萬有文庫
第二集七百種
王雲五主編

初等算學史

（上）

卡約黎著
曹丹文譯

商務印書館發行

初等算學史

（上）

卡約黎著

曹丹文譯

漢譯世界名著

序

人羣之進化，率由野蠻而趨於文明，學科之發達，率由簡淺而趨於高深；各科皆然，算學亦何獨不然。夫人類之有算學，蓋自世界之有人類始，一若粟米布帛，與人生相終始，不能須臾離去。然皆先簡後繁，先淺後深，舉世同軌，莫之或異。若學者徒驚近世算學之新奇，而不尋流溯源，一考其隨時變遷之陳迹，又何能探索算學之本原，窺視其推陳出新之妙用耶？鄙人不揣簡陋，爰取美國卡約黎氏，『初等算學史』而譯之，以餉學者。若學者不棄而取閱之，則於初等算學變遷之大勢，或能了然於心歟！

中華民國十四年仲秋固始曹丹文誌

例言

一、是書爲美國卡約黎氏所著。引證之書，爲數甚多。內於各國（博引遠古近今）之初等算學，原原本本，歷述其變遷之情勢，文詞整潔，詳簡合宜。惟譯者無文，恐失本來面目。

一、書內引述之書名，無論爲英國，或他國文字，悉斟酌原義，譯成中文，俾便記憶。

一、書內引述之西曆年代，悉註以中國年代，俾便對照。

一、譯文內句讀，人名，地名，書名，及其他重要名詞，悉用新式記號及標點，以圖醒目。

一、書內小註，關係重要者，擇譯於每面之下，以資考證。

一、鄙人學識簡陋，詞句之間，錯誤必多，深願海內外算學同志進賜教正，將不勝感謝之至。

目錄

第二編　中古時代……九九

第三編　近世時代……一五一

第四章　近日教育上之運動

初等算學史

第一編　上古時代

第一章　記數法與數目字

世界記數之法，時無論古今，殆皆以五進位，以十進位，或以二十進位。此其故不難知之。小兒初習算數，往往用及手指，甚至足趾。推之有史以前，未開化之野人，其利用手指與足趾以計數，蓋無疑義。卽今日之阿非利加人，伊士企摩人(*Eskimo*)，及南太平洋之島人(*The South Sea Islander*)亦皆實行利用其手指足趾者也。人之借助於手指，常由於手勢記數法多少之發達，若聾啞字母之類。手指記數之法，其流行之明徵，可於古時之埃及人，巴比倫人，希臘人，羅馬人間考得之，又可於中

世紀歐洲人間考得之;即在今日之東方諸民族間,亦皆可考得之也。華人之記數也,在十萬以內者,能以左手表之;其法以右手大指之指甲,遍觸左手小指之節,先起小指外邊,由下而上,次依中路,由上而下,次依內邊,由下而上,藉以表自一至九單位之數;同式表十位之數以無名指;百位之數以中指;千位之數以食指;萬位之數以大指。若欲推此記數之法,以表更多之數,祇需推及於右手斯可矣。而商界中人,磋商價值者,嘗用袖中之手,以通彼此之意,用避旁觀之目,亦可想見其術之普通為何如矣。

若人類手指之數,因人不同,則世界流行之記數法之進位,亦必隨在各異。設人類之一手多生一指,全數為十二指,則文明各國記數進位之法,將不以十而以十二矣。若然,則必需特別數目字二,以代表十及十一焉。所不幸者,歷盡用算術之人類,實無第六指發生耳。然除需添二特別數目字及習乘法表必增至12×12外,十二進位法,實優於十進位法。何則,蓋十二含有整除數2,3,4,6,而十祇有整除數2及5。在平常事務之間,$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{4}$,為常用之分數,進位之根數為2,3,及4之整倍數,便利良多。對於十二進位法,討論提倡而最具熱心者,為瑞典國王查理第十二(*Charles XII*),其甍

時，猶希望其統轄之境，改十進爲十二進。但此改變，究未能成爲事實耳。法蘭西之革命，一切舊時文物，推翻無餘，獨此十進位法，非特無毫髮之變動，且較往時更加鞏固，亦足見其根深難撼矣。十二進位之便利，惜古時無有知之者，迨算術發達，至今日已不可改矣。雖然，文明民族，其留有上古野蠻生活時蠢蠢之遺迹，又何止此一事耶。

人類依肢體之關係而創設之記數法，其五進位法及二十進位法常見於知識卑陋之種族，至知識較高之人民，則以前者進位之根太小，後者進位之根太大，俱避而不用，特擇其適中之十進位法而用焉。各族之人民，並非一致膠執於任何一種進位法。在五進位法中，5,25,125,625 等數，應爲相連各位之單位，但如此五進位法所得之數，並未見諸實用。及其增至更多之數，每每變爲十進，或變爲二十進。亞美利加洲者，五進位法或二十兼五進位法之安宅也。其法實流行於其北冰洋區之伊士企摩種族，流行於北美洲印第安（*Indian*）種族之一大部分，且更流行於中美及南美焉。此等進位法，北西伯利亞人及非洲之多數種族亦用之。其遺迹也，並可於現用十進位法諸種族之文字中考得之；在詩人荷馬（*Homer*）之希臘文中，可見其例。而羅馬之記數法，如 I, II, … V, VI,

…X,XI,…XV 等等，亦表顯其遺迹者也。

所可異者，五進位之法，往往與二十進位之法相混合；蓋未開化之人，初以一手之指數爲其較高之單位，不足則繼以手指足趾之全數，爲其更高之單位。二十進位之法，其普通較遜於五進位之法，然二者不能純粹獨立則一也。在此法中，20,400,8000,160000，爲初進四位之單位，並於猶夏旦（*Yucatan*）之馬耶人（*Mayas*）得確實考見其特別字體用以代表此等數者焉。阿芝特克人（*Aztec*）之進位法，卽表示五進位法及二十進位法之遞嬗，次第列之，卽1,2,3,4,5, 5+1…10, 10+1,…10+5,10+5+1,…20,20+1,…20+10,20+10+1,…40，等等。有特別字體以表顯1,2,3,4,5,10,20,40，等數。二十進位之法，盛行於美洲新大陸，但罕見於舊世界之歐洲。歐洲古族遺迹之此一端，可於法蘭西文字中見之，如 *quatre-vingts* 者，卽表 4×20 或80也，*six-vingts* 者，卽表 6×20 或 120 也，*quinze-vingts* 者，卽表 15×20 或 300 也。更考之於英文中之 *score*（二十）一字，在 *three-score years and ten* 句內者，亦有二十進位之意焉。

在人類所設之三個進位法中，要以十進位法爲最盛行，其盛行之程度，據古之傳說，實舉世界

之種族而皆用之。僅至近數世紀中，始知其他二個進位法有前人所未及知之種族曾採用之。十進位法，亦嘗用於北美印第安種之多數部落，但罕用於南美耳。

十進法之組成，蓋原於一手十指，數至十而暫停，因以為第一次較高之單位。在 10 及 100 間之數，可以 $b(10)+a(1)$ 表之，a 及 b 為小於 10 之整數。但 110 可以兩式表之，一為$10\times10+10$，一為 11×10。然後式亦非勉強，而何以人之稱數，不仿效稱八十，九十等例，而稱一百一十以十一個十耶？於此 $10\times10+10$ 及 11×10 選擇之間，組成進位系統之樞紐，即在是矣。所幸者，世界各國表顯十進位之法，皆依前式而表 100 以內之數，10 之一字，與最初之單位 1 受同等之待遇。數在 100 及 1000 之間者表之以 $c(10)^2+b(10)+a$，a b，c 為小於10之整數。仿此，數在 10,000 以下者，表之以 $d(10)^3+c(10)^2+b(10)^1+a(10)^0$；並依法可表更大之數。

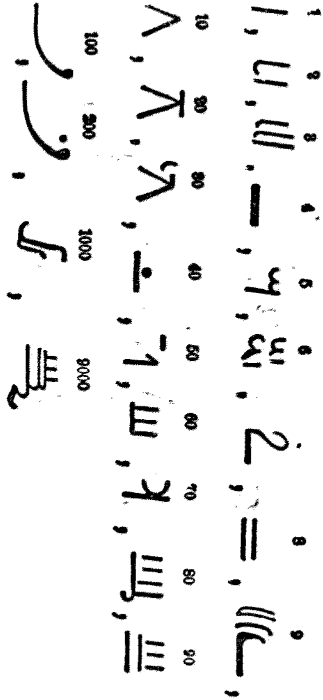
進而解明各種記數之法，吾人端自巴比倫始。尖形字體，及附屬之記數法，殆為古之蘇美爾人(*Sumerian*)所發明。用豎尖劈 ▼ 以表1，而用 ⋖ 及 ⋖▼ 以表10及100焉，數之小於 100 者，則各種記號之價值，依加法之例用之。如 ⋖⋖▼▼▼ 表23，⋖⋖⋖ 表 30 是也。若然，則表大數者之記

號，常置於表小數者之左。但表百之倍數，則置表小數者於表100之前，用以乘100。如表10×100或1000是也。取此以爲新單位，則者，依例解之，並非表20×100，實表10×1000者也。此記數法之原理，乃利用加法及乘法而成。因此法所計之數，未見有過百萬者。此外，巴比倫尙有六十進位之一法，當於以後詳之。

埃及之記數法也，由商坡弄氏(*Champollion*)，楊氏(*Young*)，及其他學者解釋其象形文字而得之。其數目字，用一以表1，∩以表10，以表100，以表1000，以表10,000，以表100,000，以表1,000,000，及以表10,000,000。考其數目字之形似，表1者狀若豎桿；表10,000者，若手指；表100,000者，若鳥；表1,000,000者，若受驚之人。至其他數目字所表之狀，則莫得而知。此等數目字，與其他象形文字同，皆顯然爲埃及人習見之動物及物件，蓋默示於人而取其形象焉。卽視爲圖畫之優美標本也可。其記數之理，全基於加法而成，如用以表顯111者是也。

象形文字可於記念碑，方尖碑，及廟壁間見之。除此之外，埃及尙有宗教及人民兩類字體，諒皆

為象形文字之變格，似由於使用久遠及希圖速寫之故而來者。今將宗教數目字列之以見其例：



因宗教一類數目之字多於象形一類數目之字，故凡數皆可由前一類之字以簡明之式表之。至其利用加法之理，則二者皆同，且表大數之字常居於表小數者之前焉。

約當梭倫 (*Solon*) 時代，希臘人嘗用指示數量形容字之起首字母以代表各種數目。此等記號稱為『赫洛德 (*Herodianic*) 記號』，蓋為紀元後二百年（約後漢獻帝建安五年）拜占庭

(*Byzantium*)文士赫洛德(*Herodianus*)所考定者也。〕亦稱爲雅典(*Attic*)記號,因其常見於雅典文字中也。腓尼基人(*Phœnicians*),敍利亞人(*Syria*),及希伯來人(*Hebrews*),是時已有字母,敍利亞人與希伯來人則已用字母以表數。希臘人於紀元前五百年(約東周敬王二十年)始採用同式之步驟。希臘各字母,與古時之三字母ϛ,Ϙ,ϡ,及*M*字,皆用以表數,若1至9,以α,β,γ,δ,ε,ϛ,ζ,η,θ,表之;十之倍數10至90,以ι,κ,λ,μ,ν,ξ,ο,π,Ϙ表之;百之倍數100至900,以ρ,σ,τ,υ,φ,χ,ψ,ω,ϡ表之;其餘表千之倍數以͵α,͵β,͵γ,͵δ,͵ε,等;表100,000以M;表20,000以$\overset{\beta}{M}$;表30,000以$\overset{\gamma}{M}$等等是也。夫由雅典記數法而變爲字母記數法,實見其變本加厲,蓋前法究較爲易記耳。吾人讀希臘文法,見其言表數目之字母,上加短撇,以別於尋常之字,但此並非通例;若加一平線於字母之上,亦常具同等之意義,至字母上加撇,乃用以表單位之分數,如δ′=¼是也。希臘人之記數,利用加法之理,及觀其用$\overset{\varepsilon}{M}$以表50,000,則亦利用乘法之理矣。

羅馬之記數法,除加法之外,尙利用減法之理。若有二字母於此,前者表小數,後者表大數,則爲後者減去前者之意。如IV=4,與VI=6是也。雖此理不見於他種記數法,然有時見於他種數量文

字。如拉丁 (*Latin*) 字 *duodeviginti* =20 減 2 或 18 是也。羅馬數目文字殆以伊特拉司坎 (*Etruscan*) 字爲其根源。

若巴比倫，埃及，希臘，羅馬，及其他上古時之十進位記數法者，皆用少數記號以表數，此等記號或僅利用加法之理，或兼及於乘法或減法之理。但無一及於定位法緊要之理，如吾人今日之所用者。失此一端，古人卽失零號之用，故其距意想之記數法尙甚遠也。就此點言之，卽希臘羅馬人亦始終未能成就，若近百年來始與歐人通聞問之亞洲一遠國所成就之偉績，卽印度是也。未論印度之前，吾人須再論巴比倫之記數法，其進位之可異者，非五，非十，亦非二十，其用意甚近於意想原則爲其他種人所缺乏者，卽六十進位之記數法是也。

此法也，巴比倫人大半用之以組成重量及度量之數。其先之蘇買兒人，無論於整數分數，此六十進位法俱稱發達，實顯其數學之優異焉。此法得之於巴比倫之二册葉。第一册葉之紀年，殆爲紀元前一千六百年(商太戊三十八年)，或紀元前二千三百年 (唐堯五十八年) 載自 1 至 60 平方之數。其最初七數，卽 1,4,9,16,25,36,49 也。其次則 $1\cdot4=8^2,1\cdot21=9^2,1\cdot40=10^2,2\cdot1=11^2$ 等

等也。此式非依六十進位法，不能解之，因1·4＝60＋41·21＝60＋21等等也。第二冊集記錄太陰自生魄至望每日光體之大小，令其全體爲240分焉。起首五日之光體爲5,10,20,40,1·20（＝80）之級數。其六十進位之法，於此可見，且可知其具有幾何級數之知識。後此則變爲算術級數，如五日至十五日之數爲 1·20,1·36,1·52,2·8,2·24,2·40,2·56,3·12,3·28,3·44,4。是也。在此六十進位法之中，吾人得定位之理焉。如1·4(＝64)一式，1者，所以表60者也，對於4具位置之關係，而表其高一位之單位也。巴比倫利用定位之理，其先於印度者殆二千年之久，其時羅莫那（*Romulus*）與立麻（*Remus*）兄弟以及阿奚里（*Achilles*），買尼勞（*Menelaus*），及海倫（*Helen*）猶未見於歷史及詩歌中也。但欲定位之理完全發達，必須一記號以表零。約紀元前二百年（漢高帝七年）之巴比倫記錄，卽有表零之記號，其意指空一位，但未顯然作佈算之用耳。其記號維何，卽⋀⋀是也。約紀元一百三十年（約後漢順帝永建五年）托勒密（*Ptolemy*）嘗用六十進位之分數，並用希臘字母"*o*"以表其空位。此o之一字，並非用作正式之零。故巴比倫者，雖知定位之理，且有零之記號以表空位，但未用之以入算耳。其六十進位之分數法，後卽流傳於印度。

果何事以促醒巴比倫人而用六十為進位之根乎？坎梯（Cantor）及其他學者，則為之解答如下：巴比倫人蓋最初以三百六十日為一年。由此分圓周為三百六十度，每度表太陽繞地之假定年周一日之數。用半徑作弦於圓內連續六次，圓周適盡，彼等或早知此理。故每弧得六十度，若然，則平分六十，以為進位之根，由此起矣。更進則每度再分為六十等份，命之曰分。至分一日為二十四時，依六十進位法，再分為分為秒，亦始於巴比倫。外此，六十進位命分之例，如此後之希臘人，亞拉伯人中古時之學者，及近時之學者，皆採用之。

巴比倫之科學，已深留印象於近世之文化。測量家錄儀器之弧度，近世人記晝夜之時刻，皆不知不覺而端然效法彼幼發拉底（*Euphrates*）河岸已往之天文家矣。

吾人十進位記數法之完全發達，蓋屬於比較近世之時代。夫十進位法之簡明便利，乃在利用定位之理，然未知此法以前，十進法之行用蓋已數千年矣。吾人之有零號之用，定位之理，實受印度人之賜，彼等於紀元後五世紀或六世紀（俱約南北朝時，）久已通行。於數學諸凡發明之中，其能助普通之進步誠無有勝於此者。至於舊式之記數法，只可記錄演算後之答案，而印度之記數法

（嘗謂稱爲亞拉伯記數法）在演算其數時，實具可驚之助力焉。欲證此理，試以723乘364，而先以羅馬記數法表之，如*DCCXXIII*乘*CCCLXIV*是。然如此記數，實難佈算，故羅馬人對此等運算，遂被迫而不得不乞助於算盤焉。

印度記數法發展之情狀，可得而知者甚鮮。其信而有徵者，當紀元後二世紀時（後漢時）印度之記數法，尚無零號，亦無定位之理。在錫蘭島間，有一類似印度而無零號之記數法，迄今尚保存無恙。蓋印度之佛教及其文化，約紀元後三世紀時（約後漢及晉時）流傳於彼土，巍然而無所變遷者也。則錫蘭記數法者，或誠爲印度不完全之古法歟。除1至9數目字之外，錫蘭尚有字以表10之倍數，並有字以表100及1000。如7685一數，將用六字以表之，即用一字以表7，用一字以表1000，又各用一字以表6，表100，表80及5是也。然此等所稱爲錫蘭語之記號者，殆先爲相當數目形容字之起首字母，若古印度之數目字然。且印度古語之數目形容字，其1至9之字，異於英語，其起首之字母各不相同，故無混亂之事。夫經時代之變遷，印度字母之體，亦隨而改易，但其狀極似波伊悉阿斯(*Boethius*)氏及西亞拉伯之數目字者（當見之於後，）則其紀元後二世紀時（後

漢時）之字母也。

印度最初表零之記號，爲一小點，無論刻字及抄錄，皆用之以記空位。此誠類似更古之巴比倫人及托勒密氏所用表零之記號。至若吾人表零之號，紀元後五世紀時（東晉及南北朝時，）阿雅巴塔氏(*Aryabhatta*)或已知之。至在印度，則其最初之確然見諸實用者，係在紀元後八百七十六年也（唐僖宗乾符三年。）

印度人有各種不同之記數法。有時因便利故，而用標識之意義以記數，如1可以月或地球表之，2可以眼目表之之類。在印度某天文書之中，1577917828 一數，由單位起表法如後：如偉蘇(*Vasu* 八神團體)——二——八——山(比喻之七山脈)——某物狀(可表1者)——數目字(九數目字)——七——山——太陰日（陰曆半月有十五日）是也。此記數法實屬有趣。似爲記錄之用而以之記日及數者。擇同義之字，以易其暗昧之辭；使強記之事歸於簡易。此其用意，教師或可於課室中仿行之。

印度之記數法，本其已發達狀態，在十二世紀時（宋時）流傳於歐洲。其流傳於西方也，經過

亞拉伯，所以有亞拉伯記數法之稱焉。但冒此偽名，並非亞拉伯之咎，因其固嘗自認此記數法為印度之遺產也。在紀元後一千二百年（南宋寧宗慶元六年）前之一千年間，印度數目字與記數法，及其發展之順序，挨次流傳於各國。至究其流傳之眞相如何，則實為極端之難題。雖久尼阿司（*Junius*）尺牘一書著者之問題，且未引起如許之聚訟。惟其事實，猶可解釋而條貫之如次：

（1）十二世紀之末，學者漸知吾人之數目字非屬於亞拉伯，實以印度為其源，同時亞印二國之數字適具同形之說，宣傳亦廣。所最可奇者，當亞拉伯有一種數目字，所謂『孤巴』(*Gubar*)數字』者，發現之時，其中有大多數字，對於近時印度字之所謂『德温拿加利（*Devanagari*）數字』者，乃絕無形似之處。

（2）加以更精之考核，則見巴格達（*Bagdad*）亞拉伯人之數字逈異於哥爾多巴（*Cordova*）亞拉伯人之數字，從此遂知西鄰之數字為直接受於東鄰者，殆難信之事。此西方亞拉伯數字，卽上述『孤巴數字』是也。且某數碼，可上追遠至第十世紀之時云（唐末宋初。）

（3）東西亞拉伯人俱以印度為其數目字之根源地。『孤巴數字』者，卽塵土數字，蓋因婆羅

門人嘗散塵沙於冊葉以記數也。

(4)有一事令人不無驚異者，兩種亞拉伯數字，俱類似於波伊悉阿斯之算錐，遠過於其與近世德溫拿加利數字之近似。其中尤以『孤巴數字』與算錐之近似為特甚。然算錐究為何物乎？波伊悉阿斯者，六世紀時（約南北朝時，）羅馬之著作家也，嘗著一幾何書，其中論及一種算盤，謂為畢達哥拉(*Pythagoras*)門人所製。不效古人之用卵石於算盤以運算，波氏則易以形似小圓錐之物置於算盤。每個之上，各書九數碼之一，今之稱為算錐者是也。此等數碼，其書中隨在皆可見之。然波氏無記零之號。

在希圖整理此等顯然各別之事實之際，學者對於數字經歷各土時所具奇特之變形，或飄忽之蹤迹，嘗釋之而歷久未能一致，此非吾人所當驚異者乎？

然解釋此事最稱順利者則為吳坡克氏(*Woepcke*)。

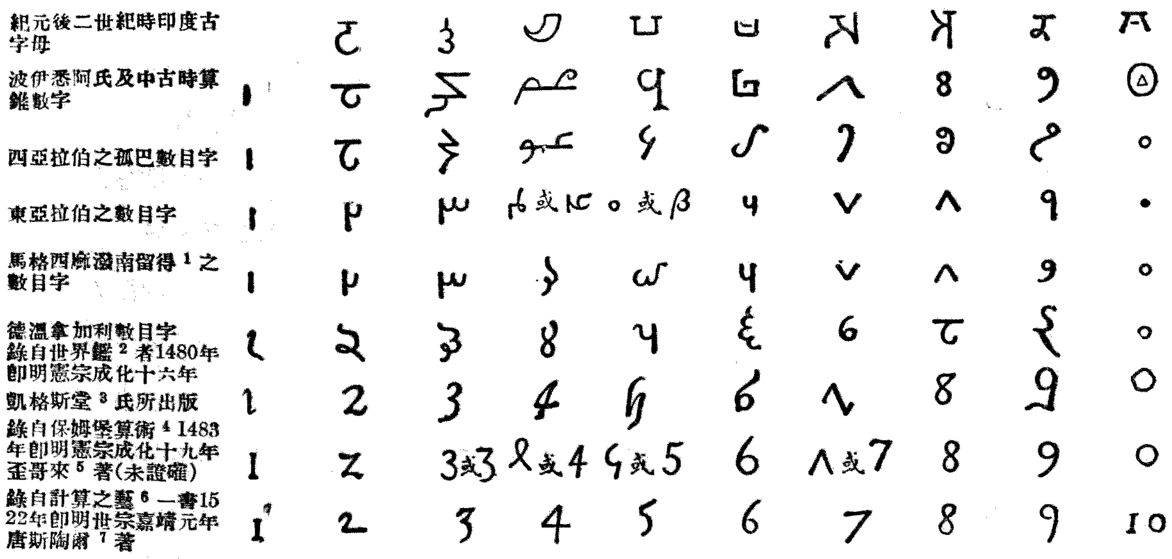
(1)紀元後二世紀時（後漢時，）印度人有九數字而無零號。當是時，印度與羅馬經亞歷山大城(*Alexandria*)有繁盛之商業交通。由是思想之交換，一如貨物之交換。印度人獲知希臘思

想之一斑，亞歷山大城人亦得領受東方之哲學及科學焉。

(2)無零字之九數目字，依此而流入亞歷山大城，因之以引起畢達哥拉新派門徒之注意。從亞歷山大城而傳於羅馬，從羅馬而傳於西班牙及非洲之西部。〔波伊悉阿斯幾何學（除非謂算錐之言論，爲波氏身後五六百年所補述）足證明羅馬之有數目字，在五世紀（約南北朝時，）實達反吳坡克氏假設之一部，蓋吳氏以不充分之證據，謂數字之流入亞歷山大城在二世紀或三世紀也。〕

(3)在二世紀及八世紀（約唐中宗迄德宗）之間，印度之九數目字所有之形狀改變。亞拉伯有一著名著作家，名阿爾比拉尼(*Albiruni*)者（卒於一千零三十八年即宋仁宗寶元元年，）在印度數年，考得印度之數目字及其字母，隨地不同，當八世紀印度記數法傳於亞拉伯之時，亞拉伯人卽從各式中擇其最適當者用之。但在東方亞拉伯人得此記數法之前，零字之發明及定位之理之應用，久已完成矣。

(4)零字者猶之哥倫布(*Columbus*)豎卵之喻，一經發現，人盡能爲之，西方亞拉伯人因是



1. *Maximus Planudes*, 2. *Mirrour of the World*, 3. *Caxton*, 4. *Bamberg Arithmetic*, 5. *Wajner*, 6. *De Arte Supputandi*, 7. *Tonstall*

遂由東方亞拉伯人借得此造成新紀元之記號，但其他九數目字，則仍保存其舊時得於羅馬者之形狀。其保存之由，一則因憎惡無關緊要之變更，二則或用以別於東方之政治敵人焉。

(5)西方亞拉伯人嘗記憶舊式之印度原狀，謂之為『孤巴』或『塵土數目字』。

(6)八世紀以後，在印度之數目字又經改變，遂成近世『德溫拿加利數目字』特變之狀。

夫辯論吾人數目字之原，及其流傳之狀，蓋已費幾許心力矣。因欲尋覓此項事跡，故於印度人，亞歷山大城之希臘人，羅馬人，尤其於東西亞拉伯人之文學商業政治種種情形，皆有甚精密之考慮。於此吾人遂有一優美之例，即算學的歷史問題，可引起文化史之研究，且增其異彩，

