統計學

陳善林著

中華書局印行

統計學

陳善林著

中華書局印行

民國廿七年十二月發行
民國三十年四月再版

大學用書 統計學（全一冊）

◎ 實價國幣七元六角

（郵運匯費另加）

著者 陳善林

發行者 中華書局有限公司 代表人 路錫三

印刷者 上海澳門路 美商永寧有限公司

總發行處 昆明 中華書局發行所

分發行處 各埠 中華書局

（一三一一四）

引　言

諺云工欲善其事,必先利其器.統計之於爲學治事,猶利器之於工師匠石.蓋自然現象,錯綜難測;人事社會,至變無常;巧曆之士,亦所難記.統計根據科學方法,以繁賾事實,列記之,整理之;從大量,得共相;由已知,測未知;使樊然者,呈整齊之相;棼如者,有線索可循;複雜變量,燭照無遺;紛紜事態,一目了然.此其功也.

物產之增減,在在受自然支配;人之動靜,在在與社會有關.倘自然變化,未能盡知;社會事實,不盡了了,則閉門造車,難期合轍.是故統計之與爲學,猶魚之與水;統計之與治事,猶南針之與航行也.然則統計何由而成乎?曰成於人.成於人而人用之,則成之者是否可信,用之者能否不誤,一視成之者與用之者之造詣而定.編製不依學理,則不當;應用不得其法,則失眞.不當則不信,失眞則貽誤.此所以有專門研究之必要也.

十八世紀中葉,始用統計方法爲有系統之研究;十九世紀以還,斯學漸盛.德法努力理論之發明,英美專重實際之應用;統計遂成研究科學之工具.我國統計事實,史冊記述,早有見聞;禹貢分九州之土壤爲九等.周禮載遂大夫掌登萬民之地,自生齒皆書於版.戰國游說之士,動輒以各國之車騎方里相較絜,此與近世之國防調查同.惜乎數千年來,深中科舉之毒,學者競尙華靡,不務翔實.每立一言,不參證於事實,但求其

爲先聖之所曾云;一若先聖之言,可以窮天地亙萬世而無疑義者,何其傎歟!近今國事大定,文化日進,凡百建設,亟待興舉,統計局統計處之設立,亦已燦然大備.惟以人民尙無相當認識,故調查確切,編製精良之統計,尙如鳳毛麟角之不多覯.淺學如余,奚敢自謂已通斯學,惟以教本缺少,需求至急,乃於課餘,攟摭羣籍,奮然操觚,閱十月而成是書,已承褚鳳儀蔡正雅兩先生校閱,內子王佐芳女士繕校,均爲作者所深感.惟千慮一失,或尙難免,尙冀海內方家,不吝教誨,以匡不逮,幸甚幸甚.

民國二十六年五月

陳善林

統計學目錄

統計學

第一章　總論

第一節　統計學之歷史及學派

統計之術,由來已久.遠稽往古,部落相結,迺成國家.國家之雛形既具,其國君卽不可不徵集本國之事實,以爲施政之寶典.蓋不知人口之確數,卽不能定戰士之多寡;不知戰士之多寡,則不能定戰爭之實力.無全國財富統計,則不知民間之貧富;不知民間之貧富,則不能計賦稅之征解.當紀元前一二〇〇年,夏禹本實地考察之所得,編製禹貢九州篇,乃依治水之次序,州境之區劃,川河之原委,物產,土質,貢賦之次第而排列之.其組織雖不完善,然頗具統計之意味矣.厥後在商湯,有井田之制度,計民授田;卽土地與戶籍之統計也.在東周,計兵車之乘數,定戰鬥力之厚薄;卽兵車調查之比較也.在漢代,量天下之戶口,人民之資產,定爲九等;縣司註定,州司覆之;每屆三年,一造戶籍,此皆有統計之意義存乎其中.惟終乏專家之研究,科學之系統,以故未成專學.

考之歐西各國,於西歷紀元前三〇五〇年,埃及建築金字塔;欲規定徵集建築費之標準,卽有全國人口與財富之統

計.厥後羅馬氏第二 (Romeses II) 復作埃及土地之調查,按人民之數額,以均分之.英皇愛德華第二(Edward II)等,核計國內人口及財產之數,以爲施政之標準.迄十七世紀以降,世界經濟組織,日形繁複,各國政情,亦非如昔日之簡單;一般學者,爲求便於研究政治社會及經濟起見,不得不求執簡馭繁之術;而執簡馭繁之術,捨統計實難其選.西歷一六六〇年,德人赫爾曼康林氏(Hermaun Conring)著現代政治上之顯著事態,其內容詳列當時歐洲各國人口,土地,財政,軍政及出產等項目,頗似今日之政治統計.誠足啓發後人研究統計之興趣.同時英人葛郎脫氏(John Graunt)作生命統計,發現人口生產及死亡率常時不變.此乃創統計基本原理中「大量恆靜」說 (The Law of inertia of large numbers)之世祖.一七四一年,丹麥人安喬生氏 (Ancherson) 編製歐洲各國比較統計表.一七四六年,德人靄誠華氏(Gottfried Achinwall),掌教於馬波來 (Marbury) 大學,編有統計講義,詳述葡萄牙,荷蘭,丹麥,西班牙,瑞典,英,法,德,俄等國之物產,人口,土地等狀況;作各國政情之比較.並就拉丁文 Status 「政情」一字,蛻化而爲 Statistics 「統計學」.故學者恆稱靄氏爲近代統計學之鼻祖.繼之有比人刻特來氏(Lambert Adophe Jacque Quetelet),更擴大統計之研究範圍,舉凡人類社會上,道德上及物質上之特質與夫各種動植物之現象等,俱在其研究範圍之內.並於一八五三年,集合各國統計學家,組織一國際統計會議(International Statistical Congress),

卽將各國統計,觀摩切磋,推測一切.惟於一八七八年,因各國不受該會議決案之約束,大會遂告停頓.惟至一八八五年,英人諾門斯把拉脫(Neumaun Spallart)又組織一統計學會(The Statistical Institute),專事研究統計學術之改進與普及.並發行國際統計年鑑及統計月報等刊物.自後如奧之海音(Hain),德之克納伯(Knapp),英之皮爾生(Karl Pearson),于爾(Yule),鮑來(A. L. Bowley),美之御獨克(R. E. Chaddock)等,對於統計均有精密之研究,巨大之貢獻.惟各人主張不同,入主出奴,意見紛歧,致形成許多學派.茲舉其大者,述之如下:

(一) 記述統計學派——導此學派之先河者,爲德赫爾曼康林(Hermaun Conring).其於研究國家情勢,社會狀態時,俱以文字之記述爲中心,故名之爲記述統計學派.惟赫氏所研究者,不外一國之理亂興亡,故亦有稱赫氏爲國勢學派之鼻祖.

(二) 表記統計學派——自十八世紀以還,統計界多知大量觀察(Mass-observation)之重要,故丹麥人安喬生(Ancherson)卽創表記統計學派.其於一國之面積,人口,宗教,財政,軍隊,政體,度,量,衡制,貨幣等,俱以數字顯示之,列表歸納之,使其便於比較與研究.一七八二年,德人刻羅美(Crome)更作各種統計圖表,以明示一切事實之狀態及關係.以是後人多稱刻氏爲統計圖表之首創者.

(三) 數理統計學派——創此學派者,爲英人葛郎脫(John

Graunt),其統計方法,首在搜集準確之材料,用適當之方法整理之,計算之,然後根據學理,以推究其因果關係,同時闡發其定理,而演繹其通則.此派重在數理之計算,故名之曰數理學派.

(四) 新統計學派——此派為德人蘇密爾渠(G. P. Süssmilch)及比人刻特來(Quetelet)所創.其主張不特熔以上三派之意志於一爐,且力圖改進統計之技術.依大量觀察法,搜集準確之統計材料,編製精密之統計.同時公佈統計之結果,俾人人得以研究所統計事實之因果關係.

第二節 統計學之定義

據比人刻特來氏(Quetelet),於一八六九年荷蘭海牙舉行第七次國際統計會議時,報告統計之定義已有一八〇種之多.自後學者所倡用者,尚不在內.足見為統計下一完善之界說,殊非易事.茲舉其中最著者,迻譯如下:

(一) 英人威勃司特(Webster)謂統計為考查一國人民生活狀況,及其他特種情形,用數字列表等分別顯示之學術.(Classified facts respecting the condition in various respects of the people in a state, or respecting any particular class or interest; esp., those facts which can be stated in numbers, or in tables of numbers)

(二) 德人買爾氏(Von Mayr)謂統計係根據大量觀察法,為人

類社會生活狀態,作有系統之說明與研究者也.

(三) 日人橫山雅男謂統計者,以社會與國家動靜之現象,依合法之大數觀察,研究其原因及規律之學科.

(四) 英人鮑來 (A. L. Bowley) 稱統計為計算平均數之學. (Statistics may rightly be called the science of average.)

(五) 美人金氏 (Willford I. King) 謂統計者,乃根據所搜集之大量事實,或估計之數目,加以分析,以研究一般自然現象或社會情況之方法也. (The science of statistics is the method of judging collective natural or social phenomena from the results obtained by the analysis of an enumeration or collection of estimates.)

(六) 美人葛伯蘭突 (Copeland) 謂統計者,即以數目表示事實,從大量現象中分析之,以明各個單體對於各部之關係.比較之,以示各部之異同.繼續記錄之,以備時間比較之用者也. (Statistics may be defined as numerical statement of facts by means of large aggregates are analyzed, the relation of individual units to their groups are ascertained, comparisons are made between groups and continuous records are maintained for comparative purposes.)

(七) 美人西克里司脫 (H. Secrist) 謂統計者從大量事實之現象中,依據合理準確之標準,作有系統之徵集與估計,以適應預定之目的.並就其相互關係,依次排列,而以數目

敍述之,枚舉之,或推算之,以求顯明事實之各個現象及其間之因果關係.(Aggregates of facts affected to a marked extent by a multiplicity to causes numerically stated enumerated or estimated according to reasonable standards of accuracy, collected in a systematic manner for a predetermined purposes and placed in relation to each other.)

以上諸說,除西氏之定義較為確當外,其餘均有缺誤之點.蓋統計不特用以研究政情,卽社會經濟及自然現象等,亦應列入其探討範圍之內.不但着重於平均數;平均數之外,更應利用圖表等以顯明事實之因果關係.不但對於材料及數量加以分析,並須綜合之,推算之,以測未來之趨勢.故嚴密言之:「統計學者,乃從大量之社會或自然現象中,用計數或估量方法,以數字表示其動態或靜態,並分析其數字間關係之學也.」茲將此定義略加解釋之如下:

(一) 統計是從大量中觀察眞情之科學——社會或自然現象中,常有「大量恆靜」(The law of inertia of large numbers)之法則存在.大量恆靜者,非謂大量不變,乃在大量觀察(Mass-observation)中,其變化常較小量為規則耳.蓋大量觀察事實,其間各種偶然發生之特殊現象,在平均時,俱可互相抵銷.其所存者乃僅不甚變異之通常或中庸之現象.此中庸之現象,乃卽統計者亟欲知之者也.故欲統計某種事實,應從大量現象中觀察,不應從小量現象中

推求.

(二) 統計是研究社會和自然現象之科學——最初研究統計學之對象爲國家,故有以統計爲研究國家之學者.其後研究之範圍,漸次推廣;研究之對象,亦漸由國家而推及於社會與自然現象;此種現象,或同時同地,或同時異地,或同地異時.故社會與自然現象之動態與靜態,均在統計學研究範圍之內.

(三) 統計是計量而不計質之科學——欲比較人之貧富智愚,在統計學內,必須先有可以表示此貧富智愚之數量,方可以言比較.故計數爲統計學之主要職務.惟統計學上之數字,未必均由計數而來,有時不得不用估量方法,以求其近似之數值.故定義中計數與估量並列.

(四) 統計是分析事實間相互關係之科學——統計學不特用數字表示社會與自然現象之動態與靜態,且用種種分析方法,以推求其數字間之關係.此種關係不僅是平均數一種,即離中差,偏態及相關等,亦均在統計學研究範圍之內.

第三節　統計學與其他科學之關係

哥斯(Goethe)有言:「統計爲治理世界之科學,」(Statistics govern the world.) 斯說甚善.蓋統計乃科學之工具,無論政治,經濟,社會等科學,無不藉此以闡定原理.施政行政,亦無不賴

此以表決方針.是以統計爲科學之科學,其與各科學最顯著之關係如下:

(一) 統計學與政治學之關係——統計之研究,在過去及現在;而政治學之推討,多屬未來;兩者似無何等關係.然政治之目的,苟欲爲國家及國民謀未來之幸福,即不可不以過去及現在之情況爲寶鑑.是以政治學之借重於統計者:

(1)藉定施政行政之方針.

(2)藉察立法行政之效果.

(3)使國民知國家之現狀及進步之實況,供參政之參考

(二) 統計學與經濟學之關係——經濟學派中,有所謂統計學派者,欲以經濟上及社會上之現象,大量觀察之,分別記錄之,計核比較之,藉以發現其中之法則,或證實其已定之原理.故統計學與經濟學之關係:

(1)藉此發見經驗之法則.

(2)藉此可得實際之證據.

(三) 統計學與社會學之關係——近世社會學家,無不創言社會政策,社會立法.然欲救濟社會之疾病,必先明瞭社會疾病之原因;欲明瞭疾病之原因,則非取證於統計不可.例如根據工業上之失事統計,於是有強迫保險之實行.比較男女童工之工資,知女工及童工有特別保護之必要,於是有最低工資法之制定.他如社會公共衛生之

設施,必賴疾病死亡統計以定一切.故統計學與社會學之關係:

(1)藉以商榷社會政策.

(2)藉以制定社會立法.

(3)藉以解決社會問題.

(四) 統計學與會計學之關係——會計是記錄財產上之增減變化,整理並分析各經濟組織經濟狀況之科學,與統計學初無若何關係.惟在整理及分析資產之時,如固定資產折舊率之決定,卽以過去某資產使用年限之平均數,作爲推定之根據.又如各種資產與資產間之比較,負債與負債間之比較;本年資產負債與上年資產負債之比較,以及曲線圖等之繪製,無不藉統計方法闡明之.故統計學與會計學之關係:

(1)藉以決定整理記錄.

(2)藉以分析財政狀況.

第四節　統計之功用

統計之功用,不勝枚舉,概括言之,約有三點:

(一) 執簡馭繁,以便比較——人類頭腦之組織,無論何時,僅能記憶簡單之事實,而不易想像多數零星之變量.若不化繁爲簡,卽不能比較兩大羣之事物.例有兩級學生之成績於此,若一一列舉各生之成績幾何,則聞之者,非特

不能分別兩級學生成績之優劣,卽各生成績亦多遺忘而不能想像.統計之爲用,卽將此繁賾之數字,化爲簡單之總數,平均數,或統計圖等,使事實之軒輊,了然示之.

(二) 依據事實,找求眞情——社會事實,參差紛紜,不一而足,若不加統計而妄事批評,則必昧於眞理,浮而不實.例如比較甲乙兩校學生程度之良窳,若僅就兩校最優或最劣學生之成績比較之,妄加批評之,必致抹殺眞情,遺笑大方也.然若依據統計方法,由實際事實中分析之,則心得其平,易得準確之見解.

(三) 根據過去,預測未來——社會現象,本至變而難測者也.然若根據過去之事實,亦可預測未來.如物價之升降,生活程度之漲跌,世界人口之增減等,若有過去確當之記述,卽可用統計方法,推測未來之變遷.此統計之第三功用也.

綜觀上述,統計之於人羣,實有深切之關係.如政治家多據爲施政之準則,科學家以爲研究眞理之工具,經濟家以此而立論人口,工資及物價之定則,社會學家以此而定社會政策,社會立法,生物學家以此證明變化與遺傳之定律,教育心理學家以此證實腦力與年齡之關係.凡此種種,皆統計學之功用也.

第五節 大量觀察法

宇宙間之現象,至爲繁複,我人殊不易明瞭其眞相.然若根據大量觀察法,取其大而遺其小,亦可知其梗概.猶之觀海,近望則波濤萬千,起伏無定;若從遠處望之,自有平線可尋.試就社會現象而言,雖千頭萬緒,繁複難計,然就大量中觀察之,其間恆有一定法則之存在.此法則爲何?卽所謂大數之法則(The law of large numbers)是也.茲分二項說明之如下:

(一) 大數有序律 (Law of statistical regularity) —— 抽樣調查爲統計學中最重要之調查法.所謂抽樣,卽於一大羣複雜之事項中,抽取一小部份作爲調查之樣本.由此所得之結果,如抽樣適當,計算準確,卽可用以代表全部.譬如調查全國人口之年齡,我人可不必遍查全國人口之年齡,再求其平均數,祇須抽查其中可以代表全體之一小羣人口之年齡,而求其平均數.由是而得之平均年齡,與全體人口年齡中所得者當無巨大出入.設所取之「樣本」(Samples)愈多,所得之結果,愈能代表全體,此大數有序之定律也.

(二)大數恆靜律 (Law of inertia of large numbers) —— 所謂大數恆靜者,乃謂在大量觀察事實時,其間各種偶然發生之現象,恆可互相抵銷,而爲通常中庸之現象.例如某城因特種關係,居民死亡特多;某城因預防周密,死亡特少;結果互相抵銷,卒至普通常態.故由全國城市之死亡人數上觀之,常無多大變異,此大數恆靜之定律也.惟我人

須注意者,所謂大數恆靜,非經常期而不變,不過根據大數觀察之結果,較之得諸少數「樣本」者,為有規則耳.

第六節 統計之程序

統計之程序,常因調查目的及範圍之不同而異.大體言之,約可分為下列五步:

(一) 事前計劃.

(二) 搜集資料.

(三) 整理資料.

(四) 分析資料.

(五) 發表結果.

在進行統計之先,必須加以計劃及考慮.如統計某種事實,必先研究其是否能藉統計方法以表示現象.果其能也,乃對於其性質與範圍等,加以周密之考慮,並從事調查及統計之整個計劃.此統計之第一步驟也.

統計之事項既經考慮及計劃後,即進而搜集資料,如須親自調查者,即出發前往調查.如派員調查者,則應委聘調查人員,施以相當訓練,督促進行之.如用通信調查者,則將調查表鉛印寄發.如採用間接資料者,即開始考查是項已有資料之來源,並審愼選取之.此統計之第二步驟也.

迨資料羅集,則進而檢查審核,謄錄彙類,標記分配之,此整理之工作也.整理既畢,即開始分析,如各類平均數,差異數

及相關等之計算,舉一反三,詳爲分析.分析既畢,即酌量情形,繪圖製表,編註說明,刊印報告公佈之.統計工作卽告終了.

問題

1. 何謂統計?統計與各科學之關係若何?
2 試述中外統計之歷史及學派?
3. 試列舉統計之功用,及與人生之關係.
4. 何謂「大量有序,」「大量恆靜?」試舉例述之。
5. 統計之步驟有幾?試略述之。

第二章 徵集資料

第一節 事前計劃

徵集資料爲統計之基本問題,蓋有精密之統計方法,而無確切之統計資料,亦屬徒然.徵集資料之先決問題有三:卽一,預定調查目的;二,確定調查範圍;三,選定調查單位是也.

(一) 預定調查目的

統計目的不定於先,則搜羅之資料往往殘缺不全,或一部無用,或謬誤百出.例如調查工人工資,須先自問調查之目的何在?設欲研究工人工資率之大小,則工人每週或每月之實際收入,可不必調查,每日每月之額定工資及每日之工作時數,則非詳查不可.又如調查工人家庭之兒女人數,亦須自問調查之目的安在?設欲研究工人家庭之誕生率,則已死兒女,亦在調查之列.反之,欲研究工人家庭之生活費用,則已死兒女與生活費無關,卽可不必調查.綜觀上例,搜集資料之前,預定調查目的,乃其第一先決問題也.

(二) 確定調查範圍

徵集資料之第二先決問題,卽依預定之目的,確定調查之範圍.蓋不明事實之性質與範圍,調查問題之選擇,必歸錯誤;以後統計事務之進行,亦必入於迷途而不堪應用.例如調查全國工人之工資,必先規定何城,何種工業,何種工人之何

種工資,應在調查之列;何城,何種工業,何種工人之何種工資,不在調查之列.非然者,則此工人究指男工抑係女工?究指時工抑係件工?究指成年工抑係童工?究指各業之全體工人抑係各業之直接製造工人?所謂工資,究指貨幣工資(Money wages or norminal wages)抑爲眞實工資(Real wages)?究指工資率(Wage rates)抑爲實際收入(Earnings)?究指每日工資抑爲每月工資?若不規定於前,必得謬果於後.確定調查範圍之重要於此可見.

(三) 選定調查單位

統計不離數字,而數字必有其單位,蓋抽象之數字在統計上毫無意義者也.統計單位之選定,驟視之似甚簡易,但實際上頗感困難.例如「一廠,」盡人知爲一工廠,然用於統計上,則「一廠」係指用原動力運動機器,雇工在三十人以上之新式工廠,抑爲用手工製造出品之舊式工廠?又如「一工」普通指工人工作一日之謂,然用於統計上,此「一工」究指工作八小時者爲一工,抑指工作十小時者爲一工?他如「田莊」五畝爲田莊,十畝百畝亦爲田莊.「罪犯」殺人者爲罪犯,放火者亦爲罪犯,若殺人而行賄法官得免於法者,其人即非罪犯乎?此種問題,對於統計者顯有不可踰越之障礙.故調查之第三先決問題即在單位之選擇及單位意義之規定是也.至於單位之種類,依瓦特金氏(G. P. Watkins)分,約有二類:

(1)個體單位(Individual units):

(A)自然單位(Natural units)——如「一人」,「一馬」,「一樹」,「一草」等,各以其原來個體爲單位,無須加以說明者也.

(B)人爲單位(Produced units)——如「一椅」,「一桌」,「一書」,「一屋」等,各按人工製成之個體爲單位,在未加規定之前,意義混統而不顯者也.

(2)測量單位(Measurational units):

(A)度量衡單位(The physical measures)——如布之長短以尺計,米之多少以升計,物之輕重以斤計.是雖定於國法,行於各地,然在民間實際使用者,紊亂不堪,統計時必須輾轉折合,困難至多.

(B)金錢單位(The picuniary units)——如我國之銀元,英國之金鎊,法國之法郎,美國之金元等,皆金錢單位也.

第二節 資料之來源

統計資料約可分爲二種:

(一) 原始資料(Primary data)

原始資料乃由統計者直接向資料之來源地搜集之資料也.以其直接搜集,故較詳實可靠.惟羅致不易,整理需時,非私人勞力及財力等所能舉辦.

(二) 次級資料(Secondary data)

次級資料乃轉錄他人所刊佈已經整理之資料也.以其

既經他人之整理刊佈,故不如原始資料之詳實.且於抄印刊佈之際,數字難免倒列,誤排或遺漏等謬誤.即經人發覺,因無原始資料,亦無法爲之改正.此次級資料之所以不如原始資料也.至於次級資料之來源有四:

(1)政府機關報告——近世各國政府,對於統計非常重視.我國自國民政府成立後,各院部會以及省市政府等,無不有統計處,統計局,統計科等之設立;舉凡全國人口,政治,經濟,敎育等狀況,無不詳爲調查,列表製圖,編製報告公佈之.故政府機關之統計報告,爲次級資料之第一來源地.

(2)公共團體報告——晚近社會上各種公共團體,如工會,商會等,亦知借統計以解決各種問題;社會全體或一部份特別消息,亦多詳爲調查,編製報告公佈之.故公共團體報告,爲次級資料之第二來源地.

(3)學術機關報告——統計資料之來自學術機關者,多屬專門性質.如天津南開大學與上海中國經濟統計研究所之經濟統計,中華敎育基金董事會社會調查部及河北定縣中華平民敎育促進會社會調查部之社會統計等,俱能按期編製報告,在學術界早有相當之地位.此種報告,乃次級資料之第三來源地.

(4)個人統計報告——個人編製統計,我國尙不多覯,然在美國如費暄敎授 (Irving Fisher) 之物價指數,勃卜生氏

(Roger W. Babson)之商情預測表,均為統計界所贊許者也.

第三節 取樣之方法

統計資料之徵集,常受時間,精力與經濟等之限制,未能作全部之調查,取樣問題,因之而起.考取樣之方法,約有三種:

(一) 無限取樣法 (Extensive sampling)

無限取樣法,亦稱盲目取樣法,即統計者不問查得資料之性質如何,代表性如何,抱多多益善之成見,盡量選取樣本.其弊過於疏濫,每空耗精力時間而無所用處也.

(二) 標準取樣法 (Representative sampling)

標準取樣法亦稱代表取樣法,即統計者於實施調查之前,於大數中選擇足以代表全體之小量,加以詢查而統計之.例如美國勞工局於一九一六年調查哥倫比亞區(District of Columbia) 人民之標準生活狀態時,即於收到之二千一百十一家之家計簿中,僅選取記載詳盡,一夫一妻若干小孩之中級家庭二百家,統計分析之,用以代表全體.此種辦法,雖可避免顧量不顧質之弊病,然於選取樣本之際,每因不能排除統計者之主觀觀念而有偏見.甚或無意低定或高定標準,致所得材料,缺乏代表性.此統計者於選樣時亦應注意者也.

(三) 任意取樣法 (Random sampling)

任意取樣法亦稱機會取樣法,即就論理學上之機會定

律(Random principle),於全體量數中,任意抽取若干,作爲張本.此種取樣法,已完全超脫統計者之主觀見解,使全體各份子,俱有當選之均等機會.其弊端卽在選擇之樣本過少,不足代表全體.甚或以統計者之感情作用,未能將主觀之偏見,完全排除.故欲用此法挑選樣本,應注意下列三點:

(1)樣本應由全體資料中選取,不應從局部資料或容易詢查之資料中抽選.

(2)全體變量應給予均等之當選權.

(3)各變量之選擇,應絕對獨立,決不可選入甲而以甲之關係聯選乙.

綜觀上述,無限取樣法以取樣之過於疏濫而用之者極少.標準取樣法雖受主觀之偏見影響過巨,然若參酌事實之實際情況,任意抽選充分樣本,統計結果鮮有失實者也.

第四節　調查表之編製

研究自然科學,多賴儀器以助我人器官之不及.研究社會科學,則賴調查表以記我人不能記憶之現象.美國統計學家,常以觀察社會現象之調查表,比爲觀察自然科學之儀器,意卽在此.社會情況,本極繁複,若不分條發問,則恐所得非所欲,所欲反付闕如也.調查表旣如是重要,製表則不可不加注意.茲特將各重要點分條述之如下:

(一)　製表之要點

(1)調查表之式樣,以矩形爲準.大小須合度,紙張須堅固,以免撕毀而便調查.

(2)調查表之種類如甚繁複,則可用不同之顏色區分之,以便識別.

(3)表上印字,須視問題之主要或次要而分大小.

(4)標題須簡括,俾一覽而知調查之要旨.

(5)表中項目,須依類排列,不可混雜.

(6)表中線格,應視問題之爲主要或次要而分粗細.

(7)每一問語之後,應留相當地位,俾便填寫答句.

(8)表中應將調查之目的及調查之機關寫明,使被查者得明瞭其主旨而據實詳報.

(二) 選擇問語之要點

(1)問語宜少不宜多.

(2)問語宜簡明淺顯,不宜冗長深奧.

(3)問語應化抽象爲具體,化性質爲數量.最好以「是」「否」或數字作答.

(4)問語最好能有前後互相證實之處,俾便預防僞報.

(5)問語不宜窮究被調查者之私隱,避免被詢者之厭惡.

(6)問語中如用專門名詞,則須下一註釋,以免誤會.

(7)問語先後排列,應合論理.

(8)問語措辭應直接懇切,使被詢者樂於填答.

調查表果能遵照上述條件,編製印發,收效必宏.惟於編

就之後,應先油印試用,俾可參酌實際情形,加以改正也.

第五節　資料之徵集

統計資料非可咄嗟而致,必經多方之掇拾,長期之搜羅,持以毅力,運以精心,方可得確切之資料.至於掇拾搜羅之方法,則視資料性質之不同而異:

(一)直接調查法 (Direct investigation)

直接調查亦稱實地調查,爲徵集原始資料之最好方法.實施之前,應按預定調查之範圍及時期等,依法取樣,然後親往或派員調查之.

(1) 親自調查法 (Personal investigation)——此法卽由統計者親臨各地調查之,費用甚省,最宜於精深之研究.惟個人之精力及時間有限,搜集之範圍過狹,故不宜於大規模之調查.

(2) 僱員調查法 (Schedules in charge of enumerators)——此法爲大規模調查之最好方法,以其由有經驗之調查員徵集材料,故確度甚高.惟需費浩大,非私人財力所能及.至於調查時調查員應注意之事項如下:

(A)調查員應澈底瞭解調查之目的,及調查表內所列各項問題之內容.

(B)調查員應具有堅忍耐勞之精神,誠懇方正之態度.並須謙恭毋傲,鎭靜毋躁,庶使被詢者覺其和藹可親而

盡量供給資料.

(C)調查員於調查某區某事項時,應與當地行政機關及民衆團體等,有相當之聯絡,俾實施調查時,減除障礙.

(D)調查員於調查時,如遇被詢者言語半吞半吐,或欲言忽止時,應用旁敲側擊或興奮之言詞刺激之,使其吐露詳情.

(E)調查員於調查時,如發現被查者之談話虛僞時,不宜直接加以辯駁,須用間接言語糾正之.

(F)調查員於調查時,如遇被查者談話有窘狀時,可雜以不相關之語句以釋其疑懼.

(G)調查員發問,應簡單扼要,切不可煩瑣冗長.

(H)調查員應注重客觀之事實,不宜師心自用,參入自己之成見.尤不可感情用事,自造事實.

(I)調查員與被查人約定時間,切不可失信.所得資料,切不可洩漏.

(J)調查員填表,務須精細準確.由計算或抄錄而得之數字,須加覆核,以免錯誤.

(3)被查人呈報法 (Schedules to be filled by informants)——此種調查法雖可節省調查之經費,然被查人對於調查之問題,如無相當之知識及興趣時,或被查人對於調查人,無相當信任時,收效甚少.蓋統計者登報公告或分發通知書,令飭被查者前來呈報,往往因不能引起被查者

之興趣及信任心而置之不理,致徵集之資料,殘缺不全,而無用處.然物有其利,必有其弊,取利捨弊,在乎人之能善用與否耳.統計者如化繁雜之問題為簡賅語句,或事前已徵得被查者之同意,及國家法令之限制,採用此法亦可得美滿之結果.

(4)通信調查法 (Estimates from correspondents) —— 直接搜集資料之方法,除上述三種外,更有所謂通信調查者,其法卽將印就之調查表,分送各被查者自行填具,由郵寄還統計.此種辦法,於發出調查信時,應附一印有回信地址及貼備郵票之信封,以備填表者寄回之用.其弊往往因被查者缺乏統計智識及興趣,致擱置不答,或答而不實,或答非所問,資料之確度,當不若前者之可靠.惟若發出之表格,倍於希望收回之數;收回之表格,更加嚴密之考核,則所得資料亦甚確切.

(二) 間接調查法 (Indirect investigation)

徵集次級資料,則多用間接調查法.統計者卽根據原有表册,精心考核,轉錄重編而得.例如調查工人工資,則可根據工廠工帳;調查學生人數,則可根據學生名册;調查人民生活,則可依據家計簿册;調查勞資糾紛,則可依據勞資協約.他如書報雜誌,亦時有次級資料之發表.統計者如能留心保存,庶用時能免搜集之勞.惟於應用次級資料時,須注意下列諸點:

(1)次級資料之供給 —— 任何統計機關均有其設立之目

的與特殊之使命,故於採用此機關發表之統計資料時,應先考慮此機關之組織如何?聲譽如何?編製此統計之目的何在?搜集資料之方法如何?均爲利用次級資料者應加考慮者也.

(2)次級資料之性質——次級資料有無偏誤與是否由抽樣而得,統計者亦不可不詳爲考察.蓋偏誤之原因不一,統計者應設法爲之校正,庶不致以訛傳訛,遺笑大方也.

(3)次級資料之單位——各時,各地或各類所用之單位,是否一致?亦不可忽視.例如紗廠聯合會對於全國棉田之估計,卽以各省估計之植棉畝數總加而得.惟各地一畝之大小不同,卽所用之單位不一,依此估得之畝數,價值甚小.

(4)次級資料之確度——吾人應用次級資料,雖不能期其絕對準確,然如計算之有無錯誤?答案之有無標準?估計之有無根據?均與確度有關,統計者應深慮遠謀,藉定資料之取捨.

(三) 估計法 (Estimation)

估計法爲徵集資料之下乘,非至不得已時,不宜採用,以其所得之結果,不甚精確之故.例如統計全國煤礦儲量,因無實數可檢,故不得不出於估計一途,應用此法時,應注意以下諸點:

(1)當有根據——估計者非憑空懸想之謂,亦必有相當之

根據,然後估計始有價值.所可根據者有三:

(A)根據以前之統計或估計——如估計某年全國人口,即可根據前若干年之人口統計,核算估計之.又如估計山西省之儲煤量,即有根據以前雷叔文 (F. Van Rithofen) 之估計.

(B)根據直接取得之資料——即如人壽保險公司之生命表(Mortality table),根據以往數十年之死亡率,及死亡率與年齡體魄等之關係而估計之.

(C)根據間接有關之資料——例如估計全國銷鹽量,即可根據每人平均食鹽量,及全國人口數二種間接資料估計之即得.

(2)審查確度——審查估計之結果,應依下述三種標準:

(A)估計之方法——估計之方法若非臆測,則確度較高.若參與私人意見而推測者,則確度較低.

(B)事實之變性——估計之事實苟非易變者,則易得準確之結果.如係易變者,則推測較難.

(C)他人之估計——估計之結果,如有多數人相同者,或稍有差別,而可補償者,亦近準確.

第六節　資料之整理

根據大量觀察法徵集之資料,未必盡屬可用.整理之前,須用抽查法(Sample testing),或校讀法 (Check reading) 審核一

過,以別其正誤.若資料中發現矛盾或可疑之處,應卽設法覆查,或竟棄而不用,以免牽累大體.審核之工作旣畢,乃卽着手整理.整理統計資料之方法有四:

(一)　彙錄法

所謂彙錄法者,卽將徵集之資料彙錄一處,保存其實在情形,備作詳細研究之用.然於彙錄之時,應依事實性質之不同,徵集目的之互異,或以地方區域分別,或以時間先後爲次,分類條列,俾便製表分析.

(二)　標記法

標記法乃將性質相同之事實,彙於一欄,用記號計其數目.其目的乃在避免謄錄之勞,便於列表分析耳.至於普通應用之記號,計有下列四種:

(1) 一　丅　下　正　正.

(2) ㅣ　∟　凵　口　⍂.

(3) /　//　///　////　/////.

(4) |　||　|||　||||　卌.

應用此法整理,不僅可免彙錄之煩,且經整理之後,事實之分配狀況,俱可顯示無餘.惟其缺點,卽在不能明示事實之個別情況而已.

(三)　塡製卡片法

彙錄與標記法,俱甚呆板,資料旣經整理,不便隨意增減.如將每一資料,分記於獨一卡片上,則卡片之數量,可增減自

如;分析之時,可隨意顚倒.例如上海市社會局前編工人工資率和工作時間統計時,卽將各工人每小時工資率及每日工作時數,分別塡製卡片,於分析各組次數時,卽將卡片依組値彙納,於分析業別,職別,工人別時,又依業別,職別及工人別等歸類,其活動自如,遠非他法所能及.

(四) 機器整理法

應用機器整理之前,先用數字號碼代表事實之各項性質,而後用各種穿孔機 (Key punch),依預定號碼穿孔於特種卡片上,每一單位製成一片.依片上孔穴之所在,卽能知該單位事實之性質,狀況與數量.更將已穿孔之卡片,放入電動分類機(Sorting machine)之方箱內,上覆薄鐵板,同時將其欲分類之孔穴,對準穿孔針,然後開始運動機器,卽能將各卡片依次分類.其結果並可於該機左邊之計數盤內顯示之.機器分類之速度,每分鐘約可分析三百三十餘張,其工作效能,當數倍於人工.惟機價昂貴,非各低級統計機關所能購備.我國海關造册處編製海關對外貿易報告時,卽用此種機器整理資料,其目的卽取其迅速準確也.

問題

1. 徵集資料前之先決問題有幾?試略述之.
2. 試述調查單位之重要及種類.
3. 統計資料之來源有幾?各資料之可靠性如何?

4. 取樣之方法及取樣時應注意之點各有幾?試申述之.

5. 試略述調查表之重要,及製表時之要點.

6. 何謂直接調查?直接調查之方法有幾?各方法之優劣如何?試申述之.

7. 調查員於調查某事項時,應注意何點?

8. 試述採用次級資料時應注意之點.

9. 估計某事項時,應注意何點?

10. 試述整理統計資料之重要及方法.

第三章　統計表

第一節　統計表之功用

統計資料經充分之搜集,嚴密之整理後,卽爲無數零亂之數字.若用文字一一爲之說明,則長篇累牘,閱者仍難知其要領.然若提綱挈要,摘錄一表,則統計結果,卽可一目了然,此統計表之所以重要也.統計表之功用,要言之,約有七端:

(一) 易得要領——零亂之數字,經分類列表後,則類別之間,不僅便於比較觀察,且易得其要領.

(二) 易於記憶——凡有關係之事實,在表中列於一處,簡賅清晰,自易引起讀者之聯念作用,而易記憶.

(三) 易於分析——同類事實,彙於一處,縱橫分明,羅列不混.總計平均,自易計算.

(四) 易於審查——表中資料,旣排列有序,則數字之謬誤或遺漏,自易審察.

(五) 易見事實之規律——統計資料,經整理製表後,因排列有序,自易發見一定之規律.例如社會學家視歷年人口之誕生數,定人口之增加,爲幾何級數.卽研究自然科學者,亦多賴統計表以檢求各種規律.

(六) 易見事實之因果——將全體事實彙錄一表,則項目間之因果關係,自易發見.

(七) 易省重複之說明——繁賾之事實,製成統計表後,則綱舉目張,可以減省許多重複之說明.近著中常附有統計表者,目的卽在此耳.

第二節 統計事項之分類

統計事項之分類,驟視之似甚簡易,然分之不當,則不僅製表時發生障礙,卽所得結果亦無意義.如分居民爲男性女性,則男女界限顯明,不致混淆.若分居民爲婦女,未成年者與有職業者,則各類混雜而不能互相排斥.蓋未成年者,旣有男性,又有女性;有職業者亦未必均爲男性,卽女性及未成年者亦有之.故此種分類,卽爲不適當之分類.

統計事項之分類,如從縱橫方面分別之,可分爲縱分及橫分二種:

(一) 縱分——縱分爲縱剖面之分類,以經過之時間爲標準,故亦稱歷史之分類.如歷年人口之增減,貿易之盛衰,物價之漲跌等,俱依時間之先後排列,皆歷史之分類也.

(二) 橫分——橫分爲橫斷面之分類,與時間無關.以其採用標準之不同,復可分爲下列三種:

(1) 地理之分類——統計事項之分類,如依統計事實之地域分配爲標準者,謂之地理分類.如我國各省面積之大小,產米之多少,各國人口之疏密,軍備之強弱等,俱依地域分列,皆地理之分類也.

(2)性質之分類——分類之標準,設爲某種特性,謂之性質分類.如某市罷工停業原因之比較,某時期各業工人工資率之比較,某校學生性別之比較,以及某國各種歲入歲出之比較等,俱以統計之某種特性,作爲排列之標準.故名曰性質之分類.

(3)數量之分類——分類之標準,如依數量之大小而編列者,爲數量之分類.如依年齡之大小,測定全國人口之分配;分數之多少,測定優劣學生之分佈等;俱以事實之數量,作爲排列之標準.故名曰數量之分類.

第三節　統計表之種類

統計表之種類甚多,分類殊不一致.普通言之,可就表中所列事實之原始,非原始;分類標準之縱剖或橫斷;所列事實之簡賅與繁複等,約可分統計表爲下列十餘種:

(一) 按表內所列事實之原始非原始,可分統計表爲原始表(Original table)及次級表(Secondary tabie)二種:

(1)原始表——將有關研究現象而搜集之一切原始資料,用彙錄法,集於一表,保存其原始情形,備作詳細研究之用者,謂之原始表.例如某年某校各級學生之各科成績,經分別調查後,得彙編原始表如表一:

原始表之優點,在能將事實之詳細情形,顯示無餘.蓋資料一經折算,編成非原始表格,則不僅數字易失確度,即一部

表一 某校學生各科成績表

(原 始 表)

學號	國文	英文	數學	史地	公民	平均
一年級						
1001						
1002						
....						
二年級						
2001						
2002						
....						
三年級						
3001						
3002						
....						
....						
....						

份次要數字,或爲隱蔽而不知也.

(2)次級表——次級表乃就原始表中所載之資料,摘要記述,或加以分析而成之統計表.例如某年某校各級學生之各科成績,經計算後,得各科及總平均成績如下表:

表二 某校各級學生成績比較表

(次 級 表)

年級	國文	英文	數學	史地	公民	平均
初中部						
一年級						
二年級						
三年級						
高中部						
一年級						
二年級						
三年級						
總平均						

次級表既爲原始表之縮影,當不若原始表之詳盡.然統計之目的,在使讀者領略統計之結果,而不在深究事實之詳情.故統計機關每以次級表爲正表,原始表爲附表,務使讀者閱次級表而知事實之要領,讀附表可作他種更深之分析也.

(二) 按表內分類標準之不同,可分統計表爲時間數列表,地理數列表及次數表等三種:

(1) 時間數列表——統計表之編製,如依時間之先後,順次排列者,謂之時間數列表.例如民國十五年至二十五年我國對外輸出入貨值及入超額,依時間之先後,列表如下:

表三　歷年我國對外輸出入貨值表

民國十五年至二十五年

(單位　千元)

(時間數列表)

年次	輸入淨值	輸出總值	輸出入總淨值	入超
民國十五年	1,751,537	1,346,571	3,098,108	404,966
十六年	1,578,148	1,431,209	3,009,357	146,939
十七年	1,863,320	1,544,531	3,407,851	318,789
十八年	1,972,083	1,582,441	3,554,524	389,642
十九年	2,040,599	1,394,166	3,434,765	646,433
二十年	2,233,376	1,416,963	3,650,339	816,413
廿一年	1,634,726	768,077	2,402,803	866,649
廿二年	1,345,567	612,293	1,957,860	733,274
廿三年	1,029,665	535,733	1,565,398	493,932
廿四年	919,211	576,298	1,495,509	342,913
廿五年	941,545	706,791	1,648,336	234,754

(2)地理數列表——統計表之編製,如以地域別或國別等爲分類之標準者,爲地理數列表.例如民國二十五年我國對外輸出入貨值國別表,以國別爲列表之主體,乃即地理數列表也.

表四 民國二十五年我國對外輸出入貨值國別表

(單位 千元)

(地理數列表)

國別	輸入	輸出	輸出入	出(+)入(-)超
美國	185,512	186,321	371,833	+ 809
日本	167,914	130,150	298,064	- 37,764
香港	17,795	186,547	204,342	+168,752
德國	150,238	39,174	189,412	-111,064
英國	110,497	64,884	175,381	- 45,613
法國	18,381	30,389	48,770	+ 12,008
印度	24,719	18,685	43,404	- 6,034
比國	26,011	6,322	32,333	- 19,689
其他各國	243,456	44,319	287,775	-199,137
總計	944,523	706,791	1,651,314	-237,732

(3)次數表——次數表亦稱頻數表,係將同一時期之事實,無地域關係者,依其性質或數量分成若干類或若干組,而以變量之數值,盡納於各類各組中之表式也.次數表又以分類標準之不同,可分爲質量次數表(Statistics of attributes)及數量次數表(Statistics of variables)二種如下:

(A)質量次數表——次數表之編製,如以事實之性質爲分類之標準者,爲質量次數表.例如民國二十四

年度上海市各級學校學生數比較表,即依各級學校,分別男女學生編製而成之質量次數表如下:

表五　上海市各級學校學生數比較表

二十四年度

(質量次數表)

學校別	男生	女生	總計
初級學校			
幼稚園	4,185	2,577	6,762
短期小學	4,169	2,812	6,981
初級小學	15,527	5,292	20,819
小學校	101,698	50,235	151,933
合計	125,579	60,916	186,495
中等學校			
初級中學	3,808	1,977	5,785
高級中學	457	92	549
中學校	18,242	7,510	25,752
師範學校	431	974	1,405
職業學校	3,139	897	4,036
合計	26,077	11,450	37,527
高等學校			
專科學校	699	272	971
獨立學院	2,327	402	2,729
大學校	6,690	1,068	7,758
合計	9,716	1,742	11,458
總計	161,372	74,108	235,480

(B)數量次數表——數量次數表乃按變量之大小,分列而成,以其有分組及不分組之不同,又可分爲二種:

(a)不分組次數表——不分組次數表之編製方法,

郎按變量之原有數值,分別繪劃記號,核計次數而成.例有某校學生二百三十三名之成績如下:

45	88	81	66	62	82	73	80	80	75	52	73
75	93	78	77	76	55	57	68	57	87	59	57
51	71	61	72	63	78	71	63	82	65	86	48
73	83	68	61	75	73	75	92	77	51	73	75
59	69	56	77	58	58	66	59	61	72	64	53
71	63	72	64	85	47	73	84	67	62	80	73
75	83	76	76	73	75	75	79	58	50	59	59
67	58	78	55	64	78	71	54	72	63	54	71
69	71	74	67	65	60	74	65	73	74	65	76
69	74	79	70	65	65	67	61	72	70	62	66
72	69	71	74	66	66	60	67	77	65	71	66
76	69	74	65	56	72	65	67	63	72	70	73
78	78	70	71	74	67	67	74	76	62	68	72
67	76	69	66	81	76	71	67	68	64	72	72
76	62	79	70	71	74	68	73	62	70	63	67
73	68	69	67	64	74	77	73	68	67	65	71
61	68	61	77	70	71	74	73	75	72	70	62
66	74	69	68	63	68	74	60	74	69	66	70
73	75	69	74	78	70	68	71	69	60	72	70
61	69	69	70	68							

若按各變量原有數值分別歸納之如下表:

表六　某校二百三十三生成績表

(不分組次數表)

分數	標記(每筆代表一次)	學生數	分數	標記(每筆代表一次)	學生數
45	/	1	69	※ ※ //	12
47	/	1	70	※ ※ //	12
48	/	1	71	※ ※ ※	14
50	/	1	72	※ ※///	13
51	//	2	73	※ ※ ※	15
52	/	1	74	※ ※ ※	15
53	/	1	75	※ ※	10
54	//	2	76	※ ※	9
55	//	2	77	※ /	6
56	//	2	78	※ //	7
57	///	3	79	///	3
58	※	4	80	///	3
59	※	5	81	//	2
60	※	4	82	//	2
61	※ //	7	83	//	2
62	※ //	7	84	/	1
63	※ //	7	85	/	1
64	※	5	86	/	1
65	※ ※	10	87	/	1
66	※ ※	9	88	/	1
67	※※///	13	92	/	1
68	※※///	13	93	/	1

(b)分組次數表——分組次數表,簡稱分組表,乃按變量數大小,分列數組,再用標記法分配其次數而成之表式也.其編製之步驟有五:

(I)求全距——全距(Range)者即資料中最大一項與最小一項之差額也.例如某校二百三十三

三生中,成績最優者爲93分,成績最劣者爲45分,故全距爲93－45＝48分.

(II)定組距——求得全距後,即須決定組距(Class-interval).所謂組距者,乃分全距爲若干組,而介於每組間之距離也.至於組距之大小,則視全距之長短而定.惟不得過大;蓋過大則組中各數相差太巨,其中點當難作爲一組之代表,且次數分配之重要情況將因是而被蒙蔽.又不得過小;蓋過小既不便於處理,且不能顯示其分配之趨勢.據統計學家于爾氏(G. U. Yule)之意見,連續或間隔徵細之非連續數列,以分十五組至二十五組爲標準.勒格氏(H.O. Rugg)之意見,分組表中之組數,最好介於十組與二十組之間.前例全距爲48分,如以5分爲組距,則可分爲十組.若以3分爲組距,則可分爲十六組.惟組距3分,不若5分之易爲讀者記憶.蓋以5或10之倍數作爲組距,較優於其他數目也.

各組組距,普通均屬相等;然亦有不等者.例如統計全國人民財富之分配設以$50,000爲組距,則0至50,000元一組之次數必多,如不將此組分成若干小組,則事實之詳情,必難

顯露.若縮小組距,則組數過多,不僅計算煩宂,卽次數之分配,將失其集中之趨勢.有此種種困難,原則上雖各組之組距應均等,然實際應用時,仍當視研究事實之性質如何以爲斷.

(III)定組限——組距雖定,若不分組限(Class limit),則次數之分配,仍難確定.組限有上限 (Upper limit) 下限 (Lower limit) 之分,如表七第一組爲45分至49.99分;49.99分爲上限,45分爲下限.第二組爲50分至59.99分;59.99分爲上限,50分爲下限.蓋45小於49.99,50小於59.99也.在連續數列 (Continuous series) 中,因變量可分至無盡數,如平均分數,可爲70.9999……分,每日工資可爲$0.8999……,每畝產棉量可爲21.9999……斤等,劃分組限時,不妨用小數分明之.然在非連續數列 (Discrete series) 中,則變量不能分至無盡數,如3人,7馬,4牛等,不能分爲3.99人,7.99馬,4.99牛等.故劃分組限時,僅能分爲1人至4人,5人至9人,或10匹至14匹,15匹至19匹等,不能用小數分明者也.劃定組限時,尤須注意者,卽各組之中點,能爲整數最佳.蓋次數表之編製,有一假定,卽一組中各變量之平均,可以該組中值代表之.如中值爲小數,則不便以後

之計算也.

(IV)劃標記——組距組限決定後,再將各變量按其數值之大小,用標記法納入各相當組中,即成表七第二列(橫者爲排,豎者爲列.)之標記.

(V)計次數——表七第二列劃記之次數,如用數字塡明之如第三列,即成一分組次數表如下:

表七 某校學生成績分配表

(分組次數表)

分 數	標 記 (每筆代表一次)	學生數
45——49.99	下	3
50——54.99	正丅	7
55——59.99	正正正一	16
60——64.99	正正正正正正	30
65——69.99	正正正正正正正正正正正丅	57
70——74.99	正正正正正正正正正正正正正亚	69
75——79.99	正正正正正正正	35
80——84.99	正正	10
85——89.99	亚	4
90——94.99	丅	2

(三) 按表內所列事實之繁簡,可分統計表爲單項表,二項表,三項表,四項表及多項表等多種:

(1)單項表——單項表 (Table of first order) 者祇作一種比較之表式也.例如表八民國二十四年上海市棉紡,繅絲,烟草,絲織,棉織及印刷業工人平均每小時之工資率,表內僅有業別間之一種比較,故名之曰單項表.

表八　民國二十四年上海市各業工人

平均每小時工資率比較表

（單　項　表）

業　　別	平均每小時工資率
棉紡業	$0.040
繅絲業	0.029
烟草業	0.061
絲織業	0.074
棉織業	0.048
印刷業	0.139

(2)二項表——二項表 (Table of second order) 者卽於表之縱橫行上,記載二項平行事實之表式也.表九在縱行上表示業別,橫行上表示工人性別,乃卽二項表也.

表九　民國二十四年上海市各業男女工人

平均每小時工資率比較表

（二　項　表）

業　　別	男　工	女　工	平　均
棉紡業	$ 0.045	$ 0.039	$ 0.040
繅絲業	…………	0.029	0.029
烟草業	0.084	0.056	0.061
絲織業	0.096	0.062	0.074
棉織業	0.054	0.047	0.048
印刷業	0.143	0.065	0.139

(3)三項表——三項表 (Table of third order) 卽於縱橫行上,記載三項平行事實之表式也.表十在縱行上表示業別,橫行上既分性別,又分工人別如下:

表十 民國二十四年上海市各業各種工人平均每小時工資率比較表

(三 項 表)

業別	男工 時工	男工 件工	男工 平均	女工 時工	女工 件工	女工 平均	總平均
棉紡業	$0.040	$0.061	$0.045	$0.038	$0.040	$0.039	$0.040
繅絲業	....	....	....	0.029	....	0.029	0.029
烟草業	0.084	....	0.084	0.046	0.056	0.056	0.061
絲織業	0.063	0.100	0.096	0.044	0.067	0.062	0.074
棉織業	0.053	0.070	0.054	0.042	0.048	0.047	0.048
印刷業	0.102	0.179	0.143	0.043	0.079	0.065	0.139

(4)四項表——四項表 (Table of fourth order) 卽於縱橫行上,記載四項平行事實之表式也.表十一在縱行上既示業別,又示年次;橫行上既示性別,又示工人別如下:

表十一 歷年上海市各業各種工人平均每小時工資率比較表

民國二十年至二十四年

(四 項 表)

業別及年次	男工 時工	男工 件工	男工 平均	女工 時工	女工 件工	女工 平均	總平均
棉紡業							
二十年	$0.037	$0.052	$0.039	$0.042	$0.036	$0.037	$0.037
廿一年	0.040	0.074	0.046	0.038	0.040	0.040	0.041
廿二年	0.039	0.056	0.042	0.044	0.039	0.039	0.040
廿三年	0.041	0.067	0.046	0.042	0.040	0.040	0.041
廿四年	0.040	0.061	0.045	0.038	0.040	0.039	0.040

纏絲業							
二十年	…………	…………	…………	0.041	…………	0.041	0.041
廿一年	…………	…………	…………	0.034	…………	0.034	0.034
廿二年	…………	…………	…………	0.038	…………	0.038	0.038
廿三年	…………	…………	…………	0.029	…………	0.029	0.029
廿四年	…………	…………	…………	0.029	…………	0.029	0.029
烟草業							
二十年	0.076	…………	0.076	0.046	0.075	0.074	0.075
廿一年	0.077	…………	0.077	0.050	0.070	0.070	0.071
廿二年	0.079	0.083	0.079	0.047	0.077	0.076	0.076
廿三年	0.078	…………	0.078	0.035	0.071	0.070	0.071
廿四年	0.084	…………	0.084	0.046	0.056	0.056	0.061
絲織業							
二十年	0.044	0.135	0.110	0.041	0.082	0.068	0.091
廿一年	0.050	0.172	0.167	0.047	0.107	0.091	0.112
廿二年	0.051	0.151	0.144	0.042	0.104	0.087	0.104
廿三年	0.058	0.114	0.106	0.045	0.096	0.078	0.087
廿四年	0.063	0.100	0.096	0.044	0.067	0.062	0.074
棉織業							
二十年	0.048	0.068	0.055	0.042	0.051	0.051	0.051
廿一年	0.048	0.078	0.049	0.056	0.045	0.046	0.046
廿二年	0.050	0.087	0.051	0.047	0.044	0.044	0.045
廿三年	0.051	0.071	0.055	0.050	0.054	0.054	0.054
廿四年	0.053	0.070	0.054	0.042	0.048	0.047	0.048
印刷業							
二十年	0.121	0.151	0.140	0.093	0.077	0.078	0.131
廿一年	0.087	0.154	0.111	0.046	…………	0.046	0.111
廿二年	0.092	0.175	0.135	0.042	0.069	0.055	0.133
廿三年	0.093	0.162	0.118	0.041	0.083	0.063	0.116
廿四年	0.102	0.179	0.143	0.043	0.079	0.065	0.139

(5)多項表——多項表即於縱橫行上,記載十餘項平行事實之表式也.例如表十二,於縱橫行間,記載事實甚多,乃即多項表也.

表十二　某工廠一覽表

(多項表)

概況	廠名				廠址			
	廠長或經理姓名				性質			
	成立年月				開工年月			
	資本		已繳資本 $	，未繳資本 $	，總計 $			
廠屋	式樣				光線			
	層數				自有或租用			
	座數				建築材料			
特種設備	(1)		(3)		(5)			
	(2)		(4)		(6)			
機械	動力		(1)　，共　座	(2)　，共　座	(3)　，共　座			
	製造機		(1)　，共　座	(4)　，共　座	(7)　，共　座			
			(2)　，共　座	(5)　，共　座	(8)　，共　座			
			(3)　，共　座	(6)　，共　座	(9)　，共　座			
職工	工資	職員	性別	人數	最高工資	最低工資	平均工資	有無分紅
			男					
			女					
		工人	男					
			女					
			童					
	工作時間	日工	上午　時至　時,下午　時至　時,計　小時					
		夜工	自　時至　時,計　小時					
產銷	原料		原料名稱	產地	出品	出品名稱	銷售地	
			(1)			(1)		
			(2)			(2)		
			(3)			(3)		
			(4)			(4)		
			(5)			(5)		
	近三年營業概況		年次	二十三年	二十四年	二十五年	平均	
			生產額	$	$	$	$	
			銷售額	$	$	$	$	
			存貨	$	$	$	$	
			盈(十)虧(一)	(　)$	(　)$	(　)$	(　)$	

第四節　累積統計表

統計表如依表內所列量數之累積與非累積,又可分爲簡單與累積二種:

(一) 簡單統計表——簡單統計表者,各依分類之標準,順次排列,而未加累積之表式也.上列表一至表十二,俱爲簡單統計表,以其所列量數,俱未累積故也.

(二) 累積統計表——累積統計表者,乃將各期量數或各組次數,加以累積而製成之表式也.以其縱剖與橫斷之不同,又可分爲下列二種:

(1)累積時間數列表——累積時間數列表者,乃將各期量數累積而成之統計表也.此種表式更以累積方法之不同,分爲以前及以後累積二種:

(A)以前累積時間數列表——以前累積時間數列係上向之累積,卽示某時期末及某時期前若干時期數值或次數之總和.例如表十三第三列,卽示民國二十五年我國對外輸出入貿易總值,在一月三十一日前爲$131,119,554.二月二十八日前推至一月一日止,爲$240,708,007.三月三十一日前推至一月一日止,爲$368,070,675,換言之,卽三月及三月前一月二月我國對外輸出入貿易總值爲$368,070,675是也.

(B)以後累積時間數列表——以後累積時間數列係下向之累積,卽示某時期初及某時期後若干時期

數值或次數之總和.例如表十三第四列,即示民國二十五年我國對外輸出入貿易總值,在一月初及一月以後至十二月三十一日止,爲 \$1,647,286,141. 二月初及二月以後至十二月三十一日止,爲 \$1,516,166,587. 三月初及三月以後至十二月三十一日止,爲 \$1,406,578,134. 餘類推.

表十三 民國二十五年我國輸出入貨值逐月累積表

(累積時間數列表)

月次	輸出入貨值	以前累積	以後累積
一月	\$ 131,119,554	\$ 131,119,554	\$1,647,286,141
二月	109,588,453	240,708,007	1,516,166,587
三月	127,362,668	368,070,675	1,406,578,134
四月	141,656,088	509,726,763	1,279,215,466
五月	139,330,170	649,056,933	1,137,559,378
六月	142,154,780	791,211,713	998,229,208
七月	135,366,322	926,578,035	856,074,428
八月	125,737,811	1,052,315,846	720,708,106
九月	139,914,696	1,192,230,542	594,970,295
十月	141,046,048	1,333,276,590	455,055,599
十一月	141,976,255	1,475,252,845	314,009,551
十二月	172,033,296	1,647,286,141	172,033,296

(2)累積次數表——累積次數表乃將各組次數累積而成之表式也.此種表式,亦以累積方法之不同,分爲以下累積及以上累積二種:

(A)以下累積次數表——此乃由組值最小一端之次數加起,如表十四第三列,其累積次數,按「以下」

(Less than) 法讀之;如上海市紗廠男工每小時工資率,在$0.015 以下(卽不到 $0.015)者,計 16 人;不到$0.025 者,157 人;不到$0.035 者,1,801 人是也.

(B)以上累積次數表——此種表式,乃由組值最大一端之次數加起,如表十四第四列,其累積次數,按「以上」(More than)法讀之;如上海市紗廠男工每小時工資率,在 $0.145 及 $0.145 以上者,16 人;$0.135 及$0.135 以上者,41 人; $0.125 及 $0.125 以上者,65 人是也.

表十四 上海市紗廠男工每小時工資率分組表

(累積次數表)

每小時工資率	男工人數	以下累積	以上累積
$0.005——0.0149	16	16	7,558
0.015——0.0249	141	157	7,542
0.025——0.0349	1,644	1,801	7,401
0.035——0.0449	3,127	4,928	5,757
0.045——0.0549	1,066	5,994	2,630
0.055——0.0649	493	6,487	1,564
0.065——0.0749	336	6,823	1,071
0.075——0.0849	261	7,084	735
0.085——0.0949	176	7,260	474
0.095——0.1049	104	7,364	298
0.105——0.1149	97	7,461	194
0.115——0.1249	32	7,493	97
0.125——0.1349	24	7,517	65
0.135——0.1449	25	7,542	41
0.145——0.1549	16	7,558	16

第五節　製表之規律

欲編製適用之統計表,則不可不知製表之規律.茲分四項說明之如下:

(一) 關於表之標題者:

(1)標題應置於表之頂端,所以顯明表之內容.

(2)標題須簡明易解,切合表之內容.

(3)標題中所舉各點,其次序應與表中所列之項目一致.

(4)表之內容有地理及時間區別者,標題中亦應註明之.

(5)表之內容甚長,須佔數頁地位者,各頁表首應各註明標題;除第一頁外,餘頁於標題後註明「續」或「續前」等字樣.

(二) 關於表之項目者:

(1)表中項目之次序,應按下列各種標準排列之:

(A)重要之程度.

(B)等級之高低.

(C)時間之先後.

(D)數量之大小.

(E)地域之位置.

(F)筆畫之多少.

(G)字母之先後.

(2)表中項目,最好一律由左而右橫寫.

(3)大項目之下,可分小項目;小項目之下,可分細目.祇須各低一格,用細直線劃分之.

(4)某項目須特別注重時,可用較重之字體排印之.

(5)表之橫幅過長,左部所註項目,不便閱覽時,可於右端重註一次.

(三) 關於表之線格者:

(1)縱行與縱行間,大項目與小項目間,小項目與細目間,均須用細直線劃分之.

(2)橫行與橫行間,不必用直線劃分,惟求易於找尋各行所屬之數字起見,可每五行空一行,俾便閱覽.

(3)表中上部項目之下,左部項目之右,均須用粗直線或細直線劃分之.

(4)表之下部如有總數平均數或百分數者,應於各數之上,用細直線劃分之.

(5)表之上下二端,應用粗直線劃斷之.左右二邊,則可不必.

(四) 關於數字之排列者:

(1)表中數字,須一律用阿拉伯字,以其整齊而便於書寫.

(2)表中縱行數字之位置,應上下相對.數字之小數點,尤須同列於一垂直線上,以便核算總計及平均數等.

(3)雖爲同一數字,而行欄不同時,須全部重寫.切忌寫「同上」或「,, ,,」等字樣.

(4)表中數字,在四位以上者,每三位,應用分位點分點之.

(5)無數字之空格,須用短點線或短虛線填充之,免使閱者起漏填之疑慮.

問 題

1. 統計表之功用如何?試論之.
2. 統計事項之分類如何?試申述之.
3. 何謂「原始表」「次級表」?其區別何在?
4. 統計表如以分類標準之不同,約可分為幾種?
5. 何謂次數表?編製分組次數表之步驟如何?試詳述之.
6. 何謂「單項表」,「雙項表」,「三項表」,「四項表」,「多項表」?其區別何在?
7. 累積統計表之種類有幾?試分別略述之.
8. 統計表之標題,應題於何處?其內容應如何?試詳述之.
9. 統計表內項目之排列,應注意何點?
10. 統計表內數字之排列及線格之分割,應注意何點?

習題一

民國十年至二十五年我國對外貿易國別表

(單位 千元)

年次	輸						入	
	美國	日本	英國	德國	香港	印度	其他各國	總計
民國十年	271,531	330,157	232,355	20,477	348,785	55,016	153,418	1,411,739
十一年	254,979	361,955	223,972	38,333	365,067	66,863	161,218	1,472,387
十二年	230,567	334,593	185,880	50,351	378,751	85,746	172,774	1,438,662
十三年	290,389	372,727	195,203	60,042	371,357	60,355	236,299	1,586,372
十四年	216,037	474,741	144,050	50,083	269,205	75,932	246,726	1,476,774

十五年	288,333	532,386	180,078	70,705	186,923	123,193	369,919	1,751,537
十六年	256,099	470,789	115,644	60,598	324,039	65,715	285,263	1,578,147
十七年	318,728	515,514	176,249	86,154	346,493	73,793	346,389	1,863,320
十八年	358,510	520,283	184,868	104,001	327,822	84,412	392,187	1,972,083
十九年	360,915	522,436	166,890	107,189	229,397	205,801	347,971	2,040,599
二十年	498,974	468,110	185,938	129,576	339,909	132,620	478,249	2,233,376
廿一年	418,192	236,624	177,894	111,576	90,031	39,609	560,800	1,634,726
廿二年	296,100	134,531	153,557	107,653	44,174	34,800	574,752	1,345,567
廿三年	271,535	131,338	124,513	93,200	22,215	32,190	353,674	1,029,665
廿四年	174,930	147,058	98,232	103,385	20,359	35,480	345,251	924,695
廿五年	185,512	167,914	110,497	150,238	17,795	24,719	287,848	944,523
年次	輸						出	
民國十年	139,506	291,670	48,164	10,554	238,179	15,173	193,510	936,756
十一年	152,028	281,986	59,995	15,276	264,854	15,295	230,888	1,020,322
十二年	197,561	356,467	67,317	18,564	273,890	19,209	240,037	1,173,045
十三年	156,975	361,504	78,291	24,849	269,788	17,817	293,216	1,202,440
十四年	223,032	344,503	74,228	25,593	178,726	19,907	343,569	1,209,558
十五年	233,876	402,145	86,992	27,670	146,144	24,806	424,938	1,346,571
十六年	189,691	418,580	90,350	31,713	264,361	34,580	401,934	1,431,209
十七年	198,185	431,839	95,138	35,561	283,749	30,016	470,043	1,544,531
十八年	214,748	461,498	115,812	34,990	270,439	27,756	457,198	1,582,441
十九年	205,469	406,217	97,638	36,396	246,192	26,413	375,841	1,394,166
二十年	187,279	458,967	100,522	36,049	231,070	28,229	374,837	1,416,963
廿一年	93,773	209,465	58,556	46,479	117,887	29,054	212,863	768,077
廿二年	113,431	116,921	48,765	20,795	120,954	24,480	166,947	612,293
廿三年	94,672	100,301	49,806	19,159	101,001	18,389	152,405	535,733
廿四年	136,410	96,716	49,463	28,926	94,893	20,345	149,545	576,298
廿五年	186,321	130,150	64,884	39,174	186,547	18,685	81,030	706,791

試用上列統計資料編製:

(1) 時間數列表。

(2) 地理數列表。

(3) 單項表。

(4) 二項表。

(5) 三項表。

(6) 以前累積時間數列表。

(7) 以後累積時間數列表。

習題二

某工廠二百十一名工人每月實際收入表

$26.25	$26.70	$28.20	$27.70	$24.30	$27.60	$26.15	$27.95	$28.60
27.80	25.35	29.30	25.55	27.90	31.00	28.55	23.10	27.55
25.25	24.00	26.75	24.60	26.30	30.75	24.60	25.75	26.75
28.60	29.10	24.50	26.80	28.85	27.56	29.50	27.80	25.70
26.10	28.55	27.15	27.55	27.00	28.80	26.30	28.25	26.30
23.40	27.75	26.60	27.75	24.75	27.60	25.75	27.00	27.80
27.25	28.35	27.30	25.25	28.60	27.80	26.75	29.80	24.25
28.60	30.00	24.50	27.10	27.30	27.40	28.15	29.90	27.80
28.15	25.55	26.80	30.70	28.30	25.80	25.15	27.10	30.55
29.55	23.50	26.30	24.75	27.20	23.60	25.75	28.15	27.25
26.55	28.60	26.00	24.10	24.55	27.30	28.35	28.30	26.30
29.20	28.10	28.30	24.15	26.80	28.00	25.80	26.30	30.00
23.00	26.30	26.30	26.25	26.75	25.85	25.30	28.25	28.10
29.30	27.45	28.70	26.25	26.15	27.50	28.10	26.40	29.00

26.55	25.30	23.00	28.90	27.30	26.90	26.55	27.30	27.90
26.60	24.60	25.75	27.00	25.15	28.55	26.35	25.80	26.30
30.60	27.55	27.95	25.75	27.15	28.50	26.85	24.10	29.60
28.60	25.15	28.30	24.10	23.50	25.75	27.55	27.55	29.30
26.55	24.55	27.15	25.00	29.00	30.10	30.25	27.30	27.80
25.70	29.75	27.55	26.50	24.35	27.00	28.55	24.55	27.90
27.40	26.10	25.25	27.60	27.90	25.25	32.00	26.55	27.00
26.00	30.15	24.10	24.25	26.60	27.45	28.65	27.55	27.80
26.30	27.90	26.30	28.55	22.55	27.30	27.55	25.35	28.10
26.80	25.60	24.10	25.55					

試用上列統計資料編製:

(1) 不分組次數表.

(2) 分組次數表.

(3) 以下累積次數表.

(4) 以上累積次數表.

習題三

試將下列事項加以整理及歸類後,編製一多項表(某校一覽表).

(1) 校名,校長,教務長,事務長.

(2) 開辦年月,立案年月.

(3) 校史.

(4) 最近三年來經費之來源.

(5) 三年來(民國二十三年,二十四年及二十五年.)經費之實收額,實支額及盈虧.

(6) 全校面積.

(7) 校舍 —— 辦公室,教室,宿舍,學生會客室,教員會客室,會議室,教員住宅,圖書室,閱報室,儲藏室,特種教室,成績室,儀器室,打字室,實習工場,門房,膳堂,禮堂,教員休息室,學生自修室,洗漱室,浴室,廁所。

(8) 教員人數,職員人數。

(9) 教職員年齡(20至40歲),資格,(留學,大學畢業,專科畢業,中學畢業。)任期(1至5年),性別。

(10) 學生人數 —— 分商科,工科;高中,初中;男生,女生。

(11) 學生籍貫 —— 分高中,初中;江蘇,浙江,安徽,江西,福建,湖北,湖南,河北。

(12) 學生年齡 —— 十二歲至二十二歲;分寄宿生,走讀生。

(13) 學生家長職業 —— 分商科,工科;農,工,商,學,政,其他。

(14) 畢業生出路 —— 分商科,工科;工廠,銀行,公司,學校,行政機關,其他。

(15) 設備 —— 商科:合作社,學校銀行,打字室,簿記室,統計實習室,商品陳列室。

工科:木工場,翻砂工場,機器工場,化學實驗室,物理實驗室。

(16) 圖書 —— 分哲學,社會科學,語文學,自然科學,其他;中文,西文;種數,册數。

(17) 儀器 —— 化學儀器,物理儀器;件數,估值。

(18) 校具 —— 課桌,課椅,牀,寫字檯,椅。

(19) 其他。

習題四

試搜集各種次級資料編製:

(1) 時間數列表.

(2) 地理數列表.

(3) 質量次數表.

(4) 數量次數表.

(5) 單項表.

(6) 二項表.

(7) 三項表.

(8) 四項表.

(9) 多項表.

(10) 以前以後累積時間數列表.

(11) 以下以上累積次數表.

第四章 統計圖

第一節 統計圖之功用

統計表之功用,在能化繁爲簡,前章言之已詳.然以數字表明事實,每多陷於抽象,無甚深義;且數字與數字間,苟非審愼檢視,仍不易發覺事實之因果.統計圖則不然,蓋於表示某二項事實時,圖形同則其結果同,圖形異則其結果亦異;不待比較數字,而事實之大概已畢現於紙上.故統計圖實表現統計上數字間關係最有效之科學方法也.茲將統計圖之功用,略述之如下:

(一) 易得明確概念——繪製統計圖之目的,在表明統計之結果;故檢閱圖形,耗時少而易悉事實之概念.

(二) 易得深刻印象——列表則多用數字表現事實之眞相;惟每陷於抽象,不若圖之具體化,易使讀者得深刻之印象.故於演講宣傳或廣告時,每多捨表而用圖.

(三) 易示相互關係——統計圖除表示各變量之大小外,每可將各變量間之相互關係顯示之.

(四) 易定分配狀況——在統計表中不易將全體事實之分佈狀況,明確顯示.然於統計圖中,可由抽查之樣本上確定全部之分配狀況.

(五) 易使閱者入趣——統計之結果,如用各種圖式繪示之,

不僅易使閱者入趣,即繁冗之數字,亦易印入閱者腦海之中.

(六) 易於插補——如事實中某變量遺缺時,在表格中須詳加計算,方可得其近似值,然於圖形上可用插補法推求,藉免計算之煩.

第二節 繪圖之步驟

繪製各種統計圖時,每有一定步驟之存在.本節即將各步驟詳細說明,使初學者得按步就班,繪製各種圖形.

(一) 選擇材料——一表之內項目每有多至十餘者,然何者應採作製圖之材料?何者應捨而不顧?此乃製圖之先決問題.普通每以一表內之總計或平均,作為製圖之唯一材料.然亦有以各項細數同示於圖中者,全視製圖之目的何在而定.

(二) 選定圖式——何種圖形最合應用?須視材料之性質,繪圖之宗旨,及用圖之情形而定.例如:

(1)表現時移事遷之資料,宜用簡單歷史曲線,山狀曲線,分歧曲線,距限曲線等圖.

(2)表現次數分配之資料,宜用長條,平面,簡單次數曲線,圓滑次數曲線及直方圖等.

(3)表現事實在地域上分佈之現象,宜用統計地圖.

(4)表現事實比例之變量,宜用對數曲線圖.

(5)表現事實在某種程度以上或以下,或某時期以前或以後之數值時,宜用累積曲線圖.

(6)表現一組織內各部間權限之關係時,宜用系統圖.

(7)繪圖之目的,在供演講宣傳或廣告之用者,宜用劃線,顏色或像形圖.

(8)繪圖之目的,在陳列一處,供人閱覽,期引起觀衆之興趣者,宜用像形或立體圖.

(三) 分析計算——材料及圖式選定後,即開始計算繪圖時應用之數字.如繪百分數比較圖,則應計算其百分比.繪累積曲線圖,則應計算累積數.繪圓形圖,則應計算代表各變量之角度等.

(四) 定比度——比度 (Scale) 之起點,通常由下而上,由左而右,即縱橫軸相交之處.若數值小於零而成負數者,零點仍起自縱橫軸相交之處.比度單位亦應於規定比度時決定,例如單位「百萬元」,「千噸」,「百疋」等.並應記明於比度數目之上,切不可遺缺.比度決定後,再按圖心之大小分定比度點.例如比度單位爲百萬元,比度數目爲 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 圖心爲 5 英吋則比度點與比度點間之間隔,應爲$\frac{5}{10}=0.5$英吋(對數圖不在此例).

(五) 定輪廓線點,基線點及指導線點——輪廓線即圖形之外圈線;其長短闊狹,視圖紙及圖心之大小而定.圖紙大,

圖心應隨之而大;圖紙小,圖心亦隨之而小.圖心決定後,即於圖心之四角,規定輪廓點.檢閱零點之所在,規定基線點.再按比度點配定指導線點.

(六) 繪輪廓線,基線及指導線——各點繪定後,即開始劃線.普通輪廓線,基線與指導線之粗細,成 3 與 5 與 1 之比.

(七) 定坐標——根據第三步計算而得之數字,依縱橫軸上之比度,定各繪定點之坐標.橫坐標 (Abscissa) 係與縱軸 (Vertical axis)距離,而平行於橫軸(Horizontal axis)之點.縱坐標 (Ordinate) 係與橫軸距離,而平行於縱軸之點.

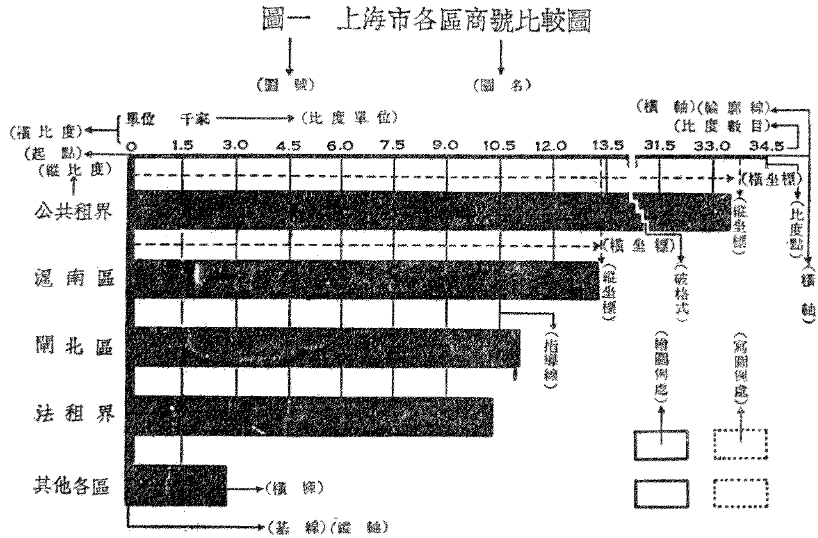
(八) 繪圖示線——將各繪定點用直線聯綴之,即成曲線圖.將各點與基線間用直線聯綴之,即成長條圖.

(九) 劃交叉線與着色——如一圖上因表現數種數量而欲使代表各數量之部份顯明時,應用各種交叉線或顏色分別之.

(十) 繪圖例——如圖中用若干種交叉線或顏色顯示若干事項者,則各線或各色所代表之事項,應設例說明之.

(十一) 題名——圖形繪就後,即將圖之名稱題於圖之上方或下方,或在輪廓之內,視圖之形式如何而定.

(十二) 審核——統計圖繪就後,繪製者仍須嚴密審核;視其能否將事實之眞相表現?其形式是否適用?各部排列是否整潔?繪定各點是否準確?如能適應上述諸條件,即可公告.茲將統計圖上各部名稱,設例示之如下:



(統計圖各部名稱說明圖)

第三節 繪圖之規律

統計圖之功用,在使閱者易得明確之概念,然若繪製不當,亦足蒙蔽事實之實況.茲將製圖之規律,擇要示之如下:

(一) 名稱——每圖所示之事實,均應於圖之名稱中顯示之.故圖之名稱以能表示圖中內容為原則.惟須簡單醒目,免使閱者發生厭倦.至於題名之地位,或在圖之上方或在圖之下方,或在輪廓線之內,全視圖之形式如何而定.

(二) 列號——如繪圖甚多,繪製者往往依次編列號數,冠於圖名之前,藉免查閱時之困難.至於各圖先後之次序,則多依各圖之重要性而排列;惟亦有依各圖間相互關係之深淺,順次排列者.

(三) 起點——起點亦稱零點,係縱橫比度測量之出發處.普通俱以各圖之左下方縱橫軸交叉處計之.(即縱軸上之比度,須由該處由下而上,順次排列.橫軸上之比度,須由該處由左而右,順次排列.)

(四) 基線——基線(Base line)亦稱零點線(Zero line),即全圖之基本線.繪劃之時,普通以較指導線粗五倍之線畫之,以資區別.基線之種類,其普通者,計有八種如下:

(1) 橫軸——橫軸亦稱橫尺量,即以圖之底線或頂線,作爲基線.

(2) 縱軸——縱軸亦稱豎尺量,即以圖之右邊線或左邊線,作爲基線.

(3) 中軸——即以平分圖形爲上下二部之橫線,作爲基線.在此中基線之上方代表正數,下方代表負數.

(4) 圓線——在圓形圖中,多以外圈線作爲基線.

(5) 半徑線——在扇形圖中,則多以半徑線作爲基線.

(6) 三邊線——即以三角形之三邊線作爲基線.

(7) 四邊線——即以矩形之四邊線作爲基線.

(8) 多邊線——即以多角形之各邊線作爲基線.

(五) 輪廓線——包括圖形範圍之線,謂之輪廓線.曲線圖中,多用以分別圖之內外者.然在長條圖及平面圖中,則多捨而不用.惟輪廓線旣用以分劃圖形內外之線,其粗細自應與指導線分別,普通較指導線粗三倍.

(六) 指導線——由各比度點引長之線,謂之指導線.其作用,僅在輔助讀者之閱覽,普通愈細愈妙.

(七) 圖示線——圖示線應與指導線相異,普通多用二倍至四倍粗之指導線顯示之.

(八) 百分線——用百分數繪製之圖,如指數圖等,代表百分之線,應異於其他各線,普通用四倍粗之指導線顯示之.

(九) 比度——比度之排列,俱由左而右,小數在左,大數在右.或由下而上,小數在下,大數在上.比度單位,宜於比度數目之上下或前後顯示之,切不可遺漏.

(十) 劃線——實地長條或曲線,多用以表示主要事項.較深劃線(即交叉線)長條或曲線,多用以表示次要事項.空地長條或虛曲線,則多用以表示不主要之事項.

(十一) 着色——如在圖之各部使用顏色,則深者用以表示重要事項.較淺者,用以表示次要事項.

(十二) 半透明紙之應用——如圖中曲線過多,每不能使讀者一目了然.故最好用半透明紙多頁,分繪各曲線於其上,在比較時即將某項曲線檢出對照可矣.

(十三) 兩種變量相差極巨時之比較——如兩種變量相差極大時,似不能繪示於一圖.惟若採用下列諸法,即可解決種種困難.

(1)破格法——即將圖之比度不需要之一部分,加以中斷之,如圖一.

(2)比度調合法——同一圖形內如欲表示兩種相差極大之變量,往往用兩種互相平行之比度以調節之.

(3)百分數法——先將各變量化成百分率,(如指數及百分數比較圖)然後繪製各種圖式以比較之.

(4)用對數紙法——因事實之變動,各有一定之比率.如變量大,可用多組之對數紙繪之,故用對數紙繪製曲線,亦可免此困難.

(十四)　整潔——圖形務須十分清潔,其各部排列,亦宜整齊美觀.

(十五)　準確——統計圖須能傳遞眞實之消息為原則.故繪製時切不可重視美觀而失之不確.

第四節　統計圖之種類

統計圖之種類,如依其繪製之目的分:可分為計算圖,分析圖及說明圖三種.如依其用途分:可分為書圖,壁圖及桌圖三種.如依其比較之性質分:可分為時間比較圖,空間比較圖,次數分配圖及數量比較圖四種.若就其形式而言:則可分為長條圖(Bar diagram),平面圖(Surface diagram),立體圖(Volume graph),像形圖(Pitogram or figurative diagram),系統圖(Organization chart),統計地圖(Cartogram or statistical map),及曲線圖(Curve graph)等七種,每種之中又可分為數種如下:

(一)　長條圖(Bar diagram)

(1)單式長條圖

(A)單式全條圖

(B)單斷單式長條圖

(C)全斷單式長條圖

(D)折曲單式長條圖

(E)迴轉單式長條圖

(F)單式距限長條圖

(2)複式長條圖

(A)複式全條圖

(B)單斷複式長條圖

(C)全斷複式長條圖

(D)疊併複式長條圖

(3)獨一分段長條圖

(A)實數獨一分段長條圖

(B)百分數獨一分段長條圖

(4)單式分段長條圖

(A)實數分段單長條圖

(B)百分數分段單長條圖

(5)複式分段長條圖

(A)實數分段複長條圖

(B)百分數分段複長條圖

(6)條線混合圖

(A)單式條線混合圖

(B)累積式條線混合圖

(二) 平面圖 (Surface diagram)

(1)圓形圖

(A)單圓形圖

(B)多圓形圖

(a)同心多圓形圖

(b)異心多圓形圖

(C)扇形圖

(2)矩形圖

(A)正方圖

(B)長方圖

(3)三角形圖

(4)多角形圖

(三)立體圖 (Volume graph)

(1)透視立體圖

(2)投影立體圖

(3)散處長柱圖

(4)集合長柱圖

(四) 像形圖 (Pitogram or figurative diagram)

(五) 系統圖 (Organization chart)

(1)組織系統圖

(2)辦事程序圖

(3)製造程序圖

(六)　統計地圖 (Cartogram or statistical map)

(1)點地圖

(A)單點地圖

(B)密點地圖

(C)四分點地圖

(2)橫線地圖

(3)顏色地圖

(4)像形地圖

(5)標針地圖

(6)模型地圖

(七)　曲線圖 (Curve graph)

(1)等差曲線圖

(A)歷史曲線圖

(*a*)簡單歷史曲線圖

(I)　簡單歷史曲線圖

(II)　破格式簡單歷史曲線圖

(III)　比度調合式簡單歷史曲線圖

(IV)　指數式簡單歷史曲線圖

(*b*)圓滑歷史曲線圖

(*c*)累積歷史曲線圖

(I) 以前累積歷史曲線圖

(II) 以後累積歷史曲線圖

(*d*)距限曲線圖

(*e*)帶紋曲線圖

(I) 實數帶紋曲線圖

(II) 百分數帶紋曲線圖

(*f*)山狀曲線圖

(*g*)分歧曲線圖

(B)次數曲線圖

(*a*)直方圖

(*b*)簡單次數曲線圖

(I) 對稱次數曲線圖

(II) 右偏次數曲線圖

(III) 左偏次數曲線圖

(IV) 「U」字形次數曲線圖

(V) 「J」字形次數曲線圖

(VI) 倒「J」字形次數曲線圖

(VII) 羅蘭曲線

(*c*)圓滑次數曲線圖

(*d*)累積次數曲線圖

(I) 以下累積次數曲線圖

(II) 以上累積次數曲線圖

(2)等比曲線圖

(A)單對數曲線圖

(B)雙對數曲線圖

統計圖之種類,簡分之僅有七類,然細分之,計有七十餘種.各圖實例,以及繪製之規律,方法與可能之比較等,於拙著統計製圖學(民國二十五年九月商務印書館出版,大學叢書之一.)一書中論之甚詳.本書限於篇幅,僅將各圖繪法,於下節中略加說明之.

第五節 統計圖之繪製

第一目 長條圖

長條圖乃以若干平行長條之長短,代表某項數量或百分比大小之圖形也.凡事項之無繼續性者,多用之.此種圖形又有縱條與橫條之分:凡平行之長條,其起點基於某縱線者,謂之橫條圖.凡豎直之長條,其起點基於某橫線者,謂之縱條圖.縱橫條圖之中復以其形式之繁簡,又可分為單式長條,複式長條,獨一分段長條,單式分段長條,複式分段長條,及條線混合等六種:

(一) 單式長條圖——單式長條圖乃以若干簡單之長條,代表若干變量之圖形也.此種圖形,復以形式之不同,分為下列數種:

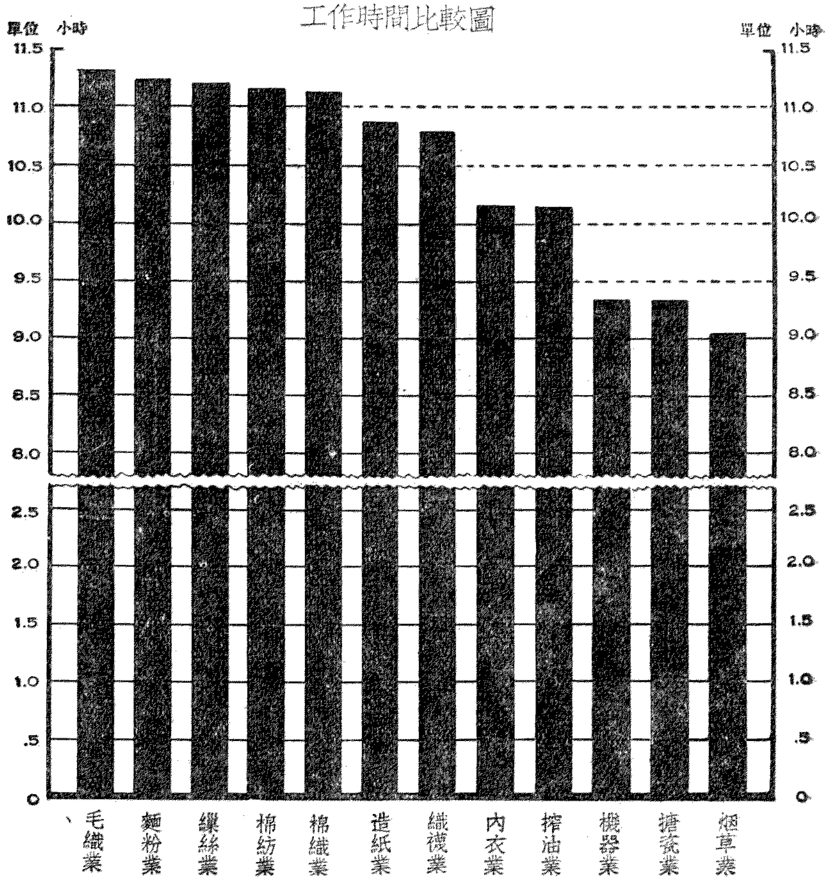
(1)單式全條圖——單式全條圖乃以若干簡單之全條,(各條無中斷者,謂之全條.)代表若干變量之大小者也.

(2)單斷單式長條圖——如變量中某變量特巨時,可將代表此特巨變量之長條切斷之.圖一公共租界之商號數爲 33,591 家,較滬南區 13,234 家,多二倍半.理應以二倍半於滬南區之長條表示之.然欲經濟紙面及放大比度與比度間之距離起見,將代表公共租界商號數之長條中斷之,如圖一.

(3)全斷單式長條圖——如遇某數列之各變量相差極小時,繪成之長條,因受比度之限制,使各條之長短相差極微,比較困難;繪圖者可將各長條之下部,完全切斷之,同時縮小比度組距;依此方法繪成之長條,雖受切斷之影響,條與條之間不能作直接之比較,然各條之長短,自可顯別.圖二即示民國二十四年上海市主要工業工人,每日工作時數之比較.每日工作時間最長與最短者相差僅 2 小時強,若不用全斷條形表示之,則各條之長短,定必相差無幾,比較困難.若切斷每條之下部,並縮小比度組距,則各條之差別自顯.

(4)折曲單式長條圖——長條圖中,如遇某條特長時,又可用折條法繪示之.所謂折條者,即將特長之長條折曲於圖之上端(在縱條圖中)或右邊(在橫條圖

圖二 民國二十四年上海市主要工業工人每日工作時間比較圖



(全斷單式長條圖)

中)以示之.

(5)迴轉單式長條圖——斷條折條之外,又有所謂迴條者,即將某極大之變量,用迴轉數次之長條顯示之.其

優點,可使各條之間直接比較,不若斷條之失其比較可能者也.

(6)單式距限長條圖——單式距限長條圖者,乃以各條之長短,表示各事實全距(Range)之大小.例如圖三各條之長短,與各業工人每日最高工資率與最低工資率之差成正比例.印刷業之距限長條最長,卽示印刷工人工資率之給予,最不均勻.搾油業最短,卽示搾油工人工資率之給予,最稱均勻.各條之中段更繪豎線以示平均工資率.故此種圖形所示之比較有八:

(A)各條之長短,表示各業工人工資率之給予,是否均勻.

(B)各條中段之豎線,卽示各業工人之平均工資率.

(C)在豎線左邊之長條,如長於豎線右邊之長條,卽示該業各職工人之每日工資率,有偏低性,如造船業及機器業等.

(D)在豎線右邊之長條如長於豎線左邊之長條,卽示該業各職工人之每日工資率,有偏高性,如印刷業及絲織業等.

(E)各條在豎線左右之長度相等,卽示該業各職工人之每日工資率,無偏高偏低性.

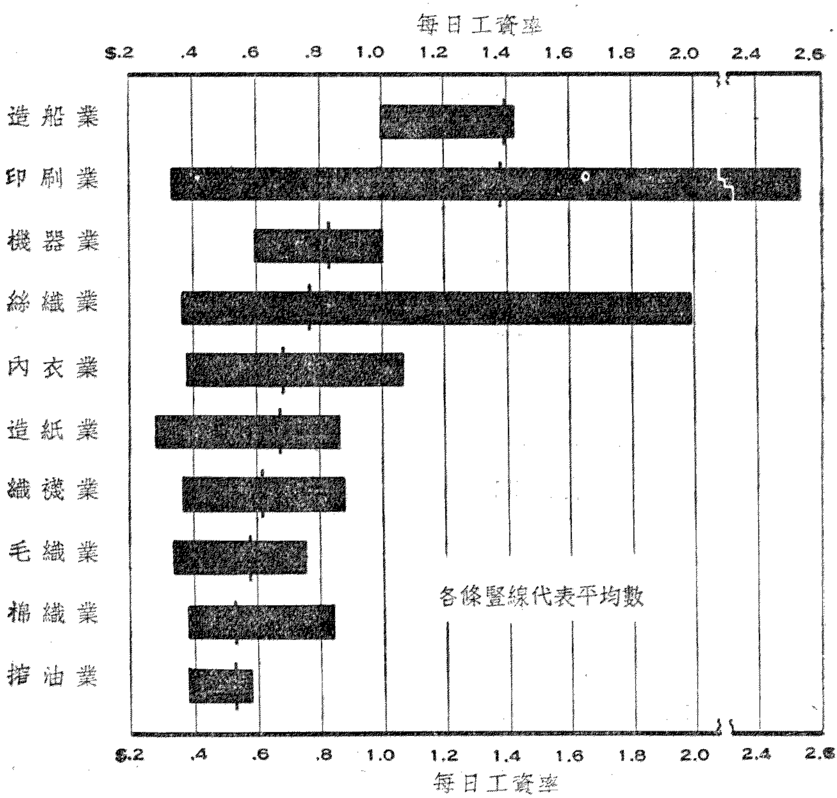
(F)觀察各條中段之豎線,可知各業工人平均每日工資率之大小.

(G)觀察各條之左端,即可比較各業工人每日最低工資率之差異.

(H)觀察各條之右端,即可比較各業工人每日最高工資率之差異.

繪製單式距限長條圖之步驟,先由各業工人

圖三 民國二十四年上海市各業工人每日工資率比較圖



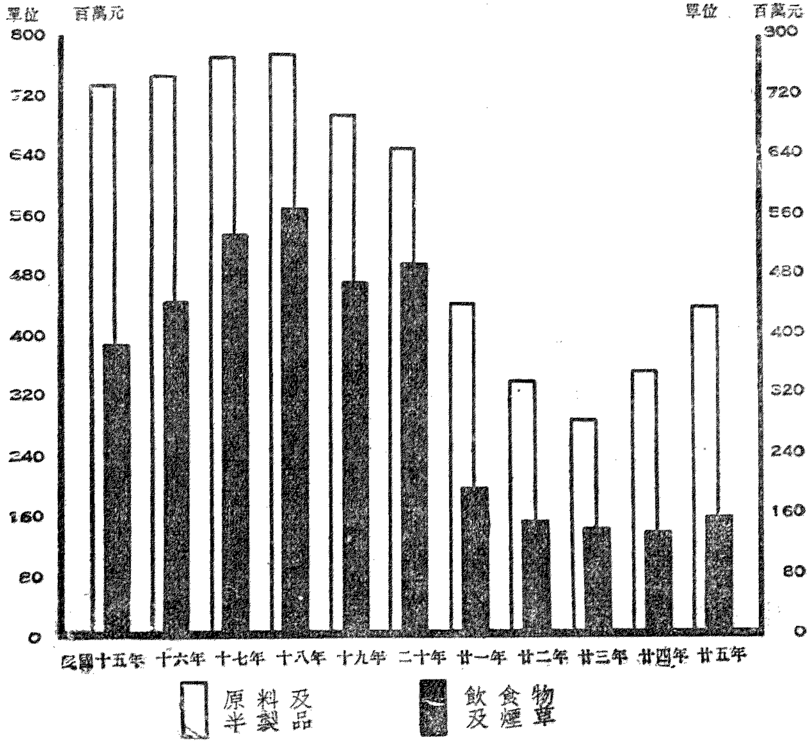
(單式距限長條圖)

之最高與最低工資率中探求最大之差數,定爲比度之全距;然後規定比度單位,比度數目,比度點;繪定各業工人工資率之最高最低及平均點;更用橫直線聯綴各業工資率之最高點與最低點,用豎線標別各業之平均工資率點卽成.

(二)複式長條圖——複式長條圖乃以兩道或兩道以上之

圖四　歷年我國輸出原料及半製造品與飲食物及烟草比較圖

民國十五年至二十五年



(疊併複式長條圖)

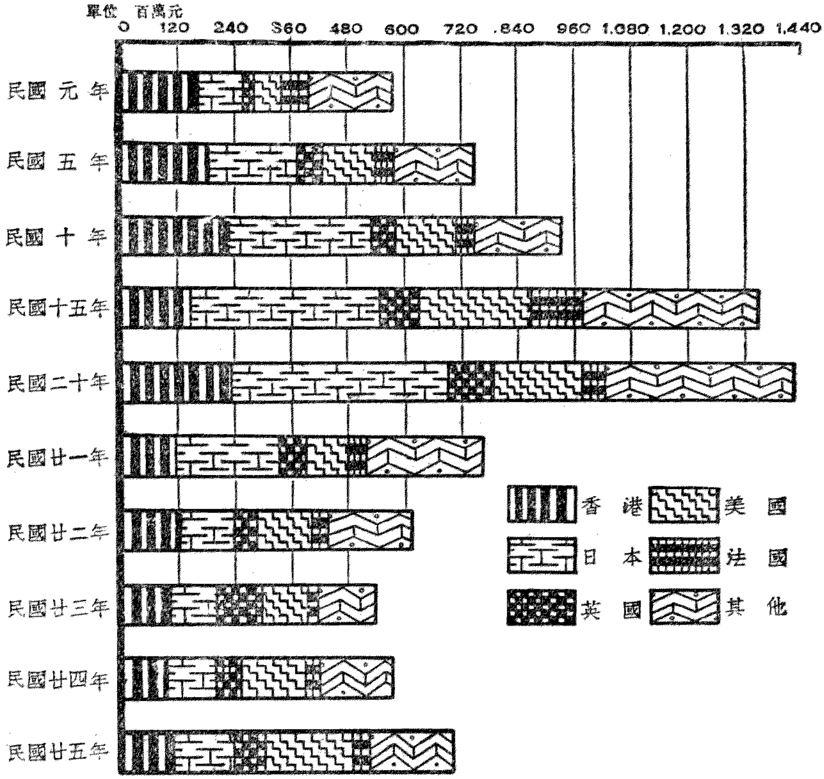
長條爲一組,代表一大項目,而以每組中各長條,表示大項目中之小項目之圖形也.此種長條圖於每條之中,不分區段,惟以兩道及兩道以上之長條繪於一處,每道長條宜用不同之顏色或交叉線區別之,免致混雜.圖四以白縱條表示輸出原料及半製造品值,黑縱條表示輸出飲食物及烟草值.更以縱條過多,將黑白二長條疊併之,藉可經濟地位,而得維持各長條及條與條間適當闊度.

(三) 獨一分段長條圖——獨一分段長條圖者,乃以單一之長條內,區分爲若干段之圖形也.此種圖式,以單一長條之全部,代表事實之總數,同時將其區分爲若干段,每段代表總數中之一部.並將各段以不同之交叉線或顏色顯別之卽成.

(四) 單式分段長條圖——單式分段長條圖者,乃將各條之內,分成區段之簡單長條圖也.此種圖形,除段與段之間可供比較外,卽條與條之間,亦可相互比較.圖五卽示我國於民國元年,五年,十年,十五年及二十年至二十五年,國貨輸往各國之比較.各條之長短,卽示各年輸出貨值之大小.每條之內又分爲六段,每段用一種交叉線或顏色顯示之卽成.

單式分段長條圖之繪法,先將各年輸出貨值按上端之橫比度,繪成若干空白長條.再將各年輸往各國之累積貨值,點定分段點,繪畫分段線.末後將各段用交叉

圖五 歷年我國輸出總值國別圖 民國元年,五年,十年,十五年及二十年至二十五年



(實數分段單長條圖)

線或顏色區別之即成.惟某種交叉線或顏色用以代表某國者,應先後一律,切不可隨年更變.

單式分段長條圖除用實數繪製者外,更有用百分數代表實數者,其繪法相同,惟各條全長代表一百分,故其長短一致,不若前者參差不齊者也.

(五) 複式分段長條圖——複式分段長條圖,係以兩道或兩道以上之分段長條爲一組,代表一大項目,而以每組中各長條,表示大項目中之小項目,各長條中之區段,明示各小項目中之事項之圖形也.其繪法,與單式分段長條圖同,惟條與條間之間隔不等.蓋每兩道或兩道以上之長條併成一組,則此兩道間之間隔,自應密接.至於各組間之間隔,自應疏散,以資識別.圖六乃以百分數繪成,故各條之長短一律;其持有比較,計有五點:

(1) 以條內各段之長短,比較各類貨值在輸入及輸出總值中,所佔百分數之大小.

(2) 各組第一條第一段之長短,比較各年輸入飲食物及烟草值,在輸入總值中所佔百分數之大小.同理,第二段比較原料及半製造品,第三段比較製造品,第四段比較雜貨.

(3) 與第二種比較相似,惟改輸入爲輸出.

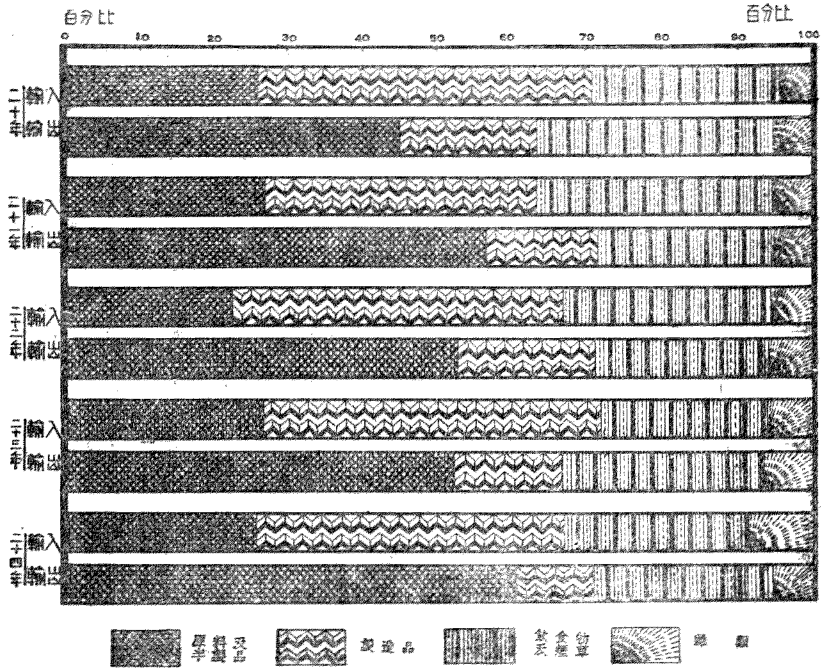
(4) 第一條各段與第二條各段之長短,比較民國二十年輸出入各類貨值在該年輸出入總值中所佔百分數之大小.同理,第三及第四條各段,比較民國二十一年;第五及第六條各段,比較民國二十二年;第七及第八條各段,比較民國二十三年;第九及第十條各段,比較民國二十四年.

(5) 圖六係用百分數繪成,故各條之長短一律,若改百分

數爲實際數量,則各橫條及條內各段之長短,又可作實値上之種種比較.

圖六　歷年我國輸出入貨值分類百分數比較圖

民國二十年至二十四年

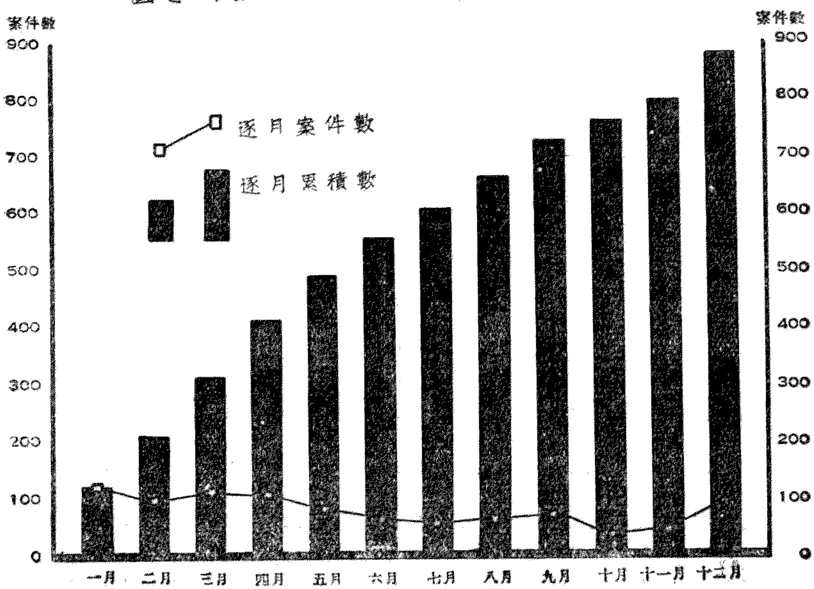


(百分數分段複長條圖)

(六)　條線混合圖——條線混合圖乃以曲線與縱條混合而成,縱條與縱條之間,俱可相互比較.各同項目之長條間,更以曲線聯綴之,以示歷年之升降變遷.此種圖形,以所用資料之簡單與累積,可分爲單式條線混合圖與累積式條線混合圖二種.若以各變量之簡單量數,點定各繪

定點,繪製垂直縱條,更與性質相同之縱條間,用曲線聯綴而成者,謂之單式條線混合圖.若用各變量之累積量數,點定各繪定點,更用縱條及曲線混合繪成者,謂之累積式條線混合圖.圖七即用各月盜案數,繪製各月單式縱條.用各月累積盜案數,繪製各月累積縱條.更因經濟紙面起見,將各月單式縱條與累積縱條疊併之,用白方塊標識各月案件數,以曲線聯綴之,藉可觀察各月盜案之多寡.由各累積縱條上觀察之,又可知各月底盜案之總數.

圖七 民國二十五年上海市盜案逐月比較圖



(累積式條線混合圖)

第二目 平面圖

平面圖乃以平面之面積,代表一事項全體之圖形也.惟面積有長寬二邊,在比較時,每感不便,故用之者較少.此種圖形以其形式之不同,又可分爲四種:一曰圓形圖,二曰矩形圖,三曰三角形圖,四曰多角形圖.

(一) 圓形圖——圓形圖以一圓形或若干圓形之面積,代表一全體事實或一事實中之若干項目之圖也.此種圖形復以其圓之多少,及單圓內包含項目之多寡,可分爲單圓,多圓及扇形三種:

(1) 單圓形圖——此種圖形係以圓形之全部面積,代表一事實之全體,再按事實各部之大小,分全圓面積爲若干扇形,以代表各項數量.其繪製之步驟如下:

(A)求各項在全體事實中所佔之百分數.

(B)以各部之百分數乘360°,得各部在全圓內應佔之度數.

(C)點定各部應佔之度數點.

(D)由圓之中心點起,依照點定之度數點,引若干界線,分全圓爲若干扇形.

(E)各扇形內用交叉線或顏色填蓋之,以資區別.

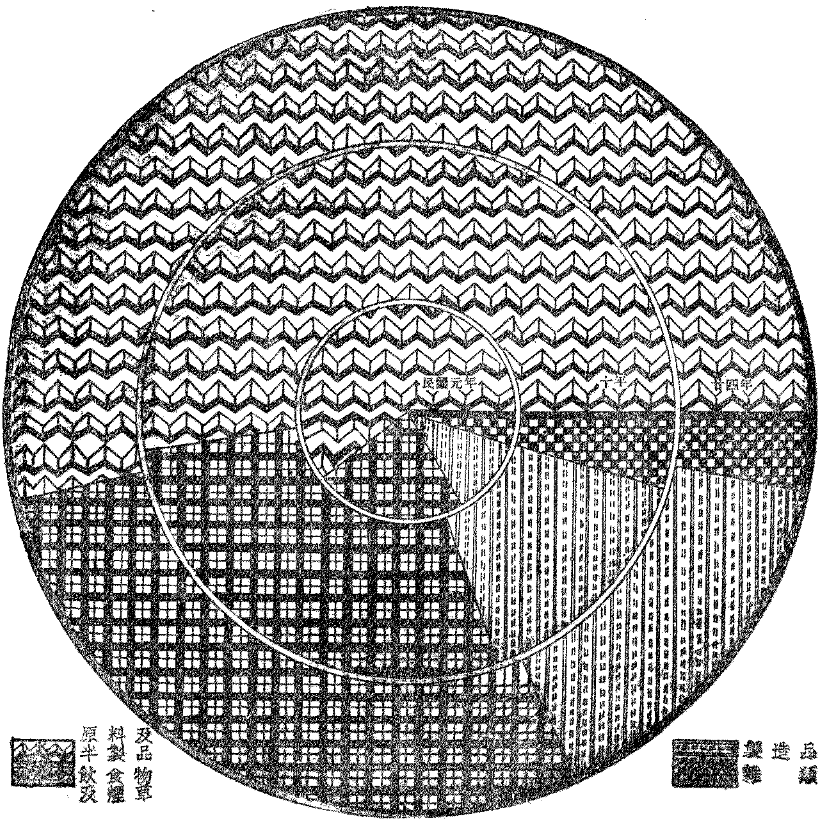
(F)各項名稱及百分數,均須寫明於各扇形之內.惟於圖下另繪圖例者,各項名稱,亦可不必直接書於各

扇形之內.

(2)多圓形圖——多圓形圖又可分為同心與異心二種:

(A)同心多圓形圖——同心多圓形,即從同一中心點,用不同之半徑繪成兩個或兩個以上之圓周,代表

圖八 民國元年十年及二十四年我國輸出貨值分類百分數比較圖



(同心多圓形圖)

兩種或兩種以上之項目.例如圖八,卽以三個圓周包圍於同一圓心點上.最小之圓周,乃代表民國元年我國輸出貨値之分類.中圓周,乃代表十年;大圓周,乃代表二十四年.至於圓周與圓周間,在半徑線上之距離,則與各年輸出總値之多寡成正比例.例如半徑線之長爲 6 英吋,元年之輸出總値爲$577,270,000,十年爲$936,756,000,二十四年爲$575,809,000,則第一圓周距離中心點當爲 1.66 吋,第二圓周距離第一圓周爲2.69吋,距離中心點爲1.66+2.69=4.35吋,第三圓周距離第二圓周爲 1.65 吋,距離中心點爲1.66+2.69+1.65=6吋.次將各圓周內,按各類貨値佔輸出總値之百分數,化成度數,點定角度點,繪劃分界線,再以交叉線或顏色塡蓋各小扇形卽成.

(B)異心多圓形圖——異心多圓形圖係用兩個或兩個以上之圓面積,代表兩項或兩項以上事實之圖形也.大圓代表大量,小圓代表小量;大量與小量之比,卽大圓面積與小圓面積之比;亦卽大圓半徑與小圓半徑平方之比.故繪製此種圖形時,不可不知求圓面積之方法.求圓面積之公式如下:

$$\text{圓面積} = \text{半徑}^2 \times 3.1416$$

繪製此種圖形時,先將最大或最小變量,假定其在圓形上之半徑爲若干,再依上列公式求得代

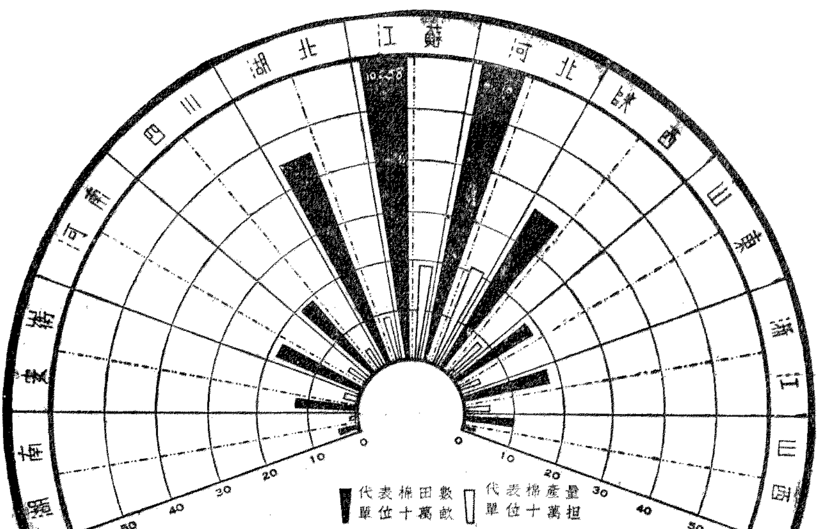
表此最大或最小變量之圓面積.以此圓面積為標準,按各變量之大小,推求代表其他變量應有之面積.然後再依下列公式計算其他圓形應有之半徑.

$$圓形之半徑=\sqrt{\frac{圓形面積}{3.1416}}$$

依上列公式求得代表各變量圓形之半徑後,即可繪製大小不一之異心多圓形圖.

(3)扇形圖——扇形圖係以全圓之一部,代表事實之一部或全部.例如多扇形圖,則用各扇形面積之大小,代表事實中各變量之大小.每一扇形,即表示事實之一部.單扇形圖,則以一大扇形代表事實之全體,再將其

圖九　民國二十四年我國各省棉田及棉產比較圖



(扇形圖)

分劃爲若干小扇形,藉以表示全體事實中各項變量之大小.如圖九卽在一大扇形中復分爲十一小扇形,每一小扇代表一省,復將其分爲左右兩部,按各省於民國二十四年棉田及棉產量之大小多少,繪製長條,(棉田在左,棉產在右.)更將代表各省棉田之長條,用交叉線等塡蓋之卽成.

(二) 矩形圖——矩形圖者,係以各正方或長方之面積,代表事實中各變量大小之圖形也.繪製之法,先將最大或最小之變量,假定其邊長爲若干,然後依下列公式,求正方之面積:

$$\text{正方面積} = \text{邊長}^2$$

$$\text{長方面積} = \text{長} \times \text{闊}$$

依上列公式,求得代表各變量之面積後,再用:

$$\text{邊長} = \sqrt{\text{正方面積}}$$

之公式計算其他各方塊之邊長,然後繪示之卽成矩形圖.

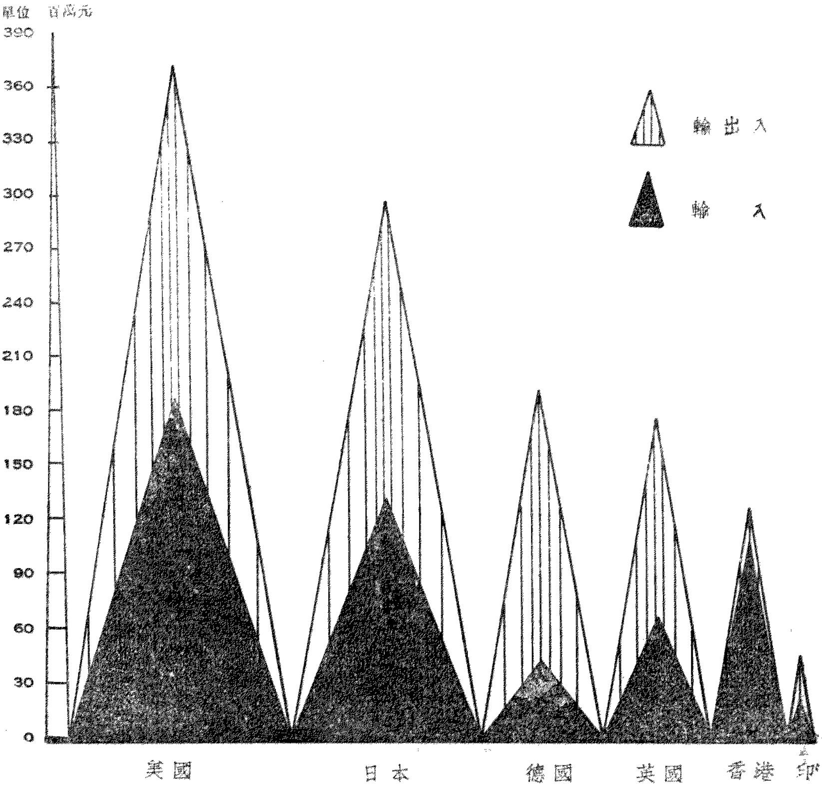
(三) 三角形圖——三角形圖乃以各三角面積之大小,或各三角垂直線之長短,底基線之寬狹,表示變量大小之圖形也.如以面積之大小,代表變量之大小者,則三角形面積之求法,不能不知.求三角形面積之公式如下:

$$\text{三角形面積} = \frac{\text{垂直線} \times \text{底基線}}{2}$$

如以各三角之垂直線及底基線之長短闊狹,測定

變量之大小者,則於各三角之旁,多設一比度尺,各三角之高低,即視各變量在此比尺上之高下而定.至於在底基線上之寬狹,則先規定各三角之總基線爲若干,然後按變量之大小比例分配之即得.

圖十　民國二十五年我國輸出入淨值國別圖



(三角形圖)

(四) 多角形圖——多角形圖乃指四角以上之圖形.其繪法,先用圓規畫一圓周,然後用量角器等分其預定角數之

平均角度.惟於等分角度時,尚須騰留塡寫比度等之地位.例如繪製八角形圖,則除留40°左右之地位作爲塡寫比度及圖例外,其餘320°可分爲八等分,每等分應佔$\frac{320}{8}=40°$.角度規定後,卽自圓之中心點起,引數直線劃分全部爲八區,區與區之間,更用直線聯綴之卽成.

第三目 立體圖

立體圖係以一立體形代表事實之全部,以長,闊,高或正面面積,側面面積之大小,表示變量之多少,或以若干立體之體積,表示各變量大小之圖形也.立體圖之種類甚多,其普通者有角柱,圓柱,正立方體,長立方體及球體等數種.其繪法,有用透視(Perspective)畫法者,亦有用投影(Oblique parallel projection)畫法者,全視繪圖者之喜歡而定.

立體圖旣有以體積之大小,代表變量之大小者,則求各立體形體積之方法,應先知之.玆將求角柱,圓柱,正立方體,長立方體及球體體積之公式,示之如下:

(一) 角柱體積$=\frac{1}{3}\times$角柱底面積$\times$角柱之垂直線

(二) 圓柱體積$=$圓柱底面積$\times$圓柱高

(三) 正立方體體積$=$邊長^3

(四) 長立方體體積$=$長$\times$闊$\times$高

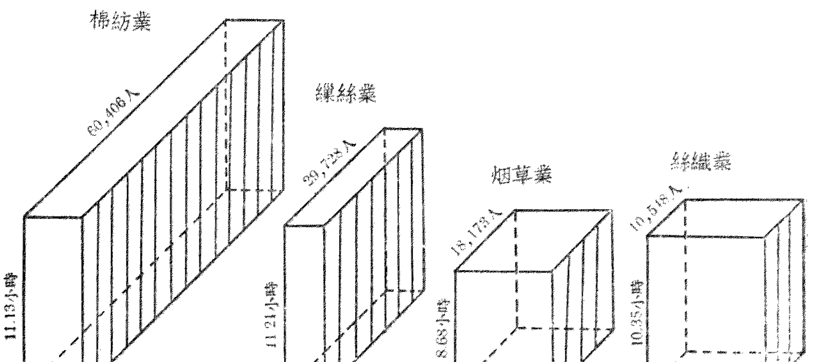
(五) 球體體積$=\frac{1}{6}\times$半徑$^3\times 3.1416$

用面積之大小,表示事實變量之大小,因有長闊二邊,比

較困難.立體圖除長闊之外,尙須計其高度,比較時之困難尤甚,故用之者極少.

圖十一卽以各長立方體之長度,表示各業之工人數;闊度表示各業工人每小時之工資率,高度表示各業工人每日實際工作時數.其繪法,先將代表棉紡業之長立方體,假定其長,闊,高度各爲若干,然後按此長立方體之長,闊,高度,依變量之大小,推求代表其他各業長立體之長,闊,高度繪製之.

圖十一　民國二十四年上海市主要工業工人數每日工作時間及每小時工資率比較圖



(立體圖——以長闊高度表示事實者)

圖十二卽用投影法繪成之正立方圖.事實變量之大小,卽用正立方體之大小表示之.繪製之法,亦先假定代表最大或最小變量之正立方體之邊長爲若干,然後依此標準,推求其他正立方體應有之邊長.例如代表墨西哥產銀量之正立

方體,其每邊長度爲一英吋,則其體積爲$1\times1\times1=1$立方英吋.代表美國產銀量之正立方體,其每邊長度應爲0.797吋.其計算方法如下:

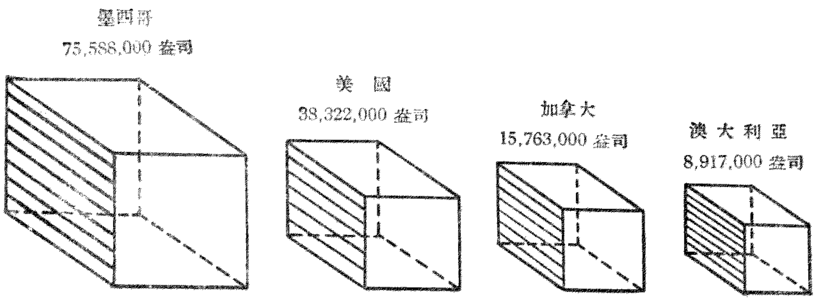
$$75{,}588{,}000:38{,}322{,}000=1:x$$

$$x=\frac{38{,}322{,}000\times1}{75{,}588{,}000}=0.506985$$

$$\text{每邊長度}=\sqrt[3]{0.506985}=0.797\text{吋}$$

代表加拿大及祕魯正立方體之每邊長度,亦可依此計算.而後繪成正立方體如下:

圖十二 一九三五年世界重要產銀國產銀數額圖

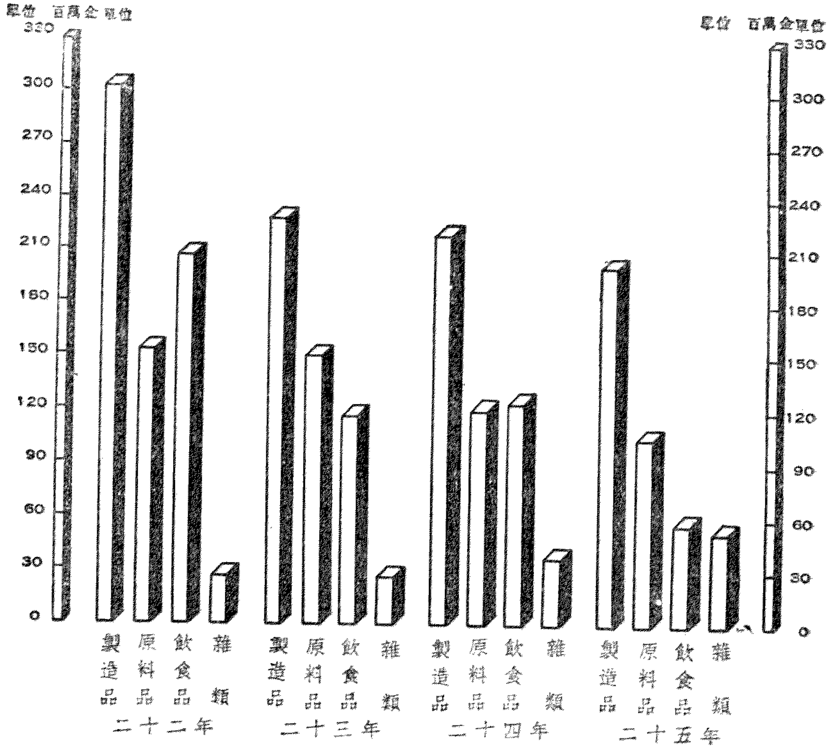


(投影立體圖——以體積之大小表示事實者)

圖十三爲一散處之長柱圖,此種圖式不檢各柱體積之大小,僅以其在比度尺上之高低,表示變量之大小.其繪法,以若干長柱併成一組,代表一年;組內第一條,代表輸入製造品值,第二條代表原料及半製造品,第三條代表飲食物及烟草,第四條代表雜類.第一組代表民國二十二年,第二組代表二十三年,第三組代表二十四年,第四組代表二十五年.

圖十三 歷年我國輸入貨值分類比較圖

(民國二十二年至二十五年)



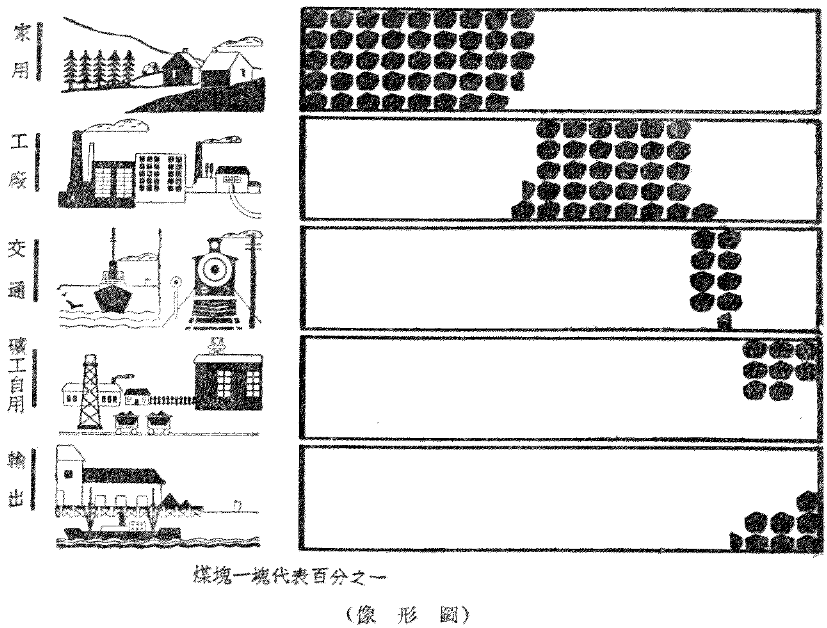
(圖柱長處散)

第四目 像形圖

像形圖乃將欲表示之事實繪成圖形,以各體形之大小,高低,闊狹,多少等,表示事實變量之大小者也.圖十四即以煤塊之多少,表示國煤用途之分配.煤塊一塊,代表百分之一.用

量愈大,煤塊愈多,所佔百分愈高.用量愈小,煤塊愈少,所佔百分愈低.且於煤塊之前,更用各種圖式顯示其用途.此種圖形,最易引人入趣,故於啓蒙及宣傳上多用之.

圖十四　國煤用途百分數比較圖

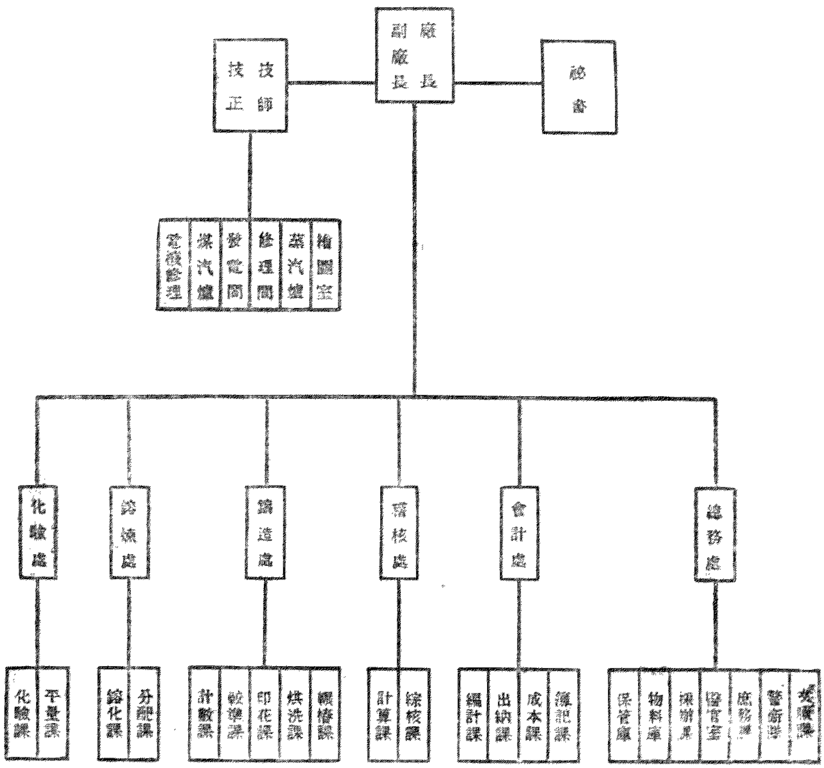


(像形圖)

第五目　系統圖

系統圖亦稱組織圖,凡事實之現象,不重數量,而重相互關係及先後次序者,如用此種圖形表示,最稱確當.圖十五即示我國中央造幣廠之新組織,廠長及副廠長之下,共分總務,會計,稽核,鑄造,鎔煉及化驗等六處二十二課如下:

圖十五　財政部中央造幣廠組織圖



(系統圖)

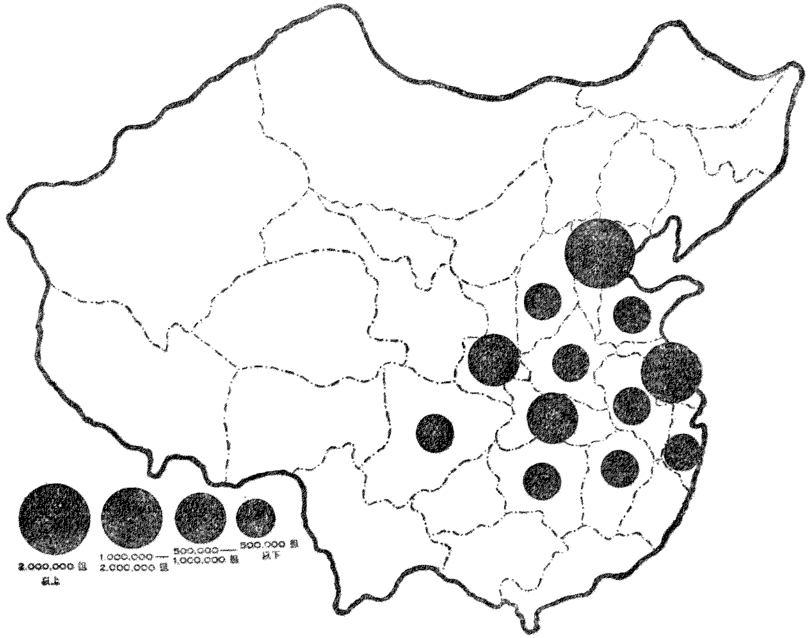
第六目　統計地圖

統計地圖者,表示統計事項在地域上分佈關係之圖也.其繪製之方法,有以交叉線之粗細疏密,區別數量之大小者.有以點之多少,大小,濃淡,表示變量之大小者.有以顏色之深淺異彩,分別各項變量之大小者,各各不同.其在地圖之本身

性質上,地域鄰接之順序,本已表出,如製圖者更依變量之大小,加以種種記號,則其在各地集中或分佈之狀況,位置,風土,地勢及其他之特質,俱能明白顯示.故凡統計各省人口之疏密,農產礦產之多寡等,多用此種圖形表明之.統計地圖之種類,以其繪法之不同,更可分爲點地圖,橫線地圖,顏色地圖,像形地圖,標針地圖及模型地圖等六種:

(一) 點地圖——統計圖中有名點圖者,即以點之大小,多少,或陰影之深淺,表示事實變量之大小者也.點圖如繪於地圖上即成點地圖.凡顯示各地人口之疏密,牲畜之多

圖十六 民國二十四年全國各省產棉量比較圖



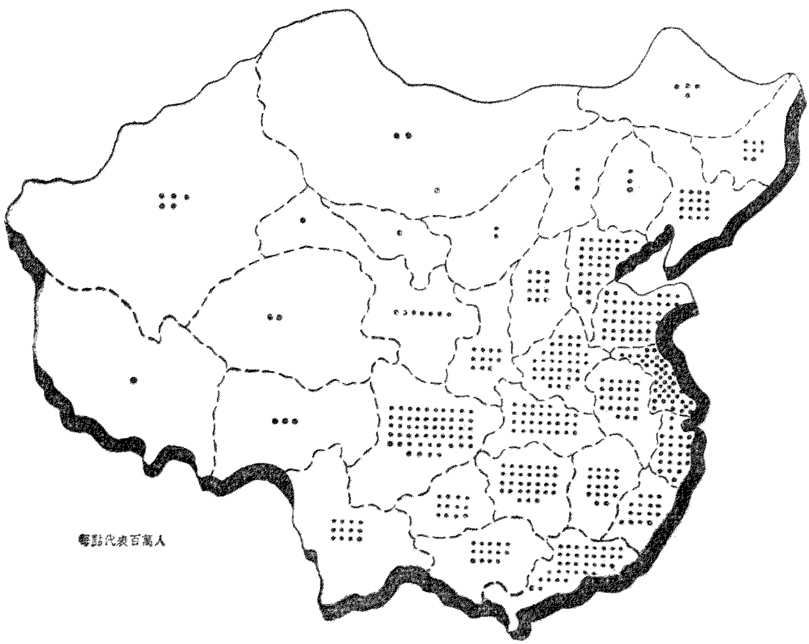
(單點地圖)

寡等多用之.點地圖復以用點之多少及陰影之深淺,又可分爲單點,密點及四分點等三種:

(1)單點地圖——單點地圖即以地圖內點之大小表示事實變量之巨細.變量巨,用點大;變量細,用點小.圖十六即示我國各省產棉量之多寡.最小之點,代表產皮棉 500,000 擔以下;較大之點,代表 500,000 至 1,000,000 擔;更大之點,代表 1,000,000 至 2,000,000 擔;最大之點,代表 2,000,000 擔以上.

(2)密點地圖——密點地圖乃以點之多少,表示變量之

圖十七　全國各省人口比較圖



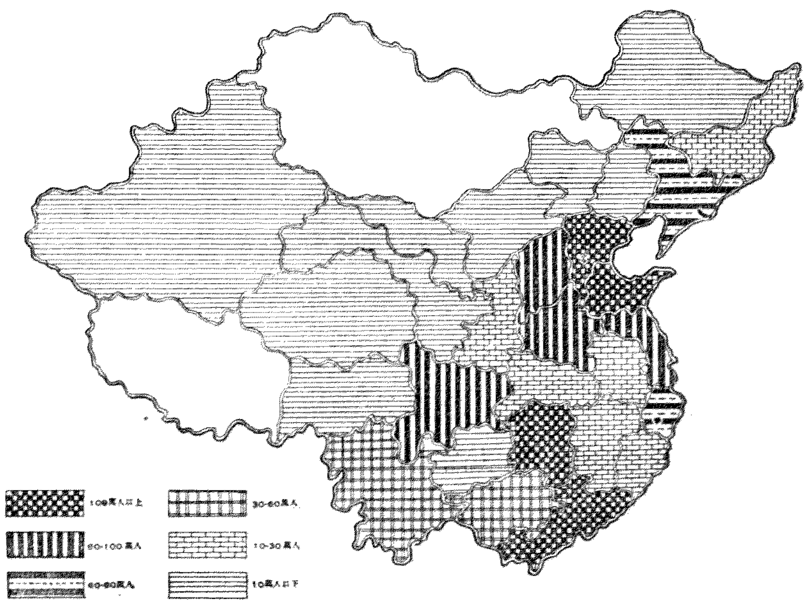
(密點地圖)

大小.圖十七即示全國各省人口之多寡,每一小點,代表一百萬人.四川省密點最多,代表人口數最大.西康及寧夏等省僅一點,代表人口百餘萬.此種圖形之優點,可使閱者易得確切之概念;蓋視點之多少,即可知變量之大小也.

(3) 四分點地圖——四分點地圖乃以點內黑影之多少,表示變量大小之圖形.點內黑影愈多,表示變量愈大.點內黑影愈少,表示變量愈小.

(二) 橫線地圖——橫線地圖乃以交叉線之疏密或陰影之

圖十八　全國各省學生數比較圖



(橫線地圖)

深淺,表示事實大小之圖形也.劃線密接或陰影較深者,代表大量;劃線疏散或陰影較淺者,代表小量.圖十八即示我國各省學生數之多少,中以廣東,湖南,河北,山東等省之陰影最深,代表學生數最多.四川,山西等省陰影較淺,代表學生數較少.其他各省俱以交叉線之疏密,表示學生數之多少者也.

(三) 顏色地圖——顏色地圖乃以各種顏色,或同一顏色之深淺,表示變量大小之圖也.使用異色時,暗濃之色,代表大量;鮮淡之色,代表小量.如用同色,則着色愈深,代表變量愈大;着色愈淺,代表變量愈小.此種地圖如作色巧妙,配合得當,亦易引人入趣.惟於繪製時費用較大,印刷時手續太繁,故仍少採用者.

(四) 像形地圖——像形地圖乃以大小或多少之形像,分繪於各地之圖形.例如表示各省人口之多少,即可隨變量之大小,分繪若干人形於各地.表示各省銀行家數之多寡,即可隨變量之大小,分繪高低不一之建築物於各地等是也.

(五) 標針地圖——標針地圖乃以細針之多少,或不同之標旗插於地圖之上,以示事實變量之大小,或兩軍之駐防地等等.此種圖之優點,在於標針之隨時可以移動.故遇事實之在地域上常有變動者,利用此圖最稱便利.例如兩軍相鬥,一敗一勝,則兩種不同之標旗,可隨時移至戰

敗或戰勝之地.又如某工廠出品,在昔盛銷於甲地,故甲地細針最多;自後因受種種影響,銷數漸減,則甲地細針,隨時拔去.如甲地減銷,乙地增加,則將細針移至乙地標記之,以顯其變動後之結果也.

(六) 模型地圖——模型地圖乃於地圖板上塑成凹凸不平之圖形也.例如甲地地勢高,可用凸出之高度表示之.乙地地勢較低,可用凹入之低度顯示之.此種圖形常於陳列室或博物館內見之.惟以塑刻不易,製之者極少.

第七目　曲線圖

曲線圖乃以曲線之升降表示統計事項變動之圖形.其繪法,先引縱橫兩線於一紙,縱線普通稱爲縱軸(y軸),橫線普通稱爲橫軸(x軸).縱軸上之比度,謂之縱比度;橫軸上之比度,謂之橫比度.平面上任何一點在縱比度上所測定之數量,爲該點之縱坐標.其在橫比度上所測定之數量,爲該點之橫坐標.再將在縱橫比度上測定之點,用直線聯綴之,即成曲線圖.其升降起伏,即可測定統計事項變遷之實況.

事實之變量,每可分爲獨立及附屬兩種.在時間數列中,時間爲獨立變量;各時期之數量乃隨時間之過去而不同,故稱附屬變量.在次數表中,分組數量爲獨立變量;次數乃隨分組而異,故稱次數爲附屬變量.獨立變量,應置於橫軸;附屬變量,應置於縱軸.故橫比度爲獨立變量之尺量,縱比度爲附屬

變量之尺量也.

曲線圖之種類,如依所示統計資料之不同,可分爲歷史曲線圖與次數曲線圖兩種.如依縱橫比度點與比度點間間隔之不同,可分爲等差與等比曲線圖兩種.如依曲線曲折之不同,又可分爲多角曲線圖與圓滑曲線圖兩種.如依繪成曲線形狀之不同,又可分爲距限,帶紋,山狀及分歧等數種.茲分別述之如下:

(一) 等差曲線圖——等差曲線圖又名算術曲線圖 (Arithmetic curve),以其在縱橫兩軸上各比度點與比度點間之間隔相等,而其代表數量之差亦相等故名.等差曲線圖以其所用統計材料之不同,又可分爲歷史及次數曲線圖兩種:

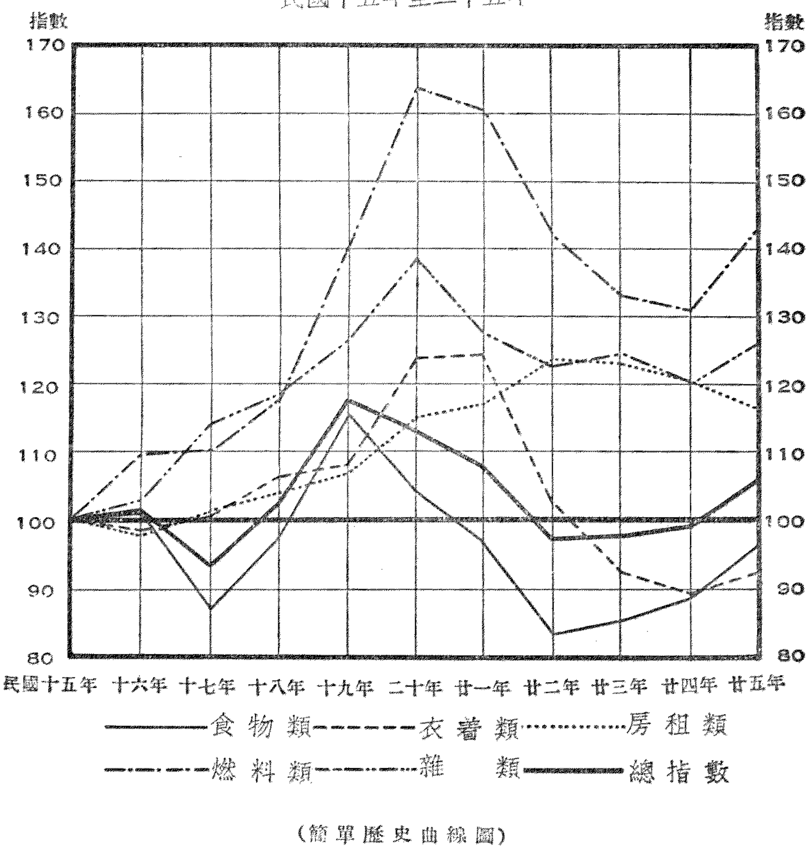
(1) 歷史曲線圖——歷史曲線圖 (Historical curve) 者,乃表示歷史上連貫之事實,以觀察其變遷之狀況者也.此種圖形既以時間爲基性,則繪製之時,應先將各時期之數値順次排列之,而爲時間數列;再依時間數列上之變量,點定坐標,繪成曲線,藉以表明變量與時間間之相互關係.歷史曲線圖之種類,因繪製方法及繪成形式之不同,又可分爲下列七種:

(A)簡單歷史曲線圖——簡單歷史曲線圖 (Simple historical curve) 乃用時間數列之簡單變量繪製而成.其所表示者乃僅數量於時間過去上之升降起

狀.圖十九即示上海市工人生活費指數之升降,生活程度之高低,即可一覽無餘。

圖十九　上海市工人生活費指數分類比較圖

民國十五年至二十五年



(簡單歷史曲線圖)

歷史曲線圖上如欲表示兩種變量相差極大之數列時,則代表大變量之曲線,升降極顯.代表小

變量之曲線,因受比度之限制,起伏不顯.解決此種困難之方法,普通計有下列四種:

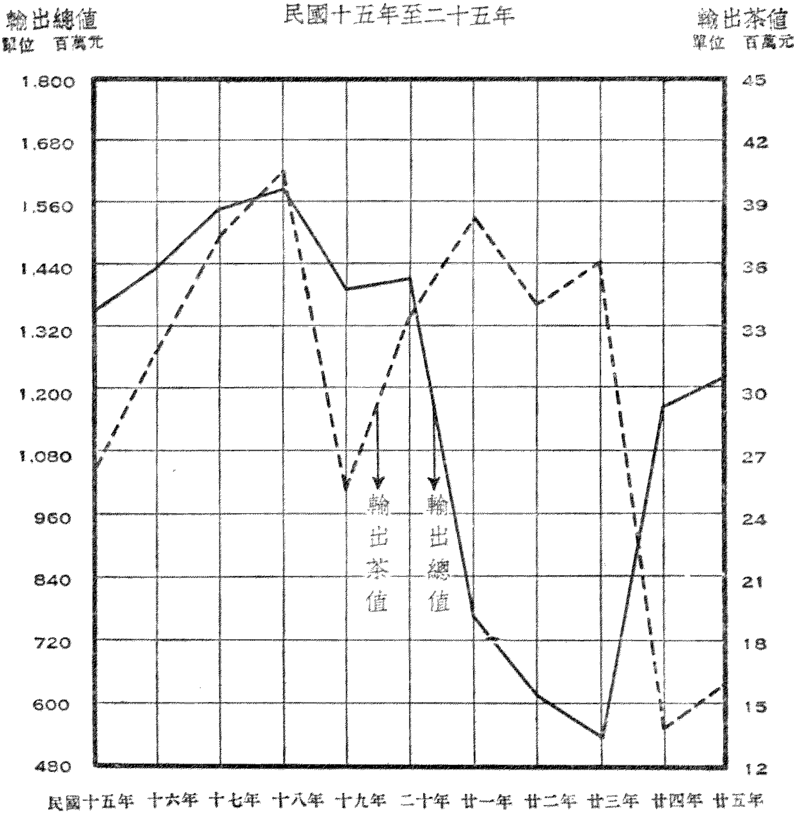
(a)破格法——即將一曲線圖用破格式分為上下兩部.上部之比度組距與下部之比度組距,可不必相同.兩部之間用裂紙形分斷之,如是曲線之漲跌並顯,比較自易.

(b)比度調合法——此法即於左右縱軸上,用不同之比度調節之.例如圖二十,左縱軸上之比度,用以測量輸出總值.右縱軸上之比度,用以測量輸出茶值.因左縱軸上之比度組距大於右縱軸上之比度組距40倍,故雖兩數列之變量成1與42之比,然用上述兩種比度調節之,則曲線之起伏並顯,比較不難矣.

比度調合法,除能解決兩變量相差極大時之比較外,即兩變量之單位不同,亦可用此法調節之.例如歷年我國輸出生絲量值之比較;輸出生絲量,以公擔計,輸出生絲值,以國幣元計.統計者如欲將歷年輸出絲量絲值,繪於一圖比較時,則不僅變量與變量間,相差極大,(如民國二十五年我國輸出生絲量為37,942公擔,值$36,712,870,變量與變量間,成1與968之比.)比較困難,即單位互異,絕不能用同一比度測量之.惟若將圖

之左縱比度用以測量絲值,右縱比度,用以測量絲量,若是雖變量相差極大,單位互異,繪製及比較時之困難,俱可迎刃而解。

圖二十　歷年我國輸出總值及茶值比較圖



（比度調合式簡單歷史曲線圖）

(c)指數法——若將輸出總值,輸出茶值,或輸出絲值,輸出絲量,同以某年爲基期,化成指數,則實際

數值,俱變為相對數字.大變量小變量以及單位等等,俱可相互銷除.以此相對數字繪製曲線,亦可解決上述困難.

(*d*)對數法——如將代表兩變量相差極大之曲線,繪於單對數圖上,則兩曲線之升降並顯,比較不難.例如圖二十九卽將歷年某市甲,乙,丙三廠之生產量,同繪於單對數紙上,三線之升降甚顯.若繪於算術曲線圖上,則代表丙廠與乙廠每日生產值之曲線,定必受比度之限制,而起伏不明.

(B)圓滑歷史曲線圖——簡單歷史曲線圖乃用直線聯綴各繪定點而成.以其用直線聯綴各點,故角度至多,普通名之曰多角曲線,或稱多邊曲線.若將角度删去,改用曲線板繪製之,卽成圓滑曲線圖.繪製此種圖形之目的,乃欲免除不規則之變動,使統計事項得能示其眞相.並可用以插補遺漏或未調查之數值,及決定長期趨勢等等.

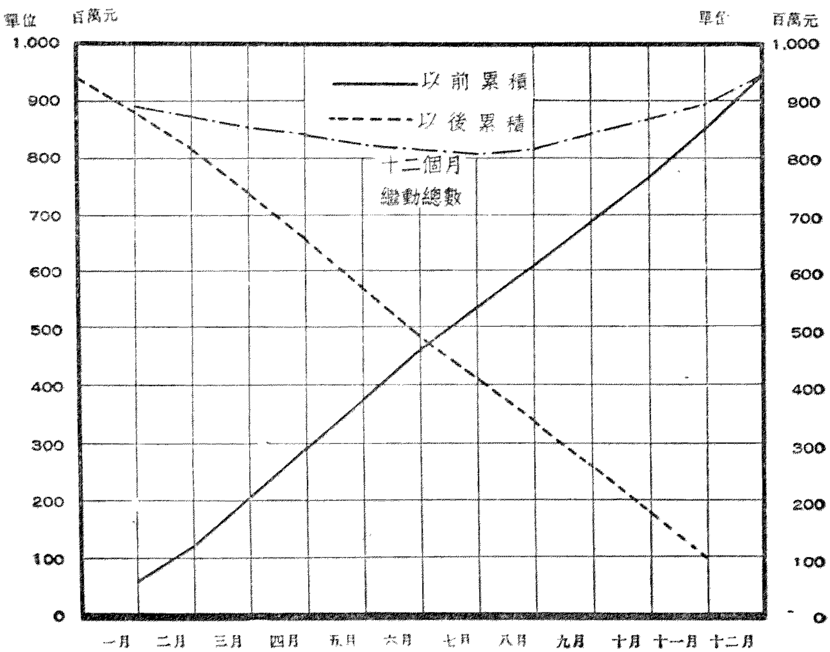
(C)累積時間曲線圖——累積時間曲線圖乃用各時期末或各時期初之累積數量繪製而成.圖二十一卽用民國二十五年我國對外貿易之逐月累積數繪製而成.此種圖形因累積方法之不同,又可分為三種:

(*a*)以前累積曲線圖——以前累積曲線(Up to and

including curve) 乃由圖之左下角逐漸趨向右上角,如圖二十一之以前累積線.其所示者係我國於某月末及某月以前對外貿易之總值,故橫坐標應點定於每月之右指導線上,以示各月末之累積總值.

(*b*)以後累積曲線圖——以後累積曲線(After and including curve) 乃由圖之左上角逐漸趨向右下角,如圖二十一之以後累積線.其所示者係我國於某月初及某月以後對外貿易之總值,故橫坐標

圖二十一　民國二十五年我國輸入貨值逐月累積圖



(累積歷史曲線圖)

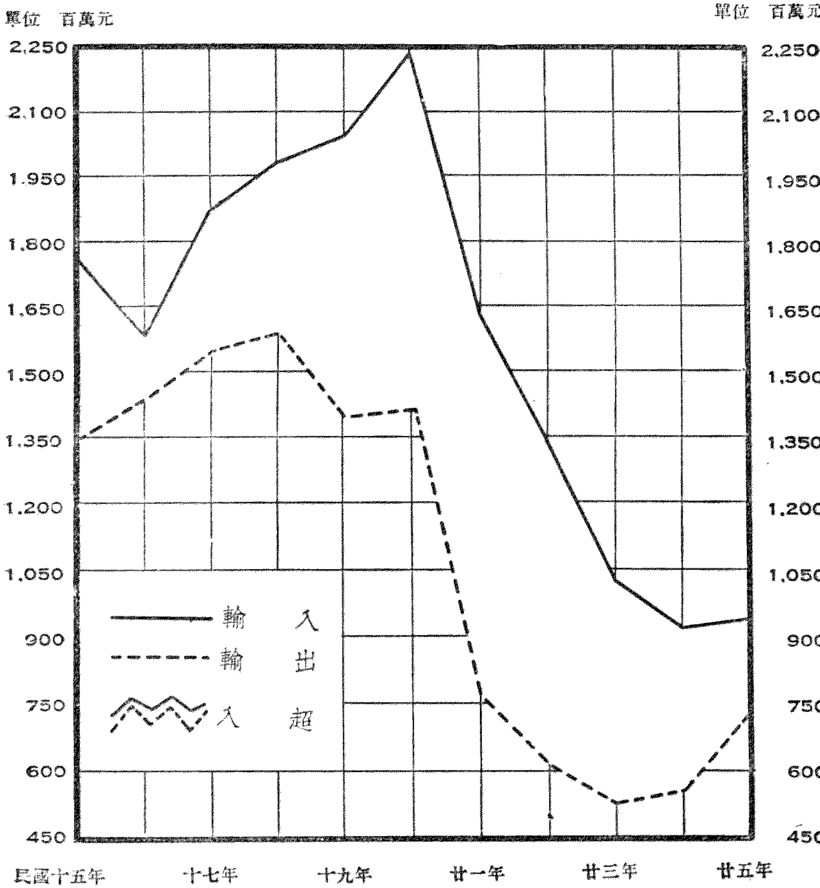
標應點定於每月之左指導線上,以示各月初之累積總值.

(c)繼動累積曲線圖——繼動累積曲線(Moving total curve)係用某時期末及某時期以前若干時間之總數量,繪製而成.其所表示者係於若干時期前至本時期末之總量.如圖二十一之繼動總數線,卽示我國每十二個月對外貿易總值之變遷.繪製之前,先行計算本月與前十一個月之總值,然後於每月之右指導線上點定坐標,並將各坐標用直線聯綴之,卽成繼動累積曲線圖.

(D)距限曲線圖——以上所述各種曲線圖,每期之數值祇有一種.如欲表示一期中兩種不同之數值,則可用距限曲線圖.如一期中最高與最低利率之比較,最大工資與最小工資之比較,最貴價格與最賤價格之比較,以及輸出入貨值之比較等,皆可用此種圖形顯示之.繪製之法,先將各期最高利率,工資,價格或輸入值等,製成第一條簡單曲線.次將各期最低利率,工資,價格或輸出值等,製成第二條簡單曲線.末將兩簡單曲線間之面積,用顏色或交叉線填蓋之,卽成距限曲線圖.圖二十二卽示我國歷年輸出入之超額.輸入貨值俱超過輸出.入超額之增減,卽可視兩線距離之遠近而知之.

圖二十二　歷年我國入超額比較圖

民國十五年至二十五年



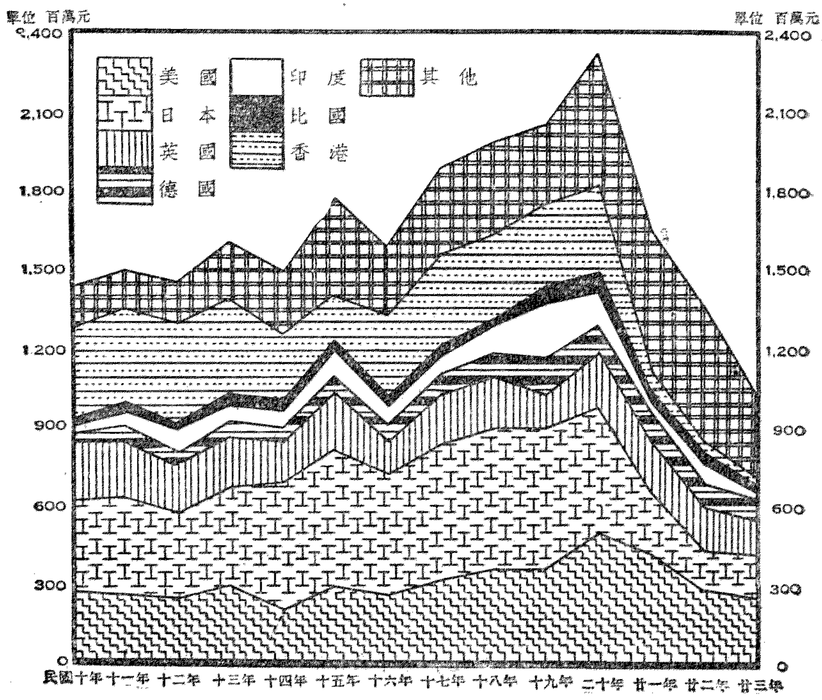
(距限曲線圖)

(E)帶紋曲線圖——帶紋曲線圖乃用帶紋表示事實全體及各部份分量之圖也,繪製之法,先由基線起測定代表一部份分量之曲線,然後仍由基線起用第一部份與第二部份之累積數量,測定第二部之

曲線.迨各部份之面積與界線完全求出後,即將代表各部份數量之面積,用各種交叉線或顏色顯別之即成.此種圖形因所用數量係實數或百分數之不同,又可分爲實數及百分數帶紋曲線圖兩種:

(*a*)實數帶紋曲線圖——此種圖形係用各部份之累積實數,繪製而成.其形式略與簡單分段長條圖同.圖二十三即示歷年我國輸入淨值國別圖,各部份之分界線,俱用各部份之累積數值繪製

圖二十三 歷年我國輸入淨值國別圖 民國十年三二十三年

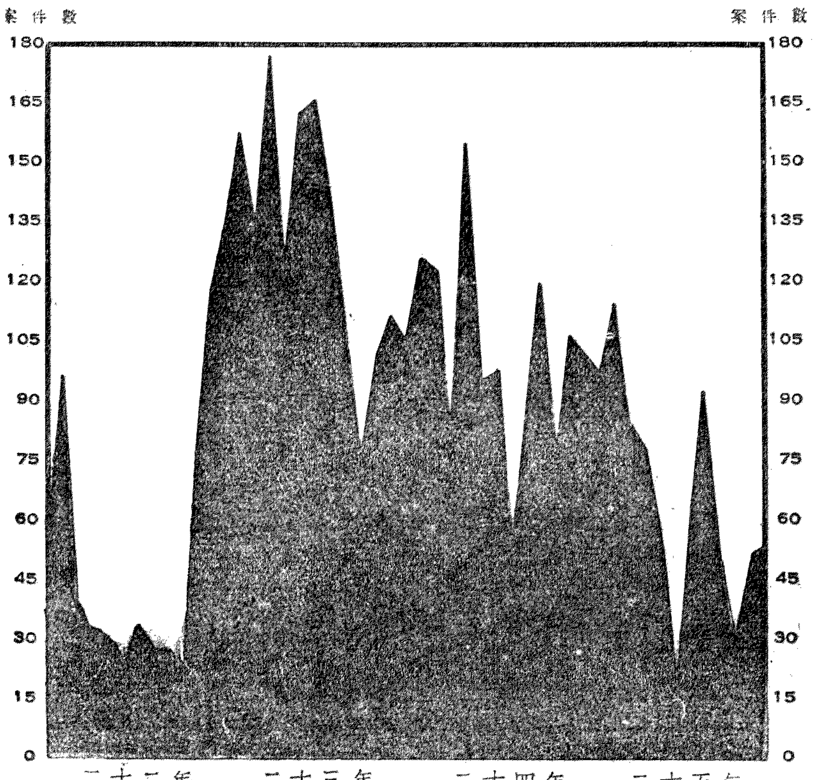


(實數帶紋曲線圖)

之.故最高之曲線,卽示我國歷年輸入淨值之總額.

(*b*)百分數帶紋曲線圖——此種圖形係用各部份之累積百分數繪成.其形式略與簡單分段長條圖之用百分數繪成者略同.其繪法與實數帶紋曲線圖同,惟用百分數代替實數而已.

圖二十四　上海市火災統計逐月比較圖 民國二十二年至二十五年

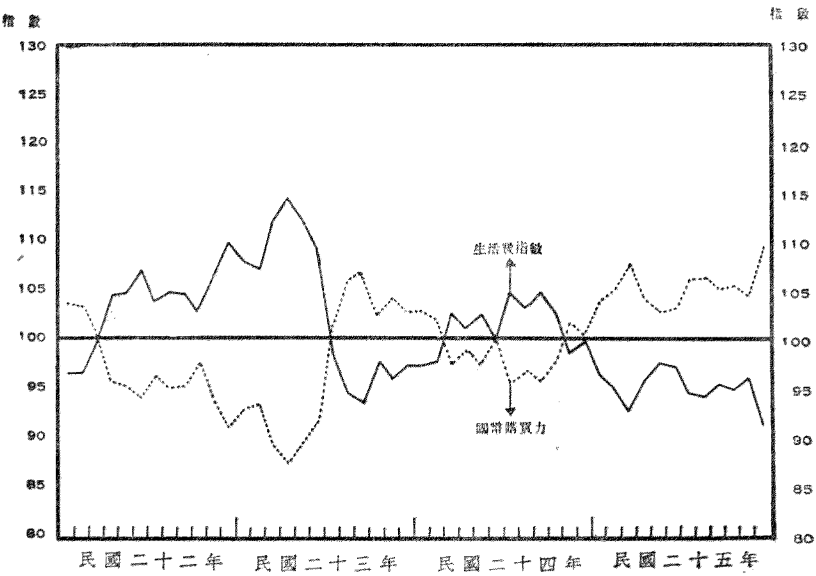


(山狀曲線圖)

(F)山狀曲線圖——此種圖形因狀似高山,故名曰山狀曲線圖.其繪法與簡單歷史曲線圖,大致相同,惟比度須自零度起,曲線下之面積,須用交叉線或顏色塡蓋之.圖二十四卽示上海市火災統計逐月之比較,高峯起伏,酷似山巒也.

(G)分歧曲線圖——分歧曲線圖爲表示某種事實正負相反狀況之圖形.繪製之時,應先擇定某橫線爲基線,代表百分點或零點.依此基線卽將事實之正負數量,繪成多邊或山狀曲線,卽成分歧曲線圖.例

圖二十五 上海市工人生活費指數及國幣購買力逐月比較圖
民國二十二年至二十五年



(分歧曲線圖)

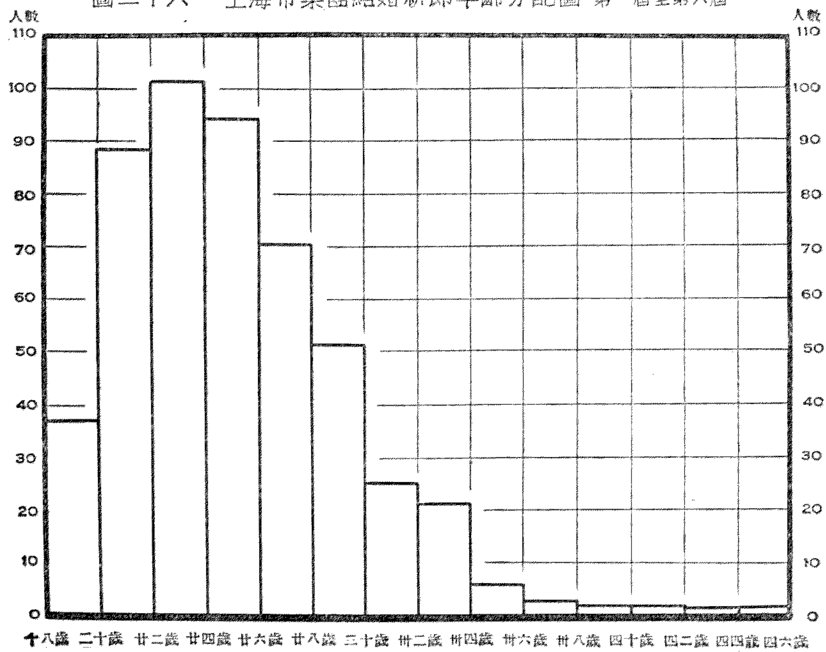
如圖二十五卽示民國二十二年至二十五年上海市逐月工人生活費指數與國幣購買力之比較,生活費指數上漲,國幣購買力必隨之下跌;生活費指數下跌,國幣購買力必隨之上漲.用此兩指數繪成兩條簡單歷史曲線,卽成分歧曲線圖.

(2)次數曲線圖——歷史曲線圖乃表示歷史上連貫事實之變動,次數曲線圖乃用以表示次數分配之狀態.歷史曲線圖以時間列項所發生之變量爲主體,次數曲線圖乃以次數所由生之變量爲主體.簡言之,歷史曲線圖與次數曲線圖之異點,僅在表示材料上之不同而已.至其繪製方法等,大致相同,次數曲線圖既以次數數列爲主體,故於繪製之前,應將事實之變量編成分組或不分組次數分配表;以縱比度測量次數,橫比度測量變數;將各組次數逐一依縱比度求縱坐標,並順序依橫比度求橫坐標.再將各坐標用直線聯綴之,卽示變量與次數兩量間相互關係之次數曲線圖.至於次數曲線圖之種類,以其所用材料之不同,復可分爲直方圖,簡單次數曲線圖,圓滑次數曲線圖及累積次數曲線圖等四種如下:

(A)直方圖——直方圖乃以若干直立長方形,表示若干組次數分配之圖形.各直方之高低與各組次數之多少成正比例.故繪製之時,先將次數分配表內

之次數,依縱比度測定各直方之高頂線,再由高頂線之兩端,引兩垂直線與基線相繼,即成直方圖.其效用,除能表示次數之分配外,且易於核計次數之精確數目.

圖二十六 上海市集團結婚新郎年齡分配圖 第一屆至第六屆



(直 方 圖)

(B)簡單次數曲線圖——簡單次數曲線圖亦稱多邊或多角次數曲線圖.其繪法即將直方圖上各長方頂線之中點,用直線聯綴之即成.繪製此種曲線圖

時,應加注意者,卽直方圖上代表次數分配之面積,於可能範圍內,應與簡單次數曲線下之面積相等.圖二十七之B線卽簡單次數曲線也。

(C)圓滑次數曲線圖——繪製圓滑次數曲線圖之目的有二:

(a)將各項偶由取樣而發生之不規則現象刪去之,使準確之分配狀況得以表現.

(b)求便於推算各變量之次數分配.

繪製圓滑次數曲線圖時,應以直方圖(如圖二十七之A線)爲面積上之指導.簡單次數曲線(如圖二十七之B線)爲方向上之指導.美教授威斯脫氏,在其所著之數學統計導論中,對於圓滑次數曲線之繪製,定有下列三條規律:

(a)在圓滑次數曲線下包含面積之總和,當等於原來直方圖上各長方形面積之總和.

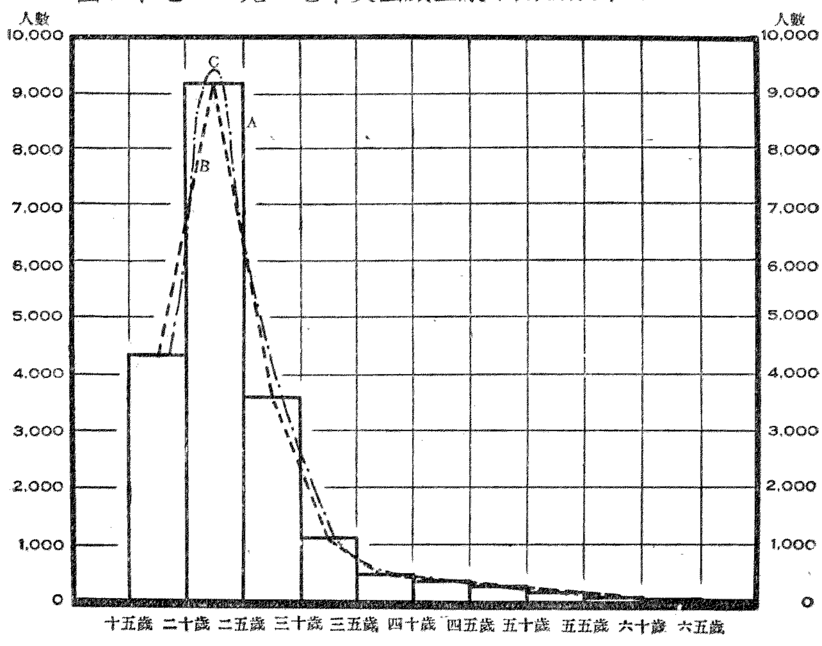
(b)各組圓滑曲線下之面積,於可能範圍內,與各直方之面積均等.

(c)圓滑曲線之轉折務須和緩,並應將簡單次數曲線,作其方向上之指導.

圓滑次數曲線之高峯,應否與簡單次數曲線之最高點,或最高直方之頂線相密合?抑在其上,或在其下?依大量觀察之原理,及上述之規律,則應在

最高點之上.蓋直方圖之繪製,其假定爲各組內次數之分配均勻.然在實際上,各組內次數之分配定必集中於中央.故在繪製圓滑曲線時,如欲將其集中之情形顯示於圖上,則應在簡單曲線最高點之

圖二十七 一九一七年美國威士康辛州新娘年齡分配圖



(簡單及圓滑次數曲線圖)

上.更依威氏定律,爲欲維持直方圖上原有之面積起見,亦應繪於最高直方頂線之上.然遇某組長方特別高出於其他各組長方時,則此非常狀態,大約

由於抽樣之失當所致,在修勻時圓滑曲線當在最高點之下.

(D)累積次數曲線圖——累積次數曲線圖係用各組之累積次數繪成.此種圖形因累積方法之不同,又可分爲以下累積與以上累積兩種:

(*a*)以下累積次數曲線圖——此乃由組值最小一端之次數加起,逐漸累積至組值最大之一端.繪成之曲線,乃由圖之左下角,趨向右上角,如圖二十八之以下累積線.

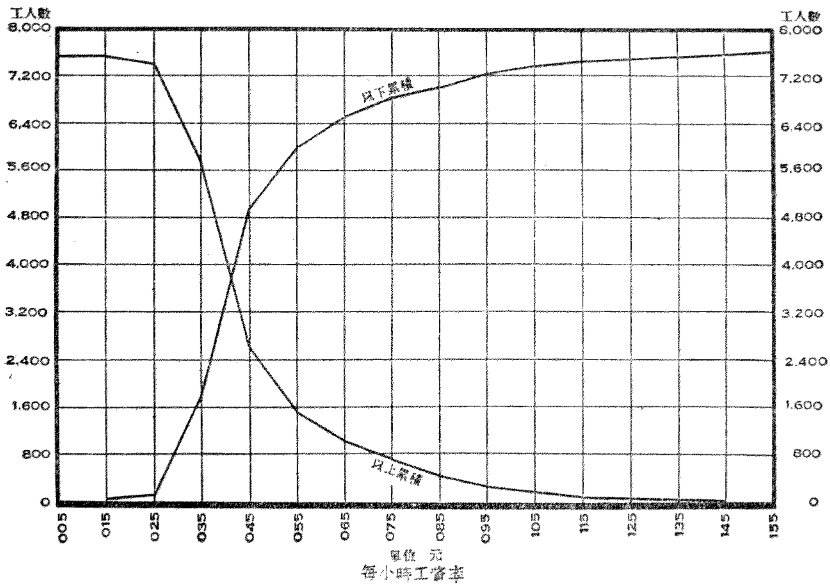
(*b*)以上累積次數曲線圖——此乃由組值最大一端之次數加起,逐漸累積至組值最小之一端.繪成之曲線,乃由圖之左上角,下向右下角,如圖二十八之以上累積線.

