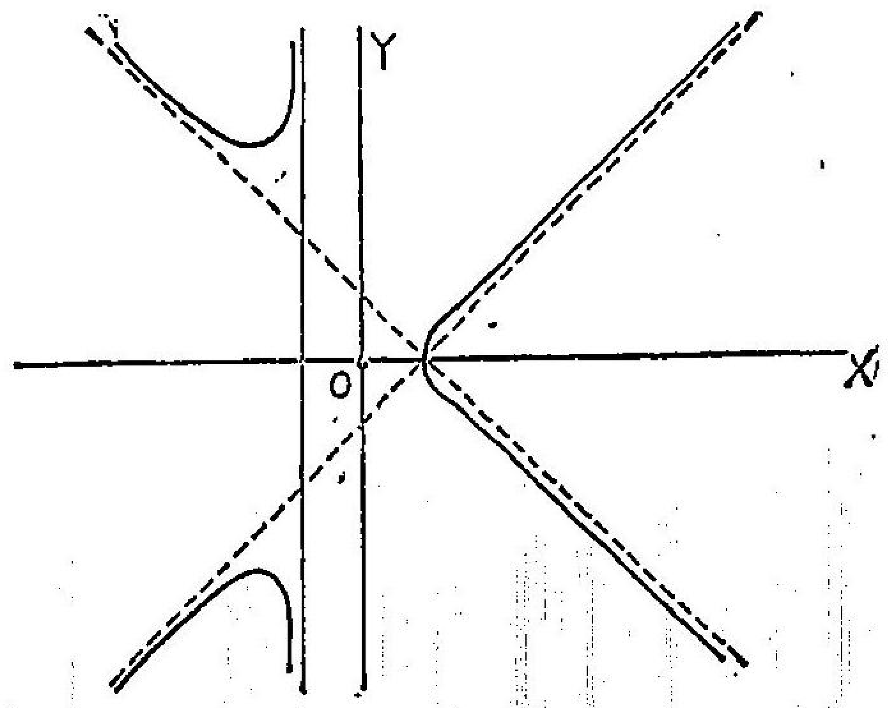
次ニ曲度半徑ヲ求ムルニ

$$\rho=\frac{2(8x^4+8x^3-x^2-2x)^{\frac{3}{2}}}{(x-1)(2x+1)^2},$$

$$\therefore\qquad x=\frac{1}{2}\quad ノキハ\quad \rho=\frac{1}{8},$$

上ノ研究ニヨリ圖形ヲ畫クキハ大略次ノ如シ

第三十九圖



73. 極軸ニ關スル曲線ノ畫法

此ニ注意スベキ大要ヲ示セバ次ノ如シ.

I.　定直線或ハ定曲線トノ交點ヲ定ム.

II.　定點或ハ定直線トノ對稱ヲ檢ス.

III.　曲線ノアル區域ヲ定ム.

IV.　$\frac{dr}{d\theta}$ ヲ求メテ其値及符號ヲ吟味ス.

V.　彎點ヲ求ム.

VI.　動徑ト切線トノ間ノ角ヲ求ム.

VII.　漸近線ヲ求メ曲線トノ位置關係ヲ檢ス.

VIII.　曲度ヲ求ム.

IX.　r 又ハ θ ニ種々ノ値ヲ與ヘ之ニ對應スル θ 或ハ r ノ値ヲ求メテ曲線上ノ點ヲ定ム.

勿論此場合ニモ方程式ノ形ヲ適當ナル形ニ化シテ種々ノ性質ヲ檢スルモノトス.

【例】 $r=a(1+cos\theta)$ $a>0$, (*Cordioide*).

$\theta=0$ ノ時 $r=2a$,

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ノ時 $r=a$,

$\theta=\pi$ ノ時 $r=0$,

$\theta=\dfrac{3\pi}{2}$ ノ時 $r=a$,

$cos\theta$ ハ θ ノ偶函數ナルニヨリ r ハ原線ニ對シテ對稱ナリ. 故ニ θ ハ正ナル所ヲ吟味セバ可ナリ.

$$\frac{dr}{d\theta}=-asin\theta$$

$\therefore$ $0<\theta<\pi$ マデハ $\dfrac{dr}{d\theta}<0$, 即 θ ガ增スニ從テ r ハ減ズ.

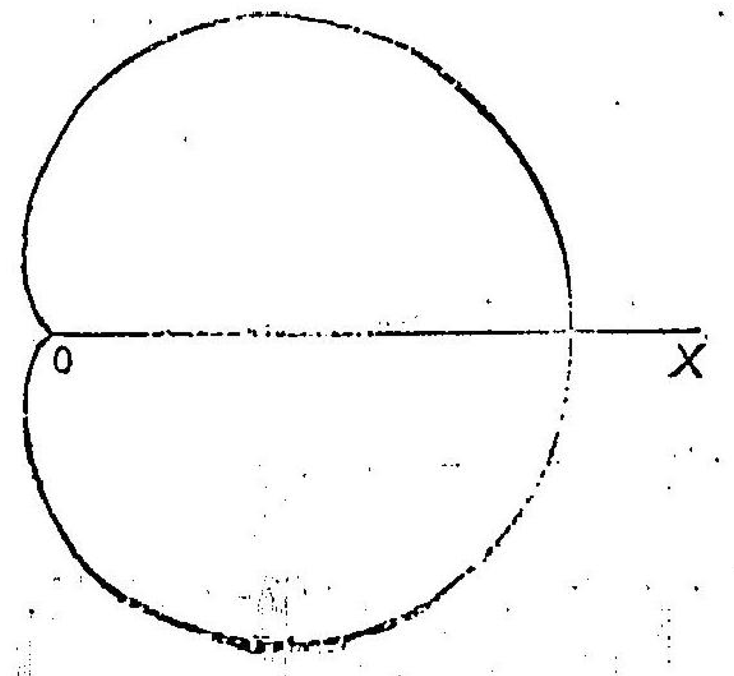
$|cos\theta|<1$ ナルニヨリ $|r|<2a$. 即極ヲ中心トシテ $2a$ ヲ半徑トセル圓ヨリ外ニアルコトナシ. 從テ漸近線ナシ.

$$\frac{d^2r}{d\theta^2}=-acos\theta.$$

$$r^2+2(r')^2-rr''=a(1+cos\theta)^2+2a^2sin^2\theta+a^2cos\theta(1+cos\theta)$$
$$=3a^2(1+cos\theta)$$

之ガ 0 トナルハ $\theta=\pi$ ナリ然レ圧 θ ガ π ヲ過ルトキニ r' ハ符號ヲ變ジテ $r'=0$ トナルニヨリコレ r ノ極小ニシテ彎點ニアラズ. 斯クシテ次ノ如キ曲線ヲ得ベシ.

第四十圖



74. 第一章例題

1. 方程式 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^n+\left(\dfrac{y}{b}\right)^n=1$, ガ表ハス曲線ハ n ガ如何ナル値ナルモ常ニ點 (a,b) ニ於テ切スルコトヲ證セ.

點 (a,b) ニ於ケル切線ハ §64 ニヨリ

$$(x-a)\frac{na^{n-1}}{a^n}+(y-b)\frac{nb^{n-1}}{b^n}=0,$$

即
$$\frac{x-a}{a}+\frac{y-b}{b}=0,$$

之レ n ノ値ニ關セザルヲ以テナリ.

2. 楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 及圓 $x^2+y^2=a^2$ ニ於テ相等シキ x ノ値ニ對スル點ニ於ケル二ツノ切線ノナス角ノ最大ナルモノヲ ϕ トセバ
$$tan\phi=\frac{a-b}{2\sqrt{ab}},$$
ヲ證セ.

楕圓ニ於ケル離心角ヲ θ トセバ二點ノ坐標ハ夫々

$$a\cos\theta,\ b\sin\theta\ ;\quad a\cos\theta\ ,\quad a\sin\theta\ ;$$

二切線ガ x 軸トナス角ノ正切ヲ m, m' トセバ

$$m=-\frac{b}{a}\cot\theta,\quad m'=-\cot\theta,$$

$$\therefore\qquad \tan\phi=\cot\theta\left(1-\frac{b}{a}\right)\div\left(1+\frac{b}{a}\cot^2\theta\right),$$

即 $$(a-b)\cot\phi=a\tan\theta+b\cot\theta,$$

$$-(a-b)\operatorname{cosec}^2\phi\frac{d\phi}{d\theta}=a\sec^2\theta-b\operatorname{cosec}^2\theta,$$

$\therefore$ ϕ ノ極大ニ對シテハ $\dfrac{d\phi}{d\theta}=0$, 即

$$a\sec^2\theta=b\operatorname{cosec}^2\theta \text{ 即 } \tan\theta=\sqrt{\frac{b}{a}},$$

$$\therefore\qquad \tan\phi=\frac{a-b}{2\sqrt{ab}},$$

$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ ノ時ニハ $\phi=0$.

3. $y=a\sqrt{\dfrac{x}{2a-x}}$, ノ彎點ヲ求ム.

$$y^2(2a-x)=a^2x.$$

$$\therefore\qquad 2y\frac{dy}{dx}(2a-x)-y^2=a^2,$$

$$\therefore\qquad 2y(2a-x)\frac{d^2y}{dx^2}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2(2a-x)-4y\frac{dy}{dx}=0\ ;$$

$\therefore$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ ナルトキハ $2y(2a-x)\dfrac{d^3y}{dx^3}=6\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2,$

$$(2a-x)\frac{dy}{dx}=2y\qquad \therefore\quad 4y^2=a^2+y^2$$

$\therefore$ $(2a-x)=3x,\ x=\dfrac{a}{2}$ $\therefore$ $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ ハ 0 ナラズ.

4. $xy=a^2\log\dfrac{x}{a}$ ハ $x=ae^{\frac{3}{2}}$ ニ彎點アルコトヲ證セ.

$$x\frac{dy}{dx}+y=\frac{a^2}{x}.\quad \therefore\quad x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=-\frac{a^2}{x^2},$$

$\therefore$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ ノ時ハ $2x\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{a^2}{x}=\dfrac{2a^2}{x}-y,$

$$\therefore\qquad xy=\frac{3a^2}{2},\quad \therefore\quad x=ae^{\frac{3}{2}},$$

又 $$x\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{2a^2}{x^3}=0 \text{ ナラズ.}$$

5. $x=a(1-\cos\phi),\quad y=a(n\phi+\sin\phi)$, ノ曲線ハ $\cos\phi=-\dfrac{1}{n}$ ナル時彎點アルコトヲ證セ.

$$\frac{dx}{d\phi}=a\sin\phi,\qquad \frac{dy}{d\phi}=a(n+\cos\phi),$$

$$\therefore\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{a\sin\phi}\,\frac{d}{d\phi}(n\operatorname{cosec}\phi+\cot\phi)\ ;$$

故ニ彎點ニ對シテハ

$$n\operatorname{cosec}\phi.\cot\phi+\operatorname{cosec}\phi=0,$$

即 $$n\cos\phi=-1,$$

此時ニ $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ ハ 0 トナラザルコトヲ證明スル必要アリ.

即 $$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{1}{a^2\sin\phi}\,\frac{d}{d\phi}(n\operatorname{cosec}^2\phi\cot\phi+\operatorname{cosec}^3\phi),$$

$$=\frac{1}{a^2\sin\phi}(2n\operatorname{cosec}^2\phi\cot^2\phi+n\operatorname{cosec}^4\phi+3\operatorname{cosec}^3\phi\cot\phi),$$

$$=\frac{1}{a^2\sin^3\phi}(2n\cos^2\phi+3\cos\phi+n).$$

之レ　$\cos\phi=-\frac{1}{n}$ ノ時 0 トナラズ.

6.　$y^3=(x-a)^2(x-c)$ ハ $x=a$ ニ於テ第一種ノ尖點ヲ有スルコトヲ證セ.

原點ヲ $(a,0)$ ニ移ストキハ

$$y^3=x^3+x^2(a-c),$$

∴　原點ニ於ケル切線ハ,

$$x^2=0,$$

ニヨリテ與ヘラル. 而シテ原點ニ近キ所ニテハ $x^3<x^2$,

$$\therefore\quad x=\pm\left(\frac{y^3}{a-c}\right)^{\frac{1}{2}},$$

∴　y ハ $a-c$ ト同符號ナリ. 故ニ第一種ノ尖點アリ.

7.　$x=1$ ニ於テ $(xy+1)^2+(x-1)^3(x-2)=0$ ハ第一種ノ尖點ヲ有スルコトヲ證セ.

$x=1$ ノ時ハ $(y+1)^2=0$,　∴ $x=1$ ノ所ニハ二枝アリ.

$(+1,-1)$ ニ原點ヲ移ストキハ

$$(xy+y-x)^2=x^3-x^4,$$

∴　原點ニ於テ $y=x$ ハ二枝ノ共通切線ナリ. 而シテ原點ニ近キ所ニテハ

$$x^4<x^3,\quad\therefore\quad y-x=\pm x^{\frac{3}{2}}-xy=\pm x^{\frac{3}{2}}\ (\text{殆ンド})$$

∴　x ハ正ナラザルベカラズ. 而シテ二枝ハ

$$y-x=0,$$

ノ兩側ニアルニヨルニヨリ第一種ノ尖點アリ.

8.　$x^4-ax^2y-a(x-a)y^2=0$, ハ原點ハ孤立點ナリ.

$$2(x-a)y=-ax^2\pm\sqrt{a^2+4a(x-a)}.x^2$$
$$=-\{a\pm\sqrt{a(4x-3a)}\}x^2,$$

∴　$a>0$ ナルトキハ $x>\frac{3a}{4}$ ナラザレバ曲線ナシ.

又　$a<0$ ナルトキハ $x<\frac{3a}{4}$ ナラザレバ曲線ナシ.

然ルニ $x=0.\ y=0$ 即原點ノ坐標ハ方程式ヲ滿足ス. 故ニ原點ハ孤立點ナリ.

9.　$x^4-2ay^3-3a^2y^2-2a^2x^2+a^4=0$ ハ $x=\pm a$ 及 $y=-a$, ニ於テ二重點ヲ有ス.

$$(x^2-a^2)^2=2ay^3+3a^2y^2,$$

∴　$(\pm a,0)$ ヲ原點トスルトキハ曲線ノ式ハ

$$(x^2\pm 2ax)^2=2ay^3+3a^2y^2;$$

∴　原點ニ於ケル切線ハ

$$4a^2x^2=3a^2y^2,$$

即　$$\frac{y}{x}=\pm\sqrt{\frac{4}{3}},$$

之レ原點ニ於ケル $\frac{dy}{dx}$ ノ値ナリ. 故ニ二重點ナリ.

$y=-a$ ノ時ニハ $(x^2-a^2)^2=a^4$, 或ハ $x^2=0$, 或ハ $2a^2$. 故ニ原點ヲ $(\pm a\sqrt{2},-a)$ ニ移ストキハ

$$(x^2\pm 2ax\sqrt{2}+a^2)^2=2a(y-a)^3+3a^2(y-a)^2,$$

∴　最低次ノ式ハ $\pm a^3x\sqrt{2}=a^3y(+6-6)=0$, 或ハ $x=0$ ハ切線ナリ. 又原點ヲ $(0,-a)$ ニ移ス時ハ

$$(x^2-a^2)^2=2a(y-a)^3+3a^2(y-a)^2$$

∴ 新原點ノ切線ハ

$$-2a^2x^2=a^2y^2(-6+3) \text{ 或ハ } \frac{y}{x}=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

∴ $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, 即二重點ナリ.

10. $ay^2=(x-a)^2(x-b)$, $a>0$.

ハ $a<b$ ノトキハ $x=a$ ニ於テ孤立點.

$a>b$, 二重點

$a=b$, 尖點.(第一種).

原點ヲ $(a,0)$ ニ移ストキハ

$$ay^2=x^2(x+a-b),$$

∴ 切線ハ $ay^2=x^2(a-b)$,

∴ $a<b$ ノトキハ原點ハ孤立點ナリ.

又 $a>b$ ノトキハ切線ハ二ツノ異レル直線ナルニヨリ原點ハ二重點ナリ. $a=b$ ノトキハ二切線ハ合シテートリ. $x<0$ ノトキハ曲線ナシ故ニ原點ハ尖點ナリ.

11. $y^2=x^3-x^4$ ノ特別點ヲ求ム.

原點ニ於ケル切線ハ $y^2=0$,

又 $y=\pm x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-x}$, ナルニヨリ $0<x<1$ ノ間ノミ曲線アリ. 故ニ原點ハ第一種ノ尖點ナリ.

彎點ニ付テハ

$$\pm\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}},$$

∴ $$\pm\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4}\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}-\frac{6}{4}\frac{\sqrt{x}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{4}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{(1-x)^{\frac{3}{2}}},$$

∴ $3(1-x)^2-6x(1-x)-x^2=0$,

$8x^2-12x+3=0$,

∴ $$x=\frac{6-2\sqrt{3}}{8}(<-1),$$

∴ 二ツノ彎點アリ.

12. 楕圓上ノ一點ヨリ焦點マデノ距離ヲ r, r' トシ, 其點ニ於ケル法線ガ長軸トナス角ヲ θ トセバ

$$\rho=\frac{(rr')^{\frac{3}{2}}}{ab}, \quad \rho=\frac{b^2}{a(1-e^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}, \text{ ヲ証セ.}$$

$$\rho=r\frac{dr}{dp} \qquad (\S 70).$$

$$\frac{p^2}{r^2}=\frac{b^2}{rr'}, \text{ 或ハ } p^2=\frac{b^2r}{2a-r},$$

∴ $$2p\frac{dp}{dr}=\frac{2ab^2}{(2a-r)^2} \quad ∴ \ \rho=\frac{pr\cdot r'^2}{ab^2}=\frac{(rr')^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

又 $$\frac{dy}{dx}=-\cot\theta, \quad a^2y\frac{dy}{dx}+b^2x=0,$$

∴ $$\frac{bx}{a\cos\theta}=\frac{ay}{b\sin\theta}=\frac{ab}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}},$$

$$a^2y\frac{d^2y}{dx^2}+a^2\cot^2\theta+b^2=0;$$

∴ $$\rho=\frac{\operatorname{cosec}^3\theta a^2y}{a^2\cot^2\theta+b^2}=\frac{a^2y\operatorname{cosec}\theta}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta},$$

$$=\frac{a^2b^2}{(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}=\frac{b^2}{a(1-e^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

13. $y^2(x-4a)=ax(x-3a)$, ヲ畫ケ. $(a>0)$.

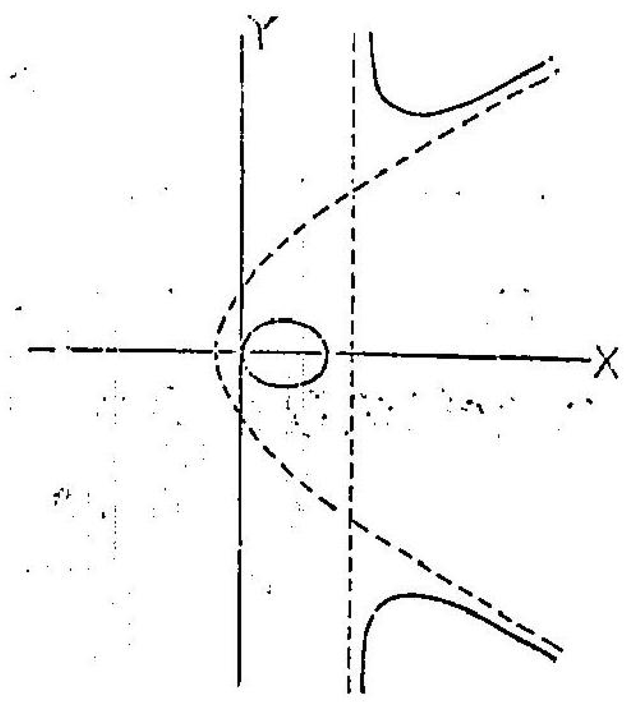
此曲線ハ x 軸ニ對シテ對稱ナリ.

$x=0$ 及 $x=3a$ ノ時 $y=0$; $x=4a$ ハ漸近線ナリ.

$x<0$ ノトキハ y ハ虚數ナリ.

$0<x<3a$ ニテハ y ノ正値ハ只一ツアリ故ニ原點及 $(3a,0)$ ナル二點ヲ結ブ自閉線 (*loop*) アリ. 又 $3a<x<4a$ ニ於テハ y ハ虚數ナリ.

第四十一圖



又 $$y^2=ax\left(1-\frac{3a}{x}\right)\left(1-\frac{4a}{x}\right)^{-1}$$

$$=ax\left(1+\frac{a}{x}+\cdots\cdots\right).$$

故ニ $$y^2=a(x+a),$$

ナル拋物線ハ漸近曲線ナリ.

故ニ其大勢ハ圖ノ如シ.

