MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA

DELLE SCIENZE

DI TORINO

SERIE SECONDA

TOMO XXXII

TORINO

ERMANNO LOESCHER

Libraio della R. Accademia delle Scienze

MDCCCLXXX

MEMORIE

DELLA REALE ACCADEMIA

DELLE SCIENZE

DI TORINO

MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA

DELLE SCIENZE

DI TORINO

SERIE SECONDA

TOMO XXXII.

TORINO

ERMANNO LOESCHER

Libraio della R. Accademia delle Scienze

MDCCCLXXX

Stamperia Reale della Ditta G. B. Paravia e C.

INDICE

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI, E STRANIERI

AL 31 OTTOBRE MDCCCLXXX

ACCADEMICI NAZIONALI

Presidente

Ricotti, Ercole, Senatore del Regno, Maggiore nel R. Esercito, Professore di Storia moderna nella R. Università, Presidente della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Socio della R. Accademia delle Scienze di Monaco in Baviera, Gr. Uffiz. ✻, Gr. Cord. ⊜, Cav. e Cons. ✠, ✪.

Vice-Presidente

Richelmy, Prospero, Professore di Meccanica applicata nella Scuola d'Applicazione per gl' Ingegneri, Socio della R. Accademia di Agricoltura, Comm. ✻ e ⊜.

Tesoriere

. . . .

Vice-Tesoriere

Manno, Barone Antonio, Membro e Segretario della R. Deputazione sovra gli studi di Storia Patria, ✻ e Uffiz. ⊜.

CLASSE DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Direttore

Delponte, Giovanni Battista, Dottore in Medicina e in Chirurgia, Professore Onorario di Botanica nella R. Università, Socio della R. Accademia di Agricoltura, Uffiz. ✱, e Comm. ⊜.

Segretario Perpetuo

Sobrero, Ascanio, Dottore in Medicina ed in Chirurgia, Professore di Chimica docimastica e Vice-Direttore della Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri, Membro del Collegio di Scienze fisiche e matematiche, Presidente della R. Accademia di Agricoltura, Comm. ✱, ✠, Uffiz. ⊜.

ACCADEMICI RESIDENTI

Sobrero, Dottore Ascanio, *predetto.*

Richelmy, Prospero, *predetto.*

Delponte, Giovanni Battista, *predetto.*

Genocchi, Angelo, Professore di Analisi infinitesimale nella R. Università, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio della R. Accademia dei Lincei, Uffiz. ✱ e ⊜, ✠.

Lessona, Michele, Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore e Direttore de' Musei di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata della R. Università, Socio delle RR. Accademie di Agricoltura e di Medicina di Torino, Uffiz. ✱, Comm. ⊜.

Dorna, Alessandro, Professore d'Astronomia nella R. Università, Professore di Meccanica razionale nella R. Militare Accademia, e di Geodesia nella Scuola Superiore di Guerra, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della R. Accademia dei Lincei, Direttore del R. Osservatorio astronomico di Torino, ✱, Uffiz. ⊜.

Salvadori, Conte Tommaso, Dottore in Medicina e Chirurgia, Assistente al Museo Zoologico della R. Università, Professore di Storia naturale nel Liceo Cavour, Socio della R. Accademia di Agricoltura, della Società Italiana di Scienze Naturali, dell'Accademia Gioenia di Catania, Membro corrispondente della Società Zoologica di Londra, dell'Accademia delle Scienze di Nuova-York e della *British Ornithological Union*.

Cossa, Alfonso, Dottore in Medicina, Professore di Chimica agraria, e Direttore della Stazione agraria presso il R. Museo Industriale Italiano, Socio della R. Accademia dei Lincei, dell'Accademia Gioenia di Catania, della R. Accademia di Agricoltura, e Corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Uffiz. ✻, e Comm. ⊜.

Bruno, Giuseppe, Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Professore di Geometria descrittiva nella R. Università, ✻.

Berruti, Giacinto, Ingegnere Capo delle Miniere, Direttore dell'Officina governativa delle Carte-Valori, Uffiz. ✻, e Comm. ⊜, dell'O. di Francesco Gius. d'Austria, Cav. della L. d'O. di Francia, e Comm. della Repubblica di S. Marino.

Curioni, Giovanni, Professore di Costruzioni nella Scuola d'Applicazione degli Ingegneri, Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Università, Socio della R. Accademia di Agricoltura, ✻, e Uffiz. ⊜.

Siacci, Francesco, Capitano nell'Arma d'Artiglieria, Professore di Meccanica superiore nella R. Università, e di Balistica nella Scuola d'Applicazione delle Armi di Artiglieria e Genio, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, ✻, ⊜.

Bellardi, Luigi, Conservatore delle collezioni paleontologiche presso il Museo di Geologia della R. Università degli studi, Prof. di Storia naturale al Liceo *Gioberti*, Uffiz. ✻, Cav. ⊜, e dell'O. di Cristo del Portogallo, Membro di varii Istituti scientifici.

Basso, Giuseppe, Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche e matematiche, Prof. di Fisica matematica nella R. Università, ✠.

D'Ovidio, Enrico, Prof. ordinario d'Algebra e Geometria analitica e incaricato di Geometria superiore nella R. Università di Torino, ✠.

Bizzozero, Giulio, Professore e Direttore del Laboratorio di Patologia generale nella R. Università di Torino, Socio delle RR. Accademie di Medicina e di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del Regio Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, ecc., ✠.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

S. E. Ménabréa, Conte Luigi Federigo, Marchese di Val Dora, Senatore del Regno, Professore emerito di Costruzioni nella R. Università di Torino, Luogotenente Generale, Ambasciatore di S. M. a Londra, Primo Aiutante di campo Onorario di S. M., Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio della R. Accademia dei Lincei, Membro Onorario del Regio Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, ecc.; C. O. S. SS. N., Gr. Cord. e Cons. ✱, Cav. e Cons. ✤, Gr. Cr. ✪, ✠, dec. della Med. d'oro al Valor Militare, Gr. Cr. dell'O. Supr. del Serafino di Svezia, dell'O. di S. Alessandro di Newski di Russia, di Dannebrog di Dan., Gr. Cr. dell'O. di Torre e Spada di Portogallo, dell'O. del Leone Neerlandese, di Leop. del Belg. (Categ. militare), della Probità di Sassonia, della Cor. di Wurtemberg, e di Carlo III di Sp., Gr. Cr. dell'O. di S. Stefano d'Ungheria, dell'O. di Leopoldo d'Austria, di quelli della Fedeltà e del Leone di Zoehringen di Baden, Gr. Cr. dell'Ordine del Salvatore di Grecia, Gr. Cr. dell'Ordine di S. Marino, Gr. Cr. degli Ordini del Nisham *Elood* e del Nisham *Iftigar* di Tunisi, Comm. dell'Ordine della L. d'O. di Francia, ecc., ecc.

Sella, Quintino, Membro del Consiglio delle Miniere, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Presidente della R. Accademia dei Lincei, Gr. Cord. ✱ e ✠, Cav. e Cons. ✤, Gr. Cord. degli O. di S. Anna di R., di Leop. d'A., dell'Aquila Rossa di Prussia, di Carlo III di Spagna, della Concez. di Port., del Mejidié di Turchia, e di S. Marino.

Brioschi, Francesco, Senatore del Regno, Professore d'Idraulica, e Direttore del R. Istituto tecnico superiore di Milano, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio della R. Accademia dei Lincei, Gr. Uffiz. ✱ e ⊜, ✠, Comm. dell'O. di Cr. di Port.

Govi, Gilberto, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Napoli, Membro del Comitato internazionale dei Pesi e delle Misure, Socio della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia d'Agricoltura di Torino, Uffiz. ✱, Comm. ⊜.

Moleschott, Jacopo, Senatore del Regno, Professore di Fisiologia nella R. Università di Roma, Socio della R. Accademia di Medicina di Torino, Socio corrispondente delle Società per le Scienze mediche e naturali a Horn, Utrecht, Amsterdam, Batavia, Magonza, Lipsia, Cherbourg, degli Istituti di Milano, Modena, Venezia, Bologna, della R. Accademia dei Lincei a Roma, delle Accademie Medico-chirurgiche in Ferrara e Perugia, Socio Onorario della *Medicorum Societas Bohemicorum* a Praga, della *Société médicale allemande* a Parigi, della Società dei Naturalisti in Modena, dell'Accademia Fisio-medico-statistica di Milano, della *Pathological Society* di S. Louis, della *Sociedad antropolojica Espanola* a Madrid, Socio dell'Accademia Veterinaria Italiana, del Comitato Medico-Veterinario Toscano, della *Société Royale des Sciences Médicales et Naturelles de Bruxelles*, Socio Straniero della Società Olandese delle Scienze a Harlem, Socio fondatore della Società Italiana d'Antropologia e di Etnologia in Firenze, Membro ordinario dell'Accademia Medica di Roma, Comm. ✱ e ⊜.

Cannizzaro, Stanislao, Senatore del Regno, Professore di Chimica generale nella R. Università di Roma, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio della Reale Accademia dei Lincei, Comm. ✱, ✠, Uffiz. ⊜.

Betti, Enrico, Professore di Fisica Matematica nella R. Università di Pisa, Direttore della Scuola Normale superiore, Uno dei XL della Società Ital. delle Scienze, Socio della R. Accademia dei Lincei, Comm. ✱, ✠, Gr. Uffiz. ⊜.

Scacchi, Arcangelo, Senatore del Regno, Professore di Mineralogia nella R. Università di Napoli, Presidente della Società Italiana delle Scienze detta dei XL, Segretario della R. Accademia delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli, Socio della R. Accademia dei Lincei, Comm. ✻, ✠, Gr. Uffiz. ⊜.

Ballada di S. Robert, Conte Paolo, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio della R. Accademia dei Lincei.

Cornalia, Emilio, Direttore del Museo civico e Professore di Zoologia applicata nella R. Scuola Superiore di Agronomia di Milano, Presidente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente dell' Istituto di Francia, Uffiz. ✻, ✠, Comm. ⊜, di Sant'Anna di Russia, ecc., ecc.

Schiaparelli, Giovanni, Direttore del R. Osservatorio astronomico di Milano, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della R. Accademia dei Lincei, dell'Accademia Reale di Napoli e dell' Istituto di Bologna, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione *Astronomia*), delle Accademie di Monaco, di Vienna, di Berlino, di Pietroborgo, di Stockolma, di Upsala, e della Società de' Naturalisti di Mosca, e della Società astronomica di Londra, Comm. ✻, ✠, ⊜, Comm. dell'O. di S. Stan. di Russia.

ACCADEMICI STRANIERI

Dumas, Giovanni Battista, Segretario Perpetuo dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Francia, Gr. Cr. della L. d'O. di Francia; *a Parigi.*

Helmholtz, Ermanno Luigi F., Professore nella Università di Heidelberg, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia; *a* Berlino.

Chasles, Michele, Membro dell' Istituto di Francia, Comm. della L. d'O. di Francia; *a Parigi.*

Darwin, Carlo, Membro della Società Reale di Londra; *a Londra.*

Dana, Giacomo, Professore di Storia naturale a New Haven, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia; *a New Haven.*

Hofmann, Guglielmo Augusto, Prof. di Chimica, Membro della R. Accademia delle Scienze di Berlino, della Reale Società delle Scienze di Londra, Corrispondente dell'Istituto di Francia (Sezione di Chimica); *a Berlino.*

Chevreul, Michele Eugenio, Membro dell'Istituto di Francia, Gr. Cr. della L. d'O. di Francia; *a Parigi.*

Hermite, Carlo, Membro dell'Istituto di Francia, Uffiz. della L. d'O. di Francia; *a Parigi.*

Schwan, Teodoro, Professore di Fisiologia nell' Università di Liegi, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Medicina e Chirurgia); *a Liegi.*

Joule, James Prescott, della Reale Società di Londra; *a Londra.*

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore

Bon-Compagni, Conte Carlo, Senatore del Regno, Ministro plenipotenziario di S. M., Socio della R. Accademia dei Lincei, Vice-Presidente della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, della Facoltà di Lettere e Filosofia, e Professore di Diritto costituzionale nella R. Università, Gr. Cord. ✠, Cav. e Cons. ✠, Gr. Cord. ✠.

Segretario Perpetuo

Gorresio, Gaspare, Prefetto della Biblioteca Nazionale, Dottore aggregato alla Facoltà di Lett. e Filosofia, e già Professore di Letteratura orientale nella R. Università di Torino, Socio Straniero dell'Istituto di Francia, Socio della Reale Accademia di Scienze e Lettere di Palermo, della R. Accademia della Crusca, ecc., Membro Onorario della Reale Società Asiatica di Londra, Presidente della Società di Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Comm. ✠, ✠, Gr. Uffiz. ✠, dell'O. di Guadal. del Mess., e dell'O. della Rosa del Brasile, Uffiz. della L. d'O. di Francia, ecc.

ACCADEMICI RESIDENTI

Ricotti Ercole, *predetto.*

Bon-Compagni, Cavaliere Carlo, *predetto.*

Gorresio, Gaspare, *predetto.*

Fabretti, Ariodante, Professore di Archeologia greco-romana nella Regia Università, Direttore del Museo di Antichità, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), Socio della Reale Accademia dei Lincei, Membro corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, dell'Accademia di Archeologia, Letteratura e Belle Arti di Napoli, della R. Accademia della Crusca e dell'Istituto di Corrispondenza archeologica, Prof. Onorario della Università di Perugia, Membro e Segretario della Società di Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Uffiz. ✱, Comm. ⊜, ✠, Cav. della Leg. d'O. di Francia, e C. O. R. del Brasile.

Peyron, Bernardino, Professore di Lettere, Bibliotecario Onorario della Biblioteca Nazionale di Torino, Uffiz. ✱.

Vallauri, Tommaso, Professore di Letteratura latina nella Regia Università, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Socio corrispondente della R. Accademia della Crusca e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Comm. ✱, Cav. dell'Ordine di S. Gregorio Magno.

Flechia, Giovanni, Professore di Storia comparata delle lingue classiche e neolatine e di Sanscrito nella R. Università, Socio della R. Accademia dei Lincei, Uffiz. ✱, e Comm. ⊜, ✠.

Claretta, Barone Gaudenzio, Dottore in Leggi, Socio e Segretario della R. Deputazione sovra gli studi di Storia Patria, Membro della Società di Archeologia e Belle Arti e della Giunta conservatrice dei monumenti d'Antichità e Belle Arti per la Provincia di Torino, Uffiz. ✱, Comm. ⊜.

Bianchi, Nicomede, Soprantendente degli Archivi Piemontesi, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria delle antiche Provincie e della Lombardia, Membro corrispondente delle Deputazioni di Storia patria delle Provincie Modenesi, delle Provincie della Toscana, dell'Umbria e delle Marche, Membro Onorario della Società storica Svizzera, della R. Accademia Palermitana di Scienze e Lettere, della Società Ligure di Storia patria, della R. Accademia Petrarca di Scienze, Lettere ed Arti in Arezzo, dell'Accademia Urbinate di Scienze, Lettere ed Arti, del R. Ateneo di Bergamo, e della R. Accademia Paloritana di Messina, Gr. Uffiz. ✱, Comm. ⊜, e Gr. Uffiz. dell'O. di S. Mar.

Promis, Vincenzo, Dottore in Leggi, Bibliotecario e Conservatore del Medagliere di S. M., Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, e della Società d'Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Ispettore degli scavi e monumenti d'antichità in Torino, ✱, ⊜.

Rossi, Francesco, Adiutore al Museo d'Antichità, Prof. d'Egittologia nella R. Università, ⊜.

Manno, Barone Antonio, *predetto.*

Bollati di Saint-Pierre, Barone Federigo Emanuele, Dottore in Leggi, Direttore dell'Archivio di Stato, detto Camerale, Consigliere d'Amministrazione nel R. Economato generale delle antiche Provincie, Membro della R. Deputazione sopra gli studi di Storia patria per le antiche Provincie e la Lombardia, Socio Onorario della Società di Archeologia e Belle Arti di Milano, Corrispondente dell'Accademia storico-archeologica di Milano, della Società Lombarda di Economia politica, della Società Ligure di Storia Patria, della Società Colombaria Fiorentina, della R. Deputazione di Storia patria per le Provincie della Romagna e della Società per la Storia di Sicilia, Uffiz. ✻ e ⊜.

Schiaparelli, Luigi, Dottore aggregato, Professore di Storia antica, e Preside della Facoltà di Lettere e Filosofia nella R. Università di Torino, ✻, Comm. ⊜.

Pezzi, Domenico, Dottore aggregato e Professore straordinario nella Facoltà di Lettere e Filosofia della R. Università di Torino, ⊜.

Ferrero, Ermanno, Dottore in Giurisprudenza, Dottore aggregato alla Facoltà di Lettere e Filosofia della R. Università di Torino, Membro della Società d'Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Membro corrispondente dell'Imp. Instituto Archeologico Germanico, ⊜.

Carle, Giuseppe, Dottore aggregato alla Facoltà di Leggi, Professore della Filosofia del Diritto nella R. Università, ⊜.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Carutti di Cantogno, Barone Domenico, Consigliere di Stato, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Socio e Segretario della R. Accademia dei Lincei, Socio Straniero della R. Accademia delle Scienze Neerlandese, Socio corrispondente della R. Accademia Lucchese, ecc., Membro del Consiglio degli Archivi, Gr. Uffiz. ✻, Comm. ⊜, Cav. e Cons. ✠, Gr. Cord. dell'O. del Leone Neerlandese e dell'O. d'Isla Catt. di Sp. e di S. Mar., Gr. Uffiz. dell'O. di Leop. del B., dell'O. del Sole e del Leone di Persia, e del Mejidié di 2ª cl. di Turchia, Gr. Comm. dell'O. del Salv. di Gr., ecc.

Amari, Michele, Senatore del Regno, Professore emerito dell'Università di Palermo e del R. Istituto di studi superiori di Firenze; Dottore in Filosofia e Lettere dell'Università di Leida e di Tubinga; Socio della Reale Accademia dei Lincei in Roma, delle RR. Accademie delle Scienze in Monaco di Baviera e in Copenhagen; Socio Straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), Socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze in Palermo, della Crusca, dell'Istituto Veneto, della Società Colombaria in Firenze, della R. Accademia d'Archeologia in Napoli, dell'Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Lucca, della R. Deputazione di Storia patria per le Provincie Parmensi, di quella per le Provincie Toscane, dell'Umbria e delle Marche, delle Accademie Imperiali di Pietroborgo e di Vienna; Socio Onorario della R. Società Asiatica di Londra, delle Accademie di Padova e di Gottinga; Presidente Onorario della Società Siciliana di Storia patria e Socio Onorario della Ligure; della Veneta e della Società storica di Utrecht; Gr. Uffiz. ✻, e Gr. Croce ⊜, Cav. e Cons. ✠.

Reymond, Gian Giacomo, già Professore di Economia politica nella Regia Università, ✻.

Ricci, Marchese Matteo, Uffiz. ⊜, a Firenze.

Minervini, Giulio, Bibliotecario e Professore Onorario della Regia Università di Napoli, Segretario generale Perpetuo dell'Accademia Pontoniana, Socio Ordinario della Società R. di Napoli, Socio della R. Accademia dei Lincei, Corrispondente dell' Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), della R. Accademia delle Scienze di Berlino, ecc., Uffiz. ✻, e Comm. ⊜, Cav. della L. d'O. di Francia, dell'Aquila Rossa di Prussia, di S. Michele del Merito di Baviera, ecc.

De Rossi, Comm. Giovanni Battista, Socio Straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), e della R. Accademia delle Scienze di Berlino e di altre Accademie, Presidente della Pontificia Accademia Romana d'Archeologia.

Canonico, Tancredi, Professore, Consigliere della Corte di Cassazione di Roma e del Consiglio del Contenzioso diplomatico, ✻, e Comm. ⊜.

Cantù, Cesare, Membro effettivo del R. Istituto Lombardo, Soprantendente degli Archivi Lombardi, Socio dell'Accademia della Crusca, della R. Accademia dei Lincei, dell'Accademia di Madrid, Corrispondente dell'Istituto di Francia e d'altri, Comm. ✻, e ⊜, Cav. e Cons. ✠, Comm. dell'O. di C. di Port., Gr. Uffiz. dell'O. della Guadalupa, ecc., Officiale della Pubblica Istruzione e della L. d'O. di Francia, ecc.

Tosti, D. Luigi, Abate Benedettino Cassinese, Socio Ordinario della Società Reale delle Scienze di Napoli.

Siotto-Pintor, Giovanni, Nobile Cagliaritano, Senatore del Regno, Presidente Onorario di Corte di Cassazione, Gr. Uffiz. ✻, Comm. ⊜, Comm. dell'O. Supremo di Takovvo di Serbia, ecc.

ACCADEMICI STRANIERI

Mommsen, Teodoro, Professore di Archeologia nella Regia Università e Membro della R. Accademia delle Scienze di Berlino, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere): *a Berlino.*

Müller, Massimiliano, Professore di Letteratura straniera nell'Università di Oxford, Socio Straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere); *a Oxford.*

Mignet, Francesco Augusto Alessio, Membro dell'Istituto di Francia (Accademia Francese) e Segretario Perpetuo dell'Accademia delle Scienze morali e politiche, Gr. Uffiz. della L. d'O. di Francia; *a Parigi.*

Renier, Leone, Membro dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), Uffiz. della L. d'O. di Francia; *a Parigi.*

Egger, Emilio, Professore alla Facoltà di Lettere di Parigi, Membro dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), Uffiz. della L. d'O. di Francia; *a Parigi.*

Bancroft, Giorgio, Socio corrispondente dell' Istituto di Francia (Accademia delle Scienze morali e politiche).

Witte, Barone Giovanni Giuseppe Antonio Maria De, Membro dell' Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere); *a Parigi.*

Longpérier, Enrico Adriano Prevost De, Membro dell' Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere); *a Parigi.*

Gregorovius, Ferdinando, della R. Accademia Bavarese delle Scienze in Monaco; *a Monaco.*

MUTAZIONI

avvenute nel Corpo Accademico
dal 30 Giugno 1878 al 31 Ottobre 1880

MORTI

20 Aprile 1879.

Ghiringhello, Giuseppe, Dottore aggregato in Teologia, Professore emerito di Sacra Scrittura e Lingua Ebraica nella Regia Università.

8 Agosto 1879.

Garelli, Vincenzo, Dottore aggregato della Facoltà di Lettere e Filosofia nella R. Università, Uffiz. ✻, e Comm. ⊜.

23 Dicembre 1879.

Cavalli, Giovanni, Senatore del Regno, Tenente Generale, Gr. Croce ✻, ⊜, ecc.

ELEZIONI

D'Ovidio, Enrico, Prof. d'Algebra e di Geometria analitica nella R. Università, ⊜, eletto il 29 Dicembre 1878 a *Socio Nazionale residente* della Classe di Scienze fisiche e matematiche.

Schiaparelli, Luigi, Professore di Storia antica, e Preside della Facoltà di Lettere e Filosofia nella R. Università di Torino, eletto il 5 Gennaio 1879 a *Socio Nazionale residente* della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

Siotto-Pintor, Giovanni, Senatore del Regno, Gr. Uffiz. ✱, Comm. ✠, eletto il 5 Gennaio 1879 a *Socio Nazionale residente* della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

Pezzi, Domenico, Dottore aggregato alla Facoltà di Lettere e Filosofia della R. Università di Torino, eletto il 18 Maggio 1879 a *Socio nazionale residente* della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

Ferrero, Ermanno, Dottore in Giurisprudenza, Dottore aggregato alla Facoltà di Lettere e Filosofia della R. Università di Torino, eletto il 18 Maggio 1879 a *Socio Nazionale residente* della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

Bizzozero, Giulio, Cav. dell'O. della Cor. d'Italia, Professore di Patologia generale nella R. Università di Torino, eletto il 25 Maggio 1879 a *Socio Nazionale residente* della Classe di Scienze fisiche e matematiche.

Carle, Giuseppe, Dottore aggregato alla Facoltà di Leggi, Professore della Filosofia del Diritto nella R. Università, eletto il 7 Dicembre 1879 *Accademico Nazionale residente* nella Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

Gregorovius, Ferdinando, della R. Accademia Bavarese delle Scienze in Monaco, eletto il 21 Dicembre 1879 *Accademico Straniero* nella Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

Sourindro Mohun Tagore, Membro della Reale Società Asiatica di Londra, eletto il 18 Gennaio 1880 a *Corrispondente* della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

Nordenskiöld, Adolfo Enrico, della Reale Accademia di Stoccolma, eletto il 22 Febbraio 1880 a *Corrispondente* della Classe di Scienze fisiche e matematiche.

ELEZIONI DI UFFIZIALI

PRESIDENTE

Ricotti, Comm. Ercole, Senatore del Regno, eletto il 9 Marzo ed approvato con Decreto Reale del 27 dello stesso mese 1879 alla carica triennale di Presidente dell'Accademia.

VICE - PRESIDENTE

Richelmy, Comm. Prospero, eletto il 9 Marzo ed approvato con Decreto Reale del 27 dello stesso mese 1879 alla carica triennale di Vice-Presidente dell'Accademia.

UFFIZIALI

Delponte, Comm. Giambattista, eletto il 26 Gennaio 1879 alla carica triennale di Direttore della Classe di Scienze fisiche e matematiche.

Bon-Compagni, Comm. Carlo, Senatore del Regno, eletto il 20 Aprile alla carica triennale di Direttore della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

Soci passati nella Categoria de' Nazionali non residenti.

Moleschott, Comm. Jacopo, per determinazione presa dalla Classe nella sua tornata dell'11 Maggio 1879.

Siotto-Pintor, Comm. Giovanni, per determinazione presa dalla Classe nella sua tornata del 23 Novembre 1879.

SCIENZE

FISICHE E MATEMATICHE.

STUDIO

SULLE

CUBICHE GOBBE

MEDIANTE LA NOTAZIONE SIMBOLICA DELLE FORME BINARIE

DI

ENRICO D'OVIDIO

Memoria letta nell'adunanza del 9 Marzo 1879

PROEMIO

Intrapresi questo studio nello scopo di apprestare ad alcuni studenti un'applicazione allo spazio di tre dimensioni della teoria delle forme binarie, e principalmente dei loro invarianti, covarianti, ecc. trattati con la notazione simbolica. La quale, promossa da Aronhold, Clebsch, Gordan ed altri, è oggidì molto adoperata dai geometri tedeschi, e conta anche in Italia abili cultori, come il Prof. Bertini e il compianto Armenante.

Quest'ultimo infatti aveva pubblicato nei volumi XI e XII del *Giornale di Matematiche* del Prof. Battaglini una memoria *Sulle curve gobbe razionali del quart'ordine*, nella quale dimostrava, mediante la notazione simbolica, le proprietà di quelle curve già trattate con la geometria pura dal Prof. Cremona, ed altre ne aggiungeva.

Ed io mi proposi appunto di comporre una monografia, la quale facesse sistema con la memoria dell'ARMENANTE, lieto di rendere così omaggio al perduto collega.

Cominciai dunque dal dimostrare, sempre mediante la notazione simbolica, le principali proprietà delle cubiche gobbe già note per le belle ricerche di MÖBIUS, SEYDEWITZ, CAYLEY, CHASLES, CREMONA, ecc.; e, attenendomi segnatamente al CREMONA, passai in rassegna le proprietà dei *fuochi* e piani *focali*, coni *congiunti* e coniche *congiunte*, iperboloidi circoscritti alla cubica e iscritti nella sviluppabile osculatrice.

Ma presto la succinta eleganza delle formole e la speditezza e fecondità dei procedimenti m'invogliarono ad applicare il metodo di cui mi servivo anche all'iperboloide individuato da tre tangenti della cubica, e studiato dal Prof. BELTRAMI (*); dal quale iperboloide passai a quelli più generali individuati da tre corde della cubica o da tre rette in due piani della sviluppabile osculatrice.

Vidi inoltre che codesti iperboloidi e quelli circoscritti alla cubica o iscritti nella sviluppabile, non che i coni e le coniche congiunti, facevano parte di certi più generali sistemi di superficie di secondo grado, le proprietà de' quali mi parve opportuno rilevare.

Studiai altresì le superficie polari successive di un punto rispetto alla sviluppabile o di un piano rispetto alla cubica, e notai qualche proprietà di certe superficie di terzo e di sesto grado, che fra quelle o assieme a quelle si presentavano.

La ricerca della equazione del cono di terz'ordine circoscritto da un punto qualunque alla cubica m'indusse a studiare i complessi costituiti da quelle rette che secano quattro tangenti della cubica i cui

(*) Rend. Ist. Lombardo, serie II, vol. I.

punti di contatto formino un gruppo armonico o equianarmonico o di dato rapporto anarmonico.

Così mi era aperta la via per sottoporre al trattamento da me prescelto altre proprietà delle cubiche gobbe, e forse a trovarne delle nuove. Ma, costretto a sospendere queste ricerche, io mi accingeva a chiudere il lavoro col dedurre dalle proposizioni e formole innanzi svolte la interpretazione geometrica dei principali invarianti, covarianti, ecc. di una o più forme binarie de' primi quattro gradi, assumendo a sostegno della rappresentazione la cubica gobba, nell'intento di dare una illustrazione geometrica di una parte della quinta sezione della *Theorie der binären algebraischen Formen* di Clebsch; quando il chiar.mo R. Sturm pubblicò nel *Giornale di Borchardt* (*) un pregevole articolo, avente per oggetto appunto la cennata interpretazione.

In verità, questa circostanza non mi dispensa del tutto dal seguitare a occuparmi dell'argomento; sia perchè i miei procedimenti son diversi da quelli del Prof. Sturm; sia perchè egli non fa uso della notazione simbolica, che costituisce invece lo strumento de'miei studî, e che ha il pregio di conciliare la generalità delle formole con la semplicità, senza tuttavia ricorrere, per procurar questa, ad una particolare scelta degli elementi di riferimento. Ma d'altra parte io non voglio privarmi del valido sussidio, che dal lavoro dello Sturm può venirmi.

Per queste riflessioni credo miglior consiglio differire alquanto la pubblicazione di quella parte del mio lavoro in cui potrò giovarmi dell'articolo dello Sturm; e mi limito oggi a presentare la maggior parte di quanto avevo già redatto prima che venisse a mia notizia

(*) Vol. 86°, 1878. — *Darstellung binärer Formen auf der cubischen Raumcurven.*

l'articolo suddetto, non che altri due del sig. Voss (*). L'argomento è tutt'altro che esaurito; poichè non poche questioni rimangono a trattare, sia relativamente alla semplice cubica gobba, sia relativamente alla cubica in connessione con una superficie di secondo grado che si assuma come *assoluto* o *limite* dello spazio di tre dimensioni, sia relativamente a dei sistemi di cubiche gobbe. Spero che mi sarà dato di riprendere quanto prima e proseguire il presente studio.

Torino, 8 Marzo 1879.

(*) *Ueber vier Tangenten einer Raumcurven dritter Ordnung*, e *Ueber Raumcurven und Developpabele* (*Math. Ann.* 1878).

STUDIO SULLE CUBICHE GOBBE

La cubica gobba - Suoi piani secanti, tangenti, osculatori - Corde e tangenti.

§ 1. Consideriamo la curva luogo dei punti le cui coordinate omogenee $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ (rispetto a un tetraedro qualunque di riferimento) siano esprimibili come funzioni intere di 3° grado di un parametro variabile $\lambda_1 : \lambda_2$; vale a dire poniamo per un punto qualunque della curva

$$\begin{cases} x_1 = a_{111}\lambda_1^3 + 3a_{112}\lambda_1^2\lambda_2 + 3a_{122}\lambda_1\lambda_2^2 + a_{222}\lambda_2^3 \\ x_2 = b_{111}\lambda_1^3 + \ldots \\ x_3 = c_{111}\lambda_1^3 + \ldots \\ x_4 = d_{111}\lambda_1^3 + \ldots \end{cases}$$

(ove gl'indici di ciascun coefficiente sono permutabili); ovvero poniamo simbolicamente

$$\begin{cases} x_1 = (a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^3 = a_\lambda^3 = a'^3_\lambda = a''^3_\lambda = \ldots \\ x_2 = (b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2)^3 = b_\lambda^3 = \ldots \\ x_3 = (c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2)^3 = c_\lambda^3 = \ldots \\ x_4 = (d_1\lambda_1 + d_2\lambda_2)^3 = d_\lambda^3 = \ldots \end{cases}$$

Chiameremo *punto* x il punto di coordinate $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$, e *punto* λ il punto (della curva) di parametro $\lambda_1 : \lambda_2$.

Sarà

$$\begin{aligned} 0 &= a_\lambda^3\xi_1 + b_\lambda^3\xi_2 + c_\lambda^3\xi_3 + d_\lambda^3\xi_4 \\ &= p_\lambda^3 = p'^3_\lambda = \ldots\ldots \\ &= p_{111}\lambda_1^3 + 3p_{112}\lambda_1^2\lambda_2 + 3p_{122}\lambda_1\lambda_2^2 + p_{222}\lambda_2^3 \ (*) \end{aligned}$$

l'equazione del punto λ in coordinate di piani ξ ($\xi_1\ \xi_2\ \xi_3\ \xi_4$).

(*) Qui si pone

$$p_1^3 = p_{111} = a_1^3\xi_1 + b_1^3\xi_2 + c_1^3\xi_3 + d_1^3\xi_4 = a_{111}\xi_1 + b_{111}\xi_2 + c_{111}\xi_3 + d_{111}\xi_4$$
$$p_1^2p_2 = p_{112} = a_1^2a_2\xi_1 + \ldots = a_{112}\xi_1 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si noti che due punti $\lambda\ \mu$ coincidono se $o = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} = (\lambda\mu)$.

2. Con le coordinate di 4 punti distinti $\lambda\ \mu\ \nu\ \rho$ della curva si può formare il determinante

$$\begin{vmatrix} a_\lambda^3 & b_\lambda^3 & c_\lambda^3 & d_\lambda^3 \\ a_\mu^3 & b_\mu^3 & c_\mu^3 & d_\mu^3 \\ a_\nu^3 & b_\nu^3 & c_\nu^3 & d_\nu^3 \\ a_\rho^3 & b_\rho^3 & c_\rho^3 & d_\rho^3 \end{vmatrix};$$

il quale, annullandosi per le posizioni

$$o = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (ab), \ldots, \quad o = (\lambda\mu), \ldots,$$

è divisibile pe' fattori $(ab) \ldots (\lambda\mu) \ldots$, e quindi si trasforma facilmente nel prodotto

$$9 \cdot (ab)(ac)(ad)(bc)(bd)(cd) \cdot (\lambda\mu)(\lambda\nu)(\lambda\rho)(\mu\nu)(\mu\rho)(\nu\rho) \quad (*).$$

Questo prodotto non si annulla, se non è nullo l'invariante delle forme $a_\lambda^3\ b_\lambda^3\ c_\lambda^3\ d_\lambda^3$ lineare nei loro rispettivi coefficienti:

$$(ab)(ac)(ad)(bc)(bd)(cd) = \Delta$$

(*) O altrimenti: il determinante in esame è il prodotto dei due

$$\begin{vmatrix} a_1^3 & a_1^2 a_2 & a_1 a_2^2 & a_2^3 \\ b_1^3 & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2\lambda_2 & 3\lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^3 \\ \mu_1^3 & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix};$$

dei quali il 2°, diviso nella 2ª e 3ª verticale per 3 e nelle orizzontali per $\lambda_2^3\,\mu_2^3\,\nu_2^3\,\rho_2^3$, diviene

$$9 \cdot \lambda_2^3 \mu_2^3 \nu_2^3 \rho_2^3 \cdot \begin{vmatrix} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^3 & \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 & \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) & 1 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix}$$

e quindi vale

$$9 \cdot \lambda_2^3 \mu_2^3 \nu_2^3 \rho_2^3 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\nu_1}{\nu_2}\right)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{\nu_1}{\nu_2}\right)\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\left(\frac{\nu_1}{\nu_2} - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$$

ossia $9\,(\lambda\mu)(\lambda\nu)(\lambda\rho)(\mu\nu)(\mu\rho)(\nu\rho)$; e il 1° vale similmente $(ab)(ac)(ad)(bc)(bd)(cd)$.

ossia

$$\begin{vmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{122} & a_{222} \\ b_{111} & b_{112} & b_{122} & b_{222} \\ c_{111} & c_{112} & c_{122} & c_{222} \\ d_{111} & d_{112} & d_{122} & d_{222} \end{vmatrix}.$$

Dunque, se Δ non è nullo, come supponiamo, 4 punti della curva non giacciono in uno stesso piano, onde la curva è gobba.

Ed è chiaro che la curva non ha punti doppî o cuspidi, nè piani bitangenti, nè rette trisecanti.

3. Tre punti distinti $\lambda\ \mu\ \nu$ della curva individuano un piano:

$$o = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ a_\lambda^3 & b_\lambda^3 & c_\lambda^3 & d_\lambda^3 \\ a_\mu^3 & b_\mu^3 & c_\mu^3 & d_\mu^3 \\ a_\nu^3 & b_\nu^3 & c_\nu^3 & d_\nu^3 \end{vmatrix};$$

sicchè *la curva è di* 3° *ordine*, ovvero *una cubica gobba* (*).

Sviluppando il determinante si ha

$$o = x_1 \begin{vmatrix} b_\lambda^3 & c_\lambda^3 & d_\lambda^3 \\ b_\mu^3 & c_\mu^3 & d_\mu^3 \\ b_\nu^3 & c_\nu^3 & d_\nu^3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} a_\lambda^3 & c_\lambda^3 & d_\lambda^3 \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} a_\lambda^3 & b_\lambda^3 & d_\lambda^3 \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix} - x_4 \begin{vmatrix} a_\lambda^3 & b_\lambda^3 & c_\lambda^3 \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix};$$

e poichè

$$\begin{vmatrix} b_\lambda^3 & c_\lambda^3 & d_\lambda^3 \\ b_\mu^3 & c_\mu^3 & d_\mu^3 \\ b_\nu^3 & c_\nu^3 & d_\nu^3 \end{vmatrix} = (\lambda\mu)(\lambda\nu)(\mu\nu)\,.\,(bc)(bd)(cd)\,\Sigma\, b_\lambda c_\mu d_\nu \;(^{**}),\ \text{ecc.}\ ,$$

(*) SEYDEWITZ la chiama una *conica gobba* (*ein raümlich Kegelschnitt*).

(**) Qui la somma Σ si estende alle permutazioni di $\lambda\ \mu\ \nu$.

Per dimostrare questa identità, si osservi che il determinante del 1° membro è evidentemente divisibile per $(\lambda\mu)(\lambda\nu)(\mu\nu)\,.\,(bc)(bd)(cd)$, e il quoziente è lineare in $\lambda_1 : \lambda_2, \ldots, b_1 : b_2, \ldots$; e sia $\Sigma b_\alpha c_\beta d_\gamma \lambda_\delta \mu_\iota \nu_\zeta$, ove gl'indici son scelti fra 1 e 2. Una permutazione fra $\lambda\ \mu\ \nu$ o fra $b\ c\ d$ può solo alterar il segno del 1° membro e del fattore esterno a Σ; onde Σ è costante per tali permutazioni, e può scriversi $\Sigma(\Sigma b_\alpha c_\beta d_\gamma)(\Sigma \lambda_\delta \mu_\iota \nu_\zeta)$, le somme parziali riferendosi alle dette permutazioni e la totale agl'indici. Ora è chiaro, che non può mancare il termine $b_\alpha c_\beta d_\gamma \,.\, \lambda_\alpha \mu_\beta \nu_\gamma$, e però $\Sigma \lambda_\delta \mu_\iota \nu_\zeta = \Sigma \lambda_\alpha \mu_\beta \nu_\gamma$; sicchè la somma totale vale $\Sigma(\Sigma b_\alpha c_\beta d_\gamma)(\Sigma \lambda_\alpha \mu_\beta \nu_\gamma)$ ovvero $\Sigma b_\lambda c_\mu d_\nu$, la somma riferendosi alle permutazioni di $\lambda\ \mu\ \nu$.

si ottiene l'equazione del piano per i tre punti $\lambda\ \mu\ \nu$ della cubica:

$$\begin{aligned} o = \quad & x_1 \,.\, (bc)\,(bd)\,(cd)\ \Sigma\, b_\lambda\, c_\mu\, d_\nu - x_2 \,.\, (ac)\,(ad)\,(cd)\ \Sigma\, a_\lambda\, c_\mu\, d_\nu \\ & + x_3 \,.\, (ab)\,(ad)\,(bd)\ \Sigma\, a_\lambda\, b_\mu\, d_\nu - x_4 \,.\, (ab)\,(ac)\,(bc)\ \Sigma\, a_\lambda\, b_\mu\, c_\nu \,. \end{aligned}$$

Facendo coincidere ν con λ, si ha l'equazione del piano tangente alla cubica nel punto λ e secante nel punto μ:

$$\begin{aligned} o = \quad & x_1 \,.\, (bc)\,(bd)\,(cd)\ \Sigma\, b_\lambda\, c_\lambda\, d_\mu - x_2 \,.\, (ac)\,(ad)\,(cd)\ \Sigma\, a_\lambda\, c_\lambda\, d_\mu \\ & + x_3 \,.\, (ab)\,(ad)\,(bd)\ \Sigma\, a_\lambda\, b_\lambda\, d_\mu - x_4 \,.\, (ab)\,(ac)\,(bc)\ \Sigma\, a_\lambda\, b_\lambda\, c_\mu \,. \end{aligned}$$

E qui facendo coincidere μ con λ si ha l'equazione del piano osculatore alla cubica nel punto λ:

$$\begin{aligned} o = \quad & x_1 . (bc)(bd)(cd) b\, c_\lambda d_\lambda - x_2 . (ac)(ad)(cd) a_\lambda c_\lambda d_\lambda \\ & + x_3 . (ab)(ad)(bd) a_\lambda b_\lambda d_\lambda - x_4 . (ab)(ac)(bc) a_\lambda b_\lambda c_\lambda \,, \end{aligned}$$

che chiameremo *piano* λ.

Un piano dato ξ' seca la cubica in tre punti, i cui parametri saranno le radici della equazione

$$o = a_\lambda^3\, \xi_1' + b_\lambda^3\, \xi_2' + c_\lambda^3\, \xi_3' + d_\lambda^3\, \xi_4' = \pi_\lambda^3 = \pi'^3_\lambda = \ldots\ (^*).$$

Supponendo reali il tetraedro di riferimento e i coefficienti delle forme $a_\lambda^3\ b_\lambda^3\ c_\lambda^3\ d_\lambda^3$, la cubica è reale; e, se si suppone reale anche il piano ξ', si vede che il piano può secare la cubica in tre punti reali e distinti, o in un punto reale e in due punti imaginari coniugati, o toccare in un punto reale e secare in un altro punto reale, o osculare in un punto reale.

4. Poniamo simbolicamente

$$\left\{ \begin{array}{ll} A_\lambda^3 = (bc)\,(bd)\,(cd)\ b_\lambda\, c_\lambda\, d_\lambda & B_\lambda^3 = -\ (ac)\,(ad)\,(cd)\ a_\lambda\, c_\lambda\, d_\lambda \\ C_\lambda^3 = (ab)\,(ad)\,(bd)\ a_\lambda\, b_\lambda\, d_\lambda & D_\lambda^3 = -\ (ab)\,(ac)\,(bc)\ a_\lambda\, b_\lambda\, c_\lambda \,, \end{array} \right.$$

introducendo così 4 nuove forme binarie cubiche $A_\lambda^3\ B_\lambda^3\ C_\lambda^3\ D_\lambda^3$ accanto alle primitive $a_\lambda^3\ b_\lambda^3\ c_\lambda^3\ d_\lambda^3$, delle quali sono covarianti.

(*) Qui si pone

$$\begin{aligned} & \pi_1^{\,3} = a_1^{\,3}\, \xi_1' + b_1^{\,3}\, \xi' + c_1^{\,3}\, \xi'_3 + d_1^{\,3}\, \xi'_4 = \pi_{111} = a_{111}\, \xi_1' + \ldots \\ & \pi_1^{\,2}\, \pi_2 = a_1^{\,2}\, a_2\, \xi_1' + \ldots = \pi_{112} = a_{112}\, \xi_1' + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Sotto altra forma (*):

$$\left\{\begin{aligned} -3\,A_\lambda^3 &= b_\lambda^3\,(cd)^3 + c_\lambda^3\,(db)^3 + d_\lambda^3\,(bc)^3 \\ 3\,B_\lambda^3 &= c_\lambda^3\,(da)^3 + d_\lambda^3\,(ac)^3 + a_\lambda^3\,(cd)^3 \\ -3\,C_\lambda^3 &= d_\lambda^3\,(ab)^3 + a_\lambda^3\,(bd)^3 + b_\lambda^3\,(da)^3 \\ 3\,D_\lambda^3 &= a_\lambda^3\,(bc)^3 + b_\lambda^3\,(ca)^3 + c_\lambda^3\,(ab)^3\ . \end{aligned}\right.$$

Le $A_\lambda^3\ -B_\lambda^3\ C_\lambda^3\ -D_\lambda^3$ moltiplicate per 216 equivalgono ai determinanti delle 2^e derivate dei gruppi

$$b_\lambda^3\ c_\lambda^3\ d_\lambda^3\,,\ a_\lambda^3\ c_\lambda^3\ d_\lambda^3\,,\ a_\lambda^3\ b_\lambda^3\ d_\lambda^3\,,\ a_\lambda^3\ b_\lambda^3\ c_\lambda^3\ (^{**}).$$

Si ha pure (***)

$$\left\{\begin{aligned} A_\lambda^3 &= \frac{\partial\Delta}{\partial a_{111}}\lambda_2^3 - \frac{\partial\Delta}{\partial a_{122}}\lambda_2^2\lambda_1 + \frac{\partial\Delta}{\partial a_{122}}\lambda_2\lambda_1^2 - \frac{\partial\Delta}{\partial a_{222}}\lambda_1^3 \\ B_\lambda^3 &= \frac{\partial\Delta}{\partial b_{111}}\lambda_2^3 - \ .\ .\ .\ . \\ C_\lambda^3 &= \frac{\partial\Delta}{\partial c_{111}}\lambda_2^3 - \ .\ .\ .\ . \\ D_\lambda^3 &= \frac{\partial\Delta}{\partial d_{111}}\lambda_2^3 - \ .\ .\ .\ . \end{aligned}\right.$$

(*) Qui occorre far capo alla identità

$$(\beta+\gamma+\delta)\ (\beta+r\gamma+r^2\delta)\ (\beta+r^2\gamma+r\delta) = \beta^3+\gamma^3+\delta^3-3\beta\gamma\delta\,,$$

detta r una radice cubica imaginaria dell'unità. Se $\beta+\gamma+\delta=0$ si ha

$$3\beta\gamma\delta = \beta^3+\gamma^3+\delta^3.$$

(**) A verificarlo giova ricordare l'identità

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)\ (\alpha-\gamma)\ (\beta-\gamma)\ .$$

Notiamo anche le identità

$$\begin{vmatrix} \alpha^3 & \alpha^2 & 1 \\ \beta^3 & \beta^2 & 1 \\ \gamma^3 & \gamma^2 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)\ (\alpha-\gamma)\ (\beta-\gamma)\ (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\,,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha^3 & \alpha & 1 \\ \beta^3 & \beta & 1 \\ \gamma^3 & \gamma & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)\ (\alpha-\gamma)\ (\beta-\gamma)\ (\alpha+\beta+\gamma)\ ;$$

che possono farsi servire a porre A_λ^3..... sotto forma di determinanti, ed anche a provare le identità adoperate nel § 3.

(***) Poichè $\dfrac{\partial\Delta}{\partial(a_1)^3} = \dfrac{\partial\Delta}{\partial a_{111}} = (bc)\ (bd)\ (cd)\ b_2\ c_2\ d_2$, ecc.

ovvero

$$A_\lambda^3 = \begin{vmatrix} \lambda_2^3 & -\lambda_2^2\lambda_1 & \lambda_2\lambda_1^2 & -\lambda_1^3 \\ b_{111} & b_{112} & b_{122} & b_{222} \\ c_{111} & c_{112} & c_{122} & c_{222} \\ d_{111} & d_{112} & d_{122} & d_{222} \end{vmatrix} \qquad B_\lambda^3 = \begin{vmatrix} a_{111} & . & . & . \\ \lambda_2^3 & . & . & . \\ c_{111} & . & . & . \\ d_{111} & . & . & . \end{vmatrix} .$$

$$C_\lambda^3 = \begin{vmatrix} a_{111} & . & . & . \\ b_{111} & . & . & . \\ \lambda_2^3 & . & . & . \\ d_{111} & . & . & . \end{vmatrix} \qquad D_\lambda^3 = \begin{vmatrix} a_{111} & . & . & . \\ b_{111} & . & . & . \\ c_{111} & . & . & . \\ \lambda_2^3 & . & . & . \end{vmatrix} .$$

Fra le forme primitive a_λ^3 . . . e le nuove A_λ^3 . . . passano le relazioni (*):

$$(a\,A)^3 = (b\,B)^3 = (c\,C)^3 = (d\,D)^3 = \Delta\,,$$

$$\left\{\begin{aligned} &(a\,B)^3 = (b\,A)^3 = (a\,C)^3 = (c\,A)^3 = (a\,D)^3 = (d\,A)^3 \\ &= (b\,C)^3 = (c\,B)^3 = (b\,D)^3 = (d\,B)^3 = (c\,D)^3 = (d\,C)^3 = 0\,, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &-3(AB)^3 = \Delta\,(c\,d)^3 \quad -3\,(A\,C)^3 = \Delta\,(d\,b)^3 \quad -3\,(A\,D)^3 = \Delta\,(b\,c)^3 \\ &-3(CD)^3 = \Delta\,(a\,b)^3 \quad -3\,(DB)^3 = \Delta\,(a\,c)^3 \quad -3\,(BC)^3 = \Delta\,(a\,d)^3\,, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \tfrac{1}{3}\,\Delta^2 a_\lambda^3 &= B_\lambda^3\,(C\,D)^3 + C_\lambda^3\,(D\,B)^3 + D_\lambda^3\,(B\,C)^3 \\ -\tfrac{1}{3}\,\Delta^2 b_\lambda^3 &= C_\lambda^3\,(D\,A)^3 + D_\lambda^3\,(A\,C)^3 + A_\lambda^3\,(C\,D)^3 \\ \tfrac{1}{3}\,\Delta^2 c_\lambda^3 &= D_\lambda^3\,(A\,B)^3 + A_\lambda^3\,(B\,D)^3 + B_\lambda^3\,(D\,A)^3 \\ -\tfrac{1}{3}\,\Delta^2 d_\lambda^3 &= A_\lambda^3\,(B\,C)^3 + B_\lambda^3\,(C\,A)^3 + C_\lambda^3\,(A\,B)^3\,, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} -\tfrac{1}{9}\,\Delta^2 a_\lambda^3 &= (B\,C)\,(B\,D)\,(C\,D)\,B_\lambda\,C_\lambda\,D_\lambda \\ \tfrac{1}{9}\,\Delta^2 b_\lambda^3 &= (A\,C)\,(A\,D)\,(C\,D)\,A_\lambda\,C_\lambda\,D_\lambda \\ -\tfrac{1}{9}\,\Delta^2 c_\lambda^3 &= (A\,B)\,(A\,D)\,(B\,D)\,A_\lambda\,B_\lambda\,D_\lambda \\ \tfrac{1}{9}\,\Delta^2 d_\lambda^3 &= (A\,B)\,(A\,C)\,(B\,C)\,A_\lambda\,B_\lambda\,C_\lambda \text{ (**)}\,, \end{aligned}\right.$$

(*) Se A_{111} . . . sono i coefficienti effettivi della A_λ^3, si ha

$$(a\,A)^3 = a_{111}\,A_{222} - 3\,a_{112}\,A_{122} + 3\,a_{122}\,A_{112} - a_{222}\,A_{111} = (a_{111}\,A_{222}) - 3\,(a_{112}\,A_{122})\;;$$

e così via.

Per verificare le relazioni qui accennate si faccia capo alle

$$-3\,A_\lambda^3 = b_\lambda^3\,(c\,d)^3 + c_\lambda^3\,(d\,b)^3 + d_\lambda^3\,(b\,c)^3\,,\ \text{ecc.}$$

(**) Si ha pure:

e

$$(AB)(AC)(AD)(BC)(BD)(CD) = \tfrac{1}{9}\Delta^3 .$$

Inoltre si ha

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda_2'^3 & -\lambda_2'^2\lambda_1' & \lambda_1'\lambda_1'^2 & -\lambda_1'^3 \\ -a_\lambda^3 & a_{111} & a_{112} & a_{122} & a_{222} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\lambda\lambda')^3 & \lambda_2'^3 & . & . & . \\ 0 & a_{111} & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \end{vmatrix} ,$$

onde $$a_\lambda^3 A_{\lambda'}^3 + b_\lambda^3 B_{\lambda'}^3 + c_\lambda^3 C_{\lambda'}^3 + d_\lambda^3 D_{\lambda'}^3 = \Delta(\lambda\lambda')^3 .$$

Di qui, operando col simbolo $\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\nu_1 + \frac{\partial}{\partial\lambda_2}\nu_2\right)\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\mu_1 + \frac{\partial}{\partial\lambda_2}\mu_2\right)$, si trae

$$a_\lambda\, a_\mu\, a_\nu\, A_{\lambda'}^3 + \ldots\ldots = \Delta(\lambda\lambda')(\mu\lambda')(\nu\lambda') ;$$

ed analogamente si avrebbe

$$a_\lambda^3 A_{\lambda'} A_{\mu'} A_{\nu'} + \ldots\ldots = \Delta(\lambda\lambda')(\lambda\mu')(\lambda\nu') .$$

Se i parametri de' punti λ μ ν si suppongono essere le radici di una equazione di 3° grado

$$\begin{aligned} 0 &= u_\lambda^3 = u_\lambda'^3 = u_\lambda''^3 = \ldots \\ &= u_{111}\lambda_1^3 + 3u_{112}\lambda_1^2\lambda_2 + 3u_{122}\lambda_1\lambda_2^2 + u_{222}\lambda_2^3 \quad (^*), \end{aligned}$$

$$-\tfrac{1}{9}\Delta^2 a_\lambda^3 = \begin{vmatrix} \lambda_2^3 & -\lambda_2^2\lambda_1 & \lambda_2\lambda_1^2 & -\lambda_1^3 \\ B_{111} & B_{112} & B_{122} & B_{222} \\ C_{111} & C_{112} & C_{122} & C_{222} \\ D_{111} & D_{112} & D_{122} & D_{222} \end{vmatrix} , \text{ ecc.}$$

Onde

$$\tfrac{1}{9}\Delta^2 \mu_\lambda^3 = \begin{vmatrix} 0 & \lambda_2^3 & -\lambda_2^2\lambda_1 & \lambda_2\lambda_1^2 & -\lambda_1^3 \\ \xi_1 & A_{111} & A_{112} & A_{122} & A_{222} \\ \xi_2 & B_{111} & B_{112} & B_{122} & B_{222} \\ \xi_3 & C_{111} & C_{112} & C_{122} & C_{222} \\ \xi_4 & D_{111} & D_{112} & D_{122} & D_{222} \end{vmatrix} .$$

(*) Vale a dire si pone

$$\begin{aligned} u_1^3 &= u_{111} = \lambda_2\mu_2\nu_2 \\ -3u_1^2u_2 &= -3u_{112} = \lambda_1\mu_2\nu_2 + \mu_1\nu_2\lambda_2 + \nu_1\lambda_2\mu_2 \\ 3u_1u_2^2 &= 3u_{122} = \lambda_1\mu_1\nu_2 + \mu_1\nu_1\lambda_2 + \nu_1\lambda_1\mu_2 \\ -u_2^3 &= u_{222} = \lambda_1\mu_1\nu_1 . \end{aligned}$$

allora si ha

$$(au)^3 A_{\lambda'}^3 + \ldots \ldots = -\Delta u_{\lambda'}^3 .$$

E se i parametri dei punti λ' μ' ν' si suppongono radici dell'altra equazione

$$0 = U_\lambda^3 = U_\lambda'^3 = \ldots \quad ,$$

allora

$$a_\lambda^3 (AU)^3 + \ldots \ldots = \Delta U_\lambda^3 .$$

Finalmente sarà

$$(au)^3 (AU)^3 + \ldots \ldots = -\Delta (uU)^3 .$$

E, in generale, in tutte le identità qui esposte è lecito sostituire a λ_1 e λ_2 i coefficienti simbolici u_2 e $-u_1$ di una forma binaria cubica u_λ^3.

Da ultimo, notiamo le identità

$$(ab)^3 (cd)^3 + (ac)^3 (db)^3 + (ad)^3 (bc)^3 = -3\Delta$$
$$(AB)^3 (CD)^3 + (AC)^3 (DB)^3 + (AD)^3 (BC)^3 = -\tfrac{1}{3}\Delta^3 .$$

5. Con l'introduzione delle $A_\lambda^3 \ldots$ *l'equazione del piano osculatore alla cubica nel punto* λ *diviene*

$$\begin{aligned} 0 &= A_\lambda^3 x_1 + B_\lambda^3 x_2 + C_\lambda^3 x_3 + D_\lambda^3 x_4 \\ &= P_\lambda^3 = P'^3_\lambda = \ldots \\ &= P_{111} \lambda_1^3 + 3 P_{112} \lambda_1^2 \lambda_2 + 3 P_{122} \lambda_1 \lambda_2^2 + P_{222} \lambda_2^3 \quad (*) \end{aligned}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & \lambda_2^3 & -\lambda_2^2\lambda_1 & \lambda_2\lambda_1^2 & -\lambda_1^3 \\ x_1 & a_{111} & a_{112} & a_{122} & a_{222} \\ x_2 & b_{111} & b_{112} & b_{122} & b_{222} \\ x_3 & c_{111} & c_{112} & c_{122} & c_{222} \\ x_4 & d_{111} & d_{112} & d_{122} & d_{222} \end{vmatrix} .$$

E l'equazione del piano tangente nel punto λ *e secante nel punto* μ

$$0 = A_\lambda^2 A_\mu x_1 + \ldots = P_\lambda^2 P_\mu = P'^2_\lambda P'_\mu = \ldots$$

(*) Qui

$$P_1^3 = A_1^3 x_1 + B_1^3 x_2 + C_1^3 x_3 + D_1^3 x_4 = P_{111} = A_{111} x_1 + \ldots$$
$$P_1^2 P_2 = A_1^2 A_2 x_1 + \ldots = P_{112} = A_{112} x_1 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

E *l'equazione del piano secante ne' tre punti* λ μ ν

$$0 = A_\lambda A_\mu A_\nu x_1 + \ldots = P_\lambda P_\mu P_\nu = \ldots \quad (*).$$

Se si suppone che i parametri de' punti λ μ ν siano le radici della equazione $0 = u_\lambda^3 = \ldots$ l'equazione del piano pe' tre punti λ μ ν assume la forma

$$0 = (P u)^3 = (A u)^3 x_1 + \ldots = \begin{vmatrix} 0 & u_{111} & \cdot & \cdot \\ x_1 & a_{111} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

E similmente, se l'equazione

$$0 = v_\lambda^2 = v'^2_\lambda = \ldots$$
$$= v_{11} \lambda_1^2 + 2 v_{12} \lambda_1 \lambda_2 + v_{22} \lambda_2^2$$

determina i parametri di due punti λ μ (**), la equazione del piano per questi due punti e per un altro qualunque ν prende la forma

$$0 = (P v)^2 P_\nu = (A v)^2 A_\nu x_1 + \ldots$$

Notiamo che le equazioni

$$0 = a_\lambda^3 \qquad 0 = b_\lambda^3 \qquad 0 = c_\lambda^3 \qquad 0 = d_\lambda^3$$

determinano rispettivamente i parametri delle terne di punti in cui la cubica è secata dai piani di riferimento

$$0 = x_1 \qquad 0 = x_2 \qquad 0 = x_3 \qquad 0 = x_4 \; .$$

Se dunque si suppone che questi siano piani osculatori della cubica, allora le $a_\lambda^3 \ldots$ saranno cubi perfetti, e i coefficienti a_1 $a_2 \ldots$ cesseranno di esser meri simboli ed acquisteranno un valore effettivo.

6. Le coordinate-raggi della retta che passa per due punti λ μ della cubica (*retta per due punti* o *corda* o *bisecante* della cubica) sono proporzionali ai determinanti della matrice

$$\begin{vmatrix} a_\lambda^3 & b_\lambda^3 & c_\lambda^3 & d_\lambda^3 \\ a_\mu^3 & b_\mu^3 & c_\mu^3 & d_\mu^3 \end{vmatrix};$$

(*) La $P_\lambda^2 P_\mu = 0$ si ottiene dalla P_λ^3 mediante l'operazione $\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \mu_1 + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \mu_2$, e la $P_\lambda P_\mu P_\nu$ si ottiene da P_λ^3 mediante l'operazione

$$\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \nu_1 + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \nu_2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \mu_1 + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \mu_2 \right).$$

(**) Vale a dire: se

$$v_1^2 = v_{11} = \lambda_2 \mu_2 \,; \quad v_1 v_2 = v_{12} = -(\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) \,, \quad v_2^2 = v_{22} = \lambda_1 \mu_1 \; .$$

ora si ha

$$\begin{vmatrix} a_\lambda^3 & b_\lambda^3 \\ a_\mu^3 & b_\mu^3 \end{vmatrix} = a_\lambda^3 b_\mu^3 - a_\mu^3 b_\lambda^3 = (a_\lambda b_\mu - a_\mu b_\lambda)(a_\lambda^2 b_\mu^2 + a_\lambda a_\mu b_\lambda b_\mu + a_\mu^2 b_\lambda^2)$$

$$= (\lambda\mu)(ab)\{(a_\lambda b_\mu - a_\mu b_\lambda)^2 + 3 a_\lambda a_\mu b_\lambda b_\mu\}$$

$$= (\lambda\mu)(ab)\{(\lambda\mu)^2 (ab)^2 + 3 a_\lambda a_\mu b_\lambda b_\mu\}, \text{ ecc.};$$

dunque si può assumere per le dette coordinate i sei binomi

$$(ab)^3 (\lambda\mu)^2 + 3(ab) a_\lambda a_\mu b_\lambda b_\mu, \ldots\ldots$$

Più semplice riesce il calcolo delle coordinate-assi della corda $\lambda\mu$ medesima. Considerando questa come l'intersezione di due piani passanti per i punti λ e μ, p. es.

$$0 = A_\lambda A_\mu A_\nu x_1 + \ldots \qquad 0 = A_\lambda A_\mu A_\rho x_1 + \ldots,$$

si ha

$$\begin{vmatrix} A_\lambda A_\mu A_\nu & B_\lambda B_\mu B_\nu \\ A_\lambda A_\mu A_\rho & B_\lambda B_\mu B_\rho \end{vmatrix} = A_\lambda A_\mu B_\lambda B_\mu (AB)(\nu\rho), \text{ ecc.};$$

sicchè possiamo assumere per le coordinate-assi i valori

$$(AB) A_\lambda A_\mu B_\lambda B_\mu, \ldots\ldots \quad (*).$$

Intanto dal confronto dei due gruppi di coordinate anzidetti risultano le 6 relazioni

$$\Delta\{(ab)^3 (\lambda\mu)^2 + 3(ab) a_\lambda a_\mu b_\lambda b_\mu\} = 9 \cdot (CD) C_\lambda C_\mu D_\lambda D_\mu \quad (**)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

da aggiungere a quelle del § 4, e nelle quali è lecito sostituire per λ_1 e λ_2, μ_1 e μ_2 i coefficienti simbolici di due forme quadratiche o anche di due forme cubiche [dopo aver moltiplicato per $(\lambda\mu)$].

Se i parametri dei punti λ μ sono le radici della equazione $0 = v_\lambda^2 = v'^2_\lambda = \ldots$, sarà

$$(\lambda\mu)^2 = -2(vv')^2;$$

e potremo assumere per coordinate-raggi della corda

$$-2(ab)^3 (vv')^2 + 3(ab)(av)^2 (bv')^2, \ldots\ldots,$$

(*) Essi sono i determinanti funzionali o Jacobiani delle coppie di forme (quadratiche in $\lambda_1 : \lambda_2$) $A_\lambda^2 A_\mu$ e $B_\lambda^2 B_\mu$, ecc., od anche delle coppie di forme (quadratiche in $\mu_1 : \mu_2$) $A_\lambda A_\mu^2$ e $B_\lambda B_\mu^2$, ecc. Del pari $(ab) a_\lambda a_\mu b_\lambda b_\mu$ è il Jacobiano di $a_\lambda^2 a_\mu$ e $b_\lambda^2 b_\mu$, ecc.

(**) I fattori Δ e 9 si possono determinare mediante il confronto di due termini simili.

e per coordinate-assi

$$(AB)(Av)^2(Bv')^2, \ldots\ldots$$

Facendo coincidere μ con λ si hanno le coordinate-raggi e le coordinate-assi della tangente nel punto λ espresse rispettivamente da

$$(ab)\, a_\lambda^2 b_\lambda^2, \ldots\ldots \quad (*)$$

$$(AB)\, A_\lambda^2 B_\lambda^2, \ldots\ldots$$

Potremo chiamare questa retta brevemente: *tangente* λ o *retta* λ.

Si ha

$$\Delta\,(ab)\, a_\lambda^2 b_\lambda^2 = 3\,(CD)\, C_\lambda^2 D_\lambda^2, \ldots\ldots$$

La sviluppabile di 3ª classe osculatrice della cubica gobba. Corrispondenza fra la cubica e la sviluppabile. Assi della sviluppabile.

7. Le relazioni esposte al § 4 mostrano che lo stesso procedimento con cui si compongono le forme $A_\lambda^3 \ldots$ dalle $a_\lambda^3 \ldots$ serve a comporre, viceversa, le $a_\lambda^3 \ldots$ mediante le $A_\lambda^3 \ldots$ (salvo il fattore Δ^2 e un fattor numerico). Abbiamo anche visto che ad un medesimo parametro $\lambda_1 : \lambda_2$ corrisponde un punto λ ($o = p_\lambda^3$) della cubica gobba ed un piano λ ($o = P_\lambda^3$) cioè quello che oscula la cubica nel punto λ.

Il sistema dei piani λ costituisce la superficie *sviluppabile osculatrice* della cubica, e ciascuno di essi piani chiameremo *un piano della sviluppabile.* Della quale le generatrici sono le tangenti alla cubica, e questa è la curva cuspidale della sviluppabile.

La notata analogia della $a_\lambda^3 \ldots$ con le $A_\lambda^3 \ldots$, e la corrispondenza univoca fra i punti λ e i piani λ (*elementi* rispettivamente della cubica e della sviluppabile), sono di capitale importanza, così nel campo algebrico come nel geometrico. Eccone alcune immediate deduzioni:

Per ogni punto passano tre piani della sviluppabile, ovvero osculatori della cubica; sicchè *la sviluppabile è di* 3ª *classe* (**). *E se* $\lambda\ \mu\ \nu$ *sono tre piani della sviluppabile, sarà*

$$o = p_\lambda p_\mu p_\nu = a_\lambda a_\mu a_\nu \xi_1 + \ldots$$

l'equazione del loro punto comune.

(*) Sono i Jacobiani delle coppie di forme:

$$a_\lambda^3 \text{ e } b_\lambda^3, \ldots\ldots, A_\lambda^3 \text{ e } B_\lambda^3, \ldots\ldots$$

(**) Cayley, *Journal de Liouville*, t. X.

Facendo coincidere ν con λ, si ha l'equazione del punto comune al piano μ e a quella generatrice della sviluppabile che sta nel piano λ, cioè *l'equazione di un punto qualunque della sviluppabile*:

$$o = p_\lambda^2 p_\mu = a_\lambda^2 a_\mu \xi_1 + \ldots$$

Chiameremo *generatrice* λ *della sviluppabile* quella che sta nel piano λ: essa è anche la tangente λ della cubica, od anche la retta λ.

Se l'equazione $o = u_\lambda^3$ determina i parametri di tre piani della sviluppabile, sarà

$$o = (pu)^3 = (au)^3 \xi_1 + \ldots = -\frac{9}{\Delta^2} \begin{vmatrix} o & u_{111} & \cdot & \cdot \\ \xi_1 & A_{111} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

l'equazione del punto comune ai tre piani. E se l'equazione $o = v_\lambda^2$ determina i parametri di due piani della sviluppabile, sarà

$$o = (pv)^2 p_\mu = (av)^2 a_\mu \xi_1 + \ldots$$

l'equazione del punto comune a quei due piani e al piano μ.

Le equazioni

$$o = A_\lambda^3 \quad o = B_\lambda^3 \quad o = C_\lambda^3 \quad o = D_\lambda^3$$

dànno i parametri di quelle terne di piani della sviluppabile che concorrono ne' punti di riferimento

$$o = \xi_1 \quad o = \xi_2 \quad o = \xi_3 \quad o = \xi_4 .$$

Se x' (x'_1 x'_2 x'_3 x'_4) è un punto dato, i parametri dei tre piani della sviluppabile che passano per esso saranno le radici della equazione

$$o = A_\lambda^3 x'_1 + B_\lambda^3 x'_2 + C_\lambda^3 x'_3 + D_\lambda^3 x'_4 = \Pi_\lambda^3 = \Pi'^3_\lambda = \ldots \quad (*).$$

Nelle ipotesi fatte in fine del § 3 la sviluppabile è reale, e i tre piani di essa condotti per un punto reale possono esser tutti reali e distinti, ovvero due reali coincidenti e un terzo distinto (quando il punto è su una retta λ), ovvero tutti tre reali e coincidenti (quando il punto è sulla cubica), ovvero uno reale e due imaginarî coniugati.

(*) Qui

$$\Pi_1^3 = A_1^3 x'_1 + \ldots = \Pi_{111} = A_{111} x'_1 + \ldots$$
$$\Pi_1^2 \Pi_2 = A_1^2 A_2 x'_1 + \ldots = \Pi_{112} = A_{112} x'_1 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le coordinate-assi della retta comune a due piani λ μ della sviluppabile (*retta in due piani* o *asse* della sviluppabile) saranno

$$(AB)^3 (\lambda \mu)^2 + 3 (AB) A_\lambda A_\mu B_\lambda B_\mu , \ldots \ldots ,$$

e le coordinate-raggi

$$(ab)\, a_\lambda a_\mu b_\lambda b_\mu , \ldots \ldots$$

E si avrà

$$(AB)^3 (\lambda\mu)^2 + 3 (AB) A_\lambda A_\mu B_\lambda B_\mu = \Delta\, (cd)\, c_\lambda c_\mu d_\lambda d_\mu$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Qui accade notare che, se $o = u_\lambda^3$ e $o = U_\lambda^3$ determinano due piani $o = (P\,u)^3$ e $o = (PU)^3$, o due punti $o = (pu)^3$ e $o = (p\,U)^3$, la retta comune ai due piani ha per coordinate-assi

$$(u\,U)^3 (AB)^3 + 3 (u\,U) (AB) (A\,u) (A\,U) (B\,u) (B\,U) \quad \text{ecc.}$$

e per coordinate-raggi

$$(u U) (a\,b) (a\,u) (a\,U) (b\,u) (b U) \quad \text{ecc.}$$

ossia

$$\begin{vmatrix} u_{,,,} & U_{,,,} & a_{,,,} & b_{,,,} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} \quad \text{ecc.};$$

e la retta pe' due punti ha per coordinate-raggi

$$(u U)^3 (ab)^3 + 3 (u U) (ab) (au) (aU) (bu) (bU) \quad \text{ecc.}$$

e per coordinate-assi

$$(u U) (AB) (A\,u) (AU) (Bu) (BU) \quad \text{ecc.}$$

ossia

$$\begin{vmatrix} u_{,,,} & U_{,,,} & A_{,,,} & B_{,,,} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} \quad \text{ecc.}$$

Le due rette sono reciproche.

8. *Per ogni punto x dello spazio si può far passare una corda della cubica* (*). Poichè la corda $\lambda\mu$ passa per x quando si ha indipendentemente da ν

$$o = P_\lambda P_\mu P_\nu ,$$

ovvero

$$o = P_\lambda P_\mu P_1 \qquad o = P'_\lambda P'_\mu P'_2 ;$$

(*) Cayley, l. c.

dalle quali equazioni eliminando μ si ottiene

$$o = (PP')^2 P_\lambda P'_\lambda = (AA')^2 A_\lambda A'_\lambda x_1^2 + \ldots + 2(AB)^2 A_\lambda B_\lambda x_1 x_2 + \ldots$$
$$= Q_\lambda^2 = Q'^2_\lambda = \ldots \quad (*).$$

Questa equazione determina due parametri; ma potendo scambiarsi λ con μ, ne segue che i due punti corrispondenti ai detti parametri sono su una corda che passa per x, e questa è l'unica corda che passi per x.

Supponendo λ fisso e x variabile, *la precedente equazione* $o = Q_\lambda^2$ *rappresenta il cono che proietta la cubica dal punto* λ *della stessa. Questo cono è di* 2° *ordine.* Lo diremo *cono* λ *circoscritto alla cubica.*

Analogamente, *ogni piano* ξ *dello spazio contiene un asse della sviluppabile*, ossia una retta per cui passano due piani della sviluppabile (**); i parametri dei quali son dati dalla equazione

$$o = (pp')^2 p_\lambda p'_\lambda = (aa')^2 a_\lambda a'_\lambda \xi_1^2 + \ldots + 2(ab)^2 a_\lambda b_\lambda \xi_1 \xi_2 + \ldots$$
$$= q_\lambda^2 = q'^2_\lambda = \ldots \quad (***).$$

Quando λ è fisso e ξ variabile, *questa equazione* $o = q_\lambda^2$ *rappresenta l'inviluppo delle rette secondo cui i piani della sviluppabile secano il piano* λ *della stessa. Questo inviluppo è una conica (la conica* λ *iscritta nella sviluppabile).*

9. *L'equazione della sviluppabile in coordinate di punti* si ottiene eguagliando a zero il discriminante della forma (cubica in λ) $P_\lambda^3 = o$. Essa è dunque

$$o = \text{discr. } P_\lambda^3 = \text{discr. } Q_\lambda^2$$
$$= (PP')^2 (P''P''')^2 (PP'')(P'P''') = (QQ')^2$$
$$= \Sigma \text{ (ipotesi)},$$

(*) $(PP')^2 P_\lambda P'_\lambda$, $(AA')^2 A_\lambda A'_\lambda$, ... sono gli Hessiani di P_λ^3, A_λ^3 ... E $(AB)^2 A_\lambda B_\lambda$ è la somma, divisa per 36, de' due determinanti formati con le 2e derivate di A_λ^3 e B_λ^3, cioè $\begin{vmatrix} A_\lambda A_1^2 & A_\lambda A_1 A_2 \\ B_\lambda B_2 B_1 & B_\lambda B_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_\lambda^2 B_1 & B_\lambda B_1 B_2 \\ A_\lambda A_2 A_1 & B_\lambda^2 A_2 \end{vmatrix}$. E così via.

(**) Cayley, l. c.

(***) $(pp')^2 p_\lambda p'_\lambda$ è l'Hessiano di p_λ^3, ecc.

e sviluppata

$$\Sigma = 2\left\{ 4\,(P_{111}P_{122} - P^2_{112})\,(P_{112}P_{222} - P^2_{122}) - (P_{111}P_{222} - P_{112}P_{122})^2 \right\}$$

$$= 2\left\{ 6\,P_{111}P_{112}P_{122}P_{222} + 3\,P^2_{112}P^2_{122} - P^2_{111}P^2_{222} - 4\,P_{111}P^3_{122} - 4\,P_{222}P^3_{112} \right\} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2(AA')^2A_1A'_1x_1^2 + \ldots + 2(AB)^2A_1B_1x_1x_2 + \ldots, & (AA')^2(A_1A'_2 + A_2A'_1)x_1^2\ldots \\ (AA')^2(A_1A'_2 + A_2A'_1)x_1^2\ldots + 2(AB)^2(A_1B_2 + A_2B_1)x_1x_2\ldots, & 2(AA')^2A_2A_2x_1^2 + \ldots \end{vmatrix}$$

$$= (AA')^2(A''A''')^2(AA'')(A'A''')\,x_1^4 + \ldots$$

$$+ 4\,(AA')^2(A''B)^2(AB)(A'A'')\,x_1^3x_2 + \ldots$$

$$+ 2\left\{ \begin{array}{l} (AA')^2(BB')^2(AB)(A'B') + (AB)^2(B'A')^2(AB')(BA') \\ \quad + (AB)^2(A'B')^2(AA')(BB') \end{array} \right\} x_1^2x_2^2 + \ldots.$$

Dunque *la sviluppabile è di 4° ordine* (*); ossia una retta arbitraria incontra 4 tangenti della cubica.

Per dualità, *l'equazione della cubica in coordinate di piani è*

$$\begin{aligned} 0 &= \text{discr.}\ p_\lambda^3 = \text{discr.}\ q_\lambda^2 \\ &= (pp')^2(p''p''')^2(pp'')(p'p''') = (qq')^2 \\ &= \sigma\ \text{(ipotesi)}. \end{aligned}$$

La *cubica è di 4ª classe*, ossia per ogni retta passano 4 piani tangenti alla cubica; il che conferma che ogni retta seca 4 tangenti della cubica.

È chiaro che, se una retta giace in un piano osculatore, due delle 4 tangenti che essa incontra coincidono con quella contenuta nel piano; se poi la retta è comune a un altro piano osculatore, le altre due tangenti coincidono con quella che è contenuta in questo piano; e se la retta è una tangente della curva, non ne incontra alcun'altra. Del pari, se una retta seca la cubica in un punto, due delle 4 tangenti coincidono con quella che tocca nel punto; e se la retta seca in un altro punto, le altre due tangenti coincidono con quella che tocca ivi. Di più (nelle ipotesi fatte in fine del § 3) due delle 4 tangenti possono essere imaginarie coniugate, e così pure le altre due.

(*) Chasles, *Aperçu historique etc.*, nota XXXIII.

Rapporto anarmonico di 4 punti della cubica o piani della sviluppabile.

10. Per la corda che unisce due punti λ μ della cubica passano infiniti piani, ciascuno dei quali seca la cubica in un terzo punto; e la corrispondenza fra questo punto e il piano è univoca. Presi sulla curva 4 punti ν ν' ν'' ν''', saranno

$$o = P_\lambda P_\mu P_\nu \qquad o = P_\lambda P_\mu P_{\nu'} \ldots$$

i piani corrispondenti: e il rapporto anarmonico dei 4 piani sarà

$$\frac{(\nu\nu'')}{(\nu'\nu'')} : \frac{(\nu\nu''')}{(\nu'\nu''')} ,$$

che non dipende da λ e μ. Dunque *è costante il rapporto anarmonico de' 4 piani che passano per 4 punti fissi della cubica e per una corda (o tangente) variabile della medesima.* Esso prende il nome di *rapporto anarmonico dei 4 punti della cubica.*

Dualmente, per ogni punto di una retta in due piani λ μ (asse $\lambda\mu$ della sviluppabile) passa un altro piano della sviluppabile, il quale corrisponde univocamente al punto. Fissati 4 piani ν ν' ν'' ν'''. il rapporto anarmonico dei 4 punti è

$$\frac{(\nu\nu'')}{(\nu'\nu'')} : \frac{(\nu\nu''')}{(\nu'\nu''')} ,$$

indipendente da λ e μ. Dunque *è costante il rapporto anarmonico dei 4 punti in cui 4 piani fissi della sviluppabile secano un asse (o una generatrice) variabile della stessa*, e dicesi *rapporto anarmonico dei 4 piani della sviluppabile.*

Si noti che il rapporto anarmonico di 4 punti della cubica è lo stesso di quello dei 4 piani della sviluppabile che osculano ivi la cubica (*).

(*) Tre fasci proiettivi di piaoi generano, con l'intersezione di tre piani corrispondenti, una cubica gobba (CHASLES, *Comptes rendus etc.*, 1857), ed ogni cubica gobba può esser generata in tal modo.

Fuochi e piani focali.

11. Per un punto dato x' passano tre piani osculatori della cubica, ed i parametri dei punti di osculazione sono dati dalla equazione

$$o = \Pi_\lambda^3 = A_\lambda^3 x'_1 + \ldots :$$

sicchè l'equazione del piano che seca la cubica nei detti tre punti è

$$\begin{aligned}
o = (P\Pi)^3 &= (A\Pi)^3 x_1 + \ldots = (PA)^3 x'_1 + \ldots \\
&= \{ (AB)^3 x'_2 + (AC)^3 x'_3 + (AD)^3 x'_4 \} x_1 + \ldots \\
&= - \{ (AB)^3 x_2 + (AC)^3 x_3 + (AD)^3 x_4 \} x'_1 + \ldots \\
&= (AB)^3 (x_1 x'_2 - x_2 x'_1) + \ldots + (CD)^3 (x_3 x'_4 - x_4 x'_3) .
\end{aligned}$$

La simmetria di questa equazione rispetto ai punti x x' prova che il punto x' giace nel piano dalla equazione rappresentato. Dunque. *se da un dato punto si conducono i tre piani osculatori alla cubica* (piani della sviluppabile), *il piano de' tre punti d'osculazione passa per il dato punto* (*); ovvero, *se un dato piano seca la cubica in tre punti, il punto comune ai tre piani osculatori in questi punti giace nel dato piano.*

Diremo il punto *fuoco* del piano, e il piano *focale* del punto.

Si rileva inoltre dalla simmetria anzidetta che, *se un punto sta nel piano focale di un altro punto. viceversa, questo sta nel piano focale del primo.*

Se ξ' è un piano dato, posto al solito

$$\pi_\lambda^3 = a_\lambda^3 \xi'_1 + \ldots ,$$

sarà

$$o = (p\pi)^3 = \ldots = (ab)^3 (\xi_1 \xi'_2 - \xi_2 \xi'_1) + \ldots + (cd)^3 (\xi_3 \xi'_4 - \xi_4 \xi'_3)$$

l'equazione del fuoco di ξ'.

Se il punto x' è dato come intersezione di tre piani qualunque

$$o = (Pu)^3 \quad o = (Pv)^3 \quad o = (Pw)^3 ,$$

consegue dalle cose dette che il suo piano focale ξ' passerà pei fuochi

$$o = (pu)^3 \quad o = (pv)^3 \quad o = (pw)^3$$

(*) Chasles, *Compt. r.* 1857

di quei piani; e quindi avrà per equazione

$$o = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ (au)^3 & (bu)^3 & (cu)^3 & (du)^3 \\ (av)^3 & (bv)^3 & (cv)^3 & (dv)^3 \\ (aw)^3 & (bw)^3 & (cw)^3 & (dw)^3 \end{vmatrix}$$

ossia (cfr. §§ 3 e 5)

$$o = (uv)\,(uw)\,(vw)\,(\mathrm{P}u)\,(\mathrm{P}v)\,(\mathrm{P}w)\,;$$

esso secherà la cubica ne' punti dati dalla

$$o = (uv)\,(uw)\,(vw)\,u_\lambda v_\lambda w_\lambda\,.$$

Analogamente, se il piano ξ' è dato mediante tre suoi punti

$$o = (pu)^3 \quad o = (pv)^3 \quad o = (pv)^3\,,$$

sarà

$$o = (uv)\,(uw)\,(vw)\,(pu)\,(pv)\,(pw)$$

l'equazione del suo fuoco x'. E i tre piani della sviluppabile per x' saran dati dalla

$$o = (uv)\,(uw)\,(vw)\,u_\lambda v_\lambda w_\lambda\,.$$

Se le equazioni

$$o = u_\lambda{}^3 \qquad o = \mathrm{U}_\lambda{}^3$$

determinano due piani (o due punti), l'uno passerà pel fuoco dell' altro (o l'uno starà nel piano focale dell'altro) se sarà

$$o = (u\mathrm{U})^3 \quad \text{o} \quad o = (au)^3\,(\mathrm{AU})^3 + \ldots$$

Corrispondenza dualitica degli elementi dello spazio mediante la cubica.

12. Il teorema precedente definisce il carattere speciale della corrispondenza univoca e dualitica di cui abbiam toccato al § 7, e permette di compierne il concetto.

A ciascun punto dello spazio corrisponde un piano che passa pel punto, e a ciascun piano un punto che giace nel piano *(fuoco* e *piano focale)* (*). — Ai punti di una retta corrispondono de' piani per un'altra

(*) Si ha insomma un *Nullsystem*. Un punto e un piano corrispondenti possono anche chiamarsi: il primo *Nullpunkt* del secondo, e il secondo *Nullebene* del primo.

retta, e ai punti della seconda i piani per la prima; onde le due rette sono *reciproche.* Quattro punti di una retta e i quattro piani corrispondenti hanno eguali rapporti anarmonici. E se due rette hanno un punto comune ossia sono in un piano, le reciproche sono in un piano ossia hanno un punto comune (punto e piano corrispondenti). — Ai punti della cubica corrispondono i rispettivi piani osculatori, e viceversa. Quattro punti della cubica e i quattro piani corrispondenti hanno eguali rapporti anarmonici. — A una retta che sechi la cubica in un punto corrisponde come reciproca una retta nel relativo piano osculatore, e viceversa. — Una retta (corda) che sechi la cubica in due punti ha per reciproca la retta (asse) comune a' due piani osculatori in quei due punti, e viceversa. Diremo spesso la prima retta *focale* di ciascun suo punto, e la seconda *direttrice* di ciascun piano per essa.

Per ogni punto passano infinite rette reciproche di sè stesse, cioè quelle che giacciono nel piano focale del punto. Viceversa, in ogni piano giacciono infinite rette reciproche di sè stesse, cioè quelle che passano pel fuoco del piano. In particolare, una retta che passi per un punto della cubica e giaccia nel relativo piano osculatore è reciproca di sè stessa; tra queste le tangenti della cubica.

L'insieme delle rette reciproche di sè stesse costituisce un complesso Plückeriano lineare la sua equazione è

$$o=(AB)^3z_{12}+(AC)^3z_{13}+(AD)^3z_{14}+(BC)^3z_{23}+(BD)^3z_{24}+(CD)^3z_{34}=0,$$

indicando con $z_{12}\,\ldots\,z_{34}$ le coordinate-raggi di una retta (*); sicchè gl'invarianti

$$(AB)^3\,\ldots\ldots\,(CD)^3$$

possono chiamarsi le *coordinate-assi* del complesso. E due rette reciproche nel complesso sono tali altresì nella corrispondenza.

L'invariante del complesso è

$$(AB)^3(CD)^3+(AC)^3(DB)^3+(AD)^3(BC)^3=-\tfrac{1}{3}\Delta^3.$$

Indicando poi con $\zeta_{12}\,\ldots\ldots\,\zeta_{34}$ le coordinate-assi di una retta (**), lo stesso complesso ha per equazione

$$o=(ab)^3\zeta_{12}+\ldots\ldots+(cd)^3\zeta_{34}=o\ ,$$

(*) Cioè ponendo $z_{ij}=x_i x'_j-x'_i x_j$, se $x\ x'$ son due punti della retta.

(**) Cioè ponendo $\zeta_{ij}=\xi_i\xi'_j-\xi'_i\xi_j$, se $\xi\ \xi'$ son due piani per la retta.

ossia ha per coordinate-raggi

$$(ab)^3 \, . \, . \, . \, . \, . \, (cd)^3 \ ;$$

allora il suo invariante è

$$(ab)^3 \, (cd)^3 + \ldots = -3\,\Delta \quad (*) \, .$$

Quelle rette reciproche di sè stesse che si appoggiano ad una data retta, si appoggiano anche alla reciproca di essa, e costituiscono un iperboloide, su cui sono generatrici di un sistema; mentre la retta data e la reciproca sono generatrici dell'altro sistema, e ad ogni generatrice di questo secondo sistema ne corrisponde un'altra, cioè la retta reciproca.

Ancora, quelle rette reciproche di sè stesse che si appoggiano a due date rette reciproche di sè stesse, p. e. a due rette λ, costituiscono un iperboloide su cui sono generatrici di un sistema, mentre le generatrici dell'altro sistema si corrispondono a due a due come reciproche, e le due rette date sono le rette doppie di questa corrispondenza.

Risulta da quanto precede che le quattro rette λ che secano una retta data (§ 9), secano anche la sua reciproca, e nessun'altra. Viceversa, quattro rette λ ammettono due rette secanti comuni, e queste sono reciproche. Le quattro rette λ che secano una retta reciproca di sè stessa non ammettono altra secante comune.

I piani per una retta reciproca di sè stessa sono proiettivi ai loro fuochi, che stanno su di essa. E siccome, se $o = u_\lambda^3$ $o = U_\lambda^3$ determinano due terne di punti i cui piani passino per la retta, $o = k_1 u_\lambda^3 + k_2 U_\lambda^3$ ne determina un'altra qualunque; così i punti in cui la retta seca quelle quattro rette λ che incontra, non che i piani per la retta e per le stesse quattro rette λ, corrispondono univocamente ai quattro valori di $k_1 : k_2$ pei quali è nullo il discriminante della $k_1 u_\lambda^3 + k_2 U_\lambda^3$. Possiamo semplificare il calcolo di questo discriminante senza scemare l'estensione de' risultati, supponendo che la retta giaccia nel piano tangente alla cubica nel punto

---

(*) Del resto, che le due equazioni rappresentino lo stesso complesso risulta dalle note relazioni

$$z_{12} : \zeta_{34} = z'_{13} : \zeta_{42} = \ldots\ldots$$
$$-3\,(AB)^3 = \Delta\,(cd)^3 \ , \ \ldots\ldots$$

Notiamo che ogni retta λ appartenendo al complesso $o = O \equiv o$, si ha

$$o = (ab)^3 (cd) \, c_\lambda^2 d_\lambda^2 + \ldots\ldots + (cd)^3 (ab) \, a_\lambda^2 b_\lambda^2$$
$$o = (AB)^3 (CD) \, C_\lambda^2 D_\lambda^2 + \ldots\ldots$$

di parametro zero e secante nel punto di parametro ∞, cioè ponendo $U_\lambda^3 = 3\lambda_1^2\lambda_2$; allora, essendo attualmente $o = (u U)^3 = 3u_{122}$, avremo

$$k_1 u_\lambda^3 + k_2 U_\lambda^3 = k_1 u_{111} \lambda_1^3 + 3(k_1 u_{112} + k_2)\lambda_1^2\lambda_2 + k_1 u_{222}\lambda_2^3 ,$$

e

$$\text{discr.}(k_1 u_\lambda^3 + k_2 U_\lambda^3) = -2 \{ 4 k_1 u_{222} (k_1 u_{112} + k_2)^3 + k_1^4 u_{111}^2 u_{222}^2 \} ,$$

che può trasformarsi linearmente in

$$l k_1 k'^3_2 + m k_1^4 .$$

L'invariante quadratico di questa forma in $k_1 : k'_2$ è evidentemente nullo Dunque:

I quattro punti nei quali una retta reciproca di sè stessa (cioè del complesso $o = O \equiv o$) seca la sviluppabile, formano un sistema equianarmonico; e viceversa.

E i quattro piani condotti per una retta reciproca di sè stessa a toccare la cubica formano un sistema equianarmonico; e viceversa.

13. A complemento del § 8, osserviamo che il cono che proietta la cubica da un punto qualunque è di 4^a classe (perchè ogni retta pel punto seca 4 tangenti della cubica, e quindi per essa passano 4 piani tangenti alla cubica); è di 3^o ordine (perchè ogni piano pel punto contiene tre punti della cubica e quindi tre generatrici del cono); ha una generatrice doppia (la corda o focale del punto), tre generatrici stazionarie (le rette che, nei tre piani osculatori pel punto, vanno dal punto ai tre punti d'osculazione), e queste sono in un piano (focale del punto). Se il vertice sta su una tangente della cubica, il cono si riduce alla 3^a classe, con una generatrice cuspidale ed una stazionaria; al qual cono è da aggiungere la detta tangente considerata come asse di un fascio di piani. E se il vertice λ è un punto della cubica, il cono si riduce ad uno di 2^a classe $(o = Q_\lambda^2)$, più la retta tangente in λ alla cubica considerata come asse di un fascio di piani e contata due volte.

Dualmente: un piano qualunque è secato dalla sviluppabile secondo una curva, che è l'inviluppo delle tracce dei piani della sviluppabile sul piano dato. Essa è di 4^o ordine e di 3^a classe; ha tre cuspidi (i punti ove il piano seca la cubica) con le tangenti cuspidali concorrenti nel fuoco del piano, ed ha una tangente doppia (la direttrice del piano). Se il piano passa per una generatrice della sviluppabile, la curva diviene di 3^o ordine, con una cuspide e un flesso; e ad essa va aggiunta la detta generatrice come punteggiata. E se il piano appartiene alla sviluppabile, la curva si riduce alla conica $0 = q_\lambda^2$ più due volte la generatrice contenuta nel piano (*).

Involuzioni di punti della cubica, o di piani della sviluppabile.

14. Fra i punti della curva, come pure fra i piani della sviluppabile, possiamo istituire una corrispondenza proiettiva, e ciò in infiniti modi; anzi i teoremi del § 10 permettono di ridurre una cosiffatta corrispondenza ad una più elementare fra i piani di due fasci o di un medesimo fascio, ovvero fra i punti di due rette o di una medesima retta.

In particolare, basterà stabilire fra due parametri variabili $\mu_1 : \mu_2$ e $\mu'_1 : \mu'_2$ una equazione bilineare qualunque, per istituire una corrispondenza univoca proiettiva fra i punti $\mu\ \mu'$ della cubica, o fra i piani $\mu\ \mu'$ della sviluppabile, od anche fra i punti μ della cubica e i piani μ' della sviluppabile.

Ancora in particolare, possiamo imaginare i punti della cubica, ovvero i piani della sviluppabile, accoppiati in involuzione quadratica, e ciò in infiniti modi; bastando stabilire una equazione bilineare e simmetrica fra i due parametri variabili $\mu_1 : \mu_2$ e $\mu'_1 : \mu'_2$. Una cosiffatta involuzione sarà del tutto determinata quando siano dati i parametri di due coppie di elementi coniugati, ovvero i parametri $\lambda'_1 : \lambda'_2$ e $\lambda''_1 : \lambda''_2$ degli elementi doppî, ovvero anche l'equazione che ha per radici questi due parametri.

Se $0 = v_\lambda^2$ è questa equazione, avremo

$$v_\lambda^2 = (\lambda\lambda')(\lambda\lambda'') \ ;$$

e la relazione fra i parametri di due elementi coniugati nell'involuzione sarà

$$0 = v_\mu v_{\mu'} \ , \qquad \text{ovvero} \qquad 0 = (\mu\lambda')(\mu'\lambda'') + (\mu'\lambda')(\mu\lambda'') \, .$$

I piani che passano per un punto fisso ν della cubica e per ciascuna coppia di punti $\mu\ \mu'$ in involuzione, formano un fascio intorno a una certa retta per ν, al quale fascio appartengono due piani per le tangenti nei punti $\lambda'\ \lambda''$, e queste tangenti sono le due che incontrano l'asse del fascio (oltre

(*) Due coni di 2° ordine con una generatrice comune si secano inoltre lungo una cubica gobba. E due coniche in piani diversi ma con una tangente comune sono iscritte in una sviluppabile di 3ª classe (oltre che ne' piani per la tangente).

la tangente in ν presa due volte). Viceversa, un fascio di piani il cui asse sechi la cubica in un punto ν segna sulla cubica coppie di punti in involuzione, ecc.

Dualmente, *i punti comuni a ciascuna coppia di piani variabili* μ. μ' *di una involuzione e a un piano fisso* ν *della sviluppabile, sono su una retta nel piano* ν, ecc. E viceversa, da' singoli punti di una retta in un piano ν della sviluppabile si possono tirare coppie di piani della sviluppabile in involuzione, ecc.

15. Ancora, due terne di punti della cubica o di piani della sviluppabile, i cui parametri sieno le radici di due equazioni

$$o = u_\lambda^3 \qquad o = U_\lambda^3 \ ,$$

determinano una involuzione cubica di punti della cubica, o rispettivamente di piani della sviluppabile; e gli elementi di una terna qualunque della involuzione saran dati dalla equazione

$$o = k_1 u_\lambda^3 + k_2 U_\lambda^3 \ ,$$

essendo $k_1 : k_2$ un numero variabile con la terna.

Se si tratta di un'involuzione cubica di punti sulla curva, i piani delle singole terne dell'involuzione,

$$o = (Pu)^3 \qquad o = (PU)^3 \qquad o = k_1(Pu)^3 + k_2(PU)^3 \ , \ ecc.,$$

formeranno un fascio. E viceversa, i piani di un fascio qualunque secano la cubica in terne di punti in involuzione.

Se poi si tratta di un'involuzione di piani, i punti comuni alle singole terne,

$$o = (pu)^3 \qquad o = (pU)^3 \qquad o = k_1(pu)^3 + k_2(pU)^3 \ , \ ecc.,$$

formeranno una punteggiata. E viceversa, le terne di piani della sviluppabile condotte pe' singoli punti di una retta formano un'involuzione cubica.

In ambo i casi vi saranno, in generale, 4 terne fornite di elementi doppî; e ciò conferma che in generale 4 rette λ secano una retta data.

Fra i casi particolari è notevolissimo questo: che *l'involuzione ammetta due elementi tripli*, anzichè 4 elementi doppî. Allora, se si tratta di terne di punti in involuzione, nel fascio di piani da esse determinato vi saranno due piani osculatori della cubica, cioè i piani osculatori nei due punti tripli dell'involuzione; e l'asse del fascio sarà un asse della sviluppabile, od anche la direttrice dei singoli piani del fascio. Se invece si tratta di terne di piani in involuzione, la retta, luogo dei punti comuni alle singole terne, secherà la cubica in due punti, cioè ne' punti d'osculazione dei due piani tripli dell'involuzione; sicchè la retta sarà una corda della cubica, ovvero la focale dei singoli suoi punti.

Nell'un caso e nell'altro, è noto che, se i parametri degli elementi di una terna qualsivoglia dell'involuzione si suppongono esser le radici di una equazione

$$o = u_\lambda^3 = u'^3_\lambda = \ldots,$$

i parametri dei due elementi tripli λ' e λ'' saranno le radici della equazione quadratica

$$\begin{aligned} o &= \text{Hess. } u_\lambda^3 = (uu')^2 u_\lambda u'_\lambda \\ &= v_\lambda^2 = v'^2_\lambda = \ldots, \end{aligned}$$

e sviluppando

$$\tfrac{1}{2} v_\lambda^2 = \begin{vmatrix} u_{111}\lambda_1 + u_{112}\lambda_2 & u_{112}\lambda_1 + u_{122}\lambda_2 \\ u_{112}\lambda_1 + u_{122}\lambda_2 & u_{122}\lambda_1 + u_{222}\lambda_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_2^2 & -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1^2 \\ u_{111} & u_{112} & u_{122} \\ u_{112} & u_{122} & u_{222} \end{vmatrix}.$$

È anche noto che ciascun elemento triplo con gli elementi di una terna qualunque della involuzione costituisce un sistema equianarmonico (in sè) o ciclico-proiettivo, vale a dire un sistema di quattro elementi pel quale tre rapporti anarmonici fondamentali sono eguali fra loro (e ad una radice cubica imaginaria dell'unità negativa), e gli altri tre eguali fra loro (e all'altra radice cubica imaginaria dell'unità negativa).

Inoltre, se di ciascun elemento di una qualunque terna dell nvoluzione si prende l'elemento coniugato armonicamente rispetto agli altri due, i tre nuovi elementi così ottenuti formano un'altra terna dell'involuzione; reciprocamente, ciascun elemento della prima terna è coniugato armonicamente al *corrispondente* elemento della seconda terna rispetto agli altri due di questa; e ciascun elemento della prima terna è coniugato armonicamente al corrispondente elemento della seconda terna anche rispetto ai due elementi tripli dell'involuzione. Due terne cosiffatte si diranno *congiunte* l'una all'altra (I loro elementi insieme costituiscono ciò che dicesi involuzione di sei elementi).

Se $o = u_\lambda^3 = \ldots$ dà i parametri degli elementi di una terna, i parametri degli elementi della terna congiunta saran dati dal covariante cubico di u_λ^3 eguagliato a zero:

$$\begin{aligned} o &= \text{cov. cub. } u_\lambda^3 = (uu'')^2 (u'u'') u_\lambda u'^2_\lambda = (uv) u_\lambda^2 v_\lambda \\ &= \omega_\lambda^3 = \omega'^3_\lambda = \ldots\ldots \end{aligned}$$

Se si pone

$$u = \text{discr. } u_\lambda^3 = (uu')^2 (u''u''')^2 (uu'')(u'u''')$$
$$= \text{discr. } v_\lambda^2 = (vv')^2 = v_{\lambda'} v_{\lambda''} = -\tfrac{1}{2} (\lambda'\lambda'')^2$$
$$= 2 \left\{ 4 (u_{111} u_{122} - u_{112}^2)(u_{112} u_{222} - u_{122}^2) - (u_{111} u_{222} - u_{112} u_{122})^2 \right\}$$
$$= 2 (6u_{111} u_{112} u_{122} u_{222} + 3u_{112}^2 u_{122}^2 - 4u_{111} u_{122}^3 - 4u_{222} u_{112}^3 - u_{111}^2 u_{222}^2)$$
$$= -\frac{2}{u_{111}^2} \left\{ 4 (u_{111} u_{122} - u_{112}^2)^3 + (u_{111}^2 u_{222} + 2u_{112}^3 - 3u_{111} u_{112} u_{122})^2 \right\}$$
$$= -\frac{2}{u_{222}^2} \left\{ 4 (u_{112} u_{222} - u_{122}^2)^3 + (u_{111} u_{222}^2 + 2u_{122}^3 - 3u_{112} u_{122} u_{222})^2 \right\},$$

si avrà

$$\omega_\lambda^3 = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial u_{111}} \lambda_2^3 - \frac{\partial u}{\partial u_{112}} \lambda_2^2 \lambda_1 + \frac{\partial u}{\partial u_{122}} \lambda_2 \lambda_1^2 - \frac{\partial u}{\partial u_{222}} \lambda_1^3 \right).$$

Notiamo anche che, se gli elementi di una terna dell'involuzione sono tutti reali, i due punti tripli sono imaginarî coniugati, e gli elementi della terna congiunta sono anche tutti reali; mentre, se di una terna un elemento è reale e due imaginarî coniugati, i due elementi tripli sono reali, e gli elementi della terna congiunta sono uno reale e due imaginarî coniugati. E viceversa. Sicchè, quanto alla realità degli elementi, quel che avviene per una terna vale per tutte le altre.

Da ultimo osserviamo, che la involuzione cubica, di cui è parola, è accompagnata da una involuzione quadratica, costituita dagli stessi elementi di quella, ma altrimenti distribuiti. Questa involuzione quadratica è quella costituita dalle infinite coppie di elementi *corrispondenti* appartenenti alle infinite coppie di terne congiunte nella involuzione cubica, ed ha per elementi doppî gli elementi tripli di quella. E la sua equazione è

$$o = (\lambda\lambda')(\mu\lambda'') + (\lambda\lambda'')(\mu\lambda')$$
$$= (uu')^2 u_\lambda u'_\mu = v_\lambda v_\mu ,$$

se λ e μ sono i parametri di due elementi corrispondenti.

16. Come si vede, *un dato piano determina completamente sulla curva una involuzione cubica di punti con due punti tripli.* E se l'equazione del piano è

$$o = (Pu)^3 ,$$

cioè se $o = u_\lambda^3$ determina la terna di punti in esso, sarà

$$0=(P\omega)^3=(uu'')^2(u'u'')(Pu)(Pu')^2=(uv)^2(Pu)^2(Pv)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial u_{111}}P_{111}+\frac{\partial u}{\partial u_{112}}P_{112}+\frac{\partial u}{\partial u_{122}}P_{122}+\frac{\partial u}{\partial u_{222}}P_{222}\right)$$

l'equazione del piano della terna congiunta; piano, che diremo *congiunto* al primo (*).

Ancora, *ad ogni punto x' dello spazio corrisponde un piano* (cioè il suo piano focale) *e quindi una involuzione cubica di punti sulla curva con due elementi tripli.* Allora

$$0=(P\Pi)^3 \qquad 0=(\Pi\Pi'')^2(\Pi'\Pi'')(P\Pi)(P\Pi')^2=\ldots$$

sono le equazioni di quel piano e del congiunto. E i parametri dei punti tripli son dati dalla equazione

$$0=\text{Hess. }\Pi_\lambda^3=(\Pi\Pi')^2\Pi_\lambda\Pi'_\lambda=\overline{Q_\lambda^2}=\overline{Q'^2}=\ldots$$

In *ciascuna* di queste involuzioni cubiche di punti della curva, le quali corrispondono ai singoli piani o anche ai singoli punti dello spazio, *le coppie di piani congiunti costituiscono alla lor volta una involuzione quadratica di piani intorno alla comune direttrice;* e i piani doppî di questa nuova involuzione sono quelli che osculano la curva nei due punti tripli della precedente involuzione; sicchè due piani congiunti sono coniugati armonicamente rispetto a questi due piani osculatori.

È anche determinata un'involuzione cubica di punti sulla curva quando ne son dati i due punti tripli: se questi sono λ' e λ'', saranno $0=P_{\lambda'}^3$ $0=P_{\lambda''}^3$ i due piani osculatori ivi, e

$$0=k_1P_{\lambda'}^3+k_2P_{\lambda''}^3 \qquad 0=k_1P_{\lambda'}^3-k_2P_{\lambda''}^3$$

i piani di due terne congiunte qualunque.

17. Dualmente, *un dato punto determina una involuzione cubica di piani della sviluppabile con due piani tripli.* E se l'equazione del punto (sempre comune a una terna di piani) è

$$0=(pu)^3,$$

sarà

$$0=(p\omega)^3=(uu'')^2(u'u'')(pu)(pu')^2$$

quella del punto comune ai piani della terna congiunta; punto, che diremo *congiunto* al primo (**).

(*) Cremona, *Annali di Matematica,* 1858 e 1859; e *Nouvelles Annales,* 1862.

(**) Cremona, l. c.

Ancora, *ad ogni piano* ξ' *corrisponde un punto* (come fuoco) *e quindi una involuzione cubica di piani della sviluppabile.* Allora

$$o = (p\pi)^3 \qquad o = (\pi\pi'')^2 (\pi'\pi'') (p\pi) (p\pi')^2 = \ldots$$

sono le equazioni di quel punto e del congiunto, e la

$$o = \text{Hess.}\, \pi_\lambda^3 = (\pi\pi')^2 \pi_\lambda \pi'_\lambda = \bar{q}_\lambda^2 = \ldots$$

dà i parametri dei due punti tripli.

In *ciascuna* di queste involuzioni cubiche di piani della sviluppabile, le quali corrispondono ai singoli piani o anche ai singoli punti dello spazio, *le infinite coppie di punti congiunti costituiscono una involuzione quadratica di punti sulla loro comune focale,* che seca la cubica gobba nei punti di osculazione dei due piani tripli della precedente involuzione, e questi due punti sono i punti doppî della involuzione quadratica; sicchè rispetto ad essi due punti congiunti qualunque sono coniugati armonicamente.

È anche determinata una involuzione cubica di piani della sviluppabile, quando ne sono dati i due piani tripli: se questi sono λ' e λ'', saranno $o = p_{\lambda'}^3$ $o = p_{\lambda''}^3$ i due punti ove essi osculano la curva, e

$$o = k_1 p_{\lambda'}^3 + k_2 p_{\lambda''}^3 \qquad o = k_1 p_{\lambda'}^3 - k_2 p_{\lambda''}^3$$

i punti d'incontro di due terne congiunte di piani.

Superficie di 2° grado circoscritte alla cubica o iscritte nella sviluppabile.

18. Esprimendo che

$$x_1 = a_\lambda^3 \qquad x_2 = b_\lambda^3 \qquad x_3 = c_\lambda^3 \qquad x_4 = d_\lambda^3$$

soddisfanno alla equazione di 2° grado

$$o = \sum h_{rs} x_r x_s \qquad (r, s = 1, \ldots, 4;\ h_{rs} = h_{sr})$$

si ottengono i parametri dei 6 punti nei quali la cubica è secata dalla superficie di 2° grado rappresentata da quella equazione.

Esprimendo che la equazione medesima è soddisfatta qualunque sia $\lambda_1 : \lambda_2$, si hanno 7 equazioni lineari omogenee nei 10 coefficienti h_{rs}; il che prova che *per la cubica passano* ∞^2 *superficie di* 2° *grado (quadriche), formanti una* RETE, e ciascuna individuata da due punti estranei alla cubica.

A questa rete di quadriche *circoscritte* alla cubica appartengono i coni che proiettano la cubica dai suoi punti. Scelti sulla cubica due punti $\lambda'\ \lambda''$, il parametro di ogni altro suo punto potrà ridursi alla forma

$$k_1\lambda'_1 + k_2\lambda''_1 : k_1\lambda'_2 + k_2\lambda''_2\ ,$$

(supposto $k_1 : k_2$ variabile), e il punto potrà indicarsi con $k_1\lambda' + k_2\lambda''$. E i coni circoscritti alla cubica dai tre punti $\lambda'\ \lambda''\ k_1\lambda' + k_2\lambda''$ avranno per equazioni

$$o = Q^2_{\lambda'} \qquad o = Q^2_{\lambda''} \qquad o = Q^2_{k_1\lambda' + k_2\lambda''}\ ,$$

e si avrà identicamente

$$Q^2_{k_1\lambda' + k_2\lambda''} = Q^2_{\lambda'} k_1^2 + 2\, Q_{\lambda'} Q_{\lambda''} k_1 k_2 + Q^2_{\lambda''} k_2^2\ .$$

Questa identità prova che la quadrica rappresentata dalla equazione $o = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}$ appartiene alla rete. E siccome nella equazione entrano due parametri $\lambda'_1 : \lambda'_2$ e $\lambda_1'' : \lambda_2''$ ciascuno a 1° grado; così, variando questi due parametri, l'*equazione*

$$o = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}$$

può rappresentare tutte le ∞^2 *quadriche della rete.*

È bene osservare che

$$Q_{\lambda'} Q_{\lambda''} = (P P')^2\, P_{\lambda'} P'_{\lambda''}$$

$$= (A A')^2\, A_{\lambda'} A'_{\lambda''} x_1^2 + \ldots + (AB)^2\, (A_{\lambda'} B_{\lambda''} + A_{\lambda''} B_{\lambda'})\, x_1 x_2 + \ldots$$

Il discriminante della forma $Q^2_{k_1\lambda' + k_2\lambda''}$ quadratica in $k_1 : k_2$, eguagliato a zero, rappresenta (cfr. § 9) la sviluppabile; e infatti si ha

$$Q^2_{\lambda'} Q'^2_{\lambda''} - (Q_{\lambda'} Q_{\lambda''})^2 = (\lambda'\lambda'')^2 (Q Q')^2 = (\lambda'\lambda'')^2\, \Sigma\ ,$$

la quale identità prova che la quadrica $o = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}$ passa per tutti i punti comuni alla sviluppabile ed al cono $o = Q^2_{\lambda'}$, come pure per tutti i punti comuni alla sviluppabile ed al cono $o = Q^2_{\lambda''}$; vale a dire passa per la cubica e per le sue due tangenti λ' e λ''. *Queste due tangenti $\lambda'\ \lambda''$ sono dunque due generatrici d'uno stesso sistema sulla quadrica* $o = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}$, *e la quadrica è un iperboloide* (supposti reali i punti $\lambda'\ \lambda''$).

I piani

$$o = P^2_{\lambda'} P_{\lambda} \qquad o = P^2_{\lambda''} P_{\lambda}\ ,$$

che passano rispettivamente per le due tangenti $\lambda'\ \lambda''$ e per uno stesso punto variabile λ della cubica, si secano lungo una retta, che sarà una generatrice dell'altro sistema sull'iperboloide, e che secherà la cubica nel *solo* punto λ. Una generatrice di questo sistema è la retta comune al piano $o = P^3_{\lambda'}$ che oscula la cubica nel punto λ' e al piano $o = P^2_{\lambda''} P$ che la tocca nel punto λ'' e la seca nel punto λ'; e un'altra generatrice è la retta comune al piano $o = P^3_{\lambda''}$ che oscula nel punto λ'' e al piano $o = P^2_{\lambda'} P_{\lambda''}$ che tocca in λ' e seca in λ''. Queste due ultime rette sono di quelle che diconsi *associate* (*). Sicchè *l'iperboloide passa pel quadrilatero gobbo formato dalle due rette λ' e λ'' con queste due rette associate.*

Fissata una generatrice del 2° sistema, p. e. quella che passa pel punto λ; un piano variabile per essa seca la cubica in due punti $\mu\ \mu'$, e seca l'iperboloide lungo una generatrice del 1° sistema, la quale dunque seca la cubica in quei *due* punti $\mu\ \mu'$. Codeste coppie variabili di punti formano sulla cubica una involuzione quadratica, della quale λ' e λ'' sono i punti doppî (§ 14). Ed è chiaro che *ad ogni involuzione quadratica di punti sulla cubica corrisponde un iperboloide* (**).

19. Se si suppone che i parametri dei punti λ' e λ'' sieno le radici della equazione $o = v_\lambda^2 = v_\lambda'^2 = \ldots$, l'equazione dell'iperboloide prende la forma

$$o = (Q v)^2 = (P P')^2 (P v) (P' v) .$$

E se $\mu\ \mu'$ sono due punti coniugati nella involuzione di cui λ' e λ'' sono i punti doppî, ossia i punti in cui una generatrice del 1° sistema seca la cubica, si ha $o = v_\mu\, v_{\mu'}$, onde

$$\mu'_1 : \mu'_2 = v_\mu v_2 : - v_\mu v_1 = v'_\mu v'_2 : - v'_\mu v'_1 ;$$

e però, detto λ un altro punto qualunque della cubica, l'equazione del piano pei tre punti $\mu\ \mu'\ \lambda$ $(o = P_\mu P_{\mu'} P_\lambda)$ diviene

$$o = (P v)\ P_\mu\, v_\mu P_\lambda .$$

Questa equazione, quando μ è fisso e λ variabile, rappresenta un piano qualunque per quella generatrice del 1° sistema che seca la cubica in μ (e μ'); e quando μ è variabile e λ fisso, rappresenta un piano qualunque per quella generatrice del 2° sistema che seca la cubica in λ, fra' quali piani figurano i due $o = P_{\lambda'}^2 P_\lambda$ e $o = P_{\lambda''}^2 P_\lambda$ di cui sopra.

Le coordinate-assi della 1ª generatrice saranno

$$(AB)\ (A v)\ (B v')\ A_\mu B_\mu\, v_\mu v'_\mu\ , \ldots\ldots ,$$

(*) Cremona, *Nouv. Ann.*, 1862. Esse sono reciproche di sè stesse.

(**) Quando i punti doppî coincidono in uno, l'iperboloide si riduce al cono che proietta la cubica da quel punto.

e le coordinate-raggi

$$-(ab)^3 v_\mu^2 v'^2_\mu + 3(ab)(av)(bv') a_\mu b_\mu v_\mu v'_\mu, \ldots\ldots$$

Le coordinate-assi della 2^a generatrice saranno

$$(AB) A_\lambda B_\lambda (A_{\lambda'} B_{\lambda''} + A_{\lambda''} B_{\lambda'}), \ldots\ldots$$

o

$$(AB)(Av)(Bv) A_\lambda B_\lambda \ldots\ldots;$$

e le coordinate-raggi

$$(ab)^3 v_\lambda^2 + (ab)(av)(bv) a_\lambda b_\lambda, \ldots\ldots$$

Se poi l'involuzione quadratica di punti cui corrisponde l'iperboloide è quella che *accompagna* (§ 15 in fine) l'involuzione cubica con due elementi tripli determinata da una terna di punti della curva, i cui parametri siano le radici della equazione $o = u_\lambda^3 = u'^3_\lambda = \ldots$ (e i cui punti doppî son dati dalla $o = v_\lambda^2 = \text{Hess. } u_\lambda^3$); allora l'equazione dell'iperboloide sarà

$$\begin{aligned} o = (Qv)^2 &= (uu')^2 (Qu) Qu') = (PP')^2 (Pv)(P'v) \\ &= (uu')^2 (PP')^2 (Pu)(P'u') = (uu')(PP')(Pu)^2 (P'u')^2 \\ = 4 \{ & (u^2_{122} - u_{112} u_{222}) P^2_{112} + (u^2_{112} - u_{111} u_{122}) P^2_{122} + u_{112} u_{222} P_{111} P_{122} \\ & + u_{111} u_{122} P_{112} P_{222} - u^2_{122} P_{111} P_{122} - u^2_{112} P_{112} P_{222} \}. \end{aligned}$$

E se la involuzione quadratica di punti cui corrisponde l'iperboloide accompagna l'involuzione cubica corrispondente (§ 16) a un dato punto x', allora (§ 16) $u_\lambda^3 = \Pi_\lambda^3$, $v_\lambda^2 = \overline{Q}_\lambda^2$, e l'equazione dell'iperboloide sarà

$$\begin{aligned} o = (Q\overline{Q})^2 &= (\Pi\Pi')^2 (Q\Pi)(Q\Pi') = (PP')^2 (P\overline{Q})(P'\overline{Q}) \\ &= (\Pi\Pi')^2 (PP')^2 (P\Pi)(P'\Pi') = \ldots \end{aligned}$$

Insomma, *a ciascun fascio di coppie di piani congiunti* (intorno a un asse della sviluppabile), *e quindi anche a ciascuna punteggiata di coppie di punti congiunti* (su una corda della curva), *corrisponde un iperboloide circoscritto alla curva.*

Da ultimo, notiamo che due iperboloidi circoscritti alla curva hanno in comune, oltre la curva, una corda di questa, cioè la corda che unisce la coppia di punti comune alle due involuzioni quadratiche cui corrispondono i due iperboloidi. I parametri di tali punti sono le radici della equazione

$$o = \text{Jacob.}(v_\lambda^2, V_\lambda^2) = (vV) v_\lambda V_\lambda,$$

posto che $o = v_\lambda^2$ e $o = V_\lambda^2$ diano i punti doppî delle due involuzioni.

La sviluppabile circoscritta ai due iperboloidi è di 3ª classe. Un piano qualunque per la corda suddetta ha per equazione

$$o = (vV)(Pv)(PV)P_\lambda \ ,$$

e un piano della sviluppabile

$$o = (Pv)(PV)P_\lambda v_\lambda V_\lambda \equiv v_\lambda^2 (PV)^2 P_\lambda + V_\lambda^2 (Pv)^2 P_\lambda - (vV)^2 P_\lambda^3 \ (^*).$$

20. Ecco ciò che corrisponde per dualità alle cose esposte nei §§ 18 e 19.

Esiste un sistema lineare di ∞^2 *superficie di* 2ª *classe (quadriche)* ISCRITTE *nella sviluppabile,* ciascuna individuata da due piani che debbano toccarla e non appartengano alla sviluppabile. Fra esse figurano le coniche $o = q_\lambda^2$ *iscritte* nella sviluppabile (§ 8).

Una quadrica qualunque del sistema è, in generale, un iperboloide, che ha per equazione (in coordinate di piani)

$$o = q_{\lambda'} q_{\lambda''} \ ,$$

ove λ' e λ'' sono due piani della sviluppabile.

Esso contiene le due generatrici della sviluppabile esistenti nei piani λ' e λ'', cioè le rette λ' e λ'', le quali sono sull'iperboloide due generatrici di uno stesso sistema. Contiene anche le due rette associate, che uniscono i punti λ' e λ'' della cubica a' punti in cui i piani λ' e λ'' della sviluppabile secano, rispettivamente le rette λ'' e λ'; e queste due rette associate sono generatrici dell'altro sistema. Sicchè *l'iperboloide passa pel quadrilatero gobbo formato dalle dette due rette associate con le rette* λ' e λ''.

Per ciascuna generatrice del 1° sistema si possono condurre *due* piani della sviluppabile, e le infinite coppie di tali piani costituiscono una involuzione (sulla sviluppabile) di cui sono λ' e λ'' i piani doppî; mentre per ogni generatrice del 2° sistema passa *un sol* piano della sviluppabile. *E ad ogni involuzione quadratica di piani della sviluppabile corrisponde un iperboloide iscritto nella sviluppabile.*

(*) Infatti:

1° Un piano per la corda seca la cubica ne'due punti v v' dati dalla $0 = (vV) v_\lambda V_\lambda$ e in un punto variabile λ, e quindi la sua equazione è (§ 5)

$$0 = P_v P_{v'} P_\lambda = (vV)(Pv)(PV) P_\lambda \ .$$

2° Se λ è un punto arbitrario e λ' λ'' i suoi armonici rispetto alle coppie date da $0 = v_\lambda^2$ e $0 = V_\lambda^2$, sarà $0 = P_\lambda P_{\lambda'} P_{\lambda''}$ un piano della sviluppabile: ora essendo $0 = v_\lambda v_{\lambda'}$ e $0 = V_\lambda V_{\lambda''}$, risulta dall'eliminazione di λ' e λ''

$$0 = P_\lambda P_{\lambda'} P_{\lambda''} = (Pv)(PV) P_\lambda v_\lambda V_\lambda \ .$$

Se i piani λ' e λ'' son determinati dalla equazione $o = v_\lambda{}^2 = v'_\lambda{}^2 = \ldots$ l'equazione dell'iperboloide corrispondente sarà

$$o = (q\,v)^2 = (pp')^2\,(pv)\;(p'v)\,.$$

E l'equazione

$$o = (pv)\;p_\mu v_\mu p_\lambda\,,$$

se λ varia e μ è fisso rappresenta un punto qualunque di quella generatrice del 1° sistema che sta nel piano μ, e se μ varia e λ è fisso rappresenta un punto di quella generatrice del 2° sistema che sta nel piano λ.

Le coordinate-raggi della generatrice del 1° sistema esistente nel piano μ sono

$$(a\,b)\;(a\,v)\;(b\,v')\;v_\mu v'_\mu a_\mu b_\mu\,,\,\ldots\ldots,$$

e quelle della generatrice del 2° sistema esistente nel piano λ

$$(ab)\;(a\,v)\;(b\,v)\;a_\lambda b_\lambda\,,\ldots\ldots$$

Se l'involuzione quadratica di piani cui corrisponde l'iperboloide è quella che *accompagna* l'involuzione cubica di piani della sviluppabile con due piani tripli definita dalla equazione $o = u_\lambda^3$, l'equazione dell'iperboloide è

$$\begin{aligned} o &= (q\,v)^2 = (u\,u')^2\;(q\,u)\;(q\,u') \\ &= (p\,p')^2\;(pv)\;(p'v) = (pp')^2\,(uu')^2\;(p\,u)\,(p'u') = \ldots \end{aligned}$$

E se l'involuzione quadratica accompagna l'involuzione cubica di piani corrispondente (§ 17) a un dato piano ξ'; allora $u_\lambda^3 = \pi_\lambda^3$, e l'equazione dell'iperboloide diviene

$$o = (q\bar q)^2 = (\pi\pi')^2(q\pi)(q\pi') = (pp')^2\,(p\bar q)(p'\bar q) = (pp')^2(\pi\pi')^2(p\pi)(p'\pi') = \ldots.$$

Ad ogni punteggiata di coppie di punti congiunti (su una corda della cubica), *e quindi ad ogni fascio di coppie di piani congiunti* (intorno a un asse della sviluppabile), *corrisponde un iperboloide iscritto nella sviluppabile.*

Due iperboloidi iscritti nella sviluppabile hanno in comune come piani tangenti, oltre a quelli della sviluppabile, un fascio di piani, determinato da quella coppia di piani della sviluppabile che è comune alle due involuzioni quadratiche di piani cui i due iperboloidi corrispondono. Essi hanno di comune, oltre l'asse del detto fascio, una cubica gobba. Un punto dell'asse ha per equazione $o = (v\,\mathrm{V})\,(p\,v)\,(p\,\mathrm{V})\,p_\lambda$, e un punto della cubica

$$o = (p\,v)\,(p\,\mathrm{V})\,p_\lambda v_\lambda \mathrm{V}_\lambda \equiv v_\lambda^2\,(p\,\mathrm{V})^2\,p_\lambda + \mathrm{V}_\lambda^2\,(pv)^2\,p_\lambda - (v\,\mathrm{V})^2\,p_\lambda^3\,.$$

Rette associate.

21. Data una retta per un punto λ' della cubica gobba e nel relativo piano λ' della sviluppabile, è individuata la sua associata: basta imaginare l'iperboloide circoscritto alla curva (o iscritto nella sviluppabile) e passante per la retta data, e poi l'altra retta λ'' (oltre la retta λ') che esso contiene, e poi la retta commune al piano λ'' e al piano tangente in λ' e secante in λ'', la quale sarà la retta associata alla data retta. *La corrispondenza fra due rette associate è dunque univoca e reciproca.*

Essendo le due rette associate che passano pei punti λ' e λ'' due generatrici del 2° sistema sull'iperboloide $o = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}$ corrispondente a quei punti, ad esse si appoggeranno tutte le generatrici del 1° sistema, le quali secano la cubica in coppie di punti armonicamente coniugati rispetto a λ' e λ''; sicchè i due piani per una generatrice del 1° sistema e per i due punti μ μ' in cui un'altra generatrice del 1° sistema seca la cubica sono coniugati armonicamente rispetto ai due piani per la prima generatrice e pe' punti λ' λ''; e quindi i due ultimi piani secano la corda $\mu\mu'$ della cubica in due punti armonicamente coniugati rispetto a μ e μ'. Or quei due punti si trovano sulle due rette associate uscenti da λ' e λ''. Dunque, *date due rette associate, ciascun punto dell'una ha il congiunto sull'altra;* od anche, ogni corda della cubica che si appoggi all'una si appoggia pure all'altra, ed è da esse divisa armonicamente.

Per dualità, *ogni piano per una delle due rette associate ha il congiunto che passa per l'altra;* ovvero, ogni asse della sviluppabile che stia in un piano con l'una sta anche in un piano con l'altra, e questi due piani sono armonici con i due piani della sviluppabile che passano per l'asse.

Questa proprietà e la precedente mostrano che le rette, le quali uniscono i tre punti ove un piano seca la cubica al fuoco del piano, hanno per associate le rette che nel piano congiunto uniscono i punti (rispettivamente corrispondenti a quelli) ove esso piano seca la cubica al fuoco del piano medesimo. O altrimenti, i piani tangenti nei primi tre punti e secanti ne' corrispondenti passano pel fuoco del 2° piano, e viceversa; e inoltre i punti comuni alle rette tangenti della cubica nei primi tre punti ed ai piani osculatori ne' tre punti corrispondenti stanno nel 2° piano, e viceversa.

Di certi fasci o schiere di superficie di 2° grado.

22. Abbiamo veduto come ad ogni involuzione quadratica di punti della cubica o di piani della sviluppabile corrispondano due iperboloidi, l'uno circoscritto alla cubica e l'altro iscritto nella sviluppabile, ed aventi per equazioni

$$o = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''} \qquad o = q_{\lambda'} q_{\lambda''} ,$$

se λ' e λ'' indicano gli elementi doppî dell'involuzione.

L'uno e l'altro iperboloide passa pel quadrilatero gobbo che ha per due lati opposti le rette λ' λ'' e per altri due le rette associate uscenti dai punti λ' λ'' ovvero esistenti ne' piani λ' λ''.

Queste due coppie di rette sono altresì due coppie di spigoli opposti di un tetraedro, del quale i rimanenti due lati opposti sono la corda $\lambda'\lambda''$ della cubica e l'asse $\lambda'\lambda''$ della sviluppabile, rette reciproche (§ 12). Onde *questa corda e questo asse sono due rette* CONIUGATE *rispetto a ciascuno de' due iperboloidi,* cioè tali che i piani polari dei punti dell'una passino per l'altra, e viceversa. E precisamente, un punto della 1ª retta ha il suo congiunto sulla stessa retta ed è polo del piano per questo punto congiunto e per l'altra retta; od anche, un piano per la 2ª retta ha il suo congiunto che passa per la stessa ed è polare del punto ove questo piano seca la 1ª retta. O altrimenti: il cono circoscritto all'uno o all'altro iperboloide da un punto della 1ª retta tocca l'iperboloide lungo la conica determinata in esso dal piano condotto pel punto congiunto a quello e per la 2ª retta.

È anche chiaro che ciascun piano per una delle due rette seca i due iperboloidi lungo due coniche, rispetto alle quali quella retta ha per polo il fuoco del piano (che sta sull'altra retta); e rispetto ai coni circoscritti da ciascun punto di una delle due rette ai due iperboloidi, questa retta ha per piano polare il piano focale del punto (che passa per l'altra retta).

Inoltre apparisce, per la reciprocità che regna fra i punti e i piani dello spazio mediante la cubica, che *i punti di ciascuno de' due iperboloidi sono i fuochi dei piani tangenti all'altro, e le generatrici dell'uno reciproche di quelle dell'altro.*

Pel quadrilatero gobbo dianzi considerato passano non solo i due iperboloidi fin qui accennati, ma infiniti (∞^1) altri, costituenti un sistema lineare, che può venir riguardato sia come un fascio sia come una schiera (*); poichè assoggettare una quadrica a passare per un quadrilatero gobbo equivale ad assegnarne sia 8 punti sia 8 piani tangenti. Sicchè *ad ogni involuzione quadratica di punti della cubica o di piani della sviluppabile corrisponde un* FASCIO-SCHIERA *d'iperboloidi.*

Rispetto a ciascuno di questi iperboloidi la corda $\lambda'\lambda''$ e l'asse $\lambda'\lambda''$ godono le stesse proprietà armoniche accennate dianzi rispetto ai due iperboloidi $o = Q_{\lambda'}Q_{\lambda''}$ $o = q_{\lambda'}q_{\lambda''}$.

Ciascun iperboloide del sistema ha in comune con la cubica gobba 6 punti, 3 riuniti in λ' e 3 in λ'' (tranne $o = Q_{\lambda'}Q_{\lambda''}$ che passa per la cubica), ed ha come piani tangenti 6 fra' piani della sviluppabile, cioè i piani λ' λ'' contati 3 volte (tranne $o = q_{\lambda'}q_{\lambda''}$ che è iscritto nella sviluppabile).

23. Allorchè il sistema d'iperboloidi si considera come un fascio, ad esso appartiene la coppia de' piani λ' e λ'' $(o = P^3_{\lambda'}$ $o = P'^3_{\lambda''})$ e la coppia de' piani tangenti alla cubica in uno dei due punti λ' λ'' e secanti nell'altro $(o = P_{\lambda'}{}^2 P_{\lambda''}$ $o = P'_{\lambda''}{}^2 P'_{\lambda'})$; onde *l'equazione di un iperboloide qualunque del sistema sarà in coordinate di punti*

$$o = l P_{\lambda'}{}^3 P'_{\lambda''}{}^3 + m P_{\lambda'}{}^2 P_{\lambda''} P'_{\lambda''}{}^2 P'_{\lambda'} \,,$$
$$= I_{l:m} \,,$$

$l:m$ essendo un parametro arbitrario.

Quando poi il sistema si considera come una schiera, allora ad esso appartiene la coppia de' punti λ' λ'' $(o = p_{\lambda'}{}^3$ $o = p'_{\lambda''}{}^3)$ e la coppia dei punti ove i piani λ'' λ' secano rispettivamente le rette λ' λ'' $(o = p_{\lambda'}{}^2 p_{\lambda''}$ $o = p'_{\lambda''}{}^2 p'_{\lambda'})$; onde *l'equazione di un iperboloide qualunque del sistema sarà in coordinate di piani*

$$o = L p_{\lambda'}{}^3 p'_{\lambda''}{}^3 + M p^2_{\lambda'} p_{\lambda''} p'_{\lambda''}{}^2 p'_{\lambda'}$$
$$= i_{L:M} \,.$$

L : M essendo un parametro arbitrario.

Ora osserviamo che, se sono dati 4 piani ξ' ξ'' ξ''' ξ^{IV}, ovvero

$$o = \xi'_1 x_1 + \ldots = \xi'_x \ldots \,,$$

l'equazione di un iperboloide qualunque del fascio-schiera determinato dalle 4 rette $\xi'\xi'''$ $\xi'\xi^{\text{IV}}$ $\xi''\xi'''$ $\xi''\xi^{\text{IV}}$ è $o = l\xi'_x\xi''_x + m\xi'''_x\xi^{\text{IV}}_x$, e l'equazione dello stesso iperboloide in coordinate di piani sarà

$$o = l\,(\xi\xi'\xi''\xi''')\,(\xi\xi'\xi''\xi^{\text{IV}}) + m\,(\xi\xi'''\xi^{\text{IV}}\xi')\,(\xi\xi'''\xi^{\text{IV}}\xi'') \,,$$

(*) Diciamo *schiera* di quadriche il sistema, ∞^1, di quadriche iscritte in una stessa sviluppabile di 4ª classe.

ove $(\xi\,\xi'\,\xi''\,\xi''')$ sta pel determinante formato con le coordinate del piano variabile ξ e dei tre dati $\xi'\ \xi''\ \xi'''$, e così via; vale a dire che $0=(\xi\,\xi'\,\xi''\,\xi''')$ è l'equazione del punto comune ai 3 piani $\xi'\ \xi''\ \xi'''$, e così via.

Applicando al caso nostro, l'iperboloide $0 = \mathrm{I}_{l:m}$ avrà per equazione in coordinate di piani

$$0 = l \begin{vmatrix} \xi_1 & A^3_{\lambda'} & A^3_{\lambda''} & A^2_{\lambda'}A_{\lambda''} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 & A^3_{\lambda'} & A^3_{\lambda''} & A^2_{\lambda''}A_{\lambda'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$+ m \begin{vmatrix} \xi_1 & A^2_{\lambda'}A_{\lambda''} & A^2_{\lambda''}A_{\lambda'} & A^3_{\lambda'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 & A^2_{\lambda'}A_{\lambda''} & A^2_{\lambda''}A_{\lambda'} & A^3_{\lambda''} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} ;$$

i quali determinanti debbono differire solo per dei fattori indipendenti da $\xi_1 \ldots$ dalle quantità

$$p^2_{\lambda'}p_{\lambda''} \qquad p^2_{\lambda''}p_{\lambda'} \qquad p^3_{\lambda'} \qquad p^3_{\lambda''} ,$$

ed infatti si trova che valgono rispettivamente

$$\tfrac{1}{3}\Delta^2(\lambda'\lambda'')^3 p^2_{\lambda'}p_{\lambda''} \quad \tfrac{1}{3}\Delta^2(\lambda'\lambda'')^3 p^2_{\lambda''}p_{\lambda'} \quad -\tfrac{1}{9}\Delta^2(\lambda'\lambda'')^3 p^3_{\lambda'} \quad -\tfrac{1}{9}\Delta^2(\lambda'\lambda'')^3 p^3_{\lambda''} .$$

Sicchè si avrà in coordinate di piani

$$\mathrm{I}_{l:m} \equiv m p^3_{\lambda'} p'^3_{\lambda''} + 9\, l p^2_{\lambda'} p_{\lambda''} p'^2_{\lambda''} p'_{\lambda'} .$$

Ed analogamente in coordinate di punti

$$i_{\mathrm{L:M}} \equiv \mathrm{M\,P}^3_{\lambda'}\mathrm{P}'^3_{\lambda''} + 9\,\mathrm{L\,P}^2_{\lambda'}\mathrm{P}_{\lambda''}\mathrm{P}'^2_{\lambda''}\mathrm{P}'_{\lambda'} .$$

Adunque, *le equazioni* $0 = \mathrm{I}_{l:m}$ $\;0 = i_{\mathrm{L:M}}$ *rappresenteranno uno stesso iperboloide quando si assuma*

$$\mathrm{L : M} = m : 9l ,$$

ovvero viceversa

$$l : m = \mathrm{M} : 9\mathrm{L} .$$

In particolare, avendosi identicamente

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}^3_{\lambda'}\mathrm{P}'^3_{\lambda''} - \mathrm{P}^2_{\lambda'}\mathrm{P}_{\lambda''}\mathrm{P}'^2_{\lambda''}\mathrm{P}'_{\lambda'} = (\mathrm{P}_{\lambda'}\mathrm{P}'_{\lambda''} - \mathrm{P}_{\lambda''}\mathrm{P}'_{\lambda'})\,\mathrm{P}^2_{\lambda'}\mathrm{P}'^2_{\lambda''} \\ &= (\lambda'\lambda'')(\mathrm{P\,P}')\,\mathrm{P}^2_{\lambda'}\mathrm{P}'^2_{\lambda''} = (\lambda''\lambda')(\mathrm{P\,P}')\,\mathrm{P}^2_{\lambda''}\mathrm{P}'^2_{\lambda'} \\ &= \tfrac{1}{2}(\lambda'\lambda'')(\mathrm{P\,P}')(\mathrm{P}^2_{\lambda'}\mathrm{P}'^2_{\lambda''} - \mathrm{P}^2_{\lambda''}\mathrm{P}'^2_{\lambda'}) = \tfrac{1}{2}(\lambda'\lambda'')^2(\mathrm{P\,P}')^2(\mathrm{P}_{\lambda'}\mathrm{P}'_{\lambda''} + \mathrm{P}_{\lambda''}\mathrm{P}'_{\lambda'}) \\ &= (\lambda'\lambda'')^2(\mathrm{P\,P}')^2\,\mathrm{P}_{\lambda'}\mathrm{P}'_{\lambda''} = (\lambda'\lambda'')^2\,\mathrm{Q}_{\lambda'}\mathrm{Q}_{\lambda''} , \end{aligned}$$

l'equazione in coordinate di punti dell'iperboloide $o = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}$ circoscritto alla cubica prenderà la forma

$$o = (\lambda'\lambda'')^2 Q_{\lambda'} Q_{\lambda''} = P^3_{\lambda'} P'_{\lambda''}{}^3 - P^2_{\lambda'} P_{\lambda''} P'_{\lambda''}{}^2 P'_{\lambda'} = I_{1:-1} ,$$

e l'equazione in coordinate di piani

$$o = p^3_{\lambda'} p'_{\lambda''}{}^3 - 9\, p^2_{\lambda'} p_{\lambda''} p'_{\lambda''}{}^2 p'_{\lambda'} = i_{1:-9} .$$

Similmente, avendosi

$$p^3_{\lambda'} p'_{\lambda''}{}^3 - p^2_{\lambda'} p_{\lambda''} p'_{\lambda''}{}^2 p'_{\lambda'} = (\lambda'\lambda'')^2 q_{\lambda'} q_{\lambda''} ,$$

l'equazione dell'iperboloide $o = q_{\lambda'} q_{\lambda''}$ iscritto nella sviluppabile, in coordinate di piani potrà scriversi

$$o = (\lambda'\lambda'')^2 q_{\lambda'} q_{\lambda''} = p^3_{\lambda'} p'_{\lambda''}{}^3 - p^2_{\lambda'} p_{\lambda''} p'_{\lambda''}{}^2 p'_{\lambda'} = i_{1:-1} ,$$

e in coordinate di punti

$$o = P^3_{\lambda'} P'_{\lambda''}{}^3 - 9\, P^2_{\lambda'} P_{\lambda''} P'_{\lambda''}{}^2 P'_{\lambda'} = I_{1:-9} .$$

Dalle precedenti trasformazioni si ricava anche

$$I_{l:m} = (l + m)\, P^3_{\lambda'} P'_{\lambda''}{}^3 - m\, (\lambda'\lambda'')^2 Q_{\lambda'} Q_{\lambda''} ,$$

$$i_{L:M} = (L + M)\, p^3_{\lambda'} p'_{\lambda''}{}^3 - M\, (\lambda'\lambda'')^2 q_{\lambda'} q_{\lambda''} .$$

24. I due iperboloidi $o = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}$ $o = q_{\lambda'} q_{\lambda''}$ toccano tutte le tangenti della cubica. Gli altri iperboloidi del sistema secano ciascuna tangente della cubica in coppie di punti costituenti una involuzione, che ha per punti doppî i punti di contatto della tangente medesima con i due iperboloidi $o = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}$ $o = q_{\lambda'} q_{\lambda''}$; e tutte queste involuzioni sono proiettive; sicchè basta esaminarne più davvicino una qualunque.

Un punto qualunque della retta λ può riguardarsi come l'intersezione della retta col piano variabile μ, e quindi ha per coordinate $a_\lambda^2 a_\mu$ $b_\lambda^2 b_\mu$ $c_\lambda^2 c_\mu$ $d_\lambda^2 d_\mu$. Sostituendo queste nella equazione $o = I_{l:m}$ ed osservando che (§ 4)

$$A_{\lambda'}{}^3 a_\lambda^2 a_\mu + \ldots = \Delta\, (\lambda\lambda')^2 (\mu\lambda')$$

$$A_{\lambda''}{}^3 a_\lambda^2 a_\mu + \ldots = \Delta\, (\lambda\lambda'')^2 (\mu\lambda'') ,$$

onde

$$3 A_{\lambda'}{}^2 A_{\lambda''} a_\lambda^2 a_\mu + \ldots = \Delta \left\{ 2 (\lambda\lambda'')(\mu\lambda') + (\lambda\lambda')(\mu\lambda'') \right\} (\lambda\lambda')$$

$$3 A_{\lambda''}{}^2 A_{\lambda'} a_\lambda^2 a_\mu + \ldots = \Delta \left\{ 2 (\lambda\lambda')(\mu\lambda'') + (\lambda\lambda'')(\mu\lambda') \right\} (\lambda\lambda'') ;$$

si ottiene

$$o = 2m \left\{ (\lambda\lambda')(\mu\lambda'') - (\lambda\lambda'')(\mu\lambda') \right\}^2 + 9\, (l + m)(\lambda\lambda')(\lambda\lambda'')(\mu\lambda')(\mu\lambda'') ;$$

equazione di 2° grado in $\mu_1 : \mu_2$, che serve a determinare i due punti in cui l'iperboloide $0 = I_{l:m}$ seca la data retta λ. E se si chiama r il rapporto anarmonico de' tre punti fissi λ' λ'' λ e del punto mobile μ sulla cubica, cioè se si pone

$$r = \frac{(\lambda'\lambda)}{(\lambda''\lambda)} : \frac{(\lambda'\mu)}{(\lambda''\mu)} = \frac{(\lambda'\lambda)(\lambda''\mu)}{(\lambda''\lambda)(\lambda'\mu)},$$

la detta equazione diviene

$$0 = 2m(r-1)^2 + 9(l+m)r$$

ovvero

$$0 = 2mr^2 + (9l+5m)r + 2m\ ;$$

e sotto questa forma serve meglio allo scopo. Essa è reciproca.

In particolare:

per l'iperboloide $0 = Q_{\lambda'}Q_{\lambda''} \equiv I_{1:-1} \equiv i_{1:-9}$ si ha $(r-1)^2 = 0$; il che conferma che l'iperboloide tocca la retta λ nel punto λ; e siccome, detto λ''' il punto coniugato armonicamente a λ rispetto a λ' e λ'', la corda $\lambda\lambda'''$ è una generatrice dell'iperboloide, così il piano tangente all'iperboloide nel punto λ è quello che tocca la cubica in λ e la seca in λ''';

per l'iperboloide $0 = q_{\lambda'}q_{\lambda''} \equiv I_{1:-9} \equiv i_{1:-1}$ si ha $(r+1)^2 = 0$, vale a dire che l'iperboloide tocca la retta λ nel punto in cui la seca il piano λ'''; ed è chiaro che il piano ivi tangente all'iperboloide è il piano λ;

per la coppia di piani $0 = P_{\lambda'}{}^3 P'_{\lambda''}{}^3 = I_{1:0}$ si ha $r = 0, \infty$, onde $(\mu\lambda') = 0$ e $(\mu\lambda'') = 0$, com'era da prevedere;

per la coppia di piani $0 = P^2_{\lambda'}P_{\lambda''}P'_{\lambda''}{}^2P'_{\lambda'} = I_{0:1}$ si ha $r = -2, -\frac{1}{2}$;

per l'iperboloide $0 = I_{5:-9} \equiv i_{1:-5}$ si ha $r = \pm\sqrt{-1}$, sicchè questo iperboloide seca la retta λ nei due punti in cui la secano i piani osculatori della cubica in quei due punti che sono armonici tanto con λ' e λ'' quanto con λ e λ''';

e per l'iperboloide $0 = I_{7:-9} \equiv i_{1:-7}$ si ha $r = \dfrac{+1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, sicchè esso seca la retta λ nei due punti in cui la secano quei piani che osculano la cubica nei due punti ciascuno dei quali fa un gruppo equianarmonico con λ' λ'' e λ (cfr. § 15).

Per dualità, è manifesto che le coppie di piani tangenti agl' iperboloidi, condotte per una generatrice della sviluppabile, costituiscono una involuzione avente per piani doppî quelli che toccano (sulla detta generatrice) gl'iperboloidi $0 = Q_{\lambda'}Q_{\lambda''}$ $0 = q_{\lambda'}q_{\lambda''}$. E tutte queste involuzioni sono proiettive.

Consideriamo la retta λ: l'equazione che dà i 2 rapporti anarmonici (reciproci) dei 3 piani λ' λ'' λ con ciascuno dei piani della sviluppabile che osculano la cubica ne' punti ove questa è secata dai due piani condotti per la retta λ a toccare l'iperboloide $o = i_{L:M}$, è

$$o = 2MR^2 + (9L + 5M)R + 2M .$$

Essa conduce a conseguenze analoghe a quelle esposte di sopra: p. e. l'iperboloide $o = i_{5:-9} \equiv I_{1:-5}$ è toccata dai due piani condotti per la retta λ e per quei due punti della cubica che sono armonici tanto con λ' e λ'' quanto con λ e λ'''; e l'iperboloide $o = i_{7:-9} \equiv I_{1:-7}$ è toccata dai due piani per la retta λ e pei due punti che fanno sistema equianarmonico con λ' λ'' λ.

25. Essendo per uno stesso iperboloide del sistema $L:M = m:9l$, avremo, per determinare i valori di r e R relativi ad uno stesso iperboloide, le equazioni

$$o = 2mr^2 + (9l + 5m)r + 2m$$
$$o = 2lR^2 + (m + 5l)R + 2l \;;$$

e i valori di r e R saranno identici quando

$$\frac{m}{l} = \frac{9l + 5m}{m + 5l} \quad \text{ovvero} \quad \frac{l}{m} = \pm \tfrac{1}{3} ,$$

vale a dire per ciascuno dei due iperboloidi

$$o = I_{1:3} \equiv i_{1:3} \qquad o = I_{1:-3} \equiv i_{1:-3} .$$

Pel primo i valori di r o R sono le due radici cubiche imaginarie dell'unità positiva, e pel secondo $-2 \pm \sqrt{3}$.

Da un altro punto di vista: gl'iperboloidi del sistema si possono accoppiare in modo che a $o = I_{l:m} \equiv i_{m:9l}$ corrisponda $o = i_{l:m} \equiv I_{m:9l}$, e quindi a questo corrisponda il primo; vale a dire in modo da formare una involuzione quadratica. Per due iperboloidi coniugati avviene che i valori di r e R relativi all'uno siano eguali rispettivamente a quelli di R e r relativi all'altro. È anche manifesto che *due iperboloidi coniugati nell'involuzione son tali che i punti dell'uno siano i fuochi dei piani tangenti all'altro* (*).

(*) Le generatrici dell'uno iperboloide saranno le reciproche di quelle dell'altro.

Gli elementi doppî dell' involuzione sono appunto i due iperboloidi dianzi considerati $0 = I_{1:3} \equiv i_{1:3}$ $0 = I_{1:-3} \equiv i_{1:-3}$; sicchè *ciascun punto di uno di questi due iperboloidi è fuoco di un piano tangente allo stesso iperboloide.*

In amendue gl'iperboloidi ciascuna generatrice di uno dei due sistemi ha per reciproca un'altra generatrice dello stesso sistema, e ciascuna generatrice dell'altro sistema ha per reciproca sè stessa (cfr. § 12). E precisamente, vedremo in seguito che *nell'iperboloide* $0 = I_{1:3} \equiv i_{1:3}$ *le generatrici del sistema cui non appartengono le rette* λ' λ'' *sono reciproche di sè stesse,* mentre le generatrici del sistema delle λ' λ'' si corrispondono a due a due in involuzione come reciproche, e le λ' λ'' sono le rette doppie dell'involuzione. Invece nell'iperboloide $0 = I_{1:-3} \equiv i_{1:-3}$ le generatrici del sistema delle λ' λ'' sono reciproche di sè stesse, e quelle dell'altro sistema sono accoppiate come reciproche in una involuzione di cui le rette doppie sono le due rette associate condotte pe' punti λ' λ'' (*).

Ecco alcune coppie di iperboloidi coniugati nell' involuzione dianzi accennata:

$$
\begin{array}{llll}
0 = I_{1:-1} \equiv i_{1:-9} \equiv Q_{\lambda'} Q_{\lambda''} & & 0 = i_{1:-1} \equiv I_{1:-9} = q_{\lambda'} q_{\lambda''} \\
0 = I_{5:-9} \equiv i_{1:-5} & & 0 = i_{5:-9} \equiv I_{1:-5} \\
0 = I_{1:0} \equiv P^3_{\lambda'} P'^3_{\lambda''} & & 0 = i_{1:0} \equiv p^3_{\lambda'} p'^3_{\lambda'} \\
0 = I_{0:1} \equiv P^2_{\lambda'} P_{\lambda''} P'^2_{\lambda''} P'_{\lambda'} & & 0 = i_{0:1} \equiv p^2_{\lambda'} p_{\lambda''} p'^2_{\lambda''} p'_{\lambda'} \\
0 = I_{7:-9} \equiv i_{1:-7} & & 0 = i_{7:-9} \equiv I_{1:-7} \\
0 = I_{1:1} \equiv i_{1:9} & & 0 = i_{1:1} \equiv I_{1:9} \,.
\end{array}
$$

È opportuno notare che, quando i parametri dei due punti o piani λ' λ'' sono le radici della equazione di 2° grado $0 = v_\lambda^2 = v'^2_\lambda = \ldots$, allora si ha

---

(*) Supposti λ' λ'' λ reali, se la retta λ secasse in punti reali l'iperboloide su cui le generatrici appoggiate alle λ' λ'' sono reciproche di sè stesse, allora quella fra tali generatrici che passa per uno de' due punti suddetti sarebbe reale, e la quarta tangente della cubica che essa incontra (oltre le λ λ' λ'') sarebbe reale. Or questo contraddice a quanto dimostreremo in seguito, cioè che il punto che la detta quarta tangente individua sulla cubica fa sistema equianarmonico coi tre λ λ' λ''. Dunque l'iperboloide in quistione non può essere $0 = I_{1:-3}$, che è secato dalla retta λ in punti reali; ma è invece $0 = I_{1:3}$.

$$(\lambda'\lambda'')^2 = -2(vv')^2 = -2 \text{ discr. } v_\lambda^2 ,$$

$$\begin{aligned}
I_{1:0} &= P_{\lambda'}^3 P'^3_{\lambda''} = P^3_{\lambda''} P'^3_{\lambda'} = \tfrac{1}{2}(P^3_{\lambda'} P'^3_{\lambda''} + P^3_{\lambda''} P'^3_{\lambda'}) \\
&= \tfrac{1}{2}(P_{\lambda'} P'_{\lambda''} + P_{\lambda''} P'_{\lambda'}) \{ (P_{\lambda'} P'_{\lambda''} - P_{\lambda''} P'_{\lambda'})^2 + P_{\lambda'} P_{\lambda''} P'_{\lambda'} P'_{\lambda''} \} \\
&= (Pv)(P'v) \{ (\lambda'\lambda'')^2 (PP')^2 + (Pv')^2 (P'v'')^2 \} \\
&= (Pv)(P'v) \{ (Pv')^2 (P'v'')^2 - 2(v'v'')^2 (PP')^2 \} , \\
I_{0:1} &= P^2_{\lambda'} P_{\lambda''} P'^2_{\lambda''} P'_{\lambda'} = P^2_{\lambda''} P_{\lambda'} P'_{\lambda'} P'^2_{\lambda''} \\
&= \tfrac{1}{2} P_{\lambda'} P_{\lambda''} P'_{\lambda'} P'_{\lambda''} (P_{\lambda'} P'_{\lambda''} + P_{\lambda''} P'_{\lambda'}) \\
&= (Pv)(P'v)(Pv')^2 (P'v'')^2 , \\
I_{l:m} &= (Pv)(P'v) \{ (l+m)(Pv')^2 (P'v'')^2 - 2l(v'v'')^2 (PP')^2 \} .
\end{aligned}$$

E se si osserva che

$$\begin{aligned}
&(Pv)(P'v)(Pv')^2 (P'v'')^2 = (P'v)(Pv)(P'v')^2 (Pv'')^2 \\
&= \tfrac{1}{2}(Pv)(P'v) \{ (PP')^2 (v'v'')^2 + 2(Pv')(P'v')(Pv'')(P'v'') \} ,
\end{aligned}$$

si avrà sotto forma più semplice

$$\begin{aligned}
I_{1:0} &= -\tfrac{3}{2}(v'v'')^2 (Qv)^2 + (Pv)(P'v)(Pv')(P'v')(Pv'')(P'v'') , \\
I_{0:1} &= \tfrac{1}{2}(v'v'')^2 (Qv)^2 + (Pv)(P'v)(Pv')(P'v')(Pv'')(P'v'') , \\
I_{l:m} &= \tfrac{1}{2}(-3l+m)(v'v'')^2 (Qv)^2 + (l+m)(Pv)(P'v)(Pv')(P'v')(Pv'')(P'v''),
\end{aligned}$$

onde si ricava in particolare

$$I_{1:3} = 4(Pv)(P'v)(Pv')(P'v')(Pv'')(P'v'') .$$

Quando poi i parametri dei punti o piani λ' λ'' sono le radici della equazione

$$0 = v_\lambda^2 = \text{Hess. } u_\lambda^3 = \ldots ,$$

allora

$$I_{l:m} = (uu')^2 (Pu)(P'u') \left\{ \begin{array}{l} (l+m)(u''u''')^2 (u^{\text{IV}} u^{\text{V}})^2 (Pu'')(Pu''')(P'u^{\text{IV}})(P'u^{\text{V}}) \\ -2lu(PP')^2 \end{array} \right\} ,$$

ove u (come al § 15) è il discriminante di u_λ^3.

Nelle formole ora esposte è lecito mutare le I P l m in i p L M.

Terminiamo col notare che sin qui abbiam supposti costanti i parametri $\lambda'_1 : \lambda'_2$ $\lambda''_1 : \lambda''_2$. Facendo variare questi parametri, si avranno ∞^3 iperboloidi, distribuiti in ∞^2 fasci-schiere. Ad ogni valore di $l:m$ corrispondono ∞^2 iperboloidi; p. e. vi sono ∞^2 iperboloidi $0 = I_{1:3} \equiv i_{1:3}$, ecc.

Coni congiunti — Coniche congiunte.

26. Consideriamo il piano polare di un punto x' dello spazio rispetto al cono

$$o = Q_\lambda^2 = (PP')^2 P_\lambda P'_\lambda$$

circoscritto alla cubica dal suo punto λ.

Il punto x' è fuoco del piano ξ', che seca la cubica nei 3 punti i cui parametri sono le radici della equazione $o = \Pi_\lambda^3 = A_\lambda^3 x'_1 + \ldots$, e che ha per equazione $o = (P\Pi^3)$; e però l'equazione del piano polare in questione è

$$o = (P\Pi)^2 P_\lambda \Pi_\lambda = (A\Pi)^2 A_\lambda \Pi_\lambda x_1 + \ldots\ldots$$

L'inviluppo de' piani polari del dato punto x' rispetto a tutti i coni circoscritti alla cubica da' suoi punti è dunque una sviluppabile, la cui equazione sarà il discriminante eguagliato a zero dell'ultima equazione (quadratica in $\lambda_1 : \lambda_2$), cioè

$$\begin{aligned} o &= (P\Pi)^2 (P'\Pi')^2 (P\Pi')(P'\Pi) \\ &= (A\Pi)^2 (A'\Pi')^2 (A\Pi')(A'\Pi)\, x_1^2 + \ldots \\ &\quad + 2\,(A\Pi)^2 (B\Pi')^2 (A\Pi')(B\Pi)\, x_1 x_2 + \ldots; \end{aligned}$$

sicchè l'inviluppo *è un cono di 2° ordine.*

Siccome il punto x'' congiunto a x' si trova su ciascuno de' piani considerati, così *il punto x'' congiunto a x' è il vertice del cono inviluppo* (*). E siccome due punti congiunti si trovano in condizioni del tutto reciproche; così, viceversa, il cono di 2° ordine, inviluppo dei piani polari del punto x'' rispetto ai coni circoscritti alla cubica dai suoi punti, ha per vertice x'. Due coni cosiffatti, aventi i vertici in due punti congiunti x' x'', si diranno coni *congiunti* (**), e si chiameranno brevemente *il cono x'* e *il cono x''*.

Se x' è su una tangente della cubica, x'' è il punto di contatto di questa, e il cono x'' ha doppio contatto col cono circoscritto alla cubica da x''.

(*) Ognuno degli ∞^2 piani per x'' può rappresentarsi con $o = (P\Pi)^2 P_\lambda \Pi_\mu$, $\lambda_1 : \lambda_2$ e $\mu_1 : \mu_2$ essendo due parametri arbitrarii.

(**) CREMONA, l. c.

Se x' è sulla cubica, il cono x'' è quello circoscritto alla cubica dal punto medesimo.

Siano λ' e λ'' i due punti della cubica che si trovano in linea retta con x' e x'' (e che formano con essi un gruppo armonico). Finora abbiam supposto fisso x' e variabile λ. *Se invece si suppone λ fisso e x' mobile su una corda $\lambda'\lambda''$ della cubica, allora il piano polare di x' rispetto al cono λ inviluppa una retta;* e poichè i piani polari dei punti λ' e λ'' son quelli che toccano la cubica in λ' e λ'' e la secano in λ, ne segue che questa retta è la intersezione di quei due piani, vale a dire è *quella generatrice dell' iperboloide $o = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}$ che seca la cubica nel solo punto λ.*

Se finalmente si suppone variabile tanto x' sulla corda $\lambda'\lambda''$ quanto λ sulla cubica, allora l' inviluppo de' piani polari de' punti x' rispetto ai coni λ è l'iperboloide $o = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}$. *Questo iperboloide è dunque altresì l'inviluppo dei coni di 2° ordine a due a due congiunti, che hanno i vertici sulla corda $\lambda'\lambda''$* (*).

Quindi segue che *l'equazione del cono circoscritto all'iperboloide $o = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}$ dal punto x'' della corda $\lambda'\lambda''$ è*

$$o = (P\Pi)^2 (P'\Pi)^2 (P\Pi) (P'\Pi')$$

(x' essendo sempre il punto congiunto a x'' e $\Pi_\lambda^3 = A_\lambda^3 x'_1 + \ldots$) ; *la quale equazione si può trasformare in* (**)

$$o = \overline{(P\Pi)^3}^2 - (PP')^2 (\Pi\Pi')^2 (P\Pi)(P'\Pi') = \overline{(P\Pi)^3}^2 - (Q\overline{Q})^2 .$$

E ricordiamo che la curva di contatto di questo cono x'' con l'iperboloide $o = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''} = (Q\overline{Q})^2$ è la conica comune a questo ed al piano ξ' (passante per x', e congiunto al piano ξ'' che passa per x' e per la retta reciproca della corda $\lambda'\lambda''$).

(*) CREMONA, l. c.

(**) Infatti, se al prodotto

$$(P\Pi)^2 (P'\Pi')^2 (P\Pi') (P'\Pi)$$

si aggiunge l'altro identicamente nullo

$$(PP')(\Pi\Pi')(P\Pi)(P'\Pi')(P\Pi')(P'\Pi) ,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} & (P\Pi)(P'\Pi')(P\Pi')(P'\Pi) \{ (P\Pi)(P'\Pi') + (PP')(\Pi\Pi') \} \\ & = (P\Pi)(P'\Pi') \{ (P\Pi)^2 (P'\Pi')^2 - (PP')^2 (\Pi\Pi')^2 \} \\ & = (P\Pi)^3 (P'\Pi')^3 - (PP')^2 (\Pi\Pi')^2 (P\Pi)(P'\Pi') . \end{aligned}$$

27. Definendo per *rapporto anarmonico di 4 piani di un cono* (tangenti al cono) il rapporto anarmonico costante delle 4 rette secondo cui essi secano un piano variabile del cono; si scorge che il rapporto anarmonico di 4 punti $\lambda \ldots$ della cubica è eguale a quello dei 4 piani d'un qualunque cono x'' che sono polari del punto x' rispetto ai coni $\lambda \ldots$ circoscritti alla cubica.

Il punto x' è fuoco del piano ξ', che seca la cubica in tre punti $\mu\ \nu\ \rho$; e i tre piani del cono x'' che sono polari del punto x' rispetto ai coni $\mu\ \nu\ \rho$ sono quelli che passano per le rette $\mu\ \nu\ \rho$ e pel punto x''; sicchè il cono x'' passa per le rette $x''\mu\ \ x''\nu\ \ x''\rho$, tocca la cubica nei punti $\mu\ \nu\ \rho$, e seca il piano ξ' lungo una conica che passa pe' punti $\mu\ \nu\ \rho$ ed ivi tocca le tracce dei detti 3 piani per x'' (*).

Anche il punto x'' è fuoco del piano ξ'', che seca il cono lungo le due rette che vanno da x'' ai due punti ove l'asse $\lambda'\lambda''$ seca l'iperboloide $o = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}$.

Lo stesso ξ'' seca la cubica in tre punti $\mu'\ \nu'\ \rho'$, tali che μ' e μ sono armonici con ν e ρ, e così via. I 3 piani del cono x'', che son polari del punto x' rispetto ai 3 coni $\mu'\ \nu'\ \rho'$, passano per le tre rette $x''\mu'\ \ x''\nu'\ \ x''\rho'$; e ciascuno è armonico con uno dei 3 piani prima considerati (per le $x''\mu\ \ x''\nu\ \ x''\rho$) rispetto agli altri due.

Da ultimo, i piani del cono x'' polari del punto x' rispetto ai coni λ' e λ'' sono: quello che tocca la cubica in λ' e la seca in λ'', e quello che tocca in λ'' e seca in λ': cioè i 2 piani tangenti alla cubica (e insieme agl'iperboloidi $o = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}$ $\ o = q_{\lambda'} q_{\lambda''}$) e passanti per la corda $\lambda' \lambda''$, focale dei punti $x'\ \ x'' \ldots$ Questi sono altresì piani del cono x' polari del punto x'' rispetto ai coni λ' e λ''; essi appartengono a tutti i coni, a due a due congiunti, che hanno i vertici sulla corda $\lambda'\lambda''$.

Siccome i piani focali dei punti della corda $\lambda'\lambda''$ formano un fascio di coppie di piani congiunti intorno all'asse $\lambda' \lambda''$ della sviluppabile, ognuna delle quali coppie segna due terne congiunte di punti sulla cubica; così i piani di uno dei coni x'', che sono polari del punto congiunto x'' rispetto ai 3 coni circoscritti alla cubica da quelle terne di punti, godono sul cono x'' delle stesse proprietà armoniche che competono a quelle terne di punti sulla cubica. In particolare, i tre piani di un cono x'' polari del punto x' rispetto ai coni circoscritti alla cubica da una qua-

(*) Tutto ciò conferma che il cono tocca l'iperboloide $o = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}$ nel piano ξ'.

lunque di quelle terne di punti, fanno un gruppo equianarmonico con ciascuno dei due piani fissi che toccano la cubica in uno dei punti λ' λ'' e la secano nell'altro.

28. Alle proprietà esposte nei §§ 26 e 27 corrispondono per dualità le seguenti:

Il polo *di un piano qualunque* ξ' rispetto alla conica λ, iscritta nella sviluppabile esistente in un piano λ di questa, e rappresentata dall'equazione

$$o = q_\lambda^2 = (pp')^2 p_\lambda p'_\lambda ,$$

ha per equazione

$$o = (p\pi)^2 p_\lambda \pi_\lambda = (a\pi)^2 a_\lambda \pi_\lambda \xi_1 + \ldots ;$$

supposto che il piano ξ' abbia per fuoco il punto x' ossia $o = (p\pi)^3$, vale a dire che i parametri dei 3 piani della sviluppabile che passano per x' siano le radici della equazione $o = \pi_\lambda^3 = a_\lambda^3 \xi_1 + \ldots$

Quando ξ' *è fisso e* λ *variabile, il luogo dei poli di* ξ' *rispetto alle coniche* λ *è una conica* (*), *che ha per equazione*

$$\begin{aligned} o = \text{discr.}\ (p\pi)^2 p_\lambda \pi_\lambda &= (p\pi)^2 (p'\pi')^2 (p\pi')(p'\pi) \\ &= (a\pi)^2 (a'\pi')^2 (a\pi')(a'\pi)\xi_1^2 + \ldots + 2(a\pi)^2(b\pi')^2(a\pi')(b\pi)\xi_1\xi_2 + \ldots \end{aligned}$$

ed esiste nel piano ξ'' *congiunto a* ξ' (**). Viceversa, il luogo dei poli del piano ξ'' è una conica nel piano ξ'. Tali due coniche diconsi *congiunte*, e le chiameremo *conica* ξ'' e *conica* ξ'.

Se il piano ξ' passa per una retta della sviluppabile, il congiunto ξ'' è il relativo piano della sviluppabile, e la conica ξ'' ha doppio contatto con la conica iscritta nella sviluppabile e giacente nel piano ξ''. Se poi il piano ξ' appartiene alla sviluppabile, il congiunto ξ'' è esso stesso, e la conica ξ'' è quella che è iscritta nella sviluppabile e giace nel piano.

Per l'asse $\xi'\xi''$ della sviluppabile passano due piani della stessa: λ' e λ''. Or se supponiamo λ fisso e ξ' variabile intorno a questo asse, il polo del piano ξ' rispetto alla conica λ percorre una retta, che è quella generatrice dell'iperboloide $o = q_{\lambda'} q_{\lambda''}$ per la quale passa il piano λ (solo) della sviluppabile.

Se infine varia ξ' *e* λ, *troviamo per luogo dei poli de' piani* ξ'

(*) Cremona, l. c.

(**) Ogni punto del piano ξ'' potrà rappresentarsi con $0 = (p\pi)^2 p_\lambda \pi_\mu$, essendo $\lambda_1 : \lambda_2$ e $\mu_1 : \mu_2$ due parametri variabili.

rispetto alle coniche λ. *l'iperboloide* $0 = q_{\lambda'} q_{\lambda''}$. *Questo è dunque il luogo delle coniche, a due a due congiunte, i cui piani passano per l'asse* $\lambda'\lambda''$.

E ne segue che la conica intersezione dell'iperboloide col piano ξ'' congiunto a ξ' ha per equazione

$$\begin{aligned} 0 &= (p\pi)^2 (p'\pi')^2 (p\pi')(p'\pi) \\ &= \overline{(p\pi)^3}^2 - (pp')^2 (\pi\pi')^2 (p\pi)(p'\pi') . \\ &= \overline{(p\pi)^3}^2 - (q\bar{q})^2 . \end{aligned}$$

Definendo per *rapporto anarmonico di 4 punti* su una conica quello, costante, delle 4 rette che li uniscono a un punto variabile di essa; risulta il rapporto anarmonico di 4 piani della sviluppabile eguale a quello dei 4 punti della conica ξ'' che son poli del piano ξ' rispetto alle coniche iscritte nella sviluppabile e giacenti in quei 4 piani.

Il piano ξ' seca la cubica in punti $\mu\ \nu\ \rho$, ossia è focale del punto x' per cui passano i 3 piani $\mu\ \nu\ \rho$ della sviluppabile. I 3 punti della conica ξ'' che son poli del piano ξ' rispetto alle coniche $\mu\ \nu\ \rho$ sono le tracce delle rette $\mu\ \nu\ \rho$ sul piano ξ'', e in essi la conica tocca le tracce dei piani $\mu\ \nu\ \rho$.

Anche il piano ξ'' seca la cubica in 3 punti $\mu'\ \nu'\ \rho'$. ossia è focale del punto x'' per cui passano i piani $\mu'\ \nu'\ \rho'$ (μ' e μ sono armonici con ν e ρ, ecc.). I 3 punti della conica ξ'', che son poli di ξ' rispetto alle coniche $\mu'\ \nu'\ \rho'$, si trovano sulle rette $x''\mu'\ x''\nu'\ x''\rho'$. Ciascuno è armonico con uno dei tre prima considerati (tracce dei piani $\mu\ \nu\ \rho$) rispetto agli altri due.

Da ultimo, i due punti della conica ξ'', poli del piano ξ' rispetto alle coniche $\lambda'\ \lambda''$, sono: quello in cui la retta λ' seca il piano λ'', e quello in cui la retta λ'' seca il piano λ'; ossia i due punti in cui l'asse $\lambda'\lambda''$, o direttrice de' piani $\xi'\ \xi''$. . . , seca la sviluppabile (e gl'iperboloidi $0 = q_{\lambda'} q_{\lambda''}$, $0 = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}$). Questi due punti appartengono a tutte le coniche, a due a due congiunte, esistenti nei piani per l'asse $\lambda'\lambda''$.

I fuochi dei piani del fascio intorno all'asse $\lambda'\lambda''$ formano sulla corda $\lambda'\lambda''$ tante coppie di punti congiunti, dalle quali si possono condurre coppie di terne congiunte di piani della sviluppabile; e i punti di una conica ξ'', che siano poli del piano ξ' rispetto alle coniche λ giacenti in tali terne di piani, godono delle stesse proprietà armoniche che competono a quelle terne sulla sviluppabile. In particolare: i tre punti di una conica ξ', che sono poli del piano congiunto ξ'' rispetto alle coniche λ

esistenti in una delle dette terne di piani, fanno un gruppo equianarmonico con ciascuno dei due punti fissi dianzi considerati, nei quali l'asse $\lambda'\lambda''$ tocca la sviluppabile e seca gl'iperboloidi $0 = q_{\lambda'} q_{\lambda''}$ $0 = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}$.

Altri coni congiunti.

29. Estendiamo alquanto i risultati de' 3 precedenti §§.

I piani polari di uno stesso punto x', rispetto a tutti gli ∞^2 iperboloidi circoscritti alla cubica e formanti una rete, formano una stella intorno al punto congiunto x''. Se fra gl'iperboloidi ne scegliamo ∞^1, allora i piani polari di x' rispetto ad essi invilupperanno un cono di vertice x''.

Così vedemmo che i piani polari di x' rispetto agli ∞ coni λ inviluppano un cono di 2° ordine.

Così ancora, i piani polari di x' rispetto a quegli ∞ iperboloidi della rete che passano per un punto dato, e però formano fascio intorno alla cubica e a quella sua corda che passa pel punto dato, inviluppano una retta che passa per x'' (*).

Continuando a indicare con λ' e λ'' i punti in cui la corda $x'x''$ seca la cubica, e conservando le notazioni del § 26, siano poi μ' e μ'' due punti arbitrarî sulla cubica, e quindi

$$\sigma = Q_{\mu'} Q_{\mu''} = (PP')^2 P_{\mu'} P'_{\mu''} = \tfrac{1}{2} (PP')^2 (P_{\mu'} P'_{\mu''} + P_{\mu''} P'_{\mu'})$$

l'equazione di un'iperboloide qualunque della rete. Sarà

$$0 = (P\Pi)^2 (P_{\mu'} \Pi_{\mu''} + P_{\mu''} \Pi_{\mu'}) = (A\Pi)^2 (A_{\mu'} \Pi_{\mu''} + A_{\mu''} \Pi_{\mu'}) x_1 + \dots$$

l'equazione del piano polare di x' rispetto a questo iperboloide; ed è chiaro che esso passerà pel punto fisso di equazione

$$0 = \begin{vmatrix} \xi_1 & (A\Pi)^2 A_1 \Pi_1 & (A\Pi)^2 (A_1 \Pi_2 + A_2 \Pi_1) & (A\Pi)^2 A_2 \Pi_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} :$$

questa è dunque l'equazione del punto x'' congiunto a x', sotto una nuova forma (cfr. § 17).

(*) Un altro punto della retta si ottiene così: si meni un piano per x' e per la detta corda, si cerchi il *terzo* punto comune ad esso e alla cubica, si unisca questo punto a x' con una retta, e su questa si prenda il punto coniugato armonicamente a x' rispetto al detto punto e all'intersezione della retta con la corda. — Si noti che, se il punto dato è sulla cubica, la corda per esso diviene la tangente in esso.

Ora supponiamo che *due punti* λ *e* μ *variino sulla cubica conservandosi coniugati in una involuzione quadratica*, della quale siano μ' e μ'' i punti doppî, e che i parametri di questi siano dati dalla equazione $0 = v_\mu^2 = v'^2_\mu = \ldots$: allora sarà sempre

$$0 = v_\lambda v_\mu \,, \qquad \mu_1 : \mu_2 = v_\lambda v_2 : - v_\lambda v_1 \,;$$

e l'iperboloide avrà per equazione

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathrm{Q}v)\, \mathrm{Q}_\lambda v_\lambda = (\mathrm{P}\mathrm{P}')^2 (\mathrm{P}'v)^2\, \mathrm{P}_\lambda v_\lambda \\ &= \tfrac{1}{2} (\mathrm{P}\mathrm{P}')^2\, v_\lambda \,\{ (\mathrm{P}'v)\, \mathrm{P}_\lambda + (\mathrm{P}v)\, \mathrm{P}'_\lambda \} \,; \end{aligned}$$

e il piano polare di x' rispetto ad esso:

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathrm{P}\Pi)^2\, v_\lambda \,\{ (\Pi v)\, \mathrm{P}_\lambda + (\mathrm{P}v)\, \Pi_\lambda \} \\ &= 2\, (\mathrm{P}\Pi)^2 (\Pi v)\, \mathrm{P}_\lambda v_\lambda + (\mathrm{P}\Pi)^3 v_\lambda^2 \,, \end{aligned}$$

e l'inviluppo dei piani polari di x', *rispetto agli* ∞^1 *iperboloidi corrispondenti alle infinite coppie* λ μ *della supposta involuzione, sarà un cono di* 2° *ordine*, rappresentato dal discriminante dell'ultima equazione (quadratica in $\lambda_1 : \lambda_2$) eguagliato a zero, che vedremo essere

$$\begin{aligned} 0 &= (vv')^2 \,\{ - \overline{(\mathrm{P}\Pi)^3}^2 + 2\, (\mathrm{Q}\overline{\mathrm{Q}})^2 \,\} - 2\, \overline{(\mathrm{P}\Pi)^2 (\mathrm{P}v)\, (\Pi v)}^2 \\ &= (vv')^2 (\mathrm{Q}\overline{\mathrm{Q}})^2 - 2\, (\mathrm{P}\Pi)^2 (\mathrm{P}'\Pi')^2 (\mathrm{P}v) (\Pi v') (\mathrm{P}'v) (\Pi'v') \,. \end{aligned}$$

Infatti il discriminante di $\mathrm{V}_\lambda^2 + k\, v_\lambda^2$ è

$$(\mathrm{V}\mathrm{V}')^2 + 2\, (v\mathrm{V})^2 k + (vv')^2 k^2 \,;$$

or nel caso nostro è posto

$$\mathrm{V}_\lambda^2 = 2\, (\mathrm{P}\Pi)^2 (\Pi v)\, \mathrm{P}_\lambda v_\lambda \,, \qquad k = (\mathrm{P}\Pi)^3 \,;$$

quindi si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{V}_\lambda \mathrm{V}_\mu &= (\mathrm{P}\Pi)^2 (\Pi v)\, [2\, \mathrm{P}_\lambda v_\mu - (\mathrm{P}v)\, (\lambda\mu)] \,, \\ (v\mathrm{V})^2 &= 2\, (\mathrm{P}\Pi)^2 (\Pi v)\, (\mathrm{P}v')\, (vv') = - (\mathrm{P}\Pi)^3 (vv')^2 \,, \\ (\mathrm{V}\mathrm{V}')^2 &= 2\, (\mathrm{P}\Pi)^2 (\Pi v)\, (\mathrm{V}'\mathrm{P})\, (\mathrm{V}'v) \\ &= 2\, (\mathrm{P}\Pi)^2 (\Pi v)\, (\mathrm{P}'\Pi')^2 (\Pi'v') \,\{ 2\, (\mathrm{P}\mathrm{P}')\, (vv') - (\mathrm{P}v)'(\mathrm{P}'v') \} \\ &= 2\, (\mathrm{P}\Pi)^2 (\mathrm{P}'\Pi')^2\, (\mathrm{P}\mathrm{P}')\, (\Pi\Pi')\, (vv')^2 - 2\, \overline{(\mathrm{P}\Pi)^2 (\mathrm{P}v)\, (\Pi v)}^2 \\ &= 2\, (\mathrm{Q}\overline{\mathrm{Q}})^2\, (vv')^2 - 2\, \overline{(\mathrm{P}\Pi)^2 (\mathrm{P}v)\, (\Pi v)}^2 \,; \end{aligned}$$

e però il discriminante diviene

$$(vv')^2 \,\{ - \overline{(\mathrm{P}\Pi)^3}^2 + 2\, (\mathrm{Q}\overline{\mathrm{Q}})^2 \,\} - 2\, \overline{(\mathrm{P}\Pi)^2 (\mathrm{P}v)\, (\Pi v)}^2 \,.$$

Osservando poi che

$$2\,\overline{(P\Pi)^2(Pv)(\Pi v)}^2 = 2\,(P\Pi)^2(P'\Pi')^2(Pv)(\Pi v)(P'v')(\Pi'v')$$
$$= 2\,(P\Pi)^2(P'\Pi')^2(Pv')(\Pi v')(P'v)(\Pi'v)$$
$$= (P\Pi)^2(P'\Pi')^2\,\{(Pv)(\Pi'v')-(Pv')(\Pi'v)\}\,\{(P'v')(\Pi v)-(P'v)(\Pi v')\}$$
$$+(P\Pi)^2(P'\Pi')^2(Pv)(\Pi v')(P'v)(\Pi'v')$$
$$= (P\Pi)^2(P'\Pi')^2(P\Pi')(P'\Pi)(vv')^2+2\,(P\Pi)^2(P'\Pi')^2(Pv)(\Pi v')(P'v)(\Pi'v')$$
$$= \{\overline{(P\Pi)^3}^2-(Q\bar{Q})^2\}\,(vv')^2+2\,(P\Pi)^2(P'\Pi')^2(Pv)(\Pi v')(P'v)(\Pi'v')\,,$$

si ottiene pel discriminante medesimo l'altra espressione:

$$(vv')^2\,(Q\bar{Q})^2-2\,(P\Pi)^2\,(P'\Pi')^2\,(Pv)\,(\Pi v')\,(P'v)\,(\Pi'v')\,.$$

Un caso particolare notevole si ha quando si suppone che i due punti doppî μ' e μ'' dell'involuzione coincidano con i due punti λ' e λ'' in cui la focale di x' e x'' seca la cubica, ossia quando

$$v_\mu^2=(\Pi\Pi')^2\,\Pi_\mu\Pi'_\mu=\bar{Q}_\mu^2\,.$$

Un altro caso notevole si ha quando si suppone che μ' e μ'' coincidano in un sol punto μ dato, vale a dire quando $v_1 : v_2 = \mu_2 : -\mu_1$: allora l'equazione del piano polare di x' rispetto a uno degli iperboloidi $o = Q_\lambda Q_\mu$, che sono circoscritti alla cubica e passano per la retta fissa μ formando così un fascio, riducesi a

$$o=(P\Pi)^2(P_\lambda\Pi_\mu+P_\mu\Pi_\lambda)=2\,(P\Pi)^2\,P_\lambda\Pi_\mu+(P\Pi)^3(\lambda\mu)\,;$$

e al variare di λ inviluppa una retta, le cui coordinate-assi sono

$$\{(AB)\,\Pi_\mu\Pi'_\mu+(\Pi\Pi')\,A_\mu B_\mu\}\,(A\Pi)^2(B\Pi')^2\,,\;\ldots\quad.$$

Da ultimo, si rientra nel caso dei coni $x'\ldots$, considerato al § 26, supponendo v_λ^2 identicamente nulla; ma allora le formole ora esposte divengono illusorie.

È superfluo sviluppare le proprietà che corrispondono per dualità alle precedenti, e che costituiscono una estensione dei risultati ottenuti al § 28.

Alcuni particolari sistemi di superficie di 2° grado.

30. Siano λ' e λ'' due dati punti della cubica: saranno $o = P_{\lambda'}^3$ e $o = P_{\lambda''}^3$ i piani osculatori in questi punti; e sarà $o = k_1 P_{\lambda'}^3 + k_2 P_{\lambda''}^3$ un piano qualunque ξ' del fascio da essi determinato, cioè il piano focale di un punto qualunque x' $(o = k_1 p_{\lambda'}^3 + k_2 p_{\lambda''}^3)$ della corda $\lambda'\lambda''$.

Consideriamo la quadrica

$$\begin{aligned}
0 &= (l+m)\,(\overline{P_{\lambda'}^3}^2 k_1^2 + \overline{P_{\lambda''}^3}^2 k_2^2) + 2\, I_{l:m}\, k_1 k_2 \\
&= (l+m)\,(\overline{P_{\lambda'}^3}^2 k_1^2 + \overline{P_{\lambda''}^3}^2 k_2^2) + 2\,[l\, P_{\lambda'}^3 P'^3_{\lambda''} + m\, P_{\lambda'}^2 P_{\lambda''} P'^2_{\lambda''} P'_{\lambda'}]\, k_1 k_2 \\
&= (l+m)\,(\overline{P_{\lambda'}^3}^2 k_1^2 + \overline{P_{\lambda''}^3}^2 k_2^2) + 2\,\{(l+m) P_{\lambda'}^3 P'^3_{\lambda''} - m(\lambda'\lambda'')^2 Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}\}\, k_1 k_2 \\
&= (l+m)\,(k_1\, P_{\lambda'}^3 + k_2\, P_{\lambda''}^3)^2 - 2\, m(\lambda'\lambda'')^2 Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}\, k_1 k_2 \\
&= K_{l:m,\ k_1:k_2,\ \lambda',\lambda''} = K\,.
\end{aligned}$$

La quadrica $0 = K$ *tocca l'iperboloide* $0 = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}$ *lungo la conica che esso ha comune col piano* ξ' *o* $0 = k_1 P_{\lambda'}^3 + k_2 P_{\lambda''}^3$ (cfr. § 26 in fine); sicchè il punto x'', congiunto a x' fuoco di ξ', ha per piano polare il medesimo ξ' anche rispetto alla quadrica $0 = K$. *La stessa* $0 = K$ *seca poi l'iperboloide* $0 = I_{l:m}$ *lungo due coniche nei piani* $0 = k_1 P_{\lambda'}^3 \pm k_2 \sqrt{-1}\, P_{\lambda''}^3$, sicchè lo tocca in due punti sull'asse del fascio di piani; punti che appartengono anche agli iperboloidi $0 = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}$, $0 = q_{\lambda'} q_{\lambda''}$, e a tutti quelli del sistema studiato al § 22 e seguenti. Onde *la corda* $\lambda'\lambda''$ *e l'asse* $\lambda'\lambda''$ *sono due rette coniugate anche rispetto alla quadrica* $0 = K$. Di più *la quadrica* $0 = K$ *tocca la cubica gobba nei tre punti che questa ha nel piano* ξ'.

Variando $l:m$, $k_1 : k_2$, λ' e λ'', si ha un sistema di ∞^4 quadriche $0 = K$.

Se si fa variare solo il parametro $l:m$, *si ottiene il fascio delle quadriche circoscritte a* $0 = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}$ *lungo la conica testè ricordata.* Fra esse il cono circoscritto dal punto x'' (del quale cono demmo l'equazione al § 26), l'iperboloide $0 = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}$, è il piano ξ' preso due volte.

Se invece si fa variare solo $k_1 : k_2$, *si ottiene un sistema di* ∞ *quadriche, di cui due per ogni punto dello spazio;* e si trova *l'inviluppo del sistema* annullando il discriminante della forma K quadratica in $k_1 : k_2$, cioè

$$\begin{aligned}
&(l+m)^2\, \overline{P_{\lambda'}^3 P'^3_{\lambda''}}^2 - \{(l+m)\, P_{\lambda'}^3 P'^3_{\lambda''} - m\,(\lambda'\lambda'')^2 Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}\}^2 \\
&= m\,(\lambda'\lambda'')^2 Q_{\lambda'} Q_{\lambda''} \{(2l+m)\, P_{\lambda'}^3 P'^3_{\lambda''} + m\, P_{\lambda'}^2 P_{\lambda''} P'^2_{\lambda''} P'_{\lambda'}\} \\
&= m\,(\lambda'\lambda'')^2 Q_{\lambda'} Q_{\lambda''} \,.\, I_{2l+m:m} = m\, I_{1:-1}\, I_{2l+m\cdot m}\ ;
\end{aligned}$$

sicchè l'*inviluppo si comporrà dell'iperboloide* $0 = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''} \equiv I_{1:-1}$ *già considerato, e dell'iperboloide* $0 = I_{2l+m:m}$. Il contatto con quest'ultimo avviene lungo la conica comune ad esso ed al piano ξ'' $(0 = k_1 P_{\lambda'}^3 - k_2 P_{\lambda''}^3)$ congiunto a ξ'; poichè si ha identicamente

$$K = (l+m)\,(k_1 P_{\lambda'}^3 - k_2 P_{\lambda''}^3)^2 + 2\, k_1 k_2\, I_{2l+m:m}\ .$$

E x' è il polo del piano ξ'' rispetto alla quadrica $0 = K$.

Tornando all'ipotesi che varii $l:m$, si vede che al variare dell'iperboloide $0=I_{l:m}$ varia anche $0=I_{2l+m:m}$. Si hanno così nel fascio di tali iperboloidi due serie proiettive di iperboloidi. Gli elementi *uniti* di esse sono determinate dalla equazione

$$l:m=2l+m:m\,,$$

onde

$$m=0 \quad \text{e} \quad l+m=0\,:$$

e però sono: la coppia $0=I_{1:0}$ dei piani $\lambda'\,\lambda''$, e l'iperboloide $0=I_{1:-1}\equiv Q_{\lambda'}Q_{\lambda''}$. Due elementi corrispondenti dànno con questi due elementi uniti il rapporto anarmonico costante 2, vale a dire che $0=I_{2l+m:m}$ e $0=I_{1:-1}$ sono armonici con $0=I_{l:m}$ e con la coppia de'piani $\lambda'\,\lambda''$. All'iperboloide $0=q_{\lambda'}q_{\lambda''}\equiv I_{1:-9}$ corrisponde nella 2ª serie $0=I_{7:-9}$, e nella 1ª $0=I_{5:-9}$ (*).

31. Osserviamo che $\lambda'_1:\lambda'_2$ e $\lambda''_1:\lambda''_2$ sono le radici dell'equazione $0=\text{Hess.}\,u_\lambda^3=v_\lambda^3$, posto che $0=u_\lambda^3$ dia i parametri dei tre punti in cui la cubica è secata dal piano ξ'. Allora si può assumere

$$k_1 P_{\lambda'}^3+k_2 P_{\lambda''}^3=(Pu)^3\,.$$

Qui ponendo una volta λ''_2 e $-\lambda''_1$, un'altra volta λ'_2 e $-\lambda'_1$, al posto di P_1 e P_2, si hanno le relazioni

$$k_1(\lambda'\lambda'')^3=u_{\lambda''}^3 \qquad k_2(\lambda''\lambda')^3=u_{\lambda'}^3\,.$$

Da queste poi si ricava

$$\begin{aligned}
k_1k_2(\lambda'\lambda'')^6 &= -u_{\lambda'}^3 u'^3_{\lambda''}\\
&= -\tfrac{1}{2}\left(u_{\lambda'}^3u'^3_{\lambda''}+u'^3_{\lambda'}u_{\lambda''}^3\right)\\
&= -\tfrac{1}{2}\left(u_{\lambda'}u'_{\lambda''}+u'_{\lambda'}u_{\lambda''}\right)\left\{(u_{\lambda'}u'_{\lambda''}-u'_{\lambda'}u_{\lambda''})^2+u_{\lambda'}u_{\lambda''}u'_{\lambda'}u'_{\lambda''}\right\}\\
&= -\tfrac{1}{2}\left(u_{\lambda'}u'_{\lambda''}+u'_{\lambda'}u_{\lambda''}\right)\left\{(\lambda'\lambda'')^2(uu')^2+u_{\lambda'}u_{\lambda''}u'_{\lambda'}u'_{\lambda''}\right\}\\
&= -(\lambda'\lambda'')^2(uu')^2u_{\lambda'}u'_{\lambda''}-u_{\lambda'}^2u_{\lambda''}\,.\,u'^2_{\lambda''}u'_{\lambda'} \quad (**)\\
&= -(\lambda'\lambda'')^2v_{\lambda'}v_{\lambda''}=\tfrac{1}{2}(\lambda'\lambda'')^2(\lambda'\lambda'')^2=\tfrac{1}{2}(\lambda'\lambda'')^4
\end{aligned}$$

ovvero

$$2k_1k_2(\lambda'\lambda'')^2=1\,.$$

(*) Similmente $0=i_{l\cdot m}\equiv I_{m\cdot 9l}$ e $0=i_{2l+m\ m}\equiv I_{m:18l+9m}$ costituiscono due serie proiettive, ecc.

(**) È noto che nella nostra ipotesi

$$u_{\lambda'}^2u_{\lambda''}-(uv)^2u_{\lambda'}=0\,, \qquad u'^2_{\lambda''}u'_{\lambda'}=(uv)^2u_{\lambda''}-0\,.$$

Segue dalle precedenti relazioni che *alla* K *può darsi la forma*

$$K = (l+m)\,\overline{(Pu)^3}^2 - m\,(Qv)^2 \quad (*).$$

E se x' è il fuoco di ξ',

$$K = (l+m)\,\overline{(P\Pi)^3}^2 - m\,(Q\bar{Q})^2.$$

Ritenendo $l:m$ costante, la simmetria del 2° membro rispetto a P e Π, ossia a x e x', prova che: *se un punto x appartiene alla quadrica* $o = K$ (che diremo *corrispondente* a x' e ξ'), *viceversa, il punto x' apparterrà a quella quadrica del sistema che corrisponde al punto x.*

Ond'è che *tutte le quadriche del sistema, corrispondenti ai punti di una stessa quadrica del sistema, passano pel punto corrispondente a quella quadrica.*

Una quadrica del sistema *non* passa pel punto cui corrisponde; a meno che il punto non appartenga alla sviluppabile (**), nel qual caso la corda diviene una tangente, e la quadrica degenera nel piano della sviluppabile che contiene questa tangente, contato due volte.

Notiamo anche che, se $o = U_\lambda^3$ determina un altro piano $o = k'_1 P_{\lambda'}^3 + k'_2 P_{\lambda''}^3 = (PU)^3$ del fascio, si ha

$$\begin{aligned} k'_1 k'_2 K_{k_1:k_2} - k_1 k_2 K_{k'_1:k'_2} &= (l+m)\,\{ k'_1 k'_2 \overline{(Pu)^3}^2 - k_1 k_2 \overline{(PU)^3}^2 \} \\ &= (l+m)(kk')\,\{ k_1 k'_1 \overline{P_{\lambda'}^3}^2 - k_2 k'_2 \overline{P_{\lambda''}^3}^2 \}; \end{aligned}$$

onde *le due quadriche* $o = K_{k_1:k_2}$ $o = K_{k'_1:k'_2}$ *si secano lungo due coniche, nei due piani armonici, sia con i due piani cui le quadriche corrispondono, sia con i due piani* λ' λ''. In particolare, *due quadriche* $o = K_{k_1:k_2}$ $o = K_{k_1:-k_2}$, *corrispondenti a due piani congiunti*, si secano nei due piani $o = (Pu)^3 \pm \sqrt{-1}\,(PU)^3$ o $o = k_1 P_{\lambda'}^3 \pm k_2 \sqrt{-1}\, P_{\lambda''}^3$, e però *fanno fascio con l'iperboloide* $o = I_{l\,.\,m}$.

32. Fra le ∞^4 superficie del sistema di cui ci occupiamo meritano speciale attenzione quelle ∞^3, delle quali una qualunque è rappresentata dalla equazione $o = K_{5:-9,\ k_1:k_2,\ \lambda',\ \lambda''}$ al variare di $k_1:k_2$, λ' e λ''; cioè da

---

(*) Notiamo anche la forma

$$-2uK = 4(l+m)\,\overline{(P\omega)^3}^2 + I_{2l+m\ \ m}.$$

(**) Infatti sostituendo x' a x la espressione diviene $-m(\bar{Q}\bar{Q}')^2$: ora $0 = (QQ')^2$ è la sviluppabile.

$$
\begin{aligned}
0 &= 2\,(\overline{P_{\lambda'}^{3}}^{2} k_1^2 + \overline{P_{\lambda''}^{3}}^{2} k_2^2) - I_{5:-9}\, k_1 k_2 \\
&= 2\,(\overline{P_{\lambda'}^{3}}^{2} k_1^2 + \overline{P_{\lambda''}^{3}}^{2} k_2^2) + (-5\,P_{\lambda'}^{3} P'^{3}_{\lambda''} + 9\,P_{\lambda'}^{2} P_{\lambda''} P'^{2}_{\lambda''} P'_{\lambda'})\, k_1 k_2 \\
&= 2\,(\overline{P_{\lambda'}^{3}}^{2} k_1^2 + \overline{P_{\lambda''}^{3}}^{2} k_2^2) + \{\, 4\,P_{\lambda'}^{3} P'^{3}_{\lambda''} - 9\,(\lambda'\lambda'')^2 Q_{\lambda'} Q_{\lambda''} \}\, k_1 k_2 \\
&= 2\,(k_1 P_{\lambda'}^{3} + k_2 P_{\lambda''}^{3})^2 - 9\,(\lambda'\lambda'')^2 Q_{\lambda'} Q_{\lambda''} k_1 k_2 \\
&= 2\,\overline{(P\Pi)^{3}}^{2} - \tfrac{9}{2}\,(Q\bar{Q})^2 \\
&= 2\,(k_1 P_{\lambda'}^{3} - k_2 P_{\lambda''}^{3})^2 - I_{1:-9}\, k_1 k_2 \quad (*) \\
&= H_{k_1 : k_2,\, \lambda',\, \lambda''} = H\,.
\end{aligned}
$$

Ciascuna delle quadriche $0 = H$ *è bitangente all' iperboloide* $0 = I_{5:-9}$(**), ecc. Di più *tocca gl'iperboloidi* $0 = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}$ $0 = q_{\lambda'} q_{\lambda''}$ *lungo le coniche che essi hanno in comune col piano* ξ' *e col congiunto* ξ''. Da ciò è facile dedurre che *la quadrica* $0 = H$ *è l'iperboloide* (determinato e unico) *che passa per le tre rette tangenti alla cubica nei tre punti ove questa è secata dal piano* ξ' *cui l' iperboloide corrisponde* (***); ovvero *l'iperboloide che passa per le tre generatrici della sviluppabile giacenti nei tre piani della sviluppabile che concorrono nel punto* x' *cui l'iperboloide corrisponde.*

È manifesto che questo iperboloide si trova nelle stesse condizioni così rispetto alla cubica come alla sviluppabile.

Per conseguenza, *la sua equazione in coordinate di piani sarà*

$$
\begin{aligned}
0 &= 2\,(\overline{p_{\lambda'}^{3}}^{2} k_1^2 + \overline{p_{\lambda''}^{3}}^{2} k_2^2) - i_{5:-9}\, k_1 k_2 = \dots \\
&= 2\,(k_1 p_{\lambda'}^{3} + k_2 p_{\lambda''}^{3})^2 - 9\,(\lambda'\lambda'')^2 q_{\lambda'} q_{\lambda''} k_1 k_2 = \dots \\
&= 2\,(k_1 p_{\lambda'}^{3} - k_2 p_{\lambda''}^{3})^2 - i_{1:-9}\, k_1 k_2\,.
\end{aligned}
$$

Sull'iperboloide in discorso, individuato da tre date rette λ, queste sono generatrici di un sistema; e le generatrici dell'altro sistema sono le rette appoggiate a quelle tre. Una quarta retta λ qualsiasi con quelle tre ammette (§ 12) due rette secanti comuni (reciproche fra loro), e i due punti in cui è secata da queste sono quelli in cui è secata anche

---

(*) Ricordiamo che $I_{1:-9} \equiv q_{\lambda'} q_{\lambda''}$.

(**) Cfr. §§ 24, 25, 30.

(***) Questo importante iperboloide fu introdotto nella teoria delle cubiche gobbe dal chiar. Prof. Beltrami, il quale ne assegnò delle proprietà, che noi abbiamo in parte estese alle quadriche $0 = K$, aggiungendone qualche altra (cfr. i ***Rendiconti del R. Istituto Lombardo***, serie II, vol. I).

dall'iperboloide, e i due piani per essa e per queste sono tangenti all'iperboloide. Adunque *le generatrici del 2° sistema sono accoppiate in involuzione come reciproche, e però due fra esse sono reciproche di sè stesse.* La quarta retta λ che seca una di queste due rette, riescirà tangente all'iperboloide nel punto ove incontra la detta retta (l'unica che si appoggi ad essa e alle tre date e sia reciproca di sè stessa).

33. Torniamo alla quadrica più generale $o = K$. Essendo essa circoscritta all'iperboloide $o = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''} \equiv i_{1:-9}$ secondo il piano ξ' che ha per polo x'' $(o = k_1 p_{\lambda'}^3 - k_2 p_{\lambda''}^3)$, la sua equazione in coordinate di piani dovrà aver la forma

$$o = r(k_1 p_{\lambda'}^3 - k_2 p_{\lambda''}^3)^2 + 2 s i_{1:-9} k_1 k_2 .$$

Ora possiamo dimostrare che alle posizioni

$$l : m = -1, \qquad -\tfrac{5}{9}, \qquad o$$

devono corrispondere rispettivamente le seguenti

$$r : s = o, \qquad -4, \qquad \infty .$$

Infatti:

per $l : m = -1$ si ha

$$K \equiv 2(\lambda'\lambda'')^2 Q_{\lambda'} Q_{\lambda''} k_1 k_2 = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''} \equiv i_{1\ -9},$$

e però l'ultima equazione deve ridursi a $o = i_{1:-9}$, onde $r : s = o$;

per $l : m = -\frac{5}{9}$ si ha (§ 32)

$$K = H \equiv 2(k_1 p_{\lambda'}^3 - k_2 p_{\lambda''}^3)^2 - i_{1\ -9} k_1 k_2 ,$$

e però l'ultima equazione deve ridursi a questa, onde $r : s = -4$;

per $l : m = o$ si ha

$$K \equiv \overline{(P\Pi)^3}^2 - (Q\bar{Q})^2 ,$$

espressione che, eguagliata a zero, rappresenta (*) il cono circoscritto dal punto x'' all'iperboloide $o = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}$; e però l'ultima equazione deve rappresentare il punto $x''(o = k_1 p_{\lambda'}^3 - k_2 p_{\lambda''}^3)$ preso due volte, onde $s = o$ e $r : s = \infty$.

(*) Cfr. § 27 in fine.

Tenendo conto delle osservazioni che precedono, ed osservando che si può assumere

$$r:s=\alpha l+\beta m:\alpha' l+\beta' m\ ,$$

è facile determinare i rapporti di α β α' β', e concludere

$$r:s=5\,(l+m):l\,.$$

Adunque *l'equazione della quadrica* $0=\mathrm{K}$ *in coordinate di piani sarà*

$$\begin{aligned}
0 &= 5\,(l+m)\,(k_1 p_{\lambda'}{}^3-k_2 p_{\lambda''}{}^3)^2+2\,l\,i_{1:-9}\,k_1 k_2\\
&= 5\,(l+m)\,(\overline{p_{\lambda'}{}^3}^2\,k_1{}^2+\overline{p_{\lambda''}{}^3}^2\,k_2{}^2)+2\,\{(4\,l+5m)p_{\lambda'}{}^3 p'_{\lambda''}{}^3+9\,l\,p_{\lambda'}{}^2 p_{\lambda''}\,p'_{\lambda''}{}^2 p'_{\lambda'}\}\,k_1 k_2\\
&= 5\,(l+m)\,(\overline{p_{\lambda'}{}^3}^2\,k_1{}^2+\overline{p_{\lambda''}{}^3}^2\,k_2{}^2)-2\,i_{4l+5m:9l}\,k_1 k_2\\
&= 5\,(l+m)(k_1 p_{\lambda'}{}^3+k_2 p_{\lambda''}{}^3)^2-2\,i_{9l+10m:9l}\,k_1 k_2\\
&= 5\,(l+m)\overline{(p\,\omega)^3}^2-\frac{4l}{u}(p\,v)(p'v)(p\,v')^2\,(p'v'')^2+l(q\,v)^2\\
&= 5\,(l+m)\overline{(p\,u)^3}^2+\frac{9\,l+5\,m}{u}(p\,v)\,(p'v)\,(p\,v')^2\,(p'v'')^2-(9\,l+10\,m)(q\,v)^2\\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Si noti che solo per $l:m=-1$ e per $l:m=-\frac{5}{9}$ (casi già discussi innanzi) le equazioni della quadrica $0=\mathrm{K}$ in coordinate di punti e di piani si riducono a differire soltanto per lo scambio di P I in p i; poichè solo allora

$$\frac{l+m}{5\,(l+m)}=\frac{l}{-(4\,l+5\,m)}=\frac{m}{-9\,l}\,.$$

34. Basta accennare che, oltre alle quadriche esaminate nei §§ precedenti, si possono considerare quelle che ad esse corrispondono per dualità, e le cui equazioni $0=k_{l:m,\,k_1:k_2,\,\lambda',\,\lambda''}=k$ si deducono da esse scambiando i punti coi loro piani focali e i piani coi loro fuochi, ossia P e I con p e i. Per due quadriche corrispondenti nei due sistemi avviene che l'una sia il luogo dei punti i cui piani focali inviluppano l'altra, e viceversa (*). Si hanno così due serie proiettive di quadriche, delle quali serie gli elementi uniti sono determinati dalle equazioni

$$\frac{l+m}{5(l+m)}=\frac{m}{9\,l+10\,m}=\frac{-m}{9\,l}\,.$$

(*) Per esempio, si corrispondono gl'iperboloidi $0=\mathrm{Q}_{\lambda'}\mathrm{Q}_{\lambda''}$ $0=q_{\lambda'}q_{\lambda''}$, e i punti dell'uno sono fuochi dei piani dell'altro.

onde $9l + 10m = -9l$ o $l : m = -\frac{5}{9}$; sicchè *l'iperboloide* $o = K$ *gode* (qualunque siano $k_1 : k_2$, λ' e λ'') *la proprietà, che i suoi punti sono fuochi dei suoi piani tangenti* (*).