在佈算法術之歷史中，教授得發現重要確實之教育規則。手指演算之通行，吾人既見之矣。繼此則物件以代手指，如南海島人用可可子佈算，每遇 10 則置一小子於旁以計之，遇 100 則置一大子以計之，或如非洲之黑人用石子或堅果以佈算，每滿 5 則為一小堆另置之。數目之抽象觀念遂由實物而得之矣。算術原理如 $2+1=3$ 等等，亦由於使用實物之經驗而發覺，算盤之發明，亦以古時實物運算，為其導線，至今仍為學校中有價值之器具，後文將述及之。是故小兒最初之算術知

識，應由實物計算之經驗漸次養成，萬不宜去其玩物，使之閉目，默記彼抽象之理，如1+1=2，2+1=3之類。由古代計數進化之迹觀之，實物教法之價值，其重要可知矣。

近時之考察，定位之理，與零號之用，其在美洲所得之美滿發達，似早於亞洲有數世紀之久。此事之明徵，可於中美之馬耶人間得之。約西曆紀元之初，馬耶人已有完全發達之記數法及記年法。但非十進位而為二十進位耳。彼等記數之法，見之於其古籍者，除第三位外，俱以二十為進位之根。即20最低單位（稱為京(*kin*)或日）為1較高單位（稱為由那爾(*uinal*)或20日）18由那爾為1屯(*tun*)（360日，馬耶之官年），20屯為1加屯(*katun*)（7200日），20加屯為1圜，及20圜組成一大圜是也。其1至19之數，俱以短橫及點表之。每短橫所以表5，每點所以表1。如‥以表2，—·以表6是也。表零之號，其狀粗似半閉之目。因此，表37一數，則用三短橫及二點表17於京位，及一點於頂上表20為由那爾位。蓋其記數法自上而下也。欲表360，馬耶人則先作兩零字，一上一下，再加一點於兩零字之上第三位即成。其古籍中所見最大之數，為12,489,781。

第二章　算術與代數

(1)埃及

最古之算學手册，今時吾人所知者，厥爲英國博物院中林特氏(*Rhind*)所採集之一埃及古書。此富有興趣之象形文字，1868年(清穆宗同治七年)拍赤氏(*Birch*)解之於前，1877年(清德宗光緒三年)愛生老兒氏(*Eisenlohr*)譯之於後，爲埃及王拉斯(*Raaus*)在位之年，埃及人亞麥斯(*Ahmes*)所錄，時當紀元前1700年(商沃丁二十一年)及2000年(夏芒十五年)之間。隨稱之爲研究太古學問之指南針云。究其實際，其發現在更古之文字中，而爲雷梅特王(*Raenmat*)時所保存者。惟雷梅特王(卽亞米能哈特 *Amenemhat* 第三)之名在此古書中不能明辨，故若專門家未曾誤認此名，卽可知此書之原，確較早於亞麥斯記錄之時，有多世紀之久也。所以此亞麥

斯之埃及古書，能令吾人於埃及之幾何，算術，及代數，其確然在紀元前 1700 年者，或竟在紀元前 3000 年（唐堯元年前 643 年）者，得其想像焉。其算學知識或未能如方尖塔建築者之廣大，然其知識之高深，在亞伯拉罕（*Abraham*）入埃及時者，已可見其一斑矣。

由亞麥斯之古書觀之，吾人得推知埃及人蓋不審理論之結果爲何物。其中既無定理，亦無演算時之定則。然就大體言，編者常依挨次之序以處理同類之題。由此歸納而得定則，將爲甚易，但其並不出此耳。吾人尚能憶及百年前，多數英國之算術著作家，嘗以分數之不易喻，遲遲置於書尾，所可異者，是書距今 4000 年前，開始即有分數之演題，而對於整數反漠不注意，稿氏（*Gow*）謂亞麥斯之所錄，爲當時之名著，理或然歟。

分數之論，雖發現於此最古之算學記載中，但古人所得於分數之效用則甚少。此蓋顯然爲極難問題之一也。故同時改易其分子分母之事，則常避之而不爲。夫分數之法，巴比倫人亦有之。彼等非僅分重量及度量爲六十份，並有六十進位之分數。此等分數以60爲其定分母，稍移分子之字於普通字或數目字位置之右，即可表其分數，其分母則以意會。吾人將見羅馬人亦常用定分母，但其

數則爲 12。反之，埃及人及希臘人，則用定分子，而用常變之分母。亞麥斯氏之分數，則限於特別一類，卽單位分數，乃以單位爲分子者也。至表分數之法，首書分母，次於其上置一點，或置一記號，名之曰『羅』。而分數之價值，不能以一單位分數表之者，則以二單位分數，或多數單位分數表之。如其書 $\frac{1}{6}\,\frac{1}{18}$ 以代 $\frac{2}{9}$ 是也。所可異者，當亞麥斯知 $\frac{2}{3}$ 等於 $\frac{1}{2}\,\frac{1}{6}$ 時，彼於此置一例外，取特別記號以代 $\frac{2}{3}$，並令常入單位分數之中以運算焉。故在亞麥斯處理分數之中，而爲基本問題者，在如何求一組之單位分數，其總和可以代表原分數之價值。其法則用此古書所載之表，依此表則凡分數成爲 $\frac{2}{2n+1}$ 之形者（n 爲從 1 至 49 之整數），皆可化爲多個單位分數之和。若 $\frac{2}{35}=\frac{1}{30}\,\frac{1}{42}$，$\frac{2}{43}=\frac{1}{42}\,\frac{1}{86}\,\frac{1}{129}\,\frac{1}{301}$ 是也。利用此表，亞麥斯能推演下列之題，如『以 3 除 2』『以 17 除 2』之類。夫何故限用 2 以爲分子，亞麥斯並未言之，何時，何人如何製成此表，亞麥斯亦未述及之。其顯然易見者，則利用此表，任何分數，其分母爲小於 100 之奇數，皆可以一組之單位分數表之。以 21 除 5 之數，可推之如次：因 $5=1+2+2$。依表，得 $\frac{2}{21}=\frac{1}{14}\,\frac{1}{42}$。於是 $\frac{5}{21}=\frac{1}{21}+\left(\frac{1}{14}\,\frac{1}{42}\right)+\left(\frac{1}{14}\,\frac{1}{42}\right)=$

$\frac{1}{21}+\left(\frac{2}{14}\ \frac{2}{42}\right)=\frac{1}{21}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{21}=\frac{1}{7}\ \frac{2}{21}=\frac{1}{7}\ \frac{1}{14}\ \frac{1}{42}$。所可注意者，析分數而為單位分數，實有多術，但亞麥斯常僅示其一耳。然彼又反其常例，示一$\frac{2}{3}$乘分數之定則。其言曰：『設汝問$\frac{1}{5}$之$\frac{2}{3}$為何數，則二倍之，及六倍之；即得其式之$\frac{2}{3}$，且於他分數，必依此進行。因所標明者僅一分母，則其『二倍之』及『六倍之』之意，蓋即二倍及六倍其分母也。因$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\ \frac{1}{6}$，此定則之意，簡言之，為

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{6\times5}。$$

至其所言『於他分數必依此進行』之意，則顯指

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{a}=\frac{1}{2a}+\frac{1}{6a}。$$

分數或帶分數必用何數乘之，或何數加之，而得一指定之數，此古書有17問題以明之。惟其法須化原分數為公母之分數。所可異者，其所選之公母，並非常為諸分母所能整除者耳。亞麥斯曾示

其例，如加增$\frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{30}\ \frac{1}{45}$以為1，此公母顯然為45。因之其各數變為$11\frac{1}{4}$，$5\frac{1}{2}\ \frac{1}{8}$，$4\frac{1}{2}$，$1\frac{1}{2}$，1。而其和則為四十五分之$23\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$。以$\frac{1}{9}\ \frac{1}{40}$加之，其和變為$\frac{2}{3}$。再加以$\frac{1}{3}$，其和卽變為1。所以加於原分數之數當為$\frac{1}{3}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{40}$也。

何數乘$\frac{1}{16}\ \frac{1}{112}$可得$\frac{1}{8}$？此式所取之公母為28，則$\frac{1}{16}=\frac{1\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}}{28}$，$\frac{1}{112}=\frac{\frac{1}{4}}{28}$其和$=\frac{2}{28}$且$\frac{1}{8}=\frac{3\frac{1}{2}}{28}$。因$2+1+\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}$；先取$\frac{2}{28}$之全數，次取$\frac{2}{28}$之半數$\frac{1}{28}$，又次取$\frac{1}{28}$之半數$\frac{\frac{1}{2}}{28}$，於是吾人得$\frac{3\frac{1}{2}}{28}$。可見以$1\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$乘$\frac{1}{16}\ \frac{1}{112}$卽得$\frac{1}{8}$。

此等問題所示之法，全異於近世算學界之所用。惟有一法，在十五世紀（明惠帝迄孝宗時）及自是以後之算術中，嘗盛行應用卽約數之法是也，大都用於實行演算中。如上述之第二問題卽取$\frac{2}{28}$之約數以運算。而在單位分數表中，則復見亞麥斯用此法演算，以證其等式。

亞麥斯進而述及十一問題關於一次方程式而含一未知量者。此未知量稱為『豪』譯言『堆』

也。且有記號以表加減及相等之意。其樣式可示之如次。

堆乘　其$\frac{2}{3}$，其$\frac{1}{2}$，其$\frac{1}{7}$，其全數，等於 37

卽　$x\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+1\right)=37$

式中表$\frac{2}{3}$，表$\frac{1}{2}$。表其他單位分數，則先書數目字，次置於其上。有一問題類似以上之所述，如『堆乘其$\frac{2}{3}$，其$\frac{1}{2}$，其$\frac{1}{7}$，其1，等於33』；卽$\frac{2}{3}x+\frac{x}{2}+\frac{x}{7}+x=33$也。其解法如次：因$1\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{7}x=33$。如上約略之所述，用何數以乘$1\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{7}$而得33，因此而得『堆』等於$14\frac{1}{4}\frac{1}{97}\frac{1}{56}\frac{1}{679}\frac{1}{776}\frac{1}{194}\frac{1}{388}$。於此，吾人得一代數式之解法矣！

在此埃及人之文字中，及古時巴比倫人之記載，得見算術及幾何級數之例題。亞麥斯示一題如下：『今有五人分 100 麵包，前三人所得共數七分之一適等於後二人所得之共數。其公差為何數？』亞麥斯示其解法如次：『令公差為$5\frac{1}{2}$；各項為 23, $17\frac{1}{2}$, 12, $6\frac{1}{2}$, 1。用$1\frac{2}{3}$乘之；則各項為$38\frac{1}{3}$, $29\frac{1}{6}$, 20, $10\frac{2}{3}\frac{1}{6}$, $1\frac{2}{3}$。』亞麥斯從何而得$5\frac{1}{2}$？或如下式：令 a 及 $-d$ 為此算術級數之初項及公差，則得$\frac{1}{7}[a+(a-d)+(a-2d)]=(a-3d)+(a-4d)$，因之 $d=5\frac{1}{2}(a-4d)$ 即公差 d 等於$5\frac{1}{2}$倍其末項也。假定末項$=1$，彼即得其第一級數。但其和應為100；而此和為60，所以用$1\frac{2}{3}$乘之，因$1\frac{2}{3}\times60=100$也。於此吾人得一解法，將於印度人，亞拉伯人，及近世之歐洲人，當再見之，即假設法是也。後當詳釋之。

更可異者，則以下亞麥斯之所述也。彼述一梯，其各級之數為 7, 49, 343, 2401, 16807。並註圖，貓，鼠，大麥，量器各字，於此 7 之各方之旁。書中並無隻字詳其意之所指，但坎桃氏以為解此之方，可於下述之問題得之，為三千年後，於紀元後 1202 年（南宋寧宗嘉泰二年）發現於比沙

(Pisa)之梁拿多氏(Leonardo)之算盤書中者：今有7老婦人共往羅馬；每人有7騾，每騾負7袋，每袋盛有7麵包，每麵包有7小刀隨之，每小刀置於7鞘之中。問列舉之物全數共幾何？由此得指醒亞麥斯之語意如下：今有7人，每人有7貓；每貓食7鼠，每鼠食7枝大麥穗，每枝穗可長成大麥7量器。從此題所得之級數為何，並各項之總和為何？亞麥斯示其級數，並示其和為19607焉。此類之問題，蓋為遊戲而作。若上之解釋為是，則似乎四千年前，學者已任意為數學遊戲之舉矣。

『豪』問題之例，吾人曾示其一，因得見代數之原始狀態。依文字上之徵信，算術與代數殆為同時代。然謂算術稍古之說，亦無疑義。但於二者確然有史之初，其關係甚密切，故於算學教授中，二者當有親密之結合。在合衆國中，嘗多年置代數於高閣，而格外注重於算術。但今已重整代數之壘矣。1892年（清德宗光緒十八年）之『十人算學協會』曾建議將初等代數之淺近部分提早教授，頗得當時諸大教育家之同意。

亞麥斯古書之一部分，特費專門家之苦心者，厥為單位分數之表。此表究如何造成？有人謂非一人所為，亦非一時代所成就，故各分數造成之法，亦各不同。此說之外，羅力亞(Loria)氏則以為

彼曾發現一通法，可用以推得此表及其他同類之表。

夫亞麥斯時代，乃埃及算學界之昌明世代，因同時尚有其他二古書，內載二次方程之式！在伊拉汗（*Illahun*）方尖塔之南，克汗（*Kahun*）地方所發現者也。此等典籍，儼同亞麥斯之書，猶之近今在埃及上部尼羅（*Nile*）河畔之亞克明（*Akhmim*）城，所發現之亞克明古書，亦同於亞麥斯之書者然。然此爲希臘文字，殆爲紀元後500年及800年之間（約南朝齊和帝迄唐德宗）所編錄者。其著作者，亦效其先進亞麥斯，詳列單位分數之表，至加以審查，則較亞麥斯算術，實無進步。故埃及之算學，蓋兩千餘年而無所變動者歟！

（2）希臘

進而及於希臘之算術及代數，則見古之希臘人並非自創此等學術，殆皆得之埃及僧侶之傳授。故希臘人於幾何之學久矣登峯造極，有爲埃及人所夢想不到者，然其於演算方面幾於無所貢獻。迨至幾何發明全盛時代已告終，吾人始得見尼可馬丘（*Nicomachus*）及帶奧蕃塔斯（*Dioph-*

ntus)二氏於代數有實在的貢獻

希臘數學家嘗辨別數目之學及演算之術爲二。而稱前者爲 *arithmetica*（數目學，）後者爲 *logistica*（演算術。）

希臘之著作家，論及演算，鮮有用字母數目字者。加也，減也，乘也，或皆以算盤是賴。紀元後六世紀（約南朝齊和帝迄隋高祖）之註解家尤討秀(*Eutocius*)氏者，述相乘之法甚多，殆爲經典時代之希臘專門數學家之所用。當時懷疑派之哲學家，對於演算一端，頗多注意，而柏拉圖(*Plato*)氏則識之爲一種簡陋而且幼稚之技術，彼蓋注意於算術之哲理者也。

希臘之著作家，非同埃及人之所爲，拘拘限於單位之分數。其表單位之分數，僅書分母加雙撇於其上。若 $\rho\iota\beta'' = \frac{1}{112}$ 是也。其他分數，常一次書其分子，上加單撇，兩次書其分母，上加雙撇。若 $\iota\zeta'$ $\kappa\alpha''$ $\kappa\alpha'' = \frac{17}{21}$ 是也。以單位之分數，置於同處，而具相加之意，則與埃及同。

埃及與希臘之人，儼同東方各國，所用以助算者，亦爲算盤及手指二術。雖手指之術，其表數之狀態爲何，不得而知，但據其古之雕像，刻花，圖畫觀之，則此隱祕之事，固斑然可考也。就算盤言之，亦

非一式，蓋隨時不同，隨地不同。而其大體，不外乎分一平面爲若干格，用卵石或他物以表其各格不同之數焉。至關於埃及或希臘算盤之詳細情狀，吾人不得而知。依希羅多德(*Herodotus*)氏之書，則曰，『埃及人用卵石以佈算，其手自右至左，而海倫人則其手自左至右。』由此可明卵石算法之開始狀況，及其器具之方法矣。據手之向右向左考之，則知所用之平面或木板，對於演算之人，爲縱行，卽自上而下也。而愛安布力卡斯(*Iamblichus*)氏，則言畢達哥拉(*Pythagoras*)門徒之算盤爲散布塵土或沙之木板。因之所書之數，其迹不難抹去。且也，置一卵石於右方之空位或空格，則卽以表1，置於稍左第二格，則卽表10，第三格則卽表100等等。然一格卵石之數，不多於九，蓋至十數，又將等於較高位之單數也。而埃及人則反是，取極左之格以爲單位，稍右第二格爲十格，第三格爲百位等等。至其他憑證，且解釋算盤之意者，有一比喻，爲雷厄細阿斯(*Diogenes Laertius*)氏上梭倫(*Solon*)之文，實饒興趣：『人與暴君相處，則似演算之石，忽而表大，忽而表小焉。』

埃及與希臘之用算盤，顯限於較簡之整數演算。亞麥斯之書及其處理分數之法，蓋專爲類似盤算手算之題而編錄者也。然希臘之算學問題，常示其得數，而不示其演草。若高等數學家時常開

平方之根。而亞奇默得(*Archimedes*)之割圓術(*Mensuration of the circle*)曾言$\sqrt{3} < \frac{1351}{780}$及$\sqrt{3} > \frac{265}{153}$，但未詳其求相近數之法耳。

當六十進位之數（由巴比倫輸入希臘，約在希臘幾何家希布西克爾(*Hypsicles*)氏及亞歷山大城天文家托勒密氏(*Ptolemaeus*)之時見諸實用之時，則開方之法卽類似於今世之所用。有其法之一例，爲海排薩(*Hypatia*)氏之父西昂(*Theon*)氏之所示者，現尙保存無恙。卽求$\sqrt{4500^\circ} = 67^\circ 4' 55''$是也。

亞奇默得氏嘗示希臘之記數法，如何發展，而可表任意大之數。據其時之日用術語字典，數之可以法表者，可至10^8。至取10^8爲次級之單位，10^{16}爲三級之單位等等，則記數之法可以充量發展以記恆河沙之數。假定10,000沙粒，足充滿一罌粟之殼，彼可得一數，較之以地球至恆星之長爲半徑之球內充沙粒之數，則將有過之焉。此等有趣之理想，稱爲沙算者，其印證之事，可於印度之改造家，佛佗之一演算見之，蓋彼嘗演算一線之中，一哩之長，粒粒相連之原子數也。

數目之學，因有別於演算之術，故畢達哥拉之門人嘗加特別之考慮。而畢氏自己，則吸收埃及

之算學及其祕術。除無理數量（於別處論之）重要發現之外，畢氏之門人，對於數目之學，實無具體之貢獻。且無理之數量，在希臘人視之，亦並非數目之一類。夫畢氏之門人，嘗考一切事物，皆以數爲其本；音之調和也，基於樂理之比例；宇宙間之次序及美麗也，依數爲其根；至行星之運行也，則顯天體之間，數均力敵之奇徵。非特此也，更有某某數目，各具有特性之說。如一爲萬物之本；四爲人之靈魂，爲最完全之數是也。至於斐羅洛（*Philolaus*）氏，則言5爲顏色之原，6爲寒冷之原，7爲心思，健康，光明之原，而8爲愛情及友誼之原。至柏拉圖及亞里士多德（*Aristotle*）二氏，亦論及數目之性質。彼等之此種理想，固爲奇特而無裨實際，然數學之途，能研究而得良果者，未始非彼等有以啓發之也。

畢達哥拉之門人，曾分數爲奇偶二類，並考得自1至$2n+1$各奇數之和，常爲一完全之平方。至於彼等之分各數爲怪異類，三角類，完全類，過量類，缺陷類，和諧類，則並無何種特殊之價值。畢氏之門人，於比例一端，嘗特別注意及之，當$a-b=c-d$之時，則謂$a,b,c,d,$四數量成算術比例；當$a:b=c:d$之時，成幾何比例；當$a-b:b-c=a:c$之時，成調和比例；當$a:\frac{1}{2}(a+b)=2ab/(a+b)$

$:b$之時，成樂理比例。愛安布力卡斯氏則謂末後樂理之式，爲由巴比倫所輸入者。

歐几里得(*Euclid*)幾何學之卷七，卷八，卷九，專言數論，但其卷二，卷十，雖認爲屬於幾何方面，及討論量之大小，然其實皆可施諸數論。夫歐氏者，完全幾何家也，即其算術之書，亦具幾何之臭味。例如其卷七之定義21曰『平面之邊及立體之邊若各成比例，則其面積體積各爲相似。』且其示數，不以數字，亦不以他項記號，如吾人近世代數內之字母；乃以線段表之，甚爲不易喻之記法。往往遇一問題之理，用吾人之記法可以立時揭出者，用線段爲代，則非經過繁重之推論不能了解。

在卷七之中，始有質數之定義。歐几里得求兩數最大公約數之法，則與吾人展轉相除之法同。第五卷之中，則用比例之理，以言一切數量。八卷論連比例。九卷論畢連比例，討論質數。並一重要定理20，即質數無窮多之理是也。

歐几里得以後，四百年間，希臘之人專肆力於幾何，對於數論弁髦視之。此時代間，所當記者，僅得兩人；一即埃拉托色尼(*Eratosthenes*)氏(約紀元前275年——194年，約周赧王迄漢惠帝)，一即希布西可爾氏(在紀元前200年及100年間，約漢高帝迄武帝。)希氏者，考究多角之數及算

術級數；而埃氏則發明著名之篩法，所用以求質數者也。其法將3以上一切之奇數。自3以後，每至第三位，删去其數，於是3之一切倍數皆被篩去；自5以後，每至第五位，删去其數，於是5之一切倍數皆被篩去，以下類推。篩後所餘之數皆質數也。篩法之發明，雖未大費智力，而所堪注意者，則埃氏身後，求質數之法，實無若何進步，而在1,2,3,……n數之中決定質數總數之法，亦無若何增益，直至十九世紀高斯(Gauss)氏，勒向德(Legendre)氏，得力來特(Dirichlet)氏，雷曼(Riemann)氏，及齊必齊夫(Chebichev)氏出，經極困難極複雜之研究，始得措此問題於富庶之域。

約紀元後100年之時（約後漢和帝時）有尼可馬丘氏出，重興算數之學，彼蓋爲澤拉薩(Gerasa)（或係亞拉伯一小市）之土著而畢達哥拉之門人也。嘗用希臘文著一算術書，名之曰『算術導言』(*Introductio Arithmetica*)。此書在歷史上，關係甚大，不僅以其所載者爲算術之本原，且爲(據吾人所知者)算術上最古而有統系之書，歐洲千餘年間，算術之方式皆由此出。約言之，尼可馬丘氏之於算術，猶之歐几里得氏之於幾何也。彼之算術，在當時甚爲著名，蓋如以後里斯(Adam Riese)氏算術之在日耳曼科刻(Cocker)氏算術之在英格蘭也。有流細安(Lucian)氏

者，欲譽演算之人而言曰『君之運算同於澤拉薩之尼可馬丘』從此可覘尼氏之學矣。此書之傳爲亞帕利厄斯（*Appuleius*）氏之拉丁文譯本（現已失）而此後波伊悉阿斯氏則又譯之。波氏譯本之中，此書之初等部分，於西歐各處，在印度算術侵入以前，實具喧赫之勢力。而此後數百年間，希臘算術，於異常優勝之印度數人，嘗奮鬬以圖存，但無益耳。

尼可馬丘氏算書之體裁，與其先民之所著者有異。蓋非用抽象法而用歸納法者也。幾何意味之方法，避而不用；各類之數，皆以確實之數目字表之。其主要目的，則在各數之分類法。因處哲學及神學勢力之下，尼氏曾力據一端，分各數爲三類。卽謂奇數，有單質數，複數，互質複數之別是也。尼氏之術語，由此分類法而得者，太覺繁重。而拉丁名詞，與其希臘語意相同者，迄一千五百年後，於其門徒所著之算術書中始得見之。如稱比率$\frac{m+1}{m}$爲 *superparticularis*（高比率），$\frac{m}{m+1}$爲 *subsuperparticularis*（低比率），$3\frac{1}{4}=\frac{3\times4+1}{4}$爲 *triplex sesquiquartus*（三倍四高比率）是也。尼氏製有一種數表，用一百方格，狀若棋枰。可作乘法表之用，但究其實，似藉之以研究比率者。彼又嘗解釋多角之數，各種比例（凡十一種），並討論數目級數和之求法。所堪注意者，其中並無佈

算法術解題之式例，及實用上之算術耳。尼氏述及一重要之理如次：『連續奇數之和恆為立方數』。如 $2^3=8=3+5$; $3^3=27=7+9+11$; $4^3=64=13+15+17+19$ 是也。

在尼可馬丘氏，愛安布力卡斯氏，士麥拿（*Smyrna*）之西昂氏，昔馬力大（*Thymaridas*）氏，及其他學者之算書中，其所討論，頗有合代數之旨趣者。昔馬力大氏，曾用及一希臘文字，義為『未知數量』，頗有逼近代數之意。夫尋繹代數發展之順序，而饒興致者，為『皇家詩選』（*Palatine Anthology*）中之算術短詠，約為 50 問題，皆關於一次方程者也。在代數未傳入之先，此等問題，視若啞謎。其中第二十三題，示四水管單獨注滿一水池之時間，求其共同注滿之時間。第九題，設一日之間未來之時間，二倍已過去時間之三分之二，問過去者為此日之幾分幾？此短詩中，且載有著名之『羣牛問題』，即亞奇默得氏所提出於亞歷山大城之數學家者，為一無定方程式之難題。此題之前一段，僅從七個方程式，求八個正整數之未知數量。稿氏述此題之意如下：日中有牡牛及牝牛一羣，其色各異。(1)牡牛中，白色者(W)之數為青色者(B)及黃色者(Y)之$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$，$B$為$Y$及花色者($P$)之$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$; P為W及Y之$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)$。(2)牝牛中，亦有同樣白青

黃花四色（以w,b,y,p代之）$w=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(B+b)$; $b=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)(P+p)$; $p=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(Y+y)$; $y=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)(W+w)$。求牡牛及牝牛之數。從此所得之結果已甚緊重，但其問題之全部，則尚須加以更繁之條件，遂成一個二次無定方程式。

