МІХАЙЛА ГРАМЫКА

ПРАВАДЗЕЙНЫ ЧЛЕН ІНСТЫТУТУ БЕЛАРУСКАЕ КУЛЬТУРЫ

УВОДЗІНЫ Ў НАВУКУ АБ НЕОРГАНІЧНАЙ ПРЫРОДЗЕ

ЧАСТКА ПЕРШАЯ

КРЫШТАЛЁГРАФІЯ

БЕЛАРУСКАЕ ДЗЯРЖАЎНАЕ ВЫДАВЕЦТВА
МЕНСК—1926

МІХАЙЛА ГРАМЫКА

ПРАВАДЗЕЙНЫ ЧЛЕН ІНСТЫТУТУ БЕЛАРУСКАЕ КУЛЬТУРЫ

УВОДЗІНЫ Ў НАВУКУ АБ НЕОРГАНІЧНАЙ ПРЫРОДЗЕ

ЧАСТКА І-я

КРЫШТАЛЁГРАФІЯ

БЕЛАРУСКАЕ ДЗЯРЖАЎНАЕ ВЫДАВЕЦТВА
МЕНСК—1926

БДВ № 146. Галоўлітбел № 19256.

Менск, 2-ая Дзярж. друк. Зак. № 578г. Уліку 10.000 экз.

ПРАДМОВА.

Дасьледваньне і апісаньне так званай *неарганічнай* („няжывой“) прыроды ўваходзіць у задачы некалькіх аддзельных дысцыплін або навук, кожная з якіх падыходзіць і разглядае прыроду з свайго пункту гледжаньня. Але, паколькі неарганічная прырода *адзіна* ў сваіх зьявах, у сваіх зьменах, у сваім „жыцьці“, пастолькі і навукі аб ёй таксама маюць між сабой багата агульнага. Вось гэтыя дысцыпліны:

Геолёгія, навука аб кары зямлі ў цэлым, аб складзе гэтай кары, аб земных пародах і пераменах, якія адбываюцца з імі, нарэшце, аб гісторыі тых перамен, якія адбываліся з земнай карой і г. д.

Як бачым, першым матэрыялам, з якім мае справу геолёгія, ёсьць *земныя пароды;* земныя пароды дасьледуе асобная дысцыпліна—*петрографія*.

Але ў склад земных парод уваходзяць *мінэралі,*—прадмет дасьледваньня навукі *мінэралёгіі*.

З другога боку, немагчыма дасьледваць мінэралі без знаёмства з *крышталёграфіяй,* навукай аб законах утварэньня правільных прыродных формаў, так званых крышталяў. Такім чынам, знаёмства з неарганічнай, няжывой прыродай трэба распачынаць з навукі крышталёграфіі; затым перайсьці да мінэралёгіі і толькі пасьля гэтага, азнаёміўшыся з аддзелам геолёгіі—петрографіяй—можна больш падгатавана пазнаваць геолёгічныя зьявы.

З больш дакладным азначэньнем кожнае з пералічаных навук, як і з аддзеламі іх, мы азнаёмімся ў далейшым.

I. Асноўныя паняцьці і азначэньні.

1. Крышталічная матэрыя.

Пры знаёмстве з крышталямі—горным крышталем, каменнай сольлю і інш.—зьвяртае ўвагу, перш за ўсё, правільнасьць знадворнае формы, г. ё. тое, што крышталь зьяўляецца больш-менш правільнай геомэтрычнай фігурай: кубам, прызмай, пірамідай і г. д. Але, пры далейшым нагляданьні можна ўстанавіць, што ня гэтая правільнасьць знадворнае формы ёсьць галоўная ўласьцівасьць крышталю, але тая *нутраная будова* і разьмяшчэньне між сабой магчыма дробных, далей недзялімых частачак—атомаў—якія складаюць даны крышталь. Крышталь можа зусім згубіць правільную геомэтрычную форму (ад паломкі, ад шліфаваньня, ад вытраўленьня якім-небудзь квасам), і ўсё-ж застанецца ў ім нешта, што вызначыць яго належнасьць да крышталічнага стану. З другога боку, можна вырабіць з дрэва, шкла, воску, гліны дасканалую геомэтрычную форму, якая знадворна будзе зусім падобная да якога-небудзь крышталю, і ўсё-ж гэтыя, правільнай формы целы, мы не павінны называць крышталічнымі целамі. Каб разабрацца ў гэтым, азнаёмімся з некаторымі асноўнымі паняцьцямі і азначэньнямі.

Калі цела мае ва ўсіх сваіх частках аднолькавы *хэмічны* склад, яно завецца *хэмічна-аднародным*. Калі хэмічна-аднароднае цела (матэрыя) выяўляе ва ўсіх сваіх частках аднолькавыя *фізычныя* ўласьцівасьці, яно завецца *фізычна-аднародным*. Калі мы такое фізычна-аднароднае цела будзем дасьледваць адносна якой-небудзь фізычнай уласьцівасьці, напрыклад, адносна праменьняў сьвятла, па *розных кірунках,* і заўважым, што ва ўсіх кірунках праменьні сьвятла будуць весьці сябе *аднолькава,* што можа выразіцца аднолькавай велічынёй, напрыклад, скорасьці распаўсюджаньня сьвятла ў сярэдзіне данага фізычна-аднароднага цела, і іншымі велічынямі,—то мы будзем называць нашае цела *ізотропным* 1) адносна сьвятла.

Таксама, калі цяплыня, электрычнасьць распаўсюджваюцца ва ўзятым намі фізычна-аднародным целе аднолькава па ўсіх кірунках, мы яго будзем зваць ізотропным адносна электрычнасьці, ізотропным адносна цяплыні і г. д. Калі фізычна-аднародная матэрыя (цела) будзе ізотропнай адносна *ўсіх* фізычных уласьцівасьцяй, мы яго будзем зваць *гомогеннай* 2) *ізотропнай* матэрыяй (целам).

---

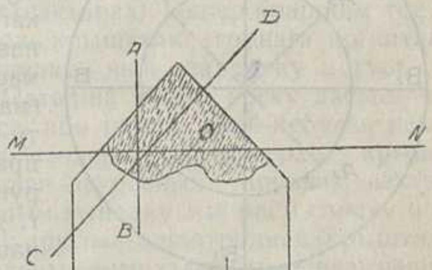
1) Як і большасьць навуковых тэрмінаў, слова гэтае ўзята з грэцкае мовы; ізос—роўны, аднолькавы; тропос—стан, постаць.

2) Гомогенны—аднародны.

Матэрыю, або цела, у якім фізычная ўласьцівасьць (цяплыня, сьвятло, электрычнасьць) *мяняецца* залежна *ад кірунку,* мы будзем зваць *анізотропным* [1] для данай фізычнай уласьцівасьці. Тады такую фізычна-аднародную матэрыю, якая анізотропна ў адносінах хаця-бы да аднэй якое-небудзь фізычнае ўласьцівасьці (напрыклад, адносна сьвятла), мы будзем зваць *гомогеннай анізотропнай* матэрыяй.

Вось-жа *крышталі* і наогул матэрыя, здольная крышталізавацца, *крышталічная матэрыя* і зьяўляецца такой *гомогеннай анізотропнай матэрыяй.*

А самая гэтая зьява—гомогенная анізотропія—часам завецца яшчэ *крышталічнай аднароднасьцю.* Анізотропія крышталічнае матэрыі можа выяўляцца або адносна ўсіх, або толькі некаторых фізычных ўласьцівасьцяй. Гэта азначае, што крышталічная матэрыя можа быць ізотропнай у вадносінах, напрыклад, электрычнасьці, сьвятла, цяплыні, магнэтызму і г. д., і будзе анізотропнай толькі адносна, напрыклад, шчапленьня. Ня можа быць толькі такога крышталю, каб ён быў ізотропным да ўсіх фізычных зьяў.



Мал. 1

Як-жа пагадзіць паняцьці аднароднасьці, гомогеннасьці з паняцьцем анізотропіі? Па паняцьці аднароднасьці (гомогеннасьці) матэрыя павінна выяўляць аднолькавыя ўласьцівасьці ў кожнай сваёй частцы; у той-жа час анізотропная матэрыя гэта такая, што фізычныя зьявы (хаця-бы аднаго якога-небудзь характару) мяняюцца залежна ад кірунку. Гэтыя нібы-супярэчнасьці пагаджаюцца тым, што ў гомогеннай анізотропнай матэрыі кожная фізычная зьява аднолькава ў *паралельных кірунках.*

Уясьніць гэта можна з наступнага мал. (1), дзе даецца схэма нейкага крышталю і штрыхамі паказаны розныя яго кавалкі (0-0_1-0_2); гэтыя кавалкі будуць, вядома, хэмічна

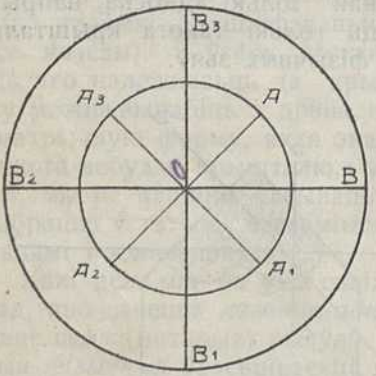
---

[1] „Ан“—адмоўная частачка ў грэцкай мове.

аднароднымі. Каб данае цела ня было крышталем (крышталічнай матэрыяй), то і фізычна яно было-б аднародным, і ўсе яго часткі па ўсіх кірунках (АВ-СД-MN) мелі-б аднолькавыя фізычныя ўласьцівасьці,—яно было-б гомогенна-ізотропным; з прычыны-ж таго, што ўзятае намі цела ёсьць крышталь, значыць гомогенна анізотропная матэрыя, то ў яго асобных аднародных кавалках (0-0_1-0_2) фізычныя зьявы будуць аднолькавымі толькі па паралельных кірунках—АВ-АВ або СД-СД і г. д.

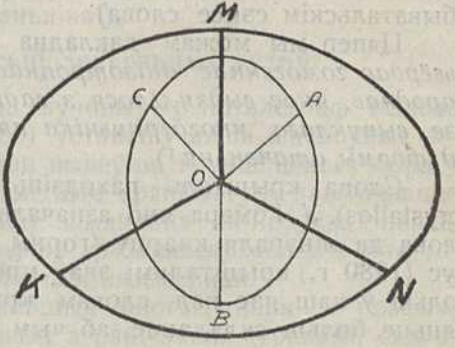
У фізыцы часам называюць велічыні, якія мяняюцца ад кірунку, *вэктарыяльнымі* велічынямі, або проста *вэктарамі*. Такім чынам, анізотропнасьць крышталічнае матэры называюць яшчэ іначай *вэктарыяльнасьцю* (можна перакласьці нашым словам—*кірунковасьць)*.

Калі дасьледваная матэрыя ізотропна, то для кожнай фізычнай зьявы (цяплыні, сьвятла, і г. д.) вэктары, якія выражаюць гэтую зьяву ў лініях, будуць аднолькавымі, і злучыўшы канцы вэктараў, што ідуць па ўсіх кірунках ад нейкага цэнтру, мы будзем мець паверхню *кулі*. Дапусьцім, мы маем нейкае ізотропнае цела (мал. 2). Дапусьцім, што з пункту 0 гэтага цела разыходзяцца праменьні сьвятла па ўсіх кірунках —ОА,-$ОА_1$-$ОА_2$-$ОА_3$ і г. д. З прычыны ізотропнасьці нашага цела, праз нейкі час сьвятло разыйдзецца на *аднолькавыя* адлегласьці, што выразіцца роўнымі вэктарамі—ОА-$ОА_1$-$ОА_2$ і г. д. Атрымаем нейкую кулістую паверхню. У наступны момант сьвятло таксама разыйдзецца на новыя роўныя між сабой адлегласьці $ОВ=ОВ_1=ОВ_2=ОВ_3$. Будзем мець новую кулістую паверхню і г. д. Тое самае паўторыцца адносна іншых фізычных зьяў—цяплыні, электрычнасьці, магнэтызму, шчапленьня і г. д. Зусім іншае наглядаецца на целах гомогенна анізотропных, або вэктарыяльных (аднародна-кірунковых).



Мал. 2

Тут, хаця-бы адносна аднэй якой-небудзь фізычнай зьявы (шчапленьня, напрыклад), наглядаецца няроўнасьць вэктараў, г. ё. ліній, якія выражаюць велічыню гэтай зьявы (шчапленьня) па розных кірунках. Гэта геомэтрычна выразіцца тым, што заместа *кулістай* паверхні, якая выражае *ізотропнасьць,* мы будзем мець якую-небудзь іншую паверхню, напрыклад, паверхню так званага *эліпсоіда* (фігуры, у якой два кірункі, або радыусы-вэктары не аднолькавы); гэтая паверхня і будзе геомэтрычна выражаць анізотропнасьць данага цела (крышталічнай матэрыі) адносна, скажам, шчапленьня. Вэктары ОА-ОВ-ОС-ОМ-ОК ня будуць роўныя (мал. 3).



Мал. 3

Можна зрабіць, напрыклад, такі досыць лёгкі досьлед. На гладкай роўнай паверхні шкла (можна ўзяць шкляную модэль або ўзор крышталю) накладзем ценкім пластом воску, ці парафіны. Паставіўшы пасярэдзіне пакрытай воскам шкляной пласьціны мэталічны стрыжанёк, пачнем награваць яго. Цяплыня пойдзе па стрыжаньку, і воск на пласьціне пачне таяць. Атрымаецца *круглая* паталіна сярод воску, якая сьведчыць, што цяплыня па шкляной паверхні разыходзіцца роўнамерна па ўсіх кірунках (вэктарах). Цяпер праробім тое самае на паверхні якога-небудзь крышталю, (горнага крышталю, кальцыту, сьлюды або лушчаку), якія знадворку могуць і ня мець правільнай формы. Паталіна сярод воску дасьць нам фігуру ня круга, але эліпса, або іншай якой-небудзь некругавой формы. Цяплыня разыходзіцца на паверхні крышталічнае матэрыі не аднолькава па розных кірунках; вэктары будуць ня роўныя. У першым выпадку мы маем справу з матэрыяй ізотропнай (шкло), у другім—анізотропнай (крышталь).

Матэрыі, якія ня здольны крышталізавацца, называюцца інакш аморфнымі [1]). Значыць, аморфная матэрыя (шкло, воск, парафіна, крамень, многія іншыя мінэралі) ёсьць ізотропная (не кірунковая) адносна ўсіх фізычных уласьцівасьцяй.

Наадварот, крышталічныя матэрыі (большасьць мінэраляў, цукар і г. д.) ёсьць анізотропныя або вэктарыяльныя (кірунковыя) адносна хаця-бы аднэй якой-небудзь фізычнай уласьцівасьці.

На аснове прынятай цяпер у навуцы *атомістычнай тэорыі*, трэба прызнаць, што кожнае матэрыяльнае цела складаецца з драбнейшых частачак—атомаў, якія знаходзяцца на некаторай адлегласьці між сабой. З пункту погляду гэтай тэорыі гомогенная ізотропная матэрыя (аморфная) будзе складацца з атомаў, якія знаходзяцца між сабой у беспарадку. Калі-ж асобныя цьвёрдыя частачкі матэрыі будуць мець нутраны пэўны парадак, мы будзем мець гомогенную анізотропную матэрыю (крышталічную). Анізотропнасьць (кірун-

---

[1]) Морфос—форма; а—адмоўная часьціна грэцкае мовы.

ковасьць) выяўляецца, галоўным чынам, у цьвёрдых целах; вось чаму цяпер у навуцы тэрмін „крышталічны“ ўжываецца, як тожсамасьць з тэрмінам „цьвёрды“ (у фізычным, ды не ў абыватальскім сэнсе слова).

Цяпер мы можам дакладна вызначыць *крышталь*, як *цьвёрдае гомогеннае анізотропнае цела, крышталічна аднароднае, якое выдзялілася з вадкасьці або газаў у выглядзе выпуклага многагранька пэўнай формы, незалежнай ад формы атачэньня* [1]).

Слова крышталь паходзіць ад грэцкага „крысталлос“ (crystallos). У Гомэра яно азначала лёд; Платон ужываў гэтае слова да мінэраля кварцу (горны крышталь). Альбэрт Магнус (1280 г.) крышталямі зваў мінэралі правільнай формы, і толькі ў наш час пад словам крышталь мы разумеем паняцьце больш складанае, аб чым гаварылася вышэй.

2. Прадмет крышталёграфіі.

Крышталёграфія ёсьць навука, якая дасьлядуе фізычныя ўласьцівасьці крышталічнае матэрыі, а таксама і нутраную будову яе. Крышталёграфія, як убачым ніжэй, мае свае ўласныя мэтоды дасьледваньня, а разам з тым ужывае і агульна-фізычныя мэтоды. Як ужо гаварылася ў прадмове, крышталёграфія мае самую сьціслую сувязь з мінэралёгіяй, з тэй прычыны, што амаль кожны мінэраль, вытварыўшыся ў прыродзе, уяўляе сабой крышталічную матэрыю. Слова крышталёграфія азначае, уласна кажучы, апісаньне крышталяў [2]), цяпер-жа крышталёграфія зрабілася навукай дакладнай, матэматычнай, і з гэтай прычыны яе правільней было-б называць крышталёлёгіяй, або крышталёгнозіяй [3]).

Крышталёграфію падзяляюць на дзьве часткі: 1) геомэтрычную і 2) фізычную. Геомэтрычная крышталёграфія ўстанаўляе законы анізотропіі (кірунковасьці) і знадворных формаў крышталяў, а таксама вывучае нутраную будову крышталічнае матэрыі. Фізычная крышталёграфія дасьледуе фізычныя ўласьцівасьці (апрача знадворнай формы), якія выяўляюцца ў анізотропным гомогенным атачэньні.

Кожная крышталічная матэрыя мае *сваю* характэрную *форму* таго ці іншага выпуклага многагранька. З гэтага факту мы бачым, што знадворная форма крышталю не *зьяўляецца* нечым *выпадковым.* Форма выражае сабою нутраныя ўласьцівасьці данае крышталічнае матэрыі.

Кожны выпуклы многагранік (як чыста геомэтрычны, так і крышталічны) мае наступныя аднародныя часткі, або *элемэнты многагранька:* 1) роўніцы агранічэньня—*грані,*

---

[1]) Пад тэрмінам „атачэньне“ мы будзем разумець тое, што абкружае, атачае цела, яго асяродзішча.

[2]) Графо—пішу, апісваю.

[3]) Лёгос—слова, веда; гнозія—веда.

(або сьценкі); 2) лініі перасячэньня граняй—*канты* многаграньніка; 3) пункты перасячэньня некалькіх граняй і кантаў—*вяршыні* многаграньніка і, нарэшце, 4) *куты* між гранямі і куты між кантамі многаграньніка[1]).

3. Закон сталасьці двугранных кутоў.

Яшчэ ў 1669 г. дацкі вучоны крышталёграф Мікола Стэнсэн (Стэнон 1631—1686) устанавіў адзін з асноўных законаў крышталёграфіі. Стэнон вывеў на грунце цэлага шэрагу нагляданьняў над крышталямі што грані могуць павялічвацца (калі крышталь расьце), або зьмяняцца як-небудзь іначай, але *велічыня двугранных кутоў крышталяў аднэй і тэй самай матэрыі застаецца сталай*, нязьменнай.

Такім чынам, крышталічныя многаграньнікі з рознымі па велічыні і форме роўніцамі аграгічэньня (гранямі, сьценкамі), але з аднолькавымі кутамі між імі,—па сутнасьці роўназначныя. Гэты *закон Стэнона* мае вялікае значэньне для высьненьня пытаньня аб прыродзе крышталічнае матэрыі, бо на аснове закону Стэнона мы ўстанаўляем тыя элемэнты крышталічнага многаграньніка, якія для яго ёсьць сталыя і характэрныя. Элемэнты гэтыя—*куты*.

Стэнон мог вывесьці свой закон таму, што, як гаварылася ў разьдзеле 2-м, крышталі аднолькавага хэмічнага складу маюць і пастаянныя, сталыя формы многаграньнікаў; іначай кажучы, пры больш-менш блізкіх умовах крышталізацыі, даная матэрыя пэўнага хэмічнага складу (напрыклад, соль NaCl; сярчанае жалеза— FeS_2; кальцыт—$CaCO_3$ і г. д.) выдзяляецца з рошчыну ў крышталях з аднымі і тымі-ж гранямі і, галоўнае, з аднолькавымі велічынямі двугранных кутоў. Стэнон першы ўказаў і на тое, як растуць крышталі: паслойна накладаюцца часьціны так, што грані растуць паралельна самім сабе. На падставе Стэнонавага закону можна дапоўніць даны крышталічны многаграньнік да нейкага больш правільнага ідэальнага геомэтрычнага многаграньніка, калі маюцца два, або некалькі аднолькавых кутоў між гранямі. У далейшым мы і будзем гаварыць не аб рэальных крышталічных многаграньніках, якія рэдка бываюць правільна разьвітыя, але аб такіх ідэальна-геомэтрычных формах. Звычайна, толькі некаторыя грані разьвіваюцца на крышталях правільна, г. ё., згодна нутраной будове і разьмяшчэньню атомаў; іншыя-ж грані або не дарастаюць або перарастаюць. На ідэальных геомэтрычных многаграньніках мы далей азнаёмімся з надта важнай зьявай крышталёграфіі, гэтак званай *сымэтрыяй*.

---

[1]) Па пытаньнях, якія належаць да геомэтрычнай крышталёграфіі, звычайна практыкуюцца не на праўдзівых („жывых“) крышталях, але на так званых модэлях крышталяў, зробленых з дрэва, шкла, або добрага картону. Модэлі галоўных крышталічных формаў патрэбна мець у кожным габінэце неорганічнай прыроды.

II. Пачаткі вучэньня аб сымэтрыі.

1. Асноўныя паняцьці і азначэньні.

У звычайным жыцьці пад словам сымэтрыя або суразьмернасьць разумеюць некаторую паўторнасьць прадметаў, разьмешчаных у пэўным парадку. (Кажуць аб сымэтрычна разьмешчаных вокнах, мэблі, малюнках на сьцяне і г. д.). Такім чынам, у звычайным разуменьні, сымэтрыя заключае ў сабе два ўяўленьні: 1) паўторнасьць аднолькавых прадметаў і 2) пэўнае разьмяшчэньне такіх прадметаў.