14. $x^2y^2=(a^2-y^2)(b+y)^2$, (*Conchoid*).

原點ヲ $(0,-b)$ ニ移ストキハ

$$x^2(y-b)^2=\{a^2-(y-b)^2\}y^2,$$

又之ヲ極式ニ直ス時ハ $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,

∴ $$(r\sin\theta-b)^2=a^2\sin^2\theta,$$

∴ $$r=b\,\mathrm{cosec}\,\theta\pm a.$$

故ニ O ヲ原點トシ Q ヲ $y=b$ 上ノ點トシ OQ ガ x 軸ト θ ナル角ヲナストセバ, 曲線上ノ相對點 P,P' ハ

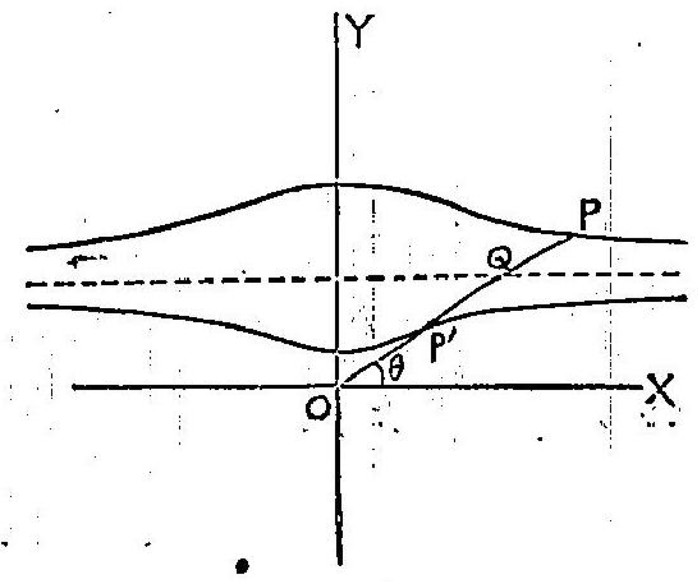
$$OP=OQ+a, \quad OQ'=OQ-a,$$

ニ依テ與ヘラル. $\theta=0$ ナル時ハ P,P' ハ無限大ノ外ニ行クニヨリ $y=b$ ハ漸近線ナリ. $\theta=\frac{\pi}{2}$ ノトキハ r ハ極小ナリ. $b>a$ トセバ θ ガ 0 ヨリ π マデ變ズル時ハ P,P' ハ二枝ノ曲線ヲ畫ク而シテ y 軸ニ對シテ對稱ナリ. 而シテ $y=b$ ナル曲線ノ方ニ凹形ナリ. 而シテ $\theta'=\theta+\pi$ ノ時ハ $r'=-b\,\mathrm{cosec}\,\theta\pm a$,

故ニ P,P' ハ逆ノ順ニ生ズルノミ.

故ニ曲線ハ二枝ヨリ成リ $r=0$ ハ孤立點ナリ. (第42圖)

第四十二圖



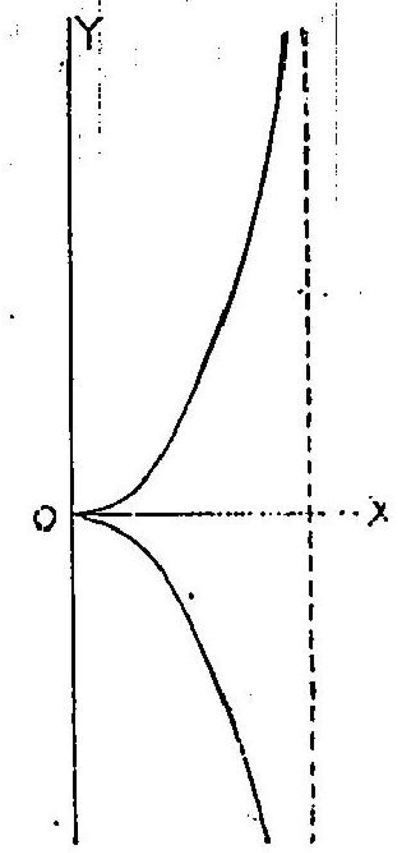
$b=a$ ナルトキハ下ノ枝ハ原點ヲ通ズ而シテコノ時ハ

$$x^2(y-b)^2=y^2(2by-y^2),$$

トナルニヨリ $x=0$ 即 y 軸ハ O ニ於ケル二重切線トナル. 而シテ方程式ハ $bx^2=2y^3$ ニ近クナルニヨリ O ハ第一種ノ尖點ナリ.

$a>b$ ナル時ハ $a=b\,\mathrm{cosec}\,\alpha$ ト置ケバ $\theta=\alpha$ ヨリ $\pi-\alpha$ マデ P' ハ $x=0$ ノ左ニ於テ一ノ自閉線ヲ畫キテ O ヲ過グ. 此場合ニハ O ニ於テハ曲線ハ大略 $b^2x^2=y^2(a^2-b^2)$ トナルニヨリ原點ハ二重點ナリ.

第四十三圖



15. $y^2(2a-x)=x^3$ ヲ畫ケ (*Cissoid*)

$2a-x=0$ ノ時 $y=\infty$,

即 $x=2a$ ハ漸近線ナリ.

又 $0<x<2a$ ノ時ノミ曲線アリ. 原點ニ近クハ $2ay^2=x^3$ ト同樣ノ形ナルニ

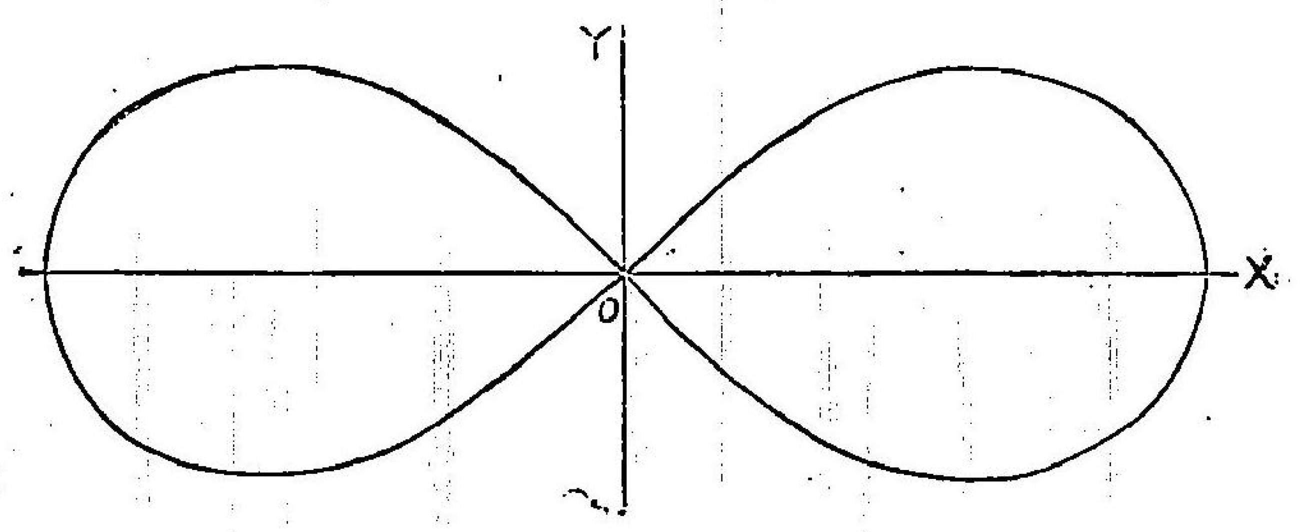
ヨリ原點ハ第一種ノ尖點ナリ．曲線ハ x 軸ニ對稱ナル二枝ヨリ成リ一枝ハ原點ヨリ出發シテ x 軸ヲ切線トナシテ右ニ進ミ $x=2a$ ニ於テ無限ニ高クナリテ $x=2a$ ナル漸近線ニ切ス．他ノ一枝ハ之ヲ轉倒セルモノニ等シ．(第43圖)

16.　$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.　(*Lemniscate*).

原點ハ $y\pm x=0$ ヲ切線トスル二重點ナリ．

極式ニ直セバ $r^2=a^2\cos 2\theta$ トナル．故ニ $\theta=0$ ノ時 $r=\pm a$, $\theta=\frac{\pi}{4}$ ノ時 $r=0$, 又曲線ハ兩軸ニ對シテ對稱ナリ．而シテ原點ニ於ケル切線ハ曲線ヲ切ルニヨリ原點ハ二ツノ彎點ガ重リ合ヘルモノニテ恰モ ∞ ノ形ニ似タリ．

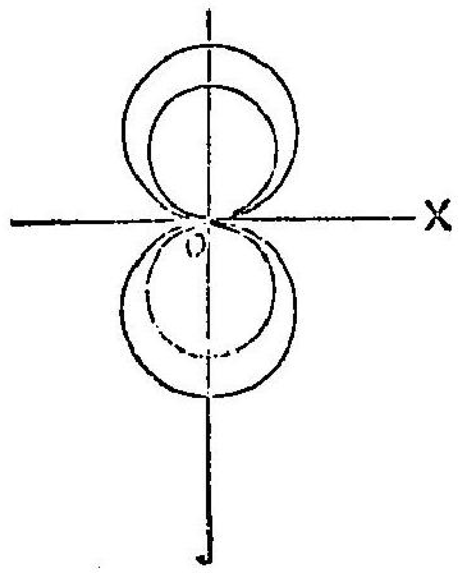
第 四 十 四 圖



17.　$r=a\theta\sin\theta$　ヲ畫ケ．

θ ガ 0 ヨリ π マデ變ズルトキニ動經ハ極ヲ通ル自閉線ヲ畫キ原線ハ之ニ切ス．　θ ハ π ヨリ 2π マデ變ズルトキハ同樣ニ外ノ自閉線ヲ畫ク　カクシテ無限ニ澤山

第 四 十 五 圖



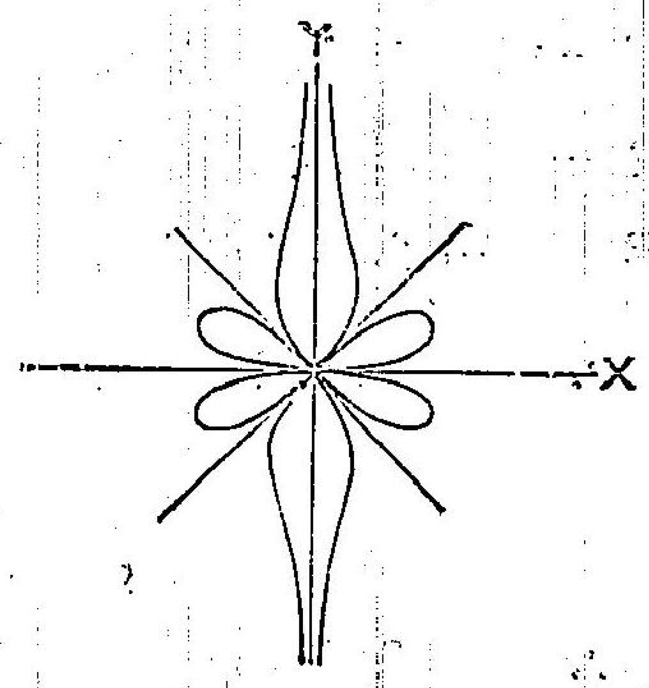
ノ自閉線ハ重リ合フ．θ ガ負トナレバ原線ノ下ニ同樣ナル自閉線ヲ畫ク．

18.　$r^2\cos\theta=a^2\sin^2 3\theta$. ヲ畫ケ

$\cos\theta$ ハ正ナル間ニハ θ ノ各ノ値ニ對シテ二ツノ r ノ値アリ．

$\theta=0$ ヨリ $\frac{\pi}{6}$ マデハ r^2 ハ 0 ヨリ $\frac{2a^2}{\sqrt{3}}$ マデ增シ $\theta=\frac{\pi}{6}$ ヨリ $\frac{\pi}{3}$ マデハ r^2 ハ $\frac{2a^2}{\sqrt{3}}$ ヨリ 0 マデ減ズ．

第 四 十 六 圖



故ニコレ極ヲ通ル二ツノ自閉線ニナル．又 θ ガ 0 ヨリ $-\frac{\pi}{3}$ マデノ間ニテ二ツノ自閉線アリ．次ニ θ ガ $\frac{\pi}{3}$ ヨリ $\frac{\pi}{3}$ マデ變ズル間ニ r^2 ハ 0 ヨリ ∞ マデ變ズ．故ニ自閉線ニ切シテ始マリテ y 軸ヲ漸近線トスル二枝ヲ得ベシ．同樣ニ $-\frac{\pi}{3}$ ト $-\frac{\pi}{2}$ トノ間モ同樣ノ二枝アリ．故ニ大略 46 圖ノ如シ

19.　曲線 $r=a\cos\frac{\theta}{3}$ ヲ畫キ，A ヲ原線ノ延長ガ曲線ト交ル點トシ．$POQR$ ヲ極 0 ヲ過ル一弦トセバ

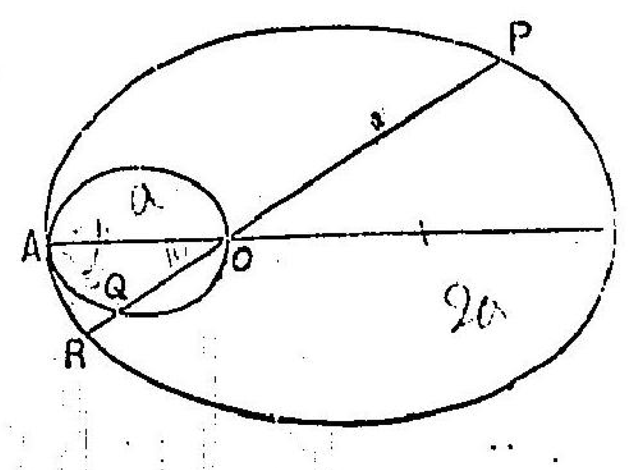
$$\angle PAQ=QAR=60^\circ\ ,\qquad AOQ=3APO,\qquad \text{ヲ證セ}$$

$\cos\left(-\frac{\theta}{3}\right)=\cos\frac{\theta}{3}$ ナルニヨリ曲線ハ原線ニ對シテ對稱ナリ．

$\theta=0$ ノ時ハ $r=a$, ニシテ $\frac{\theta}{3}=\frac{\pi}{2}$ マデ r ハ減ジテ $r=0$ トナル．

又 $\theta=0$ ヨリ $\frac{\theta}{3}=-\frac{\pi}{2}$ マデ漸々 r ハ減ジテ $r=0$ トナル. 故ニ曲線ハ二自閉線ヨリ一ハ他ノ全ク内ニアリテ互ニ切ス. 而シテ一般ニ O ヲ通ル直線ハ θ ノ一値ニ對シテ $\cos\frac{\theta}{3}$ ノ三値アルニヨリ三點ニ於テ交ル.

第四十七圖



$\theta=\pi$ ノトキハ $r=OA=\frac{a}{2}$.

P ニ於テ $\theta=3\alpha$ ノトキニハ

Q ……… $\theta=\pi+3\alpha$,

R ……… $\theta=-(\pi-3\alpha)$,

$$\therefore \quad \tan PAO=a\cos\alpha.\sin3\alpha\div\left(a\cos\alpha.\cos3\alpha+\frac{a}{2}\right),$$

$$=(\sin4\alpha+\sin2\alpha)\div(2\cos^2 2\alpha+\cos2\alpha),$$

$$=\tan2\alpha,$$

$$\therefore \quad PAO=2\alpha,$$

$$\therefore \quad APO=\alpha,\ 及\ AOQ=3\alpha=3APO.$$

又 $$\tan OAQ=OQ\sin3\alpha\div\left(\frac{a}{2}-OQ\cos3\alpha\right),$$

$$=a\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin3\alpha\div\left\{\frac{a}{2}-a\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos3\alpha\right\},$$

$$=\left\{\sin\left(4\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

$$\div\left\{1-\cos\left(4\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right\},$$

$$=\left\{\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{3}+\pi\right)+\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

$$\div\left\{1-\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(4\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)\right\},$$

$$=-\tan\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right),$$

$$\therefore \quad OAQ=\frac{\pi}{3}-2\alpha, \quad \therefore \quad PAQ=\frac{\pi}{3}.$$

又 $$\tan OAR=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin3\alpha\div\left\{-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos3\alpha+\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\left\{\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

$$\div\left\{1-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

$$=\left\{-\sin\left(2\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)-\sin\left(4\alpha-\frac{4\pi}{3}\right)\right\}$$

$$\div\left\{1+\cos\left(2\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(4\alpha-\frac{4\pi}{3}\right)\right\}$$

$$=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\alpha\right)\left\{1+2\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2\alpha\right)\right\}$$

$$\div\left\{1+2\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2\alpha\right)\right\}\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2\alpha\right).$$

$$\therefore \quad OAR=\frac{2\pi}{3}-2\alpha, \quad \therefore \quad QAR=\frac{\pi}{3}=PAQ.$$

20. 次ノ場合ノ各ニ對スル曲線 $y=\sin x\log(m\sin x)$ ヲ畫ケ (i) $m>1$ ノトキ, (ii) $m=1$, (iii) $1>m>\frac{1}{e}$ (iv) $\frac{1}{e}>m$ ノトキ,

若シ $m>0$ ノトキハ $\sin x>0$ ナラザルベカラズ.

$m<0$ ノトキハ x 及 y ノ符號ヲ變ズルトキハ方程式ノ形ハ變ラズ. 故ニ m ハ正ナルモ負ナルモ同樣ノ曲線ヲ得ルニヨリ $m>0$ トシテ論ズベシ. $m=0$ ノトキハ x ハ $2p\pi$ ト $(2p+1)\pi$ (p ハ任意ノ整數) ト

ノ間ニアリ.

$$\frac{dy}{dx}=cosx(1+log(msinx)).$$

∴ 若シ $cosx=0$ 或ハ $msinx=\frac{1}{e}$ ノ𪜈ハ $\frac{dy}{dx}=0$ ナルニヨリ曲線ハ x 軸ニ平行ナリ.

又 $x=2p\pi$ 或ハ $2(p+1)\pi$ ノ𪜈ハ

$$y=\frac{log(msinx)}{cosecx}=\left[\frac{cotx}{-cosecxcotx}\right], \qquad (\S 52)$$

$$=[-sinx]=0,$$

(i) $m>1$,

$x=0$ ヨリ $msinx=1$ マデハ $y<0$, ニシテ $msinx=1$ ノ𪜈 $y=0$, ハ増シテ $\pi-sin^{-1}\left(\frac{1}{m}\right)$ ニナルマデ y ハ正ニシテ 終ニ $y=0$ ニナル. 又 y ハ負ニナリテ $x=\pi$ ノ𪜈 $y=0$ ニナル. 此後ハ $x=2\pi$ マデハ曲線ナシ. x ハ $-\infty$ ヨリ $+\infty$ ニ變ズル間ニハ之ヲ無限ニ繰リ返スニヨリ曲線ハ等距離ヅヽ離レタル無限ノ波線ヨリ成ル. m ハ負ノトキニハ m ハ正ノ𪜈ニ曲線ナキ所ニ曲線アリテ形ハ轉倒ス. m ハ正ノ𪜈ハ第48圖甲ノ如シ

(ii) $m=1$,

$x=2p\pi+\frac{\pi}{2}$ ノ𪜈ハ $msinx=1$, 故ニ y ノ正ナル値ハナシ. 故ニ第48圖乙ノ如クナル.

