യുക്തിഭാഷാ

ജ്യേഷ്ഠദേവൻ

യുക്തിഭാഷാ

(ഒന്നാം ഭാഗം: സാമാന്യഗണിതം)

ജ്യേഷ്ഠദേവൻ

വ്യാഖ്യാതാക്കൾ:
രാമവർമ്മ (മരു) തമ്പുരാൻ തിരുമനസ്സുകൊണ്ടു്
ഏ. ആർ. അഖിലേശ്വരയ്യർ, എം. ഏ. എൽ. ടി.
ഹെഡ് മാസ്റ്റർ, സർക്കാർ ഹൈസ്കൂൾ,
വടക്കാഞ്ചേരി.

സായാഹ്ന ഫൗണ്ടേഷൻ
തിരുവനന്തപുരം
2020

Yuktibhāsha
Malayalam General Mathematics
by **Jyēshṭadēvan**
First published: 1946

This PDF version is released under the provisions of Creative Commons Attribution Share Alike license for free download and usage.

The PDF was generated from sources marked up in LaTeX in a computer running GNU/LINUX operating system. It was typeset using XeTeX from TeXLive 2020. The base font is traditional script of RIT Rachana developed by KH Hussain *et al.* and maintainted by Rachana Institute of Typography. The Latin script is TeX Gyre Pagella developed by GUST, the Polish TeX Users Group and math font is from newpxmath by Michael Sharpe.

Cover: Maske Motte (1933), a painting by Paul Klee (1879–1940). The image has been taken from Wikimedia and is gratefully acknowledged.

This document is distributed in the hope that it will be useful, but without any warranty; without even the implied warranty of merchantability or fitness for a particular purpose.

Published by **Sayahna Foundation**
JWRA 34, Jagathy, Trivandrum, India 695014
URL: www.sayahna.org

ഉപോൽഘാതം

"വേദസ്യ ചക്ഷുഃ കില ശാസ്ത്രമേതൽ
പ്രധാനതാംഗേഷു തതോസ്യ യുക്താ"

എന്നിങ്ങനെ വേദാംഗങ്ങളിൽ സൎവ്വപ്രാധാന്യം അർഹിക്കുന്ന ജ്യോതിശാസ്ത്രത്തിന്റെ അപാരതയും ഗഹനതയും സൎവ്വവിദിതമാണല്ലൊ. ആ ശാസ്ത്രത്തിന്റെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളായ ക്രിയാഭാഗവും ഫലഭാഗവും ആധാരാധേയഭാവം പോലെയാണ് വർത്തിക്കുന്നതു്. നക്ഷത്രതിഥി വാരയോഗകരണങ്ങളായ പഞ്ചാംഗത്തെ പുരസ്കരിച്ചുള്ള സാധാരണഗണിതംതൊട്ടു ഗ്രഹണപര്യന്തമുള്ള എല്ലാ ഗണിതവും ക്രിയാ ഭാഗത്തിൽ പെട്ടതാകയാൽ അതിന്റെ പ്രാധാന്യം അനുക്തസിദ്ധമാണ്. ഇപ്രകാരം പ്രാധാന്യവും പ്രാഥമ്യവും അഹിക്കുന്ന ഗണിത പദ്ധതിയുടെ ദൃഢതയും പ്രൗഢതയും നിമ്മാണയുക്തിയും യഥാതഥം ആധുനികഗണിതശാസ്ത്രപണ്ഡിതന്മാർക്കുടി ദൃഷ്ടിഗോചരമാക്കിത്തരുന്ന ഒരു പ്രാചീനഗ്രന്ഥരത്നമാണ് ഒരു ലഘുവ്യാഖ്യാനത്തോടുകൂടി ഞങ്ങളിപ്പോൾ വിദ്വൽസമക്ഷം അവതരിപ്പിക്കുന്ന ഈ "യുക്തിഭാഷാ".

യുക്തിഭാഷയിൽ സമ്യക്കായ ജ്ഞാനവും തഴക്കവും പഴക്കവും സിദ്ധിച്ചിട്ടുള്ള ഗണിതപടുക്കൾ ഇന്ന് അതിവിരളമായിരിക്കുന്നു. ഉത്തമനായ ഒരു ഗുരുവിന്റെ മുഖത്തുനിന്നു പഠിക്കുവാൻ ഉദ്ദേശിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ഒരു മഹൽഗ്രന്ഥമാണ് "യുക്തിഭാഷാ' എന്നു പലപ്പോഴും ഞങ്ങൾക്കു തോന്നിയിട്ടുണ്ട്. താദൃശനായ ഒരു ഗുരുവിന്റെ അഭാവം നിമിത്തം യുക്തിഭാഷാ കത്താവിന്റെ യഥാർത്ഥമനോഗതി ഏതാണ്ട് ഊഹിച്ചെടുക്കുവാൻ മാത്രമേ ഞങ്ങൾക്ക് സാധിച്ചിട്ടുള്ളൂ. ഇന്നത്തെ ഗണിതശാസ്ത്രന്യായങ്ങളെ അനുസരിച്ചു യുക്തിഭാഷയെ വ്യാഖ്യാനിക്കുവാൻ എളുപ്പമാണെന്നു ചിലർക്കു തോന്നിയേക്കാമെങ്കിലും അതു് അത്രത്തോളം ക്ഷിപ്രസാദ്ധ്യമാണെന്നു ഞങ്ങൾക്കു തോന്നുന്നില്ല. യുക്തിഭാഷയിലെ ഭാഷയുടെ പഴമയ്ക്കും വിഷയത്തിന്റെ ഗൗരവത്തിന്നും പഴയരീതിയിൽ തന്നെ വ്യാഖ്യാനിക്കുകയായിരിക്കും സമഞ്ജസമായിരിക്കുക എന്നാണ് ഞങ്ങളുടെ അഭിപ്രായം. പ്രാചീനകേരളഗണകോത്തമന്മാരുടെ ചിന്താഗതിയെ അനുസരിച്ചു തന്നെയാണ് ഞങ്ങളുടെ വ്യാഖ്യാനത്തിന്റെ ഗതിയും. ഞങ്ങളുടെ ഈ ശ്രമം പൂർണ്ണമായും സഫലമായി എന്നു ഞങ്ങൾ അഭിമാനിക്കുന്നില്ല. തുടങ്ങിവെച്ചാൽ പൂർത്തിയാക്കുവാനോ പരിഷ്കരിക്കുവാനോ പലരുമുണ്ടാകുമെന്നുള്ള വിശ്വാസത്താൽ മാത്രമാണ് ഞങ്ങൾ ഈ ഉദ്യമത്തിലേക്ക് പ്രവേശിച്ചതു്.

കയ്യെഴുത്തു പ്രതികളിൽ എഴുത്തുകാരുടെ അനവധാനതയാൽ വന്നുകൂടിയ പിഴകളും അവ്യക്തതകളും കഴിയുന്നതും തീർത്തുകൊണ്ടുള്ള ഒരു പാഠമാണ് ഇതിൽ സ്വീകരിച്ചിട്ടുള്ളത്. പാഠനിർണ്ണയം ചെയ്യുവാൻ തൃപ്പൂണിത്തുറ സംസ്കൃതഗ്രന്ഥശാല വക ഒരു കയ്യെഴുത്തുപ്രതി, കുളിവാരിയംവക ഒരു ഗ്രന്ഥം, ദേശമംഗലം മനവക ഒരു ഗ്രന്ഥം, കൊടുങ്ങല്ലൂർ കോവിലകം വക ഒരു ഗ്രന്ഥം എന്നിങ്ങനെ നാലു ഗ്രന്ഥങ്ങൾ ഞങ്ങൾക്ക് സഹായകമായിത്തീർന്നിട്ടുണ്ട്.

ഏതദ്ഗ്രന്ഥത്തിൽ സാമാന്യഗണിതപ്രകരണമായ പൂർവ്വഭാഗത്തിലെ വിഷയങ്ങളെ ഏഴദ്ധ്യായങ്ങളായിട്ടാണ് വിഭജിച്ചിട്ടുള്ളത്. 'പരികർമ്മാഷ്ടകം' മുതൽ 'ത്രൈരാശികം' വരെയുള്ള ആദ്യത്തെ നാലദ്ധ്യായങ്ങളിൽപ്പെട്ട ക്രിയകളെല്ലാം സാമാന്യഗണിതമാർഗ്ഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നവർക്കൊക്കെയും സുപരിചിതമായിട്ടുള്ളതാകകൊണ്ടും മൂലംകൊണ്ടുതന്നെ വിഷയം മിക്കവാറും സ്പഷ്ടമാകുന്നതുകൊണ്ടും വിശദീകരണം വേണമെന്നു തോന്നിയേടത്തു മാത്രമേ ടിപ്പണികൾ ചേർത്തിട്ടുള്ളു. അഞ്ചാമദ്ധ്യായത്തിൽ "കുട്ടാകാരക്രിയ"യുടെ യുക്തിയാണ് പ്രതിപാദിച്ചിട്ടുള്ളത്. ഈ യുക്തി മനസ്സിലാക്കുവാൻ കുട്ടാകാര ക്രിയയിൽ നല്ല ഉപസ്ഥിതി ആവശ്യമാണ്. തന്മൂലം അവിടെ ടിപ്പണികൾ ചേർത്തിട്ടുള്ളതിനു പുറമെ യുക്തിഭാഷാ കർത്താവിന്റെതന്നെ ഒരു ഭാഷാവ്യാഖ്യാനത്തെ അനുസരിച്ചൊരു ലഘുവ്യാഖ്യാനത്തോടും ഉദാഹരണങ്ങളോടുംകൂടി "തന്ത്രസംഗ്രഹ"ത്തിലെ കുട്ടാകാരപ്രകരണത്തെ ഒരനുബന്ധമായി പുസ്തകത്തിന്റെ ഒടുവിൽ പ്രത്യേകം ചേർത്തിട്ടുമുണ്ട്. പരിധിവ്യാസം, ജ്യാപ്രകരണം എന്ന ആറും ഏഴും അദ്ധ്യായങ്ങൾ പ്രൗഢങ്ങളും ഗഹനങ്ങളുമാകയാൽ ആ ഭാഗങ്ങൾ സവിസ്തരം വ്യാഖ്യാനിച്ചിട്ടുണ്ടെന്നു കാണാവുന്നതാണ്.

പ്രസ്തുത ഗ്രന്ഥത്തിൽ പലതരം സംഖ്യാസൂചനകളുണ്ട്. അവയുടെ സുഗമതയ്ക്കുവേണ്ടി കടപയാദ്യക്ഷരങ്ങളിൽനിന്നും രൂഢിമൂലകാർത്ഥപ്രതിപാദിതഭൂതസംഖ്യകളിൽനിന്നും സംഖ്യകളെ കണക്കാക്കുന്ന സമ്പ്രദായത്തിന്റേയും അതോടൊപ്പം പാശ്ചാത്യഗണിതശാസ്ത്രപ്രകാരമുള്ള ക്രിയാസൂചകചിഹ്നങ്ങളുടേയും ഒരു സംക്ഷിപ്തവിവരണം ഈ പ്രസ്ഥാവനയുടെ ചുവട്ടിൽ എഴുതിച്ചേർത്തിട്ടുണ്ട്.

വിദ്യാഭ്യാസം ഉദ്ദിഷ്ടഫലപ്രാപ്തിയിലെത്തണമെങ്കിൽ മാതൃഭാഷാ വഴിക്കാകണമെന്നുള്ള വിദഗ്ദ്ധാഭിപ്രായത്തെ ഇന്നു മിക്ക ഗവമ്മേണ്ടുകളും സ്വീകരിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലൊ. ഈ കാര്യത്തിൽ നേരിട്ടുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന വൈഷമ്യങ്ങളിലൊന്നു സാങ്കേതികപദങ്ങളുടെ ദൗലഭ്യമാണ്. എന്നാൽ ഗണിതശാസ്ത്രത്തെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളമെങ്കിലും കൈരളിയിൽ ഈ ക്ഷാമം തീർക്കുവാൻ യുക്തിഭാഷയിലെ സാങ്കേതികപദങ്ങൾ തുലോം പര്യാപ്തങ്ങളും സാവ്വത്രികമായ പ്രാചാരം അർഹിക്കുന്നവയുമാണെന്നാണ് ഞങ്ങൾക്കു തോന്നുന്നത്. ഇംഗ്ലീഷ് തർജ്ജമയോടുകൂടി അകാരാദിക്രമത്തിൽ ചേർത്തിട്ടുള്ള സാങ്കേതികപദങ്ങളുടെ ഒരു പട്ടികയും ഇന്ന് ഇംഗ്ലീഷുഗണിതപാഠപുസ്തകങ്ങളിൽ കാണുന്ന സാങ്കേതികപദങ്ങൾക്കു ശരിയായ മലയാളപദങ്ങളുടെ ഒരു പട്ടികയും ഈ ഗ്രന്ഥാവസാനത്തിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ളത് ഒരു പക്ഷേ പാഠശാലകളിലേയ്ക്കു വേണ്ടതായ ഗണിതശാസ്ത്രപാഠപുസ്തകങ്ങൾ തയ്യാറാക്കുന്നവർക്കെങ്കിലും മാർഗ്ഗദർശകമായിത്തീർന്നുകണ്ടാൽക്കൊള്ളാമെന്ന ആഗ്രഹത്താൽ മാത്രമാണ്.

കുട്ടാകാരക്രിയാസമ്പ്രദായം പാശ്ചാത്യഗണിതക്കാർക്കും പരിചയപ്പെടണമെന്ന ഉദ്ദേശത്തോടെ അതിനെപ്പറ്റി ഇംഗ്ലീഷിൽ ഒരു ഉപന്യാസവും ഇതിൽ ചേർത്തിട്ടുണ്ട്.

പരിലേഖങ്ങളിലെ മുകൾഭാഗം സാമാന്യേന കിഴക്കെന്നു കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഇനി, ഈ സദുദ്യമത്തിൽ ഞങ്ങളെ പല വിധത്തിലും സഹായിച്ച മാന്യവ്യക്തികളെക്കുറിച്ചുകൂടി രണ്ടുവാക്കു പറയേണ്ടതായിട്ടുണ്ട്. അവരിൽ പരേതനായ സംസ്കൃതപണ്ഡിതർ ശ്രീമാൻ കോണത്തു കൃഷ്ണവാരിയരുടെ സ്വരൂപമാണ് ഞങ്ങളുടെ സ്മൃതിപഥത്തിൽ ആദ്യമായി ഉദിക്കുന്നത്. യുക്തിഭാഷാപഠനത്തിൽ ഞങ്ങളുടെ സഹപ്രവർത്തകനായിരുന്ന അദ്ദേഹത്തിന്റെ പാണ്ഡിത്യവും തീക്ഷ്ണബുദ്ധിയും ഞങ്ങൾക്ക് എത്രമാത്രം സഹായകമായിത്തീർന്നിട്ടുണ്ടെന്നു പറഞ്ഞറിയിക്കാവതല്ല. അദ്ദേഹത്തിന്റെ ആത്മാവിനു നിത്യശാന്തി ഭവിക്കട്ടെ എന്നു പ്രാർത്ഥിക്കുകയല്ലാതെ കരണീയാന്തരമില്ലല്ലൊ. അടുത്ത്, എടുത്തുപറയത്തക്ക പ്രമുഖവ്യക്തികളിൽ പ്രഥമസ്ഥാനം വഹിക്കുന്നത് ഇപ്പോൾ വടക്കാഞ്ചേരി ഹൈസ്കൂൾ അദ്ധ്യാപകനായിരിക്കുന്ന ശ്രീമാൻ ടി. വി. വേദമൂർത്തിഅയ്യർ ബി. എ. അവർകളാണ്. കയ്യെഴുത്തു പകർപ്പുകൾ പരിശോധിക്കുക, ഉദാഹരിച്ചിരിക്കുന്ന ക്രിയകൾ വീണ്ടുംചെയ്തു ഉറപ്പിക്കുക, പരിലേഖനങ്ങളുടെ അറ്റകുറ്റങ്ങൾ തീർത്ത് അവയെ വരച്ചുണ്ടാക്കുക, സാങ്കേതികപദങ്ങൾ മുതലായവയുടെ പട്ടിക തയ്യാറാക്കുക എന്നിങ്ങനെ സർവ്വവിധത്തിലും ഞങ്ങളെ സഹായിച്ച ശ്രീമാൻ വേദമൂർത്തിഅയ്യർ അവർകളോട് അദ്ദേഹത്തിന്റെ സഹായസഹകരണങ്ങൾക്കു ഞങ്ങൾ എന്നും കടപ്പെട്ടവരാണ്. അതുപോലെതന്നെ "പ്രൂഫ്" നോക്കുക എന്ന ആ ഭാരിച്ച കൃത്യം മുഴുവനും ഹൃദയപൂർവ്വം നടത്തിത്തന്ന ചാലക്കുടി സർക്കാർ പ്രാഥമികസ്കൂൾ ഹെഡ്മാസ്റ്റർ ടി. കെ. രങ്കയ്യർ അവർകളോടും ഞങ്ങൾക്കുള്ള ആധമർണ്ണ്യം തീർത്താൽ തീരാത്തതാണ്. കയ്യെഴുത്തു പകർപ്പ് സനിഷ്കർഷം പരിശോധിക്കുകയും വേണ്ടത്തക്ക നിർദ്ദേശങ്ങൾ നല്കുകയും ചെയ്ത പണ്ഡിതർ ശ്രീമാൻ കുനെഴുത്തു പരമേശ്വരമേനോൻ അവർകളും വ്യാഖ്യാനത്തിലെ ചില വിഷമഘട്ടങ്ങളെ സുഗമമാക്കിത്തീർത്തുതന്ന ശ്രീമാൻ പി. കെ. കോരു എം. എ. എൽ. ടി. അവർകളും ഞങ്ങളുടെ സവിശേഷകൃതജ്ഞതയ്ക്കു പാത്രീഭവിച്ചിട്ടുള്ള മറ്റു രണ്ടു മാന്യവ്യക്തികളാകുന്നു. ആരുടെ നിരന്തരമായ നിർബ്ബന്ധവും പ്രോത്സാഹനവും ഹേതുവായിട്ടാണോ ഈ ഗ്രന്ഥം എവംവിധം വ്യാഖ്യാനസഹിതം രംഗപ്രവേശം ചെയ്തത് ആ ശാസ്ത്രകുതുകിയും മഹാമതിയുമായ ബ്രഹ്മശ്രീ എ. കെ. ടി. കെ. എം. വാസുദേവൻ നമ്പൂതിരിപ്പാടവർകളോടും ഞങ്ങളുടെ ആവശ്യപ്രകാരമാണെങ്കിലും യാതൊരു വൈമനസ്യവും കൂടാതെ ഈ ഗ്രന്ഥത്തിനു സമുചിതമായ ഒരവതാരിക എഴുതിത്തന്ന, സംസ്കൃതചിത്തനായ പണ്ഡിതർ ശ്രീമാൻ ശ്രീധരമേനോൻ (ചാലക്കുടി ഹൈസ്കൂൾ സീനിയർ മലയാളം പണ്ഡിതർ) അവർകളോടും ഇത്രയും ഭംഗിയിൽ ഇതിന്റെ അച്ചടിവേല മുഴുവനും നടത്തിത്തന്ന മംഗളോദയം പ്രസ്സ് ഭാരവാഹികളോടും, പ്രത്യേകിച്ച് പ്രസ്സ് മാനേജർ ശ്രീമാൻ പി. വി. നാരായണയ്യർ ബി. എ. അവർകളോടും ഞങ്ങൾക്കുള്ള നിസ്സീമമായ നന്ദിയേയുംകൂടി ഇവിടെ രേഖപ്പെടുത്തിക്കൊണ്ടു ഞങ്ങൾ ഈ പ്രസ്താവനയെ അവസാനിപ്പിച്ചുകൊള്ളുന്നു.

പട്ടിക 1: ചിഹ്നങ്ങളും അവയുടെ അർത്ഥങ്ങളും

ചിഹ്നം	ഉദാഹരണം	വിവരണം
$+$	$\text{ഗ} + \text{മ}$	‘ഗ’ എന്ന സംഖ്യയോടു ‘മ’ എന്ന സംഖ്യ കൂട്ടുക
$-$	$\text{ഗ} - \text{മ}$	‘ഗ’ എന്ന സംഖ്യയിൽനിന്നു ‘മ’ എന്ന സംഖ്യയെ വാങ്ങുക
$\times$; .	$\text{ഗ} \times \text{മ}$; $\text{ഗ} \cdot \text{മ}$	‘ഗ’ എന്ന സംഖ്യയെ ‘മ’ എന്ന സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിക്കുക
$\div$	$\text{ഗ} \div \text{മ}$; $\frac{\text{ഗ}}{\text{മ}}$	‘ഗ’ എന്ന സംഖ്യയെ ‘മ’ എന്ന സംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിക്കുക $\frac{\text{ഗ}}{\text{മ}}$. ‘ഗ’ അംശവും ‘മ’ ഛേദവും ആയിരിക്കുന്ന ഒരു ഭിന്നസംഖ്യ
$\frac{\text{പ്രമാണഫലം}}{\text{പ്രമാണം}}$		പ്രമാണത്തിന്റെ എത്ര ആവർത്തി പ്രമാണഫലമെന്ന്
$: \, : \,;\ =$	$\text{ഗ} : : \text{മ}; \text{ഗ} = \text{മ}$	സമം; തുല്യം. : : ഈ അടയാളം ത്രൈരാശികത്തിൽ മാത്രമേ ഉപയോഗിക്കാറുള്ളു
$\left.\begin{array}{l}\text{ഗ} : \text{മ} : : \text{ന} : \text{ട} \\ \text{ഗ} : \text{മ} = \text{ന} : \text{ട}\end{array}\right\}$	$\frac{\text{ഗ}}{\text{മ}} = \frac{\text{ന}}{\text{ട}}$	
$\pm$	$\text{ഗ} \pm \text{മ}$	‘ഗ’; ‘മ’ എന്ന സംഖ്യകളുടെ യോഗമൊ അന്തരമൊ
$\backsim$	$\text{ഗ} \backsim \text{മ}$	‘ഗ’, ‘മ’ എന്നീ സംഖ്യകളുടെ അന്തരം
ഗ^2, ഗ^3, ഗ^4, ഗ^5 ഇത്യാദി		‘ഗ’ എന്ന സംഖ്യയുടെ ക്രമേണ വർഗ്ഗം, ഘനം, സമചതുർഘാതം, സമപഞ്ചഘാതം എന്ന്
$\surd$	$\sqrt{\text{ഗ}}$	‘ഗ’ എന്ന സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലം
$\angle$	$\angle \text{ഗ}$	$1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots \times \text{ഗ}$. ഒന്നു തുടങ്ങി ‘$\text{ഗ}$’ എന്ന സംഖ്യ-വരെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഘാതം
$\therefore$		അതുകൊണ്ട്
$-^{\circ}$, $-'$, $-''$, $-'''$	$\text{ഗ}^{\circ} - \text{മ}' - \text{ത}'' - \text{പ}'''$	തിയ്യതി, ഇലി, വിലി, തല്പര

(തുടരും . . .)

പട്ടിക 1: ചിഹ്നങ്ങളും അവയുടെ അർത്ഥങ്ങളും

ചിഹ്നം	ഉദാഹരണം	വിവരണം
( ).;{ } [ ]	$ഗ + [ച + \{ത - (സ - പ)\}]$	ക്രിയ ചെയ്യുമ്പോൾ അതാതു ആവരണ ചിഹ്നത്തിനകത്തുള്ള ക്രിയകൾ ആദ്യം ചെയ്യണം

കുറിപ്പുകൾ

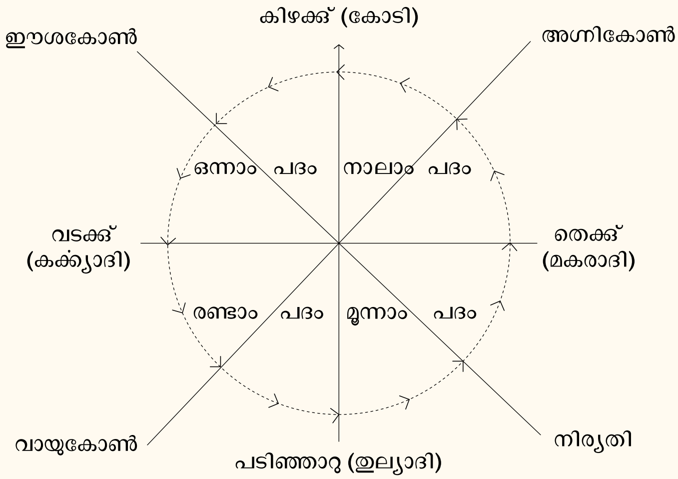
കടപയാദി: കവൎഗ്ഗം, ടവൎഗ്ഗം, പവൎഗ്ഗം ഇവ ഓരോന്നിലും അയ്യഞ്ച് അക്ഷരങ്ങൾ ക്രമേണ ഒന്ന്, രണ്ട്, മൂന്ന്, നാല്, അഞ്ച് എന്ന സംഖ്യകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ചവൎഗ്ഗം, തവൎഗ്ഗം ഇവ ഓരോന്നിലും ആദ്യത്തെ നാലക്ഷരങ്ങൾ ക്രമേണ ആറ്, ഏഴ്, എട്ട്, ഒമ്പത് എന്ന സംഖ്യകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. കൂട്ടക്ഷരങ്ങളിൽ ഞ, ന എന്നീ രണ്ടക്ഷരങ്ങളും അച്ചുകളും (സ്വരാക്ഷരങ്ങളും) ശൂന്യങ്ങളാകുന്നു. യ, ര, ല, വ, ശ, ഷ, സ, ഹ, ള, ഇവ ക്രമേണ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 എന്നീ സംഖ്യകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. കൂട്ടക്ഷരങ്ങളിൽ ഒടുക്കത്തെ അക്ഷരംകൊണ്ടു മാത്രമാണ് സംഖ്യയെ നിൎണ്ണയിക്കുന്നതു്.

ഭൂതസംഖ്യകൾ: നാലു വേദങ്ങൾ, ദ്വാദശാദിത്യന്മാർ, ഏകാദശരുദ്രന്മാർ, നയനദ്വയം, പഞ്ചബാണൻ, മൂന്നഗ്നികൾ ഇത്യാദികളെല്ലാം പ്രസിദ്ധങ്ങളാണല്ലോ. അതുകൊണ്ടു വേദങ്ങൾ എന്നു പറഞ്ഞാൽ നാലെന്നും, ആദിത്യന്മാർ എന്നു പറഞ്ഞാൽ പന്ത്രണ്ടെന്നും ഇത്യാദിരീത്യാ ഭൂതങ്ങളിൽനിന്നും സംഖ്യകളെ കല്പിക്കേണ്ടും പ്രകാരം.

പട്ടിക 2: പട്ടിക

60 തല്പര ($60'''$)	=	ഒരു വിലി
60 വിലി ($60''$)	=	ഒരു ഇലി
60 ഇലി ($60'$)	=	ഒരു തിയതി
30 തിയതി (30°)	=	ഒരു രാശി
12 രാശി	=	ഒരു ഭഗണം
60 ഗുൎവ്വക്ഷരം	=	ഒരു വിനാഴിക
60 വിനാഴിക	=	ഒരു നാഴിക
60 നാഴിക	=	ഒരു ദിവസം

ദിക്കുകൾ


കിഴക്ക് (കോടി)
ഈശകോൺ
അഗ്നികോൺ
ഒന്നാം പദം
നാലാം പദം
വടക്ക്
(കക്ക്യാദി)
തെക്ക്
(മകരാദി)
രണ്ടാം പദം
മൂന്നാം പദം
വായുകോൺ
നിരൃതി
പടിഞ്ഞാറ് (തുല്യാദി)

അവതാരിക

“യുക്തിഭാഷാ” എന്ന ഈ പ്രാചീനഗണിതഗ്രന്ഥം, ഏവം വിധം സമഞ്ജസമായ ഒരു ഭാഷാവ്യാഖ്യാനത്തോടുകൂടി രംഗപ്രവേശം ചെയ്യുന്നതു് ഇദംപ്രഥമമായിട്ടാണെന്നു തോന്നുന്നു. അമേയമായ ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രസൗധത്തിന്റെ അസ്ഥിവാരമായ ക്രിയാപദ്ധതിയുടെ എല്ലാ ഭാഗവും അങ്ങേ അറ്റത്തോളം സസൂക്ഷ്മം സനിഷ്കർഷം പരിശോധിച്ചു് അതിന്റെ നിർമ്മാണ കൗശലയുക്തിയും അതിൽക്കൂടി സുഗമമാംവിധം സഞ്ചരിക്കുവാനുള്ള മാർഗ്ഗനിർദ്ദേശവും നൽകുന്ന പ്രസ്തുതഗ്രന്ഥം ഒരു ഭാഷാഗ്രന്ഥമാകയാൽ കൈരളിക്കും ഒരു കേരളീയനാൽ വിരചിതമായിട്ടുള്ളതാകയാൽ കേരളീയർക്കേവർക്കും അഭിമാനത്തെ വളർത്തിക്കൊണ്ടു് ഭാഷാഭണ്ഡാഗാരത്തിന്റെ ഒരൊഴിഞ്ഞ മൂലയിലാണ് വർത്തിക്കുന്നതു്. തന്മൂലം ഈ അമൂല്യരത്നം അധികമാരുടേയും ദൃഷ്ടിയിൽപ്പെട്ടിട്ടുണ്ടാവില്ല. അങ്ങിനെയായാൽപ്പോരെന്നു തീരുമാനിച്ച ഇതിന്റെ പ്രസാധകന്മാരുടെ സദ്വ്യവസായം എത്രയും അഭിനന്ദനീയമായിരിക്കുന്നു.

ഭാരതത്തിലെ ഇതരദേശങ്ങളെ അപേക്ഷിച്ച കേരളത്തിനുള്ള പ്രത്യേകത ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രവിഷയത്തിലും കാണപ്പെടുന്നുണ്ട്. പഞ്ച സിദ്ധാന്തങ്ങളിൽ സൂര്യ്യസിദ്ധാന്തത്തെ സർവ്വപ്രധാനമായി ഇതര ദേശീയർ സ്വീകരിച്ചിരിക്കേ കേരളീയർ മാത്രം ആദ്യം മുതൽക്കേ ബ്രഹ്മസിദ്ധാന്തത്തെ അനുസരിച്ചു വരുന്നതുതന്നെ ഇതിനു മതിയായ ലക്ഷ്യമാകുന്നു. കല്യബ്ദം 3785-ൽ (എ. ഡി. 684-ൽ) ആണല്ലോ പരഹിതഗണിതപദ്ധതി ആദ്യമായി നടപ്പിൽ വന്നതു്. അതിനുമുമ്പ് ഗോളഗണിതപാരദൃശ്വാവായ ആര്യ്യഭടാചാര്യ്യരുടെ ആര്യ്യഭടീയ ഗ്രന്ഥമായിരുന്നു ഇവിടെ ഗണിതമനീഷികൾക്കാലംബം. ഈ ആര്യ്യഭടൻ ഒരു കേരളീയനാണെന്നും ആര്യ്യഭടൻ എന്നായിരുന്നില്ല അദ്ദേഹത്തിന്റെ സാക്ഷാൽ നാമധേയമെന്നും സാധാരണക്കാർക്കു് ദുർഗ്ഗമമായ ആര്യ്യാവൃത്തത്തിൽ ആര്യ്യഭടീയം ഗ്രന്ഥം മുഴുവനും എഴുതിയതിനാൽ ലഭിച്ച ഒരു ബിരുദനാമം മാത്രമാണ് അതെന്നും പല അഭിജ്ഞന്മാരും അഭിപ്രായപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. ഈ അഭിപ്രായത്തിന് ഉപോൽബലകമായി തെളിവുകളുമുണ്ട്. ആര്യ്യഭടീയത്തിന്റെ ഗണിതപാദത്തിലേയും ഗീതികാപാദത്തിലേയും പ്രാരംഭശ്ലോകങ്ങൾ ആസ്പദമാക്കി നോക്കുമ്പോൾ ആര്യ്യഭടീയം ബ്രഹ്മസിദ്ധാന്തത്തെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയാണ് എഴുതിയിട്ടുള്ളതെന്നു കാണാവുന്നതാണ്. ആര്യ്യഭടീയത്തിന്റെ വ്യാഖ്യാതാക്ക

ന്മാരെല്ലാവരും കേരളീയരാകുന്നു. മാത്രമല്ല, ആര്യഭടീയഭാഷ്യകാരനായ കേളല്ലൂർ നീലകണ്ഠസോമയാജിപ്പാട്ട്, ആര്യഭടന്റെ ജന്മദേശത്തെപ്പറ്റി "അശ്മകജനപദജാതഃ" എന്നു രേഖപ്പെടുത്തീട്ടുള്ളതും ശ്രദ്ധേയമാകുന്നു. അശ്മകപദത്തിന് ആപ്റ്റിയുടെ സംസ്കൃതനിഘണ്ടു (Apte's Sanskrit Dictionary)വിൽ പ്രാചീനതിരുവിതാംകൂർ എന്നാണ് അർത്ഥം കൊടുത്തിട്ടുള്ളത്. ഇപ്രകാരം ഒരു കേരളീയനാണെന്ന് അനുമാനിക്കുവാൻ ഇടംനൽകുന്ന ഈ മഹാനുഭാവൻ എ. ഡി. 476-ൽ ജനിച്ചതായും എ. ഡി. 499-ൽ ഗ്രന്ഥകാരനു കേവലം 23 വയസ്സുമാത്രം പ്രായമായിരുന്ന കാലത്തു ആര്യഭടീയനിർമ്മിതി നടന്നതായും അസന്ദിഗ്ദ്ധമാംവിധം തെളിഞ്ഞിരിക്കുന്നു. "ഷഷ്ട്യബ്ദാനാം ഷഷ്ടിർയദാ വ്യതീതാസ്ത്രയശ്ച യുഗ പാദാഃ ത്ര്യധികാ വിംശതിരബ്ദാസ്തദേഹ മമ ജന്മനോതീതാഃ" എന്നു ഗ്രന്ഥകാരൻതന്നെ കാലക്രിയാപാദത്തിൽ തന്റെ കാലത്തെ സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുള്ളതു നോക്കുക.

ആര്യഭടീയസിദ്ധാന്തത്തിൽത്തന്നെയും കാലാനുരോധേന ന്യൂനതകൾ കണ്ടുതുടങ്ങിയതിനാലാണ് മുൻ പ്രസ്താവിച്ചപോലെ എ. ഡി. 684-ൽ ഏതാണ്ട് ഒരു രണ്ടു നൂറ്റാണ്ടു കഴിഞ്ഞപ്പോൾ പരഹിതഗണിതം നടപ്പാവാനിടയായത്. പരഹിതപദ്ധതിയുടെ നിർമ്മാതാവ് ആരാണെന്നു തീർത്തുപറയുവാൻ സാധിക്കുന്നില്ലെങ്കിലും ആ മഹാനും ഒരു കേരളീയനായിരിക്കണം എന്നൂഹിക്കുവാൻ അതിന് ഇന്നും കേരളത്തിൽ മാത്രമുള്ള പ്രചാരംതന്നെ മതിയായ കാരണമാകുന്നു. കൃത്യമായി കാലനിർണ്ണയം ചെയ്യുവാൻ തക്ക രേഖകൾ ഇല്ലെങ്കിലും ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രപാരാവാരപാരംഗതന്മാരായ പല പണ്ഡിതവരേണ്യന്മാരും കേരളത്തെ അധിവസിച്ചിട്ടുണ്ടെന്നുള്ളതിന് അവരുടെ ചില കൃതികളും അവരെസ്സംബന്ധിച്ചുള്ള പല ഐതിഹ്യങ്ങളും സാക്ഷ്യങ്ങളായി നില്ക്കുന്നുണ്ട്. "പറച്ചിപെറ്റ പന്തിരുകുല"ത്തിന്റെ പിതാവെന്നു പ്രസിദ്ധനായ, വാക്യകാരൻ എന്ന പേരിൽ അറിയപ്പെടുന്ന, വരരുചിയും പാഴൂർ പടിപ്പുരയുടെ മാഹാത്മ്യത്തിനു ഹേതുഭൂതനായിത്തീർന്ന തലക്കുളത്തു ഭട്ടതിരിയും 'ജീവേ പരസ്പരന്യായ'ത്തിന്റെ മൂലകർത്താവായ സങ്ഗമഗ്രാമ മാധവനും മഹിഷമംഗലം നമ്പൂതിരി, തൃക്കണ്ടിയൂർ അച്യുതപ്പിഷാരടി തുടങ്ങിയുള്ളവരും മറ്റും ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രപഥചാരികളുടെ ഭക്ത്യാദരബഹുമാനങ്ങൾക്കു പാത്രങ്ങളായി യശശ്ശരീരികളായി കേരളം ഉള്ള കാലത്തോളം ജീവിച്ചിരിക്കുന്നവരാകുന്നു.

അന്നത്തെ ഏറ്റവും പരിഷ്കരിച്ച ഗണിതപദ്ധതിയായിരുന്ന പ്രസ്തുത പരിഹിതത്തിലും കാലാന്തരത്തിൽ സ്ഖലിതങ്ങൾ കണ്ടുതുടങ്ങി. തൽഫലമായി ദൃഗ്ഗണിതം എന്ന നൂതനപദ്ധതി നടപ്പിൽ വന്നു. ഏകദേശം ഒരഞ്ഞൂറുകൊല്ലം കൂടുമ്പോൾ ഗണിതപദ്ധതിയിൽ മാറ്റങ്ങൾ വരുത്തേണ്ടി വരുമെന്ന് ആചാര്യന്മാർ തന്നെ പ്രവചിച്ചിട്ടുണ്ട്. ദൃഗ്ഗണിതം നടപ്പിൽ വന്നത് "ശാകേ ത്രീഷു വിശ്വമിതേ കൃതം" എന്ന വാക്യം അനുസരിച്ച് ശകാബ്ദം 1353-ന് എ. ഡി. 1430-ൽ ആണെന്നു സിദ്ധമാകുന്നു. എ. ഡി. 684-ൽ നടപ്പിൽ വന്ന പരഹിതത്തിൽ ശാസ്ത്രദൃഷ്ട്യാ പിഴകൾ കണ്ടുതുടങ്ങീട്ടും പിന്നേയും ഒന്നു രണ്ടു നൂറ്റാണ്ടുകൂടി കഴിഞ്ഞതിനു ശേഷമാണ് ദൃഗ്ഗണിതം നടപ്പിൽ വന്നതെന്ന് ഇതിൽനിന്നും വ്യക്തമാകുന്നുണ്ടല്ലോ. ദൃഗ്ഗണിതകർത്താവായ വടശ്ശേരി പരമേശ്വരൻനമ്പൂതിരി—പരമേശ്വരാചാര്യർ—ആലത്തൂർ ഗ്രാമക്കാരനും

ഭാസ്കരാചാര്യകൃതമായ ലീലാവതിക്കും മറ്റു പല ജ്യൗതിഷികഗ്രന്ഥങ്ങൾക്കും വ്യാഖ്യാനങ്ങൾ എഴുതീട്ടുള്ള ആളുമാകുന്നു. ഇദ്ദേഹം 55 കൊല്ലക്കാലം നിളാനദിയുടെ (ഭാരതപ്പുഴയുടെ) തീരത്തു കിടന്നുകൊണ്ടു നക്ഷത്രനിരീക്ഷണം നടത്തിയതിന്റെ ഫലമായിട്ടാണ് ദൃഗ്ഗണിതം ഉണ്ടായതെന്നു വിശ്വാസയോഗ്യമായ ഒരൈതിഹ്യം ഇന്നും പ്രചാരത്തിലുണ്ട്. പ്രസ്തുത ദൃഗ്ഗണിതകർത്താവു മാത്രമല്ല അന്നു ഗണിത പദ്ധതിയിൽ തെറ്റുകളുണ്ടെന്നും അവയെ യഥാകാലം തിരുത്തേണ്ടതാണെന്നും ഉൽഘോഷിച്ചിട്ടുള്ളത്. പരമേശ്വരാചാര്യരുടെ അടുത്തു മുമ്പു ജീവിച്ചിരുന്നവരെന്ന് മിക്കവാറും ഗണിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള രണ്ടു വിദ്വച്ഛിരോമണികളുടെ പേരുകൾ ഇവിടെ പ്രത്യേകം പ്രസ്താവയോഗ്യമാകുന്നു. "നൂതനഗ്രഹ സോമസുതാ രചിതായാഃ കരണ പദ്ധതേർവിദുഷാ" എന്നിങ്ങനെ 'കരണപദ്ധതി'യുടെ പ്രണേതാവെന്നു പ്രസിദ്ധനായ പുതുമനച്ചോമാതിരിപ്പാടും 'ജീവേ, പരസ്പരന്യായ'ത്തിന്റെ ജനയിതാവെന്നു മുൻ സൂചിപ്പിച്ച സങ്ഗമഗ്രാമമാധവനും ആകുന്നു ആ രണ്ടു മാന്യവ്യക്തികൾ. കരണപദ്ധതിയുടെ കർത്താവ് ഗ്രഹണസംബന്ധിയായ പ്രതിപാദനത്തിൽ സ്ഫുടങ്ങളെ ദൃക്കുകൊണ്ട് (നിരീക്ഷണംകൊണ്ട്) ശരിപ്പെടുത്തുവാനുള്ള മാർഗ്ഗങ്ങളെ നിർദ്ദേശിച്ചിരിക്കുന്നതും വേണ്വാരോഹാദി മഹൽഗ്രന്ഥങ്ങളുടെ കർത്താവായ മാധവൻ പരഹിതസ്ഫുടങ്ങളെ നിരീക്ഷണഫലങ്ങളുമായി ഒത്തു നോക്കുന്നതും അന്നു നടപ്പിലിരുന്ന ഗണിതപദ്ധതിയിൽ പ്രത്യക്ഷമായിരുന്ന സ്ഖാലിത്യങ്ങളെ പുരസ്കരിച്ചായിരുന്നുവെന്നു വിശിഷ്യ പറയേണ്ടതായിട്ടില്ലല്ലോ. ഈ മാധവൻ അപരിമിതശ്രേണികൾ മുഖേന പരിധിമാനത്തെ സൂക്ഷ്മപ്പെടുത്തി ആദ്യത്തെ കേരളീയനോ അഥവാ ആദ്യത്തെ ഭാരതീയനോ ആണെന്നും ഈ ഗണിതവിദ്യാസൂത്രം പാശ്ചാത്യർ കണ്ടുപിടിച്ചതായി അഭിമാനിക്കുന്നത് ഒന്നു രണ്ടു നൂറ്റാണ്ടിനു ശേഷം മാത്രമാണെന്നും കൂടി ഇവിടെ അഭിമാനപൂർവ്വം രേഖപ്പെടുത്തിക്കൊള്ളട്ടെ.

പ്രസ്തുത പരമേശ്വരാചാര്യരുടെ ദൃഗ്ഗണിതപദ്ധതി നടപ്പിൽവരുന്നുവെങ്കിലും അതിനു കേരളമൊട്ടുക്കും സർവ്വസമ്മതമായ ആനുകൂല്യം ലഭിച്ചിരുന്നില്ലെന്ന് ഊഹിക്കുവാൻ അവകാശമുണ്ട്. ആലത്തൂർ ഗ്രാമക്കാരൊഴികെ ശേഷം ഗ്രാമക്കാർ ഒരു സിദ്ധാന്തം എന്നപോലെ ഇന്നും മുഹൂർത്താദികൾക്ക് ആ പഴയ പരഹിതസിദ്ധാന്തത്തെത്തന്നെ മുറുകെ പിടിച്ചു വരുന്നുണ്ടല്ലോ. ആ സ്ഥിതിക്ക് അന്നത്തെ കഥ എന്തായിരുന്നിരിക്കാം! ഇതരഗ്രാമക്കാരുടെ മാമൂൽപ്രിയത്വമോ അജ്ഞതയോ എന്താണ് ഇതിനു ഹേതുവെന്നു മനസ്സിലാവുന്നില്ല. എ. ഡി. 1430-ൽ നടപ്പിൽ വന്ന ഇന്നത്തെ ദൃഗ്ഗണിതത്തിൽത്തന്നെ സ്ഫുടങ്ങളിൽ ന്യൂനതകൾ കാണുന്നുണ്ടെന്നും കാലാനുസൃതം ഈ പദ്ധതിയും പരിഷ്കരിക്കേണ്ട കാലം അതിക്രമിച്ചുവെന്നും കേരളത്തിലെ ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രവിശാരദന്മാർ ഐകകണ്ഠേന അഭിപ്രായപ്പെടുകയും പരിഷ്കരണാർത്ഥം കഴിയുംവിധം പരിശ്രമിക്കയും ചെയ്തുവരുന്ന ഇക്കാലത്ത്, എ. ഡി. 684-ൽ നടപ്പിൽ വന്ന ആ പഴഞ്ചൻ പരഹിത പദ്ധതി സ്വീകാര്യമാണെന്നു കരുതി പിഴച്ച മുഹൂർത്തങ്ങളിൽ മികച്ച കർമ്മങ്ങൾ അനുഷ്ഠിച്ചു പോരുന്നവരുടെ മനസ്ഥിതിയെക്കുറിച്ചെന്തു പറയേണ്ടു! പഞ്ചാംഗപുസ്തകങ്ങളിൽ പരഹിതത്തിലും ദൃക്കിലും വെവ്വേറെ ഗ്രഹസ്ഫുടങ്ങളും പകർച്ചകളും മറ്റും കാണിക്കുന്നതിലും ഗണി

തപാഠവിദ്യാർത്ഥികളെ വെറുതെ രണ്ടു വഴിക്കും നടത്തി ബുദ്ധിമുട്ടിപ്പിക്കുന്നതിലും എത്രത്തോളം ഔചിത്യമുണ്ടെന്നുള്ള സംഗതിയും സവിശേഷം ചിന്തനീയമാകുന്നു.

ആചാര്യരുടെ പ്രസ്തുത ദൃഗ്ഗണിതഗ്രന്ഥം നാളിതുവരെ കണ്ടുകിട്ടിയിട്ടില്ലെന്നുള്ളതു വേദനാജനകമായിരിക്കുന്നു. പക്ഷേ, അതിന്റെ ഒരു പരിഷ്ക്കരിച്ച പതിപ്പ് നമുക്കു കിട്ടിയിട്ടുണ്ട്. അതാണ് "തന്ത്ര സംഗ്രഹം" എന്ന പേരിൽ സുപ്രസിദ്ധമായ ഗ്രന്ഥം. തന്ത്രസംഗ്രഹകർത്താവ്, ദൃഗ്ഗണിതകർത്താവിന്റെ ഒരു മകനായ ദാമോദരൻ നമ്പൂതിരിയുടെ ശിഷ്യനും ആര്യഭടീയ ഭാഷ്യകർത്താവെന്നു വിഖ്യാതനുമായ കേളല്ലൂർ നീലകണ്ഠസോമയാജിപ്പാട്ടുതന്നെയാകുന്നു. ഇതിന്റെ നിർമ്മിതി "ഹേ വിഷ്ണോ നിഹിതം കൃത്സ്നം" എന്ന കലിയനുസരിച്ച്. എ. ഡി. 1500-ാമാണ്ടിനടുത്താണെന്നു കാണുന്നു. ഈ തന്ത്രസംഗ്രഹമാണ് "യുക്തിഭാഷ" എന്ന പ്രകൃതഗ്രന്ഥത്തിന്റെ ആധാരം. തന്ത്രസംഗ്രഹത്തിൽ പ്രതിപാദിച്ചിട്ടുള്ള വിഷയങ്ങളുടേയും ക്രിയകളുടേയും തത്തൽ ക്രമത്തിലുള്ള യുക്തികൾ നമുക്കു യുക്തിഭാഷയിൽ കാണാം. ഗോളഗണിതത്തിനും അതിനുപയുക്തമായ സാമാന്യഗണിതത്തിന്നും അവശ്യം ആവശ്യമായ എല്ലാ ഭാഗങ്ങളുടേയും യുക്തികളെ സവിസ്തരം ഉപപാദിക്കുക എന്നതു യുക്തിഭാഷയുടെ ഒരു പ്രത്യേകതയായ് കണക്കാക്കാം. "യേ ഗോളപഥസ്ഥാസ്സ്യുഃ" എന്ന കലിദിനത്തിൽ (എ. ഡി. 1639-ൽ) യുക്തിഭാഷ എഴുതി അവസാനിപ്പിച്ചതായി കാണുന്നു. "അലേഖി യുക്തിഭാഷാ വിപ്രേണ ബ്രഹ്മദത്തസംജ്ഞേന"—ഇത്യാദി ശ്ലോകംകൊണ്ടു യുക്തിഭാഷാകർത്താവ് 'ബ്രഹ്മദത്തൻ' എന്നൊരു ബ്രാഹ്മണനാണെന്നു തെളിയുന്നുണ്ട്. ഈ ബ്രാഹ്മണസത്തമൻ—ബ്രഹ്മദത്തൻനമ്പൂതിരി—ഏതു നാട്ടുകാരനാണെന്നോ ഏതു് ഇല്ലക്കാരനാണെന്നോ സൂക്ഷ്മത്തോളം അറിയുവാൻ സാധിച്ചിട്ടില്ല. എന്നു വരികിലും, ആലത്തൂർ ഗ്രാമത്തിൽപ്പെട്ട "പറങ്ങോട്" എന്ന ഇല്ലത്തെ ഒരംഗമാണ് ഇദ്ദേഹമെന്നു തൽഗ്രാമവാസികൾ ഇന്നും പരമ്പരയാ വിശ്വസിച്ചും പറഞ്ഞും വരുന്നുണ്ടെന്നുള്ള സംഗതി ഇവിടെ പ്രസ്താവ്യമാകുന്നു. പരമ്പരാഗതമായി നിലനിന്നു വരുന്ന ആ ഐതിഹ്യം കേവലം തള്ളിക്കളയത്തക്കതാണെന്നു തോന്നുന്നില്ല. ദൃഗ്ഗണിത തന്ത്രസംഗ്രഹാദിഗുരുകാരണവന്മാരുടെ വർഗ്ഗത്തിൽപ്പെട്ട ഈ യുക്തിഭാഷാ ശിശുവിന്റെയും ഉൽപ്പത്തി ആ ഗ്രാമത്തിൽത്തന്നെയാവാനാണല്ലോ അധികം ന്യായം.

യുക്തിഭാഷയിൽ പ്രതിപാദിതമായ വിഷയം തൽകർത്താവിന്റെ സ്വന്തമല്ലെന്നും അതു പ്രാധാന്യേന തന്ത്രസംഗ്രഹത്തിനു കീഴ്പ്പെട്ടാണ് വർത്തിക്കുന്നതെന്നും മുൻ സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. എന്നാൽ വേറെ ചില പ്രാമാണിക ഗ്രന്ഥങ്ങളുടെ തണലിലും ഗ്രന്ഥകാരൻ അഭയം പ്രാപിച്ചിട്ടുള്ളതായി കാണുന്നുണ്ട്. മദ്രാസ് ഗവർമ്മേണ്ടു വകയായുള്ള പൗരസ്ത്യ കയ്യെഴുത്തു ഗ്രന്ഥാലയത്തിൽ (Madras Government Oriental manuscripts Library-ൽ) "ഗണിതയുക്തിഭാഷ" എന്നൊരു സംസ്കൃതഗ്രന്ഥമുണ്ടെന്നും വിഷയസാമ്യം നോക്കുമ്പോൾ ഏതെങ്കിലും ഒന്നു മറ്റതിന്റെ തർജ്ജമയാവണമെന്നും സൂക്ഷ്മദൃക്കായ ഒരു മഹാൻ അഭിപ്രായപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. "ക്രിയാക്രമകരീ" എന്ന ലീലാവതീവ്യാഖ്യാനത്തിന്റെ കർത്താവ് (അജ്ഞാതനാമാവ്) യുക്തിഭാഷാഗ്രന്ഥകാരൻതന്നെയല്ലയോ എന്നു ബലമായ് ആരും സംശയിച്ചുപോകുംവിധം അത്രയ്ക്ക സാപ്തപദീനമായ സാദൃശ്യം രണ്ടു ഗ്രന്ഥങ്ങൾക്കും തമ്മിൽ ചില

സ്ഥലങ്ങളിൽ കാണപ്പെടുന്നുണ്ട്. ദൃഷ്ടാന്തത്തിന് ഒരു രണ്ടു വരി ഇവിടെ ഉദ്ധരിച്ച് കാണിക്കാം. ക്രിയാക്രമകരിയിലെ "കഥം പുനരത്ര മുഹുർവിഷമസംഖ്യാഹരണേന ലബ്ധസ്യ പരിധേരാസന്നത്വം അന്ത്യസംസ്കാരേണാപാദ്യതേ; ഉച്യതേ. തത്രതാവദു ക്തരൂപസ്സംസ്കാരസ്സൂക്ഷ്മോ നവേതി പ്രഥമം നിരൂപണീയം" എന്ന ഭാഗവും യുക്തി ഭാഷയിലെ "എങ്ങിനെ പിന്നെ ഇവിടെ പിന്നേയും പിന്നേയും മീത്തേ മീത്തേയു ള്ള വിഷമസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലങ്ങളെ സംസ്കരിച്ചിരിക്കുന്നതു പരിധിയോട് അടുത്തുവന്നു, ഒടുക്കത്തെ സംസ്കാരം ചെയ്താൽ, എന്ന പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ ഇച്ചൊല്ലിയ സംസ്കാരംതന്നെ സൂക്ഷ്മമോ അല്ലയോ എന്നു നടേ നിരൂപി ക്കേണ്ടുവതു്" എന്ന ഭാഗവും ഒപ്പംവെച്ചു വായിച്ചു നോക്കുക. ഇങ്ങിനെ ചുഴിഞ്ഞു നോക്കുകയാണെങ്കിൽ വിഷയത്തെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം യുക്തിഭാഷാ കർത്താ വിനു സ്വയം അഭിമാനിക്കുവാൻ വളരെയൊന്നുമില്ലെന്നു പറയേണ്ടിവരും. എന്നാൽ യുക്തിഭാഷാ കർത്താവിനെപ്പോലെയുള്ള ഒരു പണ്ഡിതൻ ഇപ്രകാരം "സർവ്വനി ബന്ധനഹർത്താ" വായിത്തീരുമോ എന്നതും ചിന്തനീയമാണ്. യുക്തിഭാഷയിലെ വിഷയങ്ങളുടെ ഉപപത്തി കേരളത്തിലെ ജ്യൗതിഷിക കുടുംബങ്ങളിൽ ഗൂഢമൂലമാ യും പരമ്പരാസിദ്ധമായും എന്നാൽ നാനാവിധമായും കിടന്നിരുന്നതായി വിചാരി പ്പാൻ വിരോധമില്ല. ദേശഭേദത്തോടും പാഠഭേദത്തോടും പ്രകാരഭേദത്തോടും കൂടി ക്കിടന്നിരുന്ന തൽസംബന്ധികളായ ക്രിയകൾക്ക് ഒരൈക്യരൂപ്യവും സ്വച്ഛതയും വരുത്തുവാൻ യുക്തിഭാഷാകർത്താവ് യത്നിക്കുകയും ചിന്നിച്ചിതറിക്കിടന്നിരുന്നതു പലതും സംഭരിക്കയും സംശോധിച്ചു ക്രോഡീകരിക്കയും ചെയ്തു കൂട്ടത്തിൽ വിഷ യസമഗ്രതയ്ക്കുവേണ്ടി മറ്റു ചില ഗ്രന്ഥങ്ങളെ നോക്കുകയോ അവയിൽനിന്നു ചില ഭാഗങ്ങൾ അതേപടി തർജ്ജമചെയ്യുകയോ ചെയ്തിട്ടുണ്ടെങ്കിൽത്തന്നെ അതു ക്ഷ ന്തവ്യമല്ലാത്ത ഒരപരാധമായിപ്പോയെന്നു വിധിച്ചുകൂടാത്തതാകുന്നു.

പ്രതിപാദനരീതിയെക്കുറിച്ചു പറയുകയാണെങ്കിൽ യുക്തിഭാഷാകർത്താവ് എത്രയും പ്രശംസനീയനും അനുകരണീയനുമാകുന്നു. ഏതു വിഷയവും മൂലതത്വ ത്തിൽനിന്നു തുടങ്ങുകയും അതിനെ കേന്ദ്രമാക്കിക്കൊണ്ടു ശാഖോപശാഖകളായി സാവധാനം സംക്രമിക്കുകയും ഒടുവിൽ അതേവരെ പ്രതിപാദിച്ച ഭാഗങ്ങളുടെ ഒരു പുനഃപരിശോധനയ്ക്കുശേഷം ഉപസംഹരിക്കുകയും ചെയ്യുന്ന സമ്പ്രദായവിശേഷം കൊണ്ടു യുക്തിഭാഷാകർത്താവു പ്രതിപാദ്യവിഷയത്തെ അനുവാചകന്മാരിൽ ശി ലാരേഖപോലെ പതിയുമാറാക്കിത്തീർക്കുന്ന കൗശലം അനുഭവൈകവേദ്യമെന്നേ പറയേണ്ടൂ. പരിലേഖസഹായം കൂടാതെ തന്നെ പ്രൗഢവും ഗഹനവുമായ വിഷയ ങ്ങളെ പരിമിതപദങ്ങളെ കൊണ്ടു സുഗമമാംവണ്ണം പ്രതിപാദിക്കുക എന്ന കാര്യ ത്തിൽ യുക്തി ഭാഷാകർത്താവിനെ കവച്ചുവെയ്ക്കുവാൻ അധികംപേരുണ്ടാകുമെന്നു തോന്നുന്നില്ല. ഭാഷയെ സംബന്ധിച്ചാണെങ്കിൽ അതിന്റെ ഹൃദയംഗമത്വവും അനി തരസാധാരണത്വവും വാചാമഗോചരംതന്നെയാണ്. അന്നത്തെ വിദ്യാസമ്പന്ന ന്മാർ സർവ്വസാധാരണം സംസാരഭാഷയായി സ്വീകരിച്ചു പോന്നിരുന്ന ആ ഭാഷ അതേവിധംതന്നെയാണ് ഇതിൽ സാകല്യേന ഉപയോഗിച്ചിട്ടുള്ളത്. ഉദാഹരണ ത്തിന് ഏതാനും വരികൾ ഇവിടെ കാണിക്കാം.

"കണ്ണത്രയഘാതത്തെ ക്ഷേത്രഫലംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഇരട്ടിച്ച വ്യാസമായിട്ടിരിക്കും." "ഇങ്ങിനെ രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗാന്തരം അവറ്റിന്റെ ചാപയോഗത്തിന്റേയും അന്തരത്തിന്റേയും ജ്യാക്കൾ രണ്ടും തങ്ങളിലെ ഘാതമായിട്ടിരിക്കും, മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായം കൊണ്ടു്." "നടേത്തെ സ്ഥാനത്തു ശൂന്യം, രണ്ടാമേടത്തു നാലു്, പിന്നെ ശൂന്യം, പിന്നെ ഋണം രണ്ട്, പിന്നെ അഞ്ചാംസ്ഥാനത്തു ധനമായിട്ടു രണ്ടു്—ഇങ്ങിനെ ക്രമം—സംസ്കാരഫലയോഗം പിന്നെ." "ഭുജമുഖഘാതാദ്ധത്തെ വേറെവെച്ച് അവറ്റിന്റെ അദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗയോഗത്തെ അതിങ്കൽ സംസ്കരിപ്പൂ. പിന്നെ ദക്ഷിണോത്തര ബാഹുഘാതാദ്ധത്തിൽ അവറ്റിന്റെ അദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗയോഗത്തെ സംസ്കരിപ്പൂ. പിന്നെ ഇങ്ങിനെ സംസ്കൃതങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഘാതാദ്ധത്തിൽ രണ്ടും തങ്ങളിൽ കൂട്ടു. അതു യോഗാന്തരങ്ങളിൽ ഒന്നായിട്ടിരിക്കും." ഇത്രയുംകൊണ്ട് ഇതിലെ ഭാഷാരീതി സാമാന്യേന ഗ്രഹിക്കാവുന്നതാണല്ലോ. ഭാഷയെപ്പോലെതന്നെ തുലോം ശ്ലാഘനീയമാണ് ഇതിലെ സാങ്കേതികസംജ്ഞാനിർമ്മാണയുക്തിയും. യുക്തിഭാഷാകർത്താവു്, വൃത്തഭാഗത്തിന്റെ ഏതാനുമൊരുഭാഗത്തിന്നു ചാപം (arc, bow) എന്നും ചാപമൂലാഗ്രങ്ങളുടെ ഇടയ്ക്കുള്ള ഋജുരേഖയ്ക്കു ജ്യാ (chord, bow-string)വെന്നും ജ്യാമദ്ധ്യത്തിൽനിന്നു ചാപമദ്ധ്യാവധിയായ രേഖയ്ക്കുശര(one of the two segments into which the chord divides the diameter perpendicular to it, arrow)മെന്നും നാമകരണം ചെയ്തിരിക്കുന്നതു് എത്രത്തോളം അന്വത്ഥമായിരിക്കുന്നുവെന്നു നോക്കുക. ഇതുപോലെതന്നെ മറ്റു സംജ്ഞകളുടെ കാര്യത്തിലും കാണാവുന്നതാണ്.

ഇനി രണ്ടു വാക്കു പറയുവാനുള്ളതു് ഇതിന്റെ വ്യാഖ്യാനത്തെക്കുറിച്ചാകുന്നു. മാടരാജവംശം ശാസ്ത്രപാണ്ഡിത്യത്തിനു പണ്ടയ്ക്കുപണ്ടേ പ്രസിദ്ധിപെറ്റതാണ്. ആ വംശത്തിലെ സമാദരണീയമായ സാത്വികദീപ്തിയോടുകൂടിയ ഒരു മണിദീപമാണ് മഹാമഹിമശ്രീ രാമവമ്മ മരുത്തമ്പുരാൻ ബി. എ. തിരുമനസ്സുകൊണ്ടു്. ഗൈവ്വാണീഹൗണിമാരാൽ പരിസേവിതനും ശാസ്ത്രമതിയുമായ തിരുമനസ്സിലെ ഏതാനും നാളത്തെ നിസ്തന്ദ്രമായ പരിശ്രമത്തിന്റെ പരിണതഫലമാണ് കേരളീയരായ നമുക്ക് ഇന്നു ലഭിച്ചിട്ടുള്ള ഈ യുക്തിഭാഷാ വ്യാഖ്യാനം. തിരുമനസ്സുകൊണ്ടു ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രവിഷയകമായി വേറെയും പല വിലപിടിച്ച ലേഖനങ്ങളും എഴുതീട്ടുണ്ട്. അവയിൽ, 1120-ൽ "ഗണിതഗവേഷകന്മാരുടെ ശ്രദ്ധയ്ക്കു്" എന്ന പേരിൽ മലയാളത്തിലും 1121-ൽ "The Date and Authorship of Karana Paddhati" എന്ന പേരിൽ ഇംഗ്ലീഷിലും അവിടുന്നു് എഴുതി പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തീട്ടുള്ള ലേഖനങ്ങൾ വിജ്ഞാനവാരിധിയായ ഉള്ളൂരിന്റെ പ്രശംസയ്ക്കുകൂടി പാത്രമായിത്തീർന്നവയാണെന്നു മാത്രം സ്ഥാലീപുലാകന്യായേന ഇവിടെ പ്രസ്താവിച്ചുകൊള്ളട്ടെ. തിരുമനസ്സിലെ വ്യാഖ്യാനപരമായ ഈ മഹദുദ്യമമാകട്ടെ അവിടുത്തെ ശാസ്ത്രപാണ്ഡിത്യത്തിന്റെ മറ്റൊരു നിദർശനമാകുന്നു. ഈ ഉദ്യമത്തിൽ പലരും പലവിധത്തിലും തിരുമനസ്സിലെ പേരിൽ സഹായിച്ചിട്ടുണ്ടെങ്കിലും ആദ്യന്തം വലംകൈയായിനിന്നു സഹായിച്ച ഒരേ ഒരു വ്യക്തി ഗണിതശാസ്ത്രവിചക്ഷണനായ ബ്രഹ്മശ്രീ എ. ആർ. അഖിലേശ്വരയ്യർ, എം. എ. എൽ. ടി. അവർകളാകുന്നു. അദ്ദേഹത്തിന്റെ കൂട്ടുകെട്ടുകൊണ്ട് അഥവാ അദ്ദേഹത്തിന്റെ തീക്ഷ്ണബുദ്ധിയാകുന്ന ശാണോപലത്തോടുള്ള സമ്പക്കംകൊണ്ടു്

ഈ വ്യാഖ്യാനരത്നം കൂടുതൽ ആകർഷകവും കൂടുതൽ പ്രകാശമാനവും ആയിത്തീർന്നിട്ടുണ്ടെന്നുള്ളതിൽ രണ്ടുപക്ഷമില്ല. രണ്ടുപേരുടേയും കൂടിയുള്ള ഈ മഹൽ പ്രയത്നം ഉദ്ദിഷ്ടഫലപ്രാപ്തിയിലായിട്ടുണ്ടെന്ന് ഏതു നിഷ്പക്ഷനിരീക്ഷകനും സമ്മതിക്കും. പാശ്ചാത്യഗണിതഗവേഷകവിദഗ്ദ്ധന്മാരുടെ സിദ്ധാന്തങ്ങളെ 'യുക്തിഭാഷ'യുമായി താരതമ്യപ്പെടുത്തി നോക്കുക, വിവരണങ്ങൾ വിഷയഗ്രഹണത്തിനു പര്യാപ്തങ്ങളാകുന്നില്ലെന്നു തോന്നുന്ന ഘട്ടങ്ങളിൽ പരിലേഖങ്ങൾ കൊടുക്കുക, അതുകൊണ്ടും മതിയാവാത്ത സ്ഥലങ്ങളിൽ ചുവടെ ഇംഗ്ലീഷിൽ "ഫുട്ട്നോട്ട്" ചേർക്കുക എന്നിങ്ങനെ ദുർഗ്രഹങ്ങളായ യുക്തികളെ സുഗ്രഹമാക്കിത്തീർക്കുന്നതിന് എന്തെല്ലാം ചെയ്യാമോ അതെല്ലാം ഇതിൽ ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. യുക്തിഭാഷയിൽ ഉപയോഗിച്ചിട്ടുള്ള സാങ്കേതിക സംജ്ഞകളുടെ ഒരു പട്ടിക അകാരാദിക്രമത്തിൽ തുല്യാർത്ഥപ്രസിദ്ധങ്ങളായ ഇംഗ്ലീഷ് പദങ്ങളോടുകൂടി പുസ്തകത്തിന്റെ ഒടുവിൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ളതും "കുട്ടാരകാരക്രിയ"യ്ക്ക് ഒരു പ്രത്യേക വിവരണം നൽകീട്ടുള്ളതും മറ്റും വ്യാഖ്യാനത്തിന്റെ സമീചീനമായ സുഗ്രാഹ്യതയ്ക്കുവേണ്ടി വ്യാഖ്യാതാക്കന്മാർ സഹിച്ച ബുദ്ധിമുട്ടുകളുടെ സജീവചിത്രങ്ങളാകുന്നു. വ്യാഖ്യാതാക്കന്മാരുടെ ഈ അത്യുദാരകൃത്യത്തിനു ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രത്തിൽ കൈകാര്യം ചെയ്യുന്നവർ മാത്രമല്ല പൊതുവിൽ കേരളീയരെല്ലാവരുംതന്നെ എന്നെന്നും കൃതജ്ഞരായിരിക്കേണ്ടതാണ്.

ഇത്രത്തോളം സമുൽകൃഷ്ടമായ വ്യാഖ്യാനത്തോടുകൂടിയ ഈ മഹൽഗ്രന്ഥത്തെ മഹാജനസമക്ഷം അവതരിപ്പിക്കുക എന്ന മഹനീയകൃത്യത്തിനു കൂടുതൽ അർഹതയും യോഗ്യതയും തികഞ്ഞ പലരും ഇന്നു കേരളത്തിലുണ്ട്. അവരെ ആരേയും ഏല്പിക്കാതെ, വ്യാഖ്യാതാക്കന്മാരിൽ പ്രാതഃസ്മരണീയനായ തമ്പുരാൻ തിരുമനസ്സുകൊണ്ട്, ആ ഭാരം ഇയ്യുള്ളവനോടു നിർവ്വഹിക്കുവാൻ കല്പിച്ചത് എന്തുദ്ദേശത്തിന്മേലാണെന്ന് എത്ര ആലോചിച്ചിട്ടും കിട്ടുന്നില്ല. ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്ര സമുദ്രത്തിന്റെ അപാരതയിലും ഗംഭീരതയിലും അത്ഭുതസ്തിമിതനായി പരിഭ്രാന്തനായി അതിന്റെ ഇങ്ങേക്കരയിൽ വെറുതെ കണ്ണുംമിഴിച്ചു നില്ക്കുവാൻ മാത്രം പോന്ന ഞാൻ തമ്പുരാൻ കല്പിച്ചതനുസരിച്ച് ചിലതെല്ലാം എഴുതിക്കൂട്ടിയെന്നേയുള്ളൂ. വിഷയങ്ങളുടെ ഉള്ളിൽ കടന്നു നിന്നുകൊണ്ടുള്ള ചർച്ചയ്ക്കു ഞാൻ തുനിഞ്ഞിട്ടില്ല. അഥവാ, അതിനുള്ള ശേഷി ഇയ്യുള്ളവനില്ലതന്നെ. ചുരുക്കത്തിൽ എനിക്കൊന്നു പ്രാർത്ഥിക്കുവാനുള്ളത് ഇതു മാത്രമാണ്. "ഗണിതകലയുടെ ഏതു വശവും യുക്തിപൂർവ്വം സ്പർശിച്ചുകൊണ്ട് വിരാജിക്കുന്ന ഈ യുക്തിഭാഷാഗ്രന്ഥം, ഏതദ്വ്യാഖ്യാനസഹിതം, നമ്മുടെ ഹൈസ്ക്കൂളുകളിലും കോളേജുകളിലും, ഒരു പാഠ്യപുസ്തകമായിട്ടല്ലെങ്കിൽ പാഠ്യപുസ്തകനിർമ്മാതാക്കൾക്കൊരു മാർഗ്ഗദർശക ഗ്രന്ഥമായിട്ടെങ്കിലും അചിരേണ പ്രവേശിക്കുമാറാകട്ടെ; തദ്വാരാ, പാശ്ചാത്യരെ അപേക്ഷിച്ചു ഭാരതീയർ, വിശിഷ്യ കേരളീയർ, ഗണിതമാർഗ്ഗത്തിൽ എത്ര ദൂരം മുന്നേറി നിന്നിരുന്നു എന്ന വാസ്തവം ജനസാമാന്യം ഗ്രഹിക്കുമാറാകട്ടെ." ഈ പ്രാർത്ഥനയോടെ വ്യാഖ്യാനത്തിനും വ്യാഖ്യാതാക്കന്മാർക്കും സർവ്വഭാവിഭാവുകങ്ങളും ആശംസിച്ചുകൊണ്ട്, ഈ ഗ്രന്ഥതല്ലജത്തെ ഞാനിതാ സജ്ജനസമക്ഷം സാദരം അവതരിപ്പിച്ചുകൊള്ളുന്നു.

ചാലക്കുടി,
1-4-1123

പണ്ഡിതർ, പി. ശ്രീധരമേനോൻ

1

പരികർമ്മാഷ്ടകം

|| ഹരിഃ ശ്രീ ഗണപതയേ നമഃ അവിഘ്നമസ്തു ||

പ്രത്യൂഹവ്യൂഹവിഹതികാരകം പരമം മഹഃ |
അന്തഃകരണശുദ്ധിം മേ വിദധാതു സനാതനം ||

ഗുരുപാദാംബുജം നത്വാ നമസ്കാര്യതമം മയാ |
ലിഖ്യതേ ഗണിതം കൃത്സ്നം ഗ്രഹഗത്യുപയോഗി യൽ [1] ||

വ്യാഖ്യാനം 1: ഗ്രന്ഥാരംഭത്തിൽ വിഘ്നശാന്തിക്കായിക്കൊണ്ട് അഭീഷ്ടദേവതാനമസ്കാരത്തെ ചെയ്യുകയും ഗ്രന്ഥോദ്ദേശത്തെ പറയുകയും ചെയ്യുന്നു.

"ഗുരുപാദാംബുജദ്വന്ദ്വം നമസ്കാര്യതമം മയാ |
നത്വാ വിലിഖ്യതേ കൃത്സ്ന ഗണിതന്യായസംഗ്രഹഃ" ||

എന്നു രണ്ടാമത്തെ ശ്ലോകത്തിന്നൊരു പാഠഭേദവുമുണ്ട്.

സംഖ്യാസ്വരൂപം

അവിടെ നടേ തന്ത്രസംഗ്രഹത്തെ അനുസരിച്ചുനിന്നു ഗ്രഹഗതിയിങ്കൽ ഉപയോഗമുള്ള ഗണിതങ്ങളെ മുഴുവനേ ചൊല്ലുവാൻ തുടങ്ങുന്നേടത്തു നടേ സാമാന്യഗണിതങ്ങളായിരിക്കുന്ന സങ്കലിതാദിപരികർമ്മങ്ങളെച്ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ ഗണിതമാകുന്നതു ചില സംഖ്യേയങ്ങളിലെ സംഖ്യാവിഷയമായിട്ടിരിപ്പോരു പരാമർശവിശേഷം. [2]

വ്യാഖ്യാനം 2: സംഖ്യേയങ്ങൾ എന്ന പദത്തിന് സംഖ്യാനം ചെയ്യുവാൻ യോഗ്യങ്ങളായവ—എണ്ണുവാൻ സാദ്ധ്യമായിട്ടുള്ളവ—എന്നർത്ഥം. സംഖ്യേയങ്ങളിലുള്ളതായിട്ടു ശാസ്ത്രകാരന്മാർ സ്വീകരിച്ചിട്ടുള്ള ഒരു ധർമ്മം അല്ലെങ്കിൽ ഒരു വസ്തുവാണ് സംഖ്യ. പരാമർശവിശേഷം എന്നതിന്ന് ഒരു പ്രത്യേക തരത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്യൽ എന്നർത്ഥം. ചില സംഖ്യേയങ്ങളിലെ ധർമ്മമായ സംഖ്യകളെ വിഷയീകരിച്ചുള്ള ഒരുതരം ചർച്ച ചെയ്യുന്നതാണ് ഗണിതം.

ചില സംഖ്യാവിശേഷങ്ങൾ ഗണിതത്തിനു സാധനമാകുന്നു. ഈ സംഖ്യാവിശേഷങ്ങൾക്കു ചില സ്ഥാന വിശേഷങ്ങളുടെ കല്പിച്ചാൽ മാത്രമേ വ്യവഹാരക്ഷമത്വമുണ്ടാവൂ.

“ഏകപങ്ക്തിശതാദീനാം ദശഘ്നാനാം യഥോത്തരം|
സ്ഥാനാനാനി ദക്ഷിണാദീനി ന്യസ്യേൽ സവ്യാവധീനി ച”||

എന്ന സ്ഥാനകല്പനത്തേയും ശാസ്ത്രകാരന്മാർ വ്യവഹാരാർത്ഥമായി കല്പിച്ചിട്ടുണ്ട്.

സംഖ്യകൾ പിന്നെ ഒന്നുതുടങ്ങി പത്തോളമുള്ളവ പ്രകൃതികൾ[3] എന്ന പോലെ ഇരിക്കും. ഇവറ്റെ പ്രത്യേകം പത്തിൽ പെരുക്കി നൂറ്റോളമുള്ളവ ഇവറ്റിന്റെ വികൃതികൾ എന്നപോലെ ഇരിക്കും. ഒന്നു തുടങ്ങിയുള്ള വറ്റിന്റെ സ്ഥാനത്തിങ്കന്ന് ഒരു സ്ഥാനം കരേറീട്ടിരിപ്പൂതും ചെയ്യും ഇവറ്റെ പത്തിൽ ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന വറ്റിന്റെ സ്ഥാനം. പിന്നെ ഇവ[4] പ്രകൃതികൾ എന്ന പോലെയിരുന്നിട്ട് ഇവറ്റിന്റെ സ്ഥാനത്തിങ്കത്തിങ്കന്ന് ഒരു സ്ഥാനം കരേറിയിരിക്കും ഇവറ്റെ പത്തിൽ പെരുക്കിയവ ആയിരത്തോളമുള്ള സംഖ്യകൾ. ഇങ്ങനെ അതാതിനെ പത്തിൽ പത്തിൽ ഗുണിച്ചവ പിന്നെ പിന്നത്തെ സംഖ്യകളാകുന്നവ. അവറ്റിന് ഒരോരോ സ്ഥാനം കൊണ്ട് ഉൽക്കർഷവുമുണ്ട്. ഇങ്ങനെയിരിക്കുന്ന പതിനെട്ടു സ്ഥാനത്തിങ്കലേ വറ്റിനുള്ള സംജ്ഞകൾ ഇവ.

വ്യാഖ്യാനം 3: പ്രകൃതി വികൃതി — പാൽ തൈരിന്റെ പ്രകൃതിയാണ്. തൈരു മോരിന്റെ പ്രകൃതിയാണ്. തൈരു പാലിന്റെ വികൃതിയും, മോരു തൈരിന്റെ വികൃതിയുമാണ്. അതായത് ഒരു വസ്തു അതിന്റെ സ്വതേയുള്ള രൂപത്തെ ഉപേക്ഷിച്ച് (താർക്കികന്മാർ ഇതിന്നു നാശമെന്നു പറയുന്നു) മറ്റൊരു രൂപത്തെ സ്വീകരിക്കുന്നേടത്ത് ആദ്യത്തെ രൂപത്തോടുകൂടിയതിനെ പ്രകൃതിയെന്നും രണ്ടാമത്തെ രൂപത്തോടു കൂടിയതിനെ ആദ്യത്തേതിന്റെ വികൃതിയെന്നും പറയുന്നു. എന്നാൽ ഒരു പൂമാലയിൽ പൂവ് അതിന്റെ രൂപത്തെ തീരെ ഉപേക്ഷിക്കുന്നില്ലെങ്കിലും പൂവിനെ പ്രകൃതിയെന്നും മാലയെ അതിന്റെ വികൃതിയെന്നും സാധാരണയായിട്ടു പറയാറുണ്ട്. ഇതുപോലെ തന്നെ ഒന്നുമുതൽ പത്തുവരെയുള്ള സംഖ്യകൾ അവിടുന്ന് നൂറുവരെയുള്ള സംഖ്യകളിൽ അവയുടെ രൂപത്തെ തീരെ ഉപേക്ഷിക്കുന്നില്ലെങ്കിലും, ഒന്നു മുതൽ പത്തുവരെയുള്ള സംഖ്യകളെ പ്രകൃതികളെന്നു കല്പിച്ചാൽ പത്തുമുതൽ നൂറുവരെയുള്ള സംഖ്യകളെ അവയുടെ വികൃതികളെന്നു പറയാം. ശാസ്ത്രകാരന്മാർ ഇതു സമ്മതിക്കുന്നതല്ല അതുകൊണ്ടാണ് “പ്രകൃതികൾ എന്നപോലെ ഇരിക്കും” “വികൃതികൾ എന്ന പോലെ ഇരിക്കും” എന്നെല്ലാം ഗ്രന്ഥകർത്താവുപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നത്.

വ്യാഖ്യാനം 4: പത്തുമുതൽ നൂറുവരെയുള്ളവ.

“ഏകദശശതസഹസ്രായുതലക്ഷപ്രയുതകോടയഃ ക്രമശഃ |
അബ്ബുദമബ്ജം[5] ഖർവനിഖർവമഹാപത്മശംകവസ്തസ്മാൽ ||
ജലധിശ്ചാന്ത്യം മദ്ധ്യം പരാർദ്ധമിതി ദശഗുണോത്തരാസ്സംജ്ഞാഃ |
സംഖ്യായാ സ്ഥാനാനാം വ്യവഹാരാർത്ഥം കൃതാഃ പൂർവൈഃ” || ഇതി.

വ്യാഖ്യാനം 5: ‘അബ്ബുദവൃന്ദേ’ എന്ന പാഠഭേദം.

ഇങ്ങനെ സംഖ്യയ്ക്കു ഗുണനവും സ്ഥാനഭേദവും കല്പിയായ്കിൽ സംഖ്യേടെ പേക്ക് അവസാനമില്ലായ്കയാൽ സംഖ്യകൾ തങ്ങളേയും അവറ്റിന്റെ ക്രമത്തെയും അറിഞ്ഞുകൂടാ. എന്നിട്ടു വ്യവഹായിരത്തിനായിക്കൊണ്ട് ഇവ്വണ്ണം കല്പിപ്പൂ. അവിടെ ഒന്നുതുടങ്ങി ഒമ്പതോളമുള്ള സംഖ്യകൾക്കു സ്ഥാനം നടേത്തേത്. പിന്നെ ഇവറ്റെ എല്ലാറ്റേയും പത്തിൽ ഗുണിച്ചവറ്റിന്റെ സ്ഥാനം രണ്ടാമത്. അത് ഇടത്തു കല്പിക്കുന്നു. ഏക

സ്ഥാനം, ദശസ്ഥാനം എന്നിങ്ങനെ തുടങ്ങി ഇവറ്റിന്റെ പേര്. ഇങ്ങനെ സംഖ്യാസ്വരൂപം.

അനന്തരം ഇവറ്റെക്കൊണ്ടുള്ള ഗണിതഭേദങ്ങളെ കാട്ടുന്നു. അവിടെ രണ്ടുപ്രകാരമുള്ളൂ ഗണിതം—വൃദ്ധിസ്വരൂപമായിട്ടും ക്ഷയസ്വരൂപമായിട്ടും. അവിടെ വൃദ്ധിക്കു സ്ഥാനമാകുന്ന ഗണിതം, യോഗം, ഗുണനം, വർഗ്ഗം, ഘനം എന്നിവ പിന്നെ ക്ഷയത്തിനു സ്ഥാനമാകുന്നതു വിയോഗം, ഹരണം, വർഗ്ഗമൂലം, ഘനമൂലം എന്നിവ. ഇവിടെ യോഗത്തിന്നു ഗുണനത്തിങ്കലുപയോഗമുണ്ട്; ഗുണനത്തിന് വർഗ്ഗത്തിങ്കൽ, വർഗ്ഗത്തിന്നു ഘനത്തിങ്കൽ. ഇവ്വണ്ണമേ വിയോഗത്തിന്നു ഹരണത്തിങ്കലുപയോഗമുണ്ട്; ഹരണത്തിന്നു വർഗ്ഗമൂലത്തിങ്കൽ, വർഗ്ഗമൂലത്തിന്നു ഘനമൂലത്തിങ്കൽ. ഇങ്ങനെ മുമ്പിലേവ പിന്നത്തേവറ്റിലുപയോഗിക്കും.

സംകലിതവ്യവകലിതങ്ങൾ

അനന്തരം ഈ ഉപയോഗപ്രകാരത്തെ കാട്ടുന്നു. അവിടെ ഒരു സംഖ്യയിൽ രൂപം ക്രമേണ കൂട്ടിയാൽ അതിങ്കന്നുതുടങ്ങി നിരന്തരേണ ഉള്ള മേലെ മേലെ സംഖ്യകളായിട്ടു വരുമവ. പിന്നെ ഒരേറിയ സംഖ്യയിങ്കന്ന് ഓരോന്നിനെ ക്രമേണ കളയുക. എന്നിരിക്കുമ്പോൾ അതിങ്കന്നു തുടങ്ങി നിരന്തരേണ കീഴെ കീഴെ സംഖ്യകളായിട്ടു വരും. എന്നിങ്ങനെ എല്ലാസ്സംഖ്യകൾ തങ്ങളുടെ സ്വരൂപം ഇരിക്കുന്നു. അവിടെ ഒരിഷ്ടസംഖ്യയിങ്കന്നു ക്രമേണ മേലെ മേലെ സംഖ്യകളെ ഓക്കുമ്പോൾ ക്രമേണ ഓരോ സംഖ്യകളുടെ യോഗരൂപമായിട്ടിരിക്കും അത്. പിന്നെ ഇഷ്ടത്തിങ്കന്നു തന്നെ ക്രമേണ കീഴെ കീഴെ സംഖ്യകളെ ഓക്കുമ്പോൾ ക്രമേണ ഓരോരൊ സംഖ്യേടെ വിയോഗരൂപമായിട്ടിരിക്കുമസ്സംഖ്യകൾ. എന്നാൽ സംഖ്യാസ്വരൂപത്തെ ക്രമേണ മേല്പോട്ടും കീഴ്പോട്ടും ഓർക്കുമ്പോൾ തന്നെ ഓരോരൊ സംഖ്യേടെ യോഗവിയോഗങ്ങൾ സിദ്ധിക്കും. പിന്നെ അയിഷ്ടസംഖ്യയിൽ ഒന്നിനെ എത്ര ആവൃത്തി കൂട്ടുവാൻ നിനച്ചൂ അത്ര ഒന്നിനെ വേറെ ഒരേടത്തുകൂടി അതിനെ ഒരിക്കാലെ ഇഷ്ടസംഖ്യയിൽ കൂട്ടു. എന്നാലും വെവ്വേറെ കൂട്ടിയപോലെ സംഖ്യതന്നെ വരും. എന്നിതും ഓർക്കുമ്പോൾ അറിയായിട്ടിരിക്കും. അവ്വണ്ണം എത്ര ആവൃത്തി ഒന്നിനെക്കളവാൻ നിനച്ചൂ അവറ്റെ ഒക്ക ഒരിക്കാലെ കളകിലും ഇഷ്ടത്തിങ്കന്ന് അത്ര കീഴെ സംഖ്യ വരും എന്നും അറിയാം. ആകയാൽ മേല്പോട്ടും കീഴ്പോട്ടുമുള്ള എണ്ണം അറിയപ്പോകുമെങ്കിൽ യോഗവിയോഗങ്ങൾ സിദ്ധിക്കും. ഈ യോഗവിയോഗങ്ങളെ സംകലിതവ്യവകലിതങ്ങൾ എന്നു ചൊല്ലുന്നു. ഒന്നിനെ രൂപമെന്നും വ്യക്തിയെന്നും ചൊല്ലുന്നു. ഇങ്ങനെ സംകലിതവ്യവകലിതങ്ങൾ.[6]

വ്യാഖ്യാനം 6:

> ആദ്യസ്ഥാനാൽ സമാരഭ്യ കയ്യാൽ യോഗാന്തരേ ക്രമാൽ |
> രാശേരല്പതരസ്യാന്ത്യസ്ഥാനാദുൽക്രമതോപി വാ || (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

സാമാന്യഗുണനം

അനന്തരഗുണനം: അതാകുന്നതു സംകലിതം തന്നെയത്രെ ഓക്കുമ്പോൾ.[7] അവി

വ്യാഖ്യാനം 7: ഗുണ്യം $= 8$, ഗുണകാരം $= 5$ എന്നു കല്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ, ഗുണ്യമാകുന്ന 8-നെ തന്നെ ഗുണകാരമാകുന്ന അഞ്ചാവൃത്തി കൂട്ടിയാൽ $8+8+8+8+8 = 40$ എന്നു വരും. അപ്പോൾ യോഗത്തിന്റെ പ്രാകാരാന്തരം തന്നെ ഗുണനമെന്നു വന്നു.

ടെ ഒന്നിനെ ഒന്നിനെക്കൊണ്ട് ഗുണിക്കുമ്പോൾ യാതൊന്നിനെ ഗുണിക്കുന്നു അതിന്നു ഗുണ്യമെന്നു പേർ; യാതൊന്നുകൊണ്ടു ഗുണിക്കുന്നു അതിനു ഗുണകാരമെന്നു പേർ. അവിടെ ഗുണ്യത്തിൽ കൂട്ടുന്നു, ഗുണ്യത്തെത്തന്നെ കൂട്ടുന്നതും, എന്നു വിശേഷമാകുന്നത്. അവിടെ ഗുണകാരത്തിങ്കൽ എത്ര സംഖ്യാവ്യക്തികളുള്ളു അത്ര ആവൃത്തി ഗുണ്യത്തെ കൂട്ടുന്നതും. എന്നീ നിയമത്തോടുകൂടിയുള്ള യോഗം ഗുണനമാകുന്നത് ഇതിനെ കാട്ടുന്നു.

ഇവിടെ ഗുണ്യത്തിന്റെ ഒടുക്കത്തെ സ്ഥാനത്തെ ഗുണകാരം കൊണ്ടു നടേ ഗുണിക്കേണ്ടു. എന്നാൽ ഗുണിച്ച സംഖ്യകളും ഗുണിയാത്ത സംഖ്യകളും തങ്ങളിൽ കൂടുകയില്ല എന്നൊരെളുപ്പമുണ്ട്. അവിടെ ഗുണ്യത്തിന്റെ ഒടുക്കത്തെ സ്ഥാനത്ത് ഒരു സംഖ്യ[8] ഉണ്ട് എന്നിരിപ്പൂ. അതിനെ നൂറുകൊണ്ടു ഗുണിക്കേണ്ടു എന്നും കല്പിപ്പൂ.

വ്യാഖ്യാനം 8: 'ഒരു സംഖ്യ' എന്നതിന്ന് ഒന്ന് അല്ലെങ്കിൽ രൂപമെന്നർത്ഥം.

അപ്പോൾ ആ ഒന്നിനെ നൂറ്റിൽ ആവർത്തിക്കേണം. അവിടെ അതിനെ പത്തിൽ ആവർത്തിക്കുമ്പോൾ ദശസ്ഥാനത്ത് ഒന്നു കരേറും മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായംകൊണ്ട്. പിന്നേയും ഒരിക്കൽ ആ ഒന്നിനെ പത്തിൽ ആവർത്തിക്കുമ്പോൾ ദശസ്ഥാനത്തു രണ്ടുണ്ടാകും. ഇങ്ങനെ നൂറുവട്ടം ആവർത്തിക്കുമ്പോൾ ശതസ്ഥാനത്തു ഒന്നുണ്ടാകും. ആകയാൽ ഗുണകാരത്തിങ്കൽ ശതസ്ഥാനത്തു ഒരു സംഖ്യയുണ്ടായ്കിൽ ഗുണ്യത്തിന്റെ അന്ത്യസ്ഥാനത്തെ അവിടുന്നു ശതസ്ഥാനത്തുവെയ്പ്പൂ. എന്നാൽ അതിനെ നൂറ്റിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടുവരും. അപ്പോൾ ഗുണ്യത്തിങ്കൽ കീഴ ചില സംഖ്യയുണ്ടെന്നു കല്പിക്കേണ്ടാ. അന്നേരത്ത് അവറ്റെക്കൊണ്ടുപയോഗമില്ല, എന്നിട്ട്. അവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ ഗുണ്യത്തിന്റെ അന്ത്യസ്ഥാനത്തിനു നേരെ ആദ്യസ്ഥാനം വരുമാറു ഗുണകാരത്തെ വയ്പ്പൂ. പിന്നെ ഗുണ്യത്തിന്റെ അന്ത്യസ്ഥാനത്തെ ഗുണകാരത്തിന്റെ അന്ത്യസ്ഥാനത്തിനുനേരെ വെയ്പ്പൂ, ഗുണകാരാന്ത്യസ്ഥാനത്തിങ്കൽ ഒന്നു സംഖ്യ എന്നുകിൽ. അവിടെ സംഖ്യ രണ്ടെങ്കിൽ ഗുണ്യാന്തസ്ഥാനത്തെ രണ്ടിൽ ആവർത്തിച്ചിട്ടു വെയ്പ്പൂ. അപ്പോൾ ഗുണകാരത്തിന്റെ അന്ത്യ സ്ഥാനത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതായി. പിന്നെ അന്ത്യസ്ഥാനത്ത് അടുത്തു കീഴേതിന്ന് ഉപാന്ത്യമെന്നു പേർ. ഇങ്ങനെ ഉപാന്ത്യസ്ഥാനത്തിങ്കൽ എത്ര ഗുണകാരത്തിനു സംഖ്യ ഉള്ളൂ ആ സ്ഥാനത്ത് അത്രയിലാവർത്തിച്ചിട്ടു വെയ്പ്പൂ ഗുണ്യാന്ത്യസ്ഥാനത്തെ എന്നാലതിനെക്കൊണ്ട് ഗുണിച്ചതായി. ഇങ്ങനെ ഗുണകാരത്തിന്റെ ആദ്യസ്ഥാനത്തോളമുള്ളവറ്റെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അതതിന്റെ സ്ഥാനത്തു നേരെ വെയ്പ്പൂ ഗുണ്യാന്ത്യസ്ഥാനസംഖ്യയെ. എന്നാൽ ഗുണ്യത്തിന്റെ അന്ത്യസ്ഥാനത്തെ ഗുണകാരസ്ഥാനങ്ങൾ എല്ലാം കൊണ്ടും ഗുണിച്ചതായിട്ടു വരും. അവിടെ ഗുണകാരത്തിന്റെ യാതൊരു സ്ഥാനത്തു സംഖ്യയില്ലായ്കയാൽ അവിടം ശൂന്യസ്ഥാനമാകുന്നു, അതിനുനേരെ

ഗുണ്യത്തെ വെയ്ക്കേണ്ടൂ. മറ്റേ സ്ഥാനങ്ങളിലെ സംഖ്യകൾ കരേറി ഉണ്ടാകുമത്രേ അവിടെ സംഖ്യ. പിന്നെ ഗുണ്യത്തിന്റെ ഉപാന്ത്യസ്ഥാനത്തിനു നേരെ ഏകസ്ഥാനം വരുമാറു വെയ്പ്പൂ ഗുണകാരത്തെ. അതിനേയും ഇവ്വണ്ണം ഗുണിപ്പൂ. ഇവ്വണ്ണം ഗുണ്യാന്ത്യസ്ഥാനത്തോളവും. അപ്പോൾ ഗുണ്യത്തെ മുഴുവനും ഗുണിച്ചൂതായി.[9]

വ്യാഖ്യാനം 9:

ഗുണ്യാന്തിമപദോർദ്ധ്വസ്ഥം ഗുണകാദ്യം യഥാ തഥാ |
ന്യസ്യാഥ ഗുണകാരസ്യ യാ യാ സംഖ്യാ പദേ പദേ ||
ഗുണ്യാന്ത്യാംകാം തയാവൃത്താം ന്യസേത്തത്തൽ പദാദധഃ |
അപസാര്യഗുണം തദ്വദുപാന്ത്യാദീംശ്ച താഡയേൽ || (തന്ത്രസംഗ്രഹം).

ഈ ക്രിയ സ്ഥാനനിയമനത്തെ അനുസരിച്ച് കവടികൊണ്ടു ചെയ്യാറുള്ളതുതന്നെ. ഇവിടെ ഗുണ്യം = 647; ഗുണകാരം = 234.

234	ഗുണ്യത്തിന്റെ അന്ത്യസ്ഥാനത്തിനു മീതെ
647	ഗുണകാരത്തിന്റെ ആദ്യസ്ഥാനം വരുമാറു വെയ്ക്കുന്നു
12	ഗുണ്യാന്ത്യസ്ഥാനം × ഗുണകാരാന്ത്യസ്ഥാനം
18	ഗുണ്യാന്ത്യസ്ഥാനം × ഗുണകാരോപാന്ത്യസ്ഥാനം
138	ഇവയുടെ യോഗം
24	ഗുണ്യാന്ത്യസ്ഥാനം × ഗുണകാരാദ്യസ്ഥാനം
1404	ഗുണ്യത്തിന്റെ അന്ത്യത്തെ ഗുണകാരം മുഴുവൻകൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്
234	ഗുണകാരത്തെ ഒരു സ്ഥാനം ഇറക്കിവച്ചു
47	അന്ത്യംകളഞ്ഞ ഗുണ്യം
1404	ഗുണ്യാന്ത്യം × ഗുണകാരം
8	ഗുണ്യോപാന്ത്യം × ഗുണകാരാന്ത്യം
1484	ഗുണ്യാന്ത്യം × ഗുണകാരം + ഗുണ്യോപാന്ത്യം × ഗുണകാരാന്ത്യം
12	ഗുണ്യോപാന്ത്യം × ഗുണകാരോപാന്ത്യം
1496	ഗുണ്യാന്ത്യം × ഗുണകാരം + ഗുണ്യോപാന്ത്യം × (ഗുണകാരാന്ത്യം + ഗുണകാരോപാന്ത്യം)
16	ഗുണ്യോപാന്ത്യം × ഗുണകാരാദ്യം
14976	(ഗുണ്യാന്ത്യം + ഗുണ്യോപാന്ത്യം) × ഗുണകാരം
234	ഗുണകാരത്തെ ഒരു സ്ഥാനവുംകൂടി ഇറക്കി
7	ഗുണ്യത്തിന്റെ അന്ത്യോപാന്ത്യങ്ങളെ കളഞ്ഞത്
14976	(ഗുണ്യാന്ത്യം + ഗുണ്യോപാന്ത്യം) × ഗുണകാരം
14	ഗുണ്യാദ്യം × ഗുണകാരാന്ത്യം
15116	(ഗുണ്യാന്ത്യം + ഗുണ്യോപാന്ത്യം) × ഗുണകാരം+ ഗുണ്യാദ്യം × ഗുണകാരാന്ത്യം
21	ഗുണ്യാദ്യം × ഗുണകാരോപാന്ത്യം
15137	(ഗുണ്യാന്ത്യം + ഗുണ്യോപാന്ത്യം) × ഗുണകാരം + ഗുണ്യാദ്യം (ഗുണകാരാന്ത്യം + ഗുണകാരോപാന്ത്യം
28	ഗുണ്യാദ്യം × ഗുണകാരാദ്യം
151398	ഗുണ്യം × ഗുണകാരം

പിന്നെ ഇവ്വണ്ണമാകിലുമാം ഗുണനപ്രകാരം. ഗുണ്യത്തിന്റെ ഓരോ സ്ഥാനങ്ങളിലെ സംഖ്യയെ വേറെ എടുത്തുകൊണ്ടു ഗുണകാരത്തെ ഇവ്വണ്ണം ഗുണിച്ച് അതാതു സ്ഥാനമാദിയായിട്ടു കൂട്ടി ഒരുമിച്ചുകൊള്ളൂ എന്നാകിലുമാം. അവിടെ അന്ത്യസ്ഥാനം തുടങ്ങൂ എന്നുള്ള നിയമം വേണ്ടാ. സംഖ്യകൾ കലരുകയില്ല അപ്പോൾ, എന്നിട്ട്. ഗുണ്യത്തെ എന്നവണ്ണം ഗുണകാരത്തെ ഖണ്ഡിച്ച ഗുണിക്കിലുമാം. അവിടെ ഗുണകാരത്തിന്നു മൂന്നുസ്ഥാനം എന്നിരിപ്പൂ. ഇരുന്നൂറ്റി മുപ്പത്തിനാല് എന്നിരിപ്പൂ സംഖ്യ. അതിനെ ഖണ്ഡിപ്പൂ മൂന്നായിട്ട്. അവിടെ ഒന്ന് ഇരുന്നൂറ്, ഒന്നു മുപ്പത്, ഒന്നു നാല് ഇങ്ങനെ മൂന്നു ഗുണകാരം എന്നു കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ ഗുണ്യത്തെ മുഴുവനേ മൂന്നേടത്തു വെച്ച് ഇവ ഓരോന്നിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിപ്പൂ. പിന്നെ സ്ഥാനം പകരാതെ തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂ ഇതും മുമ്പിലെപ്പോലെ ഗുണിച്ചതായി വരും. അവിടെ ഇരുന്നൂറ്റിൽ ആവർത്തിച്ചത് ഒന്ന്, മുപ്പതിൽ ആവർത്തിച്ചത് വേറെ ഒന്ന്, നാലിലാവർത്തിച്ചത് വേറെ ഒന്ന്. പിന്നെ ഇവ ഒക്ക കൂട്ടുമ്പോൾ ഇരുന്നൂറ്റിമുപ്പത്തിനാലിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടുവരും.

അനന്തരം സ്ഥാനനിയമം കൂടാതെ മറ്റൊരു പ്രകാരം സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു പെരുക്കിലുമാം. അവിടെ ഒന്നു നൂറ്റൊരുപത്, ഒന്നു നൂറ്റിരുപത്തിനാല് ഇങ്ങനെ താൻ ഖണ്ഡിപ്പൂ. ഇവ്വണ്ണം ഗുണ്യത്തെ ആകിലുമാം. ഇങ്ങനെ രൂപവിഭാഗവും സ്ഥാനവിഭാഗവും എന്നു രണ്ടുപ്രകാരം ഖണ്ഡിക്കാം. ഇങ്ങനെ ഗുണനപ്രകാരം കൊണ്ടു തന്നെ ഖണ്ഡഗുണനപ്രകാരവുമുണ്ടാകും.[10]

വ്യാഖ്യാനം 10:

ഖണ്ഡയിത്വാഥവാ ഗുണ്യം ഖണ്ഡാനേതാൻ പൃഥക് പൃഥക് |
ഗുണകേന ഹതാൻ യുഞ്ജ്യാൽ . . . . ‖ (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

സ്ഥാനനിയമംകൂടാതെ പ്രകാന്തരേണ ഗുണനത്തെ പറയുന്നു.

സ്ഥാനവിഭാഗത്തെ അനുസരിച്ച്:

ഇവിടെ ഗുണ്യം $= 647$; ഗുണകാരം $= 234$

$$\begin{aligned} 647 \times 200 &= 129400 \\ 647 \times 30 &= 19410 \\ 647 \times 4 &= \underline{2588} \\ 647 \times 234 &= \underline{151398} \end{aligned}$$

രൂപവിഭാഗത്തെ അനുസരിച്ച്:

$$\begin{aligned} 647 \times 110 &= 71170 \\ 647 \times 124 &= \underline{80228} \\ 647 \times 234 &= \underline{151398} \end{aligned}$$

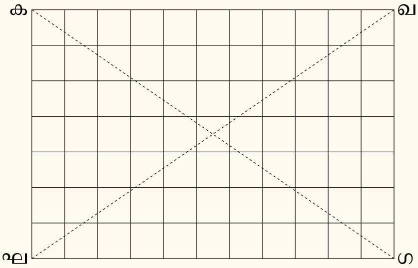
പിന്നെ ഇങ്ങനെ ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന സംഖ്യയെ ക്ഷേത്രമായിട്ടും കല്പിക്കാം.[11]

വ്യാഖ്യാനം 11: ഗുണ്യഗുണകാരങ്ങൾ അതുല്യങ്ങളെങ്കിൽ ക്ഷേത്രം ഒരു ഘാതക്ഷേത്രമായിരിക്കും. അതു ഗുണ്യസംഖ്യയോളം നീളവും ഗുണകാര്യസംഖ്യയോളം ഇടവുമുള്ളതായിരിക്കും.

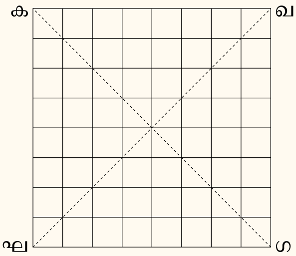
പരിലേഖം 1-ൽ ഗുണ്യം $= 11$, ഗുണകാരം $= 7$.
ക്ഷേത്രഫലം = ആകെയുള്ള ഖണ്ഡങ്ങൾ $= 77$.
ഗുണിതഫലം = $11 \times 7 = 77$.

ഗുണ്യഗുണകാരങ്ങൾ തുല്യങ്ങളാകുമ്പോൾ, ക്ഷേത്രം സമചതുരശ്രമായിരിക്കും.

പരിലേഖം 2-ൽ ഗുണ്യം = ഗുണകാരം = 8.
ക്ഷേത്രഫലം = 64.
ഗുണിതഫലം $8 \times 8 = 8^2$ = $\underline{64}$.



പരിലേഖം (1)



പരിലേഖം (2)

എന്നാലുണ്ടു ചില എളുപ്പം. അവിടെ ക്ഷേത്രമെന്നതു സമതലമായി ചതുരശ്രമായിരിപ്പോരു പ്രദേശം. അതു നീണ്ടിട്ടിരിക്കിലുമാം സമചതുരശ്രമായിട്ടാകിലുമാം. അവിടെ ഗുണ്യം വലുത് ഗുണകരം ചെറുത് എന്നിരിക്കുമ്പോൾ കോൽ വിരൽ എന്നിവറ്റിലേതാനും ഒരു മാനംകൊണ്ട് ഗുണ്യസംഖ്യയോളം നീളമായി ഗുണകാരസംഖ്യയോളം ഇടമായി ഇരുന്നൊന്ന് ഈ ക്ഷേത്രമാകുന്നത് എന്നു കല്പിക്കേവേണ്ടുവത്. പിന്നെ ഇതിങ്കൽ കോൽമാനമാകുന്നത് എങ്കിൽ ഒരിക്കോലൊരിക്കോൽ അകലത്തിൽ നീളവും വിലങ്ങും ചില രേഖകളെ ഉണ്ടാക്ക. അപ്പോൾ ഒരിക്കൽ പോന്നോ ചിലവ സമചതുരശ്രങ്ങളെക്കൊണ്ട് നിറയപ്പെട്ടിരിക്കും ഈ ക്ഷേത്രം. ഈ ഖണ്ഡങ്ങൾ പങ്ക്തികളായിട്ട് ഇരിപ്പൂതും ചെയ്യും. അവിടെ നീളത്തിലുള്ള ഓരോ വരിയിൽ ഗുണ്യത്തിന്റെ സംഖ്യയോളം ഖണ്ഡങ്ങളുള്ളവ, ഗുണകാരസംഖ്യയോളം വരിയുമുള്ളവ. പിന്നെ വിലങ്ങത്തിൽ വരിയാകുന്നു എന്നു കല്പിക്കുന്നുതാകിൽ വരിയിലോരോന്നിൽ ഗുണകാരത്തോളം ഖണ്ഡങ്ങൾ. ഗുണ്യസംഖ്യയോളം വരികൾ എന്നാകിലുമാം. ഈ ഖണ്ഡങ്ങൾക്കു ക്ഷേത്രഫലം എന്നു പേർ. ഈ വണ്ണം കല്പിക്കുമ്പോൾ ക്ഷേത്രത്തിന്റെ നീളവും ഇടവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചാൽ ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലങ്ങളുണ്ടാം എന്നു വരും. പിന്നെ ഗുണ്യത്തെക്കൊണ്ട് ആവർത്തിച്ചിരിക്കും ഗുണകാരമെന്നും ഗുണകാരത്തെക്കൊണ്ട് ആവർത്തിച്ചിരിക്കും ഗുണ്യമെന്നും വ്യക്തമാകും. ഗുണിതഫലത്തിങ്കൽ ഇതു സമകർണ്ണമായിരിപ്പൊന്നു ക്ഷേത്രം. ഇവിടെ പിന്നെ ചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തിന്റെ ഒരു കോണിൽ നിന്നു തുടങ്ങി ക്ഷേത്രമദ്ധ്യേക്കൂടി മറ്റെ കോണിൽ സ്പർശിക്കുന്ന സൂത്രം കർണ്ണമാകുന്നത്. ഇതിന്നു ഘാതക്ഷേത്രമെന്നുപേർ. ഘാതമെന്നും സംവർഗ്ഗമെന്നും ഗുണനത്തിന്നു പേർ. പിന്നെ വർഗ്ഗത്തേയും ക്ഷേത്രരൂപേണ കല്പിക്കാം. അവിടെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രമെങ്കിൽ സമചതുരശ്രമായിട്ടേ ഇരിക്കുമത്രെ എന്നു നിയതം. ഇങ്ങനെ സാമാന്യഗുണനം.

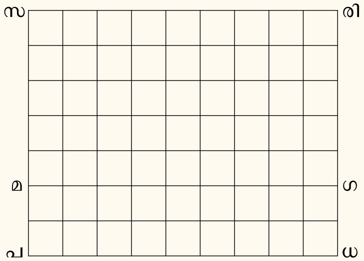
ഗുണനത്തിങ്കൽ ചില വിശേഷങ്ങൾ

അനന്തരം ഗുണ്യത്തിങ്കത്താൻ ഗുണകാരത്തിങ്കത്താൻ ഒരിഷ്ടസംഖ്യകൂട്ടിത്താൻ കളഞ്ഞുതാൻ ഇരിക്കുന്നവറ്റെ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചുവെങ്കിൽ കേവലങ്ങളാകുന്ന ഗുണ

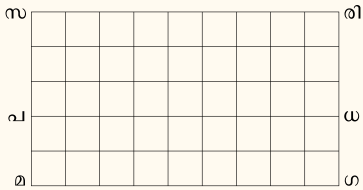
ഗുണ്യങ്ങളുടെ ഘാതത്തിങ്കന്ന് എത്ര ഏറിതാൻ കുറഞ്ഞുതാൻ ഇരിക്കുന്നു ഈ ഘാതം എന്നതിനെ അറിയുംപ്രകാരം. ഇവിടെ ഗുണഗുണ്യങ്ങളിൽവെച്ചു ചെറിയതിങ്കന്ന് ഒരിഷ്ടസംഖ്യയെ കളഞ്ഞിട്ടു ശേഷത്തെക്കൊണ്ട് വലിയതിനെ ഗുണിപ്പൂതാകിൽ ആ ക്ഷേത്രം അത്ര ഇടം കുറഞ്ഞിരിക്കും. ഇഷ്ടം എത്ര സംഖ്യ അത്ര വരി കുറഞ്ഞിരിക്കും. ആകയാൽ ആ ഇഷ്ടത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച വലിയതിനെ കൂട്ടേണം. എന്നാൽ തികയും വരി. ഇഷ്ടസംഖ്യ കൂട്ടീട്ട് എങ്കിൽ അത്ര വരി ഏറി. എന്നിട്ട് ഇഷ്ടം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച വലിയതിനെ കളയേണം. എന്നാൽ തികയും വരി. ഇഷ്ടസംഖ്യയെ കൂട്ടീട്ട് എങ്കിൽ അത്രവരി ഏറി എന്നീട്ട്. ഈവണ്ണം വലിയതിങ്കന്ന് ഒരിഷ്ടസംഖ്യയേ കളകതാൻ കൂട്ടുകതാൻ ചെയ്തിട്ട് ഗുണിച്ചൂതാകിൽ ഇഷ്ടത്തെക്കൊണ്ടു ചെറിയതിനെ ഗുണിച്ചിട്ടു കൂട്ടുകതാനു കളകതാൻ ചെയ്യേണം എന്നതു വിശേഷമല്ല.[12]

വ്യാഖ്യാനം 12:

യദ്വേഷ്ടോനഗുണഘ്നേത്ര ഗുണ്യമിഷ്ടാഹതം ക്ഷിപേൽ |
ഇഷ്ടാഢ്യഗുണനിഘ്നാദ്വാ ഗുണ്യമിഷ്ടാഹതം ത്യജേൽ || (തന്ത്രസംഗ്രഹം)



പരിലേഖം (3)



പരിലേഖം (4)

പരിലേഖം 3: ഗുണ്യം $= 9$.
ഗുണകാരം $= 5$.
ഇഷ്ടസ്യം $= 2$.
9×5 എന്നതിന്റെ ക്ഷേത്രം $=$ *സരിഗമ*. (പരിലേഖം 3)
$9 \times (5+2)$ എന്നതിന്റെ ക്ഷേത്രം $=$ *സരിധപ*.
സരിഗമ $=$ *സരിധപ* $-$ *മഗധപ*.
$$9 \times 5 = 9 \times (5+2) - 9 \times 2.$$

ഇഷ്ടസംഖ്യയെ ഗുണകാരത്തിങ്കന്നു കളയുന്ന പക്ഷം:

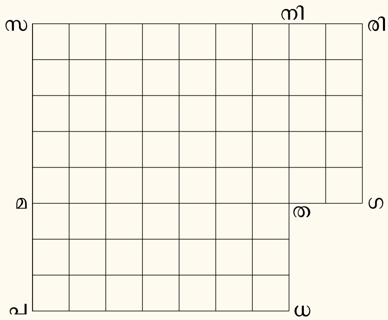
9×5 എന്നതിന്റെ ക്ഷേത്രം $=$ *സരിഗമ*. (പരിലേഖം 4)
$9 \times (5-2)$ എന്നതിന്റെ ക്ഷേത്രം $=$ *സരിധപ*.

പരിലേഖം 4:

സരിഗമ $=$ *സരിധപ* $+$ *മഗധപ*.
$$9 \times 5 = 9.(5-2) + 9 \times 2.$$

അനന്തരം ഗുണഗുണ്യങ്ങളിൽ ചെറിയതിൽ വലിയൊരിഷ്ടം കൂട്ടൂ; വലിയതിങ്കന്നു ചെറിയൊരിഷ്ടം കളയൂ. പിന്നെ ഇവ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചൂവെങ്കിൽ അവിടെയെത്രകൂട്ടി അത്ര വരി ഏറിപ്പോയി. എത്രയുണ്ടു മറ്റേതിങ്കന്നു കളഞ്ഞതു് അത്രച്ച വരിയിലെ ഖണ്ഡസംഖ്യയും കുറഞ്ഞും പോയി. ഇങ്ങനെ ഇരിപ്പൊന്നു് അക്ഷേത്രം. അവിടെ വലിയ ഗുണ്യത്തിങ്കന്നു കുറഞ്ഞൊരു സംഖ്യ കളഞ്ഞതു്, ചെറിയ ഗുണകാരത്തിങ്കൽ ഏറിയസംഖ്യ കൂട്ടിയതു് എന്നു കല്പിക്കുമ്പോൾ ഇഷ്ടം പോയഗുണ്യത്തോളന്നീളമുള്ള വരികൾ ഏറിയതു്. അവിടെ പിന്നേയും ഗുണകാരത്തിങ്കലെ ഇഷ്ടത്തോളം വരികൾ ഏറി. എന്നിട്ടു ഗുണകാരത്തിങ്കൽ കൂട്ടിയ ഇഷ്ടത്തെക്കൊണ്ടു ഇഷ്ടം പോയഗുണ്യത്തെ ഗുണിച്ചിട്ടുള്ളതു് ഈ ക്ഷേത്രത്തിങ്കന്നു കളയേണം. പിന്നെ ഗുണ്യത്തിങ്കലെ ഇഷ്ടത്തോളം വിലങ്ങുള്ള വരികൾ കൂട്ടേണ്ടുവതു്. ആകയാൽ കേവലഗുണകാരത്തെ ഗുണ്യത്തിങ്കലെ ഇഷ്ടത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച കൂട്ടേണ്ടു. എന്നിങ്ങനെ സ്ഥിതമിതു്. ഈവണ്ണം ഗുണഗുണ്യങ്ങളിൽ രണ്ടിങ്കലും ഇഷ്ടത്തെ കൂട്ടുകതാൻ കളകതാൻ ചെയ്യുന്നേടത്തും ഊഹിച്ചുകൊള്ളൂ.[13]

വ്യാഖ്യാനം 13: ഗുണ്യം $= 9$; ഗുണകാരം $= 5$; ഗുണ്യത്തിൽ കളഞ്ഞ ഇഷ്ടം $= 2$; ഗുണകാരത്തിൽ കൂട്ടിയ ഇഷ്ടം $= 3$.



പരിലേഖം (5)

$$\begin{aligned}
9 \times 5 &= \textit{സരിഗമ};\\
(9-2) \times 5 &= \textit{സനിതമ}.\\
(9-2) \times (5+3) &= \textit{സനിധപ}.\\
\textit{സരിഗമ} &= \textit{സനിധപ} + \textit{നിരിഗത} - \textit{മതധപ}\\
9 \times 5 &= (9-2)(5+3) + 2 \times 5 - 3 \times (9-2)
\end{aligned}$$

അനന്തരം ഗുണകാരത്തെ ഏതാനും ഒരിഷ്ടത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തെ തന്നിൽ തന്നെ കൂട്ടി പിന്നെ അതിനെക്കൊണ്ടു ഗുണ്യത്തെ ഗുണിപ്പൂ എങ്കിൽ അതിങ്കന്നു് എത്ര കളയേണ്ടൂ എന്നു്. അവിടെ ഗുണകാരസംഖ്യ പന്ത്രണ്ടു് എന്നു കല്പിപ്പൂ. പന്ത്രണ്ടിൽ തന്നെ ഹരിച്ച ഫലം ഒന്നും കൂട്ടിയതു് എന്നും കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ ഇതിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിപ്പൂ ഗുണ്യത്തെ. എന്നാൽ ഗുണ്യത്തോളന്നീളമുള്ള പതിമ്മൂന്നുവരികൾ ഉണ്ടാകും. അവിടുന്നു ഒരുവരി പോവാനായിക്കൊണ്ടു പതിമ്മൂന്നിൽ ഹരിച്ച

ഫലം കളയേണ്ടുവതു്, പന്ത്രണ്ടിൽ ഹരിച്ച ഫലമല്ല. കേവലത്തിന്റെ പന്ത്രണ്ടാലൊന്ന് യാതൊന്ന് ഈ അംശത്തോടുകൂടിയതിങ്കന്നു പതിമ്മൂന്നാലൊന്നായിരിക്കും ഈ ഫലം. എന്നീവണ്ണം വ്യക്തമാകയാൽ യാതൊരു ഹാരകം കൊണ്ടു നാടേ ഹരിച്ചൂ അതിൽ ഒരു സംഖ്യ കൂട്ടിയതു പിന്നയ്ക്ക ഹാരകമാകുന്നതു്. പതിമ്മൂന്നു വരിയുള്ള അംശകക്ഷേത്രത്തിങ്കന്ന് ഒരു വരി കളയേണ്ടുമ്പോൾ അതു പതിമ്മൂന്നാലൊന്നായിരിക്കും. നടേ പന്ത്രണ്ടാലൊന്നുകൂട്ടീട്ടു പതിമ്മൂന്നായി. പിന്നെ പതിമ്മൂന്നാലൊന്നു കളഞ്ഞാൽ പന്ത്രണ്ടു വരുന്നൂ, എന്നിട്ടു്. പിന്നെ ഇവ്വണ്ണം പന്ത്രണ്ടാലൊന്നുകളക ചെയ്തതു പന്ത്രണ്ടിങ്കന്ന് എങ്കിൽ, പിന്നെ ശേഷത്തിങ്കന്നുള്ള പതിനൊന്നാലൊന്നു കൂട്ടിയാൽ പന്ത്രണ്ടാകുന്നു. ആകയാൽ യാതൊരു ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ചു ഗുണകാരത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞുവോ; ഗുണിച്ച ഫലത്തിങ്കന്നു അതിലൊന്നു കുറഞ്ഞ ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം കൂട്ടേണം. എന്നാൽ വാസ്തവമായിരിക്കുന്ന ഫലം വരും. ഇങ്ങനെ ഗുണിച്ച ഫലത്തിങ്കന്നു ചൊല്ലിയ ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തെ കൂട്ടുകതാൻ കളകതാൻ ചെയ്യാം, ഔചിത്യത്തിനു തക്കവണ്ണം. ഗുണിക്കുന്നതിനു മുമ്പിലെ ഗുണഗുണ്യങ്ങളിൽ ഒന്നിങ്കന്ന് ഈയംശത്തെ ഉണ്ടാക്കി തന്നിൽതന്നെ കളയുകതാൻ കൂട്ടുകതാൻ ചെയ്കിലുമാം. എന്നാലും ഫലമൊക്കും. അവിടയ്ക്ക ഹാരകം മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയതു തന്നെ. ഒന്നു കളകതാൻ കൂട്ടുകതാൻ ചെയ്തതു മുമ്പിലെ ഹാരകത്തിൽ, അതു പിന്നെയ്ക്ക ഹാരകമാകുന്നതു് എന്നു ചൊല്ലപ്പെട്ടതു്. അവിടെ യാതൊരുപ്രകാരം ഗുണകാരത്തിങ്കൽ കൂട്ടിയ അംശത്തെ അതിങ്കന്നുതന്നെ കളഞ്ഞാൽ വാസ്തവമായിരിക്കുന്ന ഫലം വരുന്നൂ, അവ്വണ്ണം ഗുണ്യത്തിന്റെ ആയംശത്തെ അതിങ്കന്നു കളഞ്ഞാലും ഫലം തുല്യം. ഗുണകാരത്തിങ്കന്നുതന്നെ കളയുമ്പോൾ വാസ്തവമായിരിക്കുന്ന വരികൾ ഉണ്ടാവും എന്നു വരുന്നതു്. ഗുണ്യത്തിങ്കന്നു കളയുന്നതാകിൽ വരിയിലെ ഖണ്ഡസംഖ്യ കുറക ചെയ്യുന്നതു് എന്നേ വിശേഷമുള്ളൂ. വാസ്തവക്ഷേത്രത്തേക്കാൾ ഇടമേറി നീളംകുറഞ്ഞു എന്നു വരുന്നതേ ഉള്ളൂ. ക്ഷേത്രഫലം തുല്യം.

അനന്തരം ഗുണഗുണ്യങ്ങളിൽ വച്ചു് ഗുണകാരം പന്ത്രണ്ട് എന്നു കല്പിച്ചേടത്തു് അതിനെ പന്ത്രണ്ടിൽ ഹരിക്കുന്നൂ എന്നിരിക്കുന്ന ഫലത്തെ പിന്നെ ഏതാനുമൊന്നുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു പന്ത്രണ്ടിൽ കൂട്ടി എന്നിരിക്കുന്നതാകിൽ അവിടെ വിശേഷം. ഇവിടെ പന്ത്രണ്ടിൽ ഹരിച്ച ഫലത്തെ അഞ്ചിൽ ഗണിച്ചിട്ടു് ഗുണകാരമാകുന്ന പന്ത്രണ്ടിൽ കൂട്ടി എന്നു കല്പിക്കുന്നൂ. അവിടെ അഗ്ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന ഫലക്ഷേത്രത്തിങ്കൽ പതിനേഴുവരിയുണ്ടാവും. അവിടെ ഒരു വരിയിലെ ഖണ്ഡസംഖ്യ ഉണ്ടാവാൻ ക്ഷേത്രഫലത്തെ പതിനേഴിൽ ഹരിക്കേണ്ടൂ. പിന്നെ ആ സംഖ്യയെ അഞ്ചിൽ ഗണിച്ചിട്ടു് ഉണ്ടായതിനെ മുമ്പിൽ ഉണ്ടായ ക്ഷേത്രഫലത്തിങ്കന്നു കളക വേണം, വാസ്തവമായിരിക്കുന്ന ക്ഷേത്രഫലമുണ്ടാവാൻ. അവിടെ നടേത്തെ ഹാരകത്തിന്റെ ഫലത്തെയെത്രകൊണ്ടു ഗുണിച്ചൂ അഗ്ഗുണകാരത്തെ കൂട്ടിയ ഹാരകം പിന്നെയ്ക്ക ഹാരകമാകുന്നതു് എന്നു വരും.

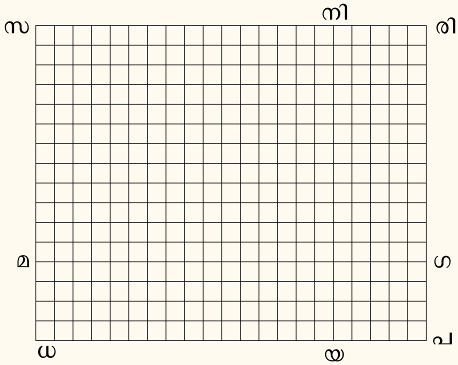
ഈവണ്ണം ഫലത്തെ കളയുന്നതാകിൽ അവിടെ ക്ഷേത്രഫലം ഏഴുവരിയായിരിക്കും. അവിടെ ഏഴിൽ ഹരിച്ചിട്ടു വരിയിലെ ഖണ്ഡസംഖ്യ ഉണ്ടാക്കേണ്ടൂ. ആകയാൽ അവിടെ ഫലഗുണകാരമാകുന്ന അഞ്ചിനെ കളകവേണ്ടതു പന്ത്രണ്ടിങ്കന്ന്.

അതു പിന്നെയ്ക്കു ഹാരമാകുന്നതെന്നും വരും. ഗുണകാരം ഫലത്തിന്റേതു നടേത്തെ അഞ്ചു തന്നെയത്രെതാനും രണ്ടേടത്തും. എന്നിങ്ങനെ ഇപ്രകാരങ്ങളെല്ലാറ്റേയും അറിയുന്ന ഈ ഘാതത്തെ ക്ഷേത്രഫലമാക്കീട്ടു നിരൂപിക്കുമ്പോൾ അറിയുന്നേടത്തേയ്ക്കു എളുപ്പമുണ്ടു്.[14]

വ്യാഖ്യാനം 14: പരിലേഖം 6-ൽ

$$\begin{aligned} \textit{സരി} &= \text{ ഗുണ്യം } = 20; \\ \textit{സമ} &= \text{ ഗുണകാരം } = 12. \\ \text{ക്ഷേത്രഫലം} &= 20 \times 12 = 240. \end{aligned}$$

ഇവിടെ ഗുണകാരത്തിൽ അതിൽ പന്ത്രണ്ടാലൊന്നിനെ നാലിൽ ഗുണിച്ചതു് (അതായതു 4) കൂട്ടുന്നു.



പരിലേഖം (6)

അപ്പോൾ *സധപരി* എന്ന ക്ഷേത്രം വരുന്നു.

$$\begin{aligned} \text{അതിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം} &= 20 \times (12 + 4) = 320. \\ \textit{സരിഗമ} &= \textit{സധപരി} - \textit{മധപഗ}. \\ &= 320 - 20 \times 4 = \underline{240}. \end{aligned}$$

നാലു് പതിനാറിന്റെ എത്ര അംശമാണോ പതിനാറിന്റെ ആ അംശത്തെ പതിനാറിൽ നിന്നു കളഞ്ഞു ഗുണ്യംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാലും ഇരുപതിന്റെ ആ അംശത്തെ ഗുണ്യത്തിങ്കൽനിന്നു കളഞ്ഞു ഗുണകാരത്തെ ഗുണിച്ചാലും ഫലം തുല്യമായിരിക്കും.

$$4 = \frac{1}{4} \times 16.$$

$$20 \times \left(16 - \frac{1}{4} \times 16\right) = 240 = \left(20 - \frac{1}{4} \times 20\right) \times 16.$$

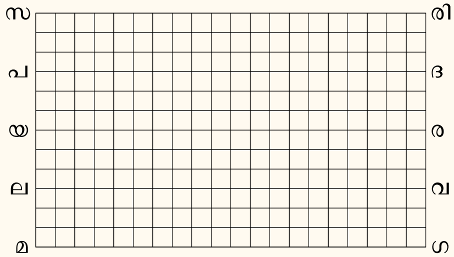
("യാതൊരുപ്രകാരം ഗുണകാരത്തിങ്കൽ കൂട്ടിയ അംശത്തെ അതിങ്കന്നുതന്നെ കളഞ്ഞാൽ വാസ്തവമായിരിക്കുന്ന ഫലം വരുന്നു, അവ്വണ്ണം ഗുണ്യത്തിന്റെ ആയംശത്തെ അതിങ്കന്നുതന്നെ കളഞ്ഞാലും ഫലം തുല്യം" എന്ന വാക്യത്തിന്റെ അർത്ഥമാണ് കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു്.) അതായതു *ക്ഷേത്രം സരിഗമ = ക്ഷേത്രം സധയനി.*

പിന്നെ പന്ത്രണ്ടു ഗുണകാരമാകുന്നേടത്തു് അപ്പന്ത്രണ്ടിന്റെ നാലിൽ ഹരിച്ചാൽ അപ്പലം മൂന്ന്. ആ മൂന്നിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിപ്പൂ ഗുണ്യത്തെ. പിന്നെ അഗ്ഗുണിച്ചിരി

ക്കുന്നതിനെ തന്നെ നാലാകുന്ന ഹാരകംകൊണ്ടും ഗുണിപ്പൂ. അപ്പോൾ അതു പന്ത്രണ്ടിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടു വരും. അവിടെ നടേ ഗുണ്യത്തെ മൂന്നിൽ ഗുണിക്കുമ്പോൾ ഗുണ്യം മൂന്നു വരിയായിട്ടുണ്ടാവും. പിന്നെ അതിനെ നാലിൽ ഗുണിക്കുമ്പോൾ മുമ്മൂന്നുവരിയായിട്ടുണ്ടാകും, നാലേടത്തു. അപ്പോൾ പന്ത്രുണ്ടുവരി ഉണ്ടാകും. ആകയാൽ ഗുണഗുണ്യങ്ങളിൽവെച്ച് ഒന്നിനെ ഏതാനും ഒരു ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മുടിയുമെങ്കിൽ ഈ ഹാരകം കൊണ്ടു ഗുണഗുണ്യങ്ങളിൽ മറ്റേതിനെ ഗുണിപ്പൂ. പിന്നെ ഗുണിച്ചതിനെതന്നെ ഹരിച്ച ഫലത്തെക്കൊണ്ടും ഗുണിപ്പൂ. അപ്പോൾ ഇഷ്ടഗുണഗുണ്യങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചൂതായിട്ട് വരും. ഇങ്ങനെ പല പ്രകാരത്തിലുള്ള ഗുണനത്തെ ചൊല്ലീതായി. [15]

വ്യാഖ്യാനം 15:

. . . . യദ്വാ യേന ഹൃതോ ഗുണഃ |
ശുദ്ധ്യേത്തേന ഹതം ഗുണ്യം പുനഹ്ന്യാൽ ഫലേന ച || (തന്ത്രസംഗ്രഹം)



പരിലേഖം (7)

ഗുണകാരത്തെ യാതൊരു സംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മുടിയുന്നു അസ്സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണ്യത്തെ ഗുണിക്ക. ഇങ്ങനെ ഗുണിച്ചിരിക്കുന്നതിനെ ഗുണകാരത്തെ ഹരിച്ചു കിട്ടിയ ഫലംകൊണ്ടും ഗുണിക്ക. എന്നാൽ ഗുണഗുണ്യങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതായി.

ഹരണം

അനന്തരം ഹരണം. അവിടെ യാതൊന്നിനെ ഹരിക്കുന്നൂ അതിന്നു ഹാര്യമെന്നു പേർ. യാതൊന്നിനെക്കൊണ്ടു ഹരിക്കുന്നൂ അതിന്നു ഹാരകമെന്നു പേർ. അവിടെ ഹാര്യത്തെ ഒരു ഘാതക്ഷേത്രമെന്നു കല്പിച്ച് ഇതിന്റെ ഒരു പാർശ്വത്തിന്റെ നീളം ഒരു ഹാരകസംഖ്യയോളമെന്നു കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ ഈ ഹാരകത്തെ എത്ര ആവൃത്തികളയാം ഹാര്യത്തിങ്കൽ നിന്ന് അത്രവരേ ഉണ്ട് ആ ഘാതക്ഷേത്രത്തിങ്കൽ ഹാരകത്തോളം വരിയിൽ ഓരോന്നിലെ ഖണ്ഡസംഖ്യ. ഇങ്ങനെ ഫലവും ഹാരകവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചിരിപ്പോരു ഘാതക്ഷേത്രം ഈ ഹാര്യമാകുന്നത്. അവിടെ ഹാരകത്തെ ഹാര്യത്തിന്റെ ശതസ്ഥാനമാദിയായിട്ടുവെച്ചിട്ടു വാങ്ങാമെങ്കിൽ നൂറ് ആവൃത്തി കളഞ്ഞതായിട്ടുവരും ഹാരകം. അവിടെ ഫലം നൂറുണ്ടായിട്ടു വരും. ശതസ്ഥാനത്ത് ഒന്നുവെക്കുമ്പോൾ അതു നൂറായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ യാതൊരിടമാദിയായിട്ടു ഹാര്യത്തിങ്കന്നു ഹാരകത്തെ കളഞ്ഞു ആ സ്ഥാനത്തു ഫലത്തെ

വെക്കേണ്ടൂ. എത്ര ആവൃത്തി അവിടന്നു കളഞ്ഞു അത്ര ഫലം ആ സ്ഥാനത്തുള്ളൂതും. ഇങ്ങനെ ആദ്യ സ്ഥാനത്തോളം ഫലം ഉണ്ടാക്ക. എന്നിങ്ങനെ ഹരണപ്രകാരം.[16]

വ്യാഖ്യാനം 16:

ഹാര്യാന്ത്യസ്ഥാനതുല്യാന്ത്യം ഹാരമൂർദ്ധ്വമധോപി വാ |
ന്യസ്യ യൽഗുണിതോ ഹാരശ്ശുദ്ധ്യേത്തത്തൽഗുണം ത്യജേൽ ||
ഹാര്യതോഥ ഹരാവൃത്തിസമം ന്യസ്യേൽ ഫലം പൃഥക് ||
ഹാര്യം തമപസാര്യ്യോഥ ഹരോവേമ്മുഹമ്മുഹു || (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

വർഗ്ഗം

അനന്തരം വർഗ്ഗം. അവിടെ വർഗ്ഗമാകുന്നതു ഗുണനംതന്നെയത്രെ. ഗുണ്യവും ഗുണകാരവും സംഖ്യകൊണ്ടു തുല്യമെന്നു വിശേഷമാകുന്നത്. ആകയാൽ വർഗ്ഗക്ഷേത്രം സമചതുരശ്രമായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ രണ്ടുവരിയിലെ ഖണ്ഡസംഖ്യകളും തുല്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കും, ഇവിടെ. മുമ്പിൽ ഗുണനത്തെ ചൊല്ലിയേടത്തു ഗുണ്യത്തിന്റെ അന്ത്യസ്ഥാനത്തിന്നു നേരെ ആദ്യസ്ഥാനം വരുമാറു ഗുണകാരത്തെവെച്ചു ഗുണ്യാന്ത്യസ്ഥാനത്തെ ഗുണകാരത്തിന്റെ അതതു സ്ഥാനത്തെ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ച് അതതു സ്ഥാനത്തിന്റെ നേരെ വെപ്പൂ എന്നല്ലൊ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയത്. അവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ ഗുണഗുണ്യങ്ങളുടെ സ്ഥാനയോഗത്തിങ്കന്ന് ഒന്നുപോയ സ്ഥാനസംഖ്യയിങ്കൽ ഗുണിച്ചതിനെ വേക്കേണ്ടൂ എന്നു വന്നിരിക്കും. ഇവിടെ പിന്നെ ഗുണഗുണ്യങ്ങൾക്കു സ്ഥാനം തുല്യമാകയാൽ വർഗ്ഗ്യസ്ഥാനത്തെ ഇരട്ടിച്ചതിൽ ഒന്ന് കുറഞ്ഞത് ഒരു ഓജസ്ഥാനമായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ അന്ത്യത്തെ അന്ത്യംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചത് ഒരു ഓജസ്ഥാനത്തു വരും. അന്ത്യത്തെ ഉപാന്ത്യംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചത് അതിനടുത്തു കീഴെ യുഗ്മസ്ഥാനത്തിങ്കൽ, ഉപാന്ത്യത്തെ അന്ത്യംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതും ആ സ്ഥാനത്തുതന്നെ വരും. പിന്നെ ഉപാന്ത്യത്തെ ഉപാന്ത്യംകൊണ്ട് ഗുണിച്ചത് അതിനു കീഴെ ഓജസ്ഥാനത്തിങ്കൽ. ഇങ്ങനെ തുല്യസ്ഥാനങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിന്ന് ഓജസ്ഥാനമാകുന്നത്. അതുല്യസ്ഥാനങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിന്നു യുഗ്മം. ആകയാൽ അന്ത്യസ്ഥാനത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ നടേ ഒരിടത്തു വെയ്പൂ. പിന്നെ വർഗ്ഗത്തിങ്കൽ വർഗ്ഗ്യത്തിന്റെ എല്ലാ സ്ഥാനത്തേയും എല്ലാ സ്ഥാനംകൊണ്ടും ഗുണിക്കേണ്ടുകയാൽ തുല്യസ്ഥാനഘാതത്തിന്നു വർഗ്ഗമെന്നും അതുല്യസ്ഥാനങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗണിച്ചതിന്നു ഘാതമെന്നും പേർ. എന്നിട്ടു പറയുന്നു ഒറ്റപ്പെട്ടതിന്ന് ഓജമെന്നും ഇരട്ടപ്പെട്ടതിന്നു യുഗ്മമെന്നും പേർ. ഒട്ടുസംഖ്യ കൂട്ടിയതിന്നു രാശി എന്നും പേർ. അവിടെ അന്ത്യവർഗ്ഗംവെച്ച് അനന്തരം ഗുണ്യത്തിന്റെ അന്ത്യവും ഗുണകാരത്തിന്റെ ഉപാന്ത്യവും പിന്നെ ഗുണ്യത്തിന്റെ ഉപാന്ത്യവും ഗുണകാരത്തിന്റെ അന്ത്യവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചാൽ സ്ഥാനവും സംഖ്യയും ഒന്ന് ആകയാൽ അന്ത്യസ്ഥാനത്തെ ഇരട്ടിച്ച് ഉപാന്ത്യസ്ഥാനത്തെ ഗുണിച്ച് ഉപാന്ത്യസ്ഥാനത്തിനു നേരെ വെയ്പൂ. അന്ത്യസ്ഥാനത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ വെച്ചതിനടുത്തു കീഴെയിരിക്കുമത്. പിന്നെ ഈവണ്ണംതന്നെ ഇരട്ടിച്ച അന്ത്യത്തെക്കൊണ്ട് ഗുണിച്ച ഉപാന്ത്യത്തിന്നു കീഴെസ്സംഖ്യകൾ എല്ലാറ്റേയും അതതിനു നേരെ കീഴെ വെയ്പൂ. പിന്നെ അന്ത്യസ്ഥാനത്തെ കളയാം. ഗുണ്യാന്തംകൊണ്ടും ഗുണകാരാന്ത്യംകൊണ്ടും ഗുണിക്കേണ്ടുവതു് ഒക്ക കഴിഞ്ഞു, എന്നിട്ട്.

പിന്നെ ഉപാന്ത്യാദി സ്ഥാനങ്ങളെ ഒക്ക ഒരു സ്ഥാനം കിഴിച്ചിട്ടു വെയ്ക്ക. അപ്പോൾ മുമ്പിൽ അന്ത്യസ്ഥാനത്തിന്റെ വൎഗ്ഗത്തെ യാതൊരിടത്തുവെച്ചു അതിങ്കന്ന് അടു ത്തു കീഴേതിന്നു നേരെ കീഴെ ഇരിക്കും. അവിടെത്തന്നെ ഉപാന്ത്യസ്ഥാനത്തിന്റെ വൎഗ്ഗത്തെ കൂട്ടു. പിന്നെ ഉപാന്ത്യസ്ഥാനത്തെ ഇരട്ടിച്ചതിനെക്കൊണ്ട് അതിനു കീഴെ സ്ഥാനങ്ങളെ ഗുണിച്ചു അതതിനു നേരെ കൂട്ടു. പിന്നെ ഉപാന്ത്യത്തെ കളവൂ. പിന്നെ ഒരു സ്ഥാനം കിഴിച്ച് ഉപാന്ത്യത്തിനു കീഴെ സ്ഥാനത്തിന്റെ വൎഗ്ഗം കൂട്ടു. പിന്നെ ഇതിനെ ഇരട്ടിച്ച് അതിന്നു കീഴെ സ്ഥാനങ്ങളെ ഗുണിച്ചിട്ട് അന്നേരത്തിരിക്കുന്ന സ്ഥാനത്തിന്നു നേരെ കൂട്ടു. പിന്നെ കിഴിച്ചിട്ടു വൎഗ്ഗം. ഇങ്ങനെ സ്ഥാനമൊടുങ്ങുവോളം ഇച്ചൊല്ലിയ ക്രിയയെ ചെയ്ക. ഇങ്ങനെ വൎഗ്ഗമാകുന്നതു ഗുണനം തന്നെ. ഗുണനമാകുന്നതു സംകലിതംതന്നെയത്രെ എന്നോ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയല്ലൊ. എന്നാലിതും സംകലിത വിശേഷമത്രെ. ഇങ്ങനെ ഒരു പ്രകാരം വൎഗ്ഗത്തെ ചൊല്ലീതായി.[17]

വ്യാഖ്യാനം 17:

> സമയോസ്തു ദ്വയോരാശ്യോഘാതോവൎഗ്ഗ ഇതി സ്മൃതഃ |
> അന്ത്യാംകവൎഗ്ഗം ദ്വിഘ്നാന്ത്യതാഡിതാനിതരാനപി ||
> സ്വസ്വോപരി ക്രമാന്ന്യസ്യേ ദന്ത്യഹീനമധോഗതം |
> ദക്ഷിണേന സമാനീയ ക്രമാദേവമ്മുഹുഃ ക്രിയാ |
> ആദിമാദ്വാ സമാരഭ്യ കൎത്തവ്യാ സ്യാദയം വിധിഃ || (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

ഗുണ്യവും ഗുണകാരവും സമമാകുന്നിടത്ത് ഫലത്തിനു വൎഗ്ഗമെന്നു പേർ. വൎഗ്ഗക്ഷേത്രം അതുകൊണ്ടു സമചതുരശ്രക്ഷേത്രമായിരിക്കും.

ഒരു സ്ഥാനം മാത്രമുള്ള സംഖ്യയെ വൎഗ്ഗിച്ചാൽ വൎഗ്ഗത്തിൽ ഒന്നോ രണ്ടോ സ്ഥാനങ്ങളുണ്ടായിരിക്കും. $2 \times 2 = 4$; $5 \times 5 = 25$. രണ്ടു സ്ഥാനമുള്ള സംഖ്യയെ വൎഗ്ഗിച്ചാൽ ഫലത്തിങ്കൽ മൂന്നോ നാലോ സ്ഥാനങ്ങളുണ്ടായിരിക്കും. $12 \times 12 = 144; 75 \times 75 = 5625$. ഇങ്ങനെ മേല്പോട്ടു കണ്ടുകൊൾക. ഒരു സംഖ്യയുടെ വൎഗ്ഗത്തിൽ ആദ്യസ്ഥാനമെല്ലായ്പോഴും ഫലത്തിങ്കൽ ഒരോജസ്ഥാനത്തായിട്ടിരിക്കും. അതുകൊണ്ടാണ് ഓജസ്ഥാനത്തെ വൎഗ്ഗസ്ഥാനമെന്നും യുഗ്മസ്ഥാനത്തെ അവൎഗ്ഗസ്ഥാനമെന്നും പറയുന്നത്. മൂലത്തിങ്കലെ എത്രാം സ്ഥാനത്തെ സംഖ്യയെയാണോ വൎഗ്ഗിക്കുന്നത് ആ സ്ഥാനസംഖ്യയെ ഇരട്ടിച്ചതിൽ ഒന്നു പോയ സ്ഥാനത്തായിരിക്കും ഫലത്തിൽ ആ സംഖ്യയുടെ വൎഗ്ഗത്തിന്റെ ആദ്യസ്ഥാനം

$1 \times$	$1 =$	$1-$	വൎഗ്ഗാദ്യസംഖ്യകളുടെ സ്ഥാനം	$2 \times 1 - 1 = 1$
$10 \times$	$10 =$	$100-$	. . . . . .	$2 \times 2 - 1 = 3$
$100 \times$	$100 =$	$10000-$	. . . . . .	$2 \times 3 - 1 = 5$

ക്രിയയുടെ യുക്തി: മൂലത്തിലെ അന്ത്യസ്ഥാനത്തെ സംഖ്യ $\underline{ക}$ എന്നും, ഉപാന്ത്യ സ്ഥാനത്തേതു $\underline{ഖ}$ എന്നും ആദ്യസ്ഥാനത്തേതു $\underline{ഗ}$ എന്നും കല്പിക്കുക.

$$\text{അപ്പോൾ മൂലസംഖ്യ} = 100 \times ക + 10 \times ഖ + ഗ.$$
$$\text{വൎഗ്ഗം} = (ക \times 100 + ഖ \times 10 + ഗ)(ക \times 100 + ഖ \times 10 + ഗ)$$

(1) $ക \times 100 \times ക \times 100 = ക^2 \times 10000$ — അഞ്ചാംസ്ഥാനത്തു $ക^2$.
(2) $ക \times 100 \times ഖ \times 10 = ക.ഖ \times 1000$ — നാലാംസ്ഥാനത്തു $ക.ഖ$.
(3) $ക \times 100 \times ഗ = ക.ഗ \times 100$ — മൂന്നാംസ്ഥാനത്തു $ക.ഗ$.
(4) $ഖ \times 10 \times ക \times 100 = ക.ഖ \times 1000$ — നാലാംസ്ഥാനത്തു $ക.ഖ$.
(5) $ഖ \times 10 \times ഖ \times 10 = ഖ^2 \times 100$ — മൂന്നാംസ്ഥാനത്തു $ഖ^2$.

(6) $ഖ \times 10 \times ഗ$	$= ഖ.ഗ \times 10$	— രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു $ഖ.ഗ.$
(7) $ഗ \times ക \times 100$	$= ക.ഗ \times 100$	— മൂന്നാംസ്ഥാനത്തു $ക.ഗ.$
(8) $ഗ \times ഖ \times 10$	$= ഖ.ഗ \times 10$	— രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു $ഖ.ഗ.$
(9) $ഗ \times ഗ$	$= ഗ^2$	— ആദ്യസ്ഥാനത്തു $ഗ^2$.

ഈ ഒമ്പതു സംഖ്യകളുടെയും യോഗം വൎഗ്ഗം.

വൎഗ്ഗത്തിൽ അഞ്ചാംസ്ഥാനത്തു $ക^2$; നാലാംസ്ഥാനത്തു $2 \times ക \times ഖ$; മൂന്നാംസ്ഥാനത്തു $2 \times ക \times ഗ$, $ഖ^2$; രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു $2 \times ഖ \times ഗ$; ആദ്യസ്ഥാനത്തു $ഗ^2$.

ക്രിയ: (i) $ക$ എന്നതിനെ വൎഗ്ഗിച്ച അഞ്ചാംസ്ഥാനത്തു വെക്കുക. (ii) $2 \times ക$ എന്നതു കൊണ്ടു $ഖ$, $ഗ$ എന്നവറ്റെ ഗുണിച്ച നാലാംസ്ഥാനത്തിലും മൂന്നാംസ്ഥാനത്തിലും വെയ്ക്കുക. (iii) മൂലത്തിലെ $ക$ എന്നതിനെ കളഞ്ഞു, $ഖ$, $ഗ$ എന്ന സംഖ്യകളെ ഒരു സ്ഥാനം കീഴ്പോട്ടിറക്കി വെക്കുക. അപ്പോൾ $ഖ$ ഫലത്തിങ്കലെ മൂന്നാംസ്ഥാനത്തിന്റേയും $ഗ$ രണ്ടാംസ്ഥാനത്തിന്റേയും നേരെ വരും. പിന്നെ $ഖ$ എന്നതിനെ വൎഗ്ഗിച്ച മൂന്നാംസ്ഥാനത്തിൽ കൂട്ടൂ. $2 \times ഖ$ എന്നതിനെക്കൊണ്ടു $ഗ$ എന്നതിനെ ഗുണിച്ച ഫലത്തെ രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു വെക്ക. (iv) മൂലത്തിലെ $ഖ$ എന്നതിനേയും കളഞ്ഞു $ഗ$ എന്നതിനെ ഒരു സ്ഥാനം ഇറക്കിവെക്ക. അപ്പോൾ $ഗ$ എന്നതു ഫലത്തിങ്കലെ ആദ്യസ്ഥാനത്തിനു നേരെ വരും. $ഗ$ എന്നതിനെ വൎഗ്ഗിച്ചാദ്യസ്ഥാനത്തുവെക്ക, ഇങ്ങനെ വൎഗ്ഗീകരണം.

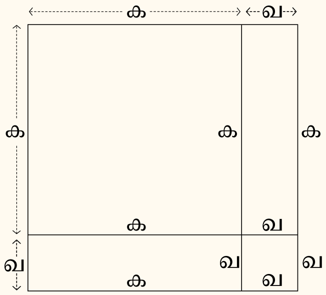
അനന്തരം ഇതിനെത്തന്നെ ക്ഷേത്രത്തിങ്കൽ കാട്ടുന്നു. അവിടെ വൎഗ്ഗമെന്നൊരു സമചതുരശ്രക്ഷേത്രം. ഇതിന്റെ അന്ത്യസ്ഥാനത്തിന്റെ വൎഗ്ഗത്തെ വെയ്ക്കുമ്പോൾ അത്രപോന്നൊരു സമചതുരശ്രമമുണ്ടാകും. അതൊരുകോടിയിലുണ്ടാകും. അതും പിന്നെയിവിടെ വൎഗ്ഗ്യരാശി ഖണ്ഡിച്ചിട്ടു വൎഗ്ഗിക്കുമാറ് ഓർക്കുന്നു. അവിടെ അതിന്റെ അന്ത്യസ്ഥാനം ഒരു ഖണ്ഡം. കീഴെസ്ഥാനങ്ങൾ ഒക്ക കൂടിയതു് ഒരു ഖണ്ഡം. ഇങ്ങനെ ഗുണകാരത്തേയും പിന്നെ ഗുണ്യത്തെയും ഖണ്ഡിപ്പൂ ഇവ്വണ്ണം തന്നെ. എന്നാൽ ഗുണകാരത്തിന്റെ അന്ത്യഖണ്ഡം കൊണ്ടു ഗുണ്യത്തിന്റെ അന്ത്യഖണ്ഡത്തെ ഗുണിച്ചതു് ഒന്ന്. ഗുണ്യത്തിന്റെ ആദ്യഖണ്ഡത്തെ ഗുണിച്ചതു് രണ്ടാമതു്. പിന്നെ ഗുണകാരത്തിന്റെ ആദ്യഖണ്ഡത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണ്യത്തിന്റെ അന്ത്യഖണ്ഡത്തെ ഗുണിച്ചതു മൂന്നാമതു്. ഇതിനെക്കൊണ്ടു് ആദ്യഖണ്ഡത്തെ ഗുണിച്ചതു നാലാമതു്. ഇങ്ങനെ വൎഗ്ഗക്ഷേത്രം നാലുഖണ്ഡമായിട്ടിരുന്നൊന്ന്. അവിടെ നടേത്തെ ഖണ്ഡവും നാലാമതും. സമചതുരശ്രമായിട്ടിരുന്നൊന്ന്. എന്നിട്ടു് ഇവ രണ്ടും വൎഗ്ഗക്ഷേത്രം. രണ്ടാമതും മൂന്നാമതും ഘാതക്ഷേത്രം. അവിടെ നൂറ്റിഇരുപത്തിമൂന്നിന്റെ വൎഗ്ഗം വേണ്ടുവതു് എന്നിരിക്കുമ്പോൾ, ശതസ്ഥാനത്തിങ്കലെ ഒന്ന് ഒരു ഖണ്ഡമാകുന്നതു്, കീഴെ സ്ഥാനങ്ങൾ രണ്ടുംകൂടി ഇരുപത്തിമൂന്നു മറ്റേഖണ്ഡമാകുന്നത്. അവിടെ നടേ നൂറ്റിന്റെ വൎഗ്ഗം വെയ്ക്കുമ്പോൾ നൂറുവരിയും ഓരോ വരിയിൽ നൂറുനൂറു ഖണ്ഡങ്ങളുംകൂടിയിരിപ്പോരു സമചതുശ്രമുണ്ടാകും. ഇതു് ഈശ കോണിൽ എന്നു കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ ഘാതങ്ങൾ രണ്ടും ഇതിന്റെ തെക്കും പടിഞ്ഞാറും വെയ്പൂ.

അവ രണ്ടും നൂറു നീളവും ഇരുപത്തിമൂന്നു് ഇടവും ഇങ്ങനെ ഇരിപ്പോ ചില രണ്ടു ക്ഷേത്രങ്ങൾ ഇവ. പിന്നെ ഇരുപത്തിമൂന്നിന്റെ വൎഗ്ഗം നിരൃതികോണിൽ വരും. പിന്നെ ആ ക്ഷേത്രത്തിങ്കലും ഇരുപതും മൂന്നും ഇങ്ങനെ സ്ഥാനത്തെ ഖണ്ഡിച്ച വൎഗ്ഗിക്കാം. അവിടെ ഇരുപതിന്റെ വൎഗ്ഗം അവിടത്തെ ഈശകോണിൽ കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ

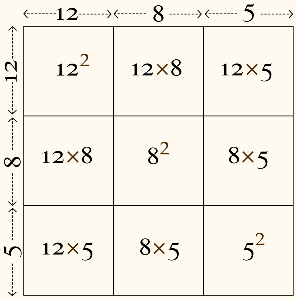
ഇരുപതു നീളവും മൂന്നിടവും ഇങ്ങനെ രണ്ടു ഘാതക്ഷേത്രം തെക്കും പടിഞ്ഞാറും. പിന്നെ മൂന്നിന്റെ വർഗ്ഗം ഇതിന്റെ നിരൃതികോണിൽ. ഇങ്ങനെ സ്ഥാനമൊട്ടുങ്ങുവോളം. ഇങ്ങനെ ഒരു വർഗ്ഗപ്രകാരം. ഇങ്ങനെ ഒരു രാശിയെ വർഗ്ഗിക്കേണ്ടുമ്പോൾ അതിനെ രണ്ടായി ഖണ്ഡിച്ച തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചിരിട്ടിച്ച രണ്ടു ഖണ്ഡത്തിന്റേയും വർഗ്ഗവും കൂട്ടിയാൽ ഖണ്ഡയോഗത്തിന്റെ വർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും എന്നു ചൊല്ലി.[18]

വ്യാഖ്യാനം 18: വർഗ്ഗിക്കേണ്ടുന്ന സംഖ്യയെ *ക*, *ഖ* എന്നു രണ്ടു സംഖ്യകളായിട്ടു ഖണ്ഡിക്കുക. പരിലേഖം 8-ൽ

$$\text{വലിയ ക്ഷേത്രം} = \text{ഒരു സമചതുരശ്രം} = (ക + ഖ)^2.$$



പരിലേഖം (8)



പരിലേഖം (9)

ഇതിൽ നാലു ഖണ്ഡങ്ങളുണ്ട്. അതിലൊന്നു $ക^2$ രണ്ടാമതു $ഖ^2$ മൂന്നാമതും നാലാമതും ഘാതക്ഷേത്രങ്ങൾ. ഈ ഘാതക്ഷേത്രങ്ങളോരോന്നും $ക \times ഖ$ എന്നതിനോടു തുല്യം.

അപ്പോൾ $(ക + ഖ)^2 = ക^2 + ഖ^2 + 2ക \times ഖ$.

ഇവിടെ ഖണ്ഡിക്കുന്നതു സ്ഥാനക്രമേണയും സംഖ്യാക്രമേണയുമാവാം. 25-നെ 20, 5 എന്നും 15, 10 എന്നും രണ്ടു വിധത്തിൽ ഖണ്ഡിക്കാം.

ഖണ്ഡയോർവ്വർഗ്ഗയോഗേ വാ ദ്വിഘ്നീം ഖണ്ഡാഹതീം ക്ഷിപേൽ || (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

പരിലേഖം 9: ഇവിടെ 123-നെ സ്ഥാനക്രമേണ 100, 20, 3 ഇങ്ങനെ മൂന്നായി ഖണ്ഡിച്ചിട്ടാണുദാഹരിച്ചിരിക്കുന്നത്. എന്നാൽ പരിലേഖം 9-ൽ എളുപ്പത്തിനുവേണ്ടി 25-നെ 12, 8, 5 എന്നിങ്ങനെ സംഖ്യാക്രമേണ മൂന്നായിട്ടു ഖണ്ഡിച്ചിട്ടാണുദാഹരിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഇവിടെ വലിയ ക്ഷേത്രം 25-ന്റെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രം. ഇതിൽ ഒമ്പതു ഖണ്ഡങ്ങളുണ്ട്. അവ 12-ന്റെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രം, 8-ന്റെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രം, 5-ന്റെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രം, $12 \times 8, 12 \times 5, 8 \times 5$ ഈ ഘാതങ്ങളുടെ ഈ രണ്ടു ക്ഷേത്രങ്ങൾ.

$$25^2 = (12 + 8 + 5)^2 = 12^2 + 2 \times 12 \times 8 + 2 \times 12 \times 5 + 8^2 + 2 \times 8 \times 5 + 5^2.$$

അനന്തരം ഖണ്ഡഘാതത്തെ നാലിൽ ഗുണിച്ചിട്ട് അതിൽ ഖണ്ഡാന്തരവർഗ്ഗവും കൂട്ടൂ. എന്നാലും ഈ വർഗ്ഗമുണ്ടാകും. ഇതിൻപ്രകാരം ഇവിടെ ഘാതക്ഷേത്രമാകുന്നതു വലിയ ഖണ്ഡത്തോളം നീളവും ചെറിയ ഖണ്ഡത്തോളമിടവും ഉണ്ടായിരിക്കും. ഇതിങ്കൽ ഒരു കർണ്ണരേഖയും വരപ്പൂ. ഇങ്ങനെ നാലുള്ള ഇവറ്റെക്കൊണ്ടു വർഗ്ഗക്ഷേത്രമുണ്ടാക്കും പ്രകാരം. ഈ ഘാതക്ഷേത്രത്തിൽ ഒന്നിനെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രത്തിന്റെ ഈശകോണിൽനിന്നു തുടങ്ങി തെക്കോട്ടു വെയ്പൂ. പിന്നെ ഒന്നിനെ ഇതിന്റെ അഗ്നികോ

ണിൽനിന്നു പടിഞ്ഞാറോട്ട്. പിന്നെ നിരൃതികോണിങ്കന്നു വടക്കോട്ട്. പിന്നെ വായുകോണിങ്കന്നു കിഴക്കോട്ട്. ഇങ്ങനെവെച്ചാൽ ക്ഷേത്രമദ്ധ്യത്തിൽ ഖണ്ഡാന്തരവർഗ്ഗത്തോളം പോരാതെയിരിക്കും. അതും കൂട്ടിയാൽ തികയും. ചെറിയ ഖണ്ഡത്തോളം ഇരുപുറവുമുണ്ടാകുമ്പോൾ നടുവിൽ അന്തരത്തോളം ശേഷിക്കും, എന്നിട്ട്. ആകയാൽ നാലുഘാതവും അന്തരവർഗ്ഗവും കൂട്ടിയാലും ഖണ്ഡയോഗവർഗ്ഗം ഉണ്ടാകും. പിന്നെ ഇച്ചൊല്ലിയതുകൊണ്ടു തന്നെ, ഖണ്ഡങ്ങളുടെ വർഗ്ഗയോഗം ഘാതത്തെ ഇരട്ടിച്ചതും അന്തരവർഗ്ഗവും കൂടിയായിരിക്കും എന്നു വരും. ഇതിൽ ഖണ്ഡഘാതത്തെ ഇരട്ടിച്ചതിനെ കൂട്ടീട്ടല്ലൊ മുമ്പിൽ വർഗ്ഗത്തെ ഉണ്ടാക്കി, എന്നിട്ട്.[19]

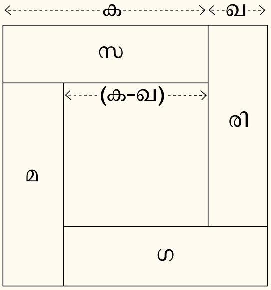
വ്യാഖ്യാനം 19: ഖണ്ഡങ്ങളെ *ക*, *ഖ* എന്നു കല്പിക്ക.

ക എന്നതിനോളം നീളത്തിലും *ഖ* എന്നതിനോളം ഇടമായിട്ടും *സ*, *രി*, *ഗ*, *മ* എന്ന നാലു ഘാതക്ഷേത്രങ്ങളെ ഉണ്ടാക്ക. യോഗവർഗ്ഗക്ഷേത്രത്തിൽ [$(\text{ക} + \text{ഖ})^2$ എന്നതിന്റെ ക്ഷേത്രം] ഇവയെ പരിലേഖം 10-ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന മാതിരി വെക്ക. അപ്പോൾ നടുവിൽ ഒരു വർഗ്ഗക്ഷേത്രം ശേഷിക്കും. അതിന്റെ ബാഹു $= \text{ക} + \text{ഖ} - 2 \times \text{ഖ} = \text{ക} - \text{ഖ}$.

അപ്പോൾ $(\text{ക} + \text{ഖ})^2 = 4\text{ക}.\text{ഖ} + (\text{ക} - \text{ഖ})^2$ എന്നു വന്നു.

$$(\text{ക} + \text{ഖ})^2 = \text{ക}^2 + \text{ഖ}^2 + 2\text{ക}.\text{ഖ} = 4\text{ക}.\text{ഖ} + (\text{ക} - \text{ഖ})^2$$

$$\therefore \text{ക}^2 + \text{ഖ}^2 = 2\text{ക}.\text{ഖ} + (\text{ക} - \text{ഖ})^2.$$



പരിലേഖം (10)

മൂലത്തിൽ ഘാതക്ഷേത്രത്തിന്നൊരു കർണ്ണരേഖ വരയ്ക്കുവാൻ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. അതു മേലിൽ പറയുവാൻ പോകുന്നേടത്തേയ്ക്ക് ഉദ്ദേശിക്കപ്പെട്ടതാകകൊണ്ടു പരിലേഖം 10-ൽ വരച്ചിട്ടില്ല.

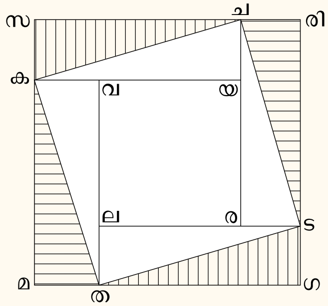
ഇവിടെ പിന്നെ ഖണ്ഡവർഗ്ഗയോഗത്തെ ഒരു ക്ഷേത്രമെന്നു കല്പിക്കുമ്പോൾ ഘാതക്ഷേത്രത്തിന്റെ കർണ്ണം സമചതുരശ്രബാഹുവായിട്ടിരിപ്പോരു വർഗ്ഗക്ഷേത്രമത് എന്നു വരും. ഇതിൻപ്രകാരം. അവിടെ നാലു ഘാതക്ഷേത്രത്തെ വെച്ച് അവറ്റിന്ന് ഓരോ കർണ്ണരേഖകൾ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയവറ്റിന്റെ അഗ്രം. സമചതുരശ്രകോണിൽ അല്ലാ വേണ്ടൂ, മറ്റേ കോടികളെ സ്പർശിക്കുമാറ് ഇരിക്കേണ്ടൂ. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്നേടത്ത് ആ കർണ്ണരേഖാമാർഗ്ഗേണ പെളിച്ചു പുറത്തു ഖണ്ഡങ്ങൾ ഓരോന്നു നാലിങ്കന്നും കളയൂ. അപ്പോൾ അതിന്നകം അക്കർണ്ണരേഖകൾ ചതുരശ്രബാഹുക്കൾ നാലുമായിട്ടിരിപ്പോരു സമചതുരശ്രം ശേഷിക്കും. പിന്നെ കളഞ്ഞ ഖണ്ഡങ്ങൾ നാലിൽ ഈരണ്ടു തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയാൽ രണ്ടു ഘാതക്ഷേത്രങ്ങൾ ഉണ്ടാകും. ഈ വണ്ണമാകുമ്പോൾ

വർഗ്ഗയോഗം കർണ്ണവർഗ്ഗമെന്നും വർഗ്ഗയോഗത്തിങ്കൽ ഇരട്ടിയിങ്കുന്ന യോഗവർഗ്ഗം അന്തരവർഗ്ഗംകൊണ്ട് കുറഞ്ഞിരിക്കുമെന്നും വരും. ആകയാൽ ഇവിടെ വർഗ്ഗയോഗത്തിങ്കുന്ന ഘാതത്തിലിരട്ടി കളഞ്ഞാലും യോഗവർഗ്ഗത്തിങ്കുന്ന ഘാതത്തിൽ നാന്മടങ്ങു പോയാലും വർഗ്ഗയോഗത്തിൽ ഇരട്ടിയിങ്കുന്ന യോഗവർഗ്ഗം പോയാലും മൂന്നിങ്കലും അന്തരവർഗ്ഗം ശേഷിക്കും എന്നും വരും.[20]

വ്യാഖ്യാനം 20: പരിലേഖം 10-ലെപ്പോലെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രത്തിൽ നാലു ഘാതക്ഷേത്രങ്ങളേയും വെക്കു. നാലിനും ഓരോ കർണ്ണരേഖയേയും വരയ്ക്കു. ഈ കർണ്ണങ്ങൾ വർഗ്ഗക്ഷേത്ര കോണുകളിൽ കൂടിയല്ലാത്തവയായിരിക്കണം (പരിലേഖം 11 നോക്കുക). ഇവിടെ യോഗവർഗ്ഗക്ഷേത്രം *സരിഗമ*. *സകയച*, *ചരടരി*, *ലടഗത*, *കമതവ* ഇങ്ങനെ നാലു ഘാതക്ഷേത്രങ്ങൾ, അപ്പോൾ *വലരയ* അന്തരവർഗ്ഗക്ഷേത്രമാകുന്നു. *കച*, *ചട*, *ടത*, *തക* എന്ന കർണ്ണങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കു. അപ്പോൾ ത്ര്യശ്രം *സകച* = ത്ര്യശ്രം *ചടരി* = ത്ര്യശ്രം *ടതഗ* = ത്ര്യശ്രം *തകമ* = ഘാതക്ഷേത്രാർദ്ധം.

∴ നാലു ത്ര്യശ്രങ്ങളുംകൂട്ടി ഇരട്ടിച്ച ഘാതക്ഷേത്രത്തിനോടു തുല്യം.

ഈ ത്ര്യശ്രങ്ങൾ നാലിനേയും കർണ്ണരേഖാമാർഗ്ഗേന മുറിച്ചു കളയു. അപ്പോൾ യോഗവർഗ്ഗക്ഷേത്രത്തിൽ *കതടച* എന്ന ക്ഷേത്രം ശേഷിക്കും. ഇതു കർണ്ണം ബഹുവായിട്ടിരിക്കുന്ന ഒരു സമചതുരശ്രം.



പരിലേഖം (11)

കതടച = കർണ്ണവർഗ്ഗക്ഷേത്രം
= യോഗവർഗ്ഗക്ഷേത്രം − 2 × ഘാതക്ഷേത്രം.
∴ കർണ്ണവർഗ്ഗം = യോഗവർഗ്ഗം − 2 × ഘാതം
= വർഗ്ഗയോഗം.

കർണ്ണവർഗ്ഗക്ഷേത്രം = *കതടച*
= *വലരയ* + ത്ര്യശ്രം *കയച* + ത്ര്യശ്രം *ചരട*
+ ത്ര്യശ്യ്രം *ടലത* + ത്യ്രശ്രം *കതവ*.
ഇവിടേയും ത്ര്യശ്രം *കയച* = ത്ര്യശ്രം *ചരട*
= ത്ര്യശ്രം *ടലത*
= ത്ര്യശ്രം *തകവ*
= ഘാതക്ഷേത്രാർദ്ധം.

നാലുക്ഷേത്രങ്ങളും കൂടി ഇരട്ടിച്ച ഘാതക്ഷേത്രത്തിനോടു തുല്യം.

∴ കർണ്ണവർഗ്ഗക്ഷേത്രം = അന്തരവർഗ്ഗക്ഷേത്രം + 2 × ഘാതക്ഷേത്രം.

$$\text{കർണ്ണവർഗ്ഗം} = \text{അന്തരവർഗ്ഗം} + 2 \times \text{ഘാതം}.$$
$$\text{കർണ്ണവർഗ്ഗം} = \text{യോഗവർഗ്ഗം} - 2 \times \text{ഘാതം}.$$
$$\therefore\ 2 \times \text{കർണ്ണവർഗ്ഗം} = 2 \times \text{വർഗ്ഗയോഗം} = \text{അന്തരവർഗ്ഗം} + \text{യോഗവർഗ്ഗം}.$$
$$\text{അതായതു യോഗവർഗ്ഗം} = 2 \times \text{വർഗ്ഗയോഗം} - \text{അന്തരവർഗ്ഗം}.$$
$$\text{അപ്പോൾ അനന്തരവർഗ്ഗം} = \begin{cases} \text{വർഗ്ഗയോഗം} - 2 \times \text{ഘാതം} \\ \text{യോഗവർഗ്ഗം} - 4 \times \text{ഘാതം} \\ 2 \times \text{വർഗ്ഗയോഗം} - \text{യോഗവർഗ്ഗം} \end{cases}$$

എന്നെല്ലാം വന്നുകൂടി.

അനന്തരം വർഗ്ഗിക്കേണ്ടുന്ന രാശിയെ രണ്ടേടത്തുവെച്ച് ഒന്നു ഗുണകാരമെന്നും ഒന്നു ഗുണ്യമെന്നും കല്പിച്ച് ഇതിൽ ഒന്നിങ്കന്ന് ഒരിഷ്ടസംഖ്യയെ കളവൂ. അതിനെത്തന്നെ മറ്റേതിൽ കൂട്ടൂ. പിന്നെ തങ്ങളിൽ ഗുണിപ്പൂ. ആ ക്ഷേത്രം ഇഷ്ടോനത്തോളം ഇടവും ഇഷ്ടാധികത്തോളം നീളവുമായിട്ടിരിക്കും. അവിടെ നീളം ഏറിയതിനെ മുറിച്ച് ഇടം പോരാത്തേടത്തു വെയ്പൂ. അപ്പോൾ ഒരു കോണിൽ ഇഷ്ടവർഗ്ഗത്തോളം പോരാതെയിരിക്കും. അതും കൂട്ടിയാൽ വർഗ്ഗക്ഷേത്രം മുമ്പിലത്തെതു തന്നെ.[21]

വ്യാഖ്യാനം 21:

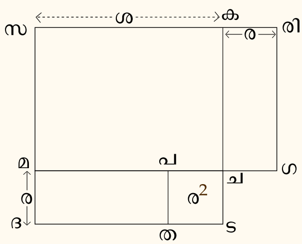
ഇഷ്ടോനേഷ്ടാഢ്യയോരാശ്യോഘാതേ വേഷ്ടകൃതിം ക്ഷിപേൽ || (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

വർഗ്ഗിക്കേണ്ടും രാശിയെ രണ്ടേടത്തുവെച്ച് ഒന്നിനെ ഗുണ്യമെന്നും മറ്റെതിനെ ഗുണകാരമെന്നും കല്പിക്കുക. പരിലേഖം 12-ൽ ഈ വർഗ്ഗക്ഷേത്രം <u>*സകടദ*</u> എന്ന്. ഇവിടെ *സക* ഗുണകാരം, *സദ* ഗുണ്യം. ഗുണകാരത്തിൽ ഒരിഷ്ടസംഖ്യയെ കൂട്ടു, ഗുണ്യത്തിൽനിന്ന് ആ ഇഷ്ടസംഖ്യയെത്തന്നെ കളയൂ. ഇങ്ങനെയിരിക്കുന്ന ഗുണഗുണ്യങ്ങളുടെ ഘാതക്ഷേത്രം <u>*സരിഗമ*</u>. ഗുണകാരത്തിലേറിയതുകൊണ്ടു ക്ഷേത്രത്തിലേറിയ ഭാഗം <u>*കചഗരി*</u>. ഈ ഭാഗത്തെ മുറിച്ചു *മപതദ* എന്ന സ്ഥാനത്തുവെക്കുക.

$$\text{അപ്പോൾ } \textit{സരിഗമ} = \textit{സമചക} + \textit{മദതപ}$$
$$= \textit{സദടക} - \textit{പതടച}.$$

ഇവിടെ *സദടക* ആദ്യത്തെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രവും *പതടച* ഇഷ്ടവർഗ്ഗക്ഷേത്രവുമാകുന്നു.
അപ്പോൾ *സരിഗമ* = ആദ്യവർഗ്ഗക്ഷേത്രം − ഇഷ്ടവർഗ്ഗക്ഷേത്രം.
വർഗ്ഗിക്കേണ്ടും സംഖ്യയെ *അ* എന്നും ഇഷ്ടസംഖ്യയെ *ഇ* എന്നും കല്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ,

$$(\text{അ} + \text{ഇ})(\text{അ} - \text{ഇ}) = \text{അ}^2 - \text{ഇ}^2 \text{ എന്നു വന്നു.}$$
$$\text{അ}^2 = (\text{അ} + \text{ഇ})(\text{അ} - \text{ഇ}) + \text{ഇ}^2.$$



പരിലേഖം (12)

അനന്തരം ഈ ഖണ്ഡവർഗ്ഗന്യായം ചൊല്ലിയതിനെക്കൊണ്ടു തന്നെ ഒരിഷ്ടരാശിയെ വർഗ്ഗിച്ചതിനെ രണ്ടേടത്തുവെച്ചു രണ്ടാമതൊരു ഇഷ്ടസംഖ്യയെ കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ പ്രഥമദ്വിതീയേഷ്ടങ്ങളുടെ ഘാതത്തെ ഇരട്ടിച്ച് അതിനെ ഒന്നിൽ കൂട്ടൂ, ഒന്നിൽ കളയൂ. പിന്നെ ദ്വിതീയേഷ്ടവർഗ്ഗം രണ്ടിലും കൂട്ടൂ. അപ്പോൾ പ്രഥമേഷ്ടത്തിൽ ദ്വിതീയേഷ്ടം കൂട്ടിയതിന്റേയും കളഞ്ഞതിന്റേയും വർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കുമവരണ്ടും. പിന്നെ അവറ്റെ മൂലിച്ചാൽ ഒരു യോഗവർഗ്ഗമൂലവും ഒരന്തരവർഗ്ഗമൂലവുമായിട്ടിരിക്കുമവ.[22]

വ്യാഖ്യാനം 22: *ക, ഖ* എന്നു രണ്ടിഷ്ടരാശികൾ.

$$\text{ക}^2 + 2\text{ക}.\text{ഖ} + \text{ഖ}^2 = (\text{ക} + \text{ഖ})^2 \rightarrow \text{ യോഗവർഗ്ഗം.}$$
$$\text{ക}^2 - 2\text{ക}.\text{ഖ} + \text{ഖ}^2 = (\text{ക} - \text{ഖ})^2 \rightarrow \text{ അന്തരവർഗ്ഗം.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{\text{ക}^2 + 2\text{ക}.\text{ഖ} + \text{ഖ}^2} = \text{ യോഗവർഗ്ഗമൂലം.} \\ \sqrt{\text{ക}^2 - 2\text{ക}.\text{ഖ} + \text{ഖ}^2} = \text{ അന്തരവർഗ്ഗമൂലം.} \end{array}\right\}$$

ഇവിടെ യാതൊന്നു മുമ്പിൽ ഖണ്ഡവർഗ്ഗക്ഷേത്രം ചൊല്ലപ്പെട്ടത് — ഈശകോണിൽ വലിയ ഖണ്ഡത്തിന്റെ വർഗ്ഗം, നിര്യതികോണിൽ ചെറിയതിന്റെ വർഗ്ഗം, മറ്റേ കോണുകളിൽ ഖണ്ഡദ്വയഘാതക്ഷേത്രങ്ങളും — ഈ നാലു ക്ഷേത്രവും കൂടിയത് അഖണ്ഡയോഗവർഗ്ഗക്ഷേത്രമാകുന്നത്. എന്നിങ്ങനെ ചൊല്ലിയേടത്ത് ആ നിര്യതികോണിലെ ഖണ്ഡക്ഷേത്രം ഒരിഷ്ടവർഗ്ഗക്ഷേത്രം; പിന്നെ ഈശകോണിലേതു മറ്റൊരു ഇഷ്ടവർഗ്ഗക്ഷേത്രം. ഇവിടെ ഈശകോണിലെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രത്തെക്കാട്ടിൽ മറ്റെ മൂന്നു ക്ഷേത്രങ്ങളും കൂടിയത് അഖണ്ഡമായിരിക്കുന്ന വലിയ രാശിയുടെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രത്തിൽ ഏറിയ ഭാഗമാകുന്നത്. ആകയാൽ ആ ക്ഷേത്രങ്ങൾ മൂന്നും കൂടിയത് വർഗ്ഗാന്തരമാകുന്നത്. ഈ വർഗ്ഗാന്തരക്ഷേത്രമാകുന്നതിനെ വരുത്തുംപ്രകാരം പിന്നെ. ഇവിടെ ഈശകോണിലെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രത്തിന്റെ തെക്കെപ്പുറത്തും പടിഞ്ഞാറെപ്പുറത്തും ഓരോ ഘാതക്ഷേത്രമുള്ളവ ഇവിടയ്ക്കു ചെറിയ രാശിയെ രാശ്യന്തരംകൊണ്ട് ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കുമവ. പിന്നെ നിര്യതികോണിലേത് അന്തരവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ ചെറിയ രാശിയെ ഇരട്ടിച്ചതിനെയും രാശികൾ രണ്ടിന്റേയും അന്തരത്തേയും അന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിക്കേണം. ആകയാൽ ചെറിയ രാശിയും വലിയ രാശിയും കൂടിയുള്ള യോഗത്തെ രാശ്യന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചിട്ടുള്ളതായിട്ടിരിക്കും. ചെറിയ രാശിയും അന്തരവുമുള്ള യോഗം വലിയ രാശിയായിട്ടിരിക്കും, എന്നിട്ട്. **യോഗാന്തരാഹതിർവ്വർഗ്ഗാന്തരമെന്നും** വരും. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ ഒന്നിന്റെ വർഗ്ഗം ഒന്നിൽനിന്നു ശൂന്യവർഗ്ഗമായ ശൂന്യത്തെ കളഞ്ഞാൽ ശേഷം ഒന്ന്. ഒന്നും രണ്ടും ഉള്ള യോഗം ആകുന്ന മൂന്നിനെ അന്തരമാകുന്ന ഒന്നിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ സംഖ്യാഭേദമില്ലായ്കയാൽ മൂന്നുതന്നെ യോഗാന്തരാഹതിയാകുന്നത്. ആകയാൽ ഒന്നും രണ്ടും തങ്ങളിലുള്ള വർഗ്ഗാന്തരം മൂന്ന്. ഈ മൂന്നിനെ ഒന്നിന്റെ വർഗ്ഗമാകുന്ന ഒന്നിൽ കൂട്ടിയാൽ നാലു രണ്ടിന്റെ വർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. ഈ വണ്ണം രണ്ടും മൂന്നും കൂടിയ അഞ്ചു രണ്ടിന്റേയും മൂന്നിന്റേയും വർഗ്ഗാന്തരമാകുന്നത്. പിന്നെ മൂന്നിന്റേയും നാലിന്റേയും വർഗ്ഗാന്തരം ഏഴ്. നാലുമഞ്ചുമുള്ള വർഗ്ഗാന്തരം ഒമ്പത്. ഇങ്ങനെ ഒന്നു തുടങ്ങി ഈരണ്ടീരണ്ടു സംഖ്യ നിരന്തരേണ ഏറി ഏറിയിരിക്കും ഒന്നു തുടങ്ങിയുള്ള നിരന്തരസംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗാന്തരം. ആകയാൽ ഒന്നു തുടങ്ങി ഈരണ്ടീരണ്ടേറി

ഇരിപ്പോരു ശ്രേഢീക്ഷേത്രമായിരിക്കുമതു്. ഏകാദിക്രമേണയുള്ള സംഖ്യകളുടെ വ്ഗ്ഗക്ഷേത്രമായിട്ടിരിക്കുമതു്. ഇങ്ങനെ ആകുമ്പോൾ ഏകാദിദ്വിചയശ്രേഢീക്ഷേത്രമായിട്ടും കല്പിക്കാം വഗ്ഗക്ഷേത്രത്തെ. അവിടെ ചതുരശ്രബാഹുവിങ്കലെ സംഖ്യയോളം വരി; നടേത്തെ വരിയിൽ ഒരു ഖണ്ഡം, പിന്നത്തേതിൽ മൂന്നു ഖണ്ഡം, പിന്നത്തെ വരിയിൽ അഞ്ചു്, ഇങ്ങനെ വരിയിൽ ഖണ്ഡസംഖ്യകൾ ഈ രണ്ടീരണ്ടേറീട്ടിരുന്നോ ചിലവ. ഇപ്രകാരം ശ്രേഢീക്ഷേത്രസ്വഭാവം. ഇതിനെ മേലിൽ വിസ്തരിക്കുന്നു ജ്യാപ്രകരണത്തിങ്കൽ. ഇങ്ങനെ ചൊല്ലീതായി വഗ്ഗപരികമ്മം.[23]

വ്യാഖ്യാനം 23: ഒരു യോഗവഗ്ഗക്ഷേത്രത്തിൽ രണ്ടു ഖണ്ഡവഗ്ഗക്ഷേത്രങ്ങളും രണ്ടു ഘാതക്ഷേത്രങ്ങളുമുണ്ടെന്നു് മുമ്പിൽ പറഞ്ഞുവല്ലോ. അതായതു *ക*, *ഖ* എന്നു രണ്ടു രാശികളെ കല്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ,

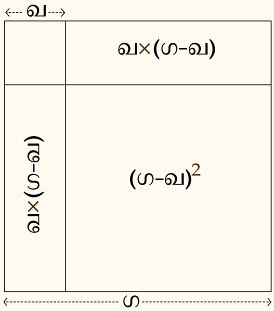
$$\begin{aligned} (ക + ഖ)^2 &= ക^2 + ഖ^2 + 2ക.ഖ. \\ \therefore\ (ക + ഖ)^2 - ക^2 &= ഖ^2 + 2ക.ഖ. \end{aligned}$$

ഇങ്ങനെ $ഖ^2 + 2ക.ഖ.$ എന്നതു ഒരു വഗ്ഗാന്തരമാകുന്നു. ഈ ബന്ധത്തെ പ്രകാരാന്തരേണ കല്പിക്കാം.

$ക + ഖ$ എന്ന യോഗത്തെ *ഗ* എന്നു കല്പിക്കു.

$$\begin{aligned} \text{അപ്പോൾ } ക + ഖ &= ഗ. \\ \therefore ക &= ഗ - ഖ. \end{aligned}$$

അപ്പോൾ പരിലേഖം 13-ൽ ഈശകോണിലെ വഗ്ഗക്ഷേത്രത്തെ *ഖ* എന്നതിന്റെ വഗ്ഗക്ഷേത്രമെന്നും വലിയ വഗ്ഗക്ഷേത്രത്തെ *ഗ* എന്നതിന്റെ വഗ്ഗക്ഷേത്രമെന്നും കല്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ, നിരൃതികോണിലെ വഗ്ഗക്ഷേത്രം ഒരു അന്തരവഗ്ഗക്ഷേത്രമാകുന്നു — $(ഗ - ഖ)^2$. ഓരോ ഘാതക്ഷേത്രത്തിന്റെ ഫലം $= ഖ \times (ഗ - ഖ)$



പരിലേഖം (13)

$$\begin{aligned} \text{അപ്പോൾ } (ക + ഖ)^2 - ഖ^2 &= ക^2 + 2ക.ഖ. \\ ഗ^2 - ഖ^2 &= (ഗ - ഖ)^2 + 2(ഗ - ഖ).ഖ. \\ &= (ഗ - ഖ)(ഗ - ഖ + 2ഖ) \\ &= \underline{(ഗ - ഖ)(ഗ + ഖ)}. \end{aligned}$$

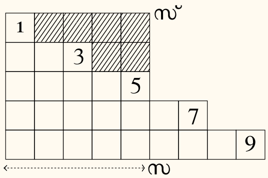
ഇങ്ങനെ യോഗാന്തരാഹതിവ്വഗ്ഗാന്തരം എന്നു പ്രകാരാന്തരേണ കാണിച്ചു.

$$\begin{aligned} \therefore\ 1^2 - 0^2 &= (1 + 0)(1 - 0) = 1. \\ 2^2 - 1^2 &= (2 + 1)(2 - 1) = 3. \end{aligned}$$

$$3^2 - 2^2 = (3+2)(3-2) = 5.$$
$$4^2 - 3^2 = (4+3)(4-3) = 7.$$
$$5^2 - 4^2 = (5+4)(5-4) = 9.$$

ഇവയെല്ലാം ഒരുമിച്ചു കൂട്ടുമ്പോൾ,

$5^2 - 0^2 = 5^2 = 1+3+5+7+9$ എന്നു വരും.



പരിലേഖം (14)

$1+3+5+7+9$ എന്നതിനെ പരിലേഖം 14-ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന മാതിരി ഒരു ശ്രേഢീക്ഷേത്രമായിട്ടു കല്പിക്കാം. അതുകൊണ്ടു് ഏകാദിക്രമേണയുള്ള സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളെയും ഇങ്ങനെയുള്ള ശ്രേഢീക്ഷേത്രങ്ങളായിട്ടു കല്പിക്കാം. ഈ ശ്രേഢീക്ഷേത്രത്തിൽ മൂലസംഖ്യയോളം വരി ഉണ്ടായിരിക്കും. ആദ്യത്തെ വരിയിലൊരു ഖണ്ഡം, രണ്ടാമത്തേതിൽ മൂന്നു്, മൂന്നാമത്തേതിൽ അഞ്ചു്, ഇങ്ങനെ മേല്പോട്ടു മേല്പോട്ടു ഇരണ്ടീരണ്ടു ഖണ്ഡങ്ങളേറിയിരിക്കും.

$1+3+5+7+9$ എന്നിങ്ങനെ ശ്രേഢീക്ഷേത്രമായിട്ടു പരിലേഖം 14-ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ ക്ഷേത്രത്തെ *സസ്* എന്ന രേഖാമാർഗ്ഗേണ പൊളിച്ചു പരിലേഖത്തിൽ കാണിച്ചപ്രകാരം കൂട്ടിച്ചേർക്കുകയാണെങ്കിൽ അഞ്ചിന്റെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രമായൊരു സമചതുരശ്രമുണ്ടാകും.