繪製以下累積次數曲線時,各組之累積次數應落於各組之上限.在曲線圖上亦應將各繪定點點於各組之右指導線;切不可移點中央或左指導線上.繪製以上累積次數曲線時,各組之累積次數應落於各組之下限.在曲線圖上應將各繪定點點於各組之左指導線;切不可移點中央或右指導線上.至於繪製累積次數曲線圖之功用,則有二:

(*a*)於此累積次數曲線上,可以隨時找尋衆數,中位數,四分位數,十分位數及百分位數等.

(*b*)由橫軸上之任何一點,引一縱線與曲線相交,再由交點引一橫線至縱軸,即得此任意點所當組值以下或以上之近似累積次數.

圖二十八　民國十八年上海市紗廠男工每小時工資率分配圖



(累積次數曲線圖)

(二) 等比曲線圖——等比曲線圖乃以縱橫軸上相等之距離,表示相等比率之圖形也.繪製此種圖形之目的,概言之,約有三點:

(1)可由同一曲線上觀察各部份之變動率及變動實數.

(2)兩變量相差極大時,在等差曲線圖上往往難於比較,

如繪於對數紙上,則兩曲線之起伏並顯,易於比較.

(3)若數列之變動,具有常率者,如用對數紙繪示曲線,則容易推測將來之變動率及實值.

等比曲線圖之縱軸用等比比度,在橫軸上仍用等差比度者,謂之單對數圖.若圖之縱橫軸上,俱用對數尺測定縱橫比度點者,謂之雙對數圖.茲更分述之如下:

(1)單對數曲線圖——單對數曲線圖,乃以縱比度相等之距離,代表實際變量相等之倍數;橫比度相等之距離,代表實際變量相等之差數之圖形也.繪製時應注意之點甚多,茲擇要述之如下:

(A)普通單對數曲線圖之橫比度爲等差比度,縱比度爲等比比度(卽 x 與 $\log y$).然亦有倒列者,橫比度爲等比比度,縱比度爲等差比度者(卽 y 與 $\log x$),惟不多見而已.

(B)單對數曲線圖中無零點橫線,卽無基線.

(C)幾何級數繪於單對數圖上,則成一直線.換言之,卽統計事項之增減率相等.

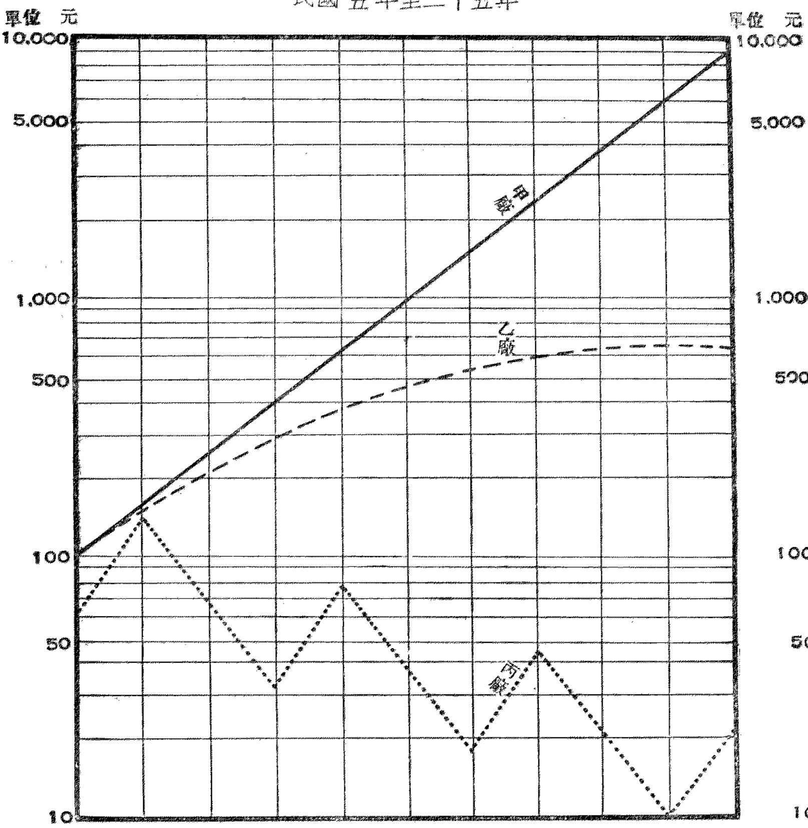
(D)若在單對數曲線圖上曲線離直線而向上彎曲,則其增加率增大;反之,向下彎曲,則其增加率減少.

(E)在縱比度上,兩曲線或一曲線之兩部份,有相等之直立升高,表示相等之比例增加;相等之下降,表示相等之比例減少.

(F)兩曲線或同一曲線之兩部份,有同樣之斜度時,則兩線或同一曲線兩部份變動之百分數亦同.反之,如兩曲線或同一曲線之兩部份,有不同之斜度時,則兩曲線或同一曲線兩部份變動之百分數,亦隨

圖二十九歷年某市甲乙丙三廠平均每日產值圖

民國五年至二十五年

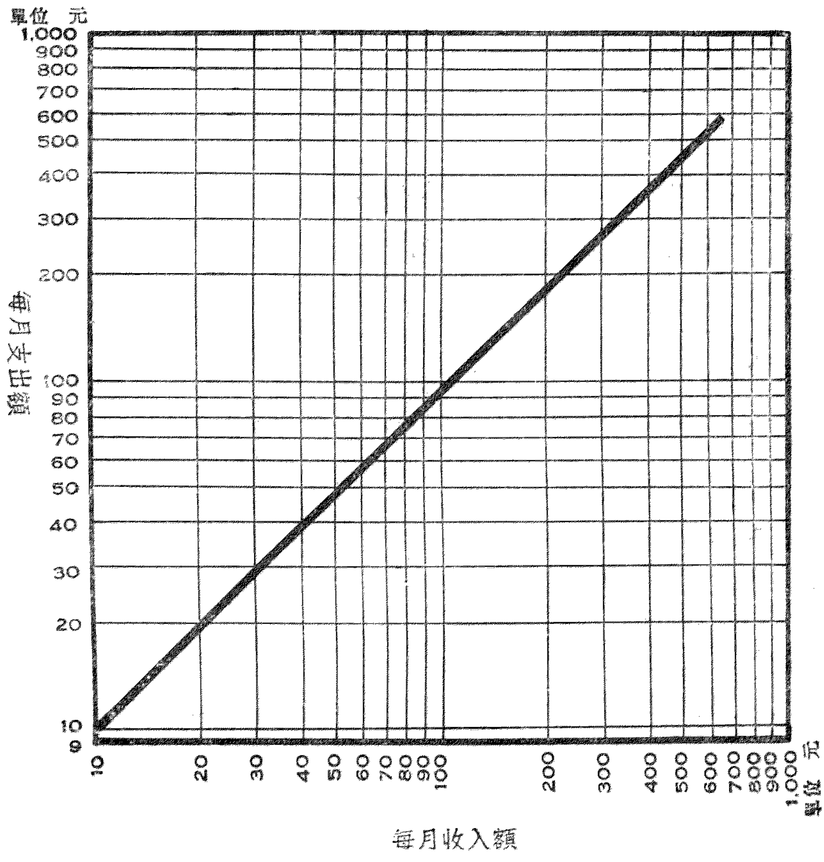


(單對數曲線圖)

之不同。

(G)若繪製者之目的在比較兩變量之增減比率,而不問其絕對數量時,則此種曲線可任意上下移動,使其互相接近,便於比較。

圖三十　某市人民平均每月收入及支出分配圖



(雙對數曲線圖)

(2)雙對數曲線圖——雙對數曲線圖,係縱橫比度俱用對數尺測定比度點之圖形.如變量之變動成 $y=x^2$ 者,在等差曲線圖上繪製曲線,必爲拋物線,若用雙對數圖表示之,則成一直線.此種圖形在經濟統計上時常用之.例如表示收入分配之派來脫線(Pareto's line),爲其中之最著者.

問題

1. 試比較統計圖及統計表之功用.
2. 繪圖之步驟有幾?試略述之.
3. 選定圖式,應注意何點?
4. 何謂基線?其種類有幾?
5. 基線,輪廓線,指導線及圖示線應如何分別之?
6. 兩變量相差極大時,應用何法繪示於一圖?
7. 統計圖如依其形式分,約可分爲幾種?各種圖之特性如何?試略述之.
8. 單式分段長條及單式距限長條圖上所示之比較有幾?
9. 何謂條線混合圖?試略述其種類及繪製之方法.
10. 繪製單圓形圖之步驟有幾?試略述之.
11. 試述繪製多角形,扇形,矩形,三角形及正立方體圖之方法.
12. 統計地圖約可分爲幾種?試略述之.

13. 何謂「縱比度」,「橫比度」,「獨立變量」,「附屬變量」,「縱坐標」,「橫坐標」,「比度單位」,「比度數目」?試各舉例述之。

14. 歷史曲線圖約可分爲幾種?各種圖形之特性如何?試略述之。

15. 試述繪製圓滑次數曲線圖之目的及規律。

16. 繪製以前以後或以上以下累積曲線圖時,應注意何點?繪製此種圖形之目的何在?試申述之。

17. 繪製等比曲線圖之目的何在?其與等差曲線圖之異同如何?

18. 繪製單對數曲線圖時,應注意何點?

習題五

試用習題一統計資料繪製:

(1) 單式全條圖「歷年我國輸出入總值圖(民國十年,十五年及二十年至二十五年)」

(2) 疊併複式長條圖「歷年我國輸出入貨值比較圖(民國十五年至二十五年)」

(3) 實數分段單長條圖「歷年我國輸入貨值國別圖(民國十年至二十五年)」

(4) 實數分段複式長條圖「歷年我國輸入及輸出貨值國別圖(民國二十年至二十五年)」

(5) 單式條線混合圖「歷年我國輸出入貨值比較圖(民國十五年至二十五年)」

習題六

歷年我國輸出入貨值分類百分數表

民國十年至二十五年

年次	輸入				
	飲食物及烟草	原料及半製造品	製造品	雜貨	總計
民國十年	21.50	17.00	59.61	1.89	100.00
十一年	25.65	17.97	54.49	1.89	100.00
十二年	29.58	19.59	48.59	2.24	100.00
十三年	28.86	18.30	51.11	1.73	100.00
十四年	26.91	22.57	48.21	2.31	100.00
十五年	28.33	21.35	48.30	2.02	100.00
十六年	29.88	20.57	46.42	3.13	100.00
十七年	27.17	19.22	50.98	2.63	100.00
十八年	27.36	19.85	50.82	1.97	100.00
十九年	27.89	22.51	46.63	2.97	100.00
二十年	26.63	25.95	44.74	2.68	100.00
廿一年	32.12	24.22	40.08	3.58	100.00
廿二年	30.13	22.06	43.94	3.87	100.00
廿三年	22.32	28.81	43.47	5.40	100.00
廿四年	24.80	23.86	43.84	7.50	100.00
廿五年	13.86	25.16	48.23	12.75	100.00
年次	輸出				
民國十年	27.16	53.67	15.42	3.75	100.00
十一年	25.11	57.74	14.13	3.02	100.00
十二年	25.36	58.69	14.03	1.92	100.00
十三年	29.75	53.82	14.63	1.80	100.00
十四年	28.98	55.85	13.59	1.58	100.00
十五年	28.51	54.90	15.26	1.33	100.00
十六年	31.09	52.28	15.26	1.37	100.00
十七年	34.56	49.86	14.83	.75	100.00
十八年	35.87	49.12	14.26	.75	100.00
十九年	33.65	49.72	15.73	.90	100.00
二十年	35.06	45.65	18.59	.70	100.00
廿一年	24.95	57.35	13.64	4.06	100.00
廿二年	24.46	53.96	16.88	4.70	100.00
廿三年	25.90	53.02	15.54	5.54	100.00
廿四年	23.06	60.57	12.02	4.35	100.00
廿五年	21.86	61.63	13.02	3.49	100.00

試用上列統計資料繪製:

(1) 百分數獨一分段長條圖「民國二十五年我國輸入貨值分類百分數圖」

(2) 百分數分段單長條圖「歷年我國輸出貨值分類百分數圖(民國十年,十五年及二十年至二十五年)」

(3) 百分數分段複長條圖「歷年我國輸出入貨值分類百分數圖(民國二十年至二十五年)」

(4) 單圓形圖「民國二十五年我國輸出貨值分類百分數圖」

(5) 同心多圓形圖「民國十年二十年及二十五年我國輸入貨值分類百分數圖」

習題七

(1) 試用下列統計資料繪製扇形圖「民國二十五年我國輸出入貨值港別圖」

民國二十五年我國輸出入貨值港別表

(單位　千元)

港別	輸入	輸出	輸出入	出(+)入(-)超
上海	555,183	362,274	917,457	- 192,909
天津	72,647	117,827	190,474	+ 45,180
膠州	54,752	51,533	106,285	- 3,219
廣州	30,905	42,487	73,392	+ 11,582
九龍	57,550	6,245	63,795	- 51,305
汕頭	29,621	23,224	52,845	- 6,397
漢口	32,875	13,559	46,434	- 19,316
蒙自	8,117	23,663	31,780	+ 15,546
南京	17,406	1,672	19,078	- 15,734
廈門	13,296	4,002	17,298	- 9,294
其他	72,171	60,305	132,476	- 11,866
總計	944,523	706,791	1,651,314	- 237,732

(2) 試用上列統計資料繪製三角形圖「民國二十五年我國輸出入貨值港別圖」

(3) 試用下列統計資料繪製正方形圖「世界主要各國面積比較圖」

世界主要各國面積及人口比較表

國別	面積（單位 方哩）	人口
英國	34,650,000	485,500,000
俄國	21,352,572	163,166,100
法國	12,370,700	108,153,000
中國	11,173,558	441,849,148
美國	9,466,400	128,164,000
日本	382,000	66,500,000

(4) 試用下列統計資料繪製散處長柱圖「歷年世界主要各國中央銀行及政府庫存現金數額比較圖(民國二十年至二十五年)」

歷年各國中央銀行及政府庫存現金數額表*

（單位 百萬美金元）

年次	美國	法國	英國	其他	總計
民國二十年	4,051	2,699	588	3,928	11,266
廿一年	4,045	3,254	583	4,005	11,887
廿二年	4,012	3,022	928	3,980	11,942
廿三年	8,238	5,445	1,584	6,504	21,771
廿四年	10,125	4,395	1,648	5,415	21,583
廿五年	11,258	2,995	2,584	5,765	22,602

*民國二十三年前,每一盎司九成成色之生金,合美金g$ 20.67.二十三年及二十三年後,合美金g$ 35.00.

(5) 試用下列統計資料繪製集合長柱圖「江蘇省人民職業統計圖」

江蘇省人民職業統計表

職業別	男	女	總計
農人	7,293,403	6,722,893	14,016,296
工人	9,730,036	648,410	10,378,446
商人	782,469	141,389	923,858
教員及學生	456,572	114,550	571,122
負販	163,662	55,283	218,945
漁人	67,060	23,695	90,755
工務員	67,736	725	68,461
軍人	44,825		44,825
醫生	23,012	751	23,763
航員	15,904	5,515	21,419
警察	17,803		17,803
黨員	5,963	186	6,149
郵電路員	5,113	103	5,216
新聞記者	1,402	13	1,415
律師	1,055	3	1,058

習題八

(1)　試用下列統計資料繪製海艦像形圖「一九三五年世界五大海軍國軍艦噸位比較圖」

世界五大海軍國軍艦噸位比較表

一九三五年

國別	新艦噸位	舊艦噸位	總計
英國	1,042,748	335,686	1,378,434
美國	1,011,360	356,790	1,368,150
日本	667,496	199,208	866,704
法國	548,321	228,187	776,508
意國	369,665	148,745	518,410

(2)　試用習題七(3)統計資料繪製人體像形圖「世界主要各國人口比較圖」

(3) 試繪「我國國民政府組織圖」

(4) 試繪「本校辦事程序圖」

(5) 試繪「紡紗程序圖」

紡紗程序	(1)拆包	(5)製花捲	(9)紡細紗	(13)驗紗
	(2)鬆花	(6)梳棉	(10)併線	(14)秤紗
	(3)和花	(7)煉條	(11)潤水	(15)打絞
	(4)清花	(8)紡粗紗	(12)搖紗	(16)打包

習題九

(1) 試用習題六統計資料繪製簡單歷史曲線圖「歷年我國輸入貨值分類百分數比較圖(民國十年至二十五年)」

(2) 試用下列統計資料繪製累積歷史曲線圖「歷年我國入超額比較圖(民國元年至二十五年)」

歷年我國對外輸出入貿易貨值表

民國元年至二十五年

(單位 千元)

年次	輸入淨值	輸出總值	輸出入總淨值	入超
民國元年	737,085	577,270	1,314,355	159,815
二年	888,314	628,351	1,516,665	259,963
三年	886,877	555,002	1,441,879	331,875
四年	708,074	652,585	1,360,659	55,489
五年	804,562	750,640	1,555,202	53,922
六年	856,151	721,248	1,577,399	134,903
七年	864,523	757,006	1,621,529	107,517
八年	1,008,023	982,800	1,990,823	25,223
九年	1,187,586	843,861	2,031,447	343,725

十　年	1,411,739	936,756	2,348,495	474,983
十一年	1,472,387	1,020,322	2,492,709	452,065
十二年	1,438,662	1,173,045	2,611,707	265 617
十三年	1,586,372	1,202,440	2,788,812	383,932
十四年	1,476,774	1,209,558	2,686,332	267,216
十五年	1,751,537	1,346,571	3,098,108	404,966
十六年	1,578,147	1,431,209	3,009,356	146,938
十七年	1 863,320	1,544,531	3,407,851	318,789
十八年	1,972,083	1,582,441	3,554,524	389,642
十九年	2,040,599	1,394,166	3,434,765	646,433
二十年	2,233,376	1,416,963	3,650,339	816,413
廿一年	1,634,726	768,077	2,402,803	866,649
廿二年	1,345,567	612,293	1,957,860	733,274
廿三年	1,029,665	535,733	1,565,398	493,932
廿四年	919,211	576,298	1,495,509	342,913
廿五年	941,545	706,791	1,648,336	234,754

(3) 試用上列統計資料繪製距限曲線圖「歷年我國入超額比較圖(民國元年至二十五年)」

(4) 試用上列統計資料繪製分歧曲線圖「歷年我國輸出入貨值圖(民國元年至二十五年)」

(5) 試用習題一統計資料繪製實數帶紋曲線圖「歷年我國輸出總值國別圖(民國十年至二十五年)」

習題十

(1) 試用下列統計資料繪製直方圖「上海市集團結婚新娘年齡分配圖(第一屆至第七屆)」

上海市集團結婚新郎新娘年齡分配表

第一屆至第七屆

年　　齡	新郎人數	新娘人數
16歲——17.9歲		97
18歲——19.9歲	44	113
20歲——21.9歲	112	200
22歲——23.9歲	116	85
24歲——25.9歲	121	60
26歲——27.9歲	81	20
28歲——29.9歲	55	12
30歲——31.9歲	26	6
32歲——33.9歲	21	
34歲——35.9歲	7	
36歲——37.9歲	3	
38歲——39.9歲		
40歲——41.9歲	3	
42歲——43.9歲	1	
44歲——45.9歲	3	
總　　計	593	593

(2) 試用上列統計資料繪製簡單次數曲線圖「上海市集團結婚新郎年齡分配圖(第一屆至第七屆)」

(3) 試用上列統計資料繪製累積次數曲線圖「上海市集團結婚新娘年齡分配圖(第一屆至第七屆)」

(4) 試用下列統計資料繪製單對數曲線圖「歷年我國輸出總值及生絲值比較圖(民國十年至二十五年)」

歷年我國輸出總值及生絲值表

民國十年至二十五年

(單位　千元)

年次	輸出總值	輸出絲值
民國十年	936,756	174,719
十一年	1,020,322	213,785
十二年	1,173,045	216,431
十三年	1,202,440	169,020
十四年	1,209,558	219,648
十五年	1,346,571	225,639
十六年	1,431,209	200,524
十七年	1,544,531	226,601
十八年	1,582,441	230,088
十九年	1,394,166	170,104
二十年	1,416,963	131,932
廿一年	768,077	51,308
廿二年	612,293	48,242
廿三年	535,733	23,519
廿四年	576,298	35,663
廿五年	706,791	36,713

(5)　試用下列統計資料繪製雙對數曲線圖「某市居民每月平均收入及支出比較圖」

某市居民每月平均收入及支出比較表

每月平均收入	每月平均支出	每月平均收入	每月平均支出
$ 8	$ 7	$128	$112
16	14	256	224
32	28	512	448
64	56	1,024	896

第五章 平均數

第一節 平均數之特性及種類

統計之目的,在將繁賾之事實,整理而爲簡賅之量數.整理之方法爲何?即求平均數也.例有兩級學生於此,吾人如欲比較其成績之優劣,於次數表以外,更應就每班中求一代表之平均成績,以爲比較之根據.然此代表全體之平均成績,決非最優之成績,亦非最劣之成績,定爲通常中等之成績.故平均數爲通常之事項,而非異常之事項;爲中心之事項,而非極端之事項;其代表性之高低,即視量數集中程度之大小而定.

(一) 平均數之特性——凡一妥善之平均數,應含有以下諸特性:

(1) 應根據全部觀察而得——平均數之核算,應由全體量數中推計,方可代表全體.

(2) 應含簡明之數學性質——平均數之核計,宜普通淺顯,易爲閱者了解.如根據抽象之數理推算,則意義深奧,不易使人明瞭.

(3) 宜穩定不宜極度變動——代表全體之平均數,如於取樣更改時,受極度之影響而起極度之變動者,其代表性必極低微,不可妄據立論.

(二) 平均數之種類——平均數之種類,總計有五:

(1) 算術平均數 (Arithmetic average or arithmetic mean, 簡寫爲 M.)

(2) 中位數 (Median, 簡寫爲 M_d.)

(3) 衆數 (Mode, 簡寫爲 M_o.)

(4) 幾何平均數 (Geometric mean, 簡寫爲 M_g.)

(5) 倒數平均數 (Harmonic mean, 簡寫爲 M_h.)

茲將求各平均數之方法以及各平均數之優劣及關係等,分節述之如下:

第二節 算術平均數

算術平均數爲某事實次數之總和,除變量總值之商.其計算方法,概別有四:一爲普通法,二爲簡捷法,三爲假定離中差法,四爲累積次數法.茲逐一設例述之如下:

(一) 普通法 (General method)

(1) 由枚舉表中求算術平均數法——由枚舉表中,用普通法求算術平均數,乃以變量項數除變量總值即得.其計算公式如下:

設 M 爲算術平均數.

N 爲變量項數.

m 爲變量之數值.

m_1 爲第一變量之數值.

m_2 爲第二變量之數值.

m_3 爲第三變量之數值.

m_n 爲第 n 變量之數值.

Σ 爲總和之記號,讀如 Sigma.

$$M=\frac{m_1+m_2+m_3+\cdots\cdots+m_n}{N}$$

$$=\frac{\Sigma m}{N}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式一)}$$

例如甲廠十五織機於某年某月內各產布量如下:

表十五　某年某月甲廠各織機產布量表

(由枚舉表中用普通法求算術平均數表)

機　號	產布量(單位　疋)	各變量與算術平均數之差(d)	
		$+d$	$-d$
1	32.5		15.2
2	42.7		5.0
3	28.6		19.1
4	37.8		9.9
5	48.6	.9	
6	56.8	9.1	
7	39.5		8.2
8	46.6		1.1
9	72.6	24.9	
10	64.5	16.8	
11	58.1	10.4	
12	43.5		4.2
13	32.0		15.7
14	66.7	19.0	
15	45.0		2.7
總　計	715.5	81.1	81.1

應用公式一

$$M=\frac{715.5}{15}=47.70\text{ 疋}$$

(2)由次數表中求算術平均數法——由次數表中,用普通法求算術平均數,乃以各變量次數總和除各變量與次數乘積之總和卽得.其計算公式如下:

設 M 爲算術平均數.

N 爲次數之總數.

m 爲變量之數值.

m_1 爲第一變量之數值.

m_2 爲第二變量之數值.

m_3 爲第三變量之數值.

m_n 爲第 n 變量之數值.

f 爲變量之次數.

f_1 爲第一變量之次數.

f_2 爲第二變量之次數.

f_3 爲第三變量之次數.

f_n 爲第 n 變量之次數.

Σ 爲總和之記號.

$$M=\frac{f_1m_1+f_2m_2+f_3m_3+\cdots\cdots+f_nm_n}{N}$$

$$=\frac{\Sigma fm}{N}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式二)}$$

(A)由不分組次數表中求算術平均數法——由不分組次數表中,用普通法求算術平均數,乃以各變量次數之總和除各變量乘各變量相當次數之總和卽得.

表十六 上海市市立中學學生年齡分配表

(由不分組次數表中用普通法求算術平均數表)

年齡 m	學生數 f	fm
11	9	99
12	35	420
13	97	1,261
14	172	2,408
15	157	2,355
16	191	3,056
17	177	3,009
18	149	2,682
19	104	1,976
20	45	900
21	19	399
22	3	66
23	5	115
24	2	48
25	1	25
總計	1,166	18,819

應用公式二

$$M=\frac{18,819}{1,166}=16.14\text{歲}$$

(B)由組距相等之分組次數表中求算術平均數法——由組距相等之分組次數表中,用普通法求算術平均數,即將各組次數之總和除各組中值乘各組相當次數之總和即得.

表十七 上海市三〇五工人家庭每年收入額分配表

（由組距相等之分組次數表中用普通法求算術平均數表）

收入額	中值 m	家數 f	fm
\$200 ——\$299.99	\$250	62	15,500
300 —— 399.99	350	95	33,250
400 —— 499.99	450	80	36,000
500 —— 599.99	550	31	17,050
600 —— 699.99	650	25	16,250
700 —— 799.99	750	8	6,000
800 —— 899.99	850	4	3,400
總計		305	127,450

應用公式二

$$M=\frac{127,450}{305}=417.87$$

(C)由組距不等之分組次數表中求算術平均數法——由組距不等之分組次數表中,用普通法求算術平均數,亦將各組次數之總和除各組中值乘各組相當次數之總和即得。

表十八 某市大學生每年費用分配表

（由組距不等之分組次數表中用普通法求算術平均數表）

每年費用	中值 m	學生數 f	fm
\$250 —— \$299.99	\$275	30	8,250
300 —— 349.99	325	87	28,275
350 —— 399.99	375	183	68,625
400 —— 449.99	425	246	104,550
450 —— 499.99	475	388	184,300
500 —— 599.99	550	96	52,800
600 —— 699.99	650	61	39,650
700 —— 799.99	750	25	18,750
800 —— 999.99	900	8	7,200
1,000 ——1,199.99	1,100	2	2,200
總計		1,126	514,600

應用公式二

$$M=\frac{514,600}{1,126}=\$457.02$$

(二) 簡捷法 (Short cut method)

欲明瞭用簡捷法求算術平均數之理論,須先明瞭各變量與其算術平均數之差(Deviation,簡寫爲 d)之和等於零.蓋變量有大於算術平均數者,有小於算術平均數者,此大於算術平均數之差($+d$)之和,與小於算術平均數之差($-d$)之和,應相互銷除而爲零.茲證明之如下:

設 M 爲算術平均數.

N 爲變量項數.

m_1 爲第一變量之數值.

m_2 爲第二變量之數值.

m_3 爲第三變量之數值.

m_n 爲第 n 變量之數值.

d 爲變量與算術平均數之差.

d_1 爲第一變量與算術平均數之差.

d_2 爲第二變量與算術平均數之差.

d_3 爲第三變量與算術平均數之差.

d_n 爲第 n 變量與算術平均數之差.

Σ 爲總和之記號.

$$M=\frac{m_1+m_2+m_3+\cdots\cdots+m_n}{N}$$

或 $NM = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots\cdots + m_n$

NM 為 N 個 M 相加之和,故

$$\underbrace{M + M + M + \cdots\cdots + M}_{N個} = \underbrace{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots\cdots + m_n}_{N個}$$

移項得

$$0 = (m_1 - M) + (m_2 - M) + (m_3 - M) + \cdots\cdots + (m_n - M)$$

因 $d_1 = (m_1 - M)$

$d_2 = (m_2 - M)$

$d_3 = (m_3 - M)$

$d_n = (m_n - M)$

故 $0 = d_1 + d_2 + d_3 + \cdots\cdots + d_n$

$\Sigma d = 0$

表十五第三列,計大於算術平均數之變量有六,其差額之總和 $\Sigma(+d)$ 為 81.1.第四列計小於算術平均數之變量有九,其差額之總和 $\Sigma(-d)$ 為 -81.1.全體變量與算術平均數之差之總和 Σd 則為零.

$$\Sigma d = \Sigma(+d) + \Sigma(-d)$$
$$= 81.1 + (-81.1) = 0$$

各項變量與算術平均數之差之和既為零,如於核計算術平均數時,先行假定某數為假定算術平均數(Assumed arithmetic mean, 簡寫為 M'),而後將各變量與之比較,其差額之總和,自不等於零.若以總次數除之,當

可得改正數(Correction,簡寫爲 C).將此改正數加入假定算術平均數,即得眞正算術平均數.茲更證明之如下:

設 M 爲眞正算術平均數.

M' 爲假定算術平均數.

N 爲變量項數.

m 爲變量之數值.

d' 爲變量與假定算術平均數之差.

d'_1 爲第一變量與假定算術平均數之差.

d'_2 爲第二變量與假定算術平均數之差.

d'_3 爲第三變量與假定算術平均數之差.

d'_n 爲第 n 變量與假定算術平均數之差.

C 爲假定算術平均數與眞正算術平均數之差,亦稱改正數.

Σ 爲總和之記號.

$$\Sigma(m-M')=\Sigma[(m-M)+(M-M')]$$
$$=\Sigma(m-M)+N(M-M')$$

但 $\Sigma(m-M)=\Sigma d=0$

故 $\Sigma(m-M')=N(M-M')$

設 $\Sigma(m-M')=d'_1+d'_2+d'_3+\cdots\cdots+d'_n$
$$=\Sigma d'$$

則 $N(M-M')=\Sigma d'$

設 $M-M'=C$

則　　$NC=\Sigma d'$

故　　$C=\dfrac{\Sigma d'}{N}$

$$M=M'+\frac{\Sigma d'}{N}$$

(1)由枚舉表中求算術平均數法——由枚舉表中用簡捷法求算術平均數,應先假定某變量或某數爲假定算術平均數,次求各變量與此假定算術平均數之差之總和,再將變量項數除差額總和,得改正數C,末將改正數加入假定算術平均數,即得眞正算術平均數.

設M爲眞正算術平均數.

M'爲假定算術平均數.

N爲變量項數.

d'爲變量與假定算術平均數之差.

Σ爲總和之記號.

$$M=M'+\frac{\Sigma d'}{N}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式三})$$

表十九　歷年上海市粳米市價表

民國十年至二十四年

(每市石市價,單位元)

(由枚舉表中用簡捷法求算術平均數表)

年　次	市　價 m	與假定平均價\$9.49之差 (d')		與假定平均價\$9.00之差 (d')	
		$+d'$	$-d'$	$+d'$	$-d'$
民國十　年	\$ 8.23		1.26		.77
十一年	9.57	.08		.57	

十二年	9.52	.03		.52	
十三年	8.75		.74		.25
十四年	9.31		.18	.31	
十五年	13.40	3.91		4.40	
十六年	12.55	3.06		3.55	
十七年	9.49			.49	
十八年	11.48	1.99		2.48	
十九年	14.47	4.98		5.47	
二十年	11.00	1.51		2.00	
廿一年	10.47	.98		1.47	
廿二年	7.98		1.51		1.02
廿三年	9.79	.30		.79	
廿四年	11.44	1.95		2.44	
總計	157.45	18.79	3.69	24.49	2.04

應用公式一

$$M=\frac{157.45}{15}=\$10.50$$

應用公式三

$$M=9.49+\frac{18.79+(-3.69)}{15}=9.49+\frac{15.10}{15}$$

$$=9.49+1.01=\$10.50$$

或 $$M=9+\frac{24.49+(-2.04)}{15}=9+\frac{22.45}{15}$$

$$=9+1.50=\$10.50$$

(2)由次數表中求算術平均數法——由次數表中,用簡捷法求算術平均數,應先假定某變量或某組中值為假定算術平均數,次求各變量或各組中值與此假定算術平均數之差,又次將各變量或各組相當次數乘各變量或各組中值與假定算術平均數之差,並核計

其總和,再以總次數除差額總和,得改正數 C,末將改正數加入假定算術平均數,即得眞正算術平均數.

設 M 爲眞正算術平均數.

M' 爲假定算術平均數.

N 爲次數之總數.

f 爲變量之次數.

d' 爲變量與假定算術平均數之差.

Σ 爲總和之記號.

$$M=M'+\frac{\Sigma fd'}{N}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式四})$$

(A)由不分組次數表中求算術平均數法——由不分組次數表中,用簡捷法求算術平均數,即將各變量與假定算術平均數比較之得 d',以各變量相當之次數乘之,總計之,以總次數除之,得改正數 C,末將改正數 C 加入假定算術平均數中,即得眞正算術平均數.

表二十　上海市市立初級小學學生年齡分配表

(由不分組次數表中用簡捷法求算術平均數表)

年齡	學生數	普通法	簡	捷	法
m	f	fm	$M'=11$ d'	$+fd'$	$-fd'$
3	31	93	−8		248
4	235	940	−7		1,645
5	1,407	7,035	−6		8,442
6	2,920	17,520	−5		14,600

7	4,288	30,016	−4		17,152
8	4,806	38,448	−3		14,418
9	5,121	46,089	−2		10,242
10	5,371	53,710	−1		5,371
11	5,051	55,561	0		
12	4,504	54,048	+1	4,504	
13	3,074	39,962	+2	6,148	
14	1,653	23,142	+3	4,959	
15	552	8,280	+4	2,208	
16	143	2,288	+5	715	
17	32	544	+6	192	
18	8	144	+7	56	
19	4	76	+8	32	
20	1	20	+9	9	
總計	39,201	377,916		18,823	72,118

應用公式二

$$M=\frac{377,916}{39,201}=9.64\text{歲}$$

應用公式四

$$M=11+\frac{18,823+(-72,118)}{39,201}$$

$$=11+\frac{-53,295}{39,201}$$

$$=11+(-1.36)=9.64\text{歲}$$

(B)由組距相等之分組次數表中求算術平均數法——由組距相等之分組次數表中,用簡捷法求算術平均數,與由不分組次數表中推求無異,惟改用某組

中值作爲假定算術平均數耳.茲設例示之如下:

表二十一 美國鋼鐵業工人工資*分配表

(由組距相等之分組次數表中用簡捷法求算術平均數表)

工資	中值 m	人數 f	普通法 fm	簡捷法 $M'=52.5$ d'	$+fd'$	$-fd'$
$0 ——$14.99	$7.5	156	1,170.0	−45		7,020
15 —— 29.99	22.5	233	5,242.5	−30		6,990
30 —— 44.99	37.5	435	16,312.5	−15		6,525
45 —— 59.99	52.5	455	23,887.5	0		
60 —— 74.99	67.5	305	20,587.5	+15	4,575	
75 —— 89.99	82.5	15	1,237.5	+30	450	
90 ——104.99	97.5	1	97.5	+45	45	
總計		1,600	68,535.0		5,070	20,535

*十六日所得之工資.

應用公式二

$$M=\frac{68,535}{1,600}=\$42.83$$

應用公式四

$$M=52.5+\frac{5,070+(-20,535)}{1,600}$$

$$=52.5+\frac{-15,465}{1,600}$$

$$=52.5+(-9.67)=\$42.83$$

(C)由組距不等之分組次數表中求算術平均數法——由組距不等之分組次數表中用簡捷法求算術平

均數,與在組距相等之分組表中推算無異.惟各組中值與其假定算術平均數之差距因各組組距之不同而異.茲設例示之如下:

表二十二 某市中學生每年費用分配表

(由組距不等之分組次數表中用簡捷法求算術平均數表)

每年費用	中值 m	學生數 f	普通法 fm	簡捷法 $M'=275$ d'	$+fd'$	$-fd'$
\$100 ——\$149.99	125	213	26,625	−150		31,950
150 —— 199.99	175	478	83,650	−100		47,800
200 —— 249.99	225	654	147,150	− 50		32,700
250 —— 299.99	275	736	202,400	0		
300 —— 399.99	350	982	343,700	+ 75	73,650	
400 —— 499.99	450	327	147,150	+175	57,225	
500 —— 699.99	600	215	129,000	+325	69,875	
700 —— 899.99	800	133	106,400	+525	69,825	
900——1,099.99	1,000	11	11,000	+725	7,975	
總計		3,749	1,197,075		278,550	112,450

應用公式二

$$M=\frac{1,197,075}{3,749}=\$319.31$$

應用公式四

$$M=275+\frac{278,550+(-112,450)}{3,749}$$

$$=275+\frac{166,100}{3,749}$$

$$=275+44.31=\$319.31$$

(三) 假定離中差法 (Step deviation method)

應用公式四求算術平均數,已較用公式二便捷多矣;然在組距小於1或大於1時,計算fd'猶覺煩複,(如表二十一組距爲15,計算fd'時以數目太大,猶感不便.)故有假定離中差法之採用.此法乃以組距爲單位,在計算fd'時,各數俱可減少組距之倍數;迨求得$\Sigma fd'$後,再乘組距,俾其還原;末將還原之$\Sigma fd'$爲總次數分除,加入假定算術平均數內,卽得眞正算術平均數.

設M爲眞正算術平均數.

M'爲假定算術平均數.

N爲次數之總數.

f爲各組之次數.

d''爲各組中值與假定算術平均數之假定離中差.

i爲組距.

Σ爲總和之記號.

$$M=M'+\frac{\Sigma fd''}{N}\times i\text{…………(公式五)}$$

用假定離中差法計算算術平均數之步驟有七:

(1)將統計資料製成分組次數表.

(2)選定適中一組之中值,爲假定算術平均數.

(3)以組距爲單位,表示各項變量對於假定算術平均數之假定離中差(d''),以假定平均數所在一組之離中差爲零;其下一組爲-1,其上一組爲$+1$,餘類推.惟

組距不等時,假定離中差之大小,應視組距之放大或縮小而增減.

(4) 以各組次數乘各組相當之假定離中差,並列於 fd'' 行下.

(5) 就 fd'' 行下各乘積求其總和 $\Sigma fd''$.

(6) 所得 $\Sigma fd''$ 以總次數除之,更乘組距;或先以組距乘之,再以總次數分除,即得改正數 C.

(7) 將改正數加入假定算術平均數內,即得眞正算術平均數.

表二十三　某校新生入學試驗成績分配表

(由組距相等之分組次數表內用假定離中差法求算術平均數表)

分數	中值 m	學生數 f	簡捷法 $M'=57.5$ d'	簡捷法 fd'	假定離中差法 $M'=57.5$ d''	假定離中差法 fd''
30——34.9	32.5	15	−25	−375	−5	−75
35——39.9	37.5	27	−20	−540	−4	−108
40——44.9	42.5	38	−15	−570	−3	−114
45——49.9	47.5	42	−10	−420	−2	−84
50——54.9	52.5	64	−5	−320	−1	−64
55——59.9	57.5	68	0	0	0	0
60——64.9	62.5	72	+5	360	+1	72
65——69.9	67.5	96	+10	960	+2	192
70——74.9	72.5	32	+15	480	+3	96
75——79.9	77.5	15	+20	300	+4	60
80——84.9	82.5	3	+25	75	+5	15
總計		472		−50		−10

應用公式四

$$M=57.5+\frac{-50}{472}$$

$$=57.5+(-.10)=57.40$$

應用公式五

$$M=57.5+\frac{-10}{472}\times 5=57.5+\frac{-50}{472}$$

$$=57.5+(-.10)=57.40$$

(四) 累積次數法 (Cumulative frequency method)

由次數表中核算算術平均數之方法,除上述三種外,尚有所謂累積次數法者,乃用次數表中以上累積次數核算者也.

設 M 爲眞正算術平均數.

M' 爲假定算術平均數.

N 爲次數之總數.

n 爲變量之項數.

m_1 爲第一變量之數值(即數值最小之變量).

m_2 爲第二變量之數值(即數值更小之變量).

m_3 爲第三變量之數值(即數值次小之變量).

m_n 爲第 n 變量之數值(即數值最大之變量)

m_{n-1} 爲第 n 變量以上第一個變量之數值(即數值更大之變量).

m_{n-2} 爲第 n 變量以上第二個變量之數值(即數值次大之變量).

f' 爲各變量以上累積次數。

f_1 爲第一變量之次數。

f_2 爲第二變量之次數。

f_3 爲第三變量之次數。

f_n 爲第 n 變量之次數。

f_{n-1} 爲第 n 變量以上第一個變量之次數。

f_{n-2} 爲第 n 變量以上第二個變量之次數。

d'' 爲各組中值與假定算術平均數之假定離中差。

i 爲組距。

Σ 爲總和之記號。

中 值	$M'=m_1$ $d''+1$	次數 f	$f(d''+1)$	以上累積次數 f'
m_1	$0+1=1$	f_1	$1f_1$	$f_n+f_{n-1}+f_{n-2}+\cdots+f_3+f_2+f_1$
m_2	$1+1=2$	f_2	$2f_2$	$f_n+f_{n-1}+f_{n-2}+\cdots+f_3+f_2$
m_3	$2+1=3$	f_3	$3f_3$	$f_n+f_{n-1}+f_{n-2}+\cdots+f_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m_{n-2}	$n-2$	f_{n-2}	$(n-2)f_{n-2}$	$f_n+f_{n-1}+f_{n-2}$
m_{n-1}	$n-1$	f_{n-1}	$(n-1)f_{n-1}$	f_n+f_{n-1}
m_n	n	f_n	nf_n	f_n

因 $\Sigma f(d''+1)=1f_1+2f_2+3f_3+\cdots\cdots+(n-2)f_{n-2}+(n-1)f_{n-1}$
$+nf_n$

$\Sigma f'=(f_n+f_{n-1}+f_{n-2}+\cdots+f_3+f_2+f_1)+(f_n+f_{n-1}$

$$+f_{n-2}+\cdots\cdots+f_3+f_2)+(f_n+f_{n-1}+f_{n-2}+\cdots\cdots$$

$$+f_3)+\cdots\cdots\cdots+(f_n+f_{n-1}+f_{n-2})+(f_n+f_{n-1})+$$

$$(f_n)$$

$$=nf_n+(n-1)f_{n-1}+(n-2)f_{n-2}+\cdots\cdots+3f_3+2f_2$$

$$+1f_1$$

故 $\Sigma f(d''+1)=\Sigma f'$

若 $\Sigma f(d''+1)-(f_1+f_2+f_3+\cdots\cdots\cdots+f_{n-2}+f_{n-1}+f_n)$

$$=\Sigma f(d''+1)-N$$

$$=\Sigma fd''$$

故 $\Sigma fd''=\Sigma f(d''+1)-N$

$$=\Sigma f'-N$$

依公式五

$$M=M'+\frac{\Sigma fd''}{N}\times i$$

故 $$\boldsymbol{M=m_1+\frac{\Sigma f'-N}{N}\times i}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式六)}$$

用累積次數法求算術平均數之步驟有五:

(1)將統計資料製成分組次數表.

(2)求各組以上累積次數.

(3)求累積次數之總和,並減次數之總和N,得$\Sigma fd''$

(4)以總次數除第三步所得之結果得改正數C.

(5)將改正數加入數值最小一組之中值內,即得眞正算術平均數.

表二十四 上海市第一屆至第七屆集團結婚新娘年齡分配表

（由組距相等之分組次數表中用累積次數法求算術平均數表）

年齡	中值	新娘數	假定離中差法		累積次數法		
	m	f	$M'=m_1=17$ d''	fd''	$M'=m_1=17$ $(d''+1)$	$f(d''+1)$	f'
16——17.99	17	97	0	0	+1	97	593
18——19.99	19	113	+1	113	+2	226	496
20——21.99	21	200	+2	400	+3	600	383
22——23.99	23	85	+3	255	+4	340	183
24——25.99	25	60	+4	240	+5	300	98
26——27.99	27	20	+5	100	+6	120	38
28——29.99	29	12	+6	72	+7	84	18
30——31.99	31	6	+7	42	+8	48	6
總計		593		1,222		1,815	1,815

應用公式五

$$M=17+\frac{1,222}{593}\times 2=17+\frac{2,444}{593}$$

$$=17+4.12=21.12\text{ 歲}$$

應用公式六

$$M=17+\frac{1,815-593}{593}\times 2=17+\frac{2,444}{593}$$

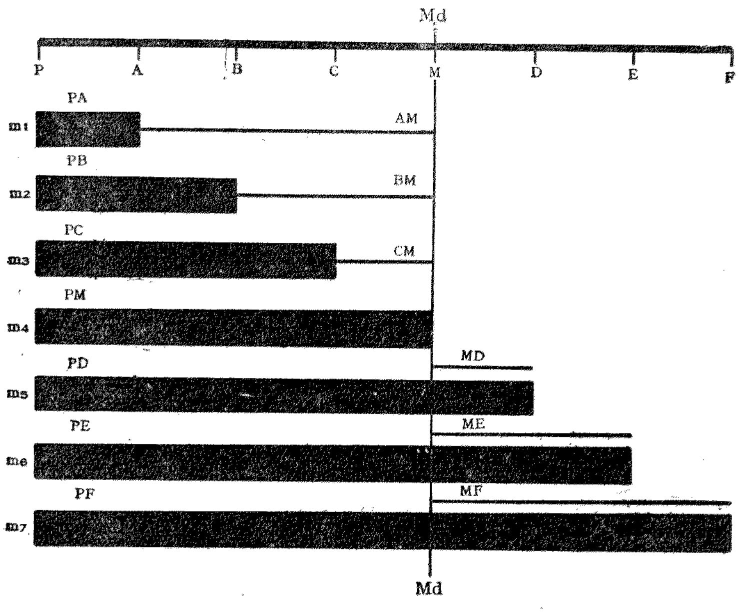
$$=17+4.12=21.12\text{ 歲.}$$

第三節 中位數

中位數爲全體變量依大小次序排列後,中間一項或一

點之數值.其求法因重地位而輕計算,故有人稱之曰地位平均數.在枚舉數列中,計算甚簡;在次數數列中,推算較煩.惟中位數與各變量相差絕對值之和為最小,玆證之如下:

圖三十一　證明中位數與各變量相差絕對值之和為最小圖



(中位數與各變量差異圖甲)

設 PM 為數列

$PA \quad PB \quad PC \quad PM \quad PD \quad PE \quad PF$

之中位數,令 $\Sigma\overline{d}$ 為中位數與各變量相差絕對值之和,則

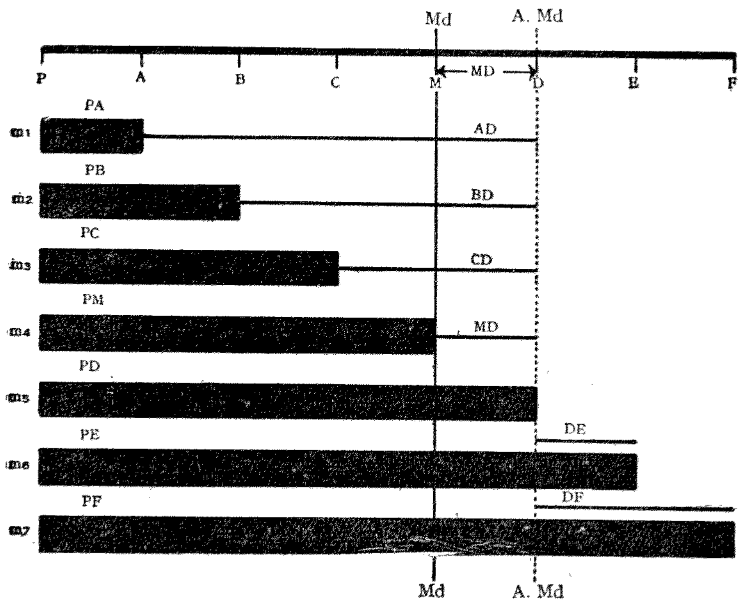
$$\Sigma\overline{d}=(PM-PA)+(PM-PB)+(PM-PC)+(PD-PM)$$

$$+(PE-PM)+(PF-PM)$$

$$=AM+BM+CM+MD+ME+MF$$

若任取一數,如 PD 爲中位數,並令 $\Sigma\overline{d}'$ 爲 PD 與各變量相差絕對值之和.

圖三十二 證明假定中位數與各變量相差絕對值之和並非最小圖



(中位數與各變量差異圖乙)

則

$$\Sigma\overline{d}'=(PD-PA)+(PD-PB)+(PD-PC)+(PD-PM)$$

$$+(PD-PD)+(PE-PD)+(PF-PD)$$

$$=AD+BD+CD+MD+DE+DF$$

(天)

$$=(AM+MD)+(BM+MD)+(CM+MD)+MD+$$
$$(ME-MD)+(MF-MD)$$
$$=AM+MD+BM+MD+CM+MD+MD+$$
$$ME-MD+MF-MD$$
$$=(AM+BM+CM+MD+ME+MF)+MD$$
$$=\Sigma\overline{d}+MD$$

但　$MD>0$

故　$\Sigma\overline{d}'>\Sigma\overline{d}$

至於核算中位數之方法大別有三:

(一)視察法 (Inspection or count)

(1)由空間數列中求中位數法——由枚舉之空間數列中,用視察法推算中位數,應先按變量之大小,順次排列,然後用下列公式求之:

設 M'_d 爲中位數之地位.

N 爲變量項數.

$$M'_d=\frac{N+1}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式七})$$

求得居中一項之地位後,再計居中一項之數值,即得中位數.例如表十五甲布廠於某年某月十五織機之產布量,經整理後,產量最少者爲三號機,僅產 28.6 疋;次爲32.0疋,32.5疋 37.8 疋,39.5 疋,42.7 疋,43.5疋,45.0疋,46.6 疋,48.6 疋,56.8 疋,58.1 疋,64.5 疋,66.7 疋, 72.6 疋;則居中一項之地位應爲:

應用公式七

$$M'_d=\frac{15+1}{2}=8$$

從此數列之任何一端起,數至第八項,得數值爲 45.0。故 45.0 疋即爲該十五機生產量之中位數.

若甲廠於十五架舊機外,本年添購新機一架,其生產量爲 73.0 疋,則居中一項之地位應爲:

$$M'_d=\frac{16+1}{2}=8.5$$

中位數(M_d)爲第八第九兩變量之平均數 45.8 疋.

$$M_d=\frac{45.0+46.6}{2}=45.8\text{ 疋}$$

(2)由時間數列中求中位數法——由時間數列中,用視察法推算中位數,應先按變量之大小(不以時間之先後爲次),順次排定,然後用公式七,核算居中之地位,視察居中變量之數值,即得中位數.例如上海市於民國二十三年每百磅蛋價如下:

一月	\$18.00	五月	\$11.50	九月	\$14.50
二月	15.50	六月	11.50	十月	14.50
三月	13.00	七月	10.50	十一月	17.50
四月	11.50	八月	11.00	十二月	18.50

如以時間之先後爲次,則中位數之位置爲:

$$M'_d=\frac{12+1}{2}=6.5$$

中位數爲六月七月之平均價

$$M_d=\frac{11.50+10.50}{2}=\$11.00$$

惟以時間之先後爲次,所得中位數 $11, 全視季節變動如何而定.蛋價於六,七月間,因受氣候之影響而下跌,依此所得中位數,必偏之過低.反之如冰價,於六,七月間,因需要者多而上漲,依此所得中位數,必失之過高.故依時間之先後求得之中位數,非眞正之中位數也.

前例如以變量之大小爲次,則各月蛋價之排列如下:

\$10.50	\$11.00	\$11.50	\$11.50	\$11.50	\$13.00
\$14.50	\$14.50	\$15.50	\$17.50	\$18.00	\$18.50

中位數爲

$$M_d=\frac{13.00+14.50}{2}=\$13.75$$

(二) 次數表核算法 (By interpolation in a frequency table)

在分組次數表中求中位數之步驟如下:

(1) 將統計資料製成分組次數表.

(2) 以 2 除次數之總和,決定中位數之地位及中位數兩端之次數.

(3) 自次數分配之任何一端起,將各組次數相加,至含有中位數之一組止,得次數總和 F.

(4) 從 $\frac{N}{2}$ 中減去 F, 所餘次數以中位數所在一組之次數除之,再乘組距,即得中位數距中位數所在組下限(在公式八甲中)或上限(在公式八乙中)之數值.

(5)將第四步所得之結果,加入中位數所在組之下限內(如公式八甲),或由中位數所在組之上限內減去之(如公式八乙),即得中位數.

設M_d為中位數.

N 為次數之總數.

L 為中位數所在組之下限.

U 為中位數所在組之上限.

F 為中位數所在組以上或以下次數之總和.

f 為中位數所在組之次數.

i 為組距.

$$M_d = L + \frac{\frac{N}{2} - F}{f} \times i \cdots\cdots(\text{公式八甲})$$

$$M_d = U - \frac{\frac{N}{2} - F}{f} \times i \cdots\cdots(\text{公式八乙})$$

表二十五 上海市第一屆至第七屆集團結婚新郎年齡分配表

(由分組次數表中求中位數表)

年齡	新郎人數	以下累積人數	以上累積人數
18——20.99	86	86	593
21——23.99	186	272	507
24——26.99	174	446	321
27——29.99	100	546	147
30——32.99	30	576	47
33——35.99	8	584	17
36——38.99	2	586	9
39——41.99	4	590	7
42——44.99	3	593	3

應用公式八甲

$$M_d=24+\frac{\frac{593}{2}-272}{174}\times 3=24+\frac{73.5}{174}$$

$$=24+.42=24.42\text{歲}$$

應用公式八乙

$$M_d=27-\frac{\frac{593}{2}-147}{174}\times 3=27-\frac{448.5}{174}$$

$$=27-2.58=24.42\text{歲.}$$

在次數表中核算中位數時,常因次數分配無定,致遭遇困難極多,茲分別設例述之如下:

(1) 如中位數適在兩組之間(即中位數所在點以上及以下之次數總和相等時),則中位數等於 L 及 U.

分組	次數	以下累積	以上累積
0——5	2	2	24
5——10	2	4	22
10——15	8	12	20
15——20	6	18	12
20——25	4	22	6
25——30	2	24	2

應用公式八甲

$$M_d=15+\frac{\frac{24}{2}-12}{\text{[illegible]}}\times 5=15$$

應用公式八乙

$$M_d=15-\frac{\frac{24}{2}-12}{8}\times 5=15$$

(2)如中位數介於兩組之間,而兩組間一組之次數爲零,則中位數爲$\frac{L+U}{2}$.

分組	次數	以下累積	以上累積
0——5	1	1	22
5——10	3	4	21
10——15	7	11	18
15——20	0		
20——25	6	17	11
25——30	3	20	5
30——35	2	22	2

應用公式八甲

$$M_d=15+\frac{\frac{22}{2}-11}{0}\times 5=15$$

應用公式八乙

$$M_d=20-\frac{\frac{22}{2}-11}{0}\times 5=20$$

$$M_d=\frac{L+U}{2}=\frac{15+20}{2}=17.50$$

(3)如分組表內各組組距不等時,中位數之計算,應以中

位數所在組之組距為標準.

分組	次數	以下累積	以上累積
0——5	3	3	24
5——10	6	9	21
10——20	8	17	15
20——30	4	21	7
30——50	2	23	3
50——70	1	24	1

應用公式八甲

$$M_d=10+\frac{\frac{24}{2}-9}{8}\times 10=13.75$$

應用公式八乙

$$M_d=20-\frac{\frac{24}{2}-7}{8}\times 10=13.75$$

(4) 如中位數在第一組內,則其求法如下:

分組	次數	以下累積	以上累積
0——5	21	21	38
5——10	7	28	17
10——15	4	32	10
15——20	3	35	6
20——25	2	37	3
25——30	1	38	1

應用公式八甲

$$M_d=0+\frac{\frac{38}{2}-0}{21}\times 5=4.52$$

應用公式八乙

$$M_d=5-\frac{\frac{38}{2}-17}{21}\times 5=4.52$$

(5)中位數在末組內,則其求法如下:

分　組	次　數	以下累積	以上累積
0——5	1	1	79
5——10	4	5	78
10——15	7	12	74
15——20	10	22	67
20——25	15	37	57
25——30	42	79	42

應用公式八甲

$$M_d=25+\frac{\frac{79}{2}-37}{42}\times 5=25.30$$

應用公式八乙

$$M_d=30-\frac{\frac{79}{2}-0}{42}\times 5=25.30$$

(6)在不分組次數表及非連續數列中,中位數之計算法,與視察法同.即先定中位數之地位,視中位點落於何

數或何組,即以該數或該組中值作為中位數是也.

數　值	次　數	以下累積
5	1	1
10	3	4
15	4	8
20	8	16
25	7	23
30	2	25

應用公式七

$$M'_d=\frac{25+1}{2}=13$$

$$M_d=20$$

(三) 累積次數曲線圖核算法 (By interpolation on a cumulative frequency graph)

中位數又可於累積次數曲線圖中推求之,茲將推算之步驟,述之如下:

(1)將統計資料製成以下累積次數表.

(2)繪製以下累積次數曲線圖.

(3)由縱軸(Y軸)上次數之中點(M點),引一水平線與曲線相交於E點.

(4)由E點引一垂直線與橫軸(X軸)相交於G點.

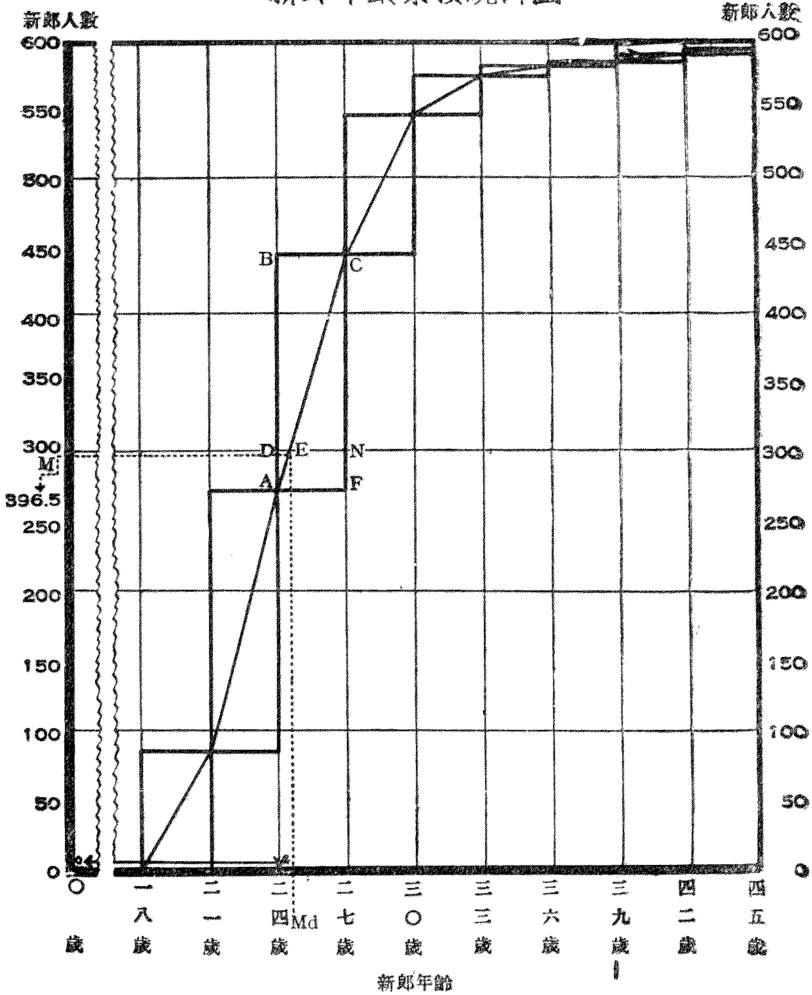
(5)在橫軸上,測量G點所代表之數值,即得中位數.

茲用表二十五上海市第一屆至第七屆集團結婚新郎

年齡之分配,製成以下累積次數曲線圖如下:

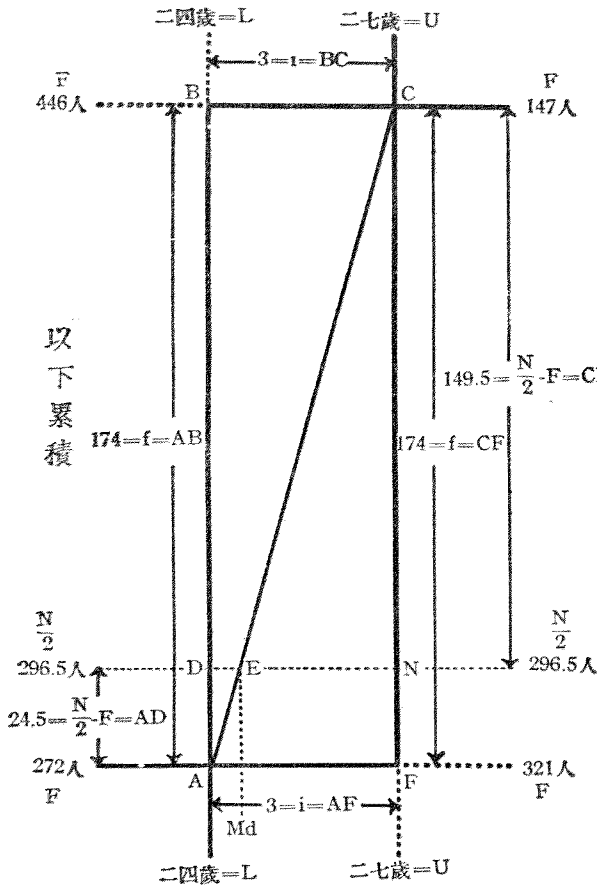
圖三十三 上海市第一屆至第七屆集團結婚

新郎年齡累積統計圖



(由累積次數曲線圖中核算中位數圖甲)

圖三十四　上海市第一屆至第七屆集團結婚新郎年齡二十四歲至二十七歲組累積統計圖



(由累積次數曲線圖中核算中位數圖乙)

參與上海市第一屆至第七屆集團結婚之新郎,共計593人,故中位點為 593÷2=296.5. 我人於縱軸上即可求此

中位點,更由此中位點引一 MN 水平線,與曲線相交於 E 點;E 點所在一組,卽中位數所在組;再由 E 點引一 EG 之垂直線,與橫軸相交;OG 卽中位數之數值,用目力觀察之,約爲 24.50.然 $OG=ME$,故吾人亦可推求 ME 之數值.圖中 $ME=MD+DE$ 或 $ME=MN-EN$, 但 $MD=24$,爲中位數所在組之下限;$MN=27$, 爲中位數所在組之上限;用插補法$\left(\dfrac{\frac{N}{2}-F}{f}\times i\right)$計算者,爲 DE 或 EN 之數值.依幾何學原理 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ADE$ 爲相似三角形,故

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$$

$$DE=\frac{AD\times BC}{AB}$$

查 $AD=\dfrac{593}{2}-272$

$=24.5$(卽中位數所在組之下限與中位數所在點間之次數)

$AB=174$(卽中位數所在組之次數)

$BC=3$(卽組距)

故 $DE=\dfrac{24.5\times 3}{174}=0.42$(卽公式八甲中之$\dfrac{\frac{N}{2}-F}{f}\times i$)

$M_a=MD+DE=24+0.42=24.42$ 歲

又知 $\triangle ACF$ 與 $\triangle ECN$ 爲相似三角形,故

$$\frac{CN}{CF}=\frac{EN}{AF}$$

$$EN=\frac{CN\times AF}{CF}$$

查　$CN=\frac{593}{2}-147$

$=149.5$　（即中位數所在組之上限與中位數所在點間之次數）

$CF=174$　（即中位數所在組之次數）

$AF=3$　（即組距）

故　$EN=\frac{149.5\times 3}{174}=2.58$（即公式八乙中 $\frac{\frac{N}{2}-F}{f}\times i$）

$M_d=MN-EN=27-2.58=24.42$歲

(四) 四分位數十分位數及百分位數之核算法

中位數之外,尙有所謂四分位數者(Quartiles),即將中位數分列爲前後二部,此前後二部又各求其中位數,即得四分位數.前半部之中位數,名曰第一四分位數(First quartile),又稱下四分位數(Lower quartile);後半部之中位數,名曰第三四分位數(Third quartile),又稱上四分位數(Upper quartile),第二四分位數,即中位數也.四分位數之外,統計學上,亦有分數列爲十等分或百等分者,其分點名曰十分位數(Deciles)及百分位數(Percentiles).

求四分位數十分位數及百分位數之方法,與求中位數同.所異者在於等分之不同耳.茲分別數列之分組與不分組,說明其求法如下:

(1)由枚舉數列中求四分位數十分位數及百分位數法——由枚舉數列中求四分位數十分位數及百分位數之公式如下:

設Q'_1爲第一四分位數之地位.

Q_1 爲第一四分位數.

Q'_3爲第三四分位數之地位.

Q_3 爲第三四分位數.

D'_n爲第n十分位數之地位.

D_n 爲第n十分位數.

P'_n爲第n百分位數之地位.

P_n 爲第n百分位數.

N 爲變量項數.

n 爲十分位數或百分位數之位數.

$$Q'_1=\frac{1(N+1)}{4} \quad \text{(公式九)}$$

$$Q'_3=\frac{3(N+1)}{4} \quad \text{(公式十)}$$

$$D'_n=\frac{n(N+1)}{10} \quad \text{(公式十一)}$$

$$P'_n=\frac{n(N+1)}{100} \quad \text{(公式十二)}$$

例如某校二十學生之平均成績,經整理後,排列如下:

43	45	52	55	59	64	67	68	70	70
72	74	74	75	78	79	80	82	85	88

應用公式九求第一四分位數

$$Q'_1=\frac{1(20+1)}{4}=5.25$$

$$Q_1=59+\frac{5.25-5}{1}\times(64-59)$$

$$=59+1.25=60.25$$

應用公式十求第三四分位數

$$Q'_3=\frac{3(20+1)}{4}=15.75$$

$$Q_3=78+\frac{15.75-15}{1}\times(79-78)$$

$$=78+.75=78.75$$

應用公式十一求第四十分位數

$$D'_4=\frac{4(20+1)}{10}=8.40$$

$$D_4=68+\frac{8.4-8}{1}\times(70-68)$$

$$=68+.80=68.80$$

應用公式十二求第七十百分位數

$$P'_{70}=\frac{70(20+1)}{100}=14.70$$

$$P_{70}=75+\frac{14.70-14}{1}\times(78-75)$$

$$=75+2.10=77.10$$

(2)由分組次數表中求四分位數十分位數及百分位數法——由分組次數表中求四分位數十分位數及百

分位數之公式如下:

設Q_1爲第一四分位數.

Q_3爲第三四分位數.

D_n爲第n十分位數.

P_n爲第n百分位數.

N爲次數之總數.

L爲四分位數,十分位數或百分位數所在組之下限.

U爲四分位數,十分位數或百分位數所在組之上限.

F爲四分位數,十分位數或百分位數所在組以上或以下次數之總和.

f爲四分位數,十分位數或百分位數所在組之次數.

i爲組距.

n爲十分位數或百分位數之位數.

$$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - F}{f} \times i \cdots\cdots\text{(公式十三甲}$$

$$Q_1 = U - \frac{\frac{3N}{4} - F}{f} \times i \cdots\cdots\text{(公式十三乙)}$$

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - F}{f} \times i \cdots\cdots\text{(公式十四甲)}$$

$$Q_3=U-\frac{\frac{N}{4}-F}{f}\times i \cdots\cdots(\text{公式十四乙})$$

$$D_n=L+\frac{\frac{nN}{10}-F}{f}\times i \cdots\cdots(\text{公式十五甲})$$

$$D_n=U-\frac{\frac{(10-n)N}{10}-F}{f}\times i \cdots\cdots(\text{公式十五乙})$$

$$P_n=L+\frac{\frac{nN}{100}-F}{f}\times i \cdots\cdots(\text{公式十六甲})$$

$$P_n=U-\frac{\frac{(100-n)N}{100}-F}{f}\times i \cdots\cdots(\text{公式十六乙})$$

表二十六　某國八一〇城某月火油價分配表

（由分組次數表中求四分位數十分位數及百分位數表）

每加崙價格（單位　分）	城市數 f	以下累積城市數	以上累積城市數
6.0——6.49	5	5	810
6.5——6.99	8	13	805
7.0——7.49	13	26	797
7.5——7.99	18	44	784
8.0——8.49	61	105	766
8.5——8.99	90	195	705
9.0——9.49	140	335	615
9.5——9.99	119	454	475
10.0——10.49	100	554	356
10.5——10.99	81	635	256
11.0——11.49	65	700	175
11.5——11.99	42	742	110
12.0——12.49	32	774	68
12.5——12.99	23	797	36
13.0——13.49	13	810	13

應用公式十三甲

$$Q_1=9.0+\frac{\frac{810}{4}-195}{140}\times 0.5$$

$$=9.0+\frac{7.5}{140}\times 0.5$$

$$=9.0+0.027=9.027\text{ 分}$$

應用公式十三乙

$$Q_1=9.5-\frac{\frac{3\times 810}{4}-475}{140}\times 0.5$$

$$=9.5-\frac{132.5}{140}\times 0.5$$

$$=9.5-0.473=9.027\text{ 分}$$

應用公式十四甲

$$Q_3=10.5+\frac{\frac{3\times 810}{4}-554}{81}\times 0.5$$

$$=10.5+\frac{53.5}{81}\times 0.5$$

$$=10.5+0.330=10.830\text{ 分}$$

應用公式十四乙

$$Q_3=11.0-\frac{\frac{810}{4}-175}{81}\times 0.5$$

$$=11.0-\frac{27.5}{81}\times 0.5$$

$$=11.0-0.170=10.830\text{ 分}$$

應用公式十五甲求第三十分位數

$$D_3=9.0+\frac{\frac{3\times 810}{10}-195}{140}\times 0.5$$

$$=9.0+\frac{48}{140}\times 0.5$$

$$=9.0+0.171=9.171\text{ 分}$$

應用公式十五乙求第三十分位數

$$D_3=9.5-\frac{\frac{(10-3)\times 810}{10}-475}{140}\times 0.5$$

$$=9.5-\frac{92}{140}\times 0.5$$

$$=9.5-0.329=9.171\text{ 分}$$

應用公式十六甲求第六十百分位數

$$P_{60}=10+\frac{\frac{60\times 810}{100}-454}{100}\times 0.5$$

$$=10+\frac{32}{100}\times 0.5$$

$$=10+0.160=10.160\text{ 分}$$

應用公式十六乙求第六十百分位數

$$P_{60}=10.5-\frac{\frac{(100-60)\times 810}{100}-256}{100}\times 0.5$$

$$=10.5-\frac{68}{100}\times 0.5$$

$$=10.5-0.340=10.160\text{ 分}$$

由累積次數曲線圖中,求四分位數,十分位數及百分位數之方法,與求中位數同,惟於縱軸上,改中位點自四分位點,十分位點或百分位點引一水平線與曲線相交,再自交接點引一垂直線與橫軸相交,測量在橫軸上交接點之數值,卽得四分位數,十分位數或百分位數.

第四節　衆數

衆數亦稱密集數,其意義最爲淺顯,蓋量數中次數最密集之一點,卽衆數也.(The mode of a frequency series is that value of the variable for which the frequency is the maximum.)例如最普通之成績,最普通之工資等,皆屬衆數.以其爲最普通之事實,故可用爲全體事項之代表.衆數之計算法有四:

(一)　視察法(Inspection)

用視察法推求衆數,以其所用圖表之不同,又可分爲三種:(1)由分組次數表中視察衆數法,(2)由簡單次數曲線圖中視察衆數法,(3)由累積次數曲線圖中視察衆數法.

(1)由分組次數表中視察衆數法——從分組次數表中視察衆數,卽以次數最多一組之中值,爲衆數之數值.例如表二十七,次數最多之一組爲$0.045至$0.0549,故以該組中值$0.05爲衆數.

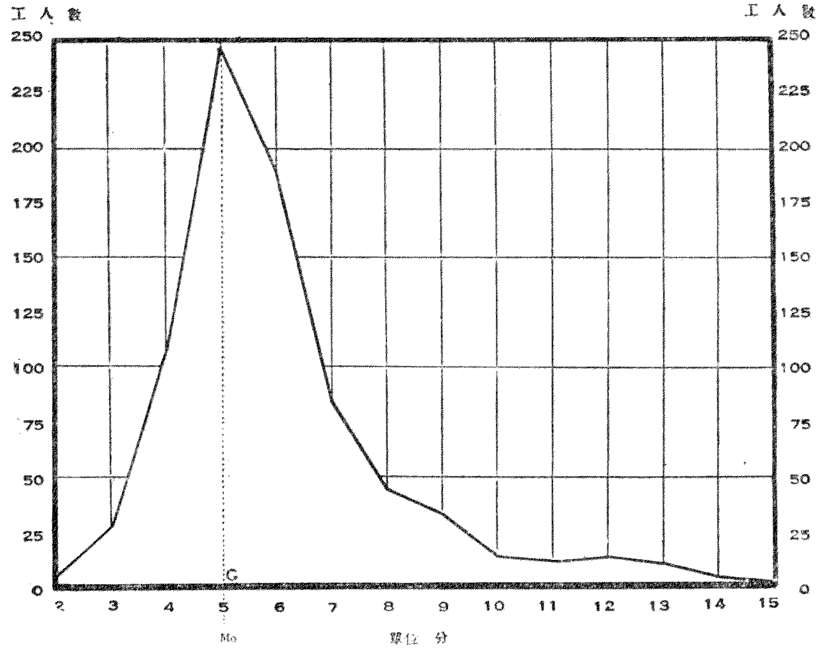
表二十七　上海市造紙業男工每小時工資率分配表

(由分組次數表中視察衆數表)

工資率	中值	工人數	以下累積	以上累積
$0.015 ——$0.0249	$0.02	5	5	792
0.025 —— 0.0349	0.03	27	32	787
0.035 —— 0.0449	0.04	107	139	760
0.045 —— 0.0549	0.05	250	389	653
0.055 —— 0.0649	0.06	189	578	403
0.065 —— 0.0749	0.07	83	661	214
0.075 —— 0.0849	0.08	46	707	131
0.085 —— 0.0949	0.09	33	740	85
0.095 —— 0.1049	0.10	13	753	52
0.105 —— 0.1149	0.11	12	765	39
0.115 —— 0.1249	0.12	13	778	27
0.125 —— 0.1349	0.13	10	788	14
0.135 —— 0.1449	0.14	3	791	4
0.145 —— 0.1549	0.15	1	792	1

(2)由簡單次數曲線圖中視察衆數法——從簡單次數曲線圖中視察衆數,即自曲線之最高點,引一垂直線與橫軸相交,測量此相交點在橫軸上之數值,即得衆數.例如圖三十五由曲線之最高峯處,引一垂直線與橫軸相交於G點.測定G點在橫軸上所代表之數值爲$0.05,即衆數之數值也.

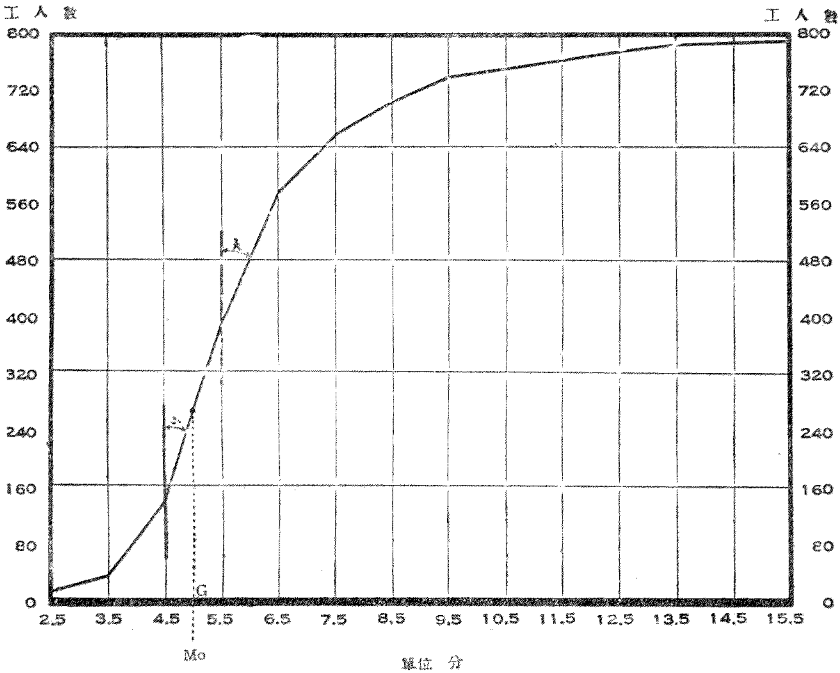
圖三十五 上海市造紙業男工每小時工資率分配圖



(由簡單次數曲線圖中視察衆數圖)

(3)由累積次數曲線圖中視察衆數法——從累積次數曲線圖中視察衆數法,卽視累積曲線之平峭而定.例如圖三十六上海市造紙業男工每小時工資率之分配曲線,始則甚平,繼則漸峭,末又平坦.而以 $0.045 至 $0.055 一組曲線之峭度最高,蓋以該組次數最多之故也.就此峭度最高曲線之中點,引一垂直線與橫軸相交於 G 點,測量橫軸上 G 點之數值,亦得衆數爲$0.05

圖三十六　上海市造紙業男工每小時工資率累積統計圖



(由累積次數曲線圖中視察衆數圖)

(二) 併組法(By grouping method)

分組次數表中,如有一組次數特多,則衆數之決定,即取該組之中值,至爲簡易.但若次數之分配,不甚整齊,如有兩高峯(Bi-modal)或多高峯時,則衆數究在何組,頗難斷定.依美國統計學家金氏(Willford I. King)之說,如遇此種情形,則可用併組法以求之.用併組法求衆數之步驟有七:

(1)將統計資料製成分組次數表.

(2) 自第一組起將組距擴大一倍,即每兩組之次數相加,得第二分組次數表.

(3) 自第二組起仍將組距擴大一倍,即將第二第三組及第四第五組等之次數合併之,得第三分組次數表.

(4) 自第一組起將組距擴大二倍,即每三組之次數相加,得第四分組次數表.

(5) 自第二組起仍將組距擴大二倍,即將第二第三第四組或第五第六第七組等之次數合併之,得第五分組次數表.

(6) 自第三組起仍將組距擴大二倍,即將第三第四第五組或第六第七第八組等之次數合併,得第六分組次數表.依此而下,至衆數之位置能確定為止.

(7) 將各次併組後求得之衆數,編列一表,以發現次數最多者一組之中值,確定為該分組表之衆數.茲設例明之如下:

表二十八　某校學生每月費用分組表

(由分組次數表中用併組法求衆數表)

每月費用	中值 m	學生數 f	組距為\$2 每兩組合併		組距為\$3 每三組合併		
\$4.5——\$5.49	5	48	100		156		
5.5—— 6.49	6	52		108		168	
6.5—— 7.49	7	56	116				178
7.5—— 8.49	8	60		**122**	**182**		
8.5—— 9.49	9	62	122			**180**	
9.5——10.49	10	60		118			174
10.5——11.49	11	58	114		177		
11.5——12.49	12	56		119		179	
12.5——13.49	13	63	**123**				**171**
13.5——14.49	14	60		108	148		
14.5——15.49	15	48	88			120	
15.5——16.49	16	40		72			
16.5——17.49	17	32					

每二組合併後所得之衆數為:

(1) 13, 14

(2) 8, 9

每三組合併後所得之衆數為:

(1) 8, 9, 10

(2) 9, 10, 11

(3) 7, 8, 9

各衆數發現之次數:

7	一次
8	三次
9	四次
10	二次
11	一次
13	一次
14	一次

分組次數表經併組後,衆數發現之次數最多者為9,故某校學生每月費用最普通者為$9.此法如遇分組表中包含數種性質不同之資料,而有一個以上之衆數者,應分為若干分組次數表而後依法求之,方可得確切之衆數,否則不獨無衆數可尋,即分組次數表亦將失其效用矣.

(三) 次數表核算法 (By interpolation in a frequency table)

應用第一第二法求得之衆數,多粗率不可靠.蓋組距大小不一,若組距甚大,則衆數究在該組何點?在視察及併組法中,俱假定爲中值,殊不可靠.故統計家倡用次數表核算法,以求較爲可靠之衆數.例如表二十七造紙業 792 男工每小時工資率之分配,依視察法,假定衆數所在組($0.045 至 $0.0549 一組)上下兩組或若干組之次數分配,完全對稱(Symmetrical),故卽以 $0.045 至 $0.0549 一組之中值 $0.05 作爲衆數,然考該分組表,衆數所在組以下一組之次數爲 107, 以下三組之總次數爲 139. 衆數所在組以上一組之次數爲 189, 以上十組之總次數爲 403. 上下分配旣不對稱 (Asymmetrical), 則衆數之數值,自應加以糾正.如衆數所在組以下一組或若干組之次數,多於以上一組或若干組之次數時,則衆數之數值小於衆數所在組之中值.反之,則衆數之數值大於衆數所在組之中值.蓋衆數所在組上下兩端之次數,不啻爲兩軍實力,足以左右衆數之數值,如勢均力敵,則衆數不動,否則常向次數較多之一端移動,統計家根據此種理論,定一公式如下:

設M_0爲衆數.

L 爲衆數所在組之下限.

U 爲衆數所在組之上限.

f'_1 爲衆數所在組以下一組之次數.

f''_1爲衆數所在組以下各組或若干組之總次數.

f'_2爲衆數所在組以上一組之次數.

f''_2爲衆數所在組以上各組或若干組之總次數.

i 爲組距.

$$M_o = L + \frac{f'_2}{f'_1 + f'_2} \times i \cdots\cdots\text{(公式十七甲)}$$

$$M_o = U - \frac{f'_1}{f'_1 + f'_2} \times i \cdots\cdots\text{(公式十七乙)}$$

$$M_o = L + \frac{f''_2}{f''_1 + f''_2} \times i \cdots\cdots\text{(公式十八甲)}$$

$$M_o = U - \frac{f''_1}{f''_1 + f''_2} \times i \cdots\cdots\text{(公式十八乙)}$$

茲應用表二十七上海市造紙業男工每小時工資率之分配,計得衆數如下:

應用公式十七甲

$$M_o = 0.045 + \frac{189}{107+189} \times 0.01$$
$$= 0.045 + 0.0064 = \$0.0514$$

應用公式十七乙

$$M_o = 0.055 - \frac{107}{107+189} \times 0.01$$
$$= 0.055 - 0.0036 = \$0.0514$$

應用公式十八甲（f''爲衆數所在組以上及以下各組之總次數）

$$M_o = 0.045 + \frac{403}{139+403} \times 0.01$$
$$= 0.045 + 0.0074 = \$0.0524$$

應用公式十八乙（f''爲衆數所在組以上及以下各組之總次數）

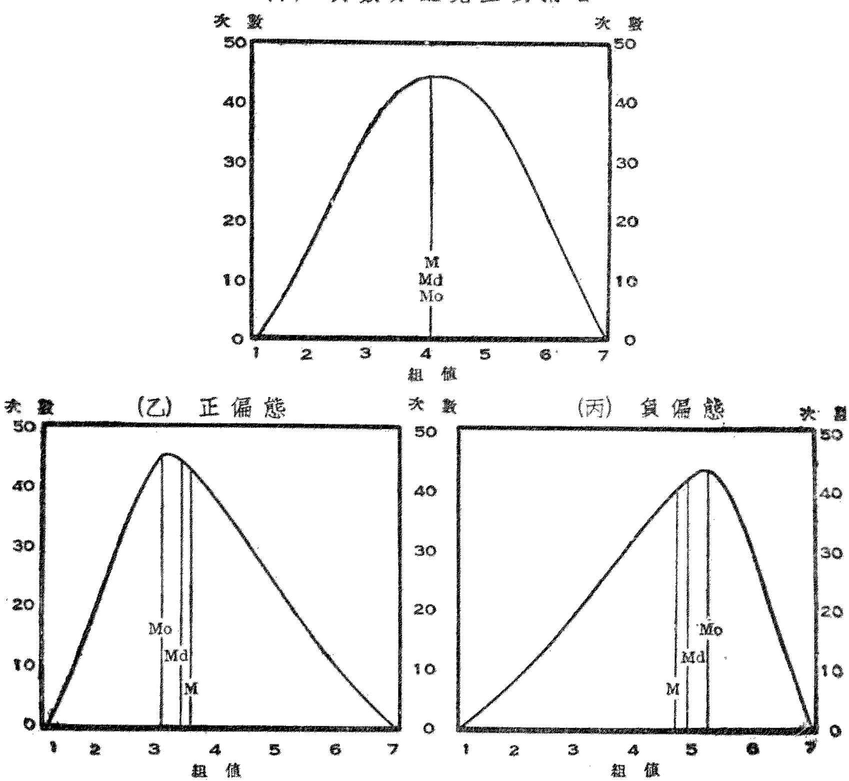
$$M_o = 0.055 - \frac{139}{139+403} \times 0.01$$
$$= 0.055 - 0.0026 = \$0.0524$$

(四) 皮爾生公式 (Pearsonian Formula)

次數之分配完全對稱時,算術平均數,中位數及衆數三者合而爲一.次數之分配如不對稱而略呈偏斜時,

圖三十七 對稱及略不對稱之次數分配圖

(甲) 次數分配完全對稱者



(用皮爾生公式核算衆數圖)

三者之數值,各不相同.但仍有相當關係之存在,即算術平均數與衆數相距最遠,而中位數與算術平均數之距離,約等於算術平均數與衆數距離三分之一.如次數分配爲正偏態(即右傾 Skewed to the right)時,則算術平均數大於中位數,中位數大於衆數,如圖三十七乙.反之,若次數分配略呈負偏態(即左傾 Skewed to the left)時,則算術平均數小於中位數,中位數小於衆數,如圖三十七丙.

皮爾生即本實驗各偏斜不甚之次數數列,定一求衆數近似值之公式如下:

設M_o爲衆數.

M爲算術平均數.

M_d爲中位數.

$$M_o = M - 3(M - M_d) \quad \text{(公式十九)}$$

例如表二十七上海市造紙業男工每小時工資率之分配,略呈右傾,爲正偏態.故求得衆數爲$0.0462

$M = \$0.0600$

$M_d = \$0.0554$

$M_o = 0.0600 - 3(0.0600 - 0.0554)$

$\quad = 0.0600 - 0.0138 = \$0.0462$

皮爾生公式之規定,全憑實驗而無數理之根據,故所得衆數爲近似之數值,非至萬不得已時,不宜輕用.

第五節 幾何平均數

幾何平均數為N個變量連乘後,開N方所得之方根也.在求貨物之平均比價,人口之平均增減率,能力之平均增進率,以及複利率之高低等多用之.其計算方法,以加權與不加權之不同,可分為兩種:

(一) 求簡單幾何平均數法——在枚舉數列中,各變量之次數均為一,求簡單幾何平均數之公式如下:

設M_g為簡單幾何平均數.

N 為變量項數.

m 為變量之數值.

m_1為第一變量之數值.

m_2為第二變量之數值.

m_3為第三變量之數值.

m_n為第n變量之數值.

Σ 為總和之記號.

$$M_g=\sqrt[N]{m_1m_2m_3\cdots\cdots m_n}\cdots\cdots\text{(公式二十甲)}$$

$$\log M_g=\frac{\log m_1+\log m_2+\log m_3+\cdots\cdots+\log m_n}{N}$$

$$M_g=\text{antilog}\frac{\Sigma\log m}{N}\cdots\cdots\text{(公式二十乙)}$$

(例一) 求平均物價指數——幾何平均數在經濟統計上最著之用途,在求平均物價指數.設有甲乙丙丁戊五種

物品,甲種物價較前年增兩倍,乙種物價較前年漲一倍,丙種物價不漲不跌,丁種物價較前年跌一倍,戊種物價較前年跌兩倍.在理想中,甲物價漲兩倍與戊物價跌兩倍,乙物價漲一倍與丁物價跌一倍,應互相銷除而無變動.然用算術平均法,求得本年平均物價指數爲 136.66, 似較前年漲百分之 36.66,與理想上不能符合,自不能以算術平均法計算之.若用幾何平均法核算,則得本年平均物價指數爲 100.00, 適與理想及實際情形相符合.此幾何平均數之所以適用於物價指數之核計也.玆將五種物價及核算簡單幾何平均數之方法,表示之如下:

表二十九 五種物價比較表

(計算簡單幾何平均數表)

物品	前年物價	本年物價	前年物價比價	本年物價比價(m)	$\log m$
甲	\$1.00	\$3.00	100.00	300.00	2.477121
乙	8.00	16.00	100.00	200.00	2.301030
丙	3.00	3.00	100.00	100.00	2.000000
丁	4.00	2.00	100.00	50.00	1.698970
戊	6.00	2.00	100.00	33.33	1.522835
總計				683.33	9.999956

算術平均指數

$$M=\frac{683.33}{5}=136.66$$

幾何平均指數

$$M_g = antilog\frac{9.999956}{5} = 100.00$$

(例二) 求人口增加率——人口之增加,依馬爾塞斯(Thomas Robert Malthus)之立論爲幾何級數,故求人口增加率時,應用幾何平均法計算之.例如某地於民國十年人口數爲 100,000 人,二十年增至 150,000 人,則每年平均增加率爲:(設 r 爲平均每年增加率)

$$150,000 = 100,000 \times (1+r)^{10}$$

$$log150,000 = log100,000 + 10\ log(1+r)$$

$$10\ log(1+r) = log150,000 - log100,000$$

$$log(1+r) = \frac{log150,000 - log100,000}{10}$$

$$= \frac{5.176091 - 5.000000}{10}$$

$$= 0.0176091$$

$$1 + r = antilog\,0.0176091$$

$$= 1.0414$$

$$r = 1.0414 - 1$$

$$= 4.14\%$$

民國十五年之人口應爲:

$$M_g = \sqrt{100,000 \times 150,000}$$

$$= 122,474 \text{ 人}$$

或

$$100,000 \times (1 + 0.0414)^5$$

$$log\,100{,}000+5\ \ log(1.0414)=5.0880455$$

民國十五年人口$=antilog\,5.0880455$

$$=122{,}474\text{ 人.}$$

(例三) 求能力增加率——能力之增進,依教育專家之測定,亦成幾何級數,故於計算平均增進率時,亦應採用幾何平均法.例有某生對於某種技能,經學習五個月後,已進步百分之八十,則每月平均增進率應爲 12.47% 如下:(設 r 爲平均每月增進率)

$$180=100\times(1+r)^5$$

$$log\,180=log\,100+5\,log(1+r)$$

$$5\,log(1+r)=log\,180-log\,100$$

$$log(1+r)=\frac{log\,180-log\,100}{5}$$

$$=\frac{2.255273-2.000000}{5}$$

$$=0.0510546$$

$$1+r=antilog\,0.0510546$$

$$=1.1247$$

$$r=1.1247-1$$

$$=12.47\%$$

學習二個半月時,進步分數應爲:

$$M_g=\sqrt{100\times180}$$

$$=134.$$

進步分數為$134-100=34$分

或

$$100\times(1+0.1247)^{2.5}$$

$$\log\ 100+2.5\log 1.1247=2.1276365$$

二個半月時分數$=antilog\,2.1276365$

$$=134$$

進步分數為$134-100=34$分

(例四) 求複利率——利息之給予,如係複利,則複利率之計算,亦應採用幾何平均法求之.例有本金\$1,000, 十二年後共得本息\$1,600, 按算術平均法,求得利率為5%如下:(設r為單利率)

$$1{,}600=1{,}000+1{,}000\times r\times 12$$

$$1{,}600-1{,}000=1{,}000\times r\times 12$$

$$r=\frac{1{,}600-1{,}000}{1{,}000\times 12}$$

$$=\frac{600}{12{,}000}$$

$$=5\%$$

5% 為單利率而非複利率,如用幾何平均法求之,即得複利率為4%如下:(設r為複利率)

$$1{,}600=1{,}000\times(1+r)^{12}$$

$$\log 1{,}600=\log 1{,}000+12\log(1+r)$$

$$12\ \log(1+r)=\log 1{,}600-\log 1{,}000$$

$$\log(1+r)=\frac{\log 1{,}600-\log 1{,}000}{12}$$

$$= \frac{3.204120 - 3.000000}{12}$$

$$= 0.017010$$

$$1 + r = antilog\, 0.017010$$

$$= 1.04$$

$$r = 1.04 - 1$$

$$= 4\%$$

存入本金$1,000六年後應得本息

$$M_g = \sqrt{1,000 \times 1,600}$$

$$= \$1,265$$

或

$$1,000 \times (1 + 0.04)^6$$

$$log\, 1,000 + 6 \;\; log\, 1.04 = 3.102060$$

存入本金$1,000六年後應得本息

$$antilog\, 3.102060 = \$1,265$$

(二) 求加權幾何平均數法——如枚舉數列中,各變量之輕重不一時,則應求加權幾何平均數,其公式如下:

設 M_g 爲加權幾何平均數.

m 爲變量之數值.

m_1 爲第一變量之數值.

m_2 爲第二變量之數值.

m_3 爲第三變量之數值.

m_n 爲第 n 變量之數值.

W 爲變量之權數.

W_1 爲第一變量之權數.

W_2 爲第二變量之權數.

W_3 爲第三變量之權數.

W_n 爲第 n 變量之權數.

Σ 爲總和之記號.

$$M_g = \sqrt[\Sigma W]{m_1^{W_1} m_2^{W_2} m_3^{W_3} \cdots\cdots m_n^{W_n}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(公式二十一甲)}$$

$$\log M_g = \frac{W_1 \log m_1 + W_2 \log m_2 + W_3 \log m_3 + \cdots + W_n \log m_n}{\Sigma W}$$

$$= \frac{\Sigma W \log m}{\Sigma W}$$

$$M_g = \text{antilog} \frac{\Sigma W \log m}{\Sigma W} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(公式二十一乙)}$$

表三十　民國二十五年上海市九種物價比價表

民國十五年比價 =100

(計算加權幾何平均數表)

物品	比價 m	消費值* W	$\log m$	$W \log m$
粳米	81.49	$57	1.911104	108.932928
鮮豬肉	89.05	11	1.949634	21.445974
鮮魚	86.13	5	1.935154	9.675770
鮮鴨蛋	75.00	3	1.875061	5.625183
食鹽	221.28	2	2.344942	4.689884
細布	79.63	2	1.901077	3.802154
條格布	95.00	1	1.977724	1.977724
廢木柴	144.45	4	2.159718	8.638872
肥皂	98.04	3	1.991403	5.974209
總計		$88		170.762698

*每工人家庭平均每年消費值

應用公式二十一乙

$$M_g = antilog\,\frac{170.762698}{88}$$

$$= antilog\,1.940485$$

$$= 87.19$$

第六節　倒數平均數

倒數平均數爲各變量倒數之算術平均數之倒數.在求每小時之平均速率及每元之平均購買量時多用之.其計算方法亦以加權不加權之不同,可分爲下列兩種:

(一)　求簡單倒數平均數法——在枚舉數列中,各變量之次數均爲一,求簡單倒數平均數之公式如下:

設 M_h 爲倒數平均數.

N 爲變量項數.

m 爲變量之數值.

m_1 爲第一變量之數值.

m_2 爲第二變量之數值.

m_3 爲第三變量之數值.

m_n 爲第 n 變量之數值.

Σ 爲總和之記號.

$$\frac{1}{M_h} = \frac{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \cdots\cdots + \frac{1}{m_n}}{N}$$

$$M_h = \cfrac{1}{\cfrac{\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{m_n}}{N}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{N}\Sigma\left(\frac{1}{m}\right)} \text{……………………（公式二十二）}$$

（例一）求每小時平均速率——例有甲乙丙三人,各駕一舟,行於江中,甲氣力最大,每小時可行15里;乙次之,可行10里;丙氣力最小,每小時僅行8里.若用算術平均法平均之,甲乙丙三人平均每小時可行$\frac{15+10+8}{3}=11$里.但事實上則不然,蓋以時間為單位,則人人所行里數相等（如前例為11里）,行完了事,雖駕舟速者,亦不能多行.若以工作為單位,則

甲行一里需時$60\div15=$ 4.0分鐘

乙行一里需時$60\div10=$ 6.0分鐘

丙行一里需時$60\div8=$ 7.5分鐘

三人各行一里需時　17.5分鐘

平均三人行一里需時$17.5\div3=5.8333$分鐘

三人平均每小時可行$60\div5.8333=10.29$里

較之算術平均數11里,相差0.71里,故遇此種問題應求倒數平均數.

應用公式二十二

$$M_h = \frac{1}{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{10}+\frac{1}{8}\right)}$$

$$=\frac{1}{\frac{350}{3\times 1,200}}=\frac{1}{0.0972}$$

$$=10.29\text{ 里}$$

（例二）求每元平均購買量——如物價以每元可購若干物量表示者,亦須用倒數平均數.例如白糖於民國二十年至二十五年間,平均每元可購糖量如下:

表三十一　歷年每元可購白糖量表

民國二十年至二十五年

（計算簡單倒數平均數表）

年次	每元可購市斤數 m	每市斤價格 $\frac{1}{m}$
民國二十年	8	$0.125
廿一年	5	0.200
廿二年	4	0.250
廿三年	6	0.167
廿四年	5	0.200
廿五年	3	0.333
總計	31	$1.275

如求算術平均數,則每元可購5.167市斤

$$M=\frac{31}{6}=5.167\text{ 市斤}$$

如求倒數平均數,則每元可購4.706市斤

$$M_h=\frac{1}{\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{18,360}{6 \times 14,400}} = \frac{1}{0.2125}$$

$$= 4.706 \text{ 市斤}$$

平均每市斤價格爲

$$M = \frac{1.275}{6} = \$0.2125$$

或

$$M = \frac{1}{4.706} = \$0.2125$$

(二) 求加權倒數平均數法——在枚舉數列中,如各變量之輕重不一,則應求加權倒數平均數,其公式如下:

設 M_h 爲加權倒數平均數.

m 爲變量之數值.

m_1 爲第一變量之數值.

m_2 爲第二變量之數值.

m_3 爲第三變量之數值.

m_n 爲第 n 變量之數值.

W 爲變量之權數.

W_1 爲第一變量之權數.

W_2 爲第二變量之權數.

W_3 爲第三變量之權數.

W_n 爲第 n 變量之權數.

Σ 爲總和之記號.

$$\frac{1}{M_h}=\frac{W_1\frac{1}{m_1}+W_2\frac{1}{m_2}+W_3\frac{1}{m_3}+\cdots\cdots+W_n\frac{1}{m_n}}{\Sigma W}$$

$$M_h=\cfrac{1}{\cfrac{\cfrac{W_1}{m_1}+\cfrac{W_2}{m_2}+\cfrac{W_3}{m_3}+\cdots\cdots+\cfrac{W_n}{m_n}}{\Sigma W}}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{\Sigma W}\Sigma\left(\frac{W}{m}\right)}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式二十三)}$$

表三十二　某市五種物價表

（計算加權倒數平均數表）

物　品	每元可購物量 m	每年消費值 W	每單位價格 $\frac{1}{m}$	$W\frac{1}{m}$
甲	5	\$10	\$0.200	2.00
乙	25	8	0.040	0.32
丙	10	3	0.100	0.30
丁	20	6	0.050	0.30
戊	40	2	0.025	0.05
總　計		29		2.97

應用公式二十三

$$M_h=\frac{1}{\frac{1}{29}\times 2.97}=\frac{1}{0.1024}$$

$$=9.77$$

第七節　各種平均數之比較

(一) 各種平均數之優劣

(1)算術平均數

(A)優點——算術平均數之優點有四:

(a)富代表性——算術平均數乃將各個變量,參與計算而得,其代表性當超過其他各平均數.故遇極端變量有關全體量數者,用算術平均數最爲適宜.

(b)準確可靠——算術平均數完全根據數理方式,從全體變量中核算,故較其他平均數準確可靠.

(c)普通明顯——算術平均數爲常人所共知,用以測定量數之集中程度,較其他平均數爲顯明易知.

(d)易於計算——算術平均數之計算,僅將各變量相加,除以變量項數卽得.原始資料之未加整理者,亦可核算.卽統計資料僅知全體變量之總值及總項數,不知各變量之數值時,亦可計算.例如某廠於某月共支付工資 $1,560, 全廠共有工人 95 名,則每人每月平均可得工資 $16.42. 非若其他平均數之不可據以核算者也.

(B)劣點——算術平均數之劣點有二:

(a)失代表性——如極端變量與平均數頗有關係者,則由全體變量中求得之算術平均數,固富有代表性.然極端變量多係偶然之現象,應屏棄不

顧者,則用算術平均數測定全體量數時,反失代表性.

(b)不合事理——在非連續之量數中,求得之算術平均數,如平均每家有人口4.2人等,此0.2人在實際上所絕無者,其不合事理於此可見.

(2)中位數

(A)優點——中位數之優點有三:

(a)富代表性——中位數乃全體變量之中心數值,以其不受兩極端變量之影響,及數值常居算術平均數與衆數之間之關係,故富有代表性.

(b)易於計算——如變量項數極多時,求算術平均數,則須總加各變量之數值,似覺繁雜.若順次排列,摘取中間之變量代表全體,在計算上似較便利.

(c)易定數值——組距之大小,組限之上下移動,影響中位數至微.故中位數之數值,較易確定,非若衆數之隨分組情形如何而變異.

(B)劣點——中位數之劣點有三:

(a)欠精確——中位數僅以數列之中心變量代表全體,遇極端變量與全體事實頗有關係時,中位數即失代表性.且中位數乘變量項數,苟非偶然,常不等於各變量之和.故在數理上言之,中位數

實欠精確.

(b)不合事理——在非連續數列中,用次數表核算法核算之中位數,亦常與事理不合.

(c)整理繁複——中位數之核算,應將各變量依數值大小,先行整理,而後用視察法或核算法計算之.如變量極多,則整理繁複,不若求算術平均數之輕而易舉.

(3)衆數

(A)優點——衆數之優點有三:

(a)富代表性——衆數乃次數發現最多之變量值.以其不受極端變量之影響,故在組距不大,集中程度甚高之數列中,衆數富有代表性.

(b)易於明解——衆數爲變量中之普通數,意義淺顯,易使讀者明解.

(c)計算便捷——衆數爲次數發現最多之變量值,故在集中趨勢甚大之次數分配表內,一望即知衆數爲若干.

(B)劣點——衆數之劣點有三:

(a)欠精確——衆數係由最普通之一小部份變量中求出,故不若算術平均數之精確可靠.且兩極端變量俱棄而不顧,若此極端變量與全體事實有極密切之關係者,衆數不能適用.

(b)難定數值——次數之分配,常隨組距之大小,組限之上下移動而異;衆數之確定,俱視次數之如何分配而定;故組距組限變動時,衆數隨之變異,其倏變難定,不言可諭.

(c)計算繁隤——若用皮爾生公式計算衆數,則先核計算術平均數及中位數,而後推算衆數,繁隤複雜,可想而知.

(4)幾何平均數

(A)優點——幾何平均數之優點有三:

(a)幾何平均數可用以測定各變量之平均變動率.

(b)幾何平均數因連乘及開方之關係,受極端變量之影響極小.

(c)幾何平均數可用代數式表示之,合乎數理化.

(B)劣點——幾何平均數之劣點有三:

(a)幾何平均數須將各變量連乘,並須開 n 方,計算繁複,非常人所能爲.

(b)幾何平均數多含抽象之數理性質,不易使人明解.

(c)如變量中有零,或分組之上下限無規定時,不能計算幾何平均數.

(5)倒數平均數

(A)優點——倒數平均數之優點,在能改正算術平均

數之謬點.蓋如計算每小時平均速率,每元平均可購物量等,如用算術平均數,往往示人謬果,沒煞眞情也.

(B)劣優——倒數平均數常小於算術及幾何平均數,故有時缺乏代表性.且意義晦澀,在統計分析上,除非不得已時,以少用爲妙.

(二)　各種平均數間之關係

各種平均數之數值,雖以計算方法之不同而互異,然其間恆有一定關係之存在.茲分條述之如下:

(1)算術平均數等於中位數等於衆數——在完全對稱之次數分配表中,求得算術平均數,中位數及衆數之數值相等.

(2)算術平均數大於幾何平均數——除完全對稱之次數分配外,任何數列之算術平均數,必大於幾何平均數.

(3)幾何平均數大於倒數平均數——除完全對稱之次數分配外,任何數列之幾何平均數,必大於倒數平均數.

(4)中位數與算術平均數之差,約等於算術平均數與衆數之差之三分之一——次數分配,如略呈偏態時,算術平均數與衆數之距離最遠(即相差最大);中位數與算術平均數之距離,約當算術平均數與衆數距

離之三分之一.此種關係如以公式示之如下:

$$M-M_o=3(M-M_d)$$

$$或\ M_o=M-3(M-M_d)$$

(5)兩變量之幾何平均數等於其算術平均數與倒數平均數之幾何平均數——任何兩變量(祇以兩變量爲限)之幾何平均數,等於其算術平均數與倒數平均數之幾何平均數.茲設例證明之如下:

設 a 爲第一變量.

b 爲第二變量.

$$M=\frac{a+b}{2}$$

$$M_h=\frac{1}{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$$

$$=\frac{1}{\frac{\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}}{2}}=\frac{1}{\frac{\frac{a+b}{ab}}{2}}$$

$$=\frac{1}{\frac{a+b}{2ab}}=\frac{2ab}{a+b}$$

$$因\ \sqrt{ab}=\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}}$$

$$故\quad M_g=\sqrt{M\cdot M_h}$$

例有二變量爲4,10則

$$M=\frac{4+10}{2}=7$$

$$M_h=\frac{2\times4\times10}{4+10}=\frac{80}{14}=5.7143$$

$$M_g=\sqrt{4\times10}=\sqrt{7\times5.7143}=\sqrt{40}$$

$$=6.32$$

(6)次數分配之離中趨勢,如依算術定律支配者,衆數與中位數,往往與算術平均數相近.如依幾何定律支配者,則衆數與中位數,常與幾何平均數相近.

本章應用公式

(公式一)由枚舉表中求算術平均數(普通法)

$$M=\frac{\Sigma m}{N}$$

(公式二)由次數表中求算術平均數(普通法)

$$M=\frac{\Sigma fm}{N}$$

(公式三)由枚舉表中求算術平均數(簡捷法)

$$M=M'+\frac{\Sigma d'}{N}$$

(公式四)由次數表中求算術平均數(簡捷法)

$$M=M'+\frac{\Sigma fd'}{N}$$

(公式五)由分組表中求算術平均數(假定離中差法)

$$M=M'+\frac{\Sigma fd''}{N}\times i$$

(公式六)由分組表中求算術平均數(累積次數法)

$$M = m_1 + \frac{\Sigma f' - N}{N} \times i$$

（公式七）由枚舉表中求中位數之地位（視察法）

$$M'_d = \frac{N+1}{2}$$

（公式八）由分組表中求中位數（次數表核算法）

(甲) $$M_d = L + \frac{\frac{N}{2} - F}{f} \times i$$

(乙) $$M_d = U - \frac{\frac{N}{2} - F}{f} \times i$$

（公式九）由枚舉表中求第一四分位數之地位(視察法)

$$Q'_1 = \frac{1(N+1)}{4}$$

（公式十）由枚舉表中求第三四分位數之地位(視察法)

$$Q'_3 = \frac{3(N+1)}{4}$$

（公式十一）由枚舉表中求第 n 十分位數之地位(視察法)

$$D'_n = \frac{n(N+1)}{10}$$

（公式十二）由枚舉表中求第 n 百分位數之地位(視察法)

$$P'_n = \frac{n(N+1)}{100}$$

（公式十三）由分組表中求第一四分位數（次數表核算法）

(甲) $$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - F}{f} \times i$$

(乙) $$Q_1=U-\frac{\frac{3N}{4}-F}{f}\times i$$

(公式十四)由分組表中求第三四分位數(次數表核算法)

(甲) $$Q_3=L+\frac{\frac{3N}{4}-F}{f}\times i$$

(乙) $$Q_3=U-\frac{\frac{N}{4}-F}{f}\times i$$

(公式十五)由分組表中求第n十分位數(次數表核算法)

(甲) $$D_n=L+\frac{\frac{nN}{10}-F}{f}\times i$$

(乙) $$D_n=U-\frac{\frac{(10-n)N}{10}-F}{f}\times i$$

(公式十六)由分組表中求第n百分位數(次數表核算法)

(甲) $$P_n=L+\frac{\frac{nN}{100}-F}{f}\times i$$

(乙) $$P_n=U-\frac{\frac{(100-n)N}{100}-F}{f}\times i$$

(公式十七)由分組表中求衆數(次數表核算法)

(以衆數所在組以上以下一組之次數核算)

(甲) $M_o = L + \frac{f'_2}{f'_1 + f'_2} \times i$

(乙) $M_o = U - \frac{f'_1}{f'_1 + f'_2} \times i$

（公式十八）由分組表中求衆數（次數表核算法）

（以衆數所在組以上以下各組或若干組之總次數核算）

(甲) $M_o = L + \frac{f''_2}{f''_1 + f''_2} \times i$

(乙) $M_o = U - \frac{f''_1}{f''_1 + f''_2} \times i$

（公式十九）由算術平均數及中位數中核算衆數（皮爾生公式）

$M_o = M - 3(M - M_d)$

（公式二十）簡單幾何平均數

(甲) $M_g = \sqrt[N]{m_1 m_2 m_3 \cdots\cdots m_n}$

(乙) $M_g = antilog \frac{\Sigma \log m}{N}$

（公式二十一）加權幾何平均數

(甲) $M_g = \sqrt[\Sigma W]{m_1^{W_1} m_2^{W_2} m_3^{W_3} \cdots\cdots m_n^{W_n}}$

(乙) $M_g = antilog \frac{\Sigma W \log m}{\Sigma W}$

（公式二十二）簡單倒數平均數

$$M_h = \frac{1}{\frac{1}{N} \Sigma \left(\frac{1}{m}\right)}$$

（公式二十三）加權倒數平均數

$$M_h=\frac{1}{\frac{1}{\Sigma W}\Sigma\left(\frac{W}{m}\right)}$$

問　題

1. 何謂平均數?測定平均數之目的何在?其特性如何?
2. 測定算術平均數之方法有幾?試略述各計算法之步驟.
3. 試述算術平均數之利弊,及算術平均數與中位數衆數之關係.
4. 用次數表核算法核算中位數及衆數之步驟如何?試略述之.
5. 累積次數曲線圖上,如何能核算中位數及衆數?
6. 中位數與衆數之代表性如何?試詳述之.
7. 何謂幾何平均數?其種類有幾?測定之方法各如何?
8. 何謂倒數平均數?其種類有幾?測定之方法各如何?
9. 在何種情形之下,方可採用幾何及倒數平均數?
10. 各種平均數間之關係如何?試申述之.

習題十一

歷年上海市秈米市價表

民國十年至二十五年

年　次	每市石市價	年　次	每市石市價
民國十　年	$8.01	民國十八年	$10.67
十一年	8.37	十九年	12.96
十二年	8.31	廿　年	10.38
十三年	8.56	廿一年	8.82
十四年	8.76	廿二年	7.32

十五年	11.87	廿三年	8.90
十六年	11.48	廿四年	10.06
十七年	7.92	廿五年	9.54

試用上列枚舉數列,計算以下諸數:

(1) 用普通法求算術平均數。

(2) 用簡捷法求算術平均數。

(3) 用視察法求中位數。

(4) 用視察法求第一四分位數。

(5) 用視察法求第三四分位數。

(6) 用視察法求第八十分位數。

(7) 用視察法求第四十百分位數。

(8) 求簡單幾何平均數。

習題十二

東方公司職員年俸分配表

年俸	人數
$600——799.99	22
800——999.99	88
1,000——1,199.99	121
1,200——1,399.99	390
1,400——1,599.99	215
1,600——1,799.99	99
1,800——1,999.99	86
2,000——2,199.99	18
2,200——2,399.99	1
總計	1,040

試用上列分組次數數列,計算以下諸數:

(1) 用普通法求算術平均數.

(2) 用簡捷法求算術平均數.

(3) 用假定離中差法求算術平均數.

(4) 用累積次數法求算術平均數.

(5) 用次數表核算法求中位數.

(6) 用次數表核算法求第三四分位數.

(7) 用次數表核算法求第七十分位數.

(8) 用次數表核算法求第三十百分位數.

(9) 用次數表核算法求衆數.

(10) 用皮爾生公式求衆數.

習題十三

某市七等粳米市價表

等級	每市石*市價	每元可購市升數	某市每日消費量（單位 市石）
甲	$13.16	7.6	301
乙	12.50	8.0	653
丙	11.76	8.5	1,014
丁	11.24	8.9	1,205
戊	10.31	9.7	1,498
己	10.00	10.0	2,013
庚	9.09	11.0	2,576
總計			9,260

*一市石等於100市升.

試用上列粳米市價表,求以下諸數:

（1）求簡單幾何平均市價。

（2）求加權幾何平均市價。

（3）求簡單倒數平均數(平均每元可購粳米量)。

（4）求加權倒數平均數(平均每元可購粳米量)。

習題十四

江蘇省人民年齡分配表

民國二十年江蘇省民政廳調查

年齡	男	女	總計	以下累積
1歲——5歲	1,665,588	1,525,029	3,190,617	3,190,617
6歲——10歲	1,746,765	1,551,879	3,298,644	6,489,261
11歲——15歲	1,608,257	1,409,571	3,017,828	9,507,089
16歲——20歲	1,501,746	1,312,203	2,813,949	12,321,038
21歲——25歲	1,500,574	1,343,238	2,843,812	15,164,850
26歲——30歲	1,480,923	1,331,706	2,812,629	17,977,479
31歲——35歲	1,361,823	1,220,810	2,582,633	20,560,112
36歲——40歲	1,283,120	1,148,699	2,431,819	22,991,931
41歲——45歲	1,132,464	1,007,075	2,139,539	25,131,470
46歲——50歲	1,005,977	910,451	1,916,428	27,047,898
51歲——55歲	835,446	767,165	1,602,611	28,650,509
56歲——60歲	664,193	633,586	1,297,779	29,948,288
61歲——65歲	457,181	457,410	914,591	30,862,879
66歲——70歲	276,513	295,693	572,206	31,435,085
71歲——75歲	153,872	172,002	325,874	31,760,959
76歲——80歲	75,209	94,074	169,283	31,930,242
81歲——85歲	29,151	38,903	68,054	31,998,296
86歲——90歲	10,199	14,011	24,210	32,022,506
91歲——95歲	3,284	3,412	6,696	32,029,202
96歲——100歲	312	481	793	32,029,995

試用上列統計資料,繪製以下累積曲線圖,並核算以下諸數:

（1）中位數。

（2）第一四分位數。

（3）第三四分位數。

（4）第四十分位數。

（5）第六十分位數。

（6）第十五百分位數。

（7）第九十百分位數。

（8）衆數。

第六章　離中差

第一節　離中差之重要

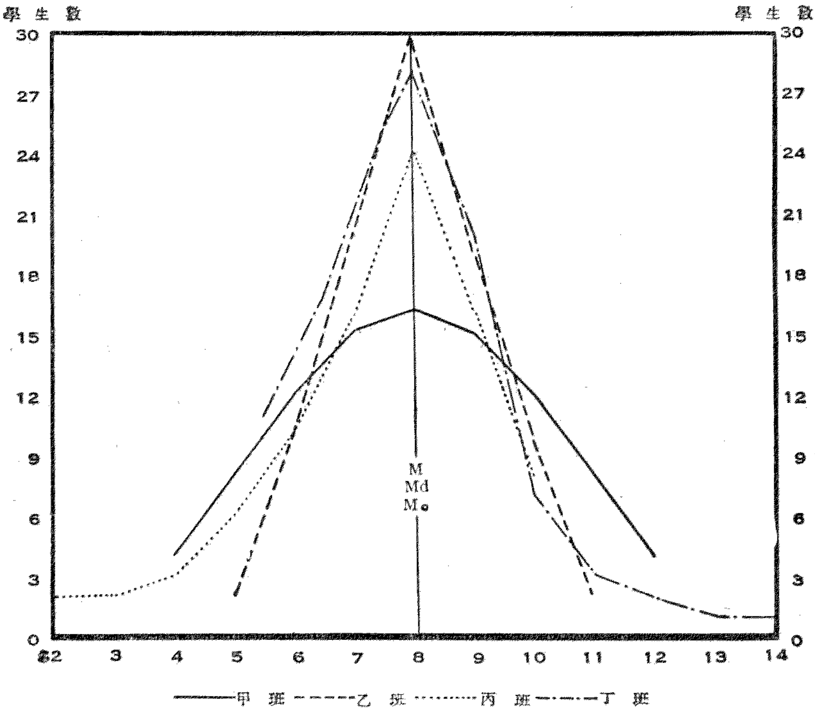
平均數所表示者,爲一事實全體變量之中心地位,或若干變量之集中點;而非全體變量之分佈狀況,或若干變量之離中差.故僅有平均數,次數分配之性質,不能謂已可窺其全豹.平均數之外,尙須測定離中差與偏態,事實之眞相,方能顯示無餘.且平均數之意義,隨離中差之大小而定;離中差愈大,平均數之價値愈小;離中差愈小,平均數之價値愈大.故平均數爲全體變量之代表數,離中差乃表示平均數之非代表性者也.茲將離中差與平均數之關係及其重要性,設例示之如下:

表三十三　某校甲乙丙丁四班學生每月費用分配表

(觀察離中差之重要表)

每月零用費	甲班	乙班	丙班	丁班
$2			2	
3			2	
4	4		3	
5	8	2	4	11
6	12	10	7	15
7	15	20	9	22
8	16	30	24	28
9	15	20	22	21
10	12	10	13	15
11	8	2	7	5
12	4			2
13				1
14				1
總計	94	94	93	121

圖三十八　某校甲乙丙丁四班學生每月費用分配圖



(觀察離中差之重要圖)

觀上列圖表,某校四班學生每月零用費之平均數,俱爲$8.如是,固可斷定四班學生每月零用費之分配完全相同乎?曰否,蓋甲班之次數分配,疏散而不集中;次數曲線平而廣.乙班之次數分配,則較密結而集中;次數曲線峭而狹.換言之甲班之離中差較大於乙班,乙班平均數之價值較大於甲班也.至於丙班之次數分配曲線爲左偏(卽負偏態),丁班爲右

偏(即正偏態),故丙丁兩班之平均數,雖與甲乙兩班相同,然其次數分配非若甲乙兩班之完全對稱者也.

測量離中差之方法不一,言乎形式:則有用含有度量之數目以表示者,或用一抽象數目以表示者.前者謂之絕對離中差(Absolute measure of dispersion),後者謂之相對離中差,或稱離中係數(Coefficients of variation).言乎原則,則既有取一距離以表示者,亦有取各變量與平均數相差之平均數以表示者,更有取各種配合公式之某係數以表示者,因此離中差又可分爲全距(Range 簡寫爲 R_g),四分位差(Quartile deviation 簡寫爲 $Q.D.$),平均差(Average deviation or mean deviation 簡寫爲 $M.D.$ 或 δ),標準差(Standard deviation 簡寫爲 $S.D.$ 或 σ),及各種離中係數(Coefficients of variation)等數種.本章所討論者僅爲離中差及離中係數,至於偏態容於下章繼續論之.

第二節 全距

全距爲事實全體變量中,最大變量與最小變量之差異數.在枚舉及不分組次數數列中,計算最易,其公式如下:

設 R_g 爲全距.

m_1 爲數值最小之變量值.

m_n 爲數值最大之變量值.

$\boldsymbol{R_g = m_n - m_1}$ ……………………………………………………(公式二十四)

例如表十五,甲廠十五織機中某月產布量最多者,爲九號機,

產布 72.6 疋,最少者為三號機,僅產 28.6 疋,全距為 72.6－28.6＝44 疋.又如表二十,上海市市立初級小學學生之年齡,最高者為20歲,最低者為 3 歲,全距為 20－3＝17 歲.

在分組次數表內,求全距之方法,即將組值最高組之上限減組值最低組之下限即得.若用公式表示之如下:

設R_g為全距.

L'為組值最小組之下限.

U'為組值最大組之上限.

$$R_g = U' - L' \qquad \text{(公式二十五)}$$

例如表二十二,某市中學生每年費用之分配,組值最大組之上限為 \$1,100, 組值最小組之下限為\$100,故全距為 1,100－100＝\$1,000.

在次數分配均勻之數列中,全距愈小,集中趨勢愈大;反之,全距愈大,集中趨勢愈小;此一定不易者也.惟以兩極端變量值相差之大小,測定數列離中程度之高低,其受極端變量影響之巨大,(有時為免受極端變量之影響計,以第九十百分位數與第十百分位數之差代之者.)求得數值之膚淺不確,不言可諭.且兩數列之全距相等,而離中之程度不等者有之;離中趨勢相等,而全距不等者亦有之.故全距之計算雖極簡便,然以膚淺不確,「惰性」過巨,每為統計者棄而不用.

第三節 四分位差

四分位差乃第一四分位數與第三四分位數間差距之半,用以間接表示離中趨勢者也.按四分位數既非極端變量之數值,自可避免特殊事實之影響.且第三四分位數,為中位數較大一端之中點;第一四分位數,為中位數較小一端之中點;其間所含量數必為全體變量之半,其距離之長短,自可窺測離中趨勢.若次數分配極為散漫,第三與第一四分位數間之距離愈遠,離中趨勢愈大.反之,次數分配極為集中,第三與第一四分位數間之距離愈近,離中趨勢愈小.就此第三與第一四分位數間之距離二分之,即得四分位差,其公式如下:

設 $Q.D.$ 為四分位差.

Q_1 為第一四分位數.

Q_3 為第三四分位數.

$$Q.D.=\frac{Q_3-Q_1}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式二十六})$$

例如表二十五,上海市第一屆至第七屆集團結婚新郎年齡之分配,求得第一第三四分位數及四分位差如下:

$$Q_1=21+\frac{\frac{593}{4}-86}{186}\times 3$$

$$=21+\frac{186.75}{186}$$

$$=21+1.00=22.00\text{歲}$$

$$Q_3=24+\frac{\frac{3\times 593}{4}-272}{174}\times 3$$

$$=24+\frac{518.25}{174}$$

$$=24+2.98=26.98\text{ 歲}$$

$$Q.D.=\frac{26.98-22.00}{2}=\frac{4.98}{2}$$

$$=2.49\text{ 歲}$$

設Q_3與Q_1中間之數值爲m_d,則全體變量之半,必在$m_d \pm Q.D.$之距離中.前例

$$Q_1=22.00$$

$$Q_3=26.98$$

$$Q.D.=2.49$$

$$m_d=22+2.49=24.49\text{ 歲}$$

全體變量之半當在24.49歲 ±2.49 歲之距離中.次數分配如爲完全對稱者,則m_d與中位數M_d之數值相等.今新郎年齡之分配有右偏態,故m_d爲24.49歲,M_d爲24.42歲,互相不同者也.

四分位差雖受首尾兩端特殊變量之影響極小,然以全體變量當中一半之差異狀態,代表全體變量之離中趨勢,其代表性究不充分.且四分位差之計算,亦僅用第一及第三四分位變量之數值,縱使其前其後之變量有極大之變動,而四分位差仍屹然不動.故就「感覺性」(Sensibility)言之,四分位差亦不得謂妥善之離中差也.然苟使吾人不欲苛求精確,則全距與四分位差意義既甚顯明,計算又極簡捷,亦儘有其可

取之道焉.

第四節　平均差

全距與四分位差不過用間接方法,以觀察離中之程度而已,根據各變量之離中差而測定離中趨勢者,則有平均差與標準差兩種.

平均差者,乃事實各變量與其算術平均數,中位數或衆數之差之算術平均數也.各項變量有大於平均數者,亦有小於平均數者,故離中差有正有負,然在計算平均差時,不論離中差之爲正爲負,均須相加,以求其平均,否則平均差縱不等於零,亦必甚小.

平均差之計算,統計家俱以中位數爲比較之標準.蓋各變量與中位數相差絕對值之和爲最小(參閱第五章第三節中位數),故取中位數作爲比較之標準,較爲合理;惟間亦有用算術平均數及衆數以計算平均差者.茲將計算平均差之方法,分別述之如下:

(一) 普通法 (General method)

(1) 由枚舉表中求平均差法——由枚舉表中用普通法求平均差,乃將各變量與中位數比較之,得各變量與中位數之差,總和之,爲變量項數除之,即得平均差.

設 $M.D.$ 爲平均差.

M_d 爲中位數.

N 爲變量項數.

m 爲變量之數値.

m_1 爲第一變量之數値.

m_2 爲第二變量之數値.

m_3 爲第三變量之數値.

m_n 爲第 n 變量之數値.

$\overline{d}$ 爲各變量與中位數之絕對差.

Σ 爲總和之記號.

$$M.D.=\frac{(m_1-M_d)+(m_2-M_d)+(m_3-M_d)+\cdots\cdots+(m_n-M_d)}{N}$$

$$=\frac{\Sigma(m-M_d)}{N}$$

$$=\frac{\Sigma\overline{d}}{N}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式二十七)}$$

例如某市九布廠平均每日產布量經整理後如下表:

表三十四 某市九布廠平均每日產布量表

(由枚舉表中用普通法求平均差表)

位次	產布量(m)(單位 疋)	$\overline{d}$
第一	367.5	221.6
第二	398.6	190.5
第三	453.8	135.3
第四	567.7	21.4
第五	589.1	0
第六	613.2	24.1
第七	624.4	35.3
第八	678.1	89.0
第九	723.0	133.9
總計		851.1

$$M'_d=\frac{9+1}{2}=5$$

$$M_d=589.1\text{ 疋}$$

應用公式二十七

$$M.D.=\frac{851.1}{9}$$

$$=94.57\text{ 疋}$$

(2)由次數表中求平均差法——在分組或不分組次數表中用普通法求平均差,卽將各組中值或各變量與中位數相差之絕對值乘各組相當次數,總和之,爲次數總數除之卽得.其計算公式如下:

設$M.D.$爲平均差.

M_d 爲中位數.

N 爲次數之總數.

m 爲變量之數值.

m_1 爲第一變量之數值.

m_2 爲第二變量之數值.

m_3 爲第三變量之數值.

m_n 爲第n變量之數值.

f 爲變量之次數.

f_1 爲第一變量之次數.

f_2 爲第二變量之次數.

f_3 爲第三變量之次數.

f_n 爲第n變量之次數.

$\overline{d}$ 為各組中值與中位數之絕對差.

Σ 為總和之記號.

$$M.D.=\frac{f_1(m_1-M_d)+f_2(m_2-M_d)+f_3(m_3-M_d)+\cdots+f_n(m_n-M_d)}{N}$$

$$=\frac{\Sigma f(m-M_d)}{N}$$

$$=\frac{\Sigma f\overline{d}}{N}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式二十八)}$$

表三十五 上海市市立初級小學教職員月俸分配表

(由分組次數表中用普通法求平均差表)

月俸	中值 m	人數 f	$\overline{d}$ $Md=\$43.16$	$f\overline{d}$
\$0——\$5	\$2.5	2	40.66	81.32
5.1——10	7.5	15	35.66	534.90
10.1——15	12.5	13	30.66	398.58
15.1——20	17.5	24	25.66	615.84
20.1——25	22.5	66	20.66	1,363.56
25.1——30	27.5	97	15.66	1,519.02
30.1——35	32.5	115	10.66	1,225.90
35.1——40	37.5	135	5.66	764.10
40.1——45	42.5	173	.66	114.18
45.1——50	47.5	125	4.34	542.50
50.1——55	52.5	155	9.34	1,447.70
55.1——60	57.5	103	14.34	1,477.02
60.1——65	62.5	50	19.34	967.00
65.1——70	67.5	29	24.34	705.86
70.1——75	72.5	23	29.34	674.82
75.1——80	77.5	19	34.34	652.46
80.1——85	82.5	3	39.34	118.02
85.1——90	87.5	2	44.34	88.68
90.1——95	92.5	3	49.34	148.02
95.1——100	97.5	1	54.34	54.34
總計		1,153		13,493.82

應用公式二十八

$$M.D.=\frac{13,493.82}{1,153}=\$11.70$$

(二) 簡捷法 (Short cut method)

在枚舉數列表中求平均差,尚稱簡捷.然在分組次數表內,平均差之核算,殊嫌煩瑣.蓋中位數未必爲整數,各變量與中位數之離中差,往往爲小數,與各組相當次數相乘時,頗感不便;故實際計算時常用簡捷法,其計算公式如下:

設 $M.D.$ 爲平均差.

N 爲次數之總數.

N_a 若中位數大於假定中位數,則 N_a 爲小於眞正中位數各組次數之總和.若中位數小於假定中位數,則 N_a 爲大於眞正中位數各組次數之總和(或 $N_a = N - N_b$).

N_b 若中位數大於假定中位數,則 N_b 爲大於眞正中位數各組次數之總和.若中位數小於假定中位數,則 N_b 爲小於眞正中位數各組次數之總和(或 $N_b = N - N_a$).

c 爲組距除眞正中位數與假定中位數之絕對差.

f 爲各組之次數.

$\overline{d}''$ 爲各組中値與假定中位數之假定絕對差.

i 爲組距.

Σ 爲總和之記號.

$$M.D. = \frac{\Sigma f \overline{d}'' + (N_a - N_b)c}{N} \times i \quad \text{(公式二十九)}$$

公式二十九驟視之,似難明解,然細察之,亦甚簡易.茲即用圖表說明之如下:

表三十六　甲廠二十一工人每月工資分配表

(由分組次數表中用簡捷法求平均差表甲)

工資	中值 m	工人數 f		普通法 $\bar{d}$	普通法 $f\bar{d}$	簡捷法 $\bar{d}''$	簡捷法 $f\bar{d}''$
\$2.50——\$7.49	5	4	$N_b=10$	7.81	31.24	2	8
7.50——12.49	10	6		2.81	16.86	1	6
12.50——17.49	15	8	$N_a=11$	2.19	17.52	0	0
17.50——22.49	20	1		7.19	7.19	1	1
22.50——27.49	25	1		12.19	12.19	2	2
27.50——32.49	30	1		17.19	17.19	3	3
總計		21			102.19		20

設 $A.M_d$ 為假定中位數.

$$A.M_d=\$15$$

$$M_d=12.5+\frac{\frac{21}{2}-10}{8}\times 5$$

$$=12.5+\frac{2.5}{8}=\$12.81$$

$$c=\frac{12.81-15}{5}=0.438$$

應用公式二十八

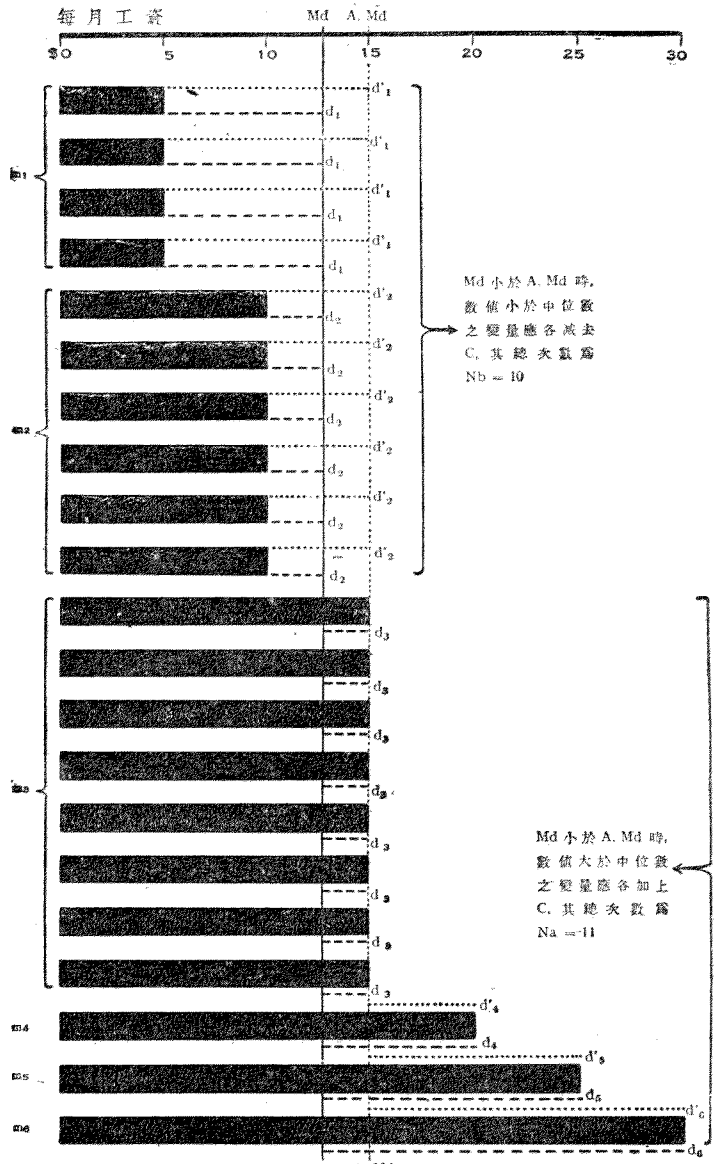
$$M.D.=\frac{102.19}{21}=\$4.87$$

應用公式二十九

$$M.D.=\frac{20+(11-10)\times 0.438}{21}\times 5$$

$$=\frac{102.19}{21}=\$4.87$$

圖三十九　甲廠二十一工人每月工資比較圖



(用簡捷法核算平均差說明圖甲——中位數小於假定中位數)

觀上圖若用普通法求平均差,則將$4\overline{d}_1+6\overline{d}_2+8\overline{d}_3+1\overline{d}_4+1\overline{d}_5+1\overline{d}_6$得$\Sigma f\overline{d}$,爲21$(N)$除之,即得平均差.

但 $\overline{d}_1=\overline{d}'_1-C$

$\overline{d}_2=\overline{d}'_2-C$

$\overline{d}_3=O+C$

$\overline{d}_4=\overline{d}'_4+C$

$\overline{d}_5=\overline{d}'_5+C$

$\overline{d}_6=\overline{d}'_6+C$

故 $\Sigma f\overline{d}=(4\overline{d}'_1-4C)+(6\overline{d}'_2-6C)+8C+(1\overline{d}'_4+1C)$

$+(1\overline{d}'_5+1C)+(1\overline{d}'_6+1C)$

$=4\overline{d}'_1+6\overline{d}'_2+1\overline{d}'_4+1\overline{d}'_5+1\overline{d}_6+(11-10)C$

$\Sigma f\overline{d}=\Sigma f\overline{d}'+(N_a-N_b)C$

若用假定離中差法,以組距爲計算絕對差之單位者,$\Sigma f\overline{d}$可改變如下:

$$\Sigma f\overline{d}=[\Sigma f\overline{d}''+(N_a-N_b)c]i$$

前例假定中位數大於眞正中位數,故N_a爲大於眞正中位數各組次數之和.N_b爲小於眞正中位數各組次數之和.若假定中位數小於眞正中位數,則N_a爲小於眞正中位數各組次數之和.N_b爲大於眞正中位數各組次數之和.玆更設例示之如下:

表三十七　乙廠二十一工人每月工資分配表

（由分組次數表中用簡捷法求平均差表乙）

工　資	中值 m	工人數 f		普通法 $\bar{d}$	$f\bar{d}$	簡捷法 $\bar{d}''$	$f\bar{d}''$
\$2.50——\$7.49	5	1	$N_a=11$	12.19	12.19	2	2
7.50——12.49	10	2		7.19	14.38	1	2
12.50——17.49	15	8		2.19	17.52	0	0
17.50——22.49	20	5	$N_b=10$	2.81	14.05	1	5
22.50——27.49	25	3		7.81	23.43	2	6
27.50——32.49	30	2		12.81	25.62	3	6
總　計		21			107.19		21

$$A.M_d=\$15$$

$$M_d=12.5+\frac{\frac{21}{2}-3}{8}\times 5$$

$$=12.5+\frac{37.5}{8}=\$17.19$$

$$c=\frac{17.19-15}{5}=0.438$$

應用公式二十八

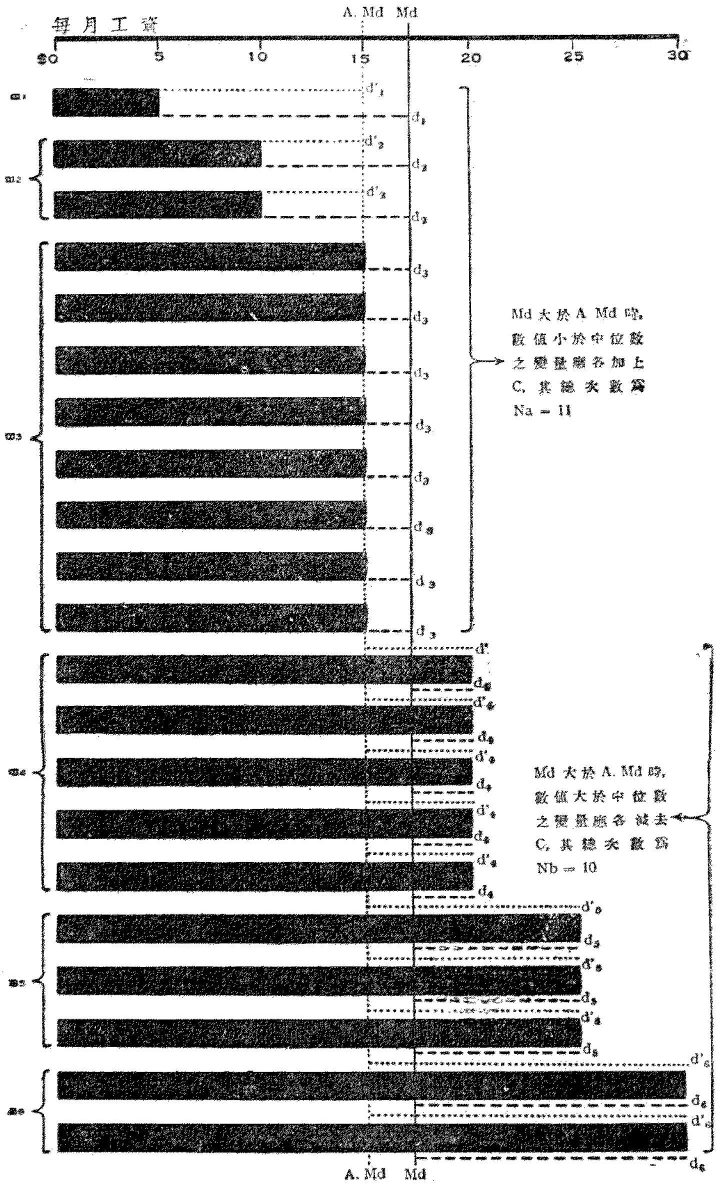
$$M.D.=\frac{107.19}{21}=\$5.10$$

應用公式二十九

$$M.D.=\frac{21+(11-10)\times 0.438}{21}\times 5$$

$$=\frac{107.19}{21}=\$5.10$$

圖四十 乙廠二十一工人每月工資比較圖



(用簡捷法核算平均差說明圖乙——中位數大於假定中位數)

觀上圖若用普通法求平均差,則將$1\overline{d}_1+2\overline{d}_2+8\overline{d}_3+5\overline{d}_4+3\overline{d}_5+2\overline{d}_6$得$\Sigma f\overline{d}$,爲21$(N)$除之,卽得平均差.

但　$\overline{d}_1=\overline{d}'_1+C$

$\overline{d}_2=\overline{d}'_2+C$

$\overline{d}_3=0+C$

$\overline{d}_4=\overline{d}'_4-C$

$\overline{d}_5=\overline{d}'_5-C$

$\overline{d}_6=\overline{d}'_6-C$

故　$\Sigma f\overline{d}=(1\overline{d}'_1+1C)+(2\overline{d}'_2+2C)+8C+(5\overline{d}'_4-5C)+(3\overline{d}'_5-3C)+(2\overline{d}'_6-2C)$

$=1\overline{d}'_1+2\overline{d}'_2+5\overline{d}'_4+3\overline{d}'_5+2\overline{d}'_6+(11-10)C$

$\Sigma f\overline{d}=\Sigma f\overline{d}'+(N_a-N_b)C$

若用假定離中差法,以組距爲計算絕對差之單位者,$\Sigma f\overline{d}$可改變如下:

$\Sigma f\overline{d}=[\Sigma f\overline{d}''+(N_a-N_b)c]i$

綜觀上例,可知用簡捷法求平均差之步驟有九:

(1)將統計資料製成分組次數表.

(2)用公式八求眞正中位數.

(3)以中位數所在組之中值爲假定中位數$A.M_d$.(因欲減小$\overline{d}''$之數值,便於計算起見,應以中位數所在組之中值爲假定中位數.)

(4)以組距爲單位,表示各項變量對於假定中位數之假

定離中差($\overline{d}''$),以假定中位數所在組之絕對離中差為零,其下一組為 +1,其上一組亦為 +1,餘類推.

(5) 以各組次數乘各組相當之假定絕對差,列於 $f\overline{d}''$ 行下.總和之得 $\Sigma f\overline{d}''$.

(6) 將中位數減假定中位數,得絕對改正數 C.用假定離中差法求平均差者,M_d 與 $A.M_d$ 間之絕對差應以組距除之得 c.

(7) 若中位數大於假定中位數,則將大於中位數各組之次數相加得 N_b.若中位數小於假定中位數,則將小於中位數各組之次數相加得 N_b.

(8) 由次數總和 N 中,減去 N_b 得 N_a.

(9) 以第五步所得之結果,加 N_a-N_b 乘 c,得以組距為單位之絕對離中差;為總次數 N 除之,再乘組距,即得平均差.

(三) 校正平均差法

上述兩法為于爾(G. L. Yule),西克里司脫(H. Secrist)及羅格 (O. H. Rugg) 等統計學家所採用,嚴格言之,不甚準確.蓋根據數理原則,各變量與中位數相差絕對值之和為最小(參閱第五章第三節中位數),然用前述兩法核算,常與此原則違背,茲設例示之如下:

表三十八　丙廠一百九十六工人每月工資分配表

（由分組次數表中求校正平均差表甲）

工資	中值 m	工人數 f		$\bar{d}''$	$f\bar{d}''$
\$2.50——\$7.49	\$5	2	$N_b=78$	3	6
7.50——12.49	10	24		2	48
12.50——17.49	15	52		1	52
17.50——22.49	20	65	$N_a=118$	0	0
22.50——27.49	25	29		1	29
27.50——32.49	30	13		2	26
32.50——37.49	35	10		3	30
37.50——42.49	40	1		4	4
總計		196			195

$$A.M_d=\$20$$

$$M_d=17.5+\frac{\frac{196}{2}-78}{65}\times 5$$

$$=17.5+\frac{100}{65}=\$19.04$$

$$M=20+\frac{-17}{196}\times 5$$

$$=20-0.43=\$19.57$$

以中位數爲比較之標準:（設 δ_{Md} 爲以中位數作比較標準之平均差）

$$C=19.04-20=0.96$$

$$c=\frac{0.96}{5}=0.192$$

$$\delta_{Md}=\frac{195+(118-78)\times 0.192}{196}\times 5$$

$$=\frac{195+7.68}{196}\times 5$$

$$=\frac{1,013.4}{196}=\$5.17$$

以算術平均數爲比較之標準:(設δ_M爲以算術平均數作比較標準之平均差)

$$C=19.57-20=0.43$$

$$c=\frac{0.43}{5}=0.086$$

$$\delta_M=\frac{195+(118-78)\times 0.086}{196}\times 5$$

$$=\frac{195+3.44}{196}\times 5$$

$$=\frac{992.2}{196}=\$5.06$$

上例中以中位數爲比較之標準,得平均差$5.17;若以算術平均數作比較之標準,則得平均差爲$5.06,反小於平均離中差.此種現象,驟視之似與數學原理發生矛盾,然細察之,乃非數理上之錯誤,實係計算上之謬誤.蓋公式二十八及二十九俱假定各組中之次數平均分配於各組距之內,故以各組中值代表各組次數之平均數值.其謬誤不在假定,而在不實行其假定而已.各組組距內之次數既平均分配,自應用其中值,此就不包含眞正中位數及假定中位組而言.至包含中位數及假定中位數組,應照次數平均分配計算,不能用其中值代表其次數之數值.故計算平均差時之校正數,應分爲兩部:一爲$(N'_a-N'_b)c$,一爲$(0.25+c^2)N_i$,其全部之計算公式爲:

設δ_c爲校正之平均差.

N爲次數之總數.

N'_a 若中位數大於假定中位數,則N'_a為中位數所在組以下各組次數之總和.若中位數小於假定中位數,則N'_a為中位數所在組以上各組次數之總和.

N'_b 若中位數大於假定中位數,則N'_b為中位數所在組以上各組次數之總和.若中位數小於假定中位數,則N'_b為中位數所在組以下各組次數之總和.

N_i 為中位數或假定中位數所在組之次數.

c 為組距除眞正中位數與假定中位數之絕對差.

f 為各組之次數.

$\overline{d}''$ 為各組中值與假定中位數之假定絕對差.

i 為組距.

Σ 為總和之記號.

$$\delta_c=\frac{\Sigma f\overline{d}''+(N'_a-N'_b)c+(0.25+c^2)Ni}{N}\times i \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{公式三十})$$

茲即將前例以中位數為比較之標準,用公式三十計算平均差如下:

$$c=\frac{19.04-20}{5}=0.192$$

$$\delta_{Md}=\frac{195+(53-78)\times 0.192+(0.25+0.192^2)\times 65}{196}\times 5$$

$$=\frac{190.2+18.64616}{196}\times 5$$

$$=\frac{1,044.2308}{196}=\$5.33$$

若以算術平均數為比較之標準,用公式三十計算平均差如下:

$$c=\frac{19.57-20}{5}=0.086$$

$$\delta_M=\frac{195+(53-78)\times0.086+(0.25+0.086^2)\times65}{196}\times5$$

$$=\frac{192.85+16.73074}{196}\times5$$

$$=\frac{1,047.9037}{196}=\$5.35$$

用公式三十核算平均差,得 δ_{Md} 爲\$5.33,小於 δ_M \$5.35,合乎數學之原則.惟公式三十驟視之似甚難解,然若一爲分析,亦甚淺顯.各組次數既假定平均分配於各組距之內,則含有眞正中位數組組距內之次數當亦分配均勻.在表三十九中,眞正中位數當包含於\$70至\$80一組之中,則教職員之月薪大於眞正中位數者有之,小於眞正中位數者亦有之;離眞正中位數甚遠者有之,甚近者亦有之.玆用圖表明解之如下:

表三十九 某校教職員月薪分配表

(由分組次數表中求校正平均差之表乙)

月俸	中值 m	人數 f		$\bar{d}''$	$f\bar{d}''$
\$30——39.9	35	6	$N'_b=39$	4	24
40——49.9	45	8		3	24
50——59.9	55	11		2	22
60——69.9	65	14		1	14
70——79.9	75	19	——Ni	0	0
80——89.9	85	12	$N'_a=32$	1	12
90——99.9	95	8		2	16
100——109.9	105	5		3	15
110——119.9	115	4		4	16
120——129.9	125	2		5	10
130——139.9	135	1		6	6
總計		90			159

應用公式二十九求得未校正平均差如下:

$$A.M_a=\$75$$

$$M_d=70+\frac{\frac{90}{2}-39}{19}\times 10$$

$$=70+\frac{60}{19}=\$73.16$$

$$c=\frac{73.16-75}{10}=0.184$$

$$\delta_{Md}=\frac{159+(51-39)\times 0.184}{90}\times 10$$

$$=\frac{159+2.208}{90}\times 10$$

$$=\frac{1,612.08}{90}=\$17.91$$

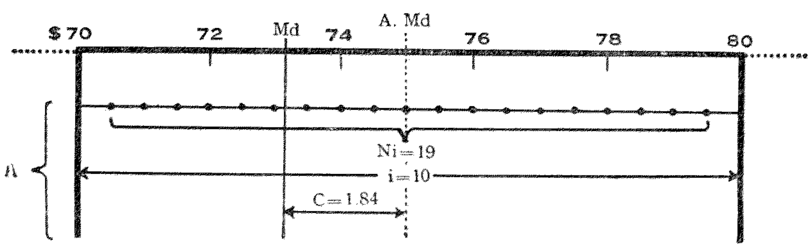
應用公式三十求得校正平均差如下:

$$\delta_c=\frac{159+(32-39)\times 0.184+(0.25+0.184^2)\times 19}{90}\times 10$$

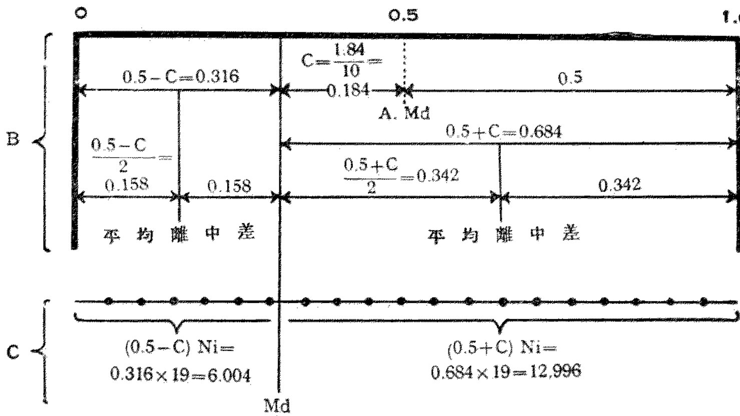
$$=\frac{157.712+5.393264}{90}\times 10$$

$$=\frac{1,631.05264}{90}=\$18.12$$

圖四十一　某校教職員月薪七十元至八十元組分析圖



假定組距為一



(核算校正平均差說明圖)

A 部

$$A.M_d = \$75$$

$$M_d = \$73.16$$

$$N_i = 19$$

$$i = 10$$

$$C = 1.84$$

B 部

$$0.5 + c = 0.5 + 0.184 = 0.684$$

$$0.5 - c = 0.5 - 0.184 = 0.316$$

$$\frac{0.5 + c}{2} = \frac{0.684}{2} = 0.342$$

$$\frac{0.5 - c}{2} = \frac{0.316}{2} = 0.158$$

C 部

$$(0.5+c)Ni=0.684\times 19=12.996$$

$$(0.5-c)Ni=0.316\times 19=6.004$$

故19項變量之離中差,以組距爲單位者如下:

$$\left[\frac{0.5+c}{2}(0.5+c)Ni\right]+\left[\frac{0.5-c}{2}(0.5-c)Ni\right]$$

$$=\frac{(0.5+c)(0.5+c)Ni}{2}+\frac{(0.5-c)(0.5-c)Ni}{2}$$

$$=\left[(0.5+c)^2+(0.5-c)^2\right]\frac{Ni}{2}$$

$$=(0.25+c^2)Ni$$

$$\left[\frac{0.5+0.184}{2}\times(0.5+0.184)\times 19\right]+$$

$$\left[\frac{0.5-0.184}{2}\times(0.5-0.184)\times 19\right]$$

$$=\frac{0.684\times 0.684\times 19}{2}+\frac{0.316\times 0.316\times 19}{2}$$

$$=\frac{8.889264+1.897264}{2}$$

$$=5.393264$$

或 $(0.25+0.184^2)\times 19$

$$=0.283856\times 19$$

$$=5.393264$$

上圖 *A* 部即示\$70至\$80一組內19人月薪之分配,眞正中位數爲\$73.16,假定中位數爲\$75,兩者之差爲\$1.84,組距爲\$10.

上圖 *B* 部爲便於計算起見,將組距\$10改爲\$1,絕對差 *C*

以組距除之得 $c=0.184$. 在假定中位數之右距上限爲0.5,在眞正中位數之右距上限爲 $0.5+c=0.684$, 在此距離內各項之平均離中差爲 $\frac{0.5+c}{2}=0.342$. 眞正中位數之左距下限爲 $0.5-c=0.316$,各項之平均離中差爲 $\frac{0.5-c}{2}=0.158$.

上圖 C 部卽示19項平均分配之數值,其大於眞正中位數者(卽在眞正中位數線之右方者),計 $(0.5+c)\times Ni=(0.5+0.184)\times 19=12.996$ 項;小於眞正中位數者(卽在眞正中位數線之左方者),計 $(0.5-c)\times Ni=(0.5-0.184)\times 19=6.004$項.

上圖 B 部與 C 部合併觀察之,卽知 12.996 項之平均離中差爲0.342,共計 4.444632; 6.004 項之平均離中差爲0.158,共計 0.948632. 19 項離中差之總數爲 5.393264, 卽第二部之校正數也.

第五節 標準差

平均差爲各變量與中位數相差之算術平均數,以其由全部變量中核算,故較全距與四分位差爲準確可靠.惟於計算之時,不問離中差之爲正爲負,均須一律合併.就數理上言之,未免牽強.皮爾生氏因卽發明標準差,以各變量與平均數之差,各自自乘,銷除負號,再求平方差之算術平均數,開方還原,卽得標準差.故標準差亦可名之曰均方差(Root-mean-square deviation), 乃各變量與平均數相差平方之算術平均數之方根也.在統計學上恆以 σ (讀如 Sigma)表示之.平均差之計

算,常以中位數爲中心,而標準差之計算,則以算術平均數爲中心.蓋平均差以從中位數計算者爲最小,而標準差則以從算術平均數計算者爲最小.

因 $\Sigma(m-M)=\Sigma d=0$ (參閱第五章第二節算術平均數)

但 $\Sigma(m-M')=\Sigma d'>0$

故 $\Sigma(m-M)^2<\Sigma(m-M')^2$

$$\sqrt{\frac{\Sigma(m-M)^2}{N}}<\sqrt{\frac{\Sigma(m-M')^2}{N}}$$

計算標準差之方法甚多,茲分普通,簡捷,假定離中差及變量自乘法等四種述之如下:

(一) 普通法 (General method)

(1) 由枚舉表中求標準差法——由枚舉表中,用普通法求標準差,乃以各變量與其算術平均數相差平方之算術平均數,開方之即得.其計算公式如下:

設 σ 爲標準差.

M 爲算術平均數.

N 爲變量項數.

m 爲變量之數值.

m_1 爲第一變量之數值.

m_2 爲第二變量之數值.

m_3 爲第三變量之數值.

m_n 爲第 n 變量之數值.

d 爲變量與算術平均數之差.

Σ 爲總和之記號.

$$\sigma=\sqrt{\frac{(m_1-M)^2+(m_2-M)^2+(m_3-M)^2+\cdots+(m_n-M)^2}{N}}$$

$$=\sqrt{\frac{\Sigma(m-M)^2}{N}}$$

因 $m-M=d$

故 $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}}$ ……………………………………(公式三十一)

表四十 歷年甲廠生產無線電收音機表

民國十一年至二十五年

(由枚舉表中用普通法求標準差表)

年次	產機量(單位 架)	離中差 d	d^2
民國十一年	3,250	−1,520	2,310,400
十二年	4,270	−500	250,000
十三年	2,860	−1,910	3,648,100
十四年	3,780	−990	980,100
十五年	4,860	+90	8,100
十六年	5,680	+910	828,100
十七年	3,950	−820	672,400
十八年	4,660	−110	12,100
十九年	7,260	+2,490	6,200,100
二十年	6,450	+1,680	2,822,400
廿一年	5,810	+1,040	1,081,600
廿二年	4,350	−420	176,400
廿三年	3,200	−1,570	2,464,900
廿四年	6,670	+1,900	3,610,000
廿五年	4,500	−270	72,900
總計	71,550		25,137,600

$$M=\frac{71{,}550}{15}=4{,}770\text{ 架}$$

應用公式三十一

$$\sigma=\sqrt{\frac{25,137,600}{15}}$$

$$=\sqrt{1,675,840}=1,294.54$$ 架

(2)由次數表中求標準差法——由分組或不分組次數表中,用普通法求標準差,乃以各變量或各組次數,乘各變量或各組中值與算術平均數相差之平方,總和之,除總次數,得平均平方差,開平方卽得標準差.其計算公式如下:

設 σ 爲標準差.

M 爲算術平均數.

N 爲次數之總數.

m 爲變量之數值.

m_1 爲第一變量之數值.

m_2 爲第二變量之數值.

m_3 爲第三變量之數值.

m_n 爲第 n 變量之數值.

f 爲變量之次數.

f_1 爲第一變量之次數.

f_2 爲第二變量之次數.

f_3 爲第三變量之次數.

f_n 爲第 n 變量之次數.

d 爲變量與算術平均數之差.

Σ 爲總和之記號.

$$\sigma=\sqrt{\frac{f_1(m_1-M)^2+f_2(m_2-M)^2+f_3(m_3-M)^2+\cdots+f_n(m_n-M)^2}{N}}$$

$$=\sqrt{\frac{\Sigma f(m-M)^2}{N}}$$

因 $m-M=d$

故 $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}$ ……………………………………(公式三十二)

表四十一 美國鋼鐵業工人工資*分配表

(由分組次數表中用普通法求標準差表)

工 資	中 值 m	人 數 f	fm	d	d^2	fd^2
$0——$14.99	$7.5	156	1,170.0	−35.33	1,248.2089	194,720.5884
15—— 29.99	22.5	233	5,242.5	−20.33	413.3089	96,300.9737
30—— 44.99	37.5	435	16,312.5	− 5.33	28.4089	12,357.8715
45—— 59.99	52.5	455	23,887.5	9.67	93.5089	42,546.5495
60—— 74.99	67.5	305	20,587.5	24.67	608.6089	185,625.7145
75—— 89.99	82.5	15	1,237.5	39.67	1,573.7089	23,605.6335
90——104.99	97.5	1	97.5	54.67	2,988.8089	2,988.8089
總 計		1,600	68,535.0			558,146.1400

*十六日所得之工資.

$$M=\frac{68{,}535}{1{,}600}=\$42.83$$

應用公式三十二

$$\sigma=\sqrt{\frac{558{,}146.1400}{1{,}600}}$$

$$=\sqrt{348.8413}=\$18.68$$

(二) 簡捷法 (Short cut method)

在量數極多,或算術平均數非整數時,用普通法求標準差,計算上極感繁複(如表四十一之計算).故實際核算時,多用簡捷法.其公式又以數列之不同而異.

(1) 由枚舉表中求標準差法——在枚舉表中,用簡捷法求標準差,應先假定某變量爲假定算術平均數,就此假定算術平均數計算其與各變量之平方差,並總計之,得各變量與假定算術平均數相差平方之總數($\Sigma d'$).惟因假定算術平均數未必適與眞正算術平均數相等,就此假定算術平均數求得之總平方差,與由眞正算術平均數計算者,自有多少錯誤.故就假定算術平均數求得之平均差,須減去此項錯誤,方可開方,核算標準差.其計算公式如下:

設 σ 爲標準差.

M 爲眞正算術平均數.

M' 爲假定算術平均數.

C 爲假定算術平均數與眞正算術平均數之差,亦稱改正數.

N 爲變量項數.

d 爲變量與眞正算術平均數之差.

d' 爲變量與假定算術平均數之差.

m 爲變量之數值.

Σ 為總和之記號.

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma(m-M')^2}{N}-\left[\frac{\Sigma(m-M')}{N}\right]^2}$$

因 $m-M'=d'$

故 $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d'^2}{N}-\left(\frac{\Sigma d'}{N}\right)^2}$

因 $\frac{\Sigma d'}{N}=C$

故 $\boldsymbol{\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d'^2}{N}-C^2}}$ ……………………………………(公式三十三)

其實公式三十三卽等於公式三十一,試證之如下:

因 $M=M'+C$

$d=m-M$

故 $d=m-M'-C$

因 $d'=m-M'$

故 $d'=d+C$

$d'^2=d^2+2Cd+C^2$

$\Sigma d'^2=\Sigma d^2+2C\Sigma d+NC^2$

但 $\Sigma d=0$

故 $\Sigma d'^2=\Sigma d^2+NC^2$

$\Sigma d^2=\Sigma d'^2-NC^2$

$$\frac{\Sigma d^2}{N}=\frac{\Sigma d'^2}{N}-C^2$$

$$\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}}=\sqrt{\frac{\Sigma d'^2}{N}-C^2}$$

表四十二　民國二十四年上海絲價逐月比較表

（由枚舉表中用簡捷法求標準差表）

月次	每担絲價 單位 元	d' $M'=\$538$	d'^2
一月	$545	+7	49
二月	530	−8	64
三月	490	−48	2,304
四月	479	−59	3,481
五月	428	−110	12,100
六月	420	−118	13,924
七月	475	−63	3,969
八月	538	0	0
九月	585	+47	2,209
十月	755	+217	47,089
十一月	870	+332	110,224
十二月	800	+262	68,644
總計		+459	264,057

應用公式三十三

$$\sigma=\sqrt{\frac{264,057}{12}-\left(\frac{459}{12}\right)^2}$$

$$=\sqrt{22,004.75-(38.25)^2}$$

$$=\sqrt{20,541.6875}=\$143.32$$

(2) 由次數表中求標準差法——由次數表中,用簡捷法求標準差之步驟有八:

(A)將統計資料製成次數分配表.

(B)選擇適中一組之中值,爲假定算術平均數(M').

(C)計算各組中值與假定算術平均數之差(d').

(D)以各組之次數乘各組相當之離中差,並注意其正負號,列於 fd' 行下,然後相加得 $\Sigma fd'$.

(E)以各組之離中差乘各組相當之fd',列在fd'^2行下,然後總加之得$\Sigma fd'^2$.

(F)以次數總數(N)除$\Sigma fd'^2$,得由假定算術平均數求出標準差之平方.

(G)從$\frac{\Sigma fd'^2}{N}$中減去改正數$\left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2$,卽得由眞正算術平均數求出標準差之平方.

(H)將第七步所得之結果開方,卽得由眞正算術平均數計算之標準差.其計算公式如下:

設 σ 爲標準差.

M' 爲假定算術平均數.

N 爲次數之總數.

f 爲變量之次數.

d 爲變量與眞正算術平均數之差.

d' 爲變量與假定算術平均數之差.

Σ 爲總和之記號.

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma f(m-M')^2}{N}-\left[\frac{\Sigma f(m-M')}{N}\right]^2}$$

因 $m-M'=d'$

$$\frac{\Sigma fd'}{N}=C$$

故 $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N}-C^2}$ ……………………………(公式三十四)

因 $d=m-M$

$d'=m-M'$

$$M = M' + C$$

故 $$M' = M - C$$

$$m - M' = m - M - C$$

$$d' = d - C$$

$$d'^2 = (d - C)^2$$

$$\Sigma f d'^2 = \Sigma f (d - C)^2$$

$$= \Sigma f d^2 - 2\Sigma f dC + NC^2$$

因 $$\Sigma f d = 0$$

故 $$\Sigma f d'^2 = \Sigma f d^2 + NC^2$$

$$\frac{\Sigma f d'^2}{N} = \frac{\Sigma f d^2}{N} + C^2$$

$$\frac{\Sigma f d^2}{N} = \frac{\Sigma f d'^2}{N} - C^2$$

$$\sqrt{\frac{\Sigma f d^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma f d'^2}{N} - C^2}$$

表四十三　上海市第一屆至第七屆集團結婚新娘年齡分配表

（由次數表中用簡捷法求標準差表）

年齡	中值 m	新娘人數 f	d' $M'=23$	fd'	fd'^2
16歲——17.9歲	17	97	-6	-582	3,492
18歲——19.9歲	19	113	-4	-452	1,808
20歲——21.9歲	21	200	-2	-400	800
22歲——23.9歲	23	85	0	0	0
24歲——25.9歲	25	60	2	120	240
26歲——27.9歲	27	20	4	80	320
28歲——29.9歲	29	12	6	72	432
30歲——31.9歲	31	6	8	48	384
總計		593		$-1,114$	7,476

應用公式三十四

$$\sigma=\sqrt{\frac{7,476}{593}-\left(\frac{-1,114}{593}\right)^2}$$

$$=\sqrt{12.6071-(-1.88)^2}$$

$$=\sqrt{9.0727}=3.01 \text{ 歲}$$

(三) 假定離中差法 (Step deviation method)

應用公式三十四計算標準差,已較用公式三十二便捷多矣.惟在組距小於一或大於一時,計算 fd' 及 fd'^2 等,猶感數字太大,位數太多而不便.假定離中差法,即以組距為單位,於計算各組中值與假定算術平均數之差時,以假定算術平均數所在組之差(d'')為零;其下第一組為 -1,第二組為 -2;其上第一組為 $+1$,第二組為 $+2$,餘遞推.由此求得之假定離中差(d'')乘各組相當之次數得 fd'',總加之得 $\Sigma fd''$;復將各組之 fd'' 乘各組相當之假定離中差(d''),得 fd''^2,總加之得 $\Sigma fd''^2$;為總次數(N)除之,得由假定算術平均數計算之假定標準差之平方;再減去校正數(c^2),開平方並以組距乘之,即得眞正標準差.其計算公式如下:

設 σ 為標準差.

N 為次數之總數.

f 為各組之次數.

d'' 為各組中值與假定算術平均數之假定離中差.

i 爲組距.

Σ 爲總和之記號.

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd''^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fd''}{N}\right)^2}\times i \text{…………（公式三十五）}$$

表四十四　某國立大學學生每年費用分配表

（由分組次數表中用假定離中差法求標準差表）

每年費用	中值 m	學生數 f	d'' $M'=525$	fd''	fd''^2	$d''+1$	$f(d''+1)$	$f(d''+1)^2$
\$250——\$299.99	275	30	−5	−150	750	−4	−120	480
300——349.99	325	87	−4	−348	1,392	−3	−261	783
350——399.99	375	183	−3	−549	1,647	−2	−366	732
400——449.99	425	246	−2	−492	984	−1	−246	246
450——499.99	475	388	−1	−388	388	0	0	0
500——549.99	525	96	0	0	0	1	96	96
550——599.99	575	61	1	61	61	2	122	244
600——649.99	625	25	2	50	100	3	75	225
650——699.99	675	8	3	24	72	4	32	128
700——749.99	725	2	4	8	32	5	10	50
750——799.99	775	2	5	10	50	6	12	72
總　計		1,128		−1,774	5,476		−646	3,056

應用公式三十五

$$\sigma=\sqrt{\frac{5,476}{1,128}-\left(\frac{-1,774}{1,128}\right)^2}\times 50$$

$$=\sqrt{4.85461-(-1.573)^2}\times 50$$

$$=\sqrt{2.380281}\times 50$$

$=1.543\times 50=\$77.15$

上表中 $\Sigma fd''$ 與 $\Sigma fd''^2$ 可用薛立愛校核法(Charlier check)稽核其計算之正誤.此法為薛立愛氏所創故名.採用薛立愛氏校核法時,須於表中添設三行,一為 $d''+1$, 二為 $f(d''+1)$, 三為 $f(d''+1)^2$,即上表中之第七,第八,及第九行是也.末行 $f(d''+1)^2$ 之和為 $\Sigma f(d''+1)^2$,與公式三十五各項有一定之關係,蓋:

$$
\begin{aligned}
\Sigma f(d''+1)^2 &= \Sigma f(d''^2+2d''+1)\\
&= \Sigma fd''^2+2\Sigma fd''+\Sigma f\\
&= \Sigma fd''^2+2\Sigma fd''+N
\end{aligned}
$$

若 $\Sigma fd''^2$ 及 $\Sigma fd''$ 計算準確,則其總和再加總次數(N),必等於 $\Sigma f(d''+1)^2$ 上例

$$
\begin{aligned}
\Sigma f(d''+1)^2 &= 3{,}056\\
\Sigma fd''^2 &= 5{,}476\\
\Sigma fd'' &= -1{,}774\\
N &= 1{,}128
\end{aligned}
$$

故
$$
\begin{aligned}
3{,}056 &= 5{,}476+2\times(-1{,}774)+1{,}128\\
&= 3{,}056
\end{aligned}
$$

(四) 變量自乘法

(1)由枚舉表中求標準差法 —— 由枚舉表中,用變量自乘法求標準差,即將各變量自乘方,為項數除之,得各變量之平均平方,減各變量算術平均之平方,再開平方即得標準差.其計算公式如下:

設 σ 為標準差.

N 為變量項數.

m 為變量之數值.

Σ 為總和之記號.