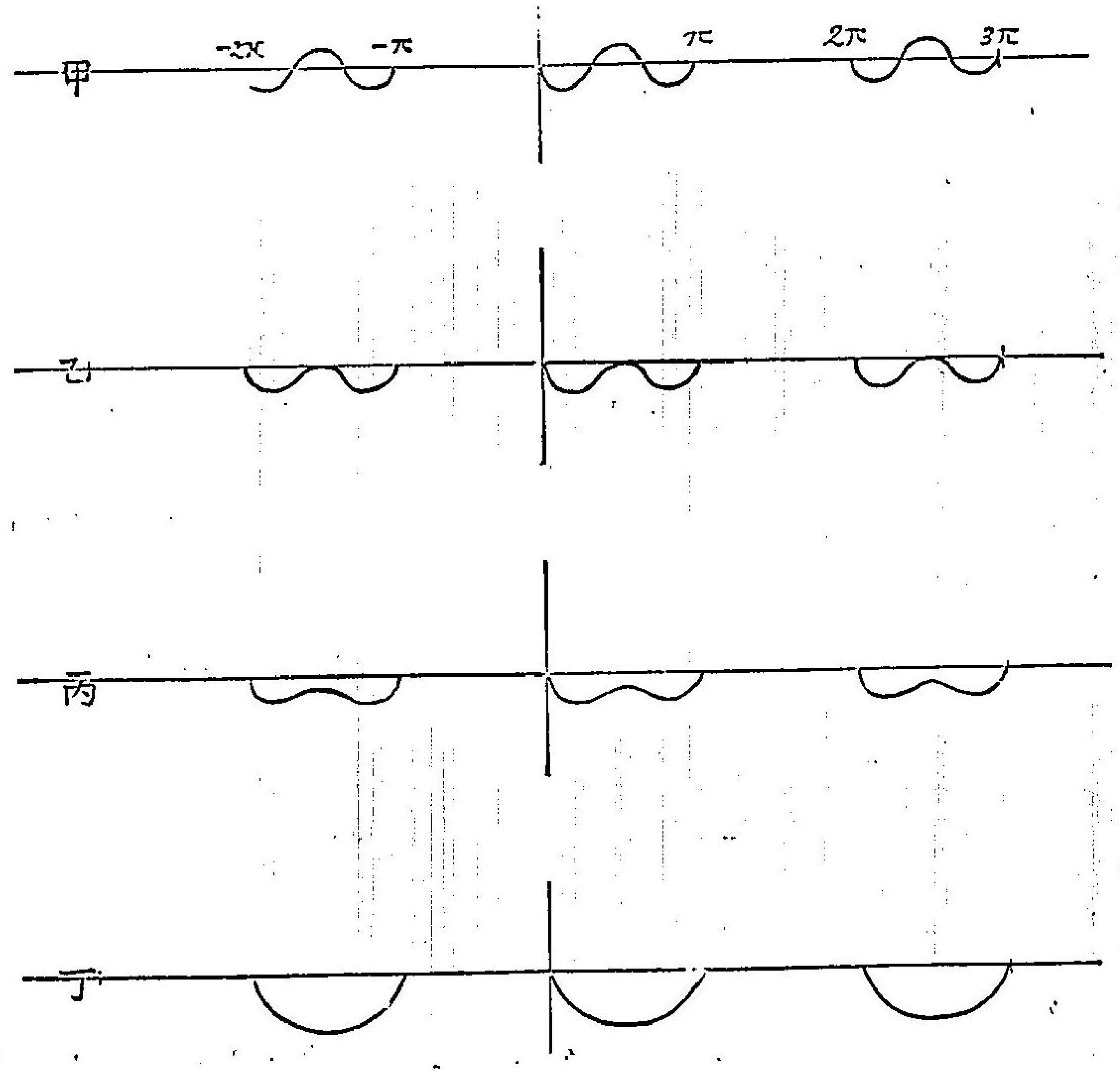
(iii) $1>m>\frac{1}{e}$,

コノトキハ $\frac{dy}{dx}$ ヲ 0 トスル二解ガ存在スルヲ得. 然レ𪜈 $x=\frac{\pi}{2}$ ノ𪜈ハ $y=logm<0$, 故ニ丙ノ如クナル.

(iv) $m<\frac{1}{e}$,

コノ𪜈ハ $\frac{dy}{dx}=0$ トナルハ $cosx=0$ ノミ. 故ニ丁ノ如キ圖ニナル.

第　四　十　八　圖



問　題　5.

1.　曲線 $x^2y^2=a^3(x+y)$ ノ原點ニ於ケル切線ハ

$$x+y=0$$

ナルコトヲ證セ.

2. x_1, y_1 ヲ曲線 $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ 上ノ點 (x,y) ニ於ケル切線ガ兩軸ヲ切ル截片トセバ

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1.$$

3. 曲線 $y^2=4a\left(x+a\sin\frac{x}{a}\right)$ ノ x 軸ニ平行ナル切線ノ切點ガ或拋物線上ニアルコトヲ證セ.

下ノ曲線ノ漸近線ヲ求ム

4. $y^3=x^2(2a-x)$,　答　$y=-x+\frac{2a}{3}$,

5. $y^3=(x-a)^2(x-c)$,　$y=x-\frac{1}{3}(2a+c)$,

6. $xy^2+yx^2=a^3$,　$x=0,\ y=0,\ x+y=0$,

7. $y^2(x-y)^2+ax^2(x-y)-3a^2y^2-a^4=0$,

$y=x+\frac{a}{2}(1\pm\sqrt{13})$.

8. $x^2(x-y)^2-a^2(x^2+y^2)=0$　$x=\pm a, y=x\pm a\sqrt{2}$.

9. 曲線 $r\theta=a$ ニテ極次切線ハ常數ナリ.

10. $r^2=a^2\cos\theta$ ニテ $\psi=\frac{\pi}{2}+2\theta$,

11. $r=a\sec^3\frac{\theta}{3}$ ニテハ切線ニ下セル原點ヨリノ垂線ノ足ノ軌跡ハ拋物線トナル.

12. $r\cos\theta=a\cos2\theta$ ノ漸近線ハ $r\cos+a=0$ ナリ.

13. $y=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ ハ $x=\frac{3}{4}$ ノ所ニ彎點アリ.

14. $y=x^2+(x-1)^{\frac{3}{5}}$ ハ $x=1$ ノ處ニ彎點アリ.

15. $ax^2-x^2y-a^2y=0$ ハ $x=\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ ノ處ニ彎點アリ.

16. 次ノ曲線ハ原點ニ特別點ヲ有ス.

$y=\sin x$,　彎點,

$y=x\cos x$　" ,

$y=\tan x$　" ,

$y=x^2\tan x$　" ,

$y^2=x^3$　尖點,

$(y-x)^2=x^3$　" ,

$(y-x^2)^2=x^5$　" ,

$x^4-2ax^2y-axy^2+a^2y^2=0$　第二種ノ尖點,

$y^4-axy^2+x^4=0$　第一種ノ尖點,

17. 直線 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ハ曲線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-(a^2+b^2)^{\frac{1}{3}}=0$ ニ切スルコトヲ證セ.

18. 次ノ曲線ヲ書ケ

$y^3+x^3=a^3$,

$(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$,

$y^4+x^2y^2-a^2x^2=0$,

$xy^2+ax^2-a^3=0$,

$y=xe^{-x}$,

$r=\log\sin\theta$,

$r^2\cos\theta=a^2\sin^3\theta$,

$r^2\sin\theta=a^2\cos2\theta$,

$r(\theta-\pi)^2=\theta^2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$.

第 二 章

諸 種 ノ 曲 線

75. 反轉曲線

$$f(x,y)=0,$$

ハ曲線 A ノ方程式トス. 今或定點 $O'(a,b)$ ト A 上ノ點 $P(x,y)$ トヲ連ヌル直線上ニ點 $P'(\xi,\eta)$ ヲ取リ

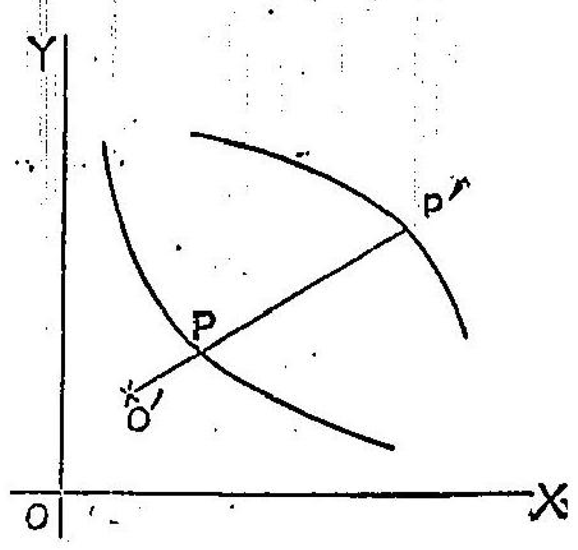
$$O'P=r\ ,\qquad O'P'=r',$$

ト置キ k ヲ或常數トスルヰニ方程式

$$rr'=k^2,$$

ヲ滿足スル點 P' ノ軌跡ヲ曲線 A ノ點 O' ニ關スル反轉曲線(*Inverse curve*)ト云ヒ, 點 O' ヲ反轉ノ中心 (*Centre of Inversion*) ト云ヒ k ヲ反轉半徑ト云フ.

第 四 十 九 圖



扨テ $$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2$$
$$r'^2=(\xi-a)^2+(\eta-b)^2$$

∴ $$k^4=\{(x-a)^2+(y-b)^2\}\times\{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2\},$$

然ルニ $$\frac{x-a}{y-b}=\frac{\xi-a}{\eta-b},$$

∴ $$\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{(y-b)^2}=\frac{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2}{(\eta-b)^2}$$
$$=\frac{k^4}{(y-b)^2\{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2\}}.$$

∴ $$y-b=\frac{k^2(\eta-b)}{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2},$$

同樣ニ $$x-a=\frac{k^2(\xi-a)}{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2},$$

此 x 及 y ノ値ヲ A ノ曲線ノ式ニ入ルレバ

$$f\left\{a+\frac{k^2(\xi-a)}{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2},\quad b+\frac{k^2(\eta-b)}{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2}\right\}=0,$$

之レ A ノ反轉曲線ノ方程式ナリ.

特ニ反轉ノ中心ガ原點ト一致スルトキハ $a=0,\ b=0,$ ナルニヨリ方程式ハ

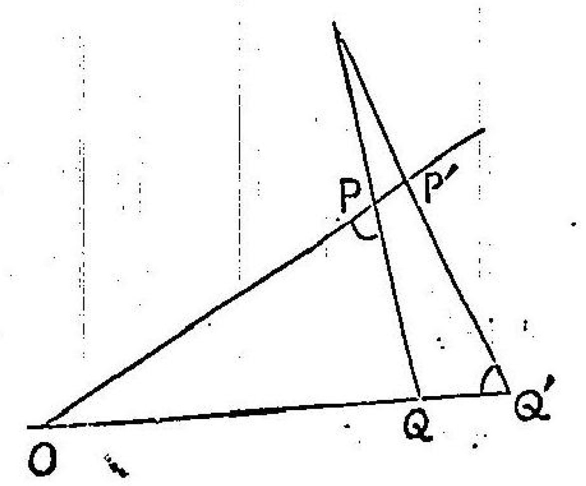
$$f\left\{\frac{k^2\xi}{\xi^2+\eta^2},\quad \frac{k^2\eta}{\xi^2+\eta^2}\right\}=0,$$

トナル.

扨テ $P,P';\ Q,Q'$ ヲ夫々原曲線及反轉曲線上ノ對應點トセバ

$$OP.OP'=k^2=OQ.OQ'$$

第 五 十 圖



∴ $$\frac{OP}{OQ}=\frac{OQ'}{OP'},$$

∴ $$O\hat{P}Q=O\hat{Q'}P'.$$

∴ $$\frac{PQ}{P'Q'}=\frac{OP}{OQ'}=\frac{OP.OQ}{OQ'.OQ}$$
$$=\frac{OP.OQ}{k^2},$$

故ニ P ト Q トヲ無限ニ近ヅクルトキハ $PQ,\ P'Q'$ ヲ夫々原曲線及反轉曲線ノ弧ノ微分 $ds,\ ds'$ ト考フルヲ得ルニヨリ

$$\frac{ds}{ds'}=\frac{r^2}{k^2}=\frac{r}{r'}.$$

【例】1. 直線 $ax+by+c=0$ ノ原點ニ關スル反轉曲線ノ方程式ハ

$$a\frac{k^2\xi}{\xi^2+\eta^2}+b\frac{k^2\eta}{\xi^2+\eta^2}+c=0,$$

或ハ $c(\xi^2+\eta^2)+k^2(a\xi+b\eta)=0,$

之レ原點ヲ通ル圓トナル.

【例】2. 圓 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ノ原點ニ關スル反轉曲線ノ方程式ハ

$$\frac{k^4\xi^2}{(\xi^2+\eta^2)^2}+\frac{k^4\eta^2}{(\xi^2+\eta^2)^2}+a\frac{k^2\xi}{\xi^2+\eta^2}+b\frac{k^2\eta}{\xi^2+\eta^2}+c=0.$$

即 $c(\xi^2+\eta^2)+k^2(a\xi+b\eta)+k^4=0,$

トナリ他ノ圓トナル. 即直線或ハ圓ノ反轉曲線ハ圓ナリ.

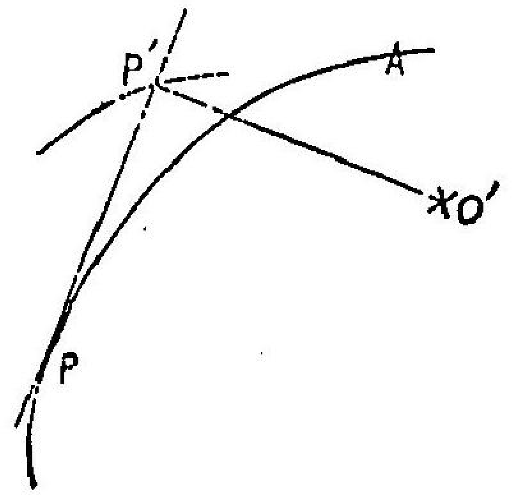
76. 垂足曲線

曲線 A ノ方程式ヲ

$$f(x,y)=0,$$

トス. 或點 $O'(a,b)$ ヨリ A 上ノ點 $P(x,y)$ ニ於ケル切線ニ下セル垂線ノ足 $P'(\xi,\eta)$ ノ軌跡ヲ曲線 A ノ點 O' ニ關スル垂足曲線 (*Pedal curve*) ト云フ.

第五十一圖



P ニ於ケル切線ノ方程式ハ §64 ニヨリ

$$(\eta-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(\xi-x)\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

O' ヨリ之ニ下セル垂線ノ式ハ

$$\frac{\eta-b}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{\xi-a}{\frac{\partial f}{\partial x}},$$

ナリ曲線ノ式 $f(x,y)=0$ ト此二方程式ヨリ x,y ヲ消去スルトキハ ξ,η ニ關スル方程式ヲ得ベシ之レ即垂足曲線ノ方程式ニ外ナラズ.

【例】 楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ ノ原點ニ關スル垂足曲線ノ式ヲ求ム

切線ノ方程式ハ

$$\frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}=1,$$

又 $$\frac{\xi}{\eta}=-\frac{dy}{dx}=\frac{b^2x}{a^2y},$$

∴ $$\frac{a\xi}{b\eta}=\frac{\frac{x}{a}}{\frac{y}{b}}$$

∴ $$\frac{a^2\xi^2+b^2\eta^2}{b^2\eta^2}=\frac{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}{\frac{y^2}{b^2}}=\frac{1}{\frac{y^2}{b^2}},$$

∴ $$y=\pm\frac{b^2\eta}{\sqrt{a^2\xi^2+b^2\eta^2}},$$

同様ニ $$x=\pm\frac{a^2\xi}{\sqrt{a^2\xi^2+b^2\eta^2}},$$

之ヲ切線ノ方程式ニ入ルレバ

$$\frac{\xi^2}{\sqrt{a^2\xi^2+b^2\eta^2}}+\frac{\eta^2}{\sqrt{a^2\xi^2+b^2\eta^2}}=\pm1,$$

∴ $(\xi^2+\eta^2)^2=a^2\xi^2+b^2\eta^2.$

之レ原點ニ孤立點ヲ有シ楕圓ヨリ少シク圓ミヲ有スル曲線ナリ.

次ニ $O'P'=p$, トシ $O'P'$ ガ或定直線トナス角ヲ ϕ トセバ O' ヲ極トスル垂足曲線ノ極方程式ハ p,ϕ 間ノ關係トシテ顯ハルベシ.

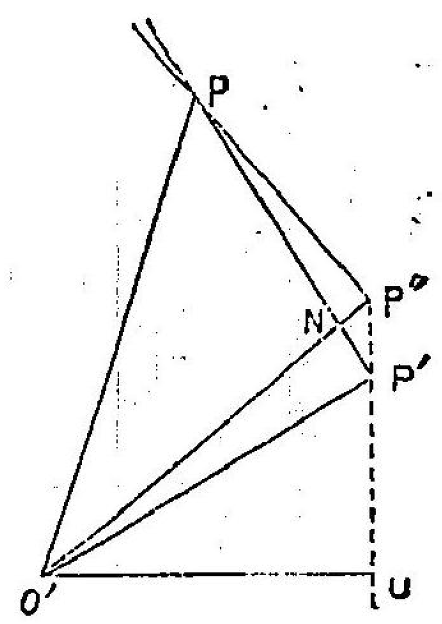
【例】 圓ニ於テ其直徑ノ一端ヲ極トスル其垂足線ヲ求ム. 半徑ヲ a トセバ

$$p=a+a\cos\phi\,,$$

$$\therefore \qquad r=a(1+\cos\theta)\,,$$

ハ所要ノ極方程式トナル. (第 40 圖參照).

第五十二圖



又 $O'P', O'P''$ ヲ O' ヨリ二隣接切線 PP', PP'' ニ下セル垂線トス. $O'U$ ヲ $P'P''$ ノ延長ニ垂直ニ作ル. P', P'' ハ $O'P$ ヲ直徑トスル圓周上ニアリ.

$$\therefore \qquad O'\hat{P'}U=O'\hat{P}P''.$$

極限ニ於テ $O'\hat{P'}U$ ハ $O'P'$ ガ垂足曲線ノ切線トナス角ニシテ, $O'\hat{P}P''$ ハ $O'P$ ガ原曲線ノ切線トナス角ニ等シ. 故ニ O' ヨリ原曲線及垂足曲線ノ相對點ニ引ケル直線ハ夫々其點ニ於ケル切線トナス角ハ相等シ. 又相似三角形ノ理ニヨリ

$$\frac{O'U}{O'P'}=\frac{O'P''}{O'P}\,,$$

故ニ原曲線ノ動徑ヲ r, 即 $O'P=r$, トシ, P ニ於ケル切線ニ下セル垂線ノ長サヲ p トシ, P' ニ於ケル垂足曲線ノ切線ニ下セル垂線ノ長サヲ p' トセバ

$$\frac{p'}{p}=\frac{p}{r}\,,$$

即
$$p'=\frac{p^2}{r}\,,$$

次ニ $\qquad O'P'=p\,,\quad O'P''=p+dp\,,\quad P'\hat{O'}P''=P'\hat{P}P''=d\phi$

トセバ $\qquad NP''=dp=PP''d\phi.$

故ニ PP' ガ PP'' ニ接近セルトキノ極限ニ於テ

$$PP'=\frac{dp}{d\phi}$$

ナル式ヲ得ベシ. 之ヲ應用シテ所謂負垂足線 (*Negative pedals*) ノ問題ヲ解クヲ得ベシ. 即與ヘラレタル垂足曲線ヲ有スル原曲線ヲ求ムル問題ナリ. O' ヲ原點トシテ ϕ ヲ計ル原線ヲ x-軸トスルトキハ P ノ坐標ハ

$$x=O'P'\cos\phi-PP'\sin\phi\,,$$

$$y=O'P'\sin\phi+PP'\cos\phi\,,$$

即
$$x=p\cos\phi-\frac{dp}{d\phi}\sin\phi\,,$$

$$y=p\sin\phi+\frac{dp}{d\phi}\cos\phi.$$

此二式及與ヘラレタル垂足曲線ノ方程式ヨリ p 及 ϕ ヲ消去スルトキハ原曲線ノ方程式ヲ得ベシ.

【例】 $r=a(1+\cos\theta)$ ガ垂足線ナルベキ曲線ヲ求ム. 今之ヲ $p=a(1+\cos\phi)$ ト書クトキハ

$$\frac{dp}{d\phi}=-a\sin\phi \text{ ナルニヨリ}$$

$$x=a\cos\phi+a\,,\quad y=a\sin\phi\,,$$

$\therefore \qquad (x-a)^2+y^2=a^2,$

即原點ヲ通過スル圓周ナリ.

77. 反極曲線

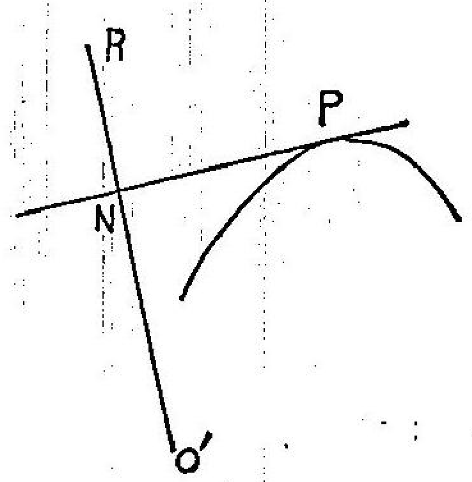
$$f(x,y)=0,$$

ハ曲線 A ヲ表ハストス. 其上ノ點 $P(x,y)$ ニ於ケル切線 PN ニ定點 $O'(a,b)$ ヨリ垂線 $O'N$ ヲ引キ其上ニ

$$O'N.O'R=k^2,$$

ナル方程式ヲ滿足スル點 $R(\xi,\eta)$ ヲ取ルトキ R ノ軌跡ヲ曲線 A ノ點 O' ニ關スル反極曲線 (*Reciprocal polar*) ト云ヒ, O' ヲ其極 (*Pole*) ト云フ.