$\therefore 5^2 = 1+3+5+7+9.$

വർഗ്ഗമൂലം

അനന്തരം മൂലം. അതു വർഗ്ഗത്തിന്റെ വിപരീതക്രിയയായിരുന്നൊന്നു. അവിടേയുമാദ്യസ്ഥാനത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി അന്ത്യസ്ഥാനമൊടുക്കമായിട്ടുള്ള വർഗ്ഗക്രിയയിങ്കന്നു വിപരീതമായിരുന്നൊന്നു മൂലക്രിയ. അവിടെ നൂറ്റിരുപത്തിമൂന്നിനെ ആദ്യസ്ഥാനത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി വർഗ്ഗിക്കുംപ്രകാരം. ആദ്യസ്ഥാനത്തെ മൂന്നിന്റെ വർഗ്ഗം ഒമ്പതിനെ ആദ്യസ്ഥാനത്തിനു നേരെ വെയ്പൂ. അതു നടേത്തെ ക്രിയയാകുന്നതു്. പിന്നെ ഈ മൂന്നിനെ ഇരട്ടിച്ച ആറുകൊണ്ടു രണ്ടാംസ്ഥാനത്തെ രണ്ടിനേയും മൂന്നാംസ്ഥാനത്തെ ഒന്നിനേയും ഗുണിച്ചു് അതതിനുനേരെ നടേ വർഗ്ഗം വെച്ചതിന്റെ വരിയിൽവെയ്പൂ. ഇതു രണ്ടാംക്രിയ. പിന്നെ ദ്വിതീയസ്ഥാനത്തെ രണ്ടിനേയും തൃതീയസ്ഥാനത്തെ ഒന്നിനേയും ഓരോ സ്ഥാനം മേല്പോട്ടു നീക്കി രണ്ടിന്റെ വർഗ്ഗം നാലിനെ ശതസ്ഥാനത്തു വെയ്പൂ എന്നു മൂന്നാംക്രിയ. പിന്നെ രണ്ടിനെ ഇരട്ടിച്ച നാലിനെക്കൊണ്ടു മൂന്നാംസ്ഥാനത്തെ ഒന്നിനെ നീക്കി നാലാംസ്ഥാനത്തിനു നേരെ ഇരിക്കുന്നതിനെ ഗുണിച്ച നാലിനെ സഹസ്രസ്ഥാനത്തിന്നു നേരെ വെയ്പൂ. ഇതു നാലാംക്രിയ. പിന്നെ മൂന്നാംസ്ഥാനത്തിരുന്ന ഒന്നിനെ നീക്കി നാലാംസ്ഥാനത്താക്കിവെച്ചതു യാതൊന്നു്, പിന്നേയുമതിനെ നീക്കി അഞ്ചാംസ്ഥാനത്തിങ്കൽ ഇതിന്റെ വർഗ്ഗമൊന്നു വെയ്പൂ. ഇതു

അഞ്ചാംക്രിയ. ഇങ്ങിനെ മൂന്നു സ്ഥാനമുള്ളതിന്റെ ക്രിയ. ഇതിന്റെ മൂലം ഇച്ചൊല്ലിയ വർഗ്ഗക്രിയയിങ്കന്നു വിപരീതമായിട്ടിരിപ്പൊന്ന്. ഇവിടെ എല്ലായിലും ഒടുക്കത്തെ ക്രിയയാകുന്നതു് അഞ്ചാംസ്ഥാനത്തിങ്കൽ ഒന്നിന്റെ വർഗ്ഗം വെക്ക. അവിടുന്ന് ഒന്നിന്റെ വർഗ്ഗം വാങ്ങുക അവിടെ നടേത്തെ ക്രിയ ആകുന്നതു്. പിന്നെ കീഴെ സ്ഥാനത്തിങ്കന്ന് ഇതിനെ ഇരട്ടിച്ച ഹരിക്കുക. മുമ്പിൽ നാലാമതു ഗുണിച്ച വെക്കുക. പിന്നെ ഫലത്തിന്റെ വർഗ്ഗം അതിന്നു കീഴെ സ്ഥാനത്തിങ്കിന്നു വാങ്ങുക. പിന്നെയീ സ്ഥാനങ്ങൾ രണ്ടുംകൂടി കീഴെ സ്ഥാനത്തിങ്കന്നു ഹരിക്ക. പിന്നെ ഫലത്തിന്റെ വർഗ്ഗം അതിന്നു കീഴെ സ്ഥാനത്തിങ്കന്നു വാങ്ങുക. ഇങ്ങനെ വിപരീതക്രിയയുടെ പ്രകാരം ഒടുക്കത്തെ ക്രിയ നടേത്തെ ക്രിയ, നടേത്തെ ക്രിയ ഒടുക്കത്തെ ക്രിയ. കൂട്ടുന്നേടത്തു കളയുക, കളയുന്നേടത്തു കൂട്ടുക. സ്ഥാനം കരേറ്റുന്നേടത്തു കിഴിക്ക. ഇങ്ങനെ മൂലീകരണമാകുന്നതു വർഗ്ഗക്രിയയുടെ വിപരീതക്രിയ.[24]

വ്യാഖ്യാനം 24:

വർഗ്ഗീകരണം 123 × 123 ഫലം 123

മൂലീകരണം 15129

(1) 3-ന്റെ വർഗ്ഗം വെക്ക					9	(1) 100-ന്റെ വർഗ്ഗം കളയുന്നു.	1
							51
(2) 3 × 2 × 120 കൂട്ടുന്നു.			7	2	. . .	(2) ഫലം 1-നെ ഇരട്ടിച്ച 2,	
(3) 20 × 20 കൂട്ടുന്നു						5-ൽ രണ്ടാവൃത്തി പോവും.	
(സ്ഥാനം കരേറ്റുന്നു.)			4	. . .	. . .	ഇങ്ങനെ നാലു കളയുന്നു	4
							11
(4) 2 × 20 × 100 കൂട്ടുന്നു		4	. . .	. . .	. . .	(3) ഫലവർഗ്ഗം കളയുന്നു	
(5) 100 × 100 കൂട്ടുക						(ഫലത്തെ ഇറക്കുന്നു)	4
							729
(സ്ഥാനം കരേറ്റുന്നു)	1	. . .	. . .	. . .	. . .	(4) ഫലം 12-ന്റെ ഇരട്ടി 24,	
						72-ൽ മൂന്നാവൃത്തി പോവുന്നു.	
						അതിനെ കളയുന്നു.	72
							9
വർഗ്ഗം	1	5	1	2	9	(5) ഒടുക്കത്തെ ഫലവർഗ്ഗം 9	
						കളയുന്നു. (സ്ഥാനം ഇറക്കുന്നു)	9

ഇങ്ങനെ മൂലീകരണം വർഗ്ഗീകരണത്തിന്റെ വിപരീതക്രിയയാകുന്നു.

വർഗ്ഗയോഗമൂലവും വർഗ്ഗാന്തരമൂലവും

പിന്നെ ഈ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ രണ്ടു വർഗ്ഗങ്ങളെ കൂട്ടി മൂലിച്ച മൂലമുണ്ടാക്കണമെങ്കിൽ ചെറിയ രാശിയുടെ വർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു വലിയ രാശിയെ ഇരട്ടിച്ചതിനെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. പിന്നെ ഫലത്തിന്റെ വർഗ്ഗം വാങ്ങൂ. ഫലത്തെ ഇരട്ടിച്ച ഹാരകത്തിൽ കൂട്ടൂ. പിന്നേയുമിങ്ങനെ. ഇവിടെ ഹാര്യത്തിന്റെ എത്രാം സ്ഥാനത്തിങ്കന്നു ഹരിച്ചു, ഫലത്തെ ഇരട്ടിച്ചതിനെ ഹാരകത്തിന്റെ അത്രാംസ്ഥാനത്തു കൂട്ടേണ്ടൂ എന്നു നിയമം. പിന്നെ ഒടുക്കത്തെ ഹാരാർദ്ധം യോഗമൂലമാകുന്നതു്. അവിടെ ഹരിച്ചാൽ എത്ര ഫലമുണ്ടാകുമെന്ന് ഊഹിച്ചിട്ട് ആ ഫലത്തെ ഇരട്ടിയാതെ ഹാരകത്തിൽ കൂട്ടീട്ടാ

വു ഹരിപ്പൂതു് എങ്കിൽ പിന്നെ ഫലത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ വേറെ വാങ്ങേണ്ടാ. അതു കൂടി പോയിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഹരിച്ചാലും ഫലത്തെ ഹാരകത്തിൽ കൂട്ടൂ. അപ്പോൾ ഇരട്ടിച്ചു കൂട്ടിയതായിരിക്കും. പിന്നെ കീഴെ സ്ഥാനത്തിങ്കന്നു ഹരിക്കുമ്പോൾ എത്ര ഫലമുണ്ടാകുമെന്നതിനെക്കണ്ടു് അതിനെ ഹാരകത്തിന്റെ കീഴെ സ്ഥാനത്തു കൂട്ടീട്ടു ഹരിപ്പൂ. പിന്നേയും ഫലത്തെ കൂട്ടൂ. ഇങ്ങനെ ഹാര്യമൊടുങ്ങുവോളം ക്രിയ ചെവ്വൂ. ഹാരകാർദ്ധം യോഗവർഗ്ഗമൂലം. ഇവിടെ വർഗ്ഗയോഗത്തിങ്കന്നു വലിയ രാശീടെ വർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞു മൂലത്തെ ഇരട്ടിച്ചു വെച്ചിരിക്കുന്നതു ഹാരകമാകുന്നതു് എന്നു കല്പിക്കുന്നതു്. സ്ഥാനവിഭാഗത്തിന്നു തക്കവണ്ണമല്ല നടേത്തെ വർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞു, സംഖ്യാവിഭാഗത്തിന്നു തക്കവണ്ണമത്രെ എന്നു മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ മൂലീകരണക്രിയയിങ്കന്നു വിശേഷമാകുന്നതു്. ഇങ്ങനെ വർഗ്ഗയോഗമൂലീകരണം. പിന്നെ വർഗ്ഗാന്തരമൂലമറിയേണ്ടിവരികിൽ ഇപ്രകാരംതന്നെ ഹാര്യത്തേയും ഹാരകത്തേയുംവെച്ചു ഹരിക്കുന്നേടത്തു ഹാരകത്തിങ്കന്നു ഫലത്തെ കളഞ്ഞിട്ടു ഹരിക്കേണം. ഹരിച്ചനന്തരം ഫലത്തെ കളവൂതും ചെവ്വൂ. പിന്നെ സ്ഥാനം കിഴിച്ചിട്ടു ഹരിക്കുന്നേടത്തുണ്ടാകുന്ന ഫലത്തെ ഊഹിച്ചിട്ടു മുമ്പേ ഹാരകത്തിങ്കന്നു് അത്രാം സ്ഥാനത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞ ശേഷത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഹരിച്ചനന്തരം ഫലത്തെ കളവൂ. ഇങ്ങനെ ഹാര്യാന്തം ക്രിയാ. ഒടുക്കത്തെ ഹാരകത്തെ അർദ്ധിച്ചതു വർഗ്ഗാന്തരമൂലമായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ വർഗ്ഗാന്തരമൂലം.[25]

വ്യാഖ്യാനം 25: ഇവിടേയും മൂലീകരണപ്രകാരം മുമ്പിൽ പറഞ്ഞതുപോലെതന്നെ. മുമ്പിൽ സ്ഥാനവിഭാഗത്തിനു തക്കവണ്ണം ക്രിയചെയ്തു. ഇവിടെ സംഖ്യാവിഭാഗത്തിന്നു തക്കവണ്ണം ക്രിയ ചെയ്യേണം.

$12^2 + 9^2$ എന്നതിന്റെ മൂലം വരുത്തേണം.

ആദ്യത്തെ ക്രിയ 12-ന്റെ വർഗ്ഗം കളയുക. ശേഷം 81. ആദ്യഫലമായ 12-നെ ഇരട്ടിച്ചതു 24 ഒരു ഹാരകം. 81 ഹാര്യം. ഹാര്യത്തിൽ ഹാരകം മൂന്നു് ആവൃത്തി പോവും. ശേഷം 9. രണ്ടാംഫലം 3. ഈ മൂന്നിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ 9-ൽ നിന്നു കളഞ്ഞാൽ ശേഷം ശൂന്യം. രണ്ടാം ഫലത്തെ ഇരട്ടിച്ചത് ആറ്. ദ്വിഘ്നഫലയോഗം $= 24 + 6 = 30$. ഇതിന്റെ അർദ്ധം 15. അതു വർഗ്ഗയോഗമൂലം. ഇങ്ങനെ രണ്ടു ക്രിയകളും തുല്യങ്ങൾ.

രണ്ടാംഫലത്തെ ദ്വിഘ്നാദ്യഫലത്തിൽകൂട്ടി അതു ഹാരകമായിട്ടു ക്രിയ ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ, 27 എന്നു ഹാരകം കിട്ടും. ഇതുകൊണ്ടു ഹാര്യത്തെ ഹരിക്കുകയാണെങ്കിൽ 3 ഫലം കിട്ടും. ഇവിടെ ഫലവർഗ്ഗം കളയേണ്ടാ. ഈ മൂന്നിനെ 27-ൽ കൂട്ടി അർദ്ധിച്ചാൽ വർഗ്ഗയോഗമൂലം വരും.

$$24 \times 3 + 3 \times 3 = (24 + 3) \times 3 = 81.$$

അന്തരമൂലീകരണത്തിൽ രണ്ടാംഫലത്തെ ആദ്യഫലത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞു ഹാര്യത്തെ ഹരിക്കേണം. രണ്ടാംഫലത്തെ കളഞ്ഞ ആദ്യഫലത്തിങ്കന്നു് ഇവിടെ കിട്ടിയ ഫലത്തേയും കളയേണം.

The following algebraical formulae have been proved in this chapter.

	Page	Line
$ab = a(b + x) - ax$	8	28
$ab = a(b - y) + by$	8	6

$ab = (a-x)(b+y) + bx - (a-x)y$	9	2
$ab = a\left(b+\frac{b}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \times a\left(b+\frac{b}{n}\right)$	10	16
$ab = a\left(b-\frac{b}{n}\right) + \frac{1}{n-1} \times a\left(b-\frac{b}{n}\right)$	10	20
$ab = a\left(b+\frac{mb}{n}\right) - \frac{m}{m+n} \times a\left(b+\frac{mb}{n}\right)$	10	7
$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$	16	4
$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$	17	30
$2(a^2+b^2) - (a+b)^2 = (a-b)^2$	18	18
$a^2 = (a+x)(a-x) + x^2$	20	16
$a^2 - x^2 = (a+x)(a-x)$	21	37
$1+3+5+$ ......to r terms $= r^2$.	22	11

കവടിവെച്ച് വർഗ്ഗിക്കുംപ്രകാരം:-

347-ന്റെ വർഗ്ഗം [പേജ് 14, ഫുട്ട്നോട്ട്]

(1)		9	...	...	...	...	അന്ത്യവർഗ്ഗം
		2	4	...	...	...	2 × അന്ത്യം × ഉപാന്ത്യം
			4	2	...	...	2 × അന്ത്യം × ആദ്യം
(2)	1	1	8	2	...	...	യോഗം
			1	6	...	...	അന്ത്യത്തെക്കളഞ്ഞ് ഒരു സ്ഥാനം
							ഇറക്കിയ ഉപാന്ത്യവർഗ്ഗം
				5	6	...	അപ്രകാരം തന്നെയുള്ള ഉപാന്ത്യത്തെ
							ഇരട്ടിച്ചതുകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ആദ്യം
(3)	1	2	0	3	6	...	യോഗം
					4	9	ഉപാന്ത്യത്തെയും കളഞ്ഞു പിന്നെയും
							ഒരു സ്ഥാനം ഇറക്കിയ ആദ്യവർഗ്ഗം
	1	2	0	4	0	9	സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം
							ഉപാന്ത്യത്തെ കളഞ്ഞു പിന്നേയും
(3) ←	...	...	...	...	...	7	ഒരു സ്ഥാനം ഇറക്കിയതു
(2) ←	...	...	...	4	7	...	അന്ത്യത്തെ കളഞ്ഞു ഒരു സ്ഥാനം ഇറക്കിയതു
(1) ←	...	3	4	7	...	...	സംഖ്യ

$$(a+b+c+\dots)^2 = a^2+2a(b+c+\dots)+b^2+2b(c+\dots)+c^2+\dots$$

2

ദശപ്രശ്നോത്തരം

അനന്തരം രണ്ടു രാശികളുടെ യോഗം, അന്തരം, ഘാതം, വർഗ്ഗയോഗം, വർഗ്ഗാന്തരം എന്നീ അഞ്ചു വസ്തുക്കളിൽ ഈരണ്ടു വസ്തുക്കളെ അറിഞ്ഞാൽ അവ സാധനമായിട്ടു രണ്ടു രാശികളേയും വേറെ അറിയുംപ്രകാരം.[1]

വ്യാഖ്യാനം 1:

"രാശ്യോര്യോഗോഭിദാഘാതോ വർഗ്ഗയോഗസ്തദന്തരം |
ഏഷു ദ്വാഭ്യാം ദശവിധം രാശ്യോരാനയനം ഭവേൽ ||
യോഗോ ഭേദാദിസംയുക്തോ ഭേദോ ഘാതാദിനാ തഥാ |
സ്വോത്തരോത്തരസംയുക്താശ്ചൈവം ഘാതാദയഃപരേ" || (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

യോഗം, അന്തരം, ഘാതം, വർഗ്ഗയോഗം, വർഗ്ഗാന്തരം ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു സാധനങ്ങളെക്കൊണ്ടു രാശികളെ വേറെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെയാണിവിടെ വിവരിക്കുന്നത്. ഇങ്ങനെ പ്രശ്നങ്ങൾ പത്തുവിധമുണ്ട്.

(i) യോഗം, അന്തരം
(ii) യോഗം,ഘാതം
(iii) യോഗം, വർഗ്ഗയോഗം
(iv) യോഗം, വർഗ്ഗാന്തരം
(v) അന്തരം, ഘാതം
(vi) അന്തരം, വർഗ്ഗയോഗം
(vii) അന്തരം, വർഗ്ഗാന്തരം
(viii) ഘാതം, വർഗ്ഗയോഗം
(ix) ഘാതം, വർഗ്ഗാന്തരം
(x) വർഗ്ഗയോഗം, വർഗ്ഗാന്തരം

ഇവിടെ രണ്ടു രാശിയുടെ യോഗത്തിൽ അവറ്റിന്റെ അന്തരത്തെ കൂട്ടിയാൽ വലിയ രാശിയുടെ ഇരട്ടിയായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ആ യോഗത്തിങ്കന്നുതന്നെ ആയന്തരത്തെ കളഞ്ഞാൽ ചെറിയ രാശിയുടെ ഇരട്ടിയായിരിക്കും. പിന്നെ രണ്ടിനേയും അർദ്ധിച്ചാൽ രാശികൾ രണ്ടുമുളവാകും.[2]

വ്യാഖ്യാനം 2: രാശികളെ *ക*, *ഖ* എന്നു കല്പിക്കുക.

(i) $ക + ഖ$, $ക - ഖ$ എന്നു ജ്ഞാതങ്ങൾ.

"രാശിദ്വയം പൃഥക്കാര്യം യഥാ തത്തു തഥോച്യതേ |
യോഗേ ഭേദയുതേ ദ്വിഘ്നോ മഹാനല്പസ്തദൂനിതേ ||
അർദ്ധീകൃതൗതു തൗ സ്യാതാം രാശീ ദ്വൗ മഹദല്പകൗ". || (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

$$\text{യോഗാന്തരയോഗാർദ്ധം} = \frac{(ക + ഖ) + (ക - ഖ)}{2} = ക.$$
$$\text{യോഗാന്തരാന്തരാർദ്ധം} = \frac{(ക + ഖ) - (ക - ഖ)}{2} = ഖ.$$

അനന്തരം യോഗവും ഘാതവും അറിഞ്ഞാൽ രാശികളെ അറിയുംപ്രകാരം. അവിടെ മുമ്പിൽ പറഞ്ഞ ന്യായത്തിന്നു തക്കവണ്ണം യോഗത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു നാലിൽ ഗുണിച്ച ഘാതത്തെ കളഞ്ഞ ശേഷത്തെ മൂലിച്ചതു രാശ്യന്തരം. പിന്നെ മുമ്പിൽ പറഞ്ഞപോലെ വേർപ്പെട്ടുത്തിക്കൊള്ളൂ രാശികൾ രണ്ടിനേയും.[3]

വ്യാഖ്യാനം 3: (ii) $ക + ഖ$, $ക.ഖ$.

രാശ്യോശ്ചതുർഗ്ഗുണേ ഘാതേ ത്യക്തേ യോഗസ്യ വർഗ്ഗതഃ |
ശിഷ്യതേന്തരവർഗ്ഗസ്തന്മൂലയോഗാദിനാ തഥാ || (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

$(ക + ഖ)^2 - 4ക.ഖ = (ക - ഖ)^2$. പിന്നെ യോഗാന്തരങ്ങളെക്കൊണ്ടുള്ളതുപോലെ ക്രിയ.

പിന്നെ യോഗവും വർഗ്ഗയോഗവും. അവിടെ വർഗ്ഗയോഗത്തെ ഇരട്ടിച്ചതിങ്കന്നു യോഗവർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞു മൂലിച്ചത് അന്തരം.[4]

വ്യാഖ്യാനം 4: (iii) $ക + ഖ$, $ക^2 + ഖ^2$.

യോഗവർഗ്ഗാദ്വർഗ്ഗയോഗേ ത്യക്തേ ദ്വിഘ്നസ്തയോർവ്വിധഃ |
തദൂനിതാദ്വർഗ്ഗയോഗമൂലം ഭേദാസ്തതോപി തൗ (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

$$\left.\begin{aligned}(ക + ഖ)^2 - (ക^2 + ഖ^2) &= 2ക.ഖ.\\ (ക + ഖ)^2 - 4.ക.ഖ &= (ക - ഖ)^2.\end{aligned}\right\} \therefore 2ക^2 + 2ഖ^2 - (ക + ഖ)^2 = (ക - ഖ)^2$$

പിന്നെ യോഗാന്തരങ്ങളെക്കൊണ്ടുള്ളതുപോലെ ക്രിയ.

പിന്നെ യോഗത്തെക്കൊണ്ടു വർഗ്ഗാന്തരത്തെ ഹരിച്ചഫലം രാശ്യന്തരമായിട്ടുവരും, മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായംകൊണ്ട്.[5]

വ്യാഖ്യാനം 5: (iv) $ക + ഖ$, $ക^2 - ഖ^2$

വർഗ്ഗാന്തരാദ്യോഗഭക്തോ ഭേദസ്തേനാപിപൂർവ്വവൽ | (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

$$\frac{ക^2 - ഖ^2}{ക + ഖ} = ക - ഖ.$$

പിന്നെ (i)-ൽ കാണിച്ചപോലെ ക്രിയ.

അനന്തരം അന്തരവും ഘാതവും. അവിടെ ഘാതത്തെ നാലിൽ ഗുണിച്ചതിൽ അന്തരവർഗ്ഗത്തെക്കൂടി മൂലിച്ചതു രാശിയോഗമായിട്ടിരിക്കും.[6]

വ്യാഖ്യാനം 6: (v) $ക - ഖ$, $ക.ഖ$.

ഭേദകൃത്യാധികോ യോഗവർഗ്ഗോ ഘാതാച്ചതുർഗ്ഗുണാൽ |
ഭേദവർഗ്ഗയുതാത്തസ്മാന്മൂലം രാശ്യോർയ്യുതിർഭവേൽ || (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

$4.ക.ഖ + (ക - ഖ)^2 = (ക + ഖ)^2$

പിന്നെ (i)-ൽ കാണിച്ചപോലെ ക്രിയ.

വർഗ്ഗയോഗത്തെ ഇരട്ടിച്ചതിങ്കന്ന് അന്തരവർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞു മൂലിച്ചതു രാശിയോഗം.[7]

വ്യാഖ്യാനം 7: (vi) $ക - ഖ, ക^2 + ഖ^2$

ഭേദകൃത്യാധികോ വർഗ്ഗയോഗോഘാതദ്വയാദിഹ |
ഘാതസ്തതോ വർഗ്ഗയോഗാൽ ഭേദവർഗ്ഗോനിതാദ്ദളം || (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

$ക^2 + ഖ^2 - (ക - ഖ)^2 = 2ക.ഖ$
$\therefore 2ക^2 + 2ഖ^2 - (ക - ഖ)^2 = (ക + ഖ)^2$
പിന്നെ (i)-ലെപ്പോലെ ക്രിയ.

പിന്നെ അന്തരത്തെക്കൊണ്ടു വർഗ്ഗാന്തരത്തെ ഹരിച്ചതു യോഗം.[8]

വ്യാഖ്യാനം 8: (vii) $ക - ഖ, ക^2 - ഖ^2$.

വർഗ്ഗാന്തരാൽ ഭേദഭക്തോ യോഗോ രാശീ തു പൂർവ്വവൽ || (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

$$\frac{ക^2 - ഖ^2}{ക - ഖ} = ക + ഖ.$$

പിന്നെ (i)-ലെപ്പോലെ ക്രിയ.

അനന്തരം ഘാതവും വർഗ്ഗയോഗവും. അവിടെ ഘാതത്തെ ഇരട്ടിച്ചതിനെ വർഗ്ഗയോഗത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞു ശേഷത്തിന്റെ മൂലം അന്തരം. നാലിൽ ഗുണിച്ച ഘാതത്തിൽ അന്തരവർഗ്ഗം കൂട്ടിമൂലിച്ചതു യോഗം.[9]

വ്യാഖ്യാനം 9: (viii) $കഖ, ക^2 + ഖ^2$.

ദ്വിഘ്നഘാതയുതോ വർഗ്ഗയോഗോ യോഗകൃതിർഭവേൽ |
തദൂനിതോ വർഗ്ഗയോഗോ ഭേദവർഗ്ഗസ്തയോർമ്മതഃ ||
തന്മൂലാഭ്യാം പ്രസാദ്ധ്യേതാം രാശീ യോഗാദികർമ്മണാ. (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

$$\sqrt{ക^2 + ഖ^2 + 2ക.ഖ} = ക + ഖ.$$
$$\sqrt{ക^2 + ഖ^2 - 2ക.ഖ} = ക - ഖ.$$

പിന്നെ (i)-ലെപ്പോലെ ക്രിയ.

പിന്നെ ഘാതവും വർഗ്ഗാന്തരവും. അവിടെ രാശികൾ രണ്ടിന്റേയും വർഗ്ഗങ്ങളുണ്ടാകുന്നത്. അതിൻപ്രകാരം ഇവിടെ രാശികളെക്കൊണ്ടു ചെയ്യുന്ന ക്രിയകളെ വർഗ്ഗങ്ങളാകുന്ന രാശികളെകൊണ്ടു ചെയ്യാം. എന്നാൽ ഫലങ്ങളും വർഗ്ഗരൂപങ്ങളായിട്ടിരിക്കും എന്നേ വിശേഷമുള്ളൂ. അവിടെ ഘാതത്തെ വർഗ്ഗിച്ചാൽ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ ഘാതമായിട്ടിരിക്കും, **ഗുണനത്തിങ്കൽ ക്രമഭേദംകൊണ്ടു ഫലഭേദമില്ല**. ആകയാൽ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ ഘാതവും അന്തരവും അറിഞ്ഞത് എന്നു കല്പിച്ചിട്ടു രാശ്യന്തരവും ഘാതവും അറിഞ്ഞിട്ടു രാശിയോഗത്തെ ഉണ്ടാക്കുംവണ്ണം വർഗ്ഗയോഗത്തെ ഉണ്ടാക്കാം. അവിടെ ഘാതവർഗ്ഗത്തെ നാലിൽ ഗുണിച്ച വർഗ്ഗാന്തരവർഗ്ഗവും കൂടി മൂലിച്ചതു വർഗ്ഗയോഗമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഈ വർഗ്ഗയോഗത്തെ രണ്ടേടത്തു വെച്ച് ഒന്നിൽ വർഗ്ഗാന്തരത്തെ കൂട്ടൂ, മറ്റേതിങ്കന്നു കളവൂ. പിന്നേ രണ്ടിനേയും അർദ്ധിപ്പൂ. അവ രാശികൾ രണ്ടിന്റേയും വർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും.[10]

വ്യാഖ്യാനം 10: (ix), (x) :
(ix) $കഖ, ക^2 - ഖ^2$, (x) $ക^2 + ഖ^2, ക^2 - ഖ^2$.

വർഗ്ഗാന്തരസ്യ വർഗ്ഗേണ ഘാതവർഗ്ഗശ്ചതുർഗ്ഗണഃ |
യുക്തോയോസ്യ പദം ദ്വിഷ്ഠം വർഗ്ഗാന്തരയുതോനിതം |
ദളിതം മൂലിതം രാശിദ്വയമന്തേപ്യയം വിധിഃ |
ഇതീരിതം ദശവിധം രാശ്യോരാനയനം വിധിഃ | (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

(ix)
$$\sqrt{(ക^2 - ഖ^2)^2 + 4ക^2.ഖ^2} = ക^2 + ഖ^2.$$
$$\sqrt{\frac{(ക^2 + ഖ^2) + (ക^2 - ഖ^2)}{2}} = ക.$$
$$\sqrt{\frac{(ക^2 + ഖ^2) - (ക^2 - ഖ^2)}{2}} = ഖ.$$

(x)
$$\sqrt{\frac{(ക^2 + ഖ^2) + (ക^2 - ഖ^2)}{2}} = ക.$$
$$\sqrt{\frac{(ക^2 + ഖ^2) - (ക^2 - ഖ^2)}{2}} = ഖ.$$

പിന്നെ വർഗ്ഗയോഗവും വർഗ്ഗാന്തരവും അറിഞ്ഞതു പത്താമതു. അതും ചൊല്ലീതായി.[10] ഇങ്ങനെ ദശപ്രശ്നങ്ങൾ. ഇവറ്റിന്നു പലേടത്തും ഉപയോഗമുണ്ട്, എന്നിട്ടു ചൊല്ലീ.

ഘനമൂലങ്ങൾക്കു ഗ്രഹഗണിതത്തിങ്കലെ ഉപയോഗമില്ല. എന്നിട്ട് അവറ്റെ ഇവിടെ ചൊല്ലുന്നീല. ഇങ്ങനെ ഒരു വഴി പരികർമ്മങ്ങൾ.

3
ഭിന്നഗണിതം

അനന്തരം നാനാപ്രകാരങ്ങളായി അവയവങ്ങളായിട്ടിരിക്കുന്ന രാശികളുടെ സംകലിതാദികളെ ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ തികഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഒന്നിനു രൂപമെന്നു പേർ.[1]

വ്യാഖ്യാനം 1: $4\frac{3}{5}$ എന്ന സംഖ്യയിൽ 4, $\frac{3}{5}$ ഈ രണ്ടു സംഖ്യകളും വേർപെട്ടിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ നാലിനെ പൂർണ്ണരൂപങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ നാലു രൂപങ്ങൾ എന്നും പറയുന്നു. $\frac{3}{5}$ എന്നതിനെ ഭിന്നസംഖ്യ എന്നും പറയുന്നു. ഭിന്ന സംഖ്യകൾ അവയവിയായിരിക്കുന്ന പൂർണ്ണരൂപങ്ങളുടെ അവയവങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. $\frac{3}{5}$ എന്നു വെച്ചാൽ പൂർണ്ണരൂപമായിരിക്കുന്ന ഒന്നിനെ അഞ്ചായി ഭാഗിച്ചതിൽ മൂന്നാംശമെന്നും മൂന്നിനെ അഞ്ചായി പകുത്തിട്ടൊരു ഭാഗം അല്ലെങ്കിൽ ഒരു കൂറെന്നും പറയുന്നു. അപ്പോൾ $\frac{3}{5}$-നെ അഞ്ചിലിറങ്ങിയ മൂന്നെന്നും മൂന്നിനെ അഞ്ചേടത്തു പകുത്തിട്ടൊരു കൂറെന്നും പറയും. $\frac{3}{5}$ എന്നതിൽ 3-നു അംശമെന്നും 5-നു ഛേദമെന്നും പേർ.

ഇങ്ങനെ പൂർണ്ണരൂപമായിരിക്കുന്ന ഒന്നിൻ പൂർണ്ണരൂപമായിട്ടേ ഇരിക്കുന്ന ഒന്നിനെ കൂട്ടിയാൽ രണ്ടാകും. പിന്നേയുമതിൽ അവ്വണ്ണമിരിപ്പൊന്നു കൂട്ടിയാൽ മൂന്നാകും. പിന്നെ ഈ മൂന്നിങ്കന്നു പൂർണ്ണരൂപമായിരിക്കുന്ന ഒന്നിനെ കളഞ്ഞാൽ രണ്ടുണ്ടാകും. ഇതിങ്കന്നു രൂപം പോയാൽ ഒന്നാകും. ഇങ്ങനെ സദൃശങ്ങളാകുന്നവറ്റിന്റെ യോഗം കൊണ്ടു മീത്തെ മിത്തെ സംഖ്യ ആയിട്ടു വരും. അവ്വണ്ണമേ സദൃശങ്ങളുടെ വിയോഗം കൊണ്ടു കീഴെ കീഴെ സംഖ്യയും വരും. സദൃശങ്ങളല്ലാത്തവറ്റിന്റെ യോഗമാകുന്നതു് ഒന്നിൽ അര താൻ കാൽ താൻ കൂട്ടുക. എന്നാൽ അതു രണ്ടെന്നു വരാ. രണ്ടിൽ അര താൻ കാൽ താൻ കുറഞ്ഞതു ഒന്നാകയുമില്ല. ആകയാൽ സദൃശങ്ങൾക്കേ യോഗ വിയോഗങ്ങൾക്കു് ആഞ്ജസ്യമുള്ളൂ.[2]

വ്യാഖ്യാനം 2: സദൃശങ്ങൾ, സവർണ്ണങ്ങൾ, വർണ്ണമൊത്തവ ഇവയെല്ലാം പര്യായപദങ്ങൾ. സദൃശങ്ങൾക്കു മാത്രമേ യോഗവിയോഗങ്ങൾക്കു് അർഹതയുള്ളൂ. 1, 2, 3, ... ഇവയെ ഒരൊന്ന്, രണ്ടൊന്നുകൾ, മൂന്നൊന്നുകൾ . . . . . . എന്നിങ്ങനെ കല്പിക്കാം. അങ്ങനെ അവ സദൃശ്യങ്ങളാകകൊണ്ടു അവ തങ്ങളിൽ യോഗവിയോഗങ്ങൾ ചെയ്യാം. എന്നാൽ നാലൊന്ന് ($\frac{1}{4}$), അഞ്ചൊന്ന് ($\frac{1}{5}$) ഇവ സദൃശങ്ങളല്ല. ഇവ തങ്ങളിൽ യോഗവിയോഗങ്ങൾ ചെയ്യുവാൻ പാടില്ല. യോഗവിയോഗങ്ങൾ ചെയ്യേണമെന്നുണ്ടെങ്കിൽ അവയെ സമച്ഛേദങ്ങളാക്കി വർണ്ണമൊപ്പിക്കേണം.

യോഗവിയോഗങ്ങൾകൊണ്ട് സംഖ്യ ഏറുകയും കുറയുകയും ചെയ്യേണം. അതേ അജ്ഞസാലുള്ള യോഗവിയോഗങ്ങളായിട്ടിരിപ്പൂ. ഒന്നേകാൽ കുറയ രണ്ട് എന്നു തുടങ്ങിയുള്ളേടത്ത് എല്ലാം യോഗവിയോഗങ്ങൾ ഉണ്ടായീലാ, വേർപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത്രെ. ആകയാൽ ഭിന്നപ്രമാണങ്ങളാകുന്ന അവയവങ്ങൾ തങ്ങളിത്താൻ അവയവവും അവയവിയും തങ്ങളിത്താൻ യോഗവിയോഗങ്ങൾ ചെയ്യേണ്ടുകിൽ, വണ്ണമൊപ്പിച്ചിട്ട് ഒരു തരമേ ആക്കിക്കൊണ്ടിട്ടുവേണം. വണ്ണമൊപ്പിക്കും പ്രകാരം, പിന്നെ. ഒരു രൂപത്തിന്റെ അഞ്ചൊന്നും നാലൊന്നും തമ്മിൽ കൂട്ടേണമെങ്കിൽ അവിടെ ഒന്നിനെക്കൊണ്ടു നാലു പെളിച്ചതിൽ ഒരു കൂറു നാലൊന്നാകുന്നത്. അതിനെ അഞ്ചു പെളിച്ചാൽ ഇരുപത് പെളിച്ചതിൽ അഞ്ചുകൂറായിട്ടിരിക്കും. രൂപത്തിൽ അഞ്ചൊന്നു പിന്നെ രൂപത്തെ അഞ്ച് അംശിച്ചതിൽ ഒരു കൂറ്. അതിനെ പിന്നെ നാലുപൊളിച്ചാൽ ഇരുപത് അംശിച്ചതിൽ നാലു കൂറായിട്ടിരിക്കും. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ അഞ്ചൊന്നായിരിക്കുന്ന നാലും നാലൊന്നായിരിക്കുന്ന അഞ്ചും തങ്ങളിൽ വണ്ണമൊക്കയാൽ യോഗവിയോഗങ്ങൾ ചെയ്യാം. രണ്ടു വകയും ഇരുപതാലൊന്നാകയാൽ വണ്ണമൊക്കുന്നു. ഇവിടെ നാലൊന്നിലൊന്നാകുന്നവ നാലുകൂട്ടിയവ പൂർണ്ണരൂപമാകുന്നത് എന്നറിവാനടയാളമായിട്ടു നാലിനെ ഛേദമായിട്ടു കീഴെ വെപ്പൂ, ഒന്നിനെ അംശമായിട്ടു മേലേയും വെപ്പൂ. പിന്നെ അഞ്ചൊന്നിങ്കൽ അഞ്ചിനെ കീഴെ ചേദമായിട്ടും ഒന്നിനെ മീത്തെ അംശമായിട്ടും വെപ്പൂ. പിന്നെ നാലൊന്നിന്റെ ഛേദമായ നാലിനെക്കൊണ്ട് അഞ്ചൊന്നിന്റെ ഛേദമായ അഞ്ചിനേയും അംശമായ ഒന്നിനേയും ഗുണിപ്പൂ. പിന്നെ അഞ്ചാകുന്ന ഛേദത്തെക്കൊണ്ടു നാലൊന്നിന്റെ ഛേദമാകുന്ന നാലിനേയും അംശമാകുന്ന ഒന്നിനേയും ഗുണിപ്പൂ. ഈവണ്ണമാകുമ്പോൾ രണ്ടിങ്കലും ഛേദസംഖ്യ ഇരുപതായിട്ടിരിക്കും. അംശങ്ങൾ നാലൊന്നിങ്കൽ അഞ്ചും അഞ്ചൊന്നിങ്കൽ നാലും ആയിട്ടിരിക്കും. ഇവിടേയും നാലൊന്നുമഞ്ചൊന്നുമായിട്ടിരിക്കുന്നതിന്നു വിശേഷമില്ല. ഒട്ടേറെ ചെറിയ നുറുക്കുകൾ ഇപ്പോൾ എന്നേ വിശേഷമുള്ളൂ. ഇങ്ങനെ ഒന്നിന്റെ ഛേദത്തെക്കൊണ്ടു മറ്റേതിന്റെ ഛേദത്തെയും അംശത്തേയും ഗുണിപ്പൂ. പിന്നെ മറ്റേതിന്റെ ഛേദംകൊണ്ട് ഈ ഛേദത്തെയും അംശത്തേയും ഗുണിപ്പൂ. അപ്പോൾ സമഛേദങ്ങളായി വണ്ണമൊത്തിരിക്കും.[3]

വ്യാഖ്യാനം 3: സമച്ഛേദമാക്കുംപ്രകാരവും അതിന്റെ യുക്തിയും:

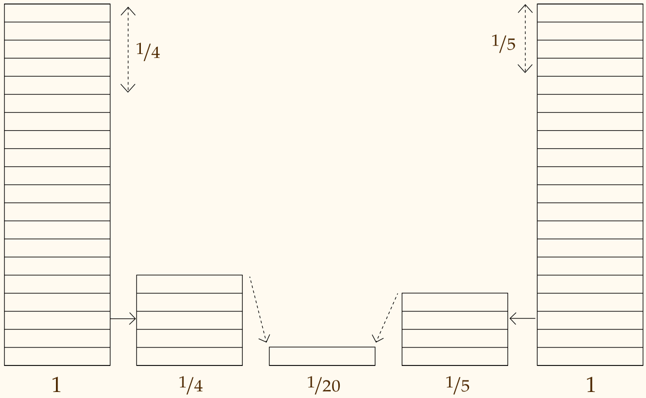
> അന്യോന്യഹാരകൈഹ്ന്യാദ്ധാരകാനംശകാനപി|
> ഏവം ദ്വയോർബ്ബഹൂനാം വാ സ്യാൽ സമച്ഛേദതാമിധഃ|| (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

ഓരോ സംഖ്യയുടെ അംശത്തേയും ഛേദത്തേയും തദിതരങ്ങളായ സംഖ്യകളുടെ ഹാരകങ്ങളെല്ലാംകൊണ്ടു ഗുണിപ്പൂ. എന്നാലെല്ലാസംഖ്യകളും സമച്ഛേദങ്ങളായിട്ടുവരും.

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$$

$$\frac{1\times4\times5\times7}{3\times4\times5\times7}, \frac{1\times3\times5\times7}{4\times3\times5\times7}, \frac{1\times3\times4\times7}{5\times3\times4\times7}, \frac{1\times3\times4\times5}{7\times3\times4\times5}.$$

$$\frac{140}{420}, \frac{105}{420}, \frac{84}{420}, \frac{60}{420}.$$



പരിലേഖം (15)

അഞ്ചൊന്നും നാലൊന്നും വെച്ചിട്ടാണിതിന്റെ യുക്തി കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. പരിലേഖം 15-ൽ ഒരു ക്ഷേത്രത്തെ നാലു തുല്യഖണ്ഡങ്ങളായി ഭാഗിച്ചിരിക്കുന്നു. വേറെ ഒരു തുല്യ ക്ഷേത്രത്തെതന്നെ അഞ്ചു തുല്യ ഖണ്ഡങ്ങളായിട്ടും ഭാഗിച്ചിരിക്കുന്നു. ആദ്യത്തേതിൽ ഒരു ഖണ്ഡത്തെ അഞ്ചു തുല്യഖണ്ഡങ്ങളായി പിന്നേയും പകുത്തിരിക്കുന്നു. രണ്ടാമത്തേതിലും ഒരു ഖണ്ഡത്തെ നാലു തുല്യഖണ്ഡങ്ങളായി പിന്നേയും പകുത്തിരിക്കുന്നു. ഇങ്ങനെ രണ്ടു ക്ഷേത്രത്തിലും ഇരുപതുവീതം ചെറിയ തുല്യഖണ്ഡങ്ങളുണ്ട് . അവയെല്ലാം അന്യോന്യം തുല്യങ്ങളുമാകുന്നു. ഓരോ ചെറിയ ഖണ്ഡം ക്ഷേത്രത്തിൽ ഇരുപതാലൊന്നായിരിക്കും. അപ്പോൾ ഇരുപതു ഖണ്ഡങ്ങളുള്ള ക്ഷേത്രത്തിൽ അഞ്ചുഖണ്ഡങ്ങൾ കൂടിയതു ക്ഷേത്രത്തിന്റെ നാലൊന്നാകുന്നു. അപ്പോൾ നാലൊന്നിനെ ഇരുപതു ഛേദവും അഞ്ച് അംശവുമായിരിക്കുന്ന ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയെന്നു കല്പിക്കാമെന്നുവന്നു. അങ്ങനെതന്നെ അഞ്ചൊന്നിനെ ഇരുപതു ഛേദവും നാലംശവുമായിരിക്കുന്നൊരു ഭിന്നസംഖ്യ എന്നു കല്പിക്കാം. ഇങ്ങനെ കല്പിക്കുമ്പോൾ അവ സമച്ഛേദങ്ങളായി. പിന്നെ നാലൊന്ന് അഞ്ച് ഇരുപതാലൊന്നുകളെന്നും അഞ്ചൊന്നു നാലു ഇരുപതാലൊന്നുകളെന്നും വന്നു. അപ്പോൾ അവ സദൃശ്യങ്ങളായതുകൊണ്ടു യോഗവിയോഗങ്ങൾക്കു യോഗ്യമായി. സദൃശ്യങ്ങളാക്കുവാൻ സമച്ഛേദം ചെയ്യേണമെന്നും വന്നു.

ആകയാൽ യോഗാന്തരങ്ങൾക്കു യോഗ്യങ്ങളായിട്ടുവരും. ആകയാൽ ഇവറ്റിന്റെ യോഗത്തിങ്കൽ ഒമ്പതായിട്ടിരിക്കും, അന്തരത്തിങ്കൽ ഒന്നുമായിട്ടിരിക്കും.[4]

വ്യാഖ്യാനം 4:

“കയ്യാൽ സമച്ഛിദാമേവ രാശീനാം യോഗമന്തരം” || (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{1\times 5}{4\times 5}+\frac{1\times 4}{5\times 4}$$
$$=\frac{5}{20}+\frac{4}{20}=\frac{9}{20}.$$
$$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{5}{20}-\frac{4}{20}=\frac{1}{20}.$$

ഇവ പൂർണ്ണരൂപമായിരിക്കുന്ന ഒന്നിന്റെ ഇരുപതാലൊന്നുതാനും. ഇങ്ങനെ പലവക ഉണ്ടായിരിക്കിലും സമച്ഛേദങ്ങളാക്കാം. അവിടെ ഛേദംകൊണ്ടു, തന്നേയും തന്റെ

അംശത്തേയും ഒഴിച്ച് എല്ലാറ്റേയും ഗുണിപ്പൂ. എന്നാൽ സമച്ഛേദങ്ങളായി സംകലിതവ്യവകലിതയോഗങ്ങളായിട്ടു വരും. പിന്നെ ഇവറ്റോടു ഒരു പൂർണ്ണരൂപത്തെ കൂട്ടേണമെങ്കിൽ ഈ സമച്ഛേദത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചുകൊള്ളൂ. എന്നാൽ അവയവങ്ങളോടു വർണ്ണമൊക്കമാറുവരും പൂർണ്ണരൂപമായിട്ടിരിക്കുന്നതു്.[5]

വ്യാഖ്യാനം 5: പൂർണ്ണരൂപങ്ങൾക്കു ഛേദം രൂപമെന്നു കല്പിക്കാം.

$$\begin{aligned} 2 + \frac{3}{7} &= \frac{2}{1} + \frac{3}{7} \\ &= \frac{2 \times 7}{1 \times 7} + \frac{3 \times 1}{7 \times 1} \\ &= \frac{14}{7} + \frac{3}{7} \\ &= \underline{\underline{\frac{17}{7}}} \end{aligned}$$

ഇങ്ങനെ പൂർണ്ണങ്ങളേയും ഭിന്നസംഖ്യകളേയും സമച്ഛേദങ്ങളാക്കി യോഗവിയോഗം ചെയ്യാം.

ഇങ്ങനെ സവർണ്ണനം.

അംശഗുണനം

അനന്തരം അവയവത്തിന്റെ ഗുണനം. അവിടെ ഒരു രൂപത്തിന്റെ ചതുരംശം ഗുണ്യം, ചില പൂർണ്ണരൂപങ്ങൾ ഗുണകാരങ്ങൾ എന്നും വരുമ്പോൾ ഗുണകാരത്തിന്റെ വ്യക്തികൾ എത്ര അത്രസ്ഥാനത്തുവെപ്പൂ ഗുണ്യമാകുന്ന ചതുരാംശത്തെ. പിന്നെ തങ്ങളിൽ കൂട്ടുതും ചെയ്‌വൂ. അപ്പോൾ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ഖണ്ഡഗുണനന്യായത്തിനു തക്കവണ്ണം ആ ഗുണത്തെ ഗുണിച്ചതായിട്ടു വരും. അവിടെ ഗുണകാരത്തിങ്കൽ പത്തുരൂപവ്യക്തികൾ ഉണ്ട് എന്നിരിപ്പൂ. അപ്പോൾ രൂപചതുരംശത്തെ പത്തേടത്ത് ഉണ്ടാക്കൂ. അവറ്റിന്റെ യോഗം ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കും. അതു പിന്നെ സമഛേദങ്ങളായിരിപ്പോ ചിലവ പത്ത് അംശങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. ഇതു ഹേതുവായിട്ടു തന്നെ രൂപചതുരംശത്തെക്കൊണ്ടു പത്തിനെ ഗുണിച്ചാലും വിശേഷമില്ല, പത്തു ചതുരംഗമായിട്ടേ ഇരിക്കമത്രേ. ഗുണ്യാവൃത്തമായിരിക്കുന്ന ഗുണകാരവും ഗുണകാരവൃത്തമായിരിക്കുന്ന ഗുണ്യവും ഒന്നുതന്നെ എന്നു മുമ്പിൽ ചൊല്ലീ, എന്നിട്ട്. ഇങ്ങനെ ആകുമ്പോൾ ഛേദമുണ്ടാകയാൽ ഛേദംകൊണ്ടു ഹരിച്ചേ ഗുണിച്ചുണ്ടാകുന്ന പൂർണ്ണരൂപങ്ങളായിട്ടു വരൂ എന്നേ വിശേഷമുള്ളൂ. ഇങ്ങനെ ഗുണ്യഗുണകാരങ്ങളിൽവെച്ച് ഒന്നിങ്കൽ ഛേദമുണ്ടായിരിക്കുമ്പോൾ. പിന്നെ രണ്ടിങ്കലുംകൂടി ഛേദമുണ്ടായിരിക്കൽ ഛേദങ്ങൾ രണ്ടിനെക്കൊണ്ടും ഹരിക്കേണം. ആകയാൽ ഛേദങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിനെക്കൊണ്ടു ഹരിക്കേണം. ആകയാൽ അവയവഗുണനത്തിങ്കൽ ഗുണ്യഗുണകാരങ്ങളുടെ അംശങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിപ്പൂ, ഛേദങ്ങൾ തങ്ങളിലും ഗുണിപ്പൂ. അപ്പോൾ ഗുണ്യഗുണകാരങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചുതായിട്ടു വരും. ആകയാൽ അഞ്ചൊന്നും നാലൊന്നും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചാൽ ഇരുപതാലൊന്നായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ അംശഗുണനം.[6]

വ്യാഖ്യാനം 6:

"ഗുണഗുണ്യാംശകവധം തയോശ്ഛേദവധേന തു |
ഹൃത്വാപ്യംഭിന്നഗുണനേ ഫലം സ്യാൽ . . . . . . " || (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

ഗുണഗുണ്യങ്ങളിൽവെച്ച് ഒന്നിന്നുമാത്രം ഛേദമുണ്ടായിരിക്കുമ്പോൾ:–

$$\text{ഗുണ്യം} = \text{രൂപത്തിന്റെ ചതുരംശം} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{ഗുണകാരം} = 10.$$

ഖണ്ഡഗുണനന്യായേന

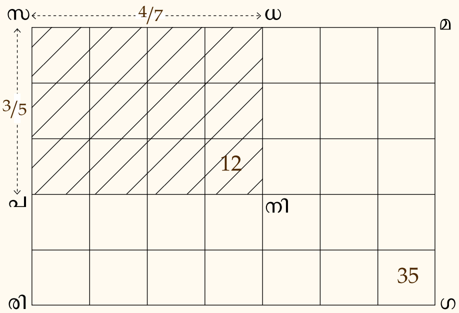
$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\times 10 &= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\\ &= \frac{1+1+1+1+1+1+1+1+1+1}{4}\\ &= \frac{10}{4}\end{aligned}$$

അഥവാ, പത്തിനെക്കൊണ്ടൊരു ചതുരംശത്തെ ഗുണിച്ചാലും പത്തു ചതുരംശം തന്നെ $= \frac{10}{4}$.

ഗുണഗുണ്യങ്ങൾ രണ്ടിലും ഛേദമുണ്ടായിരിക്കുമ്പോൾ:– $\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}$.

നാലൊന്നിനെ രൂപം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ നാലൊന്നുതന്നെ. അതിനെ അഞ്ചിൽ അംശിക്കേണ്ടുകയാൽ ഫലം ഇരുപതാലൊന്ന് $\left(=\frac{1}{20}\right)$.

അപ്പോൾ ഭിന്നഗുണത്തിങ്കൽ അംശഘാതത്തെ ഛേദഘാതത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിക്കേണം.



പരിലേഖം (16)

ഈ ന്യായത്തെ ക്ഷേത്രരൂപേണ കാണിക്കുംപ്രകാരത്തെ ഗ്രന്ഥാന്തരത്തിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. പരിലേഖം 16-ൽ ഏഴിലിറങ്ങിയ നാലിന്റേയും അഞ്ചിലിറങ്ങിയ മൂന്നിന്റേയും ഘാതത്തെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെയാണ് കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഘാതക്ഷേത്രത്തിൽ ഛേദങ്ങളിൽ ഒന്നായ ഏഴോളം വരികൾ, വരി ഒന്നിൽ ഇതര ഛേദമായ അഞ്ചോളം ഖണ്ഡങ്ങളുണ്ട്. ഈ ക്ഷേത്രത്തെ *സരിഗമ* എന്നു കല്പിക്ക. അതിന്നകത്ത് അംശമാകുന്ന നാലുവരിയും വരി ഒന്നിൽ മറ്റേ അംശമാകുന്ന 3 ഖണ്ഡങ്ങളുമുള്ള ഒരു ഘാതക്ഷേത്രത്തെ (*സപനിധ*) പരിലേഖത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നപോലെ കല്പിക്ക. വലിയ ക്ഷേത്രത്തിൽ 35 ഖണ്ഡങ്ങളും

ചെറിയ ക്ഷേത്രത്തിൽ 12 ഖണ്ഡങ്ങളുമുണ്ട്.

$$\text{സധ} \times \text{സപ} = \frac{4}{7}\text{സമ} \times \frac{3}{5}\text{സരി} = \frac{4}{7} \times \frac{3}{5} \times \text{സമ} \times \text{സരി}.$$

$$\text{അപ്പോൾ } \frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{\text{സധ} \times \text{സപ}}{\text{സമ} \times \text{സരി}} = \frac{\text{12 ഖണ്ഡങ്ങൾ}}{\text{35 ഖണ്ഡങ്ങൾ}} = \underline{\frac{12}{35}}$$

അംശഭാഗഹരണം

അനന്തരം അംശഭാഗഹരണം. ഇവിടെ അംശരൂപമായിരിക്കുന്ന ഹാരകത്തെ അവ്വണ്ണമിരിക്കുന്ന ഹാര്യത്തിങ്കന്ന് എത്ര ആവൃത്തികളയാം അത്ര പൂൎണ്ണരൂപങ്ങളായിട്ടിരിക്കുന്ന ഫലങ്ങളുളവാകും എന്നു മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായംതന്നെ അത്രേ ഇവിടേയ്ക്കുമാകുന്നത്. അവിടെ ഒരു രൂപത്തിന്റെ ചതുരംശത്തെ പൂൎണ്ണരൂപങ്ങൾ പത്തിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ രൂപ ചതുരംശങ്ങൾ പത്ത് ഉളവാകും. നാലിൽ ഇറങ്ങിയ പത്ത് എന്നും പറയുമിതിനെ. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്ന ഇതിനെ ഗുണകാരംകൊണ്ട് ഹരിക്കിൽ ഗുണ്യം ഫലമായിട്ടു വരും. ഗുണ്യംകൊണ്ടു ഹരിക്കിൽ ഗുണകാരം ഫലമായിട്ടു വരും. അവിടെ ഗുണ്യമാകുന്ന നാലിൽ ഇറങ്ങിയ ഒന്നിനെ പത്താവൃത്തി കളയാം. അപ്പോൾ പൂൎണ്ണരൂപങ്ങൾ പത്ത് ഉളവാം. അതു ഫലമായിട്ടു വരും, ചൊല്ലിയ ന്യായംകൊണ്ട്. പിന്നെ പൂൎണ്ണരൂപങ്ങൾ പത്തിനെ ഇതിങ്കന്നു കളയേണ്ടുമ്പോൾ ഈ ഹാര്യമാകുന്ന പത്തു ചതുരംശമല്ലൊ. ആകയാൽ ഇത്തരം നാലുതു കൂടിയേ പൂൎണ്ണരൂപങ്ങളായിരിക്കുന്ന പത്തിനെ ഒരാവൃത്തി കളവാൻ പോരൂ. അപ്പോളേ ഫലം ഒരു രൂപം തികവൂ. ആകയാൽ ഈ ഹാര്യത്തിങ്കൽ ഫലം രൂപചതുരംശമേ ഉള്ളൂ എന്നു വന്നു. ഈവണ്ണമാകുമ്പോളതിന്റെ ക്രിയ പിന്നെ ഹാരകത്തെ ചെറുതാക്കിലുമാം, ഹാര്യത്തെ പെരുക്കിലുമാം.[7]

വ്യാഖ്യാനം 7: ഇവിടെ ഗുണ്യം $= \frac{1}{4}$, ഗുണകാരം $= 10$, ഫലം $= \frac{10}{4}$

$\frac{1}{4} \times 10 = \frac{10}{4}$ എന്നു മുമ്പിൽ പറഞ്ഞുവല്ലോ.

ഇവിടെ $\frac{10}{4}$ എന്നതിനെ ഹാര്യമെന്നും, രൂപചതുരംശം, പത്ത്, ഇവയിലൊന്നിനെ ഹാരകമെന്നും, മറ്റേതിനെ ഫലമെന്നും കല്പിക്കുക.

അപ്പോൾ $\frac{10}{4} \div \frac{1}{4} = 10.$

$\frac{10}{4} \div 10 = \frac{1}{4}.$

ഹാര്യത്തിങ്കന്നു ഹാരകം എത്ര ആവൃത്തി കളയാമോ അതു ഫലമെന്നാണല്ലോ സാമാന്യഹരണന്യായം. അതുകൊണ്ട് $\frac{1}{4}$-ന്റെ പത്തിരട്ടി $\frac{10}{4}$ ആകയാൽ, $\frac{10}{4}$-നെ $\frac{1}{4}$ കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം 10. അതുപോലെ $\frac{10}{4}$-നെ 10 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം $\frac{1}{4}$.

പിന്നെ ഹാര്യം $= \frac{10}{4}.$

ഹാരകം $= 10.$

40 ചതുരംശങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ പത്തിനെ ഒരാവൃത്തികളയാം. പക്ഷേ ഇവിടെ ഹാര്യം $\frac{10}{4}$ മാത്രമേ ഉള്ളൂ. അപ്പോൾ $\frac{1}{4}$ ആവൃത്തി കളഞ്ഞാൽ മതി. അപ്പോൾ: ഫലം $\frac{1}{4}$.

(i) $\frac{10}{4} \div 10 = \frac{10 \text{ ചതുരംശം}}{40 \text{ ചതുരംശം}} = \frac{1}{4}$.

(ii) $\frac{\text{പത്തുചതുരംശം}}{10} = \frac{\text{പത്ത്}}{\text{നാല്പത്}} = \frac{1}{4}$.

(i)-ൽ ഹാരകമായിരിക്കുന്ന രൂപങ്ങളെ ചതുരംശങ്ങളാക്കി വണ്ണത്തിൽ കുറച്ചു. (ii)-ൽ ഹാര്യത്തിങ്കലെ ചതുരംശങ്ങളെ രൂപങ്ങളാക്കി വണ്ണത്തിൽ കൂട്ടി. "ഇതിന്റെ ക്രിയ പിന്നെ ഹാരകത്തെ ചെറുതാക്കിലുമാം, ഹാര്യത്തെ പെരുക്കിലുമാം" എന്ന വാക്യത്തിന്റെ അർത്ഥമിപ്രകാരമാണ്.

അവിടെ നാലിലിറങ്ങിയ പത്തിനെ നാലിലിറങ്ങിയ ഒന്നിനെക്കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ. ഹാരമാകുന്ന ഒന്നിന്റ ഹാരകം നാല്. ആ നാലിനെക്കൊണ്ട് ഹാര്യമാകുന്ന പത്തിനെ ഗുണിപ്പൂ. പിന്നെ ഒന്നിനെക്കൊണ്ടുതന്നെ ഹരിക്കേ വേണ്ടൂ. ഹാര്യത്തിന്റെ നടേയുള്ള ഛേദത്തെക്കൊണ്ടും. ആകയാൽ ഒന്നും നാലുമുള്ള ഘാതം നാല്. അതിനെക്കൊണ്ട് നാല്പതിനെ ഹരിച്ച ഫലം പത്തുണ്ടാകും. ഇങ്ങനെ ഹാരകത്തിന്റെ ഛേദംകൊണ്ട് ഹാര്യത്തിന്റെ അംശത്തെ ഗുണിപ്പൂ. അത് അംശമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഹാരകത്തിന്റെ അംശംകൊണ്ട് ഹാര്യത്തിന്റെ ഛേദത്തെ ഗുണിപ്പൂ. അതു ഛേദമായിട്ടിരിക്കും. അപ്പോൾ ഹരിച്ചതായിട്ടിരിക്കും.[8]

വ്യാഖ്യാനം 8: പിന്നെ നാലിലിറങ്ങിയ പത്തിനെ നാലിലിറങ്ങിയ ഒന്നുകൊണ്ടു ഹരിക്കേണം. അപ്പോൾ ഹാര്യത്തിന്റെ അംശത്തെ ഹാരകത്തിന്റെ അംശംകൊണ്ടു ഹരിക്കേണം. ഹാരകത്തിന്റെ അംശത്തെ ഹാരകത്തിന്റെ ഛേദംകൊണ്ട് ഹരിക്കേണം. അപ്പോൾ ഹാര്യത്തിന്റെ അംശത്തെ ഹാരകാംശത്തിന്റെ ഹാരകമായ ഹാരകഛേദംകൊണ്ട് ഗുണിക്കേണം, ഹാരകത്തിന്റെ അംശംകൊണ്ട് ഹരിക്കേണം. ഫലത്തെ ഹാര്യത്തിന്റെ ഛേദംകൊണ്ടു ഹരിക്കേണം. അപ്പോൾ ഹാര്യത്തിന്റെ അംശത്തെ ഹാരകത്തിന്റെ ഛേദംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ഹാരകത്തിന്റെ അംശത്തിന്റേയും ഹാര്യത്തിന്റെ ഛേദത്തിന്റേയും ഘാതംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഹരണത്തിങ്കലെ ഫലം വരും. അപ്പോൾ ഹാരകത്തിന്റെ അംശഛേദങ്ങളെ മാറ്റികല്പിച്ച ചെയ്യുന്ന ഗുണനം തന്നെ ഹരണം.

"... ... ...ഹരണേ പുനഃ
ഹാരരാശ്യംശഹാരഘ്നൗ ഹാരച്ഛേദാംശകൗ ക്രമാൽ |
കൃത്വാ തേന പുനശ്ചേദേനാപ്യമംശാഹതേഃ ഫലം||" (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

പൂർണ്ണരൂപങ്ങളായിട്ടു ഫലങ്ങൾ എത്ര ഉള്ളവയെന്ന് അറിവേണ്ടുകിൽ ഛേദത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിക്കേണം എന്നേ ഉള്ളൂ. ഇങ്ങനെ നാലൊന്നും അഞ്ചൊന്നും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ച് ഇരുപതാലൊന്നായിട്ടിരിക്കുന്നതിനെ ഹാര്യമെന്നു കല്പിച്ച് ഇതിനെ അഞ്ചിലൊന്നിനെ കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഇരുപതിലിറങ്ങിയ അഞ്ച്. പിന്നെ ഈ ഛേദാംശങ്ങൾ രണ്ടിനേയും അഞ്ചിൽ ഹരിച്ചാൽ [9]

വ്യാഖ്യാനം 9:

$$\frac{1}{20} \div \frac{1}{5} = \frac{5}{20} = \frac{5 \div 5}{20 \div 5} = \frac{1}{4}.$$

ഇങ്ങനെ ഛേദാംശങ്ങളെ അഞ്ചിൽ ഹരിക്കുന്നതിന്ന് അപവർത്തനം ചെയ്യുക എന്നു പറയുന്നു. ഈ അപവർത്തനക്രിയയെ മുകളിൽ വിസ്തരിക്കുന്നുണ്ട്.

നാലിലിറങ്ങിയ ഒന്നു ഫലം വരും. പിന്നെ ഈ ഹാര്യത്തെ തന്നെ നാലൊന്നിനെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ അഞ്ചിലിറങ്ങിയ ഒന്നായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ ഗുണനവും ഹരണവും ഒരു പ്രകാരംതന്നെ മിക്കവാറും. ഗുണഗുണ്യങ്ങളുടെ ഛേദങ്ങൾ തങ്ങളിലും അംശങ്ങൾ തങ്ങളിലും ഗുണിപ്പൂ. ഇതു ഗുണനം. പിന്നെ ഹാരകത്തിന്റെ ഛേദത്തെ അംശമെന്നും അംശത്തെ ഛേദമെന്നും കല്പിച്ചിട്ടുതന്നെ ഗുണനക്രിയ ചെയ്യുമ്പോൾ ഹരിച്ചതായിട്ടു വരും. ഇത്രേ വിശേഷമുള്ളൂ. ഇങ്ങനെ ഗുണനഹരണങ്ങൾ.

പിന്നെ സച്ഛേദമായിട്ടിരിക്കുന്ന രാശിയെ വർഗ്ഗിക്കേണ്ടുമ്പോൾ ഛേദത്തേയും അംശത്തേയും വർഗ്ഗിക്കേണം. അവ വർഗ്ഗിച്ച രാശിയുടെ ഛേദാംശങ്ങളാകുന്നവ. [10]

വ്യാഖ്യാനം 10: വർഗ്ഗീകരണാദി:-

"വർഗ്ഗേ ഹാരാംശയോർവ്വർഗ്ഗഃ കാര്യസ്തദ്വൽ ഘനേ ഘനഃ"|| (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

പിന്നെ ഛേദം കൂടിയിരിക്കുന്ന രാശിയെ മൂലിക്കേണ്ടുമ്പോൾ ഛേദത്തേയും അംശത്തേയും മൂലിക്കേണം. അവ പിന്നെ മൂലിച്ച രാശിക്കു ഛേദാംശങ്ങളാകുന്നവ. [11]

വ്യാഖ്യാനം 11: മൂലീകരണം:–

"മൂലേ ചാപി ദ്വയോർമ്മൂലമേവം ഭിന്നവിധിർഭവേൽ"|| (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

ഇങ്ങനെ സച്ഛേദത്തിന്റെ മൂലീകരണങ്ങൾ. [12]

വ്യാഖ്യാനം 12: വർഗ്ഗിക്കുന്നതിന്നും മൂലിക്കുന്നതിന്നും മുമ്പിൽ സംഖ്യകളെ സമഛേദങ്ങളാക്കണം. $3\frac{3}{4}$-നെ വർഗ്ഗിക്കേണ്ട ദിക്കിൽ അതിനെ $\frac{15}{4}$ എന്ന സമഛേദമാക്കണം.

$$3\frac{3}{4} \times 3\frac{3}{4} = \frac{15 \times 15}{4 \times 4} = \frac{225}{16} = 14\frac{1}{16}.$$

അതുപോലെ മൂലീകരണത്തിലും:–

$$\sqrt{14\frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{16}} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}.$$

4

ത്രൈരാശികം

അനന്തരം ത്രൈരാശികം[1]

വ്യാഖ്യാനം 1: ത്രൈരാശികം (Rule of Three) എന്ന പേർ വരുവാനുള്ള ഹേതു:- "ത്രയോരാശയഃ സമാഹൃതാഃ കാരണം യസ്യ, സരാശിഃ കാര്യേ കാരണോപചാരാൽ ത്രിരാശിർഭവതി, സ പ്രയോജനം യസ്യ തൽ ഗണിതം ത്രൈരാശികം" കാരണരൂപങ്ങളായിരിക്കുന്ന മൂന്നുരാശികളെക്കൊണ്ട് കാര്യരൂപമായിരിക്കുന്ന രാശിയെ വരുത്തുവാനുള്ള ഗണിതം ത്രൈരാശികം. ഇപ്രകാരംതന്നെ അഞ്ച്, ഏഴ്, ഒമ്പതു തുടങ്ങിയ രാശികളെക്കൊണ്ടുള്ള ക്രിയകൾക്ക് പഞ്ചരാശികം, സപ്തരാശികം, നവരാശികം എന്നിങ്ങനെയുള്ള പേർ പറയുന്നു. (Rule of Compound Proportion).

അവിടെ ഒരു അവയവിക്കു രണ്ട് അവയവം ഉണ്ടായിട്ടിരിപ്പൂ. അതിൽ ഒരു അവയവം ഇത്ര പരിണാമത്തോടുകൂടിയിരുന്നൊന്ന്; അപ്പോൾ അവയവാന്തരം ഇത്ര പരിണാമത്തോടുകൂടിയിരുന്നൊന്ന് നിയതമായിട്ടിരിപ്പൂ. ഇന്നിയമത്തെ അറിഞ്ഞിട്ടും ഇരിപ്പൂ. അപ്പോൾ മറ്റൊരിടത്ത് ഇങ്ങനത്തെ ഒരു അവയവിയിങ്കലെ ഏകദേശത്തിന്റെ പരിമാണത്തെ അനുമാനിക്കാം. ഇതു ത്രൈരാശികമാകുന്നത്. ഇതിനുദാഹരണം.[2]

വ്യാഖ്യാനം 2: ഇവിടെ അവയവി നെല്ല്. അതിന്റെ അവയവങ്ങൾ അരി, ഉമി, തവിട്.

അഞ്ഞാഴി നെല്ലിന് ഇരുനാഴി അരി എന്നിങ്ങനെ അറിഞ്ഞിട്ടിരിക്കുമ്പോൾ ഇതിന്റെ ശേഷം നെല്ലിന്നൊക്കയ്ക്കും ഇങ്ങനത്തൊരു അരിയൊടുള്ള മാനസംബന്ധനിയമമുണ്ട് എന്നിരിക്കേണം. ആകയാൽ പന്തിരുനാഴി നെല്ലിന്ന് എത്ര അരിയുണ്ടെന്ന് അറിയേണ്ടുമ്പോൾ ഇത്ത്രൈരാശികമാകുന്ന ക്രിയ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഇവിടെ പന്തിരുനാഴി നെല്ലിന്റെ അരി അറിയേണ്ടുന്നേടത്തേയ്ക്ക് അറിഞ്ഞ നെല്ല് അഞ്ചിനു **പ്രമാണ**മെന്നുപേർ. അരി രണ്ടിന്നു **പ്രമാണഫല**മെന്നും പന്ത്രണ്ടു നെല്ലിന്ന് **ഇച്ഛ**യെന്നും പന്ത്രണ്ടിന്റെ അരി അറിവാനിരിക്കുന്നതിന്ന് **ഇച്ഛാഫല**മെന്നും പേർ.[3]

വ്യാഖ്യാനം 3:

ഇവിടെ പ്രമാണം അഞ്ചുനാഴി നെല്ല്.
പ്രമാണഫലം രണ്ടുനാഴി അരി.

ഇച്ഛാ പന്ത്രണ്ടുനാഴി നെല്ല്.
ഇച്ഛാഫലം ജ്ഞേയമായിട്ടുള്ള അരി.

അപ്പോൾ പ്രമാണവും, ഇച്ഛയും സമാനജാതികളായിട്ടിരിക്കണം, പ്രമാണഫലവും ഇച്ഛാഫലവും സമാനജാതികളായിരിക്കണമെന്നും ത്രൈരാശികത്തിലെ നിയമമാകുന്നു.

അവിടെ അഞ്ചിന്ന് ഇത്ര എന്നു അറിഞ്ഞതിനെക്കൊണ്ടു തന്നെ ഒന്നിന്ന് ഇത്ര എന്നു നടേ അറിഞ്ഞുകൊണ്ടാൽ ഇച്ഛാവ്യക്തികൾ ഓരോന്നിന്ന് അത്രയത്ര ഉണ്ടാകും ഫലം എന്നറിവാനെളുപ്പമുണ്ട്. ഇതിന്റെപ്രകാരം. അവിടെ പ്രമാണവ്യക്തികൾ അഞ്ചിന്നു ഫലവ്യക്തികൾ രണ്ട്, എന്നേടത്ത് ആ രണ്ടിനെ അഞ്ചേടത്തു പകുത്താൽ ഒരു കുറുപ്രമാണവ്യക്തി ഒന്നിന്റെ ഫലമായിട്ടിരിക്കുമത്. ഇതിനെ ഇച്ഛാരാശിയെകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഇച്ഛാവ്യക്തികൾ എല്ലാറ്റിന്റേയും ഫലയോഗമുണ്ടാകും. അവിടെ രണ്ടിനെ അഞ്ചേടത്തു പകുക്കുകയാകുന്നത് അഞ്ചിൽ ഹരിക്ക. അഞ്ചിൽ ഒരു കുറു ഹരിച്ച ഫലമാകുന്നത്. അവിടെ ഹരിച്ചാൽ മുടിയായുമ്പോൾ രണ്ടിന്നു അഞ്ചു ഛേദമായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ ഒന്നിന്ന് അഞ്ചിൽ ഇറങ്ങിയ രണ്ടും ഫലമാകുന്നത് എന്നും വരും. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ പ്രമാണം പ്രമാണഫലത്തിന്നു ഛേദമായിട്ടിരിക്കും. ഇതു ഗുണ്യമാകുന്നത്. ഇച്ഛാരാശി ഗുണകാരമാകുന്നത്. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ പ്രമാണഫലത്തെ ഇച്ഛയെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അപ്ഫലത്തിനു ഛേദമായിട്ടിരിക്കുന്ന പ്രമാണരാശിയെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലമിച്ഛാഫലമായിട്ടു വരും. ഇവിടെ അഞ്ചേടത്തു പകുത്തിട്ട് ഒരു കുറെന്നും അഞ്ചിൽ ഹരിച്ച ഫലമെന്നും ഒന്നു തന്നെ. 4

വ്യാഖ്യാനം 4:

"ഇച്ഛാം ഫലേന സംഹത്യ പ്രമാണേന വിഭാജയേൽ|
ഇച്ഛാഫലം ഭവേൽ ലബ്ധമേവം ത്രൈരാശികം മതം||

ഈ ക്രിയയുടെ യുക്തിയാണിവിടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

$$\text{ഇച്ഛാഫലം} = \text{ഇച്ഛാ} \times \frac{\text{പ്രമാണഫലം}}{\text{പ്രമാണം}}$$

$$\text{അപ്പോൾ ഇച്ഛാ} \times \text{പ്രമാണഫലം} = \text{പ്രമാണം} \times \text{ഇച്ഛാഫലം}.$$

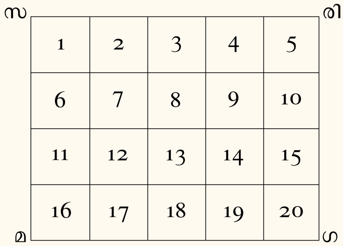
ത്രൈരാശികത്തിൽ ഇച്ഛാപ്രമാണഫലഘാതം പ്രമാണേച്ഛാഫലഘാതത്തോടു തുല്യമായിട്ടിരിക്കും.
ഈ ബന്ധത്തെ തന്നെ വേറെ ഒരു പ്രകാരത്തിൽ കല്പിക്കാം.

$$\frac{\text{പ്രമാണഫലം}}{\text{പ്രമാണം}} = \frac{\text{ഇച്ഛാഫലം}}{\text{ഇച്ഛാ}}.$$

പ്രമാണഫലം പ്രമാണത്തിന്റെ എത്ര ആവൃത്തിയാണോ അത്രാവൃത്തി ഇച്ഛാഫലം ഇച്ഛയുടേതായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ ഇച്ഛാ പ്രമാണത്തേക്കാളേറുമ്പോൾ, ഇച്ഛാഫലം പ്രമാണഫലത്തേക്കാളേറും; കുറയുമ്പോൾ കുറയും. വ്യസ്തത്രൈരാശികത്തിലുള്ള വ്യത്യാസത്തെ മേലിൽ പറയുന്നുണ്ട്.

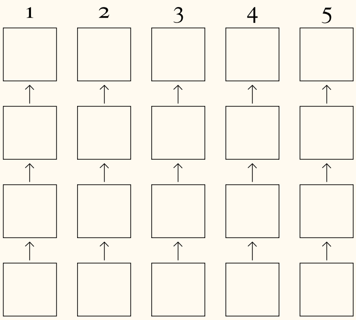
യാതൊരുപ്രകാരം ഘാതക്ഷേത്രത്തെ ഒരു വക വരിയിലെ ഖണ്ഡസംഖ്യയെക്കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ മറ്റെ പരിഷയിലെ ഒരു വരിയിലെ ഖണ്ഡസംഖ്യയുണ്ടാകും ഫലമായിട്ട്. അത്രേടത്തു പകുത്താലും ഒരു വരി ഒരു കുറായിട്ടിരിക്കും എന്നവണ്ണം. 5

വ്യാഖ്യാനം 5: ഇരുപതു ഖണ്ഡങ്ങളടങ്ങിയ ഒരു ഘാതക്ഷേത്രത്തെ ഒരു വരിയിൽ അയ്യഞ്ചു



പരിലേഖം (17)

ഖണ്ഡം വീതമായിട്ടു കല്പിക്ക. അപ്പോൾ മറ്റേവരിഒന്നിൽ നാലുഖണ്ഡങ്ങളുണ്ടാകും (പരിലേഖം 17). അതായത് ഇരുപതിനെ അഞ്ചിൽ ഹരിച്ചാൽ ഫലം നാല് എന്ന്.



പരിലേഖം (18)

പിന്നെ അഞ്ചു ഖണ്ഡങ്ങളെ വെവ്വേറെ വെക്ക (പരിലേഖം 18). ഓരോന്നിൽ ഓരോ ഖണ്ഡം വീതം ചേൎക്ക. പിന്നേയും ഓരോ ഖണ്ഡങ്ങൾ ചേൎക്ക. മൂന്നാമതും ഓരോ ഖണ്ഡങ്ങൾ ചേൎക്ക. അപ്പോൾ ഇരുപതു ഖണ്ഡങ്ങളും തികഞ്ഞു. ഇങ്ങനെ നാലു ഖണ്ഡങ്ങളടങ്ങിയ അഞ്ചുകൂട്ടങ്ങൾ ഉണ്ടാകുന്നു. ഇരുപതിനെ അഞ്ചായിട്ടു പകുത്തിട്ട് ഒരു കൂറ് എന്നീ നാലിനെ പറയുന്നു. അപ്പോൾ ഇരുപതിനെ അഞ്ചിൽ ഹരിച്ച ഫലവും ഇരുപതിനെ അഞ്ചേടത്തു പകുത്തിട്ട് ഒരു കൂറും നാലുതന്നെ. അഞ്ചേടത്തു പകുക്കുക എന്നതിന് അഞ്ചിൽ ഹരിക്കുക എന്നുതന്നെ അൎത്ഥം. അപ്പോൾ പ്രകൃതോദാഹരണത്തിൽ രണ്ടിനെ അഞ്ചിൽ ഹരിച്ച ഫലവും രണ്ടിനെ അഞ്ചേടത്തു പകുത്തിട്ട് ഒരു കൂറും അഞ്ചിൽ ഇറങ്ങിയ രണ്ടുതന്നെ — $\frac{2}{5}$.

ഇങ്ങനത്തൊന്നു ത്രൈരാശികമാകുന്ന ഗണിതം.

ഇവിടെ നെല്ല് അവയവി ആകുന്നത്. ഉമിയും അരിയും തവിടും അവയവങ്ങളാകുന്നത്. അവിടെ മൂന്ന് ഉമിക്കു രണ്ടു അരി എന്നാകിലുമാം വ്യാപ്തിഗ്രഹണം. അഞ്ചു നെല്ലിന്നു മൂന്ന് ഉമി എന്നാകിലുമാം. ഇങ്ങനെ ഉപാധിവശാൽ പ്രമാണഫലങ്ങൾ അതതായിട്ടു കല്പിക്കാം. ഒരിടത്തു ജിജ്ഞാസവശാൽ രണ്ട് അരിക്ക് അഞ്ചു നെല്ല്, ഇത്ര അരിക്ക് എത്ര നെല്ല് എന്നും വരും പ്രമാണേച്ഛാഫലഭേദങ്ങൾ. ഇങ്ങനെ ഒരു വക ത്രൈരാശികം.

പിന്നെ വ്യസ്തത്രൈരാശികവിഷയം.[6]

വ്യാഖ്യാനം 6:

“ഇച്ഛാവൃദ്ധൗഫലഹ്രാസ ഇച്ഛാഹ്രാസേധികം ഫലം|
യത്ര തത്ര ഹി കർത്തവ്യം വ്യസ്തത്രൈരാശികം ബുധൈഃ ||

ഇവിടെ ഇച്ഛാപ്രമാണത്തേക്കാളേറുമ്പോൾ ഇച്ഛാഫലം പ്രമാണഫലത്തേക്കാൾ കുറയും, കുറയുമ്പോളേറും. ഇങ്ങനെയുള്ള വിഷയത്തിങ്കലെ ക്രിയയ്ക്ക് വ്യസ്തത്രൈരാശികമെന്നു പറയുന്നു (Inverse Proportion).

അവിടെ എട്ടുമാറ്റിൽ ഈ വിലയ്ക്ക് ഇത്ര പണത്തൂക്കം പൊന്നു വേണം, അപ്പോൾ പത്തു മാറ്റിൽ എത്ര പണത്തൂക്കം എന്ന ത്രൈരാശികത്തിങ്കൽ പ്രമാണത്തേക്കാൾ എത്രയേറും ഇച്ഛാരാശി പ്രമാണഫലത്തേക്കാൾ അത്രയേറും ഇച്ഛാഫലം എന്നല്ലാ ഇരിപ്പൂ, അത്ര കുറയുമെന്ന്. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്നേടത്തു വ്യസ്തത്രൈരാശികം വേണ്ടുവതു്. അതാകുന്നതു പ്രമാണവും പ്രമാണഫലവും തങ്ങളിൽ ഘാതത്തിങ്കന്ന് ഇച്ഛാരാശിയെകൊണ്ടു ഹരിച്ചതു് ഇവിടെ ഇച്ഛാഫലമാകുന്നതു് എന്നു വിശേഷം.[7]

വ്യാഖ്യാനം 7: വ്യസ്തത്രൈരാശിക ക്രിയയാണിവിടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത്.

“വ്യസ്തത്രൈരാശികഫലമിച്ഛാഭക്തഃ പ്രമാണഫലഘാതഃ”||

പ്രമാണാന്തരം:

“പ്രമാണേന ഫലം ഹത്വാ വിഭജേദിച്ഛയാ ബുധഃ|
വ്യസ്തത്രൈരശികം ഹ്യേതൽ ജ്ഞേയം സർവ്വത്ര ധീമതാ”||

ഒരു കൂലിക്കാരനു കുറെ തെങ്ങുംതയ്യുകൾ വെയ്ക്കുവാൻ ഒരു ദിവസം വേണമെങ്കിൽ രണ്ടു കൂലിക്കാർക്ക് അത്രതന്നെ തെങ്ങുംതയ്യു വെയ്ക്കുവാൻ പകുതി സമയം മതി. ഒരേ വിലയ്ക്കുതന്നെ പത്തു മാറ്റുള്ള സ്വർണ്ണത്തിന്റെ തൂക്കത്തിനേക്കാളധികം എട്ടുമാറ്റുള്ള സ്വർണ്ണത്തിന്റെ തൂക്കം വാങ്ങാം. നാല്പതു മഞ്ചാടിക്കുരുവിനെ നാലായി ഭാഗിച്ചാൽ ഓരോ ഭാഗത്തിൽ പത്തു മഞ്ചാടിവീതമുണ്ടാകും. എന്നാലവയെ എട്ടായിട്ടു ഭാഗിക്കുകയാണെങ്കിൽ ഓരോ ഭാഗത്തിൽ അഞ്ചുവീതം മാത്രമേ ഉണ്ടാകയുള്ളൂ. ഇങ്ങനെ ചില വ്യസ്തത്രൈരാശികത്തിന്റെ ഉദാഹരണങ്ങൾ.

വ്യസ്തത്രൈരാശികത്തിങ്കൽ,

$$\text{പ്രമാണം} \times \text{പ്രമാണഫലം} = \text{ഇച്ഛാ} \times \text{ഇച്ഛാഫലം}.$$
$$\frac{\text{ഇച്ഛാ}}{\text{പ്രമാണം}} = \frac{\text{പ്രമാണഫലം}}{\text{ഇച്ഛാഫലം}}.$$

“വ്യസ്തത്രൈരാശികഫലമിച്ഛാഭക്തഃ പ്രമാണഫലഘാതഃ” എന്നുണ്ട്. ഇങ്ങനെ ത്രൈരാശികത്തിന്റെ ദിങ്മാത്രം.[8]

വ്യാഖ്യാനം 8: പഞ്ചരാശികം, സപ്തരാശികം, നവരാശികം ഇങ്ങനെയെല്ലാം ചില ക്രിയകളുണ്ടെന്നു മുമ്പിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ. പഞ്ചരാശികത്തിന്റെ ഒരു ഉദാഹരണം:

“മാസേ ശതസ്യ യദി പഞ്ചകലാന്തരം സ്യാ
ദ്വർഷേ ഗതേ ഭവതി കിം വദ ഷോഡശാനാം”|| (ലീലാവതീ)

നൂറ്റിന്ന് ഒരു മാസത്തിൽ അഞ്ചു പലിശയാണെങ്കിൽ, പതിനാറിന്നൊരു കൊല്ലത്തേയ്ക്കു പലിശ എന്ത്?

ഇവിടെ പ്രമാണങ്ങൾ — 100, 1.

$$\text{പ്രമാണഫലം} - 5.$$
$$\text{ഇച്ഛകൾ} - 16, 12.$$
$$\text{ഇച്ഛാഫലം} = \frac{\text{പ്രമാണഫലം} \times \text{ഇച്ഛാ}}{\text{പ്രമാണം}}.$$
$$= \frac{5 \times 16 \times 12}{1 \times 100} = \frac{960}{100} = 9\frac{3}{5}$$

ഇവിടെ പ്രമാണഫലത്തെ എല്ലാ ഇച്ഛകളെക്കൊണ്ടും ഗുണിക്കേണം. എല്ലാ പ്രമാണങ്ങളെക്കൊണ്ടും ഹരിക്കുകയും വേണം. ഈ ക്രിയയെ രണ്ടു ത്രൈരാശികങ്ങളെന്നു കല്പിക്കാം. ഇവ രണ്ടും സാധാരണ ത്രൈശികം തന്നെ. എന്നാൽ ഒന്നു വ്യസ്തത്രൈരാശികമാണെങ്കിൽ അതിലെ പ്രമാണഫലത്തെ അതിന്റെ പ്രമാണംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഇച്ഛകൊണ്ടു ഹരിക്കേണം. മറ്റെ ത്രൈരാശികത്തിൽ ഇച്ഛതന്നെ ഗുണകാരം, പ്രമാണം ഹാരകവും. ഇങ്ങനെ ത്രൈരാശികത്തിലും പഞ്ചാദിരാശികങ്ങളിലും ക്രിയയ്ക്കു വ്യത്യാസമില്ല.

പിന്നെ ഇത്ത്രൈരാശികന്യായവും ഭുജാകോടികർണ്ണന്യായവും ഇവ രണ്ടിനെക്കൊണ്ടും വ്യാപ്തം ഗണിതക്രിയ മിക്കതും. ഇവറ്റിന്നു അംഗമായിട്ടു സംകലിതാദി പരികർമ്മങ്ങൾ ഇരിപ്പൂ. ഇങ്ങനെ ഗണിതന്ന്യായങ്ങൾ മിക്കതും ചൊല്ലീതായി.

5

കുട്ടാകാരം

അഹര്‍ഗ്ഗണാനയനം

അനന്തരം അഹര്‍ഗ്ഗണം വരുത്തുക തുടങ്ങിയുള്ള ഗണിതത്തെ ഈ ന്യായാ[1] തിദേശപ്രകാര ത്തെക്കൊണ്ടു ചൊല്ലുന്നു.

വ്യാഖ്യാനം 1: ത്രൈരാശികം ന്യായം.

അവിടെ കല്യാദ്യഹര്‍ഗ്ഗണത്തെ രണ്ടു ത്രൈരാശികം[2] കൊണ്ടറിയുന്നു.

വ്യാഖ്യാനം 2:

ദ്വാദശഘ്നാന്‍ കലേരബ്ദാന്‍ മാസൈശ്ചൈത്രാദിഭിര്‍ഗ്ഗതൈഃ|
സംയുക്താന്‍ പൃഥഗാഹത്യാപ്യധിമാസൈ സ്തതോ ഹൃതൈഃ ||
സൗരമാസൈര്‍യ്യുഗോക്തൈസ്തൈരധിമാസൈര്‍യ്യുതാന്‍ ഗതൈഃ |
മാസാംശ്ച ത്രിംശതാ ഹത്വാ തിഥിയുക്താ ഗതാഃപൃഥക് ||
തിഥിക്ഷയൈര്‍ന്നിഹത്യാതോ യുഗോക്തതിഥിഭിര്‍ഹൃതാന്‍ |
അവമാന്‍ ശോധയേച്ഛേഷസ്സാവനോ ദ്യുഗണഃ കലേഃ || (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

ഇവിടെ രണ്ടു ത്രൈരാശികങ്ങളെ ചെയ്യുന്നുണ്ട്. (1) കല്യാദിയിങ്കന്നു തുടങ്ങി കഴിഞ്ഞ സൗരാബ്ദങ്ങളെ പന്ത്രണ്ടില്‍ ഗുണിച്ച് മാസമാക്കി വര്‍ത്തമാനവര്‍ഷത്തിലെ കഴിഞ്ഞ ചൈത്രാദി മാസങ്ങളെ അതില്‍ കൂട്ടു. ആ മാസസമൂഹത്തെ വേറെവെച്ച് യുഗാദിമാസങ്ങളെക്കൊണ്ട് പെരുക്കി യുഗസൗരമാസങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിക്കുക. അപ്പോള്‍ കിട്ടുന്നതു കഴിഞ്ഞുപോയ അധിമാസങ്ങളായിരിക്കും. (2) ഈ അധിമാസങ്ങളെ മുന്‍ വേറെ വെച്ചിരിക്കുന്ന മാസസമൂഹത്തില്‍ക്കൂട്ടി മുപ്പതില്‍ ഗുണിച്ച് വര്‍ത്തമാനചാന്ദ്രമാസത്തിങ്കലെ ശുക്ലപ്രതിപദം മുതല്‍ കഴിഞ്ഞ പക്കങ്ങളേയുംകൂട്ടി വേറെ വെയ്ക്കുക. അതിനെ യുഗാവമദിനങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് യുഗചാന്ദ്രദിനങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിക്കൂ. ഇങ്ങനെ ഹരിച്ച് കിട്ടുന്നത് അവമദിനങ്ങളാകുന്നു. ഈ അവമദിനങ്ങളെ വേറെവെച്ചിരിക്കുന്ന ചാന്ദ്രദിനങ്ങളില്‍നിന്നു കളയൂ. ശേഷിച്ചതു കല്യാദിയിങ്കന്നു കഴിഞ്ഞ സാവനാഹര്‍ഗ്ഗണമാകും.

ഇതിങ്കല്‍ കല്യാദ്യതീത സംവത്സരത്തെ സൗരംകൊണ്ട് അറിയുന്നു, സംവത്സര ത്തിങ്കല്‍ സൗരം[3] പ്രസിദ്ധമാകുന്നത്, എന്നിട്ട്.

വ്യാഖ്യാനം 3:

"സൗരാബ്ദോ ഭാസ്കരസ്യൈവ ജ്യോതിശ്ചക്രപരിഭ്രമഃ" (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

ആദിത്യനു ജ്യോതിചക്രത്തിൽ കിഴക്കുനോക്കിക്കൊണ്ടുള്ള ഒരു ഭ്രമണത്താൽ പരിച്ഛേദിക്കപ്പെടുന്ന കാലം ഒരു സൗരാബ്ദം.

പിന്നെ വർത്തമാനസംവത്സരത്തിങ്കൽ കഴിഞ്ഞ മാസങ്ങളെ ചാന്ദ്രം[4] കൊണ്ട് അറിയും.

വ്യാഖ്യാനം 4:

പൂർവ്വപക്ഷശ്ശശാങ്കസ്യ വിപ്രകർഷോ രവേഃ സ്മൃതഃ|
സന്നികർഷോപരഃ പക്ഷഃ സിതവൃദ്ധിക്ഷയൗ യയോഃ ||
മാസസ്താഭ്യാം മതശ്ചാന്ദ്രസ്ത്രിംശത്തിഥ്യാത്മകസ്സ ച || (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

അമാവാസ്യന്തത്തിങ്കൽ ആദിത്യനോടു കൂടിയിരിക്കുന്ന ചന്ദ്രനു പൗർണ്ണമാസ്യാന്തത്തോളം ക്രമേണയുള്ള വിപ്രകർഷം യാതൊന്ന് അതിനു പൂർവ്വപക്ഷമെന്നും പൗർണ്ണമാസ്യന്തത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ക്രമേണ അമാവാസ്യന്തമുള്ള സന്നികർഷം യാതൊന്ന് അതിന്ന് അപരപക്ഷമെന്നും പറയപ്പെടുന്നു. ചന്ദ്രബിംബത്തിന്റെ സിതാസിതമാനങ്ങളുടെ വൃദ്ധിക്ഷയങ്ങളെ അനുസരിച്ച് അക്കാലങ്ങൾക്കു ശുക്ലപക്ഷമെന്നും കൃഷ്ണപക്ഷമെന്നും പേരുകളുണ്ട്. ഇപ്രകാരം പൂർവ്വാപരപക്ഷങ്ങളെക്കൊണ്ടുള്ള മുപ്പതു തിഥികളടങ്ങിയ കാലമാകുന്നു ഒരു ചാന്ദ്രമാസം.

പിന്നെ വർത്തമാനമാസത്തിൽ കഴിഞ്ഞ ദിവസങ്ങളെ സാവനം[5] കൊണ്ട് അറിഞ്ഞിരിക്കുന്നു, പ്രസിദ്ധിവശാൽ.

വ്യാഖ്യാനം 5:

രവേഃ പ്രത്യഗ്ഭ്രമം പ്രാഹുഃ സാവനാഖ്യം ദിനം നൃണാം || (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

പ്രവഹവായുവശഗനായ ആദിത്യന്റെ പടിഞ്ഞാറു നോക്കിയുള്ള ഒരു ഭ്രമണത്തിനുള്ള കാലമാകുന്നു ഒരു സാവനദിനം.

പിന്നെ ഇവറ്റെക്കൊണ്ടു കല്യാദ്യതീതസാവനദിവസങ്ങളെ അറിയേണ്ടുന്നു. ഇവിടെ പിന്നെ ചതുര്യുഗത്തിങ്കലെ ഭഗണഭൂദിനങ്ങളല്ലൊ പഠിച്ചത്. അവറ്റെകൊണ്ട് കല്യാദിയിങ്കന്നു തുടങ്ങി കഴിഞ്ഞതിനെ വരുത്തുന്നു. അവിടെ യുഗത്തിങ്കൽ സൗരചാന്ദ്രഭഗണാന്തരം ചാന്ദ്രമാസമാകുന്നത്.[6]

വ്യാഖ്യാനം 6:

$$\text{സൂര്യഭഗണം} = \text{അയുതഘ്നരദാർണ്ണവാഃ} = 432 \times 10000 = \underline{4320000}$$

$$\text{ചന്ദ്രഭഗണം} = \text{ഖാശ്വി ദേവേഷു സപ്താദ്രി ശരാഃ} = \underline{57753320}$$

$$\begin{aligned}\text{ചാന്ദ്രമാസം} &= \text{സൂര്യേന്ദു ഭഗണാന്തരം}\\ &= 57753320 - 4320000\\ &= \underline{53433320}.\end{aligned}$$

അതിങ്കന്നു യുഗസൗരഭഗണത്തെ പന്ത്രണ്ടിൽ ഗുണിച്ചുണ്ടായ യുഗസൗരമാസത്തെ കളഞ്ഞശേഷം യുഗാധിമാസം.[7]

വ്യാഖ്യാനം 7:

$$\begin{aligned}\text{യുഗസൗരമാസം} &= \text{അയുതഘ്നാബ്ധിവസ്വേക ശരാഃ}\\ &= 4320000 \times 12 = \underline{51840000}.\end{aligned}$$

$$\text{യുഗാധിമാസം} = \text{ഖനേത്രാഗ്നി രാമനന്ദേഷു ഭൂമയഃ} = \underline{1593320}$$

ഇവിടെ സൂര്യ്യഭഗണത്തെ പന്ത്രണ്ടിൽ പെരുക്കിയാൽ യുഗസൗരമാസം കിട്ടുമെന്നും ചന്ദ്രമാസത്തിൽ നിന്നും യുഗസൗരമാസം വാങ്ങിയാൽ ശേഷം യുഗാധിമാസമായിട്ടു വരുമെന്നും അറിയേണം.

പിന്നെ യുഗസൗരമാസത്തിന് ഇത്ര അധിമാസം കല്യാദ്യതീതസൗരമാസത്തിന്ന് എത്ര അധിമാസം എന്ന ത്രൈരാശികത്തെക്കൊണ്ട് അതീതാധിമാസത്തെ ഉണ്ടാക്കി അതീതസൗരമാസത്തിൽ കൂട്ടിയത് അതീതചാന്ദ്രമാസമായിട്ടിരിക്കും. ഇതിൽ പിന്നെ വത്മാനവഷത്തിലെ ചൈത്രാദികളെക്കൂട്ടി മുപ്പതിൽ ഗുണിച്ച വത്മാനമാസത്തിലെ അതീതദിവസത്തേയും കൂട്ടിയതു കല്യാദ്യതീതതിഥികൾ. പിന്നെ യുഗതിഥിയും യുഗസാവനവും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരം **യുഗാവമം.**[8]

വ്യാഖ്യാനം 8:

യുഗതിഥികൾ = ഖഖഷണ്ണവഗോനന്ദനേത്രശൂന്യരസേന്ദവഃ
= $53433320 \times 30 = \underline{1602999600}$.

യുഗസാവനദിവസങ്ങൾ (ഭൂദിനം) = ഖഖാക്ഷാത്യഷ്ടിഗോസപ്തസ്വരേഷു ശശിനഃ
= $\underline{1577917500}$.

അവമദിങ്ങൾ അഥവാ തിഥിക്ഷയങ്ങൾ
ഖവ്യോമേന്ദുയമാഷ്ടാഭ്രതത്വതുല്യാഃ
= $\underline{25082100}$.

പിന്നെ യുഗതിഥിക്ക് ഇത്ര അവമം അതീതതിഥിക്ക് എത്ര അവമം എന്ന ത്രൈരാശികത്തെക്കൊണ്ട് ഉണ്ടായ അവമത്തെ അതീതതിഥിയിങ്കന്നു കളഞ്ഞതു കല്യാദ്യതീതസാവനദിവസം.[9]

വ്യാഖ്യാനം 9: ഒരുദാഹരണം:- 1120-ാമാണ്ടു ചിങ്ങം 1-ാംനു ഉദയത്തിലെ കല്യാദ്യഹഗ്ഗണം എന്ത്? അതായത് 5046-ാം കല്യബ്ദത്തിൽ ശ്രാവണമാസത്തിൽ കറുത്ത ത്രയോദശി ബുധനാഴ്ച ഉദയത്തിലെ കലിക്കൊട്ടനാൾ ഏത്?

1119 മേടം 1-ാംനുക്ക് അതീതസൗരമാസങ്ങൾ = $5045 \times 12 = 60540$

ആദ്യത്തെ ത്രൈരാശികം:-

യുഗസൗരമാസം:യുഗാധിമാസം : : അതീതസൗരമാസം:അതീതാധിമാസം.

$$\text{അപ്പോൾ അതീതാധിമാസം} = \frac{60540 \times 1593320}{51840000} = 1860$$

$$\text{അതീതചാന്ദ്രമാസം} = 60540 + 1860 = 62400$$

$$\text{ഇഷ്ടകാലത്തേയ്ക്ക് അതീതചാന്ദ്രമാസം} = 62400 + 4 = 62404$$

$$\text{ഇഷ്ടകാലത്തേയ്ക്ക് അതീതചാന്ദ്രദിവസം} = 62404 \times 30 + 27 = 1872147.$$

രണ്ടാമത്തെ ത്രൈരാശികം:-

യുഗതിഥി: യുഗാവമം : : അതീതതിഥി: അതീതാവമം.

$$\therefore \text{ അതീതാവമം} = \frac{1872147 \times 25082100}{1602999600} = 29293.$$

$$\text{അപ്പോൾ അതീതസാവനദിവസം} = 1872147 - 29293 = 1842854.$$

ഇവിടെ ഒന്നോ രണ്ടോ ദിവസത്തെ വ്യത്യാസം കാണവാൻ സംഗതിയുണ്ട്. കല്യാദി വെള്ളിയാഴ്ച എന്നു സങ്കല്പിച്ച് ഇവിടെ ആഴ്ച ഒപ്പിച്ച് ഇഷ്ടാഹർഗ്ഗണം ശരിപ്പെടുത്തേണ്ടതാകുന്നു. ആഴ്ച ഒപ്പിച്ചു നോക്കുമ്പോൾ,

$$\text{ഇഷ്ടകല്യാദ്യഹർഗ്ഗണം} = \underline{1842853} \text{ എന്നുംവരും.}$$

പ്രസിദ്ധമായിട്ടുള്ളതു സാവനമാണെങ്കിലും, ചാന്ദ്രങ്ങളായിട്ടുള്ള വസ്തുക്കളെ ഉപയോഗിച്ചു രണ്ടു ത്രൈരാശികംകൊണ്ടു കല്യാദ്യഹർഗ്ഗണത്തെ വരുത്തുന്നു. എന്തുകൊണ്ടാണ് ചന്ദ്രങ്ങളെ സ്വീകരിച്ചിരിക്കുന്നത്? കല്യാദിയായ ദിവസം ലംകയിലെ ഉദയത്തിങ്കൽ സൂര്യചന്ദ്രന്മാരുടെ മദ്ധ്യമം ശൂന്യവും തുംഗന്റെ മദ്ധ്യമം മൂന്നു രാശിയും ആണെന്നു കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു. എന്നാൽ കല്യബ്ദത്തിന്റെ ആരംഭം മേഷസ്ഫുടസംക്രമസമയത്തുനിന്നാണ്. മേഷസ്ഫുടസംക്രമസമയത്തു സൂര്യമദ്ധ്യമം 11 രാശി 27 തിയ്യതി, 52 ഇലി, 58 വിലി, 6 തല്പര മാത്രമേ ആയിട്ടുള്ളൂ. അപ്പോൾ സൂര്യമദ്ധ്യമം ശൂന്യമാകുവാൻ രണ്ടിൽ ചില്വാനം ദിവസംകൂടി വേണ്ടതായിട്ടിരിക്കുന്നു. കല്യബ്ദാദി കഴിഞ്ഞിട്ട് രണ്ടിൽ ചില്വാനം ദിവസം കഴിഞ്ഞിട്ടാണ് കല്യാദി തുടങ്ങുന്നത്. അപ്പോൾ തികഞ്ഞ കല്യബ്ദം വെച്ചു ക്രിയ ചെയ്യുമ്പോൾ കല്യാദ്യഹർഗ്ഗണം വരുത്തുവാൻ രണ്ടിൽ ചില്വാനം ദിവസം തള്ളിക്കളയേണ്ടിവരും. എന്നാൽ കല്യാദിയിങ്കൽ ചന്ദ്രന്റെ ഉദയസ്ഫുടം ഏകദേശം 5 തിയ്യതി 1 ഇലി ആകുന്നു. അസ്സമയത്തു ചന്ദ്രസൂര്യന്മാരുടെ സ്ഫുടാന്തരം 2തി 54 ഇലി. അതായതു കല്യാദി ഉദയത്തിങ്കൽ വെളുത്ത പ്രതിപദം തുടങ്ങിയിട്ട് ഏകദേശം $14\frac{1}{2}$ നാഴിക കഴിഞ്ഞിരിക്കുന്നു. കല്യാദിയിങ്കലെ ഉദയം വെളുത്ത പ്രതിപദത്തിന്റെ മുതൽക്കാലിലാകുന്നു. ക്രിയയിലും ശുക്ലപ്രതിപദാദി തുടങ്ങി തന്നെ അഹർഗ്ഗണത്തെ കണക്കാക്കുന്നു. അതു കല്യാദിയിങ്കന്നു തുടങ്ങിയതുതന്നെ എന്നു കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

എന്നാൽ സൂര്യന്റെ മേഷസ്ഫുടസംക്രമവും മദ്ധ്യസംക്രമവും തമ്മിലുള്ള രണ്ടിൽ ചില്വാനം ദിവസത്തിന്റെ വ്യത്യാസത്തെ പരിഹരിക്കുവാൻ ഒരു സംസ്കാരം ചെയ്തു സാവനങ്ങളായിരിക്കുന്ന വസ്തുക്കളെക്കൊണ്ടുതന്നെ ഒരു ത്രൈരാശികം ചെയ്താൽ ശരിയായിട്ടുള്ള കല്യാദ്യഹർഗ്ഗണം വരും. മേഷാദി തുടങ്ങി മേഷാദിവരെ ഗമിക്കുവാൻ സ്ഫുടസൂര്യനും മദ്ധ്യമസൂര്യനും വേണ്ടിവരുന്ന സമയം “മകുടോൽബണകൃഷ്ണതാലഃ” (365 ദിവസം 15 നാഴിക 31 വിനാഴിക 15 ഗുർവ്വക്ഷരം).

$$\text{1119 മേടം 1-ാംനുക്ക തികഞ്ഞ കല്യബ്ദം} = 5045.$$

അതായതു കല്യാദിയിങ്കന്നു രണ്ടിച്ചില്വാനം ദിവസം മുമ്പുണ്ടായ സൂര്യസ്ഫുടമേഷസംക്രമം തുടങ്ങി 1119-ൽ മേഷസംക്രമംവരെ സ്ഫുടസൂര്യൻ 5045 പരിഭ്രമണങ്ങൾ കഴിച്ചു എന്നർത്ഥം അസ്സമയത്തു മദ്ധ്യമസൂര്യൻ 5044 ഭഗണം 11 രാശി 27തി. 52ഇ., 58വി. 6ത മാത്രമേ ഗമിച്ചിട്ടുള്ളൂ. അപ്പോൾ 4320000 ഭഗണത്തിന്നു 1577917500 ദിവസം വേണമെങ്കിൽ 5044ഭ. 11രാ. 27തി. 52ഇ. 58വി. 6ത-ക്ക് എത്ര ദിവസം വേണമെന്നുള്ള ത്രൈരാശികംകൊണ്ടു ശരിയായിട്ടുള്ള അഹർഗ്ഗണം വരും.

1119 മേടം 1-ാംനുക്ക തികഞ്ഞ കലിക്കൊട്ടനാൾ

$$= (5044\text{ഭ}.\ 11\text{രാ}.\ 27\text{തി}.\ 52\text{ഇ}.\ 58\text{വി}.\ 6\text{ത}.) \times \frac{1577917500}{4320000}$$

$$= [5045\text{ഭ.} - (0\text{രാ.}\ 2\text{തി.}\ 7\text{ഇ.}\ 1\text{വി.}\ 54\text{ത.})] \times \frac{2103890}{5760}$$

(ഇവിടെ 1577917500-നേയും 4320000-നേയും 7500 കൊണ്ട് അപവർത്തിച്ചാൽ ദൃഢഭൃദിനഭഗണങ്ങളായിരിക്കുന്ന 210389-ഉം 576-ഉം വരും. ഇവയെ പത്തിൽ ഗുണിച്ചവയെയാണിവിടെ ഗുണകാരഹാരകങ്ങളായിട്ടു കല്പിച്ചിരിക്കുന്നതു്.)

അപ്പോൾ ഇഷ്ടകല്യാദ്യഹർഗ്ഗണം

$$= \left[5045\text{ഭ.} - \frac{2\text{തി.}\ 7\text{ഇ.}\ 1\text{വി.}\ 54\text{ത.}}{360}\text{ഭ.}\right] \times \frac{2103890}{5760}$$

$$= \frac{5045\text{ഭ.} \times 2103890 - \frac{2\text{തി.}\ 7\text{ഇ.}\ 1\text{വി.}\ 54\text{ത.}}{360} \times 2103890}{5760}.$$

$$= \frac{5045 \times 2103890 - \frac{445434 - 25 - 19 - 6}{36}}{5760}$$

$$= \frac{5045 \times 2103890 - 12373}{57\underline{60}}$$

"അബ്ദാൻ കലേരദ്ധ്ജഗന്ന്യപേന്ദ്രൈ-
ഹ്ത്വാ, തതോ ലാസഗരീഢ്യ ഹീനാൽ
ഇഷച്ഛമാപ്തം ഗതമാസവാക്യ
ഗതാഹയുക്തം ദ്യുഗണോച്ഛവാരാൽ." (പഞ്ചബോധം)

ഇതുപ്രകാരം ക്രിയചെയ്താലും മുമ്പിലെ അഹർഗ്ഗണം തന്നെ വരും.

മദ്ധ്യമാനയനം

അനന്തരം **കല്യാദ്യതീതമദ്ധ്യമാനയനം.** അവിടെ യുഗസാവനത്തിന്ന് ഇത്ര ഭഗണം.[10]

വ്യാഖ്യാനം 10: ജ്യോതിശ്ചക്രത്തിൽ ഗ്രഹത്തിന്റെ കിഴക്കുനോക്കിയുള്ള ഒരു ഭ്രമണത്തിന്നു ഒരു ഭഗണമെന്നു പറയുന്നു.

അതീതസാവനത്തിന്ന് എത്ര ഭഗണം എന്നു തികഞ്ഞ ഭഗണങ്ങൾ ഉളവാകും. പിന്നെ ശേഷത്തിങ്കന്നു ഭഗണാവയവമായിരിക്കുന്ന രാശ്യംശലിപ്താദിയെ പന്ത്രണ്ട് , മുപ്പതു്, അറുപതു്, എന്നവറ്റെകൊണ്ട് ഗുണിച്ചുണ്ടാക്കു. അവ മദ്ധ്യമങ്ങളാകുന്നവ. ഇങ്ങനെ ഒരു പ്രകാരം. പിന്നെ മാസാധിമാസാവമഭഗണങ്ങളിൽവെച്ചു കല്യാദ്യതീതങ്ങളിൽ യാതൊന്നിനെ ഇച്ഛാരാശിയായിട്ടു കല്പിക്കുന്നു, യുഗസംബന്ധികളായിരിക്കുന്ന തജ്ജാതീയത്തെ പ്രമാണമാക്കി പിന്നെ യുഗസംബന്ധികളിലിഷ്ടത്തെ പ്രമാണഫലമാക്കു. പിന്നെ ത്രൈരാശികംകൊണ്ടുണ്ടായ ഇച്ഛാഫലം പ്രമാണഫലത്തോടു സമാനജാതീയമായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ ഗ്രഹമദ്ധ്യമാനയനം.

അപവൎത്തനവും കുട്ടാകാരവും

അനന്തരം ഇച്ചൊല്ലിയവ യുഗസംബന്ധികൾ ഗുണഹാരങ്ങൾ എന്നിരിക്കുമ്പോൾ ക്രിയ പെരുത് എന്നിട്ട് ക്രിയയുടെ ചുരുക്കത്തിന്നായിക്കൊണ്ടു ഗുണഹാരങ്ങളെ ചുരുക്കുവാനായിക്കൊണ്ട് അപവൎത്തനക്രിയയേയും പ്രസംഗാൽ കുട്ടാകാരത്തേയും ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ **ഇച്ഛാഫലത്തെ പ്രമാണംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതും പ്രമാണഫലത്തെ ഇച്ഛകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതും തുല്യസംഖ്യമായിട്ടിരിക്കും.** ആകയാൽ ഈ ഘാതത്തിങ്കന്നു ഇച്ഛകൊണ്ടു ഹരിച്ചത് പ്രമാണഫലമായിട്ടുവരും. പ്രമാണത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചത് ഇച്ഛാഫലമായിട്ട് വരും. പ്രമാണഫലത്തെകൊണ്ടു ഹരിച്ചത് ഇച്ഛാ. ഇച്ഛാഫലത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചതു പ്രമാണം. ഈവണ്ണമാകുമ്പോൾ ഇച്ഛാഫലത്തെ നടേ അറിഞ്ഞിരിക്കുമ്പോൾ അതിനെ പ്രമാണത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് പ്രമാണഫലത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചത് ഇച്ഛാരാശിയായിട്ട് വരും, ഹരിച്ചാൽ ശേഷം മുടിയുന്നേടത്ത്. മുടിയാത്തേടത്തു പോരാത്ത സംഖ്യേ കൂട്ടീട്ട്, ഏറുകിൽ കളഞ്ഞിട്ടു ഹരിച്ചാൽ ഇച്ഛാരാശിയായിട്ടു വരും. ഇച്ഛാഫലം പൂൎണ്ണരൂപമായിട്ടിരിക്കുന്നതിനെക്കൊണ്ടു പ്രമാണ രാശിയെ ഗുണിച്ചു എങ്കിൽ ശേഷത്തെ കൂട്ടുകതാൻ കളകതാൻ വേണ്ടിരിക്കും. പ്രമാണഫലത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചിട്ട് ഇച്ഛേ വരുത്തുന്നേടത്തെയ്ക്ക് ഇച്ഛാഫലാവയവത്തെക്കൊണ്ടുകൂടി ഗുണിക്കിൽ ശേഷമുണ്ടായിരിക്കയില്ല. അവിടെ ഇഷ്ടാഹൎഗ്ഗണത്തിങ്കന്ന് ഇച്ഛാഫലമായിട്ട് അതീത ഭഗണങ്ങൾ ഉണ്ടായാൽ ഹരിച്ചശേഷത്തിങ്കന്നു ഭഗണാവയവമായിട്ട് അതീതരാശ്യാദികൾ ഉണ്ടാകുന്നു. ഭഗണംപൂൎണ്ണരൂപമുണ്ടായാറെ യാതൊന്നു ഹരിപ്പാൻ പോരാതെ ഹാൎയ്യത്തിങ്കൽ ശേഷിച്ചത് അതിനെ ഭഗണശേഷമെന്ന് ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ ഭഗണത്തിനു നടേത്തെ അവയവമാകുന്നതു രാശി. അതു പന്ത്രണ്ടുകൂടിയത് ഒരു ഭഗണം. ആകയാൽ രാശിക്കു ഛേദമാകുന്നത് പന്ത്രണ്ട് ആകയാൽ ഭഗണത്തെ പന്ത്രണ്ടിൽ ഗുണിച്ച് മുമ്പിലെ പ്രമാണം തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ അതീതഭഗണാവയവമായിട്ട് രാശിയുണ്ടാം. അവിടേയും ശേഷമുണ്ടു ഹാൎയ്യത്തിങ്കൽ എങ്കിൽ അതിനു **രാശിശേഷ**മെന്നു പേർ. അതിങ്കന്നു രാശ്യവയവം ഭാഗം; മുപ്പതുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു പ്രമാണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചതു ഭാഗം. ശേഷം **ഭാഗശേഷം.** അതിങ്കന്ന് അറുപതിൽ ഗുണിച്ചു മുമ്പിലെ ഹാരകം തന്നെക്കൊണ്ട് ഹരിച്ചതു **കല.** അവിടെ ശേഷിച്ചതു കലാശേഷം. ഈ വണ്ണമാകുമ്പോൾ കലാശേഷത്തിങ്കന്നു വിപരീതക്രിയകൊണ്ട് ഇഷ്ടാഹൎഗ്ഗണം വരും. അത് ഏവണ്ണമെന്ന്. അവിടെ ഹാരകത്തെക്കൊണ്ട് ഈ കലേ ഗുണിച്ചു കലാശേഷത്തെ കൂട്ടി അറുപതിൽ ഹരിച്ച ഫലം ഭാഗശേഷമായിട്ടു വരും. പിന്നെ ഹാരകത്തെക്കൊണ്ടുതന്നെ ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന ഭാഗത്തിൽ ഭാഗശേഷത്തെ കൂട്ടി മുപ്പതിൽ ഹരിച്ച ഫലം രാശിശേഷം. അതിനെ രാശിയെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന ഹാരകത്തിൽകൂടി പന്ത്രണ്ടിൽ ഹരിച്ചതു ഭഗണശേഷം. അതിനെ അതീതഭഗണംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന ഹാരകത്തിങ്കൽകൂടി യുഗഭഗണത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം അതീതാഹൎഗ്ഗണം.

ഇവിടെ ഗുണഗുണ്യഘാതമായിട്ടിരിക്കുന്ന ഹാൎയ്യത്തെ ഭാജ്യമെന്നു ചൊല്ലുവാൻ യോഗ്യമായിട്ടിരിക്കുന്നേടത്തു കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ പ്രമാണഫലങ്ങൾക്കു ഭാജ്യമെന്നു പേർ ചൊല്ലുന്നു.[11]

വ്യാഖ്യാനം 11: മദ്ധ്യമാനയത്തിൽ പ്രമാണംഭൂദിനം; പ്രമാണഫലം യുഗഭഗണം; ഇച്ഛാ അതീതാഹർഗ്ഗണം; ഇച്ഛാഫലം ഭഗണാദി മദ്ധ്യമം. യുഗഭഗണമാകുന്ന ഗുണ്യത്തെ അതീതാഹർഗ്ഗണമായിരിക്കുന്ന ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ഘാതത്തെ ഭൂദിനമാകുന്ന ഹാരകംകൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ മദ്ധ്യമം വരുന്നു. സാമാന്യേന ഈ പ്രമാണഫലേച്ഛാഘാതത്തെ ഹാര്യം അല്ലെങ്കിൽ ഭാജ്യമെന്നും ചൊല്ലുന്നു. എന്നാൽ കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ പ്രമാണഫലത്തെത്തന്നെയാണ് ഭാജ്യമെന്നു പറയാറുള്ളത്. ഇച്ഛയെ ഗുണകാരമെന്നും പ്രമാണത്തെ ഭാജകം അല്ലെങ്കിൽ ഹാരകമെന്നും പറയുന്നു.

അവിടെ ഭഗണാദി ശേഷത്തിൽ രാശ്യാദിച്ഛേദങ്ങൾ പന്ത്രണ്ടും, മുപ്പതും, അറുപതും ക്രമേണ ഭാജ്യങ്ങളാകുന്നത്.[12]

വ്യാഖ്യാനം 12: അനുബന്ധത്തിലെ ഉദാഹരണം നോക്കുക.

പ്രമാണമൊന്നുതന്നെ എല്ലാടവും ഭാജകമാകുന്നത്. മുമ്പിലെ മുമ്പിലെ ശേഷം ഇച്ഛാരാശിയായിരിക്കുന്നത് അവിടെ അവിടെയ്ക്കു സാദ്ധ്യമാകുന്നത്. അസ്സാദ്ധ്യത്തിന്നു **ഗുണകാര**മെന്ന് കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ പേർ. പ്രമാണഫലത്തെക്കൊണ്ട് ഇച്ഛാരാശിയെ ഗുണിച്ച് പ്രമാണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഹാര്യത്തിങ്കൽ ശേഷിച്ചത് എത്ര സംഖ്യ അതിനെ അറിയൂ, ഒന്നു തികയാൻ പോരാത്തത് ഇത്ര സംഖ്യയെന്ന് താൻ. ഇത് ഒരു രാശിയാകുന്നത് . പിന്നെ പ്രമാണവും പ്രമാണഫലവും ഇവ മൂന്നിനെ അറിഞ്ഞിരിക്കും വിഷയത്തിങ്കൽ **ഇച്ഛാരാശിയെ അറിവാനായിക്കൊണ്ടുള്ള ഗണിതത്തിന്നു കുട്ടാകാരമെന്നു പേർ ആകുന്നു.**[13]

വ്യാഖ്യാനം 13: കുട്ടാകാരത്തിന്റെ വിഷയത്തെപ്പറ്റി അനുബന്ധത്തിൽ നോക്കുക.

അവിടെ ആദിത്യന്റെ അപവർത്തിതഭഗണം **തൽസമ**നെന്ന്. അതിന്റെ ദൃഗണം **ധീജഗന്നൂപുരം.**[14]

വ്യാഖ്യാനം 14:

$$
\begin{aligned}
\text{ആദിത്യത്തിന്റെ ഭഗണം} &= 4320000.\\
\text{ഭൂദിനം} &= 1577917500.\\
\text{ഇവയുടെ അപവർത്തനഹാരകം} &= 7500.\\
\text{അപ്പോൾ അവാന്തരയുഗദിനം} &= \frac{1577917500}{7500}\\
&= 210389 \ (\text{ധീജഗന്നൂപുരം}).\\
\text{അവാന്തരയുഗഭഗണം} &= \frac{4320000}{7500}\\
&= 576 \ (\text{തൽസമഃ})
\end{aligned}
$$

ഇതു പ്രമാണം. തൽസമൻ പ്രമാണഫലം. **അവാന്തരയുഗം** യുഗഭഗണമെന്നുമുണ്ട് ഇവറ്റിന്നു പേർ.[15]

വ്യാഖ്യാനം 15: 1577917500 ദിവസങ്ങൾ കൂടിയത് ഒരു യുഗം. 210389 ദിവസങ്ങൾ കൂടിയത് ഒരു അവാന്തരയുഗം. അവാന്തരയുഗഭഗണം $= 576$.

ദൃഢഭാജ്യഭാജകങ്ങൾ എന്നുമുണ്ട് പേർ. ഇവറ്റെക്കൊണ്ടുള്ള ഭഗണശേഷത്തിങ്കലെ കുട്ടാകാരത്തെ ഇവിടെ നടേ കാട്ടുന്നു. അവിടെ അവാന്തരയുഗം മുടിയുന്ന ദിവസം ഉദയത്തിന്നു മീനാന്ത്യത്തിങ്കൽ അകപ്പെട്ടിരിക്കും ആദിത്യമദ്ധ്യമം.[16]

വ്യാഖ്യാനം 16: കല്യാദി ഉദയത്തിങ്കൽ സൂര്യമദ്ധ്യമം ശൂന്യം. അവാന്തരയുഗമാകുന്ന 210389 ദിവസംകൊണ്ടു ആദിത്യൻ 576 ഭഗണം തികക്കുന്നു. അപ്പോൾ അവാന്തരയുഗം മുടിയുന്ന ദിവസം ഉദയത്തിങ്കലും ആദിത്യമദ്ധ്യമം ശൂന്യം.

ആകയാലന്നു ഭഗണശേഷമില്ല. പിന്നെ അതിങ്കൽനിന്നു ചെന്ന ദിവസത്തെ തൽസമനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ധീജഗന്നൂപുരത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചു മദ്ധ്യമം വരുത്തുന്നു. ആകയാൽ അവാന്തരയുഗാദിയിങ്കന്ന് ഒരു ദിവസം ചെല്ലുമ്പോൾ തൽസമൻതുല്യം ഭഗണശേഷം. രണ്ടു ദിവസം ചെല്ലുമ്പോൾ അതിലിരട്ടി. ഇങ്ങനെ ദിവസംപ്രതി ഓരോ ഓരോ തൽസമൻ ഏറി ഏറി ഇരിക്കും ഭഗണശേഷത്തിങ്കൽ. ഭഗണത്തിങ്കൽ ഇത് അധികശേഷമായിട്ടിരുന്നൊന്ന്. പിന്നെ മാതുലനോളം ദിവസം ചെല്ലുമ്പോൾ മാതുലനും തൽസമനും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിങ്കന്നു ധീജഗന്നൂപുരത്തിന്നു പോരാത്തതു ധീവന്ദ്യഃ എന്നാകയാൽ അന്ന് ഊനശേഷമാകുന്നത് അത്. ആകയാൽ അടുത്തു പിറ്റേ ദിവസം ഈ ഘാതത്തിൽ ഒരു തൽസമൻ കൂട്ടേണ്ടുകയാൽ അതിൽ ധീവന്ദ്യനെക്കൊണ്ടു ഭഗണം തികഞ്ഞു, ധീവന്ദ്യൻ പോയ തൽസമശേഷം ദ്വിതീയസംവത്സരാദ്യദിവസത്തിങ്കലെ അധികശേഷം സുരഭി എന്ന്.[17]

വ്യാഖ്യാനം 17: ഹാര്യത്തിങ്കൽ ശേഷിച്ചത് അധികശേഷം; തികയുവാൻ പോരാതെ വരുന്നത് ഊനശേഷം. ധീവന്ദ്യഃ എന്നത് ഊനശേഷം (-149). $-149 + 576 = 427$ (സുരഭിഃ) എന്നത് അധികശേഷം.

പിന്നെ ഇതിൽ ഓരോ തൽസമൻ കൂട്ടി കൂട്ടി ഇരിക്കുന്നത് ദ്വിതീയസംവത്സരത്തിൽ ദിവസംപ്രതിയുള്ള ഭഗണശേഷം. പിന്നെ മൂന്നാം സംവത്സരാദിയിങ്കലെ ദിവസത്തിൽ അതു ധീവന്ദ്യനെ രണ്ടിൽ ഗുണിച്ചതു തൽസമനിൽനിന്നു കളഞ്ഞശേഷം ഭഗണശേഷമാകുന്നതു ദാസീസ്ത്രീ എന്ന്. പിന്നെ ഇത് ആദിയായി ദിവസംപ്രതി തൽസമൻ ഏറി ഇരിക്കുന്നത് മൂന്നാം സംവത്സരത്തിൽ ഭഗണശേഷം. ഇങ്ങനെ **സംവത്സരാദ്യദിവസത്തിലെ ഭഗണശേഷത്തിന്നു പ്രതിസംവത്സരം ഭേദമുണ്ട്.** പിന്നെ ദിവസംപ്രതിയുള്ള വൃദ്ധിക്കു സാമ്യമുണ്ട്. ആകയാൽ ഒരു ദിവസത്തെ ശേഷത്തോടു തുല്യമായിട്ടു മറ്റൊരു ദിവസം ആ യുഗത്തിൽ ഉണ്ടാകയില്ല.[18]

വ്യാഖ്യാനം 18: അവാന്തരയുഗാവസാനത്തിൽനിന്ന് അതീതമായിരിക്കുന്ന ദിവസം ഗുണകാരം തൽസമൻ ഭാജ്യം.
ധീജഗന്നൂപുരം ഭാജകം.
ശേഷങ്ങളെല്ലാം ഭഗണശേഷങ്ങൾ.

യുഗാവസാനത്തിൽനിന്ന് ആദ്യദിവസം $- \dfrac{576 \times 0}{210389}$

$$\text{ഫലം} = 0; \ \text{ശേഷം} = 0$$

ഒരു ദിവസം ചെല്ലുമ്പോൾ — $\dfrac{576 \times 1}{210389}$

$$\text{ഫലം} = 0; \ \text{ശേഷം} = 576 \ (\text{അധികം})$$

രണ്ടു ദിവസം ചെല്ലുമ്പോൾ — $\dfrac{576 \times 2}{210389}$

$$\text{ഫലം} = 0; \ \text{ശേഷം} = 2 \times 576 \ (\text{അധികം})$$

മൂന്നു ദിവസം ചെല്ലുമ്പോൾ — $\dfrac{576 \times 3}{210389}$

$$\text{ഫലം} = 0; \ \text{ശേഷം} = 3 \times 576 \ (\text{അധികം})$$

365 ദിവസം ചെല്ലുമ്പോൾ — $\dfrac{576 \times 365}{210389}$

$$\text{ഫലം} = 0; \ \text{ശേഷം} = 365 \times 576 \ (\text{അധികം})$$

അതായതു

$$\text{ഫലം} = 1, \ \text{ശേഷം} = 210389 - 365 \times 576 = 149 \ (\text{ഊനം})$$

രണ്ടാംകൊല്ലത്തിൽ ഒരു ദിവസം ചെല്ലുമ്പോൾ

$$\text{ശേഷം} = -149 + 576 = 427 \ (\text{അധികം})$$

രണ്ടാംകൊല്ലത്തിൽ രണ്ടു ദിവസം ചെല്ലുമ്പോൾ

$$\text{ശേഷം} = 427 + 576 \times 1 \ (\text{അധികം})$$

രണ്ടാംകൊല്ലത്തിൽ മൂന്നു ദിവസം ചെല്ലുമ്പോൾ

$$\text{ശേഷം} = 427 + 576 \times 2 \ (\text{അധികം})$$

മൂന്നു കൊല്ലം ചെല്ലുമ്പോൾ

$$\text{ശേഷം} = 2 \times 149 \ (\text{ഊനം})$$

മൂന്നാംകൊല്ലത്തിൽ ഒരു ദിവസം ചെല്ലുമ്പോൾ

$$\text{ശേഷം} = -2 \times 149 + 576 = 278 \ (\text{അധികം})$$

ഇങ്ങനെ ഒരു അവാന്തരയുഗത്തിൽ സംവത്സരാദ്യദിവസത്തിലെ ഭഗണശേഷത്തിന്നു പ്രതിവത്സരം ഭേദമുണ്ട്. പിന്നെ ദിവസംപ്രതിയുള്ള വൃദ്ധിക്കു സാമ്യമുണ്ട്. അതുകൊണ്ട് ഒരു അവാന്തരയുഗത്തിങ്കൽ ദിവസംപ്രതി ശേഷങ്ങൾക്കു ഭേദമുണ്ട്.

ആകയാൽ ധീജഗന്നൂപുരത്തിൽ കുറഞ്ഞതിൽ യാതൊരു സംഖ്യേക്കൊണ്ട് തത്സമനെ ഗുണിച്ചാൽ ധീജഗന്നൂപുരംകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ഇത്ര പോരാതെയിരിക്കും ഇത്ര അധികമായിട്ടിരിക്കും എന്നു താൻ അഗ്ഗുണകാരസംഖ്യ എത്ര എന്ന ചോദ്യം ഉപപന്നമത്രെ. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്നേടത്തു ഗുണകാരസംഖ്യയെ അറിവാനായിക്കൊണ്ടുള്ള ഗണിതത്തിന്നു കുട്ടാകാരമെന്നു പേരാകുന്നു.

അവിടെ ഏതാനുമൊരു സംഖ്യാ വിശേഷത്തെ ഉദ്ദേശിച്ച് ഓക്കുമ്പോൾ എളുപ്പമുള്ളൂ. എന്നിട്ട് ഈവണ്ണം നിരൂപിപ്പൂ. അവിടെ തൽസമൻ ഭാജ്യം ധീജഗന്നൂപുരം ഭാജകം, ഊനാംശമായിരിക്കുന്ന ഭഗണശേഷം നൂറ് ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്നേടത്തു യാതൊരു ദിവസം കൊണ്ടു തൽസമനെ ഗുണിച്ചാൽ **ഋണക്ഷേപ**മായിരിക്കുന്ന[19]

വ്യാഖ്യാനം 19: തൽസമനെ മുനിഗാഥകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാലുള്ള ഫലം ധീജഗന്നൂപുരത്തെ 20 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച ഫലത്തേക്കാൾ നൂറു കുറയും.

$$576 \times 7305 - 210389 \times 20 = 4207680 - 4207780 = -100.$$

അതായതു ഭാജ്യത്തിൽ നൂറു കുറഞ്ഞിരിക്കും. ഭാജ്യത്തിൽ നൂറു ഋണമായിട്ടുക്ഷേപിച്ചിരിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് 100-നെ ഭാജ്യത്തിങ്കലെ ഋണക്ഷേപമെന്നു പറയുന്നു. അതുപോലെ ഭാജ്യത്തിൽ 100 ഏറിയിരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അതു ഭാജ്യത്തിലെ ധനക്ഷേപം. ഭാജ്യത്തിൽ പോരാത്തതു് ഊനശേഷം, ഭാജ്യത്തിൽ ശേഷിച്ചതു് അധികശേഷം. അപ്പോൾ ഊനശേഷങ്ങൾ ഭാജ്യത്തിലെ ഋണക്ഷേപങ്ങൾ, അധികശേഷങ്ങൾ ഭാജ്യത്തിലെ ധനക്ഷേപങ്ങൾ. ഊനശേഷങ്ങൾ കുട്ടാകാരത്തിങ്കലെ ക്ഷേപങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ ധനക്ഷേപങ്ങളാകുന്നു; അധികശേഷങ്ങൾ കുട്ടാകരത്തിങ്കലെ ശുദ്ധികൾ അല്ലെങ്കിൽ ഋണക്ഷേപങ്ങളാകുന്നു. അപ്പോൾ ഭാജ്യത്തിൽ പോരാത്തവ ഊനശേഷങ്ങൾ അഥവാ ഭാജ്യത്തിലെ ഋണക്ഷേപങ്ങൾ. അവ കുട്ടാകാരത്തിങ്കലെ ക്ഷേപങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ ധനക്ഷേപങ്ങളാകുന്നു. ഭാജ്യത്തിൽ ശേഷിച്ചവ അധികശേഷങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ ഭാജ്യത്തിലെ ധനക്ഷേപങ്ങളാകുന്നു. അവ കുട്ടാകാരത്തിങ്കലെ ശുദ്ധികൾ അല്ലെങ്കിൽ ഋണക്ഷേപങ്ങളാകുന്നു. അപ്പോളിവിടെ 100 കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ ധനക്ഷേപമാകുന്നു.

ഈ ഭഗണശേഷം വരു എന്ന് ഊഹിക്കേവേണ്ടൂ എന്നുവെച്ചാൽ മുനിഗാഥ എന്നതിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ വരും എന്ന് അറിഞ്ഞുകൊള്ളാം എങ്കിൽ അവ്വണ്ണം കല്പിക്കേ വേണ്ടൂ. ഫലം പിന്നെ ത്രൈരാശികം കൊണ്ടും അറിയാം. അവിടെ തൽസമനും യാതൊരു സംഖ്യയും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതത്തേക്കാൾ ധീജഗന്നൂപുരവും യാതൊരു സംഖ്യയും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതം നൂറു സംഖ്യകൊണ്ട് അധികമായിട്ടിരിക്കും, ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്ന ഗുണകാരസംഖ്യകൾ രണ്ടും മുനിഗാഥ, 20 എന്നതിവിടെ വസ്തുവാകുന്നതു്. അവിടെ തൽസമനെ മുനിഗാഥ എന്നതിനെക്കൊണ്ട് ഗുണിച്ചതിനേക്കാൾ ധീജഗന്നൂപുരത്തെ ഇരുപതിൽ ഗുണിച്ചതു നൂറുസംഖ്യകൊണ്ട് അധികം. എന്നീ ഗുണകാരങ്ങളെ ഭാജ്യഭാജകങ്ങൾ ഇത്ര വലുതായിട്ടിരിക്കുമ്പോൾ ഊഹിച്ച് അറിഞ്ഞുകൂടാ. എന്നാൽ ഭാജ്യഭാജങ്ങളെ ചെറുതായിക്കൊണ്ടിട്ടു ഗുണകാരങ്ങളെ ഊഹിച്ചുകൊള്ളൂ. എന്നാലെളുപ്പമുണ്ട്.

ചെറുതാക്കുംപ്രകാരം പിന്നെ. അവിടെ ദിവസംപ്രതി തൽസമസംഖ്യ ഭഗണത്തിന്നു വൃദ്ധിയാകുന്നു. ആകയാൽ തൽസമനെ ധീജഗന്നൂപുരത്തിൽ വാങ്ങി വാങ്ങി ഇരിപ്പൂ. അവിടെ മാതുല സംഖ്യയോളമാവൃത്തി വാങ്ങിയാൽ പിന്നെ ധീവന്ദ്യ എന്നു ശേഷിക്കും. എന്നിട്ട് മാതുലദിവസത്തിന്നു തൽസമനേക്കാൾ കുറയും ശേഷം. അതു ഋണക്ഷേപം താനും. പിന്നെ ധീവന്ദ്യനേക്കാളും ശേഷം കുറയൂ എന്നു നിരൂപിക്കുന്നതു്. പിന്നെ മാതുലന്റെ പിറ്റെ ദിവസം ധീവന്ദ്യൻ പോയതത്സമൻ ഭഗണശേഷമാകുന്നതു്. അതു ധീവന്ദ്യനേക്കാളേറും. പിന്നെ ദിവസംപ്രതി ഏറുമത്രെ. പിന്നെ നാഗസ്ഥാനമെന്ന ദിവസത്തിനു ധീവന്ദ്യനിലിരട്ടിപോരാതെയിരിക്കും. പിന്നെ കാലസ്ഥാനമെന്ന ദിവസം ധീവന്ദ്യനെ രണ്ടാവൃത്തി തൽസമങ്കൽനിന്നു വാ

ങ്ങിയശേഷം അധികശേഷമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ശ്രദ്ധനയഃ എന്ന ദിവസം ധീവന്ദ്യൻ മുന്പടങ്ങ ഊനശേഷം. പിന്നെ സ്തംബ്ധനയഃ എന്ന ദിവസം ത്രിഗുണധീവന്ദ്യനെ തൽസമങ്കന്നകളഞ്ഞശേഷം ധീപ്രിയ എന്ന അധികശേഷമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ധീപ്രിയ എന്നതിങ്കന്നു കുറയൂ എന്ന്. സ്തബ്ധനയ എന്നതിന്നു ധീപ്രിയ എന്ന അധികശേഷം, മാതുലന്നു ധീവന്ദ്യനെന്ന ഊനശേഷം; ആകയാലിവറ്റിന്റെ യോഗം കാൎത്തവീര്യ എന്ന ദിവസം ധീപ്രിയ എന്നും ധീവന്ദ്യ എന്നും ഇവ രണ്ടിന്റേയുമന്തരം ഇരുപതു ഊനശേഷമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഭഗണശേഷം ഇരുപതിൽ കുറയൂ എന്ന്. പിന്നെ കാൎത്തവീൎയ്യനെ ആറിൽ ഗുണിച്ച ദിവസം ഇരുപതിനെ ആറിൽ ഗുണിച്ചതു് ഊനശേഷമായിട്ടിരിക്കും. സ്തബ്ധനയഃ എന്ന ദിവസം ധീപ്രിയ എന്ന അധികശേഷം. ഇദ്ദിവസങ്ങളുടെ യോഗം പ്രീതിദുഗ്ദ്ധേ എന്ന ദിവസം ആറിൽ ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന ഇരുപതും ധീപ്രിയ എന്നുമുള്ള അന്തരം ഒമ്പതു് അധികശേഷമായിട്ടിരിക്കും.[20]

വ്യാഖ്യാനം 20: "മാതുലഃ" (365), "നാഗസ്ഥാനം" (730), "ശ്രദ്ധനയഃ" (1095), "കാൎത്തവീൎയ്യഃ" (1461) ഇവ ആദ്യത്തെ നാലുസംവത്സരവാക്യങ്ങൾ.

$210389 - 365 \times 576 = 149$ (ഭാജകത്തിൽ ശേഷിച്ചതുകൊണ്ടു ഊനശേഷം).

സ്തബ്ധനയഃ എന്ന ദിവസം $(3 \times 365 + 1)$ ശേഷം

$$= -3 \times 149 + 576$$
$$= 129 \text{ (അധികശേഷം)}$$

സ്തബ്ധനയം + മാതുലഃ (= കാൎത്തവീൎയ്യഃ) എന്ന ദിവസം ശേഷം

$$= -149 + 129 = -20 \text{ (ഊനശേഷം).}$$

$6 \times$ കാൎത്തവീൎയ്യഃ + സ്തബ്ധനയഃ(= പ്രീതിദുഗ്ദ്ധേ) എന്ന ദിവസം.

$$\text{ശേഷം} = -6 \times 20 + 129.$$
$$= \underline{9} \text{ (അധികശേഷം).}$$

ഇങ്ങനെ അധികശേഷദിനവും ഊനശേഷദിനവും തങ്ങളിലെ യോഗത്തിന്നു ശേഷാന്തരം ശേഷമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ദിവസങ്ങൾ രണ്ടിനേയും ഗുണിച്ചു കൂട്ടൂ. ശേഷങ്ങൾ രണ്ടിനേയും അതതു ദിവസഗുണകാരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അന്തരിപ്പൂതും ചെയ്യൂ. എന്നാലായന്തരം യോഗദിവസത്തിന്നു ശേഷമായിട്ടിരിക്കും. അവിടെ ഭാജകത്തിൽ ശേഷിക്കിൽ ഊനശേഷം, ഭാജ്യത്തിൽ ശേഷിക്കിൽ അധികശേഷം എന്നു നിയതം.

ആകയാൽ ധീവന്ദ്യനേയും ധീപ്രിയനേയും അയ്യഞ്ചിൽ ഗുണിച്ച് അന്തരിച്ചാൽ ധീവന്ദ്യങ്കൽ നൂറു ഏറിയിരിക്കും. പിന്നെ മാതുലനേയും സ്തബ്ധനയനേയും അയ്യഞ്ചിൽ ഗുണിച്ചുകൂട്ടിയ മുനിഗാഥ എന്ന ദിവസത്തിന്നു നൂറ് ഊനശേഷമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഇരുപതിനെ പതിന്നാലിലും ഒമ്പതിനെ ഇരുപതിലും ഗുണിപ്പൂ. തങ്ങളിലന്തരം നൂറ്. പിന്നെ പ്രീതിദുഗ്ദ്ധ എന്നതിനെ ഇരുപതിലും കാൎത്തവീൎയ്യനെ പതിന്നാലിലും ഗുണിച്ച് തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂ. പിന്നെ അതിങ്കന്നു ധീജഗന്നൂപുരം പോയശേഷം മുനിഗാഥ എന്നതിന് ഊനശേഷം നൂറ് എന്നു ചൊല്ലിയെല്ലോ. ആകയാൽ ശേഷമെത്ര

ചെറുതായാൽ ഗുണകാരത്തെ ഊഹിക്കാവൂ അത്ര ചെറുതായിട്ട് ഊഹിച്ചുകൊള്ളൂ ഗുണകാരങ്ങളെ. എന്നാൽ എല്ലാടവും ഫലസാമ്യമുണ്ട്.[21]

വ്യാഖ്യാനം 21: ക്രിയയെ എളുപ്പമാക്കിത്തീർക്കുവാനുള്ള ഉപായത്തെ ഇവിടെ കാണിക്കുന്നു.

(ക) $(-149+129)\times 5 = -20\times 5 = -100$ (ഊനശേഷം)

(ഖ) $-20\times 14+9\times 20 = -280+180 = -100$

ഇവയ്ക്കു ദിവസങ്ങൾ:-

(ക) $(365+1096)\times 5 = 7305 =$ (മുനിഗാഥ)

(ഖ) $9862\times 20+1461\times 14 = 217694.$

ഇത് ഒരു അവാന്തരയുഗദിവസത്തേക്കാൾ ഏറുകകൊണ്ടു 210389 എന്നതിനെ ഇതിൽനിന്നും വാങ്ങേണം.

അപ്പോൾ $217694-210389 = 7305$ (മുനിഗാഥ എന്നു തന്നെ).

ഒരു അവാന്തരയുഗത്തിങ്കൽ ഒരു ശേഷം ഒരു ദിവസം മാത്രമേ ഉണ്ടാകയുള്ളു.

എന്നിട്ടു ഗുണകാരമെളുതായിട്ടുവരുംപ്രകാരമുണ്ടു ലീലാവതിയിങ്കൽ ചൊല്ലീട്ട്.

“ഭാജ്യോ ഹാരഃ ക്ഷേപകശ്ചാപവർത്ത്യഃ
കേനാപ്യാദൗ സംഭവേ കുട്ടകാർത്ഥം |
യേന ച്ഛിന്നൗ ഭാജ്യഹാരൗ ന തേന
ക്ഷേപശ്ചേത്തദ്ദുഷ്ടമുദ്ദിഷ്ടമേവ ||
പരസ്പരം ഭാജിതയോര്യയോര്യ-
ച്ഛേഷസ്തയോസ്സ്യാദപവർത്തനന്തൽ |
സ്വേനാപവർത്തേന വിഭാജിതൗ യൗ
തൗ ഭാജ്യഹാരൗ ദൃഢസംജ്ഞിതൗ സ്തഃ ||
മിഥോ ഭജേത്തൗ ദൃഢഭാജ്യഹാരൗ
യാവദ്വിഭക്തേ ഭവതീഹ രൂപം |
ഫലാന്യധോധസ്തദധോനിവേശ്യഃ
ക്ഷേപസ്തഥാന്തേ ഖമുപാന്തിമേന ||
സ്വോർദ്ധ്വേ ഹതേന്ത്യേന യുതേ തദന്ത്യം
ത്യജേന്മുഹുസ്സ്യാദിതി രാശിയുഗ്മം |
ഊർദ്ധ്വോ വിഭാജ്യേന ദൃഢേന തഷ്ടഃ
ഫലം ഗുണസ്സ്യാദപരോ ഹരേണ ||
ഏവം തദൈവാത്ര യദാ സമാസ്താ-
സ്സ്യുർല്ലബ്ധയശ്ചേദ്വിഷമാസ്തദാനീം |
യഥാ(ദാ)ഗതൗ ലബ്ധിഗുണൗ വിശോദ്ധ്യൗ
സ്വതക്ഷണാച്ഛേഷമിതൗ തു തൗ സ്തഃ || ഇതി[22]

വ്യാഖ്യാനം 22: ഈ കുട്ടാകാരക്രിയ അനുബന്ധത്തിൽ വിസ്തരിച്ചു കാണിച്ചിട്ടുണ്ട്.

ഇവിടെ ചെറിയ രണ്ടു ഭാജ്യഭാജകങ്ങളെ ഉദ്ദേശിക്കുന്നു. നടേ അതിങ്കൽ ക്രിയ യോജിച്ചാൽ വേണ്ടുന്നേടത്തു് അതിദേശിച്ചുകൊള്ളാം പിന്നെ. എന്നിട്ട് ഉദാഹരണം:

"ഏകവിംശതിയുതം ശതദ്വയം |
യൽഗുണം ഗണക പഞ്ചഷഷ്ടിയുക് ||
പഞ്ചവർജ്ജിതശതദ്വയോദ്ധൃതം |
ശുദ്ധിമേതി ഗുണകം വദാശു മേ" || ഇതി. (ലീലാവതീ).

ഇതിൻ പൊരുൾ[23]

വ്യാഖ്യാനം 23: $\dfrac{221 \times \text{ഗുണകാരം} + 65}{195} =$ ഫലം. ഈ ഗുണകാരഫലങ്ങളെ കാണുന്നതാണ് കുട്ടാകാരക്രിയ.

[Kuttakaram is to find the integral values of x and y from the Indeterminate Equation of the first degree $\dfrac{Ax \pm C}{B} = y$.

If A, B and C are known, this may be reduced to the form $Ax - By = \pm C$. The problem is to find the integral of x and y so that $Ax - By = \pm C$ where A, B, and C are given integers.]

ഇരുന്നൂറ്റിഇരുപത്തൊന്നിനെ യാതൊന്നു കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ അറുപത്തഞ്ചുകൂട്ടി നൂറ്റിതൊണ്ണൂറ്റഞ്ചുകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശേഷിയാതെ ഇരിപ്പൂ ആ ഗുണകാരമെത്രെ യെന്ന ചോദ്യം — ഇതു കുട്ടാകാരത്തിന്നു വിഷയമാകുന്നതു്.

അനന്തരം **അപവർത്തനപ്രകാരം** ഭാജ്യമാകുന്ന ഇരുന്നൂറ്റിഇരുപത്തൊന്നിനെ ഭാജകമാകുന്ന നൂറ്റിതൊണ്ണൂറ്റഞ്ചുകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശേഷം ഇരുപത്തിയാറ്. പിന്നെ അതിനെക്കൊണ്ട് നൂറ്റിതൊണ്ണൂറ്റഞ്ചിനെ ഹരിച്ചാൽ ശേഷം പതിമൂന്ന്. അതിനെക്കൊണ്ട് ഇരുപത്താറിനെ ഹരിച്ചാൽ ശേഷമൊട്ടുമില്ലായ്കയാൽ പതിമൂന്നിന്റെ ആവൃത്തി ഇരുപത്താറ്. അതു ഹേതുവായിട്ടുതന്നെ ഇരുപത്താറിനെക്കൊണ്ട് ഹരിച്ചുപോയ ഭാഗവും പതിമൂന്നിന്റെ ആവൃത്തിതന്നെയാകയാൽ ഈ ഭാഗവും പതിമൂന്നും കൂടിയതിനെക്കൊണ്ടു നടേ ഭാജ്യത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞതും പതിമൂന്നിന്റെ ആവൃത്തിതന്നെ. ഈ ന്യായംകൊണ്ടു തന്നെ ഇതിങ്കന്നു മുമ്പിലും അന്യോന്യം ഹരിച്ചതാകിൽ ഒടുക്കത്തെ ശേഷിച്ചതിന്റെ ആവൃത്തിതന്നെയായിട്ടിരിക്കും പോയ ഭാഗങ്ങളൊക്ക.[24]

വ്യാഖ്യാനം 24:

195) 221 (1	26 = 13 × 2. (13-ന്റെ ആവൃത്തി).
195	182 = 26 × 7 = 13 × 2 × 7 (13-ന്റെ ആവൃത്തി).
26) 195 (7	ഭാജ്യത്തിൽ കളഞ്ഞ
182	195 = 182 + 13 = 13. (14 + 1).
13) 26 (2	(13-ന്റെ ആവൃത്തി).
26	221 = 195 + 26. (13-ന്റെ ആവൃത്തി).
0	

എന്നാൽ പരസ്പരം ഹരിച്ച ശേഷിച്ചതിനെക്കൊണ്ട് നടേത്തെ ഭാജ്യഭാജകങ്ങളെ ഹരിച്ചാൽ ശേഷിയാതെ മുടിയും, അങ്ങനെ ഹരിച്ചിരിക്കുന്ന ഫലങ്ങൾക്കു **ദൃഢഭാജ്യഭാജകങ്ങൾ** എന്നു പേർ. എന്നാലിവിടെ ദൃഢഭാജ്യം പതിനേഴ്, ദൃഢഭാജകം പതിനഞ്ച്. പിന്നെ ക്ഷേപം അറുപത്തിഅഞ്ചിനെ പതിമൂന്നിൽ ഹരിച്ചാൽ ഫലം അഞ്ചിവിടയ്ക്കു ക്ഷേപമാകുന്നു. ഇവിടെ ക്ഷേപത്തെ പതിമൂന്നിൽ ഹരിച്ചാൽ മുടിയാതെ ഇരിക്കയില്ല. അതിന്നു ഹേതു. ഭാജകത്തിങ്കന്ന് അധികമാകുന്ന ഭാഗം ഭാജ്യത്തിങ്കൽ ഇരുപത്താറ് ഉള്ളൂ. അതിനെ ഗുണിച്ചതു ശേഷത്തിങ്കലെ വൃദ്ധിയാകുന്നതു്.[25]

വ്യാഖ്യാനം 25:

$$\text{ഭാജ്യം} = 221;\ \text{ഭാജകം} = 195;\ \text{ഇവയുടെ അപവർത്തനം} = 13.$$

$$\frac{221 \times 1}{195} - \text{ശേഷം} = 26 \times 1 = 26\ (13\text{-ന്റെ ആവൃത്തി})$$

$$\frac{221 \times 2}{195} - \text{ശേഷം} = 26 \times 2 = 52\ (13\text{-ന്റെ ആവൃത്തി})$$

$$\frac{221 \times 3}{195} - \text{ശേഷം} = 26 \times 3 = 78\ (13\text{-ന്റെ ആവൃത്തി})$$

ഗുണകാരത്തിന്റെ എത്ര ആവൃത്തികൊണ്ടു ഭാജ്യത്തെ ഗുണിക്കുന്നു, 26-ന്റെ അത്രാവൃത്തി അധികശേഷമായിട്ടു ഭാജ്യത്തിൽ ശേഷിക്കും. 13 കൊണ്ടു 26-നെ ശേഷം കൂടാതെ ഹരിക്കാവുന്നതുകൊണ്ടു ക്ഷേപത്തേയും 13 കൊണ്ട് അപവർത്തിക്കാം. കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ ഭാജ്യഭാജങ്ങളുടെ അപവർത്തനം ക്ഷേപത്തിന്റേയും അപവർത്തനമായിരിക്കുമെന്ന് നിയതം.

If $\dfrac{Ax \pm C}{B} = y$ (an integer), and A and B have a common factor, then C is also a multiple of the factor.

Let p be the common factor and let $A = ap$ and $B = bp$.

$$\text{Then } \frac{apx \pm C}{bp} = y.$$

$$\therefore apx \pm C = y \cdot bp.$$

$$\therefore \pm C = p(y \cdot b - ax)$$

$$\therefore p \text{ is a factor of } \underline{C}.$$

ആകയാലെ പതിമൂന്നിൽ ഹരിച്ചാൽ മുടിഞ്ഞിരിക്കുമെത്രെ. അല്ലായ്കിൽ ഈ ഭാജ്യഭാജകങ്ങളിൽ സംഭവിക്കുന്ന ക്ഷേപമല്ല ഉദ്ദേശിച്ചതു് എന്നു അറിയേണം. ആകയാലെ ഉദ്ദേശമനുപപന്നം ഈ വണ്ണമിരിക്കുന്നതു് എന്നു കല്പിക്കേണം.

അനന്തരമിവ്വണ്ണമപവർത്തിച്ച ദൃഢങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഭാജ്യഭാജകക്ഷേപങ്ങൾ പതിനേഴും പതിനഞ്ചും, അഞ്ചും, ഇവറ്റെക്കൊണ്ടു ഭാജ്യത്തിന്റെ ഗുണകാരത്തെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം. അവിടെ ഭാജ്യം പതിനേഴിനെ ഭാജകമായിരിക്കുന്ന പതിനഞ്ചുകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം ഒന്ന്; ശേഷം രണ്ട്. പിന്നെ ആ രണ്ടിനെക്കൊണ്ടു പതിനഞ്ചിനെ ഹരിപ്പൂ. ഫലം ഏഴ്, നടേത്തെ ഫലത്തിന്നു കീഴെ വെപ്പൂ; ശേഷം ഒന്ന്.

ഭാജ്യഭാജകങ്ങളിൽ ഒരിടത്തുശേഷമൊന്നാവോളം അന്യോന്യം ഹരിപ്പൂ. ഫലങ്ങളെ ക്രമേണ കീഴെ കീഴെ വെപ്പൂ. അപ്പഫലപരമ്പരയ്ക്കു വല്ലീ എന്നു പേർ. അനന്തരം ഈ വല്ലീഫലങ്ങൾ ഒന്നും, ഏഴും, ശേഷങ്ങൾ രണ്ടും ഒന്നും ഇവറ്റെ ക്രമേണ കീഴെ കീഴെ വെച്ചു വല്യാനയനന്യായവിപരീതക്രിയയെക്കൊണ്ട് ഭാജ്യഭാജകങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കും പ്രകാരത്തെ കാട്ടുന്നു. അവിടെ ഒടുക്കത്തെ ക്രിയ നടേ വേണ്ടുവതു്. അതാകുന്നതു ഭാജ്യത്തിങ്കലെ ശേഷം രണ്ടു്. അതുകൊണ്ടു ഭാജകം പതിനഞ്ചിനെ ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലം ഏഴ്. എന്നിട്ട് അവിടുത്തെ ഹാരകമാകുന്ന രണ്ടിനെക്കൊണ്ട് തന്റെ ഫലമാകുന്ന ഏഴിനെ ഗുണിപ്പൂ. എന്നാൽ തന്റെ ഹാര്യ്യമുണ്ടായിവരും, ഹൃതശേഷമില്ലാത്തേടത്തു്. ഉള്ളേടത്തു പിന്നെ ശേഷത്തെ ഈ ഘാതത്തിൽ കൂട്ടിയാൽ ഹാര്യ്യമായിട്ടുവരും. ഇവിടെ രണ്ടും ഏഴും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതം പതിനാലിൽ ശേഷിച്ച ഒന്നിനെ കൂട്ടിയാൽ രണ്ടിന്റെ ഹാര്യ്യമായിട്ടിരുന്ന പതിനഞ്ചും വരും. പിന്നെ ആ പതിനഞ്ചിന്റെ ഹാര്യ്യത്തെ വരുത്തും പ്രകാരം. പതിനഞ്ചിനെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലം ഒന്ന്. അതിനെ പതിനഞ്ചുകൊണ്ടു ഗുണിപ്പൂ. എന്നാൽ പതിനഞ്ചു തന്നെ. അതിൽ പിന്നെ അവിടെ ശേഷിച്ച ശേഷം രണ്ടിനേയും കൂട്ടിയുള്ള പതിനേഴ് ആ പതിനഞ്ചിന്റെ ഹാര്യ്യമാകുന്നതു്. പിന്നെ മുമ്പിലും വല്ലീഫലങ്ങൾ ഉണ്ടായിട്ടിരിക്കുന്നതാകിൽ ഇപ്പതിനേഴിനെക്കൊണ്ട് തനിക്കടുത്ത മുമ്പിലെ ഫലത്തെഗുണിച്ചതിൽ പതിനഞ്ചിനെ കൂട്ടൂ. എന്നാൽ പതിനേഴിന്റെ ഹാര്യ്യം വരും. ഇപ്രകാരം എല്ലാടവും ഉപാന്ത്യത്തെക്കൊണ്ട് തനിക്കടുത്ത മുമ്പിലെ ഫലത്തെ ഗുണിപ്പൂ. അന്ത്യത്തെ കൂട്ടൂ. പിന്നെ ആ അന്ത്യത്തെ കളഞ്ഞു പിന്നെയുള്ളതിൽവെച്ച് ഉപാന്ത്യത്തെക്കൊണ്ട് അതിനടുത്തു മുമ്പിലേതിനെ ഗുണിച്ചതിൽ അന്ത്യത്തെ കൂട്ടി ആയന്ത്യമായിട്ടു വെച്ചിരിക്കുന്നതിനെ കളവൂ. ഇങ്ങനെയാകുമ്പോൾ യാതൊരിക്കൽ രണ്ടു പങ്ക്തിയേ ഉള്ളൂ എന്നു വരുന്നു, അപ്പോൾ ഉപാന്ത്യമില്ലായ്കയാൽ ക്രിയ ഒടുങ്ങി.[26]

വ്യാഖ്യാനം 26:

$$\left.\begin{array}{l} 1 - 17 \\ 7 - 15 \\ 2 \\ 1 \end{array}\right\}$$ ഇവിടെ $7, 2, 1$ എന്നീ വല്ലീസംഖ്യയിൽ 7–ഊർദ്ധ്വം; 1—അന്ത്യം; അന്ത്യത്തിന്റെ മേലെയുള്ള സംഖ്യ 2 ഉപാന്ത്യം.

മേലേതും കീഴേതും അതായത് ഊർദ്ധ്വവും അന്ത്യവുമായിട്ട് രണ്ടു സംഖ്യകൾ മാത്രം ശേഷിക്കുമ്പോൾ, ഉപാന്ത്യത്തിനു സ്ഥാനമില്ലാത്തതിനാൽ ഉപാന്ത്യമില്ല എന്നു പറയുന്നു.

പിന്നെ ആ രണ്ടു രാശികളിൽ വെച്ച് മേലേതു ഭാജ്യമായിട്ടിരിക്കും, കീഴേതു ഭാജകവും. ഇങ്ങനെ ഭാജകത്തേക്കാൾ ഭാജ്യം വലുതായിട്ടിരിക്കുന്നേടത്തു്. ചെറുതായിട്ടിരിക്കുന്നേടത്തു പിന്നെ ഭാജ്യം കീഴേതു്, ഭാജകവും മേലേതു് ആയിട്ടിരിക്കും. **ഭാജ്യത്തിങ്കന്നുണ്ടായ ഫലത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു ഭാജ്യം വരും; ഭാജകത്തിങ്കന്നുണ്ടായ ഫലത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു ഭാജകവും എന്നു നിയമമാകുന്നതു്.** ഈ ക്രിയയ്ക്കു **വല്ല്യപസംഹാരമെന്നു** പേർ. ഇതിന്നു വിപരീതക്രിയയിങ്കന്നു കുറഞ്ഞൊരു വിശേഷമുണ്ട് എന്നു തോന്നും. വല്ലീഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുന്നേടത്തു ഹരണംതന്നേ

ഉള്ളൂ. അതിന്റെ ഉപസംഹാരത്തിങ്കൽ ഗുണനം തന്നെ അല്ലാ ഉള്ളൂ; ഗുണിച്ചതിൽ അവിടവിടുത്തെ ഹൃതശേഷത്തെ കൂട്ടുക എന്നൊരു ക്രിയകൂടെ ഉണ്ട്. എന്നിട്ടു കേവലം വിപരീതക്രിയയിങ്കന്നു കുറഞ്ഞൊരു വിശേഷമുണ്ടെന്നു തോന്നും. ഉപപത്തിയെ നിരൂപിക്കുമ്പോൾ വിപരീതക്രിയ തന്നെ. നടേയും ശേഷത്തെ കളഞ്ഞിട്ട് അത്രെ ഇരിക്കുന്നു ഫലം കൊണ്ട്,[27] എന്നിട്ട്.

വ്യാഖ്യാനം 27: ആദ്യത്തെ ക്രിയയിൽ ഹാരകം × ഫലം = ഭാജ്യം − ശേഷം. അതു കൊണ്ടു ഭാജ്യത്തിൽ നിന്നു ശേഷം കളഞ്ഞതിനെ ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ചപ്പോൾ ഫലം വന്നു. ഫലത്തെ ഹാരകംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ശേഷത്തെ കൂട്ടുക എന്നത് ഇതിങ്കന്നു വിപരീത ക്രിയതന്നെയണല്ലൊ.

അനന്തരം ഭാജ്യഭാജകങ്ങളെന്നു പേർ പെട്ടിരിക്കുന്ന പ്രമാണഫലത്തേയും പ്രമാണത്തേയും വരുത്തിയ വല്ല്യപസംഹാരന്യായം കൊണ്ടുതന്നെ ഇച്ഛാഫലത്തേയും ഇച്ഛയേയും വരുത്തുംപ്രകാരത്തെ കാട്ടുന്നു.[28]

വ്യാഖ്യാനം 28: സാധാരണയായി ത്രൈരാശികത്തിൽ പ്രമാണം, പ്രമാണഫലം, ഇച്ഛാ, ഇച്ഛാഫലം എന്നിവയിൽ ഏതെങ്കിലും മൂന്നെണ്ണംകൊണ്ടു നാലാമത്തേതിനെ കാണുവാനുള്ള ഉപായത്തെ പറയുന്നു. ഇവിടെ ഭാജ്യമായ 17 പ്രമാണഫലവും ഭാജകമായ 15 പ്രമാണവുമാകുന്നു. ഇച്ഛാഫലമാകുന്ന ഫലത്തിനുപകരം ഹരിച്ചശേഷമുള്ള ഹരണശേഷത്തെയാണ് തന്നിരിക്കുന്നത്. ഈ ഹരണശേഷത്തെ ക്ഷേപമെന്നോ ശുദ്ധി എന്നൊ കല്പിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് ഇച്ഛയും ഇച്ഛാഫലവുമായ ഗുണകാരവും ഫലവും സാദ്ധ്യങ്ങളാകുന്നു.

$$\frac{17 \times \text{ഗുണകാരം} + 5}{15} = \text{ഫലം}$$

$$\frac{\text{ഭാജ്യം} \times \text{ഗുണകാരം} + \text{ശേഷം}}{\text{ഭാജകം}} = \text{ഫലം}$$

$$\therefore\ \text{ഗുണകാരം} = \text{ഇച്ഛാ};\ \ \text{ഫലം} = \text{ഇച്ഛാഫലം}$$

അവിടെ ദൃഢഭാജ്യഭാജകങ്ങളെ അന്യോന്യം ഹരിച്ച ഫലങ്ങളെ കീഴെ കീഴെ വെപ്പൂ. ഇങ്ങനെ ഭാജ്യഭാജകങ്ങളിൽ ഒരിടത്തു രൂപം മാത്രം ശേഷിപ്പോളം. പിന്നെ വല്ലീഫലങ്ങളുടെ കീഴെ അപവർത്തിതക്ഷേപത്തേയും വെപ്പൂ. അതിന്റെ കീഴെ ശൂന്യത്തേയും വെപ്പൂ. അവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ ഇവിടയ്ക്ക് ഒന്നും, ഏഴും, അഞ്ചും, ശൂന്യവും ഇങ്ങനെ ഇരിപ്പൂ വല്ലീ. പിന്നെ ഇതിനെക്കൊണ്ടും മുമ്പിലെപ്പോലെ ഉപസംഹാരം ചെവൂ. അവിടെ കളയുന്ന അന്ത്യത്തെ വേറെ ഒരിടത്തു ക്രമേണ വെച്ചിരിക്കിലുമാം. അപ്പോളവ കീഴന്നു തുടങ്ങീട്ടു ശൂന്യം, അഞ്ച്, മുപ്പത്തഞ്ച്, നാല്പത് എന്നിങ്ങനെ ഇരിക്കും.[29]

വ്യാഖ്യാനം 29:

വല്ലീ:		ഉപസംഹൃതഫലങ്ങൾ
↓		↓
1	·········	$40\ (1 \times 35 + 5)$
7	·········	$35\ (7 \times 5 + 0)$

5
0

ഇവറ്റിൽവെച്ച ശൂന്യവും മുപ്പത്തഞ്ചും ഗുണകാരം; അഞ്ചും നാല്പതും ഫലം. ഇവറ്റിന്ന ഹാരഭാജ്യങ്ങളാകുന്നവ ഒന്നും രണ്ടും പതിനഞ്ചും പതിനേഴും. അവിടെ ഒന്നും പതിനഞ്ചും ഹാരം, രണ്ടും പതിനേഴും ഭാജ്യം. അവിടെ നടേ ഭാജ്യശേഷം രണ്ടിനെ ശൂന്യത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതു ശൂന്യം. അതിൽ ക്ഷേപം അഞ്ചുകൂട്ടി ഹാരശേഷം ഒന്നിനെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം അഞ്ച്. പിന്നെ രണ്ടാമത് ഭാജ്യശേഷം രണ്ടിനെത്തന്നെ മുപ്പത്തഞ്ചിൽ ഗുണിച്ച് അഞ്ചുകൂട്ടി പതിനഞ്ചിൽ ഹരിപ്പൂ. ഫലം അഞ്ച്. പിന്നെ മൂന്നാമത് പതിനേഴിനെ മുപ്പത്തിഅഞ്ചിൽ ഗുണിച്ച് അഞ്ചുകൂട്ടി പതിനഞ്ചിൽ ഹരിപ്പൂ. ഫലം നാല്പത്. ഇങ്ങനെ ഇരുപുറത്തെ ഗുണകാരങ്ങളെക്കുറിച്ച് നടുവിലേതു ഫലമാം. ഈവണ്ണമേ തന്റെ കീഴും മേലുമുള്ള ഫലങ്ങളെക്കുറിച്ച് നടുവിലിരിക്കുന്നതു താൻ ഗുണകാരമാം. ഈവണ്ണം ഭാജ്യഹാരങ്ങളും തന്റെ ഇരുപുറത്തേതിനെക്കുറിച്ചും ഭാജ്യഹാരങ്ങളാം.[30]

വ്യാഖ്യാനം 30:

$$\text{ഫലം} = 40 - \text{ഭാജ്യം} = 17$$
$$\text{ഗുണകാരം} = 35 - \text{ഹാരകം} = 15$$
$$\text{ഫലം} = 5 - \text{ഭാജ്യം} = 2$$
$$\text{ഗുണകാരം} = 0 - \text{ഹാരകം} = 1$$

ഭാജ്യമായ രണ്ടിന്ന ഗുണകാരങ്ങൾ $0, 35$; ഹാരകങ്ങൾ $1, 15$; ഫലം $= 5$.
ഭാജ്യമായ 17-ന്ന ഗുണകാരം $= 35$, ഹരകം 15, ഫലം 40

$$\frac{2 \times 0 + 5}{1} \underline{= 5;}$$
$$\frac{2 \times 35 + 5}{15} \underline{= 5;}$$
$$\frac{17 \times 35 + 5}{15} \underline{= 40;}$$

പിന്നെ മുപ്പത്തഞ്ചിനെ പതിനഞ്ചിൽ ഹരിച്ചശേഷം അഞ്ചു ഗുണകാരമാകിലുമാം. നാല്പതിനെ പതിനേഴിൽ ഹരിച്ച ശേഷം ആറു ഫലമാകിലുമാം. ഇതിന്ന തക്ഷണമെന്നു പേർ.[31]

വ്യാഖ്യാനം 31: തക്ഷണം: ഗുണകാരം ഹരകത്തേക്കാളും ഫലം ഭാജ്യത്തേക്കാളും ഏറുന്ന സമയത്തു തക്ഷണം ചെയ്യാം. അതായതു ഗുണകാരത്തെ ഹാരകംകൊണ്ടും ഫലത്തെ ഭാജ്യംകൊണ്ടും ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന ശേഷങ്ങൾ സ്ഥടഗുണകാരഫലങ്ങളായിട്ടു വരും. എത്രതവണ ഹാരകത്തെ ഗുണകാരത്തിൽനിന്നോ ഭാജ്യത്തെ ഫലത്തിൽനിന്നോ വാങ്ങുന്നു, അത്ര തവണ ഭാജ്യത്തെ ഫലത്തിൽനിന്നോ ഹാരകത്തെ ഗുണകാരത്തിൽനിന്നോ വാങ്ങണം. ഇങ്ങനെ ശിഷ്ടത്തെ മാത്രം ഉദ്ദേശിച്ചുള്ള ഹാരണത്തെയാണ് “തക്ഷണ”മെന്നു പറയുന്നത്.

$$\text{ഇവിടെ ഗുണകാരം} = 35; \ \text{ഹാരകം} = 15$$

$$\frac{35}{15} \text{ എന്നേടത്തു ഫലം } 2, \text{ ശേഷം } 5.$$

$$\text{ഫലം} = 40, \text{ ഭാജ്യം } 17$$

$$40 - 2 \times 17 = 6$$

$$\text{അപ്പോൾ സ്ഫുടഗുണകാരം} = 5;$$

$$\text{സ്ഫുടഫലം} = 6; \frac{17 \times 5 + 5}{15} = \underline{6}.$$

ഇങ്ങനെ ഇഷ്ടക്ഷേപത്തിങ്കലെ ഗുണലബ്ധികൾ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം.

അനന്തരം വല്യപസംഹാരന്യായത്തെ തൽസമനം ധീജഗന്നൂപുരവും ഭാജ്യഭാജകങ്ങളാകുമ്പോളെയ്ക്ക കാട്ടുന്നു. അവിടെ അന്യോന്യ ഹരണശേഷങ്ങൾ ക്രമത്താലെ ധീവന്ദ്യഃ, ധീപ്രിയഃ, നാരീ, ധിക്, ശ്രീഃ, കിം എന്നിവ. വല്ലീഫലങ്ങൾ പിന്നെ മാൎത്താണ്ഡഃ, ഗൗഃ, കിം, തൽ, ശ്രീഃ, വിൽ എന്നിവ.[32]

വ്യാഖ്യാനം 32:

$$\text{ഭാജ്യം} = 576;$$

$$\text{ഭാജകം} = 210389.$$

ചെറിയ ഭാജ്യഹാരകങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുവാനായിക്കൊണ്ട് ഇവയെ അന്യോന്യഹരണം ചെയ്യുന്നു.

```
576)210389(365
    1728
     3758
     3456
      3029
      2880
       149)576(3
           447
           129)149(1
               129
                20)129(6
                   120
                     9)20(2
                       18
                        2)9(4
                          8
                          1
```

ഇവിടെ ഭാജ്യത്തിങ്കൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ ക്ഷേപത്തെ ധനമായിട്ട് ഉദ്ദേശിച്ചതാ

കിലും ഋണമെന്നു കല്പിക്കുന്നു.[33]

വ്യാഖ്യാനം 33: ഭാജ്യത്തിങ്കൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ അതു ഭാജ്യത്തിങ്കലെ ധനക്ഷേപമാകുന്നതുകൊണ്ട് കുട്ടാകാരത്തിൽ ഋണക്ഷേപമായിട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ മുനിഗാഥ, 20 എന്ന മുൻ ഉദാഹരണത്തിൽ, നൂറിനെ കുട്ടാകാരത്തിൽ ധനക്ഷേപമായിട്ടാണ് ഉദ്ദേശിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഋണക്ഷേപമായി കല്പിച്ചു ക്രിയചെയ്തു ധനക്ഷേപമായിട്ടിരിക്കുമ്പോളെ ഗുണകാരലബ്ധികളെ വരുത്തുവാനുള്ള ഉപായത്തെയാണിവിടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. [54-ആം പേജ് ടിപ്പിണി നോക്കുക.]

എന്നിട്ടിവിടെ രൂപം ഋണക്ഷേപമെന്നു കല്പിച്ച വല്ലീഫലങ്ങളുടെ കീഴെ ഒന്നിനെ വെപ്പൂ. അതിനു കീഴെ ശൂന്യത്തേയും. പിന്നെ വില്യുപസംഹാരഞ്ചെയ്ത് ഉപസംഹൃതവല്ലീഫലങ്ങളെ ക്രമേണ കീഴന്നു മേപ്പട്ടു വെപ്പൂ. അവറ്റിന്റെ സംഖ്യ—നു, കിം, വിൽ, ധീഃ, ഹോമഃ, സൂത, ധീശത്രുഃ, ഖഈഷവേധഃ എന്നിങ്ങനെ.

അനന്തരം ധീവന്ദ്യനാദികളിൽ ഒടുക്കത്തെ ഭാജ്യശേഷം ഒന്ന്. അതിനെ ഋണക്ഷേപം ഒന്നിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഋണക്ഷേപം കളഞ്ഞാൽ ശൂന്യമാകയാൽ ഫലം ശൂന്യം. ഇവ്വണ്ണമാകയാൽ ത്രൈരശികത്തിങ്കൽ രണ്ടു ഹാരം ഒന്നു ഭാജ്യം, ഒന്നു ഗുണകാരം, ശൂന്യം ഫലം. രണ്ടാം ത്രൈരാശികത്തിങ്കൽ ഹാരം ശ്രീഃ എന്നുതന്നെ, ഭാജ്യം ഇതിന്റെ മേലെ ധീഃ എന്ന്, ഗുണം നടേത്തെ കിം എന്നുതന്നെ. ഫലം ഇതിന്റെ മേലെ വിൽ എന്ന്. മൂന്നാമതിങ്കൽ മേലെ നരഃ എന്നു ഹാരം, ഭാജ്യം നടേത്തെ ധീഃ എന്നുതന്നെ, ഗുണം മറ്റേതിന്റെ മേലെ ധീഃ, ഫലം മുമ്പിലെ കീഴെ വിൽ തന്നെ. നാലാമതിങ്കൽ പിന്നെ ഹാരഭാജ്യഗുണലബ്ധികളാകുന്നവ ക്രമത്താലെ നരഃ, ധീപ്രിയഃ, ധീഃ, ഹോമഃ എന്നിവ. അഞ്ചാമതിങ്കൽ ധിവന്ദ്യഃ, ധീപ്രിയഃ, സതീ, ഹോമഃ. ആറാമതിങ്കൽ ധീവന്ദ്യഃ, തത്സമഃ, സതീ, ധീശത്രുഃ. ഏഴാമതിങ്കൽ ധീജഗന്നൂപുരം ഹാരം, തൽസമൻ ഭാജ്യം, രത്നസ്തംഭാദ്ധം ഗുണം, ധമ്മരാൾ ഫലം. ഇങ്ങനെ ഈ ഭാജ്യഭാജകങ്ങൾക്കു രൂപം ഋണക്ഷേപമാകുമ്പോളെ ഗുണലബ്ധികളാകുന്നത്. പിന്നെ ഈ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ രൂപം ധനക്ഷേപമാകുമ്പോളേ ഗുണലബ്ധികളാകുന്നത് ഋണക്ഷേപത്തിന്റെ ഗുണലബ്ധികളെ ഹാരഭാജ്യങ്ങളിൽ നിന്നു കളഞ്ഞ ശേഷങ്ങൾ സൂദോസൗമായയാ, സകലഃ എന്നിവ. ഇങ്ങനെ ക്ഷേപത്തിന്റെ ധനണ്ണത പകരുമ്പോളേ ഗുണകാരലബ്ധികൾ വരുംപ്രകാരം. പിന്നെ ഈ രൂപക്ഷേപത്തിന്റെ ഗുണലബ്ധികളെ ഇഷ്ടക്ഷേപംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഇഷ്ടക്ഷേപത്തിന്റെ ഗുണലബ്ധികളുളവാകും.[34]

വ്യാഖ്യാനം 34: ഇവിടെ ഭാജ്യത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് രൂപത്തെ ഋണക്ഷേപമെന്നു കല്പിക്കുന്നു.

വല്ലീ		വല്യുപസംഹാരഫലങ്ങൾ
365	....	94602 — ഗുണം
3	....	259 — ഫലം
1	....	67 — ഗുണം
6	....	58 — ഫലം
2	....	9 — ഗുണം

4 .... 4 — ഫലം
1 .... 1 — ഗുണം
0 .... 0 — ഫലം

ഭാജകം ഭാജ്യത്തേക്കാളേറിയതുകൊണ്ട്, ഗുണകാരം വലിയതു്, ഫലം ചെറുതു്. ക്രമേണയുള്ള ഭാജകഭാജ്യങ്ങൾ — 210389, 576, 149, 129, 20, 9, 2, 1.

എല്ലാ ത്രൈരാശികത്തിങ്കലും ഭാജ്യത്തെ അതതു ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച അതതു ശേഷത്തെ സംസ്കരിച്ച് അതതു ഭാജകംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലംവരും.

ഭാജ്യം	ത്രൈരാശികക്രമം	ഗുണകാരം		ഹാരകം		ഫലം
576	7, 6	94602		210389		259
129	5, 4	67		149		58
9	3, 2	9		20		4
1	1	1		2		0

ഒരു ഭാജ്യത്തിനു രണ്ടു ഗുണകാരം, രണ്ടു ഹാരകം ഒരു ഫലം എന്നും അതുപോലെ ഒരു ഗുണകാരത്തിന്നു രണ്ടു ഭാജ്യങ്ങൾ; ഒരു ഫലത്തിന്നു രണ്ടു ഹാരകങ്ങൾ; ഒരു ഹാരകത്തിനു രണ്ടു ഫലങ്ങൾ എന്നും പട്ടികയിൽനിന്നും മനസ്സിലാക്കാമല്ലോ.

ത്രൈരാശികങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെയാണ് പട്ടികയിൽ (ചുവട്ടിൽനിന്നു) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 എന്ന് അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നതു്.

4-ആം ത്രൈരാശികം:- ഭാജ്യം = 129, ഹാരകം = 20, ഗുണകാരം = 9.

$$\therefore \text{ ഫലം } = \frac{129 \times 9 - 1}{20} = \frac{1160}{20} = \underline{58}$$

5-ആം ത്രൈരാശികം:- ഭാജ്യം = 129, ഹാരകം = 149, ഗുണകാരം = 67.

$$\therefore \text{ ഫലം } = \frac{129 \times 67 - 1}{149} = \frac{8642}{149} = \underline{58}$$

ഇതുപോലെ ബാക്കി ത്രൈരാശികങ്ങളും കണ്ടുകൊൾക.

രൂപം ധനക്ഷേപമാകുമ്പോൾ ഗുണകാരഫലത്തെ അതതു ഹാരകഭാജ്യങ്ങളിൽ നിന്നു വാങ്ങിയവ ഉദ്ദിഷ്ടഗുണകാരഫലങ്ങൾ ആയിട്ടുവരും.

ത്രൈരാശികത്തിന്റെ എണ്ണം	രൂപം ഋണക്ഷേപം				രൂപം ധനക്ഷേപം			
	ഭാജ്യം	ഗുണം	ഹാരം	ഫലം	ഭാജ്യം	ഗുണം	ഹാരം	ഫലം
1	1	1	2	0	1	1	2	1
2	9	1	2	4	9	1	2	5

3	9	9	20	4	9	11	20	5
4	129	9	20	58	129	11	20	71
5	129	67	149	58	129	82	149	71
6	576	67	149	259	576	82	149	317
7	576	94602	210389	259	576	115787	210389	317

രൂപം ധനക്ഷേപമായിട്ടിരിക്കുമ്പോൾ:-

5-ആം ത്രൈരാശികം:- ഭാജ്യം $= 129$, ഗുണം $= 82$, ഹാരകം 149.

$$\therefore \text{ ഫലം } = \frac{129 \times 82 + 1}{149} = \frac{100579}{149} = \underline{71}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{ഇവിടെ ഗുണകാരം} &= 149 - 67 = 82 \\ \text{ഫലം} &= 129 - 58 = \underline{71} \end{aligned}\right\}$$

4-ആം ത്രൈരാശികം:- ഭാജ്യം $= 129$, ഗുണം $= 11$, ഹാരകം $= 20$.

$$\therefore \text{ ഫലം } = \frac{129 \times 11 + 1}{20} = \frac{1420}{20} = \underline{71}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{ഗുണകാരം} &= 20 - 9 = 11 \\ \text{ഫലം} &= 129 - 58 = \underline{71} \end{aligned}\right\}$$

ശുദ്ധിക്ഷേപങ്ങൾ രൂപമല്ലെങ്കിൽ, ഗുണകാരഫലങ്ങളെ ഗുദ്ധിക്ഷേപങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച തക്ഷണം ചെയ്യേണ്ടതുണ്ടെങ്കിൽ അതും ചെയ്താൽ ഉദ്ദിഷ്ടഗുണകാരലബ്ധികൾ വരും.

ഉദാഹരണം:- 3-ആം ത്രൈരാശികത്തിൽ ഋണക്ഷേപം 3.

ആപ്പോൾ ഗുണകാരം $= 9 \times 3 = 27$ ഫലം $= 4 \times 3 = 12$

ഹാരകം $= 20$ ഭാജ്യം $= 9$

തക്ഷിതഗുണകാരം $= 7$ തക്ഷിതഫലം $= 3$

(തക്ഷിതം=തഷ്ടം, തക്ഷണാനന്തരം ലഭിച്ചത്.)

$$\text{ഫലം } = \frac{9 \times 7 - 3}{20} = \frac{60}{20} \underline{= 3}$$

ധനക്ഷേപം $= 3$,

ഗുണകാരം $= 11 \times 3 = 33$ ഫലം $= 5 \times 3 = 15$

ഹാരകം $= 20$ ഭാജ്യം $= 9$

തക്ഷിതഗുണകാരം $= 13$ തക്ഷിതഫലം $= 6$

$$\text{ഫലം } = \frac{9 \times 13 + 3}{20} \underline{= 6}$$

ഇതുപോലെതന്നെ കുട്ടാകാരക്രിയകൊണ്ടും ത്രൈരാശികം കൊണ്ടും ഗുണകാരഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കാം. ഇവിടെ വില്ലിയുടെ ഉപാന്ത്യത്തിൽ രൂപത്തെ വെയ്ക്കുന്നതിന്നു പകരം ഇഷ്ടക്ഷേപത്തെ തന്നെ വെച്ച വല്യുപസംഹാരംചെയ്തും ഗുണകാരഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കാം. ഈ വിഷയങ്ങളെല്ലാം അനുബന്ധത്തിൽ വിസ്തരിച്ചിട്ടുണ്ട്.

ഇങ്ങിനെ ചൊല്ലിയതായി കുട്ടാകാരം സംക്ഷേപിച്ചിട്ട്.

6

പരിധിവ്യാസപ്രകരണം

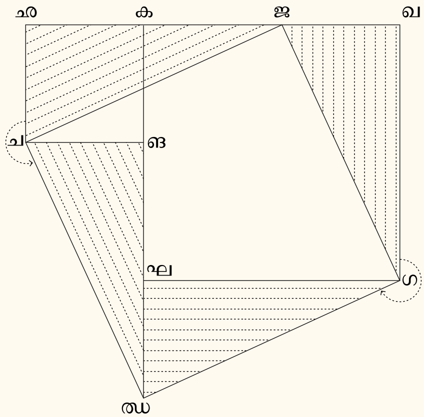
അനന്തരം ഒരു സമചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തെ കോൽ വിരൽ എന്നു തുടങ്ങി നീളത്തെ അളക്കുന്ന മാനങ്ങളാൽ ഒന്നുകൊണ്ട് എത്ര എന്നു കല്പിച്ച് അതിന്റെ ഒരു ബാഹു വ്യാസമാകുമ്പോൾ വൃത്തമെത്രമാനമെന്നറിയുംപ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

അവിടെ **ഭുജാവർഗ്ഗവും കോടിവർഗ്ഗവും കൂടിയാൽ കർണ്ണവർഗ്ഗമാകും** എന്നതിനെ ചൊല്ലുന്നു. ഇവിടെ യാതൊന്നിന്റെ വർഗ്ഗമാകുന്നു, അതു ബാഹുവാകുന്ന ഒരു സമചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം വർഗ്ഗമാകുന്നത്. പിന്നെ സമചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തിങ്കൽ താൻ ദീർഘചതുരശ്ര ക്ഷേത്രത്തിങ്കിൽ താൻ ഒരു കോണിങ്കന്നു ക്ഷേത്രത്തിന്റെ നടുവേ മറ്റെ കോണിങ്കൽ ചെല്ലുന്ന സൂത്രം കർണ്ണമാകുന്നത്. ഇവിടെ ഒരു ചതുരശ്രത്തിനു രണ്ടു പാർശ്വവും കോടി തുല്യമായി നീണ്ടിട്ടിരിപ്പൂ, രണ്ടു തലയും ഭുജാതുല്യമായി ഇടംകുറഞ്ഞിരപ്പൂ. ഇങ്ങനെ ഇവിടെ കല്പിക്കുന്നു. ഈ ക്ഷേത്രത്തിന്റെ കർണ്ണമെത്ര എന്ന് അറിയുന്നത്.