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma m^2}{N}-\left(\frac{\Sigma m}{N}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{N\Sigma m^2-(\Sigma m)^2}{N^2}}\text{…………………………(公式三十六)}$$

其實公式三十六,亦由公式三十一蛻化而來,茲證之如下:

因　$d=m-M$

$$\frac{\Sigma d^2}{N}=\frac{\Sigma(m-M)^2}{N}$$

$$=\frac{\Sigma m^2}{N}-2\frac{\Sigma mM}{N}+\frac{N(M)^2}{N}$$

但　$M=\frac{\Sigma m}{N}$

$$\frac{\Sigma d^2}{N}=\frac{\Sigma m^2}{N}-2\left(\frac{\Sigma m}{N}\right)^2+\left(\frac{\Sigma m}{N}\right)^2$$

$$=\frac{\Sigma m^2}{N}-\left(\frac{\Sigma m}{N}\right)^2$$

故　$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}}$

$$=\sqrt{\frac{\Sigma m^2}{N}-\left(\frac{\Sigma m}{N}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{N\Sigma m^2-(\Sigma m)^2}{N^2}}$$

表四十五 民國二十四年廣東絲價逐月比較表

(由枚舉表中用變量自乘法求標準差表)

月 次	每包價格 (m) 單位 港元	m^2
一 月	$430.0	184,900
二 月	410.0	168,100
三 月	375.0	140,625
四 月	340.0	115,600
五 月	310.0	96,100
六 月	300.0	90,000
七 月	322.5	104,006
八 月	370.0	136,900
九 月	395.0	156,025
十 月	447.5	200,256
十一月	560.0	313,600
十二月	625.0	390,625
總 計	4,885.0	2,096,737

應用公式三十六

$$\sigma=\sqrt{\frac{12\times 2{,}096{,}737-4{,}885^2}{12^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1{,}297{,}619}{144}}$$

$$=\sqrt{9{,}011.2431}=\$94.93$$

(2) 由次數表中求標準差法——由次數表中用變量自乘法求標準差之公式如下:

設 σ 爲標準差.

N 爲次數之總數.

m 爲變量之數值.

f 爲變量之次數.

Σ 爲總和之記號.

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fm^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fm}{N}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{N\Sigma fm^2-(\Sigma fm)^2}{N^2}}\quad\text{(公式三十七)}$$

其實公式三十七,亦由公式三十二蛻化而成,試證之如下:

因　$d=m-M$

$$\frac{\Sigma fd^2}{N}=\frac{\Sigma f(m-M)^2}{N}$$

$$=\frac{\Sigma fm^2}{N}-2\frac{\Sigma fmM}{N}+\frac{N(M)^2}{N}$$

但　$M=\dfrac{\Sigma fm}{N}$

$$\frac{\Sigma fd^2}{N}=\frac{\Sigma fm^2}{N}-2\left(\frac{\Sigma fm}{N}\right)^2+\left(\frac{\Sigma fm}{N}\right)^2$$

$$=\frac{\Sigma fm^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fm}{N}\right)^2$$

故　$\sigma=\sqrt{\dfrac{\Sigma fd^2}{N}}$

$$=\sqrt{\frac{\Sigma fm^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fm}{N}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{N\Sigma fm^2-(\Sigma fm)^2}{N^2}}$$

表四十六　某機關職員年齡分配表

（由分組次數表中用變量自乘法求標準差表）

年齡	中值 m	人數 f	fm	fm^2
18——19.99	19	1	19	361
20——21.99	21	3	63	1,323
22——23.99	23	4	92	2,116
24——25.99	25	6	150	3,750
26——27.99	27	15	405	10,935
28——29.99	29	9	261	7,569
30——31.99	31	7	217	6,727
32——33.99	33	6	198	6,534
34——35.99	35	4	140	4,900
36——37.99	37	3	111	4,107
38——39.99	39	1	39	1,521
40——41.99	41	1	41	1,681
總計		60	1,736	51,524

應用公式三十七

$$\sigma=\sqrt{\frac{60\times 51{,}524-1{,}736^2}{60^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{77{,}744}{3{,}600}}$$

$$=\sqrt{21.5956}$$

$=4.65$ 歲

(五) 校正標準差法

由分組次數表中求標準差,俱假定各組次數平均

分配於各組距之中,故於求標準差時,卽以各組中值與算術平均數之差核算之.然在實際上,各組中各變量之分配大小不等,例如在次數分配完全對稱,或略呈偏斜時,在小於算術平均數各組中,較大數值之次數,多於較小數值之次數,而在大於算術平均數各組中,較小數值之次數,多於較大數值之次數,故以各組中值代表全組各項之數值,由是求得之標準差,均較實際標準差爲大.統計學家薛伯(U. F. Sheppard)據此理由,規定校正標準差之公式如下:

設σ_c爲校正標準差.

σ 爲未校正標準差.

i 爲組距.

$$\sigma_c=\sqrt{\sigma^2-\frac{i^2}{12}}\cdots\cdots\text{(公式三十八)}$$

兹卽以表四十六資料,核算其校正標準差如下:

$\sigma=4.65$ 歲

$i=2.00$

$$\begin{aligned}\sigma_c&=\sqrt{4.65^2-\frac{2^2}{12}}\\&=\sqrt{21.6225-0.3333}\\&=\sqrt{21.2892}\\&=4.61\text{ 歲}\end{aligned}$$

第六節 離中係數

離中差之測定,有用含有度量之數字表示之者,有用抽象之數目表示之者;前者爲離中差,悉以變量之單位爲離中差之單位;在測定單獨事項之離中狀態時多用之.後者爲離中係數(Coefficient of variation),在比較兩種或兩種以上不同事項之離中程度時多用之.蓋事物單位不同,如斤之與疋,寸之與升,其間固無比較之可能;卽事物單位相同,而平均數不同者,亦不能藉絕對離中差以比較其離中程度之大小.如大學生與中學生每年費用,俱以元計,但大學生每年費用遠過於中學生,其絕對離中差,自亦較大於中學生,吾人殊不能遽謂大學生每年費用之分配,其離中程度遠較中學生之費用分配爲高.故欲比較兩種或兩種以上單位不同,或單位同而平均數不同事物之離中程度時,應將絕對離中差化爲相對離中差(卽離中係數),然後比較之,始有意義.至於化絕對離中差爲相對離中差之方法,不外以平均數或原來變量之數值,除絕對離中差,銷除其原有單位而爲抽象之數目.有時因欲增大其變數起見,更將離中係數乘 100 而以百分數表示之者,茲各分述於下:

(一) 全距係數

全距係數 (Coefficient of range) 因除數之不同,約可分爲下列四種:

(1) 甲種全距係數——甲種全距係數爲勃魯大氏(Broda)所創用,其於 La Methode des Moyennes,「L'indicenasal」

一書中定其計算公式如下:

設 V_{R1} 為甲種全距係數.

R_g 為全距.

M 為算術平均數.

$$V_{R1}=\frac{R_g}{M}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式三十九)}$$

(2) 乙種全距係數——乙種全距係數為吉還尼氏(De Giovanni)所創用,其在 Lavori Dell Istituto 一書中,定其計算公式如下:

設 V_{R2} 為乙種全距係數.

R_g 為全距.

M_d 為中位數.

$$V_{R2}=\frac{R_g}{M_d}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式四十)}$$

(3) 丙種全距係數——丙種全距係數為伍倫氏(Ohrn)所創用,其於 Kräplin's Psycho, Arbeit 一書中,定其計算公式如下:

設 V_{R3} 為丙種全距係數.

R_g 為全距.

M_o 為衆數.

$$V_{R3}=\frac{R_g}{M_o}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式四十一)}$$

(4) 丁種全距係數——丁種全距係數為西克里司脫氏(H. Secrist)所創用,其於 An Introduction to Statistical

Method 一書中,定其計算公式如下:

設 V_{R4} 為丁種全距係數.

R_g 為全距.

m_1 為第一變量值,即數值最小之變量值.

m_n 為第 n 變量值,即數值最大之變量值.

$$V_{R4}=\frac{R_g}{m_1+m_n}\text{(公式四十二)}$$

在四種全距係數中,以丁種全距係數之計算為最便利(因不必求任何平均數),且數值界限分明,(最小等於零,最大等於一.)故較其他諸全距係數略勝一籌.茲設例示之如下:

表四十七 某初級中學學生年齡分配表

(計算全距係數表甲)

年齡	中值 m	人數 f	fm
11——12.9	12	31	372
13——14.9	14	72	1,008
15——16.9	16	88	1,408
17——18.9	18	45	810
19——20.9	20	10	200
總計		246	3,798

$$M=\frac{3,798}{246}=15.44\text{歲}$$

$$M_d=15+\frac{\frac{246}{2}-103}{88}\times 2=15+\frac{40}{88}=15.45\text{歲}$$

$$M_o=15+\frac{45}{72+45}\times 2=15+\frac{90}{117}=15.77\text{歲}$$

$$R_g=21-11=10\text{歲}$$

應用公式三十九

$$V_{R1}=\frac{10}{15.44}=0.648$$

應用公式四十

$$V_{R2}=\frac{10}{15.45}=0.647$$

應用公式四十一

$$V_{R3}=\frac{10}{15.77}=0.634$$

應用公式四十二

$$V_{R4}=\frac{10}{21+11}=0.313$$

表四十八　某機關職員年齡分配表

(計算全距係數表乙)

年齡	中值 m	人數 f	$M'=32$ d''	fd''
23——24.9	24	3	−4	−12
25——26.9	26	8	−3	−24
27——28.9	28	15	−2	−30
29——30.9	30	18	−1	−18
31——32.9	32	28	0	0
33——34.9	34	45	1	45
35——36.9	36	34	2	68
37——38.9	38	20	3	60
39——40.9	40	9	4	36
總計		180		125

$$M=32+\frac{125}{180}\times 2=32+\frac{250}{180}=33.39\text{ 歲}$$

$$M_d=35-\frac{\frac{180}{2}-63}{45}\times 2=35-\frac{54}{45}=33.80\text{ 歲}$$

$$M_o=35-\frac{28}{34+28}\times 2=35-\frac{56}{62}=34.10\text{ 歲}$$

$$R_g=41-23=18\text{ 歲}$$

應用公式三十九

$$V_{R1}=\frac{18}{33.39}=0.539$$

應用公式四十

$$V_{R2}=\frac{18}{33.80}=0.533$$

應用公式四十一

$$V_{R3}=\frac{18}{34.10}=0.528$$

應用公式四十二

$$V_{R4}=\frac{18}{41+23}=0.281$$

由絕對離中差觀之,某機關職員年齡之全距(18歲),大於某初級中學學生年齡之全距(10歲),然若化成全距係數則:

	某初級中學學生年齡之全距係數		某機關職員年齡之全距係數
甲種全距係數 V_{R1}	0.648	大於	0.539
乙種全距係數 V_{R2}	0.647	大於	0.533

丙種全距係數 V_{R3} 0.634 大於 0.528

丁種全距係數 V_{R4} 0.313 大於 0.281

不論用甲種,乙種,丙種或丁種公式測得某初級中學學生年齡之全距係數,俱大於某機關職員年齡之全距係數.換言之某初級中學學生年齡之離中程度,較大於某機關職員年齡之離中程度也.

(二) 四分差係數

四分差係數(Coefficient of quartile deviation)亦因除數之不同,分為甲乙兩種:

(1) 甲種四分差係數——甲種四分差係數為聶司福綠氏(Niceforo)所創用,其於La Methode Statistique一書中,定其計算公式如下:

設 V_{Q1} 為甲種四分差係數.

Q_1 為第一四分位數.

Q_3 為第三四分位數.

R_g 為全距.

$$V_{Q1}=\frac{Q_3-Q_1}{R_g} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(公式四十三)}$$

(2) 乙種四分差係數——乙種四分差係數為鮑來氏(A. L. Bowley)所創用,其於Elements of Statistics一書中,定其計算公式如下:

設 V_{Q2} 為乙種四分差係數.

Q_1 為第一四分位數.

Q_3 爲第三四分位數.

$$V_{Q_2}=\frac{\frac{Q_3-Q_1}{2}}{\frac{Q_3+Q_1}{2}}$$

$$=\frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}\text{……………………………………(公式四十四)}$$

兩者相較,以乙種較爲通行,故若不標甲乙而僅言四分差係數者,即指乙種四分差係數.玆即以表二十五統計資料,計算其四分差係數如下:

上海市第一屆至第七屆集團結婚新郎年齡之:

$$Q_1=21+\frac{\frac{593}{4}-86}{186}\times 3$$

$$=21+\frac{186.75}{186}=22.00\text{ 歲}$$

$$Q_3=24+\frac{\frac{3\times 593}{4}-272}{174}\times 3$$

$$=24+\frac{518.25}{174}=26.98\text{ 歲}$$

$$R_g=45-18=27.00\text{ 歲}$$

應用公式四十三

$$V_{Q_1}=\frac{26.98-22.00}{27.00}$$

$$=\frac{4.98}{27.00}=0.184$$

應用公式四十四

$$V_{Q_2}=\frac{\dfrac{26.98-22.00}{2}}{\dfrac{26.98+22.00}{2}}$$

$$=\frac{2.49}{24.49}=0.102$$

表四十九　某公司職員月薪分配表

(計算四分差係數表)

月　　薪	人　數	以下累積
\$15——\$19.99	16	16
20 —— 24.99	19	35
25 —— 29.99	25	60
30 —— 34.99	30	90
35 —— 39.99	36	126
40 —— 44.99	32	158
45 —— 49.99	24	182
50 —— 54.99	15	197
55 —— 59.99	7	204
總　　計	204	

$$Q_1=25+\frac{\dfrac{204}{4}-35}{25}\times 5$$

$$=25+\frac{80}{25}=\$28.20$$

$$Q_3=40+\frac{\dfrac{3\times 204}{4}-126}{32}\times 5$$

$$=40+\frac{135}{32}=\$44.22$$

$$R_g=60-15=\$45.00$$

應用公式四十三

$$V_{Q1}=\frac{44.22-28.20}{45.00}$$

$$=\frac{16.02}{45.00}=0.356$$

應用公式四十四

$$V_{Q2}=\frac{\frac{44.22-28.20}{2}}{\frac{44.22+28.20}{2}}$$

$$=\frac{8.01}{36.21}=0.221$$

上海市第一屆至第七屆集團結婚新郎年齡之四分位差,爲 2.49 歲;某公司職員月薪之四分位差,爲$8.01;兩者單位不同,初無比較之可能,然若化成四分差係數,則知新郎年齡之離中程度,小於某公司職員月薪之離中程度也.

	新郎年齡之四分差係數		某公司職員月薪之四分差係數
甲種四分差係數 V_{Q1}	0.184	小於	0.356
乙種四分差係數 V_{Q2}	0.102	小於	0.221

(三) 平均差係數

平均差係數 (Coefficient of mean deviation) 祇以平均

數除平均差卽得.按最小差數原則,平均差之核算,旣以中位數爲各變量比較之標準,玆由平均差求其相對差異係數,自亦應以中位數除之.其計算公式如下:

設V_δ爲平均差係數.

$M.D.$爲平均差.

M_d爲中位數.

$$V_\delta=\frac{M.D.}{M_d}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式四十五})$$

玆卽以表三十五及表三十六統計資料,核計平均差係數,並比較其離中程度如下:

上海市市立初級小學教職員月俸之:

$M_d=\$43.16$

$M.D.=\$11.70$

應用公式四十五

$$V_\delta=\frac{11.70}{43.16}=0.271$$

甲廠二十一工人每月工資之:

$M_d=\$12.81$

$M.D.=\$4.87$

應用公式四十五

$$V_\delta=\frac{4.87}{12.81}=0.380$$

由絕對平均差値觀察之,甲廠二十一工人每月工資之分配,似較上海市市立初級小學教職員月俸之分配爲

整齊.然由相對之平均差係數上觀察之,適得其反,甲廠二十一工人每月工資之平均差係數為0.380,大於教職員月薪之平均差係數(0.271)也.

(四) 標準差係數

標準差係數(Coefficient of standard deviation)之計算亦頗簡易,即以平均數除標準差即得.按最小二乘原則,計算標準差既應以算術平均數為各變量比較之標準,茲由標準差求其相對差異係數,自亦應以算術平均數除之.其計算公式如下:

設V_σ為標準差係數.

σ 為標準差.

M 為算術平均數.

$$V_\sigma=\frac{\sigma}{M}\quad\cdots\cdots\text{(公式四十六)}$$

茲即以表四十一及表四十三統計資料,核計標準差係數,並比較其離中程度如下:

美國鋼鐵業工人十六日所得工資之:

$M=\$42.83$

$\sigma=\$18.68$

應用公式四十六

$$V_\sigma=\frac{18.68}{42.83}=0.436$$

上海市第一屆至第七屆集團結婚新娘年齡之:

$M=21.12$ 歲

$\sigma=3.01$ 歲

應用公式四十六

$$V_\sigma=\frac{3.01}{21.12}=0.143$$

美國鋼鐵業工人工資,單位以元計,上海市集團結婚新娘年齡,單位以年歲計;兩者離中趨勢,初無比較之可能,然若化成標準差係數,則知鋼鐵業工人工資之離中程度,大於新娘年齡之離中程度也.

(五) 羅蘭曲線

吾人在研究一種事實之離中趨勢時,離中差即可測定之.如欲比較兩種事實之離中程度時,離中係數亦可測定之.惟若研究一種事實之離中狀況,祇求知其大概,不問其數量若干時,則可用一種曲線表示之.此種曲線為美國羅蘭博士(Dr. M. O. Lorenz)所發明,故名羅蘭曲線(The Lorenz Curve),其最大之功用在於研究國民財富之分配是否均等?納稅之是否公平?以及工資土地等之分配,俱可用此曲線表示之.

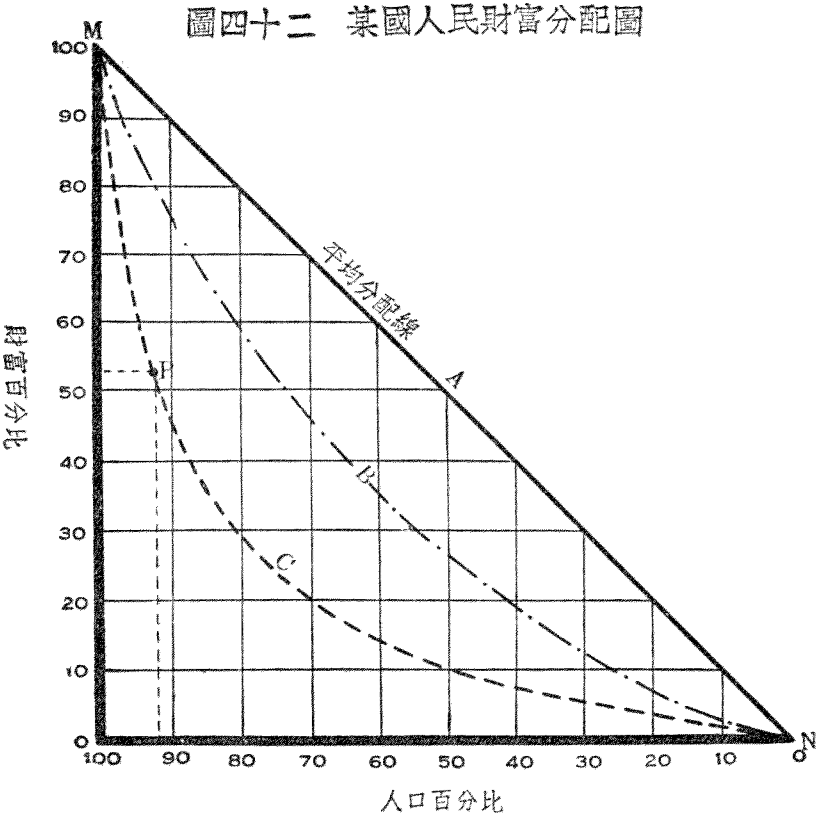
羅蘭曲線之繪法,先將縱橫二軸,製定百分比度.在縱軸上,由下而上;在橫軸上,由右而左.縱軸上之百分比度,用以測量一國之財富.橫軸上之百分比度,用以測定

一國之人口.比度製定後,先從全國財富,全屬於全國人民處着手;卽自國富(縱軸)100%及人口(橫軸)100%之M點起,製定各繪定點.例如最富階級人口,佔全人口百分之8,其所有財產,假定佔全國財富百分之47,則從縱軸上由100%處起,向下引去47%至53%.橫軸上由100%處起,向右引去8%至92%處.將此二點所當距離爲繪定點P.次及第二位有產階級,以其人口與財產百分比,依例得第二點於紙上.逐次進行至N點爲止.末將各繪定點用曲線聯綴之,卽成羅蘭曲線.(註一)

若全國財富平均分配於全國人民,卽可繪一直線MN表示之,此直線卽係平均分配線(Line of equal distribution).但事實上財富之分配,各人互異,其分配情形卽可用B線或C線表示之.如欲辨其分配之是否均勻,卽可檢閱曲線離平均分配線之遠近而定.凡曲線離平均線愈遠者,則表示財富之分配,愈不均勻.如曲線離平均線愈近者,則表示財富之分配,愈爲均勻.圖五十之A線爲平均分配線,B線表示財富分配較爲均勻,C線則示財富之分配極不均勻也.

(註一) M. O. Lorenz, "Method of Measuring the Concentration of Wealth", Quarterly Pablication of the American Statistical Association June, 1905, pp. 209—219.

圖四十二　某國人民財富分配圖



(羅　蘭　曲　線)

第七節　各種離中差之比較

(一) 各種離中差之特點

(1)就計算之繁簡言——若論計算之繁簡,各種離中差中,以全距及四分位差之計算為最簡易,平均差次之,

標準差最繁.

(2)就精確之程度言——若論確度,則全距不如四分位差,四分位差不如平均差及標準差.

(3)就極端之影響言——全距即由兩極端變量中求得,一二極端變量之去留,即可改變全距之數值,故全距最不足恃.標準差與平均差之大小與全體變量均有關係,故較穩定.兩者相較,尤以平均差所受極端變量之影響爲最小.

(4)就數學之原理言——若論數學原理,則平均差不如標準差.蓋平均差不顧差異爲正爲負,均須相加,在數理上,殊屬牽強.標準差經平方後,負號已銷,故用代數方法核計,合乎數學原理者也.

(5)就取樣之增減言——通常標準差受取樣之或增或減,或多或少之影響爲最小.

(6)就實際上應用言——標準差應用最廣,平均差次之.

(二) 各種離中差與變量之關係

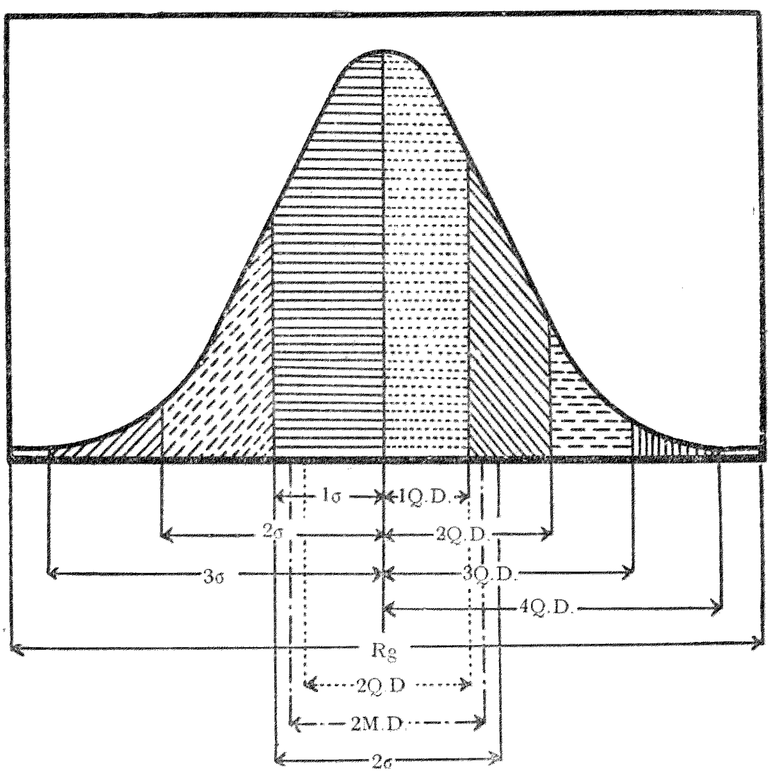
(1)全距——全距乃兩極端變量之差,全體變量盡在此距離之中.

(2)四分位差——四分位差乃第三四分位數與第一四分位數相差之半.如在第三及第一四分位數間之中點,向左右各引取四分位差之距離,則在此距離中,當有全體變量之半.

(3)平均差——在完全對稱或不甚偏斜之次數數列中，算術平均數之左右，各取三·七五倍之平均差，則在此距離中，約可包含全體變量百分之九十九.

(4)標準差——在完全對稱或不甚偏斜之次數分配中，從算術平均數之左右，各取一標準差之距離，則在此

圖四十三　正態曲線圖



(各種離中差與變量關係說明圖)

距離中,約可包含全體變量三分之二(在正態曲線下實爲68.26%);若各取二標準差之距離,則可包含全體變量百分之九十五(在正態曲線下實爲95.46%);若各取三標準差之距離,則可包含全體變量百分之九十九(在正態曲線下實爲99.73%).故六倍標準差之距離約等於全距之長.

在次數分配完全對稱之正態曲線下,各個四分位差及標準差等所佔面積大致如圖四十三.

(三) 各種離中差間之關係

凡統計事實含有量數甚多,且次數分配極爲對稱者,從中求得之平均差,約當標準差五分之四,四分位差約當標準差三分之二.六倍標準差之距離,七倍半平均差之距離,八倍四分位差之距離,約可包含全體變量百分之九十九.故離中差與離中差間之關係,如用數字表示之如下:

$$Q.D.=0.8453\ M.D.$$

$$Q.D.=0.6745\ \sigma$$

$$M.D.=1.1843\ Q.D.$$

$$M.D.=0.7979\ \sigma$$

$$\sigma\ =1.4826\ Q.D.$$

$$\sigma\ =1.2533\ M.D.$$

本章應用公式

（公式二十四）由枚舉表中求全距

$$R_g = m_n - m_1$$

（公式二十五）由分組表中求全距

$$R_g = U' - L'$$

（公式二十六）四分位差

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

（公式二十七）由枚舉表中求平均差（普通法）

$$M.D. = \frac{\Sigma d}{N}$$

（公式二十八）由次數表中求平均差（普通法）

$$M.D. = \frac{\Sigma f d}{N}$$

（公式二十九）由分組表中求平均差（簡捷法）

$$M.D. = \frac{\Sigma f d'' + (N_a - N_b)c}{N} \times i$$

（公式三十）由分組表中求校正平均差（簡捷法）

$$\delta_c = \frac{\Sigma f d'' + (N'_a - N'_b)c + (0.25 + c^2)N_i}{N} \times i$$

（公式三十一）由枚舉表中求標準差（普通法）

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}}$$

（公式三十二）由次數表中求標準差（普通法）

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f d^2}{N}}$$

（公式三十三）由枚舉表中求標準差（簡捷法）

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d'^2}{N}-C^2}$$

（公式三十四）由次數表中求標準差（簡捷法）

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N}-C^2}$$

（公式三十五）由分組表中求標準差（假定離中差法）

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd''^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fd''}{N}\right)^2}\times i$$

（公式三十六）由枚舉表中求標準差（變量自乘法）

$$\sigma=\sqrt{\frac{N\Sigma m^2-(\Sigma m)^2}{N^2}}$$

（公式三十七）由次數表中求標準差（變量自乘法）

$$\sigma=\sqrt{\frac{N\Sigma fm^2-(\Sigma fm)^2}{N^2}}$$

（公式三十八）校正標準差

$$\sigma_c=\sqrt{\sigma^2-\frac{i^2}{12}}$$

（公式三十九）甲種全距係數

$$V_{R1}=\frac{R_g}{M}$$

（公式四十）乙種全距係數

$$V_{R2}=\frac{R_g}{M_d}$$

（公式四十一）丙種全距係數

$$V_{R3}=\frac{R_g}{M_o}$$

（公式四十二）丁種全距係數

$$V_{R_i} = \frac{R_q}{m_1 + m_n}$$

（公式四十三）甲種四分差係數

$$V_{Q1} = \frac{Q_3 - Q_1}{R_g}$$

（公式四十四）乙種四分差係數

$$V_{Q2} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

（公式四十五）平均差係數

$$V_\delta = \frac{M.D.}{M_d}$$

（公式四十六）標準差係數

$$V_\sigma = \frac{\sigma}{M}$$

問題

1. 試述離中差之重要及種類.
2. 何謂全距?求全距之公式有幾?其特性如何?
3. 試述四分位差之計算法及其特性.
4. 何謂平均差?在枚舉表及分組次數表中,各以何法求平均差爲最便捷?試申述其理由.
5. 試證 $\frac{\Sigma f\bar{d}}{N} = \frac{\Sigma f\bar{d}'' + (N_a - N_b)c}{N} \times i$.
6. 平均差之誤點何在?校正之方法如何?
7. 何謂標準差?在枚舉表及分組次數表中各以何法求標準差爲最

便捷?試申述其理由.

8. 由分組次數表中,用簡捷法及變量自乘法求標準差之步驟各有幾?

9. 標準差有無校正之必要?

10. 試述各種離中差間及各種離中差與全體變量間之關係。

11. 何謂離中係數?其效用如何?

12. 試略述測定各種離中係數之方法。

習題十五

試用習題十一統計資料,計算以下諸離中差:

(1) 全距。

(2) 四分位數。

(3) 用普通法求平均差。

(4) 用普通法求標準差。

(5) 用變量自乘法求標準差。

習題十六

試用習題十二統計資料,計算以下諸離中差:

(1) 全距。

(2) 四分位差。

(3) 用簡捷法求平均差。

(4) 用簡捷法求標準差。

(5) 校正平均差。

習題十七

試用習題十四統計資料,計算以下諸離中差:

(1) 用簡捷法求平均差。

(2) 校正平均差。

(3) 用假定離中差法求標準差。

(4) 用變量自乘法求標準差。

(5) 校正標準差。

習題十八

一一三八二人體高分配表

體高（單位 吋）	中值 m	人數 f
30——32.99	31.5	8
33——35.99	34.5	72
36——38.99	37.5	350
39——41.99	40.5	1,193
42——44.99	43.5	1,914
45——47.99	46.5	2,178
48——50.99	49.5	2,196
51——53.99	52.5	1,913
54——56.99	55.5	1,115
57——59.99	58.5	361
60——62.99	61.5	69
63——65.99	64.5	13
總計		11,382

(1) 試用上列分組表,計算以下諸離中差:

(A)全距。

(B)四分位差。

(C)平均差。

(D)校正平均差。

(E)標準差。

(F)校正標準差。

(2) 試比較各種離中差之數值。

(3) 試繪示各種離中差在曲線圖中所處之地位及面積。

(4) 試繪示求校正平均差之圖式。

習題十九

試用習題十二及十八統計資料,計算以下諸離中係數:

(1) 全距係數。

(A)甲種全距係數。

(B)乙種全距係數。

(C)丙種全距係數。

(D)丁種全距係數。

(2) 四分差係數。

(A)甲種四分差係數。

(B)乙種四分差係數。

(3) 平均差係數。

(4) 標準差係數。

(5) 試比較東方公司職員年齡及一一三八二人體高之離中程度。

習題二十

美國威斯康辛省人民入息及入息稅分配表

入息額	人數	百分比	累積百分比	納稅入息單位千元	百分比	累積百分比	納稅額單位千元	百分比	累積百分比
$1,000以下	146,015	70.7	70.7	59,543	25.4	25.4	598	15.1	15.1
1,000—$1,999	33,663	16.3	87.0	46,418	19.8	45.2	502	12.6	27.7
2,000——2,999	11,659	5.6	92.0	28,191	12.0	57.2	336	8.5	36.2
3,000——3,999	5,670	2.8	95.4	19,499	8.3	65.5	256	6.4	42.6
4,000——4,999	3,142	1.5	96.9	13,986	6.0	71.5	202	5.1	47.7
5,000——5,999	1,783	0.9	97.8	9,723	4.1	75.6	156	3.9	51.6
6,000——6,999	1,123	0.5	98.3	7,267	3.1	78.7	129	3.3	54.9
7,000——7,999	785	0.4	98.7	5,879	2.5	81.2	115	2.9	57.8
8,000——8,999	567	0.3	99.0	4,788	2.0	83.2	104	2.6	60.4
9,000——9,999	415	0.2	99.2	3,953	1.7	84.9	95	2.4	62.8
10,000以上	1,804	0.8	100.0	35,366	15.1	100.0	1,475	37.2	100.0
總計	206,626	100.0		234,613	100.0		3,968	100.0	

試用上列統計資料繪製羅蘭曲線:

(1) 納稅人數與納稅入息百分分配圖。

(2) 納稅人數與納稅額百分分配圖。

(3) 試述羅蘭曲線之繪法。

(4) 試述羅蘭曲線之功用。

第七章 正態與偏態

社會現象,雖參差不齊,然就大量中觀察之,仍有自然秩序之存在.此秩序爲何?即集中趨勢 (Central tendency) 是也.例如人之長短,極長者有之,極短者有之,不長不短者亦有之,若就大羣中測量之,極長與侏儒均少,適中者居多.又如人之智慧,上智下愚均屬少數,平庸者極多.更如四季溫度,酷熱與嚴寒爲時極短,不冷不熱者爲時較長.他如學生成績之分配,工人工資之給予等,無不集處中級受此自然常態之擺佈者也.

集中趨勢如以對稱之鐘形曲線(Symmetrical bell shapped curve)表示之,即成正態曲線(Normal curve);以其能表示機率大小之分配,故又名機率曲線(Probability curve);且以高斯氏(K. F. Gauss)爲首創,故亦稱高斯曲線(Gaussian curve).社會現象雖不能盡合此正態情形,然多數事實,俱受此常態律之擺佈,故正態曲線爲曲線中最重要者也.

正態之意義及正態曲線之重要前已言之,然欲知正態曲線之理論,應先探討機率之原理 (Theorems in probability),蓋正態曲線即表示機率大小之分配者也.

第一節 機率之原理

(一) 單事機率

機率 (Probability) 者,表示一事成敗機會之比率.單

事機率(Probability of single event)者,表示試驗一次而得成敗機會之比率也.例如取鎳幣一枚,正面塗以黑漆,背面塗以白漆,而後投擲之,其結果終不出兩途:或白面向上,或黑面向上;而白面向上與黑面向上之機會各為$\frac{1}{2}$.若以a字代表黑面,b字代表白面;P字代表成功,q字代表失敗;則成功之機率為$P=\frac{a}{a+b}$;失敗之機率為$q=\frac{b}{a+b}$.兩者合併而得$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=P+q=1$,即示成功與失敗之總機率為一.是故成功與失敗機率之大小,終在零與一之間.如其為零,即示此事決不成功.如其為一,即示此事必然成功.如其為$\frac{1}{2}$,則謂成功與失敗各半也.

又如擲骰其結果終不出六種:或為一點,或為二點,或為三,四,五,六點.因六種結果實現之機會亦各均等,故一擲而得一點之機率為$\frac{1}{6}$,一擲而非一點之機率為$\frac{5}{6}$.設以得六點為成功,得一,二,三,四,五點為失敗,則成功之機率為$\frac{1}{6}$,而失敗之機率為$\frac{5}{6}$也.

惟若成功之希望有種種各不相關之不同方式者,則其成功之機率,應為各項機率之和.例如擲骰,以得五點及六點者為成功,一點,二點,三點及四點者為失敗,則成功之機率為得五點及六點機率之和:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

失敗之機率爲得一點,二點,三點及四點機率之和:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

又如儲二十紅球,二十五黃球,十五藍球於一囊,每次祇取一球,如是得紅球之機率爲:

$$\frac{20}{20+25+15}=\frac{20}{60}=\frac{4}{12}$$

得黃球之機率爲:

$$\frac{25}{20+25+15}=\frac{25}{60}=\frac{5}{12}$$

得藍球之機率爲:

$$\frac{15}{20+25+15}=\frac{15}{60}=\frac{3}{12}$$

一取欲得紅球或黃球之機率爲:

$$\frac{4}{12}+\frac{5}{12}=\frac{9}{12}$$

一取欲得黃球或藍球之機率爲:

$$\frac{5}{12}+\frac{3}{12}=\frac{8}{12}$$

一取欲得紅球或藍球之機率爲:

$$\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$$

(二) 複事機率

上述諸例,俱係單事機率,至於複事機率(Probability of compound event),乃即若干各自獨立之單純事件同時發生之總和現象也.例如取兩骰擲之,希望二者俱得

四點,此乃繁複事件也.其機率乃爲各單獨事件機率之積.(The probability of a compound event is the product of the probabilities of the separate events.)例如儲紅球十個,黃球十二個,藍球八個於一囊;一次而欲取得紅黃二球之機率,乃即紅球與黃球單事機率之積.(設 P 爲一次取得紅黃兩球之成功機率,q 爲失敗之機率.)

$$P=\frac{10}{10+12+8}\times\frac{12}{10+12+8}$$

$$=\frac{120}{900}=\frac{2}{15}$$

$$q=1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}$$

又如取甲乙兩骰擲之,其各得一點之機率當爲:

$$P=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{36}$$

各得五點之機率,與各得一點之機率同.惟兩骰合得五點之機率,則非 $\frac{1}{36}$;蓋兩骰組合五點之方法有四:

甲骰 1 點 + 乙骰 4 點 = 5 點

甲骰 2 點 + 乙骰 3 點 = 5 點

甲骰 3 點 + 乙骰 2 點 = 5 點

甲骰 4 點 + 乙骰 1 點 = 5 點

甲骰得一點之機率爲 $\frac{1}{6}$,乙骰得四點之機率亦爲 $\frac{1}{6}$,兩骰合得五點之機率,當爲 $\frac{1}{36}$.惟其他三種組合之結果,亦

均可得五點;故兩骰一擲而合得五點之成功機率爲:

$$P=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}$$

$$=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

若所問並非合得五點,乃謂至少可得五點之機率幾何?則其答案又不同矣.蓋既云至少五點,則六點七點以至十二點,均在其成功之例,故其機率應爲$\frac{30}{36}$或$\frac{5}{6}$。蓋兩骰一擲而合得十二點(即甲骰得六點,乙骰亦得六點)之機率,爲$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.兩骰一擲而合得十一點之機率爲$\frac{2}{36}$(因十一點之組合有二即$6+5$及$5+6$).依此類推兩骰一擲合得十點之機率,爲$\frac{3}{36}$;合得九點之機率爲$\frac{4}{36}$;合得八點之機率爲$\frac{5}{36}$;合得七點之機率最大爲$\frac{6}{36}$;(因兩骰組合七點之方法有六:$1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2$及$6+1$.)合得六點之機率爲$\frac{5}{36}$,合得五點之機率爲$\frac{4}{36}$.故兩骰一擲,至少可得五點之成功機率,當爲各機率之和.

$$P=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{5}{36}+\frac{4}{36}$$

$$=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$$

反之,若問兩骰一擲至多可得四點之機率幾何?則此機率乃爲$\frac{6}{36}$或$\frac{1}{6}$.蓋兩骰一擲而合得二點之機率爲$\frac{1}{36}$;合得三點之機率爲$\frac{2}{36}$;合得四點之機率爲$\frac{3}{36}$.設以兩

骰一擲,至少合得五點爲成功;至多合得四點爲失敗,則失敗之機率,亦當爲各機率之和.

$$q=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}$$

$$=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

成功與失敗之總機率爲:

$$P+q=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1$$

綜觀上例,擲骰可得之點數,因各點組合之難易(即組合機會之多少),致發見之機率不等.其中最易實現者,即機率最大之一種,如兩骰合得七點是也.其中最難實現者,即機率最小之一種,如兩骰合得十二點及二點是也.至於得六,五,四,三點,及八,九,十,十一點之機率,均逐漸減少,故此項機率之分配,即可以正態曲線表示之.惟各項機率之大小,當單獨事件之成功與失敗機率相等時(即 $P=q$),即可利用二項展開式 (Binomial expansion) 求之,無須一一核算者也.

(三) 二項展開式

在複雜事件中,若成功與失敗之機會相等者,則各結果實現機會之大小,即可用二項展開式求之.例如用甲乙兩鎳幣,正面塗以黑漆,反面塗以白漆,同時投擲之,其發現之結果,不外下列四種:

	第一枚	第二枚
	(甲)	(乙)
第一種結果	黑	黑
第二種結果	黑	白
第三種結果	白	黑
第四種結果	白	白

若將上列四種結果縮併之,可得下列三個組合:

(1)二黑,其機率爲 $P_{2黑}=\frac{1}{4}$

(2)一黑一白(或一白一黑),其機率爲 $P_{一黑一白}=\frac{2}{4}$

(3)二白,其機率爲 $P_{2白}=\frac{1}{4}$

若以 P 字代表黑面,爲成功之機率;q 字代表白面,爲失敗之機率;則據二項定理得各組合之機率如下:

$$(P+q)^2=P^2+2Pq+q^2$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}$$

更用甲乙丙三鎳幣,正反面各塗以黑白漆,同時投擲之,其發現之結果,不外下列八種:

	第一枚	第二枚	第三枚
	(甲)	(乙)	(丙)
第一種結果	黑	黑	黑
第二種結果	黑	黑	白

第三種結果	黑	白	黑
第四種結果	白	黑	黑
第五種結果	白	白	黑
第六種結果	白	黑	白
第七種結果	黑	白	白
第八種結果	白	白	白

若將上列八種結果縮併之,可得下列四個組合:

(1)三黑,其機率 $P_{3黑}=\frac{1}{8}$

(2)二黑一白,其機率 $P_{2黑1白}=\frac{3}{8}$

(3)二白一黑,其機率 $P_{2白1黑}=\frac{3}{8}$

(4)三白,其機率 $P_{3白}=\frac{1}{8}$

若仍以 P 字代表黑面,為成功之機率;q 字代表白面,為失敗之機率;則據二項定理得各組合之機率如下:

$$(P+q)^3=P^3+3P^2q+3Pq^2+q^3$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}$$

依例如用甲乙丙丁四鎳幣,正反面亦各塗以黑白漆,同時投擲之,其發現之結果,可有十六種,各組合之機率如下:

$$(P+q)^4=P^4+4P^{4-1}q+\frac{4(4-1)}{1\cdot 2}P^{4-2}q^2$$

$$+\frac{4(4-1)(4-2)}{1\cdot 2\cdot 3}P^{4-3}q^3+q^4$$

$$=P^4+4P^3q+6P^2q^2+4Pq^3+q^4$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^4=\left(\frac{1}{2}\right)^4+4\left(\frac{1}{2}\right)^4+6\left(\frac{1}{2}\right)^4+4\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$=\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}$$

綜觀上述可知複事機率之大小,即可根據二項定理核計之.二項展開公式如下:

$$(P+q)^n=P^n+np^{n-1}q+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}P^{n-2}q^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}P^{n-3}q^3$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}P^{n-4}q^4+\cdots\cdots+q^n$$

觀上式$(P+q)^n$展開式中,各項係數卽可用下列之組合公式求之:

設${}_nC_r$爲n物件中每r個組合之方法.

n爲物件數.(在擲骰試驗中,卽示骰子數.)

r爲組合數.

$r!$爲$1\times2\times3\times\cdots\cdots\times r$之積.

$${}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}{r!}\cdots\cdots(\text{公式四十七})$$

玆將各物件在展開式中,求得各項係數如下:

物件數	各項係數		
一	1	1	
二	1	2	1

三	1	3	3	1							
四	1	4	6	4	1						
五	1	5	10	10	5	1					
六	1	6	15	20	15	6	1				
七	1	7	21	35	35	21	7	1			
八	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
九	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
十	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

若 n 爲五,卽查第五排,得各項係數如下:

1 5 10 10 5 1

若 n 爲八,卽查第八排,得各項係數如下:

1 8 28 56 70 56 28 8 1

n 種物件在 N 次試驗中,各種結果之或然次數,等於 $N(P+q)^n$ 展開式之各項,卽:

設 ${}_nC_r$ 爲 n 物件中每 r 個組合之方法.

N 爲試驗之次數.

n 爲物件數.

P 爲成功之機率.

q 爲失敗之機率.

$$N(P+q)^n = N(P^n + {}_nC_1P^{n-1}q + {}_nC_2P^{n-2}q^2 + {}_nC_3P^{n-3}q^3 + \cdots\cdots + {}_nC_{n-1}Pq^{n-1} + q^n) \cdots\cdots\cdots\text{(公式四十八)}$$

故若用鎳幣十枚,同時投擲,或鎳幣一枚,連擲十次,則在 1024 次之試驗中,得各項之機率如下:

表五十　鎳幣十枚投擲一〇二四次之機遇表

(計算機率表甲)

黑　白　面	理論次數	機　率
十黑面無白面	1	$\frac{1}{1024}=0.000977$
九黑面一白面	10	$\frac{10}{1024}=0.009766$
八黑面二白面	45	$\frac{45}{1024}=0.043945$
七黑面三白面	120	$\frac{120}{1024}=0.117187$
六黑面四白面	210	$\frac{210}{1024}=0.205078$
五黑面五白面	252	$\frac{252}{1024}=0.246094$
四黑面六白面	210	$\frac{210}{1024}=0.205078$
三黑面七白面	120	$\frac{120}{1024}=0.117187$
二黑面八白面	45	$\frac{45}{1024}=0.043945$
一黑面九白面	10	$\frac{10}{1024}=0.009766$
無黑面十白面	1	$\frac{1}{1024}=0.000977$
總　計	1,024	1.000000

表中理論次數及機率,即根據公式四十八核算而得,茲演算之如下:

(1)各項機率:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{10}=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+10\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+45\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+120\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$+210\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+252\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+210\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$+120\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+45\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+10\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$=\frac{1}{1024}+\frac{10}{1024}+\frac{45}{1024}+\frac{120}{1024}+\frac{210}{1024}+\frac{252}{1024}$$

$$+\frac{210}{1024}+\frac{120}{1024}+\frac{45}{1024}+\frac{10}{1024}+\frac{1}{1024}$$

(2)各項理論次數:

$$1024\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{10}=1024\times\left(\frac{1}{1024}+\frac{10}{1024}+\frac{45}{1024}+\frac{120}{1024}\right.$$

$$+\frac{210}{1024}+\frac{252}{1024}+\frac{210}{1024}+\frac{120}{1024}+\frac{45}{1024}$$

$$\left.+\frac{10}{1024}+\frac{1}{1024}\right)$$

$$=1+10+45+120+210+252+210+120$$

$$+45+10+1$$

(四) 機率之實驗

維爾頓氏 (W. F. R. Weldon) 嘗取骰子十二粒作一試驗,以得一,二,三點各面爲失敗,四,五,六點各面爲成功,共擲 4096 次,其實際次數之分配如下表第二列.因擲骰一枚,得一,二,三點之機會,與得四,五,六點之機會相等(各爲$\frac{1}{2}$),故卽可用二項展開式核計各項之理論次數(Theoretical frequencies) 如下:

$$4096\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{12}=4096\times\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{12}+12\left(\frac{1}{2}\right)^{12}+66\left(\frac{1}{2}\right)^{12}\right.$$

$$+220\left(\frac{1}{2}\right)^{12}+495\left(\frac{1}{2}\right)^{12}+792\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$$

$$+924\left(\frac{1}{2}\right)^{12}+792\left(\frac{1}{2}\right)^{12}+495\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$$

$$+220\left(\frac{1}{2}\right)^{12}+66\left(\frac{1}{2}\right)^{12}+12\left(\frac{1}{2}\right)^{12}+\left(\frac{1}{2}\right)^{12}\Bigg]$$

$$=1+12+66+220+495+792+924+792+495$$

$$+220+66+12+1$$

表五十一　擲骰試驗中實際次數與理論次數比較表

（計算機率表乙）

得四,五,六點各面骰子數	實際次數	理論次數
0	0	1
1	7	12
2	60	66
3	198	220
4	430	495
5	731	792
6	948	924
7	847	792
8	536	495
9	257	220
10	71	66
11	11	12
12	0	1
總計	4,096	4,096

實際分配之算術平均數爲6.139,標準差爲1.712.至於理論分配之算術平均數(亦稱成功平均數 Mean number of successes) 及標準差(亦稱成功標準差 Standard deviation of successes),卽可用下列兩公式求之:

設 M 爲算術平均數.

σ 爲標準差.

n 爲物件數.

P 爲成功之機率.

q 爲失敗之機率.

$$M=nP \quad \cdots\cdots(\text{公式四十九})$$

$$\sigma=\sqrt{nPq} \quad \cdots\cdots(\text{公式五十})$$

茲卽將前例擲骰試驗中,依上列兩公式計得成功平均數及標準差如下:

應用式四十九

$$M=12\times\frac{1}{2}=6.000$$

應用公式五十

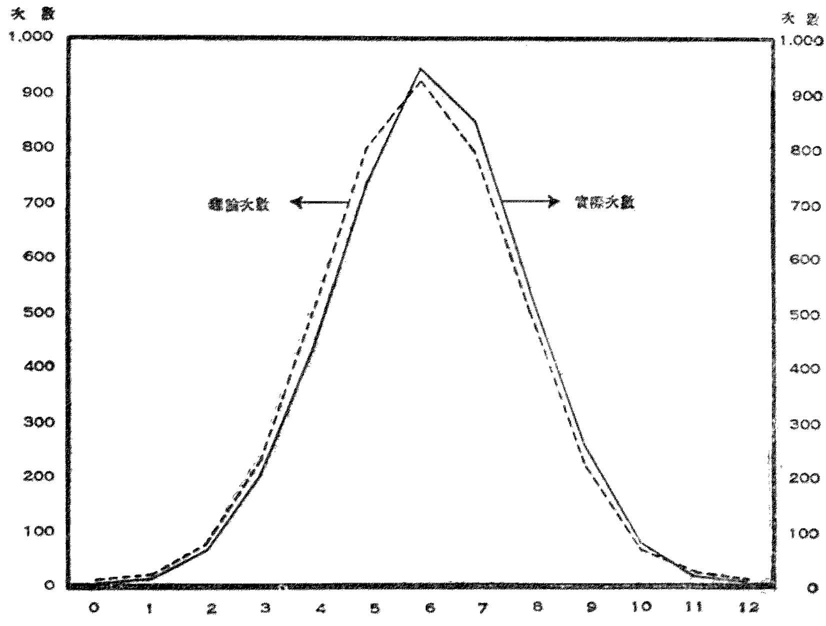
$$\sigma=\sqrt{12\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{3}=1.732$$

茲更以實際次數曲線與理論次數曲線疊繪於一圖,以覘二者之差異.設擲骰次數增加(卽 N 增大),則實際次數曲線愈能迫近理論次數曲線.設投擲骰數增加(卽

n 增大),則曲線之角度愈多,愈近於圓滑.如骰數爲無限大,則所成圖形,即爲一正態曲線.

圖四十四 擲骰試驗中實際次數與理論次數比較圖



(測驗機率圖)

第二節 正態曲線之繪法

在幾何學中,將多角形繪於一圓周之內,角數愈多,距圓周愈近;角數愈少,距圓周愈遠.圖四十四,乃以十二骰同時投擲4096次之結果繪示者,故僅有十二角.如以十五骰同時投擲之結果繪示之,當有十五角.故曲線之角數,與投擲之骰數

成正比例.骰數愈多,則表示 $(P+q)^n$ 展開之圖形,角數愈多,愈近於圓滑.若 n 爲無限大,則所繪圖形,卽成正態曲線.

正態曲線之繪製,如以二項展開式計算,則不勝其繁,故另有種種方程式核算之,其中最普通者,則如公式五十一及五十三如下:

設 y 爲橫基線上除平均數所在點外,某點向上引出縱線之高度.

y_o 爲橫基線上平均數所在點向上引出最高縱線之高度.(y_o 卽正態曲線下,最高縱線之高度.)

σ 爲標準差.

e 爲納氏對數之底數 (The base of Napierian logarithms), 等於 2.7182818.

x 爲以標準差爲單位之各變量與其算術平均數之差.

N 爲次數之總數.

π 爲 3.1416.

$$y=y_oe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \text{………………………………(公式五十一)}$$

(上式證明請參閱鮑來著統計學第二六四頁. A. L. Bowley: Elements of Statistics, p. 264.)

惟正態曲線下最高縱線之高度(y_o)可以下式求之:

$$y_o=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}=\frac{N}{\sigma\, 2.506628} \text{………………………(公式五十二)}$$

(上式證明請參閱鮑來著統計學第二六四頁.)

故公式五十一可改寫如下:

$$y=\frac{N}{\sigma 2.506628}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式五十三)}$$

惟用公式五十三核算正態曲線下各縱線之高度,猶覺繁瑣.蓋公式中 $e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}=2.7182818^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ 一分數,計算非易.故統計學家就 y 與 y_o 間之關係:

$$y=y_o e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{y}{y_o}=e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}=2.7182818^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

假定 x (即以標準差表示之離中差 $\frac{d}{\sigma}$)爲若干,作成一表,如附表四.利用此表,由橫基線上算術平均數所在點左或右任何一點引出之縱線高度,相當於最高縱線 y_o 之分數,可以一查即得.蓋正態曲線下,各縱線(除最高縱線外)之高度,常爲最高縱線 y_o 之分數,且視距離 y_o 之遠近,而有一定之比例.例如 x 爲 1.5σ,則由此點引出之縱線高度,等於 $0.32465y_o$,其算法如下:

$$\begin{aligned}
y&=y_o e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\\
&=y_o 2.7182818^{-\frac{(1.5\sigma)^2}{2\sigma^2}}\\
&=y_o 2.7182818^{-\frac{2.25\sigma^2}{2\sigma^2}}\\
&=y_o 2.7182818^{-1.125}\\
&=y_o\frac{1}{(2.7182818)^{1.125}}\\
&=y_o\frac{1}{3.0802}\\
&=y_o 0.32465
\end{aligned}$$

$$\frac{y}{y_o}=0.32465$$

查 0.32465 即附表四中 $\frac{x}{\sigma}=1.5$（即 $x=1.5\sigma$）時，$\frac{y}{y_o}$ 之分數爲 0.32465. 故有此表，在核算各點之縱高度時，即可避免繁重之計算工作. 茲將簡單次數曲線圖配合一正態曲線之步驟，述之如下：

(一)以實際次數繪製一簡單次數曲線圖.

(二)以簡單次數曲線圖中，算術平均數所在點向上引伸，爲正態曲線之中心點.（此點爲 0σ，因各變量與此算術平均數之差 d，等於零，故 $x=0\sigma$.）

(三)沿橫基線上算術平均數所在點，左右各置若干以標準差爲單位之相等距離. 如 $0.01\sigma, 0.02\sigma, 0.03\sigma$；或 $0.1\sigma, 0.2\sigma, 0.3\sigma$；或 $1\sigma, 2\sigma, 3\sigma$ 等. 距離分得愈小，則配合之正態曲線愈爲圓滑.

(四)按 $y_o=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}=\frac{N}{\sigma 2.506628}$ 之公式求 y_o.

(五)將算術平均數所在點豎立之縱線，其高度等於 y_o 之數值.

(六)計算各項以標準差爲單位之離中差得 x，然後就附表四中，一一查出 $\frac{x}{\sigma}$ 相當 $\frac{y}{y_o}$ 之分數.

(七)將 $\frac{y}{y_o}$ 之分數乘 y_o，得各項理論次數 f_c.

(八)將第七步所得之理論次數爲縱坐標，x 爲橫坐標，繪定各點於圖上. 並聯綴各點，即成正態曲線.

茲以大不列顛島 8585 成年男子之體高爲例. 先計其算術平均數及標準差，如表五十二，得平均體高爲 67.52 吋，標準差爲

2.572吋.更依上列步驟核計正態曲線之縱坐標(即理論次數),如表五十三.末將實際次數曲線及理論次數曲線(即正態曲線)比較之,如圖四十五.

表五十二　大不列巔島八五八五成年男子體高分配表

(計算算術平均數及標準差表)

體高(單位 吋)	中值 m	次數 f	$M'=67.5$ d'	fd'	fd'^2
57—57.99	57.5	2	—10	—20	200
58—58.99	58.5	4	—9	—36	324
59—59.99	59.5	14	—8	—112	896
60—60.99	60.5	41	—7	—287	2,009
61—61.99	61.5	83	—6	—498	2,988
62—62.99	62.5	169	—5	—845	4,225
63—63.99	63.5	394	—4	—1,576	6,304
64—64.99	64.5	669	—3	—2,007	6,021
65—65.99	65.5	990	—2	—1,980	3,960
66—66.99	66.5	1,223	—1	—1,223	1,223
67—67.99	67.5	1,329	0	0	0
68—68.99	68.5	1,230	1	1,230	1,230
69—69.99	69.5	1,063	2	2,126	4,252
70—70.99	70.5	646	3	1,938	5,814
71—71.99	71.5	392	4	1,568	6,272
72—72.99	72.5	202	5	1,010	5,050
73—73.99	73.5	79	6	474	2,844
74—74.99	74.5	32	7	224	1,568
75—75.99	75.5	16	8	128	1,024
76—76.99	76.5	5	9	45	405
77—77.99	77.5	2	10	20	200
總計		8,585		179	56,809

$$M=67.5+\frac{179}{8,585}=67.52\text{ 吋}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{56,809}{8,585}-\left(\frac{179}{8,585}\right)^2}=\sqrt{6.6172-.0004}$$

$$=\sqrt{6.6168}=2.572\text{ 吋}$$

表五十三　大不列顛島八五八五成年男子體高分配表

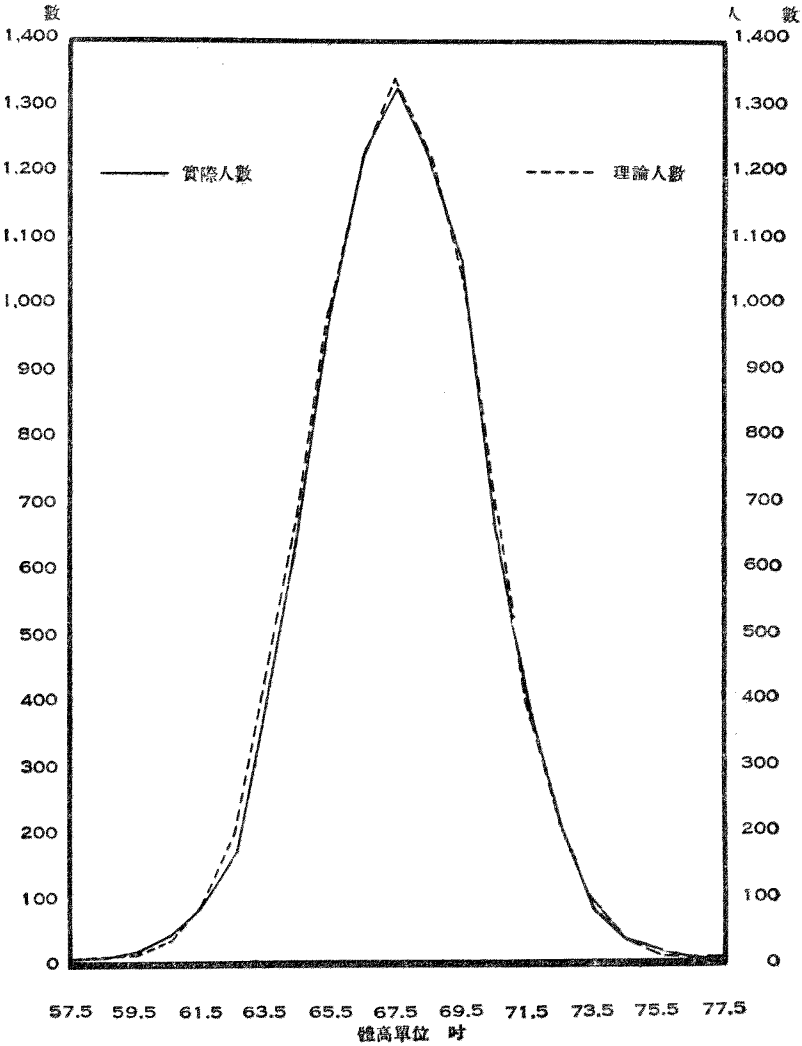
（計算理論次數表）

體高中值 m	與算術平均數之差	$\frac{x}{\sigma}$	$\frac{y}{y_0}$	理論次數（縱坐標）f_c	實際次數 f
57.5吋	—10.02	—3.90	0.00050	1	2
58.5吋	—9.02	—3.51	0.00217	3	4
59.5吋	—8.02	—3.12	0.00769	10	14
60.5吋	—7.02	—2.73	0.02408	32	41
61.5吋	—6.02	—2.34	0.06471	86	83
62.5吋	—5.02	—1.95	0.14939	199	169
63.5吋	—4.02	—1.56	0.29618	394	394
64.5吋	—3.02	—1.17	0.50437	671	669
65.5吋	—2.02	—.78	0.73769	982	990
66.5吋	—1.02	—.40	0.92312	1,229	1,223
67.5吋	—.02	—.01	0.99995	1,331	1,329
68.5吋	.98	.38	0.93024	1,238	1,230
69.5吋	1.98	.77	0.74342	990	1,063
70.5吋	2.98	1.16	0.51027	679	646
71.5吋	3.98	1.55	0.30082	400	392
72.5吋	4.98	1.94	0.15232	203	202
73.5吋	5.98	2.33	0.06624	88	79
74.5吋	6.98	2.71	0.02542	34	32
75.5吋	7.98	3.10	0.00819	11	16
76.5吋	8.98	3.49	0.00221	3	5
77.5吋	9.98	3.88	0.00054	1	2
總計				8,585	8,585

應用公式五十二

$$y_o=\frac{8,585}{2.572\times2.506628}=1,331.4$$

圖四十五　大不列顛島八五八五成年男子體高正態分配圖



（正態曲線圖）

第三節　正態曲線下之面積

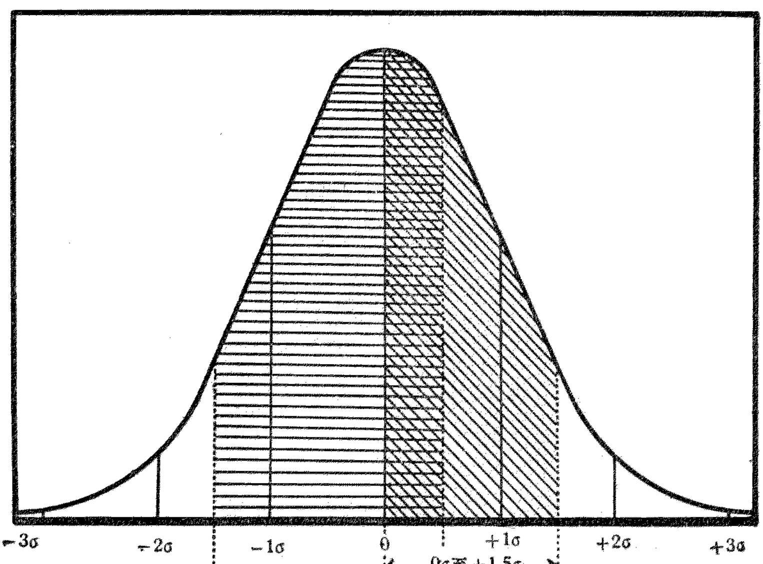
正態曲線之兩端,依數理上推測之,蔓延靡盡,不與橫基線相交者也.正態曲線下之面積,以此似無核計之可能.然在實際上,曲線兩端引伸至相當地位後,所佔面積,已達 99.8% 或 99.9%,所缺 0.1% 在全部面積中佔極小數,可不必加以注意.

正態曲線下以全部面積,代表次數之總數,故知某部面積之百分數,卽可知其包含次數爲若干.各部面積,可由附表五中查核.該表假定正態曲線下之全部面積等於一,並以標準差爲單位,將正態曲線下最高縱線 y_o 左右之面積,分作若干部份,視各縱線 (y) 離此最高縱線 (y_o) 之遠近,(卽各縱線點在橫基線上,離算術平均數點之遠近.)載明各部面積佔全面積之百分數.例如離平均數在 1σ 間之面積,卽於表中載明,佔全面積百分之34.134,離平均數在 2.5σ 間之面積爲49.379%,離平均數 3σ 間之面積爲 49.865%,離平均數 5σ 間之面積爲 49.99997%;惟表中不以百分而以分數(如 34.134% 書作 0.34134)表明者也.

正態曲線之左右兩邊,完全對稱,故表中所載分數,正負均可適用.例如從 y_o(卽由算術平均數向上引出之最高縱線)至 $+1.5\sigma$ 距離間之面積,應佔全體面積百分之 43.319.反之,由 y_o 至 -1.5σ 距離間之面積,亦佔全體面積百分之

43.319.至於 $+0.5\sigma$ 至 -1.5σ 間之面積究佔若干?則可先查 y_0 至 $+0.5\sigma$ 間之分數爲 0.19146;次查 y_0 至 -1.5σ 間之分數爲 0.43319;兩者之和 $0.19146+0.43319=0.62465$,即知 $+0.5\sigma$ 至 -1.5σ 間之面積,佔全體面積百分之 62.465(如圖四十六).核算此種正態曲線下之面積時應加注意者,即距 y_0 之標準差距,切不可先加或先減而後查表.蓋距 y_0 愈遠,面積愈小,若將 $+0.5\sigma$ 與 -1.5σ 先加(得 $+2\sigma$)而後查表,所得分數 0.47725,小於 0.62465 也.

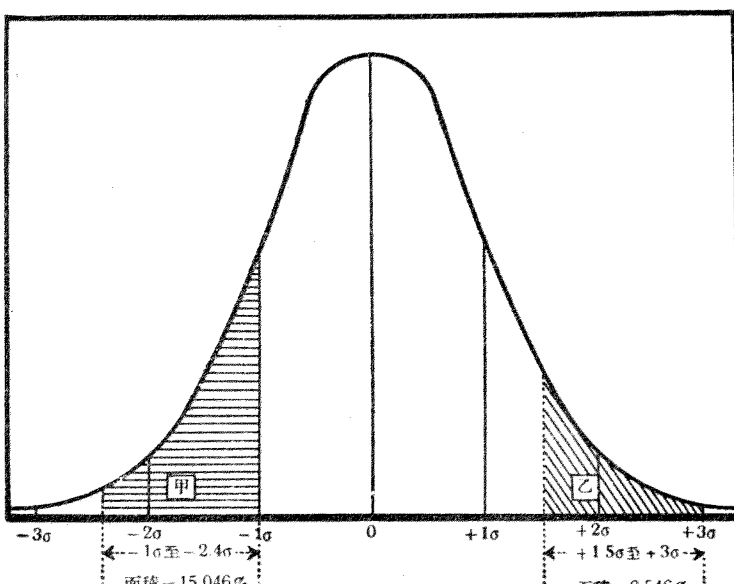
圖四十六　正態曲線下之面積圖甲



(核算正態曲線下之面積圖甲)

若問 -1σ 至 -2.4σ 間之面積,佔全體面積之百分數為若干?即可先查 y_0 至 -2.4σ 間之分數為0.49180,次查 y_0 至 -1σ 間之分數為0.34134;兩者之差 $0.49180-0.34134=0.15046=15.046\%$,即 -1σ 至 -2.4σ 間之面積,佔全體面積之百分比也(如圖四十七甲部).反之,若問 $+1.5\sigma$ 至 $+3\sigma$ 間之面積,佔全體面積百分之幾?即可先查 y_0 至 $+3\sigma$ 間之分數為 0.49865,次查 y_0 至 $+1.5\sigma$ 間之分數為0.43319;兩者之差 $0.49865-0.43319=0.06546=6.546\%$,即 $+1.5\sigma$ 至 $+3\sigma$ 間之面積,佔全體面積之百分比也(如圖四十七乙部).

圖四十七　正態曲線下之面積圖乙



(核算正態曲線下之面積圖乙)

第四節 取樣標準誤之測定

社會現象,雖不能盡以正態配合,然其大半,俱屬正態之分佈.設如前例,大不列巔島 8585 成年男子體高之分配,其實際次數之分配曲線,與配合之正態曲線極相近似.惟有數點,差異極顯,此項差異究受取樣之影響乎?抑成年男子體高之分配本非正態乎?二者之中,必居其一.如差異之原因係受取樣之影響所致者,則增加調查人數,差異自可減小.如事實分佈根本非正態者,則不當以正態曲線配合之.惟欲知差異程度之大小,及差異之原因究屬前者抑屬後者?吾人即可根據實際次數與理論次數間測定之標準誤(Standard error of sampling)以判斷之.然欲從事實際次數與理論次數之比較,必先有較精確之理論次數,而精確之理論次數,則須按正態曲線下之面積核計之.茲仍以大不列巔島 8585 成年男子體高之分配為例,求得較精確之理論次數如下:

表五十四 大不列巔島八五八五成年男子體高分配表

(計算精確之理論次數表)

組限	與算術平均數之差	$\frac{x}{\sigma}$	y_0 與 $\frac{x}{\sigma}$ 兩縱線間之面積佔全體面積之百分比	y_0 與 $\frac{x}{\sigma}$ 兩縱線間之次數	理論次數	
					分組	次數
57吋	—10.52	—4.09	0.49998	4292.3		
58吋	—9.52	—3.70	0.49990	4291.6	57—57.99	1
59吋	—8.52	—3.31	0.49953	4288.5	58—58.99	3

60吋	—7.52	—2.92	0.49825	4277.5	59—59.99	11
61吋	—6.52	—2.53	0.49430	4243.6	60—60.99	34
62吋	—5.52	—2.15	0.48422	4157.0	61—61.99	87
63吋	—4.52	—1.76	0.46080	3956.0	62—62.99	201
64吋	—3.52	—1.37	0.41466	3559.9	63—63.99	396
65吋	—2.52	—0.98	0.33646	2888.5	64—64.99	671
66吋	—1.52	—0.59	0.22240	1909.3	65—65.99	979
67吋	—0.52	—0.20	0.07926	680.4	66—66.99	1229
68吋	0.48	.19	0.07535	646.9	67—67.99	1327
69吋	1.48	0.58	0.21904	1880.5	68—68.99	1234
70吋	2.48	0.97	0.33398	2867.2	69—69.99	987
71吋	3.48	1.35	0.41149	3532.6	70—70.99	665
72吋	4.48	1.74	0.45907	3941.1	71—71.99	409
73吋	5.48	2.13	0.48341	4150.1	72—72.99	209
74吋	6.48	2.52	0.49413	4242.1	73—73.99	92
75吋	7.48	2.91	0.49819	4277.0	74—74.99	35
76吋	8.48	3.30	0.49952	4288.4	75—75.99	11
77吋	9.48	3.69	0.49989	4291.6	76—76.99	3
78吋	10.48	4.07	0.49998	4292.3	77—77.99	1
總計						8585

較精確之理論次數求得後,卽可就實際次數與理論次數相差最大之數點,計算其取樣標準誤.惟一事成敗之機率已求得時,其標準誤卽可依公式五十($\sigma=\sqrt{NPq}$)求之.然公式中P表示成功之機率,在次數分配中,可以$\frac{f_c}{N}$代表之.(f_c卽示正態線下,由某一點向上所引縱線之高度,亦卽該點之理論次數.N爲次數之總數.)q表示失敗之機率,在次數分配

中,可以$\frac{N-f_c}{N}$代表之.故取樣標準誤之公式,可改寫如下:

設σ_s為取樣標準誤.

N為次數之總數.

f_c為正態曲線下某點之理論次數.

$$\sigma_s=\sqrt{N\times\frac{f_c}{N}\times\frac{N-f_c}{N}}$$

$$=\sqrt{\frac{f_c(N-f_c)}{N}}\text{……………………(公式五十四)}$$

上例理論次數與實際次數相差最大者,有下列二組:

體高	中值	實際次數 f	理論次數 f_c	差數 $f-f_c$
62吋－62.99吋	62.5	169	201	－32
69吋－69.99吋	69.5	1,063	987	76

應用公式五十四

中值 62.5 吋一組之取樣標準誤為:

$$\sigma_s=\sqrt{\frac{201\times(8585-201)}{8585}}$$

$$=\sqrt{201-4.71}$$

$$=14.01$$

中值 69.5 吋一組之取樣標準誤為:

$$\sigma_s=\sqrt{\frac{987\times(8585-987)}{8585}}$$

$$=\sqrt{987-113.47}$$

$$=29.56$$

取樣標準誤既經求得,錯誤之由於取樣或配合曲線之失當者,即可判別之.如理論次數與實際次數之差,小於三倍取樣標準誤之數值者,則此錯誤由於取樣之失當,可慎選或增取樣本解決之.若理論次數與實際次數之差,大於三倍取樣標準誤之數值,則此錯誤必非由於取樣之變動,而爲正態曲線配合之失當所致.本例62吋至62.99吋一組之理論次數爲 201, 實際次數爲 169, 兩者之差爲32吋,較三倍取樣標準誤 $14.01 \times 3 = 42.03$ 爲小.又69吋至69.99吋一組之理論次數爲987, 實際次數爲 1,063, 兩者之差爲 76, 較三倍取樣標準誤 $29.56 \times 3 = 88.68$ 爲小.故本例錯誤,斷爲取樣失當所致.若增選樣本,嚴密編審,其次數分配,定與正態分配近似者也.

取樣標準誤除能決定錯誤之原因外,更可測定實際次數與理論次數相差若干之機會率.例如62吋至62.99吋一組,理論次數與其實際次數之差爲 -32,而取樣標準誤爲14.01,則相差之數等於 σ_s 之 2.28 倍,查附表五 $\frac{x}{\sigma}=2.28$ 時,其面積等於48.870%,在 $\pm 2.28\ \sigma_s$ 兩縱線間之次數應佔總次數百分之97.740.換言之實際次數(169)與理論次數間,相差 -32 之機會,僅百分之二强.故吾人可斷言此項差異係受取樣之影響,而非其他之影響.至於69吋至69.99吋一組,理論次數與實際次數之差爲76,取樣標準誤爲29.56,則相差之數,等於 σ_s 之 2.57 倍,查附表五 $\frac{x}{\sigma}=2.57$ 時,其面積等於49.492%,在 $\pm 2.57\ \sigma_s$ 兩縱線間之次數應佔總次數百分之98.984.換言之實際次數(1,063)

與理論次數間相差76之機會,僅百分之一强.故大不列巔島成年男子體高之分配,定爲正態曲線,其差異之原因,全由取樣不當所致.

第五節 學生成績之分配

敎員評分,有用等級制者,如分學生成績爲A,B,C,D,E或最優,優,中,下,劣或甲,乙,丙,丁,戊等若干等級者.其評定之方法,亦多依據正態曲線之理論.蓋測驗人數甚多,其成績分配必近正態;成績最優者,人數必少;成績最劣者亦必極少;不優不劣之中庸成績,必佔多數.例以甲,乙,丙,丁,戊爲分數等級,代表一級學生不齊之成績,其最優者爲甲等,最劣者爲戊等,介乎甲與戊等間之丙等,乃爲中級,學生應佔最多數,乙丁等次之,甲戊等又次之.苟事實不受他種非常原因之影響,其成績之分配,定必如此.至欲核算各等成績分配之成份,卽可依據正態曲線下各部面積之大小計算之.卽如某師評分共分五級,則在橫基線上算術平均數所在點(卽y_o之出發點),左右$\pm 3\sigma$之距離劃分爲五區,每區在橫軸上相距$\frac{6}{5}=1.2\sigma$.然後檢閱附表五卽得各部面積如下:

正態曲線下甲部面積之大小,卽示甲等學生佔全體學生之百分比:

-3.0σ至y_o間之面積爲	49.87%
-1.8σ至y_o間之面積爲	46.41%

-3.0σ 至 -1.8σ 間之面積爲　$\underline{3.46\%}$

正態曲線下乙部面積之大小,即示乙等學生佔全體學生之百分比:

-1.8σ 至 y_0 間之面積爲　46.41%

-0.6σ 至 y_0 間之面積爲　$\underline{22.57\%}$

-1.8σ 至 -0.6σ 間之面積爲　$\underline{23.84\%}$

正態曲線下丙部面積之大小,即示丙等學生佔全體學生之百分比:

-0.6σ 至 y_0 間之面積爲　22.57%

$+0.6\sigma$ 至 y_0 間之面積爲　$\underline{22.57\%}$

-0.6σ 至 $+0.6\sigma$ 間之面積爲　$\underline{45.14\%}$

正態曲線下丁部面積之大小,即示丁等學生佔全體學生之百分比:

$+1.8\sigma$ 至 y_0 間之面積爲　46.41%

$+0.6\sigma$ 至 y_0 間之面積爲　$\underline{22.57\%}$

$+1.8\sigma$ 至 $+0.6\sigma$ 間之面積爲　$\underline{23.84\%}$

正態曲線下戊部面積之大小,即示戊等學生佔全體學生之百分比:

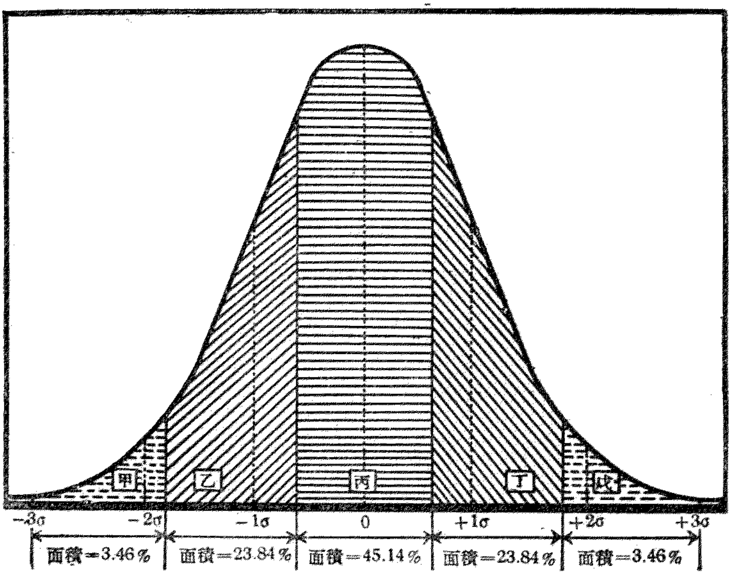
$+3.0\sigma$ 至 y_0 間之面積爲　49.87%

$+1.8\sigma$ 至 y_0 間之面積爲　$\underline{46.41\%}$

$+3.0\sigma$ 至 $+1.8\sigma$ 間之面積爲　$\underline{3.46\%}$

玆將正態曲線下各部面積繪示之如下:

圖四十八 學生成績分配圖



(核算正態曲線下之面積丙圖)

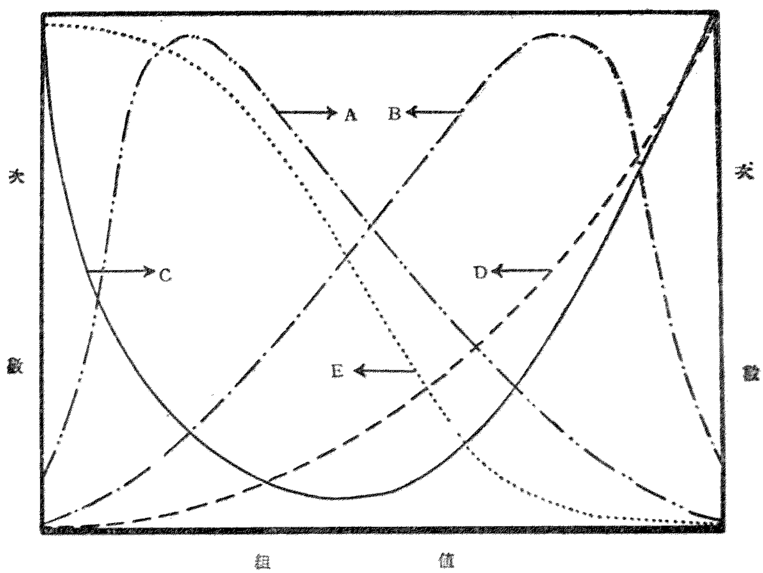
第六節 偏態之意義

表示事實之集中傾向者,爲平均數.表示事實之離中趨勢者,爲離中差及離中係數.表示次數之正常分配者,爲正態曲線,前文言之已詳.然次數之分配,有右傾者,有左傾者,既不能配以正態曲線,又不能藉平均數,離中差及離中係數等,以窺其全豹.偏態(Skewness)及偏態係數(Coefficient of skewness),乃卽測定中心數值兩旁次數分配對稱或不對稱之狀態者也.

偏斜之測定,如用原有單位表示者,謂之偏態.如欲比較兩種事實偏斜之程度,則應化絕對偏態為相對偏態,化度量數字為抽象數目,即所謂偏態係數是也.在次數分配完全對稱之數列中,算術平均數,中位數及衆數俱合於一點,偏態及偏態係數俱等於零,即示無偏態.若次數之分配不對稱而呈左傾(即向左偏斜)或右傾(即向右偏斜)者,則三者分而為三,其數值之大小,即足影響偏態之方向與數量.故偏態者亦即測定偏向及偏斜程度者也.

偏態之形式不一:有右傾者,如圖四十九 A 線.有左傾者,

圖四十九　各種偏態之形式圖



(偏態之形式圖)

如圖四十九B線.有成「U」字形者,如圖四十九C線.有成「J」字形者,如圖四十九D線.有成倒「J」字形者,如圖四十九E線,至不一律.其測定之方法得於下節中述之.

第七節 偏態係數之測定

偏態之測定,正與離中差及離中係數之測定相同,亦有偏態與偏態係數之分.惟離中係數爲離中差與平均數之比,而偏態係數則爲偏態與離中差之比.蓋偏態所以表示離中差分配之情形,故計算係數時,所用分母當爲離中差而非平均數.茲擇測定偏態最普通之二法,分述之於下:

(一) 皮爾生公式

皮氏方法係利用算術平均數,中位數及衆數三者之差異,爲測定偏態係數之標準.蓋次數分配完全對稱者,算術平均數等於中位數,中位數等於衆數.若次數分配曲線略向右傾,則算術平均數因常在重心處受極端變量之影響而向右移動甚多;中位數祇受次數多少之影響而向右移動較少.反之,若次數分配曲線略向左傾,則算術平均數與中位數亦均向左移動,其移動之程度,算術平均數亦較甚於中位數.至於衆數,則不論次數分配曲線之向右或向左偏斜,均能維持其原有位置,茲特設例示之如下:

表五十五　某校甲乙丙三級學生成績分配表

（表示次數分配對稱不對稱與平均數之關係表）

成績	中值	甲級	乙級	丙級
42.5—47.49	45			3
47.5—52.49	50			5
52.5—57.49	55	2		10
57.5—62.49	60	12	1	16
62.5—67.49	65	28	25	25
67.5—72.49	70	35	35	35
72.5—77.49	75	28	25	25
77.5—82.49	80	12	16	1
82.5—87.49	85	2	10	
87.5—92.49	90		5	
92.5—97.49	95		3	
總計		119	120	120

甲級學生成績（算術平均成績等於中位成績等於衆數成績）

$M=70$ 分　　　　$M_d=70$ 分

$M_o=70$ 分　　　　$M=M_d=M_o$

乙級學生成績（算術平均成績大於中位成績大於衆數成績）

$M=73.96$ 分　　　　$M_d=72.36$ 分

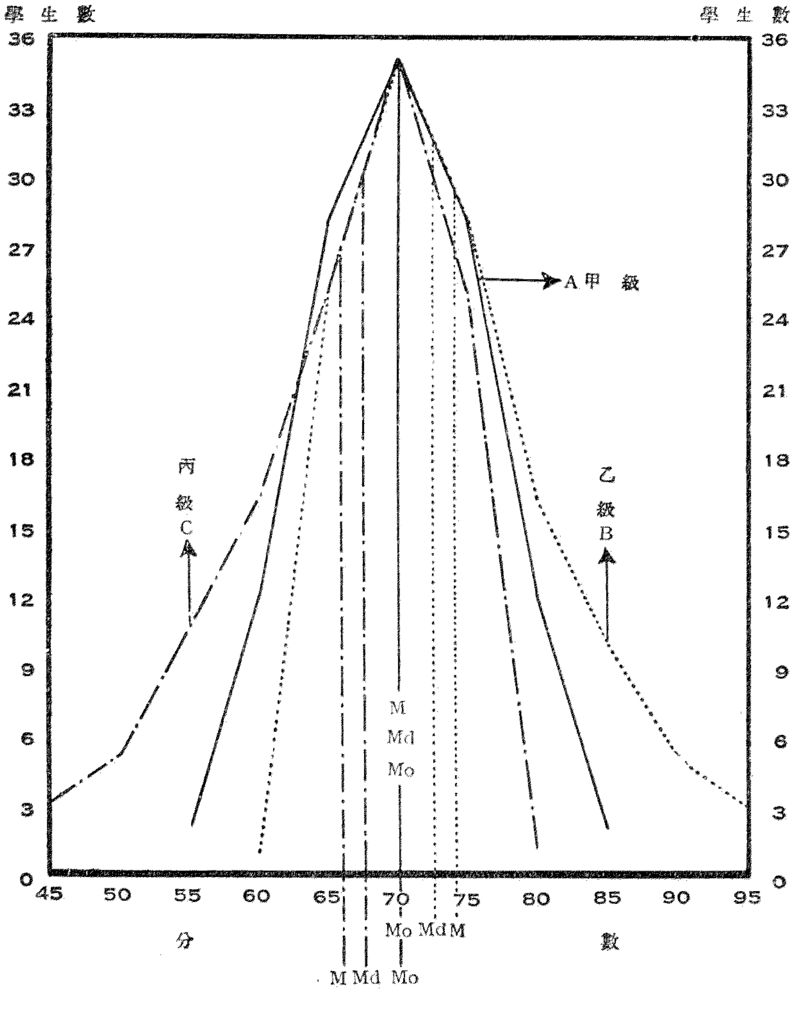
$M_o=70.00$ 分　　　　$M>M_d>M_o$

丙級學生成績（算術平均成績小於中位成績小於衆數成績）

$M=66.04$ 分　　　　$M_d=67.64$ 分

$M_o=70.00$ 分　　　　$M<M_d<M_o$

圖五十 某校甲乙丙三級學生成績分配圖



(次數分配對稱不對稱與平均數之關係圖)

觀上圖,可知次數分配曲線左右完全對稱時(如表示

甲級學生成績分配之A線),算術平均數,中位數及衆數同爲70分.若次數分配曲線向右偏斜時(如表示乙級學生成績分配之B線),算術平均數爲73.96分,大於中位數72.36分;中位數又大於衆數70分,此爲正偏態.如次數分配曲線向左偏斜時(如表示丙級學生成績分配之C線),算術平均數爲66.04分,小於中位數67.64分;中位數又小於衆數70分,此爲負偏態.皮爾生氏卽本算術平均數,中位數及衆數間之關係,定計算偏態及偏態係數之公式如下:

設sk爲偏態.

V_{sk}爲偏態係數.

M爲算術平均數.

M_o爲衆數.

σ爲標準差.

$$sk = M - M_o \quad \text{……(公式五十五)}$$

$$V_{sk} = \frac{M - M_o}{\sigma} \quad \text{……(公式五十六)}$$

惟衆數不易確定,故上列兩公式有時不能應用.然在偏斜不甚之數列中,根據皮爾生氏之實驗,中位數與算術平均數之差,約等於算術平均數與衆數之差之三分之一.故上列兩公式,可改書如下:

設sk爲偏態.

V_{sk}爲偏態係數.

M爲算術平均數.

M_d 爲中位數.

σ 爲標準差.

$$sk = M - [M - 3(M - M_d)]$$

$$= 3(M - M_d) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式五十七})$$

$$V_{sk} = \frac{M - [M - 3(M - M_d)]}{\sigma}$$

$$= \frac{3(M - M_d)}{\sigma} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式五十八})$$

表五十六　某銀行行員薪金分配表

（計算偏態及偏態係數表甲）

月　薪	中　値 m	人　數 f	$M'=77.5$ d''	fd''	fd''^2
\$40—\$44.9	\$42.5	3	—7	—21	147
45— 49.9	47.5	5	—6	—30	180
50— 54.9	52.5	8	—5	—40	200
55— 59.9	57.5	11	—4	—44	176
60— 64.9	62.5	14	—3	—42	126
65— 69.9	67.5	18	—2	—36	72
70— 74.9	72.5	22	—1	—22	22
75— 79.9	77.5	25	0	0	0
80— 84.9	82.5	30	1	30	30
85— 89.9	87.5	45	2	90	180
90— 94.9	92.5	68	3	204	612
95— 99.9	97.5	48	4	192	768
100—104.9	102.5	45	5	225	1,125
105—109.9	107.5	32	6	192	1,152
110—114.9	112.5	17	7	119	833
總　計		391		+817	5,623

$$M = 77.5 + \frac{817}{391} \times 5$$

$$= 77.5 + 10.45 = \$87.95$$

$$M_d = 90 + \frac{\frac{391}{2} - 181}{68} \times 5$$

$$= 90 + 1.07 = \$91.07$$

$$M_o = 90 + \frac{48}{45 + 48} \times 5$$

$$= 90 + 2.58 = \$92.58$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{5,623}{391} - \left(\frac{817}{391}\right)^2} \times 5$$

$$= \sqrt{14.3811 - 4.3681} \times 5$$

$$= \sqrt{10.0130} \times 5$$

$$= 3.16 \times 5 = \$15.80$$

$$V_\sigma = \frac{15.80}{87.95} = 0.180$$

應用公式五十五

$$sk = 87.95 - 92.58 = -\$4.630$$

應用公式五十六

$$V_{sk} = \frac{87.95 - 92.58}{15.80} = -0.293$$

應用公式五十七

$$sk = 3 \times (87.95 - 91.07) = -\$9.360$$

應用公式五十八

$$V_{sk} = \frac{3 \times (87.05 - 91.07)}{15.80} = -0.592$$

表五十七 某縣初級小學教員月薪分配表

(計算偏態及偏態係數表乙)

月薪	中值 m	教員數 f	$M'=28.5$ d''	fd''	fd''^2
\$9—\$11.9	10.5	8	—6	—48	288
12—14.9	13.5	25	—5	—125	625
15—17.9	16.5	41	—4	—164	656
18—20.9	19.5	63	—3	—189	567
21—23.9	22.5	28	—2	—56	112
24—26.9	25.5	25	—1	—25	25
27—29.9	28.5	18	0	0	0
30—32.9	31.5	15	1	15	15
33—35.9	34.5	10	2	20	40
36—38.9	37.5	8	3	24	72
39—41.9	40.5	5	4	20	80
42—44.9	43.5	3	5	15	75
45—47.9	46.5	1	6	6	36
總計		250		—507	2,591

$$M=28.5+\frac{-507}{250}\times 3$$

$$=28.5+(-6.08)=\$22.42$$

$$M_d=18+\frac{\frac{250}{2}-74}{63}\times 3$$

$$=18+2.43=\$20.43$$

$$M_o=18+\frac{28}{41+28}\times 3$$

$$=18+1.22=\$19.22$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{2,591}{250}-\left(\frac{-507}{250}\right)^2}\times 3$$

$$=\sqrt{10.3640-4.1128}\times 3$$

$$=\sqrt{6.2512}\times 3$$

$$=2.50\times 3=\$7.50$$

$$V_\sigma=\frac{7.50}{22.42}=0.335$$

應用公式五十五

$$sk=22.42-19.22=\$3.200$$

應用公式五十六

$$V_{sk}=\frac{22.42-19.22}{7.5}=0.427$$

應用公式五十七

$$sk=3\times(22.42-20.43)=\$5.970$$

應用公式五十八

$$V_{sk}=\frac{3\times(22.42-20.43)}{7.5}=0.796$$

綜觀前舉兩例,某銀行行員月薪之平均數及離中差雖大於某縣初級小學教員之月薪,然離中係數適得其反,行員月薪之離中係數爲0.180,小於小學教員月薪之離中係數(0.335).偏態及偏態係數亦然.銀行行員月薪之偏態(－\$4.630),似大於小學教員月薪之偏態(\$3.200),然若化成係數,因行員月薪之標準差,倍於教員月薪之標準差,致行員月薪之偏態係數(－0.293),反不若教員月薪偏態係數(0.427)之巨.更須注意者,卽行員月薪之

分配爲負偏態（即左偏偏態）;換言之,即衆數以下之次數多於以上之次數也.至於教員月薪之分配爲正偏態（即右偏偏態）;換言之,即衆數以上之次數多於以下之次數也.茲將行員及教員之平均數,標準差,標準差係數,偏態及偏態係數等,列表比較之如下:

	某銀行行員之月薪	某縣小學教員之月薪
M（算術平均數）	\$87.95	\$22.42
M_d（中位數）	\$91.07	\$20.43
M_o（衆數）	\$92.58	\$19.22
σ（標準差）	\$15.80	\$ 7·50
V_σ（標準差係數）	0.180	0.335
sk（偏態）	−\$4.630	+\$3.200
sk（推測之偏態）	−\$9.360	+\$5.970
V_{sk}（偏態係數）	−0.293	+0.427
V_{sk}（推測之偏態係數）	−0.592	+0.796

（二） 鮑來公式

鮑來氏(A. L. Bowley)計算偏態及偏態係數之方法,係利用第一及第三四分位數與中位數之關係,以測定之.蓋次數分配如屬完全對稱者,則中位數與第一四分位數之差,等於第三四分位數與中位數之差.若次數分配曲線向右偏斜,則第三四分位數因受偏量數之影響,向右移動甚多;中位數與第一四分位數因受影響較小,

向右移動甚微.反之,若次數分配曲線向左偏斜,則第一四分位數因受偏量數之影響,向左移動甚多;中位數與第三四分位數因受影響較小,向左移動甚微.茲更設例明之如下:

表五十八　甲乙丙三公司職員年齡分配表

(表示四分位數與中位數之關係表)

年齡	中值	甲公司	乙公司	丙公司
17—18.9	18			3
19—20.9	20			5
21—22.9	22	2		10
23—24.9	24	12	1	16
25—26.9	26	28	25	25
27—28.9	28	35	35	35
29—30.9	30	28	25	25
31—32.9	32	12	16	1
33—34.9	34	2	10	
35—36.9	36		5	
37—38.9	38		3	
總計		119	120	120

甲公司職員年齡之:

$$Q_1 = 25 + \frac{\frac{119}{4} - 14}{28} \times 2 = 26.12 \text{歲}$$

$$Q_3 = 29 + \frac{\frac{3 \times 119}{4} - 77}{28} \times 2 = 29.88 \text{歲}$$

$$M_d = 27 + \frac{\frac{119}{2} - 42}{35} \times 2 = 28.00 \text{ 歲}$$

$$Q_3 - M_d = 29.88 - 28.00 = 1.88 \text{ 歲}$$

$$M_d - Q_1 = 28.00 - 26.12 = 1.88 \text{ 歲}$$

故 $Q_3 - M_d = M_d - Q_1$

乙公司職員年齡之:

$$Q_1 = 27 + \frac{\frac{120}{4} - 26}{35} \times 2 = 27.23 \text{ 歲}$$

$$Q_3 = 31 + \frac{\frac{3 \times 120}{4} - 86}{16} \times 2 = 31.50 \text{ 歲}$$

$$M_d = 27 + \frac{\frac{120}{2} - 26}{35} \times 2 = 28.94 \text{ 歲}$$

$$Q_3 - M_d = 31.50 - 28.94 = 2.56 \text{ 歲}$$

$$M_d - Q_1 = 28.94 - 27.23 = 1.71 \text{ 歲}$$

故 $Q_3 - M_d > M_d - Q_1$

丙公司職員年齡之:

$$Q_1 = 23 + \frac{\frac{120}{4} - 18}{16} \times 2 = 24.50 \text{ 歲}$$

$$Q_3 = 27 + \frac{\frac{3 \times 120}{4} - 59}{35} \times 2 = 28.77 \text{ 歲}$$

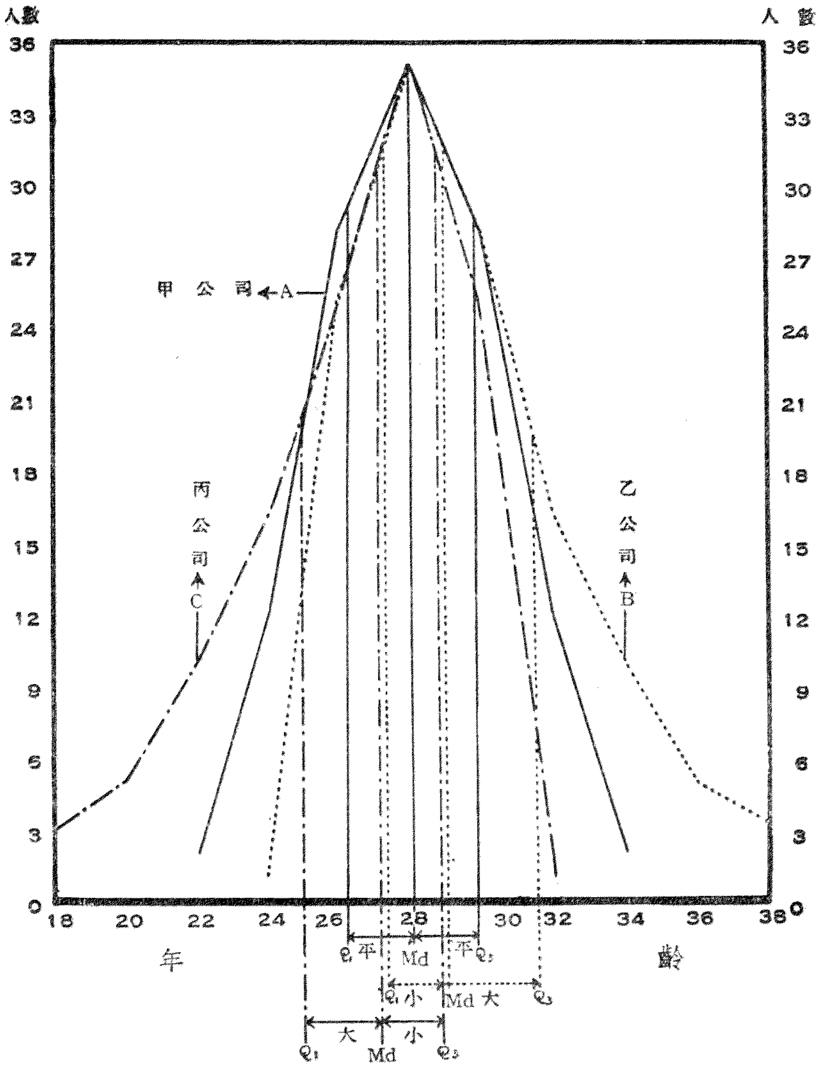
$$M_d = 27 + \frac{\frac{120}{2} - 59}{35} \times 2 = 27.06 \text{ 歲}$$

$$Q_3 - M_d = 28.77 - 27.06 = 1.71 \text{ 歲}$$

$$M_d - Q_1 = 27.06 - 24.50 = 2.56 \text{ 歲}$$

故 $Q_3 - M_d < M_d - Q_1$

圖五十一　甲乙丙三公司職員年齡分配圖



(四分位數與中位數之關係圖)

綜觀上圖,可知次數分配曲線左右完全對稱時(如表示甲公司職員年齡分配之 A 線),第三四分位數與中位數,及中位數與第一四分位數間之距離,完全相等(各爲 1.88 歲).如次數分配曲線向右偏斜時(如表示乙公司職員年齡分配之 B 線),則第三四分位數與中位數之距離(2.56 歲),大於中位數與第一四分位數之距離(1.71 歲).如次數分配曲線向左偏斜時(如表示丙公司職員年齡分配之 C 線),則第三四分位數與中位數之距離(1.71 歲),小於中位數與第一四分位數之距離(2.56 歲).鮑來氏即本此原則,定計算偏態及偏態係數之公式如下:

設 sk 爲偏態.

V_{sk} 爲偏態係數.

Q_1 爲第一四分位數.

Q_3 爲第三四分位數.

M_d 爲中位數.

$Q.D.$ 爲四分位差.

$$sk=(Q_3-M_d)-(M_d-Q_1)$$

$$=Q_3+Q_1-2M_d \qquad \text{(公式五十九)}$$

$$V_{sk}=\frac{(Q_3-M_d)-(M_d-Q_1)}{Q.D.}$$

$$=\frac{Q_3+Q_1-2M_d}{Q.D.} \qquad \text{(公式六十)}$$

茲仍用表五十七某銀行行員月薪之分配,及表五十八某縣小學教員月薪之分配,用鮑氏公式,核算偏態及偏態係數如下:

某銀行行員月薪之:

$$Q_1 = 75 + \frac{\frac{391}{4} - 81}{25} \times 5 = \$78.35$$

$$Q_3 = 95 + \frac{\frac{3 \times 391}{4} - 249}{48} \times 5 = \$99.61$$

$$M_d = 90 + \frac{\frac{391}{2} - 181}{68} \times 5 = \$91.07$$

$$Q.D. = \frac{99.61 - 78.35}{2} = \$10.63$$

$$V_{Q_2} = \frac{99.61 - 78.35}{99.61 + 78.35} = 0.119$$

應用公式五十九

$$sk = 99.61 + 78.35 - 2 \times 91.07 = -\$4.180$$

應用公式六十

$$V_{sk} = \frac{99.61 + 78.35 - 2 \times 91.07}{10.63} = -0.393$$

某縣小學教員月薪之:

$$Q_1 = 15 + \frac{\frac{250}{4} - 33}{41} \times 3 = \$17.16$$

$$Q_3 = 24 + \frac{\frac{3 \times 250}{4} - 165}{25} \times 3 = \$26.70$$

$$M_d = 18 + \frac{\frac{250}{2} - 74}{63} \times 3 = \$20.43$$

$$Q.D. = \frac{26.70 - 17.16}{2} = \$4.77$$

$$V_{Q_2} = \frac{26.70 - 17.16}{26.70 + 17.16} = 0.218$$

應用公式五十九

$$sk = 26.70 + 17.16 - 2 \times 20.43 = \$3.000$$

應用公式六十

$$V_{sk} = \frac{26.70 + 17.16 - 2 \times 20.43}{4.77} = 0.629$$

茲更將某銀行行員及某縣小學教員月薪之四分位數,中位數,四分位差,四分差係數,偏態及偏態係數等,列表比較之如下:

	某銀行行員之月薪	某縣小學教員之月薪
Q_1(第一四分位數)	\$78.35	\$17.16
Q_3(第三四分位數)	\$99.61	\$26.70
M_d(中位數)	\$91.07	\$20.43
$Q.D.$(四分位差)	\$10.63	\$4.77
V_{Q_2}(乙種四分差係數)	0.119	0.218
sk(偏態)	$-$\$4.180	$+$\$3.000
V_{sk}(偏態係數)	-0.393	$+0.629$

本章應用公式

(公式四十七)n 物件中每 r 個組合公式

$$_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}$$

（公式四十八）二項展開式

$$N(P+q)^n=N(P^n+{}_nC_1P^{n-1}q+{}_nC_2P^{n-2}q^2+{}_nC_3P^{n-3}q^3$$
$$+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}Pq^{n-1}+q^n)$$

（公式四十九）理論分配之算術平均數即成功平均數

$$M=nP$$

（公式五十）理論分配之標準差即成功標準差

$$\sigma=\sqrt{nPq}$$

（公式五十一）求正態曲線下各縱坐標公式甲

$$y=y_oe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

（公式五十二）求正態曲線下最高縱線高度公式

$$y_o=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}=\frac{N}{\sigma2.506628}$$

（公式五十三）求正態曲線下各縱坐標公式乙

$$y=\frac{N}{\sigma2.506628}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

（公式五十四）取樣標準課

$$\sigma_s=\sqrt{\frac{f_c(N-f_c)}{N}}$$

（公式五十五）皮氏偏態公式

$$sk=M-M_o$$

（公式五十六）皮氏偏態係數公式

$$V_{sk}=\frac{M-M_o}{\sigma}$$

（公式五十七）皮氏推測偏態公式

$$sk=3(M-M_d)$$

（公式五十八）皮氏推測偏態係數公式

$$V_{sk}=\frac{3(M-M_d)}{\sigma}$$

（公式五十九）鮑氏偏態公式

$$sk=Q_3+Q_1-2M_d$$

（公式六十）鮑氏偏態係數公式

$$V_{sk}=\frac{Q_3+Q_1-2M_d}{Q.D.}$$

問　題

1. 何謂正態?測定正態曲線之目的何在?

2. 單事機率與複事機率之區別何在?試舉例述之。

3. 試展開$(P+q)^{11}$。

4. 繪製正態曲線,及核算正態曲線下面積之步驟各如何?

5. 測定取樣標準誤之方法如何?試略述之。

6. 試述學生成績之分配應按正態曲線測定之理由.某教員如用A, B, C, D, E, F, G等七級評分,則各級應佔百分比各若干?

7. 何謂偏態?測定偏態之方法有幾?

8. 核算偏態係數之目的何在?步驟如何?試略述之。

習題二十一

試用表二十上海市市立初級小學學生年齡之分配,繪製以下各圖,並

核算下列諸數:

（1）繪製一簡單次數曲線圖。

（2）依據實際分配次數,核算理論次數,並配合一正態曲線。

（3）試核算 -1.5σ 與 -0.5σ, $+1.8\sigma$ 與 $+2.3\sigma$, -2.1σ 與 $+1.0\sigma$ 間之面積百分比及包含之理論次數。

（4）根據正態曲線下之面積,核算比較精確之理論次數。

（5）根據較精確之理論次數,核算取樣之標準誤,並解釋各差異之原因。

習題二十二

甲乙兩機關職員年齡分配表

年齡	中值	甲機關	乙機關
18歲—20.9歲	19.5歲	2	3
21歲—23.9歲	22.5歲	15	3
24歲—26.9歲	25.5歲	24	6
27歲—29.9歲	28.5歲	46	8
30歲—32.9歲	31.5歲	61	11
33歲—35.9歲	34.5歲	42	14
36歲—38.9歲	37.5歲	30	25
39歲—41.9歲	40.5歲	15	31
42歲—44.9歲	43.5歲	10	49
45歲—47.9歲	46.5歲	8	65
48歲—50.9歲	49.5歲	7	45
51歲—53.9歲	52.5歲	4	37
54歲—56.9歲	55.5歲	3	15
57歲—59.9歲	58.5歲	1	5
總計		268	317

（1）用皮爾生公式核算甲乙兩機關職員年齡之偏態。

（2）用皮爾生公式核算甲乙兩機關職員年齡之偏態係數。

（3） 用鮑來公式核算甲乙兩機關職員年齡之偏態.

（4） 用鮑來公式核算甲乙兩機關職員年齡之偏態係數.

（5） 試比較並說明甲乙兩機關職員年齡之偏態係數.

第八章　直線相關

第一節　相關之意義及種類

社會現象,參差紛紜,驟視之似各自生滅風馬牛不相及;然若詳爲分析,則其間常有因果關係之存在.例如幣值之漲落,影響物價之升降;雨量之多寡,影響農產品收穫量之豐歉;開發匯票額之巨細,影響承兌匯票額之大小;數學成績之優劣,影響物理成績之良窳等是也.惟欲知其感應程度之或大或小,爲正爲負,則必求一簡單之數字以表示之,此簡單之數字爲何?即所謂相關係數(Coefficient of correlation)是也.

相關之意義,已如上述.至於相關之種類,若就方向言,約可分爲三種如下:

(一)　正相關

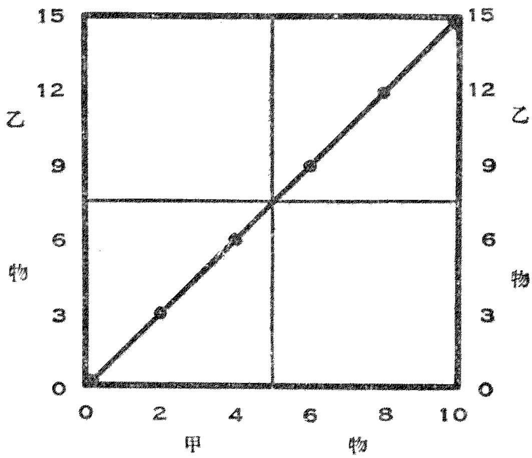
在兩種事實之變化中;甲物增,乙物亦隨之而增;甲物減,乙物亦隨之而減者,此種關係稱之曰正相關(Positive correlation or direct correlation). 譬如批發物價漲,零售物價亦隨之而漲;批發物價跌,零售物價亦隨之而跌,即其例也.正相關如以圖形示之,則如圖五十二:

表五十九　正相關表

(正相關表)

甲物 X	乙物 Y
0	0
2	3
4	6
6	9
8	12
10	15

圖五十二　正相關圖

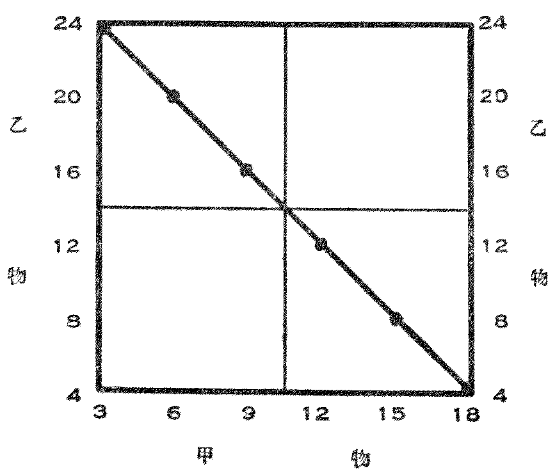


(正相關圖)

(二)　負相關

在兩種事實之變化中,甲物增加時,乙物因之減少;甲物減少時,乙物因之增加者,此種關係稱之曰負相關(Negative correlation or inverse correlation).譬如產量與物價,產量多則物價跌,產量少則物價漲,卽其例也.負相關如以圖表顯示之如下:

圖五十三　負相關圖



(負相關圖)

表六十　負相關表

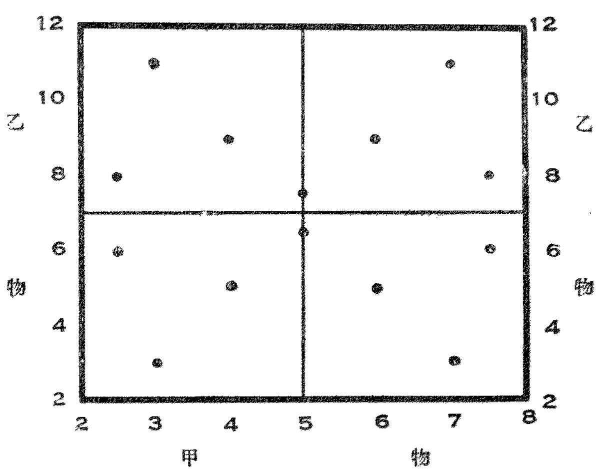
（負相關表）

甲物	乙物
X	Y
3	24
6	20
9	16
12	12
15	8
18	4

(三) 無相關

在兩種事實之變化中,甲物增加或減少時,乙物不生影響;乙物增加或減少時,甲物不受影響者,謂之無相關(Zero correlation).譬如人之美醜與學業,絕無關係之存在,即無相關也.無相關如以圖表顯示之如

圖五十四　無相關圖



（無相關圖）

下:

表六十一 無相關表

（無相關表）

甲物 X	乙物 Y
2.5	6.0
2.5	8.0
3.0	3.0
3.0	11.0
4.0	5.0
4.0	9.0
5.0	6.5
5.0	7.5
6.0	5.0
6.0	9.0
7.0	3.0
7.0	11.0
7.5	6.0
7.5	8.0

相關之種類,如依核算方法之不同,又可分爲數種如下:至其詳細說明,容再分節論之.

(一)直線相關 (linear correlation or rectilinear correlation)

(二)非直線相關 (Non-linear correlation)

(三)等級相關 (The method of rank-differences)

(四)均方相關 (The coefficient of mean square contingency)

(五)相應相關 (The method of concurrent deviation)

(六)異號相關 (The method of unlike signed pairs)

(七)純相關 (Partial correlation)

(八)複相關 (Multiple correlation)

兩事實之相關,如屬完全正者(Perfect positive correlation),則結果應爲 +1;如屬完全負者 (perfect negative correlation),則結果應爲 −1;如毫無關係者,則結果爲零.然事實之相關程度,無論爲正爲負,鮮能達完全之地位者,故相關係數(Coefficient of correlation)終在 +1 與 −1 之間.然何者爲高相關?何者爲低相關?學者主張不一.茲舉克拉桑(A. R. Crathorne)勒格(H. O. Rugg)及麥可爾(W. A. Mc Call)三人之分級法,列表示之如下:

表六十二 相關係數等級表

(相關係數等級表)

克拉桑氏		勒格氏		麥可爾氏	
相關係數	等級	相關係數	等級	相關係數	等級
0— .25	最低	0— .20	微	0— .40	低
.25— .40	低	.20— .40	低	.40— .70	顯
.40— .55	中	.40— .70	顯	.70—1.00	高
.55— .70	高	.70—1.00	高		
.70—1.00	最高				

克氏分相關係數爲五等,未免太多,麥氏僅分三等,未免

太少;勒氏分爲四等,似較合用.相關係數之假想分等雖如上述,然在實際應用時,仍應視事實之性質而異.伍田兒氏(Odell)即根據實驗所得,定相關之標準如下:

父子體高之相關係數,應在0.40至0.60之間。

夫妻年齡之相關係數,應在0.85至0.95之間。

性質相近兩科學成績之相關係數,應在0.40至0.70之間。

第一第二兩次標準測驗成績之相關係數,應在0.60至0.90之間。

第一第二兩次個別智力測驗結果之相關係數,應在0.90至0.95之間。

相關係數亦有目之爲因果關係之測定者,此種立論未免太偏,蓋完全相關之事實,可謂絕無僅有.相關而不完全,即示影響此事實之因子不少.例如中學成績與大學成績之相關係數爲0.65,根據此相關係數,雖可就現在中學某級之成績,預測將來大學之成績;然此種推定結果,未能有十分把握.蓋大學成績之優劣,與學生年齡,性別,健康,向上心,學習方法,缺課程度及教師之動作等,俱有相當之關係.結果僅有一個,而因子如此之多,根據一個結果推定之事實,當無十分把握者也。

第二節　相關表之編製

編製相關表,與編製分組次數表之手續相同.蓋相關表乃即甲乙兩事實次數之共同分配表.故全距,組距及組限等之規定,與編製分組次數表同.惟分組次數表所列事實,僅爲一種,相關表所列事實,則有兩項,故全距,組距及組限等,各有兩個.若求相關之兩事實性質相同者,組限與組數,最好一致.茲即採用上海市第五屆至第七屆集團結婚新郎新娘之年齡,設例述之如下:

表六十三　上海市第五屆至第七屆集團結婚新郎新娘年齡表

(編製相關表之原始表)

新娘年齡 X	新郎年齡 Y	新娘年齡 X	新郎年齡 Y	新娘年齡 X	新郎年齡 Y	新娘年齡 X	新郎年齡 Y
18	32	21	27	17	24	18	32
21	24	21	25	20	21	30	34
19	21	20	28	18	21	23	31
22	26	18	23	19	24	20	25
24	29	20	24	22	27	21	27
17	25	20	24	19	22	21	24
20	34	17	23	20	23	17	22
18	22	22	20	17	25	24	24
18	29	18	22	22	22	16	19
20	23	20	23	16	22	22	27
29	31	20	24	28	29	24	28
21	20	21	22	20	24	20	21
20	22	24	30	20	22	20	28
16	20	16	24	20	26	19	23
21	19	20	20	16	20	20	23
20	25	23	25	21	22	22	34
23	30	23	34	23	26	21	24
24	29	23	31	24	39	20	24
21	21	19	23	18	18	21	24

新娘年齡 X	新郎年齡 Y	新娘年齡 X	新郎年齡 Y	新娘年齡 X	新郎年齡 Y	新娘年齡 X	新郎年齡 Y
20	28	21	27	21	24	24	24
22	21	20	22	22	21	24	32
20	21	18	21	16	30	22	22
21	26	17	22	17	21	19	21
21	25	18	25	17	20	20	25
21	21	16	26	21	26	20	23
19	28	24	30	22	26	20	21
22	29	17	21	20	29	20	19
17	22	17	25	27	29	21	26
21	32	23	23	18	20	19	25
24	21	18	25	27	27	20	20
29	32	19	21	20	22	18	20
17	22	18	19	24	25	17	28
22	24	25	25	20	24	20	29
17	26	18	21	25	23	25	27
23	25	23	24	24	31	20	21
24	24	26	26	18	25	23	29
25	24	29	39	22	24	21	21
20	23	27	33	19	18	20	24
25	28	16	18	16	21	20	21
20	25	22	22	16	20	22	26
22	22	21	21	20	21	20	23
16	20	25	25	17	18	21	21
19	27	17	22	16	21	27	26
21	27	26	24	23	28	29	39
19	24	20	26	21	22	24	26
21	22	22	25	20	21	25	33
17	25	16	23	19	19	25	23
20	24	23	34	22	26	21	22
20	21	19	26	25	23	17	20
20	23	24	26	18	16	21	24
18	22	20	26	22	23	22	22
21	23	19	19	20	22	17	24
18	30	18	19	19	22	20	20
21	24	20	19	18	28	16	19
16	20	18	21	18	22	20	30

新娘年齡 X	新郎年齡 Y	新娘年齡 X	新郎年齡 Y	新娘年齡 X	新郎年齡 Y	新娘年齡 X	新郎年齡 X
25	27	16	21	25	24	25	27
22	24	20	20	17	24	21	22
21	22	17	24	21	19	19	18
17	22	16	19	16	21	23	29
20	23	17	21	20	24	22	22
19	22	20	23	18	25	21	20
21	22	17	25	17	30	21	28
20	23	19	28	16	22	21	20
18	20	21	21	27	32	16	20
20	28	17	20	17	21	23	28
21	24	19	24	17	24	29	32
27	26	19	23	21	32	19	26
20	26	21	29	17	22	22	24
23	27	21	21	25	28	18	22
19	19	17	19	18	24	20	22
17	22	16	20	18	26	20	24
19	24	20	18	19	21	17	19
19	21	26	25	20	22	17	22
27	32	30	36	21	24	19	26
16	19	18	28	20	22	18	18
24	29	22	32	19	19	22	27
18	22	25	26	21	23	23	23
22	26						

(一) 求全距

參加上海市第五屆至第七屆集團結婚者,共有309對,此 309 個新娘之年齡,最高者為30歲,最低者為16歲,故全距為30－16＝14歲.然新郎之年齡,最高者為39歲,最低者為16歲,故全距為39－16＝23歲.兩者合併觀之,新郎新娘年齡之共有全距為39－16＝23歲.

(二) 求組距

如以一歲爲組距,可分全距爲23組,似嫌繁多.若以二歲爲組距,則可分全距爲12組,似較確當.故決以二歲爲組距.

(三) 定組限

新郎新娘之年齡最低者僅16歲,故分組即自16歲起.既定組距爲 2,則第一組應爲16歲至 17.9 歲,第二組應爲18歲至 19.9 歲,第三組應爲20歲至 21·9 歲,依此推下,第十一組爲36歲至37.9歲,第十二組應爲38歲至39.9歲.

(四) 定排列

新郎新娘年齡分配共有之組限,經第三步規定後,進而選定排列.(横者爲排,即 X 量數.豎者爲列,即 Y 量數.)茲以新娘之年齡爲 X(自變數),新娘年齡之分組,應爲横排.新郎之年齡爲 Y(附變數),新郎年齡之分組,應爲縱列.(如倒置以新郎之年齡組爲 X,新娘之年齡組爲 Y 亦可.)各組之次序,在横排由左而右,組值小者在左,組值大者在右.在縱列由下而上,組值小者在下,組值大者在上.

(五) 劃標記

根據横排新娘年齡之分組,及縱列新郎年齡之分組,將各對新夫婦之年齡,繪劃標記於各方格內,即成一散佈表 (Scatter diagram or table) 如下:

表六十四　上海市第五屆至第七屆集團結婚新郎新娘年齡分配表

（標記相關表）

新郎年齡分組（Y）	新娘年齡分組（X）							
年齡	16—17.9	18—19.9	20—21.9	22—23.9	24—25.9	26—27.9	28—29.9	30—31.9
38—39.9					一		丁	
36—37.9								一
34—35.9			一	下				一
32—33.9		丁	丁	一	丁	下	丁	
30—31.9	丁	一	一	下	下		一	
28—29.9	一	正	正下	正	正一	一	一	
26—27.9	丁	正	正正一	正正	正一	𠄟		
24—25.9	正正一	正正	正正正正正	正下	正下	丁		
22—23.9	正正下	正正下	正正正正正𠄟	正𠄟	下			
20—21.9	正正正下	正正丁	正正正正下	下	一			
18—19.9	正下	正正	正					
16—17.9		一						

(六) 記次數

根據表六十四中之標記,計算各格內次數,即成一相關表如下:

表六十五 上海市第五屆至第七屆集團結婚新郎新娘年齡分配表

（相 關 表）

	新娘年齡分組 (X)									總計
	年齡	16—17.9	18—19.9	20—21.9	22—23.9	24—25.9	26—27.9	28—29.9	30—31.9	
新郎年齡分組 (Y)	38—39.9					1		2		3
	36—37.9								1	1
	34—35.9			1	3				1	5
	32—33.9		2	2	1	2	3	2		12
	30—31.9	2	1	1	3	3		1		11
	28—29.9	1	5	8	5	6	1	1		27
	26—27.9	2	5	11	10	6	4			38
	24—25.9	11	10	25	8	8	2			64
	22—23.9	13	13	29	9	3				67
	20—21.9	18	12	23	3	1				57
	18—19.9	8	10	5						23
	16—17.9		1							1
	總計	55	59	105	42	30	10	6	2	309

第三節 直線相關公式

直線相關係數(Coefficient of linear correlation or coefficient of rectilinear correlation),通常以 r 代之,其計算法,以英人高爾登(F. Galton)發其端,其門人皮爾生(K. Pearson)總其成,故又名皮爾生相關係數(The Pearsonian coefficient of correlation).其

計算公式,甚爲簡單,茲引申之於下:

設 r 爲直線相關係數,簡稱相關係數.

X 爲甲數列,亦稱自變數.

Y 爲乙數列,亦稱附變數.

X_1 爲甲數列之第一變量.

X_2 爲甲數列之第二變量.

Y_1 爲乙數列之第一變量.

Y_2 爲乙數列之第二變量.

M_x 爲甲數列之算術平均數.

M_y 爲乙數列之算術平均數.

N 爲次數之總數.

d_x 爲甲數列中各變量與其算術平均數之差.

d_y 爲乙數列中各變量與其算術平均數之差.

σ_x 爲甲數列之標準差.

σ_y 爲乙數列之標準差.

P 爲 $d_x d_y$ 之積.

Σ 爲總和之記號.

$$r=\frac{\Sigma d_x d_y}{N\sigma_x\sigma_y}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式六十一)}$$

皮氏公式之意義,驟視之,似甚深奧,然細察之,乃即甲數列與乙數列各與算術平均數相差之積之平均離中係數也.如以圖形解析之,更見其淺顯.圖六十四,即將全圖面積分爲四象限,第一象限內表示 X 與 Y 數列之離中差俱爲正.故此

象限內之各點,如P_1等皆爲正數.第二象限內表示X數列之離中差爲負,Y數列之離中差爲正.故此象限內之各點,如P_2等皆爲負數.第三象限內表示X與Y數列之離中差俱爲負數.故此象限內之各點,如P_3等皆爲正數.第四象限內表示X數列之離中差爲正,Y數列之離中差爲負,故此象限內之各點,如P_4等皆爲負數.

$$P_1=d_{x_1}d_{y_1}$$

$$P_2=d_{x_2}d_{y_2}$$

$$P_3=d_{x_3}d_{y_3}$$

$$P_4=d_{x_4}d_{y_4}$$

各P點之算術平均數,即可用以測定相關之大小.故相關爲:

$$r=\frac{d_{x_1}d_{y_1}+d_{x_2}d_{y_2}+d_{x_3}d_{y_3}+d_{x_4}d_{y_4}+\cdots\cdots+d_{x_n}d_{y_n}}{N}$$

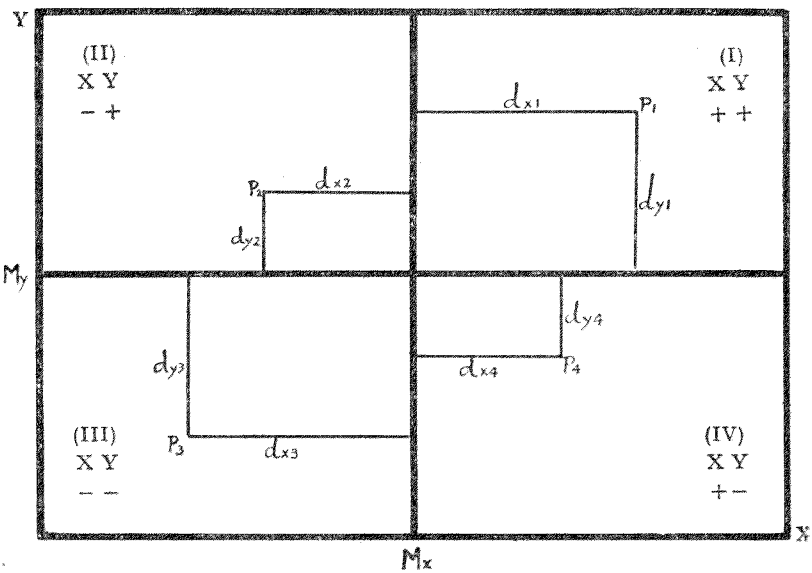
$$=\frac{\Sigma d_x d_y}{N}$$

惟甲數列(X)與乙數列(Y)之單位不同,爲欲征服此種困難起見,即將各變量與算術平均數之差,各以標準差除之,化成抽象之係數,而後連乘與,平均之即得.惟以其由各變量與其算術平均數相差之乘積中推算,故亦稱之爲乘積相關係數(The product-movement coefficient).茲證之如下:

$$r=\frac{\left(\frac{X_1-M_x}{\sigma_x}\times\frac{Y_1-M_y}{\sigma_y}\right)+\left(\frac{X_2-M_x}{\sigma_x}\times\frac{Y_2-M_y}{\sigma_y}\right)}{N}$$

$$\frac{+\cdots\cdots+\left(\frac{X_n-M_x}{\sigma_x}\times\frac{Y_n-M_y}{\sigma_y}\right)}{}=\frac{\Sigma d_x d_y}{N\sigma_x\sigma_y}$$

圖五十五　四象限圖



（四象限圖）

第四節　普通法

計算相關係數之方法甚多,本章僅舉普通,簡捷及對角線三法述之.用普通法求相關係數,又以統計事項之是否分列相關表而異.

(一)　由非相關表中求相關係數法

由非相關表中用普通法求相關係數,應先將自變數(X)按照某種特性,順次排列之.(如自變數係時間數列,則按時間之先後,順次排列.如係空間數列,則多按自

變量之大小,先後排定之.)而附變數(Y),則多按自變數之先後而定.次求自變數與附變數之算術平均數,並核算自變量與附變量各與其算術平均數之離中差.再將各對變量之離中差相乘,加註正負符記,得 $d_x\,d_y$;總和之,得 $\Sigma d_x\,d_y$.末求自變數與附變數之標準差,並連乘之,再乘 N,得 $N\sigma_x\sigma_y$;以此乘積除 $\Sigma d_x d_y$,即得相關係數 r.茲舉民國十年至二十四年我國輸出入貨值,求其相關係數如下:

表六十六　歷年我國輸出入貨值相關表

民國十年至二十四年(單位　百萬元)

(由非相關表中用普通法求相關係數表)

年次	輸入淨值 X	離中差 d_x	離中差自乘方 d^2x	輸出總值 Y	離中差 d_y	離中差自乘方 d^2y	d_xd_y
民國十年	1,412	−171.67	29,470.59	937	−179.67	32,281.31	+ 30,843.95
十一年	1,472	−111.67	12,470.19	1,020	− 96.67	9,345.09	+ 10,795.14
十二年	1,439	−144.67	20,929.41	1,173	+ 56.33	3,173.07	− 8,149.26
十三年	1,586	+ 2.33	5.43	1,202	+ 85.33	7,281.21	+ 198.82
十四年	1,477	−106.67	11,378.49	1,210	+ 93.33	8,710.49	− 9,955.51
十五年	1,752	+168.33	28,334.99	1,347	+230.33	53,051.91	+ 38,771.45
十六年	1,578	− 5.67	32.15	1,431	+314.33	98,803.35	− 1,782.25
十七年	1,863	+279.33	78,025.25	1,545	+428.33	183,466.59	+119,645.42
十八年	1,972	+388.33	150,800.19	1,582	+465.33	216,532.01	+180,701.60
十九年	2,041	+457.33	209,150.73	1,394	+277.33	76,911.93	+126,831.33
二十年	2,233	+649.33	421,629.45	1,417	+300.33	90,198.11	+195,013.28
廿一年	1,635	+ 51.33	2,634.77	768	−348.67	121,570.77	− 17,897.23
廿二年	1,346	−237.67	56,487.03	612	−504.67	254,691.81	+119,944.92
廿三年	1,030	−553.67	306,550.47	536	−580.67	337,177.65	+321,499.56
廿四年	919	−664.67	441,786.21	576	−540.67	292,324.05	+359,367.13
總計	23,755		1,769,685.35	16,750		1,785,519.35	+1,465,828.35

$$M_x=\frac{23,755}{15}$$

$$=\$1,583.67$$

$$M_y=\frac{16,750}{15}$$

$$=\$1,116.67$$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{1,769,685.35}{15}}$$

$$=\sqrt{117,979.02}$$

$$=\$343.48$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{1,785,519.35}{15}}$$

$$=\sqrt{119,034.62}$$

$$=\$345.01$$

應用公式六十一

$$r=\frac{1,465,828.35}{15\times 343.48\times 345.01}$$

$$=\frac{1,465,828.35}{1,777,560.45}$$

$$=0.825$$

應用皮爾生公式核計相關係數,須求自變數與附變數之標準差,覺甚繁瑣.故不妨將皮氏公式改列如下:

設 r 爲相關係數.

d_x 爲甲數列中各變量與其算術平均數之差.

d_y 爲乙數列中各變量與其算術平均數之差

σ_x 爲甲數列之標準差.

σ_y 爲乙數列之標準差.

N 爲變量項數.

Σ 爲總和之記號.

$$r=\frac{\Sigma d_x d_y}{N\sigma_x\sigma_y}$$

因 $\sigma_x=\sqrt{\frac{\Sigma d^2{}_x}{N}}$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\Sigma d^2{}_y}{N}}$$

故 $r=\frac{\Sigma d_x d_y}{N\cdot\sqrt{\frac{\Sigma d^2{}_x}{N}}\cdot\sqrt{\frac{\Sigma d^2{}_y}{N}}}$

$$=\frac{\Sigma d_x d_y}{\sqrt{\Sigma d^2{}_x}\cdot\sqrt{\Sigma d^2{}_y}}$$

$$=\frac{\Sigma d_x d_y}{\sqrt{\Sigma d^2{}_x\cdot\Sigma d^2{}_y}}\text{……………………(公式六十二)}$$

計算 $\sqrt{\Sigma d^2{}_x\Sigma d^2{}_y}$ 遠較計算 $N\sigma_x\sigma_y$ 爲便捷.茲仍將民國十年至二十四年我國輸出入貨值,應用公式六十二,核計相關係數如下:

$$r=\frac{1,465,828.35}{\sqrt{1,769,685.35\times1,785,519.35}}$$

$$=\frac{1,465,828.35}{\sqrt{3,159,807,435,836.5225}}$$

$$=\frac{1,465,828.35}{1,777,584.71}$$

$$=0.825$$

(二) 由相關表中求相關係數法

由相關表中用普通法計算相關係數之步驟有十二:

(1)各組之組限,屬於 X(自變數)數列者,書於第一排

（橫行爲排）.屬於 Y（附變數）數列者,書於第一列（豎行爲列）。

(2)各組之中値(m),屬於 X 數列者,書於第二排.屬於 Y 數列者,書於第二列.

(3)各組之次數(f),屬於 X 數列者,書於第三排.屬於 Y 數列者,書於第三列.

(4)各組中値,與 X 數列算術平均數之差(d_x),書於第四排.與 Y 數列算術平均數之差(d_y),書於第四列.

(5)求各組次數與各組中値離中差之積(fd),其屬於 X 數列者(fd_x),書於第五排.其屬於 Y 數列者(fd_y),書於第五列.

(6)求各組次數與各組中値離中差平方之積(fd^2),其屬於 X 數列者($fd^2{}_x$),書於第六排.其屬於 Y 數列者($fd^2{}_y$),書於第六列.

(7)將相關表中,各方格 X 與 Y 數列共有之次數,轉入各相當方格內,並加括號以資區別.

(8)各方格中次數之上各記入 d_x 與 d_y 之乘積.(即 X 數列各組中値之離中差,與 Y 數列各組中値之離中差之積.)

(9)各方格中次數,乘各方格中 d_x 與 d_y 之積,書於各方格中次數之下.

(10)將第三及第六排各項相加,得 N 及 $\Sigma fd^2{}_x$.將第三及第

六列各項相加,得N及$\Sigma f d^2_y$.

(11)將各排及各列方格中第三排數字相加,記於各排及各列之末排末列.並總加之,得$\Sigma f d_x d_y$,書於右下角之末格中.(末排之總和,應與末列之總和相等.)

(12)應用公式六十三,核計相關係數.

設r為相關係數.

d_x為甲數列中各變量與其算術平均數之差.

d_y為乙數列中各變量與其算術平均數之差.

σ_x為甲數列之標準差.

σ_y為乙數列之標準差.

f 為變量之次數.

N 為次數之總數.

Σ 為總和之記號.

$$r=\frac{\Sigma f d_x d_y}{N\sigma_x\sigma_y}$$

因

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\Sigma f d^2_x}{N}}$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\Sigma f d^2_y}{N}}$$

故

$$r=\frac{\Sigma f d_x d_y}{N\cdot\sqrt{\frac{\Sigma f d^2_x}{N}}\cdot\sqrt{\frac{\Sigma f d^2_y}{N}}}$$

$$=\frac{\Sigma f d_x d_y}{\sqrt{\Sigma f d^2_x}\cdot\sqrt{\Sigma f d^2_y}}$$

$$=\frac{\Sigma f d_x d_y}{\sqrt{\Sigma f d^2_x\cdot\Sigma f d^2_y}}\quad\text{…………………(公式六十三)}$$

表六十七　上海市第五屆至第七屆集團結婚新郎新娘年齡相關表

（由相關表中用普通法求相關係數表）

分組						16·0–17·9	18·0–19·9	20·0–21·9	22·0–23·9	24·0–25·9	26·0–27·9	28·0–29·9	30·0–31·9	總計	fd_xd_y
	m					17	19	21	23	25	27	29	31		
		f				55	59	105	42	30	10	6	2	309	
			d			−4	−2	0	+2	+4	+6	+8	+10		
				fd		−220	−118	0	+84	+120	+60	+48	+20		
					fd^2	880	238	0	168	480	360	384	200	2708	
38·0–39·9	39	3	+14.2	+42.6	604.92					+56.8 (1) +56.8		+113.6 (2) +227.2			+284.0
36·0–37·9	37	1	+12.2	+12.2	148·84								+122.0 (1) +122.0		+122.0
34·0–35·9	35	5	+10·2	+51·0	520·20			0 (1) 0	+20.4 (3) +61.2				+102.0 (1) +102.0		+163.2
32·0–33·9	33	12	+8.2	+98·4	806·88		−16.4 (2) −32.8	0 (2) 0	+16.4 (1) +16.4	+32.8 (2) +65.6	+49.2 (3) +147.6	+65.6 (2) +131.2			+328.0
30·0–31·9	31	11	+6.2	+68.2	422.84	−24.8 (2) −49.6	−12.4 (1) −12.4	0 (1) 0	+12.4 (3) +37.2	+24.8 (3) +74.4		+49.6 (1) +49.6			+ 99.2
28·0–29·9	29	27	+4.2	+113·4	476.28	−16.8 (1) −16.8	−8.4 (5) −42.0	0 (8) 0	+8.4 (5) +42.0	+16.8 (6) +100.8	+25.2 (1) +25.2	+33.6 (1) +33.6			+142.8
26·0–27·9	27	38	+2.2	+ 83.6	183.92	−8.8 (2) −17.6	−4.4 (5) −22.0	0 (11) 0	+4.4 (10) +44.0	+8.8 (6) +52.8	+13.2 (4) +52.8				+110.8
24·0–25.9	25	64	+0.2	+12·8	2.56	−0.8 (11) −8.8	−0.4 (10) −4.0	0 (25) 0	+0.4 (8) +3.2	+0.8 (8) +6.4	+1.2 (2) +2.4				− 0.8
22·0–23·9	23	67	−1.8	−120.6	217.08	+7.2 (13) +93.6	+3.6 (13) +46.8	0 (29) 0	−3.6 (9) −32.4	−7.2 (3) −21.6					+ 86.4
20·0–21·9	21	57	−3·8	−216·6	823.08	+15.2 (18) +273.6	+7.6 (12) +91.2	0 (23) 0	−7.6 (3) −22.8	−15.2 (1) −15.2					+ 326.8
18·0–19·9	19	23	−5·8	−133.4	773.72	+23.2 (8) +185.6	+11.6 (10) +116.0	0 (5) 0							+301.6
16·0–17·9	17	1	−7·8	− 7·8	60.84		+15.6 (1) +15.6								+ 15.6
總計		309			5,041.16										
fd_xd_y						+460	+156.4	0	+148.8	+320.0	+228.0	+441.6	+224.0		+1,978.8

$$M_x = \frac{6,483}{309} = 21.0 \text{歲}$$（新娘之平均年齡）

$$M_y=\frac{7,667}{309}=24.8$$ 歲（新郎之平均年齡）

應用公式六十三

$$r=\frac{1,978.8}{\sqrt{2,708\times5,041.16}}$$

$$=\frac{1,978.8}{\sqrt{13,651,461.28}}$$

$$=\frac{1,978.8}{3,694.8}$$

$$=0.536$$

第五節　簡捷法

用簡捷法求相關係數,亦視統計事實之是否分列相關表而異.茲分別舉例述之如下:

(一) 由非相關表中求相關係數法

由不列相關表之資料中,用簡捷法求相關係數之步驟如下:

(1) 將兩數列中之自變數(X),按某種特性,依次排定之.另一附變數(Y),則隨 X 數列排列之.

(2) 假定自變數中之某變量,爲 X 數列之假定算術平均數.假定附變數中之某變量,爲 Y 數列之假定算術平均數.

(3) 求 X 數列中,各變量與其假定算術平均數之離中差(d'_x),及 Y 數列中,各變量與其假定算術平均數之離中差(d'_y),並各註明正負符號.

(4) 求 d'_x 與 d'_y 之乘積,及各項 d'_x 與 d'_y 之自乘方.

(5) 核算 d'_x, d'_y, d'^2_x, d'^2_y 及 $d'_xd'_y$ 之總和.

(6) 以項數 N 除 $\Sigma d'_x$, 得 X 數列眞正算術平均數與其假定算術平均數之差(C_x). 以項數 N 除 $\Sigma d'_y$, 得 Y 數列眞正算術平均數與其假定算術平均數之差(C_y).

(7) 應用公式六十四求相關係數.

設 r 爲相關係數.

X 爲甲數列,亦稱自變數.

Y 爲乙數列,亦稱附變數.

M_x 爲甲數列之算術平均數.

M_y 爲乙數列之算術平均數.

M'_x 爲甲數列之假定算術平均數.

M'_y 爲乙數列之假定算術平均數.

C_x 爲甲數列假定算術平均數與其眞正算術平均數之差,即甲改正數.

C_y 爲乙數列假定算術平均數與其眞正算術平均數之差,即乙改正數.

N 爲變量項數.

d_x 爲甲數列中各變量與其算術平均數之差.

d_y 爲乙數列中各變量與其算術平均數之差.

d'_x 爲甲數列中各變量與其假定算術平均數之差.

d'_y 爲乙數列中各變量與其假定算術平均數之

差。

σ_x 爲甲數列之標準差。

σ_y 爲乙數列之標準差。

Σ 爲總和之記號。

$$d_x = X - M_x$$

$$d_y = Y - M_y$$

$$d'_x = X - M'_x$$

$$d'_y = Y - M'_y$$

$$C_x = M_x - M'_x$$

$$C_y = M_y - M'_y$$

故 $d'_x = X - M_x + C_x$

$$= d_x + C_x$$

$$d'_y = Y - M_y + C_y$$

$$= d_y + C_y$$

$$\Sigma d'_x d'_y = \Sigma(d_x + C_x)(d_y + C_y)$$

$$= \Sigma d_x d_y + C_x \Sigma d_y + C_y \Sigma d_x + NC_x C_y$$

因 $\Sigma d_x = 0$

$$\Sigma d_y = 0$$

故 $\Sigma d'_x d'_y = \Sigma d_x d_y + NC_x C_y$

$$\Sigma d_x d_y = \Sigma d'_x d'_y - NC_x C_y$$

$$r = \frac{\Sigma d'_x d'_y - NC_x C_y}{N\sigma_x \sigma_y}$$

因 $\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma d'^2_x}{N} - \left(\frac{\Sigma d'_x}{N}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma d'^2_x}{N} - C^2_x}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma d'^2_y}{N} - \left(\frac{\Sigma d'_y}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma d'^2_y}{N} - C^2_y}$$

故

$$r = \frac{\Sigma d'_x d'_y - NC_x C_y}{N \cdot \sqrt{\frac{\Sigma d'^2_x}{N} - C^2_x} \cdot \sqrt{\frac{\Sigma d'^2_y}{N} - C^2_y}}$$

$$= \frac{\Sigma d'_x d'_y - NC_x C_y}{\sqrt{(\Sigma d'^2_x - NC^2_x) \cdot (\Sigma d'^2_y - NC^2_y)}} \cdots\cdots\cdots$$

（公式六十四）

表六十八　歷年我國輸出入貨值相關表

民國十年至二十四年（單位　百萬元）

（由非相關表中用簡捷法求相關係數表）

年　次	輸入淨值 X	假定離中差 $M'x=1,578$ d'_x	假定離中差自乘方 d'^2_x	輸出總值 Y	假定離中差 $M'y=1,431$ d'_y	假定離中差自乘方 d'^2_y	$d'_x d'_y$
民國十年	1,412	−166	27,556	937	−494	244,036	+82,004
十一年	1,472	−106	11,236	1,020	−411	168,921	+43,566
十二年	1,439	−139	19,321	1,173	−258	66,564	+35,862
十三年	1,586	+ 8	64	1,202	−229	52,441	− 1,832
十四年	1,477	−101	10,201	1,210	−221	48,841	+22,321
十五年	1,752	+174	30,276	1,347	− 84	7,056	−14,616
十六年	1,578	0	0	1,431	0	0	0
十七年	1,863	+285	81,225	1,545	+114	12,996	+32,490
十八年	1,972	+394	155,236	1,582	+151	22,801	+59,494
十九年	2,041	+463	214,369	1,394	− 37	1,369	−17,131
二十年	2,233	+655	429,025	1,417	− 14	196	− 8,170
廿一年	1,635	+ 57	3,249	768	−663	439,569	−37,791
廿二年	1,346	−232	53,824	612	−819	670,761	+ 190,008
廿三年	1,030	−548	300,304	536	−895	801,025	+ 490,460
廿四年	919	−659	434,281	576	−855	731,025	+ 563,445
總　計		+ 85	1,770,167		− 4,715	3,267,601	+1,439,110

$$C_x=\frac{85}{15}=5.67$$

$$C_y=\frac{-4,715}{15}=-314.33$$

應用公式六十四

$$r=\frac{1,439,110-15\times5.67\times(-314.33)}{\sqrt{[1,770,167-15\times(5.67)^2]\times[3,267,601-15\times(-314.33)^2]}}$$

$$=\frac{1,439,110+26,733.75}{\sqrt{(1,770,167-482.25)\times(3,267,601-1,482,050.25)}}$$

$$=\frac{1,465,843.75}{\sqrt{1,769,684.75\times1,785,550.75}}$$

$$=\frac{1,465,843.75}{\sqrt{3,159,861,932,626.0625}}$$

$$=\frac{1,465,843.75}{1,777,600.04}$$

$$=0.825$$

(二) 由相關表中求相關係數法

由相關表中,用簡捷法求相關係數之步驟如下:

(1)各組之組限,屬於 X 數列者,書於第一排.屬於 Y 數列者,書於第一列.

(2)各組之中值,屬於 X 數列者,書於第二排.屬於 Y 數列者,書於第二列.

(3)將相關表中,各方格 X 與 Y 數列共有之次數,轉入各相當方格內,並加括號以資區別.同時將各列次數相加,得 X 數列之次數,書於第三排.各排次數相加,得 Y 數列之次數,書於第三列.

(4) 擇兩數列中適中一組之中值,爲各該數列之假定算術平均數.

(5) 以組距爲單位,(依原值亦可,惟以組距爲單位,即如求算術平均數時,用假定離中差法核計,尤覺便捷.)計算各組中值與各該數列假定算術平均數之離中差,分別書於第四排(屬於 X 數列者),及第四列(屬於 Y 數列者)d'' 行中.

(6) 以兩數列各組之次數,乘各該組之假定離中差(d''),書於第五排(屬於 X 數列之 fd''_x),及第五列(屬於 Y 數列之 fd''_y)fd'' 行內.

(7) 以各組之 d''_x 及 d''_y 乘各該組之 fd''_x 及 fd''_y,書於第六排(屬於 X 數列之 fd''^2_x),及第六列(屬於 Y 數列之 fd''^2_y)fd''^2 行內.

(8) 將第五排各 fd''_x 及第六排各 fd''^2_x 相加,得 $\Sigma fd''_x$ 及 $\Sigma fd''^2_x$,書於各該排之末格內.再將第五列各 fd''_y 及第六列各 fd''^2_y 相加,得 $\Sigma fd''_y$ 及 $\Sigma fd''^2_y$,書於各該列之末格內.

(9) 以次數總數(N)除 $\Sigma fd''_x$,得以組距爲單位之 X 數列之校正數 c_x.以次數總數(N)除 $\Sigma fd''_y$,得以組距爲單位之 Y 數列之校正數 c_y.

(10) 以組距爲單位計算 $\Sigma fd''_x d''_y$,其法有三:

(A) 甲種普通核算法 —— 先將第一排中各方格內之

次數,乘各該組之 d''_x,得 fd''_x;總加之,得 $\Sigma' fd''_x$;復乘該橫排之 d''_y,即得第一排之 $\Sigma' fd''_x d''_y$.依此而下,得各排之 $\Sigma' fd''_x d''_y$,總加之,得 $\Sigma fd''_x d''_y$.茲即以表六十九新郎新娘年齡之相關,以組距爲單位,核計各排 $\Sigma' fd''_x d''_y$ 如下:

第一排:$[(1\times1)+(3\times2)]\times6 \qquad = +\ 42$

第二排:$[(4\times1)]\times5 \qquad = +\ 20$

第三排:$[(-1\times1)+(0\times3)+(4\times1)]\times4 \qquad = +\ 12$

第四排:$[(-2\times2)+(-1\times2)+(0\times1)+(1\times2)$

$+(2\times3)+(3\times2)]\times3 \qquad = +\ 24$

第五排:$[(-3\times2)+(-2\times1)+(-1\times1)+(0\times3)$

$+(1\times3)+(3\times1)]\times2 \qquad = -\ 6$

第六排:$[(-3\times1)+(-2\times5)+(-1\times8)+(0\times5)$

$+(1\times6)+(2\times1)+(3\times1)]\times1 \qquad = -\ 10$

第七排:$[(-3\times2)+(-2\times5)+(-1\times11)$

$+(0\times10)+(1\times6)+(2\times4)]\times0 \qquad = \ 0$

第八排:$[(-3\times11)+(-2\times10)+\ -1\times25)$

$+(0\times8)+(1\times8)+(2\times2)]\times(-1) \qquad = +\ 66$

第九排:$[(-3\times13)+(-2\times13)+(-1\times29)$

$+(0\times9)+(1\times3)]\times(-2) \qquad = +182$

第十排:$[(-3\times18)+(-2\times12)+(-1\times23)$

$+(0\times3)+(1\times1)]\times(-3) \qquad = +300$

第十一排:$[(-3\times 8)+(-2\times 10)+(-1\times 5)]$

$\times(-4)$ $=+196$

第十二排:$[(-2\times 1)]\times(-5)$ $=+\ 10$

各排總計$(\Sigma f d''_x d''_y)$ $=+836$

(B)乙種普通核算法——先將第一列中各方格內之次數,乘各該組之 d''_y 得 fd''_y;總和之,得 $\Sigma' fd''_y$;復乘該豎列之 d''_x,即得第一列之 $\Sigma' fd''_y d''_x$.依此而下,得各列之 $\Sigma' fd''_y d''_x$,總加之,得 $\Sigma fd''_y d''_x$.茲仍以表六十九新郎新娘年齡之相關,以組距為單位,核計各列 $\Sigma' fd''_y d''_x$ 如下:

第一列:$[(2\times 2)+(1\times 1)+(0\times 2)+(-1\times 11)$

$+(-2\times 13)+(-3\times 18)+(-4\times 8)]\times(-3)=+354$

第二列:$[(3\times 2)+(2\times 1)+(1\times 5)+(0\times 5)$

$+(-1\times 10)+(-2\times 13)+(-3\times 12)$

$+(-4\times 10)+(-5\times 1)]\times(-2)$ $=+208$

第三列:$[(4\times 1)+(3\times 2)+(2\times 1)+(1\times 8)$

$+(0\times 11)+(-1\times 25)+(-2\times 29)$

$+(-3\times 23)+(-4\times 5)]\times(-1)$ $=+152$

第四列:$[(4\times 3)+(3\times 1)+(2\times 3)+(1\times 5)+(0\times 10)$

$+(-1\times 8)+(-2\times 9)+(-3\times 3)]\times 0$ $=\ 0$

第五列:$[(6\times 1)+(3\times 2)+(2\times 3)+(1\times 6)+(0\times 6)$

$+(-1\times 8)+(-2\times 3)+(-3\times 1)]\times 1$ $=+\ 7$

第六列:$[(3\times3)+(1\times1)+(0\times4)+(-1\times2)]\times2$ $=+\ 16$

第七列:$[(6\times2)+(3\times2)+(2\times1)+(1\times1)]\times3$ $=+\ 63$

第八列:$[(5\times1)+(4\times1)]\times4$ $=+\ 36$

各列總計($\Sigma fd''_yd''_x$) $=+836$

(C)相關表核算法——此法先將各方格內,X與Y數列共有之次數,加以括號.次將d''_x乘相當之d''_y,所得乘積,書於各方格中次數之上.再將各方格中次數乘該格內d''_x與d''_y之積,並書於各方格中次數之下.末將各方格內次數下之$fd''_xd''_y$相加,亦可得$\Sigma fd''_xd''_y$,如表六十九.

(11)應用公式六十六求相關係數.

設r爲相關係數.

C_x爲甲數列假定算術平均數與其眞正算術平均數之差,即甲改正數.

C_y爲乙數列假定算術平均數與其眞正算術平均數之差,即乙改正數.

c_x爲以組距爲單位之甲數列假定算術平均數與其眞正算術平均數之差.

c_y爲以組距爲單位之乙數列假定算術平均數與其眞正算術平均數之差.

d'_x爲甲數列中各變量與其假定算術平均數之差.

d'_y 爲乙數列中各變量與其假定算術平均數之差.

d''_x 爲甲數列中各變量與其假定算術平均數之假定離中差（即以組距爲單位者）.

d''_y 爲乙數列中各變量與其假定算術平均數之假定離中差（即以組距爲單位者）

σ_x 爲甲數列之標準差.

σ_y 爲乙數列之標準差.

i_x 爲甲數列之組距.

i_y 爲乙數列之組距.

N 爲次數之總數.

f 爲變量之次數.

Σ 爲總和之記號.

$$r=\frac{\Sigma fd'_xd'_y-NC_xC_y}{N\cdot\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2_x}{N}-C^2_x}\cdot\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2_y}{N}-C^2_y}}$$

$$=\frac{\Sigma fd'_xd'_y-NC_xC_y}{\sqrt{\Sigma fd'^2_x-NC^2_x}\cdot\sqrt{\Sigma fd'^2_y-NC^2_y}}$$

$$=\frac{\Sigma fd'_xd'_y-NC_xC_y}{\sqrt{(\Sigma fd'^2_x-NC^2_x)\cdot(\Sigma fd'^2_y-NC^2_y)}}\text{(公式六十五)}$$

惟以組距爲單位者:

則 $\Sigma fd'_xd'_y=i_xi_y\Sigma fd''_xd''_y$

$C_xC_y=i_xi_yc_xc_y$

$C^2_x=i^2_xc^2_x$

$$C^2{}_y = i^2{}_y c^2{}_y$$

$$\Sigma f d'^2{}_x = i^2{}_x \Sigma f d''^2{}_x$$

$$\Sigma f d'^2{}_y = i^2{}_y \Sigma f d''^2{}_y$$

故 $$r = \frac{i_x i_y \Sigma f d''_x d''_y - i_x i_y N c_x c_y}{N \cdot \sqrt{\frac{i^2{}_x \Sigma f d''^2{}_x}{N} - i^2{}_x c^2{}_x} \cdot \sqrt{\frac{i^2{}_y \Sigma f d''^2{}_y}{N} - i^2{}_y c^2{}_y}}$$

$$= \frac{i_x i_y \Sigma f d''_x d''_y - i_x i_y N c_x c_y}{\sqrt{(i^2{}_x \Sigma f d''^2{}_x - i^2{}_x N c^2{}_x) \cdot (i^2{}_y \Sigma f d''^2{}_y - i^2{}_y N c^2{}_y)}}$$

$$= \frac{i_x i_y \Sigma f d''_x d''_y - i_x i_y N c_x c_y}{i_x i_y \sqrt{(\Sigma f d''^2{}_x - N c^2{}_x) \cdot (\Sigma f d''^2{}_y - N c^2{}_y)}}$$

$$= \frac{\Sigma f d''_x d''_y - N c_x c_y}{\sqrt{(\Sigma f d''^2{}_x - N c^2{}_x) \cdot (\Sigma f d''^2{}_y - N c^2{}_y)}} \text{(公式六十六)}$$

茲仍以上海市第五屆至第七屆集團結婚新郎新娘年齡之相關,用簡捷法核計其相關係數如下:

應用公式六十六

$$c_x = \frac{-312}{309} = -1.010$$

$$c_y = \frac{-338}{309} = -1.094$$

$$r = \frac{836 - 309 \times (-1.010) \times (-1.094)}{\sqrt{[992 - 309 \times (-1.010)^2] \times [1{,}630 - 309 \times (-1.094)^2]}}$$

$$= \frac{836 - 341.426}{\sqrt{676.789 \times 1{,}260.178}}$$

$$= \frac{494.574}{\sqrt{852{,}874.608442}}$$

$$= \frac{494.574}{923.512}$$

$$= 0.536$$

表六十九　上海市第五屆至第七屆集團結婚新郎新娘年齡相關表

（由相關表中用簡捷法求相關係數表）

分組						16·0 | 17·9	18·0 | 19·9	20·0 | 21·9	22·0 | 23·9	24.0 | 25·9	26·0 | 27·9	28·0 | 29·9	30·0 | 31·9	總計	$fd''_x d''_y$
	m					17	19	21	23	25	27	29	31		
		f				55	59	105	42	30	10	6	2	309	
			d''			-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4		
				fd''		-165	-118	-105	0	+30	+20	+18	+8	-312	
					fd''^2	495	236	105	0	30	40	54	32	992	
38·0 | 39·9	39	3	+6	+18	108					+6 (1) +6		+18 (2) +36			+42
36·0 | 37·9	37	1	+5	+5	25								+20 (1) +20		+20
34·0 | 35·9	35	5	+4	+20	80			-4 (1) -4	0 (3) 0				+16 (1) +16		+12
32·0 | 33·9	33	12	+3	+36	108		-6 (2) -12	-3 (2) -6	0 (1) 0	+3 (2) +6	+6 (3) +18	+9 (2) +18			+24
30·0 | 31·9	31	11	+2	+22	44	-6 (2) -12	-4 (1) -4	-2 (1) -2	0 (3) 0	+2 (3) +6		+6 (1) +6			-6
28·0 | 29·9	29	27	+1	+27	27	-3 (1) -3	-2 (5) -10	-1 (8) -8	0 (5) 0	+1 (6) +6	+2 (1) +2	+3 (1) +3			-10
26·0 | 27·9	27	38	0	0	0	0 (2) 0	0 (5) 0	0 (11) 0	0 (10) 0	0 (6) 0	0 (4) 0				0
24·0 | 25·9	25	64	-1	-64	64	+3 (11) +33	+2 (10) +20	+1 (25) +25	0 (8) 0	-1 (8) -8	-2 (2) -4				+66
22·0 | 23·9	23	67	-2	-134	268	+6 (13) +78	+4 (13) +52	+2 (29) +58	0 (9) 0	-2 (3) -6					+182
20·0 | 21·9	21	57	-3	-171	513	+9 (18) +162	+6 (12) +72	+3 (23) +69	0 (3) 0	-3 (1) -3					+300
18·0 | 19·9	19	23	-4	-92	368	+12 (8) +96	+8 (10) +80	+4 (5) +20							+196
16·0 | 17·9	17	1	-5	-5	25		+10 (1) +10								+10
總計		309		-338	1,630										
$fd''_x d''_y$						+354	+208	+152	0	+7	+16	+63	+36		+836

第六節　對角線法

在相關表中計算相關係數之方法,除上述普通及簡捷兩法外,又有所謂對角線法 (The diagonal method) 者,於相關表中分引若干對角線而核算之.此法因可免除煩複之乘除,故於計算相關係數時,尤爲學者所樂用.

對角線之引法,可自左下角,上向右上角.或自左上角,下向右下角.同時 X 及 Y 兩數列組值之排列,可爲同方向,或方向互背,均可自由處置.惟公式之應用,則應因時制宜,隨相關表之如何編製,對角線之如何繪劃而定.

應用對角線計算相關係數,除原有 X 及 Y 數列外,更由對角線中求得第三數列,通常稱謂 Z 數列.多於相關表下,附表明示之.至於用對角線法計算相關係數之步驟,自第一步至第九步,與用簡捷法在相關表中求相關係數同,茲不重贅.第十步至第十六步略述之如下:

(1)至(9)與用簡捷法由相關表中求相關係數同.

(10)引對角線.(對角線之引法,自各方格之左下角,上向右上角;或自各方格左上角,下向右下角均可.惟所引對角線方向之不同,計算公式亦隨之而異,詳見下文.)

(11)在相關表下另附第三數列(Z)之小表.

(12)將同一對角線上所經過各方格所有之次數相加,得第三數列(Z)之各項次數.

(13)視對角線之如何繪劃,及 X 與 Y 組值之如何排列,求第三數列(Z)之假定離中差(d''_z).

(14)以 Z 數列之各項次數,乘各項假定離中差(d''_z),得 fd''_z. 再乘 d''_z,得 fd''^2_z.

(15)求 Z 表第一排,第三排及第四排之總計,得 N, $\Sigma fd''_z$ 及 $\Sigma fd''^2_z$.

(16)應用公式計算相關係數(公式詳下文).

用對角線法求相關係數之公式,隨相關表之如何編製,對角線之如何繪劃而異.茲分述之如下:

(一) X 與 Y 數列之組值同方向排列者

X 與 Y 數列之組值,俱由同點出發,由大而小,或由小而大排列時,計算相關係數之公式,又以對角線之如何繪劃,而分下列兩種:

(1)對角線如由左下角,上向右上角繪劃者,則

$$d'_z = d'_x + d'_y$$

計算相關係數之公式,應如下:

設 r 為相關係數.

d_x 為甲數列中各變量與其眞正算術平均數之差.

d_y 為乙數列中各變量與其眞正算術平均數之

差.

d_z 爲Z數列中各變量與其眞正算術平均數之差.

d'_x 爲甲數列中各變量與其假定算術平均數之差.

d'_y 爲乙數列中各變量與其假定算術平均數之差.

d'_z 爲Z數列中各變量與其假定算術平均數之差.

C_x 爲甲數列假定算術平均數與其眞正算術平均數之差,即甲改正數.

C_y 爲乙數列假定算術平均數與其眞正算術平均數之差,即乙改正數.

C_z 爲Z數列假定算術平均數與其眞正算術平均數之差,即Z改正數.

N 爲次數之總數.

f 爲變量之次數.

Σ 爲總和之記號.

$$r=\frac{\Sigma fd'^2_z-\Sigma fd'^2_x-\Sigma fd'^2_y-N(C^2_z-C^2_x-C^2_y)}{2\cdot\sqrt{(\Sigma fd'^2_x-NC^2_x)\cdot(\Sigma fd'^2_y-NC^2_y)}}\cdots\cdots$$

(公式六十七)

其實公式六十七即等於公式六十三,茲證之如下:

$$r=\frac{\Sigma fd'^2{}_z-\Sigma fd'^2{}_x-\Sigma fd'^2{}_y-N(C^2{}_z-C^2{}_x-C^2{}_y)}{2\cdot\sqrt{(\Sigma fd'^2{}_x-NC^2{}_x)\cdot(\Sigma fd'^2{}_y-NC^2{}_y)}}$$

$$=\frac{(\Sigma fd'^2{}_z-NC^2{}_z)-(\Sigma fd'^2{}_x-NC^2{}_x)-(\Sigma fd'^2{}_y-NC^2{}_y)}{2\cdot\sqrt{(\Sigma fd'^2{}_x-NC^2{}_x)\cdot(\Sigma fd'^2{}_y-NC^2{}_y)}}$$

$$=\frac{\left[\Sigma fd'^2{}_z-N\left(\frac{\Sigma fd'_z}{N}\right)^2\right]-\left[\Sigma fd'^2{}_x-N\left(\frac{\Sigma fd'_x}{N}\right)^2\right]-\left[\Sigma fd'^2{}_y-N\left(\frac{\Sigma fd'_y}{N}\right)^2\right]}{2\cdot\sqrt{\left[\Sigma fd'^2{}_x-N\left(\frac{\Sigma fd'_x}{N}\right)^2\right]\cdot\left[\Sigma fd'^2{}_y-N\left(\frac{\Sigma fd'_y}{N}\right)^2\right]}}$$

因 $\Sigma fd^2{}_x=\Sigma fd'^2{}_x-N\left(\frac{\Sigma fd'_x}{N}\right)^2$

$$\Sigma fd^2{}_y=\Sigma fd'^2{}_y-N\left(\frac{\Sigma fd'_y}{N}\right)^2$$

$$\Sigma fd^2{}_z=\Sigma fd'^2{}_z-N\left(\frac{\Sigma fd'_z}{N}\right)^2$$

故 $r=\frac{\Sigma fd^2{}_z-\Sigma fd^2{}_x-\Sigma fd^2{}_y}{2\cdot\sqrt{\Sigma fd^2{}_x\cdot\Sigma fd^2{}_y}}$

惟 $d_z=d_x+d_y$

則 $\Sigma fd^2{}_z=\Sigma f(d_x+d_y)^2$

$$=\Sigma fd^2{}_x+\Sigma fd^2{}_y+2\Sigma fd_xd_y$$

故 $r=\frac{\Sigma fd^2{}_x+\Sigma fd^2{}_y+2\Sigma fd_xd_y-\Sigma fd^2{}_x-\Sigma fd^2{}_y}{2\cdot\sqrt{\Sigma fd^2{}_x\cdot\Sigma fd^2{}_y}}$

$$=\frac{2\Sigma fd_xd_y}{2\cdot\sqrt{\Sigma fd^2{}_x\cdot\Sigma fd^2{}_y}}$$

$$=\frac{\Sigma fd_xd_y}{\sqrt{\Sigma fd^2{}_x\cdot\Sigma fd^2{}_y}}$$

表七十 上海市第五屆至第七屆集團結婚新郎新娘年齡相關表

(由相關表中用對角線法求相關係數表甲)

分組						16·0–17·9	18·0–19·9	20·0–21·9	22·0–23·9	24·0–25·9	26·0–27·9	28·0–29·9	30·0–31·9	總計
	m					17	19	21	23	25	27	29	31	
		f				55	59	105	42	30	10	6	2	309
			d''			-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	
				fd''		-165	-118	-105	0	+30	+20	+18	+8	-312
					fd''^2	495	236	105	0	30	40	54	32	992
16·0–17·9	17	1	-5	-5	25		1							
18·0–19·9	19	23	-4	-92	368	8	10	5						
20·0–21·9	21	57	-3	-171	513	18	12	23	3	1				
22·0–23·9	23	67	-2	-134	268	13	13	29	9	3				
24·0–25·9	25	64	-1	-64	64	11	10	25	8	8	2			
26·0–27·9	27	38	0	0	0	2	5	11	10	6	4			
28·0–29·9	29	27	+1	+27	27	1	5	8	5	6	1	1		
30·0–31·9	31	11	+2	+22	44	2	1	1	3	3		1		
32·0–33·9	33	12	+3	+36	108		2	2	1	2	3	2		
34·0–35·9	35	5	+4	+20	80			1	3				1	
36·0–37·9	37	1	+5	+5	25								1	
38·0–39·9	39	3	+6	+18	108					1		2		
總計		309		-338	1,630									

f_z	9	28	30	47	44	41	29	27	16	15	6	6	4	2	1	1	3	309
d_z''*	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9	
fd_z''	-63	-168	-150	-188	-132	-82	-29	0	+16	+30	+18	+24	+20	+12	+7	+8	+27	-650
$fd_z''^2$	441	1,008	750	752	396	164	29	0	16	60	54	96	100	72	49	64	243	4,294

* $d_z'' = d_x'' + d_y''$

$$i_x = 2$$

$$i_y = 2$$

$$i_z = 2$$

$$\Sigma fd'^2_x = \Sigma fd''^2_x \cdot i^2_x$$

$$= 992 \times 2 \times 2 = 3{,}968$$

$$\Sigma fd'^2_y = \Sigma fd''^2_y \cdot i^2_y$$

$$= 1{,}630 \times 2 \times 2 = 6{,}520$$

$$\Sigma fd'^2_z = \Sigma fd''^2_z \cdot i^2_z$$

$$= 4{,}294 \times 2 \times 2 = 17{,}176$$

$$C^2_x = \left(\frac{\Sigma fd''_x}{N} \cdot i_x \right)^2$$

$$= \left(\frac{-312}{309} \times 2 \right)^2 = (-2.020)^2 = 4.0804$$

$$C^2_y = \left(\frac{\Sigma fd''_y}{N} \cdot i_y \right)^2$$

$$= \left(\frac{-338}{309} \times 2 \right)^2 = (-2.188)^2 = 4.7873$$

$$C^2_z = \left(\frac{\Sigma fd''_z}{N} \cdot i_z \right)^2$$

$$= \left(\frac{-650}{309} \times 2 \right)^2 = (-4.208)^2 = 17.7073$$

應用公式六十七

$$r = \frac{17{,}176 - 3{,}968 - 6{,}520 - 309 \times (17.7073 - 4.0804 - 4.7873)}{2 \times \sqrt{(3{,}968 - 309 \times 4.0804) \times (6{,}520 - 309 \times 4.7873)}}$$

$$=\frac{6{,}688-309\times 8.8396}{2\times\sqrt{(3{,}968-1{,}260.844)\times(6{,}520-1{,}479.276)}}$$

$$=\frac{6{,}688-2{,}731.4364}{2\times\sqrt{2{,}707.156\times 5{,}040.724}}$$

$$=\frac{3{,}956.5636}{2\times\sqrt{13{,}646{,}026.220944}}$$

$$=\frac{1{,}978.2818}{\sqrt{13{,}646{,}026.220944}}$$

$$=\frac{1{,}978.2818}{3{,}694.053}$$

$$=0.536$$

(2)對角線如由左上角,下向右下角繪劃者,則

$$d'_z=d'_y-d'_x$$

計算相關係數之公式,應如下:

設 r 爲相關係數.

d_x 爲甲數列中各變量與其眞正算術平均數之差.

d_y 爲乙數列中各變量與其眞正算術平均數之差.

d_z 爲 Z 數列中各變量與其眞正算術平均數之差.

d'_x 爲甲數列中各變量與其假定算術平均數之

差.

d'_y 爲乙數列中各變量與其假定算術平均數之差.

d'_z 爲Z數列中各變量與其假定算術平均數之差.

C_x 爲甲數列假定算術平均數與其眞正算術平均數之差,卽甲改正數.

C_y 爲乙數列假定算術平均數與其眞正算術平均數之差,卽乙改正數.

C_z 爲Z數列假定算術平均數與其眞正算術平均數之差,卽Z改正數.

N 爲次數之總數.

f 爲變量之次數.