Дапусьцім, што некалькі аднолькавых прадметаў, напрыклад, некалькі куль, зробленых з аднаго матэрыялу, мы разьмясьцілі ў дзьве групы так, што адлегласьць паміж кожнымі дзьвюма кулямі аднэй групы будзе роўнай адлегласьці між адпаведнай парай другой групы. (Мы можам адзначыць кожную кулю аднэй групы якім-небудзь значком і такім-жа значком адзначым адну з куль другой групы; тады кожнай кулі першае групы будзе адпавядаць адна куля другой групы). Будзем мець тады дзьве сымэтрычныя групы куль (мал. 4). Замяніўшы кожную кулю абедзьвюх груп яе цэнтральным пунктам (нейкім матэрыяльным асяродкам кулі), захаваўшы між такімі пунктамі ўзаемна-адназначнае разьмяшчэньне, будзем мець дзьве *ўзаемна-сымэтрычныя сыстэмы* пунктаў, або дзьве сыстэмы пунктаў, сымэтрычныя адна аднэй.

Мал. 4

Ня цяжка ўявіць сабе, што левая сыстэма куль (мал. 4) ёсьць люстранае выяўленьне правай сыстэмы і наадварот. Падобная сымэтрыя і завецца *люстранай сымэтрыяй*. Такой люстранай сымэтрыяй валадаюць, напрыклад, правая рука адносна левай, кожны прадмет адносна свайго выяўленьня ў люстры і інш. Іначай яшчэ падобная сымэтрыя завецца сымэтрыяй *адсьвету,* адбіцьця. Калі мы адну сыстэму пунктаў можам *укласьці* ў другую, сымэтрычную ёй, так, каб сумясьціліся адна з аднэй узаемнаадназначныя часткі, то будзем зваць такую сымэтрыю—*сымэтрыяй сумяшчальнасьці.*

2. Элемэнты сымэтрыі.

Разглядаючы якую-небудзь сымэтрычную фігуру, або сыстэму пунктаў, мы можам заўважыць, што сымэтрычныя часткі паўтараюцца адносна некаторых геомэтрычных вобразаў, як роўніца, вось. Гэтыя геомэтрычныя вобразы называюцца *элемэнтамі сымэтрыі,* або элемэнтамі суразьмернасьці. Крышталёграфія адзначае наступныя элемэнты суразьмернасьці:

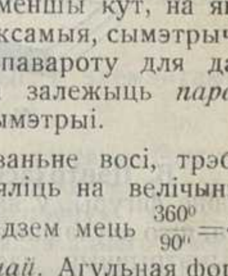
А. Восі сымэтрыі. Вось сымэтрыі ёсьць лінія, пры павароце вакол якой на некаторы кут, усе тожсамыя часткі данай сымэтрычнай фігуры сумяшчаюцца між сабой; іначай кажучы, пры павароце вакол восі сымэтрыі мы будзем бачыць падобныя часткі фігуры. Той найменшы кут, на які трэба павярнуць фігуру, каб спаткаць тожсамыя, сымэтрычныя часткі, завецца элемэнтарным кутом павароту для данай восі сымэтрыі. Ад элемэнтарнага кута залежыць *парадак* восі сымэтрыі, або *менаваньне восі* сымэтрыі.

Каб знайсьці парадак восі або менаваньне восі, трэба поўны паварот вакол восі, г. ё. 360^0 падзяліць на велічыню элемэнтарнага кута, напрыклад: на 90^0; будзем мець $\frac{360^0}{90^0}=4$; вось сымэтрыі носіць тады назву *чацьвёрнай.* Агульная формула вылічэньня парадку восі будзе мець такі выгляд: $n=\frac{2\pi}{a}=\frac{360^0}{a^0}$, дзе *n*—парадак восі; *a*—велічыня кута павароту; 2π— умоўнае абазначэньне поўнага кругавога павароту на 360^0.

Пры $a=120^0$, n будзе роўным тром $(n=\frac{360^0}{120^0}=3)$ і вось будзе называцца тройчай і г. д. Для азначэньня восі сымэтрыі мы будзем ужываць лацінскую літару L, а парадак восі будзем ставіць нібы паказальнік ступені:

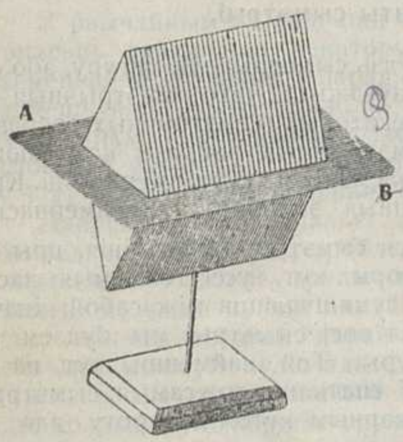
L^2—вось другога парадку;
L^3—вось трэцяга парадку;
L^4—вось чацьвертага парадку.
L^n—вось n-га (эннага) парадку і г. д.

На мал. 5-ым PQ вось сымэтрыі 12-га парадку; элемэнтарны кут павароту між бліжэйшымі тожсамымі пунктамі роўны тут $360^0:12=30^0$.



Мал. 5

Б. Роўніца сымэтрыі. Другім элемэнтам сымэтрыі ёсьць некаторая матэматычная роўніца, якую мы можам мысьленна правесьці між тожсамымі часткамі сымэтрычнай фігуры. Роўніцай сымэтрыі мы падзяляем фігуру на правую і левую палавіны, верх і ніз, пярэднюю і заднюю часткі і г. д. Для азначэньня роўніцы сымэтрыі служыць лацінская літара Р. Роўніца суразьмернасьці ёсьць нібы люстра, у якім адна сымэтрычная частка мае свой адбітак, адсьвет у вобразе другой сымэтрычнай часткі. У фізыцы даводзіцца, што адсьвет прадмету знаходзіцца па пэрпэндыкуляры да люстра, на роўнай адлегласьці па другі яго бок. Гэткім-жа чынам знаходзяцца сымэтрычныя часткі фігуры адносна роўніцы сымэтрыі:яны павінны знаходзіцца на лініях, пэрпэндыкулярных да роўніцы сымэтрыі, на аднолькавай адлегласьці ад яе. На малюнку (6) роўніца сымэтрыі азначана праз АВ.



Мал. 6

В. Цэнтр (асяродак) сымэтрыі. Гэта такі пункт у сярэдзіне фігуры, у якім падзяляюцца папалам усе простыя лініі, што злучаюць адназначныя, сымэтрычныя часткі фігуры. Прысутнасьць у якім-небудзь многаграньніку цэнтра сымэтрыі выяўляецца тым, што кожнай грані (сьценцы) адпавядае процілежная ёй паралельная грань, кожнаму канту—паралельны яму процілежны кант (мал. 7).

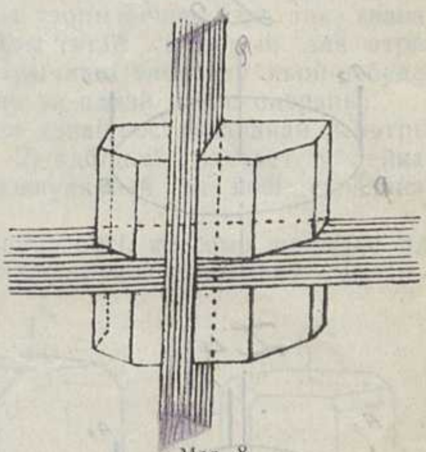
Цэнтр сымэтрыі азначаецца латынскай літарай С. Тыя сымэтрычныя многаграньнікі, якімі займаецца крышталёграфія (праўдзівыя крышталі, а таксама геомэтрычныя іх вобразы і модэлі) маюць, звычайна, не адзін які-небудзь элемэнт сымэтрыі—вось, роўніцу, цэнтр,—але некалькі элемэн-

Мал. 7

таў: некалькі восяй сымэтрыі розных парадкаў, некалькі роўніц; цэнтр сымэтрыі можа быць, вядома, толькі адзін.

Увага: Карысна папрактыкавацца ў знаходжаньні элемэнтаў суразьмернасьці на звычайных рэчах. Напрыклад: якія элемэнты суразьмернасьці і колькі мае звычайны стол (з шуфлядамі і бяз іх)? крэсла? скрынка? цела чалавека? шклянка? куля?

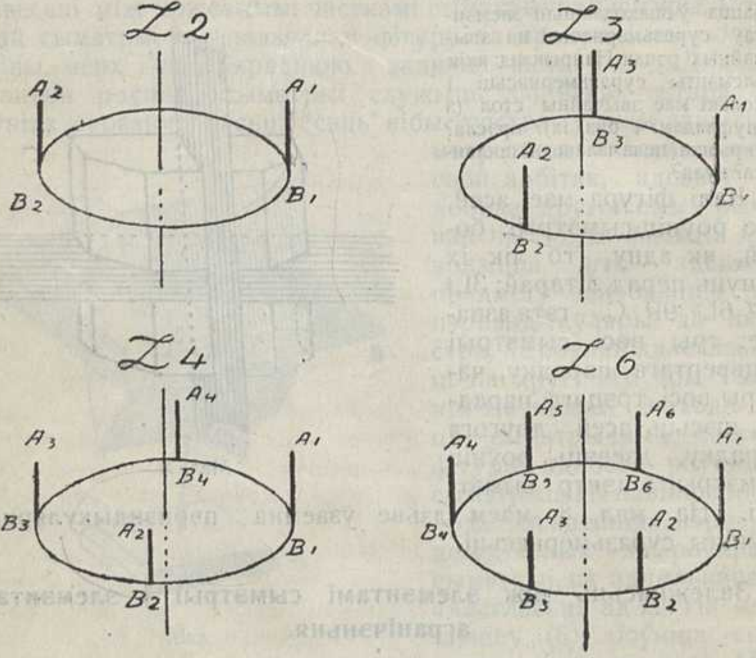
Калі фігура мае асей, або роўніц сымэтрыі болей, як адну, то лік іх пішуць перад літарай: $3L^4$ $4L^2$ $6L^3$ 9P C, — гэта азначае: тры восі сымэтрыі чацьвертага парадку, чатыры восі трэцяга парадку, шэсьць асей другога парадку, дзевяць роўніц сымэтрыі і цэнтр сымэтрыі. На мал. 8 маем дзьве ўзаемна пэрпэндыкулярныя роўніцы суразьмернасьці.



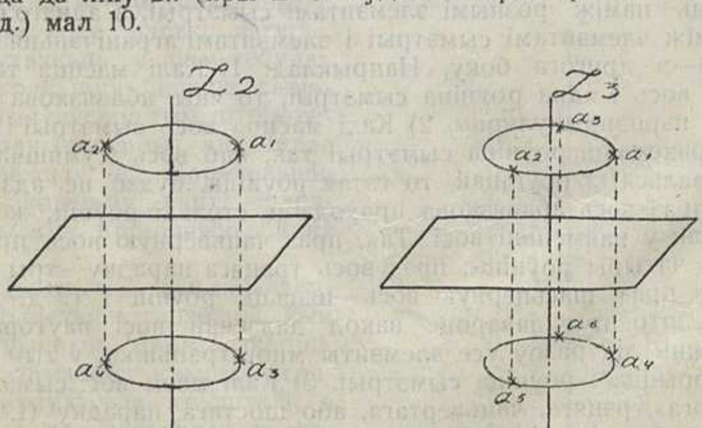
Мал. 8

3. Залежнасьць між элемэнтамі сымэтрыі і элемэнтамі агранічэньня.

Чыста матэматычным разважаньнем, а таксама нагляданьнем над сымэтрычнымі формамі (крышталічнымі многагараньнікамі, напрыклад) можна ўстанавіць пэўную залежнасьць паміж рознымі элемэнтамі сымэтрыі, з аднаго боку, і паміж элемэнтамі сымэтрыі і элемэнтамі агранічэньня (гранямі)—з другога боку. Напрыклад: 1) Калі маецца толькі адна вось і адна роўніца сымэтрыі, то яны абавязкова ўзаемна пэрпэндыкулярны. 2) Калі маецца вось сымэтрыі і праз яе праходзіць роўніца сымэтрыі так, каб вось сумяшчалася (зьлівалася) з роўніцай, то гэтая роўніца будзе не адзінай, але праз вось абавязкова праходзіць столькі роўніц, колькі адзінак у найменьні восі Так, праз чацьвёрную вось праходзіць чатыры роўніцы; праз вось трэцяга парадку—тры роўніцы; праз шасьцёрную вось—шэсьць роўніц і г. д. Гэта таму, што пры павароце вакол дадзенай восі паўтарацца належны лік разоў усе элемэнты многаграньніка, у тым ліку паўторыцца і роўніца сымэтрыі. 3) Калі маем восі сымэтрыі другога, трэцяга, чацьвертага, або шостага парадку (L^2, L^3, L^4, L^6) і адзін які-небудзь элемэнт многаграньніка (грань, кант, кут), які не ляжыць на данай восі, то такія элемэнты (грань, кант, кут) абавязкова паўторацца столькі разоў, каб агульны лік іх быў роўны парадку восі. Гэта можам уясьніць на малюнку 9. 4) Калі маем вось сымэтрыі n-га парадку (L^2, L^3, L^4, L^6, L^{12}, L^n) і роўніцу сымэтрыі, пэрпэндыкулярную гэтай восі, то кожны пункт нашае фігуры паўторыцца да ліку 2n (пры L^2 іх будзе чатыры, пры L^3—шэсьць і г. д.) мал 10.



Мал. 9



Мал. 10

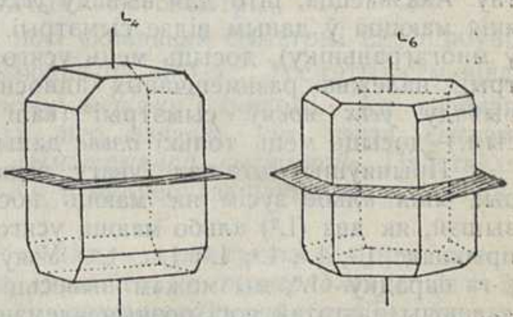
Гэтыя пытаньні прыдзецца закрануць і далей, пры апісаньні крышталічных многаграньнікаў.

4. Складаная сымэтрыя.

Ёсьць яшчэ адзін элемэнт сымэтрыі, які спатыкаецца на крышталях, і які магчымы тэорытычна. Гэта так званая *вось складанай сымэтрыі*. Пры гэтай сымэтрыі, для атрыманьня роўназначнага, сымэтрычнага элемэнту якой-небудзь фігуры, трэба прарабіць адну за аднэй дзьве опэрацыі:

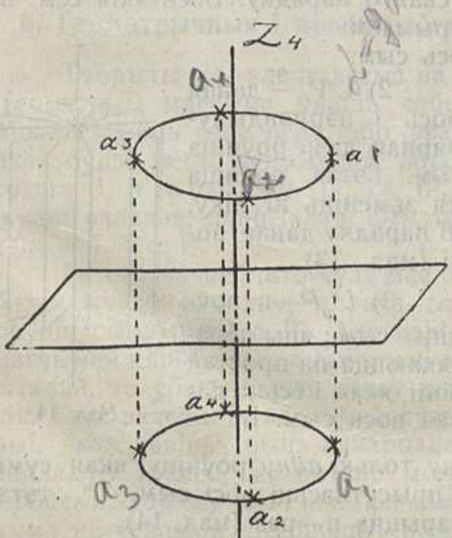
1) паварот фігуры вакол данай восі складанай сымэтрыі на той ці іншы кут і затым 2) адбіцьцё, адсьвет у нейкай роўніцы сымэтрыі, пэрпэндыкулярнай да восі складанай сымэтрыі.

Сам па сабе паварот вакол восі, як само па сабе адбіцьцё ў роўніцы, яшчэ не дадуць пры складанай сымэтрыі роўназначных, сымэтрычных частак. Значыць, пры восі складанай сымэтрыі мы заўсёды павінны ўяўляць сабе пэрпэндыкулярную да яе роўніцу сымэтрыі. На мал. 11 мы даем дзьве фігуры з васямі складанай сымэтрыі чацьвёрнай і шасьцёрнай. Верхнія часткі фігур будуць сымэтрычныя ніжнім толькі пры павароце на 90° або на 60° і затым пры адсьвеце ў роўніцы, якая заштрыхавана.



Мал. 11

Як бачым на мал. 12-ым, пры восі складанай сымэтрыі лік сымэтрычных пунктаў памяншаецца ў два разы, параўнальна з восьсю звычайнай сымэтрыі таго-ж найменьня. Так, мы маем пры восі складанай сымэтрыі найменьня чацьвёрнага (L^4) толькі чатыры сымэтрычныя пункты, замест васьмі (у прысутнасьці роўніцы). У вадзнаку ад звычайнай сы-



Мал. 12

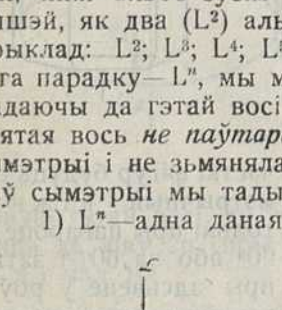
мэтрыі, вось складанай сымэтрыі прынята азначаць так, што знак найменьня ставяць унізе, а наверсе ставяць адпаведны лік па звычайнай сымэтрыі (удвая меншы). Будзем мець: L_2^1, L_4^2, L_6^3, L_{2n}^n—восі складанай сымэтрыі другога, чацьвертага, шостага парадку і парадку „два n“.

5. Сымэтрычныя сыстэмы.

Як мы ўжо гаварылі вышэй, на грунце пэўнай залежнасьці між элемэнтамі сымэтрыі (васямі, роўніцамі і цэнтрам) можна тэорытычна (матэматычна) вывесьці ўсе магчымыя віды сымэтрыі. *Відам сымэтрыі* і завецца поўная скупнасьць, злучэньне сымэтрыі, якія можна вывесьці з даных элемэнтаў. Аказваецца, што для вываду *ўсіх элемэнтаў* сымэтрыі, якія маюцца ў даным відзе сымэтрыі (у якой-небудзь форме ў многаграньніку), досыць мець усяго *тры* элемэнты сымэтрыі, належна разьмешчаных адносна адзін аднаго. А для вываду *ўсіх восяў* сымэтрыі (калі маюцца толькі восі сым.) досыць мець толькі *дзьве* даныя восі сымэтрыі.

Прыняўшы гэта пад увагу, выведзем усе віды сымэтрыі, якія альбо зусім ня маюць восяў сымэтрыі парадку вышэй, як два (L^2) альбо маюць усяго адну такую вось, напрыклад: L^2; L^3; L^4; L^5; L^6... L^n. Узяўшы заісходнае вось р-га парадку—L^n, мы можам вывесьці *сем* відаў сымэтрыі, дадаючы да гэтай восі розныя элемэнты сымэтрыі, так, каб узятая вось *не паўтаралася* ад дадаваньня новых элемэнтаў сымэтрыі і не зьмяняла-б свайго парадку. Вось якія сем відаў сымэтрыі мы тады атрымаем:

1) L^n—адна даная вось сым.



Мал. 13

2) L^nP — даная вось і пэрпэндыкулярная да яе роўніца сым. Гэтая роўніца ня зьменіць ні ліку, ні парадку данае восі (мал. 13).

3) L^n_nP—n роўніцы сым.; яны перасякаюцца па простай лініі, якая і ёсьць даная вось сым. L^n.

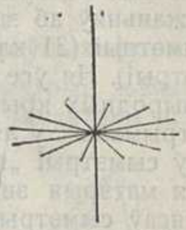
Мал. 14

Тут мы бярэм спачатку толькі *адну* роўніцу, якая сумяшчаецца з восьсю; але ў прысутнасьці восі сым. L^n, гэтая адна роўніца павінна паўтарыцца n—раз (мал. 14).

4) $L^n_n L_2$ даная вось+n падвойных васей сымэтрыі, якія ўсе перасякаюцца ў адным пункце і ўсе пэрпэндыкулярны да восі L^n (мал. 15).

Тут таксама спачатку дадаем да восі L^n толькі адну пэрпэндыкулярную ёй вось другога парадку—L^2. Гэтая вось ня зьменіць ні ліку, ні парадку нашае ісходняе восі L^n. Але сама даданая вось L^2, ад прысутнасьці восі L^n пэрпэндыкулярнай ёй, павінна паўтарыцца n разоў.

5) $L^n\,{}_nL^2\,(n+1)\,P$—n роўніц сымэтрыі, якія перасякаюцца ў данай восі L^n; адна роўніца, пэрпэндыкулярная да восі L^n; n двойчых восяй сымэтрыі.



Мал. 15.

6) L^n_{2n} адна вось складанай сымэтрыі.

7) $L^n_{2n}\,L^2_n P$—n двойчых восяй сымэтрыі, пэрпэндыкулярных да восі складанай сымэтрыі L^n_{2n}; n роўніц сымэтрыі, якія перасякаюцца па восі L^n_{2n}. Усе гэтыя сем відаў сымэтрыі ўтвараюць *адну сыстэму* сымэтрыі. Ад грэцкага слова „гонос“ (gonos), што азначае кут, гэтая сыстэма завецца n-*гональнай сымэтрычнай сыстэмай*. Падстаўляючы пад альгебраічны лік n які-небудзь пэўны лік—1, 2, 3, 4... мы будзем мець:

моногональную[1] *сымэтрычную сыстэму* (пры $n=1$); *дыгональную* сым. с. (пры $n=2$); *трыгональную* ($n=3$); *тэтрагональную* ($n=4$); *пэнтагональную* ($n=5$); *гэксагональную* ($n=6$) і г. д.

6. Геомэтрычныя і крышталёграфічныя віды сымэтрыі.

Тэорытычна, але таксама на аснове законаў матэматыкі (геомэтрыі) магчыма ўявіць сабе безьліч відаў сымэтрыі. Можна ўявіць сабе цела, або зрабіць сымэтрычную фігуру, якая будзе мець, напрыклад, восі сымэтрыі ад першага да сотага і n-га парадку (L^1, L^2, L^3... L^{100}... L^n). Кулістае цела (куля) валадае, напрыклад, сымэтрыяй, якую можна выразіць так: $\infty L^{\infty}\,\infty P$.