ഇവിടെ കോടി തുല്യമായിട്ട് ഒരു സമചതുരശ്രമുണ്ടാക്കൂ, ഭുജാ തുല്യമായിട്ടും. ഇങ്ങനെ രണ്ടു സമചതുരശ്രക്ഷേത്രങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കൂ. പിന്നെ ഭുജാചതുരശ്രം വടക്കേപ്പുറത്ത്, കോടിചതുരശ്രം തെക്കേപ്പുറത്ത്, രണ്ടിന്റേയും കിഴക്കെ പാർശ്വം ഒരു സൂത്രത്തിങ്കൽ വരുമാറു തങ്ങളിൽ ചേർപ്പൂ. ഭുജേടെ തെക്കേ പാർശ്വം കോടീടെ വടക്കെ പാർശ്വത്തോടു ചേരുമാറ്. ഈ പാർശ്വം ഭുജാപാർശ്വം കഴിഞ്ഞിട്ടും പടിഞ്ഞാറോട്ട് ഒട്ടു ശേഷിക്കും. ഭുജേടെ വടക്കു കിഴക്കെ കോണിങ്കന്നു തെക്കോട്ടു കോടിയോളം അളപ്പൂ. അവിടെ ഒരു ബിന്ദുവിടൂ. ഇവിടുന്നു തെക്കേടം നീളം ഭുജയോളമുണ്ടായിരിക്കും. പിന്നെ ബിന്ദുവിങ്കന്നു കോടീടെ തെക്കുപടിഞ്ഞാറെ കോണോളവും ഭുജേടെ വടക്കുപടിഞ്ഞാറെ കോണോളവുമുള്ള രേഖാമാർഗ്ഗേന പെളിപ്പൂ. കോണിങ്കൽ രണ്ടിങ്കലും കുറഞ്ഞൊന്നു വേർവിടാതെ ഇരിപ്പൂ. പിന്നെ ബിന്ദുവിങ്കന്നു ചെറിയ രണ്ടു പെളിയും വേർപെടുത്തി ബിന്ദുവിങ്കൽ കൂടിയിരുന്ന രേഖാഗ്രങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ കോടീടെ വടക്കുപടിഞ്ഞാറു സന്ധിക്കുമ്മാറു കണ്ടു വലിയ ചതുരശ്രത്തിന്റെ ഇരുപുറവുന്തിരിച്ചുകൊണ്ടുപോയി ചേർപ്പൂ. എന്നാൽ മുറിവാ പുറവായിൽ വരുമാറു കണ്ടു യോജിക്കേണ്ടതും. എന്നാലത് ഒരു സമചതുരശ്രക്ഷേത്രമായിട്ടിരിക്കും. ഇതിന്റെ ബാഹുക്കൾ ഈ ഭുജാകോടികളുടെ കർണ്ണത്തോട് ഒക്കുംതാനും. എന്നാൽ ഈ

ഭുജാകോടികളുടെ വർഗ്ഗംയോഗം കർണ്ണവർഗ്ഗം, കർണ്ണവർഗ്ഗത്തിൽ ഒന്നിന്റെ വർഗ്ഗം കള ഞ്ഞാൽ ഭുജാകോടികളിൽ മറ്റേതിന്റെ വർഗ്ഗം എന്ന സ്ഥിതമായി ഇപ്പോൾ. ഇതു് എല്ലാടവും അറിയേണ്ടുവൊന്ന്.

വ്യാഖ്യാനം: പരിലേഖം 19-ൽ കോടിവർഗ്ഗക്ഷേത്രം *കഖഗഘ* എന്ന സമചതുരശ്രം. ഭുജാ വർഗ്ഗക്ഷേത്രം *കങചഛ* എന്ന സമചതുരശ്രം. *ഛജ*-വിനെ *കഖ*



പരിലേഖം (19)

എന്ന കോടിക്കു സമമായി കല്പിച്ചിട്ടുള്ളതിനാൽ

ജഖ = കോടി − *കജ* = *ഛജ* − *കജ* = *ഛക*

ആകയാൽ *ജഖ* = *ഭുജ*; *ഖഗ* = കോടി

ചജ, *ജഗ* ഇവ രണ്ടും കർണ്ണതുല്യങ്ങൾ

ജഖഗ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തെ *ഗ*-വിനെ അപേക്ഷിച്ച പ്രദക്ഷിണമായി തിരിച്ചുകൊണ്ടു വന്നു ചേർത്തിട്ടുള്ള ത്ര്യശ്രം *ഝഘഗ* ആകയാൽ *ഝഘ* = ഭുജാതുല്യം = *കങ*, *ഘഗ* കോടി തുല്യം , *ഝഗ* കർണ്ണതുല്യം.

ഝഘ + *ഘങ* = *കങ* + *ഘങ* = *കഘ* = കോടി.

ആകയാൽ *ഝങ* = കോടി; *ചങ* = *ഭുജ*

ഝച കർണ്ണതുല്യമെന്നും വന്നു.

അപ്പോൾ *ചഛജ* എന്ന ത്ര്യശ്രത്തെ *ച*-വിനെ അപേക്ഷിച്ച് അപ്രദക്ഷിണമായി തിരിച്ചുകൊണ്ടുവന്നു ചേർത്തിട്ടുള്ള ത്ര്യശ്രമാണ് *ചങഝ* എന്നും *ചജഗഝ* എന്ന ക്ഷേത്രം സമചതുരശ്രമായ കർണ്ണവർഗ്ഗക്ഷേത്രമാണെന്നും വന്നു. ഇവിടെ *ചജഗഘങ* എന്നൊരു പഞ്ചകോണക്ഷേത്രമുണ്ട്. ആ ക്ഷേത്രവും *ചഛജ*, *ജഖഗ* എന്ന രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളും കൂടിയാൽ *കങചഛ* എന്ന ഭുജാവർഗ്ഗവും *കഖഗഘ* എന്ന കോടിവർഗ്ഗവും ഇവ രണ്ടിന്റേയും യോഗമായിട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ അതേ പഞ്ചകോണക്ഷേത്രത്തോടു *ചഝങ*, *ഝഘഗ* എന്ന രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളെ ചേർത്താൽ കർണ്ണവർഗ്ഗമായ *ചജഗഝ* എന്ന സമചതുരശ്രക്ഷേത്രം വരും. എന്നാലിവിടെ *ചഛജ*, *ജഖഗ*, *ഝഘഗ*, *ചങഝ* ഇവ നാലുത്ര്യശ്രങ്ങളും

തുല്യങ്ങളാകയാൽ ഭുജാവൎഗ്ഗമായ *കഖചഛ*, കോടിവൎഗ്ഗമായ *കഖഗഘ* ഇവയുടെ യോഗം കൎണ്ണവൎഗ്ഗമായ *ചജഗഝ*-യോടു തുല്യം.

കഖഗഘ + *ചഛകങ* = *ചജഗഘങ* + *ചഛജ* + *ഖഗജ*

= *ചജഗഘങ* + *ചഝങ* + *ഗഘഝ*

= *ചഝഗജ*

= കൎണ്ണവൎഗ്ഗക്ഷേത്രം

ഇപ്രകാരംഭുജാകോടി വൎഗ്ഗങ്ങളുടെ യോഗം കൎണ്ണവൎഗ്ഗതുല്യമെന്നു സിദ്ധമായി.

അനന്തരം ചതുരശ്രത്തെക്കൊണ്ടു വൃത്തത്തെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം. ഇഷ്ടമാനമായിട്ട് ഒരു ചതുരശ്രത്തെ കല്പിപ്പൂ. ഇതിന്റെ ബാഹു വ്യാസമായിട്ടിരിപ്പോരു വൃത്തത്തിന്ന് എത്രമാനമെന്ന് അറിയുന്നത്. ഈ കല്പിച്ച ചതുരശ്രത്തിന്നു നടുവേ പൂൎവ്വാപരരേഖയും ദക്ഷിണോത്തരരേഖയും ഉണ്ടാക്കൂ. എന്നാൽ നാലു ചതുരശ്രമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ വലിയ ചതുരശ്രത്തിന്റെ മദ്ധ്യത്തിങ്കന്നു കോണോളം ഒരു രേഖ ഉണ്ടാക്കൂ. അതു കൎണ്ണമാകുന്നത്. ഈ കൎണ്ണത്തെ അഗ്നികോണിൽ കല്പിച്ചിട്ടു ചൊല്ലുന്നു. പിന്നെ ദക്ഷിണസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു പൂൎവ്വസൂത്രാഗ്രത്തോട്ട് ഒരു കൎണ്ണം കല്പിപ്പൂ. ഇവിടെ ചതുരശ്രമദ്ധ്യം കേന്ദ്രമായിട്ട് ഇനി ഉണ്ടാകുന്ന വൃത്തം ഉള്ളൂ. ഇവിടെ യാതൊരു ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലും മൂന്നു ഭുജകളിലുംവെച്ചു വലിയ ഭുജേടെ ഒരു പാശ്വം മുഴുവൻ നിലത്തു തട്ടുമാറു കല്പിച്ച് അതിന്റെ ഇരുതലയ്ക്കുന്നുമുള്ള ഭുജകളുടെ യോഗം നേരെ മേലാമാറു കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ ഈ യോഗത്തിങ്കന്നു കനത്തൊരു വസ്തു കെട്ടിയ സൂത്രം തൂക്കൂ. ആ സൂത്രത്തിന്നു ലംബമെന്നു പേർ. മേല്പോട്ടുള്ള ഭുജകൾക്കു ഭുജകൾ എന്നു പേർ. ഭൂമിസ്പൃഷ്ടമായിരിക്കുന്ന ഭുജക്കു ഭൂമി എന്നു പേർ. ഭൂമിയിങ്കൽ യാതൊരിടത്തു ലംബം സ്പൎശിക്കുന്നു അവിടുന്നു ഇരുപുറവുമുള്ള ഭൂഖണ്ഡത്തിന്ന് ആബാധകൾ എന്നു പേർ. ഇവിടെ പിന്നെ കേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു കോണോളമുള്ള കൎണ്ണം ഭൂമി എന്നു കല്പിക്കുന്നു. പൂൎവ്വസൂത്രവും പൂൎവ്വഭുജേടെ തെക്കേപ്പാതിയും ഭുജകളാകുന്നത്. പൂൎവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നുള്ള കൎണ്ണത്തിന്റെ അൎദ്ധം ലംബമാകുന്നത്. ഇവ്വണ്ണം ദക്ഷിണസൂത്രവും തെക്കേ ഭുജേടെ കിഴക്കേപ്പാതിയും ഭുജകളായിട്ട് ഒരു ത്ര്യശ്രം. ഭൂമിയാകുന്നതു നടേത്തെ ഭൂമിതന്നെ. ഇങ്ങനെ ഒരു ചതുരശ്രംകൊണ്ടു രണ്ടു ത്ര്യശ്രം. ഇവിടെ കോണിങ്കൽ സ്പൎശിക്കുന്ന ആബാധ യാതൊന്ന് അതു പ്രമാണമാകുന്നത്. കോണിങ്കന്നു ദിക്സൂത്രാഗ്രമുള്ള ഭുജാ പ്രമാണഫലമാകുന്നത്. ഭൂമിയിങ്കന്നു വ്യാസാൎദ്ധം പോയശേഷം കോണിങ്കൽ ശേഷിച്ചത് ഇച്ഛാരാശിയാകുന്നത്. ഇവിടന്ന് ഉണ്ടായ ഇച്ഛാഫലത്തെ കോണിങ്കന്ന് ഇരുപുറവും ഭുജയിങ്കന്ന് അളന്നു നീക്കി ബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ടാക്കി അതിന്നു നേരെ കോൺമുറിച്ചുകളയൂ. എന്നാലഷ്ടാശ്രമാകും. ഈ ഉണ്ടായ ഇച്ഛാഫലത്തെ ഇരട്ടിച്ചു ചതുരശ്രബാഹുവിങ്കന്നു കളയൂ. ശേഷം അഷ്ടാശ്രഭുജേടെ നീളം.

പിന്നെ കേന്ദ്രത്തിങ്കന്ന് അഷ്ടാശ്രഭുജാമദ്ധ്യത്തോളമുള്ള വ്യാസാൎദ്ധത്തിന്റേയും അഷ്ടാശ്രഭുജാൎദ്ധത്തിന്റേയും വൎഗ്ഗയോഗമൂലം കേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി അഷ്ടാശ്രകോണോളമുള്ള കൎണ്ണമായിട്ടുണ്ടാകും. ഇതു ഭൂമിയായിട്ട് ആ ത്ര്യശ്രകോണിങ്കന്ന് ഒരു ലംബം കല്പിപ്പൂ. അത് അഷ്ടാശ്രഭുജാമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നു കൎണ്ണത്തിങ്കൽ പതിക്കുമാറ്

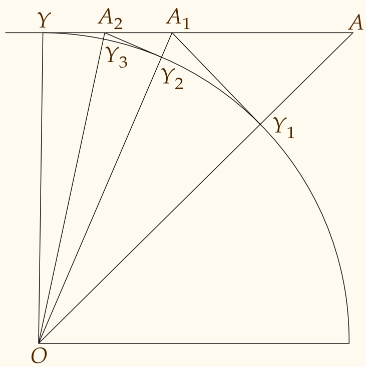
ഇരിക്കും. ഈ ലംബം സ്പൃശിക്കുന്നേടത്തുന്ന് ഇരുപുറവുമുള്ള കർണ്ണത്തിന്റെ ഖണ്ഡങ്ങൾ ആബാധകളാകുന്നതു്. വ്യസാർദ്ധവും അഷ്ടാശ്രഭുജാർദ്ധവും ഭുജകളാകുന്നതു്. **ഭുജകൾ തങ്ങളിലെ വർഗ്ഗാന്തരവും ആബാധകളുടെ വർഗ്ഗാന്തരവും ഒന്നേ.** ലംബാബാധകളുടെ കർണ്ണം ഭുജകൾ, എന്നിട്ടു ലംബവർഗ്ഗം രണ്ടിങ്കലും തുല്യം. ആബാധകളുടെ വർഗ്ഗഭേദമത്രെ പിന്നെ ഭുജകളുടെ വർഗ്ഗാന്തരമാകുന്നതു്. എന്നാൽ ഭുജാവർഗ്ഗാന്തരത്തെ കർണ്ണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ആബാധാന്തരമുണ്ടാകും, കർണ്ണമാകുന്നതു് ആബാധായോഗം എന്നിട്ടു്. വർഗ്ഗാന്തരത്തെ യോഗം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ അന്തരമുണ്ടാകും എന്നിട്ടു്. പിന്നെ ആബാധാന്തരത്തെ കർണ്ണത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞു് അർദ്ധിച്ചാൽ ചെറിയ ആബാധ ഉണ്ടാകും. പിന്നെ ഈ ആബാധ പ്രമാണമാകുന്നതു്. അഷ്ടാശ്രഭുജാർദ്ധം പ്രമാണഫലം, വ്യാസാർദ്ധത്തെ കർണ്ണത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞശേഷം കർണ്ണാഗ്രം ഇച്ഛാരാശിയാകുന്നതു്. ഇതു ചെറിയ ആബാധൈകദേശം ആയിട്ടുണ്ടാകും. ആബാധക്കു കർണ്ണമാകുന്നതു് അഷ്ടാശ്രഭുജാർദ്ധം; ഈ ഇച്ഛാഭംഗത്തിന്നു കർണ്ണമാകുന്നതു് എന്തു് എന്ന ത്രൈരാശികംകൊണ്ടു കോണിങ്കന്നു് അഷ്ടാശ്രഭുജേടെ എകദേശം ഉണ്ടാകും. ഇവിടെ ബിന്ദുക്കളുണ്ടാക്കി അഷ്ടാശ്രത്തിന്റെ കോൺ മുറിച്ചു കളയൂ. എന്നാൽ ഷോഡശാശ്രമാകും. ഈ ഇച്ഛാഫലത്തെ ഇരട്ടിച്ചു് അഷ്ടാശ്രബാഹുവിങ്കന്നു കളഞ്ഞശേഷം ഷോഡശാശ്രബാഹുവിന്റെ നീളം ആയിട്ടു വരും.

പിന്നെ ഈ ഷോഡശാശ്രബാഹു ഉണ്ടാക്കിയ ന്യായംകൊണ്ടു ദ്വാത്രിംശദശ്രബാഹു തുടങ്ങി ഇരട്ടിച്ച ഇരട്ടിച്ച അശ്രങ്ങളുടെ ബാഹുമാനത്തെ ഉണ്ടാക്കിയാൽ കോണസംഖ്യമാവോളമേറിയാൽ[1]

വ്യാഖ്യാനം 1: കോൺ അസംഖ്യമാവോളം എന്നർത്ഥം.

വൃത്തപ്രായം. ഇതിനെ വൃത്തമെന്നു കല്പിപ്പൂ.[2]

വ്യാഖ്യാനം 2: One method of estimating the length of the circumferance of a circle starting from the measure of its diameter D is to suppose that the circle is insribed in a square.



പരിലേഖം (20)

Let O be the centre of the square, Y the middle point of a side and and A one of the extremities of the side.

Then $OY = YA = \frac{D}{2}$ when D is the diameter.

If Y_1 is taken on OA so that $OY_1 = OY$ and Y_1A_1 is drawn $\perp_r$ to OA to meet AY at A_1, then OA_1 is the bisector of $\angle YOA$ and A_1 is consequently a vertex of the regular octagon which circumscribe the same circle with one point of contact at Y.

Now join OA_1 and take Y_2 on OA_1 so that $OY_2 = OY$ and draw $Y_2A_2 \perp_r$ to OA_1 meeting OY at A_2. Then as before OA_2 is the bisector of $\angle YOA_1$ and A_2 is therefore a vertex of the regular polygon of 16 sides circumscribing the same circle with one point of contact at Y. The process of bisection of the successive angles so formed can be repeated indefinitely like this. The problem is to calculate successively the lengths $YA_1, YA_2, YA_3, \ldots\ldots$ in terms of D.

Then $YA_n = \frac{1}{2}$ the side of the regular polygon having 4.2^n sides circumscribing the circle with one point of contact at Y.

Hence the perimeter of the polygon $= 2.4.2^n.YA_u$,

when n is sufficiently large, the perimeter of the polygon approximates to the circumference of the circle.

Hence the circumference $= 2.4.2^n YA_n$,

and if $YA_n = D.M.$ where M has been calculated,

We have the circumference $= 4.2^{n+1}DM$.

Now to calculate YA_n in terms of D_1 since OA_1 bisects $\angle YOA$;

$$YA_1 : A_1A = OY : OA.$$

$$\therefore \frac{YA_1}{YA} = \frac{OY}{OY + OA}$$

$$\therefore YA_1 = \frac{OY.YA}{OY + OA} = \frac{r^2}{r + \sqrt{2}r} \text{ where } r = \text{the radius}$$

$$= \frac{r}{1 + \sqrt{2}} = r(\sqrt{2} - 1)$$

$$\text{Again } = \frac{YA_2}{A_2A_1} = \frac{OY}{OA_1}$$

$$\therefore \frac{YA_2}{YA_1} = \frac{OY}{OY + OA_1}$$

$$\therefore YA_2 = \frac{YA_1.OY}{OY + OA_1}$$

$$= \frac{r^2(\sqrt{2} - 1)}{r + \sqrt{r^2 + r^2(\sqrt{2} - 1)^2}} = \frac{r(\sqrt{2} - 1)}{1 + \sqrt{1 + 3 - 2\sqrt{2}}}$$

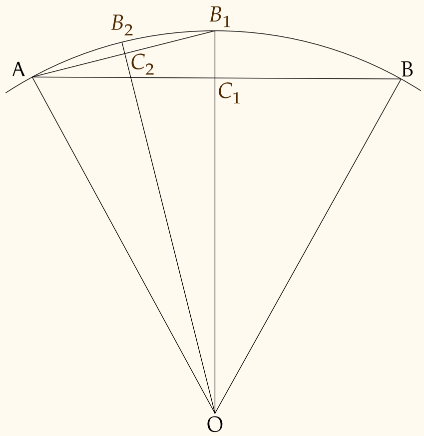
$$= \frac{r(\sqrt{2} - 1)}{1 + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}$$

Now OA_2 can be found from ${OA_2}^2 = OY^2 + {YA_2}^2$.

$$\text{Now } \frac{YA_3}{A_3A_2} = \frac{OY}{OA_2}$$
$$\therefore\ \frac{YA_3}{YA_2} = \frac{OY}{OY + OA_2}$$
$$\therefore\ YA_3 = \frac{YA_2.OY}{OY + OA_2} \text{ and so on.}$$

At each stage we get the $\frac{1}{2}$ the side of the regular polygon as a product of r and a fraction involving surds. Proceeding like this as far as we please say up to YA_{10} and multiplying the value of YA_{10} thus obtained by $2.2^{10} \times 4$ *i.e* by 8192 we get the perimeter of the regular polygon of 4096 sides, circumscribing the circle. This can be taken as the circumferences of the circle itself.

A second method is to start with a regular hexagon inscribed in a circle of given diameter $D(= 2r)$. The side of hexagon $= r$.



പരിലേഖം (21)

In Fig. 21, let O be the center of the circle and AB a side of the hexagon. If B_1 is the mid-point of arc AB and OB^1 meets OB at C_1, then ${AB_1}^2 = {AC_1}^2 + {C_1B_1}^2$

$$i.e.\ {AB_1}^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left\{r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2}\right\}^2$$
$$= \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(r - \frac{\sqrt{3}r}{2}\right)^2$$
$$= \frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{4}(2 - \sqrt{3})^2$$
$$= \frac{r^2}{4}\{1 + 4 + 3 - 4\sqrt{3}\} = r^2(2 - \sqrt{3})$$

Again if B_2 is the middle point of arc AB_1 and OB_2 cuts AB_1 at C_2 we have

$$\begin{aligned} {AB_2}^2 &= {AC_2}^2 + {B_2C_2}^2 \\ &= \left(\frac{AB_1}{2}\right)^2 + (OB_2 - OC_2)^2 \\ &= \left(\frac{AB_1}{2}\right)^2 + \left\{OB_2 - \sqrt{OA^2 - {AC_2}^2}\right\}^2 \text{ and so on.} \end{aligned}$$

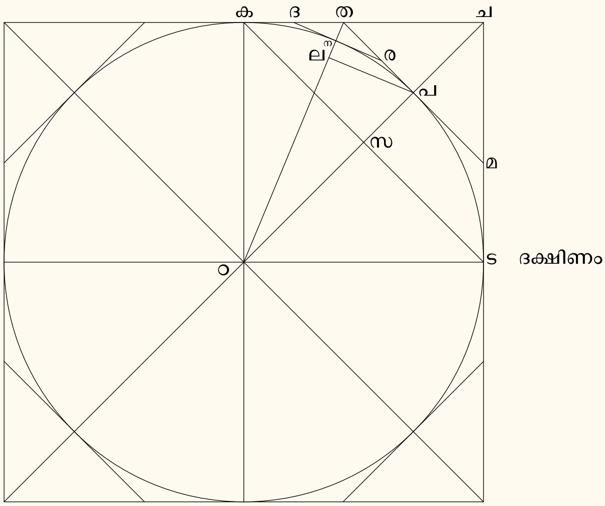
At each stage we get $\frac{1}{2}$ the side of the inscribed regular polygon as a product of r and a surd. Proceeding like this as far as we please say up to AB_9 we get $\frac{1}{2}$ the side of the inscribed regular polygon of 12.2^9 or 12×512 *i.e.* 6144 sides. Thus if AB_9 is multiplied by 12266 we get the perimeter of the polygon, which can be taken as the circumferences of the circle itself.

In general $AB_n = \frac{1}{2}$ the side of the regular inscribed polygon of 6.2^n sides.

Hence the circumference in the limit $= AB_n \times 6 \times 2^{n+1}$.

ഈ വൃത്തത്തിന്നു മുമ്പിലെ ചതുരശ്രബാഹു വ്യാസമാകുന്നതു്. പിന്നെ ഈ വൃത്തവ്യാസങ്ങളെക്കൊണ്ടു് ഇഷ്ടത്തിങ്കൽ ത്രൈരാശികംചെയ്തുണ്ടാക്കു വ്യാസത്തെ താൻ വൃത്തത്തെ താൻ.

വ്യാഖ്യാനം: ഇവിടെ ഒരു സമചതുരശ്രത്തിന്റെ ബാഹു വ്യാസമായിട്ടിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ മാനത്തെ അറിയേണം, പരിലേഖം 22. ആ സമചതുരശ്രത്തിന്റെ മദ്ധ്യത്തിൽക്കൂടി പൂർവ്വാപരരേഖയും ദക്ഷിണോത്തരരേഖയും ഉണ്ടാക്കുക. അപ്പോൾ ആ ചതുരശ്രം തുല്യങ്ങളായ നാലു ചെറിയ സമചതുരശ്രങ്ങളായിട്ടു വിഭജിക്കപ്പെട്ടിരിക്കും. അവയിൽ അഗ്നികോണിങ്കലേതു *ഠടചക*. *ഠച*, *കട* എന്ന കർണ്ണങ്ങളേയും വരക്കുക. *ഠചക* എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ *ഠച* ഭൂമി, *ഠക*, *കച* ഭുജകൾ, *കസ* ലംബം, *ഠസ*, *സച* ആബാധകൾ.



പരിലേഖം (22)

ഇവിടെ $ചസ$ പ്രമാണം, $ചക$ പ്രമാണഫലം, $ഠച -$ വ്യാസാർദ്ധം $= ഠച - ഠട = ഠച - ഠപ = \underline{ചപ} -$ ഇച്ഛാ. ($ഠപ$ ബാഹ്വർദ്ധതുല്യമെന്നു കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു.)

$$\therefore \text{ ഇച്ഛാഫലം} = ചത$$
$$= \frac{ചക \times ചപ}{ചസ}$$

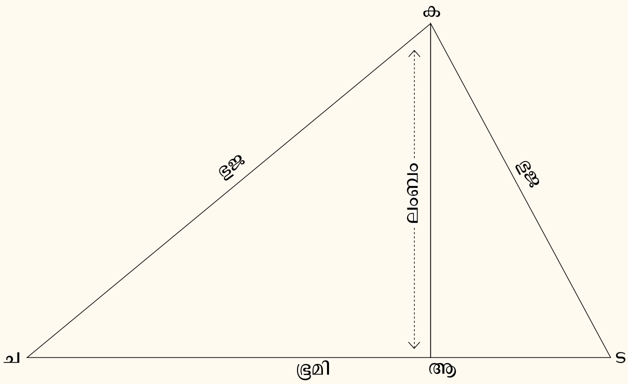
വലിയ ചതുരശ്രത്തിന്റെ നാലുകോണുകളുടെ ഇരുപുറവും ഇച്ഛാഫലത്തോളം ചെന്നേടത്തു ബിന്ദുക്കളെ ഇട്ടു. ഈ ബിന്ദുക്കളെക്കൊണ്ടു $ചതമ$ എന്നപോലെയുള്ള നാലു ത്ര്യശ്രങ്ങളുണ്ടാകും. ആ ത്ര്യശ്രങ്ങൾ നാലും മുറിച്ചു കളഞ്ഞാൽ ഒരു സമാഷ്ടാശ്രക്ഷേത്രമുണ്ടാകും.

$$\text{അപ്പോൾ അഷ്ടാശ്രത്തിന്റെ } \underline{\text{ബാഹു}} = \text{വലിയ ചതുരശ്രത്തിന്റെ } \underline{\text{ബാഹു}} - 2 \times \text{ ഇച്ഛാഫലം.}$$

(ഇവിടെ $കസ$ എന്നതിനു തുല്യദിക്കായി $പ$-യിൽ കൂടി ഒരു രേഖ വരക്കുകയാണെങ്കിൽ അതു $ചക$ എന്നതിനെ $ത$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കും. അപ്പോൾ $ചകസ$, $ചതപ$ എന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങൾ തുല്യാകരങ്ങൾ. അതുകൊണ്ടു $ചത = \frac{ചക \times ചപ}{ചസ}$)

$തമ =$ അഷ്ടാശ്രത്തിന്റെ ഒരു ഭുജ.

പരിലേഖം 23-ൽ ഒരു ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ ഭൂമി, ഭുജകൾ, ലംബം, ആബാധകൾ ഇവയെ വ്യക്തമായി കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



പരിലേഖം (23)

$$ചട = \text{ ഭൂമി.}$$
$$കച, കട = \text{ ഭുജകൾ.}$$
$$ചആ, ആട = \text{ ആബാധകൾ .}$$
$$കആ = \text{ ലംബം.}$$

പരിലേഖം 22-ൽ

$തമ$ എന്ന അഷ്ടാശ്രഭുജയുടെ മദ്ധ്യം $പ$.

$$ഠപ = \text{ വ്യാസാർദ്ധം } = വ \text{ എന്നു കല്പിക്ക.}$$
$$തപ = \text{ അഷ്ടാശ്രഭുജാർദ്ധം.}$$

$\textit{ഠപ}$, $\textit{തപ}$ ഇവ ഭുജാകോടികളായിരിക്കുന്ന ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ കർണ്ണം $= \textit{ഠത}$.

$$\textit{പല} = \text{ഒരു ലംബം.}$$

$$\textit{തല}, \textit{ഠല} \text{ രണ്ടാബാധകൾ.}$$

$$\textit{ഠപ}^2 = \textit{ഠല}^2 + \textit{പല}^2$$

$$\textit{തപ}^2 = \textit{തല}^2 + \textit{പല}^2$$

$$\therefore \quad \textit{വ}^2 - \textit{തപ}^2 = \textit{ഠല}^2 - \textit{തല}^2$$

$$= (\textit{ഠല} + \textit{തല})(\textit{ഠല} - \textit{തല})$$

$$= \textit{ഠത} \times (\textit{ഠല} - \textit{തല}).$$

$$\frac{\textit{വ}^2 - \textit{തപ}^2}{\textit{ഠത}} = \textit{ഠല} - \textit{തല}.$$

$$\textit{ഠത} = \textit{ഠല} + \textit{തല}.$$

$$\therefore \quad \textit{തല} = \frac{1}{2}\left(\textit{ഠത} - \frac{\textit{വ}^2 - \textit{തപ}^2}{\textit{ഠത}}\right)$$

$$\text{ഇവിടെ } \textit{ഠത} = \sqrt{\textit{ഠപ}^2 + \textit{തപ}^2}$$

$$= \sqrt{\textit{വ}^2 + \textit{തപ}^2}.$$

ഇവിടെ $\textit{തല}$ പ്രമാണം, $\textit{തപ}$ പ്രമാണഫലം, ഇച്ഛാ $= \textit{തഠ} - \textit{വ} = \textit{തഠ} - \textit{ഠന} = \textit{തന}$. ($\textit{ഠന}$ എന്നതിനെ വ്യാസാർദ്ധമെന്നു കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു.)

$$\therefore \quad \text{ഇച്ഛാഫലം} = \frac{\textit{തപ} \times \textit{തന}}{\textit{തല}} = \textit{തര}.$$

മുമ്പിലെപ്പോലെ അഷ്ടാശ്രത്തിന്റെ കോണുകളുടെ ഇരുപുറവും $\textit{തര}$ എന്നതിനോളമെടുത്തു കോൺമുറിച്ചു കളഞ്ഞാൽ ഷോഡശാശ്രം വരും.

ഷോഡശാശ്രത്തിന്റെ ഭുജാ $=$ അഷ്ടാശ്രഭുജാ $- 2 \times \textit{തര}$.

ഈ ന്യായം കൊണ്ടുതന്നെ $32, 64, 128, \ldots$ തുടങ്ങി കോണുകളുള്ള ക്ഷേത്രങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി അവയുടെ ബാഹുക്കളുടെ മാനത്തേയും വരുത്താം. ഇങ്ങനെ ആവോളം ഏറിയ കോണുകളുള്ള ക്ഷേത്രത്തെ ഉണ്ടാക്കിയാൽ, അതിനെ വൃത്തപ്രായമെന്നു കല്പിക്കാം. അപ്പോൾ ഒരു ബാഹുവിന്റെ മാനത്തെ കോൺസംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ പരിധി വരും.

വൃത്താന്തർഗ്ഗതമായി എല്ലാ ബാഹുക്കളും വൃത്തത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാക്കളായിട്ടിരിക്കുന്ന ഒരു സമഷഡശ്രത്തിന്റെ ബാഹു വ്യാസാർദ്ധതുല്യമെന്നു നിയതമാകുന്നു. ഈ ബാഹുവിൽ ഇരട്ടിയോടു തുല്യമായിരിക്കുന്ന വ്യാസത്തിന്നു പരിധിയുടെ മാനംമെത്ര എന്ന പ്രകാരേണയും പരിധിയെ വരുത്താം. വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിൽനിന്നു സമസ്തജ്യാർദ്ധത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞു മൂലിച്ചാൽ സമസ്തജ്യാർദ്ധത്തിന്റെ കോടി വരും. വ്യാസാർദ്ധത്തങ്കന്ന് ഈ കോടിയെ കളഞ്ഞാൽ ശരം വരും. ശരവർഗ്ഗവും സമസ്തജ്യാർദ്ധവർഗ്ഗവും തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയാൽ സമസ്തജ്യാചാപത്തിന്റെ അർദ്ധത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാവുണ്ടാകും. ഈ ന്യായങ്ങളെല്ലാം ജ്യാപ്രകരണത്തിൽ വിസ്തരിച്ചു പറയുന്നുണ്ട്. ഇങ്ങനെ ഷോഡശാശ്രബാഹ്വർദ്ധവർഗ്ഗത്തിൽ ശരവർഗ്ഗം കൂട്ടിയാൽ ദ്വാദശാശ്രബാഹുവർഗ്ഗം വരും. ഇങ്ങനെ $24, 48, 96, 194, 384, \ldots$ തുടങ്ങിയ കോൺസംഖ്യ

യുള്ള അശ്രങ്ങളുടെ ബാഹുമാനങ്ങളെ വരുത്താം. ഈ പ്രകാരത്തെയാണ് ഭാസ്കരാചാര്യർ ആശ്രയിച്ചിട്ടുള്ളതെന്നു ലീലാവതിവ്യാഖ്യാതാവു ഗണേശൻ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നു.

"വ്യാസേ ഭനന്ദാഗ്നിഹതേ വിഭക്തേ
ഖബാണസൂര്യൈഃ പരിധിസ്സസൂക്ഷ്മഃ"

(ലീലാവതി 6-ാം അദ്ധ്യായം, ശ്ലോകം 201)

1250 എന്ന വ്യാസത്തിന്നു പരിധി എത്ര?

$$\text{ഷഡശ്രത്തിന്റെ ബാഹു} = 525$$

$$\text{ഷഡശ്രബാഹ്വർദ്ധത്തിന്റെ കോടി} = \sqrt{625^2 - \left(312\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{292968.75}$$
$$= 541.2659$$
$$\text{ഇവിടത്തെ ശരം} = 625 - 541.2659 = 83.7341.$$
$$\therefore\ \text{ദ്വാദശാശ്രബാഹുവർഗ്ഗം} = 312.5^2 + 83.7341^2$$
$$= 97656.25 + 7011.39950281$$
$$= 104667.64950281$$

ഈ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ,

$$\text{24 ബാഹുക്കളുടെ സമബാഹ്വശ്രബാഹുവർഗ്ഗം} = 26620.44902866$$
$$\text{48 സമബാഹുക്കളുള്ള സമബാഹ്വശ്രബാഹുവർഗ്ഗം} = 6683.69838872$$
$$\text{95 സമബാഹുക്കളുള്ള സമബാഹ്വശ്രബാഹുവർഗ്ഗം} = 1672.71537542$$
$$\text{192 സമബാഹുക്കളുള്ള സമബാഹ്വശ്രബാഹുവർഗ്ഗം} = 418.29080125$$
$$\text{384 സമബാഹുക്കളുള്ള സമബാഹ്വശ്രബാഹുവർഗ്ഗം} = 104.57970600$$
$$\text{384 കോണുകളുള്ള സമബാഹ്വശ്രബാഹു} = \sqrt{104.57970600}$$
$$= 10.2264.$$

ഇതിനെ വൃത്തപ്രായമെന്നു കല്പിച്ചാൽ,

$$\text{വൃത്തപരിധി} = 10.2264 \times 384 = 3925.9375$$
$$= \underline{3927}$$

ഖബാണസൂര്യ്യഃ (1250) എന്ന വ്യാസത്തിന്നു ഭനന്ദാഗ്നിഃ (3927) എന്ന പരിധിയാണെന്നു ലീലാവതിയിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നു. സമഷോഡശാശ്രത്തെ അപേക്ഷിച്ചു വരുത്തിയതാണീ പരിധി എന്നു ഗണേശൻ വ്യാഖ്യാനിച്ചിട്ടുമുണ്ട്.

"ചതുരധികം ശതമഷ്ടഗുണം
ദ്വാഷഷ്ടിസ്തഥാ സഹസ്രാണാം |
അയുതദ്വയവിഷ്കംഭസ്യാ-
സന്നോ വൃത്തപരിണാഹഃ" ||

(ആര്യ്യഭടീയം ഗണിതപാദം ശ്ലോകം 10)

20000(1250 × 16) എന്ന വ്യാസത്തിനുപരിധി 62832(3927 × 16) എന്ന് ആര്യഭടാചാര്യരും പറഞ്ഞിരിക്കുന്നു.

എന്നാൽ ഈ ബന്ധത്തെതന്നെ സമചതുരശ്രത്തെ അപേക്ഷിച്ചും വരുത്താം.

$$\begin{aligned}
\text{സമചതുരശ്രബാഹു} = \text{വ്യാസം} &= 1250\\
\text{പരിലേഖം 22-ൽ വ്യാസാർദ്ധം } \textit{കച} &= 625\\
\text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം } \textit{കച}^2 &= 390625\\
\text{കർണ്ണം } \textit{ഠച} &= \sqrt{2 \times 390625} = 883.8835\\
\text{കർണ്ണാർദ്ധം } \textit{ചസ} &= 441.9417\\
\text{കർണ്ണം-വ്യാസാർദ്ധം} = \textit{ചപ} &= 883.8835 - 625\\
&= 258.8835.\\
\textit{തച} = \frac{\textit{കച} \times \textit{ചപ}}{\textit{ചസ}} &= \frac{625 \times 258.8835}{441.9417}\\
&= 366.1166\\
\therefore\ \text{അഷ്ടാശ്രഭുജ } \textit{തമ} &= 1250 - 2 \times 366.1166\\
&= 517.7668.\\
\text{അഷ്ടാശ്രഭുജാർദ്ധവർഗ്ഗം} = \textit{തപ}^2 &= 258.8834^2 = 67020.51479555\\
\text{കർണ്ണം } \textit{ഠത} &= \sqrt{390625 + 67020.61479555}\\
&= \sqrt{457645.61479556}\\
&= 676.4951.\\
\text{ആബാധാവർഗ്ഗാന്തരം} &= \textit{ഠപ}^2 - \textit{തപ}^2\\
&= 390625 - 67020.51479556\\
&= 323604.38520444.\\
\text{ആബാധായോഗം} &= \textit{ഠത} = 676.4951.\\
\therefore\ \text{ആബാധാന്തരം} &= \frac{323604.38520444}{676.4951}\\
&= 478.3544.\\
\therefore\ \text{ചെറിയ ആബാധ } \textit{തല} &= \frac{676.4951 - 478.3544}{2}\\
&= \frac{198.1407}{2} = 99.0703\\
\text{കർണ്ണം} - \text{ വ്യാസാർദ്ധം} &= 676.4951 - 625\\
&= 51.4951.\\
\therefore\ \textit{തര} = \frac{\textit{തന} \times \textit{തപ}}{\textit{തല}} &= \frac{51.4951 \times 258.8834}{99.0703}\\
&= 134.5533\\
\text{ഷോഡശാശ്രഭുജ} &= \text{അഷ്ടാശ്രഭുജ} - 2 \times \textit{തര}.\\
&= 517.7668 - 2 \times 134.5533
\end{aligned}$$

$$= 248.6402.$$

ഈ ഷോഡശാശ്രഭുജയെ വരുത്തിയ ന്യായപ്രകാരംതന്നെ 32, 64, 128,... തുടങ്ങിയ കോണുകളുള്ള അശ്രക്ഷേത്രങ്ങളുടെ ബാഹുക്കളെ വരുത്താം.

32 കോണുകളുള്ളതിന്റെ ഭുജ = 123.2386
64 കോണുകളുള്ളതിന്റെ ഭുജ = 61.4085
128 കോണുകളുള്ളതിന്റെ ഭുജ = 30.6857
256 കോണുകളുള്ളതിന്റെ ഭുജ = 15.3405

256 കോണുകളുള്ള ക്ഷേത്രത്തെ വൃത്തപ്രായമെന്നു കല്പിക്കാം.

അപ്പോൾ പരിധി = 15.3405 × 256
= 3927.168
= 3927 (ഭനന്ദാഗ്നിഃ)

അനന്തരം ഇഷ്ടമായിട്ട് ഒരു വ്യാസത്തെ കല്പിച്ച് അതിങ്കന്നു വർഗ്ഗമൂലക്രിയകൾ കൂടാതെ പരിധിയെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ നടേ നാലു ബാഹുക്കളേയും ഇഷ്ടവ്യാസതുല്യമായിട്ടു കല്പിച്ച് ഇരിപ്പോരു സമചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തെ കല്പിപ്പൂ. അതിന്റെ അകത്ത് ഒരു വൃത്തത്തേയും കല്പിപ്പൂ. വൃത്തനേമി നാലു ഭുജാമദ്ധ്യത്തിങ്കലും സ്പശിക്കുമാറ് ഇരിക്കേണം. പിന്നെ വൃത്തമദ്ധ്യത്തൂടെ പൂർവ്വാപരസൂത്രത്തേയും ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തേയും വൃത്തനേമിയും ഭുജാമദ്ധ്യവും തങ്ങളിലുള്ള സംപാതത്തിങ്കൽ അഗ്രമാകുമാറു കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രങ്കത്തിങ്കന്നു ചതുരശ്രത്തിന്റെ അഗ്നികോണോടിടവ്യാസാർദ്ധതുല്യമായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ പെരികെ അടുക്കെ ഇടകൾ എല്ലാമൊക്കുമാറുകണ്ടു ചില വിഭാഗത്തെ കല്പിച്ചു ചില ബിന്ദുക്കളെ ഉണ്ടാക്കൂ. എത്ര ഏറസംഖ്യ ഉണ്ടായി അത്ര സൂക്ഷ്മമാകും പരിധി. പിന്നെ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ആ ബിന്ദുക്കളിലഗ്രമാകുമാറ് അത്ര കർണ്ണരേഖകളേയും കല്പിപ്പൂ. അവിടെ പൂർവ്വസൂത്രം കോടിയാകുന്നത്. പൂർവ്വസൂത്രത്തോടു കർണ്ണാഗ്രത്തോടിടയിലേടം പൂർവ്വഭുജാഭാഗം ഭുജ ആകുന്നത്. അവിടെ പൂർവ്വസൂത്രത്തിന്നടുത്തുള്ള തെക്കേ കർണ്ണത്തിന്ന് ഒരു ഖണ്ഡം ഭുജയാകുന്നത്. രണ്ടാം കർണ്ണത്തിനു രണ്ടു ഖണ്ഡം കൂടിയതു ഭുജയാകുന്നത്. ഇങ്ങിനെ പിന്നെ പിന്നെ കർണ്ണത്തിന് ഓരോരോ ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളേറിയതു ഭുജകളായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങിനെ ചതുരശ്രകോണിലെ കർണ്ണത്തിനു എല്ലായിലും വലിയ ഭുജാ. പിന്നെ കോടി എല്ലാ കർണ്ണത്തിന്നും വ്യാസാർദ്ധമാകുന്ന പൂർവ്വസൂത്രംതന്നെ. ആകയാൽ വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗവും അതതു ഭുജാവർഗ്ഗവും കൂട്ടി മൂലിച്ചത് അതതു കർണ്ണമായിട്ടിരിക്കും.

അനന്തരം ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തോട് അതിനടുത്തുള്ള ആദ്യകർണ്ണാഗ്രത്തോട് ഉള്ള ഇട ചതുരശ്രബാഹുവിങ്കലെ ഒരു ഖണ്ഡം യാതൊന്ന് അതിനെ ദിക്സൂത്രാഗ്രമാകുന്ന വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ആദ്യകർണ്ണംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്ന് ആദ്യകർണ്ണത്തോടിട ആദ്യകർണ്ണവിപരീതമായിട്ടുണ്ടാകും. ഈ രേഖ ഒരു കോടിയായിട്ടിരിക്കും. ഇക്കോടിയും ആദ്യകർണ്ണവുമുള്ള സംപാതത്തിങ്കന്ന് ആ

കർണ്ണത്തിന്റെ അഗ്രം ഭുജയാകുന്നത്. ആദ്യകർണ്ണാവും ദിക്സൂത്രാഗ്രവുമുള്ള ഇട ചതുരശ്രബാഹ്വഗ്രങ്കലെ ഖണ്ഡം കർണ്ണമാകുന്നത്. ഇത് ഒരു ഇച്ഛാക്ഷേത്രം. ഇതിന്നു തുല്യാകാരമായിരിക്കുന്ന പ്രമാണക്ഷേത്രമാകുന്നതു പിന്നെ. വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു പൂർവ്വഭുജാമദ്ധ്യത്തോളമുള്ള ദിക്സൂത്രം കോടി. ആദ്യ കർണ്ണരേഖ കർണ്ണം. കർണ്ണകോടികളുടെ അഗ്രാന്തരം ഭുജ. ഇപ്രമാണക്ഷേത്രത്തോടു തുല്യാകാരമായിട്ടിരുന്നോന്ന് ഇച്ഛാക്ഷേത്രം. ഇതിന്നു ഹേതു. പ്രമാണക്ഷേത്രഭുജയോടു തുല്യദിക് ഇച്ഛാക്ഷേത്രകർണ്ണം, ഇച്ഛാക്ഷേത്രഭുജയോടു തുല്യദിക് പ്രമാണകർണ്ണം എന്ന് ആകിലുമാം. പിന്നെ പ്രമാണക്ഷേത്രകോടിയാകുന്ന ദിക്സൂത്രത്തിങ്കന്നു വിപരീതമായിട്ടിരുന്നൊന്ന് ഇച്ഛാക്ഷേത്രകർണ്ണമായിട്ടിരിക്കുന്ന ചതുരശ്രഭുജാഖണ്ഡം. ഇവിടെ ഇച്ഛാഫലമായിട്ടു വരുത്തിയ ഇച്ഛാക്ഷേത്രകോടി പ്രമാണക്ഷേത്രകർണ്ണത്തിന്നു വിപരീതദിക്കായിട്ടിരുന്നൊന്ന് എന്നാകിലുമാം. രണ്ടു ക്ഷേത്രങ്ങളും തുല്യാകാരങ്ങൾ എന്മാൻ ഹേതുവാകുന്നത്. ഇങ്ങനെ ഇവിടെ രണ്ടു ക്ഷേത്രങ്ങളിലും അന്യോന്യം ഭുജാകർണ്ണങ്ങൾക്കു ദിക്സാമ്യം, കോടികർണ്ണങ്ങൾക്കു ദിഗ്വൈപരീത്യം, എന്നിട്ട് ആകാരസാമ്യം ഉണ്ടാകുന്നു. അവിടെ മൂന്നിനുംകൂടി ദിഗ്വൈപരീത്യം താൻ ദിക്സാമ്യം താൻ ഉണ്ട് എങ്കിലും തുല്യാകാരങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. യാതൊരുപ്രകാരം സമചതുരശ്രമായിട്ടിരിക്കുന്ന മണ്ഡപത്തിന്റെ ചെരിഞ്ഞിരിക്കുന്ന കഴക്കോൽ പ്രമാണക്ഷേത്രകർണ്ണമായിട്ടിരിക്കുന്നതിന്നു വാമട ഭുജയായിട്ടിരിക്കുന്നു. ഇതിനു തുല്യദിക്കായിട്ടിരിക്കും ഇച്ഛാക്ഷേത്രകർണ്ണമായിട്ടിരിക്കുന്ന വളത്തുള; ഇക്കർണ്ണത്തിന്റെ ഭുജയാകുന്നത് കഴക്കോലുടെ പാർശ്വത്തിങ്കലെ വളത്തുളേടെ ചെരിവ്; ഭുജാകർണ്ണങ്ങൾ ഇതരേതരതുല്യദിക്കുകളാകയാൽ കഴക്കോൽ ചെരിവുകൊണ്ടു വളത്തുളേടെ ചെരിവുണ്ടാകുന്നു എന്നിങ്ങനെ എല്ലാം നിരൂപിക്കേണ്ടൂ. ആകയാൽ ത്രൈരാശികംകൊണ്ടുവരുത്താം ഇച്ചൊല്ലിയ ഇച്ഛാക്ഷേത്രത്തിങ്കലെ കോടിയെ.

അനന്തരം മൂന്നാമതുണ്ട് ഇവിടെ ഒരു ത്ര്യശ്രം. അതിന്നു ദിക്സൂത്രം കർണ്ണാമാകുന്നത്. ദിക്സൂത്രത്തിങ്കന്ന് ആദ്യകർണ്ണത്തോടുള്ള അന്തരാളം ഇച്ചൊല്ലിയ ഇച്ഛാക്ഷേത്രകോടി ഇവിടക്കു ഭുജയാകുന്നത്. ഈ ഭുജയും ആദ്യകർണ്ണവുമുള്ള യോഗത്തിങ്കന്ന് ആദ്യകർണ്ണത്തിന്റെ ഖണ്ഡം വൃത്തകേന്ദ്രത്തോളമുള്ളതു കോടി ആകുന്നത്. ഇങ്ങനെ ഇത്.

അനന്തരം രണ്ടാമതുമുണ്ട് ഒരു പ്രമാണക്ഷേത്രം. അതിന്നു ദിക്സൂത്രംതന്നെ കോടിയാകുന്നത്. കോട്യഗ്രത്തിങ്കന്നു ചതുരശ്രബാഹ്വഗ്രങ്കലെ രണ്ടു ഖണ്ഡംകൂടിയതു ഭുജയാകുന്നത് വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങിയുള്ള കർണ്ണത്തിൽ രണ്ടാമതു കർണ്ണമാകുന്നത്. ഇങ്ങനെത്തൊന്നു ദ്വിതീയപ്രമാണക്ഷേത്രമാകുന്നത്. പിന്നെ ഇതിന്റെ ഇച്ഛാക്ഷേത്രം. പ്രഥമ കർണ്ണാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ദ്വിതീയകർണ്ണത്തിനു വിപരീതമായി ദ്വിതീയകർണ്ണത്തെ സ്പർശിക്കുമാറുള്ള രേഖ കോടിയാകുന്നത്. ഈ കോടിസംപാതത്തിങ്കന്നു ദ്വിതീയകർണ്ണത്തിന്റെ അഗ്രം ഭുജാ. ചതുരശ്രബാഹ്വഗ്രങ്കലെ രണ്ടാംഖണ്ഡം കർണ്ണമാകുന്നത്. ഇങ്ങനെ രണ്ടാമിച്ഛാക്ഷേത്രം. യാതൊരുപ്രകാരം നടുവിങ്കന്നു രണ്ടാം കഴക്കോൽ പ്രമാണക്ഷേത്രകർണ്ണമാകുമ്പോൾ കഴക്കോൽപങ്ക്തി രണ്ടു കൂടിയതു പ്രമാണഭുജയാകുന്നത്. ആകയാൽ നടേത്തെ കഴക്കോലേക്കാൾ നീളമേറും രണ്ടാംകഴക്കോൽ. അതിനു തക്കവണ്ണം അതിന്മേലെ വളത്തുളയും നീളമേറും.

അത് ഇവിടക്ക് ഇച്ഛാക്ഷേത്രകർണ്ണമായി പ്രമാണക്ഷേത്രഭുജയാകുന്ന വാമടയോടു തുല്യദിക്കായി ഇരുന്നൊന്ന്. ഇങ്ങനെ കഴക്കോൽ ചെരിവും അതാതുങ്കലെ വളത്തുളയുടെ ചെരിവും ഒരു പ്രകാരമെന്നതു യാതൊന്ന് അവ്വണ്ണമിരിപ്പൊന്ന് ഇവിടത്തെ പ്രമാണേച്ഛാക്ഷേത്രങ്ങൾ. ഇവിടെ ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കൽ ചതുരശ്രബാഹുവിങ്കലെ രണ്ടാംഖണ്ഡത്തെ പ്രമാണക്ഷേത്രകോടിയായിരിക്കുന്ന വ്യാസാർദ്ധത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച പ്രമാണമാകുന്ന ദ്വിതീയ കർണ്ണത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ദ്വിതീയേച്ഛാക്ഷേത്രത്തിങ്കലെ കോടി.പിന്നെ ഈ കോടിയെ ഭുജയെന്നു കല്പിച്ച് ഇതിന്റെ സംപാതത്തിങ്കന്നു വൃത്തകേന്ദ്രത്തോളമുള്ള ദ്വിതീയകർണ്ണഖണ്ഡം കോടി, ആദ്യകർണ്ണമാകുന്നത് എന്നും കല്പിപ്പൂ ഇങ്ങനെ മൂന്നാമത് ഒരു ത്ര്യശ്രമുണ്ട് ഇവിടേയും.

ഇങ്ങനെ ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ചതുരശ്രബാഹുവിങ്കലെ, കോണോടമുള്ള ചതുരശ്രബാഹുഖണ്ഡങ്ങൾ ഓരോന്നിങ്കലെ മുമ്മൂന്നു ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രങ്ങളുള്ളൂ. അവിടെ ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ചതിരശ്രകോണോളമുള്ള ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളെ ഓരോന്നിനെ ദിക്സൂത്രത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അതതു ഖണ്ഡങ്ങളുടെ അഗ്രങ്ങളെ സ്പർശിക്കുന്നതിൽ വലിയ കർണ്ണങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടാകുന്ന ഫലം ഇതിനടുത്തു മുമ്പിലെ കർണ്ണത്തിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി അതിനടുത്ത വലിയ കർണ്ണത്തിന്നു വിപരീതമായിട്ടിരിക്കുന്ന അന്തരാളങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. ഇവ ഇച്ഛാക്ഷേത്രകോടികൾ. ഇവ തന്നെ പിന്നെയ്ക്കു ഭുജകളായിട്ടിരിക്കും. ഈ ഭുജാസംപാതത്തിങ്കന്നുതുടങ്ങി വലിയകർണ്ണത്തിന്റെ ഖണ്ഡം വൃത്തകേന്ദ്രത്തോളമുള്ളതു കോടി. പിന്നെ ഈ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി അതതു ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളെ സ്പർശിക്കുന്ന കർണ്ണങ്ങൾ രണ്ടിൽവച്ച ചെറിയത് ഇവിടക്കു കർണ്ണമാകുന്നത്. ഇങ്ങനെ ഇരിപ്പോചിലവ ത്ര്യശ്രങ്ങൾ. ഇവ പിന്നക്കു പ്രമാണക്ഷേത്രങ്ങളായിരിപ്പോ ചിലവ. ഇവിടയ്ക്കു ഇച്ഛാക്ഷേത്രങ്ങളാകുന്നവ ഈ പ്രമാണക്ഷേത്രങ്ങളെതന്നെ വൃത്തത്തിന്റെ അന്തർഭാഗത്തിങ്കൽ കല്പിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നവ. ഇവിടെ ഈ പ്രമാണകർണ്ണത്തിന്റെ ഏകദേശമായിട്ടിരിക്കുന്ന വൃത്തവ്യാസാർദ്ധം ഇച്ഛയാകുന്നത്. ഈ വ്യാസാർദ്ധാഗ്രത്തിങ്കന്നു വലിയ കർണ്ണത്തിന്നു വിപരീതമായിട്ടുള്ള അന്തരാളമിച്ഛാഫലം. ഇങ്ങനെ അതതു കർണ്ണാന്തരാളങ്ങളിലെ പരിധിഭാഗത്തിങ്കലെ അർദ്ധജ്യാക്കളായിട്ട് ഉളവാകം ഇച്ചൊല്ലിയ ഇച്ഛാഫലങ്ങൾ. എന്നാൽ ദിക്സൂത്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങിയുള്ള ചതുരശ്രബാഹുഖണ്ഡങ്ങളതതിനെ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു രണ്ടുവട്ടം ഗുണിച്ച് അതതു ഖണ്ഡത്തെ സംബന്ധിച്ചുള്ള കർണ്ണങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും ഘാതംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം അതതു കർണ്ണാന്തരാളത്തിങ്കലെ പരിദ്ധ്യംശത്തിങ്കലെ അർദ്ധജ്യാവായിട്ടു വരും. ഇവിടെ ചതുരശ്രഃദാഃഖണ്ഡങ്ങൾ പെരികെ ചെറുത് എങ്കിൽ ഈ അർദ്ധജ്യാക്കൾതന്നെ ചാപഖണ്ഡങ്ങളായിട്ടിരിക്കും പ്രായേണ.

വ്യാഖ്യാനം: *വ* എന്നൊരു വ്യാസത്തെ ഇഷ്ടമായിട്ടു കല്പിക്കു, ഇതിനോടു തുല്യങ്ങളായിരിക്കുന്ന ബാഹുക്കളോടുകൂടിയ ഒരു ചതുരശ്രത്തെ വരക്കു. വൃത്തനേമി നാലു ഭുജാമദ്ധ്യത്തിങ്കലും സ്പർശിക്കേണം. വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽക്കൂടി പൂർവ്വാപരസൂത്രത്തെയും ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തേയും ഉണ്ടാക്കൂ. അവ ബാഹുമദ്ധ്യങ്ങളിൽ സ്പർശിക്കുന്നു എന്നും കല്പിക്കു. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്ന ക്ഷേത്രത്തിങ്കൽ കിഴക്കു (കടലാസ്സിന്റെ മുകൾഭാഗം കിഴക്ക് എന്നു സങ്കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു) നിന്നു അഗ്നികോണോളമുള്ള പരിധിഭാഗത്തിന്റെ—പരിദ്ധ്യാഷ്ടാംശത്തിന്റെ—

മാനത്തെയാണ് ആദ്യമായി വരുത്തുന്നത്. പരിലേഖം 24-ൽ ക്ഷേത്രത്തിന്റെ ഈ ഭാഗത്തെ മാത്രമേ കാണിച്ചിട്ടുള്ളൂ.

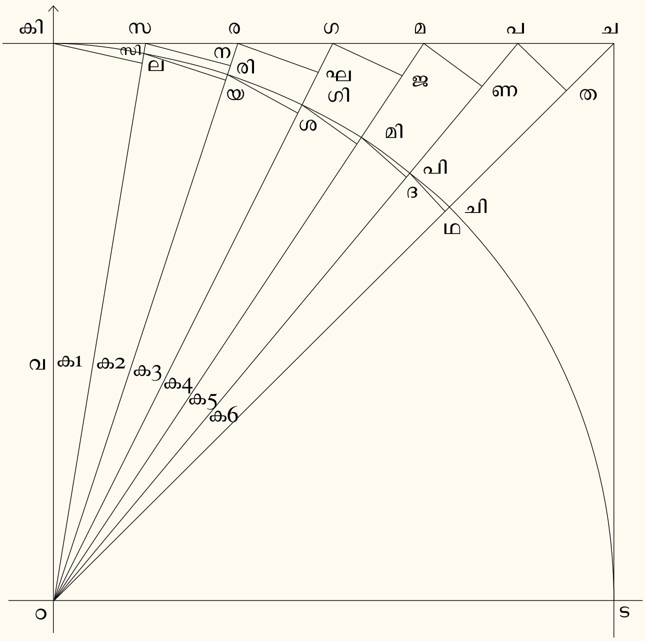
പരിലേഖം 24-ൽ *ഠകി* = പൂർവ്വസൂത്രം.

ഠട = ദക്ഷിണസൂത്രം.

കി, *ട* ക്രമേണ പൂർവ്വദക്ഷിണബാഹുക്കളുടെ മദ്ധ്യങ്ങൾ.

ഠ = വൃത്തകേന്ദ്രം.

കിച = പൂർവ്വബാഹുവിന്റെ തെക്കേ അദ്ധം.



പരിലേഖം (24)

കിച എന്നതിനെ *കിസ*, *സര*, *രഗ*, *ഗമ* എന്നു തുടങ്ങിയ അസംഖ്യംതുല്യഖണ്ഡങ്ങളായിട്ടു വിഭജിക്കൂ.

അപ്പോൾ *ഠസ*, *ഠര*, *ഠഗ*, *ഠമ*, . . . *ഠച* ഇവയെല്ലാം ഓരോ കർണ്ണമായിട്ടിരിക്കും. ഈ കർണ്ണങ്ങളെ $ക_1$, $ക_2$, $ക_3$, $ക_4$, . . . എന്നും കല്പിക്കൂ.

ഇവയിൽ ഏറ്റവും വലിയ കർണ്ണം *ഠച*.

കി, *സ*, *ര*, *ഗ*, *മ*, . . . എന്ന ഖണ്ഡാഗ്രങ്ങളിൽനിന്ന് അതാത് അടുത്ത കർണ്ണത്തിന്നു വിപരീതദിക്കായിട്ടു *കില*, *സന*, *രഘ*, *ഗജ*, *മണ* . . . . . . എന്ന ക്രമേണയുള്ള ലംബങ്ങളെ വരക്കൂ. ഈ കർണ്ണങ്ങൾ വൃത്തത്തെ *സി*, *രി*, *ഗി*, *മി*, . . . എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ സ്പർശിക്കുന്നു. ഈ ബിന്ദുക്കളിൽനിന്നും അതാതിന്റെ മേലെയുള്ള കർണ്ണത്തിന്നു വിപരീതദിക്കായിട്ടു *സിയ*, *രിശ*, . . . എന്നു തുടങ്ങിയ ക്രമേണയുള്ള ലംബങ്ങളേയും വരക്കൂ.

ഒരു ഭുജാഖണ്ഡം = *ഖ* എന്നു കല്പിക്കൂ.

ത്ര്യശ്രങ്ങളുടെ തുല്യാകാരത്വത്തിന്റെ ലക്ഷണങ്ങൾ:-

1. രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളിൽ ഇതരേതരഭുജാകർണ്ണങ്ങൾക്ക് അന്യോന്യം ദിക്സാമ്യം, ഇതരേതരകോടികർണ്ണങ്ങൾക്കു ദിഗ്വൈപരീത്യം.
2. രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളിൽ ഭുജാകോടികർണ്ണങ്ങൾ മൂന്നിന്നും അന്യോന്യം ദിഗ്വൈപരീത്യം.
3. രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളിൽ ഭുജാകോടികർണ്ണങ്ങൾ മൂന്നിന്നും അന്യോന്യം ദിക്സാമ്യം.

ഇങ്ങനെ തുല്യാകാരങ്ങളായിരിക്കുന്ന രണ്ടു ക്ഷേത്രങ്ങളിൽ ഒന്നിനെ പ്രമാണക്ഷേത്രമെന്നും മറ്റേതിനെ ഇച്ഛാക്ഷേത്രമെന്നും കല്പിക്കാം.

എന്നാലവിടെ $\frac{\text{ഇച്ഛാക്ഷേത്രഭുജാ}}{\text{പ്രമാണക്ഷേത്രഭുജാ}} = \frac{\text{ഇച്ഛാക്ഷേത്രകോടി}}{\text{പ്രമാണക്ഷേത്രകോടി}} = \frac{\text{ഇച്ഛാക്ഷേത്രകർണ്ണം}}{\text{പ്രമാണക്ഷേത്രകർണ്ണം}}$

ഇങ്ങനത്തെ ഒരു ബന്ധമുണ്ടായിരിക്കും. ഇങ്ങനെ തുല്യാകാരക്ഷേത്രങ്ങളിലെ ത്രൈരാശികന്യായം.

ഇവിടെ *ഠകിസ*, *കിലസ* എന്ന രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളുണ്ട് ആദ്യത്തേതിൽ കർണ്ണം *ഠസ*, ഭുജ *കിസ*, കോടി *ഠകി*. രണ്ടാമത്തേതിൽ കർണ്ണം *കിസ*, ഭുജ *ലസ*, കോടി *കില*. ത്ര്യശ്രം *ഠകിസ* ഒരു പ്രമാണക്ഷേത്രം, ത്ര്യശ്രം *കിലസ*, ഒരിച്ഛാക്ഷേത്രം. ഇച്ഛാക്ഷേത്രഭുജ *ലസ* പ്രമാണക്ഷേത്രകർണ്ണം *ഠസ* എന്നതിനോടു തുല്യദിക്; ഇച്ഛാക്ഷേത്രകർണ്ണം *കിസ* പ്രമാണക്ഷേത്രഭുജ *കിസ* എന്നതിനോടു തുല്യദിക്; ഇങ്ങനെതന്നെ ഇതരേതരകോടികർണ്ണങ്ങൾക്കു ദിഗ്വൈപരീത്യവുമുണ്ടെന്നു കാണാം. അതുകൊണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങൾ *ഠകിസ*, *കിലസ* രണ്ടും തുല്യാകാരങ്ങൾ.

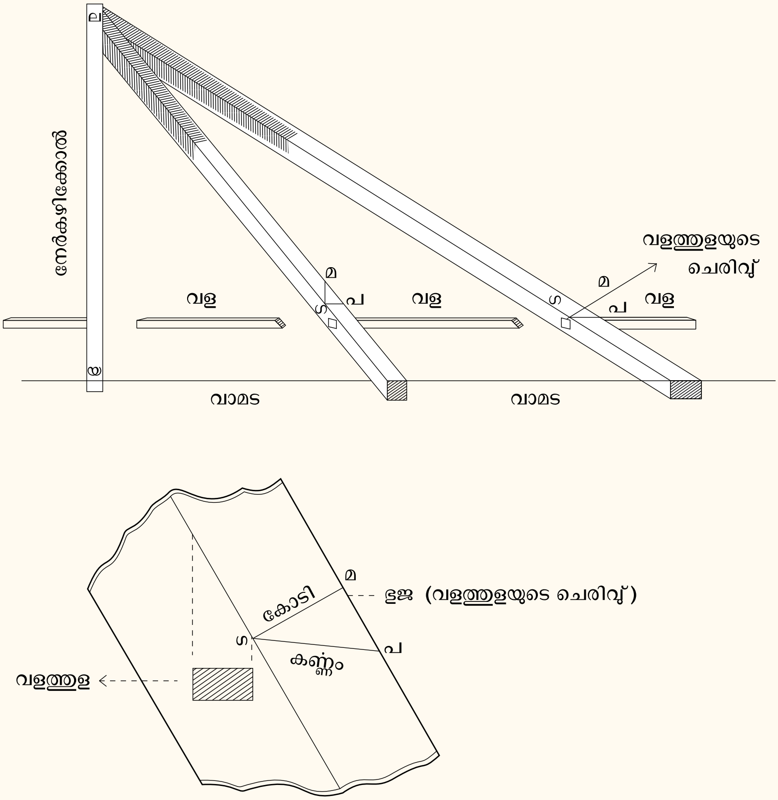
$$\therefore\ \frac{\text{കില}}{\text{കിസ}} = \frac{\text{ഠകി}}{\text{ക}_1}$$

$$\therefore\ \text{കില} = \frac{\text{കിസ} \times \text{ഠകി}}{\text{ക}_1} = \frac{\text{ഖ} \times \text{വ}}{\text{ക}_1}.$$

പിന്നെ ഇതരേതരഭുജാകർണ്ണങ്ങൾക്കു ദിക്സാമ്യംകൊണ്ടും ഇതരേതരകോടി കർണ്ണങ്ങൾക്കു ദിഗ്വൈപരീത്യംകൊണ്ടും, ത്ര്യശ്രങ്ങൾ *ഠകിര*, *സനര*, രണ്ടും തുല്യാകാരങ്ങൾ

$$\therefore\ \text{സന} = \frac{\text{സര} \times \text{ഠകി}}{\text{ക}_2} = \frac{\text{ഖ} \times \text{വ}}{\text{ക}_2}.$$

ഈ തുല്യാകാരന്യായത്തെ ഒരു സമചതുരശ്രമായ മണ്ഡപത്തിന്റെ കഴുക്കോൽ, വാമട, വളത്തുളയുടെ ചെരിവ് ഇവയെക്കൊണ്ട് ഉദാഹരിച്ചിരിക്കുന്നു. ഒരു പ്രമാണക്ഷേത്രത്തിൽ ആദ്യത്തെ ചെരിഞ്ഞ കഴുക്കോൽ കർണ്ണം, വാമട ഭുജ, അതിന്റെ ഇച്ഛാക്ഷേത്രത്തിൽ ഇച്ഛാക്ഷേത്രകർണ്ണമായിരിക്കുന്ന വളത്തുള പ്രമാണക്ഷേത്രഭുജയായിരിക്കുന്ന വാമടയോടു തുല്യദിക്; ഭുജയായിരിക്കുന്നത് ആ ചെരിഞ്ഞ കഴുക്കോലിന്റെ പാർശ്വത്തിങ്കലെ വളത്തുളയുടെ ചെരിവ്. ഇങ്ങനെ ഇതരേതരഭുജാകർണ്ണങ്ങൾക്കു ദിക്സാമ്യം. അതുകൊണ്ടു കഴുക്കോലിന്റെ ചെരിവിന്നു തക്കവണ്ണം വളത്തുളയുടെ ചെരിവുണ്ടാകുന്നു. വളത്തുളയുടെ ചെരിവു ത്രൈരാശികംകൊണ്ടു വരുത്താം. രണ്ടാം കഴുക്കോൽ പ്രമാണക്ഷേത്രമാകുമ്പോൾ കഴുക്കോൽപന്തികൾ രണ്ടുകൂടിയതു പ്രമാണക്ഷേത്രഭുജയാകുന്നു. അതിനാൽ അതിന്മേലെ വളത്തുളയുടെ നീളമേറുന്നു. ഈ വളത്തുള വാമടയോടു തുല്യദിക്കാകുന്നു. ഇങ്ങനെ കഴുക്കോൽചെരിവും അതിന്മേലെ വളത്തുളയുടെ ചെരിവും ഒരുപ്രകാരംതന്നെ ബന്ധിച്ചിരിക്കണം. പരിലേഖം 24(അ)-ൽ നിന്നു ഇവയെല്ലാം മനസ്സിലാക്കാം.



പരിലേഖം (24)(അ)

പരിലേഖം 24-ൽ,

$$\text{ത്ര്യശ്രങ്ങൾ } ഠകിഗ,\ രഘഗ \text{ തുല്യാകാരങ്ങൾ.}$$

$$\text{ത്ര്യശ്രങ്ങൾ } ഠകിമ,\ ഗജമ \text{ തുല്യാകാരങ്ങൾ}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\text{അപ്പോൾ } ഘര = \frac{ഖ \times വ}{ക_3}$$

$$ജഗ = \frac{ഖ \times വ}{ക_4}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

പിന്നെ ത്ര്യശ്രം *ഠസന* എന്നൊരു പ്രമാണക്ഷേത്രം, അതിന്റെ ഇച്ഛാക്ഷേത്രം *ഠസിയ*. ഇവിടെ രണ്ടിങ്കലും ഭുജാകോടി കർണ്ണങ്ങൾക്ക് അന്യോന്യം ദിക്സാമ്യമുണ്ടാകയാൽ രണ്ടു ത്ര്യശ്ര

ങ്ങളും തുല്യാകാരങ്ങൾ.

$$\text{അപ്പോൾ}\frac{സിയ}{വ} = \frac{സന}{ക_1}$$

$$\therefore\ സിയ = \frac{സന \times വ}{ക_1} = \frac{ഖ \times വാ}{ക_1 \times ക_2}.$$

$$\text{ഇപ്രകാരംതന്നെ } രിശ = \frac{ഖ \times വ^2}{ക_2 \times ക_3}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\text{പിഥ} = \frac{ഖ \times വ^2}{ഠപ \times ഠച}.$$

$$\text{ഇവിടെ } കില = \frac{ഖ \times വ}{ക_1} = \frac{ഖ \times വ^2}{വ \times ക_1}.$$

ഇവിടെ *കില*, *സിയ*, *രിശ* . . . . . . *പിഥ* ഇവയെല്ലാം *കിസി*, *സിരി*, *രിശി* . . . . . . എന്ന ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ ക്രമേണയുള്ള അദ്ധജ്യാക്കളാകുന്നു.

ഭുജാഖണ്ഡം വളരെ ചെറുതായി കല്പിച്ചാൽ ഈ ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ വളരെ ചെറിയവ യായിരിക്കും. അപ്പോൾ ചാപഖണ്ഡങ്ങളോടു തുല്യമദ്ധജ്യാക്കളെന്നു കല്പിക്കാം.

$$\begin{aligned} \text{ചാപഖണ്ഡയോഗം} &= കിസി + സിരി + രിഗി + \dots + പിചി \\ &= \text{പരിദ്ധ്യഷ്ടാംശം} \\ &= \text{അദ്ധജ്യാക്കളുടെ യോഗം} \\ \therefore\ \text{പരിദ്ധ്യഷ്ടാംശം} &= കില + സിയ + രിശ + \dots + പിഥ. \\ &= \frac{ഖ \times വ^2}{വ \times ക_1} + \frac{ഖ \times വ^2}{ക_1 \times ക_2} + \frac{ഖ \times വ^2}{ക_2 \times ക_3} + \cdots + \frac{ഖ \times വ^2}{ഠപ \times ഠച} \end{aligned}$$

അവിടെ ചതുരശ്രുഭുജയെ തുല്യമായിട്ടുഖണ്ഡിക്കയാൽ ഗുണ്യങ്ങൾ തുല്യങ്ങൾ, വ്യാസാദ്ധവർഗ്ഗം ഒന്നുതന്നെ ഗുണകരമാകുന്നതും. അതതു ഖണ്ഡത്തിന് അടുത്തു കീഴേയുമ്മീതേയുമുള്ള കർണ്ണങ്ങളുടെ ഘാതം ഹാരകമാകയാൽ ഹാരകന്നാനാത്രു പം. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്നേടത്ത് **ഈ കർണ്ണഘാതത്തെ രണ്ടു കർണ്ണങ്ങളുടേയും വർഗ്ഗയോഗാദ്ധമെന്നു കല്പിക്കാം, മിക്കവാറും തങ്ങളിൽ സംഖ്യാസാമ്യമുണ്ട്, എന്നിട്ട്.** ഈവണ്ണമാകുമ്പോളതതു ഹാര്യത്തെ രണ്ടു കർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങളെക്കൊണ്ടും വെവ്വേറെ ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലങ്ങളെ രണ്ടിനേയും കൂട്ടി അദ്ധിച്ചുകൊള്ളൂ. ഇതിനോടു തുല്യമായിട്ടിരിക്കും വർഗ്ഗയോഗാദ്ധം കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം.

വ്യാഖ്യാനം:

$$\text{പരിദ്ധ്യഷ്ടാംശം} = \frac{ഖ \times വ^2}{വ \times ക_1} + \frac{ഖ \times വ^2}{ക_1 \times ക_2} + \frac{ഖ \times വ^2}{ക_2 \times ക_3} + \dots + \frac{ഖ \times വ^2}{ഠപ \times ഠച}.$$

ഇവിടെ എല്ലായിടത്തും ഗുണ്യം *ഖ* തന്നെ, ഗുണകാരം $വ^2$ തന്നെ. ഹാരകം നാനാപ്രകാര ങ്ങൾ.

ബാഹ്വർദ്ധത്തെ അസംഖ്യമായിട്ടു ഖണ്ഡിക്കയാൽ, അടുത്തുള്ള കർണ്ണങ്ങൾ രണ്ടും തുല്യങ്ങളെന്നുതന്നെ കല്പിക്കാം.

$$\therefore\ \text{ക}_2 - \text{ക}_1 \rightarrow \text{ഠ}$$
$$(\text{ക}_3 - \text{ക}_1)^2 = {\text{ക}_2}^2 + {\text{ക}_1}^2 - 2\text{ക}_2 \times \text{ക}_1 \rightarrow \text{ഠ}$$
$$\therefore\ {\text{ക}_1}^2 + {\text{ക}_2}^2 \rightarrow 2\text{ക}_1\text{ക}_2$$
$$\therefore\ \text{ക}_1 \times \text{ക}_2 \rightarrow \frac{{\text{ക}_1}^2 + {\text{ക}_2}^2}{2} (\text{കർണ്ണങ്ങളുടെ വർഗ്ഗയോഗാർദ്ധം} = \text{ഘാതം})$$
$$\frac{1}{\text{ക}_1 \times \text{ക}_2} \rightarrow \frac{2}{{\text{ക}_1}^2 + {\text{ക}_2}^2}$$
$$\rightarrow \frac{2({\text{ക}_1}^2 + {\text{ക}_2}^2)}{({\text{ക}_1}^2 + {\text{ക}_2}^2)^2}$$
$$\rightarrow \frac{2({\text{ക}_1}^2 + {\text{ക}_2}^2)}{4{\text{ക}_1}^2{\text{ക}_2}^2}$$
$$\rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{{\text{ക}_1}^2} + \frac{1}{{\text{ക}_2}^2}\right)$$

അതുകൊണ്ടു കർണ്ണഘാതംകൊണ്ടു ഹരിക്കുന്നതിന്നു പകരം കർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങളെക്കൊണ്ടു വെവ്വേറെ ഹരിച്ചുകൂട്ടി അർദ്ധിച്ചാലും ഫലം തുല്യമാകുമെന്നു വന്നു.

$$\therefore\ \text{പരിധ്യഷ്ടാംശം} = \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ഖ} \times \text{വ}^2}{{\text{ക}_1}^2} + \frac{\text{ഖ} \times \text{വ}^2}{\text{വ}^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ഖ} \times \text{വ}^2}{{\text{ക}_2}^2} + \frac{\text{ഖ} \times \text{വ}^2}{{\text{ക}_1}^2}\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ഖ} \times \text{വ}^2}{\text{ഠപ}^2} + \frac{\text{ഖ} \times \text{വ}^2}{\text{ഠപ}^2}\right)$$

അവിടെ പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ദോഃഖണ്ഡങ്ങളുടെ വടക്കെ അഗ്രത്തെ സ്പർശിക്കുന്ന കർണ്ണങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളെക്കൊണ്ടു നടേ ഹരിക്കുമാറു നിരൂപിപ്പൂ. അവിടെ നടേത്തേതാകുന്നതു ദിക്സൂത്രം, ഇതിന്റെ വർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ഗുണകാരവും ഇതുതന്നെ ആകയാൽ ദോഃഖണ്ഡംതന്നെ ഫലമാകുന്നത്. പിന്നെ ഒടുക്കത്തെ കർണ്ണം കോണസൂത്രം. ഇതിന്റെ വർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ദോഃഖണ്ഡാർദ്ധമായിരിക്കും ഫലം. **വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗത്തെ ഇരട്ടിച്ചതെല്ലൊ അന്ത്യകർണ്ണവർഗ്ഗമാകുന്നത്, എന്നിട്ട്. ഗുണകാരത്തിലിരട്ടി ഹാരകമാകുന്നേടത്തു ഗുണ്യത്തിലർദ്ധം ഫലം.** ഇവിടെ എല്ലാ ദോഃഖണ്ഡങ്ങളുടേയും ആദ്യദ്വിതീയാഗ്രങ്ങളെ സ്പർശിച്ചിട്ട് ഈരണ്ടു കർണ്ണങ്ങളുള്ളൂ. ഇവറ്റിൽ ആദ്യകർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചുള്ള ഫലങ്ങളുടെ യോഗം യാതൊന്ന്, യാതൊന്നു പിന്നെ ദ്വിതീയ കർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലങ്ങളുടെ യോഗം, ഇവ തങ്ങളുടെ അന്തരമാകുന്നതു നടേത്തെ പരിഷയിലെ ആദ്യഫലവും രണ്ടാം പരിഷയിലെ ഒടുക്കത്തെ ഫലവും തങ്ങളിലെ അന്തരം. അവ പിന്നെ ദോഃഖണ്ഡത്തിന്റെ അർദ്ധമായിട്ടിരിക്കും. ഇടയിലെ ഫലങ്ങൾ രണ്ടു വകയിലും ഹാരകങ്ങൾ ഒന്നേ ആകയാൽ ഫലങ്ങളും ഒന്നേ ആയിട്ടിരിക്കും. രണ്ടാമതു തുടങ്ങി ഉപാന്ത്യം ഒടുക്കമായിട്ടുള്ള ഫലങ്ങൾക്കു ഭേദമില്ല. അതു പിന്നെ ദോഃഖണ്ഡത്തിന്റെ അർദ്ധമായിട്ടിരിക്കും. അവിടെ ആദ്യഹാരകം

കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം ദോഃഖണ്ഡം തന്നെ, അന്ത്യഹാരംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം ദോഃഖണ്ഡാർദ്ധം. കർണ്ണവർഗ്ഗയോഗാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിക്കുന്ന പക്ഷത്തിങ്കൽ അന്തരം ദോഃഖണ്ഡത്തിന്റെ നാലൊന്ന്. ദോഃഖണ്ഡം ചെറുതാകുമ്പോൾ ഈ ചതുരംശത്തെ ഉപേക്ഷിക്കാം ആകയാൽ ഒരു കർണ്ണവർഗ്ഗത്തെ ഹാരകമായിട്ടു കൊള്ളേണമെന്നേ ഉള്ളൂ.

വ്യാഖ്യാനം:

$$\begin{aligned}\text{പരിദ്ധ്യഷ്ടാംശം} =& \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_1{}^2}+\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{വ}^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_2{}^1}+\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_1{}^2}\right)\\ &+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ഠച}^2}+\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ഠപ}^2}\right)\\ =&\frac{1}{2}\left(\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{വ}^2}+\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_1{}^2}+\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_2{}^2}+\cdots+\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ഠപ}^2}\right)\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_1{}^2}+\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_2{}^2}+\cdots+\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ഠച}^2}\right)\end{aligned}$$

ഇവിടെ രണ്ടു ഫലയോഗാർദ്ധങ്ങളുള്ളതിൽ,

$$\begin{aligned}\text{പ്രഥമഫലയോഗം} =& \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{വ}^2}+\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_1{}^2}+\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_2{}^2}+\cdots+\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ഠപ}^2}\\ \text{ദ്വിതീയഫലയോഗം} =& \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_1{}^2}+\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_2{}^2}+\cdots+\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ഠപ}^2}+\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ഠച}^2}\\ \text{ഇവയുടെ അന്തരം} =& \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{വ}^2}-\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ഠച}^2}\\ =& \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{വ}^2}-\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{2\text{വ}^2}\\ & \left(\text{ഠച}^2=\text{ഠക}^2+\text{കച}^2=2\text{വ}^2,\ \text{എന്നിട്ട്}\right)\\ =& \text{ഖ}-\frac{\text{ഖ}}{2}=\frac{\text{ഖ}}{2}\\ \text{ഇവയുടെ അന്തരാർദ്ധം} =& \frac{\text{ഖ}}{4}\end{aligned}$$

ഖ അതിച്ചെറുതാകയാൽ $\frac{\text{ഖ}}{4}$ ശൂന്യപ്രായമെന്നു കല്പിക്കാം.

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{1}{2}&\left(\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{വ}^2}+\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_1{}^2}+\cdots+\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ഠപ}^2}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_1{}^2}+\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_2{}^2}+\cdots+\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ഠച}^2}\right)\end{aligned}$$

അതുകൊണ്ട് ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലുമൊന്നിന്റെ ഇരട്ടിയെ പരിദ്ധ്യഷ്ടാംശമെന്നു പറയാമെന്നു വന്നു.

$$\therefore\ \text{പരിദ്ധ്യഷ്ടാംശം} = \frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_1{}^2}+\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_2{}^2}+\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ക}_3{}^2}+\cdots+\frac{\text{ഖ}\times\text{വ}^2}{\text{ഠച}^2}$$

അവിടെ ദോഃഖണ്ഡത്തെ സംബന്ധിച്ചുള്ളതിൽ വലിയ കർണ്ണവർഗ്ഗത്തെ ഹാരകമായിട്ട് ഇവിടെ നിരൂപിക്കുന്നു. എന്നിട്ടു വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗത്തെക്കൊണ്ട് അതതു ദോഃഖണ്ഡത്തെ ഗുണിച്ച് അതിന്റെ വലിയ കർണ്ണത്തിന്റെ വർഗ്ഗംകൊണ്ട് ഹരിപ്പൂ. ഫലങ്ങൾ അതതു കർണ്ണാന്തരാളത്തിങ്കലെ പരിധ്യംശത്തിങ്കലെ അർദ്ധജ്യാക്കൾ. ഇവിടെ ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ട് അതതു ദോഃഖണ്ഡത്തെ ഗുണിച്ച് അതതു കർണ്ണവർഗ്ഗത്തെക്കൊണ്ട് ഹരിച്ച ഫലത്തെ അതതു ദോഃഖണ്ഡത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞശേഷം അതതു കർണ്ണാന്തരാളപരിധ്യാംശജ്യാവായിട്ടുതന്നെ ഇരിക്കും. അവിടെ ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്ന് അതത് ഇഷ്ടകർണ്ണാഗ്രത്തോടുള്ള അന്തരാളത്തിങ്കലെ ദോഃഖണ്ഡയോഗത്തിന്റെ വർഗ്ഗം ഗുണഹാരാന്തമാകുന്നത്. വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം ഗുണകരമാകുന്നത്. അവിടെ ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഗുണകാരംകൊണ്ടുതന്നെ ഹരിക്കുന്നൂ എങ്കിൽ ഗുണകാരം ഹാരകത്തേക്കാൾ ചെറുതാകയാൽ ഫലം ഏറെയുണ്ടാവും. അവിടെ ഫലത്തെ രണ്ടേടത്തുവച്ച് ഒന്നിനെ ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ചഫലത്തെ മറ്റേതിങ്കന്നു കളയേണം. അതു വാസ്തവമായിരിക്കുന്ന ഫലമാകുന്നത്. അവിടെ ശോദ്ധ്യഫലമുണ്ടാക്കുന്നേടത്തും പിന്നെ ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഗുണകാരംകൊണ്ടു തന്നെ ഹരിക്കുന്നൂ എങ്കിൽ അപ്ഷലത്തിങ്കന്നും ഒട്ടുകളയേണം മുമ്പിലെപ്പോലെ ഉണ്ടാക്കീട്ട്, എന്നു വരും. അവിടെ ആ രണ്ടാമതു ശോദ്ധ്യഫലമുണ്ടാക്കിയതിനേയും ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം ശോദ്ധ്യഫലത്തിങ്കന്നു ശോദ്ധ്യമായി മൂന്നാമത് ഒരു ഫലമുണ്ടാകും. ഇവിടേയും ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഹരിക്കിൽ അതിന്നു നാലാമത് ഒരു ശോദ്ധ്യഫലമുണ്ടാക്കേണം. ഇങ്ങനെ ഗുണകാരംകൊണ്ട് എല്ലാറ്റേയും ഹരിക്കിൽ ശോദ്ധ്യപരമ്പര ഒടുങ്ങുകയില്ല, ഒടുക്കത്തെ ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിപ്പോളവും. ഹരകംകൊണ്ടു ഹരിക്കായ്കിൽ ഫലപരമ്പര ഒടുങ്ങുകയില്ല. പെരികെ ചെറുതായാൽ ഉപേക്ഷിക്കാമെന്നേ ഉള്ളൂ.

ഇങ്ങനെ ഉണ്ടാക്കിയാൽ നടേത്തേതു ഗുണ്യയോഗം. അതു ചതുരശ്രബാഹ്വഖണ്ഡങ്ങളുടെ യോഗമാകുന്ന വ്യാസാർദ്ധം. പിന്നെ രണ്ടാമത് ഇതിങ്കന്നും കളയേണ്ടും ഫലം. രണ്ടാമതിങ്കന്നു കളയേണ്ടുവതു മൂന്നാമത്. ഇങ്ങനെ ആകുമ്പോൾ ഓജങ്ങൾ ഒക്കത്തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂ, യുഗ്മങ്ങൾ തങ്ങളിലും കൂട്ടൂ. പിന്നെ ഓജയോഗത്തിങ്കന്നു യുഗ്മയോഗം കളയൂ. ശേഷം പരിധ്യഷ്ടാംശം. ഇങ്ങനെ ഗുണകാരം ചെറുതാകയാൽ. ഇവിടെ യാതൊരിടത്തു പിന്നെ ഗുണാകാരം വലിയത് അവിടെ ഗുണ്യത്തിൽ കൂട്ടുകയേവേണ്ടൂ ഫലങ്ങൾ എല്ലാം.

ഇവിടെ പിന്നെ കോടികർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങൾ ഗുണഹാരകങ്ങളാകയാൽ ഭുജാവർഗ്ഗങ്ങൾ ഗുണഹാരാന്തരങ്ങളാകുന്നവ. അവിടെ പിന്നെ സമമായി പകുത്തിരിക്കുന്ന ചതുരശ്രബാഹ്വഖണ്ഡങ്ങളിൽ ഒന്നു നടേത്തെ ഭുജയാകുന്നത്. രണ്ടു ഖണ്ഡംകൂടിയതു രണ്ടാംഭുജാ. മൂന്നു ഖണ്ഡംകൂടിയതു മൂന്നാംഭുജാ. ഇങ്ങനെ ക്രമേണ ഏകാദ്യേകോത്തരഖണ്ഡരൂപങ്ങളായിട്ട് ഇരിക്കും ആ ഭുജകൾ. അവറ്റെ പിന്നെ അണുപരിമാണമായിട്ടു കല്പിക്കേണ്ടൂ, ഫലത്തിന്റെ സൂക്ഷ്മതക്കായിക്കൊണ്ട്. പിന്നെ ഇവറ്റെ രൂപങ്ങളെന്നും കല്പിച്ച് ഒന്നു തുടങ്ങി ഓരോന്നേറിയ സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗയോഗത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണ്യമാകുന്ന ബാഹ്വഖണ്ഡം അണുപരിമിതമായി രൂപമായി കല്പിച്ചിരിക്ക

ന്നതിനെ ഗുണിച്ച വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലമാദ്യഫലയോഗം. പിന്നെ ദ്വിതീയഫലയോഗത്തിന്നു പ്രഥമഫലം ഗുണ്യമാകയാൽ ഗുണ്യങ്ങൾ നാനാഭൂത ങ്ങൾ, ഗുണഹാരാന്തരം ഇഷ്ടമാകുന്ന ഭുജാവർഗ്ഗവും നാനാരൂപങ്ങൾ; ആകയാൽ ഗുണഹാരാന്തരയോഗം കൊണ്ടു ഗുണിപ്പാൻ ഉപായമില്ല. എന്നിട്ടു ഗുണഹാരാന്ത രയോഗമായിരിക്കുന്ന ഭുജാവർഗ്ഗസംകലിതത്തെക്കൊണ്ടു രൂപമാകുന്ന നടേത്തെ ഗുണ്യത്തെ രണ്ടു വട്ടം ഗുണിച്ച വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗംകൊണ്ടു രണ്ടു വട്ടം ഹരിപ്പൂ. ഫലം ദ്വി തീയഫലയോഗം. ഇവിടെ ഏകാദ്യേകോത്തരങ്ങളുടെ വർഗ്ഗവർഗ്ഗങ്ങളുടെ സംകലിതം ഗുണകാരം വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗവർഗ്ഗം ഹാരകം എന്നിരിക്കും. സംകലിതത്തിന്നു വ്യാസാ ർദ്ധം പദമാകുന്നത് ഇവിടെ. പിന്നെ മൂന്നാംഫലയോഗവും ഇവ്വണ്ണംതന്നെ ആദ്യഗു ണത്തിങ്കന്നു തന്നെ ഉണ്ടാക്കൂ. അവിടെ ഏകാദ്യേകോത്തമങ്ങളുടെ സമഷൾഘാ തസംകലിതം ഗുണകാരം, വ്യാസാർദ്ധസമഷൾ ഘാതം ഹാരകം, ഇങ്ങനെ മീത്തെ മീത്തെ സമയുഗ്ഘാതം ഹാരകം, അതിന്റെ സംകലിതം ഗുണകാരമായിട്ടുമിരിക്കും. അവിടെ സമത്രിഘാതത്തിങ്കന്നു വർഗ്ഗസംകലിതം, സമപഞ്ചഘാതത്തിങ്കന്നു വർഗ്ഗവ ർഗ്ഗസംകലിതം, സമസപ്തഘാതത്തിങ്കന്നു സമഷൾഘാതസംകലിതം ഉണ്ടാകുന്നു. അവിടെ ഗുണകാരമാകുന്ന സമത്രിഘാതത്തെ ഹാരകമാകുന്ന സമദ്വിഘാതത്തെ ക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം വ്യാസാർദ്ധം തന്നെ. ഈവണ്ണംതന്നെ എല്ലാടവും അതതു ഹാരകത്തെക്കൊണ്ട് അതതു ഗുണകാരത്തെ ഹരിച്ചാൽ ഫലം വ്യാസാർദ്ധംതന്നെ ആയിരിക്കും. പിന്നെ സമത്രിഘാതത്തെ മൂന്നിൽ ഹരിക്കേണ്ടുകയാൽ മൂന്നിൽ ഹരിച്ചുകൊള്ളൂ വ്യാസാർദ്ധത്തെ. എന്നാൽ വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗസംകലിതത്തെ വ്യാസാ ർദ്ധവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചതായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ വ്യാസാർദ്ധത്തെ അഞ്ചിൽ ഹരിച്ച തു സമചതുർഘാതസംകലിതത്തെ സമചതുർഘാതംകൊണ്ടു ഹരിച്ചതായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ വ്യാസാർദ്ധത്തിങ്കന്നു ത്രിശരാദി വിഷമസംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചഫ ലം ഇച്ചൊല്ലിയ ഫലപരമ്പരയിൽ മേലേതു മേലേതായിട്ടിരിക്കും. എന്നിട്ടുചൊ ല്ലീ—**ത്രിശരാദിവിഷമസംഖ്യാഭക്തമൃണം സ്വം പൃഥക്ക്രമാൽ കുര്യാൽ**—എന്ന്. അവിടെ ഫലപരമ്പരയിൽ കീഴേതിങ്കന്നു കളയേണ്ടുന്നേടത്ത് ഓജങ്ങളുടെ യോഗ ത്തെ ഗുണ്യയോഗത്തിങ്കന്നു കളയൂ, യുഗ്മയോഗത്തെ കൂട്ടൂ, എന്നാകിലുമാം. **എന്നിട്ടു ഋണം സ്വം പൃഥക്ക്രമാൽ കുര്യാൽ എന്നു ചൊല്ലീ.**

വ്യാഖ്യാനം:

$$\text{പരിദ്ധ്യഷ്ടാംശം} = \frac{\text{ഖ} \times \text{വ}^2}{\text{ക}_1{}^2} + \frac{\text{ഖ} \times \text{വ}^2}{\text{ക}_2{}^2} + \frac{\text{ഖ} \times \text{വ}^2}{\text{ക}_3{}^2} + \cdots + \frac{\text{ഖ} \times \text{വ}^2}{\text{ഠച}^2}.$$

ഇവിടെ ആദ്യഫലത്തിൽ ഗുണ്യം ഖ, ഗുണകാരം വ^2 ഹാരകം $\text{ക}_1{}^2$.

ഹാരകത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു ഗുണകാരംകൊണ്ടുതന്നെ ഹരിക്കുകയാണെങ്കിൽ ഹാര കം ഗുണാകാരത്തേക്കാൾ ഏറുകകൊണ്ടു ഫലവും ഏറിപ്പോകും. ഇവിടെ ഗുണഹാരാന്തരം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ചത് ഏറിപ്പോയ അംശം. ഇത് ഒരു ശോദ്ധ്യഫല മാകുന്നത്. ഈ ശോദ്ധ്യഫലം വരുത്തുന്നേടത്തും ഗുണകാരംകൊണ്ടുതന്നെ ഹരിക്കുകയാ ണെങ്കിൽ ആദ്യശോദ്ധ്യഫലത്തിങ്കന്നും കളയേണ്ടുന്ന ഒരു ശോദ്ധ്യഫലമുണ്ടാക്കി സംസ്കരി ക്കേണം. ആദ്യശോദ്ധ്യഫലത്തെ ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരി ച്ചത് രണ്ടാംശോദ്ധ്യഫലം. ഇങ്ങനെ മേലെ മേലെയുള്ള ശോദ്ധ്യഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുന്നേ

ടത്തും ഗുണകാരം കൊണ്ടുതന്നെ ഹരിക്കുകയാണെങ്കിൽ ശോദ്ധ്യഫലപരമ്പര ഒടുങ്ങുകയില്ല. ശോദ്ധ്യഫലം അത്യന്തം ചെറുതാകയാൽ ഉപേക്ഷിക്കാമെന്നേയുള്ളൂ.

$$\frac{ഖ \times വ^2}{ക_1{}^2}.$$

ഇവിടെ ഗുണഹാരാന്തരം $= ക_1{}^2 - വ^2 =$ കർണ്ണവർഗ്ഗം $-$ കോടിവർഗ്ഗം $=$ ഭുജാവർഗ്ഗം $=$ $ഖ^2$.

$$\frac{ഖ \times വ^2}{വ^2} - \frac{ഖ \times ഖ^2}{ക_1{}^2} = ഖ - \frac{ഖ \times ഖ^2}{ക_1{}^2}$$
$$= \frac{ഖ\left(ക_1{}^2 - ഖ^2\right)}{ക_1{}^2}$$
$$= \frac{ഖ \times വ^2}{ക_1{}^2} \quad (= \text{ ആദ്യഫലം തന്നെ}).$$

$$\frac{ഖ \times വ^2}{വ^2} - \left(\frac{ഖ \times ഖ^2}{വ^2} - \frac{ഖ^3\left(ക_1{}^2 - വ^2\right)}{വ^2 \times ക_1{}^2}\right)$$
$$= ഖ - \left(\frac{ഖ^3}{വ^2} - \frac{ഖ^3.ഖ^2}{വ^2.ക_1{}^2}\right)$$
$$= ഖ - ഖ^3\left(\frac{ക_1{}^2 - ഖ^2}{വ^2.\, ക_1{}^2}\right)$$
$$= ഖ - \frac{ഖ^3.വ^2}{വ^2.\, ക_1{}^2}.$$
$$= ഖ - \frac{ഖ\, ഖ^2}{ക_1{}^2}$$
$$= \frac{ഖ \times വ^2}{ക_1{}^2} \text{ (ആദ്യഫലം തന്നെ).}$$

അപ്പോൾ എല്ലാ ഫലങ്ങളേയും ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഹരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ,

$$\frac{ഖ \times വ^2}{ക_1{}^2} = ഖ - \frac{ഖ^3}{വ^2} + \frac{ഖ^5}{വ^4} - \frac{ഖ^7}{വ^6} + \cdots$$

ഹാരകം ഗുണകാരത്തേക്കാളേറുമ്പോൾ ഓജശോദ്ധ്യഫലങ്ങളെ കളയേണം, യുഗ്മശോദ്ധ്യഫലങ്ങളെ കൂട്ടേണം. ഹാരകം ഗുണകാരത്തേക്കാൾ കുറയുമ്പോൾ എല്ലാ ശോദ്ധ്യഫലങ്ങളേയും കൂട്ടേണം.

$$\therefore\ \frac{ഖ \times ഖ^2}{ക_1{}^2} = ഖ - \frac{ഖ \times ഖ^2}{വ^2} + \frac{ഖ \times ഖ^2 \times ഖ^2}{വ^2 \times വ^2} - \frac{ഖ \times ഖ^2 \times ഖ^2 \times ഖ^2}{വ^2 \times വ^2 \times വ^2} + \cdots$$

$$\frac{ഖ \times വ^2}{ക_2{}^2} = ഖ - \frac{ഖ \times (2ഖ)^2}{വ^2} + \frac{ഖ \times (2ഖ)^2 \cdot (2ഖ)^2}{വ^2 \cdot വ^2} - \frac{ഖ \times (2ഖ)^2 \cdot (2ഖ)^2 \cdot (2ഖ)^2}{വ^2\ വ^2\ വ^2} + \cdots$$

$$\frac{ഖ \times വ^2}{ക_3{}^2} = ഖ - \frac{ഖ \times (3ഖ)^2}{വ^2} + \frac{ഖ \times (3ഖ)^2 \cdot (3ഖ)^2}{വ^2 \times വ^2} - \frac{ഖ \times (3ഖ)^2(3ഖ)^2(3ഖ)^2}{വ^2 \cdot വ^2 \cdot വ^2} + \cdots$$

$$\begin{array}{ccccc} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\text{പരിദ്ധ്യഷ്ടാംശം} &= \frac{\text{ഖ} \times \text{വ}^2}{{\text{ക}_1}^2} + \frac{\text{ഖ} \times \text{വ}^2}{{\text{ക}_2}^2} + \frac{\text{ഖ} \times \text{വ}^2}{{\text{ക}_3}^2} + \cdots \\
&= \left(\text{ഖ} - \text{ഖ}\,\frac{\text{ഖ}^2}{\text{വ}^2} + \text{ഖ}\,\frac{\text{ഖ}^2}{\text{വ}^2} \cdot \frac{\text{ഖ}^2}{\text{വ}^2} - \text{ഖ} \cdot \frac{\text{ഖ}^2}{\text{വ}^2} \cdot \frac{\text{ഖ}^2}{\text{വ}^2} \cdot \frac{\text{ഖ}^2}{\text{വ}^2} + \cdots\right) \\
&\quad + \Bigg(\text{ഖ} - \text{ഖ} \cdot \frac{(2\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2} + \text{ഖ} \cdot \frac{(2\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2} \cdot \frac{(2\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2} \\
&\qquad - \text{ഖ} \cdot \frac{(2\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2} \cdot \frac{(2\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2} \cdot \frac{(2\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2} + \cdots\Bigg) \\
&\quad + \Bigg(\text{ഖ} - \text{ഖ} \cdot \frac{(3\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2} + \text{ഖ} \cdot \frac{(3\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2} \cdot \frac{(3\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2} \\
&\qquad - \text{ഖ} \cdot \frac{(3\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2} \cdot \frac{(3\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2} \cdot \frac{(3\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2} + \cdots\Bigg) \\
&\quad + \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{aligned}$$

ഈ ഫലപ്രയോഗങ്ങളിൽ ആദ്യത്തെ ഫലയോഗം

$$\begin{aligned}
&= \text{എല്ലാ ഖണ്ഡങ്ങളുടേയും യോഗം} \\
&= \text{ചതുരശ്രബാഹ്വർദ്ധം} \\
&= \text{വ്യാസാർദ്ധം} = \text{വ}.
\end{aligned}$$

ഈ ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളെ അണുപരിമാണങ്ങളെന്നും രൂപങ്ങളെന്നും കല്പിക്കുക.

$$\begin{aligned}
\text{അപ്പോൾ ദ്വിതീയഫലയോഗം} &= \frac{1}{\text{വ}^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots) \\
&= \frac{1}{\text{വ}^2} \times \text{ ഘനഹാരാന്തരയോഗം.}
\end{aligned}$$

തൃതീയഫലയോഗത്തിൽ, $\text{ഖ} \cdot \frac{\text{ഖ}^2}{\text{വ}^2}, \text{ഖ} \cdot \frac{(2\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2}, \text{ഖ} \cdot \frac{(3\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2} \cdots$ എന്നുള്ള ഗുണ്യങ്ങൾ നാനാരൂപങ്ങൾ; $\frac{\text{ഖ}^2}{\text{വ}^2}, \frac{(2\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2}, \frac{(3\text{ഖ})^2}{\text{വ}^2} \cdots$ എന്നുള്ള ഗുണകാരങ്ങളും നാനാരൂപങ്ങൾ. അപ്പോൾ ഘനഹാരാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിപ്പാൻ ഉപായമില്ല. എന്നിട്ട് ആദ്യത്തെ ഗുണ്യമായ ഒരു ഭുജാഖണ്ഡത്തെത്തന്നെ ഗുണ്യമായി കല്പിക്ക. അപ്പോൾ,

$$\begin{aligned}
\text{തൃതീയഫലയോഗം} &= \frac{1}{\text{വ}^4}(1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots) \\
\text{ചതുർത്ഥഫലയോഗം} &= \frac{1}{\text{വ}^6}(1^6 + 2^6 + 3^6 + \cdots)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ \text{പരിദ്ധ്യഷ്ടാംശം} &= \text{വ} - \frac{1}{\text{വ}^2}\,(1^2 + 2^2 + 3^2\ + \cdots) \\
&\quad + \frac{1}{\text{വ}^4}(1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots)
\end{aligned}$$

$$- \frac{1}{വ^6}\left(1^6 + 2^6 + 3^6 + \ldots\right) + \cdots$$

ഇവിടെ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots =$ ഏകാദ്യേകോത്തരവർഗ്ഗസംകലിതം.

$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots =$ ഏകാദ്യേകോത്തരവർഗ്ഗവർഗ്ഗസംകലിതം.

$1^6 + 2^6 + 3^6 + \cdots =$ ഏകാദ്യേകോത്തരസമഷൾഘാതസംകലിതം.

$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$

$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$

ഇവയുടെ ഇടയ്ക്കും ഘനസംകലിതം, സമപഞ്ചഘാതസംകലിതം എന്നെല്ലാമുണ്ട്. ഈ സംകലിതങ്ങൾക്കെല്ലാറ്റിന്നും ഇവിടെ പദം വ്യാസാർദ്ധം തന്നെ.

(പദം എന്നതിന് ഇവിടെ ഏകാദ്യേകോത്തരങ്ങളിൽ ഒടുക്കത്തെ സംഖ്യ എന്നർത്ഥം).

അതുകൊണ്ടു $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots = \frac{വ^3}{3}$.

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots = \frac{വ^5}{5}.$$

$$1^6 + 2^6 + 3^6 + \cdots = \frac{വ^7}{7}.$$

$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$

$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$

$\therefore$ പരിദ്ധ്യഷ്ടാംശം $= വ - \frac{വ^3}{3} \cdot \frac{1}{വ^2} + \frac{വ^5}{5} \cdot \frac{1}{വ^4} - \frac{വ^7}{7} \cdot \frac{1}{വ^6} + \cdots$

$$= വ - \frac{വ}{3} + \frac{വ}{5} - \frac{വ}{7} + \cdots$$

$\therefore$ പരിധി $= 8വ - \frac{8വ}{3} + \frac{8വ}{5} - \frac{8വ}{7} + \cdots$

$$= 4വ്യാ - \frac{4വ്യാ}{3} + \frac{4വ്യാ}{5} - \frac{4വ്യാ}{7} + \cdots$$

(ഇവിടെ $വ്യാ =$ വ്യാസം; $വ =$ വ്യാസാർദ്ധം.)

"വ്യാസേ വാരിധിനിഹതേ
രൂപഹൃതേ വ്യാസസാഗരാഭിഹതേഃ
ത്രിശരാദിവിഷമസംഖ്യാഭക്തേ ...
മൃണം സ്വം പൃഥക്ക്രമാൽ കുര്യാൽ" || (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

അനന്തരം സമഘാതസംകലിതാനയനോപായത്തെ ഇവിടക്കു ഉപകാരിയായിട്ടു കാട്ടേണ്ടുകയാൽ മൂലവർഗ്ഗാദ്യശേഷസംകലിതത്തേയും കാട്ടുന്നു. പ്രസംഗാൽ ഉത്തരോത്തരസംകലിതൈക്യാനയനോപായത്തേയും ക്രമേണ കാട്ടുന്നു. ഇവിടെ ദിഗ്രേഖാവർഗ്ഗം ഗുണകാരം, അതതു കർണ്ണരേഖാവർഗ്ഗം ഹാരകം. ആകയാൽ അതതു കർണ്ണാഗ്രത്തോടു ദിഗ്രേഖാഗ്രത്തോടുള്ള അന്തരാളത്തിങ്കലെ ചതുരശ്രബാഹുഭാഗത്തിന്റെ വർഗ്ഗം ഗുണഹാരാന്തരം. പിന്നെ ഇഷ്ടകർണ്ണാഗ്രത്തിങ്കന്ന് അതിനടുത്ത

ചെറിയ കണ്ണാഗ്രത്തോടുള്ള അന്തരാളത്തിങ്കലെ ചതുരശ്രബാഹുഖണ്ഡം ഗുണ്യ മാകുന്നതു്. ഈ രണ്ടു കണ്ണാന്തരാളത്തിങ്കലെ പരിദ്ധ്യംശത്തിങ്കലെ അദ്ധജ്യാവു് ഇച്ഛാഫലം. ഇങ്ങനെ എല്ലാ ഫലവും വരുന്നു. അവിടെ ഗുണ്യങ്ങളെല്ലാം തുല്യം, കണ്ണരേഖാഗ്രാന്തരം തുല്യമാകയാൽ. ഇങ്ങനെ ഫലങ്ങളുണ്ടാക്കി ഫലയോഗം ചെയ്താൽ ദിക്സൂത്രത്തോടു ചതുരശ്രകോണിങ്കലെ കണ്ണരേഖയോടുള്ള അന്തരാള ത്തിങ്കലെ പരിധിഭാഗം വരും. ഇവിടെ ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തിന്നടുത്തുള്ള കണ്ണത്തിന്നു ചതുരശ്രബാഹുഖണ്ഡങ്ങളിലൊന്നു ഭുജയാകുന്നതു്. രണ്ടാംകണ്ണത്തിന്നു ഭുജാഖണ്ഡ ങ്ങളാൽ രണ്ടുകൂടിയതു ഭുജയാകുന്നതു്. ഇങ്ങനെ ഓരോരോ ഭുജാഖണ്ഡം ഏറിയതു പിന്നെ പിന്നത്തെ കണ്ണത്തിന്റെ ഭുജയാകുന്നതു്. എന്നാലൊന്നു തുടങ്ങി ഓരോന്നേ റി ഇരിക്കുന്ന ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളുടെ യോഗങ്ങൾ ഭുജകളാകുന്നതു്. എന്നാലിവറ്റിന്റെ വണ്ണയോഗങ്ങൾ ഗുണഹാരാന്തരങ്ങളുടെ യോഗമാകുന്നതു്. ഗുണ്യമെല്ലാമൊന്നാ കയാൽ അതിനെക്കൊണ്ടു ഗുണ്യഹാരാന്തരയോഗത്തെ ഗുണിച്ചു ഹാരകമൊന്നെ ങ്കിൽ അതിനെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലയോഗം വരും. ഇവിടെ ഹാരകമൊന്നേ എന്നു കല്പിപ്പൂ. അതു വ്യാസാദ്ധവഗ്ഗംതന്നെ താനും എന്നു കല്പിച്ചിട്ടു ക്രിയ ചെയ്യു ന്നു. ഇവിടെ ഇങ്ങനെ ഉണ്ടാക്കിയ ഫലവും ഗുണഹാരാന്തരവും തമ്മിലുള്ള ഘാതം ഹാര്യത്തിങ്കൽ ശേഷിച്ചിരിക്കുമ്പോൾ ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തോടൊക്കും ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം. ഇതു ശേഷിയാതെ കൂട്ടിപ്പോയി എങ്കിൽ ആ ഫലവും ഗുണഹാരാന്തരവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ച ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലത്തെ ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലത്തിങ്കന്നു കളയേണം. എന്നാലും ഫലമൊക്കും. ഇക്കളയേണ്ടും ഫലം ഉണ്ടാക്കുമ്പോഴും ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഹരി പ്പൂ എങ്കിൽ ഒട്ടേറീട്ടിരിക്കും. എന്നാലതിങ്കന്നുമുണ്ടാക്കേണമൊരു ശോദ്ധ്യഫലം. പിന്നെയുമിവണ്ണമാകിൽ പിന്നെ പിന്നെ ഫലത്തിങ്കന്നും കുറഞ്ഞൊന്നു കളയേണ്ടി വരും. ആകയാൽ ഒടുക്കത്തിന്നു തുടങ്ങി ഇവ ഒക്കെ കളഞ്ഞു കൂട്ടുമ്പോൾ ഫലമൊ ക്കും. ഇവിടെ ഹാര്യത്തിങ്കൽ സംഖ്യ നൂറു് എന്നു കല്പിപ്പൂ. ഹാരകം പത്തു്, ഗുണകാരം എട്ടു്. ഇതിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചിട്ടു നൂറു് ഉണ്ടായീ എന്നും കല്പിപ്പൂ. ഇവിടെ ഹാരകം കൊണ്ടു് ഹരിച്ചാൽ ഫലം പത്തു് ഉണ്ടാകും. ഇവിടെ പത്തു സംഖ്യയാകുന്ന ഹാരകം ഹാര്യത്തിങ്കൽനിന്നു് ഒരിക്കൽ കളയേണ്ടി ഇരിക്കുന്നേടത്തു് എട്ടുകളയുമ്പോൾ ഗു ണഹാരാന്തരമാകുന്ന രണ്ടു ഹാര്യത്തിങ്കൽ ശേഷിക്കും. പിന്നെയുമെത്ര ആവൃത്തി കളഞ്ഞു അത്ര ഗുണഹാരാന്തരം ശേഷിക്കും ഹാര്യത്തിങ്കൽ. എന്നാൽ ഫലവും ഗുണഹാരാന്തരവുമുള്ള ഘാതത്തെ ഹാര്യത്തിങ്കൽ കളഞ്ഞ ശേഷത്തെ ഗുണകാ രംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഈ ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തോടു തുല്യമായിരിക്കും. ഇവിടെ അതിനേയും കൂടെ ഗുണകാരംകൊ ണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ഫലം പന്ത്രണ്ടര. ഈ ഫലത്തെ ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഇരുപത്തഞ്ചു്. ഇതിനെ ഹാരമാകുന്ന പത്തുകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം രണ്ടര. ഇതിനെ മുമ്പിലെ പന്ത്രണ്ടരയിൽനിന്നു കളയുമ്പോൾ ശേഷം ഫലം പത്തു തന്നെ. ഇവിടെ ഇരുപത്തിഅഞ്ചിനേയും എട്ടിൽ ഹരിക്കിൽ അഷ്ടാംശംകൂടിയ മൂന്നു ഫലം. ഇതു ശോദ്ധ്യം. വാസ്തവത്തിങ്കന്നു ഏറും. എന്നാൽ ഈ ഫലത്തേയും

ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം അഷ്ടാംശത്തോടുകൂടിയ അര. ഇതിനെ രണ്ടാംഫലത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ രണ്ടര. അപ്പോൾ അതു നടേത്തെ ഫലത്തിങ്കന്നു കളവാൻ മതി. ഇങ്ങനെ ആതതു ഫലത്തെ ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം അതിനടുത്തു മുമ്പിലെ ഫലത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ അപ്പലം സൂക്ഷ്മമാകും. എന്നാൽ അതു് അതിന്നു കീഴെ ഫലത്തിങ്കന്നു ശോധിക്കാം. പിന്നെ അതു് അതിങ്കന്നു കീഴേതിങ്കന്നു്, ഇങ്ങനെ. എന്നാൽ നടേത്തെ ഫലം വാസ്തവത്തോടു് ഒക്കും.

വ്യാഖ്യാനം: ശോദ്ധ്യഫലത്തെ ഉണ്ടാക്കുന്നേടത്തെ യുക്തി പറയുന്നു.

$$\text{ഹാര്യം} = 100$$
$$\text{ഗുണകാരം} = 8$$
$$\text{ഹാരകം} = 10.$$
$$\therefore \quad \text{ഗുണഹാരാന്തരം} = 2$$

പത്തു് ഒരാവൃത്തി 100-ൽ നിന്നും കളഞ്ഞാൽ ശേഷം 90; എട്ടു് ഒരാവൃത്തി കളഞ്ഞാൽ ശേഷം 92. അപ്പോൾ ഓരോ ആവൃത്തി കളയുമ്പോൾ, ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ഹാര്യത്തിങ്കൽ ശേഷിക്കുന്ന 92, ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ഹാര്യത്തിങ്കൽ ശേഷിക്കുന്ന 90-നെക്കാൾ രണ്ടുകൊണ്ടു് ഏറും. ഈ രണ്ടു ഗുണഹാരാന്തരമാകുന്നതു്.

പത്തിനെ പത്തു് ആവൃത്തി നൂറ്റിൽനിന്നും കളഞ്ഞാൽ ശേഷം ശൂന്യം. അപ്പോൾ വാസ്തവമായിരിക്കുന്ന ഫലം $=$ 10. ഗുണകാരത്തിനെ പത്താവൃത്തി ഹാര്യത്തിങ്കൽനിന്നു കളയുമ്പോൾ, ഹാര്യത്തിങ്കൽ ശേഷിക്കുന്നതു്, $= 2 \times 10 =$ വാസ്തവഫലം $\times$ ഗുണഹാരാന്തരം.

"ഇവിടെ ഇങ്ങനെ ഉണ്ടാക്കിയ ഫലവും ഗുണഹാരാന്തരവും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതം ഹാര്യത്തിങ്കൽ ശേഷിക്കുമ്പോൾ, ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തോടൊക്കും ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം."

ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ഹാര്യത്തിങ്കൽ ശേഷിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ആ ശേഷത്തെ ഹാര്യത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞശേഷത്തെ ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ വാസ്തവമായിരിക്കുന്ന ഫലം വരും.

$$\text{ഗുണഹാരാന്തരം} \times \text{വാസ്തവഫലം} = 2 \times 10 = 20.$$
$$\frac{100-20}{8} = \frac{80}{8} = 10.$$
$$\frac{100}{10} = 10.$$

ഇങ്ങനെ ഫലങ്ങൾ ഒക്കുന്നു.

ഈ ഇരുപതിനെ ഹാര്യത്തിൽനിന്നും കളയാതെ അതിനേയുംകൂട്ടി ഗുണകാരംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തിങ്കൽ കൂട്ടിപ്പോയി എങ്കിൽ, ഫലം വാസ്തവത്തിൽനിന്നു് ഏറിയിരിക്കും.

$$\frac{100}{8} = 12\frac{1}{2} (> 10)$$

ഈ ഫലത്തെ ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം മുമ്പിലെ ഫലത്തിൽനിന്നും വാങ്ങിയാൽ വാസ്തവമായിരിക്കുന്ന ഫലം വരും.

$$\text{അതായതു വാസ്തവഫലം} = 12\frac{1}{2} - \frac{12\frac{1}{2} \times 2}{10} = 10$$
$$= 12\frac{1}{2} - \frac{\frac{12\frac{1}{2}\times 2\times 8}{10}}{8}$$
$$= \frac{100-20}{8}$$
$$\text{അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ ശോദ്ധ്യഫലം} = \frac{12\frac{1}{2} \times 2}{10} = 2\frac{1}{2}.$$

ഈ ശോദ്ധ്യഫലത്തെ ഉണ്ടാക്കുന്നേടത്തും ഗുണകാരത്തെക്കൊണ്ടുതന്നെ ഹരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ, ശോദ്ധ്യഫലം വാസ്തവത്തിൽനിന്ന് ഏറിയിരിക്കും അപ്പോൾ ആ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ ദ്വിതീയശോദ്ധ്യഫലത്തെ ഉണ്ടാക്കി ആദ്ധ്യശോദ്ധ്യഫലത്തിങ്കന്നു കളയേണം. എന്നാൽ ഫലമൊക്കും.

$$\text{ആദ്യത്തെ ശോദ്ധ്യഫലം} = \frac{25}{10}$$
$$\text{25-നെ എട്ടിൽ ഹരിക്കുകയാണെങ്കിൽ,} = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}\ \left(> 2\frac{1}{2}\right).$$

അപ്പോൾ ഇതിനെ ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലം രണ്ടാംശോദ്ധ്യഫലം.

$$\frac{25}{8} \times \frac{2}{10} = \frac{5}{8}$$
$$\text{ഇതിനെ } 3\frac{1}{8}\text{-ൽ നിന്നും കളയുമ്പോൾ, ശേഷം} = 3\frac{1}{8} - \frac{5}{8} = 2\frac{1}{2}.$$
$$12\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 10\ (= \text{വാസ്തവഫലം}).$$

ഇപ്രകാരംതന്നെ,

$$\text{വാസ്തവഫലം} = 12\frac{1}{2} - 12\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{8} + 12\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{2}{8} - 12\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{2}{10}.$$
$$= 12\frac{1}{2} - 3\frac{1}{8} + \frac{25}{32} - \frac{5}{32} = 10.$$

സാമാന്യേന,

$$\text{ഫലം} = \frac{\text{ഹാര്യം}}{\text{ഹാരകം}} = \text{ഗുണ്യം} - \text{ഗുണ്യം} \times \frac{\text{ഗുണഹാരാന്തരം}}{\text{ഗുണകാരം}}$$
$$+\text{ഗുണ്യം} \times \frac{\text{ഗുണഹാരാന്തരവർഗ്ഗം}}{\text{ഗുണകാരവർഗ്ഗം}}$$
$$-\text{ഗുണ്യം} \times \frac{\text{ഗുണഹാരാന്തരഘനം}}{\text{ഗുണകാരഘനം}} + \cdots$$

ഹാരകംകൊണ്ട് ഒരിക്കലും ഹരിക്കായ്കിൽ ഇങ്ങനത്തെ ഒരു ഒടുങ്ങാത്ത ഫലപരമ്പര വരും.

ഹാരകം ഗുണകാരത്തെക്കാൾ ചെറുതെങ്കിൽ, ഈ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ,

$$\text{ഫലം} = \text{ഗുണ്യം} + \text{ഗുണ്യം} \times \frac{\text{ഗുണഹാരാന്തരം}}{\text{ഗുണകാരം}} + \text{ഗുണ്യം} \times \frac{\text{ഗുണഹാരാന്തരവർഗ്ഗം}}{\text{ഗുണകാരവർഗ്ഗം}} + \text{ഗുണ്യം} \times \frac{\text{ഗുണഹാരാന്തരഘനം}}{\text{ഗുണകാരഘനം}} + \ldots\ldots \text{ എന്നുവരും.}$$

ഇവിടെ പിന്നെ അതതു ഭുജാവർഗ്ഗങ്ങൾ അതതു ഭുജാഖണ്ഡത്തിന്നു ഗുണഹാരാന്തരമാകയാൽ അതതിങ്കന്ന് ഉണ്ടായ ഫലത്തെ പിന്നേയും അതതു ഭുജാവർഗ്ഗം തന്നെക്കൊണ്ടു ഗുണിക്കേണ്ടൂ. അതിന്നു ഫലം വേറേ ഇല്ലായ്കയാൽ, നടേത്തെ ഗുണ്യമാകുന്ന ഭുജാഖണ്ഡത്തിങ്കന്നുതന്നെ ഉണ്ടാക്കു രണ്ടാംഫലം. അതിന്ന്, രണ്ടുഫലത്തിന്നും ഭുജാവർഗ്ഗം ഗുണകാരമാകയാൽ, ഭുജാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു രണ്ടുവട്ടം ഗുണിപ്പൂ ഭുജാഖണ്ഡമാകുന്ന ഗുണ്യത്തെപ്പിന്നെ. നടേത്തെ ഫലത്തിന്റെ ഹാരകം വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം. അതിന്റേയും വർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. എന്നാലുണ്ടാം രണ്ടാഫലം. ഇവിടെ ഗുണ്യങ്ങൾ തുല്യങ്ങളാകയാൽ ഗുണകാരയോഗത്തെ ഗുണിക്കാം. ഇവിടെ ഗുണകാരങ്ങളാകുന്നതു പിന്നെ ഒന്നു തുടങ്ങി ഓരോന്നേറ കൂട്ടിയിരിക്കുന്ന ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളുടെ വർഗ്ഗവർഗ്ഗങ്ങൾ. അവറ്റിന്റെ യോഗം ഗുണഹാരാന്തരയോഗമാകുന്നത്.[3]

വ്യാഖ്യാനം 3: ഇവിടെ ഗുണഹാരാന്തരയോഗം എന്നതിനു ഗുണഹാരാന്തരയോഗസ്ഥാനീയമെന്നെ അർത്ഥമുള്ളൂ. നടേത്തെ ഫലയോഗം വരുത്തിയപ്പോൾ ഗുണ്യമാകുന്ന ഭുജാഖണ്ഡത്തെ ഗുണഹാരാന്തരയോഗംകൊണ്ടു ഗുണിക്കുവാനാണല്ലോ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത്. ഇവിടെ വർഗ്ഗസംകലിതമാകുന്ന ഗുണഹാരാന്തരയോഗത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു വർഗ്ഗസംകലിതംകൊണ്ടു ഗുണ്യമാകുന്ന ഭുജാഖണ്ഡത്തെ ഗുണിക്കുവാനാണ് പറയുന്നത്. അഥവാ, "ഗുണഹാരാന്തരയോഗം" എന്ന പദത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു "ഗുണകാരയോഗം" എന്ന പദത്തെ ഉപയോഗിക്കുകയാണെങ്കിൽ അർത്ഥം വ്യക്തമാകും. എന്നാൽ ഗ്രന്ഥങ്ങളിലെല്ലാം "ഗുണഹാരാന്തരയോഗം" എന്ന പാഠമാണ് കാണുന്നത്.

ഈ യോഗത്തിന്ന് **ഏകാദ്യേകോത്തരവർഗ്ഗവർഗ്ഗസംകലിത**മെന്നു പേർ. ഇവിടെ ഹാരമാകുന്നതു വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗവർഗ്ഗം. പിന്നെ ഇവിടെ നടേത്തെ ഫലം ഉണ്ടാക്കുന്നേടത്തു തുല്യങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഭുജാഭാഗങ്ങൾ രണ്ടു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ഗുണകാരം, വ്യാസാർദ്ധം രണ്ടു തങ്ങളിൽ ഗിണിച്ചതു ഹാരകം. പിന്നെ മൂന്നാം ഫലത്തിന്നു സമങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഭുജാഭാഗങ്ങൾ നാലു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ഗുണകാരം, വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ നാലു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ഹാരകം. പിന്നെ മൂന്നാംഫലത്തിന്നു സമങ്ങളായിരിക്കുന്ന ആറു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ഗുണകാരവും ഹാരകവും ആകുന്നത്. ഇങ്ങനെ നാലാമതിന്നു സമങ്ങൾ എട്ടു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ഗുണഹാരങ്ങളാകുന്നത്. ഗുണ്യമാകുന്നത് എല്ലാടവും ഭുജാഖണ്ഡം തന്നെ. ഇവിടെ എല്ലാടവും ഫലയോഗം വരുത്തുവാൻ ഗുണകാരയോഗം ഗുണകരമാകുന്നത്. ഇവിടെ നടേത്തെ ഫലയോഗം വരുന്നേടത്തു ദിക്സൂത്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ചതുരശ്രകോണസൂത്രത്തോളമുള്ള കർണ്ണങ്ങൾക്കു ഭുജകളാകുന്നത് ഒരു ഭുജാഖണ്ഡം തുടങ്ങി ഓരോരോ ഖണ്ഡം ഏറക്കൂടി ഒടുക്കത്തേതു വ്യാസാർദ്ധത്തോടു തുല്യമായിരിക്കുന്ന ചതുരശ്രബാഹ്വർദ്ധഭാഗം ഭുജയാകുന്നത്.

ഇവറ്റിന്റെ വൎഗ്ഗയോഗം ഗുണകാരയോഗമാകുന്നതു്. ഇതിന്നു **ഏകാദ്യേകോത്തരവ ൎഗ്ഗസംകലിത**മെന്നു പേർ. ഇങ്ങനെ രണ്ടാംഫലയോഗം വരുത്തുവാൻ ഒരു ഖണ്ഡം തുടങ്ങി ഓരോന്നേറ കൂടിയിരിക്കുന്ന ഭുജകൾ എല്ലായിലും വലുതു വ്യാസാൎദ്ധതുല്യമാ യിരിക്കുന്നവറ്റിന്റെ വൎഗ്ഗവൎഗ്ഗസംകലിതം ഗുണകാരയോഗമാകുന്നതു്. ഇങ്ങനെ ആറു്, എട്ടു് എല്ലാം തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചവറ്റിന്റെ സംകലിതം പിന്നെപിന്നത്തെ ഗുണകാര യോഗമാകുന്നതു്.

സംകലിതങ്ങൾ

ഇവിടെ ഈ സംകലിതങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരത്തെ ഇനി ചൊല്ലുന്നതു്. അവിടെ നടേ കേവലസംകലിതത്തെ ചൊല്ലുന്നു. പിന്നെ സമങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ ഗുണി ച്ചതിന്റെ സംകലിതം. പിന്നെ ഇവിടെ ഉപയോഗമില്ലായ്കിലും സമങ്ങൾ മൂന്നു്, അഞ്ചു് എന്നിവ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചവറ്റിന്റെ സംകലിതവുംകൂടി ചൊല്ലുന്നുണ്ടു്, ഉപയോഗമു ള്ളവറ്റിന്റെ നടുവേ ഉണ്ടായിരിക്കയാൽ.

മൂലസംകലിതം

ഇവിടെ മൂലസംകലിതത്തിങ്കൽ ഒടുക്കത്തെ ഭുജാ വ്യാസാൎദ്ധത്തോടു് ഒക്കും; അതി ന്നു കീഴെ ഒരു ഖണ്ഡം കുറയും; അതിന്നു കീഴെ രണ്ടു ഖണ്ഡം കുറയും എന്നിരിക്കുന്നേ ടത്തു് എല്ലാ ഭുജകളും വ്യാസാൎദ്ധത്തോടു തുല്യങ്ങൾ എന്നിരിക്കുന്നുതാകിൽ ഭുജാ സംഖ്യകൊണ്ടുതന്നെ വ്യാസാൎദ്ധത്തെ ഗുണിച്ചാൽ അതു സംകലിതഫലമാകുന്ന തു്. ഇവിടെ ഒരു ഭുജ എല്ലൊ വ്യാസാൎദ്ധതുല്യമായിട്ടുള്ളു. അതിങ്കന്നു ക്രമേണ ചെറിയ ചെറിയ കണ്ണങ്ങളുടെ ഭുജകൾ ഓരോരൊ സംഖ്യ കുറഞ്ഞിരിക്കുന്നു എല്ലൊ ഇവിടെ വ്യാസാൎദ്ധം എത്ര സംഖ്യ ആയി കല്പിക്കുന്നു, ഭുജേടെ ഖണ്ഡസംഖ്യയും അത്രയായി കല്പിപ്പൂ. എന്നാൽ എളുപ്പമുണ്ടു് ഓർപ്പാൻ. എന്നാലിവിടെ ഉപാന്ത്യഭുജയിങ്കൽ സം ഖ്യ ഒന്നു കുറയും, അതിൽ ചെറിയതിങ്കൽ വ്യാസാൎദ്ധസംഖ്യയിങ്കന്നു രണ്ടു കുറയും. ഇക്കുറയുന്ന അംശം ഒന്നു തുടങ്ങി ക്രമേണ ഓരോന്നേറി ഏറി ഇരിക്കും, ഒടുക്ക ത്തെ ഊനാംശം പോരായിന്നതു വ്യാസാൎദ്ധത്തോടു മിക്കതും ഒക്കും, ഒരു സംഖ്യ കുറയുമത്രെ. എന്നാൽ കുറയുന്ന അംശം ഒക്കെ കൂട്ടിയാലും ഒന്നു തുടങ്ങി ഓരോന്നേ റി വ്യാസാൎദ്ധമൊടുക്കമായിരിക്കുന്ന സംകലിതത്തോടു സംഖ്യ പ്രായേണ ഒക്കും, ഒരു വ്യാസാൎദ്ധമേ കുറയൂ. എന്നാൽ ഭുജാസംഖ്യയിൽ ഒന്നു കൂടിയതിനെക്കൊണ്ടു വ്യാസാൎദ്ധസംഖ്യേ ഗുണിച്ചു് അതിന്റെ അൎദ്ധം ഭുജാസംകലിതമായിട്ടിരിക്കും. ഭുജാ സംകലിതമെന്നു് എല്ലാ കണ്ണത്തിന്റേയും ഭുജകളൊക്കെ കൂടിയതു്. പിന്നെ ഖണ്ഡം ചെറുതായോളം ഫലം സൂക്ഷ്മമാകും. എന്നിട്ടു ഭുജാസംഖ്യ ഓരോന്നിനെ അണുവായി നുറുക്കമാറു കല്പിച്ചതിനെക്കൊണ്ടും സംകലിതം ചെയ്വൂ. ഇവിടെ പരാൎദ്ധംകൊണ്ടു് അംശിക്കുന്നുതാകിൽ പരാൎദ്ധസംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ഭുജയിൽ പരാൎദ്ധാംശത്താ ലൊന്നുകൂട്ടി വ്യാസാൎദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു അൎദ്ധിപ്പൂ. പിന്നെ പരാൎദ്ധംകൊണ്ടു ഹരി പ്പൂതും ചെയ്വൂ. അതു മിക്കവാറും വ്യാസാൎദ്ധവൎഗ്ഗാൎദ്ധമത്രെ. മുഴുവൻ സംഖ്യയാവൻ പിന്നെ പരാൎദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിക്കുന്നു ഇങ്ങനെ ഖണ്ഡം ചെറുതായോളം ഭുജയിൽ കു റഞ്ഞൊരു് അംശമേ കൂട്ടേണ്ടു സംകലിതം വരുത്തുവാൻ. എന്നാൽ ഭുജയിൽ ഒന്നും

കൂട്ടാതെ വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അർദ്ധിച്ചത് അത്യന്തം സൂക്ഷ്മമായി ഖണ്ഡി ച്ചിരിക്കുന്ന ഭുജേടെ സംകലിതമെന്നു വന്നിരിക്കും. ഇങ്ങനെ വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗാർദ്ധം സൂക്ഷ്മമായിരിക്കുന്ന ഭുജാഖണ്ഡസംകലിതമാകുന്നത്.

വ്യാഖ്യാനം: സംകലിതങ്ങളെ വരുത്തുവാനുള്ള ഉപായത്തെ പറയുന്നു.

മൂലസംകലിതം: വ്യാസാർദ്ധാ വ ഇലി എന്നു കല്പിക്ക ഇത് ഒടുക്കത്തെ ഭുജാ. ഇതിന്നു കീഴെയുള്ളതു $(\text{വ} - 1)$, ഇതിന്നും കീഴെയുള്ളതു $(\text{വ} - 2)$, ഇങ്ങനെ കീഴേതിന്നു കീഴേതിന്ന് ഓരോ സംഖ്യ കുറഞ്ഞ ഭുജകൾ.

$$\text{മൂലസംകലിതം} = \text{വ} + (\text{വ} - 1) + (\text{വ} - 2) + \cdots\cdots + 3 + 2 + 1.$$

ഈ ഭുജകളെല്ലാം വ്യാസാർദ്ധത്തിനോടു തുല്യമായിരുന്നുവെങ്കിൽ,

$$\begin{aligned}
\text{അവയുടെ സംകലിതം} &= \text{വ}+\text{വ}+\text{വ}+\cdots+\text{വ}+\text{വ}+\text{വ} = \text{വ} \times \text{വ} = \text{വ}^2.\\
\text{ഇവ തമ്മിലുള്ള അന്തരം} &= 0+1+2+3+\cdots+(\text{വ} - 3)+(\text{വ} - 2)+(\text{വ} - 1).\\
&= \text{മൂലസംകലിതം} - \text{വ}.\\
\therefore\ \ \text{വ}^2 - \text{മൂലസംകലിതം} &= \text{മൂലസംകലിതം} - \text{വ}\\
2 \times \text{മൂലസംകലിതം} &= \text{വ}^2 + \text{വ}.\\
&= \text{വ}(\text{വ} + 1).\\
\therefore\ \ \text{മൂലസംകലിതം} &= \frac{\text{വ}(\text{വ} + 1)}{2}
\end{aligned}$$

വ്യാസാർദ്ധത്തെ വ്യാസാർദ്ധസംഖ്യയിലൊന്നു കൂട്ടിയതുകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അർദ്ധിച്ചാൽ വ്യാസാ ർദ്ധാ പദമായിട്ടിരിക്കുന്ന മൂലസകലിതം വരും.

പിന്നെ ഒരു ഇലിയെ പരാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ചത് ഒരു ഭുജാഖണ്ഡമെന്നു കല്പിപ്പൂ അപ്പോൾ ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളുടെ സംഖ്യ $= \text{പ} \times \text{വ}$ (പരാർദ്ധത്തെ പ എന്നു കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു). പദം വ്യാസാർദ്ധം തന്നെ.

$$\text{മുമ്പിൽ പറഞ്ഞ ന്യായം കൊണ്ട്, മൂലസംകലിതം} = \frac{\text{വ}(\text{വ} \times \text{പ} + 1)}{2}.$$

ഇവിടെ ഈ രൂപം പരാർദ്ധാംശത്താലൊന്നാകകൊണ്ട് അതിനെ ഉപേക്ഷിക്കാം.

$$\therefore\ \ \text{മൂലസംകലിതം} = \frac{\text{വ} \times \text{പ}.\text{വ}}{2}$$

മുഴുവൻ സംഖ്യകളാകുവാൻ, പദാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിക്കേണം; എന്തെന്നാൽ $\frac{\text{വ} \times \text{പ} \times \text{വ}}{2}$ പരാർദ്ധാംശത്താലൊന്നുകളാകുന്നു.

$$\text{അപ്പോൾ ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളുടെ മൂലസംകലിതം} = \frac{\text{വ} \times \text{വ} \times \text{പ}}{2\text{പ}.} = \frac{\text{വ}^2}{2}.$$

വർഗ്ഗസംകലിതം

പിന്നെ വർഗ്ഗസംകലിതത്തെ ചൊല്ലുന്നുണ്ട്. ഇവിടെ ഇസ്സംകലിതം ചെയ്ത ഭുജകളിൽ ഓരോന്നെ തന്നെത്തന്നെ കൊണ്ടുതന്നെ ഗുണിച്ചതെല്ലൊ ഭുജാവർഗ്ഗങ്ങളാകുന്നത്. ഇവിടെ ഗുണകാരങ്ങളാകുന്ന ഭുജകളെല്ലാം വ്യാസാർദ്ധത്തോട് ഒക്കും എന്നിരിക്കു ന്നുതാകിൽ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച സംകലിതം വർഗ്ഗസംകലിതമായിട്ടിരി ക്കും. ഇവിടെ പിന്നെ ഒരു ഗുണകാരമെ വ്യാസാർദ്ധത്തോടു തുല്യമായിട്ടുള്ളൂ. അത്

ഒടുക്കത്തേതു്. അതിന്നു നടെത്തേതിന്നു വ്യാസാദ്ധത്തിൽ ഒന്നു കുറയും ഗുണകര ഭുജാസംഖ്യാ. അതിനേയും വ്യാസാദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിക്കിൽ ഒന്നുകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ഉപാന്ത്യഭുജാ ഏറ്റും വൎഗ്ഗസംകലിതത്തിങ്കന്ന്. പിന്നെ അതിന്നു കീഴേതു് ഒടുക്കത്തേതിന്നു മൂന്നാമതു്. അതു വ്യാസാദ്ധത്തിങ്കന്നു രണ്ടു ഖണ്ഡം കുറയും. എന്നാൽ ഭുജയെ രണ്ടിൽ ഗുണിച്ചതു് ഏറ്റം. ഇങ്ങനെ ക്രമേണ ചെറിയ ചെറിയ ഭുജകളെ ക്രമേണ ഏറിയ സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതു വ്യാസാദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച സംകലിതത്തിൽ വൎഗ്ഗസംകലിതത്തിങ്കന്ന് ഏറിപ്പോയ ഭാഗമാകുന്നതു്. അതു കളഞ്ഞാൽ വൎഗ്ഗസംകലിതമായിട്ടു വരും വ്യാസാദ്ധഗുണിതമായിട്ടിരിക്കുന്ന സംകലിതം. ഇവിടെ ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്ന് അടുത്ത ഭുജയിൽ കുറഞ്ഞതു് ഒന്നു കുറഞ്ഞ വ്യാസാദ്ധമാകയാൽ, ഇവിടെ ഏറിപ്പോകുന്ന അംശം ഒക്കെ കൂട്ടിയാൽ മൂലത്തിന്റെ സംകലിതസംകലിതമായിട്ടു വരും. എങ്കിലോ സംകലിതങ്ങളുടെ യോഗമല്ലോ സംകലിതസംകലിതമാകുന്നതു്. അവിടെ ഒടുക്കത്തെ സംകലിതം എല്ലാ ഭുജകളും കൂടിയതു്. അന്ത്യത്തിന്നടുത്തു കീഴെസ്സംകലിതം പിന്നെ. ഒടുക്കത്തെ ഭുജ ഒന്നുകൂടാതെ മറ്റെ ഭുജകളെല്ലാം കൂടിയതു് ഒടുക്കത്തേതിന്നു കീഴ്. മൂന്നാം സംകലിതത്തിങ്കൽ ഭുജകൾ രണ്ടു കൂടാതെ മറ്റുള്ള ഭുജകളുടെ യോഗം അതിന്റെ കീഴെ സംകലിതമാകുന്നതു്. അതു് ഒടുക്കമായിരിക്കുന്ന ഭുജകളെല്ലാറ്റിന്റേയും യോഗം ഇവ്വണ്ണം കീഴ്പോട്ടുള്ളതൊക്കെ ഓരോരോ ഭുജ കുറഞ്ഞിരിക്കും, നടേത്തെ നടേത്തെ സംകലിതത്തിങ്കന്ന്. എന്നാൽ എല്ലാറ്റിലും വലിയ ഭുജക്കു് ഒരു സംകലിതത്തിങ്കലേ യോഗമുള്ളൂ. പിന്നെ ഒടുക്കത്തേതിന്നു് അടുത്തു കീഴെഭുജക്കു് ഒടുക്കത്തെ സംകലിതത്തിലും അതിന്നടുത്തു കീഴേതിലും യോഗമുണ്ടു്. അവിടുന്നു കീഴെഭുജകൾക്കു് ക്രമേണ മൂന്ന്, നാലു തുടങ്ങിയുള്ള സംകലിതങ്ങളിൽ യോഗമുണ്ടു്. എന്നാൽ ഒടുക്കത്തെ ഭുജക്കടുത്തു കീഴെഭുജ തുടങ്ങിയുള്ള ചെറിയ ചെറിയ ഭുജകളെ ഒന്നു തുടങ്ങിയുള്ള സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു ക്രമേണ ഗുണിച്ചിരിക്കുന്നതു സംകലിതസംകലിതമെന്നു വന്നുകൂടി. ഇപ്പോളിവിടെ അതിസൂക്ഷ്മമായി ഖണ്ഡിച്ചിരിക്കുന്ന ഭുജേടെ സംകലിതമാകുന്നതു് ഒടുക്കത്തെ ഭുജേടെ വൎഗ്ഗത്തിൽ പാതി എന്നൊ നടേ ചൊല്ലിയല്ലൊ. എന്നാലതതു ഭുജ ഒടുക്കമായിരിക്കുന്ന സംകലിതമുണ്ടാവാൻ അതതു ഭുജയെ വൎഗ്ഗിച്ചദ്ധിക്കേവേണ്ടുവതു് എന്നുവന്നു. എന്നാൽ എല്ലാ ഭുജകളുടേയും വൎഗ്ഗയോഗത്തെ അദ്ധിച്ചാൽ സംകലിതസംകലിതമുണ്ടാവും. എന്നാൽ വൎഗ്ഗസംകലിതത്തിന്റെ പാതി മൂലത്തിന്റെ സംകലിതസംകലിതമാകുന്നതെന്നു വന്നു. എന്നാൽ സംകലിതത്തെ വ്യാസാദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ തന്നിൽ പാതി കൂട്ടിയിരിക്കുന്ന വൎഗ്ഗസംകലിതമായിട്ടിരിക്കുമതു്. വൎഗ്ഗാദ്ധസംകലിതംകൂടി ഇരിക്കുന്നു എന്നും ചൊല്ലാമതിനെ. എന്നാൽ വ്യാസാദ്ധവൎഗ്ഗത്തിന്റെ അദ്ധത്തെ വ്യാസാദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച തന്നിലെ മൂന്നൊന്നു കളഞ്ഞാൽ ശേഷിക്കുന്നതു മുഴുവനിൽ മൂന്നൊന്നായിട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ വ്യാസാദ്ധഘനത്തിൽ മൂന്നൊന്നു വൎഗ്ഗസംകലിതമാകുന്നതു് എന്നും വരും.

വ്യാഖ്യാനം: വൎഗ്ഗസംകലിതം:–

$$\text{വൎഗ്ഗസംകലിതം} = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + \cdots + (\text{വ} - 2)(\text{വ} - 2) + (\text{വ} - 1)(\text{വ} - 1) + \text{വ} \times \text{വ}.$$

'$\textit{വ}$' എല്ലായിടത്തും ഗുണകാരമായിട്ടെടുക്കുമ്പോൾ

$$\begin{aligned}
\text{സംകലിതം} &= വ \times 1 + വ \times 2 + വ \times 3 \\
&\quad + \cdots + വ(വ - 2) + വ(വ - 1) + വ \times വ \\
&= \frac{വ^2}{2} \cdot വ = \frac{വ^3}{2}. \\
\text{ഇവതമ്മിലുള്ള അന്തരം} &= 1 \times (വ - 1) + 2(വ - 2) + 3(വ - 3) \\
&\quad + \cdots + (വ - 2) \times 2 + (വ - 1) \times 1. \\
&\quad 1 + 2 + 3 + \cdots + (വ - 3) + (വ - 2) + (വ - 1). \\
&\quad 1 + 2 + 3 + \cdots + (വ - 3) + (വ - 2). \\
&\quad 1 + 2 + 3 + \cdots + (വ - 3) \\
&\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
&\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
&\quad 1 + 2 + 3. \\
&\quad 1 + 2. \\
&\quad 1. \\
\text{ഇവയുടെ യോഗം} &= 1 \times (വ - 1) + 2(വ - 2) \\
&\quad + \cdots + (വ - 3) \times 3 + (വ - 2) \times 2 + (വ - 1) \times 1.
\end{aligned}$$

ഇതു മുമ്പിലത്തെ അന്തരം തന്നെ. ഇതു $വ - 1, വ - 2, വ - 3, \ldots \ldots, 1, 2, 3$ എന്ന പദങ്ങളാദിയായിട്ടുള്ള മൂലസംകലിതങ്ങളുടെ യോഗം. ഈ യോഗത്തിന്നു മൂലസംകലിതസംകലിതമെന്നു പേർ,

$$\begin{aligned}
\text{ഈ മൂലസംകലിതങ്ങളുടെ യോഗം} &= \frac{(വ - 1)^2}{2} + \frac{(വ - 2)^2}{2} + \cdots \\
&= \text{വർഗ്ഗസംകലിതാർദ്ധം (പ്രായേണ)}
\end{aligned}$$

ഇവിടെ വാസ്തവത്തിൽ വർഗ്ഗസംകലിതത്തിങ്കന്നു വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗാർദ്ധസംഖ്യ പോരാതെയുണ്ട്. എന്നാൽ വർഗ്ഗസംകലിതസംഖ്യയെ അപേക്ഷിച്ച വർഗ്ഗസംഖ്യയെ ഉപേക്ഷിക്കാം.

$$\begin{aligned}
\text{അപ്പോൾ } \frac{വ^3}{2} - \text{വർഗ്ഗസംകലിതം} &= \text{വർഗ്ഗസംകലിതാർദ്ധം}. \\
\frac{3}{2}\ \text{വർഗ്ഗസംകലിതം} &= \frac{വ^3}{2}. \\
\therefore \quad \frac{3}{2}\text{വർഗ്ഗസംകലിതം} - \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}\text{വർഗ്ഗസംകലിതം} &= \frac{വ^3}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{വ^3}{2}. \\
\therefore \quad \text{വർഗ്ഗസംകലിതം} &= \frac{വ^3}{3} \\
\text{മൂലസംകലിതസംകലിതം} = \text{വർഗ്ഗസംകലിതാർദ്ധം} &= \frac{വ^3}{6}
\end{aligned}$$

ഘനസംകലിതാദി

പിന്നെ ഘനസംകലിതത്തെ വരുത്തുംപ്രകാരം. ഈ വൎഗ്ഗസംകലിതത്തിങ്കലെ അതതു ഭുജാവൎഗ്ഗത്തെ അതതു ഭുജതന്നെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതെല്ലൊ ഘനസംകലിതമാകുന്നതു്. ഇവിടെ എല്ലാറ്റേയും വ്യാസാൎദ്ധം കൊണ്ടുതന്നെ ഗുണിക്കുമ്പോൾ എത്ര ഉണ്ടു് ഘനസംകലിതത്തിങ്കന്നു് ഏറുവതു് എന്നു് ഓൎക്കുംപ്രകാരം. ഇവിടെ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായംകൊണ്ടു തന്നെ ഒടുക്കത്തേതിന്നടുത്തു കീഴെ ഭുജാവൎഗ്ഗം ഒന്നിൽ ഗുണിച്ചതു് ഏറും. പിന്നെ അവിടുന്നു മുമ്പിലെ ഭുജാവൎഗ്ഗങ്ങളെ രണ്ടു്, മൂന്നു തുടങ്ങിയുള്ള സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു ക്രമേണ ഗുണിച്ചതു് ഏറും. അതു വൎഗ്ഗസംകലിതസംകലിതമെന്നു വരും. ഘനത്ര്യംശം വൎഗ്ഗസംകലിതമെന്നൊ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയല്ലൊ. എന്നാലതതു ഭുജാഘനത്തിന്റെ ത്ര്യംശ്യം അതതു ഭുജ ഒടുക്കമായിരിക്കുന്ന വൎഗ്ഗസംകലിതമായിട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ ഘനസംകലിതത്തിന്റെ മൂന്നൊന്നു വൎഗ്ഗസംകലിതസംകലിതമെന്നും വരും. എന്നാൽ വൎഗ്ഗസംകലിതത്തെ വ്യാസാൎദ്ധം കൊണ്ടു ഗുണിക്കുമ്പോൾ തന്നിൽ മൂന്നൊന്നു കൂടിയിരിക്കുന്ന ഘനസംകലിതമായിട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ ഇതു തന്നിൽ നാലൊന്നു കളഞ്ഞാൽ ഘനസംകലിതം ശേഷിക്കും. എന്നാൽ വൎഗ്ഗവൎഗ്ഗത്തിന്റെ നാലൊന്നു ഘനസംകലിതമെന്നും വന്നു. പിന്നെ ഈ ഘനസംകലിതത്തെ വ്യാസാൎദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ വൎഗ്ഗവൎഗ്ഗസംകലിതവും ഘനസംകലിതസംകലിതവുംകൂടി വരും എന്നു മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായംകൊണ്ടു വന്നിരിക്കുന്നു. വൎഗ്ഗവൎഗ്ഗത്തിൽ നാലൊന്നു ഘനസംകലിതം എന്നും ചൊല്ലീ ഇതു ഹേതുവായിട്ടു വൎഗ്ഗവൎഗ്ഗസംകലിതത്തിൽ നാലൊന്നു ഘനസംകലിതസംകലിതം എന്നും വരും, ചൊല്ലിയ ന്യായംകൊണ്ടു്. എന്നാൽ ചതുരംശം കൂടിയിരിക്കുന്നതിങ്കന്നു പഞ്ചാംശം കളഞ്ഞാൽ വ്യാസാൎദ്ധങ്ങൾ അഞ്ചു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിന്റെ അഞ്ചൊന്നായിട്ടിരിക്കും വൎഗ്ഗവൎഗ്ഗസംകലിതം എന്നും വന്നു.

വ്യാഖ്യാനം:

$$\begin{aligned}
\text{ഘനസംകലിതം} &= 1^3 + 2^3 + 3^3 \ldots + \text{വ}^3. \\
& 1^2 \cdot \text{വ} + 2^2 \cdot \text{വ} + 3^2 \cdot \text{വ} + \cdots + \text{വ}^2. \\
& \text{വ} = \frac{\text{വ}^3}{3}.\ \text{വ} = \frac{\text{വ}^4}{3}. \\
\text{ഇവയുടെ അന്തരം} &= 1^2(\text{വ} - 1) + 2^2(\text{വ} - 2) \\
& \quad + \cdots (\text{വ} - 2)^2 \times 2 + (\text{വ} - 1)^2 \times 1. \\
&= \text{വൎഗ്ഗസംകലിതസംകലിതം.} \\
&= \frac{\text{ഘനസംകലിതം}}{3} \ \text{(മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായം കൊണ്ടു്)}
\end{aligned}$$

$$\frac{4}{3} \times \text{ഘനസംകലിതം} = \frac{\text{വ}^4}{3}.$$

$$\frac{4}{3} \times \text{ഘനസംകലിതം} - \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} \times \text{ഘനസംകലിതം} = \frac{\text{വ}^4}{3} - \frac{1}{4} \times \frac{\text{വ}^4}{3}$$

$$\therefore \ \text{ഘനസംകലിതം} = \frac{\text{വ}^4}{4}$$

ഇതുപോലെതന്നെ,

$$\text{ഘനസംകലിതസംകലിതം} = \text{ശ} \times \frac{\text{ശ}^4}{4} - \text{വൎഗ്ഗവൎഗ്ഗസംകലിതം}$$

$$\text{ഘനസംകലിതസംകലിതം} = \frac{\text{വൎഗ്ഗവൎഗ്ഗസംകലിതം}}{4}$$

$$\text{അപ്പോൾ } \frac{5}{4} \times \text{വൎഗ്ഗവൎഗ്ഗസംകലിതം} = \frac{\text{ശ}^5}{4}.$$

$$\therefore \text{ വൎഗ്ഗവൎഗ്ഗസംകലിതം} = \frac{\text{ശ}^5}{5}.$$

ഇങ്ങനെ മേലെ മേലെയുള്ള സംകലിതങ്ങളെ വരുത്താം.

സംകലിതാനയനസാമാന്യന്ന്യായം

പിന്നെ വൎഗ്ഗവൎഗ്ഗത്തെ തന്നെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ സമപഞ്ചഘാതമെന്നു പേർ. ഇങ്ങനെ സമപഞ്ചാദി ഘാതസംകലിതം എന്നു മീത്തെ മീത്തെ സംകലിതങ്ങൾ ക്കു പേർ. അതിന്നു മുമ്പിലത്തെ സംകലിതത്തെ വ്യാസാദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതു് അഗ്ഗുണ്യത്തിന്റെ സംകലിതസംകലിതവും അതിന്നു മീത്തെ സമഘാതസംകലി തവുംകൂടി വരും. എന്നാൽ മീത്തെ മീത്തെ സമഘാതസംകലിതമുണ്ടാക്കുവാൻ അതതു സംകലിതത്തെ വ്യാസാദ്ധംകൊണ്ടു് ഗുണിച്ചതിങ്കന്നു് ഓരോന്നേറിയ സം ഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തെ കളഞ്ഞാൽ മേലെ മേലെ സമഘാതസംകലിതമു ണ്ടാകും. എന്നാൽ വ്യാസാദ്ധങ്ങൾ രണ്ടു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിനെ രണ്ടിൽ ഹരിപ്പൂ. ഘനമെങ്കിൽ മൂന്നിൽ ഹരിപ്പൂ. വൎഗ്ഗവൎഗ്ഗമെങ്കിൽ നാലിൽ. സമപഞ്ചഘാതത്തെ അഞ്ചിൽ. എന്നിങ്ങനെ ഏകൈകോത്തരസമഘാതത്തെ ഏകൈകോത്തരസം ഖ്യകളെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലങ്ങൾ ക്രമേണ ഉള്ള സമഘാതസംകലിതമായി ട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ വൎഗ്ഗത്തിങ്കന്നു മൂലസംകലിതം, ഘനത്തിങ്കന്നു വൎഗ്ഗസംകലിതം, വൎഗ്ഗവൎഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ഘനസംകലിതം എന്നിങ്ങനെ രാശികളെ തന്നെക്കൊണ്ടു് എത്ര ആവൃത്തി ഗുണിച്ചതിങ്കന്നു് ഏകാദിസംഖ്യകളിൽ അത്രാമതുകൊണ്ടു ഹരിച്ചഫലം യാതൊന്നു് ആ രാശിയെ ഒരാവൃത്തി കുറച്ചു ഗുണിച്ചതിന്റെ സംകലിതമായിട്ടിരിക്കും ഇങ്ങനെ മൂലവൎഗ്ഗാദിസംകലിതങ്ങളെ വരുത്തും പ്രകാരം.

വ്യാഖ്യാനം: മൂലവൎഗ്ഗാദിസംകലിതങ്ങളെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെ സാമാന്യേന പറയുന്നു.

$$\text{മൂലസംകലിതം} = \frac{\text{ശ}^2}{2}$$

$$\text{വൎഗ്ഗസംകലിതം} = \text{ശ}.\frac{\text{ശ}^2}{2} - \frac{1}{3}.\frac{\text{ശ}^3}{2} = \frac{\text{ശ}^3}{3}.$$

$$\text{ഘനസംകലിതം} = \text{ശ}.\frac{\text{ശ}^3}{3} - \frac{1}{4}.\frac{\text{ശ}^4}{3} = \frac{\text{ശ}^4}{4}.$$

$$\text{വൎഗ്ഗവൎഗ്ഗസംകലിതം} = \text{ശ}.\frac{\text{ശ}^4}{4} - \frac{1}{5}.\frac{\text{ശ}^4}{4} = \frac{\text{ശ}^5}{5}.$$

$$\text{സമപഞ്ചഘാതസംകലിതം} = \text{ശ}.\frac{\text{ശ}^5}{5} - \frac{1}{6}.\frac{\text{ശ}^6}{5} = \frac{\text{ശ}^6}{6}.$$

. . . .
. . . .

ആദ്യദ്വിതീയാദിസംകലിതങ്ങൾ

അനന്തരം ആദ്യദ്വിതീയാദി സംകലിതത്തെ കാട്ടുന്നു. അവിടെ ആദ്യസംകലിതമാകുന്നതു മൂലസംകലിതം തന്നെ. അതു പദവർഗ്ഗാർദ്ധമെന്നോ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയല്ലൊ. ദ്വിതീയം പിന്നെ മൂലസംകലിതൈക്യം. അതും പിന്നെ വർഗ്ഗസംകലിതാർദ്ധത്തോടു തുല്യം എന്നു ചൊല്ലീതായി. അതാകുന്നതു പദത്തിന്റെ ഘനത്തിൽ ആറൊന്നായിരിക്കും. തൃതീയ സംകലിതം പിന്നെ. ദ്വിതീയസംകലിതം അന്ത്യമെന്നു കല്പിച്ചിട്ട്, പിന്നെ പദത്തിൽ ഒരു സംഖ്യ കുറച്ചിട്ട്, മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയപോലെ ഒരു സംകലിതൈക്യത്തെ ഉണ്ടാക്കു. അതിനെ ഉപാന്ത്യമെന്നു കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ പദത്തിങ്കന്നു രണ്ടു സംഖ്യ കുറച്ചിട്ട് ഒരു സംകലിതൈക്യത്തെ വരുത്തൂ. അത് ഉപാന്ത്യത്തിങ്കന്നു കീഴേതായിട്ടിരിക്കും. എന്നിങ്ങനെ ഏകൈകോനങ്ങളുടെ സംകലിതൈക്യത്തെ ഉണ്ടാക്കുവാൻ ഏകൈകോനങ്ങളുടെ ഘനഷഷ്ഠാംശങ്ങളുടെ യോഗത്തെ ഉണ്ടാക്കേണം. അതു ഘനഷഷ്ഠാംശസംകലിതമായിട്ടിരിക്കും. അതു ഘനസംകലിതത്തിന്റെ ആറൊന്നായിട്ടിരിക്കും. ഘനസംകലിതം പിന്നെ വർഗ്ഗവർഗ്ഗചതുരംശമായിട്ടിരിക്കും എന്നു മുമ്പിൽ ചൊല്ലിതായി എല്ലോ. എന്നാൽ വർഗ്ഗവർഗ്ഗചതുരംശത്തിന്റെ ഷഷ്ഠാംശം ഘനഷഷ്ഠാശസംകലിതമായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ വർഗ്ഗവർഗ്ഗചതുർവ്വിംശാംശം ഘനഷഷ്ഠാംശസംകലിതമാകുന്നത് എന്നു വരും. പിന്നെ നാലാമത് ഈ ന്യായത്തിന്നു തക്കവണ്ണം വർഗ്ഗവർഗ്ഗചതുർവ്വിംശാംശസംകലിതമായിട്ടിരിക്കും. ഇതു പിന്നെ സമപഞ്ചഘാതപഞ്ചാംശത്തിന്റെ ചതുർവ്വിംശാംശം എന്നു വരും. ആകയാൽ പദത്തെ എത്ര ആവൃത്തി പദത്തെ തന്നെക്കൊണ്ടു ഗുണിപ്പൂ അതിങ്കന്ന് ഏകദ്വിത്യാദി അത്ര സംഖ്യകൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിനെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ആദ്യദ്വിതീയാദി സംകലിതത്തിൽ അത്രാമതായിട്ടിരിക്കും. എന്നതു തൽപ്രകാരം.

വ്യാഖ്യാനം: ആദ്യസംകലിതം മൂലസംകലിതം തന്നെ. ദ്വിതീയസംകലിതം മൂലസംകലിതസംകലിതം. തൃതീയസംകലിതം ഘനസംകലിതസംകലിതം, എന്നിങ്ങനെ മേല്പോട്ടു നിരൂപിച്ചുകൊള്ളൂ. യുക്തി മുമ്പിൽ കാണിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലൊ. മുകളിൽ ജ്യാപ്രകരണത്തിലും ഇതിനെ വിസ്തരിക്കുന്നുണ്ട്.

$$\text{ആദ്യസംകലിതം} = \frac{n^2}{1 \times 2} = \frac{n^2}{\angle 2}.$$

$$\text{ദ്വിതീയസംകലിതം} = \frac{n^3}{1 \times 2 \times 3} = \frac{n^3}{\angle 3}.$$

$$\text{ത്രിതീയസംകലിതം} = \frac{n^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{n^4}{\angle 4}.$$

$$\text{ചതുർത്ഥസംകലിതം} = \frac{n^5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = \frac{n^5}{\angle 5}.$$

. . .   .
. . .   .

ഉപസംഹാരം

ഇവിടെ പിന്നെ വർഗ്ഗസംകലിതം, വർഗ്ഗവർഗ്ഗസംകലിതം, സമഷൾഘാതസംകലിതം എന്നിവറ്റെ ഉണ്ടാക്കേണ്ടൂ. എന്നിട്ട് മൂന്ന് അഞ്ചു തുടങ്ങിയുള്ള സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പാൻ ചൊല്ലീ. ഇവറ്റിന്നു ഹാരകങ്ങളാകുന്നതു വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം, പിന്നെ വർഗ്ഗവർഗ്ഗം എന്നിവ. എന്നാൽ വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗംകൊണ്ടു വ്യാസാർദ്ധഘനത്തെ ഹരിച്ചാൽ ഫലം വ്യാസാർദ്ധം തന്നെ. എന്നാൽ വ്യാസാർദ്ധത്തെ മൂന്നിൽ ഹരിച്ചതു നടേത്തെ ഫലയോഗമാകുന്നത്. ഇതു പിന്നെ അതതു ഗുണ്യവും അതതു ഫലവും തങ്ങളിലെ അന്തരങ്ങളുടെ യോഗന്താൻ. എന്നാലതിനെ ഗുണ്യയോഗത്തിങ്കന്നു കളയൂ. അതാകുന്നതു ദിക്സൂത്രാങ്കത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി കോണോളമുള്ളതു ചതുരശ്രബാഹുവിന്റെ പാതി. ഇവ്വണ്ണം സമപഞ്ചഘാതത്തെ വർഗ്ഗവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാലും വ്യാസാർദ്ധംതന്നെ ഫലം. എന്നാൽ വ്യാസാർദ്ധത്തെ അഞ്ചിൽ ഹരിച്ചതു രണ്ടാംഫലം. ഇങ്ങനെ ഏഴ്, ഒമ്പത് തുടങ്ങിയുള്ള ഒറ്റപ്പെട്ട സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു വ്യാസാർദ്ധത്തെ ഹരിച്ചാൽ മീത്തെ മീത്തെ ഫലം വരും. ഉണ്ടായ ഫലത്തെ ക്രമേണ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ കളയുകയും കൂട്ടുകയും ചെയ്വൂ. എന്നാൽ പരിധീടെ എട്ടൊന്നുണ്ടാകും. ഇങ്ങനെ ഗുണകാരം ഹാരകത്തേക്കാൾ ചെറുതാകുന്നേടത്തു പിന്നെ പിന്നെ ഫലം കുറകകൊണ്ടു പെരികെ കുറഞ്ഞാൽ പിന്നെ ഫലങ്ങളെ ഉപേക്ഷിച്ച് ഒടുക്കാം ക്രിയ. എന്നാൽ മിക്കതും സൂക്ഷ്മമാകും. എന്നാൽ ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തോടു കോണസൂത്രത്തോട് ഇടയിലെ വൃത്തഭാഗം വരും. ഇതിനെ എട്ടിൽ ഗുണിച്ചാൽ വൃത്തം മുഴുവനായിട്ടിരിക്കും. ഹാര്യമാകുന്ന വ്യാസാർദ്ധത്തെ എട്ടിൽ ഗുണിക്കിലുമാം നടേ. എന്നാൽ നാലിൽ ഗുണിച്ച വ്യാസമത്. അപ്പോൾ അതിങ്കൽതന്നെ ഫലം സംസ്കരിക്കേണ്ടതും. എന്നാൽ വൃത്തം വരും.

വ്യാഖ്യാനം: "വ്യാസേ വാരിധിനിഹതേ. . . . . ." എന്ന ക്രിയയുടെ യുക്തിയെ ഇവിടെ ഉപസംഹരിക്കുന്നു. ഈ ഭാഗം മുമ്പിൽ വ്യാഖ്യാനിച്ചിട്ടുണ്ട്.

ചാപീകരണം.

ഈ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ ജ്യാവിനെ ചാപിക്കാം.

> ഇഷ്ടജ്യാത്രിജ്യയോഘാതാൽ കോട്യാപ്തം പ്രഥമം ഫലം |
> ജ്യാവർഗ്ഗം ഗുണകം കൃത്വാ കോടിവർഗ്ഗഞ്ച ഹാരകം ||
> പ്രഥമാദിഫലേഭ്യോഥ നേയാ ഫലതതിർമ്മുഹുഃ |
> ഏകത്ര്യാദ്യോജസംഖ്യാഭിർഭക്തേഷ്വേതേഷ്വനുക്രമാൽ ||

ഓജാനാം സംയുതേസ്ത്യക്ത്വാ യുഗ്മയോഗം ധനുർഭവേൽ |
ദോഃകോട്യോർല്പമേവേഷം കല്പനീയമിഹ സ്മൃതം ||
ലബ്ധീനാമവസാനം സ്യാന്നാന്യഥാപി മുഹുഃ കൃതേ |
വ്യാസവർഗ്ഗാദ്രവിഹതാൽ പദം സ്യാൽ പ്രഥമം ഫലം ||
തദാദിതസ്ത്രീസംഖ്യാപ്തം ഫലം സ്യാദുത്തരോത്തരം |
രൂപാദ്യയുഗ്മസംഖ്യാഭിർഹൃതേഷ്വേഷു യഥാക്രമം ||
വിഷമാണാം യുതേസ്ത്യക്ത്വാ സമം ഹി പരിധിർഭവേൽ ||

(തന്ത്രസംഗ്രഹം)

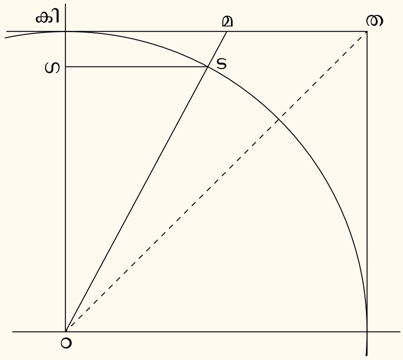
ഇവിടെ ഭുജാകോടിജ്യാക്കളിൽ കുറഞ്ഞതു യാതൊന്ന് അതിനെ ചാപിക്കും പ്രകാരം ചൊല്ലുന്നതു്. അവിടേയും ഭുജ ചെറുതു് എന്നും നടേ കല്പിക്കുന്നതു്. ഈ ഇഷ്ടജ്യാവിനെ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച കോടിജ്യാവിനെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചതു നടേത്തെ ഫലമാകുന്നതു്. പിന്നെ ഈ ഫലത്തെത്തന്നെ ഭുജാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച കോടിവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചതു രണ്ടാംഫലമാകുന്നതു്. പിന്നെ ഈ രണ്ടാംഫലത്തെ ഭുജാവർഗ്ഗംതന്നെകൊണ്ടു ഗുണിച്ച കോടിവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ച രണ്ടാംഫലം ഉണ്ടാക്കിയപോലെ മൂന്നാംഫലത്തേയുമുണ്ടാക്കൂ. പിന്നെ അതതിങ്കന്നു മീത്തെ മീത്തെ ഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കൂ, ഇഗ്ഗുണകാരഹാരകങ്ങളെക്കൊണ്ടുതന്നെ. ഉണ്ടായ ഫലപരമ്പരേ ക്രമത്താൽ ഒന്ന്, മൂന്ന്, അഞ്ച് എന്ന ഒറ്റപ്പെട്ട സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലത്തിൽ നടേത്തേതു്, മൂന്നാമതു്, അഞ്ചാമതു് എന്നിവ ഒക്കത്തങ്ങളിൽ കൂട്ടി ഇതിങ്കന്നു രണ്ടാമതു്, നാലാമതു്, തുടങ്ങിയുള്ളവറ്റിന്റെ യോഗം കളയൂ. ശേഷം ചാപം. അതിനെ മൂന്നു രാശിയിൽനിന്നു കളഞ്ഞതു കോടിചാപം. കോടിചാപം ചെറുതാകിൽ നടേ കോടിചാപം ഉണ്ടാക്കൂ.[4]

വ്യാഖ്യാനം 4: This is the so called Gregory's general series for any arc.
For arc $t \leq \frac{\pi}{4}$, arc tan $t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \cdots$
For arc $t = \frac{\pi}{4}$, $\frac{\text{Circumference}}{8} = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdots\right) \times R$
where R is the radius.

ഇവിടക്ക് ഉപപത്തിയാകുന്നതു്. വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു വൃത്തം വരുത്തുവാൻ ചൊല്ലിയപോലെ തന്നെ ഇവിടെ ചതുരശ്രമദ്ധ്യത്തിങ്കലെ വൃത്തത്തിങ്കൽ ദിക്സൂത്രത്തിങ്കൽ ശരവും വരുമാറു ജ്യാവു കല്പിക്കുന്നൂ. വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു ജ്യാവിന്റെ തലയ്ക്കൽ സ്പർശിക്കുന്ന കർണ്ണസൂത്രം വൃത്തത്തിന്റെ പുറത്തെ ചതുരശ്രത്തോളം നീളെ കല്പിപ്പൂ. ഇതു് ഇവിടയ്ക്ക് എല്ലായിലും വലിയ കർണ്ണസൂത്രമാകുന്നതു്. ഇക്കർണ്ണ സൂത്രാഗ്രത്തോട് ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തോടുള്ള അന്തരാളത്തിങ്കലെ ചതുരശ്രഭുജാഭാഗം ഇവിടെ നടേത്തെ ഫലമായിട്ടു വരുത്തിയതു്. പിന്നെ ഇതു ഗുണ്യമായി ഇതിന്റെ വർഗ്ഗം ഗുണകാരമായി ദിക്സൂത്രവർഗ്ഗം ഹാരകമായിട്ടു മീത്തെ മീത്തെ ഫലങ്ങളെ വരുത്തുവാൻ നടേ ചൊല്ലീ. അവിടെ എല്ലാ ഫലത്തിന്നും ഭുജാഭാഗംതന്നെ ഗുണ്യമായി കല്പിക്കുമ്പോൾ, ഗുണഹാരങ്ങൾ തുല്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. അതു ഹേതുവായിട്ടു ഗുണ്യം തന്നെ

ഫലമായിട്ടിരിക്കും എല്ലാടവും. എന്നിട്ടു ഗുണ്യത്തെത്തന്നെ ഓജസംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു ഹരിക്കുന്നു. ഇവിടെ പിന്നെ ഭുജകോടികളാകുന്ന ഗുണഹാരങ്ങൾ തുല്യങ്ങളല്ലായ്കയാൽ ഫലങ്ങൾ പിന്നെ പിന്നെ കുറഞ്ഞിട്ടേ വരൂ. എന്നിട്ടു ഫലങ്ങളെല്ലാറ്റേയും ക്രമേണ ഉണ്ടാക്കേണം. എന്നാലൊ ചെറിയ ഗുണഹാരങ്ങളെ കൊള്ളുക എല്ലൊ എളിയതു്. എന്നിട്ട് ഒടുക്കത്തെ കർണ്ണവും ദിക്സൂത്രവും ഉള്ള അന്തരാളം ചതുരശ്രഭുജാഭാഗമല്ല ഇവിടെ ഗുണകാരമായിട്ടു കൊള്ളുന്നതു്, വൃത്തത്തിന്റെ അകത്തൂടെ അന്തരാളം. അതു ജ്യാവാകുന്നതു്. അപ്പോൾ അതിന്റെ കോടി ഹാരകവും അതതു ഫലം ഗുണ്യവും എന്നിവിടെ വിശേഷമാകുന്നതു്. ഇവിടേയും ഓജസംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു ഹരിക്കുന്നു, വർഗ്ഗസംകലിതാദി വരുത്തുവാൻ. ഇങ്ങനെ ചാപീകരണം.

വ്യാഖ്യാനം: പരിധിയെ വരുത്തുവാൻ പറഞ്ഞ ന്യായം കൊണ്ടുതന്നെ ഭുജാകോടികളിൽ വെച്ച ചെറിയതിനെ ചാപിക്കുംപ്രകാരത്തെ പറയുന്നു.



പരിലേഖം (25)

ചാപിക്ക എന്നു വെച്ചാൽ അർദ്ധജ്യാവിന്റെ ചാപത്തെ വരുത്തുക എന്നർത്ഥം. സമചതുരശ്രമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ ഒരു വൃത്തത്തെ കല്പിക്ക. ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കൽ *കിഗ* എന്ന ശരം വരുമാറു *ഗട* എന്ന ജ്യാവിനെ കല്പിക്ക. ഇതു വൃത്താഷ്ടമാംശത്തിന്റെ ജ്യാവിനേക്കാൾ ചെറിയതെന്നും കല്പിക്ക. *Oട* എന്ന വ്യാസാർദ്ധത്തെ *കിത* എന്ന ബാഹ്വർദ്ധത്തിൽ *മ* എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കത്തക്കവണ്ണം നീട്ടികല്പിക്ക. ഇവിടെ *ടഗ* എന്ന ജ്യാവിനെ *ജ* എന്നും വ്യാസാർദ്ധത്തെ *വ* എന്നും കല്പിക്ക.

പരിദ്ധ്യാനയനത്തിലും ചാപീകരണത്തിലും ക്രിയ സാമാന്യേന ഒന്നു തന്നെ. പരിദ്ധ്യാനയനത്തിൽ വ്യാസാർദ്ധത്തേയും ചാപീകരണത്തിൽ *കിമ* എന്ന ബാഹ്വഭാഗത്തേയും അണുപ്രായഭുജാഖണ്ഡങ്ങളായി രൂപങ്ങളായിട്ടു കല്പിക്കുന്നു. അപ്പോൾ ഖണ്ഡയോഗം ആദ്യത്തേതിൽ വ്യാസാർദ്ധവും രണ്ടാമത്തേതിൽ ബാഹ്വഭാഗം *കിമ*-യും ആകുന്നു.

സംകലിതങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കുന്നേടത്തും പാരിദ്ധ്യാനയനത്തിൽ പദം വ്യാസാർദ്ധസംഖ്യ, ചാപീകരണത്തിൽ പദം *കിമ* എന്ന സംഖ്യ. ഹാരകമായിട്ടു കല്പിക്കുന്നതു രണ്ടിടത്തും കോടിവർഗ്ഗമാകുന്ന വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം തന്നെ.

ഇവിടെ *കിമ* എന്നതിനെ *ബ* എന്നു കല്പിക്ക.

$$\text{അപ്പോൾ പരിദ്ധ്യഷ്ടാംശം} = വ - \frac{വ^3}{3വ^2} + \frac{വ^5}{5വ^4} - \frac{വ^7}{7വ^6} + \cdots$$

$$\text{തുല്യന്യായേന ചാപം} = ബ - \frac{ബ^3}{3വ^2} + \frac{ബ^5}{5വ^4} - \frac{ബ^7}{7വ^6} + \cdots$$

ഇവിടെ $ഠമകി$, $ഠടഗ$ ഈ രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളും തുല്യാകാരങ്ങളാകയാൽ

$$കിമ = \frac{ടഗ \times ഠകി}{ഠഗ}.$$

$$\text{അതായത് } ബ = \frac{ജ \times വ}{ക} (\text{ഇവിടെ } ക = \text{ഇഷ്ടജ്യാവിന്റെ കോടി.})$$

$$\text{അപ്പോൾ ചാപം} = \frac{ജ \times വ}{ക} - \frac{ജ^3.വ^3}{3ക^3.വ^2} + \frac{ജ^5.വ^5}{5ക^5.വ^4} + \cdots$$

$$= \frac{ജ \times വ}{ക} - \frac{ജ.വ}{3ക}.\frac{ജ^2}{ക^2} + \frac{ജ \times വ}{5ക}.\frac{ജ^2}{ക^2}.\frac{ജ^2}{ക^2} - \cdots$$

പ്രകാരാന്തരേണ പരിദ്ധ്യാനയനം.

അനന്തരം ഈ വിശേഷന്യായത്തിന്നു തക്കവണ്ണം വ്യാസംകൊണ്ടു വൃത്തംവരുത്തും പ്രകാരം. ഇവിടെ ഇഷ്ടവ്യാസവർഗ്ഗത്തെ പന്ത്രണ്ടിൽ ഗുണിച്ചു മൂലിച്ചതു നടേത്തെ ഫലം. ഇതിനെ മൂന്നിൽ ഹരിച്ചതു രണ്ടാംഫലം. രണ്ടാംഫലത്തെ മൂന്നിൽ ഹരിച്ചതു മൂന്നാമതു്. പിന്നെ അതിനെ മൂന്നിൽ ഹരിച്ചതു മീത്തെ മീത്തെ ഫലം. പിന്നെ ഇങ്ങനെ ഉണ്ടാക്കിയ ഫലങ്ങളെ ക്രമേണ ഒന്ന്, മൂന്ന് എന്നു തുടങ്ങിയുള്ള ഓജസംഖ്യകളെക്കൊണ്ടും ഹരിപ്പൂ. ഫലങ്ങൾ നടേത്തേതു്, മൂന്നാമത്തേതു തുടങ്ങിയുള്ളവറ്റെ തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയതിങ്കന്നു രണ്ടാമതു്, നാലാമതു്, തുടങ്ങിയുള്ള യോഗത്തെ കളയൂ. ശേഷം പരിധി.[5]

വ്യാഖ്യാനം 5: This is particular case of Gregory's Series when $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

ഇവിടെ വൃത്തത്തിൽ പന്ത്രണ്ടാലൊന്നു നടേ ഉണ്ടാകുന്നതു്. പിന്നെ പന്ത്രണ്ടിൽ ഗുണിപ്പൂ. യതൊരുപ്രകാരം നടേ വൃത്തത്തിൽ എട്ടൊന്നിനെ ഉണ്ടാക്കി അവ്വണ്ണമിവിടെയും. മുമ്പിൽ ചാപീകരണത്തിങ്കൽ ചൊല്ലിയപോലെ വൃത്തത്തിങ്കൽ ജ്യാവു കല്പിപ്പൂ. ദിക്സൂത്രത്തിങ്കന്ന് ഇരുപുറവും വൃത്തത്തിൽ പന്ത്രണ്ടാലൊന്നു ചെന്നേത്തു ജ്യാവിന്റെ രണ്ടഗ്രവും വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കുമാറു കല്പിപ്പൂ. അപ്പോൾ അതു വൃത്തത്തിന്റെ ആറൊന്നിന്റെ സമസ്തജ്യാവായിട്ട് ഇരിക്കും. ദിക്സൂത്രത്തിങ്കൽ നടുവു്. ഇതിൽ പാതി പന്ത്രണ്ടാലൊന്നിന്റെ അദ്ധജ്യാവു്. അതു വ്യാസത്തിന്റെ നാലൊന്ന് എന്നു നിയതം, ആറൊന്നിന്റെ സമസ്തജ്യാവു വ്യാസാദ്ധത്തോടു തുല്യം എന്നിട്ടു്. ഇങ്ങനെ വ്യാസാദ്ധതുല്യങ്ങളായിട്ട് ആറു ജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടു വൃത്തം തികയും. ഇവിടെ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു ജ്യാവിന്റെ തലക്കൽ വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കുന്ന കർണ്ണസൂത്രം യാതൊരിടത്തു ചതുരശ്രബാഹുവിങ്കൽ സ്പർശിക്കുന്നു അവിടന്നു ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തോളമുള്ള ചതുരശ്രബാഹുഭാഗം ഇവിടെ നടേത്തെ ഫലം; എന്നിട്ടു വരുത്തുന്നു. ഇതിനെക്കൊണ്ടു പിന്നെ ഇക്കർണ്ണസൂത്രാഗ്രത്തോടു ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തോടുള്ള അന്തരാളത്തിങ്കലെ വൃത്തഭാഗത്തെ വരുത്തുന്നു. അതിനെ പിന്നെ പന്ത്രണ്ടിൽ പെരുക്കേണ്ടുകയാൽ നടേത്തെ ഫലത്തെ തന്നെ പന്ത്രണ്ടിൽ പെരുക്കിയതിനെ നടേ

ഉണ്ടാക്കുന്നു. ഇവിടെ വ്യാസത്തിൽ നാലൊന്നു പരിധിദ്വാദശാംശജ്യാവ് എന്നിരിക്കയാൽ ഈ ജ്യാവർഗ്ഗം വ്യാസവർഗ്ഗത്തിൽ പതിനാറാലൊന്ന്. ഈ ജ്യാവർഗ്ഗത്തിന്റെ നാന്മടങ്ങു വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം. വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിൽ നാലൊന്നു പോയശേഷം മുക്കുറും കോടിവർഗ്ഗം. ഇവിടെ ഈ കോടിവർഗ്ഗം ഹാരകം, വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം ഗുണകാരം ഈ ജ്യാവർഗ്ഗത്തിന്ന്. എന്നിട്ട് അപവർത്തിച്ചാൽ നാലു ഗുണകാരം, മൂന്നു ഹാരകം എന്നു വരും. വ്യാസവർഗ്ഗത്തെ പതിനാറിൽ ഹരിച്ചിരിക്കുന്ന ജ്യാവർഗ്ഗം ഗുണ്യം. ഫലം കർണ്ണാഗ്രത്തോടു ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തോടുള്ള അന്തരാളത്തിങ്കലെ ചതുരശ്രബാഹുഭാഗവർഗ്ഗം. അതിനെ പന്ത്രണ്ടിന്റെ വർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു മൂലിപ്പൂ. എന്നാലിവിടെ പന്ത്രണ്ടിന്റെ വർഗ്ഗവും നാലും ഗുണകാരം. തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചാൽ ഇരുപത്തിനാലിന്റെ വർഗ്ഗം. പതിനാറും മൂന്നും ഹാരകം തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ച നാല്പത്തെട്ടുകൊണ്ട് ഇരുപത്തിനാലിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ ഹരിച്ചാൽ ഫലം പന്ത്രണ്ട്. എന്നിട്ടു പന്ത്രണ്ടിൽ ഗുണിപ്പാൻ ചൊല്ലീ വ്യാസവർഗ്ഗത്തെ ഇതിന്റെ മൂലം വൃത്തത്തിന്നു പുറമേ ഷഡശ്രബാഹ്വർദ്ധം. ഇവിടെ വൃത്തത്തിന്നകത്തെ ഷഡശ്രകോണിങ്കൽ സ്പർശിക്കുന്ന കർണ്ണസൂത്രവും പുറത്തെ ഷഡശ്രകോണിങ്കലും സ്പർശിക്കും. ഇങ്ങനെ സംസ്ഥാനം. പിന്നെ പുറത്തെ ഷഡശ്രബാഹുവിന്റെ അർദ്ധം ഗുണ്യം, ജ്യാവർഗ്ഗം ഗുണകാരം, കോടിവർഗ്ഗം ഹാരകം, ഇങ്ങനെ രണ്ടാംഫലം വരുത്തു, ചാപീകരണത്തിങ്കൽ ചൊല്ലിയതുപോലെ. പിന്നെ ഈ രണ്ടാമതു തുടങ്ങിയുള്ള ഫലങ്ങളെ ഗുണ്യമാക്കി ഇഗ്ഗുണഹാരങ്ങളെക്കൊണ്ടു തന്നെ മീത്തെ മീത്തെ ഫലങ്ങളേയും ഉണ്ടാക്കൂ. ഇവിടെ പിന്നെ ഗുണഹാരങ്ങളെ അപവർത്തിക്കുമ്പോൾ ഒന്നു ഗുണകാരം, മൂന്നു ഹാരകം എന്നുവരും, ഏകരാശിജ്യാവു വ്യാസത്തിൽനാലൊന്ന് എന്നിട്ട്. എന്നാൽ അതതു ഫലത്തെ മൂന്നിൽ തന്നെ ഹരിച്ചാൽ മീത്തെ മീത്തെ ഫലം വരും പിന്നെ ഒന്ന്, മൂന്നു തുടങ്ങിയുള്ള ഓജസംഖ്യകളെക്കൊണ്ടും ഹരിപ്പൂ. പിന്നെ ഫലങ്ങളിൽ ഓജങ്ങളുടെ യോഗത്തിങ്കന്നു യുഗ്മങ്ങളുടെ യോഗത്തെ കളയൂ. ശേഷം പരിധി. ഇങ്ങനെ വ്യാസംകൊണ്ടു പരിധിദ്വാദശാംശത്തെ വരുത്തുംപ്രകാരം.

വ്യാഖ്യാനം:

പരിലേഖം 26-ൽ *കിട* = *കില* = പരിധിദ്വാദശാംശം.