Due quadriche corrispondenti qualunque determinano un fascio, del quale fa parte l'iperboloide fisso $o = I_{1:1}$, essendo identicamente

$$K - \rho k \equiv -5 I_{m:-m} + I_{9l+10m:9l} \equiv I_{1:1}.$$

Si potrebbero escogitare altri sistemi di quadriche analoghi a quelli studiati nel § 30 e seguenti; ma non intendiamo qui occuparcene. Ci limitiamo a menzionare il sistema (∞^5) di cui una quadrica qualunque ha per equazione

$$o = (lm' - l'm)(\overline{P_{\lambda'}^3}^2 k_1^2 + \overline{P_{\lambda''}^3}^2 k_2^2) + 2k_1 k_2 I_{lm'+l'm:2mm'},$$

ove $l : m$, $l' : m'$, $k_1 : k_2$ sono numeri arbitrarî. Il 2° membro può scriversi anche così:

$$(lm' - l'm)(k_1 P_{\lambda'}^3 + k_2 P_{\lambda''}^3)^2 + 4k_1 k_2 m I_{l':m'}$$

o

$$(lm' - l'm)(k_1 P_{\lambda'}^3 - k_2 P_{\lambda''}^3)^2 + 4k_1 k_2 m' I_{l:m};$$

e sia in vista di queste forme, sia calçolando il discriminante, si vede che una quadrica qualunque del sistema tocca i due iperboloidi $o = I_{l:m}$ e $o = I_{l':m'}$ secondo le coniche che questi hanno nel piano ξ' e nel congiunto ξ''.

Mutando $l : m$ in $2l + m : m$ e ponendo $l' : m' = -1$ (e solo così), si ricade nel sistema delle $o = K_{l:m, k_1:k_2}$.

Inoltre, ponendo

$$-\frac{lm' + l'm + 2mm' \pm \sqrt{(l+m)(l'+m')mm'}}{lm' - l'm} = \begin{cases} \theta' \\ \theta \end{cases},$$

l'equazione della quadrica può scriversi

$$o = (lm' - l'm)(k_1 P_{\lambda'}^3 - \theta k_2 P_{\lambda''}^3)(k_1 P'^3_{\lambda'} - \theta' k_2 P'^3_{\lambda''}) - 2mm'(\lambda'\lambda'')^2 Q_{\lambda'} Q_{\lambda''},$$

e mostra che la quadrica ha in comune con l'iperboloide $o = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}$ due coniche nei piani $o = k_1 P_{\lambda'}^3 - \theta k_2 P_{\lambda''}^3$ $o = k_1 P_{\lambda'}^3 - \theta' k_2 P_{\lambda''}^3$, sicchè seca la cubica in sei punti di cui tre sull'una conica e tre sull'altra.

(*) Ciò concorda colla precedente osservazione: che le generatrici appoggiate alle tre rette λ per cui passa l'iperboloide sono a due a due reciproche, e due fra esse sono reciproche di sè stesse (§ 32).

Superficie polari rispetto alla sviluppabile o alla cubica.

35. Ad ogni punto dello spazio corrisponde un piano, cioè il suo focale; e viceversa, ad ogni piano corrisponde un punto, cioè il suo fuoco; e se $x\ x' \ldots$ sono dei punti, le equazioni $o = P_\lambda^3 \quad o = \Pi_\lambda^3 \ldots$ dànno i parametri delle terne di punti in cui i rispettivi piani focali secano la cubica gobba: possiamo dunque trattare i coefficienti delle forme $P_\lambda^3 \quad \Pi_\lambda^3 \ldots$ (in $\lambda_1 : \lambda_2$) come le coordinate di quei punti $x\ x' \ldots$ (*).

Ciò posto, l'*equazione della superficie di* 3° *ordine, prima polare di un dato punto* x' *rispetto alla sviluppabile* $o = \Sigma$, *sarà*

$$\begin{aligned} o &= -\tfrac{1}{4}\left\{ \frac{\partial \Sigma}{\partial P_{111}} \Pi_{111} + \ldots \right\} \\ &= \text{cov. cub.}\,(P\Pi)^3 = (P P'')^2 (P'P'')(P\Pi)(P'\Pi)^2 = (P Q)(P\Pi)^2(Q\Pi) \\ &= (T\Pi)^3 = (T A)^3 x'_1 + \ldots \text{(**)}. \end{aligned}$$

Del resto, senza ricorrere all'artifizio qui adoperato, è chiaro che, se nella espressione di $\Sigma = (P P'')^2 (P'P''')^2 (PP''')(P''P')$ invece di P''' si pone Π, si deve ottenere $\frac{\partial \Sigma}{\partial P_{111}} \Pi_{111} + \ldots$ divisa per 4.

Se il polo è un punto λ della curva, si ha

$$o = \text{cov. cub. } P_\lambda^3 = \ldots = T_\lambda^3 = \ldots;$$

e se è un punto $o = p_\lambda^2 p_{\lambda'}$ della sviluppabile, si ha

$$o = \text{cov. cub. } P_\lambda^2 P_{\lambda'} = \ldots = T_\lambda^2 T_{\lambda'} = \ldots$$

(*) Pel punto x queste nuove coordinate sono

$$P_{111} = \Delta_{111} x_1 + \ldots = -\frac{\partial \Delta}{\partial a_{222}} x_1 - \ldots, \quad P_{112} = A_{112}\, x_1 + \ldots = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{122}} x_1 + \ldots,$$

$$P_{122} = \Delta_{122} x_1 + \ldots = -\frac{\partial \Delta}{\partial a_{112}} x_1 - \ldots, \quad P_{222} = A_{222}\, x_1 + \ldots = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{111}} x_1 + \ldots;$$

onde viceversa

$$\Delta x_1 = (a P)^3 \qquad \Delta \tilde{x}_2 = (b P)^3 \qquad \Delta x_3 = (c P)^3 \qquad \Delta x_4 = (d P)^q.$$

Per un punto λ della cubica P_λ^3 è un cubo perfetto, e quindi

$$P_{111} = \lambda_2^3 \qquad P_{112} = -\lambda_2^2 \lambda_1 \qquad P_{122} = \lambda_2 \lambda_1^2 \qquad P_{222} = -\lambda_1^3.$$

(**) Cfr. § 15.

L'equazione del piano, superficie terza polare del punto x' rispetto alla sviluppabile e seconda rispetto alla superficie di 3° ordine $o = (T\Pi)^3$, si ottiene da questa ultima equazione scambiandovi x con x', ed è quindi

$$o = (\Pi\Pi'')^2(\Pi'\Pi'')(P\Pi)(P\Pi')^2 = (\Pi\overline{Q})(P\Pi)^2(P\overline{Q}) = (P\overline{T})^3$$
$$= \tfrac{1}{24}\left\{ \frac{\partial^3\Sigma}{\partial P^3_{,,,}}\Pi^3_{,,,} + \ldots \right\}$$

(indicando con $\overline{Q}_\lambda^2$ e $\overline{T}_\lambda^2$ l'Hessiano e il covariante cubico di Π_λ^3). Dunque *il piano polare di x' è il piano ξ'' congiunto di ξ' focale di x'.*

Per ottenere l'equazione della quadrica, seconda polare di x' rispetto alla sviluppabile e prima rispetto alla superficie di 3° ordine $o = (T\Pi)^3$, basta scrivere la equazione di quest'ultima sotto la seguente forma simmetrica rispetto a $P\ P'\ P''$:

$$o = (PP'')^2(P'P'')(P\Pi)(P'\Pi)^2 + (P'P'')^2(PP'')(P'\Pi)(P\Pi)^2$$
$$+ (PP')^2(P''P')(P\Pi)(P''\Pi)^2 + (P'P)(P''P)(P'\Pi)(P''\Pi)^2$$
$$+ (P''P')^2(PP')(P''\Pi)(P\Pi)^2 + (P''P)^2(P'P)(P''\Pi)(P'\Pi)^2,$$

e poi cambiare P'' in Π'; il che dà

$$o = 2(P\Pi)^2(P'\Pi')^2\{(P\Pi')(P'\Pi) - (PP')(\Pi\Pi')\}$$
$$- 2(PP')^2(\Pi\Pi')^2(P\Pi)(P'\Pi')$$
$$= 2(P\Pi)^2(P'\Pi')^2\{(P\Pi)(P'\Pi') - 2(PP')(\Pi\Pi')\}$$
$$- 2(PP')^2(\Pi\Pi')^2(P\Pi)(P'\Pi')$$
$$= 2\overline{(P\Pi)^3}^2 - 2(PP')(\Pi\Pi')(P\Pi)(P'\Pi')\{2(P\Pi)(P'\Pi') + (PP')(\Pi\Pi')\}$$
$$= 2\overline{(P\Pi)^3}^2 - 2(PP')(\Pi\Pi')(P\Pi)(P'\Pi')\{3(PP')(\Pi\Pi') + 2(P\Pi')(P'\Pi)\},$$

e poichè $(PP')(\Pi\Pi')(P\Pi)(P'\Pi')(P\Pi')(P'\Pi)$ è nullo, risulterà

$$o = 2\overline{(P\Pi)^3}^2 - 3(PP')^2(\Pi\Pi')^2(P\Pi)(P'\Pi').$$

Come si vede, *la quadrica polare di x' appartiene al sistema delle* $o = K_{l:m,k_1:k_2}$ (studiato nei §§ 30 a 34), *ed è precisamente la*

$$o = K_{-2:3,k_1:k_2} = \overline{P_{\lambda'}^3}^2\lambda_1^2 - 2I_{2:-3}k_1k_2 + \overline{P_{\lambda''}^3}^2 k_2^2 \ (*) ,$$

se $\lambda'\ \lambda''$ sono i punti di appoggio della retta focale di x' sulla cubica e $o = k_1 p_{\lambda'}^3 + k_2 p_{\lambda''}^3$ è l'equazione di x' (**).

(*) L'iperboloide $0 = I_{2:-3} \equiv i_{1:-6}$ ha per corrispondente il già considerato $0 = I_{1:-3} \equiv i_{1:-3}$ nella seconda delle due serie proiettive accennate al § 30.

(**) È facile verificare che

$$K_{-2:3:k_1,k_2} = -\tfrac{1}{4}\left\{\frac{\partial^2\Sigma}{\partial P^2_{,,,}}\Pi^2_{,,,} + \ldots\right\}.$$

La superficie di 3° ordine $0=(\mathrm{T\Pi})^3$ passa evidentemente per la cubica gobba, pel punto x'' congiunto a x', e per le tre rette della sviluppabile giacenti nei tre piani di questa che passano per x'. Cotesti piani toccano in punti parabolici la superficie, secandola lungo tre coniche tangenti alle rette medesime sulla cubica. E ciascuna di queste tre coniche seca quella conica della sviluppabile che sta nel suo piano, nei due punti ove la stessa è toccata dalle tangenti condottele da x'; sicchè la superficie passa per tali coppie di punti. Essa passa anche per il punto armonico di x' su ciascuna delle tangenti suddette rispetto ai due punti in cui la tangente medesima già seca la superficie. Abbiamo così $(3\,.\,3+1)+1+2\,.\,3+2\,.\,3+2\,.\,3=29$ punti della superficie, mentre basterebbero 19 a individuarla.

La quadrica polare di x' è circoscritta agl'iperboloidi $0=\mathrm{Q}_{\lambda'}\mathrm{Q}_{\lambda''}\equiv\mathrm{I}_{1:-1}\equiv i_{1:-9}$ e $0=\mathrm{I}_{1:-3}\equiv i_{1:-3}$ lungo due coniche nei piani ξ' e ξ'' (§§ 30 e 31), e tocca la cubica nei tre punti che questa ha nel piano ξ'. Se un punto sta sulla quadrica polare di un altro, viceversa, questo starà sulla quadrica polare di quello. I tre piani della sviluppabile passanti per x' secano la quadrica polare di x' lungo coniche tangenti alla sviluppabile sulla cubica.

Siccome, se un punto sta sul piano polare di un altro, questo sta sulla superficie prima polare di quello; così apparisce che *la superficie* $0=(\mathrm{T\Pi})^3$ *è il luogo dei fuochi dei piani congiunti a quelli che passano per* x', *ossia il luogo dei punti congiunti a quelli del piano* ξ'. E il piano ξ'' è il luogo dei poli di quelle fra tali superficie che passano per x'.

36. Si ha la seguente relazione (*):

$$4\,\overline{(\mathrm{T\Pi})^{3}}^{2}=\Sigma\,.\,\left\{-2\,\overline{(\mathrm{P\Pi})^{3}}^{2}+3\,(\Pi\Pi')^{2}(\mathrm{Q}\Pi)(\mathrm{Q}\Pi')\right\}$$
$$-2\,(\mathrm{Q}\Pi)(\mathrm{Q}\Pi')(\mathrm{Q}'\Pi)(\mathrm{Q}'\Pi')(\mathrm{Q}''\Pi)(\mathrm{Q}''\Pi')\,;$$

la quale, osservando che

$$\mathrm{K}_{1:-3,\,k_1:k_2}=-2\,\overline{(\mathrm{P\Pi})^{3}}^{2}+3\,(\Pi\Pi')^{2}(\mathrm{Q}\Pi)(\mathrm{Q}\Pi')$$
$$=-2\left\{\overline{\mathrm{P}_{\lambda'}}^{3^2}k_1^{\,2}+\overline{\mathrm{P}_{\lambda''}}^{3^2}k_2^{\,2}-\mathrm{I}_{1:-3}k_1k_2\right\}$$

e ponendo

$$\mathrm{S}=(\mathrm{Q}\Pi)(\mathrm{Q}\Pi')(\mathrm{Q}'\Pi)(\mathrm{Q}'\Pi')(\mathrm{Q}''\Pi)(\mathrm{Q}''\Pi')\,,$$

(*) Per la dimostrazione rimando il lettore alla mia Nota « Estensione di alcuni teoremi sulle forme binarie » (*Atti* di questa Accademia, seduta 25 Maggio 1879).

si riduce a

$$2S = \underset{\smile}{\overline{\Sigma}} \,.\, K_{1:-3,\,k_1:k_2} + 4\overline{(T\Pi)^3}^2 \quad (*).$$

Incontriamo così una superficie di 6° ordine $o = S$.

La equazione prova che questa superficie tocca la sviluppabile e la quadrica $o = K_{1:-3,\,k_1:k_2}$ nei punti che hanno comuni con la $o = (T\Pi)^3$; sicchè passa per la cubica gobba, per le tre rette della sviluppabile giacenti nei tre piani di questa che s'incontrano in x', e per le tre coppie di punti d'intersezione delle coppie di coniche che la sviluppabile e la $o = (T\Pi)^3$ hanno nei detti piani.

Inoltre, siccome le successive polari di x' rispetto a $o = S$ hanno per equazioni (**)

$$o = \overline{\Sigma}\xi'' - 2TQ, \quad o = \Sigma\overline{\overline{\Sigma}} - K'Q, \quad o = 2T\overline{\Sigma} - K'\xi'' - 3Q\xi'',$$
$$o = \xi'^2\overline{\overline{\Sigma}} + 12\xi''^2, \quad o = \xi'',$$

così si vede che le rette che vanno da x' ai tre punti in cui ξ' seca la cubica hanno con la superficie un contatto quadripunto in quei punti (***), e che ξ'' è il piano polare di x' rispetto alla superficie.

Se anzi osserviamo che l'equazione $o = S = (Q\Pi)(Q\Pi') \ldots$ differisce dalla $o = I_{1:3}$ (§ 25) per lo scambio di v con Q e x con x', dedurremo che un punto x sta sulla $o = S$ quando x' sta su quell'iperboloide del sistema $o = I_{1:3}$ che passa pe' due punti in cui la retta focale di x si

---

(*) Scambiando x con x' abbiamo l'altra relazione

$$4\,(P\overline{Q})(P'\overline{Q})(P\overline{Q}')(P'\overline{Q}')(P\overline{Q}'')(P'\overline{Q}'')$$
$$= P_{\lambda'}{}^3 P'_{\lambda''}{}^3 + 3\,P_{\lambda'}{}^2 P_{\lambda''} P'_{\lambda''}{}^2 P'_{\lambda'}$$
$$= I_{1:3} = 2\,\overline{\overline{\Sigma}}\,.\,K_{1:-3,\,k_1:k_2} - 8\overline{(P\overline{T})^3}^2,$$

che concorda con una già data in nota al § 31.

(**) Per brevità, denotiamo con

$$T,\ K,\ K',\ \xi',\ \xi'',\ Q$$

le espressioni

$$(T\Pi)^3,\ K_{1:-3,\,k_1:k_2},\ K_{2:-3,\,k_1:k_2},\ (P\overline{\Pi})^3,\ (P\overline{T})^3,\ (\Pi\Pi')^2(Q\Pi)(Q\Pi');$$

ed osserviamo che, posto $\delta = \dfrac{\partial}{\partial P_{111}}\Pi_{111} + \ldots$, si ha

$$\delta\Sigma = 4T,\quad \delta T = K',\quad \delta K' = \delta K = 3\,.\,\delta Q = 6\xi'',\quad \delta\xi'' = \overline{\Sigma}\,.$$

(***) I quali annullano Σ, T, Q, K, K', ξ''.

appoggia alla cubica: in altre parole, *la equazione* $0=S$ *rappresenta la superficie rigata di* 6° *ordine e classe generata dalle corde della cubica che uniscono le coppie di punti in cui la cubica è osculata da quegl'infiniti iperboloidi del sistema* $0=I_{1:3}$ *che passano pel punto* x'.

Per ognuna delle dette coppie di punti λ' λ'' sulla cubica si ha

$$0=4\Pi_{\lambda'}^3\Pi_{\lambda''}'^3+3(\lambda'\lambda'')^2\bar{Q}_{\lambda'}\bar{Q}_{\lambda''}\,,$$

e ad ogni λ' corrispondono tre λ''; vale a dire che *la cubica è una curva tripla sulla superficie*. Di più, uno anzi due dei tre λ'' coincidono con λ' se $\Pi_{\lambda'}^3=0$, e allora il terzo λ'' annulla $\bar{Q}_{\lambda'}\bar{Q}_{\lambda''}$; dunque delle tre generatrici che partono da ciascuno dei tre punti in cui ξ' seca la cubica, due coincidono con la tangente della cubica in quel punto, e la terza va al punto *corrispondente* del piano ξ'' (*).

Accenniamo la relazione, più generale di quella dianzi notata (**):

$$\begin{aligned}&2(Q\Pi)(Q\pi)(Q'\Pi)(Q'\pi)(Q''\Pi)(Q''\pi)\\&=\Sigma\left\{-2(P\Pi)^3(P'\pi)^3+3(Q\tilde{\omega})^2\right\}-4(T\Pi)^3(T'\pi)^3\,,\end{aligned}$$

dove $0=\Pi_\lambda^3$ $0=\pi_\lambda^3$ determinano i parametri delle terne di piani della sviluppabile che passano per due dati punti x' X', e

$$\tilde{\omega}_\lambda^2=(\Pi\pi)^2\Pi_\lambda\pi_\lambda\,.$$

Quanto al significato geometrico della forma $\tilde{\omega}_\lambda^2$, accenniamo solo che la equazione $0=\tilde{\omega}_\lambda^2$ determina quei due elementi λ (punti o piani), le cui coppie polari rispetto alle terne determinate da $0=\Pi_\lambda^3$ $0=\pi_\lambda^3$ sono armoniche.

Quanto alla quadrica

$$0=-2(P\Pi)^3(P'\pi)^3+3(Q\tilde{\omega})^2,$$

essa fa parte del sistema, ∞^1, caratterizzato dalla equazione

$$0=(l+m)(P\Pi)^3(P'\pi)^3-m(Q\tilde{\omega})^2,$$

il quale contiene come caso particolare quello della equazione $0=K_{l:m,\,k_1:k_2}$

(*) Le tre rette che uniscono le tre coppie di punti corrispondenti in ξ' e ξ'', insieme con la cubica contata tre volte, formano l'intersezione della superficie $0=S$ con l'iperboloide circoscritto alla cubica e passante per le rette medesime.

Fra gl'iperboloidi $0=I_{1:3}$ in discorso figurano i 3 coni circoscritti alla cubica dai tre punti in ξ'.

(**) Cfr. la Nota citata.

(§ 30 e seg.). Ciascuna quadrica del sistema seca l'iperboloide $o = (Q\bar{\omega})^2$ circoscritto alla cubica, lungo le coniche che questo ha nei piani ξ' e Ξ'.

Quanto alla equazione

$$o = (Q\Pi)(Q\pi)(Q'\Pi)(Q'\pi)(Q''\Pi)(Q''\pi) = \ldots,$$

essa rappresenta *una superficie di* 6° *ordine e classe, luogo delle corde della cubica che uniscono le coppie di punti in cui questa è osculata da quegl'iperboloidi del sistema* $o = I_{1:3}$ *rispetto ai quali* x' *e* X' *sono due punti coniugati.*

Ci dispensiamo dal parlare delle superficie polari di un piano rispetto alla cubica gobba, applicandosi ad esse, con le debite modificazioni, le cose dette per le superficie polari di un punto rispetto alla sviluppabile.

Di alcuni complessi.

37. Se x x' sono due punti, e $z_{12} = x_1 x'_2 - x_2 x'_1$ ecc. le coordinate-raggi della loro retta, sappiamo che l'equazione (§ 12)

$$o = (P\Pi)^3 = (AB)^3 z_{12} + \ldots + (CD)^3 z_{34} = O$$

rappresenta il piano ξ' focale di x', se x' è fisso e x variabile; e rappresenta il complesso lineare delle rette reciproche di sè stesse (uscenti da ciascun punto e giacenti nel rispettivo piano focale), se x e x' variano entrambi.

Inoltre, il piano $o = P_\lambda^2 P_\mu$ per la retta λ e il punto μ passa per x' se $o = \Pi_\lambda^2 \Pi_\mu$, e allora la sua equazione diviene

$$\begin{aligned} o &= (P\Pi) P_\lambda^2 \Pi_\lambda^2 \\ &= (AB) A_\lambda^2 B_\lambda^2 z_{12} + \ldots \\ &= E_\lambda^4 : \end{aligned}$$

essa rappresenta il piano per la retta λ e x', se λ e x' son fissi e x variabile; e rappresenta il complesso (speciale) delle rette secanti la λ, se λ è fisso e x x' variano. Se poi λ varia e la xx' è fissa, l'equazione $o = E_\lambda^4$ dà i parametri dei quattro punti o piani λ le cui relative rette λ incontrano la retta xx'.

Ora si ha

$$2\,E_\lambda^3 E_\mu \;=(P\Pi)P_\lambda\Pi_\lambda(P_\lambda\Pi_\mu+P_\mu\Pi_\lambda)=(AB)\,A_\lambda B_\lambda(A_\lambda B_\mu+A_\mu B_\lambda)z_{12}+\ldots,$$

$$6\,E_\lambda^2E_\mu E_\nu=(P\Pi)\,\{(P_\lambda\Pi_\mu+P_\mu\Pi_\lambda)(P_\lambda\Pi_\nu+P_\nu\Pi_\lambda)+P_\lambda\Pi_\lambda(P_\mu\Pi_\nu+P_\nu\Pi_\mu)\},$$

$$6\,E_\lambda^2E_\mu^2 \;=(P\Pi)\,\{(P_\lambda\Pi_\mu+P_\mu\Pi_\lambda)^2+2\,P_\lambda P_\mu\Pi_\lambda\Pi_\mu\}$$
$$=(P\Pi)^3(\lambda\mu)^2+6\,(P\Pi)\,P_\lambda P_\mu\Pi_\lambda\Pi_\mu\,.$$

La

$$o=(P\Pi)P_\lambda P_\mu\Pi_\lambda\Pi_\mu=(AB)\,A_\lambda A_\mu B_\lambda B_\mu z_{12}+\ldots$$
$$=E_\lambda^2E_\mu^2-\tfrac{1}{6}(\lambda\mu)^2\,O$$

è l'equazione del piano pe' tre punti λ μ x' quando questi son fissi e x variabile; o del complesso (speciale) di rette appoggiate alla corda $\lambda\mu$, quando questa è fissa e x x' variano.

La

$$o=E_\lambda^3E_\mu=\ldots$$

rappresenta il complesso (speciale) di rette appoggiate alla retta comune al piano λ e al piano pel punto λ e la retta μ, se λ e μ sono fissi (cfr. § 19); ecc.

Ciò posto, formiamo gl'invarianti e covarianti fondamentali della biquadratica E_λ^4:

L'invariante quadratico è

$$(EE')^4=\;\tfrac{1}{6}(P\Pi)(EP)^2(E\Pi)^2$$
$$=(^*)\,\tfrac{1}{6}(P\Pi)^3(P'\Pi')^3+(P\Pi)(P'\Pi')(PP')(\Pi\Pi')(P\Pi')(P'\Pi)$$
$$=\;\tfrac{1}{6}O^2:$$

e, stante il suo significato (**), vediamo che *quelle rette che secano quattro rette λ relative a una quaderna di punti o piani λ equianarmonici, sono le reciproche di sè stesse;* cioè formano il complesso lineare $o=O$ preso due volte (***).

Il covariante biquadratico o Hessiano è

$$F_\lambda^4=\quad(EE')^2E_\lambda^2E'^2_\lambda=\tfrac{1}{6}(P\Pi)^3E_\lambda^4+(P\Pi)P_\lambda\Pi_\lambda E_\lambda^2(EP)(E\Pi)$$
$$=\quad\tfrac{1}{6}(P\Pi)^3E_\lambda^4+\tfrac{1}{2}(P\Pi)\,E_\lambda^2\,\{(EP)^2\Pi_\lambda^2+(E\Pi)^2P_\lambda^2-(P\Pi)^2E_\lambda^2\}$$
$$=-\tfrac{1}{3}\,OE_\lambda^4+\tfrac{1}{2}(P\Pi)\,E_\lambda^2\,\{(EP)^2\Pi_\lambda^2+(E\Pi)^2P_\lambda^2\}:$$

(*) Ponendo nell'espressione di $E_\lambda^2E_\mu^2$ P_2 e $-P_1$ per $\lambda_1\,\lambda_2$, Π_2 e $-\Pi_1$ per $\mu_1\,\mu_2$.

(**) L'invariante quadratico e il cubico sono rispettivamente nulli quando i quattro elementi rappresentati dalla biquadratica sono rispettivamente equianarmonici o armonici.

(***) Si raffronti questo teorema con quello dimostrato in fine del § 12, di cui è un complemento.

esso, eguagliato a zero, quando la xx' è fissa, dà i parametri dei quattro punti o piani λ che sono doppî su terne prime polari di punti o piani λ rispetto ai quattro di $o = E_\lambda^4$, od anche che formano un sistema equianarmonico con ciascuna terna prima polare. Quando poi λ è fisso e $x\ x'$ variano, la equazione $o = F_\lambda^4$ rappresenta un complesso di 2° grado, formato da quelle rette che secano quattro rette λ tali, che quella relativa al dato λ figuri tra gli elementi del loro Hessiano.

L'invariante cubico è

$$\begin{aligned}(EE')^2(EE'')^2(E'E'')^2 &= (EF)^4 \\ &= -\tfrac{1}{3}O(EE')^4 + \tfrac{1}{2}(P\Pi)(EE')^2 \{(EP)^2(E'\Pi)^2 + (E\Pi)^2(E'P)^2\} \\ &= -\tfrac{1}{18}O^3 + G,\end{aligned}$$

posto

$$G = (P\Pi)(EE')^2(EP)^2(E'\Pi)^2:$$

onde l'*equazione*

$$o = O^3 - 18G$$

rappresenta un complesso di 3° *grado, formato da quelle rette (a due a due reciproche) che secano quattro rette* λ *armoniche* (cioè relative a punti o piani λ armonici). È chiaro che a questo complesso, e quindi anche all'altro $o = G$, appartengono tutte le rette λ.

Il covariante sestico è

$$\begin{aligned}(EF)E_\lambda^3F_\lambda^3 &= \tfrac{1}{6}O(EE')E_\lambda^3E'^3_\lambda \\ &\quad + \tfrac{1}{4}(P\Pi)(E'P)(E'\Pi)E_\lambda^3E'_\lambda\{2(EE')P_\lambda\Pi_\lambda + E'_\lambda[(EP)\Pi_\lambda + (E\Pi)P_\lambda]\} \\ &= \tfrac{1}{4}(P\Pi)E_\lambda^3E'_\lambda(EE')\{(E'P)^2\Pi_\lambda^2 + (E'\Pi)^2P_\lambda^2 - (P\Pi)^2E'^2_\lambda\} \\ &\quad + \tfrac{1}{4}(P\Pi)(E'P)(E'\Pi)E_\lambda^3E'^2_\lambda\{(EP)\Pi_\lambda + (E\Pi)P_\lambda\} \\ &= -\tfrac{1}{4}(P\Pi)E_\lambda E'_\lambda\{(EE')^2(EP)E'_\lambda P_\lambda\Pi_\lambda^2 + (EE')(E\Pi)E'_\lambda P_\lambda^2\Pi_\lambda\} \\ &\quad + \tfrac{1}{4}(P\Pi)(E'P)(E'\Pi)E_\lambda^3E'^2_\lambda\{(EP)\Pi_\lambda + (E\Pi)P_\lambda\} \\ &= -\tfrac{1}{4}(P\Pi)E_\lambda E'^2_\lambda\{(EE')^2P_\lambda\Pi_\lambda - E_\lambda^2(E'P)(E'\Pi)\}\{(EP)\Pi_\lambda + (E\Pi)P_\lambda\} \\ &= \tfrac{1}{4}\{(EE')^2P_\lambda\Pi_\lambda - E_\lambda^2(E'P)(E'\Pi)\}\{(EP)^2\Pi_\lambda^2 - (E\Pi)^2P_\lambda^2\}E'^2_\lambda,\end{aligned}$$

ed è facile vederne il significato geometrico.

38. Il discriminante di E_λ^4 è

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{27}\{\overline{(EE')^4}^3 - 6\overline{(EF)^4}^2\} &= \tfrac{1}{2^3.3^6}\{O^6 - (2O^2 - 36G)^2\} \\ &= -\tfrac{1}{2^3.3^5}(O^3 - 36G)(O^3 - 12G):\end{aligned}$$

esso sarà annullato da tutte quelle rette che secano quattro rette λ di cui due almeno coincidano, ossia: da quelle che si appoggiano alla cubica in un punto almeno, e da quelle che giacciono in un piano almeno della sviluppabile; sicchè *i complessi speciali di* 3° *grado*

$$0 = O^3 - 36G \qquad 0 = O^3 - 12G$$

sono rispettivamente formati dalle rette pei punti della cubica e dalle rette nei piani della sviluppabile.

Quindi, se x' è fisso,

$$0 = O^3 - 36G$$

è l'equazione del cono di 3° *ordine che proietta la cubica dal punto* x (cfr. § 13); e

$$0 = O^3 - 12G$$

è l'equazione della terna di piani della sviluppabile che passano pel punto x'.

In particolare: se x' è un punto ρ della cubica, si ha

$$\Pi_\lambda^3 = \Delta(\rho\lambda)^3 \qquad O = (P\Pi)^3 = \Delta P_\rho^3 \qquad E_\lambda^4 = (\rho\lambda)^2 P_\lambda^2 P_\rho;$$

e siccome l'invariante cubico è allora(*) $-\frac{1}{36}(\Delta P_\rho^3)^3$, così sarà

$$G = \frac{1}{36}(\Delta P_\rho^3)^3 \qquad O^3 - 36G = 0 \qquad O^3 - 12G = \frac{2}{3}(\Delta P_\rho^3)^3;$$

il che prova che in generale $0 = O^3 - 12G$ è la terna de' piani della sviluppabile per x' e $0 = O^3 - 36G$ il cono da x', e non viceversa.

Più generalmente: una retta seca quattro rette λ relative a punti o piani λ di dato rapporto anarmonico ε, se

$$\frac{\overline{(EE')^4}^3}{\overline{(EF)^4}^2} = 24\,\frac{(1-\varepsilon+\varepsilon^2)^3}{(1+\varepsilon)^2(2-\varepsilon)^2(1-2\varepsilon)^2} = \frac{3}{2}\varepsilon'^2,$$

onde

$$0 = O^6 - \varepsilon'^2(O^3 - 18G)^2 = \{(1+\varepsilon')O^3 - 18\varepsilon' G\}\{(1-\varepsilon')O^3 + 18\varepsilon' G\},$$

sicchè le rette in questione formano due complessi di 3° grado.

L'equazione del cono circoscritto da x' alla cubica può trovarsi altrimenti come segue:

Il piano per la corda $\lambda\mu$ e x', e il piano per la focale di x' e il punto λ, cioè

$$0 = (P\Pi)P_\lambda P_\mu \Pi_\lambda \Pi_\mu \qquad 0 = (P\bar{Q})^2 P_\lambda,$$

(*) Se $\alpha_\lambda^2\beta_\lambda^2$ è una biquadratica in cui α_λ sia una forma lineare, l'invariante quadratico è $\frac{1}{6}\overline{(\alpha\beta)^2}^2$, il cubico $\frac{1}{36}\overline{(\alpha\beta)^2}^3$, l'Hessiano $-\frac{1}{6}(\alpha\beta)^2\alpha_\lambda^2\beta'^2_\lambda + \frac{1}{4}(\beta\beta')^2\alpha_\lambda^4$, e il covariante sestico $\frac{1}{8}(\alpha\beta)^2\alpha_\lambda^5\beta'_\lambda(\beta'\alpha)$.

si secano lungo la retta $x'\lambda$; ed eliminando λ dalle loro equazioni si avrà quella del cono:

$$o = (P\Pi)(PP')(\Pi P'')(P'\overline{Q})^2(P''\overline{Q}')^2 P_\mu \Pi_\mu$$
$$= E_\mu^2 (EP)(EP')(P\overline{Q})^2(P'\overline{Q}')^2 - \tfrac{1}{6} P_\mu P'_\mu (P\overline{Q})^2 (P'\overline{Q}')^2 (P''\Pi)^3;$$

qui μ è un punto dato della cubica ma arbitrario, con la sola condizione che non sia $\overline{Q}_\mu^2 = o$.

Se x' è un punto ρ della cubica, si ha

$$\Pi_\lambda^3 \equiv (\rho\lambda)^3 \quad \Pi_\rho (P\Pi)(\Pi P'') \equiv (\rho\mu) P_\rho P''_\rho \quad \overline{Q}_\lambda^2 = (\rho\lambda)^2,$$

e l'equazione del cono riducesi a

$$o = (\rho\mu)(PP')P_\rho P_\mu P'^2_\rho . P''^3_\rho = \tfrac{1}{2}(\rho\mu)^2 . Q_\rho^2 . P_\rho^3,$$

conforme al § 13.

39. Abbiamo più volte incontrato l'iperboloide $o = I_{1:3} \equiv i_{1:3}$, sul quale (§ 25) le generatrici di un sistema sono reciproche di sè stesse (ossia appartengono al complesso $o = O \equiv o$), e quelle dell'altro sistema sono a due a due reciproche, ed accoppiate in una involuzione, le cui rette doppie sono due rette λ' λ''. Di qui segue, come dimostreremo or ora, che le coordinate-raggi di una generatrice di questo secondo sistema e della sua reciproca sono della forma:

$$z_{12} = k_1^2 . (ab) a_{\lambda'}^2 b_{\lambda'}^2 + k_2^2 . (ab) a_{\lambda''}^2 b_{\lambda''}^2 \pm k_1 k_2 . \frac{(\lambda'\lambda'')^2}{\sqrt{3}} (ab)^3, \text{ ecc.};$$

sulle quali eseguendo la somma

$$\Sigma (ab) a_\lambda^2 b_\lambda^2 z_{34} = \frac{3}{\Delta} \Sigma (AB) A_\lambda^2 B_\lambda^2 z_{12} = \frac{3}{\Delta} E_\lambda^4,$$

si ottiene la relazione

$$\frac{3}{\Delta^2} E_\lambda^4 = k_1^2 (\lambda\lambda')^4 + k_2^2 (\lambda\lambda'')^4 .$$

L'invariante cubico di E_λ^4 è dunque nullo (*), e per conseguenza *le ∞^3 generatrici non reciproche di sè stesse negli ∞^2 iperboloidi*

(*) Poichè se α_λ^4 e β_λ^4 sono due forme biquadratiche, l'invariante cubico della $\alpha_\lambda^4 + k\beta_\lambda^4$ è

$$(\alpha\alpha')^2(\alpha\alpha'')^2(\alpha'\alpha'')^2 + 3k(\alpha\alpha')^2(\alpha\beta)^2(\alpha'\beta)^2 + 3k^2(\beta\beta')^2(\alpha\beta)^2(\alpha\beta')^2 + k^3(\beta\beta')^2(\beta\beta'')^2(\beta'\beta'')^2,$$

ed è nullo se α_λ e β_λ sono due forme lineari effettive.

Od anche: perchè la E_λ^4 si può trasformare linearmente in $\lambda_1^4 + \lambda_2^4$, il cui invariante cubico è nullo.

$0 = I_{1:3}$, *secano quattro rette* λ *relative a punti o piani* λ *armonici; vale a dire non sono altre che le rette del complesso di* 3° *grado* $0 = O^3 - 18G$ (*).

Per dimostrare intanto ciò che poc'anzi abbiamo presunto, osserviamo che, dati tre complessi

$$0 = \Sigma \alpha_i z_j = \alpha_{12} z_{34} + \alpha_{34} z_{12} + \alpha_{13} z_{42} + \alpha_{42} z_{13} + \alpha_{14} z_{23} + \alpha_{23} z_{14}$$
$$0 = \Sigma \beta_i z_j = \ldots$$
$$0 = \Sigma \gamma_i z_i = \ldots,$$

le rette comuni ad essi e quindi agli ∞^2 complessi

$$0 = \Sigma (k\alpha_i + l\beta_i + m\gamma_i) z_j \quad (k:l:m \text{ arbitrarî})$$

costituiscono un iperboloide, sul quale sono generatrici di uno stesso sistema, mentre le generatrici dell'altro sistema hanno per coordinate-raggi

$$k\alpha_{12} + l\beta_{12} + m\gamma_{12} \qquad \text{ecc.},$$

con la condizione

$$0 = \Sigma (k\alpha_i + l\beta_i + m\gamma_i)(k\alpha_j + l\beta_j + m\gamma_j)$$

ovvero

$$0 = k^2 \Sigma \alpha_i \alpha_j + \ldots + 2kl \Sigma \alpha_i \beta_j + \ldots$$

Se i primi due complessi sono speciali, cioè composti di rette appoggiate alle due rette di coordinate-raggi

$$\alpha_{12} \quad \text{ecc.} \qquad \text{e} \qquad \beta_{12} \quad \text{ecc.}$$

con le condizioni

$$0 = \Sigma \alpha_i \alpha_j \qquad \text{e} \qquad 0 = \Sigma \beta_i \beta_j ;$$

e se inoltre queste due rette (direttrici) appartengono al terzo complesso, sicchè

$$0 = \Sigma \alpha_i \gamma_i \qquad 0 = \Sigma \beta_i \gamma_j ;$$

allora si ha

$$0 = \Sigma \gamma_i \gamma_j . m^2 + 2 \Sigma \alpha_i \beta_j . kl \ ,$$

e le coordinate-raggi di una generatrice del 2° sistema nel detto iperboloide divengono

$$k^2 \alpha_{12} - m^2 \frac{\Sigma \gamma_i \gamma_j}{2 \Sigma \alpha_i \beta_j} \beta_{12} + km \gamma_{12} \quad \text{ecc.}$$

ovvero

$$k_1^2 \alpha_{12} + k_2^2 \beta_{12} + k_1 k_2 \sqrt{- \frac{2 \Sigma \alpha_i \beta_j}{\Sigma \gamma_i \gamma_j}} \gamma_{12} \quad \text{ecc.}$$

(*) Voss, Math. Ann., t. XIII, p. 241, diede questo teorema, che noi qui dimostriamo con procedimento diverso dal suo.

Ora nel caso da noi considerato è supposto (§ 6)

$$\alpha_{12}=(a\,b)\,a_{\lambda'}^2 b_{\lambda'}^2 \quad \text{ecc.}\,, \qquad \beta_{12}=(a\,b)\,a_{\lambda''}^2 b_{\lambda''}^2 \quad \text{ecc.}\,,$$

e (§ 12)

$$\gamma_{12}=(a\,b)^3 \quad \text{ecc.};$$

onde

$$\Sigma\gamma_i\gamma_j=2\,\{(a\,b)^3(cd)^3+\ldots\}=-6\,\Delta \quad (\S\ 4),$$

e si ha pure

$$\begin{aligned}
\Sigma\alpha_i\beta_j &= (a\,b)(c\,d)\,(a_{\lambda'}^2 b_{\lambda'}^2 c_{\lambda''}^2 d_{\lambda''}^2+a_{\lambda''}^2 b_{\lambda''}^2 c_{\lambda'}^2 d_{\lambda'}^2)\\
&+(a\,c)(db)(a_{\lambda'}^2 c_{\lambda'}^2 d_{\lambda''}^2 b_{\lambda''}^2+a_{\lambda''}^2 c_{\lambda''}^2 d_{\lambda'}^2 b_{\lambda'}^2)\\
&+(ad)(bc)(a_{\lambda'}^2 d_{\lambda'}^2 b_{\lambda''}^2 c_{\lambda''}^2+a_{\lambda''}^2 d_{\lambda''}^2 b_{\lambda'}^2 c_{\lambda'}^2)\\
&=(a\,c)(b\,d)\,(a_{\lambda'}^2 d_{\lambda''}^2-a_{\lambda''}^2 d_{\lambda'}^2)\,(b_{\lambda'}^2 c_{\lambda''}^2-b_{\lambda''}^2 c_{\lambda'}^2)\\
&+(ac)(b\,d)\,(a_{\lambda'}^2 c_{\lambda''}^2-a_{\lambda''}^2 c_{\lambda'}^2)\,(d_{\lambda'}^2 b_{\lambda''}^2-d_{\lambda''}^2 b_{\lambda'}^2)\\
&=(a\,c)(b\,d)(ad)(bc)(a_{\lambda'}d_{\lambda''}+a_{\lambda''}d_{\lambda'})(b_{\lambda'}c_{\lambda''}+b_{\lambda''}c_{\lambda'})(\lambda'\lambda'')^2\\
&-(a\,d)(b\,c)(a\,c)(b\,d)\,(a_{\lambda'}c_{\lambda''}+a_{\lambda''}c_{\lambda'})(b_{\lambda'}d_{\lambda''}+b_{\lambda''}d_{\lambda'})(\lambda'\lambda'')^2\\
&=(ac)(b\,d)\,(ad)\,(b\,c)\begin{vmatrix} a_{\lambda'}d_{\lambda''}+a_{\lambda''}d_{\lambda'} & b_{\lambda'}c_{\lambda''}+b_{\lambda''}c_{\lambda'}\\ a_{\lambda'}c_{\lambda''}+a_{\lambda''}c_{\lambda'} & b_{\lambda'}d_{\lambda''}+b_{\lambda''}d_{\lambda'}\end{vmatrix}(\lambda'\lambda'')^2\\
&=(a\,c)\,(bd)\,(a\,d)\,(b\,c)\begin{vmatrix} a_{\lambda'} & a_{\lambda''}\\ b_{\lambda'} & b_{\lambda''}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} d_{\lambda''} & d_{\lambda'}\\ c_{\lambda''} & c_{\lambda'}\end{vmatrix}(\lambda'\lambda'')^2\\
&=(a\,b)\,(a\,c)\,(a\,d)\,(b\,c)\,(b\,d)\,(c\,d)\,(\lambda'\lambda'')^4\\
&=\Delta\,(\lambda'\lambda'')^4\,.
\end{aligned}$$

Del resto, due rette λ' λ'' non potendo incontrarsi senza coincidere, non può la somma $\Sigma\alpha_i\beta_j$ annullarsi se non quando $(\lambda'\lambda'')=0$, onde essa non poteva differire da $(\lambda'\lambda'')^4$ che per un fattore lineare nelle $a_1^3\ldots$, che abbiam trovato essere Δ.

Più generalmente, si ha

$$(a\,b)a_\lambda a_\mu b_\lambda b_\mu\,.\,(cd)c_{\lambda'}c_{\mu'}d_{\lambda'}d_{\mu'}+\ldots=\Delta\,(\lambda\lambda')\,(\lambda\mu')\,(\mu\lambda')\,(\mu\mu')\,.$$

40. I varî complessi

$$0=O^3\,,\quad 0=G\,,\quad 0=O^3-18G\,,\quad 0=O^3-36G\,,\quad 0=O^3-12G$$

appartengono tutti al sistema di complessi rappresentati dalla equazione

$$0=O^3-6kG$$

al variare di k. Per vedere le loro mutue relazioni, basta considerare i coni di 3° ordine rappresentati dalle stesse loro equazioni quando x' si suppone fisso; i quali coni fanno fascio, ed hanno per piani d'inflessione i tre della sviluppabile per x', e per generatrici d'inflessione le rette da x' ai tre punti della cubica nel piano ξ' focale di x'. Per $k=0, 2, 3, 6$ si hanno rispettivamente: il piano ξ' preso tre volte, la terna dei piani della sviluppabile per x', il cono delle rette per x' che secano quattro rette λ armoniche, e il cono proiettante la cubica da x', il quale ha per generatrice doppia la focale di x'. Per $k=\infty$ si ha il cono $0=G$, che ora determineremo meglio.

Le identità

$$-2O^3=(O^3-36G)-3(O^3-12G)$$
$$4(O^3-18G)=(O^3-36G)+3(O^3-12G)$$

provano che nel fascio il cono $0=O^3-18G$ è armonico al piano triplo $0=O^3$ rispetto al cono proiettante la cubica e alla terna dei piani per x''. E le identità

$$-36G=(O^3-36G)-O^3$$
$$2(O^3-18G)=(O^3-36G)+O^3$$

provano che il cono $0=G$ è armonico al precedente rispetto al cono proiettante e al piano triplo; sicchè il piano per la focale di x' e per una generatrice d'inflessione seca ciascun cono del fascio in una coppia di rette armoniche rispetto alla focale e alla generatrice suddetta (oltre che in questa generatrice), e pel cono $0=G$ la coppia di rette è armonica anche con quella esistente sul cono $0=O^3-18G$.

L'equazione del piano polare di un punto ρ della cubica, e quindi della retta $x'\rho$, rispetto al cono

$$0=G=(EE')^2(EE'')^2(E'E'')^2+\tfrac{1}{18}\overline{(P\Pi)^3}^2.O\ ,$$

si trova ponendo ρ al posto di x ne' simboli E' E'' P: ma allora

$$(P\Pi)^3=-\Delta\Pi_\rho^3 \qquad E'^4_\lambda=E''^4_\lambda=-\Delta(\lambda\rho)^2\Pi_\rho\Pi_\lambda^2$$
$$(E'E'')^2E'^2_\lambda E''^2_\lambda=F_\lambda^4=-\tfrac{1}{12}\Delta^2(\lambda\rho)^2\{2\Pi_\rho^3\Pi'^2_\lambda\Pi'_\rho-3\overline{Q}_\rho^2(\lambda\rho)^2\}\ ;$$

quindi l'equazione sarà

$$0=6\Pi_\rho^3.(E\Pi')^2E_\rho^2\Pi'_\rho-9\overline{Q}_\rho^2E_\rho^4-2\overline{\Pi_\rho^3}^2.O$$
$$=\Pi_\rho^3\{\Pi'^3_\rho.O+6(P\Pi'')(P\Pi')(\Pi''\Pi')P_\rho\Pi''_\rho\Pi'_\rho\}-9\overline{Q}_\rho^2E_\rho^4-2\overline{\Pi_\rho^3}^2.O,$$

ovvero

$$0=\overline{\Pi_\rho^3}^2.O+9\overline{Q}_\rho^2.E_\rho^4\ ,$$

e l'equazione del piano polare della $x'\rho$ rispetto al cono $o = O^3 - 6kG$ sarà

$$o = (6-k)\overline{\Pi_\rho^3}^2 . O + 9k\overline{Q}_\rho^2 . E_\rho^4 .$$

Se la $x'\rho$ è la focale di x', si ha $\overline{Q}_\rho^2 = o$, e l'equazione diviene

$$o = (6-k)\overline{\Pi_\rho^3}^2 . O$$

e il piano polare è quindi ξ' (*).

In particolare: *la focale di x' ha per piano polare il piano ξ' focale di x', rispetto alla terna dei piani della sviluppabile che passano per x'* (**).

Anche qui ci dispensiamo dallo sviluppare le cose che fanno riscontro per dualità alle precedenti. Per es., all'ultimo teorema corrisponde seguente:

La direttrice di un piano ha per polo il fuoco del piano rispetto al triangolo dei punti in cui il piano seca la cubica (***).

41. Ecco una nuova dimostrazione di questo teorema:

Se $\lambda\ \mu\ \nu$ sono i punti della cubica in ξ', e $\lambda'\ \mu'\ \nu'$ i punti corrispondenti nel piano congiunto ξ'', le corde $\lambda\lambda'\ \mu\mu'\ \nu\nu'$ saranno generatrici di un iperboloide circoscritto alla cubica (§ 19), e il piano tangente a

---

(*) Per $k=6$ il piano polare è indeterminato, e ciò perchè la focale di x' è doppia sul cono proiettante la cubica da x'.

(**) Risulta da ciò che, *se una cubica piana ha un punto doppio, questo ha per retta polare la retta dei tre flessi, rispetto alla terna delle tangenti nei flessi:* teorema ben noto, e dal quale il Cremona deduce quello del testo con un procedimento inverso del nostro.

(***) Si ha

$$o = (p\pi)^3 = -\frac{3}{\Delta r}(P\Pi)^3 = -\frac{3}{\Delta r} O$$

(se $\xi\ \xi'$ sono due piani, e $\zeta_{12} = \xi_1\xi'_2 - \xi_2\xi'_1$ ecc., e $0 = p_\lambda^3 = a_\lambda^3\xi_1 + \dots$ $0 = \pi_\lambda^3 = a_\lambda^3\xi'_1 + \dots$, e $z_{12} : \xi_{34} = \dots = r$),

$$e_\lambda^4 = (p\pi)p_\lambda^2\pi_\lambda^2 = \frac{3}{\Delta r}(P\Pi)P_\lambda^2\Pi_\lambda^2 = \frac{3}{\Delta r} E_\lambda^4 \text{ ecc.},$$

$$g = (p\pi)(ee')^2(ep)^2(e'\pi)^2 = -\frac{27}{\Delta^3 r^3}(P\Pi)(EE')^2(EP)^2(E'\Pi)^2 = -\frac{27}{\Delta^3 r^3} G ,$$

$$o^3 - 6kg = -\frac{27}{\Delta^3 r^3}(o^3 - 6kG) .$$

Quindi $0 = o^3 - 36g$ rappresenta anche la curva di 4° ordine e 3ª classe con tre cuspidi e una tangente doppia, secondo cui la sviluppabile è secata dal piano ξ'.

questo in λ passerà per la retta λ e per la $\lambda\lambda'$. E siccome il punto λ' è armonico con λ rispetto a μ e ν, così il piano tangente e il piano λ saranno armonici rispetto ai piani per la retta λ e rispettivamente pei punti μ ν; onde, secando col piano ξ', troviamo che la tangente in λ alla conica sezione dell'iperboloide è armonica alla retta $\lambda x'$ rispetto alle $\lambda\mu$ $\lambda\nu$; e così via. Dunque questa conica è la 1ª polare di x' rispetto al triangolo $\lambda\mu\nu$; e poichè la retta polare di x' rispetto ad essa è la direttrice di ξ' (§ 22), ne segue che la direttrice stessa è anche la polare di x' rispetto al triangolo $\lambda\mu\nu$.

Aggiungasi che i piani λ' λ μ ν, essendo armonici, secano la direttrice suddetta in quattro punti armonici, vale a dire che la direttrice seca il piano λ' nello stesso punto che la corda $\lambda\mu$; e così via. Dunque *il triangolo $\lambda\mu\nu$, e il triangolo sezione del piano ξ' con la terna dei piani λ' μ' ν' condotti pel fuoco x'' del piano ξ'', sono omologici; la direttrice di ξ' è l'asse di omologia, e x'* (come risulta dal teorema seguente) *ne è il centro.*

Per dualità, *il triedro $\lambda'\mu'\nu'$ e il triedro dagli spigoli $x''\lambda$ $x''\mu$ $x''\nu$ sono omologici, $x'x''$ essendo la retta centrale di omologia, e ξ'' il piano di omologia* (come risulta dal teorema precedente).

Inoltre, siccome ξ' seca l'iperboloide iscritto nella sviluppabile e passante per le direttrici $\lambda\lambda'$ $\mu\mu'$ $\nu\nu'$, lungo quella che dicemmo conica ξ' (§ 28), rispetto a cui x' è polo della direttrice di ξ' (§ 22); così *le rette, che dai vertici del triangolo sezione del piano ξ' colla terna dei piani λ' μ' ν' vanno ai punti di contatto dei lati opposti con la conica ξ', concorrono nel punto x'.*

Per dualità, *le rette intersezioni dei piani $x''\lambda\mu$ $x''\mu\nu$ $x''\nu\lambda$ coi piani tangenti lungo le $x''\nu$ $x''\lambda$ $x''\mu$ al cono x''* (circoscritto da x'' all'iperboloide per le $\lambda\lambda'$ $\mu\mu'$ $\nu\nu'$ § 26) *giacciono nel piano ξ''.*

NUOVE RICERCHE

SULL'ORIGINE REALE

DEI NERVI CEREBRALI

(GLOSSOFARINGEO, ACUSTICO, FACCIALE, ABDUCENTE
E TRIGEMINO)

PEL DOTTORE

LAURA GIOVANNI BATTISTA

Letta nell'adunanza del 17 Novembre 1878

Nella memoria « Sull'origine dei Nervi spinali e di qualche nervo cerebrale » che io ho avuto l'onore di presentare a questa illustre Accademia nel giugno del 1877, ho cercato di dimostrare quanta sia l'importanza del criterio introdotto dal Deiters nelle ricerche sulla fina struttura dei centri nervosi. In questa mia seconda memoria, che ha nuovamente per argomento l'origine reale di altri nervi cerebrali (glossofaringeo, acustico, facciale, abducente e trigemino), io apporterò nuovi fatti, che sempre più faranno risaltare il valore di quel criterio, e in qualche punto abbatteranno opinioni, che tutt'ora han corso nella scienza come verità incontestabili. Come già nella prima memoria, ho limitato le mie ricerche al midollo allungato del vitello; nè mi propongo, per ora, di esaurire questo argomento, ma solo di pubblicare alcuni fatti, che mi venne dato di accertare circa l'origine dei nervi suddetti; ed ho ragione di credere che le osservazioni positive, che presento, siano le sole, che si conoscano nella scienza: imperocchè nessuno vorrà sostenere, che i dati che noi sinora abbiamo su questo argomento, non confortati da alcuna prova, non appoggiati su alcuna figura, debbansi accettare come fatti positivi.

Certo, i fatti che io ho avuto la fortuna di raccogliere, non sono gran cosa a fronte del moltissimo che rimane ancora a fare in questo campo così vasto, che malgrado il grandissimo valore di tanti osservatori che lo esplorarono, ci presenta pur sempre tante incognite da ricercare (e pur troppo il da farsi supera di molto il già fatto); ma ho raccolto relativamente poco, perchè mi son limitato a pubblicare solo quelle osservazioni che ho ragione di credere positive, sicure e fuori d'ogni contestazione, perchè appoggiate a preparazioni della più chiara evidenza. Al contrario ho lasciato da parte ogni fatto men che certo, ho evitato ogni ipotesi, perchè, a parer mio, se esse possono essere utili in altri rami dello scibile, nell'Anatomia, e specialmente in quella del sistema nervoso, non fanno generalmente che ingombrare la via a chi ci segue. In nessun altra scienza, quanto in questa, credo si debba adottare con tanto vantaggio la regola di condotta, che Kant stabilì a se stesso nella Prefazione alla sua Critica della ragione pura: « in simili ricerche io mi sono condannato a non opinare in modo alcuno e a considerare tutto ciò che rassomigliasse solamente ad una ipotesi, come una mercanzia proibita ».

Le figure che accompagnano questa mia memoria furono tutte, come quelle della precedente, eseguite da mia Moglie: e per la loro esecuzione e disposizione ho tenuto lo stesso sistema già seguíto nella mia prima memoria. Dirò in ultimo, che tutte indistintamente le mie figure sono tolte da sezioni del midollo allungato, colorate colla solita soluzione ammoniacale di carmino, trattate successivamente col metodo del Clarke e chiuse in gomma Damar.

I.

Nella tavola I ci si presenta in *r g l f* la radice del glossofaringeo, la quale decorre attraverso al midollo allungato nella identica direzione del pneumogastrico, obliquamente all'indietro ed all'interno, ed arriva al suo nucleo, *nglf*, collocato sul prolungamento del nucleo del pneumogastrico: senonchè quivi (siamo a livello delle ultime radici del glossofaringeo) il nucleo grandemente ridotto nelle sue dimensioni, non è più contiguo al pavimento del 4° ventricolo, ma ne è separato da un altro ammasso di sostanza grigia, che vedremo essere il nucleo dell'acustico. Il nucleo del glossofaringeo si continua senza linea di demarcazione nel nucleo del pneumogastrico, e le sue cellole non ci presentano alcuna differenza da quelle di quest'ultimo, nè riguardo alla forma (rotondeggiante non fusiforme come la descrive il Meynert (2, p. 788)), nè per la grossezza. Sinora però, come agli osservatori che mi hanno preceduto, non mi riuscì di dimostrare nè la partenza del prolungamento nervoso da queste cellole, nè la loro connessione colle fibre del glossofaringeo.

Il glossofaringeo, come i suoi congeneri pneumogastrico e spinale, non arresta tutte le sue fibre in questo nucleo: ma, come vedesi nella tavola I, una parte di esse lo circonda all'indietro e rasentando il confine anteriore del nucleo dell'acustico si porta verso l'interno. Che esse arrivino al rafe, come ammettono il Meynert (2, p. 789) e l'Huguenin (3, p. 190), io non mi saprei per ora decidere ad affermare, o negare, perchè su questo i miei reperti sono del tutto negativi; solo mi sembra estremamente difficile su preparati colorati colla solita imbibizione in carmino, e unicamente sopra sezioni trasverse di questa regione, di seguitare le fibre del glossofaringeo sino al rafe.

Inoltre il glossofaringeo è in rapporto con un fascio di fibre, sul quale però non venne ancor detta l'ultima parola. Già lo Stilling (4, p. 24, 39, 44, tav. IV *n.*, V, VI *m.*) aveva notato al lato esterno e posteriore dell'accessorio, pneumogastrico e glossofaringeo un fascio di sostanza bianca, confermato dal Lenhossek (5, pag. 63), che gli diede il nome di fascicolo solitario; poco dopo lo Schröder van der Kolk (6, pag. 170) e il Clarke (7, II, pag. 277), che lo denominò *slender column*, lo misero in connessione coi suddetti nervi, affermando che molte delle sue fibre passano nelle loro radici. Quasi tutti gli osservatori, che seguirono, ammisero senza più come dimostrato questo fatto, malgrado che le prove apportate non fossero tali da togliere assolutamente ogni dubbio, e mentre sulle sezioni trasverse è difficilissimo il provare che le fibre del fascicolo solitario passino nelle radici dei nervi misti, non so che alcuno abbia mai dato una buona figura dimostrativa di sezioni, o antero-posteriori, o oblique, che mettesse questo fatto fuori d'ogni dubbio: a ragione quindi l'Huguenin (3, pag. 191) l'accetta con riserva. Ed è appunto sopra una sezione antero-posteriore obliqua all'innanzi ed all'esterno che mi riuscì di ciò dimostrare, al che ho destinato la tav. XI. La sezione trasversa del fascicolo solitario di circa 1 mm. è facilmente reperibile (sebbene manchi l'indicazione) nelle tav. II, III, IV della mia prima memoria, mentre è già scomparsa nella sezione rappresentata nella tav. I della presente, perchè quivi siamo alle ultime radici superiori del glossofaringeo. Ma su tutte queste sezioni mi riuscì impossibile di dimostrare il passaggio delle fibre del fascicolo solitario nella radice dei nervi misti: mentre questo passaggio è evidentissimo nella tav. XI, che ci rappresenta una sezione antero-posteriore obliqua all'esterno ed in avanti; in essa noi vediamo in *fs* il fascicolo solitario sezionato longitudinalmente, in *rglf* le radici del glossofaringeo e in x il passaggio delle fibre del primo in queste. Ma se da questo lato non resta più dubbio sull'uffizio e sul significato del fascicolo solitario, ben diversamente è la cosa per rispetto alla sua origine, sulla quale sinora non conosciamo nulla di sicuro.

Il Meynert (2, p. 790) dà ancora al glossofaringeo, come al congenere pneumospinale, una radice riflessa in avanti; da un supposto nucleo motorio anteriore, collocato vicino alla superficie anteriore del midollo allungato, partirebbero delle fibre, che arrivate al glossofaringeo e al pneumospinale s'arrovescerebbero all'esterno e passerebbero nella loro radice. Nella mia prima memoria ho dimostrato che questo nucleo, per la regione del pneumospinale, non ha questo significato. Ma nel piano del glossofaringeo noi vediamo svolgersi un altro nucleo di cellole, che è disegnato in a nella tav. I di questa memoria e già ci si presenta nella tav. VI della mia prima memoria. Ma le cellole di questo nucleo non hanno più i caratteri delle cellole del supposto nucleo motorio anteriore del pneumospinale; esse sono più piccole (60 μ circa) e analoghe alle cellole di un altro nucleo, che trovasi più in alto nel midollo allungato e che vedremo essere il nucleo del facciale, col quale anzi è contiguo e quindi difficile a distinguersi esaminando la serie successiva di sezioni trasverse di un midollo allungato; i due nuclei non si confondono però, perchè sulle sezioni antero-posteriori (tav. X), noi vediamo come il nucleo, che ora descrivo in a, sia nettamente separato da quello del facciale *nf*. Però nè sulle sezioni trasverse, nè sulle frontali, nè sulle antero-posteriori di questo nucleo mi riuscì di dimostrare la partenza di fibre o fasci, che da esso si porterebbero al glossofaringeo; e ciò sulle identiche sezioni, che pur mi presentavano evidentissimi i fasci analoghi, che dal nucleo del facciale si portano alla sua radice: laonde io mi trovo costretto per ora a sospendere ogni giudizio sul significato di questo nucleo.

Finalmente accennerò come il glossofaringeo nel suo decorso nel midollo allungato attraversi, in *ratr*, la sezione a ferro di cavallo d'un fascio di fibre, che vedremo essere la radice ascendente del trigemino: il Clarke

(7, II, p. 284) descrive fibre che verrebbero alla radice del glossofaringeo dalla sostanza grigia abbracciata dalla radice ascendente del trigemino, nel mentre che essa l'attraversa: ma non mi fu possibile di vedere queste fibre.

In quel tratto del midollo allungato, che corrisponde alle radici del glossofaringeo, noi incontriamo in *nr* sul decorso del rafe, e in sua vicinanza, un gran numero di cellole sparse attorno al medesimo ed occupanti un'area assai larga: all'innanzi questo gruppo si estende sino alle piramidi, ed è quivi appunto che le sue cellole sono più numerose, mentre all'indietro si va gradatamente perdendo, ed all'esterno si confonde a poco a poco con un altro gruppo di cellole moltipolari enormi, delle quali dirò più oltre. Questo nucleo non si limita alla regione del glossofaringeo, ma più o meno cospicuo si continua in alto nella regione del facciale e trigemino, come pure si continua in basso, perdendosi a poco a poco nella regione dell'ipoglosso. Le cellole che lo compongono sono in parte di piccolo calibro, per lo più di mezzano calibro 45 a 50 μ; pochissime sono le grosse: tutte hanno forma irregolarmente poliedrica, prolungamenti grossi e numerosi, fra i quali per moltissime ho potuto dimostrare il prolungamento nervoso. Nella tav. XII, ho raccolto alcuni esemplari di queste cellole (appartenenti alle varie regioni che occupa il nucleo) le quali ci dimostrano quale varietà di direzione prendano i loro prolungamenti nervosi, onde resta assai difficile lo stabilire quale sia il loro uffizio: solo ho potuto accertare che in molte di queste cellole, adagiate contro fasci arciformi, il prolungamento che ne nasce passa a costituire fibre arciformi. Prima di tutto noi abbiamo nella fig. 3 due cellole intercalate alle fibre stesse del rafe, vicinissime fra loro, che mandano il loro prolungamento nervoso in opposta direzione: ambedue si possono seguire in due fasci arciformi che arrivano al rafe. Questo fatto dell'opposta direzione dei prolungamenti nervosi, che partono da due cellole vicine, ce lo dimostra anche la fig. 2 in cui però le due cellole sono collocate sul lato sinistro del rafe, laonde il prolungamento nervoso che trae origine dalla cellola in *a* per recarsi al lato destro del midollo allungato attraversa il rafe. Il passaggio dei prolungamenti nervosi di queste cellole nelle fibre arciformi ci è in modo evidentissimo dimostrato dalla fig. 6, nella quale due cellole collocate ai due lati e in vicinanza del rafe, mandano i loro prolungamenti nervosi (quello a sinistra in *a* attraverso il rafe) dallo stesso lato, e quello specialmente della cellola in *b* si può seguire, per lunghissimo tratto, in un fascio di fibre arciformi, che arriva al rafe. Oltre a queste due cellole la stessa figura ci presenta in *c* una terza cellola la quale manda il suo prolungamento nervoso direttamente in avanti. All'opposto nella figura 5 la grossa cellola che troviamo tra le fibre stesse del rafe manda il suo prolungamento nervoso direttamente all'indietro, e questo si può seguire, per lunghissimo tratto in tale direzione, senza che accenni a cambiarla. Nè solo per le cellole di questo gruppo che si trovano dentro il rafe, o poco da esso distanti, mi riuscì di dimostrare la partenza del prolungamento nervoso, ma ciò mi venne pur fatto per quelle che se ne trovano a qualche distanza. Così nella fig. 4 ho disegnato una cellola assai lontana dal rafe, dal cui polo interno parte il prolungamento nervoso che s'immette subito in un fascio di fibre arciformi, decorre con esso sino al rafe, ed arrivato a questo lo attraversa per continuare il suo cammino dal lato opposto; mentre nella fig. 1 noi abbiamo una cellola in analoga posizione, dalla quale nasce parimente un prolungamento nervoso che vien sino al rafe; arrivatovi, non lo attraversa, ma si ripiega nuovamente all'esterno facendo un'ansa molto stretta.

Sull'ufficio di queste cellole io non voglio avventurare alcuna ipotesi; sarebbe facile di metterle in rapporto con uno dei tanti centri che abbiamo nel midollo allungato; ma meglio che lasciarmi andare a non sicura affermazione, preferisco di limitarmi per ora alla semplice descrizione dei fatti, come me li presentano le mie preparazioni. Di questo nucleo non trovo fatta menzione da altri che dallo Stieda (8, pag. 117), il quale però non fa che accennarlo, dandogli il nome di nucleo del rafe.

II.

Nella tav. I. noi osserviamo in *n p a c*, all'indietro del nucleo del glossofaringeo ed occupante tutta l'estensione del pavimento del 4° ventricolo, un nucleo di sostanzà grigia, di forma irregolarmente triangolare, al quale nelle tavole successive, sempre in *n p a c*, vediamo arrivare le fibre del nervo acustico: è desso appunto il nucleo posteriore del nervo acustico. Non comincia però nel piano delle ultime radici del glossofaringeo, rappresentato nella tav. I; ma esso si sviluppa ai lati del rafe, appena esaurito il nucleo dell'ipoglosso e già lo vediamo, in *nac*, nella tav. IV della mia prima memoria: anzi nell'angolo esterno del triangolo inferiore del pavimento esso si sviluppa già a livello delle radici superiori dell' ipoglosso, restando al lato esterno del nucleo del pneumogastrico. Il merito d'aver dimostrato, che questo è il nucleo dell'acustico, spetta specialmente al Clarke (7, II, p. 294), il quale pel primo fece vedere l'errore in cui era caduto lo Stilling, credendolo (per la parte sua inferiore) il nucleo del glossofaringeo. Questo nucleo è ricchissimo di cellole di piccolo calibro con prolungamenti sottili e delicatissimi, per le quali non mi fu ancora possibile di dimostrare che diano origine al prolungamento nervoso: in mezzo a questi elementi piccoli trovansene sparsi altri più grossi con dimensioni varie; i più grossi non arrivano che a 60 - 70 μ. Questo nucleo è attraversato da sottili fasci di fibre, che decorrono in direzione trasversale dall'esterno all'interno, e si fanno più numerosi a misura che noi ci portiamo verso il limite anteriore del nucleo. Questi fasci non sono altro che la continuazione verso l'interno della radice, o meglio di una delle radici dell'acustico.

È noto che l'acustico penetra nel midollo allungato diviso in due radici, una posteriore, l' altra anteriore. Al nucleo descritto dell'acustico arriva la radice posteriore, dopo avere abbracciato il peduncolo cerebellare inferiore (*pci* delle tavole). Questa radice è compatta e composta di fibre fine; arrivata al nucleo in parte vi si sparpaglia, per unirsi agli elementi cellolari del medesimo, in modo però sinora sconosciuto; ma una sua grossa porzione continua il suo decorso all'interno e leggermente in avanti, com'è specialmente evidente nelle sezioni del midollo allungato oblique in basso ed all'indietro, fatte cioè parallelamente al peduncolo cerebellare medio (tav. IX). Nel portarsi all'interno questa porzione della radice si divide in vari fascetti sottili, che dapprima, come più sopra ho detto, attraversano il nucleo dell'acustico e poi passano a costituire fibre arciformi e si dirigono verso il rafe. Sul decorso di queste fibre si trovano disposte le cellole di mezzano calibro che abbiamo visto concorrere a costituire il nucleo dell'acustico, e per queste mi è riuscito di dimostrare che dànno origine ad un prolungamento nervoso: in tutte queste cellole esso si porta direttamente all'indentro, seguendo la direzione generale della radice posteriore, come ho disegnato nella fig. 5 della tav. XIII. È vero che frequentemente si incontrano di queste cellole, le quali mandano il loro prolungamento nervoso all'esterno, ma l'essere i medesimi tronchi dopo breve decorso dalle cellole e l'avere osservato, come ho disegnato nella fig. 6 della stessa tavola, che il prolungamento nervoso, nato da una di queste cellole, si porta dapprima all'esterno, ma dopo breve cammino si arrovescia bruscamente all'interno nella direzione di tutti gli altri prolungamenti che hanno la stessa origine, tuttociò mi autorizza ad affermare che queste cellole con prolungamento nervoso diretto apparentemente all'esterno non fanno eccezione alla regola generale. Inoltre sul confine anteriore del nucleo noi troviamo delle cellole gangliari grosse, analoghe in tutto a quelle che costituiscono il così detto nucleo esterno dell'acustico, per molte delle quali mi venne fatto di dimostrare, che il prolungamento nervoso al quale esse dànno origine si porta pur esso all'interno, passando, insieme coi prolungamenti nervosi delle cellole suddescritte, a costituire in parte quei fasci radicolari dell'acustico che si portano verso il rafe. Una di queste cellole noi la vediamo, nella fig. 3 della tav. XIII in *a*, collocata sul confine anteriore del nucleo dell'acustico; essa manda il suo prolungamento nervoso all'indietro e all'interno verso il centro di quello. È per questo motivo che anche ammesso, come dimostrato, col Meynert (2, pag. 785) che queste fibre passino nella radice dell'acustico del lato opposto (1° ordine delle fibre incrociate del Meynert), non credo si possa ammettere senz'altro la di lui opinione, che queste fibre provengano dal peduncolo cerebellare e non piuttosto dalle cellole suddescritte.

Sul decorso della radice posteriore e nel campo triangolare compreso fra essa e la faccia posteriore del peduncolo cerebellare inferiore sono disposte delle cellole di grosso calibro, alle quali accennano anche il Dean (9, pag. 54), il Clarke (7, II, pag. 290), il Meynert (2, pag. 782); esse ben presto si raccolgono in un nucleo, il quale, a misura che c'innalziamo nel midollo allungato, si estende sempre più in avanti ed all'interno, continuandosi direttamente nel così detto nucleo esterno dell'acustico, di cui dirò tra breve. Le cellole che ora descrivo in vicinanza e sul decorso della radice posteriore hanno il loro massimo diametro disposto longitudinalmente alla direzione della radice e per molte di esse ho potuto accertarmi, come ho disegnato solo nella fig. 4 della tav. XIII, che il prolungamento nervoso al quale dànno origine passa nella radice posteriore; però non si porta verso l'esterno, in modo da farci credere che a queste cellole arrivino le fibre dell'acustico dello stesso lato, ma bensì verso l'interno e vanno pur essi a costituire in parte quei fasci della radice posteriore, che abbiamo visto più sopra. Sinora anzi non mi riuscì di osservare una sola di queste cellole che mandi il suo prolungamento all'esterno e nella radice dell'acustico; per lo che mi credo autorizzato ad affermare che queste cellole non dànno origine a fibre dell'acustico dello stesso lato. Le fibre, alle quali esse dànno origine, subiscono probabilmente la sorte delle fibre più sopra descritte; ma su questo non posso dire nulla di positivo.

La radice posteriore dell'acustico nel suo decorso all'esterno del peduncolo cerebellare inferiore viene abbracciata da un nucleo di sostanza grigia, che vien detto nucleo anteriore dell'acustico, ma sul quale non possediamo sinora alcun dato definitivo, inquantochè non sia che una pura supposizione quella dell'Huguenin (3, pag. 177, 267) che ad esso arrivi il nervo intermedio del Wrisberg. Quello però che le mie preparazioni mi dimostrano si è, che questo nucleo ha (almeno nel vitello, nel porco, nel cane) una estensione molto più grande di quello che generalmente non si ammetta dagli osservatori, fatta eccezione però del Clarke; già macroscopicamente puossi vedere come esso abbracci l'acustico a guisa di vagina e lo accompagni sino al pavimento del 4° ventricolo (tav. IX). In questo nucleo noi troviamo non solo le cellole rotondeggianti con scarsi prolungamenti generalmente ammesse, ma verso la parte sua posteriore esso ci si presenta popolato di piccole cellole analoghe a quelle del nucleo dell'acustico, anzi esso finisce per fondersi con questo, senza linea di demarcazione. Però nè per gli elementi più grossi, nè per questi ultimi piccoli, mi fu dato di dimostrare l'esistenza del prolungamento nervoso.

Circa alle strie acustiche che si connettono alla radice posteriore nulla ho a dire, perchè come è noto esse mancano generalmente negli animali inferiori all'uomo, e, nel vitello, non solo apparentemente come ammette il Meynert (2, pag. 771), ma in realtà, perchè io non le ho osservate nemmanco sotto forma di nudi cilindri assi, spogli della loro guaina midollare, al che, secondo questo autore, sarebbe dovuta la loro invisibilità, quando mancano.

La radice anteriore dell'acustico penetra nel midollo allungato tra il peduncolo cerebellare inferiore e la radice ascendente del trigemino, quindi in un piano anteriore alla sinquì descritta; di più essa trovasi in un piano superiore alla stessa, laonde nelle sezioni trasverse successive del midollo allungato dal basso all'alto noi incontriamo prima la posteriore e poscia la anteriore. Per ottenere le due radici riunite sullo stesso piano è necessario sezionare il midollo allungato trasversalmente e obliquamente in basso e all'indietro come ho fatto per la sezione disegnata nella tav. IX, nella quale noi osserviamo la radice anteriore *raac* e la posteriore *rpac* fondersi insieme, al punto di emergenza dell'acustico dal midollo allungato.

La radice anteriore dell'acustico, come vediamo nelle tav. IV, V, VI, ci si presenta divisa in fasci ed è composta di fibre più grosse di quelle della radice posteriore. Passando fra il peduncolo cerebellare e la radice ascendente del trigemino arriva ad un grosso nucleo di cellole, ammesso da tutti gli osservatori (meno il Deiters), quale nucleo esterno dell'acustico. Questo nucleo è la continuazione in alto del gruppo di cellole che abbiamo visto sul decorso della radice posteriore, il quale sempre più sviluppandosi, tav. V, VI, viene ad occupare tutto il campo trapezoidale che esiste tra la radice posteriore all'indietro, la radice ascendente del trigemino in avanti, il peduncolo cerebellare all'esterno e la radice del facciale all'indentro (suo ramo inferiore in basso, suo ramo superiore in alto); ha il suo maggiore sviluppo in corrispondenza del ramo ascendente del facciale e si esaurisce presso a poco col suo ramo superiore. Esso è composto di grosse cellole moltipolari, con prolungamenti numerosi e voluminosi, tra i quali è facile distinguere il prolungamento nervoso; a differenza delle cellole più sopra descritte lungo la radice posteriore, le quali ci presentano un corpo allungato, queste sono più regolarmente poliedriche con un calibro che oscilla fra i 90 e i 120 μ. Ho detto come sia facile il dimostrare per queste cellole la partenza del prolungamento nervoso, e in tutti i casi, in cui ciò mi è riuscito, ho sempre visto che esso non va all'esterno verso la radice anteriore bensì all'interno, in direzione del tutto opposta; così nella fig. 2 della tav. XIV per ben cinque cellole, che si trovano allo sbocco della radice *raac* nel nucleo, vediamo come il prolungamento nervoso si porta in tutte all'interno: lo stesso fatto ci presentano le due cellole della fig. 1 della stessa tavola, le quali sono tolte dalla porzione più esterna ed anteriore del nucleo, quella che si innicchia tra il peduncolo cerebellare e la radice ascendente del trigemino. Da questo nucleo partono fasci voluminosi di fibre, spesso raccolti in un solo di calibro sovente eguale e qualche volta superiore a quello della radice del facciale che esso attraversa (conf. la fig. 3 della stessa tavola); i quali fasci attraversando la radice del facciale si recano obliquamente all'innanzi ed all'interno, volgendo verso il rafe; però sinora non mi fu possibile di seguitarli (sopra sezioni trasverse) che sin poco oltre il nucleo del facciale, per lo che mi è impossibile di precisare il loro significato morfologico; mentre lo SCHRÖDER VAN DER KOLK (6, pag. 116), che già ha osservato questi fasci, afferma d'averli seguiti attraverso il rafe, sin nel nucleo del lato opposto, cosicchè si avrebbe per loro intermezzo una connessione immediata dei due nuclei dell'acustico, il che merita conferma. Che questi fasci di fibre traggano realmente la loro origine dalle cellole di questo nucleo ce lo dimostra la fig. 3 della stessa tavola, nella quale in *a* e *b* abbiano due di queste cellole, che mandano il loro prolungamento nervoso nel grosso fascio di fibre che attraversa il facciale. Nella fig. 4 abbiamo in *a* un'altra di queste cellole, che manda il suo prolungamento nervoso nel fascio suddetto, mentre in *b* ne vediamo una seconda, che lo manda all'esterno, in direzione opposta alla precedente; probabilmente ciò non è che in apparenza, ma ad ogni modo son così pochi i casi di questo genere da me osservati, che credo non possano infirmare la regola generale. I fatti, che ho riportato a proposito delle fibre che traggono origine dal cosidetto nucleo esterno dell'acustico, provano ad evidenza, che l'affermazione dello SCHRÖDER VAN DER KOLK (6, pag. 114), che nulla vi sia di più facile quanto l'osservare (a un ingrandimento di 40 a 50 diametri!) il passaggio de' prolungamenti di queste cellole nella radice anteriore dell'acustico, è fondata sopra illusioni ottiche da una parte e dall'altra sulla confusione del prolungamento nervoso coi prolungamenti protoplasmatici: e reca veramente meraviglia il vedere, come tutti gli osservatori abbiano diviso l'errore dello SCHRÖDER e senza più abbiano denominato questo nucleo il nucleo esterno dell'acustico; per l'acustico dello stesso lato esso non ha certo questo significato; perchè, come ripeto, fra le moltissime sue cellole, per le quali ho potuto dimostrare la partenza del prolungamento nervoso, non ne ho ancora trovata una sola che lo mandi nell'acustico. Unico il DEITERS vide che queste cellole non si comportano nel modo ammesso da tutti gli altri osservatori, e in più luoghi del suo lavoro (1, pag. 85, 93, 170, 192, 295, 296) accenna al fatto che queste cellole non mandano i loro prolungamenti nell'acustico, e quindi secondo lui nulla hanno da fare con questo nervo. Ma le sue affermazioni, non appoggiate a prove, lasciarono increduli gli osservatori che gli tennero dietro, laonde essi non ebbero in quella considerazione, che meritava l'osservazione così importante e così originale del DEITERS, e che io sappia, essa non ottenne che due righe di accenno nel manuale del FREY (10, pag. 608); tutti gli autori anche recentissimi continuarono a parlare di un nucleo esterno dell'acustico: CLARKE (7, II, pag. 292, 293); Stieda (8, pag. 75, 95, 118, 121); Meynert (2, pag. 786); Huguenin (3, pag. 177); l' Henle (11, pag. 236) riunisce sotto la denominazione comune di *nucleus acust. sup.* il nucleo interno (il nostro posteriore) ed esterno del Clarke, senza però farne notare i loro differenti caratteri anatomici. Malgrado però che io abbia, colle prove che sopra ho apportato, messo fuori dubbio che questo nucleo non dà origine all' acustico dello stesso lato, non intendo però di sottoscrivere alle deduzioni che il Deiters trae da questo fatto, che cioè questo nucleo non abbia nulla a fare coll'acustico e che invece le sue cellole servano d'intermezzo al cambiamento di direzione delle fibre dei cordoni anteriori e laterali. Non è questo il luogo di discutere una simile opinione, e del resto mi mancano i materiali sui quali fondare una decisa affermazione sull'ufficio di queste cellole, poichè neppure sulle sezioni longitudinali in corrispondenza di questo nucleo ho potuto farmi un'idea chiara delle sue connessioni. Nella tav. XI che ci rappresenta la sezione antero-posteriore obliqua in avanti e all'esterno del midollo allungato, noi vediamo questo nucleo in tutta la sua altezza, che dalle ultime radici del glossofaringeo arriva quasi sino al piano d'uscita del trigemino; al nucleo sembrano convergere varii ordini di fibre dall'indietro, dal basso e dall'alto, ma sinora non ho potuto accertarmi che esse vi finiscano realmente, non avendo ancora osservato un solo caso, in cui le cellole del nucleo mandino il loro prolungamento nervoso in quei fasci. Ma già la considerazione che i prolungamenti nervosi che traggono la loro origine dalle cellole inferiori del nucleo stesso hanno una direzione diversa da quelli delle superiori; che essi hanno con qualche probabilità rapporto coll' acustico e quindi non può escludersi del tutto la possibilità che anche quelli delle superiori finiscano in esso (a queste fibre accenna forse il Meynert (2, pag. 785) nel suo 2° sistema di fibre incrociate dell'acustico che fa nascere appunto dal così detto nucleo esterno del lato opposto), che finalmente i prolungamenti nervosi di queste cellole hanno una direzione ben diversa da quelli delle colossali cellole gangliari di cui dirò più oltre, alle quali il Deiters vorrebbe pure attribuire lo stesso ufficio (1, pag. 193, 195), tutto ciò m'induce a non ammettere ancora come dimostrata l'opinione del Deiters. Ad ogni modo siccome sinora nulla ci prova che questo così detto nucleo esterno dell'acustico sia realmente un nucleo d'origine dell'acustico e che il Deiters è l' unico osservatore che abbia segnalato questo fatto alla nostra attenzione, così io propongo di denominarlo *nucleo del* Deiters, tanto più che malgrado le tracce così luminose, che questo grande osservatore ha lasciato nel campo della scienza, nessuna disposizione anatomica porta ancora il suo nome, e d'altra parte sono convinto che fra tutti i sistemi di nomenclatura da adottarsi nella descrizione delle regioni ed organi del sistema nervoso centrale, quello fondato sul nome degli scopritori sia il più sicuro.

Anche per la radice anteriore abbiamo un nucleo anteriore collocato al suo lato esterno, al punto dov'essa esce dal midollo allungato (tav. IV, V, VI *naac*); esso non è altro che la continuazione in alto di quel nucleo di piccole cellole che abbiamo visto alla periferia anteriore ed esterna della radice posteriore, nè altro ho da aggiungere a quello che ho già detto più sopra.

Inoltre, sul decorso della radice anteriore non è difficile l' osservare i nidi di piccole cellole descritte dal Meynert (2, pag. 783), ma per esse pure non m'è riuscito in alcun modo di dimostrare la loro connessione colle fibre dell'acustico, anzi finora non fui abbastanza fortunato da osservare in esse il prolungamento nervoso e quindi nulla posso dire circa ai due prolungamenti nervosi, che lo Stieda dice aver visto nascere da queste cellole (8, pag. 75).

III.

Nelle tav. II-V ci si presenta in *nf*, in mezzo ai fasci del cordone laterale, in vicinanza della periferia anteriore del midollo allungato, un grosso nucleo di cellole moltipolari di mezzano calibro, 60 a 65 μ, con numerosi e voluminosi prolungamenti, il quale viene diviso in varii gruppi secondari da sepimenti formati di fibre trasversali e fibre longitudinali. Le dimensioni di questo nucleo (due mm. circa di spessore) si conservano per lungo tratto (6 a 7 mm.) uniformi, poi esso si esaurisce rapidamente in modo che le sue ultime tracce noi le incontriamo a livello della radice del facciale nella tav. V. In basso esso si va pure assottigliando, ma in questa direzione è assai difficile il dargli un limite, almeno nelle sezioni trasverse successive, perchè esso si continua, come ho detto più sopra, in un nucleo analogo di cellole moltipolari, uguali per forma e calibro; però nelle sezioni antero-posteriori, tav. X, è evidente la distinzione dei due nuclei. Il nucleo che ora descrivo è il nucleo del facciale il quale in alto arriva sino alle prime tracce della radice di questo nervo, in basso discende sino alle ultimi radici del glossofaringeo, nè posso accettare il limite inferiore datogli dal Krause (12, pag. 419), solo però per la pecora, sino all'estremità superiore del nucleo dell'ipoglosso. Questo nucleo è in rapporto all'esterno colla radice ascendente del trigemino, all'indietro coi fasci di fibre che abbiamo visto trarre origine dal nucleo di Deiters, in avanti coi fasci più superficiali del cordone laterale ed all'interno, per la parte sua superiore, con un nuovo ammasso di sostanza grigia, l'oliva superiore, dalla quale però è sempre separato per mezzo di fasci interposti, e non so, come si possa affermare dal Duval (13, pag. 522) che il nucleo del facciale è così contiguo coll'oliva superiore che si potrebbe confondere con essa; d'altra parte la struttura dei due nuclei è così diversa che anche ad un piccolo ingrandimento è impossibile il confonderli. Superficiale nella sua prima porzione (tav. II e III), il nucleo del facciale si fa più profondo in alto perchè viene ricoperto dalle fibre del trapezio (tav. V). Le fibre che dividono questo nucleo in varii ammassi secondari sono di due ordini: le une longitudinali attraversano il nucleo dall'alto al basso e sono la continuazione delle fibre del cordone laterale: sono specialmente evidenti nella tav. X. Le altre attraversano il nucleo in direzione orizzontale, dall'avanti all'indietro; esse, tratta con ogni probabilità la loro origine dalle cellole del nucleo, si dirigono obliquamente all'indietro ed all'interno verso il pavimento del 4° ventricolo. Nella regione inferiore del nucleo queste fibre sono tronche, più o meno vicine al punto di loro partenza (tav. II); solo più in alto noi le possiamo osservare attraversare il midollo allungato in tutta la sua lunghezza (tav. III): e ciò perchè, in corrispondenza della porzione inferiore del nucleo, le fibre hanno una direzione obliqua in alto. Arrivate queste fibre in vicinanza del pavimento del 4° ventricolo, e a poca distanza dal rafe, si raccolgono in un fascio compatto, in *gf*, che dapprima, poco evidente, come nella tav. III, ci si presenta più in alto ben distinto e circoscritto, di forma circolare e del diametro di circa due mm. (tav. IV). Più in alto ancora (tav. V) noi incontriamo sempre la sezione trasversa del fascio suddetto e vediamo pure svilupparsi all'innanzi ed al suo lato esterno un grosso fascio compatto di fibre che è la radice del nervo facciale, la quale però, a quest'altezza, non ci si presenta che nella sua porzione anteriore, e solo più in alto (tav. VI) la incontriamo in tutta la sua estensione attraversare il midollo allungato, obliquamente all'indietro ed all'interno, sino al fascio rotondo suddetto, nel quale è evidente che essa si continua; più in alto finalmente (tav. VII) noi non incontriamo più che il pezzo posteriore della radice del facciale in continuità col fascio rotondo; e ciò perchè il facciale descrive nel midollo allungato un decorso alquanto obliquo all'indietro ed in alto. È inoltre a notarsi, che la radice del facciale, per arrivare a quel fascio rotondo, non descrive una linea retta ma una curva rimarchevole colla concavità rivolta all'interno ed all'avanti, curva che il Duval (13, pag. 181), non so con quale fondamento, dice che è propria dell'uomo, mentre io l'ho osservata non solo nel vitello, ma anche nel porco e nel cane. Noi abbiamo così in queste tavole tutto il decorso del facciale e sintetizzandole, possiamo vedere com'esso arrivato all'indietro in vicinanza del pavimento si ripiega in basso, gli decorre per un certo tratto parallelo e poi si ripiega nuovamente all'innanzi ed all'esterno per portarsi al suo nucleo. Noi abbiamo quindi nel decorso di questo nervo una curvatura a ferro di cavallo i di cui rami trasversali sono le due porzioni orizzontali del facciale, l'ansa è fatta dalla porzione longitudinale ascendente. I due rami orizzontali, superiore ed inferiore differiscono tra loro per struttura, dimensioni e decorso; il primo è compatto, rotondeggiante, uniforme, solo qualche volta diviso in fascetti, mentre il secondo è sparpagliato, fatto da fasci fra di loro divergenti, per lo che all'indietro è molto più stretto che all'innanzi, dove ha per altezza tutta la lunghezza del nucleo, e quindi ha la forma di un cono schiacciato tronco alla sua parte posteriore. Di più, sebbene ambedue i rami decorrano all'indietro ed all'interno, essi non sono però esattamente paralleli e non si sovrappongono come vorrebbe il Meynert (2, pag. 781), ma il ramo inferiore è alquanto più interno del ramo superiore, come ha già osservato il Duval (13, pag. 7). Questo decorso complicato del facciale nell'interno del midollo allungato difficilmente si può rendere evidente con sezioni trasverse; è specialmente il passaggio della radice inferiore nella porzione ascendente quello che ci si presenta più difficile a dimostrare e del quale le sezioni trasverse non possono darci che una ben pallida immagine.

Sopra una sezione antero-posteriore, ma obliqua all'innanzi ed all'esterno, mi è riuscito di dimostrare questo passaggio, come ho disegnato nella tavola X; in essa vediamo che le fibre a pennello nate dal nucleo *nf* si portano all'indietro, a poco a poco convergono nel fascio *gf*, che facendo una curva colla concavità rivolta in avanti ascende in alto lungo il pavimento del 4° ventricolo, e dopo un decorso di 5 o 6 mm. si ripiegano nuovamente all'innanzi nella porzione superiore che ci si presenta tronca in *rfs;* per quanto io abbia variata la direzione dei tagli, non mi venne ancor fatto di ottenere una sezione che sintetizzasse tutto il decorso del facciale. Di questa interessantissima disposizione del facciale nel suo decorso attraverso il midollo allungato io non conosco che la figura schematica del KRAUSE (12, fig. 247, pag. 418) e le figure non ischematiche del DUVAL (fig. 3, 4 della sua tav. VII). Solo quella del KRAUSE mi sembra conforme al vero. mentre quelle riportate dal DUVAL se ne allontanano; confrontando le sue figure colla mia è facile vederne la differenza per ciò che riguarda il ramo inferiore, da lui disegnato come un cordone uniforme, cilindrico uguale al ramo superiore, mentre in realtà esso è foggiato a pennello, perchè deve allargarsi nel suo nucleo alto 7 od 8 mm. È forse perchè il DUVAL ha fatto quest'ultimo troppo piccolo, che il ramo inferiore gli è riuscito così stretto, in paragone di ciò che dovrebb'essere: è bensì vero che le sue figure sono di midollo allungato del gatto, mentre le mie riguardano il vitello; ma anche pel gatto ho potuto convincermi sopra una sezione di midollo allungato di quest'ultimo animale, fatta nell'identica direzione di quella disegnata nella tav. X, che il ramo inferiore del facciale ha gli stessi-caratteri anatomici che nel vitello. In quanto alla fig. 29 dello STIEDA (8) che si riferisce al midollo allungato di coniglio, credo che le si possa muovere lo stesso appunto, sebbene, oltre la porzione ascendente del facciale, non sia disegnato che un tratto brevissimo dei due rami orizzontali; ma basta per dimostrarci, che in essa figura non sono resi fedelmente i loro caratteri differenziali.

Questo decorso così complicato del facciale nel midollo allungato venne pel primo scoperto dal DEITERS (1, pag. 151, 178, 189, 281), il quale denominò la porzione longitudinale ascendente ginocchio del facciale e dimostrò come essa, e non altro elemento, sia la cagione del rilievo fatto dal *funiculus teres* sul pavimento del 4° ventricolo, per quel suo tratto, che le corrisponde. Nè so capire perchè il MEYNERT, parlando della scoperta del DEITERS, si esprima in modo alquanto dubbio (2, pag. 780): « per quanto si può decifrare dalla esposizione rimasta incompleta del DEITERS », son queste le sue testuali parole. Ora nell'opera del DEITERS noi abbiamo già così chiaramente descritto il fatto, che è impossibile fraintenderlo; fra i varii passi, ai quali ho sopra rimandato il lettore, scelgo quello a pag. 281: « il facciale negli animali arriva sotto forma di un cordone bianco splendente alla linea mediana, quivi non finisce, come sinora si è detto, in un nucleo comune all'abducente ed al facciale, ma il suo tronco forma un ginocchio completo e in totalità si arrovescia all'indietro »; secondo il suo modo speciale, molte volte imbarazzantissimo ed oscuro di indicazioni. Riguardo al nucleo egli così si esprime: « nei cordoni laterali comparisce il grosso nucleo del facciale, al quale arrivano in massa le fibre dal pavimento, in modo sinora del tutto sconosciuto ». Agli antichi osservatori non erano interamente ignorati questi fatti, solo davano loro un'interpretazione erronea; così lo Stilling (4, pag. 33 e tav. IV), che pure avea bene osservata la sezione trasversa del ginocchio del facciale e l'aveva disegnata in evidente connessione colla radice di questo, la crede una radice del trigemino, e peggio Schröder (6, pag. 110), nel voler correggere lo Stilling, cade in più grave errore, dicendola la sezione trasversa di una stria acustica. Lo stesso Dean, che cronologicamente viene subito prima del Deiters (9, pag. 59), ed ha il merito di aver visto che una parte delle fibre del facciale si ripiega in basso, non ha ancora un'idea chiara del fatto: ed il lettore imparziale non può trovare conforme a giustizia l'osservazione, che a tal riguardo fa il Kölliker (14, pag. 383); che cioè egli, il Deiters, ha descritto, come una novità, una riflessione a forma di ginocchio, fatta dalle radici di questo nervo sul pavimento del 4° ventricolo, mentre questa riflessione era già conosciuta dal Dean. Ora il Deiters è per lo meno contemporaneo del Dean e forse non ebbe tempo a conoscerne il lavoro, perchè moriva nel dicembre dello stesso anno (1863), nell'agosto del quale questi presentava la sua Memoria alla *Smithsonian Institution* di Washington. D'altronde il Dean non emette che una supposizione (9, pag. 48, 59), che cioè una parte delle fibre della radice del facciale si ripieghi in basso e, o finisca nel suo nucleo (il Dean non conosce pel facciale altro nucleo che il nostro nucleo dell'abducente), oppure passi dalla parte opposta del rafe: siamo dunque lungi dalla precisione colla quale si esprime il Deiters. La descrizione che dà il Clarke (7, II, pag. 297 e seg.) è molto migliore e più completa di quella del Dean; ma egli scrive due anni dopo pubblicata l'opera del Deiters, della quale è notevole come l'insigne osservatore inglese non abbia avuto conoscenza. Ad ogni modo nella descrizione data dal Clarke è così mescolato il certo coll'incerto, è ammessa con tanta facilità la connessione delle fibre del facciale con tanti e sì svariati gruppi cellolari, che non è possibile dargli la preferenza sul Deiters; basti l'accennare che mentre il Deiters aveva già scoperto il vero nucleo del facciale (1, pag. 164, 203, 205), il Clarke invece lo crede ancora il nucleo inferiore del trigemino; mentre il Kölliker (14, pag. 379) suppone che questo nucleo non sia altro che la continuazione in alto del nucleo del cordone laterale. Che il Clarke poi consideri quale nucleo d'origine del ramo inferiore del facciale l'oliva superiore, come afferma il Meynert (2, pag. 780), non mi risulta: è bensì vero che il Clarke (7, II, pag. 298), descrivendo la radice del facciale nella pecora, dice, che essa si divide come un pennello in tante fibre separate, le quali s'immergono nell'oliva superiore e nel (suo) nucleo motorio del trigemino; ma egli però non afferma ricisamente che da questi nuclei traggano la loro origine. In modo analogo (pag. 296) egli descrive delle fibre che dal nucleo del facciale (il nostro nucleo dell'abducente) vanno al nucleo motorio del trigemino (del Clarke, il nostro nucleo del facciale) e all'oliva superiore. Ora che dalla radice del facciale o dal nucleo dell'abducente vadano fibre all'oliva superiore non venne confermato da alcun altro osservatore, e nelle mie preparazioni, che pur mi dimostrano colla massima evidenza i fasci della radice inferiore del facciale, mi fu impossibile di veder quelle fibre. È poi notevole come il Clarke, malgrado che abbia descritto la connessione della radice inferiore del facciale col suo vero nucleo, lo consideri però sempre quale nucleo motorio del trigemino. È vero che il Deiters non ci lasciò che frammenti, e che la morte gl'impedì di darci una descrizione completa del decorso del facciale, ma ciò nulla toglie al merito della sua scoperta e d'altra parte non credo che gli osservatori venuti dopo di lui abbiano aggiunto gran cosa alle sue osservazioni.

E sovrattutto riguardo al nucleo del facciale, nessuno ha sinora provato che le sue cellole diano realmente origine alle fibre che partono da esso. Questa prova io la presento nella fig. 6 della tav. XV: essa rappresenta parte d'una sezione trasversa del nucleo del facciale in corrispondenza dell'estremità sua superiore; in *a* e *b* vediamo due cellole di questo nucleo che dal loro polo posteriore dànno origine ad un prolungamento nervoso, il quale va ad immettersi, specialmente quello della cellola in *a*, nei fasci radicolari che partono dal nucleo. Non è questo il solo caso che io posseggo di cellole di questo nucleo, per le quali ho dimostrato la partenza del prolungamento nervoso, ma credo che quello che ho riportato basti a provare, che le cellole del nucleo del facciale ci presentano un prolungamento nervoso e questi vanno a costituire i fasci radicolari del ramo inferiore del facciale.

Ma a questi fasci non arrivano soltanto le fibre che traggono origine dal nucleo. In vicinanza di questo noi troviamo sparse delle cellole gangliari che hanno il calibro di quelle del nucleo: per qualcuna di esse ho potuto dimostrare (fig. 5 della tav. XV) che mandano il loro prolungamento nervoso nei fasci radicolari del facciale. Inoltre, lungo il decorso degli stessi fasci noi troviamo intercalate delle cellole identiche, che pure mandano il loro prolungamento nervoso in essi (fig. 1 della stessa tav.); laonde possiamo conchiudere che un contributo non piccolo di fibre arriva al facciale, e dalle cellole sparse che si trovano attorno al nucleo e da quelle che troviamo sul decorso del ramo inferiore del facciale. Una sola eccezione ho incontrato per queste ultime e l'ho disegnata nella fig. 2 della tav. XV (essa è tolta da una sezione trasversa di midollo allungato di porco); in essa vediamo una cellola collocata in mezzo alle fibre del ramo inferiore del facciale, la quale manda il suo prolungamento nervoso in questo, però non nella direzione delle sue fibre, ma nella direzione opposta, verso il nucleo.

Nelle adiacenze del nucleo del facciale, e più frequentemente tra questo e il rafe, s'incontrano sovente delle cellole moltipolari di calibro molto più cospicuo che le cellole proprie del nucleo, di forma più decisamente poliedrica, le quali dànno origine a un prolungamento nervoso più grosso, quasi doppio di quello delle fibre del facciale. In un sol caso (fig. 4, tav. XV) ho visto questo prolungamento portarsi all'indietro ed all'esterno e dopo un lunghissimo decorso, alquanto flessuoso, finire tronco, in vicinanza dei fasci provenienti dal nucleo; ma nel maggior numero dei casi, come ho solo disegnato nella fig. 3 della tav. XV, esso si porta invece direttamente verso il rafe. Son forse queste le cellole che servirebbero d'intermezzo tra i centri e il nucleo del facciale? È questa un'interrogazione alla quale non posso rispondere in modo decisivo, atteso la insufficienza dei materiali che posseggo. Quello però che posso affermare con qualche certezza si è, che malgrado l'attenzione colla quale ho esaminato le preparazioni ch'io posseggo sul nucleo del facciale, non mi è riuscito di vedere quelle fibre, che, secondo il Meynert (2, pag. 781), gli arriverebbero direttamente dal rafe e che rappresenterebbero le fibre afferenti di un gomitolo fatto dal nucleo, le di cui fibre efferenti sarebbero le fibre radicolari partite da esso gomitolo che anche l'Huguenin ammette (3, pag. 266).

Neppure ho visto le fibre che, secondo il Duval (13, pag. 522), provengono dal rafe, si uniscono al ramo inferiore del facciale e vanno al suo nucleo.

In quanto alle fibre che arriverebbero al facciale dal nucleo dell'abducente, che descriverò fra breve, e che secondo lo Schröder van der Kolk (6, pag. 110) trarrebbero la loro origine dalla parte sua inferiore; secondo il Meynert (2, pag. 780), l'Huguenin (3, pag. 169) dalla porzione sua superiore, secondo il Duval (13, pag, 521) da tutto il nucleo, e che sono negate dal Deiters (1, pag. 281), io devo dichiarare che non mi fu possibile di osservarle: in nessun caso mi riuscì di dimostrare il passaggio di un prolungamento nervoso delle cellole di quel nucleo nelle fibre del facciale, ma invece, come il Deiters, ho osservato (le mie osservazioni però non riflettono che il vitello, il porco, il cane ed il gatto) che il ramo superiore della radice del facciale si arrovescia in massa nel suo ginocchio, come dimostra specialmente la sezione antero-posteriore obliqua della tav. X: di più il non osservare in questa sezione alcuna fibra che si sciolga dal ginocchio del facciale per passare nel nucleo dell'abducente, il vedere anzi che esso mantiene il suo calibro e non lo diminuisce di niente malgrado il suo decorso lungo quello, tutto concorre a provarci che il facciale non riceve alcuna fibra dal medesimo.

Così pure non mi venne fatto di vedere quelle fibre che il Meynert (2, pag. 780) fa arrivare al ramo superiore del facciale direttamente dal rafe e che sarebbero fibre dirette provenienti al facciale dai centri, ammesse anche dall'Huguenin (3, pag. 169); è vero che in molte sezioni trasverse, come ad esempio nelle tavole VI e VII, s'incontrano dei fasci di fibre provenienti dal ramo superiore del facciale i quali, rasentandone il ginocchio alla sua circonferenza anteriore, si portano all'interno e a primo aspetto sembra che vadano a finire nel rafe, ma ad un attento esame si vede che essi s'incurvano all'indietro e finiscono nel ginocchio, nel quale penetrano dal suo lato interno.

La stessa considerazione m'induce ad emettere qualche dubbio sull'incrociamento delle fibre del facciale con quelle del lato opposto, ammesso da molti osservatori; Stilling (4, pag. 37), Clarke (7, II, pag. 300), Dean (9, p. 59), Henle (11, p. 249), Meynert (2, p. 780), Schröder van der Kolk (6, p. 109): quest'ultimo anzi, con evidente esagerazione, fa arrivare la maggior parte delle fibre del facciale al rafe, dove divergono di nuovo dal lato opposto in avanti. È vero che in tutta la regione del facciale abbiamo nella parte posteriore del rafe un vivo scambio di fibre fra i due lati del midollo allungato, ma sinora non mi riuscì di accompagnare sino a questo punto le fibre del facciale, d'altra parte le fibre che quivi s'incrociano hanno un calibro più grosso di quelle del facciale; e finalmente l'incrociamento continua vivissimo, anche nei piani superiori e inferiori al medesimo.

Quanto alle fibre che secondo il Meynert (2, pag. 780) arriverebbero al ramo superiore del facciale direttamente dai centri, attraverso il campo motorio, parallelamente e poco distante dal rafe, esse non sono altro che i prolungamenti nervosi di enormi cellole gangliari sparse nel midollo allungato, che descriverò più oltre.

IV.

A livello del ramo superiore del facciale (tav. VI e VII) noi vediamo penetrare nel midollo allungato il nervo abducente, *rab*, il quale decorre direttamente dall'avanti all'indietro e leggermente all'esterno. Esso è composto di due o tre fascetti, i quali però non hanno un decorso rettilineo, ma come ha osservato il Clarke (7, II, pag. 302) leggermente ondulato; laonde nelle sezioni trasverse disegnate nelle mie tavole noi li vediamo solo a frammenti più o meno lunghi. Le radici di questo nervo trovansi adunque all'esterno del rafe, tra questo e il facciale, dal quale però vengono separate da un ammasso di sostanza grigia, propria della regione di questi due nervi, che è l'oliva superiore, in *o s*. Arrivate all'indietro, in vicinanza del pavimento del 4° ventricolo, le fibre dell'abducente si incurvano all'esterno e vanno a sparpagliarsi in un ammasso di sostanza grigia, poco distante dal ginocchio del facciale, anzi quasi contiguo al medesimo, a cui è anteriore ed esterno, il nucleo dell'abducente, *nab*. È desso un nucleo di cellole moltipolari di mezzano calibro, analoghe in tutto alle cellole del nucleo del facciale; è difficile assegnargli una forma, perchè esso non ha limiti netti e si perde a poco a poco nella sostanza bianca che lo circonda; nelle sezioni antero-posteriori oblique (tav. X in *nab*) noi vediamo che esso è collocato nel seno aperto all'innanzi ed all'esterno fatto dal ginocchio del facciale. Quanto alle cellole che lo compongono non ho mai osservato quella differenza di calibro che il Clarke (7, II, pag. 303) descrive fra le cellole della parte interna e quella della parte esterna del nucleo. Le fibre dell'abducente arrivate al nucleo, in parte vi si immettono immediatamente, in parte, portandosi ancora all'indietro, lo circondano, passandogli al lato interno, per penetrarvi dalla parte posteriore; qualche fascio radicolare sembra inclinarsi all'interno, ma ciò non è che in apparenza, perchè ad un attento esame si vede che tutti i suoi fasci si recano all'esterno verso il nucleo. Per le cellole di questo, solo con grande difficoltà, ho potuto accertare, non l'esistenza del prolungamento nervoso, perchè ne posseggo varii esemplari, ma il suo passaggio nella radice dell'abducente: ciò mi riuscì però in modo indubitato nella sezione trasversa, che presento nella fig. 2 della tav. XVI: in questa noi vediamo in *a* una delle cellole più anteriori del nucleo, la quale manda il suo prolungamento nervoso all'interno e in avanti, e questo finisce dopo lungo decorso per penetrare nella radice, in *rab*.

Questa prova perentoria, che io ho ora apportato dell'origine reale dell'abducente dal suo nucleo, riduce al suo giusto valore le osservazioni fatte dallo SCHRÖDER VAN DER KOLK con forti ingrandimenti (6, pag. 121), le quali gli avrebbero dimostrato con certezza, che le fibre dell'abducente non finiscono nel nucleo, ma lo attraversano e scompaiono dall'altra parte del nucleo, sul pavimento del 4° ventricolo. Nel coniglio poi egli avrebbe visto inoltre (l. c. nella nota a piè di pagina) che queste fibre dell'abducente, incrociando il decorso del facciale, riescono ad un grosso gruppo di cellole, collocato sul suo lato esterno, il quale sarebbe in parte il vero nucleo dell'abducente. È specialmente notevole in tutto questo il fatto, che lo SCHRÖDER non abbia saputo vedere in questo grosso nucleo al lato esterno del facciale la continuazione in alto del supposto nucleo esterno dell'acustico, per il quale abbiamo già visto più sopra come lo SCHRÖDER abbia affermato che esso dà origine a fibre dell'acustico.

Ho già detto più sopra che sinora non mi è riuscito di osservare, che da questo nucleo vadano fibre al facciale, perlocchè col DEITERS io lo ritengo soltanto quale nucleo dell'abducente. Così pure non ho potuto constatare per questo nucleo la forma a gomitolo, anche per esso ammessa dal MEYNERT (2, p. 778) non avendo io osservato alcun fascio afferente che gli pervenga direttamente dal rafe: queste fibre (secondo il MEYNERT) per arrivare al nucleo lo circonderebbero all'innanzi ed all'esterno. E neppure ho visto quelle fibre che il DUVAL descrive (13, pag. 521) arrivare dal rafe al nucleo, passando innanzi al ginocchio del facciale. Nè finalmente mi venne fatto di osservare quei fasci di fibre che, nel decorso complicato che il CLARKE (7, II, pag. 303) assegna al nervo abducente, gli arriverebbero dall'*eminentia teres*.

Sul decorso dell'abducente noi osserviamo disposti dei gruppi di cellole di varia grossezza, ai quali sinora non venne fatto grande attenzione dai precedenti osservatori e sui quali non possediamo alcun dato sicuro, per poter connetterli con questo nervo.

Fra le fibre del corpo trapezoide, che a quest'altezza abbracciano all'innanzi il midollo allungato, noi vediamo in *p* (tav. III, IV, V) attorno all'abducente un nucleo di piccole cellole rotondeggianti a scarsi prolungamenti, analoghe a quelle del nucleo anteriore dell'acustico; questo nucleo accompagna l'abducente in tutta la sua altezza nel midollo allungato; ma nulla saprei dire del suo significato morfologico, nè del suo ufficio; nè ho potuto osservare che dalle sue cellole parta un prolungamento nervoso, nè che l'abducente sia più voluminoso dopo attraversato questo nucleo: probabilmente esso non ha che fare col nervo stesso.

Inoltre lungo tutto il decorso dell'abducente (a partire però solo dai fasci più profondi del corpo trapezoide) noi troviamo sparse delle cellole moltipolari enormi, le più grosse che io abbia finora osservate nei centri nervosi: esse sono le analoghe delle cellole enormi che noi troviamo pure sparse in una grande estensione del midollo allungato e delle quali dirò ancora più oltre: ma qui esse meritano una speciale menzione, perchè, il loro stretto rapporto colle fibre dell'abducente potrebbe far credere che esse diano loro origine, tanto più che per la loro grossezza esse hanno carattere eminentemente motorio. Or bene, in tutti i casi nei quali mi riuscì di dimostrare in queste cellole la partenza del prolungamento nervoso e di seguitarlo per un tratto abbastanza lungo, da poter pronunziarmi sulla sua direzione (cosa che mi occorse moltissime volte perchè, come già il Deiters ha fatto osservare (1, pag. 232), non evvi forse nel midollo allungato un'altra località in cui più facilmente si possano seguire i prolungamenti nervosi delle cellole), ho sempre verificato che esso si porta all'indietro. Così nella fig. 2 della tav. XVI, che mi ha già servito a dimostrare il passaggio del prolungamento nervoso delle cellole del nucleo nella radice dell'abducente, vediamo in *b* un'altra cellola moltipolare, di calibro più grosso di quella del nucleo in *a*, la quale è collocata sul lato esterno del nervo: dal suo polo posteriore parte il prolungamento nervoso, che va all'indietro ed all'interno, anzi attraversa la radice per portarsi verso il rafe. Questa tendenza del prolungamento nervoso a portarsi verso il rafe ci è dimostrata anche nella fig. 5 della stessa tavola, nella quale vediamo una cellola isolata fra il rafe e la radice dell'abducente (la quale rimane fuori del campo); essa manda il suo prolungamento all'indietro, poi esso si ripiega direttamente all'interno verso il rafe. Però non tutte queste cellole mandano il loro prolungamento nervoso all'interno; così nella fig. 1 della stessa tavola noi abbiamo una di queste cellole collocata sul lato interno della radice dell'abducente; il suo prolungamento nervoso va dapprima e per lunghissimo tratto all'indietro e leggermente all'esterno, poi, inclinandosi sempre più all'esterno, attraversa la radice, si ripiega bruscamente in avanti, decorre per un piccolo tratto in questa direzione e finalmente, facendo un altro angolo, si volge direttamente all'esterno. Nella fig. 3 della stessa tavola i prolungamenti nervosi delle due cellole, che essa ci presenta, contraggono un rapporto molto più diretto colle fibre dell'abducente; anzi quello della cellola più interna sembra immettersi in mezzo ad esse, sempre però in direzione opposta alla loro e probabilmente non fa che attraversarle come nei casi suddescritti. Quanto sia facile il dimostrare la partenza dei prolungamenti nervosi da queste cellole, e seguitarli per lunghissimi tratti, ce lo dimostra la fig. 4 della stessa tavola, nella quale ben sei cellole vicine mandano il loro prolungamento nervoso all'indietro, cinque più o meno all'interno, una decisamente all'esterno, attraverso la radice dell'abducente. In un sol caso, che non ho disegnato, ho osservato che il prolungamento nervoso si portava per un certo tratto all'avanti ed all'esterno, ma poscia si ripiegava bruscamente all'indietro e in seguito decorreva all'indietro ed all'interno come tutti quelli sinora descritti.

Laonde quanto ai prolungamenti nervosi di queste cellole enormi, sparse attorno alla radice dell'abducente, possiamo stabilire la legge generale che essi si dirigono all'indietro. In nessun caso sinora mi occorse di osservare che essi venissero ad immettersi nella radice dell'abducente e nemmeno che si portassero all'esterno e in avanti nella loro direzione; in conseguenza di ciò possiamo ammettere come dimostrato, che queste cellole non hanno nulla a fare coll'origine di questo nervo. Cade così la possibilità, già ammessa dal Deiters (1, pag. 195), che qualcuna di queste cellole serva di origine a fibre dell'abducente.

V.

Insieme colle ultime fibre della porzione superiore del facciale (tav. VII) comincia a svilupparsi in *ntr* un nuovo nucleo di cellole, il quale va rapidamente aumentando le sue dimensioni, cosicchè nella sezione immediatamente susseguente (tav. VIII) noi lo troviamo già composto di un gran numero di cellole separate in varii gruppi. È questo il nucleo del trigemino, che, per la località che occupa nel midollo allungato e pel modo di comportarsi delle sue cellole, ci si dimostra di natura motoria. Esso è infatti collocato sul prolungamento del nucleo del facciale, colla differenza però che esso si trova più centrale, anzi più vicino al pavimento del 4° ventricolo che alla superficie anteriore del midollo, mentre abbiamo visto essere l'inverso pel nucleo del facciale; i due nuclei non sono separati che da brevissimo tratto, appena tutta l'altezza del ramo superiore del facciale; ed è appunto per questo stretto rapporto che passa fra i due nuclei che gli antichi osservatori li confusero insieme ed ammisero, oltre il nucleo motorio del trigemino, che sto descrivendo e che denominarono nucleo superiore, un altro nucleo inferiore, che si prolungava in basso sin dove giunge il nostro nucleo del facciale. Che il nucleo motorio del trigemino discenda più in basso dell'apice del nucleo del facciale, come il Meynert afferma di aver sovente osservato (2, pag. 774), a me non occorse mai di vedere. A questo nucleo arriva la porzione orizzontale o media della radice del trigemino alla quale come è noto si aggiunge per costituire il tronco di questo nervo una grossa radice ascendente ed una discendente; per ora ho limitato le mie ricerche al nucleo motorio, alla radice media ed alla radice ascendente; mentre sulla porzione discendente, sul nucleo sensibile e sul controverso incrociamento delle fibre del trigemino sulla linea mediana è mia intenzione di ritornare in un prossimo lavoro sull'origine reale dei rimanenti nervi cerebrali.

Il nucleo motorio del trigemino è composto di cellole moltipolari, analoghe alle cellole che compongono i nuclei del facciale e dell'abducente, e quel che più importa ho dimostrato anche per esse la partenza del prolungamento nervoso come dirò fra breve. A questo nucleo arriva la radice media del trigemino in *rmtr* e questa arrivatavi, in parte vi si immette direttamente penetrandovi dalla sua parte antero-esterna e in parte lo circonda all'indietro ed all'esterno; mentre una porzione delle sue fibre si conduce verso il pavimento del 4° ventricolo, l'altra abbraccia il nucleo, in parte vi penetra dalla sua parte posteriore ed in parte sembra continuarsi verso il rafe. Che le cellole del nucleo diano realmente origine a parte delle fibre della radice media del trigemino ce lo dimostra la fig. 2 della tav. XVII; in essa noi vediamo in *a* una delle cellole più anteriori del nucleo, la quale dal suo polo anteriore dà origine ad un sottile prolungamento nervoso, che dopo non breve decorso s'immette nella radice. Inoltre, attorno alla radice del trigemino troviamo sparse delle cellole, analoghe in tutto a quelle del nucleo, per le quali ho dimostrato che mandano pure il loro prolungamento nervoso nella radice; così nella fig. 1 della stessa tavola noi vediamo in *a* una cellola con corpo molto allungato, sul lato interno della radice e molto innanzi al nucleo *ntr*, la quale dal suo polo esterno dà origine al prolungamento nervoso, che dirigendosi trasversalmente all'esterno arriva alla radice e vi si immette. Sul decorso della radice media del trigemino, oltre a queste cellole moltipolari di mezzano calibro, ne ho osservate anche delle più grosse ed una anzi in mezzo ai fasci stessi della radice, anch'essa col suo prolungamento nervoso, che si portava all'interno ed all'indietro; ma non mi fu possibile di seguitarlo per un tratto abbastanza lungo, per potere stabilire con certezza, che esso prendesse parte alla costituzione della radice.

Pel trigemino abbiamo, come ho già detto, oltre a questa radice media una radice ascendente, subodorata già dagli antichi anatomici, osservata dallo Stilling (4, pag. 134) (il quale ammetteva che una parte del cordone posteriore passasse direttamente nel trigemino), ma solo dimostrata in modo definitivo contemporaneamente dal Clarke (7, I, pag. 249) e dallo Schröder van der Kolk (6, p. 125). In tutte le tavole di questa memoria noi vediamo in *ratr*, all'innanzi del peduncolo cerebellare inferiore, un grosso fascio di fibre sezionate trasversalmente che ha forma di mezza luna. È questa la radice ascendente del trigemino, la quale dopo lungo decorso nel midollo allungato si unisce alle altre radici per costituire il grosso tronco che esce ai lati del ponte di Varolio. Già nelle tavole II, III, IV della mia prima memoria è facile osservare verso la periferia esterna del midollo allungato, malgrado che io abbia ommesso l'indicazione, questa sezione a mezzaluna; paragonando con esse quelle che ora presento, noi vediamo come nel suo ascendere attraverso il midollo allungato la radice ascendente del trigemino subisce uno spostamento in avanti, e mentre da principio è collocata ad una certa profondità, a livello del ramo inferiore del facciale, si fa superficialissima (tav. III), e più in alto a livello del ramo superiore si fa nuovamente più profonda, perchè viene ricoperta dalle fibre del trapezio (tav. IV). Il passaggio di questa radice nel nervo trigemino noi lo vediamo abbastanza bene nella tav. VIII, nella quale essa non ci si presenta più costituita da fibre sezionate trasversalmente, ma obliquamente e ad essa vediamo unirsi la radice media *rmtr*. Nulla poi di più facile che il convincersi di questo passaggio sulle sezioni frontali, o antero-posteriori, che però mi propongo di presentare in altra occasione. Se però noi conosciamo bene questo fatto e la topografia della radice ascendente nei varii piani del midollo allungato, lo stesso non possiamo dire della sua origine e del suo modo di comportarsi cogli altri nervi cerebrali, coi quali viene in rapporto: inquantochè sulle connessioni così largamente ammesse dagli autori e specialmente dallo Schröder van der Kolk (6, pag. 125 e seg.), noi non possediamo alcun fatto ben accertato, ma delle semplici congetture. Nella concavità della radice ascendente noi troviamo un ammasso di sostanza gelatinosa, la quale non è altro che la continuazione in alto del tubercolo di Rolando. In mezzo ai piccoli elementi cellolari che lo compongono, pei quali non mi è riuscito in modo alcuno di dimostrare la loro connessione colle fibre della radice, trovansi frequentemente cellole moltipolari di calibro mezzano, generalmente con corpo allungato e numerosi prolungamenti; per qualcheduna di queste cellole ho dimostrato, che dànno origine al prolungamento nervoso; ma in tutti questi casi esso non si portava nella radice, bensì in direzione opposta; così le due cellole, che nella fig. 1 della tav. XIII trovansi nella concavità della radice ascendente del trigemino *ratr*, il prolungamento nervoso, al quale dànno origine, si porta in avanti e la cellola della fig. 2 della stessa tavola lo manda direttamente all'interno; laonde non posso ammettere col Krause (12, pag. 420), che tutti gli elementi, dei quali consta il *caput cornu post.*, abbracciato dalla radice ascendente del trigemino, diano origine alle fibre di questa.

A livello del nucleo motorio del trigemino (tav. VIII) prende un grande sviluppo quel nucleo di cellole moltipolari enormi (*o*), che già abbiamo visto in corrispondenza dell' abducente e che già comincia a presentarsi nei piani del glossofaringeo. Queste cellole sono collocate sul decorso di fasci antero-posteriori di fibre, che si recano verso il pavimento del 4° ventricolo e nei quali esse mandano il loro prolungamento nervoso; questo è pure diretto all'indietro come ho già dimostrato per la regione dell'abducente, e come mi riuscì con grandissima facilità di dimostrare in molte sezioni, che posseggo, del midollo allungato, nelle quali trovansi queste cellole. Tra quelle che appartengono alla regione del glossofaringeo ho scelto, come tipo di questa disposizione, la sezione disegnata nella fig. 3 della tav. XVII; in essa noi abbiamo ben sei cellole vicine, che tutte mandano il loro prolungamento nervoso all'indietro e all'interno. Per la regione del trigemino ho scelto la sezione rappresentata nella fig. 4 della stessa tavola, nella quale altre sei cellole vicine mandano pure il loro prolungamento nervoso all'indietro ed all'interno. Una sola eccezione ho sinora incontrato a questa legge generale; essa è disegnata nella fig. 5 della stessa tavola, in cui una delle cellole più posteriori di questo nucleo manda il suo prolungamento nervoso in avanti ed all'esterno, direzione che esso mantiene per un lunghissimo tratto.

Qual significato hanno queste cellole? Per me, sebbene per ora mi sia impossibile dare una risposta decisiva a questa domanda, non esito menomamente a dichiarare che esse non hanno alcun rapporto coll'origine dei nervi cerebrali, che si trovano nel loro stesso piano (facciale, abducente, trigemino); in prima perchè in nessun caso ho visto il loro prolungamento nervoso passare nella radice di questi nervi, anzi esso va in direzione opposta; in secondo luogo perchè il loro prolungamento nervoso ha un calibro molto più considerevole di quelli che compongono le radici dei tre nervi menzionati. Cade così la possibilità già ammessa dal Deiters (1, pag. 195), che queste cellole servano di origine in qualche caso ai nervi suddetti, su di che il Meynert (2, pag. 787) vorrebbe fondare una sua presunzione sull'ufficio di queste cellole; secondo lui esse servirebbero a connettere nei centri nervosi gli organi che producono i suoni con gli organi che li ricevono. Mi affretto però a soggiungere che già il Deiters ammette che queste cellole non servano nei più dei casi all'origine dei nervi, sibbene servano d'intermezzo ai fasci dei cordoni anteriori, che in questa regione cambiano direzione; opinione che non può dirsi sicura da ogni contestazione. Parlando più sopra dell'origine del facciale abbiamo visto che il Meynert fa arrivare direttamente dai centri (2, pag. 780) al ramo superiore del facciale delle fibre che attraversano il campo motorio, ai lati e a poca distanza dal rafe; la posizione e la direzione che egli dà a queste fibre mi fa supporre che siano appunto quei fasci che ho or ora descritto, e in tal caso, nè queste fibre verrebbero direttamente dal rafe, nè arriverebbero al facciale.

VI.

Ora ecco in riassunto i risultati delle mie ricerche sull'origine dei nervi cerebrali che ho esposto nella mia memoria:

1° Quanto all'origine del glossofaringeo i miei reperti sono del tutto negativi tanto per le cellole del nucleo classico, quanto per le cellole del supposto nucleo motorio anteriore; mentre mi venne fatto di dimostrare in modo indubitato il passaggio delle fibre del fascicolo solitario nella radice del glossofaringeo;

2° Nel piano del glossofaringeo, come pure dei nervi susseguenti, troviamo sul decorso del rafe e a poca distanza dal medesimo un grosso nucleo di cellole (nucleo del rafe) che mandano per ogni verso i loro prolungamenti nervosi;

3° Quanto all'origine dell'acustico i miei reperti sono parimente negativi per le piccole cellole che ne costituiscono il nucleo; al contrario ho dimostrato per le cellole di mezzano calibro, che con quelle concorrono alla formazione del nucleo posteriore dell'acustico e le cellole di grosso calibro, che si trovano sul suo confine anteriore, che esse mandano i loro prolungamenti nervosi all'interno, nella direzione dei sottili fasci di fibre che attraversano il nucleo, i quali non sono altro che la continuazione della radice posteriore dell'acustico: essa non arresta tutte le sue fibre nel nucleo, ma in parte si continua all'interno, verso il rafe, dividendosi nei fasci suddetti;

4° Sul decorso della radice posteriore, laddove questa circonda il peduncolo cerebellare inferiore, trovansi disposte delle grosse cellole moltipolari, che mandano il loro prolungamento nervoso in essa, sempre però verso l'interno;

5° Il così detto nucleo esterno dell'acustico non dà origine a fibre dell'acustico, almeno dello stesso lato. Le sue cellole mandano i loro prolungamenti nervosi in direzione opposta alla radice anteriore, in grossi fasci di fibre che attraversano la radice del facciale e si portano verso l'interno e in avanti: su essi però non posso ancora pronunciarmi in modo definitivo;

6° Sul nucleo anteriore dell'acustico e sui nidi di piccole cellole sparsi nella radice anteriore i miei reperti sono del tutto negativi;

7° Il nucleo del facciale, collocato alla periferia anteriore del cordone laterale, è composto di cellole di mezzano calibro, per le quali ho dimostrato che dànno origine a un prolungamento nervoso, che va ad immettersi nel ramo inferiore della radice del facciale;

8° A formare questo ramo inferiore concorrono anche altre cellole di mezzano calibro, che si trovano sparse nel midollo allungato, a poca distanza dal nucleo del facciale e lungo la stessa radice;

9° Fra il nucleo del facciale e il rafe trovansi sparse grosse cellole moltipolari che per lo più mandano il loro prolungamento nervoso verso il rafe, in un solo caso ho osservato che esso prolungamento si portava verso il ramo inferiore del facciale;

10° Al facciale non arrivano fibre dal nucleo dell'abducente;

11° Il nucleo dell'abducente è composto di cellole moltipolari di mezzano calibro, per le quali ho pure dimostrato la partenza del prolungamento nervoso e il suo passaggio nella radice dell'abducente;

12° Sul decorso della radice dell'abducente trovansi sparse cellole moltipolari enormi, che tutte mandano il loro prolungamento nervoso all'indietro, la maggior parte all'indietro ed all'interno verso il rafe, qualcheduna invece all'indietro ed all'esterno, nessuna nella radice;

13° Quanto al nucleo motorio del trigemino, ho pure dimostrato che le sue cellole dànno origine al prolungamento nervoso che va nella radice;

14° A formare la radice media del trigemino concorrono anche i prolungamenti nervosi di cellole di mezzano calibro, che si trovano sparse nel midollo allungato, attorno ad essa e all'innanzi del nucleo;

15° Per i piccoli elementi della sostanza gelatinosa del Rolando, abbracciata dalla radice ascendente del trigemino, i miei reperti sono negativi; solo per le cellole di mezzano calibro che vi incontriamo ho dimostrato, che dànno origine al prolungamento nervoso, il quale però non va nella radice, ma si porta in avanti ed all'interno;

16° In tutto il midollo allungato, a cominciare dai piani del glossofaringeo sino al margine superiore del ponte di Varolio, trovansi sparse delle cellole moltipolari enormi: per esse ho dimostrato che il loro prolungamento nervoso va all'indietro e all'interno; in un solo caso l'ho visto portarsi in direzione opposta e non ho mai osservato che esso passasse a costituire le radici di qualche nervo cerebrale.

Torino, Novembre 1878.

BIBLIOGRAFIA

1. O. Deiters - *Untersuchungen über Gehirn u. Rückenmark*, herausgegeben von M. Schultze. Braunschweig, 1865.
2. Th. Meynert - *Vom Gehirne der Säugethiere: im* Stricker's Handbuch. II Band.
3. G. G. Huguenin - *Allgemeine Pathologie des Nervensystems*. Anatomische Einleitung. Zürich, 1873.
4. B. Stilling - I. *Textur u. Function der medulla oblongata*. Erlangen, 1843.
   II. *Untersuchungen über den Bau und die Verrichtungen des Gehirns* (Varolischen Brücke). Jena, 1846.
5. v. Lenhossek - *Neue Untersuchungen über den feineren Bau des centralen Nervensystems des Menschen*. Denkschriften der K. Akademie der Wissenschaften. Wien, 1855.
6. J. L. C. Schröder van der Kolk - *Bau u. Function der medulla spinalis u. oblongata*. Deutsche Uebersetzung. Braunschweig, 1859.
7. Lockhart Clarke - I. *Researches into the structure of the brain*. First series. *On the structure of the medulla oblongata* (from the philos. Transactions. London, 1858).
   II. *Researches into the structure of the brain*. Second series (Ib., 1868).
8. L. Stieda - *Studien über das centrale Nervensystems der Wirbelthiere*. Leipzig, 1870.
9. J. Dean - *The gray substance of the medulla oblongata and trapezium*. Washington, 1869.
10. H. Frey - *Handbuch der Histologie und Histochemie des Menschen*. Leipzig, 1874.
11. J. Henle - *Handbuch der system. Anatomie des Menschen. Nervenlehre*. 2te *Auflage*. Braunschweig, 1879.
12. W. Krause - *Handbuch der menschlichen Anatomie*. I Band. Hannover, 1876.
13. M. Duval - *Recherches sur l'origine réelle des nerfs craniens*. Journal de l'Anatomie et de la Physiologie, 1876 Sept. et Oct.; 1877 Mars et Avril; 1878 Janv. et Févr.
14. A. Kölliker - *Éléments d'histologie humaine*, 2me édition Française sur la 5me édit. Allemande. Paris, 1868.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tutte le figure disegnate a forte ingrandimento (*tav. XII-XVII*, Ob. IV, Hartnack, Oc. 2) *sono disposte in modo, che la parte posteriore del midollo allungato guarda verso l'alto della tavola, essendo il rafe parallelo all'asse della medesima: ad ogni tavola indicherò da che lato guardi la linea mediana del midollo. Le figure d'insieme* (*tav. I-XI*) *sono disegnate ad un piccolo ingrandimento di circa* 10 *diametri* Oc. 2, *e prima lente dell'* Ob. IV *di* Hartnack. *Tutte poi indistintamente le figure vennero disegnate coll'aiuto di una camera lucida di* Nachet.

Tav. **I**.

Sezione trasversa del midollo allungato a livello delle ultime radici del glossofaringeo.

Tav. **II**.

Sezione trasversa del midollo allungato a livello delle prime tracce del nucleo del facciale.

Tav. **III**.

Sezione trasversa del midollo allungato a livello della radice posteriore dell'acustico.

Tav. **IV**.

Sezione trasversa del midollo allungato a livello della radice anteriore dell'acustico.

Tav. **V**, **VI**, **VII**.

Sezione trasversa del midollo allungato a livello della radice del facciale.

Tav. **VIII**.

Sezione trasversa del midollo allungato a livello della radice media del trigemino.

Tav. **IX**.

Sezione trasversa del midollo allungato obliqua in basso e all'indietro, per dimostrare le due radici dell'acustico sulla stessa sezione.

Tav. **X**.

Sezione antero-posteriore obliqua all'innanzi ed all'esterno del midollo allungato, a livello del nucleo del facciale e del ramo inferiore della sua radice. La parte superiore del midollo guarda verso il basso della tavola.

Tav. **XI**.

Sezione antero-posteriore ed obliqua all'innanzi ed all'esterno del midollo allungato, a livello del fascicolo solitario. La parte superiore del midollo guarda verso l'alto della tavola.

Denominazioni comuni alle 11 prime tavole: *npac* nucleo posteriore dell'acustico; *nglf* nucleo del glossofaringeo; *nf* nucleo del facciale; *naac* nucleo anteriore dell'acustico; *nD* nucleo del Deiters; *nab* nucleo dell'abducente; *ntr* nucleo del trigemino; *os* oliva superiore; *nr* nucleo del rafe; *p* nucleo di piccole cellole tra i fasci del trapezio, ai lati dell'abducente: o grosse cellole sparse nel midollo allungato; *rglf* radice del glossofaringeo: *rpac* radice posteriore dell'acustico; *raac* radice anteriore dell'acustico; *rfi* ramo inferiore della radice del facciale: *rfs* ramo superiore della radice del facciale; *gf* ginocchio del facciale; *rab* radice dell'abducente; *ratr* radice ascendente del trigemino; *rmtr* radice media del trigemino; *pci* peduncolo cerebellare inferiore; *fs* fascicolo solitario.

Tav. XII.

Fig. 1ª. Cellola del nucleo del rafe, la quale manda il suo prolungamento nervoso verso di questo, arrivatovi esso si arrovescia nuovamente all'esterno.

Fig. 2ª. Due cellole dello stesso nucleo sul lato sinistro del rafe, le quali mandano i loro prolungamenti nervosi in opposta direzione; quello in *a* attraversa il rafe.

Fig. 3ª. Due cellole come nella fig. 2: solo esse si trovano in mezzo alle fibre del rafe.

Fig. 4ª. Cellola dello stesso nucleo assai distante dal rafe, la quale dà origine al prolungamento nervoso, che s'immette subito in un fascio di fibre arciformi, arriva con esso al rafe, lo attraversa per continuare il suo cammino dalla parte opposta.

Fig. 5ª. Cellola dello stesso nucleo in mezzo alle fibre del rafe, la quale manda il suo prolungamento nervoso direttamente all'indietro.

Fig. 6ª. Tre cellole sul decorso del rafe, due in *a* e *b* lo mandano all'esterno, la terza in *c* lo manda all'innanzi.

Tav. XIII.

Nelle figure 1-4 di questa tavola la linea mediana del midollo guarda l'asse della tavola: nella fig. 5-6 il margine sinistro della medesima.

Fig. 1ª. Due grosse cellole della sostanza gelatinosa del Rolando, abbracciata dalla radice ascendente del trigemino, *ratr*, che mandano il loro prolungamento nervoso in avanti.

Fig. 2ª. Altra cellola come sopra, che lo manda all'interno.

Fig. 3ª. Grossa cellola in *a* sul confine anteriore del nucleo dell'acustico, la quale manda il suo prolungamento nervoso all'indietro e all'interno.

Fig. 4ª. Tre grosse cellole lungo il decorso della radice posteriore dell'acustico, le quali mandano il loro prolungamento nervoso all'interno; uno di essi s'immette nella radice.

Fig. 5ª. Cellola di mezzano calibro nel centro del nucleo dell'acustico, la quale manda il suo prolungamento nervoso all'interno e in avanti nella direzione dei sottili fasci di fibre che attraversano il nucleo.

Fig. 6ª. Cellola come sopra, che manda il suo prolungamento nervoso dapprima all'esterno, poi dopo breve decorso lo arrovescia all'interno.

Tav. XIV.

In tutte le figure di questa tavola la linea mediana del midollo guarda il margine sinistro.

Fig. 1ª. Due cellole fra le più anteriori ed esterne del nucleo del Deiters, che mandano il loro prolungamento nervoso all'interno.

Fig. 2ª. Cinque cellole del nucleo del DEITERS collocate allo sbocco della radice anteriore dell'acustico *raac*, le quali tutte mandano il loro prolungamento nervoso all'interno, in direzione opposta alla radice.

Fig. 3ª. Due cellole, in *a* e *b*, del nucleo del DEITERS, che mandano il loro prolungamento nervoso nel grosso fascio di fibre che attraversa il ramo superiore della radice del facciale.

Fig. 4ª. Cellola come sopra in *a*, la quale manda il suo prolungamento nervoso all'interno ed in avanti in un fascio di fibre, che si continua in tale direzione; in *b* troviamo un'altra cellola dello stesso nucleo, che manda il suo prolungamento nervoso in direzione opposta.

Tav. **XV**.

Nelle fig. 1-4 la linea mediana del midollo guarda il margine sinistro, nelle fig. 5-6 l'asse della tavola.

Fig. 1ª. Cellola in mezzo ai fasci del ramo inferiore del facciale, che manda il suo prolungamento nervoso in questo, all'indietro e all'interno.

Fig. 2ª. Cellola come sopra, che manda pure il suo prolungamento nervoso nel ramo inferiore del facciale, ma all'innanzi ed all'esterno.

Fig. 3ª. Grossa cellola moltipolare fra il nucleo del facciale *nf* e il rafe; il suo prolungamento nervoso si porta direttamente all'interno, attraversando i fasci di fibre, che provengono dal nucleo del DEITERS.

Fig. 4ª. Cellola come sopra, che manda invece il suo prolungamento nervoso all'indietro e all'esterno verso i fasci che provengono dal nucleo del facciale *nf*.

Fig. 5ª. Cellola isolata all'indietro del nucleo del facciale; da essa parte il prolungamento nervoso, che va dapprima all'esterno, poi si arrovescia all'indietro nei fasci che provengono dal nucleo.

Fig. 6ª. Nucleo del facciale; in *a* e *b* due sue cellole che mandano i loro prolungamenti nervosi nei fasci di fibre che partono dal nucleo.

Tav. **XVI**.

Nelle figure 1-4 la linea mediana del midollo guarda l'asse della tavola, nella fig. 5 il margine sinistro.

Fig. 1ª. Cellola sul lato interno della radice dell'abducente, *rab*, dalla quale parte il prolungamento nervoso, che va dapprima all'indietro ed all'esterno, attraversa la radice, si arrovescia in avanti e finalmente decorre direttamente all'esterno.

Fig. 2ª. Cellola (in *a*) del nucleo dell'abducente, dalla quale parte il prolungamento nervoso, che va all'innanzi ed all'interno, e dopo lungo decorso si immette nella radice *rab*. In *b* grossa cellola moltipolare, che manda il suo prolungamento nervoso all'indietro e all'interno, attraverso la radice dell'abducente, verso il rafe.

Fig. 3ª. Due cellole vicine sul lato esterno della radice dell'abducente, le quali mandano il loro prolungamento nervoso all'indietro ed all'interno; quello della cellola posteriore s'immette nelle fibre della radice.

Fig. 4ª. Sei cellole vicine sul lato interno della radice dell'abducente, che mandano tutte il loro prolungamento nervoso all'indietro; cinque più o meno all'interno, una attraverso la radice, all'esterno.

Fig. 5ª. Cellola fra la radice dell'abducente ed il rafe, la quale manda il suo prolungamento nervoso all'indietro, poi lo ripiega all'interno verso il rafe.

Tav. XVII.

In tutte le figure di questa tavola la linea mediana del midollo guarda l'asse della tavola.

Fig. 1ª. Cellola sul lato interno della radice del trigemino all'innanzi del nucleo motorio *ntr*, la quale manda il suo prolungamento nervoso all'esterno nella radice.

Fig. 2ª. Cellola in *a* del nucleo motorio del trigemino, la quale manda il suo prolungamento nervoso all'innanzi ed all'esterno nella radice.

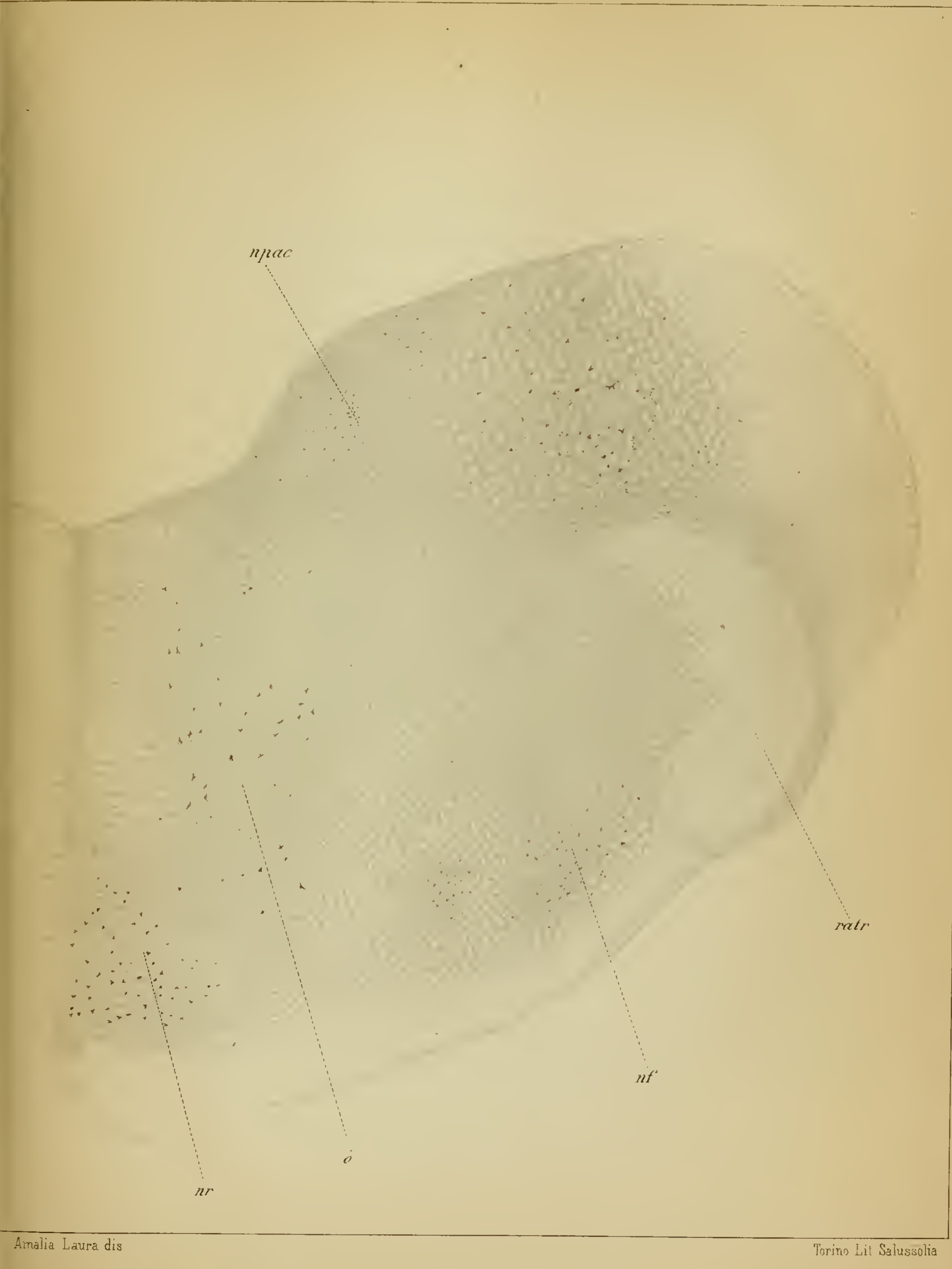
Fig. 3ª. Sei cellole vicine della regione del glossofaringeo, che mandano il loro prolungamento nervoso all'indietro ed all'interno.

Fig. 4ª. Sei cellole vicine della regione del trigemino, che mandano pure il loro prolungamento all'indietro ed all'interno.

Fig. 5ª. Cellola come sopra, che manda il suo prolungamento nervoso all'innanzi ed all'esterno.

Amalia Laura dis.

Torino Lit Salussolia



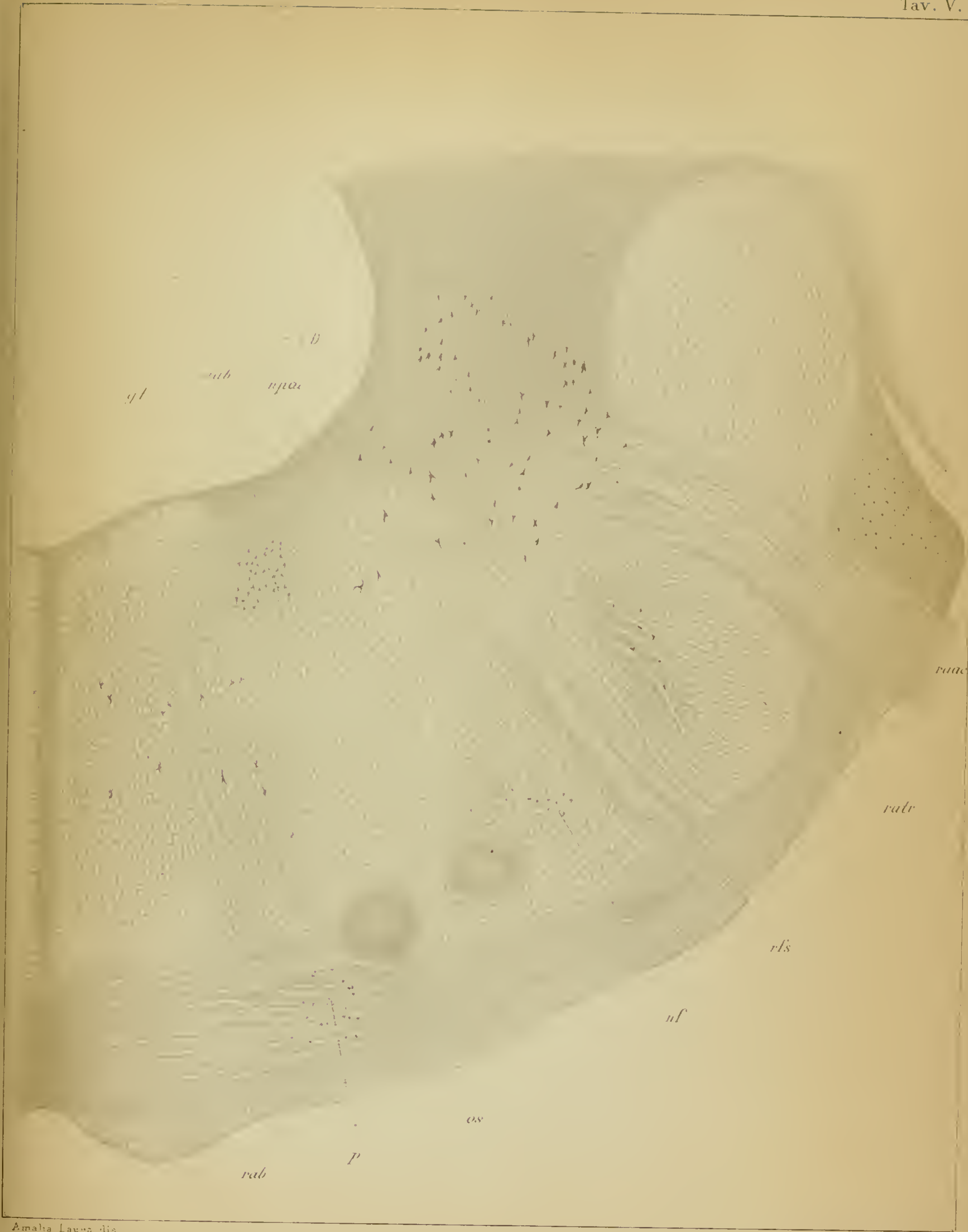
Amalia Laura dis

Torino Lit Salussolia

Amalia Laura dis.
Torino, Lit Salussolia

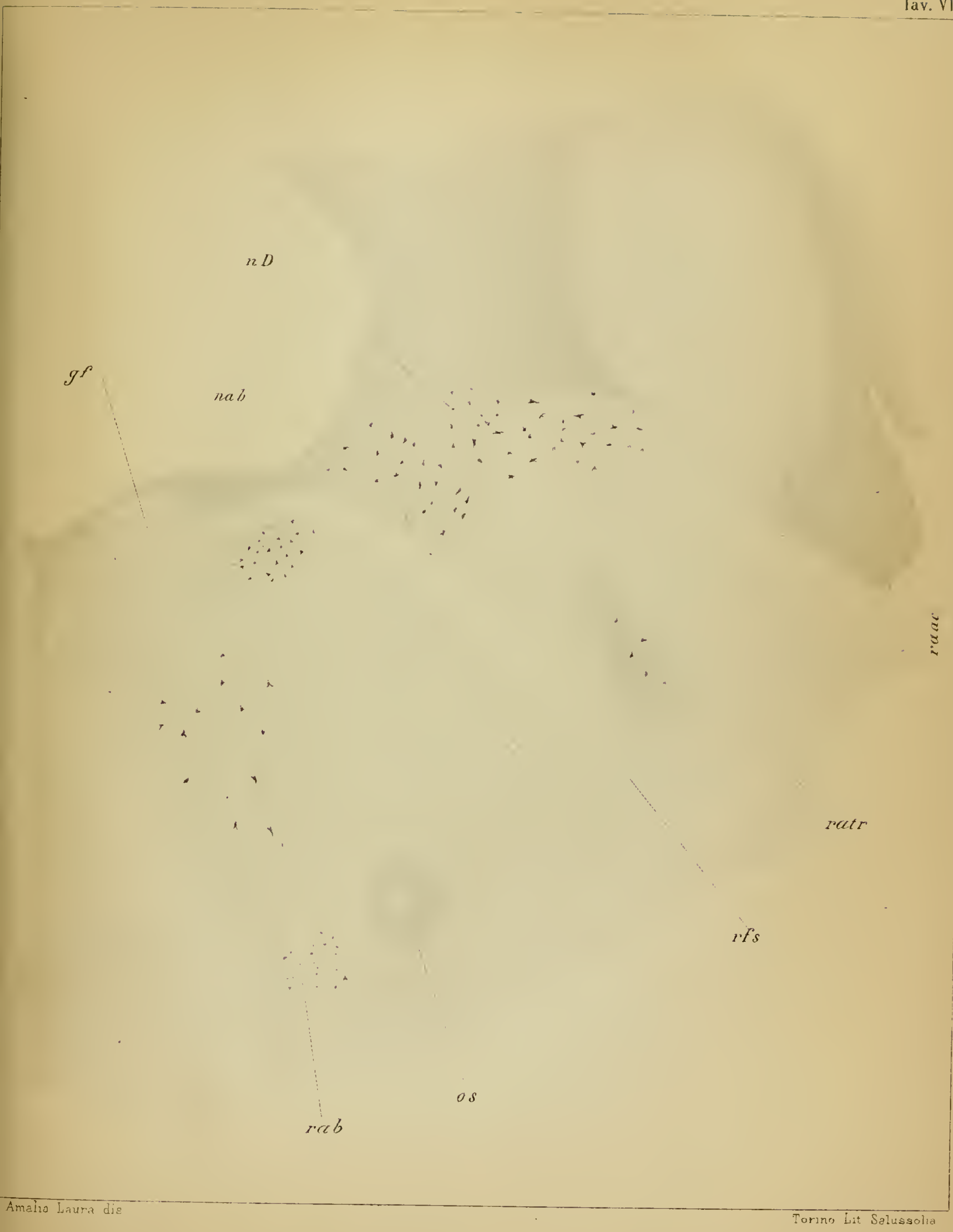
Amalia Laura dis.

Torino, Lit. Salussolia



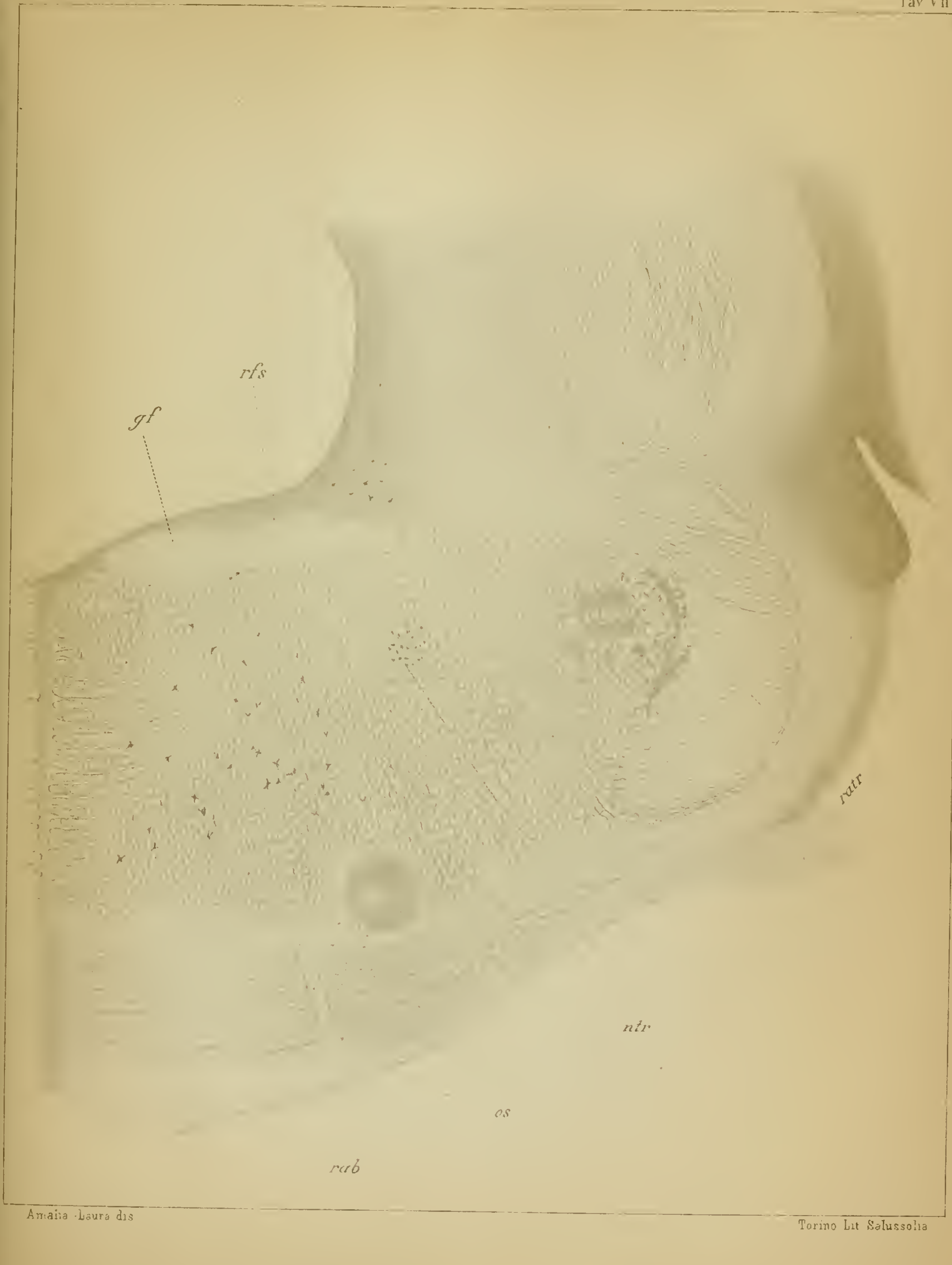
Amalia Laura dis

Torino, Lit. Salussolia



Amalia Laura dis

Torino Lit Salussolia

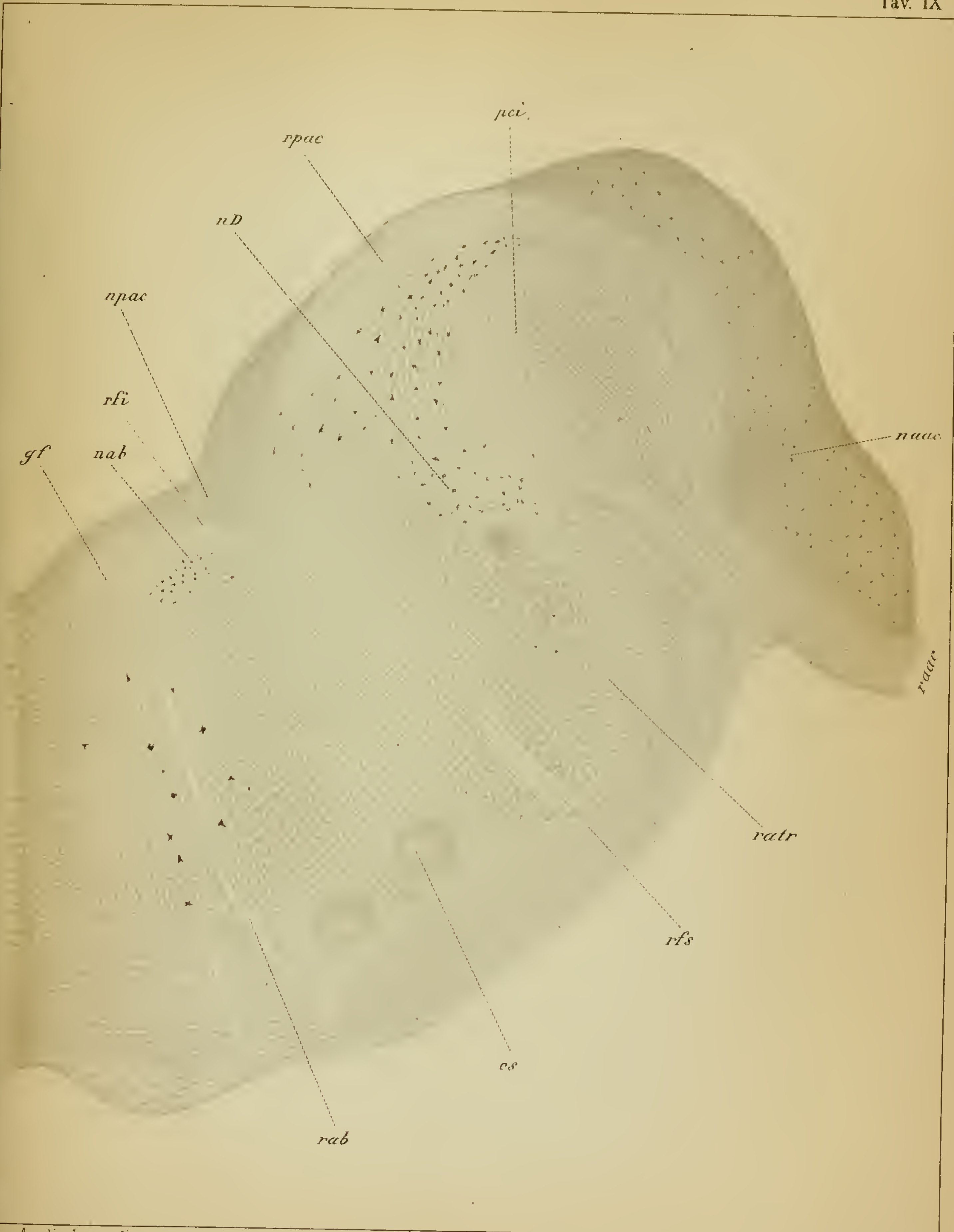


Amalia Laura dis

Torino Lit Salussolia

Amalia Laura dis

Torino Lit. Salussolia



Amalia Laura dis.

Torino Lit. Salussolia

Amalia Laura dis.
Torino Lit. P. Salussolia

Amalia Laura dis.

Torino, Lit. Salussolia

Fig 1

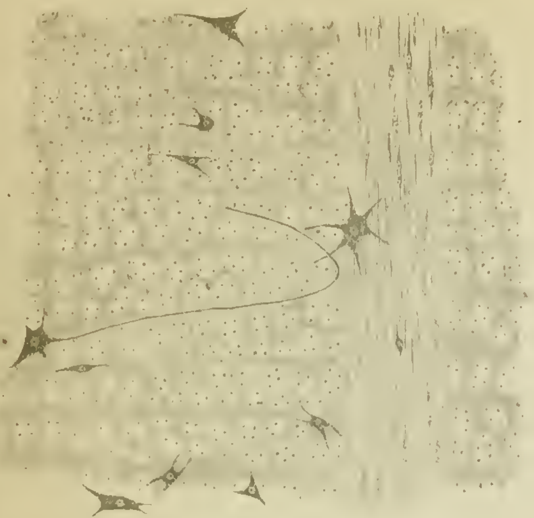


Fig 2

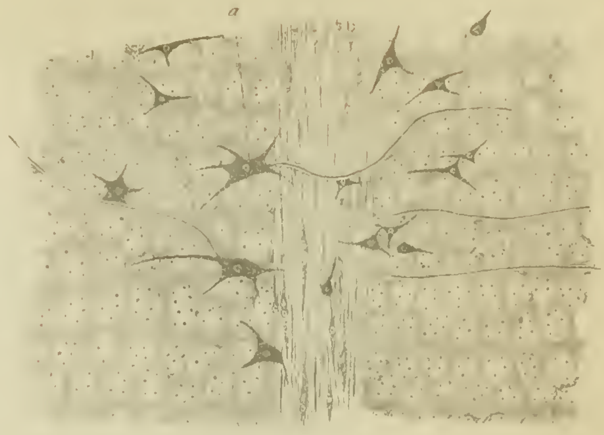


Fig 3

Fig 4

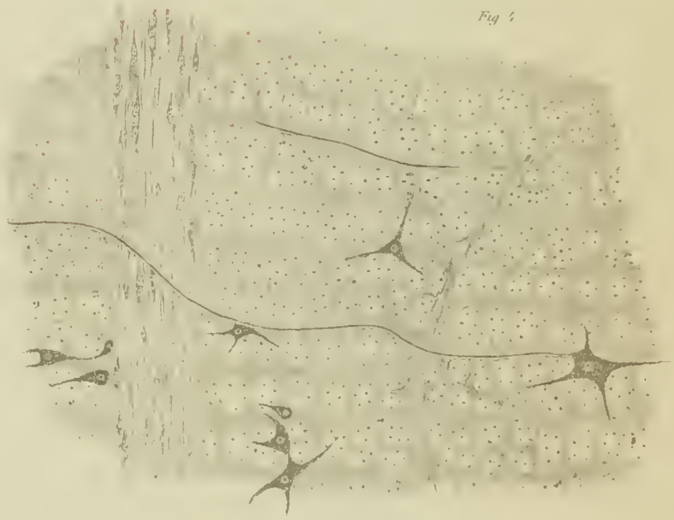


Fig 5

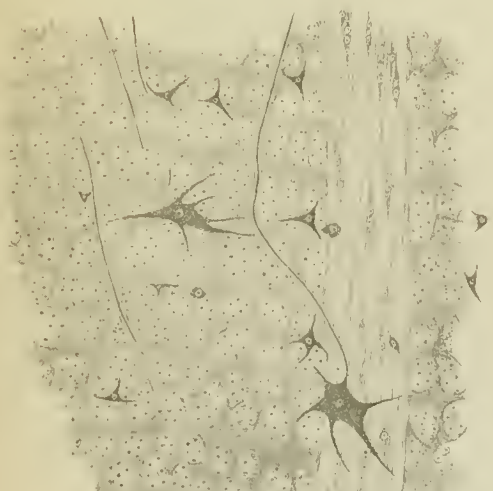
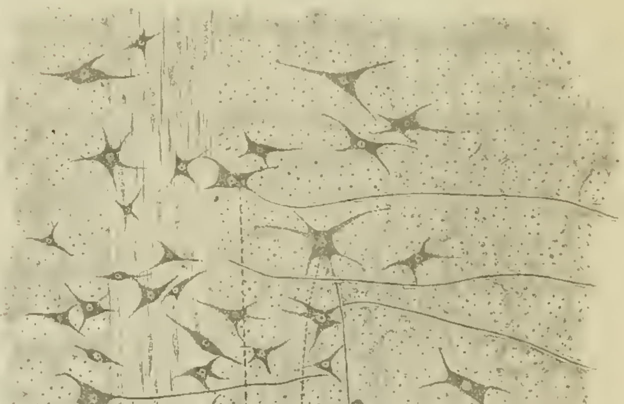


Fig 6



Amalia Laura dis

Righini lit

Torino Lit Flli Doyen

Fig 1

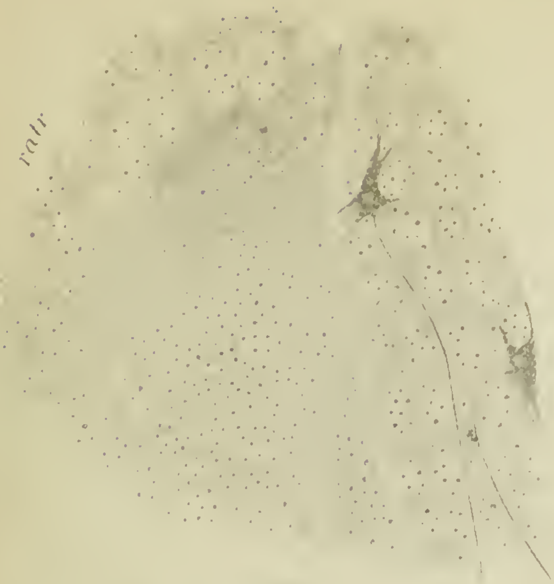


Fig 2

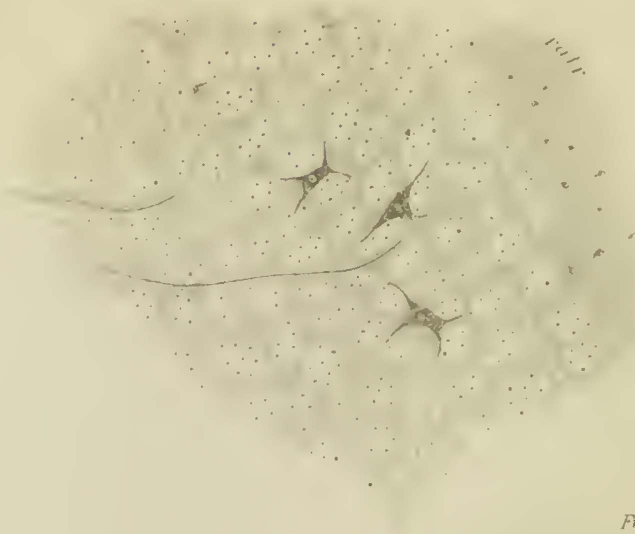


Fig. 3

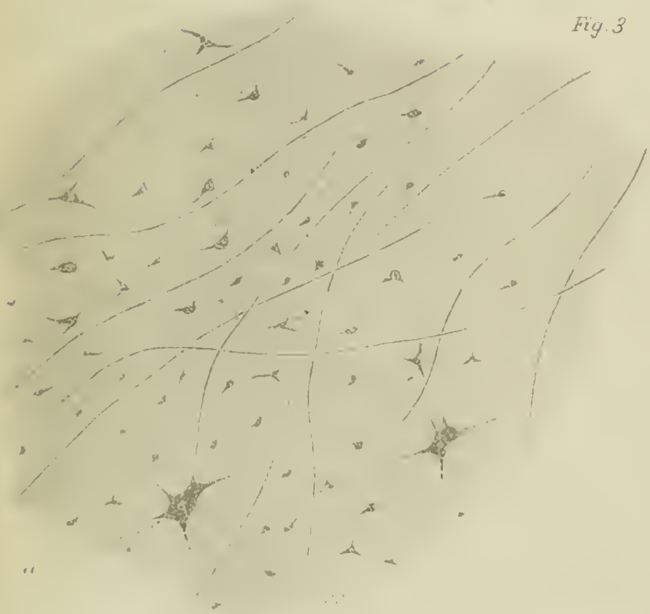


Fig 4

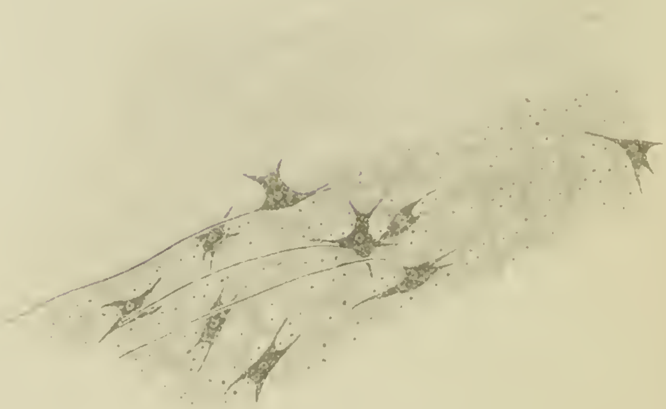


Fig. 5

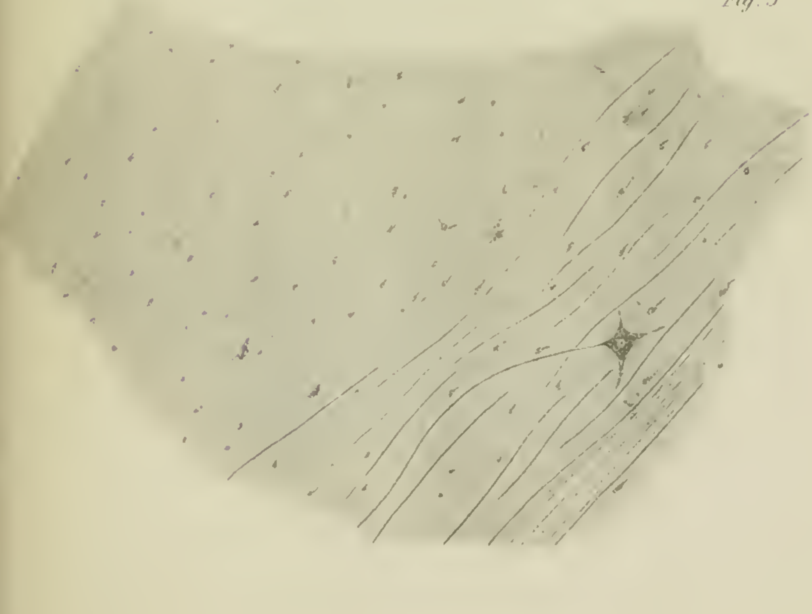
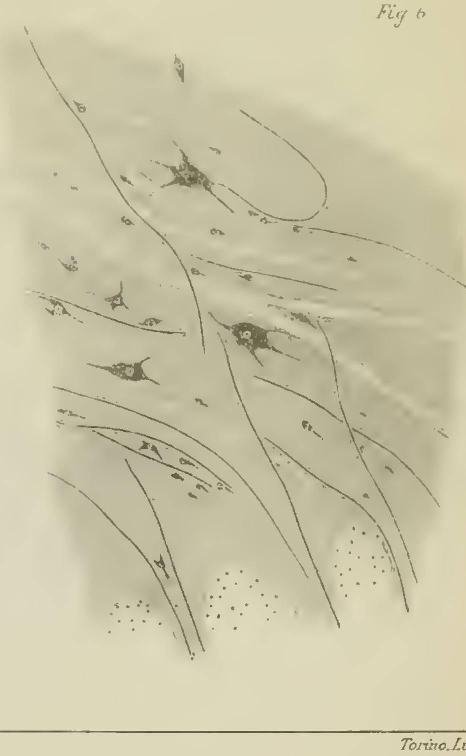


Fig 6



alia Laura dis.

Torino, Lit. F.lli Doyen

Fig. 1

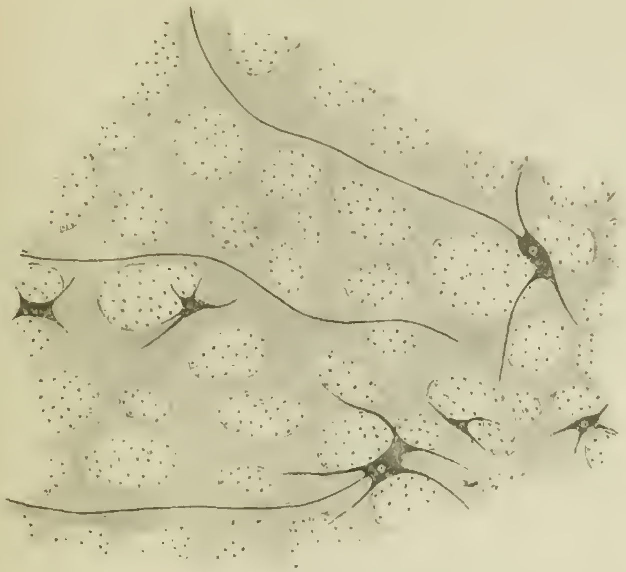
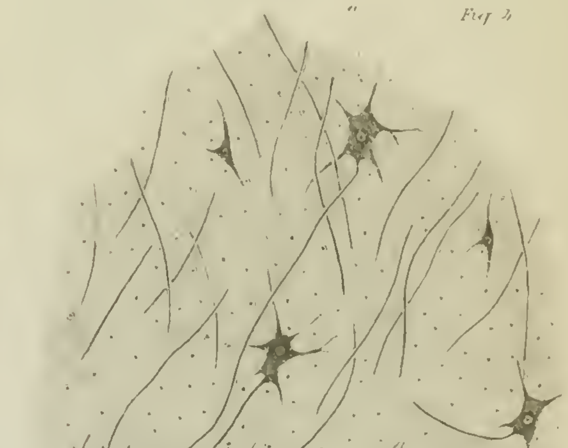


Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4



malia Lauro dis

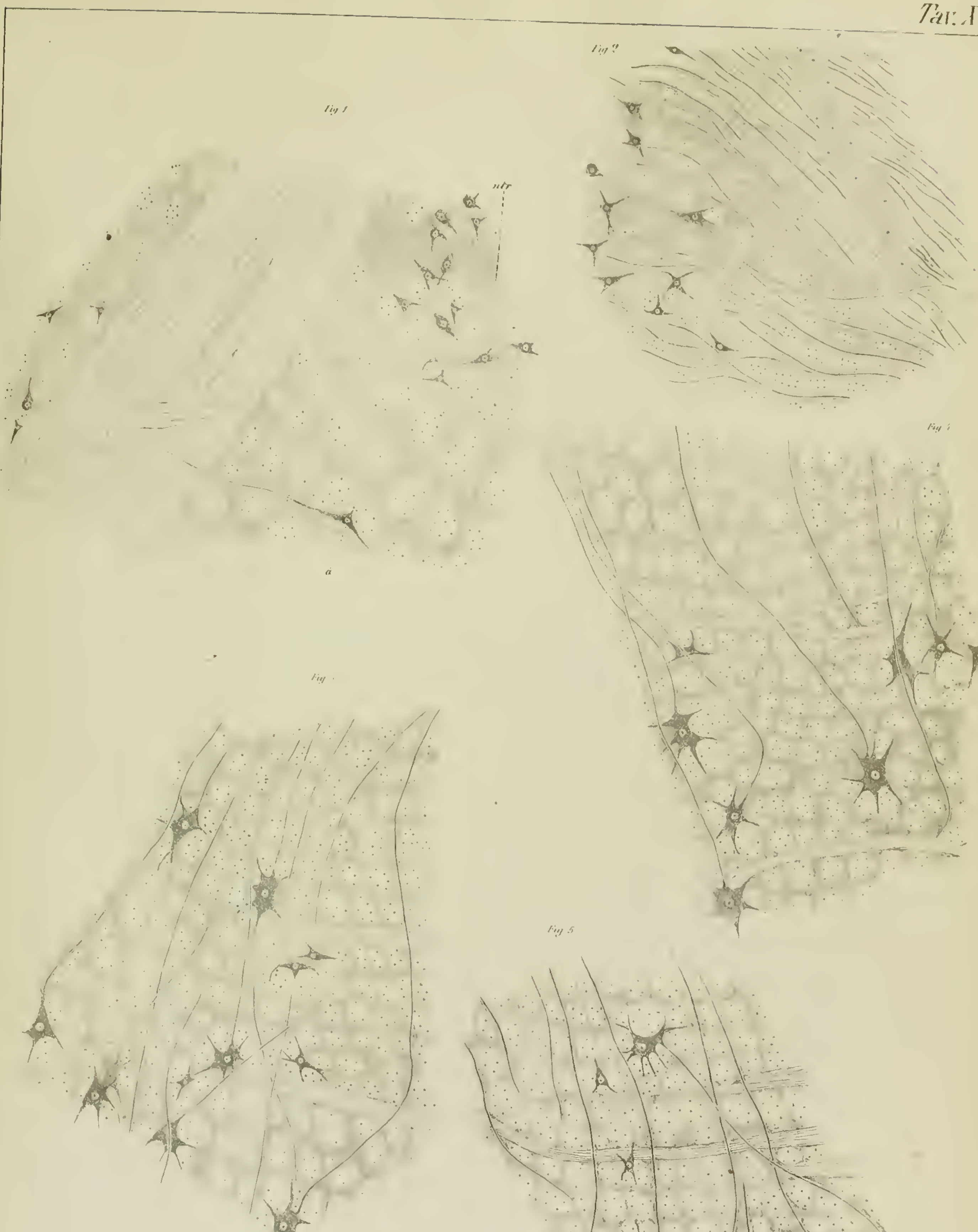
Torino Lit. F.lli Doyen

Tav. XV.

Amalia Laura dis

Torino Lit Doyen

Tav. XVII.



Amalia Laura dis.   Righini lit.   Torino Lit. F.lli Doyen

DI ALCUNI

FOSSILI TERZIARII

DEL PIEMONTE E DELLA LIGURIA

APPARTENENTI ALL' ORDINE DEI CHELONII

DEL

Dott. ALESSANDRO PORTIS

Memoria letta nell'Adunanza del 27 *Aprile* 1879

A diverse riprese sono stati trovati e raccolti nei terreni terziarii del Piemonte e della Liguria avanzi, talor abbastanza vistosi, appartenenti all'ordine dei Chelonii. Alcuni dei medesimi furono accolti nelle collezioni paleontologiche del nostro Museo di Geologia, altri son conservati in collezioni private.

Avendo intenzione di fare un lavoro comparativo fra i Chelonii terziarii dell'Alta Italia e quelli della confinante Svizzera, pensai descrivere dapprima quei che avevo più facilmente sotto mano e di far così per la regione nostra subalpina quello che hanno già fatto il Delfortrie (1) per il dipartimento della Gironda, Biedermann (2) e Pictet e Humbert (3) per la Svizzera occidentale, Peters (4) per il bacino di Vienna, e Ceselli (5) per la campagna romana.

(1) *Les Chéloniens du miocène supér. de la Gironde.* Bordeaux, 1870, avec 8 pls., in-folio.

(2) *Chéloniens tertiaires des environs de Winterthur.* Winterthur, 1863, avec 5 pls., in-4°.

(3) *Monographie des Chéloniens de la molasse suisse.* Genève, 1856, dal Pictet, Matériaux pour la Paléontologie suisse.

(4) *Schildkrötenreste aus den Oesterreichischen tertiär ablagerungen.* Denkschft. d. Kais. Akad. d. Wiss., Band 9. Wien, 1855.

(5) Sopra una tartaruga fossile di Viterbo. Roma, 1846.

Mettendo assieme il materiale appartenente a quest'ordine raccolto nel nostro Museo Geologico e quello che potei avere dalla squisita gentilezza dei signori Michelotti e Craveri, ottenni in tutto 7 esemplari di Chelonii stati trovati in diversi piani dei terreni terziarii del Piemonte e della Liguria e ripartiti fra le diverse famiglie dell'ordine.

Un ottavo esemplare venne descritto nel 1859 dal Prof. Peters (1) ed io, allo scopo di completare per quanto mi è possibile la conoscenza dei Chelonii fossili del nostro paese, ho stimato bene di riportarne la descrizione verso il fine di questo mio lavoro.

Di questi otto esemplari 5 appartengono al periodo Miocenico e provengono: l'uno dal miocene inferiore di Pareto in Piemonte; un secondo dal miocene medio di Ceva presso Mondovì, stato trovato in occasione dei lavori di scavo per la costruzione della ferrovia Torino-Savona e facente parte presentemente, come il primo, della collezione Michelotti; un terzo dal miocene superiore (Gessi) di Santa Vittoria presso Alba ed ornante ora la collezione dei signori fratelli Craveri a Bra; un quarto pure dal miocene superiore del Pino d'Asti presso Castelnuovo, questo come il quinto, del quale non conosco la provenienza precisa, appartenenti al Museo Geologico.

Tre altri esemplari appartengono al periodo Pliocenico e provengono: due da San Stefano Roero ed uno dalle sabbie gialle dell'astigiana; tutti tre fanno parte presentemente delle collezioni paleontologiche del Museo Geologico di Torino.

Per quanto riguarda poi le famiglie di Chelonii alle quali questi esemplari appartengono, dirò non aver trovato finora rappresentanti delle Chelidi (Paladine Pleurodere di Dum. e Bib.). Gli esemplari che ho dinanzi si ripartiscono invece fra le 4 famiglie delle Chelonidi (Talassiti di Dum. e Bib.), delle Chersine o Testudinidi, delle Chelydroidi (Paludine Criptodere di Dum. e Bib.) e delle Trionychidi (Potamiti di Dum. e Bib.), per modo che degli otto esemplari in questione, tre appartengono alla famiglia delle Chelonidi, uno a quello delle Testudinidi, uno a quello delle Chelydroidi e tre a quella delle Trionychidi.

Gli esemplari della famiglia delle Chelonidi rappresentano altrettanti individui che ho creduto bene raccogliere in due specie rappresentate:

---

(1) *Beiträge zur Kenntniss der Schildkrötenreste aus den Oesterreichischen tertiär-ablagerungen:* in: F. v. Hauer: Beiträge zur Palaeontographie. Band. I, heft 2, Taf. 14 (4°, pag. 53-64, tav. 11-14, Vienna, 1859).

l'una da un magnifico modello interno del cranio, l'altra da un modello dello scudo dorsale, di cui si vede grandissima parte, e dal modello dello scudo dorsale, di un altro giovane individuo, modello cui aderiscono ancora alcuni minuti frammenti delle piastre ossee. L'esemplare della famiglia delle Testudinidi è unico e fa specie a sè, così pure quello appartenente alla famiglia delle Chelydroidi. Gli esemplari della famiglia delle Trionychidi rappresentano invece un numero più scarso di individui, essendo due di essi modelli, l'uno della faccia superiore, l'altro della faccia inferiore di uno stesso scudo dorsale. Di questa famiglia abbiamo in tutto due individui che vennero raccolti in una sola specie avente rappresentanti dal terreno miocenico medio al pliocenico superiore.

Ed ora veniamo alla descrizione delle singole specie.

CHELONE GASTALDII MIHI

Vedi Fig. 1-3, Tav. I.

Ho creduto poter dedicare alla memoria del mio compianto Maestro lo stupendo modello interno del cranio di una Chelone stato raccolto nelle sabbie gialle plioceniche dell'Astigiana.

Il fine materiale di cui il medesimo consiste penetrò nel cranio allorchè questo era già spoglio delle parti molli e privo del mascellare inferiore, per le numerose e capaci aperture esistenti nella parete del medesimo: si adattò così esattamente sulle singole ossa ed acquistò tale solidità che, allorchè le parti ossee stesse caddero in isfacelo o furono via disciolte, rimase un modello interno in cui tutte le suture son marcate da altrettanti finissimi rilievi, le aperture comunicanti con l'esterno da massicci prismi di materiale e le sporgenze ossee verso la cavità craniale da altrettanti solchi o da buchi attraversanti gran tratto del modello stesso. Egli è così che alla faccia superiore del modello stesso riconosciamo ora la superficie tenuta dai grandissimi parietali « *hh* » e dinanzi ai medesimi dai frontali medii « *ff* », mentre i frontali anteriori « *aa* » appaiono divisi ciascuno in due parti, distinte da un solco « *d* » rappresentante la lamina verticale che, faciente parte del frontale anteriore stesso, circoscrive posteriormente la cavità nasale.

Accanto ai frontali medii ed ai parietali concorrenti coi frontali anteriori alla delimitazione dell'arco superiore dei potenti prismi rappresentanti della cavità orbitale, osserviamo i frontali posteriori « *g g* » che sono allo indietro seguiti dai mastoidei « *m m* » ultimo paio di ossa che concorra in questa famiglia alla copertura della fossa temporale e del cranio. Dell'occipitale superiore sono rimasti in una cavità « *r* » del modello posta inferiormente allo estremo angolo posteriore e interno dei parietali, piccolissimi avanzi di osso, mentre la sporgenza che faceva il sopraoccipitale allo indietro dei parietali stessi è affatto demolita. Prima di lasciare la faccia superiore del modello, debbo ancor notare: che, grazie alla finezza del materiale che si modellò nella cavità craniana ed alla durezza dal medesimo acquisita in seguito, ci vennero conservate, oltre ai contorni delle diverse ossa, anche la forma e dimensione approssimativa dell'encefalo. Noi vediamo nella cavità nasale *à* terminare un cordone di roccia rappresentante il nervo olfattorio, che ha sua origine dal cervello anteriore *n*; a questo far seguito il breve cervello medio *o* delimitato dal cervello anteriore e dal posteriore *p* da due solchi; e vediamo finalmente il cervello posteriore stesso eguagliare, anzi superare in volume le altre due parti dello encefalo prese assieme. Dove comincierebbe il midollo allungato, il modello è rotto per l'esiguità del cordone di roccia che dovrebbe rappresentare il midollo spinale e perchè esso rimaneva molto più isolato che le parti precedenti, trovandosi in mezzo alla vasta fossa *q* formatasi attorno al condilo occipitale triplo che cadeva precisamente in questo punto. Dopo il punto *q* la fossa va restringendosi e scorrendo fino all'estremità posteriore del modello; e rappresenta la spina posteriore dell'occipitale superiore.

Il modello esaminato di fianco (vedi fig. 2) ci lascia vedere in *c* l'intermascellare (vedi anche fig. 3), e tutto il mascellare superiore *e* colla sua lamina superiore *b* che serve di parete laterale e fondo alla cavità nasale, ed in *è* di parete inferiore dell'orbita, in *i* il jugale ed in *l* il quadrato-jugale molto nascosto dall'essersi parte del materiale che usciva dall'arco quadrato-jugale ripiegato all'insù; finalmente in *m* abbiam di nuovo dinanzi il mastoideo.

Diversi fori che si presentano alla superficie laterale e posteriore del modello rappresentano sporgenze ossee ed articolazioni del cranio. Così uno che osserviamo in *s* a $^2/_3$ di lunghezza dal margine anteriore e posto sul limite fra la superficie laterale e la inferiore del modello, rappresenta l'estremità dell'osso quadrato sporgente al punto dell'articolazione colla mandibola.

Un altro gran foro di forma irregolare *t v* che osserviamo sugli angoli posteriori delle superficie laterali rappresenta: nella parte superiore *t* l'angolo posteriore ed inferiore del mastoideo *m*, e nel suo prolungamento *v* l'angolo posteriore-laterale-superiore del quadrato che in questo punto si articola col mastoideo.

Finalmente un terzo piccolo foro *u*, collocato già sulla superficie posteriore, ma non separato dal precedente che da una piccola barra di roccia, ne rappresenta l'estremità posteriore del quadrato, il quale per conseguenza si estendeva sotto al prisma di roccia dal punto *s* al punto *v* ed *u*.

Confrontato colla Chelone Caouana il cranio del Chelone Gastaldi offre come caratteri un gran sviluppo della dimensione longitudinale ed uno relativamente molto minore della trasversale. I temporali ed i frontali medii assumono per conseguenza anche la stessa particolarità; abbastanza estesi si mostrano i frontali anteriori ed ancora più i frontali posteriori, ciò a pregiudizio dei mastoidei che rimangono relativamente molto ridotti in superficie. È ancor degno di menzione il notevole appiattimento del cranio istesso principalmente nella sua metà posteriore, appiattimento che io in parte riferisco siccome caratteristico del cranio istesso, in parte attribuisco ad una pressione obliqua dal disopra e dietro, al disotto e davanti, pressione subìta mentre le ossa cominciavano per la macerazione a perdere di resistenza, e l'effetto della quale si fu lo schiattare della regione quadrato-jugale con formazione delle grandi masse di roccia *x*.

La forma e divisione e posizione dell'encefalo sono tali quali le osserviamo nei Chelonii che vivono sotto ai nostri occhi.

La lunghezza massima del modello, tal quale presentemente si trova, tocca i 174 mm.; la sua massima larghezza all'angolo posteriore delle masse *x* è di 120 mm.

L'esemplare in questione venne, come dissi, trovato nelle sabbie gialle dell'Astigiana e fa dall'anno 1859 parte delle nostre collezioni paleontologiche.

CHELONE SISMONDAI MIHI.

Vedi Tav. II.

Quale esemplare principale di questa specie pongo un grande scudo dorsale trovato al Pino presso Castelnuovo d' Asti ed appartenente pure alle sabbie gialle plioceniche. L'esemplare in questione misura longitudinalmente 530 mm., trasversalmente 370 mm.: esso è un modello formatosi sulla superficie inferiore ed interna dello scudo dorsale di un individuo le cui ossa scomparvero non lasciando che minuti e sottili residui raccolti sul terzo posteriore del fossile stesso, e colla lor superficie tanto guasta da non potervisi più ravvisar traccia del solco delle piastre cornee.

Passando ora all'esame delle singole parti vediamo come della piastra nucale non siano conservate traccie, all'incontro si ravvisano e distinguono bene i contorni lasciati dalle piastre ossee neurali che erano allungate, principalmente la terza e quinta, con margine anteriore concavo e posteriore convesso, con margini laterali divisi ciascuno in due parti, le une minori convergenti al davanti, le altre maggiori convergenti allo indietro. Prese poi isolatamente ed esaminate queste piastre neurali, vediamo: come la prima delle medesime sia, contrariamente alla regola generale, molto più ristretta nei suoi due terzi anteriori confinanti colla prima piastra costale, che non nel terzo posteriore avente contatto con la seconda costale.

La seconda piastra neurale appuntita allo avanti ed allo indietro, è relativamente breve; essa non ha contatto che colla neurale che la precede, con quella che la segue e colle 2ᵉ costali.

La terza e quarta sono le più lunghe, esse hanno la forma generale che abbiamo prima indicata e toccano colla lor parte anteriore la piastra costale antecedente, colla maggior parte di lunghezza poi le costali loro corrispondenti in numero.

La quinta comincia ad accorciarsi pur conservando la forma delle due precedenti e così fa pure la sesta, la settima poi ancor più ridotta tocca con quasi metà di sua lunghezza la costale antecedente, mentre la ottava neurale tocca già la costale antecedente per un tratto maggiore che non lo faccia per la ottava costale, facendo così posto ad una piccola prima sopracaudale, la quale è di fianco ancor tutta limitata dalla ottava costale, mentre una non troppo estesa 2ª sopracaudale di forma triangolare la segue sulla linea mediana; essa è a sua volta limitata posteriormente da una terza avente un contorno arcuato al davanti e pressochè rettilineo allo indietro e misurante mm. 100 in direzione trasversale e mm. 35 in direzione longitudinale, ai punti si intende di sua massima estensione. Questa terza sopracaudale poi chiude la serie delle ossa poste lungo la linea longitudinale mediana.

A ciascuna delle otto piastre neurali corrisponde sulla linea mediana un allargamento del solco che percorre quasi tutta la lunghezza del fossile e che rappresenta la serie dei corpi delle vertebre. I successivi punti di massimo allargamento indicano i punti di articolazione delle singole vertebre fra loro. Essi son fiancheggiati da ambe le parti ed all'esterno del contorno delle piastre neurali da buchi di dimensioni relativamente considerevoli e rappresentanti le estremità delle coste partenti dalle articolazioni or accennate fra i corpi delle vertebre, e portantisi allo infuori ed allo insù per inserirsi poi alla parte interna ed alla superficie inferiore delle piastre costali e continuare poi sulla superficie inferiore delle costali stesse sotto forma di rilievo che ha lasciato la sua traccia sotto forma di un solco che, partendo dai buchi indicati, raggiunge il margine del fossile.

Le piastre costali in numero di otto per parte son tutte prive della loro estremità esterna, non è per conseguenza possibile lo stabilire alcun rapporto fra la lor parte allargata e la parte terminale che non lo è. Per ciò che riguarda gli altri caratteri loro, osserverò, che nella parte conservata esse presentano tutte una forma quadrangolare con bordo anteriore e posteriore fra loro presso a poco paralleli, meno la prima, il cui bordo anteriore doveva essere abbastanza fortemente curvo all'indietro.

Tutte quante hanno una direzione obliqua dallo interno allo esterno ed allo indietro, obliquità tanto più accentuata quanto più ci avviciniamo all'estremità posteriore dello scudo e che è marcatissima per la costale ottava.

In tutto il fossile in questione non è conservata la minima traccia di alcuna delle piastre marginali. Similmente per il quasi assoluto mancare della sostanza ossea non posso avere alcuna indicazione sopra l'estensione e la forma delle piastre cornee.

Sul lato sinistro e nella metà anteriore del fossile una cavità piatta estendentesi obliquamente all'indentro ed allo ingiù del modello ne indica la posizione dell'estremità prossimale espansa dell'omero anch'esso stato esportato o disciolto e che fortemente deformata dalla compressione fu ridotta ad una lamina sottile ed arcuata nel lembo suo posteriore.

Io sarei d'opinione che il modello in questione si sia formato sullo scudo di un individuo già completamente formato e finito di crescere, e non credo di andar errato se ammetto che l'estremità libera delle piastre costali fosse già ridotto a ben poca cosa, a questa conclusione indotto dalla direzione che par prendere all'estremità posteriore la sutura fra la piastra sopracaudale 2da e la caudale; direzione che continuata, verrebbe a contornare il modello a poca distanza all'infuori del profilo segnato dal terminarsi della parte allargata delle piastre costali medesime.

Tutti i caratteri osservati e qui esposti concordano perfettamente con quelli che si osservano nella generalità dei Chelonii marini o Chelonidi, e mi portano per conseguenza a porre il fossile in questione nella serie dei medesimi, proponendo di distinguerlo specificamente col nome del Professore E. Sismonda, il quale pel primo rivolse la sua attenzione sul medesimo.

Non sarei poi di parere di considerarlo come lo scudo della specie di cui ho precedentemente descritto il cranio: 1° perchè quantunque ambedue provenienti dalle sabbie gialle dell'Astigiana, questi due esemplari non provengono dalla stessa località e sono stati trovati ciascuno per sè, quindi tolta la supposizione che abbiano appartenuto allo stesso individuo; 2° e più forte perchè le considerevoli dimensioni che ho date del cranio della precedente specie converrebbero ad uno scudo di gran lunga superiore a quello che fa oggetto della presente discussione, mentre io, come già feci osservare, ritengo questo scudo come già completamente al termine della sua cresciuta.

A questa specie ho pensato bene di riunire qual secondo esemplare un altro scudo di conservazione analoga al precedente, e mostrante solo lungo la linea mediana qualche traccia di osso di più.

Anche a questo esemplare manca la parte non dilatata delle piastre costali; la sua massima lunghezza, così nello stato in cui si trova, tocca 242 mm., mentre la larghezza massima al punto delle 4te costali tocca 193 mm.

Oltre alle dimensioni, anche il modo di conservazione ne addita aver dinanzi un individuo ancor giovanissimo, e di fatti vediamo sparsa per tutta la superficie del modello una quantità di fibrille in cui si scomposero le parti ossee pel fatto della lunga macerazione; fatto questo che mentre succede per le piastre dorsali ancora in pieno lavoro di accrescersi e di formarsi, non ha più così facilmente luogo allorchè queste stesse piastre costali han raggiunto col lor pieno sviluppo una maggior consistenza ed omogeneità.

La forma e le dimensioni relative delle parti osservabili di questo individuo ricordano esattamente ciò che abbiamo detto per l'esemplare tipico di questa specie.

Sui pochi frantumi di osso conservati lungo la linea mediana del modello riuscii a ravvisare traccie di suture delle piastre cornee neurali, cioè la sutura fra la 1ª e la 2ª, fra la 2ª e la 3ª e fra la 3ª e la 4ª. Così pure sulla destra e nella metà anteriore del medesimo, ed a pochi centimetri dalla linea mediana, potei osservare la sutura delimitante l'estremità laterale interna della 2ª piastra cornea.

Da ciò potei rilevare che la larghezza della 2ª piastra cornea stessa sta alla lunghezza come i numeri 3 : 2, relazione questa che incontriamo in moltissime delle odierne Chelonidi, quantunque in altre specie vediamo le piastre cornee vertebrali molto ristrette e talor più lunghe che larghe.

Questo secondo individuo esiste da alcuni anni in Museo, solamente non potei trovar alcuna indicazione sulla provenienza e sull'orizzonte dai quali esso deriva. La natura della roccia di cui è formato pare però indicare che esso provenga eziandio dalle sabbie gialle dell'Astigiana.

Prima di lasciare questa famiglia di Chelonii è mio dovere il ricordare ancora un frammento di piastra costale di Chelone trovato nel miocene medio di Ceva e conservato nella Coll. Michelotti. Questo frammento non merita di essere distinto con un nuovo nome specifico; serve però a farci constatare la presenza del genere Chelone anche nel miocene medio del nostro paese.

TESTUDO CRAVERII MIHI.

Tav. III, Fig. 1-2.

Il fossile originale che pongo a capo della presente specie fu trovato a Santa Vittoria presso Alba nel terreno miocenico superiore e, già conosciuto al Professore E. Sismonda doveva essere, come mi comunicò gentilmente il Prof. Bellardi, dedicato al Prof. F. Craveri, nella cui collezione vien presentemente conservato e dal quale mi fu, colla squisita cortesia che lo distingue, comunicato perchè lo potessi studiare.

Esso misura dall'avanti allo indietro 180 mm. e trasversalmente 141 mm., ed è rappresentato in grandezza naturale alla tavola 3ª fig. 1 e 2.

Esso consiste in un modello di argilla azzurra gessosa che riempì tutto il guscio dell'animale, vi si modellò esattamente e sopravvisse al guscio stesso, del quale non restano che ben poche parti che andrò ricordando nel corso della descrizione.

Lo scudo dorsale (che questo è il solo conservato) era nella sua parte media a disco grandemente elevato e convesso; dal piano quasi orizzontale segnato dalla metà anteriore della piastra nucale, la linea mediana si elevava bruscamente e quasi verticalmente per tutta la lunghezza della seconda metà della nucale stessa per correre di là con curva dolcemente ascendente fino ad un tubercolo posto sul limite posteriore della quinta neurale, di là discendere rapidamente la lunghezza della sesta, moderare un poco la discesa per il tratto occupato dalle brevissime settima ed ottava e prima caudale, facendo così al limite d'incontro fra la sesta e la settima un angolo ottusissimo coll'apertura all'indietro ed allo insù, e riprenderla ed esagerarla fin quasi alla verticale poi, pel tratto occupato dalla 2da sopracaudale e dalla pygale.

Oltre alla curva segnata dalla linea mediana vi era anche quella segnata dalle diverse piastre costali e neurali, ma queste non descrivevano che un arco di circolo un po' depresso alla sommità, e con una corda varia secondo la relativa posizione delle costali stesse.