Гэта азначае, што куля мае безьліч (∞) восяй сымэтрыі бязьмежнага парадку; апрача таго, куля мае яшчэ безьліч роўніц сымэтрыі (∞ P). Але калі ад сымэтрыі геомэтрычна магчымай пяройдзем да сымэтрыі крышталічнае матэрыі, крышталяй, то ўбачым, што відаў сымэтрыі вельмі абмежаваны лік. Гэта залежыць ад самай сутнасьці крышталічнай матэрыі, якая павінна быць аднароднай (гомогеннай). Як убачым дакладней далей, крышталі могуць мець толькі *двойчыя, тройчыя, чацьвёрныя і шасьцёрныя восі* сымэтрыі. Затым, магчыма не ўсялякія комбінацыі паміж сабой пералічаных во-

---

[1] Моно (monos) адзін; ды (di)—два; тры (tri); тэтра—чатыры і г. д.; гонос—(gonos)—калена, кут.

сяй сымэтрыі, але толькі такія комбінацыі, якія ня цягнуць за сабой іншых восяй сымэтрыі, не магчымых у крышталях. Такім чынам, на аснове гомогеннасьці (аднароднасьці) крышталічнае матэрыі, а таксама на аснове матэматычных разважаньняў аб законах сымэтрыі, выведзена ўсяго 32 клясы сымэтрыі (31 кляса з рознай сымэтрыяй і 1 кляса бяз сымэтрыі). Ня ўсе 32 клясы маюць сваіх прадстаўнікоў сярод прыродных крышталяў (мінэраляў) або штучных крышталяў (атрыманых у лябораторыі пры крышталізацыі). Але лік клясаў сымэтрыі „пустых“ паступова зьмяншаецца, і кожная новая матэрыя знаходзіць сабе месца толькі сярод гэных 32 клясаў сымэтрыі.

7. Сыстэмы і сынгоніі.

Усе 32 віды або клясы сымэтрыі, магчымыя для крышталічных многаграньнікаў, падзяляюцца на 6 груп, якія завуцца сынгоніямі[1]). Гэтыя сынгоніі наступныя:

1. Гэксаэдрычная, або кубічная сынгонія (ад гэксаэдр—куб). Агульнай характарыстыкай гэксаэдрычнай сынгоніі з боку элемэнтаў сымэтрыі ёсьць $4L^3$ (чатыры восі сым. трэцяга парадку). Яна заключае ў сабе 5 відаў, або клясаў сымэтрыі.

2. Гэксагональная сынгонія характарызуецца прысутнасьцю аднае восі шостага парадку—L^6. Гэксагональная сынгонія складаецца з 12 клясаў, або відаў сымэтрыі.

3. Тэтрагональная сынгонія характарызуецца аднэй восьсю сым. чацьвертага парадку—L^4. Сюды належыць 7 відаў сым.

4. Ромбічная сынгонія характарызуецца прысутнасьцю васей сым. ня вышэй другога парадку, якіх можа быць тры ($3L^2$).

5. Монаклінная[2]) сынгонія характарызуецца прысутнасьцю аднэй восі сым. другога парадку і аднэй роўніцы (L^2P). Сюды належаць тры віды сым.

6. Трыклінная сынгонія. Найболей бедная элемэнтамі сымэтрыі: можа быць прысутным толькі адзін цэнтр сым. (C).

Успамінаючы тое, што гаварылася пра сымэтрычныя сыстэмы, мы бачым, што *сыстэмы* аб‘ядноўваюць *тэорытычна* (матэматычна) магчымыя віды сымэтрыі; *сынгоніі-ж* ёсьць групы *крышталічных* відаў сымэтрыі. Некаторыя сымэтрычныя сыстэмы цалкам уваходзяць у вадпаведныя крышталёграфічныя сынгоніі, напрыклад: гэксагональная сынгонія складаецца з 5 відаў гэксагональнай сыстэмы ды яшчэ 7 відаў трыгональной сыстэмы; да тэтрагональнай сынгоніі належыць 5 відаў тэтрагональнай сыстэмы ды яшчэ 2 віды

---

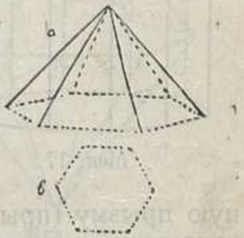
[1]) Ад грэцкага syngonos (сынгонос)—родны, блізкі.

[2]) Тлумачэньні назваў сынгоній знойдзем далей.

з дыгональнай сыстэмы. З другога боку, пэнтагональная сыстэма зусім не ўваходзіць у сынгоніі, як не ўваходзяць у сынгонію ўсе сыстэмы сымэтрыі парадку вышэй за шостыя. Мы ўжо гаварылі, што такая сымэтрыя немагчыма для крышталяў.

8. Асноўныя формы і комбінацыі асноўных форм.

Калі нам дана некалькі элемэнтаў сымэтрыі, зьвязаных між сабой, іначай кажучы, калі мы маем некаторы пэўны від сымэтрыі, то мы заўсёды можам, узяўшы нейкую роўніцу ў прасторы пэўнага палажэньня адносна даных элемэнтаў сымэтрыі, атрымаць прасторавую фігуру, сьценкі (грані) якой будуць зьвязаны між сабой элемэнтамі сымэтрыі. Напрыклад, маем L^6 і касую адносна гэтай восі роўніцу; паварочваючы даную роўніцу адносна восі шостага парадку (L^6) мы атрымаем яшчэ новых пяць падобных роўніц, а разам з данай роўніцай будзем мець шэсьць роўніц (граняй), зьвязаных між сабой даным элемэнтам сымэтрыі—восьсю шостага парадку L^6 (мал. 16).



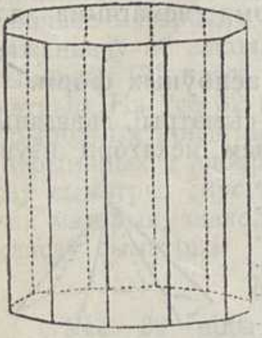
Мал. 16.

Такая геомэтрычная прасторавая фігура, грані якой зьвязаны адна з аднэй данымі элемэнтамі сымэтрыі, *завецца асноўнай формай.*

На ўзятым намі прыкладзе (L^6 і косая роўніца) мы маем асноўную форму, якая завецца наогул *пірамідай;* у даным выпадку (пры L^6) гэта будзе гэксагональная (шасьцікутная) піраміда. Асноўныя формы могуць або замыкаць, закрываць прастору з усіх бакоў, тады яны завуцца *замкнутымі;* або не замыкаць, не закрываць прасторы,—тады яны завуцца *незамкнутымі* формамі. Атрыманая намі асноўная форма—гэксагональная піраміда—адкрыта з аднаго боку, і таму ёсьць незамкнутая форма. Разгледзім цяпер некаторыя асноўныя формы, якія можна вывесьці для розных відаў (клясаў) сымэтрыі.

Возьмем від сымэтрыі, які выражаецца L^n—аднэй восьсю сымэтрыі n-га парадку (мы разглядалі яго вышэй па n-гональнай сымэтрычнай сыстэме); з аднае касой адносна L^n роўніцы мы выведзем яшчэ (n—1) роўніц, а разам будзем мець n роўніц, якія перасякуцца ў адным пункце на восі сымэтрыі L^n. Будзем мець тады незамкнутую асноўную форму з n роўніцамі з адным многагранным кутом і аднэй восьсю сымэтрыі, што праходзіць праз вяршыню многаграннага кута. Атрымаем так званую *n-гональную піраміду.* Апрача n-гональнай піраміды, мы можам мець для віду сымэтрыі L^n яшчэ дзьве асноўныя формы:

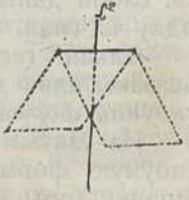
1) n-гональную прызму, калі возьмем роўніцу паралельна L^n ($\| L^n$) (мал. 17);



Мал. 17.

2) гэміпінакоід 1)), калі нашая роўніца будзе пэрпэндыкулярная да восі L^n ($\perp L^n$). Гэта асноўная форма, якая складаецца толькі з *аднэй грані*—гэміпінакоіда. І праўда, колькі-б разоў ні паварочваць роўніцу вакол пэрпэндыкулярнае восі, яна ня дасьць новых граняй.

Калі замест L^n будзем браць па парадку L^1, L^2, L^3, L^4, L^5, L^6 і г. д., то ясна, што і асноўныя формы будуць належна мяняць сваё найменьне. Будзем мець, напрыклад, трыгональную піраміду, і трыгональную прызму (пры L^3); тэтрагональную піраміду і тэтрагональную прызму (пры L^4) і г. д. Пры L^2 замест піраміды будзем мець так званую гэміпрызму (напоўпрызму) (мал. 18). L^1 азначае, сьцісла кажучы, адсутнасьць усялякае сымэтрыі, бо любая несымэтрычная форма пры павароце вакол сябе на 360^0 паўторыць сама сябе. Значыць, калі маем L^1 і касую роўніцу, то атрымаем адзіную асноўную форму—гэміпінакоід (адну грань). Запытаем сябе: ці магчымы ўсе пералічаныя асноўныя формы на крышталічных многаграньніках? Як мы ўжо гаварылі вышэй, сярод крышталяў ня могуць сустракацца фігуры n-га парадку сымэтрыі, калі n будзе болей за шэсьць ($n > 6$). Значыць, ня можа сустракацца сярод крышталяў, напрыклад, октогональная (васьмікутная) піраміда, сямікутная, дзевяцікутная і г. д.—прызма; ня можа быць (гл. раней) і пэнтагональнай піраміды і прызмы. Апрача таго, ня можа быць крышталічнага многаграньніка з незамкнутымі формамі; значыць, ня можа быць сярод крышталяў такіх асноўных форм, як разгледжаная вышэй піраміда і прызма. Гэтыя асноўныя формы могуць сустракацца на крышталях толькі сумесна, у комбінацыі з іншымі асноўнымі формамі, якія разам з першымі і замыкаюць прастору.



Мал. 18.

Такія сымэтрычныя фігуры і крышталічныя многаграньнікі, якія складаюцца з дзьвёх, трох і болей асноўных форм, завуцца *комбінацыямі асноўных форм.* Так, напрыклад, гэксагональная (або тэтрагональная, трыгональная) піраміда

---

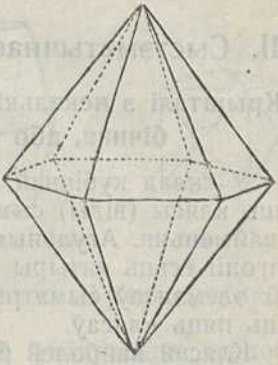
1) Ад гэмі—палавіна і пінакоід—дошчачка.

комбінуецца з гэміпінакоідамі (мал. $16^{б}$). Разгледзім яшчэ асноўныя формы для віду сымэтрыі L^nP (вось n-га парадку і $\perp$ да яе роўніца сымэтрыі). Мы будзем мець тут:

1) n-гональную *дыпіраміду,* калі грань бярэцца коса адносна восі L^n; дыпіраміда—фігура з дзьвюма пірамідамі, павернутымі вяршынямі ў розныя бакі; гэта замкнутая фігура.

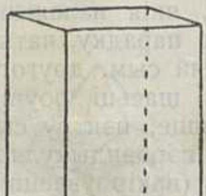
На малюнку 19-м мы маем у паасобку *гэксагональную дыпіраміду,* якая магчыма і на крышталях.

2) Пінакоід (так завецца асноўная форма, якая складаецца з *дзьвёх* сымэтрычных граняй). Пінакоід атрымаецца тады, калі грань бярэцца пэрпэндыкулярна да восі L^n, а значыць, паралельна да роўніцы P.



Мал. 19.

3) n-гональная *прызма;* грань бярэцца паралельна L^n. Як бачым, гэтая асноўная форма будзе тая самая, што і пры сымэтрыі віду L^n.



Мал. 20.

Прызма, як фігура незамкнутая, комбінуецца звычайна з пінакоідам, які закрывае прызму з двох бакоў. На мал. 20-м мы маем комбінацыю дзьвёх асноўных форм—тэтрагональную прызму і пінакоід. Разглядаючы далей усе магчымыя сем відаў сымэтрыі n-гональнай сымэтрычнай сыстэмы (гл. раней) мы можам вывесьці для кожнага віду ўсе асноўныя сымэтрычныя формы, узяўшы адну грань у розных палажэньнях адносна элемэнтаў сымэтрыі: грань касая адносна восі дае n-гональную піраміду або дыпіраміду; грань паралельная восі дае n-гональную прызму; грань пэрпэндыкулярная восі дае гэміпінакоід або пінакоід і г. д.

Таксама мы можам разгледзець усе магчымыя асноўныя формы кожнае тэорытычна магчымае сымэтрычнае сыстэмы — моногольнае, дыгональнае, трыгональнае, тэтрагональнае, пэнтагональнае, гэксагональнае і г. д. Тут будзем мець або пінакоіды, або гэміпінакоіды; рознага найменьня піраміды (трыгональная, гэксагональная); рознага найменьня прызмы (трыгональная, тэтрагональная) і г. д. Ясна, што далёка ня ўсе з сымэтрычных асноўных форм і комбінацый могуць сустракацца на крышталях; таксама і ня ўсе тэорытычныя сымэтрычныя сыстэмы магчымы ў якасьці крышталічных сынгоній. Цяпер мы каротка спынімся на аглядзе сынгоній і больш вядомых многаграньнікаў кожнае сынгоніі.

III. Сыстэматычнае апісаньне сынгоній і форм.

1. Крышталі з некалькімі галоўнымі восямі сымэтрыі—кубічная, або гэксаэдрычная сынгонія.

У склад кубічнай, або гэксаэдрычнай сынгоніі ўваходзяць клясы (віды) сымэтрыі з некалькімі восямі вышэйшага найменьня. Агульным *характэрным* элемэнтам для ўсяе сынгоніі ёсьць чатыры тройчыя восі—$4L^3$, незалежна ад іншых элемэнтаў сымэтрыі. Усяго да кубічнае сынгоніі належыць пяць клясаў.

Клясай найболей багатай на элемэнты сымэтрыі ва ўсёй сынгоніі, ды і наогул ва ўсіх крышталічных сынгоніях ёсьць кляса так званага *саракавасьміграньніка*. Элемэнты сымэтрыі гэтае клясы выражаюцца наступнай формулай:

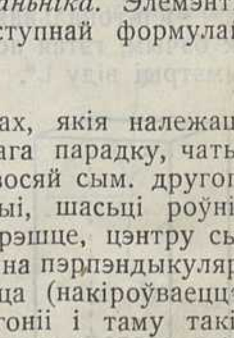
$$3L^4 \; 4L^3 \; 6L^2 \; 3P \; 6P^2C,$$

што азначае прысутнасьць ва ўсіх формах, якія належаць да гэтае клясы: трох восяй сым. чацьвертага парадку, чатырох восяй сым. трэцяга парадку, шасьці восяй сым. другога парадку, трох галоўных роўніц сымэтрыі, шасьці роўніц сымэтрыі, не галоўных (усяго 9P) і, нарэшце, цэнтру сымэтрыі. Восі чацьвертага парадку ўзаемна пэрпэндыкулярныя і роўныя між сабой. Па іх орыентуецца (накіроўваецца) крышталічны многаграньнік кубічнае сынгоніі і таму такія восі завуцца яшчэ *крышталёграфічнымі восямі*. Адна з іх, якая стаіць старча (вэртыкальна) завецца „вось Z“, другая, што ідзе ад наглядальніка, завецца „вось X“ і трэцяя,—паралельная наглядальніку,—„вось У“. Гэта тое самае, прыблізна, што ў геомэтрыі ёсьць *коордынатныя* восі—вось X, вось У і вось Z. Сымэтрычныя асноўныя многаграньнікі (фігуры), якія належаць да клясы саракавасьміграньніка наступныя:

1. Куб—шасьцісьцен—гэксаэдр; правільны многаграньнік, грані якога пэрпэндыкулярны да L^4; кожная грань гэксаэдра—квадрат (мал. 21).

2. Октаэдр—васьмісьцен; грань пэрпэндыкулярна да L^3 (мал. 22). Кожная грань—роўнабочны трыкутнік.

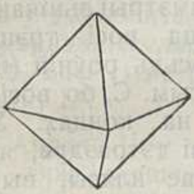
3. Ромбічны додэкаэдр—дванаццацісьцен, кожная грань якога ёсьць ромб. Грані пэрпэндыкулярны да L^2

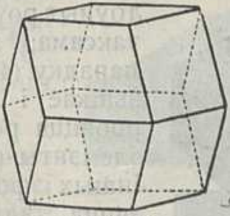


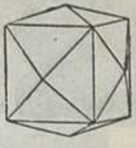
Мал. 21.

(мал. 26). Ромбічны додэкаэдр часам завецца яшчэ гранатоэдрам (па мінэралю гранату).

4. *Пірамідальны куб* (пір. гэксаэдр); кожная грань куба замяняецца чатырохграннай пірамідай, але так,


Мал. 22.

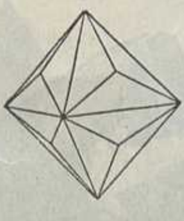

Мал. 26.

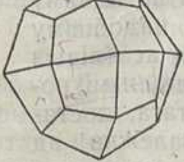

Мал. 23.

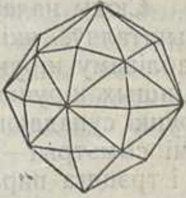
каб канты на кубе засталіся нязьменнымі. Грані—роўнаплечыя трыкутнікі (мал. 23).

5. *Пірамідальны октаэдр*; утвараецца падобна пір. кубу, толькі на грані октаэдра—трохгранная пірамідa (мал. 24).

6. *Трапэцоэдр—трыоктаэдр*; асноўная форма, якая мае ў тры разы болей граняй, як октаэдр, г. ё. 24 грані. Форма завецца, часам, лейцытоэдрам (па мінэралю лейцыту) (мал. 25).


Мал. 24.


Мал. 25.


Мал. 27.

7. *Саракавасьміграньнік—дытрыоктаэдр*; форма з 48 гранямі; кожная грань—сукосны трыкутнік (мал. 27). Як ставіць пералічаныя асноўныя формы адносна крышталёграфічных восяй і восяй сымэтрыі, паказана на наступных малюнках: мал. 28 дае куб і октаэдр на восі сымэтрыі трэцяга парадку (L^3), мал. 29 куб, октаэдр і ромбічны додэкаэдр на восі сымэтрыі L^2.

З іншых форм кубічнае сынгоніі прывядзем, як агульнавядомую, *тэтраэдр*—правільны чатырохграньнік, які належыць ужо да клясы з меншым лікам граняй і элемэнтаў сымэтрыі (мал. 33). Няпоўнагранную форму тэтраэдра можна вывесьці з поўнаграннае формы октаэдра праз зьніканьне цэлых граняй октаэдра (так званых октантаў—васьмушак); тады, заместа васьмі граняй октаэдра, і будзем мець чатыры грані тэтраэдра, з належнымі зьменамі элемэнтаў сымэтрыі, а ласьне: восі чацьвертага парадку (у октаэдра $3L^4$) робяцца восямі другога парадку (у тэтраэдра $3L^2$); восі другога парадку (у октаэдра $6L^2$)—зьнікаюць зусім; галоўныя роўніцы сымэтрыі зьнікаюць таксама; застаюцца восі трэцяга парадку ($4L^3$) і шэсьць роўніц ($6P$); зьнікае і цэнтр сым. C, бо восі L^3 робяцца рознымі на канцах. Усе элемэнты сымэтрыі тэтраэдра, як і іншых форм гэтае клясы, выразяцца тады праз: $4L^3$ $3L^2$ $6P$.


Мал. 28.

Прыкладам комбінацый асноўных форм кубічнай сынгоніі, можа быць так званы *кубо-октаэдр:* трохгранныя куты куба (ад якіх выходзяць восі L^3) прытупляюцца тут гранямі октаэдра (мал. 34).

Прыкладамі мінэраляў, якія крышталізуюцца па кубічнай сынгоніі, могуць быць: медзь самародная, серабро, волава, золата, гранаты (ромбічны додэкаэдр), каменная соль і інш.

2. Крышталі з аднэй галоўнай восьсю сымэтрыі.

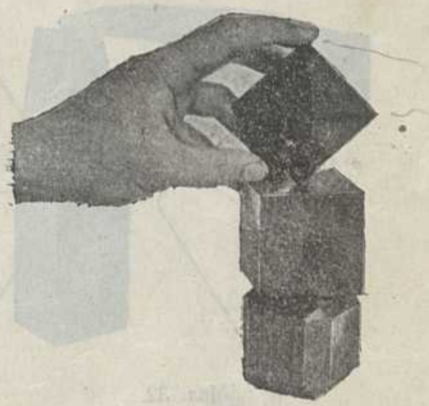
Сюды належаць формы і віды крышталяў, якія маюць па аднаму асабліваму кірунку, не падобнаму да іншых кірункаў. Гэтыя асаблівыя кірункі супадаюць з галоўнымі восямі сымэтрыі—чацьвертага, шостага і трэцяга парадку. Залежна ад парадку галоўнае восі, мы маем тры розныя сынгоніі: *тэтрагональную* сынгонію—з галоўнай восьсю L^4; *гэксагональную*—з восьсю L^6 *і трыгональную*—з восьсю L^3. Часам трыгональную і гэксагональную сынгоніі злучаюць у вадну—гэксагональную сынгонію, і тады трыгональную лічаць падсынгоніяй (гіпосынгоніяй) гэксагональнай сынгоніі. Разгледзім кожную з іх.

1. Тэтрагональная (квадратовая) сынгонія. Яна характарызуецца трымаўзаемна пэрпэндыкулярнымі крышталёграфічнымі восямі (па якіх орыэнтуецца многаграньнік і кожная з яго граняй). Адна з гэтых трох крышталёгра-


Мал. 29.

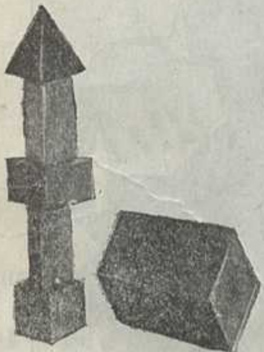
фічных восяй—вэртыкальная вось Z—можа быць даўжэйшай ці карацейшай за іншыя дзьве (X і У), і ёсьць разам з тым галоўная вось сымэтрыі L^4. Дзьве іншыя крышталёграфічныя восі, роўныя між сабой, ляжаць у горызонтальнай роўніцы, пэрпэндыкулярнай да L^4, і ёсьць восі сымэтрыі другога парадку L^2.