皇家詩選中之大多數問題，雖算術家視若甚難，而在代數家則屬易易。此等問題，在帶奧蕃塔斯氏時代，卽已視爲平常，然於智力上有甚大之激刺則無疑也。

帶奧蕃塔斯氏者，亞歷山大城最後數學家之一，乃知識豐富之代數家，卒於紀元後330年。年84歲，由一墓誌得如下之事實。帶奧蕃塔斯氏之一生，幼稚時代佔$\frac{1}{6}$，青年時代佔$\frac{1}{12}$，鰥居時代佔$\frac{1}{7}$有餘；結婚後，五年生一子，其子先其父四年而卒，得其父壽數之半。帶氏事蹟，吾人所得知者，盡於此墓誌矣。至其卒於何時，世系維何，故園何處，則吾人俱不得而詳焉。若彼之書，不以希臘文字著錄，且將無人能斷其爲希臘知識界之產物也。而一生精神，盡萃於其傑作之算書〔相傳爲十三卷，僅六卷（七卷？）尚在〕其異於歐几里得時代之重要經典，儼同純粹幾何學之異於純粹解析

學也。然在希臘人中，對於帶氏，實無人爲其卓異之先進，亦無人爲其卓異之門徒，且除帶氏算書之外，吾人不得不謂希臘之知識界，對於代數，殆無所成就也。在亞麥斯氏古書發現之前，帶氏之書，蓋爲代數上所知最古之書。指出以記號表代數式之法，全脫幾何形式，而用純粹解析方法。夫減號數乘減號數，而得加號數（即負數乘負數成正數），目今盡人而知之，第一次述說此理者，當推帶氏。此理嘗應用於較數相乘，若$(2x-3)(2x-3)$是，因而役之求其積，並不依賴於幾何焉。恆等之式，如$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$者，歐几里得氏曾舉而納於幾何之高級定理，但在帶氏，則僅爲代數律最簡單之結果耳。道氏以ς表未知數量x，以δ^{υ}表未知數量之平方x^2，以κ^{υ}表x^3，而以$\delta\delta^{\upsilon}$表x^4。相減之記號爲$\pitchfork$，相等之記號爲ι，若置於同處，則表相加。有時彼若不知此等記號，而以文字表演算之意，然若表之以記號，則將見更善。其於多項式也，一切正項悉列於負項之前。若x^3-5x^2+8x-1一式，以彼之方法顯之，則將爲$\kappa^{\upsilon}\bar{\alpha}\varsigma^{o\iota}\bar{\eta}\pitchfork\delta^{\upsilon}\bar{\varepsilon}\mu^{o}\bar{\alpha}$是也。至其數目係數，則綴附於$x$之後。

此中所堪注目者，帶氏於代數之基本知識，缺乏負數之觀念。如在$2x-10$式中，當$2x<10$時，彼即視爲背理，避之不用。其算書卷一問題第十六曰：「求三個特別之數，其每對之和皆爲已定之

數。』若 a,b,c 爲已定之數，則所求數之一，即爲 $\frac{1}{2}(a+b+c)-c$，若 $c>\frac{1}{2}(a+b+c)$，則此答案，必爲帶氏所不明瞭者矣。故其於此題加以限制曰，『但此已定三數之和之半，必大於任一已定之數。』且帶氏並不示解題法中普通之格式。如於上述之題則假設 20,30,40，爲其已定之各數。

問題之關於聯立方程式者，帶氏僅用一個記號，設法以代各未知之數。因缺乏多元之觀念，故每遇多元問題，其選擇未知數量之事，非運靈巧之心思不可。且彼常用一法，類似印度之『假設法』：用一預試之數，以代未知之數，俾合於緊要之一二條件。由此所得之數，有時或誤，然正當之方法，往往可由此提醒而得之。

帶氏且知解二次方程之術，但在其遺書中，無解題之例。然所堪注意者，二根之中，縱令俱爲正數，彼常指示其一；而於數量之爲負，或無理式者，則不認爲問題之答案。

帶氏算書，僅第一卷專論有定方程。而在解決無定方程（二次者）之中，則顯其可驚之巧思。

雖然，其異常才力，於各種方程，化爲特別形狀，藉便解決一端，費之較多，於各種方程，發現通共法則

一端，費之殆少。故其相異之多數問題，一題有一題之特殊解法，但在關係最爲親密之題，常覺其法爲無用耳。『所謂近世數學家研究帶氏之 100 題解後，而於第 101 題，解之猶覺困難。……蓋帶氏之法隱而不顯也。』

因帶氏之算書，缺乏之通共原則以解無定方程之題，因之近世學者不得不另覓途徑，若尤拉 (*Euler*)，拉果蘭諸 (*Lagrange*)，高斯諸人是也。但於此端，帶氏並未授彼等以若何之通則耳。故究其結果，近世之各數論，比於帶氏之解析術，實逈然不同，且確然爲更優貴之科學。然近世帶氏之後學，常暴露其先師之弱點，所以對於此端，難有具體之補助。

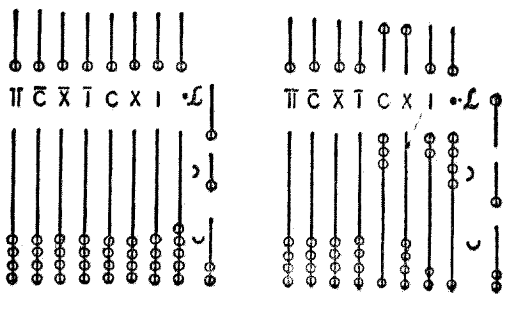
據吾人視之，特具興趣者，厥爲帶奧蕃塔斯氏之解一次有定方程，其法曰：『若任一問題，方程兩端，有同次之未知數，而係數不同數，吾人必於兩端減相等之數，至得一項等於一項而後已。若在一端，或兩端，而其項爲負係數，則必兩端加相等之數，蓋如此而兩端可僅餘正項。於是吾人必再減相等之數於兩端，直至每數僅有一項而後已。』由此觀之，今日之方法，用遷項法，化簡法，及X之係數除法而完成者，而帶氏則以加法及減法完成之。且所當注意者，帶氏之著作，及一切上古之書籍，

實缺商法之觀念；無處見其除法之演算，若一數爲一數所除，則其答數由纍減之法而得之。

(3)羅馬

羅馬演算之法，爲吾人所知者，多於希臘及埃及。學校中授盤算之術；著作家述卵石之方，而分爲縱行之塵沙算盤，彼亦論述及之。有伊特拉司坎種族？之一碑記，現保存於巴黎者，其上標一演算之人，左手執算盤，列數於其中，而右手移卵石，置於檯桌之上。

羅馬人嘗用另一種之算盤，盤爲金屬版，內有多數小槽及可移之珠。利用此器，凡自1至9,999,999之整數，及某某分數，皆可得而表之。下列二圖，豎線表示槽，小圈表示珠，二槽之間羅馬數目字，則示下槽每珠之值，在上短槽之珠，則五倍於下槽一珠之值。若$\overline{|\,|}$=1,000,000；故用極左長槽之每珠表顯1,000,000，其上短槽



之珠則表顯 5,000,000 焉。其他各槽，標羅馬數目字者，皆可以同理推之。自左至右之第八長槽（有五珠）表十二進位法之分數，每珠表$\frac{1}{12}$，點上之珠，表$\frac{6}{12}$。而第九行在上之珠，則表$\frac{1}{24}$，在中者，則表$\frac{1}{48}$，在下二珠，則每個表$\frac{1}{72}$。第一圖代表未算前，各珠之位置；第二圖，代表 $852\frac{1}{3}\frac{1}{24}$ 之數。故吾人所當注目而分別之者，在其已用之珠及未用之珠耳。此圖表數之珠非他，即一珠在 C 之上（$=500$），三珠在 C 之下（$=300$）；一珠在 X 之上（$=50$）；二珠在 I 之下（$=2$）；四珠表十二進位法之分數$\left(=\frac{1}{3}\right)$；及一珠表$\frac{1}{24}$是也。

今設加$10,318\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{48}$，於 $852\frac{1}{3}\frac{1}{24}$。演算之人，或由最高之單位起算，或由最低之單位起算，悉聽其便。其中素稱最難者，則為分數之相加。在此例，表$\frac{1}{48}$之珠，點上之珠，及點下之三珠，皆用之以表其和數$\frac{3}{4}\frac{1}{48}$。加 8 之時，I 之上下之珠，將全用之，蓋成本單位之 10，故退去全數，而於 X 之下之槽，移上一珠。加 10 之時，於 X 之下，再移上一珠；加 300 於 800 之時，C 之下，僅留一珠；其餘之珠，全行退去，於 $\overline{I}$ 之下，移上一珠；加10,000之時，則於 $\overline{X}$ 之下移上一珠。至其減法之演

算，則可依同理推之。

其在乘法，嘗可以多種方法演之。如在 $38\frac{1}{2}\frac{1}{24}$ 乘 $25\frac{1}{3}$ 之一例，則算盤可依順序，表出以下之各數：$600(=30\cdot20)$，$760(=600+20\cdot8)$，$770\left(=760+\frac{1}{2}\cdot20\right)$，$770\frac{10}{12}\left(=770+\frac{1}{24}\cdot20\right)$，$920\frac{10}{12}\left(=770\frac{10}{12}+30\cdot5\right)$，$960\frac{10}{12}\left(=920\frac{10}{12}+8\cdot5\right)$，$963\frac{1}{3}\left(=960\frac{10}{12}+\frac{1}{2}\cdot5\right)$，$963\frac{1}{2}\frac{1}{24}\left(=963\frac{1}{3}+\frac{1}{24}\cdot5\right)$，$973\frac{1}{2}\frac{1}{24}\left(=963\frac{1}{2}\frac{1}{24}+\frac{1}{3}\cdot30\right)$，$976\frac{2}{12}\frac{1}{24}\left(=973\frac{1}{2}\frac{1}{24}+8\cdot\frac{1}{3}\right)$，$976\frac{1}{3}\frac{1}{24}\left(=976\frac{2}{12}\frac{1}{24}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)$，$976\frac{1}{3}\frac{1}{24}\frac{1}{72}\left(=976\frac{1}{3}\frac{1}{24}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{24}\right)$。

其算盤之於除法，僅用之以表餘數，累次減法數於實數，或減法數相宜之倍數於實數之所餘。其法繁難。據此盤算之方，則乘除二法，如何以累次加減了之，則已明白表示矣。但就此關係而論，則吾人料其必依賴心算及乘法表，而手指之演算，蓋亦嘗見施用。然乘除之時，數目巨大者，則又非尋

常演算家之所能勝任矣。夫此等難關，有時由用算術之表而免之，故求和數，較數，或二數之積，皆可依表錄之。其表爲亞奎坦尼亞 (*Aquitania*) 之維克多利亞 (*Victorius*) 氏所編輯。維氏本爲一著作家，而知名於其所著之『復活節推求法』一書，書乃一種定法，可求得耶穌復活之眞確日期，出版於紀元後 457 年（南朝宋武帝大明元年。）維氏之表，且載有分數之特別記法，蓋中古之世，嘗繼續施諸實用焉。又羅馬人之分數，多見於銀錢之演算。

所當注意者，羅馬人偏愛十二進位之分數也。何故以十二進位而非以十進位乎？必因十分重量及度量，不合自然之旨趣。蓋尋常日用，分單位爲 2,3,4,6 各等分，實爲最普通之事，用十二進位之分數表之，較爲更易。故在十二進位之法，上之各等分，爲全分之 $\frac{6}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{2}{12}$; 而在十進位之法，則爲全分之 $\frac{5}{10}$, $\frac{3\frac{1}{3}}{10}$, $\frac{2\frac{1}{2}}{10}$ $\frac{1\frac{2}{3}}{10}$ 矣。且羅馬之人異於希臘之人，喜用明顯之分數。羅馬字之愛斯 (*as*)，本爲一銅幣之名，重一磅，分爲 12 恩夏 (*uncia*)。其抽象分數 $\frac{11}{12}$，則用顯著之方法，以底恩格司 (*deunx* = *de uncia*) 即 *as* 〔1〕減 *uncia* 〔$\frac{1}{12}$〕) 以名之；而稱 $\frac{5}{12}$ 爲困克恩格司 (*quin-*

cunx··*quinque*〔五〕*uncioe*)；如是而羅馬之每一分數，皆有一特別之名稱。且此等分數，施以加減，甚爲易事。至於羅馬學校之中，爲算術主要課程者，分數演算是也。有賀拉西 (*Horace*) 氏者，嘗記錄當日在學校時，師生間問答之詞如下：『令阿爾平納斯 (*Albinus*) 之子告余，若從五盎斯〔*ounce* 卽 $\frac{5}{12}$〕減去一盎斯〔卽 $\frac{1}{12}$〕，其餘數爲何？曰，「三分之一。」善哉；汝堪勝經理汝之財產之任矣。然若以一盎斯〔卽 $\frac{1}{12}$〕加之，則得數爲何？曰，「二分之一。」』

用顯著方法，以處理分數，因之羅馬人不知不覺得一優美之教育理想，故羅馬兒童之學習分數，皆與銀錢，重量，及度量顯著之例並進。吾人可知分數之對於彼等，所含之意，必較英人古算術中定義所謂『碎數』者爲多也。

波伊悉阿斯者，(*Boethius* 卒於紀元後 524 年，卽南朝梁高祖普通五年，) 最後羅馬著作家之一。嘗編錄一書，名曰『算術定例』(*De Institutione Arithmetica*)，就其大體言，實爲尼可馬丘氏算術一書之譯本，但原書中有若干極美之算術條款，則皆爲波氏所刪去。此譯本日後在西歐各處，曾被推廣採用，故其在歷史頗關重要。

羅馬遺產律，多有可爲算術之例題者。以下所示，尤具有興致，且以其重見於稍後之古籍，吾人得藉以探求西歐算術知識之源流：一垂危之人，其妻孕而未產，立遺囑曰，若男也，則男當得其產業之三分之二，妻當得三分之一；若女也，則女當得其產業之三分之一，而妻當得三分之二焉。乃日後竟隻孿生，一男一女。其產業當如何分配，始符其遺囑耶？著名之羅馬律師朱理安納斯氏，（Salvianus Julianus）則決定其產業當分爲七等分，其子應得其四，其妻應得其二，其女應得其一云。

除算盤之改良（或者，）及十二進位分數之發展外，羅馬人於算術上殆無所貢獻。帶奧番塔斯氏之代數，彼蓋未曾知之，彼等於數目之演算，一如上古各國，殊覺繁重而困難，蓋因其無完全記數之法與零號之用及定位之理也。

第三章　幾何與三角

(1)埃及與巴比倫

開始粗淺之幾何，猶如計算之術，其流必甚古。吾人最古之記載，縱遠在紀元前 2500 年者(唐堯前百餘年，)料已爲較新之理想矣。故亞麥斯之古書，埃及之方塔，或爲研究幾何最古之憑證。而討論此端，以巴比倫爲始，則較爲便利。夫上古之科學，大半摻雜神怪之說，巴比倫之幾何各圖，作爲占卜之用，蓋信而有徵。而此等圖中，有一對平行之線，一正方之形，一箇帶有回返角之形，並有一殘缺之形，乃代表三箇同心三角形，其邊互相平行者。至其附記之文，有蘇美爾人之 tim(亭)字，義訓爲『線，』本爲『繩索』之意，故料巴比倫人同於埃及之人，用繩索以量遠近，並用之以限定角度焉。且巴比倫之記號，*確於分圓爲六等分有關，並於六卜進位之法有涉，(因巴比倫人分圓爲

360 度。）而巴比倫人之分圓爲六等分也，（或用半徑六次度之，）則由於考查王車之輪輻有六而知，車在一圖畫之內，而發現於尼尼微（*Nineveh*）之古物中也。且巴比倫人同於希伯來人，取周徑之比率等於 3，實爲不密確之數值。至於幾何上之解說，則無遺迹可尋。『蓋所謂東方人之心理，趨重天賦之智力，輕視嚴密之理論，幾若一定例云。』

述埃及之幾何，吾人其以亞麥斯古書之幾何問題始，乃記載於其算術部之中段者也。其計算倉穀之容量，在決定面積之先；因昧於穀倉之形狀，吾人卽難證明其演算之當否，但於平面幾何，亞麥斯之圖，實常予吾人以助力。至其所研究土地之面積，則屬於正方形，長方形，兩等邊三角形，兩等邊梯形，及圓形焉。其問題第 44，示一正方之面積爲 100，而其邊爲 10。問題第 51，示一兩等邊三角形，邊爲 10 魯（*ruths*），底爲 4 魯，求其面積爲 20。其正確之數則爲 19·6。而亞麥斯之相近數，則由乘一邊於半底而得之。至兩等邊梯形，亦有此相同之錯誤。蓋半兩底之和以乘一邊而得者也。其處理圓形，一似眞正之方，因其指示一法，如何可求一方，俾等於圓形之面積。卽從直徑減其自己 $\frac{1}{9}$，以餘數爲邊是也。而此實爲一優美之相近數，因若以半徑爲單位，則正方之邊爲 $\frac{16}{9}$ 而其

面積$\left(\frac{16}{9}\right)^2=3\cdot1604$……焉。然此等問題之外，尚有其他問題，則關於方尖之塔，及指出相似形，比例，術或幼稚三角法之若干知識。

亞麥斯古書之外，古代埃及幾何之存在，可於其建築物中壁間之圖畫見之。蓋其壁分為正方形，或他種直線形，而著彩色之圖於其內。

希臘之哲學家德謨頡利圖（*Democritus*）氏（約紀元前 460 年，迄 370 年，即約東周貞定王九年迄烈王六年）有言曰，『作平面之圖，……無有逾於余者，雖埃及之所謂哈配多那提，（*Harpedonaptæ*）亦不能及。』而哈配多那提者，即坎桃氏所釋為繩量家之意也。於此端之外，參以他種遺迹，坎桃氏因得推定埃及人之建築寺院，南北之線，以精密之天文考查法決之；於是彼等作一直線，與此線成直角，用一繩索圍繞三木表而得，令此所成三角形之邊，若 3:4:5 之比，且令此正三角形之一股，合於南北之線。則其他一股，指示東西之線，而寺院之正東方向得以定焉。觀柏林博物院中之牛皮書，則繩索測量之術，早發現於甚古之亞米能哈特第一（*Amenemhat*）之時代。苟坎桃氏之解釋為正當，則埃及人之於正三角形著名之性質，若三邊之比為 3:4:5 之比者，遠在紀元前

2000 年之時（約當夏芒時）蓋早已知之矣。

由上之說，則埃及之幾何，在太古時期，固稱發達。但其後之進行為何如耶？當紀元前 257 年（東周赧王五十八年）和拉斯神（*Horus*）之寺院，建設於上埃及之愛得佛（*Edfu*）。約至紀元前 100 年（約漢武帝時）土地片段之數面積之數，屬於僧人者，則俱以象形文字記於寺院之壁。而亞麥斯之書內，不密切之公式，屬於兩等邊梯形者，於此，則利用於任何無法之四邊形焉。若然，則紀元前兩千餘年（夏芒十五年以前）之公式，比於歐几里得後兩世紀之公式，尚能依之以得更近之數！由此得推知埃及之人，儼同中國之人，富於守舊思想，蓋非特其政治如此，其科學亦如此也。此種理解，不難於各種事實求之，如數學之發明也，醫學之創設也，在上古之時，神聖之書，早著其說，然在其以後之時代，於其內有任何之改變，或任何之加增，則俱視為異端而斥之。故此等典籍，遂無進步之望矣。

埃及之幾何，大體屬於面積之幾何，蓋主要部分，皆為平面立體之度量法所組成。此等實用之幾何，殆難稱之為一種科學。至其定理之證明，亦無基於原理公理而得之邏輯之順序，故其大多數

之定則，皆純由經驗而獲得者也。

若吾人以希臘之證據為可信，則知埃及之幾何，本為丈量土地之用，蓋迫於尼羅河之每次氾濫，不得不然也。

(2)希臘

約當紀元前七世紀（約東周桓王時，）希臘與埃及之間，文化與商業方面，各有繁盛之交通。希臘學子，負笈於方尖塔之國。一若今之美洲人之求學於日耳曼也，若退利斯(*Thales*)氏也，恩諾派斯(*Œnopides*)氏也，畢達哥拉氏也，柏拉圖氏也，德謨頡利圖氏也，及攸多克薩斯(*Eudoxus*)氏也，俱抱書於埃及僧侶之絳帳而受業焉。故知希臘之文化，本非固有，徒博吾人之虛譽耳。然而希臘之人，運其富於理想之心思，將僅關日用所需之問題，即刻提高其程度，遂推及於理想之研究而暢飲科學之精華。以是之故，希臘人之幾何，雖不無限域與缺憾，將常為世人所稱許無疑也。

歐德謨(*Eudamus*)氏者，亞里士多德之門人也，著有幾何歷史一書，然現已佚矣；但蒲羅克

督(*Proclus*)氏註解歐几里得幾何之時，曾錄其大要，在古希臘之幾何中，最可信而尚存之記錄也。故吾人仍當認此記載爲歐德謨氏之所著錄。

(1)愛奧尼亞(*Ionia*)學派——幾何學之輸入希臘，由於米利都(*Miletus*)之退利斯氏，(紀元前640年迄546年，即東周襄王十二年迄靈王二十六年)乃七賢(*seven wise men*)之一也。因貿遷之事，而往埃及；因文化之事而在彼作一時之勾留焉。波奴塔克(*Plutarch*)氏者，稱退利斯氏不久即學超僧侶，能從方尖塔之影，推知其高，而令埃及王亞美西司(*Amasis*)驚異云。依波奴塔克氏之說，則其求法如次：塔影之長，比一直立桿影之長，同於塔之高，比桿之高。而雷厄細阿斯氏所述之測法則異是：常直立桿之影，等於桿長之時，則將塔影之長，取作塔身之高，即得所求矣。

夫對頂角之相等，兩等邊三角形底角之相等，直徑之平分圓形，及兩三角形之一邊與其兩鄰角互相等，則兩形相同等定理，歐德謨氏稱爲退利斯氏之所發明。而利用此末後一定理，以決定船舶離岸之遠近，則其著名者也。至於半圓內所畫各周角，等於直角之理，古人有稱爲屬於退利斯氏者，亦有稱爲屬於畢達哥拉氏者。若然，則退利斯氏似乎創設線與角之幾何，大體爲抽象之性質，而

埃及之人，則爲研究皮面與立體之幾何，且爲經驗之性質。故埃及僧侶，對於上述諸理，似至少亦有多少之覺悟。彼等僅覺悟此理，至於退利斯氏，則以眞正哲學家之態度，確定此定理，爲之證明，他人僅知其然而退氏則知其所以然也。至於退利斯氏方尖塔之推算，船舶之測量，則爲理論幾何施諸實用之第一次耳。

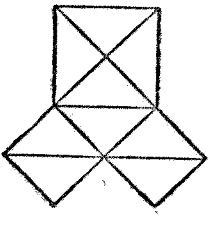
退利斯之得享受甚大之榮譽，實由於其能預測紀元前585年（東周簡王元年）之日蝕，自是以後，始有科學式之天文學。相傳退氏觀察恆星之時，有一次跌於溝渠中。有老嫗見之謂曰「近在足前，目不能見，汝尚欲知天上事耶？」

愛奧尼亞學派之天文家，爲亞諾芝曼德（*Anaximander*）氏及亞諾芝曼尼（*Anaximenes*）氏二人。而亞諾薩哥拉（*Anaxagoras*）氏者，則亞諾芝曼尼氏之門人，雖禁於囹圄之時，尚致力於以方求圓之問題。夫圓率π之相近值，埃及，巴比倫，及希伯來人等固早已知之；然記載相傳，亞諾薩哥拉氏，實爲探求密率之第一人——自是以後，欲解此難題，而未償所願者，奚啻累千，然亞諾薩哥拉氏，亦始終未得解決之方法。

(2)畢達哥拉學派。——畢達哥拉氏之生平事蹟（紀元前580年？迄500年？）其詳不得而知矣。據吾人之所知者，則畢氏生於薩摩斯(*Samos*)，學於埃及，後復返歸故鄉，或曾至巴比倫一遊，嘗欲建學校於薩摩斯未成，隨文化之潮流，留居於南意大利（彼時稱爲大希臘 *Magna Graecia*）之克洛吞(*Croton*)地方；於是創設畢達哥拉學社。其特點近於一種祕密社會，社中之所研究與發明，禁止社友之洩漏，故迄至今日，畢達哥拉學派之所有發明，欲知其究屬何人，實爲不可能之事。且畢達哥拉學派中，尙有一種習慣，即每有發明，輒歸功於一宗派之首領是也。初，學社頗稱發達，嗣因祕密之事易起外人之猜疑，遂有意大利某政黨，縱暴徒焚毀其社址；畢氏逃遁，卒被戮於麥塔逢坦(*Metapontum*)。雖然，畢氏之學社，已從此消滅，然其學派之生命，尙繼續存在，至少有兩世紀之久云。

畢達哥拉氏，同於退利斯氏，亦未有關於數學之著述。歐德諾氏之言曰：『畢達哥拉氏將幾何學之研究，變爲一種文學之教育，蓋以其推求原則，必尋其底蘊，考究定理，則以訓練心智之態度出之也。』

正三角著名之定理，蓋爲畢達哥拉氏個人所發明。此理之特例，若三邊爲3,4,5者，畢氏或由埃及人而知之。當此理發明之時，畢氏之欣忭，不可言狀，曾用百牲祭神，酬其默示之惠。然此必爲古時荒誕之傳述，蓋畢氏信靈魂輪迴，當無如此殺牲之理。故後世畢氏新派學者遂有『牛爲麵粉所造』之說以爲解釋！夫三平方定律之證法，見於歐几里得幾何學之卷一第47題者，乃歐氏自己之作，而畢氏之證明，並未傳授於吾人，今人曾多方以揣測其證法。有布勒士奈得氏(*Bretschneider*)者，謂畢氏之證明，大體同於巴士加拉阿卡亞氏(*Bhaskara Acarya*)證明之一（詳於他處），韓克爾氏(*Hankel*)，與爾曼氏(*Allman*)，稿氏(*Gow*)，羅力亞氏(*Loria*)皆深信其說。坎桃氏則謂古之證法，殆爲多數特例所合成，就中兩等邊正三角形，或爲其第一例，如下圖所示，蓋其下面四三角形共等於其上面四三角形也。且如此形狀，用對角線以分平方，嘗見於柏拉圖氏之著作。自希臘以來，此著名之畢氏定理嘗經過多數不同之證解。