第五十三圖



今 N ノ坐標ヲ (α,β) トセバ 之レ PN, 及 $O'R$ 上ニアルニヨリ次ノ二式ガ滿足サル.

$$(\beta-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(\alpha-x)\frac{\partial f}{\partial x}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\beta-\eta}{b-\eta}=\frac{\alpha-\xi}{a-\xi}, \tag{2}$$

又 $PN\perp O'R$ ナルニヨリ

$$\frac{\eta-b}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}=\frac{\xi-a}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}, \tag{3}$$

ナル條件アリ.

又 $\qquad O'N.O'R=k^2 \qquad$ ナル式ハ

$$\{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2\}\{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2\}=k^4 \tag{4}$$

トナル. 式 (1)(2)(3) 及曲線ノ方程式 $f(x,y)=0$ ノ五式ヨリ $x,y,\alpha,\beta,$ ヲ消去シテ ξ,η ノ間ノ關係ヲ得レバ之レ所求ノ反轉曲線ノ方程式トナル.

扨テ N ハ曲線 A ノ垂足曲線上ノ點ナリ. 故ニ §75 ニヨリ一曲線ノ反極曲線ハ其垂足曲線ノ反轉曲線ナルヲ知ルベシ.

【例】 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ノ原點ヲ極トスル反極曲線ヲ求ム.

§76 例ニヨリ其垂足線ハ

$$(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2,$$

之ニ $\qquad x=\dfrac{k^2\xi}{\xi^2+\eta^2}, \quad y=\dfrac{k^2\eta}{\xi^2+\eta^2},$

$$k^4=(x^2+y^2)(\xi^2+\eta^2),$$

ト置ケバ $\qquad k^4=a^2\xi^2+b^2\eta^2,$

即 $\qquad \dfrac{\xi^2}{b^2}+\dfrac{\eta^2}{a^2}=\dfrac{k^4}{a^2b^2},$

即他ノ楕圓トナル.

78. 包絡線

曲線ノ式中ニ數字ナラザル常數 a ヲ含ミ

$$f(x,y,a)=0,$$

ナル形ヲ有ストス. 此式ニ於テ a ハ或ル一定ノ値ヲ有スルトキハ只一曲線ヲ表ハスノミナレドモ, モシ a ニ種々ノ異レル値ヲ與フルトキハ其都度異レル曲線ヲ表ハスベシ. 然レ氏全ク別種ノ曲線トナルニ非ズシテ或特別ナル場合ヲ除キテハ一般ニ其大サ, 位置ヲ異ニヌ

ルカ或ハ其形ノ各部分ニ於テ變形ノ有樣ヲ異ニスルノミ．故ニ上ノ方程式ハ a ヲ變ズルコトニヨリテ異レル一群ノ曲線ヲ表ハスト見做シ得ベシ，此意味ニ於テ a ヲ特ニ假變數（*Parameter*）ト云フ．

斯ク考フルトキハ曲線ノ方程式中ニ含マルヽ假變數ノ値ガ a ナルトキト $a+h$ ナルトキトノ二曲線ノ方程式ハ

$$f(x,y\,|a)=0,$$

及 $$f(x,y\,|a+h)=0,$$

ナリ．第二ノ曲線ハ §21 ニヨリ

$$f(x,y,|a)+h\frac{\partial}{\partial a}f(x,y\,|a+\theta h)=0, \qquad 0<\theta<1,$$

若シ第一ノ曲線ト第二ノ曲線トハ交點ヲ有スルトキハ其交點ノ坐標ハ

$$f(x,y,|a)=0,$$

及 $$\frac{\partial}{\partial a}f(x,y,|a+\theta h)=0,$$

ノ二式ニヨリテ與ヘラル．h ヲ無限ニ小サク取ルトキハ

$$f(x,y\,|a)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial a}f(x,y,|a)=0,$$

トナル．此等二式ヨリ a ヲ消去シテ

$$F(x,y)=0,$$

ナル式ヲ得タリトセバ之レ與ヘラレタル方程式ノ a ヲ種々ニ變ズルコトニヨリテ得ル曲線群ノ交點ノ軌跡ヲ表ハス．是ヲ原曲線ノ包絡線（*Envelope*）ト稱ス．扨テ

$$\frac{\partial}{\partial a}f(x,y\,|a)=0,$$

ヲ a ニ付テ解クトキニ

$$a=\phi(x,y)$$

トナレリトス．之ヲ原方程式ニ入ルレバ

$$f(x,y,\phi)=0,$$

トナル之レ上ニ F ヲ以テ表ハセル包絡線ノ方程式ニ外ナラズ．今原曲線及其包絡線ノ交點ニ於ケル夫々ヘノ切線ノ方向ヲ驗センニ，

原曲線ノ $\dfrac{dy}{dx}$ ハ §36 ニヨリ

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0,$$

ニヨリテ與ヘラレ，包絡線ノ $\dfrac{dy}{dx}$ ハ次ノ式ニヨリテ與ヘラル．

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial \phi}\left\{\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right\}=0,$$

然ルニ $$\frac{\partial f}{\partial \phi}=\frac{\partial f}{\partial a}=0,$$

∴ 包絡線ノ $\dfrac{dy}{dx}$ ハ

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0,$$

ニヨリテ與ヘラル，之レ原曲線ノ $\dfrac{dy}{dx}$ ト相等シ．故ニ原曲線及其包絡線ハ交點ニ於テ少クトモ第一次ノ切觸ヲナス．

【例】1. 定長 a ヲ有スル直線ガ常ニ其兩端ヲ兩軸上ニアル樣ニ動クトキニ其包絡線ヲ求ム．

直線ヘ原點ヨリ引ケル垂線ガ x 軸トナス角ヲ α トセバ直線ノ式ハ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=a\sin\alpha\cos\alpha.$$

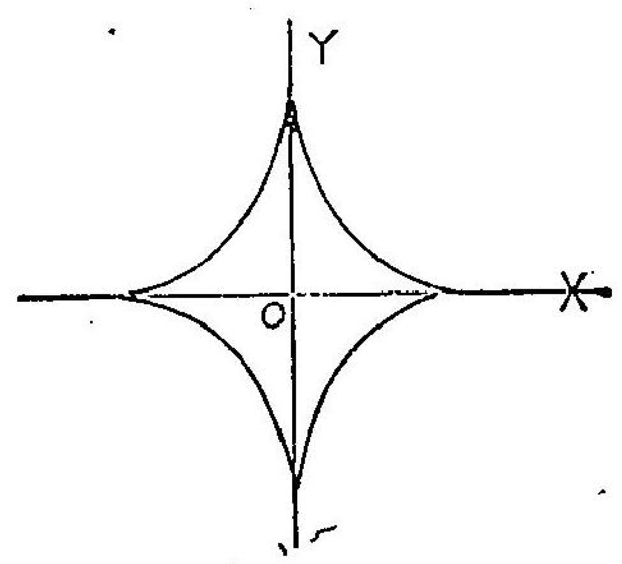
之ヲ α ニ付テ微分セバ

$$-x\sin\alpha+y\cos\alpha=a(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha),$$

∴ $x=a\sin^3\alpha,$

$y=a\cos^3\alpha,$

第五十四圖



∴ コレヨリ α ヲ消去セバ

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},$$

トナル之レ星狀線 (*Astroid*) ト云ヒ 4 尖點ヲ有スル曲線ナリ。

【例】2. $y=a^2x^2-2ax+1,$

之ヲ a ニ付テ微分スルトキハ

$$0=2x(ax-1)$$

∴ $a=\frac{1}{x}$, コレヲ上ノ式ニ入ルレバ

$y=0,$

之レ上ノ拋物線ノ包絡線ナリ.

【例】3. 直線 $x\sin\theta-y\cos\theta+c=c\sin\theta.\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right).$

ノ θ ヲ假變數トシテ包絡線ヲ見出セ.

θ ニ付テ微分シテ

$$x\cos\theta+y\sin\theta=c\cos\theta\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$$

$$+\frac{c}{2}\sin\theta.\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=c\cos\theta\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)+c\tan\theta.$$

∴ $\log$ ヲ消去シテ

$$y=c\left(\cos\theta+\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right),$$

即 $y\cos\theta=c.$

∴ $x=c\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$ ∴ $e^{\frac{x}{c}}=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta},$

∴ $e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}=\frac{\cos^2\theta+(1-\sin\theta)^2}{\cos\theta(1-\sin\theta)}=\frac{2}{\cos\theta}=\frac{2y}{c}.$

∴ $y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right).$

【例】4. 拋物線ノ法線ガ軸ト交ル點ニ於テ法線ト直交スル直線ノ交點ノ軌跡ヲ求ム. 拋物線ノ式ヲ $y^2=4ax$ トス.

法線ガ軸ト交ル點ハ $(x+2a,0)$ ナリ. 故ニ之ニ直交スル直線ノ方程式ハ x',y' ヲ其上ノ流坐標トセバ

$$y'=m(x'-x-2a),$$

此ニ $m=\frac{2a}{y}$ 或ハ $4ax=\frac{4a^2}{m^2},$

∴ 其直線ハ $y'=m(x'-2a)-\frac{a}{m^2},$

m ニ付微分スルトキハ

$$0=x'-2a+\frac{a}{m^2} \quad ∴ \quad x'-2a=\frac{y'}{m}+\frac{a}{m^2},$$

或ハ $2(x'-2a)=\sqrt{\frac{2a-x'}{a}},$

∴ $4a(x'-2a)+y'^2=0.$

【例】5. $x\cos3\theta+y\sin3\theta=a(\cos2\theta)^{\frac{3}{2}}$ ナル直線ノ包絡線ハ *Lemniscate* (§74, 例 16) ナルコトヲ證セ.

θ ニテ微分スルトキハ

$$-x\sin3\theta+y\cos3\theta=-a(\sin2\theta)(\cos2\theta)^{\frac{1}{2}},$$

$$\therefore\quad x^2+y^2=a^2\cos2\theta,$$

又

$$x=a(\cos2\theta)^{\frac{1}{2}}\cos\theta,$$

$$y=a(\cos2\theta)^{\frac{1}{2}}\sin\theta.$$

$$\therefore\quad x^2-y^2=a^2\cos^2 2\theta.$$

$$\therefore\quad (x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

若シ曲線ノ方程式ハ n 個ノ假變數ヲ有シ, 別ニ是等ノ間ニ $n-1$ 個ノ關係式アルトキハ此等 $n-1$ ノ式ニヨリテ n 個ノ假變數ノ中 $n-1$ 個ヲ殘リノ一假變數ニヨリテ表ハシ之ヲ曲線ノ方程式ニ代入シテ只一ツノ假變數ヲ含ム式ヲ作リ前述ノ方法ニヨリテ其包絡線ヲ求メ得ベシト雖モ. 次ニ示ス方法ニヨルコト却テ便利ナリ.

今一般ノ場合ヲ示ス代リニ三假變數ヲ有シ

$$f(x,y,|\alpha,\beta,\gamma)=0,$$

ナル片他ニ

$$\varphi_1(\alpha,\beta,\gamma)=0,$$

$$\varphi_2(\alpha,\beta,\gamma)=0,$$

ナルニ關係アリトス. 曲線ノ方程式中ニ含マルヽ β,γ ヲ α ノ函數ト見做シテ之ヲ α ニ關シテ微分スルトキハ §36 ニヨリ,

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial\beta}\frac{d\beta}{d\alpha}+\frac{\partial f}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{d\alpha}=0,$$

然ルニ α,β,γ ノ中ニアル二關係ヨリ

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}\frac{d\beta}{d\alpha}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{d\alpha}=0,$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta}\frac{d\beta}{d\alpha}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{d\alpha}=0,$$

是等三式ヨリ $\frac{d\beta}{d\alpha}$, $\frac{d\gamma}{d\alpha}$ ヲ消去セバ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial\alpha} & \frac{\partial f}{\partial\beta} & \frac{\partial f}{\partial\gamma} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma} \end{vmatrix}=0,$$

或ハ

$$\frac{\partial(f,\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)}=0,$$

或ハ

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta}\right)+\frac{\partial f}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\gamma}\right)$$
$$+\frac{\partial f}{\partial\gamma}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha}\right)=0,$$

此式及曲線ノ方程式及 α,β,γ 間ニアル二關係式ヨリ α,β,γ ヲ消去セバ包絡線ノ方程式ヲ得ベシ.

〔例〕1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a+b=c$ ノ包絡線ヲ求ム.

$$\frac{x^2}{a^3}+\frac{y^2}{b^3}\frac{db}{da}=0,$$

$$1+\frac{db}{da}=0,$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{a^3}=\frac{y^2}{b^3}=\lambda \quad \text{ト置ケバ}$$

$\lambda^{-2}, -2\lambda^{-3}$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\lambda(a+b)=\lambda c=1,$$

∴ $c=a+b=(cx^2)^{\frac{1}{3}}+(cy^2)^{\frac{1}{3}}$,

∴ $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}$, ハ包絡線

【例】2.　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

$$a^2+b^2=c^2,$$

$$\frac{x^2}{a^3}+\frac{y^2}{b^3}\frac{db}{da}=0;\quad a+b\frac{db}{da}=0,$$

∴ $\frac{x^2}{a^4}=\frac{y^2}{b^4}=\lambda$ ト置ケバ

$$\lambda(a^2+b^2)=1=\lambda c^2,\qquad \therefore\ \lambda=\frac{1}{c^2}$$

∴ $a^2=\pm cx$,　$b^2=\pm cy$,

∴ $x\pm y=\pm c$ ハ包絡線

【例】3.　楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上ノ各點ヨリ兩軸ニ垂線ヲ下シ其足ヲ連結スルトキハ其直線ハ常ニ $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ ニ切スルコトヲ證セ.

(h,k) ヲ楕圓上ノ點トスレバ直線ノ式ハ

$$\frac{x}{h}+\frac{y}{k}=1,$$

又　$\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}=1$,

∴ $\frac{x}{h^2}+\frac{y}{k^2}\frac{dk}{dh}=0$;　$\frac{h}{a^2}+\frac{k}{b^2}\frac{dk}{dh}=0$,

∴ $\frac{a^2x}{h^3}=\frac{b^2y}{k^3}=\lambda$ ト置ケバ.

∴ $\frac{x}{h}+\frac{y}{k}=\left(\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)\lambda=\lambda=1$.

∴ $h=(a^2x)^{\frac{1}{3}}$,　$k=(b^2y)^{\frac{1}{3}}$,

∴ $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$,

【例】4.　a,b ハ假變數ノトキ $\left(\frac{x-a}{h}\right)^2+\left(\frac{y-b}{k}\right)^2=1$ ノ包絡線ヲ求ム. 但シ $\left(\frac{a}{h}\right)^2+\left(\frac{b}{k}\right)^2=1$ トス.

$$\frac{x-a}{h^2}+\frac{y-b}{k^2}\frac{db}{da}=0,\quad \frac{a}{h^2}+\frac{b}{k^2}\frac{db}{da}=0.$$

∴ $\frac{x-a}{a}=\frac{y-a}{b}$　∴ $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\lambda$ ト置ケバ.

∴ $\left(\frac{a}{h}\right)^2+\left(\frac{b}{k}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{x}{h}\right)^2+\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{y}{k}\right)^2=1$.

∴ $\left(\frac{x}{h}\right)^2+\left(\frac{y}{k}\right)^2=\lambda^2$,

然ルニ　$\left(\frac{x}{h}\right)^2+\left(\frac{y}{k}\right)^2-2\left(\frac{ax}{h^2}+\frac{by}{k^2}\right)=0$

∴ $\lambda^2-\frac{2}{\lambda}\left(\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}\right)=0$

∴ $\lambda=2$.

∴ $\left(\frac{x}{h}\right)^2+\left(\frac{y}{k}\right)^2=4$ ハ包絡線ナリ.

【例】5.　拋物線 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$ ニ於テ $ab=c^2$ ナルトキニ其包絡線ヲ求ム.

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}+\frac{y^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}}\frac{db}{da}=0,\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\frac{db}{da}=0,$$

$\therefore$ $\sqrt{\dfrac{x}{a}}=\sqrt{\dfrac{y}{b}}$, $=\lambda$ ト置ケバ

$$\lambda=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad c^2=\frac{xy}{\lambda^2}=\frac{xy}{4}$$

或ハ $xy=4c^2$,

即兩軸ヲ漸近線トスル直角双曲線ナリ.

79. 焦曲線

本§ニテハ前§ニ論ゼル包絡線ノ物理學上ノ應用ヲ示サントス. 光線ハ水或ハ硝子ノ如キ物質ノ表面ニ達スルトキハ一般ニ一部分反射シテ反射光線 (*Reflected ray*) トナリ一部分物質內ニ入リテ屈折光線 (*Refracted ray*) トナル. 此光線ノ進ム方向ヲ表ハス直線ノ包絡線ヲ焦曲線 (*Caustics*) ト云フ. 反射光線ト屈折光線トハ次ノ三ツノ法則ニ從テ其方向ガ定マルモノナリ.

(i) 入射光線ト反射光線, 屈折光線及入射點ニ於ケル物質面ノ法線トハ同一平面ニアリ.

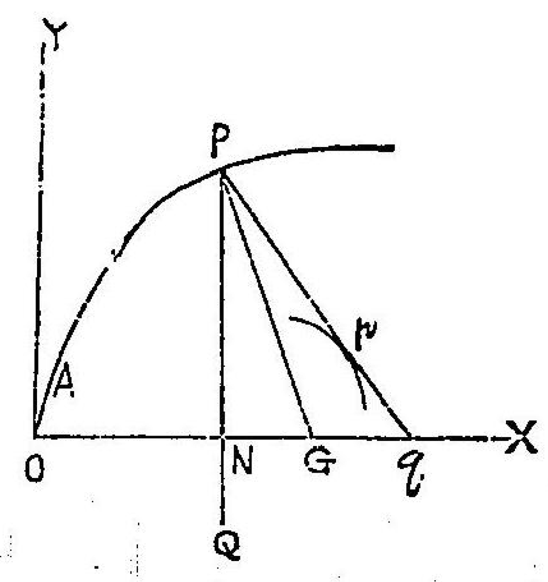
(ii) 入射光線ガ物質ノ表面ノ法線トナス角ハ反射光線ガ其法線トナス角ニ等シ.

(iii) 入射光線ガ法線トナス角 θ ノ正弦ト屈折光線ガ法線トナス角 ϕ ノ正弦トノ比ハ常數ナリ. 即

$$\frac{\sin\theta}{\sin\phi}=\mu,$$

ニシテ μ ハ其物質ノ屈折率ト稱スルモノナリ.

第五十五圖



今 y 軸ノ方向ニ進メル光線ガ AP ナル切斷線ヲ有スル表面ニ反射シテ作ル焦曲線ヲ求メントス. QP ヲ入射光線トシ, Pq ヲ反射光線トシ, PG ヲ P ニ於ケル法線トスレバ

$$q\hat{P}G=G\hat{P}Q=\varphi \text{ トス.}$$

P ノ坐標ヲ (x_1,y_1) トセバ Pq ノ方程式ハ

$$y-y_1=m(x-x_1),$$

此ニ $m=\tan P\hat{q}x=\tan(90^\circ+2\varphi)=-\cot 2\varphi$

$y=f(x)$, ハ AP ノ方程式トスレバ

$$m=-\frac{1-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_1^2}{2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_1},$$

$\therefore$ Pq ノ方程式ハ

$$y-y_1=-\frac{1-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_1^2}{2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_1}(x-x_1)$$

トナル.

之ヲ x_1 ニ付テ微分スルトキハ

$$-\left(\frac{dy}{dx}\right)_1=\frac{1-\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^2}{2\left(\frac{dy}{dx}\right)_1}+\frac{1}{2}(x-x_1)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1\left\{\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^2}+1\right\},$$

$$\therefore\quad (x-x_1)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1\left\{\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^2}+1\right\}=-\left(\frac{dy}{dx}\right)_1\left\{1+\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^2}\right\},$$

$$\therefore\quad x=x_1-\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1},$$

$$y=y_1+\frac{1-\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^2}{2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1},$$

此二式及 $y_1=f(x_1)$ ノ三式ヨリ x_1, y_1 ヲ消去シテ x, y ノ關係ヲ得レバ之レ焦曲線ノ方程式ナリ.

全ク同様ニシテ若シ光リハ原點 O ヨリ發スルトキハ Pq ノ方程式ハ

$$y-y_1=\frac{2\left(\frac{dy}{dx}\right)_1x-y\left\{1-\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^2\right\}}{2\left(\frac{dy}{dx}\right)_1y+x\left\{1-\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^2\right\}}(x-x_1),$$

トナル.