Passando alla descrizione delle singole parti osserverò come le suture delle piastre neurali siano, principalmente nella parte posteriore, alquanto confuse, con tutto ciò ho potuto rilevare con sufficiente sicurezza che le neurali stesse siano in numero di 8, più 2 sopracaudali, di queste ultime l'una piccolissima ed avente la forma della ottava neurale, l'altra molto più allargata e triangolare.

Meno la prima, che è alquanto ristretta alla estremità anteriore, son tutte le neurali di forma quadrangolare, allargate trasversalmente all'animale ed offrenti minori dimensioni secondo la linea longitudinale; questo carattere si esagera ancora dopo la sesta, offrendo la settima ed ottava una larghezza agguagliante o superante il doppio della lunghezza.

Mentre la prima, terza, quinta e settima neurale non articolano che colla porzione media del lato interno delle piastre costali, le neurali seconda, quarta e sesta articolano con tutto il lato interno della costale loro corrispondente ed ancora per i loro angoli anteriori e posteriori, rispettivamente colle costali che le precedono o le seguono di un' unità. La ottava neurale poi, ridotta in lunghezza, non articola che con porzione delle costali corrispondenti.

Consegue da questo fatto una lieve modificazione nella figura presentata dalle neurali segnate da numero pari, le quali avranno i loro angoli un po' mozzati, mentre quelle segnate da numero impari li hanno vivi e sporgenti.

Come ho detto, le due sopracaudali che nei limiti del disco terminano la serie lineare incominciata dalle neurali sono: la prima quadrangolare cortissima e con un diametro trasversale superante il doppio del longitudinale, la seconda triangolare ed a margine posteriore arrotondato; essa presenta una lunghezza di mm. 28 ed una larghezza di mm. 45.

Dopo quanto ho detto per le piastre neurali viene di natural conseguenza che ciascuna delle costali prima, terza e quinta articoli pel suo limite interno con tre delle ossa poste lungo la linea mediana, cioè la prima con piccola porzione della nucale, con tutta la prima neurale e breve porzione della seconda, la terza e quinta costale con porzione della neurale loro antecedente, con tutta la loro corrispondente e con porzione della seguente. Per ciò fare esse sono molto più lunghe al lor margine interno che non le loro alternanti seconda, quarta e sesta che non articolano che con porzione della neurale corrispondente; ma mentre quest'ultime vanno coll'allontanarsi dalla linea mediana e coll' avvicinarsi al margine del disco sempre aumentando in lunghezza, le prime van facendo il contrario fino a perdere pressochè metà della loro lunghezza primitiva. La settima ed ottava costale non obbediscono a questa legge di alternanza, esse son ambedue pressochè tanto lunghe al bordo interno quanto al margine del disco ed articolano sulla linea mediana: la settima colla corrispondente neurale, la ottava colla ottava neurale e la prima sopracaudale.

La serie marginale si componeva di 24 ossa; la nucale cioè, 11 marginali per parte e la pigale. La cornice ossea dalle medesime formata seguiva un piano orizzontale per la metà anteriore della nucale e per la prima e seconda marginale di ciascuna parte, dopo si scostava bruscamente dal medesimo avvicinandosi, e di molto, alla verticale con una direzione che seguiva per tutto il resto del contorno, sol diminuendo un po' l'angolo di inclinazione al punto dove sporgevano le estremità posteriori, cioè alla nona e decima marginale di ciascun lato.

Per ciò che riguarda le relazioni delle singole marginali tra loro e colle costali, dirò dapprima che la nucale risultava composta di due metà: una anteriore quadrangolare o ad un dipresso, e, come ricordammo in giacitura orizzontale, una posteriore triangolare colla punta allo indietro ed in posizione quasi verticale; poi che le undici marginali di ciascuna parte avevan tutte una forma quadrangolare, o ad un di presso, col loro maggior diametro normale alla periferia del disco intorno a cui esse erano collocate (nessuna fontanella o traccia della medesima era osservabile per tutta la superficie occupata dallo scudo dorsale). Per ciò che riguarda il contatto colle costali, ricorderò come, a parte la 1ª costale che tocca le marginali 1-3, le costali che han verso la linea mediana contatto con tre neurali, hanno solamente contatto con una marginale sul bordo esterno, e quelle che non toccano che una neurale hanno sul lato esterno contatto con tre marginali, cioè direttamente con una, e coll'angolo posteriore ed anteriore, rispettivamente, della precedente e della seguente: conseguenza questa del fatto che ho menzionato del raccorciarsi delle une, e dello allungarsi delle altre vieppiù le medesime si scostano dalla linea mediana. Sulla piastra pygale non posso dir gran che; le sue suture laterali son pressochè cancellate ed ella doveva esser alquanto più stretta che la 2ª sopracaudale.

Delle marginali stesse sono ancora rimaste alcune in posto, la 8ª-10ª del lato destro; esse non fanno che confermare quanto ho detto sulla disposizione loro generale e mostrano traccia di qualcuno degli scudi cornei marginali che dobbiamo menzionare quanto prima.

Sui due lati del fossile son rimasti alla parte anteriore e dopo la metà della lunghezza dai due lati del medesimo, quattro frammenti delle ali serventi a collegare solidamente lo scudo ventrale col dorsale. A parte il menzionato, lo scudo ventrale manca completamente, a noi bastano però queste quattro traccie a porre in sodo che le marginali 2ª-8ª, e per conseguenza 7 per parte erano interessate nella articolazione: la prima e l'ultima a dir vero solo indirettamente dalle ali stesse e senza cambiar punto di forma, le cinque medie invece allungandosi a toccare gli hyopiastroni e gli hypopiastroni, e formar così il ponte sternale.

Tanto sulla costituzione degli scudi dorsale e ventrale; a fianco della 1ª piastra neurale si scorgono una per parte due piccole impressioni, traccie le medesime delle ossa scapolari che in quei punti sono ancora infitte verticalmente o quasi nel modello; similmente due impressioni più grandi a fianco della 8ª neurale segnano il luogo tenuto dalle estremità prossimali degli ilii di cui si vedono ancora sporgere dal modello traccie di ossa; i solchi marcanti il corso delle singole coste sono pochissimo marcati.

Alla parte anteriore del fossile, sulla piastra nucale e sulle marginali 1 e 2 vediamo segnata l'impressione del risvolto inferiore: 1° della piccola piastra cornea nucale; 2° delle tre prime marginali, ciò non ha nulla di singolare, mentre grandissima importanza ha per noi il fatto della presenza delle marginali ossee 8-10 del lato destro; infatti avendo esse conservata l'impronta dei sovrastanti scudi cornei possiamo constatare che il loro limite di confine cogli scudi costali coincide colla sutura che limita le piastre ossee costali dalle marginali, carattere questo di altissima importanza, allorchè, come in questo caso, non si ha a mano per lo studio che lo scudo senza le estremità, poichè sulla sua guida noi possiamo subito, e con tutta sicurezza, collocare l'individuo nella sola famiglia che presenti questo carattere, cioè in quella degli Emydidi o Testudinidi.

Ed appunto chiudo la descrizione della specie, dicendo che, oltre al carattere sovra indicato, altri ne avevo in mano per venire alla stessa conclusione, e che non rilevai nella descrizione, onde non interromperne il filo; e sono: i rapporti indicati fra le piastre neurali e le diverse costali, l'aumentare in lunghezza coll'allontanarsi dalla linea mediana, delle costali segnate da numero d'ordine pari, ed il diminuirne di quelle segnate da numero d'ordine impari, e conseguenza di ciò i rapporti pure indicati fra le diverse piastre costali e le marginali, la forma indicata delle due sopracaudali e della nucale, l'arrivare delle ali del piastrone solamente fino al margine del disco dorsale, la grande estensione tenuta dai ponti sternali, la elevazione grandissima dello scudo dorsale, la sua forma per conseguenza molto corta e radunata, e finalmente la grande piccolezza delle estremità prossimali delle scapole e degli ilii, unitamente alla quasi completa sparizione delle coste. Tutti questi son caratteri che da soli basterebbero quasi a far definire precisamente la posizione del fossile, considerato nel sistema, tanto più poi quando tutti questi caratteri si veggono assieme riuniti.

Egli è perciò che ho collocato la tartaruga fossile di S^ta^ Vittoria fra le testuggini, e seguendo il desiderio del Professore E. Sismonda, la ho denominata *Testudo Craverii.*

TRYONIX PEDEMONTANA MIHI.

Tav. IV.

Ho creduto bene di raccogliere in una specie sola i due individui che ho dinanzi quali rappresentanti della famiglia dei Trionichidi. — Di essi l'uno presenta lo scudo dorsale adagiato sopra una lastra di argilla e conservato magnificamente per un $^3/_4$ della sua larghezza, essendo il quarto di destra rotto e mancante. Questo individuo che ho raffigurato nella tavola quarta, ponendolo come individuo tipico della specie che imprendo a descrivere, appartiene alla collezione del Cavaliere Michelotti, dal quale mi fu gentilmente confidato, e proviene dal miocene medio dei dintorni di Ceva, presso Mondovì, dove fu trovato nei lavori di scavo fatti durante la costruzione della ferrovia Torino-Savona. Il secondo individuo di questa specie appartiene al nostro Museo Paleontologico, e consisteva dapprima in un nucleo di argilla arenacea indurita proveniente dal terreno pliocenico di San Stefano Roero, che spaccato parallelamente alla sua maggior estensione, forma ora due pezzi, presentanti l'uno l'impronta della superficie superiore dello scudo dorsale, l'altro quella della superficie inferiore del medesimo scudo, mentre la materia ossea stessa è completamente mancante. Le due impronte sono però magnificamente ottenute: si sono formate sopra un individuo più grande e più vecchio che il precedente, e dànno indicazioni sopra ai dettagli che lo distinguono, quasi altrettanto precise che quello. Per conseguenza se mi decisi a considerare l'individuo più giovane come esemplare tipo, gli è solamente perchè: 1° in esso era ancor presente il materiale stesso del fossile; 2° perchè il medesimo presentava, oltre alla parte allargata delle piastre costali, anche l'impronta di qualcuna delle punte libere sporgenti dalle piastre stesse; 3° perchè sull'angolo sinistro posteriore della tavola di marna, che sostiene il fossile in questione, ho ravvisato anche l'impronta di alcune ossa dello scudo ventrale, di cui parlerò in seguito. La descrizione della specie è fatta sull'individuo giovane avendo però sempre dinanzi agli occhi i pezzi dell'individuo adulto, il quale a sua volta è già stato l'oggetto di un breve cenno del Professore A. Sismonda, inserto nelle Memorie dell'Accademia di Torino, vol. I, ser. 2ª, pag. 85, tav. 3, fig. 1-2, 1836, e di un altro del medesimo autore, nel *Bull. de la Soc. Géol. de France*, t. 7ème, 1835-36, pag. 207, dove esso vien riferito al *Tryonix ægyptiacus* vivente.

Lo scudo dorsale si componeva di 25 pezzi ossei così distinti: una piastra nucale, sette piastre neurali lungo la linea mediana ed otto piastre costali per parte. Di marginali nessuna traccia, ed infatti ne mancano quasi tutte le odierne trionychidi.

A capo della serie delle parti ossee collocate sulla linea mediana esisteva ed esiste tuttavia una piastra nucale allargatissima, il cui terzo anteriore depresso aveva una superficie fibrosa, mentre i due terzi posteriori rilevati avevano la superficie zigrinata siccome tutto il resto dello scudo. La parte anteriore fibrosa era come le punte delle piastre costali rivestita nel vivente da un integumento molto più alto e resistente, servente a coprire le parti non protette dallo scudo osseo, che a sua volta non era ricoperto che da una pelle coriacea più sottile.

La piastra nucale colla sua parte posteriore espansa si adatta immediatamente alla prima neurale ed al primo paio di costali senza lasciare per conseguenza fra se stessa e le medesime traccia alcuna di fontanella, anzi essendo terminate da una linea suturale ben accentuata e netta.

Il poco spessore delle piastre ossee componenti lo scudo faceva sì che appunto nel terzo medio e posteriore della cervicale, e nella metà anteriore della prima costale si accusasse sulla superficie superiore ed esterna dello scudo un rilievo prodotto dall'inserzione a questo punto, ma sulla superficie inferiore ed interna del medesimo, dei processi trasversi delle due prime vertebre dorsali, come pure delle estremità prossimali delle singole scapole.

Queste ossa non erano inserite allo scudo dorsale che con legamenti, ma per essere esse collocate in posizione fortemente ravvicinata alla verticale, trasmettevano subito all'unica parte dura con cui fossero in contatto, cioè allo scudo stesso, l'urto prodotto dal peso dell'animale stesso, come pure qualunque pressione di sotto in su cui fosse soggetto in vita l'animale, per non esser questa pressione che ben poco bilanciata dal debole e sottile scudo ventrale, composto di ossa quasi non toccantisi fra loro ed oltraciò sottili e pieghevoli: esse producevano per conseguenza, in questo punto di maggior lavoro, una impressione alla superficie interna dello scudo, la quale, non mascherata dallo spessore delle piastre ossee, si mostrava alla superficie sotto forma di rilievo locale.

Alla piastra nucale fa seguito la prima neurale, avente la forma di un trapezio, in cui i lati paralleli siano molto più corti che non i lati obliqui. — Dei due lati paralleli il più grande è l'anteriore, mentre il posteriore è diviso in tre porzioni, due laterali oblique, che sono i limiti di contatto fra la prima neurale stessa e le seconde costali ed una mediana curva con concavità allo indietro e che confina colla seconda neurale.

La seconda, terza e quarta neurale hanno invece una forma che, ristretta alla parte anteriore, va allargandosi alquanto fin presso all'estremità posteriore, ove, con un angolo del loro profilo esterno, tornano a restringersi bruscamente. Il punto in cui il loro contorno esterno comincia a restringersi coincide colla linea separante la piastra costale corrispondente dalla successiva. Esse sono per conseguenza in tal modo in rapporto colla piastra costale loro corrispondente in numero, per la maggior parte del loro contorno laterale, mentre per la parte minore e posteriore sono in rapporto colla costale successiva. La quinta neurale invece ha bordi laterali pressochè paralleli; essa non è in rapporto che col paio di costali corrispondenti, le quali presso al loro margine posteriore articolano con una piccola porzione col margine laterale della 6ª neurale. Questa 6ª neurale viene per tal modo ad avere una forma analoga alle neurali 2-4, ma con rapporti affatto invertiti ai loro; così mentre esse strette alla parte anteriore andavano allargandosi posteriormente, avendo il massimo diametro trasversale press'a poco ai $^5/_6$ di lor lunghezza contando dal margine anteriore, così questa va, più larga alla parte anteriore, restringendosi posteriormente e avendo il massimo diametro trasversale ad $^1/_6$ di sua lunghezza; mentre le costali 2-4 toccavano per la maggior parte di lor profilo laterale le costali corrispondenti, e per piccol tratto le successive, così questa tocca per piccolo tratto il paio di costali anteriori e per la maggior parte di sua estensione tocca le costali corrispondenti.

Anche la settima neurale tocca per una parte le costali antecedenti, e per un'altra le corrispondenti, ma essa si termina pressochè a metà lunghezza delle costali stesse, le quali allor si prolungano e vengono a toccarsi sulla linea mediana.

In tal modo la settima neurale riesce molto più corta delle precedenti ed è l'ultima delle ossa della serie mediana, non comparendone alcuna posteriormente nemmeno isolatamente dalle precedenti, e compresa fra i prolungamenti interni delle costali. Egli è questo un fatto cui dobbiamo rivolgere la nostra attenzione, poichè ci indica come la metà posteriore dello scudo perdesse molto prestamente della mobilità delle sue parti, contrariamente a ciò che succede per la maggior parte delle viventi Trionichidi.

Le piastre costali sono ciascuna divise in una parte dilatata aderente alle altre parti dello scudo ed in una punta non dilatata libera ed a superficie fibrosa, di queste punte non è conservata alcuna in nessuno degli esemplari; solo l'esemplare giovane che mi serve di tipo presenta sulla marna, al posto una volta da loro tenuto, l'impronta ben netta e dettagliata della 1ª, 2ª ed 8ª. — Da esse rilevo, che la lunghezza della punta libera era presso a poco un sesto di quella totale della piastra. Per ciò che riguarda la parte allargata delle piastre stesse, così ho stabilito per la 3ª, che la lunghezza è circa un quarto della larghezza, rapporto che troviamo uguale a quello osservabile per la *Tryonix gangetica.*

Per ciò che riguarda poi i rapporti di ciascuna colle parti adiacenti, così risulta da quanto abbiamo detto precedentemente che la 1ª costale di ciascuna parte è in rapporto anteriormente colla nucale e verso la linea mediana nella massima parte colla neurale corrispondente. Risulta che la 2ª, 3ª e 4ª sono anteriormente e posteriormente in rapporto colle costali loro immediatamente antecedenti e susseguenti e verso la linea mediana per una piccola porzione anteriore colla neurale loro precedente e per la massima parte colla corrispondente, che la 5ª costale conservando gli stessi rapporti anteriori e posteriori che le precedenti e le seguenti articola verso la linea mediana con tre neurali, cioè per una piccola porzione anteriore colla 4ª neurale, per un buon tratto colla corrispondente 5ª neurale e per un piccolo angolo posteriore colla successiva 6ª neurale; che la 6ª costale articola sempre verso la linea mediana, colla corrispondente per la maggior parte del suo profilo e colla successiva per una piccola parte del medesimo e che la 7ª costale non tocca più che la corrispondente per metà di sua lunghezza, mentre per la metà posteriore tocca la costale del lato opposto, mentre la costale 8ª non tocca che la sua costale simmetrica, formando una sutura che molto facilmente si cancella per modo che le due costali ottave riescono a formare nello individuo adulto una sola lista ossea, chiudente la serie delle ossa mediane e laterali, che mentre ha rapporto pel lato anteriore colle precedenti 7ᵉ costali, ha il margine posteriore attondato e libero.

Per ciò che risguarda la direzione delle piastre costali, solamente la 4ª ha direzione esatta dallo interno allo esterno e margine anteriore e posteriore rettilinei, quelle che la precedono e la seguono hanno direzione arcuata rispettivamente allo avanti ed allo indietro, e van via assumendo maggior diametro longitudinale, vie più si scostano dalla linea mediana, tantochè per esempio la 2ª e la 6ª hanno al loro contorno esterno una lunghezza che sta a quella che hanno al contorno interno come i numeri 5 a 3.

Gran parte della superficie della piastra nucale e tutta la superficie delle neurali e della parte espansa delle costali è coperta dalla zigrinatura che contraddistingue le Trionichidi, zigrinatura che si mostra uniforme e concentrica su tutta la superficie dello scudo, meno una leggiera modificazione sulle linee suturali, dove le granulosità si collocano in serie parallela al margine delle piastre, rendendo così più facile il definire il corso della sutura.

Finalmente sull'angolo sinistro e posteriore della lastra di marna, che sostiene il fossile, ho ravvisata un'impronta, che confrontata collo scheletro di alcune Trionichidi viventi e fossili, ravvisai essere quella della parte posteriore dello hyopiastrone di sinistra e di gran parte dell'hypopiastrone dello stesso lato; esse racchiudono fra di loro una lieve depressione prodotta dal maggior rilievo di una callosità esistente in questo punto sulla faccia inferiore ed esterna del piastrone stesso e che doveva avere la sua simmetrica sul lato opposto. Le ossa che produssero questa impronta, e che presentemente mancano, dovevano essere sottilissime, con una superficie inferiore fibrosa, ma dovevano essere molto più espanse che per quasi tutte le Trionichidi viventi ed avere per conseguenza una forma analoga a quelle che si osservano nella *Tryonix Teyleri* di Oeningen, descritta dal Winkler (1), nella quale gli hyopiastroni e gli hypopiastroni dovevano sulla linea mediana toccar quasi, coi loro prolungamenti pettiniformi, l'osso simmetrico del lato opposto ed a quelle della *Tryonix vindobonensis*, descritta dal Peters (loc. cit.).

Il modello interno dello scudo del grande individuo mostra poi corrispondentemente alle piastre neurali ed alla linea mediana delle ottave costali un solco allargantesi e restringentesi successivamente e rappresentante le successive nevrapofisi, serventi a collegare i corpi delle vertebre colle piastre neurali dello scudo, in alcuni la parte ossea della nevrapofisi è ancor conservata, dove questa manca, si vede più profondamente un cilindro uniforme di roccia scorrente per tutta la lunghezza del solco e rappresentante il riempimento del canale midollare. Dai due lati poi di questo solco, che rappresenta la linea mediana, sono ordinati in fila due serie di buchi, i quali rappresentano l'estremità prossimale di ciascuna costa veniente a raggiungere la corrispondente piastra costale.

Chiuderò finalmente questa mia descrizione con dire che l'individuo giovane ha pressochè uguali le dimensioni longitudinale e trasversale, misurando dallo avanti allo indietro 26 cm., e traversalmente, sulla linea delle 4e costali, 25 cm. mentre l'individuo adulto misura longitudinalmente: 38 cm. e trasversalmente: 36 cm.

Questa specie presenta un'analogia grandissima colla *Tryonix vindobonensis* Peters, la quale, presentando quasi tutte le particolarità indicate nella descrizione delle piastre neurali, differisce però dalla specie piemontese, per avere queste stesse piastre neurali molto più ristrette, avuto riguardo alla lunghezza loro, e per aver la prima delle medesime molto più allargata al davanti. Infatti la *Tryonix vindobonensis* ha o doveva

---

(1) *Description des tortues fossiles conservées dans le Musée* Théyler, *et dans quelques autres Musées.* Haarlem, 1863, 4°, pag. 73, Tav. XV.

avere per la prima neurale il lato anteriore più che doppio del posteriore, essendo probabile che le due costali prime si incontrassero sulla linea mediana per breve tratto, separando così la prima neurale dalla serie delle seguenti.

Mentre la *Tryonix vindobonensis* è stata trovata solamente in terreni miocenici, la *Tryonix pedemontana*, rappresentata nel miocene medio coll'individuo giovane di Ceva, risale pure nel pliocene inferiore coll'individuo adulto di S. Stefano Roero, sopravvivendo per tal modo alla sua rappresentante orientale.

La prima piastra neurale serve pure a distinguere questa specie dalla *Tryonix stiriacus* PETERS, essendo, come risulta dalla descrizione, questa piastra più larga nella sua porzione anteriore e più stretta nella posteriore per la *Tryonix pedemontana*, mentre il contrario succede per la *Tryonix stiriacus*, dove il punto più largo della prima piastra neurale è sul limite fra i tre quarti anteriori e il quarto posteriore della lunghezza totale, risultando così per questa piastra stessa una forma analoga a quella delle piastre seguenti.

Il Cav. MICHELOTTI ha pur segnalato nel miocene inferiore di Bagnasco (1) alcuni avanzi di *Tryonix*:

I pezzi fin qui raccolti (frammenti di piastre costali), non bastano ancora per poter definire se la *Tryonix* in questione appartenga a qualcuna delle specie fin qui conosciute o se faccia specie a parte.

A completare la serie delle tartarughe fossili del Piemonte, mi sia concesso di riportar qui testualmente il brano scritto dal PETERS (loc. cit.) riguardo ad una 5ª specie di Chelonii piemontesi: « Il signor Giovanni » MICHELOTTI ha avuta la bontà di confidarmi un bell'esemplare della sua » collezione privata. Esso proviene da un giacimento sabbioso-marnoso di » Pareto in Piemonte, giacimento che questo abile conoscitore del terziario » d'Italia determina per miocene inferiore.

» Per ciò che ricavo dalla letteratura paleontologica delle Emydidi, » l'esemplare in questione stabilisce una nuova specie per la quale mi » permetto di proporre il nome di EMYS MICHELOTTII, n. sp. (Tav. IV).

(1) *Études sur le miocène inférieur de l'Italie septentrionale.* Mém. Soc. Holl. d. Sc. Natur. Haarlem, 1861, pag. 146.

» Sventuratamente il solo piastrone ventrale è soddisfacentemente con-
» servato; ciò che vi si vede dello scudo dorsale annunzia il più comune
» tipo di Emydidi senzá il menomo punto di appoggio ad una caratteristica.
» La larghezza del medesimo tocca 0,102 m., la lunghezza deve aver
» toccato all'incirca 0,122 m. La parte nucale è fortemente arcuata e
» pende rapidamente verso l'avanti. Un po' men ripida è la parte poste-
» riore, incominciando già nella piastra nucale un graduato pendio dello
» scudo verso l'indietro.
» Il pendio verso i lati non è tutt' assieme considerevole, essendo
» ridotta la pendenza delle piastre costali da una lieve concavità esistente
» sul limite fra i due terzi interni e il terzo anteriore di loro larghezza.
» Lo spigolo delle marginali è abbastanza sentito, facendo la faccia supe-
» riore un angolo di circa 70° colla faccia inferiore alla seconda marginale,
» alla parte anteriore della 3ª ed alla 7ª e di 120°-130° alle intermedie.
» Le piastre neurali son larghe, le 5 prime hanno i loro angoli poste-
» riori, la 7ª gli angoli anteriori smussati, i bordi della 6ª convergono
» debolmente allo indietro.
» Il primo solco degli scudi cornei costali scorre sul terzo posteriore
» della seconda piastra costale, per ciò che si vede, quasi affatto nella
» linea trasversale, il secondo incontra, come per la maggior parte delle
» specie, anche qui la stessa sezione della quarta piastra costale, si allon-
» tana però fortemente ed allo indietro dalla linea trasversale.
» Il piastrone, il quale dalla parte sinistra è rimasto, per mezzo del
» raggio osseo dell'hyopiastrone, in rapporto collo scudo dorsale, si distingue
» per il suo entopiastrone largamente deltoide, con bordi anteriori più
» allungati, per la piccola estensione del raggio hypopiastronale allo indietro
» (per conseguenza della qual cosa l'estremità anteriore deve aver avuto
» un movimento molto libero), per il contorno leggiadramente ondulato
» dell'hypo- e xiphi-piastrone e per la forte intaccatura di quest' ultimo,
» come pure per il corso del solco degli scudi cornei addominali e femorali,
» corso che non si allontana dalla linea trasversale. Traccie concentriche
» degli scudi cornei, son ben impresse sull'entopiastrone ed hyopiastrone.
» La specie in questione sta in più vicina parentela coll'*Emys Comptoni*
» *Owen* (Foss. Rept., London-Clay, pag. 77, Tab. XX) per le condizioni
» dello scudo dorsale e per diverse somiglianze nel piastrone, tuttavia si
» distingue dalla medesima a primo colpo d'occhio per la di lei intaccatura
» del bordo posteriore del xiphi-piastrone, che ha comune, senza ulteriori

» rapporti, coll'*Emys Charpentieri* Pictet *et* Humbert (*Matériaux p. l.* » *Paleont. Suisse,* VIII livrais., pag. 29, pl. VI), ed altre tartarughe di » palude e di terra ».

Noi abbiamo così fino a questo punto 5 specie di Chelonii appartenenti ai terreni terziarii del Piemonte e secondo la famiglia in cui son compresi e l'epoca a cui appartengono, divisi nel seguente modo:

	Miocene			Pliocene	
	inferiore	medio	superiore	inferiore	superiore
Chelonidi	+	*Chelone* sp.	+	+	*Chelone Gastaldii.*
	+		+	+	*Chelone Sismondai.*
Emididi	+	+	*Testudo Craverii*	+	+
Chelidroidi	*Emys Michelottii* Peters	+	+	+	+
Chelidi	+	+	+	+	+
Trionichidi	*Tryonix* sp.	*Tryonix pedemontana*	+	*Tryonix pedemontana*	+

Io termino così la mia descrizione delle tartarughe fossili piemontesi conservate nel nostro Museo Paleontologico od in collezioni private esistenti in Piemonte; con questo il mio còmpito è ben lungi dall'essere esaurito. Or debbo ancora tener dietro a quelle che, pur provenendo dai nostri terreni terziarii, si trovano in collezioni lontane come quelle indicate dal Cuvier (1), come esistente nel Museo di Ginevra, e poi sulla guida così abilmente tracciata dal Rütimeyer (2), ripassare tutte le tartarughe dei bacini terziarii che ne circondano, e scoprire quali legami le congiungano alle piemontesi, e quali affinità presentino le specie viventi e con queste e con quelle, e ciò spero sarà fra non lungo tempo l'oggetto di un altro mio lavoro.

---

(1) *Ossements fossiles*, 4ème édition, Vol. 9, pag. 473.

(2) *Ueber den Bau von Schale und Schädel bei lebenden und fossilen Schildkröten.* Abdr. a. d. Verhadlgn. d. Naturf. Gesellschft. in Basel. VI, I, 1873.

Spiegazione delle Figure

TAVOLA 1ª

Modello del Cranio *Chelone Gastaldii* mihi

Grandezza naturale.

a Frontali anteriori.
b Lamina superiore nasale del mascellare superiore.
c Intermascellare.
d Lamina verticale nasale del frontale anteriore.
e Mascellare superiore.
f Frontali medii.
g Frontali posteriori.
h Temporali.
i Jugali.
l Quadrato jugale.
m Mastoidei.
n Cervello anteriore.
o Cervello medio.
p Cervello posteriore.
q Cavità rappresentante il condilo occipitale.
r Spina posteriore dell'occipitale superiore.
s Articolazione mandibolare del quadrato.
t Angolo posteriore inferiore del Mastoideo.
u Angolo posteriore del quadrato.
v Articolazione laterale Mastoideo-Quadrato.

TAVOLA 2ª

Modello dello scudo dorsale di *Chelone Sismondai* mihi

$^1/_2$ Grandezza naturale.

TAVOLA 3ª

Modello dello scudo dorsale di *Testudo Craverii* mihi

Grandezza naturale.

a Veduta dal di sopra.
b Veduta di fianco.

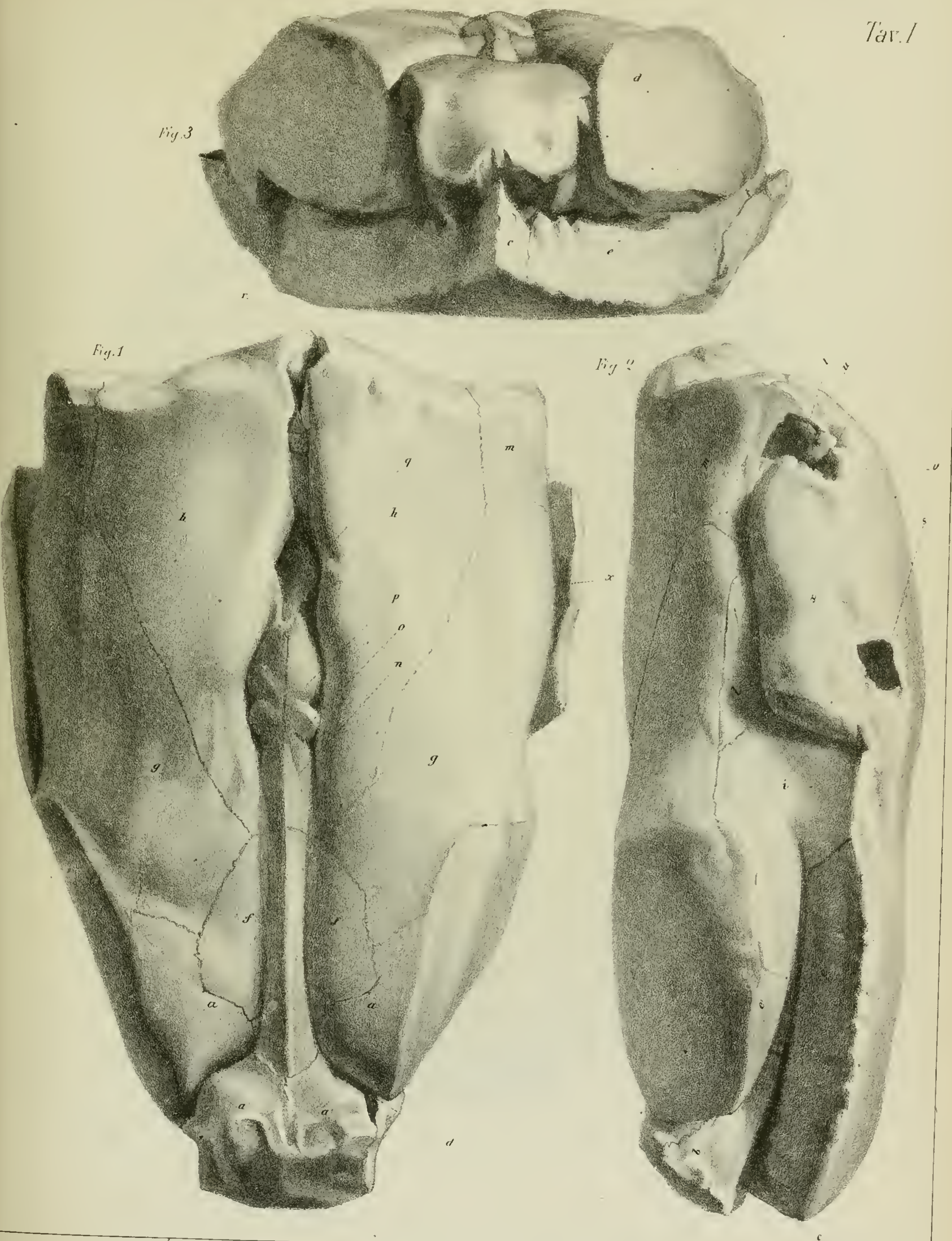
TAVOLA 4ª

Tryonix Pedemontana

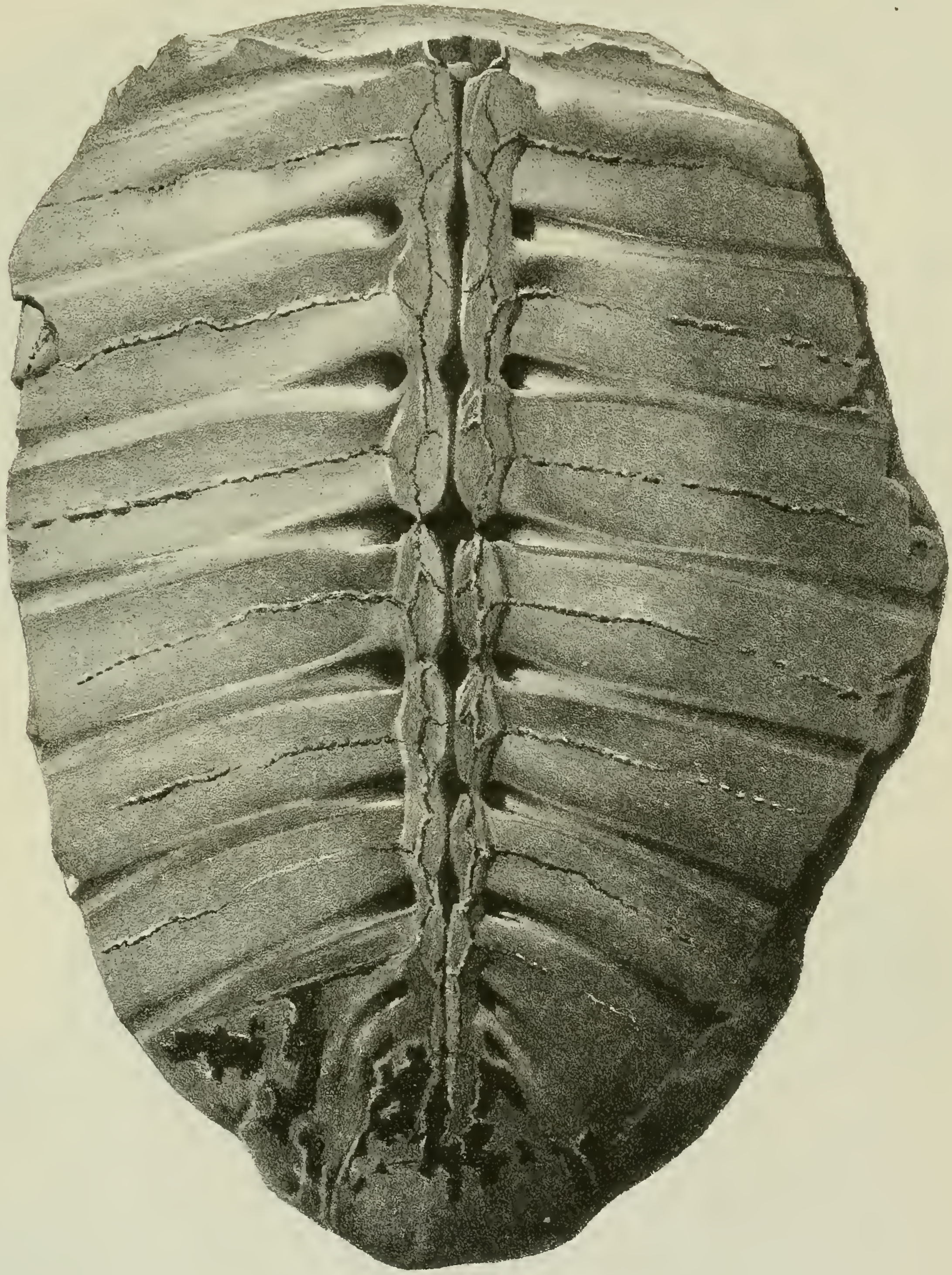
Grandezza naturale.

a *Hyopiastrone* sinistro.
b *Hypopiastrone* sinistro

Tav. I



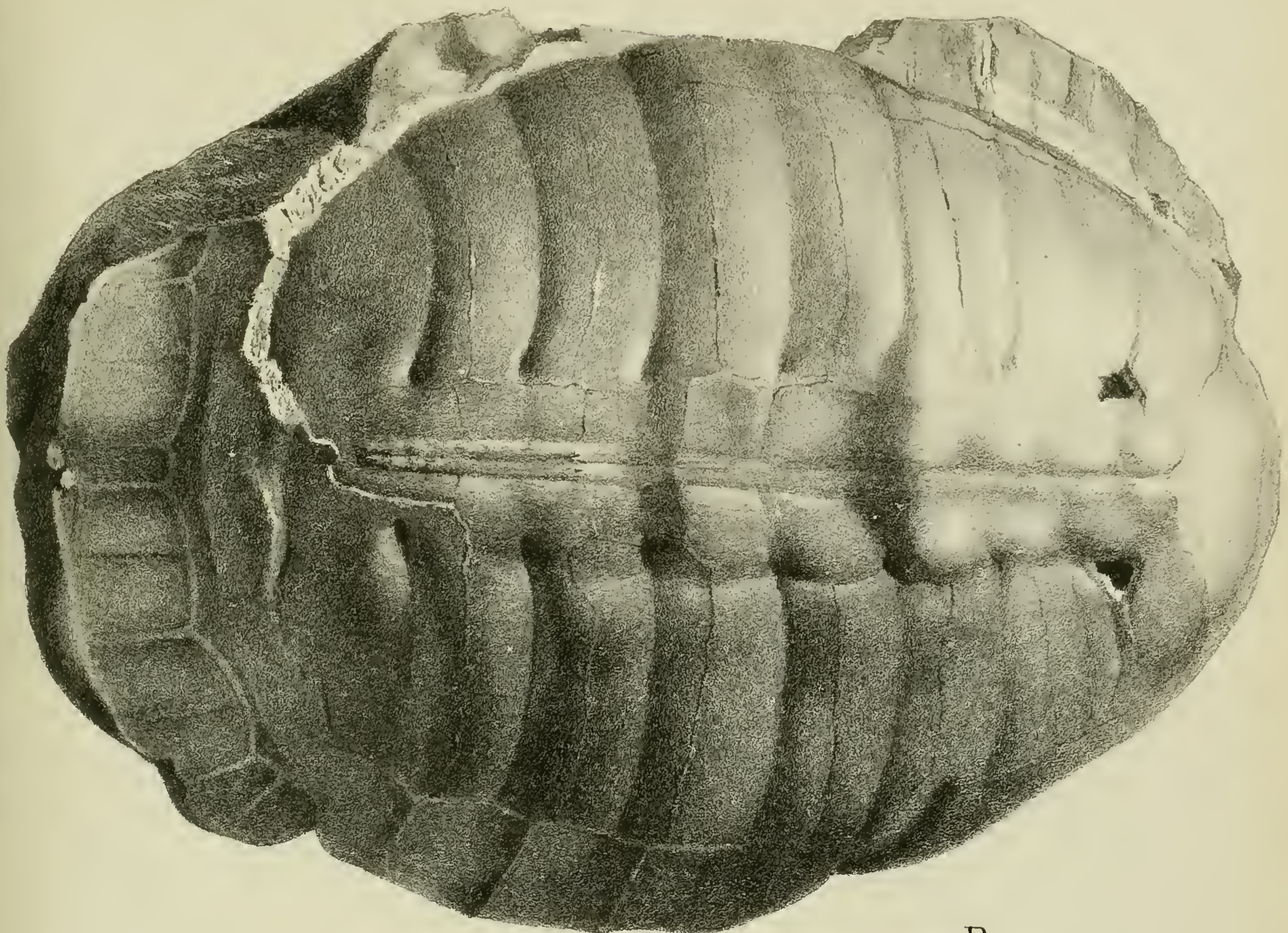
Torino Lit. F.lli Doyen



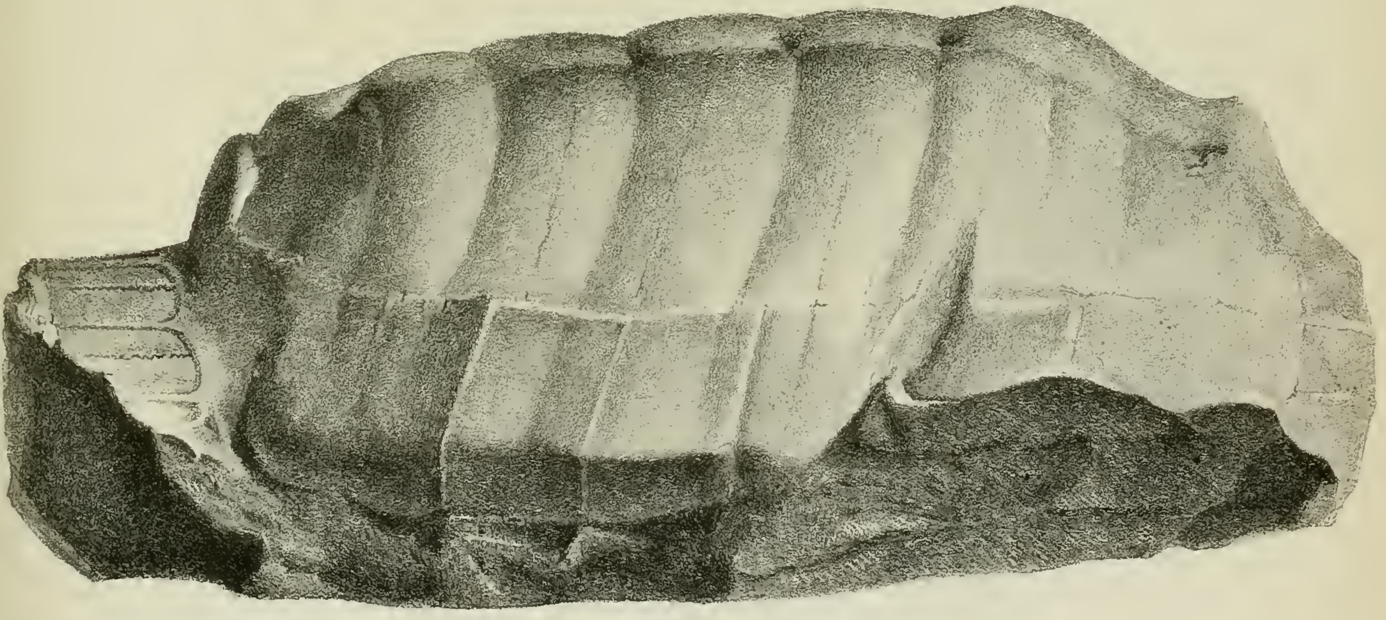
Torino. Lit. F.lli Doyen

Tav. III

A



B



Torino Lit. F.lli Doyen

Tav. IV.

L' ELASTICITÀ

NELLA TEORIA

DELL'EQUILIBRIO E DELLA STABILITÀ DELLE VÔLTE

VÔLTE SIMMETRICHE E SIMMETRICAMENTE SOLLECITATE

PER

GIOVANNI CURIONI

Letta nell'adunanza del 9 Marzo 1879

1. Assunto di questo lavoro. — Facendo seguito alla prima mia nota intitolata *L'elasticità nella teoria dell'equilibrio e della stabilità delle vôlte* ed all'altra che, oltre il titolo generale predetto, porta anche quello di *Riduzione del metodo generale per le applicazioni pratiche*, state lette in questa Reale Accademia delle Scienze, la prima nella seduta del 7 Marzo 1875 e la seconda nella seduta del 10 Giugno 1877, e state ascritte, quella al Tom. XXVIII e questa al Tom. XXXI della Serie II delle Memorie, presento ora una terza nota nella quale è trattato il caso particolare delle vôlte simmetriche e simmetricamente sollecitate rispetto al giunto di chiave. Questo caso è frequentissimo nella pratica delle costruzioni, ed è quello che pel primo merita di essere diffusamente trattato applicando le formole che nelle note già citate si sono stabilite.

Prima però di entrare nella trattazione dell'argomento formante l'oggetto di questo lavoro, non posso astenermi dal dichiarare: che nell'Ufficio d'Arte delle Strade ferrate dell'alta Italia, cui appartiene il distinto signor Ingegnere Castigliano Alberto, il quale nei suoi studi sull'equilibrio dei sistemi elastici trattò anche l'argomento delle vôlte a botte di struttura murale, già si fecero molti progetti di importantissime costruzioni introducendo l'idea dell'elasticità nella verificazione della stabilità delle arcate; che, nell'Aprile dell'anno 1878, venne fatta, per cura del Servizio della Manutenzione e dei Lavori, un'interessante pubblicazione intitolata *Applicazioni pratiche della teoria sui sistemi elastici;* e che in queste applicazioni sono trattati due casi rimarchevolissimi di arcate di ponti in muratura ossia di quella del ponte sul fiume Oglio per la ferrovia Treviglio-Roato, e di quella del classico ponte Mosca sulla Dora presso Torino.

Ma i procedimenti di verificazione seguìti in questi due casi, come pure quelli stati pubblicati dal prelodato signor Ingegnere Castigliano nelle dispense dei mesi di settembre e di ottobre dell'anno 1876 del commendevole periodico l'*Ingegnería civile e le arti industriali*, differiscono dai metodi che emanano spontanei dalle citate mie due note. Per questo motivo non credo fuori di proposito questo terzo lavoro sull'elasticità nella teoria dell'equilibrio e della stabilità delle vôlte, destinato principalmente a mettere in evidenza come, anche i casi più complessi di vôlte simmetriche e simmetricamente sollecitate rispetto al giunto di chiave, si possano ridurre ai casi semplicissimi ed elementari di vôlte poste in identiche condizioni di simmetria e sollecitate da due pesi, da due forze orizzontali e da due coppie.

Tratterò solamente quella parte del problema che ha rapporto colla determinazione delle reazioni degli appoggi e dello spostamento del giunto di chiave; e per le ulteriori determinazioni, come per quelle delle componenti tangenziali, delle componenti normali e dei punti d'applicazione delle azioni per giunti qualsiasi della vôlta, mi rapporterò, o ai semplici procedimenti grafici, ormai ben noti, per la verificazione della stabilità di una vôlta quando si conoscono le reazioni delle imposte ed i punti d'applicazione delle reazioni stesse, o ai metodi numerici risultanti dall'applicazione delle formole dei numeri 8 e 9 della prima citata mia nota. Dalle semplicissime formole dei successivi numeri 10 e 11 sarà facile dedurre le resistenze longitudinali riferite all'unità di superficie per varî giunti della vôlta, onde assicurarsi del grado di stabilità che essa sarà per presentare anche nelle più sfavorevoli condizioni.

2. Formole determinatrici delle reazioni degli appoggi. — Ritenute le denominazioni già state stabilite nelle precedenti citate mie note, se considerasi una vôlta simmetrica rispetto al piano verticale OD (*Fig.* 1) e sollecitata da forze simmetricamente disposte rispetto al detto piano, a motivo della simmetria nella forma della vòlta e nelle forze sollecitanti, si ha: che sono eguali le due reazioni R ed R' delle due imposte GH ed EK; che, essendo B ed A i centri delle dette imposte, le distanze $\overline{BN}$ ed $\overline{AL}$ dei punti d'applicazione delle reazioni stesse da questi centri devono essere eguali; e che sono pure eguali fra di loro gli angoli che le direzioni delle forze R ed R' fanno colla BA. Segue da ciò che la componente orizzontale Q', la componente verticale V' e la coppia M' prodotta dalle forze $+R'$ e $-R'$ applicate in L ed A sono rispettivamente eguali alla componente orizzontale Q, alla componente verticale V ed alla coppia M prodotta dalle forze $+R$ e $-R$ applicate in N e B, e che quindi le incognite determinanti completamente le reazioni dei due appoggi GH ed EK sono, non più sei, come nel caso generale, ma solamente le tre Q, V ed M.

Per determinare queste incognite osservasi: che, a motivo della perfetta simmetria della vôlta e delle forze sollecitanti rispetto al piano di profilo OD, sono verificate per identità le condizioni dell'equilibrio di translazione nella direzione AB e dell'equilibrio di rotazione attorno all'asse proiettato nel punto A; e che si riduce a

$$V = -\Sigma F_v \qquad \ldots\ldots\ (1)$$

l'equazione esprimente l'equilibrio di translazione nella direzione OD, quando intendasi che il simbolo Σ si estenda alle sole forze poste da una stessa parte del piano OD, per esempio, alle sole forze sollecitanti la metà $GHIF$ della vôlta.

Per ottenere i due valori di Q e di M conviene assumere: il punto di mezzo O della retta $\overline{AB}$ per origine delle coordinate; la direzione $OB\zeta$ per asse delle ascisse; la direzione ODv per asse delle ordinate; e la sezione di chiave della vôlta per sezione d'origine. Chiamando poi c la semi-corda $\overline{OB}$, bisogna porre le due equazioni dell'elasticità esprimenti: che è nullo lo spostamento $\Delta\zeta_i$ del punto B nel senso dell'asse $O\zeta$; e che è nulla la rotazione m_i della sezione d'imposta GH. Siccome per la sezione d'origine FI sono nulli lo spostamento $\Delta\zeta_0$ nella direzione $O\zeta$ e la rotazione m_0, queste due equazioni dell'elasticità, quando si mettano in evidenza le incognite del problema, si riducono alle equazioni (2) e (4) del numero 5 della prima citata mia nota sull'elasticità nella teoria dell'equilibrio e della stabilità delle vôlte, col solo cangiamento di a in c, e coll'avvertenza di dover annoverare fra i termini cogniti quelli che contengono il fattore V; cosicchè le equazioni determinatrici di Q e di M risultano

$$\left\{\begin{aligned}&-\left(\int_0^c \frac{1}{\Omega}\frac{d\zeta}{d\sigma}d\zeta+\int_0^c \frac{\upsilon^2}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\right)Q+M\int_0^c \frac{\upsilon}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\\&+\left(\int_0^c \frac{1}{\Omega}\frac{d\upsilon}{d\sigma}d\zeta+\int_0^c \frac{(c-\zeta)\upsilon}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\right)V+\int_0^c \frac{Z'}{\Omega}d\zeta+\int_0^c \frac{\upsilon M_x'}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\end{aligned}\right\}=0$$

$$-Q\int_0^c \frac{\upsilon}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta+M\int_0^c \frac{1}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta+V\int_0^c \frac{c-\zeta}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta+\int_0^c \frac{M_x'}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta=0\,.$$

Ponendo

$$\left.\begin{aligned}E&=-\int_0^c \frac{1}{\Omega}\frac{d\zeta}{d\sigma}d\zeta-\int_0^c \frac{\upsilon^2}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\\F&=\int_0^c \frac{\upsilon}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\\G&=\left(\int_0^c \frac{1}{\Omega}\frac{d\upsilon}{d\sigma}d\zeta+c\int_0^c \frac{\upsilon}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta-\int_0^c \frac{\zeta\upsilon}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\right)V+\int_0^c \frac{Z'}{\Omega}d\zeta+\int_0^c \frac{\upsilon M_x'}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\\F'&=\int_0^c \frac{1}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\\G'&=\left(c\int_0^c \frac{1}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta-\int_0^c \frac{\zeta}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\right)V+\int_0^c \frac{M_x'}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\end{aligned}\right\}\ (2),$$

le ultime due equazioni diventano

$$EQ+FM+G=0$$
$$-FQ+F'M+G'=0\,,$$

dalle quali ricavasi

$$\left.\begin{aligned} Q &= \frac{FG'-F'G}{EF'+F^2} \\ M &= -\frac{FG+EG'}{EF'+F^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (3) \,.$$

La formola (1) serve alla determinazione di V, le formole (2) alla determinazione dei tre coefficienti E, F ed F' e dei due termini G e G', le formole (3) alla determinazione delle due incognite Q ed M.

3. Spostamento del giunto di chiave. — Per essersi assunta alla chiave la sezione d'origine, non si può dire che lo spostamento verticale Δv_0 del suo centro D (*Fig.* 1) sia nullo. La seconda delle equazioni del numero 3 della prima citata mia nota, applicata fra le due sezioni limiti FI e GH, tra le quali si vogliono valutare gli spostamenti, essendo

$$\zeta_0 = 0 \,, \qquad m_0 = 0 \,,$$

$$\zeta_i = c \,, \qquad \Delta v_i = 0 \,,$$

dà la formola

$$\Delta v_0 = -\int_0^c \frac{Z}{E_t \Omega} \frac{dv}{d\zeta} d\zeta - \int_0^c \frac{(c-\zeta) M_x}{E_t I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta \,,$$

nella quale si è presa la ζ per variabile indipendente.

Questa formola, portando fuori dei segni $\int$ il coefficiente E_t, che si può ritenere come costante, e sostituendo per Z e per M_x i loro valori dati dalle relazioni (1) del numero 5 della nota stessa, si riduce a

$$\Delta v_0 = \frac{1}{E_t} \left\{ \begin{aligned} &+ Q\left(\int_0^c \frac{1}{\Omega} \frac{dv}{d\sigma} d\zeta - \int_0^c \frac{\zeta v}{I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta \right) \\ &- V\left(\int_0^c \frac{1}{\Omega} \frac{dv}{d\zeta} \frac{dv}{d\sigma} d\zeta - \int_0^c \frac{(c-\zeta)\zeta}{I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta \right) \\ &+ M \int_0^c \frac{\zeta}{I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta - \int_0^c \frac{Z'}{\Omega} \frac{dv}{d\zeta} d\zeta + \int_0^c \frac{\zeta M_x'}{I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta \end{aligned} \right\} \ldots\ldots (a) \,;$$

e, ponendo

$$\left.\begin{aligned}
H &= \int_0^c \frac{1}{\Omega}\frac{dv}{d\sigma}d\zeta - \int_0^c \frac{\zeta v}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta \\
I &= -\int_0^c \frac{1}{\Omega}\frac{dv}{d\zeta}\frac{dv}{d\sigma}d\zeta + c\int_0^c \frac{\zeta}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta - \int_0^c \frac{\zeta^2}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta \\
K &= \int_0^c \frac{\zeta}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta \\
L &= -\int_0^c \frac{Z'}{\Omega}\frac{dv}{d\zeta}d\zeta + \int_0^c \frac{\zeta M_x'}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1),$$

la formola determinatrice di Δv_0 risulta

$$\Delta v_0 = \frac{1}{E_t}\left(HQ + IV + KM + L\right) \quad \ldots\ldots (2).$$

Le formole (1) servono alla determinazione dei tre coefficienti H, I, K e del termine L, e la formola (2) si presta per trovare lo spostamento della chiave del vôlto, quando sia cognito il valore del coefficiente di elasticità E_t e quando siansi già calcolate le tre quantità Q, V ed M. I valori positivi di Δv_0 rappresentano un innalzamento ed i valori negativi un abbassamento del giunto di chiave.

4. Osservazioni sui valori dei coefficienti E, F, F', H, I, K e dei termini G, G' ed L. — Il calcolo di queste nove quantità, a seconda della forma dell'asse della vòlta, a seconda della legge di variazione delle sue sezioni normali all'asse ed a seconda della distribuzione delle forze sollecitanti, si può fare talvolta esattamente e talvolta per approssimazione; che anzi vale su questo proposito quanto si è già detto al numero 4 della seconda citata mia nota, relativamente alla determinazione dei nove coefficienti A, B, C, D, B', C', D', C'' e D''.

Vien però in acconcio di far osservare: che i sei coefficienti E, F, F', H, I e K sono indipendenti dalle forze sollecitanti la vòlta, e che dipendono soltanto dalla forma del suo asse e dalle leggi secondo cui variano le sue sezioni; che i tre termini G, G' ed L, contenendo le due quantità Z ed M_x', dipendono anche dalle dette forze, e che questa circostanza non può a meno di rendere generalmente la loro determinazione un po' difficile e lunga; che conviene cercare di esprimere G, G' ed L con costanti moltiplicate per integrali effettuabili col considerare le sole relazioni geometriche esistenti fra l'asse e la sezione retta della vôlta.

Per raggiungere lo scopo conviene considerare i casi elementari di vôlte simmetriche sollecitate da due pesi, da due forze orizzontali e da due coppie simmetricamente operanti rispetto alla sezione di chiave.

5. **Reazioni degli appoggi e spostamento della sezione di chiave sotto l'azione di due pesi simmetrici rispetto alla sezione medesima.** — A ciascuno dei due punti N ed N' (*Fig.* 2) dell'asse della vôlta, simmetricamente disposti rispetto al punto di mezzo D, sia applicato un peso, e si dicano

P l'intensità di ognuno dei due pesi ed

i le distanze $\overline{On}$ ed $\overline{On'}$ dei punti N ed N' dall'asse coordinato $O\upsilon$.

I tre coefficienti E, F ed F' sono dati dalla prima, dalla seconda e dalla quarta delle formole (2) del numero 2; i tre coefficienti H, I e K dalle prime tre delle formole (1) del numero 3; ed i tre termini G, G' ed L devono essere determinati in conseguenza dell'intensità e della posizione dei pesi P cercando la forza Z' ed il momento M_x'.

Per ottenere la forza Z' bisogna scomporre il peso P in due componenti, una parallela e l'altra perpendicolare alla tangente Cz all'asse della vôlta nel punto qualunque C, compreso fra D ed N, di coordinate $\overline{Oc}=\zeta$ e $\overline{cC}=\upsilon$, e prendere la componente secondo Cz. Si ha quindi

$$Z'=-P\frac{d\upsilon}{d\sigma}.$$

Per avere il momento M_x' bisogna fare il momento del peso P rispetto all'asse proiettato nel punto qualunque C già indicato, cosicchè risulta

$$M_x'=-P(i-\zeta).$$

Ponendo questi valori di Z' e di M_x' nelle formole determinatrici di G, G' ed L (numeri 2 e 3), osservando che le integrazioni devono essere estese fra i limiti 0 ed i, giacchè la forza Z' ed il momento M_x' hanno soltanto azione sulle sezioni rette della vôlta poste fra D ed N e per di più non dimenticando che la componente verticale V della reazione dell'appoggio GH è data da

$$-V=P\,,$$

si deduce

$$\left.\begin{aligned}
G &= \left(\int_0^c \frac{1}{\Omega}\frac{dv}{d\sigma}d\zeta + c\int_0^c \frac{v}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta - \int_0^c \frac{\zeta v}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\right)P \\
&\quad - \left(\int_0^i \frac{1}{\Omega}\frac{dv}{d\sigma}d\zeta + i\int_0^i \frac{v}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta - \int_0^i \frac{\zeta v}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\right)P \\
G' &= \left(c\int_0^c \frac{1}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta - \int_0^c \frac{\zeta}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\right)P - \left(i\int_0^i \frac{1}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta - \int_0^i \frac{\zeta}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\right)P \\
L &= \left(\int_0^i \frac{1}{\Omega}\frac{dv}{d\zeta}\frac{dv}{d\sigma}d\zeta - i\int_0^i \frac{\zeta}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta + \int_0^i \frac{\zeta^2}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\right)P
\end{aligned}\right\}\quad(1).$$

Sostituendo i valori dei coefficienti E, F ed F' e quelli dei termini G e G' nelle formole (3) del numero 2, immediatamente si ottengono i valori di Q e di M, e quindi il problema trovasi risoluto per rapporto alla determinazione delle reazioni degli appoggi.

Sostituendo poi nella formola (2) del numero 3 i valori trovati di V, di Q e di M, i valori noti dei coefficienti H, I e K e quello del termine L, si potrà ottenere lo spostamento Δv_0 della sezione di chiave, se si conoscerà il coefficiente di elasticità E_t.

6. **Reazioni degli appoggi e spostamento della sezione di chiave sotto l'azione di due forze orizzontali simmetriche rispetto alla sezione medesima.** — Siano

S l'intensità di ciascuna delle due forze orizzontali date, applicate una nel punto N (*Fig.* 3) e l'altra nel punto N',

l le distanze $\overline{nN}$ ed $\overline{n'N'}$ delle stesse forze dall'asse coordinato $O\zeta$.

I valori de' sei coefficienti E, F, F', H, I e K sono dati, i primi tre dalla prima, dalla seconda e dalla quarta delle formole (2) del numero 2, gli altri dalle prime tre delle formole (1) del numero 3; ed i valori dei tre termini G, G' ed L devono essere determinati col tener conto dell'intensità e della posizione della forza S cercando la forza Z' ed il momento M_x'.

La forza Z' si ottiene scomponendo la forza S in due componenti, l'una parallela e l'altra perpendicolare alla tangente Cz all'asse della vôlta nel punto qualunque C compreso fra D ed N, e prendendo la componente secondo Cz; cosicchè risulta

$$Z' = S\frac{d\zeta}{d\sigma} .$$

Il momento M_x' è quello della forza S rispetto all'asse proiettato nel punto C, di modo che

$$M_x' = S(\upsilon - l) .$$

Sostituendo questi valori di Z' e di M_x' nelle formole determinatrici di G, G' ed L (numeri 2 e 3), osservando che, se ritiensi la lettera i per indicare l'ascissa $\overline{On}$, le integrazioni devono essere estese fra i limiti 0 ed i (giacchè la forza Z' ed il momento M_x' hanno azione soltanto sulle sezioni poste fra D ed N), e risultando evidentemente nullo il valore di V, si giunge alle formole

$$\left.\begin{aligned} G &= \left(\int_0^i \frac{1}{\Omega}\frac{d\zeta}{d\sigma}d\zeta - l\int_0^i \frac{\upsilon}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta + \int_0^i \frac{\upsilon^2}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\right)S \\ G' &= \left(-l\int_0^i \frac{1}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta + \int_0^i \frac{\upsilon}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\right)S \\ L &= \left(-\int_0^i \frac{1}{\Omega}\frac{d\upsilon}{d\sigma}d\zeta - l\int_0^i \frac{\zeta}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta + \int_0^i \frac{\zeta\upsilon}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\right)S \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1) .$$

I valori di E, F ed F' e quelli di G e G', posti nelle formole (3) del numero 2, immediatamente conducono ai valori di Q e di M, e così il problema trovasi risoluto per rapporto alla determinazione delle reazioni degli appoggi.

I valori di Q ed M e quelli di H, I, K ed L, posti nella formola (2) del numero 3, serviranno a dedurre lo spostamento $\Delta\upsilon_0$ della sezione di chiave sempre quando si conosca il coefficiente di elasticità E_t. Come già si è detto, il valore di V è nullo; il termine IV che entra nell'ultima citata formola è dunque pur nullo; e quindi, pel caso che si considera, è inutile il calcolo del coefficiente I.

7. Reazioni degli appoggi o spostamento della sezione di chiave sotto l'azione di due coppie simmetriche rispetto alla sezione medesima. — Le due coppie che vogliónsi considerare siano contenute nel piano dell'asse ADB (*Fig.* 4) della vôlta; trovandosi una a dritta e l'altra a sinistra della sezione di chiave FI, facciano sentire le loro azioni, la prima sulle sezioni rette comprese fra quelle determinate dai due punti N e D e la seconda sulle sezioni rette comprese fra quelle corrispondenti ai punti N' e D; e si chiamino

μ il momento di ciascuna di esse,

i la distanza $\overline{On}$ ed $\overline{On'}$ dei due punti N ed N' dall'asse coordinato Ov.

Trovati i valori dei coefficienti E, F, F', H, I e K, usando delle opportune formole poste sotto le indicazioni (2) ed (1) dei numeri 2 e 3, conviene cercare la forza Z' ed il momento M_x' indispensabili per il calcolo dei tre termini G, G' ed L.

Per la sezione, determinata da un punto qualunque C dell'asse compreso fra D ed N, evidentemente si ha

$$Z' = 0$$
$$M_x' = \mu \; ,$$

e quindi, osservando che pel caso di due coppie simmetricamente disposte rispetto al giunto di chiave si ha $V=0$, i valori di G, G' ed L risultano

$$\left.\begin{aligned} G &= \mu \int_0^i \frac{v}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta \\ G' &= \mu \int_0^i \frac{1}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta \\ L &= \mu \int_0^i \frac{\zeta}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ (1)\,.$$

I valori di E, F, F', G e G' si porranno nelle formole (3) del numero 2 per ottenere la forza Q ed il momento M, e così il problema sarà risoluto per rapporto alla determinazione delle reazioni degli appoggi.

La formola (2) del numero 3 verrà dopo in acconcio per trovare lo spostamento Δv_0 della sezione di chiave quando si conosca il coefficiente di elasticità E_t, e quando siansi già calcolati i valori di Q ed M, di H, I, K ed L. Però, essendo nullo il valore di V, il termine IV che entra nella formola ultima indicata è anche nullo; cosicchè nel caso che si considera diventa inutile la determinazione del coefficiente I.

8. Reazioni degli appoggi e spostamento della sezione di chiave sotto l'azione di pesi simmetricamente disposti rispetto alla sezione stessa ed uniformemente distribuiti su due parti della proiezione orizzontale o della lunghezza dell'asse della vôlta. — Quanto si è detto nei tre ultimi numeri, mentre pone in evidenza in qual modo, dai casi contemplati nei numeri 5, 6 e 7 della citata seconda mia nota sull'elasticità nella teoria dell'equilibrio e della stabilità delle vôlte, riferentisi ad una vôlta non simmetrica, si passi a quelli meno generali di una vôlta simmetrica e simmetricamente sollecitata rispetto alla sezione di chiave, rende anche manifesto quanto facilmente dalle quantità D, D' e D'' si possano dedurre le quantità analoghe G, L e G'.

Per questo motivo, per l'altro che i due casi di pesi uniformemente distribuiti sulla proiezione orizzontale e sulla lunghezza dell'asse della vôlta non sono quelli che più di frequente si presentano nella pratica delle costruzioni delle vôlte di struttura murale, ed anche perchè nello studio pratico dell'equilibrio e della stabilità di queste costruzioni è generalmente più conveniente e più spiccio di considerare i pesi di diverse parti del vôlto, del riempimento e dei timpani siccome operanti secondo le verticali passanti pei centri delle parti stesse, crediamo superflua la deduzione delle quantità G, G' ed L, la quale d'altronde assai facilmente può essere fatta seguendo la via e le avvertenze chiaramente tracciate nei numeri 8 e 9 della predetta seconda mia nota e nei numeri 2 e 3 di questo lavoro.

9. Reazioni degli appoggi sotto l'azione di forze qualunque simmetricamente disposte rispetto alla sezione di chiave. — Considerando il caso generale di una vôlta avente per asse una curva qualunque, con sezione retta variabile secondo una legge qualsiasi e comunque sollecitata, ma posta nelle accennate condizioni di simmetria, si ha: che, prendendo sulla metà DB (*Fig.* 5) del suo asse i punti 1, 2, 3, 4, ... , $n-1$, si può considerare la vôlta siccome sollecitata dalle forze verticali P_1, P_2, P_3, P_4, ... e P_n rappresentanti i pesi delle differenti parti in cui essa trovasi divisa dalle sezioni rette condotte pei punti D, 1, 2, 3, 4, ... , $n-1$ e B; che questi pesi, con sufficiente approssimazione per la pratica sempre quando la curva DB siasi divisa in parti brevi, si possono considerare siccome applicati a quella superficie cilindrica, che è intermedia fra quelle d'intradosso e d'estradosso, che ha per direttrice la curva DB e che ha le sue generatrici parallele alle generatrici delle superficie ultime indicate; che si possono assumere i punti d'applicazione dei pesi stessi in quei punti m_1, m_2, m_3, m_4, ... ed m_n, cui corrispondono quelle generatrici della superficie intermedia predetta, le quali sono determinate dai centri di superficie delle sue parti proiettate nei segmenti $D1$, 12, 23, 34, ... ed $n-1\,B$ dell'asse; che le distanze degli indicati pesi P_1, P_2, P_3, P_4, ... e P_n dall'asse verticale si possono rispettivamente indicare con i_1, i_2, i_3, i_4, ... ed i_n; che le accennate sezioni rette, passanti pei punti D, 1, 2, 3, 4, ..., $n-1$ e B, dividono l'estradosso nelle parti KI_1, I_1I_2, I_2I_3, I_3I_4, ... ed $I_{n-1}H$; che su queste parti generalmente agiranno forze date R_1, R_2, R_3, R_4, ... ed R_n, applicate in punti noti L_1, L_2, L_3, L_4, ... ed L_n aventi rispettivamente, dall'asse verticale Ov le distanze ι_1', ι_2', ι_3', ι_4', ... e ι_n', dall'asse orizzontale $O\zeta$ le distanze λ_1', λ_2', λ_3', λ_4', ... e λ_n'; che queste forze ammetteranno rispettivamente le componenti verticali P_1', P_2', P_3', P_4', ... e P_n' e le componenti orizzontali S_1', S_2', S_3', S_4', ... ed S_n'; che agli indicati punti L_1, L_2, L_3, L_4, ... ed L_n corrisponderanno le sezioni rette incontranti l'asse della vôlta nei punti n_1, n_2, n_3, n_4, ... ed n_n aventi rispettivamente dall'asse verticale Ov le distanze i_1', i_2', i_3', i_4', ... ed i_n', dall'asse orizzontale $O\zeta$ le distanze l_1', l_2', l_3', l_4', ... ed l_n'; che le forze P_1', P_2', P_3', P_4', ... e P_n' opereranno rispetto alle orizzontali, rispettivamente proiettate nei punti n_1, n_2, n_3, n_4, ... ed n_n, coi momenti cogniti μ_1', μ_2', μ_3', μ_4', ... e μ_n'; e che le forze S_1', S_2', S_3', S_4', ... ed S_n' opereranno, rispetto alle stesse rette, coi momenti pure noti μ_1'', μ_2'', μ_3'', μ_4'', ... e μ_n''.

Conosciute le dette distanze dagli assi coordinati $O\zeta$ ed Ov, ottenute le dette forze parallele agli assi stessi e calcolati i momenti ultimi indicati, si potranno trovare le reazioni degli appoggi facendo ordinatamente le operazioni che seguono:

1° Colla formola (1) del numero 2 si dedurrà il valore di V;

2° Colla prima, colla seconda e colla quarta delle formole (2) dello stesso numero 2, si determineranno i tre coefficienti E, F ed F' dipendenti soltanto dalla forma o dalle dimensioni dell'asse della vôlta ed indipendenti dalle forze sollecitanti;

3° Colle prime due delle formole (1) del numero 5, si troveranno i termini G_{P_1} e G_{P_1}', G_{P_2} e G_{P_2}', G_{P_3} e G_{P_3}', G_{P_4} e G_{P_4}', ..., G_{P_n} e G_{P_n}' rispettivamente dovuti ai pesi P_1, P_2, P_3, P_4, ..., P_n, e quindi si faranno le due somme G_P e G_P' date da

$$G_P = G_{P_1} + G_{P_2} + G_{P_3} + G_{P_4} + \ldots\ldots + G_{P_n}$$
$$G_P' = G_{P_1}' + G_{P_2}' + G_{P_3}' + G_{P_4}' + \ldots\ldots + G_{P_n}' ;$$

4° Colle stesse formole del numero 5, si dedurranno i termini $G_{P'}$ e $G_{P_1'}'$, $G_{P_2'}$ e $G_{P_2'}'$, $G_{P_3'}$ e $G_{P_3'}'$, $G_{P_4'}$ e $G_{P_4'}'$, ..., $G_{P_n'}$ e $G_{P_n'}'$, rispettivamente dovute ai pesi P_1', P_2', P_3', P_4', ..., P_n' e quindi si otterranno le due somme $G_{P'}$ e $G_{P'}'$, col porre

$$G_{P'} = G_{P_1'} + G_{P_2'} + G_{P_3'} + G_{P_4'} + \ldots\ldots + G_{P_n'}$$
$$G_{P'}' = G_{P_1'}' + G_{P_2'}' + G_{P_3'}' + G_{P_4'}' + \ldots\ldots + G_{P_n'}' ;$$

5° Colle prime due delle formole (1) del numero 6 si determineranno i termini $G_{S_1'}$ e $G_{S_1'}'$, $G_{S_2'}$ e $G_{S_2'}'$, $G_{S_3'}$ e $G_{S_3'}'$, $G_{S_4'}$ e $G_{S_4'}'$, ..., $G_{S_n'}$ e $G_{S_n'}'$, rispettivamente dovuti alle forze orizzontali S_1', S_2', S_3', S_4', ..., S_n' e dopo si faranno le due somme $G_{S'}$ a $G_{S'}'$ date da

$$G_{S'} = G_{S_1'} + G_{S_2'} + G_{S_3'} + G_{S_4'} + \ldots\ldots + G_{S_n'}$$
$$G_{S'}' = G_{S_1'}' + G_{S_2'}' + G_{S_3'}' + G_{S_4'}' + \ldots\ldots + G_{S_n'}' ;$$

6° Si faranno le somme $\mu_1 = \mu_1' + \mu_1''$, $\mu_2 = \mu_2' + \mu_2''$, $\mu_3 = \mu_3' + \mu_3''$, $\mu_4 = \mu_4' + \mu_4''$, ... e $\mu_n = \mu_n' + \mu_n''$, colle prime due delle formole (1) del numero 7 si dedurranno i termini G_{μ_1} e G_{μ_1}', G_{μ_2} e G_{μ_2}', G_{μ_3} e G_{μ_3}', G_{μ_4} e G_{μ_4}', ..., G_{μ_n} e G_{μ_n}', e quindi si calcoleranno i valori di G_μ e di G_μ' dati da

$$G_\mu = G_{\mu_1} + G_{\mu_2} + G_{\mu_3} + G_{\mu_4} + \ldots\ldots + G_{\mu_n}$$
$$G_\mu' = G_{\mu_1}' + G_{\mu_2}' + G_{\mu_3}' + G_{\mu_4} + \ldots\ldots + G_{\mu_n}' ;$$

7° Si faranno le somme G e G' date da

$$G = G_P + G_{P'} + G_{S'} + G_\mu$$
$$G' = G_P' + G_{P'}' + G_{S'}' + G_\mu' ;$$

8° I valori trovati di E, F, F', G e G' si porranno nelle formole (3) del numero 2 onde ottenere i valori delle due quantità Q ed M.

10. Spostamento della sezione di chiave sotto l'azione di forze qualunque simmetricamente disposte rispetto alla sezione medesima. — Considerando il caso già stato indicato nel precedente numero, pel quale già abbiamo insegnato a trovare le reazioni degli appoggi, si determinerà lo spostamento verticale della sezione di chiave facendo le seguenti operazioni:

1° Colla prima, colla seconda e colla terza delle formole (1) del numero 3, si determineranno i tre coefficienti H, I e K dipendenti soltanto dalla forma e dalle dimensioni dell'asse della vôlta ed indipendenti dalle forze sollecitanti;

2° Colla terza delle formole (1) del numero 5, si calcoleranno i termini L_{p_1}, L_{p_2}, L_{p_3}, L_{p_4}, ... ed L_{p_n} rispettivamente dovuti ai pesi P_1, P_2, P_3, P_4, ... e P_n, e quindi si farà la somma

$$L_p = L_{p_1} + L_{p_2} + L_{p_3} + L_{p_4} + \ldots\ldots + L_{p_n} ;$$

3° Colla stessa formola, si troveranno i termini $L_{p_1'}$, $L_{p_2'}$, $L_{p_3'}$, $L_{p_4'}$, ... ed $L_{p_n'}$ per le forze verticali P_1', P_2', P_3', P_4', ... e P_n', quindi si passerà alla somma

$$L_{p'} = L_{p_1'} + L_{p_2'} + L_{p_3'} + L_{p_4'} + \ldots\ldots + L_{p_n'} ;$$

4° Colla terza delle formole (1) del numero 6, si dedurranno i termini $L_{S_1'}$, $L_{S_2'}$, $L_{S_3'}$, $L_{S_4'}$, ... ed $L_{S_n'}$ per le forze orizzontali S_1', S_2', S_3', S_4', ... ed S_n' e si otterrà la loro somma

$$L_{S'} = L_{S_1'} + L_{S_2'} + L_{S_3'} + L_{S_4'} + \ldots\ldots + L_{S_n'} ;$$

5° Colla terza delle formole (1) del numero 7, si calcoleranno le quantità L_{μ_1}, L_{μ_2}, L_{μ_3}, L_{μ_4}, ... ed L_{μ_n} dovute alle coppie μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, ... e μ_n, e quindi si farà il valore di L_μ dato da

$$L_\mu = L_{\mu_1} + L_{\mu_2} + L_{\mu_3} + L_{\mu_4} + \ldots\ldots + L_{\mu_n} ;$$

6° Si calcolerà il termine L dato da

$$L = L_p + L_{p'} + L_{S'} + L_\mu ;$$

7° I valori trovati di H, I, K ed L, unitamente a quelli già noti di Q, V ed M, si porranno nella formola (2) del numero 3, dalla quale sarà facile dedurre lo spostamento domandato Δv_0 quando sia noto il coefficiente di elasticità E_t.

11. Osservazione. — Ben di frequente avviene nella risoluzione dei problemi pratici, che i punti (*Fig.* 5) L_1, L_2, L_3, L_4, ... ed L_n, cui si possono considerare applicate le forze R_1, R_2, R_3, R_4, ... ed R_n determinano sezioni rette della vôlta incontranti l'asse DB in punti n_1, n_2, n_3, n_4, ... ed n_n vicinissimi ai punti m_1, m_2, m_3, m_4, ... ed m_n. In questi casi le coppie corrispondenti alle forze verticali P_1', P_2', P_3', P_4', ... e P_n' ed alle forze orizzontali S_1', S_2', S_3', S_4', ... ed S_n' si possono prendere senz'altro per rapporto ai punti m_1, m_2, m_3, m_4, ... ed m_n. Così procedendo notevolmente si semplificano i calcoli occorrenti per le determinazioni delle reazioni degli appoggi e dello spostamento del giunto di chiave, senza compromettere, nella risoluzione dei problemi pratici, l'esattezza dei risultamenti di queste stesse determinazioni, sulle quali le coppie predette hanno generalmente ben poca influenza.

Reazioni degli appoggi per un' arcata di ponte per ferrovia.

12. Come applicazione delle formole e delle norme state stabilite nei precedenti numeri per la determinazione delle reazioni degli appoggi delle vôlte simmetriche e simmetricamente sollecitate, si considererà il caso di un'arcata di ponte per ferrovia assumendo i seguenti dati:

Corda dell'arcata all'intradosso	35^{m}
Saetta corrispondente	9
Grossezza dell'arcata alla chiave	1,50
Grossezza dell'arcata all'imposta	2
Altezza del suolo stradale sulla generatrice più alta dell'estradosso dell'arcata	1
Peso del metro cubo di terra, di detriti di roccia e d'inghiaiamento della ferrovia	$1800^{cg.}$
Peso del metro cubo di muratura dell'arcata fatta con mattoni	2200
Peso del metro cubo di muratura di pietrame ...	2300
Peso del sovraccarico corrispondente presso a poco all'azione del passaggio di un convoglio, per ogni metro quadrato di proiezione orizzontale della zona occupata dalle traversine	2000.

La direttrice della superficie d'intradosso e l'asse dell'arcata sono archi circolari definiti dalla corda, dalla saetta e dalle grossezze alla chiave ed alle imposte già state accennate.

Nella risoluzione del problema si avrà riguardo: al caso della sola arcata senza alcun carico; al caso dell'arcata col carico ad essa incumbente pel ponte ultimato; ed al caso in cui si trova sul ponte un sovraccarico uniformemente distribuito sulla sua proiezione orizzontale, paragonabile presso a poco all'azione di un convoglio ferroviario.

Siccome poi il lavoro riuscirebbe eccessivamente lungo quando si volessero fare numericamente tutte le determinazioni necessarie a risolvere il problema, si adopereranno promiscuamente metodi numerici e metodi grafici, preferendo per ogni singola operazione quelli che più facilmente e speditamente conducono allo scopo, e desumendo molte delle dimensioni da introdursi nei calcoli da disegni regolarmente eseguiti in una scala sufficientemente grande. Questo modo di procedere avrà sicuramente per effetto di condurre a risultati finali non scevri da quei piccoli ed inevitabili errori che sempre accompagnano le operazioni grafiche e le deduzioni di lunghezze da disegni. Siffatti errori però non saranno mai gravi e sempre trascurabili nella risoluzione del problema che si sta trattando, giacchè i principii teorici da cui si parte e le formole che dai medesimi emanano, non potranno mai rappresentare in modo preciso la realtà dei fatti che si verificano nelle deformazioni e nei modi di resistere delle vôlte di struttura murale.

Operazioni preliminari.

13. Determinazioni riferentesi all'asse dell'arcata, disegno della sua sezione trasversale, scomposizione di questa, lunghezze dei giunti e loro angoli colla verticale. — Siano: l'arco circolare AC (*Fig.* 6), col suo centro in O sulla verticale determinata dal punto C, la metà della direttrice della superficie d'intradosso dell'arcata; AA'' il giunto d'imposta normale in A alla detta direttrice; CC'' il giunto corrispondente alla sommità della vôlta; A' e C' i punti di mezzo dei due giunti accennati; e l'arco circolare $A'C'$, col suo centro in O' sulla verticale stessa del centro O, la metà dell'asse della vôlta.

Essendo
$$\overline{CC'} = 0^{m},75\,,\qquad \overline{AA'} = 1^{m},00\,,$$
$$\overline{AB} = 17\;,50\,,\qquad \overline{BC} = 9\;,00\,,$$

si deduce: che il raggio $\overline{OA}=r$ della direttrice dell'intradosso è dato da

$$r=21^m,514\ ;$$

che l'ampiezza dell'angolo $AOC=\frac{1}{2}\alpha^o$ risulta

$$\frac{1}{2}\alpha_o=54^o\ 25'\ 55''\ ;$$

che, immaginando condotta la semi-corda $\overline{A'B'}$ dell'asse dell'arcata ed abbassata da A la perpendicolare $\overline{AD}$ alla semi-corda stessa, si ha

$$\overline{A'D}=0^m,813$$

$$\overline{A\ D}=0\ ,582\ ;$$

che la semi-corda $\overline{A'B'}$ e la monta $B'C'$ dell'asse predetto sono

$$\overline{A'B'}=18^m,\ 313$$

$$\overline{B'C'}=\ 9\ ,\ 168\ ;$$

e che finalmente il suo raggio $\overline{O'A'}=r'$, la sua ampiezza $A'O'C'=\frac{1}{2}\alpha'^o$ e la sua lunghezza L' risultano

$$r'=22^m,874$$

$$\frac{1}{2}\alpha'^o=53^o\ 11'\ 15''$$

$$L'=21^m,\ 1851\ .$$

Fatte queste importanti determinazioni numeriche, relative all'asse dell'arcata, conviene eseguire il disegno della sezione trasversale di quest'ultima in iscala sufficientemente grande, onde potersene servire per la deduzione celere di alcune dimensioni. Questo si è fatto nelle figure 7 ed 8, disegnate nella scala di $\frac{1}{100}$, col descrivere la direttrice della superficie d'intradosso, l'asse della vòlta, la direttrice della superficie d'estradosso ed i giunti d'imposta normali all'asse predetto.

La metà dell'asse dell'arcata si è divisa in parti eguali, nel caso concreto, in sei. Quindi, pei punti di divisione **0**, **1**, **2**, **3**, **4**, **5** e **6** si sono condotte le sette rette normali all'asse e limitate alle direttrici dell'intradosso e dell'estradosso. Le sei porzioni **01**, **12**, **23**, **34**, **45** e **56** si sono divise per metà nei punti m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 ed m_6, e pei sei punti così ottenuti si sono condotte le normali all'asse stesso, pure limitate alle direttrici d'intradosso e d'estradosso e rappresentanti i giunti mediani delle porzioni di vôlta già state considerate.

Conoscendosi la lunghezza L' della metà dell'asse della vôlta, riesce facile trovare la lunghezza di ciascuna delle parti **01**, **12**, **23**, **34**, **45** e **56**; giacchè, indicando con $\Delta\sigma$ ciascuna di queste parti, si ha

$$\Delta\sigma = \frac{21,1851}{6} = 3^m,531 ,$$

mentre la parte di arco, compresa fra un giunto mediano qualunque ed uno dei giunti vicini, è data da

$$\frac{1}{2}\Delta\sigma = 1^m,765 .$$

Elementi indispensabili per la determinazione delle reazioni degli appoggi e dello spostamento del giunto di chiave di un'arcata sono le ascisse e le ordinate dei punti **0**, **1**, **2**, **3**, **4**, **5** e **6** per rapporto alla corda ed alla saetta dell'asse, non che le ascisse e le ordinate dei punti m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 ed m_6. Questi elementi, stati desunti dalle figure 7 ed 8, sono marcati: nella figura 7 pei punti estremi delle differenti parti in cui si è diviso l'asse predetto per fare la scomposizione della vôlta; nella figura 8 pei punti di mezzo delle parti stesse.

Altri elementi indispensabili sono: gli angoli che i differenti giunti, determinati dai punti **0**, **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 ed m_6 e normali all'asse della vôlta, fanno colla verticale; le lunghezze dei giunti stessi fra le curve d'intradosso e d'estradosso. Osservando che i detti punti dividono il semi-asse dell'arcata in dodici parti eguali, immediatamente si deduce che gli angoli indicati devono differire l'uno dall'altro di $\frac{1}{12}$ dell'angolo $\frac{1}{2}\alpha'^\circ$ e che quindi devono risultare come appare dalla seguente tavola, nella quale si sono pure raccolte le lunghezze dei giunti corrispondenti quali furono desunte dal disegno.

Indicazione dei giunti	Angoli colla verticale	Lunghezza dei giunti
0	0° 0′ 0″	1^m, 50
m_1	4 25 56	1 , 51
1	8 51 52	1 , 52
m_2	13 17 48	1 , 53
2	17 43 45	1 , 54
m_3	22 9 41	1 , 56
3	26 35 37	1 , 60
m_4	31 1 33	1 , 66
4	35 27 30	1 , 72
m_5	39 53 26	1 , 80
5	44 19 22	1 , 86
m_6	48 45 18	1 , 94
6	53 11 15	2 , 00

14. Riduzione della muratura dei timpani, del riempimento sui timpani stessi, del ballast e del sovraccarico ad equipollenti massi di muratura dell'arcata. — Considerando una lunghezza di vôlta eguale all'unità nel senso delle sue generatrici e chiamando

h l'altezza di un prisma di muratura di pietrame di base eguale all'unità,

h' l'altezza di un prisma di muratura dell'arcata, pure di base eguale all'unità e dello stesso peso del primo,

si ha pei dati stati stabiliti nel numero 12

$$h' = \frac{2300}{2200} h = 1,045 \cdot h \ .$$

Cosicchè, disegnati nella figura 7 il profilo della vôlta determinato dal piano verticale passante per l'asse della strada ed il profilo $K'I'\alpha'C'$ della superficie superiore della cappa, e supposto che il peso del metro cubo di cappa sia eguale al peso del metro cubo di muratura di pie–

trame, immediatamente si dedurrà il profilo della superficie superiore di un masso di muratura, come quella dell'arcata, equipollente alla muratura dei timpani ed alla cappa: cōl portare

$$\overline{KK''} = 1,045 \times \overline{KK'}$$
$$\overline{II''} = 1,045 \times \overline{II'} ;$$

col tirare la retta $K''I''$; col descrivere una curva parallela al profilo dell'estradosso distante da esso di $1,045 \times \overline{CC'}$, la qual curva, a motivo della piccola spessezza della cappa e della scala in cui è disegnata la figura 7, materialmente si confonde colla $C'\alpha'$; e col condurre da I'' la retta $I''\alpha'$ tangente alla curva stessa.

Analogamente, dicendo

h_1 l'altezza di un prisma, di base eguale all'unità, del materiale costituente il riempimento ed il ballast;

h_1' l'altezza di un prisma di muratura dell'arcata, pure di base eguale all'unità e dello stesso peso del primo,

si ha

$$h_1' = \frac{1800}{2200} h_1 = 0,818 . h_1 .$$

Di maniera che, essendo $C'''K'''$ quella retta la quale passa all'altezza di 1 metro al di sopra della generatrice più alta dell'estradosso della vôlta, e la quale, per conseguenza, rappresenta l'asse della strada sul ponte, si otterrà il profilo della superficie superiore di un masso di muratura, come quella dell'arcata, equipollente al riempimento esistente sui timpani ed al ballast, col portare

$$\overline{K''K^{\text{iv}}} = 0,818 \times \overline{K'K'''}$$
$$\overline{I''I^{\text{iv}}} = 0,818 \times \overline{I'I'''}$$
$$\overline{C'C^{\text{iv}}} = 0,818 \times \overline{C'C'''}$$

e col tracciare la spezzata $K^{\text{iv}}I^{\text{iv}}C^{\text{iv}}$. — A tutto rigore avrebbesi dovuto trovare l'ultimo indicato profilo col considerare la verticale passante per α' e molte altre per punti fra α' e C', col determinare gli incontri di queste verticali colla $C'''K'''$ e col moltiplicare pel numero 0,818 le loro lunghezze intercette fra la curva $\alpha'C'$ e la retta $C'''K'''$. Così operando avrebbesi ottenuto, invece della retta $I^{\text{iv}}C^{\text{iv}}$, un profilo composto di una retta e di una curva; la retta con un estremo in I^{IV} e coll'altro estremo sulla verticale del punto z'; la curva colla sua origine in quest'ultimo estremo della retta e coll'altra estremità in C^{IV}. Però il profilo $K^{\text{IV}}I^{\text{IV}}C^{\text{IV}}$ di pochissimo si scosta da quello mistilineo or accennato; cosicchè per la risoluzione pratica del problema, che si sta trattando, non è il caso di occuparsi della determinazione di quest'ultimo.

Finalmente, indicando con H l'altezza di un prisma di muratura dell'arcata avente la base di 1 metro quadrato ed il peso di 2000 chilog., ossia di peso presso a poco eguale all'azione del passaggio di un convoglio su ogni metro quadrato della proiezione orizzontale della zona occupata dalle traversine, si ha

$$H=\frac{2000}{2200}=0^{\text{m}},909 \; .$$

E quindi, designando un profilo, parallelo al già trovato $K^{\text{IV}}I^{\text{IV}}C^{\text{IV}}$ ed elevato su quest'ultimo di metri 0,909, ossia $\left(\text{per essere la figura 8 disegnata nella scala di } \frac{1}{100}\right)$ prendendo

$$\overline{K_1K_1^{\text{IV}}}=\overline{KK^{\text{IV}}}+\frac{0^{\text{m}},909}{100}$$

$$\overline{I_1I_1^{\text{IV}}}=\overline{II^{\text{IV}}}+\frac{0^{\text{m}},909}{100}$$

$$\overline{CC_1^{\text{IV}}}=\overline{CC^{\text{IV}}}+\frac{0^{\text{m}},909}{100}\; ,$$

si ottiene in $K_1^{\text{IV}}I_1^{\text{IV}}C_1^{\text{IV}}$ il profilo della superficie superiore di un masso di muratura, come quella dell'arcata, equipollente all'azione del massimo carico di cui può essere gravata l'arcata del viadotto.

15. Pesi gravitanti sulle differenti parti dell'arcata. — Nel fare questa determinazione si assumerà come unità di peso quello del metro cubo di muratura di mattoni, di cui si suppone fatto il vôlto, e si considereranno a parte: i pesi delle differenti porzioni dell'arcata; i pesi che si possono ammettere siccome gravitanti su queste porzioni a motivo dei timpani, del riempimento sui timpani e del ballast; e finalmente questi ultimi pesi aumentati dall'azione dei sovraccarichi.

Per la scomposizione della sezione retta della vôlta nella maniera stata indicata nel numero 13, si devono considerare i pesi P_a di quelle sue porzioni che sono comprese fra i giunti determinati (*Fig.* 7) dai punti **0** ed **1**, **1** e **2**, **2** e **3**, **3** e **4**, **4** e **5**, **5** e **6**. Questi pesi, con sufficiente approssimazione per la pratica, si possono supporre diretti secondo le verticali dei punti m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 ed m_6; e, sia per considerarsi una lunghezza dell'arcata eguale all'unità nel senso delle generatrici, sia per la scelta stata fatta dell'unità di peso, sono espressi dalle aree rappresentate nelle figure mistilinee in cui è stata scomposta la sezione trasversale della vôlta colle rette normali all'asse passanti pei punti **0**, **1**, **2**, **3**, **4**, **5** e **6**. Ciascuna di queste aree poi, in modo spedito e sufficientemente esatto, si può ottenere moltiplicando la lunghezza della parte di asse della vôlta compresa fra i punti di mezzo dei suoi due giunti estremi per le lunghezze dei giunti medii determinati dai punti m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 ed m_6; e, riunendo i fattori che dànno i pesi indicati ed i valori di questi ultimi, si può compilare la seguente tabella:

Indicazione delle parti di arcata di cui si vogliono i pesi	Lunghezze delle differenti parti dell'asse	Lunghezze dei giunti medii	Pesi P_a
Dal giunto **0** al giunto **1**	3^m, 53	1^m, 51	5, 33
» **1** » **2**	3 , 53	1 , 53	5, 40
» **2** » **3**	3 , 53	1 , 56	5, 51
» **3** » **4**	3 , 53	1 , 66	5, 86
» **4** » **5**	3 , 53	1 , 80	6, 35
» **5** » **6**	3 , 53	1 , 94	6, 85
			35, 30

Per trovare i pesi P_r che si possono ammettere siccome gravitanti sulle porzioni state indicate dal vôlto a motivo dei timpani, del riempimento sui timpani stessi e del ballast, si può seguire questo semplice procedimento. Condurre pei punti, in cui i giunti della vôlta passanti per **0**, **1**, **2**, **3**, **4**, **5** e **6** incontrano la direttrice della superficie d'estradosso, altrettante verticali fino all'incontro colla spezzata C^{IV} I^{IV} K^{IV} (*Fig.* 7); e supporre che sulle parti di vôlta, le cui sezioni trasversali sottostanno e corrispondono ai trapezi mistilinei determinati dalle verticali accennate, gravitino i pesi dei prismi di muratura di mattoni aventi per base i trapezi stessi ed altezze eguali all'unità. Considerando questi trapezi come quadrilateri, riesce facile trovare i loro centri di superficie g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, e determinare così le verticali secondo le quali operano i pesi dei prismi in essi rappresentati. Questi pesi poi saranno espressi dalle aree dei trapezi mistilinei sovr'indicati, i quali, per semplicità di calcolazione ed operando in favore della stabilità coll'ammettere che graviti sulla vôlta un peso maggiore di quello che effettivamente esiste, si considereranno come rettilinei. La tavola, che qui si presenta, riassume gli elementi, desunti dal disegno, occorrenti pel calcolo delle azioni, supposte verticali, dovute ai timpani, al riempimento sui timpani ed al ballast.

Indicazione delle parti di arcata cui insistono i pesi	Altezze dei trapezii	Semi-somme delle basi	Pesi P_r
Dal giunto 0 al giunto 1	3^m, 65	0^m, 945	3, 45
» 1 » 2	3 , 55	1 , 405	4, 99
» 2 » 3	3 , 40	2 , 390	8, 13
» 3 » 4	3 , 15	3 , 890	12, 25
» 4 » 5	2 , 85	5 , 880	16, 76
» 5 » 6	2 , 50	8 , 500	21, 25
			66, 83

Finalmente, per trovare i pesi P_{rs} che si possono ammettere siccome gravitanti sulle porzioni state indicate dal vôlto pei timpani, pel riempimento, pel ballast o pel sovraccarico, si può seguire il procedimento stesso stato or ora indicato pel caso della non esistenza del sovraccarico, col prolungare le verticali, determinate dai punti in cui i giunti dell'arcata passanti pei punti 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 incontrano la direttrice della superficie d'estradosso, fino alla spezzata C_1^{IV} I_1^{IV} K_1^{IV} (*Fig.* 8). I centri di superficie h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 ed h_6 dei trapezi che così risultano determinati, col considerare questi trapezi come quadrilateri, dànno le linee d'azione dei pesi stessi. E le loro intensità, risultanti dagli elementi desunti dal disegno e contenuti nella seconda e nella terza colonna della tabella che qui si presenta, si trovano nella quarta colonna della tabella stessa.

Indicazione delle parti di arcata cui insistono i pesi	Altezze dei trapezi	Semi-somme delle basi	Pesi P_{rs}
Dal giunto 0 al giunto 1	3^m, 65	1^m, 855	6, 77
» 1 » 2	3 , 55	2 , 315	8, 22
» 2 » 3	3 , 40	3 , 300	11, 22
» 3 » 4	3 , 15	4 , 800	15, 12
» 4 » 5	2 , 85	6 , 790	19, 35
» 5 » 6	2 , 50	9 , 410	23, 53
			84, 21

16. Calcolo approssimato degli integrali dipendenti dalla forma e dalle dimensioni dell'asse della vôlta, fra i limiti definiti dalla sezione di chiave e dai giunti corrispondenti ai punti di divisione dell'asse medesimo. — Considerando una sezione o giunto qualunque SP (*Fig.* 6) lungo l'unità nel senso delle generatrici e normale all'asse $C'A'$ della vôlta, assumendo per asse delle ascisse la orizzontale $B'A'\zeta$ e per asse delle ordinate la verticale $B'C'\upsilon$, e dicendo

ζ ed υ le due coordinate $\overline{B'm}$ ed $\overline{mM}$ del punto M in cui il giunto qualunque SP incontra l'asse $C'A'$,

σ l'arco $C'M$ compreso fra l'origine C' degli archi ed il punto M predetto,

Ω la superficie della sezione SP ed

I_x il suo momento d'inerzia rispetto alla orizzontale proiettata nel punto M,

φ l'angolo $MO'C'$ che il giunto SP fa colla verticale ed

r' il raggio $\overline{O'M}$,

bisogna calcolare

$$\int\frac{1}{\Omega}\frac{d\zeta}{d\sigma}d\zeta=\int\frac{1}{\Omega}\left(\frac{d\zeta}{d\sigma}\right)^2 d\sigma\,,\qquad \int\frac{1}{\Omega}\frac{d\upsilon}{d\sigma}d\zeta-\int\frac{1}{\Omega}\frac{d\zeta}{d\sigma}\frac{d\upsilon}{d\sigma}d\sigma\,,$$

$$\int\frac{1}{\Omega}\frac{d\upsilon}{d\zeta}\frac{d\upsilon}{d\sigma}d\zeta=\int\frac{1}{\Omega}\left(\frac{d\upsilon}{d\sigma}\right)^2 d\sigma\,,$$

$$\int\frac{1}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta=\int\frac{1}{I_x}d\sigma\,,\quad \int\frac{\upsilon}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta=\int\frac{\upsilon}{I_x}d\sigma\,,\quad \int\frac{\zeta}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta=\int\frac{\zeta}{I_x}d\sigma\,,$$

$$\int\frac{\upsilon^2}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta=\int\frac{\upsilon^2}{I_x}d\sigma\,,\quad \int\frac{\zeta\upsilon}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta=\int\frac{\zeta\upsilon}{I_x}d\sigma\,,\quad \int\frac{\zeta^2}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta=\int\frac{\zeta^2}{I_x}d\sigma\,,$$

fra i limiti definiti dal giunto di chiave e dai diversi giunti corrispondenti ai punti (*Fig.* 7) m_1, **1**, m_2, **2**, m_3, **3**, m_4, **4**, m_5, **5**, m_6 e **6**.

Questi integrali, pel caso che si tratta di una vôlta avente per asse un arco di circolo, si calcoleranno considerando le loro seconde espressioni, in cui la variabile indipendente è l'arco σ. In quanto ai valori dei coefficienti differenziali $\frac{d\zeta}{d\sigma}$ e $\frac{dv}{d\sigma}$ osservasi: che, immaginando condotta per M (*Fig.* 6) la retta Mn parallela ad $A'B'$, si ha

$$\overline{nM} = \overline{B'm} = \zeta \ ,$$

$$\overline{B'n} = \overline{O'n} - \overline{O'B'} = \overline{mM} = v \ ,$$

ossia

$$\zeta = r' \operatorname{sen} \varphi \qquad \ldots\ldots \ (1) \ ,$$

$$v = r' \left(\cos \varphi - \cos \frac{1}{2} \alpha'^{\circ} \right) \qquad \ldots\ldots \ (2) \ ;$$

che per conseguenza risulta

$$d\zeta = \ \ r' \cos \varphi \, d\varphi$$

$$dv = -r' \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \ ;$$

che

$$d\sigma = \ \ r' d\varphi \qquad \ldots\ldots \ (3) \ ;$$

e che infine si ottiene

$$\frac{d\zeta}{d\sigma} = \cos \varphi \ , \qquad \frac{dv}{d\sigma} = -\operatorname{sen} \varphi \qquad \ldots\ldots \ (4) \ .$$

Dalle seconde espressioni dei nove riportati integrali chiaramente appare, che le ordinate di quelle curve, dalle quali si dovranno dedurre i valori degli integrali stessi fra i limiti indicati, avranno fra di loro le distanze costanti $d\sigma = r' d\varphi$; distanze che, procedendo per approssimazione col metodo delle quadrature e col calcolare le dette ordinate pei punti **0**, m_1, **1**, m_2, **2**, m_3, **3**, m_4, **4**, m_5, **5**, m_6 e **6**, saranno eguali alla lunghezza di ciascuna delle dodici parti in cui il semi-asse è diviso dagli ultimi indicati punti, ossia eguale a quella lunghezza che nel numero 13 venne indicata con $\frac{1}{2} \Delta \sigma$.

Premesso questo, si può passare alle calcolazioni degli accennati integrali col mantenere in evidenza il fattore $\frac{1}{2} \Delta \sigma$ od anche, per semplicità di scritturazione, col supporlo eguale all'unità; non dimenticando però questa supposizione onde ristabilirlo in quelle espressioni in cui, per non essere comune al numeratore ed al denominatore, non può sparire dal risultato finale. I risultamenti delle calcolazioni saranno posti in apposite tabelle; nella prima colonna di queste tabelle saranno indicati i differenti punti dell'asse dell'arcata; nell'antipenultima si porranno le ordinate, corrispondenti ai punti predetti, per quelle curve dalle quali si dovranno dedurre i valori degli integrali; nella penultima le semi-somme di due ordinate successive, ossia, nell'ipotesi della distanza $\frac{1}{2}\Delta\sigma$ eguale all'unità, l'area del trapezio di cui queste ordinate sarebbero le basi parallele; e finalmente nell'ultima le somme successive di queste aree, le quali somme, sempre nell'ipotesi della distanza $\frac{1}{2}\Delta\sigma$ eguale all'unità, rappresenteranno rispettivamente gli integrali domandati fra i limiti definiti dalle sezioni o giunti passanti pei punti **0** ed m_1, **0** ed **1**, **0** ed m_2, **0** e **2**, **0** ed m_3, **0** e **3**, **0** ed m_4, **0** e **4**, **0** ed m_5, **0** e **5**, **0** ed m_6, **0** e **6**.

Ecco le tabelle riassuntrici degli elementi e dei risultamenti del calcolo degli integrali predetti, coll'indicazione (in testa) dell'integrale a cui si riferiscono. Chiamando poi b la lunghezza di un giunto qualunque in senso normale all'asse della vôlta, per considerarsi una lunghezza di arcata eguale all'unità nel senso delle generatrici, si ha $\Omega = b$ ed $I_x = \frac{1}{12} b^3$.

$$\int \frac{1}{\Omega} \frac{d\zeta}{d\sigma} d\zeta = \int \frac{1}{\Omega} \left(\frac{d\zeta}{d\sigma} \right)^2 d\sigma = \int \frac{1}{\Omega} \cos^2 \varphi \cdot r' d\varphi$$

Punti dell'asse dell'arcata	Superfice Ω	Angoli φ	Ordinate $\frac{1}{\Omega}\cos^2\varphi$	Semi-somme delle ordinate successive	Integrali nell'ipotesi di $\frac{1}{2}\Delta\sigma = 1$
0	1^{mq}, 50	0° 0′	0,667		
				0,66	
m_1	1 , 51	4 26	0,658		0,66
				0,65	
1	1 , 52	8 52	0,642		1,31
				0,63	
m_2	1 , 53	13 18	0,619		1,94
				0,60	
2	1 , 54	17 44	0,589		2,54
				0,57	
m_3	1 , 56	22 10	0,550		3,11
				0,53	
3	1 , 60	26 36	0,500		3,64
				0,47	
m_4	1 , 66	31 2	0,442		4,11
				0,41	
4	1 , 72	35 28	0,386		4,52
				0,36	
m_5	1 , 80	39 53	0,327		4,88
				0,30	
5	1 , 86	44 19	0,275		5,18
				0,25	
m_6	1 , 94	48 45	0,224		5,43
				0,20	
6	2 , 00	53 11	0,180		5,63

$$\int \frac{1}{\Omega} \frac{dv}{d\sigma} d\zeta = \int \frac{1}{\Omega} \frac{d\zeta}{d\sigma} \frac{dv}{d\sigma} d\sigma = \int -\frac{1}{\Omega} \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi \cdot r' d\varphi$$

Punti dell'asse dell'arcata	Superfice Ω	Angoli φ	Ordinate $-\frac{1}{\Omega} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi$	Semi-somme delle ordinate successive	Integrali nell'ipotesi di $\frac{1}{2}\Delta\sigma = 1$
0	1^{mq}, 50	0° 0′	−0, 000		
				−0, 03	
m_1	1 , 51	4 26	−0, 051		−0, 03
				−0, 08	
1	1 , 52	8 52	−0, 100		−0, 11
				−0, 12	
m_2	1 , 53	13 18	−0, 146		−0, 23
				−0, 17	
2	1 , 54	17 44	−0, 188		−0, 40
				−0, 21	
m_3	1 , 56	22 10	−0, 224		−0, 61
				−0, 24	
3	1 , 60	26 36	−0, 250		−0, 85
				−0, 26	
m_4	1 , 66	31 2	−0, 266		−1, 11
				−0, 27	
4	1 , 72	35 28	−0, 275		−1, 38
				−0, 27	
m_5	1 , 80	39 53	−0, 273		−1, 65
				−0, 27	
5	1 , 86	44 19	−0, 269		−1, 92
				−0, 26	
m_6	1 , 94	48 45	−0, 256		−2, 18
				−0, 25	
6	2 , 00	53 11	−0, 240		−2, 43

$$\int \frac{1}{\Omega} \frac{dv}{d\sigma} \frac{dv}{d\zeta} d\zeta = \int \frac{1}{\Omega} \left(\frac{dv}{d\sigma} \right)^2 d\sigma = \int \frac{1}{\Omega} \operatorname{sen}^2 \varphi \cdot r' d\varphi$$

Punti dell'asse dell'arcata	Superfice Ω	Angoli φ	Ordinate $\frac{1}{\Omega} \operatorname{sen}^2 \varphi$	Semi-somme delle ordinate successive	Integrali nell'ipotesi di $\frac{1}{2} \Delta \sigma = 1$
0	1^{mq}, 50	0° 0′	0, 000		
				0, 002	
m_1	1, 51	4 26	0, 004		0, 002
				0, 01	
1	1, 52	8 52	0, 016		0, 01
				0, 03	
m_2	1, 53	13 18	0, 035		0, 04
				0, 05	
2	1, 54	17 44	0, 060		0, 09
				0, 08	
m_3	1, 56	22 10	0, 091		0, 17
				0, 11	
3	1, 60	26 36	0, 125		0, 28
				0, 14	
m_4	1, 66	31 2	0, 160		0, 42
				0, 18	
4	1, 72	35 28	0, 196		0, 60
				0, 21	
m_5	1, 80	39 53	0, 228		0, 81
				0, 25	
5	1, 86	44 19	0, 262		1, 06
				0, 28	
m_6	1, 94	48 45	0, 291		1, 34
				0, 31	
6	2, 00	53 11	0, 320		1, 65

$$\int \frac{1}{I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta = \int \frac{1}{I_x} d\sigma$$

Punti dell'asse dell'arcata	Lunghezze b	Ordinate $\frac{1}{I_x}$	Semi-somme delle ordinate successive	Integrali nell'ipotesi di $\frac{1}{2}\Delta\sigma = 1$
0	1^m, 50	3,5556		
			3,52	
m_1	1 , 51	3,4854		3,52
			3,45	
1	1 , 52	3,4170		6,97
			3,38	
m_2	1 , 53	3,3505		10,35
			3,32	
2	1 , 54	3,2856		13,67
			3,22	
m_3	1 , 56	3,1609		16,89
			3,05	
3	1 , 60	2,9297		19,94
			2,78	
m_4	1 , 66	2,6234		22,72
			2,49	
4	1 , 72	2,3583		25,21
			2,21	
m_5	1 , 80	2,0576		27,42
			1,96	
5	1 , 86	1,8648		29,38
			1,75	
m_6	1 , 94	1,6435		31,13
			1,57	
6	2 , 00	1,5000		32,70

$$\int \frac{\upsilon}{I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta = \int \frac{\upsilon}{I_x} d\sigma$$

Punti dell'asse dell'arcata	Ordinate υ dei punti dell'asse dell'arcata	Valori di $\frac{1}{I_x}$	Ordinate $\frac{\upsilon}{I_x}$	Semi-somme delle ordinate successive	Integrali nell'ipotesi di $\frac{1}{2}\Delta\sigma=1$
0	9^m, 168	3,5556	32,597		
				32,16	
m_1	9, 10	3,4854	31,717		32,16
				31,06	
1	8, 90	3,4170	30,412		63,22
				29,53	
m_2	8, 55	3,3505	28,647		92,75
				27,63	
2	8, 10	3,2856	26,614		120,38
				25,13	
m_3	7, 48	3,1609	23,643		145,51
				21,69	
3	6, 74	2,9297	19,746		167,20
				17,63	
m_4	5, 91	2,6234	15,504		184,83
				13,58	
4	4, 94	2,3583	11,650		198,41
				9,79	
m_5	3, 85	2,0576	7,922		208,20
				6,46	
5	2, 68	1,8648	4,998		214,66
				3,65	
m_6	1, 40	1,6435	2,301		218,31
				1,15	
6	0, 00	1,5000	0,000		219,46

$$\int \frac{\zeta}{I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta = \int \frac{\zeta}{I_x} d\sigma \; .$$

Punti dell'asse dell'arcata	Ascisse ζ dei punti dell'asse dell'arcata	Valori di $\frac{1}{I_x}$	Ordinate $\frac{\zeta}{I_x}$	Semi-somme delle ordinate successive	Integrali nell'ipotesi di $\frac{1}{2}\Delta\sigma = 1$
0	0^m, 00	3,5556	0,000		
				3,05	
m_1	1 , 75	3 4854	6,099		3,05
				9,10	
1	3 , 54	3,4170	12,096		12,15
				14,86	
m_2	5 , 26	3,3505	17,624		27,01
				20,30	
2	6 , 99	3,2856	22,967		47,31
				25,15	
m_3	8 , 65	3,1609	27,342		72,46
				28,69	
3	10 , 25	2,9297	30,029		101,15
				30,49	
m_4	11 , 80	2,6234	30,956		131,64
				31,16	
4	13 , 30	2,3583	31,365		162,80
				30,81	
m_5	14 , 70	2,0576	30,247		193,61
				30,04	
5	16 , 00	1,8648	29,838		223,65
				29,06	
m_6	17 , 21	1,6435	28,285		252,71
				27,88	
6	18 , 313	1,5000	27,469		280,59

$$\int \frac{v^2}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta = \int \frac{v^2}{I_x}d\sigma$$

Punti dell'asse dell'arcata	Ordinate v dei punti dell'asse dell'arcata	Valori di $\frac{1}{I_x}$	Ordinate $\frac{v^2}{I_x}$	Semi-somme delle ordinate successive	Integrali nell'ipotesi di $\frac{1}{2}\Delta\sigma = 1$
0	9^m, 168	3, 5556	298, 852		
				293, 74	
m_1	9 , 10	3, 4854	288, 624		293, 74
				279, 64	
1	8 , 90	3, 4170	270, 664		573, 38
				257, 80	
m_2	8 , 55	3, 3505	244, 928		831, 18
				230, 25	
2	8 , 10	3, 2856	215, 571		1061, 43
				196, 21	
m_3	7 , 48	3, 1609	176, 852		1257, 64
				154, 97	
3	6 , 74	2, 9297	133, 088		1412, 61
				112, 36	
m_4	5 , 91	2, 6234	91, 629		1524, 97
				74, 59	
4	4 , 94	2, 3583	57, 551		1599, 56
				44, 03	
m_5	3 , 85	2, 0576	30, 499		1643, 59
				21, 95	
5	2 , 68	1, 8648	13, 394		1665, 54
				8, 31	
m_6	1 , 40	1, 6435	3, 221		1673, 85
				1, 61	
6	0 , 00	1, 5000	0, 000		1675, 46

$$\int \frac{\zeta v}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta=\int\frac{\zeta v}{I_x}\,d\sigma$$

Punti dell'asse dell'arcata	Coordinate dei punti dell'asse dell'arcata ζ	v	Valori di $\frac{1}{I_x}$	Ordinate $\frac{\zeta v}{I_x}$	Semi-somme delle ordinate successive	Integrali nell'ipotesi di $\frac{1}{2}\Delta\sigma=1$
0	0^m, 00	9^m, 168	3,5556	0,000		
					27,75	
m_1	1 , 75	9 , 10	3,4854	55,505		27,75
					81,58	
1	3 , 54	8 , 90	3,4170	107,651		109,33
					129,17	
m_2	5 , 26	8 , 55	3,3505	150,681		238,50
					168,36	
2	6 , 99	8 , 10	3,2856	186,029		406,86
					195,27	
m_3	8 , 65	7 , 48	3,1609	204,515		602,13
					203,46	
3	10 , 25	6 , 74	2,9297	202,397		805,59
					192,67	
m_4	11 , 80	5 , 91	2,6234	182,947		998,26
					168,95	
4	13 , 30	4 , 94	2,3583	154,944		1167,21
					135,70	
m_5	14 , 70	3 , 85	2,0576	116,451		1302,91
					98,21	
5	16 , 00	2 , 68	1,8648	79,965		1401,12
					59,78	
m_6	17 , 21	1 , 40	1,6435	39,599		1460,90
					19,80	
6	18 , 313	0 , 00	1,5000	0,000		1480,70

$$\int \frac{\zeta^2 d\sigma}{I_x d\zeta} d\zeta = \int \frac{\zeta^2}{I_x} d\sigma$$

Punti dell'asse dell'arcata	Ascisse ζ dei punti dell'asse dell'arcata	Valori di $\frac{1}{I_x}$	Ordinate $\frac{\zeta^2}{I_x}$	Semi-somme delle ordinate successive	Integrali nell'ipotesi di $\frac{1}{2}\Delta\sigma = 1$
0	0^m, 00	3,5556	0,000		
				5,34	
m_1	1 , 75	3,4854	10,674		5,34
				26,75	
1	3 , 54	3,4170	42,821		32,09
				67,76	
m_2	5 , 26	3,3505	92,700		99,85
				126,62	
2	6 , 99	3,2856	160,536		226,47
				198,52	
m_3	8 , 65	3,1609	236,504		424,99
				272,15	
3	10 , 25	2,9297	307,801		697,14
				336,54	
m_4	11 , 80	2,6234	365,276		1033,68
				391,22	
4	13 , 30	2,3583	417,157		1424,90
				430,89	
m_5	14 , 70	1,0576	444,630		1855,79
				461,02	
5	16 , 00	1,8648	477,400		2316,81
				482,09	
m_6	17 , 21	1,6435	486,786		2798,90
				494,92	
6	18 , 313	1,5000	503,049		3293,82

17. Calcolo dei coefficienti E, F ed F'. — La prima, la seconda e la quarta delle formole (2) del numero 2 dicono che gli integrali per la determinazione dei coefficienti E, F ed F' devono essere presi fra i limiti definiti dal giunto di chiave e dal giunto d'imposta; cosicchè, pei risultati contenuti nelle tabelle del precedente numero, si ha

$$E = -5,63 - 1675,46 = -1681,09 ;$$
$$F = 219,46 ,$$
$$F' = 32,70 .$$

Reazioni degli appoggi pel solo peso dell'arcata.

18. Determinazione dei termini G e G'. — Conservando alla lettera c il significato attribuitole nel numero 2, indicando con

P_a il peso di una qualunque delle sei parti in cui si è divisa la metà dell'arcata, con

i l'ascissa del suo punto d'applicazione e con

G_a e G_a' quei valori particolari delle quantità G e G' che corrispondono al solo peso dell'arcata,

per quanto risulta dai numeri 5 e 9, le formole determinatrici di G_a e di G_a' si possono mettere sotto la forma

$$\left.\begin{aligned} G_a &= J\,\Sigma\,P_a + \Sigma\,N\,P_a \\ G_a' &= J'\,\Sigma\,P_a + \Sigma\,N' P_a \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (1),$$

nelle quali il simbolo Σ deve essere esteso a tutti i pesi sollecitanti la metà dell'arcata, mentre i coefficienti J, J', N ed N' sono dati dalle formole

$$\left.\begin{aligned} J &= \int_0^c \frac{1}{\Omega}\frac{dv}{d\sigma}\,d\zeta + c\int_0^c \frac{v}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta - \int_0^c \frac{\zeta v}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta \\ J' &= c\int_0^c \frac{1}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta - \int_0^c \frac{\zeta}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta \\ N &= -\int_0^i \frac{1}{\Omega}\frac{dv}{d\sigma}\,d\zeta - i\int_0^i \frac{v}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta + \int_0^i \frac{\zeta v}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta \\ N' &= -i\int_0^i \frac{1}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta + \int_0^i \frac{\zeta}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ (2) .$$

I valori dei coefficienti J ed J' sono subito trovati; gli integrali in essi contenuti si devono prendere fra i limiti definiti dal giunto di chiave e dal giunto d'imposta e quindi, pei risultati inscritti nelle tabelle del numero 16, si ha

$$J = -\ 2,43 + 18,313 \times 219,46 - 1480,70 = 2535,84$$
$$J' = \ 18,313 \times 32,70 - 280,59 = 318,25\ .$$

Siccome poi il valore di ΣP_a non è altro che la somma 35,30 di tutti i pesi contenuti nell'ultima colonna della prima tabella del numero 15, si ottiene

$$J \Sigma P_a = 2535,84 \times 35,30 = 89515,1520$$
$$J' \Sigma P_a = \ 318,25 \times 35,30 = 11234,2250\ .$$

Per ottenere le due quantità $\Sigma N P_a$ e $\Sigma N' P_a$ si può procedere come segue: si supporrà che ai punti m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 ed m_6 dell'asse dell'arcata (*Fig.* 7) siano applicati i pesi registrati nell'ultima colonna della prima tabella del numero 15; si calcoleranno i coefficienti N ed N' relativi ai punti stessi; e si dedurranno i valori di $\Sigma N P_a$ e di $\Sigma N' P_a$ facendo le due somme dei pesi P_a pei corrispondenti valori di N e di N'. In quanto ai valori degli integrali da impiegarsi nelle calcolazioni dei detti coefficienti N ed N', riesce facile desumerli dalle ultime colonne delle tabelle del numero 16, osservando che gli integrali fra i limiti 0 ed i sono i numeri delle colonne stesse, i quali corrispondono ai citati punti m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 ed m_6.

Nelle due tavole che seguono si hanno le espressioni numeriche ed i valori dei coefficienti N ed N'

Punti dell'asse dell'arcata	Espressioni di N	Valori di N
m_1	0,03 − 1,75 × 32,16 + 27,75	− 28,50
m_2	0,23 − 5,26 × 92,75 + 238,50	− 249,14
m_3	0,61 − 8,65 × 145,51 + 602,13	− 655,92
m_4	1,11 − 11,80 × 184,83 + 998,26	− 1181,62
m_5	1,65 − 14,70 × 208,20 + 1302,91	− 1755,98
m_6	2,18 − 17,21 × 218,13 + 1460,90	− 2294,04

Punti dell'asse dell'arcata	Espressioni di N'	Valori di N'
m_1	$-1,75 \times 3,52 + 3,05$	$-3,11$
m_2	$-5,26 \times 10,35 + 27,01$	$-27,43$
m_3	$-8,65 \times 16,89 + 72,46$	$-73,64$
m_4	$-11,80 \times 22,72 + 131,64$	$-136,46$
m_5	$-14,70 \times 27,42 + 193,61$	$-209,46$
m_6	$-17,21 \times 31,13 + 252,71$	$-283,04$

Trovati i valori dei coefficienti N ed N', riesce facile ottenere le due somme ΣNP_a e $\Sigma N'P_a$ da dedursi come appare dalla tavola che segue.

Punti dell'asse dell'arcata	Valori di P_a	Valori di N	Valori di N'	Valori dei prodotti NP_a	Valori dei prodotti $N'P_a$
m_1	5,33	$-28,50$	$-3,11$	$-151,9050$	$-16,5763$
m_2	5,40	$-249,14$	$-27,43$	$-1345,3560$	$-148,1220$
m_3	5,51	$-655,92$	$-73,64$	$-3614,1192$	$-405,7564$
m_4	5,86	$-1181,62$	$-136,46$	$-6924,2932$	$-799,6556$
m_5	6,35	$-1755,98$	$-209,46$	$-11150,4730$	$-1330,0710$
m_6	6,85	$-2294,04$	$-283,04$	$-15714,1740$	$-1938,8240$
	35,30			$-38900,3204$	$-4639,0053$

Le somme finali, poste nella penultima e nell'ultima colonna, sono rispettivamente ΣNP_a e $\Sigma N'P_a$; e, applicando la formola (1), si ottiene

$$G_a = 89515,1520 - 38900,3204 = 50614,8316$$
$$G_a' = 11234,2250 - 4639,0053 = 6595,2197 \ .$$

19. Determinazione della reazione dell'imposta dell'arcata. — Questa reazione si determina cercando la sua componente verticale V_a, la sua componente orizzontale Q_a ed il suo momento M_a rispetto alla orizzontale passante pel centro di superficie del giunto d'imposta. Queste tre quantità poi non sono altro che i valori particolari di V, di Q e di M dati dalle formole (1) e (3) del numero 2 quando si tenga conto del solo peso dell'arcata.

Essendo il valore della componente verticale della reazione dell' imposta data dalla formola (1) del numero 2, ossia essendo eguale al peso della metà dell'arcata, si ha

$$V_a = 35,30 \ .$$

Per ottenere i valori di Q_a e di M_a si sostituiranno nelle formole (3) del numero 2 i valori di E, F ed F' stati trovati nel numero 17 e, invece di G e G', i valori di G_a e di G'_a stati dedotti nel precedente numero. Così facendo si trova

$$Q_a = 30,51$$
$$M_a = \ 3,05 \ .$$

Il segno positivo del momento M_a indica che il punto d'applicazione della reazione dell' imposta è al di sopra del suo punto di mezzo 6 (*Fig.* 7).

Conosciuti i valori delle due forze Q_a e V_a, riesce facile di scomporre ciascuna di esse in due componenti, una perpendicolare e l'altra parallela al giunto d'imposta che fa colla verticale (num.° 13) l'angolo $\frac{1}{2}\alpha'^\circ = 53^\circ\, 11'\, 15''$, e di ottenere nella somma delle due componenti perpendicolari la componente Z_{6a} della reazione dell'imposta, la quale è normale al giunto predetto. Applicando perciò la formola (2) del numero 8 della prima mia nota (*L'elasticità nella teoria dell'equilibrio e della stabilità della vôlta*), risulta

$$Z_{6a} = -Q_a \cos\frac{1}{2}\alpha'^\circ - V_a \operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha'^\circ \qquad \ldots\ldots\ (1)\ ,$$

dalla quale, pei noti valori di Q_a, V_a e $\frac{1}{2}\alpha'^\circ$, si deduce

$$Z_{6a} = -46,54 \ .$$

Conoscendo ora i valori di M_a e di Z_{6a}, riesce facile trovare la distanza d_{6a} del punto d'applicazione della reazione dell'imposta dell'arcata dal mezzo dell' imposta medesima. Basta perciò applicare la formola (1) del numero 9 dell'or citata mia nota, e si ottiene

$$d_{6a} = \frac{M_a}{Z_{6a}} = \frac{3,05}{-46,54} = -0^{m},065 \ .$$

Questo valore negativo di d_{6a} significa, che esso si deve portare dal mezzo del giunto d'imposta verso l'estradosso; cosicchè essendo l_6 la lunghezza del giunto predetto e d_{i6a} la distanza dell'indicato punto d'applicazione dall'intradosso, si ha

$$d_{i6a} = \frac{1}{2} l_6 - \overline{d}_{6a} = 1 + 0,065 = 1^m,065 .$$

I trovati valori di d_{6a} e di d_{i6a} accennano come il punto d'applicazione della reazione dell'imposta sia vicinissimo al mezzo del giunto corrispondente.

Reazioni degli appoggi pei pesi dell'arcata e del riempimento dall'estradosso al suolo stradale.

20. Determinazione dei termini G e G' pel peso del riempimento dall'estradosso al suolo stradale. — Indicando con G_r e G_r' quei valori particolari delle quantità G e G', i quali corrispondono al peso dei timpani, del riempimento di terra e del ballast, osservando che le verticali dei centri di superficie (*Fig.* 7) g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 e g_6 non passano molto discoste dalle generatrici dell'estradosso corrispondenti alle sezioni rette determinate dai punti m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 ed m_6 dell'asse dell'arcata e che quindi, con sufficiente approssimazione per la pratica, si può adottare il procedimento spedito stato accennato nel numero 11 col non considerare le altre sezioni normali corrispondenti agli incontri delle dette verticali colla curva direttrice dell'estradosso, per quanto risulta dai numeri 5, 7 e 9, le formole determinatrici di G_r e di G_r' si possono mettere sotto la forma

$$\left.\begin{aligned} G_r &= J\ \Sigma P_r + \Sigma N\, P_r + \Sigma\, O\ \mu_r \\ G_r' &= J'\, \Sigma P_r + \Sigma N'\, P_r + \Sigma\, O'\, \mu_r \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (1),$$

nelle quali J, J', N ed N' sono dati dalle formole già state stabilite nel numero 18, mentre P_r e μ_r rappresentano rispettivamente il peso di una qualunque delle sei parti in cui si è diviso il riempimento ed il momento di questo peso rispetto alla orizzontale proiettata nel punto di mezzo della corrispondente parte dell'asse dell'arcata. Per ottenere poi i valori di O e di O' servono le formole

$$\left.\begin{aligned} O &= \int_0^i \frac{v}{I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta}\, d\zeta \\ O' &= \int_0^i \frac{1}{I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta}\, d\zeta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (2).$$

Le ascisse i che entrano nelle formole determinatrici dei coefficienti N, N', O ed O' sono quelle che corrispondono ai punti m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 ed m_6 dell'asse dell'arcata, giacchè si sono introdotte le coppie μ_r onde poter supporre applicati i pesi P_r nei punti predetti.

Per ottenere le coppie μ_r basta misurare le distanze orizzontali fra i punti g_1 ed m_1, g_2 ed m_2, g_3 ed m_3, g_4 ed m_4, g_5 ed m_5, g_6 ed m_6, e moltiplicare ciascuno dei pesi P_r per la distanza corrispondente d_r. Facendo la misura di queste distanze sulla figura 7, si trovano le coppie i cui momenti sono riportati nell'ultima colonna della tabella che segue.

Indicazioni delle parti di arcata cui insistono i pesi	Pesi P_r	Bracci d_r	Momenti μ_r
Dal giunto 0 al giunto 1	3,45	0^m, 14	— 0,48
» 1 » 2	4,99	0 , 31	— 1,55
» 2 » 3	8,13	0 , 43	— 3,50
» 3 » 4	12,25	0 , 50	— 6,13
» 4 » 5	16,76	0 , 63	—10,56
» 5 » 6	21,25	0 , 72	—15,30

Per quanto si è trovato nel numero 15, si ha $\Sigma P_r = 66{,}83$; e quindi, avuto riguardo ai valori di J ed J' ottenuti nel numero 18, si deducono i seguenti valori dei termini $J\Sigma P_r$ ed $J'\Sigma P_r$

$$J\Sigma P_r = 2535{,}84 \times 66{,}83 = 169470{,}1872$$
$$J'\Sigma P_r = 318{,}25 \times 66{,}83 = 21268{,}6475\ .$$

Essendo i valori dei coefficienti N ed N' quelli inscritti nella prima e nella seconda tavola del numero 18, ed essendo i valori di P_r quelli posti nella seconda colonna della precedente tavola, si potranno dedurre le due somme ΣNP_r e $\Sigma N'P_r$ nel modo indicato dalla tavola che segue.

Punti dell'asse dell'arcata	Valori di P_r	Valori di N	Valori di N'	Valori dei prodotti NP_r	Valori dei prodotti $N'P_r$
m_1	3,45	− 28,50	− 3,11	− 98,3250	− 10,7295
m_2	4,99	− 249,14	− 27,43	− 1243,2086	− 136,8757
m_3	8,13	− 655,92	− 73,64	− 5332,6296	− 598,6932
m_4	12,25	− 1181,62	− 136,46	− 14474,8450	− 1671,6350
m_5	16,76	− 1755,98	− 209,46	− 29430,2248	− 3510,5496
m_6	21,25	− 2294,04	− 283,04	− 48748,3500	− 6014,6000
	66,83			− 99327,5830	− 11943,0830

Finalmente, avuto riguardo ai valori di O e di O' dati dalle formole (2) ed ai risultamenti contenuti nelle tabelle del numero 16 ed anche tenuto conto dei valori dei momenti μ_r inscritti nella prima tabella di questo numero, si possono dedurre i valori delle due somme $\Sigma O\mu_r$ e $\Sigma O'\mu_r$ come appare da quest'altra tabella.

Punti dell'asse dell'arcata	Valori di μ_r	Valori di O	Valori di O'	Valori dei prodotti $O\mu_r$	Valori dei prodotti $O'\mu_r$
m_1	− 0,48	32,16	3,52	− 15,4368	− 1,6896
m_2	− 1,55	92,75	10,35	− 143,7625	− 16,0425
m_3	− 3,50	145,51	16,89	− 509,2850	− 59,1150
m_4	− 6,13	184,83	22,72	− 1133,0079	− 139,2736
m_5	− 10,56	208,20	27,42	− 2198,5920	− 289,5552
m_6	− 15,30	218,13	31,13	− 3340,1430	− 476,2890
				− 7340,2272	− 981,9649

Pei risultati che si trovano nelle ultime due tabelle evidentemente si ha

$$\Sigma N P_r = -99327,5830$$
$$\Sigma N' P_r = -11943,0830$$
$$\Sigma O \mu_r = -7340,2272$$
$$\Sigma O' \mu_r = -981,9649\ ;$$

e quindi, applicando le formole (1), si deducono i seguenti valori di G_r e di G_r'

$$G_r = 169470,1872 - 99327,5830 - 7340,2272 = 62802,3770$$
$$G_r' = 21268,6475 - 11943,0830 - 981,9649 = 8343,5996\ .$$

21. Determinazione della reazione dell'imposta dell'arcata pel solo riempimento dall'estradosso al suolo stradale. — Indicando con V_r, Q_r ed M_r i valori particolari delle due forze V e Q e del momento M quando si considera il solo riempimento dall'estradosso dell'arcata al suolo stradale, si ha: che la componente verticale V_r della reazione dell'imposta è data dalla formola (1) del numero 2, cosicchè

$$V_r = 66,83\ ;$$

e che le formole (3) dello stesso numero dànno i valori di Q_r e di M_r quando in esse si pongano i valori di E, F ed F', stati trovati nel numero 17 e, invece di G e di G', i valori di G_r e di G_r' stati calcolati nel precedente numero. I valori di Q_r e di M_r risultano

$$Q_r = 32,68$$
$$M_r = -35,79\ .$$

Il segno negativo, da cui è preceduto il valore di M_r, porta a conchiudere che il punto d'applicazione della reazione dell' imposta della vôlta pel solo riempimento dall'estradosso al suolo stradale è al di sotto del punto di mezzo 6 (*Fig.* 7).

22. Determinazione della reazione dell' imposta pel peso dell' arcata e del riempimento dall' estradosso al suolo stradale. — Indicando con V_{ar}, Q_{ar} ed M_{ar} i valori particolari delle tre quantità V, Q ed M determinanti la reazione dell'imposta nell'accennata condizione di carico e tenendo conto dei valori di V_a, Q_a ed M_a stati trovati nel numero 19 non che di quelli di V_r, Q_r ed M_r ottenuti nel numero precedente, pel teorema dell'accumulazione degli effetti si ottiene

$$V_{ar} = 35{,}30 + 66{,}83 = \quad 102{,}13$$
$$Q_{ar} = 30{,}51 + 32{,}68 = \quad 63{,}19$$
$$M_{ar} = 3{,}05 - 35{,}79 = -32{,}74 \ .$$

Il valore negativo di M_{ar} indica che il punto d'applicazione della reazione dell'imposta è al di sotto del suo punto di mezzo 6 (*Fig.* 7).

Per trovare la componente normale Z_{6ar} della reazione predetta al giunto d'imposta, serve la formola

$$Z_{6ar} = -Q_{ar} \cos \tfrac{1}{2}\alpha'^{0} - V_{ar} \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\alpha'^{0}$$

analoga alla formola (1) del numero 19; e, pei valori noti di $\frac{1}{2}\alpha'^{0}$, V_{ar} e Q_{ar}, si ottiene

$$Z_{6ar} = -119{,}63 \ .$$

La distanza d_{6ar} del punto d'applicazione della reazione dell'imposta dal mezzo dell'imposta stessa è data da

$$d_{6ra} = \frac{M_{ar}}{Z_{6ar}} = \frac{-32{,}74}{-119{,}63} = 0^{m}{,}274 \ .$$

Questo valore positivo di d_{6ar} significa che la distanza corrispondente deve essere valutata dal mezzo del giunto d'imposta verso l'intradosso; cosicchè, essendo l_6 la lunghezza del giunto predetto e d_{i6ar} la distanza dell'indicato punto d'applicazione dall'introdosso, si ha

$$d_{i6ar} = \tfrac{1}{2}l_6 - d_{6ar} = 1 - 0{,}274 = 0^{m}{,}726 \ .$$

I valori trovati di d_{6ar} e di d_{i6ar} indicano come il punto d'applicazione della reazione dell'imposta sia nella parte di mezzo della lunghezza del giunto corrispondente, supposto diviso in tre parti eguali, e quindi come si trovi soddisfatta una condizione da ritenersi come favorevole alla stabilità dell'arcata.

Reazioni degli appoggi pei pesi dell'arcata, del riempimento dall'estradosso al suolo stradale e del sovraccarico.

23. Determinazione dei termini G e G' pei pesi del riempimento dall'estradosso al suolo stradale e pel sovraccarico. — Chiamando G_{rs} e G_{rs}' quei valori particolari delle quantità G e G' i quali corrispondono ai pesi dei timpani, del riempimento di terra e del ballast e del sovraccarico, osservando che le verticali determinate dai centri di superficie (*Fig.* 8) h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 ed h_6

passano piuttosto vicine alle generatrici dell'estradosso poste nelle sezioni normali all'asse della vôlta condotte pei punti m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 ed m_6 e che quindi, con sufficiente approssimazione per la pratica, si può adottare il metodo spedito stato indicato nel numero 11 col non considerare le altre sezioni normali corrispondenti agli incontri delle dette verticali colla curva direttrice dell'estradosso, si possono assumere per formole determinatrici di G_{rs} e di G_{rs}' le

$$\left.\begin{aligned} G_{rs} &= J\,\Sigma P_{rs} + \Sigma N\,P_{rs} + \Sigma O\,\mu_{rs} \\ G_{rs}' &= J'\Sigma P_{rs} + \Sigma N' P_{rs} + \Sigma O'\mu_{rs} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

I valori dei coefficienti J, J', N ed N' sono quelli stessi già stati trovati nel numero 18; i valori dei coefficienti O ed O' sono quelli contenuti nella seconda e nella terza colonna dell'ultima tabella del numero 20; e le quantità P_{rs} e μ_{rs} rappresentano rispettivamente il peso di una qualunque delle sei parti in cui è diviso il riempimento coll'insistente sovraccarico ed il momento di questo peso rispetto alla orizzontale proiettata nel punto di mezzo della corrispondente parte dell'arcata.

La determinazione delle coppie μ_{rs} può essere fatta col misurare le distanze orizzontali fra i punti h_1 ed m_1, h_2 ed m_2, h_3 ed m_3, h_4 ed m_4, h_5 ed m_5, h_6 ed m_6 e col moltiplicare ciascuno dei pesi P_{rs} per la distanza corrispondente d_{rs}. Facendo la misura di queste distanze sulla figura 8, si trovano le coppie i cui momenti sono riportati nell'ultima colonna della seguente tavola.

Indicazioni delle parti di arcata cui insistono i pesi	Pesi P_{rs}	Bracci d_{rs}	Momenti μ_{rs}
Dal giunto 0 al giunto 1	6,77	0^m, 10	− 0,68
» 1 » 2	8,22	0, 25	− 2,06
» 2 » 3	11,22	0, 36	− 4,04
» 3 » 4	15,12	0, 46	− 6,96
» 4 » 5	19,35	0, 59	− 11,42
» 5 » 6	23,53	0, 74	− 17,41

Per quanto si è trovato nel numero 15, si ha $\Sigma P_{rs} = 84,21$; e quindi, pei valori di J e di J' ottenuti nel numero 18, si deducono i seguenti valori dei termini $J\Sigma P_{rs}$ ed $J'\Sigma P_{rs}$:

$$J \Sigma P_{rs} = 2535{,}84 \times 84{,}21 = 213543{,}0864$$

$$J' \Sigma P_{rs} = 318{,}25 \times 84{,}21 = 26799{,}8325 \;.$$

I valori dei coefficienti N ed N' sono quelli inscritti nella prima e nella seconda tavola del numero 18, i valori dei pesi P_{rs} sono quelli posti nella seconda colonna della tavola precedente; e quindi si possono dedurre le due somme $\Sigma N P_{rs}$ e $\Sigma N' P_{rs}$ nel modo indicato da quest'altra tavola.

Punti dell'asse dell'arcata	Valori di P_{rs}	Valori di N	Valori di N'	Valori dei prodotti $N P_{rs}$	Valori dei prodotti $N' P_{rs}$
m_1	6, 77	— 28, 50	— 3, 11	— 192, 9450	— 21, 0547
m_2	8, 22	— 249, 14	— 27, 43	— 2047, 9308	— 225, 4746
m_3	11, 22	— 655, 92	— 73, 64	— 7359, 4224	— 826, 2408
m_4	15, 12	— 1181, 62	— 136, 46	— 17866, 0944	— 2063, 2752
m_5	19, 35	— 1755, 98	— 209, 46	— 33978, 2130	— 4053, 0510
m_6	23, 53	— 2294, 04	— 283, 04	— 53978, 7612	— 6659, 9312
	84, 21			— 115423, 3668	— 13849, 0275

I valori dei coefficienti O ed O' sono quelli che si trovano inscritti nella seconda e nella terza colonna dell'ultima tabella del numero 20; cosicchè, avuto riguardo ai valori dei momenti μ_{rs} posti nell'ultima colonna della prima tabella di questo numero, si possono dedurre le due somme $\Sigma O \mu_{rs}$ e $\Sigma O' \mu_{rs}$ come risulta da quest'altra tabella.

Punti dell'asse dell'arcata	Valori di μ_{rs}	Valori di O	Valori di O'	Valori dei prodotti $O \mu_{rs}$	Valori dei prodotti $O' \mu_{rs}$
m_1	— 0,68	32, 16	3, 52	— 21, 8688	— 2, 3936
m_2	— 2, 06	92, 75	10, 35	— 191, 0650	— 21, 3210
m_3	— 4, 04	145, 51	16, 89	— 587, 8604	— 68, 2356
m_4	— 6, 96	184, 83	22, 72	— 1286, 4168	— 158, 1312
m_5	— 11, 42	208, 20	27, 42	— 2377, 6440	— 313, 1364
m_6	— 17, 41	218, 31	31, 13	— 3800, 7771	— 541, 9733
				— 8265, 6321	— 1105, 1911

Pei risultati contenuti nelle ultime due tavole evidentemente si ha

$$\Sigma N P_{rs} = - 115423{,}3668$$
$$\Sigma N' P_{rs} = - \;\; 13849{,}0275$$
$$\Sigma O \mu_{rs} = - \;\;\; 8265{,}6321$$
$$\Sigma O' \mu_{rs} = - \;\;\; 1105{,}1911 \; ;$$

e quindi, applicando le formole (1), si deducono i seguenti valori dei termini G_{rs} e G_{rs}'

$$G_{rs} = 213543{,}0864 - 115423{,}3668 - 8265{,}6321 = 89854{,}0875$$
$$G_{rs}' = \;\; 26799{,}8325 - \;\; 13849{,}0275 - 1105{,}1911 = 11845{,}6139 \; .$$

24. Determinazione della reazione dell' imposta dell'arcata pel riempimento dall'estradosso al suolo stradale e pel sovraccarico. — Essendo V_{rs}, Q_{rs} ed M_{rs} i valori particolari delle due forze V e Q e del momento M quando si considera il riempimento dall'estradosso al suolo stradale ed il sovraccarico, si ha: che la componente verticale V_{rs} della reazione dell'imposta è data dalla formola (1) del numero 2, cosicchè

$$V_{rs} = 84{,}21 \; ;$$

e che le formole (3) dello stesso numero dànno i valori della componente orizzontale Q_{rs} della reazione predetta e del momento M_{rs}, di modo che, pei trovati valori di E, F ed F' (numero 17) e pei valori di G_{rs} e di G_{rs}' stati calcolati nel numero precedente, si trova

$$Q_{rs} = \;\;\; 49{,}73$$
$$M_{rs} = - 28{,}52 \; .$$

Il segno negativo, da cui è preceduto il valore di M_{rs}, dice che il punto d'applicazione della reazione dell'imposta pel riempimento e pel sovraccarico è al di sotto del punto di mezzo 6 (*Fig.* 8) dell' imposta stessa.

25. Determinazione della reazione dell' imposta pei pesi dell'arcata, del riempimento dall'estradosso al suolo stradale e del sovraccarico. — Siano V_{ars}, Q_{ars} ed M_{ars} i valori particolari delle tre quantità V, Q ed M, le quali determinano completamente la reazione dell'imposta nell'ammessa condizione di carico. Pei valori di V_a, Q_a ed M_a trovati nel numero 19, pei valori di V_{rs}, Q_{rs} ed M_{rs} ottenuti nel precedente numero e pel teorema dell'accumulazione degli effetti, si ha

$$V_{ars} = 35{,}30 + 84{,}21 = \quad 119{,}51$$
$$Q_{ars} = 30{,}51 + 49{,}73 = \quad 80{,}24$$
$$M_{ars} = \;\;3{,}05 - 28{,}52 = -25{,}47 \;.$$

Essendo negativo il valore del momento M_{ars}, il punto d'applicazione della reazione dell'imposta si trova al di sotto del punto di mezzo 6 (*Fig.* 8).

Per ottenere la componente normale Z_{6ars} della reazione stessa al giunto d'imposta, si può applicare la formula

$$Z_{6ars} = -Q_{ars} \cos \tfrac{1}{2}\alpha'^{0} - V_{ars} \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\alpha''$$

analoga alla formola (1) del numero 19, dalla quale si deduce

$$Z_{6ars} = -143{,}76 \;.$$

Per la determinazione della distanza d_{6ars} dal punto d'applicazione della reazione dell'imposta dal mezzo dell'imposta medesima si porrà

$$d_{6ars} = \frac{M_{ars}}{Z_{6ars}} = \frac{-25{,}47}{-143{,}76} = 0^{m},177 \;;$$

e questa distanza, per essere positiva, si dovrà portare dal mezzo del giunto d'imposta verso l'intradosso; cosicchè, indicando con l_6 la lunghezza del giunto predetto e con d_{i6ars} la distanza dell'indicato punto d'applicazione dall'intradosso, risulta

$$d_{i6ars} = \tfrac{1}{2} l_6 - d_{6ars} = 1 - 0{,}177 = 0^{m},823 \;.$$

I valori di d_{6ars} e di d_{i6ars} indicano come, anche pel caso in cui sull'intiera arcata trovasi il sovraccarico, il punto d'applicazione della reazione dell'imposta sia nella parte di mezzo del giunto corrispondente, supposto diviso in tre parti eguali nel senso della sua dimensione normale all'asse della vôlta, e quindi come si trovi pur soddisfatta una condizione favorevole alla stabilità dell'arcata stessa.

26. Determinazione della mutua azione delle due parti di arcata alla chiave. — Una volta trovate le reazioni delle imposte, riesce operazione facile e del dominio della statica ordinaria quella di trovare la mutua azione delle due parti di arcata alla chiave. Essendo la vôlta simmetrica e simmetricamente sollecitata di pesi, l'intensità di questa mutua azione è evidentemente eguale alla componente Q della reazione di ciascuna imposta ed il suo punto d'applicazione si può trovare: o numericamente, col porre l'equazione dei momenti attorno l'orizzontale proiettata sul punto di mezzo C' (*Fig.* 6) del giunto di chiave CC'' e col considerare tutte le forze sollecitanti la metà dell'arcata e quindi anche la reazione dell'imposta AA''; o graficamente, col determinare la verticale VV' rappresentante la linea d'azione della risultante di tutti i pesi sollecitanti la metà dell'arcata, col condurre pel punto d'applicazione N della reazione dell'imposta la linea d'azione Nb della reazione stessa, col determinare l'incontro U di quest'ultima retta colla verticale VV' e col condurre da U la orizzontale UL, la quale dà il punto d'applicazione della mutua azione alla chiave nel suo incontro L colla verticale CC''.

27. Osservazioni sulla determinazione dello spostamento del giunto di chiave. — I metodi, stati seguiti nel dedurre i coefficienti E, F ed F' ed i termini G e G' occorrenti per la determinazione della reazione delle imposte, mettono in evidenza come si dovrebbe procedere pel calcolo dei coefficienti H, I e K e del termine L necessari per trovare lo spostamento della sezione di chiave mediante l'applicazione della formola (2) del num. 3.

Quest'ultima determinazione però richiede l'impiego del coefficiente di elasticità E_l relativo alla muratura, per la conoscenza del quale non furono finora instituite numerose esperienze serie e concludenti. Misurando direttamente l'abbassamento della grande arcata del ponte in muratura di mattoni sul fiume Oglio per la ferrovia Treviglio-Roato, di cui si parla nel citato lavoro intitolato *Applicazioni pratiche della teoria sui sistemi elastici*, stato pubblicato dal Servizio della Manutenzione e dei Lavori delle Ferrovie dell'Alta Italia, e ricavando dalla relazione fra le forze sollecitanti, fra il cedimento della vôlta alla chiave e fra il coefficiente d'elasticità il valore di quest'ultimo, si trovò che esso vale 71778000 coll'assumere il chilogramma per unità di peso, il metro quadrato per unità di superficie e 2000 chilogrammi per peso del metro cubo di muratura di mattoni.

Sul valore del coefficiente di elasticità così trovato evidentemente deve aver avuto grande influenza il minore o maggior grado di presa, la maggiore o minor grossezza degli strati e la maggiore o minore quantità di malta schizzata dai giunti all'atto del disarmo; e quindi non si può esso ritenere siccome rappresentante quel valore medio che conviene alla muratura di mattoni in quello stato normale di presa che si verifica dopo qualche tempo dalla sua ultimazione e di azione delle forze sollecitanti.

Per questi motivi si ritiene, che il coefficiente di elasticità E_l della muratura sia ancora un'incognita e che quindi non si possano avere con sufficiente garanzia di verità gli spostamenti della sezione di chiave. Ad ogni modo, se, usando del coefficiente di elasticità sopra indicato e pel caso dell'arcata stata considerata in questa nota, si volessero trovare tali spostamenti nelle tre ipotesi del solo peso della vôlta, dei pesi della vôlta e del riempimento fino al suolo stradale e dei pesi della vôlta, del riempimento predetto e del sovraccarico, non si dimenticherà: che, nel calcolo degli integrali che entrano nelle formole dei coefficienti H, I e K e del termine L, si è supposto il fattore $\frac{1}{2}\Delta\sigma$ eguale all'unità, mentre effettivamente vale $1^m,765$; che per conseguenza, ponendo nella formola (2) del numero 3 i valori di H, I, K ed L, bisogna moltiplicare il suo secondo membro per l'indicato valore del fattore $\frac{1}{2}\Delta\sigma$; e che il valore del coefficiente di elasticità suindicato deve essere riferito al peso del metro cubo di muratura che è quello stato adottato per unità di forza nel dedurre i valori di V, Q ed M.

Torino, 9 Marzo 1879.

Tav. I.

Fig. 1.

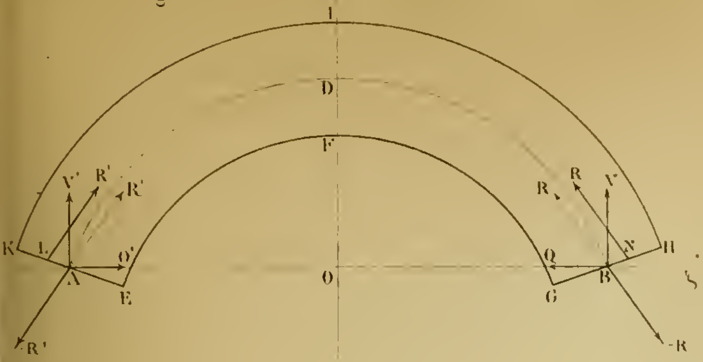


Fig. 2.

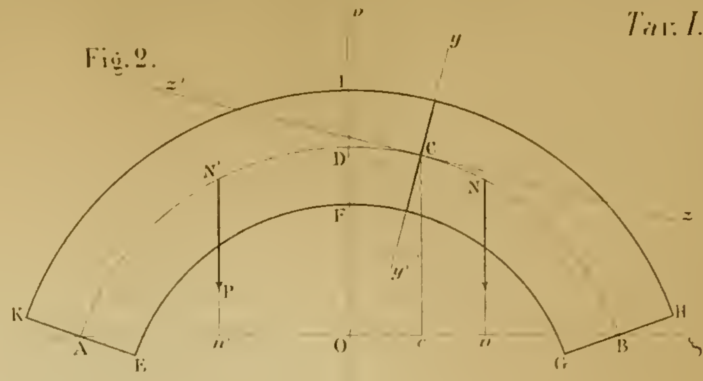


Fig. 3.

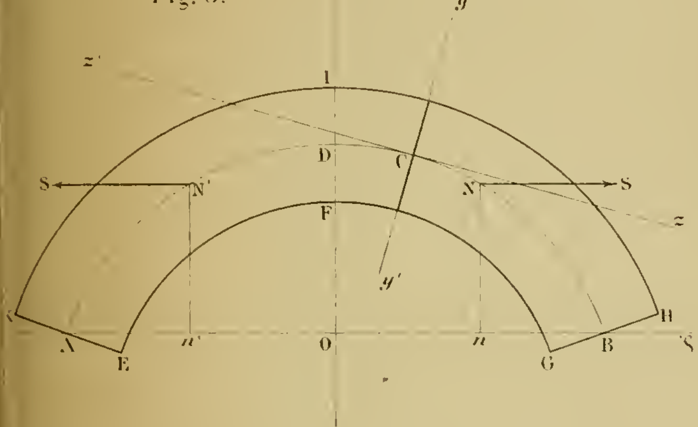


Fig. 4

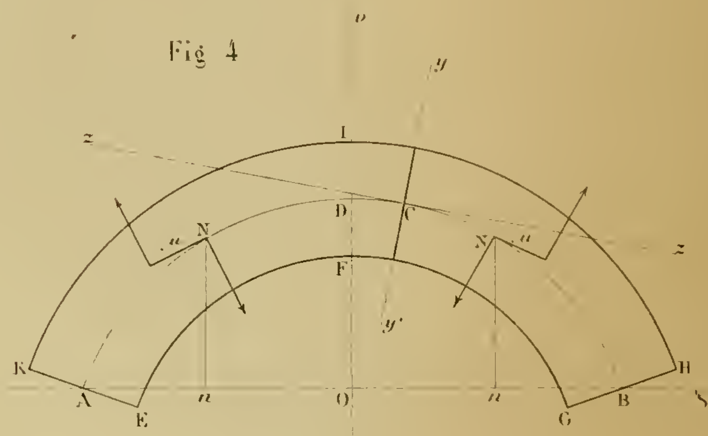


Fig. 5.

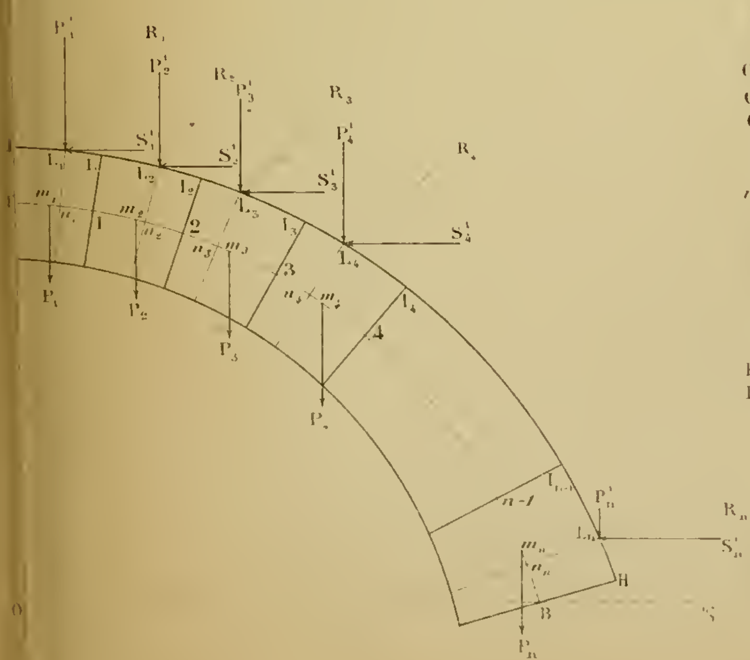
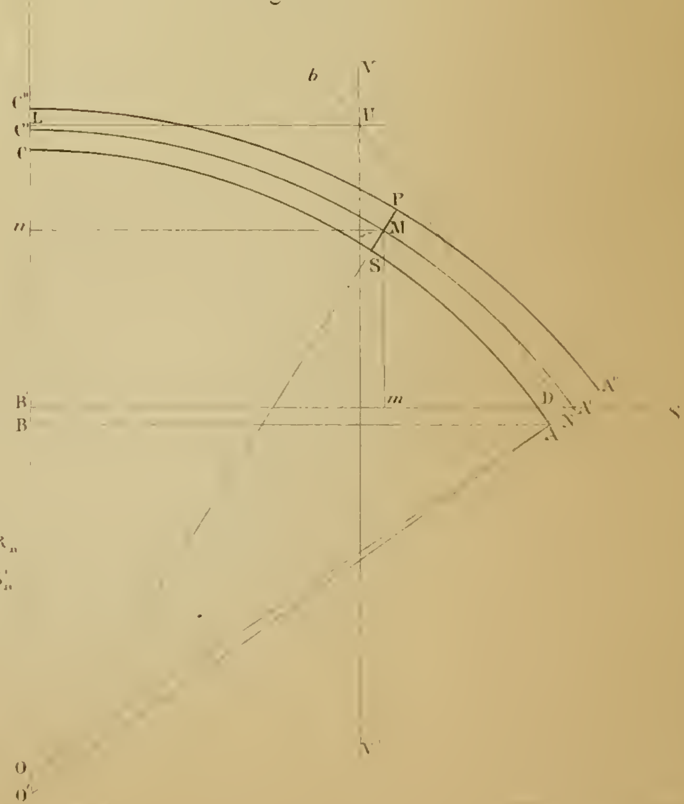


Fig. 6.



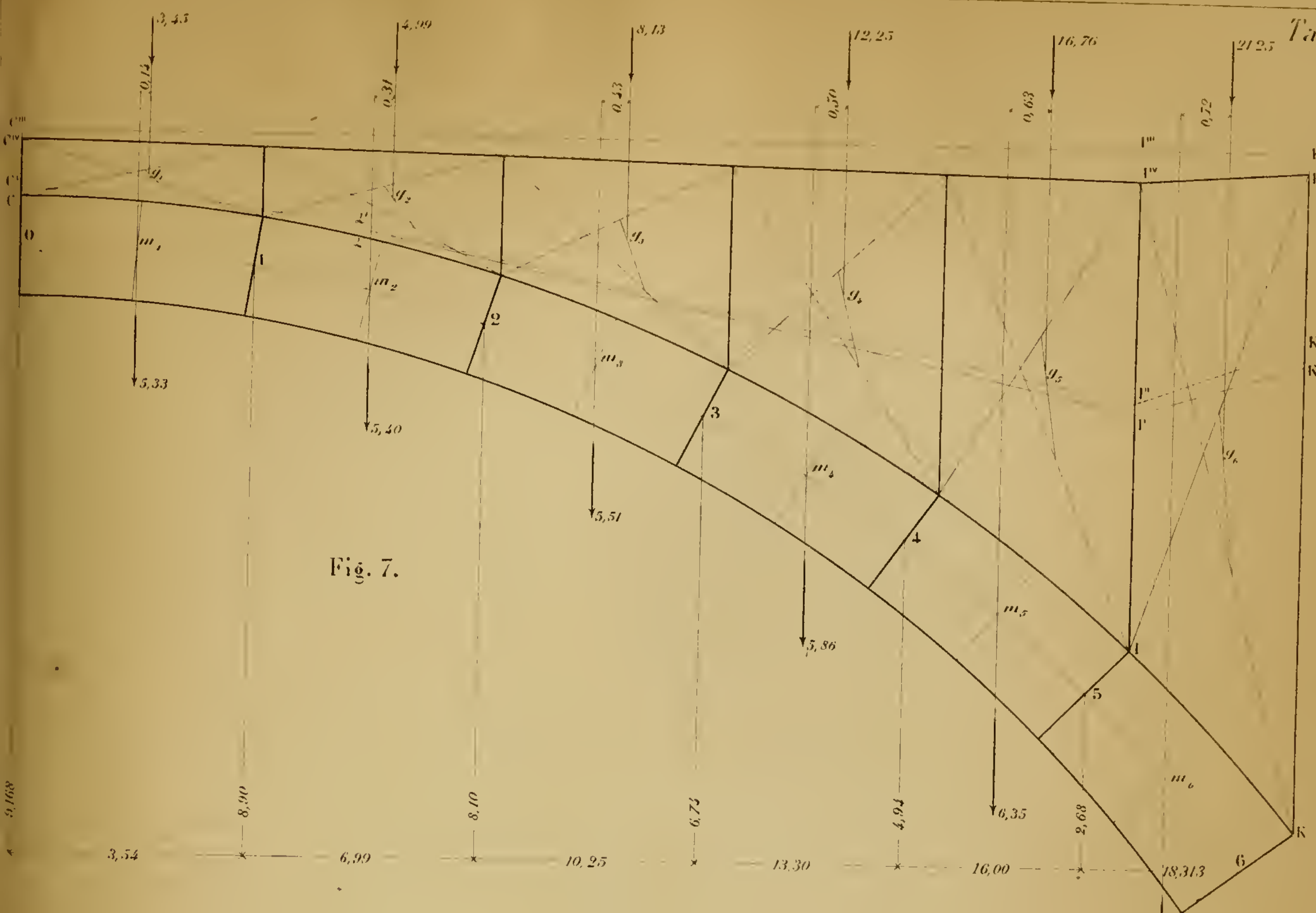

3,45
4,99
8,13
12,25
16,76
21,25
0,14
0,31
0,43
0,50
0,63
0,72
5,33
5,40
5,51
5,86
6,35
6,85
9,168
8,90
8,10
6,74
4,94
2,68
3,54
6,99
10,25
13,30
16,00
18,313
K'''
K''''
K''
K'
K
I'''
I''''
I''
I'
I
0
1
2
3
4
5
6

Fig. 7.

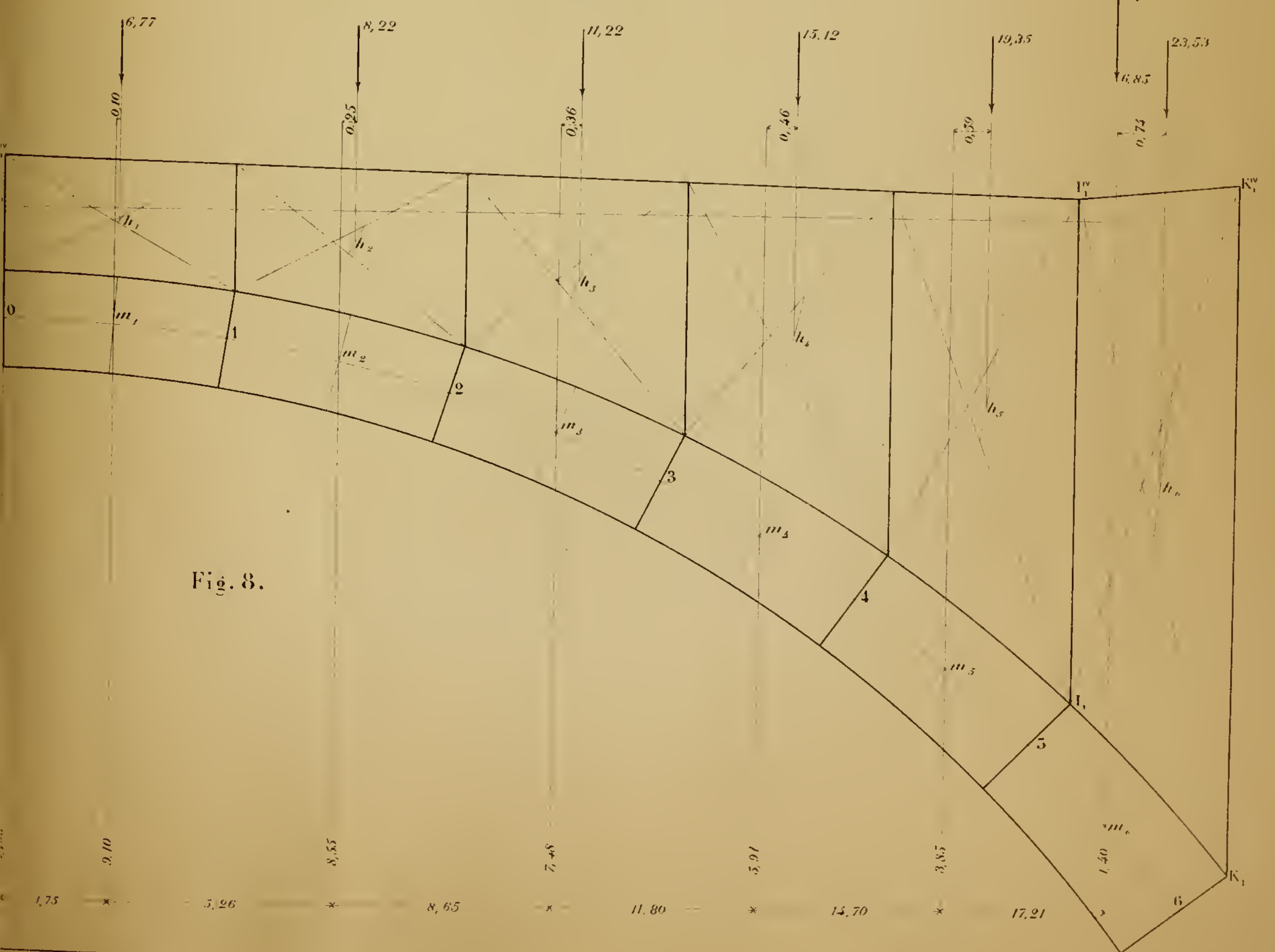

6,77
8,22
11,22
15,12
19,35
23,53
0,10
0,25
0,36
0,46
0,59
0,74
9,10
8,55
7,48
5,91
3,85
1,40
1,75
5,26
8,65
11,80
14,70
17,21
K_1''''
K_1
I_1''''
I_1
0
1
2
3
4
5
6

Fig. 8.

ERRATA-CORRIGE

per le due precedenti note intitolate *L'elasticità nella teoria dell'equilibrio e della stabilità delle vôlte.*

Nella nota stata letta nella seduta del 7 Marzo 1875 e stata inserta nel Tomo XXVIII della Serie II delle *Memorie*

al numero	invece di	leggasi
5	$M = M_x' - Q\upsilon + V(a-\zeta) + M$	$M_x = M_x' - Q\upsilon + V(a-\zeta) + M$
7	$Va - Qb + M - \Sigma F_\zeta d_\zeta + \Sigma F_\upsilon d_\upsilon + M' = 0$	$Va - Qb + M + \Sigma F_\zeta (d_\zeta - b) + \Sigma F_\upsilon d_\upsilon + M' = 0$
8	e la tangente Cz alla curva ACB, si ha:	e la tangente Cz alla curva ACB ed indicando con Σ' somme estese alle sole forze F_ζ ed F_υ poste a dritta del giunto SCP, si ha:
id.	$Y = (Q - \Sigma F)\frac{d\upsilon}{d\sigma} + (V + \Sigma F_\upsilon)\frac{d\zeta}{d\sigma}$	$Y = (Q - \Sigma' F_\zeta)\frac{d\upsilon}{d\sigma} + (V + \Sigma' F_\upsilon)\frac{d\zeta}{d\sigma}$
id.	$Z = (-Q + \Sigma F_\zeta)\frac{d\zeta}{d\sigma} + (V + \Sigma F_\upsilon)\frac{d\upsilon}{d\sigma}$	$Y = (-Q + \Sigma' F_\zeta)\frac{d\zeta}{d\sigma} + (V + \Sigma' F_\upsilon)\frac{d\upsilon}{d\sigma}$
id.	$\ldots\ldots + M - \Sigma F_\zeta (d_\zeta - \upsilon) + \Sigma F_\upsilon (d_\upsilon - \zeta)$	$\ldots\ldots + M - \Sigma' F_\zeta (d_\zeta - \upsilon) + \Sigma' F_\upsilon (d_\upsilon - \zeta)$

Nella nota stata letta nella seduta del 10 Giugno 1877, e stata inserta nel Tomo XXXI della Serie II delle *Memorie*

al numero	invece di	leggasi
8	$D' = p\left[\begin{array}{c}\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots - \zeta_2 \int_0^{\zeta_2} \frac{\zeta_2}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta + \cdots\end{array}\right]$	$D' = p\left[\begin{array}{c}\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots - \zeta_2 \int_0^{\zeta_2} \frac{\zeta^2}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta + \cdots\end{array}\right]$
8	$D'' = p\left[\cdots + \zeta_2 \int_0^{\zeta_2} \frac{\zeta^2}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta - \cdots\right]$	$D'' = p\left[\cdots + \zeta_2 \int_0^{\zeta_2} \frac{\zeta}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta - \cdots\right]$
9	$D' = q\left[\begin{array}{c}\cdots\cdots\cdots + H \int_0^{\zeta_1} \frac{\zeta}{\Omega}\frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right]$	$D' = q\left[\begin{array}{c}\cdots\cdots\cdots + H \int_0^{\zeta_1} \frac{\zeta}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right]$

NOUVEAU CALCUL

DES

MOUVEMENTS ELLIPTIQUES

PAR

ÉDOUARD SANG

Lu dans la séance du 26 Janvier 1879

Depuis la découverte des lois des mouvements des planètes autour du Soleil, le calcul a engagé l'attention des mathématiciens, et le problème de KEPLER est devenu fameux.

Par une voie directe, on peut calculer le temps correspondant à une position donnée; mais le problème inverse, de déterminer la position pour un temps donné, n'a reçu qu'une solution indirecte; les procédés apparemment directs n'étant au fond que des approximations reglées.

Soit A O a l'axe majeur d'une ellipse, S étant le foyer et P la place de la planète; alors l'angle ASP est l'anomalie vraie, et l'aire ASP est proportionnelle au temps écoulé depuis le passage du périhélie.

Ayant décrit un cercle sur le diamètre A a, tirons par P l'ordonnée HPQ et joignons SQ. On sait que l'aire ASQ est à l'aire du cercle comme l'aire ASP est à celle de l'ellipse; elle est donc proportionnelle au temps. Concevons alors un point M décrivant uniformément la circonférence du cercle et arrivant aux points A et a simultanément avec la planète. L'angle AOM est ce qu'on appèle l'anomalie moyenne, et l'aire du secteur AOM doit être équivalente à ASQ.

Tirons par S l'ordonnée FSE et joignons QE, QF. Alors la ligne QS divise le triangle EQF en deux parties équivalentes, tandis que SA bisecte le segment circulaire FAE. Par conséquent, l'aire ASQ est la demi-somme ou la demi-différence des deux segments circulaires tranchés par les cordes FQ, EQ, selon que le point H est à l'un ou à l'autre côté du foyer S.

Si nous indiquons par e l'arc AE, arc qui détermine le caractère de l'ellipse; l'excentricité OS est exprimée par $\cos e$, et le demi-axe mineur, SE, par $\sin e$, en prenant le demi-axe majeur pour l'unité. Désignons par p l'arc de position AQ, et nous avons

$$\mathrm{AOM} = \mathrm{ASQ} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{segm}\,(p+e) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{segm}\,(p-e)\,.$$

Ainsi, à l'aide d'une table des segments du cercle, on peut déduire les aires correspondantes aux anomalies moyennes. Reste à traduire ces aires en degrés.

Au lieu de mesurer les segments en parties du quarré du rayon, il nous convient de les compter en degrés de surface : c'est-à-dire, nous divisons la surface du cercle en quatre cents secteurs égaux que nous appelons degrés superficiels. La table première ci-jointe contient pour chacun des 400 degrés d'arc, la valeur du segment exprimée en degrés de surface. Ces valeurs ont été calculées à huit places décimales du degré, et ensuite raccourcies à quatre places, ou à secondes de la division centésimale.

En nous servant de cette table nous avons

$$\text{anom. moy.} = \mathrm{AM} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{segm}\,(p+e) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{segm}\,(p-e)\,,$$

sans besoin d'aucune conversion. La simplicité de cette formule nous conduit à la confection des tables astronomiques universelles.

Quand l'arc d'ellipticité, e, est donné en degrés exacts, nous formont la table des anomalies moyennes d'après la manière suivante:

Ayant reglé uniformément deux rubans de papier, nous écrivons sur l'un, les valeurs des demi-segments pour les arcs de 0^c jusqu'à 300^c; et sur l'autre les mêmes valeurs commençant à -100^c et finissant à $+200^c$. Le premier sert pour $p+e$, le second pour $p-e$.

Plaçant ces deux rubans à coté l'un de l'autre de telle manière que le $+e$ du premier soit en ligne avec le $-e$ du second; et prenant la somme algébrique des deux nombres dans chaque ligne nous avons tout-à-coup les anomalies moyennes correspondantes aux positions successives, sans besoin d'écrire un seul chiffre de plus. Et en changeant les positions relative des rubans nous obtenons la table pour quelque autre degré d'ellipticité.

Le calcul de l'anomalie vraie, auparavant le plus facile, est dorénavant au moins neuf fois plus laborieux que celui de l'anomalie moyenne. En effet, il nous faut calculer les logarithmes de l'abscisse SH, et de l'ordonnée HP; en prendre la différence qui est le log. tangent de l'anomalie, et puis extraire les angles.

Pour le logarithme de SH nous observons que la corde EQ est $2 \sin \frac{p-e}{2}$, et que l'angle EQH est $\frac{p+e}{2}$, en sorte que

$$SH = 2 \sin \frac{p-e}{2} . \sin \frac{p+e}{2} .$$

Ainsi, en écrivant sur un ruban les logarithmes des $2 \sin \frac{p-e}{2}$, et sur un autre ceux des $\sin \frac{p+e}{2}$, nous pouvons, d'après le procédé déjà expliqué, obtenir les logarithmes des HS. Pour les logarithmes des HP il nous faut ajouter, pour chaque cas, le constant $\log \sin e$ aux log sinus des arcs de position.

Par ces moyens on a calculé les anomalies moyennes et vraies pour chaque degré de l'angle de position, et pour les valeurs des e de dix en dix degrés. Pour achever le calcul il nous faut insérer les valeurs pour chaque degré des e, et alors la table contiendra tout ce qui est nécessaire pour l'étude générale des mouvements périodiques des planètes et des comètes. Les tables pour $e = 10^c$, $e = 50^c$ et $e = 90^c$ sont ici données.

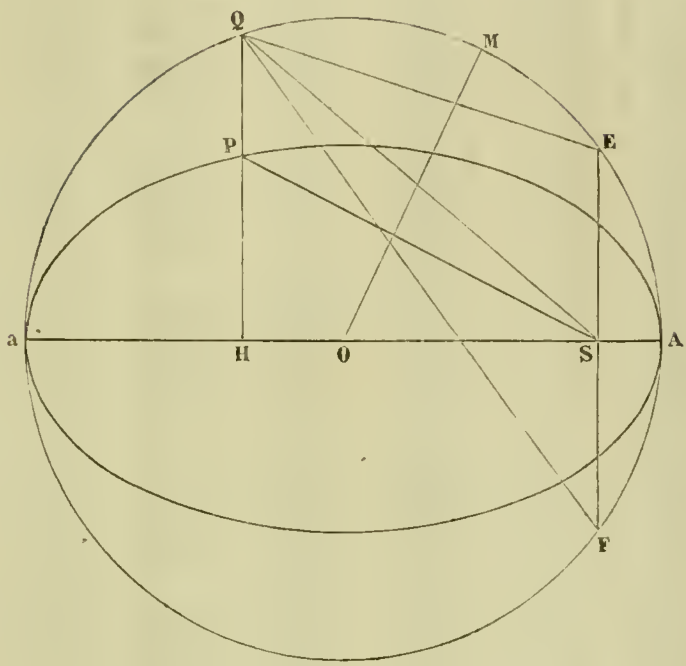
Calculée de dix en dix minutes et pour la position et pour l'ellipticité, ou même pour chaque minute auprès des excentricités actuelles, cette table ne laissera rien à désirer pour l'exactitude des interpolations, et les astronomes en peuvent déduire facilement leurs tables spéciales; car on peut y consigner les abscisses, les ordonnées, et les rayons vecteurs avec leurs logarithmes.

Aussi, au lieu de calculer les perturbations sur les longitudes et sur les distances héliocentriques, les astronomes peuvent déterminer les perturbations des ordonnées de chaque orbite et ainsi se mettre à même pour les transformer en les coordonnées X, Y, Z du système général; évitant par ce procédé le calcul des anomalies vraies et des positions héliocentriques.

On peut observer, que ces positions équi-différentes appartiennent au mouvement d'une planète autour du centre O dans le cas où l'attraction est en raison directe avec la distance OP.

Edimbourg, 15 Janvier 1879.

Mouvements elliptiques



I. Table des Segments du Cercle.

Arc.	Segment.	Arc.	Segment.	Arc.	Segment.	Arc.	Segment.
c	c ′ ″	c	c ′ ″	c	c ′ ″	c	c ′ ″
0	.0000	50	4.9842	100	36.3380	150	104.9842
1	.0000	51	5.2827	101	37.3459	151	106.6968
2	.0003	52	5.5924	102	38.3694	152	108.4204
3	.0011	53	5.9136	103	39.4087	153	110.1547
4	.0026	54	6.2464	104	40.4636	154	111.8996
5	.0051	55	6.5911	105	41.5343	155	113.6549
6	.0089	56	6.9476	106	42.6206	156	115.4203
7	.0141	57	7.3163	107	43.7225	157	117.1958
8	.0210	58	7.6972	108	44.8400	158	118.9811
9	.0299	59	8.0905	109	45.9731	159	120.7761
10	.0411	60	8.4964	110	47.1218	160	122.5804
11	.0547	61	8.9150	111	48.2860	161	124.3940
12	.0709	62	9.3464	112	49.4657	162	126.2167
13	.0902	63	9.7909	113	50.6607	163	128.0481
14	.1126	64	10.2484	114	51.8712	164	129.8882
15	.1384	65	10.7192	115	53.0970	165	131.7367
16	.1679	66	11.2035	116	54.3381	166	133.5934
17	.2013	67	11.7012	117	55.5944	167	135.4581
18	.2389	68	12.2126	118	56.8658	168	137.3306
19	.2808	69	12.7377	119	58.1523	169	139.2107
20	.3274	70	13.2768	120	59.4539	170	141.0981
21	.3788	71	13.8298	121	60.7703	171	142.9926
22	.4353	72	14.3969	122	62.1017	172	144.8940
23	.4971	73	14.9783	123	63.4478	173	146.8022
24	.5645	74	15.5739	124	64.8086	174	148.7168
25	.6376	75	16.1840	125	66.1840	175	150.6376
26	.7168	76	16.8086	126	67.5739	176	152.5645
27	.8022	77	17.4478	127	68.9783	177	154.4971
28	.8940	78	18.1017	128	70.3969	178	156.4353
29	.9926	79	18.7703	129	71.8298	179	158.3788
30	1.0981	80	19.4539	130	73.2768	180	160.3274
31	1.2107	81	20.1523	131	74.7377	181	162.2808
32	1.3306	82	20.8658	132	76.2126	182	164.2389
33	1.4581	83	21.5944	133	77.7012	183	166.2013
34	1.5934	84	22.3381	134	79.2035	184	168.1679
35	1.7367	85	23.0970	135	80.7192	185	170.1384
36	1.8882	86	23.8712	136	82.2484	186	172.1126
37	2.0481	87	24.6607	137	83.7909	187	174.0902
38	2.2167	88	25.4657	138	85.3464	188	176.0709
39	2.3940	89	26.2860	139	86.9150	189	178.0547
40	2.5804	90	27.1218	140	88.4964	190	180.0411
41	2.7761	91	27.9731	141	90.0905	191	182.0299
42	2.9811	92	28.8400	142	91.6972	192	184.0210
43	3.1958	93	29.7225	143	93.3163	193	186.0141
44	3.4203	94	30.6206	144	94.9476	194	188.0089
45	3.6549	95	31.5343	145	96.5811	195	190.0051
46	3.8996	96	32.4636	146	98.2464	196	192.0026
47	4.1547	97	33.4087	147	99.9136	197	194.0011
48	4.4204	98	34.3694	148	101.5924	198	196.0003
49	4.6968	99	35.3459	149	103.2827	199	198.0000
50	4.9842	100	36.3380	150	104.9842	200	200.0000

I. Table des Segments du Cercle.

Arc	Segment.	Arc.	Segment.	Arc.	Segment.	Arc.	Segment.
c	c ′ ″	c	c ′ ″	c	c ′ ″	c	c ′ ″
200	200.0000	250	295.0158	300	363.6620	350	395.0158
201	202.0000	251	296.7173	301	364.6541	351	395.3032
202	203.9997	252	298.4076	302	365.6306	352	395.5796
203	205.9989	253	300.0864	303	366.5913	353	395.8453
204	207.9974	254	301.7536	304	367.5364	354	396.1004
205	209.9949	255	303.4089	305	368.4657	355	396.3451
206	211.9911	256	305.0524	306	369.3794	356	396.5797
207	213.9859	257	306.6837	307	370.2775	357	396.8042
208	215.9790	258	308.3028	308	371.1600	358	397.0189
209	217.9701	259	309.9095	309	372.0269	359	397.2239
210	219.9589	260	311.5036	310	372.8782	360	397.4196
211	221.9453	261	313.0850	311	373.7140	361	397.6060
212	223.9291	262	314.6536	312	374.5343	362	397.7833
213	225.9098	263	316.2091	313	375.3393	363	397.9519
214	227.8874	264	317.7516	314	376.1288	364	398.1118
215	229.8616	265	319.2808	315	376.9030	365	398.2633
216	231.8321	266	320.7965	316	377.6619	366	398.4066
217	233.7987	267	322.2988	317	378.4056	367	398.5419
218	235.7611	268	323.7874	318	379.1342	368	398.6694
219	237.7192	269	325.2623	319	379.8477	369	398.7893
220	239.6726	270	326.7232	320	380.5461	370	398.9019
221	241.6212	271	328.1702	321	381.2297	371	399.0074
222	243.5647	272	329.6031	322	381.8983	372	399.1060
223	245.5029	273	331.0217	323	382.5522	373	399.1978
224	247.4355	274	332.4261	324	383.1914	374	399.2832
225	249.3624	275	333.8160	325	383.8160	375	399.3624
226	251.2832	276	335.1914	326	384.4261	376	399.4355
227	253.1978	277	336.5522	327	385.0217	377	399.5029
228	255.1060	278	337.8983	328	385.6031	378	399.5647
229	257.0074	279	339.2297	329	386.1702	379	399.6212
230	258.9019	280	340.5461	330	386.7232	380	399.6726
231	260.7893	281	341.8477	331	387.2623	381	399.7192
232	262.6694	282	343.1342	332	387.7874	382	399.7611
233	264.5419	283	344.4056	333	388.2988	383	399.7987
234	266.4066	284	345.6619	334	388.7965	384	399.8321
235	268.2633	285	346.9030	335	389.2808	385	399.8616
236	270.1118	286	348.1288	336	389.7516	386	399.8874
237	271.9519	287	349.3393	337	390.2091	387	399.9098
238	273.7833	288	350.5343	338	390.6536	388	399.9291
239	275.6060	289	351.7140	339	391.0850	389	399.9453
240	277.4196	290	352.8782	340	391.5036	390	399.9589
241	279.2239	291	354.0269	341	391.9095	391	399.9701
242	281.0189	292	355.1600	342	392.3028	392	399.9790
243	282.8042	293	356.2775	343	392.6837	393	399.9859
244	284.5797	294	357.3794	344	393.0524	394	399.9911
245	286.3451	295	358.4657	345	393.4089	395	399.9949
246	288.1004	296	359.5364	346	393.7536	396	399.9974
247	289.8453	297	360.5913	347	394.0864	397	399.9989
248	291.5796	298	361.6306	348	394.4076	398	399.9997
249	293.3032	299	362.6541	349	394.7173	399	400.0000
250	295.0158	300	363.6620	350	395.0158	400	400.0000

Excentricité = Cos 10^c = . 987 6883

Pos.	Anom. Moy.	Anom. Vraie.	Pos.	Anom. Moy.	Anom. Vraie.
c	c ' "	c ' "	c	c ' "	c ' "
0	.0000	0.0000	50	5.5384	176.0931
1	.0124	12.6645	51	5.8455	176.6024
2	.0249	25 0848	52	6 1638	177.0940
3	.0380	37.0438	53	6.4933	177.5688
4	.0518	48.3717	54	6.8344	178.0276
5	.0666	58.9549	55	7.1870	178.4711
6	.0826	68.7343	56	7.5515	178.9004
7	.1001	77.6972	57	7.9279	179.3160
8	.1193	85.8646	58	8.3165	179.7187
9	.1404	93.2801	59	8.7173	180.1090
10	.1637	100.0000	60	9.1305	180.4876
11	.1894	106.0859	61	9.5562	180.8551
12	.2178	111.6000	62	9.9947	181.2119
13	.2491	116.6019	63	10.4459	181.5586
14	.2835	121.1467	64	10.9102	181.8956
15	.3214	125.2849	65	11.3875	182.2233
16	.3628	129.0613	66	11.8781	182.5422
17	.4081	132.5160	67	12.3820	182.8527
18	.4575	135.6844	68	12.8994	183.1550
19	.5113	138.5974	69	13.4304	183.4497
20	.5696	141.2824	70	13.9751	183.7369
21	.6327	143.7633	71	14.5336	184.0170
22	.7008	146.0610	72	15.1061	184.2902
23	.7741	148.1949	73	15.6926	184.5570
24	.8530	150.1788	74	16.2932	184.8174
25	.9376	152.0295	75	16.9081	185.0719
26	1.0281	153.7587	76	17.5373	185.3205
27	1.1247	155.3776	77	18.1810	185.5636
28	1.2278	156.8962	78	18.8391	185.8013
29	1.3374	158.3233	79	19.5119	186.0338
30	1.4539	159.6667	80	20.1993	186.2614
31	1.5774	160.9335	81	20.9015	186.4842
32	1.7082	162.1300	82	21.6185	186.7023
33	1.8465	163.2618	83	22.3504	186.9161
34	1.9924	164.3339	84	23.0972	187.1256
35	2.1462	165.3510	85	23.8591	187.3309
36	2.3082	166.3172	86	24.6361	187.5322
37	2.4784	167.2362	87	25.4282	187.7297
38	2.6572	168.1114	88	26.2456	187.9235
39	2.8447	168.9459	89	27.0681	188.1137
40	3.0411	169.7425	90	27.8959	188.3004
41	3.2467	170.5037	91	28.7491	188.4838
42	3.4615	171.2319	92	29.6176	188.6636
43	3.6859	171.9293	93	30.5015	188.8409
44	3.9199	172.5977	94	31.4009	189.0148
45	4.1639	173.2391	95	32.3156	189.1858
46	4.4179	173.8550	96	33.2459	189.3540
47	4.6822	174.4465	97	34.1916	189.5194
48	4.9569	175.0165	98	35.1528	189.6822
49	5.2423	175 5648	99	36.1296	189.8423
50	5.5384	176.0931	100	37.1218	190.0000

Excentricité = Cos 10ᶜ = . 987 6883

Pos.	Anom. Moy.	Anom. Vraie.	Pos.	Anom. Moy.	Anom. Vraie.
c	c ′ ″	c ′ ″	c	c ′ ″	c ′ ″
100	37.1218	190.0000	150	105.5384	195.8509
101	38.1296	190.1552	151	107.2423	195.9426
102	39.1528	190.3081	152	108.9569	196.0338
103	40.1916	190.4587	153	110.6822	196.1245
104	41.2459	190.6071	154	112.4179	196.2146
105	42.3156	190.7533	155	114.1589	196.3042
106	43.4009	190.8975	156	115.9199	196.3933
107	44.5015	191.0396	157	117.6859	196.4819
108	45.6176	191.1798	158	119.4615	196.5700
109	46.7491	191.3180	159	121.2467	196.6576
110	47.8959	191.4544	160	123.0411	196.7448
111	49.0581	191.5891	161	124.8447	196.8316
112	50.2356	191.7219	162	126.6572	196.9179
113	51.4282	191.8531	163	128.4784	197.0038
114	52.6361	191.9826	164	130.3082	197.0893
115	53.8591	192.1105	165	132.1462	197.1744
116	55.0972	192.2369	166	133.9924	197.2591
117	56.3504	192.3617	167	135.8465	197.3435
118	57.6185	192.4850	168	137.7082	197.4275
119	58.9015	192.6070	169	139.5774	197.5112
120	60.1993	192.7275	170	141.4539	197.5945
121	61.5119	192.8467	171	143.3374	197.6776
122	62.8391	192.9646	172	145.2278	197.7604
123	64.1810	193.0811	173	147.1247	197.8428
124	65.5373	193.1965	174	149.0281	197.9250
125	66.9081	193.3106	175	150.9376	198.0069
126	68.2932	193.4235	176	152.8530	198.0886
127	69.6926	193.5353	177	154.7741	198.1700
128	71.1061	193.6460	178	156.7008	198.2512
129	72.5336	193.7556	179	158.6327	198.3322
130	73.9751	193.8641	180	160.5696	198.4130
131	75.4304	193.9716	181	162.5113	198.4935
132	76.8994	194.0781	182	164.4575	198.5739
133	78.3820	194.1836	183	166.4081	198.6541
134	79.8781	194.2882	184	168.3628	198.7341
135	81.3825	194.3918	185	170.3214	198.8140
136	82.9102	194.4946	186	172.2835	198.8937
137	84.4459	194.5964	187	174.2491	198.9733
138	85.9947	194.6974	188	176.2178	199 0528
139	87.5562	194.7976	189	178.1894	199.1321
140	89.0305	194.8970	190	180.1637	199.2114
141	90.7173	194.9956	191	182.1404	199.2905
142	92.3165	195.0933	192	184.1193	199.3696
143	93.9279	195.1905	193	186.1001	199.4485
144	95.5515	195.2868	194	188.0826	199.5274
145	97.1870	195.3825	195	190.0666	199.6063
146	98.8344	195.4774	196	192.0518	199.6851
147	100.4933	195.5717	197	194.0380	199.7639
148	102.1638	195.6654	198	196.0249	199.8426
149	103.8455	195.7584	199	198.0125	199.9213
150	105.5384	195.8509	200	200.0000	200.0000

Excentricité = Cos 50^c = . 707 1068

Pos.	Anom. Moy.	Anom. Vraie.	Pos.	Anom. Moy.	Anom. Vraie.
c	c ′ ″	c ′ ″	c	c ′ ″	c ′ ″
0	.0000	0.0000	50	18.1690	100.0000
1	.2929	2.4140	51	18.6730	101.4032
2	.5860	4.8265	52	19.1849	102.7845
3	.8795	7.2362	53	19.7049	104.1443
4	1.1734	9.6416	54	20.2331	105.4829
5	1.4681	12 0413	55	20.7697	106.8008
6	1.7636	14.4339	56	21.3147	108.0982
7	2.0602	16.8180	57	21.8683	109.3756
8	2.3580	19.1925	58	22.4305	110.6333
9	2.6572	21.5559	59	23.0015	111.8716
10	2.9580	23.9069	60	23.5814	113.0910
11	3.2605	26.2445	61	24.1703	114.2918
12	3.5649	28.5674	62	24.7683	115.4743
13	3.8714	30.8746	63	25.3754	116.6390
14	4.1801	33.1649	64	25.9919	117.7861
15	4.4913	35.4373	65	26.6177	118.9160
16	4.8050	37.6911	66	27.2530	120.0291
17	5.1215	39.9251	67	27.8978	121.1256
18	5.4410	42.1386	68	28.5523	122.2060
19	5.7635	44.3309	69	29.2166	123.2706
20	6.0893	46.5012	70	29.8906	124.3197
21	6.4186	48.6489	71	30.5746	125.3536
22	6.7514	50.7734	72	31.2685	126.3726
23	7.0880	52.8741	73	31.9724	127.3771
24	7.0286	54.9506	74	32.6865	128.3673
25	7.7732	57.0025	75	33.4108	129.3436
26	8.1221	59.0293	76	34.1454	130.3063
27	8.4753	61.0309	77	34.8902	131.2556
28	8.8332	63.0069	78	35.6455	132.1919
29	9.1958	64.9571	79	36.4113	133.1153
30	9.5632	66.8814	80	37.1874	134.0263
31	9.9358	68.7797	81	37.9742	134.9250
32	10.3135	70.6518	82	38.7716	135.8118
33	10.6965	72.4978	83	39.5797	136.6869
34	11.0851	74.3176	84	40.3984	137.5505
35	11.4793	76.1114	85	41.2280	138.4030
36	11.8793	77.8791	86	42.0683	139.2444
37	12.2853	79.6209	87	42.9195	140.0746
38	12.6974	81.3369	88	43.7815	140.8955
39	13.1157	83.0273	89	44.6545	141.7055
40	13.5404	84.6923	90	45.5384	142.5055
41	13.9716	86.3321	91	46.4333	143.2957
42	14.4095	87.9469	92	47.3391	144.0763
43	14.8542	89.5370	93	48.2560	144.8475
44	15.3058	91.1027	94	49.1840	145.6096
45	15.7646	92.6442	95	50.1180	146.3626
46	16.2305	94.1616	96	51.0730	147.1068
47	16.7038	95.6558	97	52.0342	147.8425
48	17.1846	97.1267	98	53.0064	148.5698
49	17.6729	98.5746	99	53.9897	149.2889
50	18.1690	100.0000	100	54.9842	150.0000

Excentricité = Cos 50^c = . 707 1068

Pos.	Anom. Moy.	Anom. Vraie.	Pos.	Anom. Moy.	Anom. Vraie.
c	c ″	c ′ ″	c	c ′ ″	c ′ ″
100	54. 9842	150. 0000	150	118. 1690	178. 3653
101	55. 9897	150. 7032	151	119. 6729	178. 8355
102	57. 0064	151. 3987	152	121. 1846	179. 3033
103	58. 0342	152. 0867	153	122. 7038	179. 7687
104	59. 0730	152. 7674	154	124. 2305	180. 2319
105	60. 1230	153. 4409	155	125. 7646	180. 6928
106	61. 1840	154. 1073	156	127. 3058	181. 1516
107	62. 2560	154. 7669	157	128. 8542	181. 6083
108	63. 3391	155. 4198	158	130. 4095	182. 0629
109	64. 4333	156. 0661	159	131. 9716	182. 5156
110	65. 5384	156. 7059	160	133. 5404	182. 9663
111	66. 6545	157. 3395	161	135. 1157	183. 4152
112	67. 7815	157. 9669	162	136. 6974	183. 8622
113	68. 9195	158. 5883	163	138. 2853	184. 3075
114	70. 0683	159. 2038	164	139. 8793	184. 7511
115	71. 2280	159. 8135	165	141. 4793	185. 1931
116	72. 3984	160. 4177	166	143. 0851	185. 6333
117	73. 4797	161. 0163	167	144. 6965	186. 0722
118	74. 7716	161. 6095	168	146. 3135	186. 5096
119	75. 9742	162. 1975	169	147. 9358	186. 9454
120	77. 1874	162. 7804	170	149. 5632	187. 3799
121	78. 4112	163. 3582	171	151. 1958	187. 8130
122	79. 6455	163. 9310	172	152. 8332	188. 2449
123	80. 8902	164. 4991	173	154. 4753	188. 6755
124	82. 1454	165. 0625	174	156. 1221	189. 1049
125	83. 4108	165. 6213	175	157. 7732	189. 5331
126	84. 6865	166. 1756	176	159. 4286	189. 9603
127	85. 9724	166. 7255	177	161. 0880	190. 3864
128	87. 2685	167. 2711	178	162. 7514	190. 8115
129	88. 5746	167. 8125	179	164. 4186	191. 2358
130	89. 8906	168. 3497	180	166. 0893	191. 6592
131	91. 2166	168. 8830	181	167. 7635	192. 0812
132	92. 5523	169. 4124	182	169. 4410	192. 5028
133	93. 8978	169. 9379	183	171. 1215	192. 9237
134	95. 2530	170. 4597	184	172. 8050	193. 3435
135	96. 6177	170. 9779	185	174. 4913	193. 7630
136	97. 9919	171. 4924	186	176. 1801	194. 1816
137	99. 3754	172. 0035	187	177. 8714	194 5997
138	100. 7683	172. 5112	188	179. 5649	195. 0172
139	102. 1703	173. 0155	189	181. 2605	195. 4342
140	103. 5814	173. 5166	190	182. 9580	195 8508
141	105. 0015	174. 0146	191	184. 6572	196. 2669
142	106. 4305	174. 5094	192	186. 3580	196. 6827
143	107. 8673	175. 0012	193	188. 0602	197. 0981
144	109. 3147	175. 4901	194	189. 7636	197. 5132
145	110. 7697	175. 9761	195	191. 4631	197. 9280
146	112. 2331	176. 4594	196	193. 1734	198. 3427
147	113. 7049	176. 9397	197	194. 8895	198. 7572
148	115. 1849	177. 4175	198	196. 5860	199. 1715
149	116. 6730	177. 8927	199	198. 2929	199. 5858
150	118. 1690	178. 3653	200	200. 0000	200. 0000

Excentricité = Cos 90^c = .156 4345

Pos.	Anom. Moy.	Anom. Vraie.	Pos.	Anom. Moy.	Anom. Vraie.
c	c ' "	c ' "	c	c ' "	c ' "
0	.0000	0.0000	50	42.9580	57.4947
1	.8436	1.1708	51	43.8482	58.6040
2	1.6872	2.3416	52	44.7403	59.7112
3	2.5309	3.5123	53	45.6341	60.8163
4	3.3747	4.6828	54	46.5297	61.9190
5	4.2186	5.8531	55	47.4222	63.0196
6	5.0628	7.0232	56	48.3265	64.1178
7	5.9072	8.1929	57	49.2278	65.2137
8	6.7518	9.3622	58	50.1309	66.3073
9	7.5968	10.5311	59	51.0360	67.3986
10	8.4421	11.6996	60	51.9431	68.4875
11	9.2878	12.8675	61	52.8521	69.5740
12	10.1339	14.0348	62	53.7632	70.6581
13	10.9805	15.2015	63	54.6763	71.7398
14	11.8275	16.3675	64	55.5914	72.8191
15	12.6751	17.5328	65	56.5086	73.8959
16	13.5233	18.6973	66	57.4279	74.9703
17	14.3721	19.8609	67	58.3494	76.0422
18	15.2215	21.0237	68	59.2729	77.1116
19	16.0717	22.1855	69	60.1986	78.1786
20	16.9225	23.3463	70	61.1265	79.2430
21	17.7741	24.5061	71	62.0566	80.3049
22	18.6265	25.6648	72	62.9889	81.3644
23	19.4798	26.8224	73	63.9234	82.4213
24	20.3339	27.9788	74	64.8501	83.4757
25	21.1889	29.1340	75	65.7992	84.5275
26	22.0448	30.2879	76	66.7404	85.5768
27	22.9018	31.4405	77	67.6840	86.6236
28	23.7597	32.5917	78	68.6298	87.6678
29	24.6187	33.7416	79	69.5780	88.7095
30	25.4787	34.8899	80	70.5285	89.7486
31	26.3399	36.0368	81	71.4813	90.7852
32	27.2023	37.1822	82	72.4365	91.8193
33	28.0658	38.3260	83	73.3940	92.8507
34	28.9305	39.4682	84	74.3540	93.8797
35	29.7965	40.6087	85	75.3162	94.9061
36	30.6636	41.7476	86	76.2809	95.9299
37	31.5323	42.8847	87	77.2480	96.9512
38	32.4023	44.0200	88	78.2175	97.9700
39	33.2736	45.1537	89	79.1894	98.9863
40	34.1463	46.2854	90	80.1637	100.0000
41	35.0205	47.4152	91	81.1404	101.0112
42	35.8961	48.5432	92	82.1196	102.0200
43	36.7733	49.6692	93	83.1012	103.0261
44	37.6519	50.7933	94	84.0853	104.0298
45	38.5322	51.9153	95	85.0718	105.0310
46	39.4140	53.0353	96	86.0607	106.0297
47	40.2975	54.1533	97	87.0521	107.0260
48	41.1826	55.2692	98	88.0460	108.0198
49	42.0695	56.3829	99	89.0423	109.0111
50	42.9580	57.4947	100	90.0411	110.0000

Excentricité = Cos 90^c = . 156 4345					
Pos.	Anom. Moy.	Anom. Vraie.	Pos.	Anom. Moy.	Anom. Vraie.
c	c ′ ″	c ′ ″	c	c ′ ″	c ′ ″
100	90.0411	110.0000	150	142.9580	156.7059
101	91.0423	110.9865	151	144.0695	157.5945
102	92.0460	111.9705	152	145.1826	158.4818
103	93.0521	112.9522	153	146.2975	159.3677
104	94.0607	113.9315	154	147.4140	160.2523
105	95.0718	114.9084	155	148.5322	161.1356
106	96.0853	115.8829	156	149.6519	162.0177
107	97.1012	116.8551	157	150.7733	162.8985
108	98.1196	117.8249	158	151.8961	163.7782
109	99.1404	118.7925	159	153.0205	164.6566
110	100.1637	119.7577	160	154.1463	165.5339
111	101.1894	120.7207	161	155.2736	166.4101
112	102.2175	121.6814	162	156.4023	167.2852
113	103.2480	122.6398	163	157.5323	168.1592
114	104.2809	123.5960	164	158.6637	169.0321
115	105.3162	124.5500	165	159.7965	169.9041
116	106.3540	125.5018	166	160.9305	170.7751
117	107.3940	126.4514	167	162.0658	171.6451
118	108.4365	127.3989	168	163.2023	172.5141
119	109.4813	128.3442	169	164.3399	173.3823
120	110.5265	129.2874	170	165.4787	174.2496
121	111.5780	130.2285	171	166.6187	175.1160
122	112.6298	131.1675	172	167.7597	175.9816
123	113.6840	132.1045	173	168.9018	176.8465
124	114.7404	133.0394	174	170.0448	177.7105
125	115.7992	133.9723	175	171.1889	178.5739
126	116.8601	134.9032	176	172.3339	179.4365
127	117.9234	135.8321	177	173.4798	180.2984
128	118.9889	136.7591	178	174.6265	181.1597
129	120.0566	137.6841	179	175.7741	182.0204
130	121.1265	138.6073	180	176.9225	182.8804
131	122.1986	139.5285	181	178.0717	183.7399
132	123.2729	140.4479	182	179.2215	184.5989
133	124.3494	141.3655	183	180.3721	185.4573
134	125.4279	142.2812	184	181.5233	186.3153
135	126.5086	143.1952	185	182.6751	187.1728
136	127.5914	144.1074	186	183.8275	188.0298
137	128.6763	145.0178	187	184.9805	188.8865
138	129.7632	145.9265	188	186.1329	189.7428
139	130.8521	146.8335	189	187.2878	190.5988
140	131.9431	147.7389	190	188.4421	191.4544
141	133.0360	148.6426	191	189.5968	192.3098
142	134.1309	149.5446	192	190.7518	193.1649
143	135.2278	150.4451	193	191.9072	194.0198
144	136.3265	151.3440	194	193.0628	194.8745
145	137.4272	152.2414	195	194.2186	195.7290
146	138.5297	153.1372	196	195.3747	196.5834
147	139.6341	154.0316	197	196.5309	197.4376
148	140.7403	154.9245	198	197.6872	198.2918
149	141.8482	155.8159	199	198.8436	199.1459
150	142.9580	156.7059	200	200.0000	200.0000

NOTA QUINTA

INTORNO ALLE FUNZIONI ELITTICHE ED AGLI INTEGRALI ELITTICI DI PRIMA SPECIE E SULLA LORO APPLICAZIONE AL MOTO CIRCOLARE DI UN PUNTO VINCOLATO ATTRATTO O RESPINTO CON FORZA COSTANTE DA UN CENTRO FISSO.