Апрача іх у тэй-жа роўніцы ляжаць яшчэ дзьве восі сымэтрыі другога парадку. Усе элемэнты сымэтрыі поўнаграннае клясы тэтрагональнай сынгоніі выражаюцца: L^4 $4L^2$ 5PC, што азначае: адна галоўная вось чацьвертага парадку, чатыры восі другога парадку (лік L^2 роўны найменьню галоўнае восі—L^4), адна галоўная роўніца сымэтрыі ($P \perp L^4$), чатыры іншыя роўніцы сымэтрыі (яны перасякаюцца між сабой па восі L^4),—усяго 5P, і цэнтр сымэтрыі.

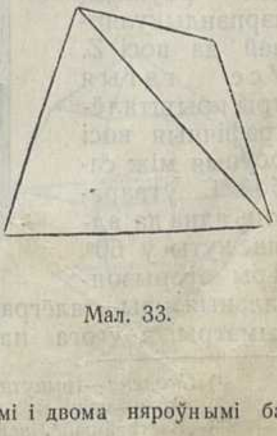


Мал. 30.

Асноўнай формай тэтрагональнае сынгоніі ёсьць *тэтрагональная дыпіраміда* (мал. 35), грані якой нахілены да L^4. Калі грані паралельны восі L^4, то будзем мець *тэтрагональную прызму* (гл. мал. 32); прызма ёсьць форма незамкнутая і комбінуецца звычайна з другой формай—*пінакоідам*—грані якой пэрпэндыкулярны да восі L^4. З іншых, ужо няпоўнагранных форм тэтрагональнае сынгоніі, можна адзначыць: *тэтрагональную піраміду* з элемэнтамі сымэтрыі—L^4 4P (мал. 36); *тэтрагональны трапэцоэдр* 1) L^4 $4L^2$ (мал. 37); *тэ-*



Мал. 31.

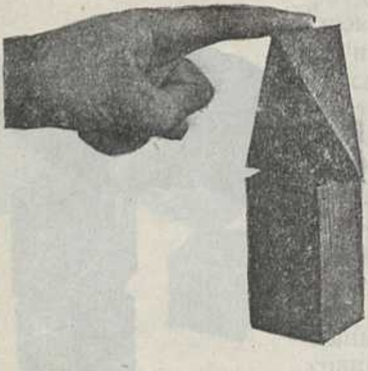


Мал. 33.

---

1) *Трапэца*—чатырохкутнік з двома роўнымі і двома няроўнымі бакамі.

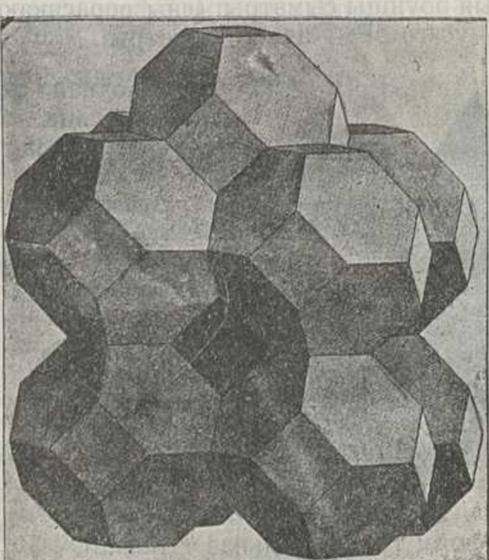
трагональны скаленоэдр 1) L^2 $2L^2$ $2P$ (мал. 38); *тэтрагональны сфэноэдр* (мал. 32).



Мал. 32.

З больш распаўсюджаных комбінацый можна адзначыць: прызма-дыпіраміда (мал. 39); дзьве дыпіраміды—„вастрэйшая“ і „тупейшая“ 3) (мал. 40) і г. д. Па квадратовай сынгоніі крышталізуюцца мінэралі цыркоң, цынавы камень (SnO^2), вульфэніт і іншыя, а таксама такія хэмічныя штучныя злучэньні, як каломель, цыаністая ртуць, вінна-квасны барыум і багата іншых.

2. Гэксагональная сынгонія. Сюды належаць 7 кляcаў, або відаў сымэтрыі. Характарызуецца гэксагональная сынгонія прысутнасьцю шасьцёрнай восі сымэтрыі L^6, якая ёсьць разам з тым крышталёграфічная вось Z (вэртыкальная). Апрача восі Z, мы маем тут яшчэ тры крышталёграфічныя восі, якія ляжаць у вадной роўніцы, пэрпэндыкулярнай да восі Z. Усе гэтыя тры крышталёграфічныя восі роўныя між сабой і ўтвараюць адна да аднае куты ў 60^0. Тры горызонтальныя крышталёграфічныя восі ёсьць разам з тым восі сымэтрыі другога парадку—L^2; апрача іх, у тэй-жа горы-



Мал. 34.

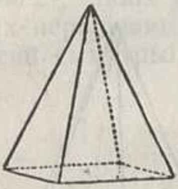
---

1) *Скалена*—трыкутнік з няроўнымі бакамі.

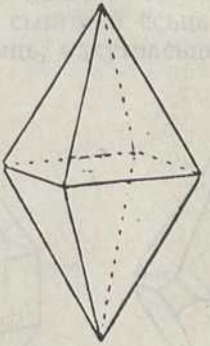
2) *Сфэн*—клін.

3) „Вастрэйшай“ завецца такая піраміда, грані якой адсякаюць галоўную вось сымэтрыі L^4 (вось Z) больш высока.

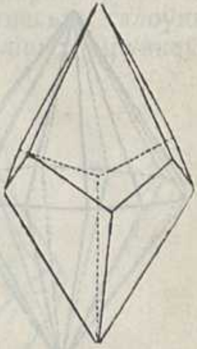
зонтальнай (экваторыяльнай адносна многаграньніка) роўніцы, ляжаць яшчэ тры восі сымэтрыі L^2, усяго $6L^2$.



Мал. 36.

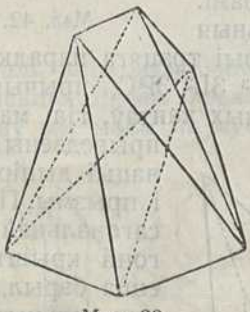


Мал. 35.

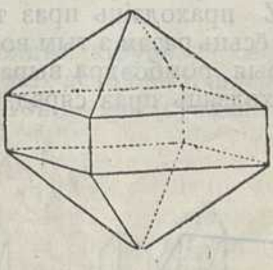


Мал. 37.

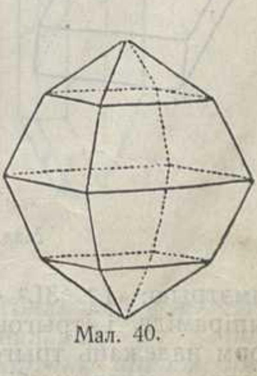
Поўнагранныя формы гэксагональнай сынгоніі маюць наступную формулу сымэтрыі: $L^6\ 6L^2\ 7PC$.



Мал. 38.



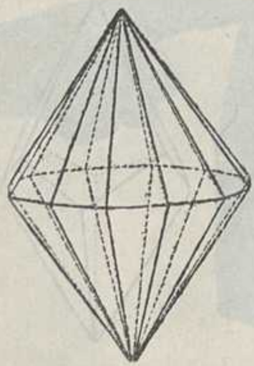
Мал. 39.



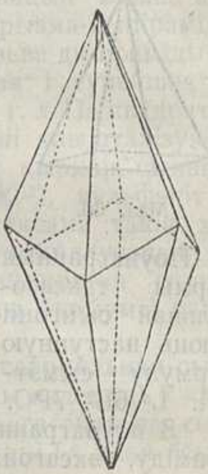
Мал. 40.

З поўнагранных форм мы маем тут гэксагональную дыпіраміду, гэксагональную прызму (з пінакоідам), дыгэксагональную дыпіраміду (яна мае па 12 граняй верхніх і ніжніх, вось сымэтрыі застаецца L^6, бо хаця грані роўныя між сабой, але куты між гранямі роўныя праз адзін) (гл. мал. 41). Ёсьць яшчэ і дыгэксагональная прызма з 12 гранямі. Як дыгэксагональная піраміда, так і дыгэксагональная прызма даюць у сячэньні так званы *дыгэксагон*—падвойны шасьцікутнік. Гэтак завецца геомэтрычная фігура з роўнымі 12-цю бакамі, але з кутамі роўнымі толькі *праз адзін*. Да рэчы сказаць, падобныя-ж формы мы маем і па тэтрагональнай сынгоніі—дытэтрагональную піраміду і дытэтрагональную прызму.

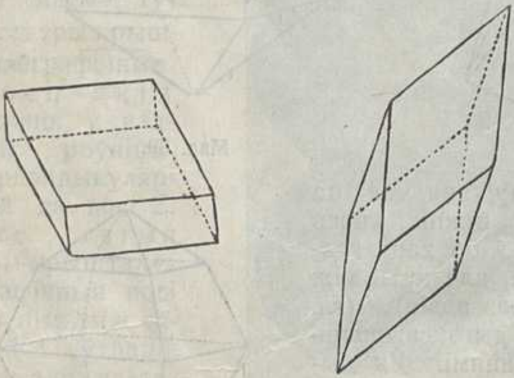
З няпоўнагранных форм (формы з меншай сымэтрыяй) можна прывесьці формы адпаведныя тэтрагональным: гэксагональную піраміду, гэксагональны трапэцоэдр і скаленоэдр (мал. 42), а таксама новую форму—*ромбоэдр* (мал. 43). Ромбоэдр складаецца шасьцю парна-паралельнымі ромбамі. Вось Z праходзіць праз трыгональныя куты і ёсьць разам з тым вось сымэтрыі трэцяга парадку—L^3. Сымэтрыя ромбоэдра выражаецца L^3 $3L^2$ $3PC$, прычым восі L^2 праходзяць праз сярэдзіны ламаных кантаў. На мал. 44 прыведзены комбінацыі дыпіраміды і прызмы. Па гэксагональнай сынгоніі крышталізуецца бэрыл, апатыт, кальцыт (ромбоэдр) і інш. мінэралі і штучныя злучэньні.



Мал. 41.



Мал. 42.

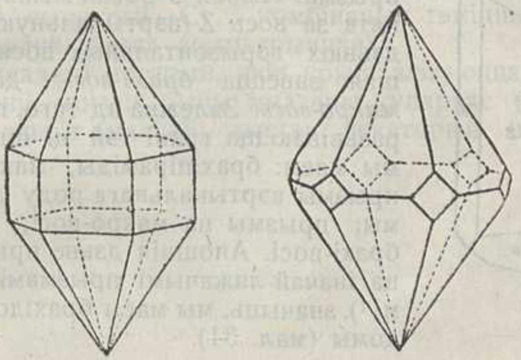


Мал. 43.

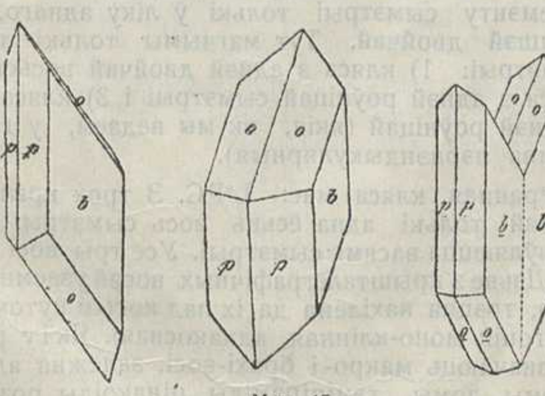
3. Трыгональная гіпосынгонія. Зьмяшчае 5 клясаў і можа лічыцца самастойнай сынгоніяй. Поўнагранная кляса мае сымэтрыю: L^3 $3L^2$ 4 PC. Сюды належаць трыгональная дыпіраміда і трыгональная прызма. Да няпоўнагранных форм належаць трыгональная піраміда, трыгональны трапэцоэдр і шэраг комбінацыйных форм. Важнейшым прадстаўніком гэтае сынгоніі ёсьць мінэраль *кварц* (горны крышталь—„хрусталь“) і *цынобра* („кіновар“).

3. Сынгоніі без галоўных восяй.

Да трох апошніх сынгоній—*ромбічнай, моноклінная* і *трыклінная*—належаць крышталі з восямі сымэтрыі ня вышэй L^2; такіх усяго 8 клясаў. Агульнай характарыстыкай усіх пералічаных трох сынгоній ёсьць адсутнасьць галоўных восяй сымэтрыі, значыць, адсутнасьць асаблівых кірункаў у крышталі, якія вызначаліся-б ад іншых кірункаў сваёй ізотропнасьцю. Як мы бачылі раней, такіх асаблівых, ізотропных, кірункаў мы маем па кубічнай сынгоніі—тры (супадаюць яны з галоўнымі восямі сым. $3L^4$); па тэтрагональнай сынгоніі—адзін ізотропны кірунак L^4; па гэксагональнай—L^6. У ромбічнай, моноклінная і трыклінная *усе кірункі анізотропны* адносна ўсіх фізычных уласьціvasьцяй.

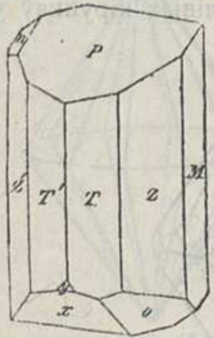


Мал. 44.



Мал. 45.

Ромбічная сынгонія мае тры крышталёграфічныя восі ўзаемна пэрпэндыкулярныя, але няроўныя між сабой (адзнака ад тэтрагональнай). Яны ёсьць разам з тым восі сымэтрыі другога парадку—$3L^2$.



Мал. 46.

Сымэтрыя поўнаграннае клясы выражаецца формулай: $3L^2$ $3PC$. Сюды належаць ромбічная дыпіраміда і ромбічная прызма. Любая з восяй можа быць прынята за вось Z (вэртыкальную); тады з дзьвюх горызонтальных восяй карацейшая завецца *брахі-вось;* даўжэйшая—*макро-вось*. Залежна ад таго, па якой восі разьвіваюцца грані тэй ці іншай формы, мы маем: брахіпіраміды, макропіраміды; прызмы вэртыкальнага роду або Z-прызмы; прызмы па макро-восі; прызмы па брахі-восі. Апошнія дзьве прызмы завуцца інача ляжачымі прызмамі або домамі1), значыць, мы маем брахідомы і макродомы (мал. 31).

Маем таксама тры віды пінакоідаў: базопінакоід, дзьве грані якога адсякаюць вось Z; макропінакоід—паралельны макро-восі, і брахіпінакоід—паралельны брахі-восі. Па ромбічнай сынгоніі крышталізуюцца: серка (S), марказыт (FeS_2), барыт ($BaSO_4$), топаз, горкая соль і багата іншых матэрый.

Моноклінная сынгонія характарызуецца прысутнасьцю кожнага элемэнту сымэтрыі толькі ў ліку аднаго, прычым вось ня вышэй двойчай. Тут магчымы толькі тры віды (клясы) сымэтрыі: 1) кляса з аднэй двойчай восьсю сымэтрыі, 2) кляса з аднэй роўніцай сымэтрыі і 3) кляса з аднэй восьсю і аднэй роўніцай (якія, як мы ведаем, у гэтым выпадку ўзаемна пэрпэндыкулярныя).

Поўнагранная кляса мае: L^2PC. З трох крышталёграфічных восяй толькі адна ёсьць вось сымэтрыі L^2; іншыя дзьве не зьяўляюцца васямі сымэтрыі. Усе тры восі няроўныя між сабой. Дзьве з крышталёграфічных восяй узаемна пэрпэндыкулярныя; трэцяя нахілена да іх пад косым кутом (адсюль і назва сынгоніі: моно-клінная, аднакосная). Як і ў ромбічнай сынгоніі адзначаюць макро- і брахі-восі, залежна ад чаго мы маем: прызмы, домы, гэміпіраміды, пінакоіды featuresнага найменьня і комбінацыі гэтых форм. Прыкладамі крышталяў па монокліннай сынгоніі могуць быць: гіпс (мал. 45), ортокляз, аўгіт, рагавы падабняк („обманка“), сьлюда, або лушчак і інш.

---

1) Дома (doma)—дах, страха.

Трыклінная сынгонія. Самая бедная элемэнтамі сымэтрыі. Да яе належаць толькі дзьве клясы: 1) кляса з адным магчымым тут элемэнтам сымэтрыі—цэнтрам С, 2) кляса асымэтрычная. Усе тры крышталёграфічныя восі ня роўныя і касыя між сабой. За крышталічныя восі могуць быць прыняты абы-якія тры канты многаграньніка.

Магчымы, уласна кажучы, толькі дзьве формы: комбінацыя *пінакоідаў,* іначай, парных граняй (калі ёсьць прысутным цэнтр сымэтрыі—С) і комбінацыя гэміпінакоідаў, няпарных граняй (кляса асымэтрычная).

Прыкладамі матэрый, якія крышталізуюцца па трыкліннай сынгоніі, могуць быць: мядзяны купарвас (сіні камень), мінэралі—альбіт (мал. 46), дыстэн, некаторыя шпаты і г. д.

IV. Будова крышталічнае матэрыі.

1. Структура крышталяў.

З агульнае ўласьцівасьці крышталічнае матэрыі—гомогеннай анізотропнасьці, або крышталічнай аднароднасьці—можна зрабіць пэўны вывад адносна будовы крышталяў. Па праўдзе, крышталічнай аднароднасьцю можа валадаць толькі такая матэрыя, якая складаецца з аднолькавых частак, паралельных між сабой. Кожную такую частку крышталю, незалежна ад таго, што яна сабой уяўляе, мы можам разглядаць, як нейкі цэнтр, ад якога па ўсіх кірунках адыходзяць розныя сілы; яны будуць слабнуць у меру адлегласьці ад пачатковай частачкі.

Калі будзем мець некалькі частак з сіламі, то гэтыя сілы ўзаемна ўплываючы адна на адну, будуць нішчыцца, нэўтралізавацца недзе пасярэдзіне між суседнімі частачкамі і даваць тут так званыя *нэўтральныя,* або *нулявыя* паверхні. Гэтыя нулявыя паверхні будуць абмяжоўваць сфэру ўплыву кожнае асобнае частачкі крышталя і ўяўляюць сабой некаторае геомэтрычнае цела. Уся прастора, занятая крышталічнымі часткамі, будзе выпаўнена цэльнай сыстэмай такіх геомэтрычных цел, паралельных між сабой. Падобныя геомэтрычныя целы завуцца *паралелёэдрамі.*

Уявім сабе вялізную прастору выпаўненую паралелёэдрамі (напрыклад, шэраг аднолькавых пакояў, заляў у некалькі паверхаў). Наглядальнік, пераходзячы з аднаго паралелёэдра (пакою) у суседні, не заўважыць перамены, бо паралелёэдры падобны між сабой: грань (сьценка), што была перад наглядальнікам, апыніцца ззаду яго, але перад ім будзе новая грань абсолютна падобная да першае. Ідучы ў адным кірунку, наглядальнік будзе перасякаць роўныя і паралельныя між сабой грані; ён будзе йсьці ў сярэдзіне так званае *колёны паралелёэдраў.* Ідучы ад пачатковага паралелёэдра ў другім кірунку, наглядальнік пройдзе другую колёну паралелёэдраў і г. д. Ясна, што ад пачатковага паралелёэдра можна прайсьці столькі розных колён, колькі *пар* граняй мае пачатковы паралелёэдр (а значыць, і кожны з сыстэмы паралелёэдраў). Ясна таксама, што лік граняй кожнага паралелёэдра будзе парным. Кожны паралелёэдр ёсьць цела, якое ўваходзіць у склад некалькіх колён, а кожныя два суседнія паралелёэдры—вызначаюць якую-небудзь колёну.

Усе грані паралелёэдра, якія перасякаюцца ў паралельных кантах, завуцца *пасам* або зонай *граняй*.

Уся прастора, выпаўненая сыстэмай паралелёэдраў без прамежкаў, складаецца з *пластоў* паралелёэдраў, паралельных між сабой; кожны пласт, у сваю чаргу, складаецца з колён—таксама паралельных між сабой. (Напрыклад, куб, складзены з маленькіх кубочкаў). Калі які-небудзь пласт паралелёэдраў перасячы роўніцай, то на гэтай роўніцы атрымаецца сыстэма аднолькавых геомэтрычных фігур; яны, нібы пляны паралелёэдраў, дадуць уяўленьне аб самых паралелёэдрах. Гэтыя фігуры выпаўняюць роўніцу без прамежкаў і завуцца *паралелёгонамі* Яны могуць быць або чатырохкутнымі — *дыпаралелёгоны*, або шасьцікутныя — *трыпаралелёгоны*.

Кожны многагранньнік, які выпаўнае прастору без астачы (без прамежкаў), накладаючыся адзін на адзін, мы будзем называць *пярвічным паралелёэдрам*; калі такі пярвічны паралелёэдр можна апісаць вакол кулі або ўпісаць у нейкую кулю, мы будзем называць яго *тыповым пярвічным паралелёэдрам*.

2. Тыповыя пярвічныя паралелёэдры.

Прымаючы пад увагу, што тыповыя пярвічныя паралелёэдры павінны выпаўняць прастору (занятую крышталічнай матэрыяй) без астачы, прымаючы тое, што кожны такі паралелёэдр павінен мець некалькі пар паралельных граняй (глядзі вышэй аб перамяшчэньні ў сярэдзіне паралелёэдраў), а таксама тое, што вакол кожнага тыповага пярвічнага паралелёэдра можна апісаць (або ўпісаць) кулю,—можна вывесьці формы тыповых паралелёэдраў. Гэткім чынам мы можам мець:

1. Паралелёэдр з трыма парамі паралельных граняй, так званы трыпаралелёэдр Кожная грань—чатырохкутнік. Тыповым пярвічным паралелёэдрам у даным выпадку будзе куб, бо яго можна ўпісаць і апісаць па кулі (мал. раней).