畢達哥拉及其學派所用之方法，有一特殊之點，即混合幾何及算術而

爲一是也；故算術之例，有似乎幾何，而幾何之例，亦有似乎算術者。至關乎三平方之定律，畢氏嘗設一定則，用以求三整數，以表正三角形之三邊：設 $2m+1$ 爲一邊，則 $\frac{1}{2}\left[(2m+1)^2-1\right]=2m^2+2m$ ＝又一邊，而 $2m^2+2m+1=$ 弦。若 $n=5$，則其三邊爲 11,60,61。但依此定則以求，則所得之三角形，僅爲弦較一邊多一之形。

古時算學界之一大發明，屬於畢達哥拉之門人者，厥爲無理數量一事。此發明殆由研究兩等邊正三角形而得，蓋若每邊之數爲1，則其弦卽等於 $\sqrt{2}$，而不能以任何數目精密表之也。然吾人可思及其他之數，若7或 $\frac{1}{3}$，以表其邊，而在此例及他例，亦無數可求，能精密度盡其弦也。至累次失敗之後，『必有智者出，若鷹隼翔空，遠出人類智慮之上，——殆爲畢達哥拉氏自己，——恍然大悟此爲不能解決之問題。』蓋任何幾何形狀，實無物可提醒無理數量之存在，故此等發明，必由單獨之抽象思想而得之也。畢氏之門徒，視無理數量爲一種不能言說之記號，相傳有洩漏彼等學理之一人，曾受覆舟斃命之罰，『蓋認此不可言不得見之理當永守祕密也。』

畢達哥拉，證明三角形之內角總和，引用平行線之理，卽畫一線與其底平行而證之是也。於此

證明之中，吾人考得其進行方法，乃由特例而推及通例，蓋因古昔紀米那(*Geminus*)氏之證明此理（或謂爲退利斯氏？）嘗遍舉不同之三例即三等邊，兩等邊，及不等邊之三角形也。

歐德謨氏有言，畢氏之門人，發現面積應用諸題，嘗包舉殘缺及賸餘諸例，儼若歐几里得幾何卷六中第28,29題之所示。彼等更能作一多角形，面積等於指定多角形而與之相似。且就其大體而言，畢氏一門之平面幾何，同於埃及，偏於面積一端，故關於圓形定理，則付諸闕如。

畢達哥拉氏之門人，嘗證明平面之內，一點之周圍，可滿佈六箇等邊三角形，四箇平方形，或三箇等邊六角形，故任取一平面，皆可分作任一類之諸形，而正多面立體之研究，則由正多角形以推廣之，故畢氏之門人，對於立體幾何亦有貢獻。根據於等邊三角形，平方形，因之四面體，八面體，立方體，及二十面體，得以了解——此四種體，或俱爲埃及人所素知，至少知其前例之三種。且在畢氏之哲學，此等立體，皆用以表物理界之四原素：即火，空氣，土，及水是也。因無第五原素，故此後發明十二面體，即用以表宇宙之全部。此外古典所載有喜帕薩斯(*Hippasus*)氏者，曾招投海淹斃之禍，蓋因『一球可容十二箇五角形』之理，被其洩漏云。

畢達哥拉氏嘗言，立體之中，當推球體最爲美觀；而平面形之中，則推圓形。意大利學派，解證其定理，究其精審若何，吾人莫得而定之。至其進行之方，由經驗解法而至於理論解法，必甚遲緩，殆爲可信之事。

至於後起之畢氏門徒中，則有斐羅洛（*Philolaus*）者，曾著一書，錄述畢氏之學理，爲世所知，最後吾人可述及他林敦（*Tarentum*）地方享大名之亞開塔斯（*Archytas*）氏，當柏拉圖學派開始時，爲希臘僅有之幾何大家，蓋嘗發揮比例之理，並有論及立方加倍之著述。至其生卒時期則起紀元前 428 年迄 347 年焉（東周考王十三年迄顯王二十二年。）

(3)哲人派——希臘算學學派之存在，其時期頗互相參錯。畢氏學派之活動，在哲人(*Sophists*)時代，尙繼續如舊，直至柏拉圖學派開始乃止。

紀元前 480 年間（東周敬王四十年）色列米(*Salamis*)之戰，擊退波斯（*Persian*）人，及逐出腓尼基人，驅散愛琴（*Ægean*）海海盜之後，希臘之商務，即開始繁盛。因之雅典一隅，頓爲世界所重視，且成爲人文薈萃之重心。畢氏之後學，羣聚於彼，而亞諾薩哥拉氏則輸入愛奧尼亞之

哲學於彼處焉。斯時也，畢氏之秘密習慣，停止舊觀，而雅典之人，則崇拜公開之精神。且雅典之人，有奴僕以供賤役，實屬安閒，故於哲學或科學之公共討論，咸能具卓越之識，蓋彼等必曾受教育者也。而其一時供教授之選者，皆所稱爲哲人或智者也。雖然，哲人與昔日畢氏之門人異，其教授也，則領受束脩。至其所授之課程，則以修辭學爲主，而旁及於哲學，數學，及天文學焉。

圓形之幾何，爲畢氏門人所輕忽者，刻已取而研究之。而哲人研究之中心，要不外以下著名之三大著名問題，僅限於直矩圓規之助而作成者也。

(1)三等分任一角或任一弧；

(2)求立方之倍積；即作一箇立方，其體積倍於一箇指定立方；

(3)變圓形爲方；即作一箇平方，或其他直方形，其面積恰等於一箇指定圓之面積。

算學之中，經專而且久之研究，確無其他問題如此等問題者也。希臘最高之智力，偏注於此；亞拉柏之學識，施用於此；西方文藝復興時之若干最高算學家，競爭於此。殆心思無分巧拙，人性無分智愚，俱奮勇從事，冀戰勝此等之問題，蓋其過去時代之中，多數聰明睿智之士，欲求解決之方而皆

歸失敗故也。最後始漸悟此等問題，若限於希臘人所設之條件，則永無解決之望。而此種推測，乃後經嚴密之證明而決定者也。夫希臘人之條件，對於此等問題之作成，僅予直矩圓規，不得用其他儀器。換言之，卽此圖形狀，僅含直線及圓形耳。至每一問題，若利用橢圓形，拋物線，雙曲線，或其他高等曲線而作成者，則不謂爲幾何學的。而用此等曲線之助，希臘人自己，於此等三題，實優爲之，但此種解法，以其爲機械的而見拒，蓋『如是則捨天神所用千秋不易之精微想像，而復任吾人之官能，是將幾何學之優美廢棄不顧矣』（拍拉圖氏所言。）雖然，希臘之人，何故容納圓形於幾何之問題，而拒絕與圓形同次之橢圓形，拋物線，及雙曲線乎？吾人其以牛頓（*Issac Newton*）之言答之：『非爲其方程式之簡單，但因其畫法之容易，故決選此等之線，以助問題之作成焉。其實拋物線之方程式，較圓形爲更簡，但圓形之畫法更簡，故先拋物線而見用。』

三等分任一角之法，爲幾何問題中最易作成之一。至三等分任一角之法，則昔日之研究家，及今日校中之初級生，莫不希冀其變爲完全簡易之事。然在特例之直角，本可立刻求得，但於普通之例，殊感極端之困難。有喜庇亞氏（*Hippias*）者，或確爲伊利斯（*Elis*）地方之喜庇亞氏（約生於

紀元前460年，約東周貞定王九年）爲研究此題最早者之一，欲求一作成之法，僅含圓形與直線而不可能，因而發明一超越曲線（卽不能以代數式表之之曲線，）藉其助力，非特任一角能分爲三等分，卽分爲任何等分，亦非難能之事。且此種曲線，後且用於改圓爲方之法，而稱之爲平方曲線焉。

求倍立方之題，起源或以其自身能提醒多數幾何家，由平面幾何中求倍平方之題而悟及推廣於立體幾何。若在一平方之內，對角線之上，作一新平方，則新者之面積，恰等舊者之二倍。此其故不難於畢達哥拉氏之定理中立刻得之。但作一立方，倍於一箇指定立方之法，則實經過非常之困難。而埃拉托色尼氏則稱述此題另有一不同之起源。蓋第力亞(*Delian*)之人，嘗遭疫疾之流行，依神靈之默示，當倍增某處之立方神壇以禳之，一時無識之工匠，僅倍其立方邊之長度，而此種愚拙工程，未嘗安慰神靈之心。此錯誤發現以後，嘗以此『第力亞問題』商之於柏拉圖氏云。埃拉托色尼氏又告吾人以第二故事：有一悲感之老詩人，述克利特(*Crete*)王邁諾斯(*Minos*)欲爲其子建一墳墓，不滿於工匠所擬之大小，乃呼曰：『倍之，但勿失立方之形狀。』若吾人以此等故事爲可

信，則知此問題蓋發源於建築之難題。有開奧斯 (*Chios*) 地方之希波革拉提 (*Hippocrates*) 氏（約紀元前 430 年，約東周考王十一年）曾第一次指示此題，可利用定線及倍定線之間，求兩箇中比數之理，即插兩長度於此兩線之間，令四者成爲幾何比例，用近世之記號寫出，設 a 與 $2a$ 爲兩線，x 與 y 爲兩箇中比數，吾人即得其比例之項 $a,x,y,2a$ 且得 $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$；因之 $x^2=ay, y^2=2ax$。於是 $x^4=a^2y^2=2a^3x, x^3=2a^3$。但希波革拉提氏，用幾何作圖之法，以求倍立方邊之 x，仍歸失敗。雖然，推立體幾何之題，而及於平面幾何，並無若何之成就。彼之著名一世，亦因其改半月形爲方之告成；而此種結果，彼尙冀應用於改圓爲方之法。然在研究『第力亞問題』及作方問題之中，希波革拉提氏，實大有功於圓形幾何者也。至於相似形之題而含比例之理者，則亦爲彼之所注意焉。且彼曾著一幾何之書，名之爲幾何綱要（現已佚）藉以促進幾何之學，令更爲學者所易曉，而確大有裨益於此學之進行。

相傳希波革拉提氏曾有時盡喪其財產。有謂其爲海盜所掠，有謂其缺乏管理財產之經驗，而遭此損失。亞里士多德之言曰：『凡人之於事，昧於一端，則必不昧於他端，此人所共知，亦非特異之

理。故希波革拉提氏雖富於幾何之智識，然對於其他事端，則似乎愚昧；若所謂因其居心誠實，而受拜占庭稅吏之欺騙，喪失其大宗財產。」

希波革拉提氏同時，有詭辯家安第福(*Antiphom*)氏介紹窮舉之法頗有價值。於圓形之內，畫一平方，次於各邊之上，作兩等邊三角形，令頂點在圓周上，又次於此等三角形之邊上，作新兩等邊三角形等等，如是得一組之有法多角形為 8 邊 16 邊 32 邊等等，則每一多角形之面積，較其前之多角形，必更近於圓形，直至圓周窮盡而後已。安提芬氏則推定最後之多角形，可依法畫入，其微小之邊，合之即為圓周。因既能求一平方，等於任意多角形之面積，故能求一平方，等於最後多角形之面積，即等於圓形之自身。由此觀之，則其於改圓為方之問題似已完全解決。有與其同時之一人，赫拉克利亞(*Heraclea*)地方之布賴生(*Bryson*)氏，嘗修改此窮舉之法，非特畫有法多角形於其內，且同時畫之於其外。不確求多角形與圓形之吻合，而擅認圓之面積，以為兩多角形面積間之算術比例中項，以致大錯。

安第福氏之謀改圓為方也，內有一點，當時之哲學家，曾致其誠懇之討論。希臘之其他幾何家，

據吾人所知者，則皆反對圓形與多角形相合之理，因任何直線，不能與其全周或一部分相吻合也。辛普利夏(*Simplicius*)氏之言曰，若一多角形果能吻合一圓形，則吾人於任一數量可無窮分之之說，須置之不問。於此吾人得一哲學之難題，其中雅典人之辯論，似已令希臘之人，關於算學之方法一端，革新其思想。埃理亞(*Eleatic*)之哲學學派，以大理論家芝諾(*Zeno*)氏為之首者，嘗逞特異之巧智，反駁任一直線或其他數量無窮分析之理。安第福氏假定直線及曲線可最後化為相同而不可再分之原素，即採用芝諾氏之說。芝諾氏依歸謬法推得直線無窮分析為不可能。故其嘗論曰，若假定此理為真，則阿奚里(*Achilles*)（希臘勇士）將不能追及一龜矣。因其動身奔赴此龜所在地點之時，龜已先行若干距離，至阿奚里忙赴第二地點之時，龜將又前行若干距離。若然，則必須先追及為龜先所行之無窮多地段，故阿奚里終不能追及此龜焉。但據事實而言，阿奚里實能追及一龜，可見謂距離之可分為無窮多之部分者，必大誤也。同類推之，則「離弦之飛箭，當永為靜止。以其在每一時間內僅能占一個位置也。而此等奇特之理，則又含有無窮分析之義，故無窮分析之說，曾擾亂一時算學家之心思，蓋無疑矣。彼等嘗欲離去無窮小及無窮大之觀念，以建幾何學不

敗之基。且也，理爲人所共知（例如互割之兩圓，不能有公共之心，）而遇理論家之無端反對，則惟決之於精審之解釋，例如同於芝諾氏之徒，實非算學家，而幾何學乃大受其影響，而得增其精密之度。

安第福氏與布賴生氏所採用窮舉之法，遂發達而變爲完全精密之窮舉法。例如求兩圓面積之比，先畫兩相似之多角形於其內，次增加其邊之數，則多角面與圓面間之差數，可以取盡。因多角形面積之比，等於其直徑平方之比，於是所謂開奧斯之希波革拉提氏之定理，即兩圓形之比，等於其直徑平方之比者，遂爲必然之結果。但欲除去遊疑之點，後之希臘幾何家，曾用一種推論，若歐几里得幾何學卷十二第2題之所示者，吾人可簡約述之如下：設 C, c 爲兩圓之面積；D, d 爲其直徑。如是若 $D^2:d^2=C:c$ 比例爲不眞設，$D^2:d^2=C:c'$。若 $c'<c$，則一箇多角形 p 可畫入於圓形 c，其面積近於 c，遠勝於 c'。若 P 爲 C 內相當之多角形，則 $P:p=D^2:d^2=C:c'$，並 $P:C=p:c'$。因 $p>c'$，則有 $P>C$，此實爲必無之理。同理可推得 c' 亦不能大於 c。因 c' 不能大於 c，亦不能小於 c，故必等於 c 無疑（證訖）吾人於此遂得一窮舉法之例，中間且用及歸謬法。韓克爾氏謂此窮

畢法，爲開奥斯之希波革拉提氏所創，而不歸之於攸多克薩斯氏，似無充分之理由。

(4)柏拉圖學派——拍羅坡尼西 (*Peloponnesian*) 戰爭（紀元前 431 年迄 404 年，即東周考王十年迄威烈王二十二年）而後，雅典之政治權力，雖就衰微，而其哲學文學，及科學之盟主資格，則更加鞏固。若柏拉圖（紀元前 426 年？迄 347 年，東周考王十二年？迄顯王二十二年）之一流人物，相繼輩出，其心思之能力，實足感動累世哲學之思想。蘇格拉底（*Socrates*）者，彼先時之教師也，輕視算學一科，自蘇格拉底死後，柏拉圖遊歷四方，獲交多數之著名算學家。如在施勒尼(*Cyrene*)，學幾何於提奥多納氏（*Theodorus*），在意大利，識畢達哥拉之後學而塔他林敦 (*Tarentum*)之亞開塔斯氏(*Archytas*)及羅克賴 (*Locri*) 之泰米阿斯 (*Timaeus*) 氏，俱納交而成親密之友是也。約紀元前 389 年之時（約東周安王十三年），柏拉圖返於雅典，在亞開提米亞(*Academia*) 森林之中，建設學校，其一生所餘之歲月，專用於課徒及著作之中。柏拉圖異於其師蘇格拉底，認算學有發展思想之能力，極重視之。『未習幾何之人，不許入內』一語，嘗標寫於校門之上。其同式之態度，則有芝諾克拉底(*Xenocrates*)氏，中校之教師，柏拉圖之繼起者，亦拒絕未受算學教

育之生徒，於其『去休因爾並無哲學之智識』一言，足以證明之。而歐德讃氏之要言述及柏拉圖曰，『其著作之中，充滿算學之言論及解釋，而每遇時機，即標明算學與哲學重要之關係。』

夫柏拉圖，並非公認之算學家也，鮮有或竟無創始之著作，但嘗鼓勵算學之研究，促醒幾何學中所用之邏輯及方法之改良，改革先代幾何家天賦之邏輯法，而為顯明確切之方式，並創立縝密之定義，而兼及定理公理之考慮。畢達哥拉之定義所云『點為位置之單位』一語，包括哲學之理，為柏拉圖學派所拒絕，而立一點之定義曰，『一點者，一直線之始，』或『不可分析之一直線也。』然如下亞里士多德之定義，亦頗流行：點，線，面者，線，面，體之界也；體者有三度之數量也。亞里士多德又引述柏拉圖學派之公理曰：等量內各減等量，其餘必等。至其定義與公理之中，屬於柏拉圖自己者，究為若干，則吾人不得而詳焉。蒲羅克魯氏，雷厄細阿斯氏，稱柏拉圖為解析證法之發明人。雖然，前此希波革拉提氏等，蓋亦曾用此法而不自知，但吾人皆信，柏拉圖實改革不知不覺之邏輯，而進於顯明合法之方法。故解析法之發展及完成，厥功甚偉。但與爾曼氏之書（百二十五頁）推此事之功首，則又謂亞開塔斯之功尚多於柏拉圖氏云。

綜合及解析二名詞之意義，在希臘算學之中與在近世算學或論理學之中者不同。訓解析與綜合為對待，其最古之定義，見於歐几里得幾何卷十三第5題之中，殆為攸多克薩斯之所創，其說曰：「欲證一理，即假定此理為真，因而推及一已知之真理，謂之解析。反之由諸已知之理推出欲證之理，謂之綜合。」

柏拉圖於立體幾何之研究，嘗示以有力之鼓勵。球體也，有法立體也，大致為畢達哥拉之門人及埃及人考慮之所及。至埃及人之於棱錐體（尖方塔體）幾何，自然具多少之智識。而柏拉圖學派之中，於三棱體，棱錐體，長圓體，圓錐體，皆致力研究。米尼馬（*Menæchmus*）氏之發明圓錐曲線，由於研究圓錐體之嚮導。此時最著名之算學家，或當為攸多克薩斯氏。氏約於紀元前408年（約東周威烈王十八年）生於奈達斯（*Enidus*），受學於亞開塔斯氏，又嘗學於柏拉圖氏者二月，嗣後課徒於西西加司（*Cyzicus*），曾率其生徒參觀柏拉圖之學校，紀元前355年（東周顯王十四年，）卒於西西加司。攸多克薩斯氏之門人，其在西西加司而後入柏拉圖學校者，則為米尼馬氏，狄諾斯托拉式（*Dinostratus*）氏，阿式尼阿斯（*Athenæus*）氏，赫力昆（*Helicon*）氏，故此校之克

享大名者以此。歐德謨氏之要言曰，『攸多克薩斯氏最初加增普通公理之數，加三箇比例法而爲六，增「分割」之智識，柏拉圖所創設者，至一重要之度，斯則彼利用解析方法以得者也。』依此，能分割一線爲比例之中末率，即所謂黃金分割是也。亞奇默得氏之言曰，攸多克薩斯氏，嘗證明若等底等高則一棱錐體恰等於棱柱體三分之一，圓錐體，恰等於圓柱體三分之一。兩球體之相比，等於其半徑立方之相比之理，或爲彼之所決定。至於窮舉法，亦爲彼所常用，或即彼所發明亦未可知。

(5)第一亞歷山大學派——拍羅坡尼西戰爭而後，六十六年之間（政治衰微時代）希臘古時極偉極巧之思想家若干人，俱出於雅典。紀元前338年（東周顯王三十一年）雅典爲馬其頓 (*Macedon*) 之腓力 (*Philip*) 所敗，軍力盡殲。未幾，亞歷山大王 (*Alexander the Great*) 建築亞歷山大城，如是文學也，哲學也，科學也，藝術也，遂以此城爲其新宅而居之焉。

在吾人記錄之中，幾何之學，已見其萌芽於埃及；已見其移植於愛奧尼亞羣島；從彼而至意大利，而至雅典；迨今最後之期，長成堅實之質，美麗之姿，見其復移種於發源之地，經一番新培養，遂發達而繁茂成林矣。

歐几里得（約紀元前800年，（約東周赧王十五年）或爲亞歷山大算學學派之建設者，確爲其中堅之人物。在學問任何門類之中，古之著作家，於近世之教育，實無人能據盟主之地位，如歐几里得之於初等幾何者。故『除神聖經典以外，誦讀之廣，翻譯之多，實無其他希臘文字，能同於歐几里得之幾何者。』

在論述攸多克薩斯氏，西提他（*Theætetus*）氏，及柏拉圖學校之其他校友而後，蒲羅克魯氏以下述之記錄加於歐德謨氏之要言：

「歐几里得之出世也不甚晚於此等諸人，編著「幾何原本」（*Elements*），攸多克薩斯氏之論，多陳列之，西提他氏（*Theætetus*）之理，多完成之，多數問題，在其先民缺乏精密之證明者，俱付於百折不撓之確證。歐几里得之生存，在托勒密第一在位之時，亞奇默得曾引述之於其卷一書中，並謂托勒密有一次詢問歐氏，幾何之學，除彼之原本外，有無其他更捷之徑，而歐氏則答以實無其他坦蕩之途，可達幾何之域。歐氏之年，幼於柏拉圖之門人而長於埃拉托色尼氏與亞奇默得氏，因彼等爲同時之人，而埃拉托色尼氏揭示於吾人者也。且歐氏屬於柏拉圖之一派，熟悉柏拉圖式之

哲學，故據事實而言，其所著原本之最後目的，係欲作成有法之立體，卽所謂柏拉圖立體是也。」趣哉帕帕斯（*Pappus*）氏之言也，謂歐氏爲人，對於稍有志於算學之士，俱表示溫良而可近。和藹而可親。而士托俾阿斯（*Stobæus*）氏曾述以下之故事：『有一青年，開始學幾何於歐几里得，學過第一問題而問曰，「學此果何所得乎？」於是歐几里得呼其僕而言曰，「予彼三辨士，因彼必有所得於所學之中也。」』

歐几里得之生活狀態，吾人所知者，不能更多於此等記載之所選錄。至其他之一切陳述，蓋皆屬於纖微細小，鑿然可疑，或顯然錯誤者也。

歐几里得雖於算學及物理，尙有其他多數之著作，而其所以獲享大名者，要永以幾何之書，所稱爲幾何原本者是賴。此書實遠勝於希波革拉提氏，雷翁（*Leon*）氏及忒底阿斯（*Theudius*）氏所著之幾何綱要，此等幾何書亦曾經一度之生存競爭，然不久卽煙消火滅矣。歐氏之偉著，自古及今，常用作幾何之課程而教授之，其中優劣之點，藉教育學之光明，幾何學之發明，得以燭其眞象者，將於以後詳論之。而現時所述，則僅取其內容而論次之。

幾何原本中，何者確爲歐几里得之原物，吾人莫得而定之。吾人咸信殆歐氏以前之幾何著作，編制既不完備，方法亦少系統。歐氏見之遂有幾何原本之作。自歷史上考察之，則見歐氏材料之一大部份，得之於其前之著名算學家。但『畢達哥拉定理』之證法，則確爲歐氏之自創。奧爾曼氏謂其卷一，卷二，卷四之材料，出於畢達哥拉之門徒，卷六之材料，屬於畢達哥拉之門徒與攸多克薩斯氏，由氏貢獻比例之理，可應用於無公度之數量，且及窮舉之證法（卷十二）而西提他氏於卷十卷十三多有所貢獻，至於歐几里得自己之發現，其重要部份，則見之於卷十之中。故歐氏最大之成功，乃將當時已得之學理，集其大成，使幾何學爲一有系統之學科。歐氏實可稱爲古今之系統學大家！

幾何原本之內容，可約略示之如次：卷一，卷二，卷三，卷四，卷六，論平面幾何；卷五論比例之理可適用於普通數量者；卷七，卷八，卷九，論算術；卷十，論直線分析之算術特性（卽無理數）卷十一，卷十二，論立體幾何；卷十三，卷十四，卷十五，論有法立體。最後兩卷，則爲不經之書，料其各爲希布西克爾氏及達馬細阿斯(*Damascius*)氏之所著。

幾何原本之科學價值，討論者之意見，久不一致。有以書中逐條之論理法，完全而攻擊不破者，有謂書中各處，不乏膠誤之點者。據吾人之評判，二者俱非正當之論。因此原本之本文，不能完全無誤，讀其註解之人，類能知之。而讚賞亞歷山大學派之偉人歐几里得，或無人能過於辛生(*Robert Simson*)氏者。然辛生氏之註釋此書，亦發現多數之缺點。至辛生氏之失，在將其所有發現之缺點，全諉之於出版之人，蓋先時出版之人，固難免此種缺點。其大多數之改正，並不甚關重要，而此書之全體，則仍合精密之標準焉。然詳細之審查，註解家於其假設定理而無證明之中，得發現歐氏亦不無千慮一失之處，因有一二眞理，雖爲人人之所認，歐氏僅默認之，並未列入於公理之中。且也，歐氏所默認之理，有時亦可以證明，如在定義之中，彼言一圓之直徑平分此圓，此則可依公理而立刻證明者也。彼解釋平面之角，爲『兩直線互相傾斜而相遇之處，但此兩直線並非在同一直線，』故能決定角度之大小，其致此遺漏，似由於未明示兩角之相等，及兩角和較之測定之故。歐几里得有時並不考慮或指示一切特例，爲完全證明理題之所必需者。此等缺點，發現於原本之中，亦難爲之護短，足證歐几里得並非絕無錯誤者也。雖然，須知此等小誤，實無傷於其大體之優美，而爲科學上之