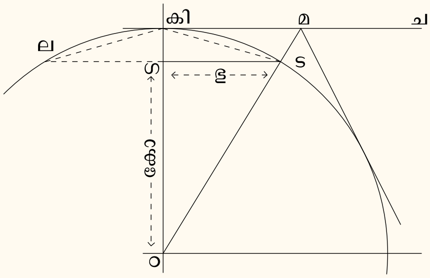
ഗട = *ഗല* = പരിധിദ്വാദശാംശത്തിന്റെ അർദ്ധജ്യാവ് = *ഭു*.

ഠഗ = പരിധിദ്വാദശാംശത്തിന്റെ കോടി = *കോ*.

ലട = പരിധിഷഡംശത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാവ് = *വ*.

(*വ* = വ്യാസാർദ്ധം)

= വൃത്തത്തിന്റെ അകത്തുള്ള ഷഡശ്രബാഹു.



പരിലേഖം (26)

OS എന്ന കർണ്ണത്തെ നീട്ടി കല്പിച്ചാൽ അതു വൃത്തത്തിന്റെ പുറത്തെ ഷഡശ്രകോണ മായ *മ*-യിൽ സ്പർശിക്കും.

$$\text{ചാപം } കിട = \frac{1}{12} \times \text{ വൃത്തപരിധി}$$

$$\therefore \text{ പരിധി} = 12 \times \text{ചാപം } കിട.$$

മുമ്പിൽ പറഞ്ഞ ന്യായംകൊണ്ട്,

$$\text{ചാപം } കിട = വ \times \frac{ഭു}{കോ} - വ \cdot \frac{ഭു}{3കോ} \cdot \frac{ഭു^2}{കോ^2} + വ\frac{ഭു}{5കോ} \cdot \frac{ഭു^2}{കോ^2} \cdot \frac{ഭു^2}{കോ^2} - \cdots$$

$$\therefore \text{ പരിധി} = 12വ \cdot \frac{ഭു}{കോ} - 12വ \cdot \frac{ഭു}{3കോ} \cdot \frac{ഭു^2}{കോ^2} + 12വ \cdot \frac{ഭു}{5കോ} \cdot \frac{ഭു^2}{കോ^2} \cdot \frac{ഭു^2}{കോ^2} - \cdots$$

വ്യാസത്തെ *വ്യ* എന്നു കല്പിക്കൂ.

$$ഭു = \frac{വ്യ}{4}; ഭു^2 = \frac{വ്യ^2}{16}; വ^2 = \frac{വ്യ^2}{4}.$$

$$\therefore കോ^2 = \frac{വ്യ^2}{4} - \frac{വ്യ^2}{16} = \frac{12വ്യ^2}{54} = \frac{3വ്യ^2}{16}.$$

$$\therefore \frac{വ^2}{കോ^2} = \frac{വ്യ^2}{4} \times \frac{16}{3വ്യ^2} = \frac{4}{3}.$$

$$\left(12വ \cdot \frac{ഭു}{കോ}\right)^2 = 144 \times \frac{വ^2}{കോ^2} \cdot ഭു^2.$$

$$= \frac{144 \times 4}{3 \times 16} \cdot വ്യ^2$$

$$= 12വ്യ^2.$$

$$\therefore \text{ ആദ്യഫലവർഗ്ഗം} = \left(12 \cdot വ \cdot \frac{ഭു}{കോ}\right)^2 = 12വ്യ^2.$$

$$\therefore \text{ ആദ്യഫലം} = \sqrt{12വ്യ^2}.$$

$$\frac{ഭു^2}{കോ^2} = \frac{വ്യ^2}{16} \times \frac{16}{3വ്യ^2} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{അപ്പോൾ പരിധി} = \sqrt{12\text{വ്യ}^2} - \frac{\sqrt{12\text{വ്യ}^2}}{3\,3} + \frac{\sqrt{12\text{വ്യ}^2}}{3^2\cdot 5} - \cdots$$

"വ്യാസവർഗ്ഗാദ്രവിരഹാൽ . . . ." എന്ന ക്രിയയുടെ ഉപപത്തിയാണിവിടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

പരിദ്ധ്യാനയനത്തിങ്കൽ ക്രിയാലാഘവത്തിന്നാവശ്യമായ സംസ്കാരം—അതിന്റെ ഉപപത്തിയും സൂക്ഷ്മതയും

എങ്ങനെ പിന്നെ ഇവിടെ പിന്നയും പിന്നയും മീത്തെ മീത്തെയുള്ള വിഷമസംഖ്യ കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലങ്ങളെ സംസ്കരിച്ചിരിക്കുന്നതു പരിധിയോട് അടുത്തു വന്നു ഒടുക്കത്തെ സംസ്കാരം ചെയ്താൽ എന്ന പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ ഇച്ചൊല്ലിയ സംസ്കാരംതന്നെ സൂക്ഷ്മമോ അല്ലയോ എന്നു നടേ നിരൂപിക്കേണ്ടുവത്. അതിനായിക്കൊണ്ട് ഏതാനും ഒരു വിഷമസംഖ്യയെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചഫലം സംസ്കരിച്ചനന്തരം വേറേ വെച്ചു സംസ്കാരം ചെവൂ. അനന്തരം വേറെ ഇരിക്കുന്നതിൽ മീത്തെ വിഷമസംഖ്യാഹൃതഫലത്തെ സംസ്കരിച്ച് അതിനു മീത്തെ സമസംഖ്യകൊണ്ടു സംസ്കാരം ചെവൂ എന്നാലുണ്ടാകുന്ന പരിധികൾ രണ്ടും തുല്യങ്ങൾ എന്നാവൂ ഇരിപ്പത് എങ്കിൽ സംസ്കാരം സൂക്ഷ്മമെന്നു കല്പിച്ചാലും. എങ്ങനെ എന്ന്. രണ്ടു പരിധിക്കും സംഖ്യാസാമ്യമുണ്ട് എന്നാവൂ ഇരിപ്പത് എങ്കിൽ സംസ്കാരത്തിന്നു സർവ്വസാധാരണത്വമുണ്ട്. എന്നാൽ മീത്തെ മീത്തെ വിഷമസംഖ്യാഹരണാനന്തരം സംസ്കാരം ചെയ്താലും അവ്വണ്ണം വരുമത്രെ. എന്നാൽ മുമ്പിലെ സംഖ്യകൾകൊണ്ടു സംസ്കാരം ചെയ്തതു തന്നെ സൂക്ഷ്മമെത്രെ എന്ന് അറിയേണം. അവ്വണ്ണം വരു പിന്നെ.

മീത്തെ വിഷമസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലവും അതിന്റെ സംസ്കാരഫലവും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരവും മുമ്പിലെ സംസ്കാരത്തോടു തുല്യം എങ്കിലേ പരിധികൾ രണ്ടും തുല്യമായിട്ടു വരൂ. എന്നാൽ ഏതാനും ഒരു വിഷമസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തോടു തുല്യമായിട്ടിരിപ്പൂ കീഴെ സംസ്കാരഫലവും മീത്തെ സംസ്കാരഫലവും ഉള്ള യോഗം. യാതൊരുപ്രകാരം തുല്യമായിട്ടു വരു അവ്വണ്ണം സംസ്കാരം ചെയ്യേണം.

ഇവിടെ രണ്ടു സംസ്കാരഹാരകങ്ങളും ഇരട്ടിച്ച വിഷമസംഖ്യയോട് ഒത്തുവരും എന്നാവൂ ഇരിപ്പത് എങ്കിൽ രണ്ടു സംസ്കാരഫലങ്ങളുടെ യോഗം വിഷമസംഖ്യാഫലത്തോട് ഒത്തിരിക്കും. ഇവിടെ രണ്ടു സംസ്കാരഹാരകവുംകൂടി ഇരട്ടിച്ച വിഷമസംഖ്യയോടു തുല്യമായിട്ട് ഒരിക്കലും സംഭവിക്കയില്ല. അത് എങ്ങനെ എന്ന്. ഇവിടെ വിഷമസംഖ്യയെ ഇരട്ടിച്ചതിനോടു തുല്യമാകേണമെല്ലൊ സംസ്കാരഹാരം എന്നിട്ട് ഇവിടെ ഏതൊരു വിഷമസംഖ്യയെ ഒടുക്കത്തെ ഹാരകമായിക്കൊണ്ടത് അതിനു മീത്തെ വിഷമസംഖ്യയെ ഇരട്ടിച്ചതു നടേത്തെ സംസ്കാരഹാരകം എന്നു ചൊല്വൂ എങ്കിൽ രണ്ടാം സംസ്കാരഹാരകം അതിനു മീത്തെ വിഷമസംഖ്യയെ ഇരട്ടിച്ചത് എന്നു വരും; ഒരുപ്രകാരം ചൊല്ലണമെല്ലോ എന്നിട്ട്. അപ്പോൾ ഇതു കീഴെ വിഷമസംഖ്യ ഇരട്ടിച്ചതിൽ നാലേറീട്ടിരിക്കും. എന്നിയെ ഇതു ദ്വിഘ്നവിഷമസംഖ്യയോടു തു

ല്യമാകുന്നതു എന്നാവു കല്പിച്ചതു് എങ്കിൽ കീഴേതു നാലു കുറഞ്ഞിട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ രണ്ടു സംസ്കാരഹാരകവുംകൂട്ടി ദ്വിഘ്നവിഷമസംഖ്യയോട്ട് ഒത്തിരിക്കുമ്മാറു വരാ ഒരു പ്രകാരവും സംസ്കാരഹാരകം.

എന്നിട്ടു രണ്ടു സംസ്കാരഹാരകവും ഒരു ദ്വിഘ്നവിഷമസംഖ്യയോട്ട് അണവു് ഉണ്ടാവൂ എവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ അവ്വണ്ണം ചൊല്ലുകേ അപ്പോളുള്ളൂ. എന്നിട്ടിവിടെ രണ്ടു സംഖ്യകൊണ്ട് അന്തരമുള്ളവറ്റെ ഇരട്ടിച്ചാൽ തങ്ങളിൽ നാലു് അന്തരിച്ചിരിക്കും. ഇവറ്റിൽ ഏതാനും കൂട്ടിത്താൻ കളഞ്ഞുതാനിരിക്കുന്നവറ്റെ ഇരട്ടിച്ചാലുമവ്വണ്ണംതന്നെ അന്തരമായിട്ടിരിക്കുമെത്രെ. എന്നിട്ടു ഒരു ഹാരകം ഇരട്ടിച്ച വിഷമസംഖ്യയിങ്കന്നു രണ്ടു കുറഞ്ഞിരിപ്പൂ, മറ്റേതു രണ്ടേറീട്ടുമിരിപ്പൂ. അവ്വണ്ണം വരേണമെന്നതിനായിക്കൊണ്ടു മീത്തെ സമസംഖ്യയെ ഇരട്ടിച്ചതു സംസ്കാരഹാരകമെന്നു ചൊല്ലീ.

അനന്തരമീവണ്ണമുണ്ടാക്കുമ്പോളെത്രയുണ്ട് സംസ്കാരത്തിന്നു സ്ഥൗല്യമുള്ളതു് എന്നു് അറിവാനായിക്കൊണ്ടു രണ്ടു സംസ്കാരഫലങ്ങളുടെ യോഗവും നടുവിലെ വിഷമസംഖ്യാഫലവും തങ്ങളിലെ അന്തരാളത്തെ ഉണ്ടാക്കുവാനായിക്കൊണ്ടു സംസ്കാരഹാരകങ്ങൾ രണ്ടിനേയും വിഷമസംഖ്യയും ഇവ മൂന്നിനേയും സമച്ഛേദങ്ങളാക്കി ചമക്കു. എന്നാൽ തങ്ങളിൽ അന്തരിക്കാം.

വ്യാഖ്യാനം:

> "യൽസംഖ്യയാത്ര ഹരണേ കൃതേ നിവൃത്താഹൃതിസ്തു ഗാമിതയാ|
> തസ്യാ ഊൎദ്ധ്വഗതാ യാ സമസംഖ്യാ തദ്ദളം ഗുണാന്തേ സ്യാൽ ||
> തദ്വൎഗ്ഗോ രൂപയുതോ ഹാരോ വ്യാസാബ്ധിഘാതതഃ പ്രാഗ്വൽ |
> താഭ്യാമാപ്തം സ്വമൃണേ കൃതേ ധനേ ശോധനഞ്ച കരണീയം ||
> സൂക്ഷ്മഃ പരിധിസ്സസ്യാൽ ബഹുകൃത്വോ ഹരണതോതിസൂക്ഷ്മശ്ച" || ഇതി.
>
> (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

മൂലത്തിൽ ഒടുക്കത്തെ സംസ്കാരം എന്നു പറഞ്ഞിരിക്കുന്നതു് ഈ ക്രിയയാണ്. ഏതാനും ഓജസംഖ്യാഹൃതമായിരിക്കുന്ന ഫലങ്ങളെ സംസ്കരിച്ചതിന്റെ ശേഷം ഒടുക്കത്തെ വിഷമസംഖ്യയുടെ മേലെയുള്ള സമസംഖ്യകൊണ്ടീ സംസ്കാരം ചെയ്താൽ സൂക്ഷ്മമായിട്ടിരിക്കുന്ന പരിധി വരും. ഈ സംസ്കാരം തന്നെ എത്രത്തോളം സൂക്ഷ്മമാണെന്നും അവിടേയും സ്ഥൗല്യമെത്രയുണ്ടാവുമെന്നുമാണ് ഇവിടെ ചിന്തിക്കുവാനുള്ളതു്.

ഇവിടെ $ക - 2$, $ക$ എന്നു രണ്ടു് ഓജസംഖ്യകളാണെന്നും, $സ_1$, $സ_2$ ക്രമേണ ഉള്ള സംസ്കാരഹാരകങ്ങളെന്നും കല്പിക്കുക. $വ്യ$ എന്നതു വ്യാസമെന്നും കല്പിക്കു.

$$\text{അപ്പോൾ പരിധി} = 4വ്യ\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{1}{ക-2} - \frac{1}{സ_1}\right) \text{ എന്നും}$$

$$\text{പരിധി} = 4വ്യ\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{1}{ക-2} - \frac{1}{ക} + \frac{1}{സ_2}\right)$$

എന്നും വരും.

ഈ പരിധികൾ രണ്ടും തുല്യങ്ങൾ എന്നു സങ്കല്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ,

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{1}{ക-2} - \frac{1}{സ_1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{1}{ക-2} - \frac{1}{ക} + \frac{1}{സ_2}$$

അതായത് $\frac{1}{\text{സ}_2} - \frac{1}{\text{ക}} = -\frac{1}{\text{സ}_1}$ എന്നു വരും.

$$\frac{1}{\text{ക}} = \frac{1}{\text{സ}_2} + \frac{1}{\text{സ}_1}.$$

ഇങ്ങനെയിരിക്കുന്നേടത്തു മേലെ മേലെയുള്ള സംസ്കാരങ്ങൾ ചെയ്യേണമെന്നില്ല. എന്തെന്നാൽ ആദ്യത്തെ സംസ്കാരം സൂക്ഷ്മമാകുന്നു. അതായതു സംസ്കാരത്തിന്നു സര്‍വ്വസാധാരാണത്വമുണ്ട്.

ഇവിടെ സംസ്കാരഹാരകങ്ങൾ ഒടുക്കത്തെ വിഷമസംഖ്യയുടെ ഇരട്ടിയാണെങ്കിൽ, $\frac{1}{\text{സ}_2} + \frac{1}{\text{സ}_1} = \frac{1}{2\text{ക}} + \frac{1}{2\text{ക}} = \frac{1}{\text{ക}}$.

അപ്പോൾ സംസ്കാരം സൂക്ഷ്മമാകണമെങ്കിൽ സംസ്കാരഹാരകങ്ങൾ ഒടുക്കത്തെ വിഷമസംഖ്യയുടെ ഇരട്ടിയാകണമെന്നു വന്നു.

എന്നാൽ പ്രകൃതവിഷയത്തിൽ ഇതൊരിക്കലും സംഭവിക്കയില്ല. ക എന്നൊരു വിഷമസംഖ്യയെ അപേക്ഷിച്ച സംസ്കാരഹാരകം 2ക എന്നാണെങ്കിൽ അതിന്നു മീത്തെയുള്ള $\text{ക} + 2$ എന്ന വിഷമസംഖ്യയെ അപേക്ഷിച്ച സംസ്കാരഹാരകം $2\text{ക} + 4$ ആകണമല്ലോ. “ഒരു പ്രകാരംതന്നെ ചൊല്ലേണമെല്ലോ” എന്നു പറഞ്ഞതിന്റെ അര്‍ത്ഥം ഇങ്ങനെയാണ്. അപ്പോൾ ഒരു വിഷയസംഖ്യയെ അപേക്ഷിച്ച് അതിന്റെ ഇരുപുറവുമുള്ള സംസ്കാരഹാരകങ്ങൾ ഒരിക്കലും വിഷമസംഖ്യയുടെ ഇരട്ടിയാവുകയില്ല. സംസ്കാരഹാരകങ്ങളിലൊന്ന് ഇരട്ടിച്ച വിഷമസംഖ്യയിൽ നിന്നു രണ്ടു കുറഞ്ഞിരിക്കും, മറ്റേതു രണ്ടേറിയുമിരിക്കും. ഇവതമ്മിലുള്ള അന്തരവും നാലായിട്ടിരിക്കും. ഈ സംസ്കാരഹാരകങ്ങളിലും ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യ കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്താലും അന്തരം നാലുതന്നെയായിട്ടിരിക്കും. അപ്പോൾ ഇവിടെ സംസ്കാരത്തിന്നു സര്‍വ്വസാധാരണത്വമില്ല. അതുകൊണ്ടു മേലെ മേലെ സംസ്കാരങ്ങളെ ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ ഫലങ്ങൾ സൂക്ഷ്മതരങ്ങളായിട്ടു വരും എന്നേ ഉള്ളൂ. ദ്വിഘ്നവിഷമസംഖ്യയോടു തുല്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കുന്ന സംസ്കാരഹാരകങ്ങളെ കല്പിക്കുവാൻ സാധിക്കാത്ത സ്ഥിതിക്ക്, അതിനോട് അടുത്തുള്ള സംസ്കാരഹാരകങ്ങളെ കല്പിക്കുവാനേ നിവൃത്തിയുള്ളൂ. ഇങ്ങനെ കല്പിച്ചിരിക്കുന്ന സംസ്കാരത്തിൽ സ്ഥൗല്യമെത്രയുണ്ടെന്നറിവാൻ സംസ്കാരഫലയോഗവും വിഷമസംഖ്യാഫലവും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരം കാണേണ്ടുകയാൽ, അവയെ സമച്ഛേദങ്ങളാക്കേണം. അജ്ഞാതങ്ങളായിരിക്കുന്ന സംഖ്യകളെ സമച്ഛേദങ്ങളാക്കുവാനുള്ള ഉപായത്തെ മേല്പോട്ടു പറയുന്നു.

ഇവിടെ സംഖ്യ അറിഞ്ഞേ സമച്ഛേദങ്ങളാക്കാവൂ. **സംഖ്യ ഇങ്ങനെ എന്നു വരുകിൽ എല്ലാടത്തേയ്ക്കും കൊള്ളരുതെന്നു വരും.** എന്നേടത്തേയ്ക്കു സംഖ്യ അറിയാതെയും സമച്ഛേദങ്ങളാക്കുവാനുമുണ്ടുപായം, ധനര്‍ണ്ണപരികല്പനംകൊണ്ട്. അത് എങ്ങനെ എന്ന്. അതുണ്ട് ചൊല്ലീട്ട്—

“ഋണമൃണധനയോര്‍ഘാതോ
ധനമൃണയോര്‍ദ്ധനവധോ ധനം ഭവതി”

എന്നു തുടങ്ങീട്ട്.

യാതൊരു രാശി ഋണഭൂതമായിരിക്കുന്നൂ, യാതൊരു രാശി ധനഭൂതമായിട്ടും ഇരിക്കുന്നൂതും അവ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചുണ്ടായ സംഖ്യയെ ഋണമായിട്ടിരിപ്പൊന്ന് എന്നറിയേണം. പിന്നെ ധനമായിട്ടിരിക്കുന്ന രണ്ടു രാശികൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു

ധനങ്ങളായിട്ടിരിപ്പൊന്ന്, പിന്നെ ഋണങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതും ധനമായിട്ടിരിപ്പൊന്ന്, എന്നിങ്ങനെ അറിയേണം.

പിന്നെ സംഖ്യ അറിയാതെ രാശിവെക്കുംപ്രകാരം ഇങ്ങനെ എന്നും അറിയേണം. അത് എങ്ങനെ എന്ന്. ഇവിടെ സംഖ്യ അറിയാത്ത രാശി എത്ര സംഖ്യയായിട്ടുള്ളൂ എന്നുണ്ടെല്ലോ ഉള്ളൂ അത്ര സംഖ്യകൊണ്ട് ആതതു സ്ഥാനത്തിങ്കന്നു മീത്തെ സ്ഥാനത്തു കരേറുന്നു എന്നു കല്പിക്കുന്നത്, മാറ്റെല്ലാംപോലെ ഒന്ന്, പത്ത്, നൂറ് എന്നിങ്ങനെ പതിന്മടങ്ങല്ല സ്ഥാനാന്തരങ്ങളെ കല്പിക്കുന്നു. ഈവണ്ണമാകുമ്പോളാദിയിങ്കലെ രൂപസ്ഥാനം. അവിടെ ആ രാശിയിങ്കലെ സംഖ്യയോളം തികഞ്ഞാൽ രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു കരേറൂ. എന്നിട്ടു രണ്ടാമതു രാശിസ്ഥാനം. രണ്ടാംസ്ഥാനത്ത് ഒന്നുണ്ടാകുമ്പോൾ രാശി തുല്യസംഖ്യ അത് എന്ന് അറിയേണ്ടൂ. എന്നിട്ടു രണ്ടാം സ്ഥാനത്തിന്നും അത്ര സംഖ്യകൊണ്ടു കരേറുകയാൽ മൂന്നാംസ്ഥാനം രാശിയുടെ വർഗ്ഗസ്ഥാനം. പിന്നേയുമവ്വണ്ണമാകയാൽ നാലാമതു ഘനസ്ഥാനം. പിന്നെ വർഗ്ഗവർഗ്ഗസ്ഥാനം. അവ്വണ്ണം സമപഞ്ചഘാതസമഷൾഘാതാദി സ്ഥാനങ്ങൾ മീത്തെ മീത്തേത് എന്നു അറിയേണ്ടൂ. അതുണ്ടു ചൊല്ലീട്ട്–

"അവ്യക്തവർഗ്ഗഘനവർഗ്ഗവർഗ്ഗപഞ്ചഹതഷഡ്ഘതാദീനാം സ്ഥാനാനി"

എന്നു തുടങ്ങീട്ട്.

ഇവിടെ ഒടുക്കത്തെ വിഷമസംഖ്യേ രാശി എന്നുകല്പിച്ചുവെക്കുംപ്രകാരത്തെ കാട്ടുന്നു. ഇവിടെ രണ്ടു വരിയായി ചില ഖണ്ഡങ്ങളെ എഴുതു, ഓരോ സ്ഥാനം ഓരോ ഖണ്ഡത്തിൽ അകപ്പെടുമാറ്. അതിൽ മീത്തെ വരി അംശകോഷ്ഠങ്ങൾ, കീഴെ വരി ഛേദകോഷ്ഠങ്ങൾ എന്നിങ്ങനെ കല്പിച്ചുവെക്കുംപ്രകാരത്തെ കാട്ടുന്നു. വിഷമസംഖ്യ $\boxed{1}\boxed{0}$. ഇവിടെ ഋണഭൂതമായിരിക്കുന്ന രാശിക്ക് ഏതാനും ഒറ്റ അടയാളം കൂടി വെച്ചുകൊള്ളണം. ശൂന്യത്തിനു യാതൊരു വസ്തു വെക്കുന്നത് അതു താൻ. ഇവിടെ നടേത്തെ സംസ്കാരഹാരകം രാശിയെ ഇരട്ടിച്ചതിങ്കന്നു രണ്ടു കുറയും. അതിന്നു രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു രണ്ട്, നടേത്തെ സ്ഥാനത്ത് ഋണരൂപമായിട്ടു രണ്ട് $\boxed{2^{\circ}}\boxed{2^{\circ}}$. പിന്നെ രണ്ടാം സംസ്കാരഹാരകം രാശിയെ ഇരട്ടിച്ചതിങ്കന്നു രണ്ടേറും. അതിന്നു രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു രാശി ഇരട്ടി എന്നിട്ടു രണ്ട്, നടേത്തെ സ്ഥാനത്തു ധനരൂപമായിട്ടു രണ്ടു രൂപവും $\boxed{2}\boxed{2}$ ഇങ്ങനെ വെക്കും പ്രകാരം.

വ്യാഖ്യാനം: അവ്യക്തരാശിയെ വെച്ചു ക്രിയചെയ്യുമ്പോൾ രണ്ടു സംഗതികൾ മനസ്സിലാക്കുവാനുണ്ട്. (1) ധനർണ്ണപരികല്പനം (2) സംഖ്യയെ വെക്കുംപ്രകാരം (കവടികൊണ്ടു ക്രിയ ചെയ്യുന്നേടത്ത്).

(1) ധനർണ്ണപരികല്പനം:–

ധനം	×	ഋണം	=	ഋണം.
ധനം	×	ധനം	=	ധനം.
ഋണം	×	ഋണം	=	ധനം.

(2) സംഖ്യയെ വെക്കുംപ്രകാരം:– ഒരു സംഖ്യയെ വെക്കുമ്പോൾ ഏകം, ദശം, ശതം എന്നു തുടങ്ങിയുള്ള സ്ഥാനങ്ങളെ കല്പിക്കുന്നു. സംഖ്യകൾ പത്തിൽ പത്തിൽ ഓരോ സ്ഥാനം കരേറുന്നതായിട്ടു സാധാരണ കല്പിക്കുന്നു. ഇവിടെ ആദ്യത്തെ സ്ഥാനം രൂപസ്ഥാ

നം; രണ്ടാംസ്ഥാനം പത്താകുന്ന രാശിസ്ഥാനം; മൂന്നാമത്തേതു പത്തിന്റെ വർഗ്ഗ (നൂറ്) സ്ഥാനം; നാലാമത്തേതു പത്തിന്റെ ഘന(സഹസ്ര)സ്ഥാനം. ഇങ്ങനെ സംഖ്യകളുടെ സംസ്ഥാനം വ്യവഹാരാർത്ഥമായി കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു ഇപ്രകാരംതന്നെ സംഖ്യകളെ എട്ടിൽ എട്ടിൽ കരേറുന്നതായിട്ടു കല്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ ആദ്യത്തേതു രൂപസ്ഥാനം. അവിടെ എട്ടു സംഖ്യ ഉണ്ടാകുമ്പോൾ എട്ടാകുന്ന രാശിസ്ഥാനത്തു ഒന്നുണ്ടാകും. അപ്പോൾ രണ്ടാമത്തേത് എട്ടാകുന്ന രാശിസ്ഥാനം. മൂന്നാമത്തേത് എട്ടിന്റെ വർഗ്ഗസ്ഥാനം ഇങ്ങനെ. പത്തിന്റേയും എട്ടിന്റേയും സ്ഥാനത്ത് ഒരവ്യക്തരാശി(*ര*)യെ കല്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ, ആദ്യത്തേതു രൂപസ്ഥാനം തന്നെ. രണ്ടാമത്തേതു *ര* എന്ന രാശിസ്ഥാനം. മൂന്നാമത്തേതു *ര*^{2} എന്ന വർഗ്ഗസ്ഥാനം. നാലാമത്തേതു *ര*^{3} എന്ന ഘനസ്ഥാനം. പിന്നെ ഇവറ്റെ വെക്കുംപ്രകാരം. രണ്ടു വരിയായിട്ടു ചില ഖണ്ഡങ്ങളെ വരക്കൂ. മുകളിലെ വരി അംശം, താഴേത്തതു ഛേദം. ഓരോ ഖണ്ഡം ഓരോ സ്ഥാനമെന്നും കല്പിക്കുക. ആദ്യത്തെ ഖണ്ഡം രൂപസ്ഥാനം, രണ്ടാംഖണ്ഡം രാശിസ്ഥാനം, മൂന്നാംഖണ്ഡം രാശിവർഗ്ഗസ്ഥാനം. ഇങ്ങനെ മേല്പോട്ടുള്ള സ്ഥാനങ്ങൾ. സംഖ്യ ഋണമെന്നു കാണിക്കുവാൻ സംഖ്യയുടെ മീതെ ഒരു ഭദ്രംവെച്ചാൽ മതി.

പിന്നെ ഇവ മൂന്നും ഛേദങ്ങൾ എന്നു കല്പിച്ച് ഇവറ്റയ്ക്ക് ഓരോ രൂപം അംശമെന്നും കല്പിച്ച് **അന്യോന്യഹാരാഭിഹതൗ ഹരാംശൗ രാശ്യോസ്സമച്ഛേദവിധാനമേവം**, എന്നതിന്നു തക്കവണ്ണം സമച്ഛേദങ്ങളാക്കുമ്പോൾ ഇവറ്റെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലങ്ങൾ സമച്ഛേദങ്ങളായിട്ടുണ്ടാകും. ഛേദമൊന്നേ വരൂ. അതാകുന്നതു നടേത്തേതു ശൂന്യം, രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു ഋണമായിട്ടു നാല്, മൂന്നാംസ്ഥാനത്തു ഋണവും ധനവും നന്നാലുണ്ടാകകൊണ്ടു തങ്ങളിൽ മാറീട്ടു ശൂന്യം, നാലാംസ്ഥാനത്ത് നാല്. ഇങ്ങനെ ഛേദസംഖ്യ. പിന്നെ വിഷമസംഖ്യയെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച അംശം നടേത്തെ സ്ഥാനത്ത് ഋണമായിട്ടു നാല്, രണ്ടാം സ്ഥാനത്ത് ശൂന്യം, മൂന്നാംസ്ഥാനത്തു നാല്. രണ്ടാംസംസ്കാരഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തിങ്കലെ അംശം പിന്നെ. നടേത്തെ സ്ഥാനത്തു ശൂന്യം, രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു ഋണമായിട്ടു രണ്ട്, മൂന്നാംസ്ഥാനത്തു ധനമായിട്ടു രണ്ട്. പിന്നെ നടേത്തെസംസ്കാരഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തിങ്കലെ അംശത്തിന്നു നടേത്തെ സ്ഥാനത്തു ശൂന്യം, രണ്ടാംസ്ഥാനത്തും മൂന്നാംസ്ഥാനത്തും ഈരണ്ട്. സംസ്കാരഫലയോഗം പിന്നെ നടേത്തെ സ്ഥാനങ്ങൾ രണ്ടിങ്കലും ശൂന്യം മൂന്നാംസ്ഥാനത്തു നാല്. വിഷമസംഖ്യാപ്തം

	4	0	4°
4	0	4°	0

; പ്രഥമഹാരാപ്തം

	2	2	0
4	0	4°	0

; ദ്വിതീയമഹാരാപ്തം

	2	2°	0
4	0	4°	0

; സംസ്കാരഫലയോഗം

	4	0	0
4	0	4°	0

. എന്നാൽ സംസ്കാരഫലയോഗം വിഷമസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തിൽ നാലേറും. എന്നാൽ മീത്തെസ്സമസംഖ്യ ഇരട്ടിച്ചതു സംസ്കാരഹാരകമെന്നു കല്പിക്കുമ്പോൾ ഒടുക്കത്തെ വിഷമസംഖ്യാഘനത്തെ തന്റെ മൂലം കളഞ്ഞിരിക്കുന്നതുകൊണ്ടു നാലിൽ ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന വ്യാസത്തെ ഹരിച്ച ഫലം സ്ഥൗല്യമാകുന്ന അംശം എന്ന് അറിയേണ്ടുവത്. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ സംസ്കാരഫലം വേണ്ടതിങ്കന്ന് ഏറിപ്പോയെല്ലോ.

എന്നിട്ടു സംസ്കാരാന്തരത്തെ ഓക്കുംപ്രകാരം. ഇവിടെ രണ്ടു ഹാരകത്തിലും ഓരോന്നു കൂട്ടിക്കൊള്ളൂ എന്നു കല്പിക്കുന്നത്. ഇവിടെ മൂന്നു ഹാരകങ്ങളും തമ്മിൽ ഗുണിച്ചതെല്ലാം സമച്ഛേദമാകുന്നതു്; അതതിന്റെ അംശമാകുന്നതു മറ്റെ ഹാരകങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു്. അവിടെ വിഷമസംഖ്യാംശമാകുന്നതു സംസ്കാരഹാരകങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു്. ഇവിടെ അസ്സംസ്കാരഹാരകങ്ങളിൽ രണ്ടിങ്കലും ഓരോ സംഖ്യകൂട്ടി തങ്ങളിൽ ഗുണിക്കുമ്പോൾ എത്ര ഉണ്ട് എറുവതു നടേത്തേതിൽ എന്നു ഓർക്കുന്നതു്. അവിടെ ഒന്നിൽ കൂട്ടിയ ഒന്നിനെ മറ്റെ ഹാരകംകൊണ്ടു ഗുണിപ്പൂ. അവിടെ കൂട്ടിയതിനെ മറ്റെ ഹാരകത്തിൽ ഒന്നു കൂട്ടിയതിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിപ്പൂ. പിന്നെ അവ രണ്ടും തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂ. അതു് ഓരോന്നു് കൂട്ടിയാൽ ഏറുന്ന അംശമാകുന്നതു്. ഇവിടെ രണ്ടു ഹാരകങ്ങളേയും ഒരു രൂപം കൊണ്ടാണല്ലൊ ഗുണിക്കേണ്ടൂ. എന്നിട്ടു് ഈ സംസ്കാരഹാരയോഗത്തെ രൂപത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചുകൊള്ളാം. സംസ്കാരഹാരയോഗം പിന്നെ നാലിൽ ഗുണിച്ച രാശിയോടൊക്കും, ഒരു ഹാരകം രാശിയെ ഇരട്ടിച്ചതിൽ രണ്ടു കുറയും മറ്റേതു രണ്ടേറും എന്നിട്ടു്. എന്നാൽ സമച്ഛേദമായിരിക്കുന്ന വിഷമസംഖ്യേടെ അംശത്തിങ്കൽ നാലിൽ ഗുണിച്ച രാശിയും ഒരു രൂപവുമേറും. നടേത്തെ സംസ്കാരഹാരകത്തിങ്കലെ അംശം പിന്നെ വിഷമസംഖ്യയും രണ്ടാംസംസ്കാര ഹാരകവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു്. അവിടെ രണ്ടാംഹാരകത്തിൽ ഒന്നേറുകകൊണ്ടു രാശിതന്നെ ഏറ്റമത്രെ. ദ്വിതീയഹാരാംശത്തിങ്കലും ഇത്രതന്നെ ഏറ്റമത്രെ. എന്നാൽ സംസ്കാരഹാരകങ്ങളുടെ അംശയോഗത്തിങ്കൽ മുമ്പിലത്തേതിൽ രാശിയെ ഇരട്ടിച്ചതു് ഏറും. വിഷമസംഖ്യാംശത്തിങ്കൽ നാലിൽ ഗുണിച്ച രാശിയും ഒരു രൂപവും ഏറും. എന്നാൽ ഇപ്പോൾ രാശി സ്ഥാനത്തിങ്കലുംകൂടി സ്ഥൗല്യമുണ്ടായി എന്നു വന്നു. മുമ്പിൽ രൂപസ്ഥാനത്തിങ്കലേ സ്ഥൗല്യമുള്ളൂ.

വ്യാഖ്യാനം:

$$\text{ഒടുക്കത്തെ വിഷമസംഖ്യ} = \text{ര}.$$
$$\text{ആദ്യത്തെ സംസ്കാരഹാരകം} = 2\text{ര} - 2.$$
$$\text{രണ്ടാമത്തെ സംസ്കാരഹാരകം} = 2\text{ര} + 2.$$

ഇവയുടെ അംശം നാലിൽ ഗുണിച്ച വ്യാസമാണെങ്കിലും, എളുപ്പത്തിന്നുവേണ്ടി അംശത്തെ രൂപം എന്നു കല്പിക്കുന്നു.

$$\text{സ്ഥൗല്യം} = \frac{1}{2\text{ര} - 2} - \frac{1}{\text{ര}} + \frac{1}{2\text{ര} + 2}$$
$$\text{ഇവയുടെ സമച്ഛേദം} = \text{ര}(2\text{ര} - 2)(2\text{ര} + 2)$$

ഛേദങ്ങളുടെ ഘാതം സമച്ഛേദമാകുന്നു. അതതിന്റെ അംശം മറ്റേവ രണ്ടിന്റേയും ഛേദങ്ങളുടെ ഘാതമായിരിക്കും

$$\begin{aligned} \text{സമച്ഛേദം} &= \text{ര}(2\text{ര} - 2)(2\text{ര} + 2) \\ &= \text{ര}(4\text{ര}^2 - 4\text{ര} + 4\text{ര} - 4) \\ &= 4\text{ര}^3 - 4\text{ര}^2 + 4\text{ര}^2 + 4\text{ര} \\ &= 4\text{ര}^3 - 4\text{ര}. \end{aligned}$$

4	0	4°	0

$$\text{ആദ്യസംസ്കാരഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം} = \frac{\text{ര}(2\text{ര} + 2)}{4\text{ര}^3 - 4\text{ര}}$$

$$= \frac{2\text{ര}^2 + 2\text{ര}}{4\text{ര}^3 - 4\text{ര}}. \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \cline{2-4} \multicolumn{1}{c|}{} & 2 & 2 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 4^\circ & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{ദ്വിതീയഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം} = \frac{\text{ര}(2\text{ര} - 2)}{4\text{ര}^3 - 4\text{ര}}$$

$$= \frac{2\text{ര}^2 - 2\text{ര}}{4\text{ര}^3 - 4\text{ര}}. \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \cline{2-4} \multicolumn{1}{c|}{} & 2 & 2^\circ & 0 \\ \hline 4 & 0 & 4^\circ & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{വിഷമസംഖ്യാപ്തഫലം} = \frac{(2\text{ര} + 2)(2\text{ര} - 2)}{4\text{ര}^3 - 4\text{ര}}$$

$$= \frac{4\text{ര}^2 - 4}{4\text{ര}^3 - 4\text{ര}}. \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \cline{2-4} \multicolumn{1}{c|}{} & 4 & 0 & 4^\circ \\ \hline 4 & 0 & 4^\circ & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{സംസ്കാരഹാരഫലയോഗം} = \frac{2\text{ര}^2 + 2\text{ര} + 2\text{ര}^2 - 2\text{ര}}{4\text{ര}^3 - 4\text{ര}}$$

$$= \frac{4\text{ര}^2}{4\text{ര}^3 - 4\text{ര}}. \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \cline{2-4} \multicolumn{1}{c|}{} & 4 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 4^\circ & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{സംസ്കാരഫലയോഗം-വിഷമസംഖ്യാപ്തഫലം} = \frac{4\text{ര}^2 - 4\text{ര}^2 + 4}{4\text{ര}^3 - 4\text{ര}} = \frac{4}{4\text{ര}^3 - 4\text{ര}}$$

അപ്പോൾ സംസ്കാരഫലയോഗം വേണ്ടതിലധികം ഏറിപ്പോയി. സംസ്കാരഹാരകങ്ങളെ വ്ദ്ധിപ്പിക്കേണം. അതുകൊണ്ടു രണ്ടിലും ഓരോന്നു കൂട്ടൂ.

$$\text{അപ്പോൾ ആദ്യസംസ്കാരഹാരകം} = 2\text{ര} - 2 + 1 = 2\text{ര} - 1$$

$$\text{രണ്ടാം സംസ്കാരഹാരകം} = 2\text{ര} + 2 + 1 = 2\text{ര} + 3$$

$$\text{വിഷമസംഖ്യ} = \text{ര}$$

$$\text{ഇവയുടെ സമച്ഛേദം} = \text{ര}(2\text{ര} - 1)(2\text{ര} + 3).$$

വിഷമസംഖ്യാപ്തഫലാംശത്തിൽ മുമ്പിലത്തേതിൽ ഏറുന്ന അംശം

$$= (2\text{ര} + 3)(2\text{ര} - 1) - (2\text{ര} + 2)(2\text{ര} - 2)$$
$$= (2\text{ര} + 3)(2\text{ര} - 2) + 1 \times (2\text{ര} + 3) - (2\text{ര} + 2)(2\text{ര} - 2).$$
$$= (2\text{ര} + 2)(2\text{ര} - 2) + 1 \times (2\text{ര} + 3) + 1 \times (2\text{ര} - 2) - (2\text{ര} + 2)(2\text{ര} - 2)$$
$$= 1 \times (2\text{ര} - 2) + 1 \times (2\text{ര} + 3).$$

ഒരു ഹാരകത്തിലേറിയ ഒന്നുകൊണ്ടു മറ്റെ ഹാരകത്തെ ഗുണിക്കൂ.

$$1 \times (2\text{ര} - 2) = 2\text{ര} - 2.$$

$(2\text{ര} - 2)$ എന്ന ഹാരകത്തിൽ കൂട്ടിയ ഒന്നുകൊണ്ടു മറ്റെ ഹാരകത്തിൽ ഒന്നു കൂട്ടിയതിനെ ഗുണിക്കൂ.

$$1 \times (2\text{ര} + 3) = 2\text{ര} + 3.$$

$$\text{ഇവയുടെ യോഗം} = 2\text{ര} - 2 + 2\text{ര} + 3 = 4\text{ര} + 1.$$

ഇതു് ഏറിയ ഭാഗമാകുന്നതു്.

∴ വിഷമസംഖ്യാഫലാംശത്തിൽ മുമ്പിലത്തേതിൽ ഏറിയഭാഗം $= 4\textit{ര} + 1$.

$$\text{ആദ്യസംസ്കാരഫലാംശം} = \textit{ര}(2\textit{ര}+3)$$
$$\text{ദ്വിതീയസംസ്കാരഫലാംശം} = \textit{ര}(2\textit{ര}-1)$$
$$\text{ആദ്യസംസ്കാരഫലാംശത്തിൽ ഏറുന്ന അംശം} = \textit{ര}(2\textit{ര}+3) - \textit{ര}(2\textit{ര}+2) = \textit{ര}.$$
$$\text{ദ്വിതീയസംസ്കാരഫലാംശത്തിലേറുന്ന അംശം} = \textit{ര}(2\textit{ര}-1) - \textit{ര}\times(2\textit{ര}-2) = \textit{ര}.$$
$$\text{സംസ്കാരഫലയോഗാംശത്തിലേറുന്ന അംശം} = 2\textit{ര}.$$

ഇവിടെ വിഷമസംഖ്യാപ്തഫലം സംസ്കാരഫലയോഗത്തേക്കാളേറുന്നു.

$$\text{ഈ ഏറുന്ന അംശം} = 4\textit{ര} + 1 - 2\textit{ര} = 2\textit{ര} + 1.$$

അപ്പോൾ രാശിസ്ഥാനത്തുംകൂടി സ്ഥൗല്യം വന്നു. മുമ്പിൽ രൂപസ്ഥാനത്തു മാത്രമേ സ്ഥൗല്യമുണ്ടായിരുന്നുള്ളൂ.

എന്നാൽ സംസ്കാരഹാരകങ്ങളിൽ ഒന്നു തികയെ കൂട്ടരുതെന്നു വന്നൂ. എങ്കിൽ പിന്നെ എത്ര കൂട്ടൂ? എന്നിട്ടു ഒരു തികയെ കൂട്ടിയാറെ വിഷമസംഖ്യേടെ അംശത്തിങ്കൽ നാലിൽ ഗുണിച്ച രാശി ഏറും, മറ്റേവറ്റിന്റെ യോഗത്തിങ്കൽ രണ്ടിൽ ഗുണിച്ചതു് ഏറും. ഇവിടെ പിന്നെ, തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച രൂപത്തെ കൂട്ടുമ്പോൾ ഇതിൽ പാതി രൂപമേ ഏറി ഇരിപ്പൂ, സംസ്കാരഹാരകങ്ങൾ ഇരട്ടിച്ച രാശിയോടു മിക്കതും തുല്യമെല്ലോ, എന്നിട്ട്. ഇവിടെ രൂപാന്തരം ഒന്നേ ഉള്ളൂ. നാലു രൂപാന്തരം ഉണ്ടാകയും വേണം, വിഷമസംഖ്യാംശത്തിങ്കൽ മറ്റേവ രണ്ടിന്റേയും യോഗത്തിങ്കുന്നു നാലു കുറയുമെല്ലോ, എന്നീട്ട്. എന്നാൽ മുമ്പിൽ കല്പിച്ച സംസ്കാരഹാരകങ്ങളിൽ, തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച നാലുരൂപങ്ങൾ കൂട്ടേണം. അപ്പോൾ വിഷമസംഖ്യയിങ്കലെ അംശത്തിങ്കൽ മിക്കവാറും എട്ടുരൂപമേറും, മറ്റേവ രണ്ടിന്റേയും യോഗത്തിങ്കൽ നാലുരൂപമേറും. എന്നാൽ ഇപ്പോൾ മിക്കതും സൂക്ഷ്മമായി എന്നു കല്പിച്ചിട്ട്, തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച നാലുരൂപങ്ങൾ കൂട്ടുവാൻ ചൊല്ലീ ആചാര്യൻ.

ഇവിടെ ഇരട്ടിച്ച വിഷമസംഖ്യയിൽ രണ്ടു കുറഞ്ഞതും രണ്ട് ഏറിയതും എല്ലൊ മുമ്പിൽ സംസ്കാരഹാരകങ്ങളായിട്ടു കല്പിച്ചതു്. വിഷമസംഖ്യയുടെ അടുത്ത് ഇരുപുറവുമുള്ള സമസംഖ്യകളെ ഇരട്ടിച്ചവ. പിന്നേവ ആകുന്നതു്. എന്നാലിവറ്റെ സമാനജാതികളാക്കുമ്പോൾ ഇരട്ടിച്ച സമസംഖ്യാവർഗ്ഗത്തിൽ നാല് ഏറിയതു ഛേദം, ഇരട്ടിച്ച സമസംഖ്യതന്നെ അംശമാകുന്നതു്. ഇവ രണ്ടിനേയും നാലിൽ അപവർത്തിച്ചാൽ സമസംഖ്യേടെ അർദ്ധം അംശമാകുന്നതു്, സമസംഖ്യാവർഗ്ഗത്തിൽ രൂപം കൂടിയതു ഛേദമാകുന്നതു്. എന്നിട്ടു ചൊല്ലീ.

“തസ്യാ ഊർദ്ധ്വഗതാ യാ
സമസംഖ്യാ തദ്ദളം ഗുണോഽന്തേ സ്യാൽ |
തദ്വർഗ്ഗോ രൂപയുതോ ഹാരഃ”|| എന്നിങ്ങനെ.

വ്യാഖ്യാനം: മുമ്പിലത്തെ സംസ്കാരഹാരകങ്ങളിൽ ഒന്നു തികയകൂട്ടിയാൽ സ്ഥൗല്യം വർദ്ധിക്കുന്നു. അപ്പോൾ ഒന്നു കൂട്ടുവാൻ വയ്യ. രാശിസ്ഥാനത്തും സ്ഥൗല്യമുണ്ടാകയാൽ രാശിസ്ഥാനത്തും സംഖ്യയുള്ള ഒരു സംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ച രൂപത്തെ കൂട്ടേണമെന്നും വന്നു. അതുകൊണ്ടു സംസ്കാരഹാരകങ്ങളിൽ, തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച രൂപത്തെ കൂട്ടി പരീക്ഷിക്കാം.

അപ്പോൾ സംസ്കാരഹാരകങ്ങൾ $\left(2ര-2+\frac{1}{2ര-2}\right)$, $\left(2ര+2+\frac{1}{2ര+2}\right)$ ആയിട്ടു തീരും. “എല്ലായിടത്തും ഒരു പ്രകാരംതന്നെ ചൊല്ലേണമല്ലോ” എന്നിട്ട് $(2ര-2)$ എന്ന ഹാരകത്തിൽ $\frac{1}{2ര-2}$ കൂട്ടി. $(2ര+2)$ എന്ന ഹാരകത്തിൽ $\frac{1}{2ര+2}$ എന്നു കൂട്ടി. ഹാരകങ്ങളിൽ ഓരോന്നു കൂട്ടിയപ്പോൾ, വിഷമസംഖ്യാപ്തഫലാംശത്തിൽ ഏകദേശം നാലുരാശിയും സംസ്കാരഹാരകാപ്തഫലയോഗത്തിൽ രണ്ടു രാശിയുമാണല്ലോ ഏറിയ അംശങ്ങളായിരുന്നത്. എന്നാൽ തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച രൂപം കൂട്ടുമ്പോൾ സംസ്കാരഹാരകങ്ങൾ രാശിയുടെ മിക്കവാറും ഇരട്ടിയാകകൊണ്ട്, അംശങ്ങളിൽ ഏറിയ ഭാഗങ്ങളും മുമ്പിലത്തേവറ്റിൽ പകുതി രൂപങ്ങൾ ആയിട്ടിരിക്കും. അപ്പോൾ വിഷമസംഖ്യാപ്തഫലാംശത്തിൽ ഏറിയഭാഗം രണ്ടു രൂപമെന്നും സംസ്കാരഹാരകാപ്തഫലമായോഗാംശത്തിൽ ഏറിയ ഭാഗം ഒരു രൂപമെന്നും വരും. വിഷമസംഖ്യാപ്തഫലാംശത്തിൽ സംസ്കാരഹാരകാപ്തഫലാംശയോഗത്തേക്കാൾ ഏറുന്നതു് ഒരു രൂപം. $\frac{4}{4ര^3+4ര}$ എന്ന സ്ഥൗല്യത്തിങ്കൽ സംസ്കാരഹാരകാപ്തഫലയോഗാംശം വിഷമസംഖ്യാപ്തഫലാംശത്തിങ്കന്നു നാലുരൂപംകൊണ്ടു് ഏറിയിരിക്കുന്നു. ഈ സ്ഥൗല്യത്തെ പരിഹരിക്കുവാൻ വിഷമസംഖ്യാപ്തഫലാംശത്തിങ്കൽ നാലുരൂപമേറിയിരിക്കണം. അപ്പോൾ, തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച രൂപങ്ങൾ അതാതു ഹാരകങ്ങളിൽ കൂട്ടിയാൽ പോരാ എന്നും തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച നാലു രൂപങ്ങൾ കൂട്ടേണമെന്നും വന്നു. ഇപ്പോൾ മിക്കതും സൂക്ഷ്മമായി എന്നു കല്പിക്കാം. ഇവിടെ സ്ഥൗല്യങ്ങൾ വരുന്നേടത്തെല്ലാം, സംസ്കാരഹാരകങ്ങളിൽ അവയെ അപേക്ഷിച്ച വളരെ ചെറിയ സംഖ്യകൂട്ടുമ്പോൾ ഛേദങ്ങൾക്കു വ്യത്യാസം വരികയില്ലെന്നു സങ്കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഈ വിഷയത്തെ പ്രകാരാന്തരേണയും വിശദീകരിക്കാം. ആദ്യം സംസ്കാരഹാരകങ്ങളെ സമസംഖ്യയിലിരട്ടി എന്നു കല്പിച്ചു. അവിടെ സംസ്കാരഹാരകാപ്തഫലയോഗം വിഷമസംഖ്യാപ്തഫലത്തേക്കാൾ $\frac{4}{4ര^3-4ര}$ കൊണ്ട് ഏറിപ്പോയി. അപ്പോൾ സംസ്കാരഹാരകങ്ങളിൽ രൂപത്തെ കൂട്ടി.

$$\text{അപ്പോൾ സ്ഥൗല്യം} = \frac{1}{2ര-1} - \frac{1}{ര} + \frac{1}{2ര+3}$$
$$= \frac{ര(2ര+3)-(2ര-1)(2ര+3)+ര(2ര-1)}{ര(2ര-1)(2ര+3)}$$
$$= \frac{2ര^2+3ര-4ര^2-6ര+2ര+3+2ര^2-ര}{ര(2ര-1)(2ര+3)}$$
$$= \frac{-2ര+3}{ര(2ര-1)(2ര+3)} \ \text{(ഋണരൂപം)}$$

ഇവിടെ വിഷമസംഖ്യാപ്തഫലം സംസ്കാരഫലയോഗത്തേക്കാളേറി. രാശിസ്ഥാനത്തും സ്ഥൗല്യം വന്നു.

അപ്പോൾ തന്നേക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച രൂപത്തെ സംസ്കാരഹാരകങ്ങളിൽ കൂട്ടുവാൻ നിശ്ചയിച്ചു.

$$\text{അവിടെ സ്ഥൗല്യം} = \frac{1}{2ര-2+\frac{1}{2ര-2}} - \frac{1}{ര} + \frac{1}{2ര+2+\frac{1}{2ര+2}}$$
$$= \left\{ ര\left(2ര+2+\frac{1}{2ര+2}\right) - \left(2ര-2+\frac{1}{2ര-2}\right) \times \left(2ര+2+\frac{1}{2ര+2}\right) + ര\left(2ര-2+\frac{1}{2ര-2}\right)\right\} \div \text{ഛേദം.}$$

$$= \frac{2ഠ^2 + 2ഠ + \frac{1}{2} - 4ഠ^2 + 4 - 1 - 1 + 2ഠ^2 - 2ഠ + \frac{1}{2}}{\text{ഛേദം}}$$
$$= \frac{3}{\text{ഛേദം}}.\ (\text{മിക്കവാറും})$$

ഇവിടെ വിഷമസംഖ്യയെ ദ്വിഘ്നസമസംഖ്യയുടെ പകുതിയെന്നും സംസ്കാരഹാരകഘാതാപ്തമായിരിക്കുന്ന രൂപം വളരെ ചെറുതാകകൊണ്ടുപേക്ഷിക്കാമെന്നും കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഇവിടെ സംസ്കാരഹാരകാപ്തഫലയോഗം വിഷമസംഖ്യാപ്തഫലത്തേക്കാൾ ഏറിപ്പോയി. ആദ്യം സ്ഥൗല്യം $\frac{4}{\text{ഛേദം}}$ സംസ്കാരഹാരകങ്ങളിൽതന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച രൂപം ചേത്താൽ സ്ഥൗല്യം $\frac{3}{\text{ഛേദം}}$. അപ്പോൾ തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച നാലുരൂപം ചേത്താൽ സ്ഥൗല്യം മിക്കവാറും ശൂന്യമാകുവാൻ ന്യായമുണ്ട്. അപ്പോൾ അങ്ങനെ കല്പിക്കു. ഇവിടെ ഛേദത്തിൽ വ്യത്യാസം വരുന്നില്ലെന്നു സംകല്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

$$\text{ഇവിടെ സ്ഥൗല്യം} = \frac{1}{2ഠ - 2 + \frac{4}{2ഠ-2}} - \frac{1}{ഠ} + \frac{1}{2ഠ + 2 + \frac{4}{2ഠ+2}}$$
$$= \left\{ ഠ\left(2ഠ + 2 + \frac{4}{2ഠ + 2}\right) - \left(2ഠ - 2 + \frac{4}{2ഠ - 2}\right) \right.$$
$$\left. \times \left(2ഠ + 2 + \frac{4}{2ഠ+2}\right) + ഠ\left(2ഠ - 2 + \frac{4}{2ഠ-2}\right)\right\} \div \text{ഛേദം}$$
$$= \frac{2ഠ^2 + 2ഠ + 2 - 4ഠ^2 + 4 - 4 - 4 + 2ഠ^2 - 2ഠ + 2}{\text{ഛേദം}}$$
(മിക്കവാറും)
$$= \text{ശൂന്യം}$$
$$\text{അപ്പോൾ സംസ്കാരം} = 4\text{വ്യാസം} \times \frac{1}{(2ഠ + 2) + \frac{4}{2ഠ+2}}$$
$$= \frac{4\text{വ്യാസം} \times (2ഠ + 2)}{(2ഠ + 2)^2 + 4}$$
$$= 4\text{വ്യാസം} \times \frac{\frac{ഠ+1}{2}}{(ഠ + 1)^2 + 1}$$

പിന്നെ ഇസ്സംസ്കാരത്തിനും എത്രയുണ്ടു സ്ഥൗല്യം എന്ന് അറിയേണ്ടുകിൽ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയവണ്ണം തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച നാലുരൂപം കൂട്ടിയ സംസ്കാരഹാരകങ്ങൾക്കും വിഷമസംഖ്യക്കും സമഛേദമുണ്ടാക്കു. ഇവ വെക്കുംപ്രകാരം. നടേ കല്പിച്ച സംസ്കാരഹാരകം ഇരട്ടിച്ച രാശിയിൽ രണ്ടു കുറകകൊണ്ടു രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു രണ്ട്, നടേത്തെ സ്ഥാനത്ത് ഋണമായിട്ടു രണ്ട്. ഇങ്ങനെ നടേത്തെ സംസ്കാരഹാരകം. രണ്ടാമതു പിന്നെ ദ്വിഘ്നരാശിയിൽ രണ്ടേറുകയാൽ രണ്ടു സ്ഥാനത്തും ധനമായിട്ടു രണ്ട്. ഇവറ്റിനു അംശം ഓരോന്ന്. പിന്നെ ഈ ഛേദങ്ങളിൽ തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച നാലു രൂപം കൂട്ടുമ്പോൾ ഛേദവർഗ്ഗത്തിൽ നാലു കൂട്ടിയതു ഛേദം, നടേത്തെ ഛേദത്തോടു തുല്യം അംശം. പിന്നെ ഛേദാംശങ്ങളെ അദ്ധിക്കാം. എന്നാൽ പ്രഥമസംസ്കാരഹാരകഛേദത്തിങ്കൽ മൂന്നാംസ്ഥാനത്തു രണ്ട്, രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു ഋണമായി

ട്ടു നാല്, നടേത്തെ സ്ഥാനത്തു ധനമായിട്ടു നാല്. രണ്ടാമതിങ്കൽ പിന്നെ വിശേഷം രണ്ടാം സ്ഥാനത്തെ നാലുംകൂട്ടി ധനം എന്ന്. അംശങ്ങൾ പിന്നെ രണ്ടിന്നും രണ്ടു സ്ഥാനങ്ങളിലും ഓരോന്ന്. അവിടെ നടേത്തേതിന്റെ നടേത്തെ സ്ഥാനത്തേത് ഋണം എന്നു വിശേഷം. പിന്നെ വിഷമസംഖ്യാഛേദം രണ്ടാംസ്ഥാനത്ത് ഒന്നു നടേത്തെ സ്ഥാനത്തു ശൂന്യം. അംശമൊന്ന്. പിന്നെ ഇവ മൂന്നിന്നും "അന്യോന്യ ഹാരാഭിഹതൗഹരാംശൗ" എന്നു സമച്ഛേദമാക്കൂ. അപ്പോൾ സമഛേദത്തിന്ന് ആറു സ്ഥാനം, ആറുഖണ്ഡത്തിൽ. ഇവിടെ നടേത്തെ ഖണ്ഡത്തിൽ ശൂന്യം, രണ്ടാംഖണ്ഡത്തിൽ പതിനാറ്, പിന്നെ മൂന്നിലും ശൂന്യം, പിന്നെ ആറാംഖണ്ഡത്തിൽ നാല്. ഇവിടെ നടേത്തെ സ്ഥാനം കൂടായുമ്പോൾ വിഷമസംഖ്യാംശം.[6]

വ്യാഖ്യാനം 6: ഇവിടെ നടേത്തെ ഖണ്ഡം മാച്ചു കളയുകയാണെങ്കിൽ, മുമ്പിലത്തെ രണ്ടാംസ്ഥാനം അപ്പോഴത്തെ ആദ്യസ്ഥാനമായിട്ടു വരും. ഇങ്ങനെ എല്ലാ സംഖ്യകളും ഓരോസ്ഥാനം ഇറങ്ങിയിരിക്കും. ഇങ്ങനെ ഉണ്ടാകുന്ന സംഖ്യ വിഷമസംഖ്യാംശം.

ഇവിടെ ഒരു ഖണ്ഡത്തിലെ സംഖ്യ മീത്തെ ഖണ്ഡത്തിൽ കരേറുകയില്ല. പത്തിലേറിയാലും പത്തിലെല്ലൊ കരേറേണ്ടൂ. എന്നിട്ട് അസ്സംഖ്യ അറിയാത്തെ രാശി ആകയാൽ രാശി തുല്യസംഖ്യകൊണ്ടു കരേറുവാനൊ ഉപായമില്ലെല്ലൊ. എന്നിട്ട് ഇവിടേയും ഒരു സ്ഥാനത്തു വരുന്ന സംഖ്യകൾ ധനങ്ങളും ഒന്നെങ്കിൽ കൂട്ടേണം, രണ്ട് എങ്കിൽ അന്തരിക്കാം. അത്രേ ആവൂ. ഇവിടുത്തെ നടേത്തെ സംസ്കാരാംശം പിന്നെ. ഇതിന്നും അഞ്ചുസ്ഥാനം. നടേത്തേതു ശൂന്യം, രണ്ടാംസ്ഥാനത്ത് ഋണനാല്, മൂന്നാമത് ശൂന്യം, പിന്നെ രണ്ടു സ്ഥാനത്തും ഈ രണ്ട്. ദ്വിതീയസംസ്കാരഹാരകത്തിന്റെ അംശം പിന്നെ. നടേത്തെ സ്ഥാനത്തു ശൂന്യം, രണ്ടാമേടത്തു നാല്, പിന്നെ ശൂന്യം, പിന്നെ ഋണം രണ്ട്, പിന്നെ അഞ്ചാംസ്ഥാനത്തു ധനമായിട്ടു രണ്ട്. ഇങ്ങനെ ക്രമം. സംസ്കാരഫലയോഗം പിന്നെ. അഞ്ചാംസ്ഥാനത്തു നാല്, മറ്റേവ ശൂന്യം. ഇതിനെ വിഷമസംഖ്യാഫലത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ നടേത്തെ സ്ഥാനത്തു പതിനാറു ശേഷിക്കുമത്രെ. പിന്നെ ശേഷിച്ച അംശത്തെയും ഛേദത്തേയും നാലിൽ അപവൎത്തിച്ചാൽ അംശം നാലും, ഛേദം ആറാംസ്ഥാനത്ത് ഒന്നും, രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു നാല്, മറ്റേവ ശൂന്യം. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ വിഷമസംഖ്യയുടെ പഞ്ചാഹതിയിൽ നാലിൽ ഗുണിച്ച മൂലം കൂട്ടിയതു ഛേദം. ഇതിലിറങ്ങിയ നാലംശം സ്ഥൗല്യമാകുന്നത് എന്നു വന്നു.

വ്യാഖ്യാനം:

$$\text{ഇവിടെ സ്ഥൗല്യം} = \frac{1}{ര} - \left\{ \frac{1}{2ര - 2 + \frac{4}{2ര-2}} + \frac{1}{2ര + 2 + \frac{4}{2ര+2}} \right\}$$

$$\frac{1}{2ര - 2 + \frac{4}{2ര-2}} = \frac{1}{\frac{(2ര-2)^2+4}{2ര-2}}$$

$$= \frac{2ര - 2}{(2ര - 2)^2 + 4}$$

$$= \frac{2ര - 2}{4ര^2 - 8ര + 4 + 4}$$

$$= \frac{ര - 1}{2ര^2 - 4ര + 4}$$

$$\frac{1}{2\text{ര} + 2 + \frac{4}{2\text{ര}+2}} = \frac{2\text{ര} + 2}{4\text{ര}^2 + 8\text{ര} + 8}$$
$$= \frac{\text{ര} + 1}{2\text{ര}^2 + 4\text{ര} + 4}$$

$$\text{അപ്പോൾ സ്ഥൗല്യം} = \frac{1}{\text{ര}} - \left\{ \frac{\text{ര} - 1}{2\text{ര}^2 - 4\text{ര} + 4} + \frac{\text{ര} + 1}{2\text{ര}^2 + 4\text{ര} + 4} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\text{സമച്ഛേദം} &= \text{ര}(2\text{ര}^2 + 4\text{ര} + 4)(2\text{ര}^2 - 4\text{ര} + 4) \\
&= \text{ര}\,\{(4\text{ര}^4 - 8\text{ര}^3 + 8\text{ര}^2) + (8\text{ര}^3 - 16\text{ര}^2 + 16\text{ര}) \\
&\quad + (8\text{ര}^2 - 16\text{ര} + 16)\} \\
&= \text{ര}(4\text{ര}^4 + 16) \\
&= 4\text{ര}^5 + 16\text{ര}.
\end{aligned}$$

വിഷമസംഖ്യാംശം $= 4\text{ര}^4 + 16$

പ്രഥമസംസ്കാരഹാരകാംശം

$$\begin{aligned}
&= \text{ര}(\text{ര} - 1)(2\text{ര}^2 + 4\text{ര} + 4) \\
&= \text{ര}(2\text{ര}^3 + 4\text{ര}^2 + 4\text{ര} - 2\text{ര}^2 - 4\text{ര} - 4) \\
&= 2\text{ര}^4 + 2\text{ര}^3 - 4\text{ര}.
\end{aligned}$$

4	8°	8			
	8	16°	16		
		8	16°	16	
4	0	0	0	16	0

ദ്വിതീയഹാരകാംശം

$$\begin{aligned}
&= \text{ര}(\text{ര} + 1)(2\text{ര}^2 - 4\text{ര} + 4) \\
&= \text{ര}(2\text{ര}^3 - 4\text{ര}^2 + 4\text{ര} + 2\text{ര}^2 - 4\text{ര} + 4) \\
&= 2\text{ര}^4 - 2\text{ര}^3 + 4\text{ര}
\end{aligned}$$

$\therefore$ സംസ്കാരഫലയോഗാംശം

$$\begin{aligned}
&= (2\text{ര}^4 + 2\text{ര}^3 - 4\text{ര}) + (2\text{ര}^4 - 2\text{ര}^3 + 4\text{ര}) \\
&= 4\text{ര}^4.
\end{aligned}$$

വിഷമസംഖ്യാംശവും സംസ്കാരഫലയോഗാംശവും തങ്ങളിലെ അന്തരം

$$\begin{aligned}
&= 4\text{ര}^4 + 16 - 4\text{ര}^4 \\
&= 16.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{അപ്പോൾ സ്ഥൗല്യം} &= \frac{16}{4\text{ര}^5 + 16\text{ര}} \\
&= \frac{4}{\text{ര}^5 + 4\text{ര}}
\end{aligned}$$

പരിദ്ധ്യാനയനപ്രകാരാന്തരങ്ങൾ

ഇപ്പോൾ ഇതിന്നു തക്കവണ്ണം പരിധിയെ വരുത്താം. അതിന്റെ പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

"സമപഞ്ചാഹതയോ യാ
രൂപാദ്യയുജാഞ്ചതുർഘ്നമൂലയുതാഃ |
താഭിഷോഡശഗുണിതാൽ
വ്യാസാൽ പൃഥഗാഹതേഷു വിഷമയുതേഃ ||
സമഫലയുതിമപഹായ
സ്വാദിഷ്ടവ്യാസസംഭവഃ പരിധിഃ" | ഇതി

(തന്ത്രസംഗ്രഹം)

ഇവിടെ പരിധി വരുത്തുവൻ അതിന്റെ പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു. ഇവിടെ പ്രായികമായിരിക്കുന്ന പരിധിക്ക് ഇസ്സംസ്കാരം ചൈതാൽ ഇത്ര സ്ഥൗല്യമുണ്ടെന്നറിഞ്ഞാൽ അതു കൂട്ടീതാകിൽ ഏറിപ്പോയി എന്നാലതിന്നു മീതെ വിഷമസംഖ്യകൊണ്ട് ഉണ്ടാക്കിയ സംസ്കാരഫലം കളഞ്ഞാൽ ഒട്ടു സൂക്ഷ്മമാകും. പിന്നയും പിന്നയും സംസ്കാരം ചൈതാൽ സൂക്ഷ്മമാകും എന്നു വന്നിരിക്കുമ്പോൾ ആദിയിങ്കന്നു തുടങ്ങീട്ടു തന്നെ ഈ സംസ്കാരം ചൈതുകൊണ്ടാലും. പരിധി സൂക്ഷ്മമാകുമെന്നു വരും. എന്ന് ഇതിന്ന് ഉപപത്തി.

വ്യാഖ്യാനം:

$$\text{പരിധി} = 4\text{വ്യ} - \frac{4\text{വ്യ}}{3} + \frac{4\text{വ്യ}}{5} - \frac{4\text{വ്യ}}{7} + \cdots\cdots$$

$$= \left(4\text{വ്യ} - \frac{4\text{വ്യ}}{2.1+2+\frac{4}{2.1+2}}\right)$$
$$+ \left(\frac{4\text{വ്യ}}{2.1+2+\frac{4}{2.1+2}} - \frac{4\text{വ്യ}}{3} + \frac{4\text{വ്യ}}{2.3+2+\frac{4}{2.3+2}}\right)$$
$$- \left(\frac{4\text{വ്യ}}{2.3+4+\frac{4}{2.3+2}} - \frac{4\text{വ്യ}}{5} + \frac{4\text{വ്യ}}{2.5+2+\frac{4}{2.5+2}}\right)$$
$$+ \left(\frac{4\text{വ്യ}}{2.5+2+\frac{4}{2.5+2}} - \frac{4\text{വ്യ}}{7} + \frac{4\text{വ്യ}}{2.7+2+\frac{4}{2.7+2}}\right)$$
$$- \cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots$$

ഇവിടെ $4\text{വ്യ} - \dfrac{4\text{വ്യ}}{2.1+2+\dfrac{4}{2.1+2}}$

$$= 4\text{വ്യ} - \frac{4\text{വ്യ}}{5} = \frac{16\text{വ്യ}}{5} = \frac{16\text{വ്യ}}{1^5+4.1}$$

$$\left(\frac{1}{2.1+2+\frac{4}{2.1+2}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2.3+2+\frac{4}{2.3+2}}\right),$$

$$\left(\frac{1}{2.3+2+\frac{4}{2.3+2}}-\frac{1}{5}+\frac{1}{2.5+2+\frac{4}{2.5+2}}\right),\ldots\ldots$$

തുടങ്ങിയവ എല്ലാം അതാതു ദിക്കിലെ സ്ഥൗല്യങ്ങളാണല്ലൊ.

$$\text{അപ്പോൾ}\quad \frac{1}{2.1+2+\frac{4}{2.1+2}}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2.3+2+\frac{4}{2.3+2}}=-\frac{4}{3^5+4.3}$$

$$\frac{1}{2.3+2+\frac{4}{2.3+2}}-\frac{1}{5}+\frac{1}{2.5+2+\frac{4}{2.5+2}}=-\frac{4}{5^5+4.5}$$

$$\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots$$

വിഷമസംഖ്യാഫലം സംസ്കാരഫലയോഗത്തേക്കാൾ ഏറുന്നു. അതുകൊണ്ടാണ് ഈ സ്ഥൗല്യങ്ങൾ ഋണഭൂതങ്ങളായിട്ടു വന്നിരിക്കുന്നത്.

$$\therefore\quad \text{പരിധി} = \frac{16\text{വ്യ}}{1^5+4.1}-\frac{16\text{വ്യ}}{3^5+4.3}+\frac{16\text{വ്യ}}{5^5+4.5}-\ldots\ldots$$

കേവലം വിഷമ[7] സംഖ്യ ഇരട്ടിച്ചതു തന്നെ സംസ്കാരഹാരകം എന്നു കല്പിച്ചാൽ അവിടുത്തെ സ്ഥൗല്യാംശത്തെ പരിഹരിച്ചു പരിധി വരുത്തും പ്രകാരം.

വ്യാഖ്യാനം 7: 'കേവലം വിഷമസംഖ്യേ' എന്നാണ് ഗ്രന്ഥങ്ങൾ മിക്കതിലും പാഠം കാണുന്നത്. എന്നാൽ ശ്ലോകത്തിൽ സമസംഖ്യയെ ഇരട്ടിച്ചതിനെ സംസ്കാരഹാരകം എന്നു കല്പിച്ചിട്ടാണ് പരിധിയെ വരുത്തിയിരിക്കുന്നത്. ഒരു ഗ്രന്ഥത്തിൽ 'കേവലമവിഷമസംഖ്യ' എന്നു തിരുത്തി എഴുതിക്കാണുന്നുണ്ട്. "കേവലമവിഷമസംഖ്യ" എന്നോ "കേവലം സമസംഖ്യെ" എന്നോ ആക്കിയാൽ മാത്രമേ ശ്ലോകത്തിന്റെ അർത്ഥത്തിനോടു യോജിക്കയുള്ളൂ.

" വ്യാസാദ്വാരിധിനിഹതാൽ
പൃഥഗാപ്തം ത്ര്യാദ്യയുഗ്വിമൂലഘനൈഃ |
ത്രിഘ്നവ്യാസേ സ്വമൃണം
ക്രമശഃ കൃത്വാ പരിധിയാനേയഃ" || ഇതി

എന്നിയെ ഒട്ടക്കത്തെ വിഷമസംഖ്യാഫലത്തിന്റെ അദ്ധം സംസ്കരിക്കുന്നത് എന്നാവൂ ഇരിപ്പതു് എങ്കിൽ ആ വഴിയുണ്ടു പരിധിവരുത്തുംപ്രകാരം.

"ദ്വ്യാദിയുജാം വാ കൃതയോ
വ്യേകാ ഹാരാ ദ്വിനിഘ്നവിഷ്കംഭേ |
ധനമൃണമന്തേന്ത്യോദ്ധ്വഗതൗജ-
കൃതിർദ്വിസഹിതാ ഹരസ്യാദ്ധം"[8] || ഇതി.

വ്യാഖ്യാനം 8: "ദ്വിസഹിതാ ഹരോ ദ്വിഘ്നഃ" എന്ന പാഠഭേദമുണ്ട്.

പിന്നേയുമുണ്ട്.

"ദ്വ്യാദേശ്ചതുരാദേർവ്വാ |
ചതുരധികാനാം നിരേകവർഗ്ഗാശ്ചേൽ ||
ഹാരാഃ കുഞ്ജരഗുണിതോ |
വിഷ്കംഭസ്സ്വമിതി കല്പിതോ ഭാജ്യഃ ||
ഫലയുതിരേകത്ര വൃതി-
ഭാജ്യദളം ഫലഹീനമന്യത്ര" || ഇതി.

എന്നിങ്ങനെ തുടങ്ങി.

സൂക്ഷ്മതരമായൊരു സംസ്കാരം

അനന്തരം വിഷമസംഖ്യാഹരണാനന്തരം ചൊല്ലിയ സംസ്കാരം നടേത്തേതിൽ സൂക്ഷ്മതരമായിരിപ്പോരു സംസ്കാരത്തെ ചൊല്ലുന്നൂ പിന്നെ.

"അന്തേ സമസംഖ്യാദള-
വർഗ്ഗസ്സൈകോ ഗുണസ്സ ഏവ പുനഃ |
യുഗഗുണിതോ രൂപയുത-
സ്സമസംഖ്യാദളഹതോ ഭവേദ്ധാരഃ" || ഇതി.[9]

വ്യാഖ്യാനം 9: ഇവിടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വാക്യങ്ങളെല്ലാം തന്ത്രസംഗ്രഹത്തിൽനിന്ന് ഉദ്ധരിച്ചിട്ടുള്ളവയാകുന്നു.

വ്യാഖ്യാനം: "വ്യാസാദ്വാരിധിനിഹതാൽ . . . . . . "

$$\text{ഇവിടെ സംസ്കാരം} = \frac{4\text{വ്യ}}{2\text{ര}+2}.$$

$$\therefore\ \text{സ്ഥൗല്യം} = \frac{4\text{വ്യ}}{2\text{ര}-2} - \frac{4\text{വ്യ}}{\text{ര}} + \frac{4\text{വ്യ}}{2\text{ര}+2}$$
$$= 4\text{വ്യ}\left\{\frac{\text{ര}(2\text{ര}+2) - (2\text{ര}+2)(2\text{ര}-2) + \text{ര}(2\text{ര}-2)}{\text{ര}(2\text{ര}-2)(2\text{ര}+2)}\right\}$$
$$= 4\text{വ്യ} \times \frac{2\text{ര}^2 + 2\text{ര} - 4\text{ര}^2 + 4 + 2\text{ര}^2 - 2\text{ര}}{4\text{ര}^3 - 4\text{ര}.}$$
$$= 4\text{വ്യ} \times \frac{4}{4\text{ര}^3 - 4\text{ര}}$$
$$= \frac{4\text{വ്യ}}{\text{ര}^3 - \text{ര}}$$

$$\therefore\ \text{പരിധി} = 4\text{വ്യ} - \frac{4\text{വ്യ}}{2.1+2} + \frac{4\text{വ്യ}}{3^3-3} + \frac{4\text{വ്യ}}{6^3-6} + \cdots\cdots$$
$$= 3\text{വ്യ} + \frac{4\text{വ്യ}}{3^3-3} - \frac{4\text{വ്യ}}{5^3-5} + \frac{4\text{വ്യ}}{7^3-7} - \cdots\cdots$$

"ദ്വ്യാദിയുജാം വാ കൃതയോ . . . . . . "

$$\text{ഇവിടെ സംസ്കാരം} = \frac{4\text{വ്യ}}{2\text{ര}}$$

$$\therefore\ \text{സ്ഥൗല്യം} = \frac{4\text{വ്യ}}{2(\text{ര}-2)} - \frac{4\text{വ്യ}}{\text{ര})} + \frac{4\text{വ്യ}}{2\text{ര}}$$

$$= 4വ്യ \left(\frac{2ര^2 - 4ര^2 + 8ര + 2ര^2 - 4ര}{4ര^2(ര-2)}\right)$$
$$= 4വ്യ \frac{4ര}{4ര^2(ര-2)}$$
$$= 4വ്യ \frac{1}{ര^2 - 2ര}$$
$$= 4വ്യ \frac{1}{(ര-1)^2 - 1}$$
$$\therefore \text{ പരിധി} = 4വ്യ - \frac{4വ്യ}{2} + \frac{4വ്യ}{2^2-1} - \frac{4വ്യ}{4^2-1} + \frac{4വ്യ}{6^2-1} - \cdots\cdots$$
$$= 2വ്യ + \frac{4വ്യ}{2^2-1} - \frac{4വ്യ}{4^2-1} + \frac{4വ്യ}{6^2-1} - \cdots\cdots$$

ഇതിൽ അന്ത്യയുഗ്മസംഖ്യയുടെ മേലെയുള്ള ഓജസംഖ്യയെവെച്ച് ഒരു സംസ്കാരം ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ സൂക്ഷ്മതരരായിരിക്കുന്ന പരിധി വരും.

ഒടുക്കത്തെ സമസംഖ്യയുടെ മീത്തെയുള്ള വിഷമസംഖ്യയെ ര എന്നു കല്പിക്കു.

$$\text{സംസ്കാരം} = \frac{4വ്യ}{2(ര^2+2)}$$

ഇവിടത്തെ സ്ഥൗല്യം:-

$$\text{സംസ്കാരഫലയോഗം} = \frac{1}{2(ര^2+2)} + \frac{1}{2\{(ര-2)^2+2\}}$$
$$= \frac{1}{2(ര^2+2)} + \frac{1}{2(ര^2-4ര+6)}$$
$$= \frac{ര^2 - 4ര + 6 + ര^2 + 2}{2(ര^2+2)(ര^2-4ര+6)}$$
$$= \frac{2ര^2 - 4ര + 8}{2(ര^2+2)(ര^2-4ര+6)} = \frac{ര^2 - 2ര + 4}{(ര^2+2)(ര^2-4ര+6)}$$
$$\therefore \text{ സ്ഥൗല്യം} = \frac{1}{ര^2 - 2ര} - \frac{ര^2 - 2ര + 4}{(ര^2+2)(ര^2-4ര+6)}$$
$$= \frac{ര^4 - 4ര^2 + 6ര^2 + 2ര^2 - 8ര + 12 - ര^4 + 2ര^3 - 4ര^2 + 2ര^3 - 4ര^2 + 8ര}{(ര^2-2ര)(ര^2+2)(ര^2-4ര+6)}$$
$$= \frac{12}{(ര^2-2ര)(ര^2+2)(ര^2-4ര+6)}$$
= ശൂന്യപ്രായം.

"ദ്വ്യാദേശ്ചതുരാദേ . . . . . . "

ഇവിടെ ആദ്യത്തേതിൽ എല്ലാ സംസ്കാരഫലങ്ങളും ധനഭ്രതങ്ങൾ. രണ്ടാമത്തേതിൽ എല്ലാം ഋണഭ്രതങ്ങൾ.

ആദ്യത്തേത്:

$$\text{പരിധി} = 4വ്യ \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots\cdots\right)$$

$$= 4\text{വ്യ}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\cdots\cdots\right.$$
$$= 4\text{വ്യ}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{35}+\frac{2}{99}+\cdots\cdots\right)$$
$$= 8\text{വ്യ}\left(\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\frac{1}{10^2-1}+\cdots\cdots\right)$$

രണ്ടാമത്തേത്:

$$\text{പരിധി} = 4\text{വ്യ}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\cdots\cdots\right)$$
$$= 4\text{വ്യ}\left\{1-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)-\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{13}\right)-\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{17}\right)\cdots\cdots\right\}$$
$$= 4\text{വ്യ}\left(1-\frac{2}{15}-\frac{2}{63}-\frac{3}{143}-\frac{2}{255}-\cdots\cdots\right)$$
$$= 4\text{വ്യ}\left(1-\frac{2}{4^2-1}-\frac{2}{8^2-1}-\frac{2}{12^2-1}-\frac{2}{16^2-1}-\cdots\cdots\right)$$
$$= 4\text{വ്യ}-\frac{8\text{വ്യ}}{4^2-1}-\frac{8\text{വ്യ}}{8^2-1}-\frac{8\text{വ്യ}}{12^2-1}-\frac{8\text{വ്യ}}{16^2-1}-\cdots\cdots$$

"അന്തേസമസംഖ്യാഗ്ലേ . . . . . ."

ഇവിടെ സൂക്ഷ്മതരമായിരിക്കുന്ന ഒരു സംസ്കാരത്തെ പറയുന്നു.

$$\text{ര} = \text{അന്ത്യവിഷമസംഖ്യ.}$$

$$\text{സംസ്കാരഗുണകാരം} = \left(\frac{\text{ര}+1}{2}\right)^2+1$$
$$= \frac{(\text{ര}+1)^2+4}{4}$$
$$= \frac{\text{ര}^2+2\text{ര}+5}{4}$$
$$\text{ഹാരകം} = (4\times\ \text{ഗുണകാരം}+1)\times\text{സമസംഖ്യാദളം}$$
$$= \left\{\frac{4(\text{ര}^2+2\text{ര}+5)}{4}+1\right\}\times\frac{\text{ര}+1}{2}$$
$$= \frac{(\text{ര}^2+2\text{ര}+6)(\text{ര}+1)}{2}$$
$$\therefore\ \text{സംസ്കാരം} = \frac{\text{ര}^2+2\text{ര}+5}{4}\times\frac{2}{(\text{ര}^2+2\text{ര}+6)(\text{ര}+1)}$$
$$= \frac{\text{ര}^2+2\text{ര}+5}{2(\text{ര}^2+2\text{ര}+6)(\text{ര}+1)}$$
$$= \frac{\text{ര}^2+2\text{ര}+5}{(2\text{ര}+2)(\text{ര}^2+2\text{ര}+6)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \cfrac{1}{(2\text{ര} + 2) + \left(1 + \frac{1}{1+\text{ര}^2+2\text{ര}+5}\right)} \\
&= \cfrac{1}{2\text{ര} + 2 + \frac{2\text{ര}+2}{\text{ര}^2+2\text{ര}+5}} \\
&= \cfrac{1}{2\text{ര} + 2 + \frac{2}{\frac{\text{ര}^2+2\text{ര}+5}{\text{ര}+1}}} \\
&= \cfrac{1}{2\text{ര} + 2 + \frac{2}{\text{ര}+1+\frac{4}{\text{ര}+1}}} \\
&= \cfrac{1}{\text{ര} + 2 + \frac{4}{2\text{ര}+2+\frac{8}{\text{ര}+1}}} \\
&= \cfrac{1}{(2\text{ര} + 2) + \frac{4}{2\text{ര}+2+\frac{16}{2\text{ര}+2}}}
\end{aligned}
$$

ഈ സംസ്കാരം മുമ്പിൽ പറഞ്ഞ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ, അവിടുത്തെ സ്ഥൗല്യമാ $\dfrac{16}{4\text{ര}^5 + 16\text{ര}}$ എന്നതിൽനിന്നും വരുത്തിയതാണെന്ന് വരുന്നുണ്ടല്ലോ. ഈ സ്ഥൗല്യത്തേയും പരിഹരിപ്പാനായിക്കൊണ്ട് ഇരട്ടിച്ച സമസംഖ്യയിൽ തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചിരുന്ന 16-നെ തന്നിൽ കൂട്ടി അതുകൊണ്ടു ഹരിച്ച നാലുരൂപങ്ങൾ ഇരട്ടിച്ച സമസംഖ്യയിൽ കൂട്ടിയതു സംസ്കാരഹാരകമെന്നു കല്പിക്കേണം. മുമ്പിൽ സംസ്കാരഹാരകത്തിങ്കന്നു വിഷമസംഖ്യാഫലത്തിൽ ഏറ്റുന്ന അംശം $\dfrac{16}{4\text{ര}^5 + 16\text{ര}}$ ആണല്ലോ. അപ്പോൾ ഇരട്ടിച്ച സമസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ച നാലുരൂപങ്ങൾ മുഴുവൻ കൂട്ടുവാൻ വയ്യാ എന്നു വന്നു. അപ്പോൾ നാലിന്റെ ഛേദത്തിൽ $\dfrac{16}{2\text{ര} + 2}$ കൂട്ടിയാൽ സൂക്ഷ്മതരമായിട്ടുള്ള സംസ്കാരമുണ്ടാകും.

മുമ്പിലത്തെ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ ഈ സംസ്കാരത്തിങ്കലും സ്ഥൗല്യത്തെ വരുത്തിയാൽ അതുകൊണ്ടും പരിധിയെ വരുത്തുവാനുള്ള ശ്രേഢിയെ ഉണ്ടാക്കാം. ഈ സ്ഥൗല്യത്തിൽനിന്നു പിന്നേയും സൂക്ഷ്മതരങ്ങളായിട്ടുള്ള സംസ്കാരങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കാം. ഇങ്ങനെ മുമ്പിൽ പറഞ്ഞ ന്യായംകൊണ്ടു തന്നെ മേലെ മേലെയുള്ള സംസ്കാരങ്ങളേയും ശ്രേഢികളേയും വരുത്താം.

ഈ സംസ്കാരങ്ങളെക്കൊണ്ടു പരിധി എത്ര സൂക്ഷ്മമാകും എന്നതിനെ കാണിപ്പാനായിക്കൊണ്ട് ഒരുദാഹരണത്തെ കാണിക്കാം.

'ആന്ത നന്തുതാനനനുന്നനിത്യം' (10000000000) എന്ന വ്യാസത്തിന്നു പരിധിയെ വരുത്തുക.

$$\text{പരിധി} = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \cdots\right) \times 4\text{വ്യ}.$$

ഇവിടെ $\text{വ്യ} = 1000000000000$ എന്നു കല്പിക്കുക.

$$4\text{വ്യ} = 4000000000000 \qquad \frac{4\text{വ്യ}}{3} = 1333333333333$$

$$\frac{4\text{വ്യ}}{5} = 800000000000 \qquad \frac{4\text{വ്യ}}{7} = 571428571428$$

$$\frac{4\text{വ്യ}}{9} = 444444444444 \qquad \frac{4\text{വ്യ}}{11} = 363636363636$$

$$\frac{4\text{വ്യ}}{13} = 307692307692$$

$$\frac{4\text{വ്യ}}{17} = 235294117647$$

$$\frac{4\text{വ്യ}}{21} = 190475190476$$

$$\frac{4\text{വ്യ}}{25} = 160000000000$$

$$\frac{4\text{വ്യ}}{29} = 137931034483$$

$$\frac{4\text{വ്യ}}{33} = 121212121212$$

$$\frac{4\text{വ്യ}}{37} = 108108108108$$

$$\frac{4\text{വ്യ}}{41} = 97560975610$$

$$\frac{4\text{വ്യ}}{45} = 88888888888$$

$$\frac{4\text{വ്യ}}{49} = 81632653061$$

$$\frac{4\text{വ്യ}}{53} = 75471698113$$

$$\begin{array}{r} \overline{6848712539734} \\ -\underline{3742822801461} \\ 3105889738273 \end{array}$$

$$\frac{4\text{വ്യ}}{15} = 266666665565$$

$$\frac{4\text{വ്യ}}{19} = 210526315789$$

$$\frac{4\text{വ്യ}}{23} = 173913043478$$

$$\frac{4\text{വ്യ}}{27} = 148148148148$$

$$\frac{4\text{വ്യ}}{31} = 129032258065$$

$$\frac{4\text{വ്യ}}{35} = 114285714286$$

$$\frac{4\text{വ്യ}}{39} = 102554102564$$

$$\frac{4\text{വ്യ}}{43} = 98023255814$$

$$\frac{4\text{വ്യ}}{47} = 85106382979$$

$$\frac{4\text{വ്യ}}{51} = 78481372549$$

$$\frac{4\text{വ്യ}}{55} = 72727272727$$

$$\overline{3742822801461}$$

$$\therefore \text{ സാമാന്യന്ന്യായേന പരിധി} = 4\text{വ്യ} - \frac{4\text{വ്യ}}{3} + \frac{4\text{വ്യ}}{5} - \frac{4\text{വ്യ}}{7} + \cdots\cdots - \frac{4\text{വ്യ}}{55}$$
$$= \underline{3105889738273}.$$

“തസ്യാ ഊദ്ധ്വഗതാ യാ—”എന്ന സംസ്കാരം ചെയ്യുക.

$$\text{സംസ്കാരം (ധനം)} = 4\text{വ്യ} \times \frac{\text{സമസംഖ്യാദ്ധം}}{\text{സമസംഖ്യാവൎഗ്ഗം} + 1}$$
$$= \frac{28 \times 4000000000000}{56^2 + 1}$$
$$= 35702900861.$$

$$\begin{array}{rr} & 3105889738273 \\ & 35702900861 \\ \hline \text{സംസ്കൃതപരിധി} = & 3141592639134 \end{array}$$

"അന്തേ സമസംഖ്യാദളവൎഗ്ഗ . . . " എന്ന സംസ്കാരം ചെയ്യുക.

$$\text{സംസ്കാരം} = 4\text{വ്യ} \times \frac{\text{സമസംഖ്യാദളവൎഗ്ഗം}+1}{\{4(\text{സമസംഖ്യാദളവൎഗ്ഗം}+1)+1\} \times \text{സമസംഖ്യാദളം}} \quad (\text{ധനം})$$
$$= 4000000000000 \times \frac{28^2 + 1}{\{(28^2 + 1) + 1\} \times 28}$$
$$= 35702915359$$

$$\begin{array}{rr} & 3105889738273 \\ & 35702915359 \\ \hline \text{സംസ്കൃതപരിധി} = & 3141592653632 \end{array}$$

അപ്പോൾ 'ആന്തനന്തതാനനന്തന്നനിത്യം' എന്ന വ്യാസത്തിന്നുള്ള പരിധികൾ:–

$$\left.\begin{array}{rcl} \text{സാമാന്യന്യായേന} & = & 31058897383 \\ \text{ആദ്യത്തെ സംസ്കാരാനന്തരം} & = & 31415926391 \\ \text{ദ്വിതീയസംസ്കാരാനന്തരം} & = & 31415926536 \end{array}\right\}$$

"ആന്തനന്തതാനനന്തന്നനിത്യം' എന്ന വ്യാസത്തിന്ന പരിധിയാകുന്നതു "ചണ്ഡാംശു ചന്ദ്രാധമകുംഭിപാലഃ"(31415926536) എന്ന്.

ഇര വരുത്തിയ പരിധികളെ പരിശോധിച്ചാൽ സംസ്കാരങ്ങളുടെ പ്രയോജനത്തെ നല്ല വണ്ണം മനസ്സിലാക്കാം.

"ആന്തനന്തതാനനന്തന്നനിത്യം" എന്നും "ചണ്ഡാംശുചന്ദ്രാധമകുംഭിപാലഃ"എന്നും ഉള്ള മഹദ്വ്യാസപരിധികളെവെച്ച് അന്യോന്യഹരണം ചെയ്തു വല്ലിയുണ്ടാക്കി രൂപാദിവ്യസ്തകുട്ടാകാരംകൊണ്ടും ശൂന്യാദിവ്യസ്തകുട്ടാകാരംകൊണ്ടും രണ്ടു പരിഷയായിട്ടു ഫലങ്ങളേ ഉണ്ടാക്കിയാൽ ആദ്യത്തെ പരിഷയിലെ ഫലങ്ങൾ പരിധികളും രണ്ടാംപരിഷയിലുള്ളവ ക്രമേണയുള്ള വ്യാസങ്ങളുമായിട്ടിരിക്കും. ഇര ഗുണഹാരങ്ങളെവെച്ച ത്രൈരാശികം ചെയ്താൽ പരിധിവ്യാസങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കാം.

അന്യോന്യഹരണംകൊണ്ടുണ്ടായ ഫലങ്ങൾ:–

3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 45, 1, 1, 8.

വല്ലി.	പരിധി.	വല്ലി.	വ്യാസം.

1		0	
3	3	1	1
7	22	7	7
15	333	15	106
1	355	1	113
292	103993	292	33102
1	104348	1	33215
1	208341	1	66317
1	312689	1	99532
4	1459097	4	464445
1	1771786	1	563977
1	3230883	1	1028422
1	5002669	1	1592399
45	228350988	45	72686377
1	233353657	1	74278776
1	461704645	1	146965153
8	3926990817	8	1250000000

7

ജ്യാനയനപ്രകാരം

ഇവ്വണ്ണം ചക്രകലാസമസംഖ്യമായി[1] വൃത്താകാരമായിരിക്കുന്ന

വ്യാഖ്യാനം 1: ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയെ 21,600 സമഭാഗമായി വിഭജിച്ചാൽ അതിൽ ഒരു ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ നീളത്തെ ഇലി എന്നു പറയുന്നു. ഈ ഇലിയുടെ മാനംകൊണ്ടു വ്യാസാർദ്ധത്തെ അളക്കുകയാണെങ്കിൽ ശ്രേഷ്ഠാ ദേവോ വിശ്വസ്ഥലീ ഭൃഗുഃ—3437 ഇലി—44 വിലി—48 തല്പര—22 പ്രതല്പര എന്നു വരും. (60 പ്രതല്പര = 1 തല്പര; 60 തല്പര = 1 വിലി; 60 വിലി = 1 ഇലി.) ഈ സംഖ്യക്കു ത്രിജ്യാ എന്നു പേർ. ചക്രകലാ (21,600) തുല്യസംഖ്യമായിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം എല്ലായ്പ്പോഴും ത്രിജ്യാ. (Trijya corresponds to the radian measure of the angle.)

പരിധിക്കു വ്യാസമുണ്ടാക്കി അതിന്റെ അർദ്ധംകൊണ്ട് ഒരു വൃത്തം വീശി ആ വൃത്തമധ്യത്തിങ്കൽ പൂർവ്വാപരരേഖയും ദക്ഷിണോത്തരരേഖയും ഉണ്ടാക്കി പിന്നെ ദക്ഷിണോത്തരരേഖയുടെ ഇരുപുറവും ഈരണ്ടു സമത്ര്യശ്രങ്ങൾ[2] കല്പിപ്പൂ.

വ്യാഖ്യാനം 2: മൂന്നു ഭുജകളും തുല്യമായിട്ടിരിക്കുന്ന ത്ര്യശ്രത്തിനു സമത്ര്യശ്രമെന്നു പേർ. മറ്റുള്ളവക്കു വിഷമത്ര്യശ്രങ്ങളെന്നു പേർ.

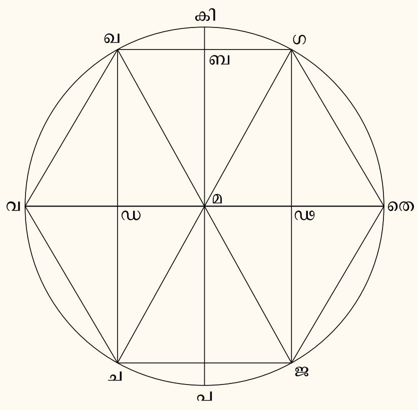
അവറ്റിന്റെ ഭുജകളെല്ലാം വ്യാസാർദ്ധത്തോടു തുല്യമായിട്ടു കല്പിക്കേണ്ടൂ. അവിടെ ദക്ഷിണോത്തരരേഖയുടെ രണ്ട് അഗ്രത്തിങ്കലും അഗ്രം സ്പർശിക്കുമാറു വ്യാസാർദ്ധ തുല്യങ്ങളായിട്ടു നാലു സമസ്തജ്യാക്കളെ കല്പിപ്പൂ. ഇവ ത്ര്യശ്രത്തിന്റെ ഓരോ ഭുജകളാകുന്നത്. പിന്നെ കേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു സമസ്തജ്യാഗ്രങ്ങളിൽ സ്പർശിക്കുമാറു നാലു വ്യാസാർദ്ധങ്ങളെ കല്പിപ്പൂ. ഇവ ഓരോ ഭുജകളാകുന്നത് പിന്നെ ദക്ഷിണോത്തര രേഖാർദ്ധങ്ങൾ ഓരോന്ന് ഈരണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങൾക്കു സാധാരണങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഭുജകൾ. ഇങ്ങനെ ദക്ഷിണോത്തരരേഖയുടെ ഇരുപുറവും ഈരണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങൾ. ഇങ്ങനെ വ്യാസാർദ്ധതുല്യഭുജകളായിട്ടു നാലു സമത്ര്യശ്രങ്ങളെ കല്പിപ്പൂ. ഇവിടെ യാതൊരു ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലും ഒരു ഭുജ മുഴവനേ നിലത്തു സ്പർശിക്കുമാറു കല്പിക്കേണ്ടൂ. ഇതിന്നു ഭൂമി എന്നു പേർ. പിന്നെ ഭൂമിയുടെ രണ്ടഗ്രത്തിങ്കലും സ്പർശിക്കുന്ന ഭുജകൾ രണ്ടും മേല്പോട്ടാക്കി കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ ആ ഭുജകൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ കൂടുന്ന കോണിങ്കൽനിന്നു കനത്തൊരു വസ്തു കെട്ടിയൊരു സൂത്രം കീഴ്പ്പോട്ടു തൂക്കൂ. അതിന്നു

ലംബമെന്നു പേർ. **മേല്പട്ടു കല്പിച്ച ഭുജകൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ നീളമൊക്കുമെങ്കിൽ ലംബം ഭൂമദ്ധ്യത്തിൽ സ്പർശിക്കും; ഒന്നു ചെറുതാകിൽ അപ്പുറത്തു നീങ്ങും.** ഇവിടെ പിന്നെ പൂർവ്വസൂത്രത്തിന്റെ കിഴക്കെ അഗ്രം നേരെ മേലാകുമാറ് ഉയർത്തുമാറ് കല്പിപ്പൂ. അപ്പോൾ ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രം **സമവിതാന**മായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തിന്റെ കിഴക്കേ പുറത്തെ ത്ര്യശ്രങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും മീത്തേ കോണിങ്കൽനിന്നു രണ്ടു ലംബസൂത്രങ്ങൾ താഴ്ത്തൂ. അവ ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തിന്റെ രണ്ടർദ്ധങ്ങളുടെയും നടുവിൽ സ്പർശിക്കും. അപ്പോളവ രണ്ടു സൂത്രങ്ങളുടെയും ഇട വ്യാസാർദ്ധത്തോളമുണ്ട്. ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തിങ്കൽ കേന്ദ്രത്തിങ്കന്ന് ഇരുപുറവുമുള്ള വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും നടുവിൽ സ്പർശിക്കയാൽ രണ്ടു വ്യാസാർദ്ധങ്ങളുടെയും രണ്ടർദ്ധങ്ങൾ കൂടുകയാൽ ഒരു വ്യാസാർദ്ധത്തോളം നീളമായിട്ടായിരിക്കും അത്. എന്നാൽ ആ ലംബസൂത്രങ്ങളുടെ അഗ്രങ്ങളുടെ ഇടയും[3]

വ്യാഖ്യാനം 3: ഒരേ ഭൂമിക്കുള്ള ലംബസൂത്രങ്ങൾ രണ്ടെണ്ണം തങ്ങളിൽ സമാന്തര (parallel) രേഖകളായിരിക്കും—അതായത് അവ തമ്മിലുള്ള ഇട എല്ലാ ഇടത്തും തുല്യമായിരിക്കുമെന്നു നിയതം.

അത്രതന്നെ വ്യാസാർദ്ധതുല്യമായിട്ടേ ഇരിക്കും. അതു ലംബാഗ്രാന്തരചാപത്തിങ്കലെ സമസ്തജ്യാവാകയുമുണ്ട്. പിന്നെ രണ്ട് ലംബങ്ങളുടെയും ഓരോ പുറത്തെ ഭുജകളും വ്യാസാർദ്ധതുല്യങ്ങളായി സമസ്തജ്യാരൂപങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തിന്റെ കിഴക്കെ പുറത്തെ പരിധ്യർദ്ധം വ്യാസാർദ്ധതുല്യങ്ങളായിരിക്കുന്ന മൂന്നു സമസ്തജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടു തികയും എന്നു വന്നു. ഇവ്വണ്ണം മറ്റെ പരിധ്യർദ്ധത്തിങ്കലും. എന്നാൽ **വ്യാസാർദ്ധതുല്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കുന്ന ആറു സമസ്തജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടു വൃത്തം മുഴുവനും തികയും എന്നു വരും.**

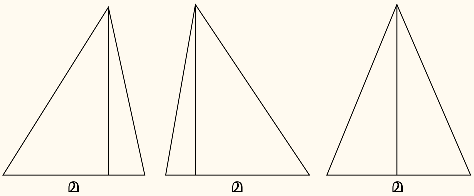
വ്യാഖ്യാനം: പരിലേഖം 27-ൽ _മ_ ത്രിജ്യാവൃത്തകേന്ദ്രം; _കിമപ_ പൂർവ്വാപരരേഖ; _തെമവ_ ദക്ഷിണോത്തരരേഖ. _വഖ_, _വച_, _തെഗ_, _തെജ_, ഇവ ദക്ഷിണോത്തരരേഖയുടെ അഗ്രങ്ങളെ സ്പർശിക്കുന്ന വ്യാസാർദ്ധതുല്യങ്ങളായിരിക്കുന്ന സമസ്തജ്യാക്കൾ. _മഖ_, _മച_, _മജ_, _മഗ_ ഇവ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ. _ഖ_, _ച_, _ജ_, _ഗ_ എന്ന ത്ര്യശ്രകോണുകളിൽനിന്നു _ഖഡ_, _ചഡ_, _ജഢ_, _ഗഢ_ എന്ന ലംബങ്ങളെ വരക്കുക.



പരിലേഖം (27)

വഖമ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ ഭുജകളായ *ഖവ*, *ഖമ* ഇവ വ്യാസാർദ്ധതുല്യങ്ങളായതുകൊണ്ടു പരസ്പരം തുല്യങ്ങൾ. അതുകൊണ്ടു ലംബം *ഖഡ* ഭൂമിയാകുന്ന *വമ*-യുടെ മദ്ധ്യത്തിൽ സ്പർശിക്കും. തുല്യന്യായംകൊണ്ട്, *ച*-യിൽ നിന്നുള്ള ലംബം ഭൂമദ്ധ്യമാകുന്ന *ഡ*-യിലും *ഗ*, *ജ*, ഇവകളിൽനിന്നുള്ള ലംബങ്ങൾ

തെമ-യുടെ മദ്ധ്യമായ *ഢ*-യിലും സ്പർശിക്കും. സമബാഹുക്കളല്ലാത്ത ത്ര്യശ്രങ്ങളിൽ ലംബങ്ങൾ ഭൂമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നു ചെറിയ ബാഹുവിന്റെ അടുത്തു നീങ്ങി ഭൂമിയെ സ്പർശിക്കും. പരിലേഖം 28 നോക്കുക.



പരിലേഖം (28)

$$\text{വ്യാസം} = \text{വതെ} = വഡ + ഡമ + മഢ + ഢതെ.$$
$$= 2ഢമ + 2ഡമ.$$
$$= 2ഡഢ.$$
$$\therefore\ \text{വ്യാസാർദ്ധം} = ഡഢ = \text{ലംബമൂലങ്ങളുടെ ഇട}.$$

ഖഡഢഗ ഒരു ഘാതക്ഷേത്രമാകകൊണ്ട്

$$ഖഗ = ഡഢ.$$
$$\text{അതുപോലെതന്നെ } ചജ = ഡഢ.$$

അപ്പോൾ ലംബാഗ്രങ്ങളുടെ ഇടയും വ്യാസാർദ്ധതുല്യം.

വഖ, *ഖഗ*, *ഗതെ*, *തെജ*, *ജച*, *ചവ* ഇവയെല്ലാം വ്യാസാർദ്ധതുല്യങ്ങളായ സമസ്തജ്യാക്കൾ. ഇങ്ങനെ വ്യാസാർദ്ധതുല്യങ്ങളായ ആറു സമസ്തജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടു വൃത്തം തികയുന്നു എന്നു വന്നു.

ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ രണ്ടു രാശീടെ സമസ്തജ്യാവു വ്യാസാർദ്ധതുല്യം എന്നും വരും. **വൃത്തഷൾഭാഗമാണെല്ലൊ രണ്ടു രാശിയാകുന്നത്**, എന്നിട്ട്. ഇതുകൊണ്ടുതന്നെ വ്യാസാർദ്ധത്തിന്റെ അർദ്ധം ഏകരാശീടെ അർദ്ധജ്യാവ് എന്നും വരും. ചാപത്തെയും ജ്യാവിനെയുംകൂടി അർദ്ധിച്ചിരിക്കുന്നതിനെ ഈ ചാപത്തിന്റെ അർദ്ധജ്യാവ് ഇത്[4] എന്നു ചൊല്ലുന്നു ചാപം മുഴുവനായിട്ടിരിപ്പൂ, ജ്യാവ് അർദ്ധവും ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്നവറ്റെ അല്ല ഇച്ചാപത്തിന്റെ അർദ്ധജ്യാവ് ഇത് എന്നു ചൊല്ലുന്നു.

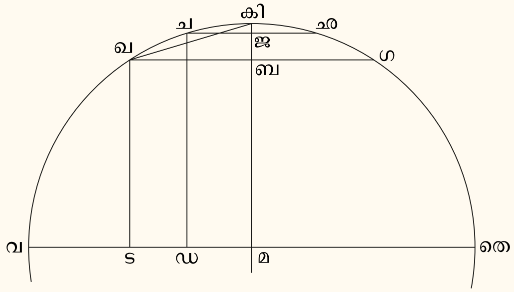
വ്യാഖ്യാനം 4: പരിലേഖം 27-ൽ *ഖകിഗ* എന്നത് ഒരു ചാപഖണ്ഡം. അതിന്റെ സമസ്തജ്യാവ് *ഖബഗ*. *ഖകിഗ* എന്ന ചാപത്തിന്റെ മദ്ധ്യം *കി* സമസ്തജ്യാവിന്റെ മദ്ധ്യം *ബ*. അപ്പോൾ *ഖബ* എന്ന രേഖയെ *ഖകി* എന്ന ചാപത്തിന്റെ അർദ്ധജ്യാവെന്നോ ജ്യാവെന്നോ ചൊല്ലുന്നു. "അർദ്ധിച്ചിരിക്കുന്നതിനെ" എന്നാണ് ഗ്രന്ഥങ്ങളിൽ പാഠം കാണുന്നത്. അർദ്ധിച്ചിരിക്കുന്നേടത്ത് എന്നു മാറ്റിയാൽ അർത്ഥം വ്യക്തമാകും.

ഇവിടെ പിന്നെ ഗ്രഹവിഷയമായിരിക്കുന്ന ക്രിയകളിൽ അർദ്ധജ്യാവുകൊണ്ടേ ഉപകാരമുള്ളൂ എന്നിട്ട് അർദ്ധജ്യാവിനെ അത്രേ ജ്യാവെന്നു ചൊല്ലുന്നു.

വ്യാഖ്യാനം: വൃത്തപരിധിയെ പന്ത്രണ്ടു തുല്യഖണ്ഡങ്ങളായിട്ടു വിഭജിച്ചാൽ ഒരു ചാപഖണ്ഡം ഒരു രാശിയാകുന്നത്. അപ്പോൾ ആറു സമസ്തജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടു വൃത്തം തികയുന്നതാകിൽ ഓരോ സമസ്തജ്യാവും ഈ രണ്ടു രാശിയുടെ സമസ്തജ്യാവാകുന്നു പരിലേഖം (27)-ൽ *ഖഗ* എന്നതു രണ്ടു രാശിയുടെ സമസ്തജ്യാവാകുന്നു. *കിഖ* എന്ന ചാപം ഒരു രാശിയുടെ ചാപമാകുന്നു. അപ്പോൾ *ഖബ* എന്ന അർദ്ധജ്യാവ് ഏകരാശിയുടെ അർദ്ധജ്യാവാകുന്നു ഏകരാശിജ്യാവു ത്രിജ്യാർദ്ധം എന്നും വന്നു.

ഇവിടെ പിന്നെ സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നു സമസ്തജ്യാചാപമദ്ധ്യത്തിന്റെ അകലം ശരമാകുന്നത്. അർദ്ധജ്യാവിന്നും സമസ്തജ്യാവിന്നും ഒന്നേ ശരമാകുന്നത്. അതു വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു ചാപമധ്യത്തിങ്കൽ സ്പർശിക്കുന്ന വ്യാസാർദ്ധസൂത്രത്തിന്റെ ഖണ്ഡമാകുന്നത്. ഇവിടെ വൃത്തം നിലത്തു വരക്കുമാറു കല്പിക്കുമ്പോൾ പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു വടക്കെ പുറം പരിധീടെ പന്ത്രണ്ടിലൊന്നിനെ മേടമെന്നു കല്പിക്കുമാറു നിരൂപിക്കുന്നു. അപ്പോൾ പൂർവ്വാപരസൂത്രത്തിങ്കൽ ശരം ആകുമാറു നേരെ തെക്കുവടക്കു കല്പിപ്പൂ ഭുജാജ്യാവിനെ. നേരെ കിഴക്കു പടിഞ്ഞാറു കോടിജ്യാവിനെയും കല്പിപ്പൂ. അപ്പോളുത്തരസൂത്രാഗ്രം കോടിശരമായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ പ്രഥമരാശിജ്യാഗ്രത്തിങ്കന്നു കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറുള്ള രേഖ പ്രഥമരാശിജ്യാകോടിയാകുന്നത്. അതു രണ്ടു രാശീടെ അർദ്ധജ്യാവ്. ഇതിനെ പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കന്നു വാങ്ങിയ ശേഷം പ്രഥമരാശിജ്യാശരം. പ്രഥമരാശിജ്യാവിനെ ഉത്തരസൂത്രത്തിങ്കന്നു വാങ്ങിയശേഷം ഏകരാശിജ്യാവിന്റെ കോടിയാകുന്ന ദ്വിരാശിജ്യാവു യാതൊന്ന് അതിന്റെ ശരമായിട്ടിരിക്കും. പ്രഥമരാശിജ്യാവിനെയും അതിന്റെ ശരവും തങ്ങളിൽ ഭുജാകോടികൾ എന്നു കല്പിക്കാം, അന്യോന്യം വിപരീതദിക്കാകയാൽ എന്നാൽ ഇവ രണ്ടിന്റെയും വർഗ്ഗയോഗമൂല്യം പൂർവ്വരേഖാഗ്രത്തിങ്കന്നു പ്രഥമരാശിജ്യാഗ്രത്തോടുള്ള അന്തരാളം ഒരു രാശിയുടെ സമസ്തജ്യാവ്. ഇതിനെ പിന്നെ പൂർവ്വരേഖയിങ്കൽ ഇസ്സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യം വരുമാറു വെക്കുമാറു കല്പിപ്പൂ. എന്നാൽ നേരേ തെക്കുവടക്കായി പൂർവ്വാപരരേഖയിങ്കൽ ശരമായിട്ടായിരിക്കും ഈ ജ്യാവിന്റെ അർദ്ധം — അർദ്ധരാശീടെ അർദ്ധജ്യാവ്. ഇതിനെ വർഗ്ഗിച്ചു വ്യാസാർദ്ധത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞു മൂലിച്ചാൽ രണ്ടര രാശീടെ അർദ്ധജ്യാവ്. ഇതിനെ വ്യാസാർദ്ധത്തിങ്കൽ കളഞ്ഞശേഷം പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കൽ അർദ്ധരാശിജ്യാശരം. ഈവണ്ണം അർദ്ധരാശിജ്യാവിനെ വ്യാസാർദ്ധത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞശേഷം ഉത്തരസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കൽ രണ്ടരരാശി ജ്യാവിന്റെ ശരം. ഇങ്ങനെ അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗവും ശരവർഗ്ഗവും കൂട്ടിമൂലിച്ച് അർദ്ധിച്ചാൽ ഈ ജ്യാവിനെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ചാപത്തെ അർദ്ധിച്ചിട്ടുള്ളതിന്റെ അർദ്ധജ്യാവു വരും. ഇങ്ങനെ **ജ്യാശരവർഗ്ഗയോഗമൂലംകൊണ്ടു ജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കാം.** പിന്നെ വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗത്തെ ഇരട്ടിച്ച് മൂലിച്ച് അർദ്ധിച്ചാൽ ഒന്നര രാശീടെ അർദ്ധജ്യാവുണ്ടാകും. ഈ വഴിയും ചില ജ്യാക്കൾ ഉളവാകും.

വ്യാഖ്യാനം: പരിലേഖം 29-ൽ *മ* വൃത്തകേന്ദ്രം. *ഖഗ* രണ്ടു രാശിയുടെ സമസ്തജ്യാവ്. *ഖകി* ഒരു രാശിയുടെ ചാപം. ഇതിന്റെ അർദ്ധജ്യാവു *ഖബ* അതിന്റെ കോടി = *ഖട* = *ബമ*.



പരിലേഖം (29)

അപ്പോൾ ഏകരാശിജ്യാശരം = *മകി* − *മബ* = *കിബ*

ഭുജാശരം = *കിബ* = *മകി* − *മബ*

= *മകി* − *ഖട*

= ത്രിജ്യാ − ഏകരാശികോടിജ്യാ.

കോടിശരം = *മവ* − *മട*

= *മവ* − *ഖബ*

= ത്രിജ്യാ − ഏകരാശിഭുജാജ്യാ.

വഖ രണ്ടു രാശിയുടെ ചാപമാകുന്നു.

ഇതിന്റെ അർദ്ധജ്യാവ് = *ഖട*

അപ്പോൾ ഏകരാശിയുടെ കോടി = രണ്ടു രാശിയുടെ ഭുജാജ്യാവ്.

ഖബകി എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ, *ഖബ*, *ബകി* ഇവ വിപരീതദിക്കുകളാകയാൽ ഇവയെ ഭുജാകോടികളെന്നു കല്പിക്കാം. ഇവയുടെ കർണ്ണം = *ഖകി*. ഒരു ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ ഭുജാകോടികൾ എല്ലായ്പ്പോഴും വി

അപ്പോൾ $ബഖ^2 + ബകി^2 = ഖകി^2$ (ഭുജാകോടികർണ്ണന്യായം കൊണ്ടു്).

= ഏകരാശിസമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം.

ഖകി എന്ന സമസ്തജ്യാവിന്റെ മദ്ധ്യം പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കൽ വരത്തക്കവണ്ണം കല്പിച്ചാൽ, അതു *ചഛ* എന്ന സമസ്തജ്യാവായിട്ടുവരും.

ചാപം *ചകിഛ* = ഒരു രാശിയുടെ ചാപം.

ചാപം *ചകി* = അർദ്ധരാശിയുടെ ചാപം

അപ്പോൾ *ചജ* = അർദ്ധരാശിയുടെ (900 ഇലി) അർദ്ധജ്യാവ്.

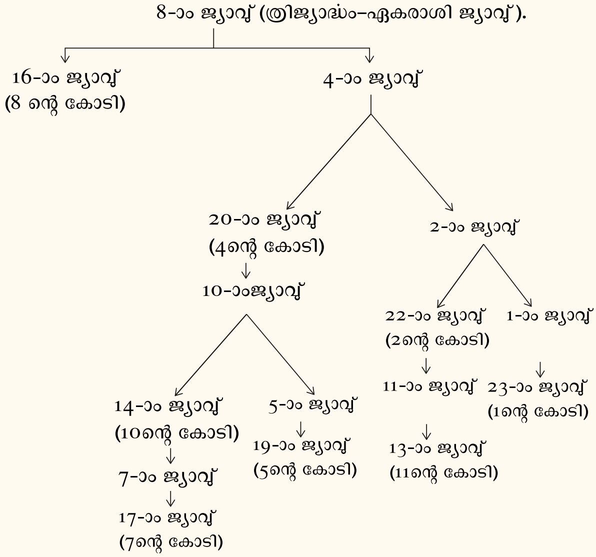
അതായതു് ഏകരാശിയുടെ സമസ്തജ്യാർദ്ധം = അർദ്ധരാശിയുടെ അർദ്ധജ്യാവ്.

ഈ ജ്യാശരവർഗ്ഗമൂലാർദ്ധന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ, 450 ഇലി, 225 ഇലി ഈ ചാപങ്ങളുടെ അർദ്ധജ്യാക്കളെ വരുത്താം.

ഇങ്ങനെ ഉണ്ടാക്കിയ അർദ്ധജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളെ ത്രിജ്യാവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു വെവ്വേറെ കളഞ്ഞു മൂലിച്ചാൽ അവയുടെ കോടികളുണ്ടാകും. ഇങ്ങനേയും ചില ജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കാം.

വൃത്തചതുരാംശത്തെ 24 ആയിട്ടു വിഭജിച്ചിരിക്കുന്നേടത്ത്, ഈ 24 മഹാജ്യാക്കളെയും ഇപ്രകാരം വരുത്താം.

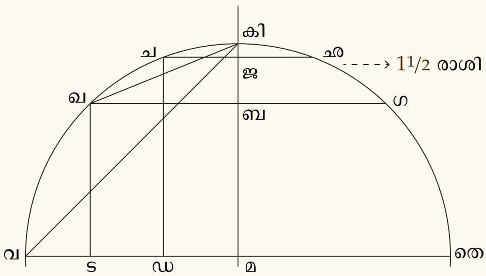
$\Big(\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2}$ corresponds to "അർദ്ധചാപജ്യാവ് $=$ ചാപസമസ്തജ്യാർദ്ധം" $= \frac{1}{2}\sqrt{\text{ചാപജ്യാവർഗ്ഗം} + \text{ശരവർഗ്ഗം}}\Big)$.



<u>24-ാംജ്യാവ് ത്രിജ്യതന്നെ.</u>

ഇപ്പോൾ 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 24 ഈ ജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കാനുള്ള മാർഗ്ഗത്തെ കാണിച്ചു.

ബാക്കിയുള്ള 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 ഇവയേയും ഈ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ ഉണ്ടാക്കാം.



പരിലേഖം (30)

പരിലേഖം 30 നോക്കുക. ഇവിടെ $\underline{\text{വമ}}^2 + \underline{\text{മകി}}^2 = \underline{\text{വകി}}^2$ (ഭുജാകോടിവർഗ്ഗയോഗം കർണ്ണവർഗ്ഗം എന്ന ന്യായംകൊണ്ട്).

$$\text{വകി (മൂന്നുരാശിയുടെ സമസ്തജ്യാവ്)} = \sqrt{2 \times \text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

$$\text{അപ്പോൾ ഒന്നരരാശിയുടെ അർദ്ധജ്യാവ്} = \text{12-ാം മഹാജ്യാവ്.}$$

$$= \sqrt{2 \times \text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}2}$$

അപ്പോൾ മുമ്പിലത്തെ ന്യായംകൊണ്ട്,

12-ാം ജ്യാവ് → 6-ാം ജ്യാവ് → 18-ാം ജ്യാവ് (6ന്റെ കോടി) → 9-ാം ജ്യാവ് → 15-ാം ജ്യാവ് (9ന്റെ കോടി)
6-ാം ജ്യാവ് → 3-ാം ജ്യാവ് → 21-ാം ജ്യാവ് (3ന്റെ കോടി)

ഇങ്ങനെ 24 മഹാജ്യാക്കളെയും വരുത്തുവാൻ ഒരു പ്രകാരത്തെ കാണിച്ചു.

സാങ്കേതികസംജ്ഞകളും നിർവ്വചനങ്ങളും

ഇങ്ങനെ പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്ന് ഉത്തരസൂത്രാഗ്രത്തിന്നിട വൃത്തത്തിന്റെ നാലൊന്ന്. ഇതിനെ ഇട ഒക്കുമാറു കണ്ട് ഇരുപത്തിനാലുതാൻ ഏറത്താൻ പകക്കുമാറു കണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ടാക്കൂ. പിന്നെ അവ്വണ്ണം മറ്റെ മൂന്നു പദങ്ങളിലും. ഇവിടെ ബിന്ദുക്കളുടെ ഇട ഓരോ ചാപഖണ്ഡമാകുന്നത്. ചാപഖണ്ഡാഗ്രങ്ങളിൽനിന്നു തെക്കു വടക്കുമ്മാറു പൂർവ്വാപരസൂത്രത്തിങ്കൽ നേരെ നടുവ് അകപ്പെടുമാറ് ഉള്ള രേഖകൾ ഭുജാജ്യാക്കളാകുന്നത്. ഈവണ്ണം രണ്ടു ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ[5] അഗ്രങ്ങൾ തങ്ങളിൽ സ്പർശിക്കുന്ന സന്ധിയിങ്കന്നുതന്നെ കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറായി ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തിങ്കൽ മദ്ധ്യം സ്പശിക്കുമാറുള്ള രേഖകൾ കോടിജ്യാക്കളാകുന്നത്.

വ്യാഖ്യാനം 5: ഏതെങ്കിലും ഒരു ഭുജയുടെ അഗ്രവും അതിന്റെ കോടിയുടെ അഗ്രവും ഇങ്ങനെ രണ്ടു ചാപഖണ്ഡാഗ്രങ്ങൾ. ഇവ ഒരു ബിന്ദുവിൽത്തന്നെ സ്ഥിതി ചെയ്യും.

അതുകൊണ്ടു വന്നു, **ഓജപദത്തിങ്കൽ ഗതം ഭുജാ, ഏഷ്യം കോടി, യുഗ്മപദത്തിങ്കൽ മറിച്ച്**, എന്നും. പിന്നെ ഭുജാകോടിജ്യാക്കൾക്കു പൂർവ്വോത്തരസൂത്രങ്ങളിൽ **മൂലം**, ചാപസന്ധിയിങ്കൽ ജ്യാക്കളുടെ **അഗ്രം** എന്നും ചൊല്ലുന്നു ഇവ്വണ്ണം ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെയും ഒരഗ്രത്തെ മൂലമെന്നും ഒരഗ്രത്തെ അഗ്രമെന്നും ചൊല്ലും. വ്യവഹാരാർത്ഥമായിട്ട് ഇവിടെ ഭുജാചാപഖണ്ഡങ്ങൾക്ക് പൂർവ്വാപരസൂത്രത്തിന്നടുത്തുള്ള അഗ്രത്തെ മൂലമെന്നും ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തിന്നടുത്തുള്ള അഗ്രത്തെ അഗ്രമെന്നും ചൊല്ലും. കോടിഖണ്ഡങ്ങൾക്കു മറിച്ചു മൂലാഗ്രങ്ങൾ. പിന്നെ ഇവിടെ ഒരു രാശിയെ എട്ട്, ഒരു പദത്തെ ഇരുപത്തിനാലും വിഭജിക്കുമാറു കല്പിച്ചു ജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കുമാറു ചൊല്ലുന്നു അവിടെ പൂർവ്വസൂത്രത്തിന്റെ വടക്കെ പുറത്തെ വൃത്തത്തിങ്കൽ രാശീടെ എട്ടൊന്നു ചെന്നിടത്തു നടേത്തെ ചാപത്തിന്റെ അഗ്രം എന്നു കല്പിപ്പൂ. ആ ചാപത്തിന്റെ അർദ്ധജ്യാവു **പ്രഥമ**ജ്യാവാകുന്നത്. അതു പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കന്നു പ്രഥമചാപാഗ്രത്തോളമുള്ളതു **പ്രഥമചാപത്തിന്റെ ഖണ്ഡജ്യാ**വാകുന്നതും തന്നെ. പിന്നെ പ്രഥമചാപാഗ്രത്തിങ്കന്നു പിന്നെയും രാശ്യഷ്ടമാംശം ചെന്നേടം ദ്വിതീയ ചാപാഗ്രം. ഈ ഇട രണ്ടാംചാപഖണ്ഡമാകുന്നത്. ഇതിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കന്നു പൂർവ്വസൂത്രത്തോളം

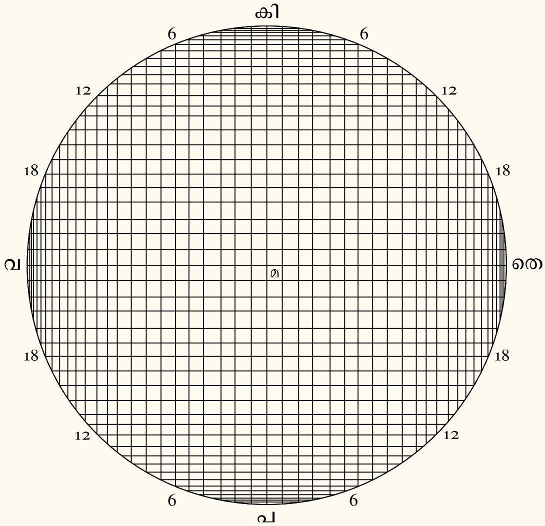
നേരെ തെക്കുവടക്കുള്ള അദ്ധജ്യാവു **രണ്ടാംജ്യാവാകുന്നത്**. പിന്നെ പ്രഥമചാപത്തിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കന്നും ദ്വിതീയചാപത്തിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കന്നു ഉത്തരസൂത്രത്തോളം നേരെ കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറുള്ള അദ്ധജ്യാക്കൾ **പ്രഥമദ്വിതീയ ജ്യാക്കളുടെ കോടികളാകുന്നതു്**. പിന്നെ ഈവണ്ണം എല്ലാ ചാപാഗ്രത്തിങ്കന്നും തെക്കുവടക്കും കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറും ജ്യാക്കളെ കല്പിപ്പൂ. **ഇരുപത്തിനാലാമതു വ്യാസാദ്ധമാകുന്നതു്**. പിന്നെ പൂവ്വസൂത്രത്തിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കലെ വൃത്തസമ്പാതത്തിങ്കന്നു പ്രഥമജ്യാമൂലത്തോടു് ഇട പൂവ്വസൂത്രാഗ്രം **പ്രഥമചാപത്തിന്റെ കോടിഖണ്ഡമാകുന്നതു്**. പിന്നെ **പ്രഥമചാപത്തിന്റെ ഭുജാഖണ്ഡമാകുന്നതു് ഭുജാജ്യാവു തന്നെ**. പിന്നെ ദ്വിതീയജ്യാഗ്രത്തിങ്കന്നു പ്രഥമജ്യാവിന്റെ കോടിയോളമുള്ള ദ്വിതീയജ്യാഭാഗം **രണ്ടാം ചാപത്തിന്റെ ഭുജാഖണ്ഡമാകുന്നതു്**. പിന്നെ പ്രഥമജ്യാകോടീടെ അഗ്രം—പ്രഥമചാപാഗ്രത്തിങ്കന്നു ദ്വിതീയജ്യാവോളമുള്ള ഇട—**ദ്വിതീയചാപത്തിന്റെ കോടിഖണ്ഡമാകുന്നതു്**. ഈവണ്ണം തൃതീയചാപത്തിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കന്നു തെക്കുവടക്കും മൂലത്തിങ്കന്നു കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറും ഉള്ള ഭുജാകോടി ജ്യാക്കളുടെ അഗ്രം തങ്ങളിലെ സമ്പാതത്തോടു് വൃത്തത്തോടു് ഇട തൃതീയചാപത്തിന്റെ ഭുജാകോടിഖണ്ഡങ്ങളാകുന്നതു്. ഈവണ്ണം എല്ലാ ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെയും തന്റെ രണ്ടു തലക്കന്നും തുടങ്ങിയ ഭുജാകോടിജ്യാക്കളുടെ അഗ്രങ്ങൾ തങ്ങളിലെ സമ്പാതത്തിങ്കന്നു വൃത്തത്തോടുള്ള ഇട യാതൊന്നു് ഈ ഖണ്ഡങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഭുജാകോടികളായിരിപ്പോ ചിലവ. ഇവറ്റിന്റെ കണ്ണമാകുന്നതു് അതതു ചാപഖണ്ഡങ്ങൾക്കു വെവ്വേറെ ഉള്ള സമസ്തജ്യാവു്. ഇവയെല്ലാം നീളമൊത്തിരിപ്പോ ചിലവ. ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ എല്ലാം തുല്യങ്ങളാകയാൽ സമസ്തജ്യാക്കളും തുല്യങ്ങൾ. ഇവ കണ്ണങ്ങളായിട്ടുള്ള ഭുജാകോടികൾ ഓരോ കണ്ണത്തിനു് ഓരോപ്രകാരം നീളമായിരിക്കും ഭുജാകോടിഖണ്ഡജ്യാക്കളായിട്ടിരിക്കുന്ന ഭുജാകോടികൾ ഇവ. തുല്യകണ്ണങ്ങളായി നാനാരൂപങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഭുജാകോടികളോടുകൂടിയിരിക്കുന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങൾ ഇരുപത്തിനാലു്. പിന്നെ ഭുജാകോടികൾക്കു കണ്ണങ്ങളാകുന്നതു വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു് അതതു ഭുജാകോടിയോഗത്തോളമുള്ളവ ചാപഖണ്ഡാഗ്രങ്ങളിൽ സ്പശിക്കുന്നവയാകയാൽ എല്ലാ കണ്ണങ്ങളും തുല്യങ്ങൾ. ഇവിടേയും ഭുജാകോടികൾ നാനാരൂപങ്ങൾ.

ഇവിടെ പൂവ്വസൂത്രാഗ്രം വൃത്തത്തെ സ്പശിക്കുന്നേടം മേഷരാശീടെ ആദി. അവിടുന്നു വൃത്തത്തിന്റെ പന്ത്രണ്ടാലൊന്നു ചെന്നേടം മേടത്തിന്റെ ഒടുക്കം. പിന്നേയുമത്ര ചെന്നേടം ഇടവത്തിന്റെ ഒടുക്കം. ഉത്തരസൂത്രാഗ്രം മിഥുനത്തിന്റെ ഒടുക്കം. എന്നിങ്ങനെ കല്പിച്ചിട്ടു പറയുന്നു. ഇവിടെ പൂവ്വസൂത്രാഗ്രവും വൃത്തവുമുള്ള സമ്പാതത്തിങ്കൽ മൂലമായി ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിട്ടുള്ളതു് ഇഷ്ടഭുജചാപം. ഉത്തരസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു് അത്രേടമുള്ളതു ഇഷ്ടകോടി ചാപം. എന്നാൽ നാടേത്തെ പദത്തിങ്കൽ പദാദിയിങ്കന്നു തുടങ്ങി കഴിഞ്ഞ ചാപം ഭുജാചാപം. ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി പദം തികവാൻ പോരാത്തതു കോടിചാപം. രണ്ടാംപദത്തിങ്കൽ ചെന്നതു കോടിചാപം, ഉത്തരസൂത്രാഗ്രം പാദാതിയാകയാൽ കോടിചാപാഗ്രത്തിങ്കന്നു പദം തികവാൻ പോരാത്തതു ഭുജാചാപം. ഭുജക്കു പശ്ചിമസൂത്രാഗ്രം പദാതിയാകയാൽ, മൂന്നാംപദത്തിങ്കൽ നടേത്തെ പദത്തിങ്കലെപ്പോലെ. നാലാംപദത്തിങ്കൽ

രണ്ടാംപദത്തിങ്കലെപ്പോലെ ഭുജാകോടിചാപങ്ങൾ. നടേത്തെ പദത്തിങ്കൽ പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കൽ ഭുജാചാപത്തിന്നുമൂലം, ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കലഗ്രം. ഈ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കൽത്തന്നെ അഗ്രമായി ഉത്തരസൂത്രത്തിങ്കൽ മൂലമായിരിക്കും ആ ഭുജാചാപത്തിന്റെ കോടിചാപം. ഇവറ്റിന്റെ അർദ്ധജ്യാക്കൾ ഭുജാകോടിജ്യാക്കുകളാകുന്നത്. എന്നാൽ വൃത്തപാദത്തെ ഇരുപത്തിനാല് ഇട ഖണ്ഡിക്കുമാറു കല്പിക്കുമ്പോൾ നടേത്തെ ചാപഖണ്ഡം ഇഷ്ടഭുജാചാപം എന്നും കല്പിക്കുമ്പോൾ ഭുജാചാപം ഒരു ഖണ്ഡം പോയശേഷം ഇരുപത്തിമൂന്നു ഖണ്ഡം കൂടിയതു കോടി ചാപം. എന്നാൽ നടേത്തെ ജ്യാവിന്നു കോടി ഇരുപത്തിമൂന്നാം ജ്യാവ്. രണ്ടാമതിന് ഇരുപത്തിരണ്ടാമത്. ഇങ്ങനെ കണ്ടുകൊള്ളൂ.

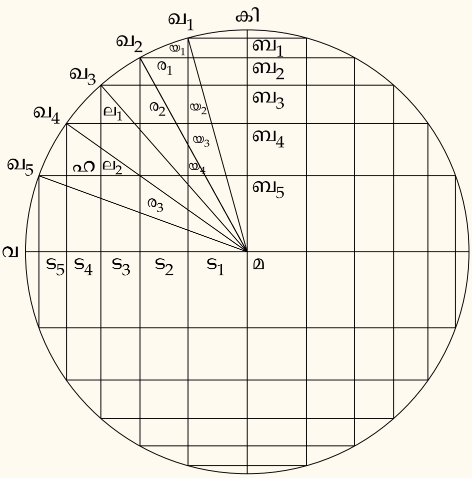
ഇവിടെ **ഭുജാജ്യാമൂല്യങ്ങൾ എല്ലാം പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കൽ സ്പർശിക്കും.** ഈ സൂത്രത്തിങ്കൽ ജ്യാമൂലസമ്പാതങ്ങളുടെ ഇട വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ക്രമേണ കോടിജ്യാഖണ്ഡങ്ങൾ. ഇവിടെ ഭുജാജ്യാവിന്റെ ഇരുപത്തിമൂന്നാമതിന്റെ മൂലവും വൃത്തകേന്ദ്രവും തങ്ങളിലുള്ള ഇട പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കലെ ഖണ്ഡം നടേത്തെ കോടിഖണ്ഡം. പിന്നെ ഇരുപത്തിമൂന്നാംജ്യാവിന്റെ മൂലത്തിങ്കന്ന് ഇരുപത്തിരണ്ടാം ഭുജാജ്യാവിന്റെ മൂലത്തോടിട പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കലെ ഖണ്ഡം കോടിജ്യാവിങ്കലെ രണ്ടാംഖണ്ഡം. ഈ ഖണ്ഡങ്ങൾ രണ്ടും കൂട്ടിയാൽ രണ്ടാംജ്യാവ്. ഇവ്വണ്ണം ക്രമേണ ഉള്ള ഖണ്ഡങ്ങളാൽ ഓരോന്നു ക്രമേണ കൂട്ടിയാൽ ക്രമേണ മീത്തെ മീത്തെ ജ്യാക്കളായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഇവിടെ പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കലെ അഗ്രത്തിങ്കലെ ഖണ്ഡം നടേത്തെ ഭുജാജ്യാവിന്റെ ശരം. ഇതിൽ പിന്നെയും അടുത്ത ഒരു ഖണ്ഡം കൂട്ടിയാൽ രണ്ടാംജ്യാവിന്റെ ശരം. ഇങ്ങനെ പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ഖണ്ഡയോഗം ചെയ്കിൽ ക്രമേണ ഭുജാശരങ്ങൾ. കേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങുകിൽ കോടിജ്യാക്കൾ. ഖണ്ഡങ്ങൾ വെവ്വേറെ ഇരിക്കുമ്പോൾ, കേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങുകിൽ **കോടിഖണ്ഡങ്ങൾ**, അഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങുകിൽ ക്രമേണ ശരഖണ്ഡങ്ങൾ. ഇവ്വണ്ണം ഉത്തരസൂത്രത്തിങ്കൽ, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങുകിൽ **ഭുജാഖണ്ഡങ്ങൾ, ഖണ്ഡയോഗത്തിങ്കൽ** ഭുജാജ്യാക്കളായിട്ടിരിക്കും. ഉത്തരസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങുകിൽ കോടിശരഖണ്ഡങ്ങളും കോടിശരങ്ങളും ക്രമേണ. ഇങ്ങനെ **വ്യാസാർദ്ധസൂത്രത്തിങ്കൽ ജ്യാഖണ്ഡങ്ങളെ കല്പിക്കുംപ്രകാരം.**

വ്യാഖ്യാനം: പരിലേഖം 31-ൽ വൃത്തത്തിൽ നാലൊന്നിനെ 24 തുല്യചാപഖണ്ഡങ്ങളായിട്ടു വിഭജിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളേയും കോടിഖണ്ഡങ്ങളേയും മറ്റും തിരിച്ചറിവാൻ ബുദ്ധിമുട്ടുള്ളതുകൊണ്ടു പരിലേഖം 32-ൽ വൃത്തത്തിന്റെ നാലൊന്നിനെ ആറു തുല്യഖണ്ഡങ്ങളായി വിഭജിച്ചിട്ടു പറയുന്നു. ഈ ന്യായങ്ങൾ 24 ആയി വിഭജിച്ചിരിക്കുന്നേടത്തും അതിദേശിച്ചുകൊള്ളാം.



പരിലേഖം (31)

പരിലേഖം 32-ൽ വൃത്തകേന്ദ്രം *മ*, തുല്യചാപഖണ്ഡങ്ങൾ *കിഖ*$_1$, *ഖ*$_1$*ഖ*$_2$, *ഖ*$_2$*ഖ*$_3$, *ഖ*$_3$*ഖ*$_4$, *ഖ*$_4$*ഖ*$_5$, *ഖ*$_5$*വ*.



പരിലേഖം (32)

ഭുജകൾ:- *ഖ*$_1$*ബ*$_1$, *ഖ*$_2$*ബ*$_2$, *ഖ*$_3$*ബ*$_3$, *ഖ*$_4$*ബ*$_4$, *ഖ*$_5$*ബ*$_5$, *വര*.

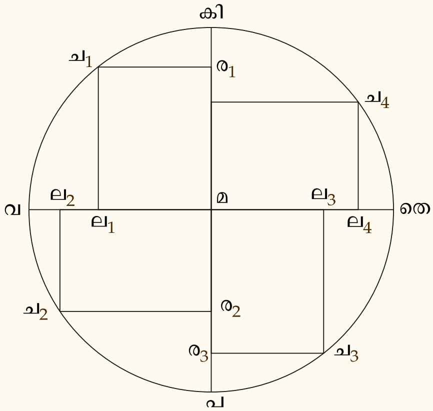
കോടികൾ:- *ഖ*$_1$*ട*$_1$, *ഖ*$_2$*ട*$_2$, *ഖ*$_3$*ട*$_3$, *ഖ*$_4$*ട*$_4$, *ഖ*$_5$*ട*$_5$, ശൂന്യം.

ഒടുക്കത്തേതായ ആറാമത്തെ ഭുജാജ്യാവ് = *വമ* = ത്രിജ്യാ.

അതിന്റെ കോടി = ശൂന്യം.

പരിലേഖം 31-ലും ഭുജാകോടികളെ ഇപ്രകാരം തന്നെ കല്പിക്കുന്നു.

പരിലേഖം 33-ൽ ഓരോ പദത്തിലും ഭുജാകോടികളുടെ ഗതൈഷ്യത്വത്തെ കാണിക്കുന്നു. വൃത്തത്തിന്റെ ചതുരംശത്തെ പദം എന്നു പറയുന്നു. ഒന്നാം പദത്തിൽ—അതായതു പൂൎവ്വസൂത്രാഗ്രമായിരിക്കുന്ന മേഷാദി <u>*കി*</u> മുതൽ ഉത്തരസൂത്രാഗ്രമായിരിക്കുന്ന കൎക്ക്യാദി <u>*വ*</u> വരെ—മേടം, എടവം, മിഥുനം എന്നു മൂന്നു രാശികൾ ഭവിക്കുന്നു. രണ്ടാംപദം കൎക്ക്യാദി <u>*വ*</u> മുതൽ തുലാദി <u>*പ*</u> വരെ. മൂന്നാംപദം തുലാദി *പ* മുതൽ മകരാദി <u>*തെ*</u> വരെ. നാലാംപദം മകരാദി <u>*തെ*</u> മുതൽ മേഷാദി <u>*കി*</u> വരെ. ഒരു ഗ്രഹം മേഷാദിയിൽനിന്നു പുറപ്പെട്ടു് ആദ്യപദത്തിൽ $ച_1$ എന്ന ഇഷ്ടപ്രദേശത്തു് എത്തിയിരിക്കുന്നുവെന്നു കല്പിക്കുക. ആ ഗ്രഹത്തിന്റെ ഭുജാജ്യാവു് $\underline{ച_1 ര_1}$, കോടിജ്യാവു് $\underline{ച_1 ല_1}$. $\underline{ച_1 ര_1}$ എന്ന ജ്യാവു് $\underline{കിച_1}$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ അൎദ്ധജ്യാവും $\underline{ച_1 ല_1}$ എന്ന ജ്യാവു് $\underline{വച_1}$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ അൎദ്ധജ്യാവുമാകുന്നു. അതുകൊണ്ടു് ആദ്യപദത്തിങ്കൽ ഗതമായിരിക്കുന്ന ചാപത്തിന്റെ അൎദ്ധജ്യാവു ഭുജയും ആ പദം തികവാനുള്ള ചാപഭാഗത്തിന്റെ അൎദ്ധജ്യാവു കോടിയുമാകുന്നു.



പരിലേഖം (33)

അതുകൊണ്ടു് <u>ആദ്യപദത്തിൽ ഗതം ഭുജം</u>, <u>ഏഷ്യംകോടി</u> എന്നു വന്നു. പിന്നെ ഗ്രഹം രണ്ടാംപദത്തിൽ $ച_2$ എന്ന പ്രദേശത്തു് എത്തി എന്നു വിചാരിക്കുക. രണ്ടാംപദാദിയായ <u>*വ*</u> എന്ന ബിന്ദുവിങ്കൽനിന്നു $\underline{വച_2}$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ അൎദ്ധജ്യാവു് <u>കോടി</u>, രണ്ടാം പദം തികയുവാൻ പോരാത്ത $\underline{പച_2}$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ അൎദ്ധജ്യാവു <u>ഭുജാ</u>. അപ്പോൾ <u>രണ്ടാംപദത്തിൽ ഗതംകോടി, ഏഷ്യംഭുജം</u>. ഇവ്വണ്ണംതന്നെ മൂന്നാംപദത്തിൽ ആദ്യപദത്തിലെപ്പോലേയും നാലാംപദത്തിൽ രണ്ടാംപദത്തിലെപ്പോലേയും ഭുജാകോടികളുടെ ഗതൈഷ്യത്വമെന്നു കാണാം. അതുകൊണ്ടു് <u>രാജപദത്തിൽ ഗതംഭുജ, ഏഷ്യം</u> <u>കോടി എന്നും യുഗ്മപദത്തിൽ മറിച്ച് എ</u> വന്നു.

പരിലേഖം 32-ൽ ജ്യാക്കളുടെ മുഖാഗ്രങ്ങൾ കല്പിക്കുംപ്രകാരം. ഭുജാജ്യാക്കൾക്കു <u>*കിമപ*</u> എന്ന പൂൎവ്വാപരസൂത്രത്തിൽ മൂലങ്ങൾ; ചാപസന്ധികളിൽ $(ഖ_1, ഖ_2, ഖ_3 \cdots)$ അഗ്രങ്ങൾ. കോടിജ്യാക്കൾക്കു <u>*വമതേ*</u> എന്ന ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തിൽ മുഖങ്ങൾ, ചാപസന്ധികളിൽ അഗ്രങ്ങൾ. ഭുജാചാപഖണ്ഡങ്ങൾക്കു പൂൎവ്വാപരസൂത്രത്തിന്നടുത്തുള്ള സന്ധിയെ മൂലമെന്നും ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തിന്നടുത്തുള്ള സന്ധിയെ അഗ്രമെന്നും പറയുന്നു; കോടിചാപങ്ങൾക്കു വിപരീതമായിട്ടു മൂലാഗ്രങ്ങൾ.

രണ്ടു ഭുജകളുടെ അന്തരത്തിനു ഭുജാഖണ്ഡമെന്നും രണ്ടു കോടികളുടെ അന്തരത്തിന്നു കോടിഖണ്ഡമെന്നും പറയുന്നു.

പരിലേഖം 32-ൽ,

$$\text{ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ—}\underline{കിഖ_1},\ \underline{ഖ_1 ഖ_2},\underline{ഖ_2 ഖ_3},\cdots\cdots$$

$$\text{പ്രഥമഭുജാജ്യാവ്} = \underline{വ_1\,ബ_1}.$$

ഇതിന്റെ മുമ്പിലത്തെ ഭുജാജ്യാവ് അതായതു $\underline{കി}$-യിൽ നിന്നുള്ള ഭുജശൂന്യം.

$$\therefore\ \text{ആദ്യത്തെ ഭുജാഖണ്ഡം} = \underline{വ_1\,ബ_1} - 0 = \underline{വ_1\,ബ_1} = \text{ആദ്യഭുജാജ്യാവുതന്നെ.}$$

$$\text{ആദ്യത്തെ (ശൂന്യഭുജയുടെ) കോടിജ്യാവ്} = \underline{കി \cdot മ} = \text{ത്രിജ്യാ.}$$

$$\text{പ്രഥമഭുജയുടെ കോടിജ്യാവ്} = \underline{വ_1\,ട_1} = \underline{ബ_1\,മ}$$

$$\therefore\ \text{ആദ്യചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ കോടിഖണ്ഡം} = കിമ - ബ_1\,മ = കിബ_1.$$

$$\text{രണ്ടാംഭുജാജ്യാവ്} = \underline{വ_2\,ബ_2}.$$

$$\text{ഇതിന്റെ കോടിജ്യാവ്} = \underline{വ_2\,ട_2}$$

$$\text{രണ്ടാംചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ഭുജാഖണ്ഡം} = \underline{വ_2\,ബ_2} - \underline{വ_1\,ബ_1} = \underline{വ_2\,യ_1}$$

$$\text{ഇതിന്റെ കോടിഖണ്ഡം} = \underline{വ_1\,ട_1} - \underline{വ_2\,ട_2} = \underline{വ_1\,യ_1}$$

$$\text{തൃതീയചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ഭുജാഖണ്ഡം} = \underline{വ_3\,ബ_3} - \underline{വ_2\,ബ_2} = \underline{വ_3\,ര_1}$$

$$\text{ഇതിന്റെ കോടിഖണ്ഡം} = \underline{വ_2\,ട_2} - \underline{വ_3\,ട_3} = \underline{വ_2\,ര_1}$$

ഇങ്ങനെ എല്ലാ ഖണ്ഡങ്ങളെയും വരുത്താം.

ഇവിടെ അതതു ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ഭുജാഖണ്ഡവും കോടിഖണ്ഡവും തങ്ങളിൽ വിപരീതദിക്കുകളാകയാൽ അവയെ ഭുജാകോടികളെന്നു കല്പിക്കാം. ഇവയുടെ കർണ്ണങ്ങളാകുന്നവ അതാതു ഖണ്ഡങ്ങളുടെ സമസ്തജ്യാക്കൾ — $\underline{വ_1\,കി}$, $\underline{വ_2\,വ_1}$, $\underline{വ_3\,വ_2}$, . . . ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ തുല്യങ്ങളാകയാൽ ഇക്കർണ്ണങ്ങളും തുല്യങ്ങൾ. ഇങ്ങനെ ഭുജാകോടിഖണ്ഡങ്ങൾ ഭുജാകോടികളായി സമസ്തജ്യാവു കർണ്ണമായി പല ത്ര്യശ്രങ്ങളും — $\underline{കിബ_1\,വ_1}$, $\underline{വ_1\,യ_1\,വ_2}$, $\underline{വ_2\,ര_1\,വ_3}$, . . . ഉണ്ടാകും. ഇവിടെ കർണ്ണങ്ങൾ തുല്യങ്ങൾ, ഭുജാകോടികൾ നാനാപ്രകാരങ്ങൾ.

പിന്നേയും ഒരു വക ത്രശ്രങ്ങൾ — $\underline{മബ_1\,വ_1}$, $\underline{മബ_2\,വ_2}$, $\underline{മബ_3\,വ_3}$, . . . ഉണ്ട്. $\underline{മബ_1\,വ_1}$ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ ആദ്യജ്യാവു $\underline{വ_1\,ബ_1}$ ഭുജ, അതിന്റെ കോടിജ്യാവു $\underline{വ_1\,ട_1}$, $(=\underline{ബ_1\,മ})$ കോടി; $\underline{മവ_1}$ എന്ന വ്യാസാദ്ധം കർണ്ണം. $\underline{മബ_2\,വ_2}$ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ രണ്ടാം ഭുജാജ്യാവു ഭുജ, അതിന്റെ കോടിജ്യാവു കോടി, വ്യാസാദ്ധംതന്നെ കർണ്ണം. ഇങ്ങനെ ആദ്യദ്വിതീയാദി ഭുജാജ്യാക്കൾ ഭുജകളായി, അതതിന്റെ കോടിജ്യാക്കൾ ക്രമേണ കോടികളായി, എല്ലായിടത്തും വ്യാസാദ്ധംതന്നെ കർണ്ണമായിട്ടിരിക്കുന്ന ഒരു വക ത്ര്യശ്രങ്ങളാണിവ. ഇവിടേയും കർണ്ണങ്ങൾ തുല്യങ്ങൾ, ഭുജാകോടികൾ നാനാപ്രകാരങ്ങൾ.

പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കൽ ഭുജാമൂലങ്ങൾ തങ്ങളില്ലുള്ള ഇടകൾ, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങുകയാണെങ്കിൽ, കോടിഖണ്ഡങ്ങൾ; പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങുകയാണെങ്കിൽ, ശരഖണ്ഡങ്ങൾ. $\underline{മബ_5}$, $\underline{ബ_5\,ബ_4}$, $\underline{ബ_4\,ബ_3}$, $\underline{ബ_3\,ബ_2}$, $\underline{ബ_2\,ബ_1}$, $\underline{ബ_1\,കി}$ ഇവ കോടിഖണ്ഡങ്ങൾ. $\underline{കിബ_1}$, $\underline{ബ_1\,ബ_2}$, $\underline{ബ_2\,ബ_3}$, $\underline{ബ_3\,ബ_4}$, $\underline{ബ_4\,ബ_5}$, $\underline{ബ_5\,മ}$ എന്ന ക്രമത്തിലിരിക്കുമ്പോൾ അവ ശരഖണ്ഡങ്ങൾ. ആദ്യശരഖണ്ഡം $\underline{കിബ_1}$ ആദ്യഭുജാജ്യാവിന്റെ ശരം തന്നെ. ദ്വിതീയജ്യാവിന്റെ ശരം = ആദ്യദ്വിതീയശരഖണ്ഡയോഗം = $\underline{കിബ_1} + \underline{ബ_1\,ബ_2} = \underline{കിബ_2}$. ത്രിതീയജ്യാവിന്റെ ശരം $= \underline{കിബ_1} + \underline{ബ_1\,ബ_2} + \underline{ബ_2\,ബ_3} = \underline{കിബ_3}$ ഇങ്ങനെ ശരഖണ്ഡയോഗംകൊണ്ടു ശരത്തെ ഉണ്ടാക്കാം. ഇങ്ങനെതന്നെ കോടിഖണ്ഡയോഗം കൊണ്ടു കോടിയേയും ഉണ്ടാക്കാം. ഇതുപോലെതന്നെ ഉത്തരസൂത്രത്തിങ്കൽ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങുകിൽ ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളും സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങുകിൽ കോടിശരഖണ്ഡങ്ങളും ഉളവാകും. ഇവയുടെ യോഗങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഭുജകളെയും കോടിശരങ്ങളെയും ഉണ്ടാക്കാം.

പിന്നെ അതതു ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ സമസ്തജ്യാക്കൾ തുല്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കു ന്നവ കർണ്ണങ്ങളായിട്ടു കർണ്ണങ്ങളുടെ രണ്ടു് അഗ്രങ്ങളിലും സ്പർശിക്കുന്നവ ജ്യാക്കൾ[6] തങ്ങളിലുള്ള സമ്പാതത്തിങ്കന്നു സമസ്തജ്യാക്കളാകുന്ന കർണ്ണങ്ങളുടെ അഗ്രത്തോള മുള്ള ഇട ഭുജാകോടികളായി സമസ്തജ്യാവിനോടുകൂടിയ ത്ര്യശ്രങ്ങളായിട്ടിരിക്കും.

വ്യാഖ്യാനം 6: എല്ലാ ദിക്കിലും സമസ്തജ്യാവിനെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ മൂലത്തിങ്കന്നുള്ള കോടിയും അഗ്രത്തിങ്കന്നുള്ള ഭുജയും ഇവയെയാണ് "ജ്യാക്കൾ" എന്ന പദം കൊണ്ടിവിടെ വിവക്ഷിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഇവയുടെ സമ്പാദത്തിങ്കന്നു സമസ്തജ്യാഗ്രങ്ങ ളോടുള്ള ഇടകൾ ആ സമസ്തജ്യാകർണ്ണത്തിന്റെ ഭുജാകോടികളാകുന്നവ. പരിലേഖം 32-ൽ ഖ$_1$ഖ$_2$ എന്ന ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ അഗ്രമായ ഖ$_2$ എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്നുള്ള ഭുജാജ്യാവ് ഖ$_2$ബ$_2$ എന്നതിന്റെയും മൂലമായ ഖ$_1$ എന്നതിൽനിന്നുള്ള ഖ$_1$ട$_1$ എന്ന കോടിയുടേയും സമ്പാതപ്രദേശം യ$_1$. അപ്പോൾ ഖ$_1$യ$_1$ഖ$_2$ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ ഖ$_1$ഖ$_2$ എന്ന സമസ്തജ്യാ കർണ്ണത്തിന്നു ഖ$_1$യ$_1$ ഭുജയും ഖ$_2$യ$_1$ കോടിയുമാകുന്നു.

ഈ ഭുജാകോടികളെ ആകിലുമാം ഭുജാകോടിഖണ്ഡജ്യാക്കൾ എന്നു കല്പിപ്പാൻ.[7]

വ്യാഖ്യാനം 7: വൃത്തത്തിന്റെ ചതുരാംശത്തെ 24 ആയി വിഭജിച്ച് 24 മഹാജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കി അവയെയാണല്ലൊ ഭുജാകോടി ജ്യാക്കളായിട്ടു പഠിച്ചുവരുന്നത്. ഇവയുടെ സ്ഥാ നത്തു 24 ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളെയുണ്ടാക്കി പഠിക്കുകയും ചെയ്യാം. ഈ ഖണ്ഡജ്യാക്കൾക്കും പഠിതജ്യാക്കൾ എന്നു പേരുണ്ട്. ആര്യഭടാചാര്യർ ഗീതികാസൂത്രത്തിൽ ഖണ്ഡജ്യാക്കളെ യാണ് തന്നിരിക്കുന്നത്. മുമ്പിൽ പറഞ്ഞതുപോലെ ഖണ്ഡജ്യാക്കളെ പൂർവ്വോത്തരസൂത്രങ്ങ ളിൽ കല്പിക്കുന്നതിന്നു പകരം സമസ്തജ്യാകർണ്ണങ്ങളുടെ ഭുജാകോടികളായിട്ടും കല്പിക്കാം. ആര്യഭടാചാര്യർ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഖണ്ഡജ്യാക്കൾ:-

മഖി, ഭഖി, ഫഖി, ധഖി, ണഖി, ഞഖി.
ങഖി, ഹസ്ഝ, സ്കകി, കിഷ്ഗ, ശ്ഘകി, കിഘ്വ,
ഘ്ളകി, കിഗ്ര, ഹക്യ, ധാഹ,
സ്ഗ, സ്ഗ, ശ്ഝ, ങ്വ, ല്ക, പ്ത, ഫ, ഛ, കലാദ്ധജ്യാഃ (ഗീതികാപാദം ശ്ലോകം 12)

അതായത്: 225, 224, 222, 219, 215, 210.
205, 199, 191, 183, 174, 164.
154, 143, 131, 119.
106, 93, 79, 65, 51, 37, 22, 7. ഇലികൾ എന്ന്.

"ഈ ഭുജാകോടിഖണ്ഡങ്ങളെ ആകിലുമാം ഭുജാകോടിജ്യാക്കൾ എന്നു കല്പിക്കാം" എന്നു ചില ഗ്രന്ഥങ്ങളിൽ ഈ വാക്യത്തിന്നു പാഠാന്തരം കാണുന്നുണ്ട്."

ഈവണ്ണമായിരിക്കുന്ന ജ്യാഖണ്ഡങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി പഠിക്കേണം. അവറ്റിനു പഠിത ജ്യാക്കൾ എന്നു പേരുണ്ട്, പൂർവ്വശാസ്ത്രങ്ങളിൽ പഠിക്കയാൽ വ്യൽക്രമേണകൂടി പഠി പ്പൂ. അത് ഉൽക്രമജ്യാക്കൾ.[8]

വ്യാഖ്യാനം 8: ഈ ഖണ്ഡജ്യാക്കളെ, $7, 22, 37, \ldots$ എന്ന ക്രമത്തിലും പഠിക്കേണം. അപ്പോൾ അവറ്റിന്ന് ഉൽക്രമജ്യാക്കളെന്നു പേർ. ഇവയുടെ യോഗംകൊണ്ടു ശരങ്ങളുണ്ടാ കുന്നു. ഉൽക്രമജ്യാവ് എന്നുവെച്ചാൽ ശരം തന്നെ. മൂലത്തിൽ ഉൽക്രമജ്യാക്കൾ എന്നതിന്ന് ഉൽക്രമജ്യാഖണ്ഡങ്ങളെന്നർത്ഥം.

$$8\text{-ആം ജ്യാവ്} = 225 + 224 + 222 + 219 + 215 + 210 + 205 + 199$$

$$= 1719.$$

$$\text{അതിന്റെ ശരം} = 7 + 22 + 37 + 51 + 65 + 79 + 98 + 106 = 460$$

$$\text{8-ആം ജ്യാവിന്റെ കോടി} = \text{ത്രിജ്യ} - \text{8-ആം ജ്യാശരം } 3438 - 460 = 2978$$

പദാദിയിങ്കന്നു തുടങ്ങി ഇത്ര ചാപഖണ്ഡം കഴിഞ്ഞ സന്ധി ഇഷ്ടപ്രദേശമെന്നു വരുമ്പോൾ അത്ര പഠിതജ്യാവൃതന്നെ ഇഷ്ടജ്യാവാകുന്നത്.[9]

വ്യാഖ്യാനം 9: അത്ര പരിതജ്യാക്കളുടെ യോഗമിഷ്ടജ്യാവാകുന്നത് എന്നത്ഥം.

പിന്നെ ഇസ്സന്ധിയിങ്കന്നു പിന്നത്തെ ചാപഖണ്ഡത്തിൽ ഒട്ടുചെന്നേടം ഇഷ്ടപ്രദേശമെന്നു വരുമ്പോൾ ഈ പഠിതജ്യാവിൽ കൂട്ടൂ, മീത്തെ ചാപഖണ്ഡൈകദേശത്തിന്റെ ജ്യാഖണ്ഡൈകദേശം. എന്നാലിഷ്ടജ്യാവത്.

ഇവിടെ ജ്യാഖണ്ഡൈകദേശമുണ്ടാക്കുംപ്രകാരം പിന്നെ, ഇച്ചാപഖണ്ഡം പ്രമാണമാകുമ്പോൾ ഈ ഖണ്ഡജ്യാക്കളിൽ ഇത്രാമതു പ്രമാണഫലം, ഇച്ചാപഖണ്ഡൈകദേശത്തിന് എത്ര ജ്യാഖണ്ഡൈകദേശം എന്ന് ഈ ത്രൈരാശികം കൊണ്ടുണ്ടാക്കാം. അതു സ്ഥൂലമത്രെ. അതിന്നു ഹേതു. നടേത്തെ ചാപത്തിലിരട്ടി രണ്ടാംചാപം, മുമ്മടങ്ങു മൂന്നാംചാപം. ഇങ്ങനെ ചാപങ്ങൾ. നടേത്തെ ജ്യാവിലിരട്ടി ഇല്ല രണ്ടാംജ്യാവ്, മുമ്മടങ്ങില്ല മൂന്നാംജ്യാവ് എന്നിവണ്ണമിരിക്കും അതിന്നു ഹേതു. നടേത്തെ ചാപത്തിന്നു വളവില്ല, ശരം പെരികെ കുറകയാൽ; ജ്യാവിനോടു മിക്കവാറും സമം. ചാപം വലുതായോളം വളവ് ഏറും. അവിടെ ജ്യാവ് കുറവേ നീളമുണ്ടായിരിപ്പൂ, ശരന്നീളമേറുകയാൽ. എന്നാൽ **ചാപം പ്രമാണമായിട്ടു ജ്യാവിനെ ത്രൈരാശികം ചെയ്യരുത്**, ഫലം സ്ഥൂലമാകയാൽ.

പഠിതജ്യാക്കളെ സൂക്ഷ്മമായിട്ടു വരുത്തുംപ്രകാരം

അനന്തരം പഠിതജ്യാക്കളെത്തന്നെ സൂക്ഷ്മമായിട്ടറിയുംപ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നുണ്ട്. അവിടെ നടേത്തെ ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ മൂലമാകുന്ന പൂവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കലും ഇവിടുന്നു വടക്കു നീങ്ങി രാശ്യഷ്ടമാംശം ഇരുന്നൂറ്റിഇരുപത്തഞ്ചിലി ചെന്നേടം അഗ്രം അവിടേയും സ്പശിച്ചിട്ട് ആദ്യചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാവിനെ കല്പിപ്പൂ. യാവ ചിലവ പിന്നെ അച്ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ മൂലാഗ്രങ്ങളിൽ നിന്നു തുടങ്ങിയ ഭുജാകോടിഖണ്ഡജ്യാക്കൾ, അവറ്റെ അന്യോന്യം ഭുജാകോടികളായിട്ടു കല്പിക്കുമ്പോൾ ഇവറ്റിന്റെ കണ്ണമായിട്ടിരിക്കും അസ്സമസ്തജ്യാവ്. പിന്നെ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്ന് ഇച്ചാപഖണ്ഡമധ്യത്തിങ്കൽ സ്പശിക്കുമാറ് ഒരു വ്യാസാദ്ധത്തെ കല്പിപ്പൂ. ഇതിന്റെ അഗ്രം ഇസ്സമസ്തജ്യാവിന്റെ ശരമാകുന്നത്. ആകയാൽ ഈ വ്യാസാദ്ധവും സമസ്തജ്യാവും തങ്ങളിൽ വിപരീത ദിക്ക് ആകയാൽ പൂവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കൽനിന്ന് ഈ വ്യാസാദ്ധാഗ്രം എത്ര വടക്കു നീങ്ങി ഇരിക്കുന്നു, ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തിന്റെ[10] ദക്ഷിണാഗ്രത്തിങ്കൽനിന്ന് അസ്സമസ്തജ്യാഗ്രം ആയംശംകൊണ്ടു കിഴക്കു നീങ്ങി ഇരിക്കും.[11]

വ്യാഖ്യാനം 10: ഇവിടെ ദിക്കിനെ മാത്രം അപേക്ഷയുള്ളതുകൊണ്ടും ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രവും ഭുജാജ്യാകളും തുല്യദിക്കുകളാകയാലും ഭുജാജ്യാക്കളെയും അതാതു സ്ഥാനത്തു ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രമെന്നു കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

വ്യാഖ്യാനം 11: Ancient Hindu Mathematicians seem to have some idea of vectors and angles.

ഇവിടെ ആദ്യചാപസമസ്തജ്യാവിനെ കുറിച്ചു ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രമാകുന്നത് ആദ്യ ജ്യാവു തന്നെ. പിന്നെ ഈ വ്യാസാദ്ധാഗ്രത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിട്ടു രണ്ടു ഭുജാകോടി ജ്യാക്കളെ കല്പിപ്പൂ. അവിടെ ഖണ്ഡാദ്ധമാകുന്ന നൂറ്റൊരുപത്തുരണ്ടര ഇലി ഭുജാചാ പമാകുന്നത്. വളവു കുറയുകയാൽ ഇച്ചാപത്തെതന്നെ അദ്ധജ്യാവ് എന്നു കല്പിച്ച് ഇതിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ വ്യാസാദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞു് മൂലിച്ചതു കോടിജ്യാവ് ഇരു പത്തിമൂന്നര ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ജ്യാവ്. ഇതുപോയ വ്യാസാദ്ധശേഷം ഭുജാശരം. ഇവിടെ പ്രഥമചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ സ്പർശിക്കുന്ന വ്യാസാദ്ധകർണ്ണത്തിന്നു നൂ റ്റൊരുപത്തുരണ്ടര ഇലി ഭുജാജ്യാവാകുന്നത്. ഈ ജ്യാവിലിരട്ടിപോന്നിരിക്കുന്ന സമസ്തജ്യാകർണ്ണത്തിന് എന്തു ഭുജ എന്ന ഇത്രൈരാശികംകൊണ്ടു സമസ്തജ്യാ കർണ്ണത്തിന്റെ ഭുജ ആയിരിക്കുന്ന പ്രഥമജ്യാശരമുണ്ടാകും. ഇവിടെ ത്രിജ്യാകർണ്ണ ത്തിന്നു തെക്കുവടക്കു ഭുജാ. ഇത്ത്രിജ്യാകർണ്ണത്തിന്നു വിപരീതമാകയാൽ സമസ്ത ജ്യാകർണ്ണത്തിന്നു കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറു ഭുജാ. പിന്നെ ഈ വ്യാസാദ്ധകർണ്ണത്തിന് ഇരുപത്തിമൂന്നര ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ജ്യാവു കോടിയാകുന്നത്. ഇസ്സമസ്തജ്യാക് ണ്ണത്തിന് എന്തു കോടി എന്ന് ആദ്യജ്യാവുണ്ടാകും. ഇവിടെ ത്രിജ്യാകർണ്ണത്തിന്നു കോടി കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറ്, സമസ്തജ്യാകർണ്ണത്തിന്നു തെക്കുവടക്കു കോടി. പിന്നെ പ്രഥമജ്യാശരം വ്യാസാദ്ധത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ പ്രഥമജ്യാകോടി ഉണ്ടാകും. ഈ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ ദ്വിതീയജ്യാദിജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കൂ. അത് എങ്ങനെ എന്ന്. ഇവിടെ ഇനി പ്രഥമജ്യാഗ്രത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിട്ട് ഒരു വ്യാസാദ്ധകർണ്ണത്തെ കല്പിപ്പൂ. ഇതിന്നു ഭുജാകോടികളാകുന്നതു നടേത്തെ ജ്യാവും ഇരുപത്തിമൂന്നാംജ്യാവും. ഇവ ഇവിടെ പ്രമാണഫലങ്ങളാകുന്നത്. പിന്നെ നടേത്തെ ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ നടുവി ലും രണ്ടാം ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ നടുവിലും സ്പർശിച്ചിട്ട് ഒരു സമസ്തജ്യാകർണ്ണത്തെ കല്പി പ്പൂ. ഇതു ഇച്ഛാരാശിയാകുന്നത്. ഇസ്സമസ്തജ്യാവും രാശിയിൽ എട്ടൊന്നായിരിക്കും, രണ്ടു ചാപഖണ്ഡത്താലും പപ്പാതി കൂടുകയാൽ. ഇതിന്ന് ഇഛാഫലങ്ങളാകുന്ന തു രണ്ടാംചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ മദ്ധ്യത്തിൽ അഗ്രമായിട്ടിരിക്കുന്ന ഭുജാഖണ്ഡജ്യാവു നടേത്തെ ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ നടുവിലഗ്രമായിരിക്കുന്ന കോടിജ്യാവോളമുള്ളത് ഒന്ന്; ഈ ഭുജാഖണ്ഡജ്യാസമ്പാതത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങീട്ടു കോടിജ്യാവിന്റെ അഗ്രം ഒന്ന്. ഇതു കോടിഖണ്ഡമാകുന്നത്. ഈ കോടിഖണ്ഡം പോയ ശേഷം കോടിജ്യാ വു[12] ദ്വിതീയചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലഗ്രമായിട്ടിരിക്കുന്ന കോടിജ്യാവായിരിക്കും. പിന്നെ ഈ ഭുജാഖണ്ഡം പ്രഥമചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിട്ടിരിക്കുന്ന ഭുജാജ്യാവിൽ കൂട്ടൂ.

വ്യാഖ്യാനം 12: അദ്ധചാപഭുജയുടെ കോടിജ്യാവിൽനിന്ന് ഈ കോടിഖണ്ഡം പോയ ശേഷം

എന്നാൽ ദ്വിതീയ ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലഗ്രമായിരിക്കുന്ന ഭുജാജ്യാവുണ്ടാകും. പി ന്നെ ഈ ജ്യാക്കൾ പ്രമാണഫലങ്ങളായി ഈ ജ്യാഗ്രങ്ങളുടെ സംപാതത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന വ്യാസാദ്ധകർണ്ണം പ്രമാണമായി ദ്വിതീയ ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ

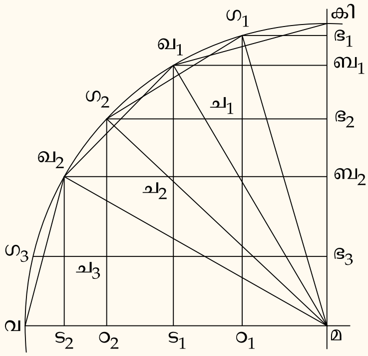
സമസ്തജ്യാവു് ഇച്ഛയായി കല്പിച്ചിട്ടുണ്ടാക്കിയ ഇച്ഛാഫലങ്ങൾ ദ്വൈതീയ ചാപ ഖണ്ഡത്തിന്റെ ഭുജാകോടിജ്യാക്കളാകുന്നതു്. ഇതിൽ ഭുജാഖണ്ഡം പ്രഥമജ്യാവിൽ കൂട്ടൂ. കോടിഖണ്ഡത്തെ ഇരുപത്തിമൂന്നാംജ്യാവിൽ കളയൂ. എന്നാൽ രണ്ടാംജ്യാവും ഇരുപത്തിരണ്ടാംജ്യാവും ഉണ്ടാകും. ഇവ ഭുജാകോടികളായിട്ടുമിരിക്കും. പിന്നെ ഇവ പ്രമാണഫലങ്ങളായിട്ടു ത്രിതീയ ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിട്ടിരിക്കുന്ന ഭുജാകോടികളെ ഉണ്ടാക്കൂ. പിന്നെ അവ പ്രമാണഫലങ്ങളായിട്ടു തൃതീയചാപത്തിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന ഭുജാകോടിജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കൂ. പിന്നെ ഒടുക്കത്തോളമീവണ്ണം. അവിടെ ചാപമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നു് ഉണ്ടാകുന്നതു മദ്ധ്യത്തിങ്കലേതിൽ സംസ്കരിപ്പൂ. ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കന്നു് ഉണ്ടാകുന്ന ഖണ്ഡജ്യാക്കൾ ഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കൽ ഉണ്ടായവറ്റിൽ സംസ്കരിപ്പൂ. എന്നാൽ ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലേവ ഒരു പരിഷ; അഗ്രത്തിങ്കലേവ ഒരു പരിഷ. ഇവറ്റിൻ മദ്ധ്യത്തിങ്കലേവറ്റെ ഉപേക്ഷിച്ച് അഗ്രത്തിങ്കലേവറ്റേ പഠിച്ചേപ്പൂ. ഇവ പഠിതജ്യാക്കളാകുന്നതു്.

വ്യാഖ്യാനം: പരിലേഖം 34-ൽ <u>മ</u> കേന്ദ്രമായിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ ചതുരംശത്തെ മൂന്നു തുല്യ ഭാഗങ്ങളായിട്ടു വിഭജിക്കുക.

തുല്യചാപങ്ങൾ:- $\underline{കിഖ_1}$, $\underline{ഖ_1 ഖ_2}$, $\underline{ഖ_2 വ}$.

$\underline{ഗ_1}$, $\underline{ഗ_2}$, $\underline{ഗ_3}$ ഇവ ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ മദ്ധ്യങ്ങൾ.

ഈ ചാപഖണ്ഡാഗ്രങ്ങളിൽ നിന്നും ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യങ്ങളിൽ നിന്നും ഭുജകളെയും കോടികളെയും ഉണ്ടാക്കൂ. $\underline{മഗ_1}$, $മഖ_1$, $മഗ_2$, $മഖ_2$ എന്നീ വ്യാസാദ്ധങ്ങളേയും വരക്കൂ.



പരിലേഖം (34)

ഒന്നിന്റെ ഭുജാകോടികണ്ണങ്ങൾ മറ്റേതിന്റെ ഭുജാകോടികണ്ണങ്ങൾക്കു വിപരീതദിക്കുകളാകയാൽ $\underline{മഗ_1 ഭ_1}$, $\underline{കിഖ_1 ബ_1}$ ഈ ത്ര്യശ്രങ്ങൾ തുല്യാകാരങ്ങൾ.

$$\therefore \text{ ആദ്യചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ഭുജാ} = \underline{ഖ_1 ബ_1} = \frac{\underline{മഭ_1} \times \underline{കിഖ_1}}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$$\text{ഇതിന്റെ ശരം } \underline{കിബ_1} = \frac{\underline{ഗ_1 ഭ_1} \times \underline{കിഖ_1}}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$$\therefore \text{ ആദ്യചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ കോടി} = \underline{ഖ_1 ട_1}$$
$$= \underline{മബ_1}$$
$$= \underline{മകി} - \underline{കിബ_1}$$

$$= \text{ത്രിജ്യാ} - \underline{\text{കിബ}_1}$$

മുമ്പിൽ പറഞ്ഞ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ $\underline{\text{മഖ}_1\text{ബ}_1}$, $\text{ഗ}_1\text{ഗ}_2\text{ച}_1$ എന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങളും തുല്യാകാരങ്ങൾ.

$$\therefore\ \text{ഗ}_2\text{ച}_1 = \frac{\text{മബ}_1 \times \text{ഗ}_1\text{ഗ}_2}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$$\text{ഗ}_1\text{ച}_1 = \frac{\text{ഖ}_1\text{ബ}_1 \times \text{ഗ}_1\text{ഗ}_2}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

പിന്നെയും തുല്യാകാരങ്ങളായിട്ടിരിക്കുന്ന $\text{മഗ}_2\text{ഭ}_2$, $\text{ഖ}_1\text{ഖ}_2\text{ച}_2$ എന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങളിൽ

$$\text{ഖ}_2\text{ച}_2 = \frac{\text{മഭ}_2 \times \text{ഖ}_1\text{ഖ}_2}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$$\text{ഖ}_1\text{ച}_1 = \frac{\text{ഗ}_2\text{ഭ}_2 \times \text{ഖ}_1\text{ഖ}_2}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

ഇങ്ങനെ വൃത്തചതുരംശത്തെ 24 തുല്യഖണ്ഡങ്ങളായിട്ടു വിഭജിക്കുകയാണെങ്കിൽ ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാവു കർണ്ണമായിട്ടു പല ഭുജാകോടികളെ ഉണ്ടാക്കാം.

$$\text{കിഖ}_1 = \text{ഗ}_1\text{ഗ}_2 = \text{ഖ}_1\text{ഖ}_2 = \text{ഗ}_2\text{ഗ}_3 = \cdots = \text{രാശ്യഷ്ടമാംശസമസ്തജ്യാവ്.}$$

$$\underline{\text{കിഗ}_1}\ \text{എന്ന ചാപഖണ്ഡാർദ്ധം} = \frac{225}{2} = 112\frac{1}{2}\ \text{ഇലി.}$$

ഖണ്ഡം വളരെ ചെറുതായതുകൊണ്ടു $\underline{\text{കിഗ}_1}$ എന്ന ചാപവും $\underline{\text{ഗ}_1\text{ഭ}_1}$ എന്ന അതിന്റെ ജ്യാവും തുല്യമെന്നു കല്പിക്കാം.

$$\text{അപ്പോൾ}\ \text{ഗ}_1\text{ഭ}_1 = 112\frac{1}{2}\ \text{ഇലി.}$$

അതുപോലെതന്നെ ചാപഖണ്ഡസമസ്തജ്യാക്കളെ ചാപഖണ്ഡതുല്യമെന്നും കല്പിക്കാം.

$$\therefore\ \text{കിഖ}_1 = \text{ഗ}_1\text{ഗ}_2 = \cdots = 225\ \text{ഇലി.}$$

$$\text{ഇവിടെ അരചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ഭുജാ} = 112\frac{1}{2}\ \text{ഇലി.}$$

$$\text{അതിന്റെ കോടി} = \text{മഭ}_1 = \sqrt{\text{ത്രിജ്യ}^2 - (112\frac{1}{2})^2}.$$

ഭുജാശരം അല്ലെങ്കിൽ അരചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ കോടിഖണ്ഡം.

$$= \underline{\text{കിഭ}_1}.$$

$$= \text{ത്രിജ്യാ} - \text{മഭ}_1.$$

$$\text{ചാപഖണ്ഡസമസ്തജ്യാവ്} = 225\ \text{ഇലി.}$$

ഈ ജ്ഞാതങ്ങളായിരിക്കുന്ന വസ്തുക്കളെക്കൊണ്ട് എല്ലാ ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെയും ഭുജാകോടിഖണ്ഡങ്ങളെ വെവ്വേറെ ഉണ്ടാക്കാം. ഇവയിൽനിന്നു 24 ജ്യാക്കളേയുമുണ്ടാക്കാം.

1) $$\frac{\text{സമസ്തജ്യാവ്} \times \text{അര ചാപഖണ്ഡകോടി}}{\text{ത്രിജ്യാ}} = \frac{\text{കിഖ}_1 \times \text{മഭ}_1}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$$= \text{ഖ}_1\text{ബ}_1\ \text{(ആദ്യചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ഭുജാഖണ്ഡം).}$$

$$\frac{\text{സമസ്തജ്യാവ്} \times \text{അരചാപഖണ്ഡഭുജ}}{\text{ത്രിജ്യാ}} = \frac{\text{കിഖ}_1 \times \text{ഗ}_1\text{ഭ}_1}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$= \text{കിബ}_1$ (ആദ്യചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ കോടിഖണ്ഡം).

ത്രിജ്യാ $-$ ആദ്യചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ കോടിഖണ്ഡം.

$= \underline{\text{മകി}} - \underline{\text{കിബ}_1}$

$= \text{മബ}_1$

$=$ ആദ്യഖണ്ഡത്തിന്റെ കോടി

$=$ 23 ഖണ്ഡങ്ങളുടെ ഭുജ

$=$ 23-ആം ജ്യാവ്.

ആദ്യഭുജാജ്യാവ് $=$ ആദ്യഭുജാഖണ്ഡം തന്നെ.

2) $$\frac{\text{സമസ്തജ്യാവ്} \times \text{23-ആം ജ്യാവ്.}}{\text{ത്രിജ്യാ}} = \frac{\text{ഗ}_1\text{ഗ}_2 \times \text{മബ}_1}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$= \text{ഗ}_2\text{ച}_1$ ($\text{ഗ}_1\text{ഗ}_2$ എന്ന ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ഭുജാഖണ്ഡം)

$$\frac{\text{സമസ്തജ്യാവ്} \times \text{ആദ്യജ്യാവ്}}{\text{ത്രിജ്യാ}} = \frac{\text{ഗ}_1\text{ഗ}_2 \times \text{ഖ}_1\text{ബ}_1}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$= \underline{\text{ഗ}_1\text{ച}_1}$ ($\text{ഗ}_1\text{ഗ}_2$ എന്ന ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ കോടിഖണ്ഡം)

$\underline{\text{ഗ}_2\text{ച}_1}$ $+$ അരചാപത്തിന്റെ ഭുജാ $= \text{ഗ}_2\text{ച}_1 + \text{ഗ}_1\text{ഭ}_1$

$= \text{ഗ}_2\text{ച}_1 + \text{ഗ}_1\text{ഭ}_2$

$= \underline{\text{ഗ}_2\text{ഭ}_2}$. (ഒന്നരചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ഭുജ)

അരചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ കോടി $- \text{ഗ}_1\text{ച}_1$

$= \text{മഭ}_1 - \text{ഗ}_1\text{ച}_1$

$= \text{മഭ}_1 - \text{ഭ}_1\text{ഭ}_2$

$= \text{മഭ}_2$ (ഒന്നരചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ കോടി)

3) $$\frac{\text{സമസ്തജ്യാവ്} \times \text{ഒന്നരചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ കോടി}}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$$= \frac{\text{ഖ}_1\text{ഖ}_2 \times \text{മഭ}_2}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$= \underline{\text{ഖ}_2\text{ച}_2}$ (രണ്ടാംചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ഭുജാഖണ്ഡം)

$$\frac{\text{സമസ്തജ്യാവ്} \times \text{ ഒന്നരചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ഭുജാ}}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$$= \frac{\text{ഖ}_1\text{ഖ}_2 \times \text{ഗ}_2\text{ഭ}_2}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$= \underline{\text{ഖ}_1\text{ച}_2}$ (രണ്ടാംചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ കോടിഖണ്ഡം)

$\text{ഖ}_2\,\text{ച}_2 + \text{ആദ്യജ്യാവ്} = \text{ഖ}_2\,\text{ച}_2 + \text{ഖ}_1\,\text{ബ}_1$

$= \text{ഖ}_2\,\text{ച}_2 + \text{ച}_2\,\text{ബ}_2 = \text{ഖ}_2\,\text{ബ}_2$

$=$ ദ്വിതീയജ്യാവ്.

23-ആം ജ്യാവ് $- \text{ച}_2\,\text{ഖ}_1 = \text{മ}\,\text{ബ}_1 - \text{ബ}_1\,\text{ബ}_2 = \text{ഖ}_2\,\text{ട}_2$

$=$ ദ്വിതീയജ്യാവിന്റെ കോടി

$=$ 22-ആം ജ്യാവ്.

. . . .

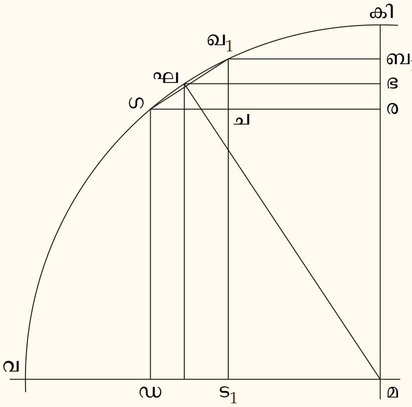
. . . .

ഇങ്ങനെ (1), (3) തുടങ്ങിയുള്ള പരിഷയിൽ നിന്നും പഠിതജ്യാക്കൾ വരും.

ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കലെ ജ്യാനയനപ്രകാരം

പിന്നെ ഒരു ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കലൊഴിയ ഇടയിലൊരു ഇഷ്ടപ്രദേശമാകുമ്പോൾ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കലഗ്രമായിരിക്കുന്ന ഭുജാകോടികളെ അറിവാനു മിതുതന്നെ ഉപായം. ഇസ്സമീപത്തിങ്കലെ ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കന്ന് ഇഷ്ടപ്രദേശത്തോടിടക്കു **ശിഷ്ടചാപ**മെന്നു പേർ. അശ്ലിഷ്ടചാപത്തെതന്നെ സമസ്തജ്യാവായി ഇച്ഛാരാശിയായി കല്പിച്ച ത്രൈരാശികം ചെയ്തുണ്ടാകുന്ന ഇച്ഛാഫലങ്ങൾ അശ്ലിഷ്ടചാപത്തിന്റെ ഭുജാകോടിഖണ്ഡജ്യാക്കൾ ആയിട്ടിരിക്കും. അവറ്റെ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിനടുത്തുള്ള ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലെ പഠിതജ്യാക്കളിൽ സംസ്കരിച്ചാൽ വൃത്തത്തിങ്കലെ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കലഗ്രങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഭുജാകോടിജ്യാക്കളുണ്ടാകും. അവിടെ ശിഷ്ടചാപമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന വ്യാസാർദ്ധകർണ്ണം പ്രമാണമാകുന്നത്. ഇതിന്റെ ഭുജാകോടിജ്യാക്കൾ പ്രമാണഫലങ്ങളാകുന്നത്. ഇവറ്റെ അറിഞ്ഞീല പിന്നെ. എന്നിട്ട് ഇവിടക്കുമിതുതന്നെ ഉപായം. ഇവിടെ ശിഷ്ടചാപമധ്യത്തിങ്കലും പഠിതജ്യാഗ്രത്തിങ്കലും സ്പർശിച്ചിട്ട് ശിഷ്ടചാപത്തിൽ പാതിക്ക് ഒരു സമസ്തജ്യാവിനെ കർണ്ണമായി കല്പിച്ച് ഇക്കർണ്ണത്തിന്റെ ഭുജാകോടിഖണ്ഡങ്ങളെ ഇച്ഛാഫലങ്ങളായി ഉണ്ടാക്കി പഠിതജ്യാക്കളിൽ സംസ്കരിച്ചാൽ ശിഷ്ടചാപമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന ജ്യാക്കളുണ്ടാകും. ഇവറ്റിനു പിന്നെ ശിഷ്ടചാപാർദ്ധത്തിന്റെ മദ്ധ്യത്തിങ്കൽ അഗ്രങ്ങളായിരിക്കുന്ന ജ്യാക്കളെ അപേക്ഷ ഉണ്ട്. അവ പഠിതജ്യാക്കൾ തന്നെ എന്നു കല്പിപ്പൂ, ഈഷൽഭേദമേ ഉള്ളൂ എന്നിട്ട്. ഇതു കൊണ്ടു സൂക്ഷ്മത പോരായ്കിൽ ശിഷ്ടചാപത്തിൽ നാലിലൊന്നിനു സമസ്തജ്യാവിനെ കല്പിച്ച് ഇതിനു ഖണ്ഡജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കു നടേ. ഇതും പോരായ്കിൽ ഇതിന്റേയുമർദ്ധത്തിങ്കലേക്കു കല്പിച്ചുകൊള്ളൂ. ഇതിനെ **ഇഷ്ടദോഃകോടിധനുഷോഃ** എന്നതു കൊണ്ടു ചൊല്ലിയത്.