2. Асноўны пас чатырохгранны і бочныя грані—шасьцікутнікі. Тут чатыры пары паралельных граняй (тэтрапаралелёэдры). Тыповым пярвічным паралелёэдрам будзе, у даным выпадку, комбінацыя гэксагональнай прызмы і пінакоіда (мал. раней).

3. Асноўны пас шасьцігранны, усе грані—чатырохкутнікі; іх шэсьць пар. Тыповым пярвічным паралелёэдрам будзе ромбічны додэкаэдр (мал. раней).

4. Асноўны пас шасьцігранны; маем сем пар паралельных граняй. Тыповым пярвічным паралелёэдрам будзе комбінацыя куба і октаэдра, пэўнага выгляду: кожная грань

октаэдра падзяляецца акурат на тры часткі і адна трэць адсякаецца сьценкай куба (мал. 34).

Паралелёэдр мае 6 квадратаў і 8 правільных шасьцікутнікаў.

3. Віды і тыпы крышталічных структур.

Кожны з пералічаных вышэй паралелёэдраў вызначае нейкі від крышталічнае структуры. Гэткім чынам мы маем чатыры магчымыя віды структуры:

1) кубічны (гэксаэдрычны), 2) прызматычны, 3) додэкаэдрычны і 4) октаэдрычны.

Разглядаючы тыповыя пярвічныя паралелёэдры адносна іхнае сымэтрыі, мы бачым, што тры з іх (тры—гэкса—і гэптапаралелёэдры, або куб, ромбічны додэкаэдр і комбінацыя куба і октаэдра) належаць да віду (або клясы) сымэтрыі, якая характарызуецца формулай $3L^4 4L^3 6L^2 9PC$—кубічнае сыстэмы; чацьверты з пярвічных паралелёэдраў (тэтрапаралелёэдр, або комбінацыя гэксагольнае прызмы з пінакоідам) належыць да віду сымэтрыі $L^6 6L^2 7PC$—гэксагональнае сыстэмы.

З гэтае прычыны вызначаюць два тыпы крышталічнае структуры:

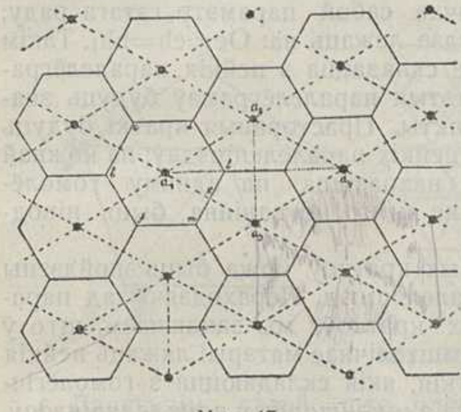
1) *кубічны* тып з трыма відамі структуры (гэксаэдрычным, додэкаэдрычным і октаэдрычным) і 2) *гэксагональны* тып з адным толькі відам структуры—прызматычным.

Тыповы пярвічны паралелёэдр можа падлягаць дэформацыям (зьменам форм) па пэўных законах. Так, куб можа быць выцягнуты па аднэй з восяй L^4 і тады ён абернецца ў тэтрагональную прызму ($L^4 4L^2 5PC$). Гэта ўжо будзе ня тыповы пярвічны паралелёэдр. Падобныя паралелёэдры будуць характарызаваць будову крышталяў з меншай колькасьцю элемэнтаў сымэтрыі, параўнаўча з крышталямі, пабудаванымі па тыповых паралелёэдрах.

4. Прасторавыя краткі.

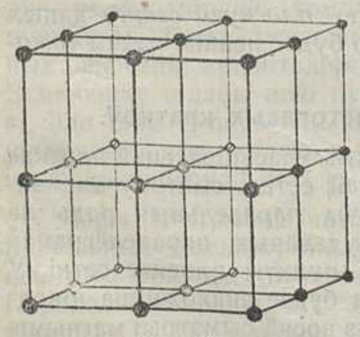
Прастору, занятую крышталічнай матэрыяй, мы ўяўляем сабе запоўненай сыстэмай паралелёэдраў. Заменім паралелёэдр, прыняты за пачатковы, пунктам, які будзе як-бы концэнтраваць у сабе крышталічную матэрыю. З прычыны поўнай тожсамасьці ўсіх паралелёэдраў данае сыстэмы, мы можам кожны з іх замяніць таксама крышталічным пунктам. Такія *пункты* называюцца *гомолёгічнымі* (аднароднымі) пунктамі. Такім чынам, колёну паралелёэдраў мы замяняем некаторым *радам гомолёгічных пунктаў;* пласт паралелёэдраў замяняем так званай *плоскай сеткай;* а ўсю сыстэму паралелёэдраў замяняем *прасторавымі краткамі* (мал. 47, 48).

Кожны кірунак, кожны рад гомолёгічных пунктаў характарызуецца аднолькавымі адлегласьцямі між гомолёгічнымі пунктамі.

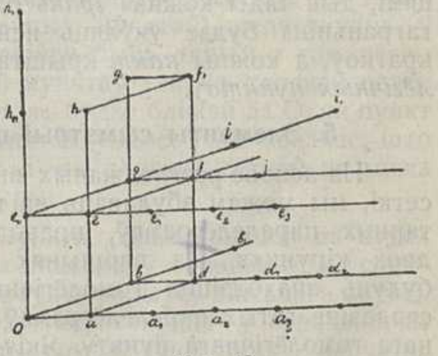


Мал. 47.

Прымем нейкі пункт O прастаровых краткоў за пачатковы (мал. 49). Бліжэйшы гомолёгічным пунктам у вадным кірунку няхай будзе пункт a. Злучыўшы гэтыя два гомолёгічныя пункты простай лініяй і працягнуўшы гэтую лінію бязьмежна, мы атрымаем гомолёгічны рад пунктаў a_1, a_2, a_3... Адлегласьці паміж гэтымі пунктамі павінны быць аднолькавыя (крышталічная аднароднасьць!) і роўныя адлегласьці паміж пачатковым пунктам O і бліжэйшым да яго гомолёгічным пунктам гэтага раду a; такім чынам $Oa = aa = a_1a_2 = a_2a_3$ і г. д. Адлегласьць між двума бліжэйшымі гомолёгічнымі пунктамі раду завецца *парамэтрам* данага раду.



Мал. 48.



Мал. 49.

Узяўшы ад пункту O другі кірунак Ов, дзе бліжэйшым да O гомолёгічным пунктам будзе в, маем другі гомолёгічны рад, з іншым парамэтрам: $Ов = вв_1 = в_1в_2$... Калі праз гомолёгічныя пункты $a - a_1 - a_2$ і г. д. правядзем лініі, паралельныя раду Ов, а праз гомолёгічныя пункты $в - в_1 - a_2$ і г. д. правядзем лініі, паралельныя раду Oa, то будзем мець плоскую сетку гомолёгічных пунктаў. Значыць, для пабудовы плоскае сеткі досыць мець два гомолёгічныя рады, якія выходзілі-б ад аднаго (пачатковага) пункту. Для пабудовы прасторавых краткоў патрэбны трэці гомолёгічны рад, які не ляжаў-бы ў аднэй роўніцы з першымі двума радамі. Хай бліжэйшым гомолёгічным пунктам гэтага трэцяга раду будзе е; адлегласьць Ое вызначае сабой параметр гэтага раду; таму наступны пункт h будзе лежаць на: $Oe=eh=hh_1$. Такім чынам, плоская сетка будзе складацца з нейкіх паралелёграмаў; па ўсіх вяршынях гэтых паралелёграмаў будуць знаходзіцца гомолёгічныя пункты. Прасторавыя краткі будуць тады складацца з сыстэмы нейкіх паралелепіпэдаў; па кожнай вяршыні паралелепіпэда находзіцца па аднаму гомолёгічнаму пункту, у сярэдзіне-ж яго не павінна быць ніводнага гомолёгічнага пункту.

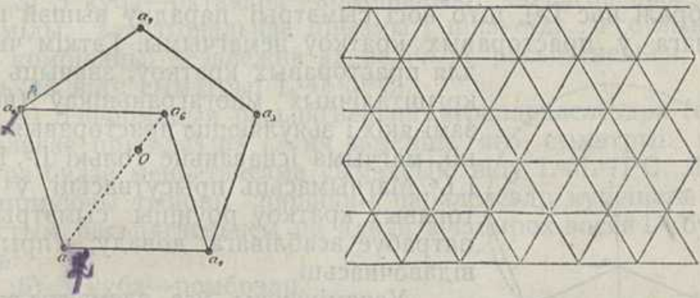
Для даных прасторавых краткоў можа быць знойдзены толькі адзін асноўны паралелепіпэд. Пераходзячы ад паралелёэдраў да прасторавых краткоў, мы заключаем, што ў аснове пабудовы кожнае крышталічнае матэрыі ляжаць нейкія пэўныя прасторавыя краткія, якія складаюцца з гомолёгічных пунктаў і ёсьць сыстэма *элемэнтарных паралелепіпэдаў*, або гранкаў („ячэек“). Самая тэорыя, якая тлумачыць будову крышталічнае матэрыі праз прасторавыя краткі, завецца *рэтыкулярнай* тэорыяй (ад лацінскага слова reticulum—гранкі). Калі мы будзем разглядаць кожны гомолёгічны пункт прасторавых краткоў, як нейкую матэрыяльную частачку, у якой концэнтруецца крышталічная матэрыя з усімі яе ўласьцівасьцямі, дык тады кожная *грань* рэальнага крышталічнага многаграньніка будзе ўяўляць нейкую *плоскую сетку* даных краткоў, а кожны *кант* крышталю будзе нейкім радам *гомолёгічных пунктаў*.

5. Элемэнты сымэтрыі прасторавых краткоў.

На аснове разгледжаных вышэй уласьцівасьцяй плоскае сеткі, мы можам збудаваць на гэтай сетцы сыстэму элемэнтарных паралелёграмаў, праводзячы паралельныя рады па двох кірунках. На вяршынях збудаваных паралелёграмаў будуць знаходзіцца гомолёгічныя пункты плоскае сеткі. У сярэдзіне гэтых паралелёграмаў ня будзе знаходзіцца ніводнага гомолёгічнага пункту. Якія-ж з восяй сымэтрыі магчымы на плоскай сетцы? Папершае, L^2. Гэтая вось сымэтрыі можа перасякацца з плоскай сэткай (пэрпэндыкулярнай да яе) або ў гомолёгічным пункце, або па-за ім.

Існаваньне L^3 магчыма толькі ў тым выпадку, калі на плоскай сетцы (пэрпэндыкулярнай да L^3) маюцца тры гомолёгічныя пункты па вяршынях правільнага трыкутніка Плоская сетка тады будзе мець выгляд трыкутнай сеткі (мал. 50) і тройчая вось можа перасякаць сетку як у гомолёгічным пункце, гэтак і ў цэнтры правільнага трыкутніка.

Пры L^4 плоская сетка будзе мець выгляд квадратаў; вось будзе праходзіць праз цэнтр такога квадрата; у гэтым цэнтры можа знаходзіцца гомолёгічны пункт, але яго можа й ня быць.

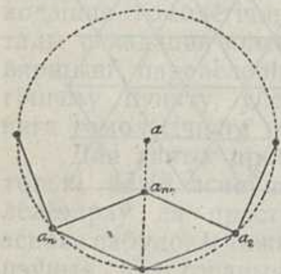


Мал. 50.

Дапусьцім далей, што плоскую сетку перасякае L^5 у пункце O (негомолёгічны пункт!) (мал. 50). Няхай бліжэйшым да O гомолёгічным пунктам будзе A. Маючы вось L^5, выведзем яшчэ чатыры пункты a_2, a_3, a_4, a_5, якія павінны знаходзіцца па вяршынях правільнага пяцікутніка. Калі правядзем праз a_5 рад, паралельны $a_1 a_2$, а праз пункт a_2 правядзем рад, паралельны $a_1 a_5$ (успомнім тое, што гаварылася пра збудаваньне паралелёграмаў плоскае сеткі), то гэтыя два рады (кірункі гомолёгічных пунктаў) перасякуцца ў пункце a_6. Гэты пункт a_6 павінен быць адным з гомолёгічных (значыць, крышталічных) пунктаў тэй-жа плоскай сеткі. З малюнку відаць, што пункт a_6 будзе бліжэй да O, як пункт a_1, але гэта супярэчыць прынятай умове. Гэта азначае, што ў прасторавых краткоў (як і на плоскай сетцы) ня можа існаваць пяцёрнай восі сымэтрыі.

Пры L^6 гомолёгічныя пункты разьмесьцяцца па кутох правільных шасьцікутнікаў, а таксама ў сярэдзіне іх успомнім, што бок шасьцікутніка роўны радыусу апісанага круга). Паралельныя рады тут якраз перасякуцца ў сярэдзінным пункце O, дзе павінен быць гомолёгічны пункт. Значыць, L^6 ня можа перасякаць пэрпэндыкулярнае да яе плоскае сеткі па-за гомолёгічным пунктам, а таму L^6, як элемэнт сымэтрыі прасторавых краткоў, зусім магчыма. Вось L^6 розьніцца ад іншых магчымых восяй L^2, L^3 і L^4 тым, што апошнія, як мы бачылі, могуць перасякаць плоскую сетку і па-за гомолёгічных пунктах гэтых сетак. Калі мы возьмем найменьне восі сымэтрыі $p>6$ (L^7, L^8... L^n), то, разважаючы па ранейшаму, убачым, што ўсе гомолёгічныя пункты разьмяшчаюцца па вяршынях правільнага многакутніка a_1, a_2, a_3...

(мал. 51). Бліжэйшым да цэнтральнага пункту a (з якога выходзіць вось сымэтрыі L^7, L^8 і г. д.) няхай будзе гомолёгічны пункт a_1. Збудаваўшы пры гомолёгічных пунктах a_2 і a_n паралелёграм, мы знойдзем новы гомолёгічны пункт a_{mn}; як відаць з малюнку гэты новы гомолёгічны пункт будзе бліжэй да цэнтральнага пункту a, чымся гомолёгічны пункт a_1. Гэтая мы бралі вос L^5), што восі сымэтрыі парадку вышэй шасьцёрнага ў прасторавых краткоў немагчымы. Гэткім чынам, для прасторавых краткоў, значыць і для крышталічных многаграньнікаў (вобразамі якіх і зьяўляюцца прасторавыя краткі), магчыма існаваньне толькі L^2, L^3, L^4 і L^6. Магчымасьць прысутнасьці ў прасторавых краткоў роўніцы сымэтрыі не патрабуе асаблівага доваду, з прычыны відавочнасьці.



Мал. 51.

Успамінаючы ўсе элемэнты сымэтрыі, які мы раней прыводзілі для крышталічных многаграньнікаў (сынгоніі), мы бачым, што сымэтрыя прасторавых краткоў супадае з раней выведзенымі сынгоніям і пацьвярджае правільнасьць тэорыі рэтыкулярнай (гранкавай) будовы крышталічнае матэрыі.

6. Паралелёэдры ў розных сынгоніях. Комплексыяльная сымэтрыя.

Мы вывелі (гл. вышэй) чатыры тыповыя пярвічныя паралелёэдры: 1) куб, 2) ромбічны додэкаэдр, 3) куба-октаэдр (кубічны тып) і 4) прызму (гэксагональны тып).

Калі прарабіць над гэтымі пярвічнымі паралелёэдрамі нейкія аднародныя дэформацыі (зьмены форм), то атрымаем шэраг паралелёэдраў, якія па сваёй вонкавай сымэтрыі належаць да іншых сынгоній. Спачатку выведзем паралелёэдры, якія належаць да тэтрагональнае і гэксагональнае сынгоніі, расьцягваючы тыповыя пярвічныя паралелёэдры па васёх сымэтрыі L^n (дзе $n>2$, напрыклад, L^3, L^4, L^6). З новых паралелёэдраў (тэтрагональных і гэксагональных) выведзем паралелёэдры ромбічнае сынгоніі, расьцягваючы паралелёэдры тэтрагональнае і гэксагональнае сынгоніі па L^2.

З гэтых апошніх паралелёэдраў мы можам атрымаць паралелёэдры моноклінnae сынгоніі, зрушыўшы фігуру па нейкай роўніцы, пэрпэндыкулярнай да аднэй з L^2 (як, напрыклад, можна зрушыць слупок аднолькавых кніжок, каб заместа прызматычнага слупка мець касы слупок кніжок). Нарэшце, з паралелёэдраў моноклінnae сынгоніі мы можам вывесьці паралелёэдры трыклінnae сынгоніі праз яшчэ адно новае абыякое зрушша монаклiннага паралелёэдра. Праз расьцягваньне па восi L^4 будзем мець:

1) З гэксаэдра (куба) — комбiнацыю тэтрагональнае прызмы i пiнакоiда.

2) З ромбiчнага додэкаэдра—комбiнацыю тэтрагональнае прызмы i тэтрагональнае пiрамiды.

3) З куба—октаэдра—комбiнацыю тэтрагональнае дыпiрамiды, тэтрагональнае прызмы i пiнакоiда. Усе выведзеныя комбiнацыi незалежна ад велiчынi расьцягненьня, належаць да вiду сымэтрыi $L^4 4L^2 5PC$.

4) Дэформацыя расьцяґненьня тэтрапаралелёэдра (гэксагональнае прызмы) па L^6 ня зьменiць яго сымэтрыi: новая фiгура будзе мець таксама сымэтрыю вiду $L^6 6L^2 7PC$. Далей, дэформуючы тыповы пярвiчны паралелёэдр кубiчнага тыпу простым расьцягненьнем па аднэй з чатырох восяй L^3, будзем мець:

5) З куба—ромбоэдр.

6) З ромбiчнага додэкаэдра—комбiнацыю ромбоэдра i гэксагональнае прызмы.

7) З куба-октаэдра — комбiнацыю двух ромбоэдраў i пiнакоiда. Усе выведзеныя комбiнацыi належаць да трыгональнае гiпосынгонii, вiду сымэтрыi $L^3 3L^2 3P$.

Расьцягваючы па восi L^2 якi-небудзь паралёэдр гэксагональнае сынгонii, атрымаем паралелёэдр ромбiчнае сынгонii, з сымэтрыяй $3L^2 3PC$.

Аб дэформацыях моноклiннай i трыклiннай гаварылася вышэй.

Як бачым, разгляд сымэтрыi прасторавых краткоў, як i вывад паралелёэдраў па розных сынгонiях, не даюць якiх-небудзь новых форм, але прыводзяць да тых самых форм крышталiчных многаграньнiкаў.

Пасьля некаторай аднароднай (гомогеннай) дэформацыi над даным многаграньнiкам, колькасьць яго граняй i кантаў застаецца тэй-жа самай; кожны многакутнiк на гранi i пасьля дэформацыi будзе мець той-жа лiк бакоў; усе выведзеныя пасьля дэформацыi комбiнацыi будуць ўяўляць з сябе паралелёэдры з тым-жа лiкам парных граняй, як i на тыповых паралелёэдрах (да дэформацыi); усе чатырохкутныя гранi застануцца чатырохкутнымi, а шасьцiкутныя гранi—шасьцiкутнымi.

Мы ведаем таксама, што кожны паралелепiпэд расьцягненьнем або зрушэньнем можна перарабiць у абы-якi даны. З дапамогай гомогенных дэформацый мы можам i кожны крышталiчны комплекс (многаграньнiк) ператварыць у даны, бо кожны крышталь характарызуецца пэўнымi прасторавымi краткамi.

I такiм чынам адзначаюць наступныя сем вiдаў *комплексыяльнай сымэтрыi*:

1) Дытрыоктаэдрычны (саракавасьмігранны) від сымэтрыі гэксаэдрычнай сынгоніі $3L^4 4L_6^3 6L^2 9PC$ з трыма відамі структуры кубічнага тыпу (гэксаэдрычным, додэкаэдрычным і октаэдрычным).

2) Дыгэксагональна-дыпірамідальны від сым. гэксагональнай гіпосынгоніі $L^6 6L^2 7PC$ з адным прызматычным відам структуры гэксагональнага тыпу.

3) Дытрыгональна-скаленоэдрычны від сымэтрыі ($L_6^3 3L^2 3P$) трыгональнай гіпосынгоніі з усімі магчымамі чатырма відамі структуры.

4) Дытэтрагональна-дыпірамідальны від сымэтрыі $L^4 4L^2 5PC$ тэтрагональнай сынгоніі з трыма відамі структуры кубічнага тыпу.

5) Ромбо-дыпірамідальны від сымэтрыі $3L^2 3PC$ ромбічнай сынгоніі з усімі чатырма відамі структуры.

6) Ромбо-прызматычны від сымэтрыі $L^2 PC$ монаклінная сынгоніі таксама з усімі чатырма відамі структуры (гэксаэдрычны, додэкаэдрычны, октаэдрычны і прызматычны).

7) Пінакоідальны від сымэтрыі C трыклінная сынгоніі, для якога магчымы таксама ўсе чатыры віды структуры.

7. Ізотропны комплекс. Ідэальны комплекс.

Калі мы маем крышталічны комплекс, у якім роўніца, пэрпэндыкулярная да якога-небудзь магчымага канта, будзе паралельнай магчымай грані, то называем такі комплекс *ізотропным крышталічным* комплексам.

З рэтыкулярнай тэорыі будовы крышталічнае матэрыі лёгічна выцякае магчымасьць існаваньня двох зусім розных тыпаў крышталяў—кубічнага і гіпогэксагональнага. І той і другі маюць свае несумясьцімыя ізотропныя комплексы: 1) кубічна-ізотропны і 2) гэксагональна-ізотропны.

У прыродзе, сярод крышталяў, прадстаўлены выключна гэтыя ізотропныя комплексы, як тыповыя, і кожны прыродны крышталь можа быць выведзены, як дэформаваны па пэўнаму закону, кубічны або гэксагональны ізотропны комплекс.

Матэматычна даводзіцца, што крышталічныя комплексы гэксаэдрычнай (кубічнай) сынгоніі ёсьць ізотропныя; тое самае належыць і да гэксагональнага комплексу.

Як мы ўжо бачылі, кожныя прасторавыя краткі можна перарабіць на іншыя праз належныя зрушшы і расьцягненьні (гомогенныя дэформацыі).

