Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Grundkurs Mathematik I

Vorlesung 13

Elementare Kombinatorik

In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns mit elementarer Kombinatorik, dabei ist ein wichtiges Ziel, die Binomialkoeffizienten einzuführen, um die allgemeine binomische Formel formulieren und beweisen zu können. Die Kombinatorik beschäftigt sich mit dem systematischen Abzählen (Anzahl bestimmen) von endlichen Mengen. Zwei wichtige Prinzipien haben wir schon kennengelernt, nämlich das Additivitätsprinzip für disjunkte Mengen (Satz 8.12) und das Multiplikativitätsprinzip für Produktmengen (Satz 9.4). In der folgenden Aussage bezeichnen wir zu einer Abbildung

$$f\colon L \longrightarrow M$$

zu $y \in M$ die Menge

$$f^{-1}(y) := \{x \in L \mid f(x) = y\}$$

als *Urbildmenge* zu y.

Satz 13.1. *Es seien L und M endliche Mengen und es sei*

$$f\colon L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Dann gilt

$$\#(L) = \sum_{y \in M} \#(f^{-1}(y)).$$

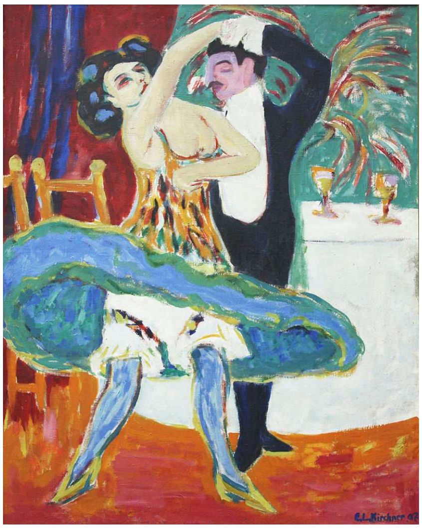
Beweis. Da jedes Element $x \in L$ auf genau ein Element aus M abgebildet wird, liegt eine disjunkte Vereinigung

$$L = \biguplus_{y \in M} f^{-1}(y)$$

vor. Nach Satz 8.12 ist daher die Gesamtanzahl der Menge gleich der Summe der disjunkten Teilmengen. $\square$

Die Fakultät

Bei einem Tanzkurs mit n Damen und n Herren gilt heute beim Schneewalzer Damenwahl, wobei die Damen in der Reihenfolge ihrer Sitzordnung wählen dürfen. Die erste Dame hat n Wahlmöglichkeiten, die zweite $n-1$ Möglichkeiten, die dritte $n-2$ Möglichkeiten, u.s.w., die vorletze Dame hat noch zwei Möglichkeiten und für die letzte Dame verbleibt eine Möglichkeit.



Dieses Tanzpaar hat sich schon gefunden. Für die verbliebenen Personen gibt es insgesamt noch $(n-1)!$ Möglichkeiten (Gemälde von Ernst Ludwig Kirchner).

Definition 13.2. Zu einer natürlichen Zahl n nennt man die Zahl

$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

die *Fakultät* von n (sprich n Fakultät).

Man setzt $0! = 1$. Für kleine n erhält man die folgende Wertetabelle.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

Lemma 13.3. *Auf einer endlichen Menge M mit n Elementen gibt es $n!$ bijektive Abbildungen von M nach M.*

Beweis. Wir zeigen etwas allgemeiner, dass es zwischen zwei endlichen Mengen M und N, die beide n Elemente besitzen, $n!$ bijektive Abbildungen gibt. Dies zeigen wir durch Induktion nach n, wobei der Fall[1] $n = 1$ klar ist. Die

[1]Man kann auch bei $n = 0$ beginnen, dann geht es um die Anzahl der Abbildungen von einer leeren Menge in eine leere Menge. Da gibt es in der Tat eine Abbildung, nämlich die leere Abbildung, was auch der Grund ist, warum man $0! = 1$ setzt.

Aussage sei nun für n schon bewiesen und es liegen zwei $(n+1)$-elementige Mengen M und N vor. Es sei $x \in M$ ein fixiertes Element. Dann gibt es für die Bilder $\varphi(x)$ genau $n+1$ Möglichkeiten, nämlich die Anzahl der Menge N. Wenn dies festgelegt ist, so entsprechen die bijektiven Abbildungen von M nach N mit

$$\varphi(x) = y$$

den bijektiven Abbildungen von $M \setminus \{x\}$ nach $N \setminus \{y\}$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es $n!$ solche bijektiven Abbildungen. Daher ist die Anzahl der bijektiven Abbildungen zwischen M und N gleich

$$(n+1) \cdot n! = (n+1)!$$

□

Gleichbedeutend damit ist, dass es $n!$ Möglichkeiten gibt, n Objekte auf n Plätze zu verteilen bzw. $n!$ Möglichkeiten, eine Menge von n Objekten abzuzählen.