വ്യാഖ്യാനം: 24 പഠിതജ്യാക്കളേയും അറിഞ്ഞതിനു ശേഷം ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ജ്യാഗ്രങ്ങളുടെ ഇടയിലുള്ള ചാപഖണ്ഡത്തിൽ ഏതെങ്കിലുമൊരു ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കലെ ഭുജാകോടികളെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെ കാണിക്കുന്നു. മുമ്പിൽപറഞ്ഞ ന്യായം തന്നെ ഇവിടക്കുമുപായം.



പരിലേഖം (35)

പരിലേഖം 35-ൽ, <u>ഖ$_1$</u> ഒരു പഠിതജ്യാവിന്റെ അഗ്രം.

<u>ഖ$_1$ബ$_1$</u> അവിടത്തെ ഭുജാജ്യാവ്.

<u>ഖ$_1$ട$_1$</u> അവിടത്തെ കോടിജ്യാവ്.

<u>ഗ</u> ഒരിഷ്ടപ്രദേശം.

ഇതിന്റെ ഭുജാകോടികളായ <u>ഗര</u>, <u>ഗഡ</u> ജ്ഞേയങ്ങൾ.

<u>ഖ$_1$ഗ</u> ശിഷ്ടചാപം.

<u>ഘ</u> ശിഷ്ടചാപമദ്ധ്യം.

<u>ഘഭ</u> ശിഷ്ടചാപമദ്ധ്യത്തിലെ ഭുജാജ്യാവ്.

<u>മഘ</u> ശിഷ്ടചാപമദ്ധ്യത്തിൽക്കൂടിയുള്ള വ്യാസാർദ്ധം.

ഒന്നിന്റെ ഭുജാകോടികർണ്ണങ്ങൾ മറ്റേതിന്റെ ഭുജാകോടികർണ്ണങ്ങൾക്കു ക്രമേണ വിപരീതദിക്കുകളാകയാൽ <u>മഘഭ</u>, <u>ഖ$_1$ഗച</u> എന്ന ത്രശ്രങ്ങൾ തുല്യാകാരങ്ങൾ.

$$\therefore\ \underline{\text{ഗച}} = \frac{\underline{\text{ഗഖ}_1} \times \underline{\text{മഭ}}}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$$\underline{\text{ഖ}_1\text{ച}} = \frac{\underline{\text{ഗഖ}_1} \times \underline{\text{ഘഭ}}}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

ഒരു ചാപഖണ്ഡം = 225 ഇലി. <u>ഖ$_1$ഗ</u> എന്ന ശിഷ്ടചാപം ചാപഖണ്ഡാർദ്ധമായ $112\frac{1}{2}$ ഇലിയിൽ കുറവായിരിക്കും. അതുകൊണ്ടു ശിഷ്ടചാപത്തെതന്നെ സമസ്തജ്യാവായി കല്പിക്കാം. <u>ഖ$_1$ഘ</u> എന്ന ബിന്ദുക്കൾ വൃത്തത്തിൽ വളരെ അടുത്തായതുകൊണ്ടു <u>ഘ</u> എന്നതിൽ നിന്നുള്ള ഭുജാകോടികളെ പഠിതജ്യാതുല്യങ്ങൾ എന്നു കല്പിക്കാം.

$$\therefore\ \underline{\text{മഭ}} = \underline{\text{മബ}_1};\ \ \underline{\text{ഘഭ}} = \underline{\text{ഖ}_1\text{ബ}_1}$$

$$\therefore\ \text{ഭുജാഖണ്ഡം} = \underline{\text{മബ}_1} \times \frac{\text{ശിഷ്ടചാപം}}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$$= \text{പഠിതാകോടിജ്യാവ്} \times \frac{\text{ശിഷ്ടചാപം}}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$$\therefore\ \text{ഭജ}\,\underline{\text{ഗര}} = \text{പഠിതഭുജജ്യാവ്} + \text{പഠിതാകോടിജ്യാവ്} \times \frac{\text{ശിഷ്ടചാപം}}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$$\text{കോടി } \underline{ഗഢ} = \text{പഠിതകോടിജ്യാവ്} - \text{പഠിതഭുജാജ്യാവ്} \times \frac{\text{ശിഷ്ടചാപം}}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$\underline{ഖ_1 ഗ}$ എന്ന ശിഷ്ടചാപം $112\frac{1}{2}$ ഇലിയിൽ കൂടുതലാണെങ്കിൽ മീത്തെ ചാപാഗ്രത്തിങ്കലുള്ള ഭുജാകോടിജ്യാക്കളിൽ ജ്യാഖണ്ഡങ്ങളെ സംസ്കരിക്കേണം. ഖണ്ഡങ്ങളെ മുമ്പിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നതിന്നു വിപരീതമായി സംസ്കരിക്കയും വേണം.

ഇവിടെ സൂക്ഷ്മത പോരാ എന്നുണ്ടെങ്കിൽ ശിഷ്ടചാപത്തിന്റെ അദ്ധത്തേയോ ചതുരാംശത്തേയോ സമസ്തജ്യാവെന്നു കല്പിച്ച് ഈ ക്രിയ ആവർത്തിച്ചു ചെയ്തു ഭുജാകോടിഖണ്ഡങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി പഠിതജ്യാക്കളിൽ സംസ്കരിച്ചാൽ സൂക്ഷ്മതരങ്ങളായ ഭുജാകോടിജ്യാക്കളുണ്ടാകും.

ഇഷ്ടദോഃകോടിധനുഷോസ്സ്വസമീപസമിരിതേ |
ജ്യേ ദ്വേ സാവയവേ ന്യസ്യ കയ്യാദൂനാധികം ധനുഃ ||
ദ്വിഘ്നതല്ലിപ്തികാപ്തൈകശരശൈലശിഖീന്ദവഃ ||
ന്യസ്യാച്ഛേദായ ച മിഥസ്തൽ സംസ്കാരവിധിത്സയാ ||
ഛിത്വൈകാം പ്രക്ഷിപേജ്ജഹ്യാൽ തദ്ധനുഷ്യധികോനകേ |
അന്യസ്യാമഥ താം ദ്വിഘ്നാം തഥാ സ്യാമ്പി മി സംസ്കൃതിഃ ||
ഇതി തേ കൃതസംസ്കാരേ സ്വഗുണൗ ധനുഷോസ്മയോഃ 'ഇതിമാധവഃ'

ഇഷ്ടപ്രദേശം രാജപദത്തിങ്കലോ യുഗ്മപദത്തിങ്കലോ സംഭവിക്കാം. ആ പദത്തിങ്കൽ ഗതമായിട്ടോ ഏഷ്യമായിട്ടോ ഇരിക്കുന്ന ഇഷ്ടചാപഭാഗത്തിന്നു ജ്യാക്കളെ വരുത്തേണ്ടിയിരിക്കുന്നു. ഈ ചാപഭാഗത്തിന്ന് ഇഷ്ടദോഃ കോടിധനുസ്സ് എന്നു പറയുന്നു. ഈ ചാപാഗ്രത്തിന്റെ നേരേ മേലെയോ കീഴേയോ ഉള്ള ചാപസന്ധിയിലെ ഭുജാകോടിജ്യാക്കളെ സ്വസമീപസമിരിതജ്യാക്കൾ എന്നു പറയുന്നു. ഉദ്ദിഷ്ടഭുജാകോടികളെ വരുത്തുവാനുള്ള ക്രിയ ഇങ്ങനെയാണ്:–

(1) ആദ്യമായി ശിഷ്ടചാപമാകുന്ന ഊനാധികധനുസ്സിനെ വരുത്തുക. ഇത് ഇഷ്ടധനുസ്സും സ്വസമീപസമിരിതജ്യാവിന്റെ ചാപവും തമ്മിലുള്ള അന്തരം. ഇതിനെ *ച* എന്നു കല്പിക്കുക.

(2) കൃഷ്ണസംഗസ്സ്യാൽ (13751) എന്നതിനെ, ഊനാധികധനുസ്സിനെ ഇലിയാക്കി ഇരട്ടിച്ചതിനെക്കൊണ്ടു ഹരിക്കുക. ഈ ഫലത്തെ *ഹ* എന്നു കല്പിക്കുക. ഇതൊരു ഹാരകമാകുന്നു.

(3) ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിന്റെ കീഴെയോ മേലേയോ ഉള്ള ചാപസന്ധിയിലെ ഭുജാകോടികളെ (പഠിതജ്യാക്കളെ) സാവയവമായിട്ടു വെക്കുക. ഇഷ്ടഭുജയെ കാണ്മാനുദ്ദേശിക്കുന്നവെങ്കിൽ ഭുജവെച്ചും കോടിയെയാണെങ്കിൽ കോടിയെവെച്ചും ക്രിയ തുടങ്ങണം. ആവശ്യംപോലെയുള്ള പഠിതജ്യാവിനെ ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലത്തെ മറ്റേതിൽ ഋണധനത്തിന്നു തക്ക വണ്ണം സംസ്കരിക്കേണം. ഈ സംസ്കൃതജ്യാവിനെ ഇരട്ടിച്ചതിനെ പിന്നേയും ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലത്തെ ആദ്യത്തേതിലും ഋണധനംപോലെ സംസ്കരിച്ചാൽ ഉദ്ദിഷ്ടജ്യാവു വരും. സ്വസമീപസമിരിതജ്യാവിന്റെ ചാപം ഇഷ്ടധനുസ്സിനേക്കാൾ കുറയുമെങ്കിൽ ധനമായിട്ടും കൂടുമെങ്കിൽ ഋണമായിട്ടും ആ ജ്യാവിന്റെ സംസ്കാരപ്രകാരം. ഓജപദത്തിങ്കൽ കിഴെ പഠിതജ്യാക്കളെ ഉപയോഗിക്കുന്ന പക്ഷം, ഭുജയിൽ ധനമായിട്ടും കോടിയിൽ ഋണമായിട്ടും സംസ്കാരം. മേലേ ജ്യാവാണെങ്കിൽ ഭുജയിൽ ഋണമായിട്ടും കോടിയിൽ ധനമായിട്ടും സംസ്കാരം; യുഗപദത്തിൽ ഇതിന്നു വിപരീതം സംസ്കാരക്രമം. പദാദി മുതൽ ഇഷ്ടപ്രദേശംവരെയുള്ള

ചാപഭാഗത്തിന്റെ ജ്യാക്കളെയാണ് കാണേണ്ടതു്. ഇവയെല്ലാം ഉദാഹരണങ്ങളെ ക്കൊണ്ട് മുകളിൽ സ്പഷ്ടമാക്കുന്നുണ്ട്.

ഇഷ്ടപ്രദേശം പ്രഥമപദത്തിലെന്നും സ്വസമീപസമീരിതജ്യാക്കൾ കീഴെ സന്ധിയിലു ള്ളവ എന്നും കല്പിച്ച പറയുന്നു. ഭുജാകോടികളെ $\underline{ഭ}$, $\underline{ക}$ എന്നും കല്പിക്കു. അപ്പോളിവിടെ ഭുജ യിൽ ധനമായിട്ടും കോടിയിൽ ഋണമായിട്ടും സംസ്കാരം ചെയ്യേണം.

$$\begin{aligned}
\text{ഹാരകം } ഹ &= \frac{13751}{2ച}.\\
\text{ഇഷ്ടപ്രദേശഭുജാ} &= ഭ + \left(ക - \frac{ഭ}{ഹ}\right) \times \frac{2}{ഹ}\\
\text{ഇഷ്ടപ്രദേശകോടി} &= ക - \left(ഭ + \frac{ക}{ഹ}\right) \times \frac{2}{ഹ}
\end{aligned}$$

ഈ ക്രിയയുടെ യുക്തിയാണ് യുക്തിഭാഷയിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു്. ഇവിടെ ചാപാ ർദ്ധത്തെ സമസ്തജ്യാവെന്നു കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

$$\begin{aligned}
\text{പഠിതജ്യാക്കൾ (സന്ധിയിങ്കലെ)} &= \underline{ഭ}, \underline{ക}.\\
\text{ശിഷ്ടചാപം} &= \underline{ച} \text{ എന്നും മുമ്പിലെപ്പോലെ കല്പിക്കു.}\\
\text{ശിഷ്ടചാപാർദ്ധത്തിന്റെ കോടിഖണ്ഡം} &= \frac{ച}{2} \times \frac{ഭ}{\text{ത്രിജ്യാ}}.\\
&= \frac{ഭ}{\text{ത്രിജ്യാ}/ച/2}\\
\text{ഹാരകം} &= \frac{\text{ത്രിജ്യാ}}{\frac{1}{2}ച}\\
&= \frac{2\text{ത്രിജ്യാ}}{ച}\\
&= \frac{4\text{ത്രിജ്യാ}}{2ച}\\
&= \frac{4 \times 3437\text{ഇലി} - 45\text{വിലി}}{2ച}\\
&= \frac{13751}{2ച} \ (=ഹ).\\
\therefore\ \text{ശിഷ്ടചാപാർദ്ധത്തിന്റെ കോടിഖണ്ഡം} &= \frac{ഭ}{ഹ}\\
\therefore\ \text{ശിഷ്ടചാപാർദ്ധഖണ്ഡത്തിന്റെ ഭുജാഖണ്ഡം} &= \frac{ക}{ഹ}\\
\text{ശിഷ്ടചാപാർദ്ധാഗ്രത്തിങ്കലെ ഭുജാ} &= ഭ + \frac{ക}{ഹ} (=ഭ_1)\\
\text{ശിഷ്ടചാപാർദ്ധാഗ്രത്തിങ്കലെ കോടി} &= ക - \frac{ഭ}{ഹ} (=ക_1)\\
\text{ശിഷ്ടചാപത്തിന്റെ ഭുജാഖണ്ഡം} &= ച \times \frac{ക_1}{\text{ത്രിജ്യാ}}.\\
&= \frac{ക_1}{\text{ത്രിജ്യാ}/ച}\\
&= \frac{ക_1}{\frac{1}{2}ഹ}
\end{aligned}$$

$$= \frac{2ക_1}{ഹ}$$

$$\text{അതു പോലെതന്നെ ശിഷ്ട ചാപത്തിന്റെ കോടിഖണ്ഡം} = \frac{2ഭ_1}{ഹ}$$

$$\text{അപ്പോൾ ശിഷ്ടചാപാഗ്രഭുജാ} = ഭ + \frac{2ക_1}{ഹ} = ഭ + \left(ക - \frac{ഭ}{ഹ}\right) \times \frac{2}{ഹ}$$

$$\text{ശിഷ്ടചാപാഗ്രകോടി} = ക - \frac{2ഭ_1}{ഹ}$$

$$= ക - \left(ഭ + \frac{ക}{ഹ}\right) \times \frac{2}{ഹ}$$

ഉദാഹരണം:

ഗ്രഹസ്ഫുടം $=$ 4 രാശി $-$ 9 തിയ്യതി $-$ 44 ഇലി.

വൃത്തത്തിൽ ഒരു പദത്തിന്നു മൂന്നു രാശി; ഒരു രാശിക്ക് എട്ടുജ്യാവ്; $3\frac{1}{4}$ തിയ്യതിക്കൊരു ജ്യാവ്.

ഗ്രഹം ദ്വിതീയപദത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.

$\therefore$ പദാദിയിങ്കന്നു ഇഷ്ടപ്രദേശംവരെയുള്ള ചാപഭാഗം $= (4^s - 9^\circ - 44') - (3^s - 0 - 0)$ ($s =$ രാശി; $^\circ =$ തിയ്യതി; $' =$ കലാ). $= 1^s - 9^\circ - 44'$.

ഇതിൽ ഒരു രാശിക്ക് എട്ടുജ്യാവും പോയി. $7\frac{1}{2}$ തിയ്യതിക്കു രണ്ടുജ്യാവും പോയി. ഇങ്ങനെ പത്തുജ്യാവും പോയിട്ടു ശിഷ്ടചാപം $= (1^s - 9^\circ - 44') - (1^s - 7^\circ - 30') = 2^\circ - 14' = 134'$.

യുഗ്മപദമായതുകൊണ്ടു ഗതംകോടി, ഏഷ്യംഭുജ.

$\therefore$ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിന്നു കീഴെ സന്ധിയിലുള്ള കോടിജ്യാവു 10-ആം ജ്യാവ്, ഭുജാജ്യാവു 14-ആം ജ്യാവ്.

ഇഷ്ടപ്രദേശം യുഗ്മപദത്തിലാകകൊണ്ടും കീഴെ സന്ധിയിലുള്ള ജ്യാക്കളെ ഉപയോഗിക്കകൊണ്ടും, ഭുജയിൽ സംസ്കാരം ഋണം, കോടിയിൽ ധനം.

$$\text{ഹാരകം} = \frac{13751}{2 \times 134} = 51$$

$$\text{10-ആം ജ്യാവ്} = 2092' - 46''\ \text{(കോടി)} - \text{തന്വീവ്രീളാനിഷ്ഠാ.}$$

$$\text{14-ആം ജ്യാവ്} = 2727' - 21''\ \text{(ഭുജ)} - \text{കണ്ണുസൂത്രം സ്ഥിരം.}$$

ഇഷ്ടപ്രദേശകോടിയെ ആദ്യം കാണുന്നു.

$$\frac{\text{കോടിജ്യാ}}{\text{ഹാരകം}} = \frac{2092' - 46''}{51} = 41' - 2''(-)$$

$$\text{ഭുജാജ്യാ} - 41' - 2'' = (2727' - 21) - (41' - 2'') = 2686' - 19''.$$

$$\frac{\text{സംസ്കൃതഭുജാജ്യാവു} \times 2}{\text{ഹാരകം}} = \frac{2686' - 19'' \times 2}{51} = 105' - 21''(+)$$

$$\therefore\ \text{ഗ്രഹത്തിന്റെ കോടിജ്യാവ്} = 2092' - 46'' + 105' - 21' = 2198' - 7''.$$

പിന്നെ ഭുജാജ്യാവ്:

$$\frac{\text{ഭുജാജ്യാവ്}}{\text{ഹാരകം}} = \frac{2727' - 21''}{51} = 53' - 29''(+)$$

$$\text{കോടിജ്യാവ്} + 53' - 29' = 2146 - 15''$$

$$\frac{\text{സംസ്കൃതകോടിജ്യാവ്} \times 2}{\text{ഹാരകം}} = \frac{2146' - 15'' \times 2}{61} = 84' - 10''(-)$$

$$\text{ഗ്രഹത്തിന്റെ ഭുജാജ്യാവ്} = (2727' - 21'')(84' - 10'') = 2643' - 11''$$

ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കന്നു മേലെയുള്ള സന്ധിയിങ്കലെ ഭുജാകോടികളെ വെച്ചിട്ടും ക്രിയ ചെയ്യാം. അപ്പോൾ കോടി 11-ആം ജ്യാവ്, ഭുജ 13-ആം ജ്യാവുമായിട്ടുവരും.

$$\text{അവിടെ ശിഷ്ടചാപം} = (3^\circ - 45') - (2^\circ - 14') = 1^\circ - 31' = 91'.$$

$$\text{11-ആം ജ്യാവ്} = 2266' - 40''\ \text{(കോടി)} - \text{അഭിഷിഞ്ചേച്ശ്രേഷ്ഠം.}$$

$$\text{13-ആം ജ്യാവ്} = 2584' - 38''\ \text{(ഭുജ)} - \text{ദൃഗ്ഗ്വദോമരഃ}$$

ആദ്യം കോടിജ്യാവിനെ കാണുന്നു. യുഗ്മപദത്തിൽ മേലേ സന്ധിയിലുള്ള ഭുജാകോടികളെ വച്ചു ക്രിയ ചെയ്യുമ്പോൾ, ഭുജയിങ്കൽ ധനമായിട്ടും കോടിയിങ്കൽ ഋണമായിട്ടും സംസ്കാരക്രമം.

$$\text{ഹാരകം} = \frac{13751}{2 \times 91} = 76.$$

$$\frac{\text{കോടിജ്യാവു}}{\text{ഹാരകം}} = \frac{2266' - 40''}{76} = 29' - 49''(+)$$

$$\text{ഭുജാ} + 29 - 49'' = 2584' - 38'' + 29' - 49'' = 2614' - 27''.$$

$$\frac{\text{സംസ്കൃതഭുജാ} \times 2}{76} = \frac{2614' - 27'' \times 2}{76} = 68' - 48''(-)$$

$$\text{അപ്പോൾ ഗ്രഹത്തിന്റെ കോടി} = (2266' - 40'') - (68' - 48) = 2197' - 52''.$$

പിന്നെ ഭുജാജ്യാവു :-

$$\frac{\text{ഭുജാജ്യാവ്}}{\text{ഹാരകം}} = \frac{2584' - 38'}{76} = 34' - 0''(-)$$

$$\text{കോടി} - 34' - 0' = (2266' - 40'') - (34' - 0'') = 2232' - 40''$$

$$\frac{\text{സംസ്കൃതകോടി} \times 2}{\text{ഹാരകം}} = \frac{2232' - 40'' \times 2}{76} = 58' - 45''(+)$$

$$\text{ഗ്രഹത്തിന്റെ ഭുജാ} = 2584' - 38'' + 58' - 45'' = 2643' - 23''$$

ഇവിടെ ഫലങ്ങളിൽ വിലിയിൽ വ്യത്യാസം കാണുന്നുണ്ട്. അതിന്നുള്ള ഹേതു മുകളിൽ പറയുന്നുണ്ട്.

പഞ്ചബോധത്തിൽ ഈ ക്രിയതന്നെ ഇപ്രകാരമാണ് പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത്.

" . . . . അതഃ (കേന്ദ്രത്തിന്റെ ഭുജയിൽനിന്ന്)
പൂർണ്ണഭോജ്ജ്യം വിജഹ്യാൽ
ശിഷ്ടജ്യാവികലാഹത "സ്ഥിതിസടാ

മാസേശ്വരോ" ഹാരകോ |
ദോൎജ്ജ്യം"നീത"ഹതാമനേന വിമജേൽ
ലബ്ധം തു കോട്യാസ്ത്യജേൽ
താം "നേത്രാസ്യ" ഹതാം ഹരേൽ ഫലായുതാ
ദോൎജ്ജ്യം . . . . " ||

∴ "ഇഷ്ടദോഃ കോടിധനുഷോഃ" എന്ന ദിക്കിൽ ഹാരകം $= \frac{2 \times \text{ത്രിജ്യാ}}{\text{ശിഷ്ടചാപം}}$.

പഞ്ചബോധത്തിൽ "തിഥിസദാമാസേശ്വരഃ" (24751776) എന്ന സംഖ്യ ത്രിജ്യയെ തല്പരയാക്കിയിട്ടുള്ളതിന്റെ ഇരട്ടിയാണ്. ഇവിടേയും ഹാരകം.

$$= \frac{2 \times \text{ത്രിജ്യാ}}{\text{ശിഷ്ടചാപം}}$$

മൂലത്തിൽ ശിഷ്ടചാപത്തെ സമസ്തജ്യാവായി കല്പിച്ച് അതിന്റെ ഭുജാകോടികളെ ത്രൈരാശികംകൊണ്ടു വരുത്തിയാൽ അവ ഭുജാകോടിഖണ്ഡങ്ങളായിരിക്കുമെന്നും അവയെ സ്വസമീപസമീരിതജ്യാക്കളിൽ സംസ്കരിച്ചാൽ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കലഗ്രമായിരിക്കുന്ന ഭുജാകോടികൾ വരുമെന്നും ഇവിടെ സൂക്ഷ്മതപോരായ്കിൽ ആവശ്യംപോലെ ഇഷ്ടചാപാൎദ്ധത്തെയോ തച്ചതുരാംശത്തെയോ തദഷ്ടാംശത്തേയോ സമസ്തജ്യാവായി കല്പിച്ചു ക്രിയ ചെയ്താൽ സൂക്ഷ്മതരങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഭുജാകോടികളുണ്ടാകുമെന്നും പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇവിടെ സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന സ്ഥൂലത്വം തന്നെയാണ് മുൻ ഉദാഹരണത്തിൽ ഫലങ്ങളുടെ വിലയിൽ വന്ന വ്യത്യാസത്തിനും കാരണം.

ഇങ്ങനെ ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലഗ്രമായിരിക്കുന്ന ജ്യാക്കളെ പ്രമാണഫലങ്ങളായി കല്പിക്കുമ്പോൾ ചാപസന്ധിയിങ്കൽ അഗ്രങ്ങളായിരിക്കുന്ന സമസ്തജ്യാകൎണ്ണത്തിന്റെ ഭുജാകോടികളായിട്ടു ചാപസന്ധിയിങ്കലെ ഭുജാകോടിജ്യാക്കൾ ഉളവാകും. അവിടെ പ്രഥമചാപമദ്ധ്യത്തിങ്കലവറ്റെക്കൊണ്ടു പ്രഥമചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിലേവ. അവിടേയും **പ്രമാണഫലം പൂൎവ്വാപരമെങ്കിൽ ഇഛാഫലം ദക്ഷിണോത്തരം. പ്രമാണഫലം ദക്ഷിണോത്തരമെങ്കിൽ ഇച്ഛാഫലം പൂൎവ്വാപരം എന്നിതു നിയതം.** പിന്നെയുമുണ്ട്. ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലഗ്രം പ്രമാണഫലങ്ങൾക്ക് എങ്കിൽ ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലഗ്രം ഇച്ഛാഫലങ്ങൾക്ക്. ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കൽ പ്രമാണഫലങ്ങൾ അഗ്രമെങ്കിൽ ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ അഗ്രങ്ങൾ ഇച്ഛാഫലങ്ങൾക്ക് എന്നിതു നിയതം. ഇവിടെ എല്ലാ ഖണ്ഡജ്യാക്കളും വരുത്തുന്നേടത്തു സമസ്തജ്യാത്രിജ്യാക്കൾ തന്നെ ഇച്ഛാപ്രമാണങ്ങളാകുന്നത്. എന്നിട്ടു തുല്യങ്ങൾ അവ. പ്രമാണഫലങ്ങൾക്കു ഭേദമുണ്ടാകകൊണ്ടത്രേ ഇച്ഛാഫലങ്ങൾക്കു ഭേദമുണ്ടാകുന്നു.

ഖണ്ഡങ്ങളേയും ഖണ്ഡാന്തരങ്ങളേയും വരുത്തുംപ്രകാരം

ഇവിടെ ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലഗ്രങ്ങളായിട്ടിരിക്കുന്ന കോടികളുടെ അന്തരംകൊണ്ട് ഇച്ഛാരാശിയെ ഗുണിപ്പൂ എങ്കിൽ ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലഗ്രമായിരിക്കുന്ന ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളുടെ അന്തരം വരും. പിന്നെ ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലെ ദോഃഖണ്ഡംകൊണ്ടു

ഗുണിക്കിൽ ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലെ കോടിഖണ്ഡാന്തരം വരും. എന്നാലിവിടെ പ്രഥമചാപസന്ധിയിങ്കലെ ഭുജാജ്യാവിനെ ചാപഖണ്ഡസമസ്തജ്യാവുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ പ്രഥമചാപമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന കോടിഖണ്ഡം വരും. പിന്നെ ആ ഖണ്ഡത്തെ സമസ്തജ്യാവുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. എന്നാൽ പ്രഥമചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന ഭുജാഖണ്ഡത്തിങ്കന്നു രണ്ടാംചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന ഭുജാഖണ്ഡം എത്ര കുറയും അതുണ്ടാകും. എന്നാൽ പ്രഥമജ്യാവിനെ ചാപഖണ്ഡസമസ്തജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം പ്രഥമഖണ്ഡജ്യാവും ദ്വിതീയഖണ്ഡജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ചാപസന്ധിയിങ്കലെ പഠിതജ്യാക്കൾക്കു പിണ്ഡജ്യാക്കൾ എന്നും ഉണ്ടു പേർ എന്നാലതതു പിണ്ഡജ്യാക്കളെ സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ഖണ്ഡജ്യാന്തരം.[13]

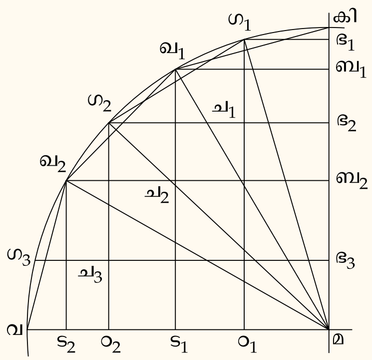
വ്യാഖ്യാനം 13: ഭുജാഖണ്ഡം corresponds to the first differential of $\sin\theta$ which is $\cos\theta d\theta$ where $d\theta$ corresponds to ചാപഖണ്ഡം, and $\sin\theta$, $\cos\theta$ corresponds to ഭുജാജ്യാ and കോടിജ്യാ, and θ to ഇഷ്ടചാപം.

ഭുജാഖണ്ഡാന്തരം corresponds to the second differential of $\sin\theta$ ie the first differential of $\cos\theta d\theta$ ie $-\sin\theta(d\theta)^2$.

Similarly, കോടിഖണ്ഡം $\rightarrow$ the first differential of $\cos\theta$ ie $-\sin\theta d\theta$ and കോടിഖണ്ഡാന്തരം $\rightarrow -\cos\theta(d\theta)^2$.

ഇവിടെ യാതൊരു ചാപഖണ്ഡസന്ധിയിൽ അഗ്രമായിട്ടിരിക്കുന്നു പിണ്ഡജ്യാവ് ഇതിന്റെ ഇരുപുറവുമുള്ള ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ ഖണ്ഡജ്യാക്കൾ യാവചിലവ ഇവറ്റിന്റെ അന്തരങ്ങൾ ഫലമായിട്ടുണ്ടാകുന്നത്. ഇവിടെ പിന്നെ ഗുണകാരത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു ഫലവും ഹാരകത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു ഗുണ്യവും കൊള്ളാം. എന്നിട്ട് അതതു ഖണ്ഡാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അതതു പിണ്ഡജ്യാവിനെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ അതതു പിണ്ഡജ്യാവിനെ. എന്നാലും അതതു ഖണ്ഡാന്തരങ്ങൾ വരും. ഇങ്ങനെ ഖണ്ഡങ്ങളും ഖണ്ഡാന്തരങ്ങളും വരുത്തുംപ്രകാരം.

വ്യാഖ്യാനം: പരിലേഖം 34-ൽ; *മ* വൃത്തകേന്ദ്രം. *കിഖ*$_1$, *ഖ*$_1$*ഖ*$_2$, *ഖ*$_2$*വ* = മൂന്നു തുല്യചാപഖണ്ഡങ്ങൾ. *ഗ*$_1$, *ഗ*$_2$, *ഗ*$_3$ ഈ ഖണ്ഡങ്ങളുടെ മദ്ധ്യങ്ങൾ.



പരിലേഖം (34)

$$\text{പ്രഥമചാപാഗ്രഭുജാ} = \underline{\text{ഖ}_1\,\text{ബ}_1}$$

$$\text{ദ്വിതീയചാപാഗ്രഭുജാ} = \underline{\text{ഖ}_2\,\text{ബ}_2}$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{പ്രഥമചാപഖണ്ഡ}\\ \text{മദ്ധ്യത്തിങ്കലെ ഭുജാ}\end{array}\right\} = \underline{\text{ഗ}_1\,\text{ഭ}_1}$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{ദ്വിതീയചാപഖണ്ഡ}\\ \text{മദ്ധ്യത്തിങ്കലെ ഭുജാ}\end{array}\right\} = \underline{\text{ഗ}_2\,\text{ഭ}_2}$$

$$\text{പ്രഥമചാപാഗ്രകോടി} = \underline{\text{ഖ}_1\,\text{ട}_1}$$

$$\text{ദ്വിതീയചാപാഗ്രകോടി} = \underline{\text{ഖ}_2\,\text{ട}_2}$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{പ്രഥമചാപഖണ്ഡ}\\ \text{മദ്ധ്യത്തിലെ കോടി}\end{array}\right\} = \underline{\text{ഗ}_1\,\text{ഠ}_1}$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{ദ്വിതീയചാപഖണ്ഡ}\\ \text{മദ്ധ്യത്തിലെ കോടി}\end{array}\right\} = \underline{\text{ഗ}_2\,\text{ഠ}_2}$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{പ്രഥമചാപമദ്ധ്യത്തിങ്കലെ}\\ \text{കോടിഖണ്ഡം}\end{array}\right\} = \text{ഗ}_1\,\text{ച}_1 = \frac{\text{ഖ}_1\,\text{ബ}_1 \times \text{സമസ്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

$$\text{ഗ}_1\,\text{ച}_1 = \text{ഭ}_1\,\text{ഭ}_2 = \text{മ}\,\text{ഭ}_1 - \text{മ}\,\text{ഭ}_2$$

$$\frac{\text{മ}\,\text{ഭ}_1 \times \text{സമസ്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാ}} = \text{ഖ}_1\,\text{ബ}_1 = \text{പ്രഥമചാപഭുജാഖണ്ഡം}$$

$$\frac{\text{മ}\,\text{ഭ}_2 \times \text{സമസ്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാ}} = \text{ഖ}_2\,\text{ച}_2 = \text{ദ്വിതീയഭുജാഖണ്ഡം}$$

$$\begin{aligned}\frac{\text{ഖ}_1\,\text{ബ}_1 \times \text{സമസ്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാ}} \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാ}} &= \text{ഗ}_1\,\text{ച}_1 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാ}}\\ &= \text{മ}\,\text{ഭ}_1 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാ}} - \text{മ}\,\text{ഭ}_2 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാ}}\\ &= \text{ഖ}_1\,\text{ബ}_1 - \text{ഖ}_2\,\text{ച}_2\\ &= \text{ആദ്യഭുജാഖണ്ഡം} - \text{ദ്വിതീയഭുജാഖണ്ഡം}\\ &= \text{ആദ്യദ്വിതീയജ്യാക്കളുടെ ഭുജാഖണ്ഡാന്തരം}\end{aligned}$$

അതതു പിണ്ഡജ്യാവിനെ സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ആ ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെയും മേലെ ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെയും ഭുജാഖണ്ഡാന്തരമുണ്ടാകും.

ഇതുപോലെതന്നെ ചാപമദ്ധ്യത്തിങ്കലുള്ള ദോഃഖണ്ഡത്തെ സമസ്തജ്യാവുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ അഗ്രത്തിലെ കോടിഖണ്ഡാന്തരം വരും.

$$\frac{\text{ഗ}_1\,\text{ഭ}_1 \times \text{സമസ്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാ}} = \text{കി}\,\text{ബ}_1 = \text{പ്രഥമചാപകോടിഖണ്ഡം}$$

$$\begin{aligned}\frac{\text{ഗ}_2\,\text{ച}_2 \times \text{സമസ്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാ}} &= \left(\text{ഗ}_2\,\text{ഭ}_2 - \text{ഗ}_1\,\text{ഭ}_1\right) \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാ}}\\ &= \text{ഗ}_2\,\text{ഭ}_2 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാ}} - \text{ഗ}_1\,\text{ഭ}_1 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാ}}\\ &= \text{ഖ}_1\,\text{ച}_2 - \text{കി}\,\text{ബ}_1\\ &= \text{കോടിഖണ്ഡാന്തരം.}\end{aligned}$$

“ഇവിടെ പിന്നെ ഗുണകാരത്തിന്റെ സ്ഥാനത്ത് . . . . . . അതതു ഖണ്ഡാന്തരം വരും” എന്ന വാക്യത്തിന്റെ അൎത്ഥം വ്യക്തമാക്കാം. ഇവിടെ സമസ്തജ്യാവൎഗ്ഗം ഗുണകാരം, ത്രിജ്യാവൎഗ്ഗം ഹാരകം, പ്രഥമജ്യാവു ഗുണ്യം, ഫലം ഖണ്ഡാന്തരം. പ്രഥമജ്യാവിനെ ഹാരകവും, ആദ്യദ്വിതീയഭുജാഖണ്ഡാന്തരത്തെ ഗുണകാരവും, ദ്വിതീയപിണ്ഡജ്യാവിനെ ഗുണ്യവുമാക്കി കല്പിച്ചാൽ ദ്വിതീയതൃതീയഭുജാഖണ്ഡാന്തരം വരും.

$$\text{പ്രഥമജ്യാ} \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവൎഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവൎഗ്ഗം}} = \text{ആദ്യദ്വിതീയഭുജാഖണ്ഡാന്തരം}$$

$$\therefore \frac{\text{സമസ്തജ്യാവൎഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവൎഗ്ഗം}} = \frac{\text{ആദ്യദ്വിതീയഭുജാഖണ്ഡാന്തരം}}{\text{പ്രഥമജ്യാ}}$$

$$\text{ദ്വിതീയജ്യാ} \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവൎഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവൎഗ്ഗം}} = \text{ദ്വിതീയതൃതീയഭുജാഖണ്ഡാന്തരം}$$

$$\therefore \text{ ദ്വിതീയപിണ്ഡജ്യാ} \times \frac{\text{ആദ്യദ്വിതീയഭുജാഖണ്ഡാന്തരം}}{\text{പ്രഥമജ്യാ}} = \text{ദ്വിതീയതൃതീയഭുജാഖണ്ഡാന്തരം.}$$

ഇപ്രകാരം തന്നെ $\frac{\text{തൃതീയപിണ്ഡജ്യാ} \times \text{ദ്വിതീയതൃതീയഭുജാഖണ്ഡാന്തരം}}{\text{ദ്വിതീയപിണ്ഡജ്യാ}}$ തൃതീയചതുൎത്ഥഭുജാഖണ്ഡാന്തരം. ഇങ്ങനെ ക്രമേണ കണ്ടുകൊൾക.

ഖണ്ഡാന്തരയോഗവും ഖണ്ഡാന്തരസംകലിതാദിയും ഇഷ്ടജ്യാശരവും

അനന്തരം ഖണ്ഡാന്തരയോഗം ഖണ്ഡാന്തരസംകലിതം എന്നു തുടങ്ങിയുള്ളവറ്റെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെക്കൊണ്ട് ഇഷ്ടജ്യാശരങ്ങളെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ പ്രഥമചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ഖണ്ഡജ്യാവാകുന്നതും പിണ്ഡജ്യാവാകുന്നതും ഒന്നേ എന്നോ ചൊല്ലിയല്ലോ മുമ്പിൽ. ഇതിനെ സമസ്തജ്യാവൎഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ത്രിജ്യാവൎഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം നടേത്തെ ഖണ്ഡജ്യാവും രണ്ടാംഖണ്ഡജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരം. ഈ അന്തരത്തെ നടേത്തെ ഖണ്ഡജ്യാവിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ ശേഷം രണ്ടാംഖണ്ഡജ്യാവ്. പിന്നെ അതിനെ നടേത്തെ ഖണ്ഡജ്യാവിൽ കൂട്ടിയാൽ രണ്ടാംപിണ്ഡജ്യാവാകും. ഇതിനെ സമസ്തജ്യാവൎഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ത്രിജ്യാവൎഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം രണ്ടാംഖണ്ഡജ്യാവും മൂന്നാംഖണ്ഡജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരം. ഇതിനെ രണ്ടാംഖണ്ഡജ്യാവിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ മൂന്നാംഖണ്ഡജ്യാവുണ്ടാവും. ഇതിനെ രണ്ടാം പിണ്ഡജ്യാവിൽകൂട്ടിയാൽ മൂന്നാംപിണ്ഡജ്യാവുണ്ടാകും. ഇവ്വണ്ണം അതാതു പിണ്ഡജ്യാവിനെ ഗുണിച്ച ഹരിച്ചാൽ അതിന്റെ മീത്തെ ഖണ്ഡാന്തരം വരും. പിന്നെ നടേത്തെ തുടങ്ങി ഇഷ്ടചാപഖണ്ഡത്തോളമുള്ള ഖണ്ഡാന്തരങ്ങളെ ഒക്കെക്കൂട്ടി നടേത്തെ ഖണ്ഡജ്യാവിങ്കന്നു കളവൂ. ശിഷ്ടമിഷ്ടഖണ്ഡജ്യാവായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഈ ഖണ്ഡജ്യാന്തരങ്ങളെ ഒക്കെക്കൂട്ടി ഒരിക്കലെ വരുത്തേണമെങ്കിൽ ഇഷ്ടജ്യാവിങ്കന്നു നടേത്തെ പഠിതജ്യാക്കളെ ഒക്കെക്കൂട്ടി സമസ്തജ്യാവൎഗ്ഗം

കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ഖണ്ഡാന്തരയോഗം. ഇതിനെ പ്രഥമഖണ്ഡജ്യാവിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ ശിഷ്ടമിഷ്ടഖണ്ഡജ്യാവായി വരും. ഇവിടെ ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലെ ശരഖണ്ഡയോഗത്തെ സമസ്തജ്യാവിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യ കൊണ്ടു ഹരിച്ചാലും ഖണ്ഡാന്തരയോഗം വരും. ശരഖണ്ഡയോഗം പിന്നെ മദ്ധ്യത്തിങ്കലേതു് ഉണ്ടാവാൻ ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലെ ഭുജാജ്യാപിണ്ഡയോഗത്തെ ചാപഖണ്ഡസമസ്തജ്യാവിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. എന്നാൽ ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യോത്ഥശരഖണ്ഡയോഗമുണ്ടാകും.

വ്യാഖ്യാനം: $\text{ഭ}_1, \text{ഭ}_2, \text{ഭ}_3, \ldots$ ക്രമേണയുള്ള ഭുജകളെന്നു കല്പിക്കു.

എന്നാൽ ക്രമേണയുള്ള ഭുജാഖണ്ഡങ്ങൾ = $\text{ഭ}_1 - 0, \text{ഭ}_2 - \text{ഭ}_1, \text{ഭ}_3 - \text{ഭ}_2, \ldots$

ഭുജാഖണ്ഡാന്തരങ്ങൾ $= \text{ഭ}_1 - (\text{ഭ}_2 - \text{ഭ}_1), (\text{ഭ}_2 - \text{ഭ}_1) - (\text{ഭ}_3 - \text{ഭ}_2), \ldots$

ഈ ഖണ്ഡാന്തരങ്ങളെ ക്രമേണ $\text{ഖ}_1, \text{ഖ}_2, \text{ഖ}_3, \ldots$ എന്നു കല്പിക്കുക.

$$\text{ഭ}_1 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}} = \text{ഖ}_1 = \text{ഭ}_1 - (\text{ഭ}_2 - \text{ഭ}_1) = 2\text{ഭ}_1 - \text{ഭ}_2$$

$$\text{ഭ}_2 - \text{ഭ}_1 = \text{ഭ}_1 - \text{ഭ}_1 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}} \ \text{(രണ്ടാംഖണ്ഡജ്യാവ്)}$$

$$\therefore\ \text{ഭ}_2 = \text{ഭ}_1 + (\text{ഭ}_2 - \text{ഭ}_1)$$

$$= 2\text{ഭ}_1 - \text{ഭ}_1 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}} \ \text{(രണ്ടാംപിണ്ഡജ്യാവ്)}$$

$$\text{ഭ}_2 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}} = \text{ഖ}_2 = (\text{ഭ}_2 - \text{ഭ}_1) - (\text{ഭ}_3 - \text{ഭ}_2).$$

$$\therefore\ \text{ഭ}_3 - \text{ഭ}_2 = (\text{ഭ}_2 - \text{ഭ}_1) - \text{ഭ}_2 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

$$\text{ഭ}_3 = \text{ഭ}_2 + (\text{ഭ}_2 - \text{ഭ}_1) - \text{ഭ}_2 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

ഇങ്ങനെ ആദ്യജ്യാവിങ്കന്നുതന്നെ മേലെയുള്ള എല്ലാ പിണ്ഡജ്യാക്കളെയും വരുത്താം. ഇഷ്ടജ്യാവ് അഞ്ചാമത്തേതെന്നു വിചാരിക്കുക.

$$\begin{aligned}
\text{ഖ}_1 &= \text{ഭ}_1 - (\text{ഭ}_2 - \text{ഭ}_1) \\
\text{ഖ}_2 &= (\text{ഭ}_2 - \text{ഭ}_1) - (\text{ഭ}_3 - \text{ഭ}_2) \\
\text{ഖ}_3 &= (\text{ഭ}_3 - \text{ഭ}_2) - (\text{ഭ}_4 - \text{ഭ}_3) \\
\text{ഖ}_4 &= (\text{ഭ}_4 - \text{ഭ}_3) - (\text{ഭ}_5 - \text{ഭ}_4)
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \text{ഖ}_1 + \text{ഖ}_2 + \text{ഖ}_3 + \text{ഖ}_4 = \text{ഭ}_1 - (\text{ഭ}_5 - \text{ഭ}_4)$$

$$\text{അഞ്ചാംജ്യാഖണ്ഡം} = \text{ഭ}_5 - \text{ഭ}_4 = \text{ഭ}_1 - (\text{ഖ}_1 + \text{ഖ}_2 + \text{ഖ}_3 + \text{ഖ}_4)$$

ഇഷ്ടചാപഖണ്ഡത്തോളമുള്ള ഖണ്ഡാന്തരങ്ങളെയെല്ലാംകൂട്ടി ആദ്യഖണ്ഡത്തിൽനിന്നു കളഞ്ഞാൽ ഇഷ്ടജ്യാവിന്റെ ഖണ്ഡജ്യാവു വരും.

$$\text{ഖ}_1 = \text{ഭ}_1 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

$$\text{ഖ}_2 = \text{ഉ}_2 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\therefore\ \text{ഖ}_1 + \text{ഖ}_2 + \text{ഖ}_3 + \cdots = (\text{ഉ}_1 + \text{ഉ}_2 + \text{ഉ}_3 + \cdots) \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

$$\text{അപ്പോൾ ഖണ്ഡാന്തരയോഗം} = \text{പഠിതജ്യായോഗം} \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

$$= \text{ആദ്യജ്യാവ്} - \text{ഇഷ്ടജ്യാഖണ്ഡം.}$$

$$\text{ഇഷ്ടജ്യാഖണ്ഡം} = \text{ആദ്യജ്യാവ്} - \text{ഇഷ്ടജ്യാവിന്നു കീഴേയുള്ള}$$
$$\text{ഖണ്ഡാന്തരങ്ങളുടെ യോഗം.}$$

പരിലേഖം 34-ൽ ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലെ ശരഖണ്ഡങ്ങൾ $\text{ഭ}_1\text{ഭ}_2$, $\text{ഭ}_2\text{ഭ}_3$, $\text{ഭ}_3\text{ഭ}_4$, $\cdots\cdots$ എന്ന്.

$$\text{ഉ}_1 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവ്}}{\text{ത്രിജ്യാ}} = \text{ഗ}_1\text{ച}_1 = \text{ഭ}_1\text{ഭ}_2$$

$$\text{ഉ}_2 \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവ്}}{\text{ത്രിജ്യാ}} = \text{ഭ}_2\text{ഭ}_3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(\text{ഉ}_1 + \text{ഉ}_2 + \text{ഉ}_3 + \cdots) \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവ്}}{\text{ത്രിജ്യാ}} = \text{ഭ}_1\text{ഭ}_2 + \text{ഭ}_2\text{ഭ}_3 + \text{ഭ}_3\text{ഭ}_4 + \cdots$$

$$\text{അപ്പോൾ മദ്ധ്യോത്ഥശരഖണ്ഡയോഗം} = \frac{\text{പിണ്ഡയോഗം} \times \text{സമസ്തജ്യാവ്}}{\text{ത്രിജ്യാ}}$$

തന്ത്രസംഗ്രത്തിൽ "വിലിപ്താദശകോനാജ്യാ ..." ഇത്യാദി ശ്ലോകങ്ങളെക്കൊണ്ടു പല പ്രകാരേണയുള്ള മഹാജ്യാനയനങ്ങളുടെ യുക്തിയെയാണിവിടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

"വിലിപ്താദശകോനാ ജ്യാ രാശ്യഷ്ടാംശധനുഃകലാഃ |
ആദ്യജ്യാർദ്ധാത്തതോ ഭക്തേ സാർദ്ധദേവാശ്വിഭിസ്തതഃ ||
ത്യക്തേ ദ്വിതീയഖണ്ഡജ്യാ ദ്വിതീയാജ്യാ ച തദ്യുതിഃ |
തതസ്തേനൈവ ഹാരേണ ലബ്ധം ശോദ്ധ്യം ദ്വിതീയതഃ ||
ഖണ്ഡാത്തൃതീയഖണ്ഡസ്സ്യാൽ ദ്വിതീയസ്തദ്യുതേഃ ഗുണഃ |
തൃതീയസ്സ്യാൽ തതശ്ചൈവം ചതുർത്ഥാദ്യാഃ ക്രമാൽ ഗുണാഃ || ഇതി

ആദ്യജ്യാവു = $224' - 50''$. "വിലിപ്താദേശകോന്യാജ്യാ" എന്നു പറഞ്ഞതുകൊണ്ടു വിലിപ്തയോളം സൂക്ഷ്മമാക്കുവാൻ മാത്രമേ ഉദ്ദേശിച്ചിട്ടുള്ളൂ എന്നു സൂചിപ്പിച്ചു.

$$\text{ജ്യാചാപാന്തരം} = 10\ \text{വിലി}$$

$$\text{ഹാരകം} = \frac{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

$$\text{ആദ്യജ്യാവിന്റെശരം} = \text{ത്രിജ്യാ} - \sqrt{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം} - \text{ആദ്യജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

$$\text{ത്രിജ്യാ} = 3437' - 44'' - 48'''$$

$$\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം} = 11818102 - 50 - 40$$

പരിലേഖം 36-ൽ

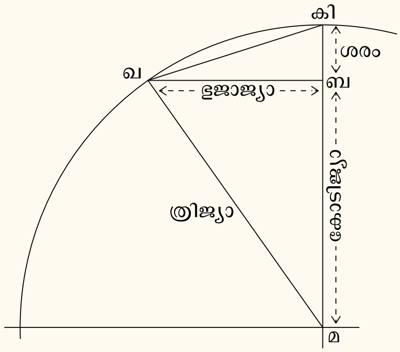
$$\textit{ഖബ} = \text{ആദ്യജ്യാവ്}$$

$$\textit{കിബ} = \text{ത്രിജ്യാ} - \sqrt{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം} - (224' - 50'')^2}$$

$$= 7' - 22''$$

$$\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം} = (224' - 50'')^2 + (7' - 22'')^2$$

$$\text{ഹാരകം} = \frac{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}} = 233 - 32 \text{ (രംഗേബാലാസ്ത്രീ)}$$



പരിലേഖം (36)

എന്നാൽ ഇവിടെ ഹാരകം $= 233 - 30$ (നീലോബാലാരിഃ) എന്നാണ് കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്. ഈ വ്യത്യാസംകൊണ്ട് വിലിയിൽതന്നെ വലിയ വ്യത്യാസം വരികയില്ല. ക്രിയക്കലാഘവവുമുണ്ട്.

$$\text{ആദ്യത്തെ ഖണ്ഡാന്തരം} = \text{ആദ്യജ്യാവ്} \div \frac{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

$$= \frac{224' - 50''}{233 - 30} = 0' - 58'.$$

$$\therefore \ \text{രണ്ടാംഖണ്ഡജ്യാവ്} = (224' - 50'') - (0' - 58'') = 223' - 52''.$$

$$\therefore \ \text{രണ്ടാംപിണ്ഡജ്യാവ്} = (224' - 50'') + (223' - 52'') = \underline{448' - 42''.}$$

$$\text{രണ്ടാമത്തെ ഖണ്ഡാന്തരം} = \frac{448' - 42''}{233 - 30} = 1' - 55''$$

$$\text{മൂന്നാംഖണ്ഡജ്യാവ്} = (223' - 52'') - (1' - 55'') = 221' - 57''$$

$$\therefore \ \text{മൂന്നാംപിണ്ഡജ്യാവ്} = (448' - 42'') + (221' - 57'') = \underline{670' - 39''.}$$

ഇങ്ങനെ മേലെ മേലെയുള്ള പിണ്ഡജ്യാക്കളെയെല്ലാം വരുത്താം.

പ്രകാരാന്തരം:

"തദ്ദളാദ്യജ്യയോഃ കൃത്യോഭേദാന്മൂലമുപാന്തിമം |
അന്ത്യോപന്ത്യാന്തരം ദ്വിഘ്നം ഗുണോവ്യാസദളം ഹരഃ ||
ആദ്യജ്യായാസ്തഥാപി സ്യാൽ ഖണ്ഡജ്യാന്തരമാദിതഃ |
താഭ്യാന്തു ഗുണകാരാഭ്യാംദ്വിതീയാദേരപി ക്രമാൽ ||
ഉത്തരോത്താരഖണ്ഡജ്യാഭേദാഃ പിണ്ഡഗുണാസ്തതഃ" |

'തദ്ദള'മെന്നതിന്നു വ്യാസാർദ്ധമെന്നർത്ഥം.

$$
\begin{aligned}
\text{ആദ്യജ്യാ} &= 224' - 50'' \\
\text{അന്ത്യജ്യാ} &= \text{ത്രിജ്യാ} \\
\text{ഉപാന്ത്യജ്യാവ്} &= 23\text{-ആം ജ്യാവ്} = \text{ആദ്യജ്യാകോടി} \\
&= \sqrt{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം} - (224' - 50'')^2} \\
&= 3430' - 23' \\
\text{ആദ്യഖണ്ഡാന്തരം} &= \text{ആദ്യജ്യാവ്} \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}} \\
&= \text{ആദ്യജ്യാവ്} \times \frac{\text{ആദ്യജ്യാവർഗ്ഗം} + \text{ആദ്യജ്യാശരവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}} \\
&= \text{ആദ്യജ്യാവ്} \times \frac{(\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം} - \text{ഉപാന്ത്യജ്യാവർഗ്ഗം}) + (\text{ത്രിജ്യ} - \text{ഉപാന്ത്യജ്യാ})^2}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}} \\
&= \text{ആദ്യജ്യാവ്} \times \frac{2 \times \text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം} - 2 \times \text{ത്രിജ്യാ} \times \text{ഉപാന്ത്യജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}} \\
&= \text{ആദ്യജ്യാവ്} \times \frac{2(\text{ത്രിജ്യാ} - \text{ഉപാന്ത്യജ്യാ})}{\text{ത്രിജ്യാ}^{1}}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}} = \frac{2(\text{ത്രിജ്യാ} - \text{ഉപാന്ത്യജ്യാ})}{\text{ത്രിജ്യാ}}
$$

$\therefore$ അതതു ജ്യാക്കളെ $2 \times (\text{ത്രിജ്യാ} - \text{ഉപാന്ത്യജ്യാ})$ എന്ന ഗുണകാരകം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചാലും അതതു ഖണ്ഡാന്തരം വരും. പിന്നെ മുമ്പിലെപ്പോലെ പിണ്ഡജ്യാക്കളെ വരുത്താം.

പ്രകാരാന്തരം:

---

[1] When $(d\theta)$ is small, $\sin d\theta \to (d\theta)$.
Hence $(d\theta)^2 = 4\left(\frac{d\theta}{2}\right)^2 = 4\sin^2\frac{d\theta}{2} = 2(1 - \cos d\theta)$.
Hence $\frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}} = \frac{2\text{ത്രിജ്യാ} - \text{ഉപാന്തജ്യാ}}{\text{ത്രിജ്യം}}$.

സ്വാദിതക്ക്വാബ്ജി[2] ഭാഗോനാ ജ്യാ ദ്വിഘ്നാഃ പൂർവ്വവജ്ജിതാഃ|
ഉത്തരോത്തരജീവാസ്സ്യുരേവം വ്യാസാദ്ധതോപി വാ ||

ഇവിടെ "നീലോബാലാരി" എന്ന ഹാരകത്തിന്റെ സ്ഥാനത്ത് ഇതിനെ ഇരട്ടിച്ച സചിവ (467) എന്നതിനെ ഉപയോഗിക്കുന്നു. അപ്പോൾ ജ്യാവിനെ 'സചിവ'നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തെ ജ്യാവിങ്കന്നു വാങ്ങിയ ശേഷത്തെ ഇരട്ടിച്ചതിൽനിന്നു കീഴെ ജ്യാവിനെ കളഞ്ഞാൽ മേലെ ജ്യാവു വരും.

'വിലിപ്താദശകോനജ്യാ' എന്നു പറഞ്ഞതുകൊണ്ട്

$$\frac{\text{ജ}3}{233 - 30} = \text{മൂന്നാമത്തെ ഖണ്ഡാന്തരം.}$$

$$\begin{aligned}
\text{നാലാമത്തെ ഖണ്ഡജ്യാവു} &= \text{മൂന്നാംഖണ്ഡജ്യാവു} - \text{മൂന്നാംഖണ്ഡാന്തരം.}\\
&= \text{ജ}_3 - \text{ജ}_2 - \frac{\text{ജ}_2}{233 - 30}\\
\text{നാലാമത്തെ പിണ്ഡജ്യാവ്}\,(\text{ജ}_4) &= \text{ജ}_3 + \text{ജ}_3 - \text{ജ}_2 - \frac{\text{ജ}_3}{233 - 30}\\
&= 2\text{ജ}_3 - \frac{\text{ജ}_3}{233 - 30} - \text{ജ}_2\\
&= 2\left(\text{ജ}_3 - \frac{\text{ജ}_3}{467}\right) - \text{ജ}_2
\end{aligned}$$

ഇവിടെ 'സചിവ' എന്ന ഹാരകത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു 'ഭാനുസ്സചിവഃ' (2 × രംഗേബാലാസ്രി) − 467 − 4 എന്നുപയോഗിച്ചാൽ ഫലം സൂക്ഷ്മതരമാകും.

ഖണ്ഡജ്യായോഗംകൊണ്ട് ഇഷ്ടജ്യാനയനം

ഖണ്ഡജ്യായോഗത്തെ വരുത്തുംപ്രകാരം പിന്നെ. പദത്തിൽ ഇരുപത്തിനാലുജ്യാവ് എന്നിരിക്കുന്നേടത്ത് എട്ടാംജ്യാവിനെ വരുത്തുവാൻ ചൊല്ലുന്നു. ആ പ്രഥമപിണ്ഡജ്യാവിനെ ഏഴിൽ ഗുണിപ്പൂ; രണ്ടാംപിണ്ഡജ്യാവിനെ ആറിൽ ഗുണിപ്പൂ; മൂന്നാമതിനെ അഞ്ചിൽ, നാലാമതിനെ നാലിൽ, അഞ്ചാമതിനെ മൂന്നിൽ, ആറാമതിനെ രണ്ടിൽ, ഏഴാംപിണ്ഡജ്യാവിനെ ഒന്നിൽ ഗുണിപ്പൂ. ഇവ ഒക്കെ തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂ. ഇതിനു ജ്യാസംകലിതമെന്നു പേർ. സംകലിതത്തെയോ മുമ്പിൽ വിസ്തരിച്ചു ചൊല്ലിയല്ലോ, വൃത്തവ്യാസത്തെ വരുത്തുന്നേടത്ത്. എന്നാൽ ഈ ജ്യാസംകലിതത്തെ ചാപഖണ്ഡസമസ്തജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലത്തെ പ്രഥമഖണ്ഡജ്യാവിനെ എട്ടിൽ ഗുണിച്ചതിങ്കന്നു കളവൂ. ശിഷ്ടം എട്ടാം ജ്യാവായിട്ടിരിക്കും.

വ്യാഖ്യാനം: ഖണ്ഡജ്യായോഗത്തെ വരുത്തി ഇഷ്ടജ്യാവു വരുത്തുവാനുള്ള ഉപായത്തെ പറയുന്നു. ഇഷ്ടജ്യാവ് എട്ടാമത്തേത് എന്നു കല്പിക്കുന്നു.

---

[2] 'സ്വാദിതക്ക്വാബ്ജി' എന്നു ഗ്രന്ഥത്തിൽ കാണുന്നു. സംഖ്യ 467 ആണ്.

$\underline{ബ_1}, \underline{ബ_2}, \underline{ബ_3} \cdots$ ക്രമേണയുള്ള ഭുജാഖണ്ഡങ്ങൾ.

$\underline{ഭ_1}, \underline{ഭ_2}, \underline{ഭ_3} \cdots$ ക്രമേണയുള്ള പിണ്ഡജ്യാക്കൾ.

$\dfrac{\text{സമസുജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$ എന്നതിനെ $\underline{സ}$ എന്നു കല്പിക്കു.

$$ഭ_8 = ബ_1 + ബ_2 + ബ_3 + \cdots + ബ_8$$
$$ബ_1 = ഭ_1$$
$$ബ_2 = ഭ_1 - ഭ_1 \times സ$$
$$ബ_3 = ഭ_1 - ഭ_1 \times സ - ഭ_2 \times സ$$
$$ബ_4 = ഭ_1 - ഭ_1 \times സ - ഭ_2 \times സ - ഭ_3 \times സ$$
$$ബ_5 = ഭ_1 - ഭ_1 \times സ - ഭ_2 \times സ - ഭ_3 \times സ - ഭ_4 \times സ$$
$$ബ_6 = ഭ_1 - ഭ_1 \times സ - ഭ_2 \times സ - ഭ_3 \times സ - ഭ_4 \times സ - ഭ_5 \times സ$$
$$\begin{aligned} ബ_7 &= ഭ_1 - ഭ_1 \times സ - ഭ_2 \times സ - ഭ_3 \times സ \\ &\quad - ഭ_4 \times സ - ഭ_5 \times സ - ഭ_6 \times സ \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} ബ_8 &= ഭ_1 - ഭ_1 \times സ - ഭ_2 \times സ - ഭ_3 \times സ \\ &\quad - ഭ_4 \times സ - ഭ_5 \times സ - ഭ_6 \times സ - ഭ_7 \times സ \end{aligned}$$
$$\therefore \quad ഭ_8 = 8ഭ_1 - (7ഭ_1 + 6ഭ_2 + 5ഭ_3 + 4ഭ_4 + 3ഭ_5 + 2ഭ_6 + ഭ_7) \times സ$$

$7ഭ_1 + 6ഭ_2 + 5ഭ_3 + 4ഭ_4 + 3ഭ_5 + 2ഭ_6 + ഭ_7$ എന്നതിനു ജ്യാസംകലിതമെന്നു പേർ.

ഇങ്ങനെ യാതൊരു ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലെ ജ്യാസം കലിതം ചെയ്തു് അതിന്റെ മീത്തെ ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലെ ജ്യാചാപാന്തരം വരും എന്നു നിയതം. ഇവിടെ ചാപഖണ്ഡം എത്രയും ചെറുതായിട്ടു കല്പിക്കേണ്ടു; അപ്പോൾ ഖണ്ഡജ്യാവും ആദ്യത്തേതിന്റേതു ചാപം തന്നെ ആയിട്ടിരിക്കും എന്നാലതിനെ ഇഷ്ടസംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ അതു് ഇഷ്ടചാപംതന്നെ ആയിട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ സംകലിതത്തിന്റെ ഫലം ഇഷ്ടചാപത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ ഇഷ്ടജ്യാവു വരും. ഇവിടെ ഒരു പ്രകാരം പറഞ്ഞുകൊള്ളേണമെല്ലോ എന്നിട്ടു ചൊല്ലീ, പദത്തിങ്കൽ ഇരുപത്തിനാലു ജ്യാവു് എന്നു്. എന്നിട്ടിവിടെ ഇഷ്ടചാപത്തിങ്കലെ ഒടുക്കത്തെ ഖണ്ഡാന്തരം തുടങ്ങി ആദ്യദ്വിതീയഖണ്ഡാന്തരത്തോളമുള്ളവറ്റെ ക്രമേണ ഒന്നു തുടങ്ങി ഓരോന്നേറിയുള്ള സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഖണ്ഡാന്തരസംകലിതം വരും. ഇതു് ഇഷ്ടചാപവും ഇഷ്ടജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരമാകുന്നതു് എന്നു വന്നു.

വ്യാഖ്യാനം: ഇവിടെ വൃത്തചതുരാംശത്തെ 24 തുല്യഖണ്ഡങ്ങളായിട്ടണല്ലോ വിഭജിച്ചിരിക്കുന്നതു്. എന്നാൽ ഇതിനെ അണുപ്രായചാപഖണ്ഡങ്ങളായിട്ടു വിഭജിക്കുകയാണെങ്കിൽ ആദ്യജ്യാവു് ഒരു ചാപഖണ്ഡത്തോടു തുല്യമെന്നു കല്പിക്കാം. $\underline{ഭ_1}$ എന്നതിനെ അണുപ്രായമായ ചാപഖണ്ഡമെന്നു സങ്കല്പിക്കുമ്പോൾ, $8ഭ_1$ ഇഷ്ടചാപത്തോടു തുല്യമായിരിക്കും.

$$\therefore \text{ എട്ടാംജ്യാവു്} = \text{ഇഷ്ടചാപം} - \text{ജ്യാസംകലിതം} \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

$$\therefore\ \text{ജ്യാസംകലിതം} \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}} = \text{ഇഷ്ടചാപം} - \text{ഇഷ്ടജ്യാവ്}$$
$$= \underline{\text{ഇഷ്ടജ്യാചാപാന്തരം.}}$$

പിണ്ഡജ്യാവിനെ സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഭുജാഖണ്ഡാന്തരമുണ്ടാകുമെന്ന് മുൻപിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഖണ്ഡാന്തരങ്ങളെ $\text{ഖ}_1, \text{ഖ}_2, \text{ഖ}_3 \cdots$ എന്നു കല്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ

$$7\text{ഖ}_1 = 7\text{ഭ}_1 \times \text{സ}$$
$$6\text{ഖ}_2 = 6\text{ഭ}_2 \times \text{സ}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\text{ഖ}_7 = \text{ഭ}_7 \times \text{സ}$$
$$\therefore\ 7\text{ഖ}_1 + 6\text{ഖ}_2 + 5\text{ഖ}_3 + \cdots + \text{ഖ}_7 = (7\text{ഭ}_1 + 6\text{ഭ}_2 + \cdots\cdots + \text{ഭ}_7) \times \text{സ}$$
$$\text{അതായത്, ഖണ്ഡാന്തരസംകലിതം} = \text{ജ്യാസംകലിതം} \times \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$$
$$\therefore\ \underline{\text{ജ്യാചാപാന്തരം}} = \underline{\text{ഖണ്ഡാന്തരസംകലിതം}}$$

ഇവിടെ ഇഷ്ടചാപത്തിന് അടുത്തു കീഴേതിനോളമുള്ള ജ്യാക്കളെല്ലോ ജ്യാചാപാന്തരത്തിനു സാധനമാകുന്നത്. ഈ ജ്യാക്കളാൽ ഒന്നും അറിഞ്ഞീലാ എന്നിരിക്കയാൽ ചാപത്തെത്തന്നെ ജ്യാവെന്നു കല്പിച്ചു ചാപസംകലിതം ചെയ്‌വൂ. ഇവിടെ ഇഷ്ടചാപംതന്നെ ഒടുക്കത്തെ ജ്യാവാകുന്നത്. ഇതിൽ ഒരു ചാപഖണ്ഡം കുറഞ്ഞതു അടുത്തു കീഴേ ജ്യാവ്. പിന്നെ ഇതിങ്കന്നും ഓരോരോ ഖണ്ഡം കുറഞ്ഞതു കീഴെ കീഴെ ജ്യാക്കൾ എന്നു കല്പിപ്പൂ. ഇവിടേയും പിന്നെ ഇഷ്ടചാപത്തിങ്കൽ എത്ര ഇലി ഉള്ളൂ അത്ര ചാപഖണ്ഡമുള്ളൂ എന്നു കല്പിപ്പൂ. എന്നാൽ പിന്നെ ഇസ്സംഖ്യകളുടെ ഏകദ്യേകോത്തരസംകലിതം ചെയ്‌വൂ. അതു യാതൊന്ന് അതു ജ്യായോഗമാകുന്നത് എന്നു വരും. ഇതിനെ സമസ്തജ്യാവാകുന്ന ഒരു ഇലിയെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ സംഖ്യാഭേദം വരാ. എന്നാൽ ഇതിനെതന്നെ ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലെ ശരഖണ്ഡയോഗം. ഖണ്ഡഞ്ചെറുതാകയാൽ ഖണ്ഡാഗ്രത്തിലെ ശരഖണ്ഡയോഗവും മിക്കതുമിതിന്നു സമം എന്നിട്ട് ഇതുതന്നെ എന്നു കല്പിക്കാം. ഖണ്ഡം ചെറുതായോളം ജ്യാവും സൂക്ഷ്മമായിരിക്കും എന്നിട്ട് ഇലീടെ പരാർദ്ധാംശംതാൻ ഖണ്ഡമെന്നും കല്പിച്ചു പരാർദ്ധമാകുന്ന ഛേദംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു സംകലിതം ചെയ്തു ഛേദംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം, ഛേദംകൊണ്ടു ഗുണിയാതെ സംകലിതം ചെയ്തതിനോടു മിക്കതും തുല്യമായിട്ടിരിക്കും. [14]

വ്യാഖ്യാനം 14: പരിധിവ്യാസപ്രകരണത്തിൽ വ്യാഖ്യാനിച്ചിട്ടുണ്ട്.

എന്നാലിവിടെ എത്ര രൂപവ്യക്തികളുള്ളൂ അണുപരിമാണമായിട്ടിരിപ്പോ ചിലവ, ഇഷ്ടചാപത്തിങ്കലത്ര സംഖ്യ ഉള്ളോരു രാശിയെ സംകലിതം ചെയ്യുന്നു.

അസ്സംഖ്യ പദമായിട്ടിരിപ്പൊന്ന്. അസ്സംകലിതക്ഷേത്രം പദത്തോളം വരി, വരിയിൽ നടേത്തെതിൽ സംഖ്യ ഒന്ന് അതു സമചതുരമായിട്ടിരിപ്പോരു ഖണ്ഡമെന്നു കല്പിച്ചാൽ എളുപ്പമുണ്ട്. രണ്ടാംവരിയിൽ രണ്ടു ഖണ്ഡം, മൂന്നാംവരിയിൽ മൂന്ന്, ഇങ്ങനെ ഓരോന്നേറീട്ട് ഒടുക്കത്തെ വരിയിൽ പദസംഖ്യയോളം ഖണ്ഡസംഖ്യയായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ രാശിയാകുന്നത് ഇഷ്ടചാപം. ഇതിങ്കലെ ഇലികളെ അണുച്ഛേദംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അണുവായിട്ടുള്ളസംഖ്യ പദസംഖ്യ ആകുന്നത്. പിന്നെ പദവും പദത്തിൽ ഒരു സംഖ്യ ഏറിയതും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ച് ഒന്നും രണ്ടും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതം രണ്ടു കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഫലം സംകലിതമായിട്ടിരിക്കും. [15]

വ്യാഖ്യാനം 15: Samkalitam corresponds to integrals of the first, second, third etc, orders

$$
\begin{aligned}
\text{Here the padam} &= x \\
\text{First samkalitam of } x &= \int_0^x x dx = \frac{x^2}{1 \times 2} \\
\text{Second samkalitam of } x &= \int_0^x \frac{x^2 dx}{1 \times 2} \\
\text{Third samkalitam of } x &= \int_0^x \int \int x \\
&= \int_0^x \int \frac{x^2}{1 \times 2} \\
&= \int_0^x \frac{x^3}{1 \times 2 \times 3} \\
&= \frac{x^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}
\end{aligned}
$$

ഇങ്ങനെ നടേത്തെ സംകലിതം. രണ്ടാംസംകലിതം പിന്നെ. ഇസ്സംകലിതവും ഇതിൽ ഒരു വരി കുറഞ്ഞ സംകലിതവും, രണ്ടുവരി കുറഞ്ഞ സംകലിതവും, മൂന്നു വരി കുറഞ്ഞതും ഇങ്ങനെ ക്രമേണ ഓരോരോ പദം കുറഞ്ഞ സംകലിതങ്ങളെ ഒക്കെക്കൂട്ടിയതു് രണ്ടാം സംകലിതമാകുന്നത്. പിന്നെ ഇസ്സംകലിതം അന്ത്യപദത്തിന്റെ സംകലിതമെന്നു കൽപിച്ച് ഉത്തരങ്ങളെ ഓരോരോ പദംകുറഞ്ഞവറ്റെ ഒക്കെക്കൂട്ടിയതു മൂന്നാംസംകലിതം. ഇതിനെ വരുത്തുംപ്രകാരം. പദവും പദത്തിൽ ഒന്നുകൂടിയതും പദത്തിൽ രണ്ടുകൂടിയതും മൂന്നും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിനെ ഒന്നും രണ്ടും മൂന്നും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ച് ആറുകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം രണ്ടാംസംകലിതം. ഈവണ്ണം ഓരോന്നോരോന്നേറിയരാശികൾ എത്ര അവ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ച അത്ര ഒന്ന്, രണ്ടു സംഖ്യകൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിനെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ഒന്നു കീഴെ സംകലിതം. ഇവിടെ ചാപഖണ്ഡം അത്യന്തം അണുവായി കല്പിച്ചാൽ ജ്യാവു സൂക്ഷ്മമാകും. എന്നിട്ടു ശൂന്യപ്രായമായ രൂപങ്ങളെക്കൊണ്ടു പദത്തിൽ ഓരോന്നേറുമ്പോൾ സംഖ്യയ്ക്ക് എത്രയും വിശേഷമില്ല. [16]

വ്യാഖ്യാനം 16: ആദ്യപാദം × പരാർദ്ധം എന്ന സംഖ്യയെ പദമായിട്ടു കല്പിക്കുമ്പോൾ, പദത്തെ പദത്തിൽ ഒന്നു കൂട്ടിയതുകൊണ്ടു ഗുണിച്ച കിട്ടിയതിനെ പദവർഗ്ഗത്തിനോടു തു

ല്യമെന്നു കല്പിക്കാം. സംകലിതഫലം $= \frac{\text{പദം} \times \text{പരാർദ്ധം} \times (\text{പദം} \times \text{പരാർദ്ധം} + 1)}{2}$ എന്നുള്ള ദിക്കിൽ പദം $\times$ പരാർദ്ധം എന്ന വലിയ സംഖ്യയിൽ ഒരു രൂപം കൂട്ടിയതുകൊണ്ടു വിശേഷമൊന്നുമുണ്ടാകുവാനില്ല.

എന്നിട്ട് ഇഷ്ടചാപത്തിന്റെ വർഗ്ഗഘനാദികളെത്തന്നെ ഏകാദിഘാതം[17] കൊണ്ടു ഹരിക്കേ വേണ്ടൂ.

വ്യാഖ്യാനം 17: ഏകാദിഘാതങ്ങൾ:- $1, 1 \times 2, 1 \times 2 \times 3, 1 \times 2 \times 3 \times 4, \ldots$ സൗകര്യത്തിനു വേണ്ടി ഇവയെ $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \ldots$ എന്നുമെഴുതാം.

എന്നാൽ ഫലം സൂക്ഷ്മമായിട്ടിരിക്കും. എന്നിട്ടു ചാപവർഗ്ഗാർദ്ധം നടേത്തെ സംകലിതം. പിന്നെ ഇഷ്ടചാപഘനത്തിൽ ആറൊന്നു രണ്ടാംസംകലിതം. അവിടെ നടേത്തെ സംകലിതം വർഗ്ഗാർദ്ധമെന്നിരിക്കയാൽ രണ്ടാംസംകലിതത്തിന്ന് അത് അന്ത്യപദം എന്നു കല്പിച്ച് അതിൽ ഒന്നു കുറഞ്ഞ പദത്തിന്റെ വർഗ്ഗാർദ്ധമുപാന്ത്യപദം, ഇങ്ങനെ ക്രമേണ യോഗം ചെയ്താൽ ഇഷ്ടചാപത്തിന്റെ വർഗ്ഗാർദ്ധത്തിന്റെ സംകലിതമായിട്ടിരിക്കും അത്. അതു വർഗ്ഗസംകലിതത്തിന്റെ അർദ്ധം. പദത്തിന്റെ ഘനത്തിൽ മൂന്നൊന്നു വർഗ്ഗസംകലിതമെന്നോ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയല്ലോ. എന്നാൽ ഇതിന്റെ അർദ്ധമാകുന്നതു ഘനത്തിൽ ആറൊന്നു. പിന്നെ മൂന്നാംസംകലിതമാകുന്നതു ഘനസംകലിതത്തിന്റെ ആറൊന്ന് എന്നിരിക്കും ഈ ന്യായംകൊണ്ട്. എന്നാൽ അതു വർഗ്ഗവർഗ്ഗത്തിൽ ഇരുപത്തുനാലൊന്നായിട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ സമരാശികളെ എത്രവറ്റെ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചു, ഒന്ന്, രണ്ട്, തുടങ്ങിയുള്ളവറ്റിന്റെ അത്രേടമുള്ള സംഖ്യേടെ ഘാതം ഹാരകമാകുന്നത് അതിന് എന്നു മുമ്പിൽ സംകലിതം വിസ്തരിച്ചു ചൊല്ലിയതിനെക്കൊണ്ടു വന്നു കൂടും.

എന്നാലിവിടെ നടേത്തെ സംകലിതമാകുന്നത് ആദ്യജ്യാവു തുടങ്ങി ഇഷ്ടജ്യാവോളമുള്ള ജ്യാക്കളുടെ യോഗം. ഇതിനെ സമസ്തജ്യാസംഖ്യ ഒന്ന് എന്നിട്ട് അതിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ സംഖ്യാഭേദമില്ല എന്നിട്ടു വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ശരഖണ്ഡയോഗമാകുന്ന ശരമായിട്ടു വരും. പിന്നെ ഇശ്ശരത്തെ ചാപഖണ്ഡയോഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ചു മൂന്നിലും ഹരിച്ചാൽ ജ്യാചാപാന്തരം വരും. പിന്നെ ഇഷ്ടചാപഘനത്തിന്റെ ആറൊന്നിനെ വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലവും ജ്യാചാപാന്തരമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഇഷ്ടജ്യാശരത്തെ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം ആദ്യാന്ത്യഖണ്ഡാന്തരം. പിന്നത്തെ ജ്യായോഗംകൊണ്ട് ആദ്യോപാന്ത്യഖണ്ഡാന്തരം ഉണ്ടാകും. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ ഘനഷഷ്ഠാംശമാകുന്ന രണ്ടാംസംകലിതത്തിങ്കന്ന്, ആദ്യഖണ്ഡജ്യാവിങ്കന്ന് എല്ലാ ഖണ്ഡത്തിന്റേയും അന്തരങ്ങൾ ഒക്കക്കൂടിയതു ഖണ്ഡാന്തരസംകലിതം—ഇതുതന്നെ ജ്യാചാപാന്തരമാകുന്നതും—അതുണ്ടാകും. ഇതു പ്രായികമെത്രെ താനും, ജ്യാസംകലിതത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു ചാപസംകലിതമല്ലോ കൊണ്ടതു്, എന്നിട്ട്. എന്നാൽ ഈവണ്ണം കീഴെ കീഴെ ജ്യാചാപാന്തരങ്ങൾ ഒക്കത്തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയതു ജ്യാസംകലിതത്തിങ്കന്നു ചാപസംകലിതത്തിൽ ഏറിപ്പോയ അംശമാകുന്നത്. എത്ര ചാപങ്ങളുടെ യോഗത്തിങ്കന്നു ശരത്തെ ഉണ്ടാക്കി അത്ര ജ്യാചാപാന്തരങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി

വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തെ ശരത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ ശരമൊട്ട് സൂക്ഷ്മമാകും. എന്നാലിവിടെ രണ്ടാം സംകലിതത്തിങ്കന്ന് എല്ലൊ ഒടുക്കത്തെ ജ്യാചാപാന്തരത്തെ ഉണ്ടാക്കി. ഇവ്വണ്ണം പദത്തിന്റെ ഓരോന്നോരോന്നു കുറഞ്ഞതിന്റെ രണ്ടാംസംകലിതത്തിങ്കന്ന് ഉപാന്ത്യാദി കീഴെ കീഴെ ജ്യാചാപാന്തരങ്ങൾ ഒക്കെ ഉണ്ടാക്കേണ്ടൂ. എന്നാൽ മൂന്നാംസംകലിതത്തിങ്കന്ന് ജ്യാചാപാന്തരയോഗമുണ്ടാകും. എന്നാൽ നാലാംസംകലിതത്തിങ്കന്നു ജ്യാചാപാന്തരസംകലിതത്തെ ഉണ്ടാക്കേണ്ടൂ. മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ വണ്ണം. പിന്നെ ഇസ്സംകലിതം യാതൊന്ന് അതു മുമ്പിൽ ജ്യാസംകലിതം വേണ്ടിയിരുന്നേടത്തു ചാപസംകലിതംകൊണ്ടാറെ ഏറിപ്പോയ അംശമത്. ഇച്ചാപസംകലിതത്തിങ്കന്നു വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം മുമ്പിൽ ഉണ്ടാക്കിയ ജ്യാചാപാന്തരത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ ഇഷ്ടജ്യാചാപാന്തരമൊട്ടു സൂക്ഷ്മമാകും. ഇവിടെ നടേ ഉണ്ടാക്കിയ ജ്യാചാപാന്തരത്തെ ഇഷ്ടചാപംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശരസംസ്കാരമുണ്ടാകും. ഇശ്ശരസംസ്കാരത്തെ പിന്നെയും ഇഷ്ടചാപംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ജ്യാചാപാന്തരസംസ്കാരമുണ്ടാകും. ഈവണ്ണമുണ്ടാക്കിയ ജ്യാചാപാന്തരസംസ്കാരം ജ്യാചാപാന്തരയോഗത്തിങ്കന്ന് ഉണ്ടാക്കൂ. അതാകുന്നത് ഈസ്സംസ്കാരത്തെ ചാപംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച പിന്നെ അതിനെ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ചതു മുമ്പിലെ ശരസംസ്കാരത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ ഇശ്ശരസംസ്കാരം സൂക്ഷ്മമാകും. ഇശ്ശരസംസ്കാരത്തെ പിന്നെ ഇഷ്ടചാപം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം ജ്യാചാപാന്തരസംസ്കാരത്തിന്റെ സംസ്കാരം. ഇവിടെ എല്ലാടവും ഫലത്തെ ചാപംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഒന്ന്, രണ്ട് എന്നു തുടങ്ങിയുള്ള സംഖ്യകളിലെത്രാമതുകൊണ്ടു ഹരിച്ചതിനെ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിക്കേണ്ടൂ, സംകലിതത്തിങ്കന്നു വേണം സംസ്കാരമുണ്ടാക്കുവാൻ, എന്നിട്ട്. ഇങ്ങനെ ഒരു സംകലിതത്തിന്റെ ഫലത്തിങ്കന്നു മീത്തെ സംകലിതംകൊണ്ടുണ്ടാക്കുന്ന ഫലത്തിന്റെ അന്തരത്തെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം. ഇവിടെ ചാപത്തെ എത്ര ആവൃത്തി ചാപം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചൂ, ഇതിന്നു ഹാരകം വ്യാസാർദ്ധത്തെ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ട് അത്ര ആവൃത്തി ഗുണിച്ച് അത്ര ഏകാദ്യേകോത്തരങ്ങളുടെ ഘാതവും കൂടി ഹാരകം. ഒരു ഫലത്തിങ്കന്നു മീത്തെ ഫലമുണ്ടാക്കുവാൻ ഇഷ്ടചാപംകൊണ്ടു ഫലത്തെ ഒരിക്കൽ ഗുണിപ്പൂ, വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടു ഒരിക്കൽ ഹരിപ്പൂ എന്നാലും ഫലം തുല്യം. ഇങ്ങനെ ഫലങ്ങളെല്ലാം ജ്യായോഗത്തിങ്കന്ന് ഉണ്ടാക്കേണ്ടൂ എന്നിരിക്കുന്നേടത്തു ചാപയോഗത്തിങ്കന്ന് ഉണ്ടാക്കയാൽ സംസ്കാരഫലങ്ങളെല്ലാം വാസ്തവഫലത്തിങ്കന്ന് ഏറ ഉണ്ടായിരിക്കും. എന്നിട്ടു മീത്തെ മീത്തെ സംസ്കാരഫലം നടേത്തെ നടേത്തെ സംസ്കാരഫലത്തിങ്കന്നു കളയേണം. എന്നാലിവണ്ണം വേണ്ടൂ ഇവിടുത്തെ ക്രിയാക്രമം. ഇഷ്ടചാപം നടേത്തെ രാശിയാകുന്നത്. ഇതിനെ വർഗ്ഗിച്ച് അർദ്ധിച്ച ത്രിജ്യ കൊണ്ടു ഹരിച്ചതു രണ്ടാംരാശിയാകുന്നത്. രണ്ടാംരാശിയെ വേറെ ഒരിടത്തു വെപ്പൂ. പിന്നെ ഇതിനേയും ചാപംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച മൂന്നിലും ത്രിജ്യകൊണ്ടും ഹരിപ്പൂ. ഈ ഫലത്തെ പ്രഥമഫലത്തിന്റെ കീഴെ വെപ്പൂ. പിന്നെ ഇതിനേയും ചാപംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച നാലിലും ത്രിജ്യകൊണ്ടും ഹരിപ്പൂ. ഫലം ദ്വിതീയഫലത്തിന്റെ കീഴെ വെപ്പൂ. ഇങ്ങനെ അതതു ഫലത്തിങ്കന്നു ചാപംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടും ഒന്ന് രണ്ട് തുടങ്ങിയവറ്റിൽ മീത്തെ മീത്തെ വറ്റെക്കൊണ്ടും ഹരിച്ചാൽ മീത്തെ മീത്തെ

ഫലങ്ങളുണ്ടാകും. ഇവിടെ മൂന്നാമതു്, അഞ്ചാമതു് എന്നു തുടങ്ങിയുള്ള ഓജഫലങ്ങൾ പ്രഥമരാശിയുടെ പങ്ക്തിയിൽ കീഴെ കീഴെ വെപ്പൂ. നാലാമതു്, ആറാമതു് തുടങ്ങിയുള്ള യുഗ്മഫലങ്ങളെ ദ്വിതീയരാശിയുടെ പങ്ക്തിയിൽ കീഴെ കീഴെ വെപ്പൂ. പിന്നെ എല്ലായിലും കീഴേതു് അടുത്തു മീത്തേതിൽ കളയൂ. ശിഷ്ടം അടുത്തു മീത്തേതിൽ. ഇങ്ങനെ ഒരു പങ്ക്തിയിൽ പ്രഥമരാശി ശേഷിക്കും. മറ്റേ പങ്ക്തിയിൽ ദ്വിതീയരാശി ശേഷിക്കും. അവ ഇഷ്ടജ്യാശരങ്ങൾ. ഇവിടെ ഓജഫലങ്ങളെ തന്നെ വേറെ ഉണ്ടാക്കി ഇഷ്ടജ്യാവുണ്ടാക്കൂ. യുഗ്മഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി ഇഷ്ടശരവുമുണ്ടാക്കൂ. ഇങ്ങനേയുമാം.

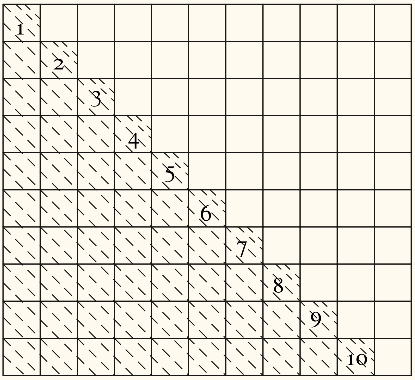
ഇവിടെ ഇഷ്ടജ്യാവിനെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം. ഇഷ്ടചാപത്തെ ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. പിന്നെ രണ്ടും മൂന്നും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതം ആറുകൊണ്ടും ഹരിപ്പൂ. ഫലം ജ്യാചാപാന്തരം. പിന്നേയും ക്രമേണയുള്ള ഫലങ്ങൾക്കൊക്ക ചാപവർഗ്ഗം ഗുണകാരം, വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം ഹാരകം. യുഗ്മസംഖ്യയും മീത്തെ ഓജസംഖ്യയും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതും ഹാരകം. അതതു യുഗ്മസംഖ്യാവർഗ്ഗത്തിൽ തന്റെ മൂലം കൂടിയതായിട്ടിരിക്കുമിതു്, യുഗ്മസംഖ്യയിങ്കന്നു് ഒന്നു് എല്ലോ മീത്തെ ഓജസംഖ്യയിൽ ഏറൂ, എന്നിട്ടു്. ഇങ്ങനെ ഇഷ്ടജ്യാവുതന്നെ വേറെ വരുത്തുംപ്രകാരം. പിന്നെ ദ്വിതീയരാശിയെ ഇവ്വണ്ണം അതിന്റെ ഫലങ്ങളേയും ഗുണിച്ചു ഹരിച്ചാൽ ഇഷ്ടശരം വരും. ഇവിടെ ഓജസംഖ്യാവർഗ്ഗത്തിൽ തന്റെ മൂലം കൂടിയതു ഹാരകമാകുന്നതു് എന്നേ വിശേഷമുള്ളൂ.

പിന്നെ ഇവ്വണ്ണം വൃത്തപാദത്തിങ്കലെ ഇഷ്ടജ്യാശരങ്ങളെ വരുത്തുവാൻ ഉണ്ടാക്കിയ ഫലങ്ങളെ പഠിച്ചിയേച്ചു് ഇവറ്റെക്കൊണ്ടു് ഇഷ്ടചാപത്തിങ്കലേക്കു ത്രൈരാശികംകൊണ്ടു വരുത്തൂ. ഓജഫലവും, യുഗ്മഫലവും വെവ്വേറെ പഠിപ്പൂ, രണ്ടു പരിഷയായിട്ടു്. ഇവിടെ രണ്ടുവകയിലും ഒടുക്കത്തെ ഫലങ്ങളെ ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചഫലം ഉപാന്ത്യഫലത്തിങ്കന്നു കളവൂ. പിന്നേയും ഇവ്വണ്ണം ഗുണിച്ചു ഹരിച്ചു നടേത്തേതിൽ നടേത്തേതിൽ കളവൂ. പിന്നെ '**വിദ്വാൻ**' എന്നു തുടങ്ങിയുള്ളവറ്റിന്റെ ഒടുക്കത്തെ ഫലത്തെ ഇഷ്ടചാപത്തിങ്കന്നു കളവൂ. ശിഷ്ടം ഇഷ്ടജ്യാവു്. **സ്തേന** എന്നു തുടങ്ങിയവറ്റിൽ ഈവ്വണ്ണം ക്രിയ ചെയ്താൽ ഒടുക്കത്തേതു തന്നെ ഇഷ്ടശരം. ഇങ്ങനെ പഠിതങ്ങൾ കൂടാതെ ഇഷ്ടജ്യാശരങ്ങളെ വരുത്തുംപ്രകാരം.

വ്യാഖ്യാനം: പഠിതജ്യാക്കളെ കൂടാതെ തന്നെ ഇഷ്ടജ്യാശരങ്ങളെ വരുത്തുവാനുള്ള ഉപായത്തിന്റെ യുക്തിയെ പറയുന്നു. ഇവിടെ ആദ്യദ്വിതീയാദി സംകലിതങ്ങളുടെ ആവശ്യമുണ്ടാകയാൽ അവയെ മുമ്പിൽ വിസ്തരിക്കുന്നു. ആദ്യസംകലിതം ഏകാദ്യേകോത്തരസംകലിതം തന്നെ. ഇതിനെ ക്ഷേത്രരൂപേണ കല്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ ആദ്യത്തെ വരിയിൽ ഒന്നു്, രണ്ടാംവരിയിൽ രണ്ടു്, മൂന്നാംവരിയിൽ മൂന്നു്, ഇങ്ങനെ മേലേ മേലേ വരിയിൽ ഓരോന്നോരോന്നേറിക്കൊണ്ടിരിക്കും. പരിലേഖം 37-ൽ ചെരിഞ്ഞുള്ള വരകളെക്കൊണ്ടു് അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുള്ള ഭാഗം ഈ സംകലിതക്ഷേത്രമാകുന്നു. ഇങ്ങനെ തന്നെ ഒരു ക്ഷേത്രത്തെ പരിലേഖനത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന പ്രകാരം മേൽ കീഴായി ആദ്യക്ഷേത്രത്തോടു യോജിപ്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ ഒരു ഘാതക്ഷേത്രമുണ്ടാകും. ഈ ഘാതക്ഷേത്രത്തിൽ സംകലിതത്തിലെ പദത്തോളം വരി, ഓരോ വരിയിൽ പദത്തിലൊന്നു കൂടിയ ഖണ്ഡങ്ങളുമുണ്ടു്. പദത്തിനെ

പ എന്നു കല്പിച്ചാൽ ഈ ഘാതക്ഷേത്രത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം $= \text{പ} \times (\text{പ}+1)$ എന്നു വരും. അപ്പോൾ ആദ്യസംകലിതഫലം $=$ ഘാതക്ഷേത്രഫലാർദ്ധം $= \dfrac{\text{പ}(\text{പ}+1)}{2} = \dfrac{\text{പ}^2+\text{പ}}{2}$.

പദത്തെ പരാർദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചുണ്ടായ സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു സംകലിതം ചെയ്യുമ്പോൾ ആദ്യസംകലിതഫലം പദവർഗ്ഗാർദ്ധ$\left(\dfrac{\text{പ}^2}{2}\right)$ത്തിനോടു തുല്യമാകുമെന്നു പരിധിവ്യാസപ്രകരണത്തിൽ വിസ്തരിച്ചു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ.



പരിലേഖം (37)

ആദ്യസംകലിതവും ഇതിന്റെ പദത്തിൽ ഓരോന്നോരോന്നു കുറഞ്ഞവയുടെ ആദ്യസംകലിതങ്ങളും ഇവയുടെ യോഗം ദ്വിതീയസംകലിതം.

$$\therefore \ \text{ദ്വിതീയസംകലിതം} = \left(\frac{\text{പ}^2}{2} + \frac{(\text{പ}-1)^2}{2} + \cdots + \frac{1^2}{2}\right) + \left(\frac{\text{പ}}{2} + \frac{\text{പ}-1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{പ}^2 + (\text{പ}-1)^2 + \cdots + 1^2 = \frac{\text{പ}(\text{പ}+1)(2\text{പ}+1)}{6} \ \text{(ലീലാവതീന്യായപ്രകാരം)}$$

$$\text{പ} + (\text{പ}-1) + \cdots + 1 = \frac{\text{പ}(\text{പ}+1)}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \ \text{ദ്വിതീയസംകലിതം} &= \frac{\text{പ}(\text{പ}+1)(2\text{പ}+1)}{12} + \frac{\text{പ}(\text{പ}+1)}{4} \\ &= \frac{\text{പ}(\text{പ}+1)}{4}\left(\frac{2\text{പ}+1}{3}+1\right) \\ &= \frac{\text{പ}(\text{പ}+1)(\text{പ}+2)}{6} \\ &= \frac{\text{പ}^3}{6} + \frac{3\text{പ}^2}{6} + \frac{2\text{പ}}{6} \\ &= \frac{\text{പ}^3}{6} + \frac{\text{പ}^2}{2} + \frac{\text{പ}}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{തൃതീയസംകലിതം} &= \frac{1}{6}\{പ^3 + (പ-1)^3 + (പ-2)^3 + \cdots + 1^3\} \\
&\quad + \frac{1}{2}\{പ^2 + (പ-1)^2 + (പ-2)^2 + \cdots + 1^2\} \\
&\quad + \frac{1}{3}\{പ + (പ-1) + (പ-2) + \cdots + 1\} \\
\text{ഘനസംകലിതം} &= \text{ഏകാദ്യോകോത്തരസംകലിതവർഗ്ഗം (ലീലാവതീന്യായേന)} \\
&= \frac{പ^2(പ+1)^2}{4} \\
\therefore\ \text{തൃതീയസംകലിതം} &= \frac{പ^2(പ+1)^2}{24} + \frac{പ(പ+1)(2പ+1)}{12} + \frac{പ(പ+1)}{6} \\
&= \frac{(പ(പ+1)(പ+2)(പ+3)}{24}
\end{aligned}$$

ഇങ്ങനെതന്നെ ചതുർത്ഥാദിസംകലിതങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കാം.

$$\begin{aligned}
\text{അപ്പോൾ ആദ്യസംകലിതം} &= \frac{പ(പ+1)}{1\times 2} = \frac{പ(പ+1)}{\angle 2} \\
\text{ദ്വിതീയസംകലിതം} &= \frac{പ(പ+1)(പ+2)}{1\times 2\times 3} = \frac{പ(പ+1)(പ+2)}{\angle 3} \\
\text{തൃതീയസംകലിതം} &= \frac{പ(പ+1)(പ+2)(പ+3)}{1\times 2\times 3\times 4} \\
&= \frac{പ(പ+1)(പ+2)(പ+3)}{\angle 4}
\end{aligned}$$

....

....

ചാപഖണ്ഡങ്ങളെ അണുപ്രായമായി കല്പിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ഈ സംകലിതങ്ങളെ $\frac{പ^2}{\angle 2}$, $\frac{പ^3}{\angle 3}$, $\frac{പ^4}{\angle 4}$ $\cdots$ എന്നിങ്ങനെ കല്പിക്കാം.

ഈ സംകലിതങ്ങളെ അപേക്ഷിച്ച് ഇഷ്ടചാപങ്ങളുടെ ജ്യാക്കളെയും ശരങ്ങളേയും വരുത്തുവാനുള്ള ഉപായത്തേയും അതിന്റെ യുക്തിയേയും കാണിക്കാം.

"നിഹത്യ ചാപവർഗ്ഗേണ ചാപം തത്തൽഫലാനി ച |
ഹരേൽ സമൂലയുഗ്വർഗ്ഗൈസ്ത്രിജ്യാവർഗ്ഗാഹതൈഃ ക്രമാൽ ||
ചാപം ഫലാനി ചാധോധോന്യസ്യോപര്യുപരി ത്യജേൽ |
ജീവാപ്ത്യൈ, സംഗ്രഹോസ്യൈവ വിദ്വാനിത്യാദിനാകൃതഃ ||
നിഹത്യ ചാപവർഗ്ഗേണ രൂപം തത്തൽഫലാനി ച |
ഹരേദ്വിമൂലയുഗ്വർഗ്ഗൈസ്ത്രിജ്യാവർഗ്ഗാഹതൈഃ ക്രമാൽ ||
കിന്തു വ്യാസദളേനൈവ ദ്വിഘ്നേനാദ്യം വിഭജ്യതാം |

ഫലാന്യധോധഃ ക്രമശോ ന്യാസ്യോപര്യുപരി ത്യജേൽ ||
ശരാപ്ത്യൈ, സംഗ്രഹോസ്യൈവ സ്തേനസ്ത്രീത്യാദിനാകൃതഃ" ||
(തന്ത്രസംഗ്രഹം)

ഇഷ്ടചാപത്തെ അതിന്റെ വർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു രണ്ടിന്റെ വർഗ്ഗത്തിൽ രണ്ടു കൂടിയിരിക്കുന്ന ആറു കൊണ്ടു ഗുണിച്ച ത്രിജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഇങ്ങനെ ഉണ്ടായ ഫലത്തെ ഇഷ്ടചാപത്തിന്റെ കീഴെ വക്കേ. ഈ ഫലത്തേയും ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു രണ്ടാമത്തെ യുഗ്മസംഖ്യയായ നാലിന്റെ വർഗ്ഗത്തിൽ അതിന്റെ മൂലം കൂട്ടിയ 20 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച ത്രിജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലത്തെ ആദ്യഫലത്തിന്റെ കീഴെ വെയ്ക്കേ. ഇങ്ങനെ മേലെ മേലെയുള്ള ഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി കീഴെ കീഴെ വെക്കേ. എല്ലായിടത്തും ചാപവർഗ്ഗം തന്നെ ഗുണകാരം. ദ്വിചതുരാദി യുഗ്മസംഖ്യാവർഗ്ഗത്തിൽ തന്റെ തന്റെ മൂലം കൂട്ടിയിരിക്കുന്നവയെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം ഹാരകം. ഫലങ്ങൾ ഏറുന്തോറും ജ്യാവിന്നു സൂക്ഷ്മത ഏറും. പിന്നെ ഒടുക്കത്തെ ഫലത്തെ അതിന്റെ മേലേതിൽ നിന്നു കളയൂ. ഈ ശേഷിച്ചതിനെ ചുവട്ടിൽനിന്നു മൂന്നാമത്തെ ഫലത്തിങ്കൽനിന്നു കളയൂ. ഇങ്ങനെ കളഞ്ഞു കളഞ്ഞ് ഒടുക്കത്തെ ഫലശേഷത്തെ ചാപത്തിൽനിന്നും വാങ്ങിയാൽ ഇഷ്ടചാപത്തിന്റെ ജ്യാവു വരും. രൂപത്തെവച്ച് ഇതുപോലെ ക്രിയ ചെയ്താൽ ഇഷ്ടജ്യാശരം വരും. ഇവിടെ രൂപത്തെ വല്ലിയിൽ വെക്കേണ്ട. ഒടുക്കത്തെ ഫലശേഷം തന്നെ ശരമായിട്ടു വരും. ഇവിടെ ആദ്യഫലത്തിന്റെ ഹാരകം രണ്ടിൽ ഗുണിച്ച വ്യാസാർദ്ധം, ചാപവർഗ്ഗം ഗുണകാരം. യുഗ്മങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളിൽ അതതിന്റെ മൂലങ്ങളെ കളഞ്ഞിരിക്കുന്ന സംഖ്യ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗങ്ങൾ ശേഷമുള്ളവറ്റിന്റെ ഹാരകങ്ങളെന്നും വിശേഷമുണ്ട്. യുക്തിഭാഷയിൽ രാജസംഖ്യാവർഗ്ഗത്തിൽ മൂലം കൂട്ടിയതിനെക്കൊണ്ടുഗുണിച്ച വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം ഇവിടേക്കു ഹാരകം എന്നാണ് പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത്. യുഗ്മസംഖ്യാവർഗ്ഗത്തിൽ മൂലം കളഞ്ഞതും രാജസംഖ്യാവർഗ്ഗത്തിൽ മൂലം കൂട്ടിയതും ഒന്നു തന്നെ. $4 \times 4 - 4 = 3 \times 3 + 3$.

ത്രിരാശിചാപമായ 5400 ഇലിയെ വെച്ചു ഈ ക്രിയകൾ ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ "വിദ്വാംസ്തുന്നബലഃ . . . " എന്നും "സ്തേനസ്ത്രീ പിശുനഃ . . . " തുടങ്ങിയുള്ള വാക്യങ്ങൾ വരും.

ഈ ക്രിയയുടെ യുക്തി:–

ചാപഖണ്ഡത്തെ അണുപ്രായമായിട്ടു നിരൂപിക്കുകയാണെങ്കിൽ ആദ്യഖണ്ഡജ്യാവു ചാപഖണ്ഡത്തിനോടു സമമെന്നു കല്പിക്കാം. ഇതിനെ ഇഷ്ടചാപത്തിലെ ചാപഖണ്ഡസംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഇഷ്ടചാപം തന്നെ. ഇതിൽനിന്നു ഖണ്ഡാന്തരസംകലിതം വാങ്ങിയാൽ ഇഷ്ടജ്യാവു വരും. ജ്യാചാപാന്തരം ഖണ്ഡാന്തരസംകലിതമെന്നു മുമ്പിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ.

ഇഷ്ടചാപത്തിനു കീഴെയുള്ള ജ്യാക്കളെല്ലാം ജ്യാചാപാന്തരത്തിനു സാധനങ്ങളാകുന്നു. അവയെല്ലാം അജ്ഞാതങ്ങൾ. അതുകൊണ്ടു ചാപങ്ങളെതന്നെ ജ്യാക്കളെന്നു കല്പിച്ചു ചാപസംകലിതം ചെയ്യേണം. അപ്പോൾ ഒടുക്കത്തെ ജ്യാവ് ഇഷ്ടചാപം.

ഇഷ്ടചാപത്തെ <u>ച</u> ഇലികളെന്നും വ്യാസാർദ്ധത്തെ *ത്ര* എന്നും ഇഷ്ടചാപത്തെ അതിന്റെ കലാസംഖ്യയോളം തുല്യഭാഗങ്ങളായിട്ടു വിഭജിച്ചിരിക്കുന്നുവെന്നും കല്പിക്ക, എന്നാൽ സമസ്തജ്യാവിനെ ഒരു ചാപഖണ്ഡത്തിനോടു തുല്യമെന്നു കല്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ, സമസ്തജ്യാവൊരു ഇലി എന്നുവരും.

അപ്പോൾ മദ്ധ്യോത്ഥശരഖണ്ഡയോഗം $= \dfrac{\text{ആദ്യസംകലിതം} \times 1}{\text{ത്ര}} = \dfrac{\text{ച}^2}{2\,\text{ത്ര}}$

ഖണ്ഡങ്ങൾ വളരെ ചെറുതാകകൊണ്ടു അഗ്രത്തിലെ ശരഖണ്ഡയോഗവും മദ്ധ്യോദ്ധ

ശരഖണ്ഡയോഗവും തുല്യമെന്നു കല്പിക്കാം. അഗ്രത്തിങ്കലെ ശരഖണ്ഡയോഗം $=$ ശരം.

$$\therefore\ \text{ഇഷ്ടചാപശരം} = \frac{\text{ച}^2}{2\text{ത്രി}}.$$

ച, ച $-$ 1, ച $-$ 2, ച $-$ 3, . . . ഇവയെയാണല്ലോ ജ്യാക്കളെന്നു കല്പിച്ചിട്ടുള്ളത്. $\text{ബ}_1, \text{ബ}_2, \text{ബ}_3, \ldots$ എന്നിവയെ ഖണ്ഡജ്യാക്കളെന്നും കല്പിക്ക.

$$\text{ബ}_1 = \frac{23\frac{1}{2}\ \text{ചാപത്തിന്റെ കോടി} \times 1}{\text{ത്രി}} = \frac{(\text{ത്രി} - \text{അരച്ചാപത്തിന്റെ ശരം}) \times 1}{\text{ത്രി}}.$$

ഈ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ

$$\text{ബ}_{\text{ച}} = \frac{\left\{\text{ത്രി} - (\text{ച} - \frac{1}{2})\ \text{ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ ശരം}\right\} \times 1}{\text{ത്രി}}$$

$\therefore\ \text{ബ}_1 - \text{ബ}_{\text{ച}}$

$$= \frac{(\text{ത്രി} - \text{അരച്ചാപഖണ്ഡശരം}) - \left\{\text{ത്രി} - \left(\text{ച} - \frac{1}{2}\right)\ \text{ചാവാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ ശരം}\right\}}{\text{ത്രി}}$$

$$= \frac{\text{ഇഷ്ടചാപശരം}}{\text{ത്രി}}\ (\text{ചാപഖണ്ഡം വളരെ ചെറുതാകയാൽ})$$

$$= \frac{\text{ച}^2}{2\text{ത്രി}} \times \frac{1}{\text{ത്രി}} = \frac{\text{ച}^2}{2\text{ത്രി}^2}$$

തുല്യന്യായംകൊണ്ടു $\text{ബ}_1 - \text{ബ}_{\text{ച}-1}$

$$= \frac{(\text{ച} - 1)\ \text{ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ ശരം}}{\text{ത്രിജ്യ}}$$

$$= \frac{(\text{ച} - 1)^2}{2\text{ത്രി}^2}$$

$$\text{ബ}_1 - \text{ബ}_{\text{ച}-2} = \frac{(\text{ച} - 2)^2}{2\text{ത്രി}^2}$$

. . . .

$$(\text{ബ}_1 - \text{ബ}_{\text{ച}}) + (\text{ബ}_1 - \text{ബ}_{\text{ച}-1}) + (\text{ബ}_1 - \text{ബ}_{\text{ച}-2}) + \cdots$$

$$= \text{ഖണ്ഡാന്തരസംകലിതം}.$$

$$\therefore\ \text{ജ്യാചാപാന്തരം} = \text{ഖണ്ഡാന്തരസംകലിതം}$$

$$= \frac{\text{ച}^2}{2\text{ത്രി}^2} + \frac{(\text{ച} - 1)^2}{2\text{ത്രി}^2} + \frac{(\text{ച} - 2)^2}{2\text{ത്രി}^2} + \cdots$$

$$= \frac{\text{ച}^3}{6\text{ത്രി}^2}\ (\text{വർഗ്ഗസംകലിതം=ഘനത്ര്യംശം എന്നിട്ട്})$$

ഇതു ദ്വിതീയസംകലിതംകൊണ്ടുണ്ടായ ഫലം.

$$\text{ഇഷ്ടജ്യാവ്} = \text{ഇഷ്ടചാപം} - \text{ജ്യാചാപാന്തരം}$$

$$= \text{ച} - \frac{\text{ച}^3}{6\text{ത്രി}^2}$$
$$\text{ശരം} = \frac{\text{ച}^2}{2\text{ത്രി}}$$

ശരത്തെ ഉണ്ടാക്കുന്നേടത്തും ജ്യാചാപാന്തരത്തെ ഉണ്ടാക്കുന്നേടത്തും ജ്യാവിന്റെ സ്ഥാനത്തു ചാപത്തെത്തന്നെ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നതുകൊണ്ട് ഈ ഫലങ്ങളും സ്ഥൂലങ്ങൾ.

$$\text{ശരം} = \frac{1}{\text{ത്രി}}\left\{\text{ച} + (\text{ച} - 1) + (\text{ച} - 2) + \cdots\right\}$$

ഇവിടെ ചാപത്തെ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നതുകൊണ്ട് ശരം സ്ഥൂലം. അതുകൊണ്ടു ച, $\text{ച} - 1$, $\text{ച} - 2$, . . . എന്നിവ എല്ലാറ്റിലും ജ്യാചാപാന്തരസംസ്കാരം ചെയ്യേണം. എന്നാൽ ശരം ഒട്ടു സൂക്ഷ്മമാകും. അങ്ങനെ ശരം സംസ്കാരം ചെയ്യുമ്പോൾ,

$$\text{ശരം} = \frac{1}{\text{ത്രി}}\left\{\left(\text{ച} - \frac{\text{ച}^3}{6\text{ത്രി}^2}\right) + \left((\text{ച} - 1) - \frac{(\text{ച} - 1)^3}{6\text{ത്രി}^2}\right) + \cdots\right\}$$

അപ്പോൾ ശരത്തിൽ ചെയ്യേണ്ട സംസ്കാരം (കുറക്കേണ്ട അംശം)

$$= \frac{1}{\text{ത്രി}}\left\{\frac{\text{ച}^3}{6\text{ത്രി}^2} + \frac{(\text{ച} - 1)^3}{6\text{ത്രി}^2} + \frac{(\text{ച} - 2)^3}{6\text{ത്രി}^2} + \cdots\right\}$$
$$= \frac{1}{6\text{ത്രി}^3} \times \text{ഘനസംകലിതം}$$
$$= \frac{\text{ച}^4}{24\text{ത്രി}^3} (\text{തൃതീയസംകലിതം})$$

ഇവിടേയും ചാപത്തെ ഉപയോഗിക്കകൊണ്ടു ശരസംസ്കാരത്തിലും സ്ഥൗല്യമുണ്ട്. എന്നാൽ ഇങ്ങനെ മേലെ മേലെയുള്ള സംസ്കാരഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി ചാപത്തിലും ശരത്തിലും സംസ്കരിച്ചാൽ സൂക്ഷ്മതരങ്ങളായ ജ്യാശരങ്ങൾ ഉണ്ടാകും.

ഇവിടെ ഇഷ്ടചാപം അന്ത്യപദമായിട്ടുള്ള ആദ്യസംകലിതത്തെ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ചപ്പോൾ ശരം വന്നു. ഇശ്ശരം അന്ത്യപദമായിട്ടുണ്ടാക്കിയ ദ്വിതീയസംകലിതത്തെ വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടുതന്നെ ഹരിച്ചപ്പോൾ ജ്യാചാപാന്തരം വരും. ജ്യാചാപാന്തരം അന്ത്യപദമായിട്ടുണ്ടാക്കിയ തൃതീയസംകലിതത്തെ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ചപ്പോൾ ശരസംസ്കാരം വരും. ഈ ശരസംസ്കാരത്തെ അന്ത്യപദമായി ചതുർത്ഥസംകലിതംചെയ്തു ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ജ്യാചാപാന്തരസംസ്കാരമുണ്ടാകും. ഇങ്ങനെ മേലെ മേലെയുള്ള ജ്യാചാപാന്തരസംസ്കാരങ്ങളും ശരസംസ്കാരങ്ങളും ഉണ്ടാക്കി ചാപത്തിലും ശരത്തിലും സംസ്കരിച്ചാൽ ജ്യാശരങ്ങൾ സൂക്ഷ്മതരങ്ങളായിട്ടു വരും. ഇവിടെ ചാപം ജ്യാവിനേക്കാളേറും. ജ്യാചാപാന്തരത്തെ ചാപത്തിൽനിന്നും കളയേണം. ജ്യാചാപാന്തരം വരുത്തുന്നതിലും ജ്യാവിന്നു പകരം ചാപം ഉപയോഗിക്കയാൽ ജ്യാചാപാന്തരം വേണ്ടതിലധികമായതുകൊണ്ടു ഫലം വേണ്ടതിലധികം കുറഞ്ഞുപോയി. അപ്പോൾ ജ്യാചാപാന്തരസംസ്കാരഫലത്തെ ധനമായിട്ടു സംസ്കരിക്കേണം. ഈ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ ജ്യാചാപാന്തരത്തിന്റെ രണ്ടാമത്തെ സംസ്കാരഫലത്തെ കളയേണം. പിന്നത്തേതു കൂട്ടേണം. ഇങ്ങനെ ആവശ്യത്തോളം ക്രിയ ചെയ്യാം. അഥവാ, ആവശ്യം പോലെ ഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി, അവയിലൊടുക്കത്തേതിനെ അതിനു മുമ്പിലത്തേതിൽനിന്നു കളയുക; ഈ ശേഷത്തെ അതിനു മുമ്പിലെ ഫലത്തിൽനിന്നു കളയുക. ഇങ്ങനെ ഒടുക്കത്തെ ഫലശേഷത്തെ ചാപത്തിൽനിന്നും കളയുക. എന്നാൽ

ഇഷ്ടജ്യാവ് ഒട്ടു സൂക്ഷ്മമാകും. ഇങ്ങനെതന്നെ ശരത്തിങ്കലും സംസ്കാരം ഇവിടെ ഒടുക്കത്തെ ഫലശേഷം തന്നെ സൂക്ഷ്മശരം.

$$
\begin{aligned}
\text{ഇഷ്ടചാപം} &= \text{ച}\cdots\cdots\cdots\cdots = \frac{\text{ച}}{\angle 1}\\
\text{ഇഷ്ടശരം} &= \left\{\frac{\text{ച} + (\text{ച} - 1) + (\text{ച} - 2) + \cdots}{\text{ത}}\right\}\\
&= \frac{\text{ച}^2}{2\text{ത}} = \frac{\text{ച}^2}{\angle 2 \times \text{ത}}\\
\text{ജ്യാചാപാന്തരം} &= \left\{\frac{\text{ച}^2 + (\text{ച} - 1)^2 + \cdots\cdots}{\angle 2 \times \text{ത} \times \text{ത}}\right\}\\
&= \frac{\text{ച}^3}{\angle 2 \times 3\text{ത}^2} = \frac{\text{ച}^3}{\angle 3\text{ത}^2}\\
\text{ആദ്യശരസംസ്കാരം} &= \left\{\frac{\text{ച}^3 + (\text{ച} - 1)^3 + \cdots\cdots}{\angle 3 \times \text{ത}^2 \times \text{ത}}\right\}\\
&= \frac{\text{ച}^4}{\angle 3 \times 4\text{ത}^3} = \frac{\text{ച}^4}{\angle 4\text{ത}^3}\\
\text{ആദ്യജ്യാചാപാന്തരസംസ്കാരം} &= \left\{\frac{\text{ച}^4 + (\text{ച} - 1)^4 + \cdots\cdots}{\angle 4 \times \text{ത}^3 \times \text{ത}}\right\}\\
&= \frac{\text{ച}^5}{\angle 4 \times 5\text{ത}^4}\\
&= \frac{\text{ച}^5}{\angle 5\text{ത}^4}\\
\text{രണ്ടാംശരസംസ്കാരം} &= \left\{\frac{\text{ച}^5 + (\text{ച} - 1)^5 + \cdots\cdots}{\angle 5 \times \text{ത}^4 \times \text{ത}}\right\}\\
&= \frac{\text{ച}^6}{\angle 5 \times 6 \times \text{ത}^5}\\
&= \frac{\text{ച}^6}{\angle 6\text{ത}^5}
\end{aligned}
$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ \text{സൂക്ഷ്മമായ ഇഷ്ടജ്യാവ്} &= \text{ച} - \frac{\text{ച}^3}{6\text{ത}^2} + \frac{\text{ച}^5}{120\text{ത}^4} - \frac{\text{ച}^7}{5040\text{ത}^6} + \cdots\cdots^3\\
&= \text{ച} - \frac{\text{ച}^3}{\angle 3\text{ത}^2} + \frac{\text{ച}^5}{\angle 5\text{ത}^4} - \frac{\text{ച}^7}{\angle 7\text{ത}^6} + \cdots\cdots\\
\text{സൂക്ഷ്മശരം} &= \frac{\text{ച}^2}{\angle 2\text{ത}} - \frac{\text{ച}^4}{\angle 4\text{ത}^3} - \frac{\text{ച}^6}{\angle 6\text{ത}^5} - \cdots\cdots\\
\therefore\ \text{ഇഷ്ടജ്യാകോടി} &= \text{ത} - \left(\frac{\text{ച}^2}{\angle 2\text{ത}} - \frac{\text{ച}^4}{\angle 4\text{ത}^3} - \frac{\text{ച}^6}{\angle 6\text{ത}^5} - \cdots\cdots\right)
\end{aligned}
$$

"വിദ്വാംസ്തുന്നബലഃ. . . . . ." എന്നും "സ്തേനസ്ത്രീപിശുനഃ. . . . . ." എന്നുമുള്ള വാക്യങ്ങളെ ഇവിടെ ഉദ്ധരിക്കുന്നു.

"വിദ്വാംസ്തുന്നബലഃ കവീശനിചയസ്സർവ്വാർത്ഥശീലസ്ഥിരോ
നിർവ്വിദ്ധാംഗനരേന്ദ്രതങ്ങ്നിഗദിതേഷ്വേഷു ക്രമാൽ പഞ്ചസു |
ആധസ്ത്യാൽ ഗുണിതാദദീഷ്ടധനുഷഃകൃത്യാ വിഹൃത്യാന്തിമ-
സ്യാപ്തം ശോദ്ധ്യമുപര്യുപര്യഥ ഘനേനൈവം ധനുഷ്യന്തതഃ" ||

— ഇതി മാധവഃ.

വിദ്വാനാദി അഞ്ചുവാക്യങ്ങൾ തല്പരാദി കലാന്തങ്ങളാകുന്നു. ഇവയെ കീഴെനിന്നു തുടങ്ങി മേല്പോട്ടു ക്രമേണ വെക്ക. എല്ലാത്തിലും കീഴേതിനെ ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിരാശിവർഗ്ഗമായ "നാനാജ്ഞാനതപോധരഃ" (2916000) എന്നതിനെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലത്തെ അടുത്ത മേലെ വാക്യത്തിൽനിന്നും കളയൂ. അവിടെ ശേഷിച്ചതിനെ ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിരാശിവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലത്തെ അതിന്റെ മേലെ വാക്യത്തിൽനിന്നു കളയൂ. ഈവണ്ണം ക്രിയചെയ്തു് എല്ലാറ്റിനുമൊടുക്കത്തെ ശേഷത്തെ ഇഷ്ടചാപഘനംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിരാശിഘനമായ "അജ്ഞാനനുന്നേ നവ തത്വസംശയഃ" (157464000000) എന്നതുകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലത്തെ ഇഷ്ടചാപത്തിങ്കൽനിന്നു കളഞ്ഞാൽ ശിഷ്ടം ഇഷ്ടജ്യാവു്.

"സ്തേനസ്ത്രീ പിശുനസ്സുഗന്ധിനഗനുൽഭദ്രാംഗഭവ്യാസനോ |
മീനാംഗോ നരസിംഹ ഊനധനകൃൽഭൂരേവ ഷൾസ്വേഷു തു ||
ആധസ്ത്യാൽ ഗുണിതാദമീഷ്ടധനുഷഃ കൃത്യാ വിഹൃത്യാന്തിമ-
സ്യാപ്തം ശോദ്ധ്യമുപര്യുപര്യഥ ഫലം സ്യാദുൽക്രമജ്യാന്ത്യജം"||

ഇതി മാധവഃ

സ്തേനാദിവാക്യങ്ങൾ ആറും തല്പരാദികലാന്തങ്ങളാകുന്നു. അവറ്റെ കീഴിൽനിന്നു തുടങ്ങി മേലെ മേലെവെച്ചു മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയവണ്ണം ക്രിയ ചെയ്യുക. ആറാംവാക്യത്തിൽ ശേഷിച്ചതിനേയും ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിരാശിചാപവർഗ്ഗംകൊണ്ടുതന്നെ ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലം ഇഷ്ടജ്യാവിന്റെ ഉൽക്രമജ്യാവായിട്ടു വരും. ശരത്തിനു ബാണമെന്നും ഉൽക്രമജ്യാവെന്നും പേരുകളുണ്ടു്.

ത്രിരാശി ചാപലിപ്തയെവെച്ചു, "നിഹത്യചാപവർഗ്ഗേണ. . . " എന്ന ന്യായംകൊണ്ടാണു് ഈ വാക്യങ്ങളെ വരുത്തിയിരിക്കുന്നതു്. ച = 5400 ഇലി.

---

[3] In Trigonometrical language,

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{\angle 3} + \frac{\theta^5}{\angle 5} + \frac{\theta^7}{\angle 7} + \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{\angle 2} + \frac{\theta^4}{\angle 4} + \frac{\theta^6}{\angle 6} + \cdots$$

ഇഷ്ടചാപം $= ച = 5400'$

1. $\frac{ച^2}{2ത്ര} = \frac{5400^2 \times 60 \times 60}{2 \times 12375888} \cdots = 4241' - 9'' - 0$ ഊനധനകൃൽഭൂരേവ

2. $\frac{ച^3}{\angle 3ത്ര^2} = \frac{4241' - 9' - 0 \times ച}{3 \times ത്ര} = 2220' - 39'' - 40''$ നിർവിദ്ധാംഗനരേന്ദ്രരുക്

3. $\frac{ച^4}{\angle 4ത്ര^3} = \frac{2220' - 39'' - 40''' \times ച}{4ത്ര} \cdots 872' - 3'' - 5'''$ മീനാംഗോനരസിംഹഃ

4. $\frac{ച^5}{\angle 5ത്ര^4} = \frac{872' - 3'' - 5''' \times ച}{5ത്ര} \cdots 273' - 57'' - 47'$ സർവാർത്ഥശീലസ്ഥിരഃ

5. $\frac{ച^6}{\angle 6ത്ര^5} = \frac{273' - 57'' - 47''' \times ച}{6ത്ര} \cdots 71' - 43' - 24'''$ ഭദ്രാംഗഭവ്യാസനഃ

6. $\frac{ച^7}{\angle 7ത്ര^6} = \frac{71 - 43'' - 24''' \times ച}{7ത്ര} \cdots 16' - 5'' - 41'''$ കവീശനിചയഃ

7. $\frac{ച^8}{\angle 8ത്ര^7} = \frac{16' - 5'' - 41''' \times ച}{8ത്ര} \cdots 3' - 9'' - 37'''$ സുഗന്ധിനഗനുൽ

8. $\frac{ച^9}{\angle 9ത്ര^8} = \frac{3' - 9'' - 37''' \times ച}{9ത്ര} \cdots 0' - 33'' - 6'''$ തുന്നബലഃ

9. $\frac{ച^{10}}{\angle 10ത്ര^9} = \frac{0 - 33'' - 6'''}{10ത്ര} \cdots 0' - 5'' - 12'''$ സ്ത്രീപിശുനഃ

10. $\frac{ച^{11}}{\angle 11ത്ര^{10}} = \frac{0' - 5'' - 12''' \times ച}{11ത്ര} \cdots 0' - 0'' - 44'''$ വിദ്വാൻ

11. $\frac{ച^{12}}{\angle 12ത്ര^{11}} = \frac{0' - 0'' - 44''' \times ച}{12ത്ര} \cdots\cdots 0' - 0'' - 6'''$ സ്തേന

(ചില സ്ഥലങ്ങളിൽ ശരിയായ ഫലം കിട്ടുവാൻ പ്രതല്പരവരെവെച്ച ക്രിയ ചെയ്യണം.)

"നിഹത്യചാപവർഗ്ഗേണ . . . " എന്ന ന്യായംകൊണ്ടും ഈ വാക്യങ്ങളിൽ നിന്നും ഇഷ്ട ജ്യാശരങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കാം. ഇവയ്ക്കുദാഹരണങ്ങൾ.

"നിഹത്യചാപവർഗ്ഗേണ . . . " എന്ന ന്യായംകൊണ്ടു ജ്യാശരങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കും പ്രകാരം:–

$$\text{ഇഷ്ടചാപത്തിന്റെ ജ്യാവ്} = ച - \frac{ച^3}{\angle 3ത്ര^2} + \frac{ച^5}{\angle 5ത്ര^4} - \frac{ച^7}{\angle 7ത്ര^6} \cdots$$

$$ച = 1200' - 0'' - 0'''$$

$$\frac{ച^3}{\angle 3 \times ത്ര^2} = \frac{1200 \times 1200 \times 1200}{6 \times ത്ര^2}$$

$$= 24' - 22'' - 10''$$

$$\frac{ച^5}{\angle 5 \times ത്ര^4} = \frac{24' - 22'' - 10'' \times 1200 \times 1200}{20ത്ര^2}$$

$$= 0' - 8'' - 54'''$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\text{ച}^7}{\angle 7 \times \text{ത്ര}^6} &= \frac{0' - 8'' - 54''' \times 1200 \times 1200}{42\text{ത്ര}^2} \\
&= 0' - 0'' - 2'' \\
\therefore \quad \text{ഇഷ്ടജ്യാവ്} &= (1200' - 0'' - 0''') - (24' - 22'' - 10''') \\
&\quad + \ (0' - 8'' - 54''') - (0' - 0'' - 2') \\
&= \underline{1175' - 46'' - 42'''} \\
\text{ശരം} &= \frac{\text{ച}^2}{\angle 2\text{ത്ര}} - \frac{\text{ച}^4}{\angle 4\text{ത്ര}^3} + \frac{\text{ച}^6}{\angle 6\text{ത്ര}^5} \cdots \\
\frac{\text{ച}^2}{\angle 2\text{ത്ര}} &= \frac{1200 \times 1200}{2 \times \text{ത്ര}} \cdots \\
&= 209' - 26'' - 21''' \\
\frac{\text{ച}^4}{\angle 4\text{ത്ര}^3} &= \frac{209' - 26'' - 21''' \times 1200 \times 1200}{4 \times 3\text{ത്ര}^2} \\
&= 2 - 7'' - 36''' \\
\frac{\text{ച}^6}{\angle 6\text{ത്ര}^5} &= \frac{2' - 7'' - 36''' \times 1200 \times 1200}{6 \times 5\text{ത്ര}^2} \cdots \\
&= 0' - 0'' - 31''' \\
\therefore \quad \text{ഇഷ്ടജ്യാശരം} &= (209' - 26'' - 21''') - (2' - 7'' - 36''') \\
&\quad + (0' - 0'' - 31''') \\
&= \underline{207' - 19'' - 16'''} \\
\therefore \quad \text{ഇഷ്ടജ്യാകോടി} &= \text{ത്രിജ്യാ} - \text{ശരം} \\
&= (3437' - 44'' - 48''') - (207' - 19'' - 16''') \\
&= \underline{3230' - 25'' - 32'''}
\end{aligned}
$$

പിന്നെ വാക്യങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഇഷ്ടജ്യാശരങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം:-

$$0' - 0'' - 44''' \times \frac{1200^2}{5400^2} \cdots = 0' - 0'' - 2'''$$

$$\{(0' - 33'' - 6''') - (0' - 0'' - 2''')\} \times \frac{1200^2}{5400^2} \cdots = 0' - 1'' - 38'''$$

$$\{(16' - 5'' - 41''') - (0' - 1'' - 38''')\} \times \frac{1200^2}{5400^2} \cdots = 0' - 47'' - 36'''$$

$$\{(273' - 57'' - 47''') - (0' - 47'' - 36''')\} \times \frac{1200^2}{5400^2} \cdots = 13' - 29'' - 23'''$$

$$\{(2220' - 39'' - 40''') - (18' - 29'' - 23''')\} \times \frac{1200^2}{5400^2} \cdots = 24' - 13'' - 17'''$$

$$\therefore \ \text{ഇഷ്ടജ്യാവ്} = (1200' - 0'' - 0''') - (24' - 13'' - 17''') = \underline{1175 - 46 - 48}$$

$$0' - 0'' - 6''' \times \frac{1200^2}{5400^2} \cdots = 0' - 0'' - 0'''$$

$$0' - 5'' - 12''' \times \frac{1200^2}{5400^2} \cdots = 0' - 0'' - 15'''$$

$$\{(3' - 9'' - 37''') - (0' - 0'' - 15''')\} \times \frac{1200^2}{5400^2} \cdots = 0' - 9'' - 22'''$$

$$\{(71' - 43'' - 24''') - (0' - 9'' - 22''')\} \times \frac{1200^2}{5400^2} \cdots = 3' - 32'' - 3'''$$

$$\{(872' - 3'' - 5''') - (3' - 32'' - 3''')\} \times \frac{1200^2}{5400^2} \cdots = 42' - 53'' - 23'''$$

$$\{(4241' - 9'' - 0''') - (42' - 53'' - 23''')\} \times \frac{1200^2}{5400^2} \cdots = 207' - 19'' - 17'''$$

ഇഷ്ടചാപശരം $= \underline{207' - 19'' - 17'''}$

ഇഷ്ടജ്യാകോടി $= \underline{3230' - 25'' - 31'''}$

ഇങ്ങനെ $225'$, $450'$, $675'$, . . . എന്ന തുടങ്ങിയുള്ള 24 ചാപങ്ങളേയും വെച്ച് "നിഹത്യ ചാപവർഗ്ഗേണ . . . " എന്ന ന്യായംകൊണ്ടു ക്രിയ ചെയ്താൽ 24 മഹാജ്യാക്കളെയും ഏറ്റവും സൂക്ഷ്മമായിട്ടു വരുത്താം.

മാധവോദിതങ്ങളായിരിക്കുന്ന തല്പരാദി മഹാജ്യാക്കളെ താഴെ ചേർക്കുന്നു:–

"ശ്രേഷ്ഠന്നാമവരിഷ്ഠാനാം ഹിമാദ്രിർവ്വേദഭാവനഃ |
തപനോ ഭാനു സൂക്തജ്ഞോ മദ്ധ്യമം വിദ്ധിദോഹനം ||
ധിഗാജ്യോനാശനം കഷ്ടം ഛന്നഭോഗാശയാംബികാ |
മൃഗാഹാരോ നരേശോയം വീരോരണജയോത്സുകഃ ||
മൂലം വിശുദ്ധം നാളധ്യഗാനേഷു വിരളാനരാഃ |
അശുദ്ധിഗുപ്താചോരശ്രീശ്ശംകുകർണ്ണോനഗേശ്വരഃ ||
തനുജോ ഗർഭജോ മിത്രം ശ്രീമാനത്രസുഖി സഖേ |
ശശിരാമത്രൗ ഹിമാഹാരോ വേഗജ്ഞഃ പഥിസിന്ധുരഃ ||
ഛായാലയോഗജോ നീലോ നിർമ്മലോ നാസ്തി സൽകുലേ |
രാത്രൗ ദർപ്പണമഭ്രാംഗം നാഗസ്തുംഗനഖോബലി ||
ധീരോ യുവാ കഥാലോലഃ പൂജ്യോ നാരീജനൈർഭഗഃ |
കന്യാഗാരോ നാഗവല്ലീ ദേവോ വിശ്വസ്ഥലീ ഭൃഗുഃ ||
തല്പരാദികലാന്താസ്താ മഹാജ്യാ മാധവോദിതാഃ" |

ത്രിജ്യാ = <u>ശ്രേഷ്ഠോ ദേവോ വിശ്വസ്ഥലീ ഭൃഗുഃ</u> $-3437' - 44'' - 48''' - 22.$
ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം = <u>ഭഗാനാം പ്രാണകലാനാം നവേന ശത്രൂൻ നാഡ്യാദൗപാദപീഡ്യാ</u>
$-11818102 - 50 - 40 - 3 - 15 - 20 - 4.$

<u>നിഹത്യ ചാപവർഗ്ഗേണ എന്ന ന്യായംകൊണ്ടു ചെറിയ ജ്യാക്കളെ ചാപിക്കുംപ്രകാരം:-</u>

ഇഷ്ടജ്യാവ് $=$ ഇഷ്ടചാപം $- \dfrac{\text{ഇഷ്ടചാപഘനം}}{6 \times \text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$.

ചാപം ചെറുതാകയാൽ $\dfrac{\text{ചാപഘനം}}{6 \times \text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$ എന്നതിനെ $\dfrac{\text{ജ്യാഘനം}}{6 \times \text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}$ എന്നതിനോടു

തുല്യമെന്നു കല്പിക്കാം.

$$\therefore \text{ ഇഷ്ടചാപം } = \text{ജ്യാവ്} + \frac{\text{ജ്യാഘനം}}{6 \times \text{ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം}}.$$

പ്രായികപരിധിയെ സൂക്ഷ്മമാക്കുംപ്രകാരം

അനന്തരം ഈ ന്യായത്തിന്നു തക്കവണ്ണം ഇഷ്ടവ്യാസത്തിന്നു പ്രായികമായിട്ട് ഒരു പരിധിയെ ഉണ്ടാക്കിയിരിക്കുന്നതിനെ സൂക്ഷ്മമാക്കുംപ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ നടേ ഇഷ്ടമായി ഒരു വ്യാസത്തെ കല്പിച്ച് അതിനു പ്രായികമായിട്ട് ഒരു പരിധിയെ ഉണ്ടാക്കൂ, ഏഴിന്ന് ഇരുപത്തിരണ്ട് എന്നു തുടങ്ങിയുള്ള പ്രായികവ്യാസപരിധികളെക്കൊണ്ടു ത്രൈരാശികത്തിന്നു തക്കവണ്ണം. പിന്നെ ഇഷ്ടവ്യാസത്തെ വ്യാസാർദ്ധമെന്നു കല്പിച്ച് ഇച്ചൊല്ലിയ പ്രായികപരിധീടെ നാലൊന്ന് അവിടെ മിക്കവാറും എട്ടൊന്നായിട്ടിരിക്കും. ഇതിന്ന് ഇച്ചൊല്ലിയ ന്യായത്തിന്നു തക്കവണ്ണം ജ്യാവിനെ ഉണ്ടാക്കൂ. അപ്പോളതു് ഇഷ്ടവ്യാസം വ്യാസാർദ്ധമായിട്ടിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തിങ്കൽ യാതൊന്നു[18] സൂക്ഷ്മമായിട്ടിരിക്കുന്ന പരിധീടെ അഷ്ടാംശമാകുന്നതു് അതിന്റെ ജ്യാവിനോടു മിക്കതുമൊത്തിരിക്കും ഈ ഉണ്ടാക്കിയ ജ്യാവ്.

വ്യാഖ്യാനം 18: ‘യാതൊന്ന്’ എന്നതിന്നു യാതൊരു പാപമെന്നർദ്ധം.

ഇവിടെ നിഹത്യ ചാപവർഗ്ഗേണ എന്ന ന്യായത്തിന്നു തക്കവണ്ണം ജ്യാവിനെ വരുത്തുന്നേടത്തു നടേത്തെ ഹാരകമാകുന്ന ത്രിജ്യാവർഗ്ഗത്തിന്റെ സ്ഥാനത്ത് ഇഷ്ടവ്യാസവർഗ്ഗത്തെ കൊള്ളൂ, ദ്വിഗുണവ്യാസവൃത്തത്തിങ്കലെ വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗമാകയാൽ. ഇത്രേ ഇഷ്ടവ്യാസത്തിങ്കൽ ഈ ജ്യാവുണ്ടാകുന്നേടത്തു വിശേഷമുള്ളൂ. പിന്നെ ഈ ജ്യാവിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ വ്യാസാർദ്ധത്തിങ്കന്നു കളയൂ. ശേഷംകോടിവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ സൂക്ഷ്മമായിട്ടിരിക്കുന്ന പരിദ്ധ്യഷ്ടാംശത്തിന്റെ ജ്യാവർഗ്ഗം വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിൽ പാതി ആയിട്ടിരിക്കും. കോടിവർഗ്ഗവും അത്രതന്നെ ആയിട്ടിരിക്കും. അഷ്ടാംശം പരിധിപാദത്തിൽ അർദ്ധമാകയാൽ ഭുജാകോടികൾ സമങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ പ്രായികമായി ഉണ്ടാക്കിയ പരിദ്ധ്യഷ്ടാംശത്തിന്റെയും സൂക്ഷ്മമായിരിക്കുന്ന പരിദ്ധ്യഷ്ടാംശത്തിന്റെയും അന്തരത്തിന്റെ ജ്യാവിനെ മേലിൽ ചൊല്ലുവാനിരിക്കുന്ന ‘ജീവേ പരസ്പരം’ എന്ന ന്യായത്തിന്നു തക്കവണ്ണം ഉണ്ടാക്കാം. അതിനു പ്രായികഭുജാകോടികളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളെ സൂക്ഷ്മകോടിഭുജാവർഗ്ഗങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച വ്യാസവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലങ്ങൾ പ്രായികഭുജാകോടി വർഗ്ഗങ്ങളുടെ അർദ്ധങ്ങളായിട്ടിരിക്കും; ഗുണകാരങ്ങൾ പാതിയും ഇരട്ടിയും ആയിട്ടിരിക്കയാൽ. പിന്നെ ഇവറ്റിന്റെ മൂലങ്ങൾ തങ്ങളിൽ അന്തരിപ്പൂ. ശേഷം സൂക്ഷ്മപ്രായിക പരിധികളുടെ അഷ്ടാംശങ്ങളുടെ അന്തരത്തിന്റെ ജ്യാവ് ഇതിനെ ചാപിപ്പൂ. അതിന്ന് ഇതിന്റെ ഘനത്തിങ്കന്നു വ്യാസവർഗ്ഗത്തെ ആറിൽ ഗുണിച്ച് അതിനെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തെ ഈ അന്തരജ്യാവിൽ കൂട്ടൂ. ഇതു് അന്തരചാപമാകുന്നതു്. പിന്നെ ഇതിനെ പ്രായികാഷ്ടാംശചാപത്തിൽ കൂട്ടൂ, പ്രായികജ്യാവർഗ്ഗം വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗാർദ്ധത്തേക്കാൾ ചെറുതു് എന്നിരിക്കിൽ; വലുതു് എന്നിരിക്കിൽ കളവൂ. അപ്പോൾ സൂക്ഷ്മാംശമായിട്ടു വരുമതു പരിധീടെ, ദ്വിഗുണവ്യാസത്തിങ്കൽ. ഇഷ്ടവ്യാസത്തിങ്കൽ പരിധീടെ ചതുരംശം ആയിട്ടിരിക്കും. അതിനെ

നാലിൽ ഗുണിച്ചാൽ സൂക്ഷ്മമായിട്ടിരിക്കുന്ന പരിധി. ഇങ്ങനെ പ്രായികപരിധിയെ സൂക്ഷ്മമാക്കും പ്രകാരം.

വ്യാഖ്യാനം: ഇവിടെ "നിഹത്യ ചാപവർഗ്ഗേണ . . . " എന്ന ന്യായംകൊണ്ടു സ്ഥൂലമായിട്ടു വരുത്തിയ പരിധിയെ സൂക്ഷ്മമാക്കും പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

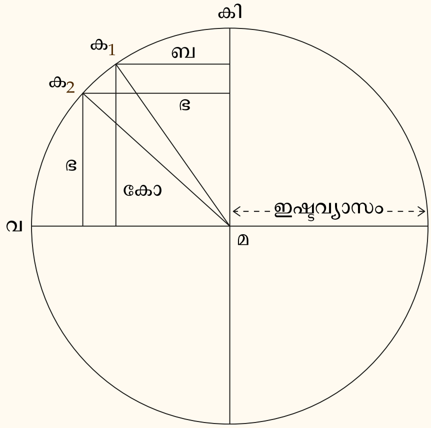
"ന്യായേനാനേന പരിധിമിഷ്ടവ്യാസസ്യ കല്പയേൽ |
ഇഷ്ടവ്യാസേഷ്ടപരിധിതുര്യം ചാപം പ്രകല്പയേൽ ||
നിഹത്യ ചാപവർഗ്ഗേണ ചാപം തത്തൽ ഫലാനി ച |
ഹരേൽ സമൂലയുഗ്വൈഗ്ഗൈർവ്യാസവർഗ്ഗഹതൈഃ ക്രമാൽ ||
ചാപം ഫലാനി ചാധോധോ ന്യസ്യോപര്യുപരി ത്യജേൽ |
ശിഷ്ടം ഗുണസ്യ വർഗ്ഗോ യോ വ്യാസവർഗ്ഗാന്തരം ച യൽ ||
തയോരാദ്യേ ദളമൂലേ തൽഭേദം സ്വഘ്നഷഷ്ഠതഃ |
വ്യാസവർഗ്ഗാപ്തസംയുക്തം ചതുഘ്നം പരിധേസ്ത്യജേൽ ||
ആദ്യമൂലേധികേ, യോജ്യമൂനേ സ്യാൽപരിധിസ്സ്ഫുടഃ |" (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

ഒന്നിനു മൂന്ന്, ഏഴിന്ന് ഇരുപത്തിരണ്ട് എന്നു തുടങ്ങിയ ഏതെങ്കിലുമൊന്നുകൊണ്ട് ഒരിഷ്ടവ്യാസത്തിന്നു പരിധിയെ വരുത്തു ആ പരിധിയുടെ നാലൊന്നിനെ ഇഷ്ടചാപമെന്നു കല്പിക്കു. ഈ ചാപത്തിന്നു "നിഹത്യചാപവർഗ്ഗേണ . . . " എന്ന ന്യായേന ജ്യാവിനെ ഉണ്ടാക്കു. ജ്യാനയനത്തിങ്കൽ ത്രിജ്യാവർഗ്ഗത്തിന്നു പകരം ഇഷ്ടവ്യാസവർഗ്ഗത്തെ ഉപയോഗിക്കണമെന്നിവിടെ വിശേഷമാകുന്നതു. ഇഷ്ടവ്യാസവർഗ്ഗത്തിങ്കന്ന് ഈ ജ്യാവർഗ്ഗത്തെ വാങ്ങൂ. ഈ ശേഷത്തേയും ജ്യാവർഗ്ഗത്തെയും വെവ്വേറെ അർദ്ധിച്ചു മൂലിപ്പൂ. ഈ രാശികളുടെ അന്തരത്തെ രണ്ടേടത്തുവച്ച് ഒന്നിന്റെ ഘനത്തെ ആറിലും വ്യാസവർഗ്ഗത്തിലും ഹരിപ്പൂ ഈ ഫലത്തെ വേറെ വെച്ചിരിക്കുന്ന രാശ്യന്തരത്തിൽ കൂട്ടൂ. ഇതിനെ നാലിൽ ഗുണിച്ചു സ്ഥൂലപരിധിയിൽ സംസ്കരിച്ചാൽ സൂക്ഷ്മമായിരിക്കുന്ന പരിധി വരും. ഇവിടെ ജ്യാവർഗ്ഗാർദ്ധം ജ്യാവ്യാ സവർഗ്ഗാന്തരാർദ്ധത്തേക്കാളേറുമെങ്കിൽ, സംസ്കാരം ഋണം; അല്ലെങ്കിൽ ധനം.

ഈ ക്രിയയുടെ യുക്തി:-

പരിലേഖം 38-ൽ ഇഷ്ടവ്യാസം (വ്യ) വ്യാസാർദ്ധമായ വൃത്തത്തിൽ കേന്ദ്രം മ, കിക$_1$ സ്ഥൂലപരിധിയിൽ നാലൊന്നായ ചാപം. ഇഷ്ടവ്യാസം വ്യാസാർദ്ധമായിട്ടിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തിൽ കിക$_1$ പരിധിയുടെ എട്ടൊന്നിനോടു മിക്കതും തുല്യമായിട്ടിരിക്കും. കിക$_2$ സൂക്ഷ്മപരിധിയുടെ എട്ടൊന്ന്.

$$\text{അന്തരചാപം} = \text{ക}_1\text{ക}_2.$$



പരിലേഖം (38)

$\underline{കി ക_1}$ എന്ന ചാപത്തിന്നു "നിഹത്യ ചാപവൎഗ്ഗേണ..." എന്ന ന്യായംകൊണ്ടു ജ്യാവിനെ ഉണ്ടാക്കുക. ഈ വലിയ വൃത്തത്തിലെ വ്യാസാൎദ്ധം ഇഷ്ടവ്യാസമാകയാൽ ത്രിജ്യാവൎഗ്ഗത്തിന്നു പകരം ഇഷ്ടവ്യാസവൎഗ്ഗത്തെ ഹാരകമായി കല്പിക്കേണം. $\underline{കി ക_1}$ എന്ന ചാപത്തെ $\underline{ച_1}$ എന്നു കല്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ

$$\underline{ച_1} \text{ എന്ന ചാപത്തിന്റെ ജ്യാവ് } (\underline{ബ}) = ച_1 - \frac{{ച_1}^3}{6 വ്യ^2} + \frac{{ച_1}^6}{120 വ്യ^4} - \cdots$$

$$\underline{ച_1} \text{ എന്ന ചാപത്തിന്റെ കോടിവൎഗ്ഗം } = വ്യ^2 - ബ^2 (= \underline{കോ^2}).$$

വൃത്തത്തിന്റെ എട്ടൊന്നിന്റെ ഭുജാകോടികൾ സമങ്ങളാകുന്നു. എന്തെന്നാൽ സൂക്ഷ്മപരിധിയുടെ എട്ടൊന്നു പദാൎദ്ധമാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഭുജാചാപവും കോടിചാപവും തുല്യങ്ങളാകയാൽ, ജ്യാക്കളും തുല്യങ്ങൾ. സൂക്ഷ്മപരിദ്ധ്യഷ്ടാംശത്തിന്റെ ഭുജാകോടികളും സ്ഥൂലപരിദ്ധ്യഷ്ടാംശത്തിന്റെ ഭുജാകോടികളും തമ്മിൽ കുറച്ചന്തരമുണ്ടാകും. ഈ അന്തരത്തെയാണിവിടെ കാണേണ്ടതു്.

$$\text{സൂക്ഷ്മപരിദ്ധ്യഷ്ടാംശത്തിന്റെ ചാപം} = \underline{ച_2}$$

$$\text{സൂക്ഷ്മപരിദ്ധ്യഷ്ടാംശഭുജ} = \text{അതിന്റെ കോടി} = \underline{ഭ}$$

$$ച_2 \propto ച_1 \text{ എന്ന ചാപത്തിന്റെ ഭുജാ} = \frac{ബ \times ഭ \propto കോ \times ഭ}{വ്യ}$$

(ജീവേ പരസ്പരം ന്യായേന)

$$\text{ഭുജ്യാകോടി കൎണ്ണന്യായേന, ഭുജാകോടിവൎഗ്ഗയോഗം} = \text{കൎണ്ണവൎഗ്ഗം}$$

$$\therefore \quad ഭ^2 + ഭ^2 = വ്യ^2$$

$$ഭ^2 = \frac{വ്യ^2}{2}$$

$$\frac{ബ^2 \times ഭ^2}{വ്യ^2} = \frac{ബ^2 \times വ്യ^2/2}{വ്യ^2} = \frac{ബ^2}{2}$$

$$\text{അതുപോലെതന്നെ } \frac{കോ^2 \times ഭ^2}{വ്യ^2} = \frac{കോ^2}{2}$$

$$\text{അപ്പോൾ ചാപാന്തരഭുജാ} = \frac{\sqrt{ബ^2}}{\sqrt{2}} \propto \frac{\sqrt{കോ^2}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{ഇതിനെ ചാപിച്ചാൽ ചാപാന്തരം } \underline{ച} = \left(\frac{\sqrt{ബ^2}}{\sqrt{2}} \propto \frac{\sqrt{കോ^2}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\left(\frac{\sqrt{ബ^2}}{\sqrt{2}} \propto \frac{\sqrt{കോ^2}}{\sqrt{2}}\right)^3}{6വ്യ^2}$$

(ഈ ചാപീകരണപ്രകാരത്തിന്റെ യുക്തി മുമ്പിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ.)

$$\therefore \text{ സൂക്ഷ്മപരിധിയുടെ എട്ടൊന്ന്} = ച_1 \pm ച.$$

$\underline{കോ^2}$-നേക്കാൾ $\underline{ബ^2}$ ഏറുമെങ്കിൽ $ച_1$ എന്നതു $ച_2$ എന്നതിനേക്കാളേറും.

$$\text{അപ്പോൾ സൂക്ഷ്മപരിധിയുടെ എട്ടൊന്ന്} = ച_1 - ച$$

$ബ^2$ കുറയുമെങ്കിൽ $ച_1$-നേക്കാൾ $ച_2$ ഏറും.

$$\text{അപ്പോൾ സൂക്ഷ്മപരിധിയുടെ എട്ടൊന്ന്} = ച_1 + ച$$

$$\text{അപ്പോൾ വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ സൂക്ഷ്മപരിധി} = 8(ച_1 \pm ച)$$

$$\therefore \text{ ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ സൂക്ഷ്മപരിധി} = 4(ച_1 \pm ച)$$

$$= 4ച_1 \pm 4ച$$

$$= \underline{\text{സ്ഥൂലപരിധി} \pm 4 \times \text{ചാപാന്തരം.}}$$

<u>ഉദാഹരണം:-</u>

$$\text{ഇഷ്ടവ്യാസം} = 1400$$

$$\text{സ്ഥൂലപരിധി} = 1400 \times \frac{22}{7} = 4400$$

$$\text{ഇതിന്റെ നാലൊന്ന്} = 1100$$

ധനം ഋണം

$$\text{ചാപം} \cdots\cdots\cdots = 1100 - 0 - 0$$

$$\text{ആദ്യഫലം} = \frac{1100^3}{6 \times 1400^2} \cdots\cdots\cdots = 113 - 10 - 49$$

$$\text{ദ്വിതീയഫലം} = \frac{113 - 10 - 49 \times 1100^2}{20 \times 1400} \cdots = 3 - 29 - 37$$

$$\text{തൃതീയഫലം} = \frac{3 - 29 - 37 \times 1100^2}{42 \times 1400^2} \cdots\cdots\cdots = 0 - 3 - 5$$

$$\text{ചതുർത്ഥഫലം} = \frac{0 - 3 - 5 \times 1100^2}{72 \times 1400^2} \cdots$$

$$= \frac{0 - 0 - 2}{1103 - 29 - 39 \quad 113 - 13 - 54}$$

$$1100 \text{ എന്ന ചാപത്തിന്റെ ഭുജാ} = 990 - 15 - 45$$

$$\text{ഭുജാവർഗ്ഗം} = 980619 - 49 - 8 - 3 - 45$$

$$\text{കോടിവർഗ്ഗം} = 1960000 - \text{ഭുജാവർഗ്ഗം}$$

$$= 979380 - 10 - 51 - 56 - 15$$

$$\text{ഭുജാവർഗ്ഗാർദ്ധമൂലം} = \sqrt{490309 - 54 - 34} = 700 - 13 - 17$$
$$\text{കോടിവർഗ്ഗാർദ്ധമൂലം} = \sqrt{489690 - 5 - 26} = 599 - 48 - 44$$
$$\text{ഇവയുടെ അന്തരം} = 0 - 26 - 33$$
$$\text{ഇതിന്റെ ചാപം} = 0 - 26 - 33 \text{ തന്നെ}$$

ഭുജാവർഗ്ഗം $>$ കോടിവർഗ്ഗം; അതുകൊണ്ടു സംസ്കാരം ഋണം.

$$\text{അപ്പോൾ സൂക്ഷ്മപരിധി} = 4400 - (0 - 26 - 33) \times 4$$
$$= \underline{4398 - 13 - 48}$$
$$(3.\ 14159265 \times 1400 = 4398 - 13 - 47)$$

ജ്യാവർഗ്ഗാനയനം

അനന്തരം നിഹത്യചാപവർഗ്ഗേണ എന്ന ന്യായത്തിങ്കന്നു കുറഞ്ഞൊരു വിശേഷംകൊണ്ടു് ജ്യാവർഗ്ഗമുണ്ടാകും എന്നതിനെ ചൊല്ലുന്നു. ഇവിടെ ചാപവർഗ്ഗത്തെ ചാപവർഗ്ഗംകൊണ്ടുതന്നെ ഗുണിക്കുന്നു. ചാപവർഗ്ഗത്തേയും ഫലങ്ങളേയും കീഴെ കീഴെ വെക്കുന്നുതും. പിന്നെ രണ്ടു തുടങ്ങി മൂന്ന്, നാല്, അഞ്ച്, എന്നിങ്ങനെയുള്ള നിരന്തരസംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളിൽനിന്നു തന്റെ തന്റെ മൂലാർദ്ധത്തെ കളഞ്ഞ ശേഷത്തെക്കൊണ്ടു് വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗത്തെ ഗുണിച്ച് അവററെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഇത്രേ വിശേഷമുള്ളൂ. ഒടുക്കത്തേതു ശേഷിക്കുന്നതു ജ്യാവർഗ്ഗം. പിന്നെ ഈ ന്യായംകൊണ്ടു ശരവർഗ്ഗത്തേയും ഉണ്ടാക്കാം. ഇവിടെ "വിദ്വാംസ്തുന്ന ബലഃ" എന്നതിന്റെ സ്ഥാനത്തു "ശൗരിജ്ജയതി" എന്നു തുടങ്ങിയുള്ളവ.

വ്യാഖ്യാനം: ക്രമജ്യാവിന്റെ വർഗ്ഗങ്ങളെ വരുത്തുംപ്രകാരം:-

"നിഹത്യ ചാപവർഗ്ഗേണ ചാപവർഗ്ഗം ഫലാനി ച |
നിരന്തരദ്വ്യാദിവർഗ്ഗാന്മൂലാർദ്ധോനഹരൈഃ ഹരേൽ ||
ത്രിജ്യാവർഗ്ഗേദ്ധനർവ്വർഗ്ഗമധോധസ്തൽഫലാനി ച |
ന്യസ്യോപര്യുപരി ത്യാജമിഷ്ടജീവാകൃതിഭവേൽ" (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

ഇവിടെ ഗുണകാരം എല്ലായിടത്തും ചാപവർഗ്ഗം. രണ്ട്, മൂന്ന്, നാല്, അഞ്ച് മുതലായ നിരന്തര സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളിൽനിന്നു തന്റെ തന്റെ മൂലാർദ്ധങ്ങളെ വാങ്ങിയശേഷങ്ങളെക്കൊണ്ടു ത്രിജ്യാവർഗ്ഗത്തെ ഗുണിച്ചവ മേലേ മേലേയുള്ള ഹാരകങ്ങൾ. ചാപവർഗ്ഗത്തെ വല്ലിയുടെ മേലെ വക്കൂ. ഇതിനെ ഇതുകൊണ്ടു തന്നെ ഗുണിച്ച $\left(2^2 - \frac{2}{2}\right)$ എന്ന മൂന്നുകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ത്രിജ്യാവർഗ്ഗത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലത്തെ ചാപവർഗ്ഗത്തിന്റെ കീഴെ വെക്കൂ. ഇങ്ങനെ മേലേ മേലേയുള്ള ഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി കീഴെ കീഴെ വെക്കൂ. ഒടുക്കത്തെ ഫലത്തെ അതിന്റെ മേലേതിങ്കന്നു കളയൂ. ആ ശേഷത്തെ അതിന്നു മേലേതിങ്കന്നു കളയൂ ഇങ്ങനെ ഒടുക്കത്തെ ഫലശേഷത്തെ ചാപവർഗ്ഗത്തിൽനിന്നു കളയൂ. എന്നാലിഷ്ടജ്യാവർഗ്ഗം വരും.

$$\text{ഇഷ്ടചാപം} = c$$

$$\text{എന്നാൽ ജ്യാവർഗ്ഗം} = \text{ച}^2 - \frac{\text{ച}^2 \times \text{ച}^2}{\left(2^2 - \frac{2}{2}\right)\text{ത്ര}^2} + \frac{\text{ച}^4}{3\text{ത്ര}^2} \times \frac{\text{ച}^2}{\left(3^2 - \frac{3}{2}\right)\text{ത്ര}^2}$$
$$- \frac{\text{ച}^6}{3 \times 7\frac{1}{2}\text{ത്ര}^4} \times \frac{\text{ച}^2}{\left(4^2 - \frac{4}{2}\right)\text{ത്ര}^2} + \cdots$$

<u>ഇതിന്റെ യുക്തി:–</u>

$$\text{ഇഷ്ടജ്യാവ്} = \text{ച} - \frac{\text{ച}^3}{\angle 3\text{ത്ര}^2} + \frac{\text{ച}^5}{\angle 5\text{ത്ര}^4} - \frac{\text{ച}^7}{\angle 7\text{ത്ര}^6} + \cdots$$

$$\text{ഇഷ്ടജ്യാവർഗ്ഗം} = \left(\text{ച} - \frac{\text{ച}^3}{\angle 3\text{ത്ര}^2} + \frac{\text{ച}^5}{\angle 5\text{ത്ര}^4} - \frac{\text{ച}^7}{\angle 7\text{ത്ര}^6} + \cdots\right)^2$$
$$= \text{ച}^2 - 2\text{ച}\left(\frac{\text{ച}^3}{\angle 3\text{ത്ര}^2} - \frac{\text{ച}^5}{\angle 5\text{ത്ര}^4} + \frac{\text{ച}^7}{\angle 7\text{ത്ര}^6} - \cdots\right) + \frac{\text{ച}^6}{36\text{ത്ര}^4}$$
$$- \frac{2\text{ച}^3}{\angle 3\text{ത്ര}^2}\left(\frac{\text{ച}^5}{\angle 5\text{ത്ര}^4} - \frac{\text{ച}^7}{\angle 7\text{ത്ര}^6} + \cdots\right) + \frac{\text{ച}^{10}}{(\angle 5)^2 \times \text{ത്ര}^8}$$
$$- \frac{2\text{ച}^5}{\angle 5\text{ത്ര}^4} \times \frac{\text{ച}^7}{\angle 7 \times \text{ത്ര}^6} + \frac{\text{ച}^{14}}{(\angle 7)^2 \times \text{ത്ര}^{12}} \cdots$$
$$= \text{ച}^2 - \frac{2\text{ച}^4}{\angle 3\text{ത്ര}^2} + \frac{\text{ച}^6}{\text{ത്ര}^4}\left(\frac{2}{\angle 5} + \frac{1}{36}\right)$$
$$- \frac{\text{ച}^3}{\text{ത്ര}^6}\left(\frac{2}{\angle 7} + \frac{2}{\angle 3 \times \angle 5}\right)$$
$$+ \frac{\text{ച}^{10}}{\text{ത്ര}^8}\left(\frac{2}{\angle 9} + \frac{2}{\angle 3 \times \angle 7} + \frac{1}{(\angle 5)^2}\right) \cdots$$
$$= \text{ച}^2 - \frac{\text{ച}^4}{3\text{ത്ര}^2} + \frac{\text{ച}^6}{3\text{ത്ര}^4}\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{12}\right) - \frac{2\text{ച}^8}{\angle 6\text{ത്ര}^6}\left(\frac{1}{7} + 1\right)$$
$$+ \frac{12\text{ച}^{10}}{\angle 6\text{ത്ര}^8}\left(\frac{1}{7 \times 8 \times 9} + \frac{1}{2 \times 3 \times 7} + \frac{1}{40}\right)$$

. . . .

$$= \text{ച}^2 - \frac{\text{ച}^4}{3\text{ത്ര}^2} + \frac{\text{ച}^6}{3\text{ത്ര}^4} \times \frac{2}{15} - \frac{\text{ച}^8}{315\text{ത്ര}^6} + \frac{2\text{ച}^{10}}{315 \times 45 \times \text{ത്ര}^8}$$
$$- \cdots$$
$$= \text{ച}^2 - \frac{\text{ച}^4}{\left(2^2 - \frac{2}{2}\right)\text{ത്ര}^2} + \frac{\text{ച}^4}{3\text{ത്ര}^2} \times \frac{\text{ച}^2}{\left(3^2 - \frac{3}{2}\right)\text{ത്ര}^2} - \frac{\text{ച}^6}{3 \times \frac{15}{2}\text{ത്ര}^4}$$
$$\times \frac{\text{ച}^2}{\left(4^2 - \frac{4}{2}\right)\text{ത്ര}^2} \cdots$$

ഉദാഹരണം:-

$$
\begin{array}{rcll}
\text{ചാപം} & = & \text{1800 ഇലി.} & \\
 & & \text{ധനം} & \text{ഋണം} \\
\text{ച}^2 = 1800 \times 1800 & = & 3240000 & \\
\dfrac{1800^2 \times 1800^2}{3\,\text{ത്രി}^2} & = & & 296088 \\
\dfrac{296088 \times 1800^2}{\left(3^2 - \frac{3}{2}\right)\text{ത്രി}^2} & = & 10823 & \\
\dfrac{10823 \times 1800^2}{\left(4^2 - \frac{4}{2}\right) \times \text{ത്രി}^2} & = & & 212 \\
\dfrac{212 \times 1800^2}{\left(5^2 - \frac{5}{2}\right)\text{ത്രി}^2} & = & 3 & \\
\hline
\text{അപ്പോൾ ജ്യാവർഗ്ഗം} & = & 3250828 \quad - & 298300 \\
 & = & \underline{2954526} & \\
\therefore \ \text{ഇഷ്ടജ്യാവ്} = \sqrt{2954526} & = & \underline{1718' - 52'' - 25'''} & \\
\text{(1800 ഇലിയുടെ ജ്യാവ്} = \text{എട്ടാം ജ്യാവ്} & = & \text{“വീരോ രണജയോത്സുകഃ”} & \\
 & = & \underline{1718' - 52'' - 24'''} &
\end{array}
$$

ജ്യാനയനത്തിങ്കൽ “വിദ്വാംസ്തുന്ന ബലഃ . . . ” എന്നപോലെ ജ്യാവർഗ്ഗാനയനത്തിങ്കലും ഉപകരിക്കാവുന്ന വാക്യങ്ങളെ വരുത്താം. ത്രിരാശി ചാപവർഗ്ഗത്തെവച്ച് മുമ്പിലെ ക്രിയചെയ്താൽ ഈ വാക്യങ്ങൾ വരും.

	ക്രിയ	ധനം	ഋണം	വാക്യങ്ങൾ
ആദ്യഫലം	ത്രിരാശിചാപവർഗ്ഗം	29160000		നാനാജ്ഞാന തപോധരഃ
രണ്ടാംഫലം	$\dfrac{29160000^2}{\left(2^2 - \frac{2}{2}\right)\text{ത്രി}^2}$		23983138	ദിഗാപാംഗ ജളാംഗസ്ത്രീ
മൂന്നാംഫലം	$\dfrac{23983138 \times 29160000}{\left(3^2 - \frac{3}{2}\right)\text{ത്രി}^2}$	7890186		ചണ്ഡാപന്നാ ധിദിത്സനാ
നാലാംഫലം	$\dfrac{7890186 \times 29160000}{\left(4^2 - \frac{4}{2}\right) \times \text{ത്രി}^2}$		1390581	യജമാനാന്ധ ലോകേന
അഞ്ചാംഫലം	$\dfrac{1390581 \times 29160000}{\left(5^2 - \frac{5}{2}\right) \times \text{ത്രി}^2}$	152494		വിദ്ധവരാശയഃ
ആറാംഫലം	$\dfrac{152494 \times 29160000}{\left(6^2 - \frac{6}{2}\right) \times \text{ത്രി}^2}$		11402	രത്നൗഘപുഷ്ടഃ
ഏഴാംഫലം	$\dfrac{11402 \times 29180000}{\left(7^2 - \frac{7}{2}\right) \times \text{ത്രി}^2}$	818		ജതതി

എട്ടാംഫലം	$\dfrac{618 \times 29160000}{(8^2 - \frac{8}{2}) \times ௳^2}$	25	ശൗരിഃ

"ശൗരിജ്ജയതി രത്നൗഘലപുഷ്ഷോ വിദ്ധവരാശയഃ |
യജമാനാന്ധലോകേന ചണ്ഡാപന്നഃധിദിത്സനാ ||
ദിഗാപാംഗജളാംഗസ്ത്രീ നാനാജ്ഞാനതപോധരഃ |
ഏതേഷ്വിഷ്ടാസ്വധോധസ്ത്യാദിഷ്ടചാപകൃതിഘ്നതഃ ||
അന്ത്യചാപസ്യ കൃത്യാപ്തമുപര്യുപരി ശോധയേൽ |
അന്തേലബ്ധസ്യയന്മൂലം തദഭീഷ്ടഗുണോ ഭവേൽ:" || (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

ഇവിടെ ഒടുക്കത്തെ ഫലത്തെ ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ത്രിരാശിചാപവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ച കിട്ടിയതിനെ മേലേ വാക്യത്തിൽനിന്നു കളയൂ. ഇങ്ങനെ കളഞ്ഞു കളഞ്ഞു ഒടുക്കത്തേതിലുണ്ടാകുന്ന ഫലം ഇഷ്ടജ്യാവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. ഇതിന്റെ മൂലം ഇഷ്ടജ്യാവായിട്ടു ഭവിക്കും.

<u>ഉദാഹരണം:-</u>

$$\text{ചാപം} = 1800 \text{ ഇലി. ചാപവർഗ്ഗം} = 3240000$$

(1) $$25' \times \frac{3240000}{29160000} = 2' - 48'' - 40'''$$

(2) $$(618' - 2' - 46'' - 40''') \times \frac{3240000}{29160000} = 68' - 21'' - 29'''$$

(3) $$(11402' - 88' - 21'' - 29''') \times \frac{3240000}{29160000} = 1259' - 17'' - 37'''$$

(4) $$(152494' - 1259' - 17'' - 37'') \times \frac{3240000}{29160000} = 16803' - 51'' - 23'''$$

(5) $$(1390581' - 16803' - 51'' - 23''') \times \frac{3240000}{29160000} = 152841' - 54'' - 17'''$$

(6) $$(7890136' - 152641' - 54'' - 17''') \times \frac{3240000}{29160000} = 859721' - 33'' - 58'''$$

(7) $$(23983138' - 859721' - 33'' - 58''') \times \frac{3240000}{29160000} = 2569258' - 29'' - 34'''$$

(8) $$(29160000' - 2589268' - 29'' - 34''') \times \frac{3240000}{29160000} = 2954525' - 43'' - 23'''$$

$$\text{അപ്പോൾ ഇഷ്ടജ്യാവർഗ്ഗം} = \underline{2954525' - 43'' - 23'''}$$
$$\therefore \text{ ഇഷ്ടജ്യാവ്} = \sqrt{2954525' - 43'' - 23'''} = \underline{1716' - 52'' - 25'''}$$

(8-ആം ജ്യാവ് $= 1718' - 52'' - 24'''$ − വീരോ രണജയോത്സുകഃ)

"ജീവേ പരസ്പരം" ന്യായവും തദ്വാരാ ജ്യാക്കളെ വരുത്തും പ്രകാരവും

ഇച്ചൊല്ലിയ ന്യായത്തിങ്കൽ എല്ലാടവും ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാവു മുഴവനേ ഇച്ഛാരാശിയാകുന്നത്. ഇനി മേലിൽ ചൊല്ലുന്നതിങ്കൽ സമസ്തജ്യാവിന്റെ അർദ്ധം ഇച്ഛാരാശി എന്ന ഭേദമാകുന്നത്. ഇവിടെ പ്രഥമചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലും തൃതീയചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലും സ്പർശിച്ചുരണ്ടു ഖണ്ഡത്തിന്നുംകൂടി ഒരു സമസ്തജ്യാവു കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ ദ്വിതീയജ്യാഗ്രത്തിൽ സ്പർശിച്ചിട്ട് ഒരു വ്യാസാർദ്ധത്തെ കല്പിപ്പൂ. ആ വ്യാസാർദ്ധകർണ്ണത്തിന്നു ദ്വിതീയജ്യാവും ഇരുപത്തിരണ്ടാംജ്യാവും ഭുജാകോടികളാകുന്നത്. ഇവിടേയും സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യം വ്യാസാർദ്ധകർണ്ണത്തിങ്കൽ സ്പർശിക്കും. ഇതിന്റെ അർദ്ധങ്ങൾ രണ്ടും ഓരോ ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ അർദ്ധജ്യാക്കളായിട്ടിരിക്കും. ഈ അർദ്ധജ്യാക്കൾ ഇവിടെ ഇച്ഛാരാശിയാകുന്നത്. എന്നാൽ ദ്വിതീയജ്യാവിനെക്കൊണ്ടു ചാപഖണ്ഡാർദ്ധജ്യാവിനെ ഗുണിച്ചു വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നു കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറായിരിപ്പോരു കോടിജ്യാഖണ്ഡമുണ്ടാകും. പിന്നെ ഇരുപത്തിരണ്ടാം ജ്യാവിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം തൃതീയചാപാഗ്രത്തിങ്കന്നു കോടിഖണ്ഡമൂലത്തോളമുള്ള ഭുജാഖണ്ഡമുണ്ടാകും, തെക്കുവടക്കായിട്ട്. പിന്നെ രണ്ടു ചാപഖണ്ഡത്തിന്നും കൂടിയുള്ള സമസ്തജ്യാകർണ്ണമദ്ധ്യവും വ്യാസാർദ്ധകർണ്ണവും തങ്ങളിൽ സ്പർശിച്ചേടത്തുന്നു പൂർവ്വാപരസൂത്രത്തോളവും ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തോളവുമുള്ള അകലമുണ്ടാക്കേണം. ഇവിടെ ത്രിജ്യാവു കർണ്ണമാകുമ്പോൾ രണ്ടാംജ്യാവും ഇരുപത്തിരണ്ടാംജ്യാവും ഭുജാകോടികളാകുന്നത്. സമസ്തജ്യാശരോനമായിരിക്കുന്ന വ്യാസാർദ്ധഭാഗം കർണ്ണമാകുമ്പോൾ എന്തു ഭുജാകോടികൾ എന്ന ത്രൈരാശികംകൊണ്ടുണ്ടാകുമവരണ്ടും. പിന്നെ ഇവിടെ ശരോനവ്യാസാർദ്ധത്തിന്റെ ഭുജയിങ്കൽ ഭുജാഖണ്ഡം കൂട്ടൂ. എന്നാൽ മൂന്നാംജ്യാവുണ്ടാകും; കളകിൽ പ്രഥമജ്യാവുണ്ടാകും; പിന്നെ ശരോനവ്യാസാർദ്ധത്തിന്റെ കോടിയിങ്കന്നു കോടിഖണ്ഡം കളവൂ. എന്നാൽ ഇരുപത്തൊന്നാംജ്യാവുണ്ടാകും. ആ കോടിയിൽ കോടിഖണ്ഡം കൂട്ടുകിൽ ഇരുപത്തിമൂന്നാംജ്യാവുണ്ടാകും. സമസ്തജ്യാകർണ്ണത്തിന്റെ അർദ്ധങ്ങൾ രണ്ടും ഇച്ഛാരാശിയായി കല്പിക്കുമ്പോളെ ഭുജാകോടി ഖണ്ഡങ്ങൾ തുല്യങ്ങൾ രണ്ടു ഖണ്ഡത്തിന്നും, എന്നിട്ട്. ശരോനവ്യാസാർദ്ധത്തിങ്കന്ന് ഉണ്ടായ ഭുജാകോടികൾ അർദ്ധജ്യാകർണ്ണത്തിങ്കന്നു ഉണ്ടായ ഖണ്ഡജ്യാക്കൾക്കു അവധികളാകുന്നത്, എന്നിട്ട്. ഇങ്ങനെ പഠിതജ്യാക്കളെ വരുത്തുംപ്രകാരം. പിന്നെ ഇവ്വണ്ണംതന്നെ ശിഷ്ടചാപത്തിന്റെ അർദ്ധജ്യാകർണ്ണത്തിന്ന് ഉണ്ടായ ഭുജാകോടിഖണ്ഡങ്ങളും ശിഷ്ടചാപശരോനവ്യാസാർദ്ധത്തിന്നും ഭുജാകോടികളെ ഉണ്ടാക്കി അവയുംകൂടി ഇഷ്ടജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കിക്കൊള്ളും.[19]

വ്യാഖ്യാനം 19:

$$\text{Trigonometrically } \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$\sin(A-B) = \sin A \cos A - \cos A \sin B$$

Vide. Fig. 39 Denoting the successive Bhujas (ordinates) as $J_1, J_2, J_3, \ldots$ and the successive Kotis (abscissae) as $c_1, c_2, c_3, \ldots$

$$\text{We have } J_3 = \text{ഖ}_3\text{ബ}_3 = \text{ഖ}_3\text{ര}_2 + \text{ര}_2\text{ബ}_3$$
$$= \text{ഖ}_3\text{ര}_2 + \text{ലച}$$
$$\text{Now } \text{ഖ}_3\text{ര}_2 : \text{ഖ}_3\text{ല} = \text{ഖ}_2\text{ട}_2 : r. \text{ (where } r = \text{the radins)}$$
$$\therefore\ \text{ഖ}_3\text{ര}_2 = \frac{\text{ഖ}_3\text{ല} \times \text{ഖ}_2\text{ട}_2}{r} = \frac{J_1 c_2}{r}$$
$$\text{ലച} : \text{ഖ}_2\text{ബ}_2 = \text{ലമ} : \text{ഖ}_2\text{മ}$$
$$\therefore\ \text{ലച} = \frac{\text{ഖ}_2\text{ബ}_2 \times \text{ലമ}}{\text{ഖ}_2\text{മ}} = \frac{J_2 c_1}{r}$$
$$\therefore\ J_3 = \frac{J_1 c_2 + J_2 c_1}{r}$$
$$\text{Similarly } c_3 = \text{ഖ}_3\text{ട}_3 = \text{ര}_2\text{ട} = \text{ലട} - \text{ലര}_2$$
$$\text{But } \text{ലട} : \text{ഖ}_2\text{ട}_2 = \text{ലമ} : \text{ഖ}_2\text{മ}$$
$$\therefore\ \text{ലട} := \frac{c_2 \times c_1}{r}$$
$$\text{and } \text{ലര}_2 : \text{ലഖ}_3 = \text{ഖ}_2\text{ബ}_2 : \text{ഖ}_2\text{മ}$$
$$\therefore\ \text{ലര}_2 = \frac{J_1 \times J_2}{r}$$
$$\therefore\ c_3 = \frac{c_1 c_2 - J_1 J_2}{r}$$
$$\text{Generally } Jm \pm n = \frac{J_m\,{}^c n \pm {}^c m\, Jn}{r}$$
$${}^c m \pm n = \frac{{}^c m\,{}^c n \pm Jm\, Jn}{r}$$

വ്യാഖ്യാനം: ഇതി ജ്യാചാപയോഃ കാര്യം ഗ്രഹണം മാധവോദിതാ |
വിധാന്തരഞ്ച തേനോക്തം തയോസ്സൂക്ഷ്മത്വരിച്ഛതാ || (തന്ത്രസംഗ്രഹം)
“ജീവേ പരസ്പരനിജേതരമൗർവ്വികാഭ്യാ-
മഭ്യസ്യ വിസ്തൃതിദളേന വിഭജ്യമാനേ ||
അന്യോന്യയോഗവിരഹാനുഗുണേ ഭവേതാം” | — ഇതിമാധവഃ

രണ്ടു ചാപങ്ങളുടെ ജ്യാക്കളെ വെവ്വേറെ അറിഞ്ഞിരിക്കുമ്പോൾ, ആ ചാപങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും യോഗത്തിന്റേയൊ അന്തരത്തിന്റേയൊ ജ്യാവിനെ അറിയേണമെങ്കിൽ, ഒന്നിന്റെ ഭുജയെ മറ്റേതിന്റെ കോടികൊണ്ടു ഗുണിച്ചതും മറ്റേതിന്റെ ഭുജയെ ആദ്യത്തേതിന്റെ കോടികൊണ്ടു ഗുണിച്ചതുമായ ഘാതങ്ങൾ രണ്ടിനേയും വെവ്വേറെ ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ

രാശികളുടെ യോഗമോ അന്തരമോ ചാപയോഗത്തിന്റേയൊ ചാപാന്തരത്തിന്റേയൊ ക്രമേണ ജ്യാവായിട്ടു വരും. ത്രിജ്യാഹരണം ഘാതയോഗാന്തരത്തിന്നു ശേഷവുമാവാം. ഫലം തുല്യം.

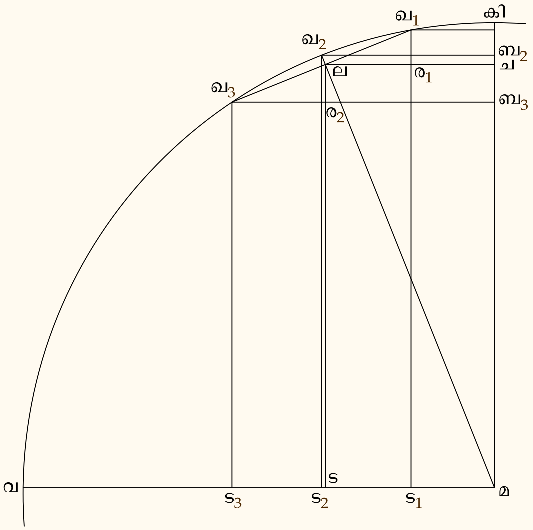
ഇതിന്റെ യുക്തി:–

$ഭ_1$, $ഭ_2$, $ഭ_3, \ldots$ ഇങ്ങനെ 24 ജ്യാക്കൾ.

പരിലേഖം 39-ൽ $കിഖ_1$, $ഖ_1 ഖ_2$, $ഖ_2 ഖ_3$ ഇങ്ങനെ മൂന്നു ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ.

$ഖ_2 ബ_2$ = രണ്ടാംജ്യാവ് = $ഭ_2$.

$ഖ_3 ബ_3$ = മൂന്നാംജ്യാവ് = $ഭ_3$.



പരിലേഖം (39)

$മഖ_2$ എന്ന വ്യാസാർദ്ധം $ഖ_1 ഖ_3$ എന്ന സമസ്തജ്യാവിന്റെ മദ്ധ്യമാകുന്ന $ല$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്നു. ഖണ്ഡാഗ്രങ്ങളിൽനിന്നു കോടിജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കു. $ല$ എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്നു ക്രമേണ ഭുജകൾക്കും കോടികൾക്കും തുല്യദിക്കുകളായിട്ടു പൂർവ്വോത്തരസൂത്രാവധി $ലച$, $ലട$ എന്ന രേഖകളെ വരക്കു. $ഖ_1 ട_1$, $ലച$ ഇവയുടെ യോഗപ്രദേശം $ര_1$; $ലട$, $ഖ_3 ബ_3$ ഇവയുടെ യോഗപ്രദേശം $ര_2$.

$ഖ_1 ലര_1$ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ ഭുജാകോടികർണ്ണങ്ങൾ $ലഖ_3 ര_2$ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ ഭുജാകോടി കർണ്ണങ്ങളോടു തുല്യങ്ങളെന്നു നിയതമായിട്ടിവിടെ കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു. എന്തെന്നാൽ $ഖ_1 ലര_1$, $ലഖ_3 ര_2$ ഈ ത്ര്യശ്രങ്ങൾ തുല്യാകാരങ്ങൾ; സമസ്തജ്യാവിന്റെ അർദ്ധങ്ങളാകയാൽ $ലഖ_1 = ലഖ_3$.

$$\therefore\ ലര_1 = ഖ_3 ര_2;\ ഖ_1 ര_1 = ലര_2$$

$$മല = \text{ശരോനവ്യാസാർദ്ധം} = \text{23-ആം ജ്യാവ്} = ഭ_{23}.$$

$മബ_2 ഖ_2$, $ലര_2 ഖ_3$ ഈ ത്ര്യശ്രങ്ങൾ തുല്യാകാരങ്ങൾ.

$$\text{അപ്പോൾ കോടിഖണ്ഡം } ലര_2 = ഖ_1 ര_1$$

$$= \frac{ഖ_2 ബ_2 \times ഖ_3 ല}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}} = \frac{ഭ_2 \times ഭ_1}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

$$\begin{aligned}\text{ഭുജാഖണ്ഡം} = \text{ഖ}_3\text{ര}_2 &= \text{ലര}_1\\ &= \frac{\text{ഭ}_{22} \times \text{ഭ}_1}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}\end{aligned}$$

പിന്നേയും $\text{മഖ}_2\text{ബ}_2$, മലച എന്നീ ത്ര്യശ്രങ്ങൾ തുല്യാകാരങ്ങൾ.

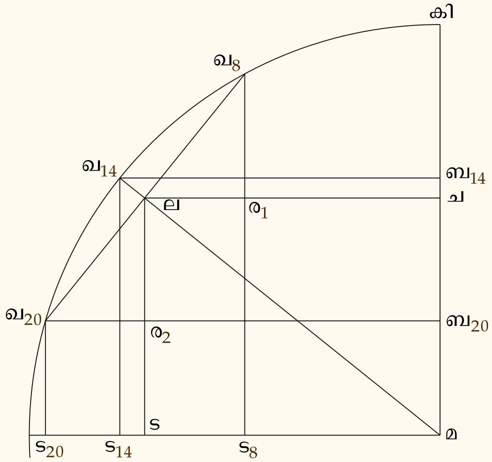
$$\begin{aligned}
\text{ലച} = \frac{\text{ഖ}_2\text{ബ}_2 \times \text{മല}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}} &= \frac{\text{ഭ}_2 \times \text{ഭ}_{23}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}\\
\text{മച} = \text{ലട} = \frac{\text{മബ}_2 \times \text{മല}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}} &= \frac{\text{ഭ}_{22} \times \text{ഭ}_{23}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}\\
\therefore\ \text{ലച} + \text{ഖ}_3\text{ര}_2 = \text{ഖ}_3\text{ബ}_3 &= \text{തൃതീയജ്യാവ്}\\
&= \frac{\text{ഭ}_2 \times \text{ഭ}_{23} + \text{ഭ}_{22} \times \text{ഭ}_1}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}\\
\text{ലച} - \text{ഖ}_3\text{ര}_2 = \text{ര}_1\text{ച} &= \text{ആദ്യജ്യാവ്}\\
&= \frac{\text{ഭ}_2 \times \text{ഭ}_{23} - \text{ഭ}_{22} \times \text{ഭ}_1}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}\\
\text{ലട} - \text{ലര}_2 = \text{ര}_2\text{ട} = \text{ഖ}_3\text{ട}_3 &= \text{തൃതീയജ്യാകോടി}\\
&= 21\text{-ആം ജ്യാവ്}\\
&= \frac{\text{ഭ}_{22} \times \text{ഭ}_{23} - \text{ഭ}_2 \times \text{ഭ}_1}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}\\
\text{ലട} + \text{ഖ}_1\text{ര}_1 = \text{ഖ}_1\text{ട}_1 &= \text{പ്രഥമജ്യാകോടി} = 23\text{-ആം ജ്യാവ്}\\
&= \frac{\text{ഭ}_{22} \times \text{ഭ}_{23} + \text{ഭ}_0 \times \text{ഭ}_1}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}
\end{aligned}$$

ഇവിടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത് ഒന്നും, രണ്ടും ചാപഖണ്ഡങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചാകുന്നു. സാമാന്യമായിട്ടുള്ള ക്രിയ മനസ്സിലാക്കുവാൻ ഉദാഹരണവും കൂടി കാണിക്കാം. 14-ാം ജ്യാവിന്റെയും ആറാംജ്യാവിന്റെയും ചാപങ്ങളുടെ യോഗാന്തരങ്ങളുടെ ഭുജാകോടികളെ വരുത്തുന്നതിന്റെ യുക്തിയെയും കാണിക്കാം.

$$\begin{aligned}
\text{പരിലേഖം}40\text{-ൽ ചാപം } \text{കിഖ}_{20} &= \text{ചാപയോഗം}\\
&= 20\ (= 14 + 6)\ \text{ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ യോഗം}\\
\text{കിഖ}_8 = \text{ചാപാന്തരം} &= 8\ (= 14 - 6)\ \text{ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ യോഗം}\\
\text{സമസ്തജ്യാവ് } \text{ഖ}_8\text{ഖ}_{20} &= 12\,\text{ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ യോഗത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാവ്.}
\end{aligned}$$

ഈ സമസ്തജ്യാവിന്റെ ചാപത്തിന്റെ മദ്ധ്യം ഖ_{14} = പതിന്നാലാംജ്യാവിന്റെ അഗ്രം. മഖ_{14} എന്ന വ്യാസാർദ്ധം സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യമായിരിക്കുന്ന ല എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്നു.