Letta nell'adunanza del 15 *Giugno* 1879

Nelle Note terza e quarta ho esposto due metodi per risolvere l'equazione normale degli integrali elittici di prima specie, ossia per trovare la variabile u quando ne è data l'amplitudine, am$u$, e viceversa. Quindi ho risoluto due problemi sul moto dipendenti da tali integrali, per relazioni che permettono di averne subito la forma normale, e che mostrano essere le leggi del movimento espresse da formole contenenti le tre funzioni elittiche $\operatorname{sen am} u$, $\cos \operatorname{am} u$, $\Delta \operatorname{am} u$. In questa espongo brevemente e dimostro in modo elementare i principii che conducono alle tre serie fattoriali di Jacobi esprimenti tali funzioni. Dopo considero il problema del moto di un punto materiale vincolato ad una periferia di circolo ed attratto o respinto con forza costante da un centro fisso; e trovata l'equazione generale che lo determina la applico ai casi in cui il centro di attrazione ed il centro di ripulsione sono sulla periferia; col secondo dei quali si ottengono le leggi del pendolo circolare che sono date da ciascuno dei due centri all'infinito, e col primo si ottengono delle leggi dipendenti anche da integrali elittici di prima specie, ma per relazioni che non ne danno immediatamente la forma normale col coefficiente reale, e che mi porgono l'occasione di dimostrare in una maniera breve e semplice ed in alcune parti nuova, le formole della sostituzione lineare, con cui si trova tale forma, quando le radici del radicale di terzo o di quarto grado del differenziale elittico sono reali.

I.

1. Dalla Nota terza si ha [12], [13]:

[1]..... $$\operatorname{sen}\varphi_0=\frac{(1+k')\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi,k)};$$
e [15], [18]:

[2]..... $$u=F(\varphi,k)=\frac{1+k_0}{2}F(\varphi_0,\ k_0),$$

[3]..... $$K=(1+k_0)K_0.$$

Col modulo k_1 della serie [A] della Nota quarta, queste espressioni diventano

[1']..... $$\operatorname{sen}\varphi=\frac{(1+k'_1)\operatorname{sen}\varphi_1\cos\varphi_1}{(\Delta(\varphi_1,\ k_1)}$$

[2']..... $$u_1=F(\varphi_1,\ k_1)=\frac{1+k}{2}F(\varphi,k)=\frac{1+k}{2}u$$

[3']..... $$K_1=(1+k)K.$$

Onde le formole

[4]..... $$\operatorname{sen}\operatorname{am}u=\frac{(1+k'_1)\operatorname{sen}\operatorname{am}u_1\cos\operatorname{am}u_1}{\Delta\operatorname{am}u_1},$$

[5]..... $$u_1=\frac{K_1}{2K}u,$$

dalle quali mettendo, per maggior chiarezza, in vista i moduli k, k_1 dei due membri, deriva la seguente fondamentale

[6]..... $$\operatorname{sen}\operatorname{am}(u,\ k)=\frac{(1+k'_1)\operatorname{sen}\operatorname{am}\frac{K_1u}{2K}\cos\operatorname{am}\frac{K_1u}{2K}}{\Delta\operatorname{am}\frac{K_1u}{2K}}.$$

(Mod. k_1).

Nel caso particolare di $k=0$, essendo tutti nulli i moduli della succitata serie [A] ed uguali ad uno i loro complementi dell'altra serie [B], sono contemporaneamente: $k=0$, $k_1=0$, $k'_1=1$; $u=\operatorname{am} u=\varphi$; $K=K_1=\frac{\pi}{2}$; $\Delta\operatorname{am}\frac{K_1 u}{2K}=1$; e la [6] si riduce alla nota formola della trigonometria piana:

[6'] ..... $$\operatorname{sen}\varphi=2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\varphi\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\pi+\varphi).$$

L'equazione [6] può essere ridotta alla formola [6'], mediante una delle proprietà delle funzioni elittiche che ora dimostrerò.

2. Stabilita la relazione

[7] ..... $$\operatorname{sen} n=\frac{\cos m}{\Delta(m,k)}$$

dalla medesima si hanno

[8] ..... $$\cos n=\frac{k'\operatorname{sen} m}{\Delta(m,k)},$$

[9] ..... $$\Delta(n,k)=\frac{k'}{\Delta(m,k)};$$

e dalle [7] ed [8] l'equazione

$$\tan n=k'\cot m,$$

la cui differenziale divisa per l'equazione stessa dà

$$\frac{dn}{\operatorname{sen} n\cos n}=-\frac{dm}{\operatorname{sen} m\cos m};$$

ed il prodotto delle [7] ed [8] diviso per la [9] dà

$$\frac{\operatorname{sen} n\cos n}{\Delta(n,k)}=-\frac{\operatorname{sen} m\cdot\cos m}{\Delta(m,k)}.$$

Moltiplicando le due ultime equazioni si trova

[10] ..... $$\frac{dn}{\Delta(n,k)}=-\frac{dm}{\Delta(m,k)}.$$

Da questa, avuto riguardo che, [7], ad $m=0$ corrisponde $n=\frac{\pi}{2}$, integrando, si ottiene

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{n}\frac{dn}{\Delta(n,k)}=\int_0^{n}\frac{dn}{\Delta(n,k)}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dn}{\Delta(n,k)}=-\int_0^{m}\frac{dm}{\Delta(m,k)},$$

epperciò l'equazione

$$[11]\ldots\ldots \qquad F(n, k) = K - F(m, k)$$

che si può rappresentare colle due

$$[11']\ldots\ldots \qquad F(m, k) = v\,; \qquad F(n, k) = K - v$$

le cui inverse sono

$$[11'']\ldots\ldots \qquad m = \operatorname{am} v\,; \qquad n = \operatorname{am}(K - v)\,.$$

Per le [7], [8], [9], quindi le suaccennate proprietà che seguono:

$$[12]\ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{sen am}(K - v) = \frac{\cos \operatorname{am} v}{\Delta \operatorname{am} v}\,; \\ &\cos \operatorname{am}(K - v) = \frac{k' \operatorname{sen am} v}{\Delta \operatorname{am} v}\,; \\ &\Delta \operatorname{am}(K - v) = \frac{k'}{\Delta \operatorname{am} v}\,. \end{aligned} \right.$$

3. Prendendo per modulo k_1 e facendo $v = -\frac{K_1 u}{2K}$ dalla prima delle [12] si ha

$$\frac{\cos \operatorname{am} \frac{K_1 u}{2K}}{\Delta \operatorname{am} \frac{K_1 u}{2K}} = \operatorname{sen am} \frac{K_1}{2K}(2K + u)\,,$$

per cui la [6] si semplifica, trasformandosi nella seguente:

$$[13]\ldots \quad \operatorname{sen am}(u, k) = (1 + k'_1) \operatorname{sen am} \frac{K_1 u}{2K} \operatorname{sen am} \frac{K_1}{2K}(2K + u)\,.$$

(Mod. k_1).

Siccome i moduli della serie [A] citata convergono a sinistra verso l'unità, e siccome pel modulo *uno* si conosce la relazione fra u ed $\operatorname{am} u$ (Nota quarta, formola [8]), così, decomponendo successivamente coll'equazione [13] ciascun seno del suo secondo membro, si perverrà ad avere $\operatorname{sen am}(u, k)$ con una serie di fattori conosciuti che adesso troverò.

Scrivo

$$U_1 = \frac{K_1 u}{2K} \qquad V_1 = \frac{K_1}{2K}(2K + u)\,,$$

e per la [13]:

$$\left. \begin{aligned} &\operatorname{sen am}(U_1, k_1) = (1 + k'_2) \operatorname{sen am} \frac{K_2 U_1}{2K_1} \operatorname{sen am} \frac{K_2}{2K_1}(2K_1 + U_1) \\ &\operatorname{sen am}(V_1, k_1) = (1 + k'_2) \operatorname{sen am} \frac{K_2 V_1}{2K_1} \operatorname{sen am} \frac{K_2}{2K_1}(2K_1 + V_1) \end{aligned} \right\}\,.$$

(Mod. k_2).

con questi sviluppi, mettendo al posto di U_1, V_1 i loro valori, la [13] diventa

$$[A]\left\{\begin{aligned}\operatorname{sen am}(u,k)=(1+k'_1)(1+k'_2)^2\operatorname{sen am}\frac{K_2 u}{2^2K}\operatorname{sen am}\frac{K_2}{2^2K}(4K+u)\\ \times\operatorname{sen am}\frac{K_2}{2^2K}(2K+u)(\operatorname{sen am}\frac{K_2}{2^2K}(6K+u).\end{aligned}\right.$$

Ma (Nota terza [24']) per qualunque modulo e variabile v essendo

[14] . . . . . $$\operatorname{sen am} v=\operatorname{sen am}(2K-v),$$

col modulo k_2 e con $v=\frac{K_2}{2^2K}(6K+u)$

si ha

$$\operatorname{sen am}\frac{K_2}{2^2K}(6K+u)=\operatorname{sen am}\frac{K_2}{2^2K}(2K-u).$$

Quindi, [A], la formola

$$\begin{aligned}\operatorname{sen am}(u,k)=(1+k'_1)(1+k'_2)^2\operatorname{sen am}\frac{K_2 u}{2^2K}\operatorname{sen am}\frac{K_2}{2^2K}(2K+u)\\ \times\operatorname{sen am}\frac{K_2}{2^2K}(2K-u)\operatorname{sen am}\frac{K_2}{2^2K}(4K+u)\\ (\text{Mod. } k_2)\end{aligned}$$

che si suole scrivere più concisamente come segue:

$$[15]\ldots\left\{\begin{aligned}\operatorname{sen am}(u,k)=(1+k'_1)(1+k'_2)^2\operatorname{sen am}\frac{K_2 u}{2^2K}\operatorname{sen am}\frac{K_2}{2^2K}(2K\pm u)\\ \times\operatorname{sen am}\frac{K_2}{2^2K}(4K+u)\\ (\text{Mod. } k_2)\end{aligned}\right.$$

rappresentando col doppio segno entrambi i fattori che si hanno, prendendo i due segni separatamente.

Scrivo

$$U_2=\frac{K_2 u}{2^2K};\qquad V_2=\frac{K_2}{2^2K}(2K\pm u);\qquad X_2=\frac{K_2}{2^2K}(4K+u)$$

e, [13],

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen am}(U_2,k_2)&=(1+k'_3)\operatorname{sen am}\frac{K_3U_2}{2K_2}\operatorname{sen am}\frac{K_3}{2K_2}(2K_2+U_2)\\ \operatorname{sen am}(V_2,k_2)&=(1+k'_3)^2\operatorname{sen am}\frac{K_3V_2}{2K_2}\operatorname{sen am}\frac{K_3}{2K_2}(2K_2+V_2)\\ \operatorname{sen am}(X_2,k_2)&=(1+k'_3)\operatorname{sen am}\frac{K_3X_2}{2K_2}\operatorname{sen am}\frac{K_3}{2K_2}(2K_2+X_2)\\ &(\text{Mod. } k_3)\end{aligned}\right]$$

Sostituendo questi sviluppi nella [15] coi valori di U_2, V_2, X_2, essa diventa

$$[\mathrm{B}]\left\{\begin{aligned} &\operatorname{sen am}(u, k) \\ &=(1+k'_1)(1+k'_2)^2(1+k'_3)^4 \operatorname{sen am}\frac{K_3 u}{2^3 K}\operatorname{sen am}\frac{K_3}{2^3K}(8K+u) \\ &\times \operatorname{sen am}\frac{K_3}{2^3K}(2K\pm u)\operatorname{sen am}\frac{K_3}{2^3K}(10K\pm u) \\ &\times \operatorname{sen am}\frac{K_3}{2^3K}(4K+u)\operatorname{sen am}\frac{K_3}{2^3K}(12K+u). \end{aligned}\right.$$

(Mod. k_3).

Ma, [14],

a $\frac{K_3}{2^3K}(10K\pm u)$ si può sostituire $\frac{K_3}{2^3K}(6K\mp u)$;

a $\frac{K_3}{2^3K}(12K+u)$ » $\frac{K_3}{2^3K}(4K-u)$.

Quindi, [B], la formola

$$[16]\left\{\begin{aligned} &\operatorname{sen am}(u, k) \\ &=(1+k'_1)(1+k'_2)^2(1+k'_3)^4 \operatorname{sen am}\frac{K_3 u}{2^3 K} \\ &\times \operatorname{sen am}\frac{K_3}{2^3K}(2K\pm u)\operatorname{sen am}\frac{K_3}{2^3K}(4K\pm u) \\ &\times \operatorname{sen am}\frac{K_3}{2^3K}(6K\pm u)\operatorname{sen am}\frac{K_3}{2^3K}(8K+u). \end{aligned}\right.$$

(Mod. k_3).

Si può già colle [13], [15] e [16] vedere con qual legge procede la serie fattoriale, ma per maggiore chiarezza farò ancora una decomposizione.

Scrivo:

$$U_3=\frac{K_3 u}{2^3K};$$

$$V_3=\frac{K_3}{2^3K}(2K\pm u); \qquad X_3=\frac{K_3}{2^3K}(4K\pm u)$$

$$Y_3=\frac{K_3}{2^3K}(6K\pm u) \qquad Z_3=\frac{K_3}{2^3K}(4K+u)$$

e, [13],

$$\left.\begin{aligned}
&\text{sen am}\,(U_3\,,\,k_3)=(1+k'_4)\,\text{sen am}\,\frac{K_4U_3}{2K_3}\,\text{sen am}\,\frac{K_4}{2K_3}(2\,K_3+U_3)\\
&\text{sen am}\,(V_3\,,\,k_3)=(1+k'_4)^2\text{sen am}\,\frac{K_4V_3}{2K_3}\,\text{sen am}\,\frac{K_4}{2K_3}(2\,K_3+V_3)\\
&\text{sen am}\,(X_3\,,\,k_3)=(1+k'_4)^2\text{sen am}\,\frac{K_4X_3}{2K_3}\,\text{sen am}\,\frac{K_4}{2K_3}(2\,K_3+X_3)\\
&\text{sen am}\,(Y_3\,,\,k_3)=(1+k'_4)^2\text{sen am}\,\frac{K_4Y_3}{2K_3}\,\text{sen am}\,\frac{K_4}{2K_3}(2\,K_3+Y_3)\\
&\text{sen am}\,(Z_3\,,\,k_3)=(1+k'_4)\,\text{sen am}\,\frac{K_4Z_3}{2K_3}\,\text{sen am}\,\frac{K_4}{2K_3}(2\,K_3+Z_3)\\
&\hspace{18em}(\text{Mod. } k_4)
\end{aligned}\right],$$

così la [16] si trasforma in

$$[c]\left\{\begin{aligned}
&\text{sen am}\,(u,\,k)\\
&=(1+k'_1)(1+k'_2)^2(1+k'_3)^4(1+k'_4)^8\,\text{sen am}\,\frac{K_4u}{2^4K}\\
&\quad\times\text{sen am}\,\frac{K_4}{2^4K}(16K+u)\,\text{sen am}\,\frac{K_4}{2^4K}(2K\pm u)\\
&\quad\times\text{sen am}\,\frac{K_4}{2^4K}(18K\pm u)\,\text{sen am}\,\frac{K_4}{2^4K}(4K\pm u)\\
&\quad\times\text{sen am}\,\frac{K_4}{2^4K}(20K\pm u)\,\text{sen am}\,\frac{K_4}{2^4K}(6K\pm u)\\
&\quad\times\text{sen am}\,\frac{K_4}{2^4K}(22K\pm u)\,\text{sen am}\,\frac{K_4}{2^4K}(8K+u)\\
&\quad\times\text{sen am}\,\frac{K_4}{2^4K}(24K+u)\;.\\
&\hspace{18em}(\text{Mod. } k_4).
\end{aligned}\right.$$

Pella [14]

a $\frac{K_4}{2^4K}(18K\pm u)$ si può sostituire $\frac{K_4}{2^4K}(14K\pm u)$

a $\frac{K_4}{2^4K}(20K\pm u)$ » $\frac{K_4}{2^4K}(12K\pm u)$

a $\frac{K_4}{2^4K}(22K\pm u)$ » $\frac{K_4}{2^4K}(8\,K-u)$.

Quindi, [c],

$$
[17]\left\{
\begin{aligned}
&\operatorname{sen\,am}(u,\,k)= \\
&(1+k'_1)(1-k'_2)^2(1+k'_3)^4(1+k'_4)^8 \operatorname{sen\,am}\frac{K_4 u}{2^4 K} \\
&\qquad\times \operatorname{sen\,am}\frac{K_4}{2^4 K}(2\,K\pm u)\operatorname{sen\,am}\frac{K_4}{2^4 K}(4K\pm u) \\
&\qquad\times \operatorname{sen\,am}\frac{K_4}{2^4 K}(6\,K\pm u)\operatorname{sen\,am}\frac{K_4}{2^4 K}(8K\pm u) \\
&\qquad\times \operatorname{sen\,am}\frac{K_4}{2^4 K}(10\,K\pm u)\operatorname{sen\,am}\frac{K_4}{2^4 K}(12K\pm u) \\
&\qquad\times \operatorname{sen\,am}\frac{K_4}{2^4 K}(14\,K\pm u)\operatorname{sen\,am}\frac{K_4}{2^4 K}(16K+u) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{Mod. } k_4);
\end{aligned}
\right.
$$

ed in generale:

$$
[18]\left\{
\begin{aligned}
&\operatorname{sen\,am}(u,\,k)= \\
&(1+k'_1)(1+k'_2)^2(1+k'_3)^4\ldots(1+k'_n)^{2^{n-1}} \operatorname{sen\,am}\frac{K_n u}{2^n K} \\
&\qquad\times \operatorname{sen\,am}\frac{K_n}{2^n K}(2K\pm u)\operatorname{sen\,am}\frac{K_n}{2^n K}(4K\pm u) \\
&\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad\times \operatorname{sen\,am}\frac{K_n}{2^n K}\{(2^n-2)K\pm u\}\operatorname{sen\,am}\frac{K_n}{2^n K}(2^n K\;u). \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{Mod. } k_n)
\end{aligned}
\right.
$$

Ma 1° per la prima delle [12], in cui si faccia $v=-\frac{K_n u}{2^n K}$ e si prenda k_n per modulo, l'ultimo fattore della [18] è il rapporto fra $\cos\operatorname{am}\frac{K_n u}{2^n K}$ e $\Delta\operatorname{am}\frac{K_n u}{2^n K}$; e queste due quantità diventano uguali per $n=\infty$, che rende $k_n=1$.

2° La quantità $\frac{K_n}{2^n K}$, per $n=\infty$, risulta eguale a $\frac{\pi}{2K'}$. Infatti nella formola [10] della Nota quarta a $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$ corrispondendo $\varphi=\pi$ si ha

$$2K\;=(1+k'_1)K_1$$

e per analogia

$$
\begin{aligned}
2K_1 &=(1+k'_2)K_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
2K_{n-1} &=(1+k'_n)K_n;
\end{aligned}
$$

onde
$$\frac{K_n}{2^n K} = \frac{1}{(1+k'_1)(1+k'_2)\ldots(1+k'_n)},$$

ed il secondo membro di questa relazione per $n=\infty$ è (Nota quarta [13]) $\frac{\pi}{2K'}$.

3° Dalla formola del modulo ridotto (Nota quarta: [1] e serie [A], [B]) si hanno

$$[19]\ldots\ldots \quad 1+k'_1=\frac{k_1}{\sqrt{k}}\,; \quad 1+k'_2=\frac{k_2}{\sqrt{k_1}}\,; \quad \ldots\ldots; \quad 1+k'_n=\frac{k_n}{\sqrt{k_{n-1}}}.$$

Quindi
$$(1+k'_1)(1+k'_2)^2(1+k'_3)^4\ldots\ldots(1+k'_n)^{2^{n-1}}=\frac{1}{\sqrt{k}}k_n^{2^{n-1}};$$

e questa quantità per $n=\infty$ diventa $\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Facendo adunque $n=\infty$ nella [18], la medesima si trasforma nella seguente:

$$[20]\ldots\ldots \quad \text{sen am}(u,k)=\frac{1}{\sqrt{k}}\,\text{sen am}\frac{\pi u}{2K'}\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right| \text{sen am}\frac{\pi}{2K'}(2hK\pm u).$$

(Mod. = 1).

Nella quale il segno $\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right|$ indica il prodotto dei seni che si ottengono alla destra del medesimo prendendo separatamente i segni *più* e *meno*, e dando ad h i valori *uno*, *due*, ecc., de'numeri naturali sino all'infinito.

4. Per la prima delle [12] in cui si faccia $v=-u$, dalla [20] si ha pure

$$\frac{\cos\text{am}(u,k)}{\Delta\,\text{am}(u,k)}=\frac{1}{\sqrt{k}}\,\text{sen am}\frac{\pi}{2K'}(K+u)\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right| \frac{\text{sen am}\frac{\pi}{2K'}\{(2h+1)K+u\}}{\text{sen am}\frac{\pi}{2K'}\{(2h-1)K-u\}}$$

(Mod.=1),

ovvero, introducendo a destra del segno fattoriale il seno che è alla sua sinistra, ed osservando che lo si comprende sostituendo nel fattore superiore $2h-1$ a $2h+1$:

$$[21]\ldots\left\{\frac{\cos\text{am}(u,k)}{\Delta\,\text{am}(u,k)}=\frac{1}{\sqrt{k}}\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right| \text{sen am}\frac{\pi}{2K'}\{(2h-1)K\pm u\}.\right.$$

(Mod.= 1.).

5. Tutti gli argomenti delle amplitudini che sono nei secondi membri delle [20] e [21] si possono rappresentare colla formola

$$[22] \ldots\ldots \qquad v = \frac{\pi}{2K'}(aK + bu);$$

ed il modulo essendo uguale ad uno, fra v ed $\mathrm{am}\, v$ havvi la relazione (Nota quarta, [8]),

$$[23] \ldots\ldots \qquad \left\{ \begin{aligned} v &= \log \tan (45^\circ + \tfrac{1}{2}\, \mathrm{am}\, v) \\ &= \tfrac{1}{2} \log \frac{1 + \mathrm{sen\, am}\, v}{1 - \mathrm{sen\, am}\, v}, \end{aligned} \right.$$

dalla quale si ricava

$$[24] \ldots\ldots \qquad \mathrm{sen\, am}\, v = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}.$$

Ma, coll'immaginarsi $i = \sqrt{-1}$, essendo

$$e^{ix} = \cos x + i \,\mathrm{sen}\, x; \quad e^{-ix} = \cos x - i\,\mathrm{sen}\, x$$

con $x = -iv$ ottiensi

$$[25] \ldots\ldots \qquad e^v + e^{-v} = 2 \cos iv; \quad e^v - e^{-v} = -2i\,\mathrm{sen}\, iv,$$

epperciò

$$[24'] \ldots\ldots \qquad \mathrm{sen\, am}\, v = -i \tan iv.$$

Con $a = 0$, $b = 1$ si ha, [22], $v = \dfrac{\pi u}{2K'}$, e [24']

$$[24''] \ldots\ldots \qquad \mathrm{sen\, am}\, \frac{\pi u}{2K'} = -i \tan \frac{\pi i u}{2K'}.$$

Inoltre, con a qualunque, $b = \pm 1$, e colla notazione di Jacobi

$$[26] \ldots\ldots \qquad q' = e^{-\frac{\pi K}{K'}},$$

dalle [22] e [24] (separando nel secondo membro i fattori che corrispondono ai segni *più* e *meno* del primo) si ottiene

$$\begin{aligned} \mathrm{sen\, am}\, \frac{\pi}{2K'}(aK \pm u) &= \frac{\left(q'^{-\frac{a}{2}} e^{\frac{\pi u}{2K'}} - q'^{\frac{a}{2}} e^{-\frac{\pi u}{2K'}}\right)\left(q'^{-\frac{a}{2}} e^{-\frac{\pi u}{2K'}} - q'^{\frac{a}{2}} e^{\frac{\pi u}{2K'}}\right)}{\left(q'^{-\frac{a}{2}} e^{\frac{\pi u}{2K'}} + q'^{\frac{a}{2}} e^{-\frac{\pi u}{2K'}}\right)\left(q'^{-\frac{a}{2}} e^{-\frac{\pi u}{2K'}} + q'^{\frac{a}{2}} e^{\frac{\pi u}{2K'}}\right)} \\ &= \frac{q'^{-a} - \left(e^{-\frac{\pi u}{K'}} + e^{\frac{\pi u}{K'}}\right) + q'^{a}}{q'^{-a} + \left(e^{-\frac{\pi u}{K'}} + e^{\frac{\pi u}{K'}}\right) + q'^{a}} \end{aligned}$$

ossia, per la prima delle [25] in cui si faccia $v=\frac{\pi u}{K'}$,

$$[27]\ldots\ldots \quad \text{sen am}\,\frac{\pi}{2K'}(aK\pm u)=\frac{1-2q'^{a}\cos\frac{\pi i u}{K'}+q'^{2a}}{1+2q'^{a}\cos\frac{\pi i u}{K'}+q'^{2a}}\,.$$

Con $a=2h$, dalla formola [20] pertanto si ha, [24''], [27],

$$[20']\ldots \quad \text{sen am}(u,\,k)=-\frac{i}{\sqrt{k}}\tan\frac{\pi i u}{2K'}\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right|\frac{1-2q'^{2h}\cos\frac{\pi i u}{K'}+q'^{4h}}{1+2q'^{2h}\cos\frac{\pi i u}{K'}+q'^{4h}}\,;$$

e, con $a=2h-1$, si ricava dalla [21]

$$[21']\ldots \quad \frac{\cos\text{am}\,(u,\,k)}{\Delta\,\text{am}\,(u,\,k)}=\frac{1}{\sqrt{k}}\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right|\frac{1-2q'^{2h-1}\cos\frac{\pi i u}{K'}+q'^{4h-2}}{1+2q'^{2h-1}\cos\frac{\pi i u}{K'}+q'^{4h-2}}\,.$$

Si deducono da queste due ultime formole delle espressioni reali. introducendo l'immaginario i come moltiplicatore di u anche nei primi membri, mediante le proprietà delle funzioni elittiche, nel seguente numero dimostrate.

6. Posta la relazione

$$[28]\ldots\ldots \quad \text{sen}\,n=i\tan m$$

ne deriva

$$[29]\ldots\ldots \quad \cos n=\frac{1}{\cos m}\,,$$

e dividendo la differenziale della prima per la seconda, si ha

$$[30]\ldots\ldots \quad dn=i\frac{dm}{\cos m}\,,$$

e dalla [28], col modulo k,

$$\Delta\,(n,\,k)=\sqrt{1-k^2\,\text{sen}^2 n}=\sqrt{1+k^2\tan^2 m}=\frac{\sqrt{1-k'^2\,\text{sen}^2 m}}{\cos m}\,,$$

ossia

$$[31]\ldots\ldots \quad \Delta(n,\,k)=\frac{\Delta\,(m,\,k')}{\cos m}\,,$$

per cui, [30],

$$[32]\ldots\ldots \quad \frac{dn}{\Delta\,(n,\,k)}=i\frac{dm}{\Delta\,(m,\,k')}\,;$$

ed essendo, [28], $n=0$ per $m=0$, da quest'ultima, integrando, si ha l'equazione

[33]..... $$F(n, k)=iF(m, k'),$$

che equivale alle due:

[33']..... $$\begin{cases} F(m, k')=v \\ F(n, k)=iv, \end{cases}$$

le cui inverse sono:

[33'']..... $$m=\operatorname{am}(v, k') \qquad n=\operatorname{am}(iv, k).$$

Adunque le seguenti suaccennate proprietà, [28], [29] e [31],

[34]..... $$\begin{cases} \operatorname{sen}\operatorname{am}(iv, k)=i\tan\operatorname{am}(v, k'); \\ \cos\operatorname{am}(iv, k)=\dfrac{1}{\cos\operatorname{am}(v, k')}; \\ \Delta\operatorname{am}(iv, k)=\dfrac{\Delta\operatorname{am}(v, k')}{\cos\operatorname{am}(v, k')}. \end{cases}$$

7. Con $iv=u$, dalla prima delle [34] si ha:

[35]..... $$\operatorname{sen}\operatorname{am}(u, k)=-i\tan\operatorname{am}(iu, k'),$$

e dal quoziente della seconda per la terza

[36]..... $$\frac{\cos\operatorname{am}(u, k)}{\Delta\operatorname{am}(u, k)}=\frac{1}{\Delta\operatorname{am}(iu, k')};$$

Ora, sostituendo nelle due equazioni [20'] e [21'] le espressioni [35] e [36], e ponendo u al posto di iu nelle due che risultano, si trovano le seguenti che sono reali

[37]... $$\tan\operatorname{am}(u, k')=\frac{1}{\sqrt{k}}\tan\frac{\pi u}{2K'}\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right|\frac{1-2q'^{2h}\cos\frac{\pi u}{K'}+q'^{4h}}{1+2q'^{2h}\cos\frac{\pi u}{K'}+q'^{4h}};$$

[38]... $$\Delta\operatorname{am}(u, k')=\sqrt{k}\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right|\frac{1+2q'^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K'}+q'^{4h-2}}{1-2q'^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K'}+q'^{4h-2}};$$

e da queste coll'altra notazione di JACOBI

[26']..... $$q=e^{-\frac{\pi K'}{K}},$$

scambiando k con k', anche le due analoghe seguenti

$$[a]\ldots\qquad \tan\operatorname{am}(u,k)=\frac{1}{\sqrt{k'}}\tan\frac{\pi u}{2\mathrm{K}}\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right|\frac{1-2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{\mathrm{K}}+q^{4h}}{1+2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{\mathrm{K}}+q^{4h}};$$

$$[39]\ldots\qquad \Delta\operatorname{am}(u,k)=\sqrt{k'}\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right|\frac{1+2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{\mathrm{K}}+q^{4h-2}}{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{\mathrm{K}}+q^{4h-2}},$$

l'ultima delle quali è la terza delle tre serie fattoriali menzionate da principio.

Per trovare le altre due pongo

$$[b]\ldots\qquad n=\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right|1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{\mathrm{K}}+q^{4h-2};$$

$$\Delta\operatorname{am}(u,k)=\frac{m}{n};$$

e con quest'ultima, dalla fondamentale

$$[c]\ldots\qquad \Delta\operatorname{am}(u,k)=\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\operatorname{am}(u,k)}$$

deduco

$$[d]\ldots\qquad \operatorname{sen}\operatorname{am}(u,k)=\frac{\sqrt{n^2-m^2}}{kn},$$

$$[e]\ldots\qquad \cos\operatorname{am}(u,k)=\frac{\sqrt{m^2-k'^2n^2}}{kn},$$

$$[a']\ldots\qquad \tan\operatorname{am}(u,k)=\frac{\sqrt{n^2-m^2}}{\sqrt{m^2-k'^2n^2}};$$

ed osservo che le $[a]$ ed $[a']$ dovendo essere identiche, con una quantità B da determinarsi è lecito scrivere

$$[f]\ldots\qquad \sqrt{n^2-m^2}=\mathrm{B}k\operatorname{sen}\frac{\pi u}{2\mathrm{K}}\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right|\left(1-2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{\mathrm{K}}+q^{4h}\right);$$

$$[g]\ldots\qquad \sqrt{m^2-k'^2n^2}=\mathrm{B}k\sqrt{k'}\cos\frac{\pi u}{2\mathrm{K}}\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right|\left(1+2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{\mathrm{K}}+q^{4h}\right).$$

In modo che, $[d]$, $[f]$, $[b]$, ed $[e]$, $[g]$, $[b]$, ne risultano le due formole

$$[40]\ldots\qquad \operatorname{sen}\operatorname{am}(u,k)=\mathrm{B}\operatorname{sen}\frac{\pi u}{2\mathrm{K}}\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right|\frac{1-2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{\mathrm{K}}+q^{4h}}{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{\mathrm{K}}+q^{4h-2}}$$

$$[41] \ldots \quad \cos \operatorname{am}(u,k) = B\sqrt{k'} \cos \frac{\pi u}{2K} \left| \begin{matrix} \infty \\ h \\ 1 \end{matrix} \right| \frac{1 + 2q^{2h} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h}}{1 - 2q^{2h-1} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}} .$$

— E la quantità B è indipendente da u, perchè altrimenti si potrebbe fare in modo che $\operatorname{sen am}(u, k)$ fosse infinito senza che lo sia $\Delta \operatorname{am}(u, k)$, la qual cosa è impossibile per la [e], e siccome risulta dalle [34] le quali mostrano che le tre funzioni elittiche $\operatorname{sen am}(u, k)$, $\cos \operatorname{am}(u, k)$ e $\Delta \operatorname{am}(u, k)$ diventano insieme infinite, e ciò per $u = \pm iK'$. — Pertanto si può determinare B in varie maniere, dando a u dei valori particolari nelle [40] e [41]. Risultano così, oltre al valore di B, delle relazioni importanti fra il modulo k, l'integrale completo K e l'ausiliaria q; fra le quali relazioni sono anche comprese quelle che derivano dalla [39] cogli stessi valori particolari di q.

8. Dalle fondamentali

$$[42] \ldots\ldots \qquad u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}, \quad \varphi = \operatorname{am}(u, k)$$

si hanno le derivate

$$[h] \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d \operatorname{am}(u,k)}{du} &= \Delta \operatorname{am}(u,k) , \\ \frac{d \operatorname{sen am}(u,k)}{du} &= \cos \operatorname{am}(u,k)\, \Delta \operatorname{am}(u,k) , \\ \frac{d \cos \operatorname{am}(u,k)}{du} &= -\operatorname{sen am}(u,k)\, \Delta \operatorname{am}(u,k) , \end{aligned} \right.$$

onde

1° Con $u = 0$, visto che nella [40] il valore indeterminato $\frac{0}{0}$ è, [h], dato da

$$\left| \frac{\cos \operatorname{am}(u,k)\, \Delta \operatorname{am}(u,k)}{\frac{\pi}{2K} \cos \frac{\pi u}{2K}} \right|_{u=0} = \frac{2K}{\pi} ;$$

dalla [40] si ha

$$[40'] \ldots\ldots \qquad \frac{2K}{\pi} = B \left| \begin{matrix} \infty \\ h \\ 1 \end{matrix} \right| \left(\frac{1 - q^{2h}}{1 - q^{2h-1}} \right)^2 ;$$

e dalla [41]:

$$[41'] \ldots\ldots \qquad 1 = B\sqrt{k'} \left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right| \left(\frac{1+q^{2h}}{1-q^{2h-1}}\right)^2;$$

2° Con $u=K$, dalla [40] si deduce la relazione

$$[40''] \ldots\ldots \qquad 1 = B \left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right| \left(\frac{1+q^{2h}}{1+q^{2h-1}}\right)^2,$$

e dalla [41], visto che l'indeterminato $\frac{0}{0}$, [h], è

$$\left|\frac{-\operatorname{sen am}(u,k)\,\Delta\operatorname{am}(u,k)}{-\frac{\pi}{2K}\operatorname{sen}\frac{\pi u}{2K}}\right|_{u=K} = \frac{2k'K}{\pi},$$

si deduce quest'altra

$$[41''] \ldots\ldots \qquad \frac{2k'K}{\pi} = B\sqrt{k'} \left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right| \left(\frac{1-2q}{1+2q}\right)^2.$$

3° Con $u=K+iK'$ si ricavano primieramente dalle [12] e [34]

$$[k] \ldots\ldots \qquad \operatorname{sen am}(u,k) = \frac{\cos\operatorname{am} iK'}{\Delta\operatorname{am} iK'} = \frac{1}{\Delta\operatorname{am}(K',k')} = \frac{1}{k};$$

$$[i] \ldots \quad \cos\operatorname{am}(u,k) = -\frac{k'\operatorname{sen am} iK'}{\Delta\operatorname{am} iK'} = -\frac{ik'\operatorname{sen am}(K',k')}{\Delta\operatorname{am}(K',k')} = -\frac{ik'}{k};$$

in secondo luogo dalle [25] e [26]

$$[l] \ldots\ldots \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi u}{2K} = \cos i\,\frac{\pi K'}{2K} = \frac{q^{-\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1+q}{2\sqrt{q}};$$

$$[m] \ldots\ldots \qquad \cos\frac{\pi u}{2K} = -\operatorname{sen} i\,\frac{\pi K'}{2K} = \frac{q^{-\frac{1}{2}}-q^{\frac{1}{2}}}{2i} = -i\,\frac{1-q}{2\sqrt{q}};$$

$$[n] \ldots\ldots \qquad 2\cos\frac{\pi u}{K} = -\cos i\,\frac{\pi K'}{K} = -(q^{-1}+q) = -\frac{1+q^2}{q};$$

$$[o]\left\{\begin{aligned} &1-2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h} = 1+(1+q^2)\,q^{2h-1}+q^{4h} = (1+q^{2h-1})(1+q^{2h+1})\\ &\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right| \left(1-2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h}\right) = \frac{1}{1+q}\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right| \left(1+q^{2h-1}\right)^2;\end{aligned}\right.$$

$$[p]\left\{\begin{aligned} &1+2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h}=1-(1+q^2)q^{2h-1}+q^{4h}=(1-q^{2h-1})(1-q^{2h+1})\\ &\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right|\left(1+2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h}\right)=\frac{1}{1-q}\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right|\left(1-q^{2h-1}\right)^2;\end{aligned}\right.$$

$$[b]\left\{\begin{aligned} &1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h-2}=1+(1+q^2)q^{2h-2}+q^{4h-2}=(1+q^{2h-2})(1+q^{2h})\\ &\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right|\left(1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h-2}\right)=2\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right|\left(1+q^{2h}\right)^2;\end{aligned}\right.$$

e finalmente dalla [40], per le [k], [l], [o], [q],

$$[40''']\ldots\ldots\qquad \frac{1}{k}=\frac{1}{4\sqrt{q}}\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right|\left(\frac{1+q^{2h-1}}{1+q^{2h}}\right)^2,$$

e dalla [41], per le [i], [m], [p], [q],

$$[41''']\ldots\ldots\qquad \frac{k'}{k}=\frac{B\sqrt{k'}}{4\sqrt{q}}\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right|\left(\frac{1-q^{2h-1}}{1+q^{2h}}\right)^2.$$

Ciò posto, colle [40′], [41′]; [40″], [41″] e [40‴], [41‴] si trovano (nell'ordine in cui sono scritte tali relazioni) le seguenti espressioni di B:

$$[42]\ldots\left\{\begin{aligned} B&=\frac{2K}{\pi}\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right|\left(\frac{1-q^{2h-1}}{1-q^{2h}}\right)^2=\frac{1}{\sqrt{k'}}\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right|\left(\frac{1-q^{2h-1}}{1+q^{2h}}\right)^2\\ &=\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right|\left(\frac{1+q^{2h-1}}{1+q^{2h}}\right)^2=\frac{2K\sqrt{k'}}{\pi}\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right|\left(\frac{1+q^{2h-1}}{1-q^{2h}}\right)^2\\ &=\frac{4}{k}q^{\frac{1}{2}}\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right|\left(\frac{1+q^{2h}}{1+q^{2h-1}}\right)^2=\frac{4\sqrt{k'}}{k}q^{\frac{1}{2}}\left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right|\left(\frac{1+q^{2h}}{1-q^{2h-1}}\right)^2.\end{aligned}\right.$$

Dalla radice quadrata del prodotto della seconda per la sesta oppure della terza per la quinta delle espressioni [42] è dato, indipendentemente dal segno fattoriale, il valore cercato di B

$$[43]\ldots\ldots\qquad B=\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}.$$

Sostituendo questo valore nelle [40] e [41] e scrivendovi di seguito la [39] si forma il seguente gruppo delle tre serie fattoriali di Jacobi che accennai da principio.

$$
[44]\ldots\ldots\left\{
\begin{aligned}
&\operatorname{sen}\operatorname{am}u=\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\operatorname{sen}\frac{\pi u}{2K}\prod_{h=1}^{\infty}\frac{1-2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h}}{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h-2}}\\
&\cos\operatorname{am}u=\frac{2\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\sqrt[4]{q}\cos\frac{\pi u}{2K}\prod_{h=1}^{\infty}\frac{1+2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h}}{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h-2}}\\
&\Delta\operatorname{am}u=\sqrt{k'}\prod_{h=1}^{\infty}\frac{1+2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h-2}}{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h-2}}\,.
\end{aligned}\right.
$$

8. Qualunque sia k, coi due metodi che esposi nelle Note terza e quarta si calcolano assai presto K e K', coi quali si potrà dedurre q colla formola [24'] o cercandone il logaritmo volgare colla seguente che ne deriva

$$[45]\ldots\ldots\qquad \operatorname{Log} q=-M\pi\frac{K'}{K}\,,$$

in cui M è il modulo dei logaritmi Neperiani.

La quantità q è una frazione, ed ordinariamente per calcolare le tre funzioni elittiche bastano pochi fattori delle [44]. Per es. se $k^2=\frac{1}{2}$ come nel problema della Nota terza, si ha $K'=K$ e $q=e^{-\pi}$, quantità manifestamente minore di $\frac{1}{20}$, in modo che è sufficiente un calcolo mentale per vedere che i fattori, i quali si scostano di più dall'unità, quelli cioè colla potenza q^{2h-1}, differiscono già anch'essi per $q=3$ di meno di un millionesimo da uno.

9. Dalle formole (Nota quarta [13], e Nota terza [20])

$$
[46]\ldots\left\{
\begin{aligned}
K'&=(1+k'_1)(1+k'_2)\ldots(1+k'_n)K_n=\frac{\pi}{2}(1+k'_1)(1+k'_2)\ldots\\
K&=(1+k_0)(1+k_{00})\ldots(1+k_{(n)})K_{(n)}=\frac{\pi}{2}(1+k_0)(1+k_{00})\ldots;
\end{aligned}\right.
$$

per le [19] si hanno queste altre

$$
[47]\ldots\left\{
\begin{aligned}
K'&=\frac{1}{\sqrt{k}}K_n\,k_n\sqrt{k_1\,k_2\ldots k_{n-1}}=\frac{\pi}{2\sqrt{k}}\sqrt{k_1\,k_2\ldots}\\
K&=\frac{1}{\sqrt{k'}}K_{(n)}\,k'_{(n)}\sqrt{k'_0\,k'_{00}\ldots k'_{(n-1)}}=\frac{\pi}{2\sqrt{k'}}\sqrt{k'_0\,k'_{00}\ldots}\;;
\end{aligned}\right.
$$

dalle quali derivano le seguenti, pel calcolo diretto di log. q, quando k^2 non differisce assai poco nè da *uno* nè da *zero:*

$$[48]\ldots \left\{\begin{array}{ll} \log q = -\mathrm{M}\pi \left(\dfrac{\cos\frac{1}{2}\theta \cos\frac{1}{2}\theta_0 \ldots}{\cos\frac{1}{2}\theta' \cos\frac{1}{2}\theta_1' \ldots}\right)^2 & \\ \operatorname{sen}\theta = k & \operatorname{sen}\theta' = k' = \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta_0 = \tan^2\frac{1}{2}\theta & \operatorname{sen}\theta_1' = \tan^2\frac{1}{2}\theta' \\ \operatorname{sen}\theta_{00} = \tan^2\frac{1}{2}\theta_0 & \operatorname{sen}\theta_2' = \tan^2\frac{1}{2}\theta_1' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

10. Dalle espressioni che hanno dato B più sopra ne deriva una che può servire a calcolare q; infatti eguagliando la terza alla quarta delle espressioni [42] si trova

$$[49]\ldots\ldots \qquad q = \frac{k^2}{16} \left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right| \left(\frac{1+q^{2h-1}}{1+q^{2h}}\right)^8,$$

e, scambiando k con k' in questa e nella [45],

$$[49']\ldots\ldots \qquad q' = \frac{k'^2}{16} \left|\begin{matrix}\infty\\ h\\ 1\end{matrix}\right| \left(\frac{1+q'^{2h-1}}{1+q'^{2h}}\right)^8$$

$$[45']\ldots\ldots \qquad \operatorname{Log} q' = -\mathrm{M}\pi\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'}.$$

Onde anche, [45] e [45'],

$$[50]\ldots\ldots \qquad \operatorname{Log} q \log q' = \mathrm{M}^2\pi^2.$$

Se $k^2 < k'^2$ si prenderà $\frac{k^2}{16}$ come un primo valore approssimato di q, e con approssimazioni successive si calcolerà questa quantità colla [49]; se invece $k'^2 < k^2$ si prenderà $\frac{k'^2}{16}$ come un primo valor approssimato di q', si calcolerà questa grandezza con approssimazioni successive mediante la [49'], e si dedurrà dopo q dalle [50].

Trovati q, e q' si potrebbero calcolare K e K' in diversi modi, perchè:

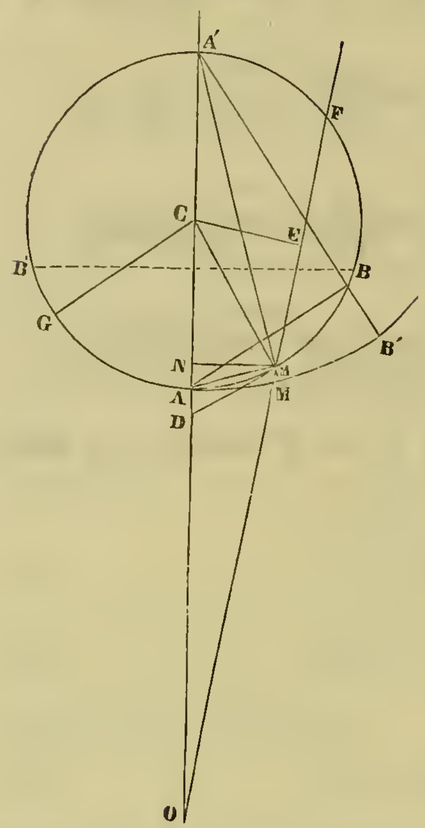
1° Dalle formole [42] (combinando nell'ordine in cui sono scritte le due che contengono K colle altre quattro, ed escludendo dalle otto espressioni che si trovano la sesta e l'ottava perchè identiche colla prima e colla terza) derivano le prime sei, delle seguenti otto espressioni di K, e si ottengono le due ultime uguagliando il valore [43] di B alla prima ed alla quarta delle espressioni [42];

$$
[51]\ldots\ldots\left\{
\begin{aligned}
\mathrm{K} &= \frac{\pi}{2\sqrt{k'}}\left|\begin{smallmatrix}\infty\\ h\\ 1\end{smallmatrix}\right|\left(\frac{1-q^{2h}}{1+q^{2h}}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\left|\begin{smallmatrix}\infty\\ h\\ 1\end{smallmatrix}\right|\left(\frac{1+q^{2h-1}}{1+q^{2h}}\right)^2\left(\frac{1-q^{2h}}{1-q^{2h-1}}\right)^2 \\
&= \frac{2\pi}{k}q^{\frac{1}{2}}\left|\begin{smallmatrix}\infty\\ h\\ 1\end{smallmatrix}\right|\left(\frac{1-q^{4h}}{1-q^{4h-2}}\right)^2 = \frac{2\pi\sqrt{k'}}{k}q^{\frac{1}{2}}\left|\begin{smallmatrix}\infty\\ h\\ 1\end{smallmatrix}\right|\frac{(1-q^{4h})^2}{(1-q^{2h-1})^4} \\
&= \frac{\pi}{2k'}\left|\begin{smallmatrix}\infty\\ h\\ 1\end{smallmatrix}\right|\left(\frac{1-q^{h}}{1+q^{h}}\right)^2 = \frac{2\pi}{k\sqrt{k'}}q^{\frac{1}{2}}\left|\begin{smallmatrix}\infty\\ h\\ 1\end{smallmatrix}\right|\frac{(1-q^{4h})^2}{(1+q^{2h-1})^4} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{k}}q^{\frac{1}{4}}\left|\begin{smallmatrix}\infty\\ h\\ 1\end{smallmatrix}\right|\left(\frac{1-q^{2h}}{1-q^{2h-1}}\right)^2 = \frac{\pi}{\sqrt{kk'}}q^{\frac{1}{4}}\left|\begin{smallmatrix}\infty\\ h\\ 1\end{smallmatrix}\right|\left(\frac{1-q^{2h}}{1+q^{2h-1}}\right)^2 .
\end{aligned}
\right.
$$

2° Scambiando k con k', q con q' e K con K' nelle [51] si hanno delle espressioni analoghe di K'.

II.

1. Rappresento con:



O il piede della perpendicolare calata dal centro attrattivo o ripulsivo O' (che non occorre segnare) sul piano del cerchio AMA';

B il luogo in cui, quando è possibile, la velocità del mobile è nulla; ed

M la posizione di questo alla fine di un tempo qualunque;

t questo tempo computato dall'istante in cui il mobile è in A punto il più vicino ad O se la forza attrae, e dall'istante in cui il mobile è in A' punto il più lontano da O se la forza respinge;

g la forza riferita all'unità di massa è positiva se attrae. E pongo:

$l = CM$ raggio del circolo (e lunghezza del pendolo circolare che risulta collocando il centro O' della forza in O, all'infinito);

$c = OO'$ distanza del punto O dal centro O' della forza;

$b = OC$ distanza dal punto O dal centro del circolo;

$\rho = O'M$ raggio vettore del mobile M rispetto al centro della forza;

ρ_0 valore iniziale di ρ; uguale ad O'A oppure ad O'A' secondo che la forza attrae o respinge;

$x = OM$; $y = NM$; $z = CN$, raggio vettore rispetto ad O e coordinate ortogonali del mobile M rispetto a CO ed alla sua perpendicolare in C;

v la velocità in M, positiva pel verso AM;

v_0 il valore iniziale di v, in A oppure in A' secondo che la forza attrae o respinge;

s l'arco AM;

$\lambda = OMD$ angolo fatto dal raggio vettore OM colla tangente MD al cerchio;

$\mu = COM$; $\qquad \psi = CA'M$; $\qquad \nu = CAM = 90^\circ - \psi$;

$\psi_0 = CA'B$; $\qquad \varepsilon = CAB = 90^\circ - \psi_0$.

La componente ortogonale della forza secondo la normale al piano del circolo, non influisce sul moto; e dell'altra componente, la quale è secondo MO ed uguale a $g\frac{x}{\sqrt{x^2+c^2}}$ la proiezione ortogonale soltanto secondo MD, ossia $g\frac{x}{\sqrt{x^2+c^2}}\cos\lambda$ è la causa del movimento. L'equazione differenziale di questo adunque è

[1] ..... $$\frac{dv}{dt}=-g\frac{x}{\sqrt{x^2+c^2}}\cos\lambda\,,$$

ed è applicabile al moto del punto vincolato a qualsivoglia linea sul piano. Pel cerchio AMA', l'equazione della linea è

[2] ..... $$y^2+z^2=l^2\,,$$

e dalla medesima, osservando che ds e dz sono di segno contrario, si ricava

$$\frac{dy}{dz}=-\frac{z}{y}\qquad ds=-dz\sqrt{1+\frac{dy^2}{dz^2}}=-l\frac{dz}{y}\;;$$

e siccome $v=\frac{ds}{dt}$, si deduce la formola

[3] ..... $$vy=-l\frac{dz}{dt}\,.$$

Fra x, y, z havvi la relazione

[4] ..... $$y^2+(b-z)^2=x^2\,,$$

e fra x e ρ ed x_0 e ρ_0 si hanno queste altre

[5] ..... $$c^2+x^2=\rho^2\;;\qquad c^2+x_0^2=\rho_0^2\,.$$

Onde, [1], [4],

[6] ..... $$\left\{\begin{aligned} z&=\frac{b^2+l^2-x^2}{2b}\\ y&=\frac{1}{2b}\sqrt{\{(b+l)^2-x^2\}\{x^2-(b-l)^2\}}\end{aligned}\right.$$

Dalla prima di queste si ha

$$dz=-\frac{x\,dx}{b}\,,$$

epperciò, [3], anche

[3'] ..... $$vy=\frac{l}{b}\frac{x\,dx}{dt}\,.$$

Tirata la retta CE a perpendicolo di OM prolungata, risulta $ECM = \lambda$.
Ma $\cos ECM = \frac{b \operatorname{sen} \mu}{l}$ e $\operatorname{sen} \mu = \frac{y}{x}$. Adunque

[7] ..... $$\cos \lambda = \frac{by}{lx};$$

che sostituito nella [1] la trasforma in

[1'] ..... $$\frac{dv}{dt} = -\frac{bg}{l} \frac{y}{\sqrt{x^2 + c^2}}.$$

Introducendo ρ nel prodotto delle [3'], [1'], e sopprimendo i fattori comuni ai due membri, si trova

$$v dv = -g d\rho,$$

da cui, integrando, l'equazione della forza viva

[8] ..... $$v^2 = v_0^2 - 2g(\rho - \rho_0).$$

Coll'ausiliaria

[9] ..... $$h = \frac{v_0^2}{2g} + \rho_0,$$

dalla [8] si ha

[10] ..... $$v = \sqrt{2g(h-\rho)},$$

ed h è il raggio vettore del punto B di velocità nulla, se è possibile; la qual cosa dipende da v_0.

Premesso che il mobile si troverà in M solamente quando $h - \rho$ è positivo, [10], allorchè la forza attrae, ed è negativo allorchè essa respinge, dalle tre ultime formole emerge quanto segue:

(a) Se il punto O è fuori della periferia dalla parte di A, oppure fra A e C, e la forza attrae, v_0 è la velocità del mobile in A, e ρ_0 il valore minimo di ρ. Onde

1° Il moto è continuo da A in A', dove il mobile si fermerebbe se potesse arrivare, quando l'altezza dovuta alla velocità v_0 in A è la differenza fra il massimo ed il minimo di ρ, ossia, [8], quando v_0 è uguale alla V dell'equazione

[11] ..... $$\frac{V^2}{2g} = \sqrt{(b+l)^2 + c^2} - \sqrt{(b-l)^2 + c^2}.$$

2° Il moto è oscillatorio attorno ad A se $v_0 < V$;

3° Il moto è rivolutivo se $v_0 > V$. Si potrebbe supporre che, essendo la forza attrattiva, avesse il mobile inizialmente una velocità in A';

ma questo caso si riduce a quello ora considerato, immaginando che sia v_0 la velocità con cui il mobile arriverebbe in A.

(*b*) Il punto O rimanendo come prima dalla parte di A fuori della periferia o fra A e C, se la forza è ripulsiva v_0 è la velocità del mobile in A', ρ_0 è il massimo di ρ, e g cambia di segno, per cui la [8] diventa

[8'] ..... $$v^2 = v_0^2 - 2g(\rho_0 - \rho).$$

Si hanno adunque rispetto ad A' gli stessi casi 1°, 2°, 3° precedentemente considerati rispetto ad A (*a*). Si può anche supporre che essendo la forza ripulsiva, abbia il mobile inizialmente una velocità in A; e questo caso rientra nel 3° ora accennato, immaginando che v_0 sia la velocità con cui arriverebbe il mobile in A'.

(*c*) Se il punto O è dalla parte di A fuori del circolo, oppure fra C ed A', si ottengono e per la forza attrattiva e per la forza ripulsiva le stesse circostanze di moto già considerate, non avendo altro da fare per esporle colle stesse parole, che scambiare l'una con l'altra le due notazioni A ed A'.

(*d*) Se il punto O è in A od A', e O' non coincide con O, cosicchè c non sia zero, i moti che possono accadere sono compresi nei precedenti. — Escluso il caso specialissimo in cui O' è in A od A', che tratterò in seguito, riepilogando, risulta che tre movimenti distinti soltanto possono accadere, sia col centro di attrazione che col centro ripulsivo; cioè:

1° Moto continuo per la mezza periferia, se $v_0 = V$;

2° Moto oscillatorio per un arco minore della periferia, se $v_0 < V$;

3° Moto rivolutivo attorno alla periferia, se $v_0 > V$; essendo V dato dalla formola [11].

Per tutte queste specie di moti si ha dalla [3'], col valore di v della [10] e di y in funzione di ρ mediante la [6] e la [5], il differenziale

[12] ..... $$dt = l\sqrt{2} \cdot \frac{\rho d\rho}{\sqrt{g(h-\rho)(M^2-\rho^2)(\rho^2-m^2)}},$$

in cui siano

[13] ..... $$\begin{cases} M = \sqrt{(b+l)^2+c^2} & \text{massimo di } \rho \\ m = \sqrt{(b-l)^2+c^2} & \text{minimo di } \rho \end{cases}$$

e g positivo, se la forza attrae, negativo se respinge.

2. Due casi particolari del moto sono ovvii a priori:

1° Se $b=0$ il moto è uniforme;

2° Se $b=+\infty$ e la forza attrae, oppure se $b=-\infty$ e la forza respinge, il moto è quello del pendolo circolare comunemente detto. — Se il mobile è respinto da un punto della periferia si hanno ancora le stesse leggi del pendolo. Infatti, designando con v_0 la velocità che il mobile ha nel punto opposto al centro di ripulsione, secondo che si colloca questo centro in A od in A′, bisogna, in accordo con ciò che ho stabilito prima, fare $b=l$ oppure $b=-l$ e $c=0$ e cambiare il segno a g. La [12] si riduce, [5], [13], a

$$[14] \ldots\ldots \qquad dt=l\sqrt{\frac{2}{g}}\frac{dx}{\sqrt{(h-x)(x^2-4l^2)}};$$

la quale è immediatamente riducibile alla formola [13] della Nota quarta, che è del pendolo circolare. Ponendo il centro di ripulsione in A′ la costante h rappresenta la corda A′B; onde

$$h=2l\cos\psi_0\,; \quad x=2l\cos\psi\,; \quad dx=-2l\,\mathrm{sen}\,\psi\,d\psi\,;$$

e quindi la formola

$$[14'] \ldots\ldots \qquad dt=\sqrt{\frac{L}{2g}}\,\frac{-d\psi}{\sqrt{\cos\psi-\cos\psi_0}}\,; \quad L=2l.$$

Il punto adunque si muove come il centro di oscillazione del pendolo, la cui lunghezza è uguale al diametro del circolo AMA′ (Nota quarta, formola [15]).

L'arco B′M′ di circolo col centro in A′ e col raggio AA′ doppio del raggio della periferia AMA′ è uguale al corrispondente arco BM di tal periferia; e nel passaggio di un punto materiale di massa *uno* da B′ in M′, il suo peso g fa il lavoro $g(\mathrm{AA'}\cos\mathrm{M'A'A}-\mathrm{AA'}\cos\mathrm{B'A'A})$, il quale è uguale al lavoro $g(\mathrm{A'M}-\mathrm{A'B})$ fatto dalla forza g che respinge il mobile nel suo passaggio da B in M. Collocando quindi i due mobili inizialmente in B ed in B′ senza velocità o con velocità uguali e per lo stesso verso, i medesimi si muoveranno in ugual modo, appunto come risulta analiticamente dalla formola [14′].

Quando la velocità v_0 è grande abbastanza perchè il mobile respinto da A′ possa arrivare nel punto A, e che questa si mantenga ripulsiva, il moto sarà *rivolutivo continuo;* ma se la medesima non cambia di direzione sul raggio vettore x girante, passando il mobile su questo raggio alla parte opposta attraverso ad A, col cambiare x di segno la forza diverrà attrattiva per il mobile, ed affinchè il moto sia rivolutivo continuo è necessario che la velocità che resta al mobile in A rimanga ancora abbastanza grande per ritornare in A'. Se invece la velocità che avrà ancora il mobile in A non gli permetterà più di raggiungere A' ed andrà soltanto in B, esso ritornerà indietro, ripasserà per A, per A', di nuovo per A, ed andrà fino al punto B' simmetrico a B rispetto al diametro A A'. Dopo di che cambierà di direzione e rifarà un uguale cammino, maggiore della periferia, pel verso contrario. E così indefinitamente; in modo che il movimento sarà, se è lecito così definirlo, *rivolutivo oscillatorio.*

3. Analoghe considerazioni valgono per la forza da principio attrattiva, cioè: quando la forza si mantiene sempre attrattiva, se la velocità v_0 non è grande quanto occorre, affinchè il mobile attratto da A possa arrivare in A', il moto sarà oscillatorio; e sarà invece rivolutivo continuo nel caso in cui possa arrivare in A' con una velocità. Quando poi la forza, conservando la sua direzione sul raggio vettore x girante, col cambiare x di segno diventa ripulsiva pel mobile, il moto sarà rivolutivo continuo se v_0 permette al mobile di arrivare in A' con una velocità senza ritornare indietro; e sarà rivolutivo oscillatorio se v_0 invece è tale che esista il punto B di velocità nulla.

Per tutti questi casi bisogna fare nelle formole [13] $b=l$, $c=0$ e la [12] si riduce a

[15] ... $$dt=l\sqrt{\frac{2}{g}}\frac{dx}{\sqrt{(x-h)(x^2-4l^2)}},$$

che è d'uopo integrare nelle tre ipotesi di

$$h=2l\,;\qquad h<2l\,;\qquad h>2l\,.$$

4. Per $h=2l$ la formola [15], nella quale x non deve superare $2l$, si riduce a

[16] ... $$dt=l\sqrt{\frac{2}{g}}\frac{dx}{(2l-x)\sqrt{2l+x}},$$

il cui integrale, non è elittico, è subito trovato. Ponendo

$$x=\frac{\chi^2}{l}-2l$$

ottiensi dalla [16]

$$dt=\sqrt{\frac{2l}{g}}\,\frac{d.\frac{\chi}{2l}}{1-\frac{\chi^2}{4l^2}},$$

ed integrando fra limiti, in modo che $t=0$ corrisponda ad $x=0$, si trova

[17] ... $$t=\sqrt{\frac{2l}{g}}\log.\frac{2\left(2+\sqrt{2+\frac{x}{l}}\right)}{(2+\sqrt{2})\left(2-\frac{x}{l}\right)}.$$

Da questa formola risultando che per $x=2l$ si ha $t=\infty$, rimane provato che il mobile si accosta continuamente ad A' senza poterlo raggiungere.

5. Per $h\lesseqgtr 2l$, il t della [15] è espresso da un integrale elittico di prima specie, perchè il differenziale

[18] ... $$\frac{dx}{\sqrt{(x-h)(x^2-4l^2)}}$$

è un caso particolare del differenziale (Nota terza, formola [1])

[19] ... $$\frac{dx}{\sqrt{A_0x^4+A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4}},$$

in cui A_0 ed A_1 non sieno entrambi nulli; quando inoltre le radici del medesimo sono tutte reali.

Si possono quindi applicare alla [18] le formole generali di riduzione della [19] alla forma normale

[20] ... $$A\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}},$$

in cui sia A reale e k un numero positivo minore dell'unità. Le formole che derivano per tale riduzione dalla sostituzione lineare, sono dimostrate nel seguente numero, in una maniera che mi sembra piuttosto breve e semplice ed in alcune parti nuova.

6. Come per la tangente fra le linee trigonometriche, alla quale si possono dare successivamente tutti i valori reali possibili facendo susseguire meno infinito a più infinito, o più infinito a meno infinito, dette α, β, γ, δ le quattro radici reali del polinomio in x della [19], disposte in modo che siano

[21] ... $$\alpha>\beta>\gamma>\delta,$$

e suddivisi tutti gli altri valori di x nelle quattro serie che seguono:

$$[22] \ldots \left\{ \begin{array}{llllll} 1^{a} & \text{Serie dei valori di } x \text{ compresi fra} & & & \alpha & \text{e} \quad \beta \\ 2^{a} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \beta & \gamma \\ 3^{a} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \gamma & \delta \\ 4^{a} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \left\{ \begin{array}{ll} \delta & -\infty \\ +\infty & \delta \end{array} \right. & , \end{array} \right.$$

attribuisco ad x tutti i valori reali, procedendo, secondo che può occorrere, con l'uno o con l'altro dei due ordini opposti:

$$[23] \ldots \left\{ \begin{array}{ll} \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ -\infty,\ +\infty,\ \alpha & \text{ordine diretto} \\ \delta,\ \gamma,\ \beta,\ \alpha,\ +\infty,\ -\infty,\ \delta & \text{» \quad inverso}. \end{array} \right.$$

Premesso ciò, l'espressione

$$[24] \ldots \qquad A_0 (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

a cui è uguale il polinomio che sta sotto il radicale del differenziale [19], mostra che l'integrale è solamente reale quando i limiti dell'integrazione non stanno fuori dei limiti della seconda o della quarta serie [22] se A_0 è positivo, e non stanno fuori dei limiti della prima o della terza serie [22] se A_0 è negativo.

Nel differenziale

$$[19'] \ldots \qquad \frac{dx}{\sqrt{A_1 x^3 + A_2 x^4 + A_3 x + A_4}}$$

il polinomio del radicale si può considerare come compreso nella formola [24] in cui si faccia $A_0(x-\delta)=A_1$; con $A_0=0$, $\delta=\pm\infty$. Inoltre suddividendo i valori reali di x nelle quattro serie:

$$[22'] \ldots \left\{ \begin{array}{llllll} 1^{a} & \text{Serie dei valori di } x \text{ compresi fra} & & & \alpha & \text{e} \quad \beta \\ 2^{a} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \beta & \gamma \\ 3^{a} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \gamma & -\infty \\ 4^{a} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \infty & \alpha \end{array} \right.$$

l'integrale della [19'] è solamente reale quando i limiti dell'integrazione non sortono dai limiti della seconda o della quarta serie [22'] se A_1 è positivo, e non sortono dai limiti della terza o della quarta serie [22'] se A_1 è negativo. Si scorge quindi, che *trovate le formole di riduzione pel differenziale* [19] *si potranno applicare al* [19'] *facendo* $A_0=0$, $\delta=\pm\infty$, *e sostituendo ai limiti* [22] *i* [22'].

Scritta per la prima una qualunque delle quattro radici [21] e le altre di seguito, *o nell'ordine diretto o nell'ordine inverso*, [23], sieno, così disposte, rappresentate da

[21'] ... $$\pi\,,\ p\,,\ q\,,\ \varkappa\,;$$

sarà

[25] $$\left\{\begin{aligned} A_0x^4+A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4 &= A_0(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\\ &= A_0(x-\pi)(x-p)(x-q)(x-\varkappa)\,, \end{aligned}\right.$$

e si possono stabilire fra x ed un'altra variabile ζ le relazioni

[26] ... $$\frac{x-p}{x-q}=P\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\,,$$

[27] ... $$\frac{x-\pi}{x-\varkappa}=Q\frac{1-k\zeta}{1+k\zeta}\,,$$

in cui siano P, Q, k tre costanti da determinarsi. Da tali relazioni e dalle loro differenziali

[26'] ... $$\frac{dx}{(x-q)^2}=-\frac{2P}{p-q}\frac{d\zeta}{(1+\zeta)^2}\,,$$

[27'] ... $$\frac{dx}{(x-\varkappa)^2}=-\frac{2Q}{\pi-\varkappa}\frac{kd\zeta}{(1+k\zeta)^2}\,,$$

si deduce l'equazione

[28] $$\frac{dx}{\sqrt{A_0(x-\pi)(x-p)(x-q)(x-\varkappa)}}=\pm\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{A_0(p-q)(\pi-\varkappa)}}\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}\,;$$

col *più* o col *meno* secondo che $\frac{dx}{d\zeta}$ è positivo o negativo; e siccome proverò che si può fare in modo che, nel secondo membro, ζ varii fra $+1$ e -1, il coefficiente risulti reale e k positivo e minore d'uno, ponendo

[29] ... $$A=\pm\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{A_0(p-q)(\pi-\varkappa)}}\,,$$

[30] ... $$\zeta=\operatorname{sen}\varphi\,,$$

da cui $$d\zeta=\cos\varphi\,d\varphi=\sqrt{1-\zeta^2}\,d\varphi\,,$$

il differenziale [19] sarà, [25], così ridotto alla forma normale [20].

Pella [26] ai valori p e q di x corrispondono $+1$, e -1 per ζ e con queste quattro quantità si ricavano dalla [27]:

$$\frac{p-\pi}{p-\varkappa}=Q\frac{1-k}{1+k}\,;\quad \frac{q-\pi}{q-\varkappa}=Q\frac{1+k}{1-k}\,,$$

onde

[31] . . . $$Q^2 = \frac{(p-\pi)(q-\pi)}{(p-\varkappa)(q-\varkappa)};$$

[32] . . . $$\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 = \frac{(p-\pi)(q-\varkappa)}{(p-\varkappa)(q-\pi)}.$$

Pella [27] a π e $\varkappa$ per x corrispondono per ζ i valori $\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$; e con queste quattro quantità dalla [26] si hanno

$$\frac{\pi-p}{\pi-q} = P\frac{1-\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}}; \qquad \frac{\varkappa-p}{\varkappa-q} = P\frac{1+\frac{1}{k}}{1-\frac{1}{k}},$$

onde

[33] . . $$P^2 = \frac{(p-\pi)(p-\varkappa)}{(q-\pi)(q-\varkappa)}$$

e la [32].

Pel modo con cui sono state scelte le radici rappresentate dalla [21'], i secondi membri delle [31], [32] e [33] sono positivi, ed inoltre il secondo membro della [32] è minore dell'unità. Per dimostrarlo dispongo le radici α, β, γ, δ in ordine diretto ed in ordine inverso rappresentandole con

[21''] . . . $$\alpha, \quad \alpha+a, \quad \alpha+a+b, \quad \alpha+a+b+c;$$

in modo che sono a, b, c tre numeri negativi per l'ordine diretto e tre numeri positivi per l'ordine inverso. — Le varie radici che possono essere rappresentate da π, p, q, $\varkappa$ restano così espresse come nel seguente schema:

Schema A.

π	p	q	$\varkappa$
α	$\alpha+a$	$\alpha+a+b$	$\alpha+a+b+c$
$\alpha+a$	$\alpha+a+b$	$\alpha+a+b+c$	α
$\alpha+a+b$	$\alpha+a+b+c$	α	$\alpha+\alpha$
$\alpha+a+b+c$	α	$\alpha+a$	$\alpha+a+b$

ed i valori dei fattori binomi contenuti nelle formole [29], [31], [32] e [33] quindi sono come in questo altro schema:

Schema B.

x nella:	$p-q$	$\pi-\varkappa$	$p-\pi$	$q-\pi$	$p-\varkappa$	$q-\varkappa$
2ª serie [22]	$-b$	$-a-b-c$	a	$a+b$	$-b-c$	$-c$
3ª »	$-c$	a	b	$b+c$	$a+b$	$a+b+c$
4ª »	$a+b+c$	b	c	$-a-b$	$b+c$	$-a$
1ª »	$-a$	c	$-a-b-c$	$-b-c$	$-a-b$	$-b$

Delle quattro colonne a destra dello schema B: 1° due fattori sono positivi e due negativi nella prima linea e nella terza; 2° sono tutti positivi nella seconda linea; 3 tutti negativi nella quarta. Ciascuno dei secondi membri delle formole [31], [32] e [33] è composto degli stessi quattro fattori d'una delle quattro linee. Adunque quei secondi membri sono positivi; epperciò reali le tre quantità P, Q, $\frac{1-k}{1+k}$.

Inoltre dalle linee dello schema B si hanno due sole espressioni distinte del secondo membro della formola [32], e sono

$$[32'] \ldots \frac{(p-\pi)(q-\varkappa)}{(q-\pi)(p-\varkappa)} \Big| \frac{ac}{(a+b)(b+c)}; \quad \frac{b(a+b+c)}{(a+b)(b+c)} = \frac{ab+b^2+bc}{ab+b^2+bc+ac},$$

ciascuna delle quali è minore dell'unità. Prendendo adunque il segno *più* della radice del secondo membro della [32], ossia

$$[34] \ldots \qquad \frac{1-k}{1+k} = \sqrt{\frac{(p-\pi)(q-\varkappa)}{(q-\pi)(p-\varkappa)}},$$

risulterà k positivo e minore di uno, siccome è richiesto per la riduzione della [19] alla forma [20] colla [28]. Dall'essere k positivo risulta che 1° qualunque sieno le radici rappresentate nel modo stabilito dalle [21′] i numeri $\frac{1}{k}$, 1, -1, $-\frac{1}{k}$ corrispondenti a π, p, q, $\varkappa$ sono in ordine diretto; 2° per le [26′], [27′] sono i due rapporti

$$[35] \ldots \qquad \frac{P}{p-q}, \quad \frac{Q}{\pi-\varkappa} \quad \text{entrambi di segno opposto a quello di } \frac{dx}{d\zeta}.$$

Ma $\frac{dx}{d\zeta}$ è positivo o negativo secondo che π, p, q, $\varkappa$ rappresentano le radici del polinomio [25] in ordine diretto od in ordine inverso, ed i valori delle radici rappresentate indicano i segni di $p-q$ e di $\pi-\varkappa$; restano adunque così anche determinati i segni di P e di Q.

Affinchè z varii fra $+1$ e -1, come è richiesto dall'equazione [30], ed il coefficiente A sia reale [29], basta prendere per p e q le due radici che sono o che comprendono i limiti dell'integrazione; perchè variando allora x solamente fra p e q, la z varierà solamente fra $+1$ e -1 che a p e q corrispondono; ed inoltre, come si è veduto più sopra, dette radici dovendo essere quelle della seconda e della quarta serie, oppure della prima o della terza delle [22], secondo che A_0 è positivo o negativo, risulta dallo schema B che è reale il radicale del denominatore di A.

Nello schema B i numeri a, b, c sono negativi o positivi secondo che $\frac{dx}{d\zeta}$ è positivo o negativo. Quindi il fattore $p-q$ ha lo stesso segno di $\frac{dx}{dt}$ per x nelle serie 1ª, 2ª e 3ª e segno contrario per x nella 4ª. Ma il rapporto $\frac{P}{p-q}$ e $\frac{dx}{dt}$ sono di segno contrario [35]; quindi *P è positivo o negativo, secondo che x è o non è nella 4ª serie* [22]. — Apparisce anche dai segni del fattore $\pi-\varkappa$ nello schema B che tal quantità ha il segno di $\frac{dx}{d\zeta}$ se x è nella 2ª serie, e segno opposto se x è nelle serie 1ª, 3ª e 4ª. Ma, [32], il rapporto $\frac{Q}{\pi-\varkappa}$ è anche di segno contrario a quello di $\frac{dx}{d\zeta}$; adunque *Q è negativo o positivo secondo che x è o non è nella 2ª serie* [22]. Pertanto sono (*)

$$[36]\ldots\begin{cases} P = \sqrt{\dfrac{(p-\pi)(p-\varkappa)}{(q-\pi)(q-\varkappa)}} & \text{se } x \text{ è nella 4ª serie [22]} \\ P = -\sqrt{\dfrac{(p-\pi)(p-\varkappa)}{(q-\pi)(q-\varkappa)}} & \text{se } x \text{ non è nella 4ª serie [22]} \\ Q = -\sqrt{\dfrac{(p-\pi)(q-\pi)}{(p-\varkappa)(q-\varkappa)}} & \text{se } x \text{ è nella 2ª serie [22]} \\ Q = \sqrt{\dfrac{(p-\pi)(q-\pi)}{(p-\varkappa)(q-\varkappa)}} & \text{se } x \text{ non è nella 2ª serie [22].} \end{cases}$$

(*) La deduzione dei segni di P è identica a quella che si legge a pag. 50 nella pregevole *Theorie der elliptischen functionen von Dr. H.* DURÈGE, *dritte aufgale Leipzig*, 1878. Ma per Q ivi si legge: *Man übersieht leicht dass von der grösse Q ganz das nämlich gilt;* e la regola dei segni nella formola contenente il valore di Q è data in accordo con tale supposizione.

Riepilogando il tutto risulta, che si può colle formole [26], [27], [36], [34], [28], [29] e [30] ridurre il differenziale [19] alla forma normale [20] in due modi distinti; ossia con x e φ sì o no insieme crescenti o decrescenti, secondo che si rappresentano con π, p, q, $\varkappa$ in ordine diretto od inverso le radici del radicale del differenziale elittico, nella scelta per p e q delle due radici che sono o che comprendono i limiti pei quali l'integrale è reale. — E se invece del differenziale [19] si ha da ridurre alla forma normale il differenziale [19′] col radicale di terzo grado valgono ancora le stesse formole, nelle quali, in conseguenza di ciò che è stato detto prima, bisogna però fare $A_0 = 0$ ed una delle radici $\pm\infty$; come nell'esempio del differenziale [15], al quale applico nel seguente numero le formole in questo dimostrate; prendendo $\frac{dx}{dt}$ col segno $+$ per aver t crescente con φ.

7. 1° *Caso:* Quando $h<2l$ i valori di x sono compresi fra h e $-2l$; quindi le radici del radicale disposte in ordine diretto e fatte susseguire dalla radice $-\infty$ devono corrispondere a π, p, q, $\varkappa$ nel seguente modo:

$$\begin{array}{cccc} \pi & p & q & \varkappa \\ 2l & h & -2l & -\infty\,; \end{array}$$

onde $\pi=2l$; $p=h$; $q=-2l$; $\varkappa=-\infty$.

Pertanto le formole di riduzione si semplificano come segue:

$$[A]\ldots\ldots\qquad \frac{1-k}{1+k}=\sqrt{\frac{p-\pi}{q-\pi}};$$

$$[B]\ldots\quad \frac{x-p}{x-q}=-\sqrt{\frac{p-\pi}{q-\pi}}\,\frac{1-\operatorname{sen}\varphi}{1+\operatorname{sen}\varphi};\quad x-\pi=-\sqrt{(p-\pi)(q-\pi)}\,\frac{1-k\operatorname{sen}\varphi}{1+k\operatorname{sen}\varphi};$$

$$[C]\ldots\ldots\qquad \frac{dx}{\sqrt{(x-h)(x^2-4l^2)}}=\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{p-q}}\;\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}};$$

quindi, sostituendo a π, p, q le radici $2l$, h, e $-2l$, e scrivendo la [15] invece della [18] si hanno

$$\frac{1-k}{1+k}=\sqrt{\frac{2l-h}{4l}};$$

$$\frac{x-h}{x+2l}=-\sqrt{\frac{2l-h}{4l}}\;\frac{1-\operatorname{sen}\varphi}{1+\operatorname{sen}\varphi};\quad x-2l=-\sqrt{4l(2l-h)}\,\frac{1-k\operatorname{sen}\varphi}{1+k\operatorname{sen}\varphi};$$

$$dt=l\sqrt{\frac{2}{g}}\cdot\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{2l+h}}\;\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

Ma

$[a]\ldots\ldots \qquad h=2l\cos\varepsilon\,;$

$[b]\ldots\ldots \qquad \sqrt{\frac{2l-h}{4l}}=\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\varepsilon\,;$

adunque

$[c]\ldots\ldots \qquad \frac{1-k}{1+k}=\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\varepsilon\,;\qquad k=\frac{1-\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varepsilon}{1+\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varepsilon}=\frac{\tan\left(45^\circ-\frac{\varepsilon}{4}\right)}{\tan\left(45^\circ+\frac{\varepsilon}{4}\right)}\,;$

$[d]\ldots\ldots \qquad \frac{x-h}{x+2l}=-\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\varepsilon\,\frac{1-\operatorname{sen}\varphi}{1+\operatorname{sen}\varphi}\,;$

$[e]\ldots\ldots \qquad x=2l\left(1-2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\varepsilon\,\frac{1-k\operatorname{sen}\varphi}{1+k\operatorname{sen}\varphi}\right);$

$[f]\ldots\ldots \qquad dt=C\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\,;$

$[g]\ldots\ldots \qquad C=\sqrt{\frac{l}{2g}}\,\sec^2\left(45^\circ-\frac{\varepsilon}{4}\right).$

Detto Φ il valore di φ per $x=0$, $t=0$, dalla [d] si deduce

$[h]\ldots\ldots \qquad \operatorname{sen}\Phi=\frac{1-\dfrac{\cos\varepsilon}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varepsilon}}{1+\dfrac{\cos\varepsilon}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varepsilon}}\,.$

E siccome

$$\int_\Phi^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}-\int_0^\Phi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\,,$$

designando con u, U questi due integrali del 2° membro, in modo che sieno

$[k]\ldots\ldots \qquad \varphi=\operatorname{am}u\,;\qquad \Phi=\operatorname{am}U\,,$

si ricava la formola

$[l]\ldots\ldots \qquad t=C\,(u-U)\,:$

da cui

$[m]\ldots\ldots \qquad u=U+\frac{t}{C}$

Onde, [e], il raggio vettore x in funzione del tempo t colla formola

$$[n] \ldots \quad x = 2l\left(1 - 2\ \mathrm{sen}\ \tfrac{1}{2}\varepsilon\ \frac{1 - k\ \mathrm{sen\ am}\ u}{1 + k\ \mathrm{sen\ am}\ u}\right),$$

in cui si ponga per u il suo valore [m]. E quindi anche le altre quantità state considerate, che da x dipendono.

Per $u = \mathrm{K}$ essendo $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\zeta = 1$, $x = h$, il mobile arriva in B alla fine del tempo $t_1 = \mathrm{C}\,(\mathrm{K} - \mathrm{U})$. Seguitando a crescere U al di là di K, x decresce fino a zero per $u = 2\mathrm{K} - \mathrm{U}$ alla fine del tempo $t_2 = \mathrm{C}(2\mathrm{K} - 2\mathrm{U})$. Il mobile ritorna quindi da B in A nel tempo $t_2 - t_1 = \mathrm{C}(\mathrm{K} - \mathrm{U})$ che impiegò ad andare da A in B. — La velocità con cui ritorna in B essendo quella stessa con cui è partito, se la forza seguitasse ad attirare il mobile verso B esso arriverebbe con velocità nulla in B′, e da B′ ritornerebbe in A in tempi anche uguali a $\mathrm{C}(\mathrm{K} - \mathrm{U})$, e riacquistando la velocità v_0 che aveva in tal punto. Di maniera che il moto sarebbe oscillatorio; e la durata delle mezze oscillazioni, uguali fra loro in tempo e spazio, sarebbe $\mathrm{C}\,(\mathrm{K} - \mathrm{U})$. Però l'equazione [o] non dà questo movimento, ma sibbene il moto rivolutivo oscillatorio che ho anche considerato nel n° 3. — Infatti, dando ad u in tale equazione dei valori maggiori di $2\mathrm{K} - \mathrm{U}$, epperciò a t dei valori più grandi di t_2, x diventa negativo e decrescente fino a $-2l$ per $u = 3\mathrm{K}$ alla fine del tempo $t_3 = \mathrm{C}\,(3\mathrm{K} - \mathrm{U})$. In modo che il mobile sarà allora in A′ avendo percorsa la mezza periferia AB′A′ nel tempo $t_3 - t_2 = \mathrm{C}(\mathrm{K} + \mathrm{U})$. Crescendo u da 3K a $4\mathrm{K} + \mathrm{U}$, x seguita ad essere negativo e diminuisce in valor numerico fino a zero alla fine del tempo $t_4 = 4\,\mathrm{CK}$. Il mobile adunque descrive la mezza periferia A′BA nel tempo $t_4 - t_3 = \mathrm{C}\,(\mathrm{K} + \mathrm{U})$ uguale a quello impiegato a descrivere l'altra metà. Ed arriverà in A colla velocità $-v_0$, siccome risulta dalle formole

$$[o] \ldots \quad h = \frac{v_0^2}{2g}\,; \quad v = \sqrt{2g(h - x)}\,,$$

che si deducono pel caso attuale dalle generali [9] e [10]. Ma per qualsivoglia intero n, sempre $\mathrm{sen}(2n\pi + \varphi) = \mathrm{sen}\,\varphi$; da cui $\mathrm{sen\,am}(4n\mathrm{K} + u) = \mathrm{sen\,am}\,u$. Il moto si ripete adunque periodicamente in intervalli di tempo uguali a $4\mathrm{K}$, nelle due opposte direzioni, producendo il moto rivolutivo oscillatorio che ho detto.

Nel caso particolare di $h = l$ risultano $\varepsilon = 60°$; $k = \frac{1}{3}$; $\Phi = 0$; $\mathrm{U} = 0$, Invece U è positivo o negativo secondo che h è minore o maggiore di l.

2° *Caso*. Quando $h > 2l$ bisogna fare

$$\pi = h; \quad p = 2l; \quad q = -2l; \quad \varkappa = \infty,$$

e si hanno ancora le formole [A], [B], [C] del 1° caso. Onde

$$\frac{1-k}{1+k} = \sqrt{\frac{h-2l}{h+2l}};$$

$$\frac{x-2l}{x+2l} = -\sqrt{\frac{h-2l}{h+2l}} \frac{1-\operatorname{sen}\varphi}{1+\operatorname{sen}\varphi}; \qquad x-h = -\sqrt{h^2-4l^2}\, \frac{1-k\operatorname{sen}\varphi}{1+k\operatorname{sen}\varphi};$$

$$dt = \sqrt{\frac{2kl}{g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

Ponendo

$[a'] \ldots\ldots \qquad 2l = h\cos e,$

da cui anche

$[b'] \ldots\ldots \qquad \sqrt{\frac{h-2l}{h+2l}} = \tan\frac{1}{2}e$

si ottengono

$[c'] \ldots \qquad \frac{1-k}{1+k} = \tan\frac{1}{2}e; \quad k = \frac{1-\tan\frac{1}{2}e}{1+\tan\frac{1}{2}e} = \sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} e}{1+\operatorname{sen} e}} = \sqrt{\frac{\tan\left(45^\circ - \frac{e}{2}\right)}{\tan\left(45^\circ + \frac{e}{2}\right)}};$

$[d'] \ldots\ldots \qquad \frac{x-2l}{x+2l} = -\tan\frac{1}{2}e\, \frac{1-\operatorname{sen}\varphi}{1+\operatorname{sen}\varphi},$

$[e'] \ldots\ldots \qquad x = h\left(1 - \operatorname{sen} e\, \frac{1-k\operatorname{sen}\varphi}{1+k\operatorname{sen}\varphi}\right);$

$(f') \ldots\ldots \qquad dt = C\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}};$

$[g] \ldots\ldots \qquad C = \sqrt{\frac{2kl}{g}}.$

Detto Φ il valor di φ per $x=0$, $t=0$, dalla $[d']$ si ricava

$$\operatorname{sen}\Phi = -k;$$

e ponendo

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}; \qquad U = \int_0^\Phi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}},$$

onde anche

$[k'] \ldots\ldots \qquad \varphi = \operatorname{am} u; \qquad \Phi = \operatorname{am} U,$

finalmente ottiensi

$$[l'] \ldots\ldots \qquad t = C(u - U);$$

$$[m'] \ldots\ldots \qquad u = U + \frac{t}{C};$$

$$[n'] \ldots\ldots \qquad x = h\left(1 - \operatorname{sen} e\, \frac{1 - k \operatorname{sen} \operatorname{am} u}{1 + k \operatorname{sen} \operatorname{am} u}\right);$$

nelle quali U è una quantità negativa.

Per $u = K$ essendo $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $\zeta = 1$; $x = 2l$, il mobile arriva in A' alla fine del tempo $t_1 = C(K - U)$. Seguitando a crescere u al di là di K, x decresce fino a zero per $u = 2K - U$ alla fine del tempo $t_2 = C(2 - 2KU)$. Il mobile ritorna quindi da A' in A nel tempo $t_2 - t_1 = C(K - U)$ uguale a quello impiegato per passare da A in A'. Se la forza si mantenesse sempre attrattiva sul mobile, siccome la velocità con cui il mobile ritorna in A è v_0 come quando partì, tutte le rivoluzioni durerebbero quanto la prima, ossia $t_2 = 2C(K - U)$. Ma giusta la formola $[n']$, crescendo u al di là di $2K - U$, x diventa negativo e decrescente fino a $-2l$ per $u = 3K$ alla fine del tempo $t_3 = C(3K - U)$. In modo che il mobile ripasserà da A in A' nel tempo $t_3 - t_2 = C(K + U)$. Crescendo u da $3K$ a $4K + U$, x seguita ad esser negativo e di valor numerico decrescente fino a zero alla fine del tempo $t_4 = 4CK$. Di maniera che il mobile ritorna per la seconda volta da A' in A nel tempo $t_4 - t_3 = C(K + U)$ che impiegò per andare la seconda volta da A in A'. Seguitando ad aumentare u, si ripeteranno indefinitamente le stesse vicende di moto; ossia delle coppie di rivoluzioni, colle durate $2C(K - U)$ e $2C(K + U)$ la cui somma è $4CK$.

15 Giugno 1879.

L' ELASTICITÀ

NELLA TEORIA

DELL' EQUILIBRIO E DELLA STABILITÀ DELLE VÔLTE

VÔLTE SIMMETRICHE NON SIMMETRICAMENTE SOLLECITATE

PER

GIOVANNI CURIONI

Letta nell'adunanza dell' 11 Maggio 1879

1. Assunto di questo lavoro. — A completare quanto vi ha di più importante per le applicazioni del nuovo metodo di verificare la stabilità delle vôlte, fondato sull'idea di tener conto dell'elasticità (sul quale già furono presentate a questa R. Accademia tre distinte memorie nelle sedute del 7 marzo 1875, del 10 giugno 1877 e del 9 marzo 1879), resta ancora da parlarsi delle vôlte simmetriche rispetto alla loro sezione retta di chiave, ma non simmetricamente sollecitate. Questo caso, che non di rado deve essere considerato nella pratica delle costruzioni, come già si disse sul finire della seconda memoria, si può far dipendere da quello assai più semplice delle vôlte con perfetta simmetria nella forma e nelle forze sollecitanti stato considerato nella terza, e questo appunto mi propongo di dimostrare col presente lavoro.

Considero soltanto quella parte del problema che ha rapporto colla determinazione delle reazioni degli appoggi e dello spostamento della sezione di chiave; e, per le ulteriori determinazioni, rimando ai metodi numerici esposti nei numeri 8, 9, 10 e 11 della prima delle citate memorie, abbreviati col sussidio di costruzioni grafiche ben note e che non è il caso di qui riportare.

2. Proprietà delle vôlte simmetriche, ma non simmetricamente sollecitate; via da seguirsi per determinare le reazioni delle imposte. — Se considerasi una vôlta simmetrica rispetto alla sua sezione di chiave, ossia rispetto al piano verticale OD (*Fig.* 1) perpendicolare a quello contenente l'asse ADB e passante pel punto di mezzo O della corda $\overline{AB}$ dell'asse stesso, e se supponesi che questa vôlta sia sollecitata da un sistema qualunque di forze F_d', F_d'', F_d''', ... , F_s', F_s'', ... operanti nell'indicato piano del suo asse, le reazioni delle imposte saranno due forze R_1 ed R_1' applicate nei punti N ed L e, per quanto chiaramente si è detto nel numero 5 della prima delle tre memorie citate, gli elementi determinanti ciascuna di esse saranno: per l'appoggio di destra, la forza orizzontale Q_1, la forza verticale V_1 e la coppia M_1 prodotta dalle due forze $+R_1$ e $-R_1$, una applicata in N e l'altra in B; per l'appoggio di sinistra, la forza orizzontale Q_1', la forza verticale V_1' e la coppia M_1' prodotta dalle due forze R_1' e $-R_1'$, la prima applicata in L e l'altra in A.

Se invece si suppone che il sistema delle forze sia applicato alla vôlta in modo perfettamente simmetrico, rispetto alla sezione di chiave, di quello stato considerato, ossia come risulta dalla figura 2, evidentemente risulterà che le reazioni delle due imposte di dritta e di sinistra saranno rispettivamente R_1' ed R_1 applicate nei punti L_1 ed N_1; che la distanza $\overline{BL_1}$ della figura 2 sarà eguale alla distanza $\overline{AL}$ della figura 1; e che la distanza $\overline{AN_1}$ della figura 2 sarà eguale alla distanza $\overline{BN}$ della figura 1. La reazione dell'appoggio di destra (*Fig.* 2) sarà determinata dalla forza orizzontale Q_1', dalla forza verticale V_1' e dalla coppia $-M_1'$; e la reazione dell'appoggio di sinistra della forza orizzontale Q_1, dalla forza verticale V_1 e dalla coppia $-M_1$.

Ammettasi ora che alla vôlta siano applicati ambedue i sistemi di forze stati considerati, onde ridurla ad essere simmetricamente sollecitata rispetto alla sezione di chiave. Pel teorema dell'accumulazione degli effetti e per la diversità di segno che acquistano i momenti M_1 ed M_1' dall'essere applicato alla vôlta l'uno o l'altro dei due indicati sistemi di forze, indicando con Q, V ed M i tre elementi determinanti la reazione di ciascun appoggio per ambedue i detti sistemi, si hanno le tre relazioni

$$\left.\begin{aligned} Q_1 + Q_1' &= Q \\ V_1 + V_1' &= V \\ M_1 - M_1' &= M \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (1),$$

le quali legano i sei elementi delle reazioni dei due appoggi di una vôlta simmetrica, causate da un dato sistema di forze, coi tre elementi delle reazioni eguali degli appoggi della stessa vôlta ridotta ad essere simmetricamente sollecitata rispetto alla sezione di chiave coll'aggiunta di un sistema di forze della stessa intensità delle precedenti.

Ma, nell'ipotesi in cui la vôlta sia sollecitata soltanto dal sistema di forze risultante dalla figura 1, dicendo

$2c$ la corda $\overline{AB}$ del suo asse,

F_ζ ed F_υ le due componenti secondo gli assi coordinati $A\zeta$ ed $A\upsilon'$ di una qualunque delle forze F,

d_ζ e d_υ le distanze di queste componenti da $A\zeta$ e da $A\upsilon'$,

Σ una somma estesa a tutte le forze F,

si hanno, per generali condizioni d'equilibrio somministrate dalla statica dei corpi rigidi, le tre equazioni

$$\left.\begin{aligned} &Q_1' + \Sigma F_\zeta - Q_1 = 0 \\ &V_1' + \Sigma F_\upsilon + V_1 = 0 \\ &2c V_1 + M_1 - \Sigma F_\zeta d_\zeta + \Sigma F_\upsilon d_\upsilon + M_1' = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2).$$

Precisamente, come già si è detto nel numero 7 della prima delle citate memorie, le prime due di queste tre equazioni esprimono che sono nulle le due somme algebriche delle componenti di tutte le forze sollecitanti il sistema, rispettivamente parallele agli assi $A\zeta$ ed $A\upsilon'$; la terza che è nulla la somma algebrica dei momenti delle stesse forze rispetto alla retta proiettata nel punto A.

Sembra in apparenza che le equazioni (1) e (2), essendo in numero di sei, possano servire alla determinazione delle quattro forze Q_1, Q_1', V_1 e V_1' e delle due coppie M_1 ed M_1' quando si conoscano tutte le altre quantità. Ma, ricavando dalle equazioni (1) i valori di Q_1', di V_1' e di M_1' e ponendoli nelle equazioni (2) risolute per rapporto a Q_1, a V_1 e ad M_1, si ottengono le formole

$$Q_1 = \frac{Q + \Sigma F_\zeta}{2} \quad \ldots\ldots (3)$$

$$V = -\Sigma F_\upsilon \quad \ldots\ldots (a)$$

$$M_1 = -cV_1 + \frac{\Sigma F_\zeta d_\zeta - \Sigma F_\upsilon d_\upsilon + M}{2} \quad \ldots\ldots (4).$$

La prima di queste formole dimostra che, conosciuta la Q si può trovare Q_1; la seconda invece non è altro che un'identità esprimente che la componente verticale V della reazione di ciascuna imposta, nell'ipotesi della vôlta simmetricamente sollecitata, è eguale e di segno contrario alla somma delle componenti parallele all'asse delle v di tutte le forze sollecitanti la metà della vôlta stessa, e quindi quest'equazione non può servire alla determinazione di elemento alcuno; la terza finalmente può solo servire a trovare M_1 quando siano note le quantità V_1 ed M. Le equazioni (1) e (2) sono adunque insufficienti alla determinazione delle quattro forze Q_1, Q_1', V_1, V_1' e delle due coppie M_1 ed M_1', ed è necessario determinare per altra via la forza V_1 rappresentante la componente verticale della reazione dell'appoggio di destra.

Per quest'ultima determinazione basta osservare che, se il centro D (*Fig.* 1) della sezione di chiave prende parallelamente all'asse delle v un certo spostamento $(\Delta v_0)_1$ sotto l'azione del sistema delle forze F_d', F_d'', F_d''', ... F_s', F_s'', ..., lo stesso punto deve necessariamente prendere (per la simmetria della vôlta rispetto alla sezione stessa) uno spostamento identico e nello stesso senso per l'azione del sistema delle forze (*Fig.* 2) F_s', F_s'', ..., F_d', F_d'', F_d''', ..., perfettamente simmetrico al primo. Segue da ciò che, supponendo applicati alla vôlta i due sistemi predetti (*Fig.* 3), pel teorema dell'accumulazione degli effetti, deve avvenire uno spostamento Δv_0 doppio di $(\Delta v_0)_1$, e che quindi si avrà la relazione

$$(\Delta v_0)_1 = \frac{\Delta v_0}{2} \qquad \ldots\ldots (5)$$

che sarà quella da utilizzarsi per giungere alla determinazione della forza V_1.

Riepilogando sul metodo da tenersi per determinare i sei elementi delle reazioni delle imposte di una vôlta simmetrica, ma non simmetricamente sollecitata, si conchiude: che, supponendo la vôlta sollecitata simmetricamente collo stabilire la simmetría mediante l'aggiunta di altrettante forze della stessa intensità di quelle che effettivamente la sollecitano, si determineranno i tre elementi Q, V ed M delle reazioni eguali dei due appoggi; che, venendo al caso reale della vôlta non simmetricamente sollecitata, si determinerà la componente Q_1, parallela all'asse $A\zeta$ (*Fig.* 1), della reazione dell'appoggio di destra colla formola (3); che si troverà la componente V_1, parallela all'asse Av, della stessa reazione traendo partito della reazione (5); che mediante la formola (4) si potrà dopo trovare il momento M_1 proveniente dal fatto che la detta reazione non passa pel mezzo del giunto d'imposta; e che finalmente si potranno dedurre i tre elementi Q_1', V_1' ed M_1' determinanti la reazione dell'appoggio di sinistra mediante le tre equazioni (1).

3. Formola determinatrice della forza V_1. — Per questa determinazione si partirà dalle ultime due formole, che si trovano nel numero 3 della prima mia nota intitolata *L'elasticità nella teoria dell'equilibrio e della stabilità delle vôlte* e stata pubblicata nella Serie II, Tom. XXVIII delle Memorie, determinanti lo spostamento Δv_i e la rotazione m_i di un giunto qualunque normale all'asse di una vôlta. Assumendo l'origine delle coordinate nel punto di mezzo O (*Fig.* 1) della corda $\overline{AB}$ e le direzioni $O\zeta$ ed Ov per assi positivi delle ascisse e delle ordinate, evidentemente si ha

$$\zeta_0 = 0 , \qquad \zeta_i = c ;$$

volendo applicare le citate equazioni al giunto d'imposta ed essendo il giunto di chiave la sezione d'origine, si deve fare

$$\Delta v_i = 0 , \qquad m_i = 0 ;$$

e quindi, prendendo la ζ per variabile indipendente, risultano le equazioni

$$\Delta v_0 + c\, m_0 + \int_0^c \frac{Z}{E_i \Omega} \frac{dv}{d\zeta} d\zeta + \int_0^c (c-\zeta) \frac{M_x}{E_i I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta = 0$$

$$m_0 + \int_0^c \frac{M_x}{E_i I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta = 0 ,$$

la prima delle quali, avuto riguardo alla seconda e portato il coefficiente E_i fuori del segno integrale giacchè per una stessa vôlta si può ritenere come costante, si riduce a

$$E_i \Delta v_0 + \int_0^c \frac{Z}{\Omega} \frac{dv}{d\zeta} d\zeta - \int_0^c \frac{\zeta M_x}{I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta = 0 ,$$

in cui Δv_0 rappresenta lo spostamento del punto D nel senso dell'asse Ov.

Bisogna ora mettere in evidenza nell'ultima equazione le quantità Q_1, V_1 ed M_1 determinanti la reazione dell'imposta di destra, implicitamente contenute nei fattori Z ed M_x; e, per raggiungere l'intento, si sostituiranno ad essi i loro valori dati dalle formole (1) del numero 5 dell'ultima citata nota, coll'osservare che le quantità $\Delta\nu_0$, Q, V ed M per la vôlta simmetrica rispetto alla sezione di chiave e sollecitata, come risulta dalla figura 1, si sono rispettivamente indicate nel numero precedente con $(\Delta\nu_0)_1$, Q_1, V_1 ed M_1. Facendo questa sostituzione si ottiene l'equazione

$$\left.\begin{array}{l} E_t(\Delta\nu_0)_1 - \left(\int_0^c \frac{1}{\Omega}\frac{d\nu}{d\sigma}d\zeta - \int_0^c \frac{\zeta\nu}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\right)Q_1 \\ + \left(\int_0^c \frac{1}{\Omega}\frac{d\nu}{d\zeta}\frac{d\nu}{d\sigma}d\zeta - \int_0^c \frac{\zeta(c-\zeta)}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\right)V_1 \\ - M_1\int_0^c \frac{\zeta}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta + \int_0^c \frac{Z'}{\Omega}\frac{d\nu}{d\zeta}d\zeta - \int_0^c \frac{\zeta M_x'}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta \end{array}\right\} = 0 .$$

Eliminando ora i valori di Q_1, di M_1 e di $(\Delta\nu_0)_1$ mediante le formole (3), (4) e (5) del precedente numero, si giunge alla formola determinatrice di V_1, la quale, ponendo

$$\left.\begin{array}{l} H' = \int_0^c \frac{1}{\Omega}\frac{d\nu}{d\sigma}d\zeta - \int_0^c \frac{\zeta\nu}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta \\ I' = \int_0^c \frac{1}{\Omega}\frac{d\nu}{d\zeta}\frac{d\nu}{d\sigma}d\zeta + \int_0^c \frac{\zeta^2}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta \\ K' = \int_0^c \frac{\zeta}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta \\ L' = -\int_0^c \frac{Z'}{\Omega}\frac{d\nu}{d\zeta}d\zeta + \int_0^c \frac{\zeta M_x'}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (1),$$

risulta

$$V_1 = \frac{-E_t \Delta v_0 + H'(Q + \Sigma F_\zeta) + K'(\Sigma F_\zeta d_\zeta - \Sigma F_v d_v + M) + 2L'}{2I'} \quad \ldots . (2).$$

Premesso questo, sia da trovarsi V_1, ossia la componente parallela all'asse Ov della reazione dell'appoggio di destra per la vôlta sollecitata come risulta dalla figura 1. Per siffatta determinazione si può procedere come segue: supponendo la vôlta simmetricamente sollecitata rispetto alla sezione di chiave nel modo indicato dalla figura 3 (ossia coll'ammettere che a dritta ed a sinistra della sezione stessa siano rispettivamente applicate le forze in realtà operanti alla sua sinistra ed alla sua destra), colle formole date e coi metodi spiegati nella mia nota stata letta a quest'Accademia nella seduta del 9 marzo ultimo passato, relativa alle vôlte simmetriche e simmetricamente sollecitate, si determineranno la componente secondo l'asse $O\zeta$ della reazione di ciascun appoggio, il momento relativo alla stessa reazione e lo spostamento del giunto di chiave nel senso dell'asse Ov, ossia le tre quantità state indicate con Q, M ed $E_t \Delta v_0$; venendo dopo a considerare la vôlta nel vero suo stato di sollecitazione, ossia come appare dalla figura 1, si faranno le tre somme ΣF_ζ, $\Sigma F_\zeta d_\zeta$ e $\Sigma F_v d_v$ per rapporto agli assi $A\zeta$ ed Av', considerando tutte le forze F_d', F_d'', F_d''', ... a dritta e le altre F_s', F_s'', ..., a sinistra del giunto di chiave; colle formole (1) si calcoleranno le quattro quantità H', I', K' ed L' per la metà di vôlta posta a destra del giunto di chiave, considerando, nel calcolo del termine L', le sole forze F_d', F_d'', F_d''', ... ; finalmente, si otterrà la forza V_1 ponendo i trovati valori di Q, M, $E_t \Delta v_0$, ΣF_ζ, $\Sigma F_\zeta d_\zeta$, $\Sigma F_v d_v$, H', I', K' ed L' nella formola (2).

4. **Formola determinatrice della forza V_1 pel caso in cui si considerano soltanto forze poste da una sola parte per rapporto al giunto di chiave.** — Le formole ed i metodi del numero precedente servono benissimo anche per questo caso, il quale è quasi il solo che si presenta nella pratica quando si vogliono determinare le reazioni degli appoggi per una vôlta simmetrica, ma non simmetricamente sollecitata rispetto alla sezione di chiave, giacchè, mediante una conveniente applicazione del teorema dell'accumulazione degli effetti, è quasi sempre possibile di ridurre anche i casi più complessi ad altri elementari, alcuni colla simmetría perfetta nelle forze sollecitanti ed alcuni con tutte le forze poste da una sola parte della sezione di chiave. Ad

ogni modo però si crede conveniente di trasformare pel caso in quistione la formola (2) del numero precedente coll'eliminare da essa le tre quantità $E_t \Delta v_0$, Q ed M; ciò che si fa assai facilmente ponendo in essa, e i valori di H', I', K' ed L' dati dalle formole (1) del numero stesso e il valore di $E_t \Delta v_0$ dato dalla formola (a) del numero 3 dell'ultima citata nota sulle vôlte simmetriche e simmetricamente sollecitate.

Dopo queste sostituzioni ed a riduzioni fatte, la formola determinatrice di V_1 risulta

$$V_1 = \frac{\begin{array}{l} V\left(\int_0^c \frac{1}{\Omega}\frac{dv}{d\zeta}\frac{dv}{d\sigma}d\zeta - c\int_0^c \frac{\zeta}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta + \int_0^c \frac{\zeta^2}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\right) \\ + \left(\int_0^c \frac{1}{\Omega}\frac{dv}{d\sigma}d\zeta - \int_0^c \frac{\zeta v}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\right)\Sigma F_\zeta + (\Sigma F_\zeta d_\zeta - \Sigma F_v d_v)\int_0^c \frac{\zeta}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta \\ - \int_0^c \frac{Z'}{\Omega}\frac{dv}{d\zeta}d\zeta + \int_0^c \frac{\zeta M_x'}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta \end{array}}{2\left(\int_0^c \frac{1}{\Omega}\frac{dv}{d\zeta}\frac{dv}{d\sigma}d\zeta + \int_0^c \frac{\zeta^2}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\right)},$$

la quale, pei valori di H', I', K' ed L' dati dalle formole (1) del numero precedente e per essere

$$I' - cK' = \int_0^c \frac{1}{\Omega}\frac{dv}{d\zeta}\frac{dv}{d\sigma}d\zeta - c\int_0^c \frac{\zeta}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta + \int_0^c \frac{\zeta^2}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta \quad \ldots\ldots(1),$$

può essere posta sotto la semplice forma

$$V_1 = \frac{H'\Sigma F_\zeta + (I' - cK')V + K'(\Sigma F_\zeta d_\zeta - \Sigma F_v d_v) + L'}{2I'} \quad \ldots\ldots(2).$$

Nell'applicare questa formola bisogna tener presente: che essa si è dedotta considerando le forze, sollecitanti soltanto una metà della vôlta, fra la sezione di chiave e l'imposta per la quale vuolsi determinare il valore di V_1; e che per conseguenza farebbe un grave errore chi, per amore di semplicità, credesse di poterla applicare per trovare il valore di V_1 relativo all'altra imposta.

Premesso questo, ecco il modo di trovare il valore di V_1 per una vôlta, come quella rappresentata nella figura 4, posta sotto l'azione delle forze F_d', F_d'', F_d''', ... operanti a dritta del giunto di chiave. Supponendo la vôlta simmetricamente sollecitata, si determinerà la forza V, la quale è evidentemente data dalla semplicissima formola

$$V = -\Sigma F_v\,,$$

in cui ΣF_v è la somma di tutte le componenti delle forze F_d', F_d'', F_d''', ... parallele all'asse Ov; si faranno le tre somme ΣF_ζ, $\Sigma F_\zeta d_\zeta$ e $\Sigma F_v d_v$ per rapporto agli assi $A\zeta$ ed Av' considerando le forze ultime indicate; colle formole (1) del numero precedente si calcoleranno le quantità H', I', K' ed L', colla formola (1) di questo numero si troverà il coefficiente $I'-cK'$; e finalmente, applicando la formola (2), si dedurrà il valore di V_1 ossia la componente parallela all'asse Ov della reazione dell'imposta GH.

5. Osservazioni sui valori dei coefficienti H', I', K' e del termine L'. — Si nota innanzi tutto che il calcolo di queste quattro quantità si fa cogli stessi integrali che si impiegano per la vôlta simmetrica e simmetricamente sollecitata e che questo rende la loro determinazione facile e spedita.

I coefficienti H', I' e K' sono indipendenti dalle forze sollecitanti la vôlta, e dipendono soltanto dalla forma del suo asse e dalle leggi secondo cui variano le sue sezioni. Il termine L', contenendo le quantità Z' ed M_x', dipende anche dalle forze suaccennate; e non pare fuori di proposito un breve cenno sulla determinazione di questo termine nei casi elementari di una vôlta simmetrica rispetto al giunto di chiave e sollecitata da un sol peso, da una sola forza orizzontale e da una sola coppia.

Osservando che il valore di L' non differisce dal valore di L dato dall'ultima delle formole (1) del numero 3 della precedente memoria del 9 passato marzo, pei ragionamenti stati fatti nei numeri 5, 6 e 7 della memoria stessa, evidentemente si ha: pel caso di una vôlta sollecitata da un sol peso P applicato all'asse nel punto N (*Fig.* 5) di ascissa $\overline{On}=i$

$$L' = \left(\int_0^i \frac{1}{\Omega}\frac{dv}{d\zeta}\frac{dv}{d\sigma}\,d\zeta - i\int_0^i \frac{\zeta}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta + \int_0^i \frac{\zeta^2}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta \right) P \quad \ldots\ldots(1);$$

pel caso di una vôlta sollecitata da una sola forza orizzontale S applicata pure all'asse nel punto N (*Fig.* 7) di coordinate $\overline{On}=i$ ed $\overline{nN}=l$

$$L'=\left(-\int_0^i \frac{1}{\Omega}\frac{dv}{d\sigma}\,d\zeta - l\int_0^i \frac{\zeta}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta + \int_0^i \frac{\zeta v}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta\right) S \quad \ldots\ldots (2);$$

e pel caso di una vôlta sollecitata da una coppia μ con una delle forze applicate all'asse nel punto N (*Fig.* 8) di ascissa $\overline{On}=i$

$$L'=\mu\int_0^i \frac{\zeta}{I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta \quad \ldots\ldots (3).$$

6. Reazioni degli appoggi di una vôlta simmetrica, dovuta all'azione di forze poste da una stessa parte del giunto di chiave. — Sia una vôlta avente per asse una curva piana ADB (*Fig.* 6) ed avente sezione retta variabile secondo una legge qualsiasi, ma simmetrica rispetto alla sua sezione di chiave FI. Sulla metà DB del suo asse siansi segnati i punti D, 1, 2, 3, 4, ..., $n-1$ e B e condotti i giunti da essi determinati, incontranti il profilo dell'estradosso nei punti I, I_1, I_2, I_3, I_4, ... I_{n-1} ed I_n. Sulle parti dell'estradosso rappresentate in II_1, I_1I_2, I_2I_3, I_3I_4, ..., ed $I_{n-1}I_n$ operino le forze R_1, R_2, R_3, R_4, ... ed R_n, applicate nei punti L_1, L_2, L_3, L_4, ... ed L_n aventi rispettivamente, dall'asse verticale Ov le distanze ι_1', ι_2', ι_3', ι_4' ... e ι_n', dall'asse orizzontale $O\zeta$ le distanze λ_1', λ_2', λ_3', λ_4', ... e λ_n'. Le componenti verticali delle indicate forze siano P_1', P_2', P_3', P_4', ... e P_n', le componenti orizzontali S_1', S_2', S_3', S_4', ... ed S_n'; ed agli indicati punti L_1, L_2, L_3, L_4, ... ed L_n corrispondano le sezioni rette incontranti l'asse della vôlta nei punti n_1, n_2, n_3, n_4, ... ed n_n aventi rispettivamente, dall'asse verticale Ov le distanze i_1', i_2', i_3', i_4', ... ed i_n' dall'asse orizzontale $O\zeta$ le distanze l_1', l_2', l_3', l_4', ... ed l_n'. Le forze P_1', P_2', P_3', P_4', ... e P_n' operino rispetto alle orizzontali, rispettivamente proiettate nei punti n_1, n_2, n_3, n_4, ... ed n_n, coi momenti noti μ_1', μ_2', μ_3', μ_4', ... e μ_n', e le forze S_1', S_2', S_3', S_4', ... ed S_n' operino, rispetto alle stesse rette, coi momenti pure noti μ_1'', μ_2'', μ_3'', μ_4'', ... e μ_n''.

Ottenute le indicate distanze dagli assi coordinati $O\zeta$ ed Ov, non che le dette forze parallele agli assi stessi, e calcolati i momenti ultimi accennati, riesce agevole trovare le reazioni degli appoggi facendo ordinatamente le seguenti operazioni:

1° Supponendo che la vòlta sia sollecitata in modo simmetrico, ossia a dritta ed a sinistra della sezione di chiave dalle forze indicate, e seguendo le norme state tracciate nel numero 9 della precedente memoria, si calcoleranno i tre elementi V, Q ed M della reazione di ciascun appoggio;

2° Si farà la somma ΣF_ζ data da

$$\Sigma F_\zeta = S_1' + S_2' + S_3' + S_4' + \ldots\ldots + S_n',$$

nella quale le forze S' si assumeranno siccome positive o siccome negative secondo che sono dirette da O verso ζ o da ζ verso O;

3° Si determinerà il valore di Q_1 mediante la formola (3) del numero 2;

4° Si faranno le due somme $\Sigma F_\zeta d_\zeta$ e $\Sigma F_v d_v$ rispetto agli assi $A\zeta$ ed Av' colle formole

$$\Sigma F_\zeta d_\zeta = \quad S_1'\lambda_1' + S_2'\lambda_2' + S_3'\lambda_3' + S_4'\lambda_4' + \ldots + S_n'\lambda_n'$$
$$\Sigma F_v d_v = -P_1'(c+\iota_1') - P_2'(c+\iota_2') - P_3'(c+\iota_3') - P_4(c+\iota_4') - \ldots - P_n'(c+\iota_n'),$$

in cui si attribuiranno alle forze orizzontali S' i segni che loro bisogna dare nel comporre la somma ΣF_ζ ed alle forze verticali P' il segno positivo od il segno negativo secondo che sono dirette dall'alto al basso o dal basso all'alto;

5° Colle prime tre delle formole (1) del numero 3 si determineranno i tre coefficienti H', I' e K' dipendenti soltanto dalla forma e dalle dimensioni dell'asse della vòlta ed indipendenti dalle forze sollecitanti;

6° Colla formola (1) del numero 5, si troveranno le quantità L_{P_1}', L_{P_2}', L_{P_3}', L_{P_4}', ... ed L_{P_n}' e quindi si farà la somma

$$L_{P'} = L_{P_1}' + L_{P_2}' + L_{P_3}' + L_{P_4}' + \ldots + L_{P_n}';$$

7° Colla formola (2) dello stesso numero 5, si calcoleranno le quantità L_{S_1}', L_{S_2}', L_{S_3}', L_{S_4}', ... ed L_{S_n}', e quindi si dedurrà la somma

$$L_{S'} = L_{S_1}' + L_{S_2}' + L_{S_3}' + L_{S_4}' + \ldots + L_{S_n}';$$

8° Si faranno le somme $\mu_1 = \mu_1' + \mu_1''$, $\mu_2 = \mu_2' + \mu_2''$, $\mu_3 = \mu_3' + \mu_3''$, $\mu_4 = \mu_4' + \mu_4''$, ... e $\mu_n = \mu_n' + \mu_n''$, colla formola (3) del numero 5 si troveranno le quantità L_{μ_1}', L_{μ_2}', L_{μ_3}', L_{μ_4}', ... ed L_{μ_n}' dovute alle coppie μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, ... e μ_n, e si otterrà la somma

$$L_\mu' = L_{\mu_1}' + L_{\mu_2}' + L_{\mu_3}' + L_{\mu_4}' + \ldots + L_{\mu_n}' ;$$

9° Si calcolerà il termine L' dato da

$$L' = L_{P'}' + L_{S'}' + L_\mu' ;$$

10° I valori trovati di H', I', K' ed L', unitamente a quelli di V, di ΣF_ζ, di $\Sigma F_\zeta d_\zeta$, di $\Sigma F_v d_v$ e di c, si porranno nella formola (2) del numero 4, la quale darà il valore di V_1 ossia la componente verticale della reazione dell'imposta di destra;

11° Ponendo nella formola (4) del numero 2 i valori di c, di $\Sigma F_\zeta d_\zeta$, di $\Sigma F_v d_v$, di M e di V_1, si dedurrà il momento M_1, il quale, unitamente alle forze già trovate Q_1 e V_1, determina completamente la reazione dell'imposta di destra;

12° Finalmente, mediante le semplicissime formole

$$Q_1' = Q - Q_1$$

$$V_1' = V - V_1$$

$$M_1' = M_1 - M ,$$

le quali emanano dalle equazioni (1) del numero 2, si determineranno i tre elementi Q_1', V_1' ed M_1' determinanti la reazione dell'imposta di sinistra.

7. Teoremi relativi alle reazioni delle imposte. — Quando le forze operanti su una vôlta simmetrica, ma non simmetricamente sollecitata, sono soltanto pesi, si ha $\Sigma F_\zeta = 0$; dalla formola (3) del numero 2 si ottiene

$$Q_1 = \frac{Q}{2} ,$$

e dalla prima delle equazioni (1) dello stesso numero si ha

$$Q_1' = Q_1 = \frac{Q}{2} ,$$

ossia *le componenti orizzontali delle reazioni delle due imposte sono eguali fra di loro, e per di più sono eguali alla metà della componente orizzontale della reazione delle imposte stesse ottenuta col supporre sta-*

bilita la simmetria mediante l'aggiunta di altrettanti pesi della stessa intensità di quelli che effettivamente sollecitano la vôlta.

Allorquando si suppone che su una vôlta simmetrica rispetto alla sezione di chiave operino soltanto forze orizzontali, si ha $\Sigma F_v = 0$; il valore di V dato dall'equazione (a) del numero 2 è nullo e la seconda delle equazioni (1) dà

$$V_1' = -V_1,$$

ossia *le componenti verticali delle reazioni delle due imposte sono eguali e di segno contrario.*

Se si suppone che la vôlta sia soltanto sollecitata da coppie, si ha contemporaneamente $\Sigma F_\zeta = 0$ e $\Sigma F_v = 0$; cosicchè si trovano soddisfatti ambedue gli accennati teoremi, uno relativo alle componenti orizzontali e l'altro relativo alle componenti verticali delle reazioni degli appoggi.

8. **Reazione alla chiave e suo punto d'applicazione.** — Questa reazione, precisamente come quella delle imposte, si determina cercando la componente orizzontale Q_{1c}, la componente verticale V_{1c} ed il momento M_{1c} rispetto alla orizzontale determinata dal punto di mezzo D (*Fig.* 1) dell'asse della vôlta.

Considerando la mezza vôlta a dritta del giunto di chiave come una vôlta qualunque fra le due imposte GH ed FI, conservando alle lettere c, d_ζ, d_v, Q_1, V_1 ed M_1 i significati che loro furono attribuiti nei precedenti numeri e chiamando

b la saetta $\overline{OD}$ dell'asse dell'arcata,

$\Sigma F_{d\zeta}$ e ΣF_{dv} le somme delle componenti parallele agli assi coordinati $O\zeta$ ed Ov delle forze F_d', F_d'', F_d''', ...,

λ_d e ι_d le distanze delle forze $F_{d\zeta}$ dall'asse $O\zeta$ e delle forze F_{dv} dall'asse Ov,

$\Sigma F_{d\zeta}(\lambda_d - b)$ e $\Sigma F_{dv}\iota_d$ le somme delle stesse forze per le loro distanze dalla orizzontale e dalla verticale condotta per D,

evidentemente si hanno le tre formole

$$\left.\begin{aligned} Q_{1c} &= \quad Q_1 - \Sigma F_{d\zeta} \\ V_{1c} &= -V_1 - \Sigma F_{dv} \\ M_{1c} &= -V_1 c + Q_1 b - M_1 + \Sigma F_{d\zeta}(\lambda_d - b) - \Sigma F_{dv}\iota_d \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1),$$

le quali servono al calcolo dei tre elementi Q_{1c}, V_{1c} ed M_{1c} della reazione della mezza vôlta a sinistra contro la mezza vôlta a destra della sezione di chiave.

I valori positivi di Q_{1c} e di V_{1c} rappresentano rispettivamente forze dirette secondo le parti positive degli assi coordinati $O\zeta$ ed $O\upsilon$; i valori positivi di M_{1c} corrispondono ad una coppia la quale tende produrre rotazione da ζ verso υ. Il contrario ha luogo quando i valori di Q_{1c}, V_{1c} ed M_{1c} sono negativi.

9. Teoremi relativi alla reazione alla chiave. — Se si considera una vôlta posta soltanto sotto l'azione di pesi, e se chiamasi ΣP_d la somma di tutti quelli posti a dritta della sezione di chiave, si ha $\Sigma F_{d\zeta} = 0$; e la prima delle formole (1) del numero precedente dà

$$Q_{1c} = Q_1,$$

ossia *la componente orizzontale della mutua azione alla chiave è eguale alla componente orizzontale delle reazioni delle imposte.*

Se invece si suppone che operino sulla vôlta solamente delle forze orizzontali, si ha $\Sigma F_{d\upsilon} = 0$, e la seconda delle formole (1) del numero precedente dà

$$V_{1c} = -V_1,$$

ossia *la componente verticale della reazione alla chiave è eguale e contraria alla componente verticale della reazione dell'imposta.*

Se si suppone che la vôlta sia soltanto sollecitata da coppie, si ha simultaneamente $\Sigma F_{d\zeta} = 0$ e $\Sigma F_{d\upsilon} = 0$, e quindi hanno luogo ambedue gli enunciati teoremi, il primo relativo alla componente orizzontale e l'altro relativo alla componente verticale della reazione alla chiave.

Se ora, come appare dalla figura 3, si suppone stabilita la simmetría nelle forze sollecitanti coll' aggiunta di tante forze della stessa intensità di quelle che effettivamente sollecitano la vôlta, e se in questa supposizione si cercano i tre elementi Q_c, V_c ed M_c determinanti la reazione alla chiave, indicando con

$\Sigma F_{s\zeta}$ e $\Sigma F_{s\upsilon}$ le somme delle componenti parallele agli assi coordinati $O\zeta$ ed $O\upsilon$ delle forze F_s', F_s'', ... supposte applicate a dritta del giunto di chiave per stabilire l'accennata simmetría nelle forze sollecitanti, con

λ_s e ι_s le distanze delle forze $F_{s\zeta}$ dall'asse $O\zeta$ e delle forze $F_{s\upsilon}$ dall'asse $O\upsilon$, con

$\Sigma F_{s\zeta}(\lambda_s - b)$, $\Sigma F_{s\upsilon}\iota_s$ le somme delle stesse componenti per le loro distanze dalla orizzontale e dalla verticale condotta per D, ed applicando le formole (1) del numero precedente, si ottiene

$$Q_c = \quad Q - \Sigma F_{d\zeta} - \Sigma F_{s\zeta}$$
$$V_c = -V - \Sigma F_{d\upsilon} - \Sigma F_{s\upsilon}$$
$$M_c = -Vc + Qb - M + \Sigma F_{d\zeta}(\lambda_d - b) + \Sigma F_{s\zeta}(\lambda_s - b) - \Sigma F_{d\upsilon}\iota_d - \Sigma F_{s\upsilon}\iota_s \,.$$

Per le equazioni (3) e (4) del numero 2 si ha

$$Q_1 = \frac{Q + \Sigma F_{d\zeta} - \Sigma F_{s\zeta}}{2}$$

$$M_1 = -V_1 c + \frac{\Sigma F_{d\zeta}\lambda_d - \Sigma F_{s\zeta}\lambda_s - \Sigma F_{d\upsilon}(c + \iota_d) - \Sigma F_{s\upsilon}(c - \iota_s) + M}{2} ,$$

e, ponendo questi valori di Q_1 e di M_1 nella prima e nella terza delle formole (1) del numero precedente coll'osservare che, per la formola (*a*) del numero 2

$$V = -\Sigma F_{d\upsilon} - \Sigma F_{s\upsilon} ,$$

si deduce

$$Q_{1c} = \frac{Q - \Sigma F_{d\zeta} - \Sigma F_{s\zeta}}{2} = \frac{Q_c}{2}$$

$$M_{1c} = \frac{-Vc + Qb - M + \Sigma F_{d\zeta}(\lambda_d - b) + \Sigma F_{s\zeta}(\lambda_s - b) - \Sigma F_{d\upsilon}\iota_d - \Sigma F_{s\upsilon}\iota_s}{2} = \frac{M_c}{2} ,$$

ossia che *la componente orizzontale della reazione ed il momento inflettente alla chiave, dovuti a forze non simmetricamente disposte rispetto alla chiave stessa, hanno valori metà di quelli che si ottengono col supporre stabilita la simmetría mediante l'aggiunta di altrettante forze della stessa intensità di quelle che effettivamente sollecitano la vôlta.*

Ma per la formola (1) del numero 9 della citata memoria del 7 marzo 1875, la distanza *d* del punto d'applicazione dell'azione in un giunto qualunque dall'asse della vôlta è data dal momento inflettente M_x, che si verifica in quel giunto, diviso per la componente normale Z dell'azione predetta; e, applicando questa regola alla sezione di chiave, si ottiene che l'indicata distanza è $\frac{M_c}{Q_c}$, tanto nel caso delle forze effettivamente sollecitanti la vôlta (*Fig.* 1), quanto nell'ipotesi del sistema sollecitante reso simmetrico nel modo indicato dalla figura 3. Si può adunque conchiudere *che il punto d'applicazione della reazione alla chiave, od anche della mutua azione delle due metà della vôlta, per forze non simmetricamente disposte rispetto alla chiave stessa, è quel medesimo che si ottiene col supporre stabilita la simmetría nel modo già stato precedentemente indicato.*

I due ultimi teoremi, come giustamente è detto nel bel lavoro intitolato *Applicazioni pratiche della teoria sui sistemi elastici*, stato pubblicato nell'anno 1878 dall'Ufficio d'Arte delle strade ferrate dell'Alta Italia, sono una manifesta conseguenza del teorema dell'accumulazione degli effetti.

10. Spostamenti verticale ed orizzontale, e rotazione della sezione di chiave. — Il più importante dei tre elementi determinanti lo spostamento della sezione di chiave è quello che si riferisce all'innalzamento od all'abbassamento del suo centro nel senso dell'asse Ov (*Fig.* 1), già stato indicato con (Δv_0), nel numero 2. La sua determinazione, per quanto si è detto nell'or citato numero, si fa stabilendo per rapporto alla sezione di chiave la simmetría nelle forze sollecitanti coll'aggiunta di altrettante forze della stessa intensità di quelle che effettivamente si considerano come sollecitanti la vôlta, trovando in quest'ipotesi lo spostamento Δv_0 e prendendone la metà.

Per determinare lo spostamento orizzontale e la rotazione della sezione di chiave, bisognerebbe prendere le mosse dalla prima e dalla terza delle equazioni del numero 3 della prima nota sull'*Elasticità nella teoria dell'equilibrio e della stabilità delle vôlte* inserta nel volume XXVIII della serie II delle Memorie, per la determinazione dello spostamento $\Delta\zeta_i$ e della rotazione m_i di un giunto qualunque normale all'asse della vôlta. Prendendo l'origine e gli assi delle coordinate come già si è detto nel numero 3 di questo lavoro, essendo b la saetta $\overline{OD}$ dell'asse della vôlta e la sezione di chiave FI quella d'origine, evidentemente si ha

$$v_0 = b\,, \qquad v_i = 0\,,$$
$$\Delta\zeta_i = 0\,, \qquad m_i = 0\,;$$

cosicchè, assumendo la ζ per variabile indipendente ed osservando che gli integrali si devono prendere fra i limiti definiti dalle sezioni FI e GH, ossia fra $\zeta = 0$ e $\zeta = c$, risultano le equazioni

$$\Delta\zeta_0 + b m_0 + \int_0^c \frac{Z}{E_t\Omega}\,d\zeta + \int_0^c \frac{vM_x}{E_tI_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta = 0$$

$$m_0 + \int_0^c \frac{M_x}{E_tI_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta = 0\,.$$

Portando fuori del segno integrale il coefficiente E_t, giacchè per una stessa vòlta si può esso ritenere come costante, e ricavando i valori di $E_t m_0$ e di $E_t \Delta\zeta_0$, si ottiene

$$E_t m_0 = -\int_0^c \frac{M_x}{I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta$$

$$E_t \Delta\zeta_0 = -b E_t m_0 - \int_0^c \frac{Z}{\Omega} d\zeta - \int_0^c \frac{\upsilon M_x}{I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta .$$

Bisogna ora mettere in evidenza in queste formole i tre elementi determinanti la reazione delle imposte di destra, implicitamente contenuti nei fattori Z ed M_x. Per questo scopo si sostituiranno i loro valori dati dalle formole (1) del numero 5 della già citata prima mia nota sull'*Elasticità nella teoria dell'equilibrio e della stabilità delle vôlte.* Avvertendo però che le quantità Q, V ed M si sono già indicate con Q_1, V_1 ed M_1 per la vòlta simmetrica non simmetricamente sollecitata per rapporto alla sezione di chiave, converrà analogamente applicare alle deformazioni $E_t m_0$ ed $E_t \Delta\zeta_0$ le notazioni $E_t(m_0)_1$ ed $E_t(\Delta\zeta_0)_1$. Facendo queste sostituzioni si ottengono le due formole

$$E_t(m_0)_1 = Q_1 \int_0^c \frac{\upsilon}{I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta - V_1 \int_0^c \frac{c-\zeta}{I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta - M_1 \int_0^c \frac{1}{I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta - \int_0^c \frac{M_x'}{I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta .$$

$$E_t(\Delta\zeta_0)_1 = \left\{ \begin{array}{l} -b E_t(m_0)_1 + \left(\displaystyle\int_0^c \frac{1}{\Omega} \frac{d\zeta}{d\sigma} d\zeta + \int_0^c \frac{\zeta^2}{I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta \right) Q_1 \\ - \left(\displaystyle\int_0^c \frac{1}{\Omega} \frac{d\upsilon}{d\sigma} d\zeta + \int_0^c \frac{(c-\zeta)\upsilon}{I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta \right) V_1 - M_1 \int_0^c \frac{\upsilon}{I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta \\ - \displaystyle\int_0^c \frac{Z'}{\Omega} d\zeta - \int_0^c \frac{\upsilon M_x'}{I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta \end{array} \right\},$$

le quali, quando sia noto il coefficiente di elasticità E_t, si prestano alla determinazione di $(m_0)_1$ e di $(\Delta\zeta_0)_1$.

Indicando con una sola lettera i coefficienti di Q_1, di V_1 e di M_1, i quali dipendono soltanto dalla forma e dalle dimensioni dell'asse della vòlta, ed anche con una sola lettera i termini contenenti Z' ed M_x' dipendenti anche dalle forze sollecitanti, le due ultime formole si potrebbero scrivere in una maniera più semplice. Di più, come già si è fatto nelle tre precedenti memorie per la determinazione delle reazioni delle imposte nel caso generale di vôlte qualunque, per la determinazione delle stesse reazioni e dello spostamento verticale del giunto di chiave nel caso delle vôlte simmetriche e simmetricamente sollecitate e per la determinazione della componente verticale della reazione dell'imposta di destra pel caso delle vôlte simmetriche non simmetricamente sollecitate (num. 5), si potrebbero trovare i due termini dipendenti dalle forze sollecitanti pei casi di un peso, di una forza orizzontale, di una coppia ed anche di un peso uniformemente distribuito su una parte o sulla totalità della lunghezza della proiezione o della lunghezza effettiva dell'asse della vôlta e, seguendo la via già tracciata nelle prime tre memorie e nel numero 6 di questo lavoro, dedurre il metodo per calcolare $E_t(m_0)_1$ ed $E_t(\Delta\zeta_0)_1$ nei casi pratici delle vôlte simmetriche rispetto alla sezione di chiave, ma non simmetricamente sollecitate. — Queste ricerche e deduzioni sono della massima facilità dopo quanto si è fatto in questa e nelle tre precedenti citate mie note; e non si crede di ulteriormente insistere sulle medesime, sia perchè sarebbe un voler presso a poco ripetere operazioni già state minutamente spiegate, sia anche perchè, non avendosi ancora per le murature risultati esperimentali concludenti sui valori del coefficiente E_t, non si può mettere gran confidenza nelle deduzioni dei calcoli relativi alle deformazioni delle vôlte di struttura murale.

Reazioni degli appoggi per un'arcata col sovraccarico sulla sua metà.

11. Passando ad un'applicazione delle formole e delle norme state stabilite in questa nota, si considererà il caso particolare dell'arcata di ponte per ferrovia, di cui già si parlò nella memoria del 9 passato marzo e per cui si hanno i dati principali e le determinazioni preliminari nei numeri 12, 13, 14, 15 e 16 della nota stessa.

Si supporrà che il sovraccarico si trovi soltanto sulla metà di destra della vôlta e, in quest'ipotesi, si calcoleranno i sei elementi determinanti le due reazioni di ciascun'imposta.

12. Formola determinatrice della componente verticale V_1 della reazione dell'imposta di destra pel solo sovraccarico sulla metà dell'arcata. — Questa formola è la (2) stata trovata nel numero 4, ridotta pel caso in cui la vôlta è soltanto sollecitata da pesi, ossia da forze parallele coll'asse Ov. Essendo in questo caso

$$\Sigma F_\zeta = 0 \,, \qquad \Sigma F_\zeta d_\zeta = 0 \,,$$

la detta formola si riduce a

$$V_1 = \frac{(I' - cK')\,V - K'\,\Sigma F_v d_v + L'}{2I'} \quad \ldots\ldots (1),$$

in cui i coefficienti I' e K' sono dati dalla seconda e dalla terza delle formole (1) del numero 3.

Gli integrali che entrano nei coefficienti predetti devono essere presi fra i limiti definiti dalla sezione di chiave e dalla sezione d'imposta, cosicchè, pei risultati ottenuti nel numero 16 della precedente nota, si ha

$$I' = 1{,}65 + 3293{,}82 = 3295{,}47$$
$$K' = 280{,}59 \,.$$

Per essere poi la semi-corda $c = 18^m,313$, risulta

$$I' - cK' = 3295{,}17 - 18{,}313 \times 280{,}59 = -1842{,}97 \,;$$

cosicchè il valore di V_1 sarà dato da

$$V_1 = \frac{-1842{,}97 \,.\, V - 280{,}59\,\Sigma F_v d_v + L'}{6590{,}94} \quad \ldots\ldots (2).$$

Bisogna ora calcolare i valori di V e di $\Sigma F_v d_v$. Perciò s'incomincia col trovare i pesi P_s dati dalle parti di sovraccarico insistenti alle porzioni di arcata determinate dai punti **0**, **1**, **2**, **3**, **4**, **5** e **6** (*Fig.* 9) ed i momenti μ_s dei pesi stessi rispetto alle orizzontali proiettate nei punti m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 ed m_6. Per ottenere questi pesi e momenti in modo spedito, basta osservare che i valori di P_s sono le differenze fra i valori di P_{rs} ed i valori di P_r e che i valori di μ_s sono le differenze fra i valori di μ_{rs} e di μ_r contenuti nelle prime tabelle dei numeri 23 e 20 dell'ultima citata memoria; cosicchè conviene procedere alla compilazione della tavola che segue:

Indicazione delle parti d'arcata cui insistono i sovraccarichi	Pesi P_{rs}	Pesi P_r	Pesi P_s	Momenti μ_{rs}	Momenti μ_r	Momenti μ_s
Dal giunto o al giunto 1	6,77	3,45	3,32	— 0,68	— 0,48	— 0,20
» 1 » 2	8,22	4,99	3,23	— 2,06	— 1,55	— 0,51
» 2 » 3	11,22	8,13	3,09	— 4,04	— 3,50	— 0,54
» 3 » 4	15,12	12,25	2,87	— 6,96	— 6,13	— 0,83
» 4 » 5	19,35	16,76	2,59	— 11,42	— 10,56	— 0,86
» 5 » 6	23,53	21,25	2,28	— 17,41	— 15,30	— 2,11
			17,38			— 5,05

Il valore di V è la somma di tutti i pesi P_s, cosicchè si ha

$$V = 17{,}38 \ .$$

In quanto al prodotto $\Sigma F_v d_v$ si può ottenere col seguente metodo.

Si suppongano tutti i pesi P_s applicati ai punti di mezzo m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 ed m_6 delle parti dell'asse dell'arcata cui essi si riferiscono e si osservi che, indicando con i la distanza di uno qualunque dei detti punti della sezione di chiave, si ha

$$\Sigma F_v d_v = -\Sigma P_s (c+i) + \Sigma \mu_s = -c\,\Sigma P_s - \Sigma P_s i + \Sigma \mu_s \ ;$$

cosicchè, essendo

$$c\,\Sigma P_s = 18{,}313 \times 17{,}38 = 318{,}28 \ , \qquad \Sigma \mu_s = -5{,}05 \ ,$$

$$\Sigma P_s i = 3{,}32 \times 1{,}75 + 3{,}23 \times 5{,}26 + 3{,}09 \times 8{,}65 + 2{,}87 \times 11{,}80$$
$$+ 2{,}59 \times 14{,}70 + 2{,}28 \times 17{,}21 = 160{,}71$$

si deduce

$$\Sigma F_v d_v = -484{,}04 \ .$$

Sostituendo nella formola (2) i valori numerici di V e di $\Sigma F_v d_v$, si ottiene

$$V_1 = \frac{103785{,}97 + L'}{6590{,}94} \qquad \ldots\ldots (3)$$

per formola determinatrice di V_1, ossia della componente verticale della reazione dell'imposta di destra, quando si considera il sovraccarico sulla metà corrispondente dell'arcata.

13. Determinazione della quantità L'. — Indicando con L_s' quel valore particolare del termine L' che corrisponde al solo sovraccarico, osservando che le verticali passanti pei punti di mezzo dei sovraccarichi insistenti alle sei parti in cui si è divisa la semi-arcata non passano molto lontane dalle generatrici dell'estradosso corrispondenti alle sezioni rette determinate dai punti (*Fig.* 9) m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 ed m_6 dell'asse e che quindi il valore di L_s' è determinabile col procedimento spedito già stato seguìto nel numero 20 della precedente memoria pel calcolo delle quantità G_r e G_r' e nel numero 23 per la determinazione delle quantità analoghe G_{rs} e G_{rs}', avuto riguardo a quanto risulta dai numeri 5 e 6 si può assumere

$$L_s' = \Sigma \Gamma P_s + \Sigma \Theta \mu_s \qquad \ldots\ldots (1)$$

per formola determinatrice di L_s', nella quale

$$\left.\begin{aligned} \Gamma &= \int_0^i \frac{1}{\Omega} \frac{dv}{d\zeta} \frac{dv}{d\sigma} d\zeta - i \int_0^i \frac{\zeta}{I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta + \int_0^i \frac{\zeta^2}{I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta \\ \Theta &= \int_0^i \frac{\zeta}{I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (2).$$

Le ascisse i che entrano in queste ultime due formole sono quelle che corrispondono ai punti m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 ed m_6 dell'asse dell'arcata, perchè si sono introdotte le coppie μ_s onde poter supporre i pesi P_s applicati nei punti predetti.

I valori degli integrali da impiegarsi nella calcolazione dei coefficienti Γ si desumono dalle ultime colonne delle tabelle del numero 16 della precedente memoria coll'osservare che gli integrali fra i limiti 0 ed i sono i numeri delle stesse colonne, i quali corrispondono ai punti m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 ed m_6. Le espressioni ed i valori dei coefficienti Γ sono quali risultano da questa tavola:

Punti dell'asse dell'arcata	Espressioni di Γ	Valori di Γ
m_1	$0{,}002 - 1{,}75 \times 3{,}05 + 5{,}34$	0,00
m_2	$0{,}04 - 5{,}26 \times 27{,}01 + 99{,}85$	$-\ 42{,}18$
m_3	$0{,}17 - 8{,}65 \times 72{,}46 + 424{,}99$	$-\ 201{,}62$
m_4	$0{,}42 - 11{,}80 \times 131{,}64 + 1033{,}68$	$-\ 519{,}25$
m_5	$0{,}81 - 14{,}70 \times 193{,}61 + 1855{,}79$	$-\ 989{,}47$
m_6	$1{,}34 - 17{,}21 \times 252{,}71 + 2798{,}90$	$-1548{,}90$

Ottenuti i valori dei coefficienti Γ, si deduce la somma $\Sigma \Gamma P_s$ come appare da quest'altra tavola:

Punti dell'asse dell'arcata	Valori di P_s	Valori di Γ	Valori dei prodotti ΓP_s
m_1	3,32	$-\ 0{,}00$	0,0000
m_2	3,23	$-\ 42{,}18$	$-\ 136{,}2414$
m_3	3,09	$-\ 201{,}62$	$-\ 623{,}0058$
m_4	2,87	$-\ 519{,}25$	$-1490{,}2475$
m_5	2,59	$-\ 989{,}47$	$-2562{,}7273$
m_6	2,28	$-1548{,}90$	$-3531{,}4920$
	17,38		$-8343{,}7140$

Finalmente, avuto riguardo ai valori di Θ dati dalla seconda delle formole (2), ai risultamenti contenuti nella sesta tabella del numero 16 della precedente memoria ed ai valori di μ_s inscritti nella tabella del numero precedente, si possono dedurre i valori di $\Sigma \Theta \mu_s$ come appare da quest'altra tavola:

Punti dell'asse dell'arcata	Valori di μ_s	Valori di Θ	Valori dei prodotti $\Theta\mu_s$
m_1	$-0,20$	$3,05$	$-\ 0,6100$
m_2	$-0,51$	$27,01$	$-\ 13,7751$
m_3	$-0,54$	$72,46$	$-\ 39,1284$
m_4	$-0,83$	$131,64$	$-109,2612$
m_5	$-0,86$	$193,61$	$-166,5046$
m_6	$-2,11$	$252,71$	$-533,2181$
			$-862,4974$

Pei risultati che si trovano nelle ultime due tabelle evidentemente si ha

$$\Sigma\Gamma P_s = -8343,7140$$

$$\Sigma\Theta\mu_s = -\ 862,4974\ ;$$

e quindi, applicando la formola (1), si ottiene

$$L_s' = -8343,7140 - 862,4974 = -9206,21\ .$$

14. Determinazione delle reazioni delle imposte pel sòlo sovraccarico sulla metà di destra dell'arcata. — La componente verticale $V_{1\frac{1}{2}s}$ della reazione dell'imposta di destra è data dalla formola (3) del numero 12 col fare in essa $V_1 = V_{1\frac{1}{2}s}$ e $L' = L_s' = -9206,21$, cosicchè si ottiene

$$V_{1\frac{1}{2}s} = 14,35\ .$$

La componente orizzontale $Q_{\frac{1}{2}s}$ della stessa reazione assai speditamente si può avere come segue. Sottraendo dalla forza $Q_{r,s}$ (pel caso del riempimento dall'estradosso al suolo stradale e del sovraccarico), trovata nel numero 24 della precedente memoria, la forza Q_r (pel caso del solo riempimento), trovata nel numero 21 della memoria stessa, si ha la componente orizzontale Q_s della reazione di ciascun'imposta pel solo sovraccarico; e quindi risulta

$$Q_s = 49,73 - 32,68 = 17,05\ .$$

Applicando poi il primo teorema del numero 7 si ha

$$Q_{1\frac{1}{2}s} = \frac{Q_s}{2} = 8{,}525 \,.$$

Il momento $M_{1\frac{1}{2}s}$ si deve dedurre dalla formola (4) del numero 2, in seguito alla conoscenza di quel valore particolare M_s del momento M, che corrisponde al sovraccarico sull'arcata intiera. Sottraendo dal momento M_{rs} trovato nel numero 24 della precedente memoria il momento M_r trovato nel numero 21 della memoria stessa, si ottiene il momento M_s corrispondente a ciascuna imposta pel sovraccarico sull'arcata intiera; cosicchè si ha

$$M_s = -28{,}52 + 35{,}79 = 7{,}27 \,.$$

Applicando la formola (4) del numero 2 col fare

$$c = 18^m{,}313\,, \qquad V_1 = V_{1\frac{1}{2}s} = 14{,}35$$

$$\Sigma F_\zeta d_\zeta = 0\,, \qquad \Sigma F_v d_v = -484{,}04\,, \qquad M = M_s = 7{,}27\,,$$

si ottiene

$$M_{1\frac{1}{2}s} = -17{,}14 \,.$$

Determinati i tre elementi $V_{1\frac{1}{2}s}$, $Q_{1\frac{1}{2}s}$ ed $M_{1\frac{1}{2}s}$ della reazione dell'imposta posta da quella parte dell'arcata sulla quale esiste il sovraccarico, riesce facile trovare i tre elementi analoghi $V'_{1\frac{1}{2}s}$, $Q'_{1\frac{1}{2}s}$ ed $M'_{1\frac{1}{2}s}$ per l'altra imposta, e servono a questo scopo le equazioni (1) del numero 2 col fare in esse

$$\begin{aligned}
V &= 17{,}38\\
Q &= Q_s = 17{,}05\\
M &= M_s = 7{,}27\\
V_1 &= V_{1\frac{1}{2}s} = 14{,}35\\
Q_1 &= Q_{1\frac{1}{2}s} = 8{,}525\\
M_1 &= M_{1\frac{1}{2}s} = -17{,}14
\end{aligned}$$

e col ricavare i valori particolari $V'_{1\frac{1}{2}s}$, $Q'_{1\frac{1}{2}s}$ ed $M'_{1\frac{1}{2}s}$ di V'_1, Q'_1 ed M'_1 dati da

$$\begin{aligned}
V'_{1\frac{1}{2}s} &= 17{,}38 - 14{,}35 = 3{,}03\\
Q'_{1\frac{1}{2}s} &= 17{,}05 - 8{,}525 = 8{,}525\\
M'_{1\frac{1}{2}s} &= -17{,}14 - 7{,}27 = -24{,}41 \,.
\end{aligned}$$

15. Determinazione delle reazioni delle due imposte tenendo conto dei pesi dell'arcata, del riempimento dall'estradosso al suolo stradale e del sovraccarico insistente alle metà di destra dell'arcata stessa; punti d'applicazione di queste reazioni. — Indicando con $V_{ar\frac{1}{2}s}$, $Q_{ar\frac{1}{2}s}$ ed $M_{ar\frac{1}{2}s}$ i tre elementi determinanti la reazione dell'imposta di destra e con $V'_{ar\frac{1}{2}s}$, $Q'_{ar\frac{1}{2}s}$ ed $M'_{ar\frac{1}{2}s}$ i tre elementi determinanti la reazione dell'imposta di sinistra, avendo riguardo ai valori di V_{ar}, Q_{ar} ed M_{ar} stati trovati nel numero 22 della precedente memoria, non che a quelli di $V_{1\frac{1}{2}s}$, $Q_{1\frac{1}{2}s}$, $M_{1\frac{1}{2}s}$, $V'_{1\frac{1}{2}s}$, $Q'_{1\frac{1}{2}s}$ ed $M'_{1\frac{1}{2}s}$ stati stabiliti nel precedente numero ed osservando che se il momento M_{ar} è negativo per l'imposta di destra diventa positivo per l'imposta di sinistra, pel teorema dell'accumulazione degli effetti si ottiene

$$\begin{aligned}
V_{ar\frac{1}{2}s} &= 102{,}13 + 14{,}35 = 116{,}48\\
Q_{ar\frac{1}{2}s} &= 63{,}19 + 8{,}525 = 71{,}715\\
M_{ar\frac{1}{2}s} &= -32{,}74 - 17{,}14 = -49{,}88\\
V'_{ar\frac{1}{2}s} &= 102{,}13 + 3{,}03 = 105{,}16\\
Q'_{ar\frac{1}{2}s} &= 63{,}19 + 8{,}525 = 71{,}715\\
M'_{ar\frac{1}{2}s} &= 32{,}74 - 24{,}41 = 8{,}33\,.
\end{aligned}$$

Il valore negativo di $M_{ar\frac{1}{2}s}$ ed il valore positivo di $M'_{ar\frac{1}{2}s}$ indicano che i punti d'applicazione delle reazioni delle due imposte cadono al di sotto del loro punto di mezzo 6 (*Fig.* 9), e, per persuadersi di ciò, basta aver riguardo alle convenzioni state stabilite sul modo di valutare i momenti in questa e nelle tre note precedenti sull'*Elasticità nella teoria dell'equilibrio e della stabilità delle vôlte*.

Trovati i valori di $V_{ar\frac{1}{2}s}$, $Q_{ar\frac{1}{2}s}$, $V'_{ar\frac{1}{2}s}$ e $Q'_{ar\frac{1}{2}s}$, riesce facile ottenere le componenti normali $Z_{6ar\frac{1}{2}s}$ e $Z'_{6ar\frac{1}{2}s}$ delle reazioni dell'imposta di destra e dell'imposta di sinistra. I piani di queste imposte fanno colla verticale l'angolo $\frac{1}{2}\alpha'^{\circ} = 53^{\circ}11'15''$, e si hanno le formole

$$\begin{aligned}
Z_{6ar\frac{1}{2}s} &= -\,Q_{ar\frac{1}{2}s}\cos.\tfrac{1}{2}\alpha'^{\circ} - V_{ar\frac{1}{2}s}\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}\alpha'^{\circ}\\
Z'_{6ar\frac{1}{2}s} &= Q'_{ar\frac{1}{2}s}\cos.\tfrac{1}{2}\alpha'^{\circ} + V'_{ar\frac{1}{2}s}\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}\alpha'^{\circ}\,,
\end{aligned}$$

dalle quali si deduce

$$\begin{aligned}
Z_{6ar\frac{1}{2}s} &= -136{,}22\\
Z'_{6ar\frac{1}{2}s} &= 127{,}16\,.
\end{aligned}$$

Si possono ora calcolare le due distanze $d_{6ar\frac{1}{2}s}$ e $d'_{6ar\frac{1}{2}s}$ dei punti d'applicazione delle reazioni delle imposte dell'arcata dai punti di mezzo delle imposte medesime mediante la formola (1) del numero 9 della prima nota, la qual formola dice che, dividendo il momento inflettente relativo ad una sezione qualunque per corrispondente valore della componente normale Z dell'azione che in essa ha luogo, si ottiene la distanza del punto d'applicazione di quest'azione dell'asse. Segue da ciò che si ha

$$d_{6ar\frac{1}{2}s} = \frac{-49{,}88}{-136{,}22} = 0^{m}{,}37$$

$$d'_{6ar\frac{1}{2}s} = \frac{8{,}33}{127{,}16} = 0\ {,}06\ .$$

Questi valori di $d_{6ar\frac{1}{2}s}$ e di $d'_{6ar\frac{1}{2}s}$, essendo positivi, si devono portare dai punti di mezzo dei giunti a cui si riferiscono verso l'intradosso; di modo che, indicando con l_6 le lunghezze dei giunti d'imposta e con $d_{i6ar\frac{1}{2}s}$ e $d'_{i6ar\frac{1}{2}s}$ le distanze dei punti d'applicazione delle reazioni delle imposte dall'intradosso, si ottiene

$$d_{i6ar\frac{1}{2}s} = \tfrac{1}{2}l_6 - d_{6ar\frac{1}{2}s} = 1 - 0{,}37 = 0^{m}{,}63$$

$$d'_{i6ar\frac{1}{2}s} = \tfrac{1}{2}l_6 - d'_{a6r\frac{1}{2}s} = 1 - 0{,}06 = 0\ {,}94\ .$$

Risulta dal trovato valore $d'_{i6ar\frac{1}{2}s}$ che il punto d'applicazione della reazione dell'imposta di sinistra cade nella parte di mezzo del giunto corrispondente supposto diviso in tre parti eguali, e che quindi si trova per questo giunto soddisfatta una condizione favorevole alla stabilità. Lo stesso però non ha luogo per l'imposta di destra, giacchè il valore di $d_{i6ar\frac{1}{2}s}$ indica come il punto d'applicazione della corrispondente reazione non sia nell'accennata parte di mezzo, ma sibbene in quella situata verso l'intradosso.

Torino, 11 Maggio 1879.

Tav. I.

Fig. 1

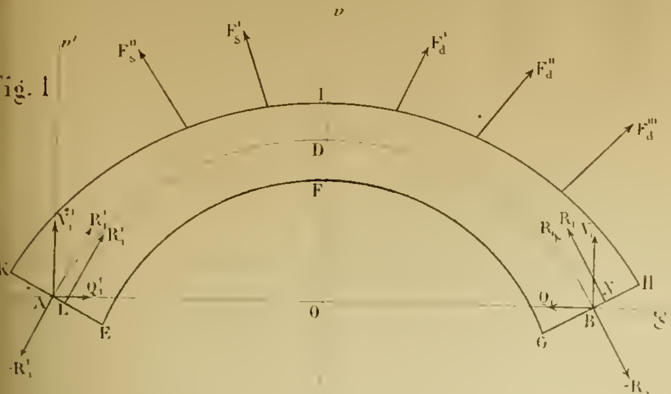


Fig. 2

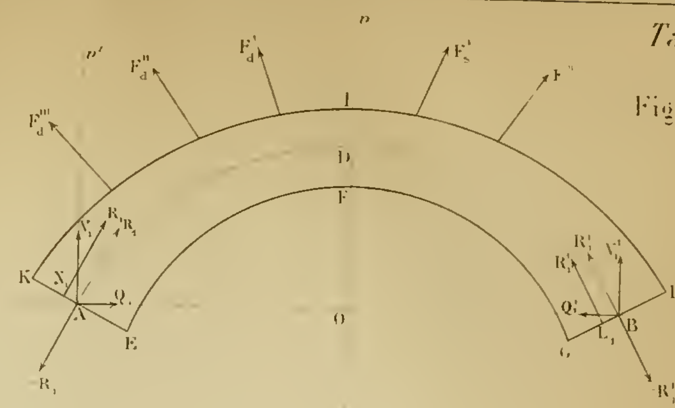


Fig. 3

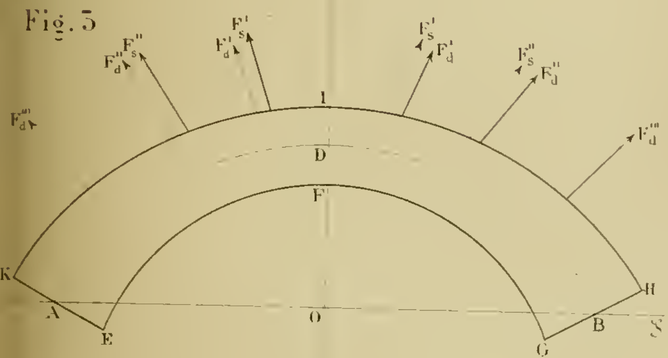


Fig. 4.

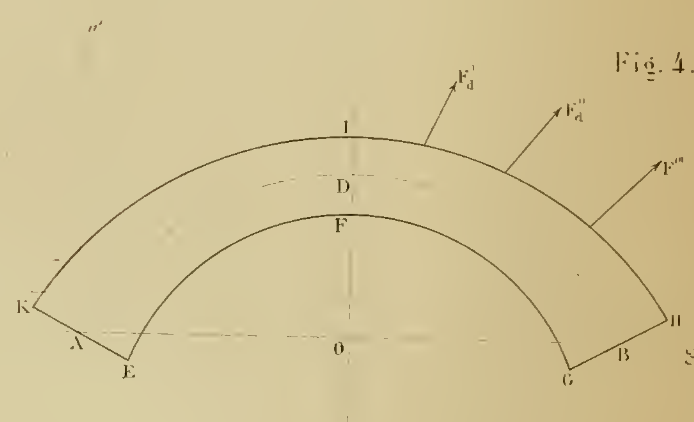


Fig. 5

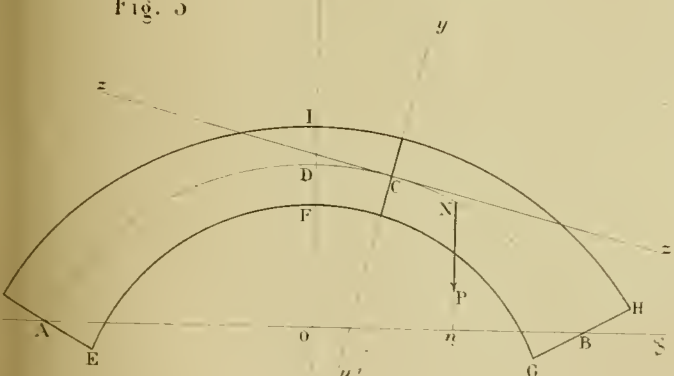


Fig. 6.

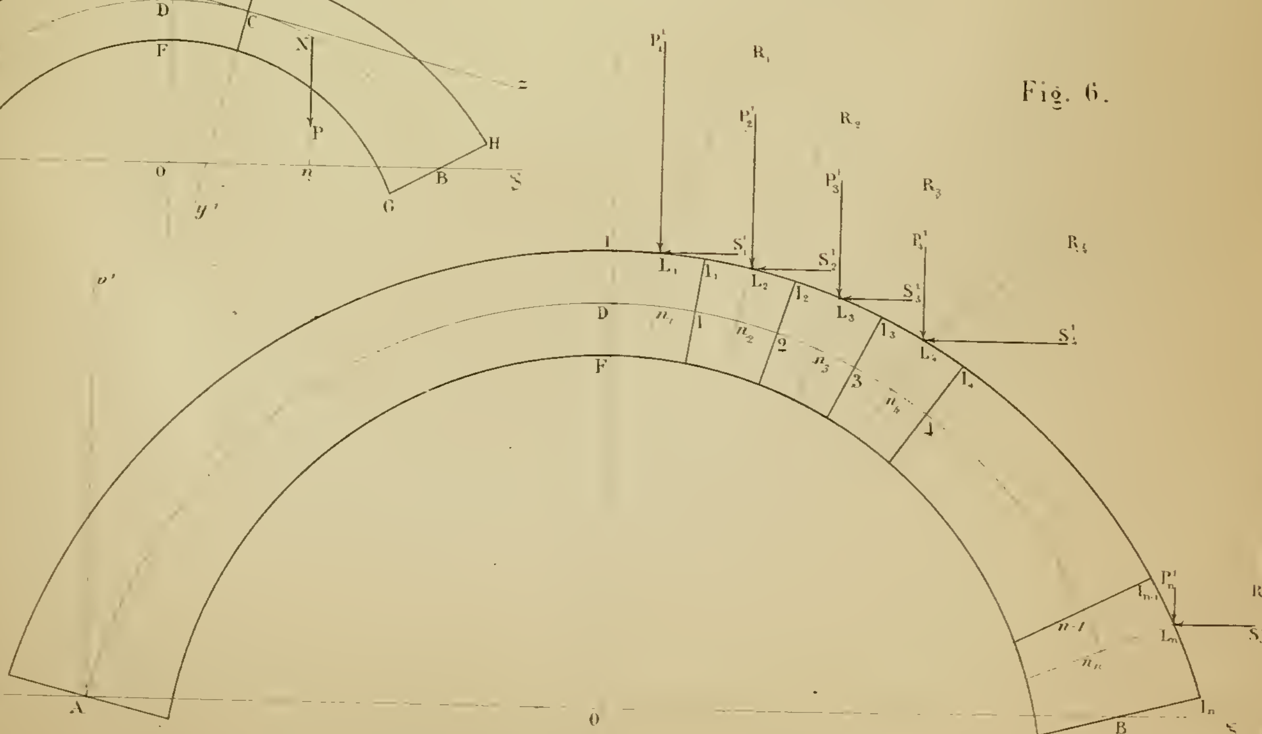


Fig. 7.

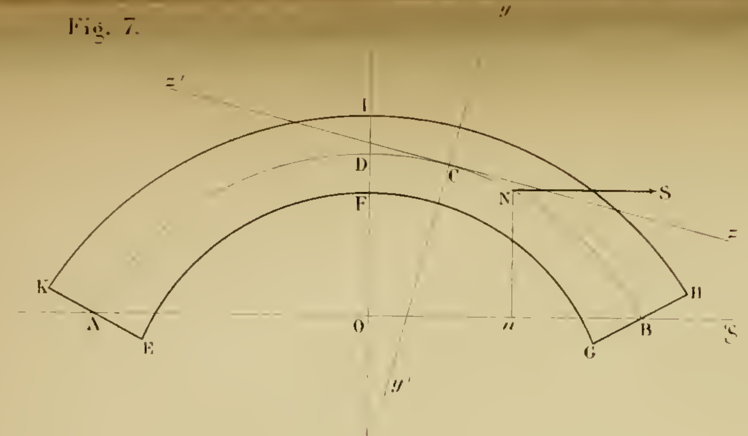


Fig. 8.

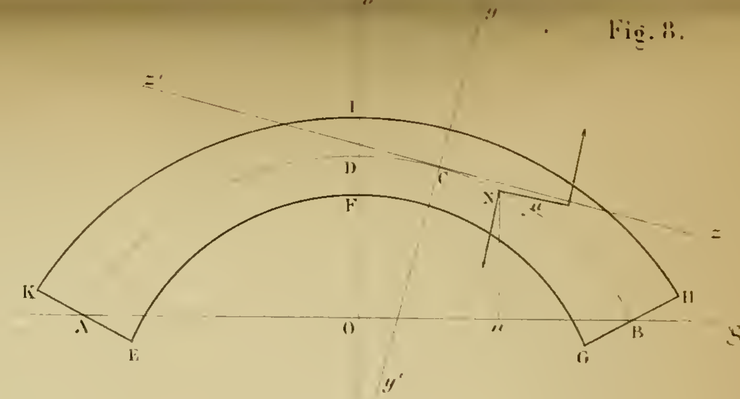


Fig. 9.

SUGLI

EFFETTI MECCANICI

DELLA ELETTROLISI

NOTA

del Prof. GIUSEPPE BASSO

Letta nell'adunanza del 14 *Dicembre* 1879

Nell'adunanza delli 11 maggio scorso io ebbi l'onore di leggere alla Classe un mio lavoro (1) intorno ad un nuovo fenomeno, che fu segnalato per la prima volta del sig. Edmondo J. Mills (2) e da lui denominato *Stringimento elettrico.*

Avevo incominciato ad occuparmi di questo argomento sino dal luglio dell'anno passato (1878), ed adottando nelle mie ricerche un procedimento sperimentale analogo a quello già tenuto dal Mills, non tardai a riconoscere che, quando uno strato metallico si va deponendo per via galvanica alla superficie di un corpo, si hanno indizii di una forte pressione che si esercita contro il corpo stesso e che tende a diminuirne il volume. Però, mentre le mie esperienze additavano come molto probabile questo fatto dello stringimento elettrico, non ne dimostravano però in modo incontrastabile la esistenza; ed io conchiudeva il mio lavoro dicendo che ogni dubbio a questo riguardo sarebbe dissipato, solo quando si riescisse a sceverare completamente gli effetti dovuti al fenomeno che si studia da quegli altri che possono assumerne la stessa apparenza e che sono semplicemente dovuti al calore.

(1) *Fenomeni che accompagnano l'elettrolisi dei composti metallici.* Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XIV, 1879.

(2) *Proceedings of the Royal Society*, XXVI, 1877.

D'allora in poi, per quanto mi permisero i mezzi sperimentali che sono a mia disposizione, non ho tralasciato di fare nuove indagini. Tentai sovrattutto la ricerca di artifizii, che permettessero di isolare affatto le manifestazioni dello stringimento elettrico, eliminando quei fenomeni termici o d'altra natura che, associandosi ad esso, tendono a svisarlo. Di questi miei più recenti studi e dei nuovi risultati ottenuti mi propongo di far cenno in questa Nota.

Debbo però avvertire innanzi tutto, che dello stesso argomento si occupò pure in questi ultimi mesi il sig. E. Bouty in un lavoro abbastanza esteso e molto accurato (1). Le ricerche di questo fisico sono affatto indipendenti dalle mie; anzi non ebbi conoscenza di esse, se non quando io aveva già presentati alla nostra Accademia i risultamenti de' miei primi studi.

Il sig. Bouty adopera anch'egli, come d'altronde aveva fatto pel primo il sig. Mills, termometri a bulbo superficialmente conduttore e li impiega a guisa di elettrodo negativo nella decomposizione di un sale metallico, ordinariamente di rame. Facendo dapprima astrazione dalle influenze termiche e supponendo che il movimento della colonna liquida nel tubo termometrico sia tutto dovuto alla pressione che il deposito metallico esercita sul bulbo-elettrodo, egli dimostra che i risultati di molte sue esperienze si accordano assai bene colle previsioni teoriche; fondandosi queste ultime sulle leggi date dal Lamé e dal Wertheim intorno alla compressibilità dei corpi e degli involucri di forma cilindrica.

Nella maggior parte delle esperienze eseguite dal sig. Bouty impiegavansi correnti elettriche molto deboli, quale, per es., avrebbe potuto fornire un solo piccolo elemento Daniell. In queste condizioni è molto probabile che il passaggio della corrente produca modificazioni lievissime nella temperatura del termometro metallizzato; perciò si comprende che non si corra il rischio di commettere gravi errori trascurando tale influenza. D'altronde lo stesso sig. Bouty osserva che, quando occorra, riesce possibile separare, fino ad un certo punto, gli effetti termici da quelli meccanici che qui voglionsi soli studiare; basta per ciò considerare che i primi diminuiscono di entità coll'agitazione del liquido, si producono in proporzione assai maggiore quando al termometro a liquido si sostituisca

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.* Veggasi pure: *Journal de Physique théorique et appliquée*, par J.-Ch. D'Almeida, Septembre 1879.

uno a gaz e non presentano diversità di sorta se si impiegano bulbi a sezione elittica anzichè cilindrici, contrariamente a ciò che succede per gli effetti di contrazione.

La supposizione che siano trascurabili gli effetti calorifici nella deposizione galvanica del metallo non è più legittima, neanche per approssimazione, quando si debbono, o si vogliono impiegare correnti elettriche alquanto intense, come appunto io faceva più spesso in quelle prime mie ricerche, quali ho già brevemente accennate. Io doveva allora valutare con qualche precisione l'influenza delle variazioni termiche sul termometro metallizzato, e ciò faceva battendo tre vie distinte, che si possono in poche parole indicare nel seguente modo:

1° Si studia la velocità con cui s'innalza la colonna liquida nel termometro-elettrodo a cominciare dall'istante in cui si chiude il circuito; si riconosce così che nei primordii dell'azione elettrolitica si ha una brusca elevazione della colonna indicatrice, seguíta ben presto da un'ascesa lenta e quasi regolare;

2° Si fanno osservazioni di confronto fra le indicazioni del termometro a bulbo inargentato durante la sua metallizzazione e quelle, di natura puramente termica, d'un termometro nudo, tenuto vicinissimo al primo nel bagno;

3° Si procede alla determinazione del *punto zero* pel termometro inargentato prima del passaggio della corrente; poi la si ripete dopo di aver rivestito il bulbo dello strato metallico.

In quasi tutte le mie esperienze trovai che all'effetto meccanico dello stringimento si sopraponevano in misura sensibile quelli dipendenti da azioni termiche. Ho potuto anzi stabilire che l'azione della corrente, nel maggior numero dei casi da me osservati, produceva elevazione di temperatura nel bulbo funzionante da elettrodo negativo e che quest'elevazione cresceva col crescere dell'intensità della corrente.

Questo fatto apparisce in contraddizione coi risultati ottenuti dal sig. Bouty, il quale afferma che, nel deporsi del metallo sul termometro inargentato, quest'ultimo si conserva alquanto più freddo dell'ambiente che lo circonda. La contraddizione però non è reale e dipende solo dalla notevole differenza d'intensità fra le correnti elettriche del sig. Bouty e quelle da me impiegate. Come già ebbi occasione di notare altra volta, il passaggio d'una corrente elettrica attraverso ad un liquido elettrolitico può attivare simultaneamente sorgenti di calore positive e negative. Per una parte si applica al fenomeno la legge generale di Joule, per cui in seno al liquido si deve svolgere, per ogni unità di tempo, una quantità di calore proporzionale alla resistenza elettrica ed al quadrato dell'intensità della corrente. Per altra parte, risulta dalle leggi di termochimica che, decomponendosi una soluzione, ad es., di solfato di rame per opera della corrente, la lamina di rame che fa da elettrodo positivo e che va mano mano sciogliendosi si comporta come sorgente positiva di calore; si ha all'incontro consumo di calore all'altro elettrodo, dove il metallo si va deponendo.

Ciò posto: avviene che la corrente che attraversa il liquido elettrolitico sia molto debole? Si osserverà all' elettrodo positivo elevazione di temperatura in virtù di ciascuna delle due cagioni ora indicate; si avrà raffreddamento all'elettrodo negativo, dove il calore assorbito dalla decomposizione chimica eccederà continuamente quello svolto dal passaggio della corrente. È questo il caso che si presentava comunemente nelle sperienze del sig. Bouty. Se si adopera invece una corrente abbastanza energica, quale potrebbero fornire due o tre piccoli elementi Bunsen, i fenomeni termici a ciascuno dei due elettrodi si fanno più pronunziati. Mentre all'elettrodo positivo havvi sempre svolgimento di calore in virtù di due cause cospiranti, anche all'elettrodo negativo si riscontra una certa elevazione di temperatura, giacchè il calore sviluppato secondo la legge di Joule eccede quello che per l'azione elettrolitica si consuma.

La difficoltà della separazione degli effetti calorifici da quelli che sono veramente dovuti allo stringimento elettrico continuava sempre a preoccuparmi, quando mi venne fatto di conoscere certi particolari, che talvolta s'incontrano nelle operazioni di galvanoplastica, e che mi aprirono una via nuova e molto facile a seguire. Il Cav. A. Botto, Capitano del Genio, il quale ora dirige presso l'Istituto topografico militare di Firenze i lavori di fotoincisione, secondo il sistema del Generale Avet, per la riproduzione dei fogli della Gran Carta d'Italia all' $^1/_{100000}$, mi comunicò gentilmente questi particolari da lui osservati nel suo laboratorio ed io debbo accennarli brevemente.

Abbiasi una lastra di vetro, di cui una faccia sia già stata coperta della pellicola di gelatina, che porta in rilievo i tratti corrispondenti a quelli che debbono poi riuscire incavati nel rame. Operando secondo il procedimento Avet, si deve coprire questa pellicola di gelatina con uno strato lievissimo di fina grafite; poscia la lastra viene immersa nel bagno galvanico e ve la si lascia fino a che siasi coperta interamente di una pellicola di rame di grossezza conveniente. Avviene talvolta che il deposito del metallo si fa più a rilento in certi punti che in altri: allora si formano, in corrispondenza dei primi, delle speciali soffiature nella pellicola di gelatina, e se il ritardo a coprirsi di rame si fa più considerevole, si producono dei veri raggrinzamenti. La cosa procede in guisa da rendere manifesto che il rame, depositatosi da principio lungo il contorno della lastra di vetro, produce un restringimento per cui le parti centrali della pellicola di gelatina vengono rinserrate all'intorno e costrette a sollevarsi. Quando quest'accidente ha luogo, la matrice è perduta e bisogna rifarsi daccapo.

Accade pure talvolta che, per l'effetto meccanico di ristringimento operato dal rame depositantesi su d'una lastra di vetro, questa si rompa. Ecco come ciò succede. Suppongasi di aver ottenuto sulla lastra un primo straterello di rame; invece di staccare quest'ultimo dal vetro ed ingrossarlo poscia in disparte, si continui a lasciarlo nel bagno affinchè più e più si rinforzi. Allora la lamina di rame, e con essa la pellicola sottostante di gelatina, incomincia a staccarsi qua e là dal vetro; si formano fra quella e questo delle concamerazioni foggiate a calotta sferica di piccola saetta; poi ad un certo punto, se lo strato metallico viene a trasbordare dagli orli del vetro, che suppongo piuttosto sottile, questo si rompe.

La rottura delle lastre, quando avviene nel modo ora spiegato, costituisce una prova diretta e decisiva dell'azione meccanica speciale esercitata dai depositi galvanici; perciò mi proposi di cercare in quali condizioni sarebbe possibile ottenere un tale fenomeno, non più in modo accidentale e fortuito, ma costantemente e con regolarità. Anche in ciò mi tornarono utilissimi i suggerimenti e le indicazioni fornitimi dal mio amico il Capitano Botto. Non volendo far l'esposizione dei varii tentativi a cui ho ricorso, mi limito ad accennare subito il procedimento che si trovò migliore per il fine proposto.

Presa una lastra sottile di vetro, di forma rettangolare o quadrata, i cui lati abbiano la lunghezza di 15 o 20 centimetri, la si ricopre innanzi tutto di collodio normale. Quando questo siasi essiccato, vi si spande sopra uno strato sottile di buona gelatina, a cui siasi aggiunto un ventesimo circa del suo peso di una soluzione satura di bicromato potassico. Esponendo alla luce questa lastra, colla faccia nuda rivolta all'insù, lo strato di gelatina diventa insolubile a cominciare dalle parti più vicine al vetro; ma l'interposto velo di collodio gli impedisce di acquistare quella più grande aderenza che, se questo non ci fosse, avrebbe pel vetro. Quando la pellicola di gelatina sia resa insolubile, conviene immergere la lastra in una soluzione di cloruro d'oro nell'acqua e lasciarvela per circa una giornata col vetro appoggiato sul fondo del recipiente. Il velo superficiale, così impregnato di cloruro d'oro, deve in seguito farsi asciugare sotto l'influenza della luce; basta per questo appoggiare la lastra contro una parete verticale e lasciarla così, in modo che la luce diffusa agisca sulla pellicola, e fino a tanto che quest'ultima sia bene asciutta.

Ora altro non rimane che spalmare, colle ordinarie precauzioni, di fina piombaggine la faccia coperta del vetro e fasciare quest'ultimo con parecchi giri di filo sottile di rame disposti parallelamente a ciascuno dei suoi quattro lati presso al contorno. Da diversi punti di questo filo si fanno partire conduttori metallici che si possono mettere in comunicazione col polo negativo della pila. Basta collocare la lastra così preparata nel solito bagno semplice di solfato di rame e, chiudendo il circuito, provocare l'elettrolisi per mezzo d'una corrente molto debole. È necessario però che, dopo qualche ora, lo sperimentatore si accerti che il deposito di rame cominciò a formarsi regolarmente su tutta la superficie della lastra e senza soluzione di continuità. Quando tale condizione indispensabile sia soddisfatta, non si ha che a lasciare l'apparato a sè; dopo qualche giorno, cioè quando il velo di rame abbia acquistato sufficiente grossezza, si osservano gli aggrinzamenti e le soffiature di cui ho parlato più sopra; finalmente se si lascia deporre il rame anche sui lembi della lastra, non tarda, nella maggior parte dei casi, ad avvenire la rottura di questa; così viene messo in evidenza lo sforzo meccanico esercitato dalla incrostazione metallica, il quale è diretta conseguenza dello stringimento elettrico.

IL GHIACCIAIO DEL MIAGE

VERSANTE ITALIANO DEL GRUPPO DEL MONTE BIANCO

(ALPI PENNINE)

PER

M. BARETTI

Letta nell'adunanza del 28 Dicembre 1879

I. *Generalità sul versante italiano del gruppo del Monte Bianco e sui ghiacciai che ne discendono.*

Alle origini della gran valle della Dora Baltea una colossale barriera di monti si stende dal *Colle della Seigne* al *Colle del Piccolo Ferret* a dividere l'Italia dalla Francia. Questa barriera si stende da S. O. a N. E. per ben 26 chilometri, misurati alla sua base ed in linea retta tra i due valichi menzionati; ma il supremo clinale, spartiacque tra il Po ed il Rodano, sinuoso nel suo andamento misura all'incirca 39 chilometri di confine naturale e politico tra i due paesi.

Questa stupenda barriera di monti, che supera in media elevazione sul livello marino i 3600 metri, che in molti punti raggiunge e sorpassa i 4000, e si spinge fino alla massima di 4810 (1), che cade rapidissima a S. E. ai 1200 metri sull'Italia, è la grande facciata meridio-orientale del gruppo del Monte Bianco, del nodo di montagne europee più formidabile, più grandioso, più nettamente delimitato.

(1) Le quote altimetriche indicate nei paragrafi I, II, III e IV sono prese dalla carta di VIOLLET-LE-DUC, e corrispondono quasi tutte a quelle ottenute dal Capitano MIEULET nei lavori di delimitazione del confine italo-franco.

Il versante S. E. del gruppo è molto più ripido di quello che, ammantato di immensi ghiacciai, scende a N. O. sulla Francia. Le sinuosità del clinale corrispondono però a sporgenze, a sproni avanzantisi verso l'Italia, ed a rientramenti, a convessità guardanti la Francia. È naturale conseguenza che, pel nostro versante, ai primi siano corrispondenti e i massimi di ripidezza e ghiacciai poco sviluppati, appesi quasi alle pareti rocciose, incastrati nei profondi e stretti burroni, ed ai secondi invece valloni più ampii e sviluppati, minori pendenze, e bacini glaciali relativamente più estesi. Citeremo ad esempio di promontorii della catena spingentisi verso l'Italia, e quindi a ripidissimo pendìo, quelli facienti capo alla vetta del Monte Bianco ed alla più elevata punta delle *Grandes Jorasses*. Il dislivello tra la vetta del Monte Bianco ed il *thalweg* di *Val Veni* presso ai casolari dell'*Avizaille* è di 3200 metri sopra una distanza orizzontale di metri 5450, vale a dire una pendenza del 58,7 per cento, di gradi 35; il dislivello tra la maggior punta delle *Grandes Jorasses*, la *Punta Walker*, e i casolari di *Frébouzie* in *Val Ferret* è di 2706 metri sopra una distanza orizzontale di appena tre chilometri, cioè una pendenza del 90,2 per cento, di 42°. Se prendiamo invece a considerare i tratti di versante italiano corrispondenti ai rientramenti, cioè alle sinuosità del clinale convesse verso Francia, troviamo che si foggiano ad ampii bacini glaciali con pendenze lievi relativamente a quelle fortissime che più sopra vedemmo. Così il bacino del ghiacciaio del *Miage* dal *Dôme du Goûter* al suo sbocco in *Val Veni* presenta un dislivello di 2331 metri, che ripartiti su una distanza orizzontale di 7600 metri danno una pendenza al più del 30,67 per cento, cioè di 18°,31′; così pure il bacino del ghiacciaio della *Brenwa* presenta dall'origine sua al *Mont Maudit* al termine del ghiacciaio un dislivello di 3031 metri, che divisi su 7 chilometri circa di distanza orizzontale danno una pendenza del 43,3 per cento, ovvero di 22°,30′.

Il versante italiano del Monte Bianco presenta adunque una alternanza di bacini glaciali piuttosto profondi ed a minore pendìo che danno ricetto ai maggiori ghiacciai, come quelli dell'*Allée Blanche*, del *Miage*, della *Brenwa*, di *Frébouzie*, di *Triolet*, di *Mont Dolent*, ed a burroni ripidissimi, in cui si annidano piccole correnti di ghiaccio incastrate tra le orride pareti di questi burroni, quali sono i ghiacciai dei *Mottets*, di *Estelette*, del *Brouillard*, di *Fresnay*, di *Combalet*, di *Entrèves*, di *Toula*, di *Mont Frety*, di *Rochefort*, di *Planpansière*, di *Tronchey*, di *Pra Sec*, dell'*Évêque*, di *Gruetta*.

Le acque fluenti da questi ghiacciai si adunano nella *Val Veni* e nella *Val Ferret*, la prima diretta dal *Colle della Seigne* a N. E., per circa 13 chilometri, la seconda scendente a S. O. dal *Colle Ferret* per 13 chilometri. Le due riviere, scorrenti nelle due valli, confluenti ad *Entrèves*, sono i due rami originarii della Dora Baltea, che inizia il suo corso dopo costituitasi dalla loro unione alla breccia aperta tra il *Mont-Chétif* ed il *Mont de la Saxe*.

I ghiacciai del versante italiano del Monte Bianco sono, e per maggior ripidezza e per esposizione a S. E., molto meno sviluppati di quelli che ammantano il versante francese; pur nondimeno alcuni riescono a sboccare dal loro vallone originario nella *Val Veni* o nella *Val Ferret*, e, perdurando nella discesa, sono forzati a deviare ripiegandosi per uniformarsi alla direzione a N. E. od a S. O. della valle nella quale sboccano; in questo caso si trovano specialmente i ghiacciai del *Miage* e della *Brenwa;* accennano ad un principio di deviazione quelli dell'*Allée Blanche*, di *Triolet* e di *Mont Dolent;* gli altri ora più non raggiungono la valle principale. Il ripiegamento forzato cui va soggetto il ghiacciaio del *Miage* ha dato origine ad alcuni fatti particolari degni di studio nel modo di comportarsi e della corrente di ghiaccio, e delle morene da essa formate; scopo appunto di queste pagine è l'esposizione di tali particolarità in primo luogo. Come poi il ghiacciaio del *Miage* è il solo, a nostra cognizione, nelle Alpi occidentali che presenti ben netti e distinti i fenomeni che generalmente si studiano in un ghiacciaio tipo, tanto che noi possiamo considerarlo senza esitazioni come il ghiacciaio classico nelle nostre regioni, così credemmo che esso meritasse una rapida ma completa descrizione, e ci accingemmo a preparare questa *Monografia.*

II. *Vallone o bacino idrografico del Miage.*

Il vallone del *Miage* è contemporaneamente bacino del ghiacciaio omonimo, giacchè è tutto da questo occupato e dai ghiacciai alimentatori.

Esso è delimitato a S. O. dalla cresta o catena secondaria che dal *Piano Combal* per *Mont Suc* (metri 2608), l'*Aiguille de Sarsadorège* (metri 2831), per lo spigolo di ghiaccio del *Petit Mont Blanc* (m. 3421, 3573, 3896) raggiunge l'estremo vertice dell'*Aiguille de Tré-la-Tête* (metri 3930) sul clinale del gruppo; questo contrafforte si sviluppa per metri 3560.

Dalla *Aiguille de Tré-la-Tête* il clinale corre sinuosamente, ma nel suo complesso a N. per 4300 metri, passando per una cima di ghiaccio senza nome (alla quale noi per la sua forma daremmo volentieri l'appellativo di *Bonnet de neige*, di metri 3779), la *Tête Carrée* (metri 3770), il *Col infranchissable* (metri 3377), il *Dôme du Miage* (metri 3500?), il *Colle del Miage* (metri 3376) fino alla *Aiguille de Bionassay* (metri 4061); questo tratto di clinale limita ad O. il bacino glaciale del *Miage* italiano separandolo dal *Miage* francese.

Altri 2200 metri di clinale diretto ad E. 30° N., enorme spigolo di ghiaccio, dal quale emergono pochi spuntoni di roccia, lo limitano a N. 30° O., dal ghiacciaio francese di *Bionassay* fino al *Dôme du Goûter* (metri 4331).

Poscia il clinale, dirigendosi a S. 45° E. per due chilometri e mezzo, sale per alti nevati, per le *Bosses du Dromadaire* (metri 4556, 4672) alla vetta del Monte Bianco (metri 4810), donde scende a 4756 metri al ciglione di rupe detto *Monte Bianco di Courmayeur*.

Da quest'ultimo si distacca il contrafforte di *Mont Brouillard*, che, scendendo a S. 30° E. da 4756 metri a 4522, a 3990, 3447, 3350 a 1922, ai *châlets du Brouillard*, per circa 4600 metri, limita il bacino glaciale del *Miage* ad E. 30° N.

Questo grande bacino glaciale ha per conseguenza un perimetro di 17160 metri, elevandosi nella porzione originaria superiore fino oltre ai 4000 metri e raggiungendo il sommo del gruppo a 4810 metri, e scendendo ai 2000 metri circa di altitudine al suo sbocco. La massima lunghezza dal Lago *Combal* al *Dôme du Goûter* in linea retta N. 5° O a S. 5° E. è di 7200 metri; la lunghezza massima però del ghiacciaio misurata dal *Dôme du Goûter* alla riunione dei ghiacciai alimentatori in una sola corrente, lungo tutto il tragitto di questa allo sbocco del vallone del *Miage* in *Val Veni*, e compreso il percorso in *Val Veni* fino all'*Avizaille* è di 10 chilometri.

Il bacino idrografico del *Miage* puossi considerare diviso in due porzioni; la porzione elevata occupata dai ghiacciai alimentatori, che si amplia in vero circo glaciale, ed una porzione inferiore, stretta, allungata a guisa di canale, che serve di alveo di discesa alla corrente principale di ghiaccio, al vero ghiacciaio del *Miage*. Il circo glaciale ha una massima larghezza di circa 6 chilometri dal Monte Bianco all'*Aiguille de Tré-la-Tête*. — Il canale di scolo misura appena 2800 metri in larghezza tra la cresta di *Sarsadorège* e quella di *Brouillard*. — La superficie totale del vero bacino di raccoglimento, del circo glaciale è di circa 11 chilometri quadrati; e di 7 chilometri quadrati è quella del canale di scolo del ghiacciaio del *Miage*.

La totale superficie del ghiacciaio del *Miage*, coi ghiacciai alimentatori e la porzione scendente in *Val Veni* raggiunge i 10 chilometri quadrati.

III. *Circo glaciale del Miage e ghiacciai alimentatori.*

Il circo glaciale del *Miage* è solcato da quattro grandi ghiacciai alimentatori, ghiacciai nevati in alto, vere masse di ghiaccio in basso, che scendendo ripidissimi dalle alture tra l'*Aiguille de Tré-la-Tête* ed il Monte Bianco, convergono al centro dell'area semicircolare e si fondono poi in una sola corrente, il ghiacciaio del *Miage*. — Cortine e sproni di roccia separano l'un dall'altro questi ghiacciai alimentatori.

Il primo di questi, il più orientale, si origina dal clinale tra il *Monte Bianco di Courmayeur* e le *Bosses du Dromadaire*; un' isola di roccia divide in due la corrente originaria in corrispondenza della più alta delle *Bosses du Dromadaire* (metri 4672). — Più in basso le due correnti si uniscono in un solo ghiacciaio detto ghiacciaio *du Mont Blanc* che scende rapidamente ad un isolotto di rupe (metri 2984), e per una cascata di *séracs* raggiunge il fondo del circo a 2400 metri circa di altitudine. Ad oriente si appoggia il ghiacciaio *du Mont Blanc* alle ripidissime pareti di protogino del *Mont Brouillard*, che in corrispondenza dell'isolotto più sopra mentovato presentano l'eccessiva pendenza di 60° cioè del 180 per cento. — Ad occidente viene ad essere limitato da una costiera di roccie frantumate, che si stacca dalla inferiore delle *Bosses du Dromadaire*, e, rendendosi sempre più evidente ed ampliandosi, scende alla *Cabane du Rocher du Mont Blanc* (metri 3253) (1), e termina nel basso del circo a 2420 metri di altitudine. — Ad un terzo circa di discesa il ghiacciaio *du Mont Blanc* invia ad O. una corrente laterale a scavalcare uno sperone della costiera *du Rocher du Mont Blanc*, e la corrente ritorna poscia a fondersi colla massa principale del ghiacciaio per un ripidissimo

(1) Quota presa dall'elenco delle guide di Courmayeur; l'autore ebbe coll'aneroide 3237 nel 1878.

canale di ghiaccio a N. E. ed al di sotto della *Cabane*. — Questo ghiacciaio alimentatore, diretto sinuosamente dall'alto al basso prima da N. a S., poi da N. 30° E. a S. 30° O. presenta le seguenti misure:

Lunghezza, dalla inferiore delle *Bosses du Dromadaire* al centro del circo glaciale	metri	4000
Larghezza massima, verso il mezzo su una linea trasversale alquanto al di sopra della *Cabane*, compresavi la corrente laterale di destra	»	1120
Larghezza minima, ad un quarto circa di discesa	»	680
Dislivello dalle origini al termine	»	2300
Pendenza per cento		57,5
» in gradi		30°.

Dal tratto di clinale che dalla inferiore delle *Bosses du Dromadaire* scende, formando un angolo al *Dôme du Goûter* ed alla *Aiguille du Goûter*, prima di raggiungere l'*Aiguille de Bionassay*, si staccano diversi spuntoni di roccia; l'estremo ad O. si accentua più fortemente, si eleva a 3827 metri, poi scende a S. 30° E. verso l'*Aiguille Grise* (metri 3263) e termina al basso del circo glaciale a metri 2574 di altitudine. La direzione di questo contrafforte dell'*Aiguille Grise* è a S. 30° E., mentre quello del *Rocher du Mont Blanc* è a S. 30° O.; ne risulta che risalendo alle loro origini i due contrafforti sono divergenti, convergenti invece ad angolo di 60° scendendo alle loro terminazioni. Nell'alto della depressione imbutiforme interposta quattro ripidissimi nevati scendono dalla inferiore delle *Bosses du Dromadaire*, dal *Dôme du Goûter*, dall'*Aiguille du Goûter*, convergono e si fondono in un solo ghiacciaio tutto rotto e sconquassato; è questo il secondo ghiacciaio alimentatore, che chiameremo del *Dôme du Goûter*.

Esso scende restringendosi in direzione S. e si unisce ai colleghi all'altitudine di 2574 metri a formare il ghiacciaio del *Miage*. Le sue misure sono:

Lunghezza, dal *Dôme du Goûter* al termine	metri	4000
Larghezza massima, tra l'inferiore delle *Bosses du Dromadaire* e l'*Aiguille du Dôme*	»	2500
Largh.ª minima, un po' al di sopra dei *séracs* terminali	»	350
Dislivello dalle origini al termine	»	1757
Pendenza per cento		44
» in gradi		24°.

Il contrafforte dell'*Aiguille Grise* ed il clinale del gruppo tra l'*Aiguille du Dôme*, per l'*Aiguille de Bionassay*, il *Colle del Miage* ed il *Col infranchissable*, e la *Téte Carrée* formano una grande *comba*, un canale diretto prima ed in alto a S. 10° O., poi, in mezzo, a S., infine, in basso, a S. E., fino al centro del circo a 2574 metri di altitudine. Esso ricetta il ghiacciaio alimentatore maestro, se non per mole, almeno perchè nella sua direzione fa seguito la principal corrente; è chiamato da alcuni ghiacciaio del *Miage* italiano superiore, meglio sarebbe chiamarlo ghiacciaio di *Bionassay* italiano. Dall'*Aiguille de Bionassay* discende in ripido nevato, e si espande e si eleva a sinistra fino quasi alla vetta della *Aiguille Grise.* A mezza discesa, sul più forte di curvatura, a 2921 metri di altitudine, si appoggia a destra ad un gran banco di roccia sormontato da piccolo nevato su cui trovasi il *Colle del Miage.* — Dal clinale a S. O. scendono al ghiacciaio numerose e ripide colate di ghiaccio, l'una delle quali conduce al *Col infranchissable.* La facciata a N. della *Téte Carrée*, che cade ancora sul ghiacciaio alimentatore in questione, è ancora essa solcata da canali di ghiaccio ripidissimi, misurando una pendenza alcuni del 154 per cento, cioè di 57°. Questo terzo ghiacciaio alimentatore presenta le misure seguenti:

Lunghezza massima, dall'*Aiguille du Dôme* al confluente cogli altri ghiacciai	metri	3320
Larghezza massima, nella curvatura	»	900
» minima, presso la confluenza	»	350
Dislivello dalle origini alla confluenza	»	1466
Pendenza per cento		45
» in gradi		24°.

Il quarto e più occidentale dei ghiacciai alimentatori è il più breve ed il più ripido; esso si origina dal clinale tra la *Téte Carrée* e l'*Aiguille de Tré-la-Téte*; si raccoglie in una colata di ghiaccio scendente a N. E. e raggiunge il fondo del bacino a 2400 metri di altitudine di fronte alla confluenza del ghiacciaio *du Mont Blanc.* Si aumenta pel contingente arrecato da numerosi canali che divallano dai ripidissimi fianchi della *Téte Carrée* e dell'*Aiguille de Tré-la-Téte.* Esso dà le seguenti misure:

Lunghezza, dal *Bonnet de neige* alla confluenza . . .	metri	1800
Larghezza massima, tra la *Téte Carrée* e l'*Aiguille de Tré-la-Téte*	»	1600

Larghezza minima, a mezza discesa	metri	360
Dislivello dalle origini alla confluenza	»	1379
Pendenza per cento		76,61
» in gradi		36° 30'.

Prima di chiudere l'accenno ai ghiacciai alimentatori, a dimostrare come alcune colate di ghiaccio incastrate nei burroni possono sostenersi su pendenze eccessive, daremo le misure di quelle che dal terzo ghiacciaio alimentatore, il ghiacciaio di *Bionassay*, scende dal *Col infranchissable:*

Lunghezza	metri	600
Larghezza	»	100
Dislivello tra le origini e la confluenza	»	677
Pendenza per cento		113
» in gradi		49°.

IV. *Canale di scolo e ghiacciaio del Miage entro il vallone omonimo.*

Le quattro correnti glaciali alimentatrici, raccogliendosi nel centro e sul fondo del circo, del bacino di raccoglimento ad un'altitudine di 2500 metri, dopo una rapida discesa da una media elevazione sul mare di 4200 metri, si comprimono, si stipano a vicenda, e, dopo una breve regione di *séracs* cumulativi appena accentuati e di crepaccie, si incamminano di conserva per il canale di scolo, di discesa, formando il ghiacciaio del *Miage.* — Questo si dirige a S. 40° E. in linea retta per 5 chilometri afforzandosi ancora di alcune piccole e ripidissime correnti che scendono dal *Petit Mont Blanc* a destra e dal *Mont Brouillard* a sinistra; le prime sono con pendenze straordinarie come ripidissime ed estremamente selvaggie sono le pareti formanti il destro versante; meno orride sono quelle del versante sinistro, ciononodimeno grandemente inclinate.

Il ghiacciaio del *Miage* ha un andamento così regolare che le morene formatesi alla confluenza dei diversi ghiacciai alimentatori corrono rettilinearmente, regolarmente, mantenendo le loro distanze, rimanendo ben distinte dalla loro origine fino allo sbocco dal vallone; ed è ciò che contribuisce a rendere il ghiacciaio del *Miage* così acconcio allo studio dei fenomeni glaciali. Questo andamento regolarissimo è dovuto alla costanza di direzione del canale di scolo, alla mancanza di rilevanti sporgenze laterali dei versanti, ed infine al debole e costante valore d'inclinazione dell'alveo ; difatti la superficie del ghiacciaio misura 2500 metri di altitudine alla confluenza dei quattro ghiacciai alimentatori, e 2100 circa al suo sbocco dal vallone originario; abbiamo per conseguenza un dislivello di 400 metri per 5000 di sviluppo orizzontale; ciò ci dà un pendìo superficiale dell'8 per cento, cioè di gradi $4 \, ^1/_2$. — Se poi teniamo conto della diminuzione di spessore del ghiacciaio da monte a valle, è facile ammettere che anche minore sia il grado di pendenza dell'alveo su cui scorre il ghiacciaio.

Per una metà circa del tragitto il ghiacciaio del *Miage* si mantiene colla superficie libera da detriti, salvo che sugli allineamenti delle morene; ma più in basso, allargandosi, queste morene vengono a riunire i loro margini, specialmente in fondo a dei solchi longitudinali che separano morena da morena, talchè percorrendo il ghiacciaio presso il termine del vallone esso appare tutto coperto da grandi accumuli di detriti angolosi e di varia grandezza. Esaminando però attentamente si vedrà che questi detriti formano semplicemente un velo superficiale che cuopre il ghiaccio vitreo sottostante. Ad ogni morena, salve le due laterali, corrisponde al di sotto un rilievo di ghiaccio, e ad ogni intervallo tra morena e morena un solco, una convalle che serve di alveo ai torrenti, talora poderosi, provenienti dalla fusione superficiale.

In alcuni punti si ammirano delle crepaccie chiuse in fondo, a pareti azzurrognole, ripiene di acqua estremamente limpida; talvolta in vece un fragore sordo ma possente segnala delle voragini in cui si inabissano le acque dei torrenti intermorenici. Le crepaccie vi sono rare visto il debole e costante grado di pendenza dell'alveo del ghiacciaio.

Di tanto, in tanto si possono ammirare dei conetti di sabbia portata dai torrentelli; la sabbia non forma che una velatura, il rilievo, talora di un metro e più di elevazione per uno o due metri di diametro, è quasi interamente formato di ghiaccio; questi rilievi sono originati dalla protezione esercitata dalla sabbia sul ghiaccio sottostante, per modo che apparentemente si elevano, abbassandosi invece realmente la superficie glaciale circostante non protetta contro l'azione struggitrice dei raggi solari; non altrimenti si formano i rilievi longitudinali, paralleli, submorenici.

Si possono pure ammirare, specialmente sul sinistro fianco del ghiacciaio, alcuni *funghi di ghiacciaio*, che, se non hanno l'imponenza di quelli visibili su altri ghiacciai famosi, servono però benissimo per lo studio del curioso fenomeno.

Il ghiacciaio del *Miage* si presenta oggidì depresso nella sua parte mediana; ma così non doveva essere in tempi più antichi, senza risalire al periodo glaciale, durante il quale la fiumana di ghiaccio si elevava di ben 250 metri sull'attuale livello, come il dimostra la levigatura delle roccie ai fianchi del canale di scolo, sulle pendici di *Sarsadorège* e *Brouillard;* ma in tempi non remoti, geologicamente parlando, doveva il ghiacciaio disporsi in superficie convessa di ben 50 metri più elevata nel mezzo dell'attuale superficie, come lo dimostra il ciglione delle morene laterali allo sbocco del vallone.

Del molto maggiore sviluppo nel periodo glaciale non rimangono a prova che le roccie levigate a 250 metri più in alto dell'attuale livello del ghiacciaio; morene antiche allo sbocco del vallone non abbiamo e ciò è facile a spiegarsi; in allora il ghiacciaio del *Miage,* per quanto più poderoso d'oggidì, non era che un tributario del gran ghiacciaio di *Val Veni* o *Val d'Allée Blanche* proveniente dal circo glaciale della *Seigne;* allo sbocco del suo vallone perdeva ogni sua individualità fondendosi col tronco glaciale maestro. — Non poteva crearsi morene sue proprie in *Val Veni*, chè i materiali da esso trasportati venivano presi dal ghiacciaio di *Val Veni* e depositati molto più in basso insieme con altri pervenutigli da ghiacciai tributarii più a monte o più a valle. — Inoltre in quell'epoca le aree di roccia scoperta nel vallone del *Miage* erano meno numerose e meno ampie di oggidì, molto meno imponente doveva per conseguenza presentarsi la mole di detriti morenici carreggiati dal ghiacciaio del *Miage.*

Il ghiacciaio del *Miage* nel suo canale di scolo misura pressochè ovunque la larghezza di 700 ad 800 metri. Lo spessore può calcolarsi in 200 metri.