Так, крышталь кубічнай сынгоніі (калі ўявіць сабе ідэальна-элястычны крышталь, гумавы, напрыклад) можна аднэй гомогеннай дэформацыяй расьцягненьня па восі Z (001) перавесьці ў крышталь тэтрагональнай сынгоніі. Тая чацьверная вось сымэтрыі (Z—001), па якйй была зроблена дэформацыя, захавае сваё значэньне чацьвернай восі і іншыя дзьве восі чацьвертага парадку зробяцца восямі другога парадку. З роўніц сымэтрыі застануцца на новым крышталічным комплексе толькі тыя, што праходзяць праз чацьверную вось расьцягненьня, ды яшчэ застанецца роўніца сымэтрыі, пэрпэндыкулярная да гэтай восі.

Наогул, новы крышталічны комплекс набудзе сымэтрыю, адпаведную дытэтрагональна-дыпірамідальнаму віду сымэтрыі тэтрагональнай сынгоніі.

Такі комплекс тэтрагональнай сынгоніі зьяўляецца *гранічным, ідэальным* комплексам, да якога імкнуцца некаторыя крышталі пры сваім утварэньні.

Далей, прарабіўшы дэформацыю расьцягненьня кубічна-ізотропнага комплексу (ідэальна-элястычнага) па аднэй з чатырох тройчых восяй сымэтрыі, мы будзем мець комплекс з аднэй толькі тройчай восьсю (па якой была зроблена дэформацыя) і трыма двойчымі восямі сымэтрыі; застануцца тады толькі і тры роўніцы сымэтрыі, што праходзяць праз тройчую вось і падзяляюць напалам куты паміж двойчых восяй сымэтрыі.

Такім чынам, з крышталю кубічнай сынгоніі зробіцца крышталь дытрыгональна скаленоэдрычнага віду, сым. гэксагональнай сынгоніі, дакладней, трыгональнай гіпосынгоніі. Новы комплекс будзе таксама *ідэальным* комплексам. Першы з памянёных ідэальных комплексаў завецца *тэтрагоналёідным*, другі—*трыгоналёідным* комплексамі.

Можна яшчэ вывесьці і трэці ідэальны комплекс, так званы *гэксагоналёідны*, які належыць крышталям гіпогэксагональнай сынгоніі (для гэтага куб расьцягваем па восі другога парадку).

Як бачым, усе ідэальныя комплексы належаць або да тэтрагональнай, або да гэксагональнай сынгоніі.

8. Асноўны закон крышталёграфіі—закон Е. Фёдарава.

На грунце апрацоўкі вялізнага крышталёграфічнага матэрыялу, таксама маючы на ўвазе закон Бравэ, і ўсё сказанае вышэй аб ідэальных комплексах, профэсар Е. С. Фёдараў вывеў яшчэ адзін чацьверты асноўны закон крышталізацыі.

Раней думалі, што гранічнай (ідэальнай) сынгоніі для крышталяў ёсьць кубічная сынгонія, да якой імкнуцца ўсе крышталічныя матэрыі. Фёдараў-жа ўстанавіў, што ўсе крышталі або *псэўдатэтрагональны* [1]) або *псэўдагэксагональны*[1]) г. ё. што гранічнымі сынгоніямі ёсьць тэтрагональная і гэксагональная сынгоніі.

Як куля ёсьць толькі паасобнасьць больш агульнае формы—эліпсоіда (пры роўнасьці восяй), так і куб ёсьць толькі паасобнасьць ад больш агульнае формы—тэтрагональнае прызмы або, скажам, ромбоэдра.

---

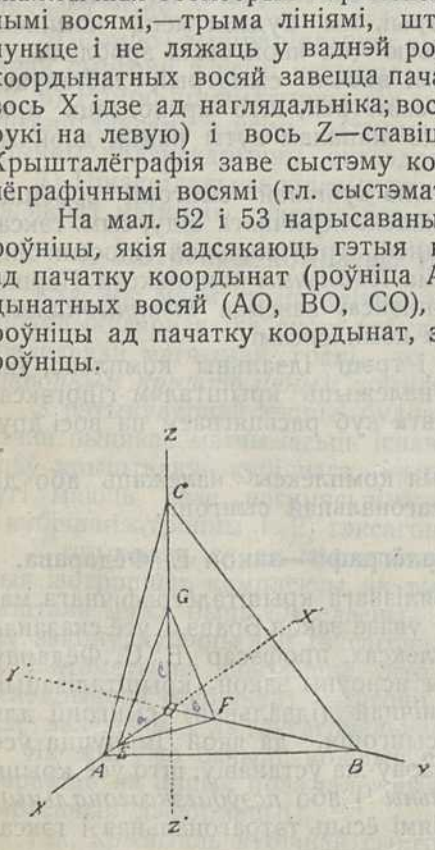
[1]) Псэўдос—няпраўдзівы.

V. Сымболі (знакі) элемэнтаў крышталічнага многаграньніка.

1.

Для вызначэньня палажэньня якой-небудзь роўніцы ў прасторы і для яе азначэньня якім-небудзь сымболем (знакам), аналітычная геомэтрыя карыстаецца так званымі координатнымі восямі,—трыма лініямі, што перасякаюцца ў адным пункце і не ляжаць у ваднэй роўніцы. Пункт перасячэньня координатных восяй завецца пачаткам координат. Звычайна, вось X ідзе ад наглядальніка; вось У—паралельна (ад правай рукі на левую) і вось Z—ставіцца старчма (вэртыкальна). Крышталёграфія заве сыстэму координатных восяй крышталёграфічнымі восямі (гл. сыстэмат. апісаньне сынгоній).

На мал. 52 і 53 нарысаваны крышталёграфічныя восі і роўніцы, якія адсякаюць гэтыя восі на рознай адлегласьці ад пачатку координат (роўніца ABC і EGN). Адрэзкі координатных восяй (AO, BO, CO), іначай кажучы, адлегласьці роўніцы ад пачатку координат, завуцца *парамэтрамі* данай роўніцы.



Мал. 52.

Мал. 53.

Азначым парамэтр па восі X праз a; па восі У праз b і па восі Z праз c. (Калі яны будуць розныя, напрыклад, 2:3:1; 3:2:4 і г. д.). Тады палажэньне нашае роўніцы адносна коордынатных восяй умоўна (сымболічна) азначацца гэтак a : b : c. Перасунем нашую роўніцу паралельна самой сабе. Калі адзін парамэтр павялічыцца (або паменшыцца) у у некалькі разоў, то і іншыя два павялічацца (або паменшацца) гэтак сама. Калі парамэтр, напрыклад, в (па восі У) павялічыцца у m разоў, то і парамэтры a і c павялічацца ў m разоў. Парамэтры новае роўніцы могуць быць азначаны як ma : mb : mc, або (пры памяншэньні ў m разоў): $\frac{a}{m}:\frac{b}{m}:\frac{c}{m}$ і г. д. Але адны лікавыя адносіны яшчэ ня вызначаць палажэньня роўніцы якога-небудзь многаграньніка. Калі возьмем, напрыклад, октаэдр, то ўсе грані октаэдра адсякаюць крышталёграфічныя восі (X, У, Z) на аднолькавай адлегласьці ад пачатку коордынат; іначай кажучы, лікавая велічыня парамэтраў кожнае грані будзе аднолькавая. Каб адзначыць грані дакладна, умовіліся лічыць адрэзкі коордынатных восяй, што ідуць *угару, праваруч і наперад* (ад наглядальніка, які трымае фігуру за вось Z—вэртыкальна)—*за дадатныя* (+), а канцы коордынат *ніжнія, левыя і заднія,—за адмоўныя* (—). Тады парамэтры граняй па розных октантах (васьмушках) многаграньніка могуць быць азначаны як a : в : c; $\bar{а}:в:с$; $\bar{а}:\bar{b}:с$ і г. д. (знак—наверсе азначае адмоўны кірунак данага парамэтра).

Прыняўшы якую-небудзь роўніцу за асноўную, і яе парамэтры за a : в : c, мы кожную іншую роўніцу можам выразіць праз парамэтры, якія будуць часткамі парамэтраў першае роўніцы, гэта азначае, што парамэтры новае роўніцы могуць быць вызначаны як $\frac{a}{h}:\frac{b}{k}:\frac{c}{l}$.

З тэй прычыны, што асноўныя парамэтры (a : в : c) заўсёды маюцца на ўвазе, указваюць толькі адны назоўнікі дробу h, k, l. Гэтыя назоўнікі завуцца *індэксамі*[1]). Калі хочуць азначыць праз індэксы роўніцу многограньніка, пішуць так: (hkl), бяручы індэксы ў дужкі. Залежна ад октантаў будзем мець індэксы (hkl); $(\bar{h}kl)$; $(\bar{h}\bar{k}l)$; $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$ і г. д.

Трэба памятаць, што чым *большай* велічынёй будзе парамэтр па якой-небудзь восі, тым меншай велічынёй будзе адпаведны індэкс. Калі будзем разглядаць заместа крышталічнага многаграньніка адпаведныя яму пpастopавыя гранкі, то пачатак коордынатных восяй будзе пачаткам гомолёгічных радоў, якія выходзяць ад аднаго пункту, а парамэтры і індэксы граняй будуць парамэтрамі і індэксамі адпаведных плоскіх сетак.

Для азначэньня некаторага гомолёгічнага пункту (a) даных прасторавых краткоў, мы праводзім з гэтага пункту тры простыя лініі, паралельныя крышталёграфічным восям,

---

[1]) Увёў індэксы крышталёграф Міл'ьлер, заместа ранейшых сымболяў Вэйса і Наўмана.

да перасячэньня гэтых простых ліній з трыма роўніцамі, у кожнай з якіх зьмяшчаюцца дзьве крышталёграфічныя восі. (Гэтыя роўніцы супадаюць з галоўнымі роўніцамі сымэтрыі). Даўжыні адцінкаў простых ліній, вымераныя аднолькавымі адзінкамі даўжыні (мілімэтрамі, сант.) завуцца *лінейнымі коордынатамі* данага пункту (а).

Азначым лінейныя коордынаты праз K_1, K_2, K_3 (значыць, ад пункту а да першае роўніцы будзе адлегласьць K_1, роўная, скажам 5 міл.; да другое роўніцы—$K_2=7$ міл.; да трэцяе роўніцы—$K_3=9$ міл.).

Дапусьцім, што прамежак паміж гомолёгічнымі пунктамі па восі X будзе роўны нейкай вялічыні C_1 (напрыклад, праз кожныя 0,5 мілімэтра будуць разьмяшчацца па восі X гомолёгічныя пункты); падобны прамежак па восі У хай будзе C_2 і па восі Z—C_3.

Тады, падзяліўшы кожную лінейную коордынату (K_1; K_2; K_3) на адпаведны ёй прамежак паміж гомолёгічных пунктаў (C_1; C_2; C_3), мы атрымаем некаторыя дзелі:

$$\frac{K_1}{C_1}=t_1; \frac{K_2}{C_2}=t_2; \frac{K_3}{C_3}=t_3$$

Кожная такая дзель (t_1; t_2; t_3) называецца лікавым коордынатам або *індэксам сымболю* данага гомолёгічнага пункту (а). Заўважым пры гэтым, што гэтыя індэксы (t_1; t_2; t_3) будуць заўсёды цэлымі лікамі (дадатнымі або адмоўнымі).

Такім чынам, кожны гомолёгічны пунт можна выявіць сымболем (t_1; t_2; t_3). Пункт (O), прыняты за пачатак крышталёграфічных восяй, будзе мець сымболь (o, o, o).

2. Другі асноўны закон крышталёграфіі.

Калі лічыць закон Стэнона першым асноўным законам крышталёграфіі, то другім асноўным законам можна назваць закон, устаноўлены францускім крышталёграфам Рэнэ Гаюі (Renè Haüy) у 1781 г.

Гэты закон кажа, што стасункі трох *парамэтраў кожнае грані крышталю выражаюцца трыма цэлымі рацыянальнымі лікамі.* Закон рацыянальнасьці парамэтраў або закон Гаюі выводзіцца, як вынік рэтыкулярнае тэорыі будовы крышталічнае матэрыі, і ў сваю чаргу пацьвярджае гэтую тэорыю. Папраўдзе, калі крышталічная матэрыя складаецца з безьліч гомолёгічных пунктаў, сабраных у рады, сеткі і краткі, то кожная грань рэальнага крышталю можа адсячы нейкі гомолёгічны рад (які служыць як-бы коордынатнай восьсю) у пэўным гомолёгічным пункце (але не паміж пунктаў!), іначай кажучы, адлегласьці гэтае грані ад пачатковага пункту выражаюцца цэлымі лікамі, роўнымі ліку прамежкаў між гомолёгічнымі пунктамі; значыць, і стасункі паміж велічынямі адлегласьці па кожнаму кірунку (па восі або па гомолёгічнаму раду), г. ё. парамэтры (індэксы) павінны выражацца таксама цэлымі рацыянальнымі лікамі. Закон Фёдарава лічыцца чацьвертым (гістарычна) законам крышталёграфіі.

Дакладней кажучы, калі заместа раальнай грані мы будзем разглядаць плоскую сетку прасторавых краткоў, то тут магчымы наступныя чатыры выпадкі перасячэньне плоскай сеткай трох радоў прасторавых краткоў (якія маюць адзін агульны пункт перасячэньня):

1) Усе тры рады перасякуцца плоскай сеткай у гомолёгічных пунктах (гэта і будзе грань крышталю, які закончыў свой рост); 2) два рады перасякуцца ў гомолёгічных пунктах, а трэці ў прамежку між гомолёгічных пунктаў; 3) адзін рад перасячэцца ў гомолёгічным пункце, а два іншыя ў прамежках; 4) усе тры рады перасякуцца ў прамежках.

Які-б з гэтых чатырох выпадкаў ня меў месца, заўсёды будзе справядлівым закон рацыянальнасьці стасункаў парамэтраў, які сьцьвярджае, што *кожная плоская сетка прасторавых краткоў адсякае на трох абыякіх радох тых-жа краткоў адрэзкі, пропорцыянальныя цэлым лікам прамежкаў радоў.*

3. Сымболі граняй асноўных форм кубічнае і іншых сынгоній.

Дапусьцім, нам даецца грань, якая адсякае на кожных з трох крышталёграфічных восяй аднолькавыя адрэзкі; усе індэксы гэтае грані будуць роўныя паміж сабой (h h h).

Калі ўзяты многогранньік будзе асноўнай формай, то парамэтры яго граняй можна прыняць за адзінку; тады індэксы нашае грані, што адсякае аднолькавыя адрэзкі восяй, выразяцца як (III). Усе восем магчымых граняй такой формы (октаэдра) будуць мець сымболі: (III) $(\dot{\mathrm{I}}\mathrm{II})$ $(\dot{\mathrm{I}}\dot{\mathrm{I}}\mathrm{I})$ $(\mathrm{I}\dot{\mathrm{I}}\mathrm{I})$ $(\mathrm{II}\dot{\mathrm{I}})$ $(\dot{\mathrm{I}}\mathrm{I}\dot{\mathrm{I}})$ $(\mathrm{I}\dot{\mathrm{I}}\dot{\mathrm{I}})$ $(\dot{\mathrm{I}}\dot{\mathrm{I}}\dot{\mathrm{I}})$.

Калі хочам азначыць усе грані асноўнай формы, то бярэм той сымболь аднэй з граняй, у якім найменей адмоўных індэксаў, ды ставім яго ў фігурныя дужкі; для октаэдра будзем мець {III.} Грані куба будуць адсякаць толькі адну якую-небудзь вось, а іншым дзьвюм будуць паралельны; сымболь грані куба, пэрпэндыкулярнай да першай крышталёграфічнай восі (адна з L^4-х) будзе мець выгляд (100). Усе шэсьць граняй будуць мець сымболі: $\begin{matrix}\{100\}\\\{100\}\end{matrix}$ $\begin{matrix}\{010\}\\\{010\}\end{matrix}$ $\begin{matrix}\{001\}\\\{001\}\end{matrix}$.

Сымболь усяго куба будзе {100}. Ромбічны додэкаэдр мае сымболь {110}. Пірамідальны куб мае сымболь {120}. Для пірамідальнага октаэдра і трыоктаэдра {112}. Нарэшце, для дытрыоктаэдра (48-мі граньніка) сымболь будзе мець выгляд {123}.

Для многагранъьнікаў гэксагональнае сынгоніі прыняты чатыры крышталёграфічныя восі, залежна ад чаго і сымболі граняй і форм прымаюць выгляд:

Пінакоід (1000) і (1000).

Дыгэксаг. прызма {ihko}—тры індэксы розныя. Гэксагональная дыпіраміда {ioil}—два індэксы аднолькавыя. Па тэтрагональнай сынгоніі маем: тэтрагональная дыпіраміда {hhl}. Тэтрагональная прызма {110}. Базопінакоід, што зразае вось Z {001}.

4. Асноўны закон крышталёграфіі—закон Бравэ (A. Bravais).

З выведзенай вышэй тэорыі структуры крышталічнае матэрыі выцякае магчымасьць утварэньня безьліч граняй крышталічнае формы. Каб усе магчымыя грані мелі аднолькавыя шансы для зьяўленьня ў выглядзе рэальных граняй данага крышталю, то заместа крышталічнага многагранъніка з невялікім лікам граняй мы наглядалі-б многагранънік з з безьліч граняй, г. ё. мелі-б, па сутнасьці, нейкую крывую паверхню (кулю, эліпсоід) і г. д. З прычыны таго, што факты ўтварэньня крышталяў у выглядзе пэўных многагранънікаў, супярэчаць такога роду дапушчэньню, было прапанавана некалькі тлумачэньняў. Ужо пасьля Гаюі (закона рацыянальнасьці парамэтраў і індэксаў) было заўважана, што індэксы сымболяў граняй выражаюцца амаль выключна лічбамі 0, 1, 2; ужо лічба 3 сустракаецца досыць рэдка, а вялікія лічбы ёсьць проста выключэньні

Для таго, каб зьвязаць закон найбольшай прастаты сымболяў з рэтыкулярнай тэорыяй, Бравэ (1851 г.) увёў адно дапушчэньне. Як мы ведаем, кожная грань крышталю будзе аднэй з плоскіх сетак прасторавых краткоў. Плоская сетка складаецца з гомолёгічных пунктаў (матэрыяльных частачак). Лік гомолёгічных пунктаў, што прыпадаюць на адзінку паверхні данае грані, завецца *рэтыкулярнай шчыльнасьцю*, або *шчыльнасьцю* сеткі данае грані.

Бравэ дапусьціў, што з усіх магчымых граняй даных краткоў, разьвіваецца рэальна (на крышталe) толькі грань з найвялікшай шчыльнасьцю сеткі Гэта і ёсьць закон *шчыльнасьці сеткі*, або закон Бравэ.

Вось чатырма законамі—Стэнона, Гаюі, Бравэ і Фёдарава—і ахапляюцца ў дадзены момант нашыя веды аб будове крышталічнае матэрыі.

5. Устаноўка крышталю. Сувязь між будовай і знадворным выглядам.

Для азначэньня сымболяў кожнага крышталічнага комплексу патрэбна выбраць тры або чатыры канты (рады прасторавых краткоў) і прыняць гэтыя канты (рады) за крышталёграфічныя восі.

Выбар тых ці іншых крышталёграфічных восяй для данага крышталічнага комплексу і азначэньне стасункаў адрэзкаў па гэтых восях завецца *ўстаноўкай крышталю.*

На грунце закону Бравэ на крышталях заўсёды разьвіваюцца грані найбольшае рэтыкулярнае шчыльнасьці (грані з найбольш густым разьмяшчэньнем частачак, гомолёгічных пунктаў). Калі возьмем за асноўнае кубічны крышталічны комплекс, то на ўсіх гранях будзем мець аднолькавую рэтыкулярную шчыльнасьць (усе грані куба аднародныя).

Калі цяпер над кубічным комплексам праробім гомогенную дэформацыю дадатнага расьцягненьня па восі L^4, то як мы ужо ведаем, атрымаем новы ідэальны комплекс (тэтрагоналёідны); конкрэтна, будзем мець прызму тэтраганальнай сынгоніі з базопінакоідам. Базопінакоідная грань будзе мець такую-ж рэтыкулярную шчыльнасьць, як і грань нашага куба; тады як грані прызмы, як расьцягнутыя грані куба, будуць мець меншую шчыльнасьць (бо колькасьць гомолёгічных пунктаў застаецца нязьменнай, а плошча кожнае грані ад расьцягненьня павялічыцца).

Грань пінакоіда, як больш рэтыкулярна шчыльная і будзе расьці на крышталю хутчэй. Будзем мець крышталі пластаватага і таблічатага выгляду, якія часта і наглядаюцца на крышталічных мінэралях (прыродных крышталях), як сьлюды і іншыя. Сувязь паміж частачкамі такой грані будзе таксама найбольшай у параўнаньні з іншымі гранямі крышталічнага комплексу; наадварот, падобныя крышталі можна лёгка шчапіць, рэзаць па кірунках паралельных найбольш рэтыкулярна шчыльнай грані (у мінэралёгіі гэтая зьява завецца луплівасьцю). Калі куб падлягае адмоўнаму расьцягненьню (сьцісканьню) па восі L^4, то грань пінакоіда ідэальнага тэтрагоналёіднага комплексу будзе мець, наадварот, найменшую рэтыкулярную шчыльнасьць. З гэтае прычыны павінны на падобных крышталічных многагараньніках больш разьвівацца грані прызм (больш рэтыкулярна шчыльных).

Такія *адмоўныя* крышталі будуць мець выгляд прызм болей і меней выцягнутых; тады як *дадатныя* крышталі будуць, наадварот, выцягвацца па пінакоідах у таблічатыя і пластаватыя формы.

VI. Мераньне крышталічных многаграньнікаў.

Як мы ведаем, сталым элемэнтам крышталічнага многаграньніка зьяўляецца яго двугранныя куты. Для вымеру гэтых кутоў існуюць асаблівыя прылады, так званыя гоніомэтры (мернікі кутоў). Іх ёсьць два тыпы—датыкальны і оптычны гоніомэтры.

Датыкальны гоніомэтр Каранжо выяўлены на мал. 54. Дзьве грані крышталю ўстаўляюцца паміж лінеек S—S_1, і двугранны кут вызначаецца другім канцом лінеек l—l_1. Трэба толькі, каб кант крышталю прышоўся акурат у вяршыню кута між лінейкамі S—S_1. Больш дакладныя вылічэньні патрабуюць ужываньня оптычнага гоніомэтра, які зьяўляецца складанай прыладай.