又屈折光線 Pp ノ長サヲ求メンニ

$$Pp^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2,$$

$$=\left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right)_1^2+\left\{\frac{1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2\frac{d^2y}{dx^2}}\right\}_1^2=\left(\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2\frac{d^2y}{dx^2}}\right)_1^2,$$

〔例〕　拋物線ニ於テ其軸ニ垂直ニ入射セル光線ノ反射光線ノ焦曲線ヲ求ム.

$$y^2=4ax,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2a}{y},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{4a^2}{y^3},$$

$$\therefore\quad x=x_1+\frac{y_1^2}{2a}=3x_1,$$

$$1-\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^2=1-\frac{4a^2}{y_1^2}=1-\frac{a}{x_1}=\frac{x_1-a}{x_1},$$

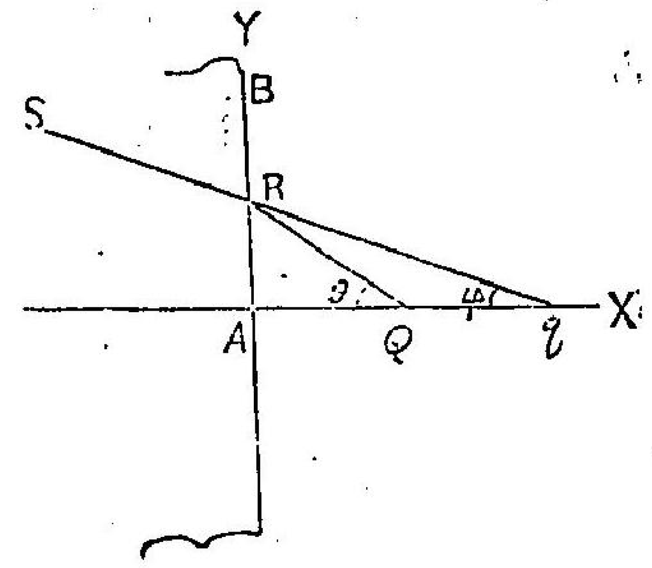
$$2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1=-\frac{8a^2}{y^3}=-\frac{8a^2}{4ax_1y_1}=-\frac{2a}{x_1y_1},$$

$$\therefore\quad y=y_1-y_1\frac{x_1-a}{2a}=y_1\left(\frac{3a-x_1}{2a}\right)$$

$$\therefore\quad y^2=\frac{x_1}{a}(3a-x_1)^2=\frac{x}{27a}(9a-x)^2.$$

次ニ QR ハ入射光線ニシテ物質面 BC ナル平面ニ於テ屈折シテ RS ナル屈折光線トナルトキ其焦曲線ヲ求ム.

第五十六圖



AQ ヲ屈折面ノ法線トシコレヲ x 軸ニ取リ, AB ヲ y 軸ニ取ル.

$$AQ=a,\quad R\hat{Q}A=\theta$$

$R\hat{q}A=\varphi$ トセバ SR ノ方程式ハ

$$y+x\tan\varphi+C=0,$$

$$x=0:\quad y=AR$$

$$\therefore\quad AR+C=0.$$

$$\therefore\quad C=-a\tan\theta,$$

$\therefore \qquad y=-x\tan\varphi+a\tan\theta \qquad (1)$

又 $\qquad \sin\theta=\mu\sin\varphi. \qquad (2)$

(1) ヨリ $\qquad \dfrac{xd\varphi}{\cos^2\varphi}=\dfrac{ad\theta}{\cos^2\theta},$

(2) ヨリ $\qquad \cos\theta d\theta=\mu\cos\varphi d\varphi.$

$$\therefore \qquad \sqrt[3]{\frac{x}{\mu a}}=\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}=\frac{1}{\mu}\frac{\tan\theta}{\tan\varphi};$$

$$\therefore \qquad 1+\tan^2\varphi=1+\frac{1}{\mu^2}\tan^2\theta\sqrt[3]{\frac{\mu^2a^2}{x^2}},$$

然ルニ
$$\frac{1}{\cos^2\varphi}=(1+\tan^2\theta)\sqrt[3]{\frac{\mu^2a^2}{x^2}},$$

$$\therefore \qquad \tan^2\theta\sqrt[3]{\frac{\mu^2a^2}{x^2}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=1-\sqrt[3]{\frac{\mu^2a^2}{x^2}}$$

$$\therefore \qquad \tan\theta=\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2-1}}\sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}}}{(\mu a)^{\frac{2}{3}}}-1};$$

$$\therefore \qquad \tan\varphi=\frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}}\sqrt[3]{\frac{\mu a}{x}}\sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}}}{(\mu a)^{\frac{2}{3}}}-1};$$

$$\therefore \qquad y=\left\{\frac{\mu a}{\sqrt{\mu^2-1}}-\frac{\sqrt[3]{\mu a x^2}}{\sqrt{\mu^2-1}}\right\}\sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}}}{(\mu a)^{\frac{2}{3}}}-1}$$

$$=-\frac{\mu a}{\sqrt{\mu^2-1}}\left\{\left(\frac{x}{\mu a}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right\}^{\frac{3}{2}}.$$

今 $\qquad \mu a=\alpha\ ,\quad \dfrac{\mu a}{\sqrt{\mu^2-1}}=\beta$ ト置ケバ

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

$m<1$ ノトキハ之レ楕圓ノ縮閉線ニシテ $m>1$ ノトキニハ双曲線ノ縮閉線ナリ (次ノ § 參照).

80. 縮閉線及伸開線

曲線ノ曲度中心ノ軌跡ヲ其曲線ノ縮閉線 (*Evolute*) ト云ヒ, 逆ニ其曲線ヲ縮閉線ノ伸開線 (*Involute*) ト云フ.

曲線 $\qquad y=f(x), \qquad (1)$

上ノ點 (x,y) ニ於ケル曲度中心ノ坐標 ξ,η ハ § 70 ニヨリ

$$x-\xi+(y-\eta)\frac{dy}{dx}=0, \qquad (2)$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\eta)\frac{d^2y}{dx^2}=0, \qquad (3)$$

ニヨリテ與ヘラル. 此等三式ヨリ x,y ヲ消去スルトキハ ξ,η ニ關スル方程式ヲ得之レ即縮閉線ノ方程式ナリ.

ξ,η ハ曲線上ノ點ノ坐標 x,y ノ函数ナルニヨリ (2) 式ヲ x ニ付テ微分スルトキハ

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\eta)\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d\xi}{dx}-\frac{d\eta}{dx}\frac{dy}{dx}=0,$$

然ルニ
$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\eta)\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

$$\therefore \qquad \frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dx}\frac{dy}{dx}=0,$$

故ニ
$$\frac{d\eta}{d\xi}=-\frac{dx}{dy}.$$

故ニ縮閉線ノ切線ハ伸開線ノ法線ト一致ス. 換言スレバ曲線上任意

ノ點ニ於ケル法線ハ其縮閉線ノ之ニ對スル點ニ於ケル切線ナリ．又切線ト法線トヲ交換シ之ヲ述ブルヲ得．

曲線 (1) 上ノ點 (x,y) ニ於ケル法線ノ方程式ハ §64 ニヨリ

$$x-\xi+(y-\eta)\frac{dy}{dx}=0, \tag{4}$$

此ニ於テ x ヲ假變數ト見做シテ其包絡線ヲ求メンニ先ヅ x ニ付テ微分スルトキハ

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\eta)\frac{d^2y}{dx^2}=0. \tag{5}$$

(1),(4),(5) ヨリ x,y ヲ消去スルトキハ (4) ナル法線ノ包絡線ノ方程式トナル．然ルニ之レ (1),(2),(3) ヨリ x,y ヲ消去セル結果ニ等シ．故ニ或ル曲線ノ法線ノ包絡線ハ其曲線ノ縮閉線ナリ

次ニ曲線 (1) 上ノ點 (x,y) ニ於ケル曲度半徑ヲ ρ トシ曲度中心ノ坐標ヲ ξ,η トセバ §70 ニヨリ

$$\rho=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$\xi=x-\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\frac{dy}{dx},$$

$$\eta=y+\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

是等ヲ夫々 x ニ付テ微分スルトキハ

$$\frac{d\rho}{dx}=\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\frac{3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\frac{d^3y}{dx^3}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2},$$

$$\frac{d\xi}{dx}=-\frac{3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\frac{d^3y}{dx^3}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d\eta}{dx}=\frac{3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\frac{d^3y}{dx^3}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2},$$

縮閉線上ノ或定點ヨリ計レル弧ノ長サヲ σ トセバ §69 ニヨリ

$$\frac{d\sigma}{dx}=\sqrt{\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2},$$

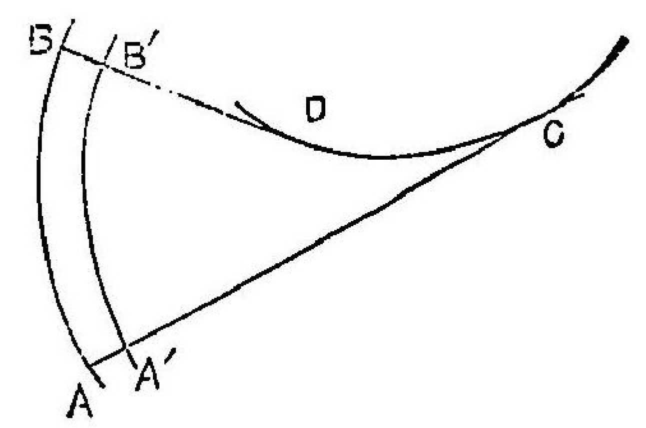
$$=\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\frac{3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\frac{d^3y}{dx^3}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$$

$$\therefore \qquad \frac{d\sigma}{dx}=\frac{d\rho}{dx}$$

或ハ $\qquad d\sigma=d\rho,$

故ニ曲度半徑 ρ_0 ナル點ニ對應スル縮閉線上ノ點ヨリ弧ノ長サヲ計リ曲線半徑 ρ ナル點ニ對應スル縮閉線上ノ點ニ至ルマデ弧ノ長サヲ σ トセバ $\qquad \sigma=\rho-\rho_0$

第五十七圖



トナリ縮閉線上ノ弧ノ長サハ其弧ノ兩端ニ對應スル伸開線上ノ點ニ於ケル曲度半徑ノ差ニ等シ

曲線 AB ハ方程式 (1) ニヨリテ表ハサルトシ，其縮閉線ヲ CD ト

シ AC, BD ヲ夫々 A, B ニ於ケル曲度半徑トセバ是等ハ曲線 CD ノ C 及 D ニ於ケル切線ニシテ

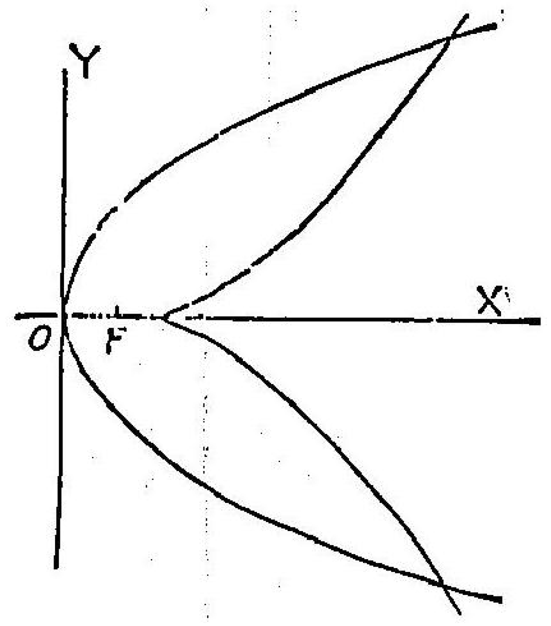
$$\overline{AC}=\widehat{CD}+\overline{DB}$$

ナリ故ニ CD ニ糸ヲ捲キ付ケ其一端 A ヲ漸々ニ之ヨリ卷キ離ストキハ A 點ハ原曲線 AB 上ヲ動クベシ. 又糸ノ上ノ他ノ點 A' ハ原曲線ニ平行ナル曲線 $A'B'$ ヲ畫クベシ. 而シテ其曲度半徑ノ軌跡ハ又 CD ナル曲線ナリ. 故ニ同一曲線ノ伸開線ハ多クノ平行ナル曲線ナリ

【例】1.　　拋物線 $y^2=4ax$ ノ縮閉線ヲ求ム.

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{a}{x}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\sqrt{a}}{2x^{\frac{3}{2}}},$$

第五十八圖



$\therefore$　　$\xi=3x+2a,$

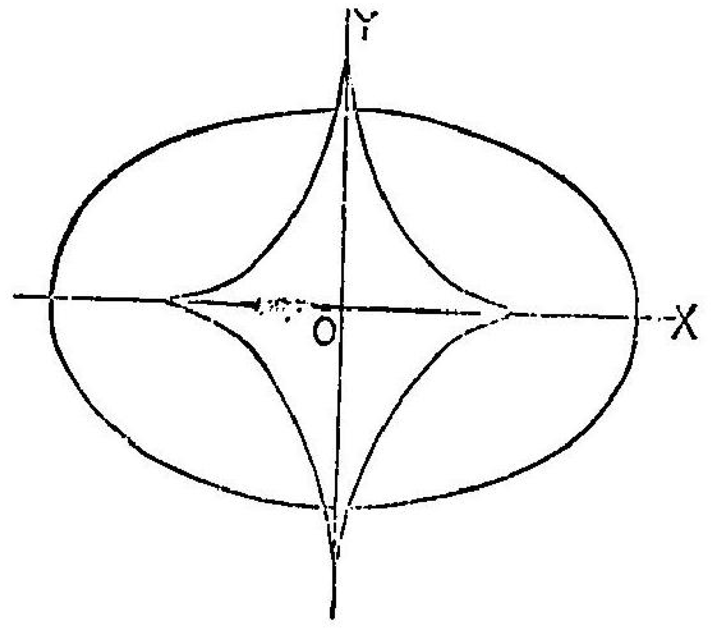
$$\eta=-\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}$$

$\therefore$　　$27a\eta^2=4(\xi-2a)^3$

之レ拋物線ノ焦點ニ尖點ヲ有スル曲線ナリ.

【例】2.　　楕圓ノ縮閉線ヲ求ム.

第五十九圖



楕圓上ノ點

$$x=a\cos\phi,\ y=b\sin\phi$$

ニ於ケル法線ハ

$$\frac{ax}{\cos\phi}-\frac{by}{\sin\phi}=a^2-b^2.$$

ϕ ニ付テ微分シテ

$$\frac{ax}{\cos^3\phi}=-\frac{by}{\sin^3\phi}=\lambda \text{ トセバ}$$

$$\lambda=a^2-b^2.$$

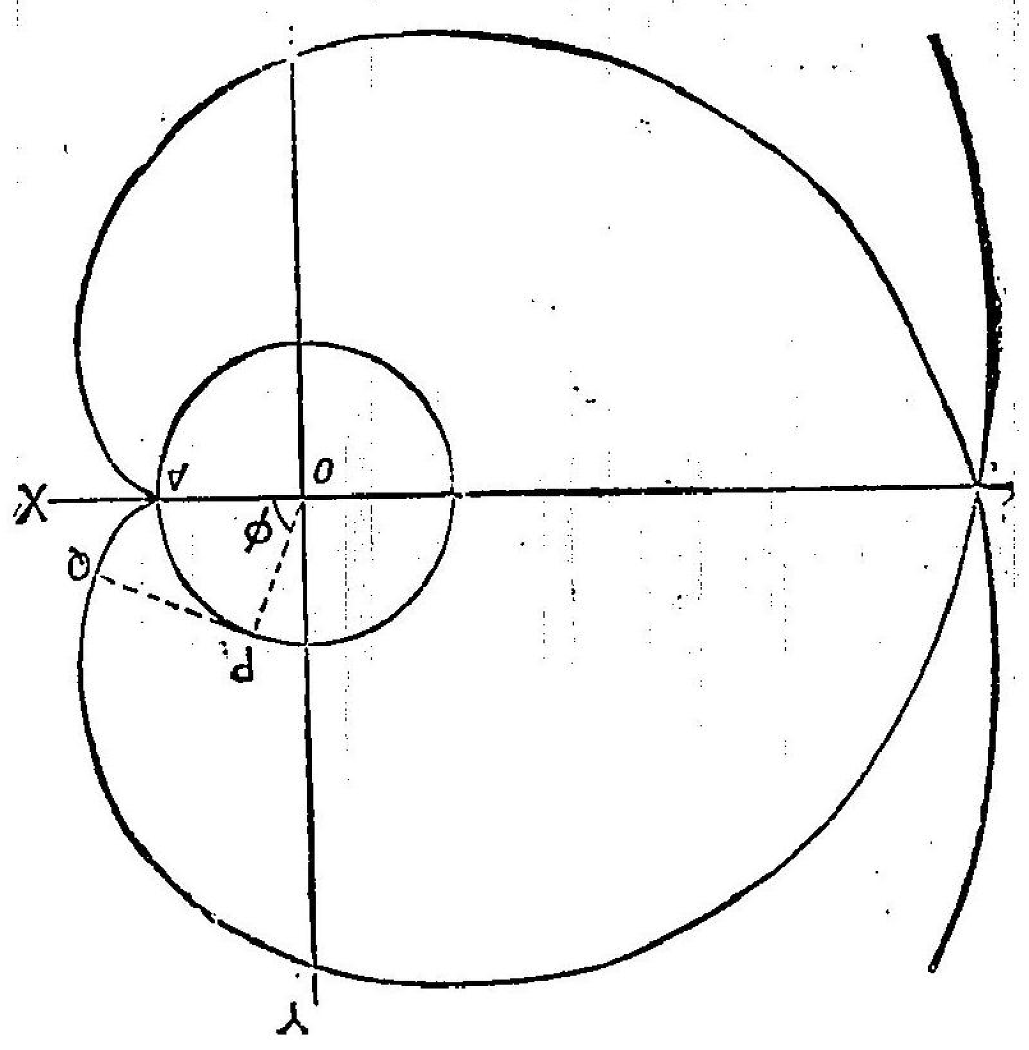
$\therefore$ 曲度中心ノ坐標ハ

$$\xi=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3\phi,\quad \eta=-\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3\phi,$$

$\therefore$　　$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$ ハ縮閉線ナリ. (59圖)

【例】3.　　半徑 a ナル圓ノ伸開線ヲ求ム

第六十圖



AQ ヲ伸開線ノ一部トシ $Q(x,y)$ ハ圓周上ノ點 P ニ對應ストスレバ

$$\widehat{AP}=\overline{PQ}=a\phi,$$

PQ ハ圓ノ切線ナルニヨリ

$$x=a\cos\phi+a\phi\sin\phi,$$

$$y=a\sin\phi-a\phi\cos\phi,$$

コレヨリ ϕ ヲ消去セバ所求ノ縮閉線ノ式トナル.

$AQ=s$ トセバ

$$\frac{ds}{d\phi}=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2},$$

$$\frac{dx}{d\phi}=-a\sin\phi+a\phi\cos\phi+a\sin\phi,$$

$$\frac{dy}{dx}=a\cos\phi+a\phi\sin\phi-a\cos\phi,$$

$$\therefore\quad \frac{ds}{d\phi}=a\phi,$$

ナル關係ヲ有スル曲線ナリ

81. りさぢゅーノ曲線

或點ガ運動スルトキニ其點ノ兩軸上ノ投影ガ

$$x=a\cos(nt+\varepsilon),$$

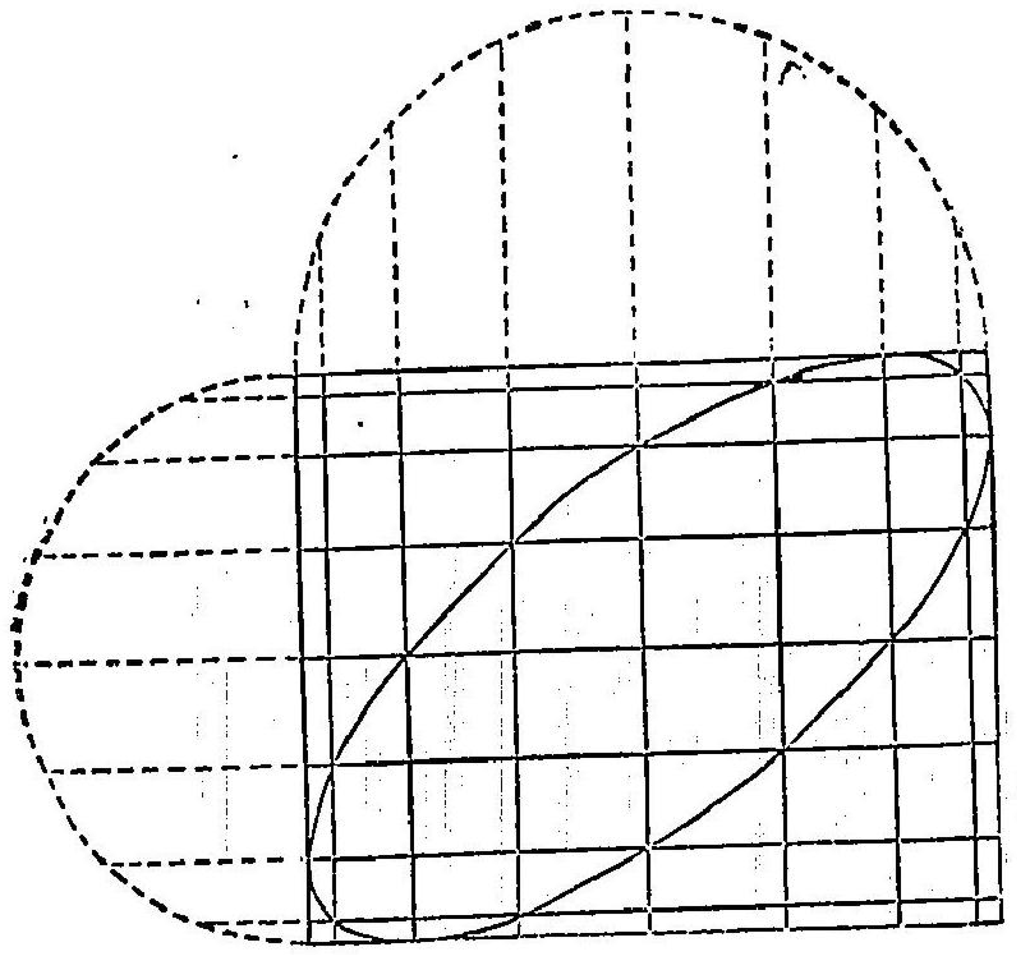
$$y=b\cos(n't+\varepsilon'),$$

ニテ表ハス如ク運動スルトキハ其點ガ畫ク曲線ヲりさぢゅー (*Lissajous*) ノ曲線ト云フ. 此ニ t ハ時ヲ表ハスモノトス.