Riassumendo ciò che d'importante presenta allo studio il ghiacciaio in questione e di comune con gli altri ghiacciai di primo ordine nei limiti del vallone originario abbiamo: l'ampiezza e la configurazione in circo glaciale regolarissima del bacino di raccoglimento; la presenza in esso di quattro grandi nevati, ghiacciai essi stessi, convergenti da altitudini vicine o superiori ai 4000 metri da N. 30° E., N., N. 45° O., S. 45° O. verso la parte centrale e profonda del circo glaciale; lo stiparsi e il fondersi di essi in una unica corrente ai 2500 metri di altitudine; il discendere regolarissimo di quest'unica corrente; i rilievi submorenici; le convalli intermoreniche; i conetti sabbiosi; i torrenti superficiali; le voragini che li inghiottono; le crepaccie chiuse e ripiene di acqua; i *funghi di ghiacciaio;* le traccie di uno spessore molto più grande durante il periodo glaciale, e di una potenza alquanto maggiore in epoca non troppo remota.

V. *Morene del ghiacciaio del Miage entro i limiti del vallone del Miage od in corrispondenza dello sbocco prima della curva del ghiacciaio.*

Ciò che merita l'attenzione dello studioso nel ghiacciaio del *Miage* è il regolarissimo andamento delle morene.

Queste sono cinque, due laterali, due medio-laterali ed una mediana. In allineamenti ben distinti lungo tutto il corso della corrente principale esse vengono poste in perfetta evidenza dalla diversa natura petrografica, e quindi dalla diversa tinta dei materiali loro costituenti, e ciò sia discendendo il ghiacciaio verso lo sbocco del vallone, sia, ed anche meglio, quando lo si osservi in un colpo d'occhio generale, sintetico dall'alto dei pascoli di *Arpes Vieilles,* sull'opposto versante di *Val Veni.*

La morena laterale sinistra è sviluppatissima, e presenta una tinta grigio-chiara, essendo formata in massima parte di frammenti di protogino; di fatti essa è costituita dai detriti provenienti dal *Monte Bianco di Courmayeur* e dal *Mont Brouillard*, carreggiati in basso dal ghiacciaio *du Mont Blanc;* il protogino forma quasi completamente le falde ed i fianchi dei monti della sinistra sponda di detto ghiacciaio, e del ghiacciaio del *Miage;* solo verso lo sbocco del vallone si addossano, o, meglio, fasciano il protogino strati di gneiss, micaschisti molto quarzosi, che non giungono però coi loro detriti ad alterare la tinta grigio-chiara di quelli di protogino.

La morena medio-laterale sinistra si origina alla terminazione della costiera della *Cabane du Rocher du Mont Blanc;* questa è formata di gneiss, e micaschisti grigi, biancastri, frequentemente rosso-giallognoli, giallastri e brunicci; epperò questa morena formata dall'incontro dei ghiacciai *du Mont Blanc* e del *Dôme,* emanante da un contrafforte non di molto emergente dai ghiacci, è meno sviluppata ma contraddistinto da una tinta rossastra o rosso-giallastra.

La morena mediana è grigia; essa si forma al termine della costiera dell'*Aiguille Grise* alla confluenza dei ghiacciai del *Dôme* e di *Bionassay*, La costiera dell'*Aiguille Grise* è formata ancora di gneiss e micaschisti di una tinta grigia ben marcata, coll' aggiunta di impasti feldispatico-quarzosi; meno che nella costiera del *Rocher du Mont Blanc* s'incontrano strati colorati in giallognolo od in giallo rossastro. Anche questa morena è poco sviluppata stante la poca estensione di roccie scoperte, e la sua tinta riproduce quella delle roccie della costiera da cui si origina.

La morena medio-laterale destra raccoglie le roccie del *Colle del Miage*, della *Tête Carrée*; sono schisti micaceo-quarzosi grigio-chiari, schisti ardesiaci grigio-scuri ed anche neri, schisti e gneiss rossicci e rosso-giallastri; la morena quindi presenta una tinta rosso-giallastra scura ed ha uno sviluppo ragguardevole essendo più ampia l'area di roccie scoperte da cui si forma.

Finalmente molto più voluminosa è la morena laterale destra e di un colore grigio-giallastro; essa raduna tutti i materiali rovinati dalla *Aiguille de Tré-la-Tête*, dal *Petit Mont Blanc*, dalla costiera di *Sarsadorège*. Abbondano dei gneiss e schisti grigi e grigio-rossastri, delle roccie amfiboliche le quali per decomposizione superficiale danno una tinta rossastra o giallastra, donde la colorazione grigio-giallastra di questa morena laterale destra.

Se havvi ghiacciaio classico per lo studio delle morene mediane, mediolaterali, e laterali questo è il ghiacciaio del *Miage* senza dubbio, sia per il regolare andamento che mantiene distinte le morene, sia per la diversa natura litologica dei contrafforti e fianchi montuosi originanti le morene, per cui queste acquistano carattere litologico distintivo marcatissimo, reso anche più evidente ed a distanza dalla diversità di tinta.

VI. *Deviazione del ghiacciaio del Miage e sua nuova direzione in rapporto con quella del nuovo alveo; invasione nella valle principale e divisione di questa in due porzioni per opera del ghiacciaio.*

Finora ci occupammo dei fenòmeni che fanno del ghiacciaio del *Miage*, un ghiacciaio interessantissimo e tipico, tanto più in quanto che è il solo nelle Alpi occidentali. Ora esamineremo alcune particolarità di esso ghiacciaio, dipendenti dal fatto non frequente di una deviazione dalla primitiva direzione, fortemente accentuata allo sbocco del vallone originario in una valle di ordine superiore. — Queste particolarità speriamo risultino chiare ed evidenti non tanto dalla testuale descrizione che ne daremo, quanto dalla ispezione dei disegni che accompagnano la presente monografia (1); disegni che sono il risultato di un diligente rilevamento fatto sul posto da due geometri-geologi il sig. Bruno d'Ivrea ed il sig. Marengo di Torino. Aggiungeremo che il sig. Bruno, coi dati raccolti nel lavoro di rilevamento, eseguì un rilievo in gesso del ghiacciaio del *Miage* convenientissimo come mezzo di dimostrazione nello insegnamento dei fenomeni glaciali.

Il ghiacciaio del *Miage* si dirige nel suo vallone originario da O. 50° N. ad E. 50° S., mentre la *Val Veni*, in cui sbocca e discende per circa 2 chilometri e mezzo, è diretta da S. 57° 30′ O. a N. 57° 30′ E. — Ove completa riuscisse la deviazione, cioè il ghiacciaio assumesse la direzione della *Val Veni*, l'angolo formato riuscirebbe di 97°, 30′; ciò però non accade, giacchè obbedendo alla spinta nella direzione primitiva, il ghiacciaio si getta contro il destro fianco di *Val Veni*, e, tenendosi stretto contro di esso, assume una direzione da S. 70° O. a N. 70° E., formando così colla nuova sulla vecchia direzione un angolo di 110°. Nonostante che questo sia un angolo ottuso pure la deviazione è troppo forte perchè non influisca grandemente sull'andamento di una massa di ghiaccio in corrente larga circa 800 metri con uno spessore allo sbocco superiore ai 100 metri e dia per conseguenza origine a certi fenomeni particolari degni di nota.

Il nuovo alveo al ghiacciaio del *Miage* nella *Val Veni* è ben diverso da quel che doveva essere prima del periodo glaciale. Le roccie secondarie, schisti alluminosi, calcari schistosi, carniole e gessi, formavano, occupavano allora il fondo di *Val Veni*, in rilievi sporgenti più o meno, a seconda della resistenza maggiore o minore agli agenti atmosferici, testate

---

(1) Preparati dal sig. Giovanni Marengo geometra. Le operazioni di rilevamento furono eseguite con uno squadro graduato a cannocchiale e con ecclimetro, e controllate con un goniometro col circolo graduato del diametro di $0^{m},08$, diviso in gradi e mezzi gradi, e col nonio diviso in 60 parti, avente per ciò l'approssimazione di 30″ e con ecclimetro a settore e diviso in gradi e mezzi gradi, col nonio diviso in 30 parti, per ciò dell'approssimazione di 1′. Il rilevamento fu fatto con 25 triangoli di lato, più o meno lunghi a seconda delle accidentalità del terreno: nessuno con angoli minori di 25° o maggiori di 130°. I punti secondari vennero rilevati o per intersezione da tre stazioni principali, o da stazioni secondarie collegate colla trisezione. La base venne misurata due volte colla catena di 10 metri, e per la poca divergenza dei risultati ne venne presa la media, che risultò di m. 249. 90. Il terreno sul quale essa giaceva è sensibilmente a livello. Il lato di massima lunghezza dei triangoli fu di m. 1022, ed il passaggio dalla base a questa venne fatta con una serie di triangoli con lati gradatamente crescenti in lunghezza. La base fu misurata sotto le case di Arpes-Vieilles.

di strati inclinati a S. E. e rialzati verso N. O., diretti da S. 80° O. - N. 80° E. dalle falde del *Mont Chétif* alle *Pyramides Calcaires* in alto dell'*Allée Blanche;* forse in vece di un'unica valle si aveva in allora una serie di valloncini di *comba* paralleli fra loro e paralleli alla direzione degli strati. L'attrito enorme dal grande ghiacciaio antico di 400 a 600 metri di spessore, che tutto riempiva lo spazio tra la catena del Monte Bianco e quella divisoria con *Val della Thuille* dal *Colle della Seigne* alla breccia tra il *Mont Chétif* ed il *Mont de la Saxe*, agì possentemente sulle roccie secondarie facilmente erodibili, ne asportò, livellò le testate dalla cappella di *Nôtre Dame de Guérison* fino ai *châlets premiers de l'Allée Blanche*, escavandosi un largo solco a lieve e quasi costante pendìo. Le *Pyramides Calcaires* sono il lembo estremo conservato a S. O. di questa formazione erosa. Questo lavoro colossale di abrasione preparò un alveo più ampio, meno accidentato, a pendìo più uniforme ai ghiacciai dell'*Allée Blanche*, del *Miage* e della *Brenwa* invadenti la *Val Veni* anche dopo la scomparsa del grande ghiacciaio antico.

Ora il ghiacciaio del *Miage* trovandosi per conseguenza ad avere più libere le mosse, ed obbedendo alla spinta che lo slanciava fuori del vallone di origine, potè naturalmente stiparsi contro l'opposto versante di *Val Veni*, scendere in basso tenendovisi strettamente addossato e prendere una direzione che non è precisamente quella della valle invasa. Venne così ad essere tagliato il grande alveo di erosione glaciale in due porzioni; la superiore a monte tra lo sbocco del ghiacciaio dell'*Allée Blanche* ed il ghiacciaio del *Miage*, e forma il *Piano Combal;* l'inferiore a valle tra il ghiacciaio del *Miage* e quello della *Brenwa*, ed è il piano di *Veni* e *Pertuis*.

VII. *Lago Combal; sua origine.*

L'invasione del ghiacciaio del *Miage* in *Val Veni*, l'occupazione di essa per circa 2500 metri, e lo stringersi del ghiacciaio contro il destro versante hanno prodotto una seconda conseguenza di grande rilievo, ed è che le acque di fusione dei ghiacciai a monte, delle nevi e quelle di sorgenti, che riunite formano la Dora dell'*Allée Blanche* dovettero acconciarsi a scendere in basso per uno stretto canale tra il versante destro della valle ed il piede della grande morena laterale destra del ghiacciaio del *Miage*. - Oggidì questo canale è aperto e nessun intoppo si oppone alla libera discesa delle acque, ma è probabile che in molte occasioni esso siasi otturato, almeno provvisoriamente, e, fatta astrazione anche da un completo sbarramento, potè benissimo in epoche diverse e remote riuscire insufficiente allo sfogo delle acque. Indubitatamente poi la morena stessa del ghiacciaio, addossandosi nel suo incurvarsi contro il versante destro della valle, vi formò diga o barriera, demolita in seguito ed in parte dalla pressione delle acque a dar loro uscita.

Ecco per conseguenza arrestarsi nel *Piano Combal* le acque scendenti da monte, e formare un lago ampio come il piano stesso, limitato a valle dalla morena laterale destra del ghiacciaio del *Miage*, a monte dai gradini di roccia ricoperti di morenico antico che conducono ai *châlets premiers de l'Allée Blanche*, ai fianchi dai versanti destro e sinistro della valle. — Quando diciamo che le acque ricopersero, trasformandolo in lago, il *Piano Combal*, ci riferiamo all'attuale condizione pianeggiante dell'area abbandonata in seguito dalle acque; ma in origine quella porzione di valle si presentava come una conca a fondo abbassantesi da monte a valle; condizione questa favorevolissima insieme collo sbarramento morenico allo accumularsi delle acque. — Questo gran lago glaciale misurava 2 chilometri di lunghezza, su 400 metri di media di larghezza; avea per conseguenza una estensione in superficie di 800,000 metri quadrati ed il ghiacciaio dell'*Allée Blanche* vi si precipitava in cascata di ghiaccio. Ecco la ragione per cui il ghiacciaio dell'*Allée Blanche* non presenta nel *Piano Combal* delle morene ben marcate e distinte.

Coll'andar del tempo i materiali trasportati e dalla Dora dell'*Allée Blanche*, e dal ghiacciaio dell'*Allée Blanche*, e dai torrentelli del versante destro e sinistro hanno innalzato e livellato il fondo del lago a monte, mentre lo sbrecciarsi della diga morenica, dando libero sfogo alle acque ne abbassò il livello. Il lago andò via ritirandosi da monte a valle ed ora è ridotto ad un'area di poco più di 24,000 metri quadrati nella inferiore parte del *Piano Combal*, immediatamente al piede della morena del *Miage;* vedremo in seguito come alcune accidentalità di questa diano una configurazione al lago un po' diversa da quella che dovrebbe avere a seconda del suo modo di origine. Il lago nella sua parte più a valle e vicino alla uscita del torrente è assai profondo, ma la sua profondità va via diminuendo verso l'alto; il lago gradatamente si trasforma in terreno acquitrinoso e ghiadi, ora più, ora meno innondati, cui succedono aree che incominciano ad inverdirsi, tagliate dai numerosi canali in cui si divide la Dora, finchè il *Piano Combal* si fa completamente asciutto sotto al ghiacciaio dell'*Allée Blanche,* ed ai pascoli dell'istesso nome. Il lavorìo di riempimento sarebbe già forse più avanzato se per motivi di difesa territoriale non si fosse costrutta nel 1742 (1) all'uscita del torrente dal lago una grande e forte diga in muratura, elevata di circa 3 metri sul livello del lago, con una potente chiusa per innalzare a piacimento il pelo delle acque ed innondare il sentiero a destra scendente dal *Colle della Seigne.* Oggidì la chiusa non esiste più, ma l'apertura della bocca di sfogo nella robusta diga raggiunge appena i tre metri e mezzo e regola così l'efflusso. Ciononostante il lago diminuisce di ampiezza ogni anno e se la diga venisse abbattuta alla stretta apertura attuale, si sostituirebbe una breccia di venti a trenta metri, ed in poco tempo il lago si ridurrebbe a ben poca cosa, cioè ad avere poco più di un 150 metri di lunghezza su 30 a 40 di larghezza, ed un'ampia area in breve riducibile a pascolo si conquisterebbe alla speculazione (2).

Questo lago presenta una curiosa particolarità; da sinistra si alimenta colle acque provenienti per fusione superficiale dal ghiacciaio dell'*Allée Blanche* e per infiltrazione dalla base della morena del ghiacciaio del *Miage;* da destra invece colle acque di numerose sorgenti; ne viene che a sinistra le sue acque sono limacciose, torbide, biancastre nella buona stagione e limpidissime a destra; a sinistra il lago è di una tinta biancogiallastra verdiccia, a destra presenta la bella tinta verde-cupo, quasi nera dei più belli laghi alpini; e questa separazione delle acque limpide dalle torbide, di diversa densità, si mantiene per un certo tratto anche nella Dora a valle della bocca di efflusso.

VIII. *Velocità di discesa del ghiacciaio; contrazione ed espandimento del ghiacciaio prima e dopo la deviazione; divisione in tre correnti terminali.*

Il ghiacciaio del *Miage* un poco al di sotto dell'uscita dal vallone originario, al cominciare della curva, ha una velocità misurata in questo anno di 5 metri al mese, cioè dai primi di agosto ai primi di settembre; ciò

---

(1) I trinceramenti e la diga presso il lago Combal esistevano già nel 1691, come risultò all'autore da documenti che gli caddero sott'occhio dopo aver presentato il presente lavoro.

(2) VIOLLET-LE-DUC dà per altitudine al lago di Combal presso l'apertura di efflusso m. 1966: questa quota fu presa come punto di partenza per calcolare l'altitudine alla quale fu misurata la base (m. 1997), e per conseguenza tutte le quote segnate nel rilevamento.

darebbe una velocità annua di discesa di 60 metri. Di questa quota non possiamo però tenerci molto sicuri per diverse ragioni; anzitutto perchè calcolata in un'epoca dell'anno in cui la velocità di discesa si avvicina al massimo; in secondo luogo perchè, se da un lato abbiamo un rallentamento nella massa di ghiaccio al momento in cui è obbligato ad inflettersi, d'altra parte, a seconda che ci avviciniamo alla curva esterna od alla interna, abbiamo, come in tutte le correnti, una maggiore velocità nel primo ed una minore nel secondo caso; in terza linea, nell'atto che la massa di ghiaccio sbocca da uno stretto vallone in più ampio alveo, si trova in condizione anormale che influisce evidentemente ad imprimerle una velocità diversa da quella che dovrebbe normalmente avere. — Per conseguenza sarebbe imprudente per ora far troppa fidanza sul dato raccolto; ma i numerosi segnali stabiliti nelle varie regioni del ghiacciaio per le operazioni di rilevamento saranno utilissimi per calcolare negli anni venturi la velocità di discesa del ghiacciaio nelle varie sue parti fuori del vallone del *Miage*. — Intanto possiamo prevedere che questa velocità sarà maggiore a valle della deviazione, giacchè, se a monte di essa abbiamo una pendenza dell'8 per cento, a valle invece abbiamo un dislivello di 300 metri per 2800 metri in orizzontale, cioè una pendenza del 12 per cento.

Al principio della deviazione il ghiacciaio del *Miage* si trova come stretto e rinserrato in una gola formata dallo sprone terminale del contrafforte del *Mont Brouillard* ed il distacco della morena laterale destra dalle rupi terminali del contrafforte di *Sarsadorège*. Esso vi misura appena un 600 metri di larghezza. Appena però compiuta la deviazione, trovando alveo più ampio e libero, si allarga e tra i *châlets du Brouillard* ed un punto situato a mezza discesa tra il lago *Combal* e l'*Avizaille* ha una larghezza di circa 1200 metri, comprese le due morene laterali destra e sinistra. Conseguenza della strangolatura prima di incurvarsi, conseguenza della stretta curva contro le rupi di sinistra e della resistenza minore incontrata a destra nella morena laterale, si è che, mentre a destra il ghiacciaio estendendosi in più ampia curva abbassa il suo livello, che si trova oggidì di una trentina di metri inferiore al ciglio della morena istessa, e presenta delle crepaccie divaricate dal mezzo verso l'estremo margine a destra, sulla sinistra invece le masse di ghiaccio si accavallano, si comprimono, si spezzano formando dei muri che si elevano fino all'altezza del ciglio della morena laterale sinistra. A destra la morena laterale si sviluppa in larga curva, la laterale sinistra invece, oltrepassato lo sperone del *Brouillard* e la linea segnante la deviazione, sotto alla quale il ghiacciaio si allarga espandendosi sul fianco, si spezza per modo da formare un canale scendente ai ristretti pascoli, al curioso bacino dei *châlets du Brouillard*.

Il ghiacciaio del *Miage* e pel contrarsi alla sua uscita dal vallone omonimo e successivo allargarsi, e per la curva regolare di sua deviazione, e per l'abbassamento e l'innalzamento del livello nelle curve esterna ed interna si comporta analogamente ad una grande fiumana.

Per la contrazione del ghiacciaio e successiva dilatazione, per il cambiamento di direzione le morene superficiali, mediana e medio-laterali, perdono alquanto della loro regolarità, si confondono pei margini, in parte vengono ingoiate dalle crepaccie del ghiacciaio, e, sommandosi poscia ai detriti emergenti in gran copia dalla massa del ghiaccio per l'ablazione, formano un rivestimento irregolare e potente sulla superficie del ghiacciaio. Ciononostante l'andamento morenico è meno caotico in questo che in altri grandi ghiacciai alla loro porzione terminale, come si vedrà in seguito dalla descrizione speciale dei cordoni morenici e meglio ancora dall'unito disegno del ghiacciaio (Tav. I).

Il ghiacciaio, presa la nuova direzione, si allarga espandendosi a destra ed a sinistra; si determinano per conseguenza nella sua massa due grandi sistemi di lacerazioni longitudinali, per le quali vengono a costituirsi tre correnti terminali sufficientemente distinte (vedi Tav. I).

IX. *Corrente sinistra e morena laterale sinistra.*

Le due correnti laterali sono molto più sviluppate ed imponenti che non la mediana e più di tutte lo è la sinistra, giacchè il ghiacciaio, nonostante che si spinga per l'impulso ricevuto contro il versante destro della valle, pure tende a scendere a sinistra essendo l'alveo alquanto inclinato contro la catena del Monte Bianco. — Ciò è provato dalle misure altimetriche; il *thalweg* della Dora tra la morena ed il versante destro ad un quarto circa di discesa tra il *Lago Combal* ed il ponte dell'*Avizaille* è a metri 1930, mentre allo estremo di una linea trasversale al ghiacciaio sul versante sinistro, al piccolo bacino del *Brouillard* non abbiamo che una elevazione di metri 1910; la differenza è debole, ma pur sufficiente a determinare un movimento obliquo verso sinistra della massa di ghiaccio. — Le acque stesse di fusione del ghiacciaio provano la pendenza da destra a sinistra; difatti il corpo maggiore di acqua sbocca dalla estremità della sinistra corrente di ghiaccio e poco rilevanti sono i torrenti originati dalla mediana e dalla destra corrente.

La corrente sinistra rovesciandosi contro il versante N. O. della valle devia alquanto dalla direzione generale del ghiacciaio incurvandosi, e la convessità della curva si porta contro i *châlets du Brouillard*. Questa corrente sinistra si sviluppa dal punto di separazione per 1400 metri in lunghezza, su circa 300 metri di media larghezza. Verso il suo termine si amplia alquanto ed è foggiata a bastione di ghiaccio inquinato da fini detriti, nel quale si apre una grande caverna che dà uscita al maggior corso d'acqua fornito dal ghiacciaio del *Miage*.

Nella sua curva convessa questa corrente spinge contro i *châlets du Brouillard* la morena laterale sinistra, elevata allo esterno di una cinquantina di metri e ricoperta di rade boscaglie. — Contro ad essa viene ad appoggiarsi il cono di deiezione del torrente *Brouillard*, che, per la presenza della morena, è deviato ad E. fino a raggiungere la Dora dal *Miage* al termine della morena, dopo averla lambita ed erosa. La morena laterale sinistra gettata così contro il cono di deiezione del *Brouillard* nel suo massimo di convessità, lascia libero a monte un piccolo e curioso bacino; è un angolo perduto e segregato di pascoli compreso tra la morena laterale e le roccie del *Brouillard* (metri 1910). — Esso attirò l'attenzione di De Saussure nel 1774 che così lo descrive:

« Mais, au milieu de ces débris, dans la région du monde la plus
» triste et la plus sauvage, on est agréablement surpris de trouver un
» réduit charmant, qui forme le plus singulier contraste avec ses environs.
» C'est une petite plaine, couverte de la plus riante verdure, bordée
» d'une ligne de mélèzes, et arrosée par une belle source d'une eau vive
» et fraiche, dont les bords sont couverts des fleurs lustrés du *Caltha*
» *palustris* ».

La morena laterale sinistra termina contro le rupi dell'*Aiguille du Châtelet*, obbligando il torrente *Brouillard* a lambirne le basi.

Là ove termina la corrente sinistra del ghiacciaio si può esaminare anzitutto un'area pianeggiante ad arco dello sviluppo in larghezza tutto al più di 70 ad 80 metri, che segna la quota di indietreggiamento ultimo della fronte della corrente. — A valle di questo circo abbiamo una serie di sette ad otto piccole morene laterali destre e sinistre della corrente, riunite da frammenti di archi morenici frontali, tagliate in basso obliquamente dal torrente *Brouillard* (metri 1754). — Il torrente originato da questo ramo del ghiacciaio scorre in un canale fra mezzo a questi piccoli cordoni morenici; di questi i tre a sinistra del torrente rimpiazzano la grande morena laterale sinistra e segnano tanti periodi di arresto della corrente di ghiaccio nel suo movimento di indietreggiamento e di restringimento. Lo sviluppo in lunghezza di questo complesso di cordoni morenici è di 200 a 250 metri ed in larghezza di 300 a 350. In tempi non troppo remoti questa corrente sinistra doveva spingersi contro la base delle roccie del *Châtelet;* il torrente *Brouillard* doveva aprirsi un varco per mezzo di un canale sottoglaciale; in seguito, e l'azione erodente del torrente *Brouillard*, e quello della Dora del *Miage*, e lo sviluppo del cono di deiezione del *Fresnay* hanno demolito completamente l'arco morenico frontale obliquo costrutto nei tempi di massimo sviluppo della corrente laterale sinistra del ghiacciaio del *Miage*.

La morena laterale sinistra è imboschita fin quasi contro le roccie del *Châtelet*, cioè alla sua terminazione; ciò prova l'antichità di sua costruzione; nel mentre istesso la scarpa terminale della corrente sinistra del ghiacciaio si trova appena oggidì distante di 300 o 400 metri dalla linea che doveva raggiungere nell'epoca di massimo sviluppo; ora dando alla morena laterale sinistra, col calcolo dell'età delle piante di alto fusto che vi si trovano, un minimo di 300 anni di età, abbiamo un ritiro di questa corrente sinistra di 400 metri per 300 anni, cioè appena di $1^{m},33$ per anno. — Questo minimo di cambiamento, questo minimo di oscillazione nello sviluppo della corrente di ghiaccio è interessante e degno di esser notato in un gruppo di montagne ove in generale i ghiacciai presentano grandissime e rapidissime oscillazioni. — Puossi spiegare questa quasi stazionarietà relativa colla grande mole di materiale detritico, che per oltre a 3 chilometri e mezzo cuopre completamente il ghiacciaio proteggendolo dall'azione consumatrice dei raggi solari. I ghiacciai scoperti sono quelli più soggetti a variazioni nella loro lunghezza; ad esempio si possono citare i due ghiacciai *Nero* e *Bianco* nelle Alpi Delfinesi in *Vallouise*, il primo coperto da ingente mole di detriti è stazionario, l'altro vicinissimo sgombro da detriti è soggetto invece a rapide varianti.

Il torrente sboccante dalla corrente sinistra non mantenne sempre l'istesso alveo, chè lateralmente a destra trovansi altri solchi intermorenici, nei quali le ghiaie e le sabbie indicano il passaggio di acqua corrente.

La corrente sinistra del ghiacciaio del *Miage* è coperta superficialmente dalla morena medio-laterale sinistra, cui è dovuta la formazione dei cordoni morenici laterali e dei tratti di archi morenici frontali a valle dell'estremo della corrente.

A destra la corrente in questione s'incurva formando una concavità corrispondente alla convessità di sinistra ed è accompagnata da una bella morena laterale formata dal contingente della morena mediana del ghiacciaio; questa morena accompagna fin quasi al suo termine la corrente sinistra per una lunghezza di 700 ad 800 metri.

X. *Corrente destra.*

La corrente destra scende molto più in basso della sinistra, ma, invece di terminare con un allargamento si assottiglia, e si partisce in diverse lacinie irradianti, separate da rilievi morenici longitudinali. Il suo sviluppo in lunghezza è di 1500 metri, con una larghezza di 250 metri verso il mezzo e di 120 presso al termine. Questa corrente s'incurva in senso inverso della sinistra, cioè colla convessità a S. E. e la concavità a N. O., per modo che le terminazioni delle due correnti destra e sinistra vengono l'una all'incontro dell'altra e distano appena di un 200 metri.

Giunta a $^2/_5$ di discesa dalla linea di separazione questa corrente si restringe notevolmente ed invia a sinistra una piccola diramazione a N., che raggiunge quasi l'estremo margine destro terminale della sinistra corrente. Questa diramazione ha una certa importanza in quanto che essa riuscì a sbrecciare la morena laterale sinistra propria della corrente destra; questa morena speciale è ben sviluppata, formata dai materiali della morena medio-laterale destra del ghiacciaio del *Miage;* si allunga in curva per 1200 metri fino all'incontro della Dora del *Miage*, che la taglia obliquamente all'apice sotto un angolo di 65°; è in gran parte imboschita e verso il suo mezzo è rotta e tagliata in due dalla sbrecciatura dovuta alla piccola diramazione più sopra accennata della corrente destra.

A destra la grande corrente destra manda pure lateralmente una sporgenza più ampia, ma meno accentuata della sinistra, da cui un piccolo torrente scende a raggiungere la Dora dell'*Allée Blanche* sotto il ponte dell'*Avizaille*.

Restringendosi la corrente si acumina, si divide in lacinie, che danno origine a cinque cordoni morenici longitudinali, irradianti, che segnano tanti periodi di sosta nel restringersi della corrente; quello estremo di sinistra si appoggia alla morena laterale sinistra speciale della corrente in questione, l'estremo di destra corre quasi parallelo alla grande morena laterale destra del ghiacciaio del *Miage*, da cui lo separa il solco percorso dal più sopra mentovato torrentello. Le estremità dei diversi cordoni morenici longitudinali, alcuni con uno sviluppo in lunghezza di 400 a 500 metri, sono rilegati da un arco morenico frontale interrotto e sbrecciato là ove il torrente della corrente di destra, molto più piccolo di quello della sinistra, si fa strada a raggiungere la Dora del *Miage*. L'attuale distanza di questo arco morenico frontale ridotto a lembi dal termine a punta della corrente di ghiaccio è di 200 metri circa, segnanti altrettanti di ritiro della massa glaciale, ed a metri 1673 sul livello del mare.

A valle di questo arco morenico frontale relativamente recente, ne troviamo un altro antico tutto coperto di boschi e coltivato a pascoli alla base (metri 1623); esso misura un'area approssimativa di 65000 metri quadrati, e termina in basso a punta introducendosi come cuneo tra la Dora del *Miage* e quella dell'*Allée Blanche*, che ivi confluiscono.

La corrente destra si appoggia solo pei due terzi a monte alla grande morena laterale destra del ghiacciaio del *Miage*, e poi, restringendosi, l'abbandona per rimanere fiancheggiata dai rilievi morenici longitudinali di formazione posteriore al restringimento; l'estremità della corrente di ghiaccio dista lateralmente dalla grande morena laterale destra di almeno 240 metri.

Notisi il fatto che, mentre la corrente di sinistra nel ritirarsi ridusse la sua lunghezza mantenendosi quasi la larghezza primitiva, la corrente di destra di poco si accorciò, ma di molto si restrinse.

La grande morena laterale destra presenta molte particolarità degne di essere segnalate, epperò ne lascieremo per ultima la descrizione.

XI. *Corrente mediana; morene incidenti; bacino intermedio.*

Espandendosi il ghiacciaio del *Miage* a destra ed a sinistra, in maniera da lacerarsi longitudinalmente su due linee, e formando due grandi correnti incurvantisi in senso inverso e guardantisi per le loro concavità, doveva naturalmente verificarsi nella parte mediana, tra le due correnti laterali, una regione di ritardo nel movimento di discesa non solo, ma ancora di minore accumulo di ghiaccio, una specie di regione di relativo riposo tra due laterali di maggiore attività. Questa regione, limitata a destra ed a sinistra dai margini concavi delle due correnti laterali, doveva foggiarsi a doppia curva convessa verso l'esterno, cioè a foggia di isola ovale, uno degli apici corrispondente alla divisione del ghiacciaio in due correnti a monte, l'altro alla riunione od al grande avvicinamento in basso delle estremità inferiori delle due correnti. Se non che una sporgenza, o meglio una corrente mediana del ghiacciaio venne ad intrudersi in questa area di riposo relativo, e, sostituendo all'apice superiore un angolo rientrante dall'alto al basso, trasforma la configurazione ovale del bacino in quella di un cuore colla base in alto e l'apice in basso.

In questa area od in questo bacino mediano vennero a darsi ritrovo i materiali della morena mediana e quelli della morena medio laterale destra del ghiacciaio del *Miage*, a formarvi un duplice cordone a destra ed a sinistra di morene incidenti, funzionanti, come già vedemmo, il destro da speciale morena laterale sinistra della grande corrente destra, ed il sinistro da speciale morena laterale destra della grande corrente sinistra. Ove non si fosse verificata l'esistenza della mediana corrente, avremmo avuto un'area ellittica irregolare, ad apici acuminati, chiusa tra le concavità corrispondentisi delle due correnti laterali, rilevata sui margini da un cordone morenico incidente, o foggiata a conca o bacino nell'interno.

Il divaricarsi delle due grandi correnti incurvandosi in modo da presentarsi l'una all'altra le loro concavità, diede origine all'area interposta ellittica, di relativo riposo, ove vennero ad accumularsi i detriti carreggiati superficialmente dalle due correnti; e viceversa lo accumularsi di questi detriti creò nel mezzo un ostacolo così forte da impedire in seguito ogni avvicinamento e saldarsi dei margini delle correnti.

La piccola corrente mediana che si introduce in questo bacino misura presso a poco 350 metri di sviluppo in lunghezza su 150 di larghezza media, e si presenta essa stessa fiancheggiata da un doppio cordone morenico, che avanzandosi in punta occupa parte notevole del bacino. — Oggidì la scarpa terminale della piccola corrente dista circa 160 metri dall'angolo d'incontro dei due cordoni morenici laterali, d'onde, per una breccia, esce il torrentello, che percorrendo per il lungo tutto il bacino, lo abbandona per una seconda breccia all'apice inferiore, tra le due morene incidenti, e va all'incontro del margine estremo interno della grande corrente di sinistra e poi si versa nella Dora del *Miage*.

L'area dell'intiero bacino per la parte sgombra da ghiacci è di circa 200,000 metri quadrati; ha realmente all'ingresso la forma di un cuore; i due margini convessi sono formati dalle due morene incidenti, laterali di destra e sinistra delle correnti di sinistra e destra; a monte rimangono ampiamente divaricati, a valle si uniscono ad angolo acuto (metri 1795) lasciando uno stretto passo al torrente. Dalle estremità a monte di esse morene marginali scendono ad angolo acuto nell'interno del bacino le due morene laterali destra e sinistra della mediana corrente del ghiacciaio. — Cosicchè abbiamo un piccolo bacino interno tra queste due ultime morene al piede della scarpa terminale della piccola corrente di ghiaccio; da questo piccolo bacino interno esce il torrentello di fusione; poi lateralmente due solchi interposti tra le piccole morene laterali interne e le morene marginali esterne, percorsi i due solchi ciascuno da un torrentello; uniti i tre corsi d'acqua ed i tre valloncini si ha una sola depressione percorsa da un solo torrente, che per una breccia esce dal bacino totale.

Questo curiosissimo bacino mediano, che si trova ad un livello inferiore a quello della superficie delle due grandi correnti del ghiacciaio per una cinquantina di metri, e che dicemmo avere all'ingrosso la forma di cuore, e le cui depressioni raffigurano quasi le due branche di una tanaglia, è sufficientemente imboschito, come pure lo è il seguito della morena laterale sinistra della corrente di destra; le piante annose che vi si scorgono provano l'antichità di formazione di questa conca interglaciale, e possiamo dire sopraglaciale, giacchè la divisione del ghiacciaio in correnti è superficiale, ma nella massa queste si fondono assieme. Vi si trovano frequentemente ed in istato di tranquilla possessione dei camosci e delle marmotte, onde l'appellativo di *Jardin des Chamois*. Che le tre correnti di ghiaccio si saldino nelle profondità in una sola massa, e che le morene incidenti non raggiungano l'alveo del ghiacciaio sarebbe provato dal fatto che le acque di fusione di quasi tutto il ghiacciaio si concentrino in un solo corpo sboccante dalla corrente glaciale di sinistra, essendo a suo confronto insignificanti gli altri piccoli torrenti.

Ed ora veniamo ad esaminare la grande morena laterale destra del ghiacciaio del *Miage*.

XII. *Morena laterale destra.*

Il ghiacciaio del *Miage* incanalato per cinque chilometri nel suo vallone originario in direzione da O. 50° N. ad E. 50° S. doveva, uscendo dal vallone del *Miage* ed incontrando libera via nella *Val Veni*, ed obbedendo alla velocità da cui è animato, tagliare la valle mantenendosi nella sua primitiva direzione con un angolo di 97° 30′, urtare contro il versante destro sotto ai *châlets d'Arpes Vieilles*, risalirlo alquanto, e poi ripiegarsi bruscamente per assumere la direzione della *Val Veni*. Invece, appena uscito dal vallone del *Miage*, accenna ad inflettersi, s'inflette, s'incurva e gradatamente assume una direzione sul suo fianco destro che si avvicina più all'E. di 12° 30′ che non quella della valle che gli serve di nuovo alveo. Questo inflettersi in curva e non ad angolo è dovuto anzitutto al fatto che, appena uscita dalla stretta rocciosa del vallone del *Miage*, la corrente di ghiaccio risente l'influenza del pendìo più rapido della valle principale (12 per cento) che non quello del vallone originario (8 per cento); laonde che, neutralizzata gradatamente in massima parte la spinta *a tergo* in direzione E. 50° S. ed obbedendo via via all'invito della maggior pendenza, il ghiacciaio, prima di raggiungere il versante opposto allo sbocco, ha cambiata la sua direzione. Inutile qui il dimostrare come seguendo l'impulso di due forze, l'una di discesa da O. 50° N. ad E. 50° S., l'altra da S. 57° 30′ O. a N. 57° 30′ E., il ghiacciaio, come una corrente qualsiasi, debba nel periodo di transizione dalla vecchia alla nuova direzione, prendere tante direzioni intermedie, cioè disporsi in curva, corrispondenti al graduale affievolirsi della forza che lo spingeva a S. 50° E. ed accentuarsi di quello che lo invita a scendere verso N. 57° 30′ E. — Perdurando tuttavia, o meglio, non annullandosi completamente l'influenza della prima forza, il ghiacciaio non viene ad assumere la vera direzione della valle principale a N. 57° 30′ E., ma quella invece a N. 70° E., almeno per la corrente destra.

Preso questo andamento il ghiacciaio non potè più abbandonarlo, sia perchè non cessarono di agire le forze che lo determinarono, sia perchè al suo fianco destro venne a costruirsi una formidabile morena laterale, la quale, seguendo fedelmente la curva marginale del ghiacciaio, si costituì in diga, in argine direttivo che costrinse il ghiacciaio a mantenere l'andamento assunto.

Rimanendo il ghiacciaio ne' suoi limiti primitivi di sviluppo in larghezza e spessore, esso non provava difficoltà a mantenersi nella direzione presa, e non faceva alcuno sforzo per modificarla; ma ammesso un periodo di aumento nella massa glaciale, questa doveva tendere naturalmente a trasformare la curva di deviazione in un angolo di deviazione, mantenendosi in tal caso più energica e più a lungo l'azione di spinta da O. 50° N. ad E. 50° S. che lanciava il ghiacciaio contro il versante opposto allo sbocco. In tal caso il ghiacciaio doveva agire tanto più potentemente contro l'argine morenico di destra quanto maggiore ne era l'aumento in larghezza e spessore, e tendere a sformarlo, ad adattarlo alla variante di andamento che esso cercava di assumere. Questo conato del ghiacciaio contro l'argine morenico determinava una reazione di resistenza dell'argine morenico contro la corrente di ghiaccio, quindi una mutua e potente compressione, ed altri fenomeni che ora esamineremo descrivendo la morena laterale destra; fenomeni così interessanti da meritare, a nostro giudizio, un cenno speciale.

La morena laterale destra del ghiacciaio del *Miage* si allontana gradatamente dalla base delle roccie di *Sarsadorège* un 600 metri prima della loro terminazione nel *Piano Combal* e nell'angolo acuto formato dalle roccie e dalla morena scorre un torrentello di acqua biancastra in estate, torrentello che è uno degli alimentatori del *Lago Combal.* La morena dal punto di sua individualizzazione forma un bellissimo e regolare cordone, parallelo all'andamento del ghiacciaio, leggiermente incurvantesi pel tragitto di circa un chilometro.

In corrispondenza di un grosso masso che sta incastrato nel ciglio morenico (metri 2042) giunge dallo esterno un sentiero a valicare la morena e scendere sul ghiacciaio; da questo punto la morena procede ancora regolarissima per un 270 metri, poi, al punto segnato colla quota altimetrica di 2041 metri, cessa ogni regolarità, la morena è rotta e sbrecciata, il ciglio regolare è demolito e la sbrecciatura è ampia presso a poco di 300 metri. — Oltrepassata questa prima rottura la morena riprende il suo regolare andamento con una curva più marcata, avendo di già oltrepassato il massimo di deviazione; questo tratto di andamento regolare misura circa 150 metri. Interviene una seconda rottura di 140 metri di ampiezza, poi la morena ripiglia a svilupparsi in lunghezza parallelamente alla direzione del ghiacciaio; s'inflette verso la linea mediana di esso corrispondentemente alla sua strangolatura, e poi nuovamente verso l'esterno là ove il ghiacciaio si espande lateralmente nella sua grande corrente di destra, s'incurva infine per la terza volta verso il mezzo della massa di ghiaccio avvicinandosi al termine del ghiacciaio.

Questa morena si mantiene ben distinta e regolarmente formata fino al suo termine al ponte dell'*Avizaille*. Dalla seconda rottura al termine misura in lunghezza 2 chilometri.

Lasciando a parte i tratti ove dessa morena perdè la sua regolarità, osserviamo subito che il suo pendìo esterno è regolarissimo, di circa 25°, là ove torrentelli superficiali non hanno originato dei solchi, delle escavazioni; essa è all'esterno in gran parte ricoperta di vegetazione arborea, e più lo sarebbe se la foresta non fosse stata distrutta quasi totalmente per uso dei *châlets* vicini. — Se esaminiamo invece l'interno versante, la faccia guardante il ghiacciaio, non possiamo far a meno di essere colpiti dalla sua ripidezza; il suo pendìo raggiunge talora i 55°; ciò è visibilissimo nel tratto a monte della prima rottura, quantunque si manifesti puranco nella inferiore porzione della morena.

L'elevazione del ciglione della morena sul livello del *Lago Combal* è di 76 metri corrispondentemente al gran masso più sopra mentovato, e di 100 a 120 metri più presso alle roccie di *Sarsadorège;* l'elevazione va diminuendo di mano in mano che ci avviciniamo al termine della morena. Il dislivello poi interno è di 30 metri corrispondentemente al masso istesso; questo dislivello interno indica un abbassamento della superficie del ghiacciaio maggiore di 30 metri, abbassamento che lasciò scoperto, anzi originò il versante interno della morena.

La superficie del ghiacciaio è, per conseguenza, sempre allo istesso punto, di 46 metri più elevata del *Piano* o del *Lago Combal;* le acque di fusione filtrando attraverso la morena danno luogo a sorgenti extramoreniche alimentatrici anch'esse del lago. Ora calcolando che il fondo su cui scorre il ghiacciaio sia per lo meno a livello del fondo del lago, avremo in corrispondenza di questo una potenza della massa di ghiaccio non lontano dagli 80 o 90 metri, dei quali 46 superiori al livello del lago.

XIII. *Pressione della massa glaciale contro la morena laterale destra.*

Abbiamo osservato come il pendìo interno raggiunga talora e superi anche i 55°; pendìo incompatibile con dei materiali incoerenti di lor natura, quali sono i materiali morenici. Questo maggior pendìo interno fa sì che lo sviluppo in larghezza del versante interno è minore a quello dell'esterno; difatti abbiamo le seguenti misure :

		Versante interno		Versante esterno
Al distacco della morena dalla roccia: ampiezza	metri	55	metri	47
Al limite delle roccie di *Sarsadorège*. .	» »	30	»	235
Fra le due sbrecciature	» »	35	»	141
A valle della sbrecciatura inferiore. . . .	» »	23	»	117
Alla separazione delle correnti del ghiacciaio	» »	28	»	100.

Più in basso mancando internamente il sostegno della massa glaciale, perchè da essa si allontana la morena, questa è rovinata ed erosa parzialmente tanto all'esterno che all'interno, epperò non possiamo tener conto dei dati della misura in larghezza dei due versanti. Notiamo che il massimo di divergenza tra la larghezza di questi due versanti corrisponde al tratto di morena compreso tra la porzione a monte della rottura superiore e quella a valle della inferiore; questa coincidenza è di grande importanza per istabilire la comunanza di causa e della pressione della massa glaciale contro la morena massima in quel tratto, col conseguente pendìo interno più forte e più ristretto, e delle rotture nella morena.

Osserviamo ancora che il ciglio della morena, là ove non è sbrecciato, è acutissimo quantunque formato di materiali incoerenti, quali si presentano in una miscela caotica di massi di ogni dimensione in un polviscolo finissimo, prodotto dalla perfetta triturazione e macinazione dei frammenti di roccia presi tra il fondo e le sponde del ghiacciaio e la massa di ghiaccio in movimento.

Esaminato poi da vicino questo materiale, che a prima vista sembrerebbe dover franare colla massima facilità solo a porvi sopra il piede o ad intaccarlo colla piccozza o col bastone ferrato, si trova invece che esso resiste molto bene, tanto da potervi scavare dei gradini per agevolare il passo nei pendìi troppo ripidi.

Lasciamo da parte il fatto della molto minor larghezza del versante interno, conseguenza diretta del pendìo molto più ripido, ma teniamo conto della stabilità di questo ripido versante e della estrema acutezza dello spigolo formante il ciglione morenico molto incoerente. — Dobbiamo ammettere un lavorìo di assodamento posteriore alla formazione della morena. Non possiamo attribuire tal fatto di assodamento posteriore del materiale caotico, incoerente della morena ad un'azione di cementazione per diverse ragioni, e queste sono:

1. La natura mineralogica di questi materiali vi si oppone, essendo in totalità rappresentata da quarzo e da silicati; sono di roccie cristalline per eccellenza, non calcaree, che presentano al grado minimo la proprietà della solubilità; manca assolutamente l'elemento calcareo che è caratteristico di morene cementate di altre località ;

2. La morena è relativamente recente, quindi il lavorìo di cementazione, ove anche vi potesse aver luogo in grado minimo, non avrebbe avuto tempo ad assodare così potentemente la massa morenica.

3. Le acque che s'infiltrano ed imbevono la massa morenica provengono unicamente dalla fusione del ghiaccio o dall' atmosfera, quindi sono poverissime di principii minerali solubili e precipitabili negli interstizi dei materiali morenici a produrne la cementazione; questo fenomeno succede sempre là ove antiche morene si trovano al basso di rupi calcaree o contenenti principii calcarei, i quali, sciolti e trasportati dalle acque di pioggia o dei torrenti, penetrano per imbevimento nella massa, si precipitano e rilegano fra loro i materiali prima liberi ed incoerenti;

4. Infine, l'esperienza di fatto toglie ogni sospetto di cementazione, lasciandosi il materiale di quella morena intaccare e scavare facilmente colla piccozza, mentre che là ove si ha che fare con morene cementate occorre il piccone e talora la mina per intaccarle.

Eliminato il fatto della cementazione dobbiamo ricercare altra causa per ispiegare tale assodamento; e questa causa è la enorme pressione esercitata dalla massa del ghiaccio contro la morena, che funzionava e funziona da diga e ne impedisce l'espandimento laterale nel *Piano Combal* a livello inferiore. Questa compressione ha determinata un'adesione fortissima tra i materiali finissimi della melma glaciale, e tra questa ed i massi angolosi in essa inclusi; è un fatto noto che dei materiali lapidei finamente polverizzati possono, sotto una forte pressione, aderire talmente da trasformarsi in masse solide.

Il ghiacciaio tende ad espandersi lateralmente e comprime e compresse fortemente la morena che si oppone ad esso quale ostacolo. — Il ghiacciaio tende per la spinta *a tergo* a dirigersi rettilinearmente contro il versante della valle opposto allo sbocco, ma la morena disposta ad arco si oppone a questa sua tendenza. — Ecco quindi manifestarsi la pressione del ghiaccio contro la morena, e tanto più forte quanto più accentuata è la curva. In ogni corrente in curva e il ghiacciaio è una corrente, la velocità di discesa e la tendenza a rompere l'argine sono maggiori allo esterno della curva, epperò ci spieghiamo come il fenomeno di assodamento sia ben manifesto nella morena laterale destra, esterna, ed appena sensibile nella morena laterale sinistra, interna; e ci spieghiamo ancora come questo fenomeno si presenti marcatissimo nel tratto incurvato del versante interno della morena destra. Esaminiamo il versante suo esterno, ove non si verifica questa pressione per parte del ghiacciaio, e vediamo che il pendìo supera appena i 20°, come conviene ad accumuli di materiali incoerenti, e tali appunto questi si presentano.

Cosicchè noi possiamo conchiudere che causa di tale assodamento è la pressione esercitata dal ghiacciaio contro la morena sia per la tendenza di esso ad espandersi lateralmente nel *Piano Combal* sottostante, sia per la sua tendenza per la spinta *a tergo* di lanciarsi rettilinearmente contro il versante della valle opposta allo sbocco del vallone originario contrariamente all'andamento ad arco della morena, sia ancora per la forza centrifuga e maggiore velocità che si sviluppano nella curva esterna del ghiacciaio. Talchè mentre il ghiacciaio agisce, comprimendola, sulla morena, questa a sua volta reagisce sulla massa di ghiaccio, obbligandola a scendere, incurvandosi nella direzione del nuovo alveo.

Questa pressione del ghiacciaio è poi provata da un altro fenomeno ben studiabile nel ghiacciaio del *Miage*, e per quanto sappiamo, suo speciale nelle Alpi occidentali. — Questo fenomeno è quello delle rotture della morena laterale destra, cui già accennammo nella descrizione di essa; queste rotture ora esamineremo più accuratamente colla scorta dei disegni annessi (Vedi Tav. I e II).

XIV. *Rotture nella morena laterale destra.*

Supponiamo che una corrente qualsiasi, scendente in direzione ad arco, perchè obbligatavi da un argine anch'esso arcuato, vinca nel massimo della curva, dove massima è la pressione della corrente, la resistenza dell'argine; avremo una rotta, una lacerazione, uno sfiancamento nell'argine, ed un espandimento laterale della corrente attraverso la rottura. Il ghiacciaio è una corrente, e nel caso nostro il ghiacciaio del *Miage* è una corrente in curva, fiancheggiata da un argine ad arco; se il ghiacciaio nel massimo di curva, ove si verifica il massimo di spinta, vince la resistenza della morena, avremo una rottura di questa; il ghiacciaio sfiancò appunto la morena laterale destra in corrispondenza del massimo di curvatura.

Se la morena laterale destra avesse resistito alla pressione della corrente di ghiaccio, e non si fosse determinata la rottura, essa avrebbe mantenuto il suo regolare andamento, dirigendosi in elegante curva saliente e rientrante ad E. 50° S., ad E. 40° S., ad E. 30° S., ad E. 18° S., ad E., ad E. 14° N., ad E., ad E 9° S., ad E. 30° S., ad E., ad E. 12° N., ad E. 5° N., ad E. 10° N., per circa 3700 metri dal suo distacco dalle roccie di *Sarsadorège* alla terminazione presso il ponte dell'*Avizaille;* il *Lago Combal*, accompagnandone il lembo esterno, si sarebbe disposto colla sua sponda settentrionale parallelamente al lembo morenico ed avrebbe presentato una configurazione triangolare ad angolo acuto verso il basso e colla base in alto.

La rottura però della morena e la conseguente irruzione laterale del ghiacciaio hanno determinato la formazione in corrispondenza del massimo di curva una protuberanza complessa di cordoni morenici, che, alterando a S. l'andamento regolare dell'istesso lembo morenico, ha respinto le acque del lago obbligando questo ad assumere una configurazione quasi di parallelogrammo rettangolare diretto nel suo maggior sviluppo ad E. 60° S., al quale si applica come appendice all'estremo S. la porzione acuminata, che va via trasformando a valle in corrente discendente a N. 60° E. L'angolo retto rientrante formato dalla sponda sinistra e settentrionale del lago corrisponde al rigonfiamento, all'invasione della morena per effetto della rottura.

Le rotte veramente sono due, ma quella a monte in iscala più vasta e più complessa indusse le maggiori varianti nell'andamento della morena laterale destra.

Un 270 metri a valle del punto ove il sentiero di cui già parlammo raggiunge il ciglione della morena (metri 2042), a metri 2041 di altitudine (vedi Tav. I) si manifesta la prima sbrecciatura larga circa 300 metri. — Il ghiacciaio tentò di erompere in direzione S. e vi formò un bacino occupato da un lago ad acque bianco-verdastre, di 1000 metri quadrati circa, limitato a S. da un piccolo arco morenico sovrapposto allo imbasamento esterno della grande morena laterale destra.

Nell'angolo a valle di questo piccolo bacino, erboso sui margini meridionali del lago, un'altra piccola sbrecciatura diè origine al ristagno delle acque di fusione del ghiacciaio a formare un laghetto di 250 metri quadrati di superficie.

In questa direzione S. il fenomeno si arresta alla formazione del bacino e del lago incluso. Il lago si produsse per accumulo delle acque di fusione della lingua di ghiacciaio introdottasi nell'apertura di sfiancamento ed arrestata dal cordone morenico (metri 2027), che in arco limita a valle il bacino originatovi; i materiali di natura glaciale depositativi dall'acqua di fusione del ghiacciaio formarono un fondo impermeabile che permise l'accumulo e la permanenza delle acque.

Il ghiacciaio però non arrestò la sua marcia erompente, ma la deviò dirigendosi a S. O. e scese molto in basso invadendo il *Piano Combal*, o meglio il *Lago Combal* per ben 200 metri allo infuori della linea segnante il lembo inferiore esterno della morena laterale destra.

L'area extramorenica invasa dal ghiacciaio per questa rotta misura presso a poco 125000 metri quadrati.

Il ghiacciaio non si mantenne gran tempo nella posizione conquistata, e si ritirò con numerosi periodi di sosta nei suoi limiti ordinarii. — Questi diversi periodi di sosta sono contrassegnati da altrettanti cordoni morenici ad arco, colle convessità rivolte a S. O. e separati da valloncini. Abbiamo, dal basso all'alto, immediatamente sovraincombente al lago quattro cordoni morenici concentrici, sinuosi, irregolari, molto vicini, giustapposti gli uni agli altri senza sensibili intervalli: essi si sviluppano quasi in un corpo solo (metri 2008) ed in una curva poco accentuata convessa a S. O. per 530 metri in lunghezza e 60 di media larghezza. Sul ciglione del più interno di questi quattro cordoni stanno costrutti dei muri a secco come opere di difesa militare. Ad essi succede un valloncino stretto nel suo mezzo ed ampliato verso le estremità a S. E. ed a N. O., e le estremità si presentano come fondo livellato di lago invaso da vegetazione erbacea; questo valloncino è di una diecina di metri più basso del ciglione del quarto cordone morenico che lo ricinge allo esterno. La prateria a N. O. del valloncino è poi limitata a N. E. da altro cordone morenico concentrico di 6 ad 8 metri di elevazione, cui succede altro piccolo solco, poi altro cordone morenico di un metro ad un metro e mezzo di elevazione. Un terzo e più ampio valloncino intermorenico, perfettamente livellato, erboso, anzi paludoso tiene dietro al sesto e microscopico cordone morenico.

Questa molteplicità di cordoni morenici e di solchi intermorenici si può esaminare solo verso N. O. dell'area invasa. Queste vallette chiuse furono sagacemente utilizzate per le costruzioni al riparo dei quartieri delle soldatesche disposte colà a difesa dei trinceramenti, ed è evidente che furono bacini di laghetti ora scomparsi per l'invasione di vegetazione erbacea, palustre. I ciglioni e le falde dei cordoni morenici furono invece coperti di vegetazione arborea che fa rimontare a tre o quattro secoli certamente l'antichità di questo apparato d'invasione glaciale extramorenica; a S. E. si possono benissimo esaminare alcuni lembi di cordoni morenici seguito a quelli visibilissimi di N. O., ma molto meno regolarmente disposti.

Succedono un settimo ed un ottavo arco morenico; l'uno elevato di 10 a 12 metri sul valloncino per cui passa il sentiero che conduce al ciglione della grande morena, l'altro più piccolo interno addossato al primo; questi ancora sono imboschiti.

Viene poscia un bacino ad arco, erboso, paludoso evidentemente da poco passato a prateria dalla condizione di lago. Un nono e maggiore cordone morenico (metri 2022) limita un bacino lacustre, occupato da un lago di circa 12000 metri quadrati, ad acque bianco-verdastre, comunicante con quello già descritto e che trovasi più a levante. Da questo lago parte un torrentello che sbreccia consecutivamente tutti gli archi morenici e scende al *Lago Combal.* I due bacini occupati dai laghi ad acque bianco-verdastre sono ben distinti per un rilievo prodotto dalla fusione delle due estremità contigue dei due archi morenici limitanti, sbrecciate però in corrispondenza del canale di comunicazione tra i due laghi.

L'apertura della breccia è chiusa oggidì da un ciglione morenico laterale di posteriore formazione, che rimpiazza l'antico demolito, e riannoda le testate di rottura (metri 2041 e 2035) del primitivo ciglione.

La vegetazione erbacea ed arborea che riveste questo apparato morenico d'irruzione, e la nudità assoluta del ciglione della grande morena laterale destra potrebbero a prima giunta far credere ad un precedente maggior sviluppo laterale del ghiacciaio e ad una maggior antichità di questo assieme di archi e solchi morenici. Ma basta per persuaderci della sua formazione posteriore, di questo assieme cioè di archi e solchi morenici, a quella della grande morena l'ispezione della lacerazione o rottura che interrompe l'andamento regolare della grande morena, e le corrispondenze esatte di questi piccoli cordoni e valloncini morenici colla rottura stessa. La morena grande fu in seguito e continuamente soggetta a nuova sovrapposizione di materiali detritivi che impedirono lo sviluppo della vegetazione, l'apparato di irruzione invece, una volta abbandonato dal ghiacciaio, fu in istato di assoluta tranquillità, che permise lo svilupparsi e delle conifere sui cordoni e sui rilievi, e delle erbe nei bacini chiusi.

Un'altra rotta ebbe luogo più in basso a 150 metri dalla descritta, essa misura un 140 metri di apertura; si formò un bacino chiuso a valle da un arco morenico (metri 2004), occupato da un laghetto di circa 8000 metri quadrati; ma il lembo di ghiacciaio che eruppe non si estese fino al basso della grande morena a S. e produsse solo una protuberanza sulla morena principale, fiancheggiata ad O. e ad E. da due convalli non molto estese.

A monte della grande rotta per circa 350 metri (presso il gran masso già più volte accennato), si può notare un principio di sbrecciatura con un piccolissimo lago di una trentina di metri quadrati; questa sbrecciatura noi crediamo molto recente.

Se il ghiacciaio aumenterà in seguito in larghezza e più in potenza, naturalmente tenderà a ripetere i suoi sforzi per rompere la grande morena: ma questi sforzi si eserciteranno a monte della grande sbrecciatura, là ove ad ostacolo non havvi che la sola morena laterale non appoggiata e rinforzata da apparati morenici di precedente irruzione.

XV. *Conclusione.*

Conchiudiamo coll'affermare l'importanza dello studio del ghiacciaio del *Miage* sia perchè per il suo grande sviluppo, la sua grande regolarità e per l'ampiezza del suo circo originario presenta i fenomeni ordinarii dei ghiacciai di primo ordine, e molto regolari e molto marcati, sia perchè per la deviazione cui è costretto sboccando in *Val Veni* presenta speciali fenomeni molto interessanti e che rarissimamente si verificano in altri ghiacciai.

Questi fenomeni cercammo di descrivere; forse la nostra descrizione sarebbe insufficiente senza l'appoggio dei disegni esplicativi. — Superiore in efficacia ad ogni descrizione, ad ogni esplicazione per via di disegni è l'esame sul posto; e fortunatamente una escursione da *Courmayeur* al ghiacciaio del *Miage* è breve ed agevole tanto da essere a portata di qualunque studioso, anche non sotto alle esplorazioni alpine, e di qualunque carovana di studenti.

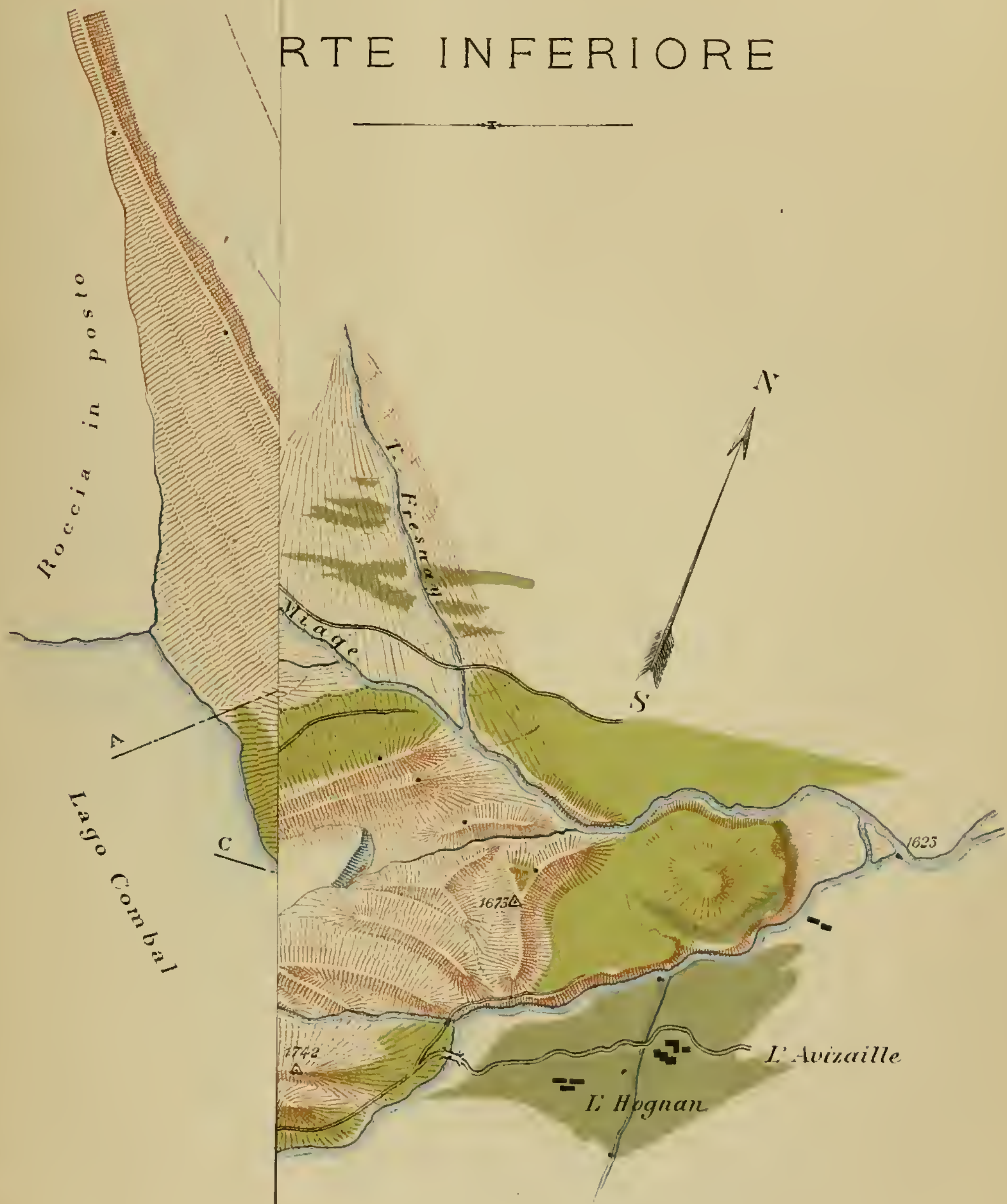
Accad. R.e delle Sc. di Tori

Tavola I.

M. BARETTI

CARTA
DEL
CIAIO DEL MIAGE

RTE INFERIORE



Aree coperte da

Aree coperte da

N. B. *I numeri indicano le quote altimetriche*

Scala 1 : 10000.

G. C. Mareng dis

Torino, Stab. P. Salu. ecis

Tavola I.

M. BARETTI

CARTA DEL GHIACCIAIO DEL MIAGE

PARTE INFERIORE

Tavola II.

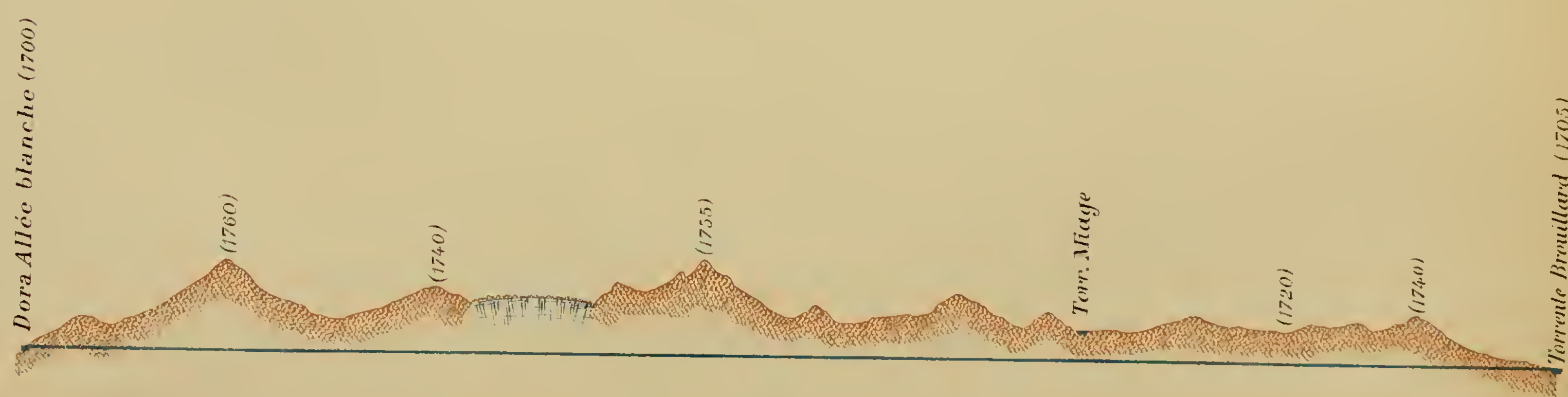
M. BARETTI

SEZIONI TRASVERSALI

AL

GHIACCIAIO DEL MIAGE

Sezione F·G·



Sezione H·I·

N.B. *I numeri in parentesi segnano le quote altimetriche*

Scala 1:5000

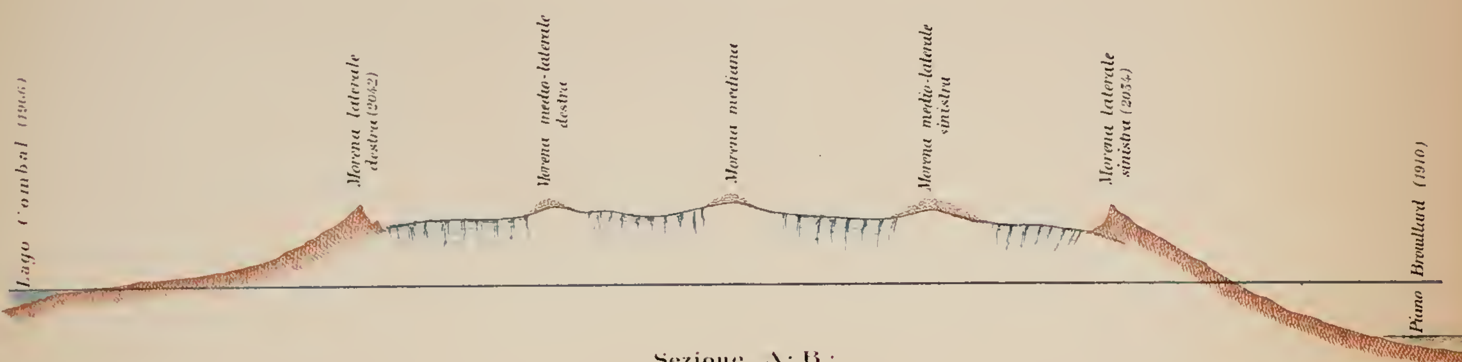
C. C. Marengo dis

Torin, Stab. F. Salussolia

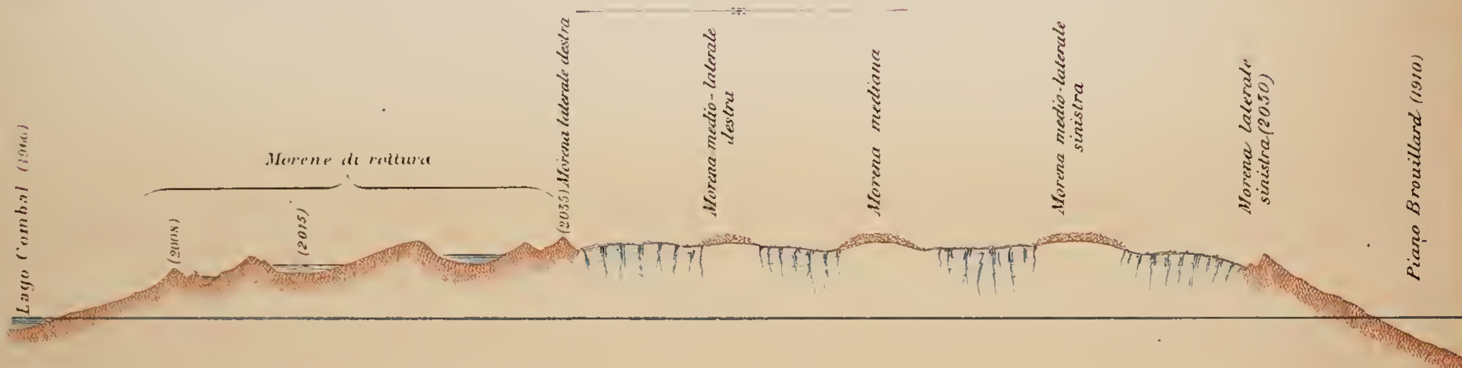
Tavola II.

M. BARETTI

SEZIONI TRASVERSALI
AL
GHIACCIAIO DEL MIAGE

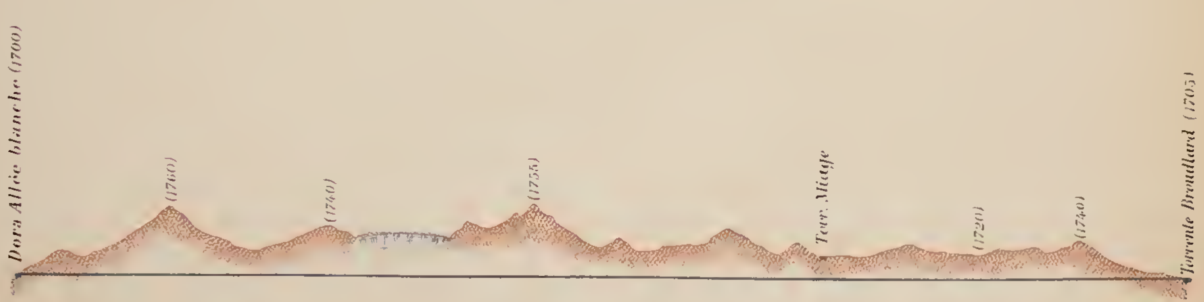


Sezione A · B ·



Sezione C·D·E·

Sezione F · G ·



Sezione H·I·

N. B. I numeri in parentesi segnano le quote altimetriche

Scala 1 : 5000

INDICE

ADDITION AU MÉMOIRE

SUR LE CALCUL

DES

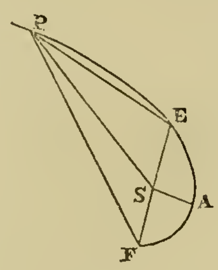
MOUVEMENTS ELLIPTIQUES

PAR

ÉDOUARD SANG

Lue dans la séance du 28 *Décembre* 1879

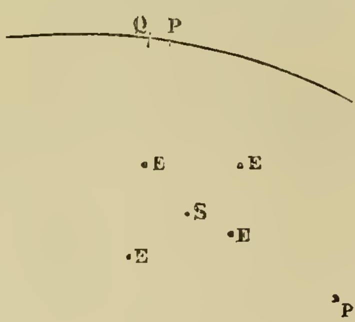
M'étant proposé de finir la table des segments pour chaque minute, et de continuer celles des anomalies moyennes de degré en degré, et en préparant une notice pour être reliée avec les tables manuscrites, une extension du théorème fondamental s'est présentée. Elle peut avoir quelque intérêt pour les mathématiciens.



La preuve que l'aire ASP est la demi-somme des segments PE et PF, ne dépend point de la nature de la ligne courbe $FAEP$; elle reste sur les faits que SF est égale à SE et que SA bisecte le segment FAE. Ce n'est pas donc une propriété du cercle ni même des lignes du second ordre. On peut éviter la division du segment FAE en énonçant le théorème ainsi:

« L'aire décrite autour du point S est la demi-somme des aires décrites autour de F et de E ».

Et alors il n'est pas nécessaire que la courbe passe ou par E ou par F.



Imaginons un système de points matériels immobiles E, chacun avec sa propre masse, placés sur un même plan et ayant S pour leur centre statique; et soit PQ un élément de la courbe tracée par la planète. Alors l'aire décrite autour de S est la moyenne statique des aires décrites autour des points E. Car en étendant indéfiniment la tangente QP et en y abaissant des perpendiculaires, on voit que celle tirée du point S est la moyenne statique entre celles tirées des points E; et que par conséquent la même loi tient pour les petits triangles, proportionnels aux perpendiculaires.

Si le système est placé dans l'espace, et si on le projette par des lignes parallèles sur un plan quelconque, la même loi tient pour les projections.

Aussi, au lieu de la ligne PQ, concevons une surface croissante autour du point P, et au lieu des petits triangles PEQ imaginons des pyramides ayant leurs sommets aux points E; alors la pyramide, dont S est le sommet, est la moyenne statique entre celles-ci.

Le théorème fondamental de notre calcul n'est donc que le cas le plus simple d'un théorème général.

Les tables actuelles font ressentir l'avantage de ce calcul. Un seul exemple sert à démontrer la facilité pour les cas isolés. Ainsi, étant données l'excentricité 37 et l'anomalie moyenne 130^c, on demande la position de la planète.

Cette excentricité est le cosinus de $75^c,871545$. On cherche donc l'anomalie moyenne 130^c dans les deux tables pour $e = 75^c$ et pour $e = 76^c$; en voici des extraits:

$e = 75^c$		
pos.	anom. moy.	diff.
145^c	$126^c.4747$	$1^c.2508$
146	127.7255	1.2553
147	128.9808	1.2598
148	130.2406	1.2641
149	131.5047	1.2685

$e = 76^c$		
pos.	anom. moy.	diff.
145^c	$127^c.1795$	$1^c.2412$
146	128.4207	1.2456
147	129.6663	1.2499
148	130.9162	1.2541
149	132.1703	1.2583

En faisant ici les interpolations il n'est pas nécessaire de tenir compte des différences secondes, parceque nous désirons seulement une valeur approximative de p pour servir comme point-de-départ pour un calcul rigoureux. Pour le cas intermédiaire $e = 75^c.87'$ nous trouvons

pos.	anom. moy.	diff.
147^c	$129^c.5772$	$1^c.2512$
148	130.8284	

et ensuite pour l'anomalie moyenne donnée, nous avons

$$p = 147^c.3378 \text{ pour première approximation;}$$

mais $\quad e = 75.8715\ 45$

d'où $\quad p + e = 223.2093\ 45$

$$p - e = 71.4662\ 55 .$$

La table des segments auprès de ces arguments est

Arc	Segment	Diff.	Arc	Segment	Diff.
$71^c.45$	$14^c.0832\ 46$	5665	$223^c.20'$	$245^c.8898\ 85$	19343
.46	.0889 11	5666	.21	.9092 28	19342
.47	.0945 77	5668	.22	.9285 70	19342
.48	.1002 45	5669	.23	.9479 12	19342
.49	.1059 14	5671	.24	.9672 54	19340

et de là on obtient

$$\begin{aligned} \text{pour } p + e &= 223^c{,}2093\ 45, & \text{segm.} &= 245^c{,}9079\ 61 \\ p - e &= 71{,}4662\ 55, & \text{segm.} &= \underline{14{,}0924\ 55} \\ & & 2\ \text{m.} &= 260{,}0004\ 16, \end{aligned}$$

qui est en excès sur la valeur proposée de $4''16$; mais la différence pour une minute de p est 25009, somme de 19343 et 5666, et par conséquent la correction est $-1''66$, d'où résulte $p = 147^c{,}3376\ 34$.

En dressant une table spéciale pour quelque planète, les anomalies moyennes sont prises équi-différentes et on s'épargne les premières interpolations, car on obtient la valeur approximative de p en étudiant les différences déjà trouvées.

Ainsi, je crois que cette table des segments donnera aux astronomes une aide considérable.

Edimbourg, 5 et 8 Décembre 1879.

SUI SISTEMI DI CUBICHE GOBBE

O DI SVILUPPABILI DI 3ª CLASSE

stabiliti col mezzo di due cubiche punteggiate proiettivamente

DI

FRANCESCO GERBALDI

Memoria letta nell'adunanza del 20 Giugno 1880

PROEMIO

La presente memoria trae la sua origine da un'altra dell'egregio Professore E. D'Ovidio (*), ed anzi può ritenersi che faccia sistema con essa, perchè valendomi dei metodi ivi esposti io ho qui proseguito, col gentile consenso ed incitamento del mio Professore, circa i sistemi di cubiche le ricerche da lui fatte sulla semplice cubica gobba.

I sistemi di cubiche, lo studio dei quali forma l'oggetto di questa monografia, e che si trovano definiti ai §§ 1, 2, 3, sono (per quanto è a mia notizia) i più generali che si siano fino ad oggi considerati, siccome quelli che si stabiliscono col mezzo di due cubiche date comunque nello spazio, laddove i sistemi imaginati da Chasles (**) e da Silldorf (***) hanno per elementi cubiche tutte situate su d'uno stesso iperboloide.

Accennerò le principali questioni che sono svolte nelle seguenti pagine Anzitutto nel Capo I ho studiata la superficie rigata del 6° ordine, sulla quale giacciono tutte le cubiche del sistema, col farne la rappresentazione

(*) *Studio sulle cubiche gobbe.* V. tomo XXXII, serie II di queste *Memorie.*

(**) Comptes rendus..... 1857.

(***) *Ueber Büschel von Raumcurven dritter Ordnung in Verbindung mit Strahlencomplexen.* — Zeitschrift für Math. u. Ph. Schlömich. — 1874.

su d'un piano (§ 4) non che la sezione con un piano qualsiasi (§ 5), col mostrare come dal complesso (speciale) delle rette secanti una data generatrice si possa dedurre l'equazione del cono circoscritto alla superficie da un punto, o della curva sezione della medesima con un piano (§ 6), col determinare i parametri delle generatrici che secano una generatrice data, di quelle che toccano la curva doppia, e di quelle singolari incontrate dalle successive (§ 7), ed infine, visto che la superficie ammette quattro piani tritangenti, ho mostrato come, assumendo questi per piani di riferimento, si semplifichi la rappresentazione analitica delle cubiche del sistema (§ 8). — Nel Capo II, dopo aver fatto vedere che nel sistema esistono quattro cubiche piane (§ 10), ho data l'equazione del piano osculatore ad una cubica qualunque del sistema in un suo punto; dalla quale si fa manifesta l'esistenza di un altro sistema di cubiche, che hanno gli stessi piani osculatori delle cubiche del sistema considerato (§ 11), e che sono tutte osculatrici agli stessi quattro piani (§ 12); ed ho dimostrato come per ogni generatrice della superficie, su cui stanno le cubiche del sistema, passano due soli piani osculatori di queste; e come per ogni cubica esistano 6 piani osculatori, che sono ad un tempo tangenti alla detta superficie (§ 13). — Nel Capo III, accennato il significato geometrico generale delle forme invariantive delle due forme cubiche che servono a rappresentare un punto qualunque di ciascuna delle due cubiche date (§ 14), ho date in coordinate di piani le equazioni della superficie più volte nominata e della sua sviluppabile bitangente (§ 15); non che d'una cubica qualunque del sistema; ed ho studiata una superficie rigata del 4° ordine, che qui si presenta (§ 16). Indi ho investigato parecchie proprietà della superficie di 6° ordine inviluppo di tutti i piani osculatori, e della sua sviluppabile bitangente, e di una schiera di superficie di 3ª classe inscritte in quest'ultima (§ 17). — Nel Capo IV ho considerato in modo speciale alcune quadriche e coniche che sono in relazione colle cubiche del sistema; quali sarebbero gli iperboloidi che hanno per generatrici d'uno stesso sistema le tangenti corrispondenti alle cubiche del sistema (§ 19), ovvero gli assi corrispondenti, ovvero le corde corrispondenti (§ 23). Sui primi mi son fermato più a lungo, e dal fatto che 8 di essi si schiacciano in piani ho dedotto che tutte le cubiche del sistema toccano 8 piani fissi (§ 21). Indi ho notato qualche proprietà d'alcune superficie, in cui figura il rapporto anarmonico di 4 generatrici della superficie su cui sono le cubiche del sistema (§§ 22, 24, 26), e di alcune coniche ed iperboloidi, in cui si presentano i fuochi di piani rispetto alle cubiche (§§ 26, 27). — In fine nel Capo V ho considerato a parte il caso speciale, in cui il sistema è definito mediante due punteggiate in involuzione segnate su una stessa cubica.

Volta per volta ho accennato ciò che corrisponde in un sistema di sviluppabili di 3ª classe correlativo al sistema di cubiche considerato, e talora ho messo in relazione questo con quello (§§ 10, 12, 20).

CAPO I.

§ 1. Avendosi due cubiche gobbe comunque situate nello spazio, si fissino ad arbitrio tre punti sull'una e tre punti sull'altra cubica, indi si consideri un quarto punto mobile sulla prima e si prenda come suo corrispondente sulla seconda quel punto, che coi tre fissati sulla seconda dà lo stesso rapporto anarmonico, che il punto scelto sulla prima dà coi tre fissati su questa. Si avranno così due cubiche punteggiate proiettivamente.

Le rette congiungenti punti corrispondenti sono le generatrici d'una superficie sghemba di 6° ordine e classe (*), per ogni punto della quale dimostreremo che passa una ed in generale una sola cubica gobba situata sulla superficie; così che su questa si ha un sistema semplicemente infinito di cubiche gobbe, del quale ci proponiamo studiare qualche proprietà.

Di siffatti sistemi se ne possono stabilire ∞^3 con due cubiche date, perchè su di queste si possono segnare ∞^3 punteggiate proiettive differenti.

Vedremo che esistono quattro piani ciascuno dei quali seca le due cubiche date in due terne di punti corrispondenti, che nei medesimi quattro piani giacciono quattro cubiche del sistema, e che queste insieme a tutte le altre determinano punteggiate proiettive sulle generatrici della loro superficie. Di qui appare come il sistema di cubiche si possa anche definire nel seguente modo:

« Date due cubiche gobbe ed un piano, si stabiliscano su di esse le due punteggiate proiettive, di cui terne di punti corrispondenti sono quelle in cui il piano seca le cubiche; indi su ogni retta passante per una

---

(*) V. Cremona, *Preliminari ad una teoria generale delle superficie.*

coppia di punti corrispondenti si scelga il punto che con questi e col punto traccia della retta sul piano dia un rapporto anarmonico costante; il luogo dei punti così scelti è una cubica gobba; agli infiniti valori del rapporto anarmonico corrispondono le infinite cubiche del sistema che si vuol considerare ».

Per dualità, date due sviluppabili di terza classe (e queste supporremo che siano le osculatrici a quelle due cubiche date, che servono a stabilire il sistema di cubiche), e fissata in modo analogo una corrispondenza proiettiva fra i loro piani, le rette intersezioni di piani corrispondenti sono le generatrici di una superficie di 6ª classe ed ordine, ogni piano della quale determina una ed in generale una sola sviluppabile di 3ª classe inscritta nella superficie; il sistema di sviluppabili così determinato gode di proprietà che sono le correlative a quelle che possiede il sistema di cubiche sopra definito.

§ 2. Le due cubiche date si riferiscano ad uno stesso tetraedro fondamentale; le coordinate omogenee per un punto qualunque dell'una siano

$$x_1 = a_\lambda^3, \qquad x_2 = b_\lambda^3, \qquad x_3 = c_\lambda^3, \qquad x_4 = d_\lambda^3;$$

e per un punto qualunque dell'altra siano

$$x_1 = \mathfrak{a}_\lambda^3, \qquad x_2 = \mathfrak{b}_\lambda^3, \qquad x_3 = \mathfrak{c}_\lambda^3, \qquad x_4 = \mathfrak{d}_\lambda^3,$$

dove $\lambda_1 : \lambda_2 = \lambda$ è un parametro variabile da punto a punto; siccome ad ogni valore di esso corrisponde un punto sull'una e un punto sull'altra cubica, così tale parametro serve a stabilire una corrispondenza proiettiva fra i punti delle due cubiche.

Dico che sotto questa forma analitica si può sempre porre la corrispondenza proiettiva sopra definita geometricamente.

Invero, se le due terne di punti fissi allora scelte sulle due cubiche hanno gli stessi parametri λ', λ'', λ''', e si considerano i due punti l'uno sull'una, l'altro sull'altra cubica, che corrispondono ad uno stesso parametro λ, questi insieme ai tre punti fissati sulle rispettive cubiche dànno luogo allo stesso rapporto anarmonico, giacchè il valore di questo dipende unicamente dai parametri della quaterna di punti che si considera, ed è

$$\frac{(\lambda\lambda'')}{(\lambda'\lambda'')} : \frac{(\lambda\lambda''')}{(\lambda'\lambda''')} \qquad \ldots\ldots (*);$$

(*) V. D'Ovidio, *Studio sulle cubiche gobbe*, § 10.

dunque in tal caso sono d'accordo le corrispondenze definite nei due modi diversi. — Ciò non avrebbe più luogo, se le due terne di punti, che si fissano sulle due cubiche, non avessero gli stessi parametri; ma questo caso lo si può ridurre al precedente, perchè nelle forme esprimenti le coordinate dei punti di una delle due cubiche si possono fare delle trasformazioni in modo, che le due terne vengano ad avere gli stessi parametri. Di fatto siano λ', λ'', λ''' i parametri dei tre punti scelti sulla prima cubica, e μ', μ'', μ''' i parametri dei tre punti scelti sulla seconda. Osserviamo che fra il parametro λ d'un punto della 1ª cubica ed il parametro μ del punto corrispondente della 2ª cubica passa una relazione lineo-lineare

$$\alpha\lambda\mu + \beta\lambda + \gamma\mu + \delta = 0 ,$$

in cui $\alpha : \beta : \gamma : \delta$ si possono determinare in modo che ai tre punti λ', λ'', λ''' della 1ª cubica corrispondano i punti μ', μ'', μ''' della 2ª cubica (*); ora tale relazione è equivalente alle

$$\mu_1 = -\beta\lambda_1 - \delta\lambda_2 , \qquad \mu_2 = \alpha\lambda_1 + \gamma\lambda_2 ,$$

e quindi è facile lo scorgere che, se nelle forme $\mathfrak{a}_\mu^3$, $\mathfrak{b}_\mu^3$, $\mathfrak{c}_\mu^3$, $\mathfrak{d}_\mu^3$ si pongono per μ_1 e μ_2 questi valori, le forme trasformate rappresenteranno ancora la 2ª cubica, non essendo avvenuto altro che un cambiamento nel valore del parametro di ciascun suo punto, e precisamente il punto, che prima aveva il parametro μ e corrispondeva al punto di parametro λ della 1ª cubica, ora avrà ancor esso il parametro λ; così si vede come la corrispondenza definita in principio sinteticamente si possa in ogni caso porre sotto la forma analitica, che volevamo.

§ 3. In coordinate di piani le equazioni di due punti, l'uno dell'una, l'altro dell'altra cubica, che corrispondono allo stesso valore del parametro $\lambda_1 : \lambda_2$, sono rispettivamente

$$0 = a_\lambda^3\xi_1 + b_\lambda^3\xi_2 + c_\lambda^3\xi_3 + d_\lambda^3\xi_4 = p_\lambda^3 ,$$
$$0 = \mathfrak{a}_\lambda^3\xi_1 + \mathfrak{b}_\lambda^3\xi_2 + \mathfrak{c}_\lambda^3\xi_3 + \mathfrak{d}_\lambda^3\xi_4 = \mathfrak{p}_\lambda^3 .$$

Le equazioni dei piani osculatori alle due cubiche date nei rispettivi punti di parametro λ sono della forma

(*) La relazione lineo-lineare di cui si parla è

$$(\lambda'\lambda''')(\mu'\mu'')(\lambda\lambda'')(\mu\mu''') - (\lambda'\lambda'')(\mu'\mu''')(\lambda\lambda''')(\mu\mu'') = 0.$$

$$o = A_\lambda^3 x_1 + B_\lambda^3 x_2 + C_\lambda^3 x_3 + D_\lambda^3 x_4 = P_\lambda^3 \ ,$$
$$o = \mathfrak{A}_\lambda^3 x_1 + \mathfrak{B}_\lambda^3 x_2 + \mathfrak{C}_\lambda^3 x_3 + \mathfrak{D}_\lambda^3 x_4 = \mathfrak{P}_\lambda^3 \quad (*) .$$

I punti, di cui le coordinate sono rappresentate da

$$(1) \ldots \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_1 = \varkappa_1 a_\lambda^3 + \varkappa_2 \mathfrak{a}_\lambda^3 \ , & x_2 = \varkappa_1 b_\lambda^3 + \varkappa_2 \mathfrak{b}^3 \ , \\ x_3 = \varkappa_1 c_\lambda^3 + \varkappa_2 \mathfrak{c}_\lambda^3 \ , & x_4 = \varkappa_1 d_\lambda^3 + \varkappa_2 \mathfrak{d}^3 \ , \end{array} \right.$$

o di cui l'equazione in coordinate di piani è

$$o = (\varkappa_1 a_\lambda^3 + \varkappa_2 \mathfrak{a}_\lambda^3)\xi_1 + \ldots + (\varkappa_1 d_\lambda^3 + \varkappa_2 \mathfrak{d}_\lambda^3)\xi_4 = \varkappa_1 p_\lambda^3 + \varkappa_2 \mathfrak{p}_\lambda^3 \ ,$$

se è fisso $\lambda_1 : \lambda_2$ e varia $\varkappa_1 : \varkappa_2$, sono su di una stessa retta, che è la retta congiungente i punti λ delle due cubiche date; se $\varkappa_1 : \varkappa_2$ è fisso e varia $\lambda_1 : \lambda_2$, sono su di una nuova cubica gobba $(g_\varkappa)$; se $\varkappa_1 : \varkappa_2$, $\lambda_1 : \lambda_2$ variano amendue, sono su di una stessa superficie V. Abbiamo così un sistema di cubiche gobbe $g_\varkappa$, le quali giacciono tutte sulla superficie V; al sistema appartengono le due cubiche date e sono precisamente le g_0, g_∞. La superficie V è rigata e sghemba, ogni sua generatrice è il luogo dei punti delle cubiche $g_\varkappa$, i quali corrispondono allo stesso parametro λ *(generatrice λ)*, e le cubiche $g_\varkappa$ determinano sulle generatrici punteggiate proiettive. Indicando con $(z_{12})_\lambda^6$, $(z_{13})_\lambda^6, \ldots$, $(z_{34})_\lambda^6$ le coordinate-raggi, e con $(\zeta_{12})_\lambda^6$, $(\zeta_{13})_\lambda^6 \ldots$, $(\zeta_{34})_\lambda^6$ le coordinate-assi d'una generatrice λ, possiamo assumere

$$(z_{12})_\lambda^6 = a_\lambda^3 \mathfrak{b}_\lambda^3 - \mathfrak{a}_\lambda^3 b_\lambda^3 = (\zeta_{34})_\lambda^6 \ ,$$
$$(z_{13})_\lambda^6 = a_\lambda^3 \mathfrak{c}_\lambda^3 - \mathfrak{a}_\lambda^3 c_\lambda^3 = (\zeta_{24})_\lambda^6 \ ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$
$$(z_{34})_\lambda^6 = c_\lambda^3 \mathfrak{d}^3 - \mathfrak{c}_\lambda^3 d_\lambda^3 = (\zeta_{12})_\lambda^6 \ .$$

È facile a vedersi come il sistema di cubiche ora definito analiticamente non sia altro che il sistema che in principio fu definito geometricamente.

Caso particolarissimo di questo sistema di cubiche è quello considerato per la prima volta dallo Chasles (*Comptes rendus à l'Académie des Sciences, Paris* 1857). Se le due cubiche gobbe date stanno su di un iperboloide, e ciascuna seca in due punti le generatrici d'uno stesso sistema, esse si

---

(*) Le $A_\lambda^3, \ldots$ sono covarianti delle $a_\lambda^3, \ldots$ e analogamente le $\mathfrak{A}_\lambda^3 \ldots$ sono covarianti delle $\mathfrak{a}_\lambda^3 \ldots$; Cfr. D'Ovidio, l. c., § 4.

incontreranno in quattro punti; di più il rapporto anarmonico dei quattro piani per questi quattro punti e per una delle dette generatrici è il rapporto anarmonico dei detti quattro punti, sia che questi si considerino sull'una, sia che si considerino sull'altra cubica, perchè la generatrice, per la quale si sono condotti i quattro piani, è corda comune alle due cubiche. Pertanto si può fare che ciascuno dei quattro punti in discorso corrisponda a sè stesso, e allora tutte le cubiche del sistema da noi considerato passeranno per i medesimi; difatto siccome in tal caso, detto μ il parametro d'uno di quei quattro punti, si ha

$$a_\mu^3 = \rho \, . \, \mathfrak{a}_\mu^3, \quad b_\mu^3 = \rho \, . \, \mathfrak{b}_\mu^3, \quad c_\mu^3 = \rho \, . \, \mathfrak{c}_\mu^3, \quad d_\mu^3 = \rho \, . \, \mathfrak{d}_\mu^3,$$

così l'equazione del punto μ d'una cubica qualunque $g_\varkappa$ non dipende da $\varkappa$, poichè in essa è fattor comune $\varkappa_1 + \rho \varkappa_2$. In questo caso adunque il sistema di cui ci occupiamo si riduce a quello di Chasles.

Per dualità l'equazione

$$0 = (\varkappa_1 A_\lambda^3 + \varkappa_2 \mathfrak{A}_\lambda^3) x_1 + \ldots . + (\varkappa_1 D_\lambda^3 + \varkappa_2 \mathfrak{D}_\lambda^3) x_4 = \varkappa_1 P_\lambda^3 + \varkappa_2 \mathfrak{P}_\lambda^3$$

fisso $\varkappa$, variando λ, rappresenta gli infiniti piani di una sviluppabile di 3ª classe $G_\varkappa$; e per gli infiniti valori di $\varkappa$ si hanno infinite sviluppabili, le quali compongono il sistema che si vuol considerare, e sono tutte inscritte in una stessa superficie W, di cui generatrici sono le rette intersezioni di piani corrispondenti alle due cubiche date.

§ 4. Quando son dati i due parametri $\varkappa$ e λ, è determinato un punto [*punto* $(\varkappa, \lambda)$] sulla superficie V, come intersezione della cubica $g_\varkappa$ colla generatrice λ. Una funzione algebrica, intera, nei due parametri $\varkappa_1 : \varkappa_2$, $\lambda_1 : \lambda_2$, quando si prenda $\varkappa_1 = y_1$, $\lambda_1 = y_2$, $\varkappa_2 = \lambda_2 = y_3$, sarà una forma ternaria, ed eguagliata a zero rappresenterà una curva sulla superficie V.

Se in un piano *(piano rappresentativo)* si stabilisce un triangolo fondamentale di vertici A_1, A_2, A_3 e le y_1, y_2, y_3 si considerano come le coordinate omogenee d'un punto di esso piano, a ogni punto della superficie V corrisponde un punto del piano, e reciprocamente; quindi a ogni curva della superficie V corrisponderà una curva nel piano, e tali due curve saranno rappresentate dalla stessa equazione. In generale, dalle proprietà delle curve del piano si potranno inferire proprietà analoghe per le curve, che sono situate sulla superficie V, e che hanno la detta corrispondenza con quelle del piano. In particolare: a una retta nel piano pel vertice A_1 del triangolo fondamentale corrisponde sulla superficie V una generatrice, a una retta nel piano pel vertice A_2 corrisponde sulla superficie una cubica g_x, e a una retta qualunque del piano corrisponde sulla superficie una curva gobba unicursale del 4° grado (*). Sono notevoli le seguenti singolarità: il punto A_1 è l'imagine di tutta la cubica g_∞, il punto A_2 è l'imagine di tutta la generatrice $\lambda = \infty$, e la retta $A_1 A_2$ è l'imagine del solo punto (∞, ∞); del resto il terzo vertice A_3 è l'imagine del punto (o, o), e gli altri due lati $A_1 A_3$, $A_2 A_3$ sono rispettivamente le imagini della generatrice $\lambda = 0$, e della cubica g_0.

Per due punti della superficie V passa una sola curva del 4° ordine unicursale, e due siffatte curve collocate sulla superficie si incontrano in un solo punto. — Per ogni punto della superficie in generale passa una sola generatrice λ, e una sola cubica gobba; fanno eccezione i punti della curva doppia, per cui passano due generatrici e due cubiche gobbe. — Due cubiche g_x in generale non si incontrano.

La superficie V, essendo rappresentabile punto per punto su d'un piano, per ciò che fu dimostrato dal Prof. Cremona (**), deve essere del genere zero, e, per ciò che fu dimostrato dall'Armenante (***), possiede una curva doppia, del 10° ordine, la quale è punteggiata proiettivamente ad una curva piana del 4° ordine, ed ha per imagine una curva dell'11° ordine, genere 21, con un punto 7^{plo} in A_1, e un punto triplo in A_2.

Denotando con π_λ^3, ϖ_λ^3 risp. ciò che divengono p_λ^3, $\mathfrak{p}_\lambda^3$ quando alle coordinate variabili $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ si sostituiscono le coordinate d'un piano dato ξ', l'equazione del 3° grado in λ

$$0 = \varkappa_1 \pi_\lambda^3 + \varkappa_2 \varpi_\lambda^3$$

dà i parametri dei 3 punti in cui il piano ξ' seca la cubica g_x; se in quest'equazione supponiamo che variino $\varkappa$ e λ, avremo l'equazione della

(*) All'equazione

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0$$

d'una retta nel piano, corrisponde

$$\alpha_1 \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} + \alpha_2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \alpha_3 = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= \alpha_2 \lambda_1 + \alpha_3 \lambda_2 \\ \varkappa_2 &= -\alpha_1 \lambda_2 \end{aligned}$$

e questi valori di $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ sostituiti nelle (1) dànno luogo ad espressioni razionali del 4° gradoin $\lambda_1 : \lambda_2$.

(**) *Annali di Matematica* — Brioschi e Cremona — Tomo I.

(***) *Annali di Matematica* — Tomo IV.

curva intersezione del piano ξ' colla superficie V; l'equazione dell'imagine di questa curva nel piano rappresentativo è della forma

$$o = \alpha y_3^4 + (\beta y_1 + \gamma y_2) y_3^3 + (\delta y_1 y_2 + \varepsilon y_2^2) y_3^2 + (\zeta y_1 y_2^2 + \eta y_2^3) y_3 + \theta y_1 y_2^3 .$$

Adunque una sezione piana (del 6° ordine) della superficie V ha per imagine nel piano rappresentativo una curva del 4° ordine, la quale, come è facile a vedersi, passa pel vertice A_2 del triangolo fondamentale, ed ha un punto triplo nel vertice A_1, ha cioè un punto della massima molteplicità; per questo adunque, ed ancora perchè le generatrici della superficie sono rappresentate da rette d'un fascio, la rappresentazione, che abbiamo stabilito della superficie V su di un piano, è la *rappresentazione di ordine minimo*, o *la rappresentazione normale* (*).

In particolare le ∞^2 curve proprie di 5° ordine, sezioni della superficie V coi suoi piani tangenti, hanno per imagine una rete di curve di 3° ordine con punto doppio in A_1; le ∞^1 curve proprie di 4° ordine, sezioni della superficie V con piani per due sue generatrici, hanno per imagine un sistema di ∞^1 coniche, che hanno di comune due punti fissi A_1, A_2.

§ 5. Sostituendo nelle equazioni (1) a $\varkappa_1 : \varkappa_2$ il valore che di esso si ricava dall'equazione

$$o = \varkappa_1 \pi_\lambda^3 + \varkappa_2 \varpi_\lambda^3 ,$$

le

$$(2) \ldots \quad \begin{cases} x_1 = \varpi_\lambda^3 a_\lambda^3 - \pi_\lambda^3 \mathfrak{a}_\lambda^3 , & x_2 = \varpi_\lambda^3 b_\lambda^3 - \pi_\lambda^3 \mathfrak{b}_\lambda^3 , \\ x_3 = \varpi_\lambda^3 c_\lambda^3 - \pi_\lambda^3 \mathfrak{c}_\lambda^3 , & x_4 = \varpi_\lambda^3 d_\lambda^3 - \pi_\lambda^3 \mathfrak{d}_\lambda^3 , \end{cases}$$

variando λ, sono le coordinate omogenee d'un punto qualunque della curva sezione del piano ξ' colla superficie V, e, dato a λ un valor particolare, sono le coordinate del punto d'incontro del piano ξ' colla generatrice λ. Intanto si può conchiudere che *ogni sezione piana della superficie V è una curva del 6° ordine e di genere zero*, perchè le coordinate d'un suo punto qualunque si possono esprimere mediante funzioni intere e razionali di un parametro λ. Inoltre indicando con n l'ordine, k la classe, p il genere d'una curva piana, d, r, w, t risp. i numeri dei punti doppi, delle cuspidi, dei flessi, e delle tangenti doppie, per la definizione del genere

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r ,$$

(*) ARMENANTE, l. c.

avvertendo che $p = 0$, $n = 6$, $r = 0$ (*), si ricava $d = 10$; dunque *la superficie V ha una curva doppia del 10° ordine;* applicando quindi le formole di Plücker

$$\begin{aligned} k &= n(n-1) - 2d - 3r\ , \\ w &= 3n(n-2) - 6d - 8r\ , \\ n &= k(k-1) - 2t - 3w\ , \\ r &= 3k(k-2) - 6t - 8w\ , \end{aligned}$$

si trova

$$k = 10\ , \qquad w = 12\ , \qquad t = 24\ ;$$

e così restano determinati i numeri caratteristici della curva sezione della superficie V con un piano qualunque.

§ 6. Dato un piano ξ, se nella sua equazione

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

si sostituiscono ad x_1, x_2, x_3, x_4 le loro espressioni (2), si avrà un'equazione del 6° grado in λ, la quale darà i parametri dei 6 punti, in cui il piano ξ taglia la curva del 6° ordine, sezione del piano ξ' colla superficie V; vale a dire darà i parametri delle 6 generatrici della superficie V incontrate dalla retta di cui le sei coordinate-assi sono

$$\zeta_{ij} = \xi_i \xi_j' - \xi_i' \xi_j$$

(ij è una combinazione binaria degli indici 1, 2, 3, 4).

Pertanto l'equazione

$$\begin{aligned} 0 &= \zeta_{12}(a_\lambda^3 \mathfrak{b}_\lambda^3 - \mathfrak{a}_\lambda^3 b_\lambda^3) + \zeta_{13}(a_\lambda^3 \mathfrak{c}_\lambda^3 - \mathfrak{a}_\lambda^3 c_\lambda^3) + \ldots + \zeta_{34}(c_\lambda^3 \mathfrak{d}_\lambda^3 - \mathfrak{c}_\lambda^3 d_\lambda^3) \\ &= \zeta_{12}(\zeta_{34})_\lambda^6 + \zeta_{13}(\zeta_{24})_\lambda^6 + \ldots + \zeta_{34}(\zeta_{12})_\lambda^6 = m_\lambda^6\ , \end{aligned}$$

dati ξ e ξ', fornisce i parametri delle 6 generatrici che sono incontrate dalla retta, secondo cui si secano ξ e ξ'; dato λ e ξ', rappresenta in coordinate di piani il punto d'incontro della generatrice λ col piano ξ'; dato λ, variando ξ e ξ', rappresenta il complesso lineare (speciale) delle rette che secano la generatrice λ. — Il discriminante del 2° membro della stessa equazione eguagliato a zero rappresenta un complesso della $2(6-1) = 10^a$ classe, formato dalle rette tangenti alla superficie V, e può chiamarsi

---

(*) $r=0$, perchè una sezione piana d'una superficie sghemba in generale non ha cuspidi.

l'*equazione in coordinate di rette* della superficie V. Se nel detto discriminante ξ' si suppone noto, si avrà un'equazione del 10° grado, la quale rappresenta in coordinate di piani la curva sezione del ξ' piano colla superficie V, e così resta confermato che tale curva è della 10ª classe.

In coordinate-raggi l'equazione del complesso lineare formato dalle rette che secano la generatrice λ è

$$
\begin{aligned}
0 &= z_{12}(c_\lambda^3 \mathfrak{d}_\lambda^3 - \mathfrak{c}_\lambda^3 d_\lambda^3) + z_{13}(b_\lambda^3 \mathfrak{d}_\lambda^3 - \mathfrak{b}_\lambda^3 d_\lambda^3) + \dots + z_{34}(a_\lambda^3 \mathfrak{b}_\lambda^3 - \mathfrak{a}_\lambda^3 b_\lambda^3) \\
&= z_{12}(z_{34})_\lambda^6 + z_{13}(z_{24})_\lambda^6 + \dots + z_{34}(z_{12})_\lambda^6 = n_\lambda^6 ,
\end{aligned}
$$

dove $z_{ij} = x_i x'_j - x_j x'_i$ sono le coordinate-raggi della retta pei due punti x, x'; la stessa equazione, dato λ e x', rappresenta il piano determinato dalla generatrice λ e dal punto x'; il suo discriminante eguagliato a zero rappresenta in coordinate di punti il complesso del 10° ordine delle rette tangenti alla superficie V; e, se nel medesimo discriminante si suppone x' dato, esso rappresenterà un cono del 10° ordine, che è il cono circoscritto da x' come vertice alla superficie. Questo cono è della 6ª classe, 10° ordine, genere zero, ha 10 piani bitangenti, 24 generatrici doppie, 12 generatrici di flesso, nessun piano stazionario.

§ 7. Se due generatrici λ e μ si incontrano, si incontreranno eziandio le corde $\overline{\lambda\mu}$ delle due cubiche date; or bene, se due rette si incontrano, e le coordinate-raggi o coordinate-assi sono per l'una y_{ij} e per l'altra y_{ij}', tra queste coordinate passa la relazione

$$
y_{12}y_{34}' + y_{13}y_{24}' + \dots + y_{34}y_{12}' = 0 \quad ;
$$

pertanto, sostituendo in questa dapprima le coordinate-raggi, poscia le coordinate-assi delle corde $\overline{\lambda\mu}$ relative alle due cubiche date (*), le equazioni

$$
(3)\left\{
\begin{aligned}
0 &= [(ab)^3(\lambda\mu)^2 + 3(ab)a_\lambda a_\mu b_\lambda b_\mu][(\mathfrak{c}\mathfrak{d})^3(\lambda\mu)^2 + 3(\mathfrak{c}\mathfrak{d})\mathfrak{c}_\lambda \mathfrak{c}_\mu \mathfrak{d}_\lambda \mathfrak{d}_\mu] \\
&\quad + [(ac)^3(\lambda\mu)^2 + 3(ac)a_\lambda a_\mu c_\lambda c_\mu][(\mathfrak{b}\mathfrak{d})^3(\lambda\mu)^2 + 3(\mathfrak{b}\mathfrak{d})\mathfrak{b}_\lambda \mathfrak{b}_\mu \mathfrak{d}_\lambda \mathfrak{d}_\mu] + \dots , \\
0 &= (AB)A_\lambda A_\mu B_\lambda B_\mu \cdot (\mathfrak{C}\mathfrak{D})\mathfrak{C}_\lambda \mathfrak{C}_\mu \mathfrak{D}_\lambda \mathfrak{D}_\mu + (AC)A_\lambda A_\mu C_\lambda C_\mu \cdot (\mathfrak{B}\mathfrak{D})\mathfrak{B}_\lambda \mathfrak{B}_\mu \mathfrak{D}_\lambda \mathfrak{D}_\mu + \dots
\end{aligned}
\right.
$$

saranno le condizioni affinchè le due generatrici λ e μ si incontrino; quindi, dato a μ un valore, queste due equazioni del 4° grado in λ hanno

(*) V. D'Ovidio, l. c., § 6.

le stesse radici, le quali sono i parametri delle 4 generatrici che incontrano la generatrice μ. Dunque *ogni generatrice della superficie V è incontrata da altre quattro*, o, ciò che torna allo stesso, *è incontrata in quattro punti dalla curva-doppia* (*).

Di ciascuna delle (3) prendendo il discriminante rispetto a μ, ed eguagliandolo a zero, si avrà un'equazione del 24° grado in λ, la quale fornirà i parametri di quelle generatrici, che sono secate da due altre fra loro infinitamente vicine. Dunque *sulla superficie V vi sono* 24 *generatrici che sono toccate dalla curva doppia* (**).

Se poi nelle (3) si fa $\lambda = \mu$, esse diverranno

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= (ab) a_\lambda^2 b_\lambda^2 \cdot (\mathfrak{c}\mathfrak{d}) \mathfrak{c}_\lambda^2 \mathfrak{d}_\lambda^2 + (ac) a_\lambda^2 c_\lambda^2 \cdot (\mathfrak{b}\mathfrak{d}) \mathfrak{b}_\lambda^2 \mathfrak{d}_\lambda^2 + \ldots \,, \\ 0 &= (AB) A_\lambda^2 B_\lambda^2 \cdot (\mathfrak{C}\mathfrak{D}) \mathfrak{C}_\lambda^2 \mathfrak{D}_\lambda^2 + (AC) A_\lambda^2 C_\lambda^2 \cdot (\mathfrak{B}\mathfrak{D}) \mathfrak{B}_\lambda^2 \mathfrak{D}_\lambda^2 + \ldots \,; \end{aligned} \right.$$

queste sono dell'8° grado in λ, quindi si conchiude che esistono 8 tangenti all'una cubica data, le quali incontrano le corrispondenti tangenti all'altra cubica data, e che *la superficie V possiede* 8 *generatrici singolari, le quali sono incontrate dalle successive, e quindi* 8 *punti cuspidali* (***). Tutti i piani tangenti alla superficie V nei punti di ciascuna di queste generatrici singolari coincidono in uno; si hanno così 8 piani singolari, sui quali ritorneremo più tardi (§ 21).

L'esistenza di quattro generatrici, che incontrano una generatrice λ data, implica l'esistenza di quattro cubiche del sistema per cui quella generatrice è una corda; invero sia μ una generatrice che seca la generatrice λ, pel punto d'incontro devono passare due cubiche $g_{x'}$, $g_{x''}$, sulla $g_{x'}$ quel punto abbia il parametro μ, sulla $g_{x''}$ avrà il parametro λ; ora la cubica $g_{x'}$, possiede anche un punto di parametro λ, e questo giace sulla generatrice λ, dunque la generatrice λ è una corda di $g_{x'}$ dal momento che passa pei due suoi punti λ, μ. — In particolare esistono

---

(*) Ciò è d'accordo col teorema generale « In una superficie sghemba di grado n, ogni generatrice è incontrata da altre $n-2$ ». V. Cremona, *Preliminari a una teoria generale della superficie.*

(**) Ciò è d'accordo colla formola

$$2(n-2)(n-3)$$

che dà il numero delle generatrici toccate dalla curva doppia in una superficie sghemba di ordine n, genere zero. — Cfr. *Math. Ann. Bd.* VIII. — *Zur Theorie der windschiefen Flächen.* — Voss.

(***) Ciò è d'accordo colla formola

$$2(n-2)$$

che dà il numero delle generatrici singolari d'una superficie sghemba, d'ordine n, genere zero. — Cfr. Voss, l. c.

8 generatrici della superficie V tangenti a cubiche g_x, esse sono le 8 generatrici singolari, e ciascuna di esse tocca appunto quella cubica g_x, che passa per il rispettivo punto cuspidale.

§ 8. La superficie V ammette un numero semplicemente infinito di piani bitangenti, di quelli cioè che ne contengono due generatrici; essi inviluppano una superficie sviluppabile, detta la *sviluppabile bitangente* della superficie V, la quale è della 10^a classe, perchè la classe della sviluppabile bitangente d'una superficie sghemba è uguale all'ordine della sua curva doppia, e quest'ordine si è dimostrato eguale a 10.

La superficie V ammette poi un numero finito di piani tritangenti, di quelli cioè che ne contengono tre generatrici. Se un piano ξ è tritangente, i tre punti, in cui seca l'una delle due cubiche date, hanno gli stessi parametri dei tre punti, in cui seca l'altra cubica; quindi le due equazioni in λ

$$0 = p_\lambda^3 \ , \qquad 0 = \mathfrak{p}_\lambda^3$$

hanno le stesse radici, epperciò si deve avere

$$p_{111} : p_{112} : p_{122} : p_{222} :: \mathfrak{p}_{111} : \mathfrak{p}_{112} : \mathfrak{p}_{122} : \mathfrak{p}_{222}$$

ossia

$$p_{111}\mathfrak{p}_{222} - \mathfrak{p}_{111}p_{222} = 0 \ ,$$

$$p_{111}\mathfrak{p}_{122} - \mathfrak{p}_{111}p_{122} = 0 \ ,$$

$$p_{111}\mathfrak{p}_{112} - \mathfrak{p}_{111}p_{112} = 0 \ ,$$

queste tre equazioni rappresentano tre iperboloidi, e i piani tangenti comuni a tutti e tre saranno i piani tritangenti della superficie V. Osservisi che tali tre iperboloidi hanno una generatrice comune, che è la retta congiungente il punto $p_{111} = 0$ col punto $\mathfrak{p}_{111} = 0$; dunque essi hanno solamente 4 piani tangenti comuni invece di 8, e ciò in virtù del teorema correlativo al seguente enunciato dallo Chasles: (*) « Tre iperboloidi che abbiano una generatrice comune, hanno di comune altri 4 punti ».

Si può quindi conchiudere che *la superficie V ammette quattro piani tritangenti* (**).

(*) Comptes rendus..... 1857.

(**) Ciò è d'accordo colla formola

$$\tfrac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)$$

che dà il numero dei piani tritangenti d'una superficie sghemba d'ordine n, genere zero. — Voss, l. c.

Assumendo per piani coordinati i quattro piani tritangenti, siccome le equazioni

$$0 = a_\lambda^3 \,, \quad 0 = b_\lambda^3 \,, \quad 0 = c_\lambda^3 \,, \quad 0 = d_\lambda^3 \;;$$
$$0 = \mathfrak{a}_\lambda^3 \,, \quad 0 = \mathfrak{b}_\lambda^3 \,, \quad 0 = \mathfrak{c}_\lambda^3 \,, \quad 0 = \mathfrak{d}_\lambda^3$$

determinano rispettivamente i parametri delle terne di punti, in cui le due cubiche date son secate dai piani di riferimento

$$0 = x_1 \,, \quad 0 = x_2 \,, \quad 0 = x_3 \,, \quad 0 = x_4 \,,$$

e siccome ciascuno di questi piani seca le due cubiche date in due terne di punti, le quali hanno gli stessi parametri, così a_λ^3 e $\mathfrak{a}_\lambda^3$ non possono differire che per un fattor numerico, e lo stesso dicasi di b_λ^3 e $\mathfrak{b}_\lambda^3$, c_λ^3 e $\mathfrak{c}_\lambda^3$, d_λ^3 e $\mathfrak{d}_\lambda^3$. Dunque, se per piani coordinati si prendono i piani tritangenti, e se

$$x_1 = k_1\, \alpha_\lambda^3 \,, \qquad x_2 = k_1'\, \beta_\lambda^3 \,,$$
$$x_3 = k_1''\gamma_\lambda^3 \,, \qquad x_4 = k_1'''\delta_\lambda^3 \,,$$

sono le coordinate d'un punto qualunque della cubica g_0, le coordinate del punto corrispondente della cubica g_∞ saranno della forma

$$x_1 = k_2\, \alpha_\lambda^3 \,, \qquad x_2 = k_2'\, \beta_\lambda^3$$
$$x_3 = k_2''\gamma_\lambda^3 \,, \qquad x_4 = k_2'''\delta_\lambda^3 \,.$$

e le coordinate del punto di parametro λ su una cubica qualunque g_κ saranno

$$x_1 = k_\kappa\, \alpha_\lambda^3 \,, \qquad x_2 = k_\kappa'\beta_\lambda^3 \,,$$
$$x_3 = k_\kappa''\gamma_\lambda^3 \,, \qquad x_4 = k_\kappa''\delta_\lambda^3 \,.$$

Vedremo tosto (§ 12) quali vantaggi introduca questa scelta particolare di piani coordinati (*).

§ **9**. Accennerò i principali risultati che corrispondono per dualità alle cose dette nei §§ 4, 5, 6, 7, 8, quando si consideri il sistema di sviluppabili di 3ª classe.

La superficie W, in cui queste sono inscritte, è ancora essa rappresentabile punto per punto su di un piano, è del 6° ordine e classe,

---

(*) Nel sistema di cubiche considerato da CHASLES, i quattro piani, di cui si parla nel testo, sono le faccie del tetraedro, che ha per vertici i quattro punti, per cui passano tutte le cubiche.

e di genere zero, ed ha una curva doppia del 10^o ordine. Una sua sezione piana è ancora una curva del 6^o ordine, 10^a classe, genere zero, con 10 punti doppi, ecc. Il complesso lineare formato dalle rette che secano la generatrice λ ha per equazione

$$0 = \zeta_{12}(A_\lambda^3 \mathfrak{B}_\lambda^3 - \mathfrak{A}_\lambda^3 B_\lambda^3) + \ldots + \zeta_{34}(C_\lambda^3 \mathfrak{D}_\lambda^3 - \mathfrak{C}_\lambda^3 D_\lambda^3)$$

in coordinate-assi di rette, e

$$0 = z_{12}(C_\lambda^3 \mathfrak{D}_\lambda^3 - \mathfrak{C}_\lambda^3 D_\lambda^3) + \ldots + z_{34}(A_\lambda^3 \mathfrak{B}_\lambda^3 - \mathfrak{A}_\lambda^3 B_\lambda^3)$$

in coordinate-raggi di rette. Ogni generatrice λ della superficie W è incontrata da 4 altre, i parametri delle quali son dati dall'equazione di 4^o grado in μ

$$0 = [(AB)^3(\lambda\mu)^2 + 3(AB)A_\lambda A_\mu B_\lambda B_\mu][(\mathfrak{C}\mathfrak{D})^3(\lambda\mu)^2 + 3(\mathfrak{C}\mathfrak{D})\mathfrak{C}_\lambda \mathfrak{C}_\mu \mathfrak{D}_\lambda \mathfrak{D}_\mu] + \ldots$$

ovvero

$$0 = (ab)a_\lambda a_\mu b_\lambda b_\mu \cdot (\mathfrak{c}\mathfrak{d})\mathfrak{c}_\lambda \mathfrak{c}_\mu \mathfrak{d}_\lambda \mathfrak{d}_\mu + \ldots + (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{a}_\lambda \mathfrak{a}_\mu \mathfrak{b}_\lambda \mathfrak{b}_\mu \cdot (cd)c_\lambda c_\mu d_\lambda d_\mu \, .$$

Anche nella superficie W vi sono 24 generatrici toccate dalla curva doppia, ed 8 generatrici singolari incontrate dalle successive, i parametri delle quali sono forniti dalle stesse equazioni (4). La superficie W ammette poi 4 punti tripli; le terne di piani delle sviluppabili G_0, G_∞, e quindi d'una sviluppabile qualunque G_n, condotte da un punto triplo hanno gli stessi parametri. Assumendo per tetraedro fondamentale quello che ha per vertici i 4 punti tripli, le coordinate del piano λ della sviluppabile G_n prendono la forma

$$\xi_1 = K_n \, \overline{\alpha_\lambda}^3 \, , \qquad \xi_2 = K_n' \overline{\beta_\lambda}^3 \, ,$$
$$\xi_3 = K_n'' \overline{\gamma_\lambda}^3 \, , \qquad \xi_4 = K_n''' \overline{\delta_\lambda}^3 \, .$$

CAPO II.

§ **10**. Studiata la superficie V luogo di tutte le cubiche $g_\varkappa$ del sistema che si considera, occupiamoci più da vicino di queste cubiche.

Una cubica $g_\varkappa$ sarà piana, se si annulla il determinante

$$\begin{vmatrix} \varkappa_1 a_{111} + \varkappa_2 \mathfrak{a}_{111} & \varkappa_1 a_{112} + \varkappa_2 \mathfrak{a}_{112} & \varkappa_1 a_{122} + \varkappa_2 \mathfrak{a}_{122} & \varkappa_1 a_{222} + \varkappa_2 \mathfrak{a}_{222} \\ \varkappa_1 b_{111} + \varkappa_2 \mathfrak{b}_{111} & . & . & . \\ \varkappa_1 c_{111} + \varkappa_2 \mathfrak{c}_{111} & . & . & . \\ \varkappa_1 d_{111} + \varkappa_2 \mathfrak{d}_{111} & . & . & . \end{vmatrix}$$

donde appare che *nel sistema di cubiche considerato ve ne sono quattro piane*, le quali corrispondono ai valori di $\varkappa_1 : \varkappa_2$ dati dall'equazione

$$0 = \Delta_\varkappa^4 = \Delta_0 \varkappa_1^4 + 4\Delta_1 \varkappa_1^3 \varkappa_2 + 6\Delta_2 \varkappa_1^2 \varkappa_2^2 + 4\Delta_3 \varkappa_1 \varkappa_2^3 + \Delta_4 \varkappa_2^4 ,$$

ove si è posto

$$\begin{aligned} \Delta_0 =& \ (ab)(ac)(ad)(bc)(bd)(cd) \ , \\ -4\Delta_1 =& \ (\mathfrak{a}b)(\mathfrak{a}c)(\mathfrak{a}d)(bc)(bd)(cd) + (a\mathfrak{b})(ac)(ad)(\mathfrak{b}c)(\mathfrak{b}d)(cd) \\ & + (ab)(a\mathfrak{c})(ad)(b\mathfrak{c})(bd)(\mathfrak{c}d) + (ab)(ac)(a\mathfrak{d})(bc)(b\mathfrak{d})(c\mathfrak{d}) \ , \\ 6\Delta_2 =& \ (\mathfrak{a}\mathfrak{b})(\mathfrak{a}c)(\mathfrak{a}d)(\mathfrak{b}c)(\mathfrak{b}d)(cd) + (\mathfrak{a}b)(\mathfrak{a}\mathfrak{c})(\mathfrak{a}d)(b\mathfrak{c})(bd)(\mathfrak{c}d) \\ & + (\mathfrak{a}b)(\mathfrak{a}c)(\mathfrak{a}\mathfrak{d})(bc)(b\mathfrak{d})(c\mathfrak{d}) + (a\mathfrak{b})(a\mathfrak{c})(ad)(\mathfrak{b}\mathfrak{c})(\mathfrak{b}d)(\mathfrak{c}d) \\ & + (a\mathfrak{b})(ac)(a\mathfrak{d})(\mathfrak{b}c)(\mathfrak{b}\mathfrak{d})(c\mathfrak{d}) + (ab)(a\mathfrak{c})(a\mathfrak{d})(b\mathfrak{c})(b\mathfrak{d})(\mathfrak{c}\mathfrak{d}) \ , \\ -4\Delta_3 =& \ (\mathfrak{a}\mathfrak{b})(\mathfrak{a}\mathfrak{c})(\mathfrak{a}d)(\mathfrak{b}\mathfrak{c})(\mathfrak{b}d)(\mathfrak{c}d) + (\mathfrak{a}\mathfrak{b})(\mathfrak{a}c)(\mathfrak{a}\mathfrak{d})(\mathfrak{b}c)(\mathfrak{b}\mathfrak{d})(c\mathfrak{d}) \\ & + (\mathfrak{a}b)(\mathfrak{a}\mathfrak{c})(\mathfrak{a}\mathfrak{d})(b\mathfrak{c})(b\mathfrak{d})(\mathfrak{c}\mathfrak{d}) + (a\mathfrak{b})(a\mathfrak{c})(a\mathfrak{d})(\mathfrak{b}\mathfrak{c})(\mathfrak{b}\mathfrak{d})(\mathfrak{c}\mathfrak{d}) \ , \\ \Delta_4 =& \ (\mathfrak{a}\mathfrak{b})(\mathfrak{a}\mathfrak{c})(\mathfrak{a}\mathfrak{d})(\mathfrak{b}\mathfrak{c})(\mathfrak{b}\mathfrak{d})(\mathfrak{c}\mathfrak{d}) . \end{aligned}$$

È bene osservare che le dette 4 cubiche piane hanno certamente punto doppio, poichè le coordinate dei loro punti sono funzioni razionali d'un parametro, e si sa che ogni curva *razionale* piana è di genere zero, possiede cioè il massimo numero di punti doppî.

I piani tritangenti della superficie V sono quelli in cui giacciono le 4 cubiche piane $g_\varkappa$; infatti un piano, che contenga una cubica segnata sulla superficie V, conterrà ancora le tre generatrici, che sono le rette congiungenti i tre punti, in cui una cubica qualunque $g_\varkappa$ seca il detto piano, coi tre punti corrispondenti della cubica in esso piano situata. Pertanto la curva sezione d'un piano tritangente colla superficie V si scinde nelle tre generatrici che esso contiene, ed in una delle 4 cubiche piane.

Per dualità nel sistema di sviluppabili di 3ª classe vi sono quattro coni, e corrispondono ai valori di $\varkappa_1 : \varkappa_2$ dati dall'equazione

$$o = \nabla_\varkappa^4 = \begin{vmatrix} \varkappa_1 A_{111} + \varkappa_2 \mathfrak{A}_{111} & \varkappa_1 A_{112} + \varkappa_2 \mathfrak{A}_{112} & \varkappa_1 A_{122} + \varkappa_2 \mathfrak{A}_{122} & \varkappa_1 A_{222} + \varkappa_2 \mathfrak{A}_{222} \\ \varkappa_1 B_{111} + \varkappa_2 \mathfrak{B}_{111} & . & . & . \\ \varkappa_1 C_{111} + \varkappa_2 \mathfrak{C}_{111} & . & . & . \\ \varkappa_1 D_{111} + \varkappa_2 \mathfrak{D}_{111} & . & . & . \end{vmatrix} .$$

Egli è notevole che, per le relazioni che legano i coefficienti delle forme $A_\lambda^3, \ldots, D_\lambda^3$ coi coefficienti delle forme $a_\lambda^3, \ldots, d_\lambda^3$ (*), e per le analoghe relazioni fra i coefficienti delle $\mathfrak{A}_\lambda^3, \ldots, \mathfrak{D}_\lambda^3$ e i coefficienti delle $\mathfrak{a}_\lambda^3, \ldots, \mathfrak{d}_\lambda^3$, in virtù d'un teorema sui determinanti dovuto al Prof. F. Siacci (**), si ha

$$\Delta_\varkappa^4 = \Delta_0 \Delta_4 \nabla_{\varkappa'}^4$$

essendo

$$\varkappa_1' = \frac{\varkappa_2}{\Delta_0} , \qquad \varkappa_2' = \frac{\varkappa_1}{\Delta_4} ,$$

donde appare che le radici dell'equazione $\nabla_\varkappa^4 = o$ differiscono dai valori reciproci delle radici di $\Delta_\varkappa^4 = o$ pel fattore $\frac{\Delta_0}{\Delta_4}$, e donde si ricavano le relazioni

$$\nabla_0 = \tfrac{1}{9} \Delta_0^3 , \quad \nabla_1 = \tfrac{1}{9} \Delta_0^2 \Delta_3 , \quad \nabla_2 = \tfrac{1}{9} \Delta_0 \Delta_2 \Delta_4 , \quad \nabla_3 = \tfrac{1}{9} \Delta_1 \Delta_4^2 , \quad \nabla_4 = \tfrac{1}{9} \Delta_4^3 .$$

§ 11. Indichiamo con δ l'operazione

$$\delta = \left(\frac{\partial}{\partial a_1} \mathfrak{a}_1 + \frac{\partial}{\partial a_2} \mathfrak{a}_2 \right)^3 + \ldots + \left(\frac{\partial}{\partial d_1} \mathfrak{d}_1 + \frac{\partial}{\partial d_2} \mathfrak{d}_2 \right)^3$$
$$= \sum \frac{\partial}{\partial a_{ijk}} \mathfrak{a}_{ijk} + \ldots + \sum \frac{\partial}{\partial d_{ijk}} \mathfrak{d}_{ijk} ,$$

(*) V. D'Ovidio, l. c.

(**) *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, Vol. VII.

e con δ_1 l'operazione

$$\delta_1 = \left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{a}_1} a_1 + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{a}_2} a_2\right)^3 + \ldots + \left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{d}_1} d_1 + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{d}_2} d_2\right)^3$$

$$= \sum \frac{\partial}{\partial \mathfrak{a}_{ijk}} a_{ijk} + \ldots + \sum \frac{\partial}{\partial \mathfrak{d}_{ijk}} d_{ijk} .$$

Siccome si ha

$$A_\lambda^3 = (bc)(bd)(cd) b_\lambda c_\lambda d_\lambda ,$$

così sarà

$$\delta A_\lambda^3 = (\mathfrak{b}c)(\mathfrak{b}d)(cd)\mathfrak{b}_\lambda c_\lambda d_\lambda + (b\mathfrak{c})(bd)(\mathfrak{c}d) b_\lambda \mathfrak{c}_\lambda d_\lambda + (bc)(b\mathfrak{d})(c\mathfrak{d}) b_\lambda c_\lambda \mathfrak{d}_\lambda ,$$

$$\tfrac{1}{2}\delta^2 A_\lambda^3 = (\mathfrak{b}\mathfrak{c})(\mathfrak{b}d)(\mathfrak{c}d)\mathfrak{b}_\lambda \mathfrak{c}_\lambda d_\lambda + (\mathfrak{b}c)(\mathfrak{b}\mathfrak{d})(c\mathfrak{d})\mathfrak{b}_\lambda c_\lambda \mathfrak{d}_\lambda + (b\mathfrak{c})(b\mathfrak{d})(\mathfrak{c}\mathfrak{d}) b_\lambda \mathfrak{c}_\lambda \mathfrak{d}_\lambda ,$$

$$\tfrac{1}{6}\delta^3 A_\lambda^3 = (\mathfrak{b}\mathfrak{c})(\mathfrak{b}\mathfrak{d})(\mathfrak{c}\mathfrak{d})\mathfrak{b}_\lambda \mathfrak{c}_\lambda \mathfrak{d}_\lambda = \mathfrak{A}_\lambda^3 ;$$

epperò si avrà

$$6 \begin{vmatrix} x_1 b_\lambda b_1^2 + x_2 \mathfrak{b}_\lambda \mathfrak{b}_1^2 & x_1 c_\lambda c_1^2 + x_2 \mathfrak{c}_\lambda \mathfrak{c}_1^2 & x_1 d_\lambda d_1^2 + x_2 \mathfrak{d}_\lambda \mathfrak{d}_1^2 \\ x_1 b_\lambda b_1 b_2 + x_2 \mathfrak{b}_\lambda \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 & x_1 c_\lambda c_1 c_2 + x_2 \mathfrak{c}_\lambda \mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_2 & x_1 d_\lambda d_1 d_2 + x_2 \mathfrak{d}_\lambda \mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2 \\ x_1 b_\lambda b_2^2 + x_2 \mathfrak{b}_\lambda \mathfrak{b}_2^2 & x_1 c_\lambda c_2^2 + x_2 \mathfrak{c}_\lambda \mathfrak{c}_2^2 & x_1 d_\lambda d_2^2 + x_2 \mathfrak{d}_\lambda \mathfrak{d}_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= 6 A_\lambda^3 x_1^3 + 6\delta A_\lambda^3 x_1^2 x_2 + 3\delta^2 A_\lambda^3 x_1 x_2^2 + \delta^3 A_\lambda^3 x_2^3$$

ovvero

$$= \delta_1^3 \mathfrak{A}_\lambda^3 x_1^3 + 3\delta_1^2 \mathfrak{A}_\lambda^3 x_1^2 x_2 + 6\delta_1 \mathfrak{A}_\lambda^3 x_1 x_2^2 + 6\mathfrak{A}_\lambda^3 x_2^3 ;$$

questa è una forma doppiamente binaria, perchè omogenea rispetto a due coppie di variabili x_1, x_2 e λ_1, λ_2; e, visto che è di 3° grado rispetto a ciascuna, la denoteremo con $\mathrm{a}_x^3 \mathrm{A}_\lambda^3$, convenendo che abbiano valore effettivo quelle combinazioni dei simboli a e A in cui entrano tre simboli a e tre simboli A.

In modo analogo porremo

$$\mathrm{b}_x^3 \mathrm{B}_\lambda^3 = 6 B_\lambda^3 x_1^3 + 6\delta B_\lambda^3 x_1^2 x_2 + 3\delta^2 B_\lambda^3 x_1 x_2^2 + \delta^3 B_\lambda^3 x_2^3 = \ldots$$

$$\mathrm{c}_x^3 \mathrm{C}_\lambda^3 = 6 C_\lambda^3 x_1^3 + 6\delta C_\lambda^3 x_1^2 x_2 + 3\delta^2 C_\lambda^3 x_1 x_2^2 + \delta^3 C_\lambda^3 x_2^3 = \ldots$$

$$\mathrm{d}_x^3 \mathrm{D}_\lambda^3 = 6 D_\lambda^3 x_1^3 + 6\delta D_\lambda^3 x_1^2 x_2 + 3\delta^2 D_\lambda^3 x_1 x_2^2 + \delta^3 D_\lambda^3 x_2^3 = \ldots$$

Ciò premesso, l'equazione del piano osculatore alla cubica g_x nel suo punto di parametro λ sarà

$$0 = \mathrm{a}_x^3 \mathrm{A}_\lambda^3 x_1 + \mathrm{b}_x^3 \mathrm{B}_\lambda^3 x_2 + \mathrm{c}_x^3 \mathrm{C}_\lambda^3 x_3 + \mathrm{d}_x^3 \mathrm{D}_\lambda^3 x_4 \qquad \ldots . \quad (1).$$

Tra questa e la $\Delta_\varkappa^4 = 0$ eliminando $\varkappa$, si ottiene l'equazione complessiva dei 4 piani tritangenti.

Osservando che l'equazione ora scritta è del 3° grado non solo in λ, ma ancora in $\varkappa$, quando λ rimane fisso e varia $\varkappa$, si deduce che *tutti i piani osculatori d'uno stesso parametro λ alle cubiche del sistema considerato osculano una nuova cubica gobba,* che denoteremo con g_λ'. Così al sistema di cubiche $g_\varkappa$ finora considerato si connette un altro sistema di cubiche g_λ'.

§ 12. Quando per piani coordinati si prendono i quattro piani tritangenti, le $a_\varkappa^3$, $b_\varkappa^3$, $c_\varkappa^3$, $d_\varkappa^3$ divengono forme effettive e sono

$$a_\varkappa^3 = k_\varkappa' k_\varkappa'' k_\varkappa''', \qquad b_\varkappa^3 = k_\varkappa k_\varkappa'' k_\varkappa''', \qquad c_\varkappa^3 = k_\varkappa k_\varkappa' k_\varkappa''', \qquad d_\varkappa^3 = k_\varkappa k_\varkappa' k_\varkappa'',$$

così pure divengono forme effettive le A_λ^3, B_λ^3, C_λ^3, D_λ^3, e sono

$$A_\lambda^3 = (\beta\gamma)(\beta\delta)(\gamma\delta)\beta_\lambda\gamma_\lambda\delta_\lambda, \qquad B_\lambda^3 = -(\alpha\gamma)(\alpha\delta)(\gamma\delta)\alpha_\lambda\gamma_\lambda\delta_\lambda,$$
$$C_\lambda^3 = (\alpha\beta)(\alpha\delta)(\beta\delta)\alpha_\lambda\beta_\lambda\delta_\lambda, \qquad D_\lambda^3 = -(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\beta\gamma)\alpha_\lambda\beta_\lambda\gamma_\lambda,$$

e l'equazione del piano osculatore alla cubica $g_\varkappa$ nel punto di parametro λ prende la forma

$$0 = \frac{A_\lambda^3}{k_\varkappa} x_1 + \frac{B_\lambda^3}{k_\varkappa'} x_2 + \frac{C_\lambda^3}{k_\varkappa''} x_3 + \frac{D_\lambda^3}{k_\varkappa'''} x_4 \;;$$

inoltre in questo sistema di coordinate per le coordinate d'un punto qualunque di parametro $\varkappa$ della cubica g_λ' si possono assumere

$$\frac{A_\lambda^3}{(kk')(kk'')(kk''')} x_1 = k_\varkappa^3, \qquad \frac{B_\lambda^3}{(kk')(k'k'')(k'k''')} x_2 = k_\varkappa'^3,$$
$$\frac{C_\lambda^3}{(kk'')(k'k'')(k''k''')} x_3 = k_\varkappa''^3, \qquad \frac{D_\lambda^3}{(kk''')(k'k''')(k''k''')} x_4 = k_\varkappa'''^3,$$

e siccome $k_\varkappa^3$, $k_\varkappa'^3$, $k_\varkappa''^3$, $k_\varkappa'''^3$ sono cubi effettivi, così si conchiude che *tutte le cubiche g_λ' sono osculatrici ai quattro piani tritangenti della superficie V*; il che si poteva prevedere considerando ogni piano tritangente come osculatore alla cubica piana $g_\varkappa$, in esso contenuta, in un suo punto λ qualunque.

Per coordinate d'un piano qualunque ρ della cubica g_λ' si possono assumere

$$\xi_1 = A_\lambda^3 . k_\rho' k_\rho'' k_\rho''', \quad \xi_2 = B_\lambda^3 . k_\rho k_\rho'' k_\rho''', \quad \xi_3 = C_\lambda^3 . k_\rho k_\rho' k_\rho''', \quad \xi_4 = D_\lambda^3 . k_\rho k_\rho' k_\rho'' \;;$$

donde appare come i piani osculatori a tutte le cubiche g_x nei rispettivi punti, che hanno per parametri le radici dell'equazione $\mathrm{A}_\lambda^3 = 0$, formino tre coni col vertice in uno stesso vertice del tetraedro fondamentale, questi coni sono della 2ª classe, perchè le coordinate ξ_2, ξ_3, ξ_4 d'un loro punto qualunque, tolto il fattore comune k_ρ, si riducono al 2° grado nel parametro ρ; lo stesso si dica circa i piani osculatori i cui parametri sono radici delle equazioni $\mathrm{B}_\lambda^3 = 0$, $\mathrm{C}_\lambda^3 = 0$, $\mathrm{D}_\lambda^3 = 0$. Di qui segue che ciascun vertice del tetraedro fondamentale è tale che le terne di piani osculatori condotte da esso alle cubiche del sistema, e quindi anche alle due cubiche date, hanno gli stessi parametri; dunque *il tetraedro che ha per faccie i piani tritangenti della superficie V, e il tetraedro che ha per vertici i punti tripli della superficie W, sono uno stesso tetraedro.*

§ **13**. Operando col simbolo δ sull'identità

$$A_\lambda^3 a_\lambda^3 + B_\lambda^3 b_\lambda^3 + C_\lambda^3 c_\lambda^3 + D_\lambda^3 d_\lambda^3 = 0\,,$$

si ha

$$(A_\lambda^3 \mathfrak{a}_\lambda^3 + \ldots + D_\lambda^3 \mathfrak{d}_\lambda^3) + (a_\lambda^3 \delta A_\lambda^3 + \ldots + d_\lambda^3 \delta D_\lambda^3) = 0\;;$$

operando di nuovo su questa col simbolo δ, si ha

$$2(\mathfrak{a}_\lambda^3 \delta A_\lambda^3 + \ldots + \mathfrak{d}_\lambda^3 \delta D_\lambda^3) + (a_\lambda^3 \delta^2 A_\lambda^3 + \ldots + d_\lambda^3 \delta^2 D_\lambda^3) = 0\;;$$

operando ancora una volta col simbolo δ su di questa, si ha

$$3(\mathfrak{a}_\lambda^3 \delta^2 A_\lambda^3 + \ldots + \mathfrak{d}_\lambda^3 \delta^2 D_\lambda^3) + (a_\lambda^3 \delta^3 A_\lambda^3 + \ldots + d_\lambda^3 \delta^3 D_\lambda^3) = 0\,.$$

Se si operasse una quarta volta col simbolo δ, si avrebbe

$$\mathfrak{a}_\lambda^3 \mathfrak{A}_\lambda^3 + \mathfrak{b}_\lambda^3 \mathfrak{B}_\lambda^3 + \mathfrak{c}_\lambda^3 \mathfrak{C}_\lambda^3 + \mathfrak{d}_\lambda^3 \mathfrak{D}_\lambda^3 = 0\,,$$

che è l'identità analoga a quella da cui siamo partiti e si riferisce alla seconda cubica data (*).

Le stesse identità si ottengono osservando che il piano osculatore alla cubica g_x nel suo punto λ passa per questo, sicchè deve essere identicamente

$$\mathrm{a}_x^3 \mathrm{A}_\lambda^3 (\varkappa_1 a_\lambda^3 + \varkappa_2 \mathfrak{a}_\lambda^3) + \ldots + \mathrm{d}_x^3 \mathrm{D}_\lambda^3 (\varkappa_1 d_\lambda^3 + \varkappa_2 \mathfrak{d}_\lambda^3) = 0\,.$$

(*) Si sarebbe potuto prendere le mosse da quest'ultima e operare successivamente su di essa col simbolo δ_1.

Poniamo pertanto

$$\varphi_\lambda{}^6 = A_\lambda{}^3 \mathfrak{a}_\lambda{}^3 + \ldots + D_\lambda{}^3 \mathfrak{d}_\lambda{}^3 = -(a_\lambda{}^3 \partial A_\lambda{}^3 + \ldots + d_\lambda{}^3 \partial D_\lambda{}^3),$$
$$\chi_\lambda{}^6 = \mathfrak{a}_\lambda{}^3 \partial A_\lambda{}^3 + \ldots + \mathfrak{d}_\lambda{}^3 \partial D_\lambda{}^3 = -\tfrac{1}{2}(a_\lambda{}^3 \partial^2 A_\lambda{}^3 + \ldots + d_\lambda{}^3 \partial^2 D_\lambda{}^3),$$
$$\psi_\lambda{}^6 = 3(\mathfrak{a}_\lambda{}^3 \partial^2 A_\lambda{}^3 + \ldots + \mathfrak{d}_\lambda{}^3 \partial^2 D_\lambda{}^3) = -(a_\lambda{}^3 \partial^3 A_\lambda{}^3 + \ldots + d_\lambda{}^3 \partial^3 D_\lambda{}^3).$$

Ciò premesso, investighiamo se esiste qualche piano λ, il quale passi per la corrispondente generatrice λ. A questo scopo basterà cercare, se si può determinare $\varkappa$ in modo che il piano osculatore nel punto λ alla cubica $g_\varkappa$ passi per il punto $(\varkappa', \lambda)$ qualunque sia $\varkappa'$, vale a dire se la

$$\mathfrak{a}_\varkappa{}^3 \mathrm{A}_\lambda{}^3 (\varkappa_1{}' a_\lambda{}^3 + \varkappa_2{}' \mathfrak{a}_\lambda{}^3) + \ldots + \mathfrak{d}_\varkappa{}^3 \mathrm{D}_\lambda{}^3 (\varkappa_1{}' d_\lambda{}^3 + \varkappa_2{}' \mathfrak{d}_\lambda{}^3) = 0$$

sussiste qualunque sia $\varkappa'$; ora il primo membro di questa equazione in virtù delle identità suesposte si può scrivere

$$(\varkappa\varkappa')[\varphi_\lambda{}^6 \varkappa_1{}^2 + 2\chi_\lambda{}^6 \varkappa_1 \varkappa_2 + \psi_\lambda{}^6 \varkappa_2{}^2]$$

dunque *i piani osculatori nei rispettivi punti* λ *a quelle due cubiche* $g_\varkappa$, *i cui parametri sono dati dalla equazione*

$$\varphi_\lambda{}^6 \varkappa_1{}^2 + 2\chi_\lambda{}^6 \varkappa_1 \varkappa_2 + \psi_\lambda{}^6 \varkappa_2{}^2 = 0, \qquad \ldots\ldots (2)$$

passano per la generatrice λ; *ossia ogni generatrice* λ *è un asse della sviluppabile osculatrice a quella cubica* g_λ' *che corrisponde ad essa generatrice.* Si vede inoltre come *ogni cubica* $g_\varkappa$ *ammetta* 6 *piani osculatori che sono tangenti alla superficie* V; o in altre parole: date due cubiche punteggiate proiettivamente, vi sono 6 piani osculatori all'una, ciascuno dei quali seca l'altra in tre punti, tra cui si trova il corrispondente al punto di osculazione. — Eliminando $\varkappa$ fra le equazioni (1), (2) si ha l'equazione complessiva dei due piani λ, che si secano secondo la generatrice λ.

Per dualità nel sistema di sviluppabili di 3ª classe, tutti i punti d'uno stesso parametro λ appartenenti agli spigoli di regresso sono i punti dello spigolo di regresso d'una nuova sviluppabile di 3ª classe G_λ'. — Gli spigoli di regresso di tutte queste sviluppabili G_λ' passano per gli stessi quattro punti, che sono i punti tripli della superficie W. — Su ogni generatrice λ della superficie W esistono due punti λ appartenenti agli spigoli di regresso di due sviluppabili $G_\varkappa$.

CAPO III.

§ 14. Siccome le forme p_λ^3, $\mathfrak{p}_\lambda^3$ eguagliate a zero rappresentano in coordinate di piani un punto qualunque dell'una e dell'altra cubica data, così l'annullarsi d'ogni invariante o covariante simultaneo di tali due forme rappresenterà superficie, che hanno relazioni proiettive colle due cubiche date. — Lo stesso si dica circa le due forme P_λ^3, $\mathfrak{P}_\lambda^3$ e le due sviluppabili di 3ª classe, che al variare di λ esse rappresentano.

Inoltre dalle proprietà dell'involuzione cubica determinata dalle forme p_λ^3, $\mathfrak{p}_\lambda^3$ (o dalle forme P_λ^3, $\mathfrak{P}_\lambda^3$) si potranno dedurre delle proprietà pel sistema di cubiche (o di sviluppabili) che si considera.

Tra le forme invariantive fondamentali di p_λ^3 e $\mathfrak{p}_\lambda^3$ ci occorrerà di considerare le seguenti

$$\begin{array}{llll} q = q_\lambda^2 = (pp')^2 p_\lambda p_\lambda', & \mathfrak{q} = \mathfrak{q}_\lambda^2 = (\mathfrak{p}\mathfrak{p}')^2 \mathfrak{p}_\lambda \mathfrak{p}_\lambda', & r = (qq')^2, & \mathfrak{r} = (\mathfrak{q}\mathfrak{q}')^2 \\ \vartheta = \vartheta_\lambda^4 = (p\mathfrak{p}) p_\lambda^2 \mathfrak{p}_\lambda^2, & \theta = \theta_\lambda^2 = (p\mathfrak{p})^2 p_\lambda \mathfrak{p}_\lambda, & i = (p\mathfrak{p})^3 & \\ s = (q\theta)^2, & t = (q\mathfrak{q})^2, & \mathfrak{s} = (\mathfrak{q}\theta)^2 & \\ l = l_\lambda = (q\mathfrak{p})^2 \mathfrak{p}_\lambda, & \mathfrak{l} = \mathfrak{l}_\lambda = (\mathfrak{q}p)^2 p_\lambda, & \omega = \frac{1}{2}(\mathfrak{l}l). & \end{array}$$

Delle forme P_λ^3, $\mathfrak{P}_\lambda^3$ ci occorreranno le analoghe forme invariantive, per le quali riterremo la stessa notazione in caratteri maiuscoli.

§ 15. Volendo l'equazione della superficie V, su cui si trovano tutte le cubiche g_x del sistema considerato, basta osservare che, essendo la superficie V rigata, ogni suo piano tangente ne contiene una generatrice, e quindi fra le due terne di punti, in cui seca le due cubiche date, vi saranno due punti, l'uno sull'una l'altro sull'altra cubica, che corrispondono allo stesso parametro; dunque, se ξ è un piano della superficie V, le equazioni in λ

$$p_\lambda^3 = 0 , \qquad \mathfrak{p}_\lambda^3 = 0$$

hanno una radice comune. Pertanto

$$0 = \text{Risult.}(p_\lambda^3, \mathfrak{p}_\lambda^3) = \begin{vmatrix} p_{111} & 0 & 0 & \mathfrak{p}_{111} & 0 & 0 \\ 3p_{112} & p_{111} & 0 & 3\mathfrak{p}_{112} & \mathfrak{p}_{111} & 0 \\ 3p_{122} & 3p_{112} & p_{111} & 3\mathfrak{p}_{122} & 3\mathfrak{p}_{112} & \mathfrak{p}_{111} \\ p_{222} & 3p_{122} & 3p_{112} & \mathfrak{p}_{222} & 3\mathfrak{p}_{122} & 3\mathfrak{p}_{112} \\ 0 & p_{222} & 3p_{122} & 0 & \mathfrak{p}_{222} & 3\mathfrak{p}_{122} \\ 0 & 0 & p_{222} & 0 & 0 & \mathfrak{p}_{222} \end{vmatrix}$$

o simbolicamente

$$
\begin{aligned}
o &= (\vartheta\vartheta')^2(\vartheta\vartheta'')^2(\vartheta'\vartheta'')^2 - \tfrac{1}{6}i(\vartheta\vartheta')^4 \\
&\equiv 2\,i^3 - 27\,\omega \\
&\equiv 4\,\overline{(p\mathfrak{p})^3}^3 - 27(pp')^2(\mathfrak{p}\mathfrak{p}')^2(p\mathfrak{p}'')(p'\mathfrak{p}'')(\mathfrak{p}p'')(\mathfrak{p}'p'')(p''\mathfrak{p}'')
\end{aligned}
$$

è in coordinate di piani l'equazione della superficie V, e mostra, se già non lo sapessimo, che la superficie V è della 6ª classe

Per dualità la superficie W, cui sono inscritte le sviluppabili di 3ª classe del sistema considerato, ha per equazione in coordinate di punti

$$o = \text{Risult.}(P_\lambda^3, \mathfrak{P}_\lambda^3) = 2I^3 - 27\Omega\ .$$

La sviluppabile bitangente alla superficie V, dovendo essere considerata (§ 8) come la sviluppabile circoscritta alle superficie, che si ottengono scrivendo le condizioni perchè p_λ^3 e $\mathfrak{p}_\lambda^3$ abbiano due radici comuni, sarà inviluppata da tutte le superficie di 4ª classe, che al variare di λ rappresenta l'equazione

$$q_\lambda^2\mathfrak{q}_\lambda^2 - \overline{\theta_\lambda^2}^2 + \tfrac{1}{3}i\vartheta_\lambda^4 = o \quad (^*),$$

e sarà ancora inviluppata da tutte le superficie di 6ª classe che al variare di λ rappresenta l'equazione

$$q_\lambda^2\mathfrak{p}_\lambda^3\mathfrak{l}_\lambda + \theta_\lambda^2(\mathfrak{p}_\lambda^3 l_\lambda - p_\lambda^3\mathfrak{l}_\lambda) - \mathfrak{q}_\lambda^2 p_\lambda^3 l_\lambda = o \quad (^*).$$

Per dualità la curva doppia della superficie W è una curva comune a tutte le superficie, che al variare di λ rappresentano le equazioni

$$
\begin{gathered}
Q_\lambda^2\mathfrak{Q}_\lambda^2 - \Theta_\lambda^2 + \tfrac{1}{3}I\overline{\vartheta_\lambda}^4 = o \\
Q_\lambda^2\mathfrak{P}_\lambda^3\mathfrak{L}_\lambda + \Theta_\lambda^2(\mathfrak{P}_\lambda^3 L_\lambda - P_\lambda^3\mathfrak{L}_\lambda) - \mathfrak{Q}_\lambda^2 P_\lambda^3 L_\lambda = o\ .
\end{gathered}
$$

§ **16.** Denotando con h_λ^2 l'Hessiano di $\varkappa_1 p_\lambda^3 + \varkappa_2\mathfrak{p}_\lambda^3$, l'equazione

$$o = h = h_\lambda^2 = q_\lambda^2\varkappa_1^2 + 2\theta_\lambda^2\varkappa_1\varkappa_2 + \mathfrak{q}_\lambda^2\varkappa_2^2\ ,$$

dati $\varkappa$ e ξ, fornisce i parametri dei due piani della cubica $g_\varkappa$ che si secano sul piano ξ; dati $\varkappa$ e λ, rappresenta in coordinate di piani *la conica* λ *iscritta nella sviluppabile della cubica* $g_\varkappa$.

(*) Queste sono le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè p_λ^3, $\mathfrak{p}_\lambda^3$ abbiano due radici comuni. Cfr. la mia Nota « Sul sistema simultaneo di due forme cubiche binarie ». *Giornale di Mat.* del Prof. G. BATTAGLINI, Vol. XVII.

Una cubica qualunque $g_\varkappa$ ha per equazione in coordinate di piani

$$
\begin{aligned}
0 &= \text{Discrim.}\,(\varkappa_1 p_\lambda^3 + \varkappa_2 \mathfrak{p}_\lambda^3) = (hh')^2 = \sigma_\varkappa^4 \\
&= r\varkappa_1^4 + 4s\varkappa_1^3\varkappa_2 + (6t - 2i^2)\varkappa_1^2\varkappa_2^2 + 4\mathfrak{s}\varkappa_1\varkappa_2^3 + \mathfrak{r}\varkappa_2^4 \quad (^*) \\
&= (pp')^2(p'''p'')^2(pp'')(p'p''')\varkappa_1^4 + 4(pp')^2(p''\mathfrak{p})^2(pp'')(p'\mathfrak{p})\varkappa_1^3\varkappa_2 \\
&\quad + [6(pp')^2(\mathfrak{p}\mathfrak{p}')^2(p\mathfrak{p})(p'\mathfrak{p}') - 2\overline{(p\mathfrak{p})^3}^2]\varkappa_1^2\varkappa_2^2 \\
&\quad + 4(\mathfrak{p}\mathfrak{p}')^2(\mathfrak{p}''p)^2(\mathfrak{p}\mathfrak{p}'')(\mathfrak{p}'p)\varkappa_1\varkappa_2^3 + (\mathfrak{p}\mathfrak{p}')^2(\mathfrak{p}''\mathfrak{p}''')^2(\mathfrak{p}\mathfrak{p}'')(\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''')\varkappa_2^4 .
\end{aligned}
$$

Quest'equazione è del 4° grado rispetto alla variabile $\varkappa$, dunque *nel sistema di cubiche $g_\varkappa$ ve ne sono 4 che toccano un piano dato;* sia il piano dato il piano all'infinito, risulta che *nel sistema di cubiche $g_\varkappa$ esistono quattro parabole cubiche.* Tra quest'ultima equazione e $\Delta_\varkappa^4 = 0$ eliminando $\varkappa$, si avrà l'equazione complessiva delle 4 cubiche piane del sistema.

Quando della forma h si prende il discriminante rispetto alla variabile $\varkappa$, l'equazione

$$0 = q_\lambda^2\,\mathfrak{q}_\lambda^2 - \overline{\theta_\lambda^2}^2$$

rappresenta *una superficie di 4^a classe, luogo delle coniche λ iscritte nelle sviluppabili osculatrici a tutte le cubiche $g_\varkappa$* . Osserviamo che $q_\lambda^2\,\mathfrak{q}_\lambda^2 - \overline{\theta_\lambda^2}^2$ è il risultante delle due forme $p_\mu^2 p_\lambda$, e $\mathfrak{p}_\mu^2\mathfrak{p}_\lambda$ di 2° grado in μ; ora le equazioni

$$0 = p_\mu^2 p_\lambda\,, \qquad 0 = \mathfrak{p}_\mu^2\mathfrak{p}_\lambda$$

rappresentano i punti d'incontro della tangente μ col piano λ relativi alle due cubiche date; quindi appare come la superficie $0 = q_\lambda^2\,\mathfrak{q}_\lambda^2 - \overline{\theta_\lambda^2}^2$ sia *una superficie rigata, che ha per generatrici le rette congiungenti i punti corrispondenti sulle coniche λ delle due cubiche date,* chiamando punti corrispondenti di queste coniche quelli, in cui esse sono toccate da piani osculatori corrispondenti delle rispettive cubiche. Di qui risulta chiaro che *questa superficie di 4^a classe, e la superficie V si toccano lungo tutta la generatrice λ di quest'ultima.*

(*) Invero si ha

$$(hh')^2 = (qh')^2\varkappa_1^2 + 2(\theta h')^2\varkappa_1\varkappa_2 + (\mathfrak{q}h')^2\varkappa_2^2$$

e poi

$$
\begin{aligned}
(qh')^2 &= (qq')^2\varkappa_1^2 + 2(\theta q)^2\varkappa_1\varkappa_2 + (\mathfrak{q}q)^2\varkappa_2^2\,, \\
(\theta h')^2 &= (q\theta)^2\varkappa_1^2 + 2(\theta\theta')^2\varkappa_1\varkappa_2 + (\mathfrak{q}\theta)^2\varkappa_2^2\,, \\
(\mathfrak{q}h')^2 &= (q\mathfrak{q})^2\varkappa_1^2 + 2(\theta\mathfrak{q})^2\varkappa_1\varkappa_2 + (\mathfrak{q}\mathfrak{q}')^2\varkappa_2^2\,,
\end{aligned}
$$

queste espressioni sostituite nella precedente di $(hh')^2$, e osservato che $(\theta\theta')^2 = t - \frac{1}{2}i^2$, dànno $(hh')^2$ in funzione degli invarianti fondamentali.

Del resto questo appare eziandio, se si cerca la superficie inviluppo di tutte le superficie di 4^a classe in discorso. Invero volendo questa superficie inviluppo, bisogna fare il discriminante di $q_\lambda^2 \mathfrak{q}_\lambda^2 - \overline{\theta_\lambda^2}^2$; a questo scopo osserviamo che si ha (*)

$$q_\lambda^2 \mathfrak{q}_\lambda^2 - \overline{\theta_\lambda^2}^2 = -\tfrac{2}{3} i \vartheta + 2 H_\vartheta ,$$

ove H_ϑ denota l'Hessiano di ϑ, e inoltre, detto ρ il discriminante di ϑ, si ha

$$\rho = \tfrac{1}{216} \omega (2 i^3 - 27 \omega) ;$$

si sa poi che il discriminante di

$$\varkappa \vartheta + \lambda H_\vartheta$$

è

$$\rho (\varkappa^3 - \tfrac{1}{2} i_\vartheta \varkappa \lambda^2 - \tfrac{1}{3} j_\vartheta \lambda^3)^2 \quad (**),$$

adunque, se qui si pone

$$\varkappa = -\tfrac{2}{3} i , \qquad \lambda = 2 , \qquad i_\vartheta = \tfrac{1}{6} i^2 , \qquad j_\vartheta = \tfrac{3}{4} \omega - \tfrac{1}{36} i^3$$

si trova per discriminante di $q_\lambda^2 \mathfrak{q}_\lambda^2 - \overline{\theta_\lambda^2}^2$ l'espressione

$$\tfrac{1}{54} \omega^3 (2 i^3 - 27 \omega) ,$$

laonde le superficie di 4^a classe considerate, oltrecchè essere tangenti alla superficie V, *sono ancora tangenti alla superficie rappresentata dall'invariante* $\omega = 0$.

L'espressione $\omega^3 (2 i^3 - 27 \omega)$ è il discriminante del discriminante della forma h doppiamente binaria, e si ottiene anche come il discriminante di σ_x^4 (***) ; ciò è d'accordo col fatto che $2 i^3 - 27 \omega = 0$ è l'equazione della superficie, su cui stanno tutte le cubiche g_x .

(*) Cfr. la Nota citata.

(**) Cfr. Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen*, § 41.

(***) Difatto il discriminante di σ_x^4 è

$$i_\sigma^3 - 6 j_\sigma^2$$

essendo

$$i_\sigma = 2 \left[r \mathfrak{r} - 4 s \mathfrak{s} + 3 (t - \tfrac{1}{3} i^2)^2 \right]$$

$$j_\sigma = 6 \left[r \mathfrak{r} (t - \tfrac{1}{3} i^2) + 2 s \mathfrak{s} (t - \tfrac{1}{3} i^2)^2 - (t - \tfrac{1}{3} i^2)^3 - r \mathfrak{s}^2 - s^2 \mathfrak{r} \right]$$

§ 17. *La superficie di* 6ª *classe* $\omega = 0$ *è l'inviluppo delle sviluppabili osculatrici a tutte le cubiche* $g_\varkappa$, *come pure a tutte le cubiche* g'_λ. Infatti l'invariante ω col suo annullarsi esprime la condizione affinchè l'involuzione determinata dalle forme p_λ^3, $\mathfrak{p}_\lambda^3$ ammetta un elemento triplo (*); ora, se ξ è un piano dato, ed esiste un valore $\varkappa_1' : \varkappa_2'$, per cui $\varkappa_1' p_\lambda^3 + \varkappa_2' \mathfrak{p}_\lambda^3 = 0$ ha radice tripla, è segno che i tre punti in cui il piano ξ seca la cubica $g_{\varkappa'}$, coincidono in uno, vale a dire ξ è un piano osculatore a $g_{\varkappa'}$; dunque ogni piano tangente alla superficie ω è un piano osculatore a una cubica $g_\varkappa$ e viceversa. — È notevole che i quattro coni (di 6ª classe) circoscritti alla superficie ω dai vertici del tetraedro formato dai piani tritangenti si scindono ciascuno in 3 coni di 2° ordine (§ 12).

Dall'equazione della superficie V appare come *questa e la superficie* ω *si osculano lungo tutta una curva della* 12ª *classe*, e questo spiega il perchè, mentre in generale per una retta passano 6 piani osculatori a cubiche $g_\varkappa$ (i 6 piani tangenti alla superficie ω condotti per la retta), per una generatrice λ della superficie V ne passino invece solamente due (§ 13).

Consideriamo un punto d'incontro d'una cubica $g_\varkappa$ colla superficie ω; questo è perciò un punto comune a V ed ω ed è anzi un punto di osculazione, sicchè in esso esiste un piano tangente comune a V ed ω, il quale è facile a vedersi che deve essere osculatore a $g_\varkappa$; laonde tenendo presente che una cubica $g_\varkappa$ ammette 6 piani osculatori tangenti a V (§ 13), segue che una cubica $g_\varkappa$ non può incontrare in più di 6 punti differenti la superficie ω, ma in ciascuno di essi è osculatrice alla superficie ω. Dunque « *tutte le cubiche* $g_\varkappa$ *osculano ciascuna in* 6 *punti la super-*

---

ora queste, tenendo presenti le relazioni (Clebsch, l. c., § 100)

$$-4i\omega = 3t^2 + r\mathfrak{r} - 2ti^2 - 4s\mathfrak{s}$$

$$2\omega^2 = \begin{vmatrix} r & s & t \\ s & t - \frac{1}{2}i^2 & \mathfrak{s} \\ t & \mathfrak{s} & \mathfrak{r} \end{vmatrix} = r\mathfrak{r}t + 2s\mathfrak{s}t - \frac{1}{2}r\mathfrak{r}i^2 + \frac{1}{2}t^2i^2 - t^3 - r\mathfrak{s}^2 - s^2\mathfrak{r},$$

si semplificano e divengono

$$i_\sigma = -8i\omega + \frac{2}{3}i^4$$

$$j_\sigma = 12\omega^2 - 4i^3\omega + \frac{2}{9}i^6,$$

laonde

$$i_\sigma^3 - 6j_\sigma^2 = 32\omega^3(2i^3 - 27\omega).$$

(*) V. Clebsch; o. c., § 100.

ficie ω ». Di qui risulta che la superficie ω, la quale abbiam visto essere della 6ª classe, è ancora del 6° ordine.

Esiste un numero semplicemente infinito di piani, che sono osculatori a due cubiche del sistema, ed è facile a vedersi che essi sono i piani bitangenti della superficie ω, e quindi ne inviluppano la sua sviluppabile bitangente. — Osserviamo che l'involuzione determinata dalle forme p_λ^3, $\mathfrak{p}_\lambda^3$ ammetterà due elementi tripli allora, e solo allora, quando la forma $\mathfrak{p}_\lambda^3$ appartenga all'involuzione determinata da p_λ^3 e del suo covariante cubico (ovvero viceversa), e che in tal caso i covarianti lineari l_λ, $\mathfrak{l}_\lambda$ sono identicamente nulli (*). Laonde *le equazioni* $l_\lambda = 0$, $\mathfrak{l}_\lambda = 0$, *al variare del parametro* λ *rappresentano una stessa schiera di superficie di* 3ª *classe; la sviluppabile di* 9ª *classe ad esse circoscritta è la sviluppabile bitangente di* ω. Quindi si conchiude che per ogni punto dello spazio passano 9 piani, i quali osculano due cubiche sia del sistema g_κ, sia del sistema g_λ'.

Se un piano ξ è osculatore a due cubiche del sistema g_κ, le due equazioni in λ.

$$0 = \text{Hess. } p_\lambda^3 = q_\lambda^2 , \qquad 0 = \text{Hess. } \mathfrak{p}_\lambda^3 = \mathfrak{q}_\lambda^2$$

hanno le stesse radici, e queste sono i parametri dei due punti di osculazione. Per altra parte il piano ξ contiene due assi, uno per ciascuna delle sviluppabili alle due cubiche date, cioè contiene relativamente a ciascuna di queste sviluppabili una retta, per cui passano due piani di essa sviluppabile, e i parametri di queste due coppie di piani sono appunto forniti dalle equazioni $0 = q_\lambda^2$, $0 = \mathfrak{q}_\lambda^2$. Quindi segue che *i piani osculatori a due cubiche del sistema* g_κ *sono quelli, che contengono assi corrispondenti* (**) *delle sviluppabili alle due cubiche date*, e perciò *date due cu-*

(*) Infatti se si chiama τ_λ^3 il covariante cubico di p_λ^3, e se si ha

$$\nu_1 p_\lambda^3 + \nu_2 \tau_\lambda^3 = \mathfrak{p}_\lambda^3$$

si ottiene

$$\mathfrak{l}_\lambda = \nu_1 (qp)^2 p_\lambda + \nu_2 (q\tau)^2 \tau_\lambda ;$$

ma $(qp)^2 p_\lambda$, $(q\tau)^2 \tau_\lambda$ sono nulli identicamente, dunque lo stesso avviene di $\mathfrak{l}_\lambda$. Riesce poi facile dimostrare che, se $\mathfrak{p}_\lambda^3$ appartiene all'involuzione determinata da p_λ^3 e dal suo cov. cub., viceversa p_λ^3 apparterrà all'involuzione determinata da $\mathfrak{p}_\lambda^3$ e dal suo cov. cub., e quindi che, se $\mathfrak{l}_\lambda$ è identicamente nullo, tale è anche l_λ.

(**) Dato un asse dell'una sviluppabile determinato dai suoi piani λ', λ'', dico *asse corrispondente* dell'altra sviluppabile l'asse di questa determinato dai suoi piani λ', λ''. Due assi corrispondenti, in generale, non sono in uno stesso piano.

biche punteggiate proiettivamente esistono infinite coppie di assi corrispondenti che si secano, e i piani di queste infinite coppie inviluppano una sviluppabile di 9^a *classe.*

Ritorniamo alle superficie di 3^a classe rappresentate dalle equazioni $l_\lambda=0$, $\mathfrak{l}_\lambda=0$. Dato il piano ξ, l'equazione $0=(pv)^2p_\lambda$ è la condizione affinchè il piano ξ passi per il punto d'incontro del piano λ della cubica g_∞ cogli altri due piani della stessa, i cui parametri sono le radici dell'equazione $0=v_\lambda^2$; pertanto, se a v_λ^2 si sostituisce $\mathfrak{q}_\lambda^2$, e si suppone che ξ varii, segue che *l'equazione* $0=\mathfrak{l}_\lambda$ *rappresenta una superficie di* 3^a *classe inviluppo di ogni piano* ξ, *che passa per il punto, in cui il piano* λ *della cubica* g_∞ *è secato da quell'asse di questa che corrisponde all'asse della cubica* g_0 *che giace nel piano* ξ. A questa superficie appartiene il piano λ della g_∞. — Analogamente l'equazione $0=l_\lambda$ rappresenta una superficie di 3^a classe inviluppo d'ogni piano ξ, che passa per il punto, in cui il piano λ della cubica g_0 è secato da quell'asse di questa che corrisponde all'asse della cubica g_∞ che giace nel piano ξ. A questa superficie appartiene il piano λ della g_0. — Che tutte le superficie rappresentate da $l_\lambda=0$ e tutte le superficie rappresentate da $\mathfrak{l}_\lambda=0$ formino una stessa schiera, risulta dal seguente ragionamento; se un piano ξ è tangente a tutte le superficie $l_\lambda=0$, esso dovrà contenere tutti i punti di quell'asse della cubica g_0 che corrisponde all'asse della cubica g_∞ giacente in esso piano, quindi conterrà tutti i punti di quell'asse della cubica g_∞ che corrisponde all'asse della cubica g_0 giacente in esso piano, e per questo sarà tangente a tutte le superficie $\mathfrak{l}_\lambda=0$.

Dalla esposta proprietà dei piani delle superficie $l_\lambda=0$, $\mathfrak{l}_\lambda=0$, visto che si ha $\omega=-\frac{1}{2}(l\mathfrak{l})$ e che di più ω è un combinante delle due forme p_λ^3, $\mathfrak{p}_\lambda^3$, segue che *ogni piano* ξ' *di* ω *è tale, che se dal punto, in cui esso è secato dall'asse d'una cubica* $g_{x'}$ *corrispondente a quell'asse d'una altra cubica* $g_{x''}$, *che giace su* ξ', *si conduce a* $g_{x'}$ *il terzo piano, e inversamente dal punto, in cui* ξ' *è secato dall'asse di* $g_{x''}$ *corrispondente a quell'asse di* $g_{x'}$ *che giace su* ξ', *si conduce a* $g_{x''}$ *il terzo piano, tali due terzi piani sono corrispondenti.*

§ 18. Alle proprietà per un sistema di cubiche dimostrate nei §§ 16, 17 corrispondono le seguenti correlative per un sistema di sviluppabili.

L'equazione

$$Q_\lambda^2 x_1^2 + 2\,\Theta_\lambda^2 x_1 x_2 + \mathfrak{Q}_\lambda^2 x_2^2 = 0$$

dati $\varkappa$ e λ, rappresenta il cono di 2° ordine circoscritto alla cubica, che è spigolo di regresso della sviluppabile $G_\varkappa$, dal suo punto λ. Una sviluppabile qualunque $G_\varkappa$ ha per equazione in coordinate di punti

$$o = R\varkappa_1^4 + 4\,S\varkappa_1^3\varkappa_2 + (6\,T - 2\,I^2)\varkappa_1^2\varkappa_2^2 + 4\,\mathfrak{S}\varkappa_1\varkappa_2^3 + \mathfrak{R}\varkappa_2^4\,.$$

Nel sistema di sviluppabili ve ne sono 4 che passano per un punto dato. L'equazione

$$o = Q_\lambda^2\,\mathfrak{Q}_\lambda^2 - \overline{\Theta_\lambda^2}^2$$

rappresenta una superficie rigata di 4° ordine, inviluppo dei coni λ circoscritti alle cubiche spigoli di regresso di tutte le sviluppabili $G_\varkappa$, essa ha per generatrici le rette intersezioni dei piani corrispondenti dei due coni λ circoscritti alle due cubiche date, è tangente lungo tutta una generatrice alla superficie W, ed anche alla superficie rappresentata dall'invariante $\Omega = o$. Il luogo delle cubiche spigoli di regresso delle sviluppabili $G_\varkappa$ è la superficie di 6° ordine $\Omega = o$, la quale è osculatrice lungo tutta una curva del 12° ordine alla superficie W. Le equazioni $L_\lambda = o$, $\mathfrak{L}_\lambda = o$ al variare di λ rappresentano uno stesso fascio di superficie di 3° ordine, la curva base di questo fascio è del 9° ordine ed è la curva doppia della superficie Ω; i punti di questa curva hanno la proprietà che in ciascuno di essi si secano due cubiche spigoli di regresso delle sviluppabili $G_\varkappa$; tale curva del 9° ordine è ancora la curva luogo dei punti d'incontro delle corde corrispondenti nelle due cubiche date.

Indicando con $\gamma_{\varkappa'}$, $\gamma_{\varkappa''}$ le cubiche spigoli di regresso di due sviluppabili qualunque $G_{\varkappa'}$, $G_{\varkappa''}$, ogni punto x' della superficie Ω gode di questa proprietà, che il piano per x' e per la corda di $\gamma_{\varkappa'}$, corrispondente alla corda per x' di $\gamma_{\varkappa''}$, seca $\gamma_{\varkappa'}$ in un terzo punto, che è corrispondente al terzo punto, in cui il piano per x' e per la corda di $\gamma_{\varkappa''}$, corrispondente alla corda per x' di $\gamma_{\varkappa'}$, seca $\gamma_{\varkappa''}$.

CAPO IV.

§ 19. Abbiamo visto (§ 16) come esistano quattro cubiche g_x, le quali toccano un piano dato ξ'; volendo i parametri dei punti di contatto, osserviamo che, se $g_{x'}$ è una delle cubiche che toccano ξ', l'equazione $x_1'\pi_\lambda^3 + x'_2\varpi_\lambda^3 = 0$ ha una radice doppia, e questa deve annullare le prime derivate parziali

$$x_1'\pi_\lambda^2\pi_1 + x_2'\varpi_\lambda^2\varpi_1 = 0$$

$$x_1'\pi_\lambda^2\pi_2 + x_2'\varpi_\lambda^2\varpi_2 = 0 \ ;$$

di qui eliminando x'_1 e x'_2 si ha l'equazione

$$0 = (\pi\varpi)\pi_\lambda^2\varpi_\lambda^2 ,$$

la quale fornisce i parametri dei punti di contatto cercati. La stessa equazione, dato λ e variando ξ', può scriversi

$$0 = \vartheta_\lambda^4 = (p\mathfrak{p})p_\lambda^2\mathfrak{p}_\lambda^2 = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} \lambda_2^2 & -2\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & -2\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1^2 \\ p_{111} & 3p_{112} & 3p_{122} & p_{222} \\ \mathfrak{p}_{111} & 3\mathfrak{p}_{112} & 3\mathfrak{p}_{122} & \mathfrak{p}_{222} \end{vmatrix}$$

$$= (a\mathfrak{a})a_\lambda^2\mathfrak{a}_\lambda^2\xi_1^2 + \ldots + (d\mathfrak{d})d_\lambda^2\mathfrak{d}_\lambda^2\xi_4^2 + [(a\mathfrak{b})a_\lambda^2\mathfrak{b}_\lambda^2 + (b\mathfrak{a})b_\lambda^2\mathfrak{a}_\lambda^2]\xi_1\xi_2 + \ldots$$

e rappresenta una quadrica, che è l'inviluppo di tutti i piani tangenti a tutte le cubiche del sistema g_x nei loro punti di parametro λ. Quindi risulta un significato geometrico del covariante ϑ, *esso rappresenta un iperboloide a una falda, per cui generatrici d'uno stesso sistema sono le rette tangenti a tutte le cubiche del sistema g_x nei loro punti λ*; *tale iperboloide*, ora è facile a vedersi, *è tangente alla superficie V lungo la sua generatrice* λ.

Le coordinate-raggi delle generatrici d'uno stesso sistema dell'iperboloide ϑ, sono

$$x_1^2(ab)a_\lambda^2b_\lambda^2 + x_1x_2[(a\mathfrak{b})a_\lambda^2\mathfrak{b}_\lambda^2 + (b\mathfrak{a})b_\lambda^2\mathfrak{a}_\lambda^2] + x_2^2(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{a}_\lambda^2\mathfrak{b}_\lambda^2 , \ldots$$

e si ottengono come le coordinate-raggi della tangente λ a una cubica qualunque g_x (*).

Qui si presenta la questione di determinare le coordinate delle generatrici dell'altro sistema; a questo scopo osserviamo che le equazioni

$$0 = p_\lambda^2 p_\nu \,, \qquad 0 = \mathfrak{p}_\lambda^2 \mathfrak{p}_\nu$$

rappresentano i punti, in cui le tangenti λ delle due cubiche date sono secate dai rispettivi piani ν. Se un piano dato ξ' passa per l'uno e per l'altro di tali punti, si avrà

$$0 = \pi_\lambda^2 \pi_\nu \,, \qquad 0 = \varpi_\lambda^2 \varpi_\nu \,,$$

e quindi eliminando ν l'equazione $0 = (\pi\varpi)\pi_\lambda^2 \varpi_\lambda^2$ fornisce quattro parametri λ', λ'', λ''', λ^{IV} tali che, se dai due punti, in cui le tangenti $\lambda^{(i)}$ $[(i) = {}', {}'', {}''', {}^{\mathrm{IV}}]$ alle due cubiche date secano il piano ξ', si conducono alle stesse cubiche i piani osculatori, questi sono corrispondenti. Di qui si vede come *l'iperboloide ϑ abbia per generatrici del 2° sistema le rette che congiungono punti corrispondenti sulle due punteggiate proiettive, che sono determinate sulle tangenti λ alle due cubiche date dai rispettivi piani osculatori* (**). Siccome ϑ_λ^4 è un combinante delle due forme p_λ^3, $\mathfrak{p}_\lambda^3$, così alle due cubiche date si possono sostituire due cubiche qualunque del sistema g_x, e quindi conchiudere che le generatrici del 2° sistema di ϑ determinano punteggiate proiettive su tutte le tangenti λ alle cubiche g_x, vale a dire che queste tangenti sono le generatrici del 1° sistema, come già si è visto. Intanto le coordinate-raggi d'una generatrice del 2° sistema di ϑ sono

$$a_\lambda^2 a_\nu \,.\, \mathfrak{b}_\lambda^2 \mathfrak{b}_\nu - b_\lambda^2 b_\nu \,.\, \mathfrak{a}_\lambda^2 \mathfrak{a}_\nu \,, \quad \ldots \,, \quad c_\lambda^2 c_\nu \,.\, \mathfrak{d}_\lambda^2 \mathfrak{d}_\nu - d_\lambda^2 d_\nu \,.\, \mathfrak{c}_\lambda^2 \mathfrak{c}_\nu \,,$$

nelle quali espressioni λ è fisso, e ν è un parametro variabile da generatrice a generatrice. Inoltre per coordinate d'un punto qualunque di ϑ si possono assumere

$$x_1 = a_\lambda^2 a_\nu + \mu\, \mathfrak{a}_\lambda^2 \mathfrak{a}_\nu \,, \qquad x_2 = b_\lambda^2 b_\nu + \mu\, \mathfrak{b}_\lambda^2 \mathfrak{b}_\nu \,,$$
$$x_3 = c_\lambda^2 c_\nu + \mu\, \mathfrak{c}_\lambda^2 \mathfrak{c}_\nu \,, \qquad x_4 = d_\lambda^2 d_\nu + \mu\, \mathfrak{d}_\lambda^2 \mathfrak{d}_\nu \,,$$

(*) V. D'Ovidio, l. c., § 6.

(**) Lo stesso si fa manifesto per ciò, che l'equazione dello iperboloide ϑ si può mettere sotto la forma

$$(\mu\nu)(p\mathfrak{p})p_\lambda^2 \mathfrak{p}_\lambda^2 = p_\lambda^2 p_\mu \,.\, \mathfrak{p}_\lambda^2 \mathfrak{p}_\nu - p_\lambda^2 p_\nu \,.\, \mathfrak{p}_\lambda^2 \mathfrak{p}_\mu = 0 \,.$$

ove μ e ν sono due parametri variabili, eliminando i quali si avrà l'equazione di $\mathfrak{J}$ in coordinate di punti. A questo scopo si scrivano le equazioni

$$\begin{aligned} x_1 &= a_\lambda^2 a_1 \nu_1 + a_\lambda^2 a_2 \nu_2 + \mathfrak{a}_\lambda^2 \mathfrak{a}_1 \mu\nu_1 + \mathfrak{a}_\lambda^2 \mathfrak{a}_2 \mu\nu_2 \,, \\ x_2 &= b_\lambda^2 b_1 \nu_1 + b_\lambda^2 b_2 \nu_2 + \mathfrak{b}_\lambda^2 \mathfrak{b}_1 \mu\nu_1 + \mathfrak{b}_\lambda^2 \mathfrak{b}_2 \mu\nu_2 \,, \\ x_3 &= c_\lambda^2 c_1 \nu_1 + c_\lambda^2 c_2 \nu_2 + \mathfrak{c}_\lambda^2 \mathfrak{c}_1 \mu\nu_1 + \mathfrak{c}_\lambda^2 \mathfrak{c}_2 \mu\nu_2 \,, \\ x_4 &= d_\lambda^2 d_1 \nu_1 + d_\lambda^2 d_2 \nu_2 + \mathfrak{d}_\lambda^2 \mathfrak{d}_1 \mu\nu_1 + \mathfrak{d}_\lambda^2 \mathfrak{d}_2 \mu\nu_2 \,, \end{aligned}$$

e si risolvano rispetto alle incognite ν_1, ν_2, $\mu\nu_1$, $\mu\nu_2$, quindi si esprima che $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\mu\nu_1}{\mu\nu_2}$; si avrà

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_\lambda^2 a_1 & \mathfrak{a}_\lambda^2 \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_\lambda^2 \mathfrak{a}_2 \\ x_2 & b_\lambda^2 b_1 & \mathfrak{b}_\lambda^2 \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_\lambda^2 \mathfrak{b}_2 \\ x_3 & c_\lambda^2 c_1 & \mathfrak{c}_\lambda^2 \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_\lambda^2 \mathfrak{c}_2 \\ x_4 & d_\lambda^2 d_1 & \mathfrak{d}_\lambda^2 \mathfrak{d}_1 & \mathfrak{d}_\lambda^2 \mathfrak{d}_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & \mathfrak{a}_\lambda^2 \mathfrak{a}_2 & a_\lambda^2 a_1 & a_\lambda^2 a_2 \\ x_2 & \mathfrak{b}_\lambda^2 \mathfrak{b}_2 & b_\lambda^2 b_1 & b_\lambda^2 b_2 \\ x_3 & \mathfrak{c}_\lambda^2 \mathfrak{c}_2 & c_\lambda^2 c_1 & c_\lambda^2 c_2 \\ x_4 & \mathfrak{d}_\lambda^2 \mathfrak{d}_2 & d_\lambda^2 d_1 & d_\lambda^2 d_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & a_\lambda^2 a_2 & \mathfrak{a}_\lambda^2 \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_\lambda^2 \mathfrak{a}_2 \\ x_2 & b_\lambda^2 b_2 & \mathfrak{b}_\lambda^2 \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_\lambda^2 \mathfrak{b}_2 \\ x_3 & c_\lambda^2 c_2 & \mathfrak{c}_\lambda^2 \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_\lambda^2 \mathfrak{c}_2 \\ x_4 & d_\lambda^2 d_2 & \mathfrak{d}_\lambda^2 \mathfrak{d}_1 & \mathfrak{d}_\lambda^2 \mathfrak{d}_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & \mathfrak{a}_\lambda^2 \mathfrak{a}_1 & a_\lambda^2 a_1 & a_\lambda^2 a_2 \\ x_2 & \mathfrak{b}_\lambda^2 \mathfrak{b}_1 & b_\lambda^2 b_1 & b_\lambda^2 b_2 \\ x_3 & \mathfrak{c}_\lambda^2 \mathfrak{c}_1 & c_\lambda^2 c_1 & c_\lambda^2 c_2 \\ x_4 & \mathfrak{d}_\lambda^2 \mathfrak{d}_1 & d_\lambda^2 d_1 & d_\lambda^2 d_2 \end{vmatrix}$$

e questa è l'*equazione in coordinate di punti dello iperboloide* $\mathfrak{J}$.

Per dualità, l'equazione

$$0 = \bar{\mathfrak{J}}_\lambda' = (P\mathfrak{P}) P_\lambda^2 \mathfrak{P}_\lambda^2$$
$$= (A\mathfrak{A}) A_\lambda^2 \mathfrak{A}_\lambda^2 x_1^2 + \ldots . \quad + [(A\mathfrak{B}) A_\lambda^2 \mathfrak{B}_\lambda^2 + (B\mathfrak{A}) B_\lambda^2 A_\lambda^2] x_1 x_2 + \ldots ..$$

rappresenta un iperboloide a una falda, tangente alla superficie W, e che ha per generatrici d'uno stesso sistema le rette λ di tutte le sviluppabili $G_\varkappa$ del sistema, generatrici che hanno per coordinate-assi

$$\varkappa_1^2 (AB) A_\lambda^2 B_\lambda^2 + \varkappa_1 \varkappa_2 [(A\mathfrak{B}) A_\lambda^2 \mathfrak{B}_\lambda^2 + (B\mathfrak{A}) B_\lambda^2 \mathfrak{A}_\lambda^2] + \varkappa_2^2 (\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \mathfrak{A}_\lambda^2 \mathfrak{B}_\lambda^2 \,, \ldots . ,$$

ed ha per generatrici dell'altro sistema le rette intersezioni di piani corrispondenti nei due fasci proiettivi, che hanno per assi le tangenti λ alle due cubiche date, ed i cui piani corrispondenti sono quelli che passano pei punti corrispondenti di queste cubiche; le coordinate-assi di queste seconde generatrici sono

$$A_\lambda^2 A_\nu . \mathfrak{B}_\lambda^2 \mathfrak{B}_\nu - B_\lambda^2 B_\nu . \mathfrak{A}_\lambda^2 \mathfrak{A}_\nu , \ldots , \qquad C_\lambda^2 C_\nu . \mathfrak{D}_\lambda^2 \mathfrak{D}_\nu - D_\lambda^2 D_\nu . \mathfrak{C}_\lambda^2 \mathfrak{C}_\nu .$$

§ **20.** Gli iperboloidi $\mathfrak{S}$, $\bar{\mathfrak{S}}$ si secano secondo un quadrilatero gobbo; di fatto le tangenti λ alle due cubiche date sono generatrici comuni ad entrambi, di più è faci'e a vedersi che le due rette (generatrici di $\mathfrak{S}$), che congiungono i punti in cui le rette λ delle due cubiche date sono secate dai rispettivi piani ν', ν'', coincidono colle rette (generatrici di $\bar{\mathfrak{S}}$) intersezioni dei piani per le tangenti λ delle due cubiche date e pei rispettivi punti μ', μ'', essendo (ν', μ') (ν'', μ'') le due coppie di valori che risolvono le due equazioni in ν e μ

$$(1) \ldots\ldots \quad \begin{cases} o = A_\lambda^2 A_\mu . \mathfrak{a}_\lambda^2 \mathfrak{a}_\nu + \ldots + D_\lambda^2 D_\mu . \mathfrak{d}_\lambda^2 \mathfrak{d}_\nu \\ o = \mathfrak{A}_\lambda^2 \mathfrak{A}_\mu . a_\lambda^2 a_\nu + \ldots + \mathfrak{D}_\lambda^2 \mathfrak{D}_\mu . d_\lambda^2 d_\nu \, ; \end{cases}$$

dunque le equazioni

$$(2) \ldots\ldots \quad u_1 . P_\lambda^2 P_{\mu'} . \mathfrak{P}_\lambda^2 \mathfrak{P}_{\mu''} + u_2 . P_\lambda^2 P_{\mu''} . \mathfrak{P}_\lambda^2 \mathfrak{P}_{\mu'} = o$$

$$(2') \ldots\ldots \quad v_1 . p_\lambda^2 p_{\nu'} . \mathfrak{p}_\lambda^2 \mathfrak{p}_{\nu''} + v_2 . p_\lambda^2 p_{\nu''} . \mathfrak{p}_\lambda^2 \mathfrak{p}_{\nu'} = o$$

rappresentano, al variare di $u_1 : u_2$, $v_1 : v_2$, la prima in coordinate di punti, la seconda in coordinate di piani, uno stesso fascio-schiera di iperboloidi, cui appartengono gli iperboloidi $\mathfrak{S}(v_1 : v_2 = -1)$ e $\bar{\mathfrak{S}}(u_1 : u_2 = -1)$. Si tratta di trovare la relazione fra $u_1 : u_2$ e $v_1 : v_2$ affinchè quelle due equazioni rappresentino uno stesso iperboloide.

L'iperboloide rappresentato dalla 1ª equazione in coordinate di punti ha per equazione in coordinate di piani (*)

$$o = u_1 \begin{vmatrix} \xi_1 & A_\lambda^2 A_{\mu'} & A_\lambda^2 A_{\mu''} & \mathfrak{A}_\lambda^2 \mathfrak{A}_{\mu''} \\ \xi_2 & B_\lambda^2 B_{\mu'} & B_\lambda^2 B_{\mu''} & \mathfrak{B}_\lambda^2 \mathfrak{B}_{\mu''} \\ \xi_3 & C_\lambda^2 C_{\mu'} & C_\lambda^2 C_{\mu''} & \mathfrak{C}_\lambda^2 \mathfrak{C}_{\mu''} \\ \xi_4 & D_\lambda^2 D_{\mu'} & D_\lambda^2 D_{\mu''} & \mathfrak{D}_\lambda^2 \mathfrak{D}_{\mu''} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 & A_\lambda^2 A_{\mu'} & \mathfrak{A}_\lambda^2 \mathfrak{A}_{\mu'} & \mathfrak{A}_\lambda^2 \mathfrak{A}_{\mu''} \\ \xi_2 & B_\lambda^2 B_{\mu'} & \mathfrak{B}_\lambda^2 \mathfrak{B}_{\mu'} & \mathfrak{B}_\lambda^2 \mathfrak{B}_{\mu''} \\ \xi_3 & C_\lambda^2 C_{\mu'} & \mathfrak{C}_\lambda^2 \mathfrak{C}_{\mu'} & \mathfrak{C}_\lambda^2 \mathfrak{C}_{\mu''} \\ \xi_4 & D_\lambda^2 D_{\mu'} & \mathfrak{D}_\lambda^2 \mathfrak{D}_{\mu'} & \mathfrak{D}_\lambda^2 \mathfrak{D}_{\mu''} \end{vmatrix}$$

$$+ u_2 \begin{vmatrix} \xi_1 & A_\lambda^2 A_{\mu'} & A_\lambda^2 A_{\mu''} & \mathfrak{A}_\lambda^2 \mathfrak{A}_{\mu'} \\ \xi_2 & B_\lambda^2 B_{\mu'} & B_\lambda^2 B_{\mu''} & \mathfrak{B}_\lambda^2 \mathfrak{B}_{\mu'} \\ \xi_3 & C_\lambda^2 C_{\mu'} & C_\lambda^2 C_{\mu''} & \mathfrak{C}_\lambda^2 \mathfrak{C}_{\mu'} \\ \xi_4 & D_\lambda^2 D_{\mu'} & D_\lambda^2 D_{\mu''} & \mathfrak{D}_\lambda^2 \mathfrak{D}_{\mu'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 & A_\lambda^2 A_{\mu'} & \mathfrak{A}_\lambda^2 \mathfrak{A}_{\mu'} & \mathfrak{A}_\lambda^2 \mathfrak{A}_{\mu''} \\ \xi_2 & B_\lambda^2 B_{\mu''} & \mathfrak{B}_\lambda^2 \mathfrak{B}_{\mu'} & \mathfrak{B}_\lambda^2 \mathfrak{B}_{\mu''} \\ \xi_3 & C_\lambda^2 C_{\mu''} & \mathfrak{C}_\lambda^2 \mathfrak{C}_{\mu'} & \mathfrak{C}_\lambda^2 \mathfrak{C}_{\mu''} \\ \xi_4 & D_\lambda^2 D_{\mu''} & \mathfrak{D}_\lambda^2 \mathfrak{D}_{\mu'} & \mathfrak{D}_\lambda^2 \mathfrak{D}_{\mu''} \end{vmatrix}$$

(*) Cfr. D'Ovidio, l. c., § 23.

i fattori determinanti, che qui figurano, devono differire solamente per fattori indipendenti da ξ dalle $p_\lambda^2 p_{\nu'}$, $p_\lambda^2 p_{\nu''}$, $\mathfrak{p}_\lambda^2 \mathfrak{p}_{\nu'}$, $\mathfrak{p}_\lambda^2 \mathfrak{p}_{\nu''}$; difatto moltiplicando ciascuno di quei determinanti per verticali col determinante

$$\eta = \begin{vmatrix} a_\lambda^2 a_{\nu'} & a_\lambda^2 a_{\nu''} & \mathfrak{a}_\lambda^2 \mathfrak{a}_{\nu'} & \mathfrak{a}_\lambda^2 \mathfrak{a}_{\nu''} \\ b_\lambda^2 b_{\nu'} & b_\lambda^2 b_{\nu''} & \mathfrak{b}_\lambda^2 \mathfrak{b}_{\nu'} & \mathfrak{b}_\lambda^2 \mathfrak{b}_{\nu''} \\ c_\lambda^2 c_{\nu'} & c_\lambda^2 c_{\nu''} & \mathfrak{c}_\lambda^2 \mathfrak{c}_{\nu'} & \mathfrak{c}_\lambda^2 \mathfrak{c}_{\nu''} \\ d_\lambda^2 d_{\nu'} & d_\lambda^2 d_{\nu''} & \mathfrak{d}_\lambda^2 \mathfrak{d}_{\nu'} & \mathfrak{d}_\lambda^2 \mathfrak{d}_{\nu''} \end{vmatrix},$$

tenendo presenti le equazioni (1), e le identità

$$A_\lambda^2 A_\mu \,.\, a_\lambda^2 a_\nu + \ldots + D_\lambda D_\mu \,.\, d_\lambda^2 d_\nu = 0$$

$$\mathfrak{A}_\lambda^2 \mathfrak{A}_\mu \,.\, \mathfrak{a}_\lambda^2 \mathfrak{a}_\nu + \ldots + \mathfrak{D}_\lambda^2 \mathfrak{D}_\mu \,.\, \mathfrak{d}_\lambda^2 \mathfrak{d}_\nu = 0 \quad (*)$$

(che sussistono qualunque siano λ, μ, ν), e ponendo inoltre per brevità di scrittura

$$A_\lambda^2 A_{\mu'} \,.\, \mathfrak{a}_\lambda^2 \mathfrak{a}_{\nu''} + \ldots + D_\lambda^2 D_{\mu'} \,.\, \mathfrak{d}_\lambda^2 \mathfrak{d}_{\nu''} = \rho \;,$$

$$A_\lambda^2 A_{\mu''} \,.\, \mathfrak{a}_\lambda^2 \mathfrak{a}_{\nu'} + \ldots + D_\lambda^2 D_{\mu''} \,.\, \mathfrak{d}_\lambda^2 \mathfrak{d}_{\nu'} = \sigma \;,$$

$$\mathfrak{A}_\lambda^2 \mathfrak{A}_{\mu'} \,.\, a_\lambda^2 a_{\nu''} + \ldots + \mathfrak{D}_\lambda^2 \mathfrak{D}_{\mu'} \,.\, d_\lambda^2 d_{\nu''} = \tau \;,$$

$$\mathfrak{A}_\lambda^2 \mathfrak{A}_{\mu''} \,.\, a_\lambda^2 a_{\nu'} + \ldots + \mathfrak{D}_\lambda^2 \mathfrak{D}_{\mu''} \,.\, d_\lambda^2 d_{\nu'} = \upsilon \;,$$

si trova, dopo aver diviso tutto per $-\frac{\rho\sigma\tau\upsilon}{\eta}$, che l'equazione in coordinate di piani, dell'iperboloide rappresentato in coordinate di punti dalla (1), è

$$u_1 \rho\upsilon \,.\, p_\lambda^2 p_{\nu''} \,.\, \mathfrak{p}_\lambda^2 \mathfrak{p}_{\nu'} + u_2 \sigma\tau \,.\, p_\lambda^2 p_{\nu'} \,.\, \mathfrak{p}_\lambda^2 \mathfrak{p}_{\nu''} = 0 \;.$$

Adunque le equazioni (2), (2') rappresentano uno stesso iperboloide, quando si abbia

$$v_1 : v_2 :: u_2 \sigma\tau : u_1 \rho\upsilon \;;$$

e quindi, ponendo $v_1 : v_2 = -1$, si ha sotto una nuova forma l'equazione in coordinate di punti dello iperboloide ϑ, ed un'analoga equazione in coordinate di piani si ha per l'iperboloide $\bar{\vartheta}$.

(*) Tali identità si ricavano dalla

$$a_\lambda^3 A_{\lambda'}^3 + b_\lambda^3 B_{\lambda'}^3 + c_\lambda^3 C_{\lambda'}^3 + d_\lambda^3 D_{\lambda'}^3 = \Delta\,(\lambda\lambda')^3 \qquad \text{(V. D'Ovidio, l. c., § 4.)}$$

operando col simbolo $\left(\frac{\partial}{\partial\lambda'_1}\mu_1 + \frac{\partial}{\partial\lambda'_2}\mu_2\right)\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\nu_1 + \frac{\partial}{\partial\lambda_2}\nu_2\right)$, indi ponendo $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\lambda'_1}{\lambda'_2}$.

§ 21. Siccome per i piani tritangenti si ha $p_\lambda^3 \equiv \mathfrak{p}_\lambda^3$, così per ogni piano tritangente ϑ_λ^4 sarà nullo identicamente per tutti i valori di λ, il che è d'accordo col fatto che un piano tritangente contiene tutta una cubica g_x (§ 10) e perciò va considerato come tangente ad essa nei suoi infiniti punti λ. Pertanto si deve conchiudere che *tutti gli iperboloidi* ϑ *sono tangenti agli stessi* 4 *piani* (piani tritangenti della superficie V).

Ogni iperboloide ϑ *è iscritto nella sviluppabile della corrispondente cubica* $\mathfrak{g}_\lambda'$, perchè ogni piano di questa, essendo osculatore nel punto λ ad una cubica g_x, ne contiene la tangente λ, la quale è, come abbiam visto, una generatrice di ϑ.

La superficie inviluppo di tutti gli iperboloidi ϑ si ottiene eguagliando a zero il discriminante di ϑ_λ^4, che è

$$\omega(2i^3 - 27\omega),$$

il che conferma che *gli iperboloidi* ϑ sono tangenti alla superficie V, e mostra inoltre che *sono ancora tangenti alla superficie* ω.

Vi sono 8 *iperboloidi* ϑ, *i quali degenerano in una conica* (considerata come inviluppo); *essi son quelli che toccano la superficie* V *lungo le* 8 *generatrici singolari*; ed invero le tangenti alle due cubiche date nei punti d'una di queste generatrici sono in un piano (§ 7), d'altra parte esse sono generatrici d'uno stesso sistema nell'iperboloide ϑ, dunque questo si deve ridurre a una conica. Pertanto le tangenti a tutte le cubiche g_x nei punti d'una generatrice singolare sono in un piano ed inviluppano su questo una conica; quel piano è tangente alla superficie V lungo tutta la generatrice singolare che esso contiene, e questa conica tocca la medesima generatrice nel suo punto cuspidale; la cubica g_x che passa per questo punto è ivi toccata dalla generatrice ed osculata dal piano tangente singolare, col quale essendo venuti a coincidere i due piani osculatori secantisi secondo la detta generatrice, segue che questa è tangente alla quadrica i, ed ha un sestuplo contatto colla superficie ω. Intanto da ciò che ora fu detto risulta che *tutte le cubiche* g_x *del sistema sono tangenti agli stessi* 8 *piani*, che sono i piani singolari della superficie V. Osservato inoltre che, quando due forme p_λ^3, $\mathfrak{p}_\lambda^3$ hanno una radice doppia comune, tutti i loro invarianti sono nulli, si conchiude che gli 8 piani tangenti singolari appartengono a tutte le superficie rappresentate dagli invarianti r, s, t, i, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{r}$, ω eguagliati a zero. Visto pertanto che gli otto piani singolari di V sono eziandio piani di ω, per le considerazioni precedenti e quelle fatte al § 17, risulta che *la superficie* ω *passa per gli* 8 *punti cuspidali della superficie* V, e che la curva secondo cui V ed ω si osculano è nei punti cuspidali tangente alle generatrici singolari.