Beispiel 13.4. Wir möchten eine vollständige Liste von allen bijektiven Abbildungen von der Menge $\{1, 2, 3\}$ in die Menge $\{a, b, c\}$ in der Form von Wertetabellen angeben. Wegen

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

gibt es sechs solche Abbildungen. Es gibt keine natürliche Reihenfolge dieser Abbildungen, dennoch kann man hier mehr oder weniger systematisch vorgehen. Beispielsweise kann man den Wert an der Stelle 1 zuerst festlegen und dann die möglichen Kombinationen für 2 und 3 durchgehen. Dies führt auf die folgenden Wertetabellen.

x	1	2	3
$\varphi_1(x)$	a	b	c

x	1	2	3
$\varphi_2(x)$	a	c	b

x	1	2	3
$\varphi_3(x)$	b	a	c

x	1	2	3
$\varphi_4(x)$	b	c	a

x	1	2	3
$\varphi_5(x)$	c	a	b

x	1	2	3
$\varphi_6(x)$	c	b	a

Die Binomialkoeffizienten

Definition 13.5. Es seien k und n natürliche Zahlen mit $k \leq n$. Dann nennt man

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

den *Binomialkoeffizienten* „n über k“.

Von der Definition her ist es nicht sofort klar, dass $k!(n-k)!$ ein Teiler von $n!$ ist und dass es sich somit bei den Binomialkoeffizienten um natürliche Zahlen handelt. Dies folgt aus der folgenden Beziehung.

Satz 13.6. *Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen in einer n-elementigen Menge ist der Binomialkoeffizient*

$$\binom{n}{k}.$$

Insbesondere sind die Binomialkoeffizienten natürliche Zahlen.

Beweis. Es sei M eine n-elementige Menge und

$$T \subseteq M$$

eine k-elementige Teilmenge. Wir betrachten die Menge aller bijektiven Abbildungen

$$\{1, \ldots, n\} \longrightarrow M,$$

die zusätzlich $\{1, \ldots, k\}$ auf T (und damit) $\{k+1, \ldots, n\}$ auf $M \setminus T$ abbilden. Nach Lemma 13.3 und nach Satz 9.4 gibt es $k! \cdot (n-k)!$ solche Abbildungen. Insgesamt gibt es $n!$ bijektive Abbildungen von $\{1, \ldots, n\}$ nach M. Daher ist

$$(\text{Anzahl der } k-\text{elementigen Teilmengen von } M) \cdot k! \cdot (n-k)! = n!.$$

Insbesondere ist $k! \cdot (n-k)!$ ein Teiler von $n!$ und es ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von M. □

Bemerkung 13.7. Für die Binomialkoeffizienten gilt die Regel

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

wie unmittelbar aus der Definition folgt. Dies kann man sich auch mit Hilfe von Satz 13.6 klar machen. Die Komplementabbildung

$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(M),\, T \longmapsto \complement T,$$

auf einer n-elementigen Menge M ist bijektiv und bildet k-elementige Teilmengen auf $(n-k)$-elementige Teilmengen ab.

Den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ kann man auch als

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+2)(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}{(k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdots 2\cdot 1)\cdot((n-k)\cdot(n-k-1)\cdots 2\cdot 1)}\\ &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+2)\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdots 2\cdot 1}\end{aligned}$$

schreiben, da die Faktoren aus $(n-k)!$ auch in $n!$ vorkommen und daher kürzbar sind. In dieser Darstellung stehen im Zähler und im Nenner gleich viele Faktoren. Gelegentlich ist es sinnvoll, auch negative k oder $k > n$ zuzulassen und in diesen Fällen die Binomialkoeffizienten gleich 0 zu setzen. Dies passt zur Interpretation in Satz 13.6.

Beispiel 13.8. In der vierelementigen Menge $\{a,b,c,d\}$ gibt es

$$\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 6$$

zweielementige Teilmengen. Diese sind

$$\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}\,.$$

Beispiel 13.9. In einer 49-elementigen Menge gibt es genau

$$\binom{49}{6} = \frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 13983816$$

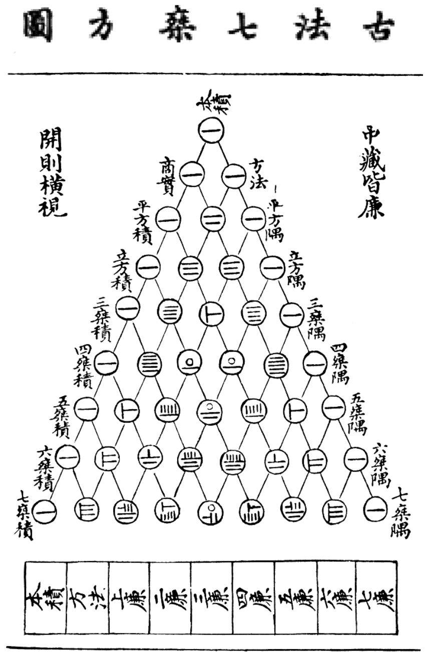
6-elementige Teilmengen. Es gibt also so viele mögliche Zahlenkombinationen beim Lotto „Sechs aus 49“. Der Kehrwert von dieser Zahl ist die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto sechs Richtige zu haben. Es werden dabei die Teilmengen gezählt, nicht die möglichen Ziehreihenfolgen. Die Anzahl der möglichen Ziehreihenfolgen ist