圓周上ヲ等速ニ運動スル點ノ其直徑上ノ投影ガナス運動ハ明カニ $x=a\cos nt$ ナル形ニテ表ハサル. (§ 20, 例ヲ見ヨ).

故ニりさぢゅーノ曲線ヲ畫クニハ, 互ニ垂直ナル直線ニ上ニ述ベタル圓周ヲ畫キ之ノ周ヲ等時間ニ隔テ、切リ各點ヨリ其直徑ニ垂線ヲ作リ其交點ヲ連結スルコトニヨリテ直ニ得ラルベシ.

第六十一圖



【例】1. $n=n'$ ノトキハ t ヲ計ル原點ヲ變ジテ

$$x=a\cos(nt+\varepsilon),$$

$$y=b\cos nt.$$

ト書クヲ得ベシ.

$$\therefore\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}\cos\varepsilon=-\sin nt.\sin\varepsilon,$$

$$\frac{y}{b}\sin\varepsilon=\cos nt\sin\varepsilon,$$

二乘シテ相加フレバ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2\cos\varepsilon}{ab}xy+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\varepsilon,$$

トナリりさぢゅーノ曲線ハ橢圓トナル.

特ニ $\varepsilon=0$, $\varepsilon=\pi$ ノトキハ

$$\frac{x}{a}\mp\frac{y}{b}=0$$

ナル直線トナル.

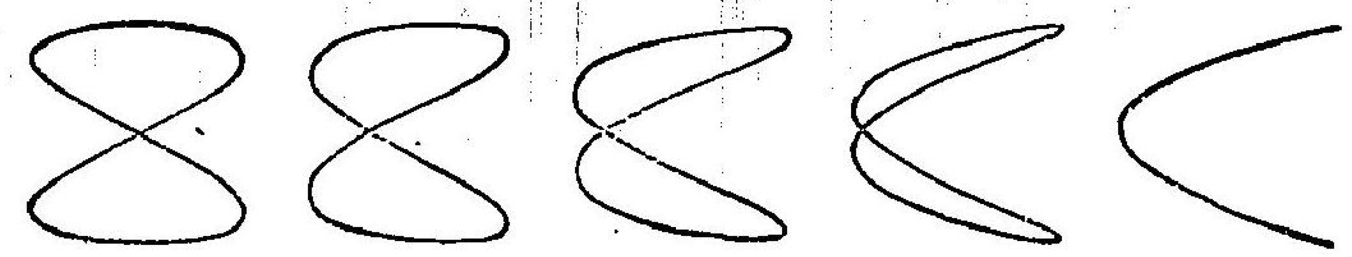
【例】2. $n'=2n$ ノ時ハ

$$x=a\cos nt,\quad y=b\cos(2nt+\varepsilon),$$

此時ハ y ハ其周期間ニ x ノ二倍ヲ進ミ，$(0,-b\cos\varepsilon)$ ナル點ヲ nt ガ 2π 丈ケ增加スル間ニ二回通過スルコトニナル.

故ニ曲線ハ一般ニ二ツノ自閉線ヲ有スベシ.

第六十二圖



若シ $\varepsilon=\pm\frac{\pi}{2}$ ノ時ハ曲線ハ兩軸ニ對稱トナリ其方程式ハ

$$a^4y^2=4b^2x^2(a^2-x^2),$$

トナル.

若シ $\varepsilon=0$ 或ハ π ノ時ハ

$$a^2y=\pm b(2x^2-a^2)$$

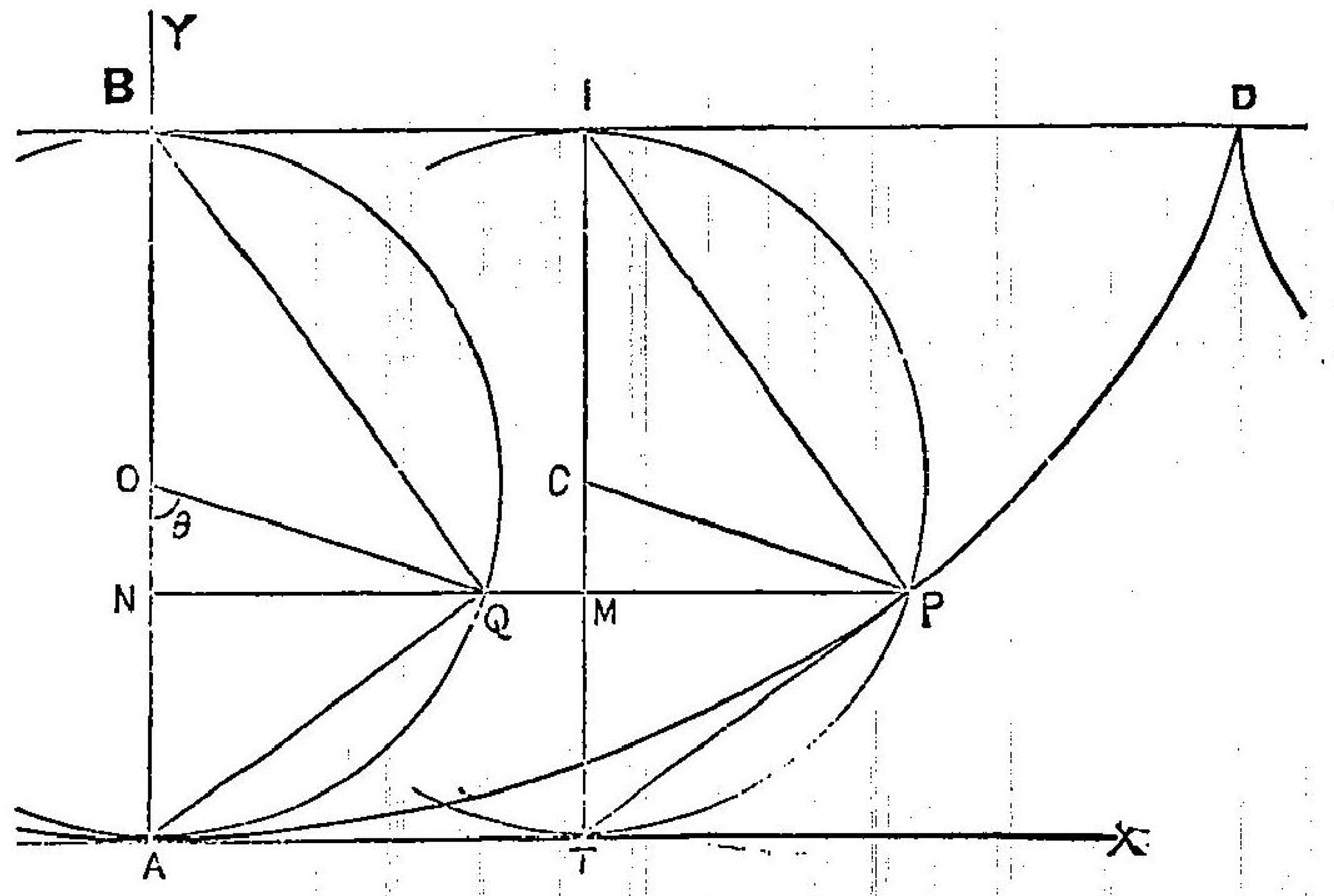
チル抛物線トナル.

82. 擺線

圓ガ一定直線上ヲ廻轉スルトキニ其圓周上ノ一點ノ畫ク曲線ヲ擺線（*Cycloid*）ト稱ス.

圓ガ一回轉スル每ニ全ク同樣ナル曲線ヲ畫クハ明ナリ. 其定直線ヨリ最遠キ點（A ノ如キ）ヲ擺線ノ頂ト云ヒ，定直線（BD）ヲ其底ト云ヒ，二ツノ隣接セル頂ノ中央ニテ曲線ガ底ニ交ル點（D）ヲ尖點ト云フ. 頂ヲ過ギ底ニ垂直ナル直線（AB）ヲ其軸ト稱シ，對稱ノ軸トナル.

第六十三圖



AB ヲ直徑トスル圓周及他ノ任意ノ位置ニ於ケル圓周 IPT ヲ畫ク其直徑ヲ IT トス. P ヲ擺線ヲ畫ク點ノ位置トス. PMN ヲ底ニ平行ニ引キ TI 及 AB ト夫々 M 及 N ニ於テ交リ，左ノ圓周ト Q ニ於テ交ラシム. P ノ坐標 x,y ハ

$$x=NP=BI+MP,\quad y=AN=CT-CM.$$

圓ノ半徑ヲ a トシ，點 P ガ A ヨリ I ニ至ル間ニ圓ガ回轉セル角ヲ θ トセバ

$$BI=a\theta,\quad PM=a\sin\theta.$$

ナルニヨリ

$$x=a(\theta+sin\theta),$$

$$y=a(1-cos\theta),$$

トナル之レ擺線ノ方程式ナリ．之ヨリ θ ヲ消去セバ

$$x=acos^{-1}\frac{a-b}{a}+\sqrt{2ay-y^2},$$

$$\therefore\qquad \frac{dx}{dy}=\sqrt{\frac{2a-y}{y}},$$

$$\therefore\qquad \frac{ds}{dy}=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=\sqrt{\frac{2a}{y}},$$

$$\therefore\qquad s=\sqrt{8ay},$$ （積分學ヲ見ヨ）．

P ニ於ケル切線ガ x 軸トナス角ヲ φ トセバ

$$tan\varphi=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\div\frac{dx}{d\theta}=\frac{sin\theta}{1+cos\theta}=tan\frac{\theta}{2},$$

$$\therefore\qquad \varphi=\frac{\theta}{2}.$$

又　$TP=TIsin\varphi$　ナルニヨリ

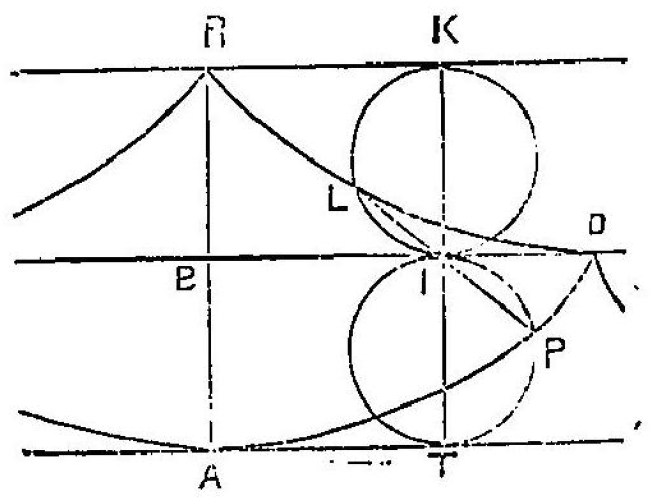
$$\widehat{AP}=2TP=2AQ.$$

又 P 點ニ於ケル曲度半徑ヲ求ムルトキハ之レ QB トナル

$$\therefore\qquad \rho=4acos\frac{\theta}{2}=2\sqrt{4a^2-2ax},$$

トナル．故ニ PI ヲ延長シテ $IL=PI$ トセバ L ハ P ニ於ケル曲度中心ナリ．$TK=2a$, トシ KR

第六十四圖



ヲ底ニ平行ニ引クトキハ BR ヲ直徑トセル圓ハ L ヲ過グベシ．而シテ

$$\widehat{IL}=\widehat{PI}=\widehat{ID}$$

$$\therefore\qquad \widehat{KL}=BI=KR.$$

故ニ L ハ直線 RK 上ヲ直徑 $2a$ ナル圓ガ廻轉スルトキニ其周上ノ一點ノ畵ク曲線上ノ一點ナリ．故ニ擺線ノ縮閉線ハ又全ク同形ノ擺線ニシテ只其位置ヲ異ニスルノミ．

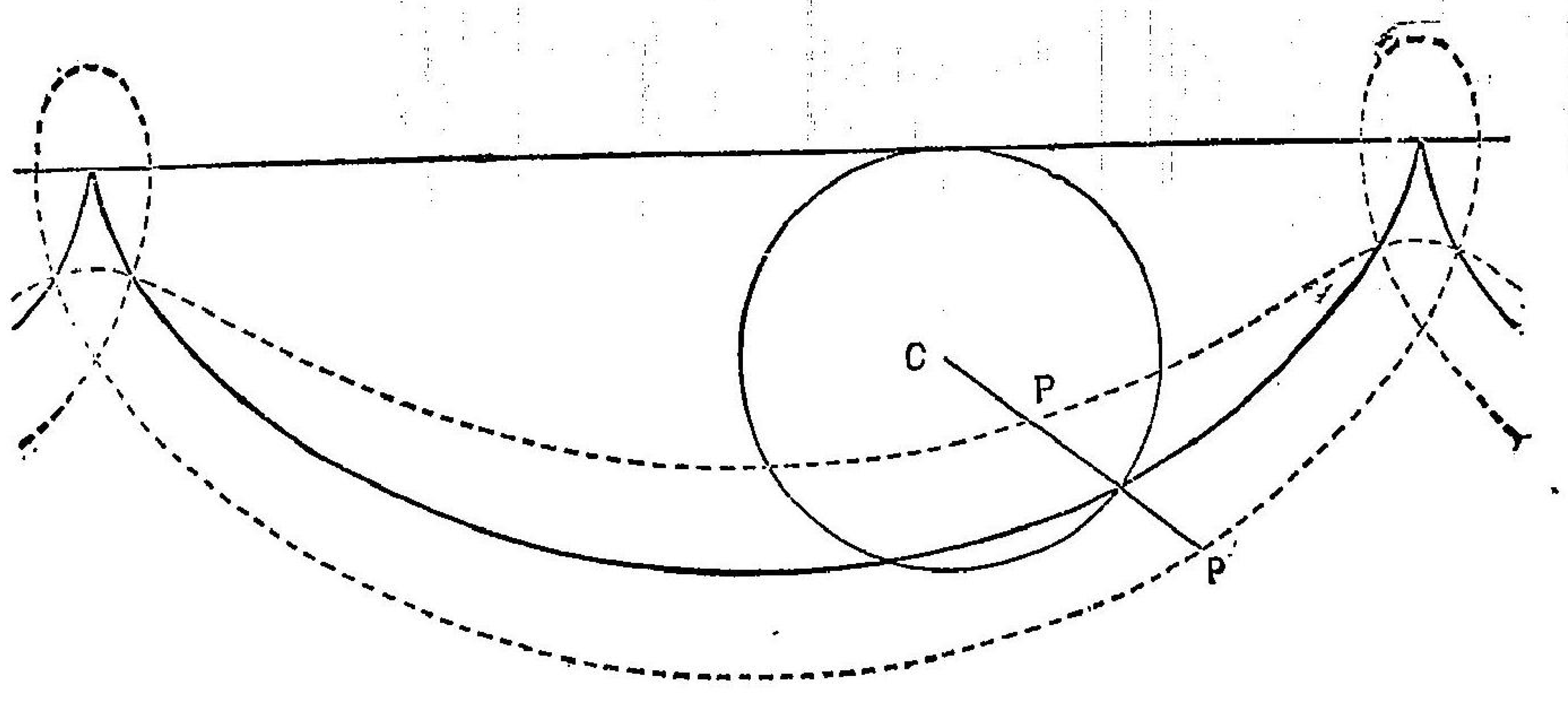
一定直線上ヲ或ル圓ガ廻轉スルトキニ其圓ニ對シテ固定セル點ノ畵ク曲線ヲ滑擺線 (*Trochoid*) ト云フ．圓ノ半徑ヲ a トシ，中心ヨリ畵ク點 P マデノ距離ガ k ナルトキノ滑擺線ノ方程式ハ

$$x=a\theta+ksin\theta,$$

$$y=a-kcos\theta.$$

トナルコトヲ證シ得．

第　六　十　五　圖



第 65 圖ニ示スガ如ク，若シ $k>a$ ノキハ自閉線ヲ有スル曲線ニシ

テ, $k<a$ ナルトキハ曲線ハ底ト交ルコトナシ. 又 $k=a$ ナル場合ニハ前ノ擺線トナリ尖點ヲ有ス. $k<a$ ナルキノ滑擺線ハ深水ノ波ニ顯ハルヽコトアル形ナリ.

83. 外擺線及內擺線

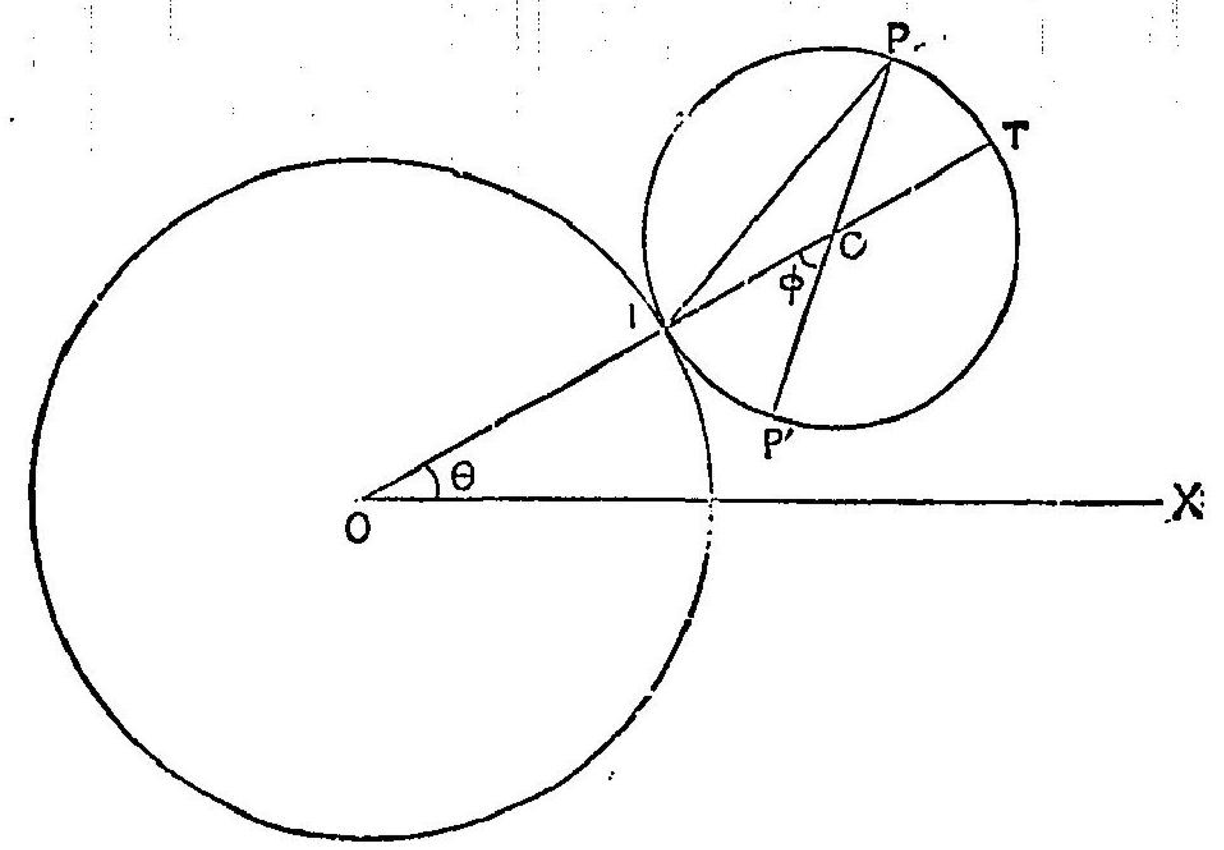
是レ定圓周上ヲ他ノ圓ガ廻轉スルトキニ其周上ノ一點ガ畫ク點ノ軌跡ニシテ廻轉圓ガ定圓ノ外ニアルカ或ハ內ニアルカニ從テ之ヲ外擺線 (*Epicycloids*) 或ハ內擺線 (*Hypocycloid*) ト稱ス.

