

## Grundkurs Mathematik II

### Vorlesung 40

Man muß nur Ein Wesen  
recht von Grund aus lieben,  
da kommen einem die übrigen  
alle liebenswürdig vor!

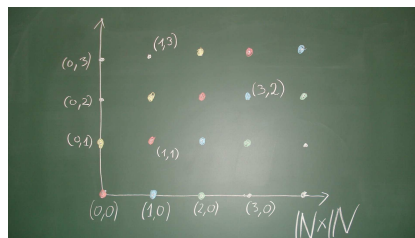
---

Johann Wolfgang von Goethe

Wir besprechen nun mit Hilfe von Äquivalenzrelationen, Äquivalenzklassen und Quotientenmengen erneut, wie man aus den natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  und wie man aus den ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  konstruieren kann. Dieser Zugang ist zwar abstrakter, aber konzeptionell klarer, allgemeiner und systematischer. In einigen Wochen werden wir die reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen ebenfalls mittels Äquivalenzrelationen definieren.

### Die Konstruktion der ganzen Zahlen

Die ganzen Zahlen haben wir in der 18. Vorlesung einfach als die disjunkte Vereinigung von natürlichen und negativen Zahlen eingeführt und dann nach und nach die Verknüpfungen und die Ordnungsrelation festgelegt und die wichtigsten Eigenschaften bewiesen. Dabei hatten wir es häufig, beispielsweise beim Nachweis der Assoziativität für die Multiplikation, mit einer Vielzahl von Fallunterscheidungen zu tun, die wir im Einzelnen gar nicht ausgeführt haben.



Es sei  $\mathbb{N}$  die Menge der natürlichen Zahlen und  $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  die Produktmenge mit der komponentenweisen Addition. Wir erklären auf  $M$  eine Relation durch

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } a + d = b + c.$$

Es wird hier also über Kreuz addiert, um diese Relation zu erhalten. Diese Relation ist bei  $a \leq c$  genau dann erfüllt, wenn es ein  $e \in \mathbb{N}$  (nämlich die natürliche Zahl  $e = c - a$ ) mit

$$(c, d) = (a, b) + (e, e)$$

gibt und bei  $a \geq c$  genau dann erfüllt, wenn es ein  $e \in \mathbb{N}$  (nämlich  $e = a - c$ ) mit

$$(c, d) + (e, e) = (a, b)$$

gibt. So oder so kann man sagen, dass die Paare  $(a, b)$  und  $(c, d)$  äquivalent zueinander sind, wenn sie sich um ein Diagonalelement, also um ein Paar, wo beide Komponenten übereinstimmen, unterscheiden. Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation auf  $M$ . Das ist von der soeben etablierten Interpretation als „gleichdiagonalig“ her klar, kann aber auch direkt gezeigt werden:

- (1) Wegen  $a + b = b + a$  ist  $(a, b) \sim (a, b)$ , die Relation ist also reflexiv.
- (2) Die Symmetrie folgt daraus, dass aus  $a + d = b + c$  sofort  $c + b = d + a$  folgt.
- (3) Zum Nachweis der Transitivität sei  $(a, b) \sim (c, d)$  und  $(c, d) \sim (e, f)$ , also  $a + d = b + c$  und  $c + f = d + e$ . Dann ist

$$a + f + c = a + d + e = b + e + c.$$

Aufgrund der Abziehregel ist dann

$$a + f = b + e,$$

und dies bedeutet  $(a, b) \sim (e, f)$ .

Passende Interpretationen für die Paare mit dieser Äquivalenzrelation sind beispielsweise:

- Das Paar  $(a, b)$  repräsentiert das Ergebnis eines Fußballspieles, wobei  $a$  die Toranzahl der Heimmannschaft und  $b$  die Toranzahl der Gastmannschaft repräsentiert. Zwei Spiele gelten dann als äquivalent, wenn die „gerichtete Differenz“ gleich ist. Ein  $5 : 1$  wird als äquivalent zu einem  $6 : 2$  betrachtet, wenn beide Mannschaften ein weiteres Tor schießen, ändert sich zwar das Paar, aber nicht die Äquivalenzklasse. Die Äquivalenzklassen kann man charakterisieren als Unentschieden, mit einem Tor Vorsprung gewonnen, mit zwei Toren Vorsprung gewonnen, mit drei Toren Vorsprung gewonnen, ... , mit einem Tor Unterschied verloren, mit zwei Toren Unterschied verloren, mit drei Toren Unterschied verloren, ...