Σ 爲總和之記號.

$$r=\frac{\Sigma fd'^2_x+\Sigma fd'^2_y-\Sigma fd'^2_z-N(C^2_x+C^2_y-C^2_z)}{2\cdot\sqrt{(\Sigma fd'^2_x-NC^2_x)\cdot(\Sigma fd'^2_y-NC^2_y)}}\text{.........}$$

(公式六十八)

其實公式六十八亦卽等於公式六十三,茲證之如下:

$$r=\frac{\Sigma fd'^2_x+\Sigma fd'^2_y-\Sigma fd'^2_z-N(C^2_x+C^2_y-C^2_z)}{2\cdot\sqrt{(\Sigma fd'^2_x-NC^2_x)\cdot(\Sigma fd'^2_y-NC^2_y)}}$$

$$=\frac{(\Sigma fd'^2{}_x-NC^2{}_x)+(\Sigma fd'^2{}_y-NC^2{}_y)-(\Sigma fd'^2{}_z-NC^2{}_z)}{2\cdot\sqrt{(\Sigma fd'^2{}_x-NC^2{}_x)\cdot(\Sigma fd'^2{}_y-NC^2{}_y)}}$$

$$=\frac{\left[\Sigma fd'^2{}_x-N\left(\frac{\Sigma fd'_x}{N}\right)^2\right]+\left[\Sigma fd'^2{}_y-N\left(\frac{\Sigma fd'_y}{N}\right)^2\right]-\left[\Sigma fd'^2{}_z-N\left(\frac{\Sigma fd'_z}{N}\right)^2\right]}{2\cdot\sqrt{\left[\Sigma fd'^2{}_x-N\left(\frac{\Sigma fd'_x}{N}\right)^2\right]\cdot\left[\Sigma fd'^2{}_y-N\left(\frac{\Sigma fd'_y}{N}\right)^2\right]}}$$

因 $\Sigma fd^2{}_x=\Sigma fd'^2{}_x-N\left(\frac{\Sigma fd'_x}{N}\right)^2$

$$\Sigma fd^2{}_y=\Sigma fd'^2{}_y-N\left(\frac{\Sigma fd'_y}{N}\right)^2$$

$$\Sigma fd^2{}_z=\Sigma fd'^2{}_z-N\left(\frac{\Sigma fd'_z}{N}\right)^2$$

故 $r=\frac{\Sigma fd^2{}_x+\Sigma fd^2{}_y-\Sigma fd^2{}_z}{2\cdot\sqrt{\Sigma fd^2{}_x\cdot\Sigma fd^2{}_y}}$

惟 $d_z=d_y-d_x$

則 $\Sigma fd^2{}_z=\Sigma f(d_y-d_x)^2$

$$=\Sigma fd^2{}_y+\Sigma fd^2{}_x-2\Sigma fd_xd_y$$

故 $r=\frac{\Sigma fd^2{}_x+\Sigma fd^2{}_y-(\Sigma fd^2{}_y+\Sigma fd^2{}_x-2\Sigma fd_xd_y)}{2\cdot\sqrt{\Sigma fd^2{}_x\cdot\Sigma fd^2{}_y}}$

$$=\frac{\Sigma fd^2{}_x+\Sigma fd^2{}_y-\Sigma fd^2{}_y-\Sigma fd^2{}_x+2\Sigma fd_xd_y}{2\cdot\sqrt{\Sigma fd^2{}_x\cdot\Sigma fd^2{}_y}}$$

$$=\frac{2\Sigma fd_xd_y}{2\cdot\sqrt{\Sigma fd^2{}_x\cdot\Sigma fd^2{}_y}}$$

$$=\frac{\Sigma fd_xd_y}{\sqrt{\Sigma fd^2{}_x\cdot\Sigma fd^2{}_y}}$$

表七十一　上海市第五屆至第七屆集團結婚新郎新娘年齡相關表

（由相關表中用對角線法求相關係數表乙）

分組						16·0–17·9	18·0–19·9	20·0–21·9	22·0–23·9	24·0–25·9	26·0–27·9	28·0–29·9	30·0–31·9	總計
	m					17	19	21	23	25	27	29	31	
		f				55	59	105	42	30	10	6	2	309
			d''			-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	
				fd''		-165	-118	-105	0	+30	+20	+18	+8	-312
					fd''^2	495	236	105	0	30	40	54	32	992
16·0–17·9	17	1	-5	-5	25		1							
18·0–19·9	19	23	-4	-92	368	8	10	5						
20·0–21·9	21	57	-3	-171	513	18	12	23	3	1				
22·0–23·9	23	67	-2	-134	268	13	13	29	9	3				
24·0–25·9	25	64	-1	-64	64	11	10	25	8	8	2			
26·0–27·9	27	38	0	0	0	2	5	11	10	6	4			
28·0–29·9	29	27	+1	+27	27	1	5	8	5	6	1	1		
30·0–31·9	31	11	+2	+22	44	2	1	1	3	3		1		
32·0–33·9	33	12	+3	+36	108		2	2	1	2	3	2		
34·0–35·9	35	5	+4	+20	80			1	3				1	
36·0–37·9	37	1	+5	+5	25								1	
38·0–39·9	39	3	+6	+18	108					1		2		
總計		309		-338	1,630									

f_z	6	7	11	29	46	75	65	55	14	1	309
d_z'' *	+4	+3	+2	+1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-
fd_z''	+24	+21	+22	+29	0	-75	-130	-165	-56	-5	-335
$fd_z''^2$	96	63	44	29	0	75	260	495	224	25	1,311

* $d_z'' = d_y'' - d_x''$

$$i_x = 2$$

$$i_y = 2$$

$$i_z = 2$$

$$\Sigma f d'^2_x = \Sigma f d''^2_x \cdot i^2_x$$

$$= 992 \times 2 \times 2 = 3{,}968$$

$$\Sigma f d'^2_y = \Sigma f d''^2_y \cdot i^2_y$$

$$= 1{,}630 \times 2 \times 2 = 6{,}520$$

$$\Sigma f d'^2_z = \Sigma f d''^2_z \cdot i^2_z$$

$$= 1{,}311 \times 2 \times 2 = 5{,}244$$

$$C^2_x = \left(\frac{\Sigma f d''_x}{N} \cdot i_x \right)^2$$

$$= \left(\frac{-312}{309} \times 2 \right)^2 = (-2.020)^2 = 4.0804$$

$$C^2_y = \left(\frac{\Sigma f d''_y}{N} \cdot i_y \right)^2$$

$$= \left(\frac{-338}{309} \times 2 \right)^2 = (-2.188)^2 = 4.7873$$

$$C^2_z = \left(\frac{\Sigma f d''_z}{N} \cdot i_z \right)^2$$

$$= \left(\frac{-335}{309} \times 2 \right)^2 = (-2.168)^2 = 4.7002$$

應用公式六十八

$$r = \frac{3{,}968 + 6{,}520 - 5{,}244 - 309 \times (4.0804 + 4.7873 - 4.7002)}{2 \times \sqrt{(3{,}968 - 309 \times 4.0804) \times (6{,}520 - 309 \times 4.7873)}}$$

$$=\frac{5,244-309\times 4.1675}{2\times\sqrt{(3,968-1,260.844)\times(6,520-1,479.276)}}$$

$$=\frac{5,244-1,287.7575}{2\times\sqrt{2,707.156\times 5,040.724}}$$

$$=\frac{3,956.2425}{2\times\sqrt{13,646,026.220944}}$$

$$=\frac{1,978.1213}{\sqrt{13,646,026.220944}}$$

$$=\frac{1,978.1213}{3,694.053}$$

$$=0.536$$

(二)　X與Y數列之組值背向排列者

X與Y數列之組值,背向排列;如X數列之組值,由左而右,小者在左,大者在右;Y數列之組值,由下而上,小者在下,大者在上者;計算相關係數之公式,又以對角線之如何繪劃,而分下列兩種:

(1)對角線如由左下角,上向右上角繪劃者,則

$$d'_z=d'_y-d'_x$$

$$r=\frac{\Sigma fd'^2_x+\Sigma fd'^2_y-\Sigma fd'^2_z-N(C^2_x+C^2_y-C^2_z)}{2\cdot\sqrt{(\Sigma fd'^2_x-NC^2_x)\cdot(\Sigma fd'^2_y-NC^2_y)}}$$

本公式與公式六十八同,茲仍以上海市第五屆至第七屆集團結婚新郎新娘年齡之相關,設例示之如下:

表七十二 上海市第五屆至第七屆集團結婚新郎新娘年齡相關表

（由相關表中用對角線法求相關係數表丙）

分組						16·0 | 17·9	18·0 | 19·9	20·0 | 21·9	22·0 | 23·9	24·0 | 25·9	26·0 | 27·9	28·0 | 29·9	30·0 | 31·9	總計
	m					17	19	21	23	25	27	29	31	
		f				55	59	105	42	30	10	6	2	309
			d''			-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	
				fd''		-165	-118	-105	0	+30	+20	+18	+8	-312
					fd''^2	495	236	105	0	30	40	54	32	992
38·0 | 39·9	39	3	+6	+18	108					1		2		
36·0 | 37·9	37	1	+5	+5	25								1	
34·0 | 35·9	35	5	+4	+20	80			1	3				1	
32·0 | 33·9	33	12	+3	+36	108		2	2	1	2	3	2		
30·0 | 31·9	31	11	+2	+22	44	2	1	1	3	3		1		
28·0 | 29·9	29	27	+1	+27	27	1	5	8	5	6	1	1		
26·0 | 27·9	27	38	0	0	0	2	5	11	10	6	4			
24·0 | 25·9	25	64	-1	-64	64	11	10	25	8	8	2			
22·0 | 23·9	23	67	-2	-134	268	13	13	29	9	3				
20·0 | 21·9	21	57	-3	-171	513	18	12	23	3	1				
18·0 | 19·9	19	23	-4	-92	368	8	10	5						
16·0 | 17·9	17	1	-5	-5	25		1							
總計		309		-338	1,630									

f_z	6	7	11	29	46	75	65	55	14	1	309
d''_z *	+4	+3	+2	+1	0	-1	-2	-3	-4	-5	
fd''_z	+24	+21	+22	+29	0	-75	-130	-165	-56	-5	-335
fd''^2_z	96	63	44	29	0	75	260	495	224	25	1,311

* $d''_z = d''_y - d''_x$

表七十二所得$\Sigma fd''_x$, $\Sigma fd''_y$, $\Sigma fd''_z$及$\Sigma fd''^2_x$, $\Sigma fd''^2_y$, $\Sigma fd''^2_z$等與表七十一所得者完全相同,故

$$r=\frac{3,968+6,520-5,244-309\times(4.0804+4.7873-4.7002)}{2\times\sqrt{(3,968-309\times4.0804)\times(6,520-309\times4.7873)}}$$

$$=\frac{5,244-309\times4.1675}{2\times\sqrt{(3,968-1,260.844)\times(6,520-1,479.276)}}$$

$$=\frac{5,244-1,287.7575}{2\times\sqrt{2,707.156\times5,040.724}}$$

$$=\frac{3,956.2425}{2\times\sqrt{13,646,026.220944}}$$

$$=\frac{1,978.1213}{\sqrt{13,646,026.220944}}$$

$$=\frac{1,978.1213}{3,694.053}$$

$$=0.536$$

(2)對角線如由左上角,下向右下角繪劃者,則

$$d'_z=d'_y+d'_x$$

$$r=\frac{\Sigma fd'^2_z-\Sigma fd'^2_y-\Sigma fd'^2_x-N(C^2_z-C^2_y-C^2_x)}{2\cdot\sqrt{(\Sigma fd'^2_x-NC^2_x)\cdot(\Sigma fd'^2_y-NC^2_y)}}$$

本公式與公式六十七同,茲仍以上海市第五屆至第七屆集團結婚新郎新娘年齡之相關,設例示之如下:

表七十三 上海市第五屆至第七屆集團結婚新郎新娘年齡相關表

（由相關表中用對角線法求相關係數表丁）

分組						16·0–17·9	18·0–19·9	20·0–21·9	22·0–23·9	24·0–25·9	26·0–27·9	28·0–29·9	30·0–31·9	總計
	m					17	19	21	23	25	27	29	31	
		f				55	59	105	42	30	10	6	2	309
			d''			−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	
				fd''		−165	−118	−105	0	+30	+20	+18	+8	−312
					fd''^2	495	236	105	0	30	40	54	32	992
38·0–39·9	39	3	+6	+18	108					1		2		
36·0–37·9	37	1	+5	+5	25								1	
34·0–35·9	35	5	+4	+20	80			1	3				1	
32·0–33·9	33	12	+3	+36	108		2	2	1	2	3	2		
30·0–31·9	31	11	+2	+22	44	2	1	1	3	3		1		
28·0–29·9	29	27	+1	+27	27	1	5	8	5	6	1	1		
26·0–27·9	27	38	0	0	0	2	5	11	10	6	4			
24·0–25·9	25	64	−1	−64	64	11	10	25	8	8	2			
22·0–23·9	23	67	−2	−134	268	13	13	29	9	3				
20·0–21·9	21	57	−3	−171	513	18	12	23	3	1				
18·0–19·9	19	23	−4	−92	368	8	10	5						
16·0–17·9	17	1	−5	−5	25		1							
總計		309		−338	1,630									

f_z	9	28	30	47	44	41	29	27	16	15	6	6	4	2	1	1	3	309
d''_z *	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9	
fd''_z	−63	−168	−150	−188	−132	−82	−29	0	+16	+30	+18	+24	+20	+12	+7	+8	+27	−650
fd''^2_z	441	1,008	750	752	396	164	29	0	16	60	54	96	100	72	49	64	243	4,294

* $d''_z = d''_x + d''_y$

表七十三所得 $\Sigma fd''_x$, $\Sigma fd''_y$, $\Sigma fd''_z$ 及 $\Sigma fd''^2_x$, $\Sigma fd''^2_y$, $\Sigma fd''^2_z$ 與表七十所得者完全相同,故

$$r=\frac{17,176-3,968-6,520-309\times(17.7073-4.0804-4.7873)}{2\times\sqrt{(3,968-309\times4.0804)\times(6,520-309\times4.7873)}}$$

$$=\frac{6,688-309\times8.8396}{2\times\sqrt{(3,968-1,260.844)\times(6,520-1,479.276)}}$$

$$=\frac{6,688-2,731.4364}{2\times\sqrt{2,707.156\times5,040.724}}$$

$$=\frac{3,956.5636}{2\times\sqrt{13,646,026.220944}}$$

$$=\frac{1,978.2818}{\sqrt{13,646,026.220944}}$$

$$=\frac{1,978.2818}{3,694.053}$$

$$=0.536$$

前舉四例,俱將 X 與 Y 數列中,各變量與其假定算術平均數之差,本以組距爲單位者(d''),各乘組距,(即將 X 數列之離中差,乘 X 數列之組距 i_x. Y 數列之離中差,乘 Y 數列之組距 i_y.)折成 d' 後,始用公式六十七或公式六十八核算相關係數.然遇 X 與 Y 數列之組距相等,或組距相等而數列之單位不同時,亦可以下列兩種簡捷公式求之:

設 r 爲相關係數.

d'_x 爲甲數列中各變量與其假定算術平均數之差.

d'_y 爲乙數列中各變量與其假定算術平均數之差.

d'_z 爲 Z 數列中各變量與其假定算術平均數之差.

d''_x 爲甲數列中各變量與其假定算術平均數之差,以組距爲單位者.

d''_y 爲乙數列中各變量與其假定算術平均數之差,以組距爲單位者.

d''_z 爲 Z 數列中各變量與其假定算術平均數之差,以組距爲單位者.

C_x 爲甲數列假定算術平均數與其眞正算術平均數之差.

C_y 爲乙數列假定算術平均數與其眞正算術平均數之差.

C_z 爲 Z 數列假定算術平均數與其眞正算術平均數之差.

c_x 爲甲數列假定算術平均數與其眞正算術平均數之差,以組距爲單位者.

c_y 爲乙數列假定算術平均數與其眞正算術平均數之差,以組距爲單位者.

c_z 爲 Z 數列假定算術平均數與其眞正算術平均數之差,以組距爲單位者.

i_x 爲甲數列之組距.

i_y 爲乙數列之組距.

i_z 爲Z數列之組距.

N 爲次數之總數.

f 爲變量之次數.

Σ 爲總和之記號.

若 $i_x = i_y = i_z$

$d''_z = d''_x + d''_y$

$$r = \frac{\Sigma fd''^2_z - \Sigma fd''^2_x - \Sigma fd''^2_y - N(c^2_z - c^2_x - c^2_y)}{2\cdot\sqrt{(\Sigma fd''^2_x - Nc^2_x)\cdot(\Sigma fd''^2_y - Nc^2_y)}}\cdots\cdots$$

(公式六十九)

公式六十七與本公式完全相同,茲證之如下:

因 $i = i_x = i_y = i_z$

$\Sigma fd'^2_x = \Sigma fd''^2_x \cdot i^2$

$\Sigma fd'^2_y = \Sigma fd''^2_y \cdot i^2$

$\Sigma fd'^2_z = \Sigma fd''^2_z \cdot i^2$

$C^2_x = c^2_x \cdot i^2$

$C^2_y = c^2_y \cdot i^2$

$C^2_z = c^2_z \cdot i^2$

$$r = \frac{\Sigma fd'^2_z - \Sigma fd'^2_x - \Sigma fd'^2_y - N(C^2_z - C^2_x - C^2_y)}{2\cdot\sqrt{(\Sigma fd'^2_x - NC^2_x)\cdot(\Sigma fd'^2_y - NC^2_y)}}$$

故 $$= \frac{\Sigma fd''^2_z\cdot i^2 - \Sigma fd''^2_x\cdot i^2 - \Sigma fd''^2_y\cdot i^2 - N(c^2_z\cdot i^2 - c^2_x\cdot i^2 - c^2_y\cdot i^2)}{2\cdot\sqrt{(\Sigma fd''^2_x\cdot i^2 - Nc^2_x\cdot i^2)\cdot(\Sigma fd''^2_y\cdot i^2 - Nc^2_y\cdot i^2)}}$$

$$=\frac{[\Sigma fd''^2{}_z-\Sigma fd''^2{}_x-\Sigma fd''^2{}_y-N(c^2{}_z-c^2{}_x-c^2{}_y)]\cdot i^2}{2\cdot\sqrt{[(\Sigma fd''^2{}_x-Nc^2{}_x)\cdot(\Sigma fd''^2{}_y-Nc^2{}_y)]\cdot i^4}}$$

$$=\frac{[\Sigma fd''^2{}_z-\Sigma fd''^2{}_x-\Sigma fd''^2{}_y-N(c^2{}_z-c^2{}_x-c^2{}_y)]\cdot i^2}{2\cdot\sqrt{(\Sigma fd''^2{}_x-Nc^2{}_x)\cdot(\Sigma fd''^2{}_y-Nc^2{}_y)}\cdot i^2}$$

$$=\frac{\Sigma fd''^2{}_z-\Sigma fd''^2{}_x-\Sigma fd''^2{}_y-N(c^2{}_z-c^2{}_x-c^2{}_y)}{2\cdot\sqrt{(\Sigma fd''^2{}_x-Nc^2{}_x)\cdot(\Sigma fd''^2{}_y-Nc^2{}_y)}}$$

表七十 $\Sigma fd''^2{}_x=992$

$$\Sigma fd''^2{}_y=1{,}630$$

$$\Sigma fd''^2{}_z=4{,}294$$

$$c^2{}_x=\left(\frac{\Sigma fd''{}_x}{N}\right)^2$$

$$=\left(\frac{-312}{309}\right)^2=(-1.010)^2=1.0201$$

$$c^2{}_y=\left(\frac{\Sigma fd''{}_y}{N}\right)^2$$

$$=\left(\frac{-338}{309}\right)^2=(-1.094)^2=1.1968$$

$$c^2{}_z=\left(\frac{\Sigma fd''{}_z}{N}\right)^2$$

$$=\left(\frac{-650}{309}\right)^2=(-2.104)^2=4.4268$$

應用公式六十九

$$r=\frac{4{,}294-992-1{,}630-309\times(4.4268-1.0201-1.1968)}{2\times\sqrt{(992-309\times1.0201)\times(1{,}630-309\times1.1968)}}$$

$$=\frac{1{,}672-309\times2.2099}{2\times\sqrt{(992-315.211)\times(1{,}630-369.811)}}$$

$$=\frac{1{,}672-682.859}{2\times\sqrt{676.789\times1{,}260.189}}$$

$$=\frac{989.141}{2\times\sqrt{852,882.053121}}$$

$$=\frac{494.571}{\sqrt{852,882.053121}}$$

$$=\frac{494.571}{923.516}$$

$$=0.536$$

若 $i_x=i_y=i_z$

$$d''_z=d''_y-d''_x$$

$$r=\frac{\Sigma fd''^2_x+\Sigma fd''^2_y-\Sigma fd''^2_z-N(c^2_x+c^2_y-c^2_z)}{2\cdot\sqrt{(\Sigma fd''^2_x-Nc^2_x)\cdot(\Sigma fd''^2_y-Nc^2_y)}}\cdots\cdots\cdots$$

（公式七十）

公式六十八與本公式完全相同,茲證之如下:

因　$i=i_x=i_y=i_z$

$$\Sigma fd'^2_x=\Sigma fd''^2_x\cdot i^2$$

$$\Sigma fd'^2_y=\Sigma fd''^2_y\cdot i^2$$

$$\Sigma fd'^2_z=\Sigma fd''^2_z\cdot i^2$$

$$C^2_x=c^2_x\cdot i^2$$

$$C^2_y=c^2_y\cdot i^2$$

$$C^2_z=c^2_z\cdot i^2$$

故 $$r=\frac{\Sigma fd'^2_x+\Sigma fd'^2_y-\Sigma fd'^2_z-N(C^2_x+C^2_y-C^2_z)}{2\cdot\sqrt{(\Sigma fd'^2_x-NC^2_x)\cdot(\Sigma fd'^2_y-NC^2_y)}}$$

$$=\frac{\Sigma fd''^2_x\cdot i^2+\Sigma fd''^2_y\cdot i^2-\Sigma fd''^2_z\cdot i^2-N(c^2_x\cdot i^2+c^2_y\cdot i^2-c^2_z\cdot i^2)}{2\cdot\sqrt{(\Sigma fd''^2_x\cdot i^2-Nc^2_x\cdot i^2)\cdot(\Sigma fd''^2_y\cdot i^2-Nc^2_y\cdot i^2)}}$$

$$=\frac{[\Sigma fd''^2_x+\Sigma fd''^2_y-\Sigma fd''^2_z-N(c^2_x+c^2_y-c^2_z)]\cdot i^2}{2\cdot\sqrt{[(\Sigma fd''^2_x-Nc^2_x)\cdot(\Sigma fd''^2_y-Nc^2_y)]\cdot i^4}}$$

$$=\frac{[\Sigma fd''^2_x+\Sigma fd''^2_y-\Sigma fd''^2_z-N(c^2_x+c^2_y-c^2_z)]\cdot i^2}{2\cdot\sqrt{[(\Sigma fd''^2_x-Nc^2_x)\cdot(\Sigma fd''^2_y-Nc^2_y)]\cdot i^2}}$$

$$=\frac{\Sigma fd''^2_x+\Sigma fd''^2_y-\Sigma fd''^2_z-N(c^2_x+c^2_y-c^2_z)}{2\cdot\sqrt{(\Sigma fd''^2_x-Nc^2_x)\cdot(\Sigma fd''^2_y-Nc^2_y)}}$$

表七十一 $\Sigma fd''^2_x=992$

$$\Sigma fd''^2_y=1{,}630$$

$$\Sigma fa''^2_z=1{,}311$$

$$c^2_x=\left(\frac{\Sigma fa''_x}{N}\right)^2$$

$$=\left(\frac{-312}{309}\right)^2=(-1.010)^2=1.0201$$

$$c^2_y=\left(\frac{\Sigma fa''_y}{N}\right)^2$$

$$=\left(\frac{-338}{309}\right)^2=(-1.094)^2=1.1968$$

$$c^2_z=\left(\frac{\Sigma fa''_z}{N}\right)^2$$

$$=\left(\frac{-335}{309}\right)^2=(-1.084)^2=1.1751$$

應用公式七十

$$r=\frac{992+1{,}630-1{,}311-309\times(1.0201+1.1968-1.1751)}{2\times\sqrt{(992-309\times1.0201)\times(1{,}630-309\times1.1968)}}$$

$$=\frac{1{,}311-309\times1.0418}{2\times\sqrt{(992-315.211)\times(1{,}630-369.811)}}$$

$$=\frac{1{,}311-321.916}{2\times\sqrt{676.789\times1{,}260.189}}$$

$$=\frac{989.084}{2\times\sqrt{852{,}882.053121}}$$

$$=\frac{494.542}{\sqrt{852,882.053121}}$$

$$=\frac{494.542}{923.516}$$

$$=0.536$$

第七節　迴歸線

(一)　迴歸之意義

迴歸(Regression)一名詞,爲高爾登(Galton)所首創.高氏在研究人類體高之遺傳性時,發現父之體高與其平均數之差,及子之體高與其平均數之差,成一定之比例.換言之,人體之長短,隨其平均數之大小而定,卽迴歸至(Regress or Step back)其均數上是也.高氏自研究遺傳問題,而創用迴歸兩字後,統計學家卽用以測定相關表上X與Y兩數列間之迴歸.蓋事實之有相關者,X數列中某變量有一單位之變動時,必影響Y數列之相當變量而變動之.反之,Y數列中某變量有一單位之變動時,亦必影響X數列之相當變量而變動之.惟X與Y兩數列之標準差,苟非偶然,常不相等,故X變量影響Y變量,或Y變量影響X變量,大小亦不一致.迴歸係數(Coefficient of regression)及迴歸方程(Regression equation)之核算,迴歸線(Line of regression)之繪製,乃卽明示X與Y間相互影響之大小者也.

(二) 迴歸係數

迴歸係數乃即 X 變量迴歸 Y 變量,或 Y 變量迴歸 X 變量之係數.其測定之公式如下:

設 b_{xy} 爲 X 迴歸 Y 之係數.

b_{yx} 爲 Y 迴歸 X 之係數.

σ_x 爲 X 數列之標準差.

σ_y 爲 Y 數列之標準差.

r 爲 X 與 Y 兩數列之相關係數.

(1) X 迴歸 Y 之係數

$$b_{xy}=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdots\cdots \text{(公式七十一)}$$

(2) Y 迴歸 X 之係數

$$b_{yx}=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdots\cdots \text{(公式七十二)}$$

茲即以上海市第五屆至第七屆集團結婚新郎新娘年齡之標準差及相關係數,核計其迴歸係數如下:

(根據表六十九各數核算)

新娘年齡之標準差(σ_x)

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{992}{309}-\left(\frac{-312}{309}\right)^2}\times 2$$

$$=\sqrt{3.210356-(-1.0097)^2}\times 2$$

$$=\sqrt{2.190862}\times 2$$

$$=1.480\times 2$$

$$=2.960 \text{ 歲}$$

新郎年齡之標準差(σ_y)

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{1,630}{309}-\left(\frac{-338}{309}\right)^2}\times 2$$

$$=\sqrt{5\cdot275081-(-1.0938)^2}\times 2$$

$$=\sqrt{4.078683}\times 2$$

$$=2.020\times 2$$

$=4.040$歲

新郎新娘年齡之相關係數(r)

$$r=\frac{\left(836-309\times\frac{-312}{309}\times\frac{-338}{309}\right)\times 4}{309\times 2.960\times 4.040}$$

$$=\frac{[836-309\times(-1.010)\times(-1.094)]\times 4}{309\times 2.960\times 4.040}$$

$$=\frac{494.574\times 4}{309\times 11.9584}$$

$$=\frac{1,978.296}{3,695.146}$$

$$=0.536$$

應用公式七十一,核計新娘年齡迴歸新郎年齡之係數爲:

$$b_{xy}=0.536\times\frac{2.960}{4.040}$$

$$=0.536\times 0.733$$

$$=0.393$$

應用公式七十二,核計新郎年齡迴歸新娘年齡之係數爲:

$$b_{yx}=0.536\times\frac{4.040}{2.960}$$

$$=0.536\times1.365$$

$$=0.732$$

迴歸係數之意義,如新娘年齡迴歸新郎年齡之係數(即X迴歸Y之係數b_{xy}),爲0.393,即示新郎年齡有一單位變動時,新娘之年齡有0.393單位之變動.如新郎年齡迴歸新娘年齡之係數(即Y迴歸X之係數b_{yx}),爲0.732,即示新娘年齡有一單位變動時,新郎之年齡有0.732單位之變動.惟此兩種迴歸係數乘積之平方根,應等於相關係數,茲證之如下:

$$b_{xy}\cdot b_{yx}=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\cdot r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$=r^2$$

故 $r=\sqrt{b_{xy}\cdot b_{yx}}$ ……………………………………(公式七十三)

前例b_{xy}爲0.393,b_{yx}爲0.732,故相關係數爲:

$$r=\sqrt{0.393\times0.732}$$

$$=\sqrt{0.287676}$$

$$=0.536$$

(三)迴歸方程式

迴歸方程式乃表示X變量迴歸Y變量,或Y變量迴歸X變量之方程式也.

設r爲X與Y兩數列之相關係數.

M_x 爲 X 數列之算術平均數.

M_y 爲 Y 數列之算術平均數.

m_x 爲 X 數列中之變量.

m_y 爲 Y 數列中之變量.

d_x 爲 X 數列中各變量與其算術平均數之差.

d_y 爲 Y 數列中各變量與其算術平均數之差.

σ_x 爲 X 數列之標準差.

σ_y 爲 Y 數列之標準差.

(1) X 迴歸 Y 之方程式

$$d_x = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}d_y$$

惟 $$d_x = m_x - M_x$$

$$d_y = m_y - M_y$$

故 $$m_x - M_x = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(m_y - M_y)$$

$$\boldsymbol{m_x = M_x + r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(m_y - M_y)} \text{……………(公式七十四)}$$

(2) Y 迴歸 X 之方程式

$$d_y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}d_x$$

惟 $$d_x = m_x - M_x$$

$$d_y = m_y - M_y$$

故 $$m_y - M_y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(m_x - M_x)$$

$$m_y=M_y+r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(m_x-M_x)\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式七十五)}$$

上列迴歸方程式,卽示 X 數列之變量(m_x)爲若干時,Y 數列之變量應爲若干?或 Y 數列之變量(m_y)爲若干時,X 數列之變量應爲若干?惟於推測之前,須先核算 X 與 Y 數列之算術平均數.例如表六十九所示,新郎新娘之算術平均年齡如下:

新娘之算術平均年齡(M_x)

$$M_x=23+\frac{-312}{309}\times 2=20.98\text{ 歲}$$

新郎之算術平均年齡(M_y)

$$M_y=27+\frac{-338}{309}\times 2=24.81\text{ 歲}$$

如知新郎之年齡,而欲推測新娘之年齡時,卽可應用公式七十四計算之.

設新郎之年齡爲25歲

則新娘之年齡應爲:

$$m_x=20.98+0.536\times\frac{2.960}{4.040}\times(25-24.81)$$

$$=20.98+0.393\times 0.19$$

$$=20.98+0.07$$

$$=21.05\text{ 歲}$$

設新郎之年齡爲40歲

則新娘之年齡應爲:

$$m_x=20.98+0.536\times\frac{2.960}{4.040}\times(40-24.81)$$

$$=20.98+0.393\times15.19$$

$$=20.98+5.97$$

$=26.95$ 歲

如知新娘之年齡,而欲推測新郎之年齡時,即可應用公式七十五計算之.

設新娘之年齡為20歲

則新郎之年齡應為:

$$m_y=24.81+0.536\times\frac{4.040}{2.960}\times(20-20.98)$$

$$=24.81+0.732\times(-0.98)$$

$$=24.81+(-0.72)$$

$=24.09$ 歲

設新娘之年齡為35歲

則新郎之年齡應為:

$$m_y=24.81+0.536\times\frac{4.040}{2.960}\times(35-20.98)$$

$$=24.81+0.732\times14.02$$

$$=24.81+10.26$$

$=35.07$ 歲

觀上列迴歸方程式,可知新郎之年齡,有一歲之變動時,新娘之年齡,即有0.393歲之變動.新娘之年齡有一

歲之變動時,新郎之年齡,卽有0.732歲之變動.茲將新郎迴歸新娘之年齡(卽Y迴歸X),及新娘迴歸新郎之年齡(卽X迴歸Y),列表示之如下:

表七十四　上海市集團結婚新郎新娘年齡推測表

(迴歸方程式推測表甲)

(甲)　Y迴歸X卽

新郎迴歸新娘之年齡

新娘年齡 X	新郎年齡 Y
15	20.43
20	24.09
25	27.75
30	31.41
35	35.07
40	38.73
45	42.39

(乙)　X迴歸Y卽

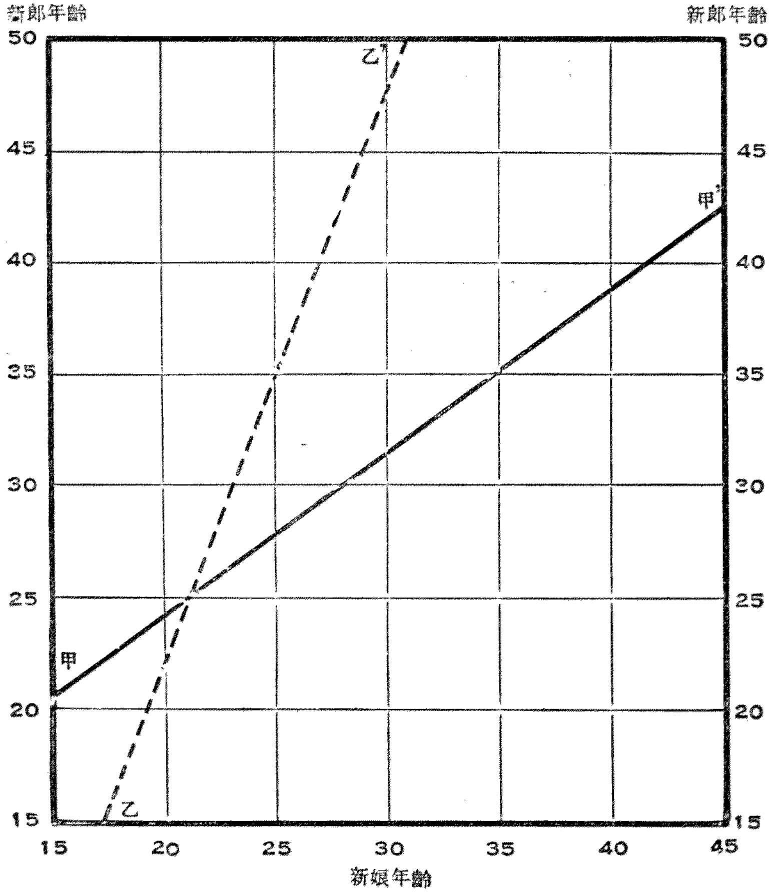
新娘迴歸新郎之年齡

新郎年齡 Y	新娘年齡 X
20	19.09
25	21.05
30	23.02
35	24.98
40	26.95
45	28.91
50	30.88

(四)　迴歸線

若就表七十四甲所列各對新夫婦之年齡,任取兩對年齡,於相關圖上,點定坐標,用直線聯綴之,其餘各點,均應落於此直線上,此直線爲甲甲'線,乃表示Y迴歸X之直線.若就表七十四乙所列各對新夫婦之年齡,任取兩對年齡,於相關圖上,點定坐標,用直線聯綴之,其餘各點,均應落於此直線上,此直線爲乙乙'線,乃表示X迴歸Y之直線.

圖五十六　上海市集團結婚新郎新娘年齡推測圖



———(甲)　新郎年齡迴歸新娘年齡之直線

- - - - -(乙)　新娘年齡迴歸新郎年齡之直線

(迴歸直線圖甲)

Y 迴歸 X 之直線,與 X 迴歸 Y 之直線,視相關係數之大小而密接或疏散.若相關係數為 1,則為完全相關,兩迴

歸直線密合爲一線.然事實上,兩事相關,鮮能達完全者,致相關點常星羅棋佈,散處各部,兩迴歸直線卽疏散而不能密接.故於試驗兩事實之相關程度時,X及Y兩迴歸線密接,卽示相關度甚高.若X及Y兩迴歸線疏散,卽示相關度甚低.茲更用人體高度與重量之相關,測定其迴歸線如下:

表七十五　一一三八二人體高與體重相關表
(相　關　表)

	體高分組(X)(單位　吋)												總計
分組	30.0—32.9	33.0—35.9	36.0—38.9	39.0—41.9	42.0—44.9	45.0—47.9	48.0—50.9	51.0—53.9	54.0—56.9	57.0—59.9	60.0—62.9	63.0—65.9	
體重分組(Y)(單位磅) 119—123.9												1	1
114—118.9													
109—113.9											1		1
104—108.9									1		5	1	7
99—103.9										5	11	3	19
94—98.9									3	23	9	2	37
89—93.9								1	10	36	18	1	66
84—88.9						1		8	32	87	8	2	138
79—83.9							2	22	120	93	4	1	242
74—78.9							3	106	335	76	5		525
69—73.9				1			35	374	340	24	2		776
64—68.9				1		8	161	621	206	3	2	2	1,004
59—63.9			1		1	39	630	568	51	6	1		1,297
54—58.9		1	3	1	17	436	905	171	11	4	3		1,552
49—53.9			4	12	249	988	411	33	5	4			1,706
44—48.9		1	7	122	875	603	38	8	1				1,655
39—43.9	1	3	51	617	697	95	11	1					1,476
34—38.9		16	220	414	72	6							728
29—33.9	3	42	62	25	3	1							136
24—28.9	4	9	2			1							16
總計	8	72	350	1193	1914	2178	2196	1913	1115	361	69	13	11,382

一一三八二人體高之標準差(σ_x)爲:

$\sigma_x = 5.36$ 吋

一一三八二人體重之標準差(σ_y)爲:

$\sigma_y = 12.97$ 磅

一一三八二人體高與體重之相關係數(r)爲:

$r = 0.91$

故 X 迴歸 Y（b_{xy} 即體高迴歸體重）之係數爲:

$$b_{xy} = 0.91 \times \frac{5.36}{12.97}$$

$$= 0.376$$

Y 迴歸 X（b_{yx} 即體重迴歸體高）之係數爲:

$$b_{yx} = 0.91 \times \frac{12.97}{5.36}$$

$$= 2.202$$

一一三八二人體高之算術平均數(M_x)爲:

$M_x = 47.96$ 吋

一一三八二人體重之算術平均數(M_y)爲:

$M_y = 55.47$ 磅

故 X 迴歸 Y（即體高迴歸體重）之方程式爲:

$$m_x = 47.96 + 0.376 \times (m_y - 55.47)$$

$$= 47.96 + 0.376 m_y - 20.857$$

$$= 0.376 m_y + 27.103$$

Y 迴歸 X（即體重迴歸體高）之方程式爲:

$$m_y = 55.47 + 2.202 \times (m_x - 47.96)$$

$$= 55.47 + 2.202m_x - 105.608$$

$$= 2.202m_x - 50.138$$

依上列兩個迴歸方程式,核計 Y 迴歸 X,及 X 迴歸 Y 之數值,如表七十六.X 與 Y 之迴歸直線如圖五十七.

表七十六　體高體重推測表

(迴歸方程式推測表乙)

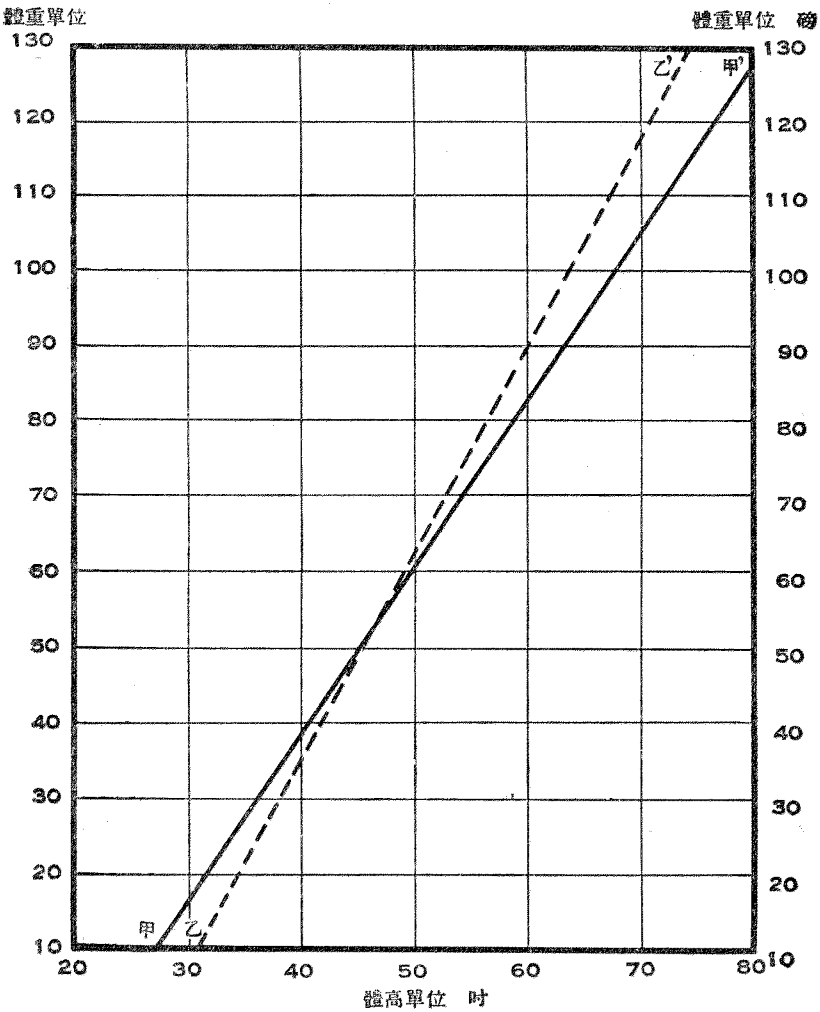
(甲)　Y 迴歸 X 即體重迴歸體高

體高 X (單位　吋)	體重 Y (單位　磅)
31.5	19.23
34.5	25.83
37.5	32.44
40.5	39.04
43.5	45.65
46.5	52.26
49.5	58.86
52.5	65.47
55.5	72.07
58.5	78.68
61.5	85.29
64.5	91.89

(乙)　X 迴歸 Y 即體高迴歸體重

體重 Y (單位　磅)	體高 X (單位　吋)
26.5	37.07
31.5	38.95
36.5	40.83
41.5	42.71
46.5	44.59
51.5	46.47
56.5	48.35
61.5	50.23
66.5	52.11
71.5	53.99
76.5	55.87
81.5	57.75
86.5	59.63
91.5	61.51
96.5	63.39
101.5	65.27
106.5	67.15
111.5	69.03
116.5	70.91
121.5	72.79

圖五十七 體高體重推測圖



——— (甲) 體重迴歸體高直線

- - - - (乙) 體高迴歸體重直線

(迴歸直線圖乙)

圖五十七兩線密接,故知相關係數甚大(0.91).圖五十六兩線較爲疏散,故知相關係數較小(0.536).

本章應用公式

(公式六十一)相關係數

$$r=\frac{\Sigma d_x d_y}{N\sigma_x\sigma_y}$$

(公式六十二)由非相關表中求相關係數(普通法)

$$r=\frac{\Sigma d_x d_y}{\sqrt{\Sigma d^2_x\cdot\Sigma d^2_y}}$$

(公式六十三)由相關表中求相關係數(普通法)

$$r=\frac{\Sigma f d_x d_y}{\sqrt{\Sigma f d^2_x\cdot\Sigma f d^2_y}}$$

(公式六十四)由非相關表中求相關係數(簡捷法)

$$r=\frac{\Sigma d'_x d'_y-NC_xC_y}{\sqrt{(\Sigma d'^2_x-NC^2_x)\cdot(\Sigma d'^2_y-NC^2_y)}}$$

(公式六十五)由相關表中求相關係數(簡捷法)

$$r=\frac{\Sigma f d'_x d'_y-NC_xC_y}{\sqrt{(\Sigma f d'^2_x-NC^2_x)\cdot(\Sigma f d'^2_y-NC^2_y)}}$$

(公式六十六)由相關表中求相關係數(簡捷法以組距爲單位者)

$$r=\frac{\Sigma f d''_x d''_y-Nc_xc_y}{\sqrt{(\Sigma f d''^2_x-Nc^2_x)\cdot(\Sigma f d''^2_y-Nc^2_y)}}$$

(公式六十七)由相關表中求相關係數(對角線法甲)

$$r=\frac{\Sigma f d'^2_z-\Sigma f d'^2_x-\Sigma f d'^2_y-N(C^2_z-C^2_x-C^2_y)}{2\cdot\sqrt{(\Sigma f d'^2_x-NC^2_x)\cdot(\Sigma f d'^2_y-NC^2_y)}}$$

（公式六十八）由相關表中求相關係數（對角線法乙）

$$r=\frac{\Sigma fd'^2_x+\Sigma fd'^2_y-\Sigma fd'^2_z-N(C^2_x+C^2_y-C^2_z)}{2\cdot\sqrt{(\Sigma fd'^2_x-NC^2_x)\cdot(\Sigma fd'^2_y-NC^2_y)}}$$

（公式六十九）由相關表中求相關係數（對角線法丙——以組距爲單位——$i_x=i_y=i_z$者）

$$r=\frac{\Sigma fd''^2_z-\Sigma fd''^2_x-\Sigma fd''^2_y-N(c^2_z-c^2_x-c^2_y)}{2\cdot\sqrt{(\Sigma fd''^2_x-Nc^2_x)\cdot(\Sigma fd''^2_y-Nc^2_y)}}$$

（公式七十）由相關表中求相關係數（對角線法丁——以組距爲單位——$i_x=i_y=i_z$者）

$$r=\frac{\Sigma fd''^2_x+\Sigma fd''^2_y-\Sigma fd''^2_z-N(c^2_x+c^2_y-c^2_z)}{2\cdot\sqrt{(\Sigma fd''^2_x-Nc^2_x)\cdot(\Sigma fd''^2_y-Nc^2_y)}}$$

（公式七十一）X迴歸Y之係數

$$b_{xy}=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

（公式七十二）Y迴歸X之係數

$$b_{yx}=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

（公式七十三）由迴歸係數中求相關係數

$$r=\sqrt{b_{xy}\cdot b_{yx}}$$

（公式七十四）X迴歸Y之方程式

$$m_x=M_x+r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(m_y-M_y)$$

（公式七十五）Y迴歸X之方程式

$$m_y=M_y+r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(m_x-M_x)$$

問 題

1. 何謂相關?其種類有幾?試略述之.

2. 相關度之大小,應如何判別之?

3. 試述編製相關表之步驟.

4. 試解釋求相關係數公式 $r=\frac{\Sigma d_x d_y}{N\sigma_x\sigma_y}$ 之意義.

5. 由相關表中,用普通法及簡捷法求相關係數之步驟各有幾?試略述之.

6. 試證 $r=\frac{\Sigma f d_x d_y}{N\sigma_x\sigma_y}=\frac{\Sigma f d'_x d'_y-NC_xC_y}{\sqrt{(\Sigma f d'^2_x-NC^2_x)\cdot(\Sigma f d'^2_y-NC^2_y)}}$

$$=\frac{\Sigma f d''_x d''_y-Nc_xc_y}{\sqrt{(\Sigma f d''^2_x-Nc^2_x)\cdot(\Sigma f d''^2_y-Nc^2_y)}}.$$

7. 用對角線法求相關係數之步驟及公式各有幾?試申述之.

8. 如甲數列之組距,等於乙數列,等於 Z 數列時,用對角線法求相關係數之公式,又應如何?試證之.

9. 何謂迴歸係數,迴歸方程及迴歸直線?求迴歸係數及迴歸方程之公式各如何?試略述之?

10. X 迴歸 Y 及 Y 迴歸 X 線之疏散或密接,如何能推測相關係數之大小?

習 題 二 十 三

某校十五生數學及物理成績比較表

學生	數學成績	物理成績
趙生	57	60
錢生	89	91
孫生	77	73
李生	43	65
周生	87	90
吳生	45	60
陳生	81	72
王生	90	88

學生	數學成績	物理成績
馮生	62	86
張生	76	60
蔣生	75	76
曹生	75	93
黃生	88	91
江生	86	78
朱生	76	83

試用上列數學及物理成績比較表,計算以下諸數:

(1) 用普通法求相關係數。

(2) 用簡捷法求相關係數。

(3) 求 X 迴歸 Y 及 Y 迴歸 X 之係數。

(4) 求 X 迴歸 Y 及 Y 迴歸 X 之方程式。

(5) 試根據數學成績,推測物理成績.根據物理成績,推測數學成績.並繪迴歸線表示之。

習題二十四

五三一七對夫妻年齡相關表

	妻之年齡 (X)															
分組	15.0—19.9	20.0—24.9	25.0—29.9	30.0—34.9	35.0—39.9	40.0—44.9	45.0—49.9	50.0—54.9	55.0—59.9	60.0—64.9	65.0—69.9	70.0—74.9	75.0—79.9	80.0—84.9	85.0—89.9	總計
夫之年齡 (Y) 85—89.9											1	1	1	1		4
80—84.9								1	1	1	2	4	5	3	1	18
75—79.9						1	1	2	3	5	10	14	12	2		50
70—74.9					1	1	2	5	8	18	31	31	6	1		104
65—69.9				1	1	3	6	11	26	53	58	13	2	1		175
60—64.9				1	3	8	16	39	81	101	23	4	1			277
55—59.9			1	3	8	18	46	110	141	35	6	1				369
50—54.9			2	8	19	57	146	195	44	10	2					483
45—49.9		1	6	20	66	178	252	59	10	2	1					595
40—44.9		3	17	71	219	309	66	12	2	1						700
35—39.9		9	69	251	369	80	12	2	1							793
30—34.9	1	41	265	411	84	12	2	1								817
25—29.9	4	185	402	84	10	2	1									688
20—24.9	16	173	46	4	1											240
15—19.9	2	2														4
總計	23	414	808	854	781	669	550	437	317	226	134	68	27	8	1	5317

試用上列夫妻年齡相關表,計算以下諸數:

(1) 用普通法求相關係數.

(2) 用簡捷法求相關係數.

(3) 用對角線法 $d''_z=d''_x+d''_y$ 及 $d''_z=d''_x-d''_y$ 求相關係數.

(4) 求 X 迴歸 Y 及 Y 迴歸 X 之係數及方程式.

(5) 試根據妻之年齡,推測夫之年齡.根據夫之年齡,推測妻之年齡.並繪迴歸線表示之.

第九章　其他相關

第一節　非直線相關

(一) 直線與非直線相關之辨別法

兩數列之相關點,在相關圖上,散處成一直線形者,此兩數列之相關,爲直線相關,前章言之已詳.若兩數列之相關點,在相關圖上,星羅棋佈,不成一直線形者,此兩數列之相關,即爲非直線相關 (Non-linear correlation). 例如表六十五上海市第五屆至第七屆集團結婚新郎新娘年齡之相關,如以新娘年齡爲自變數,求得新郎之平均年齡如下:

表七十七　上海市第五屆至第七屆集團結婚新郎新娘年齡比較表

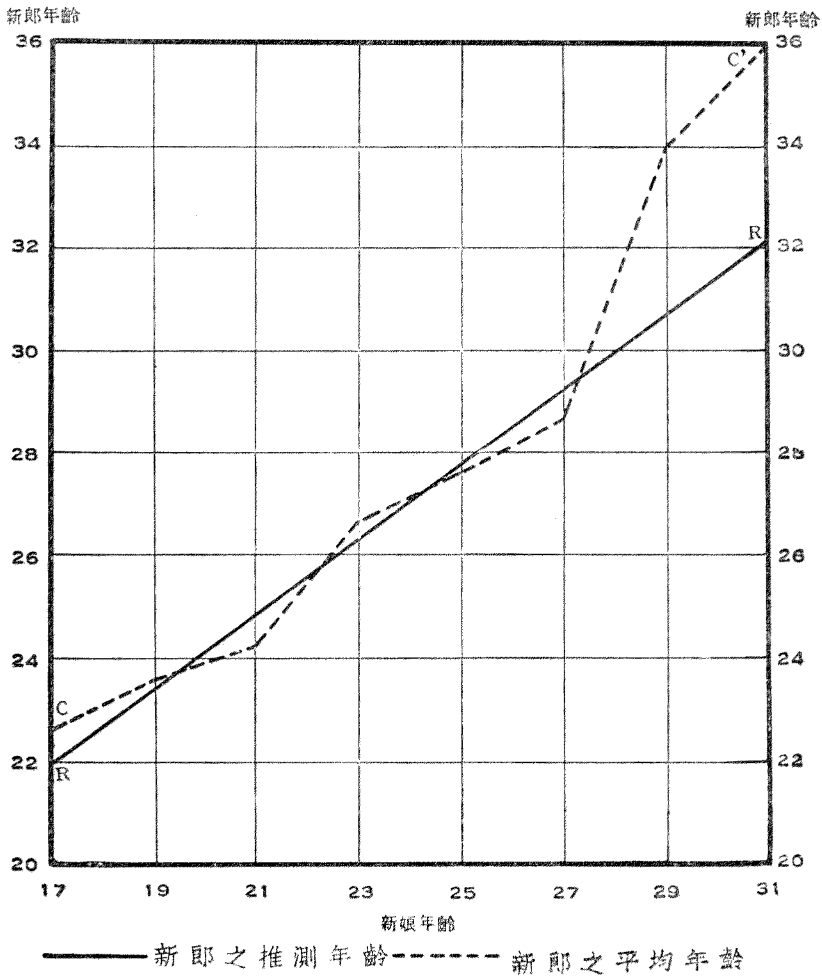
(辨別直線相關表)

新娘年齡	新郎之平均年齡	新郎之推測年齡
17	22.55	21.90
19	23.47	23.36
21	24.10	24.82
23	26.57	26.29
25	27.47	27.75
27	28.60	29.22
29	34.00	30.68
31	36.00	32.14
總平均	24.81	

如以新娘年齡爲自變數,將新郎之平均年齡,繪定各點於相關圖上,更用直線聯綴之,成曲線 CC', 與推算之迴

歸直線 RR' 比較,甚爲近似,故新郎新娘年齡之相關,知爲直線相關也.

圖五十八　上海市集團結婚新郎新娘年齡比較圖



(辨別直線相關圖)

反之,如表七十八,193 畝麥田,每畝小麥收穫量與所施氮素肥料量之相關,求得各行變數之算術平均數如下表末排末列:

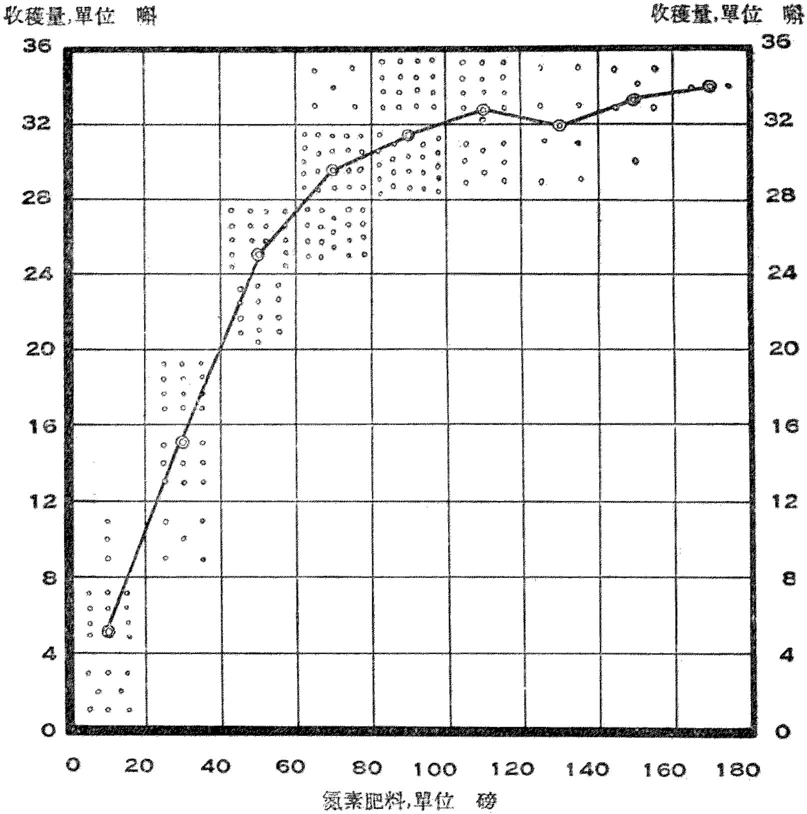
表七十八　一九三畝麥田每畝小麥收穫量與所施肥料量相關表

（非直線相關表）

每畝小麥收穫量（Y）（單位嘝）分組	每畝所施氮素肥料（X）（單位磅）0.0—19.9	20.0—39.9	40.0—59.9	60.0—79.9	80.0—99.9	100.0—119.9	120.0—139.9	140.0—159.9	160.0—179.9	總計	每畝平均所施肥料量
32—35.9				5	16	12	4	5	2	44	107.27
28—31.9			1	20	21	8	4	1		55	88.91
24—27.9			16	19						35	60.86
20—23.9			13							13	50.00
16—19.9		12								12	30.00
12—15.9		8								8	30.00
8—11.9	3	5								8	22.50
4— 7.9	10									10	10.00
0— 3.9	8									8	10.00
總計	21	25	30	44	37	20	8	6	2	193	
每畝平均收穫量	5.05	15.12	24.40	28.73	31.73	32.40	32.00	33.33	34.00		

如以每畝所施氮素肥料為自變數,將各行平均收穫量,繪定各點於相關圖上,更用直線聯綴各點,成一弓形曲線,離直線甚遠,於此可知其相關為非直線相關也.

圖五十九　一九三畝麥田每畝小麥收穫量與所施肥料量散佈圖



（辨別非直線相關圖）

辨別直線相關與非直線相關之方法,除由相關圖上觀察之外,更可比較相關係數及相關比（表示直線相關之大小者,爲相關係數.表示非直線相關之大小者,爲相關比 Correlation ratio,簡寫爲 η 讀如 eta.）之孰大

孰小以斷定之.如每畝小麥收穫量與所施氮素肥料之相關係數,僅為0.849.如以每畝麥田所施氮素肥料為自變數,其與小麥收穫量之相關比為0.965.反之,如以每畝小麥收穫量為自變數,其與每畝所施氮素肥料量之相關比為0.882.均較大於相關係數,故可斷定其為非直線相關也.

相關係數與相關比有時相差極微,不易覺察其為何種相關.勃來克美氏(Blakeman)因卽建議一直線性試驗公式(The criterion of linearity)如下:

設 η 為相關比.

r 為相關係數.

N 為次數之總數.

$$\frac{\sqrt{N}}{0.6745}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\eta^2-r^2}<2.5$$

為便於計算起見,勃氏公式又可改變如下:

$$\sqrt{N}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\eta^2-r^2}<2.5\times0.6745$$

$$\sqrt{N}\times\sqrt{\eta^2-r^2}<1.68625\times\frac{1}{2}$$

$$N\times(\eta^2-r^2)<(0.843125)^2$$

$$N(\eta^2-r^2)<\mathbf{0.71086}\cdots\cdots\text{(公式七十六)}$$

本公式之意義,卽示左邊之數值如小於0.71086,則為直線相關,應求相關係數.若大於0.71086,則為非直線相關,應求相關比.茲仍以 193 畝麥田,每畝小麥收穫量與所

施氮素肥料量之相關為例:

$$193\times[(0.965)^2-(0.849)^2]>0.71086$$

$$193\times(0.931225-0.720801)>0.71086$$

$$40.611832>0.71086$$

或

$$193\times[(0.882)^2-(0.849)^2]>0.71086$$

$$193\times(0.777924-0.720801)>0.71086$$

$$11.024739>0.71086$$

左邊之數值,俱大於0.71086,故可斷為非直線相關也.

用乘積率法求兩數列之相關係數,不論以甲數列或乙數列為自變數或附變數,所得係數互相一致.求相關比則不然,核算之前,應先分別孰為自變數?孰為附變數?然後方可着手計算.蓋以甲數列為自變數,乙數列為附變數,所得之相關比,與以甲數列為附變數,乙數列為自變數之相關比不等者也.相關係數求得後,可以推算兩數列之迴歸係數,據某數列之已知量數,即可推測他數列之近似量數.在非直線相關中則不能,蓋相關係數,正負分明,而相關比則有正而無負.至兩變量關係之為正為負,或正負兼備,則於相關表中觀察之,方可測知.此相關係數與相關比不同之點也.

(二) 非直線相關之測定

非直線相關簡稱相關比,為皮爾生氏所首創,在公式中以 η (讀如eta)代表之.其計算方法有三:一為普

通法,二爲簡捷法,三爲相關表核算法,茲分別設例示之如下:

(1)普通法——用普通法計算相關比之公式如下:

設 η_{yx} 爲 Y 對 X 之相關比.(即以 X 數列爲自變數,Y 數列爲附變數之相關比.)

η_{xy} 爲 X 對 Y 之相關比.(即以 Y 數列爲自變數,X 數列爲附變數之相關比.)

σ_{ax} 爲 X 數列中各行變量,對於各行算術平均數之標準差.

σ_{ay} 爲 Y 數列中各行變量,對於各行算術平均數之標準差.

σ_x 爲 X 數列之標準差.

σ_y 爲 Y 數列之標準差.

(A)以 X 數列爲自變數,Y 數列爲附變數,則:

$$\eta_{yx}=\sqrt{1-\frac{\sigma^2{}_{ay}}{\sigma^2{}_y}}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式七十七)}$$

(B)以 Y 數列爲自變數,X 數列爲附變數,則:

$$\eta_{xy}=\sqrt{1-\frac{\sigma^2{}_{ax}}{\sigma^2{}_x}}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式七十八)}$$

用普通法求相關比,應先核算 X 或 Y 數列之標準差(σ_x 或 σ_y);而後求各行變量對於各行算術平均數之離中差,再求離中差平方之和,末以變量項數除之,開平方,即得 X 或 Y 數列各行變量對於各行算術平均數之標準差;

再用公式七十七或七十八核算之,卽得相關比.茲據美國達文博氏(E. Davenport)之農業試驗所得結果如表七十八.如以每畝麥田所施氮素肥料量(X數列)爲自變數,每畝小麥收穫量(Y數列)爲附變數,用普通法核計其相關比如下:

表七十九 每畝小麥收穫量表

(計算 σ_{ay} 表)

每畝小麥收穫量分組(單位 斛)	中值 m	畝數 f	各列平均收穫量(單位 斛)	離中差 d	d^2	fd^2
0—3.9	2	8	5.05	−3.05	9.3025	74.4200
4—7.9	6	10	5.05	0.95	0.9025	9.0250
8—11.9	10	3	5.05	4.95	24.5025	73.5075
8—11.9	10	5	15.12	−5.12	26.2144	131.0720
12—15.9	14	8	15.12	−1.12	1.2544	10.0352
16—19.9	18	12	15.12	2.88	8.2944	99.5328
20—23.9	22	13	24.40	−2.40	5.7600	74.8800
24—27.9	26	16	24.40	1.60	2.5600	40.9600
28—31.9	30	1	24.40	5.60	31.3600	31.3600
24—27.9	26	19	28.73	−2.73	7.4529	141.6051
28—31.9	30	20	28.73	1.27	1.6129	32.2580
32—35.9	34	5	28.73	5.27	27.7729	138.8645
28—31.9	30	21	31.73	−1.73	2.9929	62.8509
32—35.9	34	16	31.73	2.27	5.1529	82.4464
28—31.9	30	8	32.40	−2.40	5.7600	46.0800
32—35.9	34	12	32.40	1.60	2.5600	30.7200
28—31.9	30	4	32.00	−2.00	4.0000	16.0000
32—35.9	34	4	32.00	2.00	4.0000	16.0000
28—31.9	30	1	33.33	−3.33	11.0889	11.0889
32—35.9	34	5	33.33	0.67	0.4489	2.2445
32—35.9	34	2	34.00	0.00	0.0000	0.0000
總計		193				1124.9508

$$\sigma_{ay}=\sqrt{\frac{1124.9508}{193}}=2.415$$

應用公式七十七($\sigma_y=9.188$)

$$\eta_{yx}=\sqrt{1-\frac{(2.415)^2}{(9.188)^2}}$$

$$=\sqrt{1-0.069086}$$

$$=\sqrt{0.930914}$$

$$=0.965$$

如以每畝小麥收穫量（Y數列）爲自變數,每畝麥田所施氮素肥料量（X數列）爲附變數,用普通法核計其相關比如下:

表八十　每畝麥田所施氮素肥料量表

（計算 σ_{ax} 表）

每畝所施氮素肥料量（單位　磅）	中值 m	畝數 f	各排平均施肥料量（單位　磅）	離中差 d	d^2	fd^2
60—79.9	70	5	107.27	−37.27	1389.0529	6945.2645
80—99.9	90	16	107.27	−17.27	298.2529	4772.0464
100—119.9	110	12	107.27	2.73	7.4529	89.4348
120—139.9	130	4	107.27	22.73	516.6529	2066.6116
140—159.9	150	5	107.27	42.73	1825.8529	9129.2645
160—179.9	170	2	107.27	62.73	3935.0529	7870.1058
40—59.9	50	1	88.91	−38.91	1513.9881	1513.9881
60—79.9	70	20	88.91	−18.91	357.5881	7151.7620
80—99.9	90	21	88.91	1.09	1.1881	24.9501
100—119.9	110	8	88.91	21.09	444.7881	3558.3048
120—139.9	130	4	88.91	41.09	1688.3881	6753.5524
140—159.9	150	1	88.91	61.09	3731.9881	3731.9881
40—59.9	50	16	60.86	−10.86	117.9396	1887.0336
60—79.9	70	19	60.86	9.14	83.5396	1587.2524
40—59.9	50	13	50.00	0.00	0.0000	0.0000
20—39.9	30	12	30.00	0.00	0.0000	0.0000
20—39.9	30	8	30.00	0.00	0.0000	0.0000
0—19.9	10	3	22.50	−12.50	156.2500	468.7500
20—39.9	30	5	22.50	7.50	56.2500	281.2500
0—19.9	10	10	10.00	0.00	0.0000	0.0000
0—19.9	10	8	10.00	0.00	0.0000	0.0000
總計		193				57831.5591

$$\sigma_{ax}=\sqrt{\frac{57831.5591}{193}}=17.311$$

應用公式七十八($\sigma_x=36.812$)

$$\eta_{xy}=\sqrt{1-\frac{(17.311)^2}{(36.812)^2}}$$

$$=\sqrt{1-0.221139}$$

$$=\sqrt{0.778861}$$

$$=0.882$$

(2)簡捷法——用普通法求相關比,似歎煩瑣,若用簡捷法核算,則其步驟如下:

(A)將兩事實編製相關表.

(B)就各橫行 X 數值,而求其算術平均數.就各直行 Y 數值,而求其算術平均數.

(C)計算 X 數列之全體算術平均數,及 Y 數列之全體算術平均數.

(D)將各橫行之算術平均數,與 X 數列之全體算術平均數比較之,得 d_x;自乘之,得 $d^2{}_x$;再乘 f,得 $fd^2{}_x$;總和之,得 $\Sigma fd^2{}_x$.

(E)將各直行之算術平均數,與 Y 數列之全體算術平均數比較之,得 d_y;自乘之,得 $d^2{}_y$;再乘 f,得 $fd^2{}_y$;總和之,得 $\Sigma fd^2{}_y$.

(F)將第四步求得之各橫行算術平均數,與 X 數列全體算術平均數相差平方之總和,爲總次數除之,得

$\frac{\Sigma fd^2{}_x}{N}=\sigma^2{}_{mx}$，開平方得$\sigma_{mx}$.

(G)將第五步求得之各直行算術平均數，與Y數列全體算術平均數相差平方之總和，爲總次數除之，得$\frac{\Sigma fd^2{}_y}{N}=\sigma^2{}_{my}$，開平方得$\sigma_{my}$.

(H)計算X數列之標準差σ_x，及Y數列之標準差σ_y.

(I)應用下列兩公式，核算各相關比：

設 η_{yx} 爲Y對X之相關比.（即以X數列爲自變數，Y數列爲附變數之相關比.）

η_{xy} 爲X對Y之相關比.（即以Y數列爲自變數，X數列爲附變數之相關比.）

σ_{mx} 爲各橫行算術平均數，與X數列全體算術平均數之標準差.

σ_{my} 爲各直行算術平均數，與Y數列全體算術平均數之標準差.

σ_x 爲X數列之標準差.

σ_y 爲Y數列之標準差.

(a)以X數列爲自變數，Y數列爲附變數，則：

$$\eta_{yx}=\frac{\sigma_{my}}{\sigma_y}\text{……（公式七十九）}$$

(b)以Y數列爲自變數，X數列爲附變數，則：

$$\eta_{xy}=\frac{\sigma_{mx}}{\sigma_x}\text{……（公式八十）}$$

茲仍用前例，如以每畝麥田所施氮素肥料量（X數列）爲自變數，每畝小麥收穫量（Y數列）爲附變

數,用簡捷法,核算相關比如下:

表八十一 每畝麥田所施氮素肥料量與平均每畝收穫小麥量表

(計算 σ_{my} 表)

每畝所施氮素肥料量(單位 磅)	各列平均收穫量(單位 噸)	對收穫量總平均數之離中差 dy	d^2y	f	fd^2y
0— 19.9	5.05	−19.96	398.4016	21	8366.4336
20— 39.9	15.12	− 9.89	97.8121	25	2445.3025
40— 59.9	24.40	− 0.61	0.3721	30	11.1630
60— 79.9	28.73	3.72	13.8384	44	608.8896
80— 99.9	31.73	6.72	45.1584	37	1670.7608
100—119.9	32.40	7.39	54.6121	20	1092.2420
120—139.9	32.00	6.99	48.8601	8	390.8808
140—159.9	33.33	8.32	69.2224	6	415.3344
160—179.9	34.00	8.99	80.8201	2	161.6402
總計	25.01			193	15162.6469

$$\sigma_{my}=\sqrt{\frac{15162.6469}{193}}=8.864$$

應用公式七十九($\sigma_y=9.188$)

$$\eta_{yx}=\frac{8.864}{9.188}$$

$$=0.965$$

如以每畝小麥收穫量(Y數列)爲自變數,每畝麥田所施氮素肥料量(X數列)爲附變數,用簡捷法,核算相關比如下:

表八十二　每畝小麥收穫量與平均每畝所施氮素肥料量表

（計算 σ_{mx} 表）

每畝小麥收穫量（單位　嘝）	各排平均施肥料量（單位　磅）	對施肥料量總平均數之離中差 d_x	d^2x	f	fd^2x
0— 3.9	10.00	−59.17	3501.0889	8	28008.7112
4— 7.9	10.00	−59.17	3501.0889	10	35010.8890
8—11.9	22.50	−46.67	2178.0889	8	17424.7112
12—15.9	30.00	−39.17	1534.2889	8	12274.3112
16—19.9	30.00	−39.17	1534.2889	12	18411.4668
20—23.9	50.00	−19.17	367.4889	13	4777.3557
24—27.9	60.86	− 8.31	69.0561	35	2416.9635
28—31.9	88.91	19.74	389.6676	55	21431.7180
32—35.9	107.27	38.10	1451.6100	44	63870.8400
總　計	69.17			193	203626.9666

$$\sigma_{mx}=\sqrt{\frac{203626.9666}{193}}=32.482$$

應用公式八十($\sigma_x=36.812$)

$$\eta_{xy}=\frac{32.482}{36.812}$$

$$=0.882$$

(3)相關表核算法——計算相關比之方法,除上述二法外,更可於相關表中,應用公式八十一或八十二核計之如下:

設 η_{yx} 爲 Y 對 X 之相關比.(即以 X 數列爲自變數,Y 數列爲附變數之相關比.)

η_{xy} 爲 X 對 Y 之相關比.(即以 Y 數列爲自變數,X 數列爲附變數之相關比.)

σ_{mx} 爲各橫行算術平均數,與 X 數列全體算術平均數之標準差.

σ_{my} 爲各直行算術平均數,與 Y 數列全體算術平均數之標準差.

σ_x 爲 X 數列之標準差.

σ_y 爲 Y 數列之標準差.

M_x 爲 X 數列之算術平均數.

M_y 爲 Y 數列之算術平均數.

$\overline{X}_y$ 爲各橫行之算術平均數.

$\overline{Y}_x$ 爲各直行之算術平均數.

d_x 爲各橫行算術平均數,與 X 數列算術平均數之離中差.

d_y 爲各直行算術平均數,與 Y 數列算術平均數之離中差.

d''_x 爲各橫行算術平均數,與 X 數列算術平均數之假定離中差.

d''_y 爲各直行算術平均數,與 Y 數列算術平均數之假定離中差.

c_x 爲以組距爲單位之 X 數列假定算術平均數,與其眞正算術平均數之差.

c_x　爲以組距爲單位之 Y 數列假定算術平均數,與其眞正算術平均數之差.

f_x　爲 X 數列之次數.

f_y　爲 Y 數列之次數.

i_x　爲 X 數列之組距.

i_y　爲 Y 數列之組距.

N　爲次數之總數.

Σ　爲總和之記號.

Σ'　爲各行總和之記號.

$$\eta_{yx}=\frac{\sqrt{\frac{\Sigma\left[\frac{(\Sigma' f_y d''_y)^2}{f_x}\right]}{N}-c^2_y}}{\sqrt{\frac{\Sigma f_y d''^2_y}{N}-c^2_y}}\text{.....(公式八十一)}$$

其實公式八十一即等於公式七十九,茲請證之如下:

$$\eta_{yx}=\frac{\sigma_{my}}{\sigma_y}$$

因　$$\sigma_{my}=\sqrt{\frac{\Sigma f_x(M_y-\bar{Y}_x)^2}{N}}$$

故　$$\eta_{yx}=\frac{\sqrt{\frac{\Sigma f_x(M_y-\bar{Y}_x)^2}{N}}}{\sigma_y}$$

惟　$$M_y=M'_y+\frac{\Sigma f_y d''_y}{N}i_y$$

$$\overline{Y}_x = M'_y + \frac{\Sigma' f_y d''_y}{f_x} i_y$$

故 $$M_y - \overline{Y}_x = \left(M'_y + \frac{\Sigma f_y d''_y}{N} i_y\right) - \left(M'_y + \frac{\Sigma' f_y d''_y}{f_x} i_y\right)$$

$$= \frac{\Sigma f_y d''_y}{N} i_y - \frac{\Sigma' f_y d''_y}{f_x} i_y$$

$$\frac{M_y - \overline{Y}_x}{i_y} = \frac{\Sigma f_y d''_y}{N} - \frac{\Sigma' f_y d''_y}{f_x}$$

$$\frac{(M_y - \overline{Y}_x)^2}{i^2_y} = \left(\frac{\Sigma f_y d''_y}{N} - \frac{\Sigma' f_y d''_y}{f_x}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\Sigma f_y d''_y}{N}\right)^2 - 2\left(\frac{\Sigma f_y d''_y}{N}\right)\left(\frac{\Sigma' f_y d''_y}{f_x}\right)$$

$$+ \left(\frac{\Sigma' f_y d''_y}{f_x}\right)^2$$

各行標準差,乘各行次數,並總和之得:

$$\frac{\Sigma f_x (M_y - \overline{Y}_x)^2}{i^2_y} = N\left(\frac{\Sigma f_y d''_y}{N}\right)^2 - 2\left(\frac{\Sigma f_y d''_y}{N}\right)\left(\Sigma' f_y d''_y\right)$$

$$+ \Sigma\left[\frac{(\Sigma' f_y d''_y)^2}{f_x}\right]$$

$$= \Sigma\left[\frac{(\Sigma' f_y d''_y)^2}{f_x}\right] - \frac{\Sigma f_y d''^2_y}{N}$$

故 $$\sigma_{my} = \sqrt{\frac{\Sigma f_x (M_y - \overline{Y}_x)^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma\left[\frac{(\Sigma' f_y d''_y)^2}{f_x}\right]}{N} - c^2_y} \times i_y$$

$$\eta_{yx}=\frac{\sqrt{\frac{\Sigma\left[\frac{(\Sigma' f_y d''_y)^2}{f_x}\right]}{N}-c^2_y}}{\sqrt{\frac{\Sigma f_y d''^2_y}{N}-c^2_y}}$$

同理

$$\sigma_{mx}=\sqrt{\frac{\Sigma\left[\frac{(\Sigma' f_x d''_x)^2}{f_y}\right]}{N}-c^2_x}\times i_x$$

$$\eta_{xy}=\frac{\sqrt{\frac{\Sigma\left[\frac{(\Sigma' f_x d''_x)^2}{f_y}\right]}{N}-c^2_x}}{\sqrt{\frac{\Sigma f_x d''^2_x}{N}-c^2_x}}\cdots\text{(公式八十二)}$$

茲仍以193畝麥田,每畝所施氮素肥料量(X數列),及每畝小麥收穫量(Y數列)為例,說明用相關表核算法求相關比之步驟如下:

(A)以每畝麥田所施氮素肥料量為X變量,每畝小麥收穫量為Y變量,編製相關表.

(B)將相關表中各直行次數相加,得f_x;各橫行次數相加,得f_y.

(C)假定X數列中某組中值,為X數列之假定算術平均數(M'_x),並根據此假定算術平均數,推算X數列之假定離中差d''_x.假定Y數列中某組中值,為Y數列之假定算術平均數(M'_y),並根據此假定算術

平均數,推算 Y 數列之假定離中差 d''_y.

(D) X 數列之各組次數,乘 X 數列之各組假定離中差,得 $f_x d''_x$;再乘 d''_x,得 $f_x d''^2_x$. Y 數列之各組次數,乘 Y 數列之各組假定離中差,得 $f_y d''_y$;再乘 d''_y,得 $f_y d''^2_y$.

(E) 各橫行內各格次數,乘各格相當之假定離中差 d''_x,得 $f_x d''_x$;總加之,得 $\Sigma' f_x d''_x$. 各直行內各格次數,乘各格相當之假定離中差 d''_y,得 $f_y d''_y$;總加之,得 $\Sigma' f_y d''_y$.

(F) 將 $\Sigma' f_x d''_x$ 自乘之,得 $(\Sigma' f_x d''_x)^2$. 將 $\Sigma' f_y d''_y$ 自乘之,得 $(\Sigma' f_y d''_y)^2$.

(G) 將 $(\Sigma' f_x d''_x)^2$ 為 f_y 除之,得 $\frac{(\Sigma' f_x d''_x)^2}{f_y}$. 將 $(\Sigma' f_y d''_y)^2$ 為 f_x 除之,得 $\frac{(\Sigma' f_y d''_y)^2}{f_x}$.

(H) 將 $f_x d''_x$, $f_x d''^2_x$, $\Sigma' f_x d''_x$, $\frac{(\Sigma' f_x d''_x)^2}{f_y}$ 各行總加之,得 $\Sigma f_x d''_x$, $\Sigma f_x d''^2_x$, $\Sigma(\Sigma' f_x d''_x)$, $\Sigma\left[\frac{(\Sigma' f_x d''_x)^2}{f_y}\right]$. 更將 $f_y d''_y$, $f_y d''^2_y$, $\Sigma' f_y d''_y$, $\frac{(\Sigma' f_y d''_y)^2}{f_x}$ 各行總加之,得 $\Sigma f_y d''_y$, $\Sigma f_y d''^2_y$, $\Sigma(\Sigma' f_y d''_y)$, $\Sigma\left[\frac{(\Sigma' f_y d''_y)^2}{f_x}\right]$.

(I) 以總次數 (N) 除 $\Sigma f_x d''_x$,得改正數 c_x;自乘之,得 c^2_x. 以總次數 (N) 除 $\Sigma f_y d''_y$,得改正數 c_y;自乘之,得 c^2_y.

(J) 應用公式八十一及八十二,核計 Y 對 X 之相關比 (η_{yx}),及 X 對 Y 之相關比 (η_{xy}).

表八十三　每畝麥田所施氮素肥料量與每畝小麥收穫量表

（由相關表中求相關比表）

每畝小麥收穫量(Y)（單位 斛）

每畝麥田所施氮素肥料量(X)（單位 磅）																				
分組						0.0–19.9	20.0–39.9	40.0–59.9	60.0–79.9	80.0–99.9	100.0–119.9	120.0–139.9	140.0–159.9	160.0–179.9	總計	$\Sigma' f_x d''_x$	$(\Sigma' f_x d''_x)^2$	$\frac{(\Sigma' f_x d''_x)^2}{f_y}$	$\Sigma' f_x d''_x d''_y$	$\bar{X}_y = 90 + \frac{\Sigma' f_x d''_x}{f_y} \times 20$
	m					10	30	50	70	90	110	130	150	170						
		f				21	25	30	44	37	20	8	6	2	193					
			d''			-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4						
				fd''		-84	-75	-60	-44	0	+20	+16	+18	+8	-201					
					fd''^2	336	225	120	44	0	20	32	54	32	863					
32.0–35.9	34	44	+4	+176	704				5	16	12	4	5	2		+38	1444	32.82	+152	107.27
28.0–31.9	30	55	+3	+165	495			1	20	21	8	4	1			-3	9	.16	-9	88.91
24.0–27.9	26	35	+2	+70	140			16	19							-51	2601	74.31	-102	60.86
20.0–23.9	22	13	+1	+13	13			13								-26	676	52.00	-26	50.00
16.0–19.9	18	12	0	0	0		12									-36	1296	108.00	0	30.00
12.0–15.9	14	8	-1	-8	8		8									-24	576	72.00	+24	30.00
8.0–11.9	10	8	-2	-16	32	3	5									-27	729	91.13	+54	22.50
4.0–7.9	6	10	-3	-30	90	10										-40	1600	160.00	+120	10.00
0.0–3.9	2	8	-4	-32	128	8										-32	1024	128.00	+128	10.00
總計		193		+338	1,610											-201		718.42	+341	
$\Sigma' f_y d''_y$						-68	-18	+48	+118	+127	+72	+28	+23	+8	+338					
$(\Sigma' f_y d''_y)^2$						4624	326	2304	13924	16129	5184	784	529	64						
$\frac{(\Sigma' f_y d''_y)^2}{f_x}$						220.19	12.96	76.80	316.45	435.92	259.20	98.00	88.17	32.00	1,539.69					
$\Sigma' f_y d''_y d''_x$						+272	+54	-96	-118	0	+72	+56	+69	+32	+341					
$\bar{Y}_x = 18 + \frac{\Sigma' f_x d''_y}{f_x} \times 4$						5.05	15.12	24.40	28.73	31.73	32.40	32.00	33.33	34.00						

$$i_x = 20 \qquad\qquad i_y = 4$$

$$\Sigma f_x d''_x = -201 \qquad\qquad \Sigma f_y d''_y = 338$$

$$\Sigma f_x d''^2_x = 863 \qquad\qquad \Sigma f_y d''^2_y = 1{,}610$$

$$\Sigma' f_x d''_x = -201 \qquad\qquad \Sigma' f_y d''_y = 338$$

$$\frac{(\Sigma' f_x d''_x)^2}{f_y} = 718.42 \qquad\qquad \frac{(\Sigma' f_y d''_y)^2}{f_x} = 1{,}539.69$$

$$c_x=\frac{-201}{193}=-1.041 \qquad c_y=\frac{338}{193}=1.751$$

$$c^2_x=(-1.041)^2=1.083681 \quad c^2_y=(1.751)^2=3.066001$$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{863}{193}-1.083681}\times 20 \quad \sigma_y=\sqrt{\frac{1,610}{193}-3.066001}\times 4$$

$$=\sqrt{3.387822}\times 20 \qquad =\sqrt{5.275968}\times 4$$

$$=1.8406\times 20 \qquad =2.297\times 4$$

$$=36.812 \qquad =9.188$$

$$r=\frac{341-193\times(-1.041)\times 1.751}{\sqrt{(863-193\times 1.083681)\times(1,610-193\times 3.066001)}}$$

$$=\frac{341+351.799}{\sqrt{653.850\times 1,018.262}}$$

$$=\frac{692.799}{815.959}$$

$$=0.849$$

應用公式八十一

$$\eta_{yx}=\frac{\sqrt{\frac{1,539.69}{193}-3.066001}}{\sqrt{\frac{1,610}{193}-3.066001}}$$

$$=\frac{\sqrt{4.911668}}{\sqrt{5.275968}}$$

$$=\frac{2.216}{2.297}$$

$$=0.965$$

應用公式八十二

$$\eta_{xy}=\frac{\sqrt{\frac{718.42}{193}-1.083681}}{\sqrt{\frac{863}{193}-1.083681}}$$

$$=\frac{\sqrt{2.638703}}{\sqrt{3.387822}}$$

$$=\frac{1.624}{1.841}$$

$$=0.882$$

(三) 校正相關比

綜觀上述,相關比與相關係數同,其值終不能大於一.若相關比爲一,即謂連絡各排或各列算術平均數之線,與全體變量無離中差也.如各列算術平均數之值,均等於 Y 數列全體之算術平均數;各排算術平均數之值,均等於 X 數列全體之算術平均數時,則 σ_{my} 及 σ_{mx} 均爲零,代入公式七十九及公式八十,所得各相關比,亦均爲零,蓋示 X 變量或增或減,與 Y 變量無任何變化發生,即此兩變量間絕無關係之可言也.

惟相關比之適用,祇限於項數甚多而能排列成相關表之時.若項數不多,在相關表中每列或每排祇有一項,則 σ_{my} 與 σ_y 及 σ_{mx} 與 σ_x 之數值完全相同,相關比之數值當爲一,殊無意義.故過次數少而分組多,則相關比求出後,須用校正法校正之.此校正法爲皮爾生氏所提示,謂之相關比校正法 (Correction of correlation ratio). 其公

式如下:

設 η'_{yx} 為 Y 對 X 之校正相關比.(即以 X 數列為自變數,Y 數列為附變數之校正相關比.)

η'_{xy} 為 X 對 Y 之校正相關比.(即以 Y 數列為自變數,X 數列為附變數之校正相關比.)

η_{yx} 為 Y 對 X 之未校正相關比.(即以 X 數列為自變數,Y 數列為附變數之相關比.)

η_{xy} 為 X 對 Y 之未校正相關比.(即以 Y 數列為自變數,X 數列為附變數之相關比.)

K_x 為 X 數列之分組數.

K_y 為 Y 數列之分組數.

N 為次數之總數.

$$\eta'_{yx}=\sqrt{\frac{\eta^2_{yx}-\frac{K_y-3}{N}}{1-\frac{K_y-3}{N}}} \quad \text{(公式八十三)}$$

$$\eta'_{xy}=\sqrt{\frac{\eta^2_{xy}-\frac{K_x-3}{N}}{1-\frac{K_x-3}{N}}} \quad \text{(公式八十四)}$$

茲仍以每畝麥田所施氮素肥料量,及每畝小麥收穫量為例,求得校正相關比如下:

$\eta_{yx}=0.965$

$\eta_{xy}=0.882$

$K_x\ =9$

$K_y=9$

$N=193$

應用公式八十三

$$\eta'_{yx}=\sqrt{\frac{0.965^2-\frac{9-3}{193}}{1-\frac{9-3}{193}}}$$

$$=\sqrt{0.929018}$$

$$=0.964$$

應用公式八十四

$$\eta'_{xy}=\sqrt{\frac{0.882^2-\frac{9-3}{193}}{1-\frac{9-3}{193}}}$$

$$=\sqrt{0.770799}$$

$$=0.878$$

按用此法校正,如N甚大而分組適當時,則校正後之相關比與未校正之相關比,相差無幾.反之,如N極小而分組極多者,則校正後之相關比,將遠較未校正之相關比爲小,此乃定律也.

第二節 等級相關

統計事物,有時僅分等級而無實際數值表示者,相關之決定,與前所論者稍有不同.例如教師評定成績,常有給予等級而不予分數者;鑑定各種農產品,亦多給予等級而不予實

際數值者;根據事物之等級而計算之相關,謂之等級相關.其核算方法有二:一為史皮美等級差異法(Spearman's method of rank difference),一為史皮美簡捷法(Spearman's foot-rule formula),此兩法以英人史皮美氏所創用故名.

(一) 等級差異法

用等級差異法求等級相關之步驟有五:

(1)將 X 與 Y 兩事實按變量值之大小或事物品質之優劣,規定等級.例如表八十四以成績最優,分數最多者為第一,(反之,若以成績最劣,分數最少者為第一亦可.惟 X 與 Y 兩事物之等級,應相互一致,不可互異.)分數最少者為末等.如遇分數相等時,則可用下列兩法分級之:

(A)中級法——中級法(Midrank method)即將各變量應佔之等位平均之,以為各變量相當之等級.例如表八十四數學成績得86分者有四,應佔等次為第四,第五,第六及第七,分級時即以 4, 5, 6, 7 四數平均之,得5.5級,為四生同有之平均等級.

(B)弧級法——弧級法(The bracket rank method)即將各相同之變量,給予相同之等級.例如表八十四數學成績得86分者有四,各為第四級;60分者有二,各為第十六級.物理成績得96分者有三,各為第一級等是也.此法用之者較少.

等級規定後,將 X 事物之等級,列於 V_x 行下.將 Y 事物之等級,列於 V_y 行下.

(2)將 X 事物之等級(V_x)減 Y 事物之等級(V_y)得兩事物等級之差,分填於第六第七兩行內.

(3)將第六及第七行內各對 X 與 Y 變量等級之差自乘之,得 $(V_x-V_y)^2$,並列於第八行內.

(4)將第八行內 $(V_x-V_y)^2$ 各數總加之,得 $\Sigma(V_x-V_y)^2$.

(5)應用下列史皮美等級差異公式,核計等級相關係數.

設 ρ 爲用等級差異法核計之等級相關係數(讀如 Rho).

V_x 爲 X 數列中各變量之等級.

V_y 爲 Y 數列中各變量之等級.

N 爲變量項數.

$$\rho=1-\frac{6\,\Sigma(V_x-V_y)^2}{N(N^2-1)}\quad\text{(公式八十五)}$$

用史皮美等級差異公式求得之等級相關係數 ρ,與用乘積率法求得之直線相關係數 r,互不一致,皮爾生乃發明下列公式,可將 ρ 轉化爲 r.

設 r 爲直線相關係數.

ρ 爲用等級差異法核計之等級相關係數.

π 爲 180°.

$$r=2\,Sin\left(\frac{\pi}{6}\rho\right)\quad\text{(公式八十六)}$$

在實際計算時,可不必依上列公式核計,祇由 ρ 值求 r

表(參閱附表六)中一查卽得.茲卽設例示之如下:

表八十四　某校二十生數學及物理成績表

(計算等級相關係數表)

學號	數學分數	物理分數	數學等級	物理等級	V_x-V_y		$(V_x-V_y)^2$
	X	Y	V_x	V_y	+	−	
1	57	60	18.0	18.0			
2	86	89	5.5	6.0		.5	.25
3	48	27	19.0	20.0		1.0	1.00
4	89	92	3.0	5.0		2.0	4.00
5	96	96	1.0	2.0		1.0	1.00
6	60	77	16.5	12.0	4.5		20.25
7	75	76	12.0	13.0		1.0	1.00
8	76	70	11.0	15.0		4.0	16.00
9	80	87	10.0	8.0	2.0		4.00
10	60	57	16.5	19.0		2.5	6.25
11	71	66	14.0	16.0		2.0	4.00
12	86	79	5.5	11.0		5.5	30.25
13	72	81	13.0	10.0	3.0		9.00
14	86	93	5.5	4.0	1.5		2.25
15	62	86	15.0	9.0	6.0		36.00
16	86	96	5.5	2.0	3.5		12.25
17	83	96	8.0	2.0	6.0		86.00
18	90	88	2.0	7.0		5.0	25.00
19	81	72	9.0	14.0		5.0	25.00
20	45	64	20.0	17.0	3.0		9.00
總計					29.5	29.5	242.50

應用公式八十五

$$\rho = 1 - \frac{6 \times 242.5}{20 \times (20^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{1,455}{7,980}$$

$$= \frac{6,525}{7,980}$$

$$= 0.818$$

應用公式八十六

$$r = 2\ Sin\left(\frac{180^\circ}{6} \times 0.818\right)$$

$$= 2\ Sin\ 24.54^\circ$$

$$= 2 \times .4155$$

$$= 0.831$$

(二) 簡捷法

用簡捷法求等級相關係數之步驟有四:

(1)先將 X 及 Y 兩事物按變量值之大小,或事物品質之優劣,用中級法規定等級,列於 V_x 及 V_y 兩行內.

(2)將 X 事物之等級減 Y 事物之等級,如爲負差數,可不必記錄,如爲正差數,則記正分數(Gain)於第六行內.

(3)將第六行內正分數相加得 ΣG.

(4)應用下列史皮美簡捷公式,核計等級相關係數.

設 R 爲用簡捷法核計之等級相關係數.

G 爲 X 與 Y 事實等級之正差分數.

N 爲變量項數.

Σ 爲總和之記號.

$$R=1-\frac{6\Sigma G}{N^2-1}$$ ……(公式八十七)

用史皮美簡捷法求得之等級相關係數 R,與用乘積率法求得之直線相關係數 r,互不一致,皮爾生氏又發明下列公式,可將 R 轉化爲 r.

設 r 爲直線相關係數.

R 爲用簡捷法核計之等級相關係數.

π 爲 180°.

$$r=2\,Cos\frac{\pi}{3}(1-R)-1$$ ……(公式八十八)

在實際計算時,可不必依上列公式核計,祗由 R 值求 r 表(參閱附表七)中一查卽得.茲仍以前例計算 R 及 r 值如下:(上例正差分數 $G=29.5$)

應用公式八十七

$$R=1-\frac{6\times29.5}{20^2-1}$$

$$=1-\frac{177}{399}$$

$$=\frac{222}{399}$$

$$=0.556$$

應用公式八十八

$$r=2\,Cos\frac{180^\circ}{3}(1-0.556)-1$$

$$=2\,Cos\,25.64^\circ$$

$$=2\times0.3935$$

$$=0.787$$

第三節　均方相關

統計事物有僅具質而無量者,如人之性情,有沉靜而溫柔者,有抑鬱而紓緩者,有激烈而暴躁者.人之體格,有健康者,有柔弱者,有殘廢者,俱不能以量數表示者也.凡遇此僅有質而無量之統計資料,而欲計其相關,卽可應用均方相關法核算之.

(一)　均方相關係數之核算

均方相關法爲皮爾生氏所首創,其意義卽將各方格中之實得次數,與全憑機遇之次數,一一爲之比較.例如表八十五,一千八百對父子中,性情沉靜之父共爲423人,沉靜之子共爲 427 人,父子性情俱沉靜者 201 人.設父子之性情毫無關係,全憑機遇湊合,則父子性情俱爲沉靜格中之次數,應爲 100 人$\left(\frac{427\times 423}{1800}=100.345\text{ 人}\right)$,然實際人數爲 201 人,足證父子性情非全憑機遇配合,而有相當關係存乎其中.如將各方格中機遇次數一一求得後,除各格實得次數之自乘方;再將各格除得之商總和之,卽得公式中之 S.若 S 等於 N,則其相關爲 O,卽示父之性情與子之性情毫無關係也.若 S 倍於 N,則得均方相關係數爲 1,卽示父之性情與子之性情爲全相關也.故視 S 之大小,卽可斷定相關程度之深淺.至於計算均方相關之方法有二:一爲普通法,二爲簡捷法,如下:

(1)普通法——用普通法求均方相關係數之公式如下:

設 C' 爲均方相關係數.

S 爲 $\Sigma\left[\dfrac{(N_{rc})^2}{\dfrac{N_rN_c}{N}}\right]$.

N 爲次數之總數.

N_r 爲各橫行次數之總數.

N_c 爲各直行次數之總數.

N_{rc} 爲相關表內各方格中之次數.

Σ 爲總和之記號.

$$C'=\sqrt{\frac{S-N}{S}}\quad\text{……………………(公式八十九)}$$

表八十五 一八〇〇對父子性情相關表

(計算均方相關表甲5×5)

子之性情	父之性情					總計 Nr
性情別	沉靜	紆緩	抑鬱	温柔	暴躁	
沉靜	201	70	51	60	45	427
紆緩	96	182	44	41	78	441
抑鬱	35	44	28	96	32	235
温柔	24	56	23	156	24	283
暴躁	67	24	41	85	197	414
總計 Nc	423	376	187	438	376	1 800

(I) $\frac{N_rN_c}{N}$	(II) $(N_{rc})^2$	(III) $\frac{(N_{rc})^2}{\frac{N_rN_c}{N}}$
$\frac{427\times423}{1800}=100.345$	$201^2=40{,}401$	$\frac{40401}{100.345}=402.621$
$\frac{441\times423}{1800}=103.635$	$96^2=9{,}216$	$\frac{9216}{103.635}=88.927$
$\frac{235\times423}{1800}=55.225$	$35^2=1{,}225$	$\frac{1225}{55.225}=22.182$
$\frac{283\times423}{1800}=66.505$	$24^2=576$	$\frac{576}{66.505}=8.661$
$\frac{414\times423}{1800}=97.290$	$67^2=4{,}489$	$\frac{4489}{97.290}=46.140$
$\frac{427\times376}{1800}=89.196$	$70^2=4{,}900$	$\frac{4900}{89.196}=54.935$
$\frac{441\times376}{1800}=92.120$	$182^2=33{,}124$	$\frac{33124}{92.120}=359.574$
$\frac{235\times376}{1800}=49.089$	$44^2=1{,}936$	$\frac{1936}{49.089}=39.439$
$\frac{283\times376}{1800}=59.116$	$56^2=3{,}136$	$\frac{3136}{59.116}=53.048$
$\frac{414\times376}{1800}=86.480$	$24^2=576$	$\frac{576}{86.480}=6.661$
$\frac{427\times187}{1800}=44.361$	$51^2=2{,}601$	$\frac{2601}{44.361}=58.633$
$\frac{441\times187}{1800}=45.815$	$44^2=1{,}936$	$\frac{1936}{45.815}=42.257$
$\frac{235\times187}{1800}=24.414$	$28^2=784$	$\frac{784}{24.414}=32.113$
$\frac{283\times187}{1800}=29.461$	$23^2=529$	$\frac{529}{29.401}=17.993$

$\frac{414\times187}{1800}=43.010$	$41^2=1,681$	$\frac{1681}{43.010}=$	39.084
$\frac{427\times438}{1800}=103.903$	$60^2=3,600$	$\frac{3600}{103.903}=$	34.648
$\frac{441\times438}{1800}=107.310$	$41^2=1,681$	$\frac{1681}{107.310}=$	15.665
$\frac{235\times438}{1800}=57.183$	$96^2=9,216$	$\frac{9216}{57.183}=$	161.167
$\frac{283\times438}{1800}=68.863$	$156^2=24,336$	$\frac{24336}{68.863}=$	353.396
$\frac{414\times438}{1800}=100.740$	$85^2=7,225$	$\frac{7225}{100.740}=$	71.719
$\frac{427\times376}{1800}=89.196$	$45^2=2,025$	$\frac{2025}{89.196}=$	22.703
$\frac{441\times376}{1800}=92.120$	$78^2=6,084$	$\frac{6084}{92.120}=$	66.044
$\frac{235\times376}{1800}=49.089$	$32^2=1,024$	$\frac{1024}{49.089}=$	20.860
$\frac{283\times376}{1800}=59.116$	$24^2=576$	$\frac{576}{59.116}=$	9.744
$\frac{414\times376}{1800}=86.480$	$197^2=38,809$	$\frac{38809}{86.480}=$	$\underline{448.759}$
			$S=\underline{\underline{2,476.973}}$

應用公式八十九

$$C'=\sqrt{\frac{2,476.973-1,800}{2,476.973}}$$

$$=\sqrt{0.273307}$$

$$=0.523$$

(2)簡捷法——用簡捷法求均方相關係數,與用普通法核算無異,惟將機遇次數$\left(\frac{N_r N_c}{N}\right)$及機遇次數除$(N_{rc})^2$等數步手續,合併計之而已.茲將其公式示之如下:

設 C' 爲均方相關係數.

P 爲 $\frac{1}{N}\Sigma\left[\frac{(N_{rc})^2}{\frac{N_r N_c}{N}}\right]=\Sigma\left[\frac{(N_{rc})^2}{N_r N_c}\right]=\frac{S}{N}$.

N 爲次數之總數.

N_r 爲各橫行次數之總數.

N_c 爲各直行次數之總數.

N_{rc} 爲相關表內各方格中之次數.

Σ 爲總和之記號.

$$C'=\sqrt{\frac{P-1}{P}}\text{……………………(公式九十)}$$

其實公式九十卽由公式八十九蛻化而成,茲證之如下:

因　$S=\Sigma\left[\frac{(N_{rc})^2}{\frac{N_r N_c}{N}}\right]$

$P=\frac{1}{N}\Sigma\left[\frac{(N_{rc})^2}{\frac{N_r N_c}{N}}\right]$

故　$P=\frac{S}{N}$

$S=NP$

因　$C'=\sqrt{\frac{S-N}{S}}$

故 $C' = \sqrt{\dfrac{NP-N}{NP}}$

$= \sqrt{\dfrac{P-1}{P}}$

P 既等於 $\dfrac{S}{N}$，故於核算 P 之數值時，可改簡之如下：

因 $S = \Sigma\left[\dfrac{\dfrac{(N_{rc})^2}{N_r N_c}}{N}\right]$

故 $P = \dfrac{1}{N}\Sigma\left[\dfrac{\dfrac{(N_{rc})^2}{N_r N_c}}{N}\right]$

$= \dfrac{1}{N}\Sigma\left[\dfrac{(N_{rc})^2 N}{N_r N_c}\right]$

$= \dfrac{1}{N}\cdot\dfrac{N}{N_c}\Sigma\left[\dfrac{(N_{rc})^2}{N_r}\right]$

$= \dfrac{1}{N_c}\Sigma\left[\dfrac{(N_{rc})^2}{N_r}\right]$

表八十五父子性情之相關，如依簡捷法核計之如下：

第一直行中之 P：

$$\frac{1}{423}\left[\frac{201^2}{427}+\frac{96^2}{441}+\frac{35^2}{235}+\frac{24^2}{283}+\frac{67^2}{414}\right]=0.31585$$

第二直行中之 P：

$$\frac{1}{376}\left[\frac{70^2}{427}+\frac{182^2}{441}+\frac{44^2}{235}+\frac{56^2}{283}+\frac{24^2}{414}\right]=0.28537$$

第三直行中之 P：

$$\frac{1}{187}\left[\frac{51^2}{427}+\frac{44^2}{441}+\frac{28^2}{235}+\frac{23^2}{283}+\frac{41^2}{414}\right]=0.10560$$

第四直行中之 P：

$$\frac{1}{438}\left[\frac{60^2}{427}+\frac{41^2}{441}+\frac{96^2}{235}+\frac{156^2}{283}+\frac{85^2}{414}\right]-0.35356$$

第五直行中之P:

$$\frac{1}{376}\left[\frac{45^2}{427}+\frac{78^2}{441}+\frac{32^2}{235}+\frac{24^2}{283}+\frac{197^2}{414}\right]=\underline{0.31562}$$

$$P=\underline{\underline{1.37610}}$$

應用公式九十

$$C'=\sqrt{\frac{1.37610-1}{1.37610}}$$

$$=\sqrt{0.273309}$$

$$=0.523$$

均方相關多不附正負,學者如欲辨別其相關之爲正爲負,則須查閱相關表,例如表八十五,1800對父子性情之相關,父之性情沉靜者,子之性情亦多沉靜;(第一直行中以第一格之次數爲最多,即示子之性淸亦多沉靜.)父之性情暴躁者,子之性情亦多暴躁,(第六直行中以第六格之次數爲最多,即示子之性情亦多暴躁.)故爲正相關.反之,如父之性情沉靜,子之性情多暴躁者;或父之性情暴躁,子之性情多沉靜者,此爲負相關.

(二) 均方相關係數之限度

均方相關之數值,常隨分類之詳略而異,表八十五縱橫各分五類,求得均方相關係數爲0.523.若將溫柔與沉靜者合併,而爲柔靜者;紆緩與抑鬱者合併,而爲紆鬱

者,若是縱橫各分三類,求得均方相關係數為0.384如下:

表八十六 一八〇〇對父子性情相關表

(計算均方相關表乙3×3)

子之性情	父之性情			總計 Nr
性情別	柔靜	紆鬱	暴躁	
柔靜	441	200	69	710
紆鬱	268	298	110	676
暴躁	152	65	197	414
總計 Nc	861	563	376	1800

$$(I)\quad \frac{N_r N_c}{N} \qquad (II)\quad (N_{rc})^2 \qquad (III)\quad \frac{(N_{rc})^2}{\frac{N_r N_c}{N}}$$

$$\frac{710\times 861}{1800}=339.617 \quad 441^2=194,481 \quad \frac{194481}{339.617}=572.648$$

$$\frac{676\times 861}{1800}=323.353 \quad 268^2=71,824 \quad \frac{71824}{323.353}=222\cdot153$$

$$\frac{414\times 861}{1800}=198.030 \quad 152^2=23,104 \quad \frac{23104}{198.030}=116.669$$

$$\frac{710\times 563}{1800}=222.072 \quad 200^2=40,000 \quad \frac{40000}{222.072}=180.122$$

$$\frac{676\times 563}{1800}=211.438 \quad 298^2=88,804 \quad \frac{88804}{211.438}=420.000$$

$$\frac{414\times 563}{1800}=129.490 \quad 65^2=4,225 \quad \frac{4225}{129.490}=32.628$$

$$\frac{710\times376}{1800}=148.311 \quad 69^2=4,761 \quad \frac{4761}{148.311}= \quad 32.101$$

$$\frac{676\times376}{1800}=141.209 \quad 110^2=12,100 \quad \frac{12100}{141.209}= \quad 85.689$$

$$\frac{414\times376}{1800}=86.480 \quad 197^2=38,809 \quad \frac{38809}{86.480}= \quad \underline{448.763}$$

$$S=\underline{\underline{2,110.773}}$$

$$C'=\sqrt{\frac{2,110.773-1,800}{2,110.773}}$$

$$=\sqrt{0.147232}$$

$$=0.384$$

同一統計資料,因分類之多寡不同,(表八十五縱橫行各分五類 5×5,表八十六縱橫行各分三類 3×3.)均方相關係數亦隨之而異.據于爾氏之意見:

當分類行數爲 2×2 時,C' 不能大於 0.707.

當分類行數爲 3×3 時,C' 不能大於 0.816.

當分類行數爲 4×4 時,C' 不能大於 0.866.

當分類行數爲 5×5 時,C' 不能大於 0.894.

當分類行數爲 6×6 時,C' 不能大於 0.913.

當分類行數爲 7×7 時,C' 不能大於 0.926.

當分類行數爲 8×8 時,C' 不能大於 0.935.

當分類行數爲 9×9 時,C' 不能大於 0.943.

當分類行數爲 10×10 時,C' 不能大於 0.949.

綜觀于氏意見,相關表中縱橫分類,至少須有五項,均方

相關係數始能近於一.惟若分類過細,不特計算煩複,即 C' 亦易受少數偶然現象之影響,而爲之牽動.至於均方相關係數與直線相關係數之關係,在取樣較多,分類適當(在 5×5 以上),X 與 Y 事實之分配對稱時,C' 可視作 r;反之,如取樣較少,分類不當(在 5×5 以下),X 與 Y 事實之分配愈不對稱時,C' 與 r 相差愈大.

第四節 相應相關

相關有正負大小之別,前已言之.若於研究兩事實間之關係時,僅欲知其爲正爲負,不必詳究其量數之大小者,用相應增減法 (The method of concurrent deviation) 求相關係數,已足明示一切.茲將計算相應相關之公式列下:

設 R' 爲相應相關係數.

N 爲相應分數與不相應分數之總和.

N_L 爲相應分數.

$\pm$ 爲未確定之正或負號.

$$R'=\pm\sqrt{\pm\frac{2N_L-N}{N}}\quad\text{(公式九十一)}$$

公式九十一 R' 之爲正爲負,全視相應分數之大小而定;若相應分數超過相應與不相應分數總和之半,則爲正相關.反之,若不相應分數超過相應與不相應分數總和之半,則爲負相關.故 R' 之正負卽視 $\frac{2N_L-N}{N}$ 之正負而定.$\pm$ 爲或正或負之記號,亦卽於求得 $\frac{2N_L-N}{N}$ 之數值後斷定之.至於核計相應分數

之方法,則隨數列之不同而異.茲分時間及空間兩種數列述之如下:

(一) 由時間數列中求相應相關法

由時間數列中求相應分數,應按時間之先後,將甲乙兩數列分別排列;然後各以本期之數值,與上期比較,若本期之數值大於上期之數值,則為正,在「較上期增減」行下,記載「+」號.若本期之數值小於上期之數值,則為負,在「較上期增減」行下,記載「−」號.若本期之數值與上期之數值相同,則於「較上期增減」行下,記載「○」號,表示不增不減.甲乙兩數列經此比較後,即得甲乙兩事實本期各較上期增減之正負號.次將甲乙兩數列對照之正負號相乘,如同為正或同為負,則得相應分數一分(正×正=正或負×負=正).如甲為正號,乙為負號,或甲為負號,乙為正號,兩者連乘得不相應分數一分(正×負=負或負×正=負).如甲為零號,乙為正號;或甲為正號,乙為零號;或甲為零號,乙為負號;或甲為負號,乙為零號;兩者連乘,依數學原理應得零分,(○×正=○,或正×○=○,或○×負=○,或負×○=○.)然在計算相應相關時,應記相應與不相應各半分.例如光緒元年至民國二十四年間,我國輸出入貨值指數,如下表第二第四列;本年各較前年增「+」或減「−」,如下表第三第五列;輸入增減號乘輸出增

減號後,得相關增減號,如下表第六列;末計相應及不相應分數如下表第七第八列.

表八十七 歷年我國輸出入貨值指數表

光緒元年至民國二十四年

(民國十五年指數=100)

(由時間數列中求相應相關係數表)

年次	輸入淨值		輸出總值		輸入增減乘輸出增減	相應分數	不相應分數
	指數	本年較上年增(+)或減(-)	指數	本年較上年增(+)或減(-)			
光緒元年	6.0		8.0				
二年	6.2	+	9.3	+	+	1.0	
三年	6.5	+	7.8	−	−		1.0
四年	6.3	−	7.8	○	○	.5	.5
五年	7.3	+	8.4	+	+	1.0	
六年	7.0	−	9.0	+	−		1.0
七年	8.2	+	8.3	−	−		1.0
八年	6.9	−	7.8	−	+	1.0	
九年	6.5	−	8.1	+	−		1.0
十年	6.5	○	7.8	−	○	.5	.5
十一年	7.8	+	7.5	−	−		1.0
十二年	7.8	○	8.9	+	○	.5	.5
十三年	9.1	+	9.9	+	+	1.0	
十四年	11.1	+	10.7	+	+	1.0	
十五年	9.9	−	11.2	+	−		1.0
十六年	11.3	+	10.1	−	−		1.0
十七年	11.9	+	11.7	+	+	1.0	
十八年	12.0	+	11.9	+	+	1.0	
十九年	13.5	+	13.5	+	+	1.0	

二十年	14.4	+	14.8	+	+	1.0	
廿一年	15.3	+	16.6	+	+	1.0	
廿二年	18.0	+	15.2	—	—		1.0
廿三年	18.0	○	18.9	+	○	.5	.5
廿四年	18.6	+	18.4	—	—		1.0
廿五年	23.5	+	22.6	+	+	1.0	
廿六年	18.8	—	18.4	—	+	1.0	
廿七年	23.9	+	19.6	+	+	1.0	
廿八年	28.0	+	24.8	+	+	1.0	
廿九年	29.0	+	24.8	○	○	.5	.5
三十年	30.6	+	27.7	+	+	1.0	
卅一年	39.7	+	26.4	—	—		1.0
卅二年	36.5	—	27.3	+	—		1.0
卅三年	37.0	+	30.6	+	+	1.0	
卅四年	35.1	—	32.0	+	—		1.0
宣統元年	37.2	+	39.2	+	+	1.0	
二年	41.2	+	44.1	+	+	1.0	
三年	41.9	+	43.7	—	—		1.0
民國元年	42.1	+	42.9	—	—		1.0
二年	50.7	+	46.7	+	+	1.0	
三年	50.6	—	41.2	—	+	1.0	
四年	40.4	—	48.5	+	—		1.0
五年	45.9	+	55.7	+	+	1.0	
六年	48.9	+	53.6	—	—		1.0
七年	49.4	+	56.2	+	+	1.0	
八年	57.6	+	73.0	+	+	1.0	
九年	67.8	+	62.7	—	—		1.0
十年	80.6	+	69.6	+	+	1.0	
十一年	84.1	+	75.8	+	+	1.0	

十二年	82.2	−	87.2	+	−		1.0
十三年	90.6	+	89.3	+	+	1.0	
十四年	84.3	−	89.8	+	−		1.0
十五年	100.0	+	100.0	+	+	1.0	
十六年	90.1	−	106.3	+	−		1.0
十七年	106.4	+	114.7	+	+	1.0	
十八年	112.5	+	117.5	+	+	1.0	
十九年	116.4	+	103.5	−	−		1.0
二十年	127.4	+	105.2	+	+	1.0	
廿一年	93.3	−	57.0	−	+	1.0	
廿二年	76.8	−	45.4	−	+	1.0	
廿三年	58.7	−	39.8	−	+	1.0	
廿四年	52.4	−	42.8	+	−		1.0
總計						35.5	24.5

應用公式九十一

$$N_L = 35.5$$

$$N = 35.5 + 24.5 = 60$$

$$R' = +\sqrt{\frac{2\times 35.5 - 60}{60}}$$

$$= +\sqrt{0.183333}$$

$$= +0.428$$

(二) 由空間數列中求相應相關法

由空間數列中求相應相關,應先計算各數列之算術平均數,然後以此算術平均數爲比較之標準,將數列中各變量,一一與之比較,若變量值大於全體之算術平

均數,則於「較平均數大或小」行下,記載「＋」號.若變量值小於全體之算術平均數,則於「較平均數大或小」行下,記載「－」號.若變量值與全體算術平均數相同,則於「較平均數大或小」行下,記載「○」號.兩數列各經此比較後,即得甲乙兩事實之對照記號.次求甲乙兩事實之相關記號(即以甲數列之增減號乘乙數列之增減號),並計其相應及不相應分數,代入公式,即得相應相關係數.

表八十八　民國二十四年我國與世界主要各國輸出入貨值表

(由空間數列中求相應相關係數表)

國別	輸入		輸出		輸入大小乘輸出大小	相應分數	不相應分數
	單位千元	較平均數大(＋)或小(－)	單位千元	較平均數大(＋)或小(－)			
阿根廷	7,306	－	201	－	＋	1.0	
澳洲	37,049	＋	2,467	－	－		1.0
比國	18,526	－	5,552	－	＋	1.0	
印度	35,480	＋	20,345	＋	＋	1.0	
加拿大	20,416	－	4,198	－	＋	1.0	
捷克斯拉夫	6,928	－	15	－	＋	1.0	
埃及	5,932	－	3,484	－	＋	1.0	
臺灣	4,722	－	3,089	－	＋	1.0	
法國	13,362	－	29,245	＋	－		1.0
安南	59,973	＋	5,644	－	－		1.0
德國	103,385	＋	28,926	＋	＋	1.0	
英國	98,232	＋	49,463	＋	＋	1.0	
香港	20,359	－	94,893	＋	－		1.0

意國	12,967	—	7,665	—	+	1.0	
日本	139,593	+	82,059	+	+	1.0	
朝鮮	2,743	—	11,568	—	+	1.0	
關東租借地	9,658	—	13,430	—	+	1.0	
荷蘭	4,518	—	15,251	—	+	1.0	
荷印	58,356	+	4,991	—	—		1.0
那威	4,859	—	605	—	+	1.0	
菲列濱	4,854	—	4,801	—	+	1.0	
暹羅	27,187	—	3,606	—	+	1.0	
新嘉坡等	10,313	—	12,907	—	+	1.0	
瑞典	8,587	—	1,411	—	+	1.0	
瑞士	5,066	—	292	—	+	1.0	
美國	174,930	+	136,410	+	+	1.0	
俄國	7,700	—	4,238	—	+	1.0	
總計	903,001		546,756			22.0	5.0

平均輸入貨值（單位 千元）

$$\frac{903,001}{27}=33,444.48$$

平均輸出貨值（單位 千元）

$$\frac{546,756}{27}=20,250.22$$

應用公式九十一

$$N_L=22.0$$

$$N=22.0+5.0=27.0$$

$$R'=+\sqrt{\frac{2\times 22-27}{27}}$$

$$= +\sqrt{0.629630}$$

$$= +0.794$$

相應相關僅計算本期較上期或各變量較平均數相差之方向,而不計其離差之大小,致本期較上期或某變量較平均數相差極大或極小時,俱一視同仁,不分軒輊,故其確度,當不若直線相關係數之可靠也.

第五節　異號相關

異號相關爲英人薛伯德氏(Sheppard)所創,乃求相關係數極迅速而不甚精確之方法.其核算法,與求相應相關法同,即在時間數列中,依時間之先後,先行排列.在空間數列中,先求各數列之算術平均數.次將本期數值與上期比較,或各變量與算術平均數比較,得正,負及零號.再將兩數列之正,負及零號相乘,並記其積分.如甲數列之記號爲正,相對乙數列之記號亦爲正,則得同號分數一分.反之,如甲數列之記號爲負,相對乙數列之記號亦爲負,亦得同號分數一分.如甲爲正乙爲負,或甲爲負乙爲正,各得異號分數一分.如甲爲正乙爲零,或甲爲零乙爲正,或甲爲負乙爲零,或甲爲零乙爲負,各得零差分數一分.各記入同號,異號及零差分數行下.末用下列公式,將各分數代入,即得異號相關係數.

設 U' 爲異號相關係數.

N 爲同號異號及零差分數之總和.

N_L 爲同號分數.

N_u 爲異號分數.

N_o 爲零差分數.

$$U' = \frac{N_u + \frac{N_o}{2}\left(\frac{N_u}{N_u + N_L} + \frac{1}{2}\right)}{N} \text{…………（公式九十二）}$$

異號相關係數求得後,卽可查閱三角表（參閱附表八）,應用下列公式將異號相關係數 U' 化成直線相關係數 r.

設 r 爲直線相關係數.

U' 爲異號相關係數.

π 爲 $180°$.

$$r = Cos(\pi U') \text{…………（公式九十三）}$$

表八十九 歷年我國由美及由日輸入淨值比較表

民國十年至二十四年

（由時間數列中求異號相關係數表）

年次	由美輸入 單位百萬元	由美輸入 本年較上年增(+)或減(-)	由日輸入 單位百萬元	由日輸入 本年較上年增(+)或減(-)	由美輸入增減乘由日輸入增減	同號分數	異號分數	零差分數
民國十年	272		330					
十一年	255	−	360	+	−		1	
十二年	231	−	335	−	+	1		
十三年	290	+	373	+	+	1		
十四年	216	−	475	+	−		1	
十五年	288	+	532	+	+	1		
十六年	256	−	471	−	+	1		

十七年	319	+	516	+	+	1		
十八年	359	+	520	+	+	1		
十九年	361	+	522	+	+	1		
二十年	499	+	468	−	−		1	
廿一年	418	−	237	−	+	1		
廿二年	296	−	135	−	+	1		
廿三年	272	−	131	−	+	1		
廿四年	175	−	147	+	−		1	
總計						10	4	

應用公式九十二

$N_L=10$

$N_u=4$

$N_o=0$

$N\ =10+4+0=14$

$$U'\ =\frac{4+\frac{0}{2}\times\left(\frac{4}{4+10}+\frac{1}{2}\right)}{14}$$

$$=\frac{4}{14}$$

$$=0.29$$

應用公式九十三

$$r\ =Cos(180^\circ\times 0.29)$$

$$=Cos\ 52.2^\circ$$

$$=+0.61$$

表九十　某校十五生數學與物理成績對照表

（由空間數列中求異號相關係數表）

學號	數學成績		物理成績		數學成績較平均數大或小乘物理成績較平均數大或小	同號	異號	零差
	分數	較平均數大(＋)或小(－)	分數	較平均數大(＋)或小(－)		分數	分數	分數
1001	90	＋	75	－	－		1	
1002	94	＋	82	＋	＋	1		
1003	78	－	84	＋	－		1	
1004	76	－	65	－	＋	1		
1005	75	－	72	－	＋	1		
1006	68	－	66	－	＋	1		
1007	75	－	87	＋	－		1	
1008	80	○	96	＋	○			1
1009	85	＋	80	＋	＋	1		
1010	82	＋	85	＋	＋	1		
1011	76	－	78	○	○			1
1012	74	－	62	－	＋	1		
1013	88	＋	85	＋	＋	1		
1014	80	○	78	○	○			1
1015	79	－	75	－	＋	1		
總計	1,200		1,170			9	3	3
平均	80		78					

應用公式九十二

$$N_L = 9$$

$$N_u=3$$

$$N_o=3$$

$$N\ =9+3+3=15$$

$$U'=\frac{3+\frac{3}{2}\times\left(\frac{3}{9+3}+\frac{1}{2}\right)}{15}$$

$$=\frac{4.125}{15}$$

$$=0.28$$

應用公式九十三

$$r\ =Cos\,(180^\circ\times 0.28)$$

$$=Cos\,50.4^\circ$$

$$=+0.64$$

第六節 純相關

(一) 純相關之意義

世間現象,變幻無窮,若一爲分析,則某一變量之變動,常與其他無數現象有關.例如數學成績之優劣,與物理成績及智力有關.農產品之收穫,與肥料,雨量及溫度有關.物價之升降,與供給及需要有關.生產率之大小,與資本及人工有關.故一變量之變幻,不僅受他一變量之影響,實受無數其他變量之共同影響;換言之,一個附變數之數值,往往爲許多自變數所左右.上文所述相關,均僅求一個附變數與一個自變數之相關(統計家恆稱

之爲簡相關 Simple correlation),對於其他許多自變數,俱略而不問.若此捨而不顧之自變數,與附變數無密切關係者,則求得之簡相關係數,固甚可靠.若此摒棄之自變數,與附變數有極大關係者,則求得之簡相關係數,實非眞正之相關.故僅求兩變量之簡相關,猶不足以資應用,簡相關之外,更須求純相關(Partial correlation)是也.

純相關者,乃兩種變數或品質間之純淨關係,其他因子均經摒除淨盡者也.例如玉蜀黍之生產量,與六七八月之溫度有關.若僅求玉蜀黍之生產量與六月平均溫度之簡相關,則兩事項間之純淨關係,常爲蒙蔽而無由表現.若假定七八月之溫度相同,然後求玉蜀黍之生產量與六月平均溫度之關係,則所得結果,已隔離七八月平均溫度之因子而爲純相關矣.故純相關之探討,實無異於理化試驗室中所作分析之試驗.在理化試驗中常覺某種因子,對於某現象具有若干作用,但此作用不能立即表現;化學家欲使其表現,須先隔離其他因子之作用,而使此因子單獨表現其作用.純相關之探求亦然,惟所用之方法,係計算上之隔離,而非實際之隔離而已.

社會現象,錯綜紛紜,其相互關係之因子,雖難一一舉出,然在相關範圍內,如能摒除一二不切合之因子,自較僅顧及一較重要之自變數與其附變數之簡相關爲可靠也.下表爲歷年美國玉蜀黍生產量,與六七八月溫

度之比較,其中長期趨勢一行,係以一九〇六年爲起點 $Y=19.967-0.1502X$ 核算.以 X_1 代表歷年實際生產量在長期趨勢中所佔之百分比; X_2 代表六月之平均溫度; X_3 代表七月之平均溫度; X_4 代表八月之平均溫度如下:

表九十一　一八九〇年至一九二二年美國開痕撒斯省玉蜀黍收穫量與溫度比較表

（核算純相關之原始表）

年次	每畝收穫量（單位嘝）	長期趨勢	X_1 實際收穫量在長期趨勢中所佔之百分比	X_2 六月之平均溫度（華氏表）	X_3 七月之平均溫度（華氏表）	X_4 八月之平均溫度（華氏表）
1890	15.6	22.4	69.6	77.6	83.1	76.1
1891	26.7	22.2	120.3	70.7	74.0	75.1
1892	24.5	22.1	110.9	73.4	77.5	76.5
1893	21.3	21.9	97.3	74.7	79.5	73.8
1894	11.2	21.8	51.4	74.2	77.8	78.0
1895	24.3	21.6	112.5	71.7	74.9	76.0
1896	28.0	21.5	130.2	74.1	78.1	78.7
1897	18.0	21.3	84.5	76.6	80.2	76.0
1898	16.0	21.2	75.5	75.0	77.7	78.2
1899	27.0	21.0	128.6	73.9	76.2	80.6
1900	19.0	20.9	90.9	74.9	77.9	81.0
1901	7.8	20.7	37.7	77.3	85.0	79.1
1902	29.9	20.6	145.1	70.9	76.8	78.2
1903	25.6	20.4	125.5	67.2	78.3	75.3
1904	20.9	20.3	103.0	70.4	75.6	74.6
1905	27.7	20.1	137.8	75.5	74.5	78.7
1906	28.9	20.0	144.5	71.8	73.8	76.3
1907	22.1	19.8	111.6	72.0	78.4	78.1
1908	22.0	19.7	111.7	72.1	75.8	76.2
1909	19.9	19.5	102.1	73.1	78.1	80.1
1910	19.0	19.4	97.9	72.2	79.5	75.7
1911	14.5	19.2	75.5	80.5	78.6	76.4
1912	23.0	19.1	120.4	69.3	79.9	77.4
1913	3.2	18.9	16.9	74.2	82.1	84.2
1914	18.5	18.8	98.4	78.2	79.9	78.2
1915	31.0	18.6	166.7	69.2	74.0	70.1
1916	10.0	18.5	54.1	70.3	81.2	79.6
1917	13.0	18.3	71.0	72.8	80.8	73.4
1918	7.1	18.2	39.0	78.4	78.3	82.3
1919	15.2	18.0	84.4	72.3	80.2	78.3
1920	26.5	17.9	148.0	72.8	77.6	72.9
1921	22.2	17.7	125.4	74.4	79.2	78.6
1922	19.3	17.6	109.7	75.2	77.0	80.1

(二) 純相關係數之計算

上表既以X_1代表玉蜀黍實際收穫量在長期趨勢中所佔之百分比,X_2代表六月之平均溫度,X_3代表七月之平均溫度,X_4代表八月之平均溫度,則r_{12}爲玉蜀黍生產百分比與六月平均溫度之相關.r_{13}爲玉蜀黍生產百分比與七月平均溫度之相關.r_{14}爲玉蜀黍生產百分比與八月平均溫度之相關.r_{23}爲六月平均溫度與七月平均溫度之相關.r_{24}爲六月平均溫度與八月平均溫度之相關.r_{34}爲七月平均溫度與八月平均溫度之相關.凡此均屬簡相關(Simple correlation),亦稱零級相關(Partial correlation of zero-order).若將r右下角之附字,以小數點分隔爲前後兩部,前部附字,謂之前附字(Primary subscripts);後部附字,謂之後附字(Secondary subscripts).前附字均有兩個,第一字表示計算純相關中之附變數,第二字表示計算純相關中之自變數.(在求直線相關係數或稱簡相關係數時,以甲變量爲附變數,乙變量爲自變數,或甲變量爲自變數,乙變量爲附變數,所得r完全相同,故前附字可以任意互易,其值不變.)後附字乃示假定不變之自變量,換言之,即計算純相關時,須將其影響摒除者.故$r_{12.3}$即假定七月之平均溫度不變,玉蜀黍生產百分比與六月平均溫度之純相關.$r_{13.4}$即假定八月之平均溫度不變,玉蜀黍生產百分比

與七月平均溫度之純相關.$r_{14.2}$即假定六月之平均溫度不變,玉蜀黍生產百分比與八月平均溫度之純相關.餘如 $r_{12.4}$, $r_{13.2}$, $r_{14.3}$, $r_{23.4}$, $r_{24.3}$, $r_{32.4}$, $r_{34.2}$, $r_{42.3}$, $r_{43.2}$等均可依此類推.凡此在統計學中謂之一級純相關(Partial correlation of first-order). $r_{12.34}$即假定第三第四自變數不變,第一附變數與第二自變數之二級純相關 (Partial correlation of second-order).至於$r_{12.43}$, $r_{13.24}$, $r_{13.42}$等,亦均為二級純相關.$r_{12.345}$即假定第三第四及第五自變數不變,第一附變數與第二自變數之三級純相關(Partial correlation of third-order).餘均類推.茲將求各級純相關之公式列下:

設 r_{12} 為第一附變數與第二自變數之簡相關係數.

r_{13} 為第一附變數與第三自變數之簡相關係數.

r_{23} 為第二附變數與第三自變數之簡相關係數.

r_{32} 為第三附變數與第二自變數之簡相關係數.

$r_{12.3}$ 為假定第三自變數不變,第一附變數與第二自變數之一級純相關係數.

$r_{13.2}$ 為假定第二自變數不變,第一附變數與第

三自變數之一級純相關係數.

$r_{14.2}$ 爲假定第二自變數不變,第一附變數與第四自變數之一級純相關係數.

$r_{14.3}$ 爲假定第三自變數不變,第一附變數與第四自變數之一級純相關係數.

$r_{24.3}$ 爲假定第三自變數不變,第二附變數與第四自變數之一級純相關係數.

$r_{34.2}$ 爲假定第二自變數不變,第三附變數與第四自變數之一級純相關係數.

$r_{43.2}$ 爲假定第二自變數不變,第四附變數與第三自變數之一級純相關係數.

$r_{12.34}$爲假定第三第四自變數不變,第一附變數與第二自變數之二級純相關係數.

$r_{13.24}$爲假定第二第四自變數不變,第一附變數與第三自變數之二級純相關係數.

$r_{14.23}$爲假定第二第三自變數不變,第一附變數與第四自變數之二級純相關係數.

$r_{12.345\cdots n}$ 爲假定第三第四第五………及第 n 自變數不變,第一附變數與第二自變數之 n 級純相關係數.

一級純相關係數

$$r_{12.3}=\frac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{(1-r^2_{13})^{\frac{1}{2}}(1-r^2_{23})^{\frac{1}{2}}}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式九十四)}$$

$$r_{13.2}=\frac{r_{13}-r_{12}r_{32}}{(1-r^2_{12})^{\frac{1}{2}}(1-r^2_{32})^{\frac{1}{2}}}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式九十五)}$$

二級純相關係數 —— 二級純相關係數,可由一級純相關係數中核算;三級純相關係數,可由二級純相關係數中核算;故 n 級純相關係數,可由低級純相關係數中依次推算者也.茲將求二級純相關係數之公式列下:

$$r_{12\cdot34}=\frac{r_{12\cdot3}-r_{14\cdot3}r_{24\cdot3}}{(1-r^2_{14\cdot3})^{\frac{1}{2}}(1-r^2_{24\cdot3})^{\frac{1}{2}}}\cdots\cdots\cdots\text{(公式九十六)}$$

$$r_{13\cdot24}=\frac{r_{13\cdot2}-r_{14\cdot2}r_{34\cdot2}}{(1-r^2_{14\cdot2})^{\frac{1}{2}}(1-r^2_{34\cdot2})^{\frac{1}{2}}}\cdots\cdots\cdots\text{(公式九十七)}$$

$$r_{14\cdot23}=\frac{r_{14\cdot2}-r_{13\cdot2}r_{43\cdot2}}{(1-r^2_{13\cdot2})^{\frac{1}{2}}(1-r^2_{43\cdot2})^{\frac{1}{2}}}\cdots\cdots\cdots\text{(公式九十八)}$$

n 級純相關係數

$$r_{12\cdot345\ldots\ldots n}=\frac{r_{12\cdot345\cdots(n-1)}-r_{1n\cdot345\cdots(n-1)}r_{2n\cdot345\cdots(n-1)}}{\left[1-r^2_{1n\cdot345\cdots(n-1)}\right]^{\frac{1}{2}}\left[1-r^2_{2n\cdot345\cdots(n-1)}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cdots\cdots\text{(公式九十九)}$$

茲就一八九〇年至一九二二年美國開痕撒斯省玉蜀黍收穫量在長期趨勢中所佔之百分比,與歷年各月平均溫度,及歷年各月平均溫度與溫度間之關係,核算各箇相關係數如下:

表九十二　一八九〇年至一九二二年美國開痕撒斯省玉蜀黍收穫量在長期趨勢中所佔之百分比與六月平均溫度之簡相關表

（計算零級相關係數表甲）

年次	X_1			X_2			d_1d_2	
	玉蜀黍收穫百分比	離中差 d_1	離中差自乘方 d^2_1	六月之平均溫度（華氏表）	離中差 d_2	離中差自乘方 d^2_2	正（＋）	負（－）
1890	69.6	−30.34	920.52	77.6	+4.06	16.48		123.18
1891	120.3	+20.36	414.53	70.7	−2.84	8.07		57.82
1892	110.9	+10.96	120.12	73.4	−0.14	0.02		1.53
1893	97.3	− 2.64	7.08	74.7	+1.16	1.35		3.06
1894	51.4	−48.54	2,356.13	74.2	+0.66	0.44		32.04
1895	112.5	+12.56	157.75	71.7	−1.84	3.39		23.11
1896	130.2	+30.26	915.67	74.1	+0.56	0.31	17.70	
1897	84.5	−15.44	238.39	76.6	+3.06	9.36		47.25
1898	75.5	−24.44	597.31	75.0	+1.46	2.13		35.68
1899	128.6	+28.66	821.40	73.9	+0.36	0.13	10.32	
1900	90.9	− 9.04	81.72	74.9	+1.36	1.85		12.29
1901	37.7	−62.24	3,873.82	77.3	+3.76	14.14		234.02
1902	145.1	+45.16	2,039.43	70.9	−2.64	6.97		119.22
1903	125.5	+25.56	653.31	67.2	−6.34	40.20		162.05
1904	103.0	+ 3.06	9.36	70.4	−3.14	9.86		9.61
1905	137.8	+37.86	1,433.38	75.5	+1.96	3.84	74.21	
1906	144.5	+44.56	1,985.59	71.8	−1.74	3.03		77.53
1907	111.6	+11.66	135.96	72.0	−1.54	2.37		17.96
1908	111.7	+11.76	138.30	72.1	−1.44	2.07		16.93
1909	102.1	+ 2.16	4.67	73.1	−0.44	0.19		0.95
1910	97.9	− 2.04	4.16	72.2	−1.34	1.80	2.73	
1911	75.5	−24.44	597.31	80.5	+6.96	48.44		170.10
1912	120.4	+20.46	418.61	69.3	−4.24	17.98		86.75
1913	16.9	−83.04	6,895.64	74.2	+0.66	0.44		54.81
1914	98.4	− 1.54	2.37	78.2	+4.66	21.72		7.18
1915	166.7	+66.74	4,454.23	69.2	−4.34	18.84		289.65
1916	54.1	−45.84	2,101.31	70.3	−3.24	10.50	148.52	
1917	71.0	−28.94	837.52	72.8	−0.74	0.55	21.42	
1918	39.0	−60.94	3,713.68	78.4	+4.86	23.62		296.17
1919	84.4	−15.54	241.49	72.3	−1.24	1.54	19.27	
1920	148.0	+48.06	2,309.70	72.8	−0.74	0.55		35.56
1921	125.4	+25.46	648.21	74.4	+0.86	0.74	21.90	
1922	109.7	+ 9.74	94.87	75.2	+1.66	2.76	16.17	
總計	3,298.1		39,223.60	2,426.9		275.68	332.24	1,914.45
	$M=99.94$			$M=73.54$			$\Sigma d_1d_2=-1,582.21$	

$$r_{12}=\frac{-1582.21}{\sqrt{39223.60\times 275.68}}$$

$$=\frac{-1582.21}{\sqrt{10813162.0480}}$$

$$=\frac{-1582.21}{3288.34}$$

$$=-0.4814$$

表九十三　一八九〇年至一九二二年美國開痕撒斯省玉蜀黍收穫量在長期趨勢中所佔之百分比與七月平均溫度之簡相關表

（計算零級相關係數表乙）

年次	X_1			X_3			d_1d_3	
	玉蜀黍收穫百分比	離中差 d_1	離中差自乘方 d^2_1	七月之平均溫度（華氏表）	離中差 d_3	離中差自乘方 d^2_3	正（＋）	負（－）
1890	69.6	−30.34	920.52	83.1	+4.87	23.72		147.76
1891	120.3	+20.36	414.53	74.0	−4.23	17.89		86.12
1892	110.9	+10.96	120.12	77.5	−0.73	0.53		8.00
1893	97.3	− 2.64	7.08	79.5	+1.27	1.61		3.35
1894	51.4	−48.54	2,356.13	77.8	−0.43	0.18	20.87	
1895	112.5	+12.56	157.75	74.9	−3.33	11.09		41.82
1896	130.2	+30.26	915.67	78.1	−0.13	0.02		3.93
1897	84.5	−15.44	238.39	80.2	+1.97	3.88		30.42
1898	75.5	−24.44	597.31	77.7	−0.53	0.28	12.95	
1899	128.6	+28.66	821.40	76.2	−2.03	4.12		58.18
1900	90.9	− 9.04	81.72	77.9	−0.33	0.11	2.98	
1901	37.7	−62.24	3,873.82	85.0	+6.77	45.83		421.36
1902	145.1	+45.16	2,039.43	76.8	−1.43	2.04		64.58
1903	125.5	+25.56	653.31	78.3	+0.07	0.05	1.80	
1904	103.0	+ 3.06	9.36	75.6	−2.63	6.92		8.05
1905	137.8	+37.86	1,433.38	74.5	−3.73	13.91		141.22
1906	144.5	+44.56	1,985.59	73.8	−4.43	19.62		197.40
1907	111.6	+11.66	135.96	78.4	+0.17	0.03	1.98	
1908	111.7	+11.76	138.30	75.8	−2.43	5.90		28.58
1909	102.1	+ 2.16	4.67	78.1	−0.13	0.02		0.28
1910	97.9	− 2.04	4.16	79.5	+1.27	1.61		2.59
1911	75.5	−24.44	597.31	78.6	+0.37	0.14		9.04
1912	120.4	+20.46	418.61	79.9	+1.67	2.79	34.17	
1913	16.9	−83.04	6,895.64	82.1	+3.87	14.98		321.36
1914	98.4	− 1.54	2.37	79.9	+1.67	2.79		2.57
1915	166.7	+66.74	4,454.23	74.0	−4.23	17.89		282.31
1916	54.1	−45.84	2,101.31	81.2	+2.97	8.82		136.14
1917	71.0	−28.94	837.52	80.8	+2.57	6.60		74.38
1918	39.0	−60.94	3,713.68	78.3	+0.07	0.05		4.27
1919	84.4	−15.54	241.49	80.2	+1.97	3.88		30.61
1920	148.0	+48.06	2,309.76	77.6	−0.63	0.40		30.28
1921	125.4	+25.46	648.21	79.2	+0.97	0.94	24.70	
1922	109.7	+ 9.74	94.87	77.0	−1.23	1.51		11.98
總計	3,298.1		39,223.60	2,581.5		220.15	99.45	2,146.58
	$M=99.94$			$M=78.23$			$\Sigma d_1d_3=-2{,}047.13$	

$$r_{13}=\frac{-2047.13}{\sqrt{39223.60\times 220.15}}$$

$$=\frac{-2047.13}{\sqrt{8635075.5400}}$$

$$=\frac{-2047.13}{2938.55}$$

$$=-0.6968$$

表九十四　一八九〇年至一九二二年美國開痕撒斯省玉蜀黍收穫量在長期趨勢中所佔之百分比與八月平均溫度之簡相關表

(計算零級相關係數表丙)

年次	X_1			X_4			d_1d_4	
	玉蜀黍收穫百分比	離中差 d_1	離中差自乘方 d^2_1	八月之平均溫度(華氏表)	離中差 d_4	離中差自乘方 d^2_4	正(+)	負(−)
1890	69.6	−30.34	920.52	76.1	−1.29	1.66	39.14	
1891	120.3	+20.36	414.53	75.1	−2.29	5.24		46.62
1892	110.9	+10.96	120.12	76.5	−0.89	0.79		9.75
1893	97.3	− 2.64	7.08	73.8	−3.59	12.89	9.48	
1894	51.4	−48.54	2,356.13	78.0	+0.61	0.37		29.61
1895	112.5	+12.56	157.75	76.0	−1.39	1.93		17.46
1896	130.2	+30.26	915.67	78.7	+1.31	1.72	39.64	
1897	84.5	−15.44	238.39	76.0	−1.39	1.93	21.46	
1898	75.5	−24.44	597.31	78.2	+0.81	0.66		19.80
1899	128.6	+28.66	821.40	80.6	+3.21	10.30	92.00	
1900	90.9	− 9.04	81.72	81.0	+3.61	13.03		32.63
1901	37.7	−62.24	3,873.82	79.1	+1.71	2.92		106.43
1902	145.1	+45.16	2,039.43	78.2	+0.81	0.66	36.58	
1903	125.5	+25.56	653.31	75.3	−2.09	4.37		53.42
1904	103.0	+ 3.06	9.36	74.6	−2.79	7.78		8.54
1905	137.8	+37.86	1,433.38	78.7	+1.31	1.72	49.60	
1906	144.5	+44.56	1,985.59	76.3	−1.09	1.19		48.57
1907	111.6	+11.66	135.96	78.1	+0.71	0.50	8.28	
1908	111.7	+11.76	138.30	76.2	−1.19	1.42		13.99
1909	102.1	+ 2.16	4.67	80.1	+2.71	7.34	5.85	
1910	97.9	− 2.04	4.16	75.7	−1.69	2.86	3.45	
1911	75.5	−24.44	597.31	76.4	−0.99	0.98	24.20	
1912	120.4	+20.46	418.61	77.4	+0.01	0.00	0.20	
1913	16.9	−83.04	6,895.64	84.2	+6.81	46.38		565.50
1914	98.4	− 1.54	2.37	78.2	+0.81	0.66		1.25
1915	166.7	+66.74	4,454.23	70.1	−7.29	53.14		486.53
1916	54.1	−45.84	2,101.31	79.6	+2.21	4.88		101.31
1917	71.0	−28.94	837.52	73.4	−3.99	15.92	115.47	
1918	39.0	−60.94	3,713.68	82.3	+4.91	24.11		299.22
1919	84.4	−15.54	241.49	78.3	+0.91	0.83		14.14
1920	148.0	+48.06	2,309.76	72.9	−4.49	20.16		215.79
1921	125.4	+25.46	648.21	78.6	+1.21	1.46	30.81	
1922	109.7	+ 9.74	94.87	80.1	+2.71	7.34	26.40	
總計	3,298.1		39,223.60	2,553.8		257.14	502.56	2,070.56
	$M=99.94$			$M=77.39$			$\Sigma d_1d_4=-1,568.00$	

$$r_{14}=\frac{-1568.00}{\sqrt{39223.60\times 257.14}}$$

$$=\frac{-1568.00}{\sqrt{10085956.5040}}$$

$$=\frac{-1568.00}{3175.84}$$

$$=-0.4937$$

表九十五　一八九〇年至一九二二年美國閉痕撒斯省六月平均溫度與七月平均溫度之簡相關表

（計算零級相關係數表丁）

年次	X_2			X_3			d_2d_3	
	六月之平均溫度（華氏表）	離中差 d_2	離中差自乘方 d^2_2	七月之平均溫度（華氏表）	離中差 d_3	離中差自乘方 d^2_3	正（＋）	負（－）
1890	77.6	+4.06	16.48	83.1	+4.87	23.72	19.77	
1891	70.7	−2.84	8.07	74.0	−4.23	17.89	12.01	
1892	73.4	−0.14	0.02	77.5	−0.73	0.53	0.10	
1893	74.7	+1.16	1.35	79.5	+1.27	1.61	1.47	
1894	74.2	+0.66	0.44	77.8	−0.43	0.18		0.28
1895	71.7	−1.84	3.39	74.9	−3.33	11.09	6.13	
1896	74.1	+0.56	0.31	78.1	−0.13	0.02		0.07
1897	76.6	+3.06	9.36	80.2	+1.97	3.88	6.03	
1898	75.0	+1.46	2.13	77.7	−0.53	0.28		0.77
1899	73.9	+0.36	0.13	76.2	−2.03	4.12		0.73
1900	74.9	+1.36	1.85	77.9	−0.33	0.11		0.45
1901	77.3	+3.76	14.14	85.0	+6.77	45.83	25.46	
1902	70.9	−2.64	6.97	76.8	−1.43	2.04	3.78	
1903	67.2	−6.34	40.20	78.3	+0.07	0.05		0.44
1904	70.4	−3.14	9.86	75.6	−2.63	6.92	8.26	
1905	75.5	+1.96	3.84	74.5	−3.73	13.91		7.31
1906	71.8	−1.74	3.03	73.8	−4.43	19.62	7.71	
1907	72.0	−1.54	2.37	78.4	+0.17	0.03		0.26
1908	72.1	−1.44	2.07	75.8	−2.43	5.90	3.50	
1909	73.1	−0.44	0.19	78.1	−0.13	0.02	0.06	
1910	72.2	−1.34	1.80	79.5	+1.27	1.61		1.70
1911	80.5	+6.96	48.44	78.6	+0.37	0.14	2.58	
1912	69.3	−4.24	17.98	79.9	+1.67	2.79		7.08
1913	74.2	+0.66	0.44	82.1	+3.87	14.98	2.55	
1914	78.2	+4.66	21.72	79.9	+1.67	2.79	7.78	
1915	69.2	−4.34	18.84	74.0	−4.23	17.89	18.36	
1916	70.3	−3.24	10.50	81.2	+2.97	8.82		9.62
1917	72.8	−0.74	0.55	80.8	+2.57	6.60		1.90
1918	78.4	+4.86	23.62	78.3	+0.07	0.05	0.34	
1919	72.3	−1.24	1.54	80.2	+1.97	3.88		2.44
1920	72.8	−0.74	0.55	77.6	−0.63	0.40	0.47	
1921	74.4	+0.86	0.74	79.2	+0.97	0.94	0.83	
1922	75.2	+1.66	2.76	77.0	−1.23	1.51		2.04
總計	2,426.9		275.68	2,581.5		220.15	127.19	35.09
	$M=73.54$			$M=78.23$			$\Sigma d_2d_3=92.10$	

$$r_{23}=\frac{92.10}{\sqrt{275.68\times 220.15}}$$

$$=\frac{92.10}{\sqrt{60690.9520}}$$

$$=\frac{92.10}{246.36}$$

$$=0.3737$$

表九十六 一八九〇年至一九二二年美國開痕撒斯省六月平均溫度與八月平均溫度之簡相關表

（計算零級相關係數表戊）

年次	X_2			X_4			d_2d_4	
	六月之平均溫度（華氏表）	離中差 d_2	離中差自乘方 d^2_2	八月之平均溫度（華氏表）	離中差 d_4	離中差自乘方 d^2_4	正（＋）	負（－）
1890	77.6	+4.06	16.48	76.1	−1.29	1.66		5.24
1891	70.7	−2.84	8.07	75.1	−2.29	5.24	6.50	
1892	73.4	−0.14	0.02	76.5	−0.89	0.79	0.12	
1893	74.7	+1.16	1.35	73.8	−3.59	12.89		4.16
1894	74.2	+0.66	0.44	78.0	+0.61	0.37	0.40	
1895	71.7	−1.84	3.39	76.0	−1.39	1.93	2.56	
1896	74.1	+0.56	0.31	78.7	+1.31	1.72	0.73	
1897	76.6	+3.06	9.36	76.0	−1.39	1.93		4.25
1898	75.0	+1.46	2.13	78.2	+0.81	0.66	1.18	
1899	73.9	+0.36	0.13	80.6	+3.21	10.30	1.16	
1900	74.9	+1.36	1.85	81.0	+3.61	13.03	4.91	
1901	77.3	+3.76	14.14	79.1	+1.71	2.92	6.43	
1902	70.9	−2.64	6.97	78.2	+0.81	0.66		2.14
1903	67.2	−6.34	40.20	75.3	−2.09	4.37	13.25	
1904	70.4	−3.14	9.86	74.6	−2.79	7.78	8.76	
1905	75.5	+1.96	3.84	78.7	+1.31	1.72	2.57	
1906	71.8	−1.74	3.03	76.3	−1.09	1.19	1.90	
1907	72.0	−1.54	2.37	78.1	+0.71	0.50		1.09
1908	72.1	−1.44	2.07	76.2	−1.19	1.42	1.71	
1909	73.1	−0.44	0.19	80.1	+2.71	7.34		1.19
1910	72.2	−1.34	1.80	75.7	−1.69	2.86	2.26	
1911	80.5	+6.96	48.44	76.4	−0.99	0.98		6.89
1912	69.3	−4.24	17.98	77.4	+0.01	0.00		0.04
1913	74.2	+0.66	0.44	84.2	+6.81	46.38	4.49	
1914	78.2	+4.66	21.72	78.2	+0.81	0.66	3.77	
1915	69.2	−4.34	18.84	70.1	−7.29	53.14	31.64	
1916	70.3	−3.24	10.50	79.6	+2.21	4.88		7.16
1917	72.8	−0.74	0.55	73.4	−3.99	15.92	2.95	
1918	78.4	+4.86	23.62	82.3	+4.91	24.11	23.86	
1919	72.3	−1.24	1.54	78.3	+0.91	0.83		1.13
1920	72.8	−0.74	0.55	72.9	−4.49	20.16	3.32	
1921	74.4	+0.86	0.74	78.6	+1.21	1.46	1.04	
1922	75.2	+1.66	2.76	80.1	+2.71	7.34	4.50	
總計	2,426.9		275.68	2,553.8		257.14	130.01	33.29
	$M=73.54$			$M=77.39$			$\Sigma d_2d_4=96.72$	

$$r_{24}=\frac{96.72}{\sqrt{275.68\times 257.14}}$$

$$=\frac{96.72}{\sqrt{70888.3552}}$$

$$=\frac{96.72}{266.25}$$

$$=0.3633$$

表九十七　一八九〇年至一九二二年美國開痕撒斯省七月平均溫度與八月平均溫度之簡相關表

（計算零級相關係數表巳）

年次	X_3			X_4			d_3d_4	
	七月之平均溫度（華氏表）	離中差 d_3	離中差自乘方 d^2_3	八月之平均溫度（華氏表）	離中差 d_4	離中差自乘方 d^2_4	正（+）	負（−）
1890	83.1	+4.87	23.72	76.1	−1.29	1.66		6.28
1891	74.0	−4.23	17.89	75.1	−2.29	5.24	9.69	
1892	77.5	−0.73	0.53	76.5	−0.89	0.79	0.65	
1893	79.5	+1.27	1.61	73.8	−3.59	12.89		4.56
1894	77.8	−0.43	0.18	78.0	+0.61	0.37		0.26
1895	74.9	−3.33	11.09	76.0	−1.39	1.93	4.63	
1896	78.1	−0.13	0.02	78.7	+1.31	1.72		0.17
1897	80.2	+1.97	3.88	76.0	−1.39	1.93		2.74
1898	77.7	−0.53	0.28	78.2	+0.81	0.66		0.43
1899	76.2	−2.03	4.12	80.6	+3.21	10.30		6.52
1900	77.9	−0.33	0.11	81.0	+3.61	13.03		1.19
1901	85.0	+6.77	45.83	79.1	+1.71	2.92	11.58	
1902	76.8	−1.43	2.04	78.2	+0.81	0.66		1.16
1903	78.3	+0.07	0.05	75.3	−2.09	4.37		0.15
1904	75.6	−2.63	6.92	74.6	−2.79	7.78	7.34	
1905	74.5	−3.73	13.91	78.7	+1.31	1.72		4.89
1906	73.8	−4.43	19.62	76.3	−1.09	1.19	4.83	
1907	78.4	+0.17	0.03	78.1	+0.71	0.50	0.12	
1908	75.8	−2.43	5.90	76.2	−1.19	1.42	2.89	
1909	78.1	−0.13	0.02	80.1	+2.71	7.34		0.35
1910	79.5	+1.27	1.61	75.7	−1.69	2.86		2.15
1911	78.6	+0.37	0.14	76.4	−0.99	0.98		0.37
1912	79.9	+1.67	2.79	77.4	+0.01	0.00	0.02	
1913	82.1	+3.87	14.98	84.2	+6.81	46.38	26.35	
1914	79.9	+1.67	2.79	78.2	+0.81	0.66	1.35	
1915	74.0	−4.23	17.89	70.1	−7.29	53.14	30.84	
1916	81.2	+2.97	8.82	79.6	+2.21	4.88	6.56	
1917	80.8	+2.57	6.60	73.4	−3.99	15.92		10.25
1918	78.3	+0.07	0.05	82.3	+4.91	24.11	0.34	
1919	80.2	+1.97	3.88	78.3	+0.91	0.83	1.79	
1920	77.6	−0.63	0.40	72.9	−4.49	20.16	2.83	
1921	79.2	+0.97	0.94	78.6	+1.21	1.46	1.17	
1922	77.0	−1.23	1.51	80.1	+2.71	7.34		3.33
總計	2,581.5		220.15	2,553.8		257.14	112.98	44.80
	$M=78.23$			$M=77.39$			$\Sigma d_3d_4=68.18$	

$$r_{34}=\frac{68.18}{\sqrt{220.15\times 257.14}}$$

$$=\frac{68.18}{\sqrt{56609.3710}}$$

$$=\frac{68.18}{237.93}$$

$$=0.2862$$

(1)一級純相關係數之核算——根據表九十二至表九十七,求得各零級相關係數如下:

玉蜀黍收穫量百分比與六月平均溫度之零級相關係數 $r_{12}=-0.4814$

玉蜀黍收穫量百分比與七月平均溫度之零級相關係數 $r_{13}=-0.6968$

玉蜀黍收穫量百分比與八月平均溫度之零級相關係數 $r_{14}=-0.4937$

六月平均溫度與七月平均溫度之零級相關係數 $r_{23}=+0.3737$

六月平均溫度與八月平均溫度之零級相關係數 $r_{24}=+0.3633$

七月平均溫度與八月平均溫度之零級相關係數 $r_{34}=+0.2862$

各零級相關係數既如上列,若將其代入公式,卽可核算各一級純相關係數.茲假定七月之平均溫度(X_3)相同(卽無變動),以玉蜀黍收穫量在長期趨勢中所佔之百分比(X_1)爲附變數,六月之平均溫度 X_2 爲自變數,核計一級純相關係數($r_{12\cdot3}$)如下:

應用公式九十四

$$r_{12\cdot3}=\frac{(-0.4814)-(-0.6968)\times0.3737}{[1-(-0.6968)^2]^{\frac{1}{2}}\times[1-(0.3737)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{(-0.4814)-(-0.2604)}{\sqrt{1-(-0.6968)^2}\times\sqrt{1-(0.3737)^2}}$$

查附表三 $log\sqrt{1-(-0.6968)^2}=\bar{1}.85568$ $antilog=0.7173$

$$\log\sqrt{1-(0.3737)^2}=\bar{1}.96733\ antilog=0.9275$$

$$\bar{1}.82301\ antilog=0.6653$$

故 $r_{12\cdot 3}=\dfrac{-0.2210}{0.6653}$

$$=-0.3322$$

至於 $r_{12\cdot 4}$, $r_{13\cdot 2}$, $r_{13\cdot 4}$, $r_{14\cdot 2}$, $r_{14\cdot 3}$, $r_{23\cdot 4}$, $r_{24\cdot 3}$ 及 $r_{34\cdot 2}$ 等一級純相關係數,亦可依此核算,茲特列表示之如下:

表九十八　美國開痕撒斯省玉蜀黍收穫量在長期趨勢中所佔之百分比與六,七,八月平均溫度一級純相關表

（計算一級純相關係數表）

零級相關係數		$(1-r^2)^{\frac{1}{2}}$	分子中兩零級相關係數之乘積	分子之全部	分母	一級純相關係數	
記號	r					記號	r
r_{12}	-0.4814		-0.2604	-0.2210	0.6653	$r_{12\cdot 3}$	-0.3322
r_{13}	-0.6968	0.7173					
r_{23}	$+0.3737$	0.9275					
r_{12}	-0.4814		-0.1794	-0.3020	0.8102	$r_{12\cdot 4}$	-0.3727
r_{14}	-0.4937	0.8696					
r_{24}	$+0.3633$	0.9317					
r_{13}	-0.6968		-0.1799	-0.5169	0.8130	$r_{13\cdot 2}$	-0.6358
r_{12}	-0.4814	0.8765					
r_{23}	$+0.3737$	0.9275					
r_{13}	-0.6968		-0.1413	-0.5555	0.8333	$r_{13\cdot 4}$	-0.6666
r_{14}	-0.4937	0.8696					
r_{34}	$+0.2862$	0.9582					
r_{14}	-0.4937		-0.1749	-0.3188	0.8166	$r_{14\cdot 2}$	-0.3904
r_{12}	-0.4814	0.8765					
r_{24}	$+0.3633$	0.9317					
r_{14}	-0.4937		-0.1994	-0.2943	0.6873	$r_{14\cdot 3}$	-0.4282
r_{13}	-0.6968	0.7173					
r_{34}	$+0.2862$	0.9582					
r_{23}	$+0.3737$		$+0.1040$	$+0.2697$	0.8928	$r_{23\cdot 4}$	$+0.3021$
r_{24}	$+0.3633$	0.9317					
r_{34}	$+0.2862$	0.9582					
r_{24}	$+0.3633$		$+0.1070$	$+0.2563$	0.8887	$r_{24\cdot 3}$	$+0.2884$
r_{23}	$+0.3737$	0.9275					
r_{34}	$+0.2862$	0.9582					
r_{34}	$+0.2862$		$+0.1358$	$+0.1504$	0.8642	$r_{34\cdot 2}$	$+0.1740$
r_{23}	$+0.3737$	0.9275					
r_{24}	$+0.3633$	0.9317					

(2)二級純相關係數之核算——一級純相關係數既經求得,即可代入公式,核算二級純相關係數.茲假定七月八月之平均溫度(X_3及X_4)相同(即無變動),以玉蜀黍收穫量在長期趨勢中所佔之百分比(X_1)爲附變數,六月之平均溫度(X_2)爲自變數,核計二級純相關係數($r_{12\cdot34}$)如下:

應用公式九十六

$$r_{12\cdot34}=\frac{(-0.3322)-(-0.4282)\times0.2884}{[1-(-0.4282)^2]^{\frac{1}{2}}\times[1-(0.2884)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{-0.3322-(-0.1235)}{\sqrt{1-(-0.4282)^2}\times\sqrt{1-(0.2884)^2}}$$

查附表三 $log\sqrt{1-(-0.4282)^2}=\bar{1}.95601$ $antilog=0.9037$

$log\sqrt{1-(0.2884)^2}=\bar{1}.98114$ $antilog=0.9575$

$\bar{1}.93715$ $antilog=0.8653$

故 $r_{12\cdot34}=\frac{-0.2087}{0.8653}$

$=-0.2412$

或 $r_{12\cdot34}=\frac{r_{12\cdot4}-r_{13\cdot4}r_{23\cdot4}}{(1-r^2_{13\cdot4})^{\frac{1}{2}}(1-r^2_{23\cdot4})^{\frac{1}{2}}}$

$$=\frac{(-0.3729)-(-0.6666)\times0.3021}{[1-(-0.6666)^2]^{\frac{1}{2}}\times[1-(0.3021)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{(-0.3729)-(-0.2014)}{\sqrt{1-(-0.6666)^2}\times\sqrt{1-(0.3021)^2}}$$

查附表三 $log\sqrt{1-(-0.6666)^2}=\bar{1}.87240$ $antilog=0.7454$

$log\sqrt{1-(0.3021)^2}=\bar{1}.97922$ $antilog=0.9533$

$\bar{1}.85162$ $antilog=0.7106$

故 $r_{12\cdot34}=\dfrac{-0.1715}{0.7106}$

$=-0.2413$

至於 $r_{13\cdot24}$ 及 $r_{14\cdot23}$ 等二級純相關係數,亦可依此核算,茲特列表示之如下:

表九十九　美國開痕撒斯省玉蜀黍收穫量在長期趨勢中所佔之百分比與六,七,八月平均溫度二級純相關表

（計算二級純相關係數表）

一級純相關係數		$(1-r^2)^{\frac{1}{2}}$	分子中兩一級純相關係數之乘積	分子之全部	分母	二級純相關係數	
記號	r					記號	r
$r_{12\cdot3}$	-0.3322		-0.1235	-0.2087	0.8653	$r_{12\cdot34}$	$-0\ 2412$
$r_{14\cdot3}$	-0.4282	0.9037					
$r_{24\cdot3}$	$+0.2884$	0.9575					
$r_{12\cdot4}$	-0.3727		-0.2014	-0.1713	0.7106	$r_{12\cdot34}$	-0.2411
$r_{13\cdot4}$	-0.6666	0.7454					
$r_{23\cdot4}$	$+0.3021$	0.9533					
$r_{13\cdot2}$	-0.6358		-0.0679	-0.5679	0.9065	$r_{13\cdot24}$	-0.6265
$r_{14\cdot2}$	-0.3904	0.9206					
$r_{34\cdot2}$	$+0.1740$	0.9847					
$r_{13\cdot4}$	-0.6666		-0.1126	-0.5540	0.8847	$r_{13\cdot24}$	-0.6262
$r_{12\cdot4}$	-0.3727	0.9280					
$r_{23\cdot4}$	$+0.3021$	0.9533					
$r_{14\cdot2}$	-0.3904		-0.1106	-0.2798	0.7601	$r_{14\cdot23}$	-0.3681
$r_{13\cdot2}$	-0.6358	0.7719					
$r_{34\cdot2}$	$+0.1740$	0.9847					
$r_{14\cdot3}$	-0.4282		-0.0958	-0.3324	0.9031	$r_{14\cdot23}$	-0.3681
$r_{12\cdot3}$	-0.3322	0.9432					
$r_{24\cdot3}$	$+0.2884$	0.9575					

一級及二級純相關係數求得後,吾人卽可列表一爲比較,使各級相關係數之意義,更見其顯明也.

零級相關係數	一級相關係數	二級相關係數
$r_{12}=-0.4814$	$r_{12\cdot3}=-0.3322$	$r_{12\cdot34}=-0.2412$
	$r_{12\cdot4}=-0.3727$	
$r_{13}=-0.6968$	$r_{13\cdot2}=-0.6358$	$r_{13\cdot24}=-0.6265$
	$r_{13\cdot4}=-0.6666$	
$r_{14}=-0.4937$	$r_{14\cdot2}=-0.3904$	$r_{14\cdot23}=-0.3681$
	$r_{14\cdot3}=-0.4282$	

觀上列零級相關係數,知玉蜀黍收穫量在長期趨勢中所佔之百分比,與六,七,八月平均溫度之負相關程度均在 -0.48 至 -0.70 之間,似甚密切.然若摒除七月或八月平均溫度之影響,而得玉蜀黍實際生產百分比與六月平均溫度之一級純相關係數($r_{12\cdot3}$ 及 $r_{12\cdot4}$);或摒除六月或八月平均溫度之影響,而得玉蜀黍實際生產百分比與七月平均溫度之一級純相關係數($r_{13\cdot2}$ 及 $r_{13\cdot4}$);或摒除六月或七月平均溫度之影響,而得玉蜀黍實際生產百分比與八月平均溫度之一級純相關係數($r_{14\cdot2}$ 及 $r_{14\cdot3}$);其數值均較 r_{12}, r_{13} 及 r_{14} 爲小.更若摒除七月及八月平均溫度之影響,而得玉蜀黍實際生產百分比與六月平均溫度之二級純相關係數($r_{12\cdot34}$);或摒除六月及八月平均溫度之影響,

而得玉蜀黍實際生產百分比與七月平均溫度之二級純相關係數($r_{13\cdot24}$);或摒除六月及七月平均溫度之影響,而得玉蜀黍實際生產百分比與八月平均溫度之二級純相關係數($r_{14\cdot23}$);其數值尤較$r_{12\cdot3}$,$r_{12\cdot4}$,$r_{13\cdot2}$,$r_{13\cdot4}$,$r_{14\cdot2}$及$r_{14\cdot3}$爲小.考其原因,蓋由六月之平均溫度與七月八月之平均溫度,七月之平均溫度與六月八月之平均溫度,及八月之平均溫度與六月七月之平均溫度,均有相當關係,且爲正相關,故各月溫度在零級相關中其地位較原有者爲重要,然此非眞情.故若摒除其他一個月或兩個月平均溫度之影響,而計其一級或二級純相關係數,其數值自當小於零級相關也.惟不論在零級,一級或二級相關係數中,玉蜀黍實際生產百分比與七月平均溫度之相關係數爲最高,蓋示玉蜀黍之生長,與七月溫度之高低,較有更密切之關係也.

(三)　純相關之迴歸方程

純相關係數僅示人將某種影響摒除後,純淨相關程度之大小,如欲根據已知各變量之數值,以推測另一變數極可能之數值,則非列迴歸方程式不可.茲特分別述之如下:

(1) 迴歸係數——純相關迴歸係數之核算,視計算純相關係數時數列之多寡而定.如數列有三(即一級純

相關),則迴歸係數之核算公式如下:

設 $b_{12\cdot3}$ 爲 X_1 對 X_2 摒除 X_3 影響之純迴歸係數.

$b_{13\cdot2}$ 爲 X_1 對 X_3 摒除 X_2 影響之純迴歸係數.

$r_{12\cdot3}$ 爲 X_1 對 X_2 摒除 X_3 影響之一級純相關係數.

$r_{13\cdot2}$ 爲 X_1 對 X_3 摒除 X_2 影響之一級純相關係數.

$s_{1\cdot23}$ 爲 X_1 對 X_2 及 X_3 之標準誤,等於

$$\sigma_1\sqrt{1-r^2_{12}}\ \sqrt{1-r^2_{13\cdot2}}.$$

$s_{2\cdot13}$ 爲 X_2 對 X_1 及 X_3 之標準誤,等於

$$\sigma_2\sqrt{1-r^2_{21}}\ \sqrt{1-r^2_{23\cdot1}}.$$

$s_{3\cdot12}$ 爲 X_3 對 X_1 及 X_2 之標準誤,等於

$$\sigma_3\sqrt{1-r^2_{31}}\ \sqrt{1-r^2_{32\cdot1}}.$$

$$b_{12\cdot3}=r_{12\cdot3}\times\frac{S_{1\cdot23}}{S_{2\cdot13}} \quad \text{(公式一〇〇)}$$

$$b_{13\cdot2}=r_{13\cdot2}\times\frac{S_{1\cdot32}}{S_{3\cdot12}} \quad \text{(公式一〇一)}$$

茲卽根據玉蜀黍實際生產百分比與各月平均溫度之一級純相關係數,核算各迴歸係數如下:

$N=33$ $\qquad$ $r_{12}=-0.4814$

$r_{13}=-0.6968$

$\Sigma d^2{}_1=39{,}223.60$

$r_{23}=+0.3737$

$\Sigma d^2{}_2=275.68$

$r_{12\cdot3}=-0.3322$

$\Sigma d^2{}_3=220.15$ $\qquad$ $r_{13\cdot2}=-0.6358$

$$r_{23\cdot1}=\frac{r_{23}-r_{12}r_{13}}{(1-r^2_{12})^{\frac{1}{2}}(1-r^2_{13})^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{0.3737-(-0.4814)\times(-0.6968)}{[1-(-0.4814)^2]^{\frac{1}{2}}\times[1-(-0.6968)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{0.3737-0.3354}{0.8765\times0.7171}$$

$$=\frac{0.0383}{0.6285}=+0.0609$$

$$\sigma_1=\sqrt{\frac{39{,}223.6}{33}}=\sqrt{1{,}188.593939}=34.476$$

$$\sigma_2=\sqrt{\frac{275.68}{33}}=\sqrt{8.353939}=2.890$$

$$\sigma_3=\sqrt{\frac{220.15}{33}}=\sqrt{6.671212}=2.583$$

$$s_{1\cdot23}=\sigma_1\sqrt{1-r^2_{12}}\ \sqrt{1-r^2_{13\cdot2}}$$

$$=34.476\times\sqrt{1-(-0.4814)^2}\times\sqrt{1-(-0.6358)^2}$$

$$=34.476\times0.8765\times0.7719=23.3254$$

$$s_{2\cdot13}=\sigma_2\sqrt{1-r^2_{21}}\ \sqrt{1-r^2_{23\cdot1}}$$

$$=2.890\times\sqrt{1-(-0.4814)^2}\times\sqrt{1-(0.0609)^2}$$

$$=2.890\times0.8765\times0.9981=2.5283$$

$$s_{3\cdot12}=\sigma_3\sqrt{1-r^2_{31}}\ \sqrt{1-r^2_{32\cdot1}}$$

$$=2.583\times\sqrt{1-(-0.6968)^2}\times\sqrt{1-(0.0609)^2}$$

$$=2.583\times0.7171\times0.9981=1.8493$$

應用公式一〇〇

$$b_{12\cdot3}=-0.3322\times\frac{23.3254}{2.5283}$$

$= -0.3322 \times 9.2257$

$= -3.0648$

應用公式一〇一

$$b_{13\cdot2} = -0.6358 \times \frac{23.3254}{1.8493}$$

$= -0.6358 \times 12.6131$

$= -8.0194$

如數列有四(卽二級純相關),則迴歸係數之核算公式如下:

設 $b_{12\cdot34}$ 爲 X_1 對 X_2 摒除 X_3 及 X_4 影響之純迴歸係數.

$b_{13\cdot24}$ 爲 X_1 對 X_3 摒除 X_2 及 X_4 影響之純迴歸係數.

$b_{14\cdot23}$ 爲 X_1 對 X_4 摒除 X_2 及 X_3 影響之純迴歸係數.

$r_{12\cdot34}$ 爲 X_1 對 X_2 摒除 X_3 及 X_4 影響之二級純相關係數.

$r_{13\cdot24}$ 爲 X_1 對 X_3 摒除 X_2 及 X_4 影響之二級純相關係數.

$r_{14\cdot23}$ 爲 X_1 對 X_4 摒除 X_2 及 X_3 影響之二級純相關係數.