അപ്പോൾ $\text{ഖ}_8\text{ല} = \text{ഖ}_{20}\text{ല}$ = ആറുചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ അർദ്ധജ്യാവ്.



പരിലേഖം (40)

അതുകൊണ്ടു ശരോനവ്യാസാർദ്ധമായിരിക്കുന്ന മല = പതിനെട്ടാംജ്യാവ്.

മുമ്പിലെ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ,

$$\text{ലര}_2 = \text{ഖ}_8\text{ര}_1 = \frac{\text{ഭ}_6 \times \text{ഭ}_{14}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

$$\text{ഖ}_{20}\text{ര}_2 = \text{ലര}_1 = \frac{\text{ഭ}_6 \times \text{ഭ}_{10}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

$$\text{ചല} = \frac{\text{ഭ}_{14} \times \text{ഭ}_{18}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

$$\text{ചമ} = \text{ലട} = \frac{\text{ഭ}_{18} \times \text{ഭ}_{10}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

$$\begin{aligned}
\text{ചാപഖണ്ഡയോഗജ്യാവ്} &= 20\text{-ആം ജ്യാവ്} \\
&= \text{ഖ}_{20}\text{ബ}_{20} \\
&= \text{ഖ}_{20}\text{ര}_2 + \text{ര}_2\text{ബ}_{20} \\
&= \text{ലര}_1 + \text{ലച} \\
&= \frac{\text{ഭ}_{14} \times \text{ഭ}_{18} + \text{ഭ}_6 \times \text{ഭ}_{10}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\text{പതിന്നാലാം ജ്യാവ്} \times \text{ആറാം ജ്യാകോടി} + \text{ആറാം ജ്യാവ്} \times 14\text{-ആം ജ്യാകോടി}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

$$\begin{aligned}
\text{ചാപഖണ്ഡാന്തരജ്യാവ്} &= 8\text{-ആം ജ്യാവ്} \\
&= \text{ര}_1\text{ച} \\
&= \text{ചല} - \text{ലര}_1 \\
&= \frac{\text{ഭ}_{18} \times \text{ഭ}_{14} - \text{ഭ}_6 \times \text{ഭ}_{10}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\text{പതിന്നാലാംജ്യാവ്} \times \text{ആറാംജ്യാകോടി} - \text{ആറാംജ്യാവ്} \times \text{14-ആം ജ്യാകോടി}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

$$\begin{aligned} \text{ചാപഖണ്ഡയോഗകോടിജ്യാവ്} &= \text{20-ആം ജ്യാവിന്റെ കോടി} \\ &= \text{മബ}_{20} = \text{മച} - \text{ചബ}_{20} \\ &= \text{മച} - \text{ലര}_{2} \\ &= \frac{\text{ഭ}_{18} \times \text{ഭ}_{10} - \text{ഭ}_{6} \times \text{ഭ}_{14}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\text{പതിന്നാലാംജ്യാകോടി} \times \text{ആറാംജ്യാകോടി} - \text{പതിന്നാലാംജ്യാവ്} \times \text{6-ആം ജ്യാവ്}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

$$\begin{aligned} \text{ചാപഖണ്ഡാന്തരകോടിജ്യാവ്} &= \text{8-ആം ജ്യാവിന്റെ കോടി} \\ &= \text{ഖ}_{8}\,\text{ട}_{8} = \text{ര}_{1}\,\text{ട}_{8} + \text{ഖ}_{8}\,\text{ര}_{1} \\ &= \text{ലട} + \text{ലര}_{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\text{പതിന്നാലാംജ്യാകോടി} \times \text{ആറാംജ്യാകോടി} - \text{പതിന്നാലാംജ്യാവ്} \times \text{6-ആം ജ്യാവ്}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

പ്രകാരാന്തരം

അനന്തരം ഈ ന്യായത്തിന്നുതന്നെ പ്രകാരഭേദം ചൊല്ലുന്നു. ഇവിടെ തൃതീയചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കന്നു പൂർവ്വസൂത്രത്തോളമുള്ളതു തൃതീയജ്യാവാകുന്നത്. ഇതിങ്കൽ സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യത്തിങ്കന്ന് ഉണ്ടാകുന്ന കോടിഖണ്ഡം യാതൊരിടത്തു സ്പർശിക്കുന്നു തൃതീയജ്യാവിങ്കൽ, അവിടുന്ന് ഇരുപുറവുമോരോഖണ്ഡം. ഇതിൽ വടക്കെ ഖണ്ഡം ഭുജയായി കോടിഖണ്ഡം കോടിയായി സമസ്തജ്യാർദ്ധം കർണ്ണമായിട്ടിരിപ്പോരു ത്ര്യശ്രം. പിന്നെ തൃതീയജ്യാവിങ്കലെ തെക്കെ ഖണ്ഡത്തിന്നും ഇച്ചൊല്ലിയ കോടിഖണ്ഡം തന്നെ കോടിയാകുന്നത്. ദ്വിതീയജ്യാവിനോടു തുല്യമായിരിക്കും കർണ്ണം. ഇവിടയ്ക്കു സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നു തൃതീയജ്യാവും പൂർവ്വസൂത്രവും തങ്ങളിലുള്ള സംപാതത്തോളമുള്ളതു കർണ്ണമാകുന്നത്. ഇവിടെ ഇതു ദ്വിതീയജ്യാവിനോടു തുല്യമാക്കുന്നു. ഇവ്വണ്ണം ത്രിജ്യാപ്രമാണം, സമസ്തജ്യാർദ്ധവും ഇതിന്റെ ശരോനവ്യാസാർദ്ധമാകുന്ന കോടിയും രണ്ടു പ്രമാണഫലങ്ങൾ. ദ്വിതീയജ്യാവ് ഇച്ഛാ. സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നുള്ള കോടിഖണ്ഡവും ഇതിന്റെ സംപാതത്തിങ്കന്നു തൃതീയജ്യാവിന്റെ ദക്ഷിണഖണ്ഡവും ഇവ രണ്ടും ഇച്ഛാഫലങ്ങൾ.[20]

വ്യാഖ്യാനം 20: ഈ ത്ര്യശ്രങ്ങൾ രണ്ടും തുല്യാകാരങ്ങളാണെങ്കിലും മുമ്പിൽ തുല്യാകാരത്തിന്റെ ലക്ഷണങ്ങൾ പറഞ്ഞതിൽനിന്നും ഇതു വ്യക്തമാകുന്നില്ല. എന്നാൽ ഇവ തുല്യാകാരങ്ങളാണെന്ന് ഒരുപ്രകാരം വ്യാഖ്യാനത്തിൽ സ്ഥാപിക്കുന്നുണ്ട്.

യാതൊരുപ്രകാരം ഭുജാകോടികളായിരിക്കുന്ന പ്രമാണഫലങ്ങൾക്കു കർണ്ണമായിട്ടിരിക്കുന്നു പ്രമാണരാശി ഇവ്വണ്ണം ഭുജാകോടികളായിരിക്കുന്ന ഇച്ഛാഫലങ്ങൾക്കു കർണ്ണമായിട്ടിരിക്കും ഇച്ഛാരാശി എന്നു നിയതം. ഇങ്ങനെ ദ്വിതീയജ്യാകർണ്ണമായി തൃതീയജ്യാവിന്റെ തെക്കെഖണ്ഡം ഭുജയായി ത്രൈരാശികം കൊണ്ടു വരുത്തിയ കോടി

ഖണ്ഡം കോടി. ഇങ്ങനെ ഒരു ത്ര്യശ്രം. സമസ്തജ്യാവിന്റെ വടക്കെ അർദ്ധം കർണ്ണം, തൃതീയജ്യാവിന്റെ വടക്കെഖണ്ഡം ഭുജ, കോടിഖണ്ഡംതന്നെ കോടിയാകുന്നത്, ഇങ്ങനെ ഒരു ത്ര്യശ്രം. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ പ്രഥമജ്യാവും ദ്വിതീയജ്യാവും ഭുജകളായി തൃതീയജ്യാവു ഭൂമിയായി കോടിഖണ്ഡം ലംബമായി ഇരിപ്പോരു ത്ര്യശ്രമിത്. എന്നാൽ ലംബവർഗ്ഗത്തെ ഭുജാവർഗ്ഗങ്ങൾ രണ്ടിങ്കന്നും കളഞ്ഞു മൂലിച്ചാൽ വെവ്വേറെ രണ്ട് ആബാധകൾ ഉണ്ടാകും. ഇവറ്റിന്റെ യോഗം ഭൂമിയാകുന്ന തൃതീയജ്യാവ്. ഇങ്ങനെയും പഠിതജ്യാക്കളെയും ഇഷ്ടജ്യാക്കളെയുമുണ്ടാക്കാം. ഇങ്ങനെ രണ്ട് അർദ്ധജ്യാക്കളെ വെവ്വേറെ അറിഞ്ഞാൽ രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെയും ചാപയോഗത്തിന്റെ ജ്യാവു വരുത്തുവാനുള്ള ഉപായം ചൊല്ലീതായി.

വ്യാഖ്യാനം:

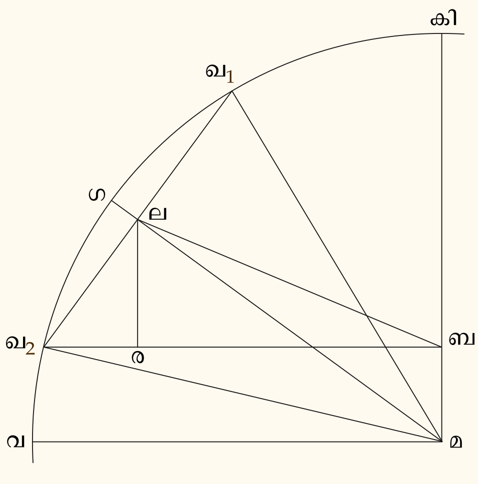
"യദ്വാ സ്വലംബകൃതിഭേദപദീകൃതേ ദ്വേ" ഇതി മാധവഃ

ജ്യാക്കൾ രണ്ടിന്റെയും വർഗ്ഗങ്ങളിൽനിന്നു വെവ്വേറെ അവ രണ്ടിന്നും സാധാരണമായിട്ടിരിക്കുന്ന ലംബത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞു മൂലിച്ചവ രണ്ടിന്റെയും യോഗമോ അന്തരമോ ചാപയോഗത്തിന്റെയോ അന്തരത്തിന്റെയോ ജ്യാവായിട്ടു വരും. ലംബത്തെ വരുത്തുംപ്രകാരം പിന്നെ. "ജ്യയോഃ പരസ്പരം ഘാതാൽ ത്രിജ്യാപ്തം ലംബ ഇഷ്യതേ." അതായതു ജ്യാക്കൾ രണ്ടിനെയും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ച ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചതു ലംബമാകുന്നു.

ഇവിടെയും (പരിലേഖം 41), 14-ാംജ്യാവിന്റെയും 6-ാംജ്യാവിന്റെയും ചാപങ്ങളുടെ യോഗാന്തരങ്ങളുടെ ഭുജാകോടിജ്യാക്കളെ വരുത്തേണമെന്നു നിരൂപിക്കുക.

പരിലേഖം 41-ൽ

$$\textit{കിഖ}_1 = \text{ചാപാന്തരം } (= 8 \text{ ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ യോഗചാപം})$$
$$\textit{കിഖ}_2 = \text{ചാപയോഗം } (= 20 \text{ ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ യോഗചാപം})$$
$$\therefore\ \textit{ഖ}_1\textit{ഗ} = \textit{ഗഖ}_2 = \text{ ആറുചാപഖണ്ഡങ്ങൾ കൂടിയത്.}$$

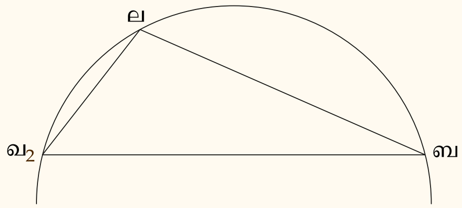


പരിലേഖം (41)

മഗ എന്ന വ്യാസാർദ്ധം *ഖ*$_1$ *ഖ*$_2$ എന്ന സമസ്തജ്യാവിനെ അതിന്റെ മദ്ധ്യമായ *ല* എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്നു.

ഖ$_2$ *ബ* = 20-ാംജ്യാവ് (*ഭ*$_{20}$)
ഖ$_2$ *ല* = 6-ാംജ്യാവ് (*ഭ*$_6$)
മല = ശരോനവ്യാസാർദ്ധം = 18-ാംജ്യാവ് (*ഭ*$_{10}$)

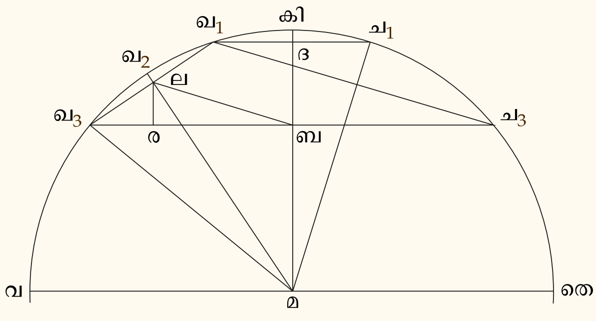
ഖ$_2$ *ലബ* എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ ഭൂമിയായ *ഖ*$_2$ *ബ*, ബാഹുക്കളായ *ഖ*$_2$ *ല*, *ലബ* ഇവ സമസ്തജ്യാക്കളായിട്ട് ഒരു വൃത്തം വരക്കാം. (പരിലേഖം 42).



പരിലേഖം (42)

ത്രിജ്യാവൃത്തത്തിന്റെ ചതുരാംശത്തെ 24 ആയി ഭാഗിച്ച 24 അർദ്ധജ്യാക്കളെ കല്പിക്കുന്നു. ഇത്രയുംതന്നെ മാനമുള്ള 24 ചാപഖണ്ഡങ്ങളെക്കൊണ്ടു ത്രിജ്യാർദ്ധവൃത്തത്തിന്റെ വൃത്താർദ്ധം തികയുന്നു; ഇവിടെ അർദ്ധജ്യാക്കളുടെ സ്ഥാനത്ത് അവയുടെ മാനത്തോടു തുല്യങ്ങളായിരിക്കുന്ന സമസ്തജ്യാക്കളേയും കല്പിക്കാം. ത്രിജ്യാർദ്ധവൃത്തത്തിങ്കൽ ഒരു ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാവു ത്രിജ്യാവൃത്തത്തിങ്കൽ ആദ്യത്തെ അർദ്ധജ്യാവ്. ത്രിജ്യാർദ്ധവൃത്തത്തിങ്കൽ രണ്ടു ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ സമസ്തജ്യാവു ത്രിജ്യാവൃത്തത്തിങ്കൽ രണ്ടാമർദ്ധജ്യാവാകുന്നു. ഇങ്ങനെ മേല്പോട്ടൂഹിച്ചുകൊള്ളണം. പരിലേഖം 42-ലെ വൃത്തം ത്രിജ്യാർദ്ധവൃത്തമെന്നു കല്പിക്കുന്നു. *ഖ*$_2$ *ബ* 20-ാംമത്തെ ജ്യാവാകയാൽ, *ഖ*$_2$ *ലബ* എന്ന ചാപം 20 ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ കൂടിയതെന്നു വന്നു. അതുപോലെ *ഖ*$_2$ *ല* ആറു ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ കൂടിയത്. അപ്പോൾ *ലബ* 14 ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ യോഗം. അപ്പോൾ *ലബ* ത്രിജ്യാർദ്ധവൃത്തത്തിൽ 14-ാം സമസ്തജ്യാവെന്നു വന്നു. അപ്പോൾ ത്രിജ്യാവൃത്തത്തിൽ അതു 14-ാം അർദ്ധജ്യാവെന്നും വന്നു. *ഖ*$_2$ *ബ*, *ഖ*$_2$ *ല*, *ലബ* അർദ്ധജ്യാക്കളായിട്ടിരിക്കുന്ന പരിലേഖം 41-ലെ വൃത്തം ത്രിജ്യാവൃത്തമാണല്ലോ. അപ്പോൾ അവിടെ *ബല* എന്നതു 14-ാം അർദ്ധജ്യാവ്.

ഈ തത്വത്തെതന്നെ പ്രകാരാന്തരേണയും സാധിക്കാം.



പരിലേഖം (43)

പരിലേഖം 43-ൽ $കിഖ_1$, $ഖ_1ഖ_2$, $ഖ_2ഖ_3$ ആദ്യത്തെ മൂന്നു ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ. $ഖ_1ദ$, $ഖ_3ബ$ എന്നിവ $കിഖ_1$, $കിഖ_3$ എന്ന ചാപങ്ങളുടെ അദ്ധജ്യാക്കൾ.

$ഖ_1ഖ_3$ എന്ന സമസ്തജ്യാവിന്റെ മദ്ധ്യം $ല$.

$മ$ വൃത്ത കേന്ദ്രം.

$ഖ_1ദ$, $ഖ_3ബ$ എന്ന അദ്ധജ്യാക്കൾ വൃത്തത്തെ $ച_1$, $ച_3$ എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ സ്പർശിക്കത്തക്കവണ്ണം അവയെ നീട്ടികല്പിപ്പൂ.

$$കിച_1 = \text{ഒരു ചാപഖണ്ഡം} = കിഖ_1.$$
$$കിച_3 = \text{മൂന്നു ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ യോഗം} = കിഖ_3.$$
$$ഖ_1ച_3 = \text{നാലു ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ കൂടിയതു്.}$$

ഇവിടെ $ലബ$ രണ്ടു ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ സമസ്തജ്യാവാണെന്നും ത്ര്യശ്രങ്ങൾ $ലരബ$, $മലഖ_3$ രണ്ടും തുല്യാകാരങ്ങളെന്നും കാണിക്കുന്നു.

ഇവിടെ $ഖ_3ച_3ഖ_1$ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ, $ല$, $ബ$ എന്ന ബിന്ദുക്കൾ $ഖ_3ഖ_1$, $ഖ_3ച_3$ എന്ന ഭുജകളുടെ മദ്ധ്യങ്ങളാകുന്നു.

$$\therefore \quad ഖ_1ഖ_3 = 2ഖ_3ല.$$
$$ഖ_3ച_3 = 2ഖ_3ബ.$$

$ഖ_3ബല$, $ഖ_3ച_3ഖ_1$ ഇവ തുല്യാകാരക്ഷേത്രങ്ങളാണെങ്കിൽ,

$$ഖ_1ഖ_3 = 2ഖ_3ല$$
$$ഖ_3ച_3 = 2ഖ_3ബ \text{ എന്നും വരുമല്ലോ.}$$

വിപരീതന്യായം കൊണ്ടു്,

$$ഖ_1ഖ_3 = 2ഖ_3ല$$
$$ഖ_3ച_3 = 2ഖ_3ബ$$

എന്നിപ്രകാരം ബന്ധിച്ചിരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ, ത്ര്യശ്രങ്ങൾ $ഖ_3ബല$, $ഖ_2ച_3ഖ_1$ തുല്യാകാരങ്ങളാവുമെന്നും വരുമല്ലോ.

അപ്പോൾ $ലബ$, $ഖ_1ച_3$ തുല്യദിക്കുകളെന്നും $ഖ_1ച_3 = 2ലബ$ എന്നും സിദ്ധമായി. $ഖ_1ച_3$ നാലു ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ സമസ്തജ്യാവാണല്ലോ. എന്നിട്ടു $ലബ$ രണ്ടു ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ അദ്ധജ്യാവെന്നും വന്നു.

$$മലഖ_3,\ മദച_1 \text{ എന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങളിൽ,}$$
$$മഖ_3 = മച_1 \text{ (രണ്ടും വ്യാസാദ്ധങ്ങൾ എന്നിട്ടു്)}$$
$$ലഖ_3 = ച_1ദ \text{ (ഒരു ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ അദ്ധജ്യാക്കൾ എന്നിട്ടു്)}$$
$$മല = മദ \text{ (ഒരു ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ശമോനവ്യാസാദ്ധങ്ങൾ എന്നിട്ടു്)}$$

അപ്പോൾ $മലഖ_3$, $മദച_1$ എന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങൾ സവ്വപ്രകാരേണ തുല്യങ്ങൾ എന്നു വന്നു. $ലരബ$ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ $രബ$ = ഭുജ, $രല$ = കോടി, $ലബ$ = കണ്ണം. $മദച_1$ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ $മദ$ = ഭുജ, $ദച_1$ = കോടി, $മച_1$ = കണ്ണം. ഒന്നിങ്കലെ ഭുജാകോടികണ്ണങ്ങൾ മറ്റേതിങ്കലെ ഭുജാകോടികണ്ണങ്ങളോടു ക്രമേണ വിപരീതദിക്കുകളാകയാൽ, ഈ ത്ര്യശ്രങ്ങൾ രണ്ടും തുല്യാകാരങ്ങൾ. $മഖ_3ല$, $മച_1ദ$ എന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങൾ സവ്വപ്രകാരേണ തുല്യങ്ങളായതുകൊണ്ടു, $ലരബ$, $ലഖ_3മ$, എന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങളും തുല്യാകാരങ്ങൾ തന്നെ.

പരിലേഖം 41-ൽ *ല*-യിൽനിന്നും $ഖ_3$*ബ*-യിലേയ്ക്കുള്ള ലംബം *ലര*.

$ഖ_2$*ലമ*, *ലരബ* എന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങൾ തുല്യാകാരങ്ങൾ. $ഖ_2$*ലമ* പ്രമാണക്ഷേത്രം, *ലരബ* ഇച്ഛാക്ഷേത്രം.

പ്രമാണം - $മഖ_2$; ഇച്ഛാ - *ബല*.

പ്രമാണഫലങ്ങൾ - *മല*, $ലഖ_2$; ഇച്ഛാഫലങ്ങൾ - *ബര*, *ലര*

$$\therefore \quad ലര = \frac{ബല \times ലഖ_2}{മഖ_2} = \frac{ഭ_{14} \times ഭ_6}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

$$ബര = \frac{ബല \times മല}{മഖ_2} = \frac{ഭ_{14} \times ഭ_{13}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

ബലര എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിലും കർണ്ണം $=$ *ബല*; ഭുജ $=$ *ബര*; കോടി $=$ *രല*

$$\therefore \quad ബര^2 = ബല^2 - രല^2 = {ഭ_{14}}^2 - \text{ലംബം}^2.$$

$$ബര = \sqrt{{ഭ_{14}}^2 - \text{ലംബം}^2}$$

$$\text{ഇതുപോലെതന്നെ } {രഖ_2}^2 = {ലഖ_2}^2 - ലര^2 = {ഭ_6}^2 - \text{ലംബം}^2$$

$$\therefore \quad രഖ_2 = \sqrt{{ഭ_6}^2 - \text{ലംബം}^2}$$

$$\therefore \quad \text{20-ആം ജ്യാവ്} = ബര + രഖ_2$$

$$= \sqrt{{ഭ_{14}}^2 - \text{ലംബം}^2} + \sqrt{{ഭ_6}^2 - \text{ലംബം}^2}$$

$$\text{ലംബവർഗ്ഗം} = \frac{{ഭ_{14}}^2 \times {ഭ_6}^2}{\text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം}}$$

$$\therefore \quad {ഭ_{14}}^2 - \text{ലംബം}^2 = {ഭ_{14}}^2 - \frac{{ഭ_{14}}^2 \times {ഭ_6}^2}{\text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം}}$$

$$ {ഭ_6}^2 - \text{ലംബം}^2 = {ഭ_6}^2 - \frac{{ഭ_6}^2 \times {ഭ_{14}}^2}{\text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം}}$$

$\therefore$ 20-ആം ജ്യാവ്

$$= \sqrt{\left({ഭ_{14}}^2 - \frac{{ഭ_{14}}^2 \times {ഭ_6}^2}{\text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം}}\right)} + \sqrt{\left({ഭ_6}^2 - \frac{{ഭ_6}^2 \times {ഭ_{14}}^2}{\text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം}}\right)}$$

$$= \frac{ഭ_{14}\sqrt{\text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം} - {ഭ_6}^2} + ഭ_6\sqrt{\text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം} - {ഭ_{14}}^2}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

$$= \frac{ഭ_{14} \times ഭ_{18} + ഭ_6 \times ഭ_{10}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

$$= \frac{\text{14-ആം ഭുജ} \times \text{6-ആം ജ്യാകോടി} + \text{6-ആം ഭുജ} \times \text{14-ആം ജ്യാകോടി}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

ഇതു ജീവേ പരസ്പരം ന്യായം തന്നെ.

ഈ ഫലംതന്നെ ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതയോഗന്യായംകൊണ്ടും വരുത്താം. ഈ ക്രിയ മേലിൽ പറയുന്നുണ്ട്.

ഉദാഹരണം:-

$$3375 \text{ ഇലി ചാപത്തിന്റെ ജ്യാവ് (15-ആം മഹാജ്യാവ്)} = 2858' - 23''$$
$$1575 \text{ ഇലി ചാപത്തിന്റെ ജ്യാവ് (7-ആം മഹാജ്യാവ്)} = 1520' - 29''$$

എന്നാൽ ഇവയുടെ യോഗമായ $4950'$ ചാപത്തിന്റെയും അന്തരമായ $1800'$ ചാപത്തിന്റെയും ജ്യാക്കളെ വരുത്തേണം. അതായതു 22-ആമത്തെയും 8-ആമത്തെയും മഹാജ്യാക്കൾ എവ?

$$\text{15-ആം ജ്യാവ്} = 2858' - 23''$$
$$\text{15-ആം ജ്യാവിന്റെ കോടി} = 1909' - 55''$$
$$\text{7-ആം ജ്യാവ്} = 1520' - 29''$$
$$\text{7-ആം ജ്യാവിന്റെകോടി} = 3083' - 13''$$

അപ്പോൾ 22-ആം ജ്യാവ്

$$= \frac{2858' - 23'' \times 3083' - 13'' + 1520' - 29'' \times 1909' - 55''}{3437' - 45''}$$
$$= \frac{8813015 - 7 - 59 + 2903995 - 27 - 35}{3437' - 45''}$$
$$= \frac{11717011 - 35 - 34}{3437 - 45}$$
$$= 3405' - 20''(\text{നീരദോനഭോഗഃ})$$
$$\text{8-ആം ജ്യാവ്} = \frac{(8813015 - 5 - 59) - (2903998 - 27 - 35)}{3437' - 45''}$$
$$= \frac{5909018 - 40 - 24}{3437' - 45''}$$
$$= 1718' - 52''(\text{രാമോ ജയോത്സുകഃ})$$

ഇഷ്ടജ്യാവിനെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം:-

$$\text{ഇഷ്ടചാപം} = 1\text{രാ} - 9\text{തി} - 44\text{ഇലി}$$

പത്തുജ്യാവുംപോയിട്ടു ശിഷ്ടചാപം $= 134'$

ശിഷ്ടചാപത്തെതന്നെ അതിന്റെ അദ്ധജ്യാവെന്നു കല്പിക്ക.

$$\text{ശിഷ്ടചാപകോടി} = \sqrt{11818103 - 17956}$$
$$= 3435' - 8''$$
$$\text{10-ആം ജ്യാവ്} = 2092' - 48'', \text{ അതിന്റെ കോടി} = 2727' - 21''$$
$$\text{അപ്പോൾ ഇഷ്ടജ്യാവ്} = \frac{2092' - 48'' \times 3435' - 8'' + 134' \times 2727' - 21''}{3437' - 45''}$$
$$= \frac{7554397 - 28 - 8}{3437' - 45''}$$
$$= \underline{2197' - 29''}$$

ലംബംകൊണ്ടു ചാപയോഗാന്തരജ്യാക്കളെ വരുത്തുംപ്രകാരം:-

15-ആം ജ്യാവിൽനിന്നും 7-ആം ജ്യാവിൽനിന്നും 22-ആം ജ്യാവിനെയും 8-ആം ജ്യാവിനെയും വരുത്തേണം.

$$
\begin{aligned}
\text{ലംബം} &= \frac{2858' - 23'' \times 1520' - 29''}{3437'' - 45''} \\
&= \frac{4346124 - 13 - 7}{3437' - 45} \\
&= \underline{1264' - 14''} \\
\text{ലംബവൎഗ്ഗം} &= 1598285 - 55 - 16 \\
\text{15-ആം ജ്യാവൎഗ്ഗം} &= 8170355 - 12 - 16 \\
\text{7-ആം ജ്യാവൎഗ്ഗം} &= 2311889 - 14 - 1 \\
\sqrt{\text{15-ആം ജ്യാവൎഗ്ഗം} - \text{ലംബവൎഗ്ഗം}} &= \sqrt{8170355 - 12 - 16 - 1598285 - 55 - 18} \\
&= \sqrt{8572069 - 17} \\
&= 2583' - 33'' \\
\sqrt{\text{7-ആം ജ്യാവൎഗ്ഗം} - \text{ലംബവൎഗ്ഗം}} &= \sqrt{2311889 - 14 - 1 - 1598285 - 55 - 18} \\
&= \sqrt{713588 - 18 - 45} \\
&= \sqrt{844' - 44''} \\
\text{അപ്പോൾ 22-ആം ജ്യാവ്} &= 2588' - 38'' + 844' - 44'' = \underline{3408' - 20''} \\
\text{8-ആം ജ്യാവ്} &= 2563' - 36 - 844' - 44'' = \underline{1718' - 52''}.
\end{aligned}
$$

ഈ ലംബാനയനന്യായംകൊണ്ടും "ജീവേ പരസ്പരം" ന്യായംകൊണ്ടും

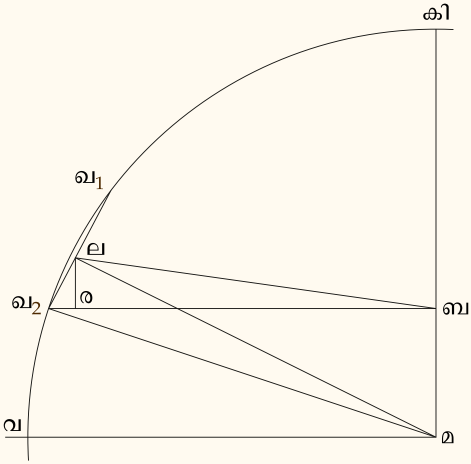
> "തത്തൽജ്യാവൎഗ്ഗമാദ്യജ്യാവൎഗ്ഗഹീനം ഹരേൽ പുനഃ |
> ആസന്നാധസ്ഥശിഞ്ജിന്യാ ലബ്ധസ്സ്യാദ്യുത്തരോത്തരാഃ" || (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

എന്ന ജ്യാനയനത്തിന്റെ യുക്തിയെ കാണിക്കാം. രണ്ടാംജ്യാവൎഗ്ഗത്തിൽ നിന്നാദ്യജ്യാവൎഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞ് ആദ്യജ്യാവുകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം മൂന്നാം ജ്യാവായിട്ടുവരും. മൂന്നാംജ്യാവിന്റെ വൎഗ്ഗത്തിൽനിന്നാദ്യജ്യാവിന്റെ വൎഗ്ഗത്തെക്കളഞ്ഞു രണ്ടാംജ്യാവുകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം നാലാംജ്യാവായിട്ടു വരും. ഇങ്ങനെ അതാതു ജ്യാവൎഗ്ഗത്തിൽനിന്ന് ആദ്യജ്യാവൎഗ്ഗത്തെക്കളഞ്ഞ് അടുത്തു കീഴെ ജ്യാവുകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം മേലെ മേലെ ജ്യാവായിട്ടു വരും.[21]

വ്യാഖ്യാനം 21:

$$
\begin{aligned}
\sin(A+B)\sin(A-B) &= \sin^2 A - \sin^2 B \\
\therefore\ \sin(A+B) &= \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin(A-B)} \\
\text{i.e., } J_{n+1} &= \frac{{J_n}^2 - {J_1}^2}{J_{n-1}}
\end{aligned}
$$

when $J_1, J_2, J_3 \cdots$ are the successive Bhujas.



പരിലേഖം (44)

പരിലേഖം 44-ൽ $\text{ഖ}_2\text{ബ} = 20$-ആം ജ്യാവ്. $\text{ഖ}_2\text{ല}$ ഒരു ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ജ്യാവ്. *ലബ* 19-ആംമത്തെ ജ്യാവാണെന്നു വരും. എന്നാൽ

$$
\begin{aligned}
\text{ഭ}_{19}{}^2 &= \text{ബല}^2 = \text{ബര}^2 + \text{രല}^2 \\
\text{ഭ}_1{}^2 &= \text{ലഖ}_2 = \text{രഖ}_2{}^2 + \text{രല}^2 \\
\text{ഭ}_{19}{}^2 - \text{ഭ}_1{}^2 &= \text{ബര}^2 - \text{രഖ}_2{}^2 \\
&= (\text{ബര} + \text{രഖ}_2)(\text{ബര} - \text{രഖ}_2) \\
&= \text{ഭ}_{20}\left\{\sqrt{\text{ഭ}_{19}{}^2 - \frac{\text{ഭ}_{19}{}^2 \times \text{ഭ}_1{}^2}{\text{വ്യാസാദ്ധവർഗ്ഗം}}} - \sqrt{\text{ഭ}_1{}^2 - \frac{\text{ഭ}_{19}{}^2 \times \text{ഭ}_1{}^2}{\text{വ്യാസാദ്ധവർഗ്ഗം}}}\right\} \\
&= \frac{\text{ഭ}_{20}}{\text{വ്യാസാദ്ധം}}\Big\{\text{ഭ}_{19}\sqrt{\text{വ്യാസാദ്ധവർഗ്ഗം} - \text{ഭ}_1{}^2} \\
&\qquad - \text{ഭ}_1\sqrt{\text{വ്യാസാദ്ധവർഗ്ഗം} - \text{ഭ}_{19}{}^2}\Big\} \\
&= \frac{\text{ഭ}_{20}}{\text{വ്യാസാദ്ധം}}(\text{ഭ}_{19} \times \text{ഭ}_{23} - \text{ഭ}_1 \times \text{ഭ}_5) \\
&= \text{ഭ}_{20} \times \text{ഭ}_{19} \text{ (ജീവേ പരസ്പരം ന്യായേന)} \\
\therefore \quad \text{ഭ}_{20} &= \frac{\text{ഭ}_{19}{}^2 - \text{ഭ}_1{}^2}{\text{ഭ}_{18}}
\end{aligned}
$$

ജീവേ പരസ്പരംന്യായം ചാപീകരണത്തിന്നുമുപയോഗിക്കാം. ഇഷ്ടജ്യാവിനെയും അടുത്ത ചാപസന്ധിയിലെ പഠിതജ്യാവിനെയും പരസ്പരേതരകോടികളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചുള്ള ഫലങ്ങളുടെ അന്തരം ഊനാധികധനുസ്സിന്റെ ജ്യാവായിട്ടു വരും. മേലിൽ പറയുവാൻപോകുന്ന അല്പജ്യാചാപീകരണോപായങ്ങളിലൊന്നുകൊണ്ട് ഈ ഊനാധികധനുർജ്ജ്യാവിനെ ചാപിക്കു. ഇതിനെ കീഴെ ചാപസന്ധിധനുസ്സിൽ കൂട്ടൂ, മേലെ ചാപസന്ധിധനുസ്സാണെങ്കിൽ അതിങ്കൽനിന്നു കളയൂ. എന്നാൽ ഇഷ്ടജ്യാവിന്റെ ചാപം വരും. തന്ത്രസംഗ്രഹത്തിൽ ഈ ക്രിയ ഇങ്ങനെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നു.

"അന്യോന്യകോടിഹതയോർഭേദാദാസന്നദോർജ്ജ്യയോഃ |
ത്രിജ്യാപ്തവർഗ്ഗേ തൽബാണവർഗ്ഗം സത്യാംശകം ക്ഷിപേൽ ||
തന്മൂലമത ഊർദ്ധ്വസ്ഥചാപസന്ധേർദ്ധനുർഭവേൽ |
തദ്യുക്തോനം സ്വാധഊർദ്ധ്വചാപസന്ധിധനുർദ്ധനുഃ ||
ദോർജ്ജ്യാകൃതേഃ കോടികർണ്ണയോഗാപ്തസ്തച്ഛരോ ഭവേൽ |
കൃത്സ്നജ്യാവർഗ്ഗതൽകൃത്സ്നവ്യാസാപ്തോ വാ ശരോ ഭവേൽ " ||

ഊനാധികധനുസ്സിന്റെ ജ്യാവിനെ വർഗ്ഗിച്ചതിൽ അതിന്റെ ബാണവർഗ്ഗത്തെ നാലിൽ ഗുണിച്ചു മൂന്നിൽ ഹരിച്ച ഫലത്തെ കൂട്ടി മൂലിച്ചാൽ ചാപം വരും. ജ്യാവർഗ്ഗത്തെ കോടികർണ്ണയോഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ അതിന്റെ ബാണം വരും. ജ്യാവു വളരെ ചെറുതാണെങ്കിൽ കോടിയും കർണ്ണവും തമ്മിൽ വ്യത്യാസമില്ലെന്നു കല്പിക്കാം, ബാണം വളരെ ചെറുതാകയാൽ. എന്നാൽ ജ്യാവർഗ്ഗത്തെ വ്യാസം മുഴവനുംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാലും ബാണം വരും. ചാപം ചെറുതാണെങ്കിൽ സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗത്തെത്തന്നെ വ്യാസംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാലും ബാണം വരും.

$$\begin{aligned}
\text{ഇഷ്ടജ്യാവർഗ്ഗം} &= \text{ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗം} - \frac{\text{ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗം}}{\left(2^2 - \frac{2}{2}\right) \times \text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം}} \times \text{ചാപവർഗ്ഗം} \\
&= \text{ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗം} - \frac{\text{ഇഷ്ടചാപചതുർഘാതം}}{3 \times \text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം}} \\
\text{ശരവർഗ്ഗം} &= \left(\frac{\text{ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗം}}{\angle 2\text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം}}\right)^2 = \frac{\text{ഇഷ്ടചാപചതുർഘാതം}}{4\text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം}} \\
\therefore \quad \text{ഇഷ്ടജ്യാവർഗ്ഗം} &= \text{ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗം} - \frac{4}{3} \times \text{ശരവർഗ്ഗം} \\
\text{ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗം} &= \text{ഇഷ്ടജ്യാവർഗ്ഗം} + \frac{4}{3}\text{ശരവർഗ്ഗം} \\
\text{പിന്നെ ജ്യാവർഗ്ഗം} &= \text{വലിയശരം} \times \text{ചെറിയശരം} \\
\text{വലിയശരം} &= \text{വ്യാസം} - \text{ചെറിയശരം} \\
&= \text{വ്യാസാർദ്ധം} + (\text{വ്യാസാർദ്ധം} - \text{ചെറിയശരം}) \\
&= \text{വ്യാസാർദ്ധം} + \text{കോടി} \\
\therefore \quad \text{ചെറിയശരം} &= \frac{\text{ജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{തൽകോടി} + \text{വ്യാസാർദ്ധം}}
\end{aligned}$$

ജ്യാവു ചെറുതാണെങ്കിൽ, ശരവും വളരെ ചെറുതായിരിക്കും. അപ്പോൾ കോടികർണ്ണങ്ങൾ പ്രായേണ തുല്യങ്ങളെന്നു കല്പിക്കാം.

$$\text{അപ്പോൾ ശരം} = \frac{\text{ജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{വ്യാസം}}$$

ജ്യാവു ചെറുതാണെങ്കിൽ സമസ്തജ്യാവിനെതന്നെ ജ്യാവെന്നു കല്പിക്കാം.

$$\text{അപ്പോൾ ശരം} = \frac{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{വ്യാസം}}$$

<u>പ്രകാന്തരേണ അല്പജ്യാചാപീകരണോപായം:-</u>

"ശിഷ്ടചാപഘനഷഷ്ഠഭാഗതോ വിസ്തരാർദ്ധകൃതിഭക്തവർജ്ജിതഃ |
ശിഷ്ടചാപമിഹ ശിഞ്ജിനീ ഭവേൽ സ്പഷ്ടതാം ഭവതിചാല്പതാവശാൽ ||

(തന്ത്രസംഗ്രഹം)

ഇങ്ങനെ ശിഷ്ടചാപജ്യാവിനെ വരുത്താം. ഇതിന്റെ വിപരീതക്രിയകൊണ്ടു ചെറിയ ജ്യാക്കളുടെ ചാപീകരണം സാധിക്കാമെന്നു മുൻപിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ.

$$\text{ഇഷ്ടജ്യാവ്} = \text{ഇഷ്ടചാപം} - \frac{\text{ചാപഘനം}}{6 \times \text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം}}$$

$$\text{ഇഷ്ടചാപം} = \text{ഇഷ്ടജ്യാവ്} + \frac{\text{ഇഷ്ടജ്യാഘനം}}{6 \times \text{വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം}}$$

വ്യാസാർദ്ധംകൂടാതെ ജ്യാക്കളെവരുത്തുംപ്രകാരം.

ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രന്യായം

അനന്തരം വ്യാസാർദ്ധം കൂടാതെ ജ്യാക്കളെ വരുത്തും പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു. ത്രിഭുജക്ഷേത്രന്യായത്തെക്കൊണ്ടു സിദ്ധിക്കേണം. എന്നിട്ട് അതിനെ നടേ ചൊല്ലുന്നു. ഇവിടെ വിഷമത്ര്യശ്രത്തിങ്കൽ[22] മൂന്നിലുംവെച്ച് വലിയ ഭുജയെ പടിഞ്ഞാറെ തെക്കുവടക്കു നീളമായിട്ടു കല്പിപ്പൂ.

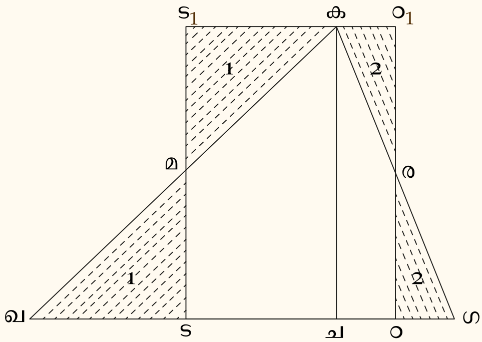
വ്യാഖ്യാനം 22: അന്യോന്യം തുല്യങ്ങളല്ലാത്ത ഭുജകളോടുകൂടിയ ത്ര്യശ്രം വിഷമത്ര്യശ്രം.

ഇതിന്നു ഭൂമി എന്നു പേർ. പിന്നെ മറ്റെഭുജകൾ രണ്ടിനെയും ഭൂമ്യഗ്രങ്ങൾ രണ്ടിങ്കന്നു തുടങ്ങി കിഴക്കു തങ്ങളിൽ സ്പർശിക്കുമാറു കല്പിപ്പൂ. ഇവറ്റിന്നു ഭുജകൾ എന്നു പേർ. പിന്നെ ഈ ഭുജകൾ തങ്ങളിൽ കൂടുന്നേടത്തുനിന്നു ഭൂമിക്കു വിപരീതമായി ഭൂമിയോളം ഒരു സൂത്രത്തെ കല്പിപ്പൂ. ഇതിന്നു ലംബമെന്നു പേർ. ലംബസംപാതത്തിങ്കന്നു ഇരുപുറവുമുള്ള ഭൂഖണ്ഡങ്ങൾക്ക് ആബാധകൾ എന്നു പേർ. ഭുജാകോടികളായിരിക്കുന്ന ആബാധാലംബങ്ങൾക്കു കർണ്ണമായിട്ടിരിപ്പോ ചിലവ ത്ര്യശ്രഭുജകൾ. ഇവിടെ വലിയ ഭുജാവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ചെറിയ ഭുജാവർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞാൽ ചെറിയ ആബാധാവർഗ്ഗത്തെക്കാൾ എത്ര വലുതു വലിയ ആബാധവർഗ്ഗം, അത് ഇവിടെ ശേഷിപ്പത്, ലംബവർഗ്ഗം രണ്ടു കർണ്ണവർഗ്ഗത്തിങ്കലും തുല്യമല്ലോ എന്നിട്ട്. ആകയാൽ ആബാധവർഗ്ഗാന്തരവും ഭുജാവർഗ്ഗാന്തരവും ഒന്നെ ആയിട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ ഭുജായോഗത്തെ ഭുജാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതു ഭുജാവർഗ്ഗാന്തരം, അതുതന്നെ ആബാധാവർഗ്ഗാന്തരവുമാകയാൽ ആബാധായോഗരൂപമായിട്ടിരിക്കുന്ന ഭൂമിയെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം ആബാധാന്തരം. ഇതിനെ ഭൂമിയിൽ കൂട്ടുകയും കളകയും ചെയ്തിട്ട് അർദ്ധിച്ചാൽ ആബാധകളുണ്ടാകും. പിന്നെ അതത് ആബാധാവർഗ്ഗത്തെ അതതു ഭുജാവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞു മൂലിച്ചാൽ ലംബമുണ്ടാകും. ലംബത്തെ ഭൂമ്യർദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ക്ഷേത്രഫലമുണ്ടാകും. ഇവിടെ രണ്ടു ഭുജാമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നും അതത് ആബാധാമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ സ്പർശിക്കുന്ന സൂത്രമാർഗ്ഗേണ പൊളിച്ച് ത്ര്യശ്രഖണ്ഡങ്ങൾ രണ്ടിനേയും ലംബാഗ്രത്തിങ്കൽ ഭൂമ്യഗ്രമാകുന്ന പ്രദേശവും കർണ്ണരേഖാമാർഗ്ഗത്തിങ്കൽ കർണ്ണരേഖയും സ്പർശിക്കുമാറു വെപ്പൂ. അപ്പോൾ ഭൂമ്യർദ്ധതുല്യമായിട്ടു രണ്ടു ഭുജകൾ, പിന്നെ ലംബതുല്യങ്ങളായിട്ടു രണ്ടു ഭുജകൾ ഇങ്ങനെ ഇരിപ്പോരു ചതുരശ്രമുണ്ടാകും. ആകയാൽ

ഭൂമ്യർദ്ധലംബങ്ങളുടെ ഘാതം ക്ഷേത്രഫലം ആയിട്ടിരിക്കും. ഇതു ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രന്യായമാകുന്നത്.

വ്യാഖ്യാനം:

പരിലേഖം 45-ൽ *കഖഗ* എന്നൊരു വിഷമത്ര്യശ്രം. *ഖഗ* ഇതിന്റെ ഭൂമി. *കഖ*, *കഗ* ഇതിന്റെ ബാഹുക്കൾ. *മ*, *ര* ബാഹുക്കളുടെ മദ്ധ്യങ്ങൾ. *മട*, *രഠ* ഇവ *മ*-യിൽനിന്നും ഭൂമിയിലേക്ക ക്രമേണയുള്ള ലംബങ്ങൾ. ഇവ ഭൂമിയെ *ട*, *ഠ* എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ സ്പർശിക്കുന്നു. ഈ ബിന്ദുക്കൾ *ഖച*, *ചഗ* എന്ന ആബാധകളുടെ മദ്ധ്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കും.



പരിലേഖം (45)

$$ച ട = ട ഖ = \frac{1}{2} ച ഖ.$$

$$ച ഠ = ഠ ഗ = \frac{1}{2} ച ഗ.$$

$$\therefore \quad ച ട + ച ഠ = ട ഠ = \frac{1}{2} ഖ ഗ = \text{ഭൂമ്യർദ്ധം}.$$

ഭുജാകോടിവർഗ്ഗയോഗം കർണ്ണവർഗ്ഗം എന്ന ന്യായംകൊണ്ട്,

$$\begin{aligned}
ക ഖ^2 &= ച ഖ^2 + ക ച^2 \\
ക ഗ^2 &= ച ഗ^2 + ക ച^2 \\
\therefore \quad ക ഖ^2 - ക ഗ^2 &= ച ഖ^2 - ച ഗ^2 \\
(ക ഖ + ക ഗ)(ക ഖ - ക ഗ) &= (ച ഖ + ച ഗ)(ച ഖ - ച ഗ) \\
&= \text{ഭൂമി} \times \text{ആബാധാന്തരം} \\
\therefore \quad \text{ആബാധാന്തരം} &= \frac{ക ഖ^2 - ക ഗ^2}{\text{ഭൂമി}} \\
\text{ആബാധായോഗം} &= ച ഖ + ച ഗ = ഖ ഗ = \text{ഭൂമി}. \\
2 ച ഖ &= \text{ഭൂമി} + \frac{ക ഖ^2 - ക ഗ^2}{\text{ഭൂമി}} \\
ച ഖ &= \tfrac{1}{2}\left\{\text{ഭൂമി} + \frac{ക ഖ^2 - ക ഗ^2}{\text{ഭൂമി}}\right\} \\
ച ഗ &= \tfrac{1}{2}\left\{\text{ഭൂമി} - \frac{ക ഖ^2 - ക ഗ^2}{\text{ഭൂമി}}\right\}
\end{aligned}$$

ബാഹുക്കളുടെ വർഗ്ഗാന്തരത്തെ ഭൂമി കൊണ്ടു ഹരിച്ച കുട്ടിയ ഫലത്തെ ഭൂമിയിൽ കൂട്ടി അർദ്ധിച്ചാൽ വലിയ ആബാധ വരും; ഭൂമിയിൽനിന്നു കളഞ്ഞർദ്ധിച്ചാൽ ചെറിയ ആബാധ വരും.

$$\text{ലംബം} = \sqrt{ക\,ഖ^2 - ച\,ഖ^2} = \sqrt{ക\,ഗ^2 - ച\,ഗ^2}$$

ത്ര്യശ്രത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം:- പരിലേഖം 45-ൽ *മ ഖ ട* എന്ന ത്ര്യശ്രത്തെ മുറിച്ചെടുത്ത്, *ഖ* എന്നതു *ക*-യിലും, *ട* എന്നതു $ട_1$-യിലും, *മ ഖ* എന്ന രേഖയെ *മ ക* എന്ന മാർഗ്ഗേണയും പരിലേഖത്തിൽ കാണിച്ചപോലെ യോജിപ്പിക്ക. അതുപോലെതന്നെ *മ ഗ ഠ* എന്ന ത്ര്യശ്രത്തെയും *മ* $ഠ_1$ *ക* എന്ന സ്ഥാനത്തും വെക്ക. അപ്പോൾ *ട ഠ* $ഠ_1$ $ട_1$ എന്നൊരു ചതുരശ്രമുണ്ടാകും.

$$\begin{aligned} \text{ഈ ചതുരശ്രത്തിൽ,}\, ട\,ഠ &= ട_1\,ഠ_1 = \text{ഭൂമ്യർദ്ധം} \\ ട\,ട_1 &= ഠ\,ഠ_1 = \text{ലംബം} \\ \therefore \quad \text{ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രഫലം} &= \text{ഈ ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം} \\ &= \underline{\text{ഭൂമ്യർദ്ധം} \times \text{ലംബം}} \end{aligned}$$

ചതുരശ്രക്ഷേത്രന്യായം

അനന്തരം ഇതിനെക്കൊണ്ടു ചതുരശ്രക്ഷേത്രന്യായത്തെ അറിയുംപ്രകാരം ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ നടേ ഒരു വൃത്തത്തെ കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ വൃത്താന്തർഭാഗത്തിങ്കൽ ഒരു ചതുരശ്രത്തെ കോണു നാലും വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കുമ്മാറു കല്പിപ്പൂ. ഇച്ചതുരശ്രത്തിന്റെ ഭുജകൾ നാലും അന്യോന്യതുല്യങ്ങളല്ലാതെയും ഇരിപ്പൂ. പിന്നെ ഈ ചതുരശ്രബാഹുക്കളുടെ പരിമാണത്തെക്കൊണ്ട് ഇതിങ്കലെ കർണ്ണങ്ങളെയുമറിയേണം. ഇതിന്റെ പ്രകാരം. ഇവിടെ വ്യവഹാരാർത്ഥമായിട്ടു ഭുജകൾക്ക് ഒരു നിയമത്തെ കല്പിച്ചുകൊള്ളൂ. ഈ ഭുജകളിൽ എല്ലായിലും വലുതു പടിഞ്ഞാറേത്. അതിന്നു ഭൂമി എന്നു പേർ. പിന്നെ തെക്കേത്, പിന്നെ വടക്കേത്. ഇവ രണ്ടിന്നും ഭുജകൾ എന്നു പേർ. പിന്നെ എല്ലാറ്റിലും ചെറുതു കിഴക്കേത്. ഇതിന്നു മുഖമെന്നു പേർ. എന്നിങ്ങനെ കല്പിപ്പൂ. ഇബ്ബാഹുക്കൾ രണ്ട് അഗ്രവും വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കയാൽ സമസ്തജ്യാക്കളായിട്ടിരിക്കുന്നോ ചിലവ. ഈ നാലു സമസ്തജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടും വൃത്തം മുഴുവൻ തികഞ്ഞിരിക്കും, ജ്യാഗ്രങ്ങൾ തങ്ങളിൽ സ്പർശിക്കയാൽ. ഇവിടെ അടുത്ത ജ്യാക്കൾ ഈ രണ്ടിന്റെ ചാപയോഗങ്ങളാകുന്നവ യാവചിലവ, ഇവറ്റിന്റെ ജ്യാക്കൾ ചതുരശ്രത്തിങ്കലെ കർണ്ണങ്ങളാകുന്നവ. ഇക്കർണ്ണങ്ങളാലൊന്നിനെക്കൊണ്ടു ചതുരശ്രത്തെ രണ്ടായി പകുത്താൽ ഇക്കർണ്ണത്തിന്റെ രണ്ടു പാർശ്വത്തിങ്കലും ഓരോ ത്ര്യശ്രങ്ങളുണ്ടാകും. രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങൾക്കും സാധാരണമായിട്ടിരിപ്പോരു ഭൂമി ആയിട്ടിരിപ്പൊന്ന് ഇക്കർണ്ണം. ഭുജകൾ ഈരണ്ടും ഭുജകളായിട്ടിരിപ്പൊന്ന്. പിന്നെ ഈവണ്ണംതന്നെ മറ്റെ കർണ്ണത്തെക്കൊണ്ടും താൻ ഭൂമിയായിട്ടു രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങൾ ഉളവാകും. പിന്നെ ഇക്കർണ്ണങ്ങളിലിഷ്ടം ആകുന്നതിന്റെ ഒരു പാർശ്വത്തിങ്കലെ ഭുജകൾ രണ്ടിന്റെയും

യോഗത്തെ തങ്ങളിലെ അന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ അത് ആബാധായോഗത്തിന്റെയും ആബാധാന്തരത്തിന്റെയും ഘാതമായിട്ടിരിക്കും. ആബാധായോഗമാകുന്നതു പിന്നെ ഈ രണ്ടു ഭുജകളുടെയും യോഗചാപത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാവായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഇവറ്റിന്റെ തന്നെ അന്തരചാപത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാവായിട്ടിരിക്കും ആബാധാന്തരം. പിന്നെ ഈ ആബാധായോഗമാകുന്ന ഇഷ്ടകർണ്ണത്തെ ഭൂമിയായി കല്പിച്ച് ആബാധാന്തരത്തെ മുഖമായിയും ചെറിയ ഭുജയോടു തുല്യമായിട്ടു വലിയ ഭുജയേയും കല്പിച്ചാൽ ഈ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ ഒരു പാശ്വത്തിങ്കൽ സമലംബമായിരിപ്പോരു ചതുരശ്രമുണ്ടാകും. ഇവിടെ ലംബാഗ്രാന്തരം ആബാധാന്തരമാകുന്നത്. എന്നാൽ ചാപാന്തരസമസ്തജ്യാവ് ആബാധാന്തരമായിട്ടിരിക്കും. ചതുരശ്രത്തിങ്കൽ പാർശ്വഭുജകൾ സമങ്ങൾ എങ്കിൽ ലംബങ്ങളും സമങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. ഇവറ്റിന്റെ ആബാധകളും സമങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ ഭൂമിയിങ്കലെ ലംബമൂലാന്തരം ആബാധാന്തരമാകുന്നത്. ലംബാഗ്രാന്തരവും ഇതുതന്നെ ആകയാൽ ചാപാന്തരസമസ്തജ്യാവ് ആബാധാന്തരമാകുന്നത്. ചാപയോഗസമസ്തജ്യാവ് ഭൂമി ആകുന്നത്. ഇതു തന്നെ ഇഷ്ടകർണ്ണമാകുന്നതും. ആകയാൽ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ ഒരു പുറത്തെ ഭുജകൾ രണ്ടിന്റെയും വർഗ്ഗാന്തരം ഈ ജ്യാക്കളുടെ യോഗചാപജ്യാവും അന്തരചാപജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതമായിട്ടിരിക്കും. ഇവ്വണ്ണമിരിക്കയാലെ യോഗാന്തരചാപജ്യാക്കളുടെ ഘാതം[23] യാതൊന്ന് ഇതു യോഗാന്തരചാപാർദ്ധജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗാന്തരവുമായിട്ടിരിക്കും.

വ്യാഖ്യാനം 23: യാവചില ജ്യാക്കളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള യോഗാന്തരചാപങ്ങൾ, ആ ജ്യാക്കളുടെ ഘാതമെന്നർദ്ധം.

എന്നാലിതു വന്നുകൂടിയ ന്യായമാകുന്നത്. യാവചിലവ രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെയും ഘാതം യാതൊന്ന് അത് അച്ചാപങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും യോഗാന്തരങ്ങളുടെ അർദ്ധങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ജ്യാക്കൾ യാവചിലവ, അവറ്റിന്റെ വർഗ്ഗാന്തരമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗാന്തരം യാതൊന്ന് അത് ഇജ്ജ്യാക്കളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ചാപങ്ങളുടെ യോഗാന്തരങ്ങൾ യാവചിലവ അവറ്റെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ജ്യാക്കളുടെ ഘാതമായിട്ടിരിക്കും.[24]

വ്യാഖ്യാനം 24:

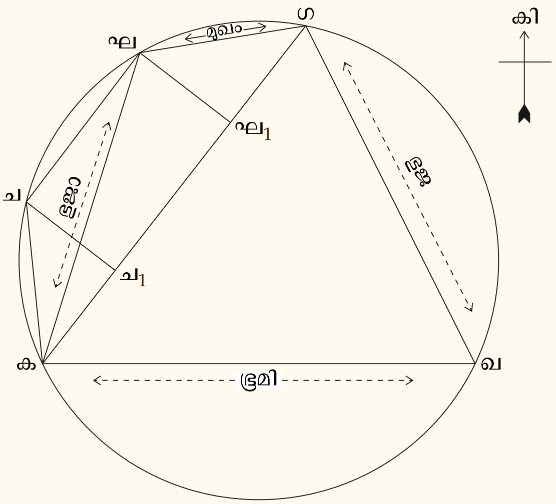
Trigonometrically,

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B)$$
$$\sin A \times \sin B = \sin^2 \frac{A+B}{2} - \sin^2 \frac{A-B}{2}.$$

ഈ ന്യായത്തെ കർണ്ണാനയനത്തിൽ നടേ അറിയേണം.

വ്യാഖ്യാനം: ത്ര്യശ്രന്യായത്തെക്കൊണ്ടു ചതുരശ്രന്യായത്തെ അറിയുംപ്രകാരത്തെ പറയുന്നു. ഇവിടെ നിയതങ്ങളായിട്ടിരിക്കുന്ന ചില ന്യായങ്ങളെ ആദ്യമായി അറിയേണ്ടതുണ്ട്. അവയെ മുമ്പിൽ ചൊല്ലുന്നു.

പരിലേഖം 46-ൽ *കഖഗഘ* വൃത്താന്തർഗ്ഗതമായിട്ടിരിക്കുന്ന ഒരു വിഷമചതുരശ്രം.



പരിലേഖം (46)

$$\text{ഭൂമി} = \textit{കഖ}$$

$$\text{മുഖം} = \textit{ഗഘ}$$

$$\text{ഭുജകൾ} = \textit{ഖഗ}, \textit{കഘ}$$

$$\text{കർണ്ണങ്ങൾ} = \textit{ഖഘ}, \textit{കഗ}$$

കഖ, *ഖഗ*, *ഗഘ*, *ഘക* എന്ന നാലു സമസ്തജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടു വൃത്തം മുഴുവൻ തികയുന്നു. കർണ്ണം *കഗ* ചതുരശ്രത്തെ *കഖഗ*, *കഘഗ* എന്നു രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളായിട്ടു ഭാഗിക്കുന്നു. അതുപോലെതന്നെ മറ്റെ കർണ്ണവും. *കഗ* എന്ന കർണ്ണം *കഖഗ*, *കഘഗ* എന്ന രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങൾക്കും സാധാരണമായിരിക്കുന്ന ഭൂമി. *കഘ* എന്ന ചാപത്തിൽ നിന്നു *ഗഘ* എന്ന ചാപത്തോടു തുല്യമായിട്ടു *കച* എന്ന ചാപത്തെ ഉണ്ടാക്കൂ. അപ്പോൾ *കഗഘച* എന്നൊരു ചതുരശ്രമുണ്ടാകും. ഈ ചതുരശ്രത്തിൽ *കഗ* ഭൂമി; *കച*, *ഗഘ* എന്ന ചാപങ്ങൾ തുല്യങ്ങളാകയാൽ ഭുജകൾ *കച*, *ഗഘ* തുല്യങ്ങൾ. *ഘ*$\textit{ഘ}_1$, *ച*$\textit{ച}_1$ എന്ന ലംബങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കൂ. വൃത്താന്തർഗ്ഗതമായിരിക്കുന്ന *കഗഘച* എന്ന ചതുരശ്രത്തിൽ *കച*, *ഗഘ* എന്ന ഭുജകൾ തുല്യങ്ങളാകയാൽ ലംബങ്ങളായ *ച*$\textit{ച}_1$, *ഘ*$\textit{ഘ}_1$ ഇവയും തുല്യങ്ങൾ. *ചഘ* എന്ന ചാപം *കഘ*, *ഗഘ* എന്ന ചാപങ്ങളുടെ അന്തരമാകയാൽ ചതുരശ്രത്തിന്റെ മുഖമായ *ചഘ* ചാപാന്തരസമസ്തജ്യാവെന്നു വന്നു

$$\textit{ച}_1\textit{ഘ}_1 = \textit{ചഘ}$$

$$\text{ഇവിടെ } \textit{ക}\textit{ച}_1 = \textit{ഗ}\textit{ഘ}_1$$

$$\textit{ക}\textit{ഘ}_1 = \textit{ഗ}\textit{ച}_1$$

$$\left.\begin{array}{r}\textit{കഘഗ}\text{ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തി-}\\ \text{ങ്കലെ ആബാധാന്തരം}\end{array}\right\} = \textit{ക}\textit{ഘ}_1 - \textit{ഘ}_1\textit{ഗ}$$

$$= \textit{ക}\textit{ഘ}_1 - \textit{ക}\textit{ച}_1$$

$$= \textit{ച}_1\textit{ഘ}_1$$

$$= \textit{ചഘ} = \text{ചാപാന്തരസമസ്തജ്യാവ്}$$

$$\text{ആബാധായോഗം} = \text{ഇഷ്ടകർണ്ണം} = \text{ബാഹുചാപയോഗസമസ്തജ്യാവ്}$$

$$\begin{aligned}
\text{ഭുജാവർഗ്ഗാന്തരം} &= \text{കഘ}_1{}^2 - \text{ഘ}_1\text{ഗ}^2 \ (\text{ആബാധാവർഗ്ഗാന്തരം}) \\
&= (\text{കഘ}_1 + \text{ഘ}_1\text{ഗ})(\text{കഘ}_1 - \text{ഘ}_1\text{ഗ}) \\
&= \text{കഗ} \times \text{ച}_1\text{ഘ}_1 \\
&= \text{കഗ} \times \text{ചഘ} \\
&= \text{ചാപയോഗസമസ്തജ്യാവ്} \times \text{ചാപാന്തരസമസ്തജ്യാവ്}
\end{aligned}$$

ബാഹുക്കളെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം,

$$\begin{aligned}
\text{ചാപയോഗം} &= \text{ചാപം കഗ} = \text{ചാപം കഘ} + \text{ചാപം ഘഗ} \\
\text{ചാപാന്തരം} &= \text{ചാപം ഘച}
\end{aligned}$$

ഈ ചാപയോഗാന്തരങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം,

$$\begin{aligned}
\text{ചാപയോഗം} &= \text{ചാപം കഗ} + \text{ചാപം ഘച} \\
&= \text{ചാപം കഘ} + \text{ചാപം ഗഘ} + \text{ചാപം കഘ} - \text{ചാപം ഗഘ} \\
&= 2 \times \text{ചാപം കഘ} \\
\text{ചാപാന്തരം} &= \text{ചാപം കഘ} + \text{ചാപം ഗഘ} - \text{ചാപം കഘ} + \text{ചാപം ഗഘ} \\
&= 2 \times \text{ചാപം ഗഘ}
\end{aligned}$$

$$\therefore \ \text{ചാപം കഘ} = \frac{\text{ചാപയോഗം}}{2}; \text{ചാപം ഗഘ} = \frac{\text{ചാപാന്തരം}}{2}$$

$\frac{\text{ചാപയോഗം}}{2}$, $\frac{\text{ചാപാന്തരം}}{2}$ എന്ന ചാപങ്ങളുടെ ജ്യാക്കളെ ഭുജകളെന്നു കല്പിക്കുമ്പോൾ,

$\frac{\text{ചാപയോഗം}}{2}$ എന്നതിന്റെ ജ്യാവർഗ്ഗം $-$ $\frac{\text{ചാപാന്തരം}}{2}$ എന്നതിന്റെ ജ്യാവർഗ്ഗം

$$= \text{ജ്യാവ് കഘ} \times \text{ജ്യാവ് ഘഗ}$$

എന്നു മുൻപിൽ പറഞ്ഞ ന്യായം കൊണ്ടു വന്നു.

അതായത്, ചാപയോഗാർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗം $-$ ചാപാന്തരാർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗം $=$ കഘ $\times$ ഘഗ

ഇങ്ങനെ കർണ്ണാനയനത്തിൽ ആവശ്യമുള്ള രണ്ടു ന്യായങ്ങൾ:-

(1) രണ്ടുജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗാന്തരം യാതൊന്ന് അത് ആ ജ്യാക്കളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ചാപങ്ങളുടെ യോഗാന്തരങ്ങൾ യാവചിലവ അവറ്റെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ജ്യാക്കളുടെ ഘാതമായിട്ടിരിക്കും.

(2) യാവചിലവ രണ്ടുജ്യാക്കളുടെ ഘാതം അത് അച്ചാപങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും യോഗാന്തരാർദ്ധങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ജ്യാക്കൾ യാവചിലവ അവറ്റിന്റെ വർഗ്ഗാന്തരമായിട്ടിരിക്കും.

വൃത്താന്തർഗ്ഗതചതുരശ്രക്ഷേത്ര കർണ്ണാനയനം

അനന്തരം ഈ ന്യായത്തെക്കൊണ്ടു കർണ്ണമുണ്ടാക്കും പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ വൃത്താന്തർഗ്ഗതമായിരിക്കുന്ന വിഷമചതുരശ്രത്തിങ്കലെ എല്ലായിലും വലിയ ഭുജയെ പടിഞ്ഞാറെ ഭൂമി എന്നും എല്ലായിലും ചെറിയ ഭുജയെ കിഴക്കു മുഖമെന്നും പിന്നെ അവറ്റിൽ വലിയതു ദക്ഷിണഭുജ, ചെറിയത് ഉത്തരഭുജ എന്നിങ്ങനെ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയവണ്ണംതന്നെ കല്പിച്ചു പിന്നെ ഭൂമീടെ തെക്കെ അഗ്രത്തിങ്കന്നു മുഖത്തിന്റെ

വടക്കെ അഗ്രത്തോളം ഉള്ളതു നടേത്തെ കണ്ണം, പിന്നെ ഭ്രമീടെ വടക്കെ അഗ്രത്തിങ്കന്നു മുഖത്തിന്റെ തെക്കെ അഗ്രത്തിങ്കൽ സ്പൃശിക്കുന്നതു രണ്ടാംകണ്ണം എന്നും കല്പിച്ച് പിന്നെ അടുത്തു് ഈരണ്ടു കണ്ണാഗ്രങ്ങളുടെ അന്തരങ്ങളിലെ വൃത്തഭാഗങ്ങളെ ഓരോ ഭുജകളുടെ ചാപങ്ങൾ എന്നും കല്പിച്ച് ഇച്ചാപഖണ്ഡങ്ങളിൽ ചില ബിന്ദുക്കളെ ഉണ്ടാക്കൂ. അവിടെ ഭ്രമീടെ വടക്കെ അഗ്രത്തിങ്കന്നു സൗമ്യഭുജാചാപത്തിങ്കൽ മുഖചാപത്തോളം ചെന്നേടത്തു് ഒരു ബിന്ദുവിടൂ. ഈ ബിന്ദുവിങ്കന്നു വൃത്തത്തിൽ മുഖത്തിന്റെ വടക്കെ അഗ്രത്തോടിടയ്ക്കു മുഖസൗമ്യഭുജാചാപാന്തരമെന്നു പേർ. ഇതിന്റെ നടുവിൽ സ്പൃശിക്കും വ്യാസാർദ്ധരേഖയുടെ ഒരു അഗ്രം. പിന്നെ ഭ്രമീടെ വടക്കെ അഗ്രത്തിങ്കന്നു ഭ്രചാപത്തിൽ യാമ്യഭുജാചാപത്തോളം ചെന്നേടത്ത് ഒരു ബിന്ദുവിടൂ. ഈ ബിന്ദുവിങ്കന്നു ഭ്രമീടെ യാമ്യാഗ്രത്തോടിടയ്ക്കു ഭ്രയാമ്യചാപാന്തരമെന്നു പേർ. ഇതിന്റെ മദ്ധ്യത്തിൽ സ്പൃശിക്കും വ്യാസരേഖയുടെ മറ്റെ അഗ്രം. ഇതു വ്യാസത്തിന്റെ മൂലം. പിന്നെ വ്യാസമൂലത്തിങ്കന്നു ഭ്രമീടെ യാമ്യാഗ്രത്തോളമുള്ള പഴുതു ഭ്രയാമ്യഭുജാചാപാന്തരാർദ്ധം. ആകയാൽ വ്യാസമൂലത്തിങ്കന്നു ഭ്രമീടെ വടക്കെത്തലയും തെക്കെ ഭുജേടെ കിഴക്കെത്തലയും അകലമൊക്കും വൃത്തത്തിങ്കൽ. പിന്നെ വ്യാസാഗ്രത്തിങ്കന്നും വടക്കെഭുജേടെ പടിഞ്ഞാറെ അഗ്രവും കിഴക്കേഭുജേടെ തെക്കെ അഗ്രവും അകലമൊക്കും. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്നേടത്തു മുഖവും സൗമ്യഭുജയും തങ്ങളിൽ ഗുണിപ്പൂ. അതിനെ യാമ്യഭുജയും ഭ്രമിയും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിൽ കൂട്ടൂ. എന്നാലതു രണ്ടു വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളുടെ യോഗമായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടേയും മുഖസൗമ്യചാപങ്ങളെ തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയും അന്തരിച്ചും അർദ്ധിച്ചിരിക്കുന്നവറ്റിന്റെ സമസ്തജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗാന്തരം നടേത്തേതു്. പിന്നെ ഭ്രയാമ്യചാപങ്ങളുടെ യോഗാന്തരാർദ്ധങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള സമസ്തജ്യാക്കളെ വർഗ്ഗിച്ച് അന്തരിച്ചതു് രണ്ടാമതു്. ഇതു മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായം കൊണ്ടും വരും. ഇവിടെ മുഖസൗമ്യചാപയോഗാർദ്ധവും ഭ്രയാമ്യചാപയോഗാർദ്ധവും ഇവ രണ്ടുംകൂട്ടിയാൽ പരിദ്ധ്യർദ്ധമായിട്ടിരിക്കും. ഈ യോഗാർദ്ധചാപങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും ജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗയോഗം വ്യാസവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും, ഈ ജ്യാക്കൾ രണ്ടും ഭുജാകോടികളാകയാൽ. യാതൊരുപ്രകാരം പരിധീടെ നാലൊന്നിനെ രണ്ടായി വിഭജിച്ചിരിക്കുന്ന ഖണ്ഡങ്ങളുടെ അർദ്ധജ്യാക്കൾ തങ്ങളിൽ ഭുജാകോടികൾ, വ്യാസാർദ്ധം കണ്ണവും ആയിട്ടിരിക്കുന്നു, അവ്വണ്ണം പരിദ്ധ്യർദ്ധത്തെ രണ്ടായി ഖണ്ഡിച്ചവറ്റിന്റെ സമസ്തജ്യാക്കൾ തങ്ങളിൽ ഭുജാകോടികളായിട്ടിരിക്കും, വ്യാസം കണ്ണവുമായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ ഇച്ചൊല്ലിയ യോഗാർദ്ധജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗയോഗം വ്യാസവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ വ്യാസവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു രണ്ട് അന്തരാർദ്ധചാപങ്ങളുടെ സമസ്തജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗങ്ങൾ രണ്ടും പോയതായിട്ടിരിക്കും ഇച്ചൊല്ലിയ ജ്യാക്കളുടെ ഘാതയോഗം. അവിടെ വ്യാസവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു നടേ ഒരു അന്തരാർദ്ധചാപജ്യാവർഗ്ഗം പോവൂ. അവിടെ ശേഷിച്ചതു് ആയന്തരാർദ്ധജ്യാവിന്റെ കോടിവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. ഇതു രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗാന്തരമാകയാൽ ഈ ജ്യാക്കൾ രണ്ടിനേയും സംബന്ധിച്ചുള്ള ചാപങ്ങളെ തങ്ങളിൽ കൂട്ടുകയും അന്തരിക്കുകയും ചെയ്തിരിക്കുന്ന ചാപങ്ങൾ രണ്ടും യാവചിലവ അവറ്റെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ജ്യാക്കൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കും, മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായത്തിനു തക്കവണ്ണം. ഇവിടെ പിന്നെ വ്യാസത്തിനു ചാപമാകുന്നതു പരിദ്ധ്യർദ്ധ്യമാകയാൽ, വ്യാസാഗ്രത്തിങ്കൽ ചൊല്ലിയ അന്തരാർദ്ധചാപത്തെ

പരിദ്ധ്യദ്ധത്തിൽ കൂട്ടുകയും കളകയും ചെയ്‌വൂ. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്ന ചാപങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും ജ്യാക്കൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടു വരേണം ഈ വർഗ്ഗാന്തരം, യോഗാന്തരചാപജ്യാഘാതരൂപമായിട്ട് എല്ലോ ഇരിപ്പൂ വർഗ്ഗാന്തരം, എന്നിട്ട്. ഇവിടെ പിന്നെ യോഗാന്തരചാപങ്ങൾക്കു രണ്ടിന്നുമൊന്നേ ജ്യാക്കൾ, ശരത്തിനും ചാപത്തിന്നുമേ ഭേദമുള്ളൂ. വ്യാസരേഖയിങ്കന്നു ഇരുപുറവും തുല്യമായിട്ട് അകലുമ്പോൾ ജ്യാക്കൾ തുല്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കും എന്നു നിയതം. യാതൊരുപ്രകാരമനന്തപുരവൃത്തത്തിങ്കൽ അദ്ധജ്യാക്കൾ പഠിക്കുന്നേടത്ത് ഇരുപത്തിനാലാകുന്ന പക്ഷത്തിങ്കൽ ഇരുപത്തിമൂന്നാമതും ഇരുപത്തിഅഞ്ചാമതും ഒന്നേ ആയിട്ടിരിക്കുന്നു, അവ്വണ്ണമിവിടേയും. ജ്യാക്കൾ തുല്യങ്ങളാകയാൽ ഘാതം വർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ വ്യാസവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു മുഖോത്തരാഗ്രവും വ്യാസാഗ്രവും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരചാപജ്യാവിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ നടേ കളയുമ്പോൾ വ്യാസമൂലത്തിങ്കന്നു മുഖോത്തരാഗ്രത്തോളമുള്ള അന്തരചാപജ്യാവിന്റെ വർഗ്ഗം ശേഷിക്കുന്നത്. പിന്നെ ഇതിങ്കന്നു വ്യാസമൂലത്തോടു ഭൂമീടെ ദക്ഷിണാഗ്രത്തോടുള്ള അന്തരചാപജ്യാവർഗ്ഗത്തെ കളകേവേണ്ടുവത്. ഇതു രണ്ടാമദ്ധചാപമാകുന്നത്. എന്നിട്ട് ഇതും രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗാന്തരമാകയാൽ ഇവറ്റിന്റെ യോഗാന്തരചാപജ്യാഘാതമായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ മുഖസൗമ്യാഗ്രത്തിങ്കന്നു വ്യാസമൂലത്തോടിടയിലുള്ള പരിദ്ധ്യംശം ഒരു ചാപമാകുന്നത്. വ്യാസമൂലത്തിങ്കന്നു ഭൂയാമ്യാഗ്രാന്തരം ഒരു ചാപമാകുന്നത്. ഇവറ്റിന്റെ അന്തരമാകുന്നതു മുഖസൗമ്യാഗ്രത്തിങ്കന്നു ഭൂയാമ്യാഗ്രത്തോടിടയിലുള്ള പരിദ്ധ്യംശം. ഇതു മുഖദക്ഷിണഭുജാചാപയോഗമായിട്ടിരിക്കും. ഇതിന്റെ ജ്യാവാകുന്നത് ആദ്യകണ്ണം. എന്നാൽ ആദ്യകണ്ണം അന്തരചാപജ്യാവാകുന്നത്. പിന്നെ മുഖസൗമ്യാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി വ്യാസമൂലം കഴിച്ചു ഭൂചാപത്തിങ്കലെ ബിന്ദുവോളമുള്ളതു യോഗചാപമാകുന്നത്. ഇതിന്റെ ജ്യാവു മുഖഭൂചാപയോഗജ്യാവായിട്ടിരിക്കും. ദക്ഷിണഭുജാചാപത്തേക്കാൾ ഭൂദക്ഷിണാഗ്രത്തോടു ഭൂചാപത്തിങ്കലെ ബിന്ദുവോടുള്ള അന്തരമേറീട്ടിരിക്കും ഭൂചാപം എന്നാൽ അന്തരത്തെ ദക്ഷിണഭുജാചാപത്തിൽ കൂട്ടിയാൽ ഭൂചാപത്തോടു തുല്യമാകയാൽ ഭൂമുഖചാപയോഗജ്യാവു യോഗജ്യാവാകുന്നത്. എന്നിട്ടു മുഖയാമ്യചാപയോഗജ്യാവും മുഖഭൂചാപയോഗജ്യാവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കും മുഖസൗമ്യഭുജാഘാതവും ഭൂയാമ്യഭുജാഖാതവും തങ്ങളിലെ യോഗം. ഇതിന്ന് ആദ്യകണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാതൈക്യമെന്നു പേർ. ആദ്യകണ്ണമാകുന്നത് മുഖസൗമ്യാഗ്രത്തോടു ഭൂയാമ്യാഗ്രത്തോടു സ്പശിച്ചുള്ള കണ്ണം. ഇതിന്റെ അഗ്രത്തെ സ്പശിച്ചിരിപ്പോ ചിലവ മുഖസൗമ്യഭുജകൾ, മൂലത്തെ സ്പശിപ്പോ ചിലവ ഭൂയാമ്യഭുജകൾ. ഇവറ്റിന്റെ ഘാതയോഗമാകയാൽ ആദ്യകണ്ണാശ്രിതഭുജഘാതൈക്യമിത്. ഇതു പിന്നെ ആദ്യതൃതീയകണ്ണാഘാതമായിട്ടിരിപ്പൊന്ന്. ഇവിടെ ആദ്യകണ്ണമാകുന്നതു ഭൂദക്ഷിണാഗ്രത്തിങ്കന്നു മുഖസൗമ്യാഗ്രത്തോളമുള്ളത്. തൃതീയകണ്ണമാകുന്നതു പിന്നെ ഭൂയാമ്യഭൂജകളെ പകന്നുവെച്ചാൽ അഗ്രം നടേത്തെതു തന്നെയും മൂലം മറ്റൊരിടത്തും സ്പശിച്ചിട്ടിരിക്കുന്ന ഈ ആദ്യകണ്ണം തന്നെ. ദ്വിതീയകണ്ണം നടേത്തെപ്പോലെ ഇരിക്കും. മുഖസൗമ്യാഗ്രത്തിങ്കൽ സ്പശിക്കുന്ന പ്രഥമകണ്ണത്തിന്റെ മൂലം മറ്റൊരിടത്തായിരിക്കും എന്നു ചൊല്ലിയത്, ഭൂചാപത്തിങ്കൽ ഭൂദക്ഷിണാഗ്രത്തിങ്കന്നു ഭൂയാമ്യചാപാന്തരം ചെന്നേടത്തു യാതൊരു

ബിന്ദു നടേ ചൊല്ലിയതു് അതിങ്കലായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടുന്നു മുഖസൗമ്യാഗ്രത്തോളമുള്ളതു തൃതീയകർണ്ണമാകുന്നതു്. ഭുയാമ്യഭുജകളെ പകർന്നുവെക്കുമ്പോളേ ഇതു് ഉണ്ടാവൂ. ഇതിനെ തൃതീയകർണ്ണമെന്നു ചൊല്ലുന്നു. പിന്നെ ഈ കർണ്ണങ്ങൾ രണ്ടും ഭുജകളായി ഇക്കർണ്ണമൂലാന്തരത്തിങ്കലെ ചാപത്തെ ഭൂചാപമെന്നും കല്പിപ്പൂ. അതാകുന്നതു ഭൂചാപത്തിങ്കലെ ബിന്ദുവും ഭുയാമ്യാഗ്രവും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരചാപം ഇതിന്റെ ജ്യാവിനെ ഭൂമി എന്നും കല്പിച്ചിട്ടു് ഒരു ത്ര്യശ്രത്തെ ഉണ്ടാക്കൂ. പിന്നെ ഈ ഭൂമിക്കു വിപരീതമായിട്ടു മുഖസൗമ്യാഗ്രത്തിങ്കന്നു് ഈ ഭൂമിയോളമുള്ളതു് ഈ ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ ലംബമാകുന്നതു്. അവിടെ ആദ്യതൃതീയകർണ്ണങ്ങളാകുന്ന ഭുജകളുടെ ഘാതത്തെ വ്യാസംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാലുണ്ടാകും ഈ ലംബം. **എല്ലായിടത്തും ജ്യാക്കളായിട്ടിരിക്കുന്ന ത്ര്യശ്രഭുജകളുടെ ഘാതത്തെ ആ വൃത്തവ്യാസംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ആ ഭുജാചാപയോഗത്തിന്റെ ജ്യാവു ഭൂമിയായിട്ടിരിക്കുന്ന ത്ര്യശ്രത്തിന്റെ ലംബമുണ്ടാകും** എന്നു നിയതം. ഇതു 'ജീവേ പരസ്പര' എന്നാദിയായുള്ള ശ്ലോകത്തിങ്കലെ ന്യായംകൊണ്ടുവരും. ഇവിടെ പിന്നെ വിഷമചതുരശ്രത്തെ ദ്വിതീയകർണ്ണംകൊണ്ടു വിഭജിച്ചു രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളായിട്ടു കല്പിച്ചാൽ രണ്ടിങ്കലും ഓരോ ലംബമുണ്ടാകും. ഈ ലംബങ്ങൾ രണ്ടിന്നും സാധാരണമായിട്ടിരിക്കുന്ന ഭൂമിയായിട്ടിരിക്കും ഈ ദ്വിതീയകർണ്ണം. ഇക്കർണ്ണം ഭൂമിയായിട്ടിരിക്കുന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങളിലെ ലംബങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും യോഗം യാതൊന്നു് ഇതിനോടു തുല്യമായിട്ടിരിക്കും ആദ്യതൃതീയകർണ്ണഘാതത്തിങ്കന്നു വ്യാസംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുള്ള ലംബം. അതു് എങ്ങനെ എന്നു പിന്നെ. ഇവിടെ ആദ്യതൃതീയകർണ്ണങ്ങളുടെ അഗ്രം മുഖസൗമ്യാഗ്രത്തിങ്കൽ, മൂലം ഭുയാമ്യാഗ്രത്തിങ്കലും ഭൂചാപബിന്ദുവിങ്കലും. ഈ മൂലാന്തരചാപജ്യാവു് ഇക്കർണ്ണങ്ങളാകുന്ന ത്ര്യശ്രഭുജകൾക്കു ഭൂമി ആകുന്നതു്. ഈ ഭൂമിക്കും ദ്വിതീയകർണ്ണത്തിന്നും ഒന്നേ ദിക്കു്, ദ്വിതീയകർണ്ണത്തിന്റെ രണ്ടഗ്രത്തിങ്കന്നു് ഈ ജ്യാഗ്രങ്ങൾ യാമ്യചാപത്തോടു തുല്യങ്ങളാകയാൽ. ദ്വിതീയകർണ്ണത്തിന്റെ ചാപത്തിന്നും ഈ ത്ര്യശ്രഭൂമിചാപത്തിന്നും മദ്ധ്യമാകുന്നതു മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ വ്യാസമൂലാഗ്രത്തിങ്കൽ ആയിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ ദ്വിതീയകർണ്ണത്തിന്നും ഈ ത്ര്യശ്രഭൂമിക്കും ദിക്കു് ഒന്നെ ആകയാൽ ദ്വിതീയകർണ്ണം ഭൂമിയായിട്ടുള്ള ലംബങ്ങൾ രണ്ടിനും വലിയ ലംബത്തിന്നും ദിക്കു് ഒന്നെ. പിന്നെ ദ്വിതീയകർണ്ണം ഭൂമിയായി ആദ്യതൃതീയകർണ്ണം ഭുജകളായിരിക്കുന്ന ത്ര്യശ്രത്തിന്റെ ഭൂമി മുഖമായി ഇരിപ്പോരു ചതുരശ്രം സമലംബമായിട്ടിരിക്കും. ഇവ്വണ്ണം കല്പിക്കുമ്പോൾ ലംബയോഗതുല്യം വലിയ ലംബമെന്നു സ്പഷ്ടമാകും. പിന്നെ ഈ ലംബയോഗത്തെ ദ്വിതീയകർണ്ണത്തിന്റെ അർദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ദ്വിതീയകർണ്ണം ഭൂമിയായിട്ടിരിക്കുന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങൾ രണ്ടിലേയും ഫലയോഗമായിട്ടു വൃത്താന്തർഗ്ഗതചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലമുണ്ടാകും. ആകയാൽ കർണ്ണങ്ങൾ മൂന്നും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിങ്കന്നു വ്യാസംകൊണ്ടു ഹരിച്ചു് അർദ്ധിച്ചതു ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലമായിട്ടിരിക്കും. കർണ്ണത്രയഘാതത്തെ ക്ഷേത്രഫലംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഇരട്ടിച്ച വ്യാസമായിട്ടിരിക്കും. കർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങളുടെ ഘാതത്തെ ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ദ്വിഗുണവ്യാസവർഗ്ഗമുണ്ടാകും. ലംബയോഗം, വ്യാസം, ക്ഷേത്രഫലമെന്നിവ എല്ലാം ഇവിടെ പ്രസംഗാൽ പറഞ്ഞു. എന്നിട്ടു് ഇതിന്റെ ശേഷം മേലിൽ പറയുന്നുണ്ടു്.

ഇവിടെ കർണ്ണങ്ങളെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നൂത്. അവിടെ ആദ്യക്ർണ്ണാശ്രിതഭുജഘാതൈക്യം ആദ്യതൃതീയകർണ്ണാഘാതമായിട്ടിരിക്കും എന്നു വിസ്തരിച്ചു ചൊല്ലി. ഈ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ ദ്വിതീയകർണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാതൈക്യം ദ്വിതീയതൃതീയകർണ്ണഘാതമെന്നും വരും. ഇതു മുഖയാമ്യഭുജാഘാതവും ഭൂസൗമ്യഭുജാഘാതവും കൂടിയതു്. പിന്നെ ഭൂയാമ്യഭുജകളെ പകർന്നു കല്പിച്ചാലുള്ള ദ്വിതീയക്ർണ്ണാശ്രിതഭുജകളുടെ ഘാതം, തദൈക്യത്തേയും ഉണ്ടാക്കൂ. അതു ഭൂമുഖഘാതവും സൗമ്യയാമ്യഭുജാഘാതവും കൂടിയതു്. ഇതിന്നു **ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതയോഗ**മെന്നു പേർ. ഇതു പ്രഥമദ്വിതീയകർണ്ണഘാതമായിട്ടിരിക്കും. ഇനി ഈ ഭുജകളെ പകർന്നുവെച്ചാൽ നാലാമതു് ഒരു കർണ്ണമുണ്ടാവുകയില്ല, പ്രസ്താരം ഒടുങ്ങിപ്പോകയാൽ. ഇവിടെ ഇവ്വണ്ണമുണ്ടാക്കിയ ആദ്യതൃതീയകർണ്ണഘാതത്തെ ആദ്യദ്വിതീയകർണ്ണഘാതംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ദ്വിതീയതൃതീയകർണ്ണഘാതംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ആദ്യകർണ്ണവർഗ്ഗം. പിന്നെ ദ്വിതീയതൃതീയകർണ്ണഘാതത്തെ ആദ്യദ്വിതീയകർണ്ണഘാതംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ആദ്യതൃതീയകർണ്ണഘാതംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ദ്വിതീയകർണ്ണവർഗ്ഗം. ഇങ്ങനെ ക്ർണ്ണങ്ങൾ വരുത്തുംപ്രകാരം. തൃതീയകർണ്ണത്തെ വരുത്തേണ്ടാ, കല്പിതമത്രെ അതു്, എന്നിട്ടു്. ഇവ്വണ്ണംതന്നെ ഉണ്ടാക്കുകയുമാം വേണ്ടുകിൽ.

വ്യാഖ്യാനം: പരിലേഖം 47-ൽ *കഖഗഘ* വൃത്താന്തർഗ്ഗതമായിരിക്കുന്ന ഒരു വിഷമ ചതുരശ്രം.

ഇവിടെ ഭൂമി = *കഖ*.

മുഖം = *ഗഘ*.

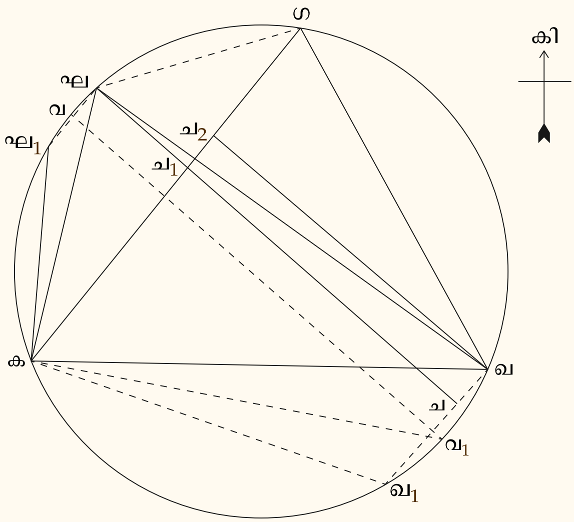
യാമ്യഭുജ = *ഖഗ*.

സൗമ്യഭുജ = *കഘ*.

കഖ > *ഖഗ* > *കഘ* > *ഗഘ* എന്നും കല്പിക്കുന്നു.

ആദ്യകർണ്ണം = *ഖഘ*.

ദ്വിതീയകർണ്ണം = *കഗ*



പരിലേഖം (47)

$ക\,ഘ$ എന്ന ചാപത്തിൽ $ഘ\,ഗ$ എന്ന ചാപത്തിനോടു തുല്യമായിട്ടു $ക\,ഘ_1$ എന്ന ചാപത്തെ ഉണ്ടാക്ക. അപ്രകാരംതന്നെ $ക\,ഖ$ എന്ന ചാപത്തിലും $ഖ\,ഗ$ എന്ന ചാപതുല്യമായിട്ട് $ക\,ഖ_1$ എന്ന ചാപത്തെ ഉണ്ടാക്ക.

$$\text{അപ്പോൾ ചാപം } ക\,ഘ_1 = \text{ചാപം } ഗ\,ഘ = \text{മുഖചാപം}$$
$$\text{ചാപം } ക\,ഖ_1 = \text{ചാപം } ഖ\,ഗ = \text{യാമ്യചാപം}$$
$$\text{ചാപം } ഘ\,ഘ_1 = \text{മുഖസൗമ്യഭുജാചാപാന്തരം}$$
$$\text{ചാപം } ഖ\,ഖ_1 = \text{ഭുയാമ്യഭുജാചാപാന്തരം}$$
$$ഘ\,ഘ_1 \text{ എന്ന ചാപത്തിന്റെ മദ്ധ്യം} = വ$$
$$ഖ\,ഖ_1 \text{ എന്ന ചാപത്തിന്റെ മദ്ധ്യം} = വ_1$$
$$\text{ചാപങ്ങൾ } വ\,ഘ + ഘ\,ഗ + ഗ\,ഖ + ഖ\,വ_1 = \text{ചാപങ്ങൾ } വ\,ഘ_1 + ഘ_1\,ക + ക\,ഖ_1 + ഖ_1 വ_1$$
$$= \text{വൃത്താർദ്ധം}$$
$$\therefore \quad വ\,വ_1 = \text{ഒരു വ്യാസമാകുന്നു.}$$

ഇവിടെ $വ$ വ്യാസാഗ്രവും, $വ_1$ വ്യാസമൂലവുമെന്നു കല്പിക്ക.

$$\text{ചാപം } വ_1\,ഖ = \text{ചാപം } വ_1\,ഖ_1$$
$$= \text{ഭുയാമ്യഭുജാചാപാന്തരാർദ്ധം}$$
$$\text{ചാപം } വ\,ഘ = \text{മുഖസൗമ്യഭുജാചാപാന്തരാർദ്ധം}$$
$$\text{ചാപം } വ_1\,ക = \text{ചാപം } വ_1\,ഖ_1 + \text{ചാപം } ഖ_1\,ക$$
$$= \text{ചാപം } വ_1\,ഖ + \text{ചാപം } ഖ\,ഗ$$
$$= \text{ചാപം } വ_1\,ഗ$$
$$\text{ഇപ്രകാരംതന്നെ ചാപം } വ\,ക = \text{ചാപം } വ\,ഗ$$

പിന്നെ മുമ്പിൽപറഞ്ഞ ന്യായംകൊണ്ട്,

$$ക\,ഘ \times ഘ\,ഗ = ക\,വ^2 - വ\,ഘ^2$$

$$ഖഗ \times ഖക = കവ_1{}^2 - വ_1ഖ^2$$

$$\therefore \quad ക഻ഘ \times ഘഗ + ഖഗ \times ഖക = കവ^2 + കവ_1{}^2 - വഘ^2 - വ_1ഖ^2$$

വ്യാസം ഭൂമിയായി വൃത്താന്തർഗ്ഗതമായിരിക്കുന്ന ഏതു ത്ര്യശ്രത്തിന്റെയും ഭുജകൾ ഭൂമിയാകുന്ന കർണ്ണത്തിന്റെ ഭുജാകോടികളായിട്ടിരിക്കുമെന്നു നിയതം.

$$\therefore \quad കവ^2 + കവ_1{}^2 = വവ_1{}^2$$

$$\therefore \quad കഘ \times ഘഗ + കഖ \times ഖഗ = വവ_1{}^2 - വഘ^2 - വ_1ഖ^2$$

വ്യാസകർണ്ണത്തിനു $വഘ$, $ഘവ_1$ ഇവയും ഭുജാകോടികളാകുന്നു

$$\therefore \quad വവ_1{}^2 = വഘ^2 + ഘവ_1{}^2$$

$$\therefore \quad വവ_1{}^2 - വഘ^2 = ഘവ_1{}^2$$

$$\text{അപ്പോൾ } കഘ \times ഘഗ + കഖ \times ഖഗ = വ_1ഘ^2 - വ_1ഖ^2$$

$$= ഘഖ_1 \times ഘഖ$$

(ആദ്യംപറഞ്ഞ ന്യായംകൊണ്ട്)

$ഘഖ$ എന്നത് ആദ്യകർണ്ണം. ഭുയാമ്യഭുജകളെ പകർന്നു കല്പിക്കുമ്പോൾ ആദ്യകർണ്ണത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു $ഘഖ_1$ എന്ന കർണ്ണമുണ്ടാകുന്നു. ഇതിന്നു തൃതീയകർണ്ണമെന്നു പേർ ദ്വിതീയകർണ്ണത്തിന്നു സംസ്ഥാനഭേദവുമില്ല.

ആദ്യകർണ്ണത്തിന്റെ ഒരഗ്രത്തെ സ്പർശിക്കുന്ന ഭുജകൾ $ഘക$, $ഘഗ$; മറ്റെ അഗ്രത്തെ സ്പർശിക്കുന്നവ $ഖഗ$, $ഖക$. അതുകൊണ്ടു $കഘ \times ഘഗ + കഖ \times ഖഗ$ എന്ന ഘാതയോഗത്തിന്ന് ആദ്യകർണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാതൈക്യമെന്നു പേർ.

$$\therefore \quad \text{ആദ്യകർണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാതൈക്യം} = ഘഖ \times ഘഖ_1$$

$$= \text{ആദ്യതൃതീയകർണ്ണാഘാതം}$$

$ഘഖഖ_1$ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ $ഖഖ_1$ എന്നതിനെ ഭൂമി എന്നു കല്പിച്ചു ബാഹുസ്പർശാഗ്രമായ $ഘ$ എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്നു ഭൂമിയിലേക്കു $ഘച$ എന്ന ലംബത്തെ വരക്കുക.

$$\text{ലംബം } ഘച = \frac{ഘഖ \times ഘഖ}{\text{വ്യാസം}}$$

("ജ്യായോഃ പരസ്പരം ഘാതാത്ത്രിജ്യാപ്തം ലംബ ഇഷ്യതേ" എന്ന ന്യായംകൊണ്ട്).

ചതുരശ്രത്തെ ദ്വിതീയകർണ്ണംകൊണ്ട് $ഘകഗ$, $ഖകഗ$ എന്നു രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളായി വിഭജിച്ചു $ഖ$, $ഘ$ എന്ന ബാഹുസ്പർശാഗ്രങ്ങളിൽ നിന്നു സാധാരണഭൂമിയായ $കഗ$-യിലേയ്ക്കു $ഘച_1$, $ഖച_2$ എന്ന രണ്ടു ലംബങ്ങളെ വരയ്ക്കുക.

ചാപം $കഖ_1$ = ചാപം $ഗഖ$; ദ്വിതീയകർണ്ണത്തിന്റെയും $ഖഖ_1$ എന്നതിന്റെയും ചാപങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും മദ്ധ്യം വ്യാസമൂലമായ $വ_1$-ൽ തന്നെ.

$$\therefore \quad ഖ_1ഖ,\ കഗ \text{ ഇവ തുല്യ ദിക്കുകൾ.}$$

$$\therefore \quad കഖ_1,\ ഖഗ \text{ സമലംബമായിട്ടിരിക്കുന്ന ഒരു ചതുരശ്രം.}$$

$$\therefore \quad ഘച,\ ഘച_1,\ ഖച_2 \text{ ഈ ലംബങ്ങളും തുല്യദിക്കുകൾ.}$$

$$\therefore \quad ഘച = ഘച_1 + ഖച_2.$$

അപ്പോൾ വിഷമചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം

= ദ്വിതീയകർണ്ണത്തിന്റെ ഇരുപുറവുമുള്ള ത്ര്യശ്രങ്ങളുടെ ക്ഷേത്രഫലയോഗം

$$= \frac{1}{2} \times \text{ദ്വിതീയകർണ്ണം} \times (\text{ഘച}_1 + \text{ഖച}_2)$$
$$= \frac{1}{2} \times \text{ദ്വിതീയകർണ്ണം} \times \text{ഘച}$$
$$\text{എന്നാൽ } \text{ഘച} = \frac{\text{ആദ്യതൃതീയകർണ്ണാഘാതം}}{\text{വ്യാസം}}$$
$$\text{അപ്പോൾ വിഷമ ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം} = \frac{\text{ആദ്യദ്വിതീയതൃതീയകർണ്ണാഘാതം}}{2 \times \text{വ്യാസം}}$$
$$\text{വ്യാസം} = \frac{\text{ആദ്യദ്വിതീയതൃതീയകർണ്ണാഘാതം}}{2 \times \text{ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം}}$$
$$\frac{\text{ആദ്യകർണ്ണവർഗ്ഗം} \times \text{ദ്വിതീയകർണ്ണവർഗ്ഗം} \times \text{തൃതീയകർണ്ണവർഗ്ഗം}}{\text{ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം}} = (2 \times \text{വ്യാസം})^2$$

ഇവിടെ ലംബയോഗം, ക്ഷേത്രഫലം, വ്യാസം ഇവയെ പ്രസംഗാൽ പറഞ്ഞു. അനന്തരം കർണ്ണാനയനത്തെ തുടരുന്നു.

$$\text{ആദ്യതൃതീയകർണ്ണാഘാതം} = \text{ആദ്യകർണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാതൈക്യം}$$
$$= \text{കഘ} \times \text{ഘഗ} + \text{കഖ} \times \text{ഖഗ}$$
$$\text{ദ്വിതീയതൃതീയകർണ്ണാഘാതം} = \text{ദ്വിതീയകർണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാതൈക്യം}$$
$$= \text{കഘ} \times \text{കഖ} + \text{ഗഘ} \times \text{ഗഖ}$$

പിന്നെ ഭുയാമ്യഭുജകളെ പകർന്നു കല്പിച്ചാൽ കഘഗഖ_1 എന്നൊരു ചതുരശ്രമുണ്ടാകും. ഈ ചതുരശ്രത്തിന്റെ കർണ്ണങ്ങൾ തൃതീയകർണ്ണവും ദ്വിതീയകർണ്ണവും. ആദ്യകർണ്ണം ഈ ചതുരശ്രത്തിന്റെ തൃതീയകർണ്ണമായിട്ടുവരും. ഇവിടെ കഗ എന്ന കർണ്ണത്തെ സംബന്ധിച്ചുള്ള കർണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാതൈക്യം $= \text{കഗ} \times \text{ഘഖ} =$ ആദ്യദ്വിതീയകർണ്ണാഘാതം.

$$\therefore \quad \text{ആദ്യദ്വിതീയകർണ്ണാഘാതം} = \text{കഘ} \times \text{കഖ}_1 + \text{ഖ}_1\text{ഗ} \times \text{ഗഘ}$$
$$= \text{കഘ} \times \text{ഗഖ} + \text{കഖ} \times \text{ഗഘ}$$

കഖഗഘ എന്ന ചതുരശ്രത്തിൽ കഘ, ഗഖ ഇവയെ അന്യോന്യം ഭുജാപ്രതിഭുജകളെന്നു പറയുന്നു; കഖ, ഗഘ ഇവയേയും അന്യോന്യം ഭുജാപ്രതിഭുജകളെന്നു പറയുന്നു.

$$\text{ആപ്പോൾ ആദ്യദ്വിതീയകർണ്ണാഘാതം} = \text{ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതയോഗം}$$
$$= \text{ഗഘ} \times \text{കഖ} + \text{കഘ} \times \text{ഖഗ}$$

ഭുജകളെ എങ്ങനെ പകർന്നു കല്പിച്ചാലും നാലാമതു് ഒരു കർണ്ണമുണ്ടാവുകയില്ല. ഭ_1, ഭ_2, ഭ_3, ഭ_4 എന്നു ചതുരശ്രത്തിന്റെ നാലു ഭുജകൾ എന്നു കല്പിക്ക. ഇവയിൽ ഈരണ്ടിന്റെ ഘാതം ആറുവിധത്തിൽ വരാം — $\text{ഭ}_1\text{ഭ}_2$, $\text{ഭ}_1\text{ഭ}_3$, $\text{ഭ}_1\text{ഭ}_4$, $\text{ഭ}_2\text{ഭ}_3$, $\text{ഭ}_2\text{ഭ}_4$, $\text{ഭ}_3\text{ഭ}_4$ —ഇങ്ങനെ പ്രസ്താരം ആറു്. രണ്ടു ഭുജകളുടെ ഘാതത്തിൽ ബാക്കിയുള്ള രണ്ടു ഘാതത്തെയാണ് കൂട്ടേണ്ടതു്. ഇങ്ങനെയുള്ള യോഗങ്ങൾ മൂന്നു മാത്രമേ ഉണ്ടാകയുള്ളൂ അവ $\text{ഭ}_1\text{ഭ}_3 + \text{ഭ}_3\text{ഭ}_4$, $\text{ഭ}_1\text{ഭ}_3 + \text{ഭ}_2\text{ഭ}_4$, $\text{ഭ}_1\text{ഭ}_4 + \text{ഭ}_2\text{ഭ}_3$ ആകുന്നു. ഇവയിൽ രണ്ടു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ച മൂന്നാമതുകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കർണ്ണവർഗ്ഗമുണ്ടാകുന്നു. മൂന്നുവിധം മാത്രമേ ഇതും സംഭവിക്കുകയുള്ളൂ.

$$\text{ആദ്യകർണ്ണവർഗ്ഗം} = \frac{(\text{ഭ}_1\text{ഭ}_2 + \text{ഭ}_3\text{ഭ}_4)(\text{ഭ}_1\text{ഭ}_3 + \text{ഭ}_2\text{ഭ}_4)}{\text{ഭ}_1\text{ഭ}_4 + \text{ഭ}_2\text{ഭ}_3}$$

$$\text{രണ്ടാംകർണ്ണവർഗ്ഗം} = \frac{(\text{ഭ}_1\text{ഭ}_2 + \text{ഭ}_3\text{ഭ}_4)(\text{ഭ}_1\text{ഭ}_4 + \text{ഭ}_2\text{ഭ}_3)}{\text{ഭ}_1\text{ഭ}_3 + \text{ഭ}_2\text{ഭ}_4}$$

$$\text{മൂന്നാംകർണ്ണവർഗ്ഗം} = \frac{(\text{ഭ}_1\text{ഭ}_3 + \text{ഭ}_2\text{ഭ}_4)(\text{ഭ}_1\text{ഭ}_4 + \text{ഭ}_2\text{ഭ}_3)}{\text{ഭ}_1\text{ഭ}_2 + \text{ഭ}_3\text{ഭ}_4}$$

പ്രസ്താരം ഒടുങ്ങുകയാൽ നാലാമതൊരു കർണ്ണമുണ്ടാവുകയില്ല എന്നു പറഞ്ഞതിന്റെ യുക്തി ഇപ്രകാരമാണ്.

$$\text{അപ്പോൾ} \quad \frac{\text{ആദ്യദ്വിതീയകർണ്ണഘാതം} \times \text{ആദ്യതൃതീയകർണ്ണഘാതം}}{\text{ദ്വിതീയതൃതീയകർണ്ണഘാതം}}$$

$$= \frac{\text{ഖഘ} \times \text{കഗ} \times \text{ഖഘ} \times \text{ഘഖ}_1}{\text{കഗ} \times \text{ഘഖ}_1} = \text{ഖഘ}^2 = \text{ആദ്യകർണ്ണവർഗ്ഗം}.$$

ഇങ്ങനെ എല്ലാ കർണ്ണങ്ങളെയും ഉണ്ടാക്കാം.

$$\therefore \ \text{ആദ്യകർണ്ണം} = \sqrt{\left\{\frac{(\text{കഖ}\times\text{ഗഘ}+\text{ഖഗ}\times\text{കഘ})(\text{കഖ}\times\text{ഖഗ}+\text{കഘ}\times\text{ഘഗ})}{\text{കഘ} \times \text{ഖക} + \text{ഗഘ} \times \text{ഗഖ}}\right\}}$$

$$\text{ദ്വിതീയകർണ്ണം} = \sqrt{\left\{\frac{\text{ആദ്യദ്വിതീയകർണ്ണാഘാതം}\times\text{ദ്വിതീയതൃതീയകർണ്ണാഘാതം}}{\text{ആദ്യതൃതീയകർണ്ണാഘാതം}}\right\}}$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{(\text{കഖ}\times\text{ഗഘ}+\text{ഖഗ}\times\text{കഘ})(\text{കഘ}\times\text{ഖക}+\text{ഗഘ}\times\text{ഗഖ})}{\text{കഖ} \times \text{ഖഗ} + \text{കഘ} \times \text{ഘഗ}}\right\}}$$

$$\text{തൃതീയകർണ്ണം} = \sqrt{\left\{\frac{\text{ആദ്യതൃതീയകർണ്ണാഘാതം}\times\text{ദ്വിതീയതൃതീയകർണ്ണാഘാതം}}{\text{ആദ്യദ്വിതീയകർണ്ണാഘാതം}}\right\}}$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{(\text{കഖ}\times\text{ഖഗ}+\text{കഘ}\times\text{ഘഗ})(\text{കഘ}\times\text{കഖ}+\text{ഗഘ}\times\text{ഗഖ})}{\text{കഖ} \times \text{ഗഘ} + \text{ഖഗ} \times \text{കഘ}}\right\}}$$

“ജീവേപരസ്പരം” ന്യായത്തിന്റെ ഉപപത്തി

അനന്തരം ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതയോഗം ആദ്യദ്വിതീയകർണ്ണഘാതമായിട്ടിരിക്കും എന്നു ചൊല്ലിയതിനെ പഠിതജ്യാക്കളിൽ കാട്ടുന്നു. അവിടെ രണ്ടു ജ്യാക്കളെ പരസ്പരകോടികളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചു കൂട്ടിയാൽ ആ ജ്യാക്കളുടെ യോഗചാപത്തിന്റെ ജ്യാവുണ്ടാകും എന്നു മുമ്പിൽ ചൊല്ലീ. ഇവിടെ ത്രിജ്യാവു പ്രഥമകർണ്ണമായിട്ടിരിക്കും, യോഗചാപജ്യാവ് ദ്വിതീയകർണ്ണമായിട്ടിരിക്കും. ഇതരേതരകോടി മറ്റേതിന്നു പ്രതിഭുജയായിട്ടിരിക്കും. അത് എങ്ങനെ എന്ന്. അവിടെ ദ്വിതീയജ്യാഗ്രത്തിങ്കൽ ത്രിജ്യാകർണ്ണത്തിന്റെ അഗ്രം. ദ്വിതീയതൃതീയചാപങ്ങൾ രണ്ടിന്നും കൂടീട്ട് ഒരു സമസ്തജ്യാവും. ഈ ജ്യാവിന്റെ മദ്ധ്യത്തിങ്കൽ സ്പർശിക്കും ത്രിജ്യാകർണ്ണം. ഇക്കർണ്ണവും സമസ്തജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള സംപാതത്തിങ്കന്നു തൃതീയജ്യാഗ്രത്തോളമുള്ള സമസ്തജ്യാർദ്ധം ഒരു ഭുജാ ദ്വിതീയജ്യാവിനെ പിന്നെ ഇസ്സംപാതത്തിങ്കലും തൃതീയജ്യാവും പൂർവ്വാപരസൂത്രവും തങ്ങളിലുള്ള സംപാതത്തിങ്കലും സ്പർശിച്ചിട്ടു കല്പിക്കാം. എന്നാലതൊരു ഭുജാ. തൃതീയജ്യാവ് ഒരു ഭുജാ. ഇങ്ങനെ ഇരിപ്പോരു ത്ര്യശ്രമുണ്ട്. ഇവിടെ സമസ്തജ്യാർദ്ധം പ്രഥമജ്യാവ്. ഇതിനേയും ദ്വിതീയജ്യാവിനേയും ഇതരേതരകോടികളെക്കൊണ്ട് ഗുണിച്ചു തങ്ങളിൽകൂട്ടി ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ

തൃതീയജ്യാവായിട്ടു വരും. എന്നിതെല്ലാം മുമ്പിൽചൊല്ലീ. പിന്നെ ഇവിടെ ക്ഷേത്രകല്പനത്തെ പ്രകാരാന്തരേണ നിരൂപിക്കം. ഇവിടെ ദ്വിതീയജ്യാഗ്രത്തിങ്കലും ചതുൎത്ഥജ്യാഗ്രത്തിങ്കലും സ്പശിക്കുമാറു സമസ്തജ്യാവിനെ കല്പിപ്പൂ. ഇസ്സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ സ്പശിക്കുമാറു വ്യാസാദ്ധകണ്ണത്തേയും ദ്വിതീയജ്യാവിനെ യഥാസ്ഥാനമായിട്ടും കല്പിച്ചു പിന്നെ ദ്വിതീയജ്യാവും പൂവ്വാപരസൂത്രത്തിങ്കലെ ദ്വിതീയജ്യാകോടിയും പിന്നെ സമസ്തജ്യാദ്ധങ്ങളിൽ ദ്വിതീയജ്യാഗ്രത്തെ സ്പശിക്കുന്ന ഒരു ഭാഗവും ഇതിന്റെ കോടി വ്യാസാദ്ധത്തിങ്കലെ ഭാഗവും ഇങ്ങനെ ഒരു വിഷമചതുരശ്രം. ഇവിടെ പൂവ്വാപരസൂത്രവും ദ്വിതീയജ്യാവുമുള്ള സംപാതത്തിങ്കലും സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യത്തിങ്കലും സ്പശിച്ചിട്ട് ഒരു കണ്ണം. ഇതു തൃതീയജ്യാവായിട്ടിരിക്കും, മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായം കൊണ്ട്; സംസ്ഥാനഭേദംതോന്നുമെത്രെ. മറ്റേ കണ്ണം ദ്വിതീയജ്യാഗ്രത്തിങ്കൽ സ്പശിച്ചിരിക്കുന്നവ്യാസാദ്ധം. ഇവിടെ ദ്വിതീയജ്യാവും പ്രഥമജ്യാകോടിയും തങ്ങളിൽ പ്രതിഭുജകളായിട്ടിരിക്കും. മറ്റേവ തങ്ങളിലും. എന്നാൽ ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതം കണ്ണഘാതമെന്നതു് ഇവിടേയും വരും.[25]

വ്യാഖ്യാനം 25: വൃത്താന്തൎഗ്ഗതമാകാവുന്ന ചതുരശ്രത്തിന്റെ ലക്ഷണങ്ങളെ യുക്തിഭാഷയിലും ലീലാവതിയിലും പറഞ്ഞുകാണുന്നില്ല.

വ്യാഖ്യാനം: ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതയോഗം = ആദ്യദ്വിതീയകണ്ണാഘാതം എന്ന ന്യായത്തെ പഠിതാജ്യാക്കളിൽ കാണിക്കുന്നു. ജീവേ പരസ്പരന്യായത്തെക്കൊണ്ട് ഇതു സാധിക്കുന്നു. ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതയോഗം കണ്ണഘാതതുല്യം എന്ന ന്യായത്തെ അപേക്ഷിച്ചു ജീവേ പരസ്പരന്യായത്തിന്റെ ഉപപത്തിയെ പ്രകാരാന്തരേണ പറയുന്നതായിട്ടുമിവിടെ കല്പിക്കാം. ഇവിടെ ജ്യാക്കൾക്കു ചില സംസ്ഥാനഭേദങ്ങളെ കല്പിക്കേണം. മുഖത്തിൽ ആദ്യദ്വിതീയജ്യാക്കളെക്കൊണ്ട് തൃതീയജ്യാവിനെ വരുത്തുവാനാണ് പറഞ്ഞിരിക്കുന്നതു്. ഇവിടെ തുല്യന്ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ അഞ്ചാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും ജ്യാക്കളെക്കൊണ്ട് എട്ടാംജ്യാവിനെ വരുത്തുവാനാണിവിടെ പറയുന്നതു്.

$$\begin{aligned} \text{പരിലേഖം 48-ൽ ചാപം } \textit{കിഖ} &= \text{അഞ്ചുചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ യോഗം} \\ \text{ചാപം } \textit{ഖഘ} &= \text{ആറുചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ യോഗം} \\ &\quad \text{(ചെറിയ ജ്യാവിന്റെ ചാപത്തിലിരട്ടി)} \\ &= \text{അഞ്ചാംജ്യാവ്} = \textit{ഭ}_5. \end{aligned}$$

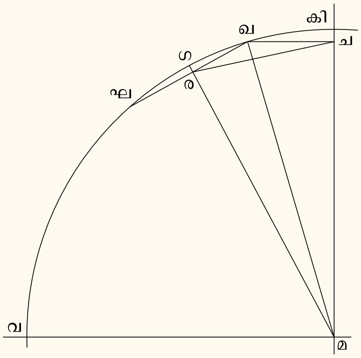
ഘഖ എന്ന ചാപത്തിന്റെ മദ്ധ്യത്തിലേയ്ക്ക് ഒരു വ്യാസാദ്ധത്തെ വരക്കുക. അതു *ഖഘ* എന്ന സമസ്തജ്യാവിന്റെ മദ്ധ്യമായ *ര* എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പശിക്കും.

$$\begin{aligned} \therefore\ \textit{ഖര} &= \text{മൂന്നാംജ്യവ്} = \textit{ഭ}_3 \\ \textit{മര} &= \text{ശരോനവ്യാസാദ്ധം} = \text{മൂന്നാംജ്യാവിന്റെ കോടി} = \textit{ഭ}_{21} \\ \textit{മച} &= \text{അഞ്ചാംജ്യാവിന്റെ കോടി} = \textit{ഭ}_{19} \\ \textit{രച} &= \text{8-ാം ജ്യാവ്} = \textit{ഭ}_8 \text{ (യുക്തി മുമ്പിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ)} \end{aligned}$$

ഇവിടെ *മരഖച* എന്ന ചതുരശ്രം വൃത്താന്തൎഗ്ഗതമായിട്ടു കല്പിക്കാം. ജീവേ പരസ്പരന്യായേന,

$$\textit{രച} = \frac{\textit{ഖച} \times \textit{മര} + \textit{ഖര} \times \textit{മച}}{\text{വ്യാസാദ്ധം}}$$

$$\text{ഖച} \times \text{മര} + \text{ഖര} \times \text{മച} = \text{രച} \times \text{വ്യാസാർദ്ധം}$$



പരിലേഖം (48)

മരഖച എന്ന ചതുരശ്രത്തിൽ, *ഖച*, *മര* ഭുജാപ്രതിഭുജകളാകുന്നു; *ഖര*, *മച* ഇവയും ഭുജാപ്രതിഭുജകളാകുന്നു. *രച*, വ്യാസാർദ്ധം ഇവ കർണ്ണങ്ങൾ.

അപ്പോൾ ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതയോഗം = കർണ്ണഘാതം എന്നു വന്നു. ഈ വരുത്തിയ ന്യായത്തെ അപേക്ഷിച്ച്,

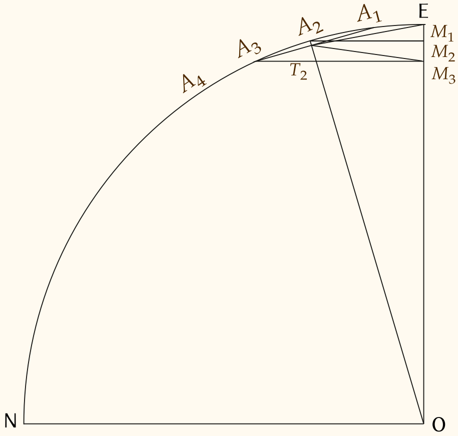
$$\text{ഖച} \times \text{മര} + \text{ഖര} \times \text{മച} = \text{രച} \times \text{വ്യാസാർദ്ധം}$$

$$\therefore \; \text{ഭ}_5 \times \text{ഭ}_{21} + \text{ഭ}_3 \times \text{ഭ}_{19} = \text{ഭ}_3 \times \text{വ്യാസാർദ്ധം}$$

$$\therefore \; \text{ഭ}_3 = \frac{\text{ഭ}_5 \text{ഭ}_{21} + \text{ഭ}_3 \times \text{ഭ}_{19}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}} \quad \text{(ജീവേ പരസ്പരന്യായം)}$$

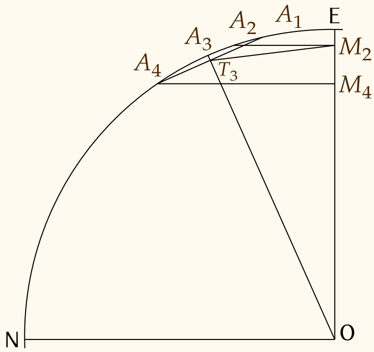
വ്യാഖ്യാനം: ജീവേ പരസ്പരന്യായം:-

Denoting the successive Bhujas by J_1, J_2, J_3, $\ldots$ and the corresponding Kotis by K_1, K_2, K_3, $\ldots$, in Fig. 49, J_1, K_1, K_1, J_1 are the four sides of the cyclic quadrilateral, $oM_1A_1T_2$ and $T_2M_1 = T_2M_3 = J_2$.



പരിലേഖം (49)

$$\text{Now } oA_1 \times T_2M_1 = A_1M_1 \times oT_2 + A_1T_2 \times oM_1$$
$$\text{i.e., } r \times J_2 = J_1 \times K_1 + J_1 \times K_1 = 2J_1 \times K_1 \text{ where } r = \text{the radius)}$$
$$\therefore\ J_2 = \frac{2J_1 \times K_1}{r}$$



പരിലേഖം (50)

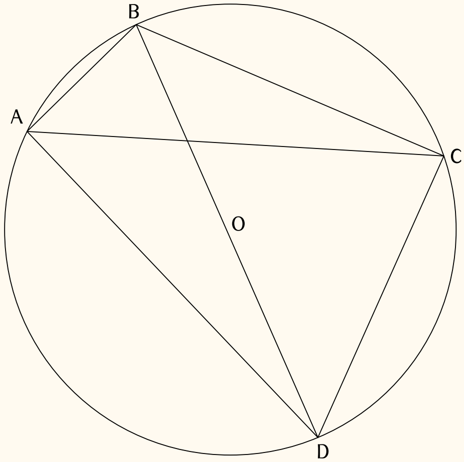
Again in Fig. 50, $oM_2A_2T_3$ is also a cyclic quadrilateral, in which $A_2M_2 = J_2$, $A_2T_3 = J_1$, $oM_2 = K_2$, $oT_3 = K_1$ and $T_3M_2 = J_3$

$$\therefore\ oA_2 \times T_3M_2 = A_2M_2 \times oT_3 + A_2T_3 \times oM_2$$
$$\text{i.e., } r \times J_3 = J_2 \times K_1 + J_1 \times K_2$$
$$\text{i.e., } J_3 = \frac{J_2 \times K_1 + J_1 \times K_2}{r}$$

and so on.

The same may be applied in the case of the whole chords as in Fig. 51.

To prove that $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.



പരിലേഖം (51)

BD is the diameter and BA, AC are two chords on opposite sides. Then $ABCD$ is a cyclic quadrilateral.

Hence $BC \times AD + AB \times CD = BD \times AC$.

$\therefore \dfrac{BC}{BD} \times \dfrac{AD}{BD} + \dfrac{AB}{BD} \times \dfrac{CD}{BD} = \dfrac{AC}{BD}$.

If BC and AB subtend angles x and y respectively at D, then $\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x+y)$

ജീവാനയനം

പിന്നെ പ്രഥമജ്യാവും ദ്വിതീയജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള വൎഗ്ഗാന്തരം പ്രഥമജ്യാവും തൃതീയജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ പ്രഥമജ്യാവും തൃതീയജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള വൎഗ്ഗാന്തരം ദ്വിതീയജ്യാവും ചതുൎത്ഥജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതമായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെ വൎഗ്ഗാന്തരം അവറ്റിന്റെ ചാപയോഗത്തിന്റെയും അന്തരത്തിന്റെയും ജ്യാക്കൾ രണ്ടും തങ്ങളിലെ ഘാതമായിട്ടിരിക്കും, മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായംകൊണ്ട്. എന്നാൽ അതതു ജ്യാവൎഗ്ഗത്തിങ്കന്നു പ്രഥമജ്യാവൎഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞ് അടുത്തു കീഴെ ജ്യാവിനെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ അടുത്തു മീത്തെ ജ്യാവുണ്ടാകും. ഇവ്വണ്ണം വ്യാസാൎദ്ധംകൂടാതെ പഠിതജ്യാക്കളെ വരുത്താം. പിന്നെ പ്രഥമതൃതീയജ്യാഘാതത്തിൽ പ്രഥമജ്യാവൎഗ്ഗത്തെക്കൂട്ടി മൂലിച്ചാൽ ദ്വിതീയജ്യാവുണ്ടാകും. ഇങ്ങനെ ജ്യാവൎഗ്ഗം ക്രമേണ ഉണ്ടാക്കാം, വ്യാസാൎദ്ധം കൂടാതെ. ഇവറ്റെ എല്ലാം സമസ്തജ്യാക്കളായിട്ടു കല്പിക്കിലുമാം. ഇങ്ങനെ ഒരു പരിഷജീവാനയനന്യായങ്ങൾ.

വ്യാഖ്യാനം: $ഭ_1, ഭ_2, ഭ_3, \ldots, ഭ_{23}, ഭ_{24}$ എന്നു ഇരുപത്തിനാലു പഠിതജ്യാക്കളെ കല്പിപ്പൂ. രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെ വൎഗ്ഗാന്തരം ആ ജ്യാക്കളുടെ ചാപങ്ങളുടെ യോഗത്തിന്റെയും അന്തരത്തിന്റെയും ജ്യാക്കളുടെ ഘാതമായിട്ടിരിക്കുമെന്നു മുമ്പിൽ ചതുരശ്രകൎണ്ണാനയനത്തിൽ പറഞ്ഞി

ട്ടുണ്ടല്ലോ. ആ ന്യായപ്രകാരം

$$\text{ജ}_2{}^2 - \text{ജ}_1{}^2 = \text{ജ}_3 \times \text{ജ}_1$$
$$\text{ജ}_3{}^2 - \text{ജ}_1{}^2 = \text{ജ}_4 \times \text{ജ}_2$$
$$\text{ജ}_4{}^2 - \text{ജ}_1{}^2 = \text{ജ}_5 \times \text{ജ}_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\therefore \quad \frac{\text{ജ}_2{}^2 - \text{ജ}_1{}^2}{\text{ജ}_1} = \text{ജ}_3$$
$$\frac{\text{ജ}_3{}^2 - \text{ജ}_1{}^2}{\text{ജ}_2} = \text{ജ}_4$$
$$\frac{\text{ജ}_4{}^2 - \text{ജ}_1{}^2}{\text{ജ}_3} = \text{ജ}_5$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

“തത്തൽജ്യാവർഗ്ഗമാദ്യജ്യാവർഗ്ഗഹീനം ...” ഇത്യാദി വ്യാസാർദ്ധം കൂടാതെ ഈ ജീവാനയന ന്യായത്തെ മുമ്പിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ. (പുറം 219)

$$\text{ജ}_2{}^2 = \text{ജ}_3 \times \text{ജ}_1 + \text{ജ}_1{}^2$$
$$\text{ജ}_3{}^2 = \text{ജ}_4 \times \text{ജ}_2 + \text{ജ}_1{}^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ഇങ്ങനെ ജ്യാവർഗ്ഗങ്ങളേയും ഉണ്ടാക്കാം.[26]

വ്യാഖ്യാനം 26:

By this theorem $J_2{}^2 - J_1{}^2 = J_3 J_1$

$$\text{Hence } J_3 = \frac{J_2{}^2 - J_1{}^2}{J_1} \text{ where } J_1 \text{ and } J_2 \text{ are known}$$

$$\text{Again } J_3{}^2 - J_1{}^2 = J_4 J_2$$

$$\text{Hence } J_4 = \frac{J_3{}^2 - J_1{}^2}{J_2}$$

Hence J_4 comes from J_1, J_2 and J_3

Thus by induction, $J_n{}^2 - J_1{}^2 = J_n + 1 \times J_n - 1$

$$\therefore \; J_n + 1 = \frac{J_n{}^2 - J_1{}^2}{J_n - 1}$$

Thus each successive Bhuja can be derived from the preceding two Bhujas and the first Bhuja.

ലംബാനയനത്തിന്റെ ഉപപത്തി

അനന്തരം രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെ ഘാതത്തെ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ തച്ചാപയോഗജ്യാവു ഭൂമി ആയിരിക്കുന്നേടത്തെ ലംബമുണ്ടാകും എന്നു ചൊല്ലിയതിന്റെ ഉപപത്തിയെ കാട്ടുന്നൂ. അനന്തപുരവൃത്തത്തിങ്കലെ സമസ്തജ്യാക്കളെക്കൊണ്ട്. അവിടെ പൂർവ്വസൂത്രത്തിന്റെ കിഴക്കെ തലക്കെന്ന് ഇരുപുറവും പതുപ്പത്തു ചാപഖണ്ഡങ്ങളെ കഴിച്ചു നേരെ തെക്കവടക്ക് ഒരു ജ്യാവിനെ കല്പിപ്പൂ. ഇതു പത്താംജ്യാവാകുന്നത്. പിന്നെ ഇതിന്റെ തെക്കെ തലക്കെന്നു തുടങ്ങി പന്ത്രണ്ടു ചാപഖണ്ഡത്തിന്ന് ഒരു സമസ്തജ്യാവിനെ കല്പിപ്പൂ. ഇതിന്റെ അഗ്രം പൂർവ്വാപരസൂത്രത്തിന്റെ വടക്കെ പുറത്തു രണ്ടു ചാപഖണ്ഡം കഴിഞ്ഞേടത്തു പരിധിയെ സ്പർശിക്കും. ഇത് ആറാം ജ്യാവ്. പിന്നെ ഇതിന്റെ വടക്കെ തലക്കലും പത്താംജ്യാവിന്റെ വടക്കെ തലക്കലുംകൂടി ഒരു സമസ്തജ്യാവിനെ കല്പിപ്പൂ. ഇതു നാലാം ജ്യാവ്. പിന്നെ ആറാംജ്യാവിന്റെ നടുവിലും വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കലും സ്പർശിച്ചിട്ടു രണ്ടഗ്രങ്ങളും പരിധിയെ സ്പർശിക്കുമ്മാറ് ഒരു വ്യാസസൂത്രത്തെ കല്പിപ്പൂ. ഇതും ആറാംജ്യാവും തങ്ങളിൽ വിപരീതദിക്കുകൾ, ഇതിങ്കലൂടെ ശരമെന്നിട്ട്. പിന്നെ ഈ വ്യാസസൂത്രത്തിന്റെ കിഴക്കെ തലക്കെന്നു നേരെ പടിഞ്ഞാറോട്ട് ഒരു സമസ്തജ്യാവിനെ കല്പിപ്പൂ, നേരെ വടക്കോട്ടും. ഇതിൽ നടേത്തേതു കോടി, രണ്ടാമതു ഭുജ. ഈ ഭുജ നാലാംജ്യാവായിട്ടിരിപ്പൊന്ന്. ഇവിടെ പൂർവ്വാപരസൂത്രാഗ്രത്തോടു പത്താംജ്യാവിന്റെ തെക്കെ അഗ്രത്തോട് ഇടയിൽ പത്തു ചാപഖണ്ഡമുള്ളൂ. അവിടെ ദശമജ്യാഗ്രത്തിങ്കന്ന് ആറുചാപഖണ്ഡം കഴിഞ്ഞിട്ട് വ്യാസാഗ്രം പരിധിയെ സ്പർശിക്കുന്നൂ. ഇവിടുന്നു പൂർവ്വസൂത്രം നാലു ചാപഖണ്ഡം; ഇവിടുന്നും നാലു ചാപഖണ്ഡം വടക്കു ചെന്നേടത്തു ഭുജാഗ്രം പരിധിയെ സ്പർശിക്കും. ഇങ്ങനെ എട്ടു ചാപഖണ്ഡത്തിങ്കൽകൂടിയുള്ളോരു സമസ്തജ്യാവ് ആകകൊണ്ടു നാലംജ്യാവ് എന്നു വന്നൂ. പിന്നെ ദശമജ്യാവിന്റെ ഉത്തരാഗ്രത്തിങ്കൽ സ്പർശിച്ചിരിക്കുന്ന ചതുർത്ഥജ്യാമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ സ്പർശിച്ചിട്ടും ഒരു വ്യാസസൂത്രത്തെ കല്പിപ്പൂ. ഇതിന്റേയും കിഴക്കെ തലക്കേന്നു തെക്കു വടക്ക് ഒരു ഭുജാജ്യാവിനെ കല്പിപ്പൂ. ഇതു പന്ത്രണ്ടു ഖണ്ഡത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാവാകയാൽ ആറാംജ്യാവായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ യാതൊരു ജ്യാവിന്റെ മദ്ധ്യത്തിങ്കൽ വ്യാസമാകുന്ന കർണ്ണം സ്പർശിക്കുന്നൂ അതിന്റെ ഭുജ ഇതരജ്യാവായിട്ടിരിക്കും.[27]

വ്യാഖ്യാനം 27: ഒരു ജ്യാവിന്നു വ്യാസമാകുന്ന യാതൊരു കർണ്ണം വിപരീതദിക്കാകുന്നു, ആ കർണ്ണത്തിന്റെ ഭുജ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ജ്യാവിന്റെ ഇതരജ്യാവാകുന്നുവെന്നർത്ഥം.

ഇവിടെ പൂർവ്വാപരസൂത്രാഗ്രവും യോഗചാപജ്യാവാകുന്ന ഭുമ്യഗ്രവും തങ്ങളിൽ, യോഗചാപാർദ്ധം അന്തരമാകുന്നൂ.[28]

വ്യാഖ്യാനം 28: "തങ്ങളിലന്തരം യോഗചാപാർദ്ധമാകുന്നു" എന്നു മാറ്റിയാൽ അർത്ഥം സ്പഷ്ടമാകും.

ഇതിങ്കന്ന് ഇഷ്ടചാപാർദ്ധം കളഞ്ഞാൽ ഇതരചാപാർദ്ധം ശേഷിക്കും എന്നു ഹേതുവാകുന്നത്. ഇവിടെ വ്യാസമാകുന്ന കർണ്ണം പ്രമാണം, ഇതിന്റെ ഭുജ പ്രമാണഫലം, വ്യാസത്തിങ്കന്നു വിപരീതമായിരിക്കുന്ന ജ്യാവ് ഇച്ഛാ, വിപരീതജ്യായോഗത്തിങ്കന്നു[29] യോഗ ചാപജ്യായോഗത്തോളം ഉള്ള ലംബം ഇച്ഛാഫലമായിട്ടുണ്ടാകും.

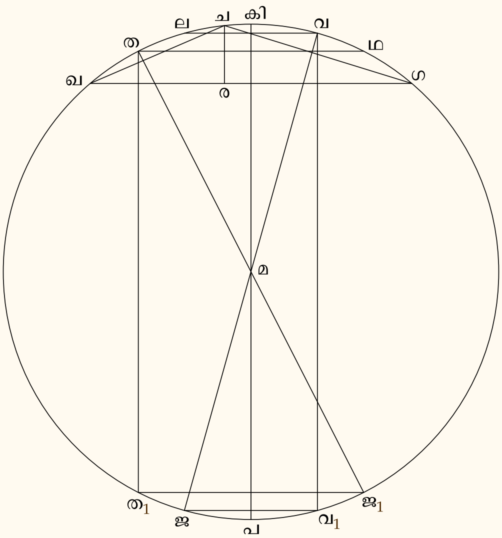
വ്യാഖ്യാനം 29: വ്യാസകർണ്ണംപ്രമാണം, ഇതിന്റെ ഭുജ പ്രമാണഫലം, ഇഷ്ടവ്യാസത്തിന്നു വിപരീതമായിട്ടിരിക്കുന്ന ജ്യാവിച്ഛാ. ഇഷ്ടവ്യാസങ്ങൾക്കു വിപരീതങ്ങളായിരിക്കുന്ന ജ്യാക്കളുടെ യോഗത്തിങ്കന്ന് ആ ജ്യാക്കളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള യോഗചാപജ്യാവോളമുള്ള ലംബം ഇവിടെ ഇച്ഛാഫലമാകുന്നത്.

ഇവിടെ ഇഷ്ടജ്യാക്കളിൽ ഒന്ന് ഇച്ഛയാകുമ്പോൾ മറ്റേതു പ്രമാണഫലമായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ ചതുരശ്രഷ്ടജ്യാക്കൾ രണ്ടിന്നും ഒന്നുതന്നെ ഇച്ഛാഫലമാകുന്നത്, ലംബം വരുത്തുന്നേടത്ത്. പിന്നെ കോടി വരുത്തുന്നേടത്തു ചാപമദ്ധ്യസ്പൃഷ്ടമായിരിക്കുന്ന വ്യാസസൂത്രത്തിന്റെ കോടി പ്രമാണഫലമാകുന്നത്. ഇവിടെ ഇച്ഛാ പ്രമാണഫലഘാതം രണ്ട് ആകയാൽ ഇച്ഛാഫലങ്ങളായി ആബാധകളായി ദശമജ്യാഖണ്ഡങ്ങളായിരിക്കുന്ന അവ രണ്ടു ജ്യാക്കൾക്കും രണ്ടായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ ഇച്ഛാപ്രമാണങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ വിപരീതദിക്കുകളാകയാൽ ഇവറ്റിന്റെ ഫലങ്ങൾ തങ്ങളിലും വിപരീതദിക്കുകളായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ ഭുജകളെക്കൊണ്ടു ലംബഭൂമികളെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെ ചൊല്ലീതായി.

വ്യാഖ്യാനം:

"ജ്യയോഃ പരസ്പരം ഘാതാത്ത്രിജ്യാപ്തം ലംബ ഇഷ്യതേ" (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെ ഘാതത്തെ വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ തച്ചാപയോഗജ്യാവു ഭൂമിയായിരിക്കുന്ന ലംബമുണ്ടാകുമെന്നതിന്റെ ഉപപത്തിയെ പറയുന്നു. ത്രിജ്യാവൃത്തത്തിങ്കലെ സമസ്തജ്യാക്കളെക്കൊണ്ട് അതിവിടെ സാധിച്ചിരിക്കുന്നു.



പരിലേഖം (52)

പരിലേഖം 52-ൽ *മ* ത്രിജ്യാവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം. *കിമപ* പൂർവ്വാപരസൂത്രം. പൂർവ്വാപരസൂത്രത്തിന്റെ ഇരുപുറത്തും പത്തു ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ വീതം അളന്നെടുത്ത് ആ ഇരുപതിനും കൂടി *ഖഗ* എന്ന സമസ്തജ്യാവിനെ വരക്കുക. പിന്നെ *ഗ*-യിൽ നിന്നു പന്ത്രണ്ടു ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ വടക്കോട്ട് അളന്നവിടെ *ച* എന്ന ബിന്ദു ഇടുക. *ഗച* എന്നതു പന്ത്രണ്ടു ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ സമസ്തജ്യാവ്. അപ്പോൾ *ഖച* എട്ടുചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ സമസ്തജ്യാവെന്നു വരും. *ചഗ* എന്ന

ചാപത്തിന്റെ മദ്ധ്യമായ *വ*-യിൽനിന്നും രണ്ടഗ്രവും വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കുമാറു *വമജ* എന്ന വ്യാസത്തെ ഉണ്ടാക്കൂ. ഈ വ്യാസവും *ചഗ* എന്ന സമസ്തജ്യാവും വിപരീതദിക്കുകൾ. *വ*-യിൽനിന്നു $വവ_1$, *വല* എന്ന സമസ്തജ്യാക്കളെ പടിഞ്ഞാട്ടും വടക്കോട്ടും ഈ വ്യാസകർണ്ണത്തിന്റെ കോടിഭുജകളായിട്ടു വരക്കൂ.

$$\begin{aligned} \text{ചാപം } കിവ &= \text{ചാപം } കിഗ - \text{ചാപം } വഗ \\ &= (10-6) \text{ ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ.} \\ \therefore \quad വല &= \text{നാലാംസമസ്തജ്യാവ്.} \end{aligned}$$

ചഖ എന്ന നാലാംജ്യാവിന്റെ മദ്ധ്യത്തിൽ സ്പർശിച്ചിട്ട് $തമജ_1$ എന്ന വ്യാസത്തെ വരക്കൂ. ഇതിന്റെ കോടിഭുജകൾ $തത_1$, *തഥ* ഇവയേയും വരക്കൂ. എന്നാൽ *തഥ* ആറാംജ്യാവാകുന്നു. *ചഖഗ* എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ ഭുജായോഗമായ *ച*-യിൽ നിന്നു *ഖഗ* എന്ന ഭൂമിയോളം *ചര* എന്ന ലംബത്തെ വരക്കൂ.

$$\begin{aligned} \text{അപ്പോൾ } ഖഗ &= \text{പത്താം ജ്യാവ്; } ചഗ = \text{6-ാം ജ്യാവ് } ചഖ = \text{നാലാംജ്യാവ്} \\ വല &= \text{നാലാംജ്യാവ്— } ചഗ \text{ എന്ന ആറാംജ്യാവിന്റെ ഇതരജ്യാവ്} \\ തഥ &= \text{ആറാംജ്യാവ്— } ചഖ \text{ എന്ന നാലാംജ്യാവിന്റെ ഇതരജ്യാവ്} \end{aligned}$$

ഖചര, $തജ_1ത_1$ എന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങൾ തുല്യാകാരങ്ങൾ.

$$\begin{aligned} \therefore \quad \text{ലംബം} = ചര &= \frac{ത_1ജ_1 \times ചഖ}{തജ_1} \\ &= \frac{തഥ \times ചഖ}{തജ_1} \\ &= \frac{\text{6-ാം ജ്യാവ്} \times \text{നാലാം ജ്യാവ്}}{\text{വ്യാസം}} \\ &= \frac{\text{ജ്യേതരജ്യാഘാതം}}{\text{വ്യാസം}} \\ ഖര &= \frac{തത_1 \times ചഖ}{തജ_1} \\ &= \frac{\text{6-ാം ജ്യാവിന്റെ കോടി} \times \text{നാലാം ജ്യാവ്}}{\text{വ്യാസം}} \end{aligned}$$

ചരഗ, $ജവ_1വ$ എന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങൾ തുല്യാകാരങ്ങൾ.

$$\begin{aligned} രഗ &= \frac{വവ_1 \times ചഗ}{വജ} \\ &= \frac{\text{4-ാം ജ്യാവിന്റെ കോടി} \times \text{6-ാം ജ്യാവ്}}{\text{വ്യാസം}} \\ \therefore \quad \text{ഭൂമി } ഖഗ &= \text{പത്താം ജ്യാവ്} = ഖര + രഗ \end{aligned}$$

$$= \frac{\text{4-ാം ജ്യാവ്}\times\text{6-ാം ജ്യാവിന്റെ കോടി} + \text{6-ാം ജ്യാവ്}\times\text{4-ാം ജ്യാവിന്റെ കോടി}}{\text{വ്യാസം}}$$

ഇവിടെ ഈ ജ്യാക്കളെല്ലാം സമസ്തജ്യാക്കളാകുന്നു.

അപ്പോൾ ഭൂമി

$$= \frac{\dfrac{4\text{-ാം അർദ്ധജ്യാ} \times 6\text{-ാം അർദ്ധജ്യാകോടി} + 6\text{-ാം അർദ്ധജ്യാ} \times 4\text{-ാം അർദ്ധജ്യാകോടി}}{\text{വ്യാസം}}}{4}$$

$\therefore$ ഭൂമ്യർദ്ധം (പത്താമർദ്ധജ്യാവ്)

$$= \frac{4\text{-ാം അർദ്ധജ്യാ} \times 6\text{-ാം അർദ്ധജ്യാകോടി} + 6\text{-ാം അർദ്ധജ്യാ} \times 4\text{-ാം അർദ്ധജ്യാകോടി}}{\text{വ്യാസാർദ്ധം}}$$

ഇതു ജീവേപരസ്പരന്യായം തന്നെ. ഇങ്ങനെ ലംബഭൂമികളെ വരുത്തുംപ്രകാരം.

ഉപസംഹാരം

ഇവിടെ രണ്ട് ഇഷ്ടജ്യാക്കളെ ഇതരേതരകോടികളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയതു് ഇഷ്ടജ്യാചാപങ്ങളുടെ യോഗജ്യാവും വ്യാസാർദ്ധവും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതമായിട്ടിരിക്കും എന്നു ചൊല്ലിയതുകൊണ്ടുതന്നെ നിയതകർണ്ണമായിട്ടിരിക്കുന്ന യാതൊരു ചതുരശ്രത്തിങ്കലും ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതയോഗം കർണ്ണഘാതമായിട്ടിരിക്കും എന്നു വന്നു. ഈ ന്യായം കൊണ്ടുതന്നെ അടുത്തുള്ള ഭുജകൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചു കൂട്ടിയതും ചില കർണ്ണഘാതമായിട്ടിരിക്കും എന്നതിനേയും ചൊല്ലീ. പിന്നെ ഈ ന്യായം കൊണ്ടു യോഗാന്തരചാപജ്യാക്കളെ വരുത്താമെന്നും ചൊല്ലീ. തദ്വാരാ പഠിതജ്യാക്കളെ ഒക്കെ വരുത്താമെന്നും ചൊല്ലീ. പിന്നെ പ്രഥമകർണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാതയോഗം പ്രഥമതൃതീയ കർണ്ണാഘാതം എന്നും വന്നേടത്തു് ഇക്കർണ്ണചാപയോഗജ്യാവു ഭൂമിയാകുന്ന ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ ലംബം വരും, ഈ കർണ്ണാഘാതത്തെ വ്യാസം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ. പിന്നെ ദ്വിതീയകർണ്ണം ഭൂമിയാകുന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങൾ രണ്ടിങ്കലെ ലംബയോഗമാകിലുമാം ഈ ലംബം. അപ്പോൾ കർണ്ണാഘാതമെന്നു വിവക്ഷിക്കണ്ടാ; ഭുജാഘാതങ്ങൾ എന്നേ വേണ്ടൂ. പിന്നെ ഈ ലംബംകൊണ്ടു ദ്വിതീയകർണ്ണാർദ്ധത്തെ ഗുണിച്ചാൽ ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം വരും എന്നു സാമാന്യന്യായംകൊണ്ടു വന്നിരിക്കുന്നു.

വൃത്താന്തർഗ്ഗതചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലാനയനം

അനന്തരം ഈ ന്യായംകൊണ്ടു പരിധികൂടാതെ നിയതകർണ്ണമായിരിക്കുന്ന ചതുരശ്രബാഹുക്കളെക്കൊണ്ടുതന്നെ വ്യാസത്തെ വരുത്താം എന്നതിനെ കാട്ടുവാനായിക്കൊണ്ട് കർണ്ണവും വ്യാസവും കൂടാതെ ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലത്തെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെ കാട്ടുന്നു. ഇങ്ങനെ ത്രിഭുജക്ഷേത്രത്തിങ്കലെ ഫലത്തിന്റെ വർഗ്ഗമുണ്ടാക്കുന്ന പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലി അനന്തരം ഇവ്വണ്ണം തന്നെ ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലത്തിന്റെ വർഗ്ഗവുമുണ്ടാകും എന്നതിനെ ചൊല്ലുന്നു അവിടെ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ അന്തർഭാഗത്തിങ്കൽ കല്പിപ്പൂ ചതുരശ്രം. അപ്പോൾ ചതുരശ്രത്തിന്റെ നാലുകോണും വൃത്തത്തെ സ്പർശിച്ചിരിക്കേണം. അപ്പോൾ ആ വൃത്തത്തിന്റെ നാലു ജ്യാക്കളായിട്ടിരിക്കും ഇച്ചതുരശ്രബാഹുക്കൾ. ഇന്നാലു ജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടു വൃത്തം മുഴുവൻ തികഞ്ഞിട്ടുമിരിക്കും.

പിന്നെ ഇച്ചതുരശ്രത്തിങ്കൽ ഇഷ്ടമായിട്ട് ഒരു കർണ്ണത്തെ കോണോടുകോണു സ്പർശിക്കുമാറ് കല്പിപ്പൂ. എന്നാലിച്ചതുരശ്രത്തിന്റെ അന്തർഭാഗത്തിങ്കൽ രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളുണ്ടാകും. ഇവിടെ രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങൾക്കും സാധാരണമായിട്ടിരിപ്പോരു ഭൂമിയായിട്ടിരിക്കും ഇക്കല്പിച്ച കർണ്ണം. ഇവ്വണ്ണം നിയതമായിരിക്കുന്ന ചതുരശ്രത്തിങ്കലെ ഫലത്തെ "സർവ്വദോര്യ്യുതി ദളം"[4] എന്നാദിയായിരിക്കുന്നതിനെക്കൊണ്ടു വരുത്തുന്നു അവിടെ പിന്നെ ഈ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ ഒരു പുറത്തെ ചതുരശ്രബാഹുക്കൾ രണ്ടിനേയും ത്ര്യശ്രബാഹുക്കൾ എന്നും ഇഷ്ടകർണ്ണത്തെ ഭൂമി എന്നും കല്പിച്ചു മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയവണ്ണം ലംബത്തെ ഉണ്ടാക്കൂ. പിന്നെ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ മറ്റെ പുറത്തെ ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ ലംബത്തേയും ഉണ്ടാക്കൂ. പിന്നെ ഇഷ്ടകർണ്ണാർദ്ധത്തെക്കൊണ്ട് ലംബയോഗത്തെ ഗുണിപ്പൂ. അത് ഈ ചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തിങ്കലെ ഫലമാകുന്നത്, ലംബംകൊണ്ടു ഭൂമ്യർദ്ധത്തെ ഗുണിച്ചാൽ ത്ര്യശ്രഫലമുണ്ടാകും എന്നിട്ട്. ഇതുണ്ടു ചൊല്ലീട്ട്[5]

"ലംബഗുണം ഭൂമ്യർദ്ധം സ്പഷ്ടം ത്രിഭുജേ ഫലം ഭവതി"

എന്നു്.

ഇവിടെ ഇസ്സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു കല്പിപ്പൂ ചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തെ.

പഞ്ചാശദേകസഹിതാ വദനം യദീയം |
ഭൂഃ പഞ്ചസപ്തതിമിതാ ച മിതോഷ്ടഷഷ്ട്യാ ||
സവ്യോ ഭുജോ ദ്വിഗുണവിംശതി സമ്മിതോന്യ-
സ്തസ്മിൻ ഫലശ്രവണലംബമിതി പ്രചക്ഷ്വ" ||[6]
"അത്രേശകോണഗാമീഷ്ടഃ കർണ്ണസ്സപ്തസപ്തതി സംഖ്യോഃ"|

ഇവിടെ പടിഞ്ഞാറെ പുറത്തെ ബാഹുവിനെ ഭൂമി എന്നും കിഴക്കെതിനെ മുഖമെന്നും ചൊല്ലീ. ഈശാന്തകോണോടു നിര്യതികോണോടുള്ള കർണ്ണം എഴപത്തേഴ്. അതിനെ ഇഷ്ടകർണ്ണമെന്നും ഇതിനെ ചതുരശ്രത്തിന്നകത്തുടെ രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങൾക്കും ഭൂമിയായിട്ടിരിപ്പൊന്ന് എന്നും കല്പിക്കുന്നു. ഇങ്ങനെ ഒരു സംഖ്യാനിയമത്തെ ആശ്രയിച്ചുകൊണ്ടാൽ ഓപ്പാനെളുത്. ഇവിടെ അഗ്നികോണിങ്കന്ന് ഉണ്ടാകുന്ന ലംബം ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ നടുവിൽനിന്നു തെക്കു നീങ്ങി സ്പർശിക്കും; വായുകോണിങ്കന്ന് ഉണ്ടാകുന്നതു വടക്കു നീങ്ങിയും സ്പർശിക്കും ഇവിടെ ഇക്കർണ്ണത്തിങ്കൽ രണ്ടു ലംബങ്ങളും സ്പർശിക്കുന്നതിന്റെ നടുപ്രദേശത്തിന്നു **ലംബനിപാതാന്തരം** എന്നു പേർ. ഇതു ഭൂമീടെ ഏകദേശമാകയാൽ രണ്ടു ലംബത്തിന്നും വിപരീതദിക്കായിട്ടിരിക്കും. ലംബങ്ങൾ രണ്ടും ഒരു ദിക്കായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ ഒരു ലംബത്തിന്നു ശേഷമായി നീട്ടി കല്പിപ്പൂ മറ്റെ ലംബത്തെ; അതിന്നു ശേഷമായിട്ട് ഇങ്ങേ ലംബത്തെയും കല്പിപ്പൂ. ഇപ്പോളിതരേതരാഗ്രത്തിങ്കലോളം നീളം രണ്ടു ലംബങ്ങളും. പിന്നെ ലംബാഗ്രങ്ങളിൽ രണ്ടേടത്തും ലംബനിപാതാന്തരത്തേയും കല്പിപ്പൂ. എന്നാൽ ഒരായതചതുരശ്രമുണ്ടാകും. പിന്നെ ലംബയോഗവർഗ്ഗവും ലംബനിപാതാന്തരവർഗ്ഗവും കൂട്ടി മൂലിച്ചാൽ

4 ലീലാവതീ, അദ്ധ്യായം 6, ശ്ലോകം 167.

5 ലീലാവതീ, അദ്ധ്യായം 6, ശ്ലോകം 164.

6 ലീലാവതീ, അദ്ധ്യായം 6, ശ്ലോകം 178.

ഈ ആയതചതുരശ്രത്തിന്റെ കണ്ണമുണ്ടാകും, ലംബാഗ്രങ്ങളെ സ്പശിച്ചിട്ട്. ഇക്കണ്ണം വൃത്താന്തഭാഗത്തിങ്കലെ ചതുരശ്രത്തിങ്കൽ കല്പിച്ചിരിക്കുന്ന ഇഷ്ടകണ്ണത്തിന്റെ മറ്റെ കണ്ണമായിട്ടിരിക്കുമത്. ഇതിന് ഇതരകണ്ണമെന്നു പേർ. എന്നാലിതരകണ്ണവ്ഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ലംബനിപാതാന്തരവഗ്ഗം പോയശേഷം ഈ ലംബയോഗവഗ്ഗം ഈ ലംബയോഗവഗ്ഗവും ഇഷ്ടകണ്ണാദ്ധവഗ്ഗവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലവഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ പഞ്ചാശദേകസഹിതാ എന്നതു കൊണ്ടു ചൊല്ലിയ സംഖ്യാവിശേഷം കൊണ്ടു കല്പിച്ച ചതുരശ്രത്തിങ്കൽ മുഖവും ദക്ഷിണബാഹുവും തങ്ങളിലുള്ള യോഗത്തിങ്കന്നുണ്ടാകുന്ന ലംബം ഭൂമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നു തെക്കു നീങ്ങി സ്പശിക്കും, മുഖത്തേക്കാൾ ദക്ഷിണബാഹു ചെറിയത്, എന്നിട്ട്. ലംബാഗ്രത്തിങ്കൽ സ്പശിക്കുന്ന ബാഹുക്കൾ രണ്ടിൽവച്ചു യാതൊരു ബാഹു ചെറിയതു ഭൂമീടെ നടുവിൽ നിന്ന് അതിന്റെ ദിക്കിൽ നീങ്ങീട്ട് ഭൂമിയെ സ്പശിക്കും ലംബം എന്നു നിയതം. ലംബസ്പശത്തിങ്കന്ന് ഇരുപുറവുമുള്ള ഭൂഖണ്ഡങ്ങൾക്ക് ആബാധകൾ എന്നു പേർ. ആ ലംബത്തെ സംബന്ധിച്ചിരിപ്പോ ചിലവ അവ രണ്ടും. പിന്നെ ഭൂമി എന്നു ചൊല്ലിയ ചതുരശ്രബാഹുവും ഉത്തര ബാഹുവും തങ്ങളിലെ യോഗത്തിങ്കന്നുണ്ടാകുന്ന ലംബം നിരൃതീശകോണു നോക്കിയുള്ള ഇഷ്ടകണ്ണമാകുന്ന ഭൂമിയിങ്കൽ നേരെ നടുവിൽ നിന്നു വടക്കു നീങ്ങി സ്പശിക്കും, ഭൂമിയേക്കാൾ ഉത്തരബാഹു ചെറിയത്, എന്നിട്ട്. ഇവ്വണ്ണം ഇരിക്കയാൽ രണ്ടു ലംബത്തെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ആബാധകളിൽ വടക്കെ പുറത്തെ ആബാധകൾ രണ്ടും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരം ഇവിടെ ലംബനിപാതാന്തരമാകുന്നത്. ഇവിടെ ഇഷ്ടകണ്ണമാകുന്ന ഭൂമീടെ നടുവിന്നു തെക്ക് ഒരു ലംബ സംപാതം, വടക്കു മറ്റേത് ആകയാൽ ഭൂമദ്ധ്യത്തോടു ലംബസംപാതത്തോടുള്ള അന്തരാളങ്ങൾ രണ്ടും കൂടിയത് ഇവിടെ ലംബനിപാതാന്തരമാകുന്നത്. ആകയാൽ രണ്ടു ലംബത്തേയും സംബന്ധിച്ചിട്ട് ഒരു ദിക്കിലെ ആബാധകൾ രണ്ടിനേയും വരുത്തി തങ്ങളിൽ അന്തരിച്ചാലും വരും ഈ ലംബനിപാതാന്തരം. ഭൂമദ്ധ്യലംബസംപാതാന്തരങ്ങൾ രണ്ടും വരുത്തി തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയാലുംവരും ഈ ലംബനിപാതാന്തരം. പിന്നെ ദക്ഷിണബാഹുവിനെ മുഖമാക്കി മുഖത്തെ ദക്ഷിണബാഹുവാക്കി പകന്നുവെച്ചാലും ഇഷ്ടകണ്ണം ഭൂമിയായിട്ടിരിക്കും. ഭൂമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നു വടക്കു നീങ്ങീട്ടു രണ്ടു ലംബവും ഭൂമിയെ സ്പശിക്കുന്നു. ആകയാൽ രണ്ടു ലംബത്തേയും സംബന്ധിച്ചുള്ള ഭൂമദ്ധ്യലംബസംപാതാന്തരങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരം ഇവിടെ ലംബനിപാതാന്തരമാകുന്നത്. ആബാധകൾകൊണ്ടു വരുത്തുകിൽ ഇവിടെയും വിശേഷമില്ല ഒരു ദിക്കിലെ ആബാധകൾ രണ്ടും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരം തന്നെ അത്രേ ലംബനിപാതാന്തരമാകുന്നത്. പിന്നെ ഇവിടെ ഇഷ്ടകണ്ണത്തെക്കൊണ്ടു ചതുരശ്രത്തെ രണ്ടു ത്ര്യശ്രമാക്കി കല്പിക്കുമ്പോൾ ഈ രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങൾ രണ്ടിലും ഈരണ്ടു ഭുജകളുള്ളതിൽ ചെറിയവ രണ്ടും ഇഷ്ടകണ്ണത്തിന്റെ ഒരഗ്രത്തെ സ്പശിക്കുന്നു, വലിയ ഭുജകൾ രണ്ടും മറ്റൊരു അറ്റത്തെ സ്പശിക്കുന്നു, എന്നിരിക്കിൽ ഭൂമിയായി കല്പിച്ചിരിക്കുന്ന ഇഷ്ടകണ്ണത്തിന്റെ നടുവിങ്കന്നു ചെറിയ ഭുജകൾ ഉള്ള ദിക്കു നോക്കി നീങ്ങീട്ടിരിക്കും രണ്ടു ലംബങ്ങളുടെയും ഭൂസ്പശം. ആകയാൽ ഭൂമദ്ധ്യവും ലംബസംപാതവും ഉള്ള അന്തരങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരം ലംബനിപാതാന്തരമായിട്ടിരിക്കും. യാതൊരിടത്തു പിന്നെ രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളിൽവെച്ച് ഒന്നിന്റെ വലിയഭുജ

യും ഒന്നിന്റെ ചെറിയ ഭുജയും കൂടി കർണ്ണത്തിന്റെ ഒരഗ്രത്തെ സ്പർശിച്ചിരിക്കും, മറ്റെ അഗ്രത്തേയും ഒന്നിന്റെ വലിയ ഭുജയും ഒന്നിന്റെ ചെറിയ ഭുജയുംകൂടി സ്പർശിച്ചിരിക്കുന്നു, അവിടെ ഇഷ്ടകർണ്ണമാകുന്ന ഭൂമീടെ മദ്ധ്യത്തിങ്കന്ന് ഇരുപുറവും സ്പർശിക്കും ലംബങ്ങൾ. ഭൂമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നു ചെറിയ ഭുജകളുള്ള ദിക്കുനോക്കി നീങ്ങി ഇരിക്കും ഭൂലംബങ്ങളുടെ സംപാതം എന്നു നിയതമാകയാൽ ഇവിടെ ഭൂമദ്ധ്യലംബസംപാതാന്തരങ്ങളുടെ യോഗം ലംബനിപാതാന്തരമാകുന്നത്. ഭൂമദ്ധ്യലംബസംപാതാന്തരമാകുന്നതു പിന്നെ ആബാധാന്തരാദ്ധം. വലിയ ആബാധേടെ അഗ്രത്തിങ്കലും ചെറിയ ആബാധയോളം വേർപെടുത്താൽ നടുവിൽ ആബാധാന്തരം ശേഷിക്കും. ഇതിന്റെ നടുവിൽ ഭൂമദ്ധ്യമാകുന്നത്. ആകയാൽ ആബാധാന്തരാദ്ധം ഭൂമദ്ധ്യലംബസംപാതാന്തരമാകുന്നത് എന്നു വന്നു. ആകയാൽ ആബാധാന്തരാദ്ധങ്ങളുടെ യോഗംതാൻ അന്തരംതാൻ ലംബനിപാതാന്തരമാകുന്നത്. പിന്നെ ഒരു ലംബത്തെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ആബാധകൾ രണ്ടിന്റേയും വർഗ്ഗാന്തരത്തെ ഈ ആബാധകളുടെ യോഗമാകുന്ന ഭൂമിയെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം ആബാധാന്തരമാകുന്നത്. വർഗ്ഗാന്തരാദ്ധത്തെ ഹരിച്ച ഫലം ആബാധാന്തരാദ്ധമാകുന്നത്. ആബാധാവർഗ്ഗാന്തരവും ത്ര്യശ്രത്തിങ്കൽ ഭൂമിയെ ഒഴിച്ചുള്ള ഭുജകൾ രണ്ടും തങ്ങളിലുള്ള വർഗ്ഗാന്തരവും തുല്യം, ആബാധാലംബങ്ങളാകുന്ന ഭുജാകോടികൾക്കു കർണ്ണങ്ങളായിട്ടിരിപ്പോ ചിലവയല്ലൊ ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ രണ്ടു ഭുജകളും, എന്നിട്ട്. ഇവിടെ ത്ര്യശ്രഭുജകൾ രണ്ടിൽ വലിയതിന്റെ വർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ചെറിയതിന്റെ വർഗ്ഗംപോയാൽ ലംബത്തിന്റെയും ചെറിയ ആബാധേടെയും വർഗ്ഗം പോയിട്ടിരിക്കും. ഇതിൽ ലംബവർഗ്ഗം വലിയ ഭുജേടെ വർഗ്ഗത്തിൽ നടേ ഉണ്ടായിട്ടിരുന്നതു പോയത്. പിന്നെ വലിയ ആബാധേടെ വർഗ്ഗം ശേഷിച്ചിട്ടുള്ളതു. അതിങ്കന്നു ചെറിയ ആബാധേടെ വർഗ്ഗം പോകുന്നു. ആകയാൽ ആബാധാവർഗ്ഗാന്തരവും ഭുജാവർഗ്ഗാന്തരവും ഒന്നേ. എന്നാൽ ഇഷ്ടകർണ്ണമാകുന്ന ഭൂമീടെ ഒരു പുറത്തെ ഭുജകൾ രണ്ടിലുംവെച്ചു വലിയതിന്റെ വർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ചെറിയതിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞ ശേഷത്തിന്റെ അദ്ധവും, ഈ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ മറ്റെ പുറത്തെ ത്ര്യശ്രഭുജകൾ രണ്ടിന്റെയും വർഗ്ഗാന്തരവും തങ്ങളിൽ കൂട്ടുകതാൻ അന്തരിക്കതാൻ ചെയ്തു് അതിനെ ആബാധായോഗമാകുന്ന ഇഷ്ടകർണ്ണംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം ലംബനിപാതാന്തരമാകുന്നത് ആകയാൽ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ ഒരു പാർശ്വത്തിങ്കലെ ഭുജകളുടെ വർഗ്ഗാന്തരത്തിൽ മറ്റേ പാർശ്വത്തിങ്കലെ ഭുജകളുടെ വർഗ്ഗാന്തരം കൂട്ടുക വേണ്ടുവത് എങ്കിൽ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ രണ്ടു പാർശ്വത്തിങ്കലെയും ഈരണ്ടു ത്ര്യശ്രഭുജകൾ ഉള്ളതിൽ ഒരു ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ വലിയ ഭുജാവർഗ്ഗത്തോടു മറ്റെ ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ വലിയ ഭുജാവർഗ്ഗത്തെ കൂട്ടൂ. ഇതിങ്കന്നു രണ്ടേടത്തെയും ചെറിയ ഭുജകളുടെ വർഗ്ഗയോഗത്തെ കളയൂ. ശേഷം ഭുജാവർഗ്ഗാന്തരങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും യോഗമായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ രണ്ടേടത്തെയും വലിയ ഭുജകളിൽ ഒട്ടൊട്ടു ശേഷിക്കുന്നു. അശ്ശേഷങ്ങൾ രണ്ടും ധനഭൂതങ്ങളാകയാൽ വലിയ ഭുജകൾ രണ്ടും ധനഭൂതങ്ങൾ എന്നു കല്പിക്കാം. ആകയാൽ ധനങ്ങളുടെ യോഗത്തിങ്കന്നു ഋണങ്ങളുടെ യോഗംകളയാം എന്നു ഹേതുവാകുന്നത്. യാതൊരിടത്തു പിന്നെ വർഗ്ഗാന്തരങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും അന്തരത്തെ ഉണ്ടാക്കേണ്ടൂ, അവിടെ രണ്ടു വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളിൽവെച്ചു ചെറിയ വർഗ്ഗാന്തരം യാതൊരു ഭുജാവർഗ്ഗത്തിലെ ശേഷം ആ ഭുജാവർഗ്ഗം മുഴുവനെ ഋണഭൂതമെന്നിരിക്കും. ഇവിടെ

ശേഷിച്ചതിനെയും മറ്റെ ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ വലിയ ഭുജാവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു കളകയല്ലോ ചെയ്യുന്നത്, എന്നിട്ട്. ആകയാൽ ഇച്ചൊല്ലിയ ഋണഭൂതഭുജാവർഗ്ഗത്തെ, തന്നെ സം ബന്ധിച്ചുള്ള ചെറിയ ഭുജേടെ വർഗ്ഗത്തിങ്കന്നും മറ്റെ ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ വലിയ ഭുജേടെ വർഗ്ഗത്തിങ്കന്നും കളയുന്നു എന്നു വന്നിരിക്കും. ആകയാൽ ഇച്ചൊല്ലിയ ഋണഭൂതഭുജാ വർഗ്ഗവും മറ്റെ ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ ചെറിയ ഭുജേടെ വർഗ്ഗവും കൂടിയത് ഋണരാശി, മറ്റെ ഭുജാവർഗ്ഗങ്ങൾ രണ്ടും കൂടിയതു ധനരാശി. തങ്ങളിലന്തരിച്ച ശേഷം ധനം. ഇങ്ങനെ ഭുജാവർഗ്ഗാന്തരങ്ങളെ അന്തരിക്കുന്നേടത്തെ പ്രകാരം.

"അന്തരയോഗേ കാര്യേ രാശിദ്വയയോർമ്മഹദ്യുതേ സ്ത്യാജ്യാ |
ഇതരയുതിരന്തരേ ചേന്ന്യൂനാധികയോഗതോന്യയുതിഃ" ||

എന്നും ഉണ്ട്.

യാതൊരിടത്തു കർണ്ണത്തിന്റെ ഇരുപുറത്തുമുള്ള ലംബങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ഈരണ്ടു ഭുജകളിൽ വലിയ ഭുജകൾ രണ്ടും ലംബങ്ങളുടെ ഒരു ദിക്കിലൂ, ചെറിയവ രണ്ടും ഒരു ദിക്കിലൂ, രണ്ടും തെക്ക് എന്നുതാൻ വടക്ക് എന്നുതാൻ ഈവണ്ണമിരി ക്കുന്നു, അവിടെ ഇച്ചൊല്ലിയ ന്യായത്തിന്നു തക്കവണ്ണം ഭുമുഖങ്ങളുടെ വർഗ്ഗയോ ഗവും ദക്ഷിണോത്തരബാഹുക്കളുടെ വർഗ്ഗയോഗവും ഉണ്ടാക്കി തങ്ങളിൽ അന്ത രിപ്പൂ. എന്നാൽ വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളുടെ അന്തരമുണ്ടാകും. യാതൊരിടത്തു പിന്നെ ഒരു ലംബത്തിന്ന് ഒരു ദിക്കിലെ ഭുജ വലിയത്, മറ്റെ ലംബത്തിന്നു മറ്റെ ദിക്കിലെ ഭുജ വലിയത് എന്നിരിക്കുന്നു, ഇവിടെ ചൊല്ലിയ ന്യായംകൊണ്ടു വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളുടെ യോഗം ഉണ്ടാക്കുവാൻ വലിയ ഭുജകൾ രണ്ടിന്റെയും വർഗ്ഗം തങ്ങളിൽ കൂട്ടേണ്ടുക യാൽ ഭുമുഖവർഗ്ഗവും ദക്ഷിണോത്തരബാഹുക്കളുടെ വർഗ്ഗവും തങ്ങളിൽ കൂട്ടേണ്ടൂ. ആകയാൽ എല്ലാടവും പ്രതിഭുജകളുടെ വർഗ്ഗയോഗം ചെയ്ക വേണ്ടുവത് എന്നു നിയ തം. ഇങ്ങനെ പ്രതിഭുജാവർഗ്ഗയോഗങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും അന്തരത്തിന്റെ അർദ്ധത്തെ ഇഷ്ടകർണ്ണം കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ലംബനിപാതാന്തരമുണ്ടാകും ഈ അന്തരാർദ്ധത്തി ന്റെ വർഗ്ഗത്തെ ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ലംബനിപാതാന്തരവർഗ്ഗമു ണ്ടാകും. പിന്നെ ഇതരകർണ്ണവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ലംബനിപാതാന്തരവർഗ്ഗം പോയശേഷം ലംബയോഗവർഗ്ഗമാകുന്നത്. പിന്നെ ലംബയോഗവർഗ്ഗവും ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗവും തങ്ങ ളിൽ ഗുണിച്ചു നാലിൽ ഹരിച്ച ഫലം ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗമാകുന്നത്. ഇവിടെ ലംബനിപാതാന്തരവർഗ്ഗം കൂടിയിരിക്കുന്ന ലംബയോഗവർഗ്ഗമാകുന്നത് ഇതരകർണ്ണ വർഗ്ഗം ആയിട്ടിരിക്കും. അതിനെ തന്നെ ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഗുണിക്കുന്നുതാ കിൽ ശോദ്ധ്യമായിരിക്കുന്ന ലംബനിപാതാന്തരവർഗ്ഗത്തെയും ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗത്തെ ക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചിട്ടു കളയണം, സമച്ഛേദങ്ങൾക്കേ യോഗവിയോഗയോഗ്യത്വമുള്ളൂ, എന്നിട്ട്. ആകയാൽ കർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിങ്കന്ന് ഇതിനെ കളയേണ്ടൂ എന്നുവരും ഇവിടെ പ്രതിഭുജാവർഗ്ഗയോഗങ്ങളുടെ അർദ്ധങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും അന്തരം യാതൊന്ന് ഇതിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചിട്ടു ലംബനിപാതാ ന്തരവർഗ്ഗത്തെ ഉണ്ടാക്കുന്നു. ഇതിനെ തന്നെ പിന്നെ ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗത്തെകൊണ്ടു ഗുണിക്കുന്നു. ആകയാൽ പ്രതിഭുജാവർഗ്ഗയോഗാർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തരവർഗ്ഗത്തെത്ത ന്നെ ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗവും ഇതരകർണ്ണവർഗ്ഗവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിങ്കന്നു കളയേണ്ടു

വത് പിന്നെ ഇതിന്റെ നാലൊന്നു ഫലവർഗ്ഗമാകുന്നത്. ഇവിടെ ഇവ രണ്ടിന്റേയും വർഗ്ഗാന്തരത്തെ നാലിൽ ഹരിക്കേണ്ടുന്നു. അവ രണ്ടിനേയും അർദ്ധിച്ച് വർഗ്ഗിച്ച് അന്തരിച്ചാൽ ആ വർഗ്ഗാന്തരചതുരംശം വരും. ആകയാൽ കർണ്ണഘാതാർദ്ധത്തെയും പ്രതിഭുജാവർഗ്ഗയോഗാർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തരാർദ്ധത്തെയും വർഗ്ഗിച്ച് അന്തരിക്കാം. അതു ഫലവർഗ്ഗം. ഈ ന്യായംകൊണ്ടു തന്നെ പ്രതിഭുജാർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗയോഗങ്ങളെ അന്തരിക്കിലുമാം എന്നു വരും. “പ്രതിഭുജദളകൃതിയുത്യോർയ്യദന്തരം യച്ച കർണ്ണഘാതദളം വർഗ്ഗാന്തരപദമനയോശ്ചതുർഭുജക്ഷേത്രഫലമധികം” എന്നുണ്ട്. ഇവിടെ പിന്നെ കർണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാതൈക്യം എന്നതിനെക്കൊണ്ടു കർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങളെ വരുത്തുന്നു എന്നു മുമ്പിൽ ചൊല്ലീ യാതൊരിടത്തു രണ്ടു ഫലങ്ങളുടെ ഘാതത്തെ ഉണ്ടാക്കേണ്ടുന്നൂ, അവിടെ ഗുണ്യങ്ങൾ രണ്ടും ഗുണകാരങ്ങൾ രണ്ടും ഇവ നാലും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിങ്കന്നു രണ്ടിന്റേയും ഹാരകങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിനെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ഫലങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ അഗ്രത്തെ സ്പർശിക്കുന്ന ഭുജകൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതും മൂലത്തെ സ്പർശിച്ചിരിക്കുന്ന ഭുജകൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതും ഈ ഘാതങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയത് ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്നു ഗുണ്യമാകുന്നത്. പിന്നെ ഇതരകർണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാതൈക്യം ഇതരകർണ്ണത്തിന്നു ഗുണ്യമാകുന്നത്. പിന്നെ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ ഗുണ്യം ഇതരകർണ്ണത്തിന്റെ ഹാരകമാകുന്നത്. ഇതരകർണ്ണത്തിന്റെ ഗുണ്യം ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ ഹാരകമാകുന്നത്. ആകയാൽ ഗുണ്യങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതും ഹാരകങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതും ഒന്നുതന്നെ ആകയാൽ രണ്ടേടത്തെ ഗുണകാരങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതുതന്നെ ഫലങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതാകുന്നത്. ഇവിടെ രണ്ടു കർണ്ണത്തിങ്കലും ഗുണകാരമാകുന്നതു ഭുജാപ്രതിഭുജകൾ ഈരണ്ടു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചു കൂട്ടിയതാകയാൽ ഇതിന്റെ വർഗ്ഗം കർണ്ണങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കും. വർഗ്ഗിക്കുംമുമ്പെ കർണ്ണങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കും. **ഗുണിച്ചിട്ടു പിന്നെ വർഗ്ഗിച്ചതും വർഗ്ഗിച്ചിട്ടു പിന്നെ ഗുണിച്ചതും തുല്യം.** എന്നാലൊരു ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതത്തിൽ മറ്റെ ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതത്തെക്കൂട്ടി വർഗ്ഗിച്ചതു കർണ്ണവർഗ്ഗഘാതമായിട്ടിരിക്കും എന്നു നിയതമാകയാൽ ലംബനിപാതാന്തരവർഗ്ഗത്തെ ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിനെ കർണ്ണവർഗ്ഗഘാതത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞശേഷം ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗവും ലംബയോഗവർഗ്ഗവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കും ഇതിൽ നാലൊന്നു ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗമാകുന്നത്. ഇവിടെ ലംബനിപാതാന്തരവർഗ്ഗത്തെ ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാകുന്നു പിന്നെ ചതുരശ്രത്തിങ്കലെ പൂർവ്വാപരഭുജകളുടെ വർഗ്ഗയോഗവും ദക്ഷിണോത്തരഭുജകളുടെ വർഗ്ഗയോഗവും—ഇവ രണ്ടിന്റെയും **അന്തരാർദ്ധവും അർദ്ധാന്തരവും ഒന്നെ** എന്നിട്ട്—അന്തരാർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. ഇതിനെ കർണ്ണവർഗ്ഗഘാതത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞു നാലിൽ ഹരിക്കേണ്ടുകയാൽ രണ്ടിനേയും നാലിൽ ഹരിച്ചിട്ട് അന്തരിക്കാം. വർഗ്ഗരൂപങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഇവ രണ്ടിനേയും നാലിൽ ഹരിക്കേണ്ടുകയാൽ ഇവറ്റിന്റെ അർദ്ധങ്ങളെ വർഗ്ഗിച്ച് അന്തരിക്കിലുമാം, **വർഗ്ഗചതുരംശവും അർദ്ധവർഗ്ഗവും തുല്യമാകയാൽ.** എന്നാൽ ഭൂമ്യർദ്ധത്തിന്റെ വർഗ്ഗവും മുഖാർദ്ധത്തിന്റെ വർഗ്ഗവും തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂ. പിന്നെ ദക്ഷിണബാഹ്വർദ്ധത്തിന്റെ വർഗ്ഗവും ഉത്തരബാഹ്വർദ്ധത്തിന്റെ വർഗ്ഗവും തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂ. പിന്നെ ഈ വർഗ്ഗയോഗങ്ങൾ

രണ്ടിന്റേയുമന്തരം യാതൊന്ന്, ഇഷ്ടേതരകർണ്ണങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ച് അർദ്ധിച്ചതും യാതൊന്ന്, ഇവ രണ്ടിന്റെയും വർഗ്ഗാന്തരവും ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം. ഇതിനെ ച്ചൊല്ലീ "പ്രതിഭുജദളകൃതിയുത്യോർധ്യദന്തരം" എന്നതിനെക്കൊണ്ട്. ഈ വർഗ്ഗാന്തരത്തെ പിന്നെ ഇവ രണ്ടും തങ്ങളിലെ യോഗത്തെ തങ്ങളിലെ അന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചിട്ടും ഉണ്ടാക്കാം. യോഗാന്തരാഹതിർവ്വർഗ്ഗാന്തരമല്ലോ എന്നിട്ട്. യോഗാന്തരങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം പിന്നെ. ഭൂമുഖങ്ങളാകുന്ന ബാഹുക്കളുടെ ഘാതവും ദക്ഷിണോത്തരബാഹുക്കളുടെ ഘാതവും തങ്ങളിൽ കൂട്ടി അർദ്ധിച്ചതിനെ രണ്ടേടത്തു വച്ച് ഒന്നിൽക്കൂട്ടൂ വർഗ്ഗയോഗാന്തരം, ഒന്നിങ്കന്നു കളയൂ. ഇവ യോഗാന്തരങ്ങളാകുന്നത്. ഇച്ചൊല്ലിയ വർഗ്ഗയോഗാന്തരമാകുന്നതു ഭൂമുഖങ്ങളുടെ അർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗയോഗവും ദക്ഷിണോത്തരബാഹുക്കളുടെ അർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗയോഗവും തങ്ങളിൽ അന്തരിച്ചത്. പിന്നെ യാതൊരിടത്ത് ഒരു രാശിയിൽ മറ്റെ രണ്ടു രാശികളുടെ അന്തരത്തെ കൂട്ടേണ്ടൂ, അവിടെ അന്തരിക്കുന്ന രാശികളിൽവെച്ചു വലിയതിനെ കൂട്ടൂ, ചെറിയതിനെ കളയൂ. എന്നാൽ അതു ആ അന്തരത്തെ കൂട്ടിയതായിട്ടു വരും. യാതൊന്നിങ്കന്നു പിന്നെ അന്തരം കളയേണ്ടൂ, അതിങ്കൽ ചെറിയ രാശിയെ കൂട്ടൂ, വലിയ രാശിയെ കളയൂ. അതു ആ അന്തരം കളഞ്ഞതായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ പിന്നെ ഇവ്വണ്ണമാകിലുമാം യോഗാന്തരമുണ്ടാക്കുവാൻ ഭൂമുഖഘാതാർദ്ധത്തെ വേറെവെച്ച് അവറ്റിന്റെ അർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗയോഗത്തെ അതിങ്കൽ സംസ്കരിപ്പൂ. പിന്നെ ദക്ഷിണോത്തരബാഹുഘാതാർദ്ധത്തിൽ അവറ്റിന്റെ അർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗയോഗത്തെ സംസ്കരിപ്പൂ. പിന്നെ ഇങ്ങനെ സംസ്കൃതങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഘാതാർദ്ധങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂ. അതു യോഗാന്തരങ്ങളിൽ ഒന്നായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ ഭൂമുഖാർദ്ധവർഗ്ഗയോഗത്തെ കൂട്ടൂ. ആ ഘാതത്തിൽ, ദക്ഷിണോത്തരബാഹ്വർദ്ധവർഗ്ഗയോഗത്തെ കളയൂ ആ ഘാതത്തിങ്കന്ന്. ഇവ തങ്ങളിലെ യോഗം ഒരു രാശി ഭൂമുഖാർദ്ധവർഗ്ഗയോഗം തൽഘാതത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞു ദക്ഷിണോത്തരബാഹ്വർദ്ധവർഗ്ഗയോഗം തൽഘാതത്തിങ്കൽക്കൂട്ടി ഇവ രണ്ടും തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയതു രണ്ടാം രാശി. ഇവിടെ യാതൊരു പ്രതിഭുജാഘാതാർദ്ധത്തിങ്കന്ന് ഇവറ്റിന്റെ അർദ്ധവർഗ്ഗയോഗം കളയേണ്ടുന്നൂ, അവിടെ ഘാതാർദ്ധം അർദ്ധങ്ങളുടെ ഘാതത്തിലിരട്ടിയായിട്ടിരിക്കും. ഇവിന്റെ വർഗ്ഗയോഗം പിന്നെ അന്തരവർഗ്ഗംകൊണ്ടു അധികമായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ വർഗ്ഗയോഗം ദ്വിഘ്നഘാതത്തിങ്കന്നു കളയരുത്. ആകയാൽ ഈ പ്രതിബാഹുക്കളുടെ അർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തരവർഗ്ഗം ഋണമായിട്ടിരിക്കും. മറ്റെ ഘാതത്തിങ്കൽ മറ്റേതു പിന്നെ പ്രതിബാഹ്വർദ്ധങ്ങളുടെ യോഗവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും, ദ്വിഘ്നഘാതവും വർഗ്ഗയോഗവും കൂട്ടുകയാൽ.