- Das Paar  $(a, b)$  repräsentiert das Alter eines menschlichen Paares, wobei  $a$  für das Alter der Frau und  $b$  für das Alter des Mannes steht. Die Äquivalenzklasse ist durch den gerichteten Altersunterschied (also den Altersunterschied mit der zusätzlichen Information, wer älter ist) festgelegt. Diese Beziehung ändert sich im Laufe des Lebens nicht, da beide gleichermaßen älter werden.

- Das Paar  $(a, b)$  kann die Einnahmen und Ausgaben eines Haushaltes in einem Monat beschreiben, wobei die erste Stelle die Einnahmen und die zweite Stelle die Ausgaben repräsentieren möge. Zwei Haushalte sind dann äquivalent, wenn sie den gleichen Überschuss oder das gleiche Defizit erwirtschaftet haben. Wenn Einnahmen und Ausgaben gleichermaßen steigen oder fallen, ändert sich an dieser Gesamtbewertung nichts.
- Man kann das Paar als eine Schrittfolge aus  $a$  Schritten nach rechts und  $b$  Schritten nach links ansehen. Im Paar selbst wird die Anzahl der Schritte in die beiden Richtungen notiert, für die Äquivalenzrelation schaut man nur das Endergebnis des Bewegungsvorganges an.

Wenn man  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  als ein quadratisches Gitter anordnet (das ist ein „diskretes Koordinatensystem“), so sind die Äquivalenzklassen durch die Punkte auf einer zur Diagonalen parallelen „diskreten Geraden“ gegeben. Die Punkte  $(a, b)$  mit  $a \geq b$  sind äquivalent zu  $(a - b, 0)$ , sie haben also einen Repräsentanten, bei dem die zweite Komponente 0 ist. Die Punkte  $(a, b)$  mit  $a \leq b$  sind äquivalent zu  $(0, b - a)$ , sie haben also einen Repräsentanten, bei dem die erste Komponente 0 ist. Die Punkte  $(a, a)$  sind zu  $(0, 0)$  äquivalent. Den Repräsentanten einer Äquivalenzklasse, bei dem mindestens eine Komponente 0 ist, nennen wir den *Standardvertreter* dieser Äquivalenzklasse. Die Standardvertreter sind die diskreten Punkte des begrenzenden Viertelkreuzes; zu einem Punkt ergibt sich der Standardvertreter, indem man parallel zur Diagonalen in Richtung der Halbachsen wandert, bis man auf einer der Halbachsen landet. Zwei Punkte sind genau dann äquivalent, wenn sie den gleichen Standardvertreter besitzen.

Wir bezeichnen nun die Quotientenmenge, also die Menge der Äquivalenzklassen unter dieser Äquivalenzrelation, als *Menge der ganzen Zahlen* und bezeichnen sie mit  $\mathbb{Z}$ . Wir sprechen vom *Äquivalenzklassenmodell* oder *Paarmodell* für die ganzen Zahlen. Diese Quotientenmenge ist die Menge der zur Diagonalen parallelen Geraden, bei der kanonischen Projektion wird jedes Paar  $(a, b)$  auf die Gerade abgebildet, auf der es liegt. Jede ganze Zahl hat genau einen Standardvertreter der Form  $n := (n, 0)$  mit  $n \in \mathbb{N}_+$ , der Form  $0 := (0, 0)$  oder der Form  $-n := (0, n)$  mit  $n \in \mathbb{N}_+$ . Eine natürliche Zahl  $n$  fassen wir in diesem Modell als die ganze Zahl  $(n, 0)$  auf.