$s_{1\cdot234}$ 爲 X_1 對 X_2,X_3 及 X_4 之標準誤,等於

$$\sigma_1\sqrt{1-r^2_{12}}\ \sqrt{1-r^2_{13\cdot2}}\ \sqrt{1-r^2_{14\cdot23}}.$$

$s_{2\cdot134}$ 爲 X_2 對 X_1, X_3 及 X_4 之標準誤,等於

$$\sigma_2\sqrt{1-r^2_{23}}\ \sqrt{1-r^2_{24\cdot3}}\ \sqrt{1-r^2_{12\cdot24}}.$$

$s_{3\cdot124}$ 爲 X_3 對 X_1, X_2 及 X_4 之標準誤,等於

$$\sigma_3\sqrt{1-r^2_{23}}\ \sqrt{1-r^2_{34\cdot2}}\ \sqrt{1-r^2_{13\cdot24}}.$$

$s_{4\cdot123}$ 爲 X_4 對 X_1, X_2 及 X_3 之標準誤,等於

$$\sigma_4\sqrt{1-r^2_{34}}\ \sqrt{1-r^2_{24\cdot3}}\ \sqrt{1-r^2_{14\cdot23}}.$$

$$\boldsymbol{b}_{12\cdot34}=\boldsymbol{r}_{12\cdot34}\times\frac{\boldsymbol{S}_{1\cdot234}}{\boldsymbol{S}_{2\cdot134}}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式一〇二})$$

$$\boldsymbol{b}_{13\cdot24}=\boldsymbol{r}_{13\cdot24}\times\frac{\boldsymbol{S}_{1\cdot324}}{\boldsymbol{S}_{3\cdot124}}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式一〇三})$$

$$\boldsymbol{b}_{14\cdot23}=\boldsymbol{r}_{14\cdot23}\times\frac{\boldsymbol{S}_{1\cdot423}}{\boldsymbol{S}_{4\cdot123}}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式一〇四})$$

如數列爲 n 個(卽 n 級純相關),則迴歸係數之核算公式如下:

設 $b_{12\cdot345\cdots\cdots n}$ 爲 X_1 對 X_2 摒除 $X_3, X_4, X_5\cdots\cdots X_n$ 影響之純迴歸係數.

$r_{12\cdot345\cdots\cdots n}$ 爲 X_1 對 X_2 摒除 $X_3, X_4, X_5\cdots\cdots X_n$ 影響之 n 級純相關係數.

$s_{1\cdot2345\cdots\cdots n}$ 爲 X_1 對 $X_2, X_3, X_4, X_5\cdots\cdots X_n$ 之標準誤,等於

$$\sigma_1\sqrt{1-r^2_{12}}\ \sqrt{1-r^2_{13\cdot2}}\ \sqrt{1-r^2_{14\cdot23}}$$
$$\sqrt{1-r^2_{15\cdot234}}\cdots\cdots\cdots\ \sqrt{1-r^2_{1n\cdot2345\cdots\cdots(n-1)}}$$

$s_{2\cdot1345\cdots\cdots n}$ 爲 X_2 對 $X_1, X_3, X_4, X_5\cdots\cdots X_n$ 之標準誤,等於

$$\sigma_2\sqrt{1-r^2_{23}}\ \sqrt{1-r^2_{24\cdot3}}\ \sqrt{1-r^2_{25\cdot34}}$$

$$\sqrt{1-r^2_{26\cdot345}}\cdots\cdots\cdots\ \sqrt{1-r^2_{2n\cdot345\cdots\cdots\cdots(n-1)}}$$

$$b_{12\cdot345\cdots\cdots n}=r_{12\cdot345\cdots\cdots n}\times\frac{S_{1\cdot2345\cdots\cdots n}}{S_{2\cdot1345\cdots\cdots n}}\text{(公式一〇五)}$$

茲卽根據玉蜀黍實際生產百分比與各月平均溫度之二級純相關,核算各迴歸係數如下:

$\sigma_1=34.476$	$r_{13\cdot2}=-0.6358$
$\sigma_2=2.890$	$r_{24\cdot3}=+0.2884$
$\sigma_3=2.583$	$r_{34\cdot2}=+0.1740$
$\sigma_4=2.791$	$r_{12\cdot34}=-0.2412$
$r_{12}=-0.4814$	$r_{13\cdot24}=-0.6265$
$r_{23}=+0.3737$	$r_{14\cdot23}=-0.3681$
$r_{34}=+0.2862$	

$$s_{1\cdot234}=\sigma_1\sqrt{1-r^2_{12}}\ \sqrt{1-r^2_{13\cdot2}}\ \sqrt{1-r^2_{14\cdot23}}$$

$$=34.476\times\sqrt{1-(-0.4814)^2}\times\sqrt{1-(-0.6358)^2}$$

$$\times\sqrt{1-(-0.3681)^2}$$

$$=34.476\times0.8765\times0.7719\times0.9298=21.6880$$

$$s_{2\cdot134}=\sigma_2\sqrt{1-r^2_{23}}\ \sqrt{1-r^2_{24\cdot3}}\ \sqrt{1-r^2_{12\cdot34}}$$

$$=2.890\times\sqrt{1-(0.3737)^2}\times\sqrt{1-(0.2884)^2}$$

$$\times\sqrt{1-(-0.2412)^2}$$

$$=2.890\times0.9275\times0.9575\times0.9705=2.4908$$

$$s_{3\cdot124}=\sigma^3\sqrt{1-r^2_{23}}\ \sqrt{1-r^2_{34\cdot2}}\ \sqrt{1-r^2_{13\cdot24}}$$

$$=2.583\times\sqrt{1-(0.3737)^2}\times\sqrt{1-(0.1740)^2}$$

$$\times\sqrt{1-(-0.6265)^2}$$

$$=2.583\times0.9275\times0.9847\times0.7797=1.8394$$

$$s_{4\cdot123}=\sigma_4\sqrt{1-r^2_{34}}\ \sqrt{1-r^2_{24\cdot3}}\ \sqrt{1-r^2_{14\cdot23}}$$

$$=2.791\times\sqrt{1-(0.2862)^2}\times\sqrt{1-(0.2884)^2}$$

$$\times\sqrt{1-(-0.3681)^2}$$

$$=2.791\times0.9582\times0.9575\times0.9298=2.3809$$

應用公式一〇二

$$b_{12\cdot34}=-0.2412\times\frac{21.6880}{2.4908}$$

$$=-0.2412\times8.7072$$

$$=-2.1001$$

應用公式一〇三

$$b_{13\cdot24}=-0.6265\times\frac{21.6880}{1.8394}$$

$$=-0.6265\times11.7908$$

$$=-7.3869$$

應用公式一〇四

$$b_{14\cdot23}=-0.3681\times\frac{21.6880}{2.3809}$$

$$=-0.3681\times9.1092$$

$$=-3.3531$$

(2)迴歸方程式——純相關之迴歸方程式,亦視數列之多寡而定:

設$m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 \cdots\cdots m_n$爲$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \cdots\cdots X_n$數列之各變量.

$M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 \cdots\cdots M_n$ 爲 $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \cdots\cdots X_n$ 數列之各算術平均數.

a 爲迴歸方程式中之常數(Constant).

d_1 爲X_1數列中各變量與其算術平均數之差,等於 m_1-M_1.

d_2 爲X_2數列中各變量與其算術平均數之差,等於 m_2-M_2.

d_3 爲X_3數列中各變量與其算術平均數之差,等於 m_3-M_3.

d_4 爲X_4數列中各變量與其算術平均數之差,等於 m_4-M_4.

d_5 爲X_5數列中各變量與其算術平均數之差,等於 m_5-M_5.

d_n 爲X_n數列中各變量與其算術平均數之差,等於 m_n-M_n.

$b_{12\cdot3}$ 爲 X_1 對 X_2 摒除 X_3 影響之純迴歸係數.

$b_{13\cdot2}$ 爲 X_1 對 X_3 摒除 X_2 影響之純迴歸係數.

$b_{12\cdot34}$ 爲 X_1 對 X_2 摒除 X_3 及X_4影響之純迴歸係數.

$b_{13\cdot24}$ 爲 X_1 對 X_3 摒除 X_2 及X_4影響之純迴歸係數.

$b_{14\cdot23}$ 爲 X_1 對 X_4 摒除 X_2 及X_3影響之純迴歸

係數.

$b_{12\cdot345\cdots n}$　爲 X_1 對 X_2 摒除 $X_3, X_4, X_5\cdots X_n$ 影響之純迴歸係數.

$b_{13\cdot245\cdots n}$　爲 X_1 對 X_3 摒除 $X_2, X_4, X_5\cdots X_n$ 影響之純迴歸係數.

$b_{14\cdot235\cdots n}$　爲 X_1 對 X_4 摒除 $X_2, X_3, X_5\cdots X_n$ 影響之純迴歸係數.

$b_{15\cdot2346\cdots n}$　爲 X_1 對 X_5 摒除 $X_2, X_3, X_4, X_6\cdots\cdots X_n$ 影響之純迴歸係數.

$b_{1n\cdot2345\cdots(n-1)}$ 爲 X_1 對 X_n 摒除 $X_2, X_3, X_4, X_5\cdots\cdots X_{(n-1)}$ 影響之純迴歸係數.

則一級純相關之迴歸方程式如下:

$$\boldsymbol{d_1 = b_{12\cdot3}d_2 + b_{13\cdot2}d_3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式一〇六})$$

惟 $d_1 = m_1 - M_1$

$d_2 = m_2 - M_2$

$d_3 = m_3 - M_3$

故 $d_1 = b_{12\cdot3}d_2 + b_{13\cdot2}d_3$

$$(m_1 - M_1) = b_{12\cdot3}(m_2 - M_2) + b_{13\cdot2}(m_3 - M_3)$$

$$m_1 = M_1 + b_{12\cdot3}(m_2 - M_2) + b_{13\cdot2}(m_3 - M_3)$$

$$= M_1 + b_{12\cdot3}m_2 - b_{12\cdot3}M_2 + b_{13\cdot2}m_3 - b_{13\cdot2}M_3$$

$$= b_{12\cdot3}m_2 + b_{13\cdot2}m_3 + M_1 - b_{12\cdot3}M_2 - b_{13\cdot2}M_3$$

設 $a = M_1 - b_{12\cdot3}M_2 - b_{13\cdot2}M_3$(爲本方程式中之常數

Constant)

故 $m_1=b_{12\cdot3}m_2+b_{13\cdot2}m_3+a$…………………(公式一〇七)

茲即根據玉蜀黍實際生產百分比與六月及七月平均溫度之一級純迴歸係數,核計迴歸方程式如下:

$M_1=99.94$　　　$b_{12\cdot3}=-3.0648$

$M_2=73.54$　　　$b_{13\cdot2}=-8.0194$

$M_3=78.23$

$$a=99.94-(-3.0648)\times73.54-(-8.0194)\times78.23$$

$$=99.94-(-225.3854)-(-627.3577)=952.6831$$

$$m_1=(-3.0648)m_2+(-8.0194)m_3+952.6831$$

設以一九二〇年為例,六月之平均溫度為72.8,七月之平均溫度為77.6,推測該年玉蜀黍之實際生產百分比為:

應用公式一〇七

$$m_1=(-3.0648)\times72.8+(-8.0194)\times77.6+952.6831$$

$$=(-223.1174)+(-622.3054)+952.6831$$

$$=107.2603$$

二級純相關之迴歸方程式如下:

$d_1=b_{12\cdot34}d_2+b_{13\cdot24}d_3+b_{14\cdot23}d_4$………(公式一〇八)

惟 $d_1=m_1-M_1$

$d_2=m_2-M_2$

$d_3=m_3-M_3$

$$d_4 = m_4 - M_4$$

故 $d_1 = b_{12\cdot34}d_2 + b_{13\cdot24}d_3 + b_{14\cdot23}d_4$

$$(m_1 - M_1) = b_{12\cdot34}(m_2 - M_2) + b_{13\cdot24}(m_3 - M_3) + b_{14\cdot23}(m_4 - M_4)$$

$$\begin{aligned} m_1 &= M_1 + b_{12\cdot34}m_2 - b_{12\cdot34}M_2 + b_{13\cdot24}m_3 - b_{13\cdot24}M_3 + b_{14\cdot23}m_4 - b_{14\cdot23}M_4 \\ &= b_{12\cdot34}m_2 + b_{13\cdot24}m_3 + b_{14\cdot23}m_4 + M_1 - b_{12\cdot34}M_2 - b_{13\cdot24}M_3 - b_{14\cdot23}M_4 \end{aligned}$$

設 $a = M_1 - b_{12\cdot34}M_2 - b_{13\cdot24}M_3 - b_{14\cdot23}M_4$(爲本方程式中之常數 Constant)

故 $\boldsymbol{m_1 = b_{12\cdot34}m_2 + b_{13\cdot24}m_3 + b_{14\cdot23}m_4 + a}$ ……………………(公式一〇九)

茲即根據玉蜀黍實際生產百分比與六月,七月及八月平均溫度之二級純迴歸係數,核計迴歸方程式如下:

$M_1 = 99.94$　　　　$b_{12\cdot34} = -2.1001$

$M_2 = 73.54$　　　　$b_{13\cdot24} = -7.3869$

$M_3 = 78.23$　　　　$b_{14\cdot23} = -3.3531$

$M_4 = 77.39$

$$\begin{aligned} a &= 99.94 - (-2.1001)\times 73.54 - (-7.3869)\times 78.23 - (-3.3531)\times 77.39 \\ &= 99.94 - (-154.4414) - (-577.8772) \end{aligned}$$

$$-(-259.4964)=1{,}091.7550$$

$$m_1=(-2.1001)m_2+(-7.3869)m_3+(-3.3531)m_4$$
$$+1{,}091.7550$$

設仍以一九二〇年爲例,六月之平均溫度爲 72.8, 七月之平均溫度爲 77.6, 八月之平均溫度爲 72.9, 推測該年玉蜀黍之實際生產百分比爲:

應用公式一〇九

$$m_1=(-2.1001)\times 72.8+(-7.3869)\times 77.6+(-3.3531)$$
$$\times 72.9+1{,}091.7550$$
$$=(-152.8873)+(-573.2234)+(-244.4410)$$
$$+1{,}091.7550$$
$$=121.2033$$

至於 n 級純相關之迴歸方程式則如下:

$$\boldsymbol{d}_1=\boldsymbol{b}_{12\cdot 345\cdots n}\boldsymbol{d}_2+\boldsymbol{b}_{13\cdot 245\cdots n}\boldsymbol{d}_3+\boldsymbol{b}_{14\cdot 235\cdots n}\boldsymbol{d}_4$$
$$+\boldsymbol{b}_{15\cdot 234\cdots n}\boldsymbol{d}_5+\cdots+\boldsymbol{b}_{1n\cdot 2345\cdots(n-1)}\boldsymbol{d}_n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式一一〇)}$$

$$\boldsymbol{m}_1=\boldsymbol{b}_{12\cdot 345\cdots n}\boldsymbol{m}_2+\boldsymbol{b}_{13\cdot 245\cdots n}\boldsymbol{m}_3+\boldsymbol{b}_{14\cdot 235\cdots n}\boldsymbol{m}_4$$
$$+\boldsymbol{b}_{15\cdot 234\cdots n}\boldsymbol{m}_5+\cdots+\boldsymbol{b}_{1n\cdot 2345\cdots(n-1)}\boldsymbol{m}_n+\boldsymbol{a}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式一一一)}$$

第七節 複相關

複相關者,乃一附變數或品質與多種自變數或品質之

總合關係.例以小麥收穫量爲附變數,我人所欲求者乃爲小麥收穫量與所施肥料量,雨量及溫度等總合之關係,所得結果,卽所謂複相關是也.複相關係數之大小,常視附變數之標準差與其推測之標準誤數值之關係而定,其公式如下:

設$R_{1\cdot 2345\cdots n}$爲n種變數之複相關係數.

$S_{1\cdot 2345\cdots n}$爲X_1對$X_2, X_3, X_4, X_5\cdots X_n$之標準誤,等於

$$\sigma_1\sqrt{1-r^2_{12}}\ \sqrt{1-r^2_{13\cdot 2}}\ \sqrt{1-r^2_{14\cdot 23}}$$
$$\sqrt{1-r^2_{15\cdot 234}}\cdots\cdots\cdots\cdots\ \sqrt{1-r^2_{1n\cdot 2345\cdots(n-1)}}.$$

σ_1 爲第一數列(X_1)之標準差.

$$R_{1\cdot 2345\cdots\cdots n}=\sqrt{1-\frac{S^2_{1\cdot 2345\cdots n}}{\sigma^2_1}}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式一一二甲)}$$

因$S_{1\cdot 2345\cdots n}=\sigma_1\sqrt{1-r^2_{12}}\ \sqrt{1-r^2_{13\cdot 2}}\ \sqrt{1-r^2_{14\cdot 23}}$

$$\sqrt{1-r^2_{15\cdot 234}}\cdots\cdots\cdots\cdots\ \sqrt{1-r^2_{1n\cdot 2345\cdots(n-1)}}$$

故$R_{1\cdot 2345\cdots n}=\sqrt{1-\dfrac{\sigma_1\sqrt{1-r^2_{12}}\ \sqrt{1-r^2_{13\cdot 2}}\ \sqrt{1-r^2_{14\cdot 23}}\ \sqrt{1-r^2_{15\cdot 234}}\cdots\sqrt{1-r^2_{1n\cdot 2345\cdots(n-1)}}}{\sigma_1}}$

$$R_{1\cdot 2345\cdots\cdots n}=\sqrt{1-\{[1-r^2_{12}][1-r^2_{13\cdot 2}][1-r^2_{14\cdot 23}][1-r^2_{15\cdot 234}]\cdots[1-r^2_{1n\cdot 2345\cdots\cdots(n-1)}]\}}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$(公式一一二乙)

玆卽根據表九十五求得玉蜀黍實際生產百分比與各月平均溫度之各級純相關及標準誤等如下:

$\sigma_1 = 34.476$ $r_{13\cdot 2} = -0.6358$

$s_{1\cdot 23} = 23.3254$ $r_{13\cdot 4} = -0.6666$

$s_{1\cdot234}=21.6880$ $\quad r_{14\cdot2}=-0.3904$

$r_{12}=-0.4814$ $\quad r_{14\cdot3}=-0.4282$

$r_{13}=-0.6968$ $\quad r_{12\cdot34}=-0.2412$

$r_{14}=-0.4937$ $\quad r_{13\cdot24}=-0.6265$

$r_{12\cdot3}=-0.3322$ $\quad r_{14\cdot23}=-0.3681$

$r_{12\cdot4}=-0.3727$

(一) 玉蜀黍實際生產百分比與六月及七月平均溫度之複相關係數如下:

$$R_{1\cdot23}=\sqrt{1-\frac{S^2_{1\cdot23}}{6^2_1}}\text{..................}(\text{公式一一三甲})$$

$$=\sqrt{1-\frac{(23.3254)^2}{(34.476)^2}}=\sqrt{1-\frac{544.0743}{1188.5946}}$$

$$=\sqrt{1-0.45774590}=\sqrt{0.54225410}$$

$$=0.7364$$

或 $$R_{1\cdot23}=\sqrt{1-\{[1-r^2_{12}][1-r^2_{13\cdot2}]\}}\text{.........}(\text{公式一一三乙})$$

$$=\sqrt{1-\{[1-(-0.4814)^2]\times[1-(-0.6358)^2]\}}$$

$$=\sqrt{1-[(1-0.2317)\times(1-0.4042)]}$$

$$=\sqrt{1-0.7683\times0.5958}$$

$$=\sqrt{0.54224686}$$

$$=0.7364$$

惟 $R_{1\cdot23}=R_{1\cdot32}$

故 $$R_{1\cdot23}=\sqrt{1-\{[1-r^2_{13}][1-r^2_{12\cdot3}]\}}\text{.........}(\text{公式一一三丙})$$

$$=\sqrt{1-\{[1-(-0.6968)^2]\times[1-(-0.3322)^2]\}}$$

$$=\sqrt{1-[(1-0.4855)\times(1-0.1104)]}$$

$$=\sqrt{1-0.5145\times0.8896}$$

$$=\sqrt{0.54230080}$$

$$=0.7364$$

(二) 玉蜀黍實際生產百分比與六月,七月及八月平均溫度之複相關係數如下:

$$R_{1\cdot234}=\sqrt{1-\frac{S^2_{1\cdot234}}{\sigma^2_1}}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式一一四甲})$$

$$=\sqrt{1-\frac{(21.6880)^2}{(34.476)^2}}=\sqrt{1-\frac{470.3693}{1188.5946}}$$

$$=\sqrt{1-0.39573569}=\sqrt{0.60426431}$$

$$=0.7773$$

或 $$R_{1\cdot234}=\sqrt{1-\{[1-r^2_{12}][1-r^2_{13\cdot2}][1-r^2_{14\cdot23}]\}}\cdots\cdots\cdots$$

(公式一一四乙)

$$=\sqrt{1-\{[1-(-0.4814)^2]\times[1-(-0.6358)^2]\times[1-(-0.3681)^2]\}}$$

$$=\sqrt{1-[(1-0.2317)\times(1-0.4042)\times(1-0.1355)]}$$

$$=\sqrt{1-0.7683\times0.5958\times0.8645}$$

$$=\sqrt{0.60427512}$$

$$=0.7774$$

惟 $R_{1\cdot234}=R_{1\cdot243}=R_{1\cdot324}=R_{1\cdot342}=R_{1\cdot423}=R_{1\cdot432}$,故 $R_{1\cdot234}$ 亦可以下列諸公式求之:

$$R_{1\cdot234}=\sqrt{1-\{[1-r^2_{12}][1-r^2_{14\cdot2}][1-r^2_{13\cdot24}]\}}\cdots\cdots\cdots$$

(公式一一四丙)

$$=\sqrt{1-\{[1-(-0.4814)^2]\times[1-(-0.3904)^2]\times[1-(-0.6265)^2]\}}$$

$$=\sqrt{1-[(1-0.2317)\times(1-0.1524)\times(1-0.3925)]}$$

$$=\sqrt{1-0.7683\times0.8476\times0.6075}$$

$$=\sqrt{0.60438992}$$

$$=0.7774$$

$$R_{1\cdot234}=\sqrt{1-\{[1-r^2_{13}][1-r^2_{12\cdot3}][1-r^2_{14\cdot23}]\}}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(公式一一四丁)

$$=\sqrt{1-\{[1-(-0.6968)^2]\times[1-(-0.3322)^2]\times[1-(-0.3681)^2]\}}$$

$$=\sqrt{1-[(1-0.4855)\times(1-0.1104)\times(1-0.1355)]}$$

$$=\sqrt{1-0.5145\times0.8896\times0.8645}$$

$$=\sqrt{0.60431835}$$

$$=0.7774$$

$$R_{1\cdot234}=\sqrt{1-\{[1-r^2_{13}][1-r^2_{14\cdot3}][1-r^2_{12\cdot34}]\}}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(公式一一四戊)

$$=\sqrt{1-\{[1-(-0.6968)^2]\times[1-(-0.4282)^2]\times[1-(-0.2412)^2]\}}$$

$$=\sqrt{1-[(1-0.4855)\times(1-0.1834)\times(1-0.0582)]}$$

$$=\sqrt{1-0.5145\times0.8166\times0.9418}$$

$$=\sqrt{0.60431215}$$

$$=0.7774$$

$$R_{1\cdot234}=\sqrt{1-\{[1-r^2_{14}][1-r^2_{12\cdot4}][1-r^2_{13\cdot24}]\}}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(公式一一四己)

$$=\sqrt{1-\{[1-(-0.4937)^2]\times[1-(-0.3727)^2]\times[1-(-0.6265)^2]\}}$$

$=\sqrt{1-[(1-0.2437)\times(1-0.1389)\times(1-0.3925)]}$

$=\sqrt{1-0.7563\times0.8611\times0.6075}$

$=\sqrt{0.60436562}$

$=0.7774$

$$R_{1\cdot234}=\sqrt{1-\{[1-r^2_{14}][1-r^2_{13\cdot4}][1-r^2_{12\cdot34}]\}}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

（公式一一四庚）

$=\sqrt{1-\{[1-(-0.4937)^2]\times[1-(-0.6666)^2]\times[1-(-0.2412)^2]\}}$

$=\sqrt{1-[(1-0.2437)\times(1-0.4444)\times(1-0.0582)]}$

$=\sqrt{1-0.7563\times0.5556\times0.9418}$

$=\sqrt{0.60425564}$

$=0.7773$

綜觀上述,可知複相關係數乃由附變數與各自變數之零級,一級及二級至 n 級純相關係數中核算.各級純相關有時爲正,有時爲負,其總合之關係,自難與以確當之符號,故複相關係數,常不冠正負號.惟各附變數與自變數之關係均爲正或負時,則複相關係數之前,亦不妨冠以正號或負號.本例玉蜀黍實際生產百分比與六月七月平均溫度之零級及一級純相關,均爲負,故複相關係數,當爲-0.7364.至於玉蜀黍實際生產百分比與六月,七月,八月之零級及二級純相關,亦均爲負,故複相關係數,當爲-0.7774.

本章應用公式

（公式七十六）直線性之試驗公式

$N\cdot(\eta^2-r^2)<0.71086$

（公式七十七）以 X 數列爲自變數，Y 數列爲附變數，求相關比（普通法）

$$\eta_{yx}=\sqrt{1-\frac{\sigma^2{}_{ay}}{\sigma^2{}_y}}$$

（公式七十八）以 Y 數列爲自變數，X 數列爲附變數，求相關比（普通法）

$$\eta_{xy}=\sqrt{1-\frac{\sigma^2{}_{ax}}{\sigma^2{}_x}}$$

（公式七十九）以 X 數列爲自變數，Y 數列爲附變數，求相關比（簡捷法）

$$\eta_{yx}=\frac{\sigma_{my}}{\sigma_y}$$

（公式八十）以 Y 數列爲自變數，X 數列爲附變數，求相關比（簡捷法）

$$\eta_{xy}=\frac{\sigma_{mx}}{\sigma_x}$$

（公式八十一）以 X 數列爲自變數，Y 數列爲附變數，求相關比（相關表核算法）

$$\eta_{yx}=\frac{\sqrt{\dfrac{\Sigma\left[\dfrac{(\Sigma' f_y d''_y)^2}{f_x}\right]}{N}-c^2{}_y}}{\sqrt{\dfrac{\Sigma f_y d''^2{}_y}{N}-c^2{}_y}}$$

（公式八十二）以 Y 數列爲自變數，X 數列爲附變數，求相關比（相關表核算法）

$$\eta_{xy}=\frac{\sqrt{\dfrac{\Sigma\left[\dfrac{(\Sigma' f_x d''_x)^2}{f_y}\right]}{N}-c^2_x}}{\sqrt{\dfrac{\Sigma f_x d''^2_x}{N}-c^2_x}}$$

（公式八十三）以 X 數列爲自變數, Y 數列爲附變數,求校正相關比

$$\eta'_{yx}=\sqrt{\frac{\eta^2_{yx}-\dfrac{K_y-3}{N}}{1-\dfrac{K_y-3}{N}}}$$

（公式八十四）以 Y 數列爲自變數, X 數列爲附變數,求校正相關比

$$\eta'_{xy}=\sqrt{\frac{\eta^2_{xy}-\dfrac{K_x-3}{N}}{1-\dfrac{K_x-3}{N}}}$$

（公式八十五）等級相關係數（等級差異法）

$$\rho=1-\frac{6\Sigma(V_x-V_y)^2}{N(N^2-1)}$$

（公式八十六）用等級差異法核計之等級相關係數中求直線相關係數

$$r=2\ sin\left(\frac{\pi}{6}\rho\right)$$

（公式八十七）等級相關係數（簡捷法）

$$R=1-\frac{6\Sigma G}{N^2-1}$$

（公式八十八）用簡捷法核計之等級相關係數中求直線相關係數

$$r=2\cos\frac{\pi}{3}(1-R)-1$$

（公式八十九）均方相關係數（普通法）

$$C'=\sqrt{\frac{S-N}{S}}$$

（公式九十）均方相關係數（簡捷法）

$$C'=\sqrt{\frac{P-1}{P}}$$

（公式九十一）相應相關係數

$$R'=\pm\sqrt{\pm\frac{2N_L-N}{N}}$$

（公式九十二）異號相關係數

$$U'=\frac{N_u+\frac{N_o}{2}\left(\frac{N_u}{N_u+N_L}+\frac{1}{2}\right)}{N}$$

（公式九十三）由異號相關係數中求直線相關係數

$$r=\cos(\pi U')$$

（公式九十四）X_1對X_2摒除X_3影響之一級純相關係數

$$r_{12\cdot3}=\frac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{(1-r^2_{13})^{\frac{1}{2}}(1-r^2_{23})^{\frac{1}{2}}}$$

（公式九十五）X_1對X_3摒除X_2影響之一級純相關係數

$$r_{13\cdot2}=\frac{r_{13}-r_{12}r_{32}}{(1-r^2_{12})^{\frac{1}{2}}(1-r^2_{32})^{\frac{1}{2}}}$$

（公式九十六）X_1對X_2摒除X_3及X_4影響之二級純相關係數

$$r_{12\cdot34}=\frac{r_{12\cdot3}-r_{14\cdot3}r_{24\cdot3}}{(1-r^2_{14\cdot3})^{\frac{1}{2}}(1-r^2_{24\cdot3})^{\frac{1}{2}}}$$

（公式九十七）X_1對X_3摒除X_2及X_4影響之二級純相關係數

$$r_{13\cdot24}=\frac{r_{13\cdot2}-r_{14\cdot2}r_{34\cdot2}}{(1-r^2_{14\cdot2})^{\frac{1}{2}}(1-r^2_{34\cdot2})^{\frac{1}{2}}}$$

（公式九十八）X_1對X_4摒除X_2及X_3影響之二級純相關係數

$$r_{14\cdot23}=\frac{r_{14\cdot2}-r_{13\cdot2}r_{43\cdot2}}{(1-r^2_{13\cdot2})^{\frac{1}{2}}(1-r^2_{43\cdot2})^{\frac{1}{2}}}$$

（公式九十九）X_1對X_2摒除$X_3, X_4, X_5\cdots\cdots X_n$影響之$n$級純相關係數

$$r_{12\cdot345\cdots n}\times\frac{r_{12\cdot345\cdots(n-1)}-r_{1n\cdot345\cdots(n-1)}r_{2n\cdot345\cdots(n-1)}}{[1-r^2_{1n\cdot345\cdots(n-1)}]^{\frac{1}{2}}[1-r^2_{2n\cdot345\cdots(n-1)}]^{\frac{1}{2}}}$$

（公式一〇〇）X_1對X_2摒除X_3影響之純迴歸係數

$$b_{12\cdot3}=r_{12\cdot3}\times\frac{S_{1\cdot23}}{S_{2\cdot13}}$$

（公式一〇一）X_1對X_3摒除X_2影響之純迴歸係數

$$b_{13\cdot2}=r_{13\cdot2}\times\frac{S_{1\cdot32}}{S_{3\cdot12}}$$

（公式一〇二）X_1對X_2摒除X_3及X_4影響之純迴歸係數

$$b_{12\cdot34}=r_{12\cdot34}\times\frac{S_{1\cdot234}}{S_{2\cdot134}}$$

（公式一〇三）X_1對X_3摒除X_2及X_4影響之純迴歸係數

$$b_{13\cdot24}=r_{13\cdot24}\times\frac{S_{1\cdot324}}{S_{3\cdot124}}$$

（公式一〇四）X_1對X_4摒除X_2及X_3影響之純迴歸係數

$$b_{14\cdot23}=r_{14\cdot23}\times\frac{S_{1\cdot423}}{S_{4\cdot123}}$$

（公式一〇五）X_1對X_2摒除$X_3, X_4, X_5 \cdots\cdots X_n$影響之純迴歸係數

$$b_{12\cdot345\cdots n}=r_{12\cdot345\cdots n}\times\frac{S_{1\cdot2345\cdots n}}{S_{2\cdot1345\cdots n}}$$

（公式一〇六）一級純相關之迴歸方程式

$$d_1=b_{12\cdot3}d_2+b_{13\cdot2}d_3$$

（公式一〇七）一級純相關之迴歸方程式

$$m_1=b_{12\cdot3}m_2+b_{13\cdot2}m_3+a$$

（公式一〇八）二級純相關之迴歸方程式

$$d_1=b_{12\cdot34}d_2+b_{13\cdot24}d_3+b_{14\cdot23}d_4$$

（公式一〇九）二級純相關之迴歸方程式

$$m_1=b_{12\cdot34}m_2+b_{13\cdot24}m_3+b_{14\cdot23}m_4+a$$

（公式一一〇）n級純相關之迴歸方程式

$$d_1=b_{12\cdot345\cdots n}d_2+b_{13\cdot245\cdots n}d_3+b_{14\cdot235\cdots n}d_4+b_{15\cdot234\cdots n}d_5+\cdots\cdots+b_{1n\cdot2345\cdots(n-1)}d_n$$

（公式一一一）n級純相關之迴歸方程式

$$m_1=b_{12\cdot345\cdots n}m_2+b_{13\cdot245\cdots n}m_3+b_{14\cdot235\cdots n}m_4+b_{15\cdot234\cdots n}m_5+\cdots\cdots+b_{1n\cdot2345\cdots(n-1)}m_n+a$$

（公式一一二甲）n種變數之複相關係數（由標準誤及標準差中核算）

$$R_{1\cdot2345\cdots n}=\sqrt{1-\frac{S^2{}_{1\cdot2345\cdots n}}{\sigma^2{}_1}}$$

（公式一一二乙）n種變數之複相關係數（由n級純相

關係數中核算）

$$R_{1\cdot 2345\cdots n}=\sqrt{1-\{[1-r^2_{12}][1-r^2_{13\cdot 2}][1-r^2_{14\cdot 23}][1-r^2_{15\cdot 234}]\cdots[1-r^2_{1n\cdot 2345\cdots(n-1)}]\}}$$

（公式一一三甲）三種變數之複相關係數（由標準誤及標準差中核算）

$$R_{1\cdot 23}=\sqrt{1-\frac{S^2_{1\cdot 23}}{\sigma^2_1}}$$

（公式一一三乙）三種變數之複相關係數（由一級純相關係數中核算）

$$R_{1\cdot 23}=\sqrt{1-\{[1-r^2_{12}][1-r^2_{13\cdot 2}]\}}$$

（公式一一三丙）三種變數之複相關係數（由一級純相關係數中核算）

$$R_{1\cdot 23}=\sqrt{1-\{[1-r^2_{13}][1-r^2_{12\cdot 3}]\}}$$

（公式一一四甲）四種變數之複相關係數（由標準誤及標準差中核算）

$$R_{1\cdot 234}=\sqrt{1-\frac{S^2_{1\cdot 234}}{\sigma^2_1}}$$

（公式一一四乙）四種變數之複相關係數（由二級純相關係數中核算）

$$R_{1\cdot 234}=\sqrt{1-\{[1-r^2_{12}][1-r^2_{13\cdot 2}][1-r^2_{14\cdot 23}]\}}$$

（公式一一四丙）四種變數之複相關係數（由二級純相關係數中核算）

$$R_{1\cdot 234}=\sqrt{1-\{[1-r^2_{12}][1-r^2_{14\cdot 2}][1-r^2_{13\cdot 24}]\}}$$

（公式一一四丁）四種變數之複相關係數（由二級純相關係數中核算）

$$R_{1\cdot234}=\sqrt{1-\{[1-r^2_{13}][1-r^2_{12\cdot3}][1-r^2_{14\cdot23}]\}}$$

（公式一一四戊）四種變數之複相關係數（由二級純相關係數中核算）

$$R_{1\cdot234}=\sqrt{1-\{[1-r^2_{13}][1-r^2_{14\cdot3}][1-r^2_{12\cdot34}]\}}$$

（公式一一四己）四種變數之複相關係數（由二級純相關係數中核算）

$$R_{1\cdot234}=\sqrt{1-\{[1-r^2_{14}][1-r^2_{12\cdot4}][1-r^2_{13\cdot24}]\}}$$

（公式一一四庚）四種變數之複相關係數（由二級純相關係數中核算）

$$R_{1\cdot234}=\sqrt{1-\{[1-r^2_{14}][1-r^2_{13\cdot4}][1-r^2_{12\cdot34}]\}}$$

問題

1. 何謂非直線相關?其測定之方法有幾?試申述之。
2. 試略述直線相關與非直線相關之辨別法。
3. 用簡捷法求相關比之步驟有幾?試略述之。
4. 在相關表中核算相關比之步驟如何?試略述之。
5. 何謂等級相關?求等級相關之方法有幾?試略述其核算之程序。
6. 中級法與弧級法有何區別?試舉例明之。
7. 試述均方相關之意義及其測定之方法。
8. 在空間及時間數列中求相應相關之方法各如何?
9. 試述相應相關與異號相關之異同。

10. 試述純相關之意義及其效用。

11. 核算一級及二級純相關之程序如何?試舉例述之。

12. 何謂迴歸方程?求一級及二級純相關迴歸方程之步驟如何?

13. 試述複相關之意義及其核算法。

14. 何謂「自變數」,「附變數」,「純迴歸係數」,「簡相關」?試申述之。

習題二十五

某銀行行員任職年數及月俸分配表

每月俸給(Y)(單位元)	任職年數(X)										總計
分組	0.0—0.9	1.0—1.9	2.0—2.9	3.0—3.9	4.0—4.9	5.0—5.9	6.0—6.9	7.0—7.9	8.0—8.9	9.0—9.9	
300—329					1	2	3	4	3	2	15
270—299				1	5	8	5	3	1		23
240—269			1	5	14	3					23
210—239			2	10							12
180—209			3								3
150—179			7								7
120—149		4	2								6
90—119		6									6
60—89	4	3									7
30—59	7	1									8
0—29	3										3
總計	14	14	15	16	20	13	8	7	4	2	113

試用某銀行行員任職年數及月俸之分配,計算以下諸數:

(1) 用普通法,以任職年數爲自變數,每月俸給爲附變數,求相關比(η_{yx})。

(2) 用簡捷法,以每月俸給爲自變數,任職年數爲附變數,求相關比(η_{xy})。

(3) 用相關表核算法,以任職年數爲自變數,每月俸給爲附變數;及每月俸給爲自變數,任職年數爲附變數,求相關比(η_{yx} 及 η_{xy})。

(4) 試求各校正相關比(η'_{yx} 及 η'_{xy})。

(5) 用勃來克美公式,試驗其直線性。

習題二十六

某校三十生體高與體重比較表

學號	體高(單位　公尺)	體重(單位　磅)	學號	體高(單位　公尺)	體重(單位　磅)
1	1.50	108	16	1.65	130
2	1.42	100	17	1.47	107
3	1.40	101	18	1.50	113
4	1.56	110	19	1.68	130
5	1.60	120	20	1.54	111
6	1.35	96	21	1.49	110
7	1.48	107	22	1.45	101
8	1.62	122	23	1.60	119
9	1.57	118	24	1.56	118
10	1.59	121	25	1.61	123
11	1.50	113	26	1.62	125
12	1.62	120	27	1.58	117
13	1.45	108	28	1.43	114
14	1.58	117	29	1.38	100
15	1.43	106	30	1.40	103

試用某校三十生體高體重之比較,計算以下諸數:

(1) 用等級差異法求等級相關係數。

(2) 用簡捷法求等級相關係數。

(3) 試求相應相關係數。

(4) 試求異號相關係數。

(5) 由各等級相關及異號相關係數中,推算直線相關係數。

習題二十七

二〇〇〇對父子眼球顏色相關表

	父之眼球							總計 N_r
	顏色別	黑	灰	藍	淡藍	櫻	淡櫻	
子之眼球	黑	158	70	26	61	23	20	358
	灰	101	120	32	70	41	22	386
	藍	63	76	96	77	36	31	379
	淡藍	50	41	50	102	51	40	334
	櫻	31	35	33	30	105	51	285
	淡櫻	20	24	25	27	84	78	258
總計 N_c		423	366	262	367	340	242	2,000

試用2,000對父子眼球顏色之相關資料,核算以下諸數:

(1) 求 6×6 之均方相關係數。

(2) 將上表中黑及灰色合併,藍及淡藍合併,櫻及淡櫻合併,成 3×3 項表。

(3) 求 3×3 之均方相關係數。

(4) 試比較 6×6 及 3×3 均方相關係數之數值。

習題二十八

歷年我國對日輸出入貨值指數表

光緒元年至民國二十五年

（民國十五年指數=100）

年次	由日輸入	由華輸日	年次	由日輸入	由華輸日
光緒元年	0.3	0.8	光緒卅二年	17.3	12.9
二年	0.5	0.7	卅三年	16.1	15.2
三年	0.5	0.7	卅四年	14.9	14.4
四年	0.7	0.7	宣統元年	17.1	20.0
五年	0.5	0.9	二年	21.7	24.9
六年	0.6	0.9	三年	22.9	25.4
七年	0.8	0.7	民國元年	26.5	23.5
八年	1.0	0.7	二年	35.1	28.0
九年	0.9	0.5	三年	37.6	27.0
十年	0.9	0.7	四年	34.8	32.3
十一年	1.4	0.6	五年	47.3	46.3
十二年	1.4	0.5	六年	66.1	44.3
十三年	1.3	0.8	七年	70.3	68.6
十四年	1.5	1.4	八年	72.6	84.3
十五年	1.6	2.5	九年	67.3	64.0
十六年	2.0	1.9	十年	62.0	72.5
十七年	1.5	2.2	十一年	68.0	70.1
十八年	1.8	3.1	十二年	62.8	88.6
十九年	2.2	3.6	十三年	70.0	89.9
二十年	2.3	3.6	十四年	89.2	85.7
廿一年	4.0	5.7	十五年	100.0	100.0
廿二年	4.8	4.4	十六年	88.4	104.1
廿三年	6.2	6.4	十七年	96.8	107.4
廿四年	7.7	6.2	十八年	97.7	114.8
廿五年	10.3	6.7	十九年	98.1	101.0
廿六年	7.1	6.6	二十年	87.9	114.1
廿七年	9.2	6.5	廿一年	44.4	52.1
廿八年	10.1	11.1	廿二年	25.3	29.1
廿九年	14.5	11.8	廿三年	24.7	24.9
卅年	13.8	14.7	廿四年	27.6	24.1
卅一年	17.5	13.7	廿五年	31.5	22.4

試用歷年我國對日輸出入貨值指數,計算以下諸數:

（1）試求相應相關係數.

（2）試求異號相關係數.

（3）由異號相關係數中,推算直線相關係數.

習題二十九

試用表九十一,一八九〇年至一九二二年美國開痕撒斯省玉蜀黍收穫量與六,七,八月平均溫度比較表,計算歷年玉蜀黍收穫量與各月平均溫度之:

(1) 一級純相關係數。

(2) 二級純相關係數。

(3) 一級純迴歸係數。

(4) 二級純迴歸係數。

(5) 一級迴歸方程式。

(6) 二級迴歸方程式。

(7) 三種變數之複相關係數。

(8) 四種變數之複相關係數。

第十章 量數之可靠性

第一節 量數可靠性之意義

世間事物,整千累萬,本不能一一集而統計之.取樣法乃即就大羣(Population)事物中,任選一小部份之張本,統計並分析之,期爲全體變量之代表.惟由此一小部份變量中測定之結果,除非偶然自難與由全體變量中求得之眞正代表數相吻合.量數可靠度,乃卽測定此不吻合程度之大小者也.

取樣愈少,所得結果,愈不能代表全體,卽與眞正代表數不吻合之程度愈高.取樣愈多,所得結果,愈能代表全體,卽與眞正代表數不吻合之程度愈低.惟事實上,取樣增多,人工經濟,俱受重大之損失,有時更以調查之困難,得不償失,爲統計家所不取.然取樣若干?其分析結果之可靠度爲幾何?增取樣本多少?所得結果,方足代表全體.故量數可靠度,不僅測定不吻合程度之大小,更可表示各量數代表性之高低者也.

統計者在測定長度,重量及角度時,常因知覺能力之不完全,及使用手續之惡劣,致起種種錯誤.此種錯誤,若起於觀察者自身之不注意,不熟練,不精細,或儀器之不完備,不準確,不一律者,調查及分析時,尙可依種種方法以糾正之.反之,若錯誤之發生,僅能想像而不能確知,僅屬偶然而非故意;其差數,或正或負,或大或小,無一定方向及數值者,在統計者亦有

測定之必要.量數可靠度亦卽測定此種祇可臆測而不能捉摸之錯誤者也.

第二節　平均數之可靠性

欲研究平均數之可靠性,必先檢查對於平均數可發生影響之因子.例如統計某國人民之體高,自不能將該國人民一一爲之丈量.若抽選一部份人民施以體高之檢查,則此一小部份人民,是否隨機選入,抑已參入觀察者之主見,而加以擇定者.更所選人民,以何地何種人民爲最多,該地該種人民,是否受環境之影響而偏高偏低.凡此種種俱足影響平均數之大小.故問平均數可靠程度如何?應先檢查取樣之公平與否.

(一)　算術平均數之可靠性

樣本之選擇旣甚公平,則算術平均數之可靠與否,由其分配之兩特性上評定之.此兩特性爲何?卽:

(1) 取樣之多寡——取樣之多寡,常足轉變平均數之大小.蓋變量增選或減選一個,除偶然與平均數相等者外,卽足移動平均數之地位.更取樣愈少,平均數受增選或減選一個變量之影響愈大.反之,取樣愈多,平均數受增選或減選一個變量之影響愈小.故欲使算術平均數穩定可靠,不受一變量取捨之影響者,應由相當數目之變量中求之.惟算術平均數可靠性之大小,

據統計家于爾氏等之實驗,不以取樣之多少爲比例,而以所取變量數平方根之大小爲比例.故由36個變量中求得算術平均數之可靠性,較由9個變量中求得者大$\sqrt{36}\div\sqrt{9}=6\div3=2$倍,而非$36\div9=4$倍.由576個變量中求得算術平均數之可靠性,較由36個變量中求得者大$\sqrt{576}\div\sqrt{36}=24\div6=4$倍,而非$576\div36=16$倍也.

(2)離中差之大小——離中差愈大,表示事實之分佈,愈見其散漫,凡未經選入之變量,將落何處?與算術平均數之距離或近或遠,頗難預測,致算術平均數之確度,因之減低.反之,離中差愈小,表示事實之分佈,愈爲集中,凡未經選取之張本,均離算術平均數甚近,卽有一二變量之取捨,殊不足影響算術平均數之大小.故算術平均數之意義,隨離中差之大小而定.離中差大,則算術平均數之價值小,確度甚低.離中差小,則算術平均數之價值大,確度甚高.故平均數爲一切變量之代表,而離中差則表示平均數之「非」代表性者也.

算術平均數可靠性之理論,上文已略述之.茲將測定其可靠程度之公式列下:

設S_M爲算術平均數之標準誤.

σ爲標準差.

N爲次數之總數.

$$S_M=\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\quad\text{(公式一一五)}$$

測定算術平均數之可靠度時,平均數之機誤,(亦稱機差 Probable error, 簡寫為 $P.E._M$.) 亦可用以代替 S_M. 其計算公式如下:

設 $P.E._M$ 為算術平均數之機誤.

σ 為標準差.

$Q.D.$ 為四分位差.

N 為次數之總數.

$$P.E._M=\frac{0.6745\sigma}{\sqrt{N}}\quad\text{(公式一一六)}$$

在正態曲線下,0.6745σ 等於 $Q.D.$(註一) 故公式一一六亦

(註一) 在正態曲線下,機差即等於四分位差,全體面積之半,應包含於±機差之內.若將機差化為標準差,則可查附表五,估全面積百分之25之地位,介於 0.67σ 與 0.68σ 之間,推算之,得其近似值為:

$0.67+0.01\times\frac{1.43}{3.18}=0.6745\sigma$ (更準確之推算,可得 0.67448975σ)

故　$1P.E.=0.6745\sigma$ 包含全面積百分之25.00,±$1P.E.$ 包含全面積50%.

$2P.E.=1.3490\sigma$ 包含全面積百分之41.13,±$2P.E.$ 包含全面積82.26%.

$3P.E.=2.0235\sigma$ 包含全面積百分之47.85,±$3P.E.$ 包含全面積95.70%.

$4P.E.=2.6980\sigma$ 包含全面積百分之49.65,±$4P.E.$ 包含全面積99.30%.

故　±$4.448P.E.$ 等於 ±3σ,約等於全距之長.

可改寫如下:

$$P.E._M=\frac{Q.D.}{\sqrt{N}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式一一七})$$

茲卽以表六十五,上海市第五屆至第七屆集團結婚新郎新娘年齡之分配爲例,核計 309 個新郎之算術平均年齡爲 24.812 歲,標準差爲 4.040 歲. 309 個新娘之算術平均年齡爲 20.981 歲,標準差爲 2.960 歲.代入公式一一五,得新郎算術平均年齡之標準誤:

應用公式一一五

$$S_M=\frac{4.040}{\sqrt{309}}=\frac{4.040}{17.5784}=0.230$$

新娘算術平均年齡之標準誤:

應用公式一一五

$$S_M=\frac{2.960}{\sqrt{309}}=\frac{2.960}{17.5784}=0.168$$

算術平均數標準誤之意義,卽示新郎年齡之算術平均數(24.812 歲)與其眞實算術平均數之差,不出 ±0.230 歲(卽 $\pm 1S_M$)者,其機遇爲 10,000 中之 6,826. 易言之,眞實算術平均年齡落在 24.812 歲 +0.230 歲與 24.812 歲 −0.230 歲之間,或落在 25.042 歲與 24.582 歲之間者,其機遇爲百分之 68.26. 落於 24.812 歲 $\pm 3\times 0.230$ 歲(卽 $\pm 3S_M$),或落在 25.502 歲與 24.122 歲之間者,約佔百分之 99.73. 至於新娘年齡之算術平均數爲 20.981 歲,其與眞實算術平均

年齡之差,不出 ±0.168 歲($\pm 1S_M$)者,其機遇爲68.26%.不出 ±0.504 歲($\pm 3S_M$)者,其機遇爲99.73%.惟此標準誤如何能測量平均數之可靠性,茲更設例闡明之.設上海市第一屆至第十五屆參與集團結婚新郎爲1,450人,吾人如於1,450人中,任意抽取 309 人之年齡平均之,如此舉行1,000 次,則得 1,000 個算術平均數.惟此 1,000 個平均數,因取樣有誤(Errors of sampling),必互有出入.再將1,450人之年齡完全選入平均之,得一眞實之算術平均數,並與1,000個由抽樣而得之平均數比較之,則此1,000個平均數中,必有大於此眞實之平均數者,亦有小於此眞實之平均數者,更有與此平均數相等者,依此而得 1000 個離中差.而此1,000個離中差之分配,必爲一正態曲線,若由此離中差之算術平均數點左右各引取一標準誤($\pm 1S_M$)之距離,則在此距離中之面積,應佔全面積68.26%,各引取二標準誤($\pm 2S_M$)之距離,則在此距離中之面積,應佔全面積95.44%.各引取三標準誤($\pm 3S_M$)之距離,則在此距離中之面積,應佔全面積99.73%.故標準誤之大小,即示平均數離此眞實平均數之遠近,亦即表示平均數確度之高低.前例新郎平均年齡之標準誤爲0.230歲,新娘平均年齡之標準誤爲0.168歲.則新娘年齡之算術平均數(20.981歲),其確度(即代表性),當高於新郎年齡之算術平均數(24.812歲)也.

本例內新郎之算術平均年齡爲 24.812 歲,標準誤爲0.230歲.新娘之算術平均年齡爲 20.981 歲,標準誤爲0.168歲.試問增取若干樣本,所得算術平均數之可靠度,倍於現有之可靠度.換言之,若增取若干樣本,所得算術平均數之標準誤,得爲現有標準誤之半.其核計之方法如下:

新郎平均年齡之標準誤,如欲減小一倍,即新郎平均年齡之確度,增加一倍,則應選取新郎1,236人.

$$\frac{1}{2}\times\frac{4.040}{\sqrt{309}}=\frac{4.040}{\sqrt{4\times309}}=\frac{4.040}{\sqrt{1236}}$$

$$=\frac{4.040}{35.157}=0.115$$ 等於原有標準誤之半

新娘平均年齡之標準誤,如欲減小一倍,即新娘平均年齡之確度,增加一倍,則應選取新娘1,236人.

$$\frac{1}{2}\times\frac{2.960}{\sqrt{309}}=\frac{2.960}{\sqrt{4\times309}}=\frac{2.960}{\sqrt{1236}}$$

$$=\frac{2.960}{35.157}=0.084$$ 等於原有標準誤之半

故欲使新郎及新娘平均年齡之確度增高一倍,則所取樣本應由 309 人,增爲1,236人,各應增取 927 人.

新郎新娘平均年齡之可靠度,如以機誤測定之,則新郎平均年齡之機誤,應爲:

應用公式一一六

$$P.E._M=\frac{0.6745\times4.040}{\sqrt{309}}$$

$$=\frac{2.72498}{17.5784}=0.155$$

新娘平均年齡之機誤,應爲:

應用公式一一六

$$P.E._M=\frac{0.6745\times 2.960}{\sqrt{309}}$$

$$=\frac{1.99652}{17.5784}=0.114$$

算術平均數機誤之意義,與標準誤同,卽示新郎算術平均年齡24.812歲,與眞實平均年齡之差,不出±0.155歲者,其機遇爲百分之50.換言之,新郎眞實算術平均年齡落於或不落於24.812歲+0.155歲,與24.812歲−0.155歲,或24.967歲,至24.657歲間之機會,各爲一半.且±4$P.E._M$不啻包含正態曲態下之全部.吾人卽可斷言,新郎之眞實算術平均年齡,必落於24.812歲±4×0.155歲,或25.432歲至24.192歲之間.新娘之眞實算術平均年齡,必落於20.981歲±4×0.114歲,或21.437歲至20.525歲之間也.

(二) 中位數之可靠性

中位數之可靠性,可從算術平均數之可靠度中推算之.蓋中位數之標準誤爲1.25331倍於算術平均數之標準誤.故求中位數標準誤之公式如下:

設 S_{Md} 爲中位數之標準誤.

σ 爲標準差.

N 爲次數之總數.

$$S_{Md} = 1.25331 \times \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \cdots\cdots\cdots\text{(公式一一八)}$$

測量中位數之可靠度時,中位數之機誤($P.E._{Md}$),亦可用以代表 S_{Md}. 其計算公式如下:

設 $P.E._{Md}$ 爲中位數之機誤.

σ 爲標準差.

$Q.D.$ 爲四分位差.

N 爲次數之總數.

$$P.E._{Md} = 1.25331 \times \frac{0.6745\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$= \frac{0.8454\sigma}{\sqrt{N}} \cdots\cdots\cdots\text{(公式一一九)}$$

在正態曲線下,0.6745σ 等於 $Q.D.$,故公式一一九亦可改寫如下:

$$P.E._{Md} = 1.25331 \times \frac{Q.D.}{\sqrt{N}} \cdots\cdots\cdots\text{(公式一二〇)}$$

茲仍以新郎新娘年齡之分配爲例, 309 個新郎年齡之中位數爲 24.203 歲,標準差爲 4.040 歲. 309 個新娘年齡之中位數爲 20.771 歲,標準差爲 2.960 歲.代入公式一一八,得新郎新娘中位年齡之標準誤如下:

新郎中位年齡之標準誤

應用公式一一八

$$S_{Md} = 1.25331 \times \frac{4.040}{\sqrt{309}}$$

$$= 1.25331 \times \frac{4.040}{17.5784} = \frac{5.0634}{17.5784}$$

$$= 0.288$$

新娘中位年齡之標準誤

應用公式一一八

$$S_{Md}=1.25331\times\frac{2.960}{\sqrt{309}}$$

$$=1.25331\times\frac{2.960}{17.5784}=\frac{3.7098}{17.5784}$$

$$=0.211$$

中位數標準誤之意義,即示新郎年齡之中位數(24.203歲),與其眞實中位數之差,不出± 0.288歲(即$\pm 1S_{Md}$)者,其機遇爲百分之68.26.新娘年齡之中位數(20.771歲),與其眞實中位數之差,不出± 0.211歲(即$\pm 1S_{Md}$)者,其機遇亦爲百分之68.26是也.至於新郎新娘中位年齡之可靠度,如以機誤測定之,則如下:

新郎中位年齡之機誤

應用公式一一九

$$P.E._{Md}=\frac{0.8454\times 4.040}{\sqrt{309}}$$

$$=\frac{3.4154}{17.5784}=0.194$$

新娘中位年齡之機誤

應用公式一一九

$$P.E._{Md}=\frac{0.8454\times 2.960}{\sqrt{309}}$$

$$=\frac{2.5024}{17.5784}=0.142$$

中位數機誤之意義,卽示新郎年齡之中位數(24.203歲),與其眞實中位數之差不出 ±0.194 歲者,其機遇爲百分之50.新娘年齡之中位數(20.771歲),與其眞實中位數之差,不出 ±0.142 歲者,其機遇亦爲百分之50是也.

綜觀新郎中位年齡之標準誤及機誤,俱大於新娘中位年齡之標準誤及機誤.換言之,新郎年齡之中位數,其可靠性低於新娘年齡之可靠性也.

中位數之標準誤(S_{Md}),較算術平均數之標準誤(S_M)約大1.25倍,中位數之機誤($P.E._{Md}$),亦較算術平均數之機誤($P.E._M$)大1.25倍.故算術平均數常較中位數爲可靠.是欲求某數列較爲可靠之代表數,應核算其算術平均數也.

(三) 四分位數之可靠性

四分位數之可靠性,亦可從算術平均數之可靠度中推算之.蓋四分位數之標準誤爲1.36263倍於算術平均數之標準誤.故求四分位數標準誤之公式如下:

設 S_Q 爲四分位數之標準誤.

σ 爲標準差.

N 爲次數之總數.

$$S_Q=\frac{1.36263\sigma}{\sqrt{N}}\text{……………………(公式一二一)}$$

測量四分位數之可靠度時,四分位數之機誤($P.E._Q$)亦可用以代表 S_Q.其計算公式如下:

設$P.E._Q$爲四分位數之機誤。

σ 爲標準差。

$Q.D.$爲四分位差。

N 爲次數之總數。

$$P.E._Q=1.36263\times\frac{0.6745\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$=\frac{0.9191\sigma}{\sqrt{N}}\text{……（公式一二二）}$$

在正態曲線下0.6745σ等於$Q.D.$,故公式一二二,亦可改寫如下:

$$P.E._Q=1.36263\times\frac{Q.D.}{\sqrt{N}}\text{……（公式一二三）}$$

如表四十一所示美國鋼鐵業1,600個工人每十六日所得工資之第一四分位數爲 \$30.379, 第三四分位數爲\$57.396, 標準差爲 \$18.68,代入公式一二一及一二二,得四分位數之標準誤及機誤如下:

應用公式一二一

$$S_Q=\frac{1.36263\times18.68}{\sqrt{1,600}}$$

$$=\frac{25.4539284}{40}=0.636$$

應用公式一二二

$$P.E._Q=\frac{0.9191\times18.68}{\sqrt{1,600}}$$

$$=\frac{17.168788}{40}=0.429$$

四分位數之標準誤,與算術平均數及中位數之標準誤

同,卽美國鋼鐵工業1,600個工人,每十六日所得工資之第一四分位數爲\$30.379,第三四分位數爲\$57.396,其與眞實第一及第三四分位數之差,不出±\$0.636(卽$\pm 1S_Q$)者,其機遇爲百分之68.26.至於四分位數之機誤,亦與算術平均數及中位數之機誤同.卽第一及第三四分位數與其眞實第一第三四分位數之差,不出±\$0.429者,其機遇爲百分之50是也.

第三節 兩平均數相差之可靠性

設我人欲知十五歲男生與十五歲女生在某種智力測驗上之成績,有無差異.平常解決方法,卽任選極多數之十五歲男生及十五歲女生,予以測驗,各計其平均數,並求兩平均數之差.設男生之平均成績較女生多幾分,卽示男生之成績優於女生.惟在立論之前,應先推考此差數之可靠性如何.若男生與女生之眞實平均數,俱可求得,則此由抽樣核計男女生平均成績之差,與男女生眞實平均成績之差,又相差若干?本節卽將測定此種差數可靠性之方法,設例述之如下:

(一) 兩算術平均數相差之可靠性

測定兩算術平均數相差可靠性之公式有二:

(1)兩算術平均數相差之標準誤

設 S_m 爲兩算術平均數相差之標準誤

S_{M_1} 爲甲數列算術平均數之標準誤.

S_{M2} 爲乙數列算術平均數之標準誤.

$$S_m = \sqrt{S^2_{M1} + S^2_{M2}} \cdots\cdots\cdots\cdots(公式一二四)$$

(2) 兩算術平均數相差之機誤

設 $P.E._m$ 爲兩算術平均數相差之機誤.

$P.E._{M1}$ 爲甲數列算術平均數之機誤.

$P.E._{M2}$ 爲乙數列算術平均數之機誤.

$$P.E._m = \sqrt{P.E.^2_{M1} + P.E.^2_{M2}} \cdots\cdots\cdots\cdots(公式一二五)$$

(二) 兩中位數相差之可靠性

(1) 兩中位數相差之標準誤

設 S_{md} 爲兩中位數相差之標準誤.

S_{Md1} 爲甲數列中位數之標準誤.

S_{Md2} 爲乙數列中位數之標準誤.

$$S_{md} = \sqrt{S^2_{Md1} + S^2_{Md2}} \cdots\cdots\cdots\cdots(公式一二六)$$

(2) 兩中位數相差之機誤

設 $P.E._{md}$ 爲兩中位數相差之機誤.

$P.E._{Md1}$ 爲甲數列中位數之機誤.

$P.E._{Md2}$ 爲乙數列中位數之機誤.

$$P.E._{md} = \sqrt{P.E.^2_{Md1} + P.E.^2_{Md2}} \cdots\cdots\cdots\cdots(公式一二七)$$

(三) 兩四分位數相差之可靠性

(1) 兩四分位數相差之標準誤

設 S_q 爲兩四分位數相差之標準誤.

S_{Q1} 爲甲數列四分位數之標準誤.

S_{Q_2}爲乙數列四分位數之標準誤.

$$S_q=\sqrt{S^2_{Q_1}+S^2_{Q_2}}\text{……………………（公式一二八）}$$

(2)兩四分位數相差之機誤

設$P.E._q$ 爲兩四分位數相差之機誤.

$P.E._{Q_1}$爲甲數列四分位數之機誤.

$P.E._{Q_2}$爲乙數列四分位數之機誤.

$$P.E._q=\sqrt{P.E.^2_{Q_1}+P.E.^2_{Q_2}}\text{……………………（公式一二九）}$$

(四) 兩平均數相差之標準誤及機誤舉例

茲以參與上海市第五屆至第七屆集團結婚新郎新娘之年齡爲例,核計新郎平均年齡與新娘平均年齡相差之標準誤及機誤如下:

新郎年齡之		新娘年齡之	
M	$=24.812$ 歲	M	$=20.981$ 歲
M_d	$=24.203$ 歲	M_d	$=20.771$ 歲
Q_1	$=21.868$ 歲	Q_1	$=18.754$ 歲
Q_3	$=27.039$ 歲	Q_3	$=22.607$ 歲
S_M	$=0.230$ 歲	S_M	$=0.168$ 歲
S_{Md}	$=0.288$ 歲	S_{Md}	$=0.211$ 歲
S_Q	$=0.313$ 歲	S_Q	$=0.229$ 歲
$P.E._M$	$=0.155$ 歲	$P.E._M$	$=0.114$ 歲
$P.E._{Md}$	$=0.194$ 歲	$P.E._{Md}$	$=0.142$ 歲
$P.E._Q$	$=0.211$ 歲	$P.E._Q$	$=0.155$ 歲

(1)新郎新娘平均年齡相差之標準誤

(A)新郎新娘算術平均年齡相差之標準誤

應用公式一二四

$$S_m=\sqrt{(0.230)^2+(0.168)^2}$$

$$=\sqrt{0.081124}=0.285$$

(B)新郎新娘中位年齡相差之標準誤

應用公式一二六

$$S_{md}=\sqrt{(0.288)^2+(0.211)^2}$$

$$=\sqrt{0.127465}=0.357$$

(C)新郎新娘四分位年齡相差之標準誤

應用公式一二八

$$S_q=\sqrt{(0.313)^2+(0.229)^2}$$

$$=\sqrt{0.150410}=0.388$$

算術平均數,中位數及四分位數各相差標準誤之意義,卽示兩平均數之差與兩眞實平均數之差相差不出 ±1 標準誤者,其機遇爲百分之68.26;相差不出 ±3 標準誤者,其機遇爲百分之 99.73.例如新郎之算術平均年齡爲 24.812 歲,新娘之算術平均年齡爲 20.981 歲,兩者之差爲 3.831 歲,與新郎新娘眞實算術平均年齡之差,相差不出 ±0.285 歲(卽 $\pm 1S_m$)之外者,其機遇爲 68.26%.換言之,卽新郎新娘眞實算術平均年齡之差,不出 3.546 歲至 4.116 歲之機遇爲百分之68.26.不出

2.976歲至4.686歲(即 $\pm 3S_m$)之機遇爲百分之99.73.至於中位數及四分位數各相差標準誤之意義,均與算術平均數相差標準誤之意義相同,即新郎中位年齡爲24.203歲,新娘中位年齡爲20.771歲,兩者相差3.432歲,其與新郎新娘眞實中位年齡之差,相差不出 ± 0.357 歲(即 $\pm 1S_{md}$)之外者,其機遇亦爲百分之68.26.新郎之第一四分位年齡爲21.868歲,新娘爲18.754歲,兩者相差3.114歲.新郎之第三四分位年齡爲27.039歲,新娘爲22.607歲,兩者相差4.432歲,其與新郎新娘眞實第一第三四分位年齡之差,相差不出 ± 0.388 歲(即 $\pm 1S_Q$)之外者,其機遇亦爲68.26 % 是也.

(2)新郎新娘平均年齡相差之機誤

(A)新郎新娘算術平均年齡相差之機誤

應用公式一二五

$$P.E._m=\sqrt{(0.155)^2+(0.114)^2}$$

$$=\sqrt{0.037021}=0.192$$

(B)新郎新娘中位年齡相差之機誤

應用公式一二七

$$P.E._{md}=\sqrt{(0.194)^2+(0.142)^2}$$

$$=\sqrt{0.057800}=0.240$$

(C)新郎新娘四分位年齡相差之機誤

應用公式一二九

$$P.E._q=\sqrt{(0.211)^2+(0.155)^2}$$
$$=\sqrt{0.068546}=0.262$$

算術平均數,中位數及四分位數各相差機誤之意義,即示兩平均數之差與兩眞實平均數之差,相差不出±1機誤者,其機遇爲百分之50,相差不出±4機誤者,其機遇爲百分之99.30.例如新郞之算術平均年齡爲24.812歲,新娘爲20.981歲,兩者之差爲3.831歲,其與新郞新娘眞實算術平均數之差,相差不出±0.192歲(即±1$P.E._m$)之外者,其機遇爲百分之50.換言之,即新郞新娘眞實算術平均年齡之差,不出3.639歲至4.023歲之機遇爲50%.不出3.063歲至4.599歲(即±4$P.E._m$)之機遇爲99.30%.至於中位數及四分位數各相差機誤之意義,均與算術平均數相差機誤之意義相同,即新郞中位年齡爲24.203歲,新娘中位年齡爲20.771歲,兩者相差3.432歲,其與新郞新娘眞實中位年齡之差,相差不出±0.240歲(即±1$P.E._{md}$)之外者,其機遇亦爲百分之50.新郞之第一四分位年齡爲21.868歲,新娘爲18.754歲,兩者相差3.114歲.新郞之第三四分位年齡爲27.039歲,新娘爲22.607歲,兩者相差4.432歲,其與新郞新娘眞實第一第三四分位年齡之差,相差不出±0.262歲(即±1$P.E._q$)之外者,其機遇亦爲百分之50是也.

第四節 離中差之可靠性

算術平均數,中位數及四分位數等,往往以取樣不當,致核計之平均數與眞實之平均數略有差異,其測定之方法前節已略述之.惟平均數旣有錯誤,則依平均數核計之離中差,與以眞實平均數核計之離中差,亦當有相當之錯誤.本節所論,乃卽測定正態分配下各離中差可靠度之方法也.

(一) 四分位差之可靠性

測定四分位差可靠性之公式如下:

(1)四分位差之標準誤

設 $S_{Q.D.}$ 爲四分位差之標準誤.

σ 爲標準差.

N 爲次數之總數.

$$S_{Q.D.}=0.78672\times\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\cdots\cdots\text{(公式一三〇)}$$

(2)四分位差之機誤

設 $P.E._{Q.D.}$ 爲四分位差之機誤.

σ 爲標準差.

N 爲次數之總數.

$$P.E._{Q.D.}=0.78672\times\frac{0.6745\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$=\frac{0.5306\sigma}{\sqrt{N}}\cdots\cdots\text{(公式一三一)}$$

在正態曲線下 0.6745σ 等於 $Q.D.$,故公式一三一亦可

改寫如下:

設 $P.E._{Q.D.}$ 爲四分位差之機誤.

$Q.D.$ 爲四分位差.

N 爲次數之總數.

$$P.E._{Q.D.}=0.78672\times\frac{Q.D.}{\sqrt{N}}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式一三二})$$

茲以表四十一所示美國鋼鐵業1,600個工人,每十六日所得工資之中位數爲\$44.172,四分位差爲\$13.509,標準差爲\$18.68,代入公式一三〇,得四分位差之標準誤如下:

應用公式一三〇

$$S_{Q.D.}=0.78672\times\frac{18.68}{\sqrt{1600}}$$

$$=\frac{14.6959296}{40}=0.367$$

四分位差標準誤之意義,卽示美國鋼鐵業1,600個工人每十六日所得工資之四分位差(卽環繞中位數\$44.172之 $Q.D.$),爲\$13.509.而此四分位差之可靠度如何?據前測定爲\$0.367,意卽核算之四分位差與眞實四分位差之差,不出±\$0.367(卽 $\pm 1S_{Q.D.}$)之外者,其機遇爲百分之68.26.不出±\$1.101(卽 $\pm 3S_{Q.D.}$)之外者,其機遇爲百分之99.73.如用公式一三一,測定四分位差之機誤如下:

應用公式一三一

$$P.E._{Q.D.}=\frac{0.5306\times18.68}{\sqrt{1600}}$$

$$=\frac{9.911608}{40}=0.248$$

四分位差機誤之意義,卽示核計之四分位差($13.509)與其眞實四分位差之差,不出±$0.248(卽$1P.E._{Q.D.}$)之外者,其機遇爲百分之50.其不出±$0.992(卽±$4P.E._{Q.D.}$)之外者,其機遇爲百分之99.30。

(二) 標準差之可靠性

(1) 標準差之標準誤

設S_σ爲標準差之標準誤.

σ 爲標準差.

N 爲次數之總數.

$$S_\sigma=\frac{\sigma}{\sqrt{2N}}\qquad\text{(公式一三三)}$$

(2) 標準差之機誤

設$P.E._\sigma$爲標準差之機誤.

σ 爲標準差.

N 爲次數之總數.

$$P.E._\sigma=\frac{0.6745\sigma}{\sqrt{2N}}\qquad\text{(公式一三四)}$$

在正態曲線下0.6745σ等於$Q.D.$,故公式一三四亦可改寫如下:

設$P.E._\sigma$爲標準差之機誤.

$Q.D.$ 爲四分位差.

N 爲次數之總數.

$$P.E._{\sigma}=\frac{Q.D.}{\sqrt{2N}}\cdots\cdots\cdots\cdots(公式一三五)$$

美國鋼鐵業1,600個工人每十六日所得工資之算術平均數爲\$42.83,標準差爲\$18.68,代入公式一三三,得標準差之標準誤如下:

應用公式一三三

$$S_{\sigma}=\frac{18.68}{\sqrt{2\times1600}}$$

$$=\frac{18.68}{56.57}=0.330$$

標準差標準誤之意義,與四分位差標準誤之意義同,卽核計之標準差與眞實標準差之差,不出±\$0.330(卽±$1S_{\sigma}$)之外者,其機遇爲百分之68.26.不出±\$0.990(卽±$3S_{\sigma}$)之外者,其機遇爲百分之99.73.如用公式一三四測定標準差之機誤如下:

應用公式一三四

$$P.E._{\sigma}=\frac{0.6745\times18.68}{\sqrt{2\times1600}}$$

$$=\frac{12.59966}{56.57}=0.223$$

標準差機誤之意義,亦與四分位差機誤之意義相同,卽核計之標準差與其眞實標準差之差,不出±\$0.223(卽±$1P.E._{\sigma}$)之外者,其機遇爲百分之50,不出±\$0.892(卽

$\pm 4P.E._{\sigma}$)之外者,其機遇約爲百分之99.30.

第五節 相關係數之可靠性

表示兩事直線相關度之大小者,謂之相關係數,其可靠性之測定,可有下列兩公式:

設 S_r 爲相關係數之標準誤.

r 爲相關係數.

N 爲次數之總數.

$$S_r=\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}\text{……………………(公式一三六)}$$

茲以參與上海市第五屆至第七屆 309 對新郎新娘年齡之相關係數(+0.536)爲例,核計其標準誤如下:

應用公式一三六

$$S_r=\frac{1-(0.536)^2}{\sqrt{309}}$$

$$=\frac{1-0.287296}{17.5784}=0.041$$

相關係數標準誤之意義,卽示新郎新娘年齡之正相關係數+0.536,其與眞實相關係數之差,不出 ± 0.041(卽 $\pm 1S_r$)之外者,其機遇爲百分之68.26,不出 ± 0.123(卽 $\pm 3S_r$)之外者,其機遇爲百分之99.73.

相關係數之可靠度如以機誤測定之,則其公式如下:

設 $P.E._r$ 爲相關係數之機誤.

r 爲相關係數.

N　爲次數之總數.

$$P.E._r=\frac{0.6745(1-r^2)}{\sqrt{N}}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式一三七})$$

茲仍以參與上海市第五屆至第七屆 309 對新郎新娘年齡之相關係數(+0.536)爲例,核計其機誤如下:

應用公式一三七

$$P.E._r=\frac{0.6745\times[1-(0.536)^2]}{\sqrt{309}}$$

$$=\frac{0.6745\times0.712704}{17.5784}=0.027$$

相關係數機誤之意義,卽示新郎新娘年齡之正相關係數+0.536,其與眞實相關係數之差,不出 ±0.027 (卽 ±1$P.E._r$) 之外者,其機遇爲百分之50,不出 ±0.108 (卽 ±4$P.E._r$) 之外者,其機遇爲百分之99.30是也.

第六節　其他相關之可靠性

(一)　相關比之可靠性

測定兩事非直線相關度之大小者,謂之相關比,其可靠性之核算,與相關係數同.茲將其計算公式設例示之如下:

設 S_η 爲相關比之標準誤.

η　爲相關比.

N　爲次數之總數.

$$S_\eta=\frac{1-\eta^2}{\sqrt{N}}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式一三八})$$

茲以表八十三每畝麥田所施氮素肥料量與每畝小麥收穫量之相關比爲例,核計其標準誤如下:

如以每畝麥田所施氮素肥料量爲自變數,每畝小麥收穫量爲附變數,所得相關比($\eta_{yx}=0.965$)之標準誤:

應用公式一三八

$$S_{\eta yx}=\frac{1-(0.965)^2}{\sqrt{193}}$$

$$=\frac{0.068775}{13.892444}=0.005$$

如以每畝小麥收穫量爲自變數,每畝麥田所施氮素肥料量爲附變數,所得相關比($\eta_{xy}=0.882$)之標準誤:

應用公式一三八

$$S_{\eta xy}=\frac{1-(0.882)^2}{\sqrt{193}}$$

$$=\frac{0.222076}{13.892444}=0.016$$

相關比標準誤之意義,與相關係數同,卽示每畝麥田所施氮素肥料量與每畝小麥收穫量之相關比,其與眞實相關比之差,不出 $\pm 1S_{\eta yx}$ 或 $\pm 1S_{\eta xy}$ 之外者,其機遇爲百分之68.26,不出 $\pm 3\,S_{\eta yx}$ 或 $\pm 3\,S_{\eta xy}$ 之外者,其機遇爲百分之99.73是也。

相關比之可靠度如以機誤測定之,則其公式如下:

設 $P.E._\eta$ 爲相關比之機誤。

η 爲相關比。

N　為次數之總數.

$$P.E._{\eta}=\frac{0.6745(1-\eta^{2})}{\sqrt{N}}\text{…………(公式一三九)}$$

茲仍以每畝麥田所施氮素肥料量與每畝小麥收穫量之相關比為例,核計其機誤如下:

若以每畝麥田所施氮素肥料量為自變數,每畝小麥收穫量為附變數,所得相關比($\eta_{yx}=0.965$)之機誤:

應用公式一三九

$$P.E._{\eta yx}=\frac{0.6745\times[1-(0.965)^{2}]}{\sqrt{193}}$$

$$=\frac{0.046389}{13.892444}=0.003$$

若以每畝小麥收穫量為自變數,每畝麥田所施氮素肥料量為附變數,所得相關比($\eta_{xy}=0.882$)之機誤:

應用公式一三九

$$P.E._{\eta xy}=\frac{0.6745\times[1-(0.882)^{2}]}{\sqrt{193}}$$

$$=\frac{0.149790}{13.892444}=0.011$$

相關比機誤之意義,與相關係數同,卽示每畝麥田所施氮素肥料量與每畝小麥收穫量之相關比,其與眞實相關比之差,不出 $\pm 1P.E._{\eta yx}$ 或 $\pm 1P.E._{\eta xy}$ 之外者,其機遇為百分之50,不出 $\pm 4P.E._{\eta yx}$ 或 $\pm 4P.E._{\eta xy}$ 之外者,其機遇為百分之99.30是也.

(二)　等級相關係數之可靠性

根據事物之等級而計算之相關度,謂之等級相關係數,前章述之已詳.測定此等級相關係數之公式亦有二,其一爲標準誤,其二爲機誤,玆特分別舉例示之如下:

設S_ρ爲等級相關係數之標準誤.

ρ 爲等級相關係數(用史皮美等級差異法核計者).

N 爲次數之總數.

$$S_\rho = \frac{1-\rho^2}{\sqrt{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式一四〇})$$

玆以表八十四某校二十生數學及物理成績之等級相關係數(0.818)爲例,核計其標準誤如下:

應用公式一四〇

$$S_\rho = \frac{1-(0.818)^2}{\sqrt{20}}$$

$$= \frac{0.330876}{4.472136} = 0.074$$

等級相關係數標準誤之意義,亦與相關係數同,卽示二十生數學及物理成績之等級相關係數0.818,其與眞實等級相關係數之差,不出± 0.074(卽$\pm 1S_\rho$)之外者,其機遇爲百分之68.26.不出± 0.222(卽$\pm 3S_\rho$)之外者,其機遇爲百分之99.73.

等級相關係數之可靠性,除以標準誤測定之外,更可核計其機誤,其公式如下:

設$P.E._\rho$爲等級相關係數之機誤.

ρ　爲等級相關係數（用史皮美等級差異法核計者）.

N　爲次數之總數.

$$P.E._{\rho}=\frac{0.6745(1-\rho^2)}{\sqrt{N}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式一四一)}$$

茲仍以某校二十生數學及物理成績之等級相關係數(0.818)爲例,核計其機誤如下:

應用公式一四一

$$P.E._{\rho}=\frac{0.6745\times[1-(0.818)^2]}{\sqrt{20}}$$

$$=\frac{0.223176}{4.472136}=0.050$$

等級相關係數機誤之意義,亦與相關係數同,卽示二十生數學及物理成績之等級相關係數0.818,其與眞實等級相關係數之差,不出± 0.050(卽$\pm 1P.E._{\rho}$)之外者,其機遇爲百分之50.不出± 0.200(卽$\pm 4P.E._{\rho}$)之外者,其機遇爲百分之99.30是也.

第七節　迴歸方程之可靠性

(一)　簡迴歸方程之可靠性

根據直線相關係數核算之迴歸方程,謂之簡迴歸方程.其推測之結果,非絕對可靠,不過據X數列中某一項,可以推知Y數列中相當一項之極可能之數值;或據Y數列中某項,可以推知X數列中相當一項之極可能

之數值而已.此種推測之結果,其可靠程度究屬如何,則隨迴歸直線與各點所處之相對地位而異.若各點均在直線之上,或離直線不遠,則此推測之價值甚高;若各點均散佈於直線兩旁,且甚散漫,則此推測之價值較低.至於測定此價值高低之方法,普通即核算其標準誤及機誤是也.茲分別設例述之如下:

設 S_y 爲根據 X 推測 Y 之標準誤.

S_x 爲根據 Y 推測 X 之標準誤.

σ_y 爲 Y 數列之標準差.

σ_x 爲 X 數列之標準差.

r 爲相關係數.

(1) 根據 X 推測 Y 之標準誤

$$S_y=\sigma_y\sqrt{1-r^2} \cdots\cdots\cdots\cdots(公式一四二)$$

(2) 根據 Y 推測 X 之標準誤

$$S_x=\sigma_x\sqrt{1-r^2} \cdots\cdots\cdots\cdots(公式一四三)$$

茲即以參與上海市第五屆至第七屆集團結婚新郎新娘年齡之相關爲例,新郎年齡之標準差(σ_y)爲 4.040,新娘年齡之標準差(σ_x)爲 2.960,新郎新娘年齡之相關係數(r)爲 +0.536.根據 Y 迴歸 X 方程式(參閱本書第 382 頁)推測新郎年齡之標準誤爲:

應用公式一四二

$$S_y=4.040\times\sqrt{1-(+0.536)^2}$$

$$=4.040\times0.844=3.410$$

根據 X 迴歸 Y 方程式(參閱本書第 382 頁)推測新娘年齡之標準誤為:

應用公式一四三

$$S_x=2.960\times\sqrt{1-(+0.536)^2}$$

$$=2.960\times0.844=2.498$$

若新郎新娘年齡之相關係數為 1,即新郎新娘年齡之相關點,均在迴歸直線之上,則根據新娘年齡推測新郎年齡,及根據新郎年齡推測新娘年齡之標準誤為 0,即示無標準誤.反之,若新郎新娘年齡之相關係數極小,即新郎新娘年齡之相關點,分佈於直線兩旁且甚為散漫,則根據新娘年齡推測新郎年齡,及根據新郎年齡推測新娘年齡之標準誤隨之增大,乃示迴歸方程式之價值甚小也.前例根據新娘年齡推測新郎年齡之標準誤為 3.410 歲,即示推測年齡在加減 1 標準誤(即 $\pm1S_y$)範圍內之機遇,當有百分之 68.26,在加減 3 標準誤(即 $\pm3S_y$)範圍內之機遇,當有百分之 99.73. 如知新娘之年齡為 20 歲,根據 Y 迴歸 X 方程式,推知新郎之年齡為 24.09 歲(參閱表七十四),此項推測之結果係一極近似之數目,事實上新郎之年齡不出 24.09 歲 $\pm$3.410 歲(即 $\pm1S_y$)範圍之機遇為 68.26%,不出 24.09 歲 $\pm$10.230 歲(即 $\pm3S_y$)範圍之機遇為 99.73%.至於根據新郎年齡推測新娘年

齡之標準誤爲 2.498 歲,如知新郎之年齡爲 20 歲,根據 X 迴歸 Y 方程式,推知新娘之年齡爲 19.09 歲(參閱表七十四),此項推測之結果亦係一極近似之數目,事實上新娘之年齡不出 19.09 歲 ± 2.498 歲(即 $\pm 1S_x$)範圍之機遇爲百分之 68.26,不出 19.09 歲 ± 7.494 歲(即 $\pm 3S_x$)範圍之機遇爲百分之 99.73 是也.標準誤之外,我人亦可以機誤測定此項推測之可靠度,其計算公式如下:

設 $P.E._y$ 爲根據 X 推測 Y 之機誤.

$P.E._x$ 爲根據 Y 推測 X 之機誤.

σ_y 爲 Y 數列之標準差.

σ_x 爲 X 數列之標準差.

r 爲相關係數.

(1)根據 X 推測 Y 之機誤

$$\boldsymbol{P.E._y = 0.6745\sigma_y\sqrt{1-r^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式一四四)}$$

(2)根據 Y 推測 X 之機誤

$$\boldsymbol{P.E._x = 0.6745\sigma_x\sqrt{1-r^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式一四五)}$$

茲仍以新郎新娘年齡之相關爲例,根據新娘年齡推測新郎年齡之機誤爲:

應用公式一四四

$$P.E._y = 0.6745\times 4.040\times\sqrt{1-(+0.536)^2}$$

$$= 0.6745\times 4.040\times 0.844$$

$$= 2.300$$

根據新郎年齡推測新娘年齡之機誤為:

應用公式一四五

$$P.E._{x}=0.6745\times 2.960\times\sqrt{1-(+0.536)^{2}}$$
$$=0.6745\times 2.960\times 0.844$$
$$=1.685$$

機誤之意義乃謂推測之結果,係一極可能或極近似之數目,事實上推測之數值,在加減 1 機誤(即 $\pm 1P.E._{y}$ 或 $\pm 1P.E._{x}$)範圍內之機遇,當有百分之50,在加減 4 機誤(即 $\pm 4P.E._{y}$ 或 $\pm 4P.E._{x}$)範圍內之機遇,當有百分之99.30是也。

(二) 純迴歸方程之可靠性

根據純相關係數核算之迴歸方程,謂之純迴歸方程.其推測之結果,亦非絕對可靠,不過據 X_2, X_3,及 X_4 等數列中某一項,可以推知 X_1 數列中相當一項之極可能數值而已.此種推測數值之可靠度,亦可以標準誤及機誤測定之.核算純迴歸方程標準誤及機誤之公式如下:

設 $S_{1.234}$ 為根據 X_2,X_3 及 X_4 推測 X_1 之標準誤。

$P.E._{1.234}$ 為根據 X_2,X_3 及 X_4 推測 X_1 之機誤。

σ_1 為 X_1 之標準差。

r_{12} 為 X_1 對 X_2 之簡相關係數。

$r_{13.2}$ 為 X_1 對 X_3 摒除 X_2 影響之一級純相關係數。

$r_{14\cdot23}$ 為 X_1 對 X_4 擗除 X_2 及 X_3 影響之二級純相關係數.

$$S_{1\cdot234}=\sigma_1\sqrt{1-r^2_{12}}\ \sqrt{1-r^2_{13\cdot2}}\ \sqrt{1-r^2_{14\cdot23}}\cdots\cdots\cdots\text{(公式一四六)}$$

$$P.E._{1\cdot234}=0.6745\times S_{1\cdot234}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式一四七)}$$

茲即根據表九十一,一八九〇年至一九二二年美國開痕撒斯省玉蜀黍實際生產百分比與六,七,八月平均溫度之各級純相關,核算其標準誤如下:

$\sigma_1\quad=34.476$

$r_{12}\quad=-0.4814$

$r_{13\cdot2}=-0.6358$

$r_{14\cdot23}=-0.3681$

應用公式一四六

$$S_{1\cdot234}=34.476\times\sqrt{1-(-0.4814)^2}\times\sqrt{1-(-0.6358)^2}\times\sqrt{1-(-0.3681)^2}$$

$$=34.476\times0.8765\times0.7719\times0.9298$$

$$=21.6880$$

純迴歸方程標準誤之意義,即示根據某年六,七,八月平均溫度推測該年玉蜀黍實際生產百分比之數值,其與眞實百分比之差,不出加減1標準誤(即 $\pm1S_{1\cdot234}$)範圍內之機遇為百分之68.26.例如一九二〇年六月之平均溫度為72.8,七月之平均溫度為77.6,八月之平均溫度

爲 72.9, 推測該年玉蜀黍之實際生產百分比爲121.2033, 其與眞實生產百分比之差,不出 ±21.6880(卽 $\pm 1S_{1.234}$) 之外者,其機遇爲 68.26%, 不出 ±65.0640 (卽 $\pm 3S_{1.234}$)之外者,其機遇爲 99.73% 是也.至於純迴歸方程之機誤,則可應用公式一四七測定之如下:

$$P.E._{1.234}=0.6745\times 21.6880$$

$$=14.6286$$

純迴歸方程機誤之意義,卽示根據某年六,七,八月平均溫度.推測該年玉蜀黍實際生產百分比之數值,其與眞實百分比之差,不出 ±14.6286(卽 $\pm 1P.E._{1.234}$)之外者,其機遇爲百分之 50,不出 ±58.5144(卽 $\pm 4P.E._{1.234}$)之外者,其機遇爲百分之 99.30 是也.

本章應用公式

(公式一一五) 算術平均數之標準誤

$$S_M=\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

(公式一一六) 算術平均數之機誤

$$P.E._M=\frac{0.6745\sigma}{\sqrt{N}}$$

(公式一一七) 算術平均數之機誤 (在正態曲線下)

$$P.E._M=\frac{Q.D.}{\sqrt{N}}$$

(公式一一八) 中位數之標準誤

$$S_{Md}=1.25331\times\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

（公式一一九）中位數之機誤

$$P.E._{Md}=\frac{0.8454\sigma}{\sqrt{N}}$$

（公式一二〇）中位數之機誤（在正態曲線下）

$$P.E._{Md}=1.25331\times\frac{Q.D.}{\sqrt{N}}$$

（公式一二一）四分位數之標準誤

$$S_Q=\frac{1.36263\sigma}{\sqrt{N}}$$

（公式一二二）四分位數之機誤

$$P.E._Q=\frac{0.9191\sigma}{\sqrt{N}}$$

（公式一二三）四分位數之機誤（在正態曲線下）

$$P.E._Q=1.36263\times\frac{Q.D.}{\sqrt{N}}$$

（公式一二四）兩算術平均數相差之標準誤

$$S_m=\sqrt{S^2_{M_1}+S^2_{M_2}}$$

（公式一二五）兩算術平均數相差之機誤

$$P.E._m=\sqrt{P.E.^2_{M_1}+P.E.^2_{M_2}}$$

（公式一二六）兩中位數相差之標準誤

$$S_{md}=\sqrt{S^2_{Md_1}+S^2_{Md_2}}$$

（公式一二七）兩中位數相差之機誤

$$P.E._{md}=\sqrt{P.E.^2_{Md_1}+P.E.^2_{Md_2}}$$

（公式一二八）兩四分位數相差之標準誤

$$S_q=\sqrt{S^2_{Q_1}+S^2_{Q_2}}$$

（公式一二九）兩四分位數相差之機誤

$$P.E._q=\sqrt{P.E.^2_{Q_1}+P.E.^2_{Q_2}}$$

（公式一三〇）四分位差之標準誤

$$S_{Q.D.}=0.78672\times\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

（公式一三一）四分位差之機誤

$$P.E._{Q.D.}=\frac{0.5306\sigma}{\sqrt{N}}$$

（公式一三二）四分位差之機誤（在正態曲線下）

$$P.E._{Q.D.}=0.78672\times\frac{Q.D.}{\sqrt{N}}$$

（公式一三三）標準差之標準誤

$$S_\sigma=\frac{\sigma}{\sqrt{2N}}$$

（公式一三四）標準差之機誤

$$P.E._\sigma=\frac{0.6745\sigma}{\sqrt{2N}}$$

（公式一三五）標準差之機誤（在正態曲線下）

$$P.E._\sigma=\frac{Q.D.}{\sqrt{2N}}$$

（公式一三六）相關係數之標準誤

$$S_r=\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$$

（公式一三七）相關係數之機誤

$$P.E._r=\frac{0.6745(1-r^2)}{\sqrt{N}}$$

（公式一三八）相關比之標準誤

$$S_\eta=\frac{1-\eta^2}{\sqrt{N}}$$

（公式一三九）相關比之機誤

$$P.E._{\eta}=\frac{0.6745(1-\eta^2)}{\sqrt{N}}$$

（公式一四〇）等級相關係數之標準誤

$$S_{\rho}=\frac{1-\rho^2}{\sqrt{N}}$$

（公式一四一）等級相關係數之機誤

$$P.E._{\rho}=\frac{0.6745(1-\rho^2)}{\sqrt{N}}$$

（公式一四二）根據 X 推測 Y 之標準誤

$$S_y=\sigma_y\sqrt{1-r^2}$$

（公式一四三）根據 Y 推測 X 之標準誤

$$S_x=\sigma_x\sqrt{1-r^2}$$

（公式一四四）根據 X 推測 Y 之機誤

$$P.E._y=0.6745\sigma_y\sqrt{1-r^2}$$

（公式一四五）根據 Y 推測 X 之機誤

$$P.E._x=0.6745\sigma_x\sqrt{1-r^2}$$

（公式一四六）根據 X_2, X_3 及 X_4 推測 X_1 之標準誤

$$S_{1.234}=\sigma_1\sqrt{1-r^2_{12}}\ \sqrt{1-r^2_{13\cdot2}}\ \sqrt{1-r^2_{14\cdot23}}$$

（公式一四七）根據 X_2, X_3 及 X_4 推測 X_1 之機誤

$$P.E._{1\cdot234}=0.6745\times S_{1.234}$$

問　　題

1. 取樣之多寡及離中差之大小,如何能影響算術平均數之可靠性?

2. 測定算術平均數及兩算術平均數相差可靠性之方法各如何?試略述之。

3. 試證 $P.E.=0.6745\sigma$。

4. 試詳述算術平均數標準誤及機誤之意義.

5. 測定中位數,四分位數及兩中位數,兩四分位數相差可靠性之方法各如何?試略述之。

6. 兩算術平均數及兩中位數相差標準誤及機誤之意義各如何?試詳述之。

7. 測定四分位差及標準差可靠性之方法如何?試略述之。

8. 相關係數,相關比及等級相關係數標準誤及機誤之意義各如何?試詳述之。

9. 測定簡迴歸及純迴歸方程可靠性之方法各如何?試略述之。

10. 試詳述簡迴歸及純迴歸方程標準誤及機誤之意義。

習題三十

某校甲乙兩級學生成績分配表

成績	甲級學生	乙級學生
40——44	1	2
45——49	2	2
50——54	4	1
55——59	4	3
60——64	5	6
65——69	8	7
70——74	12	10
75——79	18	19
80——84	7	8
85——89	3	2
90——94	1	0
總計	65	60

試用某校甲乙兩級學生成績之分配,計算以下諸數:

(1) 甲乙兩級學生算術平均成績之標準誤及機誤.

(2) 甲乙兩級學生中位成績之標準誤及機誤.

(3) 甲乙兩級學生第一及第三四分位成績之標準誤及機誤.

(4) 甲乙兩級學生算術平均成績相差之標準誤及誤機.

(5) 甲乙兩級學生中位成績相差之標準誤及機誤.

(6) 甲乙兩級學生第一及第三四分位成績相差之標準誤及機誤.

(7) 甲級學生成績四分位差之標準誤及機誤.

(8) 乙級學生成績標準差之標準誤及機誤.

習題三十一

試用習題二十四 5317 對夫妻年齡相關係數及簡迴歸方程,計算以下諸數:

(1) 相關係數之標準誤.

(2) 相關係數之機誤.

(3) 根據妻之年齡(X)推測夫之年齡(Y)之標準誤.

(4) 根據妻之年齡(X)推測夫之年齡(Y)之機誤.

(5) 根據夫之年齡(Y)推測妻之年齡(X)之標準誤.

(6) 根據夫之年齡(Y)推測妻之年齡(X)之機誤.

習題三十二

試用習題二十五某銀行行員任職年數及月俸之相關比,及習題二十七 2,000 對父子眼球顏色之等級相關係數,計算以下諸數:

(1) η_{yx} 之標準誤.

(2) η_{yx} 之機誤。

(3) η_{xy} 之標準誤。

(4) η_{xy} 之機誤。

(5) 等級相關係數之標準誤。

(6) 等級相關係數之機誤.

習題三十三

試用習題二十九,一八九〇年至一九二二年美國開痕撒斯省玉蜀黍收穫量與六,七,八月平均溫度之一級及二級純相關及純迴歸方程,計算以下諸數:

(1) 根據 X_2, X_3 及 X_4 推測 X_1 之標準誤及機誤。

(2) 根據 X_1, X_3 及 X_4 推測 X_2 之標準誤及機誤。

(3) 根據 X_1, X_2 及 X_4 推測 X_3 之標準誤及機誤。

(4) 根據 X_1, X_2 及 X_3 推測 X_4 之標準誤及機誤。

第十一章 指 數

第一節 指數之意義及沿革

(一) 指數之意義

社會現象,錯綜紛紜,奇佹繁賾,本至變而難測;今欲窺其陳迹,定其趨向;察其眞情,宣其祕奧,則指數尙矣.例如物價,以物品之整千累萬,價格之漲跌無常,每爲巧者所不能計.然依一定法則,化一羣物價爲若干簡單之百分率或千分率,則若干指數之間,卽足囊括一切.故其所以名之爲指數者,卽從英文Index一字譯出,意謂可以指出狀況也.卽如民國二十二年至二十五年上海市粳米,麵粉,青菜,鮮豬肉,鮮鴨蛋,細布及肥皂之每年平均價格如下:

表一〇〇 上海市零售物價表

民國二十二年至二十五年

(零售物價表)

物品	單位	二十二年平均價	二十三年平均價	二十四年平均價	二十五年平均價
粳米	市石	$7.567	$9.333	$10.872	$9.943
麵粉	包	2.425	2.289	2.600	3.448
青菜	市斤	0.036	0.027	0.017	0.035
鮮豬肉	市斤	0.313	0.282	0.244	0.292
鮮鴨蛋	個	0.024	0.021	0.021	0.024
細布	市尺	0.098	0.088	0.086	0.091
肥皂	塊	0.060	0.055	0.050	0.051

觀上表可知二十三年上海市每市石粳米之平均零售價,較二十二年漲$1.766.二十四年較二十二年漲$3.305,較二十三年漲$1.539.二十五年較二十二年漲$2.376,較二十三年漲$0.610,較二十四年跌$0.929.換言之,上海市每市石粳米之平均零售價於此四年間,以二十二年爲最低,二十三年次之,二十五年又次之,二十四年最高.麵粉以二十五年之價格最貴.他如青菜,鮮豬肉,鮮鴨蛋,細布及肥皂等,俱以二十二年之平均價爲最高.各物單獨觀察如此,若綜合觀之,其平均漲跌之程度如何?則無指數何能示之?蓋各物單位不同,其綜合變化,自不能直接計算;又以各物貴賤懸殊,極賤者自不能與極貴者作直接比較;設或能比較而記以某貨於某年平均每市石,每包,每市斤,每個,每市尺,每塊較某年漲或跌幾元幾角幾分幾釐,若是雖巧歷之士,亦難明記.是欲以簡明之數字,闡示其究竟,則捨指數莫屬.蓋指數之性質,乃爲相對的,而非絕對的;以某年(或某時期)之數,或其他平均數作爲基本數,基本數常爲一百分,而以他年(或他時期)之數目折算相當於基本數百分之幾,因此貨品單位雖各不同,單位價格雖各懸殊,一若折成百分數,其困難俱可迎刃而解;且貨物間相互比較,亦可於此實現.故指數不僅能將有悠久歷史之現象,用簡單之數字表示之,即各種殊異之事實,亦可藉以呈現.鑒往知來,摘隱倮纖,乃

即指數之功用也.

(二) 指數之沿革

考指數之歷史,由來已久;十七世紀末葉,有英人伏亨(Rice Voughan)著硬貨及其鼓鑄論(A Discourse of Coin and Coinage, 1675),測定當時勞資雙方對於貨幣之交換價值.其測定方法,即採用穀,家畜,魚,布帛,及革等為樣品,以一三五二年為基年,而以一六五〇年之物價作比較,此乃物價指數之首創.

一七〇七年佛里特烏(Bishop Fiest Wood)著寶貨事歷(Chronicon Preciosum),將一四四〇年至一四八〇年間英幣五鎊所購之穀物,肉類,飲料,布帛等之數量,與一七〇七年同一金額購得之數量比較.並研究六百年間三十九種物品價格之變動.故佛氏於物價指數發達史中,極有功績之人物也.

一七三八年法人提篤(Dutot)更將路易十二及路易十四時代之物價,而比較其總數.此乃近世綜合法之濫觴.

一七四七年麥賽邱賽茨領地,以紙幣貶價,不利於承受人,乃有表式之清償標準.其採用之方法,亦即今日之綜合法也.

自歐人發現美洲後,因有多量之金銀由美輸歐,歐洲物價因之驟行增漲.意人加里(G. R. Carli)即本新大

陸之發現,對於貨幣購買力之影響而研究之.彼以一七五○年穀,酒,油之價格,與一五○○年同樣之三種物價比較之,其所得之百分數復相加而三分之,其計算法乃卽今日之算術平均法也.

一七九八年英人旭克欒愛佛林勳爵有制定衡量標準芻議之披露,對於指數之原則,述之殊詳;此於指數之進展史上亦值得記述者也.

一八三三年因有拿破崙戰爭之影響,與不換紙幣流行之結果,物價之變動,益形劇烈,於是有斯克洛潑者起而主用「表式之物價標準」藉以測定此項物價變動之程度.自一八四九年後,美國新舊金山先後發現大批黃金,因是金價大跌,物價驟漲,於是對於物價指數之研究者,益見衆多.英儒奇馮氏於此貢獻尤多.蓋奇氏主張用幾何平均數以測定物價之變遷.並追溯英國之物價指數,直至一七八二年爲止.其於斯克洛潑氏之表式標準,稱道不置.因此引起後人研究物價指數之興趣不少.美國費暄(Irving Fisher)教授尊之爲指數之父,良有以也.

一八六九年英倫經濟週報,發表一種指數,以一八四五年至一八五○年之物價,作爲基價;自後按期披露,迄今從未間斷.是乃今日各國物價指數中歷史之最久者.

一八七三年後,因世界物價轉漲而跌,意人美山達格里即於一八八〇年就平均數之性質而研究其於指數上之應用.是亦物價指數上之新研究.

一八八一年美國造幣廠廠長盤卻特,編製一八二四年至一八八〇年之物價指數,此乃美國第一之物價指數.

一八九六年後世界物價轉跌而漲,歐戰開始後,漲風益熾;於是物價指數即如雨後春筍,編製日多,應用益廣.即如美國之勃拉特斯脫里指數(Brodstreet's Index of Wholesale Prices),始於一八九二年,包括物品共九十六種.滕恩指數(Dun's Index of Wholesale Prices),始於一九〇一年,包括物品三百種.勞工統計局之指數(Index Numbers of The U. S. Bureau of Labor Statistics),始於一九〇二年,包括物品四百零四種.聯合準備銀行管理局之指數(Index Numbers of The Federal Reserve Board),始於一九一八年,包括物品九十至一百多種.及費暄氏指數(Fisher's Weekly Index Numbers of Wholesale Prices),始於一九二三年等,不勝枚舉.其他如英,法,德,加拿大,澳大利亞,南非洲,日,意,比,丹,荷蘭,挪威,瑞士,西班牙,印度,新西蘭等國,俱有政府或私人編製之指數.故統計學家新豆(Care Snyder)謂今日為指數時代.環顧全球,其言信不誣也.至於吾國編製指數之簡史,容於下章第一節中述之.

第二節 指數之種類

指數之種類甚多,若依比較對象及所用材料之不同,可分下列數種:

(一) 依比較對象之不同分

(1)時間性數字系列指數——時間性數字系列指數,乃以時間爲基性,而求得各時期之比率.惟以其所用基期(Base period)之不同,又可分爲定基,環比及鎖比指數等三種:

(A)定基指數——指數之編製,俱用相對數值(Relatives即百分率或稱比率)替代絕對數值.相對數值之計算,則必選定某時期爲基期,作計算時期(Given period)比較之標準.例如表一〇一第三行即以十九年上海市各業工人平均每小時之工資率 $0.059作爲基數,等於100,其他各年即以此爲比較之標準,求得相當之比率,此種比率乃即定基指數 (Fixed base index numbers) 也.

(B)環比指數——如指數之計算,以上年之實價,作爲本年之基價;本年之實價作爲明年之基價;如此各以上一年之實價與下一年之實價相比而得之比率,謂之環比指數(Link index numbers).例如以十九年之工資率作爲 100, 求得二十年之指數爲 96.61;

再以二十年之工資率作為 100, 求得二十一年之指數為 100.00, 如此而下,即得各年環比指數如下表第四行.

(C)鎖比指數——定基與環比指數之外,尚有一種鎖比指數 (Chain index numbers), 即以環比之各環相乘而得之比率.例如二十年工資率之環比為 96.61, 二十一年為 100, 兩環相乘,即得二十一年之鎖比指數為 96.61;二十二年之鎖比乃即二十年,二十一年及二十二年環比連乘之積,亦即二十一年鎖比與二十二年環比相乘之積.惟

$$\text{二十年之定基指數}=\frac{\text{二十年之工資率}}{\text{十九年之工資率}}\times 100$$

$$\text{二十年之環比指數}=\frac{\text{二十年之工資率}}{\text{十九年之工資率}}\times 100$$

$$\therefore\ \text{二十年之鎖比指數}=\frac{\text{二十年之工資率}}{\text{十九年之工資率}}\times 100$$

$$=\text{二十年之定基指數}$$

$$\text{二十一年之定基指數}=\frac{\text{二十一年之工資率}}{\text{十九年之工資率}}\times 100$$

$$\text{二十一年之環比指數}=\frac{\text{二十一年之工資率}}{\text{二十年之工資率}}\times 100$$

$$\therefore\ \text{二十一年之鎖比指數}=\frac{\text{二十年之工資率}}{\text{十九年之工資率}}$$

$$\times\frac{\text{二十一年之工資率}}{\text{二十年之工資率}}\times 100$$

$$=\frac{\text{二十一年之工資率}}{\text{十九年之工資率}}\times 100$$

$$=\text{二十一年之定基指數}$$

$$\text{二十二年之定基指數}=\frac{\text{二十二年之工資率}}{\text{十九年之工資率}}\times 100$$

$$\text{二十二年之環比指數}=\frac{\text{二十二年之工資率}}{\text{二十一年之工資率}}\times 100$$

$$\therefore\ \text{二十二年之鎖比指數}=\frac{\text{二十年之工資率}}{\text{十九年之工資率}}$$

$$\times\frac{\text{二十一年之工資率}}{\text{二十年之工資率}}$$

$$\times\frac{\text{二十二年之工資率}}{\text{二十一年之工資率}}\times 100$$

$$=\frac{\text{二十二年之工資率}}{\text{十九年之工資率}}\times 100$$

$$=\text{二十二年之定基指數}$$

故各年之鎖比指數,各與其定基指數相等.表一〇一第五行,民國二十二,二十三及二十四年之鎖比指數,雖各與定基指數相差 0.01, 然此由於小數四捨五入所致,非計算上之謬誤.惟若工資率或計算指數之物品不止一種時,則此兩指數之數值必不相同也.

表一〇一　歷年上海市工資率指數表

民國十九年至二十四年

（定基,環比及鎖比指數比較表）

年次	平均每小時工資率	定基指數 十九年指數=100	環比指數	鎖比指數
民國十九年	$0.059	100.00		
二十年	0.057	96.61	96.61	96.61
廿一年	0.057	96.61	100.00	96.61
廿二年	0.058	98.31	101.75	98.30
廿三年	0.056	94.92	96.55	94.91
廿四年	0.053	89.83	94.64	89.82

(2)地域性數字系列指數——地域性數字系列指數,乃以地域爲基性,而求得各地域之比率.例如民國二十三年我國各地機器業男工平均每月工資如下表第二行,若以南京男工之工資 $27.67 作爲基數,求得各地指數如下表三行:

表一〇二　民國二十三年各地機器業男工平均每月工資指數表

（地域性數字系列指數表）

地域別	每月工資	指數 南京指數=100
南京	$27.67	100.00
青島	31.43	113.59
漢口	32.30	116.73
天津	29.44	106.40
杭州	29.37	106.14
無錫	16.04	57.97

(3)事實性數字系列指數——事實性數字系列指數乃以事實爲基性,而求得他事實之比率.例如民國二十四年上海市各業工人每小時工資率如下表第二行,若以棉紡業工人每小時工資率 $0.040 爲基數,求得其他各業指數如下表第三行:

表一〇三　民國二十四年上海市各業工人每小時工資率指數表

(事實性數字系列指數表)

業別	每小時工資率	指數 棉紡業指數=100	業別	每小時工資率	指數 棉紡業指數=100
棉紡業	$0.040	100.00	毛織業	$0.051	127.50
機器業	0.090	225.00	內衣業	0.068	170·00
造船業	0.140	350.00	織襪業	0.057	142.50
火柴業	0.050	125.00	麵粉業	0.044	110.00
搪瓷業	0.055	137.50	榨油業	0.052	130.00
繅絲業	0.029	72.50	烟草業	0.061	152.50
絲織業	0.074	185.00	造紙業	0.062	155.00
棉織業	0.048	120.00	印刷業	0.139	347.50

(二)　依所用資料之不同分

指數如依所用資料之不同分,種類甚多.茲舉其最著者計有下列數種:

(1)物價指數——在現代經濟制度之下,我人之經濟行爲,莫不受物價之支配,而物價參差不齊,苦難捉摸,物價指數 (Index numbers of prices) 之編製,隨需要而起.

古時,物價變動極緩,影響社會經濟較小;今則通貨之漲縮無常,物價之變動至烈,其影響社會經濟極大.故凡研究人民生活程度之高低,貨幣購買力之大小等,靡不藉物價指數以窺測之.此物價指數之所以重要也.物價指數又以所用物價之不同,可分為下列三種:

(A)批發物價指數——批發物價,為商人大宗買賣物品時所議定之價格,以此價格編成指數,即批發物價指數(Index numbers of wholesale prices).其效用,乃在測定市場上一般物價之漲跌,及商業循環之眞相者也.

(B)輸出入物價指數——輸出入物價,為國際貿易商人所宣佈之價格,或進出口商在貨物通過海關時所報,或海關所估之價格.以此價格編製之指數,即輸出入物價指數(Index numbers of export and import prices).編製此種指數之目的,乃在表示國際市場上,一國人民實際所付價格之變動,並可藉以推測國際貿易盛衰之趨勢.

(C)零售物價指數——零售物價,係消費者直接購買物品所付之價格,以此價格編成指數,即所謂零售物價指數(Inder numbers of retail prices)是也.編製此種指數之目的,乃在測定人民生活程度之高低及貨幣購買力之强弱,研究社會經濟者俱以此種

指數爲立論之根據.

(2)生活費指數——生活費乃維持人類生存最低限度之費用,如衣,食,住及燃料等費用是.生活費指數(The cost of living index numbers)乃卽測量生活費之變遷,表示生活程度之高低者也.

(3)工資指數——工資指數(Index numbers of Wages)乃以工人工作之報酬編成之指數.其效用在測定工人工作酬勞之變遷,並可藉以解決勞資糾紛問題.

(4)外匯指數——外匯指數(Index numbers of foreign exchange)者測量國外匯率之變動而編製之指數也.其在用金國與用金國之間,可不必有基期而以平價爲基數.惟在用銀國與用金國之間,則須有基期,方可編製也.

(5)國外貿易指數——國外貿易指數(Index numbers of foreign trade)乃以一國對外貿易額編成,用以表示對外貿易之狀況者也.此種指數宜用對外貿易量編製之,否則卽不足以確示對外貿易之實際趨勢,蓋貿易值之增加,不能認爲貿易額亦增高,自亦不能肯定對外貿易趨勢之增漲.

(6)證券指數——證券指數(Index numbers of securities)乃以公債券,公司股票及其他有價證券之價格或買賣數量等編製之指數.其效用,乃在窺測債券股票等

發行業務之盛衰,投資利益之大小者也.

指數除上述六種外,又有所謂生產量指數及消費量指數,用以測定供求之是否相應.成本指數,用以預測營業之盈虧,據爲定價之標準.種類之多,不勝枚舉,然物價指數乃指數中之最重要者,故以下數節專就編製物價指數而論,其他指數,大體相似,學者舉一反三,不難想像得之也.

第三節　物品及物價之選擇

(一) 擇定物品

編製物價指數之原料,則爲物價,然市上物品繁多,其應選取之品數,究以若干爲度,各家學說紛歧,迄無定律.茲舉各國編製之指數,其採用品數,列表示之如下:

(1)各國物價指數採用品數較多者:

(A)美國戰時實業部物價股(War Industrial Board, Price Section)指數,採用物品	1,366品
(B)美國勞工統計局(U. S. Bureau of Labor Statistics)一九一九年指數,採用物品	328品
(C)美國滕恩(Dun)指數,採用物品	300品

(2)各國物價指數採用品數較少者:

(A)英國薩安貝克(Sauerbeck)指數,採用物品	45品
(B)倫敦經濟週報社指數,採用物品	44品

(C)德國許米茨 (Schmitz) 指數,採用物品　29品

(D)美國奇勃孫 (Gibson) 指數,採用物品　22品

(3)中國現編各物價指數採用之物品數:

(A)廣州批發物價指數,採用物品　190品

(B)上海躉售物價指數,採用物品　153品

(C)青島批發物價指數,採用物品　120品

(D)漢口批發物價指數,採用物品　120品

(E)華北批發物價指數,採用物品　106品

(F)長沙批發物價指數,採用物品　105品

(G)南寧批發物價指數,採用物品　91品

(H)南京批發物價指數,採用物品　87品

(I)上海輸入物價指數,採用物品　82品

(J)上海輸出物價指數,採用物品　66品

(K)中國每日物價指數,採用物品　12品

觀上表物價指數之編製,其採用品數,多者逾千餘品,少者僅二十餘品,其品數之懸殊,已可睹見一般.然品數之多寡,對於編製指數時,有無巨大之影響?所編指數是否可以表示一般市價之變動?茲舉美國密乞爾氏 (W. C. Michell) 編製之六種品數不同之指數,(註一)列表於後,藉可窺測其究竟:

(註一) Bulletin No. 284 of the U.S. Bureau of Labor Statistics: "Index numbers of wholesale prices in the United States and foreign countries." P. 36.

表一〇四　美國六種物價指數比較表 一八九〇年至一九一三年

（一八九〇年至一八九九年之平均價格＝100）

（比較品數不同之物價指數表）

年次	甲 242品至261品	乙 145品	丙 50品	丁 40品	戊 25品	巳 25品
1890	113	114	114	113	115	113
1891	112	113	114	114	112	118
1892	106	106	105	105	103	112
1893	106	105	105	101	103	107
1894	96	96	94	93	92	96
1895	94	93	94	95	95	93
1896	90	89	87	88	88	85
1897	90	89	89	89	90	84
1898	93	93	95	95	96	90
1899	102	103	103	108	107	103
1900	111	111	112	115	113	109
1901	109	110	109	116	111	107
1902	113	114	116	122	116	117
1903	114	114	115	118	118	117
1904	113	114	116	118	122	110
1905	116	116	118	122	123	115
1906	123	122	123	128	130	122
1907	130	130	132	138	132	132
1908	122	121	125	129	124	122
1909	125	124	132	135	133	128
1910	130	131	135	141	133	134
1911	126	130	129	135	129	131
1912	130	134	138	142	140	138
1913	130	131	138	139	142	133

1890—1899年之平均	100	100	100	100	100	100
1900—1909年之平均	118	118	120	124	122	118
1910—1913年之平均	129	132	135	139	136	134
物價指數增(＋)或減(－)						
1896年較1890年	－23	－25	－27	－25	－27	－28
1907年較1896年	＋40	＋41	＋45	＋50	＋44	＋47
1908年較1907年	－8	－9	－7	－9	－8	－10
1912年較1908年	＋8	＋13	＋13	＋13	＋16	＋16
物價指數最高最低相差數	40	45	51	54	54	54
逐年平均變化	4.0	4.1	4.9	5.5	5.0	6.2

(註)　表中甲指數為美國勞工統計局所編之物價指數。

乙指數亦為美國勞工統計局編製,其所用物價與前指數同,惟前指數中,對於一種貨品,有採用一個以上之價格者,於乙指數中僅取其平均價格,故其結果,稍有差異。

丙指數取材於美國奇勃孫指數。

丁指數中包含物品二十項,每項物品分原料價與製品價二種,故用四十個物價編製之。

戊己二指數,則依取樣法任取重要物品二十五種編製之。

編製上列六指數之品數,多少不同;多者達二百五十餘品,少者僅二十五品;然其大體漲落之趨勢,略相髣髴.如一八九〇年至一八九六年之跌落,一八九六年至一九〇七年之上漲,以及一九〇八年之大跌,一九〇九年之恢復;及一九一〇年至一九一三年之忽漲忽落,則此六

指數之表示,初無二致.是以編製物價指數時,對於取樣問題,不在品數之多寡,而在所取貨樣之適當與否.蓋若選之得當,品數愈多,固可易取人信,然若選之失當,則雖多又奚益?

考市上貨品何止千萬,然物以類聚,釐然成羣,若細爲分析,則不外爲製造品與原料品;而原料品中又分爲農產,林產,畜產及礦產品;製造品中又分消費品及生產品是也.至於市價之變動,則彼此俱有相互之關係.如原料品價格之漲跌,常反映於製造品成本之高下;故製造品價格之變動,常隨原料品價格之上下而轉移.惟據美國密乞爾教授之調查,製造品價格之變動,不若原料品之劇烈耳.至於消費品與生產品價格之變動,彼此亦有唇齒之關,惟人民對於消費品之需要,常不受商情盛衰之影響,故其價格較生產品爲穩定而已.

綜觀上述,貨品過多,於計算及調查時俱感不便,更或因所選貨品不得其當,反足泯其眞確.然若品數過少,則掛一漏萬,不能代表一般物價之變動.是應折取中道,視所編指數之目的何在,而定其品數之多寡.至於貨品之選擇當不能偏重何方,蓋製造品與原料品及消費品與生產品等,其價格之變動,俱有相互牽涉之關係,前文已略言之.故若僅取原料品或製造品以編製之,則其影響於最後之指數,想必非吾人所能思議.例如一八六三

年至一八六五年間倫敦經濟週報社之指數,即其前車也.當時編製此指數之物價祇有二十二項,其中棉與棉製品獨佔其四;故當美國南北戰爭時,南部海港封鎖,棉運阻斷,棉價驟漲,該社之指數遂現異乎常態之飛漲.茲以薩安貝克之指數與之比較,則其謬誤立見:

一八六〇年經濟週報社指數為 100,薩安貝克指數亦為 100.

一八六一年經濟週報社指數為 102,薩安貝克指數為 100.

一八六二年經濟週報社指數為 109,薩安貝克指數為 106.

一八六三年經濟週報社指數為 136,薩安貝克指數為 109.

一八六四年經濟週報社指數為 145,薩安貝克指數為 112.

一八六五年經濟週報社指數為 136,薩安貝克指數為 106.

綜觀上述,吾人於選擇物品時,應注意之點如下:

(1)採入指數之物品,其價格之變動,彼此愈無關聯愈好.

(2)採入指數之物品,其價格之變動,與未採入指數物品之價格,彼此愈有關聯愈好.

(3)採入指數之物品,其本身之性質,彼此愈遠愈好.

(4) 採入指數之物品,其本身之性質,與未採入指數物品之性質,彼此愈近愈好.

(二) 選定物價

物價普通可分批發及零售二種,零售物價乃消費者購買物品時直接支付之價格,爲編製生活費指數之唯一資料.批發物價又可分爲下列數種:

(1) 市價——市價(Wholesale market price)爲製造商或批發商彼此交易之價格,因係同業,對於商品之鑑別能力豐富,對於市價變動之消息靈通,故欲測定貨幣購買力,市價爲最好之資料.

(2) 合同價——合同價(Contract price)爲某物品於已製成及未製成時所預定之價格.意政府及法國勒瓦叟氏(Levasseur)編製之指數,卽用此種物價.惟合同價多爲祕密價格,非若市價之公開易得.且其價目常較零售價略低,較批發價略高,似此非驢非馬,最不足以代表一般之物價,故用之者極少.

(3) 社團價——社團價爲公共機關如學校,醫院,兵站等購買物品時所付之價格.此種物價,因有以下諸缺點,故亦不宜於編製指數之用.

(A)貨物種類不普遍.

(B)貨物品質不劃一.

(C)含有零售價格之性質.

(4)海關價——海關價 (Import and export price) 爲進出口商將貨物通過海關時所報或海關估定之價格.英國商務局及德國沙答皮爾氏 (Soetbeer) 所編之指數,多用之.採用此種物價編製指數之優點有三:

(A)可以表示一國人民實際上所付或所受價格之變化.

(B)即可根據海關貿易報告册編製,不必另設機關調查之.

(C)所採用之貨品及價格皆與稅則有直接之關係,故可用作修正稅則之根據.

惟關價之變動,有由於物價本身之變動者,亦有由於進出口貨物品質上之參差者,則無從辨別.且商人報關時常欲減輕其稅則起見,致所報貨價常低於實價.故用關價編製指數,或常失之不確.

綜觀上述物價指數之編製以市價爲最適用.惟物品種類至多,即同一貨物,而品質有高下之分.同一品質,而牌號又有優劣之別,致市價高低不同.即在一日之間,同一貨物,同一品質,同一牌號,而開盤收盤之價格,亦各不同.是欲於一種貨品中找求一代表價,已不勝其煩.若欲於成千累萬之貨價中,尋求數百種之代表價,其實地調查之困難及繁重,不言可諭.近世指數專家如費暄(I. Fisher),鮑來 (A. L. Bowley),瓦爾須(C. M. Walsh),及密乞

爾 (W. C. Michell) 等,因感此種困難之難於解決,故特規定原則數條,茲錄於後,可資參照.

(1) 貨物品質不齊,而市價高低不一時,可取最高與最低之市價,而核算其中數.如某年米價最高為 $18, 最低為 $12, 則 $15 卽其中數,其與算術平均數不同,以其不受全體米價之制裁也.

(2) 代表一月或一年之市價,不宜採取月底月初或年底年初之價格,而宜採用月中(卽每月十五日)及年中(卽每年六七月之間)之價格,以其不受前月或前年之影響也.

(3) 若各交易機關所開之市場批發價,互相不同時,可採用交易最活動者以為標準.

(4) 於數種牌號不同之貨品間,欲採取一種牌號時,應取其流行最廣,而最足代表全類物品者為佳.

(三) 徵集物價

物品物價選定後,卽進而徵集物價.考物價之徵集,甚非簡易,我國自國民政府建都南京之後,中央各院部,省府各廳局等,類皆有統計局,統計處或統計股等之設立.機關組織,燦然大備;規程編訂,煥乎文章.有三年於茲矣,有五年十年於茲矣.然統計之編製,見諸公告者,能有幾何?結果確切,堪作中央施政之參照者,尤無可指名.但存舉辦統計之願,其不能實收統計之功者,乃卽在徵集

材料之困難耳.蓋材料之搜集,絕不能僅恃上級機關之美備,而尤有賴於下級幹部之健全,與乎人民對於統計之認識.即若委託調查之機關,敷衍搪塞,而材料不可靠也.或執行延緩,而時間性已失其效用也.或被詢者不知調查者之用意,而置之不答覆也.或被詢者因不明界說,而答非所問也.是雖費九牛二虎之力,成千累萬之法幣,仍一無所得;或得之而不適於用;或雖適用而已過時.若是雖有專門之統計家,良好之觀察法,欲爲編製,亦無從措手.況物價之研究,不外米,鹽,醬,醋之事,而米,鹽,醬,醋,素不爲士大夫所樂道.故欲羅輯材料,從事物價指數之編製,尤覺困難.惟若事前妥爲籌劃,訓練調查人員;事後嚴密審核,詳爲分析;持以毅力,運以精心,即一切更難得到之資料,亦可如願找求也.

第四節　基期及權數之規定

(一) 酌定基期

指數之作,如用實際價格之形式者,則無須選擇基價,故亦無所謂基期,如勃落突斯脫里指數(Brod-street's Index of Wholesale Prices)是也.惟若用相對價格(Relative prices)者,則於計算之時,必先選擇一時期以爲基期(Base period),作爲指數時期(Given period 亦稱計算時期)比較之標準.而此基期中之實際物價定爲一百,基期先後

之物價（即指數時期內之物價），俱以此基期內之物價除之，再乘 100，即得各物價之相對比價，末求比價之平均數，即得指數.

指數之基期可分二種：一曰固定基期 (Fixed base)，二曰連環基期 (Chain base). 固定基期即於選定一基期後，各指數時期之物價，俱以此基期之物價爲比較之標準，而得各時期之比價者也.至於連環基期則不然，其基期與年俱易，即如上年之物價，作爲本年之基價，本年之物價，作爲明年之基價.如此各以上一年爲基期，以比較時期極近，物價漲落較爲集中，其變化之測定，亦較容易而準確，此環比指數之優點也.如環比指數之各環相乘，即得鎖比指數，若物品祇一種，則此鎖比指數，即等於定基指數，前已設例證明.惟鎖比指數因各環間小數之四捨五入，不免有微細之錯誤，經過一二十年之久，此種錯誤，每愈積愈大，易與定基指數相去甚遠.大抵當物價下落時，鎖比指數之跌勢，小於定基指數，當物價上漲時，鎖比指數之漲勢，大於定基指數.我國現編物價指數，皆係定基指數，惟上海輸出入物價指數，曾一度試用連環基期，嗣亦改爲固定基期.然則基期應爲一星期乎？一月乎？一年乎？抑五年十年之平均乎？更應以何年，何月，何時期爲基期？此亦有一加討論之必要.

對於第一問題之解決，則與所取之平均法有關.如

用算術平均數,則以一年或一年以上者爲妥.蓋若基期中有一二項極漲或極跌之價格時,則其推計之比價勢必異常之低或異常之高,其影響於算術平均指數亦必巨大.故就物價漲跌之危險上立論,則一年比一月爲佳,而五年十年又勝於一年二年也.若用幾何平均數,則各時期比價與基期之關係較淺,即以一年或一月爲基期,亦無不可.若用中位數,則物品數多者,基期之影響,亦甚微細.至於指數基期究應選擇何年,何月,何時期?概括言之,乃愈近指數時期愈好.蓋指數基期與指數時期,相距愈遠,則比價之趨勢,愈形散漫,而物價升降之迹,愈不明顯,是以環比指數尤爲人所歡迎也.惟於選擇基期時應加注意者,即所選基期中有無特別事變?例如一九一四年至一九一九年歐洲大戰時,各國因受戰事之影響,物價俱見劇變,若選作基期,則所得指數,必無意趣.故於選擇基期時,應注意之點如下:

(1)社會經濟界之穩定——基期宜定於一般經濟及社會狀況穩定之時,不宜在經濟及社會狀況劇變之時.

(2)比價離中差之大小——編製物價指數時,宜採用物價平穩之時爲基期.惟物價之平穩與否,可以該時期比價離中差之大小測定之.蓋物價平穩之時,各比價之離中差及離中係數必小,非然者必大.茲更設例示之如下:

表一〇五 歷年上海市工人生活費指數逐月比較表

民國二十二年至二十五年（民國十五年指數＝100）

（測驗物價平穩年表）

月次	二十二年		二十三年		二十四年		二十五年		四年平均	
	指數	離中差	指數	離中差	指數	離中差	指數	離中差	指數	離中差
一月	103.48	7.66	92.82	4.53	102.87	4.69	103.64	1.25	100.70	0.00
二月	103.22	7.40	93.46	3.89	102.05	3.87	104.96	0.07	100.92	0.22
三月	100.94	5.12	89.63	7.72	97.49	0.69	107.10	2.21	98.79	1.91
四月	95.97	0.15	87.63	9.72	98.74	0.56	103.90	0.99	96.56	4.14
五月	95.59	0.23	89.14	8.21	97.62	0.56	102.68	2.21	96.26	4.44
六月	94.26	1.56	91.66	5.69	100.04	1.86	102.74	2.15	97.18	3.52
七月	96.22	0.40	101.23	3.88	95.60	2.58	105.44	0.55	99.62	1.08
八月	95.55	0.27	105.86	8.51	96.82	1.36	105.76	0.87	101.00	0.30
九月	95.66	0.16	106.57	9.22	95.72	2.46	104.82	0.07	100.69	0.01
十月	97.56	1.74	102.65	5.30	97.54	0.64	105.03	0.14	100.70	0.00
十一月	94.25	1.57	104.10	6.75	101.49	3.31	104.21	0.68	101.01	0.31
十二月	91.15	4.67	102.93	5.58	100.46	2.28	108.86	3.97	100.85	0.15
全年中位指數	95.82		97.35		98.18		104.89		100.70	
各月離中差總計		30.93		79.00		24.86		15.16		

民國二十二年各月指數之平均差及平均差係數如下：

$$M.D. = \frac{30.93}{12} = 2.578$$

$$V\delta = \frac{2.578}{95.82} = 0.027$$

民國二十三年各月指數之平均差及平均差係數如下:

$$M.D.=\frac{79.00}{12}=6.583$$

$$V\delta=\frac{6.583}{97.35}=0.068$$

民國二十四年各月指數之平均差及平均差係數如下:

$$M.D.=\frac{24.86}{12}=2.072$$

$$V\delta=\frac{2.072}{98.18}=0.021$$

民國二十五年各月指數之平均差及平均差係數如下:

$$M.D.=\frac{15.16}{12}=1.263$$

$$V\delta=\frac{1.263}{104.89}=0.012$$

綜觀上述,可知民國二十五年之離中係數爲最小,故就此四年中,以二十五年之物價爲最平穩,若採作基期,則較優於其他各年也.

指數之編製如以一月爲基期,則各月平均比價之離中差,即可測定各月價格之穩定與否.前例五月之離中差最大,即示該月物價最不平穩.一月及十月之離中差最小,即示各該月物價最近常態.故若用作基期,編製指數,則較優於其他各月也.

(3)基價供給之詳確——基期必爲一時期能供給十分

詳盡準確之物價者,譬如調查初始,所得資料必不詳確,若採作基期,易生謬誤.

考世界各國本以一九一三年爲基期,然自一九二七年九月美國勞工統計局指數,毅然改用一九二六年(即民國十五年)爲基期後,接踵而改用該年爲指數基期者,則有費暄教授之指數,加拿大指數及芬蘭指數等.查該年適爲我國國民政府奠都南京之前一年,於此開始,蓋猶取歐戰前一年(一九一三年)爲基期,藉可表明新舊遞嬗間之變動.天津南開大學經濟研究所所編華北批發物價指數,上海財政部國定稅則委員會所編上海躉售物價指數,上海輸出入物價指數,上海生活費指數等,亦先後改用是年爲基期,是乃適應潮流,便於研究及比較也.

(二) 規定權數

貨物交易之多寡,與乎民衆需要程度之大小,常因物品性質之不同而異.貨物價格之穩定與否,即依貨物需要程度之高下而不同.大抵需要較大之物品,其價格之變動,普通常較需要小而含有投機性之貨物爲穩定.故於編製指數之際,對於此兩種貨品,不可不有輕重軒輊之分.而分別輕重軒輊之方法,即所謂「加權」(Weighting) 也.

查物價指數本可分爲二種:即加權指數 (Weighted

index numbers)與簡單指數(Simple index numbers)是也。不問物品之輕重,而使各項物價之變化,有同等之影響者,是曰簡單指數.視各項物品輕重輊軒之不同,而權重其變化之影響者,是曰加權指數.然所謂簡單指數者,並非絕無權數,蓋如美國勃落突斯脫里指數(Brodstreet's Index of Wholesale Prices)內中包含物品九十六種,各物權度,俱以一磅為單位.而其指數乃即各物每磅價格之和.是以表面上觀之,似無權數之可言,然課其內容,各項價格對於最後指數之影響,則隨其每磅價格之高低而有大小之不同.故雖曰簡單指數,實即無意義之加權指數也.

指數之加權與否,其影響於最後之指數,並不甚大。蓋據愛奇渥斯氏之試驗,權數之誤,影響於指數者不過百分之五,而物價之誤,則影響於指數者有百分之二十至百分之二十五之巨.更據密乞爾氏之報告,簡單指數與加權指數之差,往往不及百分之十,而加權指數之編製,十倍於簡單指數之困難.主不用加權之設者,其理由即在此點.

加權指數與簡單指數之差別,雖甚微細,然在理論上言之,加權指數當勝於簡單指數.蓋簡單指數中無意義之權數,當不若加權指數中合理權數之為美也.茲將權數之種類及權數之制度略述之如下:

(1)權數之種類

(A)以物值爲權數——指數之用比價編製者,應以共同單位之物值爲權數.

(B)以物量爲權數——指數之用實價編製者,應以物品之生產,消費或交易等之數量爲權數.

(2)權數之制度

(A)固定權數制——固定權數制乃卽以同一之權數,權重各年之物價編製而成之指數.其優點,卽能表示歷年純粹物價之變動.然其劣點,使與年俱變之各品重要程度,一視同仁而失其確度.

(B)變動權數制——物品之重要程度,隨時間之過去而不同,用不固定(卽變動)權數編製之指數,自易顯示各期之眞情.惟此種指數之變動性,含有兩種原素,一爲物價本身之變動,一爲權數之變動,致物價變動之淨趨勢,混雜不顯.

(C)固定及變動權數兼用制——單用固定權數,固使指數失確,單用變動權數,不僅使物價之淨變動,混統不顯,且每年調查或徵集權數,於事過繁,折衷之道,權數應經五年或十年而更換之,方可兩取其利,使指數益增其價值也.

我國現編批發物價指數,皆係不加權者,蓋因國內尚無生產,消費及交易統計可資根據故也.惟各指數之編製

均參酌交易狀況,或需要程度,對於物品之分配,略有相當之比例而已.上海工人生活費指數,係用家計統計之每家消費量作爲權數;上海輸出入物價指數,卽以民國十四年,十五年及十六年之平均輸出或輸入各品貨值,作爲權數;惟自始至終,俱以同一權數權重,故係採用固定權數制.

第五節 計算指數之方法

計算指數之公式,據費暄教授在指數論(The Making of Index Numbers)一書中例舉,共有一百三十餘種,其中計算煩複,意義晦澀者有之;計算簡賅,瑕疵百出者,亦有之.玆特舉其最切實用者三法述之如下:

(一) 綜合比率法

用綜合比率法(Ratio of aggregates)計算之指數,名曰綜合指數(The aggregative index numbers 簡寫爲 I_A).其計算方法,卽將計算時期各品價格之總和,爲基期各品價格之總和除之,復乘 100 卽得.此種指數,因有加權與不加權之別,又可分爲下列二種:

(1) 簡單綜合指數 —— 簡單綜合指數(Simple aggregative index numbers)卽不加權之綜合指數,其計算公式如下:

設 I_A 爲簡單綜合指數.

P_1 爲計算期之物價.

P'_1 爲計算期第一種物品之價格.

P''_1 爲計算期第二種物品之價格.

P'''_1 爲計算期第三種物品之價格.

P_0 爲基期之物價（簡稱基價）.

P'_0 爲基期第一種物品之價格.

P''_0 爲基期第二種物品之價格

P'''_0 爲基期第三種物品之價格.

Σ 爲總和之記號.

$$I_A=\frac{P'_1+P''_1+P'''_1+\cdots\cdots}{P'_0+P''_0+P'''_0+\cdots\cdots}\times 100$$

$$=\frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0}\times 100 \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式一四八)}$$

例如民國二十年至二十五年上海市十五品零售物價如下表:

表一〇六 歷年上海市十五品零售物價表

民國二十年至二十五年

（計算簡單綜合指數表甲）

品別	單位	二十年	廿一年	廿二年	廿三年	廿四年	廿五年
粳米	市石	$11.310	$10.300	$7.567	$9.333	$10.872	$9.943
麵粉	包	2.925	2.818	2.425	2.289	2.600	3.448
豆腐	十塊	0.074	0.070	0.066	0.063	0.061	0.072
青菜	市斤	0.045	0.036	0.036	0.027	0.017	0.035
鮮豬肉	市斤	0.335	0.370	0.313	0.282	0.244	0.292
鮮魚	市斤	0.216	0.180	0.192	0.173	0.149	0.163

鮮鴨蛋	個	0.032	0.027	0.024	0.021	0.021	0.024
豆　油	市　斤	0.187	0.169	0.171	0.126	0.169	0.241
食　鹽	市　斤	0.071	0.071	0.082	0.102	0.104	0.112
白　糖	市　斤	0.136	0.202	0.214	0.182	0.176	0.205
細　布	市　尺	0.119	0.122	0.098	0.088	0.086	0.091
條格布	市　尺	0.072	0.071	0.065	0.061	0.057	0.060
廢木柴	市　斤	0.013	0.014	0.015	0.014	0.013	0.014
火　柴	十　匣	0.130	0.104	0.099	0.094	0.092	0.100
肥　皂	塊	0.065	0.065	0.060	0.055	0.050	0.051
總　計		15.730	14.619	11.427	12.910	14.711	14.851

計算簡單綜合指數即將各年各品價格相加,得二十年之總合價為$15.730,二十一年為$14.619,二十二年為$11.427,二十三年為$12.910,二十四年為$14.711,二十五年為$14.851.如以二十年為基期,則二十年之總合價$15.730為基價($\Sigma P_0$),等於100,求得其他各年之指數如下:

表一〇七　歷年上海市十五品零售物價指數表

民國二十年至二十五年

(民國二十年指數=100)

(計算簡單綜合指數表乙)

年　次	十五品綜合價 ΣP	簡單綜合指數 $\frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0}\times 100$
民國二十年	$15.730	$\frac{15.730}{15.730}\times 100=100.00$
民國廿一年	14.619	$\frac{14.619}{15.730}\times 100=92.94$
民國廿二年	11.427	$\frac{11.427}{15.730}\times 100=72.64$
民國廿三年	12.910	$\frac{12.910}{15.730}\times 100=82.07$

民國廿四年	14.711	$\frac{14.711}{15.730}\times 100=$ 93.52
民國廿五年	14.851	$\frac{14.851}{15.730}\times 100=$ 94.40

(2)加權綜合指數——加權綜合指數(Weighted aggregative index numbers)乃以各品「物量」(Quantity 如消費量,生產量及交易量等)爲權數,求得各品「物值」(Value 如消費值,生產值及交易值等)後,總加之,再以基期總值除計算期總值卽得.其計算公式如下:

設 I_A 爲加權綜合指數.

P_1 爲計算期之物價.

P'_1 爲計算期第一種物品之價格.

P''_1 爲計算期第二種物品之價格.

P'''_1 爲計算期第三種物品之價格.

P_0 爲基期之物價.

P'_0 爲基期第一種物品之價格.

P''_0 爲基期第二種物品之價格.

P'''_0 爲基期第三種物品之價格.

Q 爲物量(如消費量,生產量及交易量等).

Q' 爲第一種物品之物量.

Q'' 爲第二種物品之物量.

Q''' 爲第三種物品之物量.

Σ 爲總和之記號.

$$指_{A}=\frac{P'_{1}Q'+P''_{1}Q''+P'''_{1}Q'''+\cdots\cdots}{P'_{0}Q'+P''_{0}Q''+P'''_{0}Q'''+\cdots\cdots}\times 100$$

$$=\frac{\Sigma P_{1}Q}{\Sigma P_{0}Q}\times 100 \cdots\cdots\cdots\cdots(公式一四九)$$

例如表一〇六所列十五品,據上海市社會局於十八年四月至十九年三月間調查三百零五家工人家庭家計帳冊,平均每年每家消費各品量如下:

表一〇八　上海市工人家庭平均每年每家消費各品量表

(計算加權綜合指數權數表)

品別	消費量	品別	消費量
粳米	5.014市石	食鹽	37.575市斤
麵粉	1.122包	白糖	10.307市斤
豆腐	45.915十塊	細布	19.643市尺
青菜	304.145市斤	條格布	20.713市尺
鮮豬肉	48.060市斤	廢木柴	493.874市斤
鮮魚	32.996市斤	火柴	9.005十匣
鮮鴨蛋	84.932個	肥皂	50.827塊
豆油	68.318市斤		

根據上表各品消費量,核計各年每工人家庭消費十五品值如下表:

表一〇九　歷年上海市工人家庭消費十五品值表

民國二十年至二十五年

(計算加權綜合指數表甲)

品別	二十年	廿一年	廿二年	廿三年	廿四年	廿五年
粳米	$56.708	$51.644	$37.941	$46.796	$54.512	$49.854
麵粉	3.282	3.162	2.721	2.568	2.917	3.869

豆腐	3.398	3.214	3.030	2.893	2.801	3.306
青菜	13.687	10.949	10.949	8.212	5.170	10.645
鮮豬肉	16.100	17.782	15.043	13.553	11.727	14.034
鮮魚	7.127	5.939	6.335	5.708	4.916	5.378
鮮鴨蛋	2.718	2.293	2.038	1.784	1.784	2.038
豆油	12.775	11.546	11.682	8.608	11.546	16.465
食鹽	2.668	2.668	3.081	3.833	3.908	4.208
白糖	1.402	2.082	2.206	1.876	1.814	2.113
細布	2.338	2.396	1.925	1.729	1.689	1.788
條格布	1.491	1.471	1.346	1.263	1.181	1.243
廢木柴	6.420	6.914	7.408	6.914	6.420	6.914
火柴	1.171	0.937	0.891	0.846	0.828	0.901
肥皂	3.304	3.304	3.050	2.795	2.541	2.592
總計	134.589	126.301	109.646	109.378	113.754	125.348

計算加權綜合指數即將各年每家消費各品值相加,得二十年每家消費十五品總值爲 \$134.589, 二十一年爲 \$126.301,二十二年爲 \$109.646,二十三年爲 \$109.378,二十四年爲 \$113.754,二十五年爲 \$125.348. 如以二十年爲基期,則二十年之消費值 \$134.589 爲基價 (ΣP_0Q),等於 100,求得其他各年之指數如下:

表一一〇 歷年上海市十五品零售物價指數表

民國二十年至二十五年 (民國二十年指數=100)

(計算加權綜合指數表乙)

年次	十五品消費總值 ΣPQ	加權綜合指數 $\frac{\Sigma P_1Q}{\Sigma P_0Q}\times 100$
民國二十年	\$134.589	$\frac{134.589}{134.589}\times 100=100.00$
民國廿一年	126.301	$\frac{126.301}{134.589}\times 100=93.84$
民國廿二年	109.646	$\frac{109.646}{134.589}\times 100=81.46$

民國廿三年	109.378	$\frac{109.378}{134.589}\times100=81.27$
民國廿四年	113.754	$\frac{113.754}{134.589}\times100=84.52$
民國廿五年	125.348	$\frac{125.348}{134.589}\times100=93.13$

公式一四九中Q, Q', Q'', Q'''……,可改為Q_c, Q'_c, Q''_c, Q'''_c……,即以民國十八年各品之消費量為權數,惟究應採用基期之物量(Q_0, Q'_0, Q''_0, Q'''_0……)為權數乎?抑應採用計算期之物量(Q_1, Q'_1, Q''_1, Q'''_1……)為權數乎?學者間舉張不一,致加權綜合指數之公式,化成數十種之多.茲舉其最著者六種列下:

設I_A為加權綜合指數.

P_1為計算期之物價.

P_0為基期之物價.

Q_1為計算期之物量.

Q_0為基期之物量.

W_c為概權.(所謂概權,既非基期物量物值,又非計算期物量物值,乃任何時期之估計權數.)

Σ 為總和之記號.

(A)拉斯貝爾綜合法——拉斯貝爾綜合法(Laspeyres aggregative method)為拉斯貝爾氏(E. Laspeyres)所權輿,故名,其計算公式如下:

$$I_A=\frac{\Sigma P_1Q_0}{\Sigma P_0Q_0}\times100 \cdots\cdots\cdots(公式一五〇)$$

(B)派許綜合法——派許綜合法 (Paasche aggregative method) 爲派許氏 (H. Paasche) 所首創,故名,其計算公式如下:

$$I_A=\frac{\Sigma P_1Q_1}{\Sigma P_0Q_1}\times 100 \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式一五一})$$

(C)愛奇華士馬沙綜合法——此法爲愛奇華士 (F. Y. Edgeworth)及馬沙 (Marshall) 所創用,故名愛奇華士馬沙綜合法(Edgeworth and Marshall aggregative method),其計算公式如下:

$$I_A=\frac{\Sigma P_1\frac{Q_0+Q_1}{2}}{\Sigma P_0\frac{Q_0+Q_1}{2}}\times 100$$

$$=\frac{\Sigma P_1(Q_0+Q_1)}{2}\times\frac{2}{\Sigma P_0(Q_0+Q_1)}\times 100$$

$$=\frac{\Sigma P_1(Q_0+Q_1)}{\Sigma P_0(Q_0+Q_1)}\times 100 \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式一五二})$$

(D)理想公式——理想公式 (Ideal formula) 爲費暄氏 (I. Fisher)所發明,其計算公式如下:

$$I_A=\sqrt{\frac{\Sigma P_1Q_0}{\Sigma P_0Q_0}\times\frac{\Sigma P_1Q_1}{\Sigma P_0Q_1}}\times 100 \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式一五三})$$

(E)擴張基期綜合法——採用擴張基期法 (Broadened base aggregative method)編製指數者極多,其計算公式如下:

$$I_A=\frac{\Sigma P_1\times\text{若干期平均物量}}{\text{若干期平均物價}\times\text{若干期平均物量}}$$

$$\times 100 \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式一五四})$$

(F)概權綜合法——所謂概權,既非基期之物量(Q_0)物值(P_0Q_0),又非計算期之物量(Q_1)物值(P_1Q_1),乃任何時期之估計權數也.概權綜合指數之計算法與拉斯貝爾綜合法同,惟所用權數非爲基期物量(Q_0),而爲概權(W_c).

$$I_A=\frac{\Sigma P_1W_c}{\Sigma P_0W_c}\times 100 \qquad \text{(公式一五五)}$$

(二) 比例平均法

比例平均法(Average of ratios)乃將計算期各品價格(P_1)以基期各品價格(P_0)分除後,得各品比價;再總合各品比價而平均之,卽得各年指數.惟此種指數以所用平均方法之不同,復可分爲五:

(1)算術平均比價指數——算術平均比價指數,乃將各品比價總合後,用算術平均法求得之平均指數也.此種指數復以加權與不加權之別,得分爲下列二種:

(A)簡單算術平均比價指數——簡單算術平均比價指數,乃不加權之算術平均比價指數,其計算法,卽將各品比價總加後,以品數除之卽得.

設I_M爲簡單算術平均比價指數.

P_1, P'_1, P''_1, P'''_1 爲計算期各品之價格.

P_0, P'_0, P''_0, P'''_0 爲基期各品之價格.

N 爲品數.

Σ 爲總和之記號.

$$I_M=\frac{\frac{P'_1}{P'_0}+\frac{P''_1}{P''_0}+\frac{P'''_1}{P'''_0}+\cdots\cdots}{N}\times 100$$

$$=\frac{\Sigma\frac{P_1}{P_0}}{N}\times 100\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式一五六)}$$

例如表一〇六民國二十年至二十五年上海市十五品零售物價,化成各品比價如下表:

表一一一 歷年上海市十五品零售物價比價表

民國二十年至二十五年

(民國二十年比價=100)

(計算簡單算術平均比價指數表甲)

品別	二十年	廿一年	廿二年	廿三年	廿四年	廿五年
粳米	100.00	91.07	66.91	82.52	96.13	87.91
麵粉	100.00	96.34	82.91	78.26	88.89	117.88
豆腐	100.00	94.59	89.19	85.14	82.43	97.30
青菜	100.00	80.00	80.00	60.00	37.78	77.78
鮮豬肉	100.00	110.45	93.43	84.18	72.84	87.16
鮮魚	100.00	83.33	88.89	80.09	68.98	75.46
鮮鴨蛋	100.00	84.38	75.00	65.63	65.63	75.00
豆油	100.00	90.37	91.44	67.38	90.37	128.88
食鹽	100.00	100.00	115.49	143.66	146.48	157.75
白糖	100.00	148.53	157.35	133.82	129.41	150.74
細布	100.00	102.52	82.35	73.95	72.27	76.47
條格布	100.00	98.61	90.28	84.72	79.17	83.33
麼木柴	100.00	107.69	115.38	107.69	100.00	107.69
火柴	100.00	80.00	76.15	72.31	70.77	76.92
肥皂	100.00	100.00	92.31	84.62	76.92	78.46
總計	1,500.00	1,467.88	1,397.08	1,303.97	1,278.07	1,478.73

根據各年各品比價,求得各年總比價如上表末排,而後

應用公式一五六,核算歷年簡單算術平均比價指數如下:

表一一二　歷年上海市十五品零售物價指數表

民國二十年至二十五年

(民國二十年指數=100)

(計算簡單算術平均比價指數表乙)

年次	十五品總比價 $\Sigma\frac{P_1}{P_0}$	簡單算術平均比價指數 $\frac{\Sigma\frac{P_1}{P_0}}{N}$
民國二十年	1,500.00	$\frac{1500.00}{15}=100.00$
民國廿一年	1,467.88	$\frac{1467.88}{15}=97.86$
民國廿二年	1,397.08	$\frac{1397.08}{15}=93.14$
民國廿三年	1,303.97	$\frac{1303.97}{15}=86.93$
民國廿四年	1,278.07	$\frac{1278.07}{15}=85.20$
民國廿五年	1,478.73	$\frac{1478.73}{15}=98.58$

(B)加權算術平均比價指數——加權算術平均比價指數,乃將各年各品比價乘各品權數(如用消費值,生產值及交易值等作爲權數,惟絕對不能用物量作爲權數,因物量單位不同之故.)後,總加之;再除以權數之總值,即得加權算術平均比價指數.

設 I_M 爲加權算術平均比價指數.

P_1, P'_1, P''_1, P'''_1 爲計算期各品之價格.

P_0, P'_0, P''_0, P'''_0 為基期各品之價格.

W 為各品之物值.(如各品之消費值,生產值及交易值等.)

W' 為第一品之物值.

W'' 為第二品之物值.

W''' 為第三品之物值.

Σ 為總和之記號.

$$I_M=\frac{W'\frac{P'_1}{P'_0}+W''\frac{P''_1}{P''_0}+W'''\frac{P'''_1}{P'''_0}+\cdots\cdots}{W'+W''+W'''+\cdots\cdots}\times 100$$

$$=\frac{\Sigma W\frac{P_1}{P_0}}{\Sigma W}\times 100 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式一五七)}$$

茲據上海市社會局於民國十八年間舉行之工人家庭家計調查,得每家每年消費各品值如下:

表一一三 上海市工人家庭平均每年每家消費各品值表

(計算加權指數權數表)

品別	消費量	單價	消費值
粳米	5.014市石	$11.678	$58.553
麵粉	1.122包	3.202	3.593
豆腐	45.915十塊	0.068	3.122
青菜	304.145市斤	0.025	7.604
鮮豬肉	48.060市斤	0.293	14.082
鮮魚	32.996市斤	0.173	5.708
鮮鴨蛋	84.932個	0.028	2.378
豆油	68.318市斤	0.195	13.322

食　鹽	37.575市斤	0.067	2.518
白　糖	10.307市斤	0.095	0.979
細　布	19.643市尺	0.109	2.141
條格布	20.713市尺	0.067	1.388
廢木柴	493.874市斤	0.012	5.926
火　柴	9.005十匣	0.070	0.630
肥　皂	50.827塊	0.051	2.592
總　計			124.536

若用每家消費值作為權數,權重各品比價,得如下表:

表一一四　歷年上海市十五品零售物價權重比價表

民國二十年至二十五年

(民國二十年比價=100)

(計算加權算術平均比價指數表甲)

品　別	二十年	廿一年	廿二年	廿三年	廿四年	廿五年
粳　米	5,855.30	5,332.42	3,917.78	4,831.79	5,628.70	5,147.39
麵　粉	359.30	346.15	297.90	281.19	319.38	423.54
豆　腐	312.20	295.31	278.45	265.81	257.35	303.77
青　菜	760.40	608.32	608.32	456.24	287.28	591.44
鮮豬肉	1,408.20	1,555.36	1,315.68	1,185.42	1,025.73	1,227.39
鮮　魚	570.80	475.65	507.38	457.15	393.74	430.74
鮮鴨蛋	237.80	200.66	178.35	156.07	156.07	178.35
豆　油	1,332.20	1,203.91	1,218.16	897.64	1,203.91	1,716.94
食　鹽	251.80	251.80	290.80	361.58	368.84	397.21
白　糖	97.90	145.41	154.05	131.01	126.69	147.57
細　布	214.10	219.50	176.31	158.33	154.73	163.72
條格布	138.80	136.87	125.31	117.59	109.89	115.66
廢木柴	592.60	638.17	683.74	638.17	592.60	638.17
火　柴	63.00	50.40	47.97	45.56	44.59	48.46
肥　皂	259.20	259.20	239.27	219.33	199.38	203.37
總　計	12,453.60	11,719.13	10,039.47	10,202.88	10,868.88	11,733.72

歷年各品比價用各品消費值權重後,得如上表,若將各

年各品權重比價總加之,得各年權重總比價如上表末排.如以權數總值(ΣW)除之,即得各年指數如下表:

表一一五　歷年上海市十五品零售物價指數表

民國二十年至二十五年

(民國二十年指數=100)

(計算加權算術平均比價指數表乙)

年次	十五品加權總比價 $\Sigma W\frac{P_1}{P_0}$	加權算術平均比價指數 $\frac{\Sigma W\frac{P_1}{P_0}}{\Sigma W}$
民國二十年	12,453.60	$\frac{12,453.60}{124.536}=100.00$
民國廿一年	11,719.13	$\frac{11,719.13}{124.536}=94.10$
民國廿二年	10,039.47	$\frac{10,039.47}{124.536}=80.62$
民國廿三年	10,202.88	$\frac{10,202.88}{124.536}=81.93$
民國廿四年	10,868.88	$\frac{10,868.88}{124.536}=87.28$
民國廿五年	11,733.72	$\frac{11,733.72}{124.536}=94.22$

公式一五七中W, W', W'', W'''……以民國十八年各品之消費值為權數,惟究應採用基期之消費值(P_0Q_0)為權數乎?抑用計算期之消費值(P_1Q_1)為權數乎?或採用基期物價計算期物量之乘積(P_0Q_1)為權數乎?抑用計算期物價基期物量之乘積(P_1Q_0)為權數乎?費暄教授即根據以上各種權數,化加權算術平均比價指數公式為

下列四種:

設I_M為加權算術平均比價指數.

P_1為計算期之物價.

P_0為基期之物價.

Q_1為計算期之物量.

Q_0為基期之物量.

Σ為總和之記號.

(a)費暄氏第三公式(公式號數見 I. Fisher: The Making of Index Numbers)

$$I_M=\frac{\Sigma P_0Q_0\frac{P_1}{P_0}}{\Sigma P_0Q_0}\times 100 \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式一五八)}$$

費暄氏第三公式與本書公式一五〇拉斯貝爾公式相同.

(b)費暄氏第五公式

$$I_M=\frac{\Sigma P_0Q_1\frac{P_1}{P_0}}{\Sigma P_0Q_1}\times 100 \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式一五九)}$$

費暄氏第五公式與本書公式一五一派許氏公式相同.

(c)費暄氏第七公式

$$I_M=\frac{\Sigma P_1Q_0\frac{P_1}{P_0}}{\Sigma P_1Q_0}\times 100 \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式一六〇)}$$

(d)費暄氏第九公式

$$I_M=\frac{\Sigma P_1 Q_1 \frac{P_1}{P_0}}{\Sigma P_1 Q_1}\times 100 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式一六一})$$

(2)幾何平均比價指數——幾何平均比價指數乃將N品比價連乘後,開N次方,乘 100 而得.此種指數復以加權與不加權之別,可分下列二種:

(A)簡單幾何平均比價指數——簡單幾何平均比價指數乃不加權之幾何平均比價指數.其計算方法,卽將N個比價連乘,開N次方卽得.

設I_G爲簡單幾何平均比價指數.

P_1, P'_1, P''_1, P'''_1爲計算期各品之價格.

P_0, P'_0, P''_0, P'''_0爲基期各品之價格.

N爲品數.

π爲各比價連乘之記號.

Σ爲總和之記號.

$$I_G=\sqrt[N]{\frac{P'_1}{P'_0}\times\frac{P''_1}{P''_0}\times\frac{P'''_1}{P'''_0}\times\cdots\cdots}\times 100$$

$$=\sqrt[N]{\pi\frac{P_1}{P_0}}\times 100\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式一六二甲})$$

$$\log I_G=\frac{\log\frac{P'_1}{P'_0}+\log\frac{P''_1}{P''_0}+\log\frac{P'''_1}{P'''_0}+\cdots\cdots}{N}$$

$$+\log 100$$

$$I_G=\text{antilog}\left[\frac{\Sigma\log\frac{P_1}{P_0}}{N}+\log 100\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式一六二乙})$$

如用表一一一民國二十年至二十五年上海市十五品零售物價比價（民國二十年比價=100），核算簡單幾何平均比價指數如下：

表一一六　歷年上海市十五品零售物價比價之對數表

民國二十年至二十五年

（民國二十年比價=100）

（計算簡單幾何平均比價指數表甲）

品別	二十年	廿一年	廿二年	廿三年	廿四年	廿五年
粳米	2.00000	1.95938	1.82549	1.91656	1.98286	1.94404
麵粉	2.00000	1.98381	1.91861	1.89354	1.94885	2.07144
豆腐	2.00000	1.97585	1.95032	1.93013	1.91609	1.98811
青菜	2.00000	1.90309	1.90309	1.77815	1.57720	1.89087
鮮豬肉	2.00000	2.04317	1.97049	1.92521	1.86237	1.94032
鮮魚	2.00000	1.92080	1.94885	1.90358	1.83872	1.87772
鮮鴨蛋	2.00000	1.92624	1.87506	1.81710	1.81710	1.87506
豆油	2.00000	1.95602	1.96114	1.82853	1.95602	2.11018
食鹽	2.00000	2.00000	2.06254	2.15734	2.16578	2.19797
白糖	2.00000	2.17182	2.19687	2.12652	2.11196	2.17823
細布	2.00000	2.01081	1.91566	1.86894	1.85896	1.88349
條格布	2.00000	1.99392	1.95559	1.92799	1.89856	1.92080
廢木柴	2.00000	2.03218	2.06213	2.03218	2.00000	2.03218
火柴	2.00000	1.90309	1.88167	1.85920	1.84985	1.88604
肥皂	2.00000	2.00000	1.96525	1.92747	1.88604	1.89465
總計	30.00000	29.78018	29.39276	28.89244	28.67042	29.69110

上表末排即示十五品比價之總對數，如以品數15除之，得各年簡單幾何平均比價指數之對數，如求各對數之眞數，即得各年之簡單幾何平均比價指數如下：

表一一七　歷年上海市十五品零售物價指數表

民國二十年至二十五年

（民國二十年指數=100）

（計算簡單幾何平均比價指數表乙）

年次	十五品比價之總對數 $\Sigma\log\frac{P_1}{P_0}$	十五品比價之平均對數 $\frac{\Sigma\log\frac{P_1}{P_0}}{N}$	簡單幾何平均比價指數 $antilog\frac{\Sigma\log\frac{P_1}{P_0}}{N}$
民國二十年	30.00000	$\frac{30.00000}{15}=2.00000$	100.00
民國廿一年	29.78018	$\frac{29.78018}{15}=1.98535$	96.68
民國廿二年	29.39276	$\frac{29.39276}{15}=1.95952$	91.10
民國廿三年	28.89244	$\frac{28.89244}{15}=1.92616$	84.37
民國廿四年	28.67042	$\frac{28.67042}{15}=1.91136$	81.54
民國廿五年	29.69110	$\frac{29.69110}{15}=1.97941$	95.37

(B)加權幾何平均比價指數——加權幾何平均比價指數乃以各品消費值,生產值或交易值等,權重各品比價後,連乘之,再開權數總值次方卽得.其計算公式如下:

設 I_G 爲加權幾何平均比價指數.

P_1, P'_1, P''_1, P'''_1 爲計算期各品之價格.

P_0, P'_0, P''_0, P'''_0 爲基期各品之價格.

W, W', W'', W''' 爲各品之物值.（如各品之消費值,生產值及交易值等.）

π 爲各比價連乘之記號.

Σ 爲總和之記號.

$$I_G = {}^{W'+W''+W'''+\cdots}\sqrt{\left(\frac{P'_1}{P'_0}\right)^{W'} \times \left(\frac{P''_1}{P''_0}\right)^{W''} \times \left(\frac{P'''_1}{P'''_0}\right)^{W'''} \times \cdots\cdots} \times 100$$

$$= {}^{\Sigma W}\sqrt{\pi\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{W}} \times 100 \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式一六三甲)}$$

$$\log I_G = \frac{W' \log \frac{P'_1}{P'_0} + W'' \log \frac{P''_1}{P''_0} + W''' \log \frac{P'''_1}{P'''_0} + \cdots\cdots}{W' + W'' + W''' + \cdots\cdots} + \log 100$$

$$I_G = antilog\left[\frac{\Sigma W \log \frac{P_1}{P_0}}{\Sigma W} + \log 100\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式一六三乙)}$$

茲卽將表一一六各年各品比價之對數,用表一一三上海市工人家庭平均每年每家消費各品值權重之,得如下表:

表一一八　歷年上海市十五品零售物價比價之加權對數表

民國二十年至二十五年

(民國二十年比價＝100)

(計算加權幾何平均比價指數表甲)

品別	二十年	廿一年	廿二年	廿三年	廿四年	廿五年
粳米	117.10600	114.72758	106.88792	112.22034	116.10240	113.82937
麵粉	7.18600	7.12783	6.89357	6.80349	7.00222	7.44268
豆腐	6.24400	6.16860	6.08890	6.02587	5.98203	6.20688
靑菜	15.20800	14.47110	14.47110	13.52105	11.99349	14.37818
鮮豬肉	28.16400	28.77192	27.74844	27.11081	26.22579	27.32359

鮮魚	11.41600	10.96393	11.12404	10.86563	10.49541	10.71813
鮮鴨蛋	4.75600	4.58060	4.45889	4.32106	4.32106	4.45889
豆油	26.64400	26.05810	26.12631	24.35968	26.05810	28.11182
食鹽	5.03600	5.03600	5.19348	5.43218	5.45343	5.53449
白糖	1.95800	2.12621	2.15074	2.08186	2.06761	2.13249
細布	4.28200	4.30514	4.10143	4.00140	3.98003	4.03255
條格布	2.77600	2.76756	2.71436	2.67605	2.63520	2.66607
廢木柴	11.85200	12.04270	12.22018	12.04270	11.85200	12.04270
火柴	1.26000	1.19895	1.18545	1.17130	1.16541	1.18821
肥皂	5.18400	5.18400	5.09393	4.99600	4.88862	4.91093
總計	249.07200	245.53022	236.45874	237.62942	240.22280	244.97698

上表末排即示十五品比價之加權總對數,如以權數總值(即每工人家庭每年消費十五品之總值$124.536)除之,得各年加權幾何平均比價指數之對數,如求各對數之眞數,即得各年之加權幾何平均比價指數如下:

表一一九 歷年上海市十五品零售物價指數表

民國二十年至二十五年

(民國二十年指數=100)

(計算加權幾何平均比價指數表乙)

年次	十五品比價對數之加權總對數 $\Sigma W log\frac{P_1}{P_0}$	十五品比價之加權平均對數 $\frac{\Sigma W log\frac{P_1}{P_0}}{\Sigma W}$	加權幾何平均比價指數 $antilog\frac{\Sigma W log\frac{P_1}{P_0}}{\Sigma W}$
民國二十年	249.07200	$\frac{249.07200}{124.536}=2.00000$	100.00
民國廿一年	245.53022	$\frac{245.53022}{124.536}=1.97156$	93.66
民國廿二年	236.45874	$\frac{236.45874}{124.536}=1.89872$	79.20
民國廿三年	237.62942	$\frac{237.62942}{124.536}=1.90812$	80.93
民國廿四年	240.22280	$\frac{240.22280}{124.536}=1.92894$	84.91
民國廿五年	244.97698	$\frac{244.97698}{124.536}=1.96712$	92.71

(3)倒數平均比價指數——倒數平均比價指數者,乃各品比價倒數之算術平均數之倒數.其計算亦以加權與不加權之別,可分爲下列二種:

(A)簡單倒數平均比價指數——簡單倒數平均比價指數乃不加權之倒數平均比價指數.其計算公式如下:

設 I_H 爲簡單倒數平均比價指數.

P_1, P'_1, P''_1, P'''_1 爲計算期各品之價格.

P_0, P'_0, P''_0, P'''_0 爲基期各品之價格.

N 爲品數.

Σ 爲總和之記號.

$$I_H=\frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{\frac{P'_1}{P'_0}}+\dfrac{1}{\frac{P''_1}{P''_0}}+\dfrac{1}{\frac{P'''_1}{P'''_0}}+\cdots\cdots}{N}}\times 100$$

$$=\frac{N}{\dfrac{1}{\frac{P'_1}{P'_0}}+\dfrac{1}{\frac{P''_1}{P''_0}}+\dfrac{1}{\frac{P'''_1}{P'''_0}}+\cdots\cdots}\times 100$$

$$=\frac{N}{\dfrac{P'_0}{P'_1}+\dfrac{P''_0}{P''_1}+\dfrac{P'''_0}{P'''_1}+\cdots\cdots}\times 100$$

$$=\frac{N}{\Sigma\dfrac{P_0}{P_1}}\times 100 \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式一六四)}$$

茲仍以表一一一民國二十年至二十五年上海市十五品零售物價比價(民國二十年比價=100),核算簡單倒

數平均比價指數如下:(下表中各比價之倒數,乃查本書附表一而得,故求簡單倒數平均比價指數之方法,不依公式一六四,而用公式一六四之初步公式演算之.)

表一二〇　歷年上海市十五品零售物價比價之倒數表

民國二十年至二十五年

(民國二十年比價=100)

(計算簡單倒數平均比價指數表甲)

品別	二十年	廿一年	廿二年	廿三年	廿四年	廿五年
粳米	1.00000	1.09806	1.49454	1.21183	1.04026	1.13753
麵粉	1.00000	1.03799	1.20613	1.27779	1.12499	0.84832
豆腐	1.00000	1.05720	1.12120	1.17454	1.21315	1.02775
青菜	1.00000	1.25000	1.25000	1.66667	2.64690	1.28568
鮮豬肉	1.00000	0.90539	1.07032	1.18793	1.37287	1.14732
鮮魚	1.00000	1.20005	1.12499	1.24860	1.44970	1.32521
鮮鴨蛋	1.00000	1.18511	1.33333	1.52369	1.52369	1.33333
豆油	1.00000	1.10656	1.09361	1.48412	1.10656	0.77592
食鹽	1.00000	1.00000	0.86588	0.69609	0.68269	0.63391
白糖	1.00000	0.67326	0.63553	0.74727	0.77274	0.66339
細布	1.00000	0.97542	1.21433	1.35227	1.38370	1.30770
條格布	1.00000	1.01410	1.10767	1.18036	1.26311	1.20005
廢木柴	1.00000	0.92859	0.86670	0.92859	1.00000	0.92859
火柴	1.00000	1.25000	1.31320	1.38293	1.41303	1.30005
肥皂	1.00000	1.00000	1.08331	1.18175	1.30005	1.27453
總計	15.00000	15.68173	16.78074	18.24443	19.29344	16.18928

上表末排即示十五品比價之總倒數$\left(\Sigma\frac{1}{\frac{P_1}{P_0}}\right)$,如以品數15除之,得各年簡單倒數平均比價指數之倒數,如求各倒數之正數,即得各年簡單倒數平均比價指數如下:

表一二一 歷年上海市十五品零售物價指數表

民國二十年至二十五年

(民國二十年指數=100)

(計算簡單倒數平均比價指數表乙)

年次	十五品比價之總倒數 $\Sigma\frac{1}{\frac{P_1}{P_0}}$	十五品比價之平均倒數 $\frac{\Sigma\frac{1}{\frac{P_1}{P_0}}}{N}$	簡單倒數平均比價指數 $\frac{1}{\frac{\Sigma\frac{1}{\frac{P_1}{P_0}}}{N}}\times 100$
民國二十年	15.00000	$\frac{15.00000}{15}=1.00000$	$\frac{1}{1.00000}\times 100=100.00$
民國廿一年	15.68173	$\frac{15.68173}{15}=1.04545$	$\frac{1}{1.04545}\times 100=95.65$
民國廿二年	16.78074	$\frac{16.78074}{15}=1.11872$	$\frac{1}{1.11872}\times 100=89.39$
民國廿三年	18.24443	$\frac{18.24443}{15}=1.21630$	$\frac{1}{1.21630}\times 100=82.22$
民國廿四年	19.29344	$\frac{19.29344}{15}=1.28623$	$\frac{1}{1.28623}\times 100=77.75$
民國廿五年	16.18928	$\frac{16.18928}{15}=1.07929$	$\frac{1}{1.07929}\times 100=92.65$

(B)加權倒數平均比價指數——加權倒數平均比價指數,乃將各年各品比價之倒數,用各品消費值,生產值或交易值等權重之,總加之,算術平均之,倒除還原之,即得.其計算公式如下:

設I_H為加權倒數平均比價指數.

P_1, P'_1, P''_1, P'''_1 為計算期各品之價格.

P_0, P'_0, P''_0, P'''_0 爲基期各品之價格.

W, W', W'', W''' 爲各品之物值.(如各品之消費值,生產值及交易值等.)