Мал. 54.

VII. Проектаваньне крышталяў.

Для наглядальнага ўяўленьня аб характары крышталю, аб адносным разьмяшчэньні граняй і элемэнтаў сымэтрыі, карыстаюцца асобнымі прыёмамі рысаваньня крышталю з дапамогай проекцый ¹).

Вакол крышталю апісваюць з яго цэнтру кулістую паверхню. Затым з сярэдзіны кожнае грані праводзяць пэрпэндыкуляры да перасячэньня з кулістай паверхняй; пункты перасячэньня завуцца *полюсамі граняй* (мал. 55).

Мал. 55.

Калі правесьці роўніцы, датыкальныя да кулі ў гэтых пунктах, і працягнуць роўніцы да ўзаемнага перасячэньня, то можна лёгка аднавіць форму крышталю. Звычайна полюсы *граняй* з кулістае паверхні пераносяць (проектуюць) на роўніцу, што расьсякае кулю па мэрыдыяну, і сумяшчаюць гэтую *роўніцу проекцыі* з роўніцай малюнку (старонкай кніжкі, дзе малюнак). Так, калі возьмем комбінацыю куба, октаэдра і ромбічнага додэкаэдра (мал. 56) і паставім яго так, каб круг проекцыі праходзіў праз сярэдзіну крышталю, то полюсы граняй

Мал. 56.

---

¹) Проекцыя ёсьць нібы цень прадмета на нейкай роўніцы. Залежна ад палажэньня прадмета адносна роўніцы, на якую прадмет проектуецца, і проекцыя (цень) яго будзе мець розны выгляд. Цень ад палкі на падлозе

разьмесьцяцца на крузе ў пунктах 100, 110 і г. д. Проекцыя гэтай формы прыме выгляд, як на мал. 56 (правы).

Найболей пашыранымі і спадручнымі зьяўляюццца наступныя віды проекцый:

1) лінейная і гномонічная проекцыі,

2) граммастэрэографічная і гномостэрэографічная проекцыі,

3) ортогональная проекцыя.

Ортогональную проекцыю ўжываюць, каб мець малюнак крышталю.

Пры лінейнай проекцыі грань крышталю выяўляецца на проекцыйнай роўніцы, як лінія, а кант—як пункт. Пры гномонічнай проекцыі, наадварот, грань крышталю выяўляецца пунктам (бо проектуецца не самая грань, але пэрпэндыкуляр да грані), а кант—лініяй (заместа самога канта проектуецца пэрпэндыкулярная да яго роўніца). Такім чынам, гномонічная проекцыя ёсьць процілежная, полярная адносна лінейнай.

Стэрэографічныя проекцыі маюць свае асаблівасьці, якія залежаць ад таго, што крышталь проектуецца спачатку на сфэрычную (кулістую) паверхню, а затым пераносіцца на плоскую, экваторыяльную паверхню.

Галоўная ўласьцівасьць стэрэографічных проекцый гэта тая, што круг на кулістай паверхні выявіцца кругам і на плоскай паверхні.

можа быць або лініяй рознай даўжыні, або невялічкай плямай, пунктам. Цень ад кружка можа быць або кругавой лініяй, або простай лініяй, роўнай дыямэтру кружка; цень ад кулі заўсёды ёсьць круг, і г. д.

VIII. Ускладненьні ў утварэньні крышталяў.

Мы разгледзелі асновы сымэтрыі і будовы крышталічнае матэрыі.

Трэба дадаць, што прыродныя крышталі (крышталічныя мінэралі), утвараючыся ў надта складаных прыродных варунках, рэдка даюць правільныя формы тых ці іншых многаграньнікаў. Часьцей мы наглядаем нарослыя і ўрослыя ў пароду крышталічныя індывіды няправільна, аднабока ўтвораныя, з недаразьвітымі або перараазьвітымі гранямі і нават толькі з зачаткамі крышталічных элемэнтаў. Толькі вылічэньне кутоў і іншыя адзнакі дазваляюць, часам, устанавіць крышталёграфічную сынгонію прыродных крышталяў. Да ліку асаблівасьцяй крышталяўтварэньня належаць і так званыя *двайнікі* (блізьнюкі), калі некалькі крышталічных індывідаў зрастаюцца між сабой або прарастаюць адзін аднаго па пэўных законах.

Двайнікі можна групаваць так:

1. Звычайныя двайнікі—два недзялімыя: а) пярвічныя, крышталізацыйныя, в) другачарговыя, мэханічныя (якія ўтвараюцца ад мэханічнага ціску, напрыклад).

2. Складаныя двайнікі—некалькі зьвязаных індывідаў, і завуцца інакш яшчэ полісынтэтычнымі двайнікамі.

Двайнікі можна распазнаць па кутох, бо яны часта ўтвараюць *угнутыя* куты (канты знаходзяцца ў сярэдзіне крышталю). Утварэньне двайнікоў значна зьмяняе сымэтрыю крышталю, павышаючы або паніжаючы яго сынгонію.

ДАДАТАК І.

Над крышталямі можна рабіць шэраг надзвычайна цікавых досьледаў як фізычных, так і хэмічных: вымяраць куты гоніомэтрам, вучыцца проектаваць, дасьледваць оптычныя ўласьцівасьці і г. д. Можна на добрых гранях рабіць „фігуры выяданьня“, уплываючы якім-небудзь квасам (саляным, серчаным і г. д). Па фігурах выяданьня можна часам, вызначаць сынгонію крышталю дасьледваючы элемэнты сымэтрыі гэтых фігур.

Можна, нарэшце, гадаваць з рошчыну штучныя крышталі розных матэрый, як звычайная соль ($NaCl$), квасцы (галын), вітрыоль мядзяны (Cu_2SO_4) і г. д. Для гэтага рашчыняюць соль да насягненьня, працэжваюць рошчын (калі матэрыял нячысты), выпараюць і зноў рашчыняюць да насягненьня („перасычаны рошчын“). Затым апускаюць маленькі крышталік данае матэрыі (лепш на навошчаным воласе) і наглядаюць за ростам крышталю. З вітрыолю мядзянага, напрыклад, можна гадаваць надзвычай прыгожыя і вялікія крышталі. Крышталізацыя (на сонцы) цягнецца некалькі тыдняў.

Прыводзім цяпер шэраг запытаньняў і задач для лепшага ўсваеньня курсу.

Запытаньні і задачы.

1. Назавеце аморфныя матэрыі.
2. Ці мае вада і ртуць крышталічную структуру?
3. Назавеце рэч з восьсю сымэтрыі L^4.
4. Назавеце прадметы з роўніцамі сымэтрыі.
5. Нарысуйце ўсе сымэтрычныя пункты, калі даецца L^5 і P ($\perp$ L^5).
6. Якая сымэтрыя існуе паміж правай і левай рукой?
7. Назавеце некалькі рэчаў з сымэтрыяй сумяшчэньня.
8. Назавеце клясу сымэтрыі, самую багатую на элемэнты сымэтрыі, і пералічэце асноўныя формы гэтае клясы.
9. Якая розьніца паміж сымэтрычнай сыстэмай і сынгоніяй?
10. Якую форму мы атрымаем пры L^4P ($\perp$ да восі) і аднае роўніцы, паралельнай данай восі L^4 і пэрпэндыкулярнай да роўніцы сымэтрыі P?
11. Ці зьмяняецца гэміпінакоід ад зьмены парадку восі (L^3, L^4, L^5, L^6...)?

12. Якія з пірамід сымэтрычных сыстэм уваходзяць у крышталёграфічныя сынгоніі?

13. Ці можа сустракацца на крышталях адна асноўная форма—прызма?

14. Ці магчыма на крышталях трыгональная піраміда? тэтрагональная піраміда? пэнтагональная дыпіраміда?

15. Вызначыць розьніцу паміж крышталёграфічнымі восямі кубічнае і квадратовае сынгоніі.

16. Пастаўце тэтрагональную дыпіраміду на вось У (гэта значыць трымаць між пальцаў канцы гэтае восі); якая гэта будзе вось сымэтрыі?

17. Колькі галоўных роўніц сымэтрыі мае куб? октаэдр? тэтрагональная дыпіраміда? тэтрагональная піраміда? сфэноэдр? гэксагональная дыпіраміда? гэксагональная прызма?

Вызначыць формы і восі па малюнках: 30, 31, 32.

18. Чаму гэксагональная сынгонія мае $6L^2$ (ня $5L^2$, ня $4L^2$)?

19. Колькі сьценак мае дытэтрагональная піраміда? дытэтрагональная дыпіраміда?

20. Якую фігуру дае ў сячэньні дытэтрагональная прызма? тэтрагональная прызма? гэксагональная піраміда?

21. Як назваць прызму з шасьцю гранямі, але з восьсю L^3?

22. Што такое паралелёэдр?

23. Што такое пас граняй?

24. Указаць розьніцу між паралелёэдрам і паралелёгонам.

25. Што завецца тыповым пярвічным паралелёэдрам?

26. Як назваць тыповы паралелёэдр гэксагональнага тыпу?

27. Нарысуйце плоскую сетку пры L^4 і разьмяркуйце на ёй гомолёгічныя пункты.

28. Збудаваць плоскую сетку пры L^6.

29. Давесьці немагчымасьць існаваньня восі L^7.

30. Па якой восі трэба расьцягваць куб, каб атрымаць фігуру тэтрагональнае сынгоніі і якая гэта фігура?

31. Назваць усе формы на мал. 44.

32. Колькі лінейных адзінак будзе мець адлегласьць паміж гомолёгічнымі пунктамі данага раду, калі парамэтр яго будзе азначацца лікам 5?

33. Паказаць грань сымболю $(h\bar{k}l)$, $(\bar{h}k\bar{l})$.

34. Індэкс нейкай грані—па восі У=к=3; індэкс другой грані па тэй-жа восі=к=2; якая з гэтых граняй мае большую велічыню парамэтра па тэй-жа восі?

35. Напісаць сымболі ўсіх граняй ромбічнага додэкаэдра.

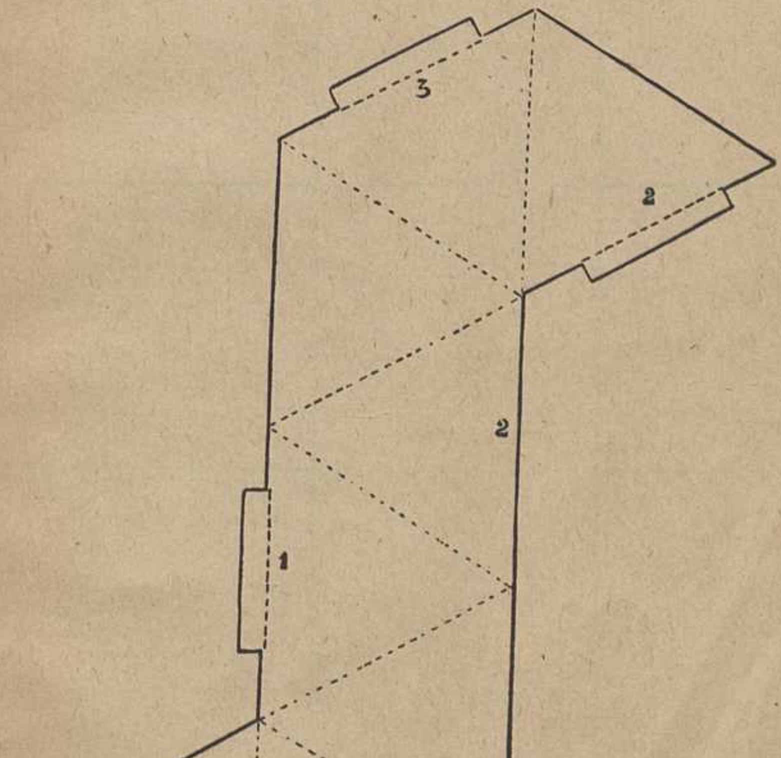
36. Знайдзеце гоніомэтрам кут паміж граняй палявіку, ісляндзкага шпату, горнага крышталю і г. д.

ДАДАТАК II.

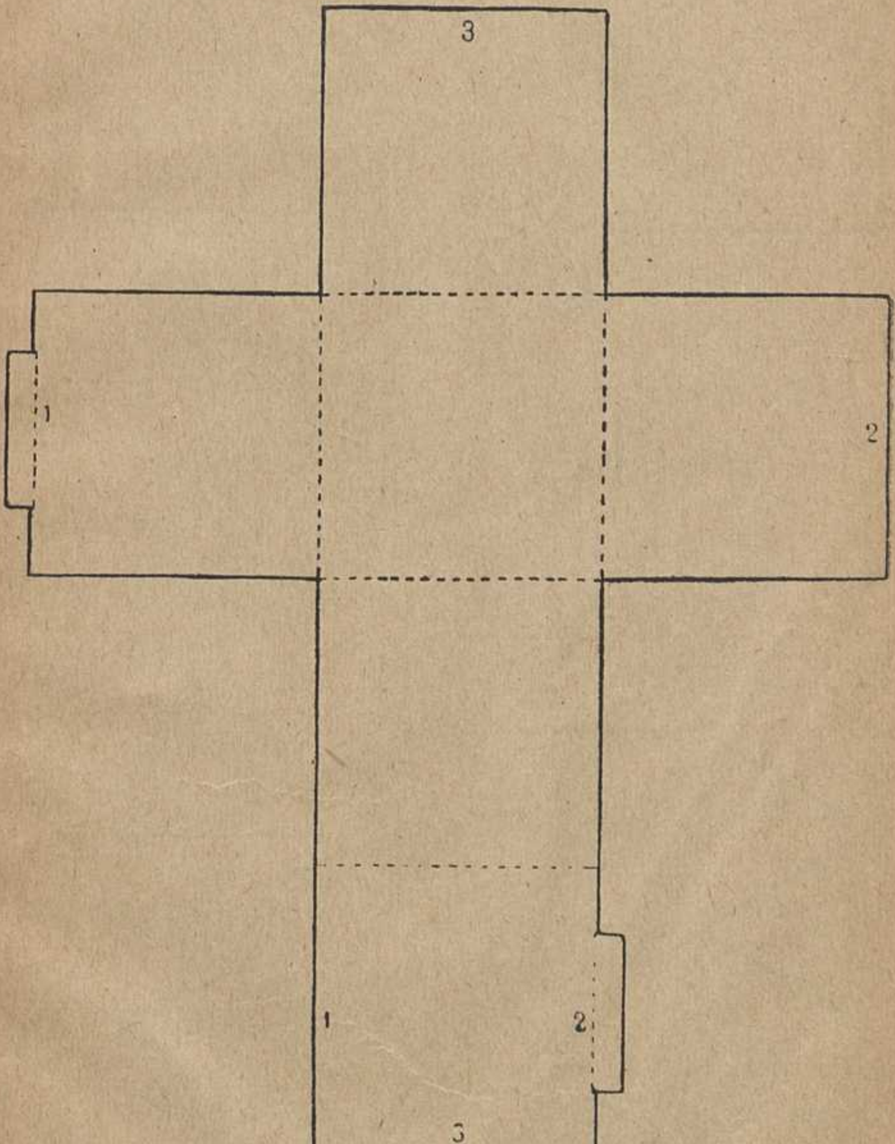
Па прыложаных да кнігі сетках выкрайце з картону і склейце формы крышталічных многаграньнікаў. Для гэтага рысунак (выкрайку) накладаюць на добры картон (чатырох-пяці аркушны „брыстольскі“ або буры ў 0,7-0,8 мілімэтраў), затым усе пункты па кутох пратыкаюць голкай, каб праколы выразна вызначаліся на картоне, злучаюць па лінейцы праколы алоўкам, выразаюць па лініях нажніцамі (запісаўшы лічбы ў тым-жа парадку, як на выкрайцы) і, нарэшце, прымацоўваюць бакі сургучом за „язычкі“.

Рысунак № 1—октаэдр, № 2—тэтраэдр, № 3—куб, № 4—кубо-октаэдр, № 5 — куб з октаэдрам, № 6 — дыпіраміда квадратная, № 7—октаэдр з кубам, № 8—ромбічная прызма, № 9—ромбічная піраміда, № 10—прызма квадратовая, № 11—моноклінная прызма, № 12—трыклінная піраміда, № 13—моноклінная піраміда, № 14—трыклінная прызма (пінакоіды), № 15—гэксагональная піраміда, № 16—гэксагональная прызма з базопінакоідам.

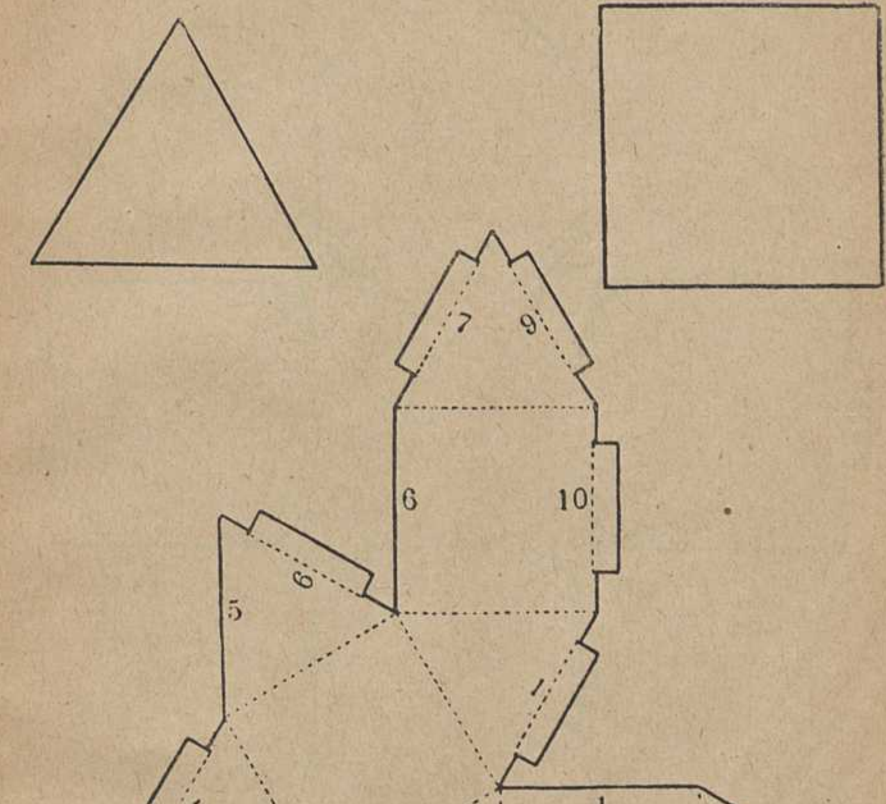
ЗЬМЕСТ



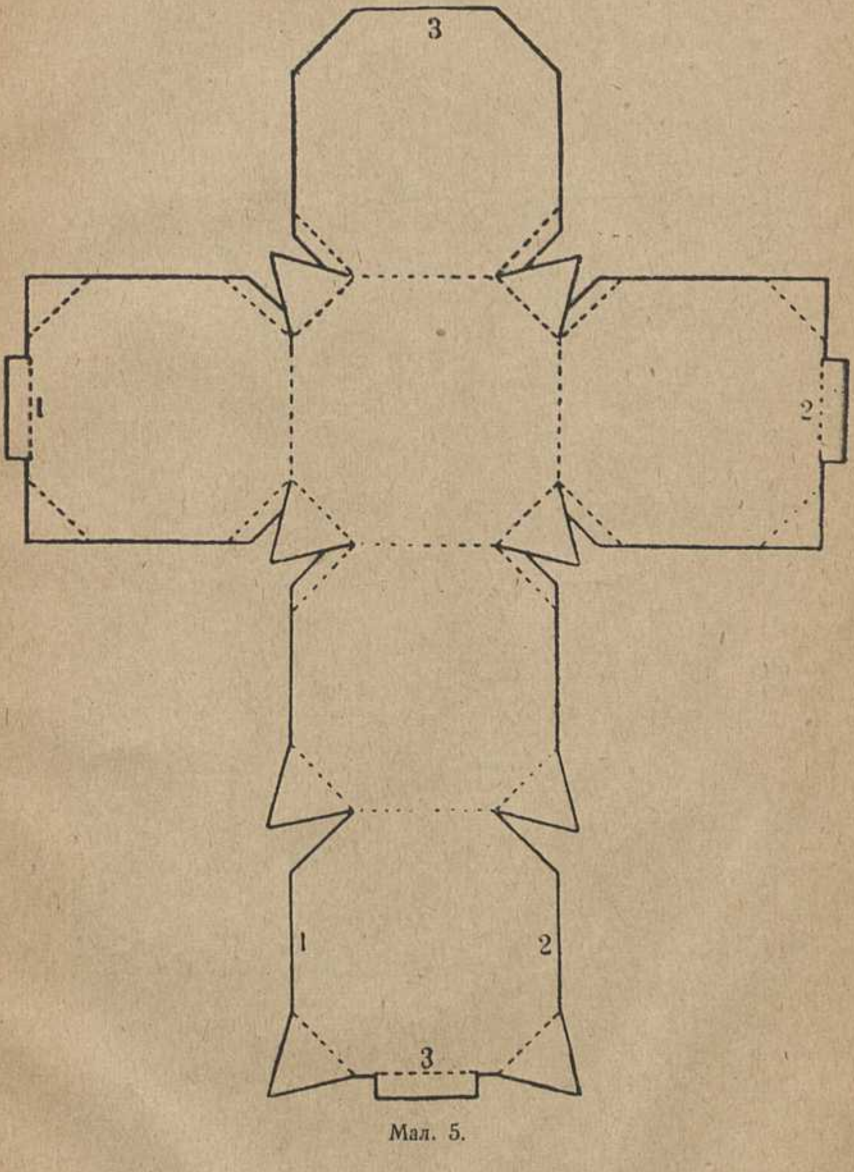
Мал. 1.