Wir wollen nun zwei ganze Zahlen, also zwei solche Äquivalenzklassen  $[(a, b)]$  und  $[(c, d)]$ , miteinander „addieren“, also eine Verknüpfung  $+$  auf  $\mathbb{Z}$  einführen. Ein Ansatz, der sich durch den Zugang über Äquivalenzklassen eröffnet, ist es, auf der Menge der Paare die Addition zu nehmen und zu versuchen, diese Addition auf die Äquivalenzklassen zu übertragen. Die komponentenweise Addition auf  $\mathbb{N}^2$ , also die Verknüpfung

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d),$$

ist recht einfach und insbesondere ist diese Verknüpfung kommutativ, assoziativ und  $(0, 0)$  ist das neutrale Element. Diese Addition hat in den oben

angegebenen Beispielen eine sinnvolle Interpretation, wie wenn man die Ergebnisse von zwei Fußballspielen miteinander addiert (Hin- und Rückspiel, allerdings muss man die Reihenfolge beibehalten) oder den Haushalt von mehreren Monaten addiert.

LEMMA 40.1. *Durch die Festlegung*

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(a + c, b + d)]$$

*erhält man auf (dem Äquivalenzklassenmodell von)  $\mathbb{Z}$  eine Verknüpfung, die kommutativ und assoziativ ist und die  $[(0, 0)]$  als neutrales Element besitzt. Darüber hinaus besitzt jedes Element ein inverses Element, und zwar sind  $[(a, b)]$  und  $[(b, a)]$  invers zueinander.*

*Beweis.* Wir müssen zuerst die Wohldefiniertheit überprüfen, da die Verknüpfung unter Bezug auf Repräsentanten erklärt wird und daher nicht von vornherein klar ist, dass unterschiedliche Repräsentanten zum gleichen Ergebnis (zur gleichen Äquivalenzklasse) führen. Zu  $(a, b) \sim (a', b')$  und  $(c, d) \sim (c', d')$  muss man überprüfen, dass

$$(a + c, b + d) \sim (a' + c', b' + d')$$

und damit  $[(a + c, b + d)] = [(a' + c', b' + d')]$  gilt. Die beiden Voraussetzungen bedeuten ausgeschrieben  $a + b' = a' + b$  und  $c + d' = c' + d$ . Damit ist durch Addition der beiden Gleichungen

$$a + b' + c + d' = a' + b + c' + d,$$

was die Äquivalenz bedeutet. Die kanonische Abbildung

$$q: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, (a, b) \longmapsto [(a, b)],$$

verträgt sich nach Konstruktion mit der Addition auf der Produktmenge und der soeben etablierten Addition auf  $\mathbb{Z}$ , es ist also

$$q(x + y) = q(x) + q(y)$$

für alle  $x, y \in \mathbb{N}^2$ . In einer solchen Situation übertragen sich wegen der Surjektivität der kanonischen Abbildung Rechengesetze von  $\mathbb{N}^2$  direkt auf die Quotientenmenge. Für das Assoziativgesetz beispielsweise betrachten wir Elemente  $r, s, t \in \mathbb{Z}$ . Es gibt  $x, y, z \in \mathbb{N}^2$  mit  $q(x) = r$ ,  $q(y) = s$ ,  $q(z) = t$ . Somit ist

$$\begin{aligned} r + (s + t) &= q(x) + (q(y) + q(z)) \\ &= q(x) + q(y + z) \\ &= q(x + (y + z)) \\ &= q((x + y) + z) \\ &= q(x + y) + q(z) \\ &= (q(x) + q(y)) + q(z) \\ &= (r + s) + t. \end{aligned}$$

Der Nachweis der Kommutativität und dass  $[(0, 0)]$  das neutrale Element der Verknüpfung ist, verläuft ähnlich einfach. Wegen

$$[(a, b)] + [(b, a)] = [(a + b, a + b)] = [(0, 0)] = 0$$

ist in der Tat  $[(b, a)]$  das inverse Element zu  $[(a, b)]$ .  $\square$

LEMMA 40.2. *Durch die Festlegung*

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac + bd, ad + bc)]$$

*erhält man auf (dem Äquivalenzklassenmodell von)  $\mathbb{Z}$  eine Verknüpfung, die kommutativ und assoziativ ist und die  $[(1, 0)]$  als neutrales Element besitzt.*