Σ 爲總和之記號.

$$I_H=\frac{1}{\dfrac{\dfrac{W'}{\frac{P'_1}{P'_0}}+\dfrac{W''}{\frac{P''_1}{P''_0}}+\dfrac{W'''}{\frac{P'''_1}{P'''_0}}+\cdots\cdots}{W'+W''+W'''+\cdots\cdots}}\times 100$$

$$=\frac{W'+W''+W'''+\cdots\cdots}{\dfrac{W'}{\frac{P'_1}{P'_0}}+\dfrac{W''}{\frac{P''_1}{P''_0}}+\dfrac{W'''}{\frac{P'''_1}{P'''_0}}+\cdots\cdots}\times 100$$

$$=\frac{W'+W''+W'''+\cdots\cdots}{W'\frac{P'_0}{P'_1}+W''\frac{P''_0}{P''_1}+W'''\frac{P'''_0}{P'''_1}}\times 100$$

$$=\frac{\Sigma W}{\Sigma W\frac{P_0}{P_1}}\times 100 \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式一六五)}$$

茲即將表一二〇各年各品比價之倒數,用表一一三上海市工人家庭平均每年每家消費各品值權重之,得如下表:

表一二二 歷年上海市十五品零售物價比價之加權倒數表

民國二十年至二十五年

(民國二十年比價=100)

(計算加權倒數平均比價指數表甲)

品別	二十年	廿一年	廿二年	廿三年	廿四年	廿五年
粳米	58.55300	64.29471	87.50980	70.95628	60.91034	66.60579
麵粉	3.59300	3.72950	4.33363	4.59110	4.04209	3.04801

豆腐	3.12200	3.30058	3.50039	3.66691	3.78745	3.20864
青菜	7.60400	9.50500	9.50500	12.67336	20.12703	9.77631
鮮豬肉	14.08200	12.74970	15.07225	16.72843	19.33276	16.15656
鮮魚	5.70800	6.84989	6.42144	7.12701	8.27489	7.56430
鮮鴨蛋	2.37800	2.81819	3.17066	3.62333	3.62333	3.17066
豆油	13.32200	14.74159	14.56907	19.77145	14.74159	10.33681
食鹽	2.51800	2.51800	2.18029	1.75275	1.71901	1.59619
白糖	0.97900	0.65912	0.62218	0.73158	0.75651	0.64946
細布	2.14100	2.08837	2.59988	2.89521	2.96250	2.79979
條格布	1.38800	1.40757	1.53745	1.63834	1.75320	1.66567
廢木柴	5.92600	5.50282	5.13606	5.50282	5.92600	5.50282
火柴	0.63000	0.78750	0.82732	0.87125	0.89021	0.81903
肥皂	2.59200	2.59200	2.80794	3.06310	3.36973	3.30358
總計	124.53600	133.54454	159.79336	155.59292	152.21664	136.20362

上表末排即示十五品比價之加權總倒數,如以權數總值(即每工人家庭每年消費十五品之總值\$124.536)除之,得各年加權倒數平均比價指數之倒數,如倒除還原之,即得各年加權倒數平均比價指數如下:

表一二三　歷年上海市十五品零售物價指數表

民國二十年至二十五年

(民國二十年指數＝100)

(計算加權倒數平均比價指數表乙)

年次	十五品比價倒數之加權總倒數 $\Sigma W\dfrac{1}{\frac{P_1}{P_0}}$	十五品比價之加權平均倒數 $\dfrac{\Sigma W\frac{1}{\frac{P_1}{P_0}}}{\Sigma W}$	加權倒數平均比價指數 $\dfrac{1}{\frac{\Sigma W\frac{1}{\frac{P_1}{P_0}}}{\Sigma W}}\times 100$
民國二十年	124.53600	$\dfrac{124.53600}{124.536}=1.00000$	$\dfrac{1}{1.00000}\times 100=100.00$
民國廿一年	133.54454	$\dfrac{133.54454}{124.536}=1.07234$	$\dfrac{1}{1.07234}\times 100=93.25$

民國廿二年	159.79336	$\frac{159.79336}{124.536}=1.28311$	$\frac{1}{1.28311}\times 100=$ 77.94
民國廿三年	155.59292	$\frac{155.59292}{124.536}=1.24938$	$\frac{1}{1.24938}\times 100=$ 80.04
民國廿四年	152.21664	$\frac{152.21664}{124.536}=1.22227$	$\frac{1}{1.22227}\times 100=$ 81.81
民國廿五年	136.20362	$\frac{136.20362}{124.536}=1.09369$	$\frac{1}{1.09369}\times 100=$ 91.43

(4)中位比價指數——中位比價指數之求法,先將各比價依其大小先後排定,然後用求中位公式,求中位之位置,視察中位相當之比價,即得中位比價指數.茲將求中位比價位置之公式列下:

設I'_D為中位比價之位置.

N為品數.

$$I'_D=\frac{N+1}{2}\text{..............................(公式一六六)}$$

例如表一一一民國二十年至二十五年上海市十五品零售物價之比價,經整理後,得如下表:

表一二四 歷年上海市十五品零售物價比價之位次表

民國二十年至二十五年

(民國二十年比價=100)

(計算中位比價指數表)

位次	二十年	廿一年	廿二年	廿三年	廿四年	廿五年
第一位	100.00	80.00	66.91	60.00	37.78	75.00
第二位	100.00	80.00	75.00	65.63	65.63	75.46

第三位	100.00	83.33	76.15	67.38	68.98	76.47
第四位	100.00	84.38	80.00	72.31	70.77	76.92
第五位	100.00	90.37	82.35	73.95	72.27	77.78
第六位	100.00	91.07	82.91	78.26	72.84	78.46
第七位	100.00	94.59	88.89	80.09	76.92	83.33
第八位	100.00	96.34	89.19	82.52	79.17	87.16
第九位	100.00	98.61	90.28	84.18	82.43	87.91
第十位	100.00	100.00	91.44	84.62	88.89	97.30
第十一位	100.00	100.00	92.31	84.72	90.37	107.69
第十二位	100.00	102.52	93.43	85.14	96.13	117.88
第十三位	100.00	107.69	115.38	107.69	100.00	128.88
第十四位	100.00	110.45	115.49	133.82	129.41	150.74
第十五位	100.00	148.53	157.35	143.66	146.48	157.75

中位比價之位置為

$$P'_D=\frac{15+1}{2}=8$$

故求得歷年中位比價指數如下:

民國二十年 100.00　　民國二十三年 82.52

民國二十一年 96.34　　民國二十四年 79.17

民國二十二年 89.19　　民國二十五年 87.16

如以表一一三上海市工人家庭平均每年每家消費值為權數,則中位比價之位置應為:

$$P'_D=\frac{124.536+1}{2}=62.768$$

求各年加權中位比價指數時,應將各年比價順次排列,並各附相當權數,而後觀察中位位置落於何比價,即以該比價作為加權中位比價指數.茲以二十一年為例,求得該年指數如下:

表一二五 民國二十一年上海市十五品零售物價比價之位次表

(民國二十年比價=100)

(計算加權中位比價指數表)

位次	品別	比價	消費值	累積消費值
第一位	青菜	80.00	$7.604	$7.604
第二位	火柴	80.00	0.630	8.234
第三位	鮮魚	83.33	5.708	13.942
第四位	鮮鴨蛋	84.38	2.378	16.320
第五位	豆腐	90.37	13.322	29.642
第六位	粳米	91.07	58.553	88.195
第七位	豆油	94.59	3.122	91.317
第八位	麵粉	96.34	3.593	94.910
第九位	條格布	98.61	1.388	96.298
第十位	食鹽	100.00	2.518	98.816
第十一位	肥皂	100.00	2.592	101.408
第十二位	細布	102.52	2.141	103.549
第十三位	廢木柴	107.69	5.926	109.475
第十四位	鮮豬肉	110.45	14.082	123.557
第十五位	白糖	148.53	0.979	124.536

中位數之位置爲第62.768,故得二十一年之中位比價指數爲91.07.依此類推,得各年之指數如下:

民國二十年	100.00	民國二十三年	82.52
民國二十一年	91.07	民國二十四年	96.13
民國二十二年	80.00	民國二十五年	87.91

(5)衆數比價指數——衆數比價指數乃以比價中發現次數最多者爲總指數,在選取樣品極多時,或可應用,然平時鮮有用之者.其求法先將各比價組成一分組次數表,而後用次數表核算法推計之卽得.

設 I_0 爲衆數比價指數.

L 爲衆數所在組之下限.

f'_1 爲衆數所在組以下一組之次數.

f'_2 爲衆數所在組以上一組之次數.

i 爲組距.

$$I_0 = L + \frac{f'_2}{f'_1 + f'_2} \times i \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式一六七})$$

(三) 平均比例法

平均比例法(Ratio of averages)乃先求計算期及基期各品實價之平均數,而後將基期平均實價除計算期平均實價,乘 100 卽得.此種指數復以平均方法之不同,可分爲下列三種:

(1)算術平均實價指數——算術平均實價指數乃將各年各品實價總合後,用算術平均法計算其平均實價,而後以基年之平均實價除計算期之平均實價,復乘100卽得.算術平均實價指數又以加權與不加權之分,得別爲簡單與加權二種:

(A)簡單算術平均實價指數——簡單算術平均實價指數乃不加權之算術平均實價指數.其計算公式

如下:

設I_m爲簡單算術平均實價指數.

P_1, P'_1, P''_1, P'''_1 爲計算期各品之價格.

$P, {}_0P'_0, P''_0, P'''_0$ 爲基期各品之價格.

N 爲品數.

Σ 爲總和之記號.

$$I_m=\frac{\dfrac{P'_1+P''_1+P'''_1+\cdots\cdots}{N}}{\dfrac{P'_0+P''_0+P'''_0+\cdots\cdots}{N}}\times 100$$

$$=\frac{\dfrac{\Sigma P_1}{N}}{\dfrac{\Sigma P_0}{N}}\times \mathbf{100}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式一六八)}$$

其實簡單算術平均實價指數即簡單綜合指數,茲證之如下:

$$I_m=\frac{\dfrac{P'_1+P''_1+P'''_1+\cdots\cdots}{N}}{\dfrac{P'_0+P''_0+P'''_0+\cdots\cdots}{N}}\times 100$$

$$=\frac{P'_1+P_1''+P'''_1+\cdots\cdots}{N}$$

$$\times\frac{N}{P'_0+P''_0+P'''_0+\cdots\cdots}\times 100$$

$$=\frac{P'_1+P''_1+P'''_1+\cdots\cdots}{P'_0+P''_0+P'''_0+\cdots\cdots}\times 100$$

$$=\frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0}\times 100$$

故 $I_m=I_A$

(B)加權算術平均實價指數——加權算術平均實價指數乃以各品權數(如各品消費值,生產值或交易值等.)權重各品價格後,總計之,算術平均之,得各品之加權平均實價,末以基期之平均價除計算期之平均價,復乘100即得.其計算公式如下:

設I_m為加權算術平均實價指數.

P_1, P'_1, P''_1, P'''_1 為計算期各品之價格.

P_0, P'_0, P''_0, P'''_0 為基期各品之價格.

W, W', W'', W''' 為各品之物值.(如各品之消費值,生產值及交易值等.)

Σ 為總和之記號.

$$I_m=\frac{\dfrac{W'P'_1+W''P''_1+W'''P'''_1+\cdots\cdots}{W'+W''+W'''+\cdots\cdots}}{\dfrac{W'P'_0+W''P''_0+W'''P'''_0+\cdots\cdots}{W'+W''+W'''+\cdots\cdots}}\times 100$$

$$=\frac{\dfrac{\Sigma WP_1}{\Sigma W}}{\dfrac{\Sigma WP_0}{\Sigma W}}\times 100 \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式一六九)}$$

茲即用表一〇六及表一一三上海市十五品零售物價,求得各年簡單及加權算術平均實價如下表第二第四列.如以民國二十年為基期,該年簡單算術平均實價\$1.049,及加權算術平均實價\$5.484為基價,求得各年簡單及加權算術平均實價指數如下表第三第五列:

表一二六 歷年上海市十五品零售物價指數表

民國二十年至二十五年

（民國二十年指數=100）

（計算簡單及加權算術平均實價指數表）

年次	十五品簡單算術平均價 $\frac{\Sigma P}{N}$	簡單算術平均實價指數 $\frac{\frac{\Sigma P_1}{N}}{\frac{\Sigma P_0}{N}}\times 100$	十五品加權算術平均價 $\frac{\Sigma WP}{\Sigma W}$	加權算術平均實價指數 $\frac{\frac{\Sigma WP_1}{\Sigma W}}{\frac{\Sigma WP_0}{\Sigma W}}\times 100$
民國二十年	\$1.049	100.00	\$5.484	100.00
民國廿一年	0.975	92.94	5.005	91.28
民國廿二年	0.762	72.64	3.703	67.53
民國廿三年	0.861	82.07	4.519	82.41
民國廿四年	0.981	93.52	5.250	95.74
民國廿五年	0.990	94.40	4.853	88.50

(2)幾何平均實價指數——幾何平均實價指數乃將歷年N品之實價連乘,開N次方,復乘 100 即得.此種指數亦可分加權與不加權二種如下:

(A)簡單幾何平均實價指數——簡單幾何平均實價指數係不加權之指數,其計算公式如下:

設I_g為簡單幾何平均實價指數.

P_1, P'_1, P''_1, P'''_1為計算期各品之價格.

P_0, P'_0, P''_0, P'''_0為基期各品之價格.

N為品數.

π 爲各實價連乘之記號.

Σ 爲總和之記號.

$$I_g=\frac{\sqrt[N]{P'_1 P''_1 P'''_1 \cdots\cdots}}{\sqrt[N]{P'_0 P''_0 P'''_0 \cdots\cdots}}\times 100$$

$$=\frac{\sqrt[N]{\pi P_1}}{\sqrt[N]{\pi P_0}}\times 100 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式一七〇甲})$$

$$\log I_g=\left[\frac{\log P'_1+\log P''_1+\log P'''_1+\cdots\cdots}{N}\right.$$

$$\left.-\frac{\log P'_0+\log P''_0+\log P'''_0+\cdots\cdots}{N}\right]+\log 100$$

$$=\left[\frac{\Sigma\log P_1}{N}-\frac{\Sigma\log P_0}{N}\right]+\log 100$$

$$I_g=antilog\left\{\left[\frac{\Sigma\log P_1}{N}-\frac{\Sigma\log P_0}{N}\right]+\log 100\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式一七〇乙})$$

(B)加權幾何平均實價指數——加權幾何平均實價指數乃以各品權數(如各品消費值,生產值及交易值等.)權重各品實價後,連乘之,開權數總值次方即得.其計算公式如下:

設 I_g 爲加權幾何平均實價指數.

P_1, P'_1, P''_1, P'''_1 爲計算期各品之價格.

P_0, P'_0, P''_0, P'''_0 爲基期各品之價格.

W, W', W'', W''' 爲各品之物值.(如各品之消費值,生產值及交易值等.)

π 爲各實價連乘之記號.

Σ 爲總和之記號.

$$I_g=\frac{\sqrt[W'+W''+W'''+\cdots\cdots]{P'_1{}^{W'}\ P''_1{}^{W''}\ P'''_1{}^{W'''}\cdots\cdots}}{\sqrt[W'+W''+W'''+\cdots\cdots]{P'_0{}^{W'}\ P''_0{}^{W''}\ P'''_0{}^{W'''}\cdots\cdots}}$$

$$\times 100$$

$$=\frac{\sqrt[\Sigma W]{\pi P_1{}^{W}}}{\sqrt[\Sigma W]{\pi P_0{}^{W}}}\times 100 \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(公式一七一甲)}$$

$$\log I_g=\left[\frac{W'\log P'_1+W''\log P''_1+W'''\log P'''_1+\cdots\cdots}{W'+W''+W'''+\cdots\cdots}\right.$$

$$\left.-\frac{W'\log P'_0+W''\log P''_0+W'''\log P'''_0+\cdots\cdots}{W'+W''+W'''+\cdots\cdots}\right]$$

$$+\log 100$$

$$=\left[\frac{\Sigma W\log P_1}{\Sigma W}-\frac{\Sigma W\log P_0}{\Sigma W}\right]+\log 100$$

$$I_g=antilog\left\{\left[\frac{\Sigma W\log P_1}{\Sigma W}-\frac{\Sigma W\log P_0}{\Sigma W}\right]\right.$$

$$\left.+\log 100\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(公式一七一乙)}$$

茲仍用表一〇六上海市十五品零售物價,求得各年簡單幾何平均實價,如下表第二列.若以十八年每工人家庭消費各品值權重之,得各年加權幾何平均實價,如下表第四列.若各以二十年爲基期,則得各年簡單幾何平均實價指價,如下表第三列,加權幾何平均實價指數,如下表第五列:

表一二七　歷年上海市十五品零售物價指數表

民國二十年至二十五年

(民國二十年指數=100)

(計算簡單及加權幾何平均實價指數表)

年次	十五品簡單幾何平均價 $\sqrt[N]{\pi P}$	簡單幾何平均實價指數 $\frac{\sqrt[N]{\pi P_1}}{\sqrt[N]{\pi P_0}}\times 100$	十五品加權幾何平均價 $\sqrt[\Sigma W]{\pi P W}$	加權幾何平均實價指數 $\frac{\sqrt[\Sigma W]{\pi P_1 W}}{\sqrt[\Sigma W]{\pi P_0 W}}\times 100$
民國二十年	$0.175	100.00	$1.071	100.00
民國廿一年	0.169	96.57	1.003	93.65
民國廿二年	0.137	78.29	0.848	79.18
民國廿三年	0.126	72.00	0.867	80.95
民國廿四年	0.143	81.71	0.910	84.97
民國廿五年	0.143	81.71	0.993	92.72

(3)倒數平均實價指數——倒數平均實價指數者,乃各品價格倒數之算術平均數之倒數平均實價指數也.其計算公式亦分簡單及加權二種:

(A)簡單倒數平均實價指數——此種指數係不加權之倒數平均實價指數,其計算公式如下:

設 I_h 為簡單倒數平均實價指數.

P_1, P'_1, P''_1, P'''_1 為計算期各品之價格.

P_0, P'_0, P''_0, P'''_0 為基期各品之價格.

N 為品數.

Σ 為總和之記號.

$$I_h=\frac{\dfrac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{P'_1}+\dfrac{1}{P''_1}+\dfrac{1}{P'''_1}+\cdots\cdots}{N}}}{\dfrac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{P'_0}+\dfrac{1}{P''_0}+\dfrac{1}{P'''_0}+\cdots\cdots}{N}}}\times 100$$

$$=\frac{\dfrac{N}{\dfrac{1}{P'_1}+\dfrac{1}{P''_1}+\dfrac{1}{P'''_1}+\cdots\cdots}}{\dfrac{N}{\dfrac{1}{P'_0}+\dfrac{1}{P''_0}+\dfrac{1}{P'''_0}+\cdots\cdots}}\times 100$$

$$=\frac{N}{\Sigma\dfrac{1}{P_1}}\times\frac{\Sigma\dfrac{1}{P_0}}{N}\times 100$$

$$=\frac{\Sigma\dfrac{1}{P_0}}{\Sigma\dfrac{1}{P_1}}\times 100\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式一七二)}$$

(B)加權倒數平均實價指數——此種指數乃以各品權數(如各品消費值,生產值及交易值等.)權重各品實價之倒數後,總計之,算術平均之,倒除還原之,即得各品之加權倒數平均實價.將基期之加權倒數平均實價作爲100,推算計算期各實價之百分數,即得加權倒數平均實價指數.其計算公式如下:

設 I_h 爲加權倒數平均實價指數.

P_1, P'_1, P''_1, P'''_1 爲計算期各品之價格.

P_0, P'_0, P''_0, P'''_0 爲基期各品之價格.

W, W', W'', W''' 爲各品之物值.(如各品之消費值,生產值及交易值等.)

Σ 爲總和之記號.

$$I_h = \frac{\dfrac{1}{\dfrac{\dfrac{W'}{P'_1}+\dfrac{W''}{P''_1}+\dfrac{W'''}{P'''_1}+\cdots\cdots}{W'+W''+W'''+\cdots\cdots}}}{\dfrac{1}{\dfrac{\dfrac{W'}{P'_0}+\dfrac{W''}{P''_0}+\dfrac{W'''}{P'''_0}+\cdots\cdots}{W'+W''+W'''+\cdots\cdots}}} \times 100$$

$$= \frac{\dfrac{W'+W''+W'''+\cdots\cdots}{\dfrac{W'}{P'_1}+\dfrac{W''}{P''_1}+\dfrac{W'''}{P'''_1}+\cdots\cdots}}{\dfrac{W'+W''+W'''+\cdots\cdots}{\dfrac{W'}{P'_0}+\dfrac{W''}{P''_0}+\dfrac{W'''}{P'''_0}+\cdots\cdots}} \times 100$$

$$= \frac{\Sigma W}{\Sigma \dfrac{W}{P_1}} \times \frac{\Sigma \dfrac{W}{P_0}}{\Sigma W} \times 100$$

$$= \frac{\Sigma \dfrac{W}{P_0}}{\Sigma \dfrac{W}{P_1}} \times 100 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式一七三)}$$

茲仍用表一〇六上海市十五品零售物價,求得各年簡單倒數平均實價,如下表第二列.若以十八年每工人家庭每年消費各品值權重之,得各年加權倒數平均實價,如下表第四列.若各以二十年爲基期,則得各年簡單及加權倒數平均實價指數,如下表第三第五列:

表一二八 歷年上海市十五品零售物價指數表

民國二十年至二十五年

(民國二十年指數=100)

(計算簡單及加權倒數平均實價指數表)

年次	十五品簡單倒數平均價 $\dfrac{N}{\Sigma \frac{1}{P}}$	簡單倒數平均實價指數 $\dfrac{\Sigma \frac{1}{P_0}}{\Sigma \frac{1}{P_1}} \times 100$	十五品加權倒數平均價 $\dfrac{\Sigma W}{\Sigma \frac{W}{P}}$	加權倒數平均實價指數 $\dfrac{\Sigma \frac{W}{P_0}}{\Sigma \frac{W}{P_1}} \times 100$
民國二十年	$0.0669	100.00	$0.1231	100.00
民國廿一年	0.0648	96.82	0.1191	96.75
民國廿二年	0.0638	95.25	0.1195	97.07
民國廿三年	0.0573	85.66	0.1042	84.68
民國廿四年	0.0513	76.68	0.0898	72.98
民國廿五年	0.0623	93.12	0.1175	95.45

計算指數之方法,前已述之甚詳,茲將用各法求得之指數,彙表比較之如下:

表一二九 歷年上海市十五品零售物價指數比較表

民國二十年至二十五年

(民國二十年指數=100)

(各種指數比較表)

指數別	二十年	廿一年	廿二年	廿三年	廿四年	廿五年
綜合比例指數						
簡單綜合指數	100.00	92.94	72.64	82.07	93.52	94.40
加權綜合指數	100.00	93.84	81.46	81.27	84.52	93.13
比例平均指數						

算術平均比價指數						
簡單算術平均比價指數	100.00	97.86	93.14	86.93	85.20	98.58
加權算術平均比價指數	100.00	94.10	80.62	81.93	87.28	94.22
幾何平均比價指數						
簡單幾何平均比價指數	100.00	96.68	91.10	84.37	81.54	95.37
加權幾何平均比價指數	100.00	93.66	79.20	80.93	84.91	92.71
倒數平均比價指數						
簡單倒數平均比價指數	100.00	95.65	89.39	82.22	77.75	92.65
加權倒數平均比價指數	100.00	93.25	77.94	80.04	81.81	91.43
中位比價指數						
簡單中位比價指數	100.00	96.34	89.19	82.52	79.17	87.16
加權中位比價指數	100.00	91.07	80.00	82.52	96.13	87.91
平均比例指數						
算術平均實價指數						
簡單算術平均實價指數	100.00	92.94	72.64	82.07	93.52	94.40
加權算術平均實價指數	100.00	91.28	67.53	82.41	95.74	88.50
幾何平均實價指數						
簡單幾何平均實價指數	100.00	96.57	78.29	72.00	81.71	81.71
加權幾何平均實價指數	100.00	93.65	79.18	80.95	84.97	92.72
倒數平均實價指數						
簡單倒數平均實價指數	100.00	96.82	95.25	85.66	76.68	93.12
加權倒數平均實價指數	100.00	96.75	97.07	84.68	72.98	95.45

第六節　指數公式之測驗

指數公式多至百數十,何者適用?何者不適用?甚難斷論。美國統計學家費暄氏曾以同種貨品,同種物價,以一九一三年爲基期,一九一八年爲計算期,以一百三十餘種不同之公式,計算指數.結果一九一八年得最大指數爲 244, 最小指數爲 178, 兩者相差竟達66點,然究以何指數爲最確切,表面觀測,何能辨別?此指數公式測驗之所以重要也.測驗指數公式

之方法有二:

(一) 時間顚倒測驗法

我人如欲測定去今兩年之物價指數,則兩年中任何一年,均可作爲基期.然以去年作爲基期而編製今年之指數,名曰前進指數.以本年作爲基期而編製去年之指數,名曰後退指數.時間顚倒測驗(Time reversal test)者,即前進指數與後退指數相乘之積,是否爲一之測驗也.若物品祇有一種,則後退指數即爲前進指數之倒數,故前進指數與後退指數之乘積必等於一.例有某牌棉紗於民國二十年每件平均市價爲\$250,二十五年爲\$200;如以二十年爲基期,則得二十五年之指數爲$(200\div 250)\times 100=80$;如以二十五年爲基期,則得二十年之指數爲$(250\div 200)\times 100=125$;兩指數相乘之積爲一.

前進指數 $= 80\% = 0.80$

後退指數 $= 125\% = 1.25$

前進指數 × 後退指數 $= 0.80 \times 1.25 = 1.00$

如物品不祇一種,則由各公式求得之指數,未必盡能適應此種測驗.茲仍以前例,換用二十五年爲基期,求得二十年之後退指數如下表第四列:

表一三〇 前進指數與後退指數比較表

（時間顚倒測驗表）

指數別	前進指數（民國二十年指數＝100）		後退指數（民國廿五年指數＝100）		時間顚倒測驗
	二十年指數	廿五年指數	二十年指數	廿五年指數	前進指數乘後退指數
簡單指數					
綜合指數	100.00	94.40	105.96	100.00	1.0003
算術平均比價指數	100.00	98.58	107.93	100.00	1.0640
算術平均實價指數	100.00	94.40	105.96	100.00	1.0003
幾何平均比價指數	100.00	95.37	104.85	100.00	1.0000
幾何平均實價指數	100.00	81.71	122.38	100.00	1.0000
倒數平均比價指數	100.00	92.65	101.44	100.00	0.9398
倒數平均實價指數	100.00	93.12	107.38	100.00	0.9999
中位比價指數	100.00	87.16	114.73	100.00	1.0000
加權指數					
綜合指數	100.00	93.13	107.37	100.00	1.0000
算術平均比價指數	100.00	94.22	109.37	100.00	1.0305
算術平均實價指數	100.00	88.50	113.00	100.00	1.0001
幾何平均比價指數	100.00	92.71	107.87	100.00	1.0001
幾何平均實價指數	100.00	92.72	107.85	100.00	1.0000
倒數平均比價指數	100.00	91.43	106.13	100.00	0.9703
倒數平均實價指數	100.00	95.45	104.77	100.00	1.0000
中位比價指數	100.00	87.91	113.75	100.00	1.0000

綜觀上表,可知指數公式之能適應時間顚倒測驗者僅綜合,幾何,中位及衆數指數.至於算術平均指數,因受極端物價之影響,大於幾何平均指數;而倒數平均指數,因

受倒數之影響,較小於幾何平均指數.致算術平均之前進指數乘後退指數常大於一,而有偏高誤(Upward bias).倒數平均之前進指數乘後退指數,常小於一,而有偏低誤 (Downward bias).此種偏高偏低誤,總稱之曰型偏誤(Type bias).至於加權算術及倒數平均指數,則以加權之關係,偏高偏低誤較小.蓋此種指數,常兼具型偏及權偏(Weight bias)兩種錯誤,在型偏誤向上,權偏誤向下;或型偏誤向下,權偏誤向上時,型偏權偏往往互相抵銷,致指數之偏誤減小(惟無定律).此加權指數之所以較優於簡單指數也.

(二) 量值衡平測驗法

量值衡平測驗(Factor reversal test 亦稱因子顛倒測驗),乃物價與物量指數之測驗也.蓋物價與物量指數之積,理論上應等於物值指數.例有某牌麵粉每包單價於民國二十年爲\$4,二十五年爲\$2,二十年每工人家庭消費量爲3包,二十五年爲4.5包,則粉價與粉量指數如下:

麵粉價指數

民國二十年指數 $=100.00$

民國二十五年指數 $=50.00\left(即\frac{2}{4}\times100\right)$

麵粉量指數

民國二十年指數 $=100.00$

民國二十五年指數 $=150.00\left(\text{即}\frac{4.5}{3}\times 100\right)$

麵粉值指數

民國二十年指數 $=100.00$

民國二十五年指數 $=75.00\left(\text{即}\frac{2\times 4.5}{4\times 3}\times 100\right)$

或麵粉價指數乘麵粉量指數

民國二十五年麵粉值指數 $=0.50\times 1.50\times 100=75.00$

於此可知,如物品祇有一種,則物價指數乘物量指數,即等於物值指數.如物品有數種時,則除費喧氏之理想公式外,俱不能適應此種測驗.惟理想公式仍不能適應時間顛倒測驗.

時間顛倒測驗及量值衡平測驗二者雖為試驗公式優劣之方法,但優良之公式,未必盡能適應此種測驗,適應此種測驗之公式,亦未必盡為優良之公式.如拉斯貝爾,派許,愛奇華士及馬沙氏之綜合公式,雖不合於時間顛倒測驗,然仍不失為優良之公式.反之,簡單中位及衆數指數,雖能適應時間顛倒測驗,然仍無補於其任偏性之弱點.此我人應當注意者也.

除上述兩種測驗法外,尚有一種測驗法,謂之循環測驗(Circular test)係由時間顛倒測驗法推演而得.時間顛倒測驗,係試驗甲乙兩時期互為基期,或甲乙兩地互為比較標準,所得指數彼此有無矛盾之測驗,而循環測驗則係試驗兩個以上之時期或地域輪為基期,或輪為

比較標準所得之指數,彼此有無矛盾之測驗.例如民國二十三年至二十五年之粳米零售價如下:

粳米零售價

民國二十三年每市石為\$10.00

民國二十四年每市石為\$12.00

民國二十五年每市石為\$15.00

如以民國二十三年為基期:

民國二十三年指數 =100.00

民國二十四年指數 =120.00

如以民國二十四年為基期:

民國二十四年指數 =100.00

民國二十五年指數 =125.00

如以民國二十五年為基期:

民國二十五年指數 =100.00

民國二十三年指數 $=66\frac{2}{3}$

三期輪為基期,得各期指數如上,若將各期指數,彼此相乘,結果應等於一$\left(\frac{120}{100}\times\frac{125}{100}\times\frac{66\frac{2}{3}}{100}=1\right)$.一種物品如此,多種物品編成之指數似亦應如此.故簡單言之,時間顛倒測驗係試驗甲乙兩時期互為基期,所得之指數彼此相乘,其積是否等於一之測驗.而循環測驗係試驗兩個以上之時期或地域輪為基期或比較標準,所得指數彼此相乘之積,是否等於一之測驗.惟此種測驗,據費暄氏

之報告,各時代或各地物品之重要性不同,宜乎不能適合此種測驗.祇有權數爲常數之時,方可滿足此測驗,故卽理想公式,亦不適應也.

第七節　各種指數之特性

(一) 簡單指數之特性

指數之計算,如以權數之不易搜集,而單以物價或物量等編製者,謂之簡單指數.其以計算方法之不同,復可分爲六種:

(1) 簡單綜合指數——用綜合比例法求得之簡單綜合指數,表面上似無權數,然究諸實際,常有無意義之權數參入.例有四種物價如下:

某號粳米每市石二十四年$10.00,二十五年$12.00

某號小麥每市擔二十四年 $7.00,二十五年 $6.00

鮮豬肉每市斤　二十四年 $0.25,二十五年 $0.30

肥皂每十塊　　二十四年 $0.50,二十五年 $0.55

如粳米以市石計,小麥以市擔計,鮮豬肉以市斤計,肥皂以十塊計,則二十四年四品之總合價爲 $17.75,二十五年爲 $18.85,若以二十四年爲基期,得兩年簡單綜合指數如下:

民國二十四年指數＝100.00

民國二十五年指數＝106.20

如計價之單位,粳米改以市升計,則二十四年四品之總合價爲$7.85,二十五年爲$6.97,若以二十四年爲基期,則得兩年簡單綜合指數如下:

民國二十四年指數 =100.00

民國二十五年指數 = 88.79

同爲四物,同爲零售價,同以二十四年爲基期,僅以粳米計價單位一市石與一市升之差,得二十五年之第一指數爲 106.20, 上漲 6.20, 第二指數爲88.79,竟下跌11.21,此種矛盾情形,全受無意義權數之影響所致.蓋第一指數粳米價以 100 市升(即一市石)爲計價之單位,換言之,即粳米價權重 100 倍,因粳米價每市升上漲二分,致指數高升百分之 6.20. 第二指數粳米以 1 市升爲計價之單位,致粳米一品,較第一指數減輕 100 倍,其價格雖上漲二分,然經總合後,受麥價下跌之影響,而低降百分之 11.21.故用綜合比例法求得之簡單綜合指數,雖能適應時間顛倒測驗,然受計價單位之影響,性質無定 (Indeterminate), 是以少用爲宜.

(2) 簡單算術平均指數——用算術平均法計算指數之優點,在於意義明顯,計算便捷.其缺點,如簡單算術平均實價指數,與簡單綜合指數同,受計價單位之影響而性質無定.至於簡單算術平均比價指數,則常有上偏誤,而不能適應時間顛倒測驗.蓋物品比價之上漲

無限,而跌勢最低至零爲止.極漲與極跌平均,牽上之勢遠過扯下之勢.故比價中如有一二品具極大漲勢時,總指數常蒙其影響而呈劇升之勢,此其第一缺點也.算術平均比價指數,不僅不能適應時間顛倒測驗,且用比價計算平均指數時,常可發生矛盾之結果.例有甲乙兩種物價,甲物於民國二十年每單位價格爲\$4.00,二十五年爲\$2.00,乙物於民國二十年每單位價格爲\$10.00,二十五年爲\$20.00,如以民國二十年爲基期,求得兩品比價如下:

甲品二十年比價=100.00,二十五年比價= 50.00

乙品二十年比價=100.00,二十五年比價=200.00

如用上列兩品比價,核計其算術平均比價指數如下:

民國二十年指數 =100.00[即(100+100)÷2]

民國二十五年指數=125.00[即(50+200)÷2]

反之,如以民國二十五年爲基期,求得兩品比價如下:

甲品二十年比價=200.00,二十五年比價=100.00

乙品二十年比價= 50.00,二十五年比價=100.00

如用上列兩品比價,核計其算術平均比價指數如下:

民國二十年指數 =125.00[即(200+50)÷2]

民國二十五年指數=100.00[即(100+100)÷2]

前例以民國二十年爲基期,得二十五年之算術平均比價指數爲125.以二十五年爲基期,得二十年之算

術平均比價指數爲 125,其矛盾及謬誤點,於此可見一般.

(3)簡單幾何平均指數——簡單幾何平均指數不僅能適應時間顚倒測驗,且對於極端事項,往往予以公平之平均,準確之結果.例有甲乙兩物價,甲較基價漲十倍爲1000,乙較基期跌十倍爲10,如用算術平均法平均之,得算術平均比價指數爲 505.如用倒數平均法平均之,得倒數平均比價指數爲 19.80.如用幾何平均法平均之,得幾何平均比價指數爲 100.蓋物價一漲十倍,一跌十倍,固未變動也.

(4)簡單倒數平均指數——用算術平均法求得之簡單算術平均指數,常有上偏誤,前已述之.用倒數平均法求得之簡單倒數平均指數,適與算術平均指數相反,而有下偏誤,此其第一缺點.因有下偏誤而不能適應時間顚倒測驗,此其第二缺點.有時如算術平均比價指數同,亦有矛盾現象之呈現.例有甲乙兩物價如下:

甲物 民國二十年每單位價 \$4.00

民國二十五年每單位價 \$1.00

乙物 民國二十年每單位價 \$2.00

民國二十五年每單位價 \$8.00

如以二十年爲基期,核計兩品比價如下:

甲物 民國二十年比價 = 100.00

民國二十五年比價=25.00

乙物 民國二十年比價=100.00

民國二十五年比價=400.00

民國二十年簡單倒數平均比價指數爲:

$$\frac{2}{1.00+1.00}\times100=100.00$$

民國二十五年簡單倒數平均比價指數爲:

$$\frac{2}{4.00+0.25}\times100=47.06$$

如以二十五年爲基期,核計兩品比價如下:

甲物 民國二十年比價=400.00

民國二十五年比價=100.00

乙物 民國二十年比價=25.00

民國二十五年比價=100.00

民國二十年簡單倒數平均比價指數爲:

$$\frac{2}{0.25+4.00}\times100=47.06$$

民國二十五年簡單倒數平均比價指數爲:

$$\frac{2}{1.00+1.00}\times100=100.00$$

前例以民國二十年爲基期,得二十五年指數爲47.06.若以二十五年爲基期,得二十年指數爲47.06.其矛盾情形,於此可見.此簡單倒數平均指數之第三缺點也.

(5)簡單中位比價指數——簡單中位比價指數之優點,在能避免極端比價之影響,與計算之便捷,意義之淺顯.其劣點乃缺乏敏銳性(Intensive)及有任偏誤(Freakish),蓋中位比價指數之決定,僅將各品比價依其數值之大小,順次排定後,求其中位之比價即得,對於中位兩端之比價,雖有劇烈之變動時,幾無所感覺中位之數值.至於居中一二比價之變動,即足影響中位比價指數之大小,其錯誤或大或小,無一定之方向.故此種指數除缺乏敏銳性外,兼有任偏誤之缺點.

(6)衆數比價指數——衆數比價指數之優點,亦能避免極端比價之影響,與計算之便捷,意義之明顯.其缺點,亦缺乏敏銳性與富有任偏誤,故鮮有用之者.

(二) 加權指數之特性

權數之種類不一,然概別之有二:

(1)以物量為權數——用綜合比例法編製加權指數,則以各品之消費量,生產量或交易量等為權數較為確當.蓋用物量權重物價,即足顯別各品之重要性,左右總指數之大小也.

(2)以物值為權數——用比例平均法計算加權指數,則應選取各品之消費值,生產值或交易值等為權數.蓋物量單位不同,未可總計平均之故.惟物值又可分為四:

(A)基期物值(P_0Q_0).

(B)基期物價乘計算期物量之物值(P_0Q_1).

(C)計算期物價乘基期物量之物值(P_1Q_0).

(D)計算期物值(P_1Q_1).

四種權數中,何者為優?何者為劣?須視編製比價指數之方法如何而定.例如:

(A)加權算術平均比價指數

(a)以基期物價乘基期物量之物值為權數(P_0Q_0)——加權算術平均比價指數之編製,如以基期物價乘基期物量之物值(即基期物值P_0Q_0)為權數,則其權偏誤偏低.蓋基期物價高(P_0大),而假定物量無劇變(Q_0平)時,則所得計算期之比價小$\left(\frac{P_1\text{小}}{P_0\text{大}}=\text{比價小於}100\right)$,如以基期較大之物值($P_0Q_0$大)為權數,則其權偏誤偏低.反之,基期物價低($P_0$小),而假定物量無劇變($Q_0$平)時,則所得計算期之比價大$\left(\frac{P_1\text{大}}{P_0\text{小}}=\text{比價大於}100\right)$,如以基期較小之物值($P_0Q_0$小)為權數,則其權偏誤仍偏低.

(b)以基期物價乘計算期物量之物值為權數(P_0Q_1)——加權算術平均比價指數之編製,如以基期物價乘計算期物量之物值(P_0Q_1)為權數,則其權偏誤偏低.蓋基期物價高(P_0大),而計算期物量假定無劇變(Q_1平)時,則所得計算期之比價小$\left(\frac{P_1\text{小}}{P_0\text{大}}=\text{比價小於}100\right)$,如以基期物價乘計算期物量之較大物值($P_0Q_1$大)為權數,

則其權偏誤偏低.反之,基期物價低(P_0小),而計算期物量假定無劇變(Q_1平)時,則所得計算期之比價大$\left(\frac{P_1\text{大}}{P_0\text{小}}=\text{比價大於}100\right)$,如以基期物價乘計算期物量之較小物值($P_0Q_1$小)爲權數,則其權偏誤仍偏低.

(c)以計算期物價乘基期物量之物值爲權數(P_1Q_0)——加權算術平均比價指數之編製,如以計算期物價乘基期物量之物值(P_1Q_0)爲權數.則其權偏誤偏高.蓋計算期物價高(P_1大),而基期物量假定無劇變(Q_0平)時,則得計算期之比價大$\left(\frac{P_1\text{大}}{P_0\text{小}}=\text{比價大於}100\right)$,如以計算期物價乘基期物量之較大物值($P_1Q_0$大)爲權數,則其權偏誤偏高.反之,計算期物價低($P_1$小),而基期物量假定無劇變($Q_0$平)時,則得計算期之比價小$\left(\frac{P_1\text{小}}{P_0\text{大}}=\text{比價小於}100\right)$,如以計算期物價乘基期物量之較小物值($P_1Q_0$小)爲權數,則其權偏誤仍偏高.

(d)以計算期物價乘計算期物量之物值爲權數(P_1Q_1)——加權算術平均比價指數之編製,如以計算期物價乘計算期物量之物值(即計算期物值P_1Q_1)爲權數,則其權偏誤偏高.蓋計算期物價高(P_1大),而計算期物量假定無劇變(Q_1

平）時,則得計算期之比價大$\left(\frac{P_1\text{大}}{P_0\text{小}}=\text{比價大於}100\right)$,如以計算期較大之物值（$P_1Q_1$大）為權數,則其權偏誤偏高.反之,計算期物價低（$P_1$小）,而計算期物量假定無劇變（$Q_1$平）時,則得計算期之比價小$\left(\frac{P_1\text{小}}{P_0\text{大}}=\text{比價小於}100\right)$,如以計算期較小之物值（$P_1Q_1$小）為權數,則其權偏誤仍偏高.

(B)加權幾何平均比價指數——簡單幾何平均比價指數,本無型偏,然若計算其加權指數,則生權偏誤,其偏誤方向與加權算術平均比價指數之權偏方向同.即用基期物值(P_0Q_0)及基期物價乘計算期物量之物值(P_0Q_1)為權數者,俱有偏低誤.若以計算期物價乘基期物量之物值(P_1Q_0)及計算期物值(P_1Q_1)為權數者,俱有偏高誤是也.

(C)加權倒數平均比價指數——加權倒數平均比價指數之權偏方向,亦與加權算術平均比價指數之權偏方向同.即用基期物值(P_0Q_0)及基期物價乘計算期物量之物值(P_0Q_1)為權數者,俱有偏低誤.若以計算期物價乘基期物量之物值(P_1Q_0)及計算期物值(P_1Q_1)為權數者,俱有偏高誤是也.

綜觀上述,可知簡單算術及倒數平均比價指數,本有型偏性,因所用權數之適當與否,或可銷除偏誤而成

無偏誤,或於型偏之外更加權偏而成雙重偏誤.簡單幾何平均比價指數本無型偏性,因採用各種權數,致有一重偏高或偏低之權偏誤.茲更列示其偏誤重數及偏誤方向如下:

(A)二重偏低(−2)

(a)加權倒數平均比價指數第一式

$$I_H=\frac{\Sigma P_0Q_0}{\Sigma P_0Q_0\frac{P_0}{P_1}}\times 100$$ (型偏誤偏低+權偏誤偏低)

(b)加權倒數平均比價指數第二式

$$I_H=\frac{\Sigma P_0Q_1}{\Sigma P_0Q_1\frac{P_0}{P_1}}\times 100$$ (型偏誤偏低+權偏誤偏低)

(B)一重偏低(−1)

(a)加權幾何平均比價指數第一式

$$I_G=\sqrt[\Sigma P_0Q_0]{\pi\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{P_0Q_0}}\times 100$$ (無型偏誤+權偏誤偏低)

(b)加權幾何平均比價指數第二式

$$I_G=\sqrt[\Sigma P_0Q_1]{\pi\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{P_0Q_1}}\times 100$$ (無型偏誤+權偏誤偏低)

(C)無偏誤(0)

(a)加權算術平均比價指數第一式

$$I_M=\frac{\Sigma P_0Q_0\frac{P_1}{P_0}}{\Sigma P_0Q_0}\times 100$$（型偏誤偏高＋權偏誤偏低）

(b)加權算術平均比價指數第二式

$$I_M=\frac{\Sigma P_0Q_1\frac{P_1}{P_0}}{\Sigma P_0Q_1}\times 100$$（型偏誤偏高＋權偏誤偏低）

(c)加權倒數平均比價指數第三式

$$I_H=\frac{\Sigma P_1Q_0}{\Sigma P_1Q_0\frac{P_0}{P_1}}\times 100$$（型偏誤偏低＋權偏誤偏高）

(d)加權倒數平均比價指數第四式

$$I_H=\frac{\Sigma P_1Q_1}{\Sigma P_1Q_1\frac{P_0}{P_1}}\times 100$$（型偏誤偏低＋權偏誤偏高）

(D)一重偏高(＋1)

(a)加權幾何平均比價指數第三式

$$I_G=\sqrt[\Sigma P_1Q_0]{\pi\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{P_1Q_0}}\times 100$$（無型偏誤＋權偏誤偏高）

(b)加權幾何平均比價指數第四式

$$I_G=\Sigma P_1Q_1\sqrt{\pi\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{P_1Q_1}}\times 100$$（無型偏誤＋權偏誤偏高）

(E)二重偏高（＋2）

(a)加權算術平均比價指數第三式

$$I_M=\frac{\Sigma P_1Q_0\frac{P_1}{P_0}}{\Sigma P_1Q_0}\times 100$$（型偏誤偏高＋權偏誤偏高）

(b)加權算術平均比價指數第四式

$$I_M=\frac{\Sigma P_1Q_1\frac{P_1}{P_0}}{\Sigma P_1Q_1}\times 100$$（型偏誤偏高＋權偏誤偏高）

所堪注意者,簡單幾何平均比價指數,本無型偏,但用第三第四兩法加權則偏高,第一第二兩法加權則偏低,簡單算術平均比價指數,原有偏高之弊,若用第三第四兩法加權,則成雙重偏高.倒數平均比價指數,原有偏低之弊,若用第一第二兩法加權,則成雙重偏低.惟若用第一第二兩法權重算術平均比價指數,第三第四兩法權重倒數平均比價指數,則型偏與權偏互銷,而成無偏誤.權數與公式關係之重要,於此可見一般.惟所謂無偏誤,非絕對準確,不過謂公式之型偏誤,可與相反之權偏誤相銷,但是否可銷盡無餘,未可定也.

本章應用公式

（公式一四八）簡單綜合指數

$$I_A=\frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0}\times 100$$

（公式一四九）加權綜合指數

$$I_A=\frac{\Sigma P_1 Q}{\Sigma P_0 Q}\times 100$$

（公式一五〇）拉斯貝爾綜合指數

$$I_A=\frac{\Sigma P_1 Q_0}{\Sigma P_0 Q_0}\times 100$$

（公式一五一）派許綜合指數

$$I_A=\frac{\Sigma P_1 Q_1}{\Sigma P_0 Q_1}\times 100$$

（公式一五二）愛奇華士馬沙綜合指數

$$I_A=\frac{\Sigma P_1(Q_0+Q_1)}{\Sigma P_0(Q_0+Q_1)}\times 100$$

（公式一五三）理想公式指數

$$I_A=\sqrt{\frac{\Sigma P_1 Q_0}{\Sigma P_0 Q_0}\times\frac{\Sigma P_1 Q_1}{\Sigma P_0 Q_1}}\times 100$$

（公式一五四）擴張基期綜合指數

$$I_A=\frac{\Sigma P_1\times \text{若干期平均物量}}{\text{若干期平均物價}\times\text{若干期平均物量}}\times 100$$

（公式一五五）概權綜合指數

$$I_A=\frac{\Sigma P_1 W_c}{\Sigma P_0 W_c}\times 100$$

（公式一五六）簡單算術平均比價指數

$$I_M=\frac{\Sigma\frac{P_1}{P_0}}{N}\times 100$$

（公式一五七）加權算術平均比價指數

$$I_M=\frac{\Sigma W\frac{P_1}{P_0}}{\Sigma W}\times 100$$

（公式一五八）費暄氏第三公式指數

$$I_M=\frac{\Sigma P_0Q_0\frac{P_1}{P_0}}{\Sigma P_0Q_0}\times 100$$

（公式一五九）費暄氏第五公式指數

$$I_M=\frac{\Sigma P_0Q_1\frac{P_1}{P_0}}{\Sigma P_0Q_1}\times 100$$

（公式一六〇）費暄氏第七公式指數

$$I_M=\frac{\Sigma P_1Q_0\frac{P_1}{P_0}}{\Sigma P_1Q_0}\times 100$$

（公式一六一）費暄氏第九公式指數

$$I_M=\frac{\Sigma P_1Q_1\frac{P_1}{P_0}}{\Sigma P_1Q_1}\times 100$$

（公式一六二甲）簡單幾何平均比價指數

$$I_G=\sqrt[N]{\pi\frac{P_1}{P_0}}\times 100$$

（公式一六二乙）簡單幾何平均比價指數

$$I_G=antilog\left(\frac{\Sigma\ log\frac{P_1}{P_0}}{N}+log\ 100\right)$$

（公式一六三甲）加權幾何平均比價指數

$$I_G=\sqrt[\Sigma W]{\pi\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^W}\times 100$$

（公式一六三乙）加權幾何平均比價指數

$$I_G = antilog\left[\frac{\Sigma W \log \frac{P_1}{P_0}}{\Sigma W} + \log 100\right]$$

（公式一六四）簡單倒數平均比價指數

$$I_H = \frac{N}{\Sigma \frac{P_0}{P_1}} \times 100$$

（公式一六五）加權倒數平均比價指數

$$I_H = \frac{\Sigma W}{\Sigma W \frac{P_0}{P_1}} \times 100$$

（公式一六六）中位比價指數之位置

$$I'_D = \frac{N+1}{2}$$

（公式一六七）衆數比價指數

$$I_0 = L + \frac{f'_2}{f'_1 + f'_2} \times i$$

（公式一六八）簡單算術平均實價指數

$$I_m = \frac{\frac{\Sigma P_1}{N}}{\frac{\Sigma P_0}{N}} \times 100$$

（公式一六九）加權算術平均實價指數

$$I_m = \frac{\frac{\Sigma W P_1}{\Sigma W}}{\frac{\Sigma W P_0}{\Sigma W}} \times 100$$

（公式一七〇甲）簡單幾何平均實價指數

$$I_g=\frac{\sqrt[N]{\pi P_1}}{\sqrt[N]{\pi P_0}}\times 100$$

（公式一七〇乙）簡單幾何平均實價指數

$$I_g=antilog\left\{\left[\frac{\Sigma\, log\, P_1}{N}-\frac{\Sigma\, log\, P_0}{N}\right]+log\,100\right\}$$

（公式一七一甲）加權幾何平均實價指數

$$I_g=\frac{\sqrt[\Sigma W]{\pi P_1{}^W}}{\sqrt[\Sigma W]{\pi P_0{}^W}}\times 100$$

（公式一七一乙）加權幾何平均實價指數

$$I_g=antilog\left\{\left[\frac{\Sigma W\, log\, P_1}{\Sigma W}-\frac{\Sigma W\, log\, P_0}{\Sigma W}\right]+log\,100\right\}$$

（公式一七二）簡單倒數平均實價指數

$$I_h=\frac{\Sigma\frac{1}{P_0}}{\Sigma\frac{1}{P_1}}\times 100$$

（公式一七三）加權倒數平均實價指數

$$I_h=\frac{\Sigma\frac{W}{P_0}}{\Sigma\frac{W}{P_1}}\times 100$$

問 題

1. 試述指數之意義及指數之功用。
2. 指數始於何時?盛自何時?為何人首創?何人興革?
3. 何謂定基指數?環比指數?鎖比指數?試略述其編製法。
4. 指數如依比較對象之不同,約可分為幾種?試分別略述其編製之

方法。

5. 指數如依所用資料之不同,約可分為幾種?試分別略述其編製之目的。

6. 取樣多寡影響指數如何?編製物價指數時,究應選取若干物品作為樣本?

7. 選取物品時應注意之點有幾?試申述之。

8. 試述物價之種類,選擇物價之原則及徵集物價之困難。

9. 基期之種類有幾?選擇基期時應注意何點?試詳述之。

10. 試述加權之重要性,及權數之種類。

11. 計算指數之方法有幾?試作一表式示之。

12. 何謂時間顛倒測驗?何種指數公式能適應此種測驗?何種指數公式不能適應此種測驗?其結果如何?試各詳述之。

13. 何謂量值衡平測驗?何種指數公式能適應此種測驗?試申述之?

14. 試述各種簡單指數之特性。

15. 試述各種加權指數之特性。

習題三十四

民國二十年至二十五年上海輸入十五品物價表

品別	單位	二十年	廿一年	廿二年	廿三年	廿四年	廿五年
棉花(正米特合美棉)	擔(1)	$66.114	$52.860	$56.544	$60.840	$59.267	$72.752
煤(頭號新紅屑)	公噸(2)	17.418	14.913	12.481	13.253	13.810	15.025
石蠟(美孚125°—127°)	擔(1)	19.938	20.518	24.608	18.875	15.496	18.325
人造絲($C/150$)	百磅	247.637	237.105	241.433	214.604	177.490	195.844
鋼鐵(九十磅素馬口鐵)	箱	19.300	14.389	16.757	15.304	14.354	18.388

汽　油	五加侖(3)	5.429	5.300	4.336	4.140	4.533	5.000
染　料（二成靛油）	擔(1)	97.188	113.202	112.007	120.750	111.750	113.000
紙　（三七磅報紙）	令	6.095	5.407	4.693	3.975	3.446	3.533
米　（一號西貢米）	石(4)	12.376	10.458	8.251	9.354	10.698	10.983
麵　粉（紅日當天牌）	袋(5)	2.943	2.762	2.413	2.241	2.544	3.366
糖　（廿四號粗沙白糖）	擔(6)	14.837	18.673	20.960	19.590	17.827	21.794
紙　烟（大英牌）	千　枝	7.736	6.278	6.255	6.582	6.211	5.918
棉　布（冲深色花標）	碼	0.357	0.350	0.285	0.281	0.263	0.258
細斜布（十二磅細斜）	疋	10.259	9.605	7.405	6.906	6.744	7.419
香　水（檀香水）	打	18.610	19.437	22.075	24.279	27.844	35.615

(註) (1) 磅秤 100 斤=120.96 市斤。　(4) 1 石=180 市斤。

(2) 1 公噸=0.9842 英噸。　(5) 1 袋=57.155 市斤。

(3) 此係美加侖, 1 美加侖=3.79 市升。　(6) 絲蔴秤 100 斤=123.17 市斤。

試用歷年上海輸入十五品物價,計算以下諸指數:

(1) 簡單綜合指數。

(2) 簡單算術平均實價指數。

(3) 簡單幾何平均實價指數。

(4) 簡單倒數平均實價指數。

習題三十五

民國二十年至二十五年上海輸入十五品物價比價表

(民國二十年比價=100)

品　　別	二十年	廿一年	廿二年	廿三年	廿四年	廿五年
棉　　花	100.00	79.95	85.53	92.02	89.64	110.64
煤	100.00	85.62	71.66	76.09	79.29	86.26

石蠟	100.00	102.91	123.42	94.67	77.72	91.91
人造絲	100.00	95.75	97.49	86.66	71.67	79.09
鋼鐵	100.00	74.55	86.82	79.30	74.37	95.28
汽油	100.00	97.62	79.88	76.26	83.50	92.10
染料	100.00	116.48	115.25	124.24	114.98	116.27
紙	100.00	88.71	77.00	65.22	56.54	57.97
米	100.00	84.50	66.67	75.58	86.44	88.74
麵粉	100.00	93.85	81.99	76.15	86.44	114.37
糖	100.00	125.85	141.27	132.03	120.15	146.89
紙烟	100.00	81.15	80.86	85.08	80.29	76.50
棉布	100.00	98.04	79.83	78.71	73.67	72.27
細斜布	100.00	93.63	72.18	67.32	65.74	72.32
香水	100.00	104.44	118.62	130.46	149.62	191.38

試用歷年上海輸入十五品物價比價,計算以下諸指數:

(1) 簡單算術平均比價指數。

(2) 簡單幾何平均比價指數。

(3) 簡單倒數平均比價指數。

(4) 簡單中位比價指數。

習題三十六

民國十四,十五,十六年我國平均輸入各品淨值表

品別	平均輸入淨值	
	單位　千海關兩	單位　千元
棉花(正米特令美棉)	81,176	126,472
煤(頭號新紅屑)	21,922	34,154

石　蠟（美孚125°—127°）	4,882	7,606
人造絲（$C/150$）	7,154	11,146
鋼　鐵（九十磅素馬口鐵）	5,522	8,603
汽　油	5,621	8,758
染　料（二成靛油）	12,669	19,738
紙　（三七磅報紙）	5,991	9,334
米　（一號西貢米）	86,070	134,097
麵　粉（紅日當天牌）	19,975	31,121
糖　（廿四號粗沙白糖）	32,202	50,171
紙　烟（大英牌）	17,099	26,640
棉　布（冲深色花標）	9,158	14,268
細斜布（十二磅細斜）	10,483	16,338
香　水（檀香水）	3,177	4,950

（註）　1海關兩＝\$1.558.

試用十四,十五,十六年我國平均輸入各品淨值作爲權數,計算以下諸指數:

（1）加權算術平均比價指數。

（2）加權算術平均實價指數。

（3）加權幾何平均比價指數。

（4）加權幾何平均實價指數。

（5）加權倒數平均比價指數。

（6）加權倒數平均實價指數。

（7）加權中位比價指數。

習題三十七

試用時間顛倒測驗法測驗以下諸指數:（試以二十五年爲基期,核算

二十年各指數後,用時間顚倒測驗法測定各種指數之優劣.)

(1) 簡單綜合指數.

(2) 簡單算術平均比價指數.

(3) 簡單算術平均實價指數.

(4) 簡單幾何平均比價指數.

(5) 簡單幾何平均實價指數.

(6) 簡單倒數平均比價指數.

(7) 簡單倒數平均實價指數.

(8) 簡單中位比價指數.

(9) 加權算術平均比價指數.

(10) 加權算術平均實價指數.

(11) 加權幾何平均比價指數.

(12) 加權幾何平均實價指數.

(13) 加權倒數平均比價指數.

(14) 加權倒數平均實價指數.

(15) 加權中位比價指數.

第十二章　我國現編之指數

第一節　我國編製指數之沿革

我國編製指數乃近四十餘年之事.其演進可分爲三期:

(一) 外人代編時期

第一期自一八九五年至一九一九年爲外人代編時期.蓋於一八九五年間,英人溫德莫氏(W. S. Wetmore)用江海關評定之進出口22種物價,編製中國批發物價指數.當時以一八七三年爲基期,自一八七三年起至一八九二年止,按年編製,並刊登於英國皇家殖民委員會一八九四年至一八九五年之報告中(Proceedings of The Royal Colonial Institute, 1894—1895).此爲我國指數之濫觴.同時日本幣制委員會(Japanese Monetary Commission)於其一八九五年之報告中,亦編有中國批發物價指數一種,其起迄日期,各較溫氏指數落後一年(一八七四年起至一八九三年止),採用物品52種,分爲內地貨物,出口貨物及上海食物等三類,以一八七四年爲基期.以上二指數均爲外人代我編製,其歷史上之價值,實大於實用上之價值,故可視作歷史上之紀念品.嗣後二十餘年間,我國指數之編製,雲烟消沉,繼起無人,蓋猶未能引人入趣之故也.

(二) 創始時期

第二時期自民國八年至十四年（即自一九一九年至一九二五年）爲創始時期.蓋自歐戰爆發,貨價飛漲,物價指數遂爲國人所注意.民國八年財政部駐滬調查貨價局（即今之財政部國定稅則委員會）選擇物品 150 種,調查其躉售價,編製上海躉售物價指數,爲國人以原始資料自編指數之嚆矢.其後香港貿易部根據海關報告冊,復編有物價指數一種,在香港貿易報告書中發表.金陵大學巴克教授 (J. L. Buck) 於民國十四年令該校學生在河北鹽山及山西武鄉二處,搜集農村物價各 8 種,以一九〇〇年至一九一四年之平均價爲基價,自一八七五年起至一九二三年止,用簡單算術平均法,按年編製指數,並於美國統計學社彙報 (Publication of The American Statistical Association) 中發表之.同時駐滬調查貨價局復編上海輸出入物價指數各一種,在該局自編之上海貨價季刊中按期發表.香港貿易部及巴克教授之指數未爲國人所注意,調查貨價局之指數,以調查翔實,編製周密,迭受中外各方之讚許.故此期爲我國編製指數之創始時期.

(三) 勃興時期

自民國十五年至現在(卽自一九二六年起至現在)爲勃興時期.蓋自上海躉售,上海輸出入物價指數發表後,繼起者如雨後春筍,年有增加.如民國十五年廣東農工廳編製之廣州批發物價指數,唐啓宇之中國批發物價指數,甘博氏(S. D. Gamble)之北平生活費指數.十六年馮柳塘編製之上海國外匯兌指數,駐滬調查貨價局之上海生活費指數,廣東農工廳之廣州農產物價指數,南開大學社會經濟研究委員會(卽今之南開大學經濟研究所)之天津外匯指數.十七年廣東農工廳發表廣州各行工人工資指數,南開大學社會經濟研究委員會之華北物價指數.在此時期內國人對於指數之編製,極感興趣.關於物價指數之編製方法,如選樣,分類,基期及加權等之論文,發表甚多.迨至十七年北伐完成,政局一統後,各地指數之編製更如風起雲湧,盛極一時.以數量論,前後共達66種之多,其中已停止編製者31種,繼續編製者35種(註一).以種類論,自批發物價,零售物價指數,進而擴充至生活費,工資,外匯,貿易及證券等指數.以發表期限論,由按年,按月發表,進而按週與按日發表.

(註一) 天津南開大學經濟研究所編南開指數年刊,民國二十四年.

以編製方法論,由簡單算術平均,進而採用幾何平均,加權綜合及理想公式矣.茲擇我國現有指數中最重要者,就其編製方法,選用物品,以及加權與基期之規定等,分節述之,聊爲編製指數者之研究.

第二節　批發物價指數

近年來我國公私機關編製之批發物價指數,其重要者計有上海財政部國定稅則委員會之上海躉售,上海輸出及上海輸入物價指數;實業部主編之南京漢口及青島批發物價指數;湖南省政府財政廳編製之長沙批發物價指數;天津南開大學經濟研究所編製之華北批發物價指數;廣東省調查統計局編製之廣州批發物價指數;廣西省政府統計局編製之南寧批發物價指數;及國民政府主計處統計局編製之中國每日物價指數等十一種.茲將其計算方法,基期,品數,權數及指數等,分別述之如下:

(一)　計算公式

論計算公式,除上海輸出入物價指數用加權綜合法外,餘均用簡單幾何平均比價公式核算指數.

(二)　基期

論基期,用民國十五年平均批發物價作爲基價者,

有上海躉售,上海輸出,上海輸入,華北批發及廣州批發物價指數等五種.用民國十九年平均批發物價作為基價者,有南京批發,漢口批發及青島批發物價指數等三種.用民國二十年六月之平均批發物價作為基價者,僅長沙批發物價指數.用民國二十三年之平均批發物價作為基價者,僅南寧批發物價指數.至於國民政府主計處統計局所編之中國每日物價指數,則以民國二十三年十月十四日之各地平均批發物價作為基價.

(三) 品數

論品數,最少者如中國每日物價指數僅12品,最多者如廣州批發物價指數達 190 品.餘如上海輸出物價指數,採用貨物66品,上海輸入物價指數82品,南京批發物價指數87品,南寧批發物價指數91品,長沙批發物價指數 105 品,華北批發物價指數 106 品,漢口及青島批發物價指數各 120 品,上海躉售物價指數 153 品.

(四) 權數

論權數,除上海輸出入物價指數用民國十四,十五及十六年之平均輸出入各品淨值作為權數外,餘均不加權之簡單指數.茲將各地批發物價指數之編製法等列表示之如下:

表一三一 我國現編批發物價指數一覽表

（編製我國現有批發物價指數總表）

地域別	上海	上海	上海	南京	漢口	長沙	青島	天津	廣州	南寧	中國
指數名稱	上海躉售物價指數	上海輸出物價指數	上海輸入物價指數	南京批發物價指數	漢口批發物價指數	長沙批發物價指數	青島批發物價指數	華北批發物價指數	廣州批發物價指數	南寧批發物價指數	中國每日物價指數
編製機關	財政部國定稅則委員會	財政部國定稅則委員會	財政部國定稅則委員會	實業部	實業部	湖南省政府財政廳	實業部	南開大學經濟研究所	廣東省調查統計局	廣西省政府統計局	國民政府主計處統計局
編製時期	十年一月起	十五年一月起	十五年一月起	十九年一月起	十九年一月起	二十年四月起	十九年一月起	二年一月起	元年一月起	廿三年一月起	廿三年十月起
計算公式	$\sqrt[N]{\pi\frac{P_1}{P_0}}$	$\frac{\Sigma WP_1}{\Sigma WP_0}$	$\frac{\Sigma WP_1}{\Sigma WP_0}$	$\sqrt[N]{\pi\frac{P_1}{P_0}}$	$\sqrt[N]{\pi\frac{P_1}{P_0}}$	$\sqrt[N]{\pi\frac{P_1}{P_0}}$	$\sqrt[N]{\pi\frac{P_1}{P_0}}$	$\sqrt[N]{\pi\frac{P_1}{P_0}}$	$\sqrt[N]{\pi\frac{P_1}{P_0}}$	$\sqrt[N]{\pi\frac{P_1}{P_0}}$	$\sqrt[N]{\pi\frac{P_1}{P_0}}$
基期	民國十五年	民國十五年	民國十五年	民國十九年	民國十九年	民國二十年六月	民國十九年	民國十五年	民國十五年	民國廿三年	民國廿三年十月十四日
品數											
米	22			35	47	18	49	43	20	10	上海11品
糧食									61		漢口11品
其他食物	30					33				21	廣州11品
紡織品及其原料	38					18		19			天津11品
衣料				13	20		21		38	18	
燃料	13			9	14	9	9	12	14	7	
建築材料	11			10	9	17	15	12	39	7	
金屬	12						13	15		6	
金屬及電器				12	17						
化學品	9										
原料品		33	12								
生產品		12	36								
消費品		21	34								
雜項	18			8	13	10	13	5	18	22	
總計	153	66	82	87	120	105	120	106	190	91	12品
權數	簡單指數	十四年至十六年平均輸出各品淨值	十四年至十六年平均輸入各品淨值	簡單指數	簡單指數	簡單指數	簡單指數	簡單指數	簡單指數	簡單指數	簡單指數
物價	上海躉售物價	上海躉售物價	上海躉售物價	南京批發物價	漢口批發物價	長沙批發物價	青島批發物價	天津批發物價	廣州批發物價	南寧批發物價	上海,漢口,廣州及天津批發物價

(五) 指數

茲將我國各地現編批發物價指數分別列表示之如下:

表一三二 上海躉售物價指數表

(民國十五年指數=100)

(批發物價指數表甲)

類別	各類指數								總指數
	食糧	其他食物	紡織品及其原料	金屬	燃料	建築材料	化學品	雜項	
物品項數	22	30	38	12	13	11	9	18	153
民國十年	72.2	81.6	103.5	96.1	108.7	125.5	161.7	104.0	104.6
十一年	82.6	81.5	104.1	85.1	105.4	117.1	119.3	97.5	98.6
十二年	86.3	93.9	110.6	99.3	102.8	115.5	108.9	98.5	102.0
十三年	83.3	95.5	107.5	92.5	97.9	102.7	102.6	95.5	97.9
十四年	91.1	95.5	106.8	96.9	99.5	96.4	101.9	101.1	99.3
十五年	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
十六年	100.6	108.1	100.9	109.1	112.7	105.4	102.6	102.1	104.4
十七年	89.6	108.7	102.1	102.9	104.0	103.0	101.2	102.0	101.7
十八年	97.2	109.5	101.9	111.0	104.1	108.1	105.8	104.2	104.5
十九年	110.3	120.3	105.6	136.2	117.1	118.2	120.1	111.4	114.8
二十年	94.4	138.3	118.8	154.2	148.5	135.4	150.7	122.1	126.7
廿一年	81.7	131.1	98.4	130.1	132.8	124.4	151.6	109.1	112.4
廿二年	69.6	123.2	89.9	132.9	119.1	113.1	153.4	100.7	103.8
廿三年	69.1	111.1	82.2	123.8	122.1	106.9	139.2	93.1	97.1
廿四年	80.0	111.5	78.9	114.1	119.7	99.2	133.2	90.9	96.4
廿五年	92.9	124.5	90.5	130.9	130.9	111.2	137.6	101.9	108.5
一月	85.2	119.6	85.9	128.4	132.5	108.9	140.6	96.4	104.3
二月	87.8	120.6	86.4	128.5	131.4	111.6	141.2	98.4	105.4
三月	93.2	119.5	87.8	127.9	129.8	112.2	140.9	98.1	106.4
四月	94.9	120.8	88.7	128.8	130.6	111.5	140.5	98.9	107.3
五月	91.5	120.2	86.6	126.8	129.7	110.6	138.2	99.8	105.8
六月	90.7	125.8	86.3	124.1	128.8	108.5	138.6	99.4	106.1
七月	91.6	124.9	90.5	123.7	127.6	109.2	135.8	101.3	107.2
八月	92.0	122.2	91.2	126.0	128.8	108.5	135.7	102.7	107.4
九月	90.1	124.5	89.4	128.5	128.7	109.1	133.5	102.6	107.0
十月	94.5	127.0	92.7	131.3	129.8	109.1	134.5	105.0	109.7
十一月	96.3	129.1	97.0	140.4	130.1	114.9	135.8	107.1	113.0
十二月	105.1	132.1	101.8	154.1	141.3	119.9	134.5	110.9	118.8

(註) 其他食物類原爲31品,自二十一年一月起刪去十番參(海參),該類品數減爲30品.化學品類原爲10品,自二十五年七月起刪去綠酸鉀,該類品數減爲9品,全表減爲153品。

表一三三　上海輸出物價指數表

（民國十五年指數=100）

（批發物價指數表乙）

類別	各類指數							總指數
	原料品					生產品	消費品	
	農產	動物產	林產	鑛產	平均			
物品項數	19	7	2	5	33	12	21	66
民國十五年	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
十六年	105.3	102.2	100.2	119.7	106.6	106.5	104.4	106.1
十七年	106.8	106.0	94.4	104.9	106.0	104.0	101.6	104.5
十八年	109.6	108.3	93.1	99.2	107.5	103.6	102.0	105.2
十九年	115.9	106.7	96.0	114.5	113.8	102.6	104.0	108.3
二十年	107.0	107.3	107.9	132.7	110.6	96.1	117.6	107.5
廿一年	95.7	80.8	99.9	109.8	95.6	73.1	104.5	90.4
廿二年	85.8	80.0	89.5	108.3	88.2	67.5	89.3	82.0
廿三年	73.7	79.8	84.8	115.8	80.7	52.2	80.3	71.7
廿四年	82.3	82.8	74.4	119.8	87.3	62.2	78.0	77.6
廿五年	107.4	111.3	80.0	131.9	110.4	81.2	84.0	96.1
一月	95.3	94.1	77.1	140.0	100.7	80.2	82.8	90.8
二月	97.5	96.7	79.7	133.5	101.7	78.5	79.9	90.2
三月	101.8	101.2	85.4	131.6	105.3	81.2	78.2	92.4
四月	110.7	104.3	85.6	132.1	111.9	86.8	78.0	97.3
五月	106.9	105.5	83.9	125.6	108.6	83.6	77.0	94.5
六月	107.7	107.8	79.2	122.6	108.9	84.1	90.6	97.5
七月	115.9	112.8	75.1	122.2	115.0	86.3	88.1	100.7
八月	113.1	118.1	74.3	123.0	113.9	80.0	85.1	97.6
九月	111.2	118.3	77.4	127.1	113.3	75.9	84.5	95.9
十月	108.8	121.1	78.8	129.4	112.5	76.2	87.1	96.1
十一月	106.6	125.3	81.3	138.9	112.9	78.1	88.0	97.1
十二月	113.3	130.8	82.7	156.4	120.8	83.6	89.1	102.9

表一三四 上海輸入物價指數表

(民國十五年指數=100)

(批發物價指數表丙)

類別	各類指數						總指數
	原料品				生產品	消費品	
	農產	林產	鑛產	平均			
物品項數	3	4	5	12	36	34	82
民國十五年	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
十六年	114.7	109.0	120.6	115.6	104.9	104.9	107.3
十七年	119.9	102.8	105.2	115.5	105.4	96.8	102.6
十八年	127.7	106.6	101.0	120.3	110.6	102.0	107.7
十九年	151.1	121.7	116.9	141.6	128.1	120.7	126.7
二十年	159.2	147.1	136.8	153.5	160.2	145.7	150.2
廿一年	138.4	120.2	111.0	131.2	153.7	140.1	140.2
廿二年	131.1	110.6	104.1	123.8	152.6	130.0	132.3
廿三年	123.4	109.2	107.5	118.9	147.1	133.3	132.1
廿四年	119.9	104.0	108.1	116.2	136.1	131.4	128.4
廿五年	138.9	133.5	122.9	135.0	150.4	141.9	141.7
一月	136.4	132.2	120.8	132.7	148.0	142.7	141.1
二月	133.4	140.9	121.8	131.5	148.0	143.3	141.2
三月	132.9	139.1	120.2	130.7	148.0	143.1	140.8
四月	134.0	136.5	123.1	131.9	149.2	142.4	140.9
五月	136.9	132.6	121.3	133.2	148.6	140.9	140.3
六月	139.6	129.9	119.3	134.5	148.3	141.0	140.7
七月	147.5	128.1	119.1	140.0	148.5	140.6	141.8
八月	137.8	128.4	119.2	133.1	149.2	140.4	140.0
九月	137.2	129.5	120.0	132.9	150.1	140.2	140.1
十月	141.3	127.4	121.5	136.0	151.7	142.3	142.3
十一月	140.8	135.6	128.3	137.7	154.3	141.8	142.9
十二月	148.7	141.6	139.5	146.2	160.7	144.4	147.6

表一三五　南京批發物價指數表

（民國十九年指數=100）

（批發物價指數表丁）

類別	各類指數						總指數
	食料	衣料	燃料	金屬及電料	建築材料	雜項	
物品項數	35	13	9	12	10	8	87
民國十九年	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
二十年	99.0	109.6	112.9	115.1	105.3	112.4	106.1
廿一年	93.0	102.5	104.8	100.3	118.2	115.7	100.8
廿二年	85.9	83.3	95.7	92.6	112.9	114.3	92.1
廿三年	77.2	74.0	89.1	73.4	98.0	96.7	80.6
廿四年	85.6	67.4	85.6	64.9	89.4	93.8	80.3
廿五年	91.1	72.8	91.4	66.7	92.1	95.4	84.8
一月	89.2	70.8	98.8	76.2	83.8	93.6	84.2
二月	87.6	73.2	90.2	69.9	85.2	95.7	83.3
三月	89.8	72.6	91.2	70.5	87.4	96.4	84.5
四月	91.0	70.3	92.4	69.5	91.2	94.3	84.7
五月	90.5	66.4	87.8	67.0	91.8	99.8	83.3
六月	89.2	70.5	87.2	64.0	92.3	98.8	82.9
七月	88.2	71.1	87.5	66.6	94.2	96.4	83.2
八月	90.4	70.5	86.8	65.9	93.8	95.5	83.6
九月	89.6	71.1	90.5	60.9	95.6	91.9	83.0
十月	93.3	77.5	92.0	62.2	95.8	92.2	85.8
十一月	95.8	80.6	93.3	64.6	96.3	91.5	87.6
十二月	99.7	81.0	100.4	69.7	99.3	99.1	91.5

(註)　二十四年八月以前之指數所根據之物品數如下:食物類43品,衣料類16品,燃料類10品,金屬及電器類17品,建築材料類11品,雜類9品,總指數106品。

表一三六 漢口批發物價指數表

（民國十九年指數＝100）

（批發物價指數表戊）

類別	各類指數						總指數
	食料	衣料	燃料	金屬及建築材料		雜項	
				金屬及電料	建築材料		
物品項數	47	20	14	17	9	13	120
民國十九年	100.0	100.0	100.0	100.0		100.0	100.0
二十年	109.6	114.1	121.7	126.7		109.2	114.5
廿一年	108.5	109.4	120.9	125.7		103.9	112.4
廿二年	94.0	95.9	101.8	116.2		95.5	98.7
廿三年	80.9	89.8	95.4	108.9		89.5	89.0
廿四年	86.3	83.8	88.8	102.0		94.5	89.2
廿五年	95.2	90.8	92.1	113.5	110.1	98.7	97.2
一月	90.1	90.4	87.2	108.3		96.3	93.0
二月	89.6	89.4	90.9	110.5		96.5	93.4
三月	95.5	91.7	92.5	112.2		96.1	96.9
四月	102.5	91.0	91.3	112.3		99.3	100.0
五月	95.2	90.1	93.5	111.5		96.8	96.5
六月	94.9	89.5	91.3	110.5		97.1	95.9
七月	93.9	88.6	92.0	104.4	108.1	101.6	96.0
八月	91.1	88.6	93.5	103.2	108.9	99.7	94.7
九月	89.7	88.8	91.8	111.1	109.9	98.4	94.9
十月	96.2	93.7	92.2	118.2	109.6	98.9	99.4
十一月	100.3	94.0	91.3	117.3	110.8	101.3	101.2
十二月	104.4	94.3	97.9	129.3	113.0	102.1	105.4

表一三七　長沙批發物價指數表

（民國二十年六月指數＝100）

（批發物價指數表己）

類別	各類指數						總指數
	糧食	其他食物	布疋及其原料	燃料	金屬及建築材料	雜項	
物品項數	18	33	18	9	17	10	105
民國二十年	112.1	101.8	103.6	97.5	99.5	101.0	104.3
廿一年	106.3	112.3	98.0	95.4	98.1	103.4	103.5
廿二年	69.2	94.2	83.6	83.7	89.6	93.5	83.6
廿三年	74.0	81.2	77.0	82.2	86.6	89.5	80.1
廿四年	97.4	85.7	75.3	80.3	92.2	85.2	87.5
廿五年	96.5	96.4	83.3	88.3	108.8	89.5	94.4
一月	94.0	88.3	79.5	85.7	101.3	87.3	89.8
二月	95.8	93.0	79.2	85.4	107.2	88.3	93.2
三月	103.7	95.8	80.4	85.7	111.6	88.5	95.8
四月	110.7	96.1	81.0	84.7	111.7	88.1	97.9
五月	106.9	96.0	79.9	83.7	109.9	87.7	96.2
六月	101.2	95.8	81.1	84.9	107.7	88.4	94.7
七月	88.5	95.8	82.8	85.2	109.2	89.3	91.8
八月	81.2	97.7	82.5	89.4	105.3	88.5	89.7
九月	80.2	98.1	78.0	90.7	106.4	88.8	88.9
十月	92.4	98.5	87.8	92.5	108.3	91.5	95.0
十一月	98.6	98.6	91.3	94.2	111.3	92.1	98.1
十二月	104.3	103.5	96.2	97.2	116.0	95.6	102.9

(註) 民國二十年指數係該年四月至十二月之平均指數。

表一三八　青島批發物價指數表

（民國十九年指數=100）

（批發物價指數表庚）

類別	各類指數						總指數
	食料	衣料	燃料	金屬	建築材料	雜項	
物品項數	49	21	9	13	15	13	120
民國十九年	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
二十年	99.5	108.2	115.2	115.7	115.3	109.5	107.6
廿一年	99.4	98.2	113.1	92.8	125.7	110.8	103.6
廿二年	90.3	82.1	110.3	85.0	121.8	110.7	94.9
廿三年	80.1	77.9	105.7	80.4	108.8	101.6	86.8
廿四年	86.6	78.2	108.9	78.9	107.2	100.2	89.4
廿五年	94.0	79.7	110.0	78.3	107.7	106.0	93.4
一月	91.3	78.8	110.6	77.9	106.9	103.3	91.7
二月	92.4	79.1	110.6	78.2	107.2	104.3	92.4
三月	92.9	79.0	110.6	77.9	108.2	105.4	92.8
四月	93.6	79.6	110.9	78.4	108.7	105.8	93.3
五月	94.0	79.4	111.1	78.9	108.8	105.9	93.5
六月	94.4	79.5	111.2	79.3	109.0	106.5	93.9
七月	95.8	80.1	111.7	79.6	109.4	107.0	94.7
八月	95.5	79.4	109.4	78.9	108.2	106.5	94.0
九月	95.3	78.8	108.6	77.9	107.2	106.6	93.6
十月	95.1	79.1	108.3	77.3	106.4	106.4	93.4
十一月	95.2	80.0	108.1	77.1	105.9	106.7	93.5
十二月	93.1	83.8	109.6	77.9	106.6	108.1	93.8

表一三九　華北批發物價指數表

（民國十五年指數=100）
（批發物價指數表辛）

類別	各類指數						總指數
	食物	布疋及其原料	金屬	建築材料	燃料	雜項	
物品項數	43	19	15	12	12	5	106
民國二年	64.27	65.47	80.24	70.53	61.02	78.67	67.18
三年	63.86	61.20	78.02	79.50	61.51	73.98	66.89
四年	64.20	65.53	91.41	74.54	61.75	85.09	68.78
五年	66.36	72.98	118.95	80.06	68.97	84.07	74.19
六年	71.30	83.29	135.40	84.23	70.59	84.30	79.95
七年	68.30	96.64	158.54	87.17	74.63	75.99	82.21
八年	66.92	107.06	111.05	86.78	75.71	77.88	81.07
九年	82.47	104.33	133.61	81.88	75.71	83.17	88.92
十年	82.24	99.78	124.61	88.80	78.75	83.29	88.91
十一年	79.92	99.33	97.05	90.10	78.47	85.50	86.40
十二年	84.96	107.41	96.44	94.12	77.02	88.56	90.35
十三年	89.24	109.70	97.65	93.89	84.10	89.76	93.61
十四年	95.89	108.21	98.26	94.42	90.60	96.03	97.28
十五年	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
十六年	106.95	99.96	101.22	96.04	101.52	108.11	103.02
十七年	113.07	103.26	99.51	103.81	110.02	110.72	107.98
十八年	116.52	107.35	104.63	107.45	109.77	107.40	111.08
十九年	119.72	103.76	131.67	104.34	116.50	116.11	115.85
二十年	114.39	117.03	145.34	116.88	139.43	132.35	122.55
廿一年	108.53	107.55	120.71	121.06	125.30	103.90	112.87
廿二年	92.76	97.87	111.86	112.99	116.40	96.23	101.00
廿三年	80.64	90.73	105.60	106.22	110.99	97.66	92.31

廿四年	94.70	86.96	99.05	102.69	104.04	89.80	95.51
廿五年	115.50	99.07	116.42	110.74	111.40	98.68	110.62
一月	105.75	93.29	107.61	107.95	114.56	90.90	104.09
二月	112.33	93.34	111.71	108.30	113.34	90.54	107.14
三月	118.08	97.61	114.86	108.46	112.12	90.74	110.54
四月	119.96	98.09	114.73	110.48	110.23	93.79	111.53
五月	115.58	94.23	112.80	112.48	110.11	94 66	109.05
六月	112.89	95.88	110.07	114.83	108.23	96.02	108.10
七月	114.48	97.39	112.04	115.69	108.16	100.25	109.60
八月	112.66	97.75	114.49	114.65	108.03	103.66	109.34
九月	112.47	96.40	114.23	112.63	107.90	102.64	108.67
十月	116.33	102.69	119.71	107.00	107.65	103.41	111.52
十一月	119.79	107.76	123.31	106.78	113.53	105.77	115.09
十二月	125.73	114.43	141.43	109.60	122.96	111.83	122.76

表一四〇 廣州批發物價指數表

(民國十五年指數=100)

(批發物價指數表壬)

類別	各類指數						總指數
	米	其他食品	衣料	燃料	金屬及建築材料	雜項	
物品項數	20	61	38	14	39	18	190
民國元年	59.4	57.0	63.4	39.3	56.8	55.0	56.7
二年	53.3	59.5	65.5	43.0	57.2	57.0	57.8
三年	51.0	61.2	69.5	46.6	58.8	61.0	59.9
四年	57.2	64.9	70.1	44.6	71.2	66.0	64.4
五年	57.9	67.7	73.1	51.1	80.1	68.8	68.7

六年	49 5	70.2	75.3	63.6	87.2	70.4	71.3
七年	57.9	75.6	78.5	67.9	86.1	70.7	74.4
八年	70.8	76.9	81.3	67.3	85.3	71.2	77.4
九年	67.2	78.0	84.7	64.4	79.7	71.0	76.6
十年	71.2	83.5	87.0	72.7	86.7	72.1	81.0
十一年	78.5	86.1	89.6	77.2	89.7	75.2	85.1
十二年	83.4	88.9	93.1	79.1	96.5	78.8	88.6
十三年	92.6	94.0	96.3	87.9	99.7	84.3	94.0
十四年	95.4	99.2	100.0	101.0	101.7	100.5	99.9
十五年	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
十六年	102.2	108.1	93.2	107.0	97.0	95.4	100.8
十七年	97.6	103.6	92.9	87.2	94.6	94.9	96.8
十八年	103.5	104.8	92.4	85.7	90.6	95.5	96.7
十九年	113.4	106.1	93.7	97.2	97.7	101.4	101.4
二十年	102.1	118.9	106.8	109.0	111.3	123.0	112.6
廿一年	95.54	121.05	101.91	129.75	113.41	128.70	113.79
廿二年	84.02	109.12	91.60	111.19	113.20	122.23	104.54
廿三年	74.64	100.24	76.71	109.91	99.84	111.54	94.28
廿四年	77.95	96.45	63.29	100.49	81 71	98.60	84.63
廿五年	104.19	117.40	90.02	117.36	94.20	118.49	105.40
一月	80.79	110.45	81.53	107.88	84.89	107.78	95.65
二月	85.18	108.16	84.34	111.19	87.63	108.38	98.27
三月	102.39	109.74	83.72	110.64	89.86	111.81	99.41
四月	102.46	112.76	85.70	109.84	89.82	113.58	100.87
五月	108.19	113.69	87.36	113.50	89.26	115.28	102.27
六月	114.65	121.01	92.87	125.90	98.95	127.62	110.49
七月	109.40	124.64	94.80	128.58	102.26	132.06	112.92
八月	111.11	123.25	89.49	119.60	99.49	124.35	109.48

九　月	109.63	123.85	91.40	119.58	95.56	124.12	108.90
十　月	110.46	122.60	94.40	121.94	94.45	119.68	108.74
十一月	112.95	119.37	97.16	122.40	98.26	119.49	109.63
十二月	113.64	121.05	98.54	119.50	102.08	120.68	111.31

表一四一　南寧批發物價指數表

（民國二十三年指數=100）

（批發物價指數表癸）

類　別	各類指數							總指數
	糧　食	其他食物	衣　料	燃　料	建築材料	金　屬	雜　項	
物品項數	10	21	18	7	7	6	22	91
民國廿三年	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
廿四年	101.03	97.06	83.27	92.02	90.00	86.69	89.26	91.09
廿五年	169.88	163.96	128.13	174.73	139.43	135.67	132.16	145.85
一　月	128.31	126.29	80.06	116.64	93.55	94.28	94.81	102.76
二　月	128.85	123.94	95.34	112.33	93.05	97.69	98.14	108.47
三　月	136.70	123.69	101.57	105.46	93.00	101.18	103.99	109.99
四　月	138.53	125.97	101.45	114.00	96.16	99.50	110.42	113.05
五　月	148.27	126.16	102.77	117.07	101.36	99.65	110.62	114.99
六　月	178.06	144.22	124.65	153.26	124.41	116.80	122.69	134.14
七　月	277.67	264.44	177.68	309.27	176.40	191.39	189.02	217.62
八　月	231.14	241.73	178.21	298.93	201.21	175.12	182.20	207.52
九　月	168.60	198.77	144.82	239.65	200.75	160.12	159.81	174.09
十　月	149.79	162.50	135.22	183.48	180.53	143.43	127.21	147.73
十一月	165.60	149.53	133.18	155.42	157.13	145.79	127.40	142.91
十二月	180.05	166.18	140.44	165.04	151.23	147.55	140.85	149.56

（註）自二十五年一月起,以二十四年之平均物價作爲100。

表一四二　中國每日物價指數表

（民國二十三年十月十四日指數=100）

（批發物價指數表子）

地域別	各地指數				總指數
	上海	漢口	廣州	天津	
物品項數	11	11	11	11	12
民國廿三年					
十月	101.12	99.88	99.02	99.88	100.06
十一月	101.30	98.06	97.94	100.69	99.68
十二月	105.01	99.74	100.03	101.74	101.64
民國廿四年					
一月	107.23	100.65	103.12	102.65	103.23
二月	106.93	101.19	105.50	104.21	103.92
三月	104.66	105.77	104.10	102.61	103.78
四月	105.05	106.14	104.26	104.60	104.54
五月	106.78	104.26	99.96	107.51	104.22
六月	103.56	100.45	98.20	106.43	102.34
七月	103.22	98.79	96.33	106.47	101.96
八月	106.09	99.30	98.31	110.88	105.40
九月	108.05	101.14	100.23	110.92	107.47
十月	111.96	107.45	104.17	114.23	112.31
十一月	116.99	107.26	120.68	119.21	118.76
十二月	114.99	109.54	123.80	120.93	119.56
民國廿五年					

一 月	114.28	107.07	124.85	122.01	120.13
二 月	115.61	108.31	126.27	124.89	122.35
三 月	116.95	113.42	139.04	128.96	129.24
四 月	118.31	114.93	144.25	132.45	132.78
五 月	117.61	115.85	146.23	128.27	130.36
六 月	123.24	113.35	156.48	128.28	134.46
七 月	124.58	113.70	161.26	131.32	137.41
八 月	121.30	111.24	154.93	129.95	134.79
九 月	119.37	109.15	153.02	127.64	133.09
十 月	119.55	111.73	155.00	126.99	133.78
十一月	122.44	115.99	154.80	132.42	138.45
十二月	130.22	123.35	160.02	142.77	147.83

第三節 零售物價及生活費指數

編製零售物價及生活費指數之目的,在表示一般零售物價之漲跌,生活程度之高低者也.零售物價漲,生活程度高,對於用法幣爲標準之長期契約(如勞資間之工資契約等)之關係人,將受法幣購買力跌減之影響,而不能維持其固有之生活.反之,零售物價跌,生活程度低,工人即穫得原有工資,然在無形之中,因法幣購買力之增漲,而使其生活更見舒適.故零售物價及生活費指數之編製,乃欲利用指數,改訂此長期契約,使其常能與物價之升降適應者也.

我國公私機關編製之零售物價及生活費指數,其重要者,計有浙江省商務管理局編製之杭州零售物價指數,江西

省政府祕書處統計室之南昌日用物品零售物價指數,實業部之青島零售物價指數,財政部國定稅則委員會之上海生活費指數,上海市政府社會局之上海工人生活費指數,南開大學經濟研究所之天津工人生活費指數,國立中央研究院社會科學研究所之北平生活費指數,廣州市政府之廣州工人生活費指數,及廣西省政府統計局之南寧生活費指數等九種.玆將其計算方法,基期,品數,權數及指數等,略述之如下:

(一) 計算公式

論計算公式,則多參差不一,如杭州,南昌及青島諸零售物價指數,俱用簡單幾何平均比價公式核計指數.上海生活費及廣州工人生活費指數,則用加權算術平均比價公式.上海及天津工人生活費指數,則用加權綜合公式,惟用作權數之物量爲某時期之每工人家庭每年之消費量.至於北平之生活費指數,所用公式雖與上海及天津工人生活費指數相同,然用作權數之物量爲基年每工人家庭每年之消費量.

(二) 基期

論基期,上海生活費,上海及天津工人生活費指數,俱以民國十五年爲基期.北平生活費指數,則以民國十六年爲基期.青島零售物價及廣州工人生活費指數,俱以民國十九年爲基期.南寧生活費指數,以民國二十年爲基期.杭州零售物價指數,以民國二十一年爲基期.南

昌日用物品零售物價指數,以民國二十四年為基期.

(三) 品數

論品數,最少者如天津工人生活費指數僅37品,最多者如青島零售物價指數達 103 品.餘如北平生活費指數38品,上海生活費指數43品,南寧生活費指數44品,杭州零售物價指數51品,上海工人生活費指數60品,南昌日用物品之零售物價指數66品,廣州工人生活費指數70品.

(四) 權數

編製零售物價及生活費指數時所用之權數有二:

(1)全國總消費量值——一國之生產量加輸入量減輸出量,即得全國總消費量.如將各品總消費量乘各品零售價,即得全國消費各品總值.在編製全國總指數時,以此總消費量及總消費值作為權數,固可顯別各品之輕重軒輊,然在編製某地之零售物價及生活費指數時,因各地消費各品之習慣不同,(如上海消費某品至多者,在他地或消費極少;或上海極少消費者,在他地或消費特多.)不能用以判別各地各品之輕重,故在編製各地零售物價及生活費指數時,不能用全國總消費量值作為權數者一也.更欲核計全國之總消費量值,須先有完備之生產與輸出入統計,我國海關報告册對於全國輸出入統計雖極美備,然生產統

計迄無編製者,故欲計算全國之總消費量值,僅能估計而不能確計,此我國不能用此作爲編製指數之權數者二也.國人消費各品之量值,時在變遷,今之大量消費品爲昔日所無;昔之重要消費品至今或已消費無幾.故以一次調查之消費量值,不能用作長期之比較,此總消費量值不能用作權數者三也.基此三因,我國現編之零售物價及生活費指數,俱不以此爲權數.

(2)每家平均消費量值——根據家計調查而得之每家每年平均消費各品量值,亦可用作權數.我國現編之零售物價及生活費指數,除杭州,南昌及青島零售物價指數俱爲簡單幾何平均比價指數外,餘如上海,天津,北平,廣州及南寧生活費指數,俱用家計調查所得每家每年平均消費各品量值作爲權數.如財政部國定稅則委員會所編上海生活費指數,即用該委員會與北平國立中央研究院社會科學研究所(即前之北平社會調查所)於民國十六年十一月至十七年十月間,合查上海曹家渡 230 家紗廠工人家庭家計統計之結果爲權數,平均每標準工人家庭(平均有等成年男子 3.78 人之工人家庭)每年開支$390.00,以大洋一角爲一權,總計3,900權.惟工人家庭消費之物品種類極多,其重要而選作編製指數之樣品僅43種,總計2,902權,其分配如下:

表一四三 上海生活費指數選用各品權數表

(編製生活費指數時所用權數表甲表)

物品	權數	物品	權數	物品	權數
食物類		牛肉	28	房租類	
白米	998	鮮魚	78	單幢住房	251
麵粉	114	鹹魚	12		
線粉	15	鷄	15	燃料類	
青菜	108	鴨蛋	24	木柴	218
菠菜	11	鷄蛋	3	煤球	24
鹹菜	25	合計	1,988	煤油	47
豆芽	28			火柴	4
葱	16			合計	293
蕃芋	14	衣着類			
蘿蔔	27	棉花	14	雜類	
黃豆	24	粗布	33	香烟	78
豆腐	89	細布	49	紹酒	37
花生	5	花標	12	茶葉	10
豆油	146	細斜紋布	37	肥皂	14
醬油	47	線呢	30	牙粉	1
白糖	15	棉直貢呢	24	毛巾	6
鹽	26	長統絲襪	25	合計	146
豬肉	120	合計	224	總計	2,902

上表僅列工人家庭主要消費品43種,合計2,902權(即$290.20),佔總權數(3,900權即$390.00)百分之74.41.在編製各類指數時,即以各品權數權重各品比價,藉可

題別各品在各類中所佔地位之輕重軒輊.惟在編製總指數時,則不以各類選入品權數之合計,權重各類指數,而以各類總權數權重之.蓋每工人家庭每年消費各類物值,除房租及燃料全部計入外,餘如食物類每年消費總值凡$218.50,計2,185權,然選入各主要食物之權數僅1,988權,佔百分之90.98,衣着類佔百分之61.04,雜類佔百分之18.16.各類選入品權數佔總權數之百分比既不一律,在編製總指數時,自不能以選入品之總權數權重各類之指數也.茲將各類選入及未選入權數列表示之如下:

表一四四 上海生活費指數各類權數表

(編製生活費指數時所用權數表乙)

類別	選入品權數	未選入品權數	總權數	選入品權數佔總權數之百分比
食物類	1,988	197	2,185	90.98
衣着類	224	143	367	61.04
房租類	251	....	251	100.00
燃料類	293	....	293	100.00
雜類	146	658	804	18.16
總計	2,902	998	3,900	74.41

至於上海市政府社會局編製之上海工人生活費指數,則以民國十八年一月至十九年三月間該局調查

上海市滬東,閘北及浦東等區 305 家各業(註一)工人家庭平均每年消費各品之物量爲權數.茲即將家計調查所得每標準工人家庭(平均有等成年男子 3.42 人之工人家庭)平均每年消費各品數量,列表示之如下:

表一四五 上海市工人生活費指數選用各品每年每工人家庭消費量表

(編製生活費指數時所用權數表丙)

品別	305工人家庭平均每家3.42個等成年男子之消費量	
	依照舊制之度量衡	折算新制之度量衡
食物類		
米麵		
粳米	4.238 石(海斛)	5.014 石(市斛)
秈米	2.849 石(海斛)	3.370 石(市斛)

(註一) 上海市政府社會局調查 305 家工人家庭中有職業者共計629人,其業務之分配如下:

機器業49人,佔百分之7.8。
水電業10人,佔百分之1.6。
火柴業34人,佔百分之5.4。
烟草業32人,佔百分之5.1。
碼頭工人10人,佔百分之1.6。
棉紡業276人,佔百分之43.9。
棉織業79人,佔百分之12.6。
針織業2人,佔百分之0.3。
服役20人,佔百分之3.2。
建築業11人,佔百分之1.7。
化學業6人,佔百分之0.9。
食品業17人,佔百分之2.7。
印刷業18人,佔百分之2.9。
洋車夫14人,佔百分之2.2。
繅絲業19人,佔百分之3.0。
絲織業3人,佔百分之0.5。
小販10人,佔百分之1.6。
其他19人,佔百分之3.0。

糯米	0.100 石（海斛）	0.118 石（市斛）
麵粉	1.122 包（49磅）	1.122 包（49磅）
切麵	36.106 斤（會館）	38.117 市斤
豆及蔬菜		
豆腐	459.152 塊[1]	459.152 塊
豆腐乾	207.497 塊	207.497 塊
百頁	382.186 張	382.186 張
油豆腐	3.528 斤（漕平）	4.138 市斤
發芽豆	19.315 斤（漕平）	22.656 市斤
線粉	19.395 斤（漕平）	22.750 市斤
黃豆芽	42.400 斤（漕平）	49.735 市斤
鹹雪菜	57.229 斤（漕平）	67.125 市斤
青菜	259.288 斤（漕平）	304.145 市斤
蘿蔔	44.510 斤（漕平）	52.210 市斤
洋山芋	15.678 斤（漕平）	18.390 市斤
韭菜	18.871 斤（漕平）	22.136 市斤
菠菜	14.592 斤（漕平）	17.116 市斤
魚，肉，蛋		
鮮豬肉	40.972 斤（漕平）	48.060 市斤
鮮牛肉	8.576 斤（漕平）	10.060 市斤
鹹豬肉	5.898 斤（漕平）	6.918 市斤
鷄	2.513 斤（漕平）	2.948 市斤
鯽魚	3.545 斤（漕平）	4.158 市斤
鮮[2]魚	28.130 斤（漕平）	32.996 市斤
鹹白魚	8.455 斤（漕平）	9.918 市斤
鮮鴨蛋	84.932 個	84.932 個
調味品		
豆油	58.242 斤（漕平）	68 318 市斤

豬油	2.249 斤（漕平）	2.638 市斤
醬油	62.042 斤（漕平）	72.775 市斤
食鹽	32.033 斤（漕平）	37.575 市斤
白糖	8.787 斤（漕平）	10.307 市斤
房租類		
樓房		
石庫門	0.220 標準間[3]	0.220 標準間
東洋式	0.580 標準間	0.580 標準間
平房	0.540 標準間	0.540 標準間
衣着類		
粗布	5.862 海尺	6.253 市尺
細布	18.415 海尺	19.643 市尺
條格布	19.418 海尺	20.713 市尺
花標布	8.586 海尺	9.159 市尺
漂布	4.833 海尺	5.155 市尺
土布	8.465 海尺	3.696 市尺
線呢	10.272 海尺	10.957 市尺
絨布	4.772 海尺	5.090 市尺
斜紋布	3.038 海尺	3.241 市尺
棉花	1.261 斤（漕平）	1.479 市斤
男線襪	3.948 雙	3.948 雙
燃料類		
煤	189.091 磅	171.543 市斤
煤油	88.566 斤（會館）	63.499 市斤
劈柴	117.897 捆[4]	117.897 捆
廢木柴	421.035 斤（漕平）	493.874 市斤
花萁柴	158.100 斤（漕平）	185.451 市斤
稻柴	158.079 斤（漕平）	205.368 市斤

火柴	90.052 小匣	90.052 小匣
炭	0.680 簍(5)	0.680 簍
雜項類		
肥皂	50.827 塊	50.827 塊
草紙	15.244 刀(90張)	15.244 刀
香烟	231.869 十枝	231.869 十枝
黃酒	38.020 斤(漕平)	44.597 市斤
高粱	21.432 斤(漕平)	25.140 市斤
茶葉	2.429 斤(漕平)	2.849 市斤
開水	4,436.469 杓(6)	4,436.469 杓

(註) (1)豆腐每塊約 120 立方公分.
(2)鮮魚包括鮮白魚,黃魚,帶魚,烏賊魚等.
(3) 1 標準間之體積爲32立方公尺.
(4)劈柴每捆重漕平 3 斤左右.
(5)炭每簍約重漕平25斤.
(6)開水每杓容水漕平25兩.

編製指數時,即將各品價格用各品消費量權重之,綜合之,比例之,即得各類指數.至於天津,北平及廣州等生活費指數,亦多根據各埠家計調查之結果,作爲權數,茲不多贅.

編製生活費指數時所用之權數,前文已略述之.至於零售物價之調查,則視各品價格變動之遲速而異.例如房租之變動,最爲遲緩,故一年調查一次(如上海市工人生活費指數)或半年調查一次(如上海生活費指數)已足發見其變動之情況.他如衣着及燃料等物價,變動亦緩,故每月十五日調查一次,或每月一日及十

表一四六　我國現編零售物價及生活費指數一覽表

（編製我國現有零售物價及生活費指數總表）

指數別	零售物價指數			生活費指數					
地域別	杭州	南昌	青島	上海	上海	天津	北平	廣州	南寧
指數名稱	杭州零售物價指數	南昌日用物品零售物價指數	青島零售物價指數	上海生活費指數	上海市工人生活費指數	天津工人生活費指數	北平生活費指數	廣州工人生活費指數	南寧生活費指數
編製機關	浙江省商務管理局	江西省政府秘書處統計室	實業部	財政部國定稅則委員會	上海市政府社會局	南開大學經濟研究所	國立中央研究院社會科學研究所	廣東省調查統計局	廣西省政府統計局
編製時期	二十一年起	二十四年起	十九年起	十五年起	十五年起	十五年起	十五年起	十九年起	二十年起
計算公式	$\sqrt[N]{\pi\frac{P_1}{P_0}}$	$\sqrt[N]{\pi\frac{P_1}{P_0}}$	$\sqrt[N]{\pi\frac{P_1}{P_0}}$	$\frac{\Sigma W\frac{P_1}{P_0}}{\Sigma W}$	$\frac{\Sigma P_1Q}{\Sigma P_0Q}$	$\frac{\Sigma P_1Q}{\Sigma P_0Q}$	$\frac{\Sigma P_1Q}{\Sigma P_0Q}$	$\frac{\Sigma W\frac{P_1}{P_0}}{\Sigma W}$	$\frac{\Sigma P_1Q}{\Sigma P_0Q}$
基期	民國廿一年	民國廿四年	民國十九年	民國十五年	民國十五年	民國十五年	民國十六年	民國十九年	民國二十年
品數									
食物	29	41	77	24	31	25	23	36	26
衣着	9	13	13	8	11	6	7	11	9
房租				1	3	1	1	1	1
燃料	7	7	7	4	8	5	4	4	3
雜項	6	5	6	6	7		3	18	5
合計	51	66	103	43	60	37	38	70	44
簡單或加權數	簡單指數	簡單指數	簡單指數	加權指數	加權指數	加權指數	加權指數	加權指數	加權指數
權數之由來				家計調查	家計調查	家計調查	家計調查	家計調查	家計調查
權數之種類				消費值	消費量	消費量	消費量	消費值	消費量
物價	杭州零售物價	南昌零售物價	青島零售物價	上海零售物價	上海零售物價	天津零售物價	北平零售物價	廣州零售物價	南寧零售物價

五日調查兩次,即足統計各品價格之變動.至於米糧,菜蔬,魚,肉等價格,變動較大,故應以每週調查各品之平均價統計之.茲將各地零售物價及生活費指數之編製法,列表比較之如表一四六.

(五)指數

茲將我國各地零售物價及生活費指數分別列表示之如下:

表一四七　杭州零售物價指數表

(民國二十一年指數=100)

(零售物價指數表甲)

類別	各類指數				總指數
	食料	服用	燃料	雜項	
物品項數	29	9	7	6	51
民國廿一年	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
廿二年	87.20	78.45	96.48	75.11	83.91
廿三年	79.21	66.49	74.96	73.08	73.29
廿四年	81.02	73.58	71.37	74.13	74.94
廿五年	93.30	77.51	77.09	77.44	81.06
一月	86.64	76.34	72.16	77.16	78.17
二月	88.56	76.34	73.35	77.16	78.65
三月	92.38	77.68	77.22	77.16	80.86
四月	94.06	76.34	76.78	77.00	80.72
五月	94.29	76.85	76.79	77.00	80.91
六月	93.90	76.85	76.65	77.00	80.78
七月	91.91	77.69	76.58	76.49	80.42
八月	90.98	78.34	76.48	76.49	80.38
九月	91.87	77.28	76.26	76.57	80.24
十月	90.58	77.63	76.26	76.57	80.04
十一月	102.21	79.37	76.48	80.44	84.05
十二月	103.66	79.50	90.33	80.44	87.97

表一四八　南昌日用物品零售物價指數表

(民國二十四年指數=100)

(零售物價指數表乙)

類別	各類指數				總指數
	飲食品	服用品	燃料品	雜項品	
物品項數	41	13	7	5	66
民國廿四年	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
廿五年					
一月	98.42	96.16	107.29	89.55	97.65
二月	102.93	91.36	109.88	89.76	98.15
三月	103.75	90.06	101.88	92.95	96.88
四月	88.84	94.00	101.52	92.46	94.10
五月	97.44	86.51	103.92	89.79	93.64
六月	100.17	85.63	95.48	84.67	91.23
七月	92.24	92.77	108.31	90.36	95.70
八月	92.24	82.41	102.67	88.54	91.18
九月	91.86	92.10	98.20	95.44	91.91
十月	99.63	92.01	111.03	96.62	99.59
十一月	100.86	106.24	110.21	96.62	103.35
十二月	99.20	108.69	112.82	105.42	106.26

表一四九　青島零售物價指數表

(民國十九年指數=100)

(零售物價指數表丙)

類別	各類指數				總指數
	食料	服用	燃料	雜項	
物品項數	77	13	7	6	103
民國十九年	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
二十年	105.1	103.9	110.8	104.5	105.3
廿一年	98.7	106.7	107.7	117.8	101.2
廿二年	97.8	121.5	119.7	148.0	104.1

廿三年	86.1	123.6	113.2	146.1	94.2
廿四年	96.2	131.1	112.0	150.9	103.4
廿五年	102.7	138.4	112.0	154.4	109.7
一　月	99.5	135.8	112.7	153.0	106.7
二　月	100.9	137.5	112.4	154.1	107.9
三　月	103.0	136.8	112.4	154.6	109.7
四　月	102.0	137.7	112.4	154.6	109.3
五　月	102.5	138.2	113.3	154.6	109.8
六　月	103.2	140.4	112.4	154.6	110.5
七　月	102.3	138.8	110.3	154.9	109.5
八　月	103.0	137.6	108.8	155.4	109.8
九　月	103.6	139.4	110.9	155.1	110.6
十　月	103.8	138.3	111.5	154.3	110.7
十一月	103.2	141.4	112.4	154.3	110.5
十二月	105.1	139.1	113.8	153.8	112.0

表一五〇　上海生活費指數表

（民國十五年指數＝100）

（生活費指數表甲）

類別	各類指數					總指數
	食物	衣着	房租	燃料	雜項	
物品項數	24	8	1	4	6	43
民國十五年	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
十六年	106.7	96.8	100.8	131.4	104.4	106.7
十七年	92.1	95.1	101.1	114.6	130.0	102.5
十八年	98.4	97.7	102.1	118.2	136.4	107.9
十九年	118.8	99.6	104.4	122.5	145.1	121.8
二十年	107.5	108.3	106.0	133.6	187.4	125.9
廿一年	101.3	102.7	107.8	133.0	173.2	119.1
廿二年	86.9	90.0	109.7	121.9	164.3	107.2
廿三年	86.4	83.2	110.7	112.5	166.9	106.2
廿四年	89.1	80.0	111.3	119.4	160.3	106.6
廿五年	100.7	87.2	109.7	128.7	154.8	113.3
一　月	93.3	84.0	111.0	137.6	161.8	111.0
二　月	98.6	84.3	110.3	132.3	154.4	112.0

三月	102.2	84.3	110.3	132.3	154.4	114.1
四月	97.9	84.3	110.3	132.5	154.4	111.7
五月	97.6	84.2	109.6	127.2	154.9	111.1
六月	99.3	84.2	109.6	127.2	153.5	111.8
七月	99.8	85.3	109.6	127.4	153.5	112.2
八月	105.7	85.3	109.6	127.4	153.5	115.5
九月	102.3	84.3	109.0	126.8	153.5	113.5
十月	102.7	87.8	109.0	126.4	153.5	114.0
十一月	103.3	95.0	109.0	125.3	153.5	114.9
十二月	106.8	100.7	109.0	127.0	153.5	117.5

表一五一 上海市工人生活費指數表

（民國十五年指數=100）

（生活費指數表乙）

類別	各類指數					總指數
	食物	衣着	房租	燃料	雜項	
物品項數	31	11	3	8	7	60
民國十五年	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
十六年	100.71	98.82	97.98	109.06	102.23	101.09
十七年	87.32	99.64	100.11	110.23	114.00	93.21
十八年	97.56	106.04	103.80	117.61	117.78	101.98
十九年	114.99	108.18	106.96	140.47	126.84	116.79
二十年	104.10	123.58	114.46	164.62	138.37	113.82
廿一年	96.89	124.17	117.18	160.93	127.86	108.05
廿二年	83.47	102.84	123.53	142.43	123.59	97.17
廿三年	85.17	92.77	123.88	133.43	124.13	97.35
廿四年	88.77	89.34	120.55	130.80	120.49	98.72
廿五年	96.65	92.42	116.78	142.43	125.39	105.04
一月	93.65	90.88	116.78	150.25	126.31	103.64
二月	95.93	93.01	116.78	146.34	126.31	104.96
三月	99.89	91.11	116.78	143.15	123.89	107.10
四月	94.51	91.71	116.78	146.56	125.58	103.90
五月	93.48	87.20	116.78	142.54	124.95	102.68
六月	93.69	86.97	116.78	138.62	127.57	102.74
七月	97.92	92.42	116.78	137.95	124.08	105.44

八　月	98.71	88.63	116.78	134.94	125.92	105.76
九　月	97.27	86.14	116.78	139.07	123.79	104.82
十　月	96.62	97.39	116.78	141.48	124.27	105.03
十一月	95.73	101.66	116.78	138.85	122.43	104.21
十二月	101.31	102.13	116.78	147.34	124.76	108.86

表一五二　天津工人生活費指數表

（民國十五年指數=100）

（生活費指數表丙）

類別	各類指數				總指數
	食物	衣着	房租	燃料與水	
物品項數	25	6	1	5	37
民國十五年	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
十六年	107.82	100.10	102.45	102.03	105.60
十七年	111.68	105.64	105.69	105.78	109.51
十八年	117.27	107.99	106.73	121.74	115.67
十九年	120.49	106.39	107.53	129.17	118.81
二十年	110.38	116.24	106.33	136.28	113.80
廿一年	101.98	102.30	104.91	121.25	105.24
廿二年	88.70	91.27	103.87	100.70	92.48
廿三年	83.82	86.81	103.87	101.39	89.70
廿四年	98.44	82.79	102.89	104.20	99.02
廿五年	118.89	87.76	97.47	115.53	112.82
一　月	113.73	85.82	99.44	126.87	111.44
二　月	117.28	85.45	97.47	133.81	114.30
三　月	120.63	85.52	97.47	128.32	115.57
四　月	119.48	84.36	97.47	113.27	112.42
五　月	121.85	87.48	97.47	110.67	113.69
六　月	119.14	85.04	97.47	107.45	111.39
七　月	117.48	86.18	97.47	108.71	110.64
八　月	115.92	85.69	97.47	106.62	109.34
九　月	117.21	85.21	97.47	108.34	110.36
十　月	118.34	90.85	97.47	110.94	111.95
十一月	123.06	90.13	97.47	112.57	115.06
十二月	132.61	98.43	97.47	121.78	122.87

表一五三　北平生活費指數表

（民國十六年指數＝100）

（生活費指數表丁）

類別	各類指數					總指數
	食品	衣服	房租	燃料	雜項	
物品項數	23	7	1	4	3	38
民國十五年	103.7	95.3	100.0	98.2	96.3	102.0
十六年	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
十七年	101.5	105.3	91.3	100.4	104.7	101.6
十八年	107.6	114.5	82.6	114.3	111.1	106.5
十九年	111.8	113.1	82.7	116.7	114.0	109.6
二十年	92.5	114.4	83.9	113.1	115.8	95.8
廿一年	85.4	113.4	95.6	107.1	114.7	91.2
廿二年	72.4	106.2	102.1	97.4	112.7	81.0
廿三年	69.9	99.6	109.8	98.5	112.0	79.5
廿四年	79.0	95.2	111.3	101.3	112.6	85.9
廿五年	99.5	97.1	108.2	98.6	113.2	100.2
一月	92.9	97.4	100.7	103.7	113.2	95.3
二月	93.0	94.6	100.7	103.2	113.2	95.1
三月	95.8	95.5	106.2	103.1	113.3	97.6
四月	96.1	97.1	111.7	100.1	112.6	98.2
五月	102.4	97.3	111.7	99.5	113.1	102.7
六月	97.0	95.8	111.7	98.0	113.2	98.6
七月	102.2	96.6	111.7	99.5	112.8	102.5
八月	98.5	96.6	111.7	93.6	113.4	99.3
九月	97.8	96.8	111.7	94.8	113.2	99.0
十月	102.3	95.8	111.7	94.6	113.1	102.0
十一月	106.6	100.2	105.3	95.0	113.4	104.9
十二月	110.3	102.2	103.6	98.4	113.3	107.9

表一五四　廣州工人生活費指數表

（民國十九年指數=100）

（生活費指數表戊）

類別	各類指數					總指數
	食物	服用	房租	燃料	雜項	
物品項數	36	11	1	4	18	70
民國廿二年	88.112	105.579	110.609	91.944	89.072	93.959
廿三年	76.980	105.283	100.975	77.015	93.352	84.676
廿四年	75.515	81.007	89.153	62.602	95.129	77.726
廿五年	91.481	100.013	88.614	65.839	89.355	88.069
一月	80.112	80.001	86.015	62.120	85.456	79.512
二月	94.690	86.361	88.836	64.183	86.191	88.568
三月	92.076	87.622	88.836	62.440	88.442	87.227
四月	94.152	96.471	88.836	76.390	91.256	90.818
五月	96.561	96.740	88.836	71.460	92.011	91.592
六月	97.477	116.735	88.836	68.729	98.150	93.446
七月	98.348	122.516	88.836	69.766	91.741	93.781
八月	97.183	111.424	88.836	67.682	90.464	92.152
九月	91.337	110.699	88.836	72.498	89.138	89.439
十月	89.600	109.181	88.836	72.498	88.607	88.370
十一月	86.255	109.181	88.836	67.682	88.607	85.980
十二月	90.118	114.351	88.836	67.682	88.640	88.353

表一五五　南寧生活費指數表

（民國二十年指數=100）

（生活費指數表己）

類別	各類指數					總指數
	食品	衣服	房租	燃料	雜項	
物品項數	26	9	1	3	5	44
民國二十年	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
廿一年	102.59	104.17	112.28	96.59	90.28	101.28

廿二年	96.69	99.10	125.24	99.96	81.30	96.87
廿三年	92.87	93.87	129.88	96.81	73.94	93.11
廿四年	93.12	90.58	130.73	79.65	73.36	91.71
廿五年						
一月	121.04	100.02	161.21	117.74	96.07	119.20
二月	110.80	100.72	161.21	105.37	96.03	111.28
三月	111.41	104.53	161.21	106.32	97.12	112.08
四月	112.29	104.11	161.21	113.04	97.75	113.29
五月	131.53	109.42	161.21	102.61	111.02	127.54
六月	157.59	128.89	161.21	123.56	141.81	152.60
七月	278.09	247.80	161.21	232.79	231.78	259.87
八月	263.14	269.89	161.21	257.29	257.47	256.18
九月	177.45	263.85	161.21	179.31	189.18	182.01
十月	143.26	289.70	161.21	132.06	162.80	152.36
十一月	143.42	237.17	161.21	131.70	155.03	149.25
十二月	153.45	239.70	161.21	137.37	153.29	156.37

第四節 工資指數

工人技能之巧拙,兩性體力之强弱,致工資之給予大小不一;給資制度之互異,男女性格之差別,工資之給予又不相侔;加之生活程度,高下不同;勞工組織,健否無定;工業本身,盛衰無常;凡此種種均足使工資長時期之趨勢,現錯綜紛紜,升降不定之徵象.工資指數乃即測定此錯綜變幻之現象者也.工資指數普通可分爲三種:即工資率(Wage rates),實際收入(Earnings)及眞工資(Real wages)指數是也.

(一) 工資率指數

勞資雙方協定之工資率,雖因工人性別,體格及技能等不同而互異,然其漲落變遷,常有集中之重心,共同

之趨勢.編製工資率指數之目的,即從大小不等之協定工資率中,探索其重心所在,趨勢所循也.我國現編之工資率指數僅上海市政府社會局一處,該指數編於民國二十五年,始自民國十九年,以該指數之起編年(十九年)爲基期.其計算方法,用加權綜合式,以中國經濟統計研究所於二十二年調查之各業工人數爲權數,惟於應用之前,先加整理與估計,蓋該所調查者爲上海全市之新工業.總計用機械及原動力製造商品之工人凡212,822人,社會局調查工資者僅十六業,據該所調查共有工人165,863人,惟不分男,女,時,件,成年,童工,製造,什務,正式及學習工人等等級.而社會局調查工資者,俱係成年正式製造男女時件工,照理應將童工,什務及學習工人等刪除,然在事實上因未能確計此種工人數究有若干,故未妄加刪改.至於男女時件工即依社會局歷年調查各種工人之成份,酌爲分配之如下:

表一五六 上海市十六業各種工人數表

(工資指數權數表)

業別	男工		女工		總計
	時工	件工	時工	件工	
機器業	4,484	660			5,144
造船業	2,579				2,579
火柴業	159	304	7	1,140	1,610
搪瓷業	2,142	6	91	110	2,349

繅絲業			29,728		29,728
棉紡業	6,604	1,379	5,561	46,862	60,406
絲織業	969	3,440	2,017	4,122	10,548
棉織業	873	157	131	8,075	9,236
毛織業	869	135	432	853	2,289
內衣業	338	236	39	1,559	2,172
織襪業	1,331	653	250	5,061	7,295
麵粉業	2,516				2,516
搾油業	2,026				2,026
烟草業	2,764	1	205	15,203	18,173
造紙業	1,106	20	294	141	1,561
印刷業	4,484	3,130	157	460	8,231
總計	33,244	10,121	38,912	83,586	165,863

計算各業各種工人每小時平均工資率時,即用各業原查人數爲權數.在求全市各業各種工人總平均及各業總平均工資率時,即用表一五六估計之各業各種工人數爲權數.茲將上海市政府社會局發表之歷年上海市各業工人每小時工資率及各種工人之工資率指數等,列表示之如下:

表一五七 上海市各業工人每小時平均工資率表

(工資率指數表甲)

業別	十九年	二十年	廿一年	廿二年	廿三年	廿四年
機器業	$0·096	$0.100	$0.091	$0·082	$0.091	$0·090
造船業	0·137	0.140	0.140	0.143	0·137	0.140
火柴業	0.058	0.054	0.059	0.052	0.056	0.050
搪瓷業	0.056	0.058	0.059	0.064	0.066	0.056
繅絲業	0·044	0.041	0.034	0.038	0.029	0.029

棉紡業	0.038	0.037	0.041	0.040	0.041	0.040
絲織業	0.096	0.091	0.112	0.104	0.087	0.074
棉織業	0.044	0.051	0.046	0.045	0.054	0.048
毛織業	0.049	0.058	0.049	0.051	0.058	0.051
內衣業	0.071	0.074	0.062	0.066	0.077	0.068
織襪業	0.073	0.070	0.074	0.064	0.072	0.057
麵粉業	0.050	0.042	0.043	0.047	0.048	0.044
搾油業	0.051	0.053	0.054	0.057	0.059	0.052
烟草業	0.079	0.075	0.071	0.076	0.071	0.061
造紙業	0.046	0.060	0.057	0.047	0.052	0.062
印刷業	0.133	0.131	0.111	0.133	0.116	0.139
各業合計	0.059	0.057	0.057	0.058	0.056	0.053

表一五八　上海市工資率指數表

(民國十九年指數=100)

(工資率指數表乙)

年次	各種工人每小時工資率指數								總指數	
	男工		女工		時工		件工			
	每小時工資率	指數	每小時工資率	指數	每小時工資率	指數	每小時工資率	指數	每小時工資率	指數
民國十九年	$.085	100.00	$.049	100.00	$.057	100.00	$.060	100.00	$.059	100.00
二十年	.086	101.18	.048	97.96	.057	100.00	.058	96.67	.057	96.61
廿一年	.086	101.18	.047	95.92	.051	89.47	.061	101.67	.057	96.61
廿二年	.087	102.35	.048	97.96	.053	92.98	.060	100.00	.058	98.31
廿三年	.083	97.65	.046	93.88	.050	87.72	.059	98.33	.056	94.92
廿四年	.084	98.82	.042	85.71	.050	87.72	.054	90.00	.053	89.83

(二) 實際收入指數

實際收入指數乃以工人實際收入額編製而成.勞資雙方協定工資率雖高,然工人實做工數極少,或出品不多,實際收入亦微.反之,勞資雙方協定工資率雖低,然工人做足廠定開工日數,或工作極快,出品至多,或生產效率極大,廠方給予升賞獎貼,(如升工工資,賞工工資,獎金,津貼等.)致每月實際收入極豐,工人生活得以改善.故工資率指數僅能表示歷年工資率之變遷,而實際收入指數則除表示工人實際收入額之增減外,更可用以研究工人生活狀況之良窳,工資與製造成本等之關係.我國現編之實際收入指數,亦僅上海市政府社會局一處.其編製方法與工資率指數同,亦以中國經濟統計研究所於民國二十二年調查之各業工人數為權數,以民國十九年為基期,用加權綜合法核算之.茲將該局發表歷年上海市各業工人每月實際收入額及各種工人之實際收入指數,列表示之如下:

表一五九 上海市各業工人每月平均實際收入表

(工人實際收入指數表甲)

業別	十九年	二十年	廿一年	廿二年	廿三年	廿四年
機器業	$26.364	$27.497	$27.672	$24.581	$24.253	$23.085
造船業	35.950	40.672	43.518	47.633	43.049	40.189
火柴業	10.685	9.517	12.615	9.771	7.918	7.917

搪瓷業	21.764	21.586	15.515	17.386	19.957	18.546
繅絲業	8.833	9.860	7.935	8.498	6.310	6.561
棉紡業	10.868	11.091	11.393	10.719	11.005	9.648
絲織業	23.507	23.207	32.705	27.759	23.357	17.370
棉織業	15.160	13.464	15.806	14.329	15.539	12.852
毛織業	13.232	15.692	14.589	15.845	17.539	14.371
內衣業	18.423	20.168	19.902	20.034	18.778	17.675
織襪業	19.256	14.058	17.901	13.674	12.009	14.639
麵粉業	18.658	16.024	14.497	17.119	17.441	16.711
榨油業	21.808	19.311	17.219	18.683	15.711	18.291
烟草業	14.878	15.439	14.129	14.309	15.605	14.598
造紙業	17.160	21.449	19.512	15.840	17.410	20.843
印刷業	41.720	40.696	28.343	32.609	29.487	29.245
各業合計	15.351	15.406	15.226	14.814	14.080	12.988

表一六〇　上海市工人實際收入指數表

（民國十九年指數=100）

（工人實際收入指數表乙）

年次	各種工人每月實際收入指數								總指數	
	男工		女工		時工		件工			
	每月實際收入	指數	每月實際收入	指數	每月實際收入	指數	每月實際收入	指數	每月實際收入	指數
民國十九年	$25.625	100.00	$11.684	100.00	$15.814	100.00	$15.192	100.00	$15.351	100.00
二十年	25.244	98.51	11.756	100.62	16.072	101.63	14.625	96.27	15.406	100.36
廿一年	25.362	98.97	11.754	100.60	14.764	93.36	15.291	100.65	15.226	99.19
廿二年	24.620	96.08	11.358	97.21	15.227	96.29	14.242	93.75	14.814	96.50
廿三年	23.538	91.86	10.834	92.73	14.343	90.70	14.000	92.15	14.080	91.72
廿四年	22.112	86.29	9.804	83.91	13.958	88.26	12.150	79.98	12.988	84.61

(三) 眞工資指數

生活程度之高低,常可左右工人生活之優劣.生活程度高,卽工人實際收入比例增加,工人生活仍未見改善;生活程度低,卽工人實際收入未見增加,工人生活亦得改進.更若實際收入增高,生活程度更高,則工人生活不僅不見改善,反以生活程度之提高而困苦.反之,如實際收入減低,生活程度更低,則工人生活不僅不以減低工資而感痛苦,反以生活程度之減低而舒適.故觀察金錢工資(Money wages)或稱名義工資(Nominal wages)誠不足以窺探工人生活之究竟.此眞工資指數之所以重要也.

眞工資指數之編製,在我國尙付厥如.最近上海市政府社會局除編製工人實際收入指數外,更用該局發表之上海市工人生活費指數,折算眞工資指數如下:

表一六一　上海市工人眞工資指數表

(民國十九年指數=100)

(眞工資指數表)

年次	每月實際收入	實際收入指數	工人生活費指數	眞工資指數
民國十九年	$15.351	100.00	100.00	100.00
二十年	15.406	100.36	97.46	102.98
廿一年	15.226	99.19	92.52	107.21
廿二年	14.814	96.50	83.20	115.99
廿三年	14.080	91.72	83.36	110.03
廿四年	12.988	84.61	84.53	100.09

第五節　外匯指數

我國之有外匯指數,始於南開大學經濟研究所所編之天津對外匯率指數.第一次披露於清華學報第四卷第二期.其後繼續在南開統計週報,按期發表,包括英,美,法,日四國匯率.論基期,初以民國二年爲基年,十八年一月添編上海對外匯率指數後,將津滬二地對外匯率指數之基期,同時改用民國十五年.惟在十五年時法日兩國貨幣,尚未兌現,故不能據爲外匯率比較之標準.因於二十一年復改用十九年爲基期.其計算公式,始終用加權綜合式.惟所用權數,初則用計算期前一年對各國之貿易值,嗣後以各國貨幣單位之不同,某國匯率之表示若用較大之貨幣單位,則此國匯率之比重即將增大,換言之,指數結果可因匯價單位之改變而異其大小.故自二十一年起,改用對各國貿易依當年海關發表之匯兌率折成外幣後作爲權數,故其計算公式爲:

設R_1爲計算期外幣每單位合國幣之市價.

R_0爲基期外幣每單位合國幣之市價.

R_i爲計算期前一年外幣每單位合國幣之市價.

T_i爲計算期前一年我國直接與各國輸出入貿易值.

Σ爲總和之記號.

$$外匯指數=\frac{\Sigma\frac{R_1}{R_i}T_i}{\Sigma\frac{R_0}{R_i}T_i}\times 100$$

自民國二十四年起津,滬外匯指數除編製定基指數外,更另編一以平價爲基數之指數.其編製方法,先求英,美,法,日四國匯率對平價之比率,再將各國匯價比價,應用加權算術平均法,以前一年中國對各國直接貿易值爲權數而核算之.茲將該所發表之津滬外匯指數,列表示之如下:

表一六二 上海外匯指數表

(民國十九年指數=100)又(平價=100)

(外匯指數表甲)

年次	平價 = 100					英,美,法,德,日五國總指數(十九年指數=100)
	英匯	美匯	法匯	日匯	總指數	
光緒卅一年	100.6	101.0	100.9	100.1	100.7	79.45
卅二年	102.3	102.5	102.5	101.8	102.2	54.88
卅三年	101.8	100.7	101.4	101.1	101.3	53.08
卅四年	98.7	98.9	99.0	98.6	98.9	63.54
宣統元年	99.6	98.9	98.6	99.0	99.1	65.31
二年	99.4	99.6	99.7	98.9	99.3	62.12
三年	99.1	99.1	98.1	98.4	98.7	62.38
民國元年	100.3	100.3	100.9	100.2	100.3	56.24
二年	99.6	99.1	98.5	98.7	99.0	69.98
三年	100.9	100.5	100.6	100.5	100.6	77.20
四年	99.8	100.3	94.4		100.1	78.96
五年	103.3	103.9			103.4	63.51
六年	104.1	100.0			101.3	49.45
七年	98.3	95.2			97.2	40.02
八年	100.3	98.3			99.0	34.94
九年	93.7	95.1			95.3	37.02
十年	101.1	101.1			101.4	58.08

十一年	99.3	97.7			98.3	55.55
十二年	99.9	99.0			99.3	58.41
十三年	100.9	100.2			100.5	52.77
十四年	100.1	99.5			99.7	50.69
十五年	99.9	99.4			99.7	59.34
十六年	100.5	99.3	99.9	(德匯)	99.7	66.32
十七年	99.4	99.1	99.2	99.7	99.3*	63.50*
十八年	100.2	99.8	99.5	100.4	99.9	69.18
十九年	101.3	100.5	100.7	101.6	100.4	100.00
二十年	102.8	102.4	102.3	103.0	102.1	132.03
廿一年	99.7	100.0	100.1	99.2	99.8	107.41
廿二年	100.5	102.0	100.6	99.9	101.2	91.86
廿三年	104.2	103.8	104.2	103.3	103.9	81.19
廿四年	110.6	110.9	112.2	112.4	111.1	74.11
廿五年	100.5	100.8	100.6	101.9	101.0	93.14
一月	100.3	100.5	100.2	101.9	100.7	91.53
二月	100.3	99.6	100.2	101.8	100.3	90.83
三月	100.1	100.0	100.0	101.6	100.4	90.89
四月	100.0	100.5	100.0	101.8	100.6	91.43
五月	100.6	101.2	100.4	102.0	101.2	91.89
六月	100.9	101.3	100.9	102.2	101.4	91.89
七月	100.8	101.2	101.1	102.1	101.3	92.30
八月	100.8	101.4	100.9	101.9	101.3	92.45
九月	101.3	102.0	101.0	102.4	101.9	92.94
十月	100.6	101.1	101.3	101.8	101.2	93.15
十一月	99.7	100.4	100.2	101.4	100.5	92.86
十二月	100.1	100.7	100.9	101.7	100.8	92.42

*民國十七年以前爲英,美,法,日四國之總指數.

表一六三 天津外匯指數表

（民國十九年指數=100）又（平價=100）

（外匯指數表乙）

年次	平價=100					英,美,法,德,日五國總指數(十九年指數=100)
	英匯	美匯	法匯	日匯	總指數	
光緒卅一年	101.3	101.2	101.7	100.9	101.2	63.72
卅二年	102.5	102.5	102.5	102.4	102.4	61.50
卅三年	102.8	102.9	102.9	103.0	102.9	65.22
卅四年	100.2	100.1	100.3	100.3	100.2	79.48
宣統元年	98.9	98.8	99.2	99.0	99.0	80.86
二年	99.5	99.6	99.7	99.2	99.4	77.62
三年	99.2	99.2	99.4	98.7	99.1	78.67
民國元年	99.7	100.1	100.1	99.7	99.8	68.55
二年	99.0	99.3	99.1	98.9	99.0	68.37
三年	101.3	100.7	98.0	101.4	101.0	76.06
四年	99.1	100.6	97.5		99.9	78.95
五年	102.7	103.4			103.1	62.99
六年	103.6	99.2			101.1	48.51
七年	98.1	94.3			96.5	39.90
八年	98.1	97.8			98.1	34.79
九年	99.2	98.4			98.8	38.09
十年	102.3	100.9			101.3	57.90
十一年	99.8	101.6			99.4	55.15
十二年	99.8	98.8			99.2	57.56
十三年	100.7	100.3			100.5	52.69
十四年	99.8	99.6			99.7	50.66
十五年	100.1	99.8			99.9	59.39

十六年	99.8	99.4	100.5		99.5	65.58
十七年	99.7	99.2	99.4		99.3	63.28
十八年	100.0	99.5	99.6		99.6	69.73
十九年	100.8	99.9	101.0		100.3	100.00
二十年	102.7	101.9	102.7		102.2	132.85
廿一年	99.5	99.6	101.0	（德匯）	99.6	104.51
廿二年	99.8	100.9	100.7	100.3	100.7*	90.81*
廿三年	103.7	102.9	104.0	103.6†	103.1†	80.78
廿四年	110.4	110.8	110.6	113.1	111.1	73.70
廿五年	100.6	101.1	101.1	102.4	101.2	92.48
一月	100.6	100.8	100.7	101.7	100.9	90.79
二月	100.5	99.9	100.7	101.7	100.5	90.06
三月	100.4	100.2	100.4	101.7	100.6	90.14
四月	100.2	100.6	100.4	101.8	100.8	90.57
五月	100.6	101.4	100.9	102.3	101.4	91.15
六月	101.1	101.8	101.3	103.3	101.9	91.37
七月	101.0	101.4	101.5	103.2	101.7	91.26
八月	101.0	101.7	101.3	103.6	102.0	91.49
九月	101.4	102.2	101.5	103.9	102.4	92.46
十月	100.7	101.3	101.9	101.7	101.3	92.39
十一月	99.9	100.6	100.6	101.4	100.6	92.04
十二月	100.3	100.9	101.4	102.1	100.5	91.80

*民國二十二年以前爲英,美,法,日四國之總指數.

†十一個月之平均指數（該年缺十月份指數）.

我國外匯指數,除南開大學經濟研究所編有津滬外匯指數外,上海中國銀行總管理處經濟研究室亦編有一上海國外匯兌指數.其編製方法,先將各國平均匯兌率以民國十

五年爲基期,化成比例,再將各國匯兌比例用簡單算術平均法平均之,即得總指數.玆將該行發表之指數,列表示之如下:

表一六四　上海國外匯兌指數表

(民國十五年指數=100)

(外匯指數表丙)

年次	各國指數									總指數
	倫敦	紐約	巴黎	漢堡	孟買	爪哇	香港	新加坡	日本	
民國十一年	113.60	105.44	41.88	372.04	134.92	…………	105.77	116.11	107.32	137.14
十二年	106.86	101.95	55.11	…………	124.97	110.91	107.22	115.71	103.34	103.26
十三年	111.75	104.15	68.02	…………	121.98	115.59	109.26	118.57	83.45	104.10
十四年	106.81	108.80	76.18	…………	112.11	111.94	105.18	113.47	129.74	108.03
十五年	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
十六年	86.13	88.66	71.83	…………	88.97	91.49	98.47	90.73	89.81	88.26
十七年	88.73	91.56	73.96	94.67	91.36	94.15	99.45	93.18	94.58	91.29
十八年	80.24	82.37	67.05	85.39	83.03	85.29	95.90	84.25	85.60	83.24
十九年	57.82	59.24	48.18	61.39	60.13	61.30	95.61	60.57	57.05	62.37
二十年	46.93	44.14	35.73	45.86	48.42	45.41	99.59	48.14	43.22	50.38
廿一年	57.73	42.64	34.61	44.33	59.06	43.99	99.28	60.55	72.73	58.21
廿二年	57.96	51.81	32.98	42.22	59.45	41.75	97.27	60.81	96.46	60.08
廿三年	62.95	67.05	32.51	41.80	64.56	41.05	95.04	65.60	108.41	64.31
廿四年	69.45	71.97	34.73	43.71	70.99	43.94	81.93	72.56	120.45	67.75
廿五年	56.21	58.96	31.37	35.85	57.41	38.06	100.96	58.50	97.84	59.46
一月	56.20	58.54	28.31	35.70	57.40	35.69	98.75	58.57	97.78	58.55
二月	56.20	59.30	28.31	35.73	57.42	35.69	97.85	58.57	98.02	58.57
三月	56.20	59.27	28.31	35.76	57.34	35.62	98.54	58.57	98.13	58.64
四月	56.20	59.11	28.36	25.75	57.33	35.68	98.47	58.57	97.88	58.59

五　月	56.20	59.04	28.50	35.86	57.37	35.90	98.34	58.53	97.57	58.59
六　月	56.20	59.04	28.64	36.14	57.33	36.22	99.74	58.29	97.29	58.77
七　月	56.20	59.06	28.59	36.16	57.35	36.04	100.49	58.33	97.66	58.88
八　月	56.20	59.29	28.79	36.34	57.40	36.25	103.51	58.53	97.72	59.34
九　月	55.86	59.37	29.21	36.31	57.10	36.23	103.58	58.12	97.17	59.23
十　月	56.11	58.54	39.48	35.38	57.41	44.54	103.79	58.40	97.79	61.27
十一月	56.55	58.54	40.01	35.53	57.84	44.64	104.23	58.84	98.53	61.63
十二月	56.36	58.40	39.87	35.57	57.59	44.19	104.19	58.70	98.48	61.48

第六節　國際貿易指數

國際貿易指數乃表示並比較一國對外貿易之趨勢與盛衰狀況者也.欲知對外貿易指數之內容,應先分析其種類,國際貿易不外輸入與輸出,輸入與輸出之種類,除勞動不計外,有商品與金銀兩種.國際貿易指數,僅限於輸入及輸出之商品,故有輸入指數與輸出指數之分.

商品交易之內容,不外物量,物價與物值三者,故國際貿易指數除分輸入及輸出指數外,更於每種中分有物量,物價與物值指數三種.如更進一步研究之,則於上述各種指數之外,更有特種貿易指數之編製,如總交易率指數,淨交易率指數,及爲特種目的編製之各種指數等是也.

輸出入物價指數,爲國際貿易指數中之最普通者,用以表示輸出入物品價格之變遷與趨勢者也.然在實際上缺點甚多:第一,因貨幣購買力之變遷,輸出入物價指數不能代表

對外貿易之變遷.例如去年物價比今年低一倍時,則同量之進出口貨物,今年之物價指數將比去年高一倍.第二,外匯之高低,亦足破壞價格與數量間之相互關係,使輸出入物價指數不能代表對外貿易,此種現象,尤以貨幣本位不同之國際間爲然.歐戰期內,金幣價格暴落,而交戰國又需要大量現銀,增鑄輔幣,銀價飛漲;中國以銀爲本位,外匯率遂大降落.歐戰以後,金價上騰,外匯市價隨之俱升.因外匯之升降,不獨影響於國際貿易市場,亦且紊亂輸出入物價指數.第三,輸出入物品之品質如有變遷,則價格隨之不同;假定今年與去年美棉輸入數量相同,而今年品質高於去年,則今年美棉關價當高於去年.故以關價編製之輸出入物價指數,測度兩部份之變遷:一爲物價本身上之變遷,一爲貨物品質上之變遷;每部份變動若干,在指數上無從辨別.第四,我國關價較之國際貿易統計完備之國家,尤多缺點.大抵輸出品之關價,不及輸入品關價之確實.從量稅品之關價,不及從價稅品關價之確實.故根據關價編製之指數,當不甚準確也.輸出入物價指數既有上述之缺點,國際貿易指數似應以輸出入物量指數爲主,而以物價指數副之.

我國國際貿易指數之編製,除財政部國定稅則委員會編有上海輸出入物價指數(其編製法等已於本章第二節中說明之)外,更有南開大學經濟研究所編製之中國進出口物量,物價及物值指數等數種.每種除分輸入輸出兩種外,

更以未調節及調節之不同,分為下列兩種:

(一) 未調節貿易指數

未調節輸出入物量,物價及物值指數,乃以一固定時期為基期而計算之輸出入物量,物價與物值對基期之百分數也.茲將南開大學經濟研究所編製中國未調節輸出入物量,物價及物值指數之方法,略述之如下:

(1)直接列入指數中之資料——海關報告册中,常有不載數量之物品(如未列名物品與其他物品等),此等物品不能直接列入計算指數.能直接列入之物品,約佔三分之二以上.例如同治六年(即一八六七年)我國輸入總值為69,000,000海關兩,直接列入者計68,000,000海關兩,佔百分之99;民國十九年,我國輸入總值為1,310,000,000海關兩,直接列入者計1,019,000,000海關兩,佔百分之78.同治六年(即一八六七年)我國輸出總值為58,000,000海關兩,直接列入者計55,000,000海關兩,佔百分之95.民國十九年,我國輸出總值為895,000,000海關兩,直接列入者計820,000,000海關兩,佔百分之92.

(2)未直接列入指數中之資料——未直接列入指數中之物品,僅具物值而無物量物價.在編製指數時,因欲避免選樣多少之偏誤起見,得用佔計法測定之.佔計之法,即假定未直接列入指數中之物品價格,其變遷

狀況與直接列入者,完全相同.惟直接列入之物品中,價格變遷失常態者,應行剔除;剔除之標準,爲較上年增加百分之40或減少百分之30者.經此剔除後之估計方法,即以所餘之直接列入物品先製指數;再以其所得之物價指數,除本年未直接列入物品之價值,即得本年未直接列入物品之基年價值.同是,我人亦可以直接列入物品之價格指數,乘基年未直接列入物品之價值,而得後者之本年價值.茲設例示之如下:

表一六五 計算國際貿易物量與物價指數表

(計算國際貿易指數表)

	輸入貨值(海關銀百萬兩)	
	民國十五年	民國十六年
直接列入指數內之貨物:		
貨值實數	(ΣP_0Q_0)	(ΣP_1Q_1)
總數	900	793
價格變動過劇之貨物	2	2
其他貨物	898	791
根據十五年物價求得之貨值	(ΣP_0Q_0)	(ΣP_0Q_1)
總數	900	731
價格變動過劇之貨物	2	1
其他貨物	(A)898	(B)730
根據十六年物價求得之貨值	(ΣP_1Q_0)	(ΣP_1Q_1)
總數	950	793
價格變動過劇之貨物	2	2
其他貨物	(a)948	(b)791

間接列入指數內之貨物:		
貨值實數	224	220
根據十五年物價所估計之貨值		(ΣP_0Q_1)
$(220\times\frac{B}{b}=220\times0.92)$	224	202
根據十六年物價所估計之貨值	(ΣP_1Q_0)	
$(224\times\frac{a}{A}=224\times1.06)$	237	220
最後計算指數所用之貨值:		
根據十五年物價所得之貨值	(ΣP_0Q_0)	(ΣP_0Q_1)
價格變動過劇之貨物	2	1
直接列入指數內之貨物	898	730
間接列入指數內之貨物	224	202
總計	1,124	933
根據十六年物價所得之貨值	(ΣP_1Q_0)	(ΣP_1Q_1)
價格變動過劇之貨物	2	2
直接列入指數內之貨物	948	791
間接列入指數內之貨物	237	220
總計	1,187	1,013

(3)基期——海關輸出入貨物變化無常,關册分類方法亦時有變更.時代愈久,困難愈多,南開大學經濟研究所有鑒於此,故各指數之編製,不用固定基期,而用連環基期;所得指數乃非定基指數,而為鎖比指數.其法先以同治六年(一八六七年)為基期,計算同治七年之指數;次以同治七年為基期,計算同治八年之指數,依此類推,至現在止.再以同治六年之指數與七年之指數相乘,得七年之鎖比指數.以同治七年之鎖比

指數乘八年之指數,得八年之鎖比指數,如是類推,其結果卽以同治六年爲基期之指數.但同治六年,距現在已久,不宜用此爲比較之標準,故我人再將全部數字,除以民國二年之指數,則基期卽可轉換爲民國二年矣.

(4)計算公式——因基期之物價或物量與計算期相差甚巨,故採用權數時,用基期物價或物量與採用計算期物價或物量,相差甚大.是以最完善之計算方法,當爲費暄氏之理想公式如下:

$$物量指數=\sqrt{\frac{\Sigma Q_1P_1}{\Sigma Q_0P_1}\times\frac{\Sigma Q_1P_0}{\Sigma Q_0P_0}}\times 100$$

$$物價指數=\sqrt{\frac{\Sigma P_1Q_1}{\Sigma P_0Q_1}\times\frac{\Sigma P_1Q_0}{\Sigma P_0Q_0}}\times 100$$

物值指數卽等於物量指數與物價指數之乘積如下:

$$物值指數=\sqrt{\frac{\Sigma Q_1P_1}{\Sigma Q_0P_1}\times\frac{\Sigma Q_1P_0}{\Sigma Q_0P_0}}\times\sqrt{\frac{\Sigma P_1Q_1}{\Sigma P_0Q_1}\times\frac{\Sigma P_1Q_0}{\Sigma P_0Q_0}}\times 100$$

$$=\frac{\Sigma P_1Q_1}{\Sigma P_0Q_0}\times 100$$

我國輸出入貨值乃明載於海關報告册中,故用爲計算時之校誤,至爲便利.玆卽以表一六五所列各資料爲例,核算輸入物量,物價及物值指數如下:

$$物量指數=\sqrt{\frac{933}{1124}\times\frac{1013}{1187}}\times 100$$

$$=\sqrt{0.7084}\times 100=84.2$$

$$物價指數=\sqrt{\frac{1187}{1124}\times\frac{1013}{933}}\times 100$$

$$=\sqrt{1.1465}\times 100=107.1$$

$$物值指數=\frac{1013}{1124}=90.1$$

$$或物值指數=84.2\times 107.1=90.1$$

(二) 調節貿易指數

調節貿易指數之編製,先用數學方法,計算二次方程拋物曲線爲長期趨勢線.次用各年輸出入物量物價長期趨勢值(Trend value)除各年輸出入物量物價指數,而得各年物量物價對此常期趨勢之百分率爲若干.例如南開大學經濟研究所以光緒二十四年(即一八九八年)爲原點,同治六年(即一八六七年)至民國十八年(即一九二九年)間之二次方程常期趨勢線公式如下:

輸入物量指數 $Y=56.5+2.25X+0.051X^2$

輸出物量指數 $Y=58.8+1.84X+0.044X^2$

輸入物價指數 $Y=70.6+1.46X+0.006X^2$

輸出物價指數 $Y=64.5+1.86X+0.040X^2$

應用上列公式決定各年長期趨勢值後,以各年趨勢值

除各年相當之指數,即得各年調節指數.其目的乃欲摒除長期趨勢,觀察輸出入物量物價之實際變動也.茲將該所編製之中國輸入輸出物量物價指數,列表示之如下:

表一六六 中國對外貿易物量及物價指數表

(民國二年指數=100)

(國際貿易指數表甲)

年次	未調節指數				調節指數			
	物量指數		物價指數		物量指數		物價指數	
	輸入	輸出	輸入	輸出	輸入	輸出	輸入	輸出
同治六年	24.7	31.9	46.9	45.1	92.5	72.3	111.9	99.8
七年	25.4	33.7	46.9	51.7	93.4	78.0	113.8	115.7
八年	26.4	35.4	47.9	47.8	95.0	83.5	118.0	108.1
九年	25.9	33.3	46.7	46.1	91.2	79.7	116.2	105.3
十年	28.1	39.4	47.4	47.2	96.6	95.6	119.1	108.5
十一年	27.9	43.3	45.8	48.7	93.9	106.4	115.9	113.9
十二年	27.3	39.1	46.3	49.6	89.8	97.0	117.8	115.3
十三年	31.5	40.1	38.5	45.9	101.0	100.5	98.2	107.0
光緒元年	33.8	42.2	35.3	40.6	105.0	106.0	90.1	94.6
二年	36.3	42.8	33.8	47.1	110.7	108.1	86.2	109.5
三年	36.1	40.8	35.5	40.8	107.4	103.0	89.9	94.9
四年	34.9	41.4	35.7	40.2	101.2	104.5	89.7	92.8
五年	40.8	43.2	35.2	41.3	115.6	108.8	87.8	94.7
六年	36.2	47.2	38.3	41.1	99.7	118.0	94.3	93.4
七年	40.8	43.5	39.6	40.5	109.4	108.2	96.4	91.0
八年	36.4	45.9	37.6	36.2	95.0	112.8	90.0	80.6

九　年	35.0	47.2	37.1	36.8	89.1	114.8	87.1	80.7
十　年	34.5	50.6	37.1	32.9	85.6	121.6	85.3	71.1
十一年	40.5	47.6	38.1	33.9	97.8	112.5	85.8	72.0
十二年	35.3	54.2	43.3	35.3	82.9	126.0	95.4	73.1
十三年	41.6	41.2	43.0	51.8	95.2	93.8	92.5	106.1
十四年	50.3	43.6	43.6	52.4	112.0	97.3	91.4	105.0
十五年	44.0	45.2	44.3	53.3	95.4	98.7	90.2	104.5
十六年	54.8	42.0	40.7	51.5	115.9	89.6	80.6	98.7
十七年	60.8	47.9	38.7	52.3	124.8	99.6	74.4	97.8
十八年	59.9	49.8	39.6	51.4	119.8	100.8	73.9	94.0
十九年	59.4	57.2	44.7	50.8	115.8	112.8	80.8	90.4
二十年	45.3	60.1	62.8	52.8	86.0	115.4	110.0	91.5
廿一年	45.8	66.3	66.1	53.5	84.8	123.5	112.0	90.2
廿二年	53.2	56.4	67.1	57.7	95.7	102.0	110.0	94.6
廿三年	49.7	61.6	71.8	66.1	87.2	108.1	114.0	105.6
廿四年	51.3	63.4	71.9	62.3	87.7	107.8	110.3	96.6
廿五年	69.2	62.5	67.2	78.0	115.3	102.5	99.7	117.5
廿六年	49.5	54.9	74.8	72.1	80.4	87.6	107.2	105.4
廿七年	62.5	59.8	75.3	70.6	98.9	92.4	104.3	100.1
廿八年	70.9	65.1	78.0	81.7	109.2	97.3	104.1	112.7
廿九年	65.1	59.8	88.3	89.0	97.9	86.5	113.9	119.0
三十年	69.2	64.0	87.2	92.7	101.5	89.6	108.7	120.2
卅一年	96.6	62.5	81.2	90.4	138.2	84.6	97.8	113.7
卅二年	95.3	64.6	75.4	90.6	132.9	84.7	87.8	110.5
卅三年	88.7	67.1	82.3	97.6	120.7	84.9	92.6	114.6
卅四年	72.7	73.0	95.4	94.1	96.5	89.5	103.6	108.0
宣統元年	77.1	92.9	95.1	90.5	100.0	110.2	99.8	100.8
二　年	79.2	102.9	102.5	91.8	100.3	118.0	104.0	99.1

三　年	80.9	102.1	102.2	91.5	99.9	113.3	100.2	95.8
民國元年	82.8	103.8	100.0	88.6	99.9	111.4	94.8	90.1
二　年	100.0	100.0	100.0	100.0	117.8	103.8	91.7	98.6
三　年	91.6	83.8	108.9	105.4	105.4	84.2	96.5	100.9
四　年	70.3	96.5	113.0	107.8	79.2	93.9	97.0	100.1
五　年	73.7	102.3	122.4	117.0	81.0	96.3	101.7	105.4
六　年	73.4	108.3	131.0	106.2	78.9	99.6	105.4	93.0
七　年	66.1	105.5	147.0	114.5	69.5	93.2	114.5	97.3
八　年	75.4	140.0	150.2	112.0	77.5	119.9	113.4	92.4
九　年	75.9	119.3	175.7	112.9	76.3	98.9	128.4	96.5
十　年	94.7	126.9	167.4	117.6	93.0	102.0	118.6	91.5
十一年	112.6	130.5	146.8	124.7	108.2	101.7	100.8	94.4
十二年	108.5	137.3	148.7	136.3	102.1	103.8	99.1	100.2
十三年	119.6	136.6	148.8	141.2	110.1	100.2	96.2	100.9
十四年	109.9	132.9	151.0	145.9	99.0	94.5	94.7	101.4
十五年	130.5	141.1	150.8	152.9	114.9	97.4	91.8	103.3
十六年	109.8	154.1	161.7	148.9	94.7	103.3	95.6	98.0
十七年	131.5	156.1	159.1	158.4	118.8	101.6	91.3	101.3
十八年	139.9	149.2	158.1	169.8	115.7	94.4	88.2	105.7
十九年	131.0	131.1	174.7	170.4	106.2	80.5	94.7	103.3
二十年	129.9	136.5	192.9	166.3	103.1	81.5	101.7	98.1
廿一年	106.0	100.8	180.1	140.0	82.4	58.5	92.3	80.5
廿二年	97.5	124.7	173.2	121.4	74.3	70.4	86.3	68.0
廿三年	85.1	118.6	151.9	111.6	63.6	65.2	73.7	60.9
廿四年	83.6	126.7	138.1	112.4	61.2	67.7	65.2	59.8
廿五年	77.9	125.6	152.3	139.2	55.9	65.3	70.0	72.1

交淨及率易交總有編尚所該,外之數指價物量物

入出輸指者率易交總,義定之士博廉何依.數指兩率易

全部物量之比較;淨交易率者僅指以物易物之數量,至於用爲支付其他費用之部份,則不之計也.

總交易率指數之編製,乃以輸入物量指數除輸出物量指數而得.其計算公式如下:

$$\text{總交易率指數}=\frac{\text{輸出物量指數}}{\text{輸入數量指數}}\times 100$$

此種指數所表示者,謂計算期之交易率較基期(民國二年)之交易率是否更爲有利?惟不能示人以某年之交易是否絕對有利也.蓋如指數低於 100, 即示每一單位輸入物量所易輸出物量,少於民國二年(基期),與基年比較爲有利於中國,反之,指數高於 100, 即示每一單位輸入物量所易輸出物量,多於民國二年(基期)與基年比較爲不利於中國.

淨交易率指數係以輸出物價指數除輸入物價指數而得.其計算公式如下:

$$\text{淨交易率指數}=\frac{\text{輸入物價指數}}{\text{輸出物價指數}}\times 100$$

此種指數實爲輸出物價指數倒數對輸入物價指數倒數之比率.蓋輸出入貨值,若恆相等,或常具一固定之比例,則此等比率適爲輸出入數量淨數之比率.輸出入物價指數變動方向之反面,即示輸出入數量變動之方向,亦即淨交易率變動之方向也.輸出價降,則我人將輸出較多之數量;輸入價漲,則我人必將輸入較少之數量.故

輸出物價指數倒數對輸入物價指數倒數之比率,即示我人對於每單位輸入物量所付之輸出物量與基期所付數量之比較.但現代國家之輸出入貨值,縱未有相等者,卽固定比例亦不多觀,故此所謂淨交易率僅爲一種假定之事例,其指數之意義,遂不如總交易率之顯明確切也.玆將南開大學經濟研究所編製之物物交易率指數,列表示之如下:

表一六七 中國輸出入物物交易率指數表

(民國二年指數=100)

(國際貿易指數表乙)

年次	總交易率	淨交易率	年次	總交易率	淨交易率
同治六年	129.1	104.0	光緒廿八年	91.8	95.5
七年	132.7	99.7	廿九年	91.9	99.2
八年	134.1	100.2	三十年	92.5	94.1
九年	128.6	101.3	卅一年	64.7	89.8
十年	140.2	100.4	卅二年	67.8	83.2
十一年	155.2	95.2	卅三年	75.6	84.3
十二年	143.2	93.3	卅四年	100.4	101.4
十三年	127.3	83.9	宣統元年	120.5	105.1
光緒元年	124.9	86.9	二年	129.9	111.7
二年	117.9	71.8	三年	126.2	111.7
三年	113.0	87.0	民國元年	125.4	112.9
四年	118.6	88.8	二年	100.0	100.5
五年	105.9	85.2	三年	91.5	103.3
六年	130.4	93.2	四年	137.1	104.8

光緒七年	106.6	97.8	民國五年	138.8	104.6
八年	126.1	103.9	六年	147.5	123.4
九年	134.9	100.8	七年	159.6	128.4
十年	146.7	112.8	八年	185.7	134.1
十一年	117.5	112.4	九年	157.2	155.6
十二年	153.5	122.7	十年	134.0	142.3
十三年	99.0	83.0	十一年	115.9	117.7
十四年	86.7	83.2	十二年	126.5	109.1
十五年	102.7	83.1	十三年	114.2	105.4
十六年	76.6	79.0	十四年	120.9	103.5
十七年	78.8	74.0	十五年	108.1	98.6
十八年	83.1	77.0	十六年	140.3	108.6
十九年	96.1	88.0	十七年	118.7	100.4
二十年	132.7	118.9	十八年	106.6	93.1
廿一年	144.8	123.6	十九年	100.1	102.5
廿二年	106.0	116.3	二十年	105.1	116.0
廿三年	123.9	108.6	廿一年	95.1	128.6
廿四年	123.6	115.4	廿二年	127.9	142.7
廿五年	90.3	86.2	廿三年	139.4	136.1
廿六年	110.9	103.7	廿四年	151.6	122.9
廿七年	95.7	106.7	廿五年	161.2	109.4

第七節　證券指數

證券指數乃測量證券行市之升降而編製之指數也.我國證券指數之編製,總計有三:

(一) 新華銀行編債券指數

新華銀行編製之上海內國債券指數,在我國公債未統一之前,選用裁兵公債,編遣庫券,十九年關稅庫券,十九年善後庫券,二十年捲烟庫券,二十年關稅庫券,統稅庫券及鹽稅庫券等八種公債及庫券之市價,作爲編製指數之資料.自全國公債統一後,即改用統一公債甲乙丙丁戊及復興公債之市價核算之.其起編日期爲民國十七年一月,以每日上下午收盤價之平均數爲標準,以投資利益月息一分爲基數.其計算方法在全國公債未統一以前,所用公式如下:

(1)公債折扣之利益

$$折扣之利益=\frac{票面-市價}{還本期數(以月數計)}$$

(2)庫券折扣之利益

$$折扣之利益=\left(1-\frac{市價}{票面餘額}\right)\times 每月還本數$$

(3)投資利益

$$投資利益=\frac{月息+折扣之利益}{市價}$$

(4)投資指數

$$投資指數=\frac{1}{投資利益}\times 100$$

自全國公債統一後,其計算方法,先將統一公債甲乙丙丁戊及復興公債,用下列公式折算債券現價後核算之:

$$債券現價=V^n+3\times\frac{(1-V^n)}{i}=\frac{100}{(1+i)^n}+\frac{3}{i}\left\{1-\frac{1}{(1+i)^n}\right\}$$

例如統一公債二十六年二月至七月及復興公債三月至八月間,新華銀行編製之現價表如下:

表一六八　統一及復興公債現價表

（民國二十六年二月一日現價）

（計算證券指數表）

年利週（名利率）	復興公債統一公債戊	統一公債丁	統一公債丙	統一公債乙	統一公債甲	合月息（實利率）
7.00	88.65	89.32	90.15	91.17	92.42	0.594
7.25	86.11	86.90	87.90	89.12	90.63	0.615
7.50	83.68	84.59	85.72	87.13	88.90	0.637
7.75	81.35	82.35	83.62	85.21	87.20	0.658
8.00	79.11	80.20	81.89	83.34	85.55	0.680
8.25	76.97	78.14	79.63	81.52	83.93	0.702
8.50	74.92	76.15	77.73	79.76	82.36	0.723
8.75	72.95	74.24	75.90	78.05	80.82	0.745
9.00	71.70	72.40	74.13	76.38	79.32	0.767
9.25	69.25	70.62	72.42	74.77	77.86	0.789
9.50	67.51	68.91	70.76	73.20	76.43	0.810
9.75	65.84	67.27	69.16	71.68	75.03	0.832
10.00	64.24	65.68	67.61	70.20	73.67	0.854
10.10	63.61	65.06	67.01	69.62	73.14	0.863
10.20	63.00	64.45	66.41	69.05	72.61	0.872
10.30	62.40	63.85	65.82	68.48	72.08	0.880
10.40	61.80	63.26	65.24	67.92	71.56	0.889
10.50	61.21	62.68	64.67	67.37	71.05	0.898
10.60	60.64	62.10	64.10	66.82	70.54	0.907
10.70	60.07	61.54	63.54	66.28	70.03	0.916
10.80	59.51	60.98	62.99	65.75	69.53	0.924
10.90	58.96	60.43	62.44	65.22	69.03	0.932
11.00	58.42	59.88	61.91	64.70	68.54	0.942

11.10	57.88	59.35	61.38	64.18	68.05	0.951
11.20	57.36	58.82	60.85	63.69	67.57	0.959
11.30	56.84	58.30	60.33	63.16	67.09	0.968
11.40	56.33	57.79	59.82	62.66	66.62	0.977
11.50	55.83	57.28	59.32	62.17	66.15	0.986
11.60	55.33	56.78	58.82	61.68	65.69	0.995
11.70	54.84	56.29	58.33	61.20	65.23	1.004
11.80	54.36	55.81	57.85	60.72	64.77	1.012
11.90	53.89	55.33	57.37	60.25	64.32	1.021
12.00	53.43	54.86	56.89	59.78	63.87	1.030
12.10	52.97	54.40	56.43	59.32	63.43	1.039
12.20	52.51	53.94	55.97	58.86	62.99	1.048
12.30	52.07	53.49	55.51	58.41	62.56	1.057
12.40	51.63	53.04	55.06	57.96	62.13	1.065
12.50	51.20	52.60	54.62	57.52	61.70	1.074

表中年利迴即示投資利率係按半年複利一次.在核計投資利息時,先將市價查對表中相當現值,再查該現值相當之投資利率,例如:

統一公債戊市價爲 \$58.50 合投資利率爲:

查表中現值 \$58.96 合投資利率爲10.90%

查表中現值 \$58.42 合投資利率爲11.00%

則現值 \$58.50 合投資利率爲

$$投資利率=(11.00-10.90)\times\frac{58.96-58.50}{58.96-58.42}+10.90$$

$$=0.10\times0.85+10.90$$

$$=10.99\%$$

公債市價查表得投資利率後,再將該利率折成月息,其方法如下:

$$月息=\frac{\left(1+\frac{年利週}{2}\right)^2-1}{12}$$

即如前例,折算月息如下:

$$月息（實利率）=\frac{\left(1+\frac{.1099}{2}\right)^2-1}{12}$$

$$=\frac{(1.055)^2-1}{12}=\frac{0.1130}{12}$$

$$=9.42\%$$

惟新華銀行所製統一公債現價表（即表一六八）係民國二十六年二月一日購現貨而言,如購期貨,在每一個月後應照實際市價扣除五角,然後再查現價表,合算利率.例如在二十四年二月一日購二個半月之期貨;或在二十四年四月十五日購進現貨統一公債戊 $75.56, 距還清日為23年 6 個月又 105 天,則其投資利率為:

查24年按現價 $75.56 合8.38%

查23年 6 個月現價 $75.56 合8.40%

則23年 6 個月 105 天價 $75.56 合投資利率為

$$0.02\times\frac{105}{180}=0.012\%$$

$$8.40\%-0.012\%=8.388\%$$

投資利率折成月息後,以月息一分為基價,即用公式 $\frac{1}{月息}\times 100$ 即得投資指數.

新華銀行編製之債券指數（即投資指數）除能表示歷年投資利益之變動（因投資利息即該指數之倒數）外,更可明示債券市價漲落之趨勢.蓋指數愈小,則所得利益愈高,即市價愈低也.反之,指數愈大,則所得利益愈低,即市價愈高也.換言之,債券指數之大小,與債券市價成正比例,與投資利息成反比例也.

(二) 新豐洋行編債券指數

新豐洋行編製之債券指數,在我國公債未統一之前,選取我國政府發行之十八年關稅庫券,編遣庫券,裁兵公債,十九年關稅庫券,十九年善後庫券,二十年捲烟庫券,二十年關稅庫券,二十年統稅庫券,整六公債,九六公債（二十二年四月一日起,以二十年鹽稅庫券代九六公債.）等十種債券之市價,作爲編製指數之資料.自國內公債券統一後,即以統一公債之市價編製之.其起編日期爲二十一年七月,除星期六以外,以每日第四盤本月期收盤價爲標準,星期六則以上午第二盤收盤價爲標準,現貨市價,概未選入.惟於十種債券之中,有庫券多種,票面本金已還去一部,故於計算指數之時,先以此種市價照未還本金數計算百分比,然後計算指數.公債及庫券之利息並不扣除,蓋各債券發息日各月皆有,此種錯誤可以互相抵銷也.

(三) 新豐洋行編證券指數

新豐洋行除編債劵指數藉以窺測國內政治之狀況與人民對於政府之信用外,更編製證劵指數(即股票指數),藉以窺探外人在華事業之盛衰及外人投資之心理.其選用股票計有下列二十種:

金融業

美東銀公司B種股票

匯衆銀公司股票

國際信託公司股票

揚子銀公司股票

保險業

美亞保險公司股票

四海保險公司股票

地產業

普益地產公司B種股票

華懋地產公司股票

中國營業公司股票

業廣地產公司股票

造船業

瑞鎔船廠股票

耶松船廠股票

公用事業

中國公共汽車公司股票

上海自來水公司股票

上海電話公司股票

電車公司不記名股票

棉紡業

怡和紗廠股票

上海紡織株式會社股票

其他

開平煤礦公司股票

孫其美鐵釘公司股票

惟自民國二十二年四月一日起,美東銀公司與孫其美鐵釘公司股票以賣買呆滯,故改以上海自來水公司C種股票與聯合影片公司股票代之.其計算公式爲簡單算術平均數,以民國二十年七月三十一日爲基期.其所以選用該日爲基期者,原因有三:

(1)避免外匯影響——近幾年來據新豐洋行研究之結果,股票市價往往受外匯之影響而漲落.故若採用一年或數月之平均價作爲基價,所編指數之變動,與其謂爲事業盛衰之結果,毋寧謂爲金銀比價變動之影響.況在外國指數中,亦有以一日爲基期者,故決用外匯較爲平穩之二十年七月三十一日爲基期,其目的無非欲避免外匯之影響而已.

(2)計入應收股息——本指數中所用各種股票市價,對

於股息均未扣除.通常股息在春初發給,故指數基期以股息發給後五六月爲最佳.

(3)易得明顯指數——二十年七月三十一日距今不遠,以此爲比較之標準,所得指數,自較顯明.

茲將各證券指數列表示之如下:

表一六九　上海債券及股票指數表

(民國二十年七月末日指數=100)又(投資月息一分=100)

(證券指數表)

年次	新華銀行編 公債券指數 投資月息一分=100			新豐洋行編 公債券指數 二十年七月末日指數=100			新豐洋行編 股票指數 二十年七月末日指數=100		
	最高	最低	平均	最高	最低	平均	最高	最低	平均
民國十七年	89.44	53.28	69.62						
十八年	96.43	71.27	80.95						
十九年	84.82	52.82	68.03						
二十年	82.90	28.46	62.29	106.81	54.70		110.65	88.60	
廿一年	64.37	23.24	49.05	77.68	49.48		90.89	76.66	
廿二年	92.51	46.29	69.56	92.86	58.66	78.30	76.92	67.23	71.37
廿三年	111.43	70.62	96.76	109.80	80.05	97.96	70.53	59.77	65.31
廿四年	110.95	71.63	92.44	110.44	86.08	98.25	59.77	56.53	57.11
廿五年	118.20	80.05	104.60	106.55	81.52	90.59	59.20	55.07	57.66
一月	97.72	80.05	88.99	106.55	97.13	102.66	57.38	57.01	57.21
二月	118.20	104.89	112.68	92.29	86.27	89.19	57.67	57.30	57.59
三月	111.10	104.06	108.73	91.64	88.15	89.67	58.17	57.60	57.73
四月	108.94	103.08	105.58	91.94	87.08	89.33	58.20	57.55	57.70
五月	108.96	105.37	107.62	94.41	90.77	91.74	58.35	57.55	57.88

六　月	105.07	96.66	101.47	90.29	81.52	87.27	58.35	57.34	57.84
七　月	108.12	98.79	103.38	93.09	85.49	89.04	57.64	57.31	57.48
八　月	107.62	105.26	106.76	90.23	87.50	89.34	57.64	57.61	57.61
九　月	106.58	100.90	105.59	89.94	85.91	89.21	57.72	57.57	57.61
十　月	104.44	98.57	102.90	89.12	84.14	87.76	57.93	57.69	57.83
十一月	107.90	103.44	105.80	99.05	88.65	90.69	59.20	57.78	58.03
十二月	109.87	100.02	105.72	94.83	86.59	91.23	58.69	55.07	57.39

問　題

1. 我國編製指數,始於何時?為何人首創?我國自編指數,始於何時?盛自何時?

2. 我國現編指數,約有幾種?編製各指數之目的何在?

3. 我國現編批發物價指數有幾?試略述其編製之方法。

4. 我國現編零售物價及生活費指數,各有幾種?試略述各指數之編製方法。

5. 編製生活費指數時,應採用何種數值為權數?其理由何在?國定稅則委員會所用權數較上海市政府社會局所選用之權數,孰優孰劣?試分別詳述之。

6. 工資指數,約可分為幾種?編製各種工資指數之目的何在?