> "വർഗ്ഗയോഗോ ദ്വയോ രാശ്യോർദ്വിഘ്നഘാതേന സംയുതഃ |
> ഹീനോ വാ തൽപദേ രാശ്യോര്യോഗഭേദൗ പ്രകീർത്തിതൗ" ||

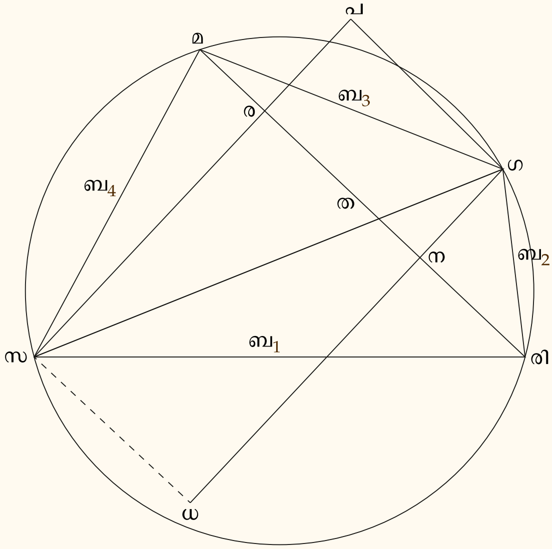
എന്നുണ്ടാകയാൽ. ഇവിടെ പിന്നെ ഭൂമ്യർദ്ധവും മുഖാർദ്ധവും ഇവ രണ്ടിന്റെയും യോഗത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ദക്ഷിണോത്തരബാഹ്വർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തരവർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞതായിട്ടിരിക്കും ഒന്ന്. പിന്നെ ദക്ഷിണോത്തരബാഹ്വർദ്ധങ്ങളുടെ യോഗവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ഭൂമുഖാർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തരവർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞതു രണ്ടാമത്. ഇവ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു

ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗമാകുന്നതു്. ഇവിടേയും ഇവ രണ്ടും ഒരോ വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളായിട്ടിരിക്കയാൽ രണ്ടിനേയും യോഗാന്തരഘാതം കൊണ്ടു് ഉണ്ടാക്കാം. പിന്നെ ഈ വർഗ്ഗാന്തരങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിക്കേണ്ടുകയാൽ രണ്ടു യോഗവും രണ്ടു് അന്തരവും ഇവ നാലും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കും ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം. എന്നാലിവിടെ ഭൂമുഖാർദ്ധങ്ങളുടെ യോഗത്തെ രണ്ടേടത്തുവച്ചു് ഒന്നിൽ ദക്ഷിണോത്തരബാഹ്വർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തരത്തെ കളയൂ, ഒന്നിൽ കൂട്ടൂ. ഇങ്ങനെ ഇവ രണ്ടു രാശികളാകുന്നതു്. പിന്നെ ദക്ഷിണോത്തരബാഹ്വർദ്ധങ്ങളുടെ യോഗത്തേയും രണ്ടേടത്തുവെച്ചു് ഒന്നിൽ ഭൂമുഖാർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തരത്തെ കൂട്ടൂ, ഒന്നിൽ കളയൂ ഇതിനെ. ഇവ മറ്റെ രണ്ടു രാശികളാകുന്നതു്. ഇവ നാലും തങ്ങളിൽ ഗുണിക്കേണ്ടു ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗമുണ്ടാവാനായിക്കൊണ്ടു്. ഇവിടെ ഇച്ചൊല്ലിയ നാലു രാശികളേയും ഇവ്വണ്ണമുണ്ടാക്കുന്നു. ചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തിന്റെ ബാഹുക്കൾ നാലിനേയും കൂട്ടിയ സംഖ്യ യാതൊന്നു് അതിന്റെ അർദ്ധത്തെ നാലേടത്തുവച്ചു നാലിൽനിന്നും ഓരോ ബാഹുക്കളെ കളയൂ ക്രമേണ. അവിടെ ശേഷിച്ച രാശികൾ നാലും ഇച്ചൊല്ലിയവ നാലുമാകുന്നതു്. ഇവിടെ ബാഹുയോഗാർദ്ധമാകുന്നതു ബാഹ്വർദ്ധങ്ങൾ നാലിന്റെയും യോഗം. ഇതിങ്കന്നു് ഒരു ബാഹുവിനെ മുഴുവനെ കളയുന്നു അതിൽ തന്റെ അർദ്ധംകൂടി ഉണ്ടാകയാൽ അതിങ്കന്നു പോകും. മറ്റെ അർദ്ധം പ്രതിബാഹ്വർദ്ധത്തിങ്കന്നും പോകും. അവിടെ പ്രതിബാഹ്വർദ്ധം വലുതു് എന്നിരിക്കിൽ അവറ്റിന്റെ അന്തരം ശേഷിക്കും. പ്രതിബാഹ്വർദ്ധം ചെറുതു് എന്നിരിക്കിൽ ഇവറ്റിന്റെ അന്തരം കൂടി പോയിരിക്കും മറ്റെ ബാഹ്വർദ്ധങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും യോഗത്തിങ്കന്നു്. ഇവിടെ സവ്വദോയ്യുതിദളത്തിങ്കന്നു മുഖമാകുന്ന ബാഹുവിനെ കളഞ്ഞാൽ ശേഷം ദക്ഷിണോത്തരബാഹ്വർദ്ധങ്ങളുടെ യോഗവും ഭൂമുഖാർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തരവും കൂടിയതായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഈ അന്തരം പോയതായിട്ടിരിക്കും ഭൂമിയാകുന്ന ബാഹുവിനെ കളഞ്ഞിട്ടിരിക്കുന്നതു്. പിന്നെ സവ്വദോയ്യുതിദളത്തിങ്കന്നു ദക്ഷിണോത്തരബാഹുക്കളിൽ ചെറിയതിനെ കളഞ്ഞാൽ ഭൂമുഖാർദ്ധങ്ങളുടെ യോഗവും ദക്ഷിണോത്തരബാഹ്വർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തരവും കൂടിയതായിട്ടിരിക്കും. വലിയതിനെ കളഞ്ഞതു് ഈ അന്തരം പോയതായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഇവ നാലും തങ്ങളിൽ ഗുണിപ്പൂ. എന്നാൽ ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗമതു്. ഇതുണ്ടു് ചൊല്ലീട്ടു്:

> "സവ്വദോയ്യുതിദളഞ്ചതുഃസ്ഥിതം ബാഹുഭിർവ്വിരഹിതഞ്ച തദ്ധതേഃ |
> മൂലമത്ര നിയതശ്രുതൗഫലം ത്ര്യശ്രബാഹുജമപി സ്ഫുടം ഭവേൽ ||"

വ്യാഖ്യാനം: വൃത്താന്തർഗ്ഗതമായിരിക്കുന്ന ഒരു വിഷമചതുരശ്രത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലത്തെ കർണ്ണവും വ്യാസവുംകൂടാതെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെ കാട്ടുന്നു. മുമ്പിലെപ്പോലെ പരിലേഖം 53-ൽ *സരിഗമ* എന്ന വൃത്താന്തർഗ്ഗതമായിരിക്കുന്ന ഒരു ചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തെ കല്പിപ്പൂ. പടിഞ്ഞാറെ പുറത്തു ഭുജ (ഭൂമി) *സരി* $= 75($*ബ*$_1)$; കിഴക്കെ ഭുജ (മുഖം) $= 51($*ബ*$_3)$; വടക്കെ ഭുജ $= 68($*ബ*$_4)$; തെക്കെ ഭുജ $= 40($*ബ*$_2)$. ഇഷ്ടകർണ്ണം $($*ക*$_1)$ $=$ *മരി* $= 77$; *സഗ* എന്ന മറ്റെ കർണ്ണത്തിന്നു് ഇതരകർണ്ണ $($*ക*$_2)$മെന്നു പേർ.

ഇഷ്ടകർണ്ണം ചതുരശ്രത്തെ *സരിമ*, *ഗരിമ* എന്ന രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളായിട്ടു ഭാഗിക്കുന്നു. ഈ ത്ര്യശ്രങ്ങൾക്കു സാധാരണമായിട്ടുള്ള ഭൂമി *മരി* എന്ന ഇഷ്ടകർണ്ണം. ഈ ത്ര്യശ്രങ്ങളിലെ ബാഹുയോഗങ്ങളായിരിക്കുന്ന *സ*, *ഗ* എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നു *സര*, *ഗന* എന്ന ലംബങ്ങളെ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്നു വിപരീതദിക്കായിട്ടുണ്ടാക്കു. *മരി*-യുടെ മദ്ധ്യം *ത*.



പരിലേഖം (53)

$$\therefore \quad സര = \frac{ബ_1 \times ബ_4}{\text{വ്യാസം}}; ഗന = \frac{ബ_2 \times ബ_3}{\text{വ്യാസം}}$$

$$മസരി \text{ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം} = \frac{ക_1}{2} \times \frac{ബ_1 \times ബ_4}{\text{വ്യാസം}}$$

$$മഗരി \text{ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം} = \frac{ക_1}{2} \times \frac{ബ_2 \times ബ_3}{\text{വ്യാസം}}$$

ലംബങ്ങൾ രണ്ടും ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്നു വിപരീതദിക്കാകയാൽ അവ രണ്ടും തുല്യദിക്കുകൾ. ഒരു ലംബത്തിന്നു ശേഷമായിട്ടു മറ്റെ ലംബത്തെ നീട്ടി കല്പിപ്പൂ, രണ്ടാംലംബത്തിന്നു ശേഷമായിട്ട് ആദ്യത്തെ ലംബത്തേയും.

$$\text{അപ്പോൾ } പസ = ഗധ = \text{ലംബയോഗം.}$$

$$നര = ഗപ = സധ = \text{ലംബനിപാതാന്തരം.}$$

അപ്പോൾ രണ്ടു ബാഹുക്കൾ ലംബയോഗത്തിന്നു തുല്യമായിട്ടും മറ്റേവ രണ്ടും ലംബനിപാതാന്തരത്തിന്നു തുല്യമായിട്ടുമൊരു ആയതചതുരശ്രം $സധഗപ$ ഉണ്ടാകും. ഇതിന്റെ കർണ്ണം $സഗ$ വിഷമചതുരശ്രത്തിന്റെ ഇതരകർണ്ണമാകുന്നു. $(= ക_2)$

$$\therefore \; {ക_2}^2 = സപ^2 + പഗ^2$$

$$\therefore \; \text{ലംബയോഗവർഗ്ഗം} = \text{ഇതരകർണ്ണവർഗ്ഗം} - \text{ലംബനിപാതാന്തരവർഗ്ഗം}$$

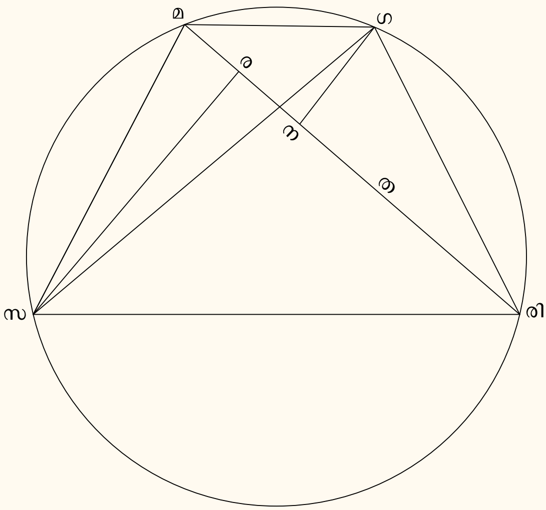
$$\text{ലംബയോഗവർഗ്ഗം} \times \text{ഇഷ്ടകർണ്ണാർദ്ധവർഗ്ഗം} = \text{ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം}$$

എല്ലാ ത്ര്യശ്രങ്ങളിലും ലംബനിപാതം ഭൂമദ്ധ്യത്തിൽനിന്നു ചെറിയ ഭുജയുടെ ഭാഗത്തേക്കു നീങ്ങി കിടക്കും. അതുകൊണ്ട് ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ ഇരുപുറവുമുള്ള ത്ര്യശ്രങ്ങളിൽ ഒന്നിന്റെ ചെറിയ ഭുജയും മറ്റേതിന്റെ വലിയ ഭുജയും ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ ഒരഗ്രത്തെ സ്പർശിക്കുന്നവെങ്കിൽ ലംബനിപാതങ്ങൾ ഇഷ്ടകർണ്ണമദ്ധ്യത്തിന്റെ ഇരുപുറവും സംഭവിക്കും. (പരിലേഖം

53 നോക്കുക.) ചിലപ്പോൾ അവ ഇഷ്ടകര്‍ണ്ണത്തിന്റെ മദ്ധ്യത്തിന്റെ ഒരു പുറത്തു സംഭവിക്കും. (പരിലേഖം 54 നോക്കുക.) ഇവിടെ ദക്ഷിണമുഖഭുജകളെ പകര്‍ന്നു കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു. അപ്പോൾ ചെറിയ ഭുജകൾ രണ്ടും ഇഷ്ടകര്‍ണ്ണത്തിന്റെ ഒരഗ്രത്തിലും വലിയഭുജകൾ രണ്ടും അതിന്റെ മറ്റെ അഗ്രത്തിലുമായിട്ടിരിക്കും. അതായതു ലംബനിപാതങ്ങൾ രണ്ടും ഇഷ്ടകര്‍ണ്ണമദ്ധ്യത്തിങ്കൽനിന്നു ചെറിയ ഭുജകളുള്ള പുറത്തു സംഭവിക്കുന്നു.

പരിലേഖം 53-ൽ ലംബനിപാതാന്തരം = *മന* − *മര*
= *നര*
= *രിര* − *രിന*
= ഭ്രമദ്ധ്യത്തിന്റെ ഒരുപുറത്തെ ആബാധാന്തരം

പരിലേഖം 54-ലും ലംബനിപാതാന്തരം = ഒരു പുറത്തെ ആബാധാന്തരം തന്നെ.



പരിലേഖം (54)

ആബാധകളെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം രണ്ടു വിഷയങ്ങളിലും ലംബനിപാതാന്തരം ഒരു പുറത്തെ ആബാധാന്തരം തന്നെ.

എന്നാൽ ഭ്രമദ്ധ്യത്തെ അനുസരിച്ചു ലംബനിപാതാന്തരത്തെ വരുത്തുകയാണെങ്കിൽ, സംസ്കാരത്തിനു വ്യത്യാസമുണ്ട്. ലംബനിപാതങ്ങൾ ഇഷ്ടകര്‍ണ്ണമദ്ധ്യത്തിന്റെ ഇരു പുറത്താണെങ്കിൽ ഭ്രമദ്ധ്യലംബനിപാതങ്ങളുടെ യോഗം ലംബനിപാതാന്തരമായിട്ടു വരും. ഒരു പുറത്താണെങ്കിൽ അവയുടെ അന്തരം ലംബനിപാതാന്തരം.

പരിലേഖം 53-ൽ ലംബനിപാതങ്ങൾ ഭ്രമദ്ധ്യത്തിന്റെ ഇരുപുറത്ത്.

അപ്പോൾ ലംബനിപാതാന്തരം = *നര* = *തര* + *തന*

പരിലേഖം 54-ൽ ലംബനിപാതങ്ങൾ ഭ്രമദ്ധ്യത്തിന്റെ ഒരുപുറത്ത്.

$\therefore$ ലംബനിപാതാന്തരം = *നര* = *തര* − *തന*

$$\left.\begin{array}{r}\textit{മഗരി}\text{ എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ,}\\ \text{ആബാധാന്തരം}\end{array}\right\} = \textit{മന} - \textit{നരി}\ \text{(പരിലേഖം 53-ൽ)}$$

$$= (\textit{മത} + \textit{തന}) - (\textit{തരി} - \textit{തന})$$

$$2 \times \textit{തന}$$

$$\therefore \quad \textit{തന} = \frac{\textit{മന} - \textit{നരി}}{2}$$

$$\text{അതുപോലെതന്നെ } \textit{തര} = \frac{\textit{രരി} - \textit{രമ}}{2}$$

$$\therefore \quad \textit{നര} = \frac{\textit{രരി} - \textit{രമ}}{2} + \frac{\textit{മന} - \textit{നരി}}{2}$$

$$= \frac{\textit{ബ}_1{}^2 - \textit{ബ}_4{}^2}{2\textit{ക}_1} + \frac{\textit{ബ}_3{}^2 - \textit{ബ}_2{}^2}{2\textit{ക}_1}\text{(ആബാധവർഗ്ഗാന്തരം}$$

$$= \text{ഭുജാവർഗ്ഗാന്തരം)}$$

$$= \frac{(\textit{ബ}_1{}^2 + \textit{ബ}_3{}^2) - (\textit{ബ}_2{}^2 + \textit{ബ}_4{}^2)}{2\textit{ക}_1}$$

$$= \frac{\text{പ്രതിഭുജകളുടെ വർഗ്ഗയോഗങ്ങളുടെ അന്തരം}}{2 \times \text{ഇഷ്ടകർണ്ണം}}$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{പരിലേഖം 54-ൽ,}\\ \text{ലംബനിപാതാന്തരം}\end{array}\right\} = \textit{തര} - \textit{തന}$$

$$= \frac{\textit{ബ}_1{}^2 - \textit{ബ}_4{}^2}{2\textit{ക}_1} - \frac{\textit{ബ}_3{}^2 - \textit{ബ}_2{}^2}{2\textit{ക}_1}$$

$$= \frac{\textit{ബ}_1{}^2 - \textit{ബ}_2{}^2}{2\textit{ക}_1} - \frac{\textit{ബ}_3{}^2 - \textit{ബ}_4{}^2}{2\textit{ക}_1}$$

$$= \frac{\text{പ്രതിഭുജാവർഗ്ഗയോഗങ്ങളുടെ അന്തരം}}{2 \times \text{ഇഷ്ടകർണ്ണം}}$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{എല്ലായിടത്തും}\\ \text{ലംബനിപാതാന്തരം}\end{array}\right\} = \textit{നര}$$

$$= \frac{\text{പ്രതിഭുജകളുടെ വർഗ്ഗയോഗങ്ങളുടെ അന്തരം}}{2 \times \text{ഇഷ്ടകർണ്ണം}}$$

(ഇവിടെ അന്തരങ്ങളുടെ യോഗത്തെയും അന്തരത്തേയും വരുത്തേണ്ടതിനുള്ള ന്യായത്തെ "അന്തരയോഗേ . . . " ഇത്യാദികൊണ്ടു പറഞ്ഞിരിക്കുന്നു.)

$(\textit{അ} - \textit{ഇ})$, $(\textit{ഉ} - \textit{ഒ})$ എന്ന രണ്ട് അന്തരങ്ങളെ കല്പിക്കുക.

ഇവിടെ $\textit{അ} - \textit{ഇ} > \textit{ഉ} - \textit{ഒ}$, എന്നും $\textit{അ} > \textit{ഇ} > \textit{ഉ} > \textit{ഒ}$ എന്നും കല്പിക്കുക

ഇവയുടെ യോഗത്തിങ്കൽ മഹത്തുക്കളായിരിക്കുന്ന *അ, ഉ* ഇവയെക്കൂട്ടി ആ യോഗത്തിൽനിന്നു മറ്റേവ രണ്ടിന്റെയും യോഗത്തെ കളഞ്ഞാൽ ആ അന്തരങ്ങളുടെ യോഗം വരും.

$$(\textit{അ} - \textit{ഇ}) + (\textit{ഉ} - \textit{ഒ}) = (\textit{അ} + \textit{ഉ}) - (\textit{ഇ} + \textit{ഒ})\ -\text{ധനഭൂതം.}$$

ഇവയുടെ അന്തരത്തിങ്കൽ ആദ്യത്തേതിലെ വലിയ രാശിയുടെയും രണ്ടാമത്തേതിലെ ചെറിയ രാശിയുടെയും യോഗത്തിങ്കന്നു മറ്റേവ രണ്ടിന്റെയും യോഗത്തെ വാങ്ങിയാൽ അന്ത

രങ്ങളുടെ അന്തരം വരും.

$അ - ഇ > ഉ - ഒ$ എന്നു കല്പിക്കയാൽ ഇതും ധനഭൂതം തന്നെ.

$(അ - ഇ) - (ഉ - ഒ) = (അ + ഒ) - (ഇ + ഉ)$ —ധനഭൂതം.

പരിലേഖം 53-ൽ

$$നര^2 = \frac{\{(ബ_1{}^2 + ബ_3{}^2) - (ബ_2{}^2 + ബ_4{}^2)\}^2}{4ക_1{}^2}$$

$$\text{ലംബയോഗവർഗ്ഗം} = ക_2{}^2 - \frac{\{(ബ_1{}^2 + ബ_3{}^2) - (ബ_2{}^2 + (ബ_4{}^2)\}^2}{4ക_1{}^2}$$

$$\text{ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം} = \text{ലംബയോഗവർഗ്ഗം} \times \text{ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗം}$$

$$= \left[ക_2{}^2 - \frac{\{(ബ_1{}^2 + ബ_3{}^2) - (ബ_2{}^2 + ബ_4{}^2)\}^2}{4ക_1{}^2}\right] \times \frac{ക_1{}^2}{4}$$

$$= \frac{4ക_1{}^2ക_2{}^2 - \{(ബ_1{}^2 + ബ_3{}^2) - (ബ_2{}^2 + ബ_4{}^2)\}^2}{4ക_1{}^2} \times \frac{ക_1{}^2}{4}$$

(സമച്ഛേദങ്ങൾക്കെ യോഗവിയോഗയോഗ്യത്വമുള്ളൂ, എന്നിട്ട്.)

$$= \frac{4ക_1{}^2ക_2{}^2 - \{(ബ_1{}^2 + ബ_3{}^2) - (ബ_2{}^2 + (ബ_4{}^2)\}^2}{16}$$

$$= \left(\frac{ക_1ക_2}{2}\right)^2 - \left\{\frac{\dfrac{ബ_1{}^2 + ബ_3{}^2}{2} - \dfrac{ബ_2{}^2 + ബ_4{}^2}{2}}{2}\right\}^2$$

$$= \left(\frac{ക_1ക_2}{2}\right)^2 - \left[\left\{\left(\frac{ബ_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{ബ_3}{2}\right)^2\right\} - \left\{\left(\frac{ബ_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{ബ_4}{2}\right)^2\right\}\right]^2$$

ഭുജകളെ അപേക്ഷിച്ച്,

$$ക_1{}^2 = \frac{(ബ_1ബ_2 + ബ_3ബ_4)(ബ_1ബ_3 + ബ_2ബ_4)}{ബ_1ബ_4 + ബ_2ബ_3}$$

$$ക_2{}^2 = \frac{(ബ_1ബ_4 + ബ_2ബ_3)(ബ_1ബ_3 + ബ_2ബ_4)}{ബ_1ബ_2 + ബ_3ബ_4}$$

$$\therefore \quad ക_1{}^2 \times ക_2{}^2 = (ബ_1ബ_3 + ബ_2ബ_4)^2$$

(ഗുണകാരത്തിലും ഹാരകത്തിലും $ബ_1ബ_2 + ബ_3ബ_4$, $ബ_1ബ_4 + ബ_2ബ_3$ എന്ന രാശികളുണ്ട്. അതുകൊണ്ടു ഫലത്തെ വരുത്തുവാൻ ഇവയെക്കൊണ്ടു ഗുണിക്കുകയും വേണ്ടാ, ഹരിക്കുകയും വേണ്ടാ.)

$\therefore$ ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം

$$= \left(\frac{ബ_1ബ_3 + ബ_2ബ_4}{2}\right)^2 - \left[\left\{\left(\frac{ബ_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{ബ_3}{2}\right)^2\right\} - \left\{\left(\frac{ബ_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{ബ_4}{2}\right)^2\right\}\right]^2$$

$$= \left[\frac{ബ_1ബ_3 + ബ_2ബ_4}{2} + \left\{\left(\frac{ബ_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{ബ_3}{2}\right)^2\right\} - \left\{\left(\frac{ബ_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{ബ_4}{2}\right)^2\right\}\right]$$

$$\times \left[\frac{ബ_1ബ_3 + ബ_2ബ_4}{2} - \left\{\left(\frac{ബ_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{ബ_3}{2}\right)^2\right\} + \left\{\left(\frac{ബ_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{ബ_4}{2}\right)^2\right\}\right]$$

$$= \left[\left\{\frac{ബ_1 ബ_2}{2}+\left(\frac{ബ_1}{2}\right)^2+\left(\frac{ബ_3}{2}\right)^2\right\}-\left\{\left(\frac{ബ_2}{2}\right)^2+\left(\frac{ബ_4}{2}\right)^2-\frac{ബ_2 \times ബ_4}{2}\right\}\right]$$
$$\times \left[\left\{\frac{ബ_2 ബ_4}{2}+\left(\frac{ബ_2}{2}\right)^2+\left(\frac{ബ_4}{2}\right)^2\right\}-\left\{\left(\frac{ബ_1}{2}\right)^2+\left(\frac{ബ_3}{2}\right)^2-\frac{ബ_1 ബ_3}{2}\right\}\right]$$

(ഇവിടെ രണ്ടു സംഗതികൾ ഓൎക്കുവാനുണ്ടു്:-

(1) $$\left(\frac{ബ_1 ബ_3 + ബ_2 ബ_4}{2}\right)+\left\{\left(\frac{ബ_1}{2}\right)^2+\left(\frac{ബ_3}{2}\right)^2\right\}-\left\{\left(\frac{ബ_2}{2}\right)^2+\left(\frac{ബ_4}{2}\right)^2\right\}$$
$$=\left\{\frac{ബ_1 ബ_3}{2}+\left(\frac{ബ_1}{2}\right)^2+\left(\frac{ബ_3}{2}\right)^2\right\}+\left\{\frac{ബ_2 ബ_4}{2}-\left(\frac{ബ_2}{2}\right)^2-\left(\frac{ബ_4}{2}\right)^2\right\}$$

ഇവിടെ $\frac{ബ_2 ബ_4}{2}-\left\{\left(\frac{ബ_2}{2}\right)^2+\left(\frac{ബ_4}{2}\right)^2\right\}$ എന്ന സ്ഥലത്ത്, $\frac{ബ_2 ബ_4}{2}$ എന്ന രാശിയിൽനിന്നു് $\left(\frac{ബ_2}{2}\right)^2+\left(\frac{ബ_4}{2}\right)^2$ എന്ന രാശിയെ കളയുവാൻ വയ്യാ. അതിന്നു ഹേതു.

$$\left(\frac{ബ_2}{2}\right)^2+\left(\frac{ബ_4}{2}\right)^2=\frac{ബ_2 \times ബ_4}{2}+\left(\frac{ബ_2}{2}-\frac{ബ_4}{2}\right)^2$$
$$\left(\frac{ബ_2}{2}\right)^2+\left(\frac{ബ_4}{2}\right)^2>\frac{ബ_2 ബ_4}{2}$$

അപ്പോൾ $\frac{ബ_2 ബ_4}{2}-\left(\frac{ബ_2}{2}\right)^2-\left(\frac{ബ_4}{2}\right)^2$ ഒരു ഋണരാശിയാകുന്നു.
അതുകൊണ്ടു ഈ രാശിയെ— $\left\{\left(\frac{ബ_2}{2}\right)^2+\left(\frac{ബ_4}{2}\right)^2-\frac{ബ_2 ബ_4}{2}\right\}$ എന്നു കല്പിച്ചു.
തുല്യന്യായേന $\frac{ബ_1 ബ_3}{2}-\left(\frac{ബ_1}{2}\right)^2-\left(\frac{ബ_3}{2}\right)^2$ എന്നതിനെ—
$\left\{\left(\frac{ബ_1}{2}\right)^2+\left(\frac{ബ_3}{2}\right)^2-\frac{ബ_1 ബ_3}{2}\right\}$ എന്നും കല്പിച്ചു.

(2) $$\left(\frac{ബ_1}{2}\right)^2+\left(\frac{ബ_3}{2}\right)^2+\frac{ബ_1 ബ_3}{2}$$
$$=\left(\frac{ബ_1}{2}\right)^2+\left(\frac{ബ_3}{2}\right)^2+2\times\frac{ബ_1}{2}\times\frac{ബ_3}{2}$$
$$=\left(\frac{ബ_1}{2}+\frac{ബ_3}{2}\right)^2$$

അപ്പോൾ ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലവൎഗ്ഗം.

$$=\left[\left(\frac{ബ_1}{2}+\frac{ബ_3}{2}\right)^2-\left(\frac{ബ_4}{2}-\frac{ബ_2}{2}\right)^2\right]\left[\left(\frac{ബ_2}{2}+\frac{ബ_4}{2}\right)^2-\left(\frac{ബ_1}{2}-\frac{ബ_3}{2}\right)^2\right]$$
$$=\left(\frac{ബ_1}{2}+\frac{ബ_3}{2}+\frac{ബ_2}{2}-\frac{ബ_4}{2}\right)\left(\frac{ബ_1}{2}+\frac{ബ_3}{2}-\frac{ബ_2}{2}+\frac{ബ_4}{2}\right)$$
$$\times\left(\frac{ബ_2}{2}+\frac{ബ_4}{2}+\frac{ബ_1}{2}-\frac{ബ_3}{2}\right)\left(\frac{ബ_2}{2}+\frac{ബ_4}{2}-\frac{ബ_1}{2}+\frac{ബ_3}{2}\right)$$

സൎവ്വദോൎയ്യുതിദളം = എല്ലാഭുജകളുടെയും യോഗാൎദ്ധം $=\frac{ബ_1}{2}+\frac{ബ_2}{2}+\frac{ബ_3}{2}+\frac{ബ_4}{2}$ ഇതിനെ $ദ$ എന്നു കല്പിക്കുക.

$$\frac{ബ_1}{2}+\frac{ബ_2}{2}+\frac{ബ_3}{2}-\frac{ബ_4}{2}=\frac{ബ_1}{2}+\frac{ബ_2}{2}+\frac{ബ_3}{2}+\frac{ബ_4}{2}-ബ_4=ദ-ബ_4$$
$$\frac{ബ_1}{2}+\frac{ബ_2}{2}-\frac{ബ_3}{2}+\frac{ബ_4}{2}=ദ-ബ_3$$
$$\frac{ബ_1}{2}-\frac{ബ_2}{2}+\frac{ബ_3}{2}+\frac{ബ_4}{2}=ദ-ബ_2$$

$$-\frac{ബ_1}{2}+\frac{ബ_2}{2}+\frac{ബ_3}{2}+\frac{ബ_4}{2}=ദ-ബ_1$$

$$\therefore\quad \text{ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം} = (ദ-ബ_1)(ദ-ബ_2)(ദ-ബ_3)(ദ-ബ_4)$$

$$\text{ക്ഷേത്രഫലം} = \sqrt{(ദ-ബ_1)(ദ-ബ_2)(ദ-ബ_3)(ദ-ബ_4)}$$

ഇതിൽനിന്നും വ്യാസം വരുത്തേണ്ടുംപ്രകാരം:-

$$\text{ലംബയോഗം} = \frac{ബ_1 ബ_4 + ബ_2 ബ_3}{\text{വ്യാസം}}$$

$$\therefore\quad \text{ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം} = \frac{ക_1}{2}\times\text{ലംബയോഗം} = \frac{ക_1(ബ_1ബ_4+ബ_2ബ_3)}{2\times\text{വ്യാസം}}$$

$$\therefore\quad \text{വ്യാസം} = \frac{ക_1(ബ_1ബ_4+ബ_2ബ_3)}{2\times\text{ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം}}$$

$$=\frac{\sqrt{(ബ_1ബ_2+ബ_3ബ_4)(ബ_1ബ_3+ബ_2ബ_4)}}{2\times\sqrt{ബ_1ബ_4+ബ_2ബ_3}}\times\frac{ബ_1ബ_4+ബ_2ബ_3}{\text{ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം}}$$

$$=\frac{\sqrt{(ബ_1ബ_2+ബ_3ബ_4)(ബ_1ബ_3+ബ_2ബ_4)(ബ_1ബ_4+ബ_2ബ_3)}}{2\times\text{ക്ഷേത്രഫലം}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{(ബ_1ബ_2+ബ_3ബ_4)(ബ_1ബ_3+ബ_2ബ_4)(ബ_1ബ_4+ബ_2ബ_3)}}{\sqrt{(ദ-ബ_1)(ദ-ബ_2)(ദ-ബ_3)(ദ-ബ_4)}}$$

ലീലാവതീവാക്യം:-

"സർവ്വദോർയ്യുതിദളഞ്ചതുഃസ്ഥിതം ബാഹുഭിർവ്വിരഹിതഞ്ച തദ്വധാൽ |
മൂലമസ്ഫുടഫലം ചതുർഭുജേ സ്പഷ്ടമേവമുദിതം ത്രിബാഹുകേ" || എന്ന്

ഇവിടെ ചതുരശ്രത്തെ വൃത്താന്തർഗ്ഗതമായിട്ടു കല്പിക്കുന്നില്ല. അതുകൊണ്ടാണ് ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം അസ്ഫുടം എന്നു പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത്. യുക്തിഭാഷയിൽ ഈ വാക്യത്തിന്നു പാഠഭേദം വരുത്തിയിട്ടുണ്ട്. "മൂലമസ്ഫുടഫലം ചതുർഭുജേ" എന്നതിന്നു പകരം "മൂലമത്രനിയതശ്രുതൗ ഫലം" എന്നു പറഞ്ഞിരിക്കുന്നു. നിയതങ്ങളായിരിക്കുന്ന കർണ്ണങ്ങളോടുകൂടിയ ചതുരശ്രം എന്നു പറഞ്ഞതു കൊണ്ടു ചതുരശ്രം വൃത്താന്തർഗ്ഗതമാകത്തക്കവണ്ണം നിശ്ചിതങ്ങളായിരിക്കുന്ന കർണ്ണങ്ങളോടുകൂടിയ ചതുരശ്രം എന്ന് അർത്ഥം വരും. അപ്പോൾ ഫലംസ്ഫുടമാവുകയും ചെയ്യും.

ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗാനയനം

ഇവ്വണ്ണം തന്നെ ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രത്തിങ്കലെ ഫലവർഗ്ഗമുണ്ടാകും. അവിടെ ഭൂമ്യർദ്ധവും ബാഹുയോഗാർദ്ധവും കൂടിയതു സർവ്വദോർയ്യുതിദളമാകുന്നത്. ഇതിനെ നാലേടത്ത് ഉണ്ടാക്കൂ. ഇവറ്റിൽ മൂന്നിൽ നിന്നും ഓരോ ബാഹുക്കളെ കളയൂ. ഒന്നിങ്കന്ന് ഏതും കളയാ.

ഇക്കേവലമായിരിക്കുന്ന സർവ്വദോർയ്യുതിദളവും ഭൂമിയാകുന്ന ബാഹുവിനെ കളഞ്ഞ സർവ്വദോർയ്യുതിദളവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു മിക്കതും ലംബവർഗ്ഗത്തോടു സമമായിട്ടിരിക്കും. ആബാധായോഗാർദ്ധവും ഭുജായോഗാർദ്ധവും തങ്ങളിൽ ഉള്ള വർഗ്ഗാന്തരമായിട്ടിരിക്കുമത്. ആബാധയും ഭുജയും തങ്ങളിലുള്ള വർഗ്ഗാന്തരം ലംബവർഗ്ഗനാകുന്നത് എന്നു ലംബവർഗ്ഗത്തോടു സാമ്യമുണ്ടാവാൻ ഹേതുവാകുന്നതു്. പിന്നെ രണ്ടു സർവ്വദോർയ്യുതിദളങ്ങളിൽ നിന്ന് ഓരോ ബാഹുക്കളെ കളഞ്ഞ ശേഷങ്ങൾ രണ്ടിനേയും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും മിക്കതും. പിന്നെ ഇതും മുമ്പിലെ ലംബവർഗ്ഗപ്രായമാകുന്നതും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചാൽ ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗമുണ്ടാകും. ഇവിടെ ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗത്തിൽ കുറയുന്ന അംശം തന്നെ ലംബവർഗ്ഗത്തിൽ ഏറുന്നതു്. എന്നിട്ടു ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം തന്നേ വരുന്നു. ഇതിന്റെ പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു. ഇവിടെ ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ രണ്ടു ബാഹുക്കളുടെയും വർഗ്ഗങ്ങളാകുന്നതു് ഇക്കർണ്ണങ്ങളായിട്ടിരിക്കുന്ന ഈ രണ്ടു ഭുജകൾക്കും സാധാരണമായിട്ടിരിക്കുന്ന കോടി ലംബമാകുന്നതു യാതൊന്ന് ഇതിന്റെ വർഗ്ഗവും തന്റെ ആബാധേടെ വർഗ്ഗവും കൂടിയതായിട്ടിരിക്കും. ആകയാലാബാധാവർഗ്ഗാന്തരത്തോടു തുല്യം കർണ്ണാങ്ങളാകുന്ന ഭുജകളുടെ വർഗ്ഗാന്തരം ആകയാൽ ഭുജാവർഗ്ഗയോഗാർദ്ധത്തിങ്കന്ന് ആബാധാവർഗ്ഗയോഗാർദ്ധത്തെ കളഞ്ഞാൽ ശേഷം കേവലലംബവർഗ്ഗം. പിന്നെ ഭുജായോഗാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കന്ന് ആബാധായോഗാർദ്ധവർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞാൽ ശേഷം ലംബവർഗ്ഗത്തെക്കാൾ ഏറീട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ ബാഹുക്കൾ രണ്ടിന്റെയും അന്തരത്തിന്റെ അർദ്ധം യാതൊന്ന് ആബാധകൾ രണ്ടിന്റെയും അന്തരത്തിന്റെ അർദ്ധവും യാതൊന്ന് ഇവ രണ്ടിനെയും വർഗ്ഗിച്ച് അന്തരിച്ചതിനോടു തുല്യം ലംബവർഗ്ഗത്തിൽ ഏറുന്ന അംശം എന്നു നിയതം. ഇവിടെ രണ്ടു ഘാതവും ഒരു അന്തരവർഗ്ഗവും കൂടിയതു വർഗ്ഗയോഗമാകയാൽ ഒരു ഘാതവും ഒരു അന്തരവർഗ്ഗവും കൂടിയതു വർഗ്ഗായോഗാർദ്ധമാകുന്നതു്. യോഗാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കൽ പിന്നെ ഒരു ഘാതവും അന്തരവർഗ്ഗത്തിൽ നാലൊന്നും ഉണ്ടായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ യോഗാർദ്ധവർഗ്ഗത്തെക്കാൾ വർഗ്ഗയോഗാർദ്ധം അന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗത്തെക്കൊണ്ട് അധികമായിട്ടിരിക്കും എന്നു വന്നു. എന്നാൽ ഇവിടെ ഭുജായോഗാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കൽ ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം കുറയും, ആബാധായോഗാർദ്ധമാകുന്ന ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കൽ ആബാധാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗവും കുറയും, വർഗ്ഗയോഗാർദ്ധത്തെ അപേക്ഷിച്ച്. ഇവിടെ ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗത്തെക്കാൾ ആബാധാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം വലിയതു്. ആബാധായോഗാർദ്ധവർഗ്ഗത്തെ മറ്റേതിങ്കന്നു കളയേണ്ടൂതും. കളയേണ്ടുന്ന രാശിയിൽ കുറയുന്ന അംശം, കളഞ്ഞ ശേഷിച്ച രാശിയിങ്കൽ ഏറീട്ടിരിക്കും. തങ്കൽ കുറയുന്ന അംശംകൊണ്ട് ഊനമായിട്ടുമിരിക്കും. ആകയാൽ ആബാധാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗവും ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗവും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരംകൊണ്ട് അധികമായിട്ടിരിക്കും ലംബവർഗ്ഗം. യോഗാർദ്ധവർഗ്ഗങ്ങൾ തങ്ങളിലന്തരിക്കുന്ന പക്ഷം ഈവണ്ണം. ഇവിടെ ത്ര്യശ്രഭുജകൾ തങ്ങളിൽ ഉള്ള വർഗ്ഗാന്തരവും ആബാധകൾ തങ്ങളിലുള്ള വർഗ്ഗാന്തരവും ഒന്നേ ആകയാൽ, ഭുജായോഗത്തെ ഭുജാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാലും ആബാധായോഗത്തെ ആബാധാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാലും തുല്യമായിട്ടുവരും എന്നു വരും, യോഗാന്തരഘാതം വർഗ്ഗാന്തരമാകയാൽ. ഇങ്ങനെ രണ്ടു ഘാതങ്ങളും തുല്യങ്ങളാകയാൽ, ഈ നാലു രാശികളിലും കൂടീട്ടു പ്രമാണേച്ഛാതൽഫലങ്ങൾ എന്ന പോലെ ഒരു സംബന്ധത്തെ കല്പിക്കാം. അവിടെ പ്രമാണഫലവും ഇച്ഛയും

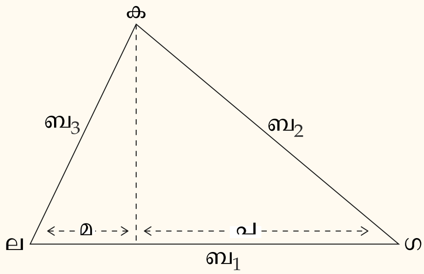
ഉള്ള ഘാതവും ഇച്ഛാഫലവും പ്രമാണവുമുള്ള ഘാതവും ഒന്നേ അത്രെ എന്ന പ്രസിദ്ധമല്ലോ. എന്നാൽ ഭുജായോഗത്തെ പ്രമാണം എന്നപോലെ കല്പിക്കുമ്പോൾ, ആബാധാന്തരം പ്രമാണഫലം, ആബാധായോഗം ഇച്ഛാ, ഭുജാന്തരം ഇച്ഛാഫലം എന്നപോലെ ഇരിക്കും. ഇവ്വണ്ണമിവറ്റിന്റെ വർഗ്ഗങ്ങൾ തങ്ങളിലും വർഗ്ഗാന്തരങ്ങൾ തങ്ങളിലും സംബന്ധമുണ്ടായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ ഭുജായോഗത്തെക്കാൾ ആബാധായോഗം എത്ര കുറയും ആബാധാന്തരത്തെക്കാൾ ഭുജാന്തരം അത്ര കുറഞ്ഞിരിക്കുമെന്നു നിയതം. ഇവറ്റിന്റെ അർദ്ധങ്ങൾക്കുമിവ്വണ്ണംതന്നെ സംബന്ധം. അർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങൾക്കും ഇങ്ങനെ തന്നെ സംബന്ധം. ഇവിടെ ഭുജായോഗാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിൽ പാതി ആബാധായോഗാർദ്ധവർഗ്ഗമെങ്കിൽ ആബാധാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിൽ പാതിയായിട്ടിരിക്കും ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം. ഇവ്വണ്ണം തന്നെ യോഗാർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗാന്തരവും അന്തരാർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗാന്തരവും തങ്ങളിലുള്ള സംബന്ധം. എന്നാൽ ഇവിടെ ഇങ്ങനെത്തൊരു ത്രൈരാശികത്തെ കല്പിക്കാം. ആബാധായോഗാർദ്ധവർഗ്ഗം പ്രമാണം, ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം പ്രമാണഫലം, ഭുജായോഗാർദ്ധവും ആബാധയോഗാർദ്ധവും ഇവ രണ്ടിന്റെയും വർഗ്ഗാന്തരം ഇച്ഛാ. പിന്നെ ആബാധാന്തരാർദ്ധവും ഭുജാന്തരാർദ്ധവും ഇവ രണ്ടിന്റേയും വർഗ്ഗാന്തരം ഇച്ഛാഫലം. ഈ ഇച്ഛാഫലം ഇവിടെ ലംബവർഗ്ഗത്തിൽ ഏറുന്ന അംശമാകുന്നതു്. ആകയാൽ ഇഗ്ഗുണഹാരങ്ങളെക്കൊണ്ടുതന്നെ ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു് ഉണ്ടാകുന്ന ഫലം ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗത്തിൽ കുറയേണ്ടുവതു്. ഇവിടെ ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗം ഗുണ്യം, ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം ഗുണകാരം, ആബാധായോഗാർദ്ധവർഗ്ഗം ഹാരകം. എന്നിട്ടു് ഇവിടെ ഗുണ്യവും ഹാരകവും ഒന്നേ ആകയാൽ ഗുണകാരകവും ഫലവും ഒന്നേ ആയിട്ടിരിക്കും. അതു ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം. എന്നിട്ടു ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു പോകേണ്ടുവതു്. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്ന ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗംകൊണ്ടു് അന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗാന്തരം കൂടി ഇരിക്കുന്ന ലംബവർഗ്ഗത്തെ ഗുണിച്ചാൽ ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം ഉണ്ടാകുന്നു. ഇവിടെ ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം കുറഞ്ഞ ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗം ഉണ്ടാകുന്നു. പിന്നെ സർവ്വദോർയ്യുതിദളങ്ങൾ രണ്ടിങ്കൽ നിന്നു് ഓരോ ത്ര്യശ്രഭുജകൾ വാങ്ങിയ ശേഷങ്ങൾ രണ്ടിൽവെച്ചു ചെറിയ ഭുജയെ കളഞ്ഞ ശേഷത്തിങ്കൽ ഭുജാന്തരാർദ്ധം കൂടിയ ഭൂമ്യർദ്ധം ഉണ്ടായിരിക്കും. വലിയ ഭുജയെ കളഞ്ഞ സർവ്വദോർയ്യുതിദളത്തിങ്കൽ ഭുജാന്തരാർദ്ധം കുറഞ്ഞ ഭൂമ്യർദ്ധ്യം ശേഷിക്കും. പിന്നെ ഭുജാന്തരാർദ്ധം കുറഞ്ഞിട്ടും ഏറീട്ടുംഇരിക്കുന്ന ഭൂമ്യർദ്ധങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം കുറഞ്ഞ ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും.

> "ഇഷ്ടോനയുഗ്രാശിവധഃ കൃതിസ്സ്യാ
> ദിഷ്ടസ്യ വർഗ്ഗേണ സമന്വിതോ വാ" ||

എന്ന ന്യായംകൊണ്ടു വരുമതു്. അവിടെ അന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗാന്തരം കൂടിയിരിക്കുന്ന ലംബവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു് അന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗാന്തരത്തെ വേറെയാക്കുവാൻ യാതൊന്നു ഗുണഹാരങ്ങളായതു് അതു തന്നെ കേവലഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗത്തിന്നു ഗുണഹാരങ്ങളാകേണ്ടുവതു്, കേവലലംബവർഗ്ഗത്തിങ്കലെ ഗുണഹാരങ്ങളെ അല്ല. യാതൊരുപ്രകാരം മൂന്നിനെക്കൊണ്ടു് അഞ്ചിനെ ഗുണിക്കേണ്ടുമ്പോൾ തന്നിലെ അഞ്ചൊന്നു കൂടിയിരിക്കുന്ന ആറിനെ ഗുണിക്കുന്നുതാകിൽ മൂന്നാകുന്ന ഗുണകാരത്തിങ്കന്നു തന്നിൽ

ആറൊന്നു പോയിരിക്കുന്ന രണ്ടരയെക്കൊണ്ടു ഗുണിക്കേണ്ടൂ, ഇവ്വണ്ണമിവിടേയും കേവലഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു കളയേണ്ടുന്ന ഫലത്തെ വരുത്തേണ്ടൂ. എന്നാൽ സർവ്വദോർയ്യുതിദളം എന്ന ന്യായംകൊണ്ടു വരുത്തുന്ന ത്രിഭുജക്ഷേത്രവർഗ്ഗം സൂക്ഷ്മമത്രെ എന്നുവന്നു.

വ്യാഖ്യാനം: പരിലേഖം 55-ൽ,



പരിലേഖം (55)

$$\begin{aligned}
\text{ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ ഭൂമി} &= ബ_1 \\
\text{വലിയബാഹു} &= ബ_2 \\
\text{ചെറിയബാഹു} &= ബ_3 \\
\text{ലംബം} &= ല \\
\text{സർവ്വദോർയ്യുതിദളം} &= \frac{ബ_1 + ബ_2 + ബ_3}{2} = ദ \\
\text{നാലു രാശികൾ} &= ദ, ദ - ബ_1, ദ - ബ_2, ദ - ബ_3 \\
\text{ആബാധകൾ} &= പ, മ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ദ \times (ദ - ബ_1) & \\
&= \frac{ബ_2 + ബ_3 + ബ_1}{2} \times \frac{ബ_2 + ബ_3 - ബ_1}{2} \\
&= \left(\frac{ബ_2 + ബ_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{ബ_1}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{ബ_2 + ബ_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{പ + മ}{2}\right)^2 \\
ല^2 &= {ബ_2}^2 - പ^2 = {ബ_3}^2 - മ^2 \\
2ല^2 &= ({ബ_2}^2 + {ബ_3}^2) - (പ^2 + മ^2) \\
\therefore \quad ല^2 &= \frac{{ബ_2}^2 + {ബ_3}^2}{2} - \frac{പ^2 + മ^2}{2}
\end{aligned}$$

$\left(\frac{ബ_2 + ബ_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{പ + മ}{2}\right)^2$ എന്ന രാശി $\frac{{ബ_2}^2 + {ബ_3}^2}{2} - \frac{പ^2 + മ^2}{2}$ എന്ന രാശിയോടു മിക്കതും തുല്യമായതുകൊണ്ടാണ്, $ദ(ദ - ബ_1)$ എന്നതു ലംബവർഗ്ഗത്തോടു മിക്കതും തുല്യമെന്നു പറയുവാൻ ഹേതു.

$$(ദ - ബ_2)(ദ - ബ_3) = \frac{{ബ_1}^2}{4} \text{ (മിക്കതും)}$$

ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം = $\frac{ല^2 \times ബ_1{}^2}{4} = ദ(ദ - ബ_1)(ദ - ബ_2)(ദ - ബ_3)$ എന്നതിനെ കാണിക്കുന്നു.

$\left(\frac{ബ_2 + ബ_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{പ + മ}{2}\right)^2$ എന്നതു ലംബവർഗ്ഗത്തേക്കാൾ ഏറ്റുന്നു. ഇതിന്നു ഹേതു: അ, ഇ എന്നു രണ്ടു രാശികളെ കല്പിക്കുക.

$$\begin{aligned}
\text{എന്നാൽ } 2 \times അ \times ഇ + (അ - ഇ)^2 &= അ^2 + ഇ^2 \\
\therefore \quad അ \times ഇ + \frac{(അ - ഇ)^2}{2} &= \frac{അ^2 + ഇ^2}{2} \\
\left(\frac{അ}{2} + \frac{ഇ}{2}\right)^2 &= \frac{അ^2}{4} + \frac{ഇ^2}{4} + \frac{അ \times ഇ}{2} \\
&= \frac{അ^2}{4} + \frac{ഇ^2}{4} - \frac{2 \times അ \times ഇ}{4} + അ \times ഇ \\
&= \left(\frac{അ - ഇ}{2}\right)^2 + അ \times ഇ \\
&= \frac{(അ - ഇ)^2}{2} + അ \times ഇ - \frac{(അ - ഇ)^2}{4} \\
&= \frac{(അ^2 + ഇ^2)}{2} - \left(\frac{അ - ഇ}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

അപ്പോൾ $\frac{(അ^2 + ഇ^2)}{2}$ എന്നതു $\left(\frac{അ + ഇ}{2}\right)^2$ എന്നതിനേക്കാൾ $\left(\frac{അ - ഇ}{2}\right)^2$ എന്നതുകൊണ്ടേറും. ഈ ന്യായം കൊണ്ട്,

$$\begin{aligned}
\frac{ബ_2{}^2 + ബ_3{}^2}{2} - \left(\frac{ബ_2 + ബ_3}{2}\right)^2 &= \left(\frac{ബ_2 - ബ_3}{2}\right)^2 \\
\frac{പ^2 + മ^2}{2} - \left(\frac{പ + മ}{2}\right)^2 &= \left(\frac{പ - മ}{2}\right)^2 \text{ എന്നു വന്നു.} \\
\left\{\frac{ബ_2{}^2 + ബ_3{}^2}{2} - \frac{പ^2 + മ^2}{2}\right\} - \left\{\left(\frac{ബ_2 + ബ_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{പ + മ}{2}\right)^2\right\} \\
&= \left(\frac{ബ_2 - ബ_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{പ - മ}{2}\right)^2 \\
\text{അതായത്, } ല^2 - ദ(ദ - ബ_1) &= \left(\frac{ബ_2 - ബ_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{പ - മ}{2}\right)^2 \\
\text{ഇവിടെ } ബ_2{}^2 - ബ_3{}^2 &= പ^2 - മ^2 \\
(ബ_2 + ബ_3)(ബ_2 - ബ_3) &= (പ + മ)(പ - മ) \\
&= ബ_1(പ - മ)
\end{aligned}$$

രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തങ്ങളിൽ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരം അവയുടെ ഇടയിലുള്ള ഋജു രേഖയാക കൊണ്ട്, $ബ_2 + ബ_3 > ബ_1$

$$\therefore \quad ബ_2 - ബ_3 < പ - മ$$

$$\therefore \quad \left(\frac{ബ_2 - ബ_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{പ - മ}{2}\right)^2 \text{ എന്നതു് ഋണരാശിയാകുന്നു.}$$

$$\therefore \quad ല^2 - ദ(ദ - ബ_1) \text{ എന്നതും ഋണരാശി}$$

$$\therefore \quad ദ(ദ - ബ_1) > ല^2$$

$$\text{അപ്പോൾ } ദ(ദ - ബ_1) = ല^2 + \left\{\left(\frac{പ - മ}{2}\right)^2 - \left(\frac{ബ_2 - ബ_3}{2}\right)^2\right\}$$

$$ല^2 \text{ നേക്കാൾ } ദ(ദ - ബ_1)\text{-ൽ ഏറുന്നതു്} = \left(\frac{പ - മ}{2}\right)^2 - \left(\frac{ബ_2 - ബ_3}{2}\right)^2$$

ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം $= ല^2 \times \left(\frac{ബ_1}{2}\right)^2 = ദ(ദ - ബ_1)(ദ - ബ_2)(ദ - ബ_3)$ എന്നു കാണിക്കേണ്ടിടത്തു്, $ദ(ദ - ബ_1)$ ലംബവർഗ്ഗത്തേക്കാളേറുന്നതു കൊണ്ടു ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗത്തിൽ ഏതാനും കളയേണ്ടിയിരിക്കുന്നു. ഈ കളയേണ്ടുന്ന സംഖ്യയെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെ മേല്പോട്ടു കാണിക്കുന്നു.

മൂന്നിനെ അഞ്ചിൽ ഗുണിക്കേണ്ടിയിരിക്കുമ്പോൾ, അഞ്ചിൽ തന്നിൽ അഞ്ചൊന്നു കൂടിയിരിക്കുന്ന ആറു കൊണ്ടു ഗുണിക്കുന്നുവെങ്കിൽ, തുല്യഫലം വരുത്തുവാൻ മൂന്നാകുന്ന ഗുണ്യത്തിങ്കൽനിന്നു തന്റെ ആറൊന്നുപോയ രണ്ടരയെ ഗുണിക്കേണം.

$$\begin{aligned} 3 \times 5 = 15 &= (5 + 5 \times \tfrac{1}{5})\left(3 - 3 \times \frac{1}{5+1}\right) \\ &= 6 \times 2\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

ഇതുപോലെതന്നെ ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗത്തെ ലംബവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിക്കേണ്ട ദിക്കിൽ $ല^2 + \left\{\left(\frac{പ - മ}{2}\right)^2 - \left(\frac{ബ_2 - ബ_3}{2}\right)^2\right\}$ എന്നതു കൊണ്ടു ഗുണിക്കുന്നുവെങ്കിൽ, ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കൽനിന്നു കളയേണ്ടുന്ന രാശിയുടെ ഗുണ്യം = $\left(\frac{ബ_1}{2}\right)^2$;

$$\text{ഗുണകാരം} = \frac{\left(\frac{പ - മ}{2}\right)^2 - \left(\frac{ബ_2 - ബ_3}{2}\right)^2}{ല^2 + \left\{\left(\frac{പ - മ}{2}\right)^2 - \left(\frac{ബ_2 - ബ_3}{2}\right)^2\right\}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \left.\begin{matrix}\text{ത്ര്യശ്രക്ഷേത്ര} \\ \text{ഫലവർഗ്ഗം}\end{matrix}\right\} &= \left[ല^2 + \left\{\left(\frac{പ - മ}{2}\right)^2 - \left(\frac{ബ_2 - ബ_3}{2}\right)^2\right\}\right] \\ &\quad \left[\left(\frac{ബ_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{ബ_1}{2}\right)^2 \times \frac{\left(\frac{പ - മ}{2}\right)^2 - \left(\frac{ബ_2 - ബ_3}{2}\right)^2}{ല^2 + \left\{\left(\frac{പ - മ}{2}\right)^2 - \left(\frac{ബ_2 - ബ_3}{2}\right)^2\right\}}\right] \\ &= \left\{\left(\frac{ബ_2 + ബ_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{പ + മ}{2}\right)^2\right\} \\ &\quad \left\{\left(\frac{ബ_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{ബ_1}{2}\right)^2 \times \frac{\left(\frac{പ - മ}{2}\right)^2 - \left(\frac{ബ_2 - ബ_3}{2}\right)^2}{\left(\frac{ബ_2 + ബ_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{പ - മ}{2}\right)^2}\right\} \end{aligned}$$

ഇവിടെ $\text{ബ}_2{}^2 - \text{ബ}_3{}^2 = \text{പ}^2 - \text{മ}^2$

$$(\text{ബ}_2 + \text{ബ}_3)(\text{ബ}_2 - \text{ബ}_3) = (\text{പ} + \text{മ})(\text{പ} - \text{മ})$$

$$\frac{\text{ബ}_2 + \text{ബ}_3}{\text{പ} - \text{മ}} = \frac{\text{പ} + \text{മ}}{\text{ബ}_2 - \text{ബ}_3}$$

$$\therefore \quad \frac{(\text{ബ}_2 + \text{ബ}_3)^2}{(\text{പ} - \text{മ})^2} = \frac{(\text{പ} + \text{മ})^2}{(\text{ബ}_2 - \text{ബ}_3)^2}$$

$$\frac{\left(\frac{\text{ബ}_2 + \text{ബ}_3}{2}\right)^2}{\left(\frac{\text{പ} - \text{മ}}{2}\right)^2} = \frac{\left(\frac{\text{പ} + \text{മ}}{2}\right)^2}{\left(\frac{\text{ബ}_2 - \text{ബ}_3}{2}\right)^2} = \frac{\left(\frac{\text{ബ}_2 + \text{ബ}_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{പ} + \text{മ}}{2}\right)^2}{\left(\frac{\text{പ} - \text{മ}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{ബ}_2 - \text{ബ}_3}{2}\right)^2}$$

(ഇതിന്റെ ഉപപത്തിയെ മേലിൽ പറയുന്നുണ്ട്.)

അപ്പോൾ $$\frac{\left(\frac{\text{പ} - \text{മ}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{ബ}_2 - \text{ബ}_3}{2}\right)^2}{\left(\frac{\text{ബ}_2 + \text{ബ}_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{പ} - \text{മ}}{2}\right)^2} = \frac{\left(\frac{\text{ബ}_2 - \text{ബ}_3}{2}\right)^2}{\left(\frac{\text{പ} + \text{മ}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{\text{ബ}_2 - \text{ബ}_3}{2}\right)^2}{\left(\frac{\text{ബ}_1}{2}\right)^2}$$

ഭൂമ്യദ്ധ്വവർഗ്ഗത്തിന്റെ ഗുണാകാരം $\dfrac{\left(\frac{\text{പ} - \text{മ}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{ബ}_2 - \text{ബ}_3}{2}\right)^2}{\left(\frac{\text{ബ}_2 + \text{ബ}_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{പ} + \text{മ}}{2}\right)^2}$ ആണെന്നു മുമ്പിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇതിനു പകരം ഇതിനോടു തുല്യമായിരിക്കുന്ന $\dfrac{\left(\frac{\text{ബ}_2 - \text{ബ}_3}{2}\right)^2}{\left(\frac{\text{ബ}_1}{2}\right)^2}$ എന്ന ഗുണകാരത്തെ ഉപയോഗിക്കാം.

അപ്പോൾ ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം $$= \left\{\left[\frac{\text{ബ}_2 + \text{ബ}_3}{2}\right]^2 - \left[\frac{\text{പ} + \text{മ}}{2}\right]^2\right\}$$

$$\left\{\left[\frac{\text{ബ}_1}{2}\right]^2 - \left[\frac{\text{ബ}_1}{2}\right]^2 \times \frac{\left[\frac{\text{ബ}_2 - \text{ബ}_3}{2}\right]^2}{\left[\frac{\text{ബ}_1}{2}\right]^2}\right\}$$

$$= \text{ദ}(\text{ദ} - \text{ബ}_1)\left\{\left[\frac{\text{ബ}_1}{2}\right]^2 - \left[\frac{\text{ബ}_2 - \text{ബ}_3}{2}\right]^2\right\}$$

$$= \text{ദ}(\text{ദ} - \text{ബ}_1)\left[\frac{\text{ബ}_1 + \text{ബ}_2 - \text{ബ}_3}{2}\right]\left[\frac{\text{ബ}_1 - \text{ബ}_2 + \text{ബ}_3}{2}\right]$$

$$= \text{ദ}(\text{ദ} - \text{ബ}_1)(\text{ദ} - \text{ബ}_2)(\text{ദ} - \text{ബ}_3)$$

അപ്പോൾ ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രഫലം $$= \sqrt{\text{ദ}(\text{ദ} - \text{ബ}_1)(\text{ദ} - \text{ബ}_2)(\text{ദ} - \text{ബ}_3)}$$

ഈ ഫലത്തെതന്നെ വൃത്താന്തർഗ്ഗതമായിരിക്കുന്ന ചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തിന്റെ ഫലത്തിൽനിന്നും വരുത്താം. ഒരു ബാഹു ശൂന്യമായിരിക്കുന്ന ചതുരശ്രക്ഷേത്രമെന്നു ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രത്തെ കല്പിക്കാം. അവിടെ $ബ_4$ എന്നതിനെ ശൂന്യമെന്നു കല്പിക്കുക.

$$\text{ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം} = \sqrt{(ദ - ബ_1)(ദ - ബ_2)(ദ - ബ_3)(ദ - ബ_4)}$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{അപ്പോൾ ത്ര്യശ്ര}\\ \text{ക്ഷേത്രഫലം}\end{array}\right\} = \sqrt{(ദ - ബ_1)(ദ - ബ_2)(ദ - ബ_3)(ദ - 0)}$$

$$= \sqrt{ദ(ദ - ബ_1)(ദ - ബ_2)(ദ - ബ_3)}$$

<u>മുമ്പിൽ പറഞ്ഞ ത്രൈരാശികങ്ങളുടെ യുക്തി:-</u>

$അ, ഇ, ഉ, ഒ$ എന്നു നാലു രാശികളെ കല്പിക്കുക.
$അ \times ഇ = ഉ \times ഒ$ എന്ന് ഇവയുടെ സംബന്ധം.
$ഇ \times ഒ$ എന്നതിനെക്കൊണ്ട് ഈ ഘാതങ്ങളെ ഹരിക്കുകയാണെങ്കിൽ,

$$\frac{അ \times ഇ}{ഇ \times ഒ} = \frac{ഉ \times ഒ}{ഇ \times ഒ}$$

$$\therefore \quad \frac{അ}{ഒ} = \frac{ഉ}{ഇ} = ഫ \text{ എന്നു കല്പിക്കുക}$$

$$\text{അപ്പോൾ } അ = ഒ \times ഫ$$

$$ഉ = ഇ \times ഫ$$

$$അ^2 = ഒ^2 \times ഫ^2$$

$$ഉ^2 = ഇ^2 \times ഫ^2$$

$$\frac{അ^2}{ഒ^2} = ഫ^2 = \frac{ഉ^2}{ഇ^2} \text{ (വർഗ്ഗങ്ങൾ തങ്ങളിലുള്ള സംബന്ധം)}$$

$$\frac{\left(\frac{അ}{2}\right)^2}{\left(\frac{ഒ}{2}\right)^2} = ഫ^2 = \frac{\left(\frac{ഉ}{2}\right)^2}{\left(\frac{ഇ}{2}\right)^2} \text{ (അർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങൾ തങ്ങളിലുള്ള സംബന്ധം)}$$

$$\left(\frac{അ}{2}\right)^2 = ഫ^2 \times \left(\frac{ഒ}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{ഉ}{2}\right)^2 = ഫ^2 \times \left(\frac{ഇ}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{അ}{2}\right)^2 - \left(\frac{ഉ}{2}\right)^2 = ഫ^2 \left\{\left(\frac{ഒ}{2}\right)^2 - \left(\frac{ഇ}{2}\right)^2\right\}$$

$$\frac{\left(\frac{അ}{2}\right)^2 - \left(\frac{ഉ}{2}\right)^2}{\left(\frac{ഒ}{2}\right)^2 - \left(\frac{ഇ}{2}\right)^2} = ഫ^2 = \frac{\left(\frac{അ}{2}\right)^2}{\left(\frac{ഒ}{2}\right)^2} = \frac{\left(\frac{ഉ}{2}\right)^2}{\left(\frac{ഇ}{2}\right)^2}$$

ഇങ്ങനെ പല ത്രൈരാശികങ്ങളുടെയും ഉപപത്തിയെ കാണിക്കാം.

ശരാനയനം

പിന്നെ ഇതിനോടു തുല്യന്യായമായിട്ടിരിപ്പോന്ന്

"ഗ്രാസോനേ ദ്വേ വൃത്തേ ഗ്രാസഗുണേ ഭാജേൽ പൃഥക്ത്വേന |
ഗ്രാസോനയോഗലബ്ധൗ സംപാതശരൗ പരസ്പരതഃ ||"[7] എന്നിതു്.

ഇവിടെ ചെറിയൊരു വൃത്തത്തിന്റെ കുറഞ്ഞൊരു പ്രദേശം വലിയൊരു വൃത്തത്തിന്റെ അകത്തു പുക്കിരിക്കുമാറു കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ രണ്ടിന്റെയും കേന്ദ്രത്തിങ്കൽ സ്പർശിച്ചു പുറത്തെ നേമിയോളം ചെല്ലുമാറ് ഒരു വ്യാസരേഖ കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ രണ്ടു വൃത്തത്തിന്റെയും നേമികൾ തങ്ങളിൽ സ്പർശിക്കുന്നേടത്തു തട്ടുമാറ് ഈ വ്യാസരേഖക്കു വിപരീതമായിട്ടിരിപ്പോരു രേഖ കല്പിപ്പൂ. ഇതു രണ്ടു വൃത്തത്തിന്നും സാധാരണമായിട്ടിരിപ്പോരു ജ്യാവായിട്ടിരിക്കും. ഈ ജ്യാവും വ്യാസസൂത്രവും തങ്ങളിലുള്ള സംപാതത്തിങ്കന്ന് അടുത്ത വൃത്തനേമിയോളമുള്ള വ്യാസഖണ്ഡങ്ങൾ ശരങ്ങൾ. അവിടെ ചെറിയ വൃത്തത്തിങ്കലെ ശരം വലുതായിട്ടിരിക്കും. വലിയ വൃത്തത്തിങ്കലേതു ചെറുതായിട്ടിരിക്കും. ശരോനവ്യാസങ്ങൾ പിന്നെ മറിച്ച്. ചെറിയ വൃത്തത്തിങ്കൽ ചെറുതു്, വലിയ വൃത്തത്തിങ്കൽ വലുതു്. ഇവിടെ അതതു ശരോനവ്യാസവും ശരവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു രണ്ടു വൃത്തത്തിന്നും സാധാരണമായിട്ടിരിക്കുന്ന അർദ്ധജ്യാവിന്റെ വർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും.

"വ്യാസാച്ഛരോനാച്ഛരസംഗുണാച്ച
മൂലം ദ്വിനിഘ്നം ഭവതീഹ ജീവാ ||"[8] എന്നുണ്ടാകയാൽ.

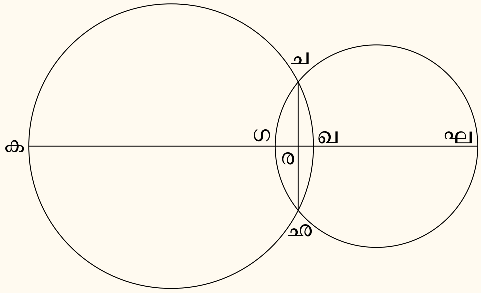
എന്നാൽ വലിയ ശരോനവ്യാസത്തേക്കാൾ എത്ര ചെറുതു ചെറിയ ശരോനവ്യാസം, ചെറിയ വൃത്തത്തിങ്കലെ ശരത്തെക്കാൾ അത്ര ചെറുതു വലിയ വൃത്തത്തിങ്കലെ ശരം എന്നിരിക്കും, ഘാതം സമമാകയാൽ; യാതൊരുപ്രകാരം ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രത്തിങ്കലെ ഭുജായോഗവും ആബാധായോഗവും എന്നപോലെ ഇരിക്കുന്നു ആബാധാന്തരവും ഭുജാന്തരവും, എന്നിട്ടു തുല്യന്യായമാകുന്നു. ഇവിടെ ശരയോഗത്തെ ഗ്രാസമെന്നു ചൊല്ലുന്നു. ഗ്രാസോനവ്യാസങ്ങൾ തങ്ങളിലും ഇങ്ങനെ സംബന്ധം, യാതൊരുപ്രകാരം ശരോനവ്യാസങ്ങൾ തങ്ങളിൽ. ഇവിടെ വലിയ ശരോനവ്യാസത്തിങ്കന്നു വലിയ ശരവും ചെറിയ ശരോനവ്യാസത്തിങ്കന്നു ചെറിയ ശരവും പോയ ശേഷം ഗ്രാസോനവ്യാസങ്ങളാകുന്നവ. എന്നിട്ടു ശരോനവ്യാസങ്ങളെപ്പോലെ ഇരിപ്പോ ചില ഗ്രാസോനവ്യാസങ്ങളും. ഇവിടെ ശരങ്ങളെ വെവ്വേറെ അറിഞ്ഞീലാ എന്നിരിക്കുമ്പോൾ ഗ്രാസോനവ്യാസങ്ങൾ പ്രമാണഫലങ്ങളായി, ഗ്രാസോനവ്യാസയോഗം പ്രമാണമായി ഗ്രാസമിച്ഛയായിട്ടുണ്ടാകും ശരങ്ങൾ. മറ്റെ ഗ്രാസോനവ്യാസത്തിങ്കന്നു തന്റെ ശരമുണ്ടാം, തന്റേതിങ്കന്നു മറ്റെ ശരവും ഉണ്ടാകും. ഇങ്ങനെ ഗ്രാസത്തിങ്കന്നു ശരവിഭാഗത്തെ അറിയുംപ്രകാരം.

വ്യാഖ്യാനം: "ഗ്രാസോനേ ദ്വേ വൃത്തേ . . . . . ." ഇത്യാദി പ്രമാണംകൊണ്ടു ശരങ്ങളെ വരുത്തുന്നേടത്തും മുമ്പിലെ ന്യായത്തെത്തന്നെ അപേക്ഷിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ വൃത്തം എന്നതിന്നു വ്യാസമെന്നർത്ഥം.

---

[7] ആര്യഭടീയം ഗണിതപാദം, ശ്ലോകം 18.

[8] ലീലാവതീ, ശ്ലോകം 207.



പരിലേഖം (56)

ഇവിടെ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ഒരംശം മറ്റൊരു വൃത്തത്തിന്റെ അകത്ത് അകപ്പെട്ടുമാറു കല്പിക്കുന്നു. പരിലേഖം 56-ൽ *ചഖഛഗ* എന്ന ഭഗത്തിന്നു മത്സ്യമെന്നു പേർ. *കഖ* വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം, *ഗഘ* ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം. വൃത്തങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ സ്പർശിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ ഇട *ചഛ* രണ്ടു വൃത്തത്തിന്നും സാധാരണമായിരിക്കുന്ന ഒരു സമസ്തജ്യാവ്. ഈ ജ്യാവിന്നു സംപാതജീവാ എന്നു പേരുണ്ട്. ഇതു *കഘ* എന്ന രേഖയ്ക്കു വിപരീതദിക്കായിരിക്കും. *കഘ*, *ചഛ* ഇവയുടെ സംപാതം *ര* എന്ന ബിന്ദുവിങ്കൽ.

വലിയ വൃത്തത്തിൽ സംപാതജീവയുടെ ശരം $= \text{രഖ}$.

ചെറിയ വൃത്തത്തിൽ സംപാതജീവയുടെ ശരം $= \text{രഗ}$.

ശരോനവ്യാസങ്ങൾ ക്രമേണ *കര*, *ഘര*.

ഇവിടെ $\text{രഗ} > \text{രഖ}$; $\text{രക} > \text{രഘ}$.

"വ്യാസാച്ഛരോനാൽ ...” ഇത്യാദിന്യായേന

$\text{രക} \times \text{രഖ} = \text{ചര}^2 = \text{രഗ} \times \text{രഘ}$.

(ത്ര്യശ്രത്തിങ്കൽ ഭുജായോഗാന്തരഘാതം = ആബാധായോഗാന്തരഘാതം എന്ന സംബന്ധംപോലെ ഇവിടേയുമൊരു സംബന്ധം ഉണ്ട്. അതു കൊണ്ടു രണ്ടിങ്കലും തുല്യന്യായം എന്നു പറഞ്ഞു.)

$$
\begin{aligned}
(\text{രക} - \text{രഗ}) \times \text{രഖ} &= \text{രക} \times \text{രഖ} - \text{രഗ} \times \text{രഖ} \\
&= \text{രഗ} \times \text{രഘ} - \text{രഗ} \times \text{രഖ} \\
&= \text{രഗ}\,(\text{രഘ} - \text{രഖ}) \\
&= \text{രഗ} \times \text{ഖഘ} \\
\therefore \quad \text{കഗ} \times \text{രഖ} &= \text{രഗ} \times \text{ഖഘ}
\end{aligned}
$$

(ശരോനവ്യാസങ്ങളിലെപ്പോലെ ഗ്രാസോനവ്യാസങ്ങളിലും സംബന്ധം)

$$
\begin{aligned}
\text{കഗ}\,(\text{രഖ} + \text{രഗ}) &= \text{കഗ} \times \text{രഖ} + \text{കഗ} \times \text{രഗ} \\
&= \text{രഗ} \times \text{ഖഘ} + \text{കഗ} \times \text{രഗ} \\
\text{കഗ} \times \text{ഗഖ} &= \text{രഗ}(\text{ഖഘ} + \text{കഗ})
\end{aligned}
$$

ഗ്രാസോനവ്യാസം × ഗ്രാസം = മറ്റെ വൃത്തത്തിലെ ശരം × ഗ്രാസോനവ്യാസയോഗം

$$
\left.
\begin{aligned}
\text{അപ്പോൾ രഗ} &= \frac{\text{കഗ} \times \text{ഗഖ}}{\text{ഖഘ} + \text{കഗ}} \\
\text{അതുപോലെതന്നെ രഖ} &= \frac{\text{ഖഘ} \times \text{ഗഖ}}{\text{ഖഘ} + \text{കഗ}}
\end{aligned}
\right\}
$$

ഇവിടെ ഗ്രാസോനവ്യാസങ്ങൾ പ്രമാണഫലങ്ങൾ, ഗ്രാസോനവ്യാസയോഗം പ്രമാണം, ഗ്രാസമിച്ഛാ, ശരമിച്ഛാഫലം. ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഗ്രാസോനവ്യാസത്തിൽനിന്നു മറ്റേതിന്റെ ശരം വരും.

ഛായാനയനം

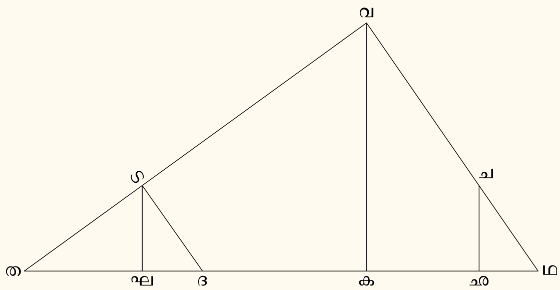
ഇതിനോടു തുല്യന്യായമായിട്ടിരുന്നൊന്ന്

"ഛായയോഃ കർണ്ണയോരന്തരേ യേ തയോ-
ർവ്വർഗ്ഗവിശ്ലേഷഭക്താ രസാദ്രീഷവഃ |
സൈകലബ്ധേ പദഘ്നന്തു കർണ്ണാന്തരം
ഭാന്തരേണോനയുക്തം ദളേ സ്തഃ പ്രഭേ ||[9] എന്നിതും.

ഇവിടെ സമനിലത്തു ദ്വാദശാംഗുലശംകുവിനേക്കാൾ ഉയരമൊന്നൊരു വിളക്കുവെച്ചു പിന്നെ ഇവിടുന്ന് ഒട്ട് അകലത്തു പന്ത്രണ്ടംഗുലം നീളമുള്ളൊരു ശംകുവിനെവെച്ചു പിന്നെ ഇശ്ശംകുവിങ്കന്നും ഒട്ട് അകലത്ത് ഇത്രതന്നെ നീളമുള്ളൊരു ശംകുവിനെ വെച്ചാൽ, വിളക്കിന്റെ അണയത്തെ ശംകുവിന്നു ഛായ ചെറുതായിട്ടിരിക്കും, അകലത്തേതിന്നു വലുതായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ ഛായാഗ്രത്തിങ്കന്നു ശംകുവിന്റെ മീത്തെ തലക്കലോളമുള്ള അന്തരാളം ഛായാകർണ്ണമാകുന്നത്. ഛായ വലിയതിന്നു ഛായാകർണ്ണം വലുത്, ശംകുതുല്യമാകയാൽ. പിന്നെ ഈ രണ്ടു ഛായകളുടേയും യോഗത്തെ ഭുമി എന്നും ഛായാകർണ്ണങ്ങളെ ബാഹുക്കളെന്നും ശംകുവിനെ ലംബമെന്നും കല്പിച്ച് പിന്നെ ഛായാന്തരമാകുന്നത് ആബാധാന്തരമെന്നും കർണ്ണാന്തരമാകുന്നത് ഭുജാന്തരമെന്നും ഇവ രണ്ടിന്റെയും വർഗ്ഗാന്തരത്തെ പ്രമാണമെന്നും ഛായായോഗവും കർണ്ണയോഗവും ഉള്ള വർഗ്ഗാന്തരത്തെ പ്രമാണഫലമെന്നും കർണ്ണാന്തരവർഗ്ഗത്തെ ഇച്ഛാ എന്നും കല്പിച്ചു ത്രൈരാശികം ചെയ്താൽ ഛായായോഗവർഗ്ഗം ഇച്ഛാഫലമായിട്ടുണ്ടാകും. ഇവിടെ പ്രമാണത്തെക്കൊണ്ടു പ്രമാണഫലത്തെ ഹരിച്ചു മൂലിച്ചു ഗുണിക്കുന്നതാകിൽ കർണ്ണാന്തരത്തെതന്നെ ഗുണിക്കേണ്ടൂ. എന്നാൽ ഛായായോഗമുണ്ടാകും. ഇവ്വണ്ണമിവിടെ ഉണ്ടാക്കുന്നു. യോഗവർഗ്ഗമാകുന്നതു പിന്നെ ശംകുവർഗ്ഗത്തെ നാലിൽ ഗുണിച്ചതിങ്കൽ അന്തരവർഗ്ഗാന്തരംകൂട്ടി ഇരിക്കുന്നത്. ഇവിടെ ഹാര്യത്തിൽ ഹാരകം കൂട്ടേണ്ടുകയാൽ ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലത്തിൽ ഒന്നു കൂട്ടിയാലും ഫലസാമ്യം വരും. എന്നിട്ടു കേവലം ചതുർഗ്ഗുണശംകുവർഗ്ഗത്തെ ഹരിക്കുന്നു. ഇത്ത്രൈ രാശികന്യായം മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ പ്രകാരംകൊണ്ടു സിദ്ധിക്കും. ഇങ്ങനെ ഇതിന്നു ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗന്യായത്തിനോടു സാമ്യം.

വ്യാഖ്യാനം: പരിലേഖം 57-ൽ *കഖ* ഒരു ദീപം. *ഗഘ* = *ചഛ* = ദ്വാദശാംഗുലശംകു. ദീപമൂലത്തിങ്കൽനിന്നു *ഗഘ* എന്ന ശംകുവിന്റെ മൂലത്തിന്റെ ദൂരം *ചഛ* എന്ന ശംകുവിന്റെ മൂലത്തിന്റെ ദൂരത്തേക്കാളേറും. അതായതു *കഘ* > *കഛ*.

[9] ലീലാവതീ, അദ്ധ്യായം 11, ശ്ലോകം 238. ഇവിടെ "സ്തഃ പ്രഭേ" എന്നതിന്നു "സ്തംഭദേ" എന്നൊരു പാഠഭേദവും കാണുന്നുണ്ട്.



പരിലേഖം (57)

ഘത, *ഛഥ* ഛായകൾ. *ഗത*, *ചഥ* ഛായാകർണ്ണങ്ങൾ *ഘക* എന്ന രേഖയിൽ *ഘദ* എന്നതു *ഛഥ* എന്നതിനോടു തുല്യമാകത്തക്കവണ്ണം *ദ* എന്നൊരു ബിന്ദുവിടു. അപ്പോൾ *ഗദ* $=$ *ചഥ* എന്നു വരും.

$$\begin{aligned}\text{അപ്പോൾ } \textit{തദ} &= \textit{തഘ} + \textit{ഘദ}\\ &= \textit{തഘ} + \textit{ഛഥ}\\ &= \text{ഛായായോഗം}\end{aligned}$$

ഈ *തദ* എന്ന ഛായായോഗത്തെ ഭൂമിയെന്നും, *ഗത*, *ഗദ* എന്ന ഛായാകർണ്ണങ്ങളെ ഭുജകളെന്നും, *ഗഘ* എന്ന ദ്വാദശാംഗുലശംകുവിനെ ലംബമെന്നും കല്പിപ്പൂ.

ഇവിടെ ഛായാന്തരവും കർണ്ണാന്തരവും ജ്ഞാതങ്ങൾ.

ഛായകളെ വെവ്വേറെ വരുത്തേണം.

കർണ്ണയോഗം $\times$ കർണ്ണാന്തരം $=$ ഛായായോഗം $\times$ ഛായാന്തരം.

(*ഗതദ* എന്ന ത്ര്യശ്രത്തിൽ കർണ്ണങ്ങളായിരിക്കുന്ന *ഗത*, *ഗദ* ഭുജകൾ, ഛായകളായിരിക്കുന്ന *തഘ*, *ദഘ* എന്ന ആബാധകൾ എന്നിട്ടു്.)

$$\begin{aligned}(\textit{ഗത} + \textit{ഗദ})(\textit{ഗത} - \textit{ഗദ}) &= (\textit{തഘ} + \textit{ഘദ})(\textit{തഘ} - \textit{ഘദ})\\ &= \textit{തദ}(\textit{തഘ} - \textit{ഘദ})\end{aligned}$$

$$\therefore\quad (\textit{ഗത} + \textit{ഗദ})^2(\textit{ഗത} - \textit{ഗദ})^2 = \textit{തദ}^2(\textit{തഘ} - \textit{ഘദ})^2$$

$$\begin{aligned}&(\textit{തഘ} + \textit{ഘദ})^2\left\{(\textit{തഘ} - \textit{ഘദ})^2 - (\textit{തഗ} - \textit{ഗദ})^2\right\}\\ &\qquad = (\textit{ഗത} + \textit{ഗദ})^2(\textit{ഗത} - \textit{ഗദ})^2 - (\textit{തഘ} + \textit{ഘദ})^2(\textit{തഗ} - \textit{ഗദ})^2\\ &\qquad = (\textit{ഗത} - \textit{ഗദ})^2\left\{(\textit{ഗത} + \textit{ഗദ})^2 - (\textit{തഘ} + \textit{ഘദ})^2\right\}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad (\textit{തഘ} + \textit{ഘദ})^2 = (\textit{ഗത} - \textit{ഗദ})^2\left\{\frac{(\textit{ഗത} + \textit{ഘദ})^2 - (\textit{തഘ} + \textit{ഘദ})^2}{(\textit{തഘ} - \textit{ഘദ})^2 - (\textit{തഗ} - \textit{ഗദ})^2}\right\}$$

$$= (\textit{ഗത} - \textit{ഗദ})^2\left\{\frac{\textit{ഗത}^2 + \textit{ഗദ}^2 + 2\textit{ഗത}\times\textit{ഗദ} - \textit{തഘ}^2 - \textit{ഘദ}^2 - 2\textit{തഘ}\times\textit{ഘദ}}{(\textit{തഘ} - \textit{ഘദ})^2 - (\textit{തഗ} - \textit{ഗദ})^2}\right\}$$

$$\begin{aligned}= (\textit{ഗത} - \textit{ഗദ})^2\{(\textit{തഘ}^2 + \textit{ഗദ}^2 - 2\textit{തഘ}\times\textit{ഘദ}) - (\textit{ഗത}^2 + \textit{ഗദ}^2 - 2\textit{ഗത}\times\textit{ഗദ}&\\ + 2(\textit{ഗത}^2 - \textit{തഘ}^2) + 2(\textit{ഗദ}^2 - \textit{ഘദ})^2\}&\\ \div\{(\textit{തഘ} - \textit{ഘദ})^2 - (\textit{ഗത} - \textit{ഗദ})^2\}&\end{aligned}$$

$$= (\text{ഗത} - \text{ഗദ})^2 \times \frac{(\text{തഘ} - \text{ഘദ})^2 - (\text{ഗത} - \text{ഗദ})^2 + 4\,\text{ഘഗ}^2}{(\text{തഘ} - \text{ഘദ})^2 - (\text{ഗത} - \text{ഗദ})^2}$$

$$= (\text{ഗത} - \text{ഗദ})^2 \{1 + \frac{576}{(\text{തഘ} - \text{ഘദ})^2 - (\text{ഗത} - \text{ഗദ})^2}\}$$

$$(4\,\text{ഗഘ}^2 = 4 \times 12 \times 12 = 576)$$

അതായത് ഛായായോഗവർഗ്ഗം $=$ കർണ്ണാന്തരവർഗ്ഗം

$$\times \left\{ \frac{576}{\text{ഛായാന്തരവർഗ്ഗം} - \text{കർണ്ണാന്തരവർഗ്ഗം}} + 1 \right\}$$

ഛായായോഗം $=$ കർണ്ണാന്തരം

$$\sqrt{\left\{ \frac{576}{\text{ഛായാന്തരവർഗ്ഗം} - \text{കർണ്ണാന്തരവർഗ്ഗം}} + 1 \right\}}$$

ഛായാന്തരം ജ്ഞാതം.

അപ്പോൾ ഛായകളുടെ യോഗത്തിന്റെയും അന്തരത്തിന്റെയും യോഗാന്തരാർദ്ധങ്ങൾ ഛായകളാകുന്നവ.[30]

വ്യാഖ്യാനം 30: The problem in short is to find the base of a triangle when the difference between the two sides, the altitude and the difference between the segments into which the altitude divides the base, are given.

Let a be the base, b, c the sides, p the altitude, x, y the segments of a adjacent to b, c respectively.

Given $b - c$, $x - y$, and p. Required to find a.

$$b^2 - c^2 = x^2 - y^2$$

$$\therefore\ (b+c)(b-c) = (x+y)(x-y)$$

$$\therefore\ \frac{b+c}{x-y} = \frac{x+y}{b-c}$$

$$\therefore\ \frac{(b+c)^2}{(x-y)^2} = \frac{(x+y)^2}{(b-c)^2} = \frac{(b+c)^2 - (x+y)^2}{(x-y)^2 - (b-c)^2}$$

$$\therefore\ (x+y)^2 = (b-c)^2 \times \frac{(b+c)^2 - (x+y)^2}{(x-y)^2 - (b-c)^2}$$

$$= (b-c)^2 \left\{ 1 + \frac{(b+c)^2 + (b-c)^2 - (x+y)^2 - (x-y)^2}{(x-y)^2 - (b-c)^2} \right\}$$

$$= (b-c)^2 \left\{ 1 + \frac{2(b^2 + c^2 - x^2 - y^2)}{(x-y)^2 - (b-c)^2} \right\}$$

$$= (b-c)^2 \left\{ 1 + \frac{4p^2}{(x-y)^2 - (b-c)^2} \right\}$$

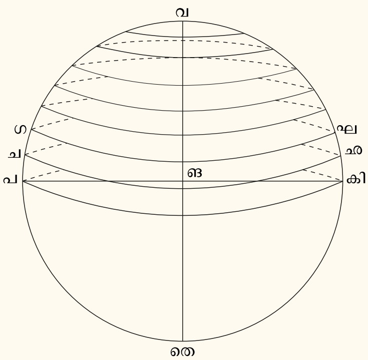
$$\therefore\ x + y = a = (b-c)\sqrt{\left\{ 1 + \frac{4p^2}{(x-y)^2 - (b-c)^2} \right\}}$$

ഗോളപൃഷ്ഠക്ഷേത്രഫലാനയനം

അനന്തരം പിന്നെ പിണ്ഡജ്യായോഗത്തിങ്കന്നു ഖണ്ഡാന്തരയോഗം ഉണ്ടാകും എന്നിതും വൃത്തവ്യാസങ്ങളെ ഒരിടത്ത് അറിഞ്ഞാൽ ഇഷ്ടത്തിങ്കലേക്കു ത്രൈരാശികം ചെയ്യാം എന്നിച്ചൊല്ലിയ രണ്ടു ന്യായവും കൂടിയാൽ ഗോളപൃഷ്ഠത്തിങ്കലെ ചതുരക്ഷേത്രഫലം ഉണ്ടാകും എന്നതിനെ ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ നേരെ ഉരുണ്ടിരിക്കുന്ന വസ്തുവിന്നു ഗോളമെന്നു പേർ. ഇങ്ങനെ ഇരിന്നോരു ഗോളത്തിന്റെ നേരെ നടുവേ സമപൂർവ്വാപരമായിട്ടും ദക്ഷിണോത്തരമായിട്ടും ഓരോ വൃത്തത്തെ കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ ഇസ്സമപൂർവ്വാപരത്തിങ്കന്നു കുറഞ്ഞൊന്നു തെക്കും വടക്കും നീങ്ങീട്ടു ഓരോ വൃത്തത്തെ കല്പിപ്പൂ. ഇവറ്റിന്നു സമപൂർവ്വാപരത്തിങ്കന്ന് ഉള്ള അകലം എല്ലാ അവയവത്തിങ്കന്നും തുല്യമായിരിക്കേണം. ആകയാൽ ഇവ രണ്ടും നടേത്തേതിനേക്കാൾ കുറഞ്ഞൊന്നു ചെറുതായിട്ടിരിക്കും. പിന്നേയും ഇച്ചൊല്ലിയവണ്ണം തന്നെ ഇവറ്റിങ്കന്നും തുടങ്ങി കുറഞ്ഞൊന്നു ചെറുതായി ചെറുതായി നാനാപ്രമാണങ്ങളായി പഴുത് എല്ലാറ്റിനും അന്യോന്യം അകലം ഒത്തു തെക്കേയും വടക്കേയും പാർശ്വത്തിങ്കൽ ഒടുങ്ങുമാറു ചില വൃത്തങ്ങളെ കല്പിപ്പൂ. ഇവറ്റിന്റെ അകലം ദക്ഷിണോത്തരവൃത്തത്തിങ്കൽ തുല്യമായിട്ടു കാണായിയിരിക്കേണം. ഇവ്വണ്ണമിരിക്കുന്നേടത്തു രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ പഴുതു വൃത്താകാരേണ ഇരിക്കുന്നതിനെ ഒരിടത്തു മുറിച്ചു ചുറ്റ് അഴിച്ചു നിവത്തുമാറു കല്പിപ്പൂ. അപ്പോൾ ഈ പഴുതിന്റെ ഇരുപുറവും ഉള്ള വൃത്തങ്ങളിൽ വലിയ വൃത്തം ഭൂമി, ചെറിയ വൃത്തം മുഖം, പിന്നെ ദക്ഷിണോത്തരവൃത്തത്തിങ്കലെ വൃത്താന്തരാളമായിട്ടിരിക്കുന്ന ചാപഖണ്ഡം പാർശ്വഭുജയായി സമലംബമായി ഇരിപ്പോരു ചതുരശ്രമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഒരു പാർശ്വത്തിങ്കലെ ലംബത്തിങ്കന്നു പുറവാ മുറിച്ചു മറ്റെ പാർശ്വത്തിങ്കൽ മേൽ കീഴ പകന്നു കൂട്ടൂ. അപ്പോൾ മുഖഭൂയോഗാർദ്ധം നീളമായി ലംബമിടയായി ഇരിപ്പോരു് ആയതചതുരശ്രമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഈവ്വണ്ണമെല്ലാമന്തരാളങ്ങളേയും ആയതചതുരശ്രമായിട്ടു കല്പിപ്പൂ. അപ്പോൾ ഇടമെല്ലാറ്റിനും തുല്യമായിട്ടിരിക്കും. നീളം നാനാപ്രമാണങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ നീളവുമിടവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ക്ഷേത്രഫലം. അവിടെ വിസ്താരമെല്ലാറ്റിന്നും തുല്യമാകയാൽ നീളമെല്ലാറ്റിന്റെയും കൂട്ടി വിസ്താരം കൊണ്ടു ഗുണിപ്പൂ. എന്നാൽ ഗോളപൃഷ്ഠഫലം വരും. ഇവിടെ അന്തരാളങ്ങൾ എത്ര ഉള്ളൂ എന്നും ഇവറ്റിന്റെ ആയാമവിസ്താരങ്ങൾ എത്ര എന്നുമറിവാൻ എന്ത് ഉപായം എന്നു പിന്നെ. ഇവിടെ ഇഗ്ഗോളവ്യാസാർദ്ധവൃത്തത്തിങ്കലെ അർദ്ധജ്യാക്കളായിട്ടിരിക്കും ഇക്കല്പിച്ച വൃത്തങ്ങളുടെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ. ആകയാൽ ഈ ജ്യാക്കളെ ഗോളപരിധിയെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഗോളവ്യാസാർദ്ധത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ അതതു ജ്യാവു വ്യാസാർദ്ധമായിട്ടിരിക്കുന്ന വൃത്തങ്ങളുണ്ടാം. ഇവ ഇദ്ദീഘചതുരശ്രങ്ങളുടെ നീളമായിട്ടിരിക്കും, അന്തരാളമദ്ധ്യത്തിങ്കലെ ജ്യാക്കളെ കല്പിച്ചുകൊണ്ടാൽ. പിന്നെ ഈ അർദ്ധജ്യായോഗത്തെ ഗുണിക്കിൽ എല്ലാ ക്ഷേത്രയാമങ്ങളുടെയും യോഗമുണ്ടാകും. ഇതിനെ വിസ്താരം കൊണ്ടു ഗുണിപ്പൂ. അപ്പോൾ ക്ഷേത്രഫലയോഗമുണ്ടാകും. മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ദക്ഷിണോത്തരവൃത്തത്തിങ്കലെ വൃത്താന്തരാളഭാഗങ്ങൾ യാവചിലവ അവ ഗോളപരിധിയിങ്കലെ ചാപഖണ്ഡമായിട്ടിരിക്കും. ഇതിന്റെ ജ്യാവ് ഇവിടെ ക്ഷേത്രവിസ്താരമാകുന്നത്. പിന്നെ ജ്യായോഗത്തെ വരുത്തുംപ്രകാരം. അവിടെ ഖണ്ഡാന്തരയോഗത്തെക്കൊണ്ടു

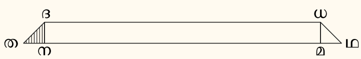
ഗോളവ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗത്തെ ഗുണിച്ച ചാപഖണ്ഡസമസ്തജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം അർദ്ധജ്യായോഗം. പിന്നെ ഇതിനെ ക്ഷേത്രവിസ്താരംകൊണ്ടു ഗുണിക്കേണം. വിസ്താരമാകുന്നതു ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ജ്യാവ്. ഖണ്ഡാന്തരയോഗമാകുന്നത് ആദ്യ ഖണ്ഡജ്യാവ്. ഇവറ്റിന്നു മിക്കവാറും അല്പത്വംകൊണ്ടു സമസ്തജ്യാതുല്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. ഇവ രണ്ടും ഗുണകാരങ്ങൾ, സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം ഹാരകം. എന്നാൽ ഗുണനവും ഹരണവും വേണ്ടാ. വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗംതന്നെ ശേഷിപ്പൂ. പിന്നെ പരിധിയെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിക്കേണം. അപ്പോൾ വ്യാസാർദ്ധംതന്നെ ശേഷിക്കും. പിന്നെ ഗോളത്തിന്റെ രണ്ട് അർദ്ധത്തിങ്കലെ ഫലവും ഉണ്ടാക്കേണ്ടുകയാൽ വ്യാസാർദ്ധത്തെ ഇരട്ടിക്കേണം. ആകയാൽ ഗോളവ്യാസത്തെ ഗോളപരിധിയെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഗോളപൃഷ്ഠത്തിങ്കലെ ചതുരശ്രഫലമുണ്ടാകും.

വ്യാഖ്യാനം: (1) പിണ്ഡജ്യായോഗത്തിങ്കന്നു ഖണ്ഡാന്തരയോഗമുണ്ടാകും. (2) വൃത്തവ്യാസങ്ങളെ ഒരിടത്തറിഞ്ഞാൽ ഇഷ്ടത്തിങ്കലേക്കു ത്രൈരാശികം ചെയ്യാം. എന്നീ രണ്ടു ന്യായങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഗോളപൃഷ്ഠത്തിങ്കലെ ക്ഷേത്രഫലത്തെ വരുത്താം.

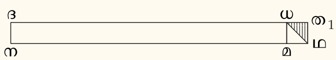


പരിലേഖം (58)(i)

ഒരു ഗോളത്തിന്റെ നടുവിലുള്ള സമപൂർവ്വാപരവൃത്തം *കിങപ* എന്ന്. (പരിലേഖം 58(i)) സമപൂർവ്വാപരവൃത്തത്തിങ്കന്നു തെക്കും വടക്കും ഗോളപ്രഷ്ഠത്തിങ്കൽ വൃത്തങ്ങളെ കല്പിക്ക. അടുത്ത് ഈരണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ തങ്ങളിലുള്ള അകലം എല്ലാ അവയവത്തിങ്കന്നും തുല്യങ്ങളായിരിക്കണം. ഈ അകലത്തെ ഗോളവൃത്തമായ ദക്ഷിണോത്തരവൃത്തത്തിങ്കൽ ചാപഖണ്ഡാകാരേണ കാണാം. വടക്കോട്ടും തെക്കോട്ടും പോകുംതോറും വൃത്തങ്ങൾ ചെറുതായി ചെറുതായി വരും. ഈ വൃത്തങ്ങളുടെ പരിധികൾ നാനാപ്രമാണങ്ങളാണെങ്കിലും അടുത്തുള്ള ഈരണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ തങ്ങളിലുള്ള അകലങ്ങൾ എല്ലാം തുല്യം. ഇങ്ങനെ തെക്കും വടക്കും ഗോളങ്ങളൊടുങ്ങുവോളം വൃത്തങ്ങളെ കല്പിപ്പൂ.



പരിലേഖം (58)(ii)



പരിലേഖം (58)(iii)

രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ ഇടയിലുള്ള ഗോളപൃഷ്ഠഭാഗത്തെ വൃത്താകാരേണയുള്ള പഴുതിൽകൂടി മുറിച്ചു നിവർത്തി വെക്കുകയാണെങ്കിൽ പരിലേഖം 58(ii)-ലെപ്പോലെ *തദധഥ* എന്നൊരു ക്ഷേത്രംവരും. അവിടെ വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ പരിധി *തഥ* ഭൂമി; ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ പരിധി *ദധ* മുഖം; ദക്ഷിണോത്തരവൃത്തത്തിങ്കലെ വൃത്താന്തരാളചാപഖണ്ഡം (*ദത*, *ധഥ*) പാർശ്വഭുജകൾ ഇങ്ങനെ സമലംബമായിരിക്കുന്ന ഒരു ചതുരശ്രമുണ്ടാകും. *ദന*, *ധമ* എന്ന രണ്ടു ലംബങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുക. *തദന* എന്ന ത്ര്യശ്രത്തെ മുറിച്ചു *ത* എന്നതിനെ *ധ*-യിലും *ദ* എന്നതിനെ *ഥ*-യിലും *തദ* എന്നതിനെ *ഥധ* മാർഗ്ഗേണയും വരുമാറു പരിലേഖം 58(iii)-ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നപോലെ ചേർക്കുക. എന്നാൽ *ദനഥന* എന്നൊരായതചതുരശ്രമുണ്ടാകും. ഇതിന്റെ നീളം $= \dfrac{\text{തഥ} + \text{ദധ}}{2}$; ഇട $=$ ലംബം. ഇതിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം $=$ ലംബം $\times \dfrac{\text{തഥ} + \text{ദധ}}{2}$. ഇങ്ങനെ എല്ലാ അന്തരാളഭാഗത്തിങ്കലെയും ക്ഷേത്രഫലത്തെ കാണാം. അപ്പോൾ അടുത്തു രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ മദ്ധ്യത്തിങ്കലുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയെ ലംബംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ആ അന്തരാളത്തിങ്കലെ ക്ഷേത്രഫലം വരും.

സമപൂർവ്വാപരവൃത്തത്തിങ്കന്നു മീത്തെയുള്ള ഗോളപൃഷ്ഠഭാഗത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം വരുത്തുവാൻ അപ്പുറത്തുള്ള അന്തരാളമദ്ധ്യത്തിങ്കലെ എല്ലാ വൃത്തപരിധികളുടേയും യോഗത്തെ ലംബംകൊണ്ടു ഗുണിക്കേണം.

ഈ പരിധികളെ $\text{പ}_1, \text{പ}_2, \text{പ}_3, \ldots$ എന്നു കല്പിക്കുക.

ഇവയുടെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങളെ $\text{ബ}_1, \text{ബ}_2, \text{ബ}_3, \ldots$ എന്നും കല്പിക്കുക. ഇവയെല്ലാം ഗോളവ്യാസാർദ്ധവൃത്തത്തിങ്കലെ അർദ്ധജ്യാക്കൾ.

ഗോളവ്യാസാർദ്ധം $=$ *വ*; ഗോളപരിധി $=$ *പ*.

$$\left.\begin{array}{l} \text{പ}_1 = \dfrac{\text{ബ}_1 \times \text{പ}}{\text{വ}} \\ \text{പ}_2 = \dfrac{\text{ബ}_2 \times \text{പ}}{\text{വ}} \\ \text{പ}_3 = \dfrac{\text{ബ}_3 \times \text{പ}}{\text{വ}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

(വൃത്തവ്യാസങ്ങളെ ഒരിടത്തു് അറിഞ്ഞാൽ ഇഷ്ടത്തിങ്കലേക്കു് ത്രൈരാശികം ചെയ്യാം എന്ന ന്യായംകൊണ്ടു്)

$$\therefore \quad \text{പ}_1 + \text{പ}_2 + \text{പ}_3 + \cdots = \frac{\text{പ}}{\text{വ}}\left(\text{ബ}_1 + \text{ബ}_2 + \text{ബ}_3 + \cdots\right)$$

$$\text{അർദ്ധജ്യായോഗം} = \text{ബ}_1 + \text{ബ}_2 + \text{ബ}_3 + \cdots$$

$$= \frac{\text{ഖണ്ഡാന്തരയോഗം} \times \text{വ}^2}{\text{അന്തരാളചാപഖണ്ഡത്തിലെ സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}}$$

$$\text{ഖണ്ഡാന്തരയോഗം} = \text{ആദ്യജ്യാഖണ്ഡം} - \text{ഒടുക്കത്തെ ജ്യാഖണ്ഡം}$$

അന്തരാളചാപഖണ്ഡത്തെ അണുപ്രായമായി കല്പിച്ചാൽ, ഒടുക്കത്തെ ജ്യാഖണ്ഡത്തെ ശൂന്യമെന്നുതന്നെ കല്പിച്ചു ഖണ്ഡാന്തരയോഗത്തെ ആദ്യഖണ്ഡജ്യാവെന്നുതന്നെ കല്പിക്കാം.

അപ്പോൾ ഖണ്ഡാന്തരയോഗം $=$ ആദ്യഖണ്ഡജ്യാവു്.

ലംബം $=$ അന്തരാളചാപഖണ്ഡത്തിലെ അർദ്ധജ്യാവു്.

ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ അല്പത്വം കൊണ്ടു് ആദ്യഖണ്ഡജ്യാവിനെയും ലംബത്തെയും സമസ്തജ്യാതുല്യമെന്നു കല്പിക്കാം.

അപ്പോൾ ഗോളപൃഷ്ഠഫലാർദ്ധം

$$\begin{aligned}
&= \frac{\text{പ}}{\text{വ}}\left(\text{ബ}_1 + \text{ബ}_2 + \text{ബ}_3 + \cdots\right) \times \text{ലംബം} \\
&= \frac{\text{പ}}{\text{വ}} \times \frac{\text{ഖണ്ഡാന്തരയോഗം} \times \text{വ}^2}{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}} \times \text{ലംബം} \\
&= \frac{\text{പ}}{\text{വ}} \times \frac{\text{വ}^2 \times \text{സമസ്തജ്യാവ്} \times \text{സമസ്തജ്യാവ്}}{\text{സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം}} \\
&= \frac{\text{പ}}{\text{വ}} \times \text{വ}^2 \\
&= \text{പ} \times \text{വ}
\end{aligned}$$

$$\therefore \;\; \text{ഗോളപൃഷ്ഠഫലം} = 2\text{വ} \times \text{പ} = \text{ഗോളപരിധി} \times \text{ഗോളവ്യാസം}.$$

ഗോളഘനക്ഷേത്രഫലാനയനം

അനന്തരം ഗോളത്തിങ്കലെ അർദ്ധഭാഗത്തിങ്കലെ ഘനക്ഷേത്രഫലത്തെ ചൊല്ലുന്നു. ഇവിടെ ഗോളപൃഷ്ഠഫലത്തെ അറിവാനായിക്കൊണ്ടു കല്പിപ്പാൻ ചൊല്ലിയ വൃത്തമാർഗ്ഗേണ മുറിപ്പൂ. അപ്പോൾ നേരേ പരന്നു വൃത്തങ്ങളായിരിപ്പോ ചിലവ ഖണ്ഡങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. അവിടെ പൃഷ്ഠഫലത്തിങ്കൽ പൂർവ്വാപരങ്ങളായിട്ടു വൃത്തങ്ങളെ കല്പിക്കുന്നു എങ്കിൽ ദക്ഷിണോത്തരവൃത്തത്തിങ്കലെ പരിധിഖണ്ഡത്തിന്റെ നീളമൊത്തിരിക്കേണം എന്നു നിയതമാകുന്നതു്. ഇവിടെ പിന്നെ എല്ലാ മുറികളും മുഴപ്പ് ഒത്തിരിക്കേണമെന്നു നിയതമാകുന്നത്. പിന്നെ എല്ലാ വൃത്തത്തിങ്കലേയും വർഗ്ഗക്ഷേത്രഫലമുണ്ടാക്കി ഓരോ മാനം മുഴപ്പു എന്നു കല്പിച്ചു തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയാൽ ഗോളത്തിന്റെ ഘനമുണ്ടാകും. വൃത്തക്ഷേത്രത്തിങ്കലെ വർഗ്ഗഫലത്തെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം പിന്നെ. വൃത്തക്ഷേത്രത്തെ വ്യാസമാർഗ്ഗേണ രണ്ടു പൊളിപ്പൂ സമമായിട്ടു്. പിന്നെ രണ്ടു പൊളിയിങ്കലും കേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി നേമിയിങ്കലോളം കീറൂ; നേമിയിങ്കലേടം എല്ലാറ്റിലും പരന്നു, കേന്ദ്രത്തിങ്കലേടം കൂർത്തു, ഇങ്ങനെ ഇരിക്കും. പിന്നെ രണ്ടു വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളേയും നേമീടെ രണ്ടു തലയുംപിടിച്ചു നിവർത്തി തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂ, കേന്ദ്രത്തിലെ കൂർത്തപ്രദേശം മറ്റേതിങ്കലെ പഴുതിൽ ചെല്ലുമാറു്. അപ്പോൾ വൃത്താർദ്ധം നീളമായി വ്യാസാർദ്ധം ഇടയായി ഇരിപ്പോരു് ആയതചതുരശ്രക്ഷേത്രം ഉണ്ടാകും. എന്നാൽ വൃത്താർദ്ധവും വ്യാസാർദ്ധവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചാൽ വൃത്തക്ഷേത്രത്തിങ്കലെ ചതുരശ്രഫലം ഉണ്ടാകും. എന്നാൽ അതതു് അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗത്തെ ഗോളപരിധി കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഗോളവ്യാസം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ അതതു ക്ഷേത്രഫലമുണ്ടാകും. പിന്നെ ഇവറ്റിന്റെ യോഗം ഗോളക്ഷേത്രഘനഫലമായിട്ടിരിക്കും. അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം. അവിടെ ശരവും ശരോനവ്യാസവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചാൽ അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും, കോടികർണ്ണയോഗം ശരോനവ്യാസം, അന്തരം ശരം, എന്നിട്ടു്. അവിടെ ശരത്തേയും ശരോനവ്യാസത്തേയും വർഗ്ഗിച്ചു കൂട്ടി വ്യാസവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ അതിനെ അർദ്ധിച്ചതും അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും, യോഗവർഗ്ഗവും വർഗ്ഗയോഗവും തങ്ങളിലന്തരം ദ്വിഗുണഘാതമായിട്ടിരിക്കും, എന്നിട്ടു്. അവിടെ

വൃത്തക്ഷേത്രങ്ങൾ പെരികെ കുറഞ്ഞ് അണുപ്രായമാത്രം മുഴപ്പായിട്ട് ഈ വൃത്തങ്ങളെ കല്പിക്കേണ്ടൂ. അവിടെ ഒരണുവായിട്ടിരിപ്പൊന്ന നടേത്തെ ശരം. ഈ ശരത്തിൽ ഓരോരോ അണുക്കൾ ഏറക്കൂടിയതു പിന്നെ പിന്നത്തെ ശരമാകുന്നത്. എന്നാലണുക്കളുടെ ഏകാദ്യേകോത്തരസംകലിതങ്ങൾ പ്രഥമദ്വിതീയാദി ശരങ്ങളാകുന്നത്. ആകയാൽ ഏകാദ്യേകോത്തരവർഗ്ഗസംകലിതം ശരവർഗ്ഗയോഗമാകുന്നത്. വ്യാസം ഗച്ഛമായിട്ടിരിപ്പോരുരാശി ഇത്. വ്യാസത്തെ അണുവായി ഖണ്ഡിച്ചിട്ടു വർഗ്ഗസംകലിതം ചെയ്യുന്നൂ. ഇതിനെ ഇരട്ടിച്ചതു ശരവർഗ്ഗയോഗവും ശരോനവ്യാസവർഗ്ഗയോഗവും കൂടിയതായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ ഒന്നു തുടങ്ങി വ്യാസാർദ്ധതുല്യമാവോളം കുറഞ്ഞതു ശരം വ്യാസാർദ്ധത്തിങ്കലേറിയതു ശരോനവ്യാസം. പിന്നെ ഏറിയതു ശരം കുറഞ്ഞതു ശരോനവ്യാസം എന്നു കല്പിക്കുമ്പോൾ ശരവർഗ്ഗയോഗവും ശരോനവ്യാസവർഗ്ഗയോഗവും തുല്യമായിട്ടിരിക്കും. എന്നിട്ട് ഏകാദ്യേകോത്തരസംകലിതത്തെ ഇരട്ടിപ്പാൻ ചൊല്ലീ. രണ്ടും തന്നെ ശരമത്രെ; വലിയ ശരം ഒന്ന്; ചെറിയ ശരം ഒന്ന്. രണ്ടിന്നും കൂടി ജ്യാവ് ഒന്ന് എന്നിങ്ങനെ കല്പിക്കിലുമാം. അവിടേ ശരവും ശരോനവ്യാസവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചത് അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗമാകുന്നത്.

“വൃത്തേ ശരസംവർഗ്ഗോർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗസ്സ ഖലു ധനുഷോഃ”[10] എന്നുണ്ട്.

പിന്നെ ശരവർഗ്ഗവും ശരോനവ്യാസവർഗ്ഗവും കൂടി വ്യാസവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു പോയ ശേഷത്തിന്റെ അർദ്ധവും അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും, വർഗ്ഗയോഗവും യോഗവർഗ്ഗവും തങ്ങളിൽ അന്തരം ദ്വിഗുണഘാതം എന്നിട്ട്. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ എത്ര അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗത്തെ ഉണ്ടാക്കേണം അത്രയിൽ ഗുണിക്കേണം വ്യാസവർഗ്ഗത്തെ. ആകയാൽ അണുച്ഛേദം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന വ്യാസത്തിന്റെ ഘനമായിട്ടിരിക്കുമത്. അവിടെ അണുച്ഛേദംകൊണ്ട് പിന്നെ ഹരിക്കേണ്ടുകയാൽ കേവലം വ്യാസഘനമായിട്ടേ ഇരിക്കു ഇത്. പിന്നെ അതിങ്കന്നു വർഗ്ഗസംകലിതത്തെ ഇരട്ടിച്ച് അതിനെ കളയേണം. വർഗ്ഗസംകലിതമാകുന്നതു ഘനത്ര്യംശം. ഇതിനെ ഇരട്ടിച്ചു കളയേണ്ടുകയാൽ ശിഷ്ടം ഘനത്ര്യംശം. പിന്നെ ഇതിനെ അർദ്ധിക്കേണ്ടുകയാൽ ഘനഷഷ്ഠാംശം. ആകയാൽ വ്യാസത്തെ ഘനിച്ച് ആറിൽ ഹരിച്ചതു ഗോളത്തിങ്കലെ നിരന്തരം ഉള്ള അർദ്ധജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗയോഗമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഇതിനെ പരിധികൊണ്ടു ഗുണിച്ചു വ്യാസംകൊണ്ടു ഹരിക്കേണം ആകയാൽ വ്യാസത്തെ നടേ തന്നെ ഘനിക്കേണ്ടാ, വർഗ്ഗിക്കവേണ്ടൂ, പിന്നെ ഹരിക്കേണ്ടുകയാൽ. എന്നാൽ വ്യാസവർഗ്ഗത്തെ ഗോളപരിധിയെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ആറിൽ ഹരിച്ച ഫലം ഗോളത്തിങ്കലെ ഘന ഫലമായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ ജ്യാവർഗ്ഗസംകലിതപ്രസംഗാൽ ശരവർഗ്ഗസംയോഗദ്വാരാ ഉണ്ടാകുന്ന ഘനഗോളഫലത്തെ ചൊല്ലീ പൃഷ്ഠഫലത്തെയും.[31]

വ്യാഖ്യാനം 31: If R is the radius of a sphere, then

$$\begin{aligned}\text{the area of the surface of the sphere} &= 4\pi R^2\\ &= (2\pi R)\times(2R)\end{aligned}$$

---

[10] ആര്യഭടീയം ഗണിതപാദം ശ്ലോകം 17.

$$\text{The cubic contents of the sphere} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{(2\pi R) \times (2R)^2}{6}$$

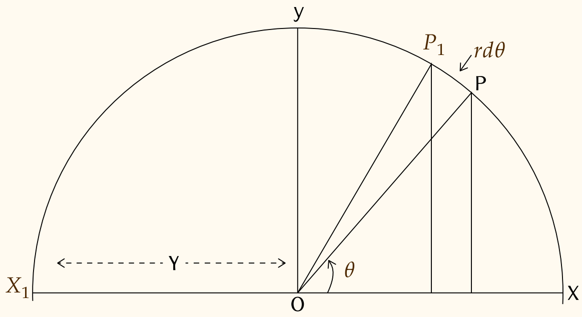
The result as shown above are now achieved by integral calculus as shown below.

A sphere can be supposed to be formed by the revolution of a semicircle about its diameter XOX'. Then every point P on the circumference having its polar co-ordinates r, θ will describe a circle whose radious is $r \sin\theta$. The arc $PP' = r \times d\theta$.

Hence the area produced by the rotation of $PP' = 2\pi r \times \sin\theta \times rd\theta$. Then the sum of all such areas formed up to the point Y

$$= \int_o^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r^2 \sin\theta \times d\theta = [-2\pi r^2 \cos\theta]_o^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 2\pi r^2$$

This is only half the surface of the sphere.



പരിലേഖം (59)

Hence the whole surface area $= 4\pi r^2$.

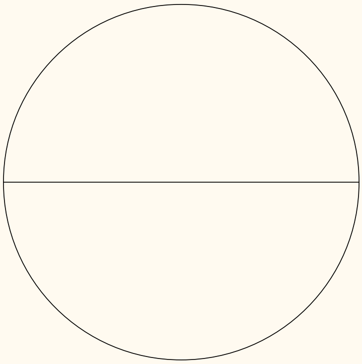
Again the volume of the element produced by the rotation of

$$PP' = \pi y^2 \times dx$$
$$\text{But } y = r\sin\theta,\ x = r\cos\theta$$
$$\therefore\ dx = -r\sin\theta d\theta$$
$$\therefore\ \pi y^2\, dx = \pi r^3 \sin^2\theta \sin\theta\, d\theta$$
$$\therefore\ \int_r^o \pi\, y^2 dx = -\pi\, r^3 \int_o^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\ \sin\theta\, d\theta$$
$$= \pi r^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^o (1 - \cos^2\theta)\ \sin\theta\, d\theta$$
$$= \pi r^3 \left[\cos\theta - \frac{\cos^2\theta}{3}\right]_{\frac{\pi}{2}}^o$$
$$= \pi r^3 (1 - \tfrac{1}{3})$$
$$= \tfrac{2}{3}\pi r^3$$

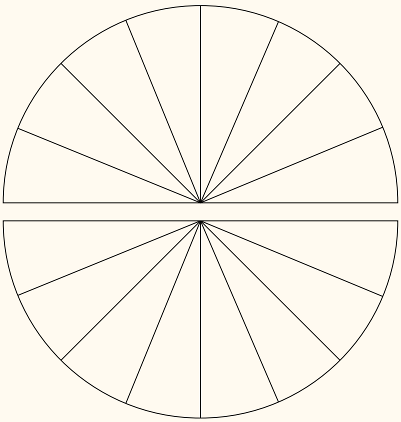
This is one half of the sphere. Hence the whole Volume

$$= \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi r^3}}$$

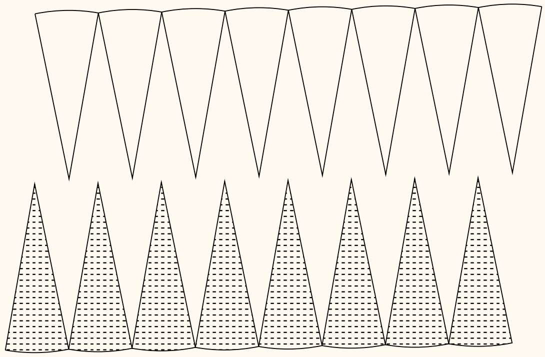
വ്യാഖ്യാനം: ഗോളത്തിന്റെ ഘനക്ഷേത്രഫലമുണ്ടാക്കേണ്ടുന്നിടത്തു വൃത്തക്ഷേത്രഫലത്തിന്റെ അപേക്ഷയുണ്ടാകകൊണ്ട് അതിനെ മുമ്പിൽ ഉണ്ടാക്കുന്നു. പരിലേഖം 60(i) ഒരു വൃത്തം. വൃത്തത്തെ ഒരു വ്യാസമാർഗ്ഗേണ രണ്ടു തുല്യഖണ്ഡങ്ങളായിട്ടു വിഭജിക്കും. (ii) പരിദ്ധ്യർദ്ധങ്ങൾ രണ്ടിനേയും തുല്യചാപഖണ്ഡങ്ങളായിട്ടു ഭാഗിക്കുക. എല്ലാ ചാപഖണ്ഡാഗ്രങ്ങളിൽനിന്നും വ്യാസാർദ്ധങ്ങളെ വരക്കുക. ചാപഖണ്ഡാഗ്രങ്ങളിൽ കുറച്ചു വേർപെടാതെ ഈ വ്യാസാർദ്ധങ്ങളിൽക്കൂടി മുറിച്ച്, പരിദ്ധ്യർദ്ധത്തിന്റെ രണ്ടറ്റവും പിടിച്ചു നിവർത്തി (iii)-ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നപ്രകാരം രണ്ടു ക്ഷേത്രങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുക. ഈ ക്ഷേത്രങ്ങളെ (iv)-ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നപ്രകാരം കൂട്ടിച്ചേർക്കുക. അപ്പോൾ രണ്ടു ഭുജകളും പരിദ്ധ്യർദ്ധത്തിനോടു തുല്യമായിട്ടും രണ്ടു ഭുജകൾ വ്യാസാർദ്ധത്തിനോടു തുല്യമായിട്ടും ഒരായതചതുരശ്രമുണ്ടാകും. ഇതിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം വൃത്തക്ഷേത്രത്തിനോടു തുല്യം. പരിദ്ധ്യർദ്ധത്തെ അസംഖ്യമായി ഖണ്ഡിക്കുകയാൽ ഈ ഉണ്ടായ ക്ഷേത്രത്തെ ആയതചതുരശ്രമെന്നുതന്നെ കല്പിക്കാം.



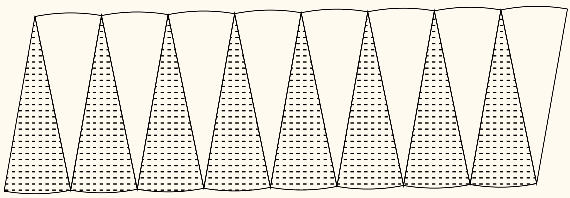
പരിലേഖം (60)(i)



പരിലേഖം (60)(ii)



പരിലേഖം (60)(iii)



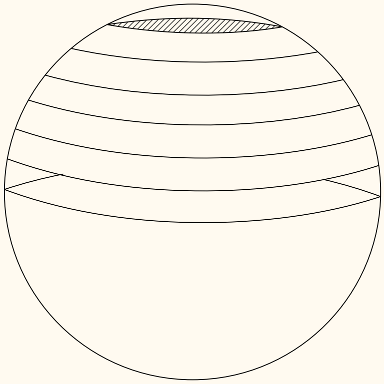
പരിലേഖം (60)(iv)

ആയതചതുരശ്രത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം = പരിദ്ധ്യർദ്ധം × വ്യാസാർദ്ധം

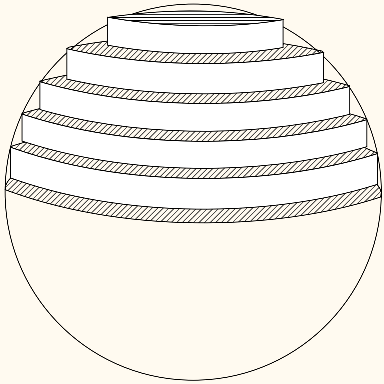
∴ വൃത്തക്ഷേത്രഫലം = പരിദ്ധ്യർദ്ധം × വ്യാസാർദ്ധം

അനന്തരം ഗോളഘനക്ഷേത്രഫലാനയനം:-

പരിലേഖനം 61-ൽ ഗോളപൃഷ്ഠഫലാനയനത്തിലെപ്പോലെ ഗോളസമപൂർവ്വാപരവൃത്തത്തിന്റെ തെക്കും വടക്കും ഗോളത്തിങ്കൽ ചില വൃത്തങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുന്നു.



a



b

പരിലേഖം (61)

ഗോളപൃഷ്ഠഫലാനയനത്തിങ്കൽ ഈരണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ തങ്ങളിലുള്ള അകലങ്ങൾ ദക്ഷിണോത്തരവൃത്തത്തിങ്കൽ തുല്യചാപഖണ്ഡങ്ങളായിട്ടിരിക്കേണമല്ലോ. എന്നാലിവിടെ അടുത്തുള്ള ഈരണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ ഇടയിലുള്ള ഗോളഖണ്ഡങ്ങളുടെ മുഴപ്പു തുല്യങ്ങളായിരിക്കേണം. അതായതു ഗോളഖണ്ഡങ്ങളുടെ പരന്ന വൃത്തങ്ങളുടെ അന്തരാളങ്ങൾ തുല്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കേണം. ഈ വൃത്തങ്ങളുടെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ ദക്ഷിണോത്തരവൃത്തത്തിങ്കലെ അർദ്ധജ്യാക്കളായിട്ടിരിക്കും. മുഴപ്പ് എല്ലായിടത്തും ത്രുപമെന്നു കല്പിക്ക.

അപ്പോൾ ഒരു ഖണ്ഡത്തിന്റെ ഘനക്ഷേത്രഫലം

$$= \text{ഖണ്ഡമദ്ധ്യവൃത്തക്ഷേത്രഫലം} \times 1$$

$$\text{വൃത്തക്ഷേത്രഫലം} = \text{പരിദ്ധ്യർദ്ധം} \times \text{വ്യാസാർദ്ധം}$$

(അതതു വൃത്തത്തെ സംബന്ധിച്ചുള്ളവ)

$$\text{വൃത്തപരിധി} = \frac{\text{ഗോളപരിധി} \times \text{അർദ്ധജ്യാവ്}}{\text{ഗോളവ്യാസാർദ്ധം}}$$

$$\therefore\ \text{വൃത്തക്ഷേത്രഫലം} = \frac{1}{2} \times \frac{\text{ഗോളപരിധി} \times \text{അർദ്ധജ്യാവ്}}{\text{ഗോളവ്യാസാർദ്ധം}} \times \text{അർദ്ധജ്യാവ്}$$

$$= \frac{\text{ഗോളപരിധി} \times \text{അദ്ധജ്യാവർഗ്ഗം}}{\text{ഗോളവ്യാസം}}$$

ഒരു വൃത്തത്തിൽ, ശരം × ശരോനവ്യാസം = (കർണ്ണം-കോടി)(കർണ്ണം+കോടി)

$$= \text{കർണ്ണവർഗ്ഗം-കോടിവർഗ്ഗം}$$
$$= \text{ഭുജാവർഗ്ഗം}$$
$$= \text{അദ്ധജ്യാവർഗ്ഗം}$$

$$\therefore \quad \text{അദ്ധജ്യാവർഗ്ഗം} = \frac{2 \times \text{ശരം} \times \text{ശരോനവ്യാസം}}{2}$$
$$= \frac{(\text{ശരം}+\text{ശരോനവ്യാസം})^2 - (\text{ശരം}^2+\text{ശരോനവ്യാസം}^2)}{2}$$
$$= \frac{\text{വ്യാസവർഗ്ഗം} - (\text{ശരം}^2 + \text{ശരോനവ്യാസം}^2)}{2}$$

ഇപ്പോൾ മുഴപ്പു രൂപമായിട്ടല്ലോ കല്പിച്ചതു്. പിന്നെ ഈ മുഴപ്പിനെ അണുവാക്കി കല്പിക്ക. അപ്പോൾ എല്ലാ ഖണ്ഡങ്ങളുടെയും മുഴപ്പു തുല്യമാകയാൽ ആദ്യജ്യാവിന്നു ശരം ഒരണു, രണ്ടാംജ്യാവിന്നു ശരം രണ്ടണു, മൂന്നാമത്തേതിന്നു മൂന്നു് ഇങ്ങനെ ക്രമേണ ഏറിയേറിയിരിക്കും. അണുക്കളുടെ ഏകാദ്യേകോത്തരങ്ങൾ പ്രഥമദ്വിതീയാദിശരങ്ങളാകുന്നവ.

അപ്പോൾ ശരവർഗ്ഗയോഗം $= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots$

വ്യാസത്തെ അണുവാക്കി വിഭജിക്കുക്കയാണെങ്കിൽ വ്യാസത്തിൽ എത്ര അണുക്കളുണ്ടോ ആ സംഖ്യ ഇവിടെ ഗച്ഛമാകുന്നതു്. ഗച്ഛം എന്നുവെച്ചാൽ ശ്രേണിയിലുള്ള സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം.

ശരം 1 എങ്കിൽ ശരോനവ്യാസം = വ്യാസം-1

ശരം 2 എങ്കിൽ ശരോനവ്യാസം = വ്യാസം-2

ശരം 3 എങ്കിൽ ശരോനവ്യാസം = വ്യാസം-3

. . . .

. . . .

ശരം(വ്യാസം-3) എങ്കിൽ ശരോനവ്യാസം = വ്യാസം−(വ്യാസം-3) = 3

ശരം(വ്യാസം-2) എങ്കിൽ ശരോനവ്യാസം = 2

ശരം(വ്യാസം-1) എങ്കിൽ ശരോനവ്യാസം = 1

$$\therefore \quad \text{ശരയോഗം} = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + \text{വ്യാസം}.$$
$$\text{ശരോനവ്യാസയോഗം} = \text{വ്യാസം} + (\text{വ്യാസം-}1) + \cdots + 1 + 0$$

ഇങ്ങനെ ശരയോഗവും ശരോനവ്യാസയോഗവും ഒന്നു തന്നെ.

$$\therefore \quad \text{ശരവർഗ്ഗയോഗം} = \text{ശരോനവ്യാസവർഗ്ഗയോഗം}$$

ശരത്തിന്നും ശരോനവ്യാസത്തിന്നും അദ്ധജ്യാവു് ഒന്നു തന്നെ.

$$\therefore \quad \text{അദ്ധജ്യാവർഗ്ഗം} = \frac{\text{വ്യാസവർഗ്ഗം} - 2\text{ശരവർഗ്ഗം}}{2}$$
$$= \frac{\text{വ്യാസവർഗ്ഗം}}{2} - \text{ശരവർഗ്ഗം}$$

ഗച്ഛം വ്യാസസംഖ്യയാകയാൽ, അദ്ധജ്യാവഗ്ഗയോഗം

$$= \frac{\text{വ്യാസം} \times \text{വ്യാസവഗ്ഗം}}{2} - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \text{വ്യാസവഗ്ഗം})$$

$$= \frac{\text{വ്യാസഘനം}}{2} - \frac{\text{വ്യാസഘനം}}{3}$$

$$= \frac{\text{വ്യാസഘനം}}{6}$$

$$\therefore \quad \text{ഗോളഘനക്ഷേത്രഫലം} = \frac{\text{ഗോളപരിധി}}{\text{ഗോളവ്യാസം}} \times \text{അദ്ധജ്യാവഗ്ഗയോഗം}$$

$$= \frac{\text{ഗോളപരിധി}}{\text{ഗോളവ്യാസം}} \times \frac{\text{ഗോളവ്യാസഘനം}}{6}$$

$$= \frac{\text{ഗോളപരിധി} \times \text{ഗോളവ്യാസവഗ്ഗം}}{6}$$

$$= \frac{\text{ഗോളപൃഷ്ഠക്ഷേത്രഫലം} \times \text{ഗോളവ്യാസം}}{6}$$

അനുബന്ധം

കുട്ടാകാരക്രിയാ (തന്ത്രസംഗ്രഹം)

നിരഗ്രകുട്ടാകാരം:

അനന്തരം കുട്ടാകാരമാകുന്ന ഗണിതത്തിന്റെ ക്രിയചൊല്ലുവാനായികൊണ്ടു തുടങ്ങുന്നേടത്ത് അതിന്റെ വിഷയത്തെ കാട്ടുന്നു.

ഭാജ്യോയേന ഹതശ്ശുദ്ധിഹീനഃ ക്ഷേപാന്വിതോഥവാ |
ശക്യോ ഹാരേണ നിശ്ശേഷം ഹർത്തും സ ഗുണകസ്തു കഃ || 1
തൽഫലം ച കിമിത്യേതൽ കുട്ടാകാരേണ ഗമ്യതേ |

കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ ഗുണ്യത്തെ **ഭാജ്യ**മെന്നും ശേഷത്തെ **അഗ്ര**മെന്നും ചൊല്ലുന്നു ഭാജ്യത്തെ യാതൊന്നുകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ഇഷ്ടശുദ്ധിയെ (ശുദ്ധി = കളയേണ്ടും സംഖ്യ) കളയുകയോ, ഇഷ്ടക്ഷേപത്തെ (ക്ഷേപം = കൂട്ടേണ്ടും സംഖ്യ) കൂട്ടുകയോ ചെയ്തനന്തരം **ഹാരകം**കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശേഷം ഇല്ലാതെയിരിക്കും, അങ്ങനെയുള്ള **ഗുണകാര**മെന്ത് എന്നും ഹരിച്ചാൽ ഫലം എന്ത് എന്നും അറിവാനുള്ള ഉപായത്തെ നിരഗ്രകുട്ടാകാരക്രിയ എന്നു പറയുന്നു.

ഭാജ്യഹാരകങ്ങളെ അപവർത്തിക്കുംപ്രകാരം:

രാശ്യോരന്യോന്യഹൃതയോശ്ശേഷസ്സ്യാദപവർത്തനം || 2
സ്വാപവർത്തഹൃതൗ ഭാജ്യഹാരകൗ ദൃഢസംജ്ഞിതൗ |
തേനാപവർത്തേനൈവാപ്താ ദൃഢാ ശുദ്ധിര്യുതിശ്ചവാ || 3

സംഭവിക്കുമെങ്കിൽ, ഒടുക്കത്തെ ശേഷം ശൂന്യമാവോളം ഭാജ്യത്തേയും ഹാരകത്തേയും അന്യോന്യം ഹരണം ചെയ്താൽ ഒടുക്കത്തെ ഹാരകത്തിന്ന് **അപവർത്തനം** എന്നുപേർ. ഒടുക്കത്തെ ശേഷം എന്നു വെച്ചാൽ ഒടുക്കത്തെ ഹാരകമെന്നർത്ഥം. ഈ അപവർത്തന സംഖ്യകൊണ്ട് ഭാജ്യത്തേയും ഹാരകത്തേയും ഹരിച്ചാൽ ഫലങ്ങൾക്ക് **ദൃഢഭാജ്യഹാരകങ്ങൾ** അല്ലെങ്കിൽ **ദൃഢഭാജ്യഭാജകങ്ങൾ** എന്നു പേർ. ഈ അപവർത്തനംകൊണ്ടുതന്നെ ക്ഷേപത്തേയോ ശുദ്ധിയേയോ ആവശ്യമുള്ളതിനേയും ഹരിക്കേണം. ഇങ്ങനെ അപവർത്തനം കൊണ്ടു ക്ഷേപത്തേയോ ശുദ്ധിയേയോ മുടിയത്തക്കവണ്ണം ഹരിക്കുവാൻ തരമാവാത്ത ദിക്കിൽ കുട്ടാകാരക്രിയചെയ്യാനും തരമില്ല. "യേനച്ഛിന്നൗ ഭാജ്യഹാരൗ ന തേന ക്ഷേപശ്ചൈതദ്ദുഷ്ടമുദ്ദിഷ്ട മേവ" എന്നു ലീലാവതിയിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. ഈ അപവർത്തിത

ങ്ങളായിരിക്കുന്ന ക്ഷേപശുദ്ധികൾക്കു **ദൃഢക്ഷേപശുദ്ധികൾ** എന്നു പേർ. കുട്ടാകാരക്രിയ ചെയ്യുന്നേടത്തെല്ലാം ഈ ദൃഢങ്ങളായിരിക്കുന്ന വസ്തുക്കളെ ഉപയോഗിക്കണം.

കുട്ടാകാരപ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

(ക) അന്യോന്യഹരണവും വല്ല്യാനയനവും:

ദൃഢയോർഭാജ്യഹരയോരല്പേനാദൗ ഹരേൽ പരം |
തത്തച്ഛേഷേണ ഭൂയോപി യാവദല്പം മിഥോ ഹരേൽ || 4
ഫലാന്യധോധഃ ക്രമശോ വല്ലീരൂപേണ നിക്ഷിപേൽ |
തത്തച്ഛേഷഞ്ച സംരക്ഷേൽ പൃഥക് സർവ്വാനപി ക്രമാൽ || 5

ദൃഢങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഭാജ്യഹാരങ്ങളിൽവെച്ച് ചെറിയതിനെക്കൊണ്ടു വലിയതിനെ ഹരിക്ക. ശേഷംകൊണ്ടു മുമ്പിലത്തെ ഹാരകത്തെ ഹരിക്ക. ഇതിന്റെ ശേഷംകൊണ്ട് ഇതിന്റെ ഹാരകത്തെ ഹരിക്ക. ഇങ്ങനെശേഷം ചെറുതാവോളം ക്രിയചെയ്ക. ഫലങ്ങളെ ക്രമേണ മേൽകീഴായി **വല്ലീ**രൂപേണ വെക്ക. ശേഷങ്ങളെയും കളയാതെ സൂക്ഷിക്കണം.

(ഖ) മതികല്പിക്കുംപ്രകാരം:

ഭാജ്യഹാരകയോരല്പസ്യാല്പശ്ശേഷസ്തദാ യദാ |
വല്ലീഫലാനാം യുഗ്മത്വം തദോജത്വേ വിപര്യയാൽ || 6
ഭാജ്യശേഷേ യദാല്പത്വം മതിസ്തത്ര പ്രകല്പ്യതാം |

വല്ലീഫലങ്ങൾ യുഗ്മസംഖ്യങ്ങളായിരിക്കുമ്പോൾ ഭാജ്യഹാരകങ്ങളിൽവെച്ചു കുറഞ്ഞതിന്റെ ശേഷം കുറഞ്ഞതു്, ഏറിയതിന്റെ ശേഷം ഏറിയതു്. ഓജസംഖ്യകളാകുമ്പോൾ വിപരീതം. അന്യോന്യഹരണത്തിൽ ഒടുക്കത്തെ ശേഷം എല്ലായ്പ്പോഴും **അല്പശേഷം.** അതിനു മുമ്പിലത്തെ ശേഷം **മഹാശേഷം.** ഒടുക്കത്തെ ശേഷത്തെ സ്വീകരിക്കാത്തപക്ഷം അതിന്റെ മുകളിലുള്ള രണ്ടു ശേഷങ്ങളിൽ ചുവട്ടിലേതു് അല്പശേഷം, മുകളിലേതു മഹാശേഷം, ഇങ്ങനെ കണ്ടു കൊൾക. വല്ലീഫലങ്ങൾ യുഗ്മസംഖ്യകളാകുമ്പോൾ ഒടുക്കത്തെ അല്പശേഷം ഭാജ്യഹാരകങ്ങളിൽ വെച്ചു കുറഞ്ഞതിന്റേതായിരിക്കും. ഓജത്വത്തിങ്കൽ വിപരീതവും. ഭാജ്യശേഷം അല്പശേഷമാകുമ്പോൾ സാമാന്യേന **മതി** കല്പിക്കപ്പെടുന്നു.

(ഗ) മതിയുടെ സ്വരൂപം:

യേനാഹതോല്പശേഷോയം ശുദ്ധ്യൂനഃ ക്ഷേപയുക്ച വാ || 7
മഹാശേഷേണ നിശ്ശേഷം ഹ്രിയതേ സ ഗുണോ മതിഃ |

അല്പശേഷത്തെ യാതൊന്നുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ശുദ്ധിയെ കളയുകയൊ ക്ഷേപത്തെ കൂട്ടുകയൊ ചെയ്തു മഹാശേഷംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശേഷമില്ലാതെ വരുന്നു, അഗ്ഗുണകാരത്തിനു **മതി** എന്നു പേർ. മഹാശേഷം കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം **മതിഫലം.**

(ഘ) വല്ല്യുപസംഹാരം:

താം ഫലാനാമധോ ന്യസ്യ തദധശ്ച മതേഃ ഫലം || 8
ഉപാന്ത്യേന ഹതേ സ്വോർദ്ധ്വേ ക്ഷിപേദന്ത്യം മുഹുസ്തഥാ |
കുര്യാദ്രാശിദ്വയം യാവൽ ഗുണോ രാശിരിഹോർദ്ധ്വഗഃ || 9
അധോഗസ്തു ഫലം ഹാരേധികേ ഭാജ്യേധികേന്യഥാ |

മുൻ ഉണ്ടാക്കിയിരിക്കുന്ന വല്ലിയുടെ താഴെ മതിയെ വെക്ക. മതിയുടെ താഴെ മതിഫലത്തെ വെക്ക. ഈ വല്ലിയുടെ ഒടുക്കത്തെ സംഖ്യക്ക് അന്ത്യമെന്നു പേർ. അതിന്റെ മുകളിലുള്ളതി

ന്ന് ഉപാന്ത്യമെന്ന പേർ. അതിന്നും മുകളിലുള്ളതിന്ന സ്വോദ്ധ്വമെന്ന പേർ. സ്വോദ്ധ്വത്തെ ഉപാന്ത്യംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അന്ത്യത്തെ കൂട്ടി സ്വോദ്ധത്തിന്റെ നേരെ വെക്കുക. അന്ത്യം മേലാൽ ആവശ്യമില്ലാത്തതിനാൽ കളയുകയും ചെയ്യാം. ഇപ്പോൾ ഒരു പുതിയ വല്ലി ഉണ്ടായി. അതിൽ അന്ത്യം മുൻ ഉപാന്ത്യം. ഉപാന്ത്യം മുൻ ക്രിയകൊണ്ടു ലഭിച്ച ഫലം. സ്വോദ്ധം മുമ്പിലത്തെ വല്ലിയിൽ ഒടുവിൽനിന്നു നാലാമത്തെ ഫലം. ഇവിടെയും സ്വോദ്ധ്വത്തെ ഉപാന്ത്യംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അന്ത്യം കൂട്ടുക. അന്ത്യം കളയുകയും ചെയ്യുക. ഇങ്ങനെ രണ്ടു രാശികളാവോളം ക്രിയ ചെയ്യുക. ഈ ക്രിയക്കു **വല്ല്യപസംഹാര**മെന്ന പേർ. കുട്ടാകാരത്തിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഗുണകാരവും ഫലവും ഈ രാശികളാകുന്നു. ഭാജ്യഹാരകങ്ങളിൽ വെച്ച ഹാരകമേറുന്നതെങ്കിൽ ഇവിടെ മേലേരാശി ഗുണകാരം, കീഴെരാശി ഫലം; ഭാജ്യമേറുന്നതെങ്കിൽ കീഴെരാശി ഗുണകാരം, മേലെരാശി ഫലം. ഇങ്ങനെ സാമാന്യനിരഗ്രകുട്ടാകാര ക്രിയ.

ക്രിയയിലെ ചില വിശേഷങ്ങൾ: തക്ഷണം

ത ഏവ ഭാജ്യഹാരാഭ്യാം തഷ്ടേ ഗുണഫലേ ക്വചിൽ || 10
ശേഷാത്ഥമേവ ഹരണം തക്ഷണം ന ഫലായ തൽ |
ഗുണലബ്ധ്യോസ്സമം ഗ്രാഹ്യം ധീമതാ തക്ഷണേ ഫലം || 11
ഇഷ്ടഹതസ്വസ്വതക്ഷണാഢ്യൗ ലബ്ധിഗുണൗ തു വാ |

ചിലപ്പോൾ ഗുണകാരഫലങ്ങളെ തക്ഷിക്കേണ്ടിവരും. തക്ഷണം എന്നത് ഒരു ഹരണവിശേഷം. ഫലം ഉദ്ദിഷ്ടമായിരിക്കുമ്പോൾ ആ ഹരണത്തെ ഹരണമെന്നു പറയുന്നു. **ശേഷം മാത്രം ഉദ്ദിഷ്ടമായിരിക്കുമ്പോൾ അതിന്നു തക്ഷണം എന്നു പറയുന്നു.** തക്ഷണത്തിങ്കൽ ശേഷങ്ങൾ മാത്രമെ ആവശ്യമുള്ളൂ. ഫലങ്ങൾ കളയാം. ഗുണകാരത്തിന്റെ തക്ഷണഹാരകം ഫാരകം; ഫലത്തിന്റെ തക്ഷണ ഹാരകം ഭാജ്യം. ഇവിടെ തക്ഷിതഫലങ്ങളും (അതായതു ഹരണശേഷങ്ങൾ) ഗുണകാരഫലങ്ങളാകുന്നു. ഫലത്തെ അറിവാനായിക്കൊണ്ടു ഹാരകത്തെ ആവർത്തിച്ച വാങ്ങുക ഹരിക്കയാകുന്നു. ശേഷത്തെ അറിവാനായിക്കൊണ്ട് ഹാരകത്തെ ആവർത്തിച്ച വാങ്ങുക **തക്ഷണ**മാകുന്നു. ഗുണകാരഫലങ്ങളെ തക്ഷിക്കുമ്പോൾ തന്റെ തക്ഷണമായ ഹാരകത്തേയോ ഭാജ്യത്തേയോ ഗുണകാരത്തിൽ നിന്നോ ഫലത്തിൽ നിന്നോ **എത്ര ആവർത്തിച്ച** വാങ്ങി, ഫലത്തിങ്കന്നോ ഗുണകാരത്തിന്നോ സ്വസ്വതക്ഷണമായ ഭാജ്യത്തെയൊ ഹാരകത്തേയൊ **അത്ര ആവർത്തിച്ച** വാങ്ങണം. അവ്വണ്ണംതന്നെ ഗുണകാരഫലങ്ങളിൽ തങ്ങൾതങ്ങളുടെ തക്ഷണങ്ങളെ ഒരിഷ്ടസംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ച കൂട്ടിയാലും ഗുണകാരഫലങ്ങൾ ലഭിക്കും.

തക്ഷണത്തിങ്കലെ വിശേഷത്തെ ചൊല്ലുന്നു

യദാ വല്ല്യപസംഹാരേ സ്യാദ്യത്രാധികസംഖ്യതാ || 12
തദാ തൽസ്ഥാനഗൈശ്ശേഷൈഃ കയ്യാദ്വാ തക്ഷണം മുഹുഃ |

യാതൊരിക്കൽ വല്ല്യപസംഹാത്തിന്നിടയിൽതന്നെ അതതു ശേഷത്തെക്കാൾ രാശിക്ക് അധികസംഖ്യത ഉണ്ടാകുന്നു, അപ്പോൾ **ആസ്ഥാനത്തിങ്കലെ ശേഷത്തെ**ക്കൊണ്ട് രാശിയെ തക്ഷിക്കാം. എന്നാൽ **കീഴെ സ്ഥാനത്തെ ശേഷത്തെക്കൊണ്ട് കീഴെ രാശിയേയും തക്ഷിക്കേണം.**

മതികല്പനത്തിങ്കലെ വിശേഷം:

അഥാല്പേ ഹാരശേഷ ചേന്മതിഃ കല്പ്യേത തത്ര തു || 13
ശുദ്ധിക്ഷേപൗ വിപര്യസ്തം കല്പയിത്വോക്തവൽ ക്രിയാ |

ഭാജ്യശേഷം കുറയുമ്പോൾ മതികല്പിക്കുവാനാണല്ലോ സാമാന്യവിധിയിൽ പറഞ്ഞത്. ഹാരശേഷം കുറയുമ്പോൾ മതികല്പിക്കുന്നു എന്നിരിക്കിൽ ശുദ്ധിക്ഷേപങ്ങളെ **പകർന്നുകല്പിച്ച്** മുമ്പിലെപ്പോലെ ക്രിയചെയ്താൽ മതിയാകും. ശുദ്ധി ഉദ്ദിഷ്ടമായതെങ്കിൽ അതിനെ ക്ഷേപം എന്നു കല്പിക്കേണം. ക്ഷേപം ഉദ്ദിഷ്ടമായതെങ്കിൽ ശുദ്ധി എന്നു കല്പിക്കേണം.

യദാ പുനഹ്ാരാഭാജ്യശേഷയോരധികേ മതിഃ || 14
കല്പ്യതേത്ര മതിസ്ത്വന്തേ സ്ഥാപ്യോപാന്ത്യേ ച തൽഫലം |

ചെറിയശേഷം ഭാജ്യമായും വലിയ ശേഷം ഹാരകമായും മതിവരുത്തുവാനാണല്ലൊ മുമ്പിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ളത്. എന്നാൽ യാതൊരിക്കൽ വലിയ ശേഷത്തെ ഭാജ്യമാക്കിയും ചെറിയ ശേഷത്തെ ഹാരകമാക്കിയും മതികല്പിക്കപ്പെടുന്നു, അവിടെ വല്ലിയിങ്കൽ **അന്ത്യമായിട്ടു മതി**യെ വെക്കുക, **ഉപാന്ത്യമായിട്ടു മതിഫലത്തേയും** വെക്കുക. ശേഷം ക്രിയ മുമ്പിലെപ്പോലെ. ഇവിടെ വലിയ ശേഷം ഭാജ്യശേഷമാകണം. വലിയശേഷം ഹാരകശേഷമെങ്കിൽ ശുദ്ധിക്ഷേപങ്ങളെ പകർന്നു കല്പിക്കേണം.

മതികല്പനത്തിങ്കൽ പ്രകാരാന്തരം:

മതേരപ്രതിഭാനേത്വ യാവദ്രൂപസ്യ ശേഷതാ || 15
ഭാജ്യേ വാ ഹാരകേ വാ സ്യാത്താവദേവം മിഥോ ഹരേൽ |
ഭാജ്യേ ചേച്ഛിഷ്യതേ രൂപം ശുദ്ധേസ്സ്യാന്മതിതാ തദാ | 16
ക്ഷേപസ്യ മതിതാന്യത്ര ശൂന്യം മതിഫലം തായോഃ |
ശുദ്ധിക്ഷേപൗ വിപര്യസ്തൗ ഭവേതാം തഹ്ി പൂർവ്വവൽ || 17
ലബ്ധൗ ലബ്ധി ഗുണൗ സ്വസ്വതക്ഷണാച്ഛോധിതൗ സ്ഫുടൗ |

കുറെനേരം അന്യോന്യഹരണം ചെയ്തതിന്റെശേഷം മതിതോന്നിയില്ല എന്നു വരുകിൽ ഭാജ്യത്തിങ്കലോ ഹാരകത്തിങ്കലോ **രൂപം** ശേഷിക്കുന്നതുവരെ ഹരിക്കുക. ഭാജ്യത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കുന്നതെങ്കിൽ ശുദ്ധിതന്നെ മതിയാകുന്നത്. ഹാരകത്തിലെങ്കിൽ ക്ഷേപം തന്നെ. രണ്ടേടത്തും മതിഫലം ശൂന്യം. ഇപ്രകാരം വല്ലി ഉണ്ടാക്കി മുന്നേപ്പോലെ ക്രിയ ചെയ്താൽ ഗുണകാരഫലങ്ങൾ ലഭിക്കും. എന്നാൽ ഭാജ്യത്തിൽ രൂപം ശേഷിച്ചിരിക്കുമ്പോൾ ക്ഷേപം ഉദ്ദിഷ്ടമായിരിക്കുന്നതെന്നോ, ഹാരകത്തിൽ രൂപം ശേഷിച്ചിരിക്കുമ്പോൾ ശുദ്ധി ഉദ്ദിഷ്ടമായിരിക്കുന്നതെന്നോ വരും വിഷയത്തിൽ ചെയ്യേണ്ട ഉപായത്തെ പറയുന്നു. ഇവിടെ ശുദ്ധിക്ഷേപങ്ങളെ പകർന്നു കല്പിച്ചു ഗുണകാരഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കു. ഈ ഗുണകാരഫലങ്ങളെ തന്റെ തന്റെ തക്ഷണത്തിങ്കന്നു വാങ്ങി ശേഷിച്ചവ സ്ഫുടങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഗുണകാരഫലങ്ങളായിട്ടു വരും. ഹാരകശേഷം കുറയുമ്പോൾ മതി കല്പിച്ചുവെങ്കിൽ ശുദ്ധിക്ഷേപങ്ങളെ പകർന്നു കല്പിക്കേണമെന്നു മുമ്പിൽ പറഞ്ഞുവല്ലോ. ശുദ്ധിക്ഷേപങ്ങളെ പകരാതെ തന്നെ ക്രിയ ചെയ്തുണ്ടായ ഗുണകാരഫലങ്ങളെ തന്റെ തന്റെ തക്ഷണത്തിൽ നിന്നു വാങ്ങി ശേഷിച്ചവയും സ്ഫുടഗുണകാരഫലങ്ങളായിട്ടു വരുമെന്ന് ഈ ന്യായംകൊണ്ടു വന്നു.

ഗുണകാരഫലങ്ങളെ അറിവാൻ പ്രകാരാന്തരം:

രൂപേ ക്ഷേപേഥവാ ശുദ്ധൗ ഗുണാപ്തീയേ പ്രസാധിതേ || 18
ഇഷ്ടഘ്നേ തേ ക്രമാൽ സ്യാതാമിഷ്ടക്ഷേപവിശുദ്ധിജേ |

രൂപത്തെ ക്ഷേപമെന്നോ ശുദ്ധിയെന്നോ കല്പിച്ച് മുമ്പിലെപ്പോലെ ക്രിയചെയ്തു ഗുണകാരഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി അവറ്റെ ഇഷ്ട സംഖ്യ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ക്രമത്താലെ ഇഷ്ടസംഖ്യാക്ഷേപമൊ ശുദ്ധിയൊ ആയിട്ടുള്ള ഗുണകാരഫലങ്ങൾ ഉളവാകും.

അനന്തരം **രാശിശേഷാദികൾ ക്ഷേപശുദ്ധികളാകുമ്പോളുള്ള ക്രിയാ**വിശേഷത്തെ പറയുന്നു.

രാശിഭാഗകലാദീനാം ശേഷേ ദൃഷ്ടേ യഥായഥം || 19
ദ്വാദശാദിഹതോ ഭാജ്യോ ഗ്രാഹ്യശ്ശേഷന്തു പൂർവ്വവൽ |

മദ്ധ്യമങ്ങൾ രാശ്യാദിശേഷങ്ങളാകുന്നു. രാശിശേഷം ക്ഷേപമായൊ ശുദ്ധിയായൊ കാണപ്പെട്ടുവെങ്കിൽ ഭാജ്യത്തെ പന്ത്രണ്ടിൽ ഗുണിച്ചതു ഭാജ്യമായി കല്പിക്കേണം. അവ്വണ്ണം ഭാഗശേഷമെങ്കിൽ ഭാജ്യത്തെ മുന്നൂറ്റിഅറുപതിൽ ഗുണിക്കേണം. കലാശേഷമാണെങ്കിൽ ഭാജ്യത്തെ ഇരുപത്തോരായിരത്തി അറുനൂറിൽ ഗുണിക്കേണം. ഇവ്വണ്ണം വികലാദി ശേഷങ്ങൾക്കും ഊഹിച്ചുകൊള്ളുണം. മറ്റു ക്രിയകൾ മുമ്പിലെപ്പോലെ.

നിരഗ്രകുട്ടാകാരക്രിയയുടെ വിശദീകരണത്തിനായിക്കൊണ്ട് ഒരു ഉദാഹരണത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

യൽ ഗുണാസ്സൂര്യ്യ ഭഗണാഃ ഖഖതത്വാശ്വിഭിര്യ്യുതാഃ || 20
ഹീനാ വാ ഭൂദിനൈർഭക്താ നിശ്ശേഷാസ്തം ഗുണം വദ |

ആദിത്യന്റെ ഭഗണങ്ങളെ യാതൊന്നുകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ഇരുപത്തീരായിരത്തി അഞ്ഞൂറു കൂട്ടുകതാൻ കളയുകതാൻ ചെയ്തു ഭൂദിനങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശേഷമില്ലാതെ മുടിയും, അങ്ങനെയുള്ള ഗുണകാരത്തെ ചൊല്ലുക.

ഭാജ്യം = ആദിത്യഭഗണം = 4320000
ഹാരകം = ഭൂദിനം = 1577917500
ക്ഷേപം അല്ലെങ്കിൽ ശുദ്ധി = 22500
അപവർത്തനഹാരകം = 7500
അപ്പോൾ ദൃഢഭാജ്യം = 576
ദൃഢഹാരകം = 210389
ദൃഢക്ഷേപം അല്ലെങ്കിൽ ദൃഢശുദ്ധി = 3

ദൃഢഭാജ്യഹാരകങ്ങളെ അന്യോന്യം ഹരണം ചെയ്താൽ,

ഫലങ്ങൾ — $365, 3, 1, 6, 2, 4$
ശേഷങ്ങൾ — $149, 129, 20, 9, 2, 1$

I. ഇവിടെ ഹാരകം ഭാജ്യത്തേക്കാളേറുന്നു. ക്ഷേപം $= 3$.

ആദ്യത്തെ നാലു ഫലങ്ങളെ വല്ലിയിൽ ക്രമേണ വെക്കു,

യുഗ്മഫലമാകയാൽ നാലാമത്തെ ശേഷം 9 ഭാജ്യശേഷമാകുന്നു.

അപ്പോൾ അല്പശേഷം $= 9$; മഹാശേഷം $= 20$.

$\dfrac{9 \times 13 + 3}{20} = 6$; അപ്പോൾ മതി $= 13$; മതിഫലം $= 6$.

ഒടുക്കത്തെ ഫലമാകുന്ന 6-ന്റെ ചുവട്ടിൽ മതിയാകുന്ന 13 വെക്ക, അതിന്റെ ചുവട്ടിൽ മതിഫലമായ 6-നേയും വെക്കു അപ്പോളുണ്ടാകുന്ന വല്ലി:

$$\left.\begin{array}{r} 365 \cdots 136972 \\ 3 \cdots\cdots 375 \\ 1 \cdots\cdots\cdots 97 \\ 6 \cdots\cdots\cdots 84 \\ 13 \quad\quad\quad\quad \\ 6 \quad\quad\quad\quad \end{array}\right\}$$

ഈ വല്ലിയിൽ ഒടുക്കത്തെ സംഖ്യ 6 അന്ത്യം, 13 ഉപാന്ത്യം, ഇതിന്റെ മുകളിലെ 6 സ്വോദ്ധ്വം, സോദ്ധ്വത്തെ ഉപാന്ത്യംകൊണ്ട് ഗുണിച്ച് അന്ത്യം കൂട്ടുമ്പോൾ $6 \times 13 + 6 = 84$ എന്ന്. അതിനെ സ്വോദ്ധ്വമാകുന്ന 6-ന്റെ നേരെ വെക്കുക. മുമ്പിലത്തെ അന്ത്യം 6-നെ കളയുകയാണെങ്കിൽ വല്ലിയുടെ സ്വരൂപം; 365, 3, 1, 84, 13 എന്ന്. ഇവിടെ 18 അന്ത്യം, 84 ഉപാന്ത്യം, 1 സ്വോദ്ധ്വം.

$1 \times 84 + 13 = 97$ അപ്പോൾ വല്ലിയുടെ സ്വരൂപം: $365, 3, 97, 84$

$3 \times 97 + 84 = 375$ അപ്പോൾ വല്ലിയുടെ സ്വരൂപം: $365, 375, 97$

$365 \times 375 + 97 = 136972;$ 97-നെ കളയുന്നു.

ഇങ്ങനെ മുകളിൽ 136972 എന്നും കീഴെ 375 എന്നും കിട്ടുന്നു.
ഇവിടെ ഹാരകം ഏറുന്നതുകൊണ്ട്,

$$\text{ഗുണകാരം} = 136972$$

$$\text{ഫലം} = 375$$

$$\left[\frac{576 \times 136972 + 3}{210389} = \frac{78895875}{210389} = 375.\ \text{ശേഷമില്ല.}\right]$$

പിന്നെ 3-നെ ശുദ്ധി എന്നു കല്പിക്കുക.

$$\left.\begin{array}{r} 365 \cdots\cdots 73417 \\ 3 \cdots\cdots\cdots 201 \\ 1 \cdots\cdots\cdots 52 \\ 6 \cdots\cdots\cdots 45 \\ 7 \quad\quad\quad\quad \\ 3 \quad\quad\quad\quad \end{array}\right\}$$

$$\text{ഇവിടെ } \frac{9 \times 7 - 3}{20} = 3$$

$$\text{അപ്പോൾ മതി } = 7;\ \text{മതിഫലം } = 3$$

$$45 = 6 \times 7 + 3$$

$$52 = 1 \times 45 + 7$$

$$201 = 3 \times 52 + 45$$

$$73417 = 365 \times 201 + 52$$

ഗുണകാരം $= 73417$, ഫലം $= 201$

$$\left[\frac{73417 \times 576 - 3}{210389} = \frac{42288189}{210389} = 201.\text{ശേഷമില്ല.}\right]$$

II. "അഥാല്പേ ഹരശേഷേ ചേൽ ..." ഹാരകം ഭാജ്യത്തേക്കാൾ ഏറുന്നു. വല്ലീഫലങ്ങൾ ഓജസംഖ്യങ്ങൾ. അപ്പോൾ ഹാരകശേഷം അല്പശേഷമായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ ക്ഷേപശുദ്ധികളെ പകന്ന് കല്പിക്കേണം.

ക്ഷേപം $= 3$. ഇതിനെ ശുദ്ധി എന്നു കല്പിക്കേണം.

$$\left.\begin{array}{l} 355 \cdots 136972 \\ 3 \cdots\cdots 375 \\ 1 \cdots\cdots 97 \\ 6 \cdots\cdots 84 \\ 2 \cdots\cdots 18 \\ 6 \\ 1 \end{array}\right\}$$

ഇവിടെ അഞ്ചുഫലങ്ങളെ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഇവിടെ അല്പശേഷം $= 2$, മഹാശേഷം $= 9$

$\frac{2\times 6-3}{9} = 1$

മതി $= 6$; മതിഫലം $= 1$

ഗുണകാരം $= 136972$ (ഹാരകം ഏറ്റുന്നതുകൊണ്ട്)

ഫലം $= 375$. (I-ലെപ്പോലെതന്നെ)

ശുദ്ധി $= 3$. ഇതിനെ ക്ഷേപമെന്നു കല്പിക്കുക.

$$\left.\begin{array}{l} 365 \cdots 73417 \\ 3 \cdots\cdots 201 \\ 1 \cdots\cdots 52 \\ 6 \cdots\cdots 45 \\ 2 \cdots\cdots 7 \\ 3 \\ 1 \end{array}\right\}$$

$\frac{2\times 3+3}{9} = 1$

അതുകൊണ്ടു മതി $= 3$, മതിഫലം $= 1$

ഗുണകാരം $= 73417$

ഫലം $= 201$ (I-ലേപോലെതന്നെ)

III. ഭാജ്യം ഹാരകത്തേക്കാളേറുന്നു ഇവിടെ 210389-നെ ഭാജ്യമെന്നും 576-നെ ഹാരകമെന്നും കല്പിക്കുക. അപ്പോൾ ഫലങ്ങളും ശേഷങ്ങളും മുമ്പിലെപ്പോലെ തന്നെ. ഇവിടെ വല്ലീഫലങ്ങൾ യുഗ്മസംഖ്യങ്ങളാകുമ്പോൾ അല്പശേഷം ഹാരകശേഷമാകുന്നു; ഓജസംഖ്യങ്ങളാകുമ്പോൾ വിപരീതം. വല്ല്യുപസംഹാരം കഴിഞ്ഞു ശേഷിക്കുന്ന രണ്ടു രാശികളിൽ ആദ്യത്തേതു ഫലവും കീഴേതു ഗുണകാരവുമാകുന്നു.

ദൃഢഭാജ്യം $= 210389$; ദൃഢഭാജകം $= 576$; ദൃഢക്ഷേപം $= 3$.

വല്ലീ—(രാജസംഖ്യകൾ)

$$\left.\begin{array}{l} 335 \cdots 73417 \\ 3 \cdots\cdots 201 \\ 1 \cdots\cdots 52 \\ 8 \cdots\cdots 45 \\ 2 \cdots\cdots 7 \\ 3 \\ 1 \end{array}\right\}$$

ഭാജ്യശേഷം $=$ അല്പശേഷം $= 2$

മഹാശേഷം $= 9$

$\frac{2\times 3+3}{9} = 1$

മതി $= 3$, മതിഫലം $= 1$

ഗുണകാരം $= 201$; ഫലം $= 73417$

$\left[\frac{201 \times 210389 + 3}{576} = 73417\right.$.ശേഷമില്ല.]

വല്ലീഫലങ്ങൾ യുഗ്മസംഖ്യങ്ങളാകുമ്പോൾ, അല്പശേഷം ഹാരകശേഷമാകുന്നു. ഇവിടെ ക്ഷേപമാകുന്ന 3-നെ ശുദ്ധി എന്നു കല്പിക്കേണം.

$$\left.\begin{array}{r}365\\3\\1\\6\\7\\8\end{array}\right\}$$

ഹാരകശേഷമാകുന്ന അല്പശേഷം $= 9$

മഹാശേഷം $= 20$

$$\frac{9\times7-3}{20} = 3$$

മതി $= 7$, മതിഫലം $= 3$

ഗുണകാരം $= 201$; ഫലം $= 73417$

IV. "യദാ പുനഃ . . . . . . "

ദൃഢഭാജ്യം $= 576$; ദൃഢഹാരകം $= 210889$; ദൃഢക്ഷേപം $= 3$

ഇവിടെ മതി കല്പിക്കുന്നേടത്ത് മഹാശേഷത്തെ ഭാജ്യമാക്കിയും അല്പശേഷത്തെ ഹാരകമാക്കിയും ക്രിയ ചെയ്യുന്നു. അവിടെ മതിയെ അന്ത്യമായിട്ടും മതിഫലത്തെ ഉപാന്ത്യമായിട്ടും വല്ലിയിൽ വെക്കേണം. മഹാശേഷം ഭാജ്യശേഷമാണെങ്കിൽ സാമാന്യന്യായംകൊണ്ടു ക്രിയ ചെയ്യേണം. അതു ഹാരകശേഷമാണെങ്കിൽ ശുദ്ധിക്ഷേപങ്ങളെ പകന്നു കല്പിക്കേണം. അഥവാ, പകന്നു കല്പിക്കാതെ തന്നെ ഗുണകാരഫലങ്ങളുണ്ടാക്കി സ്വസ്വതക്ഷണത്തിൽനിന്നും വാങ്ങിയ ശേഷങ്ങൾ സ്ഫുടഗുണകാരഫലങ്ങളായിട്ടു വരും.

$$\left.\begin{array}{l}365 \cdots 136972\\ \quad 3 \cdots\cdots 375\\ \quad 1 \cdots\cdots\cdots 97\\ \quad 6 \cdots\cdots\cdots 84\\ \quad 2 \cdots\cdots\cdots 13\\ \quad 6\\ \quad 1\end{array}\right\}$$

ഇവിടെ വല്ലിയിൽ ഒടുവിലത്തെ ഫലം 2

മഹാശേഷം 9 ഭാജ്യശേഷമാകുന്നു.

അല്പശേഷം 2 ഹാരകശേഷമാകുന്നു.

$$\frac{1\times9+3}{2} = 6$$

മതി $= 1$; മതിഫലം $= 6$

ഗുണകാരം $= 136972$; ഫലം $= 375$

ഒടുക്കത്തെ ഫലം 6 ആകിലുള്ള ക്രിയ:

$$\left.\begin{array}{l}365 \cdots\cdots 73417\\ \quad 3 \cdots\cdots 201\\ \quad 1 \cdots\cdots\cdots 52\\ \quad 6 \cdots\cdots\cdots 45\\ \quad 7\\ \quad 3\end{array}\right\}$$

ഇവിടെ മഹാശേഷം ഹാരകശേഷമാകുന്നു.

$$\frac{20\times3+3}{9} = 7$$

മതി $= 3$; മതിഫലം $= 7$

ഗുണകാരം $= 73417$; ഫലം $= 201$

ഇവിടെ സ്വതക്ഷണമാകുന്ന 210389-ൽ നിന്നു 73417-നെ വാങ്ങിയാൽ സ്ഫുടഗുണകാരമായ 136972 വരും. സ്വതക്ഷണമായ 576-ൽ നിന്നു 201-നെ വാങ്ങിയാൽ സ്ഫുടഫലമായ 375 കിട്ടും.

അഥവാ, ക്ഷേപമാകുന്ന 3-നെ ശുദ്ധി എന്നു കല്പിക്ക.

$$\left.\begin{array}{l}365 \cdots 136972\\ \quad 3 \cdots\cdots\cdots 376\\ \quad 1 \cdots\cdots\cdots\cdots 97\\ \quad 6 \cdots\cdots\cdots\cdots 84\\ \; 13\\ \quad 6\end{array}\right\}$$

$$\frac{20\times6-3}{9} = 13$$

മതി $= 6$; മതിഫലം $= 13$

ഗുണകാരം $= 136972$

ഫലം $= 375$

V. “മതേരപ്രതിഭാനേത്ര . . . . . . ”

ദൃഢരാജ്യം $= 676$; ദൃഢഹാരകം $= 210389$; ദൃഢക്ഷേപം അഥവാ ശുദ്ധി $= 3$

ശേഷങ്ങൾ	ഫലങ്ങൾ	സംഹൃതഫലങ്ങൾ
210389	366	283806
576	3	777
149	1	201
129	6	174
20	2	27
9	4	12
2	3	
1	0	

ഇവിടെ രൂപം ഭാജ്യശേഷമാകകൊണ്ടു 3 ശുദ്ധിയാകുന്നു. ദൃഢശുദ്ധി 8 ആകുമ്പോൾ, ഗുണകാരം $= 283806$, ഫലം $= 777$.

$$\left[\frac{283806 \times 576 - 3}{210389} = 777.\text{ ശേഷമില്ല.}\right]$$

ഇവറ്റെ തക്ഷണം ചെയ്യേണം. 283806-നെ 210389 കൊണ്ടു തക്ഷണം ചെയ്താൽ ഫലമാകുന്ന ഒന്നിനെ കളയാം. ശേഷം $= 73417 (= 283806 - 210389)$; 777-നെ 576 കൊണ്ടു തക്ഷണം ചെയ്താൽ ഫലമാകുന്ന ഒന്നിനെ കളയാം. ശേഷം $= 201 (= 777 - 576)$.

$\therefore$ ഗുണകാരം $= 73417$; ഫലം $= 201$.

3 ദൃഢരക്ഷപരാകുമ്പോൾ സ്വസ്വതക്ഷണത്തിൽ നിന്നു മുമ്പിൽ വരുത്തിയ ഗുണകാര ഫലങ്ങളെ വാങ്ങിയാൽ ശേഷങ്ങൾ ഉദ്ദിഷ്ടഗുണകാരഫലങ്ങളായിട്ടു വരും.

$$210389 - 73417 = 136972 = \text{ഗുണകാരം}$$
$$576 - 201 = 375 = \text{ഫലം}$$

VI. തക്ഷണത്തിന്റെ ഉദാഹരണം V കൊണ്ടു സാധിച്ചിരിക്കുന്നു. ഗുണകാരത്തിൽനിന്നും ഫലത്തിൽനിന്നും സ്വസ്വതക്ഷണത്തെ ഓരോ ആവൃത്തി വാങ്ങിയിരിക്കുന്നു. തന്റെ തന്റെ തക്ഷണത്തെ ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് കൂട്ടിയാലും ഗുണകാരഫലങ്ങൾ ലഭിക്കും.

$$\text{ഗുണകാരം} = 136972 + 210389 \times 3 = 768139$$

$$\text{ഫലം} = 375 + 576 \times 3 = 2103$$

$$\left[\frac{768139 \times 576 + 3}{210389} = \frac{442448067}{210389} = 2103.\text{ ശേഷമില്ല.}\right]$$

ഇവിടെ ശ്ലോകാർദ്ധം—“ഗുണലബ്ധ്യോസ്സമംഗ്രാഹ്യം ധീമതാ തക്ഷണേ ഫലം” (ശ്ലോ. 11) ലീലാവതിയിൽ നിന്നും ഉദ്ധരിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ളതാകുന്നു. ഗുണകാരഫലങ്ങളുടെ തക്ഷണ

ത്തിങ്കലെ ഹരണഫലങ്ങൾ സമങ്ങളായിരിക്കണം. അല്ലെങ്കിലത്തെ വൈഷമ്യം ഒരുദാഹരണം മൂലം കാണിക്കാം.

		വല്ലി:
ഭാജ്യം	5	1 − 46
ഹാരകം	3	1 − 23
ക്ഷേപം	23	23
		0

ഇവിടെ ഹാരകത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ 23 ക്ഷേപം തന്നെ. ഭാജ്യമേറുന്നതുകൊണ്ടു ഫലം = 46, ഗുണകാരം = 23. 46-ന്റെ തക്ഷണം 5, 23-ന്റെ തക്ഷണം 3. 46-ൽ 5-നെ 9 ആവൃത്തികളയാം ശേഷം 1. 23-ൽ 3-നെ 7 ആവൃത്തി മാത്രമെ കളയാവൂ. ശേഷം = 2. അപ്പോൾ ഫലം = 1, ഗുണകാരം = 2.

$$\frac{5 \times 2 + 23}{3} = 11.$$ ഇവിടെ ഫലം 1 എന്നു വരുന്നില്ല.

ഇവിടെ 23-ൽ 3-നെ 7 ആവൃത്തി മാത്രമേ കളഞ്ഞിട്ടുള്ളൂ. അതുകൊണ്ടു 46-ൽ 5-നെ 7 ആവൃത്തി മാത്രമേ കളയാവൂ. അങ്ങനെ ചെയ്യുമ്പോൾ ഫലം = 11, ഗുണകാരം = 2 എന്നു കിട്ടും.

$$\frac{5 \times 2 + 23}{23} = 11.$$ പ്രശ്നോത്തരം ശരിയായി.

VII. വല്ല്യപസംഹാരത്തിന്നിടയിൽ തന്നെ തക്ഷണം ചെയ്യാം.
“യദാവല്ല്യപസംഹാരേ . . . . . . ”

ദൃഢഭാജ്യം = 576. ദൃഢഹാരകം = 210389, ദൃഢശുദ്ധി = 3.

ശേഷങ്ങൾ	ഫലം	സംഹൃതഫലങ്ങൾ	
210389	335		73417
576	3		201
149	1		52
129	6		45
20	2	27	7
9	4	12	3
2	3		
1	0		

ഇവിടെ 27, 12 എന്ന രാശികൾ തങ്ങളുടെ ശേഷങ്ങളാകുന്ന 20, 9 ഈ രാശികളെക്കാളേറുന്നു. 27-നേയും 12-നേയും 20 കൊണ്ടും 9 കൊണ്ടും തക്ഷണംചെയ്തു ശേഷങ്ങൾ 7, 3, ഇവയെ വല്ലിയിൽ യഥാസ്ഥാനംവെച്ച് വല്ല്യപസംഹാരം ചെയ്താൽ സ്ഫുടഗുണകാരഫലങ്ങൾ വരും

355		73417
3		201
1	201	52 (201 − 149)
6	174	45 (174 − 129)
2	27	
4	12	
3	1	
0		

201, 174 ഈ രാശികളുടെ ശേഷങ്ങളാകുന്ന 149, 129 ഇവയെക്കൊണ്ടു തക്ഷിച്ചാൽ ശേഷങ്ങൾ 52, 45. മേല്പോട്ടു വല്ല്യപസം ഹാരം ചെയ്താൽ
ഗുണകാരം = 73417,
ഫലം = 201

VIII. ഗുണകാരഫലാനയനത്തിങ്കൽ പ്രകാരാന്തരം:
“രൂപേ ക്ഷേപേഥവാ . . . . . . ”

$355 \cdots 115787$	ഇവിടെ ക്ഷേപം 1 എന്നു കല്പിച്ചു. $\dfrac{11 \times 9 + 1}{20} = 5.$
$3 \cdots\cdots 317$	മതി $= 11$, മതിഫലം $= 5$.
$1 \cdots\cdots\cdots 82$	ഗുണകാരം $= 115787$, ഫലം $= 317$.
$5 \cdots\cdots\cdots 71$	ഇവയെ ഇഷ്ടക്ഷേപമാകുന്ന 3 കൊണ്ടു
11	ഗുണിക്കുമ്പോൾ ഗുണകാരം $= 847361$,
5	ഫലം $= 951$. തക്ഷണശേഷം
	ഗുണകാരം $= 135972$, ഫലം $= 375$

$365 \cdots 94602$	ഇവിടെ ശുദ്ധി $= 1$.
$3 \cdots\cdots 259$	$\dfrac{9 \times 9 - 1}{20} = 4$; മതി $= 9$, മതിഫലം $= 4$.
$1 \cdots\cdots 67$	ഗുണകാരം $= 94602$, ഫലം $= 259$.
$6 \cdots\cdots 58$	ഇവയെ മൂന്നിൽ ഗുണിക്കുമ്പോൾ,
9	ഗുണകാരം $= 283806$. ഫലം $= 777$.
4	തക്ഷണശേഷം ഗുണകാരം $= 73417$,
	ഫലം $= 201$.

"മതേരപ്രതിഭാനേതു . . . . . ." എന്നും "രൂപേ ക്ഷേപേഥവാ . . ." എന്നുമുള്ള രണ്ടു ന്യായങ്ങളുപയോഗിച്ചും ഈ ക്രിയ ചെയ്യാം. ക്ഷേപത്തേയോ ശുദ്ധിയേയോ രൂപമായിട്ടു മതിയായിട്ടു കല്പിച്ചും ശൂന്യത്തെ മതിഫലമായിട്ടും കല്പിച്ചും ക്രിയചെയ്തു ഗുണകാരഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി ഉദ്ദിഷ്ടമയിരിക്കുന്ന ക്ഷേപത്തിന്റേയോ ശുദ്ധിയുടേയോ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ച് ആവശ്യമുണ്ടെങ്കിൽ തക്ഷിച്ചു സ്ഫുടങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഗുണകാരഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കാം.

$365 \cdots 94602$	
$3 \cdots\cdots 259$	ഭാജ്യത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ രൂപം
$1 \cdots\cdots 67$	ശുദ്ധിയാകുന്നു. 94602-നേയും 259-നേയും 3-ൽ
$6 \cdots\cdots 58$	ഗുണിച്ചു തക്ഷിച്ചാൽ ഗുണകാരഫലങ്ങളാകുന്ന
$2 \cdots\cdots\cdots 9$	73417, 201 വരും. ക്ഷേപമാണുദ്ദിഷ്ടമായതെങ്കിൽ
$4 \cdots\cdots\cdots 4$	സ്വസ്വക്ഷണങ്ങളിൽനിന്ന് ഇവയെ വാങ്ങിയാൽ
1	ഗുണകാരഫലങ്ങളായ 136972, 375 വരും.
0	

IX. "രാശിഭാഗകലാദീനാം . . ."

രാശിശേഷാദികൾ ക്ഷേപശുദ്ധികളാകുമ്പോൾ ഉള്ള വിശേഷത്തെ പറയുന്നു. മാദ്ധ്യമം അറിഞ്ഞിരിക്കുമ്പോൾ ഇഷ്ടാഹർഗ്ഗണാനയനമാഗ്ഗമാണ് ഈ ക്രിയ. ഭഗണശേഷത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു രാശിശേഷമാണ് കാണപ്പെട്ടതെങ്കിൽ ഭാജ്യത്തിന്റെ 12-ൽ ഗുണിച്ചതിനെ ഭാജ്യമായി കല്പിക്കേണം. ഭാഗശേഷമെങ്കിൽ ഭാജ്യത്തെ 360-ലും, ലിപ്താ ശേഷമെങ്കിൽ 21600-ലും ഗുണിച്ചതു ഭാജ്യമാകുന്നു. വികലാദിശേഷങ്ങളിലും ഇപ്രകാരം ഊഹിച്ചുകൊള്ളണം. ഒരു അഹർഗ്ഗണത്തെവെച്ചു 576 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു 210389 കൊണ്ടു ഹരിച്ചു വികലവരെ വരുത്തിയാൽ അന്നത്തെ ഉദയത്തിങ്കലെ സൂര്യമദ്ധ്യമം വരും. ബാക്കി വരുന്ന സംഖ്യ വികലാശേഷവുമാണ്. വികലാശേഷം തന്നിരിക്കുമ്പോൾ ഭാജ്യത്തെ 1296000 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതു ഭാജ്യമാകുന്നു.

ഉദാഹരണം:- വികലാശേഷം 181244 − ശുദ്ധി.

ദൃഢഭാജ്യം $= 576 \times 1296000 = 746496000$

ദൃഢഹാരകം $= 210389$

അന്യോന്യഹരണശേഷം വല്ലി:-

$$\left.\begin{array}{rr} 3548 \cdots & 216335491 \\ 5 \cdots & \cdots\cdots 60971 \\ 1 \cdots & \cdots\cdots 10383 \\ 6 \cdots & \cdots\cdots 9056 \\ 1 \cdots & \cdots\cdots 1327 \\ 4 \cdots & \cdots\cdots 1094 \\ 1 \cdots & \cdots\cdots 233 \\ 2 \cdots & \cdots\cdots 162 \\ 3 \cdots & \cdots\cdots 71 \\ 1 \cdots & \cdots\cdots 20 \\ 1 \cdots & \cdots\cdots 11 \\ 4 \cdots & \cdots\cdots 9 \\ 2 \cdots & \cdots\cdots 2 \\ 1 & \\ 0 & \end{array}\right\}$$

ഇവിടെ ഭാജ്യത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ
രൂപം ശുദ്ധിതന്നെ.

ഭാജ്യമേറുകകൊണ്ടു ഗുണകാരം $= 60971$

ഫലം $= 216335491$

ഗുണകാരം $\times$ ശുദ്ധി $= 11050627924$

ശുദ്ധി $\times$ ഫലം $= 39209509730804$

തക്ഷണശേഷം ഗുണകാരം $= 156088$

ഫലം $= 553826804$

ഈ ഗുണകാരത്തിൽനിന്ന് അഹർഗ്ഗണവും ഫലത്തിൽനിന്നു മദ്ധ്യമവും വരും. തക്ഷണങ്ങളെ ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ഈ ഗുണകാരഫലങ്ങളിൽ കൂട്ടിയാലും ഗുണകാരഫലങ്ങൾ കിട്ടുമല്ലോ.

$8 \times 210389 + 156088 = 1839200$ (അനരുദ്ധോഗേദാവ്യോനു)

$=$ അഹർഗ്ഗണം

$8 \times 746496000 + 553826804 = 6525794804$ വികല

$= 5035$ഭഗണം. 4രാശി. 0തി. 46ഇലി. 44വിലി.

മദ്ധ്യമം $= 4$രാ $-$ 0തി $-$ 46ഇ $-$ 45വി

(അർദ്ധാധികത്തോട്ടുകൂടി)

തികഞ്ഞ കലിവർഷം $= 5035$

ഇങ്ങനെ രാശ്യാദിശേഷങ്ങൾ കൊണ്ടു മദ്ധ്യമാഹർഗ്ഗണങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കും പ്രകാരം.

പ്രകാരാന്തരം (ലീലാവതിയിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന പ്രകാരം):

വികലാശേഷം $= 181244$ (ശുദ്ധി)

210389-നേയും 60-നേയും അന്യോന്യഹരണം ചെയ്തു വല്ലിയുണ്ടാക്കി, 181244 ശുദ്ധി എന്നും കല്പിച്ച് ഗുണകാരഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുക. ഇവിടെയുണ്ടായ ഗുണകാരം കലാശേഷമായിട്ടിരിക്കും. ഫലം മദ്ധ്യമത്തിലെ വികലയായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ മുകളിലേക്കും ഊഹിച്ചുകൊള്ളുക. ശേഷങ്ങളെല്ലാം ശുദ്ധികൾ.

(ക) വികലാശേഷം $= 181244$

210389, 60 ഇവയെ അന്യോന്യഹരണംചെയ്തു വല്ലി:

3506 ···18430339872
2 ··········5258075
14 ··········2537416
181244
0

ഹരേകരേറുന്നതുകൊണ്ടു ഗുണകാരം = 18430889872
ഫലം = 5256076
തക്ഷണശേഷം ഗുണകാരം = 53088
ഫലം = 16
ഹാരകത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കുകയാൽ തന്റെ
തക്ഷണത്തിൽനിന്നു ഇവയെ വാങ്ങണം.

അപ്പോൾ ഗുണകാരം = 210689 − 53083 = 157806
ഫലം = 60 − 16 = 44
അപ്പോൾ മദ്ധ്യമത്തിങ്കലെ വികലാസംഖ്യാ = 44, കലാശേഷം = 157805

(ഖ) കലാശേഷം = 157306

210389, 50 ഇവകൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ വല്ലീ:

3508 ···15998132528
2 ··········4561874
14 ··········2202284
157306
0

ഗുണകാരം (ഭാഗശേഷം) = 163920
ഫലം (മദ്ധ്യമത്തിങ്കലെ കലാ) = 46

(ഗ) ഭാഗശേഷം = 166920

210389, 30 ഇവയെക്കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ വല്ലീ:

7012 ·······115104824
1 ············163920
183920
0

ഗുണകാരം (രാശിശേഷം) = 5454
ഫലം (മദ്ധ്യമത്തിങ്കലെ ഭാഗം) = 0

(ഘ) രാശിശേഷം = 5464

210389, 12 ഇവയെകൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ വല്ലീ:

17532 ·······478985168
2 ··············27320
2 ··············10928
5464
0

ഹാരത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ,
ഗുണകാരം (ഭഗണശേഷം) = 210689 − 169804
= 70585
ഫലം = 12 − 8 = 4.

(ങ) ഭഗണശേഷം = 70585

210889, 576 ഇവയെക്കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ വല്ലീ:–

365 ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯737255
3 ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯2155
1 ⋯⋯4729195 ⋯⋯680 } തക്ഷണ
6 ⋯⋯4099930 ⋯⋯115 } ശേഷം
2 ⋯⋯635265
4 ⋯⋯282340
70585
0

ഗുണകാരം = 787255
ഫലം = 2155

അഹർഗ്ഗണം = 787255 + 210389 × 5 = 1839200
തികഞ്ഞ കലിവഷം = 2155 + 575 × 5 = 5085
മദ്ധ്യമം = 4രാ − 0 − 46 − 45 (അദ്ധ്വാധികത്തോടുകൂടി)

ഇപ്രകാരംതന്നെ അധികമാസങ്ങൾ, തിഥിക്ഷയങ്ങൾ മുതലായവയെ കണക്കാക്കുന്നതിലും കുട്ടാകാരക്രിയയെ ഉപയോഗിക്കാം.

X. കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ ഭാജ്യത്തിന്റേയും ഹാരകത്തിന്റേയും അപവൎത്തനംകൊണ്ടു ക്ഷേപത്തേയോ ശുദ്ധിയേയോ ശേഷിയാതെ ഹരിക്കുവാൻ കഴിയണമെന്നു മുമ്പിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലൊ. എന്നാൽ ഭാജ്യത്തിന്റേയും ക്ഷേപശുദ്ധികളിലൊന്നിന്റേയും അപവൎത്തനത്തെക്കൊണ്ടു **ഹാരകത്തെ ശേഷിയാതെ ഹരിക്കേണമെന്നില്ല.** അതുപോലെതന്നെ ഹാരകത്തിന്റേയും ക്ഷേപശുദ്ധികളിലൊന്നിന്റേയും അപവൎത്തനംകൊണ്ടു ഭാജ്യത്തെ ശേഷിയാതെ ഹരിക്കേണമെന്നുമില്ല. ഈ വിഷയങ്ങളിൽ അപവൎത്തനം ചെയ്താൽ ചില എളുപ്പവുമുണ്ട്. ഈ ക്രിയയെ ലീലാവതിയിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്.

ഭാജ്യം = 100, ഹാരകം = 63, ക്ഷേപം = 90

(ക) സാമാന്യക്രിയ:
അന്യോന്യഹരണം

1	63	100	1
2	26	37	1
1	4	11	2
	1	3	

ശേഷങ്ങൾ ഫലം ⋯⋯സംഹതഫലം
100 ⋯⋯1 ⋯⋯⋯⋯2430
63 ⋯⋯1 ⋯⋯⋯⋯1530
37 ⋯⋯1 ⋯⋯⋯⋯900
26 ⋯⋯2 ⋯⋯⋯⋯630
11 ⋯⋯2 ⋯⋯⋯⋯270
4 ⋯⋯1 ⋯⋯⋯⋯90
3 ⋯90
1 ⋯⋯0

ഹാരകത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കുന്നു.
ഭാജ്യം വലുതായതുകൊണ്ട്,

ഗുണകാരം = 1530
ഫലം = 2430
തക്ഷണശേഷം ഗുണകാരം = 1530 − 24 × 63
= 18
ഫലം = 2430 − 24 × 100
= 30

(ഖ) ഭാജ്യക്ഷേപങ്ങളുടെ അപവൎത്തനം = 10. അപവൎത്തിക്കുമ്പോൾ, ഭാജ്യം = 10, ഹാരകം = 63, ക്ഷേപം = 9.