*Beweis.* Zunächst ist die Wohldefiniertheit zu zeigen. Seien also  $(a, b) \sim (a', b')$  und  $(c, d) \sim (c', d')$  gegeben, was  $a + b' = a' + b$  und  $c + d' = c' + d$  bedeutet. Somit ist auch

$$a'(c'+d)+b'(c+d')+d(a+b')+c(a'+b) = a'(c+d')+b'(c'+d)+d(a'+b)+c(a+b').$$

Eine direkte Überprüfung zeigt

$$\begin{aligned} & (ac + bd + a'd' + b'c') + a'(c' + d) + b'(c + d') + d(a + b') + c(a' + b) \\ &= (a'c' + b'd' + ad + bc) + a'(c + d') + b'(c' + d) + d(a' + b) + c(a + b'). \end{aligned}$$

Mit der Abziehregel folgt

$$ac + bd + a'd' + b'c' = a'c' + b'd' + ad + bc,$$

und dies bedeutet

$$[(ac + bd, ad + bc)] = [(a'c' + b'd', a'd' + b'c')],$$

also die Wohldefiniertheit. Die Kommutativität folgt direkt aus der Definition der Verknüpfung, ebenso die Eigenschaft, dass  $[(1, 0)]$  das neutrale Element ist. Die Assoziativität ergibt sich aus

$$\begin{aligned} (([a, b])[c, d])[e, f] &= [(ac + bd, ad + bc)] \cdot [(e, f)] \\ &= [(ace + bde + adf + bcf, acf + bdf + ade + bce)] \\ &= [(a, b)][(ce + fd, de + cf)] \\ &= [(a, b)]([c, d])[e, f]. \end{aligned}$$

$\square$

SATZ 40.3. *Das Äquivalenzklassenmodell von  $\mathbb{Z}$  ist mit der Addition*

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(a + c, b + d)],$$

*der Multiplikation*

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac + bd, ad + bc)],$$

*dem Nullelement  $[(0, 0)]$  und dem Einselement  $[(1, 0)]$  ein kommutativer Ring.*

*Beweis.* Aufgrund von Lemma 40.1 und Lemma 40.2 müssen wir nur noch das Distributivgesetz überprüfen. Dieses ist wegen

$$\begin{aligned} [(a, b)] ([ (c, d) ] + [ (e, f) ]) &= [(a, b)] [(c + e, d + f)] \\ &= [(ac + ae + bd + bf, ad + af + bc + be)] \\ &= [(ac + bd, ad + bc)] + [(ae + bf, af + be)] \\ &= [(a, b)] [(c, d)] + [(a, b)] [(e, f)] \end{aligned}$$

erfüllt. □

LEMMA 40.4. *Durch die Festlegung*

$$[(a, b)] \geq [(c, d)],$$

*falls*

$$a + d \geq b + c,$$

*erhält man auf (dem Äquivalenzklassenmodell von)  $\mathbb{Z}$  eine totale Ordnung.*

*Beweis.* Zum Nachweis der Wohldefiniertheit sei  $a + d \geq b + c$  und seien  $(a, b) \sim (a', b')$  und  $(c, d) \sim (c', d')$ , also  $a + b' = a' + b$  und  $c + d' = c' + d$ . Es ist

$$\begin{aligned} a' + d' + (c' + d + a + b') &= a + d + a' + c' + d' + b' \\ &\geq b + c + a' + c' + d' + b' \\ &= b' + c' + (c + d' + a' + b). \end{aligned}$$

Da die Ausdrücke in den Klammern nach Voraussetzung übereinstimmen, folgt nach der Abziehregel für die Ordnung auf  $\mathbb{N}$  auch

$$a' + d' \geq b' + c',$$

also die Wohldefiniertheit. Dass die Ordnung total ist, folgt unmittelbar aus der Definition und der entsprechenden Eigenschaft der Ordnung von  $\mathbb{N}$ . Die Reflexivität ist unmittelbar klar, die Antisymmetrie folgt direkt aus der Definition der Gleichheit auf  $\mathbb{Z}$ . Zum Nachweis der Transitivität sei

$$[(a, b)] \geq [(c, d)] \geq [(e, f)],$$

also  $a + d \geq b + c$  und  $c + f \geq d + e$ . Durch Addition mit  $f$  bzw. mit  $b$  erhält man

$$a + d + f \geq b + c + f \geq b + d + e,$$

woraus  $a + f \geq b + e$  folgt, also  $[(a, b)] \geq [(e, f)]$ . □

SATZ 40.5. *Das Äquivalenzklassenmodell von  $\mathbb{Z}$  ist mit der Addition*

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(a + c, b + d)],$$

*der Multiplikation*

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac + bd, ad + bc)],$$

*dem Nullelement  $[(0, 0)]$ , dem Einselement  $[(1, 0)]$  und der durch*

$$[(a, b)] \geq [(c, d)],$$

falls

$$a + d \geq b + c,$$

definierten Ordnung ein angeordneter Ring.