一大著述，——其優美之點，1877年（清德宗光緒三年）英國科學促進社（英格蘭最高算學家若干所組成）嘗鄭重承認，謂『自古及今出版之書，無有堪繼歐几里得幾何原本而居其著述之地位者。』如上之陳述，此書有若干校訂家，就中有辛生氏者，嘗著假設之詞，謂歐氏本來之書，完全無缺，至如彼等所知之錯誤，則諉之於歷時損壞之所致。例如辛生氏料其卷五之起首，當有一複比例之定義；彼加入之，並確言此卽歐氏之本來定義，但無根據耳。現時所通用之幾何原本，爲西昂氏之本。而辛生氏於歐氏幾何中，依彼之理想，所發現之一切錯誤，彼願代爲受謗，但有一原本之抄本，及其他手稿，拿破崙第一（*Napoleon I*）自梵諦岡（*Vatican*）送於巴黎者，信爲西昂氏（*Theon*）以前之本；但兩相比較，所差甚微，足證錯誤之點，或屬於歐氏自己者也。

原本近世譯本（例如辛生氏或托得罕忒（*Todhunter*）氏之本）之起首，定義之下，列舉多數臆設之理，若點，線等之意義，與若干之解釋是也。其次爲三公法，卽（1）從任一點至任一他點，可畫一直線，（2）一直線可無限量引長之，（3）以任一點爲中心任何度爲半徑，可畫一圓形是也。又其次則爲十二公理，公理二字並非歐几里得之所置，而爲蒲羅克魯氏之所用，藉之以代表『公認

之理』之義，蓋或爲一切人類，或一切科學之所公共。其以前之九『公理』關乎一切之數量（諸物各等於同物，則互相等……，全部大於其一部分，）而末後之三『公理』（兩直線不能圍繞一空間；凡直角俱相等；及平行公理）則僅關乎空間之問題。大概最近出版歐几里得之書，此幾何之三『公理』與其他九者，俱列於相同之次序，確然可信者，歐几里得於二者之間，固有嚴密之辨別。據抄本偏奇之處，曾將關於空間之公理，移置公法之間，此蓋爲其正當位置，因經近世之考查，已證明此三者爲公設之法，而非公認之理，或公理也。此不幸之變更，不知誰實作俑，故關乎此點，只得諉之於歐氏之慣例。而平行公理之於幾何歷史，實居重要之地位。近世大多數之著作家，考得歐氏曾遺漏一公理，即關於形狀之剛性者（或謂爲等變性者，）即凡形狀可移動於空間，其形式大小無所變更（或一切移動形狀以等速變動其形式，至返於原處，則每一形狀仍佔原有之位置）是也。近來之幾何，揭示形狀之定理，但其相反之言論，如上所述者（等變定理，）亦將同式容納疊合形狀以比較大小之法，且可『推廣此理於任何形狀皆通行無礙』（克利佛德(*Clifford*)氏之說。）二者之中，前者爲更簡，並與吾人日常之經驗符合。哈爾司忒得(*Halsted*)氏則抗辯歐几里得並

未遺失形狀公理，且辯明所以不標出此理之故，謂已包括於其第8個假設之中。即『一切形狀能令其互相疊合，則互相等』是也。

卷一之中，歐几里得僅一次思及形狀移動之互有關係，見於其證明第4問題，即兩邊及夾角若各相等，則兩三角形相等是也。令兩三角形互相疊合之時，可翻轉其一三角形，但此點歐氏並未聲明，『豈在平面幾何之中，移置與翻轉之迥然不同，果能逃其鑑別乎？』

卷五之數量比例，因其討論之嚴密，大爲識者所稱許，而初學者則以此卷爲難讀，故在討論幾何原本之宜爲初學教科與否，此節實嘗引起重大之爭點也。

卷十（並卷七，卷八，卷九，卷十三，卷十四，卷十五）在近世學校教科書中皆已刪去。但全書之最奇異者，厥爲此卷。歐氏考究線之一切種類，可以 $\sqrt{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$ 表之，a, b, 爲有公度之線，凡得二十有五類，每類之一線，與每他類之一切線，俱無公度。狄摩剛（*De Morgan*）氏之於此卷，極熱心讚賞之。

幾何原本之與近世學校幾何，其教材之異點如下：近世之書，對於『柏拉圖之圖形』漠不注

意，但益之以圓內外接三角形及四角形，三角形重心，球面三角形（普通球面幾何）及近世所發現之平三角圓形諸定理。

歐几里得與近世學校教科書之編者，其方法間重要之異點，卽在比例之講法，及面積之求法。歐氏藉其比例之理遂得研究面積關係，而不涉及其量法。亞奇默得以前之一切希臘幾何及幾何原本，俱有意避免面積之量法。故於三角面積等於高底相乘之半，或圓面積等於半徑平方之π倍，歐氏俱未曾論及，其實彼於周徑之比率，並未求得一相近之値。其他不同之點，歐几里得之異於近世大多數之著作家者，則爲凡歐氏欲畫一線作一圖，必待至此種作圖之能以三公法，或已成之作法證其成立而後可。故卷一之最初三問題，皆爲作法而非定理，卽(1)作一三等邊三角形，(2)從一定點畫一直線等一指定直線，(3)有兩直線，從大者截取一段等於小者。然在近世書中，則可利用假設成立作法而將一切作圖題，卽遠置諸各篇之後矣。例如在平分一角之可能及方法證明以前，吾人可想像一角之已被平分焉。在假設作圖中，最驚人之一例，則爲分圓周爲任意等分，近世教科書中亦假定其可能是也。其所以可驚異者，吾人一思及高斯氏不朽之發明愈益知之，卽除 2^n.

3,5 邊之正多角形之外（及因此所得之合數）凡邊數爲大於五之質數，僅具 $p=2^{2^n}+1$ 之形者，始可依歐氏公法，僅用直尺圓規，畫於一圓形之內是也。然則假設作圖之法，果不可用乎？若目的在嚴密，則將應之曰不可用。若目的僅偏於教授上之易於了解，則將應之曰，由具體之幾何進而爲抽象之幾何，固宜多用可以觀察之事實以代深奧之推究。即歐氏於卷一之第1問題，默認兩圓必互相交亦含有由觀察可得之意味，至艱深之理，往往不易啓發人之智慧。且初學之人，猶之古時伊璧鳩魯（*Epicurus*）主義之徒，予以慣見之事實，使之反覆推究，則乏興趣；蓋欲其於幾何理論之能發生興致者，非有新事實發現不可。故教學上欲求嚴密之理，須於實證方面求之。

關於歐几里得之其他著作，則有『論據篇』（*Data*），或爲供學者讀完幾何原本後，欲解新題而作；其已佚之『謬誤篇』（*Fallacies*），討論鑑別謬誤之方法；其『衆解論』（*Porisms*）亦爲散佚之書，但經辛生氏及沙爾（*Michel Chares*）氏補成之。

當歐几里得全盛之日，則爲希臘算學史之黃金時代。古時最重要之兩算學家，亞奇默得，別迦（*Perga*）之亞破朗尼（*Apollonius*），俱生於此時代，俱足永享最大算學家之盛名。然僅其發明之

一小部分能於此處述之焉。

亞奇默得氏（紀元前287年?迄212年，東周赧王二十八年?迄秦始皇三十五年）生於西西里(*Sicily*)島之敍拉古(*Syracuse*)城，西塞祿(*Cicero*)氏謂其出身微賤。初遊於埃及，學於亞歷山大城，嗣還歸故土，爲讚賞之友而兼愛護之人亥厄洛(*Hieron*)王所重用，因其曾用奇異之發明，以造戰爭之具，使羅馬大將馬塞拉斯(*Marcellus*)氏所統率之人，以環攻此城者，受嚴重之損失。相傳當羅馬船舶駛近城下，亞奇氏曾利用大鏡反折日光，縱火焚舟，則或爲無稽之談。敍拉古城終爲羅馬人所攻破，亞奇默得，遂死於亂兵之手。據故事之傳說，謂當城破之時，亞奇氏正在研究幾何之某圖，畫形於沙中，一羅馬兵近前，彼大叱曰，「勿壞吾之圓圖，」兵以其侮己，遂殺之。羅馬之大將馬塞拉斯氏，深讚其才智，爲之建立一墓碑，刻圓柱內容球之形於其上，藉表尊敬之忱。西西里之人，不知重視此亞奇默得之記念，故當西塞祿遊歷敍拉古之時，則見此寂寂孤墳，已沉埋於荊棘瓦礫中矣。

亞奇氏之國人，皆讚賞其機械上之創造，但亞奇氏獨自以爲其於純粹科學上之發明，更足珍

重。

其書中論圓之量法一章，尤予吾人以特別之興致。初亞氏證得圓形面積，等於以周爲底，以半徑爲高之正三角面積。推求此底，則爲其第二步：先求周徑比率之上限，作一三等邊三角形，令頂角在圓之心，底邊切圓之周，嗣平分此心角，得兩正三角形，取此無理平方根稍小之數，以爲此正三角形底高之比率。嗣又平分此正三角形之心角，而考定其勾股之比率，依此又平分最後正三角形之心角，而考定其最後勾股之比率。如是累求四次，每次悉用無理平方根稍小之數，因得最後勾股之比率，爲$>4673\frac{1}{2}:153$。但賦此比率之勾，爲外接正多角形之一邊，準此推求，考得周徑之比率$<13\frac{1}{7}$。其次則求周徑比率之下限：作6,12,24,48,96邊之正多角形於圓內，求出每次多角形之全周，因得內限度爲$3\frac{10}{71}$。故其最後之結果爲$3\frac{1}{7}>\pi>3\frac{10}{71}$，此近似值，尋常運算皆已足用矣。

所堪注意者，前此埃及之人，嘗求得π之各種近似值，而歐几里得及其希臘先民之書中，並無一言提及此值。果何故而致此奇異之遺漏乎？大抵希臘之人於幾何之中，拒絕演算之羼入，深恐此

高尙之科學，失其尊嚴，降於測量術之列。亞里士多德有言，理之關於幾何數量者，舉不能以幾何以外之事如算術者證之。其眞正原因，或可於古時批評家之辯論得之，蓋一直線不能證其等於一曲線之長，而一直線更不能證其等於一圓周之長。此在幾何推論之中，實爲困難之點，而歐几里得則用疊合之理，以證線與線或面與面之相等。因無曲線，或曲線之一段，能令吻合於一直線或直線之一段，故曲線直線間之長度，無從比較，故在歐氏書中，從未見曲線等直線之例，蓋希臘幾何中所用之方法，實拒絕如此之比較；據杜阿麥爾(*Duhamel*)氏所云嚴格建立此種比較法之可能，蓋非近世極限之理不爲功。依歐氏之假設，雖欲證明外接多角形之全周，大於圓周，內接多角形之全周，小於圓周，其實亦不足够。諸著作家皆默認爲觀察之結果，則見其然而未示其所以然也。

亞奇默得氏更進一步，其所假設，尙不止此，且信其直覺，進而默認直線等於圓周長度之可能。據此新假設，亞氏於幾何遂有有價値之貢獻，因之吾人於科學照例進行中得一實例，蓋無疑義。造成新紀元之發明，當其產生，往往不能各方面皆得論理學之贊助；反之，直覺之觀察，實指導此發明者戰勝一切困難。類此之例，如牛頓於算學上發明，馬克司維爾(*Maxwell*)於物理上之發明皆是，

大凡一發明，其在論理上一貫之證解，往往爲事後補述而成。

吾人思想進行之程序，果人人不同乎？吾人初得眞理，並非全由推論之所致，青年人初究學術，使之肆力於一切理論，亦非良法。故在幾何之教法上，凡理論過於艱深而不易喻者，若觀察上能予以便利之助，宜承認其結果。蓋學者不能直待熟習極限與微積以後，始知內接多角形之周小於圓周之理也。

亞奇默得在其一切發明之中，所最珍視者，爲其論球體與圓柱體之書。於此書中亞氏用其名言，即『直線爲兩點間最短之路徑』是也，但彼並不謂此爲直線之正式定義耳。亞奇默得嘗有多數新理之證明：即一球之皮積，等於四倍大圓之面積；球之一截體之皮積，等於以此截體頂點至其底周之直線爲半徑之圓面積。球之容積及皮積，各等於外接圓柱之容積及皮積之$\frac{2}{3}$是也。亞奇默得之意，欲得上述末一定理，繪於其墓碑之上，羅馬大將馬塞拉斯氏，卒令其如願以償焉。

亞奇默得之在立體幾何，於柏拉圖五圖之外，又進而發現半正立體形凡十有三，每體悉以正多角形作外界，但非全屬於一類。對於初等幾何亦曾加入十五箇補題。

約亞奇默得後四十年間，大幾何家別迦之亞破朗尼氏昌盛於此時，研究圓錐曲線之性質，除其著名之圓錐著述外，吾人僅述其已佚之『相切論，』韋達 (*Vieta*) 氏等嘗欲從帕帕斯氏之定理以補成之。內載著名『亞破朗尼問題』之解法，卽『有三定圓，求第四圓切於此三圓』是也，雖於近世欲完成幾何之方法，此問題猶有指導之功。

希臘幾何學之發達，至歐几里得，亞奇默得，亞破朗尼三氏已達極點。自亞破朗尼直至耶穌紀元，其間幾何之歷史，皆無可稱道，僅有芝諾道拉斯 (*Zenodorus*) 氏者，著『等周圖形論，』(*Figures of Equel Periphery*) 現已散佚，但有其十四問題，爲帕帕斯氏與西昂氏所保存。以下所示，卽其中之三題也：『圓之面積，大於與圓等周任一多角形之面積，』『多角形之中，邊數相同周長相等，則正多角形之面積爲最大，』『立體之中，皮積相等，則球體之容積爲最大。』

希布西克氏生於紀元前 200 年迄 100 年之間（漢高帝七年迄武帝天漢元年，）殆爲歐氏幾何原本卷十四之著作人。所著之高度論，爲希臘人仿效巴比倫人分圓周爲 360 度之最古之書。

俾斯尼亞 (*Bithynia*) 之尼西亞 (*Nicaea*) 市，有喜帕卡斯 (*Hipparchus*) 氏者爲有名之

擺線論，及偏心輪論之著作人，古時之最大天文家也。亞歷山大城之西昂氏謂其始創三角學，首造通弦表爲十二卷（已佚，）其從事於天文觀察，在紀元前 161 年迄 126 年之間（漢文帝後三年迄武帝元朔三年。）

有一著作家，其論調迥異乎第一亞歷山大學派之各大著作家者，則爲亞歷山大城之希綸(*Heron*)氏，亦稱爲老希綸是也。因其爲實行測量家，故其著述與歐几里得，或亞破朗尼，縱少相同之點，亦不足怪。

希綸氏者，提息比阿斯(*Ctesibius*)氏之門人，亦有人信爲其子者。提氏以機械之發明，著名於時，若水力琴，水力鐘，飛石機等是也。希綸氏之發明爲一風車，及一奇異之機，名爲『希綸噴水泉』(*Heron's Fountain*)者，與其師具同一之巧思，至其所著書籍，則莫得而詳焉。大多數之學者，信其爲『測量儀論』之著作人，完全不同之三手稿現尙存在。馬利(*Marie*)氏則謂此測量儀論爲七世紀或八世紀時（隋唐之際）另一著作人名少年希綸者所著。但無可信之證據，以證此第二希綸是否確有其人，馬利氏，謂測量儀論之原起，爲時較近，以其第一稿本，載一重要公式，用三邊

之數，以表三角面積。而希臘之著作家，無一人提及此公式者；故謂測量儀論一書，早成於老年希綸之時，殆一難信之事。然此種辯論，不足令人折服，蓋因此時希臘之算學，幸獲保存者，僅僅一小部份耳。此公式，亦稱爲『希綸公式』，表三角之面積如下：

$$\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\times\frac{a+b-c}{2}\times\frac{a+c-b}{2}\times\frac{b+c-a}{2}}$$

就中a,b,c，爲三邊。至其所示證法，雖覺繁難，究具異樣之巧思，而顯明算學之技能，亦不爲少矣。

文圖力(*Venturi*)氏謂測量儀類似近世之經緯儀，爲一四碼長之桿，兩端附金屬薄板，用以窺測，桿置一圓盤之上，桿能水平運動，亦能垂直運動。移此桿至合宜位置，以盤中原有之釘固定之，此時測量人能於已定之方向，取一垂直之線。而其所用者，即水平線與垂直線也。希綸氏用此器及幾何之助，解明多數之問題，例若求兩點間之距離，中僅一點可到；或求兩點間之距離，兩點可見而俱不可到；求從一點，立一垂線於一不可接近之線；求兩點間之水平差；測未至其地之一田面積皆是。

測量儀一書表示算學之重要技能，與經典時代之著作，不乏近似之點。希綸氏曾讀喜帕卡斯氏之書，且註歐几里得之書。但其幾何之性質，則爲埃及式而非希臘式。彼常示定法定則而無證明。彼嘗示一公式，用一邊平方之數，以求正多角形之面積；此則暗具三角學之智識。又有彼之若干公式，似出於古埃及之本源，若上示三角面積公式之外，彼又示 $\frac{a_1+a_2}{2}\times\frac{b}{2}$ 一式，則與愛得佛銘記中所得四邊形面積之公式 $\frac{a_1+a_2}{2}\times\frac{b_1+b_2}{2}$，酷相類似。希綸氏與亞麥斯氏有多數相似之點，若亞麥斯專用單位分數，希綸慣用單位分數，亦過於他書。當此之時，亞麥斯算術之理，並未遺忘，且爲亞克明古書所釋明，而此古書，雖爲實用希臘算術所存留者最古之籍，其著作時代，或在希綸之後。且希綸同於亞麥斯及愛得佛之僧人，嘗作助線，分複雜之形而爲簡單；而於等邊梯形之研究，亦與彼等同一酷好焉。

希綸之著作，足供實用之需，因之家誦而戶曉。至其遺迹所存，則吾人見之於羅馬，見之於中古時代之西方各處，更見之於印度焉。

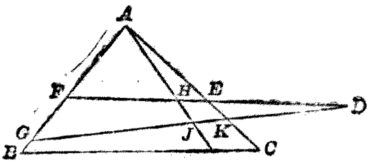
(6)第二亞歷山大學派——因羅馬帝國之兼併埃及，及耶穌教之傳播，亞歷山大城遂成爲

商業及文化之中心，各國商賈，相與雲集於其繁盛之街市，東西學者，相與把晤於其廣大之圖書館，博物院，演講所。故希臘之理想家，始得研究東方之文學哲學，因之希臘與東方之哲學，融成新畢達哥拉學說及新柏拉圖學說。柏拉圖學說與畢達哥拉神祕學說之研究，隨引起數論之復興，雖幾何學仍保有重要位置，而數論則爲更時髦之學科焉。第二亞歷山大學派，開始於耶穌時代，而其所以著名，則以有帶奧蕃塔斯氏，托勒密（*Claudius Ptolemæus*）氏，帕帕斯氏（*Pappus*），士麥拿之西昂氏，亞歷山大城之西昂氏，愛安布力卡斯氏，玻菲力亞（*Porphyrius*）氏，安廷尼亞（*Antinœia*）之西力那（*Serenus*）氏，門涅雷阿斯（*Menelaus*）氏等等之名之故。

亞歷山大城之門涅雷阿斯氏，約生於西歷 98 年之際（約後漢和帝時），因『算學庫』（*Almagest*）中所載之天文之兩觀察，爲彼之所得所記而知之。在其所著之書，名爲『球論』（*Sphærica*）者，於球面幾何，有寶貴之貢獻，此書有希伯來文，亞拉伯文之本，現尚存在，但其希臘原文之本，則已佚矣。彼示弧三角兩形疊合之理，並解釋其性質，一若歐几里得之於平三角，並示弧三角三邊之和，小於 360 度，三角之和，大於 180 焉。所著名者，當推其平三角及弧三角之二定理，關乎平三角者，則

爲『若三邊爲一直線所截，則不共端點三線段之連乘積，等於餘三線段之連乘積。』噶爾諾(Carnot)氏，用此命辭，稱爲『門力那補題，』以爲其截線論之基礎。至關乎弧三角之理，所稱爲『六量定律』者，則爲若三邊爲一線所截，則不共端點之三段之倍弧通弦之連乘積，等於餘三者之連乘積。

近世幾何之他種基本定理（關於調和列點論者）如下所示者，則爲安廷尼亞之西力那氏之所考得：若從 D 作直線 DF，截 ABC 三角形，在 DF 內擇一 H 點，令 $DE:DF=HE:HF$，若作 AH 線，則每通過 D 點之線，例如 DG，將爲 AH 所截，而成 $DK:DG=JK:JG$ 之比例焉，埃及之安廷尼亞（或稱安廷瑙坡來司）(*Antinoupolis*)，西歷 122 年（後漢安帝延光元年），羅馬帝哈特林 (*Ha-drin*) 之所建築，故西力那氏之生存時期，因得一上溯之限，而彼爲五世紀或六世紀（南北朝之際）一著作家之所援引，因又得一下溯之限。



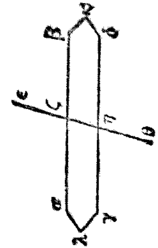
古時天文史之中心位置，爲托勒密氏所估據。其人之事蹟，殆無知之者，僅知其爲埃及之土著，

西歷139年（後漢順帝永和四年，）在亞歷山大城，赫然鼎盛於一時。至其著作之中，則推其『算學總覽』(*Syntaxis Mathematica*)，（或『算學庫』亞拉伯人嘗稱之）及『地理誌』(*Geographica*)二書為巨擘焉。然本書並無暇詳述『托勒密之法則，』此處引述托勒密者，蓋因算學庫中所載之幾何學與三角學也。彼平分圓周為360度；直徑為120段，每份又平分為60小份，每小份再平分為更小之60份。在拉丁文中此等小份，稱為 *partes minutæ primæ* 及 *partes minutæ secundæ*，譯言『分』『秒』。故巴比倫六十進位之法，紀米那氏(*Geminus*)與喜帕卡斯氏(*Hipparchus*)所知者，斯時於埃及之希臘人，實覺其根深蒂固矣。夫三角之學，著名之喜帕卡斯氏建設其基礎於前，托勒密氏完成其規模於後，而托氏推算通弦表，似為彼之所首創。其法先證一命詞，即今附於歐氏原本卷六之(*D*)者，『圓內作四邊形，其對角線所成之長方形，等於其兩對邊所成二長方形之和。』繼乃從兩弧之通弦，求其和較之通弦，及從任一弧之通弦，求其半弧之通弦之法。而此等定理，彼示以優美之證明，俱應用於通弦之演算。其術語與記號（就彼所有者，）並不謂與近世之三角學全異。惟今『正弦』即彼之『倍弧之通弦。』例如其表中，21·21·12為20°30′之通弦，

化六十進位之小數而爲十進位，則此通弦爲·*35588，半之得·17794，爲 $10°15'$ 之正弦，即 $20°30'$ 半弧之正弦也。

*〔譯註〕以 60 除21，以 60×60 除21，以 $60\times60\times60$ 除12 次以三商相加，而截留五位即得。

弧三角定理之完全，殆有過於平三角者，托勒密斯氏始從事於門涅雷阿斯氏定理之研究。彼之研究三角學，非因其學科之自身，蓋以其能藉之以考究天學，故弧三角發達，較早於平三角者，無足怪也。



予吾人以特別興致者則有一證明，依蒲羅克魯氏之意旨，托勒密以證歐几里得之平行定理者也。其精密之處則如下所示：若直線互相平行，則兩內角（在截線之一邊者）必等於兩直角。因 AG 之平行於 CH，不減於 GB 之平行於 HD，故 BGH，GHD 二角之和，或大於兩直角，或小於兩直角，而 AGH，GHC 二角之和亦然。但此四角之和，不能大於四直角，因其爲兩對相鄰之角也。然此證之中，有一不可保留之點，即其謂平行線中，截線一邊內角之和，必同於截線又一邊內角之和是也。

歷代之幾何家，經十八世紀之久，圖證明平行定理而未能，托勒密氏則其中最先之一人也。迨至羅巴曲司給(*Lobatchewsky*)氏與波爾夜(*Bolyai*)氏者出，奮其才智，解除算學家視線之障礙，俾其確見此等證明，因何而永為無益之舉。

托勒密以後之150年間，無顯著之幾何家。有一無關緊要之書，名為『戰具』(*Cestes*)者，阿夫立揆那(*Julius Africanus*)氏所著，應用幾何之學於戰具製造者也。帕帕斯氏（約當西歷300年或370年之際，約晉惠帝或東晉奕帝時）為亞歷山大城學派最後之算學大家，較之亞奇默得，亞破朗尼，及歐几里得諸人，早五世紀而成著作者，雖有望塵莫及之歎；而較其同時之人，則出類拔萃，有似巍峨之山峯高出乎平原之上也。其多數著作之中，尚存者，僅『算學彙編』一書，共計八卷，卷一，及其卷二之若干部分，現已散失。此書之目的，似特於算學難題，予幾何家以簡略之說明，並助以解釋之補理，俾其易於研究焉。此書最大之價值，則以其詳載古代希臘算學大家之著述及其學理為今世已佚者。前一世紀之學者，謂此等散佚之書，可根據帕帕斯氏一人所示之概要而補成之。書中有若干定理，當為帕帕斯氏之所自創，但難於決定者，因其中有三例，帕帕斯氏引其理而不詳創

定此理之人，且帕帕斯氏可於他處，用此同式之方法，故其眞正之發明者，吾人莫得而確定焉。

初等問題之特饒興趣而或爲帕帕斯氏自創者，茲述之如下：(1)一三角形之重心，亦必爲他一三角之重心，若後者之角頂在前者之邊上，分其三邊成同一之比率；(2)經同一直線之三點，畫三直線，俾成爲指定圓之內接三角形；(3)排氏提出對合列點之理；(4)兩圓外切，連接兩平行直徑相對兩端之直線，必經過兩圓之切點（此理可提醒兩圓相似中心之理）(5)作一平行四邊形俾其邊與一指定之平行四邊形之邊，成一指定比率而二形之面積，成其他指定比率。此則有似乎希倫氏之無定問題，即作二長方形，俾兩形邊線之和與面積，各成指定之比率是也。