7. 工人生活費指數與工人實際收入指數,有何關係?編製工人眞工資指數之方法如何?

8. 我國現編之外匯指數有幾?試略述各指數之編製法。

9. 國際貿易指數約可分為幾種?南開大學經濟研究所編製各種貿易指數之目的何在?

10. 何謂未調節及調節貿易指數?編製之方法各如何?

11. 何謂總交易率及淨交易率指數?編製之方法各如何?

12. 我國現編之證劵指數有幾?試略述各指數之編製法.新豐洋行編製之公債劵及股票指數,俱以民國二十年七月末日爲基期,其原因何在?

第十三章 長期趨勢

第一節 長期趨勢之意義

世間現象,有變而遲緩者,有變而劇烈者,有變而復變循環不已者.人物增減,受自然界之支配,年雖變動,然變而不劇者也.天災人禍,常人難測,影響所及,劇變驟起,此變而非常者也.商情輪迴,盛極必衰,衰極必盛,循序遞變,變而循環者也.變動之種類已如上述,變動之原因亦有推究之必要,或受自然界之支配,在一時期內繼續漸增或漸減,謂之長期趨勢.或受地震,水災,旱災,戰爭及罷工等之影響,現象劇變,謂之非常變動.或受世界經濟界盛衰之影響,商情起伏遞變,謂之循環變動.或受氣候寒暖之影響,現象隨季不同,謂之季節變動.時間數列之分析,乃卽長期趨勢,季節變動,循環變動及非常變動之測定與推算.茲特分章述之.

長期趨勢乃一種變量在一長時期內,逐漸向上或向下變動之傾向.此種傾向,或受自然之支配,或受外界之影響所形成.其保持期間,或短至數年,或長至數十百年.生殖率之增高,死亡率之減低,足使世界人口,與年俱增.耕種之改良,施肥之研究,足使五穀之收穫,年有增加.建築之改善,消防之增進,足使火災之發生,逐漸減少.機關組織之完密,勞資情感之協調,足使罷工糾紛案件,逐年減少.凡此種種,俱非一朝一夕所能成,日積月累所致者也.

長期趨勢之測定,對於時間數列分析及商情預測極關重要.蓋現在事態變動之傾向,若無季節,循環及非常變動等

因子參入其間,則其發展之趨勢,當爲過去原因之結果.現今所有之原因,亦可繼續影響未來,所謂預測者乃卽假定現在之趨勢,可以繼續漸進,推測將來之事態也.惟在斷論某事實時,吾人尙須注意者,卽政治或社會現象與經濟生活中之現象決然不同,形成未來之結果,亦各互異.蓋政治與社會現象,向無定則,推知在某種情形之下,卽能發生某種結果,在實際上,初無預測之可能.然經濟現象,同在某種情形之下,恆可發生同等之結果,故若根據過去之分析,觀察現在之狀況,卽可進而預測未來或然之結果,良好之經濟政策,亦可取決於此.此測定長期趨勢之所以重要也.

第二節 長期趨勢之種類

事態之變動,忽高忽低,忽急忽緩,初無一定規律,然就大體觀之,其長期之進展,未始不可以平滑有規則之曲線表示之.猶之狂潮怒濤,雖高低不平,然從遠處眺望,仍有一線可尋,長期趨勢乃卽測定此一線之傾向也.至於長期趨勢之種類,概別有下列數種:

(一) 算術級數式長期趨勢

數列變遷,每年作同額有規律之增減者,謂之算術級數.在算術格度紙上繪示之,成一直線,此種趨勢線卽算術級數式長期趨勢,惟以其傾向之不同,又可分爲二:

(1)上向算術級數式長期趨勢——例如圖六十六民國十年至二十四年上海華商銀行存儲銀元額之比較,歷年存數俱有增加,若測定其長期趨勢,乃卽上向算術級數式長期趨勢.他如某地耕農因歷年對於農具

之改良,耕種之研究,種子之選擇,施肥之調節,並得風調雨順之厚澤,歷年米穀收穫,有增無減,其長期趨勢亦即上向算術級數式長期趨勢也.

(2) 下向算術級數式長期趨勢——例如圖六十七民國八年至二十一年我國輸入棉紗量,與年俱減,故其趨勢線成一下向之算術級數式長期趨勢.他如煤礦之儲煤量,因每年採取若干,致該礦儲煤量隨時間之過去而遞減,其趨勢線亦即下向算術級數式長期趨勢也.

(二) 幾何級數式長期趨勢

數列之變遷,每年作同百分率有規則之增減者,謂之幾何級數.在對數格度紙上繪示之,成一直線,此種趨勢線即幾何級數式長期趨勢,惟以其傾向之不同,亦可分為二:

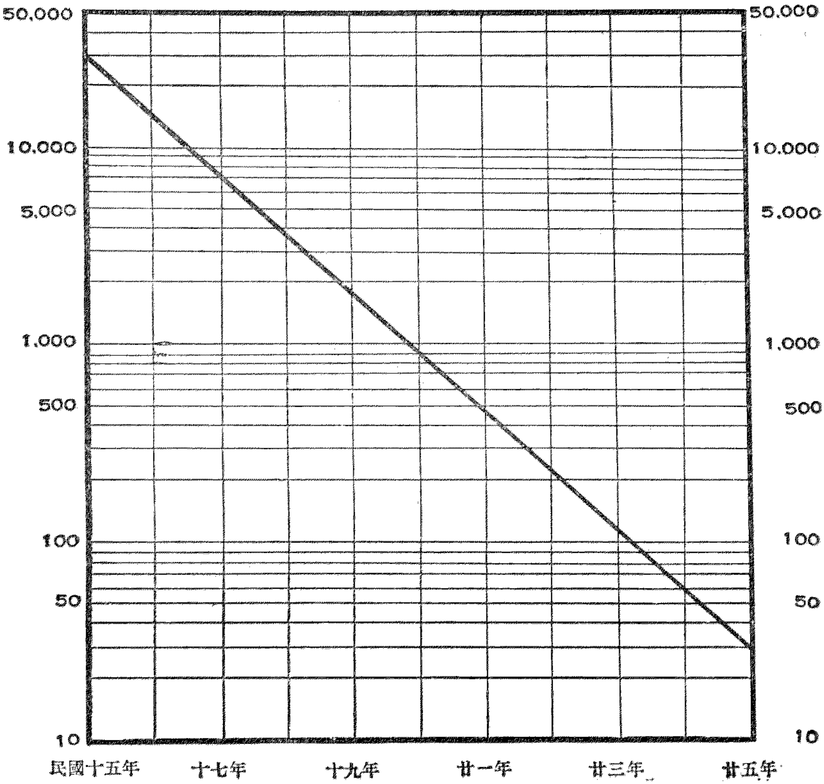
(1) 上向幾何級數式長期趨勢——例如某地人口以疾病預防得法,醫院設備完備,死亡率逐年減低,生殖率逐年增高,致人口之增加,成一幾何級數,如在算術格度紙上繪示之成一上彎「J」字形曲線,然在對數格度紙上繪示之,成一上向直線.又如表一八〇歷年東方公司營業額俱有百分之十左右之增加,故在單對數格度紙上繪示之,成一上向幾何級數式長期趨勢線如圖七十.

(2) 下向幾何級數式長期趨勢——例如圖六十某廠甲種製造機逐年現值之比較.固定資產折舊,在理論上言之,最初最大,愈後愈小,致資產之現值,在起初若干

年折減至烈,入後和緩,末年最小.如在算術格度紙上繪示之,即成下彎倒「J」字形曲線,然在對數格度紙上繪示之,成一下向之直線如下:

圖六十　歷年某工廠甲種製造機現值比較圖

民國十五年至二十五年



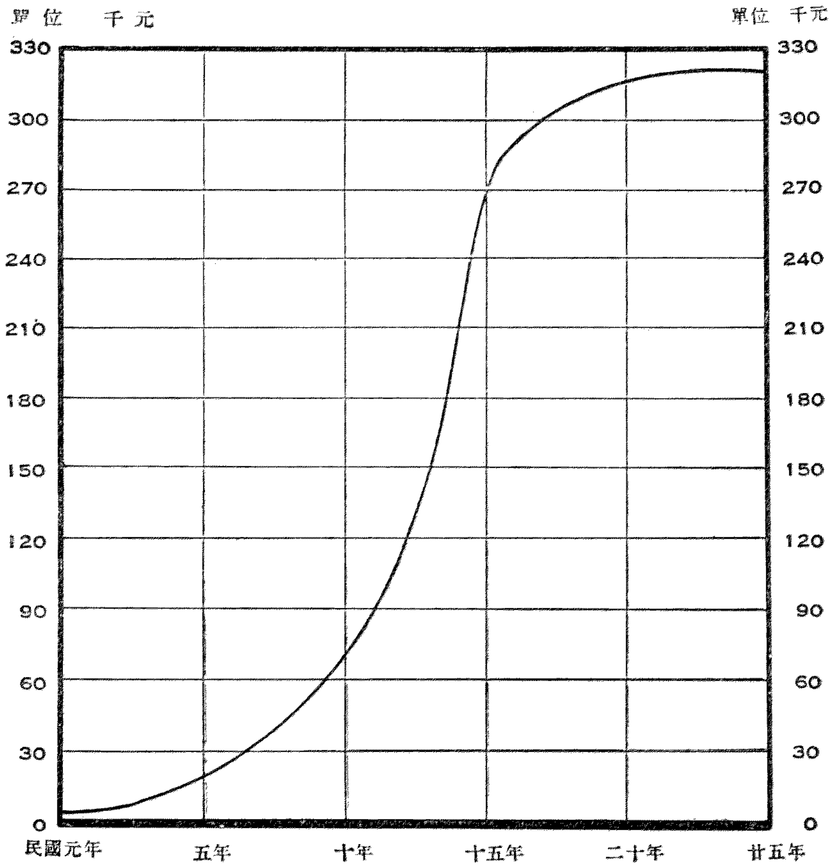
(下向幾何級數式長期趨勢圖)

(三)　S 形長期趨勢

S 形曲線爲企業發展之特殊現象,當企業開辦之

初,盈餘極少,其後努力經營,盈餘劇增,驟如直線上升,迨至成年,商品市場已到飽和之點,雖謀進展,惟開支浩大,盈餘之增加漸緩,曲線又入平坦.此種趨勢線,以其形似 S,故名之曰 S 形長期趨勢如下:

圖六十一　歷年某公司盈餘比較圖 民國元年至二十五年



(「S」字形長期趨勢圖)

(四) 他種長期趨勢

長期趨勢除上述三種外,尚有根據數學原理推測之各種曲線趨勢.惟純以理則之推測,頗難斷定其可否適用,而尤以時間之短促者,更疑其不足恃也.

第三節　測定長期趨勢之要件

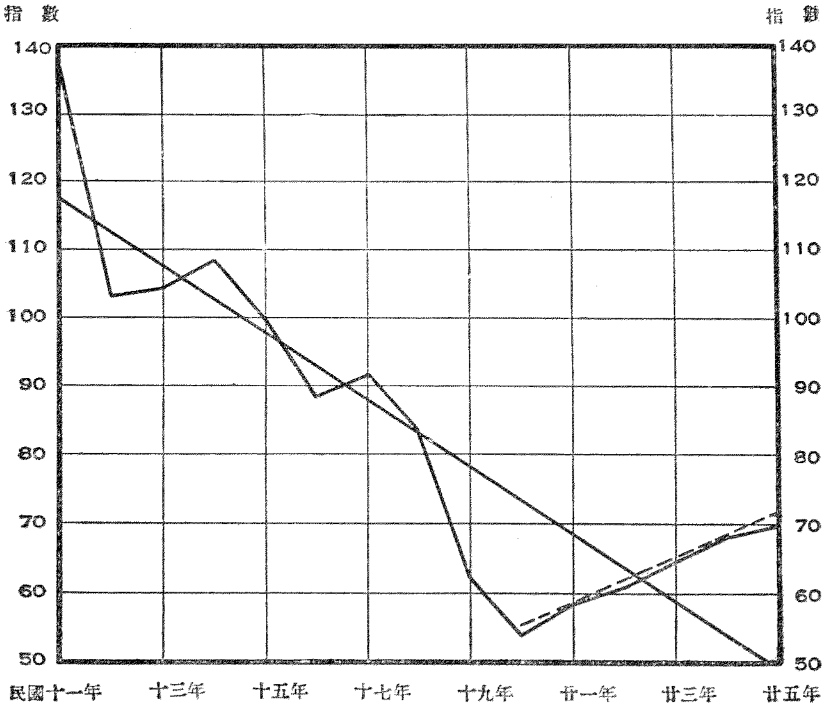
測定長期趨勢之要件有四:

(一) 需要適當時期

核算長期趨勢之時期愈短,長期趨勢線愈不可靠.蓋時期愈短,受商情輪迴之影響愈大,致長期趨勢竟被混淆而不能自主.例如民國十一年至二十五年上海國外匯兌指數之變動,由長時期觀察之,爲一下向算術級數式長期趨勢.若僅就民國二十年至二十五年間觀察之,則成一上向算術級數式長期趨勢.

同一數列,因選取時期之長短致長期趨勢之傾向完全相反.故在測定長期趨勢時,第一點應注意者,即適當時期之選取.時期愈長,受循環變動之影響愈小,長期趨勢愈見準確可靠.時期愈短,受循環變動之影響愈大,長期趨勢愈多猜疑不確.在普通情形之下,測定長期趨勢之時期,須在十年以上,否則趨勢線之繪示,將受循環變動之影響而不足恃.

圖六十二　歷年上海國外匯兌指數圖 民國十一年至二十五年



(由短時期或長時期觀察長期趨勢圖)

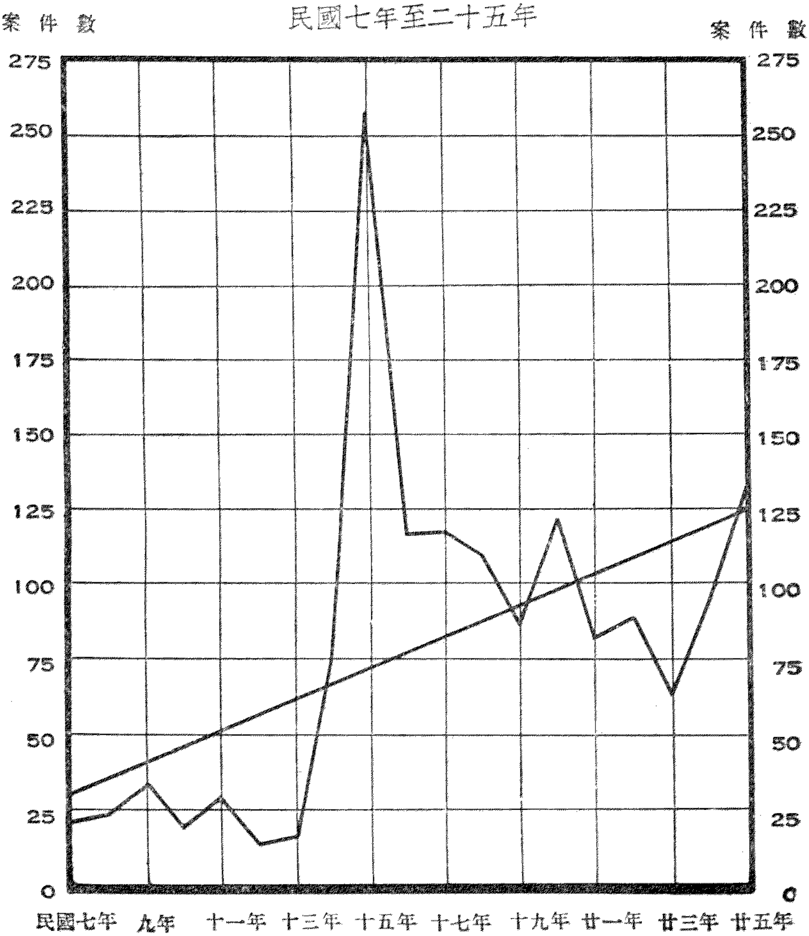
(二) 剔除極端變量

在時間數列中,某年因受特種影響而現極端變動時,可將該年之級數剔除不顧.例如近十九年來上海市之罷工停業,在民國七年至十四年及十六年至二十五年間,每年案件數俱在14件至 122 件之間,所示曲線本極平坦,惟民國十五年國民軍出師北伐之時,上海總工會在軍閥壓迫之下,祕密奮鬬,促進工人們階級爭鬬之

觀念,致是年罷工停業案件數,破空前之記錄,全年竟有257起之多.十六年三月國民軍奠定上海後,政局穩定,民衆俱具望治之心理,和平之傾向,致該年罷工停業案

圖六十三　歷年上海市罷工停業案件數比較圖

民國七年至二十五年



(觀察長期趨勢時剔除極端變量圖)

件數即減爲 117 件.此種特殊情形,在曲線圖中,驟現非常之高漲,在測定長期趨勢時,可剔除不顧.

又如某公司自民國元年至二十年及二十二年至二十五年間,每年營業額無甚差別,惟於民國二十一年時,曾聘黃君爲經理,黃君交際廣闊,濫放客帳,致生意興隆,銷貨驟增,該年銷數遂現空前未有之高峯.翌年黃君虧空潛逃,呆帳難收,信用緊縮,致銷貨額又復常態.凡此非常變動,俱非長期趨勢,季節變動及循環變動等應有之徵象,故於測定長期趨勢及各種變動時,俱宜刪除之.

(三) 研究時期始末

長期趨勢之測定,在可能範圍內,應盡量避免循環變動之影響.蓋若選取衰落期之末始,而以繁盛期之末終,則長期趨勢之測定,將失之過高.若選取繁盛期之末始,而以衰落期之末終,則長期趨勢之測定,將失之過低.惟此偏高偏低之原因,俱受循環變動之影響所致.故於測定長期趨勢時,應選取包含若干循環期之時期,而後方可得準確之趨勢線.

(四) 重視晚近變量

核算長期趨勢之目的,在預測未來之商情者,則晚

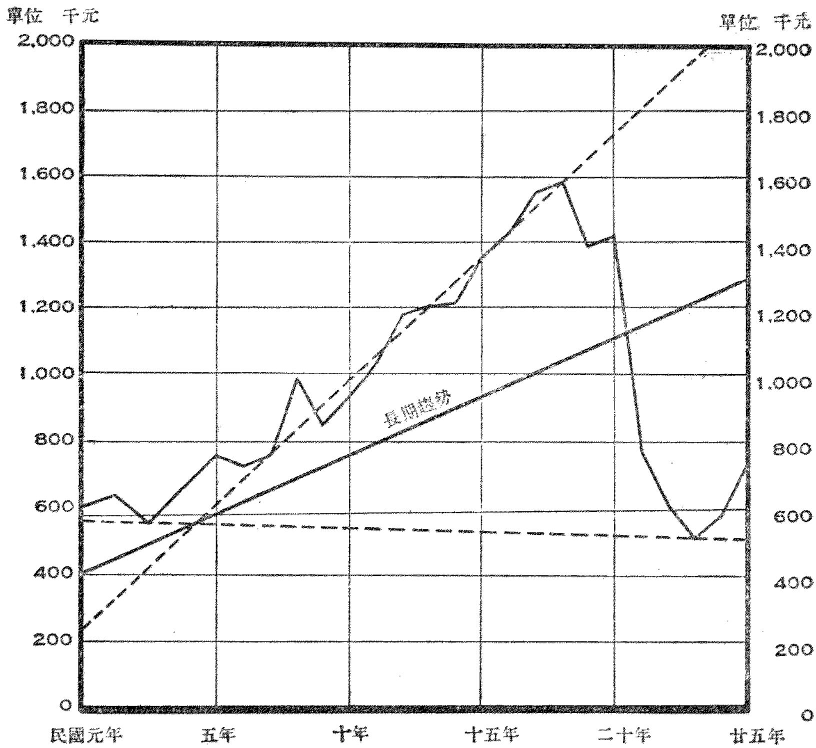
近數年之變量,應特別重視之.蓋資料可前後比較者,開始數年中,縱有小數之錯誤,影響則微.若晚近數年之資料,如滋錯誤,則在預測未來之數值時,必因差之毫釐,謬成千里也.

第四節　隨手測繪法

測定長期趨勢最簡單之方法,謂之隨手測繪法,即將時間數列用曲線繪示後,依曲線之趨向,隨手配合一趨勢線是也.此法在熟練統計之專家繪成者,亦有相當之價值.至於繪製之祕訣,即先將時間數列分為前後兩期,就此兩期中各找最大與最小之變量各一,然後將前期之最小變量點與後期之最小變量點用直線連接之,更將前期之最大變量點與後期之最大變量點用直線連接之,即得橫貫全圖之兩極端線.在此兩極端線間之平分線即長期趨勢線也.例如民國元年至二十五年我國輸出貨值,若分25年為前後兩期,則元年一月至十三年六月為前期,十三年七月至二十五年十二月為後期.前期輸出貨值,最多為民國十三年之 \$1,202,440,000,最少為三年之 \$555,002,000.後期輸出貨值,最多為十八年之 \$1,582,441,000,最少為二十三年之 \$535,733,000.若將各點用

直線連接之,即得兩極端線,如下圖兩虛線,如在兩虛線間更繪一均分線,如下圖實線即長期趨勢線是也.

圖六十四 歷年我國輸出貨值比較圖 民國元年至二十五年



(用隨手測繪法測繪直線趨勢圖)

第五節 移動均數法

測定長期趨勢之第二法,謂之移動均數法,先將時間數列核算各期均數後,再以各期均數繪示之,即得長期趨勢線.例如民國元年至二十五年上海市每石(海斛)秈米市價

如下表第二行,若用三年之連貫市價,推求其移動平均價,則民國二年之平均價爲元年至三年之平均價$(7.37+6.80+6.10)\div3=\$6.76$.若求民國三年之平均價,即可減去元年之市價,加入四年之市價除以3,即得$6.66.如用五年之連貫市價,推求其移動平均價,則民國三年之平均價爲元年至五年之平均價 $(7.37+6.80+6.10+7.07+6.52)\div5=\$6.77$.若求民國四年之平均價,即可減去元年之市價,加入六年之市價除以5,即得$6.48.依此繼續爲之,即可得各月均價.惟前例俱以3, 5, 7, 9, 11等奇數市價,核計平均數,所得結果當爲各中央年之均價.若用以核算平均數之市價數爲偶數,則所得均價,必介於兩中央年之間,若欲求某指定年之均價,則將兩平均價中再求其平均即得.例如核算二年之移動均價,則民國二年之平均市價,爲元年及二年均價與二年及三年均價之平均數$[(7.37+6.80)\div2+(6.80+6.10)\div2]\div2=(7.085+6.450)\div2=\$6.77$.民國三年之平均市價,爲二年及三年均價與三年及四年均價之平均數$[(6.80+6.10)\div2+(6.10+7.07)\div2]\div2=(6.450+6.585)\div2=\$6.52$.如用八年之連貫市價,推求其移動平均價,則民國五年之平均市價,爲元年至八年及二年至九年均價之平均數$[(7.37+6.80+6.10+7.07+6.52+5.93+5.75+6.57)\div8+(6.80+6.10+7.07+6.52+5.93+5.75+6.57+8.63)\div8]\div2=(6.514+6.671)\div2=\$6.59$,餘類推.茲將民國元年至二十五年上海市每石秈米市價核算各移動均數如下:

表一七〇 歷年上海市秈米市價比較表

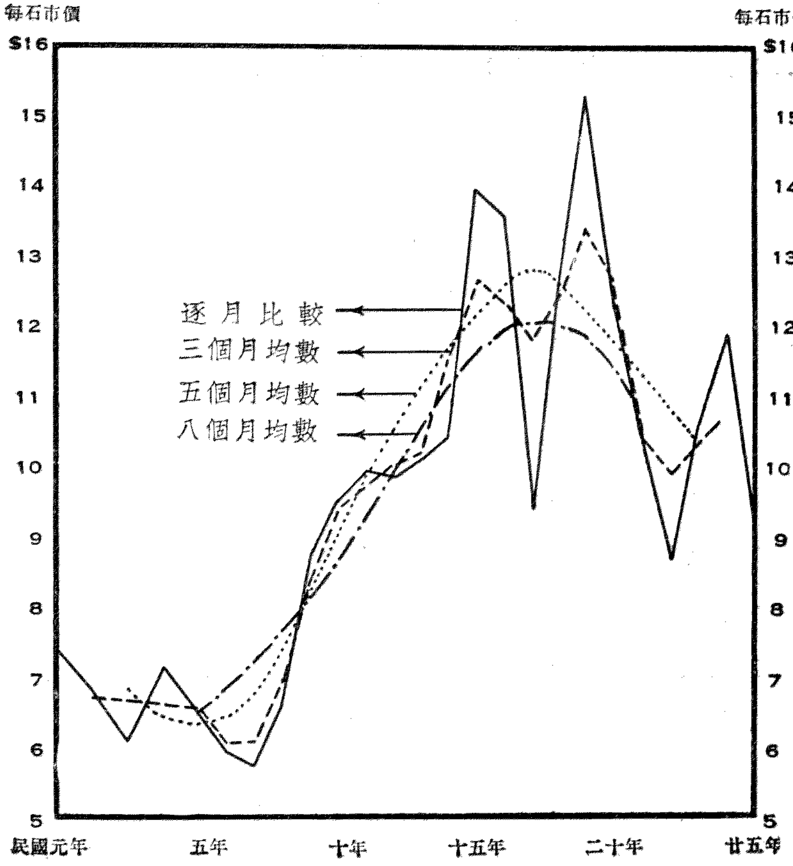
（民國元年至二十五年）

（求移動均數表）

年次	每石*市價	三個月移動均數	五個月移動均數	八個月移動均數	
民國元年	$7.37				
二年	6.80	$6.76			
三年	6.10	6.66	$6.77		
四年	7.07	6.56	6.48		
				$6.514	
五年	6.52	6.51	6.27		$6.59
				6.671	
六年	5.93	6.07	6.37		6.84
				6.999	
七年	5.75	6.08	6.68		7.23
				7.468	
八年	6.57	6.98	7.26		7.64
				7.806	
九年	8.63	8.21	8.04		8.03
				8.250	
十年	9.42	9.30	8.85		8.52
				8.798	
十一年	9.85	9.68	9.55		9.31
				9.825	
十二年	9.78	9.90	9.89		10.26
				10.693	
十三年	10.07	10.05	10.80		10.74
				10.779	
十四年	10.31	11.45	11.53		10.97
				11.170	
十五年	13.97	12.60	11.44		11.51
				11.845	
十六年	13.51	12.27	11.93		12.00
				12.149	
十七年	9.32	11.79	12.92		12.17
				12.188	
十八年	12.55	12.37	12.57		12.08
				11.975	
十九年	15.25	13.34	11.94		11.76
				11.538	
二十年	12.21	12.61	11.80		11.43
				11.328	
廿一年	10.38	10.40	11.38		11.34
				11.355	
廿二年	8.61	9.82	10.70		
廿三年	10.47	10.30	10.17		
廿四年	11.83	10.61			
廿五年	9.54				

* 海斛.

圖六十五　歷年上海秈米市價比較圖 民國元年至二十五年



（用移動均數法測繪長期趨勢圖）

綜觀上列圖表用八個月之均價繪成之長期趨勢線,較用三個月之均價繪成者爲平滑.故用以求均價之時期愈長,則繪成之趨勢線愈爲平滑.用以求均價之時期愈短,則繪成之趨勢線愈欠平滑.惟時期愈長,趨勢線愈短,如以三年之均

價繪成之曲線,則兩端各短一年(即元年及二十五年).如以五年之均價繪成之曲線,則兩端各短二年(即元年,二年及二十四年,二十五年).依此類推,如用六年及七年之均價,兩端將各短三年,用八年及九年之均價,兩端將各短四年.此用移動均數法測定長期趨勢之第一缺點也.更在上向之長期趨勢中,以逐漸增大之級數增加其趨向時,移動均數將受其影響而有上偏性.反之,若長期趨勢以逐漸減小之級數,加入計算,移動均數將受其影響而有下偏性.此種偏陂之誤解,爲移動均數法之第二缺點.

用移動均數法測定長期趨勢時,究應選用三年四年之移動均數乎?抑用十年十一年等之移動均數乎?此應視商情輪迴期之長短而定.蓋良善之長期趨勢線必應避免循環變動.故若商情五年一輪迴,則長期趨勢線,亦應採用五年之均價繪示之.若商情十年一輪迴,則長期趨勢線亦應選用十年之均價繪示之,其目的乃在平均之時互銷循環變動也.

第六節 最小平方法

測定長期趨勢最完善之方法爲最小平方法.此法以最小平方名者,蓋以此法求得之趨勢直線或曲線爲最小平方線 (Line of least squares), 亦即各變量與此趨勢線離中差之平方爲最小也.用最小平方法求得之趨勢線,有直線與曲線兩種,茲分別述之如下:

(一) 直線趨勢

時間數列中各變量若與年俱增,或逐年跌減者,則其長期趨勢線必為一直線.其核算方法,計有普通與簡捷兩種,茲分別舉例述之如下:

(1)普通法——用普通法求直線趨勢之公式如下:

設 X 為時期之位次.

Y 為各時期之長期趨勢值.

N 為變量項數.

a 為常數.

b 為趨勢直線之斜度.

Σ 為總和之記號.

$Y=a+bX$ ……………………………………(公式一七四)

例如上海華商銀行於民國十年至二十四年間,歷年年底存儲銀元數如下表第三行,若應用公式一七四求長期趨勢值 Y,則公式中常數 a 及斜度 b 應先核算之,茲將其計算法列表示之如下:

表一七一　歷年上海華商銀行存儲銀元數額表

民國十年至二十四年

(用普通法求直線趨勢表甲)

年　　次	位次 X	存儲銀元額 單位 千元 Y　$Y=a+bX$	$XY=aX+bX^2$
民國十　年	1	$12,180=a+1b$	$12,180=1a+1b$

十一年	2	$18,940=a+2b$	$37,880=2a+4b$
十二年	3	$21,460=a+3b$	$64,380=3a+9b$
十三年	4	$23,630=a+4b$	$94,520=4a+16b$
十四年	5	$40,150=a+5b$	$200,750=5a+25b$
十五年	6	$45,360=a+6b$	$272,160=6a+36b$
十六年	7	$48,500=a+7b$	$339,500=7a+49b$
十七年	8	$63,060=a+8b$	$504,480=8a+64b$
十八年	9	$94,620=a+9b$	$851,580=9a+81b$
十九年	10	$117,940=a+10b$	$1,179,400=10a+100b$
二十年	11	$147,990=a+11b$	$1,627,890=11a+121b$
廿一年	12	$185,920=a+12b$	$2,231,040=12a+144b$
廿二年	13	$183,590=a+13b$	$2,386,670=13a+169b$
廿三年	14	$211,630=a+14b$	$2,962,820=14a+196b$
廿四年	15	$225,780=a+15b$	$3,386,700=15a+225b$
總計	120	$1,440,750=15a+120b$	$16,151,950=120a+1,240b$

綜觀上表可知

$$\Sigma Y=Na+b\Sigma X$$

$$\Sigma(XY)=a\Sigma X+b\Sigma X^2$$

如將 ΣY 乘 ΣX^2 及 $\Sigma(XY)$ 乘 ΣX 則得公式如下:

$$\Sigma Y\cdot\Sigma X^2=Na\cdot\Sigma X^2+b\Sigma X\cdot\Sigma X^2$$

$$\Sigma(XY)\cdot\Sigma X=a\Sigma X\cdot\Sigma X+b\Sigma X^2\cdot\Sigma X$$

如將 $\Sigma Y\cdot\Sigma X^2$ 減 $\Sigma(XY)\cdot\Sigma X$ 則得公式如下:

$$\Sigma Y\cdot\Sigma X^2-\Sigma(XY)\cdot\Sigma X=Na\cdot\Sigma X^2-a\Sigma X\cdot\Sigma X$$

故 $a=\dfrac{\Sigma Y\cdot\Sigma X^2-\Sigma(XY)\cdot\Sigma X}{N\cdot\Sigma X^2-\Sigma X\cdot\Sigma X}$ ……………(公式一七五)

$$b=\frac{\Sigma Y-Na}{\Sigma X}\cdots\cdots\text{(公式一七六)}$$

或 $$b=\frac{\Sigma(XY)-a\Sigma X}{\Sigma X^2}\cdots\cdots\text{(公式一七七)}$$

如將ΣY乘ΣX及$\Sigma(XY)$乘N則得公式如下:

$$\Sigma Y\cdot\Sigma X=Na\cdot\Sigma X+b\Sigma X\cdot\Sigma X$$

$$\Sigma(XY)\cdot N=a\Sigma X\cdot N+b\Sigma X^2\cdot N$$

如將$\Sigma Y\cdot\Sigma X$減$\Sigma(XY)\cdot N$則得公式如下:

$$\Sigma Y\cdot\Sigma X-\Sigma(XY)\cdot N=b\Sigma X\cdot\Sigma X-b\Sigma X^2\cdot N$$

故 $$b=\frac{\Sigma Y\cdot\Sigma X-\Sigma(XY)\cdot N}{\Sigma X\cdot\Sigma X-\Sigma X^2\cdot N}\cdots\cdots\text{(公式一七八)}$$

$$a=\frac{\Sigma Y-b\Sigma X}{N}\cdots\cdots\text{(公式一七九)}$$

或 $$a=\frac{\Sigma(XY)-b\Sigma X^2}{\Sigma X}\cdots\cdots\text{(公式一八〇)}$$

即如前例　$1,440,750=15a+120b$

$$16,151,950=120a+1,240b$$

應用公式一七五,先求未知數 a 如下:

$$\begin{array}{rl} 1,786,530,000= & 18,600a+148,800b \\ 1,938,234,000= & 14,400a+148,800b \\ \hline -\quad 151,704,000= & 4,200a+\quad 0\quad b \end{array}$$

故 $a=-151,704,000\div4,200=-36,120$

應用公式一七六

$$b=\frac{1,440,750-15\times(-36,120)}{120}$$

$$=\frac{1,982,550}{120}=16,521.25$$

應用公式一七七

$$b=\frac{16,151,950-120\times(-36,120)}{1,240}$$

$$=\frac{20,486,350}{1,240}=16,521.25$$

故長期趨勢公式如下:

$$Y=-36,120+16,521.25X$$

或應用公式一七八,先求未知數 b 如下:

$$\begin{array}{r} 172,890,000=1,800a+14,400b \\ 242,279,250=1,800a+18,600b \\ \hline -69,389,250=\quad 0\quad a+-4,200b \end{array}$$

故 $b=\frac{-69,389,250}{-4,200}=16,521.25$

應用公式一七九

$$a=\frac{1,440,750-120\times 16,521.25}{15}$$

$$=\frac{-541,800}{15}=-36,120$$

應用公式一八〇

$$a=\frac{16,151,950-1,240\times 16,521.25}{120}$$

$$=\frac{-4,334,400}{120}=-36,120$$

故長期趨勢公式為:

$$Y=-36,120+16,521.25X$$

根據長期趨勢公式即可核算各年長期趨勢值如下:

表一七二　歷年上海華商銀行存儲銀元額長期趨勢表

民國十年至二十四年

(用普通法求直線趨勢表乙)

年次	位次 X	存儲銀元額 單位 千元 Y	長期趨勢值 (單位 千元) $Y=a+bX$
民國十年	1	12,180	−36,120+16,521.25× 1=−19,598.75
十一年	2	18,940	−36,120+16,521.25× 2=− 3,077.50
十二年	3	21,460	−36,120+16,521.25× 3= 13,443.75
十三年	4	23,630	−36,120+16,521.25× 4= 29,965.00
十四年	5	40,150	−36,120+16,521.25× 5= 46,486.25
十五年	6	45,360	−36,120+16,521.25× 6= 63,007.50
十六年	7	48,500	−36,120+16,521.25× 7= 79,528.75
十七年	8	63,060	−36,120+16,521.25× 8= 96,050.00
十八年	9	94,620	−36,120+16,521.25× 9= 112,571.25
十九年	10	117,940	−36,120+16,521.25×10= 129,092.50
二十年	11	147,990	−36,120+16,521.25×11= 145,613.75
廿一年	12	185,920	−36,120+16,521.25×12= 162,135.00
廿二年	13	183,590	−36,120+16,521.25×13= 178,656.25
廿三年	14	211,630	−36,120+16,521.25×14= 195,177.50
廿四年	15	225,780	−36,120+16,521.25×15= 211,698.75

(2)簡捷法——用簡捷法求直線趨勢,視年數之奇偶而異,茲又分別舉例述之如下:

(A)年數爲奇數時之計算法——若年數爲奇數,則中間一年適爲時期之中點,以時間數列之算術平均

數,作爲中間一年之數值,如繪於圖上,卽得 P 點.依數學原理,最小平方線必經過此點.故最小平方直線之中點,卽可確定爲 P,亦卽簡捷公式中之常數 a.至於斜度 b,則可用下列公式核算之:

設 X 爲各時期與中央年相差之年數.

Y 爲各時期之長期趨勢值.

N 爲變量項數.

a 爲常數.(如年數爲奇數,則 a 爲中央年之長期趨勢值,亦卽時間數列之算術平均數.)

b 爲趨勢直線之斜度.

Σ 爲總和之記號.

$$Y=a+bX$$

$$\Sigma Y=Na+b\Sigma X$$

$$\Sigma(XY)=a\Sigma X+b\Sigma X^2$$

惟 X 爲各時期與中央年相差之年數,其總和爲零 $(\Sigma X=0)$.

故 $\Sigma Y=Na$

$$\Sigma(XY)=b\Sigma X^2$$

$$a=\frac{\Sigma Y}{N}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式一八一})$$

$$b=\frac{\Sigma(XY)}{\Sigma X^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式一八二})$$

斜度 b 爲每年遞增或遞減之數量,若 b 爲正數,則每年於常數 a 上應遞增 b,若 b 爲負數,則每年於常數 a 上應遞減 b.茲將用簡捷法求直線趨勢之步驟,略述之如下:

(a)求時間數列之中央年.

(b)求各年與中央年相差之年數 X.

(c)將時間數列之各項 Y 乘各項相當之 X,得 XY,總加之得 $\Sigma(XY)$.

(d)求 X 之平方,再將各 X 之平方總加之,得 ΣX^2.

(e)以第四步所得之結果(ΣX^2)除第三步所得之結果[$\Sigma(XY)$],即得斜度 b 之數值.

(f)以項數 N 除時間數列之總值 ΣY,得時間數列之算術平均數,即爲直線趨勢公式中之常數 a,亦即中央年之長期趨勢值.

(g)依 $Y=a+bX$ 公式,將後半期各年依次遞加 b 之數值,前半期各年依次遞減 b 之數值,即得研究時期內各年之長期趨勢值.

茲仍以民國十年至二十四年上海華商銀行存儲銀元額爲例,用簡捷法核算其長期趨勢公式及各年長期趨勢值如下:

表一七三 歷年上海華商銀行存儲銀元額長期趨勢表

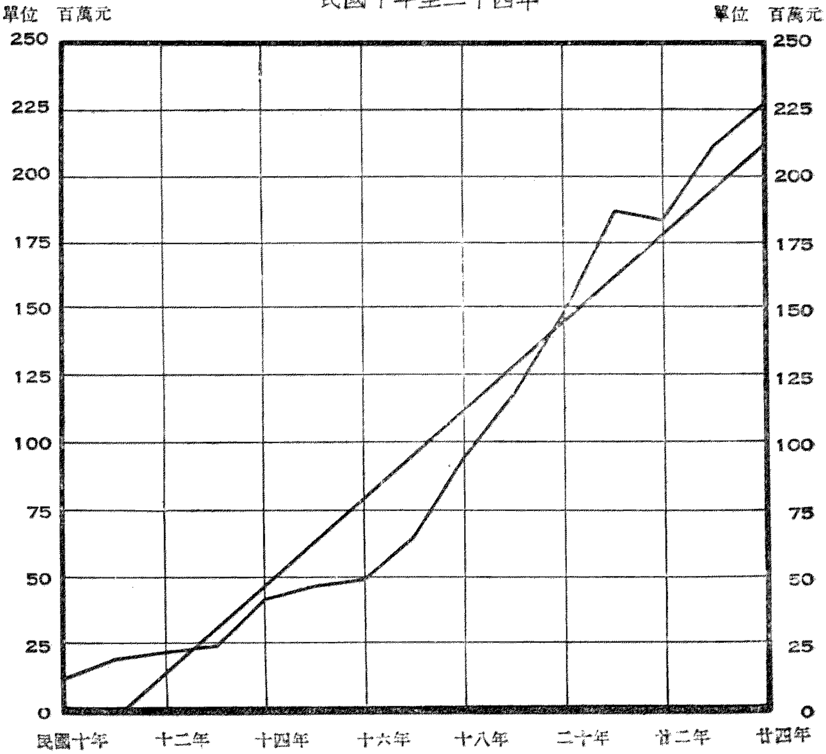
民國十年至二十四年

（年數為奇數時用簡捷法求直線趨勢值表）

年次	存儲銀元額 單位 千元 Y	年份離中差 X	XY		X^2	長期趨勢值 單位 千元 $Y=a+bX$
			+	−		
民國十年	12,180	−7		85,260	49	−19,598.75
十一年	18,940	−6		113,640	36	−3,077.50
十二年	21,460	−5		107,300	25	13,443.75
十三年	23,630	−4		94,520	16	29,965.00
十四年	40,150	−3		120,450	9	46,486.25
十五年	45,360	−2		90,720	4	63,007.50
十六年	48,500	−1		48,500	1	79,528.75
十七年	63,060	0			0	96,050.00
十八年	94,620	1	94,620		1	112,571.25
十九年	117,940	2	235,880		4	129,092.50
二十年	147,990	3	443,970		9	145,613.75
廿一年	185,920	4	743,680		16	162,135.00
廿二年	183,590	5	917,950		25	178,656.25
廿三年	211,630	6	1,269,780		36	195,177.50
廿四年	225,780	7	1,580,460		49	211,698.75
總計	1,440,750	0	5,286,340	660,390	280	

圖六十六　歷年上海華商銀行存儲銀元數長期趨勢圖

民國十年至二十四年



(用簡捷平方法測繪直線趨勢圖——年數爲奇數時)

應用公式一八一

$$a=\frac{1,440,750}{15}=96,050$$

應用公式一八二

$$b=\frac{5,286,340-660,390}{280}=16,521.25$$

故長期趨勢公式爲

$$Y=96,050+16,521.25X$$

(B)年數爲偶數時之計算法——若年數爲偶數,則年份之中點,必介乎兩中央年之間.例如用簡捷法測定民國八年至二十一年我國輸入棉紗量之長期趨勢,則年數爲偶數(共有十四年),而中央年必爲第七年之末,第八年之初.故在計算長期趨勢時.第七年之數量,當自算術平均數中減去半年增加之量;第八年之數量,當自算術平均數中增加半年增加之量.故在年數爲偶數之時間數列中,長期趨勢之測定,應以半年爲一單位,而公式中之斜度 b,亦卽每半年增減之數量.茲將其計算之步驟,略述之如下:

(a)求時間數列之中點.

(b)求各年與此中點相差半年之數,得 X 爲……-5, -3, -1, $+1$, $+3$, $+5$…….

(c)求時間數列各項 Y 與 X 之乘積,再將各乘積相加,得 $\Sigma(XY)$.

(d)求 X 之平方,再將各 X 之平方總加之,得 ΣX^2.

(e)以第四步所得之結果(ΣX^2)除第三步所得之結果[$\Sigma(XY)$],卽得每半年之增減值,亦卽公式中之斜度 b.

(f)以項數 N 除時間數列之總值 ΣY,得時間數列之算術平均數,卽爲直線趨勢公式中之常數 a,

亦即兩中央年間之長期趨勢值.

(g)將時間數列之算術平均數(即常數 a)加 b,即得時期中點後半年之長期趨勢值.其後各年,依次遞加 $2b$,即得後半期各年之長期趨勢值.將時間數列之算術平均數(即常數 a)減 b,即得時期中點前半年之長期趨勢值.其前各年,依次遞減 $2b$,即得前半期各年之長期趨勢值.

表一七四　歷年我國輸入棉紗量長期趨勢表

民國八年至二十一年

(年數為偶數時用簡捷法求直線趨勢值表)

年次	輸入量 單位 千擔 Y	年份離中年差以半年為單位 X	XY +	XY −	X^2	長期趨勢值 單位 千擔 $Y=a+bX$
民國八年	1,405	−13		18,265	169	1,362.31
九年	1,325	−11		14,575	121	1,249.35
十年	1,273	−9		11,457	81	1,136.39
十一年	1,219	−7		8,533	49	1,023.43
十二年	775	−5		3,875	25	910.47
十三年	576	−3		1,728	9	797.51
十四年	647	−1		647	1	684.55
十五年	449	1	449		1	571.59
十六年	295	3	885		9	458.63
十七年	285	5	1,425		25	345.67
十八年	234	7	1,638		49	232.71
十九年	162	9	1,458		81	119.75
二十年	48	11	528		121	6.79
廿一年	100	13	1,300		169	−106.17
總計	8,793	0	7,683	59,080	910	

應用公式一八一

$$a=\frac{8,793}{14}=628.07$$

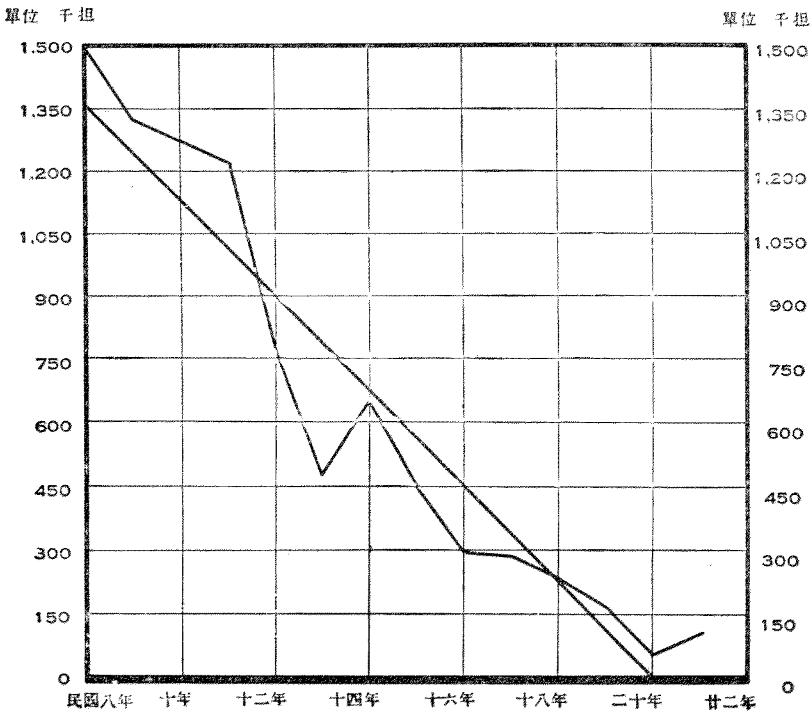
應用公式一八二

$$b=\frac{7,683-59,080}{910}=-56.48$$

故長期趨勢公式為

$$Y=628.07+(-56.48)X$$

圖六十七 歷年我國輸入棉紗量長期趨勢圖 民國八年至二十一年



(用簡捷平方法測繪直線趨勢圖——年數為偶數時)

用簡捷法求斜度 b,乃以 ΣX^2 除 ΣXY 而得.惟 ΣX^2 之核算,亦可用簡捷法求之.茲將其公式示之如下:

設 X 爲各時期與中央年相差之年數.

n 爲年數.

Σ 爲總和之記號.

若年數 n 爲奇數,則 X 爲各年與中央年相差之年數.

$$\Sigma X^2=\frac{n(n-1)(n+1)}{12}\cdots\cdots\cdots(\text{公式一八三})$$

若年數 n 爲偶數,則 X 爲各年與時期中點相差每半年之數.

$$\Sigma X^2=\frac{n(n-1)(n+1)}{3}\cdots\cdots\cdots(\text{公式一八四})$$

茲卽應用上列兩公式,編一計算表如下,惟須注意者,年數爲奇數時,則 X 以一年爲單位;年數爲偶數時,則 X 以半年爲單位.

表一七五 計算長期趨勢中 ΣX^2 之數值表

(計算 ΣX^2 之數值表)

年數爲奇數 X	ΣX^2	年數爲偶數 X	ΣX^2
5	10	6	70
7	28	8	168
9	60	10	330
11	110	12	572
13	182	14	910

15	280	16	1,360
17	408	18	1,938
19	570	20	2,660
21	770	22	3,542
23	1,012	24	4,600
25	1,300	26	5,850
27	1,638	28	7,308
29	2,030	30	8,990
31	2,480	32	10,912
33	2,992	34	13,090
35	3,570	36	15,540
37	3,218	38	18,278
39	4,940	40	21,320

以上所述俱為核算各年之長期趨勢值,若根據年趨勢公式,進而核算各月之長期趨勢值,即可以十二除每年增加之量,或以六除每半年增加之量,即得每月增加之量.如年數為奇數,則時期之中點,在中央年六月之末,七月之初.故將常數 a(即時間數列之算術平均數)加半個月之增加量,即得中央年七月之長期趨勢值.依此遞加或遞減每月之增加量,即得中央年七月以後及七月以前各月之長期趨勢值.例如表一七三民國十年至二十四年上海華商銀行存儲銀元額,為十五年之時間數列.故第八年六月末七月初之長期趨勢值,為該數列之算術平均數$96,050,000.

$$每月之增加量=\frac{b}{12}=\frac{16,521.25}{12}=1,376.771\text{千元}$$

$$每半月之增加量=\frac{\frac{b}{12}}{2}=\frac{1,376.771}{2}=688.386\text{千元}$$

故第八年(即民國十七年)各月之長期趨勢值如下:

一　月=96,738,386−6×1,376,771= \$88,477,760

二　月=96,738,386−5×1,376,771= \$89,854,531

三　月=96,738,386−4×1,376,771= \$91,231,302

四　月=96,738,386−3×1,376,771= \$92,608,073

五　月=96,738,386−2×1,376,771= \$93,984,844

六　月=96,738,386−1×1,376,771= \$95,361,615

七　月=96,050,000　+　688,386= \$96,738,386

八　月=96,738,386+1×1,376,771= \$98,115,157

九　月=96,738,386+2×1,376,771= \$99,491,928

十　月=96,738,386+3×1,376,771=\$100,868,699

十一月=96,738,386+4×1,376,771=\$102,245,470

十二月=96,738,386+5×1,376,771=\$103,622,241

如年數爲偶數,則時期之中點,在第一中央年之末及第二中央年之初.例如表一七四民國八年至二十一年我國輸入棉紗量,爲14年之時間數列.故第七年十二月三十一日,或第八年一月一日爲該數列時期之中點.其長期趨勢值卽爲該數列之算術平均數628,070擔.

$$每月之增加量=\frac{b}{6}=\frac{-56.48}{6}=-9.413\text{千擔}$$

$$每半月之增加量=\frac{\frac{b}{6}}{2}=\frac{-9.413}{2}=-4.707 千擔$$

故第八年(即民國十五年)各月之長期趨勢值如下:

一　月 $=628,070+\quad(-4,707)\quad=623,363$ 擔

二　月 $=623,363+\ 1\times(-9,413)=613,950$ 擔

三　月 $=623,363+\ 2\times(-9,413)=604,537$ 擔

四　月 $=623,363+\ 3\times(-9,413)=595,124$ 擔

五　月 $=623,363+\ 4\times(-9,413)=585,711$ 擔

六　月 $=623,363+\ 5\times(-9,413)=576,298$ 擔

七　月 $=623,363+\ 6\times(-9,413)=566,885$ 擔

八　月 $=623,363+\ 7\times(-9,413)=557,472$ 擔

九　月 $=623,363+\ 8\times(-9,413)=548,059$ 擔

十　月 $=623,363+\ 9\times(-9,413)=538,646$ 擔

十一月 $=623,363+10\times(-9,413)=529,233$ 擔

十二月 $=623,363+11\times(-9,413)=519,820$ 擔

(二) 曲線趨勢

曲線趨勢除用移動均數法測定之外,亦可用最小平方法核計之.惟曲線有二次,三次,四次及多次拋物線等數種,在統計中所用者僅二次及三次拋物線,至於多次拋物線,鮮有用之者.茲將測定各次拋物線之方法略述之如下:

(1)二次拋物線測定法——測定二次拋物線之步驟如

下:

(A)以時期之中點為標準,求各年離中央年之離中差.如年數為奇數,則中央年為0,中央年以前各年之離中差為 $-1, -2, -3\cdots\cdots\cdots$;以後各年之離中差為 $+1, +2, +3\cdots\cdots\cdots$.若年數為偶數,則年數中點介乎兩中央年之間,如以半年為單位,則中點前一年之離中差為 -1, 前二年之離中差為 -3, 前三年為 -5, 餘類推;中點後一年之離中差為 $+1$, 後二年之離中差為 $+3$, 後三年為 $+5$, 餘類推.

(B)將時間數列之各項 Y 乘各項相當之 X,得 XY, 總加之得 $\Sigma(XY)$.

(C)求 X 之平方,再將各 X 之平方總加之,得 ΣX^2.

(D)將時間數列之各項 Y 乘各項相當之 X^2,得 X^2Y,總加之,得 $\Sigma(X^2Y)$.

(E)求 X 平方之平方,得 X^4,總加之,得 ΣX^4.

(F)將 ΣY, $\Sigma(XY)$, $\Sigma(X^2Y)$, ΣX^2, ΣX^4 各數代入公式,即得常數 a_1 及各斜度 b_1 及 c_1 之數值.

(G)將常數 a_1 及各斜度 b_1 及 c_1,代入長期趨勢公式,即得各年長期趨勢值.茲將測定二次拋物線之公式列下:

設 X 為各時期與中央年相差之年數.

Y 為各時期之長期趨勢值.

N 爲變量項數.

a_1 爲二次拋物線公式中之常數.

b_1 爲二次拋物線公式中之第一斜度.

c_1 爲二次拋物線公式中之第二斜度.

Σ 爲總和之記號.

$$\boldsymbol{Y=a_1+b_1X+c_1X^2} \quad \cdots\cdots\text{(公式一八五)}$$

$$\Sigma Y=Na_1+b_1\Sigma X+c_1\Sigma X^2$$

$$\Sigma(XY)=a_1\Sigma X+b_1\Sigma X^2+c_1\Sigma X^3$$

$$\Sigma(X^2Y)=a_1\Sigma X^2+b_1\Sigma X^3+c_1\Sigma X^4$$

若用簡捷法求二次拋物線,則 $\Sigma X=0$, $\Sigma X^3=0$, 故

$$\Sigma Y=Na_1+c_1\Sigma X^2$$

$$\Sigma(XY)=b_1\Sigma X^2$$

$$\Sigma(X^2Y)=a_1\Sigma X^2+c_1\Sigma X^4$$

依上列三式,求得 a_1, b_1 及 c_1 如下:

$$\boldsymbol{a_1=\frac{\Sigma Y\cdot\Sigma X^4-\Sigma(X^2Y)\cdot\Sigma X^2}{N\cdot\Sigma X^4-\Sigma X^2\cdot\Sigma X^2}} \quad \cdots\cdots\text{(公式一八六)}$$

$$\boldsymbol{b_1=\frac{\Sigma(XY)}{\Sigma X^2}} \quad \cdots\cdots\text{(公式一八七)}$$

$$\boldsymbol{c_1=\frac{\Sigma(X^2Y)\cdot N-\Sigma Y\cdot\Sigma X^2}{\Sigma X^4\cdot N-\Sigma X^2\cdot\Sigma X^2}} \quad \cdots\cdots\text{(公式一八八)}$$

例如民國五年至二十四年我國輸入淨值指數(以民國十五年爲基期),在五年至二十年之間,輸入指數年有增漲,迄二十年後,則年見減跌.茲用最小平方法測定其二次拋物線如下:

表一七六　歷年我國輸入淨值指數表

民國五年至二十四年（民國十五年指數=100）

（計算二次拋物線表甲）

年次	輸入淨值指數 Y	年份離中差以半年爲單位 X	XY +	XY −	X^2	X^2Y	X^4
民國五年	45.9	−19		872.1	361	16,569.9	130,321
六年	48.9	−17		831.3	289	14,132.1	83,521
七年	49.4	−15		741.0	225	11,115.0	50,625
八年	57.6	−13		748.8	169	9,734.4	28,561
九年	67.8	−11		745.8	121	8,203.8	14,641
十年	80.6	−9		725.4	81	6,528.6	6,561
十一年	84.1	−7		588.7	49	4,120.9	2,401
十二年	82.1	−5		410.5	25	2,052.5	625
十三年	90.6	−3		271.8	9	815.4	81
十四年	84.3	−1		84.3	1	84.3	1
十五年	100.0	1	100.0		1	100.0	1
十六年	90.1	3	270.3		9	810.9	81
十七年	106.4	5	532.0		25	2,660.0	625
十八年	112.6	7	788.2		49	5,517.4	2,401
十九年	116.5	9	1,048.5		81	9,436.5	6,561
二十年	127.5	11	1,402.5		121	15,427.5	14,641
廿一年	93.3	13	1,212.9		169	15,767.7	28,561
廿二年	76.8	15	1,152.0		225	17,280.0	50,625
廿三年	58.8	17	999.6		289	16,993.2	83,521
廿四年	52.5	19	997.5		361	18,952.5	130,321
總計	1,625.8	0	8,503.5	6,019.7	2,660	176,302.6	634,676

應用公式一八六

$$a_1=\frac{1{,}625.8\times 634{,}676-176{,}302.6\times 2{,}660}{20\times 634{,}676-2{,}660\times 2{,}660}$$

$$=\frac{1{,}031{,}856{,}240.8-468{,}964{,}916.0}{12{,}693{,}520-7{,}075{,}600}$$

$$=\frac{562{,}891{,}324.8}{5{,}617{,}920}=100.196$$

應用公式一八七

$$b_1=\frac{8,503.5-6,019.7}{2,660}=0.934$$

應用公式一八八

$$c_1=\frac{176,302.6\times20-1,625.8\times2,660}{634,676\times20-2,660\times2,660}$$

$$=\frac{3,526,052-4,324,628}{12,693,520-7,075,600}$$

$$=\frac{-798,576}{5,617,920}=-0.142$$

故長期趨勢公式爲:

$$Y=100.196+0.934X+(-0.142)X^2$$

根據上列公式求得各年長期趨勢值如下:

表一七七 歷年我國輸入淨值指數長期趨勢表

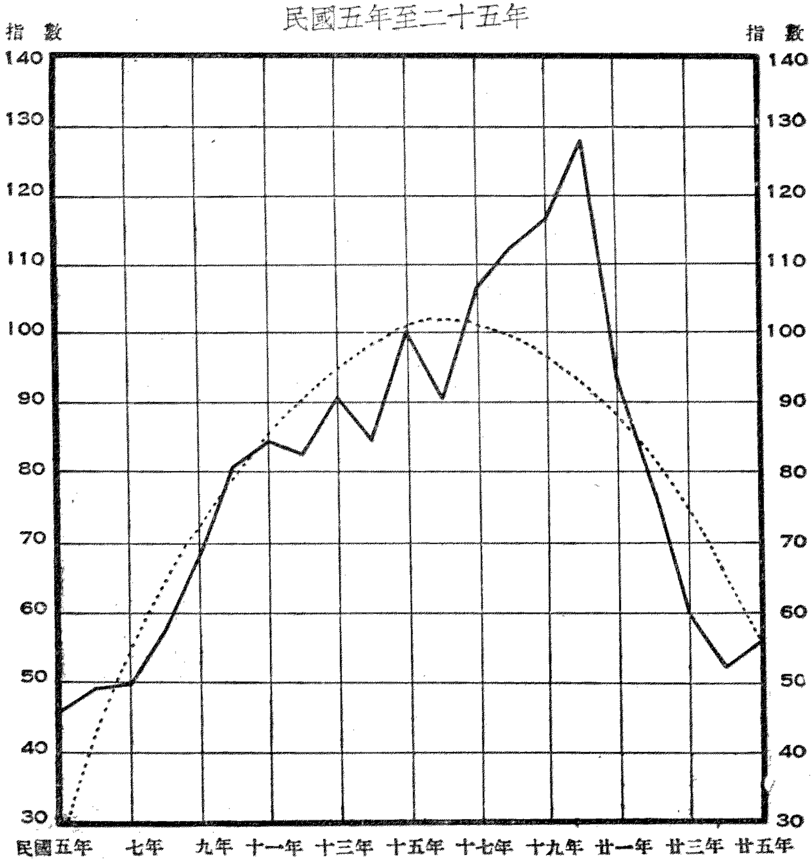
民國五年至二十四年(民國十五年指數=100)

(計算二次拋物線表乙)

年次	長期趨勢
民國五年	100.196+0.934×(−19)+(−0.142)×361= 31.188
六年	100.196+0.934×(−17)+(−0.142)×289= 43·280
七年	100.196+0.934×(−15)+(−0.142)×225= 54.236
八年	100.196+0.934×(−13)+(−0.142)×169= 64.056
九年	100.196+0.934×(−11)+(−0.142)×121= 72.740
十年	100.196+0·934×(−9)+(−0.142)×81= 80.288
十一年	100.196+0.934×(−7)+(−0.142)×49= 86.700
十二年	100.196+0.934×(−5)+(−0.142)×25= 91.976
十三年	100.196+0.934×(−3)+(−0.142)×9= 96.116
十四年	100.196+0.934×(−1)+(−0.142)×1= 99.120
十五年	100.196+0.934×1+(−0·142)×1=100.988
十六年	100.196+0.934×3+(−0.142)×9=101.720
十七年	100.196+0.934×5+(−0.142)×25=101.316
十八年	100.196+0.934×7+(−0.142)×49= 99.776
十九年	100.196+0.934×9+(−0.142)×81= 97.100
二十年	100.196+0.934×11+(−0.142)×121= 93.288
廿一年	100.196+0.934×13+(−0.142)×169= 88.340
廿二年	100.196+0.934×15+(−0.142)×225= 82.256
廿三年	100.196+0.934×17+(−0.142)×289= 75.036
廿四年	100.196+0.934×19+(−0.142)×361= 66·680

圖六十八　歷年我國輸入淨值指數長期趨勢圖

民國五年至二十五年



(二次拋物線圖)

(2)三次拋物線測定法——測定三次拋物線之步驟如下:

(A)至(D)與求二次拋物線之步驟同。

(E)將各X^2Y乘X，得X^3Y，總加之得$\Sigma(X^3Y)$。

(F)求 X 平方之平方,得 X^4,總加之,得 ΣX^4.

(G)將各 X^4 再乘各相當之 X^2,得 X^6,總加之得 ΣX^6.

(H)將 ΣY, $\Sigma(XY)$, $\Sigma(X^2Y)$, $\Sigma(X^3Y)$, ΣX^2, ΣX^4, ΣX^6 各數代入公式,即得常數 a_2 及各斜度 b_2,c_2 及 d_2 之數值.

(I)將常數 a_2 及各斜度 b_2,c_2 及 d_2,代入長期趨勢公式,即可核算各年長期趨勢值.茲將測定三次拋物線之公式列下:

設 X 爲各時期與中央年相差之年數.

Y 爲各時期之長期趨勢值.

N 爲變量項數.

a_2 爲三次拋物線公式中之常數.

b_2 爲三次拋物線公式中之第一斜度.

c_2 爲三次拋物線公式中之第二斜度.

d_2 爲三次拋物線公式中之第三斜度.

Σ 爲總和之記號.

$$\boldsymbol{Y=a_2+b_2X+c_2X^2+d_2X^3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(公式一八九)}$$

$$\Sigma Y=Na_2+b_2\Sigma X+c_2\Sigma X^2+d_2\Sigma X^3$$

$$\Sigma(XY)=a_2\Sigma X+b_2\Sigma X^2+c_2\Sigma X^3+d_2\Sigma X^4$$

$$\Sigma(X^2Y)=a_2\Sigma X^2+b_2\Sigma X^3+c_2\Sigma X^4+d_2\Sigma X^5$$

$$\Sigma(X^3Y)=a_2\Sigma X^3+b_2\Sigma X^4+c_2\Sigma X^5+d_2\Sigma X^6$$

若用簡捷法求三次拋物線,則 ΣX, ΣX^3 及 ΣX^5 各等

於 0,故

$$\Sigma Y = Na_2 + c_2 \Sigma X^2$$

$$\Sigma(XY) = b_2 \Sigma X^2 + d_2 \Sigma X^4$$

$$\Sigma(X^2Y) = a_2 \Sigma X^2 + c_2 \Sigma X^4$$

$$\Sigma(X^3Y) = b_2 \Sigma X^4 + d_2 \Sigma X^6$$

依上列四式,求得 a_2, b_2, c_2 及 d_2 如下:

$$a_2 = \frac{\Sigma Y \cdot \Sigma X^4 - \Sigma(X^2Y) \cdot \Sigma X^2}{N \cdot \Sigma X^4 - \Sigma X^2 \cdot \Sigma X^2} \cdots\cdots(\text{公式一九〇})$$

$$b_2 = \frac{\Sigma(XY) \cdot \Sigma X^6 - \Sigma(X^3Y) \cdot \Sigma X^4}{\Sigma X^2 \cdot \Sigma X^6 - \Sigma X^4 \cdot \Sigma X^4} \cdots(\text{公式一九一})$$

$$c_2 = \frac{\Sigma Y \cdot \Sigma X^2 - \Sigma(X^2Y) \cdot N}{\Sigma X^2 \cdot \Sigma X^2 - \Sigma X^4 \cdot N} \cdots\cdots(\text{公式一九二})$$

$$d_2 = \frac{\Sigma(XY) \cdot \Sigma X^4 - \Sigma(X^3Y) \cdot \Sigma X^2}{\Sigma X^4 \cdot \Sigma X^4 - \Sigma X^6 \cdot \Sigma X^2} \cdots(\text{公式一九三})$$

茲即以天津南開大學經濟研究所編製之我國淨交易率指數(民國二年為基期)為例,核計其三次拋物線如下:

表一七八　歷年我國國際貿易淨交易率指數表

民國二年至二十四年(民國二年指數=100)

(計算三次拋物線表甲)

年次	淨交易率指數 Y	年份離中差 X	XY	X^2	X^2Y	X^3Y	X^4	X^6
民國二年	100.0	−11	−1,100.0	121	12,100.0	−133,100.0	14,641	1,771,561
三年	103.3	−10	−1,033.0	100	10,330.0	−103,300.0	10,000	1,000,000
四年	104.8	−9	−943.2	81	8,488.8	−76,399.2	6,561	531,441

五　年	104.6	−8	−836.8	64	6,694.4	−53,555.2	4,096	262,144
六　年	123.4	−7	−863.8	49	6,046.6	−42,326.2	2,401	117,649
七　年	128.4	−6	−770.4	36	4,622.4	−27,734.4	1,296	46,656
八　年	134.1	−5	−670.5	25	3,352.5	−16,762.5	625	15,625
九　年	155.6	−4	−622.4	16	2,489.6	− 9,958.4	256	4,096
十　年	142.3	−3	−426.9	9	1,280.7	− 3,842.1	81	729
十一年	117.7	−2	−235.4	4	470.8	−941.6	16	64
十二年	109.1	−1	−109.1	1	109.1	−109.1	1	1
十三年	105.4	0	0	0	0	0	0	0
十四年	103.5	1	103.5	1	103.5	103.5	1	1
十五年	98.7	2	197.4	4	394.8	789.6	16	64
十六年	108.6	3	325.8	9	977.4	2,932.2	81	729
十七年	100.4	4	401.6	16	1,606.4	6,425.6	256	4,096
十八年	93.1	5	465.5	25	2,327.5	11,637.5	625	15,625
十九年	102.5	6	615.0	36	3,690.0	22,140.0	1,296	46,656
二十年	116.0	7	812.0	49	5,684.0	39,788.0	2,401	117,649
廿一年	128.6	8	1,028.8	64	8,230.4	65,843.2	4,096	262,144
廿二年	127.5	9	1,147.5	81	10,327.5	92,947.5	6,561	531,441
廿三年	145.4	10	1,454.0	100	14,540.0	145,400.0	10,000	1,000,000
廿四年	131.0	11	1,441.0	121	15,851.0	174,361.0	14,641	1,771,561
總　計	2,684.0	0	+380.6	1,012	119,717.4	+94,339.4	79,948	7,499,932

應用公式一九〇

$$a_2=\frac{2{,}684\times 79{,}948-119{,}717.4\times 1{,}012}{23\times 79{,}948-1{,}012\times 1{,}012}$$

$$=\frac{214{,}580{,}432-121{,}154{,}008.8}{1{,}838{,}804-1{,}024{,}144}$$

$$=\frac{93,426,423.2}{814,660}=114.681$$

應用公式一九一

$$b_2=\frac{380.6\times 7,499,932-94,339.4\times 79,948}{1,012\times 7,499,932-79,948\times 79,948}$$

$$=\frac{2,854,474,119.2-7,542,246,351.2}{7,589,931,184-6,391,682,704}$$

$$=\frac{-4,687,772,232}{1,198,248,480}=-3.912$$

應用公式一九二

$$c_2=\frac{2,684\times 1,012-119,717.4\times 23}{1,012\times 1,012-79,948\times 23}$$

$$=\frac{2,716,208-2,753,500.2}{1,024,144-1,838,804}$$

$$=\frac{-37,292.2}{-814,660}=0.046$$

應用公式一九三

$$d_2=\frac{380.6\times 79,948-94,339.4\times 1,012}{79,948\times 79,948-7,499,932\times 1,012}$$

$$=\frac{30,428,208.8-95,471,472.8}{6,391,682,704-7,589,931,184}$$

$$=\frac{-65,043,264}{-1,198,248,480}=0.054$$

故長期趨勢公式爲

$$Y=114.681+(-3.912)X+0.046X^2+0.054X^3$$

根據上列公式,求得各年長期趨勢值如下:

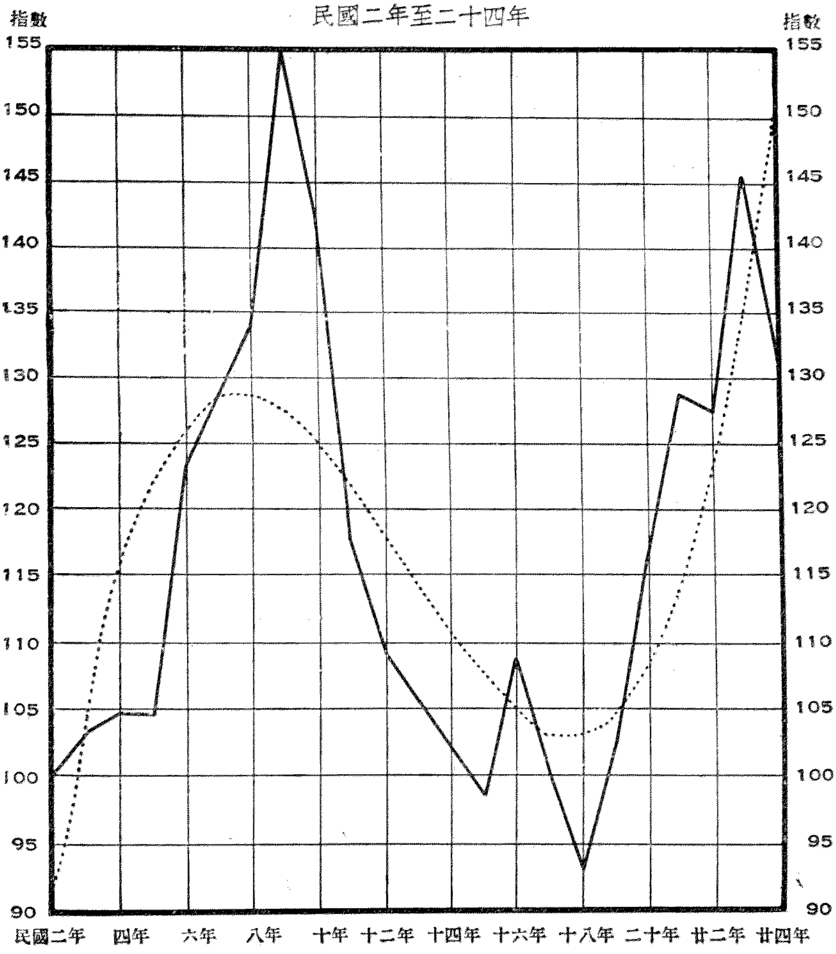
表一七九 歷年我國國際貿易淨交易率指數長期趨勢表

民國二年至二十四年(民國二年指數=100)

(計算三次拋物線表乙)

年次	長期趨勢
民國二年	$114.681+(-3.912)\times(-11)+0.046\times(-11)^2+0.054\times(-11)^3=91.405$
三年	$114.681+(-3.912)\times(-10)+0.046\times(-10)^2+0.054\times(-10)^3=104.401$
四年	$114.681+(-3.912)\times(-9)+0.046\times(-9)^2+0.054\times(-9)^3=114.249$
五年	$114.681+(-3.912)\times(-8)+0.046\times(-8)^2+0.054\times(-8)^3=121.273$
六年	$114.681+(-3.912)\times(-7)+0.046\times(-7)^2+0.054\times(-7)^3=125.797$
七年	$114.681+(-3.912)\times(-6)+0.046\times(-6)^2+0.054\times(-6)^3=128.145$
八年	$114.681+(-3.912)\times(-5)+0.046\times(-5)^2+0.054\times(-5)^3=128.641$
九年	$114.681+(-3.912)\times(-4)+0.046\times(-4)^2+0.054\times(-4)^3=127.609$
十年	$114.681+(-3.912)\times(-3)+0.046\times(-3)^2+0.054\times(-3)^3=125.373$
十一年	$114.681+(-3.912)\times(-2)+0.046\times(-2)^2+0.054\times(-2)^3=122.257$
十二年	$114.681+(-3.912)\times(-1)+0.046\times(-1)^2+0.054\times(-1)^3=118.585$
十三年	$114.681+(-3.912)\times 0+0.046\times 0+0.054\times 0=114.681$
十四年	$114.681+(-3.912)\times 1+0.046\times 1^2+0.054\times 1^3=110.869$
十五年	$114.681+(-3.912)\times 2+0.046\times 2^2+0.054\times 2^3=107.473$
十六年	$114.681+(-3.912)\times 3+0.046\times 3^2+0.054\times 3^3=104.817$
十七年	$114.681+(-3.912)\times 4+0.046\times 4^2+0.054\times 4^3=103.225$
十八年	$114.681+(-3.912)\times 5+0.046\times 5^2+0.054\times 5^3=103.021$
十九年	$114.681+(-3.912)\times 6+0.046\times 6^2+0.054\times 6^3=104.529$
二十年	$114.681+(-3.912)\times 7+0.046\times 7^2+0.054\times 7^3=108.073$
廿一年	$114.681+(-3.912)\times 8+0.046\times 8^2+0.054\times 8^3=113.977$
廿二年	$114.681+(-3.912)\times 9+0.046\times 9^2+0.054\times 9^3=122.565$
廿三年	$114.681+(-3.912)\times 10+0.046\times 10^2+0.054\times 10^3=134.161$
廿四年	$114.681+(-3.912)\times 11+0.046\times 11^2+0.054\times 11^3=149.089$

圖六十九　歷年我國國際貿易淨交易率指數長期趨勢圖



(三次拋物線圖)

時間數列中各變量之變動,有同數量之遞增遞減者,在算術格度紙中測繪之,為一直線.若各變量之變動,

有同等比率之遞增遞減者,在算術格度紙中繪示之,成一「J」字形曲線;如在對數格度紙中繪示之,則成直線。例如東方公司自民國五年至二十五年間,逐年交易額同有百分之10左右之增加率,故在算術格度紙上測繪之,成一上彎曲線,然在對數格度紙中繪示之,幾成一直線.茲將測定該直線趨勢之步驟,略述之如下:

(A)以時期之中點爲標準,求各年離中央年之離中差.

(B)求時間數列各項變量之對數,得 $Log\, Y$,總加之,得 $\Sigma log\, Y$。

(C)將各年 $log\, Y$ 乘各相當之 X,得 $X\, log\, Y$,總加之,得 $\Sigma(X\, log\, Y)$。

(D)求 X 之平方,再將各 X 之平方總加之,得 ΣX^2。

(E)將 $\Sigma\, log\, Y$, $\Sigma(X\, log\, Y)$ 及 ΣX^2 代入公式,求常數 a 及斜度 b 之對數.

(F)將 $log\, a$ 及 $log\, b$ 代入公式,即得各年長期趨勢值之對數.

(G)由長期趨勢值之對數中求眞數,即得各年長期趨勢值.茲將求長期趨勢之公式列下:

設 X 爲各時期與中央年相差之年數.

Y 爲各時期之長期趨勢值.

N 爲變量項數.

a 爲常數.

b 爲斜度.

Σ 爲總和之記號.

$$Y = antilog[log\, a + log\, b\, X] \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(公式一九四)}$$

$$log\, Y = log\, a + log\, b\, X$$

$$\Sigma\, log\, Y = N log\, a + log\, b\, \Sigma X$$

$$\Sigma(X\, log\, Y) = log\, a\, \Sigma X + log\, b\, \Sigma X^2$$

若用簡捷法求長期趨勢值,則 $\Sigma X = 0$, 故

$$\Sigma\, log\, Y = N log\, a$$

$$\Sigma(X\, log\, Y) = log\, b\, \Sigma X^2$$

根據上列兩公式,即可求常數 a 及斜度 b 之對數如下:

$$log\, a = \frac{\Sigma\, log\, Y}{N} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(公式一九五)}$$

$$log\, b = \frac{\Sigma(X\, log\, Y)}{\Sigma X^2} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(公式一九六)}$$

表一八〇　歷年東方公司營業額長期趨勢表

民國五年至二十五年

(計算幾何級數式長期趨勢表)

年次	營業額 單位千元 Y	年份離中差 X	$log\,Y$	$X\,log\,Y$	X^2	長期趨勢 對數	長期趨勢 眞數
民國五年	20	−10	1.30103	−13.01030	100	1.30242	20.06
六年	22	− 9	1.34242	−12.08178	81	1.34493	22.13
七年	25	− 8	1.39794	−11.18352	64	1.38744	24.40
八年	27	− 7	1.43136	−10.01952	49	1.42995	26.91
九年	29	− 6	1.46240	− 8.77440	36	1.47246	29.68

十　年	33	－5	1.51851	－7.59255	25	1.51497	32.73
十一年	36	－4	1.55630	－6.22520	16	1.55748	36.10
十二年	40	－3	1.60206	－4.80618	9	1.59999	39.81
十三年	44	－2	1.64345	－3.28690	4	1.64250	43.90
十四年	48	－1	1.68124	－1.68124	1	1.68501	48.42
十五年	53	0	1.72428	0.00000	0	1.72752	53.40
十六年	59	1	1.77085	1.77085	1	1.77003	58.89
十七年	65	2	1.81291	3.62582	4	1.81254	64.94
十八年	72	3	1.85733	5.57199	9	1.85505	71.62
十九年	79	4	1.89763	7.59052	16	1.89756	78.99
二十年	87	5	1.93952	9.69760	25	1.94007	87.11
廿一年	96	6	1.98227	11.89362	36	1.98258	96.07
廿二年	106	7	2.02531	14.17717	49	2.02509	105.94
廿三年	117	8	2.06819	16.54552	64	2.06760	116.85
廿四年	129	9	2.11059	18.99531	81	2.11011	128.86
廿五年	142	10	2.15229	21.52290	100	2.15262	142.11
總　計		0	36.27788	＋32.72971	770		

應用公式一九五

$$\log a = \frac{36.27788}{21} = 1.72752$$

應用公式一九六

$$\log b = \frac{32.72971}{770} = 0.04251$$

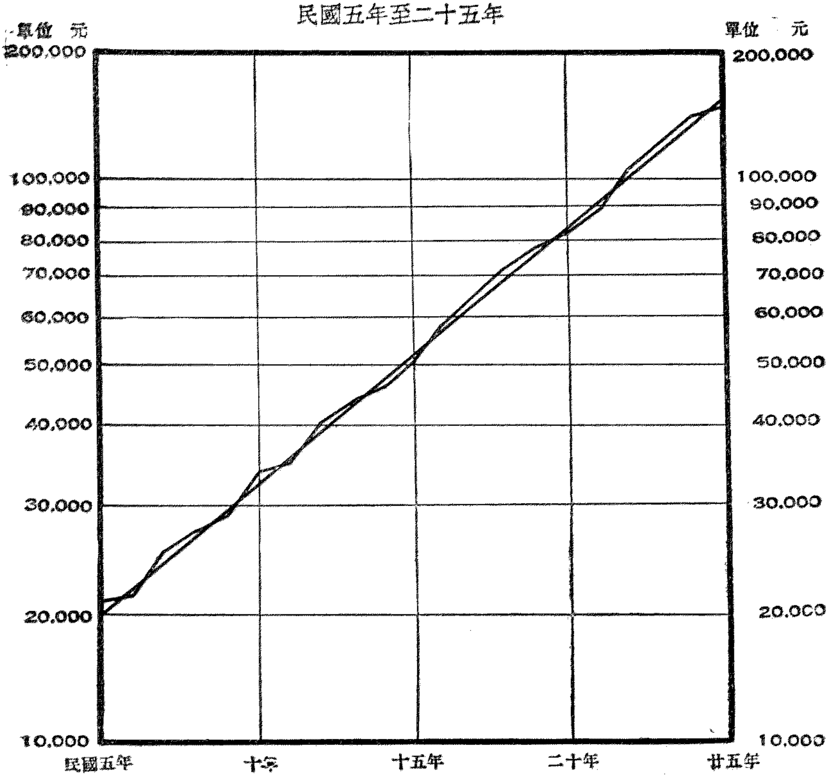
故長期趨勢公式爲

$$\log Y = 1.72752 + 0.04251X$$

$$Y = antilog(1.72752 + 0.04251X)$$

圖七十 歷年東方公司營業額長期趨勢圖

民國五年至二十五年



（上向幾何級數式長期趨勢圖）

本章應用公式

（公式一七四）直線趨勢公式

$$Y = a + bX$$

（公式一七五）用普通法求常數 a

$$a = \frac{\Sigma Y \cdot \Sigma X^2 - \Sigma(XY) \cdot \Sigma X}{N \cdot \Sigma X^2 - \Sigma X \cdot \Sigma X}$$

（公式一七六）用普通法求斜度 b

$$b=\frac{\Sigma Y-Na}{\Sigma X}$$

（公式一七七）用普通法求斜度 b

$$b=\frac{\Sigma(XY)-a\Sigma X}{\Sigma X^2}$$

（公式一七八）用普通法求斜度 b

$$b=\frac{\Sigma Y\cdot\Sigma X-\Sigma(XY)\cdot N}{\Sigma X\cdot\Sigma X-\Sigma X^2\cdot N}$$

（公式一七九）用普通法求常數 a

$$a=\frac{\Sigma Y-b\Sigma X}{N}$$

（公式一八〇）用普通法求常數 a

$$a=\frac{\Sigma(XY)-b\Sigma X^2}{\Sigma X}$$

（公式一八一）用簡捷法求常數 a

$$a=\frac{\Sigma Y}{N}$$

（公式一八二）用簡捷法求斜度 b

$$b=\frac{\Sigma(XY)}{\Sigma X^2}$$

（公式一八三）用簡捷法求 ΣX^2（年數爲奇數時）

$$\Sigma X^2=\frac{n(n-1)(n+1)}{12}$$

（公式一八四）用簡捷法求 ΣX^2（年數爲偶數時）

$$\Sigma X^2=\frac{n(n-1)(n+1)}{3}$$

（公式一八五）二次拋物線趨勢公式

$$Y=a_1+b_1X+c_1X^2$$

（公式一八六）用簡捷法求二次拋物線公式中之常數a_1

$$a_1=\frac{\Sigma Y\cdot\Sigma X^4-\Sigma(X^2Y)\cdot\Sigma X^2}{N\cdot\Sigma X^4-\Sigma X^2\cdot\Sigma X^2}$$

（公式一八七）用簡捷法求二次拋物線公式中之斜度b_1

$$b_1=\frac{\Sigma(XY)}{\Sigma X^2}$$

（公式一八八）用簡捷法求二次拋物線公式中之斜度c_1

$$c_1=\frac{\Sigma(X^2Y)\cdot N-\Sigma Y\cdot\Sigma X^2}{\Sigma X^4\cdot N-\Sigma X^2\cdot\Sigma X^2}$$

（公式一八九）三次拋物線趨勢公式

$$Y=a_2+b_2X+c_2X^2+d_2X^3$$

（公式一九〇）用簡捷法求三次拋物線公式中之常數a_2

$$a_2=\frac{\Sigma Y\cdot\Sigma X^4-\Sigma(X^2Y)\cdot\Sigma X^2}{N\cdot\Sigma X^4-\Sigma X^2\cdot\Sigma X^2}$$

（公式一九一）用簡捷法求三次拋物線公式中之斜度b_2

$$b_2=\frac{\Sigma(XY)\cdot\Sigma X^6-\Sigma(X^3Y)\cdot\Sigma X^4}{\Sigma X^2\cdot\Sigma X^6-\Sigma X^4\cdot\Sigma X^4}$$

（公式一九二）用簡捷法求三次拋物線公式中之斜度c_2

$$c_2=\frac{\Sigma Y\cdot\Sigma X^2-\Sigma(X^2Y)\cdot N}{\Sigma X^2\cdot\Sigma X^2-\Sigma X^4\cdot N}$$

（公式一九三）用簡捷法求三次拋物線公式中之斜度d_2

$$d_2=\frac{\Sigma(XY)\cdot\Sigma X^4-\Sigma(X^3Y)\cdot\Sigma X^2}{\Sigma X^4\cdot\Sigma X^4-\Sigma X^6\cdot\Sigma X^2}$$

（公式一九四）幾何級數式長期趨勢公式

$$Y = antilog[log\ a + log\ b\ X]$$

（公式一九五）用簡捷法求幾何級數式長期趨勢公式中常數 a 之對數

$$log\ a = \frac{\Sigma log Y}{N}$$

（公式一九六）用簡捷法求幾何級數式長期趨勢公式中斜度 b 之對數

$$log\ b = \frac{\Sigma(X log Y)}{\Sigma X^2}$$

問 題

1. 試述經濟現象變動之種類及變動之原因。

2. 何謂長期趨勢?試略述其測定之重要性。

3. 長期趨勢之種類有幾?試舉例述之。

4. 測定長期趨勢時應注意之點有幾?

5. 何謂隨手測繪法?其測定長期趨勢之可靠性如何?

6. 何謂移動均數?用移動均數法測定長期趨勢之缺點有幾?又移動均數究應從若干時期中核算?

7. 何謂最小平方法?用普通平方法求長期趨勢之步驟如何?

8. 核算長期趨勢之年數爲奇數或偶數時,用簡捷平方法測定長期趨勢之步驟各如何?

9. 測定各月長期趨勢之方法如何?試詳述之。

10. 何謂二次拋物線?其測定之方法如何?

11. 何謂三次拋物線?測定三次拋物線之步驟有幾?

12. 試述幾何級數式長期趨勢之特點及其測定之方法。

習題三十八

歷年上海華商銀行現銀存底比較表

民國十年至二十四年

年次	存銀額 單位千元	年次	存銀額 單位千元
民國十年	21,313	民國十八年	144,196
十一年	28,781	十九年	166,293
十二年	29,991	二十年	179,305
十三年	43,019	廿一年	253,289
十四年	62,233	廿二年	271,786
十五年	73,494	廿三年	280,325
十六年	79,342	廿四年	239,443
十七年	102,760		

試用上列統計資料,計算以下諸數,並繪製各長期趨勢線:

(1) 用隨手測繪法繪製長期趨勢線。

(2) 用五年移動均數,測定各年長期趨勢值,並繪製長期趨勢線。

(3) 用普通平方法測定長期趨勢公式及各年長期趨勢值.

(4) 用簡捷平方法測定長期趨勢公式及各年長期趨勢值,並繪製長期趨勢線。

習題三十九

歷年我國由英輸入淨值表

民國十年至二十五年

年次	輸入淨值 單位 千元	年次	輸入淨值 單位 千元
民國十年	232,355	民國十八年	184,868
十一年	223,972	十九年	166,890
十二年	185,880	二十年	185,938
十三年	195,203	廿一年	177,894
十四年	144,050	廿二年	153,557
十五年	180,078	廿三年	124,513
十六年	115,644	廿四年	98,232
十七年	176,249	廿五年	110,497

試用上列統計資料,計算以下諸數,並繪製長期趨勢線:

(1) 用普通平方法測定長期趨勢公式,及各年長期趨勢值.

(2) 用簡捷平方法測定長期趨勢公式,及各年長期趨勢值.

(3) 繪製長期趨勢線.

(4) 用各長期趨勢公式,測定民國十七年各月之長期趨勢值.

習題四十

歷年我國輸入淨值表

民國十年至二十五年

年次	輸入淨值 單位 千元	年次	輸入淨值 單位 千元
民國十年	1,411,739	民國十八年	1,972,083
十一年	1,472,387	十九年	2,040,599
十二年	1,438,662	二十年	2,233,376
十三年	1,586,372	廿一年	1,634,726
十四年	1,476,774	廿二年	1,345,567
十五年	1,751,537	廿三年	1,029,665
十六年	1,578,147	廿四年	919,211
十七年	1,863,320	廿五年	941,545

試用上列統計資料,計算以下諸數,並繪製長期趨勢線:

(1) 用簡捷平方法測定二次拋物線公式.

(2) 用二次拋物線公式測定各年長期趨勢值.

(3) 繪製我國輸入淨值曲線及二次拋物線.

習題四十一

歷年我國輸出總值表

民國五年至二十五年

年次	輸出總值 單位千元	年次	輸出總值 單位千元
民國五年	750,640	民國十六年	1,431,209
六年	721,248	十七年	1,544,531
七年	757,006	十八年	1,582,441
八年	982,800	十九年	1,394,166
九年	843,861	二十年	1,416,963
十年	936,756	廿一年	768,077
十一年	1,020,322	廿二年	612,293
十二年	1,173,045	廿三年	535,733
十三年	1,202,440	廿四年	576,298
十四年	1,209,558	廿五年	706,791
十五年	1,346,571		

試用上列統計資料,計算以下諸數,並繪製長期趨勢線:

(1) 用簡捷平方法測定三次拋物線公式.

(2) 用三次拋物線公式測定各年長期趨勢值.

(3) 繪製我國輸出總值曲線及三次拋物線.

習題四十二

歷年某城人口比較表

一八四五年至一九三五年

年次	人口數 單位 千人	年次	人口數 單位 千人
1845	15	1895	92
1850	18	1900	110
1855	22	1905	133
1860	26	1910	159
1865	31	1915	191
1870	37	1920	229
1875	45	1925	275
1880	53	1930	335
1885	64	1935	410
1890	77		

試用上列統計資料,計算以下諸數,並繪製幾何級數式長期趨勢線:

(1) 用簡捷平方法測定幾何級數式長期趨勢公式。

(2) 用幾何級數式長期趨勢公式測定各年長期趨勢值。

(3) 繪製歷年某城人口曲線及幾何級數式長期趨勢線。

第十四章 季節變動

第一節 季節變動之原因及其效用

年有四季,季分三月,不僅季與季之氣候不同,即月與月之氣候亦各互異.農產品之種植,隨氣候之寒暖而異,農產品之收穫,亦隨季節而不同.更農產品收穫之時,供給者多,價格自跌,此農產品種植,收穫,供給及價格等,受季節之影響而高下不等也.工業製品之原料,多半爲農產品,農產品之供給,既受季節之影響而互異,則製品之多寡,亦將受其影響而各季不同,此工業製品受季節之影響而有變動也.人民消費習慣不同,冬裘夏葛,物品之需要互異,物價之漲跌不同,此消費品價格,受氣候之寒暖而變動也.他若鷄蛋等食品,暖則易腐,冷則易藏;價格漲落,亦因此而異.春宜旅行,夏適避暑,致公園及名勝地之顧客,隨季不同.凡此俱因氣候之寒暖,雨量之多寡,及其他自然現象之變動,而使時間數列發生變動,即米乞爾教授(Prof. M. C. Mitchell)所謂自然因子是也.自然因子之外,更有人爲之因子,有時亦可造成季節變動.例如我國農歷年底與歐美復活及聖誕等節,居民相繼購買貨物,或以饋贈,或備自用,致商店營業極盛,此雖不受自然之影響,然以人民習慣如此而造成季節變動也.自然與人爲因子之外,各月日數之不同,亦爲季節變動原因之一,每月日數多者三十一日,少

者二十八日,日數旣有多少,每月星期數亦隨之互異,娛樂場所如影戲院等營業額,因卽隨之不同,此各月日數及星期數之多寡,造成季節變動也.

季節變動之原因已如上述,至於測定季節變動之重要性亦請論之.製品銷路之滯暢,影響工業之盛衰,工業之盛衰,常足形成失業工人之多寡.某物暢銷於冬,則冬季加工製造,夏季解雇停工.某物暢銷於夏,則夏令雇工趕造,冬季減工緊縮.凡此工人失業之多寡,俱受季節之影響所致,不得謂爲經濟盛衰之結果.此季節變動在分析事實時,爲統計界重視者一也.欲知季節變動以外之動態,如循環變動等,則須將事業之季節變動,加以刪除,若不先求季節變動指數,則何能推測其他變動之實況,此季節變動在分析事實時,爲統計界重視者二也.評定經濟定理之價値,有時亦須測定季節變動,蓋經濟定理有時雖與事實相反,但未將季節變動剔除之前,不能斷爲定理之謬誤.此季節變動在測定事理時,爲經濟界重視者三也.

第二節 初步之考慮

在測定季節變動之前,我人須先考慮者,計有四點:

(一) 有無季節變動

季節變動雖爲時間數列變動原因之一,然此非謂每一時間數列均有季節變動存在;故我人於分析季節

變動之前,須先斷定該時間數列中有無季節變動之存在,測定之法有二:

(1)圖示法——此法先將各年各月變量繪成曲線於各透明紙上,然後將各曲線疊而觀之,某月曲線特高,某月曲線特低,各年是否一律,可一覽無餘.如各年各月曲線作同趨勢之升降變動者,即可判定季節變動之存在.反之,各年各月曲線之升降,參差不一者,即示無季節變動之存在.

(2)環比法——此法爲美國哈佛大學潘蓀教授(Prof. W. M. Persons)所創用.其法先將各月變量各以前一月之變量爲比較之標準,核算環比指數,次將各年同月環比組成各分組表,視各月分組表中次數分配之集中與否,即可知季節變動之有無.茲設例示之如下:

表一八一 歷年上海粳米零售價逐月比較表

民國十五年至二十五年(每市石價格)

(計算季節指數表甲)

月次	十五年	十六年	十七年	十八年	十九年	二十年	廿一年	廿二年	廿三年	廿四年	廿五年
一月	$11.317	$12.849	$9.120	$10.287	$14.567	$10.417	$10·795	$7.987	$7.054	$11.594	$9.261
二月	12.289	13.018	9·355	10.414	14.635	9.922	11.488	8.418	7.069	11.487	9.456
三月	12.460	12.669	9.614	10.582	14.970	9.888	11.418	7.776	7.014	10.794	10.096
四月	13.177	12.489	9.468	9.801	15.798	9.376	11.210	7.251	6.943	11.194	10.087
五月	13.409	13.413	9.366	10.761	15.871	10.511	11.417	7.524	7.548	11.538	10.004

六　月	13.533	14.128	9.129	10.989	17.053	10.708	11.887	7.300	8.092	11.505	10.101
七　月	13.896	14.292	8.770	11.208	17.625	10.826	11.021	7.504	10.589	10.673	10.282
八　月	14.677	14.004	8.684	12.860	16.489	14.032	10.817	7.524	11.780	10.497	10.331
九　月	14.894	12.166	9.136	12.872	15.531	14.045	9.783	7.423	11.673	10.082	9.983
十　月	14.138	9.827	9.744	14.249	12.786	12.708	8.867	7.732	10.767	10.887	10.000
十一月	13.208	9.118	10.031	13.034	11.401	11.902	7.612	7.323	11.880	10.666	9.671
十二月	13.111	9.024	10.052	13.084	10.526	11.380	7.244	7.044	11.588	9.542	10.042
平　均	13.342	12.250	9.372	11.678	14.770	11.310	10.300	7.567	9.333	10.872	9.943

表一八二　歷年上海粳米零售價逐月環比表

民國十五年至二十五年

（計算季節指數表乙）

月　次	十五年	十六年	十七年	十八年	十九年	二十年	廿一年	廿二年	廿三年	廿四年	廿五年
一　月		98.0	101.1	102.3	111.3	99.0	94.9	110.3	100.1	100.1	97.1
二　月	108.6	101.3	102.6	101.2	100.5	95.2	106.4	105.4	100.2	99.1	102.1
三　月	101.4	97.3	102.8	101.6	102.3	99.7	99.4	92.4	99.2	94.0	106.8
四　月	105.8	98.6	98.5	92.6	105.5	94.8	98.2	93.2	99.0	103.7	99.9
五　月	101.8	107.4	98.9	109.8	100.5	112.1	101.8	103.8	108.7	103.1	99.2
六　月	100.9	105.3	97.5	102.1	107.4	101.9	104.1	97.0	107.2	99.7	101.0
七　月	102.7	101.2	96.1	102.0	103.4	101.1	92.7	102.8	130.9	92.8	101.8
八　月	105.6	98.0	99.0	114.7	93.6	129.6	98.1	100.3	111.2	98.4	100.5
九　月	101.5	86.9	105.2	100.1	94.2	100.1	90.4	98.7	99.1	96.0	96.6
十　月	94.9	80.8	106.7	110.7	82.3	90.5	90.6	104.2	92.2	108.0	100.2
十一月	93.4	92.8	102.9	91.5	89.2	93.7	85.8	94.7	110.3	98.0	96.7
十二月	99.3	99.0	100.2	100.4	92.3	95.6	95.2	96.2	97.5	89.5	103.8

上表第一排,即示歷年一月粳米價對上年十二月

份價格之比率,第二排為歷年二月粳米價對一月份價格之比率,若將各排環比製成各分組次數表,知各月環比各有其集中之點,且集中點之高低不一,故可斷定其有季節變動.

表一八三　上海粳米零售價逐月環比分組表

（計算季節指數表丙）

環比	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
80—81.9										1		
82—83.9										1		
84—85.9											1	
86—87.9									1			
88—89.9											1	1
90—91.9									1	2	1	
92—93.9			1	2			2	1		1	3	1
94—95.9	1	1	1	1					1	1	1	2
96—97.9	1		1			2	1		2		1	2
98—99.9	2	1	3	5	2	1		4	2		1	2
100—101.9	3	4	2		3	3	3	2	3	1		2
102—103.9	1	2	2	1	2	1	4				1	1
104—105.9		1		2		2		1	1	1		
106—107.9		1	1		1	2				1		
108—109.9		1			2					1		
110—111.9	2							1		1	1	
112—113.9					1							
114—115.9								1				
116以上							1	1				

(二) 研究單位時期

時間數列之單位時期,或爲一星期,或爲一月,或爲一季,各各不同.例如某廠每週之生產量,某公司每月之交易額,某物每季之平均價等是.季節變動之測定,究應選用每週之生產量,交易額或平均價,抑應採用每月或每季之生產量,交易額或平均價,此乃先決問題之一.事實受季節之影響,每週變異者,則每週變動指數有測定之必要.如事實之變動較緩,每月或每季始受季節之影響而起變異者,則每月或每季變動指數有測定之必要.是故何捨何從視問題之性質如何而定.

(三) 淘汰長期趨勢

若欲測定純粹之季節變動性,則長期趨勢有淘汰之必要.其法先求歷年各週,各月或各季之長期趨勢值,次將各週,各月或各季變量以長期趨勢值除之,得各時期變量相當於長期趨勢值之百分比.以此百分比求季節變動指數,自較準確.

(四) 淘汰其他影響

造成季節變動之原因,除自然或人爲兩因子外,有時受各月日數之多寡而形成季節變動者,則應將各月變量以各月日數除之,化成每日變量後求之,方可免受每月日數多寡之影響.惟若各月之平均變量如平均價等,與各月日數之多寡無關係者,則無考慮此點之必要.

第三節　平均法

據美教授戴維斯(Prof. G. R. Davies)之立論,凡年復一年無劇烈之變動,幾成直線之趨向者,可用平均法測定季節變動.其法先求各月之平均數,然後以各月之長期趨勢值除之,即得季節指數.茲以民國十五年至二十五年上海粳米逐月零售價為例,在此十一年間,除民國十九年因受水災之影響,米價特高外,其他各年均見減跌.若以民國二十年為中央年,求得長期趨勢公式如下:

$$Y=10.976+(-0.321)X$$

上列公式中斜度 b 為 -0.321,即示粳米市價之長期趨勢,年有\$0.321之跌落,平均每月計跌 $-0.321\div12=-\$0.027$.各月價格俱受此長期趨勢之影響而偏高偏低.故欲研究眞實之季節變動,應將此種影響剔除,其法即以各月長期趨勢值除各月平均價即得:

表一八四　上海粳米零售價季節指數表

(用戴氏平均法求季節指數表)

月　　次	各月平均價	各月長期趨勢值	季節指數
一　月	\$10.477	\$11.124	94.2
二　月	10.686	11.097	96.3
三　月	10.662	11.070	96.3
四　月	10.618	11.043	96.1

五月	11.033	11.016	100.1
六月	11.311	10.989	102.9
七月	11.517	10.962	105.0
八月	11.972	10.935	109.5
九月	11.599	10.908	106.3
十月	11.064	10.881	101.7
十一月	10.531	10.854	97.0
十二月	10.240	10.827	94.6
平均	10.976	10.976	100.0

戴氏主張先求各月之算術平均價,而後以各月相當之長期趨勢值除之,即得季節指數.惟米爾斯(F. C. Mills)之主張,則於求得各月平均價後,以任何一月爲標準月份,而得其他各月之平均價,依次校正之,然後再以十二個月之平均價除各月之校正價,即得季節指數.即如前例,由長期趨勢上觀察之,每月粳米價計跌 $0.027, 故若以一月份之粳米價爲標準,則二月份米價應加 $0.027, 三月份應加 $0.054, 四月份應加 $0.081, 餘類推.設以六月份之粳米價爲標準,則五月份之米價應減 $0.027, 四月份應減 $0.054, 三月份應減 $0.081, 二月及一月類推;七月份之米價應加 $0.027, 八月份應加 $0.054, 九月份應加 $0.081, 十月,十一月及十二月類推.如以十二月份之粳米價爲標準,則十一月份之米價應減 $0.027, 十月份應減 $0.054, 九月份應減 $0.081, 餘類推.惟於實際計算時,則多以六七月爲標準,蓋可取其居中而便於核計也.

用米氏方法核計之季節指數,與用戴氏方法核算者,完全相同.惟戴氏方法須先求得各月之長期趨勢值,且須將各月趨勢值分別除各月平均價,其計算法,遠不若米氏之簡捷.此戴氏法所以不若米氏法之美滿也.茲仍以上海之粳米零售價爲例,用米氏法,計算其季節指數如下:

表一八五　上海粳米零售價季節指數表

(用米氏平均法求季節指數表)

月次	各月平均價	校正平均價以六月爲標準	季節指數
一月	$10.477	$10.342	94.1
二月	10.686	10.578	96.3
三月	10.662	10.581	96.3
四月	10.618	10.564	96.1
五月	11.033	11.006	100.2
六月	11.311	11.311	102.9
七月	11.517	11.544	105.0
八月	11.972	12.026	109.5
九月	11.599	11.680	106.3
十月	11.064	11.172	101.7
十一月	10.531	10.666	97.0
十二月	10.240	10.402	94.6
平均	10.976	10.989	100.0

上述兩法,指由有長期趨勢之時間數列中求季節變動指數.如時間極短,僅有三四年之歷史者,則無長期趨勢可言,

求季節指數時,可不必求長期趨勢值或校正平均數等,即以十二個月之總平均價除各月之平均價,即得季節指數.

第四節 環比法

用平均法求季節指數雖甚簡捷,然實際應用,不若環比法之普遍.茲將用環比法測定季節指數之步驟,分別述之如下:

(一) 核算各月環比

各月變量各以上一個月之變量除之,卽得各月環比.例如表一八二所示,卽各月粳米零售價各以上一個月之零售價折除而得之各月環比.

(二) 求環比中位數

將各月變量化成環比後,第二步工作,卽求各月之平均環比.例如表一八二所示各月環比,除一月份僅有十個環比外,其餘各月均有十一個環比.於此十個或十一個環比中,應先核計其平均數,而後方可推求季節指數.惟平均數之種類有五,何捨何從亦應加以考慮.據一般統計學家之意見,以中位數爲最善,蓋各月價格容有例外之變化,各月環比或有劇烈之升降,中位數可免受此種影響而富有代表性也.茲卽就表一八二各月環比中,求得各月中位環比如下:

一月	100.1	五月	103.1	九月	98.7

二　月 101.3	六　月 101.9	十　月 94.9
三　月 99.7	七　月 101.8	十一月 93.7
四　月 98.6	八　月 100.3	十二月 97.5

(三) 求鎖比

環比所示為各月變量各與上一月之關係,故各月環比中位數,不能視為季節指數.鎖比者乃以某月(通常為一月或十二月)為標準,將各環比連乘而對該月之比率也.茲仍以上海粳米零售價之環比為例,一月環比之中位數為100.1,即指各年以十二月份之米價為基數,求得一月份粳米比價之中位數為100.1.二月份環比之中位數為101.3,即指各年以一月份之米價為基數,求得二月份粳米比價之中位數為101.3.依此類推,得各月環比之中位數如表一八六第二行所示.若以一月份為比較之標準,其指數由100.1改為100.0,則二月份之鎖比,將為100.1×101.3=101.4;三月份之鎖比,將為100.1×101.3×99.7=101.1;依此類推,得各月份之鎖比如表一八六第三行.

(四) 求校正鎖比

各月環比之中位數如以一月為標準,則將一月環比乘二月環比,得以一月為基期之鎖比101.4,如此而下,十一月份之鎖比乘十二月份之環比,得十二月以一月為基期之鎖比91.4,如將十二月份鎖比91.4,乘一月份

之環比100.1,依理應等於一月份之鎖比100.0.惟因受長期趨勢及小數四捨五入連乘時錯誤愈積愈大等影響,致兩者相差 $100.0-91.4\times100.1=8.5$. 在求季節指數之前,應先將此種影響校正,其法有二:

(1) 算術平均法——此法乃假定錯誤之增加與算術定律相同,換言之,即單利公式是也.即如前例,錯誤總數為 8.5, 則每環比之錯誤為:

$$\frac{8.5}{12}=0.708$$

欲校正錯誤,可就二月之鎖比中加0.708,三月之鎖比中加1.416,四月之鎖比中加2.124,餘類推.所得結果即示刪除長期趨勢等影響後之校正鎖比,如表一八六第五行.

(2) 幾何平均法——此法乃假定錯誤之增加與幾何定律相同,換言之,即複利公式是也.即如前例十二月鎖比與一月環比之積,即第二次所得一月份之鎖比為91.5, 換言之,上海粳米零售價於民國十五年至二十五年之間,有下向之趨勢,使第一次假定一月份之鎖比,較第二次所得之鎖比低 8.5. 惟此8.5之缺短,非簡單累積而成,乃逐月連乘所致.故欲校正此錯誤,應先求各月環比中位數之錯誤率.設每環比中位數之錯誤率為 r, 一月份之鎖比為 P, 第二次所得一月份之鎖比為 S, 則:

$$S=P(1+r)^{12}$$

$$\log S=\log P+12\log(1+r)$$

$$\log S-\log P=12\log(1+r)$$

$$\log(1+r)=\frac{\log S-\log P}{12}$$

$$r=\left[antilog\ \frac{\log S-\log P}{12}\right]-1$$

代入本例之數字,則得

$$r=\left[antilog\ \frac{\log 91.5-\log 100}{12}\right]-1$$

$$=\left[antilog\ \frac{1.961421-2}{12}\right]-1$$

$$=[antilog\ 9.996785-10]-1$$

$$=0.9926-1$$

$$=-0.0074$$

上例求得 r 爲 -0.0074, $(1+r)$ 爲 0.9926,校正時卽將 $(1+r)$ 除二月之鎖比,以 $(1+r)^2$ 除三月之鎖比,以 $(1+r)^3$ 除四月之鎖比,依此類推,卽得各月删除長期趨勢及計算上錯誤後之校正鎖比,如表一八七第四行.

(五) 求季節指數

上述校正鎖比,乃以一月爲比較之標準,固不足呈示一事因月令而發生變化之情況.蓋事實之升降變遷,僅視一個月之環比中位數爲依歸,殊欠公正.是欲求較準確之季節指數,應先核算全年十二個月之算術平均校正鎖比,以此平均鎖比爲比較之標準等於 100, 求得各月季節指數如表一八六及表一八七之末行如下:

表一八六 上海粳米零售價季節指數表

（用環比法求季節指數表——用算術平均法校正）

月次	環比中位數	鏈比	校正數	校正鏈比	季節指數
一月	100.1	100.0	0.000	100.0	95.2
二月	101.3	101.4	0.708	102.1	97.2
三月	99.7	101.1	1.416	102.5	97.6
四月	98.6	99.7	2.124	101.8	96.9
五月	103.1	102.8	2.832	105.6	100.5
六月	101.9	104.7	3.540	108.2	103.0
七月	101.8	106.6	4.248	110.8	105.4
八月	100.3	106.9	4.956	111.9	106.5
九月	98.7	105.5	5.664	111.2	105.8
十月	94.9	100.1	6.372	106.5	101.4
十一月	93.7	93.8	7.080	100.9	96.0
十二月	97.5	91.4	7.788	99.3	94.5
平均				105.1	100.0

表一八七 上海粳米零售價季節指數表

（用環比法求季節指數表——用幾何平均法校正）

月次	環比中位數	鏈比	校正鏈比	季節指數
一月	100.1	100.0	100.0	94.9
二月	101.3	101.4	102.1	96.9
三月	99.7	101.1	102.6	97.4
四月	98.6	99.7	101.9	96.8
五月	103.1	102.8	105.8	100.4
六月	101.9	104.7	108.6	103.1
七月	101.8	106.6	111.4	105.8
八月	100.3	106.9	112.5	106.8
九月	98.7	105.5	111.9	106.2
十月	94.9	100.1	107.0	101.6
十一月	93.7	93.8	101.0	95.9
十二月	97.5	91.4	99.2	94.2
平均			105.3	100.0

用幾何平均法求校正鎖比,較爲合理,前已言之.惟用此法求季節指數,似覺繁瑣,簡捷之法,即可應用累積對數核計之.其步驟如下:

(一)核算各月環比.

(二)求各月環比之中位數.

(三)求各環比中位數之對數.

(四)求校正數之對數.

(五)求校正環比中位數之對數.

(六)求校正環比中位數之累積對數.

(七)求校正環比中位數累積對數之眞數.

(八)求累積對數眞數之算術平均數.

(九)以眞數之算術平均數爲基數,等於 100, 求季節指數.

表一八八　上海粳米零售價季節指數表

(用環比法求季節指數表——用累積對數法校正)

月次	環比中位數	對數	校正數之對數	校正對數	累積對數	校正鎖比	季節指數
一月	100.1	2.000434	−0.003210*	2.003644	2.000000	100.0	94.9
二月	101.3	2.005609	−0.003215	2.008824	2.008824	102.1	96.9
三月	99.7	1.998695	−0.003215	2.001910	2.010734	102.5	97.4
四月	98.6	1.993877	−0.003215	1.997092	2.007826	101.8	96.7
五月	103.1	2.013259	−0.003215	2.016474	2.024300	105.8	100.5
六月	101.9	2.008174	−0.003215	2.011389	2.035689	108.6	103.1

七月	101.8	2.007748	−0.003215	2.010963	2.046652	111.3	105.7
八月	100.3	2.001301	−0.003215	2.004516	2.051168	112.5	106.8
九月	98.7	1.994317	−0.003215	1.997532	2.048700	111.9	106.3
十月	94.9	1.977266	−0.003215	1.980481	2.029181	107.0	101.6
十一月	93.7	1.971740	−0.003215	1.974955	2.004136	101.0	95.9
十二月	97.5	1.989005	−0.003215	1.992220	1.996356	99.2	94.2
平均						105.3	100.0

*因四捨五入故有0.000005之差.

第五節　移動均數比例法

移動均數法爲測定長期趨勢法中之一.蓋求十二個月之移動均數,則季節變動業已全部銷除,而盡屬長期變動.若將各月變量以各月相當之十二個月移動均數除之,卽得各變量對長期趨勢之百分比.若由各月之百分比中核算其平均數,卽得未修正之季節指數.如以十二個月未修正季節指數之總平均,作爲基數核算各月之百分比,卽得季節指數.茲仍以上海粳米價爲例,先求民國十五年一月至十二月之算術平均零售價,得十五年六月三十日或七月一日之均價爲$13.342.次求十五年二月至十六年一月之算術平均零售價,得十五年七月三十一日或八月一日之均價爲$13.470.依此類推,得各月末或月初之十二個月移動均價.若欲與各月原價比較,則須將六月末七月初之平均價,與七月末八月初之平均價,再求其算術平均數,方得七月之移動均價$13.406.依

此類推,得各月之移動均數如表一八九第三行.各月移動均數求得後,將各月均價除各月實價,得各月實價摒除長期趨勢後之百分比,如表一八九第四行.

表一八九　上海粳米零售價季節指數表

（用移動均數比例法求季節指數表甲）

月　次	零售價	十二個月均價	實價對均價之百分比	月　次	零售價	十二個月均價	實價對均價之百分比
民國十五年				民國二十年			
一　月	$11.317			一　月	$10.417	$11.815	88.2
二　月	12.289			二　月	9.922	11.430	86.8
三　月	12.460			三　月	9.888	11.265	87.8
四　月	13.177			四　月	9.376	11.200	83.7
五　月	13.409			五　月	10.511	11.218	93.7
六　月	13.533			六　月	10.708	11.274	95.0
七　月	13.896	$13.406	103.7	七　月	10.826	11.326	95.6
八　月	14.677	13.501	108.7	八　月	14.032	11.407	123.0
九　月	14.894	13.665	109.0	九　月	14.045	11.536	121.7
十　月	14.138	13.645	103.6	十　月	12.708	11.676	108.8
十一月	13.208	13.491	97.9	十一月	11.902	11.790	101.0
十二月	13.111	13.516	97.0	十二月	11.380	11.877	95.8
民國十六年				民國廿一年			
一　月	$12.849	$13.558	94.8	一　月	$10.795	$11.934	90.5
二　月	13.018	13.546	96.1	二　月	11.488	11.808	97.3
三　月	12.669	13.404	94.5	三　月	11.418	11.497	99.3
四　月	12.489	13.111	95.3	四　月	11.210	11.159	100.5
五　月	13.413	12.761	105.1	五　月	11.417	10.820	105.5
六　月	14.128	12.420	113.8	六　月	11.887	10.469	113.5

七　月	14.292	12.095	118.2
八　月	14.004	11.787	118.8
九　月	12.166	11.508	105.7
十　月	9.827	11.253	87.3
十一月	9.118	10.959	83.2
十二月	9.024	10.582	85.3
民國十七年			
一　月	$9.120	$10.144	89.9
二　月	9.355	9.692	96.5
三　月	9.614	9.344	102.9
四　月	9.468	9.215	102.7
五　月	9.366	9.249	101.3
六　月	9.129	9.330	97.8
七　月	8.770	9.421	93.1
八　月	8.684	9.514	91.3
九　月	9.136	9.599	95.2
十　月	9.744	9.653	100.9
十一月	10.031	9.724	103.2
十二月	10.052	9.860	101.9
民國十八年			
一　月	$10.287	$10.040	102.5
二　月	10.414	10.315	101.0
三　月	10.582	10.645	99.4
四　月	9.801	10.988	89.2
五　月	10.761	11.301	95.2
六　月	10.989	11.582	94.9
七　月	11.208	11.886	94.3
八　月	12.860	12.211	105.3
七　月	11.021	10.180	108.3
八　月	10.817	9.935	108.9
九　月	9.783	9.655	101.3
十　月	8.867	9.338	95.0
十一月	7.612	9.011	84.5
十二月	7.244	8.658	83.7
民國廿二年			
一　月	$7.987	$8.321	96.0
二　月	8.418	8.037	104.7
三　月	7.776	7.801	89.4
四　月	7.251	7.656	94.7
五　月	7.524	7.596	99.1
六　月	7.300	7.576	96.4
七　月	7.504	7.528	99.7
八　月	7.524	7.433	101.2
九　月	7.423	7.346	101.0
十　月	7.732	7.301	105.9
十一月	7.323	7.289	100.5
十二月	7.044	7.323	96.2
民國廿三年			
一　月	$7.054	$7.485	94.2
二　月	7.069	7.791	90.7
三　月	7.014	8.145	86.1
四　月	6.943	8.449	82.2
五　月	7.548	8.765	86.1
六　月	8.092	9.144	88.5
七　月	10.589	9.522	111.2
八　月	11.780	9.896	119.0

九　月	12.872	12.570	102.4	九　月	11.673	10.238	114.0
十　月	14.249	13.003	109.6	十　月	10.767	10.572	101.9
十一月	13.034	13.465	96.8	十一月	11.880	10.915	108.9
十二月	13.084	13.931	93.9	十二月	11.588	11.224	103.2
民國十九年				民國廿四年			
一　月	$14.567	$14.451	100.8	一　月	$11.594	$11.370	102.0
二　月	14.635	14.870	98.4	二　月	11.487	11.320	101.5
三　月	14.970	15.132	98.9	三　月	10.794	11.200	96.4
四　月	15.798	15.181	104.1	四　月	11.194	11.138	100.5
五　月	15.871	15.052	105.4	五　月	11.538	11.093	104.0
六　月	17.053	14.878	114.6	六　月	11.505	10.957	105.0
七　月	17.625	14.598	120.7	七　月	10.673	10.775	99.1
八　月	16.489	14.229	115.9	八　月	10.497	10.593	99.1
九　月	15.531	13.821	112.4	九　月	10.082	10.479	96.2
十　月	12.786	13.342	95.8	十　月	10.887	10.404	104.6
十一月	11.401	12.851	88.7	十一月	10.666	10.294	103.6
十二月	10.526	12.363	85.1	十二月	9.542	10.172	93.8
民國廿五年				民國廿五年			
一　月	$9.261	$10.097	91.7	七　月	$10.282		
二　月	9.456	10.073	93.9	八　月	10.331		
三　月	10.096	10.062	100.3	九　月	9.983		
四　月	10.087	10.021	100.7	十　月	10.000		
五　月	10.004	9.943	100.6	十一月	9.671		
六　月	10.101	9.922	101.8	十二月	10.042		

歷年各月實價對均價之百分比求得後,則進而求各月之平均百分比,即得未修正之季節指數.蓋如前例,各月份實價對均價之百分比,各有十個,一月份最小之百分比僅 88.2,

最大者爲102.5.二月份最小之百分比僅86.8,最大者爲104.7.欲求季節指數,則非就此等百分比中求一平均數不可.至於平均之方法,或用算術平均數,或用中位數均無不可.惟由各年同月之百分比中求得各月之平均百分比,其全年總平均,除非偶然,必不等於100,故末步工作,即求校正之季節指數,其法即將各月之總平均數作爲基數,核算各月對此總平均數之百分比,即得各月校正季節指數如下表第四第五行:

表一九〇 上海粳米零售價季節指數表

(用移動均數比例法求季節指數表乙)

月次	未校正季節指數		校正季節指數	
	算術平均數	中位數	算術平均數	中位數
一月	95.1	94.5	95.5	94.5
二月	96.7	96.9	97.0	96.9
三月	95.5	97.7	95.9	97.7
四月	95.4	97.9	95.8	97.9
五月	99.6	101.0	100.0	101.1
六月	102.1	99.8	102.5	99.9
七月	104.4	101.7	104.8	101.8
八月	109.1	108.8	109.5	108.9
九月	105.9	104.1	106.3	104.2
十月	101.3	102.8	101.7	102.9
十一月	96.8	99.2	97.1	99.3
十二月	93.6	94.9	93.9	94.9
平均	99.6	99.9	100.0	100.0

第六節　配線比例法

配線比例法為法爾克南(H. D. Falkner)及哈爾(Hall Lincoln W.)兩人所創用,其法先用最小二乘法求得長期趨勢之配線公式後,將斜度 b 以12除之,得各月之增減量,再依公式核算歷年各月之趨勢值,如表一九一第三行.末將各月趨勢值除各月實價,即得各月實價對長期趨勢值之百分比如表一九一第四行.

表一九一　上海粳米零售價季節指數表

(用配線比例法求季節指數表甲)

月次	零售價	長期趨勢值	實價對長期趨勢值之百分比	月次	零售價	長期趨勢值	實價對長期趨勢值之百分比
民國十五年				民國二十年			
一月	$11.317	$12.744	88.8	一月	$10.417	$11.124	93.6
二月	12.289	12.717	96.6	二月	9.922	11.097	89.4
三月	12.460	12.690	98.2	三月	9.888	11.070	89.3
四月	13.177	12.663	104.1	四月	9.376	11.043	84.9
五月	13.409	12.636	106.1	五月	10.511	11.016	95.4
六月	13.533	12.609	107.3	六月	10.708	10.989	97.4
七月	13.896	12.582	110.4	七月	10.826	10.962	98.8
八月	14.677	12.555	116.9	八月	14.032	10.935	128.3
九月	14.894	12.528	118.9	九月	14.045	10.908	128.8
十月	14.138	12.501	113.1	十月	12.708	10.881	116.8
十一月	13.208	12.474	105.9	十一月	11.902	10.854	109.7

十二月	13.111	12.447	105.3	十二月	11.380	10.827	105.1
民國十六年				民國廿一年			
一　月	$12.849	$12.420	103.5	一　月	$10.795	$10.800	100.0
二　月	13.018	12.393	105.0	二　月	11.488	10.773	106.6
三　月	12.669	12.366	102.5	三　月	11.418	10.746	106.3
四　月	12.489	12.339	101.2	四　月	11.210	10.719	104.6
五　月	13.413	12.312	108.9	五　月	11.417	10.692	106.8
六　月	14.128	12.285	115.0	六　月	11.887	10.665	111.5
七　月	14.292	12.258	116.6	七　月	11.021	10.638	103.6
八　月	14.004	12.231	114.5	八　月	10.817	10.611	101.9
九　月	12.166	12.204	99.7	九　月	9.783	10.584	92.4
十　月	9.827	12.177	80.7	十　月	8.867	10.557	84.0
十一月	9.118	12.150	75.0	十一月	7.612	10.530	72.3
十二月	9.024	12.123	74.4	十二月	7.244	10.503	69.0
民國十七年				民國廿二年			
一　月	$9.120	$12.096	75.4	一　月	$7.987	$10.476	76.2
二　月	9.355	12.069	77.5	二　月	8.418	10.449	80.6
三　月	9.614	12.042	79.8	三　月	7.776	10.422	74.6
四　月	9.468	12.015	78.8	四　月	7.251	10.395	69.8
五　月	9.366	11.988	78.1	五　月	7.524	10.368	72.6
六　月	9.129	11.961	76.3	六　月	7.300	10.341	70.6
七　月	8.770	11.934	73.5	七　月	7.504	10.314	72.8
八　月	8.684	11.907	72.9	八　月	7.524	10.287	73.1
九　月	9.136	11.880	76.9	九　月	7.423	10.260	72.3
十　月	9.744	11.853	82.2	十　月	7.732	10.233	75.6
十一月	10.031	11.826	84.8	十一月	7.323	10.206	71.8
十二月	10.052	11.799	85.2	十二月	7.044	10.179	69.2
民國十八年				民國廿三年			

一　月	$10.287	$11.772	87.4
二　月	10.414	11.745	88.7
三　月	10.582	11.718	90.3
四　月	9.801	11.691	83.8
五　月	10.761	11.664	92.3
六　月	10.989	11.637	94.4
七　月	11.208	11.610	96.5
八　月	12.860	11.583	111.0
九　月	12.872	11.556	111.4
十　月	14.249	11.529	123.6
十一月	13.034	11.502	113.3
十二月	13.084	11.475	114.0
民國十九年			
一　月	$14.567	$11.448	127.2
二　月	14.635	11.421	128.1
三　月	14.970	11.394	131.4
四　月	15.798	11.367	139.0
五　月	15.871	11.340	140.0
六　月	17.052	11.313	150.7
七　月	17.625	11.286	156.2
八　月	16.489	11.259	146.5
九　月	15.531	11.232	138.3
十　月	12.786	11.205	114.1
十一月	11.401	11.178	102.0
十二月	10.526	11.151	94.4
民國廿五年			
一　月	$9.261	$9.504	97.4
二　月	9.456	9.477	99.8

一　月	$7.054	$10.152	69.5
二　月	7.069	10.125	69.8
三　月	7.014	10.098	69.5
四　月	6.943	10.071	68.9
五　月	7.548	10.044	75.1
六　月	8.092	10.017	80.8
七　月	10.589	9.990	106.0
八　月	11.780	9.963	118.2
九　月	11.673	9.936	117.5
十　月	10.767	9.909	108.7
十一月	11.880	9.882	120.2
十二月	11.588	9.855	117.6
民國廿四年			
一　月	$11.594	$9.828	118.0
二　月	11.487	9.801	117.2
三　月	10.794	9.774	110.4
四　月	11.194	9.747	114.8
五　月	11.538	9.720	118.7
六　月	11.505	9.693	118.7
七　月	10.673	9.666	110.4
八　月	10.497	9.639	108.9
九　月	10.082	9.612	104.9
十　月	10.887	9.585	113.6
十一月	10.666	9.558	111.6
十二月	9.542	9.531	100.1
民國廿五年			
七　月	$10.282	$9.342	110.1
八　月	10.331	9.315	110.9

三　月	10.096	9.450	106.8	九　月	9.983	9.288	107.5
四　月	10.087	9.423	107.0	十　月	10.000	9.261	108.0
五　月	10.004	9.396	106.5	十一月	9.671	9.234	104.7
六　月	10.101	9.369	107.8	十二月	10.042	9.207	109.1

上表第四行爲各月實價對趨勢值之百分比,實價之趨勢影響,在折除之中業已抵銷,故各月百分比之大小,純係季節之變動.惟各月之百分比各有十一個,且其大小不一,故末步工作,卽就各月十一個百分比中求其算術平均數或中位數,方得未校正之季節指數如下表第二第三行.若以全年十二個月之總平均數作爲基數,核計各月之百分比,卽得校正之季節指數如下表第四第五行.

表一九二　上海粳米零售價季節指數表

(用配線比例法求季節指數表乙)

月　次	未校正季節指數		校正季節指數	
	算術平均數	中位數	算術平均數	中位數
一　月	94.3	93.6	94.3	90.5
二　月	96.3	96.6	96.3	93.4
三　月	96.3	98.2	96.3	95.0
四　月	96.1	101.2	96.1	97.9
五　月	100.0	106.1	99.9	102.6
六　月	102.8	107.3	102.7	103.8
七　月	105.0	106.0	104.9	102.5
八　月	109.4	111.0	109.3	107.3

九　月	106.2	107.5	106.1	103.9
十　月	101.9	108.7	101.8	105.1
十一月	97.4	104.7	97.4	101.2
十二月	94.9	100.1	94.9	96.8
平　均	100.1	103.4	100.0	100.0

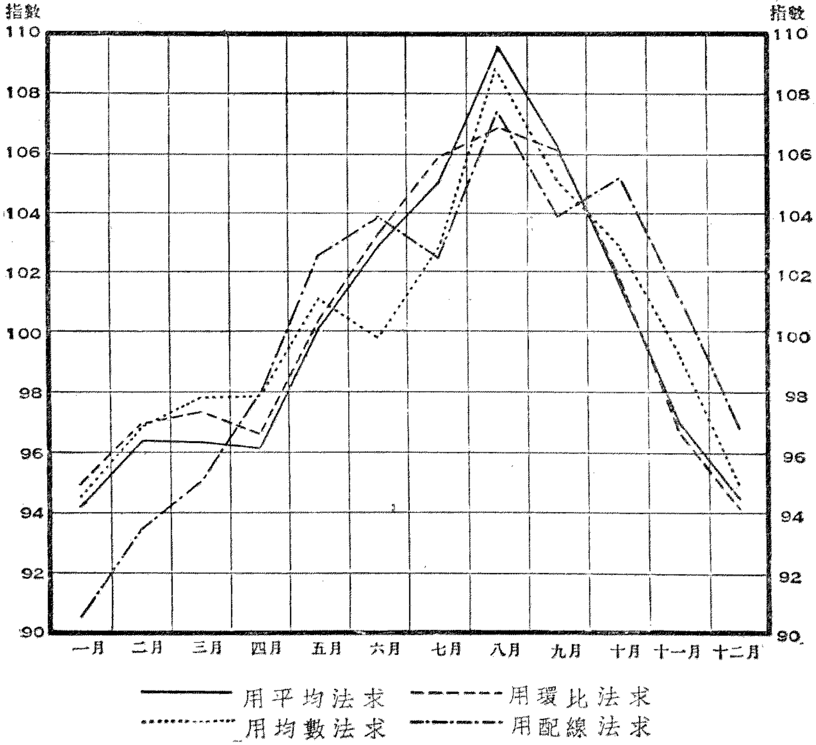
核算季節指數之方法,上文述之已詳,茲將用各方法求得之季節指數,列表比較之如下:

表一九三　上海粳米零售價季節指數比較表

(用各方法求得之季節指數比較表)

月　次	平均法	環比法		移動均數比例法		配線比例法	
		用算術平均法校正	用幾何平均法校正	中位法	算術平均法	中位法	算術平均法
一　月	94.2	95.2	94.9	94.5	95.5	90.5	94.3
二　月	96.3	97.2	96.9	96.9	97.0	93.4	96.3
三　月	96.3	97.6	97.4	97.7	95.9	95.0	96.3
四　月	96.1	96.9	96.8	97.9	95.8	97.9	96.1
五　月	100.1	100.5	100.4	101.1	100.0	102.6	99.9
六　月	102.9	103.0	103.1	99.9	102.5	103.8	102.7
七　月	105.0	105.4	105.8	101.8	104.8	102.5	104.9
八　月	109.5	106.5	106.8	108.9	109.5	107.3	109.3
九　月	106.3	105.8	106.2	104.2	106.3	103.9	106.1
十　月	101.7	101.4	101.6	102.9	101.7	105.1	101.8
十一月	97.0	96.0	95.9	99.3	97.1	101.2	97.4
十二月	94.6	94.5	94.2	94.9	93.9	96.8	94.9

圖七十一 上海粳米零售價季節指數比較圖



(季節指數圖)

綜觀上列圖表,用各種方法求得之季節指數,雖略有出入,然其漲跌之趨向,初無差別.惟以何者爲優?何者爲劣?本無標準可言.但據潘蓀氏之主張,以環比法爲最善,蓋環比法多取歷年同月環比之中位數爲求季節指數之標準,故某月環比極大,或某月環比極小時,可不致影響季節指數之變遷.且由各月環比之次數分配表中可判別季節變動之有無,故環

比法爲求季節指數最完善之方法.然據米爾斯之立論,平均法及配線比例法亦具上述兩種優點,故通常計算季節指數時,亦多用之.

若按計算季節指數之繁簡論之,則平均法計算便捷,遠非環比法所能比美.但遇劇烈之變動,或長期變化甚著時,因受極端變量之影響過巨,故常失之不確.環比法雖計算繁賾,然遇極度變動時,求得季節指數,確度較高.惟若事實變動不大或性質單純時,此法亦未必優於平均法.至於移動均數及配線比例法,雖計算亦繁,然最爲一般人士所採用.

問題

1. 試述季節變動之原因及測定季節變動之重要性.
2. 測定有無季節變動之方法如何?試論之.
3. 測定季節變動之前,須先研究單位時期及淘汰長期趨勢等何故?
4. 用平均法測定季節指數之步驟有幾?汰淘長期趨勢之方法如何?以何法爲最便捷?
5. 用環比法測定季節指數之步驟有幾?求校正鎖比之方法如何?以何法求校正鎖比較合理論?
6. 用累積對數法求校正鎖比之步驟如何?試申述之.
7. 何謂移動均數比例法?其測定季節指數之步驟如何?
8. 何謂配線比例法?其測定季節指數之步驟如何?

習題四十三

歷年上海秈米零售價逐月比較表

民國十五年至二十五年(每市石價格)

月次	十五年	十六年	十七年	十八年	十九年	二十年	廿一年	廿二年	廿三年	廿四年	廿五年
一月	$11.074	$12.278	$9.129	$10.262	$13.911	$10.518	$10.934	$8.091	$6.982	$11.147	$9.275
二月	11.697	12.018	9.425	10.262	13.975	10.185	11.488	8.845	7.078	10.863	9.445
三月	11.648	11.845	9.321	10.507	14.117	10.260	10.985	8.193	7.059	10.041	10.097
四月	11.486	11.904	9.298	10.183	14.867	9.930	10.530	7.618	6.988	10.342	10.330
五月	11.496	12.187	9.298	10.515	15.456	10.340	10.793	7.715	7.584	10.529	10.169
六月	11.141	12.618	8.784	10.799	15.454	10.458	10.586	7.655	8.079	10.863	10.137
七月	12.036	12.447	8.396	11.049	16.123	10.366	9.996	7.744	9.694	9.706	10.100
八月	12.384	11.919	8.301	12.014	15.007	13.012	9.428	7.585	11.024	9.592	9.597
九月	12.976	10.552	9.052	12.326	13.339	13.279	8.390	7.408	10.932	9.128	9.131
十月	12.743	9.207	9.400	13.258	10.304	11.349	7.587	7.235	10.113	9.791	9.148
十一月	12.680	8.797	9.791	12.647	10.366	11.002	7.075	7.098	11.516	9.839	9.388
十二月	12.494	8.319	9.862	13.215	10.342	10.841	7.343	6.963	11.029	9.288	10.000
平均	11.988	11.174	9.171	11.420	13.605	10.962	9.595	7.679	9.007	10.094	9.735

試用上列統計資料,計算以下諸數:

(1) 求歷年各月之環比。

(2) 編製各月環比之分組次數表。

(3) 求各月環比之算術平均數。

(4) 求各月環比之中位數。

習題四十四

試用習題四十三歷年上海秈米零售價,計算以下諸數:

(1) 求各月秈米零售價之算術平均數.

(2) 用簡捷平方法求秈米零售價之長期趨勢公式.

(3) 應用秈米零售價之長期趨勢公式,核算民國二十年(中央年)各月之長期趨勢值.

(4) 求秈米零售價之季節指數.

習題四十五

試用習題四十三中第三題求得之各月環比算術平均數,核算以下諸數:

(1) 求各月環比算術平均數之鎖比.

(2) 用算術平均法求各月之校正鎖比.

(3) 用幾何平均法求各月之校正鎖比.

(4) 求秈米零售價之季節指數.

習題四十六

試用習題四十三歷年上海秈米零售價,計算以下諸數:

(1) 求十二個月之移動均價.

(2) 求各月實價對各月均價之百分比.

(3) 求歷年同月百分比之算術平均數及中位數.

(4) 求秈米零售價之季節指數.

習題四十七

試用習題四十四中第二題求得之秈米零售價長期趨勢公式,核算以下諸數:

(1) 求歷年各月之長期趨勢值。

(2) 求各月實價對各月長期趨勢值之百分比。

(3) 求歷年同月百分比之算術平均數及中位數

(4) 求秈米零售價之季節指數。

第十五章　商情循環與預測

第一節　商情循環之原因與週期

物極必反,常人共知.氣候熱極漸寒,寒極漸熱,此天時之反極運動,亦卽氣候之循環變動也.商業盛極必衰,衰極必盛,此經濟之反極運動,亦卽商情之輪迴作用也.天時之循環變動,可分春夏秋冬四季,商情之循環變動,亦可分爲繁盛,凋敝,衰落與復興等四期.惟春夏秋冬之輪迴,各有定時,各有始末,盛敝衰興之遞變,旣無定期,且無起迄,此天時與商業循環變動之異點也.

企業繁盛之時,金融靈敏,物價高昂,貨品暢銷,營業順利;雖小商人,亦得金融界之互助,利市三倍.惟各業逐漸膨脹,卒因發展過度,存貨山積,運輸乏便;工人工資雖見增高,生產效率反見跌減;通貨猛烈之需要,益逼利率之上升.銀行家疑懼企業之將崩潰,收縮信用,停止放款;經商者因欲維持企業,削價求售,但消費者,各處觀望,希市價之再跌.商人雖煞費心力,廣告賤賣,然存貨依然難售;各業迫於市況,不得不縮小範圍,淸理營業,此卽凋敝時期也.自後營業淸淡,存貨凍結,債權旣難收集,債務亦難淸償;雖市價再度下跌,存底仍難脫售;企業停滯,工廠倒閉,失業蔓延,工資暴跌,此卽衰落時期也.此後經過嚴厲緊縮之慘淡經營,淸理改組之整理程序,金融機關之

貨幣累積漸多,企業之組織漸見完密,交易逐漸起色,市面日見回春,物價漸漲,營業漸復舊觀,此卽復興時期也.企業經努力擴展,勤儉經營,生產驟增,交易暢茂,復興時期,又漸入繁榮時期,此乃必然之現象,亦卽商業之循環作用也.

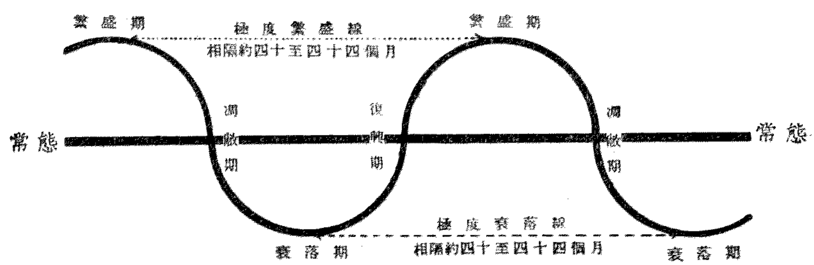
商情由盛而敝,由敝而衰,由衰而興,此爲一週期,其經過期間究有若干?亦有推考之必要.自一八一〇年起,美國商業有由盛而衰之驗經凡十六次.其商業恐慌期發生於一八二五,一八三七,一八四七,一八五七,一八七三,一八八四,一八九三及一九〇三年,故一般經濟專家,以爲經濟之恐慌,每十年必發現一次.惟近年有人假定爲七年,蓋近年之商業恐慌發生於一九〇七,一九一四及一九二〇年也.以上兩說,俱根據歷史而假定,皆過於武斷,故不能用以預測今日之商業循環也.

現代普通承認之商業循環週期,自一八九〇年起,每隔四十或四十四個月輪迴一次,此種結論,係根據各時期利率之高低及物價之漲跌研究而得.蓋在一八九二年至一九一四年間,在美國低利率之出現,其相隔時間,爲三十四,二十六,四十四,四十四,四十三,四十三及三十六個月,其中以四十三及四十四個月之循環期爲最普通.最短之循環週期爲二十六個月,最長爲四十四個月,故每週期之間隔約在三年至四年之間.

抑有進者,普通心理作用,對於商業循環週期亦有相當

之關係.蓋在物價上升,營業茂盛之時,人心樂觀,雖在一般企業極度膨脹之後,尙以爲企業之繁榮,方興未艾,而繼續擴張,卒以過分樂觀,使商業之繁榮期延長.反之,在物價下跌,企業凋敝之時,人心悲觀,雖一般企業已極度蕭條,然多數商人尙以爲衰落未已,旁立延望,不事振作,其結果卽足延長凋敝之時期也.玆將商業循環運動圖示之如下:

圖七十二　商業循環變動圖



(商業循環變動圖甲)

第二節　商情循環之測定

長期趨勢,季節變動,非常變動及循環變動爲時間數列變動之四大主因.其中非常變動因變異萬狀,影響不一,固須個別研究,姑置不論外,至於長期趨勢及季節變動之測定,前章已分別詳論,至於循環變動,則於時間數列中減除長期趨勢與季節變動卽得.玆將測定法分別述之如下:

(一) 由按年編製之數列中測定

若時間數列係按年編製者,則季節變動之影響,本已銷除,故將時間數列之各項,減去長期趨勢值,所得正負差數,即循環變差也.茲即以南開大學經濟研究所所編之我國輸入物量指數為例,設以民國十三年為原點,核計其長期趨勢公式如下:

$$Y=111.32+1.59X+(-0.245)X^2$$

若依上列公式核計各年長期趨勢值,如下表第三行,各年指數減長期趨勢後,得循環變差如下表第四行.惟若長期趨勢變動甚大,則此相差之量,尚不足表示循環變動.例如甲乙兩年之物量指數,甲年為 100, 乙年為 200, 甲年之長期趨勢為 98,乙年為 198, 則兩年之循環變差,雖各為 +2, 然就實際變量而言,甲年之循環變動應大於乙年,故欲測定可靠之循環變動,須將各年循環變差為長期趨勢值除之,得以百分比表示之.其核算公式如下:

設 C 為循環變動率.

O 為長期趨勢.

Y 為時間數列之各變量.

$$C=\frac{Y-O}{O}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式一九七})$$

循環變動以各變差相當於各長期趨勢值之百分比表示者,因時間數列之性質不同,變差百分比(即循

環變動率）分佈之全距(Range),相差甚巨,在比較或觀察數種數列之循環變動時,仍有障礙,故此種百分比應以共通之單位換算之.共通之單位爲何?即循環變差相當於長期趨勢值百分比之標準差是也.其核算公式如下:

設σ_c爲循環變動率之標準差.

O 爲長期趨勢.

Y 爲時間數列之各變量.

N 爲變量項數.

Σ 爲總和之記號.

$$\sigma_C=\sqrt{\frac{\Sigma\left(\frac{Y-O}{O}\right)^2}{N}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(公式一九八)$$

循環變動率之標準差求得後,即將各變動率以此標準差除之,即得循環變動係數如下表第六行:

表一九四　歷年我國輸入物量指數循環變動表

民國二年至二十四年

(由按年編製之時間數列中求循環變動係數表)

年次	輸入物量指數 Y	長期趨勢 O	循環變差 $Y-O$	循環變動率 $\frac{Y-O}{O}$	循環變動係數 $\frac{\frac{Y-O}{O}}{\sigma_c}$
民國二年	100.0	64.19	+35.81	+55.79	+2.81

三 年	91.6	70.92	+20.68	+29.16	+1.47
四 年	70.3	77.17	− 6.87	− 8.90	−0.45
五 年	73.8	82.92	− 9.12	−11.00	−0.55
六 年	73.5	88.19	−14.69	−16.66	−0.84
七 年	66.2	92.96	−26.76	−28.79	−1.45
八 年	75.5	97.25	−21.75	−22.37	−1.13
九 年	76.0	101.04	−25.04	−24.78	−1.25
十 年	94.7	104.35	− 9.65	− 9.25	−0.47
十一年	112.6	107.16	+ 5.44	+ 5.08	+0.26
十二年	108.5	109.49	− 0.99	− 0.90	−0.05
十三年	119.6	111.32	+ 8.28	+ 7.44	+0.37
十四年	109.9	112.67	− 2.77	− 2.46	−0.12
十五年	130.7	113.52	+17.18	+15.13	+0.76
十六年	109.9	113.89	− 3.99	− 3.50	−0.18
十七年	131.7	113.76	+17.94	+15.77	+0.79
十八年	140.1	113.15	+26.95	+23.82	+1.20
十九年	131.3	112.04	+19.26	+17.19	+0.86
二十年	130.1	110.45	+19.65	+17.79	+0.89
廿一年	106.2	108.36	− 2.16	− 1.99	−0.10
廿二年	99.2	105.79	− 6.59	− 6.23	−0.31
廿三年	84.1	102.72	−18.62	−18.13	−0.91
廿四年	77.2	99.17	−21.97	−22.15	−1.11

以民國十三年爲原點($X=O$)

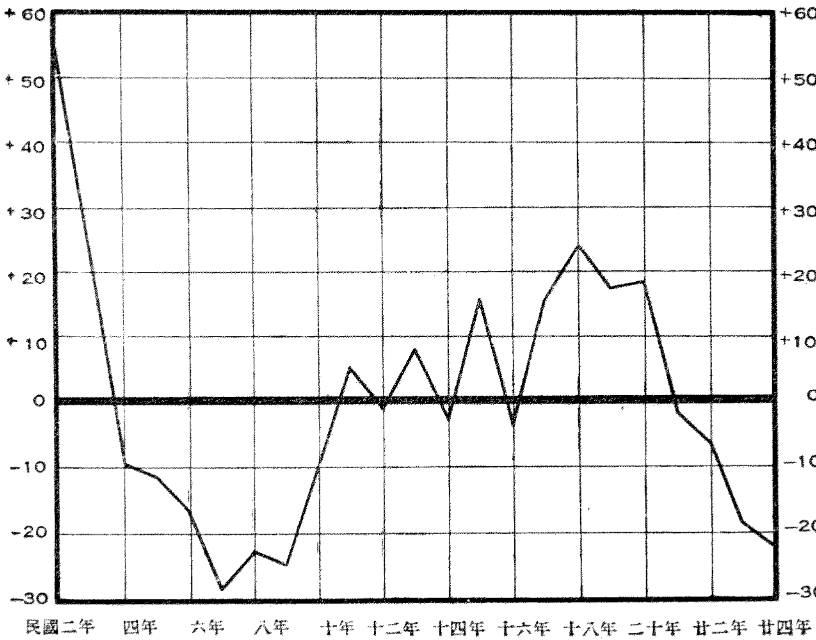
$$Y=111.32+1.59X+(-0.245)X^2$$

$$\sigma_c=\sqrt{\frac{9,088.8336}{23}}=\sqrt{395.166678}$$

$$=19.88$$

第三十七圖　歷年我國輸入物量指數循環變動圖

民國二年至二十四年



（商業循環變動圖乙）

（二）由按月編製之數列中測定

若時間數列係按月編製者,則除長期趨勢之影響應加銷除外,即季節變動之影響亦須摒棄.至於剔除長期趨勢與季節變動之方法有二:其一,即將長期趨勢乘季節指數之積,從時間數列之各變量中減去之,即得循環變差.復以長期趨勢與季節指數之乘積除之,即得循環變動率.其計算公式如下:

設 C 爲循環變動率.

O 爲長期趨勢.

S 爲季節指數.

Y 爲時間數列之各變量.

$$C=\frac{Y-OS}{OS}$$

$$=\frac{Y}{OS}-1 \quad\text{(公式一九九)}$$

其二,卽將長期趨勢乘季節指數之積,從時間數列之各變量中減除之,得循環變差.復以長期趨勢值除之,卽得循環變動率.其計算公式如下:

設 C 爲循環變動率.

O 爲長期趨勢.

S 爲季節指數.

Y 爲時間數列之各變量.

$$C=\frac{Y-OS}{O}$$

$$=\frac{Y}{O}-S \quad\text{(公式二〇〇)}$$

上述兩法,就理論上言,第一法較優於第二法,蓋各項長期趨勢乘季節指數後,卽得各項標準值,以此推算循環變動率,固甚合理也.然就實際應用而論,則第二法較爲通行,蓋取其輕而易舉也.

由按月編製之時間數列中求循環變動率之方法,前文已略述之,惟欲比較或觀察數種數列之循環變動

時,仍須以循環變動率之標準差除之,庶幾在同一單位上作直接之比較也.至於循環變動率標準差之核算,亦因推計循環變動率方法之不同而異.如應用第一法核計循環變動率者,則求標準差之公式如下:

設σ_c為循環變動率之標準差.

O 為長期趨勢.

S 為季節指數.

Y 為時間數列之各變量.

N 為變量項數.

Σ 為總和之記號.

$$\sigma_c=\sqrt{\frac{\Sigma\left(\frac{Y}{OS}-1\right)^2}{N}} \quad \text{......................(公式二〇一)}$$

若應用第二法核算循環變動率者,則求標準差之公式如下:

設σ_c為循環變動率之標準差.

O 為長期趨勢.

S 為季節指數.

Y 為時間數列之各變量.

N 為變量項數.

Σ 為總和之記號.

$$\sigma_c=\sqrt{\frac{\Sigma\left(\frac{Y}{O}-S\right)^2}{N}} \quad \text{......................(公式二〇二)}$$

茲就一九二〇年至一九三〇年美國 140 市(紐約市除外)市銀行逐月放款額,用第一法核算循環變動係數如下:

表一九五　歷年美國一四〇市(紐約除外)市銀行放款循環變動表

一九二〇年至一九三〇年

(由按月編製之時間數列中求循環變動係數表)

月　次	放款額(百萬美金) Y	長期趨勢 O	季節指數 S	標準值 OS	循環變動率 $\frac{Y}{OS}-1$	循環變動係數 $\frac{\frac{Y}{OS}-1}{\sigma_c}$
一九二〇年						
一　月	21,731	16,171	105.1	16,996	+27.86	+2.72
二　月	17,734	16,250	90.8	14,755	+20.19	+1.97
三　月	21,146	16,329	104.9	17,129	+23.45	+2.29
四　月	20,324	16,408	100.1	16,424	+23.75	+2.32
五　月	19,676	16,487	98.5	16,240	+21.16	+2.07
六　月	20,541	16,566	100.9	16,715	+22.89	+2.24
七　月	20,805	16,645	96.2	16,012	+29.93	+2.93
八　月	18,904	16,724	91.5	15,302	+23.54	+2.30
九　月	19,779	16,803	94.7	15,912	+24.30	+2.37
十　月	20,891	16,882	107.1	18,081	+15.54	+1.52
十一月	19,525	16,961	98.6	16,724	+16.75	+1.64
十二月	20,540	17,040	111.6	19,017	+ 8.01	+0.78
一九二一年						
一　月	17,996	17,119	105.1	17,992	+ 0.02	0.00

二　月	14,599	17,198	90.8	15,616	−6.51	−0.64
三　月	16,550	17,277	104.9	18,124	−8.69	−0.85
四　月	15,886	17,356	100.1	17,373	−8.56	−0.84
五　月	15,342	17,435	98.5	17,173	−10.66	−1.04
六　月	15,852	17,514	100.9	17,672	−10.30	−1.01
七　月	15,175	17,593	96.2	16,924	−10.34	−1.01
八　月	14,910	17,672	91.5	16,170	−7.79	−0.76
九　月	15,523	17,751	94.7	16,810	−7.66	−0.75
十　月	16,713	17,830	107.1	19,096	−12.48	−1.22
十一月	15,949	17,909	98.6	17,658	−9.68	−0.95
十二月	17,446	17,988	111.6	20,075	−13.10	−1.28
一九二二年						
一　月	15,879	18,067	105.1	18,988	−16.37	−1.60
二　月	14,042	18,146	90.8	16,477	−14.78	−1.44
三　月	16,535	18,225	104.9	19,118	−13.51	−1.32
四　月	15,671	18,304	100.1	18,322	−14.47	−1.41
五　月	16,322	18,383	98.5	18,107	−9.86	−0.96
六　月	17,173	18,462	100.9	18,628	−7.81	−0.76
七　月	16,343	18,541	96.2	17,836	−8.37	−0.82
八　月	15,849	18,620	91.5	17,037	−6.97	−0.68
九　月	16,553	18,699	94.7	17,708	−6.52	−0.64
十　月	18,423	18,778	107.1	20,111	−8.39	−0.82
十一月	17,133	18,857	98.6	18,593	−7.85	−0.77
十二月	19,586	18,936	111.6	21,133	−7.32	−0.72
一九二三年						
一　月	19,666	19,015	105.1	19,985	−1.60	−0.16
二　月	16,906	19,094	90.8	17,337	−2.49	−0.24
三　月	19,644	19,173	104.9	20,112	−2.33	−0.23

四 月	18,816	19,252	100.1	19,271	−2.36	−0.23
五 月	19,368	19,331	98.5	19,041	+1.72	+0.17
六 月	19,532	19,410	100.9	19,585	−0.27	−0.03
七 月	18,184	19,489	96.2	18,748	−3.01	−0.29
八 月	17,307	19,568	91.5	17,905	−3.34	−0.33
九 月	17,261	19,647	94.7	18,606	−7.23	−0.71
十 月	19,758	19,726	107.1	21,127	−6.48	−0.63
十一月	18,521	19,805	98.6	19,528	−5.16	−0.50
十二月	20,367	19,884	111.6	22,191	−8.22	−0.80
一九二四年						
一 月	19,384	19,963	105.1	20,981	−7.61	−0.74
二 月	17,512	20,042	90.8	18,198	−3.77	−0.37
三 月	19,193	20,121	104.9	21,107	−9.07	−0.89
四 月	18,865	20,200	100.1	20,220	−6.70	−0.65
五 月	18,639	20,279	98.5	19,975	−6.69	−0.65
六 月	18,304	20,358	100.9	20,541	−10.89	−1.06
七 月	18,662	20,437	96.2	19,660	−5.08	−0.50
八 月	17,776	20,516	91.5	18,772	−5.31	−0.52
九 月	18,238	20,595	94.7	19,503	−6.49	−0.63
十 月	20,912	20,674	107.1	22,142	−5.56	−0.54
十一月	18,846	20,753	98.6	20,462	−7.90	−0.77
十二月	21,830	20,832	111.6	23,249	−6.10	−0.60
一九二五年						
一 月	22,301	20,911	105.1	21,977	+1.47	+0.14
二 月	18,593	20,990	90.8	19,059	−2.45	−0.24
三 月	21,240	21,069	104.9	22,101	−3.90	−0.38
四 月	20,613	21,148	100.1	21,169	−2.63	−0.26
五 月	20,417	21,227	98.5	20,909	−2.35	−0.23

六　月	21,702	21,306	100.9	21,498	+0.95	+0.09
七　月	21,580	21,385	96.2	20,572	+4.90	+0.48
八　月	19,869	21,464	91.5	19,640	+1.17	+0.11
九　月	20,895	21,543	94.7	20,401	+2.42	+0.24
十　月	24,039	21,622	107.1	23,157	+3.81	+0.37
十一月	21,357	21,701	98.6	21,397	−0.19	−0.02
十二月	24,085	21,780	111.6	24,306	−0.91	−0.09
一九二六年						
一　月	23,607	21,859	105.1	22,974	+2.76	+0.27
二　月	20,102	21,938	90.8	19,920	+0.91	+0.09
三　月	23,458	22,017	104.9	23,096	+1.57	+0.15
四　月	22,537	22,096	100.1	22,118	+1.89	+0.18
五　月	21,449	22,175	98.5	21,842	−1.80	−0.18
六　月	22,466	22,254	100.9	22,454	+0.05	0.00
七　月	23,300	22,333	96.2	21,484	+8.45	+0.83
八　月	20,778	22,412	91.5	20,507	+1.32	+0.13
九　月	21,336	22,491	94.7	21,299	+0.17	+0.02
十　月	23,780	22,570	107.1	24,172	−1.62	−0.16
十一月	21,593	22,649	98.6	22,332	−3.31	−0.32
十二月	24,493	22,728	111.6	25,364	−3.44	−0.34
一九二七年						
一　月	23,456	22,807	105.1	23,970	−2.15	−0.21
二　月	20,781	22,886	90.8	20,780	+0.01	0.00
三　月	24,026	22,965	104.9	24,090	−0.27	−0.03
四　月	23,576	23,044	100.1	23,067	+2.21	+0.22
五　月	22,873	23,123	98.5	22,776	+0.43	+0.04
六　月	23,812	23,202	100.9	23,411	+1.71	+0.17
七　月	22,932	23,281	96.2	22,396	+2.39	+0.23

八　月	22,048	23,360	91.5	21,374	+3.15	+0.31
九　月	23,381	23,439	94.7	22,197	+5.33	+0.52
十　月	25,111	23,518	107.1	25,188	−0.31	−0.03
十一月	23,803	23,597	98.6	23,267	+2.30	+0.22
十二月	26,503	23,676	111.6	26,422	+0.31	+0.03
一九二八年						
一　月	25,601	23,755	105.1	24,967	+0.14	+0.01
二　月	21,755	23,834	90.8	21,641	+0.53	+0.05
三　月	25,847	23,913	104.9	25,085	+3.04	+0.30
四　月	25,225	23,992	100.1	24,016	+5.03	+0.49
五　月	26,346	24,071	98.5	23,710	+11.12	+1.09
六　月	27,029	24,150	100.9	24,367	+10.92	+1.07
七　月	23,897	24,229	96.2	23,308	+2.53	+0.25
八　月	23,401	24,308	91.5	22,242	+5.21	+0.51
九　月	24,450	24,387	94.7	23,094	+5.87	+0.57
十　月	27,705	24,466	107.1	26,203	+5.73	+0.56
十一月	25,880	24,545	98.6	24,201	+6.94	+0.68
十二月	29,659	24,624	111.6	27,480	+7.93	+0.78
一九二九年						
一　月	28,126	24,703	105.1	25,963	+8.33	+0.81
二　月	24,515	24,782	90.8	22,502	+8.95	+0.87
三　月	28,131	24,861	104.9	26,079	+7.87	+0.77
四　月	26,803	24,940	100.1	24,965	+7.36	+0.72
五　月	26,520	25,019	98.5	24,644	+7.61	+0.74
六　月	26,428	25,098	100.9	25,324	+4.36	+0.43
七　月	28,444	25,177	96.2	24,220	+17.44	+1.70
八　月	28,339	25,256	91.5	23,109	+22.63	+2.22
九　月	27,314	25,335	94.7	23,992	+13.85	+1.35

十　月	32,261	25,414	107.1	27,218	+18.53	+1.81
十一月	28,519	25,493	98.6	25,136	+13.46	+1.32
十二月	26,932	25,572	111.6	28,538	−5.63	−0.55
一九三〇年						
一　月	25,723	25,651	105.1	26,959	−4.59	−0.45
二　月	21,534	25,730	90.8	23,363	−7.83	−0.77
三　月	25,014	25,809	104.9	27,074	−7.61	−0.74
四　月	24,347	25,888	100.1	25,914	−6.05	−0.59
五　月	24,416	25,967	98.5	25,577	−4.54	−0.44
六　月	24,647	26,046	100.9	26,280	−6.21	−0.61
七　月	23,171	26,125	96.2	25,132	−7.80	−0.76
八　月	20,966	26,204	91.5	23,977	−12.56	−1.23
九　月	21,253	26,283	94.7	24,890	−14.61	−1.43
十　月	23,693	26,362	107.1	28,234	−16.08	−1.57
十一月	19,700	26,441	98.6	26,071	−24.44	−2.39
十二月	23,113	26,520	111.6	29,596	−21.91	−2.14

以一九二五年爲原點（$X=0$）

$$Y=21,345.91+948.43X$$

每月平均增加率

$$b=948.43\div 12=79.04$$

故以一九二五年七月爲原點,其長期趨勢公式如下:

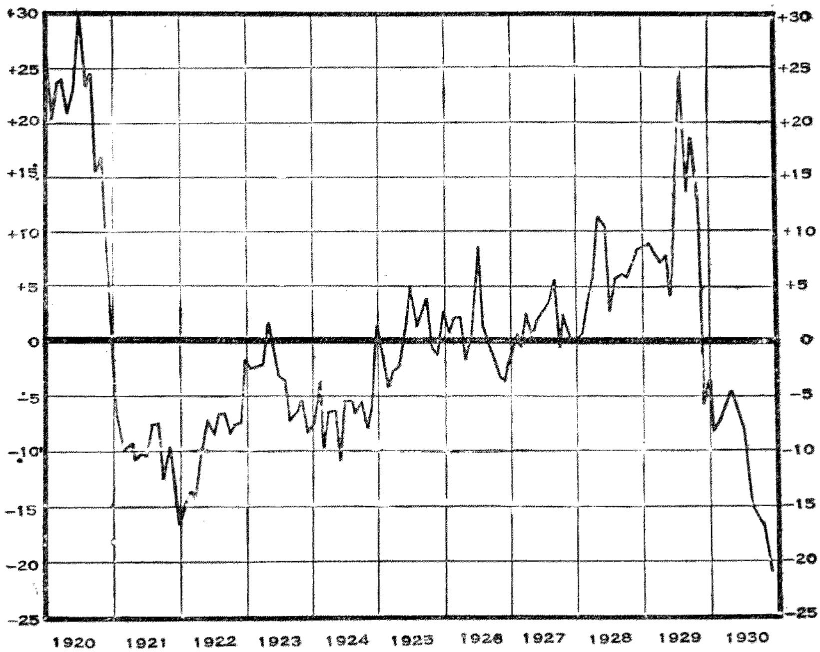
$$Y=21,385.43+79.04X$$

$$\sigma_c=\sqrt{\frac{13,820.8059}{132}}=\sqrt{104.7031}$$

$$=10.23$$

圖七十四 歷年美國一四〇市(紐約除外)市銀行放款循環變動圖

一九二〇年至一九三〇年



(商業循環變動圖丙)

第三節 商情預測之重要及其方法

世間現象,有自然與人為兩種.自然現象,常依天然之定律,一成不變,預測甚易.人為現象,常受人事之支配,變化劇烈,預測較難.然猶不可謂無能,蓋以社會經濟現象為例,因社會連鎖,各現象間常有相互關係之存在.故一起一伏,一先一後,常有定則可尋,經濟家乃即察其已往之關係,循其變動之陳

迹,用先引數列之變動,預測落後數列之變動,此乃鑒往知來,亦即商情預測也.

我人研究科學之目的,乃在求知,統計及分析已往之事實,不僅欲明過去之陳迹,卽未來徵象,猶欲知之.此商情預測在統計學中常目之爲冠冕也.

預測商情之方法甚多,有僅根據事實間之關係,及事實變動之原因而預測者,有研究時間數列之長期趨勢,季節變動與循環變動等,而爲預測之根據者,各各不同.若根據過去之經濟情況,推及現象間之相互關係及其變動之原因;根據現象間之相互關係及其變動之原因,進而分析現在之狀況及預測未來之動向者,謂之經濟預測法.若根據時間數列分析之結果而預測未來之狀況者,謂之統計法.前者依現象間之關係及變動之原因,推測未來之事實,故能知研究現象之確實變動;惟觀察現象之原因,無客觀之標準,故預測之結果,隨預測者之主觀而異.例如社會主義者與資本主義者對於經濟恐慌之原因,各有絕對不同之見解;若各憑個人之主觀,預測未來之經濟恐慌,其結果必不相同,此經濟預測法之缺點也.統計法雖不能確定原因,然因不爲預測者主觀所蔽,故其結果,常較用經濟法預測者準確可靠.玆將統計界最著名之哈佛預測法及迴歸預測法分節述之如下.

第四節　哈佛預測法

我人既知商情變化之原因,及其變化之程度,則鑒往知來,宜可以爲商情之預測.惟如何推已往,測未來,則必有賴於一種指數,此即歐美人士所謂商情風雨表(Business barometer)是也.茲將哈佛大學經濟研究委員會測定未來商情之方法,略述之如下:

哈佛大學經濟研究委員會於一九一九年在其刊行之經濟統計評論中發表一經濟晴雨表,即當時美國唯一之商情預測指數也.其編製法,即先選取時間數列中之最可靠而最重要者,去其長期趨勢與季節變動後,所得循環變動率以其標準差除之,得各數列之循環變動係數.末將各數列繪圖比較,發見各數列之極大值與極小值相隔之時期,幾相均等.惟各數列極大值與極小值之出現,有在同一時期者,有隔若干時日者,各各不同.故依該委員會之分析,根據各數列變動之先後,得分時間數列爲三大類如下:

(一) 投機類

此類在一九一九年哈佛大學初次編製經濟晴雨表時,包含股票市價,紐約證券交易所成交股數及紐約銀行交換額等三種.一九二三年五月改正時,即將紐約證券交易所成交股數及紐約銀行交換額兩種刪去,而以紐約各銀行往來帳之支取額替代之.此三種(修正後減爲兩種)指數之平均循環變動係數,不論向上或向下常在首先變動之列.是乃時間數列中之先引數列.

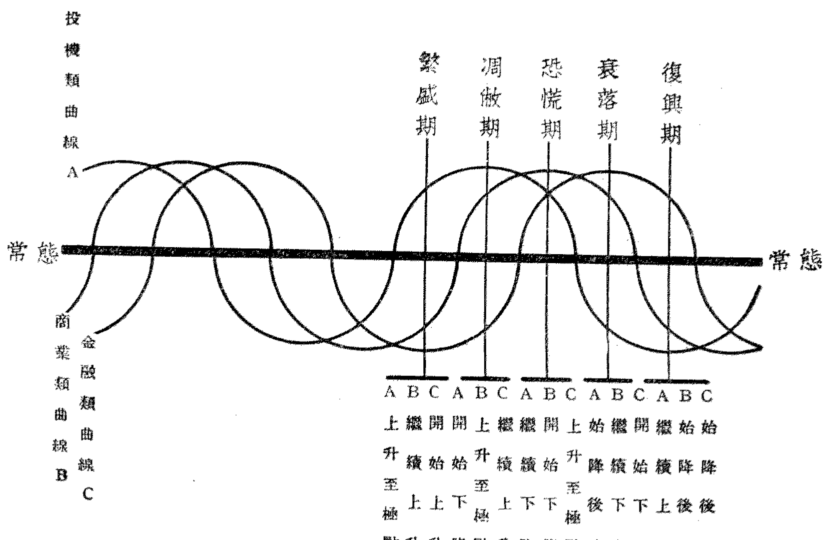
(二) 商業類

是類在一九一九年哈佛大學初編經濟晴雨表時,以紐約以外各地銀行交換額,及勃拉特斯脫里批發物價指數編製之.一九二三年修正時,則以紐約以外一四○個大城市銀行往來帳之支取額,及十種變動靈敏之物價指數替代之.其平均循環變動係數,不論向上或向下,常在投機類之後.是乃時間數列中之落後數列.

(三) 金融類

此類在一九一九年哈佛大學初次編製經濟晴雨表時,以歷年四月至六月及六十日至九十日商業票據

圖七十五　哈佛委員會之三類曲線圖



(哈佛預測曲線圖)

之貼現率編製之.一九二三年修正時,仍無變更.其平均循環變動係數,不論向上或向下,常居末後.良以投機之盛衰,影響商業之榮敝;商業之盛衰,影響金融之鬆緊也.茲將哈佛大學測定各類循環變動係數之位次,繪示之如圖七十五:

細察圖七十五,投機類(*A*線)循環變動係數首先發動,商業類(*B*線)及金融類(*C*線)隨後變異.故投機類循環變動係數,實為其他兩類變動之指標.當投機類循環變動係數開始下降時,我人卽可預測恐慌之將至.反之,投機類循環變動係數開始上升時,我人可預測繁榮之將至.蓋根據哈佛大學經濟研究委員會研究一九〇三年至一九一四年間各類循環變動係數之結果,知循環時期有五,各類指數在各期間之升降變動如下:

(一) 衰落期

在此時期中,投機類循環變動係數開始上升.商業及金融類循環變動係數繼續下降.

(二) 復興期

在此時期中,投機類循環變動係數繼續上升.商業類循環變動係數開始上升.金融類循環變動係數至期末始見上升.

(三) 繁盛期

在此時期中,投機類循環變動係數略再上升,但不

久卽停止前進.商業及金融類循環變動係數繼續上升.

(四) 凋敝期

在此時期中,投機類循環變動係數開始下降.商業類循環變動係數雖見上升,然不久卽停止前進.金融類循環變動係數繼續上升,且漲勢甚烈.

(五) 恐慌期

在此時期中,投機類循環變動係數跌至極低度.商業類循環變動係數開始下降,而金融類循環變動係數已漲至極高度,不久卽將回跌.

綜觀前述,若知投機類循環變動係數於先,卽可進而推測商業類之循環變動.知金融類循環變動係數於前,卽可進而預測投機類之循環變動.蓋三者順次而下,先後有序故也.例如金融類循環變動係數下降,卽可預測新週期之將至.惟金融類下降,投機類何時上升,猶難知之.但據潘葆教授之意見,以爲根據金融類曲線,預測投機類曲線時,我人不可僅僅注意金融類曲線之下降,與下期投機類曲線之上升在圖上相隔之橫距離,卽金融類曲線自極小值上升,或自極大值下降之縱距離,亦須詳細觀察,預測結果,始得準確可靠.

第五節 迴歸預測法

迴歸預測法乃根據自變量之變動,應用迴歸方程式預測附變量變動之方法也.哈佛法僅根據時間數列變動之方

向,預測未來之變動.迴歸法乃根據變量之大小,除預測未來之動向外,並能示人變動之範圍.此迴歸預測法所以較優於哈佛法也.惟迴歸方程式係根據自變量而預測附變量之或然數值,知自變量卽知附變量,不知自變量卽不知附變量,故自變量與附變量同時變動者,自無預測之必要與可能.欲使迴歸方程式能為預測之根據,自變量之變動,必須在附變量之前,若是方可據自變量之變動而預測附變量之變動.例如知氣候之寒暖,雨量之多寡,方可應用迴歸方程,預測農產物之豐歉.預知農產物收穫之多寡,方可應用迴歸方程,推測其價格之高低.反之,若不先知氣候與雨量於前,則不能推測農產物之豐歉於後.不知農產物收成之豐歉於前,奚能預測其價格之漲跌於後.故欲應用迴歸方程式預測未來或然之現象,自變量之變動應先知之而後可.至於根據迴歸方程式預測附變量之可靠性,則視自變量與附變量相關之大小而定.相關愈大,則預測之結果愈為可靠.相關愈小,則預測之結果愈不可靠.例如美教授馬爾(Prof. H. L. Moore)測定美國玉蜀黍之生產量(自變量)與其價格(附變量)之相關係數為 -0.79, 其迴歸方程式為:

$$Y=7.8-0.89X$$

例如一九一一年美國玉蜀黍生產量為 2,531,000,000 嘝,該年十二月一日每嘝之價格為美金0.618元;一九一二年生產量為 3,125,000,000 嘝,依迴歸方程式預測該年十二月一日之價

格爲:

$$\frac{3,125,000,000-2,531,000,000}{2,531,000,000}=23.47\%$$

$$Y=7.8-0.89\times 23.47=-13.09$$

$$0.618\times\frac{100-13.09}{100}=0.537\text{ 元}$$

因玉蜀黍生產量與其價格之相關係數甚高,故預測之結果甚爲可靠.例如根據一九一二年生產量預測該年十二月一日之價格爲美金0.537元,與實際價格0.487元,相差僅5分也.