*Beweis.* Nach Satz 40.3 ist  $\mathbb{Z}$  ein kommutativer Ring und nach Lemma 40.4 ist  $\geq$  eine totale Ordnung. Wir müssen also lediglich noch die Verträglichkeit der Ordnung mit der Addition und der Multiplikation überprüfen. Sei

$$[(a, b)] \geq [(c, d)],$$

also  $a + d \geq b + c$ , und  $[(e, f)]$  beliebig. Dann ist auch

$$a + d + e + f \geq b + c + e + f,$$

also

$$[(a, b)] + [(e, f)] = [(a + e, b + f)] \geq [(c + e, d + f)] = [(c, d)] + [(e, f)].$$

Wenn  $[(a, b)] \geq 0$  und  $[(c, d)] \geq 0$  ist, so ist  $a \geq b$  und  $c \geq d$ . Mit Aufgabe 10.20 ergibt sich

$$ac + bd \geq ad + bc,$$

was

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(ac + bd, ad + bc)] \geq 0$$

bedeutet. □

Die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  sind über die Zuordnung

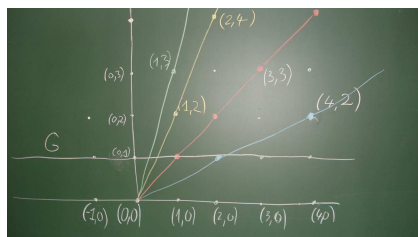
$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, n \longmapsto [(n, 0)],$$

in den ganzen Zahlen enthalten. Diese Zuordnung ist mit der Addition, der Multiplikation und der Ordnung verträglich, siehe Aufgabe 40.5. Statt  $(n, 0)$  schreibt man einfach  $n$ . Die ganzen Zahlen, die durch  $(0, n)$  mit  $n \in \mathbb{N}_+$  repräsentiert werden, heißen negative Zahlen. Statt  $(0, n)$  schreibt man einfach  $-n$ .

In den Aufgaben wird gezeigt, dass das Paarmodell für  $\mathbb{Z}$  mit dem im ersten Semester eingeführten Modell übereinstimmt.

## Die Konstruktion der rationalen Zahlen

Wir wollen ausgehend von der Menge der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$ , die einen kommutativen Ring bildet, die Menge der *rationalen Zahlen* konstruieren. Wir gehen dabei ähnlich wie bei der Konstruktion der ganzen Zahlen aus den natürlichen Zahlen vor, indem wir auf einer „zu großen“ Menge eine Äquivalenzrelation einführen, so dass die Quotientenmenge ein Modell für die rationalen Zahlen ist. Die Konstruktion und die Beweise sind nicht wesentlich verschieden von den in der 23. Vorlesung durchgeführten, als wir die Sprache der Äquivalenzrelationen noch nicht zur Verfügung hatten.



Wir starten mit der Produktmenge

$$P = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{N}_+\}.$$

Zur Orientierung sei schon jetzt gesagt, dass das Paar  $(a, b)$  später den Bruch  $a/b$  repräsentieren soll.

Man kann sich vorstellen, dass in  $(a, b)$  die erste Zahl eine Anzahl an Kuchen und die zweite Zahl eine Anzahl an Personen bedeutet, oder die Anzahl der Frauen und die Anzahl der Männer auf einer Party, oder irgendein Paar, das einen proportionalen Zusammenhang repräsentiert.