吾人次述其餘之算學家。亞歷山大城之西昂氏，嘗印行歐氏原本，而加以註釋；其註算學庫一書，大有價值，因其有關於歷史之附註，及希臘算術之式樣故也。而西昂氏之女海披薩(*Hypatia*)以婦德婦容而有令名，爲最後亞歷山大城學派之著名教授。曾註解，帶奧蕃塔斯與亞破朗尼之著述，但已散佚無存。西歷415年（東晉安帝義熙十一年）以非命而死，金斯黎(*Kingsley*)氏之海披薩女士傳言之甚詳。

自此耶穌之教義，大有改變人民思想之力。故在亞歷山大，異乎基督教之宗教及智識，悉歸消滅。雅典之新柏拉圖學派，競爭以圖存，逾於百年之久。蒲羅克魯氏，以錫多（*Isidorus*）氏等等，奮勇以保存『柏拉圖一派相續之黃金世系。』蒲羅克魯氏註解歐几里得之書；在其卷一者，現尚無恙，而大有歷史之價值。而以錫多氏之門人，達馬士革（*Damascus*）之達馬細阿斯氏（約當西歷 510 年之際，約南朝梁高祖時，）則有人信其為歐氏原本卷十五之著作人焉。

上 500 年間之幾何家，除帕帕斯氏外，殆少創造之能力；故彼等蓋皆註解家而非發明家也。

茲述希臘幾何之特點如下：

（1）其概念非常明瞭而精確，其論斷則合乎嚴密之邏輯。在其論文之中，雖偶有疏忽之點；但就希臘幾何最完全之形式，以與巴比倫，埃及，羅馬，印度，或中古幾何家所得之最上乘者相較，無不同聲讚賞者，非僅在其程式之精密，蓋其發明之豐富，實有足多者，故希臘之幾何思想，儼同巨塔，巍然獨立，高出他物萬萬矣。

（2）雖然，希臘人之缺點，則在缺乏普遍之原則與方法，例若希臘人無作切線之通法。故古之

幾何家，凡解明一學理，理中之線有若干不同之位置，即有若干不同之例，各需特別之證。『晚近幾何大有勝於古時之處，其優越之點，即因有正負數量之觀念，能括多例於一式，蓋每一學理，若依其圖案各部位置之不同，則一式可變為多式。故今日對於當日之重要九問題，及多數之特例，為帕帕斯氏之「截剖決定術」兩卷中83定理之所論者，可概括之而組成一問題，以單獨之方程式解之而已足。』『治算學之問題，譬之攻巨石欲穿透其內部，希臘算學家猶之強健之石工，運其鎚鑿，持以堅忍，自外至內，漸碎之而成片屑；近時之算學家，則儼同優越之礦師，先將石穿成少數之孔隙，次施以猛烈之爆發物，轟然一聲，碎為飛塵，如是其內部之寶藏，遂呈獻於吾前矣。』

(3)羅馬

羅馬之人，雖長於政治與戰爭，然於哲學詩歌及藝術，則僅能仿效而已，至於算學，且未嘗起仿效之念，除在文藝衰微時代，始從事歐氏幾何之研究以外，即謂古時希臘之幾何著作家，羅馬之人全未耳其名，亦無不可。故具有定義公理公法及有精密證明之幾何學，於彼土之中，實未見之。形同

古埃及之實用幾何，附以經驗上之規則可應用於測量者，竟取希臘科學之位置而代之。實用之載籍，爲羅馬測量家所輯見於『羅馬會典』(*Agrimensores or gromatici*)者，則流傳至於今日。『此等典籍，大部份論法律之事，純爲應用之藝術，關於幾何之部份，則或以其程式之粗率，或以其內容之簡陋與錯訛，遂大爲讀者之所厭棄。其程式殆無批評之價值，其名詞則游移莫定，至於定義，公理，定律之證，則並未嘗論及，對於定律也，亦無顯然之文字與公式；讀者須於其模糊不明確之數目題中，抽象以求之。故吾人對於羅馬會典之總印象，其不完全之狀，一若其早於希臘之幾何者尙有數千餘年，又似乎洪水之時代，尙在此二者之間焉。』其中有若干定律，以得之於伊特拉司坎種族，又有若干定律，與希綸(*Heron*)定律無異。後者之中，有藉三角之邊以求其面積之公式（希綸公式）及$\frac{13}{30}a^2$一近似值之公式以求三等邊三角形之面積者也(a爲其一邊)。但等邊三角形之面積，亦可以$\frac{1}{2}(a^2+a)$及$\frac{1}{2}a^2$兩公式求之，其前一公式，則希綸之所未知，而$\frac{1}{2}a^2$或發源於埃及之一公式，至於希綸較更精良之法，則又爲羅馬人所未及知，羅馬法中，有時僅據城垣周圍之長短以決定其不規則之面積，埃及之幾何，羅馬人以爲彼能應用之，遂於愷撒(*Caesar*)時

代輸入，蓋彼嘗令測全國之面積，以圖稅則之平允焉。然其先時，羅馬之慣例，分土地為長方與直線之形，牆壁與街道，互相平行，內含預定之方面，故能省卻無量之手續，減少幾何上必需之智識，而近似值之公式，亦堪供普通之用而無誤。

愷撒嘗借重埃及之學識，以改造曆書，招致亞歷山大城之天文家索息澤尼（*Sosigenes*）氏，以勸此盛舉。而羅馬之人，於幾何之學，或測量之術，名望相等者，則為發祿（*Marcus Terentius Varro*）氏（約當紀元前116年迄27年，即約當漢武帝元鼎元年迄成帝河平二年）佛郎提那（*Sextus Julius Frontinus*）氏（當西歷70年之際，即後漢明帝永平十三年之際，為羅馬之官吏）卡珀拉（*Martianus Mineus Felix Capella*）氏（五世紀之初年，即東晉安帝時生於迦太基（*Carthage*），卡息奧多拉（*Magnus Aurelius Cassiodorius*）氏（約生於西歷475年，即約南朝宋廢帝元徽三年）數人。然其中任舉何人，以較希臘學術衰微時代之希臘幾何家，則尚遠遜一籌。

政治驕橫之際，西羅馬帝國以亡，東哥德族（*Ostrogoths*）以興，希臘之科學，即於是時開始於意大利，此時輯錄之籍，實多缺點，但有可異者，直至十二世紀（南宋之初，）西方之算學智識，尚以

彼等為惟一之來源。其著作家之中，最負盛名者，則為波伊悉阿斯氏（西曆480年?迄524年南朝齊太祖建元二年迄梁高祖普通五年）初為提奧多理（Theodoric）王之寵臣，後以叛逆之罪下獄，終遭顯戮。其在獄中，曾著『哲學樂觀』（On the Consolation of Philosophy）一書。且彼又著有『算術組織』（*Institutio Arithmetica*）（大體譯自尼可馬丘氏之算術）與『幾何』（*Geometry*）二書。其幾何之第一卷，取材於歐氏幾何原本之前三卷，而遺其題證。蓋波伊悉阿斯氏及其後之若干著作家，常信歐氏原本中之學理，為歐氏之所固有，題證為西昂氏之所附添，故有遺漏一切題證之異事。至波氏幾何之第二卷，則取材於佛郎提那氏之『實用幾何』（*Practical Geometry*），羅馬會典中最稱完全者也。

波伊悉阿斯氏仿尼可馬丘氏而分算學為四類，算術，音樂，幾何，天文是也。其初稱為科學之四道，此種名詞通行於中古時代。而卡息奧多拉氏則用一類似之名詞，稱之為科學之四門。至迦太基之以錫多氏（生於西曆570年，即南朝陳宣帝太建二年）在其所著『學原』一書，則分一切科學為七類，其四者即四道，其三者（文法，修辭學，論理學）則又別為三道焉。

第二編　中古時代

第一章　算術與代數

(1)印度

希臘之算學衰微後，未幾卽有雅利安(*Aryan*)種族之印度人，開始顯其赫然之光耀於算學。其成就燦爛之觀，非在幾何而在算術與代數。彼等之於幾何，較之希臘之於代數，尤爲薄弱。其無定解析之術(不在本史範圍以內，)彼等促進之而至卓越之域，但在此點，則未嘗影響及歐洲之學者，蓋彼等之研究，至十九世紀，始爲西方人所知也。

印度之中，無公認之算學家；吾人將論列之著作家，則彼等之所視爲天文家者也。因算學之於

彼等蓋視爲天文學之侍婢。而孰知此視爲附屬之算學，卒爲其負特出盛名之唯一科學耶。至其所珍視之天文學，則僅見其爲不合宜之觀察，搜集事實，及歸納研究焉。

吾人於所得印度算學之籍，有一不快之點，因其定則與結果，俱表之以諧音之詩，隱之以迷離之語。對於已知此題旨之人，此等詩歌，或能助其記憶，但於向未問津之夫，則常有無從明瞭之歎。印度之算學家，於其一切，或大多數之發明，雖嘗推求詳盡，然其一切證明，則往往不爲保存。

所確知者，印度算學之若干部分，發源於希臘。推尋印度希臘間思想之關係，爲困難而饒興趣之事。當埃及降爲羅馬郡縣之後，亞歷山大之商務交通以繁，其哲學與科學之知識，因有重大之交換。印度之人，則固深受希綸氏，帶奧蕃塔斯氏，及托勒密氏之惠，然其拜中國之賜亦不少也。

印度算學進化之迹，吾人知之者蓋鮮。討論此科學完全之書籍，流傳至今者其數甚少。而一切重要書籍出版之時期，則除其最初一種外，皆未能確定。1881年（清德宗光緒七年）印度之西北巴哈沙利（*Bakhshâli*）地方，掘得一沉埋土中之無名算術古籍，觀其詩句之特點，當在三世紀（蜀漢及晉之際）或四世紀之際（東晉之際。）此籍爲樺樹皮所製，頗不完全，似爲八世紀之時

（唐中宗迄德宗，）轉刻當時之古籍。

吾人所知最古印度之天文家，爲阿雅巴塔氏（*Aryabhatta*）476 年（南朝宋廢帝元徽四年）生於上恆河（*Ganges*）之帕塔里卜塔拉（*Pataliputra*）地方，爲著名『阿亞哈塔大學』（*Aryab-hattiyam*）一書之著作人，其第三章，專論算學。約遲百年，布拉馬格塔（*Brahmagupta*）氏出，稱盛於一時，氏生於 598 年（隋高祖開皇十八年，）628 年（唐太宗貞觀二年，）著『婆羅門正宗』*Brahma-Sphuta-Siddhanta*），其第十二與第十八章，屬於算學。頗關重要者，爲馬哈維拉（*Maha-via*）氏（九世紀之際？）所著一初等之書；嗣則有克利特哈拉（*Cridhara*）氏著『演算精義』（*Ganita-sara*）一書，及帕馬那哈（*Padmanabha*）氏著一代數之書焉。自布拉馬格塔氏以後，此學之進步，似覺甚微，因有一書，名爲『天文冠冕』（*Siddhantaciromani*）者，1150年（南宋高宗紹興二十年，）巴士加拉阿卡亞氏（*Bhaskara Acarya*）所著，較之五百年前布拉馬格塔氏所著之『婆羅門正宗』（*Siddhanta*）一書，並無更高之處，巴士加拉書中重要之算學二章，爲『優美科學』（*Lilavati*）與『開方』（*Viga-Ganita*）二章，專論算術及代數。自此以後，研究之精神銷歇，

因之堪享盛名之學者，亦寂然無聞矣。

前文本書曾述及印度之人，在算術記數法中，善用定位與零號之理。今於此，指示其演算之方，蓋在印度，已精心造作，達完全之境，有非更古各國所能夢見。其演算方式，遺留於今日者，半得之於印度之書，但大要得之於希臘僧人斯普闌茲（*Maximus Planudes*）氏所著之一算術。氏生於十四世紀之上半（元之季世）乃自認其學之出於印度者也。

欲知印度之人，採用某種演算方法之故，則當注意其演算時所用之器具。蓋彼等書寫時，『用一短桿筆，附白色稀液之染料，書於小黑板上，痕迹易於抹去，或小於一平方尺之白色小硬片，上佈紅粉，用小桿書寫，紅底之上，得顯白字。』欲令字迹明顯，必充分放大字體，節省地位，遂成急務，故一字用過，卽行抹去者，卽此意也。印度之人，書寫多自左而右。若加254於663，則$2+6=8$，$5+6=11$，因改8爲9，$4+3=7$，故其和爲917。

其在減法，本有兩法，而『借法』爲緊要。若$51-28$，則減8於$11=3$，減2於$4=2$；或減8於$11=3$，減3於$5=2$。

其在乘法，有數法通行。有時分解乘數，爲若干因數，挨次以乘。有時分解乘數，爲兩數之和，較因成較易之乘數。其實例，如5×57893411，則乘之如次：5×5=25；書此於被乘數之上；5×7=35；加3於25得28；抹去5在其位書8，得285。其次，5×8=40；4+5=9；改5爲9，得2890等等。迨至演算之終，硬片上之式，則如下所示：

2 8 9 4 6 7 0 5 5

5 7 8 9 3 4 1 1　5

若乘數爲多位，則印度之演算，如韓克爾氏書中（188頁）所述324×753之例，玆示之如下：置乘數324之左端一數字於被乘數單位之上；3×7=21，先書21；3×5=15；改21爲22；3×3=9。而此步工作之形如上。其次，移被乘數於右方一位。2×7=14；14所屬之位，先有25，相加得39，書於25之位；2×5=10；加10於399，並書409於399之位；2×3=6。左列之演算式卽表此步之工作。至第三步，則再移被乘數於右一位；4×7=28；加此於09並書37於其位，等等。

2259
324
753

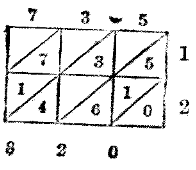
24096
324
753

今日印度之人，仍用此法，頗能節省篇幅，蓋每步之中，僅所用少數之數目字，現於硬

243972
324
753

片。於其狹小之册表，粗糙之鉛筆，固甚相宜也。若用紙以演算，則此法實有劣點。一因不能立時抹去字跡，整潔無痕，二因紙幅寬闊，猶欲節省地位，致疊次須將部分乘積相加，妨礙進行，殊覺迂愚。雖然，吾人將見亞拉伯之著作家卽採用印度之法，示其如何可演於紙上，作斜線以銷去不用之數字（不抹去）重書新字於舊字之上，惟未能有根本上之改善耳。

此外，印度尚有他法，酷似今世之所通行者。例如分一表爲多數小方形，狀類棋盤，畫對角線，左圖所示卽 $12\times735=8820$ 是也。現存之稿本，於印度除法，無詳細之陳述。似乎其每次之部分乘積，由實數中扣除，抹去舊數，改寫減後之新數。然如上之乘法，亞拉伯人亦嘗知之，殆非印度之原產物。



印度人嘗用一巧法（非印度原有）以驗演算之誤否。其所依據之理，爲一數各位數目字之和，以9除之，與此數之自身以9除之，所得之餘數相同。而此『棄9法』之在印度，較在吾人，則更覺適用。因其慣例，常抹去舊數，置以他數，故欲檢查演算之經

過，以驗其結果，實爲難事。蓋當相乘告終，其進行時經過之數字，多被抹去。因之鑑別之法，以不須考究其中間之經過者，最爲適用。

在巴哈沙利算術之殘簡中，演算之知識，認爲前知。其於分數，分子在分母之上而無除線。變整數爲分數，則以1爲分母。帶分數之式，則置整數於分數之上，例如 $\begin{matrix}1\\1\\3\end{matrix}=1\frac{1}{3}$ 是也。吾人之等號 =，彼等用 *phalam*（發拉姆）表之，簡之爲 *pha*（發）。加法則表之以 *yu*（尤）即 *yuta*（尤塔）之簡寫。而相加之數，常置一長方形之內，例如 *pha* 12 $\boxed{\begin{matrix}5 & 7 & yu\\1 & 1 & \end{matrix}}$ 意即 $\frac{5}{1}+\frac{7}{1}=12$ 是也。稱未知之數量爲 *sunya*（酸亞）以一重點·表之，*sunya* 字之意即『空虛』，亦即零字，而零字亦同式以一點表之。至於此字此點所以雙用之故，則因一位置而不實以物體，總爲『空虛』，故算式中未經決定之數目，亦以『空虛』視之。

巴哈沙利算術所載之問題，內有若干，用化成單位法，即一種虛位法解之。例如：B 之所付二倍於 A 之所付，C 三倍於 B，D 四倍於 C；四人共付 132；問 A 果付若干？設 1 爲未知之數（*sunya*），則 $A=1, B=2, C=6, D=24$，其和 $=33$；以 33 除 132，得商數 4，即 A 之所付。

虛位解法先時之埃及人固已有之。但在彼爲不知不覺之手續；在印度則爲有意識之方法。巴士加拉氏實利用之，但巴哈沙利算術每取1爲未知之數，而巴士加拉則或取3爲之。例如有某數，五倍之，由此積中減此積三分之一，餘數以10除之，以原數$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$加之，因得68。問其數爲何？取3爲未知之數，如是得15，10，1，而$1+\frac{3}{3}+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}=\frac{17}{4}$，則$\left(68\div\frac{17}{4}\right)3=48$，卽其答數。

解題法之可寶者，當推迴返法。阿雅巴塔氏之簡單述詞如下：『乘變爲除，除變爲乘；益者損之，損者益之；是謂迴返法』。詞異而意同，則有以下阿雅巴塔之設問以解明此法，『目光明媚之美女乎，因汝知眞確之迴返法，其告余當爲何數，若以3乘之，加此乘積之$\frac{3}{4}$，以7除之，減此商數之$\frac{1}{3}$，以得數自乘之，減去52，求其平方根，以8加之，以10除之，而得數爲2？』其解法則自2起逐步反求，例如$(2\cdot10-8)^2+52=196$，$\sqrt{196}=14$，$14\cdot\frac{3}{2}\cdot7\cdot\frac{4}{7}\div3=28$，卽其答數是也。又一他例，得之於優美科學章中：『今有蜜蜂一羣，其一半之平方根數，飛集於花叢，全羣之$\frac{8}{9}$遺下未

動，另一雄蜂，爲夜間荷花香氣之誘，飛入其內，不得出另有一雌蜂飛繞之，求其一羣之數。』其答數爲72。算術問題，以詩歌出之，蓋印度之慣例，學校書籍，皆爲詩歌體，且此等問題，文若謎語，一社會珍視之遊戲品耳。而布拉馬格塔之言曰：『此等問題，僅供娛樂之用；巧智之夫，能作盈千之多，或能依此處所示之法，以解其他問題。如日之燦爛以掩星光，學者若製出代數之題，更能解決之，亦將掩閉他人之榮譽矣。』

印度人，熟知『比例法』，利息法（單利與複利），混合術，水泉或水管之題及算術級數幾何級數之求和。阿雅巴塔嘗應用『比例法』於下問題——16歲之女奴價值32尼西加（*nishkas*），問20歲者，價值幾何？——並謂以反比例求之，蓋因『生物之價值（奴隸與牲畜）視其年齡』愈老愈賤故也。至於平立方根之開法，亦爲印度人所熟知。藉公式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$及$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 爲之。

印度人大有貢獻於代數學。連書二數，以表相加，一似帶奧蕃塔斯之代數；作一點於減數之上，以表相減；書 *bhavita* 字（乘積之意）之省體 *bha* 於因數之後，以表乘；置除數於被除數之下，以

表除平方之根，則書 *ka* 於數前以表之，*ka* 者由 *karana* 字（無理數之義）而來。未知之量，布拉馬格塔稱之為 *yâvattâ vat* 若干未知之量，彼則異於帶奧蕃塔斯，各予以特殊之名號，除第一量外，悉以顏色別之名為黑，青，黃，紅，綠等未知量，取每字起首之一音以作其符號。例若 *yâ* 之意為 x；*kâ*〔由於 *kâlaka* 黑之意〕之意為 y；*yâkâbha* 之意為"x乘y"；*ka* 15 *ka* 10 之意為『$\sqrt{15}-\sqrt{10}$』是也。

印度之人，首先識別獨立之負數，及無理數。正數負數之分，一則附以『盈餘』之意義，一則附以『負欠』之意義，或以之表示反對之方向。有一步驟，遠非帶奧蕃塔斯之所能及者，則為其承認二次方程有兩答數一事。例如巴士加拉示 $x=50$。或 -5，俱為 $x^2-45x=250$ 之根是。且彼之言曰，『此例之第二值，因不合宜，棄而未取；蓋人皆不滿意於負根也』。故負根雖得而知之，但不為人之所容許耳。印度之解二次方程，見於布拉馬格塔及阿雅巴塔二書者，可識別其為希臘之法術。於彼等之著述，及於亞歷山大之希綸氏之著述中，$ax^2+bx=c$ 一式，皆依一定則解之，而得

$$x=\frac{\sqrt{ac+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}}{a}。$$

此定則嘗爲克利特哈拉氏所改良，先乘此式之兩端，不以a，但以$4a$，異其先民，因之根號下之分數消去，而得

$$x=\frac{\sqrt{4ac+b^2}-b}{2a}$$

關於二次方程之理論，印度之最要進步，則爲齊視$ax^2+bx=c$，$bx+c=ax^2$，$ax^2+c=bx$三例，而納於同一定則。在帶與蕃塔斯氏，則此等之例，似爲分別討論。因其缺之負量之知識也。

有一進步，遠過於希臘，即較布拉馬格塔，亦有過無不及，則爲巴士加拉之學說。其言曰，『正數負數之平方，常爲正數；正數之平方根有二，一正一負；負數無平方根，因其非平方之數。』

吾人見希臘之人，數與量之間，分別甚嚴，無理數本不認之爲數，而無理數之發現，則爲其最高成績之一。然古印度之人，初無有理數與無理數之分，且亦未嘗注意及之。故自有理數以至無理數

一爲連續一爲非連續中間曾有深如海灣之間隔，彼亦置若罔聞。彼等納無理之數於尋常數量之中，視之一若通常之數。於是彼等於算學之進行，非常便利；因其所得之結果，常憑直覺，若用嚴密論理之法，則將費更大之勞力。故韓克爾氏之書曰（195 頁）『若一人於代數之法，而知算術運算之應用於一切之複數量，或爲有理數，或爲無理數，或爲空間數量，則印度婆羅門學者，固代數學之眞正發明人也。』

吾人於巴士加拉氏，得重要之恆等式二，其一式則幾乎吾人之一切學校代數，無不有之，即『二項無理式』之平方根求法是也。歐几里得卷十嘗論及之，括以抽象文詞，難於領悟者，於此則以代數式顯之，一目瞭然，並應用於數目之運算：

$$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

$$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{a+b\pm2\sqrt{ab}}。$$

(2)亞拉伯

亞拉伯人嘗於進化史中呈一異常之奇觀。蓋亞拉伯半島之民族，初爲愚昧無知，散漫不統一之部落，缺乏政治與戰爭之知識，忽於十年之間，由宗教之鎔冶，一躍而爲強國，百年之內，擴大其領土，自印度而北非洲，而西班牙，俱歸其版圖。自此更百餘年，則見爲研究學術之領袖；回回教徒，遂爲當時積學之士焉。

穆罕默德(*Mohammed*)嘗自麥加(*Mecca*)逃於麥地那(*Medina*)，約當其後 150 年，巴格達城(*Bagdad*)阿爾曼蘇(*Almansur*)王之廷，曾研究印度之學。773 年(唐代宗大曆八年)其廷內有一印度天文家，及天文之表冊，奉王之命，已譯爲亞拉伯之文字。而此等表冊，亞拉伯稱之爲 *Sindhind*，或得自布拉馬格塔之 *Siddhanta*(婆羅門正宗)者，實大佔勢力，其印度之數目字，或藉此以輸入焉。除亞爾比拉尼(*Albiruni*)氏旅行之外，印度與亞拉伯學者之交通實無其他確據，然日後歷史上之探索，或能發現更密之關係，亦未可知。至於亞拉伯之取得希臘學術，則較有

明證，吾人於他處將論其幾何與三角焉。阿部爾瓦發（*Abûlwafâ*）者（940年迄998年，後晉高祖天福五年迄宋眞宗咸平元年）曾譯帶奧蕃塔斯氏之代數書，希臘最後著作家之一，因得名播亞拉伯之間矣。其他歐几里得，亞破朗尼亞，及托勒密則幾乎兩世紀之前，巴格達之亞拉伯學者，固早承受其學理矣。

夫亞拉伯之一切算術，於時代爲最早，於歷史爲最要者，當推亞耳且力士米（*Alchwarizmi*）之算術，氏生於亞魯嗎蒙（*Al Mamûn*）王在位之時（813年迄833年，唐憲宗元和八年迄文宗太和七年。）彼之生平，首以天文學是務，一若亞拉伯之一切算學家，蓋亞拉伯人同於印度人，算學之研究，固其第二步也。亞耳且力士米之算術，初以爲早經散失，但1857年（清文宗咸豐七年，）有一拉丁文譯本，或爲巴斯（*Bath*）地方阿忒拉得（*Athelard*）氏之作，得於劍橋（*Cambridge*）大學之圖書館。開篇之文，爲『亞耳哥力得米（*Algoritmi*）之言曰，奉應得之頌詞於上帝，彼爲吾等之指導人，保護人』云云。著作者之名亞耳且力士米，已變爲亞耳哥力得米，近時『亞耳哥力士姆』（*Algorism*）一字，義爲演算之技術，或卽因此而得音義矣。亞耳且力士米熟於位値之理，及

印度之算法，對於亞拉伯之著作家，彼之算術，『簡潔明瞭，遠勝他人，並於其最大之發明，顯出印度人之巧智與精敏焉。』亞耳且力士米之於加減，自左而右，但於減法，減大數於小數，則不能解明，亦可異之事也。其於乘法，爲印度方法之一，改行於紙上：每次部分乘積，書於被乘數相當位置之上；不似印度人，抹去數字，但畫斜線以銷去之。至於除法，則亦依同一之理，先置被除數，書除數於其下，商數於其上，被除數中減去每次部分乘積之餘，書於商數之上，每除一次，移除數於右方一位，其原著，嘗詳釋 $46468 \div 324 = 143\frac{136}{324}$ 之例，桃坎氏錄其簡式如上之左方。此種除法，殆爲先時歐洲之著作家仿效亞拉伯程式者之所採用，直至十八世紀，尚未絕迹於歐洲。嗣後亞拉伯之著作家，修改亞耳且力士米之法，因之漸近現時通行之式，亞耳且力士米亦嘗詳釋六十進位分數之用法。

```
  136
  24
 110
 22
140
143
46468
324
 324
  324
```