O ヲ定圓ノ中心トシ, C ノ任意ノ位置ニ於ケル廻轉圓ノ中心トス I ヲ二圓ノ切點, P ヲ擺線ヲ畫ク點トシ,

$$OA=a,\quad CP=b,\quad I\hat{O}A=\theta,\quad I\hat{C}P'=\phi,$$

トセバ CP ト OA トノナス角ハ $\theta+\phi$ ナリ. 故ニ O ヲ原點トスルトキハ

第 六 十 六 圖



$$x=(a+b)\cos\theta+b\cos(\theta+\phi),$$
$$y=(a+b)\sin\theta+b\sin(\theta+\phi).$$

然ルニ $\quad a\theta=\widehat{AI}=\widehat{P'I}=b\phi,$

$$\therefore\quad x=(a+b)\cos\theta+b\cos\left(\frac{a+b}{b}\theta\right),$$
$$y=(a+b)\sin\theta+b\sin\left(\frac{a+b}{b}\theta\right),$$

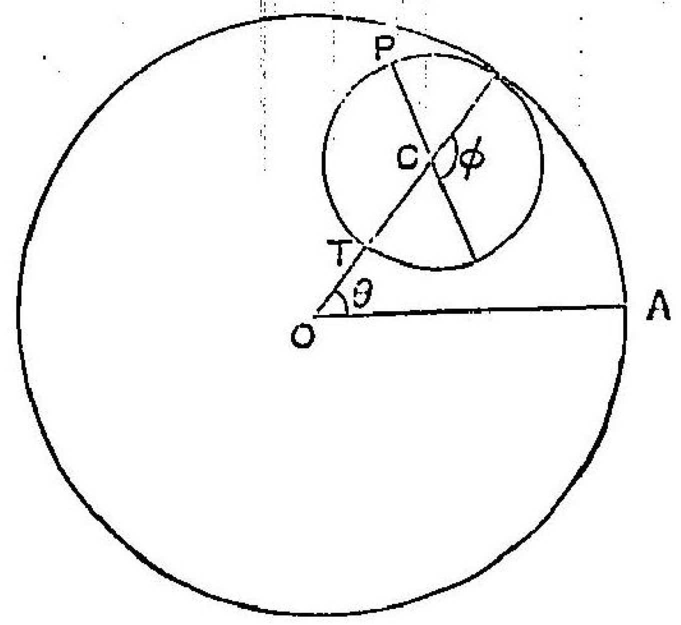
コレ P ノ畫ク外擺線ノ方程式ナリ. P' ノ畫ク外擺線ノ方程式ハ第二項ノ係數ニアル b ノ符號ヲ變ズレバ可ナリ

內擺線ノ方程式ハ外擺線ノ方程式ニ於テ悉ク b ノ符號ヲ變ズレバ得ラル. 即 (第67圖ヲ見ヨ)

$$x=(a-b)\cos\theta-b\cos\left(\frac{a-b}{b}\theta\right),$$
$$y=(a-b)\sin\theta+b\sin\left(\frac{a-b}{b}\theta\right),$$

此場合ニ $a<b$ ナル場合ニ畫ク曲線ヲ特ニ周擺線 (*Pericycloid*) ト云フ.

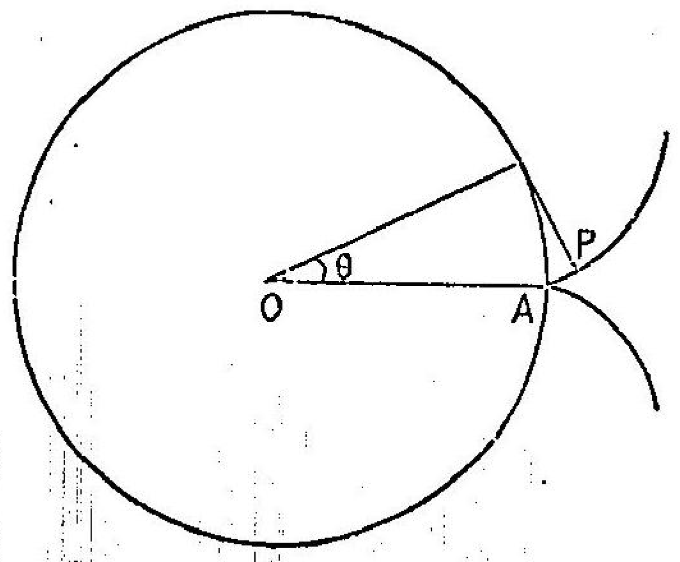
第 六 十 七 圖



外擺線ニ付テ二三ノ特別ナル場合ヲ論ズベシ. 第一ニ定圓ノ半徑ハ無限ニ大キクナルトキニハ外擺線ハ§前ニ論ジタル並通ノ擺線トナル. 此方程ヲ導クニハ外擺線ノ方程式ニ於テ x ノ代リニ $x+a$ トカキ $a\theta=b\phi$ トシ最後ニ $\theta=0$ トナスベシ.

次ニ廻轉圓ノ半徑ヲ無限大トナストキハ直線ガ定圓上ヲ廻轉スルトキ其上ノ一點ノ軌跡ニシテ是レ圓ノ伸開線ニ外ナラズ. コレ P' ノ軌跡

第六十八圖



$$x=(a+b)\cos\theta-b\cos\frac{a+b}{b}\theta,$$

$$y=(a+b)\sin\theta-b\sin\frac{a+b}{b}\theta,$$

ニ於テ $b=\infty$ ノ極限ヲ求ムレバ

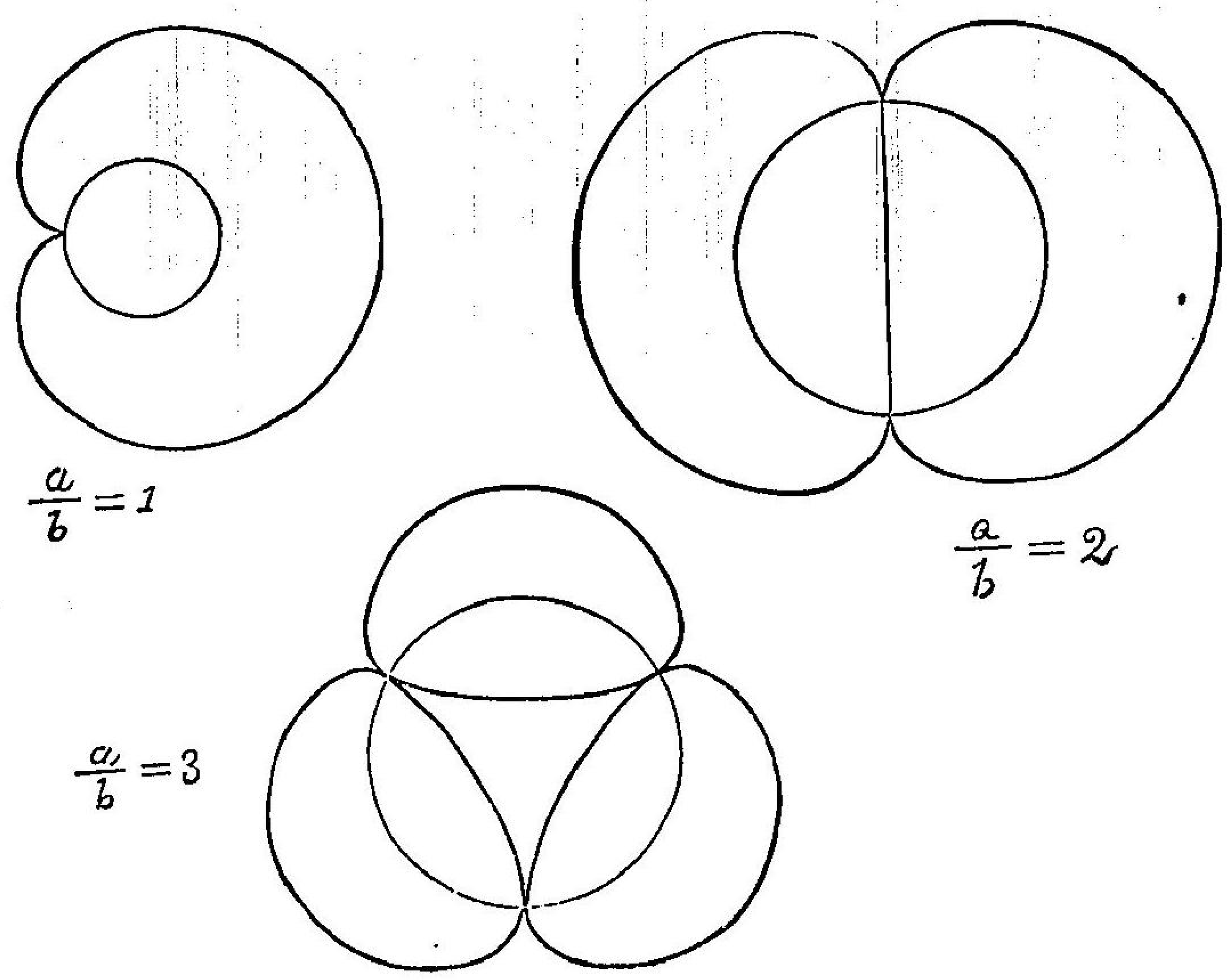
$$x=a\cos\theta+a\theta\sin\theta,$$

$$y=a\sin\theta-a\theta\cos\theta.$$

トナル. §80 例ヲ參照セヨ.

第三ニ a ト b トノ比ハ盡數ナルトキハ數回廻轉ノ後ハ P 點ハモトノ位置ニ來リ其後ハ再ビモトノ曲線ヲ畫クベシ. コノトキハ其方程式ヨリ圓函數ハ消去サレテ代數曲線トナル. 第 69 圖ニ於テ其二三ヲ示ス

第六十九圖

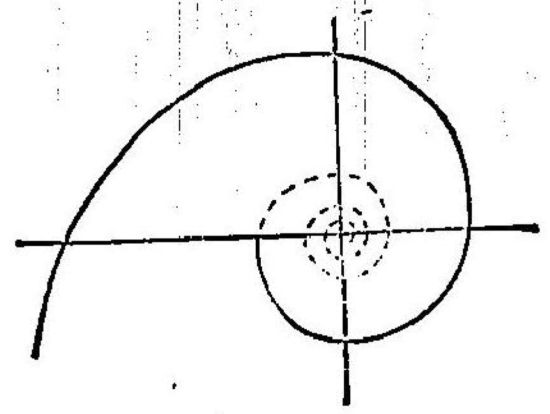


84. 螺線

螺線 (*Spiral*) ニモ其種類數多アレドモ此ニ其普通ナルモノノミヲ擧グベシ.

I $r=ae^{b\theta}$, 等角螺線. 或ハ對數螺線.

第七十圖



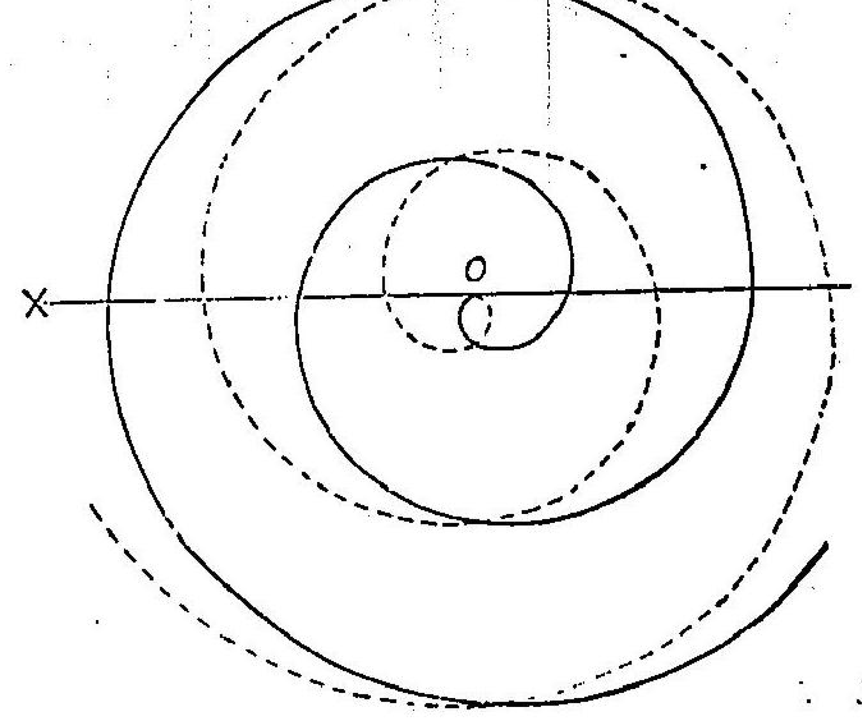
動徑ト切線トノナス角 ψ ハ §64 ニヨリ

$$\tan\psi=r\frac{d\theta}{dr}=\frac{1}{b},$$

即 ψ ハ常數ナリ故ニ等角螺線ノ名アル所以ナリ. 點線ハ θ ノ負ニ對應ス

II あーきめです (*Archimedes*) ノ螺線.

第七十一圖



之レ等角速度ヲ以テ廻轉スル直線上ヲ等速度ヲ以テ運動スル點ノ畫ク軌跡ヲ云フ

即 $r=ut$, $\theta=nt$,

$\therefore$ $r=a\theta$, $a=\frac{u}{n}$,

故ニ曲線ハ第 71 圖ノ如シ θ ノ負値ニ對スル曲線ハ點線ヲ以テ示セリ.

III 双曲螺線.

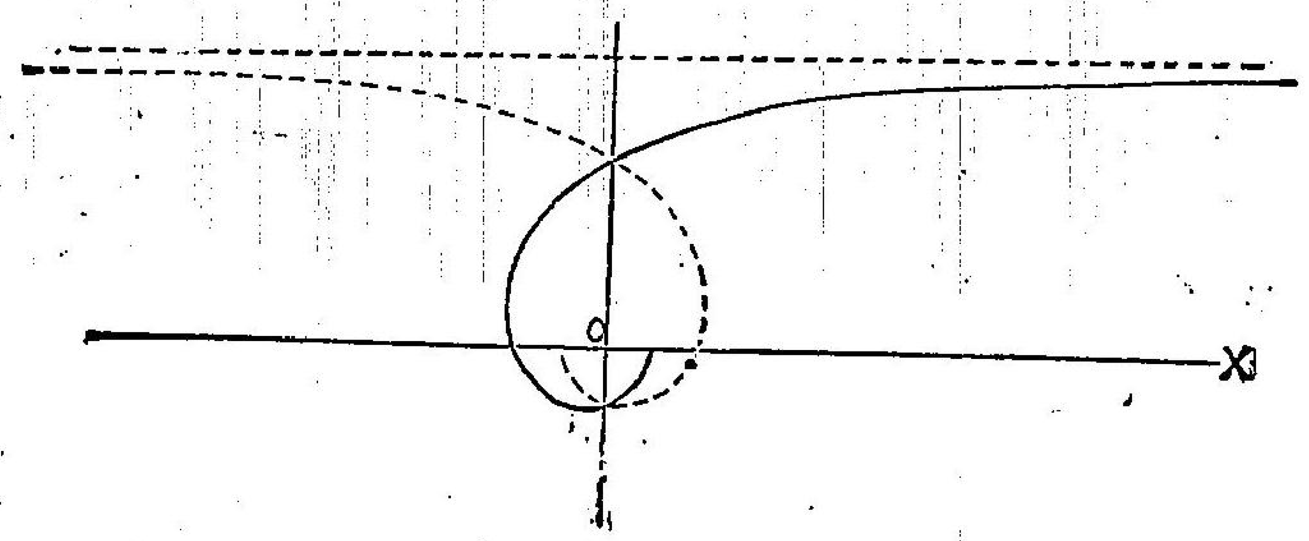
$$r=\frac{a}{\theta},$$

之レ $\theta=0$ ノ時 $r=\infty$ ニシテ

$$\lim_{\theta=0} r\sin\theta=a\left[\frac{\sin\theta}{\theta}\right]_0=a$$

ナルニヨリ原線ヨリ a 丈ケノ距離ニ漸近線アリ.

第七十二圖



85. 双極坐標

二定點 F,F' ヨリ或曲線上ノ任意ノ點 P ニ至ル距離ヲ r,r' トスルトキ其曲線ハ

$$f(r,r')=0$$

ナル方程式ニヨリテ定義サルヽコトアリ. 此時ニ r,r' ヲ點 P ノ双極坐標 (*Bipolar Coordinates*) ト云ヒ, 定點 F,F' ヲ焦點 (*Foci*) ト稱ス.

今 $P\hat{F}F'$, $P\hat{F'}F$ ヲ夫々 θ,θ' トシ, P 點ニ於ケル切線ト r,r' トノナス角ヲ ϕ,ϕ' トセバ §69 ニヨリ

$$\frac{dr}{ds}=\cos\phi,\qquad \frac{dr'}{ds}=\cos\phi',$$

$$r\frac{d\theta}{ds}=\sin\phi,\qquad r'\frac{d\theta'}{ds}=\sin\phi'.$$

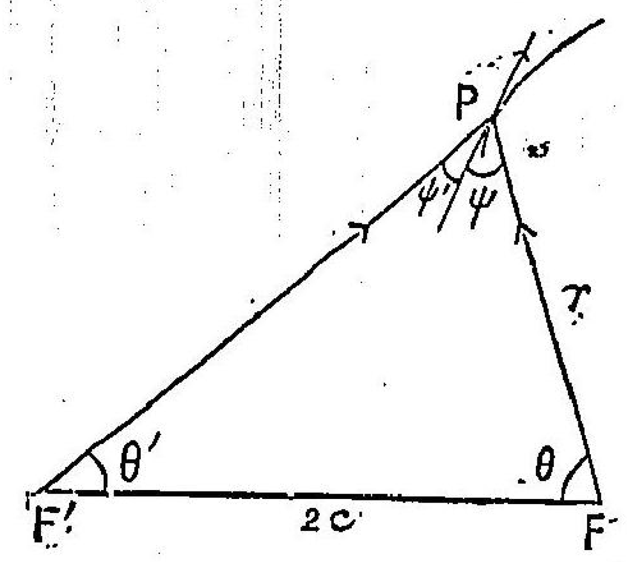
尚 F,F' ノ定距離ヲ $2c$ ヲ以テ表ハストキハ

$$r\cos\theta+r'\cos\theta'=2c,$$

及 $$r\sin\theta=r'\sin\theta.$$

ノ二關係アリ.

第七十三圖



【例】1. 楕圓ニ於テハ

$$r+r'=2a$$

$$\therefore\quad \frac{dr}{ds}+\frac{dr'}{ds}=0,$$

即 $$\cos\phi+\cos\phi'=0.$$

$$\therefore\quad \phi'=\pi-\phi.$$

同樣ニ双曲線ノトキニハ

$$r-r'=2a$$

$$\therefore\quad \cos\phi=\cos\phi'.$$

【例】2. 定點 F ヲ通過スル方向ニ進メル光線ハ反射或ハ屈折ニヨリテ他ノ定點 F' ヲ通過スベキ樣ニ物質ノ表面ヲ定メヨ. (§79 參照).

反射ノ場合ハ例 1 ノ逆ノ問題ニ過ギズ. 所要ノ表面ハ F,F' ヲ連結スル直線ヲ軸トシテ楕圓或ハ双曲線ヲ廻轉シテ生ズル表面ナリ.