വല്ലീ:	ഹാരകമേറിയതുകൊണ്ടു ഗുണകാരം $= 171$.
$6 - 171$	തക്ഷണശേഷം ഗുണകാരം $= 171 - 2 \times 63 = 45$.
	ഭാജ്യത്തിൽ രൂപം ശേഷിച്ചതുകൊണ്ട്
$3 - 27$	ഉദ്ദിഷ്ടഗുണകാരം $= 63 - 45 = 18$
9	തക്ഷണശേഷം ഫലം $= 27 - 2 \times 10 = 7$
0	അപ്പോൾ ഉദ്ദിഷ്ടഫലം $= 10 \times (10 - 7) = 30$

സ്ഫുടഫലമായ 3-നെ അപവർത്തനമായ 10-ൽ ഗുണിച്ചതാണ് ഉദ്ദിഷ്ടഫലം.

(ഗ) ഹാരകത്തിന്റേയും ക്ഷേപത്തിന്റേയും അപവർത്തനം $= 9$.
അപവർത്തിക്കുമ്പോൾ ഭാജ്യം $= 100$, ഹാരകം $= 7$, ക്ഷേപം $= 10$.

വല്ലീ	
$14 \cdots\cdots 430$	തക്ഷണശേഷം ഫലം $= 430 - 4 \times 100 = 30$
$3 \cdots\cdots\cdots 30$	തക്ഷണശേഷം ഗുണകാരം $= 30 - 4 \times 7 = 2$
10	2-നെ അപവർത്തനംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ,
0	ഉദ്ദിഷ്ടഗുണകാരം $= 2 \times 9 = 18$.

(ഖ)-യിൽ ഹാരകത്തെ അപവർത്തിച്ചിട്ടില്ല. അതുകൊണ്ടു വല്ല്യപസംഹാരം ചെയ്തു കിട്ടുന്ന ഗുണകാരംസ്ഫുടം തന്നെ. ഫലം $= \dfrac{100 \times 18 + 90}{63} = 30$. ഇങ്ങനെയും ഫലം വരുത്താം.

(ഗ)-യിൽ ഭാജ്യത്തെ അപവർത്തിച്ചിട്ടില്ല. അതുകൊണ്ടു വല്ല്യപസംഹാരം ചെയ്തു കിട്ടുന്ന ഫലം സ്ഫുടം തന്നെ.

$$\text{ഗുണകാരം} = \frac{30 \times 63 - 90}{100} = \frac{1800}{100} = 18.$$

ഇങ്ങനെ ഗുണാകാരവും വരുത്താം.

അനന്തരം ഇവിടെ പറഞ്ഞതും ഇനി പറയുവാൻ ഭാവിക്കുന്നതുമായ കുട്ടാകാരങ്ങളുടെ നാമഭേദങ്ങളെ പറയുന്നു.

കുട്ടാകാരോ നിരഗ്രോയമഥ സാഗ്രഃ പ്രകീർത്ത്യതേ|| 21

ചൊല്ലപ്പെട്ട കുട്ടാകാരം നിരഗ്രമെന്നു പേരായൊന്ന്. അനന്തരം സാഗ്രമെന്ന കുട്ടാകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

സാഗ്രകുട്ടാകാരത്തിങ്കലെ വിഷയം:

യസ്മിൻ ഭാജ്യേ ഹൃതേ ദ്വാഭ്യാം ഹാരാഭ്യാം ശേഷയോരപി |
ദ്വൈവിദ്ധ്യം സ്യാൽ സ ഭാജ്യോത്ര ജ്ഞേയശ്ശേഷോഗ്രമുച്യതേ || 22

യാതൊരു ഭാജ്യത്തെ രണ്ടു ഹാരകങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ രണ്ടു ശേഷങ്ങളും രണ്ടു പ്രകാരമായിട്ടു വരും. ആ ഭാജ്യം ഇവിടെ ജ്ഞേയമായിട്ടുള്ളത്. ശേഷത്തെ അഗ്രമെന്നു ചൊല്ലുന്നു.

അനന്തരം നിരഗ്രകുട്ടാകാരത്തിനോടുള്ള സാമ്യത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

അത്രാധികാഗ്രഹാരസ്യ ഭാജ്യത്വമിതരസ്യ ച |
ഭാജകത്വം തഥാഗ്രന്തരസ്യ ക്ഷേപത്വമിഷ്യതേ || 23

ഈ സാഗ്രകുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ അധികാഗ്രഹാരത്തിന്നു ഭാജ്യത്വവും ഊനാഗ്രഹാരത്തിന്നു ഭാജകത്വവും അഗ്രാന്തരത്തിന്നു ക്ഷേപത്വവും ഇച്ഛിക്കപ്പെടുന്നത്. യാതൊന്നുകൊണ്ടു ഹരി

ച്ചാൽ സംഖ്യകൊണ്ടു ഏറിയ ശേഷം ഭവിക്കുന്നു, അത് അധികാഗ്രഹാരം. യാതൊന്നുകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ചെറിയ ശേഷം ഭവിക്കുന്നു, അത് ഊനാഗ്രഹാരം. ശേഷാന്തരം ക്ഷേപം. ശേഷം ക്രിയ നിരഗ്രകുട്ടാകാരത്തിങ്കലെപ്പോലെ.

ജ്ഞേയത്തിന്നു വിശേഷമുണ്ടാകയാൽ അതിനായിക്കൊണ്ടു ക്രിയാവിശേഷത്തെ പറയുന്നു.

പ്രാഗ്വൽ ലബ്ധോ ഗുണോ യോധികാഗ്രഹാരഹതേത്ര തു |
യുക്തേധികാഗ്രേ ചോദ്ദിഷ്ടോ ഹാര്യസ്സ്യാൽ—

നിരഗ്രകുട്ടാകാരത്തിങ്കലെപ്പോലെ ഗുണകാരത്തെ വരുത്തി അതിനെ അധികാഗ്രഹാരം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിൽ അധികാഗ്രം കൂട്ടിയാൽ ഉദ്ദിഷ്ടഭാജ്യം വരും.

പ്രകാരാന്തരം:

— അഥവാ പുനഃ || 24
പ്രകല്പ്യാഗ്രാന്തരം ശുദ്ധിം വ്യത്യസ്തൗ ഭാജ്യഭാജകൗ |
തഥാനീതോ ഗുണസ്ത്വനാഗ്രഹാരഗുണിതസ്സ തു || 25
ഊനാഗ്രേണ യുതോ ദ്വിച്ഛേദാഗ്രോ രാശിർഭവേദിഹ|

എന്നിയെ അഗ്രാന്തരത്തെ ശുദ്ധിയെന്നും അധികാഗ്രഹാരത്തെ ഭാജകമെന്നും ഊനാഗ്രഹാരത്തെ ഭാജ്യമെന്നും കല്പിച്ചു നിരഗ്രകുട്ടാകാരവിധിപ്രകാരം വരുത്തിയ ഗുണകാരത്തെ ഊനാഗ്രഹാരം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിൽ ഊനാഗ്രംകൂട്ടിയാലും ജ്ഞേയരാശി ഉണ്ടാകും.

സാഗ്രകുട്ടാകാരത്തിന്റെ ഉദാഹരണം:

യത്രാഗ്നിരദരുദ്രാപ്തേ ശേഷോ നവഷഡിന്ദവഃ || 26
ശിഖിനന്ദാഗ്നിഭൂപാപ്തേ ശേഷോഷ്ടവിബുധാസ്തഥാ |

$$\text{ഇവിടെ ഒരു ഹാരകം} = \text{ഗോത്രഗായകഃ} = 11326$$
$$\text{ശേഷം} = 169$$
$$\text{മറ്റൊരു ഹാരകം} = \text{ഗന്ധഗീതകൃൽ} = 16393$$
$$\text{ശേഷം} = 169$$

(ക) ഇവിടെ അധികാഗ്രഹാരമായിരിക്കുന്ന 16393-നെ ഭാജ്യമെന്നും ഊനാഗ്രഹാരമാകുന്ന 11323-നെ ഭാജകമെന്നും അഗ്രാന്തരമാകുന്ന $169(= 338 - 169)$-നെ ക്ഷേപമെന്നും കല്പിക്കുക.

$$\text{ഭാജ്യഭാജകങ്ങളുടെ അപവർത്തനം} = 169$$
$$\text{അപവർത്തിക്കുമ്പോൾ ദൃഢഭാജകം} = \frac{11323}{169} = 67$$
$$\text{ദൃഢഭാജ്യം} = \frac{16393}{169} = 97$$
$$\text{ദൃഢക്ഷേപം} = \frac{169}{169} = 1$$

97-നേയും 67-നേയും അന്യോന്യഹരണം ചെയ്താലുണ്ടാകുന്ന വല്ലി:-

$$\begin{array}{l} 1 \cdots 42 \\ 2 \cdots 29 \rightarrow \text{ഗുണകാരം} \\ 4 \cdots 18 \\ 3 \cdots \text{മതി} \\ 1 \cdots \text{മതിഫലം} \end{array}$$

അപ്പോൾ ഉദ്ദിഷ്ടഭാജ്യം $= 16393 \times 29 + 338 = 475735$.

$$\left[\frac{475735}{16393}, \text{ ശേഷം} = 338; \ \frac{475735}{11323}, \text{ ശേഷം} = 169\right]$$

അഥവാ അഗ്രാന്തരത്തെ ശുദ്ധി എന്നും അധികാഗ്രഹാരത്തെ ഭാജകമെന്നും ഊനാഗ്രഹാരത്തെ ഭാജ്യമെന്നും കല്പിച്ച ക്രിയചെയ്താൽ ഗുണകാരം 42 എന്ന്.

അവിടെ ഉദ്ദിഷ്ടഭാജ്യം $= 11323 \times 42 + 169 = 475735$.

സാഗ്രകുട്ടാകാരത്തിന്റെ വിശേഷത്തെ ചൊല്ലുന്നു

മണ്ഡലാദിഭവൗ ശേഷാവുദ്ദിഷ്ടൗ ഗ്രഹയോര്യദി || 27
താഭ്യാം നിരഗ്രവിധിനാ ഗുണകാരൗ പൃഥങ്നയേൽ |
താവഗ്രേ കല്പയിത്വാഥ ദ്വിച്ഛേദാഗ്രം സമാനയേൽ || 28
സാധാരണോ ഗുണസ്സസ്യാൽ ഗ്രഹയോർദ്വയഭാജ്യയോഃ |

രണ്ടു ഗ്രഹങ്ങളുടെ മണ്ഡലശേഷങ്ങൾ, രാശിശേഷങ്ങൾ മുതലായവയിൽ ഒന്നു ജ്ഞാതമാണെങ്കിൽ നിരഗ്രകുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ പറഞ്ഞവണ്ണം ആ ശേഷങ്ങളെക്കൊണ്ടു രണ്ടു ഗുണകാരങ്ങളെയും വെവ്വേറെ ഉണ്ടാക്കി ആ ഗുണകാരങ്ങളെ അഗ്രങ്ങൾ എന്നു കല്പിച്ചു മുൻ ശ്ലോകത്തിൽ പറഞ്ഞപ്രകാരം ദ്വിച്ഛേദാഗ്രരാശിയെ ഉണ്ടാക്കിയാൽ അതു രണ്ടു ഗ്രഹങ്ങളുടെ ഭാജ്യങ്ങൾക്കും സാധാരണമായിരിക്കുന്ന ഗുണകാരമായിരിക്കും.

ഈ ക്രിയയുടെ ഉദാഹരണം:

ത്രിഘ്നനോ ഗുണകോക്സ്യ ഹാരോ ദ്വ്യംഗാഹിഗോമിതഃ || 29
ത്രിനന്ദാഗ്നിനൃപാ ഹാരഃ ഖഖാംഗാനി ഗുണോ വിധോഃ |
തത്ര മണ്ഡലശേഷോക്സ്യാഷ്ടൗ ചന്ദ്രസ്യ വഹ്നയഃ || 30
തയോസ്സാധാരണം ബ്രൂഹി ഗുണകം ഗുണകോത്തമ |

സൂര്യൻ		ചന്ദ്രൻ	
ഹാരകം =	9862	ഹാരകം =	16393
ഗുണകാരം =	27	ഗുണകാരം =	600
മണ്ഡലശേഷം =	8	മണ്ഡലശേഷം =	3

വല്ലി:
$$\begin{array}{l} 365 \cdots\cdots 8036 \\ 3 \cdots\cdots\cdots 22 \\ 5 \quad (\text{മതി}) \\ 4 \ (\text{മതിഫലം}) \end{array}$$

വല്ലി:
$$\begin{array}{l} 27 \cdots\cdots 11721 \\ 3 \cdots\cdots\cdots 429 \\ 9 \cdots\cdots\cdots 138 \\ 5 \cdots\cdots\cdots 15 \\ 3 \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore \text{അധികാഗ്രഹാരം} = 16393 \ (\text{ഭാജ്യം})$$
$$\text{ഊനാഗ്രഹാരം} = 9862 \ (\text{ഭാജകം})$$
$$\text{അഗ്രാന്തരം} = 11721 - 8036 = 3685 \ (=\text{ക്ഷേപം})$$

ഭാജ്യഭാജകങ്ങളുടെ അന്യോന്യഹരണവും വല്ലിയും:

1	9862	16393	1
1	3331	6531	1
2	131	3200	24
1	19	56	2
	1	18	

ശേഷം	ഫലം			സംഹൃതഫലം
16393	1			15032
9862	1			9043
6531	1			5989
3331	1			3054
3200	24		12535	2935
131	2		512	119
55	2	11055	247	
19	1	3685	13	
	3685			
	0			

രൂപം ഹാരകശേഷമാകയാൽ 3685 ക്ഷേപം തന്നെ. ഇവിടെ വല്ല്യുപസംഹാരത്തിന്നിടയിൽ തക്ഷണംചെയ്ത സംഖ്യകളെ ചെറുതാക്കിയിട്ടുണ്ട്.

$$\text{ഭാജ്യമേറിയതുകൊണ്ട് ഗുണകാരം} = 9043$$
$$\therefore \text{ദ്വിച്ഛേദാഗ്രരശി} = 16393 \times 9043 + 11721 = 148253620$$

[ഇതിനെ 27 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച 9862 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശേഷം = 8
600 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച 16393 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശേഷം = 3]

ഉദാഹരണാന്തരം:

രൂപേ ഗുണേ കുജാർക്ക്യോര്യൗ ഹാരൗ തദ്രൂപസംഭവഃ || 31
രാശിശേഷഃ കുജസ്യാർക്കാ ലിപ്താശേഷശ്ശനേന്നഖാഃ |
അഥ താഭ്യാം ഗുണൗ ജ്ഞാത്വാബ്രൂഹി സാധാരണം ഗുണം || 32

ഒന്നു ഗുണകാരമാകുമ്പോൾ കുജമന്ദന്മാർക്കു യാവചിലവ ഹാരകങ്ങൾ, അവയെ ഹാരകങ്ങളാക്കിയും രൂപത്തെ ഗുണകാരമാക്കിയും ക്രിയചെയ്താൽ ചൊവ്വക്കു രാശിശേഷം 12, ശനിക്കു ലിപ്താശേഷം 20. അവറ്റെക്കൊണ്ടു ഗുണകാരങ്ങളുണ്ടാക്കി സാധാരണമായിരിക്കുന്ന ഗുണകാരത്തെ ചൊല്ലുക.

ഇവിടെ ക്രിയ മുമ്പിലത്തെപ്പോലെതന്നെയാണെങ്കിലും കുറച്ച വിശേഷമുണ്ട്. മുൻ ഉദാഹരണത്തിൽ മണ്ഡലശേഷങ്ങൾ തന്നിരിക്കുന്നതുകൊണ്ട് ഗുണകാരങ്ങളെ തന്നെ വെച്ച ക്രിയചെയ്യാം. രാശിശേഷമാകുമ്പോൾ 12-ൽ ഗുണിച്ച ഗുണകാരത്തെക്കൊണ്ടും ലിപ്താശേഷമാണെങ്കിൽ 21600-ൽ ഗുണിച്ച ഗുണകാരംകൊണ്ടും ക്രിയചെയ്യേണമെന്നു വിശേഷമാകുന്നത്.

കുജൻ	ശനി
ഹാരകം = സുജാതഃ = 687	ഹാരകം = തതസൈനികം = 10766

ഗുണകാരം $= $ കിം $= 1$

രാശിശേഷം $= 12$

കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ,

ഹാരകം $= 687$

ഭാജ്യം $= 1 \times 12 = 12$

ശേഷം $= 12$

ഭാജ്യഹാരകങ്ങളുടെ അപവർത്തനം $= 3$

$\therefore$ ദൃഢഹാരകം $= 229$

ദൃഢഭാജ്യം $= 4$

ശേഷം $= 4$ (ശുദ്ധി)

വല്ലി: 57 . . . 228 (ഗുണകാരം)

4

0

ഗുണകാരം $= $ കിം $= 1$

ലിപ്താശേഷം $= 20$

കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ,

ഹാരകം $= 10766$

ഭാജ്യം $= 21600$

ശേഷം $= 20$

ഭാജ്യഹാരകങ്ങളുടെ അപവർത്തനം $= 2$

$\therefore$ ദൃഢഹാരകം $= 5383$

ദൃഢഭാജ്യം $= 10800$

ശേഷം $= 10$ (ശുദ്ധി)

വല്ലി: 2 . . . 9530

158 . . . 4750

3 . . . 30

10

0

കുജപക്ഷത്തിൽ ഹാരകമേറുകയാൽ ഗുണാകാരം $= 228$

രൂപം ഹാരകശേഷമാകയാൽ സ്ഫുടഗുണകാരം $= 229 - 228 = 1$

ഈ ഒന്നിനെ 4-ൽ ഗുണിച്ചാൽ 229-ൽ ഹരിക്കുവാനില്ല. അതുകൊണ്ട്,

സ്ഫുടഗുണകാരം $= 2 \times 229 - 228 = 230$ എന്നു കല്പിക്കേണം.

അപ്പോൾ ഫലം $= 2 \times 4 - 4 = 4$

അപ്പോൾ 230-നെ 4-ൽ പെരുക്കി 229-ൽ ഹരിച്ചാൽ ശേഷം 4 എന്നു വരും.

കുജപക്ഷത്തിൽ ഗുണകാരം $= 230$

ശനിപക്ഷത്തിൽ ഭാജ്യമേറുകയാൽ ഗുണകാരം $= 4750$

ഭാജ്യത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ 10 ശുദ്ധിതന്നെ.

അപ്പോൾ അനന്തരക്രിയയിൽ

$$\text{ഭാജ്യം} = 10766 \ (\text{അധികാഗ്രഹാരം})$$
$$\text{ഭാജകം} = 687 \ (\text{ഊനാഗ്രഹാരം})$$
$$\text{ക്ഷേപം} = 4750 - 230 = 4520$$

അന്യോന്യഹരണം:

1	687	10766	15
25	226	461	2
	1	9	

വല്ലി: ശേഷം	ഫലം	സംഹൃതഫലം	
10766	15		320 (= ഫലം)
687	1		20 (= ഗുണകാരം)
461	2	230520	20
226	25	11300	0
9	4520		
1	0		

ഇവിടെ ഭാജ്യമേറുന്നതുകൊണ്ട് ഗുണകാരം $= 20$.
ഹാരകത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ 4520 ക്ഷേപംതന്നെ.
$\therefore$ സാധാരണഗുണകാരം $= 20 \times 10766 + 4750 = \underline{220070}$.

[ഈ സാധാരണ ഗുണകാരത്തെ 1-ൽ ഗുണിച്ച 687 കൊണ്ടു ഹരിച്ച രാശിയോളമുണ്ടാക്കിയാൽ രാശിശേഷം $= 12$; ഇതിനെ തന്നെ ഒന്നിൽ ഗുണിച്ച 10766 കൊണ്ടു ഹരിച്ച് ഇലിയോളമുണ്ടാക്കിയാൽ ശേഷം $= 20$.]

ലഘുക്കളായിരിക്കുന്ന ഗുണകാരഹാരകങ്ങളുടെ ആനയനത്തിങ്കൽ കുട്ടാകാരത്തിന്റെ ഉപയോഗം:

യാവദിഷ്ടമ്മിഥോ ഹൃത്വാ ദൃഢേ ഭഗണഭൂദിനേ |
ഫലവല്യാസ്ത്വധോ രൂപം ന്യസ്യതാമുപസംഹരേൽ || 33
യൗ രാശീ തത്ര ലഭ്യേതേ ഗുണഹാരൗ വിധായതൗ |
ഭഗണാദ്യം നയേന്മദ്ധ്യം സംസ്കാരാൽ സ്പഷ്ടതാസ്യ ച || 34

അപവർത്തിക്കപ്പെട്ട ഭഗണഭൂദിനങ്ങളെ അന്യോന്യം ആവശ്യത്തോളം ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലങ്ങളെക്കൊണ്ടു വല്ലിയുണ്ടാക്കി അതിന്റെ ചുവട്ടിൽ രൂപത്തെ വെക്കുക. എന്നിട്ടു വല്ല്യപസംഹാരം ചെയ്യുക. ശേഷിക്കുന്ന രാശികളിൽ ഫലരൂപമായിരിക്കുന്ന രാശി ഗുണകാരം, ഗുണരൂപമായിരിക്കുന്ന രാശി ഹാരകം. ഈ ഗുണകാരഹാരകങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഭഗണാദ്യമായിരിക്കുന്ന മദ്ധ്യമത്തെ വരുത്താം. എന്നാൽ ഈ മദ്ധ്യമത്തിന്നു സൂക്ഷ്മത വരുത്തുവാൻ ചില സംസ്കാരം ചെയ്യേണം.

സംസ്കാരപ്രകാരം:

ഇഷ്ടാഹാരേണ നിഹതാൽ ദൃഢഹാരകതസ്തു യൽ |
മിഥോ ഹരണശേഷഘ്നചക്രലിപ്താഹൃതം ഫലം || 35
തേനേഷ്ടദ്യുഗണാൽ ലബ്ധം ഫലം ലിപ്താദികം ധനം |
ശേഷശ്ചേൽ ഭഗണേ ദൃഷ്ടോ ഭൂദിനേ ചേദൃണം തഥാ || 36

കുട്ടാകാരംകൊണ്ടു വരുത്തിയ ഹാരകത്തേയും ദൃഢഹാരകത്തേയും (അപവർത്തിക്കപ്പെട്ട ഭൂദിനം) തമ്മിൽ ഗുണിച്ചതിനെ ചക്രലിപ്ത (21600) കൊണ്ട് ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന അന്യോന്യഹരണശേഷംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ഫലം സംസ്കാരഹാരകം. ഈ സംസ്കാരഹാരകത്തെക്കൊണ്ടു ദ്യുഗണത്തെ ഹരിച്ച ഫലം (ഇലി) മദ്ധ്യമത്തിൽ സംസ്കരിക്കേണം. അന്യോന്യഹരണത്തിങ്കലെ ഒടുക്കത്തെ ശേഷം ഭഗണശേഷമെങ്കിൽ ധനമായിട്ടും ഭൂദിനശേഷമെങ്കിൽ ഋണമായിട്ടും സംസ്കരിക്കേണം.

ഈ സംസ്കാരംകൊണ്ടും സൂക്ഷ്മതപോരായ്കിൽ ദ്വിതീയസംസ്കാരഹാരകവുമുണ്ടാക്കി അതുകൊണ്ടും സംസ്കാരം ചെയ്യേണം. ഇതിൻ പ്രകാരം:

സംസ്കാരഹാരാനയനേ യശ്ശേഷസ്തേന സംഹരേൽ |
സംസ്കാരഹാരേഷ്ടഹാരദൃഢഹാരവധം തതഃ || 37
യല്ലബ്ധം സ ദ്വിതീയോപി പ്രോക്തഃ സംസ്കാരഹാരകഃ |
പൂർവ്വവൽ സ്വർണ്ണതോനത്വേ ശേഷത്വസ്യാന്യഥാന്യഥാ || 38

സംസ്കാരഹാരകവും ഇഷ്ടഹാരകവും ദൃഢഹാരകവും മൂന്നിനേയും തമ്മിൽ ഗുണിച്ച് അതിനെ സംസ്കാരഹാരകം വരുത്തുന്നേടത്തെ ശേഷംകൊണ്ടു ഹരിക്ക. അപ്പോളുണ്ടാകുന്ന ഫലം ദ്വിതീയസംസ്കാരഹാരകം. ഇതിനെക്കൊണ്ടും ദ്യുഗണത്തെ ഹരിച്ചഫലം (ഇലി) മദ്ധ്യത്തിൽ സംസ്കരിക്കേണം, സൂക്ഷ്മതക്കായിക്കൊണ്ട്. ഈ പറഞ്ഞ ശേഷം ഊന (ഹരിക്കുവാൻ പോരാതെ വരുന്ന) ശേഷമാണെങ്കിൽ മുമ്പിലെപ്പോലെ സംസ്കാരത്തിന്റെ ഋണധനത്വം; അധിക ശേഷമെങ്കിൽ വിപരീതം.

ഈ ക്രിയയുടെ ഉദാഹരണം:

$$\text{സൂര്യന്റെ ദൃഢഭഗണം} = \text{തിഥീശഃ} = 576$$
$$1\ \text{ദൃഢഭൂദിനം} = \text{ധീജഗന്നൂപുരം} = 210389$$

ഇവയെ അന്യോന്യഹരണംചെയ്കതിൽ നാലു ഫലങ്ങളെവെച്ചു ക്രിയ ചെയ്യാം.

വല്ലി: $365 \cdots 9862$ (പ്രീതിദുശ്ച്ഛഃ) — ഗുണകാരം
$3 \cdots\cdots 27$ (സൂരി) — ഫലം
$1 \cdots\cdots 7$
6
1

മദ്ധ്യരാനയനത്തിൽ ഗുണകാരം $= 27$; ഹാരകം $= 9862$
അന്യോന്യഹരണത്തിങ്കൽ 6 ഫലമാകുമ്പോൾ ശേഷം $= 9$. അതു ഭഗണശേഷം.

അപ്പോൾ സംസ്കാരഹാരകം $= \dfrac{9862 \times 210389}{9 \times 21600} = 10673$ (ധനം)

ശേഷമാകുന്ന 9 ഭഗണശേഷമാകയാൽ സംസ്കാരം ധനം.

സംസ്കാരഹാരകമുണ്ടാക്കുന്നേടത്തെ ശേഷം 25118. ഇതു് അധികശേഷം.

അപ്പോൾ രണ്ടാം സംസ്കാരഹാരകം $= \dfrac{9862 \times 210389 \times 10673}{25118} = 881636336$

അധികശേഷമായതുകൊണ്ടു ദ്വിതീയസംസ്കാരം ഋണം (ആദ്യസംസ്കാരം ധനമായതുകൊണ്ടു്.)

[സംസ്കാരഹാരകത്തെ 10674 എന്നാക്കിയാൽ ശേഷം ഊനശേഷമായിട്ടുവരും. അതു $9 \times 21600 - 25118 = 169282$ എന്നു്.

അപ്പോൾ രണ്ടാംസംസ്കാരഹാരകം $= \dfrac{9862 \times 210389 \times 10674}{169282}$

ഊനശേഷകമാകക്കൊണ്ടു് ഈ സംസ്കാരം ധനവുമാണ്.]

പരീക്ഷാർത്ഥം 100000000 ദിവസങ്ങളുടെ മദ്ധ്യമം വരുത്തി നോക്കാം.

ധ്രുവായനപ്രകാരം മദ്ധ്യമം $= \dfrac{10^8 \times 576}{210389} = \underline{6\ \text{രാശി} - 25 - 56 - 47}$

ലഘുഗുണകാരഹാരകങ്ങളെക്കൊണ്ടു് ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം:-

$$
\begin{array}{llrl}
 & & \text{രാ. തി. ഇ. വി.} & \\
(\text{ക}) & \dfrac{10^8 \times 27}{9862} = & 1-19-47-28 & \\
(\text{ഖ}) & \dfrac{10^8}{10673} = & \underline{5-\ 6-\ 9-26} & (\text{ധനം}) \\
 & (\text{ക}) + (\text{ഖ}) = & 6-25-56-54 & \\
(\text{ഗ}) & \dfrac{10^8}{881636336} = & \underline{0-\ 0-\ 0-\ 7} & (\text{ഋണം}) \\
 & \text{ഉദ്ദിഷ്ടമദ്ധ്യമം} = & \underline{6-25-56-47} &
\end{array}
$$

ഒരേ ക്രിയകൊണ്ടുതന്നെ പല ഗുണകാരഹാരകങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം:-
യദ്വാ വല്ല്യദ്ധ്വഗം രൂപം കൃത്വോദ്ധ്വാദ്യമധോന്തിമം |
കുര്യ്യാദ്വല്ല്യുപസംഹാരം പൂർവ്വം പൂർവ്വമനാശയൻ || 39
തത്ര ലബ്ധാഃ ക്രമേണൈവ ഹാരകാസ്സ്യുഃ പൃഥക് പൃഥക് |

ഭഗണഭൂദിനങ്ങളെ അന്യോന്യം ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലവല്ലിയുടെ മേലെ രൂപത്തേയും വെച്ചു മേൽനിന്ന് കീഴ്പ്പെട്ടു വല്ല്യുപസംഹാരം ചെയ്ക. മേലെ മേലെയുണ്ടായ രാശികളെ കളയാതെ സൂക്ഷിക്കുകയും വേണം. എന്നാൽ ഈ രാശികൾ വെവ്വേറെ ചില ഹാരകങ്ങളായിട്ടു വരും.

ഇവയുടെ ഗുണകാരാനയനം:
രൂപമാദ്യഫലസ്ഥാനേ ന്യസ്യ ഖഞ്ച തദൂർദ്ധ്വതഃ || 40
കർമ്മണാനേന തേഷാം സ്യുർഗ്ഗുണകാരാ യഥാക്രമം |

ഫലവല്ലിയിൽ ആദ്യത്തെ ഫലത്തെ കളഞ്ഞ് അതിന്റെ സ്ഥാനത്തു രൂപം വെക്കുക. അതിന്റെ മീതെ ശൂന്യത്തേയും വെക്കുക. മുമ്പിൽ പറഞ്ഞപ്രകാരം വല്ല്യുപസംഹാരം ചെയ്ക. എന്നാൽ മുൻ വരുത്തിയിരിക്കുന്ന ഹാരകങ്ങളുടെ ഗുണകാരങ്ങളെ ക്രമേണ ലഭിക്കും.

ഇവറ്റിന്നു സംസ്കാരഹാരകങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുവാനുള്ള ഉപായം:
പ്രാഗ്വത്തത്തൽ ഗതൈശ്ശേഷൈഃ കുര്യ്യാൽ സംസ്കാരഹാരകാൻ || 41

മുൻപറഞ്ഞപ്രകാരം അവിടവിടത്തെ ശേഷങ്ങളെക്കൊണ്ടു സംസ്കാരഹാരകങ്ങളേയും വരുത്തികൊൾക.

ഉദാഹരണം:

സൂര്യന്റെ ദൃഢഭഗണഭൂദിനങ്ങളെ (576; 210389) അന്യോന്യം ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലവല്ലിയെ രണ്ടേടത്തുവെച്ച് ഒന്നിന്റെ മീത്തെ രൂപത്തേയും മറ്റേതിന്റെ ആദ്യഫലമായ 365-നെ കളഞ്ഞ് ആ സ്ഥാനത്തു രൂപത്തേയും ഈ രൂപത്തിന്റെ മീതെ ശൂന്യത്തേയും വെച്ചു രണ്ടിങ്കലും മുകളിൽനിന്നു കീഴ്പ്പെട്ടു വല്ല്യുപസംഹാരം ചെയ്ക.

രൂപാദി വല്ലീ	ഉപസംഹൃത ഫലങ്ങൾ	ശൂന്യാദി വല്ലീ	ഉപസംഹൃത ഫലങ്ങൾ	ശേഷങ്ങൾ	ശേഷങ്ങളുടെ ഋണധനത്വം
1		0			
365		1			
3	1096	3	3	129	ഭഗണശേഷം (+)
1	1461	1	4	20	ഭൂദിനശേഷം (−)
6	9862	6	27	9	ഭഗണശേഷം (+)
2	21185	2	58	2	ഭൂദിനശേഷം (−)
4	94602	4	259	1	ഭഗണശേഷം (+)
2	210389	2	576	0	ഭൂദിനശേഷം (−)

ഇവിടെ രണ്ടാമത്തെ വരിയിലുള്ളവ ഹാരകങ്ങളാകുന്നു. നാലാമത്തെ വരിയിലുള്ളവ ഈ ഹാരകങ്ങളുടെ ക്രമേണയുള്ള ഗുണകാരങ്ങളുമാകുന്നു. അഞ്ചാമത്തെ വരിയിലെ ശേഷങ്ങളിൽ നിന്നു ക്രമേണയുള്ള സംസ്കാരഹാരകങ്ങളേയും ദ്വിതീയസംസ്കാരഹാരകങ്ങളേയും മുൻപറഞ്ഞപ്രകാരം ഉണ്ടാക്കാം.

ഇവിടെ രണ്ടു ഹാരകങ്ങളുടെ യോഗത്തേയോ അന്തരത്തേയോ ഹാരകമായി കല്പിച്ചാൽ അതതു ഗുണകാരങ്ങളുടെ യോഗമോ അന്തരമോ ഗുണകാരമായിട്ടു വരും. അതതു

ശേഷങ്ങളേയും ഋണധനം പോലെ യോഗവിയോഗം ചെയ്താൽ ഉണ്ടാകുന്ന ഫലം ശേഷമായിട്ടു വരും. ഈ ശേഷത്തിങ്കന്നു സംസ്കാരഹാരകത്തേയും ദ്വിതീയസംസ്കാരഹാരകത്തേയും ഉണ്ടാക്കാം. ഹാരകങ്ങളായിരിക്കുന്ന 9862-ന്റേയും 1461-ന്റേയും യോഗം 11323; ഇവയുടെ ഗുണകാരയോഗം $= 31$. ഇങ്ങനെയാണ് **കുലം** എന്ന ഗുണകാരത്തിന്നു **ഗോത്രഗായകഃ** എന്ന ഹാരകം ലഭിച്ചതു്. ഇവിടത്തെ സംസ്കാരഹാരകാനയനം പിന്നെ. 1461-ങ്കലേയ്ക്കുള്ള ശേഷം 20 ഭൂദിനശേഷമാകകൊണ്ടു ഋണം. 9862-ങ്കലേയ്ക്കുള്ള ശേഷം 9 ഭഗണശേഷമാകകൊണ്ടു ധനം. ഇവയുടെ അന്തരം 11 ഋണം.

മുൻപറഞ്ഞ ന്യായപ്രകാരം,

$$\text{സംസ്കാരഹാരകം} = \frac{210389 \times 11323}{11 \times 21600} = 10026 - \text{ചന്ദ്രാനനയം (ഋണം)}$$

മുമ്പിൽ പറഞ്ഞ കുട്ടാകാരങ്ങളുടെ സംജ്ഞകൾ:

ക്രമാദ്രൂപാദിശൂന്യാദികട്ടകൗ വ്യസ്തകുട്ടകൗ |

ഫലവല്ലിയുടെ മീതെ രൂപംവെച്ച മേലെനിന്നു കീഴ്പ്പെട്ടു വല്ല്യുപസംഹാരം ചെയ്യുന്ന കുട്ടാകാരത്തിന്നു **രൂപാദിവ്യസ്തകുട്ടാകാര**മെന്നു പേർ. ആദ്യഫലസ്ഥാനത്തു രൂപംവെച്ച് അതിന്നുമേൽ ശൂന്യവുംവെച്ച ചെയ്യുന്ന കുട്ടാകാരത്തിനു **ശൂന്യാദിവ്യസ്തകുട്ടാകാര**മെന്നു പേർ.

കുട്ടാകാരങ്ങളുടെ ഉപയോഗങ്ങൾ:

ഇഷ്ടദേശഭവോ യോഗോ ദ്വയോശ്ചേൽ ജ്ഞാതുമിഷ്യതേ || 42
ഇഷ്ടകാലേ സമാനീതം മദ്ധ്യമം യന്മഹാഗതേഃ |
ഇഷ്ടദേശം വിശോദ്ധ്യാതശ്ശിഷ്ടം ലിപ്തീകൃതം ഹതം|| 43
ഭൂദിനൈശ്ചക്രലിപ്താഘ്നഭഗണൈർവ്വിഭജേത്തതഃ |
ലബ്ധം ദിനാദികം ശോദ്ധ്യമിഷ്ടകാലാത്തദാ പുനഃ || 44
മദ്ധ്യമല്പഗതേഃ കൃത്വാ തസ്മാച്ചേഷ്ടം വിശോധയേൽ |
ശേഷം ലിപ്തീകൃതം ഹത്വാ മഹതാ ഭഗണേന തു || 45
ചക്രലിപ്താഹൃതാ ശുദ്ധിഃഹാരകോ ഭഗണോ മഹാൻ |
ഭാജ്യോഽല്പോ ഭഗണസ്തൈസ്തു നിരഗ്രവിധിനാഗതാൽ || 46
തൽഗുണാൽ ഭൂദിനഹതാന്മഹതാ ഭഗണേന യൽ |
ലഭ്യതേ തത്ത്യജേൽ പൂർവ്വസംസ്കൃതാദിഷ്ടകാലതഃ || 47
ഇഷ്ടകാലേ ഭവേദ്യോഗ ഇഷ്ടദേശഗ്രഹേന്ദ്രയോഃ |

രണ്ടുഗ്രഹങ്ങളുടെ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കലെ യോഗമറിവാൻ ഇച്ഛിക്കപ്പെടുന്നുവെങ്കിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരിഷ്ടദിവസത്തിങ്കലെ കലിക്കൊട്ടനാൾ വെച്ച രണ്ടു ഗ്രഹങ്ങളിലുംവെച്ച ഗതി ഏറുന്നവന്റെ മദ്ധ്യമത്തെ വരുത്തി അതിൽനിന്ന് ഇഷ്ടപ്രദേശത്തെ വാങ്ങി ശേഷിച്ചതിനെ ഇലിയാക്കി ഭൂദിനങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച ചക്രകലാഹതങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഭഗണങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലം ദിവസാത്മകം. ശേഷത്തെ 60-ൽ ഗുണിച്ച ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലം നാഴിക. അതിനെ മുമ്പിലത്തെ കലിക്കൊട്ടനാളിൽ നിന്നു വാങ്ങി ശേഷിച്ചതിനെക്കൊണ്ട് ഗതി കുറഞ്ഞവന്റേയും മദ്ധ്യമത്തെ ഉണ്ടാക്കി അതിങ്കൽനിന്ന് ഇഷ്ടപ്രദേശത്തെ വാങ്ങൂ. ശേഷിച്ചതിനെ ഇലിയാക്കി മഹാഗതിയുടെ ഭഗണംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് "അനന്തപുരം"($= 21600$) കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം ശുദ്ധിയാകുന്നതു്. ഇവിടെ തികഞ്ഞ ഫലത്തെ മാത്രം സ്വീകരിച്ചാൽ മതി. ശേഷത്തെ കളയാം. മഹാഗതിയുടെ ഭഗണം ഹാരകമാകുന്നതു്. അല്പഗതിയുടെ ഭഗണം ഭാജ്യമാകുന്നതു്. ഇവറ്റെക്കൊണ്ടു നിരഗ്രകുട്ടാഹാരം ചെയ്താൽ

ഉണ്ടാകുന്ന ഗുണകാരത്തെ ഭൂദിനങ്ങളെക്കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് മഹാഭഗണത്തെക്കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ദിവസാദി ആയിട്ടുണ്ടാകുന്ന ഫലത്തെ മുമ്പിൽ ഒരു സംസ്കാരം ചെയ്തുവെച്ചിരിക്കുന്ന കലിക്കൊട്ടനാളിൽനിന്നു വാങ്ങൂ. ശേഷിച്ച കാലത്തിങ്കൽ രണ്ടു ഗ്രഹങ്ങൾക്കും ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കൽ യോഗമുണ്ടാകും.

ഉദാഹരണം:-

ഇഷ്ടപ്രദേശം = 4 രാശി 7 തിയതി
ഇഷ്ടകലി = 1841000 (അജ്ഞാനവിഹേയം)

അക്കകുജയോഗം ഇച്ഛിക്കപ്പെടുന്നത്.

[മദ്ധ്യമാനയനം, ഭഗണങ്ങൾ ഇവയെല്ലാം തന്ത്രസംഗ്രഹം അനുസരിച്ച് കണക്കാക്കിയിരിക്കുന്നു.]

അക്കന്റെ ഭഗണം = 4320000
കുജന്റെ ഭഗണം = 2296864 } ഇവയുടെ അപവത്തനഹാരകം = 32

ഭൂദിനം = 1577917500
അക്കന്റെ ദൃഢഭഗണം = 135000
കജന്റെ ദൃഢഗണം = 71777
ഇഷ്ടദിവസത്തിങ്കലെ അക്കമദ്ധ്യമം = 3 − 4 − 51 − 61 − 23

ഇഷ്ടകാവാക്കമദ്ധ്യമത്തിൽ നിന്നു ഇഷ്ടപ്രദേശം വാങ്ങിയത് }
3 − 4 − 51 − 51 − 23
4 − 7 − 0 − 0 − 0

= 10 − 27 − 51 − 51 − 23
= 19671 ഇലി − 51 വി − 23ത

$$\frac{19671 - 51 - 23 \times 1577917500}{21600 \times 4320000} = 332\text{ദി} - 39\text{നാ} - 12\text{വി} - 43 - 5$$

കലിക്കോട്ടനാളിൽ നിന്ന്

ഈ ദിവസത്തെ വാങ്ങിയത്	=	1840667−20−47−16−56
ഈ സംസ്കൃതദിവസത്തിലെ കജമദ്ധ്യമം	=	3−16−42−59−33
ഇതിൽ നിന്ന് ഇഷ്ടപ്രദേശം വാങ്ങിയത്	=	4− 7− 0− 0− 0
		11− 9−42−59−33
	=	20382ഇ − 59വി − 33ത .

$$\frac{20382 - 59 - 33 \times 135000}{21600} = \text{ശുദ്ധി} = 127394$$ (അദ്ധാധികം കൂട്ടിയത്)

ഹാരകം = 135000
ഭാജ്യം = 71777

അക്കകുജന്മാരുടെ ദൃഢഭഗണങ്ങളായ 135000, 71777 ഇവയെ അന്യോന്യ ഹരണം ചെയ്തുണ്ടായ വല്ലി:

1 · · · 5287
1 · · · 2811
7 · · · 2476
2 · · · 335
1 · · · 131
1 · · · 73
3 · · · 58
1 · · · 15
6 · · · 13
1 · · · 2
1 · · · 1
1
0

വല്ലിയുടെ ചുവട്ടിൽ രൂപവും അതിന്റെ ചുവട്ടിൽ ശൂന്യവും വെച്ച വല്ല്യുപസംഹാരം ചെയ്ക. ഹാരകത്തിൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ 1 ക്ഷേപം. ഭാജകമേറുകയാൽ ഗുണകാരം $= 5287$. അപ്പോൾ 1 ശുദ്ധിയാകുമ്പോൾ ഗുണകാരം $= 135000 - 5287 = 129713$ അപ്പോൾ 127394 ശുദ്ധിയാകുമ്പോൾ ഗുണകാരം $= 129713 \times 127394 = 16524657922$ തക്ഷണശേഷം ഗുണകാരം $= 117922$

$$\frac{1577917500 \times 117922}{4320000} = 43072034\text{ദി} - 7 - 42 - 30$$

$1840667 - 20 - 47 - 17$ എന്ന കലി ദിവസസമയത്തിങ്കന്ന $43072034 - 7 - 42 - 30$ ദിവസം മുമ്പ കുജാക്കന്മാരുടെ യോഗം ഇഷ്ടപ്രദേശത്തു സംഭവിച്ചു.

[ഇക്കാലത്തിൽ അക്കൻ 117922 ഭഗണങ്ങൾ തികച്ചും ഗമിച്ചു; കുജൻ

$$\frac{43072034 - 7 - 42 - 30 \times 2296864}{1577917500} = 62696\text{ഭഗണം. }11\text{രാശി.}$$

9തി. 43ഇ. 2വി. ഗമിച്ചു.

അപ്പോൾ യോഗസമയമായി കണക്കാക്കിയ സമയത്തെ

$$\text{അക്കമദ്ധ്യമം} = (4 - 7 - 0 - 0) - 0 = \underline{4 - 7 - 0 - 0}$$

$$\text{കുജമദ്ധ്യമം} = (3 - 16 - 43 - 0) - (11 - 9 - 43 - 2) = \underline{4 - 6 - 59 - 58}$$

വ്യത്യാസം 2വിലി മാത്രമാകുന്നു. അത് അദ്ധ്വാധികം കൂട്ടിയതിനാലും മറ്റും ഉണ്ടായതായിരിക്കണം.]

ഗണിതത്തിൽ ആസന്നയോഗങ്ങളെക്കൊണ്ടാണ് അധികം ആവശ്യം. അതുകൊണ്ട് ചില ആസന്നയോഗങ്ങളെ അറിവാനുള്ള ഉപായത്തെ ചൊല്ലുന്നു:-

ഭഗണൗ തു തയോഃഹൃത്വാ മിഥോ വ്യസ്താഖ്യകർമ്മണാ || 48
ജാതാൻ ഭൂദിവസൈഃഹത്വാ വിഭജേൽ ഭഗണേന താൻ |
രൂപാദികേ തു മഹതാ സ്വല്പേന വിയദാദികേ || 49
ലബ്ധാസ്സ്യുർദ്ദിവസാഷ്ഷഷ്ട്യാ ഹതാന്നാഡ്യാദയോപി തേ |
ഇഷ്ടദേശയുതൗ ശീഘ്രല്പഗത്യോസ്സമയാഃ ക്രമാൽ || 50

രണ്ടു ഗ്രഹങ്ങളുടേയും ഭഗണങ്ങളെ അന്യോന്യം ഹരിച്ചു ഫലവല്ലി ഉണ്ടാക്കി രൂപാദിയായിട്ടോ ശൂന്യാദിയായിട്ടോ ഉള്ള വ്യസ്തകുട്ടാകാരം ചെയ്തുണ്ടായ രാശികളെ വെവ്വേറെ ഭൂദിനംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഭഗണംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. രൂപാദിയെങ്കിൽ വലിയഭഗണംകൊണ്ടും ശൂ

ന്യാദിയെങ്കിൽ ചെറിയ ഭഗണംകൊണ്ടും ഹരിക്കേണ്ടുവത് ഉണ്ടായ ഫലങ്ങൾ ദിവസാത്മകങ്ങൾ. ശേഷങ്ങളെ 60-ൽ ഗുണിച്ച ഭഗണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ നാഴിക മുതലായവയും ഉണ്ടാകും. ഈ ഉണ്ടായ കാലങ്ങൾ ശീഘ്രഗതിഗ്രഹത്തിന്റേയും അല്പഗതിഗ്രഹത്തിന്റേയും ഇഷ്ടദേശയോഗങ്ങളുടെ അന്തരങ്ങൾ.

ഇവിടെ നേരെ യോഗം വരായ്കയാൽ ഗ്രഹങ്ങൾ തങ്ങളിലുള്ള അന്തരത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

തത്ര തത്ര ഗതാൻ ശേഷാംശ്ചക്രലിപ്താഹതാൻ ഹരേൽ|
ഇഷ്ടസ്യ ഭഗണേന സ്യാദിതരസ്യ തദാന്തരഃ|| 51

അന്യോന്യ ഹരണത്തിങ്കൽ അവിടെയവിടെ ഉണ്ടായ ശേഷങ്ങളെ "അനന്തപുരം" കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ഇഷ്ടഗ്രഹത്തിന്റെ ഭഗണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ അവന്ന് ഇതരഗ്രഹത്തോടുള്ള അന്തരം ലിപ്താത്മകമായി കിട്ടും.

ഇതിന്റെ ഉദാഹരണം:–

സിംഹേ സപ്തമഭാഗേഭ്രൂൽ കദാ യോഗോക്കഭൗമയോ |
തയോമന്യതരസ്യാത്ര യോഗസ്തദിതരസ്യ തു || 52
അത്യാസക്തിർഭവേൽ പശ്ചാൽ കസ്മിൻ കസ്മിന്നനേഹസി ||
തയോരന്തരലിപ്താശ്ച കതിസ്യുർഗ്ഗണകോത്തമ || 53

ഒരിക്കൽ ആദിത്യനും ചൊവ്വക്കും ചിങ്ങത്തിൽ ഏഴു തിയതി തികയുന്നേടത്തു യോഗമുണ്ടായി. പിന്നെ അവരിൽ ഒരുത്തന്ന് ഇഷ്ടപ്രദേശത്തു യോഗവും മറ്റേവന്ന് ഏറ്റവും അണവും (= സാമീപ്യം, അടുപ്പം) ഏതേതു കാലത്തുണ്ടായി എന്നു ചൊല്ലുക. അന്നു ഇവ രണ്ടും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരകലകൾ എത്ര എന്നും ചൊല്ലുക.

സൂര്യന്റേയും കുജന്റേയും ദൃഢഭഗണങ്ങളായ 135000, 71777 ഇവയെ അന്യോന്യം ഹരിച്ച ഫലവല്ലിയും രൂപാദിശൂന്യാദികുട്ടാകാരങ്ങളെക്കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ സംഹൃതഫലങ്ങളും:–

വല്ലീ	രൂപാദി വ്യസ്ത കുട്ടാകാരം		ശൂന്യാദി വ്യസ്ത കുട്ടാകാരം		ദൃഢ ശേഷങ്ങൾ	
1	1		0			
1	1		1			
7	1	2	1	1		
2	7	15	7	8		
1	2	32	2	17		ശേഷംവെച്ച് അന്തരം കാണുമ്പോൾ ദൃഢശേഷങ്ങളെ ഉപയോഗിക്കുകയാണെങ്കിൽ ദൃഢഭഗണങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മതി.
1	1	47	1	25	1481	
3	1	79	1	42	383	
1	3	284	3	151	332	
8	1	356	1	193	51	
1	8	2462	3	1309	28	
1	1	2526	1	1502	25	
	1	5287	1	2811	1	

ക്രിയചെയ്തിട്ടുള്ള ഫലങ്ങൾ:

	സംഹൃത ഫലം	യോഗങ്ങൾ തങ്ങളിൽ അന്തര ദിവസങ്ങൾ	അദ്ദിവസത്തെ സൂര്യമദ്ധ്യമം	കുജമദ്ധ്യമം	അന്തര കല	ശേഷം കൊണ്ടു കിട്ടിയ അന്തരകല
രൂപാദിവ്യസ്തക്കാരം	5287	1981122-38-39	0	11-29-59-50	10വി.	10വി
	2825	1031855-48-21	0	0-0-4-0	4ഇ.	$4'$
	2462	899288-52-18	0	11-29-55-50	$4'$-$10''$	$4'$-$10''$
	383	182588-54-3	0	0-0-8-10	$8'$-$10''$	$8'$-10
	284	103788-27-10	0	11-29-8-53	$53'$-$7''$	$53'$-$7''$
ശൂന്യാദിവ്യസ്തക്കാരം	2811	1931122-38-57	0-0-0-18	0	$18''$	$18''$
	1502	1031355-38-43	11-29-52-29	0	$7'$-$31''$	$7'$-$31''$
	1809	899257-0-14	0-0-7-49	0	$7'$-$49''$	$7'$-$49''$
	193	132588-38-29	11-29-44-40	0	$15'$-$20''$	$15'$-$21''$

ഇവിടെ രൂപാദിയിലും ശൂന്യാദിയിലും അന്തരദിവസങ്ങൾ തങ്ങളിൽ നാഴികകൊണ്ടു മാത്രമേ വ്യത്യാസമുള്ളൂ. ഒരിക്കൽ ചിങ്ങത്തിൽ 7 തീയ്യതി തികയുന്ന പ്രദേശത്തു യോഗമുണ്ടായി എന്നു കല്പിച്ചാൽ ആ സമയത്തിൽ നിന്ന് ഈ അന്തരദിവസങ്ങൾ ചെല്ലുന്ന നേരത്തോ അത്ര ദിവസം മുമ്പോ ആസന്നയോഗമുണ്ടാവും. ശേഷം കുജഭഗണശേഷമെങ്കിൽ കുജൻ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തുനിന്നു ഗതം, സൂര്യഭഗണമെങ്കിൽ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിലേയ്ക്കു ഗമ്യം. സൂര്യൻ ഇഷ്ടപ്രദേശത്ത്. ഇങ്ങനെ രൂപാദിക്രിയയിൽ. ശൂന്യാദിയിങ്കൽ കുജൻ ഇഷ്ട പ്രദേശത്ത്. സൂര്യഭഗണശേഷമെങ്കിൽ സൂര്യൻ ഗതം, കുജഭഗണശേഷമെങ്കിൽ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കലേയ്ക്കു ഗമ്യം.

ഇവിടെ ഒരു ഗ്രഹം ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കലും മറ്റേത് ആസന്നമായും വരത്തക്കവണ്ണമാണല്ലോ അന്തരദിവസങ്ങളെ വരുത്തിയത്. അനന്തരം ഒരു ദിവസം രണ്ടു ഗ്രഹങ്ങൾക്കും യോഗം വരുകയും ആ യോഗപ്രദേശം ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിനോട് ഏറ്റവും അണവുണ്ടാകുകയും ചെയ്യത്തക്കവണ്ണമുള്ള അന്തരദിവസങ്ങളെ വരുത്തുവാനും ആ യോഗപ്രദേശവും ഇഷ്ടപ്രദേശവും തമ്മിലുള്ള അന്തരകലകളെ കാണുവാനുമുള്ള ഉപായത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

ഇഷ്ടദേശസമീപസ്ഥയുതൗ കാലോ യദാ ദ്വയോഃ |
യോഗേഷ്ടദേശാന്തരഞ്ച ജിജ്ഞാസ്യോതേ തദാനയോഃ || 54
ഭേദോ ഭഗണയോഃസ്വോല്പ ഭഗണഞ്ച തയോർമ്മിഥഃ |
ഹരണാൽ ലബ്ധവില്ലീനാം ശൂന്യാദാവുപസംഹൃതൗ || 55
ലബ്ധാനി ഭൂദിനൈർന്നിഘ്നാന്യാപ്താനി ദിവസാദികാഃ |
തേ സ്യുർഭഗണഭേദേന കാലാ ജിജ്ഞാസിതാഃ ക്രമാൽ || 56
വല്ലീശേഷാൽ ക്രമാച്ചക്രകലാഘ്നാൽ വിഭജേൽ പുനഃ |
ദ്വയോർഭഗണഭേദേന കലാ യോഗേഷ്ടദേശയോഃ || 57
അന്താരേ സ്യുർഗ്ഗതൈഷ്യത്വം താസാം ശേഷവശാൽ ഭവേൽ |

രണ്ടു ഗ്രഹങ്ങൾക്ക് ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിന്നടുത്തുള്ള യോഗത്തിങ്കലെ കാലവും ആ യോഗപ്രദേശവും ഇഷ്ടപ്രദേശവും തമ്മിലുള്ള അന്തരകലയും അറിവാൻ ഇച്ഛിക്കപ്പെടുന്നു. അതിന്നു ഗ്രഹങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും ഭഗണാന്തരത്തേയും അല്പഭഗണത്തേയും തമ്മിൽ അന്യോന്യം ഹരണംചെയ്തു ശൂന്യാദിയായി വല്ല്യുപസംഹാരം ചെയ്തുണ്ടായ രാശികളെ ഭൂദിനങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഭഗണാന്തരംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ദിവസാദികൾ മുമ്പിൽ അറിവാൻ ഇച്ഛിക്കപ്പെട്ട കാലങ്ങളായിട്ടു വരും. പിന്നെ ഫലവല്ലി ഉണ്ടാക്കുന്നേടത്തെ ശേഷങ്ങളെ ക്രമത്താലെ

“അനന്തപുരം”കൊണ്ടു ഗുണിച്ച ഭഗണാന്തരം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഉണ്ടായ ഫലങ്ങൾ യോഗത്തിന്റേയും ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിന്റേയും അന്തരത്തിങ്കലെ കലകളായിട്ടു ക്രമേണ വരും. അവറ്റിന്റെ ഗതഗമ്യത്വത്തെ ശേഷവശാൽ അറിഞ്ഞുകൊള്ളണം.

ഇതിന്റെ ഉദാഹരണം:-

സിംഹേ സപ്തമഭാഗസ്യ സമീപേ സ്യാൽ കജാക്കയോഃ || 58
യോഗഃ കദാകദാ ബ്രൂഹി കതി ലിപ്താസ്തദന്തരേ ||

ചിങ്ങത്തിൽ ഏഴു തിയ്യതിക്കടുത്തു കജാക്കന്മാരുടെ യോഗം ഏതേതു കാലത്തു ഭവിക്കുമെന്നും അവറ്റിന്റെ അന്തരത്തിങ്കൽ എത്ര ഇലികളുണ്ടാകുമെന്നും പറയുക.

ദൃഢാക്കഭഗണം = 135000; ദൃഢകുജഭഗണം = 71777
ദൃഢഭഗണാന്തരം = 63223;   ഭഗണാന്തരം = 2023136

71777-നേയും 63223-നേയും അന്യോന്യം ഹരിച്ചുണ്ടായ വല്ലി:–

വല്ലീ.	ശൂന്യാദിവല്ല്യുപസംഹാരം:-		ശേഷങ്ങൾ
1	0		
7	1		
2	7	7	
1	2	15	
1	1	22	
3	1	37	333
1	3	133	332
6	1	170	51
1	3	1153	26
1	1	1323	25
	1	2476	1

അന്യോന്യഹരണം

7	63223	71777	1
1	3345	8564	2
3	1481	1334	1
3	332	383	1
1	26	51	1
	1	25	

വല്ലി ഫലം	അന്തര കാലങ്ങൾ	അദ്ദിവസത്തെ സൂര്യമദ്ധ്യമം	അദ്ദിവസത്തെ കുജമദ്ധ്യമം	യോഗേഷ്ട പ്രദേശങ്ങളുടെ അന്തരം	ശേഷം കൊണ്ടു കിട്ടിയ അന്തരം
2476	1931122 − 38 − 18	11 − 29 − 59 − 39	11 − 29 − 59 − 39	21വി.	20വി.
1328	1031855 − 55 − 1	0 − 0 − 3 − 32	0 − 0 − 3 − 32	$8' - 32''$	$8' - 32''$
1153	899266 − 43 − 17	11 − 29 − 51 − 7	11 − 29 − 51 − 7	$8' - 53''$	$8' - 53''$
170	132589 − 11 − 45	0 − 0 − 17 − 25	0 − 0 − 17 − 25	$17' - 25''$	$17' - 25''$

ഇവിടെ 1-ഉം 26-ഉം ഭഗണാന്തരശേഷങ്ങളാകുന്നു. 25-ഉം 51-ഉം അല്പഭഗണശേഷങ്ങളാകുന്നു. അപ്പോൾ അന്തരശേഷത്തിങ്കൽ ഇഷ്ടപ്രദേശം ഏഷ്യം, അല്പഭഗണശേഷത്തിങ്കൽ ഗതം.

ഈ കുട്ടാകാരത്തെക്കൊണ്ടു ഗ്രഹണദിവസത്തെ അറിവാനുപായം:-

അഭീഷ്ടമദ്ധ്യപർവ്വാന്തേ കൃത്വാ പാതാക്കമദ്ധ്യമൗ || 59
തദ്വിശ്ലേഷം കലീകൃത്യ ശശിമാസൗഘതാഡിതം |
ഖഖാഷ്ടപങ്ക്തിഭിർഹൃത്വാ ലബ്ധം ശുദ്ധിഃ പ്രകല്പ്യതാം || 60

പാതശ്ചേൽ ഭാസ്കരാപ്ശുദ്ധഃ ക്ഷേപഃ കല്പ്യോ വിപര്യ്യയേ |
ദ്വിഘ്നോ ഭഗണയോര്യ്യോഗഃ പാതപാഥോജമിത്രയോഃ || 61
ശശിമാസഗണോ യശ്ച തൗ കൃത്വാ ഭാജ്യഭാജകൗ |
നിരഗ്രവിധിനാ യാതാൽ ഗുണകാൽ ഭൂദീനാഹതാൽ || 62
മാസൗഘാപ്തം ത്യജേദിഷ്ട മദ്ധ്യപര്വ്വാന്തകാലതഃ |
സ സഞ്ചിന്ത്യോപരാഗസ്യ സമയോ ദിവസാദികഃ || 63

ഏതെങ്കിലും ഒരു ഇഷ്ടമദ്ധ്യപര്വ്വാന്തത്തിങ്കലെ സൂര്യന്റേയും രാഹുവിന്റേയും മദ്ധ്യമങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കി അവയെ അന്തരിച്ച ശേഷത്തെ ഇലിയാക്കി യുഗചാന്ദ്രമാസങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച പതിനായിരത്തി എണ്ണൂറ്റിൽ ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന ഫലത്തെ (ശേഷമാവശ്യമില്ല) കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ ശുദ്ധിയെന്നോ ക്ഷേപമെന്നോ കല്പിക്കുക. സൂര്യനിൽ നിന്നു രാഹുവിനെ വാങ്ങി എങ്കിൽ ഈ ഫലം ശുദ്ധിയാകുന്നു. രാഹുവിൽ നിന്ന് സൂര്യനെ വാങ്ങി എങ്കിൽ അതു ക്ഷേപമാകുന്നു. രാഹുവിന്റേയും സൂര്യന്റേയും ഭഗണങ്ങൾ തങ്ങളിൽ കൂട്ടി ഇരട്ടിച്ചതു ഭാജ്യമാകുന്നു. ചന്ദ്രമാസഭഗണം ഭാജകമാകുന്നത്. ഇവറ്റെകൊണ്ടു നിരഗ്രകുട്ടാകാരം ചെയ്തുവെന്ന ഗുണകാരത്തെ ഭൂദിനംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ചാന്ദ്രമാസഭഗണങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച ദിവസാദിയായി വന്ന ഫലത്തെ മുമ്പിലത്തെ അഭീഷ്ടമദ്ധ്യനപര്വ്വാന്തകാലത്തിങ്കലെ കലിക്കൊട്ടു നാളിൽ നിന്നും വാങ്ങിയാൽ ശേഷിച്ച ദിവസത്തുന്നാൾ ഗ്രഹണം നിരൂപിക്കപ്പെട്ടുവാൻ യോഗ്യം.

I. 1117 മിഥുനം 14-ന ഉദയകലി $= 1842073$

അന്നു മദ്ധ്യമപര്വ്വാന്ത കാലത്തിങ്കലെ കലി $= 1842073 - 33 - 29 - 58$

മദ്ധ്യമപര്വ്വാന്തകാലസൂര്യ്യമദ്ധ്യമം $= 2 - 12 - 57 - 58$
മദ്ധ്യമപര്വ്വാന്തകാലരാഹുമദ്ധ്യമം $= 4 - 14 - 10 - 7$
} വെളുത്തവാവു ദിവസം

II. 1117 മിഥുനം 29-ന

പൂര്വ്വാന്തകാലത്തിങ്കലെ കലി $= 1842088 - 14 - 45 - 44$

മദ്ധ്യമപര്വ്വാന്തകാലസൂര്യ്യമദ്ധ്യമം $= 2 - 27 - 29 - 17$
മദ്ധ്യമപര്വ്വാന്തകാലരാഹുമദ്ധ്യമം $= 4 - 13 - 23 - 10$
} കറുത്തവാവു ദിവസം

ചന്ദ്രഭഗണം $= 57753320$
സൂര്യ്യഭഗണം $= 4320000$
ചാന്ദ്രമാസങ്ങൾ $= 53433320$
രാഹുഭഗണം $= 232300$
ഭാജകം $= 53433320$
ഭാജ്യം $= 2(4320000 + 232300) = 9104600$
ദൃഢഭാജകം $= 1335833$
ദൃഢഭാജ്യം $= 227615$

വല്ലീ		
5 · · ·591208		
1 · · ·100787		
6 · · · ·87523		
1 · · · ·13214		
1 · · · ·····8239		
1 · · · ····4975		
1 · · · ····3264		
1 · · · ····1711		ഇവിടെ ഭാജകത്തിൽ രൂപം ശേഷിച്ചിരിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ടു രൂപം ക്ഷേപമാകയാൽ പാതങ്കൽനിന്നും സൂര്യനെ വാങ്ങണം.
9 · · · ····1553		ഭാജകം ഏറുകകൊണ്ട് 591208 ഗുണകരമാകുന്നു.
1 · · · ······158		
4 · · · ······131		
1 · · · ········27		
5 · · · ········23		
1 · · · ··········4		
3 · · · ··········3		
1		
0		

I. രാഹുമദ്ധ്യമം $= 4 - 14 - 10 - 7$

അർക്കമദ്ധ്യമം $= 2 - 12 - 57 - 58$

അർക്കോനരാഹു $= 2 - 1 - 12 - 9 = 3672$ഇലി. 9 വിലി.

ക്ഷേപം $= \dfrac{1335833 \times 3672' - 9''}{10800} = \dfrac{4905379151}{10800} = 454201$

(ശേഷത്തെ കളഞ്ഞു ഫലത്തിൽ അദ്ധ്വാധി കൂട്ടിയിട്ടില്ല. ദൃഢക്ഷേപമുദ്ദിഷ്ടമാകയാൽ ദൃഢഭഗണംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു.)

454201-നെ രൂപക്ഷേപത്തിന്റെ ഗുണകാരമാകുന്ന 591208 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു സ്വതക്ഷണമായ 1335833 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, തക്ഷണശേഷം $= 786814$. ഇതു് ഉദ്ദിഷ്ടഗുണകാരം.

$$\frac{786814 \times 1577917500}{53433320} = 23235082\text{ദിവസം. 9നാ. 6വി. 35ഗു.}$$

ഇഷ്ടപർവ്വാന്തകാലത്തിൽനിന്ന് ഈ ദിവസം വാങ്ങിയാൽ ആ സമയവും പർവ്വാന്തകാലമാകുന്നു. അപ്പോൾ ഗ്രഹണം ചിന്തിക്കുകയും വേണം.

[ഇക്കാലത്തിങ്കൽ സൂര്യഗതി $= 63612$ഭ. 8രാ. 3തി. 24ഇ. 31വി.

രാഹുഗതി $= 3420$ഭ. 7രാശി. 25തി. 23ഇ. 20വി.

ഗ്രഹണം ചിന്തിക്കേണ്ട സമയത്ത്,

$$\text{സൂര്യമദ്ധ്യമം} = (2 - 12 - 57 - 58) - (8 - 3 - 24 - 31) = 6 - 9 - 33 - 27$$
$$\text{രാഹുമദ്ധ്യമം} = (4 - 14 - 10 - 7) + (7 - 25 - 23 - 20) = 0 - 9 - 33 - 27]$$

അദ്ധ്വാധികം കൂട്ടി എങ്കിൽ ക്ഷേപം $= 454202$. എന്നാൽ ഇതിനെ 591208 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു തക്ഷണംചെയ്താൽ ഉദ്ദിഷ്ടഗുണകാരം $= 42189$

$$\frac{42189 \times \text{ഭൂദിനം}}{\text{ചാന്ദ്രമാസഭഗണം}} = 1245866\text{ദി. 5നാ. 20വി. 11ഗു.}$$

ഈ അന്തരദിവസത്തിങ്കലും ഗ്രഹണം ചിന്തിക്കേണം.

[ഇക്കാലത്തെ സൂര്യഗതി = 3410ഭ. 10 − 29 − 10 − 47
” രാഹുഗതി = 183ഭ. 4 − 29 − 37 − 4
അപ്പോൾ സൂര്യമദ്ധ്യമം = (2 − 12 − 57 − 58) − (10 − 29 − 10 − 47)
= 3 − 13 − 47 − 11
രാഹുമദ്ധ്യമം = (4 − 14 − 10 − 7) + (4 − 29 − 37 − 4)
= 9 − 13 − 47 − 11]

II. 1117 മിഥുനം 29-ന കറുത്തവാവ്.

അക്കോനരാഹു = 1 − 15 − 53 − 53
= 2753ഇ. 53വി.

$$\frac{\text{ദൃഢചാന്ദ്രമാസൗഘം} \times 2753' - 53''}{10800} = 340622$$

$$\frac{591208 \times 340622}{1335833};\ \text{ശേഷം} = 290793 = \text{ഉദ്ദിഷ്ടഗുണകാരം}$$

$$\frac{290793 \times \text{ഭൂദിനം}}{\text{ചാന്ദ്രമാസഭഗണം}} = 8587289\text{ദി. }2\text{നാ. }48\text{വി. }58\text{ഉ.}$$

[അക്കാലത്തെ സൂര്യഗതി = 23510ഭ. 1 − 26 − 38 − 23
” രാഹുഗതി = 1264ഭ. 2 − 17 − 27 − 45

ഉദ്ദിഷ്ടപർവ്വാന്തകാലത്തിലെ സൂര്യമദ്ധ്യമം

= (2 − 27 − 29 − 17) − (1 − 26 − 38 − 23)
= 1 − 0 − 50 − 54
രാഹുമദ്ധ്യമം = (2 − 17 − 27 − 45) + (4 − 13 − 23 − 10)
= 7 − 0 − 50 − 55]

അനന്തരം ഇവിടെനിന്നു ഗ്രഹണാന്തരങ്ങളെ അറിവാൻ ചൊല്ലുന്നു.

ഇഹോക്തൗ ഭാജ്യഹാരൗ യൗ താഭ്യാം വല്ലീമഥാനയേൽ |
രൂപാദിവ്യസ്തവിധിനാ ജാതാൻ ഭൂദിനതാഡിതാൻ || 64
മാസൗഘേന വിഭജ്യാപ്താ ദിവസാ ഗ്രഹണാന്തരാഃ |

മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ഭാജ്യഹാരകങ്ങളെ അന്യോന്യം ഹരണംചെയ്തു വല്ലിയുണ്ടാക്കി രൂപാദിവ്യസ്തകുട്ടാകാരംകൊണ്ടു ചെയ്തുണ്ടായ രാശികളെ വെവ്വേറെ ഭൂദിനംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ചാന്ദ്രമാസങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ വരുന്ന ദിവസങ്ങൾ ഈ രണ്ടു ഗ്രഹണങ്ങളുടെ അന്തരദിവസങ്ങളായിട്ടു വരും.

വല്ലി:	ഫലം	ശേഷം
1		
5		
1	6	29857
8	41	18616
1	47	11241
1	88	7375
1	135	3866
1	223	3509
1	358	357
9	3445	296
1	3803	61
4	18657	52
1	22460	9
5	130957	7
1	153417	2
3	591208	1

ഈ ഫലങ്ങളെ വെവ്വേറെ 1577917500 എന്നതുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു 53433320 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഉണ്ടായ ഫലങ്ങൾ ഗ്രഹണങ്ങളുടെ അന്തരദിവസങ്ങളായിട്ടു വരും. ഈ ശേഷങ്ങളെ 10800-കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു 1335833-കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഉണ്ടാകുന്ന ഇലിയാദി ഫലങ്ങൾ അക്കോനരാഹുവിന്റെ ഭുജകളുടെ അന്തരങ്ങളായിരിക്കും.

	I	II				III	IV				V						VI						VII						VIII			
	ഫലങ്ങൾ	ഗ്രഹണാന്തര ദിവസങ്ങൾ				ശേഷങ്ങൾ	ശേഷങ്ങളിൽ നിന്നു അക്കോന രാഹുവിന്റെ ഭുജാന്തരങ്ങൾ				അന്തരദിവസത്തിങ്കലെ സൂര്യമദ്ധ്യമം						രാഹുമദ്ധ്യമം						മദ്ധ്യമയോഗം						യോഗത്തിങ്കന്ന് അക്കോന രാഹുവിന്റെ ഭുജാന്തരങ്ങൾ			
		ദി.	നാ.	വി.	ഗു.		വി.	ഇ.	തി.	ത.	രാ.	തി.	ഇ.	വി.	ത.	പ്ര.	രാ.	തി.	ഇ.	വി.	ത.	പ്ര.	രാ.	തി.	ഇ.	വി.	ത.	പ്ര.	തി.	ഇ.	വി.	ത.
1	6	177	11	0	45	29857	4	1	23	18	5	24	37	57	21	55	0	9	23	25	57	24	6	4	1	23	19	19	4	1	23	19
2	41	1210	45	15	11	18616	2	30	30	25	3	23	19	22	9	29	2	4	10	7	24	44	6	27	29	29	34	13	2	30	30	26
3	47	1387	56	15	58	11241	1	30	62	53	9	17	57	18	31	24	2	13	33	33	22	8	0	1	30	52	53	32	1	30	52	54
4	88	2598	41	31	7	7375	0	58	37	32	1	11	18	41	40	53	4	17	43	40	46	52	5	29	0	22	27	45	0	59	37	32
5	135	3885	37	47	3	3866	0	31	15	21	10	29	14	1	12	17	7	1	17	14	9	0	8	0	31	15	21	17	0	31	15	21
6	223	6585	19	18	10	3509	0	28	22	11	0	10	30	42	53	10	11	19	0	64	55	52	11	29	31	37	49	2	0	28	22	11
7	358	10571	57	8	14	357	0	2	63	10	11	9	44	44	5	27	8	20	18	9	4	52	8	0	2	53	10	19	0	2	53	10
8	3445	101732	53	5	15	296	0	2	23	35	6	8	13	19	44	43	11	21	44	16	40	20	6	29	67	36	25	3	0	2	23	35
9	3803	112304	50	10	28	81	0	0	28	35	5	17	58	3	50	10	6	12	2	25	45	12	0	0	0	29	35	22	0	0	29	35
10	18657	550952	13	47	8	32	0	0	25	13	4	20	5	35	5	23	1	9	53	59	41	8	5	29	58	34	46	31	0	0	25	13
11	22460	663257	3	57	37	9	0	0	4	22	10	8	3	38	55	33	7	21	56	25	28	20	6	0	0	4	21	53	0	0	4	22
12	130957	3367237	33	35	11	7	0	0	3	24	8	0	23	49	43	28	3	29	36	8	52	51	11	29	59	56	36	18	0	0	3	24
13	153417	4530494	37	32	48	2	0	0	0	58	8	8	27	28	39	1	11	21	32	32	19	11	6	0	0	0	58	12	0	0	0	58
14	591208	17458721	26	13	35	1	0	0	0	29	2	25	46	15	40	31	3	4	13	43	50	24	8	29	59	59	30	55	0	0	0	29

ഈ പട്ടികയിൽ I = ഫലങ്ങൾ = ത്രൂപാദിവ്യസ്തകുട്ടാകാരംകൊണ്ടുണ്ടായ ഫലങ്ങൾ. II = ഓരോ ഫലത്തേയും ഭൂദിനംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ചാന്ദ്രമാസങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഗ്രഹണാന്തരദിവസങ്ങൾ. III = ശേഷങ്ങൾ — അന്യോന്യഹരണത്തിങ്കലുണ്ടായ ദൃഢശേഷങ്ങൾ. IV. ഓരോ ശേഷത്തേയും 10800 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച ദൃഢഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഇലിയാദി ഫലം — അക്കോനരാഹുവിന്റെ (അല്ലെങ്കിൽ രാഹുനാക്കന്റെ) ഭുജാന്തരം. V. ഗ്രഹണാന്തര ദിവസത്തെ സൂര്യഭഗണംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ഭൂദിനംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഭഗണം കളഞ്ഞാൽ അക്കാലത്തെ സൂര്യമദ്ധ്യമം ഉണ്ടാകും. VI. അതിനെ രാഹുഭഗണംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ഭൂദിനംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ രാഹു മദ്ധ്യമം. അഥവാ അതതു ഫലത്തെ സൂര്യഭഗണംകൊണ്ടും രാഹുഭഗണംകൊണ്ടും ഗുണിച്ച ചന്ദ്രമാസൗഘംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാലും ക്രമേണ സൂര്യ മദ്ധ്യമവും രാഹുമദ്ധ്യമവും ലഭിക്കും. VII. ഈ മദ്ധ്യമങ്ങൾ രണ്ടും കൂട്ടിയാൽ മദ്ധ്യമയോഗം വരും. VIII. ആറു രാശിയിൽ നിന്നോ പന്ത്രണ്ടുരാശിയിൽ നിന്നോ ഈ യോഗത്തിന്റെ ഏറലോ കുറച്ചിലോ ഭുജാന്തരമാകുന്നു. ഭുജാന്തരാനയനം രണ്ടു വിധത്തിൽ സാധിച്ചിരിക്കുന്നു. (IV-ലും VIII-ലും). രണ്ടിലും ഫലങ്ങൾക്കു തുല്യത്വമുണ്ട്.

ഏതെങ്കിലും ഒരു വെളുത്തവാവിന്റേയൊ കറുത്തവാവിന്റേയൊ മദ്ധ്യമപർവ്വാന്തകാലത്തിൽനിന്ന ഗ്രഹണാന്തരദിവസത്തോളം കാലം കീഴ്പ്പോട്ടോ മേല്പ്പോട്ടൊ നിരൂപിക്കുമ്പോൾ അസ്സമയത്തു വെളുത്ത വാവിന്റേയോ കറുത്തവാവിന്റേയോ മദ്ധ്യമപർവ്വാന്തകാലമായിട്ടു വരുമെന്ന ക്രിയയുടെ സ്വരൂപത്തിൽ നിന്ന മനസ്സിലാകുന്നുണ്ടല്ലൊ. അപ്പോൾ ചന്ദ്രസൂര്യമദ്ധ്യമാന്തരം ആറുരാശിയോ പന്ത്രണ്ടു രാശിയോ ആയിരിക്കും.

ഭാജകശേഷമെങ്കിൽ അക്കരാഹുക്കളുടെ മദ്ധ്യമയോഗം 6 രാശിയിൽനിന്നോ പന്ത്രണ്ടുരാശിയിൽ നിന്നോ ഭുജാന്തരത്തോളം കുറഞ്ഞിരിക്കും. ഭാജ്യശേഷമെങ്കിൽ അത്രകൊണ്ട് ഏറിയുമിരിക്കും. ഭാജകം ചാന്ദ്രമാസൗഘവും ഭാജ്യം ദ്വിഗുണിതസൂൎയ്യരാഹുഭഗണയോഗവുമാണെന്ന് ഓക്കുമ്പോൾ ഈ ഏറ്റക്കുറച്ചിലിന്റെ യുക്തി വ്യക്തമാകും. ഒരു വാവുദിവസം മദ്ധ്യമപർവ്വാന്തകാലത്തിൽ രാഹു സൂര്യന്മാരുടെ മദ്ധ്യമാന്തരത്തിന്റെ ഭുജാ പതിമ്മൂന്ന തിയതിയിൽ കുറവാണെങ്കിൽ ഗ്രഹണം ചിന്തിക്കേണമെന്നുണ്ടല്ലോ. ആ ഗ്രഹണപർവ്വാന്തകാലത്തിൽ നിന്ന ഗ്രഹണാന്തരകാലത്തോളം കീഴ്പ്പട്ടോ മേല്പ്പട്ടോ നിരൂപിച്ചാൽ അന്ന വാവു തന്നെ ആയിരിക്കും. അപ്പോഴത്തെ രാഹുനസൂര്യന്റെ ഭുജ ആദ്യത്തെ ഭുജയിൽ ഏറിയിട്ടോ കുറഞ്ഞിട്ടോ ഇരിക്കും. ഭുജാന്തരങ്ങൾ കുറവാകയാൽ രണ്ടാമത്തെ ഭുജയും 13 തിയതിയിൽ മിക്കവാറും കുറഞ്ഞിരിപ്പാൻ ന്യായമുണ്ട് . അതുകൊണ്ട് അന്നും ഗ്രഹണത്തിന സംഭവ്യതയുണ്ട്. വിക്ഷേപാദികളെക്കൊണ്ട് ഗ്രഹണം സംഭവിച്ചില്ല എന്നും വരാം.

മുൻ ഉദാഹരണത്തിൽ 1117 മിഥുനം 14-ാന 33നാ. 29വി. 58ഗു. സമയത്തു (കലി 1842078-33-29-58) വെളുത്ത വാവിന്റെ മദ്ധ്യമപർവ്വാന്തകാലമാണെന്നും അതിൽ നിന്നും 23235082 9നാ. 6വി. 35ഗു. വാങ്ങിയാൽ ആ സമയത്തു സൂൎയ്യന്നും കേതുവിന്നും യോഗമുണ്ടെന്നും അപ്പോൾ ഗ്രഹണം ഊഹിക്കുവാൻ ന്യായമുണ്ടെന്നും കണ്ടുവല്ലൊ. ആ ദിവസത്തേയും ഗ്രഹണാന്തരദിവസങ്ങളേയും അപേക്ഷിച്ച നമ്മുടെ കാലത്തിനടുത്തു സൂൎയ്യന്ന രാഹുവിനോടൊ കേതുവിനോടൊ ഒരാസന്നയോഗമുള്ള ദിവസം വരുത്തി അന്ന ഗ്രഹണമുണ്ടായോ എന്ന ചിന്തിക്കാം. ഇവിടത്തെ ക്രിയ:- ഈ ദിവസത്തിൽ നിന്ന എല്ലാറ്റിലും വലിയ ഗ്രഹണാന്തരദിവസത്തെ എത്ര തവണ വാങ്ങാമോ അത്രയും വാങ്ങുക. ഈ ശേഷത്തിങ്കൽനിന്ന പിന്നത്തെ ഗ്രഹണാന്തരദിവസത്തെ അതുപോലെത്തന്നെ വാങ്ങുക. ഇങ്ങനെ ഏതാണ്ട് ഉദ്ദിഷ്ടകാര്യം വരുവോളം ക്രിയ ചെയ്യുക. ഒടുക്കത്തെ ശേഷത്തെ മുമ്പിലത്തെ കലികൊട്ടനാളിൽ നിന്നും വാങ്ങുക. അന്ന ഗ്രഹണമുണ്ടാകുവാൻ സംഗതിയുണ്ട്.

(14)×1	23235082 – 9 – 8 – 35
	17458721 – 25 – 13 – 36
	5776360 – 42 – 52 – 59
(13)×1	4530494 – 37 – 32 – 48
	1245866 – 5 – 20 – 11
(11)×1	863257 – 3 – 57 – 37
	582609 – 1 – 22 – 34
(10)×1	550952 – 13 – 47 – 0
	31656 – 47 – 35 – 28
(7)×2	21143 – 54 – 10 – 28
	10512 – 53 – 24 – 58
(6)×1	6585 – 19 – 18 – 10
	8927 – 34 – 6 – 48
(4)×1	2598 – 41 – 31 – 7
	1328 – 52 – 35 - 41
(2)×1	1210 – 45 – 15 – 11
	118 – 7 – 20 – 30

[(14), (18), (11) ഇത്യാദി സംഖ്യകൾ മുൻകൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടികയിൽ ഗ്രഹണാന്തരദിവസങ്ങളുടെ ക്രമത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നവയാകുന്നു.]

$$\begin{array}{lr} \text{1117 മിഥുനം 14-ാനു പർവ്വാന്തകാലത്തിലെ കലി} = & 1842073 - 33 - 29 - 58 \\ & 118 - 7 - 20 - 30 \\ \hline & 1841955 - 26 - 9 - 28 \end{array}$$

അതായതു 1117 കുംഭം 19-ാനു അന്നു സോമഗ്രഹണമുണ്ടായി.

1117 കുംഭം 19-ാനു മദ്ധ്യമപർവ്വാന്തകാലത്തിങ്കൽ (അതായതു 26നാ. 9വി. 28ഗു. എന്ന സമയത്ത്).

$$\left.\begin{array}{r} \text{സൂര്യമദ്ധ്യമം} = 10\text{-}16\text{-}32\text{-}41 \\ \text{ചന്ദ്രമദ്ധ്യമം} = 4\text{-}16\text{-}32\text{-}40 \\ \text{രാഹുമദ്ധ്യമം} = 4\text{-}20\text{-}25\text{-}44 \\ \text{അക്കോനരാഹുവിന്റെ ഭജ} = 0\text{-}\ 3\text{-}\ 53\text{-}3 \end{array}\right\} \text{ഇവ ധ്രുവാനയന പ്രകാരം വരുത്തിയവ.}$$

ഈ സൂര്യരാഹുമദ്ധ്യമങ്ങളേയും അക്കോനരാഹുവിന്റെ ഭുജയേയും മറ്റൊരു പ്രകാരം വരുത്താം. മുമ്പിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പട്ടികയനുസരിച്ച് 23235082-9-6-35 എന്നതിൽ ഏതെല്ലാം ദിവസങ്ങളെയാണ് വാങ്ങിയത് അദ്ദിവസങ്ങളിൽ സൂര്യന്റേയും രാഹുവിന്റേയും മദ്ധ്യമങ്ങളെ വെവ്വേറെ കൂട്ടി, 1117 മിഥുനം 14-ാനു 33നാ. 29വി. 58ഗു. എന്ന സമയത്തിൽനിന്ന്, 23235082-9-6-35 എന്ന ദിവസം വാങ്ങിയ സമയത്തെ അക്കരാഹുമദ്ധ്യമങ്ങളായ 6-9-33-27, 0-9-33-27 എന്നിവയിൽ സംസ്കരിച്ചാൽ 1117 കുംഭം 19-ാനു മദ്ധ്യപർവ്വാന്തകാലത്തിങ്കലേയ്ക്ക് ഉണ്ടാക്കിയ മദ്ധ്യമങ്ങൾ തന്നെ വരും. അതുപോലെതന്നെ അദ്ദിവസങ്ങളിലെ ഭുജാന്തരങ്ങളെ വേണ്ടവിധം യോഗവിയോഗം ചെയ്തുണ്ടായ ഫലം അക്കോനരാഹുവിന്റെ ഭുജയായിട്ടു വരും. ഭാജക ശേഷത്തിൽനിന്നുണ്ടായ ഭുജാന്തരത്തേയും ഭാജ്യശേഷത്തിൽ നിന്നുണ്ടായതിനേയും വിപരീതദിക്കുകളായിട്ടു കണക്കാക്കണം.

വാങ്ങിയ ഗ്രഹണാന്തര ദിവസങ്ങളും എത്ര ആവൃത്തി വാങ്ങി എന്നും	സൂര്യമദ്ധ്യമം	രാഹുമദ്ധ്യമം
(14)×1	2–25–46–15–40–31	3–4–13–43–50–24
(13)×1	6–8–27–28–39–1	11–21–32–32–19–11
(11)×1	10–8–3–38–55–33	7–21–56–25–26–20
(10)×1	4–20–5–35–5–23	1–9–53–59–41–8
(7)×2	10–19–29–28–10–54	1–10–36–18–9–44
(6)×1	0–10–30–42–53–10	11–19–0–54–55–52
(4)×1	1–11–16–41–40–53	4–17–43–40–46–52
(2)×1	3–23–19–22–9–29	2–4–10–7–24–44
	4–6–59–13–14–54	7–19–7–42–34–15

1117 കുംഭം 19-ന്ന പർവ്വാന്തകാലത്തിങ്കലെ

$$\left.\begin{array}{l} \text{സൂര്യമദ്ധ്യമം} = (6-9-33-27)+(4-6-59-13) = 10-16-82-40 \\ \text{രാഹുമദ്ധ്യം} = (0-9-33-27)-(7-19-7-43) = \underline{4-20-25-44} \end{array}\right\}$$

ഭാജകശേഷത്തിങ്കലെ അന്തരം	ഭാജ്യശേഷത്തിങ്കലെ അന്തരം
തി. ഇ. വി. ത.	തി. ഇ. വി. ത.

1×(14)	····0– 0– 0–29	1×(13)	········0–0– 0–58
1×(10)	····0– 0–25–13	1×(11)	········0–0– 4–22
1× (6)	····0–28–22–11	2× (7)	········0–5–46–20
1× (4)	····0–59–37–32		0–5–51–40
1× (2)	····2–30–30–25		
	3–58–55–50		
	0– 5–51–40		
അന്തരം =	3–53–4–10		

അപ്പോൾ അക്കോനരാഹുവിന്റെ ഭുജ = 3തി. 53ഇ. 4വി.

$1245866 - 5 - 20 - 11$ എന്ന ദിവസത്തിൽനിന്നും $1 \times (11), 1 \times (10), 2 \times (7), (1) \times (6), 1 \times (4), 1 \times (2)$. എന്ന ദിവസാന്തരങ്ങളെ വാങ്ങിയാലും $118 - 7 - 20 - 30$ ദിവസവും എന്നു കിട്ടും. അതായത് $1841955 - 26 - 9 - 28$ എന്ന കലിക്കൊട്ട നാൾതന്നെ (1117 കുംഭം 19-ാനു) അന്നു സോമഗ്രഹണമുണ്ടായിരുന്നുവെന്നു മുമ്പിൽ പറഞ്ഞുവല്ലോ കൊഭം 19-ാനു പവ്വാന്തകലത്തിലെ കലിയിൽ നിന്നും $1 \times (1)$ അതായത് 117ദി. $- 11 - 0 - 45$ എന്ന ദിവസാന്തരം ഒരിക്കൽ വാങ്ങിയാൽ $1841778 - 15 - 18 - 43$ എന്ന് (1117 ചിങ്ങം 20-ാനു). 1117 ചിങ്ങം 19-ാനു 58നാ. 38വി.-ക്കു സ്ഫുടപവ്വാന്തകാലമായിട്ട് ഒരു സോമഗ്രഹാണമുണ്ടായിട്ടുണ്ട്. സോമഗ്രഹണത്തിന്റെ മദ്ധ്യകാലം സ്ഫുടപവ്വാന്തകാലമാകുന്നു. ഇവിടെ മദ്ധ്യപൂവ്വാന്തകാലമാണ് ഗണിച്ചുണ്ടാക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത്.

II. 1117 മിഥുനം 29-നു കറുത്തവാവു്. ഇതിന്റെ മദ്ധ്യപൂവ്വാന്തകാലത്തിങ്കന്നും കുട്ടാകാരക്രിയകൊണ്ടു മുമ്പിലുണ്ടാക്കിയ ദിവസം $8587289 - 2 - 48 - 58$, $1 \times (13)$, $1 \times (12)$, $1 \times (9)$, $7 \times (7)$, $1 \times (4)$, $3 \times (1)$ ഈ ദിവസാന്തരങ്ങളുടെ യോഗം ഇതിൽ നിന്നു വാങ്ങുകയാണെങ്കിൽ 118ദി. $7 - 20 - 31$ എന്നു കിട്ടും. 1117 മിഥുനം 29-ാനു മദ്ധ്യമപവ്വാന്തകാലമായ $1842088 - 14 - 45 - 44$-ൽ നിന്നു $118 - 7 - 20 - 31$ എന്നതു വാങ്ങിയാൽ $1841970 - 7 - 24 - 13$ (1117 മീനം 4-ാനു) അന്നു സ്ഫുടഭാപവ്വാന്തകാലം സൂര്യോദയത്തിനു മുമ്പാകയാൽ സൂര്യഗ്രഹണം സംഭവിച്ചിട്ടില്ല. ഈ $1841970 - 7 - 24 - 13$-ൽ നിന്നു ആദ്യത്തെ ദിവസാന്തരമായ 177ദി. $11 - 0 - 43$ വാങ്ങിയാൽ $1841792 - 56 - 23 - 30$ എന്ന്. (117 കന്നി 4-ാനു 56നാ. 20വി. 30ഉ. ചെന്ന സമയം). കന്നി 5-ാനു സൂര്യഗ്രഹണമുണ്ടായി. ഇങ്ങനെ ഈ ന്യായംകൊണ്ടു പല ഗ്രഹണങ്ങളും മേല്പോട്ടും കീഴ്പോട്ടും ഊഹിക്കാം.

ഈ കുട്ടാകാരന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ രണ്ടു ഗ്രഹങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള യോഗങ്ങളുടെ അന്തര ദിവസങ്ങളെക്കൊണ്ട് അവയുടെ ആസന്നയോഗദിവസങ്ങളേയും വരുത്താം. വാക്യധ്രുവം ഉണ്ടാക്കുവാൻ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന “വിവിധം നിജ വസുരോധം . . . ” ഇത്യാദിക്രിയ ഈ ന്യായത്തെ അനുസരിച്ചിട്ടുള്ളതാകുന്നു.

Kuttākāram

On the Genesis of the Mathematical Problems designated as Kuttākāram in Hindu Mathematics and its hearing on 'The Rule of Three' 'Indeterminate Equations' and 'Continued Fractions' of Modern Mathematics.

This kind of problem arises chiefly in connection with the determination of the mean anomaly of a planet at a given instant when it is known that in a certain *integral* number of days, the planet makes a certain number of complete revolutions. For example, the Sun completes 576 revolutions in a period of 210389 days. To find the mean anomaly M of the Sun on the completion of x days from an epoch, we have to apply *The Rule of Three* as follows:-

$210389 : 576 :: x : M.$

$\therefore\ M = \dfrac{576x}{210389}.$

The result may not always be an integer. Hence, suppose the integral part of the quotient is y and the remainder C. Then,

$M = y + \dfrac{C}{210389}.$

This gives rise to the relation,

$$\begin{aligned} 210389 : 576 :: x : y + \frac{C}{210389}. \\ \therefore\ 210389\left(y + \frac{C}{210389}\right) = 576x \\ i.e.\ 210389\,y + C = 576x \qquad \text{(I)} \end{aligned}$$

Now, in finding the mean anomaly M, the integral part y is not important and is therefore neglected. It is only the remainder C shown above which gives the mean position of the planet. Thus in equation (I), if x is given, y and C are determinable.

Conversely, there arises the problem of determining the integral value of x for a given integral value of C (less than 576), and incidentally the corresponding integral value of y.

This converse problem of determining the least integral values of x and y for a given value of C (less than 576) has been styled as Kuttakaram by ancient Hindu mathematicians.

The problem in "Kuttākāram" can therefore be enunciated thus:- The 1st and 2nd term of a proportion being known, find an integral 3rd term such that the fractional part of the 4th term may be one having for its numerator a given number (less than the 2nd term) and for its denominator the 1st term. In other words, the remainder after dividing the product of the 2nd and 3rd terms by the 1st term shall be a given number (less than the 2nd term). [*Note: In the example given above, the 1st term is supposed to be greater than the 2nd term.*] It is clear therefore that Kuttākāram is a direct descendant of "The Rule of Three".

When put into algebraic form, the problem takes the following shape: A, B & C are three integers C being less than A & B. Find the least integral multiplier x of B, such that when C is added to or subtracted from the product Bx, the sum or remainder respectively shall be exactly divisible by A, thus giving incidentally an integral quotient y.

$$i.e., \quad \frac{Bx \pm C}{A} = y \quad \text{(an integer)}$$
$$i.e., \quad Bx \pm C = Ay$$

For easy comprehension, let us first consider the case where C has to be subtracted. Then the case where C has to be added can be easily deduced from the first.

Let the integers x_1 and y_1 satisfy the equation,

$$Bx - C = Ay$$
$$\text{Then} \quad Bx_1 - C = Ay_1 \tag{1}$$
$$AB = AB. \tag{2}$$

(2) – (1) gives, $B(A - x_1) + C = A(B - y_1)$.

Therefore, the values $(A - x_1)$ and $(B - y_1)$ of x & y respectively would satisfy the equation,

$$Bx + C = Ay.$$

The problem, now, is to find the least integral value of x such that

$$\frac{Bx - C}{A} = y \text{ (an integer).}$$
$$i.e., \; Bx - Ay = C \tag{II}$$

Now, (II) is called an 'Indeterminate Equation' with the condition that x & y should be determined as integers. The equation admits of an infinite number of solutions; but as a problem in Kuttākāram only the least integral values of x and y are called for. The value of x would be less than A and that of y less than B. These solutions therefore are *unique*.

It is obvious now, that if A & B have a common factor h so that $A = ah$ and $B = bh$, where a and b are integers, then equation (II) becomes

$$bhx - ahy = C$$

$$i.e.\ h(bx - ay) = C$$

$$\therefore\ \frac{C}{h} = (bx - ay) = \text{an integer } = c$$

So, the problem $Bx - Ay = C$ would be insolvable if the given value of C is not also divisible by the H.C.F. of A & B (if they have one). Hence, when equation (II) is reduced by dividing by the H.C.F. of A & B, we get

$$bx - ay = c \tag{III}$$

where a and b are prime to each other.

It is not essential that a should be divisible by the common factor of b & c or b by that of a and c for a solution to equation (III).

For, let b and c have a common factor f, such that

$$b = b_1 f \text{ and } c = c_1 f. \text{ Then eqn. (III) becomes}$$

$$b_1 fx - ay = c_1 f.$$

$$i.e.,\ \ ay = f(b_1 x - c_1)$$

$$\frac{ay}{f} = (b_1 x - c_1) = \text{ an integer.}$$

For this, it is enough if y instead of a is divisible by f. Similarly it can be shown that if a and c have a common factor, it is enough if x instead of b is divisible by that factor. Thus equation (III) is always solvable except in the case where the given value of c is not divisible by the H.C.F. (if any) of A and B.

The foregoing discussion thus shows, the intimate connection between 'Kuttākāram', 'Rule of Three' and the 'Indeterminate Equations'.

Now, for the actual process involved in seeking the required values of x & y to satisfy the equation, $bx - ay = c$ where a and b are prime to each other. The process is explained in the tabular form given below.

Case I. $a > b$

Step No.	Operation done	Result obtained	
		Quotient	Remainder
1	a is divided by b	q_1	$R_1 = a - bq_1$
2	b " R_1	q_2	$R_2 = b - R_1 q_2$
3	R_1 " R_2	q_3	$R_3 = R_1 - R_2 q_3$
4	R_2 " R_3	q_4	$R_4 = R_2 - R_3 q_4$
5	"	"	"

and so on.

It is obvious that $R_1, R_2, R_3, \ldots$ will be in descending order of magnitude.

Continue thus to get an *even* number of remainders, such that the last two are small enough to enable you to guess easily an integer m to satisfy the relation.

$$R_{2n} \times m - c = R_{2n-1}q \quad (q \text{ also being an integer}).$$

For instance if division is carried up to say the 4th remainder R_4, and at that stage you are able to guess easily a value for m such that

$$R_4 \times m - c = R_3 q.$$

From the values m and q the values of x and y can be easily obtained.
[*Note: There are several variations and these are dealt with later on.*]
The detailed process will appear as follows:

$$\begin{array}{l} b)\underline{a(}q_1 \\ \quad R_1)\underline{b(}q_2 \\ \qquad R_2)\underline{R_1(}q_3 \\ \qquad\quad R_3)\underline{R_2}(q_4 \\ \qquad\qquad\quad R_4 \end{array}$$

Column I	II	III
a	q_1	$Q_2q_1 + Q_3 = Q1$
b	q_3	$Q_3q_2 + Q_4 = Q_2$
R_1	q_3	$Q_4q_3 + m = Q_3$
R_2	q_4	$mq_4 + q = Q_4$
R_3	m	$\dots \quad \dots \quad m$
R_4	q	$\dots \quad \dots \quad q$

Column I consists of the elements a, b, R_1, R_2... in order downwords.
Column II " " q_1, q_2,... and m & q " "
The number of elements is the same in columns I & II.
Column III is obtained from column II operating upwards as indicated above.
Then it will be seen that $bQ_1 - c = aQ_2$, so that a value of x is Q_1 and the corresponding value of y is Q_2.

If $Q_1 > a$, then divide it by a and take the resulting remainder $Q_1{}'$ as the required least value of x. In that case Q_2 will also be greater than b. Divide Q_2 also by b and take the resulting remainder $Q_2{}'$ as the value of y. Care should be taken to see that the same multiple of b is sutracted from Q_2 as the multiple of a is subtracted from Q_1.

Case II $a < b$

From the order of the remainders as shown above it is clear that the greater of two number a and b is the source from which the *odd order* remainders are produced. Similarly the smaller of the two numbers is that of all the *even order* remainders. So, whenever $a < b$, R is a remainder of the divisor a. The eqn. $bx - ay = c$, reduces to the form $\dfrac{ay + c}{b} = x$. So, the value m guessed should be such that it satisfies the ralation.

$$R_{2n} \times m + c = R_{2n-1}q.$$

i.e., if 4 remainders are obtained, then

$$R_4 m + c = R_3 q.$$

The rest of the process is as in case I.

Now for the rationale of this process of finding the least values of x and y.

If $\frac{b}{a}$ (where $a > b$) is expressed as a continued fraction it will take the form

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \frac{1}{q_4} + \frac{R_4}{R_3}.$$

Now, if m and q are known such that

$$R_4 m - c = R_4 q \tag{1}$$

$$\text{Then since } R_4 = R_2 - R_3 q_4. \tag{2}$$

We have from (1) and (2),

$$\begin{aligned}
(R_2 - R_3 q_4)m - c &= R_3 q. \\
i.e.,\ mR_2 - c &= R_3(mq_4 + q) \\
\text{But, } mq_4 + q &= Q_4. \\
\therefore mR_2 - c &= R_3 Q_4 && (3) \\
\text{Again, } R_3 &= R_1 - R_2 q_3 && (4) \\
\therefore \quad \text{from (3) and (4), } mR_2 - c &= (R_1 - R_2 q_3)Q_4 \\
i.e., \quad R_1 Q_4 + c &= R_2(m + q_3 Q_4) \\
&= R_2 Q_3 \\
\therefore \quad R_2 Q_3 - c &= R_1 Q_4 && (5) \\
\text{Substituting in (5), the value } R_2 &= b - R_1 q_2, \\
Q_3(b - R_1 q_2) - c &= R_1 Q_4, \\
i.e., \quad bQ_3 - c &= R_1(q_2 Q_3 + Q_4) \\
&= R_1 Q_2 && (6) \\
\text{Substituting in (6), the value } R_1 &= a - bq_1, \\
bQ_3 - c &= (a - bq_1)Q_2 \\
i.e., \quad aQ_2 + c &= b(q_1 Q_2 + Q_3) \\
&= bQ_1. \\
\therefore \quad bQ_1 - c &= aQ_2 && (7)
\end{aligned}$$

It is thus proved that if m and q satisfy the relation

$$mR_4 - C = R_3 q,$$

then, m and Q_4 satisfy relation (3)
Hence, Q_3 and Q_4 satisfy relation (5)
Q_3 and Q_2 satisfy relation (6)
and finally Q_1 and Q_2 satisfy relation (7).

Considering the table of division on page 299, in another way, we have from the relation shown in the last column, $a - bq_1 = R_1$.

$$i.e., \quad bx_1 - ay_1 = -R_1 \tag{1}$$

where $x_1 = q_1$, and $y_1 = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Now, } b - R_1 q_2 &= R_2 \\ i.e., \quad b + (bx_1 - ay_1)q_2 &= R_2. \\ i.e., \quad b + (q_2 x_1 + 1) - aq_2 &= R_2 \text{ (note } y_1 = 1) \\ i.e., \quad bx_2 - ay_2 &= R_2 \qquad (2) \\ \text{where } x_2 = q_2 x_1 + 1 \text{ and } y_2 &= q_2. \\ \text{Again, } R_2 q_3 - R_1 &= -R_3 \end{aligned}$$

Substituting the value of R_2 obtained in (2) and R_1 as obtained in (1)

$$\begin{aligned} (bx_2 - ay_2)q_3 + (bx_1 - ay_1) &= -R_3. \\ i.e., \quad b(q_3 x_2 + x_1) - a(q_3 y_2 + y_1) &= -R_3 \\ i.e., \quad bx_3 - ay_3 &= -R_3 \qquad (3) \end{aligned}$$

where, $x_3 = q_3 x_2 + x_1$ and $y_3 = q_3 y_2 + y_1$.

$$\begin{aligned} \text{Again, } R_2 - R_3 q_4 &= R_4 \\ i.e., \quad (bx_2 - ay_2) + q_4(bx_3 - ay_3) &= R_4. \\ i.e., \quad b(q_4 x_3 + x_2) - a(q_4 y_3 + y_2) &= R_4. \\ i.e., \quad bx_4 - ay_4 &= R_4 \qquad (4) \end{aligned}$$

where $x_4 = q_4 x_3 + x_2$ and $y_4 = q_4 y_3 + y_2$

and so on.

$$\text{In general } bx_{2n} - ay_{2n} = R_{2n} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \text{where, } x_{2n} &= q_{2n} x_{2n-1} + x_{2n-2} \text{ and} \\ y_{2n} &= q_{2n} y_{2n-1} + y_{2n-2}. \end{aligned}$$

Since the remainders get successively smaller and smaller, it would be possible to guess easily at some stage, such as R_3 and R_4 a value of m so that $\dfrac{R_4 m \mp c}{R_3} = q$ (an integer) according as $a > b$ or $< b$.
Thus if $mR_4 - c = qR_3$, we have from (3) & (4)

$$\begin{aligned} m(bx_4 - ay_4) - c &= q(ay_3 - bx_3) \\ i.e., \quad b(mx_4 + qx_3) - c &= a(my_4 + qy_3) \qquad (6) \end{aligned}$$

It now remains to show that

$$\left.\begin{aligned} mx_4 + qx_3 &= Q_1 \\ \text{and } my_4 + qy_3 &= Q_2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &Q_1 \text{ and } Q_2 \text{ are obtained by} \\ &\text{the process shown in page 300} \end{aligned}$$

A short process of getting the successive numbers x_1, x_2, x_3... and y_1, y_2, y_3... arranged in two columns side by side is shown below in tabular form.

I	II Values of x to multiply 'b'	III	IV Values of 'y' to multiply 'a'	V Equations giving the value of c
I	$I = 1$	0	0	$b \times 1 - a \times 0 = b$
q_1	$q_1 = x_1$	1	$1 = y_1$	$bx_1 - ay_1 = -R_1$
q_2	$x_1 q_2 + 1 = x_2$	q_2	$y_1 q_2 = y_2 (= q_2)$	$bx_2 - ay_2 = R_2$
q_3	$x_2 q_3 + x_1 = x_3$	q_3	$y_2 q_3 + y_1 = y_3$	$bx_3 - ay_3 = -R_3$
q_4	$x_3 q_4 + x_2 = x_4$	q_4	$y_3 q_4 + y_2 = y_4$	$bx_4 - ay_4 = R_4$

(Table 3)

Column I: Consists of number I and the successive quotients q_1, q_2,... arranged downwords.
Column II: Obtained from I by operations downwards as indicated therein.
Column III: Consists of 0, 1, and the successive quotients (ommitting q_1) arranged downwards.
Column IV: Obtained from III by operations downwards as indicated.
Column V: Equations giving the value of c.

$$\begin{aligned} \text{Now, } mx_4 + qx_3 &= m(q_4 x_3 + x_2) + q(q_3 x_2 + q_1) \\ &= m\{q_4(x_2 q_3 + q_1) + q_1 q_2 + 1\} \\ &\quad + q\{q_3(q_1 q_2 + 1) + q_1\} \\ &= m\{q_4[q_3(q_1 q_2 + 1) + q_1] + q_1 q_2 + 1\} \\ &\quad + q(q_3 q_2 q_1 + q_3 + q_1) \\ &= m\{q_1 q_2 q_3 q_4 + q_4 q_3 + q_4 q_1 + q_1 q_2 + 1\} \\ &\quad + q q_1 q_2 q_3 + q q_3 + q q_1. \end{aligned}$$

Also, from page 300

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1 Q_2 + Q_3 \\ &= q_1(q_2 Q_3 + Q_4) + Q_3 \\ &= q_1\{q_2 (q_3 Q_4 + m) + Q_4\} + q_3 Q_4 + m \\ &= q_1 \{q_2 [q_3 (q_4 m + q) + m] + (q_4 m + q)\} \\ &\quad + q_3(q_4 m + q) + m \\ &= q_1 \{q_2 q_3 q_4 m + q_2 q_3 q + q_3 m + q_4 m + q\} \\ &\quad + q_3 q_4 m + q_3 q + m \end{aligned}$$

$$= m(q_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 + q_1 q_4 + q_3 q_4 + 1)$$
$$+ qq_1q_2q_3 + qq_1 + qq_3.$$

This shows that $mx_4 + qx_3 \equiv Q_1$. So, the values of x & y obtained by either of the foregoing processes will be the same.

It has already been shown that if $a > b$, $\frac{b}{a}$ when expressed as a continued fraction, will take the form, $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \frac{1}{q_4} + \cdots$

Now the part $\frac{1}{q_1}$ is called the 1st *convergent*$= \frac{y_1}{x_1}$.

$$\text{2nd convergent} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{q_2}{q_1q_2 + 1} = \frac{y_2}{x_2}$$
$$\text{3rd convergent} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} = \frac{1}{q_1 + \frac{q_3}{q_2q_3 + 1}}$$
$$= \frac{q_2q_3 + 1}{q_1(q_2q_3 + 1) + q_3}$$
$$= \frac{q_3y_2 + y_1}{q_3x_2 + x_1} = \frac{y_3}{x_3}$$
$$\text{Similarly } \frac{y_4}{x_4} = \frac{q_4y_3 + y_2}{q_4x_3 + x_2}$$
$$\text{Thus by induction, } \frac{y_n}{x_n} = \frac{q_ny_{n-1} + y_{n-2}}{q_nx_{n-1} + x_{n-2}}$$

It may now be observed that the values $y_1, y_2, y_3, \ldots$ obtained on page 303 are the same as the numerators of the successive convergnts. Like wise, the valner $x_1, x_2, x_3, \ldots$ also tally with the denominators of the successive convergents.

Again if $\frac{b}{a}$ is a proper fraction which is converted into a contuned fraction of the form $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \cdots$ and the successive convergents are $\frac{y_1}{x_1}$, $\frac{y_2}{x_2}$, $\frac{y_3}{x_3}, \ldots$ etc.

$$\frac{b}{a} - \frac{y_1}{x_1} = \frac{b}{a} - \frac{1}{q_1} = \frac{bq_1 - a}{aq_1} = -\frac{R_1}{aq_1} \quad \text{(Column V, page 303)}$$
$$\frac{b}{a} - \frac{y_2}{x_2} = \frac{bx_2 - ay_2}{ax_2} = \frac{R_2}{ax_2} \quad \text{"}$$
$$\frac{b}{a} - \frac{y_3}{x_3} = \frac{bx_3 - ay_3}{ax_3} = -\frac{R_3}{ax_3}$$
$$\frac{b}{a} - \frac{y_4}{x_4} = \frac{bx_4 - ay_4}{ax_4} = \frac{R_4}{ax_4}$$

Thus we see that the successive convergents are alternately greater and less than the real fraction, the difference getting less and less with the successive convergents. The last convergent is of course equal to the fraction itself.

From the above equations it can also be deduced that

$$\frac{b}{a} - \frac{y_n}{x_n} = (-f)^n . \frac{R_n}{a x_n}$$

$$\text{Hence } \frac{b}{a} = \frac{y_n}{x_n} + (-f)^n . \frac{R_n}{a x_n}.$$

Hence to multiply any number T by $\frac{b}{a}$, when both b and a are big numbers, it is enough if T is multiplied by any convergent $\frac{y_n}{x_n}$ of $-\frac{b}{a}$ and then a correction applied to the result as shown by the formula.

$$T \times \frac{b}{a} = T \times \frac{y_n}{x_n} + (-f)^n . \frac{T}{\left(\frac{a x_n}{R_n}\right)}$$

(In cases where $T > a$, reduce T to $(T - Ka)$ where Ka is the highest multiple of a which can be subtracted from T.)

The practical application of this formula occurs in finding the mean position of a planet. Suppose it is known that in a given number of days, say 210389, the sun performs 576 complete revolutions, and the position in T days is required. For this we have to multiply T by 576 and divide the product by 210389.

Now, if 576/210389 is to be converted into a continued fraction we have to find the successive quotients of mutual division, thus:-

Suppose 4 quotients are found and then the remainder is 9. Then the continued fraction $= \frac{1}{365} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{9}{20}$

3	576	210389	336
3	129	149	1
	2	20	

To find the 4th convergent.

$365 = 27 \times 365 + 7 = 9862$

$3 \qquad 3 \times 7 + 6 = 27$

$1 \qquad 1 \times 6 + 1 = 7$

6

1

Hence the 4th convergent is $\frac{27}{9862}$ and the corresponding remainder is $+9$

$$\text{Hence } \frac{576}{210389} - \frac{27}{9862} = \frac{9}{210389 \times 9862}$$

$$\therefore \frac{576T}{210389} = \frac{27T}{9862} = \frac{9T}{210389 \times 9862}$$

The integral part of $27T/9862$ being the number of complete revolutions can be neglected and the fractional part alone retained to find the mean position. This fractional part can be converted into *signs*, *degrees* and *minutes*. The correction in *minutes* to the fractional part is

$$\frac{9T \times 21600}{210389 \times 9862}$$

$$\text{Now, } \frac{210389 \times 9862}{9 \times 21600} = 10673 + \frac{25118}{9 \times 21600}$$

$$\text{Hence, } \frac{9T \times 21600}{210389 \times 9862} = \frac{T}{10673 + \dfrac{25118}{9 \times 21600}}$$

$$\text{But, since } \frac{b}{a+x} = \frac{b}{a} - \frac{b}{a}, \ \frac{x}{a+x},$$

$$\frac{T}{10673 + \dfrac{25118}{9 \times 21600}} = \frac{T}{10673} - \frac{T}{10673} \times \frac{\dfrac{25118}{9 \times 21600}}{10673 + \dfrac{25118}{9 \times 21600}}$$

$$= \frac{T}{10673} - \frac{T}{10673} \times \frac{25118}{9 \times 21600 \times 10673 + 25118}$$

$$= \frac{T}{10673} - \frac{T}{10673} \times \frac{1}{210389 \times \dfrac{9862}{25118}}$$

$$= \frac{T}{10673} - \frac{T}{661636336}$$

Here, both these are obtained as *minutes*.

The above discussion has indicated to some extent the intimate relation between 'Kuttākāram', 'Rule of Three', 'Indeterminate Equations', and 'Continued Fractions'. We thus derive the following rule for finding the values of x and y, so that $bx - ay = c$ where a, b and c are integers and x and y are also integers.

First convert $\frac{b}{a}$ into the form of a continued fraction, taking an even number of quotients and the corresponding remainders in the division. From the last pair of remainders guess the values m and q such that

$$R_{2n} \times m - c = R_{2n-1} \times q$$

Then find the last convergent of the continued fraction

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \frac{1}{q_4} \cdots + \frac{1}{m} + \frac{1}{b}$$

The numerator of this convergent will be a value of y and the denominator the corresponding value of x. If the values of y and x thus found are greater than b and a respectively, subtract from them equal multiples of b and a and take the remainders y' and x' as the values of y and x.

The process of reducing the values of x and y to the lowest is known as "Takshanam" which is explained later. That x' and y' satisfy the equation can be seen easily.

Let $x > a$ and $= (x' + Ka)$ K being an integer
and $y > b$ and $= (y' + Kb)$
Then, $bx - ay = c$, becomes

$$b(x' + Ka) - a(y' + Kb) = c$$
$$i.e.\ bx' - ay' = c$$

The operations which are done in a simplified form are known as "Vallyupasamhāram". Viz, the operations shown in column III, page 300 and column II and IV, page 303, according to the aim in view.

Some variations in guessing the values 'm' and 'q'

I. c is added to bx, $i.e.\ bx - ay = -c$:-
m and q should satisfy the relation,

$$R_{2n} \times m + c = R_{2n-1} \times q.$$

II. An odd order of remainder is taken:-

m and q should satisfy

$$R_{2n+1} \times m + c = R_{2n} \times q \quad \text{if } c \text{ is to be subtracted from } bx$$
$$\text{and } R_{2n+1} \times m - c = R_{2n} \times q \quad \text{"} \quad c \quad \text{"} \quad \text{added to } bx.$$

III. Sometimes it may so happen, that it is not possible to guess easily m & q. Then continue mutual division till the remainder is 1. Then $m = c$ and $q = 0$.

(a) If unit is a remainder of the divisor a, and c is negative, or if unit is a remainder of the multiplier b of x, and c is positive, the values of x and y obtained should be subtracted from a & b respectively.

(b) Consider c to be unity: find the values of x and y as described above taking into consideration the sign of c. Then multiply the values so obtained by the actual value of c. These will be values of x & y. If they exceed a and b reduce them to their lowest value by substracting equal multiplies of a and b.

IV. In case $b > a$, the above rules have to be reversed.

Some interesting relations:- (dealt with in *Yukthibhasha*)

The following tabular arrangements of all the foregoing results is a good device of getting some interesting relations in quite a mechanical manner.

I	II	III
a	q_1	$Q_2\, q_1 + Q_3 = Q_1$
b	q_2	$Q_3\, q_2 + Q_4 = Q_2$
R_1	q_3	$Q_4\, q_3 + m \quad = Q_3$
R_2	q_4	$mq_4 \quad + q \quad = Q_4$
R_3	m	m
R_4	q	q

I	III
a	Q_1
b	Q_2
R_1	Q_3
R_2	Q_4
R_3	m
R_4	q

$$m \quad R_4 - q \quad R_3 = c \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$
$$m \quad R_2 - Q_4 \quad R_3 = c \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$
$$Q_3 \quad R_2 - Q_4 \quad R_1 = c \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$
$$Q_3 \quad b - Q_2 \quad R_1 = c \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$
$$Q_1 \quad b - Q_2 \quad a = c \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

Again, if column IV is obtained from I and III by subtraction.
$R_4(R_3 - m) - R_3(R_4 - q) - R_3 q - R_4 m = -c$

I	III	IV
a	Q_1	$a - Q_1 = a_1$
b	Q_2	$b - Q_2 = b_1$
R_1	Q_3	$R_1 - Q_3 = r_1$
R_2	Q_4	$R_2 - Q_4 = r_2$
R_3	m	$R_3 - m = r_3$
R_4	q	$R_4 - q = r_4$

i.e. $r_3 \quad R_4 - r_4 \quad R_3 = -c$ (6)
Similarly, $r_3 \quad R_2 - r_2 \quad R_3 = -c$ (7)
$r_1 \quad R_2 - r_2 \quad R_1 = -c$ (8)
$r_1 \quad b - b_1 \quad R_1 = -c$ (9)
$b \quad a_1 - a \quad b_1 = -c$ (10)

Again, arranging the remainders and quotients in another way,

I	V	VI Value of ‘x’	VII	Value of ‘y’
a				
b	1		0	
R_1	q_1	$q_1 \quad = x_1$	1	$1 \quad = y_1$
R_2	q_2	$q_1 q_2 + 1 \quad = x_2$	q_2	$q_2\, y_1 \quad = y_2$
R_3	q_3	$q_3 x_2 + x_1 = x_3$	q_3	$q_3 y_2 + y_1 = y_3$
R_4	q_4	$q_4 x_3 + x_2 = x_4$	q_4	$q_4 y_3 + y_2 = y_4$

$bx_1 - ay_1 = -R_1$ (11) $\quad$ $bx_3 - ay_3 = R_3$ (13)
$bx_2 - ay_2 = R_2$ (12) $\quad$ $bx_4 - ay_4 = R_4.$ (14)

Hence if any number K can be represented as $m\, R_4 - q\, R_3$, then

$m(bx_4 - ay_4) + q(bx_3 - ay_3) = b(mx_4 + qx_3) - a(my_4 + ay_4) = K.$
Also, if K can be expressed as $p\,R_2 + q\,R_4$,

$$\text{then } K = p(qx_2 - ay_2) + q(bx_4 - ay_4)$$
$$= b(px_2 + qx_4) - a(py_2 + qy_4); \text{ and so on}$$

Now, for a concrete example:-

Suppose in a certain instance of mutual division, between $a = 121$ and $b = 84$ and their remainders, the division is carried on till the last remainder is 1.

	b	a	
2	84	121	1
1	10	37	3
	3	7	2
		1	

Arrange the columns as shown below
and perform the "upasamhāram" upwards.

I	II	III	Then,
121	1	$25 \times 1 + 11 = 36$	$3 \times 0 - 1 \times 1 = -1$
84	2	$11 \times 2 + 3 = 25$	$3 \times 2 - 7 \times 1 = -1$
37	3	$3 \times 3 + 2 = 11$	$10 \times 2 - 7 \times 3 = -1$
10	1	$2 \times 1 + 1 = 3$	$10 \times 11 - 37 \times 3 = -1$
7	2	$1 \times 2 + 0 = 2$	$84 \times 11 - 37 \times 25 = -1$
3	1	1	$84 \times 36 - 121 \times 25 = -1$
1	0	0	

Column III is obtained from column II, and column I consists of the numbers, a, b and the remainders up to 1, in succession downwards. Now, suppose in column II the last remainder 1 alone is multiplied by any number, say 3—the value of c—and the "upasamharam" is done with the new column IV. Then column V will be obtained in which the elements are each thrice the elements of column III. column VI is the difference between columns I and V.

I	IV	V	VI
121	1	108	13
84	2	75	9
37	3	33	4
10	1	9	1
7	2	6	1
3	3	3	0
1	0	0	0

Then, from I and V

$$3 \times 0 - 3 \times 1 = -3$$
$$3 \times 6 - 3 \times 7 = -3$$
$$6 \times 10 - 7 \times 9 = -3$$
$$33 \times 10 - 9 \times 37 = -3$$
$$33 \times 84 - 37 \times 75 = -3$$
$$108 \times 84 - 75 \times 121 = -3$$

Also, from I and VI

$$1 \times 10 - 1 \times 7 = 3$$
$$4 \times 10 - 1 \times 37 = 3$$
$$4 \times 84 - 37 \times 9 = 3$$
$$13 \times 84 - 9 \times 121 = 3.$$

Thus we get the following rule to be followed when the mutual division is carried on till the last remainder is 1:-

Arrange the quotients in order downwards and below them the required numerical value of c and below it 0. Then perform the "*upasamhāram*" upwards in this column, and get a fresh column. The two topmost elements of this column will be the values of x and y. Observe the rule III (a)—page 308:

Example: $a = 210389,\ b = 576;\ c = 5.$

	b	a	
3	576	210389	385
6	129	149	1
4	9	20	2
	1	2	

I	II	III
210389	865	473010
578	3	1295
149	1	335
129	6	290
20	2	45
9	4	20
2	5	6
1	0	0

$$
\begin{gathered}
2 \times 0 - 1 \times 5 = -5 \\
2 \times 20 - 9 \times 5 = -5 \\
20 \times 20 - 9 \times 45 = -5 \\
20 \times 290 - 129 \times 45 = -5 \\
149 \times 290 - 129 \times 335 = -5 \\
149 \times 1295 - 576 \times 335 = -5 \\
210389 \times 1295 - 576 \times 473010 = -5 \\
\text{i.e., } 576 \times 473010 - 5 = 210389 \times 1295
\end{gathered}
$$

The value of x. 473010 is greater than 210389 and we are in search of the *unique* value of x, below 210389. Hence take only the remainder after dividing 473010 by 210389. This is $52232 - (473010 - 2 \times 210389 = 52232)$. Similarly subtract 2×576 from 1295. We get 143. This is the value of y corresponding to 52232, the value of x.

$576(2 \times 210389 + 52232) - 5 = 210389(2 \times 576 + 143)$

i.e., $576 \times 52232 - 5 = 210389 \times 143$

Now, if c is -5 instead of 5, the value of x is 158157, i.e., $(210389 - 52232)$ and that of y is 433 i.e., $(576 - 143)$.

These numbers could have been obtained direct if in the course of the "upasamhāram" itself, the element 20 of column III which exceeded the corresponding element 9 of column I had been then and there reduced by subtracting 9 twice, and recording only the remainder 1.

I Remainder	II Quotients	III	IV
210389	365		$143 \times 365 + 37 = 52232$
576	3		$37 \times 3 + 32 = 143$
149	1		$32 \times 1 + 5 = 37$

129	6		$5 \times 6 + 2 = 32$
$20 = (5 \times 4 + 0)$	2		$2 \times 2 + 1 = 5$
9	4	20	$20 - 2 \times 9 = 2$
2	5	5	$5 - 2 \times 2 = 1$
1	0	0	

The process of reducing elements to their lowest value is known as "Takshanam". This may be done either at the end or even during "upasamharam". This may be defined thus:- If a set of values of x and y are obtained which satisfy the equation, $bx - ay = c$ and if such values exceed the values of a and b respectively, so that

$$x = na + r_x \text{ and } y = nb + r_y, \text{ then}$$
$$b(na + r_x) - a(nb + r_y) = c$$
$$i.e.\ br_x - ar_y = c$$

Reducing the values to r_x and r_y is called 'Takshanam'.

It was stated and proved before that in the equation $Bx - Ay = \pm C$. C must contain the common factor of A and B, but it is not necessary that A should contain the common factor of B and C, or that B should contain the common factor of A and C.

This will be evident from the following problem.

Solve:- $100x + 90 = 63y$

H.C.F. of 90 and 63 is 9. Dividing 90 and 63 alone by 9, make another eqn., $100x + 10 = 7y$

$(Valli)$

100	14				30
7	3	$\cdots$	30	$\cdots$	$2 = (30 - 4 \times 7)$
2	10	$\cdots$	10	$\cdots$	$2 = (10 - 4 \times 2)$
1	0				

Mutual division

3	$\underline{7}$	$\underline{100}$	14
	1	2	

$$100 \times 2 + 10 = 7 \times 30$$
$$\therefore 100 \times 13 + 90 = 63 \times 30$$
$$\therefore x = 13; y = 30$$

so, x is obtained by multiplying 2 by the H. C. F. 9.

Again, 10 is a common factor of 100 and 90. Dividing 100 & 90 alone by 10 and make another eqn, $10x + 9 = 63y$.

63	$\ldots$	6	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	45		
10	$\ldots$	3	$\ldots$	27	$\ldots$	$7 = (27 - 2 \times 10)$		
3	$\ldots$	9	$\ldots$	9	$\ldots$	$3 = (9 - 2 \times 3)$		
1	0							

3	$\underline{10}$	$\underline{63}$	6
	1	3	

Here the divisor 63, is greater than the multiplier of x; in mutual division the remainder 1 comes in the column of the multiplier of x, but 9 is to be added.

So, the values obtained have to be subtracted from 63 and 10. (see page 307 - Rule III).

$$\begin{aligned} \text{Hence } y = 10 - 7 = 3.\ \ x = 63 - 45 = 18. \\ 10 \times 18 + 9 = 3 \times 63 \\ \therefore 100 \times 18 + 90 = 30 \times 93 \\ \therefore x = 18 \text{ and } y = 30 \end{aligned}$$

The same values can also be obtained without dividing by the H. C. F. thus:-

100	1			$30 = y$
63	1			$16 = x$
37	1		36	12
26	2		58	6
11	2	270	28	
4	1	90	2	
3	90	90		
1	0	0		

	x	y	
1	100	63	1
1	37	26	2
2	11	4	3
	3	1	

The problems so far discussed are known as *Niragra-Kuttākāram* so called because $(bx \pm c)$ when divided by a leaves no remainder. There are also problems known as *Sāgra-Kuttākāram* wherein the quest is for a number which leaves two different remainders when divided separately by two different numbers.

For example find that number K which when divided by p leave a number R and when divided by p_1 leaves a remainder R_1. Here let $R > R_1$.

Then $K = pq + R$

and $\quad = p_1 q_1 + R_1$ where q and q_1 are the quotients.

$$\therefore \quad p_1 q_1 - (R - R_1) = pq \tag{1}$$

Since p, p_1 and R, R_1 are known, this reduces to the form

$$\begin{aligned} bx - c &= ay \quad \text{where} \\ b &= p_1 \\ x &= q_1 \\ c &= (R - R_1) \\ a &= p \\ \text{and } y &= q. \end{aligned}$$

Hence q and q_1 can be found easily and hence K also. Specimens of more advanced problems of this type are indicated below.

Problem 1: Find a number which when multiplied by 27 and divided by 9862 leaves a remainder 6, and which when multiplied by 600 and divided by 16393 leaves a remainder 3.

First find a and b which satisfy the two equations,

$$27\,a = 9862\,m + 8 \qquad \cdots \qquad (1)$$
$$800\,b = 16393\,n + 3 \qquad (2)$$

Then find a number K so that

$$K = 9862\,m_1 + a \qquad (3)$$
$$\text{and } K = 16393\,n_1 + b \qquad (4)$$
$$\begin{aligned}\text{Then } 27\,K &= 27 \times 9862\,m_1 + 27\,a\\ &= 27 \times 9862m_1 + 9862m + 8\\ &= \underline{9862(27m_1 + m) + 3}\\ \text{and } 600\,K &= 16393(600n_1 + n) + 3.\end{aligned}$$

Then K so found will be the required number, for $\dfrac{27K}{9862}$ leaves the remainder 8 and $\dfrac{600K}{16393}$ leaves the remainder 3. From (3) and (4)

$$9862m_1 + (a - b) = 16393n_1. \qquad (5)$$

From this m_1 and n_1 can be found. Find a, m, b and n from equations (1) and (2).

Step I. To find 'a' and 'm' from (1)

9862	365	$*$	1826	$9862 - 1826 = 8036$	3	$\underline{27}$	$\underline{9862}$	365
27	3		5	$27 - 5 = 22$		6	$\underline{7}$	1
7	1	6	1				1	
6	8	6	2					
1	0							

Since unit occurs in the divisor column, 1626 and 5 should be subtracted from 9862 and 27 respectively.

So $a = 8036$ and $m = 22$.

Step II. To find 'b' and 'n' from (2)

16393	27	$3907 \times 3 = \underline{\underline{11721}} = b$	3	$\underline{600}$	$\underline{16393}$	27
600	3	$143 \times 3 = 429 \quad = n.$	5	$\underline{21}$	$\underline{193}$	9
193	9	46		$\underline{\underline{1}}$	4	
21	5	5 $\quad b = 11721.$				
4	1	1 $\quad n = 429.$				
1	0	$(b - a) = 11721 - 8036 = 3685$				

The values are multiplied by 3, since $c = 3$. See page 308.

To find n_1 and m_1 from the equation

$$16393\,n_1 - 3685 = 9862\,m_1 \tag{6}$$

1	876	$m_1{}'$	1	9862	16393	1
1	527	$n_1{}'$		6531	9862	
1	349		1	3331	6531	1
1	178			3200	3331	
24	171		2	131	3200	24
2	7			112	3144	
2	3		1	19	56	2
1	1			19	39	
1				1	19	
0						

Here the last remainder is unity. But c is 3685. So the values of $m_1{}'$ and $n_1{}'$ should be multiplied by 3685

$$\begin{aligned}
\text{Now, } 876 \times 3685 &= 3228060 \\
\text{and, } 527 \times 3685 &= 1941995. \\
\text{Abrading the values, } m_1 &= 3228060 - 196 \times 16393 \\
&= 15032 \\
n_1 &= 1941995 - 196 \times 9862 \\
&= 9043 \\
\therefore K = (16393n_1 + b) &\text{ or } (9862m_1 + a) \\
\therefore = 16393 \times 9043 + 11721 &= \underline{\underline{148253620}}
\end{aligned}$$

If during 'Vallyupasamharam' itself the device shown below had been employed for the proposed remainder 3685, the values of m_1 and n_1 could have been obtained more easily without making figures unnecessarily too large. The device is termed "Takahanam" as has already been referred to.

Artificea to be employed in '*Vallyupasamhāram*'

Arrange all the quotients in order downwards with the last desired remainder at the bottom with 0 below it. Arrange also the two given numbers and the successive remainders downwards in a parrallel columnn. The two columns will contain the same number of elements.

The results of *Upasamharam* are to be recorded in a third column upwards. If during this operation, at any stage any element in the new column is found to exceed the corresponding element of the 'Remainder' column reduce this element at once to the remainder obtained by dividing it by that element in the 'Remainder' column against it. At the same time reduce the previous element (below it in the new column) by just as many times the corresponding remainder and then continue the *upasamharam* upwards.

Example: $a = 16393$, $b = 9862$, $c = 3685$

Remainder	Quot.	Results of 'upasamharam'(III)		
I	II	(1)	(2)	(3)
16393	1			15032
9862	1			9043
6531	1			5989
3331	1			3054
3200	24			2935
131	2		512	$512-3\times131 = 119$
56	2		247	$247-3\times56 = 79$
19	1	3685	$3685-19\times193 = 18$	
18	3685	3685	$3685-18\times193 = 211$	
1	0			

Thus we get, $9862 \times 15032 - 16393 \times 9043 = \underline{\underline{3685}}$

Problem II: Find that number which when multiplied by 7 and divided by 982 leaves the remainder 4, and which when multiplied by 11 and divided by 2023 leaves the remainder 8.

$$7a = 982m + 4 \tag{1}$$
$$11b = 2023n + 6 \tag{2}$$
$$\text{Number } K = (982\, m_1 + a)\text{or } (2023\, n_1 + b) \tag{3}$$
$$i.e.,\quad 982m_1 = 2023\, n_1 + (b - a)$$

I. To find 'a' and 'm'

$$\begin{array}{cccc} 982 & 140 & & 702 = (a) \\ 7 & 3 & 12 & 5 = (m) \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c|c|c} 3 & 7 & 982 & 140 \\ & \underline{6} & \underline{980} & \\ & 1 & 2 & \end{array}$$

II. To find 'b' and 'n'

$$\begin{array}{ccc} 2023 & 183 & 1104 = (b) \\ 11 & 1 & 6 = (n) \\ 10 & 6 & \\ 1 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 11 & 2023 & 183 \\ & \underline{10} & \underline{2013} & \\ & 1 & 10 & \end{array}$$

$$b - a = \underline{\underline{402}}.$$

III. $982m_1 - 402 = 2023n_1$

$$\begin{array}{rr}
2023 & 2 \\
982 & 18 \\
59 & 1 \\
33 & 1 \\
21 & 1 \\
17 & 4 \\
4 & 402 \\
1 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
775 = m_1 \\
376 = n_1 \\
23 \\
46 - 1 \times 38 = 8 \\
36 - 1 \times 21 = 15 \\
1608 - 17 \times 94 = 10 \\
402 - 4 \times 94 = 26
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|r|r|r|}
16 & \underline{982} & \underline{2023} & \\
1 & \underline{33} & \underline{59} & 2 \\
4 & \underline{17} & 21 & 1 \\
 & 1 & 4 & 1
\end{array}$$

$$\therefore \text{ Number} = 982 \times 775 + 702 = 761752$$

$$\textit{Verification: } \frac{K \times 7}{982} = \frac{982 \times 775 \times 7}{982} + \frac{702 \times 7}{982}$$

$$= 775 \times 7 + 5 + \text{Remainder } \underline{\underline{4}}.$$

$$\begin{array}{r}
982)4914(5 \\
\underline{4910} \\
4
\end{array}$$

$$\frac{K \times 11}{2023} = \frac{2023 \times 376 \times 11}{2023} + \frac{1104 \times 11}{2023}$$

$$= 376 \times 11 + 6 + \text{Remainder } \underline{\underline{6}}$$

$$\begin{array}{r}
2023)12144(3 \\
\underline{12138} \\
6
\end{array}$$

Problem III. Find the number which when multiplied by 17 and divided by 123 leaves the remainder 5 and which when multiplied by 13 and divided by 953 leaves the remainder 7.

$$17\,a = 123\,m + 5 \tag{1}$$

$$13\,b = 953\,n + 7 \tag{2}$$

$$K = (953\,n_1 + b) \text{ or } (123\,m_1 + a)$$

$$\therefore\ 953\,n_1 - 123\,m_1 = (a - b) \tag{3}$$

Step I

$$\begin{array}{rr}
123 & 7 \\
17 & 4 \\
4 & 5 \\
1 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
= 22 = \mathrm{a} \\
20 - 17 = 3 = \mathrm{m} \\
5 - 4 = 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|r|r|l}
4 & \underline{17} & \underline{123} & 7 \\
 & 1 & 4 &
\end{array}$$

Step II

$$\begin{array}{rr}
953 & 73 \\
13 & 3 \\
4 & 7 \\
1 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
587 = (\mathrm{b}) \\
21 - 13 = 8 = (\mathrm{n}) \\
7 - 4 = 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|r|r|l}
3 & \underline{13} & \underline{953} & 73 \\
 & 1 & 4 &
\end{array}$$

$$\mathrm{b} - \mathrm{a} = 587 - 22 = 565$$

$$123\,m_1 - 565 = 953\,n_1$$

Step III

953	7	$361 = m_1$
123	1	$46 = n_1$
92	2	39
31	1	$565 - 13 \times 31 = 7$
30	565	$565 - 13 \times 40 = 25$
1	0	

$$\begin{array}{c|c|c|c} 1 & \underline{123} & \underline{953} & 7 \\ 1 & \underline{31} & \underline{92} & 2 \\ & 1 & 30 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ K &= (953\, n_1 + b) \text{ or } (123\, m_1 + a) \\ &= (953 \times 46 + 587) \text{ or } (123 \times 361 + 22) \\ &= \underline{\underline{44425}} \end{aligned}$$

Problem IV. Find the number which when multiplied by 23 and divided by 12347 leaves the remainder 9 and which when multiplied by 150 and divided by 4999 leaves the remainder 5.

$$23\, a = 12347\, m + 9 \qquad (1)$$
$$150\, b = 4999\, n + 5 \qquad (2)$$
$$K = (12347\, m_1 + a) \text{or } (4999\, n_1 + b).$$
$$\therefore 12347\, m_1 = 4999\, n_1 + (b - a) \qquad (3)$$

Step I

12347	536	$4295 = a$	
23	1	8	
19	4	7	
4	1	$9 - 2 \times 4 = 1$	$a = \underline{4295}$
3	9	$9 - 2 \times 3 = 3$	
2	0		

$$\begin{array}{c|c|c|c} 1 & \underline{23} & \underline{12347} & 536 \\ 1 & \underline{4} & \underline{19} & 4 \\ & 1 & 3 & \end{array}$$

Step II

4999	33	$3166 = b'$
150	3	$95 = n'$
49	16	$80 - 49 = 31$
3	5	$5 - 3 = 2$
1	0	

$$\begin{array}{c|c|c|c} 3 & \underline{150} & \underline{4999} & 33 \\ & 3 & \underline{49} & 16 \\ & & 1 & \end{array}$$

Since unit comes under the divisor, b' and n' should be subtracted.

$$\therefore\ b = 4999 - 3166 = \underline{\underline{1833}}$$
$$(a - b) = 4295 - 1833 = 2462.$$
$$\therefore\ 4999 n_1 - 2462 = 12347 m_1 \qquad (3)$$

Mutual division

2	4999	12347	2
1	301	2349	7
9	59	242	4
	5	6	1
		1	

12347	2			1905	$= n_1{}'$
4999	2			781	$= m_1{}'$
2349	7			343	
301	1			45	
242	4		$1722 - 7 \times 242$	28	
59	9		$430 - 7 \times 59$	17	
6	1	$2452 - 6 \times 410$	2		
5	2462	$2482 - 5 \times 410$	412		
1	0				

$$m_1 = 4999 - 731 = 4268; n_1 = 12347 - 1805 = \underline{\underline{10542}}$$

$$\therefore \; K = \left.\begin{array}{r} 4999 \times 10542 + 1833 \\ 12347 \times 4268 + 4295 \end{array}\right\} = \underline{\underline{5,27,01,291}}$$

To test whether this is the least value:–

Since an odd order of quotients are taken,

$$1805 \times 4999 + 2462 = 731 \times 12347 \qquad (1)$$

$$12347 \times 4999 = 4999 \times 12347 \qquad (2)$$

$$(2) - (1) = 4999 \times 10542 - 2462 = 12347 \times 4268$$

$$\therefore 4999 \times 10542 - 2462 + 4295 = 12347 \times 4263 + 4295$$

$$i.e.\; 4999 \times 10542 + 1883 = 12347 \times 4263 + 4295 = K.$$

$$23K = 12347 \times 4288 \times 23 + 23 \times 4295$$

$$= 12347 \times 4288 \times 23 + 12347 \times 8 + 3$$

$$= 12347 \left(\frac{}{4288 \times 23 + 8} + \frac{9}{12347} \right)$$

$$\therefore \frac{28K}{12347} = \text{Integer} \; + \; \text{remainder } 9.$$

$$\text{Similarly } \frac{150K}{4999} = \frac{}{150 \times 10542 + 55} = \frac{5}{4999}$$

Hence, this is the least value.

"യുക്തിഭാഷയിൽ" അതിദേശിച്ചിട്ടുള്ള "സിദ്ധന്യായങ്ങൾ"

1.	ഒരു രാശിയെ വൎഗ്ഗിക്കേണ്ടുമ്പോൾ അതിനെ രണ്ടായി ഖണ്ഡിച്ചതങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചിരട്ടിച്ച രണ്ടു ഖണ്ഡത്തിന്റെയും വൎഗ്ഗവും കൂട്ടിയാൽ ഖണ്ഡയോഗത്തിന്റെ വൎഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. (പേജ് 16)	$a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$
2.	രണ്ടു രാശികളുടെ വൎഗ്ഗയോഗവും അവയുടെ ദ്വിഘ്നഘാതവും കൂട്ടിയാൽ രാശിയോഗ ത്തിന്റെ വൎഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും.	
3.	രണ്ടു രാശികളുടെ ഘാതത്തെ നാലിൽ ഗുണിച്ചിട്ട് അതിൽ അവയുടെ അന്തരവൎഗ്ഗവും കൂട്ടിയാൽ യോഗവൎഗ്ഗമുണ്ടാവും. (പേജ് 16)	$4ab + (a-b)^2 = (a+b)^2$
4.	രണ്ടു രാശികളുടെ വൎഗ്ഗയോഗത്തിങ്കന്നു ഘാതത്തിൽ ഇരട്ടികളഞ്ഞാൽ അവയുടെ അന്തരവൎഗ്ഗം ശേഷിക്കും. (പേജ് 18)	$a + b^2 - 2ab = (a-b)^2$
5.	രണ്ടു രാശികളുടെ യോഗവൎഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ഘാതത്തിൽ നാന്മടങ്ങു പോയാൽ അന്തരവൎഗ്ഗം ശേഷിക്കും. (പേജ് 18)	$(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$
6.	രണ്ടു രാശികളുടെ വൎഗ്ഗയോഗത്തിന്റെ ഇരട്ടിയിങ്കന്നു യോഗവൎഗ്ഗം പോയാൽ അന്തരവൎഗ്ഗം ശേഷിക്കും. (പേജ് 18)	$2(a^2+b^2) - (a+b)^2 = (a-b)^2$
7.	യോഗാന്തരാഹതിവൎഗ്ഗാന്തരം (പേജ് 20)	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
8.	ഗുണനത്തിങ്കൽ ക്രമഭേദം കൊണ്ടു ഫലഭേദമില്ല. (പേജ് 29)	$a.b.c. = a.c.b = b.c.a. = b.a.c. = c.a.b. = c.b.a.$
9.	ഗുണിച്ചിട്ടു പിന്നെ വൎഗ്ഗിച്ചതും വൎഗ്ഗിച്ചിട്ടു പിന്നെ ഗുണിച്ചതും തുല്യം. (പേജ് 213, 229)	$(a\,b)^2 = a^2.\,b^2$
10.	അന്തരാൎദ്ധവും അൎദ്ധാന്തരവും ഒന്നേ (പേജ് 229)	$\frac{1}{2}(a-b) = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$
11.	വൎഗ്ഗചതുരംശവും അൎദ്ധവൎഗ്ഗവും തുല്യം (പേജ് 229)	$\frac{1}{4}a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$
12.	രണ്ടു രാശികളുടെ വൎഗ്ഗാന്തരത്തെ യോഗം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം അവയുടെ അന്തരം. (പേജ് 28)	$\frac{a^2 - b^2}{a+b} = (a-b)$
13.	സദൃശങ്ങൾക്കേ യോഗവിയോഗങ്ങൾക്ക് അഞ്ജസ്യമുള്ളൂ.	Addition and subtraction can be performed only between quantities of the same denomination.
14.	ഭിന്നരാശിയെ വൎഗ്ഗിക്കേണ്ടുമ്പോൾ ഛേദത്തേയും അംശത്തേയും വൎഗ്ഗിക്കേണം. അവ വൎഗ്ഗിച്ച രാശിയുടെ ഛേദാംശങ്ങളായിരിക്കും. ഛേദം കൂടിയിരിക്കുന്ന രാശിയെ മൂലിക്കേണ്ടുമ്പോൾ, ഛേദത്തെയും അംശത്തെയും മൂലിക്കേണം. അവ മൂലിച്ച രാശിയുടെ ഛേദാംശങ്ങൾ. (പേജ് 38)	$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}; \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
15.	ഇച്ഛാഫലത്തെ പ്രമാണഫലംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതും പ്രമാണഫലത്തെ ഇച്ഛകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതും തുല്യസംഖ്യമായിട്ടിരിക്കും. (പേജ് 42, 50)	If $a : b :: c : d$, then $ad = bc$. The product of *extremes* of a proportion is equal to the product of the *means*.

16.	വ്യസ്തത്രൈരാശികഫലമിച്ഛാഭക്തഃ പ്രമാണഫലഘാതഃ (പേജ് 42)	Law of inverse proportion. If a varies as $\frac{l}{b}$, then ab is constant.
17.	ഭുജാവർഗ്ഗവും കോടിവർഗ്ഗവും കൂട്ടിയാൽ കർണ്ണവർഗ്ഗമാകം (പേജ് 67)	The square on the hypotenuse is equal to the sum of the squares on the other two sides.
18.	ഒരു ത്ര്യശ്രത്തിന്റെ ഭുജകൾ തങ്ങളിലെ വർഗ്ഗാന്തരവും ആബാധകളുടെ വർഗ്ഗാന്തരവും ഒന്നേ. (പേജ് 70)	The difference of the squares of the two sides of a triangle is equal to the difference of the squares of their projections on the base.
19.	ത്ര്യശ്രങ്ങളുടെ തുല്യാകാരത്വത്തിന്റെ ലക്ഷണങ്ങൾ:	Conditions of similarity of two triangles:–
	(1) ഇതരേതരഭുജാകർണ്ണങ്ങൾക്ക് അന്യോന്യദിക്സാമ്യം, ഇതരേതര കോടികർണ്ണങ്ങൾക്കു ദിഗ്വൈപരീത്യം.	1) Parallelism between the hypotenuses and a side of each; perpendicularity between the hypotenuses and a side of each.
	(2) രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളിൽ ഭുജാകോടി കർണ്ണങ്ങൾ മൂന്നിനും അന്യോന്യം ദിഗ്വൈപരീത്യം.	2) Perpendicularity between the three sides of the one and the three sides of the other, each to each;
	(3) രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളിൽ ഭുജാകോടി കർണ്ണങ്ങൾ മൂന്നിനും ദിക്സാമ്യം. (പേജ് 82)	3) Parallelism between the three sides of the one and the three sides of the other, each to each.
20.	മിക്കവാറും തുല്യങ്ങളായിരിക്കുന്ന രണ്ടു രാശികളുടെ ഘാതത്തെ അവയുടെ വർഗ്ഗയോഗാർദ്ധമെന്നു മിക്കവാറും കല്പിക്കാം. (പേജ് 84)	If a nearly equal to b, then ab is nearly equal to $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$.
21.	(1) ഏകാമദ്യകോത്തരസംകലിതം പദവർഗ്ഗാർദ്ധം	1) $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$
	(2) ഏകാമദ്യകോത്തരവർഗ്ഗസംകലിതം പദഘനത്തിൽ മൂന്നൊന്ന്	2) $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
	(3) ഏകാമദ്യകോത്തരഘനസംകലിതം വർഗ്ഗത്തിൽ നാലൊന്ന്	3) $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}$
	4) ഏകാമദ്യകോത്തരവർഗ്ഗവർഗ്ഗസംകലിതം സമപഞ്ചഘാതത്തിന്റെ അഞ്ചൊന്ന്.	(4) $\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5}$
22.	(1) ഋണധനഘാതം ഋണം (2) ഋണഋണഘാതം ധനം (3) ധനധനഘാതം ധനം. (പേജ് 112)	In multiplication *like* signs give *plus* and *unlike* signs give *minus*.
23.	ഒരു ത്ര്യശ്രത്തിൽ രണ്ടു ഭുജകൾ തങ്ങളിൽ നീളമൊരുക്കമെങ്കിൽ ലംബം ഭൂമദ്ധ്യത്തിൽ സ്പർശിക്കും; ഒന്നു ചെറുതാകിൽ അപ്പുറത്തു നീങ്ങും. (പേജ് 132)	If two sides of a triangles are equal, the perpendicular from the vertex bisects the base; if they are unequal the foot of the perpendicular is nearer than the shorter side.
24.	വ്യാസാർദ്ധതുല്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കുന്ന ആറു സമസ്തജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടു വൃത്തം മുഴുവനും തികയും.	Six chords, each equal to the radius, can be placed in order inside a circle.

25. വൃത്തഷൾഭാഗം രണ്ടുരാശി. രണ്ടുരാശിയുടെ സമസ്തജ്യാവു വ്യാസാർദ്ധതുല്യം. (പേജ് 134)

The chord of the sixth part of the circumference of a circle is equal the radius.

26. ഭുജാജ്യാമൂലങ്ങൾ എല്ലാം പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കൽ സ്പർശിക്കും. (പേജ് 139)

The feet of all the ordinates lie on the horizontal axis.

27. ചാപം പ്രമാണമായിട്ടു ജ്യാവിനെ ത്രൈരാശികം ചെയ്യരുത്. (പേജ് 144)

The ordinate is not proportional to the length of the corresponding arc.

28. യാതൊരു ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലെ ജ്യാസാകലിതം ചൈതതു അതിന്റെ മീത്തെ ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലെ ജ്യാചാപാന്തരം വരും. (പേജ് 164)

The difference between any arc and its ordinate is obtained from the integral of all the ordinates up to the previous ordinate.

29. ജീവേ പരസ്പരന്യായം — രണ്ടുചാപങ്ങളുടെ ജ്യാക്കളെ വെവ്വേറെ അറിഞ്ഞിരിക്കുമ്പോൾ, ആ ചാപങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും യോഗത്തിന്റെയോ അന്തരത്തിന്റേയോ ജ്യാവിനെ അറിയേണമെങ്കിൽ ഒന്നിന്റെ ഭുജയെ മറ്റേതിന്റെ കോടികൊണ്ടു ഗുണിച്ചതും മറ്റേതിന്റെ ഭുജയെ ആദ്യത്തേതിന്റെ കോടികൊണ്ടു ഗുണിച്ചതുമായ ഘാതങ്ങൾ രണ്ടിനേയും ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ രാശികളുടെ യോഗമോ അന്തരമോ ചാപയോഗത്തിന്റെയൊ ചാപാന്തരത്തിന്റേയോ ക്രമേണ ജ്യാവായിട്ടു വരും. (പേജ് 189)

$$R\sin(A \pm B) = \frac{R\sin A \;\; R\cos B \pm R\cos A \;\; R\sin B}{R}$$

30. അതാതു ജ്യാവർഗ്ഗത്തിൽനിന്ന് ആദ്യജ്യാവർഗ്ഗത്തെക്കളഞ്ഞ് അടുത്തു കീഴെജ്യാവുകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം മേലെ മേലെ ജ്യാവായിട്ടുവരും. (പേജ് 199)

$\frac{J_n{}^2 - J_1{}^2}{J_{n-2}} = J_{n+1}$, where $J_1, J_2, \ldots$ are the successive Bhujas.

31. ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രഫലം ഭൂമ്യർദ്ധലംബങ്ങളുടെ ഘാതത്തിന്നു തുല്യം. (പേജ് 202)

Area of a triangle $= \frac{1}{2}$ base $\times$ altitude.

32. യോഗാന്തരചാപജ്യാക്കളുടെ ഘാതം യാതൊന്ന് ഇതു യോഗാന്തരചാപജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗാന്തരമായിട്ടിരിക്കും. (പേജ് 205)

$$R\sin(A+B).R\sin(A-B) = R^2\sin^2 A - R^2\sin^2 B.$$

33. രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗാന്തരം യാതൊന്ന് അത് ഇജ്ജ്യാക്കളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ചാപങ്ങളുടെ യോഗാന്തരങ്ങൾ യാവ ചിലവ അവറ്റെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ജ്യാക്കളുടെ ഘാതമായിട്ടിരിക്കും. (പേജ് 207-215)

The converse of 32.

34. യാവ ചിലവ രണ്ടു ജ്യാക്കളുടേയും ഘാതം യാതൊന്നു അത് അച്ചാപങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും യോഗാന്തരങ്ങളുടെ അർദ്ധങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ജ്യാക്കൾ യാവ ചിലവ, അവറ്റിന്റെ വർഗ്ഗാന്തരമായിട്ടിരിക്കും. (പേജ് 207-215)

$$R\sin A \times R\sin B = R^2\sin^2\left(\frac{A+B}{2}\right) - R^2\sin^2\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

35. പരിധ്യർദ്ധത്തെ രണ്ടായിഖണ്ഡിച്ച വർഗ്ഗത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാക്കൾ തങ്ങളിൽ ഭുജാകോടികളായിട്ടിരിക്കും. (പേജ് 208)

The chords of any two arcs of a semicircle are mutually perpendicular.

36.	വ്യാസരേഖയിങ്കന്ന് ഇരുപുറവും തുല്യമായി-ട്ടകലുമ്പോൾ ജ്യാക്കൾ തുല്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കും.	Chords equidistant from the center are equal.
37.	ജ്യാക്കളായിരിക്കുന്ന ത്ര്യശ്രഭുജകളുടെ ഘാതത്തെ ആ വൃത്തവ്യാസംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ആ ഭുചാപയോഗത്തിന്റെ ജ്യാവ് ഭൂമിയായിരിക്കുന്ന ത്ര്യശ്രത്തിന്റെ ലംബമുണ്ടാകും. (പേജ് 210)	In a triangle, the product of the two sides, divided by the diameter of the circum. circle gives the altitude.
38.	വൃത്താന്തൎഗ്ഗതമായ ചതുരശ്രത്തിന്റെ ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതയോഗം കൎണ്ണഘാതത്തിന്നു തുല്യമായിട്ടിരിക്കും. (പേജ് 211)	In a cyclic quadrilateral the sum of the products of the opposite sides is equal to the product of the diagnosis.
39.	വൃത്താന്തൎഗ്ഗതചതുരശ്രത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം ഭുജകളുടെ യോഗാൎദ്ധത്തിൽനിന്നു ഓരോ ഭുജയും വാങ്ങിയാൽ ശേഷിക്കുന്ന നാലു രാശികൾ തമ്മിൽ ഗുണിച്ചു മൂലിച്ചതിനോടു ഒക്കും. (പേജ് 230)	The area of a cyclic quadrilateral is equal to $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ where a, b, c and d are the sides and $2s = a+b+c+d$.
40.	പ്രമാണേച്ഛ തൽഫലങ്ങൾ എന്നപോലെ സംബന്ധമുള്ള നാലുരാശികൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ, ഇവറ്റിന്റെ വൎഗ്ഗങ്ങൾ തങ്ങളിലും സംബന്ധമുണ്ടായിരിക്കും. ഇവ്വണ്ണംതന്നെ യോഗാൎദ്ധങ്ങളുടെ വൎഗ്ഗാന്തരവും അന്തരാൎദ്ധങ്ങളുടെ വൎഗ്ഗാന്തരവും തങ്ങളിലുള്ള സംബന്ധം. (പേജ് 239)	If $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, then $\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$; $\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2}$; $\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{a^2}{b^2}$
41.	ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കുറഞ്ഞൊരു പ്രദേശം മറ്റൊരു വൃത്തത്തിന്റെ അകത്തു പൂക്കിരിക്കുമാറ് കല്പിക്കുന്നതായാൽ രണ്ടിന്റേയും കേന്ദ്രത്തെ സ്പൎശിക്കുന്ന വ്യാസരേഖയ്ക്കു വിപരീതമായിരിക്കും ഈ വൃത്തങ്ങൾക്കു സാധാരണമായിട്ടിരിക്കുന്ന സമസ്തജ്യാ. (പേജ് 245)	The common chord of two interacting circles is perpendicular to the line of centres.
42.	ഒരു ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ കുറഞ്ഞൊരു പ്രദേശം ഒരു വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ അകത്തു പുക്കിരിക്കുമാറു കല്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ ചെറിയ വൃത്തത്തിന്നു ശരം വലുതു്. വലിയ വൃത്തത്തിന്നു ശരം ചെറുതു്. (പേജ് 245)	If unequal circles intersect, the sag of the common chord of the smaller circle is greater than that of the other circle.
43.	ഒരു വൃത്തത്തിൽ ശരവും ശരോനവ്യാസവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു് അൎദ്ധജ്യാവിന്റെ വൎഗ്ഗമായിട്ടായിരിക്കും. (പേജ് 250)	The product of the heights of a segment of a circle and its complimentary segment is equal to the square on half the chord.
44.	ഗോളവ്യാസത്തെ ഗോളപരിധിയെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഗോളപൃഷ്ഠത്തിങ്കലെ ചതുരശ്രഫലമുണ്ടാകും. (പേജ് 251)	The surface area of a sphere $=$ Circumference $\times$ Diameter.
45.	വൃത്താൎദ്ധവും വ്യാസാൎദ്ധവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചാൽ വൃത്തക്ഷേത്രത്തിങ്കലെ ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലമുണ്ടാകും. (പേജ് 253)	Area of a circle $=$ Semicircumference $\times$ Radius.

46. ഗോളവ്യാസവർഗ്ഗത്തെ ഗോളപരിധിയെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ആറിൽ ഹരിച്ച ഫലം ഗോളത്തിങ്കലെ ഘനഫലമായിട്ടിരിക്കും. (പേജ് 254)	Volume of a sphere $= \dfrac{\text{Circumference} \times \text{Diameter}^2}{6}$

സാങ്കേതികശബ്ദങ്ങൾ	ഇംഗ്ലീഷ്പദങ്ങൾ
അ	
അഗ്രം	The extremity of a line or arc; remainder in Division in Kuttakaram
അഞ്ചിൽ ഇറങ്ങിയ മൂന്നു	The fraction $\frac{3}{5}$
അതിദെശിക്കുക	To apply or use a general rule
അധികാഗ്രഹാരം	The divisor in സംഗ്രകുട്ടാകാരം which has numerically the greater remainder
അധികശേഷം	The positive remainder after division
അധിമാസം	Additive month on account of the difference in the number of days in Solar and Lunar years
അന്തരചാപം	The intervening arc between two points in the circumference of the circle
അന്തരാളം	Difference; the perpendicular distance from a point to a straight line or plane
അന്ത്യം	10^{15} (place and number); The digit of the highest denomination; the last term in a series.
അന്ത്യസ്ഥാനം	The place of the digit of the highest denomination; the ultimate place when arranged in a column
അണുപരിമാണം	Infinitemal
അന്യോന്യഹരണം	Mutual continued division (as in finding G.C.M.)
അപരപക്ഷം (കറുത്തപക്ഷം)	The period from Full moon to New moon
അപവർത്തനം	G.C.M.; reducing a fraction or ratio to lowest terms
അപവർത്തനഹാരകം	G.C.M.
അബ്ജം	10^9 (number and place)
അമാവാസി	New moon
അയുതം	10^4 (number and place)
അർദ്ധജ്യാവ്	Refer to “ജ്യാ”
അവമം	Subtractive days (same as തിഥിക്ഷയം)
അവർഗ്ഗസ്ഥാനം	Even place counting from the unit’s place
അവാന്തരയുഗം	A unit of time. viz 576 years or 210389 days adopted by ancient Hindu astronomers
അവിശേഷിക്കുക	To carry on an operation till the results of two successive operations are practically the same
അവ്യക്തരാശി	An unknown quantity

സാങ്കേതികശബ്ദങ്ങൾ	ഇംഗ്ലീഷ്പദങ്ങൾ
അല്പശേഷം	In Kuttakaram, the smaller of the last two remainders taken into consideration
അഷ്ടാശ്രം	Octagon
അശ്രം	A side of a poligon; an edge
അസ്ഫുടം	Rough; inexact
അഹർഗ്ഗണം	The number of days elapsed from a fixed epoch
അംഗുലം	Unit of length
അങ്കം	Number, digit
അംശം	Part; numerator of a fraction

ആ

ആദിത്യമദ്ധ്യമം	The mean longitude of the sun
ആദ്യകർണ്ണം	One of the diagonals of a quadrilateral taken for reference. The other is known as 'ദ്വിതീയകർണ്ണം' or 'ഇതരകർണ്ണം'
ആദ്യസംകലിതം	First integral or sum of an A.P.
ആദ്യസ്ഥാനം	Unit's place
ആബാധകൾ	The two segments into which the base of a triangle is divided by the perpendicualr from the vertex
ആയതചതുരശ്രം	Rectangle
ആയാമം	Length
ആയാമവിസ്താരം	Length and breadth
ആഹതി	Product

ഇ

ഇച്ഛാ	The desired anteoedant; The third in a proportion
ഇച്ഛാഫലം	The desired consequent; the fourth proportional
ഇടം	Breadth
ഇതരകർണ്ണം	Refer to ആദ്യകർണ്ണം
ഇതരജ്യാവ്	The other Co-ordiante
ഇതരേതരകോടി	The ordinate of the other ഭുജാ
ഇലി	A minute of arc
ഇഷ്ടദോഃ കോടിധനുസ്സ്	The complimentary arc of any chosen arc
ഇഷ്ടപ്രദേശം	The desired point

സാങ്കേതികശബ്ദങ്ങൾ	ഇംഗ്ലീഷുപദങ്ങൾ

ഉ

ഉപപത്തി	Proof
ഉപാധിവശാൽ	By assumption
ഉപാന്ത്യം	Penultimate; next to the digit of the highest denomination
ഉൽക്രമജ്യാ	Same as 'ശരം'

ഊ

ഊനാഗ്രഹാരം	The divisor in സാഗ്രകുട്ടാകാരം which has numerically the smaller remainder
ഊനാധികധനുസ്സ്	The deficit or excess of an arc
ഊർദ്ധ്വം	The topmost
ഊനശേഷം	The smallest number to be added to the dividend to make it exaclty divisible by the given divisor

ഋ

ഋണം	Negative

ഏ

ഏകദേശം	In the same straight line; a part
ഏകം	Unit; Unit's palce
ഏകാദിക്രമേണ	Consecutive starting from unity
ഏകദ്വിത്ര്യാദി	Consecutive, numbers starting from unity
ഏകാദ്യേകോത്തരങ്ങൾ	Same as ഏകദ്വിത്ര്യാദി
ഏകാദ്യേകോത്തരമൂല സംകലിതം	$1 + 2 + 3 + \cdots$
ഏകാദ്യേകോത്തരവർഗ്ഗസംകലിതം	$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots$
ഏകാദ്യേകോത്തരഘനസംകലിതം	$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots$
ഏകാദ്യേകോത്തരവർഗ്ഗവർഗ്ഗസംകലിതം	$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots$
ഏകാദ്യേകോത്തരസമപഞ്ചഘാതസംകലിതം	$1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots$
ഏകൈകോനങ്ങൾ	Numbers descending by unity
ഏഷ്യചാപം	The arc to be traversed. (Refer to ഗതചാപം)

ഒ

ഓജസ്ഥാനം	Odd place counting from the unit's place
ഒറ്റപ്പെട്ട	Odd number
ഓജം	Odd

സാങ്കേതികശബ്ദങ്ങൾ	ഇംഗ്ലീഷ്പദങ്ങൾ
ക	
കർണ്ണം	The diagonal of a quadrilateral; hypotenuse of a right angled triangle; radyector
കലാ	$\frac{1}{21600}$ of the circumference of a circle
കലിക്കൊട്ടനാൾ	The number of days past from a fixed epoch called Kalyadi; the begining of Kaliyuga
കുട്ടാകാരം	A special method of calculation employed in Hindu Astronomy involving the principles of Rule of Three, indeterminate equations and continued fractions
കൂറ്	Group; Section
കൃഷ്ണപക്ഷം	Same as 'അപരപക്ഷം'
കേന്ദ്രം	Centre of a circle; the particular point on the circumference from which the arc is measured
കോടി	Abscissa; adjacent side of a right angled triangle; Corner rafters of hipped roof, 10^7 (number and place)
കോടിഖണ്ഡം	The difference between two successive abscissa, the first differencial of Kotijya
കോടിമൂലം; കോട്യഗ്രം	The point at which Koti touches the circles is its starting point and the other end is its end
കോൺ	Corner; Direction
കോൽ	A unit of length equal to about $28''$
ഖ	
ഖണ്ഡം	Part
ഖണ്ഡഗുണനം	Multiplication by parts
ഖണ്ഡജ്യാ	The difference between two successive ordinates, the first differencial of Bhujajya
ഖണ്ഡജ്യാന്തരം	The second differencial of Jya
ഖർവ്വം	10^{10} (number and place)
ഗ	
ഗച്ഛം	Number of terms in a series
ഗണിതം	Calculation; Science of calculation

സാങ്കേതികശബ്ദങ്ങൾ	ഇംഗ്ലീഷുപദങ്ങൾ
ഗതചാപം	The arc already traversed; the quadrant —ഗതചാപം=ഏഷ്യചാപം
ഗുണം	Mutiplication, multiplier
ഗുണകാരം	Multiplier
ഗുണനം	Multiplication
ഗുണ്യം	Mutiplicand
ഗുർവ്വക്ഷരം	A unit of time (Refer to table appended)
ഗോളഘനക്ഷേത്രഫലം	Volume of a sphere
ഗോളപൃഷ്ഠചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം	Surface area of a sphere
ഗോളം	Sphere
ഗ്രഹം	Planet
ഗ്രാസം	The maximum width of the overlap of two intersecting circles
ഗ്രാസോനവ്യാസം	The difference between the diameter and ഗ്രാസം

ഘ

ഘനം	Cube of a number
ഘനമൂലം	Cube root
ഘനക്ഷേത്രഫലം	Volume of a body
ഘാതം	Product
ഘാതക്ഷേത്രം	Rectangle

ച

ചക്രകല	The circumference of a circle is assumed to be divided into 21600 equal parts and each part is known as a Kala or Ili
ചക്രകലാസമസംഖ്യ	The number 21600— same as “അനന്തപുരം”
ചതുരശ്രം	Quadrilateral
ചതുരശ്രഭൂമി	The base of a quadrilateral, the opposite side is known as മുഖം
ചതുർയുഗം	A unit of time viz 4320000 years adopted by ancient Hindu Astronomers
ചയം	The common difference in an A.P.
ചാന്ദ്രമാസം	Lunar month
ചാപം	Arc of a circle
ചാപീകരണം	Calculating the arc of a circle from its semichord

സാങ്കേതികശബ്ദങ്ങൾ	ഇംഗ്ലീഷ്പദങ്ങൾ
ചാപം—ഭുജാ	An arc measured from മേഷാദി & തുലാദി in the anti-clock-wise direction in the first and third quadrants and in the clock-wise direction in the second and fourth quadrant
ചാപം—കോടി	Complimentary arc of ഭുജാചാപം (Refer to Fig. 33 on page 141)
ചെരുവ്	Inclination, angle

ഛ

ഛായാ	Shadow
ഛേദം	Denominator

ജ

ജലധി	10^{14} (number and place)
ജീവാ	Same as ജ്യാവ്
ജ്യാചാപാന്തരം	Difference between an arc and corresponding semi-chord
ജ്യാവ്—അർദ്ധ	The ordinate of an arc; Semi-chord
ജ്യാവ്—സമസ്ത	Complete Chord of the arc
ജ്യാവ്—പിണ്ഡ	The semi-chords of one, two, . . . parts of the arcs quadrent which is divided into any number of equal parts
ജ്യാസംകലിതം	The summation of semi-chords

ത

തല്പര	$\frac{1}{60} \times \frac{1}{60}$ or $\frac{1}{3600}$ of a കല
താഡിക്കുക	To multiply
തഷ്ടം	Abraded
തക്ഷണം	The method of abrasion—The numbers by which the ഗുണകാരം and ഫലം are abraded
തിഥി	Elongation of the moon—the phase of the moon
തിഥിക്ഷയം	Subtractive day
തുംഗൻ	Apogee of the moon
തുല്യാകാരക്ഷേത്രങ്ങൾ	Similar Figures

സാങ്കേതികശബ്ദങ്ങൾ	ഇംഗ്ലീഷുപദങ്ങൾ
തൃതീയകർണ്ണം	In a cyclic quadrilateral, there are two diagonals. If any two sides are interchanged, a third diagonal is obtained which is called the തൃതീയ കർണ്ണം (Refer to page 212 — Fig. 47)
തൃതീയസംകലിതം	Third integral
ത്രിജ്യാ	The ordinate of 3 rasis of arc of a circle *ie* $\frac{1}{4}$ the circumference, the unit of measurement being $\frac{1}{21600}^{\text{th}}$ part of the whole circumference
ത്രിശരാദി	3, 5, 7, etc
ത്രൈരാശികം	Rule of three—(Direct proportion)
ത്ര്യശ്രം	Triangle
" വിഷമം	Scalene
" സമം	Equilateral

ദ

ദശം	10 (Number and place)
ദളം	Half
ദക്ഷിണോത്തരരേഖ	North-south line or direction
ദിഗ്വൈപരീത്യം	Perpendicularity
ദിക്സാമ്യം	Same or parallel line or direction
ദിവസം	Solar day
ദൃഢഭാജ്യം	Reduced dividend (by their G.C.M.)
ദൃഢഭാജകം	Reduced divisor (by their G.C.M.)
ദൃഢക്ഷേപം, ദൃഢശുദ്ധി	Additive and subtractive divided by the G.C.M of dividend and divisor in Kuttakaram
ദോസ്	Same as ഭുജാ
ദ്യുഗണം	Same as കലിക്കൊട്ടനാൾ
ദ്വാത്രിംശദശ്രം	A polygon of 32 sides
ദ്വാദശാംഗുലശംകു	A gnomon 12 അംഗുലം long used by ancient Hindu Mathematicians in the measurement of shadows
ദ്വിതീയസംകലിതം	Second integral
ദ്വിതീയസംസ്കാരഹാരകം	The divisor used to calculate a second correction after a first correction

ധ

ധനം	Positive

സാങ്കേതികശബ്ദങ്ങൾ	ഇംഗ്ലീഷ്പദങ്ങൾ
ധനുസ്	Arc

ന

നാഴിക	A unit of time $= \frac{1}{60}$ of a solar day
നിഖർവം	10^{11} (number and place)
നിരന്തരസംഖ്യ	Consecutive numbers
നേമി	Circumference with reference to position

പ

പകർന്നു കല്പിക്കുക	Transpose
പങ്ക്തി	Column, ten, (number and place)
പഞ്ചരാശികം	Compound proportion involving five terms
പഠിതജ്യാ	Same as മഹാജ്യാ
പദം	A quadrant, number of terms in a series
പരമ്പര	A series
പരാർദ്ധം	10^{17} (number and place)
പരികർമ്മം	Arithmatical processes or manipulations
പരിധി	Circumference with referance to manipulations
പരിഭ്രമണം	A complete revolution of a planet along the Zodiac with reference to a fixed star
പർവ്വാന്തം	The time when moon is in conjunction with or opposition to the sun
പാർശ്വം	Side, surface
പുറവാ	Outer side
പൂർവ്വാപരരേഖ	East-west line or direction
പ്രതിഭുജാ	Opposite side
പ്രമാണം	The antecedant, the first term of a proportion
പ്രമാണഫലം	The consequent; the second term in a proportion
പ്രയുതം	10^{16} (number and place)
പ്രസ്താരം	Number of combinations

ഫ

ഫലം	Result

സാങ്കേതികശബ്ദങ്ങൾ	ഇംഗ്ലീഷ്പദങ്ങൾ
ബ	
ബാണം	Same as ശരം
ബാഹു	Side of a triangle, a quadrilateral etc; a semi-chord ($R \sin \theta$)
ഭ	
ഭഗണം	same as പരിഭ്രമണം
ഭാഗം	$\frac{1}{360}$ of the circumference
ഭാജകം	Divisor (General and in Kuttakaram)
ഭാജ്യം	Dividend (General)—The multiplicant in Kuttakaram
ഭിന്നസംഖ്യ	Fraction
ഭുജാ	Side of a triangular polygon; ordinate of an arc; opposite side in a right angled triangle
ഭുജാഖണ്ഡം	The difference between two successive ordinates
ഭൂദിനം	The number of terretrial daye in a Kalpa or Yuga
ഭൂമി	One side of a triangle or quadrilateral taken for reference
മ	
മണ്ഡപം	A square with a pyramidal roof usually found in Hindu temples
മതി	Small tentative multiplier in Kuttakaram got by guessing correctly according to the condition given
മതിഫലം	The result corresponding to a given മതി
മത്സ്യം	The overlapping portion of two intersecting circles
മദ്ധ്യം	10^{16} (number and place); middle point
മദ്ധ്യമം	The mean longitude of a planet
മഹാജ്യാ	Same as പരിതജ്യാ
മഹാപത്മം	10^{12} (number and place)
മഹാശേഷം	In Kuttakaram, the greater of the last two remainders taken into consideration
മാനം	An arbitrary unit of measurement
മീനാന്തം	Same as മേഷാദി; Begining of first quadrant
മുഖം	Refer to ചതുരശ്രഭൂമി

സാങ്കേതികശബ്ദങ്ങൾ	ഇംഗ്ലീഷ്പദങ്ങൾ
മുടിയുക	To end without remainder
മുറിവാ	The line of section
മൂലം	The starting point of a line or arc; a square root; cube root etc.
മുഴപ്പ്	Thickness
മേഷാദി	The starting point on the ecliptic which is fixed in നിരയന calculation

യ

യാമ്യം	Southern
യുഗ്മം	Even
യുഗ്മസ്ഥാനം	Even place counting from unit's place
യോഗം	Sun; Contact; one of the elements of a പഞ്ചാംഗം derived from the sun of the true longitude of the sun and the moon നിത്യയോഗം
യോഗചാപം	Arc whose semi-chord is equal to the sum of two given semi-chord

ര

രാശി	A number; one of the signs of the Zodiac a term & a ratio
രൂപം	Unity
രൂപവിഭാഗം	Division by magnitude

ല

ലക്ഷം	10^{15} (number and place)
ലംകാ	A chosen point on the equator
ലംബം	Perpendicular; Vertical
ലംബനിപാതം	Foot of the perpendicular
ലിപ്ത	Same as ഇലി

വ

വർണ്ണമൊപ്പിക്കുക	Convert fractions to the same denomination
വർഗ്ഗം	Square
വർഗ്ഗമൂലം	Square root
വർഗ്ഗസ്ഥാനം	The odd place counting from the unit's place
വർഗ്ഗക്ഷേത്രം	A square

സാങ്കേതികശബ്ദങ്ങൾ	ഇംഗ്ലീഷുപദങ്ങൾ
വല്ലി	A column or series
വല്യപസംഹാരം	A particular kind of operation in Kuttakaram
വാങ്ങുക	Subtract
വിയോഗം	Subtraction
വിലി	$\frac{1}{60}$ of an Ili (ഇലി)
വിഷമസംഖ്യ	Odd number
വിസ്താരം	Breadth
വൃത്തം	Circle
വൃത്താന്തർഗ്ഗതചതുരശ്രം	A cyclic quadrilateral
വൃന്ദം	10^9 (number and place)
വ്യക്തി	Unity
വ്യവകലിതം	Subtraction
വ്യസ്തത്രൈരാശികം	Inverse proportion
വ്യസ്തകുട്ടാകാരം	Inverse proces in Kuttakaram
വ്യാപ്തിഗ്രഹണം	Generalisation
വ്യാസം	Diameter
വ്യാസാർദ്ധം	Radius

ശ

ശതം	10^2 (number and place)
ശങ്കു	Gnomon; Style; Vertical post; 10^{13} (number and place)
ശരഖണ്ഡം	Parts of the height of an arc
ശരം	Sag or height of an arc
ശരോനവ്യാസം	Diameter less ശരം
ശിഷ്ടചാപം	The difference between the given ചാപം and the nearest മഹാജ്യാചാപം
ശുദ്ധി	Subtractive
ശൂന്യം	Zero
ശോദ്ധ്യഫലം	Correction to be applied to a result
ശ്രേഢീ	A series
ശ്രേഢീക്ഷേത്രം	A figure representig a series graphically

ഷ

ഷഡശ്രം	Hexagon
ഷോഡശാശ്രം	A polygon of 16 sides

സ

സാങ്കേതികശബ്ദങ്ങൾ	ഇംഗ്ലീഷ്പദങ്ങൾ
സദൃശങ്ങൾ	Of the same denomination or kind, Similar
സംകലിതം	Addition; summation of a series; sum of a series
സംകലിതസംകലിതം	Integral of an integral
സംകലിതൈക്യം	Sum of the integrals
സംക്രമം	The moment a planet enters into a sign of the Zodiac. Also the entry from one sign to the next
സംപാതജീവ	The common chord
സംവത്സരം	Solar year
സംവർഗ്ഗം	Product
സംസ്കാരം	Correction by addition or subtraction
സമഘാതം	Product of like terms
സമചതുരശ്രം	A square
സമച്ഛേദം	Same denominator
സമലംബചതുരശ്രം	Trapezium
സമവിതാനം	Level
സമസംഖ്യ	Even number
സമഷഡശ്രം	Regular Hexagon
സമാന്തരരേഖ	Parallel straight line
സർവ്വദോർയ്യുതിദളം	Semi-perimeter
സർവ്വസാധാരണത്വം	Universality
സവർണ്ണങ്ങൾ	Of the same denomination or nature
സഹസ്രം	10^3 (number and place)
സാഗ്രം	With remainder; a kind of Kuttakaram
സാധനം	Given data
സാവനദിനം	Solar day
സൂത്രം	Line, direction, formula
സൗമ്യം	Northern
സൗരബ്ദം	Solar year
സ്ഥാനവിഭാഗം	Division according to place
സ്ഥൗല്യം	Difference from the correct value, (Error)
സ്ഫുടം	Correct; True longitude of a palnet
സ്വോർദ്ധം	The number above the penultimate in Kuttakaram

ഹ

ഹരണം	Division

സാങ്കേതികശബ്ദങ്ങൾ	ഇംഗ്ലീഷ്പദങ്ങൾ
ഹാരകം	Divisor
ഹാര്യം	Divident
ഹനിക്കുക	Multiply
ഹൃതശേഷം	Remainder after division

ക്ഷ

ക്ഷേത്രം	A palne figure
ക്ഷേത്രഫലം	Area
ക്ഷേപം	Additive

Technical Terms and Their Corresponding Malayalam Equivalents

Abraded	തഷ്ടം
Abscissa	കോടി
Addition	യോഗം, സംകലിതം
Additive	ക്ഷേപം
Antecedent	പ്രമാണം
Application	അതിദേശം
Arc	ധനുസ്, ചാപം
" already traversed	ഗതചാപം
" chord of	സമസ്തജ്യാ
" complementary	കോടിചാപം
" sag of	ശരം
" ordiante of	അർദ്ധജ്യാ
Area	ക്ഷേത്രഫലം
Breadth	വിസ്താരം, ഇടം
Base	ഭൂമി
Calculate	ഗണിക്കുക
Calculation	ഗണിതം
Centre of a circle	കേന്ദ്രം
Chord	സമസ്തജ്യാ
Circle	വൃത്തം
Circumference	പരിധി, നേമി
Column	പങ്ക്തി, വല്ലി
Combination	പ്രസ്താരം
Common	സാധാരണം
Conclusion	അനുമാനം
Contact	സ്പർശം
Continuity	സർവ്വസാധാരണത്വം
Conversely	നേരേമറിച്ച
Corner	കോൺ
Correction	ശോദ്ധ്യഫലം
Cube	ഘനം
" root	ഘനമൂലം
Cyclic	വൃത്താന്തർഗ്ഗതം
Day	ദിവസം
" solar	സാവനദിവസം
" subtractive	അവമം, തിഥിക്ഷയം

Decimal system	ദശഗുണോത്തരഗണിതം
Diagonal	കർണ്ണം
Diameter	വ്യാസം
” less sag	ശരോനവ്യാസം
Diurnal	പ്രതിദിനം
Difference	അന്തരാളം, അന്തരം
Digit	അംകം
Direction	ദിക്ക്
Divide	ഹരിക്കുക
Divident	ഹാര്യം, ഭാജ്യം
Division	ഹരണം
” mutual	അന്യോന്യഹരണം
Divisor	ഭാജകം, ഹാരകം
Ecliptic	അപക്രമവൃത്തം
Elongation of the Moon	തിഥി
Even	യുഗ്മം
” place	യുഗ്മസ്ഥാനം
Extremity	അഗ്രം
Fraction	ഭിന്നസംഖ്യ
Formula	സൂത്രം
G.C.M.	അപവർത്തനഹാരകം
Generalisation	വ്യാപ്തിഗ്രഹണം
Gnomon	ശംകു
Group	കൂറു, പരിഷ
Half	ദളം, അർദ്ധം
Hexagon	ഷഡശ്രം
” regular	സമഷഡശ്രം
Horizontal	സമവിതാനം
Height	ലംബം, ഉന്നതി
Hypotenuse	കർണ്ണം
Hemisphere	അർദ്ധഗോളം
Hypothesis	അനുമേയം
Inclination	ചെരുവ്
Infinitesimal	അണുപരിണാമം
Integral	സംകലിതം
Inverse proportion	വ്യസ്തത്രൈരാശികം
Known	ജ്ഞാതം
Lac	ലക്ഷം
Latitude	അക്ഷം

L.C.M.	സമച്ഛേദം
Length	ആയാമം, നീളം
” and breadth	ആയാമവിസ്താരം
Level	സമവിതാനം
Longitude	മദ്ധ്യമം
Longitude (mean) of a planet	ദേശാന്തരം
Limit	പദം
Last	അന്ത്യം
Month	മാസം
” additive	അധിമാസം
” lunar	ചാന്ദ്രമാസം
Multiply	ഹനിക്കുക, ഗുണിക്കുക
Multiplicand	ഗുണ്യം
Multiplication	ഗുണനം, ഗുണം
” by part	ഖണ്ഡഗുണനം
Multiplier	ഗുണം, ഗുണകാരം
Negative	ഋണം
North	ഉത്തരം
Northern	സൗമ്യം
Number	സംഖ്യ
” consecutive	നിരന്തരസംഖ്യ
Odd	ഓജസംഖ്യ
” even	യുഗ്മസംഖ്യ
Odd	ഓജം
” number	വിഷമസംഖ്യ, ഒറ്റപ്പെട്ട
” place	ഓജസ്ഥാനം
Opposite side	പ്രതിഭുജാ
Ordinate	ഭുജാ
Octagon	അഷ്ടാശ്രം
Parallel	സമാന്തരം
Parallel straight line	സമാന്തരരേഖ
Part	അംശം, ഖണ്ഡം
Penultimate	ഉപാന്ത്യം
Perpendicular	ലംബം, വിപരീതം
Perimeter	ചുറ്റളവ്
Perpendicular—foot of	ലംബനിപാതം
Perpendicularity	ദിഗ്വൈപരീത്യം
Planet	ഗ്രഹം
Positive	ധനം

Product	ആഹതി, ഘാതം, സംവർഗ്ഗം
” of equal terms	സമഘാതം
Proof	ഉപപത്തി
Proportion (inverse)	വ്യസ്തത്രൈരാശികം
Proportion direct	ത്രൈരാശികം
Progression	ശ്രേഢി
Problem	പ്രശ്നം
Permanence	വ്യവസ്ഥ, സർവ്വസാധാരണത്വം
Proposition	അനുമാനവാക്യം
Quadrilateral	ചതുരശ്രം
” cyclic	വൃത്താന്തർഗ്ഗതചതുരശ്രം
Quadrant	പദം
Quotient	ഹരിതഫലം
Radius	വ്യാസാർദ്ധം
Rectangle	ആയതചതുരശ്രം
Remainder	ശേഷം
” positive	അധികശേഷം
” after division	ഹൃതശേഷം
Result	ഫലം
Rotation	ഭ്രമണം, ഭഗണം
” complete	പരിഭ്രമണം
Rough	സ്ഥൂലം
Rotate	തിരിക്കുക
Rule of three	ത്രൈരാശികം
Semi-perimeter	സർവ്വദോര്യുതിദളം
Series	പരമ്പര, ശ്രേഢി, പരിഷ
Shadow	ഛായ
Side	പാർശ്വം
Similar figures	തുല്യാകാരക്ഷേത്രങ്ങൾ
Sphere	ഗോളം
Southern	യാമ്യം
Square	വർഗ്ഗക്ഷേത്രം, സമചതുരശ്രം, വർഗ്ഗിക്കുക
Subtract	വാങ്ങുക
Subtraction	വിയോഗം, വ്യവകലിതം
Subtractive	ശുദ്ധി
Ten	ദശം
Thickness	മുഴപ്പ്
Triangle	ത്ര്യശ്രം
” scalene	വിഷമത്ര്യശ്രം

” equilateral	സമത്ര്യശ്രം
Topmost	ഊൎദ്ധ്വം
Trapezium	സമലംബചതുരശ്രം
Transpose	പകൎന്നു കല്പിക്കുക
Transition	സംക്രമം
Transit	ഉച്ചയാവുക
Unit	ഏകം
Unit's place	ആദ്യസ്ഥാനം
Units of time	ഗുൎവ്വക്ഷരാദികൾ (പട്ടിക നോക്കുക)
Unity	രൂപം, വ്യക്തി
Universality	സൎവ്വസാധാരണത്വം
Unknown	ജ്ഞേയം
Volume of a sphere	ഗോളഘനക്ഷേത്രഫലം
” of a body	ഘനക്ഷേത്രഫലം
Year	അബ്ദം
” solar	സൗരബ്ദം
Zero	ശൂന്യം
Zodiac	രാശിചക്രം

Please write to ⟨info@sayahna.org⟩ to file bugs/problem reports, feature requests and to get involved.
Sayahna Foundation • JWRA 34, Jagathy • Trivandrum 695014 • INDIA