Per dualità nel sistema di sviluppabili, tutti gli iperboloidi $\mathfrak{S}$ passano pei 4 punti tripli della superficie W, sono circoscritti alla cubica spigolo di regresso della corrispondente sviluppabile G'_λ, e oltrechè alla superficie W sono ancora tangenti alla superficie Ω.

Esistono 8 iperboloidi $\mathfrak{S}$ che degenerano in coni di 2° grado, essi sono quelli che toccano la superficie W lungo le 8 generatrici singolari.

Tutte le sviluppabili $G_\varkappa$ passano per gli stessi 8 punti, che sono i punti cuspidali della superficie W.

§. 22. Ricordando che ogni generatrice della superficie V è il luogo dei punti situati sulle cubiche $g_\varkappa$ e corrispondenti ad uno stesso parametro, e che il rapporto anarmonico di 4 punti d'una cubica dipende unicamente dai loro parametri, segue che 4 generatrici incontrano tutte le cubiche $g_\varkappa$ in quaderne di punti, per le quali è costante il rapporto anarmonico; questo io chiamerò brevemente *rapporto anarmonico delle 4 generatrici.*

Ciò posto, l'equazione

$$\begin{aligned} o &= (\vartheta\vartheta')^4 - 6\varepsilon'^2(\vartheta\vartheta')^2(\vartheta\vartheta'')^2(\vartheta'\vartheta'')^2 \\ &\equiv i^6 - 6^4\varepsilon'^2 j^2_\vartheta \\ &\equiv (i^3 - 36\varepsilon' j_\vartheta)(i^3 + 36\varepsilon' j_\vartheta) \\ &\equiv \left[(1+\varepsilon')i^3 - 27\varepsilon'\omega\right]\left[(1-\varepsilon')i^3 + 27\varepsilon'\omega\right] \end{aligned}$$

rappresenta due superficie di 6ª *classe, i piani* ξ *delle quali hanno la proprietà, che le generatrici passanti pei quattro punti, in cui ognuno di essi è toccato da quattro cubiche* $g_\varkappa$, *hanno un rapporto anarmonico costante* ε fornito dall'equazione

$$\varepsilon' = 2\frac{(1-\varepsilon+\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\varepsilon)(2-\varepsilon)(1-2\varepsilon)}.$$

In particolare, per $\varepsilon' = o$, si ha

$$o = (\vartheta\vartheta')^4 = \tfrac{1}{6}i^2,$$

dunque *i piani della quadrica* i *sono tali che le quattro generatrici pei* *punti, in cui ciascuno di essi è toccato da cubiche* g_x, *sono equianarmoniche;* e per $\varepsilon' = \infty$ si ha

$$o = (\vartheta\vartheta')^2(\vartheta\vartheta'')^2(\vartheta'\vartheta'')^2 = -\tfrac{1}{36}(i^3 - 27\omega) ,$$

che rappresenta una superficie di 6ª classe, i cui piani sono tali che le 4 generatrici pei punti, in cui ciascuno di essi è toccato da cubiche g_x, sono armoniche. Per $\varepsilon = 1$ si hanno le due superficie V ed ω.

§ **23.** Non solamente tutte le tangenti, che corrispondono ad uno stesso parametro λ, delle cubiche g_x, si trovano, come fu dimostrato, su d'uno stesso iperboloide, ma ancora *tutti gli assi corrispondenti e tutte le corde corrispondenti hanno per luogo un iperboloide.* Di fatto siccome l'equazione

$$\varkappa_1 p_\lambda p_\mu p_\nu + \varkappa_2 \mathfrak{p}_\lambda \mathfrak{p}_\mu \mathfrak{p}_\nu = o$$

rappresenta il punto d'incontro dell'asse $\lambda\mu$ della cubica g_x col suo piano ν, così una retta, che passi pei due punti

$$o = p_\lambda p_\mu p_\nu , \qquad\qquad o = \mathfrak{p}_\lambda \mathfrak{p}_\mu \mathfrak{p}_\nu ,$$

secherà tutti gli assi $\lambda\mu$ relativi alle cubiche g_x, ed eliminando ν da queste due ultime equazioni, si avrà

$$o = (p\,\mathfrak{p}) p_\lambda p_\mu \mathfrak{p}_\lambda \mathfrak{p}_\mu ,$$

la quale equazione rappresenta un'iperboloide per cui generatrici d'uno stesso sistema sono rette che secano tutti gli assi $\lambda\mu$, questi adunque saranno generatrici dell'altro sistema. Se gli assi $\lambda\mu$ delle due cubiche date si secano, l'iperboloide in discorso si riduce ad una conica, che ha per tangenti gli assi $\lambda\mu$ di tutte le cubiche g_x.

L'equazione

$$o = p_\lambda^3 \mathfrak{p}_\mu^3 - p_\mu^3 \mathfrak{p}_\lambda^3 \equiv (\lambda\mu)^2 i + 3(p\,\mathfrak{p}) p_\lambda p_\mu \mathfrak{p}_\lambda \mathfrak{p}_\mu$$

rappresenta un iperboloide, per cui generatrici d'uno stesso sistema sono le corde $\lambda\mu$ delle cubiche g_x; di fatto essa si può scrivere

$$(\varkappa_1 p_\lambda^3 + \varkappa_2 \mathfrak{p}_\lambda^3)(\varkappa_1' p_\mu^3 + \varkappa_2' \mathfrak{p}_\mu^3) - (\varkappa_1 p_\mu^3 + \varkappa_2 \mathfrak{p}_\mu^3)(\varkappa_1' p_\lambda^3 + \varkappa_2' \mathfrak{p}_\lambda^3) = o ,$$

donde appare che ogni piano, il quale passi pei punti λ, μ della cubica g_x, appartiene all'iperboloide in discorso, qualunque sia $\varkappa$. L'iperboloide delle corde $\lambda\mu$ passa per le generatrici λ e μ della superficie V; laonde, se queste si incontrano, l'iperboloide si ridurrà ad una conica, che ha per tangenti le corde $\lambda\mu$ delle cubiche g_x.

Per dualità, nel sistema di sviluppabili l'equazione

$$o = (P\mathfrak{P}) P_\lambda P_\mu \mathfrak{P}_\lambda \mathfrak{P}_\mu$$

rappresenta un iperboloide luogo di tutte le corde $\lambda\mu$, e l'equazione

$$o = P_\lambda^3 \mathfrak{P}_\mu^3 - P_\mu^3 \mathfrak{P}_\lambda^3 \equiv (\lambda\mu)^2 I + 3 (P\mathfrak{P}) P_\lambda P_\mu \mathfrak{P}_\lambda \mathfrak{P}_\mu$$

rappresenta un iperboloide luogo di tutti gli assi $\lambda\mu$.

§ 24. Vuolsi ora investigare qualche proprietà di cui godono i piani della superficie di 2ª classe

$$o = \theta_\lambda^2 = (p\mathfrak{p})^2 p_\lambda \mathfrak{p}_\lambda = (a\mathfrak{a})^2 a_\lambda \mathfrak{a}_\lambda \,.\, \xi_1^2 + \ldots + \left[(a\mathfrak{b})^2 a_\lambda \mathfrak{b}_\lambda + (b\mathfrak{a})^2 b_\lambda \mathfrak{a}_\lambda\right] \xi_1 \xi_2 + \ldots$$

Osserviamo che, dato un piano ξ' ed il parametro $\nu_1 : \nu_2$, le equazioni $o = \pi_\lambda^2 \pi_\nu$ $o = \varpi_\lambda^2 \varpi_\nu$ forniscono le coppie di parametri λ relativi a quelle tangenti delle due cubiche date, che passano pei due punti in cui il piano ξ' ne seca le rispettive coniche ν (inscritte nelle sviluppabili); inoltre $(\pi\varpi)^2 \pi_\nu \varpi_\nu = o$ è la condizione affinchè i 4 elementi λ forniti dalle dette equazioni siano armonici; dunque i piani ξ' della quadrica $o = \theta_\lambda^2$ sono tali che, se dalle due coppie di punti in cui ciascuno di essi è incontrato dalle coniche λ delle due cubiche date si conducono a queste le tangenti, le generatrici della superficie V che passano pei 4 punti di contatto sono armoniche.

Facciamo quest'altro ragionamento. Dati ξ' e ν, l'equazione $o = \varpi_\lambda^2 \varpi_\nu$ determina due valori λ', λ'' di λ tali che le tangenti λ', λ'' della cubica g_0 passano risp. pei punti d'incontro delle terne di piani (ξ', λ', ν), (ξ', λ'', ν); il punto d'incontro dei tre piani λ', λ'', ν della cubica g_∞ ha per equazione $(p\varpi)^2 p_\nu \varpi_\nu = o$, e se esso sta sul piano ξ' deve essere $(\pi\varpi)^2 \pi_\nu \varpi_\nu = o$; quest'equazione adunque, dato ξ', determina due valori di ν tali che si trova su ξ' il punto d'incontro del piano ν della g_∞ coi due piani della stessa g_∞ corrispondenti alle due tangenti di g_0, che passano pei due punti in cui ξ' incontra la conica ν della cubica g_0. Siccome poi la $(\varpi\pi)^2 \pi_\lambda \varpi_\lambda$ è simmetrica rispetto alle ϖ e alle π, così si può conchiudere: « Se un piano ξ' è tale che cade su di esso il punto d'incontro del piano ν della cubica g_∞ coi due piani della stessa corrispondenti alle due tangenti di g_0 uscenti dai punti in cui ξ' incontra la conica ν di g_0, reciprocamente nel piano

ξ' cadrà il punto d'incontro del piano ν della cubica g_0 coi due piani della stessa corrispondenti alle due tangenti di g_∞ uscenti dai due punti in cui ξ' seca la conica ν di g_∞ ». Di qui segue che la superficie θ può intendersi generata come inviluppo dei piani, ciascuno dei quali passa per un punto mobile sul piano fisso λ della cubica g_0 (ovvero g_∞) e pei due punti sul piano fisso λ di g_∞ (ovvero g_0) che sono traccie delle due tangenti di questa corrispondenti ai due piani di g_0 (ovvero g_∞) uscenti dal detto punto mobile.

L'eguaglianza

$$(\lambda\mu)^2\theta_\lambda^2 = p_\lambda^3 \cdot \mathfrak{p}_\lambda \mathfrak{p}_\mu^2 - 2p_\lambda^2 p_\mu \cdot \mathfrak{p}_\lambda^2 \mathfrak{p}_\mu + p_\lambda p_\mu^2 \cdot \mathfrak{p}_\lambda^3$$

fa vedere come i piani λ delle due cubiche g_0, g_∞ siano due piani della quadrica θ, e così pure sono piani della quadrica θ i due piani per la generatrice λ della superficie V e le tangenti λ delle cubiche g_0, g_∞.

Variando λ, tutte le superficie θ inviluppano una superficie di 4^a classe che ha per equazione

$$0 = (\theta\theta')^2 = t - \tfrac{1}{2} i^2 .$$

Siccome θ_λ^2 non è combinante delle forme p_λ^3, $\mathfrak{p}_\lambda^3$, così le superficie θ hanno proprietà che valgono solamente per le due cubiche date.

Per dualità nel sistema di sviluppabili di 3^a classe, la superficie di 2^o ordine

$$0 = \Theta_\lambda^2 = (P\mathfrak{P})^2 P_\lambda \mathfrak{P}_\lambda$$
$$= (A\mathfrak{A})^2 A_\lambda \mathfrak{A}_\lambda x_1^2 + \ldots\ldots + \left[(A\mathfrak{B})^2 A_\lambda \mathfrak{B}_\lambda + (B\mathfrak{A})^2 B_\lambda \mathfrak{A}_\lambda\right] x_1 x_2 + \ldots\ldots$$

è il luogo dei punti ove un piano qualunque passante pel punto fisso λ della 1^a (ovvero 2^a) cubica è secato dai due piani pel punto fisso λ della 2^a (ovvero 1^a) e per le due tangenti di questa che corrispondono ai due punti, in cui il piano mobile seca la 1^a (ovvero 2^a) cubica.

§ 25. Proponiamoci ora di studiare la quadrica rappresentata dall'equazione

$$0 = i = (p\mathfrak{p})^3 = (a\mathfrak{a})^3 \xi_1^2 + \ldots + \left[(a\mathfrak{a})^3 + (b\mathfrak{a})^3\right] \xi_1 \xi_2 + \ldots$$

Osserviamo che l'equazione $(p\varpi)^3 = 0$ rappresenta il punto d'incontro dei tre piani osculatori alla cubica g_∞ nei tre punti che corrispondono a quelli in cui la cubica g_0 è secata dal piano ξ', e questo punto perciò è il fuoco rispetto alla g_∞ del piano, che seca la cubica g_∞ nei tre punti corrispondenti a quelli in cui il piano ξ' seca la cubica g_0. Ora in generale il detto punto non cade sul piano ξ', affinchè ciò avvenga è necessario che sia $(\varpi\pi)^3 = 0$. Laonde, visto che $(\pi\varpi)^3$ è simmetrico rispetto alle π e alle ϖ, si conchiude: Dato un piano ξ' che incontri la cubica g_∞ nei tre punti λ, μ, ν e la cubica g_0 nei tre punti λ', μ', ν', se il piano pei tre punti λ', μ', ν' della cubica g_∞ ha il suo fuoco rispetto a questa su ξ', ancora il piano pei tre punti λ, μ, ν della cubica g_0 avrà il suo fuoco rispetto a questa su ξ'. *La quadrica* $\boldsymbol{i}$ *è l'inviluppo dei piani* ξ' *che godono di tale proprietà.* Siccome poi l'invariante i è un combinante delle due forme p^3_λ, $\mathfrak{p}^3_\lambda$, così i piani della quadrica i conservano rispetto a due cubiche qualunque del sistema la stessa proprietà che hanno rispetto alle due cubiche date. I quattro piani tritangenti della superficie V, come è facile a vedersi, appartengono alla quadrica i; altri piani di questa sono gli 8 piani singolari della superficie V (§ 21).

Per dualità, dato un punto x' per cui passino i piani λ, μ, ν della sviluppabile G_∞ e i piani λ', μ', ν' della sviluppabile G_0, se il punto d'incontro dei tre piani λ', μ', ν' di G_∞ ha rispetto a questa il piano focale che passa per x', viceversa il punto d'incontro dei tre piani λ, μ, ν di G_0 ha rispetto a questa il piano focale che passa per x'. Luogo dei punti x' che godono di tale proprietà è la quadrica che ha per equazione

$$0 = I = (P\mathfrak{P})^3 = (A\mathfrak{A})^3 x_1^2 + \ldots + \left[(A\mathfrak{B})^3 + (B\mathfrak{A})^3\right] x_1 x_2 + \ldots$$

I punti di questa quadrica godono della proprietà analoga rispetto a due sviluppabili qualunque del sistema.

§ **26**. Il fuoco d'un piano dato ξ' rispetto alla cubica $g_\varkappa$ ha per equazione in coordinate di piani

$$0 = \varkappa_1^2 (\pi p)^3 + \varkappa_1 \varkappa_2 \left[(\varpi p)^3 + (\pi \mathfrak{p})^3\right] + \varkappa_2^2 (\varpi \mathfrak{p})^3 .$$

L'equazione del luogo dei fuochi del piano ξ' rispetto a tutte le cubiche del sistema si ottiene eguagliando a zero il discriminante del primo membro dell'equazione ora scritta di 2° grado in $\varkappa_1 : \varkappa_2$, ed è

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{f} &= 4(\pi p)^3 (\varpi \mathfrak{p})^3 - \left\{(p\varpi)^3 - (\pi\mathfrak{p})^3\right\}^2 \\ &= \varphi + 4\psi , \end{aligned}$$

dove si è posto

$$
\begin{aligned}
\varphi &= 4(\pi\varpi)^3 i - \left\{(p\varpi)^3 + (\pi\mathfrak{p})^3\right\}^2 \\
\psi &= (\varpi\pi)^3 i + (p\pi)^3(\mathfrak{p}\varpi)^3 + (\mathfrak{p}\pi)^3(\varpi p)^3 \\
&= 3(\pi\varpi)(\pi p)(\pi\mathfrak{p})(\varpi p)(\varpi\mathfrak{p})(p\mathfrak{p}) \\
&= \tfrac{1}{2}\left[6(\vartheta\hat{\vartheta})^4 - i(\pi\varpi)^3\right] \quad (*)\ ;
\end{aligned}
$$

adunque: *il luogo dei fuochi d'un piano rispetto a tutte le cubiche del sistema è una conica* $\mathrm{f} = 0$, che diremo *conica focale del piano.*

L'equazione $\varphi = 0$ rappresenta la conica sezione del piano ξ' colla quadrica i.

L'equazione $\psi = 0$ rappresenta un' altra conica nel piano ξ', di cui troveremo tosto la proprietà.

Il fuoco rispetto a una cubica $g_\varkappa$ di quel piano, che passa pei tre punti di essa cubica corrispondenti a quelli in cui un piano dato ξ' seca un'altra cubica $g_{\varkappa'}$, e che diremo piano congiunto del piano ξ' rispetto alla coppia $(g_\varkappa, g_{\varkappa'})$, ha per equazione

$$0 = \varkappa_1\varkappa_1'(p\pi)^3 + \varkappa_1\varkappa_2'(p\varpi)^3 + \varkappa_1'\varkappa_2(\mathfrak{p}\pi)^3 + \varkappa_2\varkappa_2'(\mathfrak{p}\varpi)^3 .$$

Se le due cubiche $g_\varkappa$, $g_{\varkappa'}$ si scambiano le veci, allora dato ξ' a questo corrisponderà un altro piano, che è quello che passa pei tre punti di $g_\varkappa$ corrispondenti ai tre in cui ξ' seca la cubica $g_\varkappa$, e che diremo congiunto di ξ' rispetto alla coppia $(g_{\varkappa'}, g_\varkappa)$.

Il luogo dei fuochi rispetto a una cubica fissa $g_\varkappa$ dei piani congiunti a ξ' rispetto alle coppie $(g_\varkappa, g_{\varkappa'})$, quando varia la cubica $g_{\varkappa'}$, è la retta che unisce i due punti di cui le equazioni sono

$$(3)\ \ldots \qquad 0 = \varkappa_1(p\pi)^3 + \varkappa_2(\mathfrak{p}\pi)^3\ , \qquad 0 = \varkappa_1(p\varpi)^3 + \varkappa_2(\mathfrak{p}\varpi)^3\ ;$$

e il luogo dei fuochi rispetto a una cubica variabile $g_\varkappa$ dei piani congiunti a ξ' rispetto alle coppie $(g_\varkappa, g_{\varkappa'})$, essendo fissa la cubica $g_{\varkappa'}$, è la retta che unisce i due punti di cui le equazioni sono

$$(3')\ \ldots \qquad 0 = \varkappa_1'(p\pi)^3 + \varkappa_2'(p\varpi)^3\ , \qquad 0 = \varkappa_1'(\mathfrak{p}\pi)^3 + \pi_2'(\mathfrak{p}\varpi)^3 .$$

(*) Si è denotato con $\hat{\vartheta}_\lambda^4$ ciò che diviene ϑ_λ^4 quando alle ξ si sostituiscono le ξ'. Osservando che si ha

$$6\vartheta_x^2\vartheta_y^2 = i(xy)^2 + 6(p\mathfrak{p})p_x p_y \mathfrak{p}_x \mathfrak{p}_y$$

dalla

$$(\vartheta\hat{\vartheta})^4 = (\pi\varpi)(\pi\hat{\vartheta})^2(\pi\hat{\vartheta})^2$$

si passa alla

$$6(\vartheta\hat{\vartheta})^4 = i(\pi\varpi)^3 + 6(p\mathfrak{p})(\pi\varpi)(p\pi)(p\varpi)(\mathfrak{p}\pi)(\mathfrak{p}\varpi) .$$

Questa retta e la precedente si secano in un punto, che è il fuoco rispetto alla cubica g_x del piano congiunto a ξ' rispetto alla coppia $(g_x, g_{x'})$.

Il luogo dei fuochi rispetto a una cubica variabile g_x dei piani congiunti a ξ' rispetto alle ∞^2 coppie $(g_x, g_{x'})$, essendo variabile anche la cubica $g_{x'}$, è un iperboloide di cui l'equazione in coordinate di piani è

$$0 = (p\pi)^3(\mathfrak{p}\varpi)^3 + (\pi\mathfrak{p})^3(p\varpi)^3 = \psi + (\pi\varpi)^3 i = \tfrac{1}{2}\left[6(\vartheta\hat{\vartheta})^4 + (\pi\varpi)^3 i\right],$$

lo diremo *iperboloide focale* relativo al piano ξ'; esso ha per generatrici dell'un sistema le rette di equazioni (3), e per generatrici dell'altro sistema le rette di equazioni (3').

È facile a vedersi che la conica intersezione del piano ξ' coll'iperboloide focale ad essa relativo è appunto la conica focale f del piano ξ'. Di qui segue che, se il piano ξ' è tangente al suo iperboloide focale, la conica focale si scinde in due rette; ma ξ' è tangente all'iperboloide focale ogniqualvolta $(\pi\varpi)^3 = 0$; dunque *ogni piano della quadrica i è tale che la sua conica focale degenera in due rette.*

Della schiera di quadriche determinata dalla quadrica i e dallo iperboloide focale relativo al piano ξ' fa parte la conica ψ, la quale perciò è una linea di stringimento o nodale della superficie sviluppabile di 4ª classe circoscritta a tutte le quadriche della schiera. Il piano ξ' è una delle faccie del tetraedro autoconiugato rispetto alla stessa schiera, ed il suo polo ha per equazione

$$0 = (p\varpi)^3 + (\pi\mathfrak{p})^3.$$

I due fuochi rispetto a g_x, $g_{x'}$ dei due piani congiunti di ξ' rispetto alle coppie $(g_x, g_{x'})$ $(g_{x'}, g_x)$ sono sempre in linea retta col polo del piano ξ' rispetto al suo iperboloide focale; del che è facile persuadersi scrivendo le equazioni dei due detti fuochi e sottraendole. Per i quattro piani tritangenti della superficie l'iperboloide focale è indeterminato.

§ 27. Occupiamoci ora della conica ψ, osserviamo che la sua equazione si può scrivere

$$\psi = \begin{vmatrix} \pi_{111} & -3\pi_{112} & 3\pi_{122} & -\pi_{222} \\ \varpi_{111} & -3\varpi_{112} & 3\varpi_{122} & -\varpi_{222} \\ p_{111} & -3p_{112} & 3p_{122} & -p_{222} \\ \mathfrak{p}_{111} & -3\mathfrak{p}_{112} & 3\mathfrak{p}_{122} & -\mathfrak{p}_{222} \end{vmatrix} = 0$$

e quindi si può ritenere che $\psi=0$ sia la condizione affinchè coesistano le quattro equazioni

$$(\alpha) \qquad \pi_{111}\bar{p}_{222}-3\pi_{112}\bar{p}_{122}+3\pi_{122}\bar{p}_{112}-\pi_{222}\bar{p}_{111}=(\pi\bar{p})^3=0$$

$$(\beta) \qquad \varpi_{111}\bar{p}_{222}-3\varpi_{112}\bar{p}_{122}+3\varpi_{122}\bar{p}_{112}-\varpi_{222}\bar{p}_{111}=(\varpi\bar{p})^3=0$$

$$(\gamma) \qquad p_{111}\bar{p}_{222}-3p_{112}\bar{p}_{122}+3p_{122}\bar{p}_{112}-p_{222}\bar{p}_{111}=(p\bar{p})^3=0$$

$$(\delta) \qquad \mathfrak{p}_{111}\bar{p}_{222}-3\mathfrak{p}_{112}\bar{p}_{122}+3\mathfrak{p}_{122}\bar{p}_{112}-\mathfrak{p}_{222}\bar{p}_{111}=(\mathfrak{p}\bar{p})^3=0$$

lineari e omogenee nelle $\bar{p}_{111}$, $\bar{p}_{112}$, $\bar{p}_{122}$, $\bar{p}_{222}$ riguardate come incognite, fatte note le quali si ricaveranno in corrispondenza le coordinate ξ_1'', ..., ξ_4'' d'un certo piano ξ'' mercè le equazioni

$$(\varepsilon) \qquad \left\{\begin{array}{l} a_{111}\xi_1''+b_{111}\xi_2''+c_{111}\xi_3''+d_{111}\xi_4''=\bar{p}_{111} \\ a_{112}\xi_1''+b_{112}\xi_2''+c_{112}\xi_3''+d_{112}\xi_4''=\bar{p}_{112} \\ a_{122}\xi_1''+b_{122}\xi_2''+c_{122}\xi_3''+d_{122}\xi_4''=\bar{p}_{122} \\ a_{222}\xi_1''+b_{222}\xi_2''+c_{222}\xi_3''+d_{222}\xi_4''=\bar{p}_{222}. \end{array}\right.$$

Pertanto alla conica ψ appartengono quei piani ξ, per ognuno dei quali è possibile trovare un piano ξ'' tale che siano soddisfatte le (α), (β), (γ), (δ). Or bene la (α) e la (γ) significano che ξ' e ξ devono passare per il fuoco di ξ'' rispetto alla cubica g_∞, la (β) e la (δ) significano che ξ' e ξ devono passare per il fuoco rispetto alla cubica g_∞ del piano congiunto di ξ'' rispetto alla coppia (g_∞, g_0). Quindi si può conchiudere che: sopra ogni piano ξ' si possono trovare infiniti punti x tali che cade su ξ' il fuoco y rispetto alla cubica g_∞ del piano congiunto al piano ξ'' rispetto alla coppia (g_∞, g_0), essendo poi ξ'' il piano focale di x rispetto alla g_∞. Le rette xy inviluppano sul piano ξ' la conica ψ. — Le incognite delle equazioni (α), (β), (γ), (δ) avremmo potuto denotarle con $\bar{\mathfrak{p}}_{111}$, $\bar{\mathfrak{p}}_{112}$, $\bar{\mathfrak{p}}_{122}$, $\bar{\mathfrak{p}}_{222}$, e poi al sistema di equazioni (ε), che si riferiscono alla prima cubica data, sostituire le analoghe relative alla 2ª cubica data. Allora appare come nella proposizione ora enunciata le due cubiche g_∞, g_0 si possono fra di loro scambiare. Chè anzi dalla espressione di ψ sotto forma di determinante si vede che, se alle due cubiche date si sostituiscono due cubiche qualunque $g_\varkappa$, $g_{\varkappa'}$, ψ non si altera che pel fattore $(\varkappa\varkappa')^2$; laonde alla proposizione sopra enunciata si può sostituire la seguente più generale: « *Sopra ogni piano ξ' si possono trovare infiniti punti x tali che cade sullo stesso piano ξ' il fuoco y rispetto ad una cubica $g_\varkappa$ del* *piano, che passa pei tre punti di questa corrispondenti ai tre punti, in cui un'altra cubica $g_{x'}$ è secata dal piano focale di x rispetto a g_x.* Qualunque siano *le cubiche g_x, $g_{x'}$ le rette xy inviluppano sempre la stessa conica ψ* ».

Esistono quattro piani ξ' in cui la conica ψ è indeterminata, essi sono i piani tritangenti della superficie V; di fatto per tali piani si possono scambiare le π colle ϖ (§ 8) epperò ψ si annulla identicamente.

Per ogni piano tangente singolare $\bar{\vartheta}_\lambda^4$ ha una radice quadrupla, che è il parametro della corrispondente generatrice singolare, laonde se questo parametro lo denotiamo con μ, sarà $(\vartheta\hat{\vartheta})^4 = \vartheta_\mu^4$; inoltre per un piano tangente singolare $(\pi\varpi)^3 = 0$, dunque ψ si riduce a ϑ_μ^4, ossia in un piano tangente singolare la conica inviluppo delle tangenti λ alle cubiche del sistema (§ 21) è anche la conica ψ relativa a esso piano.

È facile a rilevarsi ciò che corrisponde per dualità circa il sistema di sviluppabili, alle cose dette in questi due ultimi §§.

CAPO V.

§ **28.** Tutto ciò che finora fu detto in generale per due cubiche gobbe punteggiate proiettivamente, può, colle debite modificazioni, applicarsi al caso particolare in cui le due punteggiate giacciano su di una stessa cubica.

Si abbia pertanto su di una cubica gobba una involuzione quadratica di punti determinata per mezzo dei suoi due punti doppi, i parametri λ', λ'' dei quali siano forniti dall'equazione

$$\upsilon_\lambda^2 = \upsilon_{11}\lambda_1^2 + 2\upsilon_{12}\lambda_1\lambda_2 + \upsilon_{22}\lambda_2^2 = 0 \ ;$$

fra i parametri $\lambda_1:\lambda_2$, $\lambda_1':\lambda_2'$ di due punti coniugati nella involuzione passa la relazione $0 = \upsilon_\lambda \upsilon_{\lambda'}$, permodochè, dato il parametro $\lambda_1:\lambda_2$ d'un punto, per il punto coniugato si può assumere

$$\lambda_1' = \upsilon_2\upsilon_\lambda \quad = \quad \upsilon_{12}\lambda_1 + \upsilon_{22}\lambda_2$$
$$\lambda_2' = -\upsilon_1\upsilon_\lambda = -\upsilon_{11}\lambda_1 - \upsilon_{12}\lambda_2 \ .$$

Se nelle forme $a_{\lambda'}^3$, $b_{\lambda'}^3$, $c_{\lambda'}^3$, $d_{\lambda'}^3$, i cui valori sono le coordinate del punto λ', si sostituiscono a λ_1' e λ_2' le espressioni ora scritte si otterranno le coordinate del punto λ' coniugato di λ

$$\mathfrak{a}_\lambda^3 = (av)(av')(av'')v_\lambda v_\lambda' v_\lambda'' , \qquad \mathfrak{b}_\lambda^3 = (bv)(bv')(bv'')v_\lambda v_\lambda' v_\lambda'' ,$$
$$\mathfrak{c}_\lambda^3 = (cv)(cv')(cv'')v_\lambda v_\lambda' v_\lambda'' , \qquad \mathfrak{d}_\lambda^3 = (dv)(dv')(dv'')v_\lambda v_\lambda' v_\lambda'' ;$$

l'equazione in coordinate di piani del punto coniugato di λ è

$$0 = \mathfrak{p}_\lambda^3 = (pv)(pv')(pv'')v_\lambda v_\lambda' v_\lambda'' = \left\{ (pv)^2 . v_\lambda^2 - (vv')^2 . p_\lambda^2 \right\} (pv'')v_\lambda'' ;$$

questa stessa, noto ξ, fornisce i parametri dei tre punti coniugati ai tre in cui il piano ξ seca la cubica.

Similmente

$$0 = \mathfrak{p}_\lambda^2 \mathfrak{p}_\mu = (pv)(pv')(pv'')v_\lambda v_\lambda' v_\mu''$$

è l'equazione del punto d'incontro di quella tangente e di quel piano che nella involuzione corrispondono alla tangente λ, e al piano μ; ed ancora

$$0 = \mathfrak{p}_\lambda \mathfrak{p}_\mu \mathfrak{p}_\nu = (pv)(pv')(pv'')v_\lambda v_\mu' v_\nu''$$

è l'equazione del punto d'incontro di quei tre piani che nell'involuzione corrispondono ai piani λ, μ, ν.

L'equazione

$$\begin{aligned} 0 = \mathfrak{q}_\lambda^2 = (\mathfrak{p}\mathfrak{p}')^2 \mathfrak{p}_\lambda \mathfrak{p}_\lambda' &= \tfrac{1}{4} \overline{(vv')^2}^2 . (pp')^2 (pv)(p'v')v_\lambda v_\lambda' \\ &= \tfrac{1}{4} \overline{(vv')^2}^2 . (qv)(qv')v_\lambda v_\lambda' , \end{aligned}$$

dato λ, rappresenta quella conica iscritta nella sviluppabile che è situata nel piano λ' coniugato di λ.

§ **29**. Consideriamo ora il sistema di cubiche determinato per mezzo delle due punteggiate segnate sulla cubica data. Per ogni cubica g_x di tale sistema, un punto qualsiasi ha per coordinate

$$\rho x_1 = \varkappa_1 a_\lambda^3 + \varkappa_2 (av)(av')(av'')v_\lambda v_\lambda' v_\lambda'' ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\rho x_4 = \varkappa_1 d_\lambda^3 + \varkappa_2 (dv)(dv')(dv'')v_\lambda v_\lambda' v'' .$$

La quadrica i per questo sistema di cubiche è

$$0 = (p\mathfrak{p})^3 = (pv)(pv')(pv'')(vp')(v'p')(v''p')$$

ed è appunto l'iperboloide $i_{1:3}$ studiato dal Prof. D'Ovidio al § 25 della sua dotta memoria.

Quindi conchiudiamo: « *I piani dell'iperboloide* $i_{1:3}$ *relativo all'involuzione, per cui* $0 = \upsilon_\lambda^2$ *dà gli elementi doppi, sono tali che su di essi cadono i fuochi dei piani ad essi congiunti nella involuzione cubica, i cui elementi tripli sono dati dalla stessa equazione* $0 = \upsilon_\lambda^2$ ». Siccome poi i piani dell'iperboloide i godono della stessa proprietà rispetto a tutte le cubiche del sistema, così dall'essere i punti dell'iperboloide $i_{1:3}$ fuochi di piani ad esso tangenti (*), si deduce che « *dei piani dell' iperboloide* $i_{1:3}$ *i fuochi rispetto alle cubiche del sistema hanno per luogo le due generatrici in cui* $i_{1:3}$ *è secato da essi piani* ».

Proponiamoci ora di trovare la superficie inviluppo delle sviluppabili osculatrici a tutte le cubiche del sistema, vediamo perciò a che si riduca l'invariante ω; si ha

$$2\omega = (q\mathfrak{p})^2(\mathfrak{q}p)^2(\mathfrak{p}p) = -\tfrac{1}{4}\overline{(\upsilon\upsilon')^2}^2 . (p\upsilon)(p\upsilon')(p\upsilon'')(p'\upsilon'')(p'\upsilon''')(p'\upsilon^{\mathrm{IV}})(q\upsilon)(q\upsilon')(q'\upsilon''')(q'\upsilon^{\mathrm{IV}})$$

ma

$$2(p\upsilon)(p\upsilon')(q\upsilon)(q\upsilon') = 2(p\upsilon)^2(q\upsilon')^2 - (\upsilon\upsilon')^2(qp)^2$$
$$2(p'\upsilon''')(p'\upsilon^{\mathrm{IV}})(q'\upsilon''')(q'\upsilon^{\mathrm{IV}}) = 2(p'\upsilon''')^2(q'\upsilon^{\mathrm{IV}})^2 - (\upsilon'''\upsilon^{\mathrm{IV}})^2(q'p')^2$$

dunque

$$-32\omega = \overline{(\upsilon\upsilon')^2}^2 . \left[2(p\upsilon)^2(q\upsilon')^2 - (\upsilon\upsilon')^2(qp)^2\right]$$
$$\times\left[2(p'\upsilon''')^2(q'\upsilon^{\mathrm{IV}})^2 - (\upsilon'''\upsilon^{\mathrm{IV}})^2(q'p')^2\right](p\upsilon'')(p'\upsilon'')$$

ed osservato che $(qp)^2 p_1 = 0$, $(qp)^2 p_2 = 0$ si ha

$$-8\omega = \overline{(\upsilon\upsilon')^2}^2 . (p\upsilon)^2(p'\upsilon''')^2(p\upsilon'')(p'\upsilon'') . \overline{(q\upsilon')^2}^2$$

ovvero, chiamando λ', λ'' i due punti doppi della involuzione,

$$-8\omega = (\upsilon\upsilon')^{2\,.\,2}\, p_{\lambda'}^{\,2} p_{\lambda''} . p'_{\lambda'} p'^{\,2}_{\lambda''} . \overline{q_{\lambda'} q_{\lambda''}}^2 .$$

Pertanto la superficie ω inviluppo delle sviluppabili osculatrici a tutte le cubiche del sistema, che in generale abbiam visto essere della 6ª classe, si scinde nei due punti (superficie di 1ª classe) $p_{\lambda'}^2 p_{\lambda''} = 0$, $p_{\lambda''}^2 p_{\lambda'} = 0$, e nell'iperboloide $q_{\lambda'} q_{\lambda''} = 0$ contato due volte. Quest'ultimo adunque è iscritto non solo nella sviluppabile della cubica data (**), ma ancora nelle

(*) Cfr. D'Ovidio, l. c., § 25.
(**) Cfr. D'Ovidio, l. c., § 18.

sviluppabili di tutte le cubiche del sistema determinato mediante la involuzione di cui λ', λ'' sono punti doppi.

La superficie rigata su cui giacciono tutte le cubiche del sistema ha per equazione in coordinate di piani

$$2\,i^3 - 27\,\omega = -\tfrac{1}{32}\,i^3_{1:3} + \tfrac{27}{8}\,p_{\lambda'}^2 p_{\lambda''} \cdot p'_{\lambda'} p'^2_{\lambda''} \cdot \overline{q_{\lambda'} q_{\lambda''}}^2 \cdot \overline{(v v')^2}^2 .$$

Ora

$$i_{1:3} = p_{\lambda'}^3 \cdot p_{\lambda''}^3 + 3\,p_{\lambda'}^2 p_{\lambda''} \cdot p_{\lambda'} p_{\lambda''}^2 \quad (*)$$

$$-2(v v')^2 (q\,v'')^2 = i_{1:-1} = p_{\lambda'}^3 \cdot p_{\lambda''}^3 - p_{\lambda'}^2 p \cdot p'_{\lambda'} p'^2_{\lambda''} ,$$

dunque

$$\begin{aligned} -32\,(2\,i^3 - 27\,\omega) &= \left[p_{\lambda'}^3 \cdot p_{\lambda''}^3 + 3\,p_{\lambda'}^2 p_{\lambda''} \cdot p'_{\lambda'} p'^2_{\lambda''}\right]^3 \\ &\quad - 27\,p_{\lambda'}^2 p_{\lambda''} \cdot p'_{\lambda'} p'^2_{\lambda''} \left\{\bar{p}_{\lambda'}^3 \cdot \bar{p}'^3_{\lambda''} - \bar{p}_{\lambda'}^2 \bar{p}_{\lambda''} \cdot \bar{p}'_{\lambda'} \bar{p}'^2_{\lambda''}\right\}^2 \\ &= p_{\lambda'}^3 \cdot p'^3_{\lambda''} \left[p'^3_{\lambda'} p'^3_{\lambda''} - 9\,p_{\lambda'}^2 p_{\lambda''} \cdot p'_{\lambda'} p'^2_{\lambda''}\right]^2 = p_{\lambda'}^3 \cdot p_{\lambda''}^3 \cdot i^2_{1:-9} . \end{aligned}$$

Dunque la superficie rigata su cui giacciono tutte le cubiche del sistema, che in generale abbiam visto essere della 6ª classe, ora si scinde nei due punti λ', λ'' e nello iperboloide $i_{1:-9}$ contato due volte, il quale ha per equazione in coordinate di punti $0 = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}$ (**); così doveva appunto avvenire, perchè la superficie luogo delle cubiche del sistema è in questo caso il luogo delle corde, che congiungono punti corrispondenti nell'involuzione di cui λ', λ'' sono i punti doppi, e questo luogo (***) è l'iperboloide $0 = Q_{\lambda'} Q_{\lambda''}$.

Tutte le cubiche di questo sistema particolare passano pei due punti doppi dell'involuzione, del che è facile persuadersi osservando che pei punti doppi λ', λ'' si ha

$$\mathfrak{a}_{\lambda'}^3 = (a\,v)\,(a\,v')\,(a\,v'')\,v_{\lambda'}\,v'_{\lambda'}\,v''_{\lambda'} = a^3_{\lambda'} , \quad \ldots\ldots$$

$$\mathfrak{a}_{\lambda''}^3 = (a\,v)\,(a\,v')\,(a\,v'')\,v_{\lambda''}\,v'_{\lambda''}\,v''_{\lambda''} = a^3_{\lambda''} , \quad \ldots\ldots$$

permodochè le 4 coordinate dei punti d'una cubica qualunque g_2 che hanno i parametri λ', λ'' riescono proporzionali alle 4 coordinate dei punti λ', λ'' della cubica data. Di più tutte le cubiche del sistema hanno

---

(*) Cfr. D'Ovidio, l. c., § 23.
(**) Cfr. D'Ovidio, l. c., § 23.
(***) Cfr. D'Ovidio, l. c., § 18.

in λ' e in λ'' le stesse tangenti e gli stessi piani osculatori, e ciò si dimostra ripetendo la stessa osservazione circa le coordinate d'una tangente a una cubica qualunque g_x (§ 19) o circa l'equazione del piano osculatore a una cubica qualunque g_x (§ 11). Di qui appare come il sistema di cubiche in questione non sia altro che un caso particolare del fascio di Chasles, quando in questo si supponga che dei quattro punti, per cui passano tutte le cubiche, due sieno venuti a coincidere in λ', e due in λ''.

§ **30**. Il sistema invariativo di due cubiche binarie ci è stato di grande utilità nelle ricerche che abbiam fatto sui sistemi di cubiche gobbe; chiuderemo questo scritto facendone alcune applicazioni al caso di una cubica sola.

Date due forme cubiche P_λ^3, Π_λ^3 di cui gli Hessiani denoteremo rispett. con Q_λ^2, $\bar{Q}_\lambda^2$, la loro risultante ha per espressione

$$4(P\Pi)^3+27(Q\Pi)^2(\bar{Q}P)^2(P\Pi)\ ;$$

e l'invariante $(Q\Pi)^2(\bar{Q}P)^2(P\Pi)$ col suo annullarsi esprime che coincidono due radici del Jacobiano

$$E_\lambda^4=(P\Pi)\,P_\lambda^2\,\Pi_\lambda^2,$$

senza che perciò le due forme P_λ^3, Π_λ^3 abbiano una radice comune. — Pertanto se $P_\lambda^3=0$, $\Pi_\lambda^3=0$ danno le due terne di piani λ che partono dai punti x, x', *l'equazione*

$$0=4\overline{(P\Pi)^3}^{\,3}+27(Q\Pi)^2(\bar{Q}P)^2(P\Pi) \quad (*)$$

significa che i due punti x, x' sono su di uno stesso piano osculatore, e quindi, fisso x', *rappresenta la terna di piani osculatori che passano per x'.*

Siccome poi $E_\lambda^4=0$ dà i parametri delle quattro rette λ che secano la xx' (**), così l'equazione

---

(*) Quest'equazione è d'accordo col fatto, che i tre piani osculatori uscenti da un punto x' sono i tre piani stazionarii del cono, che proietta da x' la cubica, e che le tre generatrici stazionarie sono nel piano $0=(P\Pi)^3$ focale di x'.

(**) Cfr. D'Ovidio, l. c., § 37.

$$\begin{aligned}
0 &= (Q\Pi)^2(\bar{Q}P)^2(\Pi P)\\
&= \tfrac{8}{3}(Q\Pi)^2(E\Pi')^3(E\Pi) = \tfrac{8}{3}(E\Pi)^3(\bar{Q}P')^2(EP')\\
&= 2(\bar{T}T)^3 + (\Pi P)^3(Q\bar{Q})^2 \quad (*)\\
&= (P\Pi)(PQ)(\Pi Q)(P\bar{Q})(\Pi\bar{Q}) + \tfrac{1}{2}(P\Pi)^3(Q\bar{Q})^2\\
&= 2(EQ)^2(E\bar{Q})^2 + \tfrac{2}{3}(P\Pi)^3(Q\bar{Q})^2\\
&= \tfrac{8}{3}(EE')^2(EE'')^2(E'E'')^2 + \tfrac{2}{27}\overline{(\Pi P)^3}^3\\
&= (PP')^2(\Pi\Pi')^2(P\Pi'')(P'\Pi'')(\Pi P'')(\Pi'P'')(P''\Pi'')
\end{aligned}$$

significa che delle quattro rette λ secanti la xx' due coincidono; ora ciò può avvenire solamente in due casi: o la retta xx' si appoggia in un punto della cubica, o è in un piano λ; questo secondo caso è da escludere perchè allora P_λ^3, Π_λ^3 avrebbero una radice comune; dunque *l'equazione scritta, dato x', rappresenta il cono di 3° ordine che da x' proietta la cubica*, equazione che sotto altre forme fu già data dal Prof. D'Ovidio (**).

(*) Qui si è posto T_λ^3 = cov. cub. P_λ^3.

(**) Cfr. D'Ovidio, l. c., § 38.

SUI

NERVI DEI TENDINI

DELL'UOMO E DI ALTRI VERTEBRATI

E DI

Un nuovo Organo Nervoso terminale Muscolo-tendineo

RICERCHE

DI

CAMILLO GOLGI

Professore in Pavia

Letto ed approvata nell'adunanza del 30 *Maggio* 1880

I.

Di fronte alla diligenza con cui nell'epoca moderna vennero condotte le ricerche anatomiche, alla pertinacia con cui ogni più piccola parte dell'organismo nostro, con ogni mezzo d'osservazione, venne scrutata, è di sorpresa, che particolarità di organizzazione così spiccate, così facili a dimostrarsi, e per avventura di così rilevante significazione fisiologica come quelle ch'io mi propongo di descrivere, siano finora rimaste dagli anatomici inosservate.

Nè potrebbe dirsi che l'argomento della distribuzione e terminazione dei nervi nei tendini non abbia finora a sè richiamata l'attenzione degli osservatori, chè anzi, fra le recenti pubblicazioni, due ne troviamo, l'una di Rollet (1), l'altra di Sachs (2), esclusivamente dirette allo studio

---

(1) A. Rollet, *Ueber einen Nervenplexus und Nervenendigungen in einer Sehne.* — Silzungsberichte d. k. Akademie d. Wissenschaften. Mai, 1876.

(2) C. Sachs, *Die Nerven der Sehnen.* — Arch. f. Anatomie Physiologie und Wissensch. Med. 1875 (pubblicato nel 1876).

dell'argomento medesimo; ma per vero non potrebbesi asserire che o per l'una o per l'altra di queste due pubblicazioni, e massime per quella del primo, le conoscenze nostre sui nervi dei tendini abbiano notevolmente avvantaggiato.

Infatti Rollet, oltre che limitava lo studio ad un solo tendine della rana, il tendine del muscolo sterno-radiale, nemmeno per quest'unico ricercato tendine, per l'inadatto metodo d'indagine adoperato (1) riesciva a determinare il vero modo di terminazione delle singole fibre nervose. Secondo la descrizione da lui data, il nervo al tendine destinato dà origine, complicatamente suddividendosi, ad un considerevole plesso di fibre midollate situato entro la sostanza propria del tendine. Le singole fibre che formano il plesso, dopo alquante suddivisioni, vanno in fine a metter capo ad altrettanti apparati terminali, a cui Rollet dà il nome di *zolle nervose* (Nerven-scollen), entro i quali suddividonsi, mantenendosi sempre midollate, per 2, 3 e talora anche 4 volte, terminando finalmente od assottigliate a punta o con un'espansione a limiti indeterminati.

Nella descrizione delle zolle, poi, Rollet fa in esse distinguere le ramificazioni delle fibre nervose ed una sostanza interposta. Relativamente alle prime è solo da aggiungere che esse non rimangono circoscritte alle zolle, ma ne oltrepassano i confini, dal che risulta che la sostanza di queste non è ben delimitata, ma passa gradatamente nel tessuto circostante. La sostanza interposta consta di nuclei, d'aspetto eguale a quello delle cellule nervose, e di una sostanza costituita da granuli disposti in linee ondulate ed intrecciate, tra cui esistono degli spazii chiari del pari decorrenti in linee ondulate ed intrecciate, sicchè ne risulta un insieme difficilissimo a descriversi. Queste così dette zolle avrebbero, secondo Rollet, molta somiglianza colle piastre nervose terminali dei muscoli striati, però non si può comprendere, se si tiene conto della sua descrizione e della figura che ne dà, in che siffatta somiglianza consista (2).

---

(1) Per mettere in evidenza i nervi tendinei che descrive, Rollet adoperò una attenuata soluzione (1 gr. su 1000 cc.) di acido cloridrico o nitrico, entro la quale immergeva il tendine lasciandovelo fino a che si fosse trasformato in una massa vitrea. – Dall'acido osmico e dal cloruro d'oro nessun maggiore dettaglio gli venne fatto rilevare oltre quanto ottenne col solo acido nitrico; il cloruro d'oro è anzi da lui dichiarato non raccomandabile per lo studio delle zolle, perchè ne altera i fini dettagli di struttura, nello stesso modo che esso altera, dice, le piastre terminali dei muscoli.

(2) Per apprezzare questo confronto di Rollet, è d'uopo ricordare che per le fibre nervose motrici egli non ammette la terminazione nelle placche circoscritte quali sono generalmente descritte nelle fibre muscolari, ma in proposito s'associa alle opinioni di Gerlach ed Arndt, opinioni che da nessun altro istologo poterono finora essere confermate.

Di maggior interesse, comechè fatte su più larga scala e con miglior metodo, sono le ricerche di SACHS. Però, nel mentre è molto vicina al vero la descrizione che egli dà delle terminazioni nervose nei tendini della rana e della lucertola, nulla affatto di nuovo essa aggiunge per ciò che riguarda i tendini degli uccelli e dei mammiferi. È anzi sorprendente come, pur avendo fatto argomento di speciali ricerche anche i tendini di queste altre classi di animali, egli non abbia punto rilevate le modalità affatto speciali e caratteristiche di terminazione che in essi hanno luogo. Per ciò che riguarda lo studio della distribuzione dei nervi tendinei, devo notare di più che i suoi risultati non potrebbero essere più manchevoli; p. es. relativamente agli uccelli, egli dice di non aver trovato traccia di nervi nei tendini delle gambe e solo d'averli trovati così scarsi in quelli delle ali, da doversi loro attribuire pochissima importanza, mentre tanto nelle gambe quanto nelle ali, nei muscoli pettorali ecc., assai numerosi sono i tendini provveduti di nervi e delle corrispondenti caratteristiche terminazioni.

Tre sono i modi di terminazione da SACHS verificati. Il più frequente avverrebbe mediante decomposizione delle fibre midollari in un *intricato cespuglio (wirres Gestrüpp)* di fibrille pallide, le quali s'intrecciano in ogni direzione a guisa di un micelio. Non potè verificare se vi fosse o no una rete; gli ultimi prolungamenti del *cespuglio* sembra che terminino semplicemente a punta.

Il secondo modo (rane), molto meno frequente, lo descrive come segue: « alcune fibre s'irradiano a pennello in una serie di fibrille pallide che decorrono per lunghi tratti senza ramificarsi, terminando verosimilmente a punta ».

Il terzo avverrebbe (nel solo tendine dello sterno-radiale) mediante formazione di una specie di clava entro la quale la fibra terminerebbe con un rigonfiamento vescicolare (1).

Tutti questi diversi modi di terminazione si riferiscono ai tendini della rana e della lucertola; quanto ai mammiferi, dei quali egli fece oggetto di ricerca i tendini caudali ed il centro tendineo del ratto e del gatto, dopo aver detto che in essi le terminazioni in certo modo tengono

(1) Le figure di questa clave terminale date da SACHS e la circostanza che, ad onta delle innumerevoli preparazioni, solo 1 o 2 volte riescì ad ottenere forme siffatte con qualche evidenza, e il fatto che nessun altro fra gli osservatori che di questo argomento si sono occupati potè ottenere egual reperto, fa supporre che qualche accidentalità di preparazione lo abbia tratto in errore.

il mezzo tra i primi due tipi, di più dettagliato egli soltanto nota, che avvenuto il passaggio delle fibre midollate nelle pallide, il dominio di ramificazione delle ultime s'estende considerevolmente nella direzione longitudinale del tendine, senza derivarne forme *simili a cespuglio* come negli anfibi e negli uccelli; che la terminazione accade nell'interno della specifica sostanza tendinea non interstizialmente, e che le ramificazioni di ciascuna fibra sono rigorosamente limitate al dominio di un unico tendine elementare (1).

Lo stato della questione, quale venne qui esposto, non può certo dirsi cambiato, massime per ciò che riguarda i mammiferi in generale, da un più recente lavoro su questo medesimo argomento pubblicato da Gemt (2), basti il dire come in esso si trovi che « le ricerche dei tendini dei mammiferi diedero risultati negativi ». Quanto alle terminazioni nervose nei tendini della rana e della lucertola, egli dice che dai singoli rami delle fibre midollate emanano delle fibre varicose di diversa finezza le quali frequentemente si ramificano, e qua e là s'anastomizzano, terminando libere e senza rigonfiamenti terminali entro il tessuto, così derivando dei pennelli terminali di forma ovale visibili, quali piccole macchie di color violetto, parte ad occhio nudo, parte col semplice aiuto d'una lente.

Pertanto, ad onta delle qui accennate ricerche, noi possiamo asserire che, mentre si hanno conoscenze abbastanza dettagliate sulle terminazioni nervose nei tendini de' vertebrati inferiori (rane, lucertole), riguardo ai mammiferi in genere e l'uomo in ispecie, il problema del rapporto dei nervi coi tendini, trovasi ancora al punto medesimo che venne segnato da Kölliker (3) colle parole seguenti, le uniche che all'argomento egli abbia dedicate:

« Riguardo ai tendini, recentemente nel pipistrello, anche ne' più piccoli, ho veduto, almeno superficialmente, abbastanza numerose diramazioni nervose. Nei più grandi, come nel tendine d'Achille, nel tendine del quadricipite, nel centro tendineo, nell'uomo i nervi insieme ai vasi penetrano anche nell'interno. Nelle fascie e guaine tendinee e capsule sinoviali del sistema muscolare fino ad ora non vennero dimostrati nervi ».

---

(1) Ho creduto di dover riferire con qualche dettaglio i risultati delle ricerche di Rollet e Sachs per ciò che in un'autorevole rivista tedesca (*Jahresbericht über die Leistungen und Fortschritte in der gesammten Medicin.* Berlin, 1879) Waldeyer, facendo il sunto della mia comunicazione preventiva, *evidentemente senza averne compreso il senso*, vorrebbe far credere che il tipo di terminazione che io ho descritto come nuovo e caratteristico, corrisponde a quello descritto già da quei due osservatori.

(2) T. Gemt, *Ein Beitrag zu der Lehre von den Nervenendigungen in Bindegewebe.* Dissert. Kiel, 1877.

(3) Kölliker, *Handbuch d. Gewebelehre.* 5ª edizione. Leipzig, 1867, p. 169.

Qual considerevole lacuna sia codesta nel dominio della fine anatomia può esser dimostrato semplicemente col ricordare gli studi, che intorno a taluni particolari fenomeni di sensibilità dei tendini dell'uomo vennero recentemente istituiti da clinici e da fisiologi, e le interpretazioni diverse che dagli stessi fenomeni, per difetto di base anatomica, vennero date (1).

Obbietto principale delle mie ricerche furono i tendini dell'uomo, però estesi le osservazioni anche a diversi altri mammiferi (coniglio, cane, gatto, topo), ad alcuni uccelli (passero, fringuello, rondine) ed anche a qualche anfibio (rana) e rettile (lucertola).

Noterò anzi come ai risultati ottenuti nell'uomo io sia stato guidato da quelli ottenuti da prima nella lucertola, di poi negli uccelli, quindi nel coniglio; e voglio altresì fin d'ora far rimarcare come le terminazioni nervose che io ho trovato nei tendini della lucertola abbiano per me un doppio valore, in quanto che, oltre al presentarmi uno dei modi più chiari e più caratteristici di terminazione dei nervi, m'offersero un evidente riscontro del modo con cui le fibre nervose si comportano entro gli organi terminali da me trovati nei mammiferi e negli uccelli.

Seguendo l'ordine delle ricerche, credo utile incominciare la mia esposizione da quelle eseguite sui tendini delle lucertole e delle rane.

II.

Ricerche sulla Lucertola. — I tendini delle lucertole rappresentano il terreno più opportuno e più facile per la ricerca delle terminazioni nervose in tali organi, e in ciò essi presentano corrispondenza coi muscoli volontarii dello stesso animale, i quali, come si sa, del pari offrono il materiale più facile per la chiara dimostrazione degli apparati terminali dei nervi di moto.

I tendini che io trovai provveduti di nervi sono: 1° due o tre piccoli tendinetti appartenenti ai muscoli della doccia vertebrale; 2° uno che per situazione corrisponde allo sterno-radiale della rana; 3° due tendinetti caudali; 4° altro appartenente ai flessori delle estremità anteriori;

(1) Veggasi cap. V di questo lavoro.

5° uno appartenente agli estensori; 6° tendine del semitendinoso; 7° tendine d'Achille.

Il tendine d'Achille, e specialmente la sua superficie inferiore (superficie palmare della zampa posteriore), sia per la quantità delle fibre nervose di cui è fornito, sia per la facilità con cui può essere tolto dall'animale, è quello che meglio si presta per siffatto studio.

Sul modo con cui le fibre nervose arrivano al tendine, non esiste legge determinata: il caso più frequente è quello che esse escono dal mezzo dei fasci muscolari; alcune volte invece hanno opposta provenienza, portansi cioè alla zona della terminale loro espansione, derivando dal punto dell'inserzione ossea del tendine. Sapendo che negli arti tanto i nervi di senso, quanto quelli di moto, derivano da tronchi comuni di natura mista, parvemi superfluo il dilungarmi in ricerche per voler precisare da qual parte ne' singoli casi derivino i tronchi nervosi terminali. Qualunque sia la derivazione di questi ultimi, è regola quasi assoluta che le terminazioni si verificano in prossimità della zona di passaggio delle fibre muscolari nel tessuto tendineo; anzi frequentemente accade che gli apparati terminali trovansi negli interstizii esistenti tra i punti d'inserzione delle fibre nei tendini, venendo così nascoste dalle fibre muscolari in guisa che si riesce a renderle palesi solo allorchè s'allontanino artificialmente queste ultime.

Sia che derivino dall'interno delle masse muscolari, sia che provengano dall'opposta direzione, le fibre nervose destinate ai tendini, abbastanza facilmente distinguonsi da quelle destinate ai muscoli pel modo alquanto diverso di decorrere e di ramificarsi. Sono per verità differenze che meglio si possono comprendere colla pratica, che descrivere; tuttavia si può dire che, per es., le prime di solito veggonsi decorrere per lunghi tratti in linea retta, che le ramificazioni si succedono a notevoli intervalli, distaccandosi prevalentemente ad angolo retto, e che le diramazioni secondarie e terziarie decorrono e si ramificano conservando identico tipo, in guisa che giammai ne risultano quelle spiccate branche arboriformi che, e pel più frequente succedersi delle suddivisioni, che hanno luogo piuttosto ad angolo acuto, e pel più rapido arrivo ai corrispondenti organi terminali (piastre), quasi sono caratteristiche dei nervi muscolari.

Arrivate le fibre nervose tendinee o all'estremo limite della zona muscolare, o nella zona di confine tra il tendine ed il muscolo, inviano lateralmente, con una certa regolarità di distanza, dei rami i quali talora senza ulteriori suddivisioni, dopo breve decorso, perduta la genuina midollare si decompongono rapidamente in tenuissime fibrille pallide, le quali intrecciandosi od anastomizzandosi dànno origine alle circoscritte reticelle terminali, che descriverò con qualche maggior dettaglio più sotto; altre volte invece quelle branche nervose secondarie di nuovo si suddividono, dando luogo a fibre di terzo ed anche di quarto ordine, ciascuna delle quali mette poi capo ad un corrispondente apparato terminale, e, come accade per le fibre nervose motorie rispetto alle placche, è soltanto in prossimità degli stessi apparati terminali che esse perdono la guaina midollare (ved. Fig. 1ª).

La fisonomia degli apparati terminali nominati (Fig. 2ª e 3ª), a cui, come ho detto, mettono capo le singole fibre midollari di 2°, 3° e 4° ordine, benchè tipica, difficilmente può essere con esattezza descritta; basterà tuttavia a farne comprendere le particolarità essenziali il dire che, appena perduta la guaina midollare, i nudi *cilinder axis* si dividono da prima in due, tre o quattro fibrille che tosto dànno origine, in direzioni svariate, a numerose altre fibrille, le quali, alla lor volta, nuovamente decompongonsi in fili di estrema finezza, che, anastomizzandosi ed intrecciandosi coi vicini, riescono a formare una reticella a maglie irregolari, a confini ben delimitati, presentante qua e là degli ingrossamenti o punti nodali, ed avente non soltanto un'estensione in superficie, ma anche in profondità, entro la sostanza tendinea, comprendendo nelle sue maglie alcuni fascetti della stessa sostanza.

L'estensione in profondità non può essere con precisione determinata, ma certamente non è considerevole; l'estensione nel senso della superficie è all'incirca dai 60 ai 100 μ in lunghezza e dai 40 ai 50 μ in larghezza. Qua e là accollati alle fibrille, e specialmente a quelle risultanti dalle prime suddivisioni del *cilinder axis*, veggonsi dei nuclei tondeggianti od ovali a contorni spiccati, granulosi, di fisonomia un po' diversa da quella dei nuclei disseminati tra i fasci del circostante tessuto tendineo.

Ognuno degli apparati terminali essendo il risultato della suddivisione delle singole fibre nervose di 2°, 3° e 4° ordine sopradescritte, ne risulta che essi sogliono essere disposti in gruppi distribuiti ad intervalli lungo l'andamento dei fasci di fibre o delle fibre isolate, non di rado, anzi, le espansioni reticolari di un gruppo sono tanto vicine da confondersi le une colle altre; questo però è fatto raro.

Nel ripetere le preparazioni dei nervi tendinei delle lucertole mi è invece, con una certa frequenza, avvenuto di mettere in evidenza, insieme alle tipiche terminazioni qui descritte, un altro sistema di fibre nervose sprovvedute di mielina (fibre nervose pallide), le quali, e per la presenza di rigonfiamenti nucleati e pel modo di decorrere e di ramificarsi, presentano i caratteri dei nervi che col metodo del cloruro d'oro tanto facilmente si ponno dimostrare nelle sierose in genere, specialmente peritoneo, lungo l'andamento dei vasi. — Questo secondo sistema di fibre nervose nell'insieme dà luogo ad una rete a grandi maglie, estesa a considerevoli tratti del tendine ed avente limiti indeterminati; sembra anzi non sia che una continuazione di quella che, con caratteri identici, esiste anche tra i fasci muscolari: infine, essa verosimilmente appartiene alla categoria dei nervi vasali, sebbene non sempre si possa dimostrare la loro relazione coi vasi.

Sul conto di queste fibrille metto in nota un altro solo dettaglio, ed è che, siccome la rete da esse formata, giusta quanto ho detto, s'estende a grandi tratti della superficie dei tendini, così, talora accade, che alcuni dei relativi filamenti veggonsi passare dall'uno all'altro apparato terminale delle fibre prima descritte, dando luogo ad una connessione che però sembra sia solo apparente (ved. Fig. 2ª).

Volendo ora fare un confronto tra il tipo di terminazione dei nervi tendinei delle lucertole e quello dei mammiferi ed uccelli, risulta che, mentre da una parte, se si considera la terminazione delle singole fibre, havvi una corrispondenza quasi perfetta, giacchè tanto in quelle che in queste vi ha una reticella di eguale aspetto, d'altra parte vi ha una notevole differenza, consistente in ciò che nelle lucertole i gruppi di reticelle terminali sono liberi alla superficie dei tendini, mentre nei mammiferi ed uccelli, per effetto di ispessimento del connettivo tendineo e della probabile aggiunta di un rivestimento endoteliare, si ha la formazione di individuali e tipici corpi, con ben delimitate pareti, entro i quali sono disposte più o meno numerose reticelle terminali.

Ricerche sulle rane. — Non entro nei dettagli delle mie ricerche fatte anche su questo animale, perchè quanto ai caratteri essenziali, le terminazioni nervose dei loro tendini corrispondono a quelle delle lucertole, e se esistono delle differenze, queste si riferiscono a modalità secondarie. La corrispondenza consiste in ciò che anche nei tendini della rana gli apparati terminali sono rappresentati da reticelle, e dall'essere tali reticelle distribuite entro la sostanza del tendine, massime negli strati superficiali, *libere da involucro;* le differenze, non tenendo conto della maggiore estensione delle reticelle, consistono semplicemente in ciò, che nei tendini della rana, le stesse reticelle sono molto più fine e delicate, per cui riesce estremamente difficile il vederle nella loro integrità. Questa difficoltà dipende soprattutto dal fatto che, sia che s'adoperi il metodo del clorruro d'oro, sia che si impieghino altri più semplici metodi, per rendere spiccati i nervi, è sempre necessario far uso di reattivi, i quali, mentre valgono a rischiarare il tessuto tendineo, agiscono rigonfiandolo; è appunto per effetto del rigonfiamento che le tenuissime fibrille formanti la rete, sogliono disorganizzarsi, spesso anzi in tal grado da non rimanere dell'intero apparato terminale che un cumulo di sostanza granulo-fibrillare.

I tendini, che nella rana io trovai provveduti di nervi, sono quelli del muscolo sterno-radiale e quello del semitendinoso. Il primo, che, seguendo le indicazioni date da Rollet, può essere colla massima facilità levato dall'animale vivente, è senza contestazione il più opportuno per questo studio.

III.

Ricerche sull'uomo e su altri mammiferi. — Come ciò che v'ha di più interessante riguardo alla distribuzione dei nervi, già in parte risulta da quanto dovrò esporre intorno alle terminazioni, così parmi conveniente far precedere la descrizione di queste.

Due affatto diversi modi di terminazione delle fibre nervose vennero da me trovati nei tendini:

a) L'uno è rappresentato da particolari corpi assolutamente caratteristici per aspetto, forma, struttura e modo di connessione colle fibre nervose; corpi che trovano un riscontro in nessuno dei conosciuti apparati nervosi terminali dell'organismo nostro; la cui significazione pertanto molto probabilmente trovasi in armonia colla funzione che tendini e muscoli insieme devono compiere. A questi, a motivo dei rapporti che essi hanno coi muscoli, da una parte, e coi tendini dall'altra, io credo debbasi applicare il nome di *Organi nervosi terminali muscolo-tendinei.*

b) L'altro tipo è rappresentato da corpi che parimente hanno una propria spiccata fisonomia, ma che, insieme, almeno sotto alcuni rapporti, trovano un riscontro in altri conosciuti apparati nervosi terminali dell'organismo nostro, coi quali, in relazione coll'anatomica corrispondenza, probabilmente hanno anche analogia di funzione. Noto fin d'ora che alludo alle così dette clave terminali della congiuntiva, del glande, ecc.

Di quanto questi due tipi di apparati terminali sono fra loro diversi per forma, struttura e rapporti colle fibre nervose, di altrettanto essi l'uno dall'altro diversificano per la sede; i primi sempre si trovano negli strati profondi delle origini dei tendini, nel punto di passaggio del muscolo nel tendine, quindi sempre in relazione coi fasci muscolari; i secondi, invece, di regola si trovano negli strati superficiali dei tendini o delle espansioni tendinee.

Organi muscolo-tendinei (vegggansi Figure 4ª, 5ª, 6ª, 7ª, 8ª e 9ª con relativa spiegazione). — I principali loro caratteri anatomici si possono come segue brevemente riassumere.

Hanno generalmente forma fusata, e delle loro estremità l'una è sempre in rapporto coi fasci di fibre muscolari, del cui sarcolemma il loro stroma fibrillare appare in diretta continuazione; l'altra estremità, talora semplice, più frequentemente divisa in due, segue l'andamento dei fasci tendinei, andando a notevole distanza, gradatamente, a confondersi con essi.

Il loro diametro oscilla entro limiti piuttosto larghi, da 70 - 80 μ in larghezza e 300 - 400 in lunghezza, a 100 - 120 μ in larghezza e oltre 800 in lunghezza; questi ultimi, massime se colorati coll'oro, ponno con tutta facilità essere distinti ed isolati coll'aiuto di una semplice lente.

Il loro contorno suol essere abbastanza spiccato, anzi talora si presenta sotto forma di un sottile orlo splendente, lungo il quale si scorgono dei nuclei; però io non credo che tale orlo splendente indichi l'esistenza di una membrana involgente, piuttosto ritengo esso sia effetto d'ispessimento dei superficialissimi strati connettivi. Alcune ricerche istituite col metodo del nitrato d'argento mi fanno inclinare ad ammettere che sulla loro superficie esista un rivestimento endoteliare, siccome però i risultati della reazione non ebbero tutta la desiderabile chiarezza, non credo di poter dare questo fatto come assolutamente certo.

Quanto alla struttura, se si fa astrazione delle fibre nervose midollate, che in diverso numero dall'esterno vi penetrano, direbbesi che essi semplicemente constano di tessuto connettivo fibrillare con nuclei in esso disseminati; però esaminati dopo leggiero rischiaramento con qualche acido, negli strati più prossimi alla periferia, ed anche immediatamente al di sotto dello splendente orlo, qua e là scorgonsi numerosi, piccoli, allungati accumuli di sostanza apparentemente granulosa. Dirò poi come la granulosità non sia che un' erronea apparenza.

Caratteristico è il modo con cui i corpi che sto descrivendo si trovano in rapporto colle fibre nervose.

Il caso più frequente è che una sola sia la fibra destinata a ciascuno di essi, però accade abbastanza di frequente che diano accesso a 2, a 3 e ben anco a 4 fibre midollate. L'entrata può verificarsi tanto da una delle estremità, costantemente quella che va a confondersi coi fasci tendinei, quanto da lato e precisamente da un punto della porzione più grossa della forma fusata.

Qualunque sia il numero delle fibre entranti, nel portarsi verso la parte centrale del corpo, esse continuano a suddividersi dicotomicamente, e ciascuna fibra di secondo o terzo ordine, ancora conservando i caratteri della fibra midollata, si dirige, divergendo l'una dall'altra, alla periferia, nella direzione degli accennati piccoli accumuli di sostanza granulosa. Tutto ciò può essere rilevato coi più semplici mezzi d'osservazione, per esempio, col rischiaramento ottenuto mediante attenuate soluzioni di acido cloridrico od acetico od arsenicico. L'ulteriore o finale modo di comportarsi delle singole fibre può solo essere scoperto colla reazione del cloruro d'oro.

Ecco quanto coll'aiuto di quest'altro metodo ci è dato di rilevare.

Trasformatesi le fibre midollate in fibre pallide, queste, dando luogo ad alcune fra loro divergenti suddivisioni dicotomiche, continuano il loro tragitto verso la periferia dei corpi, dove giunte, mediante più fine e frequenti suddivisioni a brevissimi intervalli, riescono a costituire numerosi, circoscritti ed allungati intrecci reticolari, disposti parallelamente alla superficie, e situati al posto dei suaccennati periferici accumuli di sostanza apparentemente granulare. Siffatti circoscritti intrecci reticolari a piccolo ingrandimento, hanno apparenza di altrettanti fiocchetti.

A questo punto, nel mentre nuovamente richiamo l'attenzione sul fatto, già notato, che le terminazioni ora studiate offrono la più grande analogia con quelle che, secondo la descrizione da me data, sono distribuite a gruppi e libere da involucro lungo i tronchi nervosi dei tendini della lucertola, voglio in pari tempo far rilevare ancora, come, tanto le une quanto le altre, però in modo più evidente nei tendini delle lucertole, perchè ivi le circoscritte espansioni reticolari si possono meglio studiare di superficie, per l'aspetto delle ultime fibrille, e pel particolare modo di ramificarsi, e pei nuclei che alle fibrille stanno accollati, offrono una fisonomia d'assieme che richiama quella delle terminazioni nervose nei muscoli (placche). Dissi fisonomia d'assieme, giacchè ad un minuto esame quali caratteri differenziali per le terminazioni nei tendini troviamo: più complicate e più fine suddivisioni delle fibrille, la forma veramente reticolata, l'internarsi dell'intreccio reticolare nello spessore dei fascetti tendinei, e finalmente, almeno in generale, la maggior estensione che presentano gli apparenti fiocchetti terminali dei tendini in confronto delle placche terminali dei muscoli.

Riguardo alla genesi di questa categoria di corpi terminali, tenuto conto del trovarsi essi in diretta continuazione, da una parte col sarcolemma delle fibre muscolari, dall'altra coi fasci tendinei, coi quali il loro stroma va a confondersi, ed altresì tenuto conto della loro struttura fibrillare, si è portati ad ammettere che essi semplicemente risultino da un circoscritto ispessimento del connettivo tendineo attorno ed in corrispondenza di un gruppo di terminazioni nervose.

Quanto alla distribuzione degli apparati terminali ora descritti, le mie osservazioni dimostrano che essi esistono, se non in tutti, nella grande maggioranza dei muscoli del nostro organismo. I muscoli, nei quali la presenza degli apparati muscolo-tendinei è più facilmente dimostrabile, sono: grande e piccolo palmare, omero-radiale, cubitale, pronatore rotondo, flessore profondo e superficiale, per le estremità superiori; quadricipite, semitendinoso, gastronemi, soleo, plantare gracile, tibiale posteriore, flessore comune delle dita, lungo peroneo laterale, per le estremità inferiori. — Fra i muscoli, nei quali le mie ricerche intorno alla distribuzione degli organi muscolo-tendinei ebbero invece risultato negativo, menzionerò i motori dell'occhio, nessuno eccettuato.

Il fatto, che, relativamente alla topografica distribuzione di questi corpi, parmi meriti d'essere in modo più speciale rimarcato, è la loro esistenza tanto nei tendini superficiali, quanto nei profondi, e riguardo ai singoli muscoli, non meno nelle radici o lamine tendinee superficiali, che nelle interne.

Nel *coniglio*, che è l'animale nel quale queste ricerche riescono più facili, trovo sempre i corpi in numero più considerevole nei tendini delle estremità posteriori, e più specialmente nella parte alta della lamina tendinea profonda de' gastronemi, e nella estesa espansione tendinea appartenente ai muscoli della doccia vertebrale (ved. Fig. 4ª).

Nel *topo*, nel *cane* e nel *gatto*, fatta eccezione di una maggiore difficoltà a trovare i corpi, ho fatto identiche osservazioni.

Negli *uccelli*, invece, gli organi nervosi terminali muscolo-tendinei, vennero da me trovati in maggior numero nelle ali ed in una lamina tendinea profonda del grande muscolo pettorale.

Secondo tipo di organi nervosi terminali - (Gomitoli - clave - diverse forme di corpi Paciniani) (ved. Fig. 10ª, 11ª, 12ª, 13ª, 14ª, 15ª e 16ª). — Noto innanzi tutto che i fatti che passo ad esporre in questo paragrafo si riferiscono ai soli tendini dell'uomo. — Come già ho notato, le forme dei corpi, che ascrivo a questo secondo tipo, di regola si trovano alla superficie dei tendini e delle lamine tendinee e preferibilmente verso le loro radici in prossimità delle inserzioni od anche in mezzo ai fasci di fibre muscolari; abbastanza frequentemente però se ne riscontrano anche proprio nello spessore del tessuto tendineo e, secondo le più recenti mie osservazioni, alcuni altresì eccezionalmente esistono nell'interna superficie del tendine, superficie completamente occupata dalle inserzioni delle fibre muscolari, e quindi in mezzo a queste ultime.

I tendini, nei quali la ricerca m'è riuscita più facile, sono i seguenti: grande e piccolo palmare, flessore comune superficiale e profondo delle dita della mano, cubitale anteriore, adduttore del pollice, plantare gracile, gemelli, tibiale posteriore.

Hanno tali corpi generalmente forma globosa od ovale; qualche volta ho riscontrato anche forme semilunari. Il loro volume oscilla entro confini piuttosto larghi; parecchi dei più piccoli vennero da me trovati del diametro di 40 - 50 μ in larghezza e 70 - 80 di lunghezza, alcuni fra i più grandi misurarono 100 - 130 μ in larghezza e 300 - 350 in lunghezza; prevalgono le forme minori od intermedie.

In essi devonsi considerare tre parti, cioè: l'involucro, il contenuto e la fibra o le fibre nervose entranti.

L'involucro non è punto semplice, come, secondo la descrizione di Krause e di Axel-Key, si riscontra nelle clave terminali della congiuntiva; ma di un notevole spessore e composto di una serie di finissimi strati concentricamente disposti, con nuclei ovali interposti.

Il contenuto, nei miei preparati ottenuti coll'acido osmico, appare sotto forma di una massa gialliccia costituita da una sostanza fondamentale omogenea e da disseminati granuli di diversa grandezza, molto rifrangenti. Se questo contenuto sia soltanto in apparenza uniformemente granuloso e abbia invece, come riguardō agli *Endkolben* della congiuntiva è detto da Axel Key, è argomento intorno al quale non posso pronunciarmi con precisione; in proposito noterò soltanto che entro la massa d'apparenza granulosa soglionsi riscontrare alcuni nuclei, tondeggianti od ovali, generalmente provveduti di spiccato nucleolo.

Nella gran maggioranza dei casi una sola è la fibra che, attraversando il rivestimento, va a mettersi in rapporto col contenuto granuloso, ma non si ponno dire eccezionali i corpi che dànno accesso a due, ed anche a tre fibre; riguardo a questi ultimi devesi però notare, che molte volte le due o tre fibre entranti risultano da biforcazione a qualche distanza del corpo a cui sono destinate.

Nel modo di comportarsi delle fibre nervose rispetto ai corpi, e, corrispondentemente, nell'aspetto dei corpi medesimi, notansi numerose differenze, delle quali sarebbe troppo lungo il dare una descrizione dettagliata, epperò io mi limiterò a menzionarne qualcuna.

Il caso più semplice ed anche più frequente, che specialmente si verifica riguardo ai più piccoli corpi, è che la fibra entrante, perduta la guaina midollare, termina all'estremità opposta dei corpi formando un piccolo rigonfiamento quale suol essere descritto per le fibre dei corpi di Pacini; in altri casi, appena attraversato l'involucro, la fibra termina in modo indistinto entro la sostanza granulosa. Qualche altra volta ho potuto con chiarezza verificare la formazione di un'ansa; la fibra seguendo gli strati periferici della sostanza granulosa, compie entro questa un completo giro, ed esce dal corpo accollandosi alla fibra afferente per prendere poi altra via, lungo la quale a me fu dato seguirla solo per breve tratto.

Caso più frequente del precedente è quello di vedere la fibra nervosa dare luogo entro la sostanza granulosa ad una serie, talora assai complicata, di anse in direzione diversa, e di diversa forma, in guisa di risultarne un vero gomitolo (ved. Figure 12ª e 13ª) che molto da vicino ricorda quelli della congiuntiva, quali sono disegnati da Krause e da Axel Key e da Ciaccio.

Finalmente menzionerò anche un raro reperto, riguardo al quale non saprei dire se una fibra nervosa soltanto attraversasse i corpi globosi, per portarsi poi ad altra destinazione, oppure se si trattasse di due fibre entranti in opposta direzione; nei rari casi a cui ora accenno ambidue i poli di un corpo di forma ovale davano passaggio ad una fibra, senza che però vi fosse continuità fra esse.

Circa la disposizione di questi corpi, mi limiterò a notare, come di frequente parecchi di essi veggansi situati a breve distanza l'uno dall'altro, od in gruppi. Un vicino fascetto nervoso, suddividendosi, provvede ciascun corpo di una fibrilla.

Dopo quanto venne finora da me esposto intorno alla distribuzione delle due forme di apparati terminali, ben poco di interessante resta da aggiungere intorno alla distribuzione dei tronchi nervosi nei tendini. Il già detto, basta a dimostrare, come contrariamente a quanto farebbero supporre le da prima accennate osservazioni di Sachs, di Rollet, ed anche di Kölliker, la presenza di fibre nervose nei tendini, sia, almeno nei vertebrati superiori, piuttosto legge che eccezione. La mancata conoscenza di questo fatto soprattutto dipende dal non essere state rilevate le località in cui i nervi prevalentemente si distribuiscono. Nel decorso di lunghi tendini, riesce difatti piuttosto difficilmente di riscontrare dei rami nervosi, sebbene tal reperto, nell'uomo ed altri mammiferi, ad ogni modo non si possa dire eccezionale; facendo invece le ricerche verso la radice di tendini, nelle espansioni tendinee ivi esistenti, negli strati superficiali o nei profondi, massime lungo i margini verso l'inserzione delle fibre muscolari, assai facilmente riesce di trovare dei fasci di fibre nervose o delle isolate fibre, seguendo le quali si è poi guidati alla scoperta degli organi terminali.

Relativamente alla fisonomia dei plessi nervosi dei tendini, noterò come sia di carattere speciale delle singole fibre il decorrere per lunghi tratti in linea retta, il ramificarsi a piuttosto lunghi intervalli e prevalentemente ad angolo retto, il frequente passaggio da uno ad altro fascetto, dando così origine ad una irregolare rete a grandi maglie.

Da ultimo, presenterebbesi anche il problema, se, massime lungo l'andamento dei tendini, esistano altri modi di terminazione oltre quelli da me descritti. A tale problema, per ciò che riguarda i mammiferi e gli uccelli, io inclino a dare risposta negativa, però avuto riguardo alle caratteristiche terminazioni libere da involucro, esistenti lungo i sottili tendini di parecchi muscoli della lucertola e della rana, non credo di poter escludere in modo assoluto che analoghe terminazioni esistano anche ai tendini dell'uomo e di altri mammiferi.

Per conclusione, volendo dire una parola anche intorno alla probabile significazione dei due diversi tipi di organi nervosi terminali di cui ho fatta la descrizione, riguardo al primo, quello affatto caratteristico pei tendini, se prendo in considerazione e la distribuzione dei corpi, che indifferentemente ha luogo tanto nelle radici tendinee superficiali, quanto nelle profonde, e la speciale loro situazione nella zona di passaggio del muscolo nel tendine, anzi la loro diretta continuazione col sarcolemma delle fibre muscolari primitive, se finalmente anche prendo in considerazione la forma speciale, tipica, di terminazione delle singole fibrille, a me sembra di potere, con sufficiente fondamento, ammettere che i medesimi organi abbiano una funzione armonizzante con quella dei muscoli, e precisamente che essi possono essere organi di una speciale sensibilità muscolare, od i misuratori della tensione dei muscoli (organi del senso muscolare).

Quanto al secondo tipo di apparati nervosi terminali, la loro situazione più superficiale e la stessa loro analogia con altri organi terminali di nota funzione, mi sembrano abbastanza valevoli argomenti per far ammettere che essi sieno corpi tattili.

IV.

Voglio infine richiamare l'attenzione sopra un'altra particolarità singolare riguardante gli involucri delle fibre nervose dei tendini dell'uomo e che di regola appare più spiccata negli adulti (Fig. 17ª).

Seguendo l'andamento delle fibre nervose che decorrono od immediatamente sulla superficie dei tendini o nello spessore delle lamelle connettive da cui i tendini sogliono essere rivestiti, facilissimamente accade di poter osservare, che, ogni qual volta esse devono passare sopra o rasente ad un vaso arterioso, con regola costante l'esterna guaina, da cui sono circondate (guaina di Henle), presenta un considerevole circoscritto ispessimento avente il massimo spessore in corrispondenza del punto dell'incrociamento, e che va rapidamente decrescendo nelle due opposte direzioni, per ritornare a breve distanza entro i limiti ordinari. Siffatta disposizione fa sì che, considerati isolatamente, tali ispessimenti hanno l'aspetto di corpi fusati, risultanti da lamelle connettive regolarmente sovrapposte a strati disseminati di nuclei regolarmente disposti, il tutto con una certa analogia di quanto s' osserva nei corpi di Pacini. La figura 17ª offre un'esatta idea di tale particolarità.

Gli ingrossamenti sogliono essere più pronunciati allorchè le fibre nervose s'incontrano colle più grosse arterie decorrenti sulla superficie dei tendini, ma esistono in forma di piccole varicosità anche in corrispondenza agli incrociamenti colle arterie più fine.

Parmi evidente, che a questi rigonfiamenti degli involucri delle fibre nervose in corrispondenza dei punti in cui esse passano rasente alle arterie, non si possa attribuire altra significazione che quella di mezzi di difesa o di riparo dei fili conduttori delle eccitazioni di senso, contro l'urto arterioso a cui costantemente devono sottostare. Però, nel mentre hanno significato di mezzi di riparo, alla loro volta verosimilmente si ponno considerare quali conseguenze dell' urto; sarebbero delle circoscritte iperplasie della guaina di Henle prodotte dall'irritazione costante a cui essa guaina è sottoposta per effetto dell'urto arterioso.

V.

Nell'accennare, al principio di questo lavoro, come il difetto di esatte conoscenze anatomiche sull'innervazione dei tendini costituisca una notevole lacuna, non meno per la fisiologia, che per la patologia, io mi riferiva ad alcune note manifestazioni nervose riguardanti i tendini, le quali dopo che da Erb e Westphal vennero fatte argomento di speciale considerazione, successivamente da altri patologi, e da alcuni fisiologi furono più da vicino studiate, ed in varia guisa interpretate e spiegate.

I fenomeni nervosi, a cui alludo, sono semplicemente quelle rapide contrazioni o tremiti, che si verificano nei muscoli, allorchè si eserciti un' azione meccanica istantanea (p. es. leggera percussione) sui tendini che ai muscoli corrispondono. È questo un fenomeno che può essere con facilità verificato in condizioni fisiologiche, ma che, come appunto Erb e Westphal fecero rilevare, in modo più vivo e più squisito si manifesta negli individui in causa di talune malattie spinali e cerebrali (degenerazione grigia della parte alta dei cordoni posteriori e laterali, compressione del midollo spinale, tumori, emorragie cerebrali), sono affetti di paraplegia o paraparesi. È noto poi come il fenomeno in questione possa essere nel modo più facile rilevato nel muscolo quadricipite, allorchè si percuota la sua espansione tendinea formante il così detto legamento patellare, e nei muscoli gastronemi per irritazione esercitata sul tendine d'Achille.

Qual è la spiegazione che di tal fenomeno può esser data?

Esclusa l'azione riflessa per irritazione dei nervi cutanei, giacchè il fenomeno non si verifica se si pizzica istantaneamente la cute che copre il legamento patellare od il tendine d'Achille, come pure se si percuote la medesima quando sia sollevata ai due lati, mentre invece la irritazione del tendine è seguita dalla contrazione del muscolo, allorchè la cute è anestetizzata coll'apparecchio di Richardson;

Esclusa l'azione riflessa per intromissione dei nervi articolari, perchè la contrazione non si verifica se la percussione viene eseguita verso l'articolazione del piede o del ginocchio; parrebbe che il fenomeno non possa essere altrimenti spiegato, che ammettendo un'azione riflessa derivante dagli stessi tendini irritati.

Tale è difatti la spiegazione adottata da Erb (1), il quale esplicitamente dichiara che, non potendosi ammettere l'azione riflessa per via della cute, la pronta contrazione dei muscoli quadricipite della gamba, tricipite brachiale e gastronemi, per effetto di una lieve percussione fatta sui rispettivi tendini, può soltanto derivare dai tendini stessi o dalle immediate loro continuazioni.

Siffatta spiegazione non è accettata da Westphal (2), il quale, in un lavoro pubblicato contemporaneamente a quello di Erb, dopo aver esclusa l'azione riflessa per la via dei nervi cutanei ed articolari, ed aver ricordato, che « *la fisiologia non parla di azioni riflesse direttamente derivanti dai tendini* », osserva essere difficilmente ammissibile l'azione riflessa per intromissione dei centri, anche per la ragione che non s'osservano mai contrazioni consensuali nei muscoli omonimi degli arti opposti e negli antagonisti. Westphal conclude coll'ammettere, che il fenomeno della contrazione dipenda da diretta meccanica irritazione dei muscoli, irritazione esercitata dalla improvvisa distensione o scuotimento del tendine percosso.

Non è in perfetto accordo nè coll'una nè coll'altra delle spiegazioni qui accennate, quella che del fenomeno in questione venne data da

(1) W. Erb, *Ueber Sehnenreflexe bei Gesunden und Rückenmarkskranken.* Archiv. f. Psychiatrie, vol. V, pag. 792, 1875.

(2) C. Westphal, *Ueber einige Bewegungs- Erscheinungen en gelämten Gliedern.* Archiv. f. Psychiatrie, vol. V, p. 809, 1875.

Joffroy (1). Nel far osservare come i movimenti descritti da Erb e Westphal fossero da lungo tempo noti ai clinici francesi (Charcot, Vulpian, Brown-Séquard), egli li interpretava come un prodotto di azione riflessa derivante, oltrechè da tensione muscolare, anche dall'irritazione dei nervi della cute.

A questo punto trovandosi i termini della quistione, F. Schultze e P. Furbringer (2), onde venire in chiaro sulla natura del fenomeno, istituivano una serie di ricerche sui conigli in parte sani, in parte operati col taglio o del crurale, o dell'ischiatico, o del midollo spinale, a vario livello, ed arrivarono alle conclusioni: 1° Che nei fenomeni nervosi verificati nei tendini, non può trattarsi di una meccanica contrazione dei muscoli direttamente prodotta dal tendine; 2° Che gli stessi fenomeni piuttosto risultano da un meccanismo di riflessione dipendente dall'irritazione meccanica del tendine, e da questo originante, di cui gli archi di riflessione, per ciò che riguarda le estremità posteriori sono situati nella parte inferiore del midollo spinale; 3° Che le azioni riflesse della cute, nel senso di Joffroy, non sono in alcun modo ammissibili.

Successivamente Lewinski (3), coll'appoggio di osservazioni fatte in due casi clinici, contro Westphal sostenne che la contrazione muscolare, che segue all'irritazione dei tendini è da ritenersi un vero fenomeno riflesso, e ciò anche perchè, contrariamente all'osservazione dello stesso Westphal, egli avrebbe verificato che, dato un aumento dell'attività riflessoria del midollo spinale, si hanno contrazioni non soltanto dei muscoli i cui tendini sono irritati, ma anche degli antagonisti. Ammette poi la possibilità che la contrazione muscolare prodotta dalla distensione dei tendini possa essere eventualmente sostenuta da irritazione dei nervi sensibili della cute. L'aumento poi dei fenomeni riflessi dei tendini potrebbe quindi essere prodotto: 1° da aumentata tensione dei tendini (contratture), 2° da aumento delle irritabilità del centro motorio riflessore, 3° dalla combinazione di queste due cause.

Finalmente, fra i recenti studi sui fenomeni nervosi dei tendini, vogliono essere ricordati quelli di Burckhardt (4) il quale, mediante delicate

(1) A. Joffroy, *De la trépidation épileptoïde du membre inférieur dans certaines maladies nerveuses.* Gazette médicale de Paris, n. 33 e 35, 1875.

(2) F. Schultze und P. Fürbringer, *Experimentelles über die Sehnenreflexe. Centralblatt f. Med. Wissensch.*, n. 54, 1875.

(3) Lewinski, *Ueber sog. Sehnenreflexe und Spinalepilepsie.* Arch. f. Psych., vol. VII, pag. 327, 1877.

(4) G. Burckhardt, *Ueber Sehnenreflexe.* Festschrift, dem Andenken an A. v. Haller dargebracht. Bern, 1877.

sperienze col metodo della determinazione del tempo (1), otteneva interessanti risultati che si possono riassumere come segue: 1° Nell'uomo, dal momento dell'irritazione del tendine fino alla contrazione del muscolo, scorre la terza o la quarta parte del tempo necessario per le azioni riflesse della cute. 2° Alla manifestazione del fenomeno riflesso in questione non si impiega la metà del tempo necessario perchè la riflessione abbia luogo per mezzo della sostanza grigia centrale, è quindi necessario ammettere che essa abbia luogo per altra via. 3° Non è ammissibile che le azioni riflesse dei tendini risultino da diretta irritazione dei muscoli, perchè se così fosse, le parti di muscolo più vicine alla patella dovrebbero contrarsi prima di quelle situate più in alto con una differenza di 20 - 30 millesimi di secondo, mentre invece vi ha la sola differenza di 2 - 3 millesimi di secondo.

Tenuto conto delle circostanze qui accennate e del fatto che le riflessioni tendinee persistono senza alterazioni del tempo di effettuazione anche dopo il taglio delle radici nel canale vertebrale e dopo distruzione del midollo lombare, mentre, date queste condizioni, le riflessioni cutanee cessano tosto e per sempre, e che invece col taglio del nervo crurale cessano tanto le riflessioni tendinee, quanto le cutanee e che i fenomeni riflessi tendinei incrociati abbisognano d'egual tempo dei cutanei, Burckardt conclude: « che il fenomeno in questione è assolutamente di natura riflessa, la cui chiusura di circolo però, non esiste nel midollo spinale, ma probabilmente nel plesso o nei gangli spinali ». I tendini sarebbero pertanto collegati coi loro muscoli da una via sensibile, la quale non passa direttamente dal tendine al muscolo e nemmeno tocca la sostanza grigia del midollo spinale.

Concludendo, mentre dai patologi vennero date ai fenomeni nervosi dei tendini contraddittorie interpretazioni, i fisiologi invece, in base a ricerche sperimentali, con accordo completo, furono portati ad ammettere trattarsi di azioni riflesse; per sanzionare i risultati di questi e per dare una sicura base ai giudizi di quelli, mancavano, massime riguardo all'uomo, dei precisi dati anatomici, chè evidentemente in proposito non potevano dirsi sufficienti i dati concernenti i vertebrati inferiori ed i mammiferi, questi soprattutto scarsissimi, sopra ricordati.

---

(1) F. Burckhardt, *Physiologische Diagnostik*, 1875.

Ora, da queste mie ricerche, che dimostrano come i tendini dell'uomo sieno forniti di due diversi tipi di organi terminali, l'uno analogo a quello che trovasi in molte fra le parti più sensibili del corpo (per la sensibilità comune), l'altra affatto speciale e situata, quasi dinamometro, tra gli organi che rappresentano la potenza motrice (fibre muscolari) e la parte su cui primieramente questa potenza agisce (tendini), anche questa lacuna parmi completamente tolta.

VI.

(*Metodi di indagine*).

Sebbene la dimostrazione dei fatti esposti in questo lavoro io l'abbia ottenuta coi metodi e coi reattivi comunemente adoperati nella tecnica microscopica, tuttavia per quelle particolari modalità di preparazione richieste in queste come in tutte le speciali ricerche, parmi non affatto superfluo il dare in proposito qualche cenno di schiarimento.

Studio degli organi muscolo-tendinei. — I procedimenti che io seguo per lo studio di questi organi sono un po' diversi a seconda che mi prefiggo semplicemente di dimostrarne la presenza, facendo vedere insieme i rapporti che essi hanno colle fibre nervose, o di mettere in evidenza la loro connessione colle fibre muscolari, oppure di dimostrare il modo con cui entro i medesimi organi terminano le singole fibre nervose.

a) Riguardo al primo scopo, siccome nell'uomo, a motivo del considerevole spessore delle lamine tendinee e del maggiore sviluppo delle masse muscolari, la ricerca riesce alquanto difficile, così a chi per le prime volte volesse ripetere queste indagini, io suggerirei di valersi dei conigli. Come già ho notato, la gran maggioranza delle espansioni tendinee sono fornite di nervi e dei corrispondenti apparati terminali, però talune di esse offrono terreno assai più facile; fra queste annovero le espansioni tendinee dei flessori delle dita degli arti anteriori, quelle dei gemelli e tibiali anteriori e posteriori, e più specialmente la parte alta dell'estesa espansione tendinea dei muscoli della doccia vertebrale. Essendo le fibre nervose muscolo-tendinee, coi corrispondenti apparati terminali, situate nella superficie profonda della lamina, così importa innanzi tutto mettere a nudo questa, allontanando il più possibile in modo delicato le fibre muscolari, che sulla medesima superficie si inseriscono. Questo scopo può essere già in parte ottenuto col distaccare la lamina nel seguente modo: insinuato, a muscolo distaccato o lasciato in posto, un piccolo bistorì immediatamente al di sotto della espansione tendinea si fa scorrere, con un movimento di sega, la lama, orizzontalmente tenuta, verso l'estremità superiore della espansione e così se ne opera il distacco, e la si esporta nella maggior possibile estensione e nettezza. Se per avventura fosse rimasto aderente troppo considerevole quantità di tessuto muscolare, con una forbicina ricurva, conviene delicatamente allontanarlo quanto è possibile. Per quanto la lamina sia fina, la naturale opacità del tessuto tendineo suol essere tale da impedire l'osservazione delle fibre nervose che nel suo spessore ed alla sua superficie decorrono; qual secondo momento dell'operazione importa rischiarare la lamina stessa con qualcuno degli acidi comunemente a tale scopo impiegati nella tecnica microscopica.

Le ordinarie attenuate soluzioni di acido acetico, di acido cloridrico o nitrico (1, 2, 3 p. 100) servono tutte bene; per altro, siccome può importare di ottenere in questi stessi preparati la reazione del cloruro d'oro (colle modalità che esporrò in seguito), e siccome il miglior modo per ottenere questa reazione è quello di far precedere l'azione di una soluzione di acido arsenicico al 1/2 od 1 per 100, così anche pel semplice scopo di rischiaramento, io trovo utile di valermi di questa stessa soluzione nelle indicate proporzioni: un'immersione di circa 15 minuti basta per ottenere il voluto effetto. Ottenuto il rischiaramento, la lamina posta sopra un portoggetti e coperta con un largo coproggetti, può essere senz'altro sottoposta all'osservazione, e già con poca ricerca si potranno scorgere le fibre nervose midollate seguendo le quali, se il preparato non venne troppo maltrattato, costantemente s'arriverà alla scoperta de' corrispondenti apparati terminali.

Del resto, la ricerca può essere molto facilitata, ottenendosi insieme di gran lunga più chiari e spiccati i fatti che si vogliono studiare, associando all'azione rischiarante della soluzione di acido arsenicico, quella dell'acido osmico.

L'annerimento delle fibre nervose può coll'acido osmico essere ottenuto sia facendo precedere l'applicazione sua a quella dell'accennata soluzione di acido arsenicico (mediante iniezioni sottotendinee a muscolo in posto), sia col farlo agire contemporaneamente aggiungendo alla soluzione di acido arsenicico una certa quantità di soluzione osmica (di acido arsenicico parti 4; soluzione di acido osmico all' 1 p. 100 una parte), sia finalmente facendolo agire successivamente a lamina già rischiarata mediante immersione in una soluzione osmica del $^1/_2$ p. 100. Coll'associare, nei modi ora detti, l'azione dell'acido osmico a quella degli acidi rischiaranti, si ha anche il vantaggio di ottenere dei preparati che ponno essere senz'altro conservati nella glicerina, mentre col solo primo procedimento, a motivo della grande trasparenza che vanno acquistando, essi presto diventano inservibili.

Credo quasi superfluo aggiungere, che, dopo poca pratica acquistata nel coniglio, attenendosi ad identiche norme, la ricerca degli apparati muscolo-tendinei riesce facile anche nell'uomo; la preparazione è solo più fastidiosa a motivo dello spessore delle lamine tendinee e della grossezza dei fasci muscolari, in mezzo ai quali i medesimi apparati stanno nascosti.

b) Onde verificare la descritta connessione colle fibre muscolari conviene ricorrere a pezzi induriti col bicromato di potassa, secondo le comuni norme. Le modalità di preparazione in proposito da me seguite sono le seguenti: Da pezzi (preferibilmente di coniglio) induriti nel bicromato di potassa distacco intieri quei muscoli che mi propongo di studiare e li immergo in una abbondante soluzione di acido cloridrico all'1 o 2 per 100. Dopo 2 o 3 giorni di tale immersione, durante i quali è utile sostituire alla ingiallita soluzione altra pura, si osserva, che da una parte le superficiali lamine tendinee, involgenti i muscoli, acquistano trasparenza, dall'altra, che le fibre muscolari, per un tratto più o meno esteso verso le inserzioni tendinee, diventano fragili e quindi si rompono molto facilmente nel senso trasversale. Il risultato utile di questo trattamento preparatorio è che si ponno ottenere isolati degli estesi tratti di lamine tendinee cui rimangono aderenti i monconi d'inserzione delle rotte fibre muscolari. Se il tessuto tendineo per la precedente dimora nella soluzione di acido cloridrico, s'è fatta abbastanza trasparente, queste lamine ponno essere come stanno sottoposte ad esame, e in esse, seguendo il decorso delle fibre nervose, si potranno facilmente scoprire gli organi muscolo-tendinei coi rispettivi loro rapporti colle fibre muscolari, quali sono rappresentate nelle figure. Qualora invece il tessuto tendineo fosse ancora opaco, occorre rinnovare il trattamento colla soluzione acida rischiarante per un tempo più o meno lungo. Anche per questi preparati, onde rendere più spiccate le fibre nervose, è utile ricorrere all'azione dell'acido osmico (prolungata immersione in una soluzione ad $^1/_4$ o $^1/_2$ per 100).

Per quest'ultimo scopo giovano pure le attenuatissime soluzioni acidificate di cloruro di palladio, se non che le preparazioni trattate con questo reattivo col tempo si guastano, pel diffuso annerimento che in esse si verifica.

c) Finalmente, per la dimostrazione delle terminazioni delle singole fibre nervose entro gli organi muscolo-tendinei, io mi valgo dello stesso metodo di impregnazione col cloruro d'oro e di potassio, applicato con speciali modalità, che da alcuni anni io adopero per lo studio delle terminazioni nervose nei muscoli striati, e che dopo aver esperimentato i molti che vennero proposti (non esclusi quello di Fischer, coll'acido formico, e quello di Ranvier, col succo di limone), io trovo a tutti preferibile per la sicurezza di riescita, per la chiarezza delle immagini, e soprattutto perchè fornisce preparati che si mantengono inalterati per lungo tempo, ciò che pei preparati col cloruro d'oro non è punto cosa facile (1).

Esportate le lamine tendinee nel modo prima detto, le sottopongo ai seguenti diversi trattamenti:

1° Immersione per 10–15-20 minuti, fino a che siano diventate trasparenti, in una soluzione di acido arsenicico al $1/2$ per 100.

2° Passaggio diretto dalla soluzione di acido arsenicico in una piuttosto abbondante soluzione di cloruro d'oro e potassio al $1/2$ per 100, prolungando questa seconda immersione per 20-30 minuti, cioè fino a che la lamina abbia acquistato un diffuso color paglierino.

3° Lavatura nell'acqua distillata.

4° Passaggio in altra abbondante soluzione di acido arsenicico all'1 per 100, ed esposizione al sole entro la medesima.

Sotto l'influenza dei raggi solari le fibre midollate si colorano in poche ore; è più tarda a presentarsi la colorazione delle fibre pallide e delle reticelle terminali, però di regola dopo 24-30 ore (entro il qual periodo è utile sostituire alla soluzione di acido arsenicico, divenuta di color violetto per l'oro ridotto, altra soluzione pura), la colorazione è completa. Successivamente conviene sottoporre i pezzi *scelti*, che voglionsi, conservare, a ripetute lavature coll'acqua distillata. La chiusura del preparato vien fatta in glicerina.

---

(1) Dei preparati di fibre muscolari colle rispettive terminazioni nervose sono da me conservati già da 3 o 4 anni in ottimo stato, e parimente benissimo conservati tengo già da quasi tre anni i preparati di organi muscolo-tendinei colle rispettive finissime reticelle nervose terminali.

Per la ricerca del 2° tipo di organi nervosi terminali (clave, gomitoli, corpi di Pacini, ecc.), da me fatta soltanto nell'uomo, credo basti il dire che trattisi soltanto:

1° Di rendere spiccate le fibre nervose che decorrono sulla superficie delle radici dei tendini col mezzo dell'acido osmico. — Ottenuto l'annerimento, le fibre nervose ponno essere vedute a debolissimo ingrandimento (Obj. 1 o 2 Hartnack ed anche col microscopio semplice) e allora, seguendone cogli stessi ingrandimenti il decorso, è facilissimo rintracciare anche gli organi terminali.

2° Di rendere trasparenti e di assottigliare pazientemente, dall'interno verso l'esterno, le porzioni di tendine che si credono interessanti per la riconosciuta presenza dei nominati corpi terminali. L'esame e la successiva conservazione dei preparati è parimente fatta in glicerina.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 1. — Zona di passaggio tra muscolo e tessuto tendineo (nel tendine d'Achille della Lucertola) con fibra nervosa inviante numerosi rami, ciascuno dei quali mette capo ad una reticella terminale *(Preparato ottenuto coll'acido arsenicico e col cloruro d'oro; ingrandimento di circa 200 diametri).*

Fig. 2. — Fibra nervosa midollata del tendine d'Achille della Lucertola, che dà origine a 4 o 5 rami, ciascuno dei quali, dopo aver perduta la guaina midollare, suddividendosi, dà origine ad una reticella terminale situata negli strati superficiali del tendine. - Qua e là nei punti nodali della rete veggonsi alcuni nuclei di aspetto granuloso. - Le fibrille nucleate, distribuite in tutto il campo e formanti una rete a grandi maglie, appartengono al 2° sistema di fibrille nervose descritto a pag. 364 *(Preparato come il precedente; ingrandimento di circa 400 diametri).*

Fig. 3. — Isolata terminazione nervosa di un tendine di Lucertola riprodotta il più possibile dettagliatamente (*Acido arsenicico ed oro; ingrandimento ottenuto coll'Oc.* III Hartnack *e sistema n.* VII. *Immers.* Gundlach).

Fig. 4. — Disegno che dimostra la distribuzione degli organi muscolo-tendinei in un tratto della parte superiore (regione dorsale superiore) della lamina tendinea appartenente ai muscoli della doccia vertebrale nel Coniglio. - Dalla parte *superiore* della lamina arrivano tre fasci nervosi *(a. a. a.)*, i quali dànno origine a numerose fibre, ciascuna delle quali va a metter capo in un organo terminale muscolo-tendineo.

Fig. 5. — Apparato terminale muscolo-tendineo dell'uomo. - Una delle sue estremità *(a)* dà inserzione a numerose fibre muscolari; l'estremità opposta *(b)* si confonde col tessuto del tendine. - La fibra nervosa midollata entrante da un lato dell'organo, dà origine, entro l'organo medesimo, a numerose fibre secondarie, le quali, dopo altre suddivisioni, si trasformano in fibre pallide. In alcuni punti del disegno è pure accennata la terminale decomposizione delle fibre nervose (*Oc.* III, *Obj.* 8 Hartnack).

Fig. 6-7-8. — Tre esemplari di organi nervosi terminali muscolo-tendinei del Coniglio. - Rapporti identici a quelli indicati nella precedente spiegazione (*Oc.* III, *Obj.* 7 Hartnack).

Fig. 9. — Organo muscolo-tendineo di Coniglio, presentante alla sua periferia le reticelle terminali a cui mettono capo le fibrille nervose risultanti dalla complicata suddivisione dell'unica fibra midollata di cui esso è provveduto (*Oc.* III, *Obj.* 8 Hartnack).

Fig. 10. — Piccolo tratto (veduto a debole ingrandimento) della superficie del tendine del muscolo pronatore rotondo dell'uomo (zona marginale presso l'inserzione delle fibre muscolari) in cui decorrono parecchie fibre nervose dalle quali partono rami che, ora direttamente ora dopo suddivisione, vanno a metter capo a piccole forme di corpuscoli di Pacini.

Fig. 11. — Fascio nervoso, appartenente ad una espansione tendinea profonda del muscolo pronatore rotondo dell'uomo, di cui tre diramazioni mettono capo a corpi terminali appartenenti al tipo, più o meno modificato, dei corpi di Pacini, ed una, che si suddivide, va ad innervare due corpi muscolo-tendinei *(Ingrandimento di circa* 30 *diametri).*

Fig. 12. — Quattro corpi terminali analoghi a quelli da Ciaccio, Krause ed Axel Key descritti per la congiuntiva, ciascuno dei quali è provveduto di una fibra nervosa. In tre di questi corpi, la fibra entrante termina formando un *gomitolo;* in uno, invece, perduta la guaina midollare, la fibra termina con un leggiero rigonfiamento come nella maggior parte dei corpi di Pacini. - Le fibre di cui ciascuno di questi quattro corpi sono forniti emanano da una sola (*Oc.* III, *Obj.* 8 Hartnack).

Fig. 13. — Corpo nervoso terminale, con fibra nervosa formante gomitolo, tolto dal flessore superficiale delle dita dell'uomo (*Oc.* III, *Obj.* 8 Hartnack).

Fig. 14. — Rara forma di corpo terminale, d'aspetto identico ai corpi di Pacini, entro il quale penetrano, da punti diversi, tre fibre nervose midollate - (Dal tendine del muscolo ulnare interno dell'uomo) (*Oc.* III, *Obj.* 8 H.).

Fig. 15. — Gruppo di corpi terminali appartenente alla superficie di una espansione tendinea profonda del muscolo flessore superficiale delle dita dell'uomo (*Oc,* III, *Obj.* 8 H.).

Fig. 16. — Forma piuttosto frequente di corpo nervoso, al quale accedono (?) due fibre midollate - (Da una lamina tendinea del muscolo pronatore rotondo). - Il modo di comportarsi delle fibre nervose entro il corpo è incerto (*Oc.* III, *Obj.* 8 H.).

Fig. 17. — Rigonfiamento fusiforme (da iperplasia della guaina di Henle) esistente lungo l'andamento delle fibre nervose e verificantesi allorchè esse si incrociano con un vaso sanguigno, rasentandone le pareti (*Oc.* III, *Obj.* 8 H). - Il disegno riproduce un rigonfiamento appartenente ad una fibra nervosa del tendine d'Achille; però identica particolarità venne da me trovata anche in molti altri tendini.

Fig. 1

Fig. 3

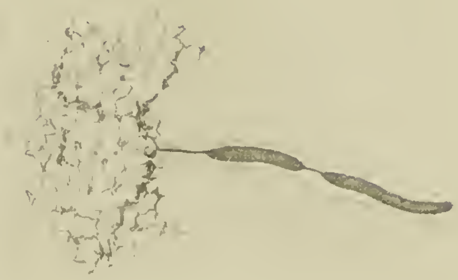


Fig. 4

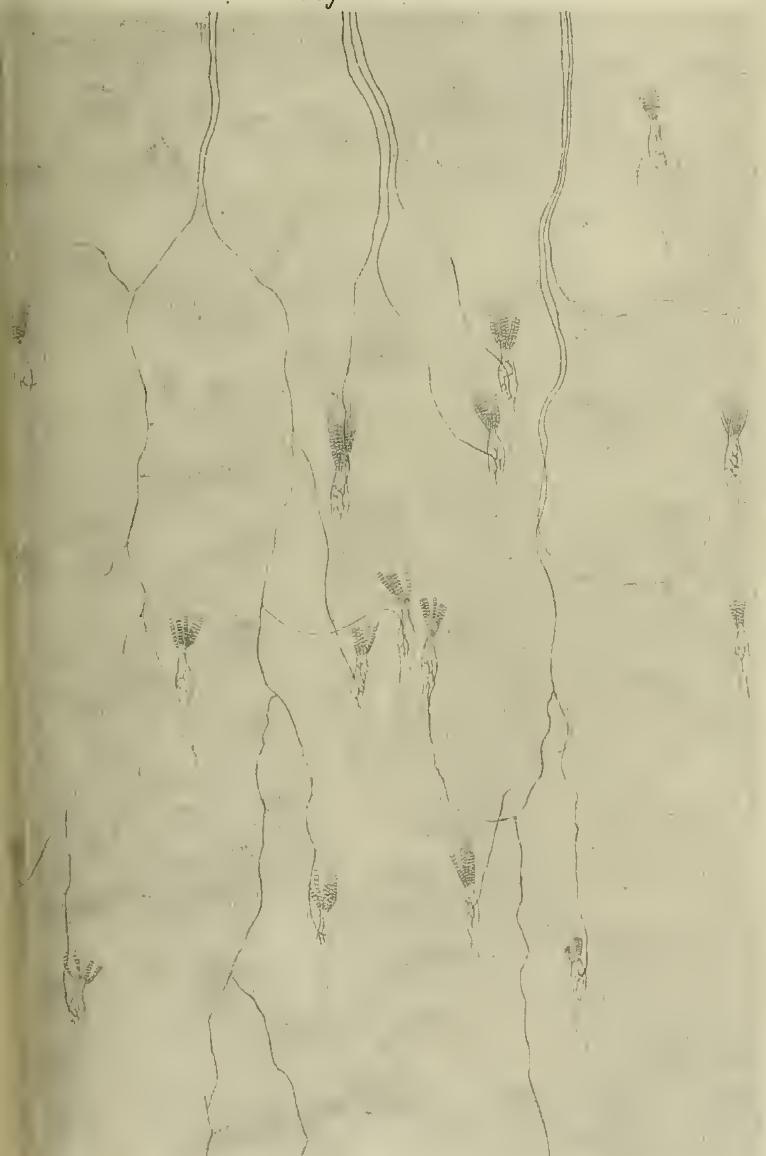


Fig. 2

Fig. 17

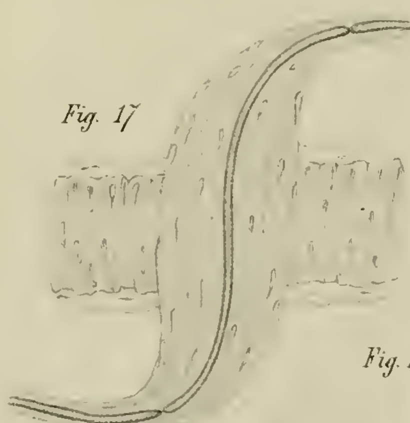


Fig. 16

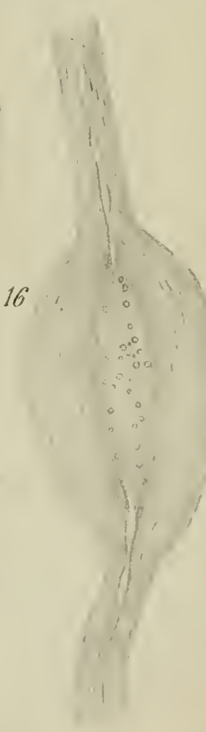
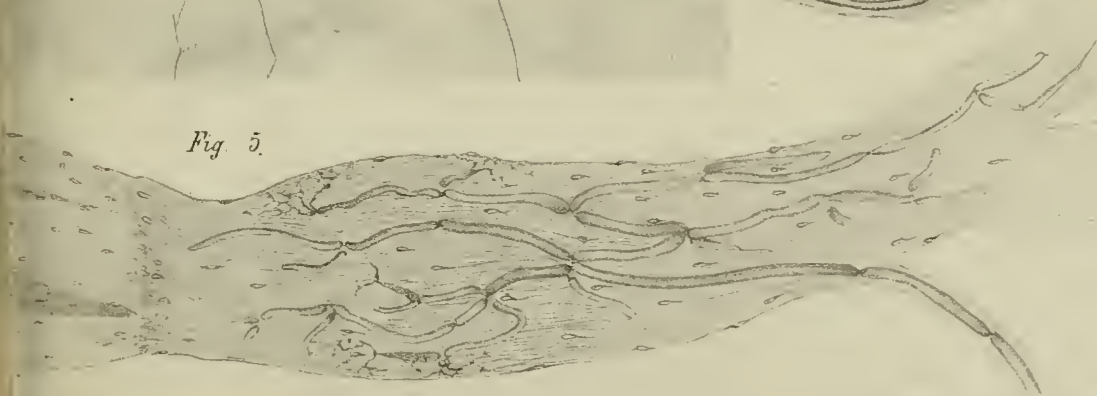


Fig. 5.



Torino, Lit. Salussolia

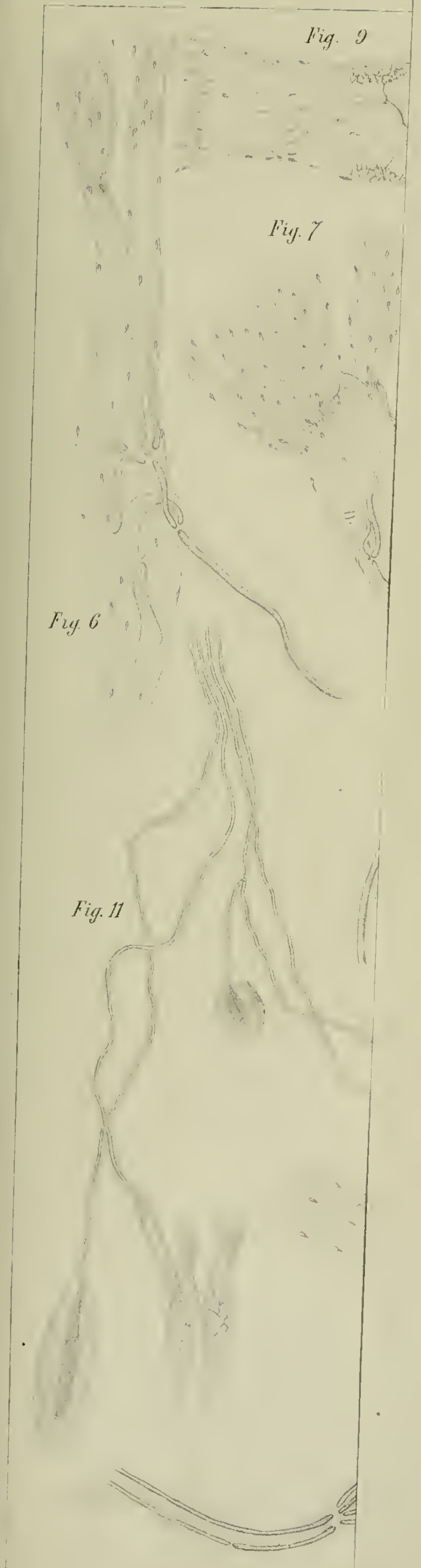


Fig. 9
Fig. 7
Fig. 6
Fig. 11

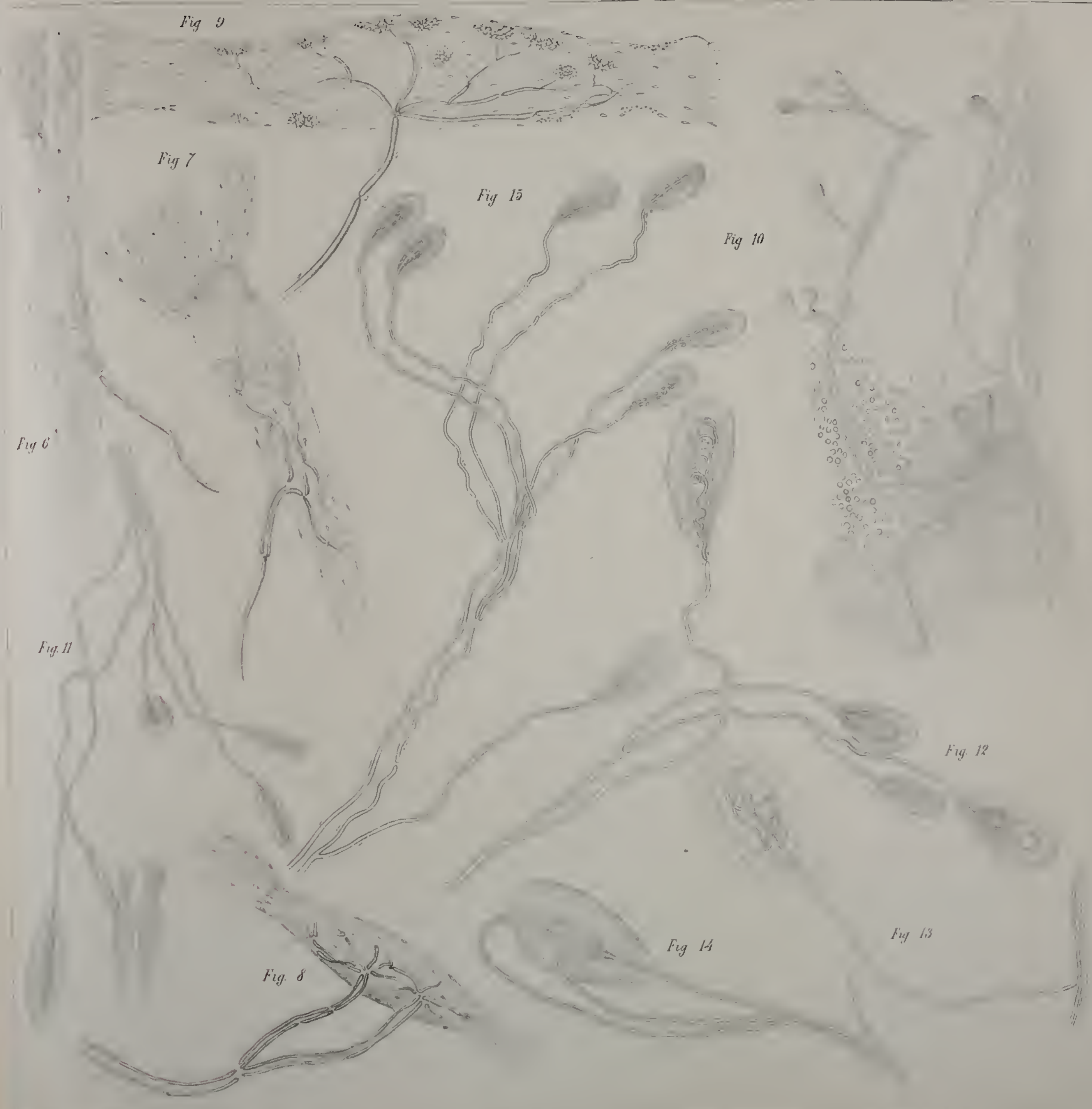


Fig 9
Fig 7
Fig 15
Fig 10
Fig 6
Fig. 11
Fig. 12
Fig 14
Fig 13
Fig. 8

MACCHINA

PER ESPERIMENTARE

LE RESISTENZE DEI MATERIALI DA COSTRUZIONE

PER

GIOVANNI CURIONI

*Memoria letta nell'adunanza dell'*11 *Gennaio* 1880

Già da molto tempo era sentito il bisogno di arricchire la nostra Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri di una macchina atta a provare le resistenze dei materiali; ma la non troppo vistosa dotazione assegnata all'insegnamento delle costruzioni rendeva impossibile il soddisfacimento di quest'esigenza, la quale ogni dì si faceva più impellente, sia per la necessità di alcune ricerche d'ordine scientifico, sia per rispondere alle molte domande che venivano fatte da Ingegneri pratici desiderosi di conoscere il grado di resistenza dei nuovi materiali che dovevano o vuolevano impiegare nell'esecuzione dei loro progetti.

Il Consiglio provinciale di Torino, che già per altri motivi ha grandi titoli di benemerenza verso la Scuola predetta, venne in aiuto per soddisfare a questo bisogno stanziando sul bilancio della Provincia la somma occorrente per la provvista e per l'impianto dell'accennata macchina; e l'onorevole sua Deputazione, annunziando alla Direzione della Scuola tale stanziamento, esprimeva il desiderio che il dono della Provincia fosse anche un prodotto dell'industria nazionale

Il riferente, come Professore di costruzioni e come Direttore del Gabinetto annesso a tale insegnamento, tosto si accinse allo studio del progetto della macchina in discorso e ne affidò la materiale esecuzione ai fratelli Colla, meccanici in Torino.

Questa macchina si trova ora a posto nel palazzo del Valentino, e avendo alcuni esperimenti posto in sodo come essa funzioni regolarmente e come in tutto e per tutto corrisponda allo scopo per cui venne costrutta, si crede conveniente di darne un cenno per mettere in evidenza la sua composizione, e per spiegare il suo modo di agire sui materiali che possono essere sottoposti ad esperimento. In altre note si renderà conto delle esperienze che man mano si andranno instituendo e dei risultamenti che nell'interesse della scienza si potranno da esse ricavare.

1. **Scopo della macchina.** — La macchina, di cui si ha il progetto nelle tavole I, II e III che accompagnano questa relazione, è destinata a fornire i mezzi pratici per sottoporre a sforzi successivi e determinati i materiali che si adoperano nelle costruzioni, provocando in essi le resistenze alla trazione longitudinale, agli scorrimenti trasversale, longitudinale e laterale, alla trazione interna, alla pressione, alla perforazione, alla flessione ed alla torsione.

Questa macchina serve per esperimenti relativi alle ricerche sull'elasticità dei corpi; permette di determinare le deformazioni che in essi si verificano sotto l'azione di forze inferiori a quelle capaci di produrre lo snervamento e di precisare gli sforzi limiti atti a produrre quest'ultimo fenomeno; conduce a trovare i coefficienti di elasticità ed i coefficienti di rottura.

La macchina esercita gli sforzi mediante un potente strettoio, il quale trasmette la sua azione ai saggi da esperimentarsi; quest'azione è contrastata da quella di un sistema di leve, il quale termina con una stadera onde poter equilibrare gli sforzi mediante appositi romani; e l'entità degli sforzi stessi si trova esattamente valutata dalla posizione dei romani sulla stadera, senza necessità di calcoli e quindi senza alcun pericolo di errori.

Le figure contenute nelle tavole rappresentanti la macchina sono tutte disegnate nella scala di otto centimetri per metro.

2. **Parti principali della macchina.** — Queste parti sono (Tav. I e II): lo strettoio A stabilmente collocato su un robusto zoccolo di ghisa, avente per iscopo di dare gli sforzi capaci di provocare determinate resistenze nei corpi da sottoporsi ad esperimento; il carretto $BBBB$, unito alla testa dello stantuffo dello strettoio per un estremo, sostenuto all'altro estremo da due rotelle e destinato a trasmettere l'azione dello strettoio

ai corpi in prova; il robusto sostegno C, solidamente fermato nell'imbasamento della macchina, il quale serve a portare la leva D a cui vengono trasmessi sforzi eguali a quelli prodotti dallo strettoio in ogni esperimento; la leva or indicata; il sostegno E sul quale ha appoggio il fulcro della stadera F per misurare l'intensità degli sforzi trasmessi dallo strettoio ai corpi sottoposti ad esperimento; e finalmente la stadera predetta.

3. Strettoio. — Questa parte importantissima della macchina non è altro che un apparecchio stato ideato dai signori Desgoffe e Ollivier, Ingegneri a Parigi, ossia uno *strettoio steridraulico* (*presse sterhidraulique*) (Tav. I e II).

In un robusto cilindro di ghisa a può muoversi uno stantuffo pieno b, pure di ghisa; e, unito al fondo del detto cilindro, si trova un recipiente circolare c in corrispondenza del cui centro vi sono sulle pareti due aperture pel passaggio di un albero di ferro d, nel quale è fissata una puleggia a ganasce e di ghisa. Nella parete posteriore del detto recipiente si trova una terza apertura per il passaggio di una corda di budella f. Una seconda puleggia a ganasce g, pure di ghisa, è posta fuori dell'apparecchio; ed è essa fissata all'albero h di ferro. Girando convenientemente l'albero d o l'albero h, la detta fune si può far passare dalla puleggia esterna all'interna o viceversa.

Le ganasce della puleggia interna e devono essere fatte in due o più parti, per ottenere che possano passare per l'apertura dello stantuffo nel collocarle in opera; giacchè il recipiente c di necessità deve venire dalla fondita col cilindro a, se non si vuole che lo strettoio sia soggetto a fughe, le quali lo renderebbero affatto inservibile allo scopo.

Per lo stesso motivo fra lo stantuffo e la parete dello strettoio si deve porre una guernitura di cuoio. Dove l'albero d attraversa le pareti dello strettoio occorre una guernitura costituita del bossolo metallico, di un anello di cuoio, della stoppa e di un secondo anello di cuoio. L'apertura pel passaggio della fune f presenta pure una guernitura nella quale, oltre il bossolo metallico e la stoppa, s'incontrano i due anelli di cuoio, se pure non si crede preferibile una guernitura di stoppa fra due bossoli metallici.

Per rendere facile il movimento della detta fune e per diminuire il suo fregamento col metallo, si allargano e si fanno ad imbuto le estremità della guernitura per cui essa passa. E con questa disposizione si possono evitare gli inconvenienti che sembrano dover risultare dal cangiamento di direzione che prende la fune a misura che si svolge da una puleggia per essere avvolta sull'altra.

La pressione che lo strettoio deve produrre si ottiene col far entrare una parte della fune *f* nel vano interno, riempito d'olio o di glicerina. E, siccome non può a meno di verificarsi un piccolo scolo all'entrata della fune nel bossolo, scolo il quale proviene, non da una fuga, ma dal fatto che la fune alla sua sortita dal recipiente si trova coperta da un sottile strato di liquido, conviene collocare un piccolo recipiente *i* destinato a riceverlo.

La puleggia esterna *g* deve avere diametro un po' più grande di quello della puleggia interna *e*, affinchè la velocità di uscita della corda sia un po' maggiore della velocità d'entrata e tale da facilitare il rinculo dello stantuffo *b* sotto l'azione della sola pressione atmosferica o col sussidio, se occorre, di contrappesi o di altri congegni usati per gli strettoi di grande potenza.

All'albero *d* sono fissate due ruote dentate, ciascuna delle quali ingrana con un pignone fissato all'albero *k*. E, tanto l'albero *h*, quanto l'albero *k* (il cui movimento si trasmette per l'ingranaggio all'albero *d*), si mettono in azione mediante due manovelle. Conviene impiegare due uomini in quest'operazione, i quali devono agire d'accordo, lentamente ed in modo continuo onde provocare nei corpi sottoposti ad esperimento resistenze ognor crescenti e non produrre lo snervamento e la rottura sotto l'azione di urti.

Lo strettoio è fornito di un apparecchio nel quale vi sono, un manometro *l* per valutare la pressione che in esso si verifica ed una coppa o recipiente *m* capace di contenere tanto liquido quanto corrisponde al volume della maggior quantità di fune che si può avvolgere alla puleggia interna. Questa coppa *m* serve anche per l'introduzione dell'olio o della glicerina nel vano dello strettoio, ed è munita di una chiavetta per stabilire o intercettare la sua comunicazione col vano stesso.

Quando lo strettoio, colle dimensioni risultanti dai disegni, sia fatto in ghisa di prima qualità e fuso verticalmente con tutte le cure prescritte dall'arte del fonditore nei casi più difficili della pratica, si può produrre sulla faccia interna del suo stantuffo una pressione di 120000 chilogrammi cui, a motivo del diametro assegnato allo stantuffo stesso, corrisponde nello strettoio la ragguardevole pressione di circa 336 atmosfere.

4. **Carretto.** — Il carretto consta essenzialmente delle due robuste piastre di ghisa n ed n' rilegate fra di loro dai quattro tiranti di ferro o. La piastra n è unita alla testa dello stantuffo, e la piastra n', attraversata nel suo mezzo da un foro, porta la testa di ghisa p con chiocciola nel senso del suo asse, la quale è attraversata da una vite di ferro q con volante di ghisa r alla sua estremità. La stessa piastra n' porta due rotelle di ghisa s scorrevoli sopra apposite guide, affinchè il carretto possa avanzare o retrocedere secondo che lo stantuffo dello strettoio è spinto innanzi o indietro (Tav. I e II). Fra le accennate due guide e sulla base della macchina vi è una dentiera, colla quale ingrana un rocchetto ι inalberato su un asse orizzontale fermato alla piastra n'. Su quest' asse orizzontale vi sono pure due rotelle cilindriche θ con fori nel senso di raggi della loro sezione retta di mezzo onde impiantarvi apposite leve per far rinculare il carretto o per far sortire lo stantuffo dallo strettoio.

Nel mezzo della piastra n vi è un foro di sezione quadrata, per ricevere alcuni pezzi ausiliari, necessari per provocare le resistenze alla pressione, alla perforazione, alla flessione ed alla torsione.

All'estremità della vite q, è adattata una robusta staffa d'acciaio u, la quale viene in acconcio per provocare le resistenze alla trazione longitudinale, alla trazione interna, allo scorrimento trasversale ed agli scorrimenti longitudinale e laterale. La detta staffa scorre senza girare quando si mette in moto la vite q.

5. **Sostegno della leva.** — Questo sostegno costituisce uno dei pezzi più complicati della macchina, è di ghisa e presenta tale forma da servire: a dar libero passaggio ai due tiranti inferiori del carretto; a sostenere la leva in modo che il suo fulcro sia ridotto ad un solo tagliente; e finalmente a dare libero passaggio a quegli organi che saranno destinati per trasmettere alla leva gli sforzi sovr' essi prodotti onde provocare una determinata resistenza.

Lo stesso sostegno in modo solidissimo è fermato alla base della macchina; e la sua sezione orizzontale ha tali dimensioni da dare le più ampie garanzie di sicurezza per rapporto alla resistenza al taglio anche sotto il massimo sforzo di 120000 chilogrammi. Per opporsi poi alla flessione che il detto sforzo tende produrre nel sostegno in discorso, si sono adottate le seguenti disposizioni: si è fatta crescere la sua sezione orizzontale dalla sommità al piede; si è fermata con un sufficiente numero di robuste chiavarde la sua base a quella dell'intiera macchina; e mediante due tiranti o' si è operato un potente collegamento del corpo dello strettoio col sostegno medesimo.

Per raggiungere lo scopo che il fulcro della leva si riduca ad un tagliente, si è posto un tirante v con snodi nei punti d'attacco al sostegno C ed alla leva D.

L'appoggio x del fulcro della leva al sostegno in discorso è dato da due pezzi di riporto in acciaio durissimo temprato.

6. Leva. — Questo pezzo della macchina è di acciaio; ha due orecchioni y per ricevere quell'organo destinato a trasmettere alla leva lo sforzo a cui si è sottoposto un corpo in prova, e due altri orecchioni z che danno il fulcro d'appoggio della leva contro il sostegno C. Questi orecchioni, dalla parte in cui devono trovarsi in contatto coll'organo e col sostegno predetti, sono foggiati a tagliente (Tav. I e II).

Nella posizione d'equilibrio della leva, la linea dei fulcri, che corrispondono ai due taglienti indicati, è verticale; e la distanza dei fulcri stessi è di metri 0,19. All'estremo del braccio di maggior lunghezza, la leva è appesa ad un tirante verticale α coll'intermezzo di un fulcro β, e la perpendicolare abbassata da questo fulcro sulla verticale predetta è di metri 1,90; cosicchè è 10 il rapporto fra il braccio più lungo ed il braccio più corto della leva.

La sezione retta dei fulcri della leva consta di due parti, ossia di un segmento circolare e di un triangolo isoscele ottusangolo, coll'angolo ottuso di circa 120°, inscritto nel circolo cui il detto segmento appartiene. Il diametro di questo circolo è di metri 0,09 pei due fulcri maggiori; di metri 0,035 pel fulcro minore posto all'estremità del braccio orizzontale della leva. I due fulcri y e z non sono invariabilmente uniti alla leva, ma si possono togliere e rimettere, sia per la composizione della macchina, sia ancora per cangiare l'organo di trasmissione da collocarsi sul fulcro y a seconda delle esperienze che si vogliono instituire.

La sezione trasversale della leva diminuisce andando verso l'estremità del suo braccio orizzontale.

7. Sostegno della stadera. — Questa parte della macchina è di ghisa, ed ha forma piuttosto complicata a motivo dei molti pezzi, cui senza alcun contrasto, deve dar passaggio. Questi pezzi sono i due tiranti inferiori o, l'estremità della leva D, la vite q ed il tirante verticale α (Tav. I e II).

Questo sostegno, atteso la sua altezza relativamente grande, è consolidato in alcuni punti come si vede in γ e δ; ed alla sommità presenta gli opportuni cuscinetti per ricevere il fulcro della stadera ed un volantino onde far muovere un romano sulla stadera stessa.

8. Stadera. — Questa delicata parte della macchina è di acciaio con appoggio sul sostegno E mediante il fulcro λ (Tav. I e II).

La leva D trasmette alla stadera una decima parte dello sforzo che il corpo sottoposto ad esperimento esercita sul fulcro y, e questa trasmissione ha luogo mediante il tirante di ferro α, fatto in modo da dar libero passaggio alla vite q. Questo tirante è sospeso alla stadera mediante il fulcro μ, ed è di metri 0,11 la distanza di questo fulcro dall' altro fulcro λ quando la stadera è equilibrata, ossia quando la sua faccia o spigolo superiore è orizzontale.

La parte di stadera lunga metri 2,20, compresa fra la verticale del fulcro λ ed il punto ν, è divisa in duecento parti eguali.

Sullo strettoio sorge un sostegno Σ di ghisa, il quale è destinato a dare appoggio all'estremità del braccio più lungo della stadera in riposo, e ad impedire che essa si sollevi oltre un certo limite quando si sta per equilibrarla.

In un punto ρ, posto presso l'estremo della stadera e distante metri 2,50 dal fulcro λ, si pone un romano fisso R, il quale è destinato alle pesate corrispondenti a sforzi della macchina variabili di 10000 in 10000 chilogr. E ogni peso di 44 chilogrammi del romano fisso corrisponde ad uno sforzo di 1000 chilogrammi sul fulcro μ e di 10000 chilogrammi sul fulcro y. Per misurare lo sforzo di 100000 chilogrammi occorrono adunque dieci pesi di 44 chilogrammi caduno. Il primo di questi pesi è dato da quello dell'asta del romano fisso e di una piastra di ghisa portata dall'estremo inferiore dell'asta del romano stesso, gli altri nove sono dati da altrettante copie di piastre. eguali di ghisa, ciascuna delle quali pesa 22 chilogrammi. Nel senso del lato maggiore e per poco più della metà della loro lunghezza, le lastre di ghisa hanno una fenditura longitudinale per disporle l'una sopra l'altra sull'asse del romano R.

Per le pesate o parti di pesate corrispondenti a sforzi minori di 20000 chilogrammi vi è un romano scorrevole R', il quale può essere caricato di cinque differenti pesi di 20 chilogrammi caduno. Il primo di questi pesi è dato dal romano, dal suo carretto e da una piastra di ghisa appesa all'estremità inferiore dell'asta del romano stesso, gli altri si hanno con quattro eguali piastre pure di ghisa, ciascuna delle quali dovendo da sola pesare 20 chilogrammi, ha grossezza maggiore della prima. Questi pesi, precisamente come quelli pel romano fisso, hanno una fenditura longitudinale onde disporli l'uno sopra l'altro sull'asta del romano mobile.

La verticale passante pel centro del romano scorrevole non si può portare a distanza minore di 25 divisioni della stadera dal fulcro λ, e quindi, siccome il peso minimo di questo romano è di 20 chilogrammi, risulta che, anche togliendo il romano R e lasciando il solo romano R', non si possono fare pesate corrispondenti a sforzi inferiori a 500 chilogrammi. Questo però non costituisce un inconveniente della macchina, giacchè in generale non avrebbero alcuna utilità, nella pratica delle costruzioni, le esperienze fatte sotto l'azione di sforzi così piccoli. D'altronde, come fra poco si indicherà, non manca il mezzo di misurare anche gli sforzi minori di 500 chilogrammi.

Il romano scorrevole non viene mosso a mano, ma sibbene da un volantino χ con rocchetto, il quale ingrana con una ruota dentata imperniata sullo stesso asse di una puleggia, che riceve una corda senza fine unita al carretto e che passa su di un'altra puleggia all'estremità opposta della stadera.

La stadera si prolunga dalla parte opposta a quella su cui si devono leggere le pesate, e porta un contrappeso T atto ad equilibrare perfettamente il sistema della leva e della stadera scarica dei suoi romani quando la macchina non è in azione, e questo onde ottenere che le indicazioni date dalla stadera corrispondano unicamente agli sforzi prodotti sul fulcro y.

Le pesate comprese fra 500 e 10500 chilogrammi si devono fare col solo romano scorrevole; si può adoperare il solo romano scorrevole oppure il romano scorrevole ed il romano fisso per le pesate comprese fra 10500 e 20000 chilogrammi; per tutte le pesate superiori a 20000 chilogrammi è di assoluta necessità l'impiego dei due romani.

Occorrendo di fare pesate inferiori a 500 chilogrammi, si toglie il romano R, si lascia il solo romano R' affatto scarico, si aumenta il contrappeso T fino ad equilibrare la stadera, e quindi si fa uso di un piccolo romano da manovrarsi a mano. Onde ottenere lo sforzo corrispondente ad una data posizione di un romano scorrevole si moltiplica il peso del romano stesso per il corrispondente numero di divisioni della stadera.

I fulcri μ e λ della stadera sono fatti come quelli della leva, ed il diametro della parte circolare della loro sezione è di metri 0,035. La stadera ha grossezza costante, ma l'altezza della sua sezione trasversale verticale cresce dall'estremo verso il fulcro λ.

9. **Fondazione.** — Per la fondazione della macchina si sono poste quattro robuste traverse di ferro ε (Fig. 1ª e 3ª, Tav. II), ciascuna delle quali attraversa le estremità inferiori di due aste verticali ζ aventi le estremità superiori a vite; sulle dette traverse si sono poste tre lunghe rotaie di ferro η, una in corrispondenza del piano verticale determinato dall'asse della macchina, le altre due parallele alla prima e distanti da essa di circa metri 0,47. Tutto lo spazio compreso fra il piano orizzontale determinato dalle facce inferiori delle traverse ε e delle rotaie η si è riempito di muratura, e quindi si sono poste due pietre parallelepipede colla spessezza di metri 0,30, complessivamente più lunghe e più larghe della base della macchina, facendo passare le otto aste ζ per fori praticati nelle pietre stesse. Il giunto fra queste pietre corrisponde alla metà circa del sostegno C della leva, e ciascuna di esse è attraversata da quattro delle otto aste ζ.

Sulle dette pietre ben orizzontate, con tutti i fori necessari per fermarvi (mediante chiavarde colle loro code inzolfate nelle pietre stesse) la generale piattaforma di ghisa Δ, si è fissata la macchina in modo che le traverse ε, le rotaie η, la muratura che avvolge quelle e queste, le pietre e la piattaforma formino un tutto assieme immobile ed indeformabile anche sotto l'azione del massimo sforzo che si può produrre sui pezzi sottoposti ad esperimento.

10. **Esperienze sulla resistenza alla trazione longitudinale.** — Supponendo che il saggio da esperimentarsi abbia un occhio in ciascuna delle sue estremità, si pone fra le due staffe u ed u', come lo dimostra la figura 1ª della tavola III, vi si fissa mediante due perni d'acciaio p_1 e p_2; si gira il volante r (Tav. I e II) onde ottenere che i due perni suddetti siano in procinto di mettere in tensione il pezzo in prova; e finalmente si fa agire lo strettoio girando convenientemente le manovelle applicate all'albero k. Lo stantuffo b avanza e con esso il carretto, e così nel saggio viene provocata la resistenza all'estensione.

La reazione del corpo viene trasmessa al fulcro y della leva D, e, convenientemente regolando i pesi e le posizioni dei romani della stadera si può misurare questa reazione eguale appunto alla resistenza stata provocata.

Volendosi fare esperienze relative all'elasticità, si stabiliscono prima gli sforzi successivi e crescenti cui il corpo si vuol sottoporre. Si dispongono i romani sulla stadera in modo da marcare il più piccolo degli sforzi prestabiliti, e quindi lentamente si mette in azione lo strettoio, finchè si vede che l'estremo della stadera leggiermente s'innalza. A questo punto si cessa dal far agire lo strettoio e, quando sul saggio siasi messo un regolo graduato con nonio come lo indica la figura 1ª della tavola III e che siasi tenuto conto della distanza primitiva L fra i due punti a_1 e a_2, si può valutare l'allungamento elastico l' corrispondente alla stessa distanza e far quindi l'allungamento proporzionale $\lambda' = l' : L$. Proseguendo gradatamente l'operazione con sforzi successivamente crescenti provocati nello stesso modo, si possono dedurre gli allungamenti elastici ad essi corrispondenti e fare gli allungamenti proporzionali, i quali serviranno a dare un'idea dello sforzo sotto il quale il corpo si è snervato.

Se, una volta provocata una determinata resistenza nel corpo, si vuol trovare il corrispondente allungamento permanente, si può far girare la puleggia esterna dello strettoio affinchè sorta tanta fune dallo strettoio stesso, quanta ne venne introdotta onde ottenere lo sforzo al quale il corpo venne sottoposto, e far indietreggiare il carretto operando alla sua estremità colle leve da applicarsi alle rotelle θ (Tav. I e Tav. II, Fig. 1ª e 2ª).

Più speditamente si può fare quest'operazione aprendo lentamente la chiavetta posta sotto il recipiente m per permettere al liquido contenuto nello strettoio di liberamente espandersi nel recipiente stesso, e girando di poco la vite q per trar partito del giuoco, appositamente lasciato nel senso dell'asse della macchina fra la testa della vite stessa e la parte, ricevente questa testa, della staffa u (Tav. II, Fig. 1ª e 2ª). La differenza fra le lunghezze della parte di corpo compresa fra i due punti a_1 ed a_2, (Tav. III, Fig. 1ª) dopo e prima dell'esperimento, dà l'allungamento permanente che le corrisponde.

Per le esperienze relative alla rottura si caricano dapprima i romani della stadera e si mettono in tale posizione da marcare uno sforzo minore ma non molto lontano da quello che corrisponde alla rottura del saggio. Si pone dopo in movimento lo strettoio procedendo colla voluta lentezza, e, quando si vede che l'estremo della stadera si innalza, si mette in moto il romano scorrevole per mantenerla equilibrata. Attentamente si osserva il corpo in prova onde far cessare l'azione dello strettoio appena si manifestano in esso i primi indizi di rottura, all'apparire dei quali conviene aprire la chiavetta del recipiente m, onde schivare strappamenti ed urti che potrebbero riuscire nocivi alla macchina.

Le estremità dei saggi da sottoporsi ad esperimento, per provare la loro resistenza all'estensione, non sempre presenteranno un occhio come si è detto nel precedente numero; e quindi la necessità di apposite morse e di appositi ordigni per fermare alle forcelle u ed u' i pezzi da porsi in prova. Non è ora il caso di parlare di questi organi, giacchè, dovendo essi variare colle qualità e colle dimensioni dei materiali da esperimentarsi, conviene farli costruire appositamente per ogni serie di esperienze.

La lunghezza massima dei corpi nei quali si può provocare la resistenza all'estensione mediante la macchina di cui si presenta il progetto è di 1 metro.

11. Esperienze sulla resistenza allo scorrimento o al taglio trasversale. — I saggi da esperimentarsi si pongono verticalmente fra i due pezzi di acciaio b' e b'', i quali sono attaccati alle due forcelle u ed u' (Fig. 2ª, Tav. III).

La macchina si fa agire come per provocare la resistenza alla trazione, e la resistenza allo scorrimento trasversale viene cimentata nella sezione $c' c''$.

Nell'instituire questi esperimenti non si può pretendere di poter valutare le piccolissime deformazioni che vi corrispondono, e quindi non si può far altro che occuparsi della resistenza alla rottura.

Onde rendere possibile di instituire esperienze sopra saggi di differente diametro, i fori praticati nei pezzi b' e b'' saranno fatti in modo da poter collocare nel loro interno dei collari di riporto nei quali verranno posti i corpi da esperimentarsi. Questi collari potranno anche essere fatti con fori di forma diversa dalla circolare, onde poter esperimentare sopra saggi prismatici aventi sezioni rette di forme svariate.

12. Esperienze sulle resistenze agli scorrimenti o al taglio longitudinale e laterale. — La resistenza allo scorrimento longitudinale si provoca in modo analogo a quello stato indicato per la resistenza allo scorrimento trasversale. I corpi da esperimentarsi si pongono longitudinalmente, ossia colle loro fibre nel senso dell'asse della macchina, fra i pezzi d'acciaio d' e d'', i quali sono uniti alle due forcelle u ed u'.

Facendo agire la macchina, come per provocare la resistenza alla trazione, si mette in giuoco la resistenza allo scorrimento longitudinale nella sezione $e' e''$.

I pezzi da esperimentarsi, conservando costantemente forma parallelepipeda colla lunghezza $e' e''$ e coll'altezza $f' f''$, possono avere differenti grossezze nel senso della loro terza dimensione.

Se, invece di disporre i corpi colle loro fibre nel senso dell'asse della macchina, si disponessero colle fibre stesse orizzontali ma in direzione perpendicolare all'asse predetto, si provocherebbe una resistenza che si potrebbe dire allo scorrimento laterale.

13. Esperienze sulla resistenza alla trazione interna. — Questa resistenza è quella che viene provocata nelle cerchiature e nei tubi destinati a sopportare una pressione interna; ed ecco in qual modo si possono instituire i relativi esperimenti.

Come lo dimostra la figura 4ª della Tavola III abbiansi quattro pezzi di acciaio g', g'', g''' e g^{IV}, identici e con un occhio cilindrico a ciascuna estremità; due dischi semicilindrici h' ed h'' pure di acciaio, anche identici fra di loro, con orecchioni sporgenti dalle loro basi e con una linguetta sulla loro superficie cõnvessa; e finalmente due piastre di acciaio o di ghisa i' ed i'', foggiate a semi-corona circolare colle faccie concave a perfetto combaciamento delle facce convesse dei dischi ultimi accennati e con scanalature per ricevere le linguette di questi ultimi. Se, disposti come risulta dall'ultima citata figura i due pezzi inferiori g''' e g^{IV}, poi i due dischi h' ed h'' e le due piastre i' ed i'', si mette il cerchio da sottoporsi ad esperimento e quindi i due pezzi g' e g''; se, mediante i due perni q' e q'', il tutto si unisce alle due forcelle u ed u', e se si fa agire la macchina, come per provocare la resistenza alla trazione, evidentemente sul cerchio predetto, si provoca la resistenza alla trazione interna.

Con diverse copie di piastre i' ed i'' si possono sottoporre ad esperimento cerchiature di differenti diametri.

Per aver un'idea dell'allungamento subìto dalla cerchiatura sotto l'azione di un determinato sforzo, può bastare una graduazione fissata al disco h' sulla quale scorre un nonio fermato al disco h''.

È anche possibile determinare l'allungamento permanente di una cerchiatura per una determinata forza traente, e per raggiungere lo scopo basta seguire le norme state tracciate al numero **10** parlando delle esperienze sulla resistenza alla trazione longitudinale.

14. Esperienze sulla resistenza alla pressione. — Per queste esperienze, i saggi da porsi in prova devono essere collocati fra un pezzo l' di acciaio unito alla piastra n del carretto (Fig. 1, Tav. I) ed un pezzo l'' (Fig. 5, Tav. III) da applicarsi al fulcro y (Tav. I) in luogo della forcella u'. I due pezzi l' ed l'' sono muniti di un piccolo foro nel senso del loro asse onde potervi all'occorrenza adattare dei pezzi o dischi di riporto in acciaio, ed ottenere fra i piani d'appoggio una distanza eguale alla lunghezza dei saggi.

Lo strettoio e la stadera si impiegano per provocare e misurare la resistenza alla pressione in modo affatto analogo a quello già stato indicato per la resistenza alla trazione.

Occorrendo di instituire esperimenti di elasticità e quindi determinazioni di accorciamenti, si attacca fra due punti del corpo in prova un piccolo regolo graduato con nonio e si procede analogamente a quanto si è detto per la resistenza alla tensione, tanto per valutare gli accorciamenti elastici, quanto per accertare gli accorciamenti permanenti.

Le esperienze sulla resistenza alla pressione si possono anche fare a compressione libera o a compressione in matrice. Nel primo caso, essendo il saggio appoggiato solamente alle sue due estremità, sotto l'azione della forza premente può liberamente deformarsi; nel secondo caso, essendo esso mantenuto in apposita matrice, può solo accorciarsi ma non inflettersi.

Per ora non è il caso di parlare della forma della matrice, giacchè, essendo questa un organo che deve essere fatto espressamente a seconda della qualità e della forma dei materiali su cui si opera, converrà occuparsi quando sia ben definito quali esperienze di questo genere si vogliono instituire.

La lunghezza massima dei corpi su cui si può esperimentare la resistenza alla pressione è di metri 0,35.

15. Esperienze sulla resistenza alla perforazione. — Si fanno queste esperienze in modo analogo a quello già stato indicato per la pressione. Si fissa alla piastra n (Fig. 6, Tav. III) un pezzo d'acciaio k' con un foro nel senso del suo asse; al pezzo e'', che è quello stesso per la pressione, si ferma il pezzo d'acciaio k'' munito di un punteruolo k''' in acciaio temprato; e la lamiera o piastra da perforarsi si mette fra il pezzo k' e il punteruolo predetto.

Facendo agire la macchina come per provocare la resistenza alla pressione, si mette in giuoco nella piastra predetta la resistenza alla perforazione.

Non è difficile di misurare l'avanzamento del punteruolo fino a raggiungere un dato sforzo e quindi d'instituire esperienze d'elasticità sulla perforazione dei corpi solidi.

16. Esperienze sulla resistenza alla flessione. — I saggi da sottoporsi ad esperimento si pongono fra la piastra n del carretto ed il sostegno C. Al fulcro y della leva (Fig. 1, Tav. I) si applica il pezzo d'acciaio t (Fig. 7, Tav. III), il quale a distanze eguali dal suo mezzo porta i due taglienti m' e m''. Questi taglienti poi sono scorrevoli entro una scanalatura lasciata nel pezzo t, onde poterli porre a distanza più o meno grande, e la maggior distanza a cui si possono collocare è di 1 metro.

Il saggio, nel quale vuolsi provocare la resistenza alla flessione, si mette contro i detti taglienti, e nel suo punto di mezzo si fa agire un tagliente d'acciaio o'' fissato nel pezzo di ghisa p' che a sua volta è fermato nella piastra n. Non occorre dire come sia necessario un assortimento di pezzi p', variabili in altezza di centimetro in centimetro od anche di mezzo centimetro in mezzo centimetro onde instituire esperimenti per saggi di differente grossezza.

Per misurare le saette d'inflessione si ha un regolo r' graduato in millimetri, sul quale può scorrere un ordigno a squadra avente un braccio s' foggiato a tubo. Questo tubo presenta un'apertura longitudinale destinata a lasciare scoperta una parte della graduazione del regolo predetto, e porta un nonio per la valutazione di frazioni delle divisioni della graduazione stessa. Il regolo r' si fissa al pezzo t con una vite di pressione, l'ordigno a squadra si dispone in modo che il suo braccio a tubo sia infilato sul detto regolo e che l'altro braccio sia verticale contro il corpo sottoposto a flessione. Facendo agire lo strettoio per produrre la flessione, questa si manifesta col piegamento del saggio e coll'avanzamento dell'ordigno a squadra; e la differenza fra le indicazioni del nonio per due determinati sforzi dà la saetta corrispondente alla differenza degli sforzi stessi.

Non occorre indicare come si determinano le saette elastiche e permanenti dopo quanto si è detto al numero **10** parlando degli allungamenti elastici e permanenti; e basta notare che le indicazioni, date dal misuratore della flessione, possono essere affette da un piccolo errore dipendente dal fatto che durante la flessione ha luogo una piccola penetrazione dei taglienti m' ed m'' nel saggio in prova. Per evitare quest'errore basta impiegare tre apparecchi misuratori da applicarsi, uno nel mezzo dell'intervallo $m'm''$ e gli altri due presso i taglienti m' ed m'' ad egual distanza da quello di mezzo (Fig. 8). Sottraendo dall'indicazione data dal primo misuratore la media aritmetica delle indicazioni date dagli altri due, si ottiene nella differenza la vera saetta di flessione per la lunghezza $t't''$ del corpo esperimentato.

18. **Esperienze sulla resistenza alla torsione.** — Queste esperienze sono quelle che presentano maggiori difficoltà per essere eseguite in modo che cause estranee alle forze, sotto le quali credesi di provocare la resistenza alla torsione, non influiscano sui risultamenti definitivi; ed ecco quali combinazioni si sarebbero adottate nella macchina di cui si discorre.

Fra il sostegno C e lo zoccolo sottostante allo strettoio A (Tav. I e II), si è posta una piastra di ghisa Π presentante una larga incavatura, nella quale, tolti i due tiranti o', si possono porre due ritegni di ghisa q_1' e q_1'' di forma parallelepipeda vuota (Fig. 9, Tav. III). Questi ritegni sono destinati per essere posti ad eguale distanza dall'asse della macchina e per fissarvi due corpi identici sui quali vuolsi esperimentare la resistenza alla torsione.

Ben fissati i corpi da porsi in prova nei ritegni suddetti in modo che i loro assi risultino verticali, si serrano le estremità superiori di ciascuno di essi in un robusto disco di acciaio r_1'. Questo disco presenta al di sotto un'incavatura, entro la quale deve entrare l'estremità superiore del corpo, e nel centro dell'incavatura esiste un piccolo tenone destinato a penetrare in un foro praticato nel corpo stesso in direzione del suo asse. La parte interna di quest'incavatura presenta quattro intaccature 1, 2, 3 e 4, le quali servono, sia per fissare la testa del corpo nel disco r_1', sia pel caso in cui la testa del corpo sia più piccola del vano che deve riceverla, giacchè allora si potrà ridurre questo vano a dimensioni convenienti mediante anelli di riporto. Se i corpi da esperimentarsi avessero sezione poligonale, converrebbe procurarsi anelli di analoga sezione.

Il detto disco porta un braccio di leva v' e la sua faccia superiore consta di due parti piane 5, 6, 7 ed 8 e 5, 6, 7, 9 e 10, la prima delle quali è più bassa della seconda. Contro il risalto in acciaio 6 appoggia il ritegno d'acciaio d_1, il quale, fermato nel pezzo t che è quello stesso che serve per provocare la resistenza alla flessione, serve per trasmettere alla leva e quindi alla stadera lo sforzo sotto il quale si opera per produrre la torsione. Il ritegno d_1 non deve toccar la faccia 5, 6, 7 ed 8, ed il suo tagliente si trova sull'asse del disco e quindi sull'asse del corpo al quale il disco stesso è applicato onde provocare la resistenza alla torsione.

Lo sforzo per provocare la resistenza alla torsione si ottiene col porre in azione lo strettoio. Questo sforzo, mediante il pezzo d'acciaio x' unito alla piastra n, viene trasmesso alle estremità dei due bracci di leva v' e v''; e si ripartisce in modo da agire per metà sull'uno e per metà sull'altro dei due corpi in prova. Fissata la totale pressione che vuolsi esercitare sui due bracci di leva, si disporrà la stadera in guisa da essere capace di equilibrarla e quindi lentamente si farà agire lo strettoio. Quando la pressione, che questo esercita all'estremo dei due bracci di leva v' e v'' sarà eguale a quella P marcata dalla stadera, fatto questo che si manifesterà sulla stadera stessa, giacchè essa si mostrerà equilibrata, si potrà dire: che alle estremità di ciascuno dei due bracci di leva avrà luogo la pressione $\frac{1}{2}P$; che nel punto 6 si verificherà pure una pressione $\frac{1}{2}P$ diretta in senso contrario di quella che ha luogo all'estremo del braccio di leva v', che per conseguenza il disco a cui questo braccio è applicato si troverà sotto l'azione della coppia $\left(\frac{1}{2}P, -\frac{1}{2}P\right)$; e che sotto l'azione di questa coppia dovrà girare nel senso della freccia φ e così provocare la resistenza alla torsione nel corpo cui questo disco è applicato.

Si comprende facilmente come coll'indicata disposizione si possano instituire esperienze sulla resistenza elastica e sulla resistenza alla rottura, e come si possano anche misurare gli angoli di torsione coll'adottare al disco r_1' un nonio il quale scorra su un arco graduato fissato ad un sostegno indipendente dal corpo sottoposto ad esperimento ed avente il suo centro sulla verticale determinata dall'asse del corpo stesso.

18. **Pregi e potenza della macchina.** — La macchina per la quale si è data la descrizione e si è indicato l'uso, ha sulle macchine analoghe finora conosciute i seguenti vantaggi: quello di prestarsi ad esperimentare tutte le resistenze, e non le sole di trazione, di pressione e di flessione; quello

della grande potenza che la rende atta ad instituire esperimenti su corpi di grandi dimensioni ed a porli per conseguenza in condizioni identiche o prossime a quelle cui saranno per trovarsi nelle costruzioni. Le disposizioni per provocare le resistenze agli scorrimenti trasversale, longitudinale e laterale sono affatto nuove; come pure sono nuove e degne di speciale menzione quelle per provocare la resistenza alla torsione.

Finalmente, per dare un'idea della potenza della macchina, di cui si è data la descrizione e si è indicato l'uso, si crede opportuno di indicare le dimensioni dei saggi che con essa si possono rompere considerando quei materiali che sono di uso più frequente nella pratica delle costruzioni.

Si possono rompere per trazione

Legnami di essenza forte con sezione quadrata,	di metri	0,14	di lato
Cilindri di ghisa	»	0,11	di diametro
Cilindri di ferro	»	0,07	»
Cilindri di acciaio	»	0,05	»

Si possono rompere per taglio o per scorrimento trasversale

Cilindri di ghisa	di metri	0,09	di diametro
Cilindri di ferro	»	0,08	»
Cilindri di acciaio	»	0,06	»

Si possono rompere per pressione

Prismi di legname di essenza forte con sezione quadrata	di metri	0,16	di lato
Cilindri di ghisa	»	0,06	di diametro
Cilindri di ferro	»	0,07	»
Prismi di pietra calcare di media resistenza con sezione quadrata	»	0,20	di lato
Prismi di granito con sezione quadrata . .	»	0,12	»
Pilastrini di mattoni di grande resistenza con sezione rettangolare	»	0,24	per 0,25
Pilastrini di mattoni di media resistenza con sezione rettangolare	»	0,24	» 0,38
Pilastrini di mattoni di poca resistenza con sezione rettangolare	»	0,37	» 0,38

Si possono rompere per flessione

Prismi di legname di essenza forte con sezione quadrata	di metri	0,30	di lato
Prismi di ghisa con sezione quadrata .	»	0,23	»
Prismi di ferro con » » .	»	0,18	»
Prismi di acciaio con » » .	»	0,12	»

Le rotaie per ferrovie ed anche le più resistenti travi in ferro che si trovano in commercio per soddisfare alle esigenze dell'arte edificatoria.

Si possono rompere per torsione

Cilindri di legname di essenza forte . .	di metri	0,24	di diametro
Cilindri di ghisa	»	0,12	»
Cilindri di ferro	»	0,10	»
Cilindri di acciaio	»	0,08	»

che anzi, aumentando le dimensioni degli apparecchi apprensori dei corpi da sottoporsi ad esperimenti di torsione, si può operare su saggi metallici di dimensioni assai maggiori di quelle indicate.

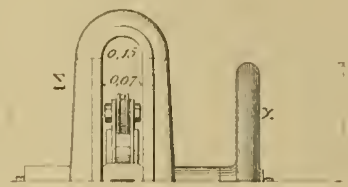
Le esperienze relative alla determinazione delle deformazioni elastiche, dovendosi fare sopra corpi in cui sia ben lungi dal verificarsi il fenomeno della rottura, si possono anche instituire sopra corpi con dimensioni molto maggiori di quelle state indicate.

Torino, 11 gennaio 1880.

Costruzione

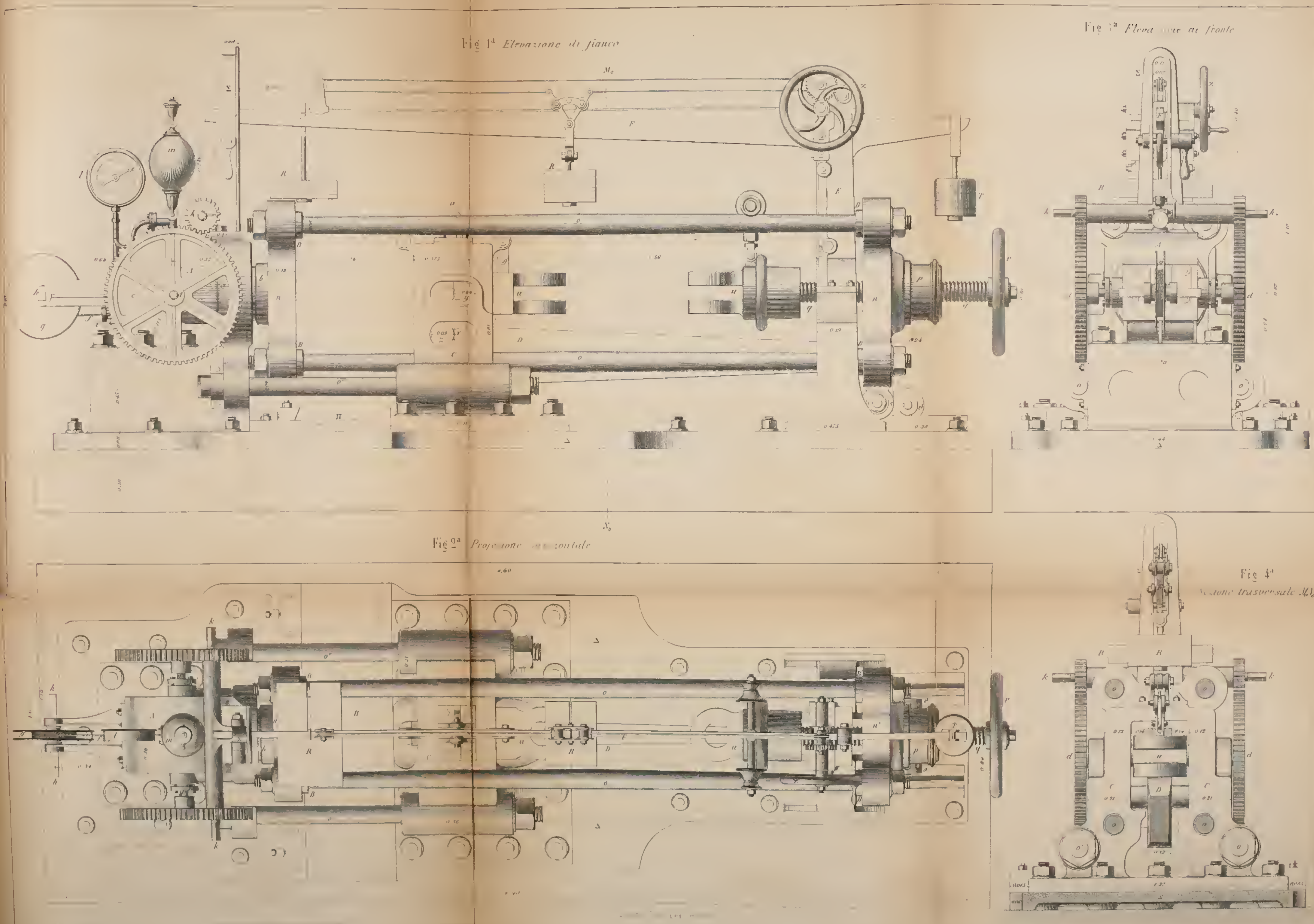
Tav. I

Fig 3ª *Elevazione di fronte.*



Macchina per esperimentare la resistenza dei materiali da costruzione

Tav. I

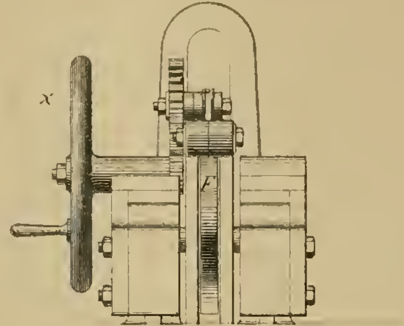


Progetto del Professore G. Curioni

COSTRUZIONE

Tav. II

Fig. 3ª. *Sezione trasversale $F_o\,G_o$.*



Macchina per esperimentare la resistenza dei materiali da costruzione

Fig. 1ª Sezione longitudinale $A_0 B_0$

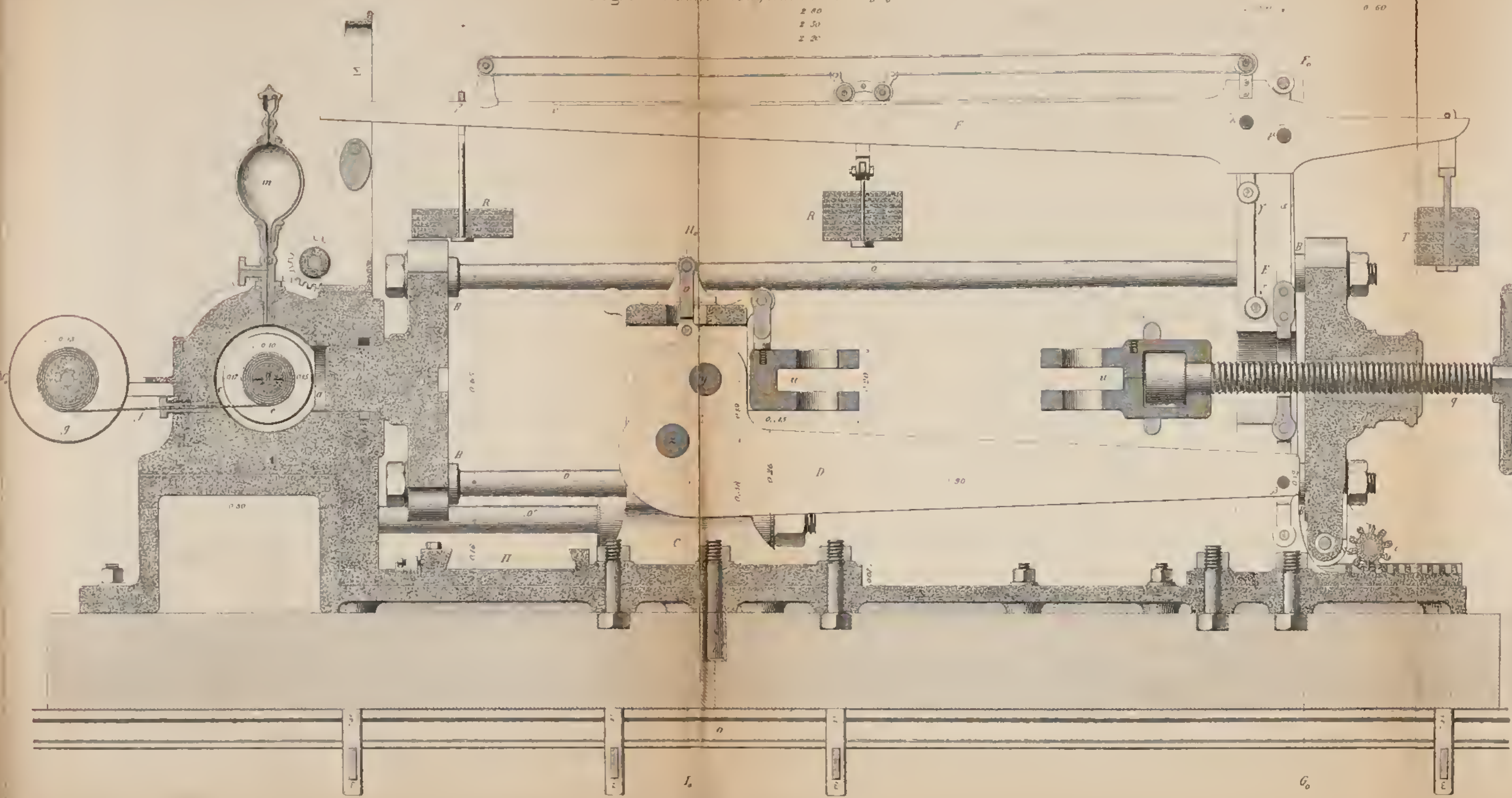


Fig. 3ª Sezione trasversale $E_0 G_0$

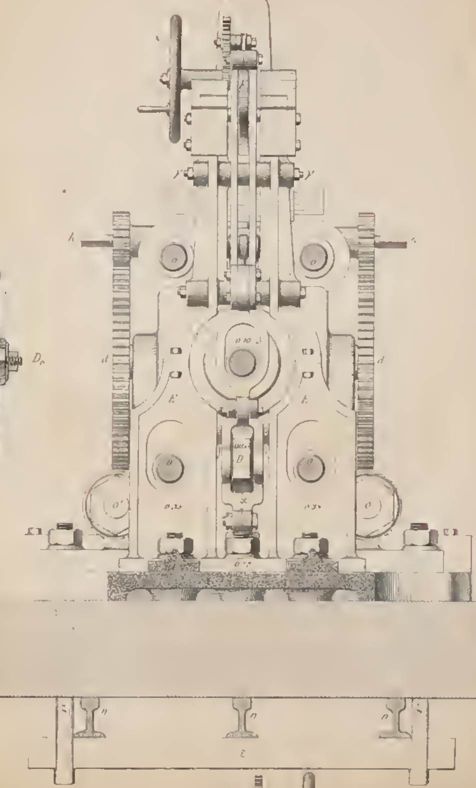


Fig. 2ª Sezione orizzontale $C_0 D_0$

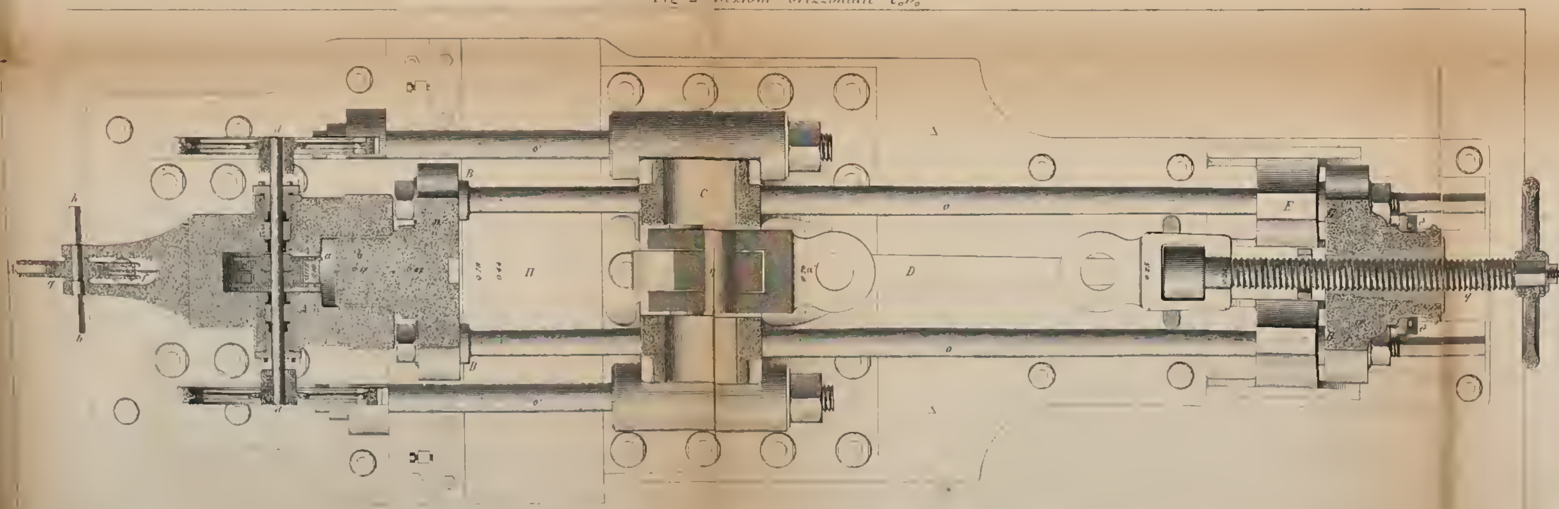
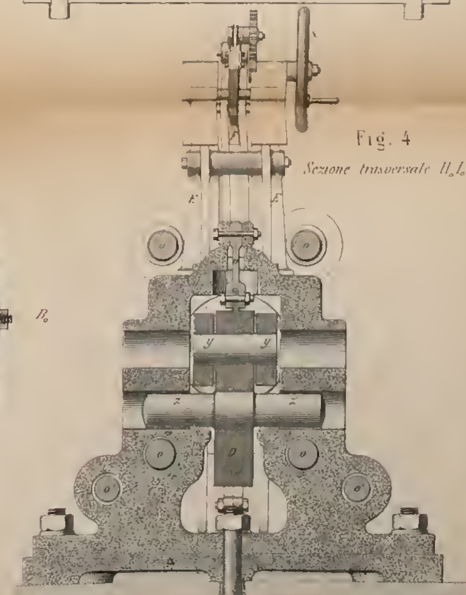


Fig. 4 Sezione trasversale $H_0 I_0$



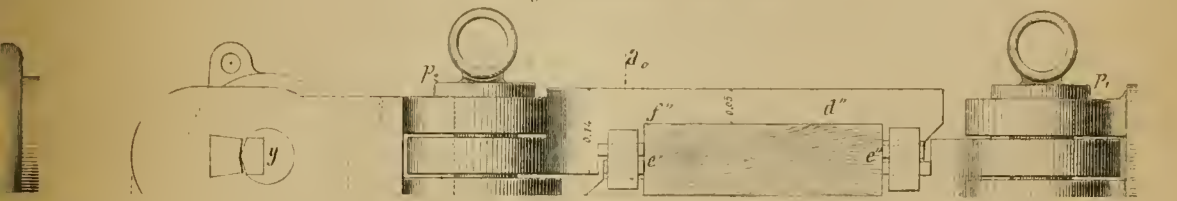
Progetto del Professore G. Curioni

Torino, Lit. Salussolia

DA COSTRUZIONE

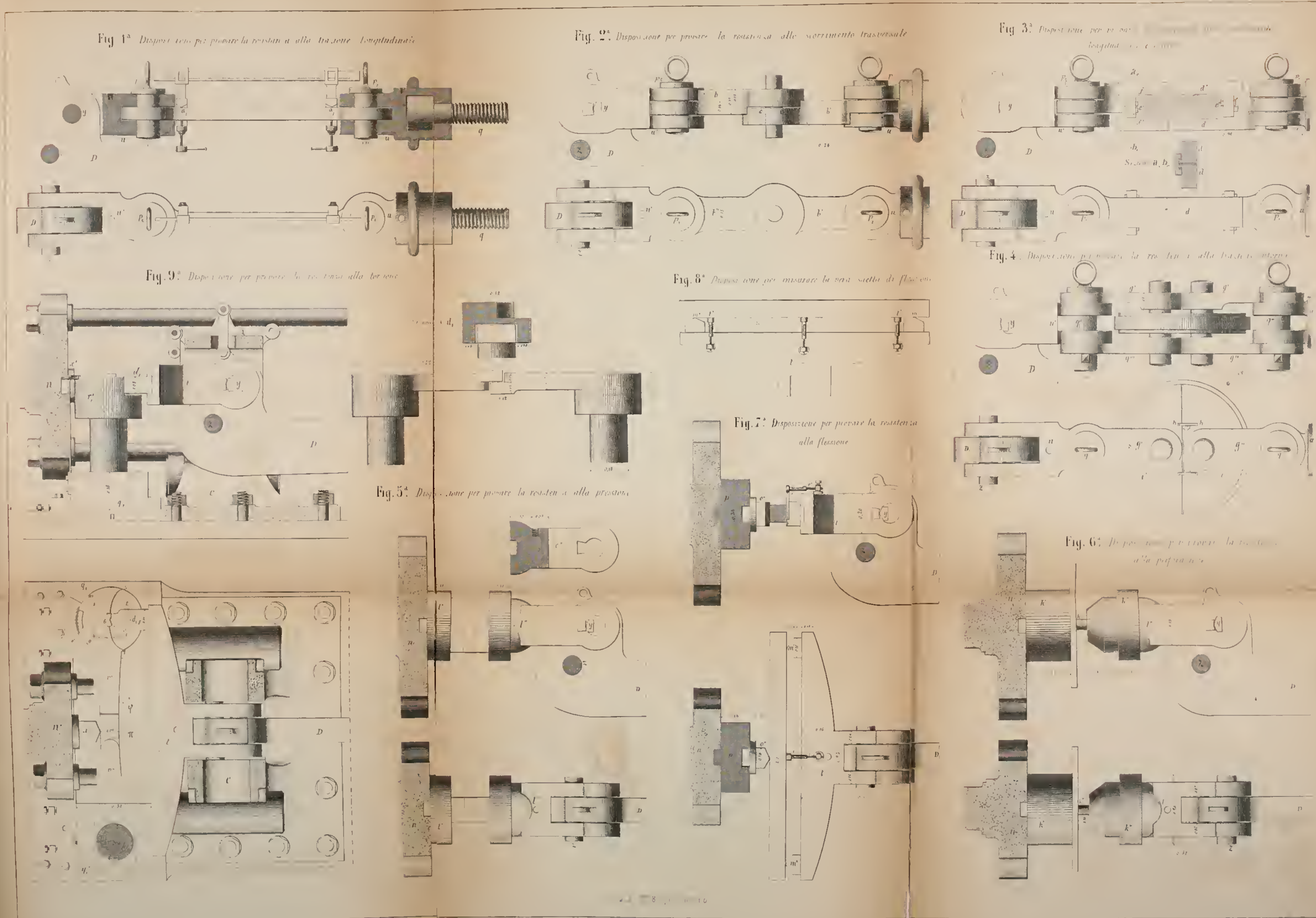
Tav. III

Fig. 3.ª Disposizione per provare la resistenza allo scorrimento longitudinale e laterale.



Macchina per esperimentare la resistenza dei materiali da costruzione

Tav. III



SCIENZE

MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE.

MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA

DELLE SCIENZE

DI TORINO

SERIE II. — TOM. XXXII.

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE.

TORINO

STAMPERIA REALE DELLA DITTA G. B. PARAVIA E C.

MDCCCLXXX.

GLI

EROI DEL LIBRO DEI RE DI FIRDUSI

SAGGIO

DEL

Dott. Prof. ITALO PIZZI

Letta ed approvata nell'adunanza del 22 Giugno 1879

Uno studio particolare sugli eroi dell'epopea persiana, quale si è già fatto sugli eroi di altre epopee sì orientali che occidentali, non è stato fatto finora. L'autore del presente saggio ha ora cercato di far cotesto studio giovandosi di molti materiali raccolti nelle sue letture, allo scopo di dimostrare come anche gli eroi dell'epopea di Firdusi meritino quell'attenzione che già fu data per altri, e di far vedere nello stesso tempo quale era il tipo ideale dell'uomo, perfetto nelle sue qualità fisiche e morali, che quel popolo si era creato e raffigurato nella mente.

Si avverte che la trascrizione dei versi persiani riferiti nelle note è fatta secondo le regole grammaticali conservandovisi interamente le vocali tutte, senza levare o aggiunger quelle che andrebbero levate o aggiunte secondo le regole della prosodia. Scrivo poi sempre *î* e *û* anche quando dovrebbe pronunciarsi *ê* e *ô*, e ciò per maggior facilità secondo il metodo di trascrizione già proposto e adottato dallo Schultze, *Handbuch der persischen Sprache*. Trascrivo anche *khva* e *khvâ* invece di *khô* e *khâ*, come sarebbe richiesto dalle regole della pronuncia.

I. — *Considerazioni generali.*

L'indole speciale del popolo iranico, di quel popolo che stanziatosi in una delle più ampie regioni dell'Asia lasciò tante memorie di sè nella storia della civiltà, quale essa indole risulta chiaramente manifesta nella leggenda epica e nei racconti della storia, si è quella di un popolo eroico e guerriero. Noi siamo stati avvezzi, fino dai primi studi della fanciullezza, a considerare il popolo Persiano come un popolo di barbari e di oppressori, guidato alla conquista da stolta ambizione di re orgogliosi e prepotenti, quando leggevamo nei primi compendi di storia le lotte dei Greci uniti contro il barbaro invasore e le eroiche battaglie delle Termopili e di Salamina. Ma ora l'andamento degli studi è cambiato; e salvi sempre il rispetto e la venerazione per quel libero popolo che tanto gloriosamente difese la patria, ora invece, per la scoperta di tanti monumenti letterari, il popolo persiano considerato nella sua storia interna e più ancora in quelle manifestazioni che rivelano la parte più intima dell'animo suo, come sono la leggenda epica popolare e il codice suo religioso, ci appare ben diverso da quello che avevamo imparato a conoscere nelle prime scuole. L'orizzonte degli studi si è allargato assai più dinanzi agli occhi nostri; e la nostra vista può giungere assai più lontano, e spingersi al di là degli antichi confini. Del resto anche l'antichità rese il dovuto onore, entro la debita misura, a questo gran popolo; ond'è che Erodoto parla con molto rispetto del gran re, di Ciro specialmente e di Dario d'Istaspe, e spesso si mostra pieno di ammirazione per le opere sue. E lo stesso Eschilo che pur combatteva per la patria a Salamina, nella sua tragedia *I Persiani*, esalta il valore di quei guerrieri, celebra la loro maestria nel maneggiar la lancia, e riversa tutta sopra di Serse la colpa della stolta impresa mal riuscita. Dario ancora sembra ammirare il valore del popol suo, egli stesso ha la coscienza dell'indole eroica della sua gente, allorquando sul suo sepolcro di Naksh i Rustem, nella iscrizione che vi è scolpita, così egli si rivolge a chi legge: « E quando tu penserai quante erano le genti che il re Dario governava, tu ne osserva la figura; ecco esse sostengono il mio trono, acciocchè tu le conosca. Onde ti sia noto che la lancia dell'uomo di Persia è giunta lontano;

onde ti sia noto che l'uomo persiano anche lontano dalla Persia ha combattuto battaglie » (1).

Queste testimonianze però vengon tutte dal di fuori, se pur mi è lecito dir così. Poichè Erodoto ed Eschilo, e con loro i Greci tutti contemporanei, solo dalle battaglie sostenute e dal valore spiegato in esse giudicavano del formidabile nemico; e il re Dario, benchè persiano, benchè di stirpe ariana, come egli stesso dice (2), anche ammirando il valore del popol suo, parla più per proprio conto che per altro fine, e a se stesso attribuisce tutta l'opera delle sue armi allorquando, sulla fine della iscrizione di Behistân, dice che tutto ciò ch'egli è venuto fin là narrando, fu operato da lui con l'aiuto di Auramazdâ (3). Ma oltre a ciò, alle guerre guidate dal re Dario e dai suoi successori ben prese parte il popolo persiano con le altre genti che obbedivano al gran re, ma ciò non fu per libera e spontanea volontà dei combattenti. Essi obbedivano mal volentieri a chi li toglieva alle loro case, e mal volentieri combattevano contro gente immune di ogni colpa verso di loro. Benchè quindi anche in queste imprese di re e di satrapi, di principi e di generali sempre si manifesti l'indole operosa e guerriera del popolo persiano, essa non vi si rivela mai tanto, nè tanto appar luminosa e chiara quanto nella leggenda epica popolare, vera figlia della mente e del cuore di quella stirpe, tutta improntata del suo genio, ravvivata tutta dai più caldi e possenti affetti. Quivi appar chiaramente, in quella terribile lotta secolare tra Irâni e Tûrâni, nella quale si riproduceva in terra sotto forme sensibili la gran battaglia tra il bene ed il male, tra Ormuzd e Ahrîmane, quale stima facesse di sè e quale delle altre genti vicine il popolo irânico, qual sorte si attendesse nell'avvenire, qual parte credesse a lui affidata

---

(1) SPIEGEL, *Altpers. Keilinschriften*, p. 52. — KOSSOWICZ, *Inscriptiones palaeo-persicae Achaemenidarum*, p. 76 e segg. L'interpretazione delle parole di Dario data dal Kossovicz « *si forsan tua interest scire quam varias facies et habitum populi Darii imperio subjecti tenebant* » non mi sembra colpire giustamente il pensiero del gran Re, anzi lo travisa e gli toglie di solennità. L'OPPERT (*Voyage scient. en Mésopotamie*, 188) interpreta : « *si tu penses ainsi : Combien sont différentes les provinces que le roi Darius gouvernait* ». La parola del testo *dahyâva* significa veramente *provincia*, ma siccome queste provincie sono raffigurate nel monumento sotto forma umana, ho preferito di tradur *genti*. Intorno ad *azdâ*, certo, noto (armen. *azd*, cognitum), vedi SPIEGEL, *Beiträge zur vergl. Sprachforschung*. 94-97, e KOSSOWICZ, *glossarium palaeo-persicum*, p. 13.

(2) NR. a. *Pârça*, *Pârçahyâ putra*, *Ariya*, *Ariya citra:* Persiano, figlio d'un Persiano, Ariano, di seme Ariano.

(3) Bh. IV, 59, 60. *Ima tya adam akunavam hamahyâyâ tharda vasnâ Auramazdâha akunavam*; quello che io ho fatto, in ogni maniera ho fatto per grazia di Auramazdâ. — Cfr. NR. a, 48, 51, etc.

nella storia del mondo, in qual maniera esso intendesse o a sè venisse raffigurando la vita dell'universo ne' suoi principii e ne' suoi fini. Ond' è che uno studio della leggenda epica popolare, quale ci è pervenuta specialmente nel *Libro dei Re* di Firdusi, ci potrà far conoscere, assai meglio di ogni altra testimonianza, l'indole guerriera, operosa ed essenzialmente eroica del popolo persiano, come da principio si diceva, e un'attenta e minuta disamina dei principali eroi potrà meglio rivelarci quali fossero i tipi ideali che risplendevano dinanzi alla sua mente. È vero che anche nell'*Avesta* compariscono di tanto in tanto le medesime figure eroiche della leggenda popolare, che se ne rammentano bene spesso anche le imprese più grandi (1), ma il modo e il fine coi quali l'*Avesta* ricorda e glorifica questi antichi eroi, sono ben diversi dal fine e dal modo della leggenda, siccome più innanzi verremo esponendo.

Nel corso delle nostre ricerche troveremo ancora molte figure eroiche comuni ad altri popoli ariani, ma, quali si svolsero particolarmente sul suolo iranico, sono esse ben diverse da quelle più antiche e lontane. Così dall'indiano dio Indra, nel quale viene raffigurato il sole, che armato di fulmine combatte con le potenze tenebrose dell'aria e abbatte il mostro Vritra, la nuvola cioè nera e gravida di pioggia, fino all'avestico Thraêtaona e al persiano Frêdûn che incatena il re Dahâk nel Demâvend, che poi diventa re dell'Irân e dà un ampio ordinamento al suo regno e lo divide tra i suoi tre figli, corre una distanza notabile assai. E dovette esser lungo certamente il lavoro della fantasia popolare che dal fenomeno naturale della battaglia celeste tra la luce e le tenebre cavò poi fuori la storia di un giovane re che ricupera il trono de' suoi avi, e fa prigione l'usurpatore, uccisor del padre suo e reo di orribili delitti. Ma qui, nel campo della leggenda epica, la battaglia celeste diventa terrena ed umana, nell'*Avesta* invece, indubbiamente per opera di sacerdoti, diventa tutta di ordine etico e morale (2).

Ora, poichè cotesti eroi iranici tanto sono lontani da quelle prime figure quali si trovano ad esempio nei *Vedi*, essi sono anche assai diversi

(1) Vedi solo per Thraêtaona, quando uccise il serpente Dahâka, *yaçna* IX : *Thraêtaonô yô g'anat azhim dahâkem thrizafanem*, etc.; Th. che uccise il serpente D. di tre bocche. — *Vendîd.* 1; *Thraêtaonô g'añta azhôis dahâkâi;* Th. uccisore del serpente D.; e molti altri punti dell'*Avesta*.

(2) Vedi p. e. il *Mînôkhired* per conoscere sino a qual punto sieno state convertite a senso morale le antiche leggende eroiche, quantunque le imprese degli eroi sieno quasi le stesse. Vedi il testo Pârsi pubblicato dallo Spiegel, *Gramm. der Pârsi-sprache*, p. 133 e segg., laddove sono enumerate le utilità (*çût*) che vennero al mondo dalle opere dei re e degli eroi della leggenda.

dagli eroi di altri popoli ariani, siccome quelli che liberamente furono delineati e scolpiti dal popolo, quantunque abbiano la primissima loro origine comune agli eroi di quelle altre genti. Anche gli eroi persiani, è vero, sono grandi e generosi, dotati di forza e di virtù maggiore degli altri uomini, non indietreggiano dinanzi a nessun pericolo e, come Nestore (1), non si lasciano vincere dalla vecchiaia e dai morbi. Prestano anch'essi la loro opera per qualche grande impresa, anzi talvolta la gloria d'averla felicemente compiuta va in particolar modo loro attribuita. Hanno armi più poderose, più gravi e più robuste degli altri guerrieri, come la freccia di Zàl che scagliata di notte nel campo dei Tûrâni spaventa al giorno seguente i nemici al vederla così smisurata e poderosa (2), e come un dardo di Rustem che lanciato nel campo di Pîrân fa conoscere con la sola sua presenza da qual mano possente sia esso stato scagliato (3). Coteste splendide qualità, inquantochè costituiscono essenzialmente il carattere dell'eroe, sono comuni a tutti gli eroi, non dubitiam di dirlo, di tutti i popoli. Ma gli eroi persiani, se bene avvisiamo, si distinguono da quelli di altre genti in questo specialmente, che non trascendono cioè l'umano giammai, e benchè superiori agli altri uomini, non hanno però quelle qualità che quasi li identificano agli dêi, siccome avvenne degli eroi greci (4). Fu osservato ancora che molti degli eroi sì greci che indiani discendono ordinariamente da Giove o da Indra o da qualche altro iddio; onde si spiega l'appellativo dato loro spesso da Omero di διογενεῖς siccome opposti ai guerrieri del volgo, ἀνέρες δήμου. Nè sarà qui il caso di ricordar la discendenza divina di Ercole, di Aiace, di Peleo, di Achille pei Greci e di Argiuna, figlio di Indra, o di Râma che è una incarnazione (5) di Vishnu per gli Indiani. Gli eroi persiani invece non salgono tant'alto; e benchè favoriti da Dio, come si legge di Yima o Gemshîd col quale Iddio di tanto in tanto s'intratteneva famigliarmente (6), son

---

(1) *Iliad.* I; 250.

(2) Fird. *Shâh.* p. 196, ed. Macan. Calc.: *c'û shab rûz gasht, ang'uman shud sipâh,* | *bi-dân tîr kardand har-yak nigâh:* | *bi-guftand k-în tîr i zâl ast,* ecc.; quando la notte diventò giorno, l'esercito (dei Tûrâni) si raccolse; ciascuno osservò quella freccia; dicevan *essi*: questa è la freccia di Zâl.

(3) Fird. *Shâh.* p. 677: *miyân i sipâh tîr bi-gudhâshtand,* | *mar ân tîr râ nîzah pindâshtand*; fecero (i Tûrâni) passare per l'esercito quel dardo; credettero *essi* quel dardo una lancia.

(4) Hesiodi, *Opera et Dies*, 156 e segg. — Stoll, *Handbuch der Mythologie der Griechen und Römer*, p. 185.

(5) Propriamente discesa di un dio in un corpo umano, skr. *avatâra.*

(6) Fird. *Shâh.* p. 20: *zi-yazdân bi-dâ nav bi-nav bud payâm*; da parte di Dio di tanto in tanto veniva a lui qualche parola. Del resto anche l'*Avesta* conosce questo particolare, allorquando fa dire

tutti figli dell'uomo, nascono, vivono e muoiono come gli altri, sono soggetti alle miserie e ai dolori della vita, e nelle loro vene non scorre il sangue di nessun essere soprannaturale.

Tutto ciò però trova una ragione nella natura stessa della religione iranica, la quale fino dai suoi principii, quale almeno si rivela nei suoi più antichi monumenti, non ferma l'animo del credente su immagini o figure vive e palpitanti di dêi e di dêe, come la religione degli Indiani e dei Greci. Ma ha molte figure astratte, prive di vita, lontane assai da quel tanto di umano che pur si trova negli dêi di altri popoli, impossibili quindi ad esser ritratti da mano di artista, se solo si eccettua la dea delle acque, Ardvî-çûra Anâhita, che si soleva scolpire con diadema, velo e pendenti agli orecchi (1). Quelle figure astratte, quali gli Amesha-çpeñta, non potevano immaginarsi siccome progenitori di alcuna delle stirpi di eroi terreni, senza che venisse ad esserne tocco il carattere essenzialmente morale e spirituale. Oltre di che l'antico Mazdeismo, quantunque accogliesse nel suo sistema alcuni dêi meramente popolari quali Mithra e la Dea delle Acque, inclina assai al monoteismo semitico, come fu osservato dallo Spiegel e da molti altri (2), nel quale spicca l'idea di un dio creatore e provveditore, padre anch'egli degli uomini tutti, ma in senso ben diverso da quello con cui s'intende che Giove fu il progenitore della stirpe di Eaco o il padre di Ercole e di Sarpedone.

In corrispondenza con tutto ciò, vediamo ancora che gli eroi persiani, siccome tali, quantunque abbisognino dell'aiuto della divinità che essi bene spesso invocano nei più difficili momenti, non sono però mai aiutati da essi direttamente con qualche prodigio, come invece avviene assai sovente per gli eroi greci e per gl'indiani. La religione iranica che così rigorosamente separa il male dal bene da immaginar due spiriti, Ormuzd e Ahrîmane, essenzialmente opposti fra loro, creatori, il primo del bene, il secondo del male, ispirando e informando di sè la leggenda eroica tutta quanta, non avrebbe potuto immaginare o approvare che per uno degli

---

ad Ahura Mazdâo che Yima o Gemshid fu il primo uomo col quale egli ha parlato: *ahmâi paoiryô mashyânâm apereçè azem yô ahurô mazdâo*: con lui pel primo degli uomini ho favellato io che *sono* A. M; *Vendîdâd* II, 2.

(1) SPIEGEL. *Erân. Alterthumskunde*, II, p. 54. Il primo a farla scolpire, secondo S. Clemente, *Admonit. adv. gentes*, p. 43, fu Artaserse Mnemone. Vedi anche WINDISCHMANN, *Die persische Anâhita oder Anaïtis*.

(2) Vedi parecchi luoghi delle opere dello SPIEGEL, *Arische Studien*, *Erânische Alterthumskunde*, *Die traditionelle Literatur der Pârsen*, etc.

eroi del Mazdeismo, per renderlo più forte e dargli vittoria sul nemico, dovesse la divinità far quello che fece Minerva per Achille sotto le mura di Troia, ingannando perfidamente Ettore, e rendendo al primo le armi che avevano fallito (1). Tutto ciò avrebbe offeso profondamente il sentimento religioso del popolo iranico; e l'inganno e la frode di Minerva sarebbero stati considerati come opera di Ahrîmane, non di un dio giustamente protettore. Ma, anche senza di ciò, gli eroi persiani non sono mai soccorsi da un intervento immediato della divinità; essi operano e compiono le loro gloriose imprese protetti soltanto dal loro valore, nè gli dêi violano per essi le leggi della natura, siccome fanno per i loro protetti gli dêi dell'Olimpo scandinavo e germanico (2). Non sono essi invulnerabili come Achille; e se Isfendyâr, il giovane figlio di Gushtâsp, ci è rappresentato con cotesta qualità nel *Libro dei Re* di Firdusi, si noti che la leggenda di Isfendyâr e delle sue imprese contro di Rustem è di gran lunga posteriore alle più antiche parti dell'epopea persiana, ed è ispirata da idee tutte particolari e opposte con influenze straniere, come vedremo in un altro scritto che farà seguito al presente (3). Non hanno armi fatate che li rendano invisibili come la Tarnkappe o Tarnhaut di Sîfrido nell'*Edda* e nei *Nibelungen* (4); e solo potrebbe far eccezione l'incorruttibile corazza di Rustem, detta *bebribeyân*, composta con la pelle di un leone da lui ucciso. Si noti però che questa notizia non ci viene da Firdusi, ma bensì da fonti secondarie e di molto tarda età (5); onde anche per questo punto ritorna vero ciò che prima si diceva. Nè conosce la leggenda armi che sieno dono degli dêi ai suoi eroi, come l'armi di Achille e di Enea fabbricate da Vulcano (6), o come i teli procreati da Brahma, o da Varuna, o dal Vento, o dal Fuoco, o lavorati dai Guhyaki, quali vediamo adoperarsi dagli eroi indiani nei loro combattimenti (7), o come la spada di Sigurdh che era fabbricata coi

(1) *Iliad.* XXII, 276-277.

(2) Wolf, *Die Deutsche Götterlehre*, p. 43.

(3) Spiegel, *Erân. Alterthumsk.* I, p. 659 e segg. — Vedi anche il mio *Discorso sull'epopea persiana* da me premesso alla traduzione dei *Racconti epici del Libro dei Re di Firdusi*, p. 66-67.

(4) *Aventiure*, III, 97, ed. K. Bartsch.

(5) Firdusi dice soltanto che essa è più forte delle altre corazze e degli altri arnesi guerreschi: *hamî nâm i babribayân khvânad-ash,* | *zi-khaftân u g'avshân fuzûn dânad-ash; egli* la chiama col nome di Babribayân, egli la conosce superiore all'*altre* corazze e agli *altri* arnesi.

(6) *Iliad.* VIII, *Æneid.* VIII.

(7) *Râmâyana*, *Adikanda* 30, 31. *Yuddhakanda* 52, etc. — Cfr. il *Mahâbhârata* nell'episodio di Ambâ laddove Bhîshma e Paraçu-Râma combattono con armi divine.

frammenti della clava di Odhino. Prevale quindi in tutti l'umano, non il divino; e la leggenda, benchè li abbia glorificati ne' suoi canti come uomini di preclara virtù e di sommo valore, li ha però lasciati sempre uomini nè più nè meno, mentre in Grecia quegli eroi, quei διογενεῖς o figli di Giove, diventarono ben presto semidei, ἡμιθέοι (1), onorati poi di culto dalle genti e propiziati con offerte e libazioni. Avviene quindi che, liberi così da ogni immediata protezione divina e abbandonati a se medesimi, senz'altra scorta che la propria coscienza ed il proprio valore, gli eroi persiani si mostrino più spediti e pronti nelle loro imprese, più risoluti nelle loro azioni, e meno dubbiosi e lenti nell'abbracciar qualche consiglio, e nel prender qualche deliberazione. Laddove gli eroi indiani, anche quando non sono asceti contemplanti e non hanno come questi da domar se medesimi e da frenar l'ira (2), ma hanno qualche impresa guerresca da compiere, rimangono come impacciati nel carattere divino che li investe, e quasi oppressi dalla possa soverchiante del dio, di cui essi sono in terra i rappresentanti (3).