Auf  $P$  wollen wir eine Äquivalenzrelation definieren, wobei zwei Paare als äquivalent gelten sollen, wenn sie „den gleichen Bruch“ repräsentieren (den es noch nicht gibt). Wir definieren

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } ad = bc \text{ ist.}$$

Diese Relation wird also unter Bezug auf die Gleichheit in  $\mathbb{Z}$  erklärt. Es handelt sich dabei um eine Äquivalenzrelation, wie man direkt nachrechnen kann, siehe Aufgabe 40.1. Insbesondere sind  $(a, b)$  und  $(ae, be)$  für  $e \neq 0$  zueinander äquivalent.

Es ist hilfreich, sich diese Situation zu veranschaulichen, indem man die diskrete obere Halbebene<sup>1</sup>  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  betrachtet. Ein Paar  $(a, b)$  ist dann ein Gitterpunkt, wobei wir uns die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  als die Punkte

$$(n, 1), n \in \mathbb{Z},$$

vorstellen. Die zugehörige durchgezogene „Zahlengerade“ (wo also die zweite Komponente konstant 1 ist.) bezeichnen wir mit  $G$ . Ein jeder Punkt  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$  definiert eine eindeutige Gerade, die durch diesen Punkt und durch den Nullpunkt  $(0, 0)$  verläuft. In dieser geometrischen Interpretation sind zwei Punkte  $(a, b)$  und  $(c, d)$  genau dann äquivalent, wenn sie die gleiche Gerade definieren, und dies ist genau dann der Fall, wenn ihre „Steigungen“ übereinstimmen. Zwei Punkte liegen ja genau dann auf der gleichen Geraden, wenn sie, wenn man durch Streckung ihre zweite Koordinate zur Übereinstimmung bringt, dann auch die erste Koordinate übereinstimmt. Wenn man den ersten Punkt mit  $d$  streckt (multipliziert) und den zweiten Punkt mit  $b$ , so erhält man die beiden Punkte  $(da, db)$  und  $(bc, bd)$ , und die Gleichheit

<sup>1</sup>Man könnte auch  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$  nehmen.



vorne war die Definition für die Relation. Die Äquivalenzklassen sind die „diskreten Geraden“ durch den Nullpunkt und einen weiteren Gitterpunkt.

Auch die Identifizierungsabbildung zu dieser Äquivalenzrelation kann man sich gut vorstellen. Der Schnittpunkt der durch einen Punkt  $(a, b)$  definierten Geraden  $H$  mit der Zahlengeraden  $G$  ist ein Punkt, der dem Bruch  $a/b$  entspricht (die Steigung der Geraden  $H$  ist aber  $\frac{a}{b}$ ).

Die Quotientenmenge unter dieser Äquivalenzrelation nennen wir  $\mathbb{Q}$  und sprechen vom *Äquivalenzklassenmodell* für  $\mathbb{Q}$ . Für die Elemente in  $\mathbb{Q}$  schreiben wir vorläufig noch  $[(a, b)]$ . Wir wollen nun auf  $\mathbb{Q}$  eine Addition und eine Multiplikation definieren.

LEMMA 40.6. *Durch die Festlegung*

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(ad + bc, bd)]$$

*erhält man auf (dem Äquivalenzklassenmodell von)  $\mathbb{Q}$  eine Verknüpfung, die kommutativ und assoziativ ist und die  $[(0, 1)]$  als neutrales Element besitzt. Darüber hinaus besitzt jedes Element ein inverses Element, und zwar sind  $[(a, b)]$  und  $[(-a, b)]$  invers zueinander.*

*Beweis.* Zum Nachweis der Wohldefiniertheit seien  $[(a, b)] = [(a', b')]$  und  $[(c, d)] = [(c', d')]$ , also  $ab' = a'b$  und  $cd' = c'd$ . Dann ist

$$ab'dd' + bb'cd' = a'bdd' + bb'c'd$$

und somit

$$[(ad + bc, bd)] = [(a'd' + b'c', b'd')].$$

Die Kommutativität und die Eigenschaft, dass  $[(0, 1)]$  das neutrale Element der Verknüpfung ist, folgen unmittelbar aus der Definition. Zum Beweis der Assoziativität seien  $[(a, b)]$ ,  $[(c, d)]$ ,  $[(e, f)]$  gegeben. Es ist dann

$$\begin{aligned} [(a, b)]([(c, d)][(e, f)]) &= [(a, b)]([(cf + de, df)]) \\ &= [(bcf + bde + adf, bdf)] \\ &= [(ad + bc, bd)][(e, f)] \\ &= (([a, b])[c, d])[e, f]. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$[(a, b)] + [(-a, b)] = [ab - ab, b^2] = [(0, b^2)] = [(0, 1)] = 0.$$