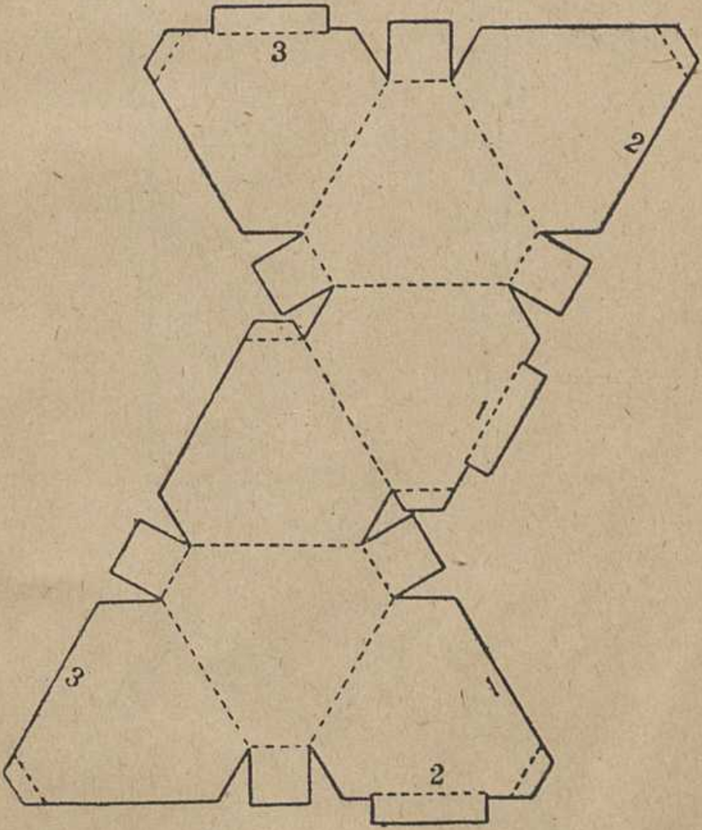
Мал. 3.



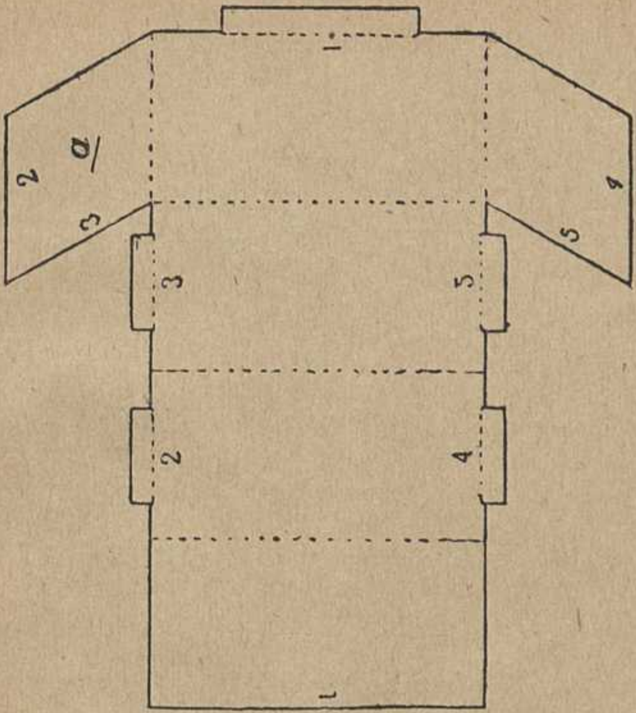
Мал. 4.



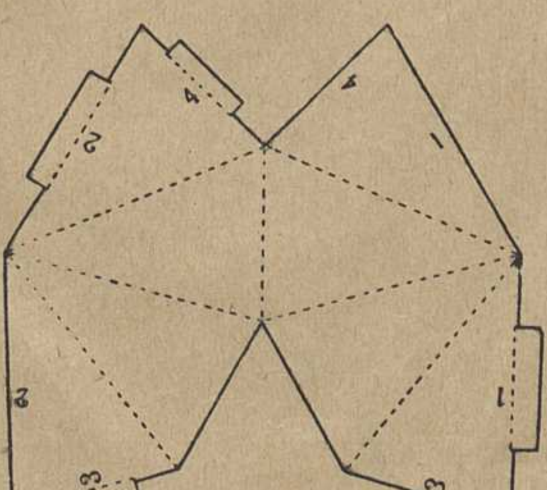
Мал. 5.



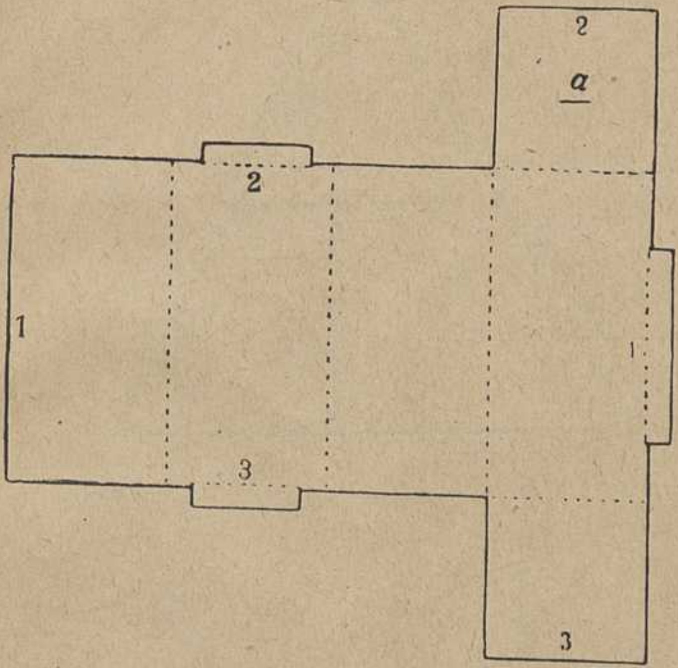
Мал. 7.



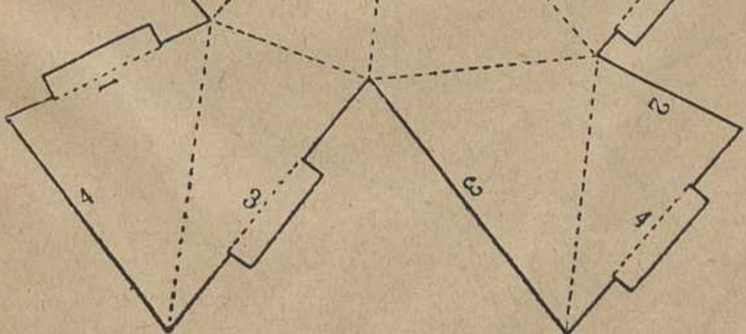
Мал. 8.



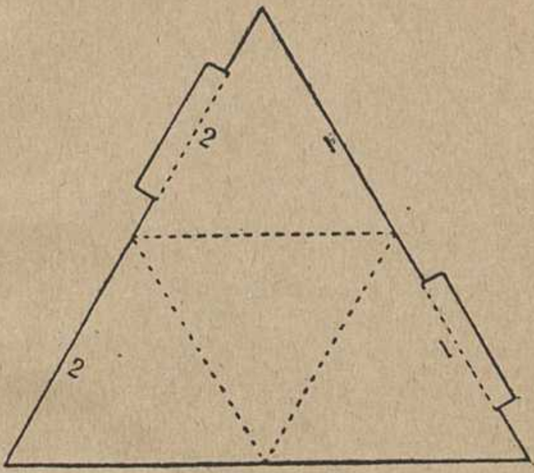
Мал. 9.



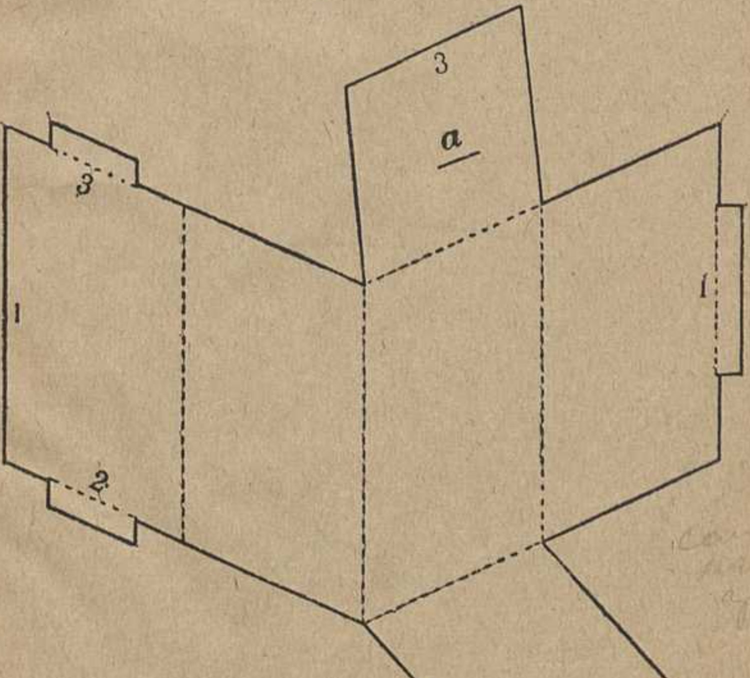
Мал. 10.



Мал. 12.

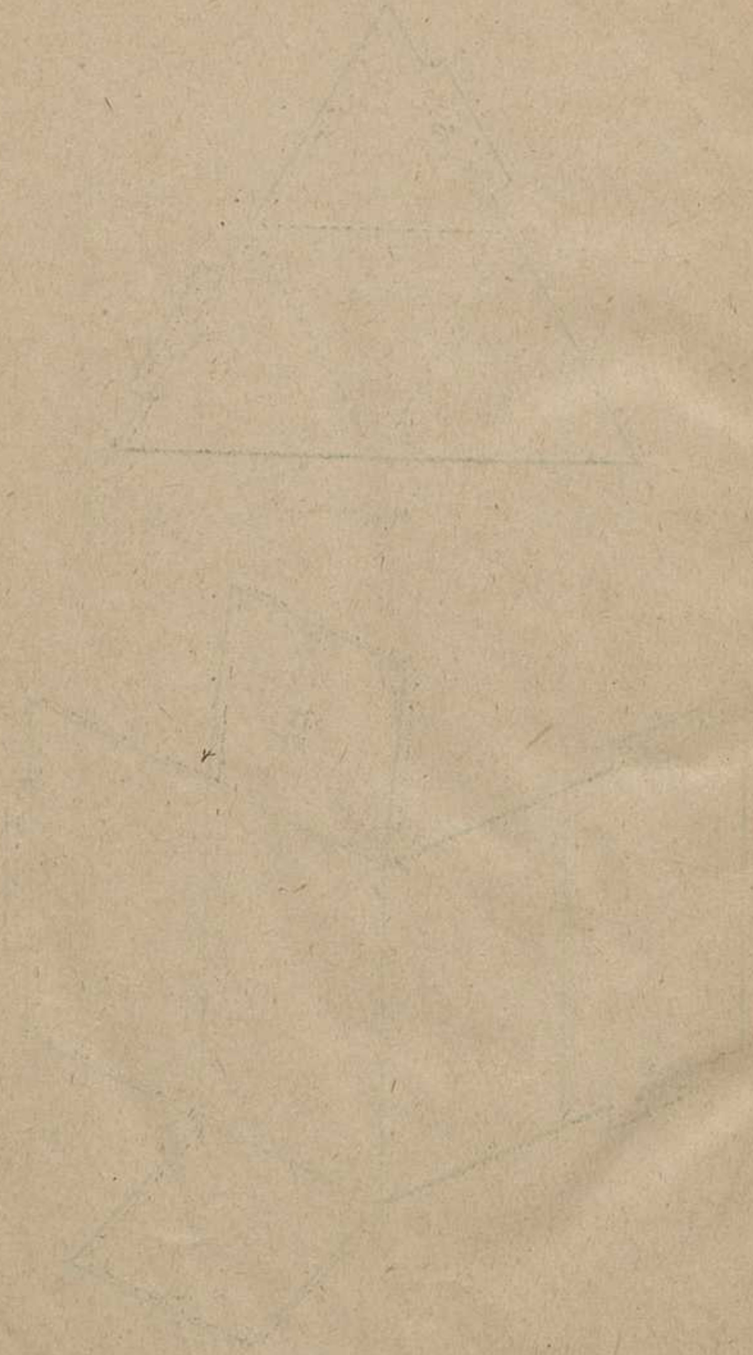


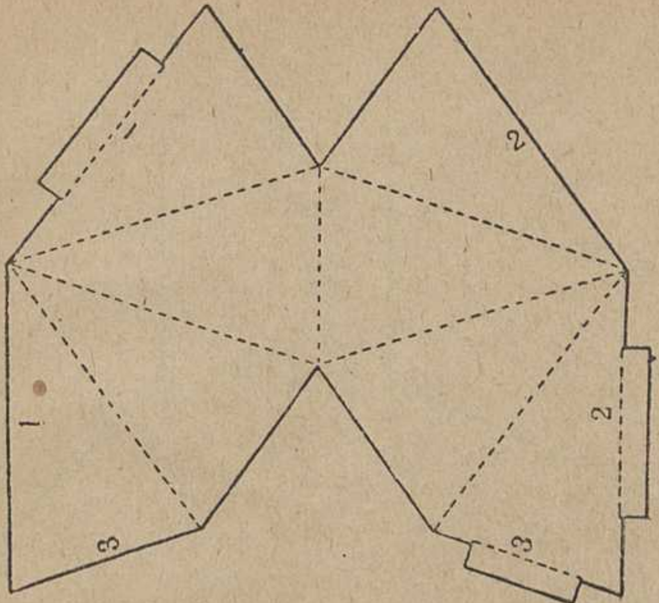
Мал. 2.



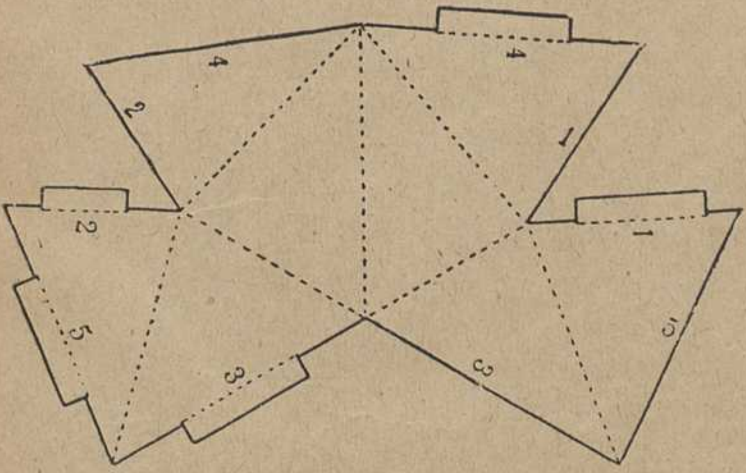
[illegible]

Мал. 11.

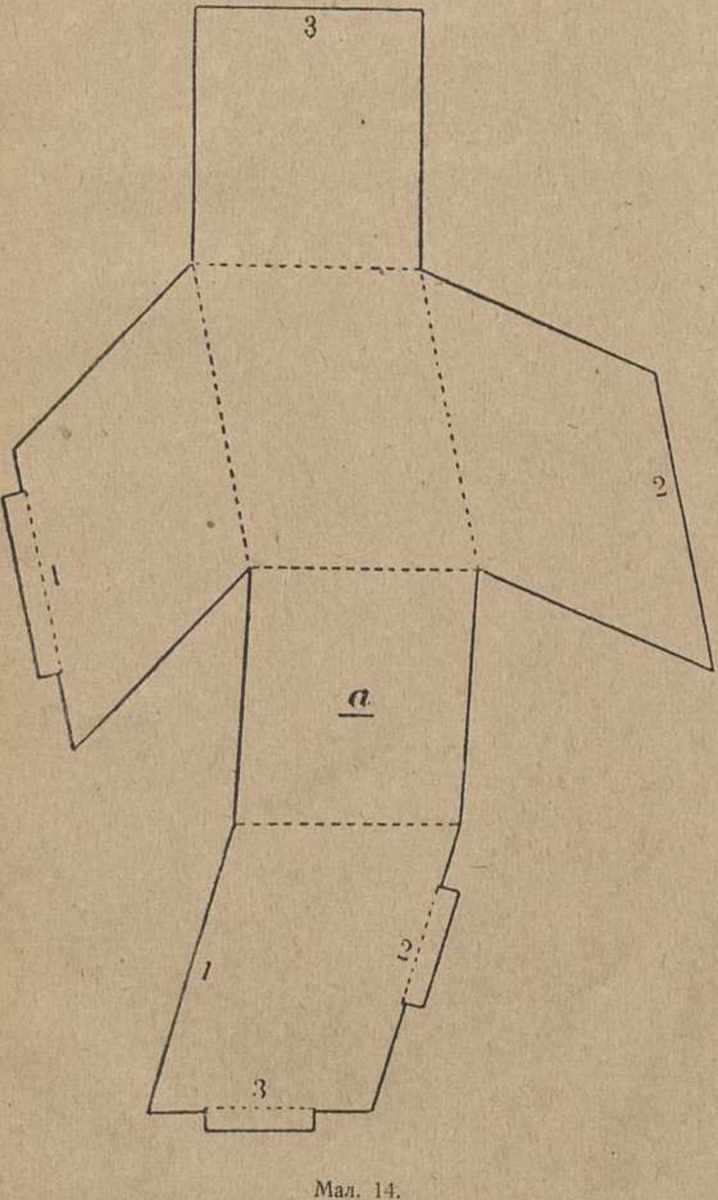




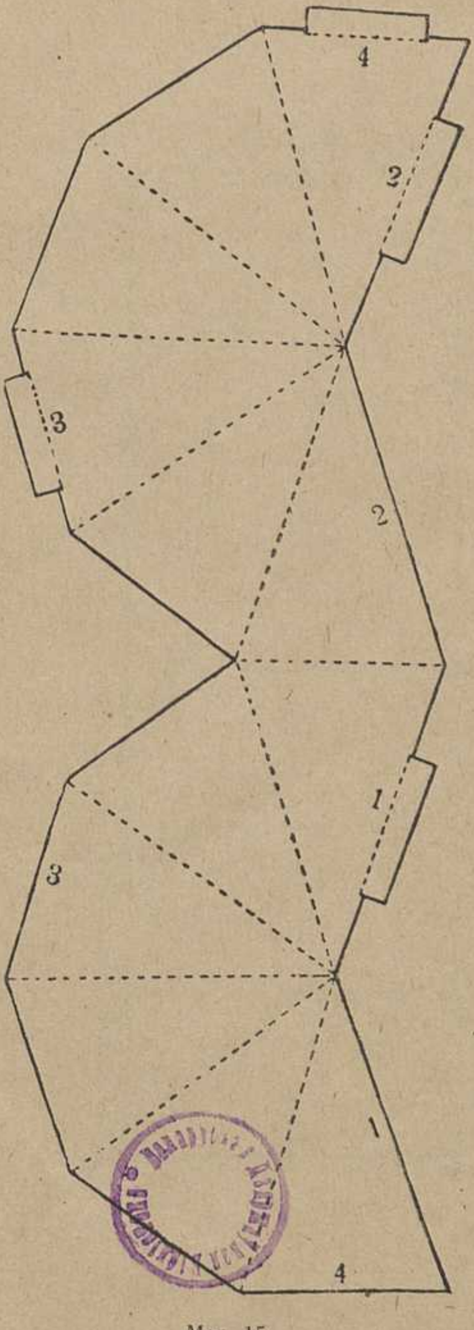
Мал. 6.



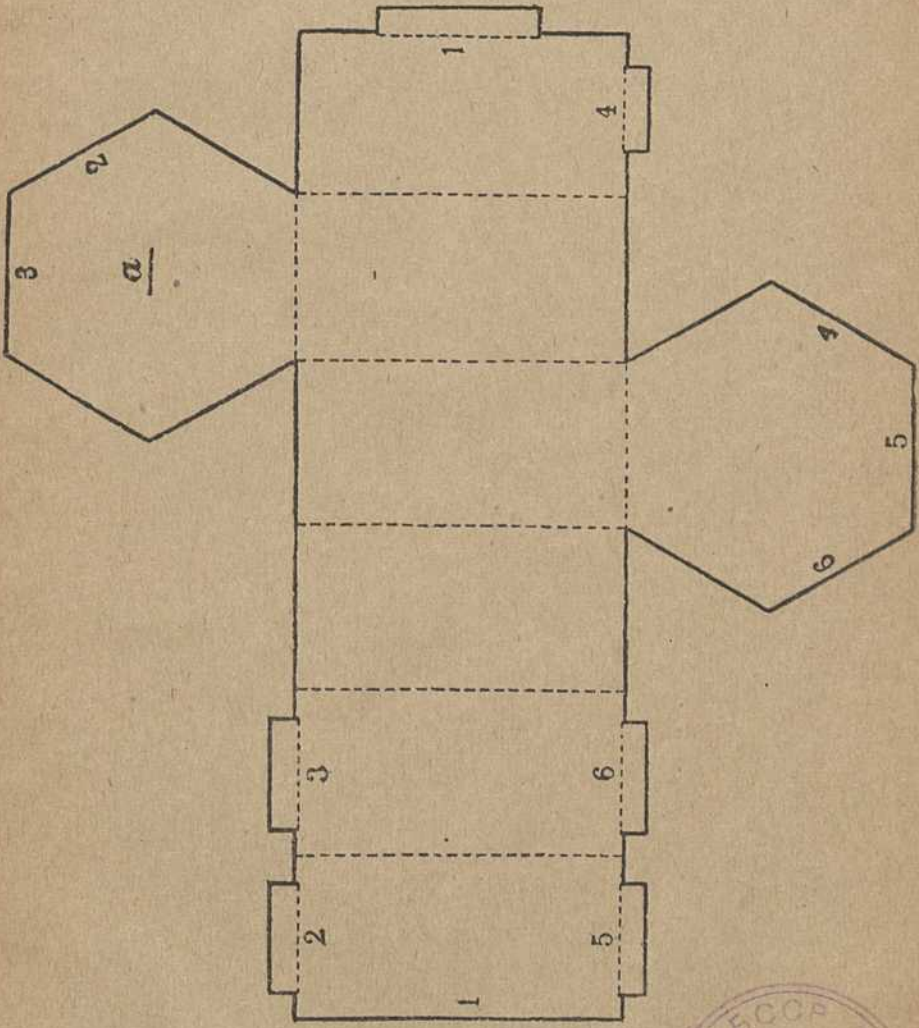
Мал. 13.



Мал. 14.



Мал. 15.



Мал. 16.