Tale è il carattere dell'eroe iranico, quale almeno ci si manifesta nella leggenda epica, forte, operoso e intraprendente, signore di sè, pronto all'operare, senza alcun sostegno fuor che la coscienza del bene e il proprio valore. Questo tipo doveva uscir tale dalla immaginazione di quel popolo, elaborato e fecondato, per dir così, dalle idee di quella sua religione tutta umanitaria e pratica, che comandava il lavoro e santificava l'operosità, collegando tutte le buone qualità dell'uomo a combattere contro il comune nemico, il male. Ma se l'eroe persiano, quale l'abbiamo or ora descritto, è il figlio genuino, in gran parte almeno, della fede religiosa, come tale ancora partecipa del difetto inerente a quella fede stessa, che scinde in due tutto quanto il creato naturale e soprannaturale, e attribuendo tutto il bene ad Ormuzd e il male ad Ahrîmane, mostra di non aver visto nel mondo altro che uno sconcerto, una lotta inevitabile e fatale, senza potersi elevare fino a quella più alta idea filosofica che vede l'armonia in tutto quanto il creato e proclama necessari in esso il bene

(1) *Hesiodi Opera et Dies*, 156: ἀνδρῶν ἡρώων θεῖον γένος, οἳ καλέονται | ἡμιθέοι προτερῇ γενεῇ κατ'ἀπείρονα γαῖαν.

(2) Wurm, *Geschichte der indischen Religion*, p. 112: « Nicht Völker zu bezwingen, sondern sich selbst zu herrschen, sich zu versenken und sich aufzulösen wie ein Tropfen im Ocean,... das ist nur das Ideal ».

(3) Trezza, *Studi critici*, p. 31: « In Rama l'eroe si muove appena impedito dalla soverchiante presenza del dio ».

e il male. In alcune dubbie occasioni avviene quindi che la mente dell'eroe si oscuri all'improvviso; egli non sa decidere se ciò ch'egli vede o sente, è opera di Ormuzd o di Ahrîmane; non discerne il bene dal male, perde a un tratto l'energia dell'animo suo, e restando inerte nell'improvviso dubbio del suo cuore, o si abbandona a un inutile dolore, o si lascia vincere da infondati sospetti (1). Così allorquando all'illustre Sâm è annunziato dalla nutrice che gli è nato un figlio bello e ben fatto, ma coi capelli bianchi, il valoroso eroe, se ne dispera (2), e pensa: « Se un giorno i principi verranno alla mia casa e vedranno questo figlio con questi sinistri segni e me ne chiederanno conto, di questo mio figlio cioè che è simile a un figlio di Ahrîmane ed ha gli occhi neri e i capelli bianchi alla maniera di un gelsomino, dirò forse io che esso è prole di un dêvo, di un demone, o una fiera variopinta, o veramente una Perî? » (3). In tal dubbio della mente l'eroe perde la retta via della ragione (4), e fa esporre sull'Alburz l'unico suo figlio, perchè con quel tristo segno esso non gli sembra di pura e genuina origine. Così, quasi per fatal conseguenza, ovvero come per un circolo vizioso, la stessa fede mazdeistica che impone dal guardarsi da tutto ciò che ha origine da Ahrîmane, fa sì ancora che il soverchio zelo e l'eccessivo scrupolo posti in ciò facciano poi cadere l'eroe stesso nel dubbio che è creazione di Ahrîmane, e in forza di quel dubbio lo inducano poi ad operare ingiustamente e contro natura.

Ma ora, confrontati gli eroi persiani con gli eroi di altri popoli sì orientali che occidentali, vediamo in qual maniera le loro figure si sieno svolte e delineate sul suolo iranico e quale dei due libri l'*Avesta* e il *Libro dei Re*, ne abbia conservati i tratti più genuini ed antichi.

Per far ciò converrà prima notare che fondamento principale di tutta quanta la religione iranica si è la dottrina del dualismo, secondo la quale il dominio dell'universo si contrasta fra due esseri soprannaturali, Ormuzd

(1) Il dubbio e il sospetto sono appunto creazione di Ahrimane: *âat... paityârem frâkerentat anrô mainyus pourumahrkô, aghemc'a vîmanôhîm:* allora creò una opposizione Anra Mainyu pieno di morte, il maligno dubbio. *Vend.* I, 27, 28.

(2) Fird. *Shâh.* p. 97: *bi-bud az g'ihân yak-sarah nâ-umîd.*

(3) Fird. *Shâh.* p. 98: *az-în bac'ah c'ûn bac'ah i Ahriman, | siyah c'ashm u mûy-ash bi-sân i saman, | c'û âyand u pursand gardan-kashân, | bi-bînand în bac'ah i bad-nishân, | c'ih gûyam kih în bac'ah i dîv kist, | palang i dû rang ast, yâ khvad pari-st ?*

(4) Fird. *Shâh.* p. 97: *shud az râh i dânish bi-dîgar manish.*

o Ahura Mazdâo e Ahrîmane o Anra Mainyu, tra il bene cioè rappresentato dal primo e tra il male raffigurato nel secondo. Cotesta dottrina ha la sua radice nelle condizioni speciali del popolo iranico sì materiali che morali, siccome in un altro mio lavoro cercai di dimostrare (1). Ora assai diversamente cotesta lotta tra il bene e il male fu intesa dal popolo e dai sacerdoti. Il popolo nei suoi canti epici, nelle sue leggende che egli stesso creò ed abbellì con giovanile entusiasmo, si raffigurò i suoi eroi grandi e generosi, operosi e amanti di gloria, ma sempre uomini e non semidei o incarnazioni di esseri soprannaturali, come già abbiamo notato, non soccorsi mai con miracoli o con incantesimi e malíe. La lotta quindi che essi devono sostenere contro il male, è lotta tutta terrena; hanno, come l'Ercole dei Greci, da purgar la terra infestata da mostri e da esseri maligni, combattono con dêvi o demoni figli delle tenebre, e più spesso ancora coi Tûrâni destinati ad essere in perpetuo gli irrequieti e non mai domati nemici degli Irâni. Le loro armi, come già diceva, sono tutte terrene e materiali; spada e laccio, arco e dardi, corazza ed elmo sono la natural difesa dell'eroe che si reca al combattimento. Gli eroi invece dell'*Avesta* e in generale degli altri libri religiosi sono ben diversi. Le armi che essi usano sono tutte armi spirituali; e come arma contro Ahrîmane e i suoi dêvi i sacerdoti pongono in mano ai loro campioni il sacro libro detto *Vendîdâd*, che in zend suona *vîdaêvôdâta*, dato cioè o creato contro i dêvi, nel quale si contengono i santi insegnamenti per allontanarli e render vane le loro opere. Avviene quindi che si legga nell'*Avesta* come un giorno Ahrîmane domandasse a Zarathustra, il Zoroastro degli antichi, quali fossero le sue armi, e che il profeta ricordasse come sue armi migliori i mortai nei quali si prepara la sacra bevanda, le tazze, la pianta *haoma* e le parole pronunciate da Ahura Mazdâo (2). La qual risposta ci fa ricordare quella data da Paraçu-Râma nel *Mahâbhârata* a Bhishma, il quale domandavagli come mai potesse combattere a piedi e senz'armi. Râma allora rispondeva esser suo carro la terra, suoi cavalli i *Vedi*, suo cocchiere l'aria, sua corazza le principali preghiere dei *Vedi* (3). Così s'incontrano nelle medesime cose l'*Avesta* e il poema indiano, opera ambedue di sacerdoti e ispirati dalle loro idee soltanto. Il

(1) Vedi i miei *Racconti epici*, capo II, 4, 5 del *Discorso sull'epopea persiana.*

(2) *Vendîd.* IX, 9: *hdvanac'a tastac'a haomac'a vac'a mazdôfraokhta mana zaya açti vahistem.*

(3) *Mahâbh.* ed. Calc. I. 11: *rathô me medinî, bhîshma, vâhâ vedâh sadaçvavat, | sûtaç-c'a mâtariçvâ vai, kavac'am vedamâtarah.*

popolo non giunse mai a cotal punto di astrazione, e preferì quindi di attribuire ai suoi eroi armi materiali e terrene, consentanee assai più al vero ed essenziale carattere dell'eroe.

Senonchè quello stesso zelo religioso che condusse i sacerdoti a prescrivere mille pratiche minute per ogni istante, si può dire, del giorno e della notte, quali almeno si trovano nel *Vendîdâd*, e dalle quali poi il Bréal conchiudeva intorno alla tarda epoca dei libri zendi (1), negli ultimi tempi e nei libri più recenti giunse ancora stranamente a far condannare gli antichi eroi, tanto benemeriti per le loro opere di valore, e come tali pur celebrati dall'*Avesta*. Leggesi infatti nel *Mînôkhired*: « Perchè poi Gim, Frêdûn, Kahôç e quegli altri regnanti che ottennero dagli Yazata potenza e regno, non sieno saliti al paradiso, ciò avvenne perchè essi non furono grati verso il loro signore (2) ». E qui veramente si potrebbe opporre che anche la leggenda popolare del *Libro dei Re* condanna Gemshîd o Gim per la sua superbia e ingratitudine; ma ciò non avviene mai nè per Kâvus nè per Frêdûn; Frêdûn poi è in essa un tipo di perfezione e bene spesso vi è ricordato come il modello dei principi che dovrebbero tutti somigliarsi a lui (3).

Per tutte queste ragioni parrebbe che si dovesse anche conchiudere che gli eroi della leggenda popolare, eccettuatane l'ultima parte che è di data evidentemente posteriore, conservino assai più che l'*Avesta* i tratti primitivi e genuini dell'eroe quale esso nacque e sorse nella libera e poetica fantasia del popolo. Prima infatti dei sacerdoti e dei collegi di sacerdoti vi sono i credenti, e al codice sacro che espone un insieme di idee religiose ridotte a sistema immutabile dalla speculazione filosofica e teologica, precede sempre la leggenda, la fiaba e la mitologia popolare. Così tra il Giove di Omero e il Giove di Cleante è un lungo lavoro di speculazione filosofica per la quale il dio del cielo azzurro si trasmuta in un dio razionale, onnipotente e previdente quale poi si venne insegnando nelle scuole di metafisica. E tra l'Indra, che è il sole, degli inni vedici, adorato da quella gente primitiva nella sua natural potenza quale essenzialmente inerente ai fenomeni del cielo, all'Indra delle parti più recenti, brahmaniche

(1) Bréal, *Sur la composition des livres zends*, in *Mélanges de Myth. et ling.* p. 207.

(2) *Mînôkhired* in Spiegel, *Pârsi-Gramm.* p. 131: *u ǵim u frêdûn u kahôç u aware êsan qadâêân ke ezh yazdan varz u tuangarî ves vandât, u nê madan i êsan ô vahêst, u pac'a an i ka andar qês qadhâê anaçpâç bût hent.*

(3) Fird. *Shâh.* p. 235.

e vishnuitiche, del *Mahâbhârata*, corre un gran tratto (1). Onde si può bene affermare che laddove le splendide e viventi figure degli eroi popolari si incontrano rappresentate come di esseri dotati di morali virtù soltanto, ovvero siccome simboli astratti, e rivestite di un carattere sacerdotale e mistico, quivi dobbiamo riconoscere l'opera più recente e posteriore delle scuole filosofiche e sacerdotali, l'appropriarsi che fa la speculazione metafisica delle idee religiose popolari per elevarle dallo stato di semplice mito o di umile fiaba al grado più nobile di sistema e di dogma. Questo lavoro lento di trasformazione mette poi capo, come ognun sa, alla compilazione del codice sacro. Evidentemente quindi gli eroi del *Libro dei Re* conservano i lineamenti più primitivi che non gli eroi, che pur sono i medesimi, dell'*Avesta* e degli altri libri religiosi, quantunque il *Libro dei Re*, quale ce l'ha tramandato Firdusi, sia del decimo secolo dell'Era volgare e l'*Avesta* sia di molti secoli anteriore. Nè ciò ne deve recar meraviglia; Firdusi infatti toglieva i suoi racconti da antichi libri, ma molti anche ne prendeva dal popolo, presso il quale s'eran conservate antichissime tradizioni; egli ricorre spesso alla narrazione dei *Dihgân* che erano gente di campagna e conoscevano essi soli, secondo un passo del *Behâr i 'ágém* (2), le antiche leggende. Così la morte di Rustem gli fu narrata da un vecchio agricoltore di nome Azâd-serv (3), e la storia di Bîzhen, che non si trovava nei libri da lui consultati, gli fu raccontata una notte da una delle sue mogli (4).

Una eccezione soltanto, se non in tutto almeno in parte, potrebbero fare a tutto quello che abbiamo detto, i così detti *Yasht*, o preghiere od inni che formano la raccolta del *Khorda-Avesta* o *piccolo Avesta* destinato ai laici; ed ecco come. Secondo lo Spiegel (5), nel sistema religioso dell'*Avesta* i sacerdoti hanno dovuto accettar molte divinità e molte figure eroiche, alcune comuni a tutta la stirpe, alcune locali soltanto, per non contraddire di troppo alla fede popolare, inchinevole per natura alle antiche leggende della mitologia. Per tal ragione adunque cotesti inni che dovevano essere riserbati al popolo, ritraggono un poco più delle altre

---

(1) Vedi la monografia dell'Holtzmann, *Indra nach den Vorstellungen des Mahâbhârata* nella Zeitschrift d. D. M. G. XXXII, p. 290 e segg.

(2) Vullers, *Lexicon persico-lat. etymol.* v. *dihgán.*

(3) Fird. *Shâh.* p. 1229: *yakî pîr bud, nâm-ash âzâd-sarv*: eravi un vecchio, il suo nome Azâd-serv, ecc.; e più innanzi: *bi-gûyam sukhun ân-c'ih z-û yâftam*, dirò le parole quali da lui le intesi.

(4) Fird. *Shâh.* p. 754.

(5) Spiegel, *Erân. Alterthumsk*, II, p. 81.

parti dell'*Avesta* il carattere popolare degli eroi che bene spesso vi sono rammentati, quantunque evidentemente le loro imprese, che la leggenda epica popolare glorifica come guerriere e terrene, sieno sovente colorite in modo al tutto diverso siccome fossero essi dotati di potere soprannaturale e in grado di dispensar grazie ai mortali alla stessa maniera dei santi della religione cattolica. Così nel *Farvardîn-Yasht* si trova invocata la Fravashi di Thraêtaona, il Frêdûn valoroso e giusto di Firdusi, siccome utile per arrestar le malattie, le febbri, l'impurità, le febbri fredde, lo svenimento, per impedire i danni prodotti dai serpenti (1). Valga ora questo esempio tra i molti altri che si potrebbero recare innanzi; ma da questo soltanto si vedrà quanto l'*Avesta* in generale, anche col carattere più popolare e leggendario del *Khorda-Avesta*, insieme agli altri libri religiosi, si ritrovi lontano, quanto ai suoi eroi, dalla leggenda popolare del *Libro dei Re*, e quanto questa alla sua volta sia lontana da quel tempo in cui gli eroi e gli dêi erano nascenti, come si trova nei *Vedi*. I quali rappresentano le loro figure eroiche e mitologiche con un linguaggio tanto incerto, da non saper sovente se vi si parli veramente di un dio o del fenomeno dal quale il dio è nato, tanto che il Müller fondava su ciò, almeno in gran parte, la sua teorica della nascita dei miti, siccome una illusione o un inganno fatto alla mente dal linguaggio di quei popoli primitivi (2).

II. — *Gli eroi delle famiglie reali.*

Nel cominciare le nostre ricerche intorno all'uno e all'altro degli eroi delle leggende epiche persiane, stimiamo necessario il dichiarar prima quali saranno gli eroi dei quali più precisamente ci occuperemo, quali quelli che toccheremo alla sfuggita, e il perchè di cotesta distinzione. Ricorderemo pertanto come prima cosa che noi rivolgiamo il nostro studio a quelle figure leggendarie di eroi soltanto, che ricevettero un ampio e compiuto svolgimento nella leggenda popolare, e non a quelle figure che sembrano piuttosto mere astrazioni di filosofi e di sacerdoti, come Hôsheng

(1) *Yasht* XIII, 131. Cfr. anche *Vendidâd* VII, 45 e il commento che fa lo Spiegel alle oscurissime parole del testo. *Comment. über das Avesta*, I, p. 228.

(2) M. MÜLLER, *Nuove letture sulla scienza del linguaggio*, e *Quattro lezioni d'introduzione alla scienza delle religioni*, trad. di G. NERUCCI.

e Thahmûrath, o trovate appositamente per riempir le apparenti lacune del racconto epico, come sono Zav e Ghershâsp, gli ultimi della dinastia dei Pêshdâd (1). Quindi il primo re e primo uomo, noto nel *Libro dei Re* col nome di Gayûmerth (2), e gli altri tre re, i primi dei Pêshdâd che gli successero nel regno, Hôsheng cioè, Thahmûrath (3) e Gemshîd, non potranno essere trattati qui con tutta l'ampiezza con la quale parleremo di altri re e di altri eroi. Eppure Gemshîd o Gem come suole anche dirsi, rammentato nell'*Avesta* col corrispondente nome di Yimô-khshaêta, è una figura mitica di non piccola importanza, ritrovandosi che essa risale fino al periodo ariano, essendo comune agli Indiani ancora e corrispondendo al giusto e pio Yama che fu il primo uomo (4). Ma la più antica leggenda eroica ne fa soltanto come un promotore della stirpe umana, un inventore di molte arti, e il *Libro dei Re* non sa che parlar delle sue invenzioni che già toccano il lusso e la mollezza, e del suo fallo quando volle farsi adorare come un dio (5). Del resto Firdusi non ci dice nulla di veramente eroico di lui, e il racconto ch'egli fa, si assomiglia a quello di Prometeo, presso Eschilo, alle Ninfe Oceanine quando loro espone ciò ch'egli ha fatto per la stirpe umana (6). Si vede che la leggenda che risguardava Gemshîd, non aveva fatto un passo più in là di ciò che di lui ci dice l'*Avesta*, allorquando Ahura Mazdâo gli comanda di promuovere questi mondi terreni, di proteggerli e di farli prosperare (7). Eppure l'*Avesta* ci parla ancora della costruzione di quel recinto, detto *vara* in zend, laddove Yima si ridusse a vivere; e tale argomento poteva esser soggetto alla leggenda popolare, e forse lo sarà stato; ma Firdusi sembra ignorarlo. Quello poi che si legge di Gemshîd nei così detti *Rivâyet* o tradizioni, quali furono pubblicati dallo Spiegel (8), è tutto di

(1) Non si confonda questo Ghershâsp con l'altro Ghershâsp della famiglia dei Çâma, in zend *Çâma Kereçâçpa* (*yasht* XIII, 61, 136) del quale parleremo al 3° paragrafo.

(2) In zendo *Gayô-meretan;* di lui si sa ben poco nell'*Avesta*. Vedi WINDISCHMANN, *Zoroastr. Studien*, p. 212 e segg. SPIEGEL, *Erân. Alterthumsk.* I, p. 508 e segg.

(3) In zendo *Haoshyanha* e *Takhmô Urupa azinavâo*, cioè T. U. rivestito di pelli (?). Vedi su quest'ultima oscura parola, che forse sta per *zaênônhvant*, n.-pers. *zîndvend*, armato, SPIEGEL, *Erân. Alterth.* I, p. 518.

(4) SPIEGEL, *Erân. Aterth.*, I, p. 439 e segg.

(5) FIRD. *Shâh.* p. 18 e segg.

(6) Æschyl. *Prometh.* 436-506.

(7) *Vendidâd* II, 13: *âat mê gaêthâo frâdhaya, âat mê gaêthâo varedhaya, âat mê viçâi gaêthanâm thrâtâća haretâća aiwyâkhstaća.* Ma tu amplia il mio mondo, ma tu fa prosperare il mio mondo, ma tu mi obbedisci qual protettore, nutritore e sorvegliator dei mondi.

(8) SPIEGEL, *Die traditionelle Literatur der Parsen*, II, p. 317 e segg.

natura astratta che ha un significato etico e morale, invenzione quindi di sacerdoti, più che lavoro della fantasia popolare. Il *Mînôkhired* (1) ricorda quelle medesime cose; ora il *Mînôkhired* è di data assai recente ed è libro di natura essenzialmente religiosa. Si leggono tuttavia di Gemshîd molte cose e molte avventure nei poemi epici posteriori al *Libro dei Re* (2), ma queste non hanno nulla di quello che suol chiamarsi veramente eroico; sono storie tutte casalinghe e di interesse locale, narrandovisi le avventure di Gemshîd allorquando egli fuggendo da Dahâk che gli aveva tolto il regno, visse lungamente incognito nel Segestân, vi sposò la figlia di quel re, finchè poi, scoperto e condotto dinanzi al suo nemico, fu da lui fatto segar per il mezzo. Firdusi non ci racconta nulla di tutto ciò, e solo rammenta come il profugo re fu visto un giorno dopo cent'anni errar solo e tristo sulle sponde del mar della Cina (3). Cotesta circostanza potrebbe provarci che anche a Firdusi erano note quelle leggende locali, e ciò sarà anche vero; ma appunto perchè esse erano d'importanza molto secondaria, egli non le accolse nel suo poema; e ben poco esse valgono per noi. Coteste leggende casalinghe di Gemshîd ci fanno venire in mente la *Telegonia* di Eugammone di Cirene, il quale, non trovando più alcuna leggenda epica non tentata da altri poeti, si accontentò di un argomento di ben meschina importanza, e narrò tutto ciò che fece Ulisse dopo il suo ritorno a casa fino alla sua morte (4).

Gli altri tre re che precedettero Gemshîd nel regno, Gayûmerth, Hôsheng e Thahmûrath, come anche osserva lo Spiegel, mostrano ancor di più la loro natura astratta e morale, e su di essi abbiamo tre monografie del Windischmann (5). Tutto quello poi che espone lo Spiegel nelle molte sue opere, basta per renderci conto qual significato abbiano questi tre re in tutto il sistema religioso iranico; Firdusi invece sa ben poco di loro, o almeno quello soltanto che si trova nell'*Avesta* e negli altri libri religiosi sul loro conto e nulla più (6). Per tutte queste ragioni adunque, tacendo

(1) *Minôkhired* in Spiegel, *Pârsi-Gramm.* p 135 e segg.

(2) Vedi queste leggende in fine dell'edizione del *Libro dei Re* procurata da Turner Macan, Calcutta 1829, p. 2099-2296.

(3) Fird. *Shâh.* p. 26: *çadum sâl rúzî bi-daryáy i C'în | padîd âmad ân shâh i nâpâk-dîn*: al centesimo anno, un giorno, sul mar di Cina si mostrò quell'empio re.

(4) Lübker, *Real-lexikon des classisch. Alterthums*, v. *Epos*, 4.

(5) Windischmann, *Zoroastr. Studien*, agli articoli: *Haoshyaoha*, p. 190; *Takhmô-urupis*, p. 196; *Urmenschen*, p. 212.

(6) *Minôkhired* in Spiegel, *Pârsi-Gramm.* p. 135 e segg. — Fird. *Shâh.* p. 14 e segg.

dei regni dei sopraddetti re e rimandando all'ultima parte di questo scritto il parlar più precisamente di Dahâk, cominceremo dal primo vero eroe che si presenta nella lista dei re delle famiglie reali, le nostre più particolari ricerche.

I re della epopea persiana sono divisi in due famiglie, in quella dei *Pêshdâd*, zendo *paradhâta*, e in quella dei *Kay*, zendo *Kava* e *Kavan*. La prima comincia con Hôsheng, l'*Haoshyanha* dell'*Avesta*, e quarto di essa si è Frêdûn. Questo nome *Frêdûn* è quale si legge nei libri pârsi e nei libri persiani, in pehlevico suona *Frîtûn*, in armeno *Hrodan* per il passaggio dell'*f* persiana in *h* armena, e in zendo *Thraêtaona*. Spetta poi al Burnouf l'aver ritrovato nel zendo *Thraêtaona* il persiano *Frêdûn*, allo stesso modo che il ted. *fliehen* corrisponde al gotico *thliuhan* (1). La pronuncia più recente *Ferîdûn* o *Afêrîdûn* che trovasi pure in Firdusi (2), è scorretta, come l'attesta lo Spiegel (3). Questo eroe al quale la leggenda persiana attribuisce tante e così gloriose imprese, è una figura mitica che non solo va riferita a quel tempo nel quale Indiani e Irâni vissero più lungamente insieme, dopo che essi si erano separati dagli altri popoli indo-europei, ma ancora a quel periodo assai più lontano nel quale tutti cotesti popoli si trovarono a vivere riuniti in una sola regione.

Quel fenomeno naturale del sole che vince e disperde le tenebre, che squarcia le nuvole e purifica il cielo dopochè la benefica pioggia è discesa sugli arsi campi, e il fulmine ha strisciato sinistramente lungo gli strati dell'atmosfera, diede origine, come ognun sa, a un numero infinito di miti presso tutti quanti i popoli indo-europei. Presso di essi quel fenomeno naturale altro non significò che una lotta tra un dio della luce e un dio delle tenebre, con la sconfitta sempre di quest'ultimo. Il dio Indra degli Indiani non è che il sole; egli, assaggiata la sacra bevanda del *Soma* (4), si prepara alla battaglia, uccide col fulmine il mostro Vritra nel quale è raffigurata la nuvola nera e gravida di pioggia, e riconduce la serenità nel cielo dopo aver ristorata la terra con le benefiche acque. I miti greci di Apollo uccisor del serpente Pythone, e di Ercole che uccide il cane

---

(1) M. Müller, *Nuove letture sulla scienza del linguaggio*, trad. di G. Nerucci, II, p. 204. — Spiegel, *Uebersetzung des Avesta*, III, p. LX. — Spiegel, *Pârsi-Gramm.*, p. 195.

(2) Fird. *Shâh.* nella storia del regno di Frêdûn, p. 47-94. La forma *âfarîdûn* è più rara assai, p. 30: *kug'â nâm i û âfarîdûn bûd*, e p. 58: *bi-sih bahr kard âfarîdûn g'ihân*.

(3) Spiegel, *Erân. Alterth.*, I, p. 537.

(4) De-Gubernatis, *Mitologia Vedica*, p. 198. — Holtzmann, *Indra nach den Vorstellungen des Mahâbhârata*, nella *Zeitschrift* der D. M. G. XXXII, p. 290 e segg.

Orthros (ὄρθρος, Fορθρος = skr. *vritra*), sono pure la stessa cosa del mito indiano; ma qui già con Ercole il dio celeste diventa un essere più umano, ciò che spicca assai più nel mito italico di Ercole e di Caco, nel quale il Bréal in una sua monografia ha riconosciuto un lontano eco del mito naturale, e in Ercole lo stesso Giove, il dio del cielo (1). Nelle leggende epiche, germaniche e scandinave, il rappresentante del dio è l'eroe Sigurdh o Sifrido, l'eroe dagli occhi rilucenti, che uccide il dragone Fafnir e poscia, secondo i *Nibelungen*, si bagna in quel sangue e diventa invulnerabile (2).

Questo mito invece, tutto di origine celeste; anzi il principale tra i miti solari, ha avuto sul suolo iranico un ben ampio svolgimento; e fa meraviglia, come diceva il Burnouf (3), che un dio del cielo, quale esso figura nel mito antico indo-europeo, sia poi diventato presso gli Irâni il capo e il fondator leggendario della loro grande monarchia, un re di tutta la terra, come spesso lo appella la leggenda (4). Il re Frêdûn discende da Gemshîd, appartiene alla famiglia degli *âtwya* (5), il qual nome ci fu conservato nella parola *âbtîn* che è il nome del padre dell'eroe, secondo Firdusi; e suo luogo di nascita, secondo l'*Avesta*, è il Varena (6), nel quale lo Spiegel vorrebbe riconoscere il Taberistân (7). La sua nascita è riguardata nell'*Avesta* come un benefizio, una grazia speciale concessa dal cielo al padre suo, perchè egli, secondo fra tutti gli uomini, estrasse nel sacrifizio l'*haoma*, il succo della pianta haoma sacra al Genio dello stesso nome (8). La principale sua impresa per la quale esso è più sovente ricordato nell'*Avesta* e nella quale egli si trova al posto del dio del cielo, si è quella di avere ucciso il serpente Dahâka che qui rappresenta, secondo

---

(1) Bréal, *Hercule et Cacus*, étude de *Mythologie*, in *Mélanges de Mythologie et de Lingustique*, p. 56 e segg.

(2) *Das Nibelungenlied*, Avent. XV, 899-902, ed. Bartsch. — Simrock, *Die Edda*, p. 176, *Fafnismâl*. — Laveleye, *La Saga des Nibelungen dans les Eddas*, p. 202.

(3) M. Müller, *Nuove letture sulla scienza del linguaggio*, II, 205, trad. del Nerucci.

(4) Fird. *Shâh.* p. 48: *shâh i zamîn*, etc.

(5) Skr. *âptya*, da *ap* skr. e zend, acqua, onde *âthwya* e *âptya* significano abitator delle acque, *Wasserbewohner*, Iusti, *Handbuch der zendspr.* Il pehlevico *âçpiân* per *âthwya* è una corruzione posteriore.

(6) *Vendîd.* I, 18: *Varenem yim c'athrugaoshem, yahmâi zayata Thraêtaonô*; il Varena che ha quattro angoli, nel quale è nato Thraêtaona.

(7) Spiegel, *Uebersetz. des Avesta*, III, p. LX.

(8) *Yaçna*, IX, 23-24: *hâ ahmâi ashis erenâvi, tat ahmâi g'açat ayâptem, yat hê puthrô uç zayata viçô çûraydo, Thraêtaonô*; questa grazia gli sopravvenne, questo benefizio gli venne, che gli nacque cioè un figlio di eroica stirpe, Thraêtaona.

l' antico mito, le potenze tenebrose dell' aria. Nell'*Avesta* l'eroe è bene spesso rammentato come in atto di pregar qualche divinità acciocchè gli conceda di abbattere il suo potente nemico; e queste divinità sono: la dea delle acque Ardvî-çûra Anâhita, il genio Drvâçpa detto anche Gôsh, il genio dell'aria Râman, il genio femminile della purità, Ashi Va*n*uhi (1). Si ricorda ancora nell'*Avesta* (2) un Vifra-navâza che Traêtaona chiamò a sè, sotto la forma di un uccello, d'un kahrkaça. Ma se pur qui sotto è adombrato un mito naturale, le parole del testo tanto sono oscure da non lasciar discernere di qual cosa si tratti. Il Westergaard vorrebbe leggere quel nome Vafra-navâza e ritrovarvi significata la neve di fresco caduta (*vafra* in zendo significa neve, pers. *barf*); altri, come l'Harlez, inclinerebbero a vedervi il nome di un eroe collegato con Thraêtaona che desiderando di ritornare alla sua dimora sul fiume Ra*n*ha (3) non potè giungervi impedito dalla neve (4). Lo Spiegel che prima inclinava, egli pure, a vedervi un eroe (5), più tardi invece rinunziava anche a cotesta opinione, dichiarando di non saper che cosa fosse questo Vifra-navâza (6).

Ora però venendo al racconto di Firdusi, troveremo che la leggenda popolare attribuisce a Frêdûn tre imprese principali: l'impresa contro di Dahâk già nota pure all'*Avesta*, la purificazione del mondo dopo la cacciata dell'usurpatore, e la divisione del regno fra i suoi tre figli. Queste due ultime imprese non sono mai ricordate nel testo dell'*Avesta*, ma, come vedremo più innanzi, abbiamo ogni ragione per credere che esse pure fossero note al tempo in cui quel libro fu compilato.

L'impresa adunque di Frêdûn contro Dahâk, quale si trova nel *Libro dei Re* e in tutti gli altri libri più recenti, ha avuta una profonda trasformazione. Già, come abbiam mostrato di sopra, l'*azhi dahâka* dell'*Avesta*, il serpente nel quale l'antico mito indo-europeo rappresentava le potenze tenebrose dell'atmosfera, è qui diventato l'arabo Dahâk che ha due orribili serpenti sulle spalle, principe di Babilonia, che per mille anni meno un giorno occupa il trono dell'Irân, dopo averne cacciato Gemshîd. E per

---

(1) *Yasht*, V, 33; IX, 13; XV, 24; XVII, 33.

(2) *Yasht*, V, 61.

(3) *Aferîn payghambar Zartust*, 4.

(4) *Yasht*, V, 61. — Harlez, *Avesta trad.*, II, p. 207.

(5) Spiegel, *Avesta Uebersetz.* III, p. 51, nota 1.

(6) Spiegel, *Erân. Alterth.*, II, p. 119: « Ein Wesen Vifra-navâza wird einmal im Avesta genannt, wir sind aber ausser Stande anzugeben, welcher Art dasselbe war ».

questa parte l'*Avesta* è più fedele all'antica tradizione, quantunque di Frêdûn o Thraêtaona faccia, come degli altri eroi, un eroe mistico e religioso. Secondo il *Libro dei Re*, Frêdûn già fin dal tempo nel quale egli abitava sul monte Alburz, laddove l'aveva nascosto la madre sua Frânek (1), meditava l'impresa contro di Dahâk (2), perchè il tiranno gli aveva ucciso il padre suo Abtîn, nel quale già abbiamo riconosciuto l'*âtwya* dell'*Avesta*. Ma l'occasione gli venne opportuna allorquando il fabbro ferraio Kâveh sollevò tutta la gente contro il tiranno e la condusse all'Alburz ponendola sotto la guida del legittimo signore dell'Irân, che era Frêdûn. Il quale, fabbricatasi una clava che aveva sull'estremità la testa di una giovenca effigiata in metallo, in memoria della vacca Birmâyeh che l'aveva allattato da fanciullo, muove contro il suo nemico (3). Contro di lui non valgono nè insidie di invidiosi fratelli (4), nè talismani del tiranno (5); un angelo disceso dal cielo gli comunica potere sovrumano e parole di misteriosa potenza (6), e così col favor del cielo egli giunge a penetrar nella reggia di Dahâk e ad atterrarlo. Già egli stava per ucciderlo, allorquando l'angelo Serôsh gli ordina di condurlo al Demâvend e di incatenarlo quivi in una caverna. Colà, secondo altre più recenti tradizioni, vive anche oggidì, si odono talvolta gridi e urli disperati per quelle deserte caverne; è Dahâk che freme ed urla oppresso dalle sue catene (7).

Alla seconda impresa che è quella di purificare il mondo dalle arti maligne del suo predecessore, Frêdûn pone tosto mano; e primieramente egli incomincia dalle donne e dalle ancelle che erano nel palazzo di Dahâk, alle quali comanda di purificarsi con acqua la fronte, poscia cancella dalla loro mente ogni ombra di errore; mostra loro la via retta di Dio, le monda da ogni sozzura, perchè erano esse come le ancelle degli adoratori degli idoli, e colla mente turbata erano simili a chi è preso da ebbrezza (8). Ma quest'o-

(1) Fird. *Shâh.*, p. 32.

(2) Fird. *Shâh.*, p. 33 e 34.

(3) Fird. *Shâh.*, p. 37.

(4) Fird. *Shâh.*, p. 38 e 39.

(5) Fird. *Shâh.*, p. 40: *tilismî kih Dhahhâk sâzîdah bûd,* | *sar-ash b-âsmân bar firâzîdah bûd;* un lismano che Dahâk aveva preparato, il cui capo si elevava fino al cielo.

(6) Fird. *Shâh.*, p. 38.

(7) De-Filippi, *Note d'un viaggio in Persia*, p. 267 e segg.

(8) Fird. *Shâh.*, p. 40: *birûn âvarîd az shabistân i ûy* | *butân i siyah-c'ashm, khvarshîd-rûy;* | *bi-farmûd shustan sarân-shân nukhust,* | *ravân-shân pas az tîragîhâ bi-shust;* | *râh i Dâvar i pâk bi-numûd-ishân,* | *az âlûdagîhâ bi-pâlûd-ishân,* | *kih parvardah i but-parastân budand,* | *sar âsimah bar sân i mastân budand.*

pera redentrice è poi intrapresa da lui un poco più tardi e con tutta solennità, allorquando, incatenato Dahâk nel Demâvend, e salito egli sul trono de' suoi padri, percorre come principe sovrano il suo regno. In quel viaggio egli vuol veder le cose tutte, le palesi e le nascoste, e passando da Amol alla selva di Temmîsheh, quivi egli ferma il suo soggiorno. Allora per ogni cosa ch'egli vedeva contraria a giustizia, e per ogni terra ch'egli vedeva non prosperosa, ivi con la sua rettitudine poneva rimedio al male (1).

Questa seconda impresa di Frêdûn non si trova rammentata nell'*Avesta*, almeno in quelle parti che sono giunte fino a noi. Ma par fuor di dubbio che anche la tradizione religiosa conoscesse questo tratto della vita di Frêdûn, trovandosi nel *Bundehesh* che Frîtûn scacciò dall'Iran gli orsi e le scimmie, discendenti impuri di un dêvo e di una fanciulla, di un giovinetto e di una Perì (2). Il *Mînôkhired* similmente ci dice che Frêdûn, oltre a Dahâk, vinse molti altri dêvi del Mâzenderân e gli scacciò dal Keshvar Qaniraç, nel quale devono abitare le creature soltanto di Ormuzd (3). Firdusi invece, in altro luogo (4), fa dire apertamente a Zâl che Frêdûn non volle mai tentare di combattere coi dêvi del Mâzenderân; ma racconta però che molti dêvi e maghi che avevano stanza nella reggia di Dahâk, furono tutti da lui abbattuti a colpi di clava e che egli poscia si sedette sul trono di colui che era addetto all'arti magiche (5). Da tutto questo si può concludere che anche la tradizione sacerdotale conosce qnesta seconda impresa di Frêdûn che noi forse ritroveremmo ricordata anche negli altri libri ora perduti dell'*Avesta*, quando questi ci fossero pervenuti.

L'ultima delle imprese di Frêdûn si è quella della divisione del regno. Se cotesta parte di leggenda sia venuta agli Irâni dai vicini Semiti, dalla leggenda cioè di Noè e de' suoi tre figli, o da quella del *Mahâbhârata* (6),

---

(1) Fird. *Shâh.*, p. 49: *zi-âmul gudhar sûy i tammîshah kard*, | *nishast andar-ân nâmvar bîshah kard...* | *har-ân c'îz k-az râh i bî-dâd dîd*, | *har-ân bûm u bar k-ân nah âbâd dîd*, | *bi-nîki bi-bast û dar u dast i bad*, | *c'unân k-az rah i hûshiyârân sazad.*

(2) *Bundehesh*, p. 57: « Allorquando Frîtûn venne contro di essi per iscacciarli dal paese dell'Irân, li pose ad abitar sul mare ».

(3) *Mînôkhired* in Spiegel, *Pârsi-Gramm.*, p. 137: *vas hanic'a vaç mâzandar dêw zat u ezh kesvar qaniraç bê kard.*

(4) Fird. *Shâh.*, p. 235: *Farîdûn na-kard în c'unîn kâr yâd*; laddove quell'*în c'unîn kâr* si riferisce alla conquista del Màzenderân.

(5) Fird. *Shâh.* p. 40: *sarân-shân bi-gurz i girân kard past*, | *nishast az bar i gâh i g'âdû parast.*

(6) *Mahâbh.* I, 3517 e segg. ed. Calc.

secondo il quale il re Yayâti figlio di Nahusha divise alla stessa maniera il dominio paterno, non staremo ora qui a ricercare, ma ci limiteremo soltanto al racconto del *Libro dei Re*. Vi si legge infatti (1) che Frêdûn, dopo aver messi alla prova i suoi tre figli e sperimentato il valor di ciascuno, pensò di spartir fra loro il regno; e ad Erag', al più piccolo, ma anche al più valoroso dei tre fratelli, egli assegnò la più bella parte del mondo, l'Irân; al maggiore, a Salm, toccò in sorte l'occidente e il paese di Rûm, e a Tûr l'oriente, la Cina e il Turkestân. Da questa divisione che parve ingiusta ai due maggiori fratelli, nacquero infinite discordie e invidie che terminarono poi con l'uccisione di Erag' procurata da Tûr e da Salm e con la vendetta che di quella morte prese poi con splendida vittoria il giovane Minôcihr.

Di questa divisione del regno non parla veramente l'*Avesta*, ma da alcuni non dubbi segni s'intende assai facilmente che tal circostanza non era ignota a chi lo compose. Trovansi infatti in esso ricordati questi nomi, *çairima* e *tûirya* (2), nei quali è ben facile riconoscere i nomi di Salm e di Tûr del *Libro dei Re;* e perchè appunto quei nomi zendi sono applicati a diverse provincie (3), tanto più è manifesto che con essi si dovevano designare i regni dei due figli maggiori del re Frêdûn. Il minor figlio di Frêdûn trovasi pure ricordato nell'*Avesta* col nome di *Airyu*, e Manuscithra che ne discendeva, ottenne perciò appunto il soprannome di *airyava* (4). Così l'*Avesta* pare non ignorasse la divisione del regno fatta da Frêdûn; il *Bundehesh* poi ricorda i tre figli di lui coi nomi di Çalm, Tûz ed Airic', e conosce la vendetta che Manuscihr prese dell'uccisione dell'ultimo (5); e finalmente il *Mînôkhired* ricorda la stessa cosa, aggiungendo ancora che Manôscihar, uccisi Çalm e Tûz, liberò anche il mondo dal male che essi vi avevano fatto (6).

Frêdûn in tutta quanta la leggenda epica appare come un re generoso

---

(1) FIRD. *Shâh.* p. 58-59.

(2) *Yasht*, XIII, 143.

(3) *Yasht*, XIII, 143: *çairimanâm daqyunâm e tûiryanâm daqyunâm* (gen. pl.).

(4) IUSTI, *Handbuch der Zendsprache*, v. *airyu*; *Yasht* XIII, 131: *manuscithrahê airyavahê* (genit.).

(5) *Bundehesh*, p. 78.

(6) *Mînôkhired*, in SPIEGEL, *Pârsi-Gramm.*, p. 137: *u ezh manosc'ihar çût in bûl, ku çalm u thôzh u yas nyâk bûl, pa khîn (kin?) êrâz be awazat, ezh patyârai i êsan gêhan awâzh dâst.* Credo di poter ritenere nel testo quell'*êsan*, loro, che lo Spiegel sembra credere non genuino, ma che, oltre essere richiesto dal senso, è anche confermato dalla versione sanscrita che pone il genitivo duale: *etayoh pratighâtaçc'a yah prithivyâm anyathâ kritah*; *Pârsi-Gramm.*, p. 150.

e di alto sentire congiunto ad una bontà e ad una rettitudine senza pari. Appena egli è giunto alla prima gioventù, quando ancora viveva solitario fra le valli dell'Alburz, udendo dalla madre sua Frânek il racconto della morte dell'infelice suo padre, si accende di nobile desiderio di punire il tiranno che gli ha tolto il genitore (1), e alla madre risponde ch'egli ha bisogno di dar alte prove di sè in quella guisa che un leone si fa coraggioso alla prova soltanto (2). Alle sventure domestiche si aggiungono le pubbliche calamità, e il grido di angoscia che si leva dagli Irâni oppressi da Dahâk, trova un eco nel suo nobile cuore. Il fabbro Kâveh gli pone in mano il vessillo della rivolta, ed egli si accomiata dalla madre sua piangente con queste estreme parole: « Io debbo recarmi alla guerra, a te null'altra cura rimanga fuorchè la preghiera » (3); parole non dissimili da quelle di Ettore allorquando sulle porte Scee dava l'ultimo addio alla sua sposa Andromaca.

Qui cominciano le imprese guerresche del re Frêdûn; ma anche tra i fatti di sangue e le battaglie risalta sempre l'indole sua nobile e generosa. Giunto alla reggia di Dahâk, purificate le ancelle e abbattuti i Dêvi che vi avevano stanza, egli accoglie con molto onore le due sorelle di Gemshîd, Shehrnâz ed Ernevâz, che vivevano miseramente quasi nella condizione di schiave (4); e allorquando egli ha vinto il nemico e si è seduto sul trono de' suoi padri, per mezzo degli araldi rende noto qual sia il voler suo alle genti, e però fa bandire dalla soglia della sua dimora che omai è tempo di posar le armi (5), di ritornare con tranquillità ciascuno alle proprie opere, di viver lungamente in pace e di serbarsi lieti ora che è carico di catene l'impuro tiranno dalle opere del quale temeva il mondo (6). Diventato re, egli corre col pensiero alla sua madre lontana, le manda sue notizie, ed ella festeggia con conviti e donativi il lieto avvenimento (7).

(1) Fird. *Shâh.*, p. 33: *dil-ash gasht pur dard u sar pur zi-kîn*; il suo cuore diventò pieno di dolore e il suo capo pieno di vendetta.

(2) Fird. *Shâh.*, p. 34: *c'unîn dâd pâsukh bi-mâdar kih: shîr | na-gardad magar b-âzmâyish dilîr*; tal risposta diede alla madre: Un leone non diventa coraggioso che alla prova.

(3) Fird. *Shâh.*, p 37: *kih: man raftanî am sûy i kârzâr, tu-râ g'uz niyâyish ma-bâd îc' kâr.*

(4) Fird. *Shâh.*, p. 41: *hamî khuftan u khâst bâ g'uft i mâr, | c'ih gûnah tuvan burdan, ay sharhiyâr?*; il coricarsi e il levarsi con chi è congiunto a serpenti (Dahâk) in qual maniera, o principe, si può sopportare?

(5) Fird. *Shâh.*, p. 45: *na-bâyad kih bâshîd bâ sâz i g'ang.*

(6) Fird. *Shâh.*, p. 45: *bi-band andar-ast ân kih nâ-pâk bûd, | g'ihân-râ zi-kirdâr i û bâk bûd.*

(7) Fird. *Shâh.*, p. 48: *pas âgahî âmad zi-farrukh pusar | bi-mâdar kih farzand shud shahriyâr.*

Gli nascono intanto dalle sorelle di Gemshîd, da lui sposate, tre figli, ai quali non impone tosto un nome, cercando di scoprirne prima l'indole e l'ingegno (1). Intanto egli pensa a trovar loro una sposa; e poichè Serv, il re del Yemen, prima di concedergli le sue tre figlie, desidera di conoscere i giovinetti, Frêdûn prima di mandarli a quella reggia li istruisce e li ammonisce di tutto ciò che essi debbono fare e del come abbiano a comportarsi. La sollecitudine e l'amor paterno non potevano esser meglio espressi da Firdusi che con queste parole che egli pone in bocca a quel buon padre: « Voi, egli dice, rispondete con convenienza alle sue parole, e se egli (il re del Yemen) vi domanda qualche cosa, consigliatevi prima, poichè i figli di un re non devono essere che prudenti, pronti nel dire, di cuore aperto, di pura fede e previdenti in qualunque cosa occorra. . . Voi intanto ascoltate ogni cosa che io vi dico, acciocchè, se riuscite in ciò, siate poi lieti. Il re del Yemen è di mente acuta, tale che un eguale a lui non v'ha fra la gente; ha tesori ed eserciti, ha sapienza e prudenza e corona. Ora non conviene che egli vi trovi di poca mente, perchè poi, qual uomo astuto, inventi per provarvi qualche astuzia (2).

Diviso il regno, i due figli maggiori, Salm e Tûr lo accusano d'ingiustizia (3), gli rammentano ch'egli è vecchio e deve aver timore di Dio essendo egli vicino a passare ad altra vita (4); annulli egli quindi quelle disposizioni, ovvero essi saranno pronti a muovere le armi contro di lui (5). L'intemerato principe non si commuove punto a quelle minaccie, ma giura pel nome di Dio, per il sole fiammante e per la terra, pel trono e per la corona reale, per gli astri e per la luna ch'egli non ha mai fatto loro alcun male (6) e che tutto fu operato da lui con giustizia. Li scongiura quindi a cambiar via, poichè egli teme per loro e per la loro sorte, e

(1) Fird. *Shâh.*, p. 49: *padar nâz nâ-kardah az nâz nâm . . .* | *az-ân pas bi-dishân nigah kard shâh.*

(2) Fird. *Shâh.*, p. 53: *bi-khûbî sukhunhâ-sh pâsukh dihîd* | *c'û pursad sukhun, rây i furrukh nihîd,* | *az-îrâ-kih parvardah i pâdishâ* | *na-bâyad kih bâshad magar parisâ,* | *sukhun-gûy, rûshan-dil u pâk-dîn,* | *bi-kârî kih pîsh âyad ash, pîsh-bîn...* | *shumâ har-c'ih gûyam zi-man bi-shinavîd,* | *agar kâr bandîd, khurram shavîd;* | *yakî zharf-bîn ast shâh i Yaman,* | *kih c'ûn û na-bâshad bi-har ang'uman,* | *ham-ash gang' i bisyâr u ham lashkar ast,* | *ham-ash dânish u rây u ham afsar ast:* | *na-bâyad kih yâbad shumâ-râ zabûn,* | *bi-kâr âvarad mard i dânâ fusûn.*

(3) Fird. *Shâh*, p. 61: *na-g'ustî g'uz az kazhzhî u kâstî,* | *na-kardî bi-bakhsh undarûn râstî;* tu non hai cercato che tortuosità e difetto, nella divisione non hai fatto giustizia.

(4) Fird. *Shâh.*, p. 60.

(5) Fird. *Shâh.*, p. 61.

(6) Fird. *Shâh.*, p. 62: *kih man bad na-kardam shumâ-râ na-gâh.*

già vecchio e vicino a morte ben sa che, ove il cuore sia mondo da impuri desiderî, sono eguali la nuda terra e i tesori dei re (1). Ma poichè le sue parole non hanno alcun frutto, egli si induce a mandar loro il minor figlio Erag', l'oggetto di tanto odio e di tanta invidia, per acquetarli, e nell'acconiatarlo gli consegna un foglio nel quale raccomanda agli altri due di accoglier come conviensi quel loro fratello. « Egli è più piccolo di voi, dice, e perciò sono per lui l'amore e le carezze; fategli festa adunque e prendete cibo insieme, e poichè ne avrete nutrito il corpo, prendetevi cura di confortar l'anima sua. E quando saranno passati alquanti giorni, dopo ch' egli sarà rimasto con voi, rimandatelo a me con onore » (2). Queste parole sole, se non erriamo, bastano a mostrare la paterna sollecitudine di questo buon padre, e l'ingenua sua bontà nel credere ancora che Salm e Tûr potessero rispettar l'innocenza e risparmiare il loro minor fratello.

Ma il fratricidio si compie (3), ed Erag' è ucciso dagli invidiosi. Allora il misero re al quale vien mandata in un' arca la testa dell' ucciso (4), sfoga pietosamente piangendo il suo dolore, trovando unico conforto nella speranza che venga dalla semenza di Erag' il punitore di tanta colpa. Minôcihr, figlio di una figlia di Erag', sarà quello; e allorquando Salm e Tûr, spaventati dai disegni di Frêdûn e di Minôcihr, mandano a far le loro scuse al padre, pregandolo di inviar loro il giovane principe che sarà accolto con feste e donativi, il vecchio re s'accende subitamente di sdegno e dopo aver disvelata in un'acerba invettiva quale sia la malvagia intenzione di quei due, chiede meravigliando se si è mai dato che un vecchio padre venda per oro l'anima del suo nobile figlio, siccome vorrebbero quelli ch'egli facesse, accettando le loro offerte (5). Ma anche con tutto ciò l'amor di padre non è spento in lui, e quantunque egli desiderasse di vendicar l'ucciso Erag', egli ha atteso che Minôcihr sia atto a prender l'armi, perchè non era bello per lui muover la guerra per il

---

(1) Fird. *Shâh.*, p. 63: *kih c'ûn âz gardad zi-dilhâ tihî,* | *hamân khâk u ham gang' i shâhinshahî.*

(2) Fird. *Shâh.*, p. 65: *bi-dân k-û bi sâl az shumâ kihtar ast,* | *bi-mihr u nuvâzandagî dar khvar ast,* | *girâmî-sh dârîd u tûshah khvarîd,* | *c'û parvardah tan shud, ravân parvarîd;* | *c'û az bûdan-ash bi-gudharad rûz c'and,* | *firistîd nazd i man-ash arg'umand.*

(3) Fird., *Shâh.*, p. 66–68.

(4) Fird. *Shâh.*, p. 68-70.

(5) Fird. *Shâh.*, p. 75: *kih gûyad kih g'ân i girâmî pusar* | *furûshad bi-zar pîr gashtah padar?*

primo contro due suoi figli (1). E quando Minôcihr manda con un suo foglio la testa dell'ucciso Tûr al padre, il messo incaricato di ciò teme di Frêdûn, poichè egli ben sa che se anche un figlio traligna talvolta, pure con la sua morte arreca dolore al padre (2). E questo dolore fu profondamente sentito dal vecchio re, quando da Minôcihr fu ucciso anche Salm ed egli si accorse che si avvicinava la fine dei suoi giorni. Solo nella sua reggia, egli si lagnava di quei tre figli che gli erano stati uccisi, quantunque egli ben sapesse che la pena li aveva incolti, quanto ai due primi, per le loro malvagie opere e per la loro perfidia e perchè essi non avevano obbedito al suo comando (3). Fu cotesto dolore che rattristò gli ultimi giorni del misero principe, nel quale, almeno come l'immaginò la leggenda popolare, non sappiamo se più dobbiamo ammirare il valore nel riacquistare il regno degli avi, o la giustizia e la fede nel riordinarlo e purificarlo, o la sollecitudine e la cura per l'avvenire dei suoi figli tanto diversi fra loro.

Un'ultima cosa è da osservare intorno al carattere di lui, ed è che egli fu fornito dal cielo di un sapere sovrannaturale sia per prevedere il pericolo, sia per conoscere il futuro. Ciò che non si deve confondere con la magia, della quale egli era e doveva esser mortal nemico, tanto che uccise molti dêvi e molti maghi nella reggia di Dahâk; ma è l'angelo Serôsh, lo Çraosha dell'*Avesta*, che gli ha comunicato quel potere sovrannaturale che poi tanto l'aiutò nelle sue imprese (4). Così egli giunge ad arrestare una enorme pietra che i suoi fratelli invidiosi avevano fatto rotolar giù da un monte a piè del quale egli si era addormentato (5). Per mettere poi alla prova i figli suoi, si convertì in mostro (6), ed egli solo

---

(1) Fird. *Shâh.*, p. 75: *nah khûb âmadi bâ dù farzand i khvísh | kih man g'ang râ kardami dast-pîsh*; intenderei quel *dast-pish* in modo diverso dai dizionari; in questo caso esso non può altro significare che *col metter innanzi le mani, far pel primo qualche cosa*. Vullers traduce *mendicus*.

(2) Fird. *Shâh.*, p. 85: *kih farzand. har c'and pic'ad zi-din, | bi-sûzad bi-marg-ash padar ham-c'unin*.

(3) Fird. *Shâh.*, p. 94.

(4) Fird. *Shâh.*, p. 38. Nell'*Avesta* (*yaçna* LVI) abbiamo un lungo inno dedicato a Çraosha, *Çrôsh-yasht*. Vedi anche Spiegel, *Erân Alterth.*, II, p. 87 e segg.

(5) Fird. *Shâh.*, p. 39: *bi-afsûn hamân sang bar g'ây i khvis | bi-bast, u na-ghaltid yak-dharrah pîsh*. Credo che alla parola *afsûn* debbasi in questo caso dare un significato speciale, quello di *potere soprannaturale*, non di *carmen magicum, incantatio* sec. il Vullers; nel dualismo iranico un eroe dato alla magia sarebbe stato dalla parte di Ahrîmane, e poi non sarebbe il Serôsh che gli avrebbe insegnata l'arte magica.

(6) Fird. *Shâh.*, p. 56: *biy-âmad bi-sân i yaki azhdahâ | k-az-ú shir, gufti, na-yâbad rahâ*, etc.

seppe prevedere le astuzie del re del Yemen che non voleva concedere le figlie sue, rendere informati i figli suoi delle arti di quel re e deluderle quindi (1); ma non seppe preveder la morte di Erag', poichè il fato così aveva stabilito, allo stesso modo che gl'indovini di Omero predicono l'avvenire agli altri, ma non vedono poi la nera Parca, κῆρα μέλαιναν, che già li minaccia e li stringe da vicino (2).

Successore di Frêdûn nel regno fu Minôcihr, e di lui, sotto il nome di Manuscithra, l'*Avesta* non fa menzione che una volta sola (3) senza toccare alcuna delle sue imprese. Dal soprannome che l'*Avesta* gli dà di *airyava* s'intende come esso lo faccia discendere da Airyu, nel quale abbiamo già riconosciuto l'Erag' delle leggende posteriori. Firdusi lo dice figlio di una figlia di Erag' e di un principe irano di nome Pesheng, mentre il *Bundehesh* un poco diversamente ne nota la discendenza (4), ma ne fa anche conoscere il luogo di nascita, che sarebbe il monte Manusmas (5). Sua consueta residenza sarebbe Temischa, di cui anche nel Medio Evo si ignorava dagli scrittori la posizione (6), mentre, secondo Masudi, Minôcihr risiederebbe in Babilonia (7). Tutto ciò è ignoto a Firdusi. Il *Bundehesh* gli attribuisce la gloria di aver trovate le fonti dell'Eufrate (8), e rammenta la sua spedizione contro di Salm e di Tûr, la pena loro inflitta da lui per l'uccisione di Erag', nota anche al *Mînôkhired*, siccome già abbiamo visto (9).

Nel *Libro dei Re* di Firdusi ci si presenta Minôcihr come un esecutore dei voleri di Frêdûn, un ministro della sua vendetta; Frêdûn infatti vive soltanto, si può dire, per vendicare il figlio suo Erag', in Minôcihr è riposta ogni sua speranza, e allorquando Salm e Tûr lo pregano di mandar loro il giovane principe, egli risponde sdegnato che lo manderà, ma a capo di mille armati, siccome esecutore di giustizia, per punire il commesso

(1) Fird. *Shâh.*, p. 53.

(2) *Iliad.*, II, 859; cfr. Virg., *Æneid.*, IX, 328.

(3) *Yasht*, XIII, 131: *manuscithrahê airyavahê* (genit.).

(4) *Bundehesh*, p. 78.

(5) *Bundehesh*, p. 22. — Windischmann, *Zoroastr. Studien*, p. 73.

(6) Spiegel, *Erân. das Land zwischen dem Indus und Tigris*, p. 68: « Oft genannt wird Temischa, eine angebliche Residenz des fabelhaften König Minotschehr; über ihre Lage war man schon im Mittelalter im zweifel.

(7) Spiegel, *Erân. Alterth.*, I, p. 555.

(8) *Bundehesh*, p. 51.

(9) *Bundehesh*, p. 58. — *Mînôkhired*, in Spiegel, *Pârsi. Gramm.*, p. 137.

fratricidio (1). Onde avviene che la figura di Minôcihr resti come nell'ombra, poichè in tutto quanto il racconto di Firdusi campeggia soltanto la figura di Frêdûn; è Frêdûn che lo manda alla guerra, che attende notizie da lui; e Minôcihr fa quasi tutto per lui solo, e ad ogni fatto compiuto si fa un dovere di informarne per lettera il vecchio re che è rimasto a casa, e di rendergli conto dell'operato (2). Anche il giovane Khusrev, come vedremo più innanzi, prima di salire al trono sostiene una terribile guerra contro di Afrâsiâb re dei Tûrâni che gli aveva ucciso il padre Siyâvish; ma chi guida quella guerra, benchè lontano dai campi di battaglia, è il re Kâvus. Pure la figura di Khusrev spicca quivi assai più che non quella di Minôcihr accanto a quella di Frêdûn; poichè Khusrev è condotto a brandir l'armi da una sventura che lo tocca assai più da vicino; trattasi di vendicar la morte del genitore, mentre il tradito Erag' non era che l'avo di Minôcihr, secondo Firdusi, e secondo il *Bundehesh* il suo tritavo (3). Si noti ancora che Frêdûn al tempo della guerra di Minôcihr era, benchè vecchio, pieno ancora di energia, mentre il re Kâvus oltre all'essere debole di carattere e di poca mente, era al tempo di Khusrev cadente per vecchiaia.

Con tutto questo però nella breve ma accanita guerra che Frêdûn dalla sua reggia guida contro i due suoi figli, Minôcihr dà alte prove di valore, e il primo che cade in campo per la sua mano, si è Tûr. Minôcihr raggiunge il nemico che fuggiva, lo colpisce nella schiena con l'asta e gli fa cader di mano la spada. Con quello stesso colpo lo toglie di sella e lo gitta al suolo, e usando del diritto del vincitore, tosto gli spicca il capo dal busto e fa pasto del tronco alle fiere (4). Intanto sopravviene un aiuto a Salm; è Kâkvi, nipote di Dahâk, che con un immenso stuolo di armati viene incontro a Minôcihr. Lo scontro di lui con Minôcihr dura tutta una giornata; e la sorte del combattimento pende

---

(1) Fird. *Shâh.*, p. 75: *na-binand rûy-ash magar bâ sipâh,* | *zi-pûlâd bi-sar bar nihâdah kulâh,* | *abâ gurz u bâ kâvyâní dirafsh;* non vedranno il suo volto (di Min.) se non con un esercito, con posto sul capo un elmo d'acciaio, con la clava e col vessillo di Kâveh.

(2) Fird. *Shâh.*, p. 84 e segg. — p. 92.

(3) Ecco la genealogia di Erag' secondo il *Bund.*, p. 78: Airic' (Erag'), una figlia, Manushursil, Manusqarnar, Manuscihr.

(4) Fird. *Shâh.*, p. 84: *zi-zín bar girift-ash bi-kirdâr i bâd,* | *bi-zad bar zamín, dâd i mardi bi-dâd;* | *sar-ash râ hamân-gah zi-tan dúr kard,* | *dad u dâm râ az tan-ash sûr kard;* credo di aver colpito il senso con bastante precisione traducendo le parole un poco oscure del testo *dâd i mardi bi-dâd* per *usò del diritto del vincitore,* alla lettera: *gli rese il diritto della vittoria.*

incerta fino a mezzogiorno (1), quantunque Minôcihr d'un colpo abbia spezzate le maglie sul petto al nemico. Al calar del sole invece egli resta vittorioso, e il suo nemico muore trafitto nel petto dopo essere stato levato di sella e gettato al suolo (2). Restava ancora Salm; e Minôcihr lo raggiunge mentre fuggiva dal campo, e con un sol colpo di spada ne divide in due la persona, quindi ne fa conficcare sopra un'asta il capo sanguinoso (3). Così è vendicata la morte di Erag'.

Queste sono le imprese di Minôcihr; ma quando, dopo la morte di Frêdûn, egli sale sul trono, la leggenda popolare nulla sa più raccontarci di lui, e Firdusi riempie la manifesta lacuna raccontando gli amori di Zâl e di Rûdâbeh e la nascita di Rustem, siccome vedremo nel paragrafo seguente. I libri religiosi non ci dicono nulla sul suo conto; l'*Avesta*, come abbiam visto, non lo ricorda che una sol volta, e il *Mînôkhired* aggiunge soltanto che egli liberò il mondo dal male che Salm e Tûr vi avevano cagionato (4); asserzione troppo generica, per poter fondarvi sopra la congettura che Minôcihr abbia compiute altre importanti imprese. E forse non ha torto lo Spiegel allorquando scrive che, se pur vi erano leggende sul conto di Minôcihr, queste dovettero essere di ben poca importanza, ovvero relative a questo o a quell'altro luogo solamente, per non meritare d'essere accolte nel gran corpo delle leggende maggiori e più conosciute (5).

Anche però da quel poco che sappiamo sul suo conto, si può conoscere con sicurezza quale sia il carattere di questo eroe leggendario; e, se non andiamo errati, nelle parole sue, nelle opere e negli usi, vediamo un uomo zelante e osservator del giusto, ma per l'amor del giusto forse troppo scrupoloso, che per riuscire a far trionfare la giustizia, o almeno a far prevalere l'opinione sua, che egli crede la sola conforme a giustizia, rasenta

(1) FIRD. *Shâh.*, p. 89: *dû g'angi bi-dîn gûnah tâ nimah rûz,* | *kih gasht az bar-ash hûr i gîtî-furûz,* | *hami c'ûn palangân bar âvîkhtand,* | *hamah khâk bâ khûn bar âmîkhtand.*

(2) V. la descrizione della battaglia, FIRD., *Shâh.*, p. 88-90.

(3) FIRD. *Shâh.*, p. 90: *yakî tîgh zad bar bar u gardan-ash,* | *bi-du nimah shud khusravâni tan-ash;* | *bi-farmûd tâ sar-ash bar dâshtand,* | *bi-nîzah bi-abr andar afrâshtand; Minôcihr* gli assestò un colpo di spada sul petto e sul collo, *onde* fu *diviso* in due metà quella real persona; comandò poi che gli troncassero il capo e sopra un'asta lo sollevassero fino alle nubi. Espressione iperbolica frequente in Firdusi e negli altri poeti persiani.

(4) *Mînôkhired* in SPIEGEL, *Pârsi-Gramm.*, p. 137; vedi anche sopra.

(5) SPIEGEL, *Erân. Alterthums*, I, p. 555: « Die Sagen von Manoschihr scheinen vorzüglich Localsagen gewesen zu sein, die man, als von zu geringem allgemeinen. Interesse, in das Königsbuch nicht aufnehmen wollte ».

il dispotico un cotal poco. Appena infatti egli è salito sul trono, nel discorso ch'egli rivolge agli eroi che gli fanno corona, afferma esser egli su quel trono quale è la vôlta del cielo sulla terra, aver egli solo il diritto di punire e di far la guerra, di render giustizia e di mostrarsi clemente (1). Dice che la terra gli è sottomessa, amico gli è il cielo, e che a lui si spetta di colpire il capo dei regnanti (2); punirà egli i malvagi, toglierà loro la libertà di operar male e farà rossa la terra del loro sangue (3); si professa del resto servo di Dio e seguace di Frêdûn, di cui camminerà nella via, perchè l'avo suo era vecchio ed egli è giovane e privo quindi di esperienza (4). Da questa parlata, che con linguaggio politico moderno si chiamerebbe programma, s'intende già quale sarà la condotta del nuovo re, quale il suo carattere e l'intima sua indole.

Con tali idee nella mente Minôcihr non ascolta ragioni; e allorquando egli giunge a sapere che il giovane Zâl si è invaghito di una fanciulla che discende dall'empio Dahâk, invita alla sua corte il padre del giovane amante, Sâm, per intimargli di far la guerra appunto con Mihrâb re del Kâbul e padre della fanciulla. Sâm vorrebbe scusare il figlio suo e pregar per lui, ma Minôcihr lo previene duramente con fiero cipiglio e gli comanda di recarsi verso le regioni dell'India e là di consegnare alle fiamme il castello di Mihrâb. Non conviene, egli soggiunge, che trovi scampo un superstite della semenza del serpente (s'intenda Dahâk), poichè il mondo è sempre turbato per cagion sua; tu adunque, o Sâm, troncagli il capo e purifica la terra da Dahâk e dai suoi discendenti (5). Così Minôcihr diventa dispotico, e sempre per troppo zelo per la giustizia e per la fede, nè ha alcun riguardo per la passione dei due giovani infelici, nè sembra accorgersi che Sâm ha impegnata la sua fede col figlio, il quale alla sua

---

(1) Fird. *Shâh.*, p. 95: *man-am bar sar i takht gardân sipihr,* | *ham-am khashm u g'ang ast u ham dâd u mihr;* laddove le due ultime parole del primo verso si potrebbero anche leggere *gurdân sipihr*, il cielo degli eroi, il primo fra essi, e il senso correrebbe lo stesso; ritengo però *gardân sipihr*, il cielo che si volge su di noi, siccome più frequente in Firdusi; cfr. anche *gardandah sipihr*.

(2) Fird. *Shâh.*, p. 95: *sar i tâg'dârân shikâr i man-ast.*

(3) Fird. *Shâh.*, p. 95: *badân-râ zi-bad dast kutah kunam,* | *zamin-râ bi-khûn rang i dîbah kunam.*

(4) Fird. *Shâh.*, p. 95: *g'ihân-âfarin râ parastandah am;* | *bi-râh i Farîdûn i farrukh ravîm,* | *niyâman kuhun bûd agar mâ nav-îm.*

(5) Fird. *Shâh.*, p. 138: *hamî khvâst* (Sâm) *guftan zi-Mihrâb u Zâl,* | *kih shâh i g'ihân pishtar bar girift,* | *sukhun râ bi-rûy i dizham sar girift.....* | *bi-Hindûstân andar âtash furûz,* | *hamah kâkh i Mihrâb i Kâbul bi-sûz;* | *na-bâyad kih û yâbad az tû rahâ,* | *kih û mândah az tukhmah i azhdahâ;* | *zamân tâ zamân z-û bar âyad khurûsh,* | *shavad râm i gîtî pur az g'ang u g'ush.....* | *sar az tan g'udâ kun, zamin-râ bi-shûy* | *zi-payvand i Dhahhâk u khvîshân i ûy.*

volta in forza dell'amor suo per la fanciulla, ha fatto alleanza con Mihrâb e non può quindi, benchè Minôcihr lo voglia, prender l'armi contro di lui (1).

Dallo stesso suo zelo Minôcihr è poi condotto a voler sapere e veder tutto, nè a fidarsi di alcuno. Avendo udito che Sâm ha riacquistato il figlio suo che egli aveva esposto sull'Alburz, vuol tosto vederlo e lo invita alla corte, ne loda l'aspetto e il portamento, ma ingiunge intanto a Sâm di farlo educare, di insegnargli le arti della guerra e le cortesie e i costumi dei banchetti, poichè il giovane essendo stato nutrito dall'uccello Sìmurgh sui monti, non può conoscere i costumi della corte e gli usi reali (2). In qual maniera egli si opponesse all'amore di Zâl e di Rûdâbeh abbiam già visto di sopra; pure, dopo ripetute preghiere di Sâm, egli si induce a sottopor la cosa al giudizio dei sacerdoti, i quali, consultate le stelle, rispondono che da quel matrimonio deve nascere un grande eroe, onore della terra che l'avrà visto nascere, e primo difensore del regno contro i Tûrânî, che perciò conviene a Minôcihr permettere quel connubio, anzi egli stesso dovrebbe promuoverlo (3). Ma egli non si contenta di ciò; e fatto venire Zâl alla sua presenza, prima di acconsentire al suo matrimonio con Rûdâbeh, lo sottopone ad una lunga prova facendogli risolvere certe ardue ed intricate questioni proposte dai sacerdoti (4). Il giovinetto esce vittorioso da questa prova, ma Minôcihr non è ancora soddisfatto, e vuole che egli in sua presenza dia anche prova di destrezza e di valore. Zâl lo riempie di stupore con alcuni colpi ben assestati di lancia e d'arco, e allora soltanto ottiene dal severo principe l'assenso alle nozze e molti augurî per la sua felicità (5).

A Minôcihr successe nel regno il figlio Nevdher che dopo breve regno fatto prigioniero in battaglia è poi ucciso dal tûrânio re Afrâsiâb. Seguono quindi i regni di Zav e di Ghershâsp, brevi e senza gloria, finchè, per consiglio di Zâl, Rustem si reca al monte Alburz a trarne Kobâd che vi viveva solitario, per porlo sul trono dell'Irân. Con Kobâd

---

(1) Fird. *Shâh.*, p. 141: *kih Mihrâb u Kâbul bi-farmân i tu-st,* | *bi-paymân i tû nist-ash rây sust;* poichè Mihrâb e il Kâbul sono *pronti* al tuo comando (è Zâl che parla al padre) e per l'amicizia tua non è in lui alcuna rilassatezza.

(2) Fird. *Shâh.*, p. 104: *biy-âmûz ûrâ râh u sâz i razm,* | *hamân shâd kâmi u âyîn i bazm;* | *na-dîd-ast g'uz murgh u kûh u kanâm,* | *kug'â dânad âyîn i shâhî u nâm?*

(3) Fird. *Shâh.*, p. 151.

(4) Fird. *Shâh.*, p. 152-154.

(5) Fird. *Shâh.*, p. 156: *hamah ârzûhâ sipurdam bi-dûy,* | *basî rûz i khurram shumurdam bi-dûy* (così Minôcihr in una lettera a Sâm).

sottentra ai Pêshdâd la famiglia dei Kay o Kavan nel regno, e a Kobâd, dopo un regno segnalato soltanto da una pace fatta con Afrâsiâb, succede Kâvus, il maggiore de' suoi tre figli. Nell'*Avesta* questo principe è designato col nome di Kava Uçan o Kava Uçadhan (1), e nel nome di Kay-Kâvus quale gli dànno Firdusi e gli altri scrittori posteriori, troviamo confuso il nome di famiglia *Kavan* col nome proprio *Uçan*, quindi considerato *Kâvus* come un nome solo, gli si prepose di nuovo il prenome *Kay* che corrisponde al *Kavan* dell'*Avesta* (nom. *Kava*). La forma pehlevica è *Ki-Kâus* (2), e la pârsi *Kahôç;* nella versione sanscrita del *Minôkhired* questo nome suona *Kahova* (3).

Anche qui, come ci accadde per Frêdûn, abbiamo dinanzi una figura mitologica che si riferisce ai primitivi tempi indo-europei. La leggenda di un uomo celebre per i suoi lavori artificiosi, che con i suoi artifici sa levarsi a volo nell'aria, è comune agli Indiani, agli Irâni, ai Greci e alle stirpi teutoniche. Riscontrasi infatti nei *Vedi* una oscura allusione ad un Kâvya Uçanas, il cui genero a cagione della sua superbia precipitò dal cielo (4). Nella mitologia greca tutti conoscono il viaggio aereo di Dedalo; e nella germanica è ben nota la storia di Völundr, come lo chiama l'*Edda*, o di Wieland il fabbro-ferraio, come lo dicono i Tedeschi, che dopo essersi vendicato del re Nidudr, si levò a volo lasciando scornato e dolente il suo nemico (5). Tanto poi il Völundr o Wieland germanico, quanto il Dedalo dei Greci sono rinomati per la loro abilità in lavorar metalli e in preparar qualunque sorta di ordegno artificioso. Ora anche questi tratti, indubbiamente i più antichi nella leggenda di questo re, si sono conservati nel *Libro dei Re* di Firdusi; gli altri fatti che questo poeta racconta di lui, sembrano più propriamente essersi svolti nella fantasia del popolo iranico soltanto. Vediamo intanto in qual maniera Firdusi ci abbia conservato quella più antica parte di leggenda.

Premettiamo anzi tutto che l'*Avesta* non ci ricorda nulla del volo di Kava Uçan e che il *Bundehesh* sembra accennarvi con le seguenti parole che però potrebbero essere prese in altro senso: « fin che egli (Ki-Kâus)

---

(1) IUSTI, *Handbuch der Zendspr.* v. *uçadhan.*

(2) *Bundehesh*, p. 81.

(3) *Minôkhired* in SPIEGEL, *Pârsi-Gramm.*, p. 138 e 151.

(4) SPIEGEL, *Erân. Alterth.*, I, p. 441.

(5) *Völundarkvidha*, in Simrock, *Die Edda*, p. 132: Lachend hob sich in die Luft Völundur; | Traurig Nidudur schaut ihm nach.

salì al cielo » (1). Il *Mînôkhired* non ha per lui che generiche parole, dicendo soltanto che da Kahôç venne questo vantaggio che generò dal proprio corpo Çyâwakhs e che molte altre opere benefiche vennero da lui (2).

Ma in Firdusi l'abilità di Kâvus nei lavori artificiosi e il suo volar pel cielo gli sono attribuiti a colpa, e quest'ultima impresa specialmente ad effetto di pazzia, mentre tutto ciò forma la gloria di Dedalo e di Völundr. Già lo stesso Firdusi non può celare il suo stupore al pensare che un re così potente dovesse costringere i dêvi a lavorar per lui, a fabbricargli un palazzo sul monte Alburz, laddove doveva essere sempre primavera, e il giorno non doveva mai crescere nè la notte diminuire (3). Anche in altre leggende popolari ritroviamo i demoni costretti o da maghi o da principi a fabbricar palazzi e castelli incantati; ma qui, secondo la dottrina del mazdeismo, il valersi dell'opera dei dêvi, delle creature di Ahrîmane, abitatori delle tenebre, non poteva esser riguardato che come opera empia o almeno effetto di pazzia; onde s'intende come Firdusi al cominciar la descrizione del palazzo di Kâvus, si volga al lettore con queste parole: « Vedi ora qual cosa fece quel re di proprio capo (4) »; e incomincia quindi la descrizione del castello, nel quale era radunata ogni magnificenza ed ogni prodotto del lusso di quei tempi (5). Ma i dêvi sono stanchi dell'immane lavoro e delle battiture, sola e trista mercede di tante fatiche, e uno di loro, Iblîs (6), propone di distogliere da Dio la mente e il cuore del principe col fargli intendere che egli è destinato a regnare in cielo, sede più nobile e più conveniente alla sua dignità. Kâvus un giorno va alla caccia; e gli si fa incontro un dêvo,

---

(1) *Bundehesh*, p. 81: Ki-Kâus bis er zum Himmel ging (vers. del WINDISCHMANN).

(2) *Mînôkhired in* SPIEGEL, *Pârsi-Gramm.*, p. 138: *u ezh Kahôç çût in bût, c'un kai Çyâwakhs ezh tan i ôi brehinît, hanic'a vaç karbagân azh-as raft.*

(3) FIRD. *Shâh.*, p. 297: *c'unân g'ây-gah sâkht bar khatt i râst, | kih nay rûz afzûd unay shab bikâst. . . . . | hamah sâlah rûz-ash bahârân budî.*

(4) FIRD. *Shâh.*, p. 297: *nigar tâ c'ih kard ân shâh i khvîsh-kâr;* nel qual verso la parola *khvîsh kâr* è intesa da me in modo tutto speciale. Il Vullers sotto questa voce pone: *sator*, *seminator*, sec. il *Burhân i kâti'u* che spiega *barzîgar* e *muzâri'*, riferendolo a *khvîsh* (non *khvêsh*), *vomer cui culter aratri infigitur, quo terra finditur.* Ma ognun vede che traducendo *re seminatore* non avremmo nessun senso; prendendo invece *khvîsh (ê)* nel significato di *sè stesso*, crederei poter tradurre meglio il *khvîsh-kâr* con *re che fa di propria testa, ostinato e caparbio;* e allora *kâr* da *kardan* sarebbe in senso di *opera;* non da *kishtan*, pres. *kâram*, seminare.

(5) Vedi la descrizione del palazzo in FIRDUSI, *Shâh.*, p. 297.

(6) FIRD. *Shâh.*, p. 298.

sotto le sembianze di un giovinetto (1), che gli fa la traditrice proposta, ed egli, approvando il disegno, si propone già di eseguirlo. Quattro aquile sono legate ai quattro spigoli d'un trono, e allorquando esse spiccano il volo, trasportano seco, seduto in trono, il re, che frattanto tiene dinanzi a sè un nappo ripieno di vino (2). Ma ben presto le aquile si stancano, ed egli cade miseramente a capo in giù in un bosco non lontano dalla città di Amol. Quivi lo raggiungono stupiti e scandolezzati i suoi principi, Gûderz, Rustem e Thûs, accorsi in suo aiuto. Gûderz, giunto al luogo dov'egli stava, in silenzio e tutto raumiliato, gli dimostra con acerbi rimproveri quale e quanta sia stata la sua follia, per la quale sarebbe per lui un ospedale luogo assai più conveniente che la città (3). In questa maniera l'antica leggenda indo-europea si è trasformata sul suolo iranico; nè poteva essere diversamente, poichè il voler salire al cielo, negato agli uomini fin che sono in terra, agli occhi degli addetti al mazdeismo è come un voler sforzare l'impossibile, violar le leggi sapienti del Creatore, un usar quasi delle arti di magia tanto aborrite dagli Irâni perchè proprie di Ahrîmane e de' suoi dêvi. Per queste ragioni soltanto al re Kâvus furono ascritte a colpa quelle arti e quelle opere che formano invece la gloria di Völundr e di Dedalo presso i Germani e presso i Greci.

Da quello che abbiamo notato, già s'intende abbastanza quale sia il giudizio che Firdusi fa di questo re, e perciò solo basterebbero le parole con le quali egli incomincia la sua storia, quando nota che, essendo Kobâd tanto virtuoso e Kâvus suo figlio tanto dissimile dal padre, non è da sdegnarsi se da una buona radice esce poi un tristo rampollo (4). L'*Avesta* invece in quelle poche volte che ricorda questo re, lo ricorda con tutto il rispetto e gli dà il nome di splendente e di seguace di Ahura Mazdâo (5). Ma la leggenda conservataci da Firdusi è forse la più genuina, e solo da essa, più che dagli sfuggevoli cenni dell'*Avesta*, potremo meglio conoscere questo re favoloso e le sue imprese.

Questo re adunque sembra destinato a incominciar molte imprese e a riuscir male in tutte, finchè poi qualcuno de' suoi eroi lo libera da ogni pericolo. La prima guerra ch'egli tenta, si è quella contro i dêvi del

(1) Fird. *Shâh.*, p. 298: *ghulâmî bar ârâst az khvîshtan.*

(2) Fird. *Shâh.*, p. 299: *nihâdah bi-pîsh andarûn g'âm i may.*

(3) Fird. *Shâh.*, p. 300: *bi-dû guft Gûdarz: bîmâristân | tu-râ g'ây zibâtar az shârsân.*

(4) Fird. *Shâh.*, p. 230: *agar shâkh i bad khîzad az bîkh i nîk, | tû bâ bîkh tundî may-âghâz, rîk.*

(5) *Yasht*, V, 45; XIII, 121: *uçadhânô mazdayaçnahê* (genit.).

Mâzenderân, quantunque Zâl, venuto in fretta dal Segestân (1), cerchi con ogni mezzo di distoglierlo da tal pensiero. Là tra i monti del Mâzenderân il dêvo bianco lo accieca e lo carica di ceppi con tutto l'esercito, e solo a stento è liberato da Rustem accorso a salvarlo per una via piena di pericoli (2). Scampato dai dêvi, egli intraprende tosto una guerra contro il re dell'Hâmâverân, lo vince, fa la pace con lui e gli chiede in isposa la figlia Sûdâbeh (3). Ma quel re si approfitta della cieca fiducia di Kâvus per prenderlo e chiuderlo in un tetro carcere, donde poi è liberato dallo stesso re dell'Hâmâverân, perchè Rustem è accorso e minaccia rovina e sterminio al suo regno (4). Qual esito avesse il suo volo aereo, abbiamo visto or ora; ma poi quando il giovane Sohrâb con uno stuolo d'armati minaccia l'Irân dal settentrione, egli per poco manda a rovina ogni cosa, perchè, sdegnatosi con Rustem che aveva tardato alcuni giorni ad obbedire alla sua chiamata, e cacciatolo con parole villane, in un impeto di collera si priva dell'aiuto di quel solo che può salvarlo dall'imminente pericolo (5). Ma Gûderz calma con savie parole lo sdegno di Kâvus e con dolci modi persuade Rustem a ritornare alla corte (6). Così ogni pericolo è scongiurato. Sopravviene intanto la guerra con Afrâsiâb, e Kâvus gli manda contro con pieni pôteri il figlio suo Siyâvish sotto la protezione di Rustem che l'aveva educato nel Segestân (7). Siyâvish parte, e dopo alcuni scontri crede di dover conchiudere col nemico una pace offerta con vantaggiose condizioni (8); ma Kâvus si rifiuta sdegnosamente di confermar quel trattato e comanda a Siyâvish ed a Rustem di continuar la guerra ad oltranza (9). Questi non vogliono e non devono mancare alla data fede con Afrâsiâb; Rustem quindi si ritira sdegnato nel suo castello del Segestân e Siyâvish trova un rifugio nella corte del suo nemico. Quivi egli è accolto con grande onore e ottiene in moglie la

(1) Fird. *Shâh.*, p. 234-237.

(2) V. la descrizione delle sette avventure incontrate da Rustem in Fird. *Shâh.* p. 245-261.

(3) Fird. *Shâh.*, p. 276-284.

(4) Fird. *Shâh.*, p. 287-293.

(5) Fird. *Shâh.*, p. 338-343.

(6) Fird. *Shâh.*, p. 341: Guderz conoscendo la follia di Kâvus gli parla così: *khirad bâyad andar sar i shahriyâr,* | *kih tîzî utundî nay-âyad bi-kâr;* prudenza convien che sia nella mente di un principe, poichè lo sdegno e l'impeto non vengono all'uopo.

(7) Fird. *Shâh.*, p. 401.

(8) Fird. *Shâh.*, p. 408-412.

(9) Fird. *Shâh.*, p. 417.

figlia stessa di Afrâsiâb, dalla quale nasce più tardi un figlio, Khusrev; ma poi, calunniato da Garzîvez, è fatto decapitare per ordine dello suocero sospettoso (1). Così l'impeto dello sdegno non frenato torna fatale a Kâvus anche questa volta, ed egli perde miseramente un figlio. Khusrev però fatto adulto, e ricondotto da Ghêv nell'Irân, dovrà ben presto prender le armi per vendicar la morte del padre suo Siyâvish; ma d'allora in poi non si fa più parola di Kâvus che ben rare volte e come per caso, poichè egli cadente per vecchiaia non può più attendere alle armi nè alle cose del regno. La sua morte segue poco tempo di poi la splendida vittoria di Khusrev che giunge finalmente a punire Afrâsiâb e Garsîvez, gli autori della morte di suo padre (2).

Questo re, quale lo descrive Firdusi, non solo è presuntuoso e inchinevole all'ira, ma anche superbo e debole nello stesso tempo. Come presuntuoso, egli tende anche al potere dispotico, ma in maniera ben differente da Minôcihr. Il quale, come abbiamo visto, vuol far prevalere la sua volontà solo in quanto essa è conforme a giustizia, e allorquando per qualche chiara prova è convinto del contrario, cede alla ragione ben volentieri e opera con ardore secondo il nuovo disegno; così egli era dapprima contrario al matrimonio di Zâl e di Rûdâbeh, ma, vistane la convenienza e chiarito in ciò il voler del cielo, egli favorisce quel connubio e augura ogni bene agli sposi, evitando così ogni disgusto ed ogni danno. Ma in Kâvus la cosa è ben diversa; egli vuol far prevalere la propria volontà, a qualunque costo, anche contro ragione; e quando dai danni che gliene vengono, intende il suo errore, allora egli ascolta in silenzio ogni più acerbo rimprovero e si umilia a far le più basse scuse a chi ha prima offeso (3).

A Zâl poi che gli rappresentava quanto fosse pericoloso tentar la conquista del Mâzenderân, tanto che Gemshìd, Frêdûn e Minôcihr non si sobbarcarono a quella impresa (4), egli risponde che apprezza i suoi consigli, ma che egli è più potente e più ricco di Gemshìd e di Frêdûn,

---

(1) Fird. *Shâh.*, p. 475.

(2) Questa lunga guerra è descritta nel *Libro dei Re* da p. 489 a p. 995.

(3) Fird. *Shâh.*, p. 343: quando Kâvus ha discacciato Rustem, *basi pûzish andar gudhashtah bi-khvâst, | kih: tundî marâ gavhar ast u sirisht*; molte scuse gli domandò per ciò che era avvenuto, *dicendo:* l'ira è la mia natura e la mia *interna* disposizione; e più innanzi: *c'û âzurdah gashtî tu, ay pîltan, | pashîmân shudam, khâk-am andar dahan*; poichè tu ti sei rattristato, o prode, io mi sono pentito, e il fango è dentro la mia bocca.

(4) Fird. *Shâh.*, p. 235.

di Minôcihr e di Kobâd, e che, se Zâl non gli vuol esser compagno in quella guerra, non lo consigli nemmeno a rimanersi inerte nella reggia (1). Intanto la guerra contro il Mâzenderân gli è fatale; ma poi, appena liberato da Rustem, dopo aver confessato il suo torto nel non aver voluto ascoltare i consigli di Zâl (2), ripiglia il primiero orgoglio e la prima burbanza, e in una lettera a quel re lo chiama stolto e fuorviato dalla retta fede, gli dice essere inutile trattar con lui, poichè se egli avesse obbedito prima come uno schiavo e gli avesse pagato il tributo senza ripugnanza e senza resistenza, egli l'avrebbe lasciato re nel suo regno, come principe vassallo e tributario (3).

Con tal presunzione egli non soffre ostacolo alla sua volontà; e appena egli incontra qualche impedimento, l'ira sua prorompe ed egli carica di contumelie e di insulti chi prima aveva ricolmato di lodi. Già abbiamo visto come egli si sdegnasse con Rustem perchè questo eroe s'indugiava a prender le armi contro Sohrâb; Ghêv e Rustem sono condannati dall'iroso principe ad essere appiccati (4), e solo Gûderz giunge a stento a calmarne lo sdegno; e abbiam pur visto quanto gli riuscisse fatale la subitana ira contro di Siyâvish per la pace conclusa senza suo permesso. Rustem poi che, dopo aver ferito Sohrâb e averlo riconosciuto per figlio, fa chiedere da Gûderz al re un portentoso balsamo che guarisce ogni ferita, ottiene da lui una ripulsa. Kâvus si meraviglia di tal domanda, fa le lodi di Rustem, ma poi soggiunge che, se Sohrâb resta vivo e fa lega col padre, i due eroi saranno troppo potenti e non vorranno più obbedirlo ed onorarlo come loro sovrano; conclude quindi che egli non concederà il balsamo richiesto, poichè chi fa bene ai nemici, sparge poi di sè cattiva fama nel mondo (5).

Come dallo sdegno, così egli si lascia vincere facilmente dall'amore per le donne. Ghêv e Thûs trovano un giorno, mentre andavano a caccia

(1) Fird. *Shâh.*, p. 236: *c'unîn pâsukh âvard Kâvuz bâz | k-az andîshah i tû nayam bî-niyâz, | va-likin ma-râ az farîdûn u g'am | fuzûn ast mardî u farr u diram, | hamân az Minûc'ihr u az kay-Kubâd, | kih Mâzandarân-râ na-kardand yâd; | gar îdûn kih yâr-am na-bâshi bi-g'ang, | ma-farmây bar gâh kardan. dirang.*

(2) Fird. *Shâh.*, p. 242: *c'û az pand-hây i tû yâd âyad-am, | hamî az g'igar sard bâd âyad-am; | na-bûdam bi-farmân i tû hûshmand*, etc.

(3) Fird. *Shâh.*, p. 264: *bi-farmân gar âyî bi-sân i rahi;* se cedi al comando qual schiavo.

(4) Fird. *Shâh.*, p. 339: *bi-gîr-ash, bi-bar, zindah bar dâr kun;* prendilo, strascinalo, appendilo vivo ad un albero.

(5) Fird. *Shâh.*, p. 369-370: ecco come Kâvus chiude il suo discorso: *kasî dushman i khvîshtan parvarad, | bi-gîtî darûn nâm i bad gustarad.*

per un bosco, una vaga fanciulla, della quale, ebbri d'amore, si contendono il possesso; e poichè la questione sta per degenerare in baruffa, la decisione è deferita al re. Kâvus s'innamora ben tosto della fanciulla, la fa sua sposa, e pretende poi di calmare i furori amorosi dei due principi rimasti delusi col dono di dieci cavalli di gran prezzo, di una corona e di un seggio reale (1). Così il gran re diventa anche un cotal poco schernitore. E allorquando egli è giunto a scoprir chiaramente le arti maligne della moglie sua Sûdâbeh, da lei adoperate per perdere Siyâvish, di cui ella si era invaghita senza esserne corrisposta (2), dall'evidenza dei fatti egli è costretto a condannarla a morte, benchè a malincuore. Ma Siyâvish che conosce l'animo debole del re, s'accorge che egli si pentirà tosto d'averla così punita (3), e però si fa innanzi chiedendo grazia per lei. Kâvus che cercava con l'animo angosciato un pretesto qualunque per salvarla (4), poichè egli è ancora schiavo all'amor di Sûdâbeh, cede tosto premurosamente alla preghiera del figlio dicendo ch'egli cede a lui soltanto, ma rivelando intanto con tale scusa mal trovata che egli pure desiderava di risparmiarla (5).

Come eroe nel vero senso della parola, Kâvus veramente non val molto; nè la sua giovinezza, prima ch'egli salisse al trono, è stata esercitata in lunghe guerre, come è accaduto a Minôcihr ed a Khusrev. Egli ha soltanto una smania sfrenata di conquista, alla quale non sa rinunziare anche quando mille pericoli e mille difficoltà gli si fanno incontro; e nelle battaglie non si trova mai che si ricordi di lui qualche bel colpo, qualche nemico da lui abbattuto ed ucciso, qualche prova di ardire e di coraggio. Egli non sa che disperarsi quando vede piegare i suoi (6), o quando nessuno de' suoi osa accettar la sfida di qualche nemico, come allorquando il tûrânio G'uyâ (7) o il giovane Sohrâb (8) lo sfidano co' suoi guerrieri a battaglia.

---

(1) Fird. *Shâh.*, p. 380: *dah asp i girân-mâyah bâ tâg' ugâh* | *bi-har-dû sipah-bad firistâd shâh.*

(2) Fird. *Shâh.*, p. 383-400.

(3) Fird. *Shâh.*, p. 399: *hamî guft* (Siyâvish) *bâ dil kih: murda-st shâh,* | *gar îdûn kih Sûdâbah gardad tabâh;* leggo *murda-st*, è morto, invece del *burda-st*, è portato, della Calc.

(4) Fird. *Shâh.*, p. 399: *bahânah hamî g'ust z-ân kâr shâh* | *bi-dân tâ bi-bakhshad gudhashtah gunâh.*

(5) Fird. *Shâh.*, p. 399: *Siyâvish-râ guft: bakhshîdam-at,* | *az-ân pas kih bar râstî dîdam-at;* a Siyâvish disse *il re:* io te la condono, poichè ti ho visto apporti al giusto.

(6) Fird. *Shâh.*, p. 269: *bi-âvâz guft ân-zamân shah riyâr* (Kâvus); | *c'ih bûd, ay dilîrân u mardân i Kâr,* | *k-az-în dîv dil-tân c'unîn khîrah shud?* etc.

(7) Fird. *Shâh.*, p. 269.

(8) Fird. *Shâh.*, p. 353 e segg.

Ma quando egli ha ottenuta la vittoria con l'aiuto de' suoi più prodi e di Rustem specialmente, egli suole poi vantarsene e attribuire a se stesso tutto il merito dell'impresa compiuta (1).

Al re Kâvus morto nella più tarda vecchiaia, dopo aver visto punito Afrâsiâb del suo misfatto, succede nel regno il giovane Khusrev, noto nell'*Avesta* col nome di *Huçravanh*. Nei *Vedi* troviamo menzione di un *Suçravas* (2); ma di esso non conosciamo che il nome; le forme che il nome di Khusrev assume nel pehlevi e nel pârsi sono *Khôçrûb* e *Qaçraw*.

Nell'*Avesta* l'impresa per la quale Khusrev o Huçravanh è principalmente celebrato, si è quella della uccisione di Franraçyan o Afrâsiâb che gli aveva ucciso il padre Siyâvish. Questo fatto è collocato dalla leggenda sulle sponde del lago C'aêc'açta tanto dall'*Avesta* quanto da Firdusi (3); ed è pure comune al *Libro dei Re* ed all'*Avesta* la circostanza che Haoma fece prigioniero Franraçyan, indi lo trasse incatenato ai piedi di Huçravanh.

L'*Avesta* pure conosce il fatto dell'uccisione a tradimento di Çyâvarshâna, il Siyâvish di Firdusi, designandolo con l'aggettivo di *ucciso per violenza* (4). In due luoghi dell'*Avesta* (5) troviamo ricordata un'altra impresa di Khusrev, ma il senso è quivi tanto oscuro, da non potersi dire chiaramente di qual cosa vi si tratti. La traduzione dello Spiegel non rende alcun senso (6), e quella tentata dal Windischmann (7) non porta maggior luce; solo l'Harlez nella sua traduzione sembra aver risolta con molta probabilità la questione. Egli, levando dal testo la parola *manô*, e nel nome *mairyô*, l'uccisore, indovinando essere adombrato lo stesso Franraçyan, riconduce l'oscura leggenda, come la chiama lo Spiegel, alla prima dell'inimicizia di Khusrev col re dei Tûrâni (8). In un altro inno dell'*Avesta* (9) si leggono le lodi di questo re, ma i pregi per i quali egli

(1) FIRD. *Shâh*, p. 274: così Kâvus si rivolge a Dio: *tû kardî ma-râ das g'ihân bî-niyâz, | tû dâdî ma-râ dast bar g'âduvân:* tu nel mondo mi hai reso non bisognoso d'alcuno, tu mi hai data sui maghi la vittoria.

(2) SPIEGEL, *Erân Alterth.*, I, p. 441. — IUSTI, *Handbuch der Zendspr.* v. *Huçravanh*.

(3) *Yasht.* V, 49, IX, 18. — FIRD. *Shâh.*, p. 988-995.

(4) *Yasht.* IX, 18; XIX, 77: *çyâvarshânahê zurôg'atahê* (genit.).

(5) *Yasht.* V, 50 e XIX, 77.

(6) SPIEGEL, *Avesta-Uebersetz.*, III, p. 50.

(7) WINDISCHMANN, *Zoroastr. Studien*, p. 12.

(8) HARLEZ, *Avesta-trad.*, t. II, p. 205.

(9) *Yasht*, XIX, 73-76.

vi è esaltato, sono quasi tutti morali e di natura in gran parte astratta, siccome abbiamo visto esser proprio dell'*Avesta* l'esaltare in tal maniera gli eroi. In altri passi invece egli vi è celebrato come colui che ha riunite in un sol regno le provincie ariane (1), laddove lo Spiegel (2) crede di dover riconoscere che cotesto re raccolse così, dopo la morte di Kâvus, le sparse membra del regno ariano, i cui confini erano troppo spesso violati dal re dei Tûrâni.

Il *Bundehesh* ci dice ben poco sul conto di Khusrev notando soltanto che egli regnò per sessant'anni (3); e il *Mînôkhired* oltre l'uccisione di Frâçyâk, gli attribuisce altre opere, ultima delle quali sarà quella di aiutare il Çaoshya*nt* al tempo della risurrezione dei morti (4).

Nel *Libro dei Re* appare evidentemente che Khusrev non propone altra meta al viver suo che quella di punire l'uccisore di suo padre. Alcuni altri fatti secondari interrompono di tanto in tanto la lunga guerra ch'egli sostiene contro di Afrâsiâb, come sono la comparsa del dêvo Akvân (5), e il ratto e il rinvenimento di Bîzhen (6); ma questi sono di poco conto rispetto alla lunga guerra coi Tûrâni. Essa poi si può dividere come in due lunghi periodi, il primo dei quali corre da quel tempo nel quale Khusrev intima la guerra ad Afrâsiâb fino alla morte. Pîrân, guerriero tûrânio, ma protettore di Khusrev perchè consapevole dell'ingiustizia del suo signore (7); e il secondo comincia dalla morte di Pîrân e va sino alla morte di Afrâsiâb e di Garsîvez e alla piena vittoria di Khusrev. Nel primo periodo Khusrev se ne sta nella reggia con Kâvus e dirige da lontano le mosse degli eserciti; nel secondo egli prende le armi, e qui soltanto egli ha campo di dar prova del suo valore (8).

Ma già una prova della sua virtù egli aveva data assai prima allorquando giunse ad espugnare la rocca di Behmen guardata dai dêvi (9),

(1) *Yasht.* V, 49: *arsha airyanâm daqyunâm khshathrâi hankeremô huçrava.*

(2) SPIEGEL, *Avesta-Uebersetz.*, III, p. 49.

(3) *Bundehesh.* p. 81.

(4) *Mînôkhired* in SPIEGEL, *Pârsi-Gramm.*, p. 138: *u riçt ârâçtâr Çaoçyôs i pe'rôzhgar riçtâkhe'zhasn. u tan i paçîn aydrî i ôi râ veh tuan kardan;* e il Çaoçyôs (zendo *Çaoshyant*) vittorioso, suscitatore dei morti, potrà dar corso alla risurrezione e ai corpi futuri (dell'altra vita) solo col suo aiuto.

(5) FIRD. *Shâh.*, p. 745-753.

(6) FIRD. *Shâh.*, p. 754-799.

(7) FIRD. *Shâh.*, p. 549-905.

(8) FIRD. *Shâh.*, p. 905-995.

(9) FIRD. *Shâh.*, p. 544.

nella quale Thûs e Ferîburz invano avevano tentato di entrare, poichè quella rocca incantata non aveva strada per accedervi, e sotto quelle mura il suolo come fuoco ribolliva, tanto che le lancie scintillavano pel calore e i guerrieri soffocavano dentro le corazze (1). Ma questa impresa non ha veramente il carattere eroico delle altre, e Khusrev vi appare non già come un vero eroe, ma bensì come un protetto dal cielo. La rocca infatti sparisce per incanto senza ch'egli personalmente abbia potuto sotto quelle mura dar prova di quanto egli valesse nell'armi (2). Nè questa impresa poteva essere di indole diversa, poichè la presa della rocca di Behmen non è richiesta a Khusrev da Kâvus e dagli altri principi che per provare se egli è veramente il figlio di Siyâvish e degno quindi di regnare; Thûs infatti era sôrto a contestargli questo diritto (3). Ora per provar ciò era necessario un manifesto segno del cielo, e Khusrev col suo favore soltanto fa sparire quella rocca, nella quale Ferîburz, il suo competitore, aveva invano tentato di entrare.

Nella guerra poi contro di Afrâsiâb due sono i punti decisivi nei quali Khusrev entra in azione. Shêdah, figlio di Afrâsiâb e zio quindi dello stesso Khusrev per essere fratello della madre sua Ferenghîs, gli viene proponendo uno scontro o con lui o con Afrâsiâb (4); ma Afrâsiâb è avolo di Khusrev, e una battaglia tra avolo e nipote non converrebbe. Khusrev quindi sceglie di provarsi con Shêdah, e Shêdah in quello scontro è ucciso (5). L'altro punto si è allorquando Hôm, un pio uomo discendente da Frêdûn, che non è poi che il genio Haoma dell'*Avesta*, conduce legato Afrâsiâb ai piedi di Khusrev che senza pietà lo trafigge e l'uccide (6); e già anche dall'*Avesta* sappiamo che Haoma faceva voti e pregava per poter condurre Fra*n*raçyan ai piedi del re Huçrava*n*h (7). Queste sono le imprese di Khusrev prima di esser re.

---

(1) Fird. *Shâh.*, p. 542 e segg.: *zamîn ham-c'û âtash hamî bar damîd, | sinânhâ zi-garmî hamî bar furûkht, | miyân i zirih mard i g'angî bi-sûkht... | bi-pîrâman i dizh yaki râh nîst, | agar hast, az ma kas âgâh nîst.*

(2) Fird., *Shâh.*, p. 544 : *va-z-ân pas yakî rûshanî bar damîd, | shud ân tîragî sar bi-sar nâ-padîd.*

(3) Fird., *Shâh.*, p. 538 : *na-bâsham bar-în kâr ham-dâstân, | zi-khusrav ma-zan pîsh i man dâstân;* in questa cosa io non convengo *teco*, non parlarmi di Khusrev (così Thûs a Ghêv). Vedi nello stesso luogo le ragioni per le quali egli crede di dover succedere al trono invece di Khusrev.

(4) Fird. *Shâh.*, p. 917 e segg.

(5) Fird. *Shâh.*, p. 923 e segg.

(6) Fird. *Shâh.*, p. 993: *bi-shamshîr i hindî bi-zad gardan-ash, | bi-khâk andar afgand târî tan-ash.*

(7) *Yasht.*, IX, 18; XVII, 38.

Ma di Khusrev diventato re non si racconta più alcun fatto degno di nota; come Minôcihr dopo vendicata la morte di Erag', egli è tranquillo e pressochè inerte. Lo assale soltanto qualche timore al pensiero di aver forse peccato nella sua vita e di aver forse troppo duramente punito l'avo suo Afrâsiàb, e desidera quindi di salire al cielo (1). Questa grazia gli è concessa, ed egli, salutati i principi Irâni e designato per suo successore Lohrâsp, s'incammina verso settentrione con alcuni eroi, e poco stante sparisce dai loro occhi dopo essersi bagnato in una fontana (2). Questa circostanza è nota a quanto pare anche all'*Avesta*, nel quale vediamo il profeta Zarathustra augurare al re Vîstâçpa di essere libero dalle malattie e dalla morte come Kava Huçrava*n*h (3). Hamzah di Ispâhân ricorda tuttavia l'uccisione di un dragone fatta da Khusrev sul monte Kûshîd laddove era un tempio del fuoco (4). Ma nè il Windischmann nè lo Spiegel, dai quali abbiamo presa cotesta notizia, non sanno dirci nulla intorno a questa impresa di Khusrev. Firdusi veramente non dice nulla di tutto ciò; ma si contenta di descrivere gli ultimi anni tranquilli e sereni del regno di Khusrev, finchè egli fu fatto degno di salire al cielo. Pure nel *Libro dei Re* ritroviamo, al tempo che Kâvus era ancora vivo e che Khusrev attendeva alla guerra con Afrâsiâb, ricordato e descritto lo scontro di Rustem col dèvo Akvân che sotto le forme di un asino selvatico disturbava i poveri pastori e le loro mandre. Il dêvo, dopo diverse avventure, è ucciso poi da Rustem. Cotesto episodio, come nota anche lo Spiegel (5), non ha alcuna relazione con la gran guerra contro di Afrâsiâb nè pei fatti antecedenti nè per quelli che seguono, e Firdusi stesso, nel prepararsi a scriverlo, dice di non ritenerlo credibile; nè si sa veramente perchè cotesto episodio cada là isolato in mezzo a quella gran guerra, senza avervi alcuna relazione (6). Ora, non potrebbe questo fatto esser quello medesimo del dragone ucciso da Khusrev sul monte Kûshîd, che Firdusi trasporta un poco indietro nel tempo, riferendolo alla giovinezza di Khusrev

(1) FIRD. *Shâh.*, p. 1002: *biy-âmurz kardah gunâh i ma-râ;* perdonami i peccati commessi; e p. 1001: *kunûn ân bih âyad kih man râh-g'ûy | shavam pîsh i Yazdân pur az âb rûy*; ora è meglio che io qual pellegrino vada alla presenza di Dio, col volto pieno di lagrime.

(2) FIRD., *Shâh.*, p. 1024 e segg.

(3) *Aferîn Paighambar Zartust*, 7.

(4) SPIEGEL, *Erân. Alterth.*, I, p. 656: — WINDISCHMANN, *Zor. Studien*, p. 12.

(5) SPIEGEL, *Erân. Alterth.*, I, p. 636: Er steht (questo episodio) weder mit dem Vorhergehenden, noch mit dem Folgenden in irgend einem Zusammenhang.

(6) FIRD. *Shâh.*, p. 745-753.

e attribuendolo non già a questo re, ma bensì a Rustem che compie l'ardita impresa per ordine del suo signore? Resterebbe la difficoltà che Hamzah di Ispâhân parla di un dragone e Firdusi di un dêvo col nome di Akvân; ma si noti che tanto i dêvi quanto i dragoni e i mostri sono creature di Ahrîmane, secondo la fede iranica; di Akvân poi non si fa alcuna menzione nell'*Avesta*, e la confusione di un dêvo con un dragone non ci sembra tanto improbabile in leggende popolari.

Il carattere del re Khusrev non risalta molto, a dir il vero, nel *Libro dei Re.* Del valor suo come guerriero abbiam già parlato più sopra; ma nella guerra contro di Afrâsiâb campeggiano sovra tutte le altre due figure di eroi soltanto, Thûs cioè e Rustem, il primo nella prima parte, il secondo nella seconda; e però la figura di Khusrev resta un poco, come si suol dire, nell'ombra, non tanto perchè egli si tiene lontano dal teatro della guerra nè vi compare se non al momento di punire il suo nemico, ma ancora per alcune ragioni che verremo esponendo nel seguente capitolo. Il suo carattere quindi non è molto segnalato in mezzo agli altri eroi, nè si può descriverlo minutamente come abbiam fatto per gli altri re che lo precedettero, quantunque la parte da lui sostenuta in tutta la leggenda epica sia delle più importanti. Si può dir tuttavia con sicurezza ch'egli in tutti gli atti di sua vita è benevolo e pio, amante di giustizia, arrendevole alla ragione, e in ciò tutto l'opposto dell'avo suo Kâvus, e tale che ben potrebbe chiamarsi il padre del popol suo. A lui quindi si converrebbe più che a qualunque altro il nome di pastore di popoli quale si trova bene spesso applicato ai regnanti tanto da Omero quanto dall'*Avesta* e da Firdusi (1). Con tal carattere egli è condotto a perdonare le offese e gli errori degli altri; e questo del perdono è il tratto più notevole dell'animo suo. Egli dimentica ben presto che Thûs è sorto a contestargli orgogliosamente il diritto al trono (2) e lo manda a capo delle sue schiere contro di Afrâsiâb (3). A Thûs riesce assai male la difficile impresa ed

---

(1) Nell'*Avesta* questo nome suona *hvanthwa* e si applica solo al re Yima, Gemshîd, *yimô hvanthwô Vend.* II, 43; *Yasht.* IX, 13; in Firdusi (*passim*) è *shâh i ramah.*

(2) Fird. *Shâh.*, p. 537-542.

(3) Fird. *Shâh.*, p. 569; e a p. 566: *bi-dîshân c'unîn guft bîdâr shâh,* | *kih:* Tûs *i sipahbad bi-pîsh i sipâh* | *bi-bâyist bâ akhtar i kâviyân;* | *bi-farmân i û bast bâyad miyân,* | *bi-farmân i û bûd bâyad hamah;* a loro così disse l'accorto principe: Conviene che Thûs, il capitano, si trovi a capo dell'esercito col vessillo di Kâveh; ad un suo cenno convien stringere al fianco *le corazze*, sotto il suo comando conviene stieno tutti.

è richiamato da Khusrev in corte che gli toglie il comando per darlo a Ferîburz (1); ma poi ogni colpa gli è da lui perdonata per intercessione di Rustem, gli è reso il comando e affidato di nuovo il carico dell'impresa (2). Nell'episodio di Bîzhen e di Menîzheh troviamo che Gurghîn, per invidia verso di Bîzhen, lo fa cader nelle mani di Menîzheh figlia di Afrâsiâb, poscia, ritornato alla corte, con perfide calunnie lo accusa dinanzi al principe (3). Ma poi la verità è scoperta, e il calunniatore è mandato da Khusrev in carcere. Egli però lo trae di là poco dipoi per intercessione di Rustem e lo ridona a libertà (4). Al suo entrare in Kang-dizh (5), la città fondata dal padre suo Siyâvish, gli si fanno incontro piangenti e supplichevoli le mogli di Afrâsiâb alle quali egli risparmia la vita (6), risparmiata da lui pure a G'ihn figlio di Afrâsiâb, perchè non macchiato di alcuna colpa verso di lui (7). Ma ciò che egli non può in niun modo condonare, si è la pena dovuta ad Afrâsiâb ed a Garsîvez per l'uccisione del padre suo (8). Egli ben sa che ciò gli potrà costar pena e dolore, ma è un dovere più forte che lo spinge, allo stesso modo che nelle tradizioni greche troviamo che Oreste per vendicare il padre suo, quantunque le furie lo assalgano di poi, è costretto a dar morte alla madre sua Clitennestra (9). Così Garsîvez ed Afrâsiâb, e prima di loro Gurvî esecutore dell'infame sentenza, cadono per mano di Khusrev.

A questa dolcezza d'animo che lo spingeva al perdono, Khusrev congiunge una insigne ed esemplare pietà. Giunto il momento nel quale egli pure deve prender le armi, suo primo pensiero si è quello di celebrare i funerali al prode tûrânio Pîrân, all'antico suo protettore, siccome vedremo

(1) Fird. *Shâh.*, p. 604 e segg.

(2) Fird. *Shâh.*, p. 622.

(3) Fird. *Shâh.*, p. 759 e segg. p. 771 e segg.

(4) Fird. *Shâh.*, p. 786 e segg.

(5) Anche il *Mînôkhired* mostra di conoscere quest'impresa di Khusrev allorquando nota che tra i vantaggi che vennero da lui, trovasi quello d'aver purificata la città di Kandizh, *u vinârdan i Kandizh;* Spiegel, *Parsi-Gramm.*, p. 138. — Nell'*Avesta* questa città è ricordata col nome di *Kanha*, *yasht*, V, 54, 57.

(6) Fird. *Shâh.*, p. 954 e segg.

(7) Fird. *Shâh.*, p. 996.

(8) Fird. *Shâh.*, p. 1001; ecco le parole di Khusrev: *bi-kushtam kasî-râ kih bâyist kushst,* | *kih bûd kazhzh ubâ pâk i yazdân durusht;* uccisi uno che pur conveniva uccidere, che era di mente tortuosa e riottoso verso Iddio santo.

(9) Soph. *Electr.*, 14: πατρί τιμωρὸν φόνου (Oreste). — Æschyl. *Choeph.* 900 e segg.

più innanzi, quantunque suo nemico e a capo dell'esercito di Afrâsiâb (1). Così le affettuose parole ch'egli rivolge ai suoi principi prima di salire al cielo (2), e la preghiera ch'egli rivolge a Dio per ottenere tal grazia (3), sono ispirate dalla più sentita pietà e da quell'ineffabile desiderio di quiete e di pace che entra nel cuore dell'uomo giusto che ha ben spese le fatiche e il tempo della sua vita. « Temete, egli dice, temete tutti Iddio, nè vi crediate sicuri di questa oscura terra, poichè i giorni passano per tutti e il tempo va numerando ogni nostro respiro. Dal sapiente Hôsheng fino al re Kâvus di quanti principi furono con maestà, trono e corona, non rimase nulla in terra fuor che il nome, e niuno ricevette mai novella di loro. Molti di essi furono irriverenti verso Dio, ma alla fine ebber poi timore per questa loro colpa » (4).

Non si potrebbe lasciar la serie degli eroi delle famiglie reali senza parlare di Thûs che pure ha tanta parte nella leggenda popolare dell'epopea. Il suo nome suona Tuça nella lingua dell'*Avesta;* e il padre suo è il re Nevdher che successe nel regno al padre suo Minôcihr. Cotesto eroe, tanto nell'*Avesta* quanto nel *Libro dei Re,* ci è rappresentato come un principe valoroso e intraprendente, ma dai brevi cenni che ne fa l'*Avesta,* non si può conoscere un altro aspetto del suo carattere che è l'ostinazione e la presunzione, quale appar manifesto in Firdusi. L'*Avesta* lo chiama per due volte il valoroso Tuça guerriero curule (5) e lo ricorda nell'atto di supplicar la dea Ardvî-çûra di concedergli di vincere, presso al castello di Khshathrôçaoka, un popolo tûrânico, gli Aurva Hunava. Questi pure, presso al castello di Khshathrôçaoka, pregano la dea di poter con le loro armi atterrar Tuça, il valoroso, l'agitator di carri, ma la dea non concesse loro tal grazia (6). Il *Bundehesh* lo chiama immortale con

(1) Fird. *Shâh.*, p. 896.

(2) Fird. *Shâh.*, p. 1014 e segg.

(3) Fird. *Shâh.*, p. 1001.

(4) Fird. *Shâh.*, p. 1015: *bi-tarsîd yak-sar zi-Yazdân i pâk, | ma-bâshîd îman darîn tìrah khâk; | kih în râz bar har kasî bi-gudharad, | zamânah hamî dam i mâ bi-shumarad; | zi-Hûshang i rad tâ bi-Kâvus i shâh, | kih bûdand bâ farr u takht u kulâh, | g'uz az nâm i ìshân bi-gîtî na-mând, | kasî nâmah i raftagân bar na-khvând; | az ìshân basî nâ-sipâsân budand, | bi-farg'âm az-în bad hirâsân budand.*

(5) *Yasht* V, 53: *takhmô Tuçô rathaêstârô* (nom.); *yasht* V, 58: *takhmem Tuçem rathaêstârem* (acc.).

(6) *Yasht* V, 53, 58: Gli *Aurva-Hunava* sono un popolo ignoto; inutile il pensare agli Unni bianchi, come vorrebbe l'Haug, *Essays*, 192. — Lo Spiegel, *Avesta-Uebersetz*, III, p. 50, vede in *hunava* il plur. di *hunu*, figlio, skr. *sunu*, e propone di tradurre *i figli di Aurva.*

altri pochi guerrieri, e a lui e a questi altri attribuisce l'ufficio di aiutare il Çaoshyant al tempo della risurrezione dei morti (1).

Ma nel *Libro dei Re* di queste imprese di Thûs contro gli Aurva-Hunava al castello Khshathrôçaoka, non si trova alcun cenno, e si sa del resto che Firdusi non ha verseggiate tutte quante le leggende epiche del suo paese. Ma del resto, anche con tal mancanza, il *Libro dei Re* racconta molti fatti di valore di questo eroe e lo ricorda sempre come uno dei primi combattenti nelle battaglie date dal re Kâvus sì nel Mâzenderân che nell'Hâmâverân (2). La sua figura campeggia specialmente nella prima parte della lunga guerra contro di Afrâsiâb, allorquando egli aveva il comando dell'esercito e Khusrev non ancora si era mosso dalla reggia. Allora egli prende la rocca di Kelât (3), uccide Arzheng figlio di Zirih (4), combatte con Hûmân (5). È ben vero che la guerra gli va male, onde Khusrev si adira con lui; ma ciò dipende da altre ragioni e specialmente da poca riflessione e da poca tattica militare; ma se egli non val molto come capitano, non manca però di valor personale, del quale dà bene spesso chiare e sicure prove.

Thûs però ha un'alta idea di se medesimo che gli viene specialmente dall'esser egli figlio di un re, di Nevdher, e nipote di Minôcihr. Per la qual cosa egli aspira al trono, e allorquando Ghêv ha ricondotto Khusrev dal Tûrân, egli solo si leva a contestarne il diritto, dicendosi figlio di Nevdher, nipote di Minôcihr e discendente di Frêdûn (6). In tale idea egli si ostina, nè vuol cedere che allorquando gli fallisce il tentativo di entrar nella rocca di Behmen (7). Per tal suo carattere ostinato, egli ama le liti, e appunto con Gûderz egli ha una lunga disputa sulla legittimità di Khusrev, e prima assai, al tempo del re Kâvus, contende ostinatamente a Ghêv una fanciulla trovata nei boschi, e già egli spinge la cosa agli estremi (8), allorquando la decisione è deferita al re, il quale,

---

(1) *Bundehesh*, p. 69.

(2) Fird. *Shâh.*, p. 268, 271, 279, ecc.

(3) Fird. *Shâh.*, p. 585 e segg

(4) Fird. *Shâh.*, p. 628.

(5) Fird. *Shâh.*, p. 628 e segg.

(6) Fird. *Shâh.*, p. 538: *man-am pûr i Navdhar g'ihân shahriyâr, | zi-tukhm i Farîdûn man-am yâd-gâr.*

(7) Fird. *Shâh.*, p. 542 e segg.

(8) Fird. *Shâh.*, p. 378 e segg.

come abbiam visto, tronca la questione ritenendo per sè la fanciulla. Per tale sua inclinazione alle contese, sembra ch'egli goda immischiarvisi anche quando esse non lo riguardano punto; così quando Kâvus, sdegnato contro Rustem per il suo ritardo, lo condanna a morte e ordina ai principi di prenderlo, nessuno osa muoversi; il solo Thûs stende il braccio per afferrare il prode guerriero, ma colpito da lui con un pugno stramazza dolorando a terra (1). Un soverchio amor proprio e del proprio utile trovasi anche in lui; egli quindi non pensa che per sè, e allorquando, sulla fine del regno di Khusrev, Zâl domanda un salvacondotto per il figlio suo Rustem e Gûderz lo chiede per il figlio Ghêv (2), egli invece lo chiede per sè soltanto e non per altri, rammenta al re che egli è nipote di Frêdûn e che dalla sua famiglia prima di Kobâd si eleggevano i re (3), ricorda le sue imprese e i suoi meriti al tempo di tanti regnanti e si raccomanda quindi al suo re e signore. Khusrev appaga ben volentieri il suo desiderio e gli consegna il vessillo di Kâveh, lo fa governatore del Khorâsân e accompagna quel decreto con una collana e una cintura d'oro (4).

III. — *Gli eroi del Segestân. — Rustem.*

In nessuna antica epopea quanto nella persiana fu osservata più costantemente quella regola di tutte le antiche leggende eroiche, per la quale un eroe secondario accanto all'eroe principale, accanto al capo di una impresa qualunque, accanto al re o al principe che dispone e comanda, acquista sempre maggior gloria dalle opere di valore che la leggenda gli attribuisce. Il re o il capo di una impresa eroica vale infatti più per senno che per valore, poichè suo ufficio soltanto si è quello di guidare

(1) Fird. *Shâh*, p. 339: *bi-shud* Tûs *u dast i tahamtan girift....* | *bi-zad* (Rustem) *tund yak-dast bar dast i* Tûs, | *tû guftî zi-pîl i zhiyân yâft kûs*; | *zi-bâlâ nigûn andar âmad* (Thûs) *bi-sar*.

(2) Fird., *Shâh.*, pag. 1018 e 1019.

(3) Fird. *Shâh.*, p. 1020: *man-am z-in buzurgân farîdûn-nizhâd*, | *zi-mâ farrukhân tâ biy-âmad Kubâd*; io tra questi eroi sono della stirpe di Frêdûn, dalla nostra famiglia si eleggevano i re fin che venne Kobâd. — Così intendo quel *farrukhân* che propriamente significa *beati*, *fortunati*; con Kobâd infatti sottentrò nel regno la famiglia dei Kay a quella dei Pêshdâd a cui Thûs apparteneva.

(4) Fird. *Shâh.*, p. 1020.

le imprese guerresche e di disporre di ogni mezzo per giungere più speditamente alla vittoria. Ma mentre egli è rispettabile per la saggezza e temuto per l'autorità, come eroe invece, nel significato più ovvio di questa parola, va perdendo assai. Laonde avviene, che mentre egli guida col senno un'impresa, chi invece affronta i pericoli e combatte per lui è sempre qualche eroe che per ordine di dignità gli è secondo, ma che per valore supera tutti i restanti; cosicchè nei racconti popolari la sua figura è sommamente cara al popolo che l'abbellisce e l'adorna, mentre quella del capo se non è dispregiata, è soventi volte trascurata. Il popolo infatti che è l'unico creatore, nei tempi antichi almeno, delle leggende epiche, non può intendere quale e quanto sia il merito di colui che non già col vigor personale nè con splendidi atti di valore, ma bensì col senno e con la virtù e con la costanza dell'animo conduce a fine una difficile impresa; la mente e l'attenzione popolare sono attirate dalle belle qualità esterne di un eroe più che dalle interne, e riscuotono dal popolo maggiore ammirazione la bellezza della persona, la fiorente giovinezza, la forza del braccio, la valentía nel trattar l'armi in campo, e il coraggio spregiatore e vincitor di pericoli. Tutte queste belle qualità mancano generalmente in persone di molto senno e di provata virtù, e innanzi alquanto negli anni; e i re e i capitani delle leggende epiche incontran meno il favore del popolo che le crea e le va elaborando in infiniti racconti, perchè appunto il loro merito è più recondito, per esser tutto morale e spirituale, e però meno inteso dal popolo. Questa pertanto è la ragione per la quale nell'*Iliade* campeggia fra tutte la figura di Achille, mentre capo naturale dell'impresa è Agamennone. E come Agamennone senza di Achille non vincerebbe, così senza di Argiuna non vincerebbe Yudhish*th*ira, il capo dei Pân*d*huidi nel *Mahâbhârata*, nè Râma senza di Hanumant condurrebbe a termine le sue imprese.

Ora nel *Libro dei Re* di Firdusi, o meglio in tutta la leggenda epica persiana, questa regola più che altrove è costantemente osservata. Gli eroi del Segestân, dei quali ora imprendiamo a parlare, sono il principal sostegno dei re Irâni, i quali ricorrono a loro per aiuto allorquando si è presentata qualche difficile impresa. Anche dalla storia abbiamo non dubbie prove della incrollabile fedeltà verso i re Persiani dell'Irân orientale, laddove appunto sorgono i monti del Segestân; ma per attenerci soltanto alla leggenda epica, cominciando da Minôcihr fino al re Khusrev, si sappia fin d'ora che le più difficili imprese sono compiute dagli eroi di questa famiglia, siccome vedremo più innanzi; e gli eroi del Segestân sono quelli che salvano sempre il regno allorquando già sembra perduta ogni cosa e gli animi cominciano a disperare.

Rimandando ora a quello che in altro mio lavoro (1) ho notato intorno al nome dato alla provincia del Segestân che fu patria di cotesta famiglia, e intorno alle ragioni per le quali l'*Avesta* e in generale tutti gli altri libri religiosi si mostrano poco amici di questi eroi, ne riferirò soltanto, come là, la discendenza. Ricordiamo pertanto come il re Gemshîd, allorquando gli fu tolto il regno da Dahâk ed egli dovette salvar la vita con la fuga, si riparò nel Segestân laddove fu accolto dal re di quel paese che gli diede in isposa la figlia sua Perî-cihreh. Frutto di questo matrimonio fu Tûr, da non confondersi con l'altro Tûr figlio di Frêdûn; da Tûr nacque Shêdasp, da Shêdasp nacque Thûrek; a Thûrek successero Shem, Athret e Ghershâsp. Ghershâsp generò Nerîmân o Nîrem; figlio di Nîrem fu Sâm; da Sâm nacque Zâl, e figlio di Zâl fu Rustem, il più grande eroe di questa famiglia (2). Questa genealogia non trovasi però nei canti del *Libro dei Re,* il quale incomincia la storia di cotesta famiglia con Sâm, a cui il re Frêdûn prima di morire raccomanda Minôcihr (3). Essa invece si trova in quei poemi posteriori al *Libro dei Re*, dei quali abbiamo già tenuto parola, e che raccontano ciò che in Firdusi non si trova (4). In una parlata di Rustem a Khusrev l'eroe ricorda i suoi antenati, ma egli incomincia da Ghershâsp soltanto la sua enumerazione, al quale poi successero Nerîmân, Sâm e Zâl (5). Nell'*Avesta* invece sono enumerati soltanto i più antichi e tra questi i due principali soltanto Thrita e Kereçâçpa (6), nella leggenda posteriore Athret e Ghershâsp.

Nel *Libro dei Re* di quattro soli eroi di questa famiglia si raccontano le imprese, e questi sono Nerîmân o Nîrem, Sàm, Zàl o Destân, e Rustem. Questi si possono dire eroi nel vero senso della parola, poichè se essi furono celebrati nelle leggende popolari, non meritaron cotesto onore che per le gloriose loro imprese con le quali beneficarono la terra natìa e

(1) *Discorso sull'Epopea persiana* nei *Racconti epici di Firdusi*, c. III, 8, 12.
(2) Spiegel, *Erân. Alterth.*, I, p. 557.
(3) Fird. *Shâh.*, p 93
(4) Vedi nell'edizione del *Libro dei Re*. Calcutta 1829 a p. 2099-2133.
(5) Fird. *Shâh.*, p. 564.
(6) *Yasht* V, 72; XIII, 113; IX, 35; *Vendid.* I. 36.

sostennero la gloria e l'autorità dei loro re. Nessun pericolo li arresta o li spaventa, nessuna opera vile o indecorosa si racconta di loro; per i loro re essi tollerano infinite fatiche, quantunque male poi ricompensati, e, finita l'impresa per la quale essi erano chiamati in corte, ritornano a vita privata nel loro castello del Segestân, paghi soltanto della gloria onde si sono coperti. Spesse volte la corona dell'Irân fu loro offerta, ma essi la rifiutaron sempre con disdegno, dicendosi servi, come gli altri, al re d'Irania e contenti soltanto di governare come gran vassalli i dominii ereditati dai loro avi nell'Irân orientale (1). Combattere con mostri e con dêvi, siccome fanno Sâm e Rustem, domar nemici e costringer all'osservanza dei patti principi ribelli, sono le imprese per le quali essi sono maggiormente celebrati. Ritornati al castello paterno nel Segestân, dopo tante nobili fatiche sostenute, essi nei conviti e nelle caccie trascorrono i giorni della pace, e con tali passatempi onorano anche gli ospiti che ricevono entro a quelle mura. Così Kâvus, ritornato dal Mâzenderân, è da loro ricevuto come ospite, e quella ospitalità è rallegrata da caccie e da conviti (2). Siyâvish pure prima di entrare in campo contro di Afrâsiâb, è ricevuto con ogni onore nelle case dei principi del Segestân (3). Educare i giovani principi alle gentili maniere e agli esercizi cavallereschi è pure nobile occupazione di questi eroi, che vi attendono con ogni sollecitudine. Siyâvish perciò, ancor fanciullo, è consegnato a Rustem dal re Kâvus perchè si prenda cura della sua educazione. Rustem lo conduce nel Segestân e là lo ammaestra nel tirar d'arco, nell'avventar lacci, nel guidar carri, nel modo di comportarsi mangiando e bevendo, nell' andar a caccia con segugi e falchi, in ciò che è giusto e ciò che è ingiusto, negli usi reali, nel modo

(1) Così p. es. quando i principi vorrebbero persuadere Sâm a farsi re, mentre il re Nevdher si mostra indegno del trono, egli si volge loro con queste parole: *în kay pisandad zi-mâ kard-gâr?* Come potrebbe Iddio approvar ciò in noi? e così segue dicendosi servo e suddito del suo re; Fird., *Shâh.*, p. 179. — Anche quando la corona è offerta a Zâl dai principi, dolenti perchè il re Kâvus voglia tentare la conquista del Mâzenderân, l'eroe risponde: *shumâ gûsh dârîd farmân i shâh, | ma-pîcîd, yak-tan az-în razm-gâh;* voi obbedite al comando del re, e nessuno si ritragga da questo campo di battaglia; Fird. *Shâh.*, p. 237.

(2) Fird. *Shâh.*, p. 277 e 278: *sipâh-râ sûy i Zâbulistân kashîd, | bi-mihmânî pûr i Dastân kashîd; | bi-bûd shâh yak mâh dar Nîmûrz, | gahî rûd u mây khvâst, gah bâz u yûz;* Kavus trasse le schiere verso il Zâbulistân, le trasse all'ospitalità del figlio di Destân (Rustem); restò il re per un mese nel Nîmrûz, ora cercava canto e vino, ora falchi e veltri.

(3) Fird. *Shâh.*, p. 402.

di parlare, nel modo di guidar gli eserciti e in ogni altra virtù (1). Il giovinetto cresceva negli anni e nella destrezza sotto la guida di tanto maestro, e ancor tenero di età, come Achille in casa di Filira sotto la guardia di Chirone Centauro, atterrava i leoni alla caccia (2).

Tali sono gli eroi del Segestân, ma noi non terremo parola che di un solo, di quello cioè che nel *Libro dei Re* ha sì gran parte ed è l'eroe principale di questa famiglia, di Rustem cioè figlio di Zâl, e lascieremo di parlare di Nerîmân (eroe solo della leggenda popolare, poichè nell'*Avesta* trovasi l'aggettivo *naremananh*, magnanimo, applicato soltanto a Kereçâçpa (3), aggettivo diventato poi nome proprio), di Sâm e di Zâl, soltanto per non sorpassare di troppo i limiti del presente scritto, che altro non è che un saggio di un lavoro che un giorno potrà essere esteso a maggiori proporzioni. Per Sâm però si potrebbe fare anche una eccezione, almeno per le tante imprese eroiche e veramente meravigliose che l'*Avesta* gli attribuisce, chiamandolo col nome di Kereçâçpa (4). Il *Mînôkhired* poi, il *Bundehesh* e il *Bahmàn-yasht* (5) gli assegnano anche una parte importante al tempo della risurrezione dei morti, allorquando egli destatosi come da un profondo sonno nella pianura di Pust-Gustâçpân ucciderà Dahâk che, infranti i suoi ceppi, sarà uscito dalle caverne del Demâvend. Ma il *Libro dei Re* non ricorda di Sâm che l'impresa contro il Mâzenderân, l'uccisione di un mostro, detto *çrvara* o cornuto nell'*Avesta* (6), sul fiume Keshef, e l'uccisione di un dêvo, probabilmente il

---

(1) FIRD. *Shâh.*, p. 381: *suvârî u tîr u kamân u kamand, | 'inân u rakîb u c'ih u c'ûn a c'and, | nishastan-gah u mag'lis u may-gusâr, | hamân bâz u shâhîn u yûz u shikâr, | zi-bîdâd u dâd u zi-takht u kulâh, | sukhun guftan u razm u rândan sipâh, | hunarhâ biy-âmûkht-ash sar bi-sar.*

(2) PIND. *Nem.*, III, 43 e segg.

(3) IUSTI, *Handbuch der Zendspr.; Yasht* V, 37, *Kereçâçpô naremanâo*, skr. *nrimanas*.

(4) SPIEGEL, *Arische studien*, p. 122, enumera le imprese di questo eroe secondo l'*Avesta*; uccide K. il serpente Çrvara, il Gandarewa, i nove ladroni, vince Hitaçpa, Çnâvidbaka, Vareshava e Pitaona, e Arezô-shamana.

(5) *Mînôkhired* in SPIEGEL, *Pârsi-Gramm.* p. 139 e 141. — *Bundehesh*, p. 70 e 71. — *Bahman-yasht* in SPIEGEL, *Die trad. Literatur der Parsen*, II, p. 134.

(6) La descrizione di questa impresa di Kereçâçpa quale è nell'*Avesta* è ben concisa, *yaçna* IX, 34-39: « egli uccise il serpente Çrvara ingoiator di cavalli, ingoiatore di uomini, velenoso, di color verde. Sopra di esso scorreva il veleno verde all'altezza di un pollice. Sopra di esso Kereçâçpa in un *vaso* di bronzo cuoceva il cibo verso il tempo del mezzogiorno. Bruciò il serpente e si riscosse (*qicalc'a*), balzò via dal vaso di bronzo e si cacciò nell'acqua torbida. Atterrito si ritrasse indietro il magnanimo Kereçâçpa ». La differenza tra questa e la veramente dantesca descrizione di Firdusi è immensa, FIRD. *Shâh.*, p. 142 e segg.; SPIEGEL, *Arische Studien*, p. 124 e segg. Vedine la mia traduzione nei *Racconti epici di Firdusi*, p. 507 e segg., e nella mia *Antologia epica*, p. 55 e segg.

Gandarewa o Gandarf dei libri religiosi. Giustamente però osserva lo Spiegel (1) che dagli scarsi e occasionali racconti delle imprese di Sâm s'intende che Firdusi ne sapeva ben più della vita e dei fatti di cotesto eroe.

Rustem pertanto, al quale la leggenda popolare dà una vita di quattrocento novant'anni, è il vero e più grande rappresentante dell'età eroica dei popoli irâni. L'*Avesta* non conosce nè questo eroe nè il padre suo Zâl, e come l'*Avesta,* così nemmeno gli altri libri religiosi parlan di loro, evidentemente perchè i sacerdoti non amavano queste leggende schiettamente popolari e tali che mal si accomodavano al loro sistema. In un altro mio scritto (2) ho già mostrato il perchè di tale ripugnanza sacerdotale per gli eroi del Segestân in generale, nè gioverà qui ripetere il già detto: ci limiteremo quindi a parlar delle imprese soltanto di Rustem e a tratteggiarne il carattere quale emerge dai canti di Firdusi.

Le imprese di Rustem, meravigliose sì per la grandezza che per il numero, si potrebbero dividere come in due classi. In una noi porremo tutte quelle imprese che egli compie per la causa comune degli Irâni, allorquando Afrâsiâb minaccia da settentrione, o il re dell'Irân è caduto in mano dei nemici e il paese natío versa in grave pericolo. Appartengono a questa classe la sua andata al monte Alburz per rintracciarvi e ricondurne il re Kobâd quando il trono dell'Irân era vacante (3); la spedizione contro i dêvi del Mâzenderân allorquando questi avevano incatenato e acciecato il re Kâvus e tutto il suo esercito (4); l'altra spedizione contro il re dell'Hâmâverân che aveva imprigionato il re Kâvus (5), e la guerra contro di Afrâsiâb per vendicar la morte di Siyâvish, nella quale egli non appar già come capitano a capo dell'esercito, poichè i condottieri sono Thûs, Ferîburz, poi Thûs ancora, poi Khusrev, ma bensì come liberatore e salvatore nell'estremo momento, siccome avviene allorquando gli Irâni sono assediati dai Tûrâni sul monte Hamâven (6). Nella seconda porremo invece tutte quelle imprese che noi potremmo chiamare individuali, perchè condotte a fine da lui solo, e sono come episodi staccati che

---

(1) SPIEGEL, *Arische studien*, p. 126.
(2) *Discorso sull'epopea persiana* nei *Racconti epici*, ecc., c. III, 12.
(3) FIRD. *Shâh.*, p. 212-217.
(4) FIRD. *Shâh.*, p. 242-261.
(5) FIRD. *Shâh.*, p. 287-293.
(6) FIRD. *Shâh.*, p. 647-745.

hanno o nessuna o ben poca relazione con la guerra contro i Tûrâni. Queste imprese sono: l'uccisione d'un elefante bianco che devastava i giardini paterni, e la presa della rocca del Sipend, laddove sotto quelle mura era perito combattendo il bisavo suo Nerîmân (1); queste sono le imprese giovanili. Vengono poi: la caccia con altri eroi nei giardini di Afrâsiâb e la battaglia coi guerrieri di quest'ultimo (2); la spedizione contro di Sohrâb che egli uccide e poi riconosce per figlio (3), il suo scontro col dêvo Akvân (4), e finalmente la liberazione di Bîzhen da quella tomba di pietra nella quale l'aveva gittato Afrâsiâb (5). Non parliamo de' suoi contrasti con Isfendyâr figlio del re Gushtâsp, perchè queste leggende sono assai più recenti e ispirate da idee ben diverse da quelle delle più antiche parti del *Libro dei Re*, e perchè spero di farne soggetto di altro lavoro che terrà dietro al presente.

Rustem, che è chiamato soltanto dai re e dagli altri principi allorquando le cose sono ridotte all'estremo e sovrasta al paese un gran pericolo, prima ancora che nascesse, fu predetto e all'avo Sâm e al padre suo Zâl e al re Minôcihr come un grande e portentoso eroe, onore e sostegno della terra natía (6), e la predizione si avverò, poichè anche nella fanciullezza egli diede segni manifesti del valore e della gagliardia a cui doveva giungere. Dieci nutrici, dice Firdusi, non bastavano a saziarlo (7), e il cibo che occorreva per lui quando fu slattato, sarebbe bastato a cinque uomini (8). Quando egli vede Sâm per la prima volta, dice che egli si assomiglia a lui, e domanda le armi, benchè ancor fanciullo di pochi anni (9). Cresciuto in età, egli tosto si cerca armi guerriere, e allorquando Zâl gli dice che sul suo labbro si sente ancora la fragranza del latte, egli risponde che alle donne soltanto si conviene una vita inerte e

---

(1) Fird. *Shâh.*, p. 168-172.

(2) Fird. *Shâh.*, p. 302-315.

(3) Fird. *Shâh.*, p. 315-377.

(4) Fird. *Shâh.*, p. 745-753.

(5) Fird. *Shâh.*, p. 778-806.

(6) Fird. *Shâh.*, p. 127, 151, 162.

(7) Fird. *Shâh.*, p. 165: *bi-Rustam hamî dâd dah dâyah shîr*; a Rustem davano il latte dieci nutrici.

(8) Fird. *Shâh.*, p. 165: *budî pang' mardah mar û-râ khvarish.*

(9) Fird. *Shâh.*, p. 166: *hamî asp u zîn khvâham u dar' u khûd,* | *hamî tîr i nâvak firistam durûd;* desidero un cavallo e una sella e una corazza e un elmo, e manderò come saluto *ai nemici le mie* freccie volanti.

ingloriosa, tra il sonno, il bere e il mangiare (1). Un puledro che nessuno era giunto a domare, è destinato a lui da un mandriano; e il suo nome è Rakhsh, cioè lucente (2). Le sue armi sono la spada, il laccio, la clava, le freccie e vestimento una corazza incorruttibile. Egli però è l'eroe dell'azione, pronto a ogni chiamata, insofferente della quiete, che alterna le caccie con le battaglie e i conviti con le privazioni nei deserti e nelle selve abbandonate. Avviene quindi che le sue parlate sono vibrate, concise e brevi, nè egli ama far pompa di eloquenza come spesse volte fanno i re e gli eroi nei loro discorsi e nelle loro lettere, Minôcihr sovra tutti. Poche parole e molti fatti sono il tratto più sentito dell'indole di questo eroe; nè egli si perde in lunghi soliloquii o in lunghe meditazioni prima di appigliarsi a questo o a quel partito; egli è un eroe del genere di Achille, tutto d'un pezzo, come direbbe il Graf (3), nel quale al pensiero segue l' azione immediatamente, l' opposto quindi di Amleto, l'eroe del dubbio e del pensiero, l'eroe che troppo pensa e non fa nulla. Dei moti quindi dell' animo suo poco traspare all' esterno, e ciò ch' egli pensa si capisce più da ciò ch'egli fa dipoi, che dalle sue parole e dai lineamenti del volto. Nè Firdusi si perde a descriverne il diverso e successivo atteggiamento, poichè il suo eroe non soffre indugi, e l'azione sua è sempre continua.

Alcuni tratti principali del suo carattere sono i seguenti. Egli è un eroe di senno pratico, e ciò che gli importa si è quello di giungere al fine desiderato. Non disdegna quindi l'astuzia e l'artifizio, ma ne usa liberamente quando ciò gli venga in acconcio. Così allorquando il padre suo Zâl lo manda a prender la rocca del Sipend per vendicarvi la morte di Nîrem perito sotto quelle mura, egli si traveste da mercante di sale, poichè il sale è merce rara in quel luogo, nasconde le armi entro i sacchi della mercanzia (4), è accolto nel castello e ospitato per quella notte; ma poi, quando tutti sono immersi nel sonno, egli corre con l'armi alla stanza del signore di quel castello e l'uccide, e fa strage degli abitanti (5). Quando poi il re Khusrev lo manda in Turania a cercar dove mai Afrâsiâb

---

(1) Fird. *Shâh.*, p. 208: *hanûz az lab-at shîr bûyad hamî;* ancor dal tuo labbro odora il latte; — *ibid. zanân-râ az-ân nâm n-âyad baland, | kih payvastah dar khvardan u khuftan and.*

(2) Fird. *Shâh.*, p. 210 e segg.

(3) A. Graf, *Dello spirito poetico dei tempi nostri*, p. 14.

(4) Fird. *Shâh.*, p. 171: *bi-bâr i namak dar nihân kard gurz.*

(5) Fird. *Shâh.*, p. 172.

avesse imprigionato lo sventurato Bîzhen, Rustem si traveste da mercante, per mezzo di Menîzheh amante di Bîzhen e figlia di Afrâsiâb giunge a conoscere il luogo di sua prigionia, e gli manda un anello nascosto entro un uccello già cucinato per farsi conoscere al prigioniero e per dargli speranza di vicina salvezza (1). Bîzhen infatti è liberato da lui poco dopo, e Rustem prende d'assalto di notte la reggia di Afrâsiâb (2).

Molte volte anche, forse perchè egli stesso sente che il nome suo è troppo celebre tra i nemici, Rustem interrogato chi egli sia e se egli è veramente Rustem di cui tanto alto suona la fama, nega di pronunciare il suo nome e spesso nega ch'egli sia Rustem veramente. Così al prode Eulâd che prima di combattere gli chiede quale sia il suo nome, egli risponde che il nome suo è *nuvola,* ma nuvola che piove lancie e spade, indi soggiunge che se egli pronunciasse il suo vero nome, il respiro e l'anima e il sangue gelerebbero a Eulâd nel cuore (3). Dimandato parimente s'egli è Rustem dal re del Mâzenderân, al quale è mandato da Kâvus, egli risponde che non osa somigliarsi a così grande eroe, ma che egli è un umile servitore, l'infimo tra i guerrieri (4). Questa stessa risposta egli rende più volte a Sohrâb (5); ma il suo ostinarsi nel diniego questa volta gli è fatale, perchè Sohrâb era partito di Turania per cercare il padre suo ch'egli non aveva mai visto, e il padre suo era appunto lo stesso Rustem, che in uno scontro trafigge il giovinetto e poi ne piange disperatamente la morte quando l'ha riconosciuto per figlio (6). Ai guerrieri Tûrâni poi che assediavano gli Irâni sul monte Hamâven e che al vederlo comparire improvvisamente nel campo e difendere gli Irâni sospettano chi egli sia e gli fanno domandare da Hûmân se egli è veramente Rustem, egli ancora questa volta risponde

---

(1) Fird. *Shâh.*, p. 792: *yakî murgh i biryân bi-farmûd garm, | bi-pîc'îd bar gird i ân nân i narm; | sabuk dast i Rustam, bi-sân i Parî, | nihân kard dar murgh angushtarî; | bi-dû dâd u guft-ash: bi-dân c'âh bar.* Ordinò tosto un uccello arrostito e intorno gli dispose del pan molle; prestamente la mano di Rustem, come quella d'una Perì, vi nascose un anello; egli lo diede a lei (Menîzheh), e le disse: porta cotesto a quel pozzo (dov'era Bîzhen).

(2) Fird. *Shâh.*, p. 798 e segg.

(3) Fird. *Shâh.*, p. 252: *c'unîn guft Rustam kih: nâm i man abr.....| hamah nîzah u tîgh bâr âvarad....| bi-gush i tû gar nâm i man bi-gudharad, | dam u g'ân u khûn i dil-at bi-fisharad.*

(4) Fird. *Shâh.*, p. 266: *c'unîn dâd pasukh kih: man c'âkir-am...| kug'â û buvad, man nay-âyam bi-kâr, | kih û pahlavân ast u gurd u suvâr.*

(5) Fird. *Shâh.*, p. 355: *c'unîn dâd pâsukh, kih: Rustam nay-am, | ham az tukhmah i Sâm i Nîram nay-am; | kih û pahlavan-ast u man kihtar-am, | nah bâ takht u gâh-am, nah bâ afsar-am.* — Così a p. 362.

(6) Fird. *Shâh.*, p. 365 e segg.

di no, dicendo che non rivelerà il suo nome a nessuno (1). Una sola volta, per quanto io mi ricordi, Rustem rivela apertamente e senza indugi il suo nome, quando cioè egli ne è domandato da un orribile dragone che egli incontra sulla via del Mâzenderân (2). In tutti gli altri casi egli cerca di nascondere studiosamente il proprio nome, ciò che è proprio di lui soltanto, non trovandosi che in ciò lo imiti alcuno degli altri eroi persiani. Ma forse egli è indotto a far ciò dalla considerazione che se egli rivelasse il nome suo, troppo celebre omai tra amici e nemici, egli si metterebbe in qualche non lieve impiccio, come se, quando l'avesse rivelato nella corte del Mâzenderân, vi fosse poi stato ritenuto prigioniero. Quel re infatti avrebbe rimandato libero qualunque altro eroe, ma non Rustem che solo e quasi disarmato gli si veniva come a dar nelle mani.

Talvolta ancora egli si finge pigro e poco desideroso di combattere, ma soltanto per far poi comprendere col sùbito ripigliar delle armi, col pronto operare, coi poderosi colpi e con le inaudite prove di valore, quanto egli valga. Ciò anche potrebbe ritenersi come un artificio del poeta per far meglio risaltare il suo principale eroe; e ciò potrebbe anche essere; ma dobbiamo anche ricordarci che il *Libro dei Re* è epopea popolare, raccolta cioè di leggende vive tra il popolo e dal popolo assai prima di Firdusi create e svolte, e che perciò molti tratti anche minuti del carattere degli eroi sono già stati trovati prima assai dei poeti, confermati dall'uso per dir così, e tramandati quindi tali e quali di generazione in generazione. Ond'è che il poeta in tali casi non può sottrarsi a questa necessità di riprodurre tale e quale la leggenda e tali e quali i caratteri de' suoi eroi. Così almeno noi ci spieghiamo questo tratto particolare di Rustem, che troppo ben conosce le proprie forze ed il proprio valore, e perciò vuol farsi alquanto pregare, mostrarsi indolente e pigro, per poi destarsi all'improvviso e far più assai di quello che da lui si domandava. Quand'egli infatti con altri eroi s'introduce a cacciare nei giardini di Afrâsiâb, Gurâzeh gli annunzia trepidante che il nemico è vicino, ma egli chiede da bere e non se ne dà per inteso (3); gli altri eroi restano di ciò meravigliati e dolenti, ma egli domanda di nuovo da bere (4), finchè poi prende

---

(1) Fird. *Shâh.*, p. 690: *bi-dû guft Rustam, kih: nâm-am ma-g'ûy.*

(2) Fird. *Shâh.*, p. 249: *c'unîn dâd pâsukh, kih: man Rustam-am, | zi-Dastân u az Sâm u az Nîram-am;* rispose: Io son Rustem di Destân, di Sâm e di Nîrem.

(3) Fird. *Shâh.*, p. 306: *tû, ay may-gusâr, az may i zâbulî | bi-paymây tâ sar yakî bulbulî.*

(4) Fird. *Shâh.*, p. 306.

le armi all'improvviso e mena tale strage dei guerrieri di Afrâsiâb, che poche battaglie del *Libro dei Re* uguagliano questa in fierezza e accanimento (1). Quando poi Ghêv è mandato da Kâvus nel Segestân perchè Rustem prenda le armi contro di Sohrâb che minaccia di invadere l'Irân, egli per vari giorni non risponde all'appello del suo signore, ma chiede le tazze e il vino ogni mattino e così trascorre inerte tutto quel giorno (2). Ghêv ne è dolente e gli rammenta le preghiere di Kâvus; ma egli, rispondendo che per quel giorno è meglio assai dimenticarsi dei re e dei principi, ridomanda il vino; e così passano diversi giorni (3). Ma poi un bel mattino ordina all'improvviso che si ponga la sella al suo cavallo, che gli si aprestino le armi, e parte dal castello natío perchè il dovere lo richiama altrove.

Così risalta sempre più per tali apparenti indugi il valore di Rustem. Il popolo poi, e col popolo il poeta che ne è l'interprete, si compiace nell' attribuire a cotesti eroi della forza, come sono Ercole, Sansone e Rustem, imprese e fatti straordinari, i quali non solo sorpassano l'abilità e la forza degli altri uomini, ma sono ancora segnalati da una certa stranezza e stramberia inerente alla loro natura. Valgano ad esempio la mascella d'asino adoperata da Sansone per uccidere i Filistei, l'astuzia da lui adoperata per bruciar loro le messi mature legando certe lampade alla coda di trecento volpi, cacciate poi da lui stesso nei loro campi (4). le stalle di Augia ripulite da Ercole col farvi passar pel mezzo le acque di un fiume e molte altre imprese di simil genere attribuite ad altri eroi. E per conto di Rustem non ne mancano, a dir vero, nel *Libro dei Re*. Egli pure è l'eroe della forza, e la leggenda si è compiaciuta di raccontarne alcuni fatti grotteschi e strambi, non senza qualche cosa di magnifico e di grandioso che va d'accordo col barbarico, come osserva il Vico. Raccontasi quindi come Rustem facesse rotolare in terra la testa al portinaio che non gli voleva schiuder le porte del castello paterno, con un pugno poderoso nella nuca (5), come mandasse il suo cavallo Rakhsh a

---

(1) Fird. *Shâh.*, p. 306.

(2) Fird. *Shâh.*, p. 337.

(3) Fird. *Shâh.*, p. 337: *ham îdar nishînîm im-rûz shâd, | zi-gurdân u khusrav na-gîrîm yâd*; stiamo qui insieme anche oggi allegri, nè facciam parola di principi o di re; — p. 338: *nay-âmad va-râ yâd i Kâvus i kay*; non si ricordò di re Kâvus.

(4) *Shôphethîm*, XV.

(5) Fird., *Shâh.*, p. 128: *tahamtan shud âshuftah az guftan-ash, | yakî musht zad bar sar u gardan-ash | bar-ân sân kih shud sar-ash mânand i gûy*; il prode si adirò per la sua risposta, lo colpì con un pugno tra il capo e il collo in tal guisa che il capo ne saltò (*shud*) via come una palla.

pascer per i campi di Eulâd, e come strappasse gli orecchi al guardiano di quei campi che aveva osato destarlo mentre dormiva (1). Nei campi del Mâzenderân Rustem scontratosi con G'uyâ, gli conficca nella schiena la lancia, e sollevatolo di sella come un uccello infisso nello spiedo, dice il poeta, lo fa poi stramazzare miseramente al suolo (2); e prima di G'uyâ, egli si era incontrato con alcuni principi del Mâzenderân in una via mentr'egli recava a quel re una lettera di Kâvus, e il saluto ch'egli loro fa, quando li vede di lontano, si è quello di sradicare una quercia che sorgeva a fianco della strada e di lanciarla contro di loro, che restarono oppressi coi loro cavalli sotto l'immane pianta e sotto una pioggia di polvere e di sassi (3). Ma Rustem non si appaga di ciò; che anzi egli afferra Kelâhver, uno di quei principi, per una mano e tanto gliela stringe che gli fa cader le unghie, come aride foglie nell'autunno, al dir di Firdusi (4). Così il re del Mâzenderân, spaventato del valore di Rustem nè osando stargli a fronte, si converte in pietra; ma a Rustem solo basta l'animo di afferrar quel macigno, di recarselo in collo e di portarlo in mezzo ad una folla di gente che gridava per lo stupore, fino alla tenda di Kâvus e di lanciarlo colà con immenso fragore (5). In uno scontro con Afrâsiâb egli lo leva di sella afferrandolo alla cintura e a capo in giù lo getta al suolo (6); arrivato poi una notte senza essere riconosciuto da alcuno al campo dei Tûrâni, egli li atterrisce tutti lanciando un solo giavellotto, ma di tal lunghezza che i Tûrâni spaventati lo credono una lancia (7). Il suo costume poi, spesso riferito da Firdusi, di uccider le fiere alla caccia, di scuoiarle, di arrostirle, di cibarsi delle loro carni e di romperne le ossa per gustarne il midollo (8), è una prova dell' antichità delle leggende popolari che riguardano questo grande eroe; poichè quest'uso barbarico si riferisce

---

(1) Fird. *Shâh.*, p. 252: *bi-g'ast u girift-ash yakâyak dû gûsh,* | *biy-afshurd u bar kand har dû zi-bun;* balzò Rustem in piedi e gli prese ad una ad una le due orecchie, le strinse e gliele strappò tutte due dalla radice.

(2) Fird. *Shâh.*, p. 270: *zi-zîn-ash g'udâ kard u bar dâsht-ash,* | *c'û bar bâbzan murgh bar gâsht-ash,* | *biy-andâkht az pusht i asp-ash bi-khâk.*

(3) Fird. *Shâh.*, p. 264 e segg.

(4) Fird. *Shâh.*, p. 265: *biy-afshurd c'ang i Kalâhver sakht,* | *furû rîkht nâkhun c'û barg az dirakht.*

(5) Fird. *Shâh.*, p. 273.

(6) Fird. *Shâh.*, p. 221.

(7) Fird. *Shâh.*, p. 677; vedi anche sopra al capo 1°.

(8) Fird. *Shâh.*, p. 247: *bi-c'ang ustukhvân-ash fushurdan girift;* p. 316: *zi-maghz ustukhvân-ash bar âvard gard,* ecc.

soltanto ai tempi preistorici e ai popoli non ancora civili, siccome mostra il Lenormant (1). Altra prova di tale antichità si è la leggenda della presa del Sipend, nella quale si racconta come Rustem che fingeva di vendere il sale, barattasse la sua merce con altri oggetti recati dagli abitanti di quella rocca (2); ciò che significa, a parer nostro, che la leggenda nacque assai tempo prima che si conoscessero dagli Irâni le monete. E qui noteremo di passaggio che l'*Avesta* non ne conosce punto l'uso.

Con tutto questo però Rustem è uno dei più belli e nobili caratteri di eroi che la fantasia possente di un popolo abbia potuto creare, siccome il tipo ideale, il modello perfetto dell'uomo che sopporta mille fatiche, affronta mille pericoli e soffre mille disagi per il bene degli altri. Egli risponde ad ogni chiamata del suo re, per accorrere a salvarlo disprezza ogni rischio ed ogni stento, come quando si pose per la spaventosa via delle sette avventure per correre a liberare il re Kâvus, imprigionato e acciecato dai dêvi del Mâzenderân; nè mai gli sfugge un lamento o qualche atto d'impazienza. Quando poi gli sembra d'esser ridotto all'estremo, la fede in Dio lo solleva; egli prega non già per sè, ma perchè egli possa recar salvezza a chi l'attende da lui. Così egli pregava nel deserto oppresso dalla sete, allorquando già temeva la morte e più che la morte, il dolore di non poter liberare il suo signore e gli Irâni (3).

Rustem quindi dalla stessa sua generosità è condotto a disprezzare i pericoli, nè abbiam bisogno di recare innanzi esempi per provarlo, poichè ne è pieno tutto quanto il *Libro dei Re*, laddove si ricorda qualche suo fatto. Ma ciò che è più consentaneo alla natura operosa e guerriera, generosa e forte di questo eroe, si è quello di sceglier sempre la via più pericolosa allorquando gli è proposta qualche nobile meta da raggiungere. Quando infatti i dêvi del Mâzenderân hanno incatenato il re Kâvus con tutto l'esercito, Zâl invita il prode suo figlio ad accorrere a salvarlo, e poichè egli gli descrive due vie che conducono a quel paese, e gli propone di scegliere la più corta, benchè infestata da dêvi, da leoni e coperta

---

(1) F. Lenormant, *Les premières civilisations*, t. I, p. 32: « Les hommes de cette époque (epoca quaternaria)..... étaient très-friands de la moelle, ainsi que l'indique le mode presque constant de fracture des os longs ».

(2) Fird. *Shâh.*, p. 172.

(3) Fird. *Shâh.*, p. 246: *rahânî tu-shân, pâk, bar dast i man, | kih dâdam bi-dîshân kunûn g'ân u tan*; tu liberali, o santo, per mano mia, poichè loro ho consacrata l'anima ed il corpo.

di tenebre (1), Rustem volenteroso si sobbarca alla difficile impresa, dice che nessuno va incontro alle fiere se prima non gli cale nulla di questa vita, che egli darà volenteroso l'anima ed il corpo per il riscatto del re e infrangerà i talismani dei maghi (2), e alla madre che piangendo gli dà l'addio, risponde soltanto che tale è il suo destino (3).

S'intende perciò, anche da tutto quanto abbiam detto, come Rustem sia gelosissimo dell'onor suo e sempre tema di essere biasimato o deriso, allorquando gli avvenga qualche caso, nel quale la sua riputazione di eroe sembri compromessa. In tali caratteri infatti l'amor proprio è delicatissimo; e vediamo nella tragedia di Sofocle uccidersi Aiace appena egli si è accorto di essersi compromesso nell' onore al cospetto degli Achei, allorquando ha menato strage di armenti credendo di uccidere Ulisse e gli Atridi; egli non può resistere alla derisione che si è meritata, e muore volontario. Rustem pure, allorquando i Tûrâni gli hanno involato il suo fedele Rakhsh mentre egli dormiva in una selva, teme, al suo destarsi, che i nemici ridano di lui e menin vanto di avergli rapito il suo celebre destriero (4), e minaccia di morte i principi di Samungàn se non gli fanno rendere il suo fedel compagno (5). Gûderz poi, in altra occasione, lo persuade a tornar indietro e a riconciliarsi con Kâvus col ricordargli soltanto che la gente, or ch' egli si allontana dalla reggia, dirà ch' egli fugge da Sohrâb per timore e che Rustem non è più quel Rustem di prima, spregiatore di pericoli e primo sostegno di tutti gli Irâni (6). A tal pensiero Rustem si arresta, e tornando sui suoi passi si riconcilia col suo principe ingiustamente sdegnato con lui. Tanto poi egli è geloso dell'onor suo, che avendo Rakhsh, il suo fedel destriero, ucciso nel deserto un leone mentr'egli dormiva, l'eroe destatosi e accortosi del fatto rimprovera duramente il generoso animale e gli domanda perchè non l'abbia destato dal sonno, toccando a lui solo domar la nemica fiera (7). Guai pertanto a colui che osa offen-

---

(1) Fird. *Shâh.*, p. 243: *dû râh ast, har-dû bi rang' u vabâl; | yakî dîrbâz, ân-kih Kâvus raft, | u dîgar kih bâlâ-sh bâshad dû haft, | pur az shîr u dîv ast u pur tîragî.*

(2) Fird. *Shâh.*, p. 243: *tan u g'ân fidây i sipahbad kunam, | tilism i tan i g'âduvân bi-shikanam.*

(3) Fird. *Shâh.*, p. 244: *c'unîn âmad-am bakhsh az rûzgâr.*

(4) Fird. *Shâh.*, p. 317: *c'ih gûyand Turkân, kih: Rakhsh-ash kih burd? | Tahamtan bi-dîn sân bi-khuft u bi-murd.*

(5) Fird. *Shâh.*, p. 318: *v-ar îdûn kih Rakhsh-am nay-âmad padîd, | sarân-râ basî sar bi-khvâham burîd.*

(6) Fird. *Shâh.*, p. 342: *k-az în Turk* (Sohrâb) *tarsandah shud sar-firâz | hamî gûyad în gûnah har-kas bi-râz;* che il prode (Rustem) abbia timore di questo Turco (Sohrâb) dice così ognuno in secreto.

(7) Fird. *Shâh.*, p. 245: *c'i-râ n-âmadi nazd i man bâ khurush?* perchè non sei venuto a me vicino facendo romore?

derlo ingiustamente. Egli allora ritorna nel suo castello lasciando nel pericolo e nelle angustie chi l'ha chiamato e poi l'ha offeso, e raramente pon giù lo sdegno per ripigliar di nuovo le armi. Così egli fa col re Kâvus allorquando questi l'aveva acerbamente rimproverato del suo indugio nell'obbedirlo, e allorquando, fatta la pace tra Siyâvish ed Afrâsiâb, nella quale era impegnata anche la sua parola, il re Kâvus non vuole approvarla e sdegnosamente comanda che la guerra si continui. Rustem allora lascia il campo e la reggia e ritorna sdegnato nel Segestân (1).

Quella ruvidezza che più sopra abbiamo scorta nel carattere di Rustem, fa sì ancora che egli non molto facilmente si lasci vincere dall'amore; diremo anzi che gli affetti suoi per la donna si assomigliano assai agli affetti degli eroi d'Omero, nei quali l'amore consiste tutto nel senso, nè va più in là; ciò che è proprio di una età molto antica e vicina alla barbarie. Di Rustem si ricorda un figlio di nome Ferâmurz, ma, per quanto io mi ricordi, non ho trovato nel *Libro dei Re* non che gli amori di Rustem o il racconto delle sue nozze con la donna dalla quale ebbe poi tal prole, neppure il nome di lei. Ai vezzi procaci di una maga egli non solo resiste, ma l'uccide ancora (2), e soltanto si descrivono le sue nozze con Tehmîneh, la figlia del re di Samungân, dalla quale poi ha un figlio di nome Sohrâb (3). Ma queste nozze son ben diverse da quelle del padre suo, Zâl, con Rûdâbeh. Mille affanni tormentarono i due amanti prima del giorno desiderato; il re Minôcihr si opponeva fieramente, perchè Rûdâbeh era figlia di Mihrâb e Mihrâb discendeva dall'antico Dahâk, dall'empio tiranno che alla sua volta discendeva da Ahrîmane (4). Cosicchè la storia degli amori di Zâl e della figlia di Mihrâb, mirabilmente descritta da Firdusi, è tutta un romanzo d'amore; e il primo incontro dei due amanti di notte al verone di una torre solitaria potrebbe trovar luogo acconcio anche in un romanzo moderno (5). Ma le nozze di Rustem e di Tehmîneh non sono così. Rustem giunge a Samungân senza saperne nulla; la figlia del re s'invaghisce di lui, si reca da lui di notte nella

(1) Fird., *Shâh.*, p. 416.

(2) Fird. *Shâh.*, p. 250 e segg.

(3) Fird. *Shâh.*, p. 318 e segg.

(4) Fird. *Shâh.*, p. 109: *zi-Dhahhâk i tâzî guhar dâshtî;* dall'arabo Dahâk egli (Mihrâb) traeva la discendenza. — Quanto alla discendenza di Dahâk da Ahrîmane *per parte di madre*, vedi il *Bundehesh*, p. 77; Spiegel, *Erân. Alterth.*, I, p. 532.

(5) Fird. *Shâh.*, p. 121 e segg.

stanza, e il giorno seguente si celebrano le nozze con gran pompa (1). Ma Rustem in quello stesso giorno abbandona la dolente sposa; si ricorda di lei soltanto quand'ella gli partorisce un figlio e le manda lettere e doni (2); solo quando, ucciso Sohrâb, si accorge che ha ucciso il proprio figlio, rammenta con angoscia la sua donna lontana (3), di cui più tardi in tutte quante le infinite avventure ch'egli incontra nella sua vita travagliosa, non si fa più alcuna ricordanza. Tale indifferenza di Rustem, o meglio tale suo costume grossolano e ruvido nell'amore ci fa ricordare il greco Ercole che dopo aver sposata la bella Jole, prima di salir sul rogo, impone al figlio suo Illo di impalmarla, e s'adira con lui perchè Illo vi avrebbe qualche ripugnanza. Così almeno troviamo nelle *Trachinie* di Sofocle (4).

Molte altre cose si raccontano di Rustem nell'ultima parte del *Libro dei Re*, ma perchè questa parte è ispirata da idee al tutto diverse, ed è di età assai posteriore (5), e Rustem vi è rappresentato sotto un aspetto ben diverso da quel di prima, così tralasciamo qui di parlar di lui, riserbandoci di trattar questa seconda parte della leggenda in un altro scritto che terrà dietro al presente.

IV. — *Gli eroi nemici*.

Tra gli eroi che nella leggenda epica persiana figurano come nemici degli Irâni, si distinguono sopra tutti tre soli, Dahâk cioè, Afrâsiâb e Pîrân, diversi l'uno dall'altro per opere, per costumi e per inclinazioni, ma più somiglianti fra loro il primo ed il secondo, diverso in tutto l'ultimo dai due primi per molte elette virtù e per molti pregi che la leggenda riconosce in lui, quantunque nemico. Lasciando pertanto gli altri siccome secondari, parleremo soltanto di questi tre partitamente.

Nella guerra tra Irâni e Tûrâni non entra Dahâk, essa infatti è venuta

---

(1) Fird. *Shâh.*, p. 318 e segg.

(2) Fird. *Shâh.*, p. 321, 322 e 336.

(3) Fird. *Shâh.*, p. 371: *c'ih gûyam c'û âgâh shavad mâdar-ash;* che dirò io (così parla Rustem) quando sarà consapevole di ciò la madre sua?

(4) Soph. *Trach.*, 1219 e segg.

(5) Spiegel, *Erân. Alterth.*, I, p. 659 e segg.

assai tempo dopo di lui, cagionata, come abbiam visto, dalle discordie dei figli del re Frêdûn. Dahâk quindi, nella leggenda epica, è una figura che sta da sè. Come poi egli non sia che il serpente dahâka dell'*Avesta*, e come cotesto mito si riattacchi ai miti d'India e di Vritra, di Ercole e di Orthros, di Apollo e di Pythone, di Sigurdh e di Fafnir, abbiam già visto nel secondo paragrafo del presente scritto, parlando di Thraêtaona, e abbiamo anche notato come il mito abbia conservati i tratti più primitivi nell'*Avesta* che non nel *Libro dei Re*. I libri posteriori religiosi assegnano gran parte a Dahâk nella risurrezione dei morti, allorquando egli uscirà dal Demâvend, laddove Frêdûn l'ha incatenato, e incontrerà la morte per mano di Sâm (1). Questa parte del mito sembra essere antichissima e risalire ai miti indo-europei, trovandosi nella mitologia scandinava, come nota il Windischmann, che Loki, il lupo Fenrir e il serpente del Midhgardhr (la terra, abitazione degli uomini) si scioglieranno dai ceppi alla fine dei giorni e correranno per il mondo (2). Il *Mînôkhired* poi gli attribuisce alcuni benefizi come venuti a lui, agli uomini, ma tutti negativi, notando che, se Dahâk e Frâçyâk non avessero avuto il regno, questo da Ahrîmane sarebbe stato dato a Khashm (il demone dell'ira, Asmodeo, nella versione sanscrita *kopadeva*), e sarebbe stato impossibile toglierlo a Khashm se non fino alla risurrezione dei morti, perchè Khashm non ha corpo (3), nè si può vincere o uccidere.

Nel *Libro dei Re* invece Dahâk è diventato un vero tiranno, nel quale, sia dal poeta, sia dalla leggenda, sono stati accumulati tutti i difetti e tutte le colpe, tutti i capricci d'un tiranno orientale, da essere una immagine viva e palpitante di quei principi, più che una copia, benchè lontana, dell'antico mito del serpente o del dragone ucciso dal dio della luce. Come egli togliesse il regno a Genshîd e poi fosse vinto da Frêdûn, non gioverà qui ripetere; ma quale lo dipinge Firdusi, esso è malvagio fino dalla fanciullezza (4), e per istigazione di Ahrîmane uccide il vecchio

(1) *Bundehesh*, p. 69; *Bahman-yasht* in SPIEGEL, *Die traditionelle Literatur der Parsen*, t. II. p. 134.

(2) WINDISCHMANN, *Zoroastr. Studien*, p. 240; SIMROCK, *Deut. Myth.*, I, 138, 162.

(3) *Mînôkhired* in SPIEGEL, *Pârsi-Gramm.*, p. 136, 137; *e'râ c'is tanmandî ne'çt*; vers. skr. *iti hetoh yatah tanumattâ nâsti.*

(4) FIRD. *Shâh.*, p. 22: *pusar bud mar ân pak-dîn râ yakî,* | *ki-ash mihr bahrah na-bûd andakî;* | *g'ihân-g'ûy-râ nâm i Dhahhâk bûd,* | *dilir u sabuk-sâr u nâ-bâk bûd;* quell'uomo pio (Mirdâs) aveva un figlio, in cui non era alcuna parte di affetto; il prode aveva nome Dahâk; era coraggioso, impetuoso e senza timore.

suo padre Mirdâs per averne il trono e gli ampi dominii in Arabia (1). Alla prima proposta fattagli di Ahrîmane di uccidere il padre, egli inorridisce, ma poi prevalgono in lui l'ambizione e la mala indole, e il delitto è consumato (2). Così egli si avvezza alla colpa. Ogni notte egli fa uccidere due uomini per cibar colle loro cervella due mostruosi serpenti che gli pendevano dalle spalle (3), e quando egli giunge a far prigioniero lo sventurato Gemshîd, si compiace di infliggergli un orrendo supplizio, e lo fa segar per il mezzo (4).

Egli però, quantunque crudele ed empio, è consapevole delle sue colpe e tutta ne conosce l'enormità. Per tal coscienza di se medesimo egli non è mai tranquillo, e vede una notte un sogno spaventoso che gli squarcia il velame del futuro, facendogli conoscere che presto verrà un principe armato di clava che gli toglierà il regno e lo incatenerà nelle caverne del Demâvend. Quel principe è Frêdûn, ed è l'indovino Zîrek che gliene predice e accerta la prossima venuta (5). Dahâk d'allora in poi non ha più pace, ma sempre è in sospetto e teme d'ora in ora il castigo delle sue colpe. Ond'è che un giorno egli raduna tutti i principi della sua reggia, e loro dice per prima cosa ch'egli ha un nemico nascosto, e voleva dir Frêdûn (6); vuole quindi esser sicuro e, se gli accadrà alcun male, desidera essere giustificato innanzi agli uomini; scrivano adunque essi sopra una carta che il loro principe non ha seminato nel mondo che il bene, che non parla se non per rettitudine e che nella giustizia non vuole alcun difetto (7). Ma intanto cotesto timore e cotesto sospetto lo rendono vile e gli tolgono il senno, poichè cercando per tutto il regno il giovinetto Frêdûn per ucciderlo, e non trovandolo, si abbatte in una famiglia di semplici pastori sui monti laddove Frêdûn ancor bambino era stato allattato dalla vacca Birmâyeh, ed allevato da quella povera gente. Dahâk allora non può frenar la rabbia per la preda che gli è sfuggita,

---

(1) Fird. *Shâh.*, p. 23.

(2) Fird. *Shâh.*, p. 23: *c'u Dhahhâk bi-shinîd, andîshah kard, | zi-khûn i padar shud dil-ash pur zi-dard*; allorquando Dahâk udì, divenne pensieroso, il suo cuore fu pieno d'angoscia per il sangue del padre.

(3) Fird. *Shâh.*, p. 27: *c'unîn bud kih har shab dû mard i g'uvân... | bi-kushtî u maghz-ash birûn âkhtî, | mar ân azhdahâ-râ khvarish sâkhtî.*

(4) Fird. *Shâh.*, p. 26: *bi-arrah mar û-râ bi-dû nîm kard.*

(5) Fird. *Shâh.*, p. 28 e segg.

(6) Fird. *Shâh.*, p. 34: *ma-râ dar nihânî yakî dushman-ast.*

(7) Fird. *Shâh.*, p. 34: *yakî mahdhar aknûn bi-bâyad nuvisht, | kih g'uz tukhm i nikî sipahbad na-kisht, | na-gûyad sukhun g'uz hamah râstî, | na-khvâhad bidâd andarûn kâstî.*

ma per sfogar lo sdegno fa uccidere la giovenca e atterrare e ardere le case dei pastori e devastarne i pascoli (1).

Come tiranno, non gli mancano i capricci; ed egli ha il suo favorito, un vago giovinetto dai biondi capelli, al quale egli non può negar nulla (2), concedendogli anche di stampare un bacio sulle proprie spalle, come quegli aveva domandato (3). Ma quel bacio gli è fatale; perchè il vago giovinetto non era che Ahrîmane, e dalle spalle sue tocche da quelle labbra maledette sbucano due neri serpenti, condegna pena delle sue colpe (4). Il tiranno ama anche i piaceri, ma sempre alla maniera di un tiranno; e però le due sorelle di Gemshîd, Shehruâz ed Ernevâz, sono tenute da lui come schiave nella sua reggia, addette ad opere vili, confuse in mezzo ad una turba di altre schiave, di ancelle, di maliarde e di dêvi (5). Come sospettoso è anche incredulo, poichè in chi gli dice la verità e lo consiglia, vuol discoprir l'ingannatore e il nemico. A Kundrev infatti che gli annunziava l'improvvisa venuta di Frêdûn e lo sterminio dei dêvi, non vuol credere dapprima; ma poi prorompe in improvvisa furia al sentire da lui che le sue donne favorite congiurano col nuovo principe a' suoi danni, e maltratta il povero Kundrev come se fosse l'autore della sua rovina (6). Così la gelosia e il sospetto vanno d'accordo in lui.

Tale è il carattere di questo principe mirabilmente descrittoci da Firdusi, quasi tipo di quei tiranni capricciosi e crudeli quali egli dovette conoscere nella lunga sua vita e quali trovansi ancora ai nostri giorni in Oriente. Concedasi tuttavia in ciò molta parte anche alla fantasia popolare, la quale, essa stessa, avrà formato in Dahâk il modello di tanti suoi tiranni, lasciando poi alla maestria di Firdusi il tratteggiarlo e il renderlo immortale.

Non si vuol negare però che nel Dahâk del *Libro dei Re,* quantunque tanto lontano dall'*azhi dahâka*, dal serpente dell'*Avesta*, non si trovino ancora alcuni tratti che ricordano l'antico mito e in parte anche il significato simbolico che l'*Avesta* ha posto in questa orribile creatura di Ahrîmane.

---

(1) Fird. *Shâh.*, p. 32.

(2) Fird. *Shâh.*, p. 25: *bi-dû guft: bi-nigar kih tâ ârzûy,| c'ih khvâhî bi-khvâh az man, ay nîk-khûy;* gli disse: vedi qual sia il tuo desiderio; ciò che desideri, chiedi da me, o bennato.

(3) Fird. *Shâh.*, p. 25: *bi-dû guft: dâdam man în kâm i tû.*

(4) Fird. *Shâh.*, p. 25: *dû mâr i siyâh az dû katf-ash bi-rust.*

(5) Fird. *Shâh.* p. 40 e 41.

(6) Fird. *Shâh.*, p. 43.

L'*Avesta* descrive il serpente Dahâka con tre bocche, tre teste, sei occhi, con mille facoltà *(hazanrayaokhstîm*, che l'Harlez (1) propone di intendere *con mille membra)*, prepotente, drug' demoniaca *(daêvîm drug'em*, fem.), malvagio, dannoso ai mondi, cui A*n*ra Mainyus creò siccome la più terribile drug' in questo mondo corporeo per la morte degli esseri puri (2). Di tutto ciò non si è conservato in Firdusi che il racconto dei baci di Ahrîmane sulle spalle di Dahâk, donde poi uscirono due orribili serpi. L'*Avesta* ancora introduce il serpente Dahâka a pregar la dea delle acque di concedergli di poter render vuote di uomini, col farli morire, tutte le sette regioni del mondo; ma la dea non gli concesse questo favore (3). Gli uomini infatti sono creature di Ahura Mazdâo, e il serpente che è creatura di A*n*ra Mainyus, desidera annientarli. In Firdusi troviamo la stessa cosa, con questa sola differenza però, che Ahrîmane, ritornato a Dahâk dopo il fatal bacio, gli suggerisce d'acquetar la furia dei serpenti che lo tormentano, coll'apprestar loro giornalmente le cervella di due uomini. E Firdusi, alla fine del suo racconto, esce in questa domanda: « Il crudele capo dei dêvi (Ahrîmane) con questa sua dimanda cosa mai voleva, e cosa mai vedeva in questo suo discorso, se non questo di ordire una frode nascosta perchè restasse vuoto di uomini il mondo? » (4). Questi due particolari soltanto proprii dell'antico mito si sono conservati anche nel Dahâk di Firdusi; ma del resto anche in tutto il racconto del *Libro dei Re* il carattere di questo principe, se non erro, ha sempre qualche cosa di più che umano, qualche cosa di mostruoso e di infernale che ricorda sempre il terribile serpente dell'*Avesta* del quale esso non è che una trasformazione.

In Afrâsiâb invece noi troviamo l'eterno, il vero nemico degli Irâni, poichè la leggenda di Dahâk è leggenda isolata, nè egli ha altro nemico, che il predetto Frêdûn, nè è spinto o animato da alcun desiderio di vendetta, mentre Afrâsiâb rappresenta l'odio inestinguibile tra gli Irâni e le barbariche orde del settentrione, e nella leggenda, come discendente dell'antico Tûr stato ucciso da Minôcihr, figura come colui che deve vendicar quella

(1) Harlez, *Avesta trad.*, t. II, p. 74, nota 1.

(2) *Yaçna* IX, 8

(3) *Yasht* V, 28-31: *dazdi me.... yatha azem amashya kerenavâni viçpâis avê karshvân yâis hapta; nôit ahmâi dathat tat avat âyaptem ardvî çûra anâhita.*

(4) Fird. *Shâh.*, p. 25: *sar i narrah dîvân az-în g'ust u g'ûy | c'ih g'ust u c'ih dîd andar în guft u gûy, | magar tâ yakî c'ârah sâzad nihân | kih pardakhtah mânad zimardum g'ihân?*

morte, ed è l'erede di un antico odio per cagione di sparso sangue (1). La sua genealogia si dà in modi diversi dal *Bundehesh* e dal *Mug'mil ut-tevârikh* (2); Firdusi non dice altro se non ch'egli è figlio di Pesheng, e che Pesheng era figlio di Zâdshem, che alla sua volta discendeva da Tûr figlio di Frêdûn (3). Ma comunque sia ciò, si noti che quello che nell'ordine morale e extramondano si è A*n*ra Mainyu o Ahrîmane, nell'ordine materiale e terreno è Afrâsiâb agli occhi degli Irâni. Il nome suo che in zendo suona *Franraçyan*, deriva, come giustamente osserva lo Spiegel (4), da una radice *hraç*, spaventare, conservata nel persiano *hirâs*, terrore, e i suoi appellativi sono *mairya*, mortifero, nell'*Avesta*, che ci ricorda il *pourumahrka*, pieno di morte, dato nello stesso libro ad A*n*ra Mainyu, e *gazaçta* o malvagio, nel *Mînôkhired* (5).

Ma le somiglianze tra Afrâsiâb ed Ahrîmane non stanno qui soltanto. Ahrîmane ed Ormuzd sono, è vero, due implacabili avversari siccome rappresentanti uno del male, l'altro del bene; ma ciò che fa Ahrîmane, non è sempre di proprio moto o di propria iniziativa; è sempre invece qualche opera maligna ch'egli oppone alle creazioni benefiche del suo avversario. Ciò si rivela chiaramente, e più che in altri passi, nel primo capo del *Vendîdâd*, laddove Ahura Mazdâo crea di proprio impulso, e A*n*ra Mainyu a ciascuna creazione di quello contrappone una sua opera malefica. Le parole stesse usate dal testo provano ciò che ora diciamo, trovandosi che il verbo usato per indicar l'atto creativo del genio del bene si è *dâ*, creare, e quello che indica l'opera del genio del male, si è *fra*+*kare*t, cioè tagliare, fabbricare, lavorare. La parola poi che indica l'opera di A*n*ra Mainyu è *paityâra* (rad. *ar*), imitazione in senso cattivo, opposizione. Così Ahrîmane, benchè avversario di Ormuzd, gli è però implicitamente inferiore, e da tutto l'insieme delle opere sue fa prevedere la sconfitta che gli toccherà alla fine del mondo.

Ora, anche in Afrâsiâb troviamo questo medesimo contrassegno; egli

---

(1) Fird. *Shâh.*, p. 181: Afrâsiâb così parla a suo padre: *kunûn har-c'ih mânîdah bûd az niyâ,* | *zi-kîn g'ustan u g'ang u az kîmiyâ,* | *kushâdân-ash bar tîgh i tîz i man ast*; | *gah i shûrish u ristakhîzi man ast;* qualunque cosa rimase da parte degli avi nostri, *sia* in chieder vendetta o guerra *sia in ordir* frodi, sta ora sull'acuta mia spada il risolverla; è mio questo tempo di tumulto e di riscossa.

(2) *Bundehesh*, p. 79; *Mug'mil* etc. in Iusti, *Handbuch der Zendsprache*, alla voce *franraçyan*.

(3) Fird. *Shâh.*, p. 180 e segg.

(4) Spiegel, *Uebersetzung des Avesta*, III, p. LXIII.

(5) *Avesta, yasht* V, 41, *mairyô tûiryô Franraçê* (nom.); IX, 18, *mairîm tuirîm Franraçyânem* (acc.). — *Mînôkhired*, in Spiegel, *Pârsi-Gramm.*, p. 136: *gazaçta Frâçyâk i tûr*.

è l'eterno avversario, quasi Ahrîmane terreno, dei re Irâni, coi quali egli si trova continuamente in guerra e ai quali tenta di involare la maestà reale, una specie di aureola che loro circonda il capo, della quale però egli è riconosciuto indegno. L'*Avesta* racconta come egli si sia bagnato per tre volte, deposte le vesti, nel lago Vourukasha per ottener la regia maestà che era custodita in quelle acque, e come essa gli fuggisse per tre volte aprendosi tre nuovi canali per sfogarvi le acque che la custodivano portandola con sè, non ascoltando le voci di lui che le correva dietro chiamandola ed invocandola (1). Così è manifesta la sua inferiorità ai re Irâni, sotto i colpi dei quali egli dovrà soccombere alla fine in pena de' suoi delitti, come ad Ormuzd soccomberà un giorno Ahrîmane.

Cotesta sua inferiorità che l'*Avesta* ci fa conoscere in questo mito meraviglioso, quantunque tutto di senso etico e morale, ci è pure chiaramente fatta conoscere e toccar con mano nel *Libro dei Re* di Firdusi, ma in modo assai diverso. Troviamo infatti in esso che Afrâsiâb non osa mai prender l'armi contro gli Irâni quando nell'Irân le cose procedon bene e non si teme di assalti nemici. Egli prende furioso le armi e mostra ardire e coraggio e minaccia solo allorquando gli Irâni hanno perduto il loro re, ovvero esso va tralignando, ovvero è accaduta nell'Irân qualche grande sventura. Così, dopo la morte di Minôcihr, egli prende le armi per istigazione del padre suo Pesheng, arde di desiderio di far la guerra, dice che egli solo è degno di combattere coi forti, pari in battaglia col principe dell'Irân (2). Ma tanto ardire gli è venuto soltanto dall'intendere che Nevdher, succeduto a Minôcihr, è uomo debole e vizioso, dato al sonno, alla gola ed ai piaceri con grave scandalo dei principi della corte e di Sâm ancora che invano tenta di richiamarlo al retto sentiero (3). Morto Zav e salito sul trono il debole Ghershâsp, Afrâsiâb approfitta dell'avvilimento d'animo in cui son caduti gli Irâni, e ne viola i confini. Il padre suo Pesheng lo esorta a passare il G'ìḥûn che segnava il confine dei due regni, lo eccita a far sì che sul trono iranico non si segga alcuno; ed egli allora raduna un esercito dal Sipeng'âb fino all'Ab, che è un altro

---

(1) *Yasht* XIX, 56-64.

(2) Fird. *Shâh.*, p. 181 : *kih shâyistah i g'ang i shîrân* (*prodi*, in questo caso, benchè potrebbe anche tradursi *leoni*) *man-am*, | *ham-âvard i sâlâr i îrân man-am.*

(3) Fird. *Shâh.* p. 177 e segg.: *na-burd û bi-dâd u dihish hìc' râh*, | *hamah khvard u khuftan budî kâr i shâh;* egli (Nevdher) non dava nessun corso alla giustizia; sempre il mangiare e il dormire erano l'occupazione del re.

nome del G'îhûn (1). Ma più tardi Kobâd, eletto re, lo riduce a far la pace e a rimanersi tranquillo nel suo regno. Egli però per la terza volta si ridesta e ripiglia le armi, allorquando il re Kâvus, abbandonata la sua sede, è fatto prigioniero dal re d'Hâmâverân. Afrâsiâb sa che gli Irâni sono senza capo; ciò risponde a' suoi desiderî, ed egli ne approfitta per rinnovar la guerra, per essere poi ricacciato da Rustem e da Kâvus riuniti nel suo regno (2).

Così implicitamente in Afrâsiâb trovasi la coscienza della propria inferiorità, la quale poi fa sì che egli, allorquando gli Irâni hanno un re e si sentono abbastanza forti da non temere de' suoi assalti, si tenga sempre quieto, nè si muova se non quando qualcheduno degli Irâni, e specialmente Rustem, è andato a disturbarlo. Allora egli si riscuote e prende le armi, per essere poi sempre sconfitto; ma allora egli non fa ciò per propria iniziativa, bensì perchè egli vi è tratto come a forza dalla necessità. Rustem un giorno va a caccia con altri sette eroi nei giardini di Afrâsiâb, e costui se ne accorge. Prende le armi con Pîlsem e con Alkûs e corre incontro a Rustem; ma là egli si smarrisce d'animo e trema all'udir la voce di Rustem che lo schernisce dicendogli ch'egli non è atto alle battaglie, essendo egli più morto che vivo; vada egli adunque e prenda come le donne la lana e il fuso e stia a piatir con le fanciulle nel gineceo; se no, egli con la sua spada indiana gli troncherà il capo, e già per lui gemono la corazza e l'elmo come presaghi della sua vicina morte (3). Afrâsiâb a quelle parole si corruccia, tace (4), e invano chiama in aiuto Pîrân e gli altri suoi prodi. Alla stessa maniera egli si comporta quando Rustem, perseguitando il dêvo Akvân, entra ne' suoi giardini e disperde le sue puledre (5), e quando ancora lo stesso Rustem, liberato che ebbe Bîzhen dalla prigione, entra nella sua reggia e la mette a ferro e a fuoco (6).

Un'altra cosa che rivela l'inferiorità di Afrâsiâb di fronte ai principi

---

(1) Fird. *Shâh.*, p. 206: *payâmî biy-âmad bi-kirdâr i sang | bi-Afrâsiyâb az dilâvar Pashang, | kih: bi-gudhâr az G'îhûn u bar kash sipâh, | ma-mân tâ kasî bar nishînad bi-gâh. | Yakî lashkar ârâst Afrâsiyâb | zi-dasht i Sipang'âb tâ rûd i Ab.*

(2) Fird. *Shâh.*, p. 285 e segg.

(3) Fird. *Shâh.*, p. 309: *tû dar g'ang i mardân basandah nah-i, | kih pazhmardah-i, hîc' zindah nah-i; | bi-rav, c'ûn zanân panbah u dûk gîr, | pas i pardah bâ dukhtarân sûg gîr..... | bi-dîn tîgh i hindî bi-burram sar-at, | bi-giryad bi-tû g'avshan u mighfar-at.*

(4) Fird. *Shâh.*, p. 309: *c'u Afrâsiyâb în sukhunhâ shinîd, | dil-ash gasht pur dard u dam bar kashîd.*

(5) Fird. *Shâh.*, p. 751: *ghamî shud sipahbad u bi-numûd pusht.*

(6) Fird. *Shâh*, p. 798: *az-ân khânah bi-girîkht Afrâsiyâb.*

Irâni, si è quella del sogno spaventoso per il quale intende che un giorno egli dovrà loro cedere e soccombere. Così dovrà soccombere Ahrîmane nell'estrema lotta con Ormuzd; così a Frêdûn dovette soccombere Dahâk, al quale era stata svelata, come ad Afràsiâb, la sconfitta in una visione notturna. Afràsiâb una notte, dopo aver cominciata la guerra con Siyâvish, sogna di trovarsi in una landa deserta piena di polvere e di serpenti; il cielo era pieno di aquile (1), e la sua tenda sorgeva all'estremo lembo di quel deserto guardata da' suoi prodi. Sopravviene allora un vento improvviso che rovescia la tenda, e dopo il vento un esercito di Irâni che prima gli uccidono tutti i suoi guerrieri, poscia lo legano e lo trascinano ai piedi di un trono su cui sta seduto maestosamente re Kâvus. Un giovinetto allora di non più di quattordici anni (2), che sedeva accanto al re, si scaglia su di lui e sta per ucciderlo, quando l'orrenda visione sparisce ed egli si desta (3). Gli indovini interrogati da lui gli predicono ogni sventura dalla guerra con Siyâvish e l'estrema rovina, alla quale egli non potrà sfuggire in niun modo (4). Così Afràsiâb è condannato a perir nella sconfitta, come Dahâk già prima e come Ahrîmane alla fine del mondo.

Per tale fatalità che lo trae alla rovina, egli è di carattere non solo presuntuoso, come allorquando si vanta di esser pari in guerra ai principi dell'Irân, ma ancora impetuoso e facile a lasciarsi vincere dallo sdegno; onde avviene che egli commetta gravi colpe che poi necessariamente espia con tante sconfitte e altrettante perdite. Così in un impeto di collera all'udire che gli sono stati uccisi da Zâl i suoi prodi, Khazarvân e Kelbâd, egli si fa condurre innanzi scalzo e dimesso e a capo scoperto (5) il re Nevdher ch'egli aveva fatto prigione, e lo uccide di propria mano (6). Aghrêrath pure che era suo fratello, è ucciso da lui perchè si era mostrato benigno e clemente verso i prigionieri Irâni (7). Siyâvish pure è fatto strascinare da lui all'estremo supplizio dietro le calunnie di Garsîvez,

(1) FIRD. *Shâh*, p. 406: *biyâbân pur az mâr dîdam bi-khvâb, | zamîn pur zi-gard, âsmân pur 'uqâb.*

(2) FIRD. *Shâh.*, p. 406: *dû haft-ash na-bûdî hamî sal bîsh.*

(3) FIRD. *Shâh.*, p. 406: *khurûshîdamî man firâvân zi-dard, | ma-râ nâlah u dard bîdâr kard*; alto gridai per il dolore; il grido e il dolore mi fecero desto.

(4) FIRD. *Shâh.*, p. 407: *g'ihândâr agar murgh gardad bi-par | bar în c'arkh i gardân, na-yâbad gudhar* Laddove in maniera figurata ed iperbolica è significata l'impossibilità di sfuggire al destino.

(5) FIRD. *Shâh.*, p. 198: *bi-dast âvarîdand-ash az khîmah khvâr, | barahnah sar u pây u bar gashtah kâr.*

(6) FIRD. *Shâh.*, p. 198: *bi-zad gardan i Navdhar i tâg'dâr.*

(7) FIRD. *Shâh.*, p. 202 e segg.

senza ricordarsi che l'infelice è il genero suo, e in quell'impeto di sdegno egli avrebbe fatto uccidere anche la figlia sua, Ferenghûs sposa di Siyâvish, come colpevole, se Pîrân non giungeva con preghiere a sottrarla al suo furore, attestando ch'essa presto assai doveva esser madre (1). Ma questa colpa è quella ch'egli espia più duramente, poichè il figlio che doveva nascere dalla sua figlia, era Khusrev, e noi già abbiamo visto come cotesto principe abbia vendicata l'uccisione del padre suo con la morte di Afrâsiâb e del perfido suo consigliere Garsîvez.

Non si può negare d'altra parte che Afrâsiâb non sia amante della gloria delle armi. Che anzi, da ciò che abbiam detto, s'intende com'egli subito si accenda di ardor guerriero e faccia alti e forti proponimenti, quantunque non mai attenuti di poi. Ma questo suo valore, se esso può così chiamarsi, è valore istantaneo che tosto cede all'avvilimento, ad un improvviso smarrirsi d'animo, come allorquando egli corre dal padre suo Pesheng a proporgli la pace con gli Irâni dopo essere stato abbattuto in campo da Rustem che gli toglie di capo la corona (2); e nella parlata ch'egli fa al padre suo per indurlo alla pace sembra ch'egli rida come di se medesimo, allorquando fa osservare ch'egli in mano di Rustem era come una pagliuzza (3); e giunge fino all'ironia allorquando rimprovera al genitore le sue spavalderie e i suoi vanti (4). Un simile avvilimento s'impadronisce di lui allorquando ascolta fra le armi le parole schernitrici di Rustem, quali più sopra abbiamo riferite, e allorquando all'udir la morte del figlio suo Shêdah, prevede la sua sconfitta e piange lagrime di dolore (5). Ma quando ogni cosa è perduta e non gli resta più alcuna speranza ed egli è costretto a cercar rifugio in una caverna di un monte, allora egli chiede a Dio o di rendergli il regno e la corona con tutti i proventi dei tesori e con tutto il suo esercito, ovvero di farlo morire, poichè la vita

---

(1) Fird. *Shâh.*, p. 479: Pîrân così parla ad Afrâsiâb: *bi-farzand, bâ kûdakî dar nihân,* | *dirafshî ma-kun kkvîshtan dar g'ihân;* non cercarti gloria nel mondo con una figlia che ha un bambino nascosto nel seno; cioè non acquistarti una trista gloria col dar morte a una tua figlia in quello stato. La frase un poco strana *dirafshî kardan* è così spiegata dal Vullers: *gloriam sibi comparare*, dietro il *Burhân i* kâti'u che ha *khvad-râ mash-hûr sâkhtan.*

(2) Fird. *Shâh.*, p. 221: *tahamtan furû kard c'ang i dirâz,* | *rubûd az sar-ash tâg' i ân sar-firâz.*

(3) Fird. *Shâh.*, p. 223: *bi-dast i vay andar yakî rîshah am.* — La parlata di Afrâsiâb al padre per la pace si trova a p. 223 e segg.

(4) Fird. *Shâh.*, p. 224: *tu-râ g'ang i îrân c'û bâzî numûd;* a te pareva un giuoco la guerra coll'Irân.

(5) Fird. *Shâh.*, p. 927: *c'unîn guft bâ mûyah Afrâsiyâb.*

non gli è più cara senza corona e senza trono (1). Finita la preghiera, egli piange (2) e piangendo pensa con rammarico come egli, che un giorno comandava alla Cina e alla Tûrânia, ora non abbia più che una caverna (3); e così va seguitando nei lamenti finchè poi un giorno Hôm che discendeva da Frêdûn (4), lo incatena e lo trae ai piedi di Khusrev.

Non v' ha alcun dubbio che quest'ultima scena, trista e desolata, della vita di Afrâsiâb non sia descritta da Firdusi con un senso di compassione per questo potente monarca caduto dal trono e ramingo dal suo regno. Poichè deve ben notarsi anche questo, che cioè Afrâsiâb in tutto quanto il *Libro dei Re* per quanto vi appaia, quale più sopra l'abbiam descritto, e presuntuoso e collerico e facile a smarrirsi dopo i più furiosi impeti dell'ira, non giunse però mai a quell'eccesso di stupida ferocia e di codarda tirannia che è proprio di Dahâk. Fin l'amor filiale è stato dimenticato da Dahâk, e il padre suo è stato da lui sacrificato alla propria ambizione. Afrâsiâb invece ha ucciso, è vero, il fratello Aghrêrath; ma l' ha ucciso in un impeto di collera e ne dimanda quindi perdono al padre suo (5), e là nella caverna, dov' egli ha trovato rifugio, lo ricorda con dolore e si accusa qual servo pieno di colpe davanti a Dio (6). Dahâk invece aveva pattuita freddamente con Ahrîmane, e senza alcuna cagione, la morte del padre. D'altra parte Afrâsiâb se tenta di conquistare il trono dell'Irân, si crede in pieno diritto, dicendosi egli pure discendente di Frêdûn quanto i re Irâni (7); e quando il re Kâvus gli rimprovera la sua smania di conquista, egli risponde che il desiderio di acquistare è proprio di tutti e che, nel caso contrario, egli stesso, il re Kâvus, non doveva tentar la conquista dell' Hâmâverân (8). Egli quindi non appare veramente,

---

(1) Fird. *Shâh.*, p. 987: *bi-man bar bi-bakhshây takhat u kulâh, | ma-râ bâz dih bâzh u gang' u sipâh; | u gar nah, ravân-am g'udâ kun zi-tan, | kih, nay afsar u gang' u nay ang'uman, | na-khvâham man în zindagânî u rang'.*

(2) Fird. *Shâh.*, p. 987: *bi-zârî hamî guft Afrâsiyâb | abâ khvîshtan, bâ dû dîdah pur âb.*

(3) Fird. *Shâh.*, p. 987: *hamah Turk u C'în zîr i farmân i tû.... | yakî ghâr dârî bi-bahrah bi-c'ang.*

(4) Fird. *Shâh.*, p. 986: *zi-tukhm i Farîdûn âmûzgâr.... | kug'â nâm i ân nâmvar Hûm bûd.*

(5) Fird. *Shâh.*, p. 202 e segg — a p. 225 Afrâsiâb così domanda perdono al padre: *har-ân-gah pashîmânî âmad bi-pîsh, | pur az gham shudah dil zi-kirdâr i khvîsh; | basî gashtam âzurdah az rûzgâr, | bi bakhshad gunâh i ma-râ shahryâr.*

(6) Fird. *Shâh.*, p. 987: *hamân bandah i pur gunâh i tû am.* E più innanzi: *darîghâ birâdar! darîghâ pusar! | c'ih âmad ma-râ az zamânah bi-sar.*

(7) Fird. *Shâh.*, p. 295: *kih Tûr i Farîdûn niyây i man-ast, | hamah shahr i îrân sarây i man-ast;* poichè Tûr figlio di Frêdûn è l'avo mio, tutte le città dell'Irân sono mia propria sede.

(8) Fird. *Shâh.*, p. 295: *tu-râ gar sazâ bûd îrân, bi-dân | niy âz-at na-bûdî bi-Hâmâvarân;* se a te l'Irân conveniva, per questo appunto non avevi bisogno dell'Hâmâverân.

in tutta quanta la leggenda epica, quale un crudele e feroce tiranno, quale è Dahâk, ma piuttosto quale un potente illuso, che si crede aver diritto a un regno che non è suo, che però tenta con ogni sforzo di conquistarlo, e travolge quindi se stesso e i suoi nella rovina, perchè il diritto e il fato gli son contrari. Egli vuol sforzar l'impossibile, come direbbe un critico moderno, e con la perdita del regno e della vita sconta dipoi la sua soverchia audacia. In ciò ancora egli è aggirato da perfidi consiglieri che conoscono il suo debole e ne approfittano; e tra questi è Garsîvez, veramente maligno e invidioso, che ordisce nel silenzio la rovina di Siyâvish per falsi sospetti, lo fa punir di morte da Afrâsiâb che n'era lo suocero (1), e attira intanto sopra di sè e del suo signore lo sdegno di Khusrev che non tarderà a vendicar sui colpevoli quella morte.