□

LEMMA 40.7. *Durch die Festlegung*

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac, bd)]$$

*erhält man auf (dem Äquivalenzklassenmodell von)  $\mathbb{Q}$  eine Verknüpfung, die kommutativ und assoziativ ist und die  $[(1, 1)]$  als neutrales Element besitzt. Darüber hinaus besitzt jedes Element  $\neq 0$  ein inverses Element, und zwar sind bei  $a > 0$  die Klassen  $[(a, b)]$  und  $[(b, a)]$  und bei  $a < 0$  die Klassen  $[(a, b)]$  und  $[(-b, -a)]$  invers zueinander.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 40.8. □

SATZ 40.8. Das Äquivalenzklassenmodell von  $\mathbb{Q}$  ist mit der Addition

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(ad + bc, bd)],$$

der Multiplikation

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac, bd)],$$

dem Nullelement  $[(0, 1)]$  und dem Einselement  $[(1, 1)]$  ein Körper.

*Beweis.* Dies folgt aus Lemma 40.6 und aus Lemma 40.7, es ist somit lediglich noch das Distributivgesetz zu begründen. Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned} [(a, b)] \left( [(c, d)] + [(e, f)] \right) &= [(a, b)][(cf + de, df)] \\ &= [(acf + ade, bdf)] \\ &= [(acf, bdf)] + [(ade, bdf)] \\ &= [(ac, bd)] + [(ae, bf)] \\ &= [(a, b)][(c, d)] + [(a, b)][(e, f)]. \end{aligned}$$

□

LEMMA 40.9. Durch die Festlegung  $[(a, b)] \geq [(c, d)]$ , falls  $ad \geq bc$ , erhält man auf (dem Äquivalenzklassenmodell von)  $\mathbb{Q}$  eine totale Ordnung.

*Beweis.* Siehe Aufgabe 40.11. □

SATZ 40.10. Das Äquivalenzklassenmodell von  $\mathbb{Q}$  ist mit der Addition

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(ad + bc, bd)],$$

der Multiplikation

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac, bd)],$$

dem Nullelement  $[(0, 1)]$ , dem Einselement  $[(1, 1)]$  und der durch

$$[(a, b)] \geq [(c, d)],$$

falls

$$ad \geq bc,$$

definierten Ordnung ein angeordneter Körper.

*Beweis.* Dies folgt aus Satz 40.8 und Lemma 40.9, es bleibt nur noch die Verträglichkeit der Ordnung mit den Verknüpfungen zu zeigen. Sei

$$[(a, b)] \geq [(c, d)],$$

also  $ad \geq bc$ , und  $[(e, f)]$  beliebig. Wegen  $f > 0$  ist dann auch  $adf \geq bcf$  und somit

$$\begin{aligned} [(a, b)] + [(e, f)] &= [(af + be, bf)] \\ &= [(adf + bde, bdf)] \\ &\geq [(bcf + bde, bdf)] \\ &= [(cf + de, df)] \\ &= [(c, d)] + [(e, f)]. \end{aligned}$$

Wenn  $[(a, b)] \geq 0$  und  $[(c, d)] \geq 0$  ist, so sind  $a, c$  positiv und dann ist auch  $ac$  positiv, also

$$[(a, b)][(c, d)] = [ac, bd] \geq 0.$$

□

Die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  sind über die Zuordnung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}, n \longmapsto [(n, 1)],$$

in den rationalen Zahlen enthalten. Diese Zuordnung ist mit der Addition, der Multiplikation und der Ordnung verträglich, siehe Aufgabe 41.12. Für die Äquivalenzklasse  $[(a, b)]$  schreibt man abkürzend  $\frac{a}{b}$ .



## Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Construction blackboard integers.jpg , Autor = Construction  
blackboard integers (= Benutzer Darapti auf Commons), Lizenz =  
CC-by-sa 3.0 1
- Quelle = Konstruktionen 007.jpg , Autor = Benutzer Darapti auf  
Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 8