$$49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44\,,$$

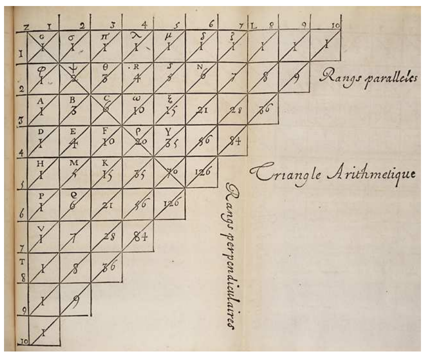
zu jeder sechselementigen Teilmenge gibt es 6! mögliche Ziehreihenfolgen die auf diese Teilmenge führen.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Das *Dreieck der Binomialkoeffizienten* war in Indien und in Persien schon um 1000 bekannt,



in China heißt es *Yanghui-Dreieck* (nach Yang Hui (um 1238-1298)),



in Europa heißt es das *Pascalsche Dreieck* (nach Blaise Pascal (1623-1662)).

LEMMA 13.10. *Die Binomialkoeffizienten erfüllen die rekursive Beziehung*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Beweis. Es ist

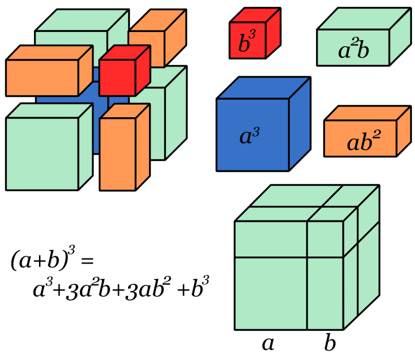
$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n+1-k)!(k-1)!} \\
&= \frac{(n+1-k)\cdot n!}{(n+1-k)!k!} + \frac{k\cdot n!}{(n+1-k)!k!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(n+1-k+k)\cdot n!}{(n+1-k)!k!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} \\ &= \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

□

Wir geben noch einen zweiten Beweis für diese Aussage, der sich an der inhaltlichen Beschreibung als Teilmengenanzahl orientiert.

Es sei M eine $(n+1)$-elementige Menge und $x \in M$ ein fixiertes Element. Wir betrachten die Aussage in Satz 13.6 als eine Aussage über die k-elementigen Teilmengen von M. Eine solche Teilmenge enthält entweder x oder aber nicht. Im ersten Fall entspricht dann eine solche Teilmenge einer $(k-1)$-elementigen Teilmenge von $M \setminus \{x\}$, das ergibt den Summanden $\binom{n}{k-1}$, im zweiten Fall einer k-elementigen Teilmenge von $M \setminus \{x\}$, das ergibt den Summanden $\binom{n}{k}$.



Der binomische Lehrsatz

Die folgende *allgemeine binomische Formel* oder *binomischer Lehrsatz* bringt die Addition, die Multiplikation und die Potenzierung in einem kommutativen Halbring und insbesondere für die natürlichen Zahlen miteinander in Beziehung.

Satz 13.11. *Es sei R ein kommutativer Halbring und $a, b \in R$. Ferner sei n eine natürliche Zahl. Dann gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Beweis. Wir führen Induktion nach n. Für $n = 0$ steht einerseits $(a+b)^0 = 1$ und andererseits $a^0 b^0 = 1$. Sei die Aussage bereits für n bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right) \\
&= a\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right) + b\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

□

Den vorstehenden Satz kann man sich auf folgendermaßen klar machen. Beim Ausmultiplizieren von

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)}_{n-\text{fach}}$$

muss jeder Summand (in jedem Faktor) mit jedem Summanden multipliziert werden. Für jedes Teilprodukt muss man sich bei jedem Faktor entscheiden, ob man den vorderen Summanden a oder den hinteren Summanden b nimmt. Die einzelnen Produkte haben die Form $a^k b^{n-k}$, wobei k die Anzahl der Faktoren ist, bei denen a gewählt wurde und $n-k$ die Anzahl der Faktoren ist, bei denen b gewählt wurde. Wenn man k fixiert, so kann man sich fragen, auf wie viele Arten das Produkt $a^k b^{n-k}$ zustande kommen kann. Eine solche Möglichkeit ist dadurch gegeben, dass man unter den n Faktoren bestimmt, an welchen von ihnen a gewählt wird. Die Anzahl der Möglichkeiten ist also die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$, also gleich $\binom{n}{k}$.

Abbildungsverzeichnis