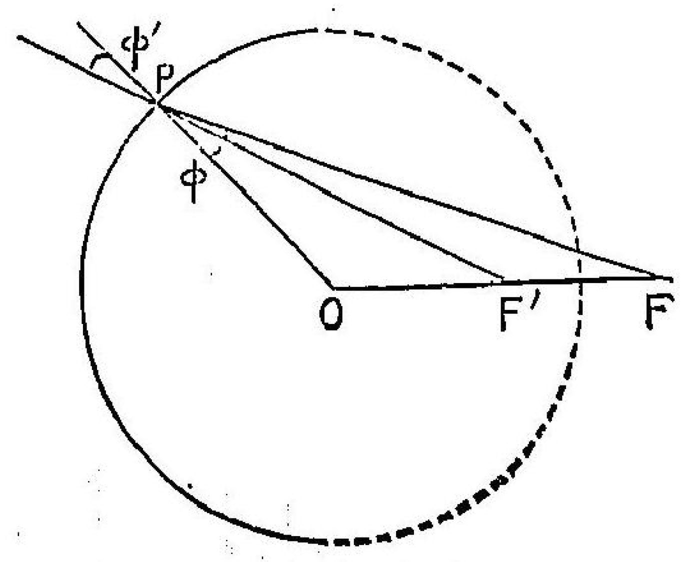
屈折ノ場合ニハ μ ヲ第二ノ物質ノ屈折率トセバ §79 ニヨリ

$$\sin\phi=\mu\sin\phi',$$

此ニ $\quad \phi=\pm\left(\dfrac{\pi}{2}-\psi\right),$

$\quad \phi'=\pm\left(\dfrac{\pi}{2}-\psi'\right),$

第七十四圖



故ニ $\quad \cos\psi\pm\mu\cos\psi'=0,$

或ハ $\quad \dfrac{d}{ds}(r\pm\mu r')=0.$

故ニ k ヲ任意ノ常數トセバ

$$r\pm\mu r'=k,$$

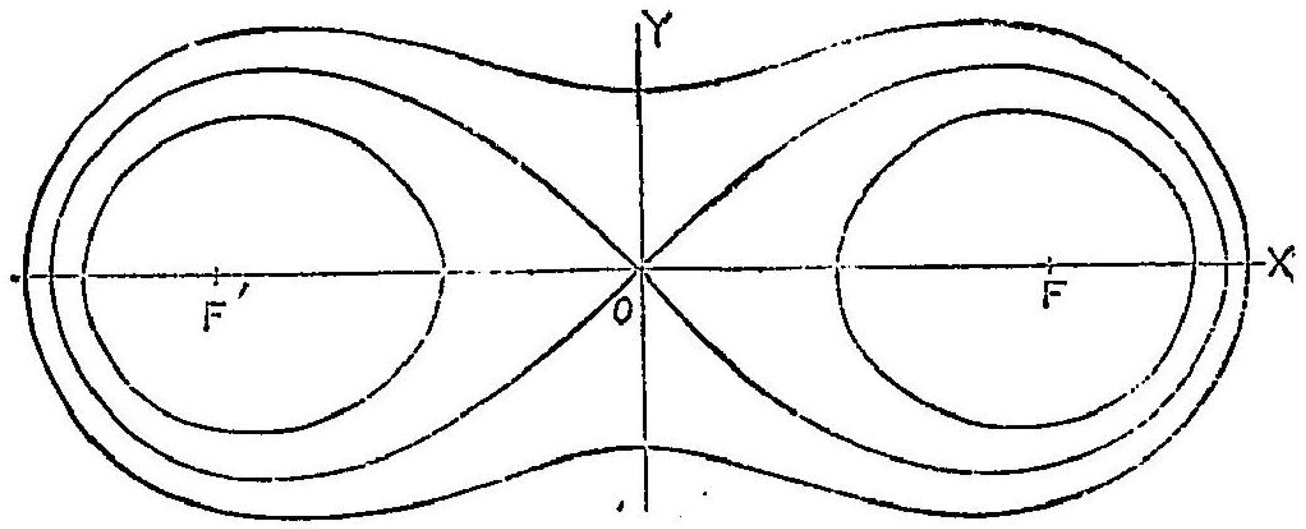
此双極方程式ニヨリテ表ハサレタル曲線ヲでかーと (*Descartes*) ハかーてじあん卵形 (*Cartesian ovals*) ト稱セリ. 特ニ負號ヲ取ルトキハ此中ニ $\quad r=\mu r' \quad (k=0).$

ナル圓ヲモ含ム. (第74圖ヲ見ヨ)

【例】3. $\quad rr'=k^2$, かっしにノ卵形 (*ovals of Cassini*).

FF' 上ノ點ニテハ rr' ノ最大値ハ c^2 ナルニヨリ, 若シ $k<c$ ナルトキハ兩焦點ヲ別々ニ包ム卵形ニシテ若シ $k>c$ ナルトキハ兩焦點ヲ同時ニ包ム繭形トナル.

第七十五圖



若シ $k=c$ ノトキニハ所謂 *Lemniscate of Bernoulli*. (§74 例16).

F,F' ノ中點ヲ O トシ O ヲ極トシ OF ヲ原線トスル曲線上ノ任意ノ點ノ坐標ヲ r_1,θ_1 トセバ

$$r^2=r_1^2+c^2-2cr_1\cos\theta_1,$$

$$r'^2=r_1^2+c^2+2cr_1\cos\theta_1,$$

ナルニヨリ *Lemniscate* ノ方程式ハ

$$(r_1^2+c^2)^2-4c^2r_1^2\cos^2\theta_1=c^4,$$

或ハ $\quad r_1^2=2c^2\cos2\theta.$

トナル. 之ヲ直交坐標ニ直ストキハ §74 例16 ト同形ナリ.

【例】4. 磁力線. (*Magnetic lines of force*).

E,F ヲ磁石ノ兩極トセバ任意ノ點 P ニ於ケル磁力ハ FP ノ方向ニ $\dfrac{m}{r^2}$, PF' ノ方向ニ $\dfrac{m}{r'^2}$ ナリ. 此二力ノ合成力ノ方向ニ引ケル曲線ヲ磁力線ト云フ. 故ニ磁力線ニ垂直ナル方向ニハ力ノ成分0ナリ. 之ヲ式ニハ表ハセバ

$$\frac{m}{r^2}\sin\psi+\frac{m}{r'^2}\sin\psi'=0,$$

即 $\quad \dfrac{1}{r}\dfrac{d\theta}{ds}+\dfrac{1}{r'}\dfrac{d\theta'}{ds}=0,$

然ルニ $\quad r\sin\theta=r'\sin\theta',$

ナルニヨリ $\quad \sin\theta\dfrac{d\theta}{ds}+\sin\theta'\dfrac{d\theta'}{ds}=0,$

或ハ $\quad \dfrac{d(\cos\theta)}{ds}+\dfrac{d(\cos\theta')}{ds}=0,$

即 $\quad \dfrac{d}{ds}(\cos\theta+\cos\theta')=0$

今 k ヲ任意ノ常數トセバ

$$\cos\theta+\cos\theta'=k.$$

是磁力線ノ方程式ナリ.

等位相線 (*Equipotential lines*) トハ磁力線ト垂直ニ交叉スル曲線ヲ云フ. 故ニ此曲線ノ切線ノ方向ニハ力ノ成分ナシ, 之ヲ式ニテ表ハセバ

$$\frac{m}{r^2}\cos\psi-\frac{m}{r'^2}\cos\psi'=0,$$

或ハ $$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds}-\frac{1}{r'^2}\frac{dr'}{ds}=0,$$

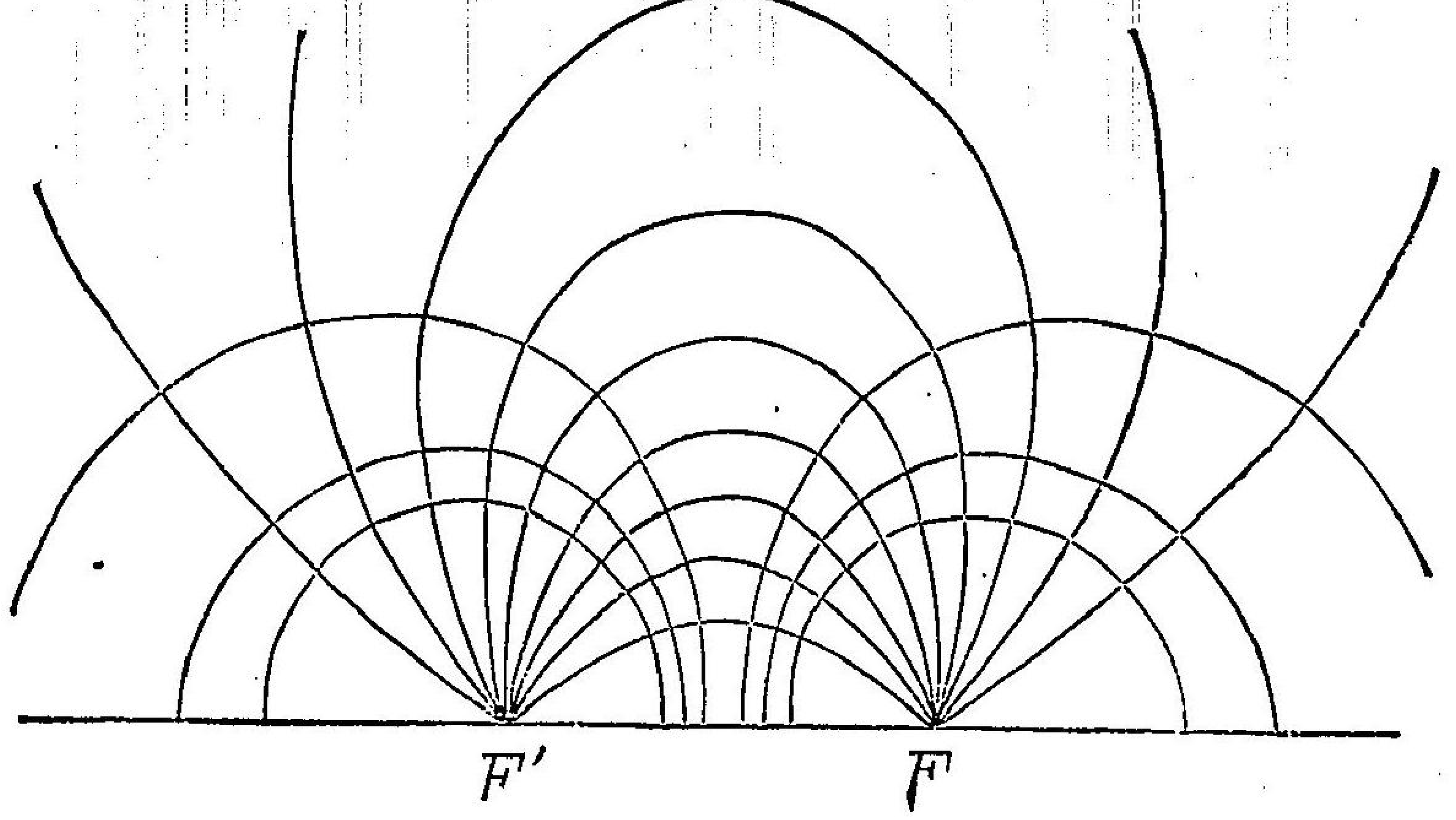
即 $$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)=0,$$

$\therefore$ k ヲ任意ノ常數トセバ

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}=k,$$

之レ等位相線ノ方程式ナリ.

第七十六圖



此圖ニ於テ F, F' ヲ連結スル曲線ハ磁力線ヲ表ハシ, F, F' ヲ包ム曲線ハ之ニ對應スル等位相線ナリ.

問　題　7.

1.　$x=a\cos nt$,　$y=b\cos 3nt$ ナルりさぢゅうノ曲線ハ曲線 $ay=bx\left(3-4\frac{x^2}{a^2}\right)$ ノ部分ヲ構成ス.

2.　運動スル點ノ坐標ハ

$$x=a\frac{e^{nt}+e^{-nt}}{2},\quad y=b\frac{e^{nt}-e^{-nt}}{2}.$$

ナルトキノ軌道ハ拋物線ナリ.

3.　あーきみですノ螺線ニ於テ

$$\phi=\cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}},$$

4.　或曲線上ノ或點ニ於ケル曲度半徑ハ ρ ナルトキ此點ニ對應スル點ノ縮閉線ノ曲度半徑ハ $\rho\frac{d\rho}{ds}$ ナリ.

5.　$y=a\tan x$ ノ縮閉線ノ漸近線ハ $ay+x=n\pi$ ナリ.

6.　$a^3y^2=x^5$ 上ノ原點ニ近キ點ニ對應スル縮閉線ハ殆ンド $xy^2=c^3$ ニ依テ表ハサルヽコトヲ證セ.

7.　$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ ノ縮閉線ハ $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$.

8.　拋物線 $y^2=4ax$ 上ニ中心ヲ有シ且ツ其頂ヲ過グル樣ニ動ク圓ハ $y^2(x+2a)+x^3=0$ ニ切ス.

9.　楕圓ノ中心ヨリ引ケル動徑ヲ直徑トスル圓ノ包絡線ハ $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$. ナリ.　(頁341例ヲ見ヨ)

$$\cos\theta+\cos\theta'=k.$$

是磁力線ノ方程式ナリ.

等位相線 (*Equipotential lines*) トハ磁力線ト垂直ニ交叉スル曲線ヲ云フ. 故ニ此曲線ノ切線ノ方向ニハ力ノ成分ナシ, 之ヲ式ニテ表ハセバ

$$\frac{m}{r^2}\cos\psi-\frac{m}{r'^2}\cos\psi'=0,$$

或ハ
$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds}-\frac{1}{r'^2}\frac{dr'}{ds}=0,$$

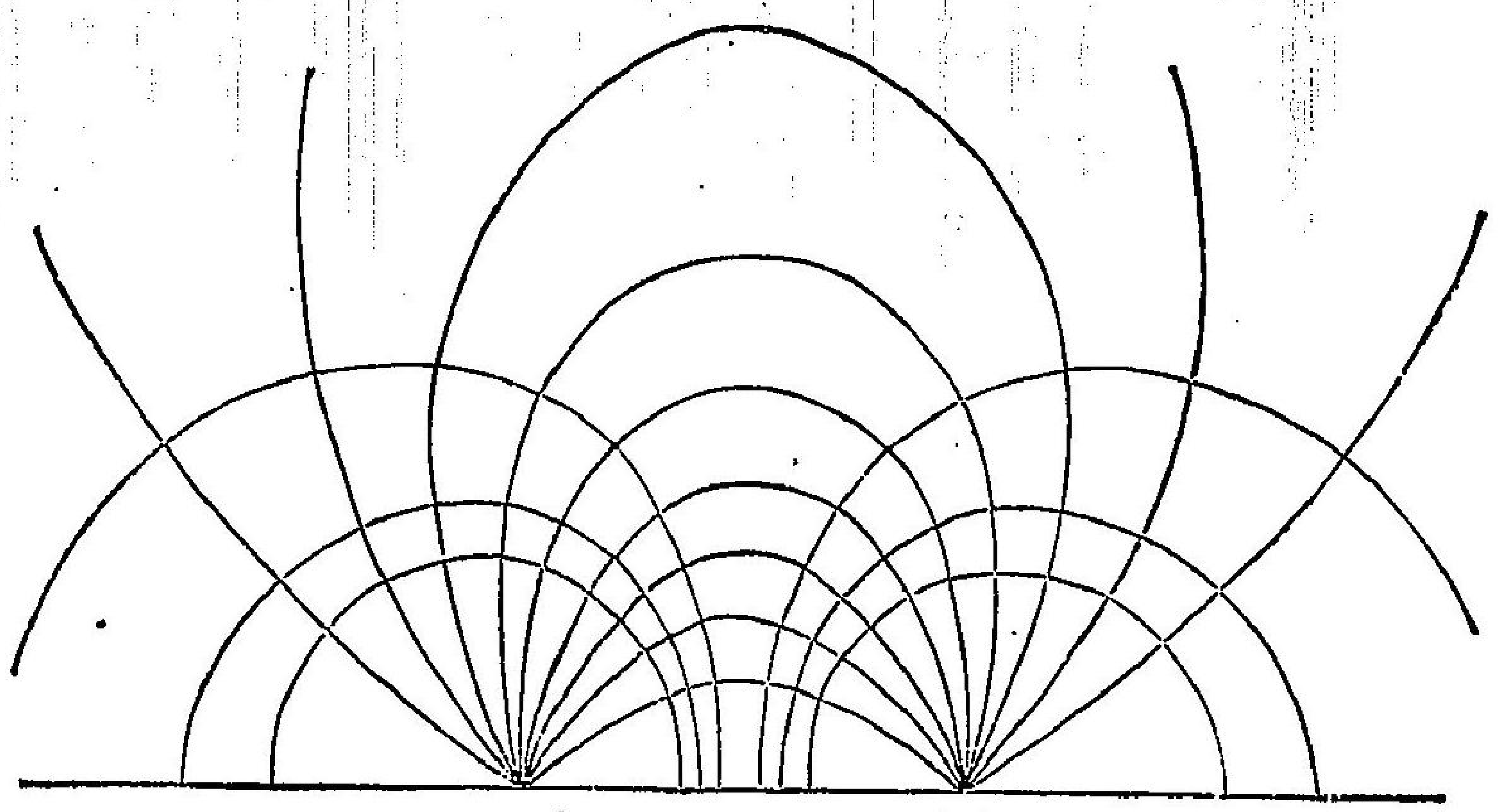
即
$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)=0,$$

$\therefore k$ ヲ任意ノ常數トセバ

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}=k,$$

之レ等位相線ノ方程式ナリ.

第七十六圖



F′　　F

此圖ニ於テ F, F' ヲ連結スル曲線ハ磁力線ヲ表ハシ, F, F' ヲ包ム曲線ハ之ニ對應スル等位相線ナリ.

問　題　7.

1.　$x=a\cos nt$, $y=b\cos 3nt$ ナルりさぢゅうノ曲線ハ曲線 $ay=bx\left(3-4\frac{x^2}{a^2}\right)$ ノ部分ヲ構成ス.

2.　運動スル點ノ坐標ハ

$$x=a\frac{e^{nt}+e^{-nt}}{2},\quad y=b\frac{e^{nt}-e^{-nt}}{2}.$$

ナルトキノ軌道ハ拋物線ナリ.

3.　あーきみですノ螺線ニ於テ

$$\psi=\cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}},$$

4.　或曲線上ノ或點ニ於ケル曲度半經ハ ρ ナルトキ此點ニ對應スル點ノ縮閉線ノ曲度半徑ハ $\rho\frac{d\rho}{ds}$ ナリ.

5.　$y=a\tan x$ ノ縮閉線ノ漸近線ハ $ay+x=n\pi$ ナリ.

6.　$a^3y^2=x^5$ 上ノ原點ニ近キ點ニ對應スル縮閉線ハ殆ンド $xy^2=c^3$ ニ依テ表ハサルヽコトヲ證セ.

7.　$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ ノ縮閉線ハ $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$.

8.　拋物線 $y^2=4ax$ 上ニ中心ヲ有シ且ツ其頂ヲ過グル樣ニ動ク圓ハ $y^2(x+2a)+x^3=0$ ニ切ス.

9.　楕圓ノ中心ヨリ引ケル動徑ヲ直徑トスル圓ノ包絡線ハ $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$. ナリ.　(頁341例ヲ見ヨ)

10.　同一ノ軸ヲ有シ且ツ不變ノ面積ヲ有スル總テノ楕圓ノ包絡線ハ $4x^2y^2=c^2$ ナリ.

11.　抛物線ノ縱線ヲ半徑トスル圓ノ包絡線ハ等シキ抛物線ナルコトヲ證セ.

12.　圓錐曲線ノ焦點ヨリ曲線上ノ點ニ引ケル直線ヲ直徑トスル圓ヲ畫クキハ，其包絡線ハ又圓ナルコトヲ證セ.

13.　與ヘラレタル等角螺線ノ極ヲ焦點トシ，其切線ヲ準線トスル抛物線ノ包絡線ハ又等角螺線ナリ.

14.　中心ノ坐標 (a,b) 半徑 c ナル圓ニ内接スル直角三角形ノ直角ヲ挾ム一邊ガ常ニ原點ヲ過グルトキ，他ノ邊ガ常ニ

$$c^2(x^2+y^2)=(a^2+b^2-c^2-ax-by)^2,$$

ニ切スルコトヲ證セ.

15.　擺線ガ定直線上ヲ廻轉スルトキニ其底ガ常ニ曲線

$$\frac{x}{2a}=\left\{2+\left(\frac{y}{2a}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}\left\{1-\left(\frac{y}{2a}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}$$

ニ切スルコトヲ證セ.

（終）

明治四十三年九月十日印刷
明治四十三年九月十五日發行

微分學講義
定價金壹圓五拾錢

著作者　大阪市東區安土町四丁目廿八番邸　寺澤寛一
發行者　大阪市西區阿波座貳番町壹番地　石田忠兵衛
印刷者　大阪市西區阿波座貳番町壹番地　堀越幸
印刷所　積善館印刷部

發行所　大阪市東區安土町四丁目　積善館本店　振替口座大阪二九八一番　電話特東一一三〇番
同　福岡市博多中島町　積善館支店　電話特四三番
同　廣島市鹽屋町　積善館支店　電話特三五〇番