加減乘除之外，亞拉伯之算術，常繼以『棄9』法（有時稱爲『印度檢驗法』）『假位法，』『倍位法，』平立方根及分數（不置分數橫線，若印度然）而『比例法』嘗見於亞拉伯之著述中，有時列於代數內。至於算盤之用，則先時之亞拉伯人中，實無痕迹可尋，殊覺奇異，

迨十三世紀之末（元世祖之際）始見一亞拉伯著作家阿爾培那（*Albanna*）氏，取算盤與印度算法，合用之。氏居於非洲之布嘉（*Bugia*）海口，恐是受歐洲之影響，因得算盤之知識。

歷時既久，東方之亞拉伯人，於算術代數二者，漸離印度之傳授，而趨於希臘科學之感化。要知印度人，於此等學術，實多新穎思想，亞拉伯人棄之不用，實自阻其進步，可爲長太息者矣。故巴格達之阿爾喀拉當（*Alkarchi*）氏，當十一世紀之初（宋眞宗之際）著一算術。書中無一印度數字，每遇一數，皆以文字完全寫出，其他關係，則幾乎全仿希臘之格式。此外又一著名之著作家阿部爾瓦發，當十世紀之下半（後周與宋初之際）著一算術，亦無印度數字。夫如此著名之著作家，何以印度數字，竟莫之知，實一可疑之事。坎桃氏解之曰，『想當時有對峙之兩學派，其於算學，一則幾盡從希臘，一則幾盡從印度。』

algebra（代數）一字，第一次見於亞耳且力士米之代數，書名 *aldschebr walmukâbala*；此兩字，前一字之義爲『回復，』後一字之義爲『對銷，』『回復』者，移負項於方程之他端，『對銷』者，棄去方程兩端相同之項，而一端較大者，得以存留。例如 $5x^2-2x=6+3x^2$ 一式，一經『回復，』則

變爲 $5x^2=6+2x+3x^2$，再經『對銷』則變爲 $2x^2=6+2x$，至於亞爾且力士米之 *aldschebr walmukâbala* 一書譯成拉丁文字之時，亞拉伯之名稱，仍保留之，但其第二字，漸漸失去而其第一字，則成爲 *algebra* 之形，是則此字之源流，研究其手稿之所發現也。有若干通俗之字學書，無此手稿之證據，亦嘗流行於世，例如謂 "*algebra*" 一字，發源於亞拉伯學者色維爾 (*Seville*) 地方人亞弗拉 (*Dschâbir ibn Aflah*) 氏之名字，即拉丁人所稱爲給柏 (*Geber*) 者是也。但給柏之時代，晚於亞耳且力士米兩世紀，故於此字最早之發現，亦晚兩世紀也。

亞耳且力士米之代數，一若其算術，初無自創之理論。惟詳述初等之術，及一次二次方程之解法而已。然則其代數之知識究從何來乎？謂其僅得之於印度，殆不合理，因印度之人，固無『回復』與『對銷』之法，亦無改各項爲正之習慣，若『回復』法之所爲。謂其得之於帶奧蕃塔斯氏之法則歟。則吾人實難斷定此亞拉伯之著作家，全以希臘之學說爲本，因其不同於帶奧蕃塔斯，而同於印度，能識別二次方程有二根，並容納無理數之解答。似此 *aldschebr walmukâbala* 一書，非純取法於希臘，亦非純取法於印度，蓋爲二者之混合物，而以希臘原料爲之主。

此書及其他之亞拉伯代數，有一點不及印度與帶奧蕃塔斯之格式，卽東方亞拉伯人全不用符號是也。關於記號，則其代數可分爲三類：(1)文詞代數，不用記號，一切意義，概以文字表之。屬此類者，則爲亞拉伯之作品（除晚近西方亞拉伯人之作品外），愛安布力卡斯氏與昔馬力大氏希臘文之作品，先時意大利之著作家與力佐莽坦納(*Regiomontanus*)氏之作品。故 $x^2+10x=39$ 一式，亞耳且力士米表之如下：『一平方及其根之十倍等於三十九；卽謂加十根於一平方其和等於三十九。』

(2)簡字代數，亦猶文詞代數，一切事物，俱以文字表之，但用簡體之字，以代表題中屢用之運算與事物。屬於此類者，則爲帶奧蕃塔斯之作品，晚近西亞拉伯人之作品，晚近歐洲之著作家，降而至十七世紀中葉（明末淸初）者之作品焉（除維塔氏 *Vieta* 外）。今摘錄帶奧蕃塔斯氏之一段，以爲例，因圖顯明起見，用印度之數字以表數，用相當之減筆英字以表希臘之記號。故若以 S, N, U, $m.$ 代表『平方』『數目』『單位』『減去』，則帶奧蕃塔斯氏第三問題第七例之解法，卽求三數其總和爲平方，其每二數之和爲平方之法，因演之如次：『假設此三數之總和等於平方 1S.

2N. 1U.，第一與第二等於 1S.，則其餘數 2N. 1U. 將爲第三數。今第二與第三等於 1S. 1U. m. 2N.，其根爲 1N. m. 1U. 今三數之總和爲 1S. 2N. 1U.；故第一將爲 4N. 但第一與第二共等於 1S.，故第二將爲 1S. 減去 4N. 至最後得第一與第三共等於 6N. 1U. 而必爲一平方。今此數爲 121U.，則數目 N. 成爲 20U. 因之第一爲 80U.，第二爲 320U.，第三爲 41U.，而符其條件。』

（3）符號代數，其一切形狀，一切演算，俱以完全發達之符號表之，若 $x^2+10x=39$ 者其一例也。蓋自十七世紀之中葉而後，印度之作品，歐洲之作品，俱可屬之於此類。

由此涅色爾曼（*Nesselmann*）氏之分類觀之，則於此學，印度人之進步，及先時亞拉伯人之返循故步，固瞭於指掌焉。雖然，亞拉伯人，於吾人所謂幾何式之代數，實有具體之貢獻。彼等（亞耳且力士米，阿爾喀拉嵩）不特於算術證明之外，於二次方程之解法，示以幾何之證明，且彼等（阿爾馬哈尼，(*Al Mâhânî*)阿部遮發奧耳卡辛，（*Abû Dscha far Alchâzin*）阿部爾遮得，（*Abûl Dschûl*）奧瑪阿耳卡遮米（*Omar Alchaijâmî*）於三次方程，已發明幾何之解法，其在代數，仍視爲不能解之問題。而其根則以圓錐曲線交點作成之。

在亞拉伯著作家之間，阿爾喀拉嵩氏實最先指出而證明下列級數總和之理：

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{2n+1}{3}(1+2+\cdots\cdots+n)$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=(1+2+\cdots\cdots+n)^2$$

或謂西方亞拉伯人嘗發明一種代數符號。其在東方，用幾何法以馭代數，已成通行，而在西方，則亞拉伯人研究算術與代數，俱與幾何無關。然饒興致者，則推安達琉西亞(*Andalusia*)或格蘭那達(*Granada*)之阿爾加薩提(*Alkalsâdî*)氏之作品，氏卒於1486年(明憲宗成化二十二年)或1477年(明憲宗成化十三年)。書名爲 *Raising of the veil of the science of Gubâr*，譯言『數學闡微』，"*gubâr*" 一字，原訓『塵埃，』此則指筆算與心算爲對也。其於加減乘三法，得數書他數之上，平方根以 *dschidr* 字起首字母 $\dot{\vee}$ 表之，此字義訓爲『根，』特訓爲『平方根，』故 $\sqrt{48}=\dfrac{\dot{\vee}}{48}$。比例式如 $7:12=84:x$，則書爲 $\dot{\vee}\therefore84\therefore12\therefore7$，此未知數量之記號，或爲 *dschahala* 字之起首字母，字則『未知』之義也。至亞拉伯之寫字，常自右而左。在純粹代數中，未知數量，則以 *schai* 字或 *dschidr* 字表之，而阿爾加薩提氏，則嘗用其簡體，因得 x；＝ ش，x^2 ＝ م，ل 爲等號。故彼依

此法而書 $3x^2=12x+63$ 一式爲

$$63\ \overset{\text{ش}}{12}\ \overset{\text{ل}}{3}$$

此種記號法，至遲在阿爾培那氏之時（生於1252年，即南宋理宗淳祐十二年，或1257年，即理宗寶祐五年）西方亞拉伯人或已開始發達之。回憶歐人，於所爲拉丁文譯本中，嘗仿效此種記法，斯亦耐人尋味者也。

(3)中古時代之歐羅巴

野蠻民族，起於北方之深林大澤，及東方之烏拉嶺（*Ural*），而進據歐陸，攻滅羅馬帝國者，其承襲學術之珍品，古代之文化，比之回教徒，實較緩慢。至於西方算學之最先陳迹，則要以羅馬之根源爲歸。

I. 羅馬算術之輸入。——波伊悉阿斯氏與卡息奧多拉氏而後，意大利之算學研究，截然停止。約再後百年，有以錫多氏者(570年迄636年，即南朝陳宣帝太建二年迄唐太宗貞觀十年)爲西

班牙之色維爾主教著一百科全書，名曰『學源』(*Origines*) 其式則仿卡珀拉 (*Martianus Capella*) 氏及卡息奧多拉氏之羅馬百科全書，其一部分則卽所謂科學之四道是也。彼於專門之名詞，嘗示其定義，考其源流，但於通行演算之方，則並未解釋。彼分數爲奇偶二類，次論完全數及餘剩數等等，終則亟讚數之爲物，其辭如下：『有物卽有數，無數則萬物消滅。』以錫多氏而後，又經黑暗之時代者百有餘年，嗣則有英格蘭之僧人俾得 (*Bede*) 長老應時以出 (672 年迄 735 年，卽唐高宗咸亨三年迄玄宗開元二十三年。) 長老之著作中，詳載耶穌復活節之求法，及手指之算法。手指記數術，似爲當時所盛用。確定耶穌復活之期，爲在當時激動教會最烈之問題。故欲每一修道院中，至少須有一僧人能決定宗教之節期，嘗予算術研究以莫大之提創。坎桃氏有言曰，『復活節之推算，其眞確起算之點，爲俾得氏所創，卡息奧多拉氏等亦有其法，以每十九年陰陽曆相合之時爲根據，並令學者於解決此問題時，無須過量之算術知識。』無怪俾得氏之於分數，無所論述，僅有一次提及羅馬十二進之盎斯云。

俾得棄世之年，卽繼起大理想家亞爾琴 (*Alcuin*) 氏出世之年 (735年迄 804 年，卽唐玄宗

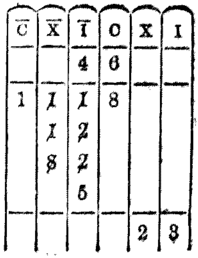
開元二十三年迄德宗貞元二十年。）彼先就學於愛爾蘭後在查理曼(*Charlemagne*)王之朝，管理法蘭克（*Frankish*）帝國之教育行政。其所建之學校，在修道院者，教授聖詩，書法，歌唱，計算及文法。因復活節之決定，對於後生小子，不能有特別之興趣或價値，故所謂計算，或指普通之計算。至所用計算之方法維何，要非吾人所得知，阿爾琴氏未必熟於算盤，或波伊悉阿斯氏之算錐。彼同列於中古時代文藝復興時代諸學子之林，嘗納數理於神學。例如創造萬物之上帝，所造生物之數爲六，因六爲完數（等於其除數 1,2,3 之和；）但八則爲不完數，因其除數 $1+2+4<8$，於是人類第二次之源，發生於八，卽所謂諾亞(*Noah*)方舟中之人數也。

有一集錄，名『促智問題』(*Problems for Quickening the Mind*)者，爲西歷一千年時（宋眞宗之際）或再前之古物。據坎桃氏之意，則謂其爲時更早，且係阿爾琴氏之作品。此集錄中之算術問題，內有水泉問題，亦見於希倫書中，希臘集中，及印度書中，其第 26 題云：一犬追一兎，兎先行 150 尺，犬一躍 9 尺，兎一躍 7 尺，求經過若干躍犬可追及兎，以 2 除 150 卽得。其第35題云：一人臨終，其妻有孕未產，囑曰，生男，則男當承其產業 $\frac{3}{4}$，而其妻承 $\frac{1}{4}$，生女，則女當承其產業 $\frac{7}{12}$，而其

妻承$\frac{5}{12}$。假如此人死後所生爲一男一女，則產業當如何分配乎？此題頗饒興趣，蓋因酷似一羅馬問題，則以其源出於羅馬殆無有誤。然此集錄中所示之解法，則迥異羅馬之解法，且完全錯誤焉。此集錄中之問題，有屬於幾何者，亦有僅爲謎語者，譬如狼，山羊，椰菜之一題是也，後文將再論之。此集錄之編者，顯係欲供讀者之娛樂，該諸問題，原爲盎格羅撒克遜(*Anglo-Saxon*)人之所好，而阿爾琴氏，尤爲有名。書名『促智問題』亦頗有趣。據此，足證雖中古黑暗時代，尚認算學有發展心智之能力。柏拉圖校門上之著名標語，已屢屢述及矣，此事雖不足爲重大證據，然亦可見欲提醒一民族之智督之難矣。

自查理曼帝國分崩，戰爭擾攘，學術研究，因以中輟，至第十世紀（唐末宋初），始獲再興，而大要皆由於給爾貝(*Gerbert*)氏一人之力。氏生於奧佛涅(*Auvergne*)之奧里拉克(*Aurillac*)地方，受教育於修道院，研究學術於西班牙，而以算學爲主。又嘗爲理姆司(*Rheims*)，拉溫那(*Ravenna*)之主教，最後升爲羅馬教皇，稱爲西維士德第二(*Sylvester II*)卒於1003年（宋眞宗咸平六年）一生嘗飽經政治之紛擾，與宗教之競爭云。

給爾貝氏嘗精讀波伊悉阿斯之著作，印行算術書二：一爲『算盤定則』(*Rule of computation on the abacus*)一爲『數目除法』(*A small book on the division of numbers*)。此乃吾人得窺其演算方法內容之第一次。氏所用之算盤，或爲阿爾琴氏之所未知，其在青年時代，嘗授課於理姆司之學校，科學之三道與四道，爲其教授之科目。聞其門人某言：其師嘗令盾牌工匠，製一皮革算板，縱分27行，備角質算子，上書自1至9之數字（算錐。）又有柏湼利納斯(*Bernelinus*)氏者，亦給爾貝之門人，則謂算盤之製法，爲一光滑板，幾何家常佈藍色之沙於上，以作各種之圖，至用於算術，則縱分此板爲30行，留三行以供分數之用，其餘27行，則以每三行爲一組，每組之三行，又以百，十，單，等字分別記之。柏湼利納斯氏曾詳示所用自1至9之數目（波伊悉阿斯之算錐，）並謂可用希臘字母代之。依此器各行之用，雖無零號，亦能表任意之數，而算術中之一切運算，亦足以優爲之。蓋其算盤家之加，減，乘三法，與今世之所用者，大致相同也。附圖即表23乘4600之演式，其進行之序如下：$3\times6=18,3\times4=12;2\times6=12;2\times4=8;1+2+2=5$; 移去1,2,2,而置5;$1+1+8=10$; 移去1,1,8而置1於稍左之行。因得其和爲105800。若用算子，則此處所塗去之數目



字，（例如第四行之1,2,2,）乃表示移去1,2,2之算子，而於其行置5之算子。若於沙上書數，則抹去1,2,2之數，而書5以代之。

至於除法，則與今世全異。觀其運算之艱澀，直可謂古人對於商之觀念幾爲門外漢。給爾貝曾爲除法之規則，而以符合下列之三條件爲依歸：（1）僅限於用乘法表，不得用心算以一位數乘二位數；（2）減法應避去，而代以加法；（3）運算應純用機械之方法，不得用試探法。使吾人憶及中古時代之僧侶，幼年並未嘗入學校，故於乘法表尚未純熟，則其設立如是之條件又何足怪。給爾貝之除法規則，爲最古物之尚在者，然簡約含糊使學者無從入手，但注意其每次之步驟，或能幫助記憶。後之抄傳本，則論述較詳，試取$4087\div6=681$爲例以解明之。其法爲『補足除法』之一種，羅馬人有用此種方法者，但在印度人，亞拉伯人，則吾人尚未之見也。至所以名爲補足者，則試觀此例中，不用6，而用$10-6$即4以爲運算，可以知矣。其理由則可於以下之部分解釋見之：$4000\div10=400$，置此數於下，作爲商數之一部分。但10爲太大之除數；改正此誤點，加以$4\times400=1600$之數。如是$1000\div10=100$，

置此數於下，作爲商數之一部，改正此新課之點，加以4×100=400之數。如是600+400=1000。

I	X	C	Ī
4			
6			
7	8		4
4	6	6	1
8	4	4	1
9	8	4	
4	4	1	
3	2	1	
4	4	1	
7	6		
1	2		
	1		
	1		
6	4	4	
2	1	1	
1	1	1	
1	1	6	
1	8		
1			

因之以10除1000等等。故得知此等之補足除法，於5以上之乘法表，皆不必用，及而近世之演算家，於以上之除法，則似覺其複雜，殆盡人類之智巧而始能明者歟。無怪乎僉謂給爾貝之除法，一般勤苦之算盤家，多不能領悟；更無怪乎亞拉伯之除法，輸入歐洲之初，即名爲『金除法』，而屬於算盤者，名爲『鐵除法』也。

*註 此除法之程序如下：置被除數4087，置除數6於其上，於6之上置4，即10−6之較數，乘此較數4於i行之4，移積數16於右一行；抹去i行之4，置4於C行下水平線之下，作爲商數之一部。以4乘i行之1，置積數於C行；抹去1，置1於右一行之下。以C行之數相加，6+4=10，置1於i行。依此求之，1×4=4，置4於C，置1於下。4×4=16，置於C與X，置4於X之下；1×4=4置於X，置1於下；4+6+8=18，置於C與X；1×4=4，置於X，置1於下4+8=12，置於C與X；1×4=4，置於X，置1於下；2+4=6置於X。

$6\times4=24$，置於 X 與 I，置 6 於下 $2\times4=8$，置於 I，置 2 於下 $8+4+7=19$，置於 X 與 I；$1\times4=4$，置於 I，置 1 於下 $9+4=13$ 置於 X 與 I；$1\times4=4$，置於 I；置 1 於下 $3+4=7$。以 6 除 7，得 1 而餘 1。於 I 行上下置 1。以下列各行之數相加，得和 681 爲答數，即 $4087\div6=681$ 而餘數 1 也。

因之而得一疑問，給爾貝果由何處以得此算盤及補足除法乎？算盤一物，或發源於波伊悉阿斯氏之著述，但補足除法一事，當給爾貝以前，則其已發達之形式，從未之見。果爲彼之所發明乎？證以彼之函件之一，則似爲『約瑟薩皮恩（*Joseph Sapiens*）氏』之乘除稿件，彼曾研究之，但據近世之考究，則並未發現關於此人，或其著作之證據。

後此五百年間，算盤之形狀，頗有修改之處。非僅佈沙之算板，消滅無迹，即給爾貝之算盤，縱分成行，註記號以數目者（算錐）亦蕩然無存。斯時替代之物，爲一演算之板，自左至右，橫分成列，用同式之記號，並不註以數目。其實用之例，見於最先出版之算術。將於論述里考地時可解釋之。而此新器具，則嘗見用於日耳曼，法蘭西，英格蘭，但未見用於意大利耳。

II. 亞拉伯稿本之翻譯——以十二世紀爲始，所成之譯件，內有亞耳且力士米之算術（似爲

巴司之阿忒拉得氏所譯，）亞耳且力士米之代數（倫巴提（*Lombardy*）之格里摩拿（*Cremona*）地方吉拉得(*Girard*)氏所譯，）及亞耳巴旦尼(*Al Battânî*）之天文（提服利（*Tivoli*）之柏拉圖氏所譯。）色維爾之約翰，則著一亞耳且力士米式數術全集，取材於亞拉伯之諸著作家。故亞拉伯之算術與代數，遂得立基礎於歐陸。因之亞拉伯式，恐實爲印度式之演算法則，借同零號，及位值原理，始取算盤術而代之。但新術之戰勝舊術，亦非一朝一夕之功。兩算術學派，即舊式算盤學派，與新式亞耳且力士米學派，競爭之久，則有非意料之所能及者，諸著作物，爲兩學派所出版者，有霄壤之差異，據此，則顯似兩派乃出於兩不相關之來源，且有人謂給爾貝之得其算錐，及其算術知識，非由於保西阿氏，但由於西班牙地方之亞拉伯人，並謂波伊悉阿斯氏之幾何，其一部分，或其全體，爲給爾貝時僞造之物。此說若確，則於給爾貝之著作中應得尋出其亞拉伯來源之痕迹，若色維爾之約翰著作然。但卒未發見此種相似之處。給爾貝實無從習算盤於亞拉伯人，因吾人尚未能徵實亞拉伯人曾用過算盤也。至於亞耳且力士米派之算學家，與算盤家相反之點，則前者論及印度，用此亞耳且力士米名詞，運算用零號，而不用算盤，後者則否；前者有開方法，後者無之。前者示亞拉

伯人所用六十進位之分數，而後者則用羅馬人十二進位之數。

III. 第一次醒悟——近十二世紀之末，有一人崛起於意大利，對於算學，具眞確之才智。彼並非僧人，若俾得，亞爾琴，給爾貝諸人然，但爲一商人耳，閑暇之時，即從事算學之研究，耶教所及之地，算學之初次復興，胥以此人是賴，此人非他，比薩之梁拿多，又名菲榜那西（*Fibonacci*）者是也。梁拿多當童年之時，曾習算盤，嗣後遊歷四方，埃及，敍里亞，希臘，西西里等處，足跡殆遍，於演算之法，遂得熟悉多種，而於多種之中，尤長於印度之法術。旋里之後，1202 年（南宋寧宗嘉泰二年，）彼印行一拉丁文之書名爲算盤全術（*liber abaci*），其再版之時，則在1828年（清宣宗道光八年。）此書所載，包括亞拉伯人對於算術與代數之全部知識，且足表明其著作人不僅爲一抄錄家及仿效家已也。此書開篇之詞曰：『印度之數目字爲 9,8,7,6,5,4,3,2,1 九字，用此九字，與亞拉伯所名爲 *sifr* 之零號0，任何數俱可表之。』亞拉伯之空字 *sifr* 一變而爲拉丁文之 *zephirum*，再變而爲英文之零字 *cipher*。若憶及亞拉伯之書法，自右而左，則知在以上之引述，梁拿多之書寫數目，爲何不依遞升而依遞降之序，並知其爲何書 $\frac{1}{2}182$ 以代 $182\frac{1}{2}$ 之故矣。記載循環級數之書，據

人所知，此爲最古而下述七老婦之題，亦饒興趣，蓋因3000年前，曾爲亞麥斯之所示（程式稍異，）其詞曰：七老婦同赴羅馬，每婦有七騾，每騾負七袋，每袋盛七麵包，每麵包有七小刀，每小刀有七鞘。求以上所列舉之總和。其答案則爲137256，而數百年間，梁拿多之書，殆爲著作家之貨棧，著一算術之書，作一代數之籍，莫不取材於此。至梁拿多自己之代數，則又純屬『文詞式』即無一切之代數記號是也。

梁拿多之令名，傳播於意大利全境，故霍亨斯陶芬（*Hohenstaufen*）帝腓特烈第二（*Frederick*），因欲召見之。當此提倡學術之偉人，晤及此著名代數家時，嘗備有一著名之科學競賽。命巴勒摩（*Palermo*）之約翰，爲公證人，提出若干問題，梁拿多於片時卽已解出之，第一題求一數x，俾x^2+5，與x^2-5，各爲平方數。其答爲$x=3\frac{5}{12}$；蓋因$\left(3\frac{5}{12}\right)^2+5=\left(4\frac{1}{12}\right)^2$；$\left(3\frac{5}{12}\right)^2-5=\left(2\frac{7}{12}\right)^2$。也。亞拉伯人固嘗解類此之問題，但梁拿多解法大部分，似爲彼個人所首創。第二題爲解$x^3+2x^2+10x=20$。三次方程之普通解法，當時尙未發明，但梁拿多居然亦求得其一根之近似值。其答爲$x=1^\circ 22' 7'' 4''' 33^{iv} 4^{v} 40^{vi}$，此乃以六十進位之分數表之。化爲十進位之小數，可得九位之

準確數。觀其解此等及他種問題，則梁拿多之燦爛才能，不難立見。其幾何之著作，將於後文論之。

意大利間，印度數字，立爲知識界所承認，但其最初嘗爲學者所拒絕。十三世紀之時，意大利商人，卽已用之。1299年（元成宗大德三年）曾禁止弗洛侖斯（*Florence*）之商人用印度數字於帳簿，並諭令須用羅馬數字，或用文字寫出。而此令之出，或因當時所用之印度數字，尙未成確定之形狀，易致誤認，及欺騙之弊。故雖時至今日，匯票期票中，銀錢之數，仍常以文字寫出之。意大利算術成熟甚早，頗有確證。皮考克（*Peacock*）有言，『多斯加納（*Tuscany*）與弗洛侖斯二城爲十三與十四世紀（約南宋寧宗迄明太祖）文學藝術之發祥地，其人俱以算術之知識著名；簿記法中所謂意大利式者，卽爲彼等所發明；而算術連算爲大規模之貿易所必需者，亦嘗爲彼等精心之所培植，之所改良；吾人今日算術中之有單複比例法，賺賠，合股，兌換，單利，折扣，複利，等篇者，皆彼輩之賜也。』

十五世紀中葉以前（約明景帝以前，）日耳曼，法蘭西，及英格蘭之間，罕有用印度之數字者。有印度算術之一小書，名爲『數之藝術』（*De arte numerandi*），又名爲『亞耳且力士米式算