本章應用公式

(公式一九七)由按年編製之時間數列中求循環變動率公式

$$C=\frac{Y-O}{O}$$

(公式一九八)求循環變動率之標準差(甲式)

$$\sigma_c=\sqrt{\frac{\Sigma\left(\frac{Y-O}{O}\right)^2}{N}}$$

(公式一九九)由按月編製之時間數列中求循環變動率公式甲

$$C=\frac{Y}{OS}-1$$

(公式二〇〇)由按月編製之時間數列中求循環變動率公式乙

$$C=\frac{Y}{O}-S$$

（公式二〇一）求循環變動率之標準差（乙式）

$$\sigma_c=\sqrt{\frac{\Sigma\left(\frac{Y}{OS}-1\right)^2}{N}}$$

（公式二〇二）求循環變動率之標準差（丙式）

$$\sigma_c=\sqrt{\frac{\Sigma\left(\frac{Y}{O}-S\right)^2}{N}}$$

問　　題

1. 商情輪迴之原因何在?輪迴週期有無定律?
2. 一般心理作用對於循環週期之影響如何?試論之。
3. 測定商情輪迴之方法如何?
4. 試述商情預測之意義及其重要性。
5. 何謂經濟預測法,統計預測法?試各申論其優劣點。
6. 哈佛大學經濟研究委員會預測商情之方法如何?試論之。
7. 投機類,商業類及金融類循環變動係數之變動各如何?試繪圖說明之。
8. 用迴歸預測法預測商情之步驟如何?試論之。

習題四十八

歷年華北批發物價指數表

民國二年至二十五年

年　次	指　數	年　次	指　數
民國二　年	67.18	民國十四年	97.28

民國三年	66.89	民國十五年	100.00
四年	68.78	十六年	103.02
五年	74.19	十七年	107.98
六年	79.95	十八年	111.08
七年	82.21	十九年	115.85
八年	81.07	二十年	122.55
九年	88.92	廿一年	112.87
十年	88.91	廿二年	101.00
十一年	86.40	廿三年	92.31
十二年	90.35	廿四年	95.51
十三年	93.61	廿五年	110.62

試用上列統計資料,計算以下諸數:

(1) 用簡捷平方法求三次拋物線公式,並核算各年之長期趨勢值.

(2) 求各年之循環變差及循環變動率.

(3) 求各年循環變動率之標準差.

(4) 求各年循環變動係數.

習題四十九

一九二三年至一九三六年某國產煤量逐月比較表

(單位　千公噸)

月次	一九二三年	一九二四年	一九二五年	一九二六年	一九二七年	一九二八年	一九二九年
一月	1,472	921	1,781	2,068	2,205	1,045	1,801
二月	1,390	1,205	1,597	1,904	2,045	1,077	1,703
三月	1,590	1,447	1,936	2,155	2,226	1,228	1,832
四月	1,608	1,555	1,922	2,073	2,216	1,149	1,738

五　月	1,713	1,534	1,963	2,098	2,295	1,165	1,880
六　月	1,673	1,292	1,793	1,976	2,234	1,092	1,929
七　月	1,546	1,106	1,741	2,013	2,255	1,218	2,101
八　月	1,571	1,167	1,843	1,926	2,250	1,348	2,246
九　月	1,553	1,352	1,899	1,960	2,183	1,418	2,385
十　月	1,425	1,450	2,053	2,196	2,336	1,563	2,600
十一月	1,039	1,486	2,014	2,187	1,828	1,577	2,547
十二月	846	1,616	2,045	2,235	1,234	1,740	2,635
平　均	1,452	1,344	1,882	2,066	2,109	1,302	2,200

月　次	一九三〇年	一九三一年	一九三二年	一九三三年	一九三四年	一九三五年	一九三六年
一　月	2,608	1,759	2,057	2,795	1,885	1,601	3,185
二　月	2,397	1,794	2,100	2,586	1,888	1,675	3,087
三　月	2,617	2,188	2,405	2,763	2,348	2,064	3,338
四　月	2,483	2,065	2,375	2,752	2,270	2,116	3,228
五　月	2,390	1,893	2,512	2,822	2,093	2,263	3,351
六　月	2,265	1,787	2,440	2,628	1,918	2,381	3,212
七　月	2,148	1,793	2,410	2,560	1,958	2,563	3,226
八　月	2,106	1,926	2,512	2,543	1,995	2,780	3,204
九　月	2,056	1,977	2,463	2,505	1,883	2,853	3,202
十　月	2,093	2,102	2,689	2,546	1,778	3,125	3,509
十一月	1,909	1,999	2,630	2,233	1,518	3,037	3,312
十二月	1,777	2,043	2,782	1,983	1,516	3,203	3,171
平　均	1,237	2,944	2,448	2,560	1,921	2,472	3,252

試用上列統計資料,計算以下諸數:

(1) 用簡捷平方法求直線趨勢公式,並核算各月之長期趨勢值。

（2）用環比中位數法求季節變動指數.

（3）用公式一九九求循環變動率.

（4）求循環變動率之標準差,並核算循環變動係數.

習題五十

某地每畝米穀生產量與八月平均溫度表

年次	米穀生產量 單位擔	八月平均溫度（華氏表）
民國十年	6.5	78.7
十一年	6.2	76.3
十二年	6.4	78.1
十三年	6.3	76.2
十四年	6.3	77.1
十五年	7.4	80.2
十六年	6.8	78.1
十七年	6.4	76.4
十八年	6.5	77.5
十九年	8.0	84.3
二十年	6.7	76.9
廿一年	6.2	73.6
廿二年	7.0	79.6
廿三年	7.1	78.3
廿四年	7.5	82.4
廿五年	7.8	84.7

試用上列統計資料,計算以下諸數:

（1）用簡捷法求米穀生產量與八月平均溫度之相關係數.

(2) 求迴歸方程式。

(3) 知民國二十五年八月之平均溫度爲華氏 84.7 度,預測該年米穀生產量約爲若干。又知二十六年八月之平均溫度爲華氏表 80.9 度,預測該年米穀生產量約爲若干。

(4) 試比較預測生產量與實際生產量(假定民國二十六年米穀之實際生產量爲 7.4 擔)之相差度。

參考書

中文

金國寶著	統計學大綱	商務印書館出版
金國寶著	統計新論	中華書局出版
艾　偉著	高級統計學	商務印書館出版
王仲武著	統計學原理及應用	商務印書館出版
陳其鹿著	統計學	商務印書館出版
林和成著	實用工商統計	商務印書館出版
甯恩承譯	統計方法	商務印書館出版
壽景偉著	應用統計	商務印書館出版
芮寶公著	統計概論	中華書局出版
唐啓賢著	統計學	黎明書局出版
呂仁一著	統計及商業調查	大東書局出版
陳炳權著	統計方法	大東書局出版
羅大凡著	數理統計學	北新書局出版
林光澂著	商業統計	商務印書館出版
楊西孟著	指數公式總論	商務印書館出版
楊西孟著	生活費指數編製法	商務印書館出版
金國寶著	物價指數淺說	商務印書館出版
朱君毅譯	心理與教育之統計法	商務印書館出版
朱君毅著	教育統計學	商務印書館出版
周調陽著	教育統計學	中華書局出版
言心哲著	社會調查大綱	中華書局出版
毛起鵕著	社會統計大綱	黎明書局出版
樊　弘著	社會調查方法	商務印書館出版
王仲武著	統計公式及例解	商務印書館出版
陳善林著	統計製圖學	商務印書館出版

西 文

Bowley, A. L.	Elements of Statistics
Brinton, W. C.	Graphic Methods for Presenting Facts
Chaddock, R. E.	Principles and Methods of Statistics
Davenport, C. B.	Statistical Methods
Davies, G. R.	Introduction to Economic Statistics
Day, E. E.	Statistical Analysis
Dittmer, C. C.	Introduction to Social Statistics
Elderton, W. P.	Frequency-Curves and Correlation
Fisher, I.	Irving Fisher Commodity Indexes
Fisher, I.	The Making of Index Numbers
Fisher, R. A.	Statistical Methods for Research Workers
Haney, L. H.	Business Forecasting
Jerome, H.	Statistical Methods
Karsten, K. G.	Charts and Graphs
Kelley, T. L.	Statistical Method
King, W. I.	The Elements of Statistical Method
Mills, F. C.	Statistical Methods Applied to Economics and Business
Persons, W. M.	Forecasting Business Cycles
Rugg, H. C.	Statistical Methods Applied to Education
Secrist, H.	An Introduction to Statistical Methods
Secrist, H.	Readings and Problems in Statistical Methods
Snider, J. L.	Business Statistics
Weld, Le Rey D.	Theory of Errors and Least Squares
Young, B. F.	Statistics and Applied in Business
Yule, G. U.	An Introduction to the Theory of Statistics

附　　錄

附錄一　本書細目

附錄二　統計表索引

附錄三 統計圖索引

附錄四 統計符號

a 為迴歸方程式及長期趨勢公式中之常數.

a_1 為二次拋物線公式中之常數.

a_2 為三次拋物線公式中之常數.

b 為趨勢直線之斜度.

b_1 為二次拋物線公式中之第一斜度.

$b_{12.3}$ 為X_1對X_2摒除X_3影響之純迴歸係數.

$b_{12.34}$ 為X_1對X_2摒除X_3及X_4影響之純迴歸係數.

$b_{12.345....n}$ 為X_1對X_2摒除$X_3, X_4, X_5 \cdots\cdots X_n$影響之純迴歸係數.

$b_{13.2}$ 為X_1對X_3摒除X_2影響之純迴歸係數.

$b_{13.24}$ 為X_1對X_3摒除X_2及X_4影響之純迴歸係數.

$b_{13.245....n}$ 為X_1對X_3摒除$X_2, X_4, X_5 \cdots\cdots X_n$影響之純迴歸係數.

$b_{14.23}$ 為X_1對X_4摒除X_2及X_3影響之純迴歸係數.

$b_{14.235....n}$ 為X_1對X_4摒除$X_2, X_3, X_5 \cdots\cdots X_n$影響之純迴歸係數.

$b_{15.234....n}$ 為X_1對X_5摒除$X_2, X_3, X_4 \cdots\cdots X_n$影響之純迴歸係數.

$b_{1n.234....n-1}$ 為X_1對X_n摒除$X_2, X_3, X_4 \cdots\cdots X_{n-1}$影響之純迴歸係數.

b_2　為三次拋物線公式中之第一斜度.

b_{xy}　為 X 迴歸 Y 之係數.

b_{yx}　為 Y 迴歸 X 之係數.

c　為組距除眞正算術平均數或中位數,與假定算術平均數或中位數之差或絕對差（即以組距為單位之相對差或絕對差）.

C　為假定算術平均數與眞正算術平均數之差,亦稱改正數.在計算循環變動時,代表循環變動率.

C'　為均方相關係數.

c_1　為二次拋物線公式中之第二斜度.

c_2　為三次拋物線公式中之第二斜度.

c_x　為以組距為單位之甲數列假定算術平均數與其眞正算術平均數之差.

C_x　為甲數列假定算術平均數與其眞正算術平均數之差,亦稱甲改正數.

c_y　為以組距為單位之乙數列假定算術平均數與其眞正算術平均數之差.

C_y　為乙數列假定算術平均數與其眞正算術平均數之差,亦稱乙改正數.

C_z　為 Z 數列假定算術平均數與其眞正算術平均數之差,亦稱 Z 改正數.

d 為各變量與算術平均數之差.

$\overline{d}$ 為各變量或各組中值與中位數之絕對差.

$\overline{d}''$ 為各變量或各組中值與假定中位數之假定絕對差.

d' 為各變量與假定算術平均數之差.

d'' 為各變量與假定算術平均數之假定離中差.

d_1 為第一變量與算術平均數之差.在計算純相關迴歸方程式時,代表 X_1 數列中各變量與其算術平均數之差,等於 m_1-M_1.

d'_1 為第一變量與假定算術平均數之差.

d_2 為第二變量與算術平均數之差.在計算純相關迴歸方程式時,代表 X_2 數列中各變量與其算術平均數之差,等於 m_2-M_2. 在計算長期趨勢時,代表三次拋物線公式中之第三斜度.

d'_2 為第二變量與假定算術平均數之差.

d_3 為第三變量與算術平均數之差.在計算純相關迴歸方程式時,代表 X_3 數列中各變量與其算術平均數之差,等於 m_3-M_3.

d'_3 為第三變量與假定算術平均數之差.

d_4 為第四變量與算術平均數之差.在計算純相關迴歸方程式時,代表 X_4 數列中各變量與其算術平均數之差,等於 m_4-M_4.

d_5　爲第五變量與算術平均數之差.在計算純相關迴歸方程式時,代表 X_5 數列中各變量與其算術平均數之差,等於 m_5-M_5.

d_n　爲第 n 變量與算術平均數之差.在計算純相關迴歸方程式時,代表 X_n 數列中各變量與其算術平均數之差,等於 m_n-M_n.

d'_n　爲第 n 變量與假定算術平均數之差.

D_n　爲第 n 十分位數.

D'_n　爲第 n 十分位數之地位.

d_x　爲甲數列中各變量與其算術平均數之差.在計算相關比時,代表各橫行算術平均數與 X 數列算術平均數之離中差.

d'_x　爲甲數列中各變量與其假定算術平均數之差.

d''_x　爲甲數列中各變量與其假定算術平均數之假定離中差.在計算相關比時,代表各橫行算術平均數與 X 數列算術平均數之假定離中差.

d_y　爲乙數列中各變量與其算術平均數之差.在計算相關比時,代表各直行算術平均數與 Y 數列算術平均數之離中差.

d'_y　爲乙數列中各變量與其假定算術平均數之差.

d''_y　爲乙數列中各變量與其假定算術平均數之假定離中差.在計算相關比時,代表各直行算術

平均數與 Y 數列算術平均數之假定離中差.

d_z 為 Z 數列中各變量與其算術平均數之差.

d'_z 為 Z 數列中各變量與其假定算術平均數之差.

d''_z 為 Z 數列中各變量與其假定算術平均數之假定離中差.

e 為納氏對數之底數,等於2.7182818.

f 為變量之次數,或各組之次數,或中位數,四分位數,十分位數,百分位數所在組之次數.

f' 為各變量以上累積次數.

F 為中位數,四分位數,十分位數,百分位數所在組以上或以下各組次數之總和.

f_1 為第一變量之次數.

f'_1 為衆數所在組以下一組之次數.

f''_1 為衆數所在組以下各組或若干組之總次數.

f_2 為第二變量之次數.

f'_2 為衆數所在組以上一組之次數.

f''_2 為衆數所在組以上各組或若干組之總次數.

f_3 為第三變量之次數.

f_c 為正態曲線下某點之理論次數.

f_n 為第 n 變量之次數.

f_{n-1} 為第 n 變量以上第一個變量之次數.

f_{n-2} 為第 n 變量以上第二個變量之次數.

f_x　為 X 數列之次數.

f_y　為 Y 數列之次數.

G　為 X 與 Y 事實等級之正差分數.

i　為組距.

I_A　為綜合指數.

I'_D　為中位比價之位置.

I_g　為幾何平均實價指數.

I_G　為幾何平均比價指數.

I_h　為倒數平均實價指數.

I_H　為倒數平均比價指數.

I_m　為算術平均實價指數.

I_M　為算術平均比價指數.

I_o　為衆數比價指數.

i_x　為甲數列之組距.

i_y　為乙數列之組距.

i_z　為 Z 數列之組距.

K_x　為 X 數列之分組數.

K_y　為 Y 數列之分組數.

L　為中位數,衆數,四分位數,十分位數,百分位數所在組之下限.

L'　為組值最小組之下限.

m　為變量之數值.

M	爲算術平均數.
M'	爲假定算術平均數.
m_1	爲第一變量之數值,普通爲數值最小之變量值.
m_2	爲第二變量之數值.
m_3	爲第三變量之數值.
M_d	爲中位數.
M'_d	爲中位數之地位.
$M.D.$	爲平均差.
M_g	爲幾何平均數.
M_h	爲倒數平均數.
m_n	爲第 n 變量之數值,普通爲數值最大之變量值.
m_{n-1}	爲第 n 變量以上第一個變量之數值.
m_{n-2}	爲第 n 變量以上第二個變量之數值.
M_o	爲衆數.
m_x	爲 X 數列(亦稱甲數列)中之變量.
M_x	爲 X 數列(亦稱甲數列)之算術平均數.
M'_x	爲 X 數列(亦稱甲數列)之假定算術平均數.
m_y	爲 Y 數列(亦稱乙數列)中之變量.
M_y	爲 Y 數列(亦稱乙數列)之算術平均數.
M'_y	爲 Y 數列(亦稱乙數列)之假定算術平均數.
n	爲十分位數或百分位數之位數.在計算機率時,代表物件數.

N	為變量項數,或次數之總數.在計算機率時,代表試驗之次數.
N_a	若中位數大於假定中位數,則N_a為小於眞正中位數各組次數之總和.若中位數小於假定中位數,則N_a為大於眞正中位數各組次數之總和.
N'_a	若中位數大於假定中位數,則 N'_a 為中位數所在組以下各組次數之總和.若中位數小於假定中位數,則 N'_a 為中位數所在組以上各組次數之總和.
N_b	若中位數大於假定中位數,則N_b為大於眞正中位數各組次數之總和.若中位數小於假定中位數,則N_b為小於眞正中位數各組次數之總和.
N'_b	若中位數大於假定中位數,則 N'_b 為中位數所在組以上各組次數之總和.若中位數小於假定中位數,則 N'_b 為中位數所在組以下各組次數之總和.
N_c	為各直行次數之總數.
${}_nC_r$	為 n 物件中每 r 個組合之方法.
N_t	為中位數或假定中位數所在組之次數.
N_t	為同號分數或稱相應分數.

N_o 為零差分數.

N_r 為各橫行次數之總數.

N_{rc} 為相關表內各方格中之次數.

N_u 為異號分數.

o 為長期趨勢.

p 為成功之機率.

P 為$d_x d_y$之積.在計算均方相關係數時,代表

$$\frac{1}{N}\Sigma\left(\frac{(N_{rc})^2}{\frac{N_r N_c}{N}}\right)=\Sigma\left[\frac{(N_{rc})^2}{N_r N_c}\right]=\frac{S}{N}.$$

P_1 為計算期之物價.

P'_1 為計算期第一種物品之價格.

P''_1 為計算期第二種物品之價格.

P'''_1 為計算期第三種物品之價格.

$P.E._{1\cdot 234}$ 為根據X_2, X_3及X_4推測X_1之機誤.

$P.E._m$ 為兩算術平均數相差之機誤.

$P.E._M$ 為算術平均數之機誤.

$P.E._{M1}$ 為甲數列算術平均數之機誤.

$P.E._{M2}$ 為乙數列算術平均數之機誤.

$P.E._{md}$ 為兩中位數相差之機誤.

$P.E._{Md}$ 為中位數之機誤.

$P.E._{Md1}$ 為甲數列中位數之機誤.

$P.E._{Md2}$ 為乙數列中位數之機誤.

$P.E._q$	爲兩四分位數相差之機誤.
$P.E._Q$	爲四分位數之機誤.
$P.E._{Q_1}$	爲甲數列四分位數之機誤.
$P.E._{Q_2}$	爲乙數列四分位數之機誤.
$P.E._{Q.D.}$	爲四分位差之機誤.
$P.E._r$	爲相關係數之機誤.
$P.E._x$	爲根據 Y 推測 X 之機誤.
$P.E._y$	爲根據 X 推測 Y 之機誤.
$P.E._\sigma$	爲標準差之機誤.
$P.E._\eta$	爲相關比之機誤.
$P.E._\rho$	爲等級相關係數之機誤.
P_n	爲第 n 百分位數.
P'_n	爲第 n 百分位數之地位.
P_o	爲基期之物價,簡稱基價.
P'_o	爲基期第一種物品之價格.
P''_o	爲基期第二種物品之價格.
P'''_o	爲基期第三種物品之價格.
q	爲失敗之機率.
Q	爲物量,如消費量,生產量及交易量等.
Q'	爲第一種物品之物量.
Q''	爲第二種物品之物量.
Q'''	爲第三種物品之物量.

Q_1	爲第一四分位數.在計算物價指數時,代表計算期之物量.
Q'_1	爲第一四分位數之地位.
Q_3	爲第三四分位數.
Q'_3	爲第三四分位數之地位.
$Q.D.$	爲四分位差.
Q_0	爲基期之物量.
r	爲直線相關係數,簡稱相關係數.在計算機率時,代表組合數.
$r!$	爲$1\times2\times3\times4\times\cdots\cdots\times r$之積.
R	爲用簡捷法核計之等級相關係數.
R'	爲相應相關係數.
r_{12}	爲第一附變數與第二自變數之簡相關係數.
$r_{12\cdot3}$	爲假定第三自變數不變,第一附變數與第二自變數之一級純相關係數.亦即X_1對X_2摒除X_3影響之一級純相關係數.
$r_{12\cdot34}$	爲假定第三第四自變數不變,第一附變數與第二自變數之二級純相關係數.
$r_{12\cdot345\cdots\cdots n}$	爲假定第三第四第五……及第n自變數不變,第一附變數與第二自變數之n級純相關係數.
$R_{1\cdot2345\cdots\cdots n}$	爲n種變數之複相關係數.
r_{13}	爲第一附變數與第三自變數之簡相關係數.

$r_{13\cdot2}$ 為假定第二自變數不變,第一附變數與第三自變數之一級純相關係數.亦卽 X_1 對 X_3 摒除 X_2 影響之一級純相關係數.

$r_{13\cdot24}$ 為假定第二第四自變數不變,第一附變數與第三自變數之二級純相關係數.

$r_{14\cdot2}$ 為假定第二自變數不變,第一附變數與第四自變數之一級純相關係數.

$r_{14\cdot23}$ 為假定第二第三自變數不變,第一附變數與第四自變數之二級純相關係數.

$r_{14\cdot3}$ 為假定第三自變數不變,第一附變數與第四自變數之一級純相關係數.

r_{23} 為第二附變數與第三自變數之簡相關係數.

$r_{24\cdot3}$ 為假定第三自變數不變,第二附變數與第四自變數之一級純相關係數.

r_{32} 為第三附變數與第二自變數之簡相關係數.

$r_{34\cdot2}$ 為假定第二自變數不變,第三附變數與第四自變數之一級純相關係數.

$r_{43\cdot2}$ 為假定第二自變數不變,第四附變數與第三自變數之一級純相關係數.

R_g 為全距.

S 為 $\Sigma\left\{\frac{\frac{(N_{rc})^2}{N_rN_c}}{N}\right\}$.在計算季節變動時,代表季節指

數.

$S_{1.23}$ 為X_1對X_2及X_3之標準誤,等於$\sigma_1\sqrt{1-r^2_{12}}\sqrt{1-r^2_{13\cdot2}}$.

$S_{1.234}$ 為根據X_2,X_3及X_4推測X_1之標準誤.亦即X_1對X_2, X_3及X_4之標準誤,等於$\sigma_1\sqrt{1-r^2_{12}}\sqrt{1-r^2_{13\cdot2}}\sqrt{1-r^2_{14\cdot23}}$.

$S_{1.2345\ldots n}$ 為X_1對X_2, X_3, X_4, $X_5\cdots\cdots X_n$之標準誤,等於$\sigma_1\sqrt{1-r^2_{12}}\sqrt{1-r^2_{13\cdot2}}\sqrt{1-r^2_{14\cdot23}}\sqrt{1-r^2_{15\cdot234}}\cdots\cdots\sqrt{1-r^2_{1n\cdot2345\cdots n-1}}$.

$S_{2.13}$ 為X_2對X_1及X_3之標準誤,等於$\sigma_2\sqrt{1-r^2_{21}}\sqrt{1-r^2_{23\cdot1}}$.

$S_{2.134}$ 為X_2對X_1,X_3及X_4之標準誤,等於$\sigma_2\sqrt{1-r^2_{23}}\sqrt{1-r^2_{24\cdot3}}\sqrt{1-r^2_{12\cdot34}}$.

$S_{2.1345\ldots n}$ 為X_2對X_1, X_3, X_4, $X_5\cdots\cdots X_n$之標準誤,等於$\sigma_2\sqrt{1-r^2_{23}}\sqrt{1-r^2_{24\cdot3}}\sqrt{1-r^2_{25\cdot34}}\sqrt{1-r^2_{26\cdot345}}\cdots\cdots\sqrt{1-r^2_{2n\cdot3456\cdots n-1}}$.

$S_{3.12}$ 為X_3對X_1及X_2之標準誤,等於$\sigma_3\sqrt{1-r^2_{31}}\sqrt{1-r^2_{32\cdot1}}$.

$S_{3.124}$ 為X_3對X_1,X_2及X_4之標準誤,等於$\sigma_3\sqrt{1-r^2_{23}}\sqrt{1-r^2_{34\cdot2}}\sqrt{1-r^2_{13\cdot24}}$.

$S_{4.123}$ 為X_4對X_1,X_2及X_3之標準誤,等於$\sigma_4\sqrt{1-r^2_{34}}\sqrt{1-r^2_{24\cdot3}}\sqrt{1-r^2_{14\cdot23}}$.

sk	為偏態.
S_m	為兩算術平均數相差之標準誤.
S_M	為算術平均數之標準誤.
S_{M1}	為甲數列算術平均數之標準誤.
S_{M2}	為乙數列算術平均數之標準誤.
S_{md}	為兩中位數相差之標準誤.
S_{Md}	為中位數之標準誤.
S_{Md1}	為甲數列中位數之標準誤.
S_{Md2}	為乙數列中位數之標準誤.
S_q	為兩四分位數相差之標準誤.
S_Q	為四分位數之標準誤.
S_{Q1}	為甲數列四分位數之標準誤.
S_{Q2}	為乙數列四分位數之標準誤.
$S_{Q.D.}$	為四分位差之標準誤.
S_r	為相關係數之標準誤.
S_x	為根據 Y 推測 X 之標準誤.
S_y	為根據 X 推測 Y 之標準誤.
S_σ	為標準差之標準誤.
S_η	為相關比之標準誤.
S_ρ	為等級相關係數之標準誤.
U	為中位數,衆數,四分位數,十分位數或百分位數所在組之上限.

U'	為組值最大組之上限.在計算相關時,代表異號相關係數.
V_{Q_1}	為甲種四分位差係數.
V_{Q_2}	為乙種四分位差係數.
V_{R_1}	為甲種全距係數.
V_{R_2}	為乙種全距係數.
V_{R_3}	為丙種全距係數.
V_{R_4}	為丁種全距係數.
V_{sk}	為偏態係數.
V_x	為 X 數列中各項之等級.
V_y	為 Y 數列中各項之等級.
V_δ	為平均差係數.
V_σ	為標準差係數.
W	為變量之權數.
W'	為第一品之物值.
W''	為第二品之物值.
W'''	為第三品之物值.
W_1	為第一變量之權數.
W_2	為第二變量之權數.
W_3	為第三變量之權數.
W_a	為概權.(所謂概權,既非基期物量物值,又非計算期物量物值,乃任何時期之估計權數.)

W_n 　為第 n 變量之權數.

x 　為以標準差為單位之各變量與其算術平均數之差.

X 　為甲數列,亦稱自變數.在計算長期趨勢時,代表時期之位次.在用簡捷法計算長期趨勢時,代表各時期與中央年相差之年數.

X_1 　為甲數列之第一變量.

X_2 　為甲數列之第二變量.

$\bar{X}_y$ 　為各橫行之算術平均數.

y 　為橫基線上除平均數所在點外,某點向上引出縱線之高度.

Y 　為乙數列,亦稱附變數.在計算長期趨勢時,代表各時期之長期趨勢值.在計算循環變動時,代表時間數列之各變量.

Y_1 　為乙數列之第一變量.

Y_2 　為乙數列之第二變量.

y_o 　為橫基線上平均數所在點向上引出最高縱線之高度.(即正態曲線下,最高縱線之高度.)

Y_x 　為各直行之算術平均數.

Σ 　為總和之記號,讀如 *Sigma*.

Σ' 　為各行總和之記號.

δ_c 　為校正之平均差.

σ 爲標準差.

σ_1 爲第一數列(X_1)之標準差.

σ_2 爲第二數列(X_2)之標準差.

σ_{ax} 爲 X 數列中各行變量對於各行算術平均數之標準差.

σ_{ay} 爲 Y 數列中各行變量對於各行算術平均數之標準差.

σ_c 爲校正標準差.在計算長期趨勢時,代表循環變動率之標準差.

σ_{mx} 爲各橫行算術平均數與 X 數列全體算術平均數之標準差.

σ_{my} 爲各直行算術平均數與 Y 數列全體算術平均數之標準差.

σ_s 爲取樣標準誤.

σ_x 爲甲數列之標準差.

σ_y 爲乙數列之標準差.

η 爲相關比.

η_{xy} 爲 X 對 Y 之相關比.(即以 Y 數列爲自變數,X 數列爲附變數之相關比.)

η'_{xy} 爲 X 對 Y 之校正相關比.(即以 Y 數列爲自變數,X 數列爲附變數之校正相關比.)

η_{yx} 爲 Y 對 X 之相關比.(即以 X 數列爲自變數,Y

數列爲附變數之相關比.)

η'_{yx} 爲 Y 對 X 之校正相關比.(即以 X 數列爲自變數, Y 數列爲附變數之校正相關比.)

ρ 爲用等級差異法核計之等級相關係數,讀如 *Rho*.

π 爲 3.1416.在計算異號相關時,代表 180°.在計算物價指數時,代表各比價連乘之記號.

$\pm$ 爲未確定之正或負號.

附錄五 計算用表

附表一　平方,平方根與倒數表

數	平方	平方根	倒數	數	平方	平方根	倒數
1	1	1.0000000	1.000000000	51	26 01	7.1414284	.019607843
2	4	1.4142136	.500000000	52	27 04	7.2111026	.019230769
3	9	1.7320508	.333333333	53	28 09	7.2801099	.018867925
4	16	2.0000000	.250000000	54	29 16	7.3484692	.018518519
5	25	2.2360680	.200000000	55	30 25	7.4161985	.018181818
6	36	2.4494897	.166666667	56	31 36	7.4833148	.017857143
7	49	2.6457513	.142857143	57	32 49	7.5498344	.017543860
8	64	2.8284271	.125000000	58	33 64	7.6157731	.017241379
9	81	3.0000000	.111111111	59	34 81	7.6811457	.016949153
10	1 00	3.1622777	.100000000	60	36 00	7.7459667	.016666667
11	1 21	3.3166248	.090909091	61	37 21	7.8102497	.016393443
12	1 44	3.4641016	.083333333	62	38 44	7.8740079	.016129032
13	1 69	3.6055513	.076923077	63	39 69	7.9372539	.015873016
14	1 96	3.7416574	.071428571	64	40 96	8.0000000	.015625000
15	2 25	3.8729833	.066666667	65	42 25	8.0622577	.015384615
16	2 56	4.0000000	.062500000	66	43 56	8.1240384	.015151515
17	2 89	4.1231056	.058823529	67	44 89	8.1853528	.014925373
18	3 24	4.2426407	.055555556	68	46 24	8.2462113	.014705882
19	3 61	4.3588989	.052631579	69	47 61	8.3066239	.014492754
20	4 00	4.4721360	.050000000	70	49 00	8.3666003	.014285714
21	4 41	4.5825757	.047619048	71	50 41	8.4261498	.014084507
22	4 84	4.6904158	.045454545	72	51 84	8.4852814	.013888889
23	5 29	4.7958315	.043478261	73	53 29	8.5440037	.013698630
24	5 76	4.8989795	.041666667	74	54 76	8.6023253	.013513514
25	6 25	5.0000000	.040000000	75	56 25	8.6602540	.013333333
26	6 76	5.0990195	.038461538	76	57 76	8.7177979	.013157895
27	7 29	5.1961524	.037037037	77	59 29	8.7749644	.012987013
28	7 84	5.2915026	.035714286	78	60 84	8.8317609	.012820513
29	8 41	5.3851648	.034482759	79	62 41	8.8881944	.012658228
30	9 00	5.4772256	.033333333	80	64 00	8.9442719	.012500000
31	9 61	5.5677644	.032258065	81	65 61	9.0000000	.012345679
32	10 24	5.6568542	.031250000	82	67 24	9.0553851	.012195122
33	10 89	5.7445626	.030303030	83	68 89	9.1104336	.012048193
34	11 56	5.8309519	.029411765	84	70 56	9.1651514	.011904762
35	12 25	5.9160798	.028571429	85	72 25	9.2195445	.011764706
36	12 96	6.0000000	.027777778	86	73 96	9.2736185	.011627907
37	13 69	6.0827625	.027027027	87	75 69	9.3273791	.011494253
38	14 44	6.1644140	.026315789	88	77 44	9.3808315	.011363636
39	15 21	6.2449980	.025641026	89	79 21	9.4339811	.011235955
40	16 00	6.3245553	.025000000	90	81 00	9.4868330	.011111111
41	16 81	6.4031242	.024390244	91	82 81	9.5393920	.010989011
42	17 64	6.4807407	.023809524	92	84 64	9.5916630	.010869565
43	18 49	6.5574385	.023255814	93	86 49	9.6436508	.010752688
44	19 36	6.6332496	.022727273	94	88 36	9.6953597	.010638298
45	20 25	6.7082039	.022222222	95	90 25	9.7467943	.010526316
46	21 16	6.7823300	.021739130	96	92 16	9.7979590	.010416667
47	22 09	6.8556546	.021276596	97	94 09	9.8488578	.010309278
48	23 04	6.9282032	.020833333	98	96 04	9.8994949	.010204082
49	24 01	7.0000000	.020408163	99	98 01	9.9498744	.010101010
50	25 00	7.0710678	.020000000	100	1 00 00	10.0000000	.010000000

1—100

附表一 平方,平方根與倒數表(續)

數	平方	平方根	倒數	數	平方	平方根	倒數
101	1 02 01	10.0498756	.009900990	151	2 28 01	12.2882057	.006622517
102	1 04 04	10.0995049	.009803922	152	2 31 04	12.3288280	.006578947
103	1 06 09	10.1488916	.009708738	153	2 34 09	12.3693169	.006535948
104	1 08 16	10.1980390	.009615385	154	2 37 16	12.4096736	.006493506
105	1 10 25	10.2469508	.009523810	155	2 40 25	12.4498996	.006451613
106	1 12 36	10.2956301	.009433962	156	2 43 36	12.4899960	.006410256
107	1 14 49	10.3440804	.009345794	157	2 46 49	12.5299641	.006369427
108	1 16 64	10.3923048	.009259259	158	2 49 64	12.5698051	.006329114
109	1 18 81	10.4403065	.009174312	159	2 52 81	12.6095202	.006289308
110	1 21 00	10.4880885	.009090909	160	2 56 00	12.6491106	.006250000
111	1 23 21	10.5356538	.009009009	161	2 59 21	12.6885775	.006211180
112	1 25 44	10.5830052	.008928571	162	2 62 44	12.7279221	.006172840
113	1 27 69	10.6301458	.008849558	163	2 65 69	12.7671453	.006134969
114	1 29 96	10.6770783	.008771930	164	2 68 96	12.8062485	.006097561
115	1 32 25	10.7238053	.008695652	165	2 72 25	12.8452326	.006060606
116	1 34 56	10.7703296	.008620690	166	2 75 56	12.8840987	.006024096
117	1 36 89	10.8166538	.008547009	167	2 78 89	12.9228480	.005988024
118	1 39 24	10.8627805	.008474576	168	2 82 24	12.9614814	.005952381
119	1 41 61	10.9087121	.008403361	169	2 85 61	13.0000000	.005917160
120	1 44 00	10.9544512	.008333333	170	2 89 00	13.0384048	.005882353
121	1 46 41	11.0000000	.008264463	171	2 92 41	13.0766968	.005847953
122	1 48 84	11.0453610	.008196721	172	2 95 84	13.1148770	.005813953
123	1 51 29	11.0905365	.008130081	173	2 99 29	13.1529464	.005780347
124	1 53 76	11.1355287	.008064516	174	3 02 76	13.1909060	.005747126
125	1 56 25	11.1803399	.008000000	175	3 06 25	13.2287566	.005714286
126	1 58 76	11.2249722	.007936508	176	3 09 76	13.2664992	.005681818
127	1 61 29	11.2694277	.007874016	177	3 13 29	13.3041347	.005649718
128	1 63 84	11.3137085	.007812500	178	3 16 84	13.3416641	.005617978
129	1 66 41	11.3578167	.007751938	179	3 20 41	13.3790882	.005586592
130	1 69 00	11.4017543	.007692308	180	3 24 00	13.4164079	.005555556
131	1 71 61	11.4455231	.007633588	181	3 27 61	13.4536240	.005524862
132	1 74 24	11.4891253	.007575758	182	3 31 24	13.4907376	.005494505
133	1 76 89	11.5325626	.007518797	183	3 34 89	13.5277493	.005464481
134	1 79 56	11.5758369	.007462687	184	3 38 56	13.5646600	.005434783
135	1 82 25	11.6189500	.007407407	185	3 42 25	13.6014705	.005405405
136	1 84 96	11.6619038	.007352941	186	3 45 96	13.6381817	.005376344
137	1 87 69	11.7046999	.007299270	187	3 49 69	13.6747943	.005347594
138	1 90 44	11.7473401	.007246377	188	3 53 44	13.7113092	.005319149
139	1 93 21	11.7898261	.007194245	189	3 57 21	13.7477271	.005291005
140	1 96 00	11.8321596	.007142857	190	3 61 00	13.7840488	.005263158
141	1 98 81	11.8743422	.007092199	191	3 64 81	13.8202750	.005235602
142	2 01 64	11.9163753	.007042254	192	3 68 64	13.8564065	.005208333
143	2 04 49	11.9582607	.006993007	193	3 72 49	13.8924440	.005181347
144	2 07 36	12.0000000	.006944444	194	3 76 36	13.9283883	.005154639
145	2 10 25	12.0415946	.006896552	195	3 80 25	13.9642400	.005128205
146	2 13 16	12.0830460	.006849315	196	3 84 16	14.0000000	.005102041
147	2 16 09	12.1243557	.006802721	197	3 88 09	14.0356688	.005076142
148	2 19 04	12.1655251	.006756757	198	3 92 04	14.0712473	.005050505
149	2 22 01	12.2065556	.006711409	199	3 96 01	14.1067360	.005025126
150	2 25 00	12.2474487	.006666667	200	4 00 00	14.1421356	.005000000

附表一 平方,平方根與倒數表(續)

數	平方	平方根	倒數	數	平方	平方根	倒數
201	4 04 01	14.1774469	.004975124	251	6 30 01	15.8429795	.003984064
202	4 08 04	14.2126704	.004950495	252	6 35 04	15.8745079	.003968254
203	4 12 09	14.2478068	.004926108	253	6 40 09	15.9059737	.003952569
204	4 16 16	14.2828569	.004901961	254	6 45 16	15.9373775	.003937008
205	4 20 25	14.3178211	.004878049	255	6 50 25	15.9687194	.003921569
206	4 24 36	14.3527001	.004854369	256	6 55 36	16.0000000	.003906250
207	4 28 49	14.3874946	.004830918	257	6 60 49	16.0312195	.003891051
208	4 32 64	14.4222051	.004807692	258	6 65 64	16.0623784	.003875969
209	4 36 81	14.4568323	.004784689	259	6 70 81	16.0934769	.003861004
210	4 41 00	14.4913767	.004761905	260	6 76 00	16.1245155	.003846154
211	4 45 21	14.5258390	.004739336	261	6 81 21	16.1554944	.003831418
212	4 49 44	14.5602198	.004716981	262	6 86 44	16.1864141	.003816794
213	4 53 69	14.5945195	.004694836	263	6 91 69	16.2172747	.003802281
214	4 57 96	14.6287388	.004672897	264	6 96 96	16.2480768	.003787879
215	4 62 25	14.6628783	.004651163	265	7 02 25	16.2788206	.003773585
216	4 66 56	14.6969385	.004629630	266	7 07 56	16.3095064	.003759398
217	4 70 89	14.7309199	.004608295	267	7 12 89	16.3401346	.003745318
218	4 75 24	14.7648231	.004587156	268	7 18 24	16.3707055	.003731343
219	4 79 61	14.7986486	.004566210	269	7 23 61	16.4012195	.003717472
220	4 84 00	14.8323970	.004545455	270	7 29 00	16.4316767	.003703704
221	4 88 41	14.8660687	.004524887	271	7 34 41	16.4620776	.003690037
222	4 92 84	14.8996644	.004504505	272	7 39 84	16.4924225	.003676471
223	4 97 29	14.9331845	.004484305	273	7 45 29	16.5227116	.003663004
224	5 01 76	14.9666295	.004464286	274	7 50 76	16.5529454	.003649635
225	5 06 25	15.0000000	.004444444	275	7 56 25	16.5831240	.003636364
226	5 10 76	15.0332964	.004424779	276	7 61 76	16.6132477	.003623188
227	5 15 29	15.0665192	.004405286	277	7 67 29	16.6433170	.003610108
228	5 19 84	15.0996689	.004385965	278	7 72 84	16.6733320	.003597122
229	5 24 41	15.1327460	.004366812	279	7 78 41	16.7032931	.003584229
230	5 29 00	15.1657509	.004347826	280	7 84 00	16.7332005	.003571429
231	5 33 61	15.1986842	.004329004	281	7 89 61	16.7630546	.003558719
232	5 38 24	15.2315462	.004310345	282	7 95 24	16.7928556	.003546099
233	5 42 89	15.2643375	.004291845	283	8 00 89	16.8226038	.003533569
234	5 47 56	15.2970585	.004273504	284	8 06 56	16.8522995	.003521127
235	5 52 25	15.3297097	.004255319	285	8 12 25	16.8819430	.003508772
236	5 56 96	15.3622915	.004237288	286	8 17 96	16.9115345	.003496503
237	5 61 69	15.3948043	.004219409	287	8 23 69	16.9410743	.003484321
238	5 66 44	15.4272486	.004201681	288	8 29 44	16.9705627	.003472222
239	5 71 21	15.4596248	.004184100	289	8 35 21	17.0000000	.003460208
240	5 76 00	15.4919334	.004166667	290	8 41 00	17.0293864	.003448276
241	5 80 81	15.5241747	.004149378	291	8 46 81	17.0587221	.003436426
242	5 85 64	15.5563492	.004132231	292	8 52 64	17.0880075	.003424658
243	5 90 49	15.5884573	.004115226	293	8 58 49	17.1172428	.003412969
244	5 95 36	15.6204994	.004098361	294	8 64 36	17.1464282	.003401361
245	6 00 25	15.6524758	.004081633	295	8 70 25	17.1755640	.003389831
246	6 05 16	15.6843871	.004065041	296	8 76 16	17.2046505	.003378378
247	6 10 09	15.7162336	.004048583	297	8 82 09	17.2336879	.003367003
248	6 15 04	15.7480157	.004032258	298	8 88 04	17.2626765	.003355705
249	6 20 01	15.7797338	.004016064	299	8 94 01	17.2916165	.003344482
250	6 25 00	15.8113883	.004000000	300	9 00 00	17.3205081	.003333333

附表一 平方,平方根與倒數表(續)

數	平 方	平方根	倒 數	數	平 方	平方根	倒 數
301	9 06 01	17.3493516	.003322259	351	12 32 01	18.7349940	.002849003
302	9 12 04	17.3781472	.003311258	352	12 39 04	18.7616630	.002840909
303	9 18 09	17.4068952	.003300330	353	12 46 09	18.7882942	.002832861
304	9 24 16	17.4355958	.003289474	354	12 53 16	18.8148877	.002824859
305	9 30 25	17.4642492	.003278689	355	12 60 25	18.8414437	.002816901
306	9 36 36	17.4928557	.003267974	356	12 67 36	18.8679623	.002808989
307	9 42 49	17.5214155	.003257329	357	12 74 49	18.8944436	.002801120
308	9 48 64	17.5499288	.003246753	358	12 81 64	18.9208879	.002793296
309	9 54 81	17.5783958	.003236246	359	12 88 81	18.9472953	.002785515
310	9 61 00	17.6068169	.003225806	360	12 96 00	18.9736660	.002777778
311	9 67 21	17.6351921	.003215434	361	13 03 21	19.0000000	.002770083
312	9 73 44	17.6635217	.003205128	362	13 10 44	19.0262976	.002762431
313	9 79 69	17.6918060	.003194888	363	13 17 69	19.0525589	.002754821
314	9 85 96	17.7200451	.003184713	364	13 24 96	19.0787840	.002747253
315	9 92 25	17.7482393	.003174603	365	13 32 25	19.1049732	.002739726
316	9 98 56	17.7763888	.003164557	366	13 39 56	19.1311265	.002732240
317	10 04 89	17.8044938	.003154574	367	13 46 89	19.1572441	.002724796
318	10 11 24	17.8325545	.003144654	368	13 54 24	19.1833261	.002717391
319	10 17 61	17.8605711	.003134796	369	13 61 61	19.2093727	.002710027
320	10 24 00	17.8885438	.003125000	370	13 69 00	19.2353841	.002702703
321	10 30 41	17.9164729	.003115265	371	13 76 41	19.2613603	.002695418
322	10 36 84	17.9443584	.003105590	372	13 83 84	19.2873015	.002688172
323	10 43 29	17.9722008	.003095975	373	13 91 29	19.3132079	.002680965
324	10 49 76	18.0000000	.003086420	374	13 98 76	19.3390796	.002673797
325	10 56 25	18.0277564	.003076923	375	14 06 25	19.3649167	.002666667
326	10 62 76	18.0554701	.003067485	376	14 13 76	19.3907194	.002659574
327	10 69 29	18.0831413	.003058104	377	14 21 29	19.4164878	.002652520
328	10 75 84	18.1107703	.003048780	378	14 28 84	19.4422221	.002645503
329	10 82 41	18.1383571	.003039514	379	14 36 41	19.4679223	.002638522
330	10 89 00	18.1659021	.003030303	380	14 44 00	19.4935887	.002631579
331	10 95 61	18.1934054	.003021148	381	14 51 61	19.5192213	.002624672
332	11 02 24	18.2208672	.003012048	382	14 59 24	19.5448203	.002617801
333	11 08 89	18.2482876	.003003003	383	14 66 89	19.5703858	.002610966
334	11 15 56	18.2756669	.002994012	384	14 74 56	19.5959179	.002604167
335	11 22 25	18.3030052	.002985075	385	14 82 25	19.6214169	.002597403
336	11 28 96	18.3303028	.002976190	386	14 89 96	19.6468827	.002590674
337	11 35 69	18.3575598	.002967359	387	14 97 69	19.6723156	.002583979
338	11 42 44	18.3847763	.002958580	388	15 05 44	19.6977156	.002577320
339	11 49 21	18.4119526	.002949853	389	15 13 21	19.7230829	.002570694
340	11 56 00	18.4390889	.002941176	390	15 21 00	19.7484177	.002564103
341	11 62 81	18.4661853	.002932551	391	15 28 81	19.7737199	.002557545
342	11 69 64	18.4932420	.002923977	392	15 36 64	19.7989899	.002551020
343	11 76 49	18.5202592	.002915452	393	15 44 49	19.8242276	.002544529
344	11 83 36	18.5472370	.002906977	394	15 52 36	19.8494332	.002538071
345	11 90 25	18.5741756	.002898551	395	15 60 25	19.8746069	.002531646
346	11 97 16	18.6010752	.002890173	396	15 68 16	19.8997487	.002525253
347	12 04 09	18.6279360	.002881844	397	15 76 09	19.9248588	.002518892
348	12 11 04	18.6547581	.002873563	398	15 84 04	19.9499373	.002512563
349	12 18 01	18.6815417	.002865330	399	15 92 01	19.9749844	.002506266
350	12 25 00	18.7082869	.002857143	400	16 00 00	20.0000000	.002500000

301—400

附表一 平方,平方根與倒數表(續)

數	平 方	平方根	倒 數	數	平 方	平方根	倒 數
401	16 08 01	20.0249844	.002493766	451	20 34 01	21.2367606	.002217295
402	16 16 04	20.0499377	.002487562	452	20 43 04	21.2602916	.002212389
403	16 24 09	20.0748599	.002481390	453	20 52 09	21.2837967	.002207506
404	16 32 16	20.0997512	.002475248	454	20 61 16	21.3072758	.002202643
405	16 40 25	20.1246118	.002469136	455	20 70 25	21.3307290	.002197802
406	16 48 36	20.1494417	.002463054	456	20 79 36	21.3541565	.002192982
407	16 56 49	20.1742410	.002457002	457	20 88 49	21.3775583	.002188184
408	16 64 64	20.1990099	.002450980	458	20 97 64	21.4009346	.002183406
409	16 72 81	20.2237484	.002444988	459	21 06 81	21.4242853	.002178649
410	16 81 00	20.2484567	.002439024	460	21 16 00	21.4476106	.002173913
411	16 89 21	20.2731349	.002433090	461	21 25 21	21.4709106	.002169197
412	16 97 44	20.2977831	.002427184	462	21 34 44	21.4941853	.002164502
413	17 05 69	20.3224014	.002421308	463	21 43 69	21.5174348	.002159827
414	17 13 96	20.3469899	.002415459	464	21 52 96	21.5406592	.002155172
415	17 22 25	20.3715488	.002409639	465	21 62 25	21.5638587	.002150538
416	17 30 56	20.3960781	.002403846	466	21 71 56	21.5870331	.002145923
417	17 38 89	20.4205779	.002398082	467	21 80 89	21.6101828	.002141328
418	17 47 24	20.4450483	.002392344	468	21 90 24	21.6333077	.002136752
419	17 55 61	20.4694895	.002386635	469	21 99 61	21.6564078	.002132196
420	17 64 00	20.4939015	.002380952	470	22 09 00	21.6794834	.002127660
421	17 72 41	20.5182845	.002375297	471	22 18 41	21.7025344	.002123142
422	17 80 84	20.5426386	.002369668	472	22 27 84	21.7255610	.002118644
423	17 89 29	20.5669638	.002364066	473	22 37 29	21.7485632	.002114165
424	17 97 76	20.5912603	.002358491	474	22 46 76	21.7715411	.002109705
425	18 06 25	20.6155281	.002352941	475	22 56 25	21.7944947	.002105263
426	18 14 76	20.6397674	.002347418	476	22 65 76	21.8174242	.002100840
427	18 23 29	20.6639783	.002341920	477	22 75 29	21.8403297	.002096436
428	18 31 84	20.6881609	.002336449	478	22 84 84	21.8632111	.002092050
429	18 40 41	20.7123152	.002331002	479	22 94 41	21.8860686	.002087683
430	18 49 00	20.7364414	.002325581	480	23 04 00	21.9089023	.002083333
431	18 57 61	20.7605395	.002320186	481	23 13 61	21.9317122	.002079002
432	18 66 24	20.7846097	.002314815	482	23 23 24	21.9544984	.002074689
433	18 74 89	20.8086520	.002309469	483	23 32 89	21.9772610	.002070393
434	18 83 56	20.8326667	.002304147	484	23 42 56	22.0000000	.002066116
435	18 92 25	20.8566536	.002298851	485	23 52 25	22.0227155	.002061856
436	19 00 96	20.8806130	.002293578	486	23 61 96	22.0454077	.002057613
437	19 09 69	20.9045450	.002288330	487	23 71 69	22.0680765	.002053388
438	19 18 44	20.9284495	.002283105	488	23 81 44	22.0907220	.002049180
439	19 27 21	20.9523268	.002277904	489	23 91 21	22.1133444	.002044990
440	19 36 00	20.9761770	.002272727	490	24 01 00	22.1359436	.002040816
441	19 44 81	21.0000000	.002267574	491	24 10 81	22.1585198	.002036660
442	19 53 64	21.0237960	.002262443	492	24 20 64	22.1810730	.002032520
443	19 62 49	21.0475652	.002257336	493	24 30 49	22.2036033	.002028398
444	19 71 36	21.0713075	.002252252	494	24 40 36	22.2261108	.002024291
445	19 80 25	21.0950231	.002247191	495	24 50 25	22.2485955	.002020202
446	19 89 16	21.1187121	.002242152	496	24 60 16	22.2710575	.002016129
447	19 98 09	21.1423745	.002237136	497	24 70 09	22.2934968	.002012072
448	20 07 04	21.1660105	.002232143	498	24 80 04	22.3159136	.002008032
449	20 16 01	21.1896201	.002227171	499	24 90 01	22.3383079	.002004008
450	20 25 00	21.2132034	.002222222	500	25 00 00	22.3606798	.002000000

附表一 平方,平方根與倒數表(續)

數	平方	平方根	倒數	數	平方	平方根	倒數
501	25 10 01	22.3830293	.001996008	551	30 36 01	23.4733892	.001814882
502	25 20 04	22.4053565	.001992032	552	30 47 04	23.4946802	.001811594
503	25 30 09	22.4276615	.001988072	553	30 58 09	23.5159520	.001808318
504	25 40 16	22.4499443	.001984127	554	30 69 16	23.5372046	.001805054
505	25 50 25	22.4722051	.001980198	555	30 80 25	23.5584380	.001801802
506	25 60 36	22.4944438	.001976285	556	30 91 36	23.5796522	.001798561
507	25 70 49	22.5166605	.001972387	557	31 02 49	23.6008474	.001795332
508	25 80 64	22.5388553	.001968504	558	31 13 64	23.6220236	.001792115
509	25 90 81	22.5610283	.001964637	559	31 24 81	23.6431808	.001788909
510	26 01 00	22.5831796	.001960784	560	31 36 00	23.6643191	.001785714
511	26 11 21	22.6053091	.001956947	561	31 47 21	23.6854386	.001782531
512	26 21 44	22.6274170	.001953125	562	31 58 44	23.7065392	.001779359
513	26 31 69	22.6495033	.001949318	563	31 69 69	23.7276210	.001776199
514	26 41 96	22.6715681	.001945525	564	31 80 96	23.7486842	.001773050
515	26 52 25	22.6936114	.001941748	565	31 92 25	23.7697286	.001769912
516	26 62 56	22.7156334	.001937984	566	32 03 56	23.7907545	.001766784
517	26 72 89	22.7376340	.001934236	567	32 14 89	23.8117618	.001763668
518	26 83 24	22.7596134	.001930502	568	32 26 24	23.8327506	.001760563
519	26 93 61	22.7815715	.001926782	569	32 37 61	23.8537209	.001757469
520	27 04 00	22.8035085	.001923077	570	32 49 00	23.8746728	.001754386
521	27 14 41	22.8254244	.001919386	571	32 60 41	23.8956063	.001751313
522	27 24 84	22.8473193	.001915709	572	32 71 84	23.9165215	.001748252
523	27 35 29	22.8691933	.001912046	573	32 83 29	23.9374184	.001745201
524	27 45 76	22.8910463	.001908397	574	32 94 76	23.9582971	.001742160
525	27 56 25	22.9128785	.001904762	575	33 06 25	23.9791576	.001739130
526	27 66 76	22.9346899	.001901141	576	33 17 76	24.0000000	.001736111
527	27 77 29	22.9564806	.001897533	577	33 29 29	24.0208243	.001733102
528	27 87 84	22.9782506	.001893939	578	33 40 84	24.0416306	.001730104
529	27 98 41	23.0000000	.001890359	579	33 52 41	24.0624188	.001727116
530	28 09 00	23.0217289	.001886792	580	33 64 00	24.0831891	.001724138
531	28 19 61	23.0434372	.001883239	581	33 75 61	24.1039416	.001721170
532	28 30 24	23.0651252	.001879699	582	33 87 24	24.1246762	.001718213
533	28 40 89	23.0867928	.001876173	583	33 98 89	24.1453929	.001715266
534	28 51 56	23.1084400	.001872659	584	34 10 56	24.1660919	.001712329
535	28 62 25	23.1300670	.001869159	585	34 22 25	24.1867732	.001709402
536	28 72 96	23.1516738	.001865672	586	34 33 96	24.2074369	.001706485
537	28 83 69	23.1732605	.001862197	587	34 45 69	24.2280829	.001703578
538	28 94 44	23.1948270	.001858736	588	34 57 44	24.2487113	.001700680
539	29 05 21	23.2163735	.001855288	589	34 69 21	24.2693222	.001697793
540	29 16 00	23.2379001	.001851852	590	34 81 00	24.2899156	.001694915
541	29 26 81	23.2594067	.001848429	591	34 92 81	24.3104916	.001692047
542	29 37 64	23.2808935	.001845018	592	35 04 64	24.3310501	.001689189
543	29 48 49	23.3023604	.001841621	593	35 16 49	24.3515913	.001686341
544	29 59 36	23.3238076	.001838235	594	35 28 36	24.3721152	.001683502
545	29 70 25	23.3452351	.001834862	595	35 40 25	24.3926218	.001680672
546	29 81 16	23.3666429	.001831502	596	35 52 16	24.4131112	.001677852
547	29 92 09	23.3880311	.001828154	597	35 64 09	24.4335834	.001675042
548	30 03 04	23.4093998	.001824818	598	35 76 04	24.4540385	.001672241
549	30 14 01	23.4307490	.001821494	599	35 88 01	24.4744765	.001669449
550	30 25 00	23.4520788	.001818182	600	36 00 00	24.4948974	.001666667

501—600

附表一 平方,平方根與倒數表(續)

數	平 方	平方根	倒 數	數	平 方	平方根	倒 數
601	36 12 01	24.5153013	.001663894	651	42 38 01	25.5147016	.001536098
602	36 24 04	24.5356883	.001661130	652	42 51 04	25.5342907	.001533742
603	36 36 09	24.5560583	.001658375	653	42 64 09	25.5538647	.001531394
604	36 48 16	24.5764115	.001655629	654	42 77 16	25.5734237	.001529052
605	36 60 25	24.5967478	.001652893	655	42 90 25	25.5929678	.001526718
606	36 72 36	24.6170673	.001650165	656	43 03 36	25.6124969	.001524390
607	36 84 49	24.6373700	.001647446	657	43 16 49	25.6320112	.001522070
608	36 96 64	24.6576560	.001644737	658	43 29 64	25.6515107	.001519757
609	37 08 81	24.6779254	.001642036	659	43 42 81	25.6709953	.001517451
610	37 21 00	24.6981781	.001639344	660	43 56 00	25.6904652	.001515152
611	37 33 21	24.7184142	.001636661	661	43 69 21	25.7099203	.001512859
612	37 45 44	24.7386338	.001633987	662	43 82 44	25.7293607	.001510574
613	37 57 69	24.7588368	.001631321	663	43 95 69	25.7487864	.001508296
614	37 69 96	24.7790234	.001628664	664	44 08 96	25.7681975	.001506024
615	37 82 25	24.7991935	.001626016	665	44 22 25	25.7875939	.001503759
616	37 94 56	24.8193473	.001623377	666	44 35 56	25.8069758	.001501502
617	38 06 89	24.8394847	.001620746	667	44 48 89	25.8263431	.001499250
618	38 19 24	24.8596058	.001618123	668	44 62 24	25.8456960	.001497006
619	38 31 61	24.8797106	.001615509	669	44 75 61	25.8650343	.001494768
620	38 44 00	24.8997992	.001612903	670	44 89 00	25.8843582	.001492537
621	38 56 41	24.9198716	.001610306	671	45 02 41	25.9036677	.001490313
622	38 68 84	24.9399278	.001607717	672	45 15 84	25.9229628	.001488095
623	38 81 29	24.9599679	.001605136	673	45 29 29	25.9422435	.001485884
624	38 93 76	24.9799920	.001602564	674	45 42 76	25.9615100	.001483680
625	39 06 25	25.0000000	.001600000	675	45 56 25	25.9807621	.001481481
626	39 18 76	25.0199920	.001597444	676	45 69 76	26.0000000	.001479290
627	39 31 29	25.0399681	.001594896	677	45 83 29	26.0192237	.001477105
628	39 43 84	25.0599282	.001592357	678	45 96 84	26.0384331	.001474926
629	39 56 41	25.0798724	.001589825	679	46 10 41	26.0576284	.001472754
630	39 69 00	25.0998008	.001587302	680	46 24 00	26.0768096	.001470588
631	39 81 61	25.1197134	.001584786	681	46 37 61	26.0959767	.001468429
632	39 94 24	25.1396102	.001582278	682	46 51 24	26.1151297	.001466276
633	40 06 89	25.1594913	.001579779	683	46 64 89	26.1342687	.001464129
634	40 19 56	25.1793566	.001577287	684	46 78 56	26.1533937	.001461988
635	40 32 25	25.1992063	.001574803	685	46 92 25	26.1725047	.001459854
636	40 44 96	25.2190404	.001572327	686	47 05 96	26.1916017	.001457726
637	40 57 69	25.2388589	.001569859	687	47 19 69	26.2106848	.001455604
638	40 70 44	25.2586619	.001567398	688	47 33 44	26.2297541	.001453488
639	40 83 21	25.2784493	.001564945	689	47 47 21	26.2488095	.001451379
640	40 96 00	25.2982213	.001562500	690	47 61 00	26.2678511	.001449275
641	41 08 81	25.3179778	.001560062	691	47 74 81	26.2868789	.001447178
642	41 21 64	25.3377189	.001557632	692	47 88 64	26.3058929	.001445087
643	41 34 49	25.3574447	.001555210	693	48 02 49	26.3248932	.001443001
644	41 47 36	25.3771551	.001552795	694	48 16 36	26.3438797	.001440922
645	41 60 25	25.3968502	.001550388	695	48 30 25	26.3628527	.001438849
646	41 73 16	25.4165301	.001547988	696	48 44 16	26.3818119	.001436782
647	41 86 09	25.4361947	.001545595	697	48 58 09	26.4007576	.001434720
648	41 99 04	25.4558441	.001543210	698	48 72 04	26.4196896	.001432665
649	42 12 01	25.4754784	.001540832	699	48 86 01	26.4386081	.001430615
650	42 25 00	25.4950976	.001538462	700	49 00 00	26.4575131	.001428571

601—700

附表一 平方,平方根與倒數表(續)

數	平方	平方根	倒數	數	平方	平方根	倒數
701	49 14 01	26.4764046	.001426534	751	56 40 01	27.4043792	.001331558
702	49 28 04	26.4952826	.001424501	752	56 55 04	27.4226184	.001329787
703	49 42 09	26.5141472	.001422475	753	56 70 09	27.4408455	.001328021
704	49 56 16	26.5329983	.001420455	754	56 85 16	27.4590604	.001326260
705	49 70 25	26.5518361	.001418440	755	57 00 25	27.4772633	.001324503
706	49 84 36	26.5706605	.001416431	756	57 15 36	27.4954542	.001322751
707	49 98 49	26.5894716	.001414427	757	57 30 49	27.5136330	.001321004
708	50 12 64	26.6082694	.001412429	758	57 45 64	27.5317998	.001319261
709	50 26 81	26.6270539	.001410437	759	57 60 81	27.5499546	.001317523
710	50 41 00	26.6458252	.001408451	760	57 76 00	27.5680975	.001315789
711	50 55 21	26.6645833	.001406470	761	57 91 21	27.5862284	.001314060
712	50 69 44	26.6833281	.001404494	762	58 06 44	27.6043475	.001312336
713	50 83 69	26.7020598	.001402525	763	58 21 69	27.6224546	.001310616
714	50 97 96	26.7207784	.001400560	764	58 36 96	27.6405499	.001308901
715	51 12 25	26.7394839	.001398601	765	58 52 25	27.6586334	.001307190
716	51 26 56	26.7581763	.001396648	766	58 67 56	27.6767050	.001305483
717	51 40 89	26.7768557	.001394700	767	58 82 89	27.6947648	.001303781
718	51 55 24	26.7955220	.001392758	768	58 98 24	27.7128129	.001302083
719	51 69 61	26.8141754	.001390821	769	59 13 61	27.7308492	.001300390
720	51 84 00	26.8328157	.001388889	770	59 29 00	27.7488739	.001298701
721	51 98 41	26.8514432	.001386963	771	59 44 41	27.7668868	.001297017
722	52 12 84	26.8700577	.001385042	772	59 59 84	27.7848880	.001295337
723	52 27 29	26.8886593	.001383126	773	59 75 29	27.8028775	.001293661
724	52 41 76	26.9072481	.001381215	774	59 90 76	27.8208555	.001291990
725	52 56 25	26.9258240	.001379310	775	60 06 25	27.8388218	.001290323
726	52 70 76	26.9443872	.001377410	776	60 21 76	27.8567766	.001288660
727	52 85 29	26.9629375	.001375516	777	60 37 29	27.8747197	.001287001
728	52 99 84	26.9814751	.001373626	778	60 52 84	27.8926514	.001285347
729	53 14 41	27.0000000	.001371742	779	60 68 41	27.9105715	.001283697
730	53 29 00	27.0185122	.001369863	780	60 84 00	27.9284801	.001282051
731	53 43 61	27.0370117	.001367989	781	60 99 61	27.9463772	.001280410
732	53 58 24	27.0554985	.001366120	782	61 15 24	27.9642629	.001278772
733	53 72 89	27.0739727	.001364256	783	61 30 89	27.9821372	.001277139
734	53 87 56	27.0924344	.001362398	784	61 46 56	28.0000000	.001275510
735	54 02 25	27.1108834	.001360544	785	61 62 25	28.0178515	.001273885
736	54 16 96	27.1293199	.001358696	786	61 77 96	28.0356915	.001272265
737	54 31 69	27.1477439	.001356852	787	61 93 69	28.0535203	.001270648
738	54 46 44	27.1661554	.001355014	788	62 09 44	28.0713377	.001269036
739	54 61 21	27.1845544	.001353180	789	62 25 21	28.0891438	.001267427
740	54 76 00	27.2029410	.001351351	790	62 41 00	28.1069386	.001265823
741	54 90 81	27.2213152	.001349528	791	62 56 81	28.1247222	.001264223
742	55 05 64	27.2396769	.001347709	792	62 72 64	28.1424946	.001262626
743	55 20 49	27.2580263	.001345895	793	62 88 49	28.1602557	.001261034
744	55 35 36	27.2763634	.001344086	794	63 04 36	28.1780056	.001259446
745	55 50 25	27.2946881	.001342282	795	63 20 25	28.1957444	.001257862
746	55 65 16	27.3130006	.001340483	796	63 36 16	28.2134720	.001256281
747	55 80 09	27.3313007	.001338688	797	63 52 09	28.2311884	.001254705
748	55 95 04	27.3495887	.001336898	798	63 68 04	28.2488938	.001253133
749	56 10 01	27.3678644	.001335113	799	63 84 01	28.2665881	.001251564
750	56 25 00	27.3861279	.001333333	800	64 00 00	28.2842712	.001250000

附表一　平方,平方根與倒數表(續)

數	平方	平方根	倒數	數	平方	平方根	倒數
801	64 16 01	28.3019434	.001248439	851	72 42 01	29.1719043	.001175088
802	64 32 04	28.3196045	.001246883	852	72 59 04	29.1890390	.001173709
803	64 48 09	28.3372546	.001245330	853	72 76 09	29.2061637	.001172333
804	64 64 16	28.3548938	.001243781	854	72 93 16	29.2232784	.001170960
805	64 80 25	28.3725219	.001242236	855	73 10 25	29.2403830	.001169591
806	64 96 36	28.3901391	.001240695	856	73 27 36	29.2574777	.001168224
807	65 12 49	28.4077454	.001239157	857	73 44 49	29.2745623	.001166861
808	65 28 64	28.4253408	.001237624	858	73 61 64	29.2916370	.001165501
809	65 44 81	28.4429253	.001236094	859	73 78 81	29.3087018	.001164144
810	65 61 00	28.4604989	.001234568	860	73 96 00	29.3257566	.001162791
811	65 77 21	28.4780617	.001233046	861	74 13 21	29.3428015	.001161440
812	65 93 44	28.4956137	.001231527	862	74 30 44	29.3598365	.001160093
813	66 09 69	28.5131549	.001230012	863	74 47 69	29.3768616	.001158749
814	66 25 96	28.5306852	.001228501	864	74 64 96	29.3938769	.001157407
815	66 42 25	28.5482048	.001226994	865	74 82 25	29.4108823	.001156069
816	66 58 56	28.5657137	.001225490	866	74 99 56	29.4278779	.001154734
817	66 74 89	28.5832119	.001223990	867	75 16 89	29.4448637	.001153403
818	66 91 24	28.6006993	.001222494	868	75 34 24	29.4618397	.001152074
819	67 07 61	28.6181760	.001221001	869	75 51 61	29.4788059	.001150748
820	67 24 00	28.6356421	.001219512	870	75 69 00	29.4957624	.001149425
821	67 40 41	28.6530976	.001218027	871	75 86 41	29.5127091	.001148106
822	67 56 84	28.6705424	.001216545	872	76 03 84	29.5296461	.001146789
823	67 73 29	28.6879766	.001215067	873	76 21 29	29.5465734	.001145475
824	67 89 76	28.7054002	.001213592	874	76 38 76	29.5634910	.001144165
825	68 06 25	28.7228132	.001212121	875	76 56 25	29.5803989	.001142857
826	68 22 76	28.7402157	.001210654	876	76 73 76	29.5972972	.001141553
827	68 39 29	28.7576077	.001209190	877	76 91 29	29.6141858	.001140251
828	68 55 84	28.7749891	.001207729	878	77 08 84	29.6310648	.001138952
829	68 72 41	28.7923601	.001206273	879	77 26 41	29.6479342	.001137656
830	68 89 00	28.8097206	.001204819	880	77 44 00	29.6647939	.001136364
831	69 05 61	28.8270706	.001203369	881	77 61 61	29.6816442	.001135074
832	69 22 24	28.8444102	.001201923	882	77 79 24	29.6984848	.001133787
833	69 38 89	28.8617394	.001200480	883	77 96 89	29.7153159	.001132503
834	69 55 56	28.8790582	.001199041	884	78 14 56	29.7321375	.001131222
835	69 72 25	28.8963666	.001197605	885	78 32 25	29.7489496	.001129944
836	69 88 96	28.9136646	.001196172	886	78 49 96	29.7657521	.001128668
837	70 05 69	28.9309523	.001194743	887	78 67 69	29.7825452	.001127396
838	70 22 44	28.9482297	.001193317	888	78 85 44	29.7993289	.001126126
839	70 39 21	28.9654967	.001191895	889	79 03 21	29.8161030	.001124859
840	70 56 00	28.9827535	.001190476	890	79 21 00	29.8328678	.001123596
841	70 72 81	29.0000000	.001189061	891	79 38 81	29.8496231	.001122334
842	70 89 64	29.0172363	.001187648	892	79 56 64	29.8663690	.001121076
843	71 06 49	29.0344623	.001186240	893	79 74 49	29.8831056	.001119821
844	71 23 36	29.0516781	.001184834	894	79 92 36	29.8998328	.001118568
845	71 40 25	29.0688837	.001183432	895	80 10 25	29.9165506	.001117318
846	71 57 16	29.0860791	.001182033	896	80 28 16	29.9332591	.001116071
847	71 74 09	29.1032644	.001180638	897	80 46 09	29.9499583	.001114827
848	71 91 04	29.1204396	.001179245	898	80 64 04	29.9666481	.001113586
849	72 08 01	29.1376046	.001177856	899	80 82 01	29.9833287	.001112347
850	72 25 00	29.1547595	.001176471	900	81 00 00	30.0000000	.001111111

附表一 平方,平方根與倒數表(續)

數	平 方	平方根	倒 數	數	平 方	平方根	倒 數
901	81 18 01	30.0166620	.001109878	951	90 44 01	30.8382879	.001051525
902	81 36 04	30.0333148	.001108647	952	90 63 04	30.8544972	.001050420
903	81 54 09	30.0499584	.001107420	953	90 82 09	30.8706981	.001049318
904	81 72 16	30.0665928	.001106195	954	91 01 16	30.8868904	.001048218
905	81 90 25	30.0832179	.001104972	955	91 20 25	30.9030743	.001047120
906	82 08 36	30.0998339	.001103753	956	91 39 36	30.9192497	.001046025
907	82 26 49	30.1164407	.001102536	957	91 58 49	30.9354166	.001044932
908	82 44 64	30.1330383	.001101322	958	91 77 64	30.9515751	.001043841
909	82 62 81	30.1496269	.001100110	959	91 96 81	30.9677251	.001042753
910	82 81 00	30.1662063	.001098901	960	92 16 00	30.9838668	.001041667
911	82 99 21	30.1827765	.001097695	961	92 35 21	31.0000000	.001040583
912	83 17 44	30.1993377	.001096491	962	92 54 44	31.0161248	.001039501
913	83 35 69	30.2158899	.001095290	963	92 73 69	31.0322413	.001038422
914	83 53 96	30.2324329	.001094092	964	92 92 96	31.0483494	.001037344
915	83 72 25	30.2489669	.001092896	965	93 12 25	31.0644491	.001036269
916	83 90 56	30.2654919	.001091703	966	93 31 56	31.0805405	.001035197
917	84 08 89	30.2820079	.001090513	967	93 50 89	31.0966236	.001034126
918	84 27 24	30.2985148	.001089325	968	93 70 24	31.1126984	.001033058
919	84 45 61	30.3150128	.001088139	969	93 89 61	31.1287648	.001031992
920	84 64 00	30.3315018	.001086957	970	94 09 00	31.1448230	.001030928
921	84 82 41	30.3479818	.001085776	971	94 28 41	31.1608729	.001029866
922	85 00 84	30.3644529	.001084599	972	94 47 84	31.1769145	.001028807
923	85 19 29	30.3809151	.001083424	973	94 67 29	31.1929479	.001027749
924	85 37 76	30.3973683	.001082251	974	94 86 76	31.2089731	.001026694
925	85 56 25	30.4138127	.001081081	975	95 06 25	31.2249900	.001025641
926	85 74 76	30.4302481	.001079914	976	95 25 76	31.2409987	.001024590
927	85 93 29	30.4466747	.001078749	977	95 45 29	31.2569992	.001023541
928	86 11 84	30.4630924	.001077586	978	95 64 84	31.2729915	.001022495
929	86 30 41	30.4795013	.001076426	979	95 84 41	31.2889757	.001021450
930	86 49 00	30.4959014	.001075269	980	96 04 00	31.3049517	.001020408
931	86 67 61	30.5122926	.001074114	981	96 23 61	31.3209195	.001019368
932	86 86 24	30.5286750	.001072961	982	96 43 24	31.3368792	.001018330
933	87 04 89	30.5450487	.001071811	983	96 62 89	31.3528308	.001017294
934	87 23 56	30.5614136	.001070664	984	96 82 56	31.3687743	.001016260
935	87 42 25	30.5777697	.001069519	985	97 02 25	31.3847097	.001015228
936	87 60 96	30.5941171	.001068376	986	97 21 96	31.4006369	.001014199
937	87 79 69	30.6104557	.001067236	987	97 41 69	31.4165561	.001013171
938	87 98 44	30.6267857	.001066098	988	97 61 44	31.4324673	.001012146
939	88 17 21	30.6431069	.001064963	989	97 81 21	31.4483704	.001011122
940	88 36 00	30.6594194	.001063830	990	98 01 00	31.4642654	.001010101
941	88 54 81	30.6757233	.001062699	991	98 20 81	31.4801525	.001009082
942	88 73 64	30.6920185	.001061571	992	98 40 64	31.4960315	.001008065
943	88 92 49	30.7083051	.001060445	993	98 60 49	31.5119025	.001007049
944	89 11 36	30.7245830	.001059322	994	98 80 36	31.5277655	.001006036
945	89 30 25	30.7408523	.001058201	995	99 00 25	31.5436206	.001005025
946	89 49 16	30.7571130	.001057082	996	99 20 16	31.5594677	.001004016
947	89 68 09	30.7733651	.001055966	997	99 40 09	31.5753068	.001003009
948	89 87 04	30.7896086	.001054852	998	99 60 04	31.5911380	.001002004
949	90 06 01	30.8058436	.001053741	999	99 80 01	31.6069613	.001001001
950	90 25 00	30.8220700	.001052632	1000	100 00 00	31.6227766	.001000000

附表二

對數表

(一至一〇〇〇)

數	對數	數	對數	數	對數	數	對數	數	對數
0	———	20	1.30 103	40	1.60 206	60	1.77 815	80	1.90 309
1	0.00 000	21	1.32 222	41	1.61 278	61	1.78 533	81	1.90 849
2	0.30 103	22	1.34 242	42	1.62 325	62	1.79 239	82	1.91 381
3	0.47 712	23	1.36 173	43	1.63 347	63	1.79 934	83	1.91 908
4	0.60 206	24	1.38 021	44	1.64 345	64	1.80 618	84	1.92 428
5	0.69 897	25	1.39 794	45	1.65 321	65	1.81 291	85	1.92 942
6	0.77 815	26	1.41 497	46	1.66 276	66	1.81 954	86	1.93 450
7	0.84 510	27	1.43 136	47	1.67 210	67	1.82 607	87	1.93 952
8	0.90 309	28	1.44 716	48	1.68 124	68	1.83 251	88	1.94 448
9	0.95 424	29	1.46 240	49	1.69 020	69	1.83 885	89	1.94 939
10	1.00 000	30	1.47 712	50	1.69 897	70	1.84 510	90	1.95 424
11	1.04 139	31	1.49 136	51	1.70 757	71	1.85 126	91	1.95 904
12	1.07 918	32	1.50 515	52	1.71 600	72	1.85 733	92	1.96 379
13	1.11 394	33	1.51 851	53	1.72 428	73	1.86 332	93	1.96 848
14	1.14 613	34	1.53 148	54	1.73 239	74	1.86 923	94	1.97 313
15	1.17 609	35	1.54 407	55	1.74 036	75	1.87 506	95	1.97 772
16	1.20 412	36	1.55 630	56	1.74 819	76	1.88 081	96	1.98 227
17	1.23 045	37	1.56 820	57	1.75 587	77	1.88 649	97	1.98 677
18	1.25 527	38	1.57 978	58	1.76 343	78	1.89 209	98	1.99 123
19	1.27 875	39	1.59 106	59	1.77 085	79	1.89 763	99	1.99 564
20	1.30 103	40	1.60 206	60	1.77 815	80	1.90 309	100	2.00 000

1—100

附表二 對數表(續)

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00000	00043	00087	00130	00173	00217	00260	00303	00346	00389
101	00432	00475	00518	00561	00604	00647	00689	00732	00775	00817
102	00860	00903	00945	00988	01030	01072	01115	01157	01199	01242
103	01284	01326	01368	01410	01452	01494	01536	01578	01620	01662
104	01703	01745	01787	01828	01870	01912	01953	01995	02036	02078
105	02119	02160	02202	02243	02284	02325	02366	02407	02449	02490
106	02531	02572	02612	02653	02694	02735	02776	02816	02857	02898
107	02938	02979	03019	03060	03100	03141	03181	03222	03262	03302
108	03342	03383	03423	03463	03503	03543	03583	03623	03663	03703
109	03743	03782	03822	03862	03902	03941	03981	04021	04060	04100
110	04139	04179	04218	04258	04297	04336	04376	04415	04454	04493
111	04532	04571	04610	04650	04689	04727	04766	04805	04844	04883
112	04922	04961	04999	05038	05077	05115	05154	05192	05231	05269
113	05308	05346	05385	05423	05461	05500	05538	05576	05614	05652
114	05690	05729	05767	05805	05843	05881	05918	05956	05994	06032
115	06070	06108	06145	06183	06221	06258	06296	06333	06371	06408
116	06446	06483	06521	06558	06595	06633	06670	06707	06744	06781
117	06819	06856	06893	06930	06967	07004	07041	07078	07115	07151
118	07188	07225	07262	07298	07335	07372	07408	07445	07482	07518
119	07555	07591	07628	07664	07700	07737	07773	07809	07846	07882
120	07918	07954	07990	08027	08063	08099	08135	08171	08207	08243
121	08279	08314	08350	08386	08422	08458	08493	08529	08565	08600
122	08636	08672	08707	08743	08778	08814	08849	08884	08920	08955
123	08991	09026	09061	09096	09132	09167	09202	09237	09272	09307
124	09342	09377	09412	09447	09482	09517	09552	09587	09621	09656
125	09691	09726	09760	09795	09830	09864	09899	09934	09968	10003
126	10037	10072	10106	10140	10175	10209	10243	10278	10312	10346
127	10380	10415	10449	10483	10517	10551	10585	10619	10653	10687
128	10721	10755	10789	10823	10857	10890	10924	10958	10992	11025
129	11059	11093	11126	11160	11193	11227	11261	11294	11327	11361
130	11394	11428	11461	11494	11528	11561	11594	11628	11661	11694
131	11727	11760	11793	11826	11860	11893	11926	11959	11992	12024
132	12057	12090	12123	12156	12189	12222	12254	12287	12320	12352
133	12385	12418	12450	12483	12516	12548	12581	12613	12646	12678
134	12710	12743	12775	12808	12840	12872	12905	12937	12969	13001
135	13033	13066	13098	13130	13162	13194	13226	13258	13290	13322
136	13354	13386	13418	13450	13481	13513	13545	13577	13609	13640
137	13672	13704	13735	13767	13799	13830	13862	13893	13925	13956
138	13988	14019	14051	14082	14114	14145	14176	14208	14239	14270
139	14301	14333	14364	14395	14426	14457	14489	14520	14551	14582
140	14613	14644	14675	14706	14737	14768	14799	14829	14860	14891
141	14922	14953	14983	15014	15045	15076	15106	15137	15168	15198
142	15229	15259	15290	15320	15351	15381	15412	15442	15473	15503
143	15534	15564	15594	15625	15655	15685	15715	15746	15776	15806
144	15836	15866	15897	15927	15957	15987	16017	16047	16077	16107
145	16137	16167	16197	16227	16256	16286	16316	16346	16376	16406
146	16435	16465	16495	16524	16554	16584	16613	16643	16673	16702
147	16732	16761	16791	16820	16850	16879	16909	16938	16967	16997
148	17026	17056	17085	17114	17143	17173	17202	17231	17260	17289
149	17319	17348	17377	17406	17435	17464	17493	17522	17551	17580

附表二 對數表(續)

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
150	17609	17638	17667	17696	17725	17754	17782	17811	17840	17869
151	17898	17926	17955	17984	18013	18041	18070	18099	18127	18156
152	18184	18213	18241	18270	18298	18327	18355	18384	18412	18441
153	18469	18498	18526	18554	18583	18611	18639	18667	18696	18724
154	18752	18780	18808	18837	18865	18893	18921	18949	18977	19005
155	19033	19061	19089	19117	19145	19173	19201	19229	19257	19285
156	19312	19340	19368	19396	19424	19451	19479	19507	19535	19562
157	19590	19618	19645	19673	19700	19728	19756	19783	19811	19838
158	19866	19893	19921	19948	19976	20003	20030	20058	20085	20112
159	20140	20167	20194	20222	20249	20276	20303	20330	20358	20385
160	20412	20439	20466	20493	20520	20548	20575	20602	20629	20656
161	20683	20710	20737	20763	20790	20817	20844	20871	20898	20925
162	20952	20978	21005	21032	21059	21085	21112	21139	21165	21192
163	21219	21245	21272	21299	21325	21352	21378	21405	21431	21458
164	21484	21511	21537	21564	21590	21617	21643	21669	21696	21722
165	21748	21775	21801	21827	21854	21880	21906	21932	21958	21985
166	22011	22037	22063	22089	22115	22141	22167	22194	22220	22246
167	22272	22298	22324	22350	22376	22401	22427	22453	22479	22505
168	22531	22557	22583	22608	22634	22660	22686	22712	22737	22763
169	22789	22814	22840	22866	22891	22917	22943	22968	22994	23019
170	23045	23070	23096	23121	23147	23172	23198	23223	23249	23274
171	23300	23325	23350	23376	23401	23426	23452	23477	23502	23528
172	23553	23578	23603	23629	23654	23679	23704	23729	23754	23779
173	23805	23830	23855	23880	23905	23930	23955	23980	24005	24030
174	24055	24080	24105	24130	24155	24180	24204	24229	24254	24279
175	24304	24329	24353	24378	24403	24428	24452	24477	24502	24527
176	24551	24576	24601	24625	24650	24674	24699	24724	24748	24773
177	24797	24822	24846	24871	24895	24920	24944	24969	24993	25018
178	25042	25066	25091	25115	25139	25164	25188	25212	25237	25261
179	25285	25310	25334	25358	25382	25406	25431	25455	25479	25503
180	25527	25551	25575	25600	25624	25648	25672	25696	25720	25744
181	25768	25792	25816	25840	25864	25888	25912	25935	25959	25983
182	26007	26031	26055	26079	26102	26126	26150	26174	26198	26221
183	26245	26269	26293	26316	26340	26364	26387	26411	26435	26458
184	26482	26505	26529	26553	26576	26600	26623	26647	26670	26694
185	26717	26741	26764	26788	26811	26834	26858	26881	26905	26928
186	26951	26975	26998	27021	27045	27068	27091	27114	27138	27161
187	27184	27207	27231	27254	27277	27300	27323	27346	27370	27393
188	27416	27439	27462	27485	27508	27531	27554	27577	27600	27623
189	27646	27669	27692	27715	27738	27761	27784	27807	27830	27852
190	27875	27898	27921	27944	27967	27989	28012	28035	28058	28081
191	28103	28126	28149	28171	28194	28217	28240	28262	28285	28307
192	28330	28353	28375	28398	28421	28443	28466	28488	28511	28533
193	28556	28578	28601	28623	28646	28668	28691	28713	28735	28758
194	28780	28803	28825	28847	28870	28892	28914	28937	28959	28981
195	29003	29026	29048	29070	29092	29115	29137	29159	29181	29203
196	29226	29248	29270	29292	29314	29336	29358	29380	29403	29425
197	29447	29469	29491	29513	29535	29557	29579	29601	29623	29645
198	29667	29688	29710	29732	29754	29776	29798	29820	29842	29863
199	29885	29907	29929	29951	29973	29994	30016	30038	30060	30081

附表二 對數表(續)

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
200	30103	30125	30146	30168	30190	30211	30233	30255	30276	30298
201	30320	30341	30363	30384	30406	30428	30449	30471	30492	30514
202	30535	30557	30578	30600	30621	30643	30664	30685	30707	30728
203	30750	30771	30792	30814	30835	30856	30878	30899	30920	30942
204	30963	30984	31006	31027	31048	31069	31091	31112	31133	31154
205	31175	31197	31218	31239	31260	31281	31302	31323	31345	31366
206	31387	31408	31429	31450	31471	31492	31513	31534	31555	31576
207	31597	31618	31639	31660	31681	31702	31723	31744	31765	31785
208	31806	31827	31848	31869	31890	31911	31931	31952	31973	31994
209	32015	32035	32056	32077	32098	32118	32139	32160	32181	32201
210	32222	32243	32263	32284	32305	32325	32346	32366	32387	32408
211	32428	32449	32469	32490	32510	32531	32552	32572	32593	32613
212	32634	32654	32675	32695	32715	32736	32756	32777	32797	32818
213	32838	32858	32879	32899	32919	32940	32960	32980	33001	33021
214	33041	33062	33082	33102	33122	33143	33163	33183	33203	33224
215	33244	33264	33284	33304	33325	33345	33365	33385	33405	33425
216	33445	33465	33486	33506	33526	33546	33566	33586	33606	33626
217	33646	33666	33686	33706	33726	33746	33766	33786	33806	33826
218	33846	33866	33885	33905	33925	33945	33965	33985	34005	34025
219	34044	34064	34084	34104	34124	34143	34163	34183	34203	34223
220	34242	34262	34282	34301	34321	34341	34361	34380	34400	34420
221	34439	34459	34479	34498	34518	34537	34557	34577	34596	34616
222	34635	34655	34674	34694	34713	34733	34753	34772	34792	34811
223	34830	34850	34869	34889	34908	34928	34947	34967	34986	35005
224	35025	35044	35064	35083	35102	35122	35141	35160	35180	35199
225	35218	35238	35257	35276	35295	35315	35334	35353	35372	35392
226	35411	35430	35449	35468	35488	35507	35526	35545	35564	35583
227	35603	35622	35641	35660	35679	35698	35717	35736	35755	35774
228	35793	35813	35832	35851	35870	35889	35908	35927	35946	35965
229	35984	36003	36021	36040	36059	36078	36097	36116	36135	36154
230	36173	36192	36211	36229	36248	36267	36286	36305	36324	36342
231	36361	36380	36399	36418	36436	36455	36474	36493	36511	36530
232	36549	36568	36586	36605	36624	36642	36661	36680	36698	36717
233	36736	36754	36773	36791	36810	36829	36847	36866	36884	36903
234	36922	36940	36959	36977	36996	37014	37033	37051	37070	37088
235	37107	37125	37144	37162	37181	37199	37218	37236	37254	37273
236	37291	37310	37328	37346	37365	37383	37401	37420	37438	37457
237	37475	37493	37511	37530	37548	37566	37585	37603	37621	37639
238	37658	37676	37694	37712	37731	37749	37767	37785	37803	37822
239	37840	37858	37876	37894	37912	37931	37949	37967	37985	38003
240	38021	38039	38057	38075	38093	38112	38130	38148	38166	38184
241	38202	38220	38238	38256	38274	38292	38310	38328	38346	38364
242	38382	38399	38417	38435	38453	38471	38489	38507	38525	38543
243	38561	38578	38596	38614	38632	38650	38668	38686	38703	38721
244	38739	38757	38775	38792	38810	38828	38846	38863	38881	38899
245	38917	38934	38952	38970	38987	39005	39023	39041	39058	39076
246	39094	39111	39129	39146	39164	39182	39199	39217	39235	39252
247	39270	39287	39305	39322	39340	39358	39375	39393	39410	39428
248	39445	39463	39480	39498	39515	39533	39550	39568	39585	39602
249	39620	39637	39655	39672	39690	39707	39724	39742	39759	39777

附表二　對數表(續)

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
250	39794	39811	39829	39846	39863	39881	39898	39915	39933	39950
251	39967	39985	40002	40019	40037	40054	40071	40088	40106	40123
252	40140	40157	40175	40192	40209	40226	40243	40261	40278	40295
253	40312	40329	40346	40364	40381	40398	40415	40432	40449	40466
254	40483	40500	40518	40535	40552	40569	40586	40603	40620	40637
255	40654	40671	40688	40705	40722	40739	40756	40773	40790	40807
256	40824	40841	40858	40875	40892	40909	40926	40943	40960	40976
257	40993	41010	41027	41044	41061	41078	41095	41111	41128	41145
258	41162	41179	41196	41212	41229	41246	41263	41280	41296	41313
259	41330	41347	41363	41380	41397	41414	41430	41447	41464	41481
260	41497	41514	41531	41547	41564	41581	41597	41614	41631	41647
261	41664	41681	41697	41714	41731	41747	41764	41780	41797	41814
262	41830	41847	41863	41880	41896	41913	41929	41946	41963	41979
263	41996	42012	42029	42045	42062	42078	42095	42111	42127	42144
264	42160	42177	42193	42210	42226	42243	42259	42275	42292	42308
265	42325	42341	42357	42374	42390	42406	42423	42439	42455	42472
266	42488	42504	42521	42537	42553	42570	42586	42602	42619	42635
267	42651	42667	42684	42700	42716	42732	42749	42765	42781	42797
268	42813	42830	42846	42862	42878	42894	42911	42927	42943	42959
269	42975	42991	43008	43024	43040	43056	43072	43088	43104	43120
270	43136	43152	43169	43185	43201	43217	43233	43249	43265	43281
271	43297	43313	43329	43345	43361	43377	43393	43409	43425	43441
272	43457	43473	43489	43505	43521	43537	43553	43569	43584	43600
273	43616	43632	43648	43664	43680	43696	43712	43727	43743	43759
274	43775	43791	43807	43823	43838	43854	43870	43886	43902	43917
275	43933	43949	43965	43981	43996	44012	44028	44044	44059	44075
276	44091	44107	44122	44138	44154	44170	44185	44201	44217	44232
277	44248	44264	44279	44295	44311	44326	44342	44358	44373	44389
278	44404	44420	44436	44451	44467	44483	44498	44514	44529	44545
279	44560	44576	44592	44607	44623	44638	44654	44669	44685	44700
280	44716	44731	44747	44762	44778	44793	44809	44824	44840	44855
281	44871	44886	44902	44917	44932	44948	44963	44979	44994	45010
282	45025	45040	45056	45071	45086	45102	45117	45133	45148	45163
283	45179	45194	45209	45225	45240	45255	45271	45286	45301	45317
284	45332	45347	45362	45378	45393	45408	45423	45439	45454	45469
285	45484	45500	45515	45530	45545	45561	45576	45591	45606	45621
286	45637	45652	45667	45682	45697	45712	45728	45743	45758	45773
287	45788	45803	45818	45834	45849	45864	45879	45894	45909	45924
288	45939	45954	45969	45984	46000	46015	46030	46045	46060	46075
289	46090	46105	46120	46135	46150	46165	46180	46195	46210	46225
290	46240	46255	46270	46285	46300	46315	46330	46345	46359	46374
291	46389	46404	46419	46434	46449	46464	46479	46494	46509	46523
292	46538	46553	46568	46583	46598	46613	46627	46642	46657	46672
293	46687	46702	46716	46731	46746	46761	46776	46790	46805	46820
294	46835	46850	46864	46879	46894	46909	46923	46938	46953	46967
295	46982	46997	47012	47026	47041	47056	47070	47085	47100	47114
296	47129	47144	47159	47173	47188	47202	47217	47232	47246	47261
297	47276	47290	47305	47319	47334	47349	47363	47378	47392	47407
298	47422	47436	47451	47465	47480	47494	47509	47524	47538	47553
299	47567	47582	47596	47611	47625	47640	47654	47669	47683	47698

附表二 對數表(續)

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
300	47712	47727	47741	47756	47770	47784	47799	47813	47828	47842
301	47857	47871	47885	47900	47914	47929	47943	47958	47972	47986
302	48001	48015	48029	48044	48058	48073	48087	48101	48116	48130
303	48144	48159	48173	48187	48202	48216	48230	48244	48259	48273
304	48287	48302	48316	48330	48344	48359	48373	48387	48401	48416
305	48430	48444	48458	48473	48487	48501	48515	48530	48544	48558
306	48572	48586	48601	48615	48629	48643	48657	48671	48686	48700
307	48714	48728	48742	48756	48770	48785	48799	48813	48827	48841
308	48855	48869	48883	48897	48911	48926	48940	48954	48968	48982
309	48996	49010	49024	49038	49052	49066	49080	49094	49108	49122
310	49136	49150	49164	49178	49192	49206	49220	49234	49248	49262
311	49276	49290	49304	49318	49332	49346	49360	49374	49388	49402
312	49415	49429	49443	49457	49471	49485	49499	49513	49527	49541
313	49554	49568	49582	49596	49610	49624	49638	49651	49665	49679
314	49693	49707	49721	49734	49748	49762	49776	49790	49803	49817
315	49831	49845	49859	49872	49886	49900	49914	49927	49941	49955
316	49969	49982	49996	50010	50024	50037	50051	50065	50079	50092
317	50106	50120	50133	50147	50161	50174	50188	50202	50215	50229
318	50243	50256	50270	50284	50297	50311	50325	50338	50352	50365
319	50379	50393	50406	50420	50433	50447	50461	50474	50488	50501
320	50515	50529	50542	50556	50569	50583	50596	50610	50623	50637
321	50651	50664	50678	50691	50705	50718	50732	50745	50759	50772
322	50786	50799	50813	50826	50840	50853	50866	50880	50893	50907
323	50920	50934	50947	50961	50974	50987	51001	51014	51028	51041
324	51055	51068	51081	51095	51108	51121	51135	51148	51162	51175
325	51188	51202	51215	51228	51242	51255	51268	51282	51295	51308
326	51322	51335	51348	51362	51375	51388	51402	51415	51428	51441
327	51455	51468	51481	51495	51508	51521	51534	51548	51561	51574
328	51587	51601	51614	51627	51640	51654	51667	51680	51693	51706
329	51720	51733	51746	51759	51772	51786	51799	51812	51825	51838
330	51851	51865	51878	51891	51904	51917	51930	51943	51957	51970
331	51983	51996	52009	52022	52035	52048	52061	52075	52088	52101
332	52114	52127	52140	52153	52166	52179	52192	52205	52218	52231
333	52244	52257	52270	52284	52297	52310	52323	52336	52349	52362
334	52375	52388	52401	52414	52427	52440	52453	52466	52479	52492
335	52504	52517	52530	52543	52556	52569	52582	52595	52608	52621
336	52634	52647	52660	52673	52686	52699	52711	52724	52737	52750
337	52763	52776	52789	52802	52815	52827	52840	52853	52866	52879
338	52892	52905	52917	52930	52943	52956	52969	52982	52994	53007
339	53020	53033	53046	53058	53071	53084	53097	53110	53122	53135
340	53148	53161	53173	53186	53199	53212	53224	53237	53250	53263
341	53275	53288	53301	53314	53326	53339	53352	53364	53377	53390
342	53403	53415	53428	53441	53453	53466	53479	53491	53504	53517
343	53529	53542	53555	53567	53580	53593	53605	53618	53631	53643
344	53656	53668	53681	53694	53706	53719	53732	53744	53757	53769
345	53782	53794	53807	53820	53832	53845	53857	53870	53882	53895
346	53908	53920	53933	53945	53958	53970	53983	53995	54008	54020
347	54033	54045	54058	54070	54083	54095	54108	54120	54133	54145
348	54158	54170	54183	54195	54208	54220	54233	54245	54258	54270
349	54283	54295	54307	54320	54332	54345	54357	54370	54382	54394

附表二 對數表（續）

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
350	54407	54419	54432	54444	54456	54469	54481	54494	54506	54518
351	54531	54543	54555	54568	54580	54593	54605	54617	54630	54642
352	54654	54667	54679	54691	54704	54716	54728	54741	54753	54765
353	54777	54790	54802	54814	54827	54839	54851	54864	54876	54888
354	54900	54913	54925	54937	54949	54962	54974	54986	54998	55011
355	55023	55035	55047	55060	55072	55084	55096	55108	55121	55133
356	55145	55157	55169	55182	55194	55206	55218	55230	55242	55255
357	55267	55279	55291	55303	55315	55328	55340	55352	55364	55376
358	55388	55400	55413	55425	55437	55449	55461	55473	55485	55497
359	55509	55522	55534	55546	55558	55570	55582	55594	55606	55618
360	55630	55642	55654	55666	55678	55691	55703	55715	55727	55739
361	55751	55763	55775	55787	55799	55811	55823	55835	55847	55859
362	55871	55883	55895	55907	55919	55931	55943	55955	55967	55979
363	55991	56003	56015	56027	56038	56050	56062	56074	56086	56098
364	56110	56122	56134	56146	56158	56170	56182	56194	56205	56217
365	56229	56241	56253	56265	56277	56289	56301	56312	56324	56336
366	56348	56360	56372	56384	56396	56407	56419	56431	56443	56455
367	56467	56478	56490	56502	56514	56526	56538	56549	56561	56573
368	56585	56597	56608	56620	56632	56644	56656	56667	56679	56691
369	56703	56714	56726	56738	56750	56761	56773	56785	56797	56808
370	56820	56832	56844	56855	56867	56879	56891	56902	56914	56926
371	56937	56949	56961	56972	56984	56996	57008	57019	57031	57043
372	57054	57066	57078	57089	57101	57113	57124	57136	57148	57159
373	57171	57183	57194	57206	57217	57229	57241	57252	57264	57276
374	57287	57299	57310	57322	57334	57345	57357	57368	57380	57392
375	57403	57415	57426	57438	57449	57461	57473	57484	57496	57507
376	57519	57530	57542	57553	57565	57576	57588	57600	57611	57623
377	57634	57646	57657	57669	57680	57692	57703	57715	57726	57738
378	57749	57761	57772	57784	57795	57807	57818	57830	57841	57852
379	57864	57875	57887	57898	57910	57921	57933	57944	57955	57967
380	57978	57990	58001	58013	58024	58035	58047	58058	58070	58081
381	58092	58104	58115	58127	58138	58149	58161	58172	58184	58195
382	58206	58218	58229	58240	58252	58263	58274	58286	58297	58309
383	58320	58331	58343	58354	58365	58377	58388	58399	58410	58422
384	58433	58444	58456	58467	58478	58490	58501	58512	58524	58535
385	58546	58557	58569	58580	58591	58602	58614	58625	58636	58647
386	58659	58670	58681	58692	58704	58715	58726	58737	58749	58760
387	58771	58782	58794	58805	58816	58827	58838	58850	58861	58872
388	58883	58894	58906	58917	58928	58939	58950	58961	58973	58984
389	58995	59006	59017	59028	59040	59051	59062	59073	59084	59095
390	59106	59118	59129	59140	59151	59162	59173	59184	59195	59207
391	59218	59229	59240	59251	59262	59273	59284	59295	59306	59318
392	59329	59340	59351	59362	59373	59384	59395	59406	59417	59428
393	59439	59450	59461	59472	59483	59494	59506	59517	59528	59539
394	59550	59561	59572	59583	59594	59605	59616	59627	59638	59649
395	59660	59671	59682	59693	59704	59715	59726	59737	59748	59759
396	59770	59780	59791	59802	59813	59824	59835	59846	59857	59868
397	59879	59890	59901	59912	59923	59934	59945	59956	59966	59977
398	59988	59999	60010	60021	60032	60043	60054	60065	60076	60086
399	60097	60108	60119	60130	60141	60152	60163	60173	60184	60195

附表二 對數表(續)

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
400	60206	60217	60228	60239	60249	60260	60271	60282	60293	60304
401	60314	60325	60336	60347	60358	60369	60379	60390	60401	60412
402	60423	60433	60444	60455	60466	60477	60487	60498	60509	60520
403	60531	60541	60552	60563	60574	60584	60595	60606	60617	60627
404	60638	60649	60660	60670	60681	60692	60703	60713	60724	60735
405	60746	60756	60767	60778	60788	60799	60810	60821	60831	60842
406	60853	60863	60874	60885	60895	60906	60917	60927	60938	60949
407	60959	60970	60981	60991	61002	61013	61023	61034	61045	61055
408	61066	61077	61087	61098	61109	61119	61130	61140	61151	61162
409	61172	61183	61194	61204	61215	61225	61236	61247	61257	61268
410	61278	61289	61300	61310	61321	61331	61342	61352	61363	61374
411	61384	61395	61405	61416	61426	61437	61448	61458	61469	61479
412	61490	61500	61511	61521	61532	61542	61553	61563	61574	61584
413	61595	61606	61616	61627	61637	61648	61658	61669	61679	61690
414	61700	61711	61721	61731	61742	61752	61763	61773	61784	61794
415	61805	61815	61826	61836	61847	61857	61868	61878	61888	61899
416	61909	61920	61930	61941	61951	61962	61972	61982	61993	62003
417	62014	62024	62034	62045	62055	62066	62076	62086	62097	62107
418	62118	62128	62138	62149	62159	62170	62180	62190	62201	62211
419	62221	62232	62242	62252	62263	62273	62284	62294	62304	62315
420	62325	62335	62346	62356	62366	62377	62387	62397	62408	62418
421	62428	62439	62449	62459	62469	62480	62490	62500	62511	62521
422	62531	62542	62552	62562	62572	62583	62593	62603	62613	62624
423	62634	62644	62655	62665	62675	62685	62696	62706	62716	62726
424	62737	62747	62757	62767	62778	62788	62798	62808	62818	62829
425	62839	62849	62859	62870	62880	62890	62900	62910	62921	62931
426	62941	62951	62961	62972	62982	62992	63002	63012	63022	63033
427	63043	63053	63063	63073	63083	63094	63104	63114	63124	63134
428	63144	63155	63165	63175	63185	63195	63205	63215	63225	63236
429	63246	63256	63266	63276	63286	63296	63306	63317	63327	63337
430	63347	63357	63367	63377	63387	63397	63407	63417	63428	63438
431	63448	63458	63468	63478	63488	63498	63508	63518	63528	63538
432	63548	63558	63568	63579	63589	63599	63609	63619	63629	63639
433	63649	63659	63669	63679	63689	63699	63709	63719	63729	63739
434	63749	63759	63769	63779	63789	63799	63809	63819	63829	63839
435	63849	63859	63869	63879	63889	63899	63909	63919	63929	63939
436	63949	63959	63969	63979	63988	63998	64008	64018	64028	64038
437	64048	64058	64068	64078	64088	64098	64108	64118	64128	64137
438	64147	64157	64167	64177	64187	64197	64207	64217	64227	64237
439	64246	64256	64266	64276	64286	64296	64306	64316	64326	64335
440	64345	64355	64365	64375	64385	64395	64404	64414	64424	64434
441	64444	64454	64464	64473	64483	64493	64503	64513	64523	64532
442	64542	64552	64562	64572	64582	64591	64601	64611	64621	64631
443	64640	64650	64660	64670	64680	64689	64699	64709	64719	64729
444	64738	64748	64758	64768	64777	64787	64797	64807	64816	64826
445	64836	64846	64856	64865	64875	64885	64895	64904	64914	64924
446	64933	64943	64953	64963	64972	64982	64992	65002	65011	65021
447	65031	65040	65050	65060	65070	65079	65089	65099	65108	65118
448	65128	65137	65147	65157	65167	65176	65186	65196	65205	65215
449	65225	65234	65244	65254	65263	65273	65283	65292	65302	65312

附表二　對數表（續）

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
450	65321	65331	65341	65350	65360	65369	65379	65389	65398	65408
451	65418	65427	65437	65447	65456	65466	65475	65485	65495	65504
452	65514	65523	65533	65543	65552	65562	65571	65581	65591	65600
453	65610	65619	65629	65639	65648	65658	65667	65677	65686	65696
454	65706	65715	65725	65734	65744	65753	65763	65772	65782	65792
455	65801	65811	65820	65830	65839	65849	65858	65868	65877	65887
456	65896	65906	65916	65925	65935	65944	65954	65963	65973	65982
457	65992	66001	66011	66020	66030	66039	66049	66058	66068	66077
458	66087	66096	66106	66115	66124	66134	66143	66153	66162	66172
459	66181	66191	66200	66210	66219	66229	66238	66247	66257	66266
460	66276	66285	66295	66304	66314	66323	66332	66342	66351	66361
461	66370	66380	66389	66398	66408	66417	66427	66436	66445	66455
462	66464	66474	66483	66492	66502	66511	66521	66530	66539	66549
463	66558	66567	66577	66586	66596	66605	66614	66624	66633	66642
464	66652	66661	66671	66680	66689	66699	66708	66717	66727	66736
465	66745	66755	66764	66773	66783	66792	66801	66811	66820	66829
466	66839	66848	66857	66867	66876	66885	66894	66904	66913	66922
467	66932	66941	66950	66960	66969	66978	66987	66997	67006	67015
468	67025	67034	67043	67052	67062	67071	67080	67089	67099	67108
469	67117	67127	67136	67145	67154	67164	67173	67182	67191	67201
470	67210	67219	67228	67237	67247	67256	67265	67274	67284	67293
471	67302	67311	67321	67330	67339	67348	67357	67367	67376	67385
472	67394	67403	67413	67422	67431	67440	67449	67459	67468	67477
473	67486	67495	67504	67514	67523	67532	67541	67550	67560	67569
474	67578	67587	67596	67605	67614	67624	67633	67642	67651	67660
475	67669	67679	67688	67697	67706	67715	67724	67733	67742	67752
476	67761	67770	67779	67788	67797	67806	67815	67825	67834	67843
477	67852	67861	67870	67879	67888	67897	67906	67916	67925	67934
478	67943	67952	67961	67970	67979	67988	67997	68006	68015	68024
479	68034	68043	68052	68061	68070	68079	68088	68097	68106	68115
480	68124	68133	68142	68151	68160	68169	68178	68187	68196	68205
481	68215	68224	68233	68242	68251	68260	68269	68278	68287	68296
482	68305	68314	68323	68332	68341	68350	68359	68368	68377	68386
483	68395	68404	68413	68422	68431	68440	68449	68458	68467	68476
484	68485	68494	68502	68511	68520	68529	68538	68547	68556	68565
485	68574	68583	68592	68601	68610	68619	68628	68637	68646	68655
486	68664	68673	68681	68690	68699	68708	68717	68726	68735	68744
487	68753	68762	68771	68780	68789	68797	68806	68815	68824	68833
488	68842	68851	68860	68869	68878	68886	68895	68904	68913	68922
489	68931	68940	68949	68958	68966	68975	68984	68993	69002	69011
490	69020	69028	69037	69046	69055	69064	69073	69082	69090	69099
491	69108	69117	69126	69135	69144	69152	69161	69170	69179	69188
492	69197	69205	69214	69223	69232	69241	69249	69258	69267	69276
493	69285	69294	69302	69311	69320	69329	69338	69346	69355	69364
494	69373	69381	69390	69399	69408	69417	69425	69434	69443	69452
495	69461	69469	69478	69487	69496	69504	69513	69522	69531	69539
496	69548	69557	69566	69574	69583	69592	69601	69609	69618	69627
497	69636	69644	69653	69662	69671	69679	69688	69697	69705	69714
498	69723	69732	69740	69749	69758	69767	69775	69784	69793	69801
499	69810	69819	69827	69836	69845	69854	69862	69871	69880	69888

附表二 對數表(續)

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	69897	69906	69914	69923	69932	69940	69949	69958	69966	69975
501	69984	69992	70001	70010	70018	70027	70036	70044	70053	70062
502	70070	70079	70088	70096	70105	70114	70122	70131	70140	70148
503	70157	70165	70174	70183	70191	70200	70209	70217	70226	70234
504	70243	70252	70260	70269	70278	70286	70295	70303	70312	70321
505	70329	70338	70346	70355	70364	70372	70381	70389	70398	70406
506	70415	70424	70432	70441	70449	70458	70467	70475	70484	70492
507	70501	70509	70518	70526	70535	70544	70552	70561	70569	70578
508	70586	70595	70603	70612	70621	70629	70638	70646	70655	70663
509	70672	70680	70689	70697	70706	70714	70723	70731	70740	70749
510	70757	70766	70774	70783	70791	70800	70808	70817	70825	70834
511	70842	70851	70859	70868	70876	70885	70893	70902	70910	70919
512	70927	70935	70944	70952	70961	70969	70978	70986	70995	71003
513	71012	71020	71029	71037	71046	71054	71063	71071	71079	71088
514	71096	71105	71113	71122	71130	71139	71147	71155	71164	71172
515	71181	71189	71198	71206	71214	71223	71231	71240	71248	71257
516	71265	71273	71282	71290	71299	71307	71315	71324	71332	71341
517	71349	71357	71366	71374	71383	71391	71399	71408	71416	71425
518	71433	71441	71450	71458	71466	71475	71483	71492	71500	71508
519	71517	71525	71533	71542	71550	71559	71567	71575	71584	71592
520	71600	71609	71617	71625	71634	71642	71650	71659	71667	71675
521	71684	71692	71700	71709	71717	71725	71734	71742	71750	71759
522	71767	71775	71784	71792	71800	71809	71817	71825	71834	71842
523	71850	71858	71867	71875	71883	71892	71900	71908	71917	71925
524	71933	71941	71950	71958	71966	71975	71983	71991	71999	72008
525	72016	72024	72032	72041	72049	72057	72066	72074	72082	72090
526	72099	72107	72115	72123	72132	72140	72148	72156	72165	72173
527	72181	72189	72198	72206	72214	72222	72230	72239	72247	72255
528	72263	72272	72280	72288	72296	72304	72313	72321	72329	72337
529	72346	72354	72362	72370	72378	72387	72395	72403	72411	72419
530	72428	72436	72444	72452	72460	72469	72477	72485	72493	72501
531	72509	72518	72526	72534	72542	72550	72558	72567	72575	72583
532	72591	72599	72607	72616	72624	72632	72640	72648	72656	72665
533	72673	72681	72689	72697	72705	72713	72722	72730	72738	72746
534	72754	72762	72770	72779	72787	72795	72803	72811	72819	72827
535	72835	72843	72852	72860	72868	72876	72884	72892	72900	72908
536	72916	72925	72933	72941	72949	72957	72965	72973	72981	72989
537	72997	73006	73014	73022	73030	73038	73046	73054	73062	73070
538	73078	73086	73094	73102	73111	73119	73127	73135	73143	73151
539	73159	73167	73175	73183	73191	73199	73207	73215	73223	73231
540	73239	73247	73255	73263	73272	73280	73288	73296	73304	73312
541	73320	73328	73336	73344	73352	73360	73368	73376	73384	73392
542	73400	73408	73416	73424	73432	73440	73448	73456	73464	73472
543	73480	73488	73496	73504	73512	73520	73528	73536	73544	73552
544	73560	73568	73576	73584	73592	73600	73608	73616	73624	73632
545	73640	73648	73656	73664	73672	73679	73687	73695	73703	73711
546	73719	73727	73735	73743	73751	73759	73767	73775	73783	73791
547	73799	73807	73815	73823	73830	73838	73846	73854	73862	73870
548	73878	73886	73894	73902	73910	73918	73926	73933	73941	73949
549	73957	73965	73973	73981	73989	73997	74005	74013	74020	74028

附表二 對數表（續）

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
550	74036	74044	74052	74060	74068	74076	74084	74092	74099	74107
551	74115	74123	74131	74139	74147	74155	74162	74170	74178	74186
552	74194	74202	74210	74218	74225	74233	74241	74249	74257	74265
553	74273	74280	74288	74296	74304	74312	74320	74327	74335	74343
554	74351	74359	74367	74374	74382	74390	74398	74406	74414	74421
555	74429	74437	74445	74453	74461	74468	74476	74484	74492	74500
556	74507	74515	74523	74531	74539	74547	74554	74562	74570	74578
557	74586	74593	74601	74609	74617	74624	74632	74640	74648	74656
558	74663	74671	74679	74687	74695	74702	74710	74718	74726	74733
559	74741	74749	74757	74764	74772	74780	74788	74796	74803	74811
560	74819	74827	74834	74842	74850	74858	74865	74873	74881	74889
561	74896	74904	74912	74920	74927	74935	74943	74950	74958	74966
562	74974	74981	74989	74997	75005	75012	75020	75028	75035	75043
563	75051	75059	75066	75074	75082	75089	75097	75105	75113	75120
564	75128	75136	75143	75151	75159	75166	75174	75182	75189	75197
565	75205	75213	75220	75228	75236	75243	75251	75259	75266	75274
566	75282	75289	75297	75305	75312	75320	75328	75335	75343	75351
567	75358	75366	75374	75381	75389	75397	75404	75412	75420	75427
568	75435	75442	75450	75458	75465	75473	75481	75488	75496	75504
569	75511	75519	75526	75534	75542	75549	75557	75565	75572	75580
570	75587	75595	75603	75610	75618	75626	75633	75641	75648	75656
571	75664	75671	75679	75686	75694	75702	75709	75717	75724	75732
572	75740	75747	75755	75762	75770	75778	75785	75793	75800	75808
573	75815	75823	75831	75838	75846	75853	75861	75868	75876	75884
574	75891	75899	75906	75914	75921	75929	75937	75944	75952	75959
575	75967	75974	75982	75989	75997	76005	76012	76020	76027	76035
576	76042	76050	76057	76065	76072	76080	76087	76095	76103	76110
577	76118	76125	76133	76140	76148	76155	76163	76170	76178	76185
578	76193	76200	76208	76215	76223	76230	76238	76245	76253	76260
579	76268	76275	76283	76290	76298	76305	76313	76320	76328	76335
580	76343	76350	76358	76365	76373	76380	76388	76395	76403	76410
581	76418	76425	76433	76440	76448	76455	76462	76470	76477	76485
582	76492	76500	76507	76515	76522	76530	76537	76545	76552	76559
583	76567	76574	76582	76589	76597	76604	76612	76619	76626	76634
584	76641	76649	76656	76664	76671	76678	76686	76693	76701	76708
585	76716	76723	76730	76738	76745	76753	76760	76768	76775	76782
586	76790	76797	76805	76812	76819	76827	76834	76842	76849	76856
587	76864	76871	76879	76886	76893	76901	76908	76916	76923	76930
588	76938	76945	76953	76960	76967	76975	76982	76989	76997	77004
589	77012	77019	77026	77034	77041	77048	77056	77063	77070	77078
590	77085	77093	77100	77107	77115	77122	77129	77137	77144	77151
591	77159	77166	77173	77181	77188	77195	77203	77210	77217	77225
592	77232	77240	77247	77254	77262	77269	77276	77283	77291	77298
593	77305	77313	77320	77327	77335	77342	77349	77357	77364	77371
594	77379	77386	77393	77401	77408	77415	77422	77430	77437	77444
595	77452	77459	77466	77474	77481	77488	77495	77503	77510	77517
596	77525	77532	77539	77546	77554	77561	77568	77576	77583	77590
597	77597	77605	77612	77619	77627	77634	77641	77648	77656	77663
598	77670	77677	77685	77692	77699	77706	77714	77721	77728	77735
599	77743	77750	77757	77764	77772	77779	77786	77793	77801	77808

附表二 對數表（續）

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
600	77815	77822	77830	77837	77844	77851	77859	77866	77873	77880
601	77887	77895	77902	77909	77916	77924	77931	77938	77945	77952
602	77960	77967	77974	77981	77988	77996	78003	78010	78017	78025
603	78032	78039	78046	78053	78061	78068	78075	78082	78089	78097
604	78104	78111	78118	78125	78132	78140	78147	78154	78161	78168
605	78176	78183	78190	78197	78204	78211	78219	78226	78233	78240
606	78247	78254	78262	78269	78276	78283	78290	78297	78305	78312
607	78319	78326	78333	78340	78347	78355	78362	78369	78376	78383
608	78390	78398	78405	78412	78419	78426	78433	78440	78447	78455
609	78462	78469	78476	78483	78490	78497	78504	78512	78519	78526
610	78533	78540	78547	78554	78561	78569	78576	78583	78590	78597
611	78604	78611	78618	78625	78633	78640	78647	78654	78661	78668
612	78675	78682	78689	78696	78704	78711	78718	78725	78732	78739
613	78746	78753	78760	78767	78774	78781	78789	78796	78803	78810
614	78817	78824	78831	78838	78845	78852	78859	78866	78873	78880
615	78888	78895	78902	78909	78916	78923	78930	78937	78944	78951
616	78958	78965	78972	78979	78986	78993	79000	79007	79014	79021
617	79029	79036	79043	79050	79057	79064	79071	79078	79085	79092
618	79099	79106	79113	79120	79127	79134	79141	79148	79155	79162
619	79169	79176	79183	79190	79197	79204	79211	79218	79225	79232
620	79239	79246	79253	79260	79267	79274	79281	79288	79295	79302
621	79309	79316	79323	79330	79337	79344	79351	79358	79365	79372
622	79379	79386	79393	79400	79407	79414	79421	79428	79435	79442
623	79449	79456	79463	79470	79477	79484	79491	79498	79505	79511
624	79518	79525	79532	79539	79546	79553	79560	79567	79574	79581
625	79588	79595	79602	79609	79616	79623	79630	79637	79644	79650
626	79657	79664	79671	79678	79685	79692	79699	79706	79713	79720
627	79727	79734	79741	79748	79754	79761	79768	79775	79782	79789
628	79796	79803	79810	79817	79824	79831	79837	79844	79851	79858
629	79865	79872	79879	79886	79893	79900	79906	79913	79920	79927
630	79934	79941	79948	79955	79962	79969	79975	79982	79989	79996
631	80003	80010	80017	80024	80030	80037	80044	80051	80058	80065
632	80072	80079	80085	80092	80099	80106	80113	80120	80127	80134
633	80140	80147	80154	80161	80168	80175	80182	80188	80195	80202
634	80209	80216	80223	80229	80236	80243	80250	80257	80264	80271
635	80277	80284	80291	80298	80305	80312	80318	80325	80332	80339
636	80346	80353	80359	80366	80373	80380	80387	80393	80400	80407
637	80414	80421	80428	80434	80441	80448	80455	80462	80468	80475
638	80482	80489	80496	80502	80509	80516	80523	80530	80536	80543
639	80550	80557	80564	80570	80577	80584	80591	80598	80604	80611
640	80618	80625	80632	80638	80645	80652	80659	80665	80672	80679
641	80686	80693	80699	80706	80713	80720	80726	80733	80740	80747
642	80754	80760	80767	80774	80781	80787	80794	80801	80808	80814
643	80821	80828	80835	80841	80848	80855	80862	80868	80875	80882
644	80889	80895	80902	80909	80916	80922	80929	80936	80943	80949
645	80956	80963	80969	80976	80983	80990	80996	81003	81010	81017
646	81023	81030	81037	81043	81050	81057	81064	81070	81077	81084
647	81090	81097	81104	81111	81117	81124	81131	81137	81144	81151
648	81158	81164	81171	81178	81184	81191	81198	81204	81211	81218
649	81224	81231	81238	81245	81251	81258	81265	81271	81278	81285

附表二　對數表（續）

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
650	81291	81298	81305	81311	81318	81325	81331	81338	81345	81351
651	81358	81365	81371	81378	81385	81391	81398	81405	81411	81418
652	81425	81431	81438	81445	81451	81458	81465	81471	81478	81485
653	81491	81498	81505	81511	81518	81525	81531	81538	81544	81551
654	81558	81564	81571	81578	81584	81591	81598	81604	81611	81617
655	81624	81631	81637	81644	81651	81657	81664	81671	81677	81684
656	81690	81697	81704	81710	81717	81723	81730	81737	81743	81750
657	81757	81763	81770	81776	81783	81790	81796	81803	81809	81816
658	81823	81829	81836	81842	81849	81856	81862	81869	81875	81882
659	81889	81895	81902	81908	81915	81921	81928	81935	81941	81948
660	81954	81961	81968	81974	81981	81987	81994	82000	82007	82014
661	82020	82027	82033	82040	82046	82053	82060	82066	82073	82079
662	82086	82092	82099	82105	82112	82119	82125	82132	82138	82145
663	82151	82158	82164	82171	82178	82184	82191	82197	82204	82210
664	82217	82223	82230	82236	82243	82249	82256	82263	82269	82276
665	82282	82289	82295	82302	82308	82315	82321	82328	82334	82341
666	82347	82354	82360	82367	82373	82380	82387	82393	82400	82406
667	82413	82419	82426	82432	82439	82445	82452	82458	82465	82471
668	82478	82484	82491	82497	82504	82510	82517	82523	82530	82536
669	82543	82549	82556	82562	82569	82575	82582	82588	82595	82601
670	82607	82614	82620	82627	82633	82640	82646	82653	82659	82666
671	82672	82679	82685	82692	82698	82705	82711	82718	82724	82730
672	82737	82743	82750	82756	82763	82769	82776	82782	82789	82795
673	82802	82808	82814	82821	82827	82834	82840	82847	82853	82860
674	82866	82872	82879	82885	82892	82898	82905	82911	82918	82924
675	82930	82937	82943	82950	82956	82963	82969	82975	82982	82988
676	82995	83001	83008	83014	83020	83027	83033	83040	83046	83052
677	83059	83065	83072	83078	83085	83091	83097	83104	83110	83117
678	83123	83129	83136	83142	83149	83155	83161	83168	83174	83181
679	83187	83193	83200	83206	83213	83219	83225	83232	83238	83245
680	83251	83257	83264	83270	83276	83283	83289	83296	83302	83308
681	83315	83321	83327	83334	83340	83347	83353	83359	83366	83372
682	83378	83385	83391	83398	83404	83410	83417	83423	83429	83436
683	83442	83448	83455	83461	83467	83474	83480	83487	83493	83499
684	83506	83512	83518	83525	83531	83537	83544	83550	83556	83563
685	83569	83575	83582	83588	83594	83601	83607	83613	83620	83626
686	83632	83639	83645	83651	83658	83664	83670	83677	83683	83689
687	83696	83702	83708	83715	83721	83727	83734	83740	83746	83753
688	83759	83765	83771	83778	83784	83790	83797	83803	83809	83816
689	83822	83828	83835	83841	83847	83853	83860	83866	83872	83879
690	83885	83891	83897	83904	83910	83916	83923	83929	83935	83942
691	83948	83954	83960	83967	83973	83979	83985	83992	83998	84004
692	84011	84017	84023	84029	84036	84042	84048	84055	84061	84067
693	84073	84080	84086	84092	84098	84105	84111	84117	84123	84130
694	84136	84142	84148	84155	84161	84167	84173	84180	84186	84192
695	84198	84205	84211	84217	84223	84230	84236	84242	84248	84255
696	84261	84267	84273	84280	84286	84292	84298	84305	84311	84317
697	84323	84330	84336	84342	84348	84354	84361	84367	84373	84379
698	84386	84392	84398	84404	84410	84417	84423	84429	84435	84442
699	84448	84454	84460	84466	84473	84479	84485	84491	84497	84504

附表二 對數表(續)

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
700	84510	84516	84522	84528	84535	84541	84547	84553	84559	84566
701	84572	84578	84584	84590	84597	84603	84609	84615	84621	84628
702	84634	84640	84646	84652	84658	84665	84671	84677	84683	84689
703	84696	84702	84708	84714	84720	84726	84733	84739	84745	84751
704	84757	84763	84770	84776	84782	84788	84794	84800	84807	84813
705	84819	84825	84831	84837	84844	84850	84856	84862	84868	84874
706	84880	84887	84893	84899	84905	84911	84917	84924	84930	84936
707	84942	84948	84954	84960	84967	84973	84979	84985	84991	84997
708	85003	85009	85016	85022	85028	85034	85040	85046	85052	85058
709	85065	85071	85077	85083	85089	85095	85101	85107	85114	85120
710	85126	85132	85138	85144	85150	85156	85163	85169	85175	85181
711	85187	85193	85199	85205	85211	85217	85224	85230	85236	85242
712	85248	85254	85260	85266	85272	85278	85285	85291	85297	85303
713	85309	85315	85321	85327	85333	85339	85345	85352	85358	85364
714	85370	85376	85382	85388	85394	85400	85406	85412	85418	85425
715	85431	85437	85443	85449	85455	85461	85467	85473	85479	85485
716	85491	85497	85503	85509	85516	85522	85528	85534	85540	85546
717	85552	85558	85564	85570	85576	85582	85588	85594	85600	85606
718	85612	85618	85625	85631	85637	85643	85649	85655	85661	85667
719	85673	85679	85685	85691	85697	85703	85709	85715	85721	85727
720	85733	85739	85745	85751	85757	85763	85769	85775	85781	85788
721	85794	85800	85806	85812	85818	85824	85830	85836	85842	85848
722	85854	85860	85866	85872	85878	85884	85890	85896	85902	85908
723	85914	85920	85926	85932	85938	85944	85950	85956	85962	85968
724	85974	85980	85986	85992	85998	86004	86010	86016	86022	86028
725	86034	86040	86046	86052	86058	86064	86070	86076	86082	86088
726	86094	86100	86106	86112	86118	86124	86130	86136	86141	86147
727	86153	86159	86165	86171	86177	86183	86189	86195	86201	86207
728	86213	86219	86225	86231	86237	86243	86249	86255	86261	86267
729	86273	86279	86285	86291	86297	86303	86308	86314	86320	86326
730	86332	86338	86344	86350	86356	86362	86368	86374	86380	86386
731	86392	86398	86404	86410	86415	86421	86427	86433	86439	86445
732	86451	86457	86463	86469	86475	86481	86487	86493	86499	86504
733	86510	86516	86522	86528	86534	86540	86546	86552	86558	86564
734	86570	86576	86581	86587	86593	86599	86605	86611	86617	86623
735	86629	86635	86641	86646	86652	86658	86664	86670	86676	86682
736	86688	86694	86700	86705	86711	86717	86723	86729	86735	86741
737	86747	86753	86759	86764	86770	86776	86782	86788	86794	86800
738	86806	86812	86817	86823	86829	86835	86841	86847	86853	86859
739	86864	86870	86876	86882	86888	86894	86900	86906	86911	86917
740	86923	86929	86935	86941	86947	86953	86958	86964	86970	86976
741	86982	86988	86994	86999	87005	87011	87017	87023	87029	87035
742	87040	87046	87052	87058	87064	87070	87075	87081	87087	87093
743	87099	87105	87111	87116	87122	87128	87134	87140	87146	87151
744	87157	87163	87169	87175	87181	87186	87192	87198	87204	87210
745	87216	87221	87227	87233	87239	87245	87251	87256	87262	87268
746	87274	87280	87286	87291	87297	87303	87309	87315	87320	87326
747	87332	87338	87344	87349	87355	87361	87367	87373	87379	87384
748	87390	87396	87402	87408	87413	87419	87425	87431	87437	87442
749	87448	87454	87460	87466	87471	87477	87483	87489	87495	87500

附表二　對數表（續）

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
750	87506	87512	87518	87523	87529	87535	87541	87547	87552	87558
751	87564	87570	87576	87581	87587	87593	87599	87604	87610	87616
752	87622	87628	87633	87639	87645	87651	87656	87662	87668	87674
753	87679	87685	87691	87697	87703	87708	87714	87720	87726	87731
754	87737	87743	87749	87754	87760	87766	87772	87777	87783	87789
755	87795	87800	87806	87812	87818	87823	87829	87835	87841	87846
756	87852	87858	87864	87869	87875	87881	87887	87892	87898	87904
757	87910	87915	87921	87927	87933	87938	87944	87950	87955	87961
758	87967	87973	87978	87984	87990	87996	88001	88007	88013	88018
759	88024	88030	88036	88041	88047	88053	88058	88064	88070	88076
760	88081	88087	88093	88098	88104	88110	88116	88121	88127	88133
761	88138	88144	88150	88156	88161	88167	88173	88178	88184	88190
762	88195	88201	88207	88213	88218	88224	88230	88235	88241	88247
763	88252	88258	88264	88270	88275	88281	88287	88292	88298	88304
764	88309	88315	88321	88326	88332	88338	88343	88349	88355	88360
765	88366	88372	88377	88383	88389	88395	88400	88406	88412	88417
766	88423	88429	88434	88440	88446	88451	88457	88463	88468	88474
767	88480	88485	88491	88497	88502	88508	88513	88519	88525	88530
768	88536	88542	88547	88553	88559	88564	88570	88576	88581	88587
769	88593	88598	88604	88610	88615	88621	88627	88632	88638	88643
770	88649	88655	88660	88666	88672	88677	88683	88689	88694	88700
771	88705	88711	88717	88722	88728	88734	88739	88745	88750	88756
772	88762	88767	88773	88779	88784	88790	88795	88801	88807	88812
773	88818	88824	88829	88835	88840	88846	88852	88857	88863	88868
774	88874	88880	88885	88891	88897	88902	88908	88913	88919	88925
775	88930	88936	88941	88947	88953	88958	88964	88969	88975	88981
776	88986	88992	88997	89003	89009	89014	89020	89025	89031	89037
777	89042	89048	89053	89059	89064	89070	89076	89081	89087	89092
778	89098	89104	89109	89115	89120	89126	89131	89137	89143	89148
779	89154	89159	89165	89170	89176	89182	89187	89193	89198	89204
780	89209	89215	89221	89226	89232	89237	89243	89248	89254	89260
781	89265	89271	89276	89282	89287	89293	89298	89304	89310	89315
782	89321	89326	89332	89337	89343	89348	89354	89360	89365	89371
783	89376	89382	89387	89393	89398	89404	89409	89415	89421	89426
784	89432	89437	89443	89448	89454	89459	89465	89470	89476	89481
785	89487	89492	89498	89504	89509	89515	89520	89526	89531	89537
786	89542	89548	89553	89559	89564	89570	89575	89581	89586	89592
787	89597	89603	89609	89614	89620	89625	89631	89636	89642	89647
788	89653	89658	89664	89669	89675	89680	89686	89691	89697	89702
789	89708	89713	89719	89724	89730	89735	89741	89746	89752	89757
790	89763	89768	89774	89779	89785	89790	89796	89801	89807	89812
791	89818	89823	89829	89834	89840	89845	89851	89856	89862	89867
792	89873	89878	89883	89889	89894	89900	89905	89911	89916	89922
793	89927	89933	89938	89944	89949	89955	89960	89966	89971	89977
794	89982	89988	89993	89998	90004	90009	90015	90020	90026	90031
795	90037	90042	90048	90053	90059	90064	90069	90075	90080	90086
796	90091	90097	90102	90108	90113	90119	90124	90129	90135	90140
797	90146	90151	90157	90162	90168	90173	90179	90184	90189	90195
798	90200	90206	90211	90217	90222	90227	90233	90238	90244	90249
799	90255	90260	90266	90271	90276	90282	90287	90293	90298	90304

附表二 對數表(續)

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
800	90309	90314	90320	90325	90331	90336	90342	90347	90352	90358
801	90363	90369	90374	90380	90385	90390	90396	90401	90407	90412
802	90417	90423	90428	90434	90439	90445	90450	90455	90461	90466
803	90472	90477	90482	90488	90493	90499	90504	90509	90515	90520
804	90526	90531	90536	90542	90547	90553	90558	90563	90569	90574
805	90580	90585	90590	90596	90601	90607	90612	90617	90623	90628
806	90634	90639	90644	90650	90655	90660	90666	90671	90677	90682
807	90687	90693	90698	90703	90709	90714	90720	90725	90730	90736
808	90741	90747	90752	90757	90763	90768	90773	90779	90784	90789
809	90795	90800	90806	90811	90816	90822	90827	90832	90838	90843
810	90849	90854	90859	90865	90870	90875	90881	90886	90891	90897
811	90902	90907	90913	90918	90924	90929	90934	90940	90945	90950
812	90956	90961	90966	90972	90977	90982	90988	90993	90998	91004
813	91009	91014	91020	91025	91030	91036	91041	91046	91052	91057
814	91062	91068	91073	91078	91084	91089	91094	91100	91105	91110
815	91116	91121	91126	91132	91137	91142	91148	91153	91158	91164
816	91169	91174	91180	91185	91190	91196	91201	91206	91212	91217
817	91222	91228	91233	91238	91243	91249	91254	91259	91265	91270
818	91275	91281	91286	91291	91297	91302	91307	91312	91318	91323
819	91328	91334	91339	91344	91350	91355	91360	91365	91371	91376
820	91381	91387	91392	91397	91403	91408	91413	91418	91424	91429
821	91434	91440	91445	91450	91455	91461	91466	91471	91477	91482
822	91487	91492	91498	91503	91508	91514	91519	91524	91529	91535
823	91540	91545	91551	91556	91561	91566	91572	91577	91582	91587
824	91593	91598	91603	91609	91614	91619	91624	91630	91635	91640
825	91645	91651	91656	91661	91666	91672	91677	91682	91687	91693
826	91698	91703	91709	91714	91719	91724	91730	91735	91740	91745
827	91751	91756	91761	91766	91772	91777	91782	91787	91793	91798
828	91803	91808	91814	91819	91824	91829	91834	91840	91845	91850
829	91855	91861	91866	91871	91876	91882	91887	91892	91897	91903
830	91908	91913	91918	91924	91929	91934	91939	91944	91950	91955
831	91960	91965	91971	91976	91981	91986	91991	91997	92002	92007
832	92012	92018	92023	92028	92033	92038	92044	92049	92054	92059
833	92065	92070	92075	92080	92085	92091	92096	92101	92106	92111
834	92117	92122	92127	92132	92137	92143	92148	92153	92158	92163
835	92169	92174	92179	92184	92189	92195	92200	92205	92210	92215
836	92221	92226	92231	92236	92241	92247	92252	92257	92262	92267
837	92273	92278	92283	92288	92293	92298	92304	92309	92314	92319
838	92324	92330	92335	92340	92345	92350	92355	92361	92366	92371
839	92376	92381	92387	92392	92397	92402	92407	92412	92418	92423
840	92428	92433	92438	92443	92449	92454	92459	92464	92469	92474
841	92480	92485	92490	92495	92500	92505	92511	92516	92521	92526
842	92531	92536	92542	92547	92552	92557	92562	92567	92572	92578
843	92583	92588	92593	92598	92603	92609	92614	92619	92624	92629
844	92634	92639	92645	92650	92655	92660	92665	92670	92675	92681
845	92686	92691	92696	92701	92706	92711	92716	92722	92727	92732
846	92737	92742	92747	92752	92758	92763	92768	92773	92778	92783
847	92788	92793	92799	92804	92809	92814	92819	92824	92829	92834
848	92840	92845	92850	92855	92860	92865	92870	92875	92881	92886
849	92891	92896	92901	92906	92911	92916	92921	92927	92932	92937

附表二 對數表(續)

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
850	92942	92947	92952	92957	92962	92967	92973	92978	92983	92988
851	92993	92998	93003	93008	93013	93018	93024	93029	93034	93039
852	93044	93049	93054	93059	93064	93069	93075	93080	93085	93090
853	93095	93100	93105	93110	93115	93120	93125	93131	93136	93141
854	93146	93151	93156	93161	93166	93171	93176	93181	93186	93192
855	93197	93202	93207	93212	93217	93222	93227	93232	93237	93242
856	93247	93252	93258	93263	93268	93273	93278	93283	93288	93293
857	93298	93303	93308	93313	93318	93323	93328	93334	93339	93344
858	93349	93354	93359	93364	93369	93374	93379	93384	93389	93394
859	93399	93404	93409	93414	93420	93425	93430	93435	93440	93445
860	93450	93455	93460	93465	93470	93475	93480	93485	93490	93495
861	93500	93505	93510	93515	93520	93526	93531	93536	93541	93546
862	93551	93556	93561	93566	93571	93576	93581	93586	93591	93596
863	93601	93606	93611	93616	93621	93626	93631	93636	93641	93646
864	93651	93656	93661	93666	93671	93676	93682	93687	93692	93697
865	93702	93707	93712	93717	93722	93727	93732	93737	93742	93747
866	93752	93757	93762	93767	93772	93777	93782	93787	93792	93797
867	93802	93807	93812	93817	93822	93827	93832	93837	93842	93847
868	93852	93857	93862	93867	93872	93877	93882	93887	93892	93897
869	93902	93907	93912	93917	93922	93927	93932	93937	93942	93947
870	93952	93957	93962	93967	93972	93977	93982	93987	93992	93997
871	94002	94007	94012	94017	94022	94027	94032	94037	94042	94047
872	94052	94057	94062	94067	94072	94077	94082	94086	94091	94096
873	94101	94106	94111	94116	94121	94126	94131	94136	94141	94146
874	94151	94156	94161	94166	94171	94176	94181	94186	94191	94196
875	94201	94206	94211	94216	94221	94226	94231	94236	94240	94245
876	94250	94255	94260	94265	94270	94275	94280	94285	94290	94295
877	94300	94305	94310	94315	94320	94325	94330	94335	94340	94345
878	94349	94354	94359	94364	94369	94374	94379	94384	94389	94394
879	94399	94404	94409	94414	94419	94424	94429	94433	94438	94443
880	94448	94453	94458	94463	94468	94473	94478	94483	94488	94493
881	94498	94503	94507	94512	94517	94522	94527	94532	94537	94542
882	94547	94552	94557	94562	94567	94571	94576	94581	94586	94591
883	94596	94601	94606	94611	94616	94621	94626	94630	94635	94640
884	94645	94650	94655	94660	94665	94670	94675	94680	94685	94689
885	94694	94699	94704	94709	94714	94719	94724	94729	94734	94738
886	94743	94748	94753	94758	94763	94768	94773	94778	94783	94787
887	94792	94797	94802	94807	94812	94817	94822	94827	94832	94836
888	94841	94846	94851	94856	94861	94866	94871	94876	94880	94885
889	94890	94895	94900	94905	94910	94915	94919	94924	94929	94934
890	94939	94944	94949	94954	94959	94963	94968	94973	94978	94983
891	94988	94993	94998	95002	95007	95012	95017	95022	95027	95032
892	95036	95041	95046	95051	95056	95061	95066	95071	95075	95080
893	95085	95090	95095	95100	95105	95109	95114	95119	95124	95129
894	95134	95139	95143	95148	95153	95158	95163	95168	95173	95177
895	95182	95187	95192	95197	95202	95207	95211	95216	95221	95226
896	95231	95236	95240	95245	95250	95255	95260	95265	95270	95274
897	95279	95284	95289	95294	95299	95303	95308	95313	95318	95323
898	95328	95332	95337	95342	95347	95352	95357	95361	95366	95371
899	95376	95381	95386	95390	95395	95400	95405	95410	95415	95419

附表二 對數表(續)

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
900	95424	95429	95434	95439	95444	95448	95453	95458	95463	95468
901	95472	95477	95482	95487	95492	95497	95501	95506	95511	95516
902	95521	95525	95530	95535	95540	95545	95550	95554	95559	95564
903	95569	95574	95578	95583	95588	95593	95598	95602	95607	95612
904	95617	95622	95626	95631	95636	95641	95646	95650	95655	95660
905	95665	95670	95674	95679	95684	95689	95694	95698	95703	95708
906	95713	95718	95722	95727	95732	95737	95742	95746	95751	95756
907	95761	95766	95770	95775	95780	95785	95789	95794	95799	95804
908	95809	95813	95818	95823	95828	95832	95837	95842	95847	95852
909	95856	95861	95866	95871	95875	95880	95885	95890	95895	95899
910	95904	95909	95914	95918	95923	95928	95933	95938	95942	95947
911	95952	95957	95961	95966	95971	95976	95980	95985	95990	95995
912	95999	96004	96009	96014	96019	96023	96028	96033	96038	96042
913	96047	96052	96057	96061	96066	96071	96076	96080	96085	96090
914	96095	96099	96104	96109	96114	96118	96123	96128	96133	96137
915	96142	96147	96152	96156	96161	96166	96171	96175	96180	96185
916	96190	96194	96199	96204	96209	96213	96218	96223	96227	96232
917	96237	96242	96246	96251	96256	96261	96265	96270	96275	96280
918	96284	96289	96294	96298	96303	96308	96313	96317	96322	96327
919	96332	96336	96341	96346	96350	96355	96360	96365	96369	96374
920	96379	96384	96388	96393	96398	96402	96407	96412	96417	96421
921	96426	96431	96435	96440	96445	96450	96454	96459	96464	96468
922	96473	96478	96483	96487	96492	96497	96501	96506	96511	96515
923	96520	96525	96530	96534	96539	96544	96548	96553	96558	96562
924	96567	96572	96577	96581	96586	96591	96595	96600	96605	96609
925	96614	96619	96624	96628	96633	96638	96642	96647	96652	96656
926	96661	96666	96670	96675	96680	96685	96689	96694	96699	96703
927	96708	96713	96717	96722	96727	96731	96736	96741	96745	96750
928	96755	96759	96764	96769	96774	96778	96783	96788	96792	96797
929	96802	96806	96811	96816	96820	96825	96830	96834	96839	96844
930	96848	96853	96858	96862	96867	96872	96876	96881	96886	96890
931	96895	96900	96904	96909	96914	96918	96923	96928	96932	96937
932	96942	96946	96951	96956	96960	96965	96970	96974	96979	96984
933	96988	96993	96997	97002	97007	97011	97016	97021	97025	97030
934	97035	97039	97044	97049	97053	97058	97063	97067	97072	97077
935	97081	97086	97090	97095	97100	97104	97109	97114	97118	97123
936	97128	97132	97137	97142	97146	97151	97155	97160	97165	97169
937	97174	97179	97183	97188	97192	97197	97202	97206	97211	97216
938	97220	97225	97230	97234	97239	97243	97248	97253	97257	97262
939	97267	97271	97276	97280	97285	97290	97294	97299	97304	97308
940	97313	97317	97322	97327	97331	97336	97340	97345	97350	97354
941	97359	97364	97368	97373	97377	97382	97387	97391	97396	97400
942	97405	97410	97414	97419	97424	97428	97433	97437	97442	97447
943	97451	97456	97460	97465	97470	97474	97479	97483	97488	97493
944	97497	97502	97506	97511	97516	97520	97525	97529	97534	97539
945	97543	97548	97552	97557	97562	97566	97571	97575	97580	97585
946	97589	97594	97598	97603	97607	97612	97617	97621	97626	97630
947	97635	97640	97644	97649	97653	97658	97663	97667	97672	97676
948	97681	97685	97690	97695	97699	97704	97708	97713	97717	97722
949	97727	97731	97736	97740	97745	97749	97754	97759	97763	97768

附表二　對數表（續）

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
950	97772	97777	97782	97786	97791	97795	97800	97804	97809	97813
951	97818	97823	97827	97832	97836	97841	97845	97850	97855	97859
952	97864	97868	97873	97877	97882	97886	97891	97896	97900	97905
953	97909	97914	97918	97923	97928	97932	97937	97941	97946	97950
954	97955	97959	97964	97968	97973	97978	97982	97987	97991	97996
955	98000	98005	98009	98014	98019	98023	98028	98032	98037	98041
956	98046	98050	98055	98059	98064	98068	98073	98078	98082	98087
957	98091	98096	98100	98105	98109	98114	98118	98123	98127	98132
958	98137	98141	98146	98150	98155	98159	98164	98168	98173	98177
959	98182	98186	98191	98195	98200	98204	98209	98214	98218	98223
960	98227	98232	98236	98241	98245	98250	98254	98259	98263	98268
961	98272	98277	98281	98286	98290	98295	98299	98304	98308	98313
962	98318	98322	98327	98331	98336	98340	98345	98349	98354	98358
963	98363	98367	98372	98376	98381	98385	98390	98394	98399	98403
964	98408	98412	98417	98421	98426	98430	98435	98439	98444	98448
965	98453	98457	98462	98466	98471	98475	98480	98484	98489	98493
966	98498	98502	98507	98511	98516	98520	98525	98529	98534	98538
967	98543	98547	98552	98556	98561	98565	98570	98574	98579	98583
968	98588	98592	98597	98601	98605	98610	98614	98619	98623	98628
969	98632	98637	98641	98646	98650	98655	98659	98664	98668	98673
970	98677	98682	98686	98691	98695	98700	98704	98709	98713	98717
971	98722	98726	98731	98735	98740	98744	98749	98753	98758	98762
972	98767	98771	98776	98780	98784	98789	98793	98798	98802	98807
973	98811	98816	98820	98825	98829	98834	98838	98843	98847	98851
974	98856	98860	98865	98869	98874	98878	98883	98887	98892	98896
975	98900	98905	98909	98914	98918	98923	98927	98932	98936	98941
976	98945	98949	98954	98958	98963	98967	98972	98976	98981	98985
977	98989	98994	98998	99003	99007	99012	99016	99021	99025	99029
978	99034	99038	99043	99047	99052	99056	99061	99065	99069	99074
979	99078	99083	99087	99092	99096	99100	99105	99109	99114	99118
980	99123	99127	99131	99136	99140	99145	99149	99154	99158	99162
981	99167	99171	99176	99180	99185	99189	99193	99198	99202	99207
982	99211	99216	99220	99224	99229	99233	99238	99242	99247	99251
983	99255	99260	99264	99269	99273	99277	99282	99286	99291	99295
984	99300	99304	99308	99313	99317	99322	99326	99330	99335	99339
985	99344	99348	99352	99357	99361	99366	99370	99374	99379	99383
986	99388	99392	99396	99401	99405	99410	99414	99419	99423	99427
987	99432	99436	99441	99445	99449	99454	99458	99463	99467	99471
988	99476	99480	99484	99489	99493	99498	99502	99506	99511	99515
989	99520	99524	99528	99533	99537	99542	99546	99550	99555	99559
990	99564	99568	99572	99577	99581	99585	99590	99594	99599	99603
991	99607	99612	99616	99621	99625	99629	99634	99638	99642	99647
992	99651	99656	99660	99664	99669	99673	99677	99682	99686	99691
993	99695	99699	99704	99708	99712	99717	99721	99726	99730	99734
994	99739	99743	99747	99752	99756	99760	99765	99769	99774	99778
995	99782	99787	99791	99795	99800	99804	99808	99813	99817	99822
996	99826	99830	99835	99839	99843	99848	99852	99856	99861	99865
997	99870	99874	99878	99883	99887	99891	99896	99900	99904	99909
998	99913	99917	99922	99926	99930	99935	99939	99944	99948	99952
999	99957	99961	99965	99970	99974	99978	99983	99987	99991	99996
1000	00000	00004	00009	00013	00017	00022	00026	00030	00035	00039

附表三 $\sqrt{1-r^2}$ 之對數表

r	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
.000	00000	00000	00000	00000	00000	99999	99999	99999	99999	99998
.010	99998	99997	99997	99996	99996	99995	99994	99994	99993	99992
.020	99991	99990	99989	99988	99987	99986	99985	99984	99983	99982
.030	99980	99979	99978	99976	99975	99973	99972	99970	99969	99967
.040	99965	99963	99962	99960	99958	99956	99954	99952	99950	99948
.050	99946	99943	99941	99939	99937	99934	99932	99929	99927	99924
.060	99922	99919	99916	99914	99911	99908	99905	99902	99899	99896
.070	99893	99890	99887	99884	99881	99878	99874	99871	99867	99864
.080	99861	99857	99853	99850	99846	99843	99839	99835	99831	99827
.090	99823	99819	99815	99811	99807	99803	99799	99795	99790	99786
.100	99782	99777	99773	99768	99764	99759	99755	99750	99745	99740
110	99736	99731	99726	99721	99716	99711	99706	99701	99696	99690
.120	99685	99680	99674	99669	99664	99658	99652	99647	99641	99636
.130	99630	99624	99618	99612	99607	99601	99595	99589	99582	99576
.140	99570	99564	99558	99551	99545	99539	99532	99526	99519	99512
.150	99506	99499	99492	99486	99479	99472	99465	99458	99451	99444
.160	99437	99430	99423	99415	99408	99401	99393	99386	99378	99371
.170	99363	99356	99348	99340	99332	99325	99317	99309	99301	99293
.180	99285	99277	99269	99260	99252	99244	99235	99227	99219	99210
.190	99202	99193	99184	99176	99167	99158	99149	99140	99132	99123
.200	99114	99104	99095	99086	99077	99068	99058	99049	99040	99030
.210	99021	99011	99001	98992	98982	98972	98962	98953	98943	98933
.220	98923	98913	98903	98892	98882	98872	98862	98851	98841	98830
.230	98820	98809	98799	98788	98777	98766	98756	98745	98734	98723
.240	98712	98701	98690	98678	98667	98656	98644	98633	98622	98610
.250	98599	98587	98575	98564	98552	98540	98528	98516	98504	98492
.260	98480	98468	98456	98444	98431	98419	98406	98394	98382	98369
.270	98356	98344	98331	98318	98305	98292	98279	98266	98253	98240
.280	98227	98214	98201	98187	98174	98160	98147	98133	98120	98106
.290	98092	98079	98065	98051	98037	98023	98009	97995	97981	97966
.300	97952	97938	97923	97909	97894	97880	97865	97850	97836	97821
.310	97806	97791	97776	97761	97746	97731	97716	97700	97685	97670
.320	97654	97639	97623	97607	97592	97576	97560	97544	97528	97512
.330	97496	97480	97464	97448	97431	97415	97399	97382	97366	97349
.340	97332	97316	97299	97282	97265	97248	97231	97214	97197	97180
.350	97162	97145	97128	97110	97093	97075	97057	97040	97022	97004
.360	96986	96968	96950	96932	96914	96895	96877	96859	96840	96822
.370	96803	96784	96766	96747	96728	96709	96690	96671	96652	96633
.380	96614	96594	96575	96555	96536	96516	96497	96477	96457	96437
.390	96417	96397	96377	96357	96337	96316	96296	96276	96255	96235
.400	96214	96193	96172	96152	96131	96110	96089	96067	96046	96025
.410	96004	95982	95961	95939	95917	95896	95874	95852	95830	95808
.420	95786	95764	95741	95719	95697	95674	95652	95629	95606	95583
.430	95561	95538	95515	95491	95468	95445	95422	95398	95375	95351
.440	95328	95304	95280	95256	95232	95208	95184	95160	95135	95111
.450	95087	95062	95037	95013	94988	94963	94938	94913	94888	94863
.460	94837	94812	94786	94761	94735	94710	94684	94658	94632	94606
.470	94580	94553	94527	94501	94474	94448	94421	94394	94367	94340
.480	94313	94286	94259	94232	94204	94177	94149	94121	94094	94066
.490	94038	94010	93982	93953	93925	93897	93868	93840	93811	93782

本頁除最初五個對數之性爲零外,其餘各數均爲 −1。

附表三　$\sqrt{1-r^2}$ 之對數表(續)

r	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
.500	93753	93724	93695	93666	93636	93607	93578	93548	93518	93489
.510	93459	93429	93399	93368	93338	93308	93277	93247	93216	93185
.520	93154	93123	93092	93061	93030	92998	92967	92935	92903	92871
.530	92839	92807	92775	92743	92711	92678	92645	92613	92580	92547
.540	92514	92481	92447	92414	92381	92347	92313	92279	92245	92211
.550	92177	92143	92108	92074	92039	92005	91970	91935	91899	91864
.560	91829	91793	91758	91722	91686	91650	91614	91578	91542	91505
.570	91468	91432	91395	91358	91321	91283	91246	91209	91171	91133
.580	91095	91057	91019	90981	90942	90904	90865	90826	90787	90748
.590	90709	90670	90630	90590	90551	90511	90471	90430	90390	90350
.600	90309	90268	90227	90186	90145	90104	90062	90020	89979	89937
.610	89895	89852	89810	89767	89725	89682	89639	89595	89552	89509
.620	89465	89421	89377	89333	89289	89244	89200	89155	89110	89065
.630	89019	88974	88928	88883	88837	88791	88744	88698	88651	88604
.640	88557	88510	88463	88415	88368	88320	88272	88223	88175	88126
.650	88078	88029	87979	87930	87881	87831	87781	87731	87681	87630
.660	87579	87528	87477	87426	87375	87323	87271	87219	87167	87114
.670	87062	87009	86955	86902	86849	86795	86741	86687	86632	86578
.680	86523	86468	86413	86357	86301	86246	86189	86133	86076	86019
.690	85962	85905	85848	85790	85732	85673	85615	85556	85497	85438
.700	85379	85319	85259	85199	85138	85077	85016	84955	84894	84832
.710	84770	84707	84645	84582	84519	84455	84392	84328	84264	84199
.720	84134	84069	84004	83938	83872	83806	83740	83673	83606	83538
.730	83470	83402	83334	83266	83197	83127	83058	82988	82918	82847
.740	82776	82705	82633	82561	82489	82417	82344	82271	82197	82123
.750	82049	81974	81899	81824	81748	81672	81596	81519	81442	81364
.760	81286	81208	81129	81050	80971	80891	80810	80730	80649	80567
.770	80485	80403	80320	80237	80153	80069	79985	79900	79814	79728
.780	79642	79555	79468	79381	79292	79204	79115	79025	78935	78845
.790	78754	78662	78570	78478	78384	78291	78197	78102	78007	77911
.800	77815	77718	77621	77523	77425	77326	77226	77126	77025	76924
.810	76822	76719	76616	76512	76408	76302	76197	76090	75983	75876
.820	75767	75658	75548	75438	75327	75215	75102	74989	74875	74761
.830	74645	74529	74412	74294	74175	74056	73936	73815	73693	73570
.840	73447	73323	73197	73071	72944	72816	72688	72558	72427	72296
.850	72163	72030	71895	71760	71623	71486	71347	71207	71067	70925
.860	70782	70638	70493	70347	70199	70051	69901	69750	69598	69444
.870	69289	69133	68976	68817	68657	68496	68333	68168	68003	67836
.880	67667	67497	67325	67152	66977	66800	66622	66442	66261	66078
.890	65893	65706	65517	65327	65134	64940	64744	64545	64345	64142
.900	63938	63731	63522	63311	63097	62881	62663	62442	62218	61992
.910	61764	61532	61299	61062	60822	60579	60334	60085	59833	59578
.920	59320	59058	58792	58524	58251	57975	57694	57410	57122	56830
.930	56533	56232	55926	55615	55300	54980	54654	54323	53987	53645
.940	53298	52944	52584	52217	51844	51464	51077	50682	50280	49869
.950	49450	49023	48586	48140	47684	47218	46741	46253	45753	45241
.960	44716	44177	43624	43056	42472	41872	41253	40616	39959	39280
.970	38579	37854	37103	36325	35516	34675	33800	32887	31932	30933
.980	29885	28782	27619	26389	25083	23693	22205	20607	18880	17002
.990	14943	12666	10119	07230	03894	99946	95111	88875	80081	65041

本頁除最後四個對數之性為 −2 外,其餘各數均為 −1.

附表四　正態曲線下之縱線表

x/σ	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	1.00000	.99995	.99980	.99955	.99920	.99875	.99820	.99755	.99685	.99596
0.1	.99501	.99396	.99283	.99158	.99025	.98881	.98728	.98565	.98393	.98211
0.2	.98020	.97819	.97609	.97390	.97161	.96923	.96676	.96420	.96156	.95882
0.3	.95600	.95309	.95010	.94702	.94387	.94055	.93723	.93382	.93024	.92677
0.4	.92312	.91399	.91558	.91169	.90774	.90371	.89961	.89543	.89119	.88688
0.5	.88250	.87805	.87353	.86896	.86432	.85962	.85488	.85006	.84519	.84060
0.6	.83527	.83023	.82514	.82010	.81481	.80957	.80429	.79896	.79359	.78817
0.7	.78270	.77721	.77167	.76610	.76048	.75484	.74916	.74342	.73769	.73193
0.8	.72615	.72033	.71448	.70861	.70272	.69681	.69087	.68493	.67896	.67298
0.9	.66689	.66097	.65494	.64891	.64287	.63683	.63077	.62472	.61865	.61259
1.0	.60653	.60047	.59440	.58834	.58228	.57623	.57017	.56414	.55810	.55209
1.1	.54607	.54007	.53409	.52812	.52214	.51620	.51027	.50437	.49848	.49260
1.2	.48675	.48092	.47511	.46933	.46357	.45783	.45212	.44644	.44078	.43516
1.3	.42956	.42399	.41845	.41294	.40747	.40202	.39661	.39123	.38569	.38058
1.4	.37531	.37007	.36487	.35971	.35459	.34950	.34445	.33944	.33447	.32954
1.5	.32465	.31980	.31500	.31023	.30550	.30082	.29618	.29158	.28702	.28251
1.6	.27804	.27361	.26923	.26489	.26059	.25634	.25213	.24797	.24385	.23978
1.7	.23575	.23176	.22782	.22392	.22008	.21627	.21251	.20879	.20511	.20148
1.8	.19790	.19436	.19086	.18741	.18400	.18064	.17732	.17404	.17081	.16762
1.9	.16448	.16137	.15831	.15530	.15232	.14939	.14650	.14364	.14083	.13806
2.0	.13534	.13265	.13000	.12740	.12483	.12230	.11981	.11737	.11496	.11259
2.1	.11025	.10795	.10570	.10347	.10129	.09914	.09702	.09495	.09290	.09090
2.2	.08892	.08698	.08507	.08320	.08136	.07956	.07778	.07604	.07433	.07265
2.3	.07100	.06939	.06780	.06624	.06471	.06321	.06174	.06029	.05888	.05750
2.4	.05614	.05481	.05350	.05222	.05096	.04973	.04852	.04734	.04618	.04505
2.5	.04394	.04285	.04179	.04074	.03972	.03873	.03775	.03680	.03586	.03494
2.6	.03405	.03317	.03232	.03148	.03066	.02986	.02908	.02831	.02757	.02684
2.7	.02612	.02542	.02474	.02408	.02343	.02280	.02218	.02157	.02098	.02040
2.8	.01984	.01929	.01876	.01823	.01772	.01723	.01674	.01627	.01581	.01536
2.9	.01492	.01449	.01408	.01367	.01328	.01288	.01252	.01215	.01179	.01145
3.0	.01111	.00819	.00598	.00432	.00309	.00219	.00153	.00106	.00073	.00050
4.0	.00034	.00022	.00015	.00010	.00006	.00004	.00003	.00002	.00001	.00001
5.0	.00000									

附表五　正態曲線下之面積表

x/σ	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.00000	.00399	.00798	.01197	.01595	.01994	.02392	.02790	.03188	.03586
0.1	.03983	.04380	.04776	.05172	.05567	.05962	.06356	.06749	.07142	.07535
0.2	.07926	.08317	.08706	.09095	.09483	.09871	.10257	.10642	.11026	.11409
0.3	.11791	.12172	.12552	.12930	.13307	.13683	.14058	.14431	.14803	.15173
0.4	.15542	.15910	.16276	.16640	.17003	.17364	.17724	.18082	.18439	.18793
0.5	.19146	.19497	.19847	.20194	.20540	.20884	.21226	.21566	.21904	.22240
0.6	.22575	.22907	.23237	.23565	.23891	.24215	.24537	.24857	.25175	.25490
0.7	.25804	.26115	.26424	.26730	.27035	.27337	.27637	.27935	.28230	.28524
0.8	.28814	.29103	.29389	.29673	.29955	.30234	.30511	.30785	.31057	.31327
0.9	.31594	.31859	.32121	.32381	.32639	.32894	.33147	.33398	.33646	.33891
1.0	.34134	.34375	.34614	.34850	.35083	.35314	.35543	.35769	.35993	.36214
1.1	.36433	.36650	.36864	.37176	.37286	.37493	.37698	.37900	.38100	.38298
1.2	.38493	.38686	.38877	.39065	.39251	.39435	.39617	.39796	.39973	.40147
1.3	.40320	.40490	.40658	.40824	.40988	.41149	.41309	.41466	.41621	.41774
1.4	.41924	.42073	.42220	.42364	.42507	.42647	.42786	.42922	.43056	.43198
1.5	.43319	.43448	.43574	.43699	.43822	.43943	.44062	.44179	.44295	.44408
1.6	.44520	.44630	.44738	.44845	.44950	.45053	.45154	.45254	.45352	.45449
1.7	.45543	.45637	.45728	.45818	.45907	.45994	.46080	.46164	.46246	.46327
1.8	.46407	.46485	.46562	.46638	.46712	.46784	.46856	.46929	.46995	.47062
1.9	.47128	.47193	.47257	.47320	.47381	.47441	.47500	.47558	.47615	.47670
2.0	.47725	.47778	.47831	.47882	.47932	.47982	.48030	.48077	.48124	.48169
2.1	.48214	.48257	.48308	.48341	.48382	.48422	.48461	.48500	.48537	.48574
2.2	.48610	.48645	.48679	.48713	.48745	.48778	.48809	.48840	.48870	.48899
2.3	.48928	.48956	.48983	.49010	.49036	.49061	.49086	.49111	.49134	.49158
2.4	.49180	.49202	.49224	.49245	.49266	.49286	.49305	.49324	.49343	.49361
2.5	.49379	.49396	.49413	.49430	.49446	.49461	.49477	.49492	.49506	.49520
2.6	.49534	.49547	.49560	.49573	.49585	.49598	.49609	.49621	.49632	.49643
2.7	.49653	.49664	.49674	.49683	.49693	.49702	.49711	.49720	.49728	.49736
2.8	.49744	.49752	.49760	.49767	.49774	.49781	.49788	.49795	.49801	.49807
2.9	.49813	.49819	.49825	.49830	.49836	.49841	.49846	.49851	.49856	.49860
3.0	.49865									
3.1	.49903									
3.2	.49931									
3.3	.49952									
3.4	.49966									
3.5	.49977									
3.6	.49984									
3.7	.49989									
3.8	.49993									
3.9	.49995									
4.0	.49997									
4.5	.49999									
5.0	.50000									

附表六 由 ρ 之值求 r 表

$$\left[r=2\ \mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{6}\rho\right)\right]$$

ρ	r	ρ	r	ρ	r	ρ	r
0.01	0.0105	0.26	0.2714	0.51	0.5277	0.76	0.7750
0.02	0.0209	0.27	0.2818	0.52	0.5378	0.77	0.7847
0.03	0.0314	0.28	0.2922	0.53	0.5479	0.78	0.7943
0.04	0.0419	0.29	0.3025	0.54	0.5580	0.79	0.8039
0.05	0.0524	0.30	0.3129	0.55	0.5680	0.80	0.8135
0.06	0.0628	0.31	0.3232	0.56	0.5781	0.81	0.8230
0.07	0.0733	0.32	0.3335	0.57	0.5881	0.82	0.8325
0.08	0.0838	0.33	0.3439	0.58	0.5981	0.83	0.8421
0.09	0.0942	0.34	0.3542	0.59	0.6081	0.84	0.8516
0.10	0.1047	0.35	0.3645	0.60	0.6180	0.85	0.8610
0.11	0.1151	0.36	0.3748	0.61	0.6280	0.86	0.8705
0.12	0.1256	0.37	0.3850	0.62	0.6379	0.87	0.8799
0.13	0.1360	0.38	0.3935	0.63	0.6478	0.88	0.8893
0.14	0.1465	0.39	0.4056	0.64	0.6577	0.89	0.8986
0.15	0.1569	0.40	0.4158	0.65	0.6676	0.90	0.9080
0.16	0.1674	0.41	0.4261	0.66	0.6775	0.91	0.9173
0.17	0.1778	0.42	0.4363	0.67	0.6873	0.92	0.9269
0.18	0.1882	0.43	0.4465	0.68	0.6971	0.93	0.9359
0.19	0.1986	0.44	0.4567	0.69	0.7069	0.94	0.9451
0.20	0.2091	0.45	0.4669	0.70	0.7167	0.95	0.9543
0.21	0.2195	0.46	0.4771	0.71	0.7265	0.96	0.9635
0.22	0.2299	0.47	0.4872	0.72	0.7363	0.97	0.9727
0.23	0.2403	0.48	0.4973	0.73	0.7460	0.98	0.9818
0.24	0.2507	0.49	0.5075	0.74	0.7557	0.99	0.9909
0.25	0.2611	0.50	0.5176	0.75	0.7654	1.00	1.0000

附表七　由R之值求r表

$$\left[r = 2\cos\frac{\pi}{3}(1-R)-1 \right]$$

R	r	R	r	R	r	R	r
0.01	0.018	0.26	0.429	0.51	0.742	0.76	0.937
0.02	0.036	0.27	0.444	0.52	0.753	0.77	0.942
0.03	0.054	0.28	0.458	0.53	0.763	0.78	0.947
0.04	0.071	0.29	0.472	0.54	0.772	0.79	0.952
0.05	0.089	0.30	0.486	0.55	0.782	0.80	0.956
0.06	0.107	0.31	0.500	0.56	0.791	0.81	0.961
0.07	0.124	0.32	0.514	0.57	0.801	0.82	0.965
0.08	0.141	0.33	0.528	0.58	0.810	0.83	0.968
0.09	0.158	0.34	0.541	0.59	0.818	0.84	0.972
0.10	0.176	0.35	0.554	0.60	0.827	0.85	0.975
0.11	0.192	0.36	0.567	0.61	0.836	0.86	0.979
0.12	0.209	0.37	0.580	0.62	0.844	0.87	0.981
0.13	0.226	0.38	0.593	0.63	0.852	0.88	0.984
0.14	0.242	0.39	0.606	0.64	0.860	0.89	0.987
0.15	0.259	0.40	0.618	0.65	0.867	0.90	0.989
0.16	0.275	0.41	0.630	0.66	0.875	0.91	0.991
0.17	0.291	0.42	0.642	0.67	0.882	0.92	0.993
0.18	0.307	0.43	0.654	0.68	0.889	0.93	0.995
0.19	0.323	0.44	0.666	0.69	0.896	0.94	0.996
0.20	0.338	0.45	0.677	0.70	0.902	0.95	0.997
0.21	0.354	0.46	0.689	0.71	0.908	0.96	0.998
0.22	0.369	0.47	0.700	0.72	0.915	0.97	0.999
0.23	0.384	0.48	0.711	0.73	0.921	0.98	0.9996
0.24	0.399	0.49	0.721	0.74	0.926	0.99	0.9999
0.25	0.414	0.50	0.732	0.75	0.932	1.00	1.0000

附表八 由U'之值求r表

$[r=\cos(\pi U')]$

U'	r	U'	r	U'	r
0.00	1.0000	0.18	0.8439	0.36	0.4260
0.01	0.9996	0.19	0.8268	0.37	0.3973
0.02	0.9982	0.20	0.8089	0.38	0.3682
0.03	0.9958	0.21	0.7902	0.39	0.3387
0.04	0.9924	0.22	0.7707	0.40	0.3089
0.05	0.9880	0.23	0.7504	0.41	0.2788
0.06	0.9826	0.24	0.7293	0.42	0.2485
0.07	0.9762	0.25	0.7074	0.43	0.2180
0.08	0.9688	0.26	0.6848	0.44	0.1873
0.09	0.9604	0.27	0.6615	0.45	0.1564
0.10	0.9511	0.28	0.6375	0.46	0.1253
0.11	0.9409	0.29	0.6129	0.47	0.0941
0.12	0.9295	0.30	0.5877	0.48	0.0628
0.13	0.9174	0.31	0.5620	0.49	0.0314
0.14	0.9044	0.32	0.5358	0.50	0.0000
0.15	0.8905	0.33	0.5091		
0.16	0.8757	0.34	0.4819		
0.17	0.8602	0.35	0.4542		