術」(*Algorismus*)，誦習於法蘭西，意大利者數百年。通常認為約翰哈黎法克司(*Halifax*)又名薩克羅保士科(*Sacrobosco*)，又名和力武得(*Holywood*)之著作。氏生於約克州(*Yorkshire*)，就學於牛津，後改居巴黎，授課以終，卒於1256年(南宋理宗寶祐四年)。此小書只載法則而無證明，亦無數目之例；無分數。刷印於1488年(明孝宗宏治元年)，再版數次。據狄摩剛云，在一法蘭西市鎮間(市名斯特拉斯堡 *Strasbourg*)，刷印算術之書，當以此為第一。

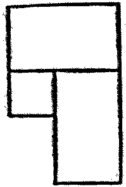
近世算學上之觀念，間有為中古時著作家之所預知者。例如奧勒司麥(*Nicole Oresme*)氏，諾曼底(*Normandy*)之一主教也(約1323年迄1382年，即約元英宗至治三年迄明太祖洪武十五年)，最先思及分指數，後復為司蒂文(*Stevin*)氏所發見，且示以記之之法。譬如 $4^3=64$，$\sqrt{64}=8$，因得 $4^{1\frac{1}{2}}=8$。而奧勒司麥之記法，則表 $4^{1\frac{1}{2}}$ 以 $\boxed{1p\cdot\frac{1}{2}}\,4$，或以 $\boxed{\frac{p\cdot 1}{1\cdot 2}}\,4$。然雖有此種提醒，而在事實上曾經十四與十五兩世紀之久(約元成宗迄明孝宗)，於獨造之算學探求，仍毫無進步，當時固不乏著作之人，但其於科學之致力，皆為其學派思想所壞耳。

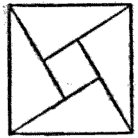
第二章　幾何與三角

(1)印度

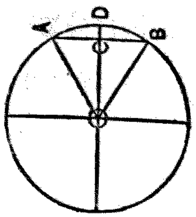
吾人於印度之幾何研究，記錄將甚簡約；一因印度人，與埃及與羅馬人同，並無幾何之一科；二因印度人與埃及與羅馬人異，並不爲關於幾何之計算猶之他國之教師也。彼等先時之幾何，是其固有，後來之幾何，則得自希臘，及中國。布拉馬格塔氏嘗示求三角面積之『希綸公式』又嘗示托勒密氏四邊形兩對角線乘積等於對邊乘積和之問題，並附加其自己所考得圓內四邊形之新理焉。推算面積一端，爲印度幾何之主要部分，阿雅巴塔氏示 $a=\frac{31416}{10000}$。巴士加拉氏證明直角三角形之理，實饒興致，畫相同四直角三角形環繞於其弦方之內，如是中餘一方，方邊爲兩股之較。次移置小方及四三角形成他種之狀，則見其湊成之形，恰等兩股之平方和。故巴士加拉氏僅言『諦

視』(*behold*)一語，並未加隻字之解釋，已能令人領悟矣。然嚴整之證明，在印度不常有，此則為一中國著作家再早時之所示，而可以同於此者，亦惟畢達哥拉氏之證耳。巴士加拉之於他處，又用別法以證明此理，即自直角頂點，畫垂直線於其弦，嗣用合宜之方法，以處理所分成相似三角形之比例即得。然此證之手續，非至華里司(*Wallis*)重新發現之時，歐陸之人固莫之知也。





印度人治三角學較多成功。彼等視三角為研究天文之利器，與希臘人同，分圓周為 360 度，21,600 分，又與巴比倫及希臘人同。用 $\pi=3\cdot1416$，$2\pi r=21,600$，彼等求得 $r=3438$；即半徑約合此圓周如是等分之3438份。然此一步，並非希臘之所有，因希臘之若干算學家，對於用曲線以量直線，固懷疑莫決也。托勒密氏之分半徑為六十進位之數，與分圓周之數無關；故無公共單位之選定。印度人，則分每象限為24等分，每等分得 21,600 份之 225。而印度三角中，有一緊要之特點，彼等不以倍定弧之通弦入算，如希臘人之所為，但以定弧之正弦（即倍定弧之通弦之半，）及定弧之正矢入算。通弦 AB，婆羅門教徒名之為



jyâ 或 jîva，亦卽獵人弓弦之義。半通弦 AC，彼等用 jyârdha 或 ardhajyâ 字以名之，但通弦之名稱，亦嘗圖簡約而用之。追尋此等字體之源流，頗具興味。亞拉伯人直譯 jivâ 或 jîva 爲 dschîba。後用同形之字，其意爲『胸膛』者 dschaib 以代之。提服利之柏拉圖譯此字爲拉丁文之 sinus，三角術中，因得 sine 之一字(正弦。)印度人，又用 utkramajyâ 字以表『正矢，』Kotijyâ 字以表『餘弦。』似此可見印度人，已用吾人三角中三函數，而希臘人，僅用一通弦耳。

印度人，依理論簡單之方法，推成一正弦表。因 90° 之正弦，等於半徑，或 3438；AB 60° 弧之通弦，亦爲 3438，故 AB 弧通弦之半 AC，或 30° 之正弦，爲 1719。用公式 $sin^2a+cos^2a=r^2$，知 $sin45°=cos45°$，彼等求得 $sin45°=\sqrt{\frac{r^2}{2}}=2431$。用 $cos\ a$ 之等數 $sin(90°-a)$，以代 $(cos\ a)$，並令 $a=60°$，彼等求得

$$sin60°=\frac{1}{2}\sqrt{3r^2}=2978。$$

以 90°，60°，45° 之正弦爲起點，依 $versin\ 2a=2sin^2a$ 之公式，彼等推得其半角之正弦，卽

22°30′, 15°, 11°15′, 7°30′, 3°45′ 之正弦。因得其餘角之正弦，即 86°15′, 82°30′, 78°45′, 75°, 67°30′ 之正弦，次推半於此諸角之正弦；因又得其餘角之正弦，以下類推。依此簡單方法，彼等因得遞差 3°45′ 之一切角之正弦。印度三角學專書，今已無存。其天文書中，則有平弧正三角之解法，其於斜三角，則分為正三角，而以普通之法御之。因正弦表示遞差 $3\frac{3}{4}$ 度之值，介於其間之正弦，則以插入術求之。其天文之觀察及演算，則僅達稍可之準確云。

(2)亞拉伯

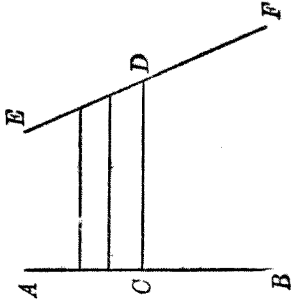
亞拉伯人於古之幾何知識，殆無所增益。然於算學之歷史上，實居一重要之職分；蓋彼等為希臘及東方科學之保管人，且隨時將其所保管者輸入於西方也。亞拉伯人一切幾何學識，以歐几里得之幾何原本為起點。彼等曾將此鉅著，譯成亞拉伯文字者數次，試想像如此翻譯中所遇之困難，如此一民族，方脫於野蠻之階級，未諳算學之思想，並於各文字之正當研究，機會亦殊有限。果於何處覓得一人，無文法與字典之助，而熟於希臘與亞拉伯之兩種文字，且兼為算學家乎？而精微遠到

之科學思想，果用何法能以未開化之文字，輸入於未開化之胸臆乎？雖然其所致此之故，當然非一二人之力，前人翻譯之成績，即後之翻譯家之所憑藉，如是繼長增高以躋於成也。

亞拉伯之當軸巧取希臘學者之助力。而敍里亞之科學，尤爲哲學與醫學，則皆希臘耶教徒所培植。其著名之學校，則爲安第奧克(*Antioch*)與愛麥薩(*Emesa*)二地之學校，及以得撒(*Edessa*)地方之景教學校。迨亞歷山大城640年衰微以後，此等學校遂爲希臘學術之東方總庫。歐氏原本譯爲敍里亞文，次由敍里亞，經希臘之耶教徒以傳於回教徒之首都巴格達。回教王哈倫阿拉齊得(*Harûn Ar-Baschîd*)時代(786年迄809年，即唐德宗貞元二年迄憲宗元和四年)易逢馬塔(*Haddschâdsch ibn jûsuf ibn Matar*)氏初成托勒密之數學庫及歐氏之幾何原本(前六卷)之亞拉伯文譯本。至回教王亞爾馬門(*Al Mamûn*)時代(813年迄833年，即唐憲宗元和八年迄文宗太和七年)氏成其第二譯本。而此回教王與君士坦丁堡(*Constantinople*)之大帝所訂之和約，其中有一條件，即大多數之希臘典籍，得由彼諭令譯成亞拉伯之文字是也。易逢胡楠(*Abû Iakûb Ishak ibn Hunain*)者，在其父易逢意暇克(*Hunain ibn Ishâk*)監督之下，嘗譯歐氏

之原本，及亞奇默得之圓球圓柱論。然此等譯品，殊難令人滿意；蓋此等翻譯家，雖為優美之語言學家，實非高明之算學家也。當是時，希布西克爾氏（?）之幾何原本第十四卷及達馬細阿斯氏（?）之第十五卷已併入於歐氏之原本十三卷之內。而易逢加拉（*Tâbit ibn kurrah*）氏（836年迄901年，即唐文宗開成元年迄昭宗天復元年）始將其譯成亞拉伯文之歐式幾何，以敷各方之需要。至其他重要之亞拉伯文譯品中，尚有亞破朗尼，亞奇默得，希綸，帶奧蕃塔斯圖之算學著述。百年之間，亞拉伯人遂盡得希臘科學界之寶藏焉。

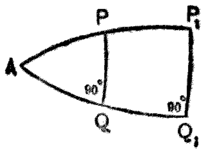
有一較晚而重要之亞拉伯文歐氏幾何原本，則為那西亞愛丁氏（*Nasîr Eddîn*）（1201年迄1274年，即南宋寧宗嘉泰元年迄元世祖至元十一年）所印行。氏為波斯之天文家，嘗說其恩主哈拉哥（*Hûlâgû*），為彼及彼之同志建一巨大觀象臺於馬拉加（*Maraga*）。氏嘗試證平行原理。設若干新假定，皆與所證之理等值。例如假定，若 AB 在 C 點垂直於 CD，若又一直線 EDF 成



EDC 銳角，則 AB 上之垂線，介於 AB 與 EF 之間，且在 CD 線近 E 之一邊者，離 CD 愈遠則愈短。故除以羅巴曲司給及波爾夜之眼光視之，則任何情形，亦難見其能逃此例焉。那西亞愛丁之『證明，』對於晚近平行論理之發達，頗有影響。氏之亞拉伯文歐氏幾何，出版於羅馬者，在1594年（明神宗萬曆二十二年，）而氏之『證明，』華里司譯之以拉丁文而印行者，則在1651年（淸世祖順治八年。）然而興味豐富者，則爲畢達哥拉定理之新證，卽那西亞愛丁所加於歐几里得之證者。有一再早之解釋，特爲兩等邊正三角形而設者，爲亞耳且力士米（*Mùhammed ibn Mùsâ Al-chwarizmi*）之所示，氏生於亞魯嗎蒙王在位之時。卽第九世紀之初期也（約淸仁宗嘉慶之際。）亞耳且力士米代數書中之討論幾何，實無精采，然亞拉伯人最早致力於此科學者唯此。此書具有印度勢力之明證。除 $\pi=3\frac{1}{7}$ 之外，並載有 $\pi=\sqrt{10}$ 及 $\pi=\frac{62832}{20000}$ 之印度二值。然再晚之亞拉伯文書籍，印度之幾何，寂然無蹤，而希臘之幾何，頓操其主權焉。有一書爲易逢薩克亞（*Mùsâ ibn Schâ-kir*）（幼時嘗爲盜）之諸子，所著曾示希綸氏三角面積之公式。又有一純粹之研究，阿部爾瓦發氏（940年迄998年，卽後晉高祖天福五年迄宋眞宗咸平元年）列於其『幾何作圖法』書中，彼

蓋科累散(*Chorassan*)之部善(*Buzshan*)地方士著也。彼嘗改良製圖法，而示球內接正多面體頂角之如何造法。故日後西方各處，成為著名之條件者，於此實初發其端，即多面體各角之畫成，僅需圓規一次之開張是也。

算學中亞拉伯人所成最優之創作，則為三次方程式之幾何解法，及三角學之發展。當773年(唐代宗大歷八年)回教王阿爾曼蘇已得印度之正弦表，或取於巴拉馬各堵之『婆羅門正宗一書(*siddhânta*)』。亞拉伯人名此表為*sindhind*，且奉為算學書之上乘。彼等早又得托勒密之算學庫，及其他之希臘天文書籍。亞耳且力士米氏為回教王亞魯嗎蒙所聘請，以選錄『婆羅門正宗』，以修改托勒密之表，以觀天象於巴格達與達馬士革，且以測量地球子午線之角度云。所堪注意者，則為亞拉伯著作家由弧三角公式所推得之理，非即舊時由於『門涅雷阿斯氏之六量規則，』但由於『四量規則』耳。其說曰：若PP_1與QQ_1為交於A點兩大環之兩弧，凡若PQ與P_1Q_1為垂直於QQ_1上兩大環之兩弧，則得比例



$$sin\ AP:sin\ PQ=sin\ AP_1:sin\ P_1Q_1。$$

夫棄去托勒密所採久用之法，初以爲易逢亞弗拉(Dschâbir ibn Aflah)氏始，但據亞拉伯典籍之晚近研究，則知由『六量規則』以變於『四量規則，』固易逢加拉氏之所優爲，故此種改革，實易逢亞弗拉以前之其他著作家所選定也。

九世紀（約唐憲宗迄昭宗）之天文家，當推阿耳巴旦尼(Al Battânî)爲巨擘，拉丁人所稱爲阿耳巴旦尼亞(Al Bategnius)者也。生於敍里亞境之巴旦(Battan)地方，其著述，名爲『科學之明星』(De scientia stellarum)者，十二世紀時（約宋徽宗迄南宋光宗）柏拉圖臺伯提那氏(Plato Tiburtinus)譯之成拉丁文字，在此譯作之中，亞拉柏字之 dschîba，本譯自梵字之 jîva，譯爲拉丁字之 sinus，即 sine 字之所由來也。阿耳巴旦尼雖爲托勒密之勤敏弟子，然亦不全依其模範。蓋彼嘗有一重要之改良，即輸入印度之『正弦，』或半通弦，以代托勒密之全通弦。而亞拉伯人對於希臘三角術之其他改良，亦同式顯有印度之勢力。運算與命詞，希臘人以幾何方法處理之者，亞拉伯人則以代數方法表顯之。故阿耳巴旦尼由$\frac{sin\theta}{cos\theta}=D$而得 $sin\theta=D\div\sqrt{1+D^2}$，

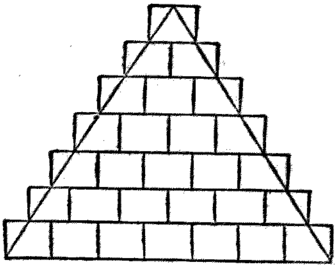
直捷求得 θ 之值，古昔之希臘人，實未知此法也。且彼於托勒密所知之公式，又附加其自己斜弧三角形重要公式之一；即 $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \times \sin c \cos A$ 是已。

阿部爾瓦發之研究，頗爲重要。彼發明一法，以造正弦表，表內示小數九位之半度正弦。彼與阿耳巴旦尼研究日晷之陰影三角時，首創三角函數之正切餘切；彼並用正割及餘割。然法術中一重要改革，則爲西班牙間色維爾之易逢亞弗拉氏（在十一世紀之下半，約宋神宗哲宗之際）及波斯遠國之那西亞愛丁氏（*Nasir Eddin*）所倡始。而在此兩著作家之書中，吾人第一次得見三角學，成爲純粹算學之一部，脫離天文學而獨立。

吾人今不欲作詳細之討論，但願鄭重聲明，當韃靼（*Tartar*）人武功暫止之時，在遠東之那西亞愛丁，實發展平弧三角而超乎常度。故薩式（*Suter*）氏嘗毅然問之曰，使十五世紀之歐陸學者得早知此等之研究，或其一部份人的知此等之研究，吾不知三角學中尚有彼等研究之餘地乎？於此問難，吾人且莫得而作最後之答案。

(3)中古時代之歐羅巴

I.羅馬幾何之輸入——當亞拉伯學術輸入歐羅巴之前，西方之幾何知識，不能謂其超過於紀元前600年(東周定王七年)之埃及。中古時代之僧人，僅知三角形，四角形，圓形，方錐，圓錐(若迦太基人卡珀拉氏羅馬百科全書中之所示)之定義，及簡單求積之規則。亞爾琴氏『促進心思之問題』一書中，三角地面積與四角地面積，則用同樣近似值之公式，若埃及人所用者以求之，而波伊悉阿斯氏曾列於其幾何之內：即長方形等於兩付對邊半和相乘之積；三角形等於二邊半和與第三邊之半相乘之積是矣。當亞爾琴氏以後，歐羅巴算學界之明星，厥爲給爾貝氏(卒於1003年，即宋眞宗咸平六年。)彼於孟都亞(*Mantua*)地方，獲得波伊悉阿斯氏之幾何，而熱誠研究之。給爾貝自己亦爲一幾何書之著作人。然其內容，並不多於波伊悉阿斯之幾何，惟波伊悉阿斯之偶然錯誤，悉爲改正耳，可見其於是科，固確有心得者也。中古時代初期之算學論文，應推給貝爾氏致烏德勒友(*Utrecht*)主教亞達爾波爾得(*Adalbold*)氏之一函件，內於三角形面積，依幾何方



法，以底乘高求得者，與依算術方法，以測量家所用a表等邊三角形一邊之公式$\frac{1}{2}a\times(a+1)$求得者，說明其何以不同之故。給爾貝氏示一正當之解釋，謂後一公式，乃設三角形分為衆小長方而計其全數不知倘有若干小部分溢出三角之外也。

II. 亞拉伯稿本之翻譯。——十二世紀之初，（約宋徽宗之際）實一文化活動劇烈之時。哲學家欲於波伊悉阿斯之記錄外，再多知亞里士多德之學說；算學家欲於已知之知識外，更求深奧之學理。然希臘之書籍不可得，故歐陸之人，祇得轉乞學術於回教徒；當此之時，亞拉伯人實世界學子之巨擘。英格蘭之僧人巴斯之阿忒拉得，吾人固已述之矣，彼遍遊小亞細亞，埃及，西班牙等處，冒無數之艱險，冀得回教徒之語言與科學。『蓋哥爾多巴（*Cordova*），色維爾，格蘭那達（*Granada*）等處之摩爾（*Moor*）人大學，固耶教徒之危險地也。』1120年（宋徽宗宣和二年），彼成一書，或即歐氏原本由亞拉伯文而拉丁文之最早譯品。彼又譯亞耳且力士米之天文表。然其由亞拉伯文所譯出之歐氏

原本，似有一舊時之拉丁文譯本以爲輔助。

一切重要之希臘算學書籍，俱由亞拉伯文以譯出。而倫巴提間格里摩拿(*Cremona*)之機拉得氏(*Gerard*)曾往托利多(*Toledo*)，1175年(南宋孝宗淳熙二年)在彼處譯算學庫一書。又聞其所譯出拉丁文字之書凡七十種，內有歐氏幾何十五卷，歐氏『論據篇』狄奧多西(*Theodosius*)氏『球形論』及門力那之一書。一歐氏原本之新譯本，則爲1260年(南宋理宗景定元年)，意大利間諾瓦拉(*Novara*)之坎佩納斯氏(*Giovanni Campano*，拉丁文爲 *Campanus*)所譯成。此書出後舊譯遂湮，故爲後來刷本之基礎。

III. 第一次醒悟——此時算學史之中心人物，爲比薩(*Pisa*)之梁拿多氏(*Leonardo* 1175 年迄?)。其主要研究，在代數學，但其『實用幾何』(*Practica Geometrae*)一書，出版於1220年(南宋寧宗嘉定十三年)者，亦精巧整嚴。歐几里得及其他希臘若干學者之著作，氏皆嘗研究，或爲亞拉伯之本稿，或爲其國人，格里摩拿(*Cremona*)之機拉得(*Gerard*)及提服利(*Tivoli*)之柏拉圖之譯本。梁拿多氏嘗以巧法證明『希綸公式，』及三角形三中線遇於一點之理(早爲亞奇默得

所知，但未證明。）又嘗首創長方體對角線之平方等於其三邊之平方和之定理。其用代數解出之諸問題例如下：於等邊三角形內求作內接正方，其一邊在此三角形之底上。

有一幾何書，類似意大利間梁拿多之著作者，則僧人約丹內（*Jordanus Nemorarius*）約當同時著成於日耳曼者也。書名『三角論』（*De triangulis*）1887年（清德宗光緒十三年）為加慈氏所印行。雖常引歐几里得之理，而實脫離希臘之格式。並非各地學校之教課本。蓋亦若梁拿多之著作，或僅為專門家之所誦讀耳。其重要定理之例，可述之如下：任意多角形，若其內外，皆能接於圓形，則兩圓之心不同在一點；圓內接無數同底三角形，等腰三角形為最大。約丹內嘗完成三等分角之法，用一刻有分寸之尺，同時施以旋轉及滑走兩種移動，其最後位置，則以尺上所記某長度定之。其分法不為歐几里得之公法所限，蓋歐氏公法，僅許用無分寸之尺及一圓規者也。彼又仿亞拉伯之著作家，輸入圖形一部分之移動法，如此之移動，乃歐氏書中所不許。與此同樣之三等分角法，坎排納斯氏亦嘗示之。

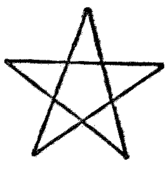
約丹內氏亦嘗試為改圓為方之法，則殊引起吾人之輕視。當時算學家頗注意。改圓為方之法，

究其效果直等於欲躍入空際之虹蜺中；彷彿已至之時，忽焉虹蜺不見，其所達到之距離，猶無異於其初試時也。然其中猶有多人，想入非非，自以爲確已達到目的，立於凱旋門，受世人之讚賀焉。

十四與十五兩世紀（約自元成宗迄明孝宗，）實無幾何家能與比薩之梁拿多氏並肩者。是時算學之作品甚多，並盡力以闡明其得自亞拉伯之豐富材料。惟於幾何學，則無實體之貢獻云。

有一十四世紀英文稿本，專言測量，其封面題辭曰：『此一幾何書，可用以求一切物體之高深，與闊。』有一最古之法文幾何書（約當1275年即約當元世祖至元十二年），亦無作者之名，與此英文書相同，專言求積之術。夫研究自古及今之典籍，則似乎歐陸之測量，自十三世紀（約南宋寧宗迄元成宗）以來，已脫離羅馬之格式，而全受希臘亞拉伯之感化。有一大名鼎鼎之著作家，名布拉德衛丁(*Bradwardine*)者(1290?迄1349年)，坎特布里(*Canterbury*)之主教也。就學於牛津之麥旦大學，後主該校之神學，哲學，及算學講席。其哲學著作中，有無窮大與無窮小之討論，自是此等論題始歸入算學以研究之，布拉德衛丁嘗著算學書若干種。有『幾何探微』一書，1511年（明武宗正德六年）印行於巴黎，爲布拉德衛丁之所著，但有人謂爲留寓巴黎之丹麥人名皮塔（*Pet-*

rus)氏者之作。此重要之書，流行甚廣。書中討論有法各立體，依西路道拉之方法討論等周各形。並討論星狀多角形。夫此等多角形，初見於畢達哥拉氏及其學派。五角星形，則畢氏之黨人，用作黨徽稱爲「幸福」者也。次於波伊悉阿斯之幾何，於坎排納斯氏，及巴斯之阿忒拉得譯自亞拉伯文之歐氏幾何，於上述最古之法文幾何，皆見此等之多角形焉。布拉德衞丁嘗發現星狀多角形之幾何性質，卽其作法，及諸角和之理是已。然吾人又嘗於力佐莽坦納氏，刻卜勒(*Kepler*)氏等之書中，見此迷離之多角形。



布拉瓦丁氏及其他少數之英格蘭學者，乃英人所引爲歐洲最古之三角學著作家以自豪者也。彼等所述之三角學，悉以亞拉伯爲來源。約翰毛提斯(*Manduith*)者，約當1340年（元順帝至元六年，）爲牛津之教授，嘗述及正切之名詞；拉德衞丁嘗引用餘切及正切兩名詞，卽見於格里摩拿之機拉得所譯阿耳阿薩凱爾(*Al-Arzakel*)之托利多表中者也。印度之人輸入正弦，正矢，餘弦；亞拉伯之人輸入正切，餘切，正割，餘割。

亞拉伯學術輸入以來之最大結果，其爲諸大學之建設乎。然其對於算學之態度果如何？巴黎之大學，並不重視幾何。但於1336年（元順帝至元二年）立一規則，凡欲取得學位者非習算學不可，觀1536年（明世宗嘉靖十五年）出版歐氏幾何前六卷之一附註，則知欲得碩士者，必發誓謂其曾在校習過此數卷書之講授。然其考試，或不出卷一之範圍，此卷之末所謂畢達哥拉定理者，有『碩士算學之履』之別名，頗足以證明之也。在1384年（明太祖洪武十七年）布拉格(*Prague*)地方所建之大學中，則天文學及應用算學，皆爲必要科目。有羅哲爾培根(*Roger Bacon*)者，著書於十三世紀之末（約元成宗之際），嘗謂牛津之學生，能越歐氏幾何之前三命詞或四命詞，而研究者蓋鮮。因此之故，遂稱其第五命詞爲『難關』(*elefuga*)又聞此第五題後稱之爲『驢橋，』(*Pons asinorum Bridge of asses*)，亦卽困難之意也。克拉維亞(*Clavius*)氏者，在其1591年（明神宗萬曆十九年）出版之歐氏幾何，言初學之人，對於此理，殊覺困難而隱晦，因題之角與線過多，一時未能領悟也。故據以上之言論，則幾何之研究，何以若此之貧乏，可以恍然矣。未受算學之訓練，或於最簡單之算術演算，皆未明瞭，開始卽授以歐几里得之抽象定義及定理，根底既不良，教法亦簡陋。

加以不嚴密之學位必要科目，則其感受困難也亦宜。至十五世紀之中葉(約明英宗與景帝之際)，牛津大學，始誦讀歐氏幾何之前兩卷。

是以知算學之研究，各大學尙未用其全力以維護之也。