Fra tanti eroi Tûrâni che sono ricordati nel *Libro dei Re* accanto ad Afrâsiâb, nessuno merita di essere rammentato quanto il prode e giusto, ma infelice Pîrân, figlio di Vêsah. Quest'uomo di così nobile ed elevato carattere, di sentimenti tanto generosi, non è ricordato nell'*Avesta*, e sembra al tutto esser figlio della fantasia popolare. Esso poi si distingue dagli altri eroi Tûrâni in questo specialmente, che cioè, mentre egli è di fermi propositi in tutte le sue opere, mentre egli è veramente valoroso nè si lascia andare a inutili vanti, gli altri invece promettono assai più di quello che non attengono di poi; sembrano valorosi al cominciar della battaglia, ma poi dan volta in fuga appena veggono risplendere il ferro dell'avversario, e cadono senza gloria e vituperati sotto i primi loro colpi. Tali sono Khazarvân, Kalûn, G'uyâ, Shemâsâs, Kelbâd, Kelâhver, il re del Mâzenderân, e quanti altri si trovano ricordati nel *Libro dei Re*. Che se Pîrân vi è ricordato, qual è, virtuoso, giusto, valoroso e nemico d'ogni viltà, ciò significa che la leggenda popolare sa ammirare la virtù e renderle il dovuto onore, anche quando essa si trova fra i nemici. L'*Avesta* anzi in uno de' suoi inni (2) invoca le Fravashi, cioè i tipi divini di ciascun essere, quali esistono nella mente di Ahura Mazdâo, anche di pii guerrieri Tûrâni e delle regioni tûrâniche. La qual cosa fa pensare allo Spiegel (3) che ciò si spiega soltanto con la circostanza che anche nel

(1) Vedi tutte le calunnie inventate da Garsîvez sul conto di Siyâvish in FIRD. *Shâh.*, p. 456 e segg.

(2) *Yasht* (*Farvardîn-yasht*) XIII, 143.

(3) SPIEGEL, *Uebersetzung des Avesta*, III, p. 139, nota 1: « Es ist sehr merkwürdig dass hier nicht blos die Fravashis der arischen sondern auch der turânischen Gegenden gepriesen werden. Es liegt darin, wie mir scheint, ein Zugeständniss dass es auch in Turân fromme Menschen gab ».

Tûrân vi erano uomini pii, che perciò, come tali, meritavano di essere ammirati ed onorati. In questa idea l'*Avesta* e la leggenda popolare convengono e s'incontrano, e di essa è figlia indubbiamente la bella figura di Pîrân del quale ora incominciamo a parlare.

La storia di Pîrân nel *Libro dei Re* è collegata a quella di Siyâvish, e in questa egli ha una grandissima parte, poichè circostanze gravissime, alle quali egli non può sottrarsi, lo inducono a favorir laddove egli può secondo giustizia la causa di Siyâvish, e di chi ne vuol vendicar la morte, mentre la nascita, il dovere e la gratitudine lo legano alla causa di Afrâsiâb e de' suoi. Ma, mentre egli favorisce la causa di Siyâvish e di Khusrevi egli non fa ciò per velleità di partito o per desiderio di mostrarsi indipendente dalla volontà di Afrâsiâb. Egli lo fa soltanto nell'intento di risparmiargli nuove colpe, e con le colpe nuovi pericoli e nuovi danni. Così egli giunge con preghiere a salvar la vita a Ferenghîs che il padre inferocito, dopo averle ucciso lo sposo, vorrebbe condannare a morte (1) Afrâsiâb vorrebbe far morire il piccolo Khusrev, figlio dell'ucciso, spaventato da certe predizioni sul suo avvenire; ma Pîrân lo invola all'ira dell'avo e lo nasconde presso alcuni pastori, sul monte Kalv (2). Così quando Bîzhen è fatto prigioniero da Afrâsiâb, chi gli salva la vita a forza di supplicare è lo stesso Pîrân, che ottiene l'intento quantunque con molta pena (3).

Oltre questo chiaro e fermo sentimento della giustizia che induce il nobile guerriero a difendere gli Irani quando Afrâsiâb si mostra ingiusto verso di loro, Pîrân vi è anche indotto da ragioni di famiglia; poichè prima che Siyâvish sposasse la figlia di Afrâsiâb, gli aveva egli data in isposa la figlia sua G'erîreh, dalla quale era nato un figlio di nome Firûd (4). Per tutte queste ragioni egli è indotto a proteggere Siyâvish e Khusrev e gli Irâni laddove gli sembra che abbian ragione. Ma anche con tutto questo egli non è insensibile alla voce del dovere; e allorquando Afrâsiâb prende le armi per difendersi dai nemici che gli invadono il regno, egli si pone a capo dei Tûrâni e conduce con tal valore e tal senno la guerra che ben presto gli Irâni sono ridotti all'estremo, assediati sul monte Hamâven, donde poi sono liberati da Rustem.

(1) Fird. *Shâh.*, p. 478 e segg.
(2) Fird. *Shâh.*, p. 481 e segg.
(3) Fird. *Shâh.*, p. 767 e segg.
(4) Fird. *Shâh.*, p. 434 e segg.

Ma intanto la posizione di Pîrân si fa sempre più difficile; egli ha forti impegni dall'una e dall'altra parte, e la voce del dovere lo fa combattere con Afrâsiâb, mentre la coscienza e la giustizia se non lo fanno parteggiar per gli Irâni, gli fanno almeno intendere che il diritto e la ragione stanno dalla loro parte. Si voglia o non si voglia, Siyâvish fu ucciso a tradimento, e gli Irâni han tutto il diritto di chiederne aspra e compiuta vendetta. Tale difficile posizione di Pîrân è ben compresa da Rustem, il quale, in un colloquio avuto con lui, gli propone di abbandonare Afrâsiâb e di passare nell'Irân laddove troverà protezione e onorevole soggiorno presso di Khusrev (1). Ma il nobile guerriero risponde che il dovere gli dice ben altra cosa; e poi, d'altra parte, quasi tutti i figli di Gûderz, che salivano a settantadue, sono caduti in quella guerra per mano de' suoi fratelli e de' suoi figli; cosicchè, se egli si recasse alla corte di Khusrev, anche là troverebbe odii e rancori. Preferisce quindi di rimanere; Rustem allora afferma che da lui non ha visto che nobili opere e che fra i Tûrâni egli è il più innocente (2). Così Pîrân ritorna al campo e in un successivo scontro con Gûderz cade trafitto e spira (3). Così egli soccombe al proprio dovere, dopo aver risparmiato ad Afrâsiâb tante colpe e dopo essersi guadagnato l'affetto e la stima di Khusrev che lo piange perduto e gli fa celebrar dagli Irâni solenni funerali (4).

Nel *Libro dei Re* di Firdusi, oltre agli eroi che siamo venuti descrivendo in questo lavoro, se ne trovano ricordati molti altri, certo di assai minore importanza, ma tali però che meriterebbero che anche di loro si facesse qualche menzione. Noi però non abbiamo fatto ciò, ma ci siamo attenuti ai principali soltanto, per dare un saggio del come potrebbe essere studiato ogni eroe dell'epica persiana, in quella guisa che furon studiate, nella loro origine e nel loro delinearsi successivo, tutte le figure eroiche dell'epopea greca, della indiana, della germanica e scandinava. Ma

---

(1) FIRD. *Shâh.*, p. 692 e segg.

(2) FIRD. *Shâh.*, p. 695: *na-dîdastam az tû bi-g'uz nîkûyî, | zi-Turkân bî-âzârtar kas tûy-î.*

(3) FIRD. *Shâh.*, p. 882: *biy-andâkht zûpîn, bi-Pîrân rasîd, | zirih dar bar-ash sar bi-sar bar darîd; | zi-pusht andar âmad bi-râh i g'igar, | bi-ghaltîd u âsîmah bar gasht sar; | bar-âmad-ash khûn i g'igar az dahân, | ravân-ash hamî raft zî hamrahân;* Gûderz lanciò un giavellotto che raggiunse Pîrân, gli forò da parte a parte sul petto la corazza; dal dorso prese la direzione del fegato, e *quegli* stramazzò e perdette i sensi; gli uscì dalla bocca il sangue del fegato, e l'anima sua volò verso i suoi compagni di guerra già morti prima. — Così spiego quell'*hamrahân*, compagni di via, soci.

(4) FIRD. *Shâh.*, p. 896 e segg.

il nostro lavoro non è che un saggio, e non siamo andati più in là; solo abbiam cercato di fare, per gli eroi che abbiamo esaminati, uno studio non ancora stato fatto, credendo che anche gli eroi di questa grande epopea possano meritar quello studio e quell'attenzione che già meritarono gli eroi di altre leggende. La parte poi, che abbiamo studiata, è la più antica del *Libro dei Re*, e abbiamo lasciata tutta quella parte, più recente e però ispirata da idee totalmente diverse, che comincia col re Lohrâsp, segue con Gushtâsp, narra le contese di Isfendyâr e di Rustem, descrive la guerra di Gushtâsp con Arg'âsp re di Tûrânia, e va fino alla morte di Rustem. Ma poichè questa parte si diversifica assai dalla prima, così lo studio de' suoi eroi, come già abbiamo detto più sopra, potrà essere il soggetto di un altro lavoro consimile, che terrà dietro al presente. Anche però da quello che abbiam detto fin qui, s'intende quale era il tipo ideale dell'uomo, perfetto nelle qualità sue fisiche e morali, che il popolo persiano si era venuto raffigurando e abbellendo nella mente.

DELLE IDEE

E PROPRIAMENTE

DELLA LOR NATURA, CLASSIFICAZIONE E RELAZIONE

PEL PROF.

P. D'ERCOLE

Memoria letta nell'Adunanza del 4 Aprile 1880.

I.

Le idee come obbietto della filosofia e definizione delle medesime.

L'argomento di questo scritto sono le idee: ma come questa è una materia vasta, anzi sì vasta che si può dirla addirittura l'unica ed integrale materia della scienza filosofica; così dichiaro che il mio intendimento, lungi dal volere abbracciare l'integrità della materia, è invece unicamente limitato e rivolto a trattarla da un determinato aspetto, e propriamente da quello che concerne la parte generale della dottrina delle idee. E, ad essere più preciso, soggiungerò, che questa considerazione della parte generale delle idee si propone più determinatamente un triplice scopo, cioè: 1° di determinare la natura di ciocchè si appella idea e di esprimerla in una adeguata definizione: 2° di fare una generale classificazione delle idee, fondata sopra un principio razionale; e 3° finalmente di considerare le idee in un particolare rapporto, vale a dire nel loro rapporto di opposizione, il quale, mentre in generale è preso assai poco in considerazione, è pur nondimeno il più importante ed essenziale rapporto che passa fra loro.

Il titolo di questa dissertazione, ai tempi che corrono, non è proprio atto ad incoraggiare i lettori od uditori della medesima, e potrebbe per avventura far credere e temere che si trattasse di astruse lucubrazioni intorno ad entità immaginarie, quali generalmente son pensate le idee. Mi affretto a dichiarar tosto che quelle che qui si appellano idee sono non altro che quelli che comunemente si appellano principî, intorno ai quali parlano e discutono tutti. Sicchè dunque avrem che fare coi principî generalmente considerati. E come i principî son parte costitutiva non solo di quelle discipline che si appellano scienze in senso stretto, ma anche delle discipline storiche, letterarie, sociali, filologiche e via dicendo; così quello che noi saremo per esporre tocca da vicino ogni disciplina, e per conseguenza si allarga alle branche tutte dello scibile.

Prima di entrare nella materia, richiamo molto volentieri l'attenzione degli illustri Membri dell'Accademia su di un punto, che procaccia non poca indulgenza a chi imprende a trattarla: vale a dire sulla grande, non dirò soltanto varietà, ma anche vaghezza ed incertezza, e persin confusione di opinioni che regna a tal riguardo. Non è mio proposito di entrare, mi si passi l'espressione, in questo vasto pelago di opinioni, per discuterle e dibatterle; giacchè questo significherebbe di entrare nel pieno campo della storia filosofica tutta intera: la quale, nel suo lunghissimo corso, ha come a precipuo argomento proprio quello di cui tratta questo scritto. Il mio scopo invece è soltanto quello di esprimere intorno alle idee quel pensiere che a me pare razionale e fondato sulla realtà delle cose. Ed ora veniamo senz'altro alla cosa.

Per intendere bene quel che dobbiamo esporre in prosieguo, fa d'uopo preporre poche parole intorno alla diversità sì dell'obbietto che del carattere che la filosofia ha per rispetto alle altre branche dello scibile.

È cosa antica ed ancor oggi abbastanza comune e frequente quella di sentire a dividere tutte le discipline dello scibile in tre gruppi ciascun de' quali avrebbe ad obbietto la realtà in una particolare manifestazione della medesima. E propriamente un gruppo di esse, astronomia, fisica, chimica, zoologia, botanica, ecc., avrebbe ad obbietto la realtà naturale, e che perciò le corrispondenti discipline si appellino a giusto titolo scienze naturali. Un secondo gruppo, psicologia, giurisprudenza, morale, storia, estetica, filologia, ecc., studierebbe la realtà nella forma del pensiere conscio, manifestantesi, quanto all'ordine finito, segnatamente nell'uomo; e le corrispondenti discipline si appellerebbero umane. Finalmente un terzo gruppo di discipline avrebbe ad obbietto la realtà divina ed assoluta, e le corrispondenti discipline teologico-religiose si appellerebbero discipline divine. Avremmo così tre gruppi di discipline, le naturali, le umane, le divine coi corrispondenti obbietti della realtà naturale, realtà umana, realtà divina.

Se ora si ponga mente alle diverse discipline de' tre predetti gruppi, è a dire che ciascuna di esse tutte considera la realtà da un singolo e particolare aspetto, il qual singolo e particolare aspetto della realtà costituisce appunto l'obbietto di ogni particolare disciplina: p. es. la chimica studia la elementarità de' corpi, la fisica le proprietà dei medesimi, la botanica la natura e funzione dei vegetali, ecc.: e poi la giurisprudenza ha ad obbietto gli atti umani rispetto al principio dell'equità, la filologia ha oggetto la parola dell'uomo in tutte le manifestazioni della medesima, ecc. ecc.: e poi la teologia ha ad obbietto il divino nella sua natura e ne' suoi attributi, ecc. Insomma tutte le diverse discipline dello scibile han sempre e ciascuna ad obbietto un lato specifico e singolare della realtà e si muovono unicamente entro i confini del medesimo. Ora noi diciamo che la singolarità dell'oggetto e i determinati confini della trattazione del medesimo fanno sì che le diverse discipline dello scibile hanno carattere di particolarità e di singolarità.

Se poi, al contrario, poniamo mente all'oggetto e al carattere della dottrina filosofica, troviamo che, sì per l'uno che per l'altro, il divario di essa dalle rimanenti discipline è veramente grande. In effetto, tutti sanno che la filosofia rivolge la sua attenzione non solo all'uomo, ma anche al principio divino ed assoluto non che all'istessa natura; e non li considera soltanto nella loro isolazione ma nel lor reciproco rapporto. Intanto, siccome la natura umana, la natura divina od assoluta e la natura fisica costituiscono nel lor complesso la universale realtà, così è a dire che l'obbietto della filosofia non è, come quello delle altre discipline tutte, un singolo lato di manifestazione della realtà, ma la realtà universale tutta quanta. Onde segue che la filosofia per la universalità dell'obbietto è disciplina di natura universale, quando le altre tutte, nessuna esclusa, son dottrine di natura particolare.

Possiam dunque in conclusione affermare che l'obbietto della filosofia è la realtà tutta intera, e il suo carattere scientifico è quello della universalità.

Se non che, una tale designazione dell'obbietto della filosofia è ancora oscura ed indeterminata: giacchè, se da una parte è vero che la filosofia ha ad obbietto la realtà tutta quanta, dall'altra è vero altresì che questa è da essa considerata in un determinato e specifico modo. Ora è proprio questo modo che vogliamo indicare; e facciamo osservare che, ciò facendo, non solo determineremo più precisamente l'obbietto della filosofia, ma si farà, ad un tempo, palese la stessa natura delle idee: in quanto che in fondo al nostro esame troveremo che le idee e l'obbietto della filosofia sono una sola e medesima cosa.

Cominciamo per dire che il carattere specifico della considerazione filosofica della realtà è che la filosofia considera (e però ha ad obbietto) quest'ultima non in ciocchè ha di singolo, sì bene in ciocchè ha di generico, o meglio di generale. Mi spiego.

Tutti sanno e tutti concedono che la filosofia si propone a scopo la conoscenza della natura delle cose, che sono il suo obbietto. Se io domandassi, pognamo, qual è la natura dell'uomo; nessuno certamente risponderebbe designandola col dire quale sia la tua o la mia singolare natura umana, ovvero anche quella de' cittadini di tale o tal altra città, di questo o quell'altro popolo, ma risponderebbe col designare i caratteri della natura umana in genere. E rispondendo così, darebbe ad intendere che la considerazion filosofica dell'uomo, a suo avviso, non possa e non debba esser altra che quella che esprime appunto la generale natura umana. Il medesimo sarebbe, se si trattasse della natura della pianta, dell'animale, del pensiere, della virtù, del linguaggio, e via via.

Ora con ciò si vuol dire che considerazion filosofica delle cose è ritenuta quella che considera le medesime in ciocchè hanno di generale, o, che vale lo stesso, quella che ha ad obbietto le cose in quanto generali, in quanto generi. L'obbietto della filosofia son dunque *i generali*, quelli che ne' tempi delle strepitose lotte de' nominalisti e realisti si sono appellati gli universali.

Ma e i generali delle cose che son mai essi stessi? non altro che il complesso, o meglio l'unità di quei caratteri che appelliamo elementi costitutivi della natura delle cose. Per esempio, quando si dice che il pensare, il sentire, il volere, ecc. sono i caratteri costitutivi dell'uomo, ciò significa che essi sono gli elementi costitutivi della *natura generale* del medesimo. Ora il generale, così designato, esprime ciocchè in linguaggio più comune si appella *essenza*. E però possiam parimenti dire che il pensare, il sentire, il volere, ecc. sono i caratteri costitutivi dell'essenza dell'uomo. Dalla qual cosa consegue che la considerazion filosofica delle cose è la considerazion delle medesime nella loro essenza. Il *generale* delle cose dunque e l'*essenza* di esse valgono il medesimo.

E l'essenza delle cose alla sua volta non vien ella designata con un'altra parola, a tutti nota, e frequentissimamente adoperata sopratutto nella scienza? Sì, e questa è la parola *principio*. Dir principio della pianta, dell'uomo, della luce, ecc., lo sanno tutti, è dir non altro che l'unità di quelle note caratteristiche che costituiscono la natura generale od essenziale di essi. E però alle due prime espressioni possiam con pari adequatezza sostituire questa terza e dire: La considerazion filosofica è la considerazione de' principî delle cose, che è quanto dire che l'obbietto della filosofia sono i principî.

Ma e i principî delle cose son di ieri o di oggi soltanto? Ed inoltre, eran ieri in un modo e son oggi in un altro? No; son sempre; e son sempre ad un modo, o, come comunemente si dice, eterni e immutabili. Ecco perchè si sente sì spesso a ripetere che la considerazion filosofica delle cose è quella che considera le medesime in ciocchè hanno di eterno e immutabile, *sub quadam aeternitatis specie*, secondo la stupenda espressione spinoziana. È naturale: i generali o la natura generale delle cose, le essenze, i principî sono appunto l'immutabile ed eterno che è in esse. Per la qual cosa alle antecedenti espressioni è equipollente quest'altra: L'obbietto della considerazion filosofica è l'*eterno*, l'*immutabile* delle cose; o, che vale lo stesso, son le cose pensate in ciocchè hanno d'eterno e immutabile. Ma non si dimentichi però che l'eterno e immutabile è nella realtà istessa, nelle cose, non fuori di esse.

E finalmente, per non allungare la serie, mi limiterò a ricordarne ancor una di queste parole, e tale che non solo è sì nota e forse più nota delle antecedenti, ma è anche più lungamente consacrata dall'uso e dal linguaggio scientifico, e persin più precisa e più adequata all'espression della cosa: parola, tra l'altro, che ricorda come imperitura una delle più splendide e compiute personalità umane. Han tutti compreso, che alludo alla parola *idea* e a Platone che la introdusse nella scienza. Dir l'idea di una cosa è dir proprio il medesimo che natura generale, immutabile, eterna, essenziale della medesima, ovvero anche il principio di essa. In effetto, per idea della cosa è ad intender non altro che l'unità degli elementi costitutivi dell'essere della medesima; proprio come si è detto per le antecedenti espressioni di *principio*, *essenza*, *generale*, e via dicendo. E conformemente a ciò, quando si domanda (e lo facciam tutto giorno) che si designi l'idea del bello, della religione, dell'animale, della materia, dello spirito, non è egli vero che si vogliono designati quei caratteri che costituiscono la natura generale, essenziale, immutabile, ossia anche il principio del bello, della religione, dell'animale, e via dicendo?

Conclusion finale dunque intorno alla natura dell'obbietto della filosofia è, che *questo obbietto sono le idee*, ossia son le cose considerate nelle loro idee; o che vale anche il medesimo, nella loro immutabilità, generalità, essenzialità, ne' loro principî.

Con ciò è esaurita questa prima ricerca, con la quale abbiam fatto come un viaggio e due servigi, avendo da una parte trovato le idee come obbietto della filosofia, dall' altra, avuta una prima e generica nozione delle medesime.

E per ciocchè concerne questo secondo punto della ricerca, comunque siffatta nozione non determini ancora pienamente la natura dell'idea, pur essa è tale che ci permette di fermare l'espresso significato di quest'ultima con una definizione e dire: L'idea è l'essere essenziale della realtà. E come l' essere essenziale non può essere che l' essere essenziale della realtà, ossia l' essere essenziale reale (giacchè di che altro sarebbe mai l'essere essenziale se non della realtà?), così possiamo anche più brevemente definire: L'idea è l'essere essenziale.

Questa nostra definizione non concerne soltanto la filosofia, ma tutte le discipline dello scibile, sieno scientifiche propriamente dette, sieno anche letterarie; perchè anch'esse, non altrimenti che la filosofia si fondano sopra idee, o, come anche più comunemente si dice, sopra principî. È possibile che a quelli che non sono cultori speciali della filosofia sia men gradita l'espressione di idea e più gradita quella di principio, foss'anche perchè quest'ultima, come più divulgata presso di loro, è ritenuta più acconcia e più intelligibile. In tal caso la cosa è presto accomodata, sostituendo alla prima la seconda parola e definendo: Il principio è l' essere essenziale. Ma è certo però che questa definizione è adequata e per noi e per loro, e che designa la natura di ciocchè in tutte le discipline dello scibile si appella principio od idea. Noi riteniamo quest'ultima espressione, siccome più conforme alla tradizione del linguaggio filosofico.

E per amore di chiarezza, se vi fosse taluno, al quale non riesca perfettamente intelligibile la definizione dell' idea (o del principio) testè riferita, noi gliela tradurremo in quest'altra, non diversa nella significazione, ma, certo, più piana od almen più vicina al comune linguaggio, vale a dire: L'idea è il complesso, o meglio, l'unità delle note essenziali della realtà.

Ognuno intende come da siffatta definizione discenda, che definire le singole idee della realtà, pognamo, le idee di pianta, animale e simili, voglia dir non altro che determinare l'essere essenziale, od i caratteri essenziali delle medesime.

Prima di passare ad altre cose, ci preme di richiamar l'attenzione su di un punto che per la sua importanza merita considerazione e spiegazione. Noi abbiamo definita l'idea nel modo anzidetto: ora tutti sanno come questa parola sia stata non solo nella scienza, ma anche nel comun discorso, adoperata in molti significati, ed anzi in tanti e sì varî, che a buon diritto può dirsi nessuna parola essere stata tanto usata ed abusata quanto questa di idea. Potremmo soggiungere che da quest'uso ed abuso è derivato non poco discredito e alla parola e alla scienza filosofica, ma ingiustamente. A questa varia fortuna della parola idea vorremmo applicare quel verissimo detto che Seneca stoico pronunziò sulla morale di Epicuro, vale a dire: *male audit,...... et immerito* (1). L'idea dunque, applicando ad essa il detto, è in mala voce, ma ingiustamente. Il sì vario uso e persin l'abuso nell'accezione di questa parola non è senza ragione, è anzi la conseguenza di una profondissima ragione. Prima di dirla questa ragione, vogliam ricordare a quelli, cui più gradisca la parola principio, credendola forse men soggetta al variar di significato e valore, come la stessissima sorte sia toccata anche ad essa. Chi è che ignora quante e quanto varie sieno le significazioni in cui è stata presa ed espressa la parola principio? Mal si avviserebbe dunque chi volesse trarre argomento di discredito dal frequente mutar di significato di siffatta parola. Giacchè questo, come dicevamo, è conseguenza di una profondissima ragione: ed è che, come l'idea è la parola essenziale, starei per dire, la parola sovrana del pensiere, e d'altra parte il pensiere ha svariatissime forme e persino sfumature di forme, così era ben naturale che l'idea, che è in fondo ad esse tutte, avesse un po' vagato tra' varii confini delle medesime, e ne fosse seguita non solo la varietà, ma persin l'incertezza e indeterminazione nell'accezione e significazione della parola.

Checchè sia di ciò, è indubitato che l'idea nel suo significato più largo, più generalmente accolto e ad un tempo più profondo, è quella da noi testè designata. In effetto tutti i più grandi filosofi, a cominciar da Platone e a venir sino ai più recenti, han sempre pensata l'idea siccome un

---

(1) SENECA, vit. be. c. 13.

principio generale, essenziale e tipico della realtà. Il divario, sovente ben grande tra loro, non è stato tanto nella general concezione e determinazione de' caratteri dell'idea, quanto piuttosto da una parte nella enumerazione di quei principî che debbono entrare nella categoria delle idee, e dall'altra nel determinare la relazione delle idee colla realtà: del qual divario ci avverrà di toccare immediatamente, in quanto che entriamo subito a trattare di alcuni quesiti che vi hanno riferimento.

II.

Tre quesiti concernenti le idee, e soluzione dei medesimi.

Con ciocchè precede è stata delineata la general natura delle idee: però siamo ancora ben lungi dall'averne esaurita la determinazione. È anzi a dire che le difficoltà rispetto alle idee comincian proprio quando, dopo l'additamento della lor generica natura, si vuol procedere a una specifica e più vicina determinazion delle medesime. Volendo ora venire a questa, bisogna che cominciamo dal porre e risolvere tre quesiti che , a nostro avviso, riassumono , se non tutte, certo, le più grosse quistioni concernenti la natura delle idee. I quesiti sono i seguenti :

1° Quali sono i principî che debbono essere appellati propriamente idee?

2° Son le idee entità soltanto mentali, ovvero anche reali fuori della mente? Il qual quesito, secondo il più comune linguaggio moderno, può esprimersi anche così: Son le idee subbiettive od obbiettive?

3° Qual è la relazione delle idee colla realtà? La qual dimanda si può esprimere anche in quest'altra guisa: Qual è la relazione del mondo ideale col reale?

Il lettore, che è informato della nostra materia, s'accorge tosto che son presso a poco i tre famosi quesiti con cui Porfirio iniziò la sua Isagoge alle categorie aristoteliche : quesiti che agitaron le menti non dei soli filosofi medioevali nelle asprissime lotte dialettiche de' nominalisti e de' realisti, ma le menti de' filosofi tutti, d'ogni tempo e d'ogni luogo, non esclusi i recenti e gli stessi viventi (1). Ed è ben naturale che così

(1) I tre famosi quesiti di Porfirio nella traduzione di Boezio, che fu quella che ebber presente nelle loro dispute i Nominalisti e i Realisti, suona così: *Quum sit necessarium*, *Chrysaori*, *et ad*

fosse, perchè i predetti quesiti son trai capitali della nostra scienza. La soluzione che noi daremo di essi è già implicitamente inclusa in quel poco istesso che abbiam detto sinora intorno alle idee, anzi nella stessa definizione da noi data delle medesime: e se faremo non altro che esplicare l'implicito, la soluzione emergerà chiara ed evidente da sè stessa.

Quanto alle opinioni storiche messe innanzi da' filosofi intorno ai tre quesiti e alla loro soluzione, vorrà ognuno concedere che i brevi confini di questo scritto non concedano di passarle a rassegna. Tanto più, che, essendo molto varie e molto importanti, entrare in esse è come entrare nel pieno e vasto campo della stessa storia della filosofia. Non potendo far ciò, ci limiteremo ad accennarne le più salienti e storicamente più importanti, e passeremo tosto a presentare la nostra soluzione.

Vi sono stati di quelli (Platone e platonici), i quali han pensato le idee come principî eterni, immutabili, generici e tipici delle cose, ma esistenti prima e fuori di queste, e che quindi fossero principî reali ed obbiettivi, indipendenti dalle cose istesse, e dalla mente che li pensa. Secondo questa concezione (accettata anche da molti filosofi cristiani e teistici colla modificazione però che le idee sarebbero nella mente divina) le idee, come principî immutabili e soprasensibili non possono esser presenti nelle cose mutabili e sensibili, la cui natura è essenzialmente diversa dalla natura di quelle, anzi sì diversa che costituiscono una vera opposizione, ed in guisa che quelle e queste formino due contrarî mondi, il mondo ideale e il mondo reale, l'uno fuori dell'altro (dualismo e trascendenza).

Vi sono stati poi altri (che con nome comune e largamente inteso si può appellarli nominalisti, quando i primi, loro avversarî, sono stati appellati realisti), i quali hanno negata la obbiettività delle idee, ritenendole per principî unicamente mentali, cioè subbiettivi, e consistenti nell'esprimere mentalmente il comune che è nei singoli, astratto da' singoli stessi.

---

eam quae est apud Aristotelem praedicamentorum doctrinam, nosse quid sit genus, quid differentia, quid species, quid proprium et quid accidens, et ad definitionum assignationem, et omnino ad ea quae in divisione et in demonstratione sunt, utili istarum rerum speculatione, compendiosam tibi traditionem faciens, tentabo breviter velut introductionis modo, ea quae ab antiquis dicta sunt aggredi, ab altioribus quidem quaestionibus abstinens, simpliciores vero mediocriter conjectans. Mox de generibus et speciebus illud quidem sive subsistant, sive in solis nudis intellectibus posita sint, sive subsistentia corporalia sint an incorporalia, et utrum separata a sensilibus an in sensilibus posita et circa haec consistentia, dicere recusabo; altissimum enim negotium est hujusmodi et majoris egens inquisitionis. Ved. Ueberweg Grundr. d. Gesch. d. Philos. II, 5. Aufl. Berlin, 1877, pag. 124.

Secondo questi filosofi, i soli realmente esistenti non sarebbero che questi ultimi, rispetto ai quali le idee (appellate da essi ordinariamente concetti, universali, generali) non sarebbero altro che nomi comuni che li esprimono.

Fra queste estreme dottrine non son mancate certamente opinioni mediane (1), ma le più spiccanti son certamente quelle due, e le stesse opinioni medie si avvicinano più o meno ad esse.

Quanto all'estensione, è a dire che il nome ed il principio di idea, segnatamente ai tempi moderni, ed in particolar modo dagli empiristi, si è quasi allargato ad ogni cosa, designandosi col nome di idee persin le immagini delle cose sensibili, e dicendosi, pognamo, l'idea del bosco, l'idea del rosso, del giallo, e via via. È giusto rilevare che non i soli empiristi han piegata ed estesa l'idea fino all'espressione del sensato, ma che anche idealisti han sovente nell'istessa guisa alterato il principio ideale. E se si dee dir proprio la verità tutta intera, è a dire che Platone, il fondatore della dottrina delle idee, ne ha dato il primo esempio egli stesso, ammettendo persin le idee della tavola, del letto, della sporchezza e consimili.

Negli ultimi tempi è stato Kant quello che ha rimesso in onore le idee; e da lui in qua (segnatamente ne' suoi immediati successori in Germania, Schelling, Hegel, e persino Schopenhauer ed Herbart, e poi anche da noi con Gioberti, Mamiani, Rosmini) si è voluto rialzare il valore delle idee e ritornarle all'antico significato, designandole come principî tipici, generali, immutabili, necessarî, ecc. Senonchè, colla filosofia positiva e sperimentale si ritorna ora di bel nuovo, quanto all'estensione e significazione delle idee, a quei tempi, in cui si appellava e riteneva idea qualsiasi prodotto spirituale, anche quello della sensazione, e quanto alla subbiettività od obbiettività delle medesime, al Nominalismo; giacchè la così detta relatività delle idee del positivismo non è che puro e pretto nominalismo.

Noi non possiamo entrare in una critica minuta di queste dottrine, giacchè lo scopo che ci proponiamo in questo scritto non è propriamente critico, ma ordinativo, sistematico. Però nel dare la nostra soluzione, che in sostanza è la hegeliana, esprimeremo brevemente il nostro avviso anche

---

(1) Per esempio, quanto al Nominalismo e Realismo in istretto senso, cioè al Nominalismo e Realismo del Medio evo, Prantl dice esservi state non meno di tredici opinioni intermedie. Ved. Prantl, *Gesch. d. Logik*, II, 118 ss.

sulle allegate dottrine. Venendo dunque alla nostra soluzione, cominciamo dal primo quesito.

I° Quesito. **Quali principî si debbono appellare propriamente idee?**

Le idee sono certamente idee delle cose, idee della realtà. Se è così, la predetta dimanda si può tradurre in quest'altra: Quali sono le cose, di cui si danno idee? od anche, ed è lo stesso: Quali sono i principî della realtà che dobbiamo appellare idee?

Per risolvere convenientemente questo quesito, non bisogna perder di mira la realtà, perchè le idee, come è detto, non sono e non possono essere che idee della medesima. Ora, se si ha presente quel che abbiamo detto innanzi intorno alla natura delle idee, la nostra risposta è facile, chiara e determinata. Vale a dire noi abbiamo definito l'idea per l'essere essenziale; abbiam parimenti detto che questo essere essenziale è il generale delle cose, il qual generale alla sua volta è l'unità degli elementi costitutivi e necessarî delle cose. Che cosa segue da ciò? segue inevitabilmente che l'idea non è e non può esser altro se non un principio essenziale, generale e necessario delle cose. Determinata così l'idea, ne scende a fil di logica che tutto ciocchè non ha questo carattere non può essere appellato idea.

Facciamo qualche esempio. Quando Platone estende tanto il principio dell'idea da allargarlo alla tavola e alla sporchezza, e parlar di idee delle medesime, noi diciamo che egli il primo, con tale estensione, significazione e valore dell'idea, ne altera e guasta perfettamente la natura. A queste ed altrettali rappresentazioni mentali delle cose noi dobbiam ricisamente negare la qualità di idee: perchè esse non sono principî generali, essenziali e necessarî della realtà, e per conseguenza non hanno una necessaria ragion di essere. Esse non son altro che designazioni di stati e prodotti subbiettivi, che mutano secondo le circostanze, le abitudini, le condizioni sociali e naturali in cui si trovano i subbietti, i quali a lor libito le immaginano, producono, cangiano e persin distruggono. La sporchezza è la cosa più relativa e variabile che si possa immaginare: ciocchè è sporco per uno, poniamo, per un fine e squisito gentiluomo, può esser nettissimo per un altro, poniamo per un contadino. Ciocchè Platone ha designato come idea della sporchezza noi non possiam designarla altrimenti che come *rappresentazione* (ciocchè i tedeschi appellano *Vorstellung*) della medesima: anche le così dette idee della sfinge, del centauro, ecc. non possono essere appellate con altro nome che con quello di *rappresentazioni*, non essendo esse principî essenziali della realtà, od almeno di quella realtà, alla quale appartengono i principî ideali o le idee.

Quanto poi alle pretese idee della tavola, del bastone, del calamaio ecc., bisogna persino scendere un grado più giù nella loro denominazione ed appellarle *immagini sensibili*, od anche semplici *immagini* (ciocchè i tedeschi appellano *Bilder* o pure *sinnliche Bilder*). Sicchè dunque la conclusione rispetto alla nostra soluzione di questo primo quesito è, che va denominata idea soltanto quella che esprime un principio essenziale e necessario della realtà, o che vale lo stesso, delle cose. E giacchè abbiam proposto il quesito anche sotto l'altra forma: – Quali sono le cose di cui si danno idee? –, vogliam presentare la nostra soluzione anche conformemente a questa forma: ed è (naturalmente questa soluzione è identica alla prima, rispetto a cui è soltanto come arrovesciata) che soltanto di quelle cose si dà l'idea, le quali costituiscono *necessarie* forme di esistenza della realtà, o come nell'hegelianismo si dice, *necessarî momenti* della medesima.

II° Quesito. **Son le idee subbiettive od obbiettive? Son principî soltanto mentali od anche reali?**

Rispetto a questo quesito sono state dominanti nella storia della filosofia, fin da' tempi più antichi e segnatamente da Platone in qua, due opposte opinioni, e propriamente quelle che con generica e larga significazione abbiamo innanzi appellate de' Realisti e de' Nominalisti. La lotta tra queste due opinioni è stata sempre viva e non è ancora cessata. Se ci si domandasse: Qual de' due contendenti credete che abbia ragione? noi risponderemmo: Nessun de' due; e soggiungiamo che la lite non potrà mai cessare e comporsi nel senso che rimanga final vincitore o l'uno o l'altro de' due litiganti. La ragione di questa nostra opinione è appunto che se essi, come stimiamo, han torto entrambi, nessun de' due ha ed avrà mai ragion di vincere. In effetto, le due opposte concezioni non sono che due astrazioni, in quanto astraggono, cioè svelgono l'idea dal suo vero e concreto sussistere. Ciocchè vi ha di vero e di falso ne' due litiganti è questo.

Quanto ai Realisti, è innanzi tutto verissimo quel che essi sostengono, che cioè le idee esistano: ma contrariamente ad essi osserviamo, primamente che le idee non esistono nè prima nè fuori delle cose individue, *ante rem*, sì bene nelle medesime, *in re*; e secondamente che esistono non solo nelle cose ma anche nella mente; vale a dire che non son soltanto obbiettive ma anche subbiettive, non solo reali, ma anche intellettuali. Dalla qual cosa segue che noi, per questo rispetto, ammettiamo non la trascendenza, ma l'immanenza delle idee.

D'altra parte accordiamo ai Nominalisti esser vero che le cose individue e gl' individui sien realmente esistenti, ma neghiam loro ricisamente che negl' individui non sieno presenti i generali, o come anche voglia dirsi, i generi e le specie: il vero è che sono esistenti anche questi. Gl'individui sono reali individuazioni de' generi e delle specie, che son realmente presenti in essi. Il singolo uomo, il singolo animale, il singolo volere, la singola religione ecc., non son soltanto singoli, ma hanno in loro tutti i veri caratteri del genere e delle specie di cui sono individuazioni, e per conseguenza son anche uomo, animale, volere, religione, ecc. Paolo e Francesco non son soltanto Paolo e Francesco, ma son anche europei, italiani, e uomini, in quanto realmente vi è in loro *individui* da una parte la *generica* natura umana, dall'altra la *specifica* natura di europei ed italiani. È falsissimo quel che il nominalismo di tutti i tempi (non escluso quello del presente positivismo) sostiene, che cioè le idee od i principî generali sieno non altro che i nomi o tutt'al più le collezioni e concezioni soltanto mentali dei comuni caratteri che hanno gl'individui (del simile ch'è in essi). Gli stessi Nominalisti non negano e non possono negare che la comunanza di caratteri tra gl'individui esiste realmente. Ora questo comune che è tra gl'individui è appunto il genere, è appunto il tipo, o come diciam noi, l'idea che è presente ed immanente in essi. Tanto è ciò vero che tutti i nominalisti del mondo non potrebbero formarsi qualsiasi concetto del comune che mentalmente essi pensano de' singoli, se questo comune non fosse realmente esistente ne' medesimi. La possibilità di formarsi, come si dice, un tal concetto comune si basa unicamente sul principio, che il pensiere in generale non è e non può essere che il pensiere dell'essere, e che per conseguenza le idee non sono e non possono essere che le idee della realtà. I Nominalisti non vorranno e non potranno negare che le idee che essi dicono formarsi, per astrazione, delle cose corrispondano alla natura di queste. Ciò non è possibile altrimenti, se non in quanto l'idea che noi abbiam della pianta (posto che l'idea sia vera) risponda perfettamente alla real natura di questa. E la rispondenza è possibile in un sol caso, cioè quando gli elementi costitutivi dell'idea che noi abbiam della pianta sieno perfettamente i medesimi di quelli che obbiettivamente costituiscano la vera e real natura della pianta istessa. Le idee soltanto subbiettive, o, come anche le dicono i positivisti, soltanto relative, sono una vera sconcordanza, anzi son più, sono un puro e pretto assurdo. Se le cose individue fossero realmente destituite di caratteri specifici e generici, tutte le nostre idee, che ne esprimono appunto la natura generica, sarebbero sempre false, perchè non corrisponderebbero mai alla realtà delle cose istesse.

Se si vuol distinguere, anche nella denominazione, l'idea ne' suoi due rispetti, cioè nel rispetto obbiettivo e nel rispetto subbiettivo, si può appellarla nel primo rispetto idea propriamente detta, e nel secondo, concetto: concetto, il quale non esprime altro se non l'idea in quanto pensata, concepita. L'idea nella sua obbiettività è l'idea come *essente*, e nella sua subbiettività è l'idea come *pensata*, *concepita* (concetto): essere e pensiere; l'idea nella sua vera realtà abbraccia l'uno e l'altro.

Qual è ora tra le due dottrine estreme del Realismo e del Nominalismo la soluzione nostra, ed in generale la soluzione razionale e vera?

Quella soluzione che noi teniam per vera non solo non è recente, ma è tanto antica quanto è antica la lite stessa. La lite, almeno nella vera posizione de' quesiti che vi si connettono, è sorta con Platone ed Aristotile. Or noi diciamo che la soluzione giusta l'ha già data Aristotile, pigliando una posizione media e razionale tra le estreme. Riferisco molto volentieri le parole di un eccellente ed autorevole storico della filosofia, per dir con esse quel medesimo che con minore autorità direi io stesso: « La opinione (platonica od almeno attribuita da Aristotile a Platone) (1), che gli *universali* abbiano una esistenza indipendente, separata da' singoli oggetti, e che esistano *prima* di questi (sia secondo il grado e la relazion di causalità, sia anche secondo il tempo) è l'*estremo realismo*, che più tardi fu ridotto alla formola: *Universalia ante rem*. L'opinione (aristotelica), che gli universali abbiano bensì una reale esistenza, ma soltanto negl'individui, è il *realismo moderato*, pel quale vale la formola: *Universalia in re*. Il *Nominalismo* è quella dottrina che stima aver reale esistenza soltanto gl'individui, e i generi e le specie al contrario esser non altro

---

(1) Così Ueberweg, ib. p. 123.

che soggettive collezioni del simile od eguale che è negl'individui stessi. Siffatte collezioni si effettuano sì in virtù del concetto eguale (*conceptus*) per mezzo di cui pensiamo i moltiplici oggetti dell'istessa specie, che in virtù dell'istesso nome (*nomen, vox*), per mezzo di cui, in mancanza di nomi proprî, designiamo pur gli oggetti della specie istessa. Il Nominalismo, in quanto accentua la subbiettività del *concetto*, è *Concettualismo*, e in quanto accentua la identità del *nome* è *estremo Nominalismo* (ovvero Nominalismo in senso stretto). La formola del Nominalismo suona: *Universalia post rem.* Tutti codesti indirizzi esistono già, parte in germe, parte con un certo sviluppo, nel nono e nel decimo secolo; ma la piena esplicazione, il fondamento dialettico e l'aspra reciproca lotta de' medesimi, non che il sorgere delle diverse possibili modificazioni e combinazioni appartengono al tempo posteriore ». Il pensiere aristotelico della soluzione è in generale quello che accogliamo anche noi.

Mi piace di ricordare come questa soluzione aristotelica, che è media tra le estreme, avesse sempre qua e là trovato de' seguaci ne' tempi posteriori. Ella ricorre già nell'istesso secolo nono, e ricorre in modo sì giusto e sì rilevante, che mi par proprio degno di essere ricordato. Cousin ha scoperto uno scritto (del secolo nono) *super Porphyrium*, che egli ed Haureau hanno attribuito a *Rabano Mauro,* e che secondo Prantl (cui si associano anche Kaulich e Ueberweg) sarebbe invece da attribuirne piuttosto a qualche scolaro del Rabano (1). Ora in questo scritto ricorre intorno alla quistione del nominalismo e del realismo un memorabile passo che è degnissimo di essere riferito. E cioè l'autore dello scritto, riferendosi alla sentenza di Boezio: – *alio namque modo (substantia) universalis est quum cogitatur, alio singularis quum sentitur,* – trova nella medesima la opinione, *quod eadem res individuum et species et genus est, et non esse universalia individuis quasi quiddam diversum, ut quidam dicunt; scilicet speciem nihil aliud esse quam genus informatum et individuum nihil aliud esse quam speciem informatam* ».

Ora noi diciamo che, per ciocchè concerne la realtà o non realtà de' generali e degl'individui, non che la relazione loro, la vera e razionale soluzione (che è la aristotelica, e alla quale è identica anche la hegeliana) è questa che cioè *eadem res individuum et species et genus est:* con che si afferma dunque che son realmente esistenti non solo gl'individui, ma

(1) Ved. PRANTL, loc. cit. p. 37 ss., UEBERWEG, loc. cit. p. 126 s.

anche i generi e le specie; e, quel che più importa, si afferma anche la loro unità e distinzione ad un tempo. Nè i generi (gli universali, i generali) son prima e fuori degli individui, nè questi son possibili senza di quelli, ma il genere esiste contemporaneamente, primamente ed unicamente nelle specie e negl' individui, che sono l'esistenza attuale e concreta de' generi stessi.

Dall'anzidetto emerge chiaro che noi ammettiamo bensì le idee platoniche (escludendone però quelle di tavola, letto, sporchezza, ecc.) nel senso che elle sieno principî generali, tipici ed essenziali delle cose, ma correggiamo ed integriamo il platonismo coll'aristotelismo e col susseguente corso storico della filosofia, ammettendo le idee non come trascendenti, ossia come separate dalle cose, ma come immanenti.

III° Quesito. Qual è la relazione delle idee colle cose reali?

Dopo le cose antecedentemente esposte, questo quesito è per noi già bello e risolto. È chiaro che esso si riduce al problema della trascendenza od immanenza delle idee. Ora, da quanto abbiam detto innanzi, s'intende benissimo che noi non possiamo essere che per la immanenza, la quale discende direttamente dalla stessa definizione che abbiam data dell'idea. Che l'idea, secondo la nostra definizione, sia l'essere essenziale delle cose, vuol dire, e porta con sè necessariamente, che essa è e non può esser tale che nell'intimo delle cose istesse. È l'unico principio razionale a tal riguardo. E non siam soli a propugnarlo, anzi siamo lieti di aver con noi, fra' tanti, un potente alleato nell'istesso Aristotile, il quale, come tutti sanno, sosteneva appunto la immanenza delle idee o de' principî contro Platone che ne sosteneva la trascendenza. Nella sua polemica contro le idee platoniche Aristotile fu critico veramente profondo e speculativo. I suoi argomenti, serii e gravi, son validi ancor oggi; e ve n'ha segnatamente uno tra di essi, che, a nostro avviso, non ammette replica. Questo argomento, che concerne in ispecial modo la trascendenza delle idee, e che noi facciam nostro, perchè ci sembra razionalissimo e validissimo è, che sarebbe assolutamente assurdo l'ammettere che le idee, che sono l'essenza delle cose, fossero fuori di ciò di cui sono l'essenza: che è come dire che il principio è fuori di ciò di cui è principio. Se si vuole evitar l'assurdo, non è possibile altrimenti che ammettendo l'immanenza delle idee.

Posta la immanenza, discende inevitabile una conseguenza importantissima che esprime una diversità non piccola rispetto all'opinione che si ha intorno alla relazione del mondo ideale e del mondo reale. E questa diversità è, che il mondo ideale (ossia il mondo de' principî) ed il mondo reale non sono l'uno fuori dell'altro, ma l'uno nell'altro e l'uno l'essenza dell'altro: la qual cosa si chiarirà maggiormente dalla susseguente esposizione dell'argomento che ci occupa.

III.

Divisione e classificazione delle idee.

Con quel che precede siam giunti a determinare il carattere generico delle idee, e sappiamo che elle son tutte principî generali ed essenziali delle cose. Ma è ciò sufficiente per conoscere e determinare la vera natura delle idee? È indubitato che elle son principî generali ed essenziali: ma la lor generalità ha la medesima estensione in tutte? e la loro essenzialità è una essenzialità generica, ovvero è una essenzialità specificamente diversa, siccome son diverse le cose di cui sono essenza? In una parola, dall'anzidetto sorge naturale la dimanda o il problema: Le idee son tutte ad un modo, ovvero si differenziano tra loro per qualche specifico carattere?

Non è chi non veda l'importanza d'un tal problema, giacchè è dalla soluzion di esso che dipende una più vicina determinazione, e quindi conoscenza, della natura delle idee. E tutti intendono che questo problema si riduce a dire se vi sieno o pur no diverse specie di idee, e quali sieno: in sostanza si riduce alla classificazione delle idee.

Il qual problema è tanto più importante, in quanto non è circoscritto alla sola scienza filosofica, ma si allarga alle discipline tutte dello scibile, sieno scientifiche propriamente dette, sieno anche letterarie: giacchè e quelle e queste si basan tutte sopra principî, vale a dire su ciocchè noi appelliamo idee. Ora non è egli del massimo rilievo il sapere a quale specie di principî appartengano, e come vadan classificati i principî, poniamo, della meccanica, della fisica, chimica, zoologia, botanica, antropologia, giurisprudenza, estetica, storia, filologia, e via dicendo? La soluzione d'un tal problema emergerà dalla divisione e classificazione delle idee che siam per fare.

Per vedere se una divisione e classificazione delle idee sia effettuabile e, dato che sia, se sia razionale, fa d'uopo muovere da qualche principio su cui si basi. Imperocchè non basta il dire: le idee si dividono tra loro così e così; e quindi son classificabili in questa o in quella guisa. Anche che una tal divisione e classificazione fosse esatta, sol perchè è soltanto asserita ed allegata, non è scientifica: rimane, a dir così, un fatto puramente e semplicemente subbiettivo, destituito d'ogni fondamento e razionalità. È chiaro dunque, che, per fare una scientifica classificazione delle idee, è necessario un principio che le serva di fondamento.

L'abbiamo noi un tal principio? l'abbiamo, e fondato sulla stessa realtà: e non abbiamo neppure ad andar lontano o a far minute ricerche per trovarlo, avendolo, a dir così, come a mano nella stessa natura delle idee antecedentemente discorsa. La natura di queste, come è stato mostrato, è che elle sono gli elementi essenziali, i principî costitutivi della realtà. Se è così, è chiaro come la luce del giorno che, per avere un principio qualificativo della natura delle idee, dobbiamo rivolgerci alla realtà stessa, di cui quelle sono i principî costitutivi. Ed è naturale: di fatto, che cosa vuol dire principî costitutivi? vuol dire principî qualificativi, determinativi, ed anzi (per il carattere di essenzialità che hanno le idee) essenzialmente determinativi. Ora, o le idee determinano la realtà tutte ad un modo, ed allora nè esse son diverse tra loro, nè la realtà (determinata dalle idee tutta ad un modo) è diversa in sè stessa: ovvero la determinano in modo diverso, ed allora da una parte vi dev' essere una diversità tra le idee, e dall'altra vi dev'essere una diversità nella stessa realtà. Sicchè, in sostanza, la quistione della specificazione e classificazione delle idee si riduce a cercare in quali e quanti modi queste determinano la realtà. Trovata la diversità de' modi di determinazione, è trovata la diversa specie di idee, e trovata questa, è trovata ad un tempo la possibilità di classificarle. La determinazione della realtà per mezzo delle idee, guardata più da vicino, concerne quest'ultima, per un lato, dal punto di vista della estensione o della quantità, e per l'altro, dal punto di vista del contenuto o della qualità (della natura specifica): due lati che non vanno pensati nella loro separazione, ma anzi nella loro congiunzione, in quantochè è l'unità dell'elemento quantitativo e dell'elemento qualitativo che costituisce la vera modalità (la misura dell'hegelianismo) delle idee.

Se ora, per venire all'applicazione di questi principî, poniamo mente alla modalità della realtà, o che vale lo stesso al modo come le idee determinano la realtà, ne troviamo di tali che si estendono alla realtà tutta intera, e però alla realtà in genere, e di tal'altre che son circoscritte a una parte della realtà istessa, e quindi alla realtà determinata in un modo particolare. Alcuni esempi chiariranno la cosa.

Le idee dell'*essere*, della *qualità*, della *quantità*, del *finito*, dell'*infinito*, della *sostanza*, dell'*accidente*, della *causa*, dell'*essenza*, ed altre ed altre, son certamente de' principî che concernono la realtà in genere: giacchè questa nelle sue diverse forme di esistenza è determinata in qualcuna di siffatte guise, essendo ora ed in questo rispetto, qualitativa, finita, fenomenica, sostanziale ecc., ora ed in quest'altro rispetto, quantitativa, infinita, essenziale, accidentale, e così via via. I rispetti e le determinazioni son diversi, ma è sempre la realtà che in essi tutti è determinata ora in un modo ora in un altro; ossia, per addurre un esempio, è sempre la realtà di cui ora è principio essenziale e determinativo l'idea dell'essere, o quella della qualità, finitezza ecc., ora è principio essenziale e determinativo l'idea della sostanza, dell'infinito, e via dicendo. Ora siffatte idee che concernono la realtà nella sua integrità ed universalità, o che vale lo stesso, ne' suoi universali modi di essere, noi le appelliamo idee universali. E se a qualche altro piace la espressione di principî universali, adoperi pur questa, che la cosa non muta di aspetto. Il certo si è che le idee universali o i principî universali son determinazioni della realtà considerata nella sua universalità: determinazioni che sono state anche appellate categorie; e sono state appellate così, appunto perchè son predicabili della realtà in genere. Un altro nome con cui son frequentemente designate le idee di cui parliamo, è quello di idee metafisiche, od anche di principî metafisici: della quale denominazione si adopera ordinariamente come sinonima anche l'altra di idee ontologiche, principî ontologici. Nella dottrina hegeliana sono appellate idee logiche; ma il valore e la estensione di esse son perfettamente identici a quelli di idee universali. Noi, non tenendo conto della differenza delle parole, e ritenendo il concetto ch' è in fondo ad esse tutte, diciamo che una prima categoria di idee è quella delle *idee universali*.

Ma se invece di idee come quelle or ora allegate, avessimo che fare colle idee di spazio, movimento, attrazione, ripulsione, materia, estensione, luce, calore, elettricità, pianta, animale e via via, ognuno concederà che abbiam pure che fare con principî della realtà: ma ognuno dovrà parimenti consentire che la realtà cui convengono tali principî non è tutta la realtà, ma una parte di essa, e, per giunta, determinata in modo suo proprio: la qual realtà tutti appellano naturale. Siffatte idee, giusto perchè idee della realtà naturale, son certamente espressive dell'essenza della medesima. Ma son elle parimenti espressive d' un' altra realtà di cose che non è la naturale, pognamo, la giustizia, la sensazione, la volontà? Chi è che dirà che la giustizia è calda od estesa, e la sensazione è repellente o luminosa ecc.? È chiaro dunque ed indubitato che le idee testè designate sono specificamente determinative o qualificative della realtà naturale, e come tali costituiscono la categoria delle *idee naturali.*

Ma se da ultimo si pon mente alle idee di bene, male, intelletto, religione, linguaggio, immaginazione, moralità, diritto ed altre consimili, abbiam pure de' principî reali, o che vale il medesimo, de' principî della realtà. Ma di quale realtà? di tutta certamente no; giacchè non ogni realtà è pensiere, intelletto, diritto ecc., ma di una sfera (estensione) e di una guisa particolare (contenuto) della realtà, cioè della realtà spirituale. Abbiam così una terza categoria di idee, che si distinguono per caratteri proprî e specifici da quelle delle due antecedenti categorie, abbiamo cioè anche le *idee spirituali.*

Sicchè dunque abbiamo finora tre generali categorie o specie di idee, le *universali,* le *naturali,* le *spirituali,* costituenti i principî essenziali della realtà considerata sotto il triplice aspetto di realtà in genere, realtà naturale e realtà spirituale.

È necessario ora di aggiungere che trovate tre specie di idee, la classificazione delle medesime è già bella e seguíta? È quella stessa delle tre generali specie di idee, conformemente alla quale non abbiam che tre classi di idee e son le mentovate.

E vi sono altre classi di idee oltre alle mentovate? Noi diciam che no, e soggiungiamo non potervene essere altre, giacchè le idee (principî) tutte, quali e quante elle sieno, debbono di necessità trovare un posto in una delle tre predette categorie o classi. Perchè vi potessero essere altre classi di idee, sarebbe necessario che vi fosse una quarta specie di realtà oltre alle tre or ora nominate, cioè oltre alla realtà universale, naturale e spirituale. Ma una quarta classe di realtà non v'è, e non è, per conseguenza, possibile neppure una quarta classe di principî essenziali e determinativi, ossia di idee della medesima.

Si potrebbe credere di trovare una quarta classe di realtà nella realtà divina, e per conseguenza una quarta classe di corrispondenti idee o principî.

Ma è un errore il crederlo; giacchè la natura divina non solo entra nel quadro da noi testè abbozzato, ma vi tiene il suo proprio e razional posto. E cioè entra nelle idee spirituali, o che vale lo stesso, entra nella realtà spirituale e vi entra a titolo di spirito assoluto.

Fino a che dunque non ci si mostri, e come razionale, una quarta classe di realtà con una quarta corrispondente specie di principî od idee, noi riterremo come esaurita la classificazione generale delle idee.

È ben vero che queste tre generali classi si specificano ulteriormente in sè stesse, dando luogo a diverse specie di idee universali, non che a diverse specie di idee naturali e spirituali, ma è vero altresì che queste ulteriori diverse specie non costituiscono categorie a parte. Imperocchè le diverse specie di idee spirituali, poniamo, son pur sempre tutte idee spirituali; e il medesimo vale delle idee universali e naturali. Però voglio brevemente adombrare anche questa ulteriore specificazione, e così avremo la classificazione delle idee anche nelle sfere secondarie delle medesime. Preveniamo il lettore che noi qui non facciamo altro che appena accennare ciocchè è il risultato di una generale sistemazione delle idee, la quale va poi giustificata nella esposizione della scienza filosofica. Secondo questa sistemazione le particolari divisioni delle tre grandi classificazioni anzidette sono le seguenti:

Le idee universali (che, com' è detto, nell' hegelianismo si appellano logiche) si suddividono in idee dell'Essere (che si può appellarle anche in senso stretto ontologiche), come sarebbero finito, infinito, qualità, quantità, limitazione ecc.; in idee dell' Essenza (che si può appellarle anche idee etiologiche), come sarebbero possibilità, realtà, sostanza, accidente, causa, effetto ecc., ed in idee concettuali (od idee logiche in senso stretto), come sarebbero concetto, giudizio, sillogismo, subbiettività, obbiettività, generalità, particolarità ecc. Le idee naturali si suddividono in idee naturali meccaniche, come sarebbero tempo, spazio, movimento, attrazione, ripulsione, materia ecc., in idee naturali fisiche, come sarebbero luce, calore, adesione, magnetismo, elettricismo ecc., ed in idee naturali organiche, come sarebbero vita, pianta, animale, genere, specie, individuo ecc. E finalmente le idee spirituali si suddividono in idee spirituali subbiettive (od individuali), come sensazione, immaginazione, appetito, volere, intelletto ecc.; in idee spirituali obbiettive (o sociali) come famiglia, diritto, torto, moralità, bene, male, stato ecc., ed in idee spirituali assolute (od universali), come arte, bellezza, religione, santità, scienza ecc.

Ora noi diciamo che tutte le idee delle diverse discipline dello scibile, per quanto ampie e svariate sien quelle e queste, entrano tutte nel quadro da noi testè abbozzato. Ed in effetto, nella classificazione delle idee universali entrano le discipline logico-metafisiche, abbracciandovi le suddivisioni delle idee universali istesse, e comprendendovi anche alcune delle fondamentali idee della matematica pura, come quantità, numero ecc. Nelle idee naturali vengono a classificarsi tutte le discipline che hanno riferimento alla realtà sensibile e naturale, e propriamente nelle idee naturali meccaniche le discipline matematiche, meccaniche ed astronomiche; nelle idee naturali fisiche, le discipline fisiche e chimiche propriamente dette; e nelle idee organiche, le discipline geologiche, botaniche e zoologiche con le discipline fisiologiche, biologiche e mediche che vi si connettono. Finalmente quanto alle idee spirituali, nelle idee spirituali subbiettive od individuali vengono a collocarsi le discipline psicologiche in senso stretto, nelle idee sociali od obbiettive le discipline giuridiche, morali, statistiche, economiche e politiche congiuntamente alle discipline storiche e filologiche; e finalmente nelle idee spirituali assolute, le discipline estetiche, religioso-teologiche e filosofiche in genere. La filosofia che espone i principî generali dello scibile, viene, per questo suo carattere di universalità, ad essere come l'enciclopedia dello scibile istesso, limitandosi però alla considerazione de' principî in quanto generali, e non entrando in tutte quelle altre particolarità de' medesimi che costituiscono il campo ed il compito delle rimanenti discipline.

Dall'anzidetto si rileva come tutte le diverse discipline dello scibile si riducano a tre grandi categorie, e cioè alle discipline logico-metafisiche che considerano la realtà in genere, alle discipline naturali che considerano la realtà nella sua sensibile manifestazione, e finalmente alle discipline spirituali che considerano la realtà nella sua forma pensante e cosciente.

IV.

Le idee e la Idea.

Essendosi questo scritto allargato per via un po' più di quel che io credeva, mi studierò di esser più breve nel riferire quel che mi sono ancora proposto di dire. Riandando le cose antecedentemente esposte, elle si riducono alle seguenti: Le idee son l'obbietto della filosofia: Le idee sono gli essenziali e necessarî principî della realtà: Le idee si dividono e classificano in universali, naturali, spirituali. Abbiam dunque finora avuto sempre che fare colle idee, con una moltiplicità di idee. Sorge quindi naturalissima la seguente dimanda: Ma queste idee costituiscono elle una pura e pretta moltiplicità, una specie di atomismo ideale, senza un comun legame e, starei per dire, un comun cemento, ovvero vi ha tra loro un principio che tutte le annoda e riduce ad unità?

La nostra risposta a tal dimanda è per l'unità delle idee, unità che sorge dalla stessa moltiplicità delle medesime. Imperocchè le molte idee non possono essere idee, se non in quanto hanno un qualche comun carattere o meglio un qualche comun principio che le costituisce tali. Dir che vi sono idee è dir che l'una sia diversa dall'altra, in quanto ciascuna, per essere un reale e specifico principio delle cose, dee avere rispetto alle altre il suo proprio e specifico carattere, l'elemento differenziale. Ma d'altra parte, dir che vi sono idee è dire che queste, ad onta del loro elemento specifico e differenziale, pur debbono avere un elemento comune, cioè quel tale elemento in virtù del quale esse son tutte idee. Di fatto, per qual ragione posso io appellar tutte ed egualmente idee le diverse idee di sostanza, causa, fenomeno, essere, essenza ecc.? La ragione non può esser altra se non che le diverse idee han tutte un elemento che, nella lor differenza, è comune ed identico in ciascuna: e propriamente, quel tale elemento che costituisce la lor natura ideale, il lor principio ideale. Se questo principio ideale è comune a tutte, vuol dire che esso ne costituisce il comun fondo nelle stesse differenze delle medesime. Ed inoltre, siccome questo comun principio delle idee non può non aver natura ideale esso stesso, appunto perchè ne costituisce l'elemento caratteristico che è elemento ideale; così ne viene di necessaria conseguenza, che esso non può essere altro se non la comune idea delle idee istesse. La quale, perchè si allarga alla universalità delle idee, non può essere che l'idea universale per eccellenza, e che più propriamente possiamo appellare l'Idea assoluta, o l'Idea puramente e semplicemente detta.

Non si perda di mente che le singole idee eran le idee della realtà e delle diverse forme di manifestazione della medesima. Se è così, ne discende inevitabile un'altra conseguenza, ed è che l'Idea assoluta, che è il comun principio delle idee, è ad un tempo il comun principio o la comune idea della realtà: o meglio e più precisamente detto, l'Idea assoluta è il principio assoluto dell'universale realtà.

Ed ecco trovato quel tal cemento che unifica l'universalità sì delle idee che della realtà. Ma vogliamo determinarla un po' più da vicino questa relazione delle idee col lor comune principio che è l'Idea assoluta.

L'Idea assoluta non è un principio astratto, vuoto, indeterminato, ma, al contrario, è concreto, pieno e determinato: e la sua concretezza consiste nell'avere i suoi proprî costitutivi caratteri che ne formano il contenuto. Che cosa son poi, in sostanza, questi caratteri costitutivi? Sono i modi di essere, o che vale lo stesso, le determinazioni del suo contenuto. Ora siffatte determinazioni non sono altro se non quei medesimi principî costitutivi che abbiamo appellati idee. Facciamo, a schiarimento, un esempio.

Noi diciamo: L'Idea assoluta è *una;* l'Idea assoluta è *sostanziale,* ed anche *essenziale*, *qualitativa*, *reale*, *vivente*, *spirituale*, ecc. ecc. Che cosa vogliam dir noi con ciò? Vogliam dire che l'Idea assoluta è determinata come una, essenziale, sostanziale ecc., ossia che l'unità, la sostanza, l'essenza, la realtà, la vita, la spiritualità ecc. sono determinazioni o principî costitutivi dell'Idea. Ora il lettore sa che i principî costitutivi ed essenziali di checchessia son quelli che noi appelliamo idee. Di qui segue che dir che l'unità, la sostanza, l'essenza ecc., son determinazioni o principî dell'Idea val perfettamente il medesimo che dire che, l'unità, la sostanza, l'essenza ecc. sono idee della Idea assoluta. E del resto, le espressioni di idea dell'essere, idea di sostanza e via via, sono tra le espressioni più comuni del linguaggio filosofico.

Da quel che è detto segue dunque che le idee non costituiscono una sconnessa pluralità, ma si unificano in un principio comune che è ad un tempo la lor comune origine e il lor fondo comune. Non solo pluralismo delle idee, ma anche monismo delle medesime.

V.

Esplicazione delle idee.

Nel determinare la natura delle idee, noi abbiamo posto come uno degli elementi caratteristici delle medesime la immutabilità. La immutabilità delle idee è un principio già messo innanzi da Platone e divenuto, a dir così, tradizionale nel pensiero filosofico intorno alla natura delle medesime. Anche noi accettiamo il principio della immutabilità delle idee, ma l'accettiamo in modo ben diverso dalla tradizionale immutabilità platonica delle medesime, e la congiungiamo con un altro principio che generalmente non è consentito come costitutivo della natura delle idee istesse. Quest'altro elemento a cui congiungiamo l'immutabilità delle idee è quello della esplicabilità delle medesime.

A prima giunta, a dir vero, immutabilità ed esplicabilità son due principî che par che non vogliano star bene insieme, e che anzi par proprio che si escludano l'un l'altro. Sappiamo bene che questa è l'opinione comune, ma noi la teniamo per interamente errata, ed il seguito del nostro discorso, mentre da una parte metterà in rilievo siffatto errore, confermerà e dimostrerà pienamente dall'altra l'opinione nostra contraria. La ragione per la quale noi ammettiamo la natura esplicativa nelle idee è la loro immanenza nella realtà, come al contrario quelli che con Platone negano e negar debbono l'esplicabilità delle idee si fondano sulla trascendenza di queste rispetto alla realtà istessa.

Di fatto, quelli che ammettono la trascendenza delle idee, pensano queste ultime siccome esistenti ab eterno in tutta la loro attuata e compiuta natura, prima delle cose e fuori delle cose. È naturale che essi impugnino la esplicabilità delle idee, essendo esse ab eterno tutto quel che possono e debbono essere. Ma noi abbiamo innanzi dimostrato che la trascendenza delle idee è falsa, assurda, e perfettamente contraria alla natura de' principî della realtà. Dimostrata falsa la trascendenza, non rimane altra possibilità che quella di ammetterne l'immanenza, la quale, del resto, è pienamente conforme e alla ragione e alla realtà delle cose. Ora, data l'immanenza delle idee, queste, volere o non volere, non possono essere che principî esplicabili, come sono esplicabili le cose reali, di cui sono appunto i principî essenziali.

Prima di venire alla dimostrazione di ciò, facciam considerare che è un vero pregiudizio scientifico quello di opinare che immutabilità ed esplicabilità sieno incompatibili in un medesimo subbietto. Il vero è al contrario che l'immutabilità e l'esplicabilità son sempre ed indissolubilmente congiunte in tutta la realtà. Il pregiudizio della incompatibilità si fonda unicamente su d'un falso concetto del principio dell'esplicazione: si crede cioè che esplicazione sia pura e semplice mutazione e non altro: se le idee, si dice, sono immutabili, esse non possono esplicarsi, perchè se si esplicassero, si muterebbero: ora come può l'immutabile mutarsi? Questo è il ragionamento: ma questo ragionamento è falso, e la sua falsità poggia sul falso concetto che si ha della esplicazione. È vero che nel concetto della esplicazione vi entra anche l'elemento della mutabilità, ma questo elemento non costituisce tutta la natura della esplicazione: il seguito del discorso chiarirà la cosa.

Cominciamo dal dire che anche noi ammettiamo la immutabilità delle idee o di principî, se non che, a differenza di Platone e de' platonici, sosteniano che, come le idee sono immanenti nelle cose, così anche la immutabilità delle idee è presente, immanente ed attuosa nelle cose istesse. Ma come le cose son mutabili, così ne vien di conseguenza che la immutabilità delle idee è presente ed immanente nella stessa mutabilità delle cose.

Ciò pare a prima giunta contraddittorio, e pur non è, per la semplice ragione che in tutte le cose vi è un lato di immutabilità e un lato di mutabilità: ora il lato di immutabilità delle cose è il lato ideale delle medesime, quello che costituisce la loro idea, il lor principio essenziale; ed al contrario il lor lato mutabile è il complesso delle condizioni singole e mutabili in cui è attraverso di cui si attua l'istesso immutabile, cioè l'istesso principio ideale della cosa. Ed intanto, siccome la cosa è esplicabile, così non è possibile che l'idea che è il principio della cosa non partecipasse anch'essa all'esplicabilità della cosa. Sarebbe una vera assurdità il pensare che la cosa si esplichi, e l'interiore principio di essa, quasi che fosse estraneo alla medesima, non fosse tocco in modo alcuno dall'azione di siffatta esplicabilità.

Questa assurdità si fa più manifesta quando si pensa all'intima relazione in cui sono l'idea e la cosa di cui quella è il principio essenziale. Di fatto, l'idea è della cosa il principio motore, il principio vitale, il *principium formans*, ed in guisa che cosa e idea di essa formano un sol tutto, una sola e medesima realtà, una sola e medesima vita. Se la relazione è tale, come è mai possibile che la cosa si esplichi e il principio di essa non sia esplicabile?

Posti questi principî, vogliamo ora chiarirli e rifermarli con esempi, e vogliamo sciegliere gli esempi nelle tre diverse specie di idee innanzi mentovate, cioè nelle idee universali, naturali e spirituali. Cominciamo con un esempio di queste ultime, e propriamente coll'idea di coscienza.

La coscienza è certamente un principio, una idea, e, d'altra parte, è anche una realtà: vale a dire, la coscienza è idea e realtà insieme. L'idea della coscienza consiste negli essenziali e costitutivi elementi dell'anima come consapevole, ossia dell'anima come presente a sè stessa in tutto ciò che avviene nell'interno della medesima. E d'altra banda, la realtà od il real sussistere della coscienza consiste nel complesso di tutti i singoli atti e di tutti i singoli fatti che costituiscono, a dir così, la vita fenomenica della coscienza istessa. Ora, sono scindibili l'idea della coscienza e la realtà della medesima? oibò! come è assurdo di scindere il principio vitale dalla vita, il principio formante o formale dalla cosa formata, così è parimenti assurdo di scindere il principio conscio dalla coscienza. Il vero è che l'idea (ossia il principio) della coscienza è presente ed agente in tutti i singoli successivi atti consci: la qual cosa è anche pienamente confermata dal fatto. Giacchè, come è che la coscienza giunge, in effetto, alla sua attuazione? ossia, e qui possiam proprio dirlo, come è che la coscienza giunge a coscienza? Non vi giunge certamente in un istante e in un solo atto conscio, ma vi giunge attraverso di una serie ben lunga di atti consci, in virtù dei quali essa coscienza, da virtuale ed implicita che era, si fa attuale ed esplicita. E la coscienza, questo è oramai stabilito, è costituita non solo dalla realtà fenomenica, ma anche dall'idea o dal principio della coscienza istessa. Ora, dir che la coscienza giunge alla sua attuazione attraverso della mentovata serie di atti consci, è dire che questa serie è percorsa non solo dalla coscienza come realtà fenomenica (cioè come complesso di singoli atti consci), ma anche dalla coscienza come idea, come principio. Ossia, l'idea della coscienza si attua, o che vale lo stesso, si fa esplicita, o che vale anche il medesimo, si esplica attraverso di una serie di atti consci. Così è chiaro come la luce del sole, che l'idea della coscienza si esplica, e che se non si esplicasse, non si esplicherebbe neppure la coscienza, la quale nella sua vita reale e fenomenale altro non è se non il graduale e successivo sviluppo dell'idea di essa che ne è il principio vivo e concreto.

Ma che forse che qui l'idea della coscienza si è mutata? no: l'idea è sempre quella, ed è sempre quella in tutte le singole coscienze: giacchè in queste tutte l'idea generale della coscienza è sempre costituita da' medesimi ed immutabili caratteri. Se non che, questi caratteri, da una parte si sviluppano ed attuano attraverso di singoli, successivi e mutabili atti consci, dall'altra si attuano attraverso di singoli, successivi e mutabili individui. In tal guisa immutabilità ed esplicabilità non solo non si contraddicono, ma al contrario si accordano e unificano, siccome condizioni entrambe necessarie della stessa realtà delle cose: e si accordano ed unificano non solo l'immutabilità e l'esplicabilità, ma anche l'immutabilità e la mutabilità.

Se si guardi poi in fondo alla esplicazion delle idee, si comprende che ella in realtà non consiste in altro se non nel passaggio delle medesime dalla loro virtualità alla loro attualità.

L'esempio arrecato or ora appartiene al regno dello spirito o alle idee spirituali: prendiamo un esempio anche tra le idee naturali, e vediamo se in queste la cosa stia diversamente; e questo esempio sia quello dell' idea dell'animale.

L'idea dell'animale ha, verbigrazia, alcuni caratteri specifici che la contraddistinguono: tali sono l'organismo con i suoi diversi sistemi, sanguigno, nervoso, riproduttivo ecc.; indi il principio animico, il principio sensitivo, quello di locomozione e via dicendo. Ebbene, l'idea dell'animale è forse attuata nel suo pieno e vero essere in ogni singolo individuo animale, ovvero (come la cosa è realmente) è attuata nella serie intera delle varie e successive specie animali? Ed inoltre, anche trattandosi di un solo individuo animale, la idea generica dell'animalità e la stessa idea particolare della specie di cui fa parte, son esse forse attuate nell' inizio della vita di questo singolo animale, ovvero nel corso intero della vita del medesimo? Certamente nel corso intero, e però nelle diverse e successive età che lo costituiscono, nelle quali età entrano in funzione o cessano di funzionare questi o quegli altri elementi costitutivi della idea di tal singolo animale. È chiaro dunque come senza esplicazione sia impossibile la realizzazione, e quindi il real processo vitale dell' idea dell'animalità.

Se ora, dopo questi esempi di esplicazione additata nelle idee spirituali e nelle naturali, ci rivolgiamo alla terza categoria di idee cioè alle universali, noi troviamo che anche queste soggiacciono in tutto e per tutto alla medesima legge esplicativa. L'idea di causa, per esempio, che è una delle idee universali, non è certamente attuosa tutta intera in un solo istante del tempo e in un sol punto dello spazio, ma va man mano manifestando il suo principio e la sua energia nelle varie e singole cause naturali e spirituali. Giacchè tutti debbono ammettere che in queste varie e singole cause è sempre agente e manifestantesi l'universal principio della causa. Ora che altro è mai la manifestazione ed energia dell' idea universale di causa nelle singole cause se non la graduale esplicazione di quell'idea? E non è forse il medesimo per le altre idee universali, per es. per quelle di qualità, quantità, essenza, fenomeno e via dicendo? Non si sviluppano e manifestano anch'esse nelle singole entità qualitative, quantitative, essenziali, fenomeniche ecc., apparisceuti nello spazio e nel tempo?

Ci par tempo di conchiudere, e con fondamento, che le idee sono esplicabili e che la esplicazione non solo non ripugna ad esse, come comunemente si crede, ma che anzi ne costituisce quel carattere che le rende principî attivi. Se le idee non si esplicassero, sarebbero principî morti che nulla avrebbero che fare colla vita e col real processo delle cose. Di tal vita e real processo son principî motori proprio le idee; e come la vita è sviluppo, movimento e real processo, così le idee o i principî delle cose non possono non partecipare allo sviluppo e processo delle cose istesse.

VI.

Opposizione delle idee.

Tra' punti che mi son proposto di toccare in questo scritto ve n'è un ultimo, ch'è forse il più importante di tutti, e nel medesimo tempo è quello di cui generalmente meno si riconosce l'importanza. Intendo dire quello d'un rapporto tutto speciale in cui le idee son tra loro, e che è il rapporto di opposizione. Questo rapporto singolarissimo, si noti bene, non è punto limitato ad alcune idee soltanto, ovvero anche a gruppi di idee: niente affatto; è un rapporto che si estende alle idee tutte. E come le idee, lo abbiam detto tante volte, sono i principî essenziali della realtà immanenti nella realtà medesima, così ne vien di conseguenza che l'opposizione nelle idee è anche opposizione nella realtà. Ma veniamo subito alla cosa, giacchè questo scritto è divenuto assai lungo.

Per procedere con ordine, rileverò la opposizione per categorie di idee, e propriamente secondo le diverse tre categorie additate innanzi, che abbracciano le idee tutte e che sono quelle delle idee universali, naturali e spirituali. È inutile di soggiungere che io qui non fo altro che dare un breve saggio soltanto della predetta opposizione, non avendo punto in mente di tesserne la lunghissima lista. E cominciando dalle idee universali, rammenterò prima la idea dell'*essere*, notissima a tutti. Ma non è parimenti a tutti nota la contraria di quella, l'idea del *non-essere?* Si prenda l'idea del *finito:* non l'ho ancor nominata, che a tutti è già corsa alla mente la contraria idea dell'*infinito*. Si pensi alla idea di *limitazione*, e non si potrà a meno di prestissimo pensare alla opposta di *illimitatezza*. Vi fissate voi alla idea dell'*uno*, ed eccovi ad essa d'incontro l'idea del *moltiplice*. Andate col pensiere all'idea di *qualità*, v'imbatterete inevitabilmente nell'opposta di essa, la *quantità*. Se avete dinanzi l'idea dell'*essenza*, vi sta pure dinanzi come opposta ad essa l'idea del *fenomeno*. E l'*identità* può ella sussistere senza la sua opposta la *differenza?* e la *materia* è ella possibile senza la *forma* che l'oppugna? provatevi a pensar l'idea del *condizionato* senza quella del *condizionante:* non riuscirete. E alla *causa*, alla *necessità*, all'*azione* non stanno a rincontro l'*effetto*, la *contingenza*, la *reazione?* E l'*assoluto* non ha il suo contrario anch'esso nel *relativo?*

Ecco un bel novero di idee universali opposte, novero che potrei prolungar di non poco; ma lo tronco, per additarne un consimile nella realtà concreta, prima della natura e poi dello spirito.

Per rispetto alle idee naturali dunque, c'imbattiamo innanzi tutto in quella, ch' è come la base della naturalità, vale a dire l'idea dello *spazio*. Ora, all'idea dello spazio si contrappone quella del *tempo*, nominate sempre insieme e fornite di contrari caratteri. L'*attrazione* è universalmente ritenuta siccome il contrario della *repulsione*. Andiamo avanti. E la natura *inorganica* non si oppone alla natura *organica?* e la *luce* non ha il suo contrario nella *tenebra?* il magnetismo non ha come elementi essenziali di sua natura il *polo nord* e il *polo sud*, l'un contrapposto all'altro? la elettricità non si afferma e nega in sè stessa come elettricità *negativa* ed elettricità *positiva?* Non vi sono nella natura i *generi*, ai quali stanno incontro gl' *individui?* E nella natura istessa vi è *vita* soltanto, o vi è anche la *morte?* E il regno vegetale e più ancora il regno animale non sono nettamente e oppostamente caratterizzati dalla sessualità, ossia dall'idea o principio *maschile* e dall'idea o principio *femminile?* E ciò basti come saggio della opposizione delle idee naturali.

Lo spettacolo che presenta all'occhio del filosofo il complesso delle idee spirituali non è diverso da quello delle altre idee; ed anzi non fa che confermarne maggiormente il principio di opposizione. Infatto, nelle idee spirituali c'incontriamo innanzi tutto nella opposizione della *coscienza* e della *inconscienza*, due principî entrambi veri ed entrambi opposti. E non è il medesimo delle idee di *ragione* ed *irrazionalità*, di *istinto* e di *volontà*, di *necessità* e di *libertà*, di spirito *individuale* e di spirito *generale?* E se volgiamo lo sguardo al lato etico dello spirito, tutti sanno che l'idea del *bene* è contraddetta dall' idea del *male*, l'idea del *diritto* da quella del *torto;* come poi per un altro rispetto all'idea di *diritto* si oppone quella di *dovere*.

Nella religione stanno incontro il principio *assoluto, adorato, creduto* ed il principio *relativo, adorante, credente:* c'è *mistero*, e c'è anche *disvelamento* del mistero: c'è l'*empietà*, e c'è la *santità;* e via dicendo.

E nell'arte non si contrappongono il *bello* ed il *brutto*, il *comico* ed il *tragico*, l'*ideale* ed il *reale* e via via?

E questo è sufficiente come saggio di opposizione nel largo campo delle idee. È naturale che da un piccolo saggio non possa sorgere la piena convinzione sì della straordinaria importanza che della vasta estensione della opposizione delle idee. Però in esso vi è tanto che il lettore può seriamente cominciare a sentire che il cardine della scienza filosofica è appunto nella contraria relazione delle idee. Tal relazione costituisce addirittura l'integrale problema filosofico. In effetto è a questa relazione che si connettono i problemi dell'infinito e del finito, dell'assoluto e del relativo, del creante e del creato, del mondo ideale e del mondo reale, della verità e dell'errore, della virtù e del vizio, della fede e della ragione, della Chiesa e dello Stato, ecc.: insomma i massimi e più ardui problemi della scienza. E pure come poco nettamente è posto ed afferrato un tal problema de' contrarî in tante e tante opere della nostra scienza! non però nelle opere de' grandi, e segnatamente de' massimi filosofi, come Platone, Aristotile, Plotino, Cusa, Bruno, Spinosa, Kant, Fichte, Schelling, Hegel, ecc., ne' quali più o meno un tal problema è il capitale della scienza. Presso di noi, oltre al mentovato Bruno, è stato Gioberti quello che ne ha compresa maggiormente l'importanza, e si è anche studiato, a modo suo, di risolverlo.

È importante di rilevare una cosa a proposito di questa opposizion delle idee, che in sostanza esprime la stessa opposizione della realtà; ed è, che la sapienza popolare, nella sua semplice e pur fine riflessione sulla realtà delle cose e conseguentemente de' principî che la esprimono, ha compreso questo rapporto di opposizione e lo ha espresso, a modo suo, in una grande quantità di proverbi. E la sapienza popolare è come il retto istinto della ragione, e vede le cose conformemente a realtà e a verità. Io qui non posso entrare in questo campo: ma se qualcuno de' lettori è curioso di vedere in che modo la sapienza de' popoli esprime ne' proverbi la relazion di opposizione, lo rimando a quel mio scritto, intitolato « *Il problema filosofico e i principî contrarî* » (1); ove è parola di siffatto argomento.

Con quel che è detto intorno alla relazione delle idee contrarie è terminata la serie di quei punti delle idee che mi proponeva di rilevare in questo scritto. Però posso bene immaginarmi quante dimande sorgano nella mente del lettore, tra le quali è certamente immancabile una; vale a dire: E questa opposizion delle idee è ella insuperabile ovvero vi è modo di accordarle insieme? e se vi è modo di accordarle insieme, qual esso è mai?

Rispondere a queste due semplici dimande adequatamente corrisponderebbe ad entrare addirittura nella reale esposizione scientifica del sistema delle idee, sistema che, diciamolo pure, si estende alla filosofia tutta quanta, per la semplicissima ragione che le idee sono addirittura i generali principî del sistema della scienza, in quella stessa guisa che lo sono del sistema della realtà.

Non potendo far ciò, che non entra nel disegno di questo scritto, cercherò tuttavia di appagare in qualche guisa il desiderio che muove quelle dimande, e di accennare ad un tempo ad alcuni altri punti, che possano far comprendere maggiormente al lettore, sia l'importanza di quel che abbiamo detto intorno alle idee, sia la parte che esse hanno a rappresentare nel sistema della scienza.

E innanzi tutto dirò che la mentovata opposizione delle idee non solo non è insuperabile, ma che anzi quelle idee che paiono sì nemiche, han d'altra parte vincoli segreti persin d'amicizia: cosa che pare strana a prima vista, e che, pur non di meno, è la più vera delle cose. Quanto alle idee contrarie, so bene che l'opinion comunale è quella della inconciliabilità delle medesime: di due cose o due principî contrarî si sente dir di continuo che sono diametralmente opposti, con che si vuol dire che non possono accordarsi tra loro. Ma il vero questa volta è proprio l'opposto, e cioè che le cose e i principî che han rapporto più diretto e, si noti bene, più vicina possibilità di conciliazione, son proprio gli opposti. Facciamo alcuni esempi.

Se io metto in relazione la penna con cui scrivo, poniamo, col Montebianco, e volessi cercare un vincolo e un rapporto tra i due, farei opera che per lo meno è lontana da quei tali rapporti che cerca e cercar dee

---

(1) Nel *Giornale Napoletano*, anno 1879, fasc. 5°.

la scienza. E se per giunta io volessi vedere un rapporto tra uno scoiattolo e il pianeta Mercurio, son sicuro che tra la gente assennata desterei per lo meno il riso. E perchè? perchè queste cose non sono in rapporto tra di loro: e noti bene il lettore che tra esse non vi è opposizione di sorta. Dunque possiam dire per ora che cose che non sono in opposizione possono benissimo non avere alcun rapporto tra di loro; e non avendo alcun rapporto, il cercarlo non importa proprio nulla alla scienza.

Se io ora penso al rapporto in cui sono e possono essere, poniamo, la sostanza e la causa, ognuno vorrà convenire, che il rapporto qui non è di quell'istessa natura che era il rapporto tra il pianeta Mercurio e lo scoiattolo. È innegabile che tra causa e sostanza v'è un rapporto: poniamo, la sostanza si può considerare anche come producente o come prodotta; e la causa, alla sua volta, si può considerare come un'entità sostanziale ecc. Rapporto dunque vi è, o vi può essere.

Ma prendiamo ora questi altri principî: causa ed effetto da una parte e sostanza ed accidente dall'altra. Qui abbiamo di bel nuovo causa e sostanza, ma non più in rapporto tra loro, sì bene ciascuna in rapporto con un'altra idea, la causa coll'effetto e la sostanza coll'accidente. Un certo rapporto, come testè dicevamo, vi era al certo tra causa e sostanza: ora io dimando se vi ha parimenti rapporto tra causa ed effetto, ed inoltre tra sostanza ed accidente? È innegabile che vi è: ma nessuno potrà parimenti negare che il rapporto che passa tra loro è di bel nuovo diverso da quel che passava tra causa e sostanza: e non solo diverso, ma anche più diretto. E che cosa vuol dir rapporto più diretto? Vuol dir rapporto più vicino e rapporto più stretto. E intanto i termini, o meglio le idee di quest'ultimo rapporto sono contrarie, mentre che le idee di sostanza e di causa eran soltanto idee diverse. Abbiamo qui una vera gradazione di rapporti: nel primo caso, cioè nel rapporto dello scoiattolo col pianeta Mercurio, avevamo termini indifferenti, che non erano in rapporto alcuno; nel secondo caso, cioè nel rapporto della sostanza colla causa, avevamo termini diversi, i quali erano bensì in un certo rapporto, ma questo rapporto, senza essere indifferente come nel primo caso, non era ancora certamente vicino e diretto: nel terzo caso finalmente, cioè nel rapporto della causa coll'effetto e della sostanza coll'accidente, abbiamo termini opposti, i quali primamente e veramente hanno un rapporto non solo vicino, ma anche stretto e diretto. Non è chiaro come la luce del giorno che i rapporti delle cose e de' principî diventano più stretti, più connessi, più intimi a misura che ci avviciniamo al rapporto di opposizione? È dunque perfettamente il contrario di ciò che comunemente si crede: comunemente si crede che i principî contrarî e le cose contrarie non s'accordino bene insieme, ed invece i principî e le cose contrarie son proprio quelli nei quali l'accordo è più vicino e più possibile, per la semplice ragione che il lor rapporto è più diretto. Saremmo proprio curiosi di sentire che il principio maschile ed il principio femminile, che son principî contrarî, ripugnino tra loro perchè opposti. Saremmo parimenti curiosi di sapere, se nell'uomo il principio spirituale ed il principio corporeo, che son principî contrarî, non possano stare insieme, perchè principî opposti, mentre non solo vi stanno, ma l'uomo non è altro che l'accordo ed anzi l'unità de' due. Vorremmo sapere se la causa e l'effetto, la sostanza e l'accidente, la virtualità e l'attualità, l'attrazione e la ripulsione, il moto e la quiete, il genere e l'individuo, la vita e la morte, il senso e l'intelletto, il bello ed il brutto, l'interesse individuale e l'interesse generale, il sostantivo e l'aggettivo (per ricordare persin le opposizioni grammaticali), il verbo attivo e il verbo passivo, il singolare e il plurale, l'articolo maschile e l'articolo femminile, ecc. ecc., che son tutti principî contrarî, son tra loro in tale opposizione che sia loro impossibile l'accordo: mentre tutti sanno, non solo gli scienziati e la gente colta, ma anche il popolo che quei principî contrarî si accordano benissimo, anzi son proprio quelli che si accordan meglio, e tanto che è non solo nella loro opposizione, ma anche nella loro conciliazione che consiste la vita della realtà.

Ecco che l'ho pronunziata la parola, ed è venuta fuori da sè dal seno stesso de' principî od idee contrarie: intendo dire la parola ed il principio di conciliazione che emerge addirittura dal seno della opposizione medesima.

L'opposizion delle idee dunque non solo non è insuperabile, ma al contrario le idee opposte (e quindi le cose opposte) son proprio quelle che son destinate alla conciliazione colla reciproca integrazione. Ossia la conciliazione è nella unificazione degli opposti. Per lo scopo che mi son proposto in questo scritto, non soggiungo altro intorno all'opposizione e conciliazione delle idee contrarie, contentandomi di averne additato, da una parte la grandissima importanza rispetto alle idee tutte quante che costituiscono i generali principî della filosofia, e dall'altra lo stretto ed intimo legame che è tra loro: legame tale che, mentre le scinde, nel tempo istesso le unifica. Si ricordi il lettore che oramai è un luogo comune il dire che la lotta, il conflitto è la vita dell'universo: or la lotta ed il conflitto è la lotta ed il conflitto de' principî o delle idee; i quali alla lor volta fan parte essenziale della lotta e del conflitto della realtà.

Alcune altre considerazioni integrative delle precedenti son queste:

1° che la filosofia è in ispecialissimo senso la dottrina delle idee, e che come le idee sono i principî essenziali della realtà, così la filosofia non è scienza di qualche cosa di astratto e di astrattamente ideale, ma de' principî reali delle cose istesse;

2° che la filosofia altro non è se non la sistemazione delle idee tutte nelle loro tre categorie di idee universali, naturali e spirituali, le quali tre categorie costituiscono il contenuto di tre corrispondenti discipline filosofiche, nelle quali si divide la filosofia istessa, cioè la disciplina logico-metafisica che è la dottrina delle idee universali, la disciplina filosofico-naturale, che è la filosofia della natura, e però delle idee naturali, e finalmente la disciplina filosofico-spirituale che è la filosofia dello spirito, ossia delle idee spirituali;

3° che il metodo filosofico non è e non può esser altro che il modo di connessità delle idee, che sono i principî del pensare e dell'essere ad un tempo. Intanto, come il metodo deve connettere le idee, ossia i principî della realtà secondo i rapporti più stretti e più diretti, così ne viene di necessaria conseguenza, che esso si basi sul rapporto di opposizione e conciliazione delle idee: il qual rapporto, come è stato dimostrato, è il più vicino e diretto rapporto de' principî e delle cose;

4° che finalmente da quanto si è detto risulta chiaro che una filosofia, la quale si fonda sulla opposizione e conciliazione delle idee e delle cose, non è e non può essere esclusiva nel suo indirizzo, cioè o materialistica, o astrattamente spiritualistica ed idealistica, ovvero emanatistica, panteistica, positivistica, scettica, ateistica, e così via via; ma, riconoscendo ad ognuno di questi indirizzi filosofici quel tanto di vero che hanno, accoglie questo vero nel proprio seno come uno de' momenti delle idee e della realtà.

Tali son le cose rilevanti che sulla dottrina delle idee ho voluto mettere innanzi agli occhi degli illustri Membri dell'Accademia. Certo, che non è tutto quello che si può dire di esse, ma il mio scopo in questo scritto, che è parte, ed anche riassunta, di un più largo, non andava più là.

ERMANNO FERRERO

LA RIVOLUZIONE INGLESE DEL 1688

E

L'INVIATO DI SAVOIA A LONDRA

Memoria letta nell'adunanza delli 29 *febbraio* 1880.

Il duca di Savoia Vittorio Amedeo II, che alla morte di Carlo II ed alla salita al trono di Giacomo II (1685) aveva mandato a Londra il conte Costa della Trinità per adempiere ai consueti ufficii di condolenza e di complimento (1), tre anni dopo inviò in quella capitale il conte Carlo Massimiliano Roero (2) per rallegrarsi della nascita del figlio del re, il principe di Galles, avvenuta il 20 di giugno. Dalle istruzioni avute (3) il conte Roero doveva pure cercare notizie intorno alle cose d'Inghilterra per informarne poi al ritorno la Corte di Torino. La nascita di un erede maschio a Giacomo II accelerò lo scoppio della rivoluzione, che gli errori di questo monarca e del suo antecessore avevano preparato. Il conte Roero fu spettatòre di questa rivoluzione, dalla quale fu posto fine al governo degli Stuardi, e che non soltanto segnò un'epoca

(1) Archivio di Stato di Torino. Negoziazioni con *Gran Brettagna*, mazzo 1. — Lettere ministri *Gran Brettagna*, mazzo 7.

(2) Carlo Massimiliano Roero conte di Revello e Val d'Andonna gentiluomo di camera del duca, fu luogotenente generale e governatore della città e del marchesato di Saluzzo, e compiè, oltre a quella d'Inghilterra, altre missioni straordinarie presso Corti straniere, cioè presso l'elettore di Baviera negli anni 1671, 1677, 1687 e presso l'imperatore nel 1677. Nel 1699 fu inviato alla Corte di Francia per annunciare la nascita del principe di Piemonte, e a Saint-Germain rivide gli esuli sovrani della Gran Brettagna.

(3) Negoz. con *Gr. Brett.*, mazzo 1.

memoranda per l'Inghilterra, ma è altresì un fatto di somma importanza per la storia europea, avendo impedito che nell'isola si soffocasse interamente quella libertà, la quale a prezzo di secolari fatiche erasi acquistata, e che, vittoriosa, promosse la grandezza dell'Inghilterra e la sua autorità nella politica del continente.

Da Londra l'inviato di Savoia di mano in mano andava ragguagliando la Corte ducale intorno ai fatti, che rapidamente succedevano dinanzi ai suoi occhi. Sulla rivoluzione del 1688 copiosi sono i documenti e le memorie contemporanee, di cui poi si poterono giovare coloro, che in tempi più recenti e a' dì nostri ne raccontarono le vicende con maggior calma e con più alto criterio di quelli, che vi assistettero. Sebbene le relazioni del rappresentante del duca di Savoia non forniscano importanti notizie ignorate su questa rivoluzione, mi parve tuttavia che potessero meritare di essere conosciute. Le impressioni provate nello assistere a tali straordinarii avvenimenti da un uomo educato ad una scuola politica opposta a quella, i cui principii trionfavano con la rivoluzione in Inghilterra, sono descritte in queste relazioni, con cui egli informava pure il suo sovrano de' sentimenti della Corte e de' ministri stranieri, delle voci, che correvano, delle speranze e dei timori, che agitavano gli animi de' partigiani del re. In tal modo egli seguiva quell'accuratezza, con la quale gli ambasciatori nostri tenevano dietro ai fatti, che si compievano nei paesi, in cui si trovavano, e ne davano notizia alla Corte, che li aveva inviati (1).

Quando il conte Roero, sul finire del settembre del 1688, giunse in Inghilterra (2), gravissime erano le condizioni di quel regno. Il clero anglicano, la nobiltà, l'esercito sdegnati contro il monarca, che, offendendo i sentimenti del popolo inglese, si dimostrava apertamente favorevole al cattolicismo, e non celava le sue tendenze al reggimento assoluto. Molti *tories* si collegavano anch'essi alla resistenza contro il re. La nascita del principe di Galles, annullando i diritti al trono della moglie del principe Guglielmo d'Orange, figliuola di prime nozze di Giacomo, cresceva il malcontento; e si spargevano voci accusanti come suppositizia tale nascita. Il principe d'Orange accettava l'invito di venire nell' isola quale vindice

(1) La corrispondenza del conte Roero da Londra al duca consta di dodici lettere (Lett. min., *Gran Brett.*, mazzo 7). Altre lettere sono scritte al ministro primo segretario di Stato, il marchese Carrone di San Tommaso (Cat. Lettere particolari).

(2) Il conte Roero arrivò a Parigi sul principio del settembre, e visitò la Corte e l'ambasciatore d'Inghilterra ragguagliandone il duca e il ministro (Lett. al duca, 13 settembre; lett. al ministro, 6, 13, 17 sett. (da Parigi), 24 sett. (da Dieppe); lett. del duca al conte Roero, 17, 25 sett.).

dell'offesa libertà inglese; procuravasi i mezzi per riuscire nella sua impresa; e, sebbene procedesse con cautela e segretezza ne'suoi apparecchi, tuttavia il suo disegno non poteva più restare celato.

In tale stato di cose una rivoluzione era inevitabile. Così, a primo aspetto, non parve all'inviato di Savoia, il quale in una relazioncella unita alla prima lettera da Londra al duca (30 settembre) giudicava esagerati i timori, nè sembrava prestar fede alla venuta dello statolder. In questa relazione egli diede pure ragguaglio sull'incarceramento nella Torre di Londra dell'inviato inglese in Francia, Skelton, d'accordo col quale la Corte di Versailles aveva fatto annunciare agli Stati Generali d'Olanda, per mezzo del conte d'Avaux, ministro di Francia all'Aia, che il re d'Inghilterra era amico ed alleato del re di Francia, e che il primo atto di ostilità contro quello sarebbe da questo giudicato come una dichiarazione di guerra. La stessa comunicazione fu fatta al governatore spagnuolo dei Paesi Bassi; ed aiuti navali furono offerti a Giacomo da Luigi XIV. I servigi del monarca francese furono alteramente respinti da Giacomo II, il quale, ingannato dal suo ministro lord Sunderland circa la intenzione dell'Orange e circa la possibilità di una rivoluzione, ordinò il richiamo e la prigionia dell'inviato in Francia. Errore gravissimo era stato pure commesso poco innanzi dal re nel chiamare intorno a sè soldati irlandesi, per razza e religione odiati dagl'Inglesi. Il duca di Berwick aveva fatto entrare nell'ottavo reggimento di linea, stanziato a Portsmouth, alcuni uomini giunti dall'Irlanda. Il luogotenente colonnello, in nome proprio e di cinque ufficiali, presentò rimostranze al duca. Il re, irritato, ordinò l'arresto de' sei ufficiali, che, condotti dinanzi ad una corte marziale, furono condannati ad essere espulsi dall'esercito. All'intendere tale sentenza altri ufficiali abbandonarono le armi.

Londre le 30 7bre 1688 (1).

Le capitaine Clément ariva dimanche, au matin devant le iour, à Grenuche (2) avec le Comte Roüer, Envoyé de S. A. R. de Savoye, qu'il estoit allé prendre à Dieppe d'ordre du Roy avec son yak. Le susdit Comte partit le soir en chaloupe, aprez avoir esté salué de 7 volées de canon. Mons.r Skelton, Envoyé de Sa Maiesté

---

(1) Il conte Roero segue il calendario gregoriano; mentre in Inghilterra usavasi ancora l'antico, in ritardo di 10 giorni sul nuovo. Le date, da me indicate, sono secondo l'uno e l'altro.

Ho omesso la lettera, a cui questa relazione è unita, perchè senza importanza.

(2) Greenwich.

Britanique en France, receut ces iours passés un courrier avec ordre de partir incessentment, et estant arivé icy le Mardy, il fut mis à la Tour avec son secrétaire. Son grief est d'avoir induit les ministres de S. M. Très Chrestiene à mender à M.[r] le Comte d'Avaux de faire la déclaration aux Estats Généraux, ce qui a choqué l'orgueil de cette nation qui prétend n'avoir besoin du secour de persone pour se défendre. Ce n'est pas que les plus fins croyent que c'est plus tost la liaison de commerce et de religion, qui est entre les Hollandois et les Anglois, qui les a outré contre le susdit Sieur Skelton, qui, peut estre, avec son zèle (qu'ils nomment indiscret), a rompu leurs mesures. L'on croit pourtant, sans la déclaration faicte au Gouverneur des Pays Bas, qu'il seroit encore à Paris, mais cette dernière a fait agir l'Ambassadeur d'Espagne et ses partisans contre luy, qui ont obligé le Roy à faire cette démonstration publique, qui d'ailleurs n'est pas fâché contre luy; car quoy qu'il ayet fait tout cela sans son ordre, S. M. voit bien qu'il ne l'a pas deservi dans la présente conioncture. L'on espère qu'il sortira bien tost, et l'on croit mesme qu'il en ayet déià des asseurences secrètes.

Le Roy est en campagne despuis quelques iours; il a esté à Chattan pour mettre en estat les 16 gros vaissaux qu'y sont, les quels ont ordre d'aller ioindre la flotte qui est aux Dunes, sous le commend.[t] du Ducq de Graffton (1).

Les Capitaines du Rég.[t] du Ducq de Barvich (2), qui ont refusé d'incorporer dans leur compagnies des Irlandois Catoliques, ont esté iugés par un Conseil de guerre à estre cassés et privés de toutes leurs charges, s'ils en avoient à la Cour. Cela a obligé quelques autres offitiers de se démettre de leurs emplois, et a fait un espèce de mutinerie dans les trouppes.

Les persones crédules sont icy dans des grandes allarmes, et il y a déià beaucoup d'Alemans qui ont pris la poste pour s'en aller; on attend d'un heure à l'autre une révolte. Cepend.[t], les persones de bon sens y aioustent peu de foy, non plus qu'à la descente du Prince d'Orange qui n'a pas encor songé à se mettre sur mer, et dont la flotte n'a pas bougé iusqu'à présent.

S'il y a quelque chose à craindre, c'est à l'ouverture du parlement, le quel pourtant, estant convoqué par l'ordre d'un Roy sage et bien éclairé, ne devroit pas produire les méchants effects que les protestants supposent (3).

Per ordine di Giacomo, il marchese d'Albeville, suo inviato all'Aia, aveva chiesto agli Stati Generali la ragione dei poderosi allestimenti guerreschi, che si compievano in Olanda, ed aveva affermato non esistere

(1) Enrico Fitzroy duca di Grafton, figlio naturale di Carlo II.

(2) Giacomo Fitzjames duca di Berwick, figlio naturale di Giacomo II.

(3) Alla lettera, accompagnante questa relazione, rispose il duca (23 ottobre), desiderando che la tranquillità dell'Inghilterra non fosse turbata: persuaso dalle notizie giuntegli d'altra parte che l'Orange stava per mandar ad effetto il suo disegno, sperava tuttavia che le cose volgessero favorevoli per il monarca britannico.

alleanza tra l'Inghilterra e la Francia: uguale dichiarazione fu pure fatta all'ambasciatore olandese a Londra. Il disegno di Guglielmo di venire in Inghilterra non era stato ancora in modo ufficiale annunciato agli Stati Generali; tuttavia ripetevasi omai come certa la notizia di un prossimo suo sbarco; il re stesso ne riceveva avvisi, e finalmente un dispaccio del marchese d'Albeville (7 ottobre (27 settembre)) confermavagli la notizia che fra pochi giorni il principe d'Orange sarebbe partito per l'Inghilterra. Già da qualche giorno Giacomo, mentre tentava provvedere alla difesa del regno, si studiava pure di riconciliarsi co' suoi sudditi; ma le sue concessioni erano fatte troppo tardi, e venivano accolte con diffidenza, non ostante che parecchi suoi avversarii protestassero di essergli fedeli. Pubblicò un proclama, in cui annunciava essere il regno minacciato da un'invasione straniera, ed invocava la devozione de' suoi sudditi; promise di proteggere la chiesa anglicana e di non insistere più per l'ammessione de' cattolici nella Camera de' Comuni. Poscia dichiarò di voler rimettere in carica i magistrati e i deputati-luogotenenti, rimossi per non aver approvato la sua politica.

Il conte Roero ebbe la sua udienza da Giacomo II, e ne riportò favorevole impressione; ma in essa il re e l'inviato scambiaronsi soltanto parole di complimento. La regina Maria d'Este, la regina vedova di Carlo II Caterina di Portogallo e il principe di Galles furono altresì da lui visitati. Egli dubitava ancora sulla possibilità di uno sbarco di Guglielmo nell'isola, e, ove questo fosse avvenuto, era persuaso che l'impresa sarebbe fallita.

A Londre ce 7 8bre 1688 (1).

Monseigneur

Les affaires d' Angleterre sont dans une situation si orageuse que je m'imagine que V. A. R. aimera mieux en sçavoir les particularités que d' entendre la relation de mes audiences, qu' elle pourra voir à mon retour escrite avec toutes ses circonstences. Il suffit que V. A. sache que le Roy me receut dimanche aprez la messe, dans sa chambre, assis sur un fauteuil couvert. Le Grand Chambellan vint me prendre à la porte, et aux trois révérences que je fis, il osta tousiours son chapeau, et se releva un peu de sa chaise; je luy fis mon compliment, au quel il respondit avec tant de marques d' estime et d'affection pour V. A. R. que je sortis bien désabusé de ce que l' on m' avoit supposé à Paris; il me dit avec plaisir qu'il avoit le bien

(1) Giovedì, 27 settembre, cal. ingl.

d'estre oncle de Madame la Duchesse (1), et qu'il considéroit M.r le Ducq de Savoye comme son meilleur Amy et Parent. Je fus le soir à l'audience de la Reyne; le lendemain de la Reyne Doüarière, et le Mardy de Mons.r le Prince de Galles; pour Mad.e la Princesse de Danemarek et Mons.r le Prince (2) ce sera samedy, et non pas plustost. Je n'en diray pas d'advantage a V. A. R., la quele je suplie de me permettre de débiter les novelles qui sont de la dernière conséquence.

Il faut sçavoir, Monseig.r, en premier lieu, que lors que Mons.r d'Avaux fit la déclaration aux Estats Généraux, il leurs dit vers la fin que les liaisons d'amitié et d'alliance, que le Roy son Maistre avoit avec celuy de la Grande Bretagne, l'obligeroient à le secourir etc. En suite de cela, le Marquis d'Albyville, Envoyé extraord.e d'Angleterre, en fit un autre aux mesmes Estats, par la quele il demendoit la raison d'un si puissant armement, à quoy ces Messieurs respondirent que, devant de parler d'autre chose, il falloit sçavoir quel estoit cett'allience entre les deux Rois que M.r D'Avaux avoit supposé, et qu'ils souhaittoient de voir le traitté. On escrivit d'abord icy, et le Roy déclara au Sieur Huitter (3), Ambassad.r de Hollande, qu'il n'avoit aucune allience avec la France, qu'il vouloit maintenir celle qu'il avoit avec les Estats, et iamais se départir de la paix de Nimègue, dans la quele il semble qu'il ayet plustost un'obligation d'assister les Hollandois en cas de rupture. Là dessus, Mons.r Huitter asseura Sa Maiesté que l'armement n'estoit point contr'Elle, mais seulement pour se garentir des insultes de la France et pour maintenir la liberté Germanique. Cepend.t, Monseig.r, l'on asseure de toute part que cette flotte est destinée contre l'Angleterre; il est mesme arivé auiourduy un courrier au Roy, par le quel il est adverti que le Prince d'Orange part lundy avec 16000 hommes embarqués pour faire une descente icy (4), où il espère d'avoir un grand party, et qu'il a avec luy les Milords Shrewbery, Denby, Wilsheer, Lomli, Lovelas (5) et autres grands Seigneurs Anglois; Mons.r de la Neufuille, Envoyé de Pologne, qui ariva hyer asseure d'avoir veu en passant le Prince d'Orange qui luy a dit, en présence de Mons.r le Ducq de Sel (6), qu'il venoit en Anglet.e pour soustenir les droits de Mad.e la Princesse, sa femme, et de la religion, avec d'autres absurdités que ie iuge à propos de ne pas coucher par escrit, quoy qu'elles soient peut estre imprimées. Le Roy qui est prévoyant, et qui craint la descente du Prince d'Orange bien moins que l'assistence, que pourroient luy donner ses suiets protestants, fit, ces iours passés, une déclaration en forme d'édit, par la quele il consent que les Catholiques Romains demeurent incapables d'estre membres de la Chambre Commune, et cela, dit il, pour dissiper l'apréhension que plusieurs persones ont eu qu'ils ne

(1) Anna d'Orléans, moglie di Vittorio Amedeo II, era figlia di Enrichetta, sorella di Giacomo II.

(2) Giorgio principe di Danimarca, marito di Anna, secondogenita di Giacomo.

(3) Arnoldo Van Citters, ambasciatore d'Olanda in Inghilterra.

(4) Cf. CLARENDON, *Diary*, sept. 27 (oct. 7).

(5) I conti di Shrewsbury e Wiltshire, lord Lumley, lord Dumblane, erede presuntivo della contea di Danby, lord Lovelace.

(6) Il duca di Zell, della casa di Brunswick, il quale con altri principi tedeschi aveva promesso di concorrere alla difesa dell'Olanda, se questa fosse stata minacciata.

s'emparassent du pouvoir législatif, et ne s'en servissent contre les protestants. Ensuite de cela, il a escrit à divers Gouverneurs des Provinces, aux quels il a donné pouvoir de rendre éligibles pour le parlement les Gentilshommes qui, despuis quelque temp, ont esté dépossédés des charges de Députés Lieutenants. Tout cela, Monseig.r, a produit de bons effects, et du despuis plusieurs Milords protestants, Grand Seigneurs et ennemis déclarés de la Courone, ont offert leurs persones, leurs enfants et leurs biens au Roy dans cette conioncture. Le Milort Maire de Londre est venu, avec les Aldermans, asseurer S. M. de la fidélité de toute la Ville, et les commendants des trouppes se vantent de donner des marques de la leur, si l'ocasion se présente; le Roy cepend.t, augmente ses compagnies d'Infanterie de dix hommes chacune, et celles de cavallerie de vingt (ce qui augmentera le prix des chevaux pour Dufresne (1), outre cela, Monseig.r, il lève deux regiments d'Infanterie et un de Cavallerie. Il prétend, dez que le Prince d'Orange paroistra sur terre (à quoy ses vaissaux s'opposeront tant qu'ils pourront), d'y aller en persone pour défendre son droit, et il s'est déclaré qu'on ne le retiendra pas, comme l'on fit dans l'affaire du Ducq de Montmout (2). Toute la Cour et les Ministres sont en berdoüille. Le Roy seul, à travers de tout cela, est intrépide, quoy qu'il coñoisse le danger; il met ordre à toute chose sans se troubler, et a fait exposer le S.t Sacrement dans toutes les chapeles de Londre pour implorer l'assistence de Dieu, dans le quel il a toute sa confience. Les Ministres estrangers paroissoient, ces iours passés, partagés dans la croyence de cette nouvelle, et hyer au matin Mons.r le Nonce (3) et le Résid.t de Florence, dans ma chambre, estoient pour l'affirmative; celuy de Venise et moy estions pour la négative; Mons.r de Barillon (4) ariva aprez, qui tesmoigna fort prudentment de craindre l'un et l'autre, parceque si la descente ne se fait point en Angleterre, elle se faira en France, la quele a lieu d'apréhender toutes les deux. A présent, Monseig.r, il semble que tout le monde est du sentiment du Roy et de ses Ministres qui croyent la chose infaillible, et mesme que la semaine qui vient elle doit esclater; cepend.t, Monseig.r, il se trouve encor des persones de bon sens qui disent que l'orage pourroit tomber sur la France, et que si, en effect, le Prince d'Orange vient icy, comme l'on dit, il échoüera et perdra tout ses amis, particulièrement ayant avec luy des trouppes estrangères. J'espère, Monseig.r, l'ordinaire qui vient, de déchiffrer à V. A. R. cett'énygme, et je suis avec un très profond respect

Monseigneur
D. V. A.

Très humble, très ob.t et très fidèle
Ser.r et Suiet
C. M. Rouer (5).

(1) Questi aveva l'incarico di acquistare in Inghilterra cavalli per il duca.

(2) Accenna alla spedizione del duca di Monmouth, figlio naturale di Carlo II, tentata per rovesciare il governo di Giacomo II e soffocata nel sangue (1685).

(3) Monsignor conte Ferdinando d'Adda.

(4) Ambasciatore di Francia a Londra.

(5) A questa lettera rispose il duca, il 30 di ottobre.

Insieme con la riferita lettera al duca, il Roero mandò la seguente al marchese di San Tommaso

A Londre ce 7 8bre 1688.

Monsieur

Par la lettre que j'escris à S. A. R., V. E. voit que nous ne sommes pas loin du martire, et que Mons.r l'Abbé (1) aura une bell'occasion de se signaler; je vous asseure Mons.r, qu'il y a bien des gens à Londre qui voudroient en estre bien loin; je ne suis pas de ceux là, car j'ay un plaisir sensible de me treuver icy dans cette conioncture, et je prend plus de cotioissences dans un iour que l'on ne feroit un autre fois dans un mois; les Ministres estrangers sont presque tousiours ensemble, et à présent on ne parle point de bagatele. J'ay oublié d'escrire à S. A. R. que, despuis quelques iours, l'Ambassadeur de Hollande fait le malade; et, à propos d'Ambassadeur, il [est bien que V. E. sache que Mr le Nonce m'a donoé la main et fait mille honestetés, mais tousiours sur le pied d'éviter la formalité en entrant dans sa chambre devant qu'il songe à me venir au devant; il voulut pourtant, la première fois, me venir accompagner iusqu'à la moitié du degré. Enfin, Mons.r, on ne peut pas treuver un plus honest homme, ni plus éclairé, ni plus accomply; j'en use de mesme avec M.r de Barillon; pour l'Ambassadeur d'Espagne (2), quoyque j'aye esté chez lui, je n'ay pas pu le voir iusqu'à présent; les Envoyés de Florence, Venise, Portugal, Danemarch, Suède, Palatin me font mille honestetés, et c'est mon unique entretien, car avec les Anglois il y a peu de commerce, et un Milord me dit hyer au soir: Mons.r, excusez moy, si je ne vous rend pas mes devoirs; vous estes venu dans un temp, que tout le mond songe à sauver son bien. Je ne dois pas oublier de mender à V. E. le ressentiment que j'ay de la lettre de S. A. R. et de celle qu'Elle m'a escrit; je recoñois toutes les bontés Royales comm'un effect des bons offices que V. E. me rend. M.r l'Abbé asseure, avec moy, Mad.e de Sommerive, M.r l'Abbé et Mad.e de Piosasque de ses très humbles services, et je suis respectueusement

Monsieur
D. V. E.

Très homble et très ob.t Ser.r
C. M. Rouer.

Sette giorni dopo queste lettere, il Roero continuava ancora ad aver qualche dubbio sulla venuta di Guglielmo. Se questi veniva, temeva uno scioglimento tragico del dramma, che si rappresentava in Inghilterra,

---

(1) L'abbate di Caraglio.

(2) Don Pedro Ronquillo

giacchè non il trono solo, ma anche la persona di Giacomo, secondo il nostro inviato, sarebbe stata in pericolo, e con la persona del re quelle della regina e del principe ereditario. Timori forse esagerati, che non toglievano però al Roero di pensare ancora ad un comico scioglimento, ove l'Orange si fosse pentito del suo proposito, e di credere altresì che, venendo, egli non avrebbe trovato lo sperato appoggio. Non aveva alcun diritto alla corona; mancava di plausibile pretesto per la difesa della religione e dei privilegii del popolo inglese; le concessioni di Giacomo a' suoi sudditi dovevano bastare, ed il Roero lascia scorgere com'egli le giudicava troppo larghe e fors'anche pericolose. Il re rimise in grazia i sette vescovi, il cui processo alcuni mesi innanzi aveva destato grande indegnazione negli anglicani ed accresciuto l'odio contro di lui. Li consultava frequentemente, e revocò la pena della sospensione, due anni prima inflitta a quello di Londra, Enrico Compton. Alla città di Londra restituì gli antichi statuti, che Carlo II le aveva tolti; e si sperava, come in fatti fu compiuto (27 (17) ottobre), che tutte le franchigie dei comuni sarebbero state restaurate.

A Londre ce 14 8bre 1688 (1).

Monseigneur

J'esperois, cet ordinaire, de faire voir à V. A. R. le dénoüement de la pièce qui se doit ioüer en Angleterre; mais comme la flotte, qui devoit se mettre à la voile le 12, ne partira que demain, à ce que l'on a apris par les derniers advis, il faut attendre la semaine qui vient pour sçavoir si elle sera comique ou tragique; et l'on ne doit pas doutter de la dernière, si Mr le Prince d'Orange fait la descente qu'il a médité, car elle la sera infailliblement pour l'un ou pour l'autre parti; mais, s'il s'en repent, ce sera une comédie toute pure, dans la quele on aura veu plusieurs acteurs ioüer leurs rolles à miracle. Quoy qu'il en soit, Monseig.r, il est bon de sçavoir par avance tout ce que le Roy a esté obligé de faire dans cette conioncture pour plaire à son conseil, pour gagner son peuple, et pour éviter les malheurs, dont il est menacé, qui ne sont pas une bagatele, car il s'agit de tout perdre, le Royaume, sa persone, celle de la Reyne et de Mons.r le Prince de Galles, qui est, à ce que l'on dit, le suiet de la guerre. V. A. R. aura déià veu dans mes lettres ce que l'on a fait à l'égard de Mons.r Skelton, la déclaration du Marquis d'Albyville aux Estats Généraux, celle de Sa Maiesté en faveur des protestants pour l'élection des Parlamentaires; il faut aiouster à cela, Monseig.r, les sept Evesques remis en grâce, avec qui l'on confère tous les iours, et quoy qu'il

(1) Giovedì, 4 ottobre.

ne soyent pas du Conseil, comme l'on avoit dit, on ne laisse pas de les consulter; on a restabli a leur prière celuy de Londre qui estoit suspendu despuis quelques années. Tout cela n'est rien, Monseig.r, Sa Maiesté donna avanthyer à la Ville de Londre la Chartre, que l'on apelle; cela veut dire la Carte, ou patente des ancienes franchises, que le Roy son Frère luy avait osté, par arrest, aprez 17 ans de procès; et l'on croit qu'ell'en faira de mesme à l'esgard de toutes les provinces, ce qui va la mettre en seurté pour le présent; mais, avec le temp, on craint que cela ne produise de méchants effects. Voilà, Monseig.r, à quoy ce Prince a esté reduit, qui n'a iamais apréhendé les Anglois; mais quand on luy a representé qu'une puissence estrangère, commendée par un homme qui prétend avoir droit à la courone, venoit avec 400 voiles (car on en conte autant entre vaissaux, steuk, brulots et autres bastiments), il a fallu s'asseurer au dedans et contenter tout le monde, autant sur le fait de la religion que du costé de la France, avec la quele on ne veut pas qu'il y ayet aucune liaison; il est mesme arivé despuis deux iours un Envoyé que l'on apelle Pointy, Offitier de la Marine (1), que l'on n'ose pas produire, et M.r de Barillon dit tout haut qu'il est venu pour se divertir, ce que l'on auroit, peut estre, cru dans une autre conioncture. Je ne crois pas, Monseig.r, que le Prince d'Orange, quand il seroit mesme en Angleterre, put faire d'advantage; il reste maintenant avec son droit imaginaire de courone qui, n'estant pas soustenu d'aucun prétexte plausible de soustenir la religion et le privilège de l'Anglelerre, ne trouvera pas l'appuy qu'il supposoit (2).

Despuis les advis du delay de la flotte on n'en a pas eu d'autres, et mesme cet ordinaire nous n'avons aucune lettre de France, Flandre et Hollande, ce qui fait croire que le vent est contraire, et que le paquebot n'a pas pu venir. Je finis, Monseig.r, toutes mes audiences avanthyer, et j'aurois comencé parler de celle de congé, si je ne croios qu'il est bien d'attendre encor la semaine qui vient pour voir l'issüe de cett'affaire. Messieurs le Nonce, Ambassadeurs de France et d'Espagne m'ont donné à disner. et ils m'ont fait plus d'honestetés que je n'en pouvois prétendre; il est vray, Monseig.r, que je les ay tousiours veu sans formalité et comme V. A. R. m'avoit prescrit. Pour celuy d'Hollande qui, aprez avoir

---

(1) Dalla lettera scritta insieme con questa al ministro: «..... nous sommes dépourveus de « novelles estrangères; pour celles du pays V. E. les verra dans la lettre de S. A. R., à la quele « il en faut adiouster une qui est essentiele; c'est, Mons.r, que cet Envoyé de France, qu'il est « véritablement, est désadvoüé de Mons.r de Barillon pour tel, et il l'a présenté au Roy en « passant comme un simple Gentilhomme, et il est assez prudent pour ne luy pas faire donner « un audience secrète dans cette conioncture, à la quele il ne manquent pas de gens qu'y « prenent garde ».

(2) Dalla citata lettera al ministro: «.... je suis aussy tranquille icy que ie le serois à Revel, et « je parois le plus intrépide de tous les autres, parceque je n'ay pas si méchante opinion de cett'af- « faire qu'en a tout le genre humain; il se peut faire que le Prince d'Orenge n'ayet iamais « véritablement songé à une actioo si noire, qu'il s'en repente, qu'il soit battu par mer ou par « terre, qu'une tourmente fasse perir la flotte, que le peuple Anglois se ravise de faire son devoir, « dans le quel cas il n'y auroit rien à craindre, quand mesme il y auroit 3 flottes semblables ».

esté retiré quelque temp, comence à paroistre, n'aura pas ma visite, s'il ne promet de me donner la main chez luy. Comme je n'ay pas eu de lettres cet ord.[re], je n'ai pas eu, Monseig.[r], des novelles de Dufresne qui ne fait, peut estre, pas mal de diférer son voyage; mais si la flotte de Hollande prenoit un autre chemin, et que l'on fut seur de ce costé là, les Offitiers pourroient peut estre revendre leurs chevaux à bon marché; je suis, cepend.[t], Monseig.[r], avec un zèle très soumis et un très profond respect

Monseigneur
D. V. A. R.

Très humble, très ob.[t] et très fidèle
Serv.[r] et Suiet
C. M. Rouer.

Intanto Luigi XIV commetteva un grave errore, il quale riuscì non solamente funesto a Giacomo II, ma fu di danno grandissimo anche per la Francia. Una contesa era sorta con l'impero per causa dell'elezione dell'arcivescovo di Colonia. Il re di Francia, in vece di prestare ascolto ai consigli del suo ambasciatore in Olanda, il quale gli dimostrava che per impedire la partenza di Guglielmo occorreva intimorire le Provincie Unite, invadendo i Paesi Bassi spagnuoli, dichiarò la guerra all'impero per la cagione dell'arcivescovado di Colonia e per qualche altro pretesto: forse il modo scortese, con cui l'offerta de' suoi aiuti era stata rigettata da Giacomo, irritandolo, servì ad indurlo ad effettuar tosto questo suo disegno. Egli fece invadere il Palatinato, ed un esercito, sotto il comando del Delfino, ma in realtà diretto dal maresciallo di Duras, mosse all'assedio di Philippsbourg: nello stesso tempo il maresciallo di Humières con dieci o dodici mila uomini s'avanzava tra la Sambra e la Mosa verso il paese di Liegi. La diversione delle forze di Luigi, che avrebbe dovuto persistere nell'aiutare il re d'Inghilterra, anche mal suo grado, fu un vantaggio immenso per il principe d'Orange, che in tal modo ebbe per la sua impresa il pieno consenso dell'Olanda, da cui era tolto il timore di un'invasione francese.

Intanto a Londra, per il vento contrario, non giungevano notizie dal continente; epperciò gli animi erano in grandissima incertezza. Il conte Roero poi non esitava a dichiarare di non comprendere più nulla, vedendo la Francia minacciare l'Olanda, se assalirà l'Inghilterra, e inviare le sue milizie, non già contro l'Olanda, ma contro l'impero; l'Olanda spedire i suoi soldati ad invadere l'Inghilterrra, non ostante che la Germania, sua alleata, sia assalita dalla Francia, il Reno, importantissima linea commerciale, sia occupato dai nemici, un esercito francese sotto il maresciallo di Humières non sia lontano, e non ostante la persuasione che, ove l'impresa d'Inghilterra sia per riuscire, il solo principe d'Orange ne ricaverà vantaggio, ottenendo una corona; il re d'Inghilterra in fine, il quale, se fosse abbandonato dai suoi sudditi e dal suo esercito, non potrebbe sperare altro soccorso che dalla Francia, rifiutare tale soccorso, anzi ordinare l'incarceramento del suo inviato, che acconsentì alle offerte di Luigi XIV. Nè il solo inviato di Savoia era nell'impaccio di discernere lo stato delle cose politiche nella somma confusione, in cui pareva si trovassero: pare che anche altri ministri stranieri non riuscissero gran che a trovar la ragione, per la quale tali fatti accadevano. Ma ogni cosa si chiarisce ponendo mente agli errori del sovrano di Francia (1), il quale, inimicatasi l'Olanda, non seppe impedire ch'essa fornisse aiuto all'Orange, e, assalendo l'impero e minacciando il papa, irritò gli Stati cattolici, che nell'impresa di Guglielmo più che il trionfo del protestantesimo in Inghilterra videro la caduta di un governo ligio alla Francia e l'inalzamento di un nuovo ad essa nemico. Da ciò pure s'intende il dubbio contegno dell'ambasciatore di Spagna a Londra e la riservatezza nelle sue parole, la quale si scorge nella relazione del nostro inviato (2).

A Londre ce 21 8bre 1688 (3).

Monseigneur

Le vent contraire qui nous prive des novelles de Paris, et par conséquent du Piedmont, est le mesme, à ce qu'on dit, qui nous est favorablè pour empêcher la descente de M.r le Prince d'Orange. Cepend.t, Monseig.r, je ne puis mender à

(1) L'assedio di Philippsbourg fu a Luigi XIV consigliato dal Louvois, che un suo biografo cercò di scusare, scostandosi dal criterio, con cui da tutti gli storici erasi tal fatto giudicato. Vedi ROUSSET, *Histoire de Louvois*, t. IV, Paris, 1863, p. 106 e segg., la cui opinione è combattuta nell'opera del conte di LORT-SÉRIGNAN, *Guillaume III stathouder de Hollande et roi d'Angleterre*, Paris, 1880, la quale uscì nello *Spectateur militaire* (1875-1879), e concerne specialmente le guerre di Guglielmo, con documenti inediti dello Archivio francese della guerra.

(2) Dopo la sua caduta, Giacomo mandò al papa, per ottenere soccorsi, un inviato, il quale si lagnò acerbamente dell'ambasciatore Ronquillo, incolpandolo di aver cooperato agl' infortunii del re d'Inghilterra; ma Innocenzo XI non ebbe per Giacomo che parole di compatimento. Intorno a ciò si trovano ragguagli nella corrispondenza del residente di Savoia a Roma (Archivio di Stato, Lett. min., *Roma*, mazzo 115).

(3) Giovedì, 11 ottobre.

V. A. R. que ce que l'on va faisant icy pour s'opposer à cett'invasion des Hollandois, qui fait à présent l'entretien des beaux esprits de l'Europe. Pour moy, Monseig.r, j'advoüe mon foible dans cette conioncture, et n'ay pas assez de discernement pour accorder les démarches des souvrains qui sont intéressés dans cett'affaire. Le Roy de France fait menacer les Estats Généraux s'ils attaquent l'Angleterre, et lors qu'il le croit, il s'éloigne d'eux, et va à Philisbourg. Les Hollandois voyent les places de leurs alliés investies, leurs ennemis se rendre maistres du Rhin qui est pour eux, à l'esgard du commerce, comme les Indes; d'un autre costé, Mons.r d'Hummière avec un armée considérable, et l'on prétend qu'ils donnent leurs trouppes pour envahir un Royaume qui, en ce cas, ne seroit pas pour eux, mais pour le Prince d'Orenge. Le Roy d'Angleterre qui, si son Peuple et ses trouppes ne luy estoyent pas fidèles, ne peut avoir du secour que de la France, rapelle son Envoyé, le fait mettre à la Tour de Londre pour en avoir demendé, et fait une déclaration aux Estats qu'il n'a point d'allience avec la France, et qu'il est prest à prendre des mesures avec eux pour maintenir la paix de Nimèghe. Tout cela, Monseig.r, embarasse un esprit peu éclairé comme le mien, et je ne dois pas m'en estoñer, car M.r l'Ambassadeur d'Espagne ces iours passés, parlant à l'Envoyé Palatin, au secrétaire de l'Empereur et à moy sur les affaires présentes, et voyant que nous aplaudissions à ce qu'il disoit, nous respondit: Messieurs, pour bien parler sur cette matière, il faut avoir 13 années de goutte et 37 de ministère comme moy. Il seroit à souhaitter, Monseig.r, comme je luy dis, d'avoir les dernières à son temp, mais pour les premières, je n'aspire point à tant de pénétration à ce prix là. Je m'estend, Monseig.r, sur des choses de cette nature, parce que, despuis l'ordinaire passé, il n'y a que deux ou trois novelles de conséquence. M.r de Skelton est sorti de la Tour, et le Roy luy donne un Rég.t d'Infanterie: le Comte de Denby, qui fit le mariage de la Princesse d'Orenge, et qui est dans les intérest de M.r le Prince, escrivit ces iours passés une fort belle lettre à S. M., en luy offrant ses services; on en auroit tiré un bon augure, mais l'on a apris du despuis que, dans la province où il est, il n'agit pas comm'il escrit (1). La Ville de Londre semble vouloir déià se prévaloir des priviléges qu'on luy a rendu, et ne voudroit pas de chapele catholique dans son enceinte; sans que le Milord Maire accourut à celle du Résid.t Palatin, dimanche passé il y arrivoit un grand scandale; et l'on croit que si le Roy est obligé de partir, il ne sera pas peu si on laisse les chapelles de Weismister (2), qui est la Ville, où la Cour et la pluspart des Ministres estrangers demeurent. Quoyque le Roy ayet dit, pour faire voir la confience qu'il a dans son peuple, de laisser icy la Reyne et M.r le Prince de Galles, il est seur qu'Elle prit hyer la résolution d'aller en cas d'allarme à Portchmut (3). Pour moy, Monseig.r, je ne sçay pas encore ce que je deviendray, et je suis trop loin pour attendre là dessus

---

(1) Tommaso Osborne conte di Danby fu uno dei sette segnatarii dell'invito al principe d'Orange di venire nell'isola. Egli trovavasi nel paese di York.

(2) Westminster.

(3) Portsmouth.

les ordres de V. A. R.; quoyque le terme d'un séiour raisonable pour un Envoyé extraord.re soit expiré, il me semble peu convenable de demender auiourduy l'audience de congé, quand on dit: demain le Prince d'Orenge arive. Il y a icy de mes collègues que je consulteray et d'autres amis sages et prudents, dont je prendray l'advis telement que V. A. R. doit estre persuadée que, dans cette conioncture, je ne feray pas un pas qui soit indigne de mon caractère et de la qualité de

Monseigneur
D. V. A. R.

Très humble, très ob.t et très-fidèle Ser.r
et Suiet
C. M. Roder (1).

Guglielmo si accomiatò dagli Stati Generali il 26 (16) di ottobre, e tre giorni dopo partì dal porto di Helvoetsluys. La lettera del Roero, scritta il 28 (18), contiene ragguagli intorno alle notizie, tra loro contrarie, che giungevano alla Corte sulla prossima venuta degli Olandesi. Si diceva che la loro armata era salpata; giungeva la notizia che alcune sue navi erano perite; più tardi correva la voce essere stata veduta dalla spiaggia inglese; finalmente si sapeva ch'essa non aveva ancora sciolto le vele. L'ambasciatore d'Olanda perseverava nel protestare che la spedizione dell'Orange non era diretta contro l'Inghilterra; anche gli Stati Generali in una risposta fatta al marchese di Albeville il 14 (4) di ottobre avevano con modi assai ambigui nascosto i loro intendimenti, pur affermando di non voler entrare in guerra col re e col popolo inglese e di bramare solamente la quiete e la concordia in Inghilterra e la conservazione della pace di Nimega.

---

(1) Il duca rispose il 6 di novembre: « Nous avons receu en mesme temps, par l'ordinaire de « cette semaine, deux de vos lettres, en date du 14e et du 21e du mois passé, les quelles nous font « remarquer votre exactitude à nous mander les nouvelles du pays, où vous estes, qui attirent « présentement l'attention de toute la chrestienté. Nous voyons comme le Ciel semble s'opposer « visiblement à l'exécution du dessein pernicieux du Prince d'Oranges, par la continuation du vent « contraire au départ de sa flotte, ce qui a donné plus de temps à Sa M.té Britannique de se pré- « cautionner contre l'orage qui paroissoit la menacer et de prendre toutes les mesures que la « necessité et la prudence luy ont également conseillé en cette conjoncture, y ayant tout lieu de « croire qu'elles rendront vaine l'entreprise du dit Prince, s'il continue dans la résolution de la « tenter. Nous avons vu volontiers les judicieuses réflexions que vous faites sur les affaires présentes, « dont le temps dévoilera bientost les mistères, qui ont obligé des puissances si considérables à « faire des démarches si opposées entre elles. Il est bien cependant que vous ayez differé de de- « mander votre audience de congé pendant que le bruit de la prochaine arrivée du Prince d'Oranges « sur les costes d'Angleterre tenait la Cour dans une juste agitation, et n'ayant rien de plus à « vous dire par ces lignes que pour vous assurer de notre particulière protection, etc. ».

Giacomo frattanto continuava a tentare di richiamare a sè, per mezzo di concessioni, i protestanti. Restituì a loro il collegio della Maddalena di Oxford, che, dopo una questione sorta tra lui e i membri del collegio per la elezione del presidente, avea dato ai cattolici. Questa ed altre concessioni erano state chieste dai vescovi anglicani e dal re accettate. Altre furono da essi domandate, ma Giacomo non vi volle consentire, specialmente rispetto alla facoltà di dispensare. Essi poi avevano fatto promessa al re di non comunicare ad alcuno il tenore delle petizioni; tuttavia qualche cosa erane trapelato (1), ed era particolarmente causa di sdegno per il nostro inviato la domanda fatta al re da' vescovi di potergli esporre le ragioni, che dovevano indurlo a ritornare alla religione protestante professata da suo padre e da suo avo. Si attendeva fra pochi giorni l'arrivo dell'Orange, che, secondo il Roero, non sarebbe a nulla riuscito se, in vece di apparire quale campione del protestantesimo e della libertà del popolo inglese, fosse venuto con lo scopo di acquistare il trono.

A Londre ce 28 8bre 1688 (2).

Monseigneur

Il ariva Lundy la novelle que l'escadre d'Amsterdam avoit perdu 12 vaissaux à la sortie du Texel (3); ell' estoit si bien circonstentiée dans son détail que tout le monde la croyoit, iusqu' au Roy mesme qui la fit lire tout haut dans l'antichambre de la Reyne. Cependant, Monseig.r, 3 heures après, on receut un courrier de M.r d'Albyvile, et voyant que dans ses lettres il parloit de tout autre chose, on comencea mettre en doutte si cela estoit véritable, et de fait on reconut que c'estoit un conte fait à plaisir et que le nom des vaissaux et des capitaines, qui s'estoient perdus, estoit le mesme que celuy que l'on voyoit dans une relation imprimée d'une borasque qui fit échoüer une partie de la flotte de Hollande, il y a 3 ou 4 ans. Le mesme iour, on fit la cérémonie du basteme de M.r le Prince de Galles dans l'église de S.t James; la Reyne Doüarière et M.r le Nonce le tinrent sur les fonts, ce qui fit dire aux protestants que l'on pouvoit bien choisir un autre parrain que le Pape dans cette conioncture; on luy mit nom Jaques, François, Édoüard. Mardy, Monseig.r, nous eumes un autre novelle bien diférente de celle

(1) Vedi Macaulay, *History of England from the accession of James II*, vol. III, p. 271, ed. Tauchnitz; Mazure, *Histoire de la révolution de 1688 en Angleterre*, Paris, 1825, t. III, p. 138 e segg.

(2) Giovedì, 18 ottobre.

(3) Cf. Clarendon, *Diary*, oct. 15 (25).

du jour précédent: on vint dire que l'on avoit aperceu la flote prez des costes d'Anglet.e; cela mit tout le monde en allarme, et l'on se préparoit déià qui pour suivre le Roy à l'armée, qui pour suivre la Reyne à Portchmut; l'on fut pourtant asseuré, quelque temps aprez, que le tout ne seroit embarqué que demain, et M.r l'Ambassadeur de Hollande soustint hier au matin efrontément au Roy que cet armement n'estoit point contre luy, et il se laissa entendre qu'il pourroit estre contre la France; il me dit à moy mesme la mesme chose, et M.r de Barillon, à qui j'en fis le récit, me respondit que c'estoit mettre les Ambassadeurs en méchante réputation que de mentir si impunément. Il est vray, Monseig.r, que l'on mande de l'Haye, par le dernier Ord.re, que les trouppes embarquées sont destinées contre l'Angleterre et que, cepend.t, l'Ambassadeur des Estats a ordre d'en désabuser S. Maiesté. V. A. R. verra, par la cy iointe response faicte à M.r d'Albyvile qui est assez mistérieuse (1), les intentions de ces Mess.s qui obligent le Roy, pour s'asseurer de ses peuples, de répendre tout les iours de novelles grâces. Il a rendu les priviléges à toutes les provinces et la corporation des membres des Villes, qui regarde proprement la liberté de l'élection des Parlementaires. Il a restabli le collége de la Madlaine d'Oxfort entre les mains des Protestants, de qui il l'avoit osté despuis six mois en faveur des Catholiques. Ce n'est pas assez, Monseig.r, pour les contenter; il faudroit voir les pétitions des Evesques pour comprendre iusque ou va leur impertinence, mais on ne peut pas en sçavoir le détail, car il n'y a que le Roy, qui en sache le contenu, et les susdit Evesques, qui iurèrent à S. M., en les présentant, qu'ils ne les auroient comuniqué à persone, et qui la suplièrent d'y bien réflechir comm'à une chose qui regardoit purement le bien de son Estat, et la quele dépendoit seulement de sa grâce Royale. L'on sçait, cepend.t, Monseig.r,

---

(1) Ecco il sunto della risposta degli Stati d'Olanda al marchese di Albeville, unito con la lettera del conte Roero:

« L'on a, cependant, donné une réponce au Marquis d'Albiville sur les derniers mémoires — « sçavoir qu'on croyoit avoir eu suiet de demander des esclaircissements touchant l'allience entre la « France et l'Angleterre, dont le Comte d'Avaux avoit parlé; mais comme il plairoit à S. M. B. de « la désavoüer sérieusement, on déclaroit de n'avoir eu, ni d'avoir encore aucune intention d'entrer « en guerre avec S. M. B. ou avec la nation Angloise, puisque il n'y avoit rien qui leur estoit plus « cher, et qu'ils prissent plus à cœur que de vivre avec S. M. B. et la nation Angloise dans une « sincère et cordialle amitié; que c'étoit avec beaucoup de regret qu'on avoit veu que ceux qui « envioient ce bonheur avoient tasché d'exciter en S. M. B. de très grands maiscontentements contre « cet État, et l'avoient voulu porter à leur en donner des marques éclattentes, seulement à cause « que L. H. P. regardoient, avec grande douleur et déplaisir, les troubles que la conduitte irregulière « de quelques uns causoit à la nation, tant à l'égard de la Relig.n rélformée, qu'à celluy de la « liberté et seureté de la nation même.

« Que L. H. Puiss.es ne souhaittoient rien tant que de voir ottés sincèrement et entièrement « annéantis tous suiets de maicontentement, la Religion rélformée maintenue et asseurée et la liberté « de la Nation conservée, affin que S. M. B. et la Nation puisse rentrer en bonne intelligence et « confience réciproque; et qu'elles protestent sincèrement et en vérité de n'avoir autre but que « le repos désiré des Royaumes de S. M. B. et la coopération puissente pour la conservation de la « paix de Nimmègue et des traittés qui l'ont suivie ».

qu' il y en a 12, dont quelques uns sont ceux que V. A. R. a déià veu acordés dans mes lettres; les autres sont d'une nature, qu'il faudroit estre sans foy Catholique et sans Courone sur la teste pour s'y résoudre; car il s'agit de se retrencher du pouvoir de dispencer de la Loy, de mettre les seuls protestants dans les charges, de donner des asseurences de ne plus revenir de ce qu' il a fait despuis un mois en faveur des peuples, et ce qui est de plus détestable, ils insinuent à S. M. adroitement que le parti le plus seur seroit de se rendre à la religion protestante. L'on attend M.[r] le Prince d'Orange dimanche ou Lundy, et il n'y a, peut estre, que moy seul qui en doute et qui croit, en cas qu'il viene, que ce ne sera pas en conquérant d'un Royaume, mais en protecteur de la religion Protestante et en libérateur de la nation Angloise, que l' on suppose dans l' esclavage sous les loix d'un Roy Papiste; car s' il estoit si mal advisé de prétendre d' abord la Royauté, il n' auroit qu' à conter sur les estrangers qu' il mène avec luy, et non pas sur ceux du Pays qui luy seroient infailliblement contraires. Enfin, Monseig.[r], voyez la plus terrible affaire qui soit iamais arrivée, et si elle ne devient pas funeste, il y aura du plaisir d' en voir le dénoüement, mais si elle nous mène d'un quartier de Lune à l' autre, comm' ell' a fait iusqu' à présent, il pourrait m'arriver comm' à l'Envoyé de Pologne qui estant arivé 15 iours aprez moy et se treuvant la bourse mal garnie, est obligé de prendre dans deux iours son audience de congé. Si cela est, Monseig.[r], j' auray de quoy me consoler d' estre plus tost aux pieds de V. A. R. et de pouvoir l'asseurer en persone du très profond respect avec le quel je suis

Monseigneur
D. V A R.

Très humble, très ob.[t] et très fidèle
Ser.[r] et Suiet
C. M. Rouer (1).

(1) Il duca rispose il 13 di novembre: « Nous répondons par ces lignes à la lettre que vous « nous avez écrite le 28[e] du mois passé, par la quele vous nous informez, avec votre exactitude « ordinaire, des nouvelles du pays, où vous estez, qui deviennent toujours plus considérables, et « tiennent tousiours plus en suspense l'attention universelle. Nous remarquons comme on attendoit « dans peu de jours l'arrivée du Prince d'Oranges sur les costes d'Angleterre, et qu'ainsi on étoit « à la veille de voir l'éclat de cette nüe, non obstant quoy il est à admirer que l'Ambassadeur de « Hollande aye fait les protestations que vous nous marqués que cet armement n' estoit pas destiné « contre Sa M.[té] Britannique, ce qui est soutenu en apparence par la response artificieuse que les « États Généraux ont faite à l'Envoyé de Sa M.[té], dont nous avons veu volontiers la copie, et dont « il est pourtant bien aysé de découvrir le fonds. Il ne faut pas s'étonner si les Evesques profitent « de cette conjoncture pour en tirer le plus d'avantage qu'ils peuvent pour la religion protestante. « Nous attendons avec impatience d'apprendre le succès de cette importante affaire, par l'interest « particulier que nous prenons au bonheur de Sa M.[té], pour qui nous faisons des vœux très ardens, « avec espérance que tout tournera à sa gloire et à l'afformissement de sa couronne; et vous assurant « sur ce de notre protection, etc. ».

Il dubbio (che poi si riconobbe senza fondamento) intorno alla supposizione della nascita del principe di Galles fu una delle cause, che avevano indotto l'Orange a tentare la sua impresa. Giacomo pensò di presentare al suo consiglio privato, ai pari spirituali e temporali, che si trovavano a Londra o nei dintorni, ai giudici, al Lord Mayor ed agli *aldermen* della città le prove del parto della regina (1° novembre (22 ottobre)). Anna, principessa di Danimarca, secondogenita di Giacomo, invitata a tale adunanza non v'intervenne, adducendo per iscusa ragioni di salute: vi fu però la vedova di Carlo II. Il padre Petre, gesuita, membro del consiglio privato ed odiatissimo dagli anglicani, si astenne dal venire. Quest'atto era umiliante per il re; nè altrimenti fu giudicato dall'inviato di Savoia, che, informando di ciò il suo sovrano, lo ragguagliava intorno alle forze navali del re d'Inghilterra, al comando dell'esercito offerto al francese conte di Roye e da questo rifiutato, ai rimproveri del re all'ambasciatore spagnuolo (fatto, da pochissimi conosciuto), e pareva che avesse ancora qualche dubbio nell'attribuire gl'indugii dello statolder soltanto al *vento papista*, come allora dicevasi, da cui le navi olandesi erano state costrette a rientrare in porto.

A Londre ce 4 9bre 1688 (1).

Monseigneur

V. A. R. sera, peut estre, ennuyée de n'entendre iamais parler que de vent, et, cependant, c' est luy qui donne le mouvement aux affaires d'Angleterre, et qui fournit matière pour escrire. Il a esté, Monseig.r, quelque temps protestant, sans que l'on ayet profité, et il est à présent Papiste, c' est à dire contraire aux desseins de M.r le Prince d' Orange. Le Roy fit assembler Lundy le conseil privé, tout les Evesques et les Gentilshommes Pairs qui se treuvoient dans la Ville, la Reyne Doüarière, les dames et autres persones qui estoient présentes à l'accouchement de la Reyne. Les dernières ont declaré sur serment ce qu' elles sçavent de la naissence de M.r le Prince de Galles. La Reyne Doüarière fut interogée par le Roy mesme, et les autres par le Chanchelier qui fit lever un acte autentique des responces, dont il y aura bien tost un imprimé que je pourray envoyer à V. A. R. Tout ce qu' il y a eu de remarquable à l' esgard de l'assemblée est que le Père Petter, Jésuite, qui est du conseil privé, ne s' y est point treuvé, pour ne pas empêcher les Evesques d' y assister, qui ont déclaré ne vouloir iamais consulter en sa compagnie. On voit, Monseig.r, à quoy les Roys d'Angleterre sont reduits: son frère fut obligé de preuver que la Reyne estoit sa femme et non pas la mère de M.r de Monmouth, et celuyci est contraint de faire des actes publiques pour attester que M.r le Prince de Galles est son véritable fils

(1) Giovedì, 25 ottobre. La lettera ha per isbaglio la data del 4 ottobre.

et non pas supposé. J'ay mal parlé, Monseig.r, quand j'ay dit son fils, car cela n'admet pas des preuves. La question est qu'il soit fils de la Reyne, et il a fallu faire voir par des tesmoins qu'ell' a esté grosse et qu'elle a accouché. La flotte du Roy doit se mettre en mer d'un moment à l'autre. Ell'est de 31 vaissaux et 18 brûlots et, dans peu de iour, on en ioindra cinq autres, sans conter ceux qui croisent le détroit de Gibraltar, qui sont advertis de revenir le plus tost qu'ils pourront. Sa Maiesté a offert à M.r le Comte de Roye, réfugié de France, le commendement de l'armée, mais il l'a refusé sur le peu de pratique du pays et sur la langue qu'il ne possède pas; il suivra pourtant le Roy, et l'on conte beaucoup sur son conseil, particulièrement pour ce qui regarde la cavallerie. Mons.r de Losun (1) est arivé despuis peu de iour; il a esté fort bien receu à la Cour, et se prépare à servir S. M. dans cette conioncture. A l'esgard de la flotte enemie, comm' il ne passe aucun paquebot à cause du temp, on ne peut pas sçavoir où elle se trouve: on asseure pourtant d'avoir veu, samedy passé, 21 vaissaux qui furent obligés de rentrer dans les ports, à cause du mauvais temps. La novelle, Monseig.r, qui est de grande conséquence, et qu'il n'y a, peut estre, que deux ou trois persones qui la sachent, est que le Roy a fait de grands reproches à l'Ambassad.r d'Espagne, sur ce qu'il a pénétré que les Espagnols sont d'inteligence avec le Prince d'Orange, non pas pour luy ravir le Royaume, mais pour le contraindre les armes à la main à se liguer avec eux et les Hollandois contre la France, estant asseurés que le Parlement et le peuple ne refuseroit pas de luy fournir l'argent nécessaire; mais si, par malheur, ce Prince venoit en Angleterre avec des forces supérieures pour réduire le Roy à faire à sa fantaisie, je crois, Monseig.r, que son ambition le pousseroit plus loin. Pour ce qui regarde mon particulier, j'advoüe à V. A. R. que je comence à m'impatienter, et si, entre aujourduy et demain, il n'arive rien de nouveau, je demenderay samedy mon audience de congé (2), et comm'il faut 8 ou 10 iour pour les audiences, j'auray encor le temp de prendre d'autres mesures, si cette célèbre descente qui ne dépend plus que du vent, à ce qu'on dit, venoit se faire devant mon départ, et je suis avec un très profond respect

Monseigneur
D. V. A. R.

Très humble, très ob.t et très fidèle
Ser.r et Suiet
C. M. Rouer (3).

---

(1) Il conte Antonio di Lauzun, francese, che accompagnò poi nella fuga la moglie ed il figlio di Giacomo II.

(2) Dalla lettera, insieme con questa, scritta al ministro: « V. E. verra, par celle que j'escris « à S. A. R., que je me dispose à prendre mon audience de congé. C'est une résolution qui est fort « économique, parce que je me vois tout les iours obligé à augmenter ma table, à cause du concour « des honestes gens qui me vienent treuver à l'heure du disner, comme si j'estois un Ambas- « sadeur establi dans Londre. Je n'espère pas, Mons.r, d'avoir comerce avec celuy de Hollande, car « il persiste que je l'aille voir, comm' a fait celuy de Pologne, sans cérémonie; il paroit de temps « en temps à la cour avec la Faccia tosta, et il disoit encor ce matin qu'il est fâché du vent con- « traire, parce que cela empêche de voir la vérité de ce qu'il a tousiours dit ».

(3) Dava risposta il duca il 27 di novembre: « En recevant ce matin par l'estaphete la lettre que

Il 5 di novembre (26 ottobre) giunse alla Corte la notizia che l'armata olandese era salpata otto giorni innanzi; ma poco dopo si seppe che per il vento contrario avea dovuto ritornare indietro, ed avea sofferto alcuni danni, esagerati però a Londra. Guglielmo non si perdette d'animo, non volle discendere dalla sua nave, e con sollecitudine provvide a riparare le perdite. Il 6 di novembre (27 ottobre) fu licenziato da tutte le sue cariche il ministro lord Sunderland, e a lui venne sostituito nell'ufficio di segretario di Stato per il mezzodì il conte di Middleton.

Sintomi inquietanti cominciavano a manifestarsi nella capitale. La chiesa dei carmelitani scalzi fu saccheggiata dai commessi di bottega a' dì 8 di novembre (28 ottobre), e maggiori guai si temevano ancora. Il 10 di novembre (31 ottobre) fu arrestato un ufficiale inglese, di servizio nell'esercito olandese, che portava seco esemplari del proclama di Guglielmo. Condotto dinanzi al re, non si prestò fede alle sue scuse, e fu incarcerato. Quanto all'armata olandese, l' Albeville con lettera del 5, giunta al re il 9, annunciava ch'essa non avrebbe sciolto le vele prima di dieci giorni. Il re voleva dimostrare intrepidezza, e a coloro, con cui parlava, mostrava speranza di battere i nemici.

A Londre ce 11 9bre 1688 (1).

Monseigneur

Il est arivé tant de courriers cette semaine, et il nous ont fourni tant de novelles que V. A. R. me permettra de les escrire en forme de journalier. Le premier, qui est celuy du Vendredy, nous aprit que la flotte Hollandoise s'estoit mise à la voile le 28 du passé (2), que M.r le Prince d'Oranges avoit dans son bastiment la femme

---

« vous nous avez escritte le 4e de ce mois, nous avons appris de Paris le succès glorieux du combat « que l'armée navale de Sa M.té Britannique a eu contre celle de M.r le Prince d'Orange, en façon « qu'il y a lieu de espérer que, pour ce coup, le pernicieux dessain de ce dernier aura échoué, et que « Sa M.té Britanique, ayant plus de temps de prendre ses mesures, rendra vaines les tentatives « de ses ennemis et de ceux de ses suiets qui s'estoint éloignés de leur devoir.

« Nous avons veu par vostre d.te lettre la formalité que le Roy a jugé à propos de faire pour « détromper ses peuples sur la fausse supposition qu'on avoit débitée, que M.r le Prince de Galles « fust un enfant supposé; nous avons veü aussy les reproches que Sa M.té a faites à l'Ambassadeur « d'Espagne, et comme nous croyons que cette lettre ne vous trouvera plus à Londres, nous l'achevons, « vous asseurant de nostre particulière protection et priant Dieu, etc. ».

(1) Giovedì, 1° novembre.

(2) La partenza si compiè nella notte del 29 (19) ottobre al 30 (20). Un vento violentissimo di nord-ovest si levò nella sera del 30; il 31 (21) si dovette dare il segnale del ritorno, e il 1° di novembre (22 ott.) una parte dell'armata era ritornata nel porto di Helvoetsluys. Cf. la *History of his own times* del BURNET, rifugiato inglese in Olanda, che accompagnò Guglielmo.

supposée mère de M.r le Prince de Galles, que tout ensemble estoit plus de 300 voiles, mais qu' il n' y avoit que 52 vaissaux de guerre, ce qui fit d'abord envoyer un ordre au Milord Dartmouts (1), qui commende la Flotte du Roy, par comission de sortir et livrer bataille aux ennemis. Le Samedy, 6 du courant, on receut le Manifeste des Estats, dans lequel on voit les raisons qui les obligent d' assister M.r le Prince d' Oranges de quelques navires et trouppes auxiliaires; il parle sur ce que le Roy empiète sur les lois fondamentales, suprime les privilèges, introduit le Papisme, ruine la religion protestante, et a estroite allience avec le Roy de France, leur ennemy. Il déclare que ce n' est point dans le dessein d'envahir le Royaume, ni détroner S. M., ni faire tòrt à la succession légitime, ni chasser les catholiques Romains, mais assister la Nation dans le restablissement de leurs lois et privilèges enfraints, et pour cela convoquer un Parlement libre, qui asseure la Noblesse à l'advenir. Le soir du mesme Samedy, M.r de Sunderland fut privé de toutes ses charges. Le Roy dit à son conseil que ce n' estoit point pour infidélité, mais pour d' autres raisons à luy connues. Ce qui j' en ay pu sçavoir est, Monseig.r, qu' il a remis, ou bien s'est laissé prendre, le traitté secret entre les deux Rois, le quel a esté porté au Prince d' Orange par un sien parent et intime amis. Le dimanche, l'on aprit (2) que la flotte ennemye avoit pencé se perdre: le Prince d'Oranges périr, et deux ou trois Milords avec le fils de M.r de Schonber (3), que l'on avoit ietté à la mer 1500 chevaux, que plusieurs petit batteaux avec de l'Infanterie avoient fait naufrage, et que l'on estoit rentré dans les ports (4), où M.r le Prince n' avoit iamais voulu descendre de son bord, mesme à la prière des députés des Estats, que l' on avoit donné ordre à tout les paysans voisins d'amener leurs chevaux pour remplacer les perdus, que l'on avoit commendé un Rég.t d' infanterie qui est à Mastrich (5) de venir en diligence, et que l'on en auroit demendé d'autres, si l'on n' avait pas de la jalousie de la marche de M.r d'Hummière (6). Le Lundy, qui fut la feste de Milord Mair, des Garçons de boutique, aprez s'estre ennivrés, allèrent à l' Église des Carmes Déchaussés, enfoncèrent les portes, prirent tout ce qu' il y avoit dedans, et le portèrent sur la place voisine pour en faire un feu de joye. Par bonheur, les Moines en avoient retiré le iour précédant les choses sacrées. On apréhende, Monseig.r, pour Lundy qui vient, qui est le iour que l'on estoit acoustumé de brûler solemnelement l' effigie du Pape, ce qui ne se faisoit plus despuis 7 ans, parce que le feu Roy l'avoit défendu; mais, à present, que l' on a rendu les privilèges à la Ville, ils croiront avoir droit de le faire et de l'accompagner avec d'autres crimes,

---

(1) Lord Giorgio Dartmouth, comandante dell'armata inglese.

(2) Secondo il giornale del Clarendon la notizia giunse al re il giorno antecedente, e soltanto quattrocento sarebbero stati i cavalli gettati in mare dagli Olandesi.

(3) Il conte Federigo di Schomborg, maresciallo di Francia, di origine tedesca e protestante, rinunciò alla sua carica, al tempo della revocazione dell' editto di Nantes, e andò a Berlino. Fu nominato luogotenente del principe d'Orange, e insieme con esso era pure suo figlio Meinardo.

(4) Secondo il Burnet, le perdite furono minori. Solamente cinquecento cavalli perirono per mancanza di aria.

(5) Maestricht.

(6) V. pag. 123.

puisque l'on n'ose pas le punir (1). Mardy, on receut la novelle que la flotte ennemye, quoy qu'elle n'eut pas encor réparé ses pertes, auroit profité du premier vent, mais M.r d'Albyville, qui le mende, ne le croit pas, et il marque dans sa lettre, qui est du 5, qu'il falloit dix iours. Cependant, Monseig.r, à l'heure que j'escris, tout le monde dit là dessus son sentiment. Qui la croit en haute mer, qui preste à descendre, qui déià descendue vers le port; mais on ne peut pas s'asseurer sur aucun de ces discours, et il faut attendre des lettres ou des hommes exprés, qui viennent de la coste, pour en sçavoir la verité. Pour les autres novelles, Monseig.r, je les ay oüies la plus part de la mesme bouche du Roy, qui est tousiours intrépide, et se croit en estat de battre les ennemis; il aura 25 mille hommes sur terre de la meilleur mine du monde, mais on se fie plus à l'armée de mer quoyqu' elle soit inférieure en nombre de celle des Hollandois. Enfin, Monseig.r, le vent est devenu Protestant despuis 3 iours, mais il est si impétueux aiourduy que l'on ne doutte pas d'une tempeste. Il semble iusqu'à présent que Dieu combatte pour le Roy, et M.r le Prince d'Oranges a déià eu tant de traverses dans cet entreprise que nous devons en tirer un bon augure. Hyer au soir, Monseig.r, on arresta un Gentilhomme Anglois, Capitaine dans les trouppes de Hollande, qui estoit venu pour rependre des manifestes du susdit Prince; il fut mené au conseil devant S. M., où il nia tout, et dit estre venu pour luy offrir ses services; il doit pourtant estre convaincu, et l'on l'a mis dans la prison, d'où l'on ne sort iamais que pour estre conduit à la potence. L'ordinaire qui vient, V. A. R. aprendra l'issüe, ou le comencement de cette grand' entreprise et en mesme temp le iour de mon depart, qu'a esté suspendu cette semaine, à cause des novelles qui arrivoient tout les jours. Je receus hyer au soir deux lettres dont V. A. R. m' a honoré, et je suis avec un très profond respet

Monseigneur
D. V. A. R.

Très humble, très ob.l et trés fidèle Ser.r
et Suiet
C. M. Rouer (2).

La sera del dì 11 (1°) di novembre le navi olandesi levarono per la seconda volta l'àncora. Il vento, ora divenuto *protestante*, favorì la navigazione nella Manica, cosicchè la domenica, 14 (4), anniversario della nascita di Guglielmo e del suo matrimonio con Maria, l'armata olandese era presso l'isola di Wight, e il giorno appresso il principe sbarcava a Torbay (3). Appena gli Olandesi toccarono terra, il vento ricominciò a

---

(1) L'effigie del papa solevasi bruciare il 27 (17) di novembre, anniversario della nascita della regina Elisabetta. Cf. la lettera del 25 dello stesso Roero, più sotto riportata, e l'estratto di lettera del Barillon, in Mazure, *Hist. de la rév. de* 1688 *en Angl.*, t. III, p. 183.

(2) Il Roero il 16 scrisse al ministro annunciandogli la ribellione della fortezza di Hall.

(3) Il 15 (5) di novembre era l'anniversario della congiura delle polveri. Lieti auspizii da ciò traevano gl'Inglesi, che facevano parte della spedizione.

spirare impetuosamente da oriente, suscitando una bufera, che sorprese le navi inglesi, uscite per inseguire le nemiche, e le costrinse a riparare nel porto di Portsmouth.

A Londra dapprima si pensava che Guglielmo sarebbe sbarcato nella contea di York: quando seppesi che la sua armata veleggiava nella Manica, si mandarono soldati verso l'ovest; e, quando si vide che Portsmouth non era minacciata, si riunirono le forze a Salisbury. Il comando dell'esercito, rifiutato dal conte di Roye, era stato preso dal conte di Feversham. Il re era rimasto a Londra, sia perchè temevasi che, durante la sua lontananza, la capitale si ribellasse, sia perchè alla Corte credevasi ancora che gli Olandesi non incontrerebbero nelle popolazioni il favore, che speravano. La lettera del conte Roero del 18 (8) di novembre dimostra le speranze, che illudevano la Corte, e quale pensavasi fosse la ragione, per cui l'Orange era approdato nell'occidente e non nel nord, siccome si credeva da principio.

Giacomo poi rispose al proclama di Guglielmo, mentre s'impadroniva di quanti esemplari di questo proclama potè avere, ed interrogò i lord e i prelati, trovantisi a Londra, se essi erano complici del principe, che aveva dichiarato di venire nell'isola indotto dall'invito di pari spirituali e temporali.

A Londre ce 18 9bre 1688 (1)

Monseigneur

Il ne s'agit plus de faire des réflections sur la descente que le Prince d'Orange méditoit de faire en Angleterre. V. A. R. verra ce qu' il en est, par la Gazette que je prend la liberté de luy envoyer cet ord.re, parcequ' elle contient tout ce que l'on sçait à la Cour, touchant la susdite descente.

Il y a de surplus, Monseig.r, la déclaration du Roy digne d'estre leüe, qui est proprement la responce faicte au Manifeste du Prince d' Oranges, que je marquay à V. A. R., dans ma précédente, avoir esté pris entre les mains de ce Capitaine qui fut fait prisonier ces iours passés. Despuis cela, Monseig.r, il est arivé deux courriers qui nous aprenent que le Gouverneur de Whayt, petit isle devant Porthsmuths, non seulement a refusé de donner des vivres aux Hollandois, mais il a arresté ceux qui sont venus en demander; que le Prince s'est logé dans un chasteau d'un Gentilhomme Catholique, dont la femme et les sœurs se sont sauveés toutes seules à cheval; que les paysans se sauvent, emportent ce qu' ils peuvent de fourage, et brûlent le reste;

(1) Giovedì, 8 novembre.

que le peuple de Cournoüaille offre 5000 hommes au Roy, et que la ville d'Exter, qui est la première à l'invasion des ennemys, les reconoistra pour tels, et non pas pour des protecteurs. Si tout cela est vray, Monseig.r, Sa Maiesté doit espérer des les voir confondus, et c'est un grand exemple pour le reste du pays qui a lieu d'estre persuadé de l'ambition du Prince d'Orange et non pas de son amitié pour la nation. Les trouppes marchent incessentmant vers l'Oüest, et dans peu de temp le Roy aura en Angleterre 40 mill'hommes, sans conter la milice et l'arrière band. On n'est point encor asseuré du iour de son départ; et mesme il semble que plusieurs de ses bons serviteurs s'y opposent, car jusqu'à présent Londre paroit fidèle, et l'on croit que sa présence y contribue beaucoup; au lieu qu'en son absence elle pourroit se souslever et mettr'en danger la Persone de la Reyne et de M.r le Prince de Galles qui devoient aller à Portchmut, si la flotte eut tiré du costé du Nort, comme l'on croyoit infailliblement; et il est à iuger que le Prince d'Oranges a véritablement changé de dessein, voyant sa cavallerie en méchant estat, pour avoir souffert dans les bourasques de mer, et il a choysi un pays fort, plein de ravines et entrecouppé de murailles; ce qui peut encor avoir un autre veüe, Monseig.r, qu'estant adverti que l'assistence promise par les Peuples n'estoit peut estre si solide que l'on se l'estoit proposé, il se soit mis dans un endroit propre pour voir leurs mouvement, et s'il ne réuscit pas en conquérant, prendre le parti de protecteur de la Nation ou de médiateur entr'elle et le Roy; mais S. M. est résolue de plustost périr que de iamais convoquer Parlement, ou faire autre chose, pendant qu'il y aura des trouppes estrangères dans le Royaume. Je ne dois pas oublier de faire sçavoir à V. A. R. que M.r le Prince d'Oranges a mis dans son Manifeste (dont les copies sont toutes entre les mains du Roy) qu'il vient en Angleterre demandé par les Seigneurs et le Clergé: là dessus Sa Maiesté a fait demender les Pairs et les Evesques qui se treuvoient à Londre; les premiers ont désavoüe et fait un acte publique qu'ils ont signé; les autres, Monseig.r, ont demandé du temp pour conférer avec leurs confrères, et, aprez quelques iours, ils vinrent déclarer au Roy qu'ils ne pouvoient pas répondre à moins de lire le contenu du Manifeste, sur quoy le Roy se mit en colère, et les renvoya, coñoissant, par leur démarche, qu'ils ne sont que trop complices de l'attentat du Prince d'Oranges (1); mais il faut, Monseig.r, dissimuler pour quelque temp, et si Dieu combat pour luy (comm'il est à espérer), l'on dira que Montmout l'a fait Roy, et l'Oranges le faira grand Monarque. L'on croit, Monseig.r, que les Hollandois ont fait un faux pas, et que leurs action produira un effect contraire, car ce Roy va devenir un ennemy irréconciliable à leurs esgard, et s'unira ouvertement avec la France pour les destruire, la quele on attend de iour en iour de voir profiter de cette conioncture pour leurs donner un atteinte. A propos de quoy, Monseig.r, le Roy dit ces iours passés une fort iolie chose, la Hollande entreprend tout, la France prend tout, et l'Angleterre souffre tout. Voylà, Monseig.r, ce qui regarde les affaires présentes que je considère plustost pour le commencement d'une guerre que pour l'invasion d'un Royaume.

---

(1) Intorno ai particolari de' colloquii del re coi pari temporali e spirituali cf. CLARENDON, *Diary*, nov. 2 (12); MACAULAY, vol. III, p. 295 e segg.

Le successeur de Sunderland dans la charge de secrétaire d'Estat du Mydi est un fort honest' homme, et je m' accomoderay bien plus tost de luy que de son prédécesseur. Je fus le voir, Monseig.r, il me receut parfaictement bien; il m' entretint fort longtemp, et me vint accompagner iusqu'à la chaise, au lieu que l'autre ne sortit que deux pas de sa chambre. Il s' appelle Milord Mydelton, et il estoit auparavant secrétaire du Nort. Je crois, Monseig.r, que je pourray cette semaine sçavoir le iour de mon départ; car si le Roy va fort loin, V. A. R. sçait que je n' ay ni équipage, ni ordre pour le suivre, et au premier ord.re j'aprendray la résolution, que j' auray prise, à V. A. R., de la quele je suis avec un très profond respect

Monseigneur
D. V. A. R.

Très humble, très ob.t et très fidèle Ser.r
et Suiet
C. M. Rouèr (1).

Gli Olandesi incominciarono ad avanzarsi nel paese il giorno seguente a quello del loro sbarco: il 19 (9) il principe giunse ad Exeter. Ivi egli

---

(1) Dalla lettera, insieme con questa, scritta al ministro: « Je n' ay pas eu de place dans la « lettre de S. A. R. pour luy marquer que hyer il ariva deux courriers de France, un de M.r de « Senclé, et l'autre de M.r de Louvoy, ce qui veut indiquer mouvement de trouppes sur mer, et « sur terre. L'Ambassadeur dit que ce n'est rien; mais, ce matin, comme j'estois dans la chambre « de la Reyne, je l' ay veu glisser dans une petite galerie avec le Roy, et ils sont esté longtemp « ensemble; il faut a cett'heure qu' il parle luy mesme à S. M., car, aprez la cheute de Sunderland, « il ne sçait à qui se fier. M.r Ferrery envoit a V. E. un sonnet qu'il a fait, que l'on a trouvé « admirable ».

Ecco il sonetto:

AL PRENCIPE D' ORANGES

su l'empio attentato contro l'Inghilterra.

Sonetto

Perchè tutta è velen l'aria che spiri,
supposto è il successor di Reggio letto!
perchè prole non hai, con torvo aspetto
pien di furor contro l'altrui conspiri!
Perchè trono non hai onde t'aggiri
entro la Reggia altrui cerchi ricetto!
di riveder mai più d'Orange il letto
non hai speranza, ed a' tre regni aspiri!
Non è gran rischio, il tuo arbuscel, che è il tutto,
contro tre scettri esporre: è grande usura,
ma pria che passi il mar, sarà distrutto.
E proverai se vieni, a tua sventura,
che l'arancio fa fronde e fiore e frutto
nel Brittanico suol, ma non matura.

non trovò buona accoglienza nel clero e nei magistrati: nè i gentiluomini del paese vennero a schierarsi sotto il vessillo, su cui, al motto degli Orange, *Je maintiendray*, erano aggiunte le parole: *pro religione protestante, pro libero parlamento.* Il vescovo della città prese la fuga; e, venuto da Giacomo, n'ebbe in compenso l'archidiocesi di York. Il Burnet, inglese accompagnante l'Orange, alla domenica, 21 (11), predicò nella cattedrale di Exeter. In Corte gioivasi perchè il nemico era stato ricevuto in tal modo, consigliato non tanto da fedeltà verso Giacomo, quanto da prudente riserbo; chè ancor fresca era la memoria della repressione in quel luogo compiuta al tempo della spedizione del Monmouth. S'intendeva pure con piacere che lord Lovelace fosse stato arrestato a Cirencester con alcuni compagni, mentre andava a congiungersi con gli Olandesi. Metteva però in pensiero la notizia della diserzione di tre reggimenti di cavalleria col colonnello Cornbury, comandante di uno di questi.

L'agitazione della capitale andava crescendo: le cappelle cattoliche erano assalite, e si paventavano tumulti per il giorno anniversario della nascita della regina Elisabetta, cioè per il 27 (17) del mese. Il re era rimasto a Londra, donde aveva stabilito di partire il 29 (19) per raggiungere a Salisbury l'esercito. Ma le notizie pervenutegli lo avevano consigliato a dar ordine di richiamare verso il Tamigi le milizie. Correva voce che al re si volesse chiedere un parlamento libero: egli però affermava di giudicare quale ribelle chi gli tenesse parola di accomodamento.

Intanto il nostro inviato, ricevuto in udienza dal re il 21 (11), preparavasi a partire, dopochè avesse pure avuto udienza dalla regina.

A Londre ce 25 9bre 1688 (1).

Monseigneur

V. A. R. aura peut estre déià apris que le Prince d'Oranges est entré dans Exeter, où il n'a trouvé aucune résistence, estant une ville ouverte sans garnison, et sans artillerie, mais, à son grand regret, il n'a pas reconũ dans le cœur des peuples ce qu'il s'estoit imaginé. Jusqu'à présent, Monseig.r, il n'a pu mettre dans son parti aucun Gentilhomme de la Province, encor moins le Clergé et le Corp de la Ville, mesme il est arivé une chose fort remarquable, que l'Evesque et les Chanoines s'estant retirés, le Docteur Brunel, Anglois insigne pour sa rébellion qui est secrétaire du Prince, se mit à prêcher dans la Cathédrale, et voulu obliger les curés

(1) Giovedì, 15 novembre.

qui sont restés à publier dans leurs églises le manifeste de son Maistre, mais il n'ont pas voulu y consentir, et l'on ne sçait pas si on pourra les forcer avec le temp. Quoy qu'il en soit, Monseig.r, il suffit d'aprendre que la Nation n'aplaudit pas à cett' invasion, et que le torrent des victoires n'est pas si rapide qu'on se l'estoit figuré. Le bon Dieu faira le reste, et puisqu'il a repandu ses grâces sur la maison Royale en luy donnant un successeur, il est à croire qu'il ne voudra pas que ce mesme successeur soit la cause manifeste de sa perte. Le Roy doit partir Lundy pour aller ioindre son armée qui est campée à la plaine de Salisbury; il y a déià des trouppes avancées a Blancfort (1) et a Varisouuister (2), qui est à 20 mille au delà du camp vers Exeter, et le Prince en a fait de mesme vers Salisbury. Hyer au soir, Monseig.r, on aprit avec joye que Milord Louveles passoit à Cirencester avec 60 ou 70 cavalliers pour aller trouver le Prince d'Oranges; il fut questioné où il alloit, et ayant mal respondu, il y eut des coups donnés; le Mylord et treze de son parti furent saisis, et une douzaine furent tués sur la place. Cette action fut faicte par la Milice qui perdit son Maior avec son fils et deux ou trois autres blessés. Cette novelle, Monseig.r, qui donne quelqu'asseurence du Peuple vient d'estre troublée dans cet instant par une bien contraire. S. M vient d'aprendre que trois Régiments de Dragons ou de Cavallerie qui estoient des plus avancés vers le Prince d'Oranges, sçavoir de Cornombery, de S.t Alban et de Barwich, le premier avec son Colonel (3) et les deux autres avec les Offitiers Maiors, parceque les Colonels sont absents, ont entièrement deserté, et sont allés se ioindre à l'ennemy. Je ne sçay, Monseig.r, si cecy faira changer le iour du départ du Roy, et si, voyant l'infidélité de ses trouppes, il ne prendra pas d'autres mesures, en demendant des secours estrangers, pour les quels il a hésité jusqu'à présent. Ce n'est pas tout, Monseig.r, il ne faut pas seulement songer au Prince d'Oranges, il faut de l'attention à la ville de Londre qui est enragée contre les chapelles novellement érigées. Chaque deux ou trois iours on en attaque une, et l'autre soir il y avoit tant de populace à celle d'un Bénédictin, qui se dit Ministre de l'Électeur de Cologne, que le Roy fut obligé d'envoyer ses Gardes avec ordre pourtant de ne pas tirer; mais comm'il aprit qu'il y avoit un Garde blessé, il commenda un Régiment Escossois qu'y alla incontinent, et aprez en avoir couché 7 ou 8 sur le carreaux, il mit en fuite tout le reste. Du despuis, Monseig.r, on a esté sage, mais on menace fort pour Samedy qui est le iour de la naissence de la Reyne Elisabet, et par conséquent solemnel pour les Protestants et propre pour les insolences populaires. Qui dit que l'on a déià marqué toutes les maisons des Catholiques, qui dit, Monseig.r, que l'on en veut aux Chapelles du Nonce et de la Reyne, alléguant qu'il n'y a que celle du Roy et de la Reyne Doüairière passée par le Parlement; enfin, si l'on prestoit l'oreille à tout les bruits qui courrent, il y a longtemps qu'il faudroit avoir passé la mer. Il est vray, Monseig.r, que s'il y arive quelque chose, il y aura un grand

(1) Blandford.

(2) Warminster.

(3) Questi era figlio di lord Enrico Clarendon. Vedi il giornale di costui, nov. 15 (25).

carnage, car il y a déià de bon ordres donnés pour des trouppes en bataille dans des places, pour des Corp de Gardes aux lieux suspects et pour des canons chargés à cartouche qui enfileront les advenues. Pour moy, Monseig.r, si l'on se dépêche, je pourray voir quelque chose, mais si le Peuple est aussy lent dans ses résolutions comme la flotte l'a esté à venir et le Prince l'est à sortir d'Exeter, je m'en iray bagues sauvés; car j'eus dimanche mon audience de congé du Roy sur ce qu'il devoit partir avanthyer, sans avoir demendé celle de la Reyne, auprez de la quele je souhaittois rester quelques jours pour voir les monuments de Londre. J'espère, Monseig.r. de partir à la fin de la semaine qui vient, c'est à dire deux iours aprez l'Ord.re, et je ne crois pas que l'on puisse se plaindre de mon séiour, puisque ne devant rester icy que trois semaines, j'y passe plus de deux mois, et mesme 20 iours aprez cette descente qui n'a pas fait partir moins de gens d'Angleterre qu'ell'en a empêché d'y venir. J'ay veu, Monseig.r, par les lettres dont V. A. R. m'a honoré que je n'ay aucun ordre exprès de demeurer icy, et là dessus j'ay consulté ma bourse qui est le meilleur amy que j'aye dans Londre, quoy que j'en coñoisse plusieurs sus les quels je pourray conter, et j'ay pris le parti de me retirer, aprez avoir asseuré S. M. de la passion extrème que V. A. R. a pour son service et luy avoir offert tout ce qui dépend d'Elle dans cette conioncture. Je crois que le Roy se figuroit mon compliment, car on ne peut pas, Monseig.r, recevoir plus honestement un Envoyé de ce que je l'ay esté, et comme touts les Ministres estrangers y estoient pour augmenter la foulle des courtisans, qu'estoit ce iour là incroyable, plusieurs d'entr'eux dirent tout haut, voyant l'accueil de S. M., que iamais Envoyé, mesme des plus grand Rois, n'avoit esté receu si bien que moy, et cela, Monseig.r, fut dit seulement sur les manières extérieures, car pour les compliments, qui furent fort obligeants pour V. A. R, il n'y eut que ceux qui estoient prez de la chaise du Roy qui les entendirent. A mon retour V. A. R. sera informée plus exactement de tout ce qui s'est passé, et je suis, cepend.t, avec autant de sousmission que de respect

Monseigneur
D. V. A. R.

L'agitation, dans la quele la Cour est présentement, doit estre contée pour la plus extraord.re que le monde ayet iamais veu, car le matin, Monseig.r, la victoire est pour le Roy, le soir tout est perdu. Il vient d'ariver un autre courrier avec des lettres qui marquent que le Prince est malade et la plus part des soldats aussy. J'en souhaitte autant, Monseig.r, à ceux qui le vont ioindre.

Très humble, très ob.t et très fidèle Ser.r et
Suiet
C. M. Rouer (1).

---

(1) Dalla lettera dello stesso giorno al ministro: « Depuis la lettre escrite à S. A. R. il semble « que le Roy ayet résolu de faire revenir son armée vers Londre, et pour cela on dit qu'il a dépêché

Quattro giorni dopo il Roero scriveva al Cullet, segretario dell'ambasciatore di Savoia a Parigi, essendo persuaso che la gravità degli avvenimenti e i timori di tumulti nella metropoli facessero desiderare ragguagli intorno a ciò che accadeva. La notizia, giunta il 25 (15), della diserzione dei tre reggimenti di cavalleria avea gettato lo sgomento nell'animo del re, da cui furono richiamate le sue soldatesche da Salisbury.

Ma tale ordine venne revocato, quando nel giorno seguente si seppero i particolari del fatto, e s'intese che dei tre reggimenti l'uno era ritornato in gran parte, e che anche soldati degli altri due avevano rifiutato di far parte della ribellione. Giacomo stesso, mandato a Portsmouth il principe di Galles, partì per l'esercito il 27. Ma prima che lasciasse Londra, gli arcivescovi di Cantorbery e di York e i vescovi di Ely e di Rochester gli presentarono una petizione firmata da essi e da parecchi lord, nella quale gli domandavano che convocasse un parlamento, e facesse in modo di evitare spargimento di sangue. Sì fatte richieste dal re furono respinte.

A Londre ce 29 9bre 1688 (1).

Monsieur

La iuste apréhension, dans la quele devoient estre nos bons amis et tout les Catholiques pour Samedy et Dimanche, m'oblige de vous escrire cellecy pour les tirer de peine, la quele auroit esté plus grande, si l'on avoit sceu que le Roy partit Samedy au matin, aprez avoir envoyé Mons.r le Prince de Galles à Porchmuth et laissé icy la pauvre Reyne toute en larmes. Cependant, Mons.r, les ordres marqués dans mes dernières lettres ont esté si bien exécutés que iamais on a esté si sage à Londre que ces iours icy. Le départ inopiné de S. M. a fait parler bien des gens, et a mis le cœur au ventre aux suiets fidèles qui estoient déià effrayés de l'ordre donné Jeudy au soir pour faire retirer les trouppes. Ce qui a fait, Mons.r, changer de résolution est que l'on receut le lendemain un courrier, par le quel l'on aprit que de trois Rég.ts desertés celuy de Barwich est revenu tout entier, de celuy de St Alban presque cent cavalliers, et 300 Dragons de Mylord Cornbery qui est le chef de cette rebellion, et les a quasi touts trompé, en feignant de les mener combattre les ennemis

---

« un courrier. Quoyque j'aye marqué que touts les Rég.t estoient entièrement desertés, il y a bien « des soldats et des offitiers qui se sont sauvés pour n'estre pas rebelles. Le bruit court, Mons.r, « que la Ville et d'autres provinces veulent présenter dimanche des requestes au Roy pour convoquer « un Parlement dans la présente conioncture. C'est tout ce que souhaitte le Prince d'Orange, et S. M « dit hyer au matin que qui parleroit d'accomodement seroit censé rebelle. M.r Culet envoit de ma « part à V. E. la copie de la lettre du Prince d'Oranges, et j'envoirois aussy celle du manifeste que « j'ay eu à la fin, mais cela est trop volumineux ».

(1) Lunedì, 19 novembre.

dans un certaint endroit, où, aprez les avoir harangués, il fit sortir une grosse trouppe du Prince d'Oranges, qui enveloppa tout ceux qui ne purent pas se sauver. Ce qui est de plus remarquable, Mons.r, est que l'armée receut avec des cris de joye ceux qui revenoient, et détestoit hautement l'action des autres. Le Roy, devant de partir, eut un compliment des Evesques de leur stil ord.re. C'estoit un adresse signée par l'Archevesque de Cantorbéry, celuy de York, les evesques d'Ely et de Clochester (1), les ducqs de Grafton et Dormont (2), dans la quele ils demandoient la convoquation d'un Parlement, qui est le grand but des rebelles. Le Roy respondit qu'il le souhaittoit comm'eux, mais que les Pairs eclésiastiques, dans cette conioncture, devoient aller à leurs Diocèses pour contenir les peuples; les séculiers estoient une partie avec le Prince d'Oranges, et les autres devoient estre avec luy pour le défendre, telement qu' il estoit impossible de l'assembler, mais qu'aprez ces troubles finis, qu'ils auroient contentement, comme il avoit promis dans une déclaration publiée despuis plus de trois semaines. Je ne sçay, si quelque considération que je dois avoir pour la Reyne, et que je ne puis pas mettre par escrit, m'obligera de rester icy quelque iour de plus. Je vous prie, Mons.r, aprez que vous aurez communiqué cellecy a M.r l'Ambassadeur, de l'envoyer à M.r le Marquis de S.t Thomas qui pourra commencer voir ces novelles, en attendant celles de Jeudy qui apparentmant ne seront pas plus curieuses, car le Roy ne peut estre à Salisbury devant demain au soir, et pour quelques iours il n'y aura pas aucun mouvement. Nos Messieurs vous saluent, et vous priant de faire nos compliments à l'acoustumée, je suis très sincèrement

Monsieur

Vostre très humble et ob.t Ser.r
C. M. Roder.

A queste notizie il Roero in una lettera al duca, scritta tre giorni dopo, unì quelle dell'arrivo del re a Salisbury, di una piccola scaramuccia tra una compagnia di Scozzesi, al servizio dell'Olanda, e alcuni dragoni e guardie del corpo inglesi, nella quale questi furono vincitori.

A Londre ce 2 10bre 1688 (3).

Monseigneur

V. A. R. aura apris par la lettre que j'escrivis à Paris, il y a trois iours, et qui devoit ensuite estre envoyée à M.r le Marquis de S.t Thomas, le départ inopiné du Roy, la retraitte de M.r le Prince de Galles à Porchmut, le retour des deux tiers des trouppes désertées et l'adresse présentée par les Evesques. Despuis cela, Monseign.r,

---

(1) Rochester.
(2) D'Ormond.
(3) Giovedì, 22 novembre.

nous avons eu la novelle que S. M. est arivée à Salisbury en parfaicte santé, et que toute l'Armée l'a receu avec des cris de joye et des protestations de luy vouloir estre fidèle. A l'esgard de M.[r] le Prince de Galles, la Reyne ce matin, estant à table, a leu une lettre, dans la quele ell'a veu qu'il se porte bien, et qu'il n'a pas souffert dans le voyage, quoyqu' il ayet fait un temp espouvantable avec de neige et du vent. Ce mattin, Monseig.[r], un courrier nous a porté la novelle que une compagnie d'infanterie des ennemis s'estant avancée rencontra un parti du Roy composé de quelque gardes du corp et Dragons. Dez qu'elle l'aperceut, elle se mit dans des ravines, et derrière des hayes pour se défendre, mais les Dragons, ayant mis pied à terre, en tuèrent 30, et firent 6 prisoniers ; la susdite compagnie de 44 hom̃es se treuve estre toute d'Escossois qui estoient déià au service des Estats ; des Anglois il y a eu trois soldats de morts et un officier dangereusement blessé. Quoyque ce soit, Monseig.[r], une bagatelle, comme c'est la première action, elle ne laisse pas d'encourager les trouppes qui en forment un bon augure. Mons.[r] le Prince d'Orange doit auiourduy s'advancer à Tauton (1) avec son armée; c'est un lieu, Monseig.[r], situé d'une manière qu'il laisse le Roy en doutte, s'il a dessein d'aller à Bristol, ou de venir vers Londre. L'adresse ou pétition presentée par les Evesques signée par 19 Milords ne contient qu'un humble prière au Roy de convoquer un Parlement libre qui résolve la paix et l'establissement de l'Église et du Pays, et cela promptement pour éviter de rependre le sang Chrestien et ne pas exposer sa Persone sacrée. C'est icy, Monseig.[r], la pierre d'achoupement; presque touts les conseillers qui préférent leurs interest à celuy du Roy y donnent les mains, et l'on croit qu'auiourduy plusieurs Milords s'assemblent à Yorch pour le mesme effect (2). Ce qu'il y a plus à craindre, Mons[r], est que les Offitiers de l'Armée ne tendent à la mesme fin. Mais j'espère que S. M. qui est éclairée, qui est intrépide, et qui, ayant mis le successeur en seurté, veut iouer de son reste, aimera mieux perir à la teste des seuls Hirlandois, que prendre la loix d'un Parl.[t] soustenu par le mécontents du pays, et par des trouppes estrangères, qui pourroit peut estre entreprendre des choses plus fâcheuses que ne seroit la mort dans un champ de bataille. Samedy, Monseig.[r], je fis un compliment au Roy devant son départ, il le receut le plus honestement du monde, et despuis que je suis à Londre, je n'ay pas remarqué en luy l'œil si gay, ni l'air si intrépide, comme dans ce moment que touts ses bons serviteurs trembloient pour la résolution qu'il avoit prise. Ce n'est pas de mesme de la Reyne, Monseig.[r], ell'estoit ce iour là inconsolable de se voir séparée du fils, qui semble avoir esté obligé de se sauver, et du mari, qu' alloit combattre des rebelles avec des soldats qui peuvent d'une heure à l'autre le devenir aussy, et par dessus cela rester dans la Ville qui paroissoit devoir le mesme soir se révolter et donner dessus tout les Catholiques; mais ce qui est de remarquable, Monseig.[r], est que, despuis le départ de S. M., tout est paisible, et il n' y a pas le moindre mouvement dans Londre.

---

(1) Taunton.

(2) La riunione si tenne in fatti nel giorno indicato, e fu presieduta da lord Danby.

Je croiois, Monseig.[r], de partir dimanche, mais quelque considération que je dois avoir pour la Reyne, et que je n'escris pas, pour n'estre pas certain du sort de nos lettres dans cette conioncture, pourroit bien me faire passer icy la semaine qui vient. J'ay cepend.[t], Monseig.[r], beaucoup d'impatience d'estre aux pieds de V. A. R. pour l'asseurer en persone du très profond respect avec le quel je suis

Monseigneur
D. V. A. R.

Très humble et très ob.[t] Ser.[r] et très
fidèle Suiet
C. M. ROUER (1).

Gli avvenimenti succedevansi rapidamente; nuovi partigiani s'aggiungevano a Guglielmo. Mentre la contea di York insorgeva, lord Lumley occupava Newcastle, e il conte di Bath cedeva Plymouth al nemico. Il 5 di dicembre (25 novembre) giunse a Londra la notizia che il duca di Grafton, lord Churchill e il colonnello Berkley erano passati dalla parte del principe. Il giorno appresso si seppe che la principessa Anna era scomparsa da Londra; in pari tempo si conosceva che il principe Giorgio di Danimarca col duca di Ormond e con altri nella sera del 3 era partito da Andover, ove trovavasi il re, per andare a congiungersi con l'Orange. Per tali fatti era grande l'indegnazione del Roero, specialmente per l'abbandono del Churchill e per il tentativo, a questo attribuito, di far cadere il re in mano degli Olandesi. Nella sera del 6, Giacomo ritornò a Londra; nel giorno seguente convocò i lord spirituali e temporali, che trovavansi nelle vicinanze, e a loro promise la pronta convocazione di un parlamento. Intanto mandò deputati al principe d'Orange per esporgli i suoi intendimenti. La convocazione di un parlamento sembrava a molti un ottimo rimedio: il Roero al contrario giudicavala un pessimo mezzo di salute, e pare che in Corte egli abbia intorno a ciò esposte le osservazioni, le quali furono da lui enunciate nella lettera del 9, in cui egli fornisce sì fatti ragguagli al duca di Savoia.

(1) Dalla lettera, della stessa data, al ministro: « J'ay, Mons.[r], tout les iours des gens qui « viennent s'offrir pour m'accompagner iusqu'à Cales, car à présent tout le monde veut marcher sous « les auspices d'un Ministre estranger. Les borasques de la Manche sont contées pour rien; on craint « les voleurs d'icy à Douvre et les Hollandois à la mer. Quand je songe, Mons.[r], que nous avons « déià passé tant de dangers, il me prend envie de rire, mais je réserve de le faire en France, où « l'on pourra se réioüir tout de bon. J'ay oublié, Mons.[r], de marquer dans la lettre de S. A. R. « que M.[r] de Barillon et l'Envoyé de Dannemarch sont les seuls Ministres estrangers qu'ayent suivi « le Roy. Le successeur de M.[r] de Skelton, qui est milord Valdgrave, est parti pour aller à Paris ».

A Londre ce 9 xbre 1688 (1).

Monseigneur

La rébellion du Ducq de Grafton, du Ducq d'Ormond, de Milord Churchel, du colonel Barcle, de Trillani (2) et autres offitiers de l'Armée, la retraitte du Prince et Princesse de Dannemarch; la révolte de la Province de Yorch. où le Milord Dainby (3) s'est emparé de la forteresse de Neucastel, la trahison de Milord Bath, Gouverneur de Plymouth, qui en a chassé touts les catholiques et protestants, qu'il croioit fidèles au Roy, le retour de Sa Maiesté et celuy de toute l'armée, qui doit camper entre icy et Windsor, avoient mis toute la Cour dans une grande consternation; mais il parut hyer au mattin un rayon de joye dans touts les visages, parceque le Roy déclara de vouloir convoquer le Parlement, après avoir pris l'advis des Pairs temporels et spirituels, du quel un homme de bon sens ne pouvoit iamais doutter. L'on croit, Monseig.r, que c'est le seul expédient pour détourner l'orage, d'autant plus que, parmi les rebelles, il y a un camp volant qui ne se déclare pas contre le Roy, ni pour le Prince, mais pour la convoquation d'un Parlement libre. Cet expédient, Monseig.r, qui paroit si plausible à tout les Ministres, produit à mon esgard un effect bien contraire, car n'ayant iusqu'à present iamais tremblé pour S. M, je commence à fremir despuis cette nouvelle, et si ell' est véritable au dedans comme au dehors, l'on peut dire que le Roy est perdu pour sa bonne foy; je ne parle pas, Monseig.r, de la Catholique, car il doit tout sacrifier pour elle, mais pour celle qu'il a pour les Anglois qui doivent l'avoir ensorcelé, car non obstant qu'il se voit tout les iours trahi des parents, des intimes, et des plus gratifiés, il ne peut pas se méfier de ceux qu' restent. On a déià nommé quattre Milords et deux Evesques, de la part de l'assemblée des Pairs (4), pour aller trouver M.r le Prince d'Orange et sçavoir de luy s'il aprouve la résolution que la Cour a pris, et qu'elle ne devoit pas prendre, ou bien s'il y trouve quelque difficulté, et s' il ne craint pas qu' il n'y ayet là dessous quelque mistère pour gagner du temp. Quoy qu' il en soit, Monseig.r, il faut apréhender les préliminaires et se préparer à des conditions bien fâcheuses, pour asseurer l'ennemy que, pendant le 40 jours qu' il faut pour assembler le Parl.t, le Roy n' attirera pas des forces estrangères pour défendre son droit, et d'ailleurs, il faut sçavoir si les Estats Généraux voudront laisser en Angleterre si longtemps leurs trouppes qui ne sont icy (à ce que l'on dit) que de passage pour aller en France, après qu'elle seront ioint à celles de S. M., la quele a suspendu le voyage de M.r le Prince de Galles en France et d'autres mesures qu'il auroit fallu prendre despuis longtemp. Tout cela, Monseig.r, par le conseil de ses ministres, fomentés par ceux de certains Princes que je ne

(1) Giovedì, 29 novembre.

(2) Il colonnello Trelawney.

(3) Newcastle fu presa da lord Lumley.

(4) I deputati, che si recarono dall' Orange, furono solamente tre, cioè i lord Halifax, Nottingham e Godolphin.

dois pas nommer, et Dieu veuille, pendant que le Roy est amusé en paroles que tout cecy ne tend qu' à la destruction de l'ennemy de la ligne d'Ausbourg, qu' il ne soit luy mesme abysmé en effect. J'espère que cela ne sera pas, puisque le Ciel protège visiblement ce Monarque, comme l'on a remarqué ces iours passés que Milord Churchel vouloit le livrer entre les mains d'un parti du Prince d'Oranges, sous prétexte de le mener dans son carosse visiter un retranchement, qu' il avoit fait à son quartier de Warismister (1), où il estoit déià résolu d'aller, non obstant que milord Feurechams (2) se fut mis à genoux pour le détourner; mais il luy prit dans ce moment un seignement de nez qui l' obligea de rester; et le Churchel se sauva avec ceux qui estoient de concert avec luy. Il est bon de sçavoir, Monseig.r, que cet homme icy n'est pas seulement Milord et suiet du Roy; mais de simple sargent il a esté élevé, par faveur, aux charges de Gentilhomme de la Chambre, de Capitaine des Gardes du Corp et Lieut.t G.al des armes, avec plus de 8 mille pistoles d'apointement. Je ne crois pas, Monseig.r, qu' il y ayet sur la terre de pareils ingrats, et un Piedmontois ne feroit pas contre son amis ce qu' un grand Seig.r d'Angleterre est capable de faire contre son souvrain; mais il faut, Monseig.r, revenir à ce Parlement et déchifrer le mot de libre; cela voudra dire que les trouppes du Roy en soient bien éloignées, qu' il ne puisse pas le dissoudre, ou le prolonger à son plaisir. Enfin, les conditions seront si fâcheuses et les suites si funestes que l'on auroit parié le iour précédent double contre simple que S. M. n' y auroit iamais consenti. Mais, Monseig.r, c'est présomption toute pure de vouloir se promettre de l'advenir dans cette Cour· un homme de bon sens peut bien deviner ce qu'il faudroit faire, mais rarement ce que l'on faira. C'est pourquoy, sur les lettres que je me donne l'honeur de luy escrire, V. A. R. doit croire le fait et raisoner sur ce qui doit ariver. Il en sera de mesme à l'esgard de mon départ. J' ay eu, Monseig.r, mon audience de la Reyne hyer au soir; j'ay receu auiourduy mon présent: je dois partir de iour en iour, mais il peut ariver tant d'accidents d'un heure à l'autre, que V. A. R. ne me doit pas croire parti qu'Elle n'ayet receu de mes novelles de France, et je suis, cependant, avec un très profond respect

Monseigneur
D. V. A. R.

Je viens d'aprendre, par un billet secret, que les réflections, que j'ay fait à V. A. R. dans ma lettre et ce matin à un Ministre fidèle du Roy, ont fait auiourduy une grand impression qui pourroit bien faire prendre quelque résolution contraire.

S. M. ne sçait pas positivement où M.r le Prince d'Oranges se trouve à present.

Très humble, très ob.t et très fidèle
Serv.r et Suiet
C. M. ROUER (3)

---

(1) Warminster.

(2) Feversham.

(3) Dalla lettera scritta lo stesso giorno al ministro: « J'ay veu par celle, que V. E m'a fait

L'ultimo dispaccio dell'inviato di Savoia dalla metropoli inglese fu spedito quando già i deputati del re erano partiti per il campo del principe. Le cose, che si sarebbero trattate col principe, e quale fine avrebbero avuto le pratiche erano argomento di grandissima curiosità a Londra, ove continuamente giungevano notizie sui progressi della rivoluzione, ed ove un'apocrifa aggiunta al manifesto dell'Orange, stampata e venduta per le vie, dava grandissima inquietudine a quelli, che ancora rimanevano fedeli al sovrano.

A Londre ce 16 xbre 1688 (1).

Monseigneur

V. A. R. auroit suiet de croire que je suis parti de Londre il y a quelques iours; cepend.[t], Monseig.[r], m'y voicy encor, et si je pouvois escrire ce qui m'a retenu, V. A. R. me condanneroit si j'en avois usé autrement. Il est vray qu'après samedy je suis en liberté, et je dois partir infailliblement le dimanche. Despuis ma lettre du 13, escrite au sieur Cullet, il n'y a pas aucune novelle de conséquence. Le trompette envoyé au Prince est revenu avec des passeports fort amples et mesme en blanc, telement que les Desputés qui sont partis pourront entrer demain en conférence (2), et samedy on en aura la responce, de la quele dépendent toutes les résolutions que S. M. doit prendre. La condition secrète, dont on s'est servi pour obliger le Roy à convoquer le Parlement, est que l'Armée des ennemis doit rester à 4 milles de Londre. C'est à sçavoir, Monseig.[r], si on voudra l'accorder, puisque elle n'est pas plus eloignée dez à présent, et qu'estant asseurée de l'infidélité de ceux qui devroient s'y opposer, ell'aura de l'empressement de se laisser voir aux environs de la capitale du Royaume. Avanthyer, M.[r] le Prince d'Oranges assista à un assemblée de Milords faicte à Exbery. O n'a pas pénétré les matières qui s'y sont traittées;

« l'honeur de m'escrire, qu'Elle a eu la bonté de faire réflection à ma despence. Je puis l'asseurer « qu'elle est grande et qu'elle fait plus d'honneur à S. A. R. qu'à moy, parce que tout le monde « croit que je reste icy par ordre, et que l'on m'a envoyé de l'argent pour cela. Cepend.[t], Mons.[r], « V. E. sçait que cela n'est pas, et je le sçay mieux qu'Elle; mais il n'importe, il y aura plaisir « de conter à nos petits enfants tout ce que nous avons veu. Hier au soir, Monsieur, j'eus mon « audience de la Reyne sur ce que le Roy estoit revenu, et que l'on entroit dans des voyes d'acco- « modement; elle me tesmoigna beaucoup de reconoissence et bien d'advantage à l'esgard de mon « Maistre, de qui l'on est satisfait plus que d'aucun autre Prince, car je sçay que la Reyne a dit « que, dans cette conioncture, il n'y a eu que l'Envoyé de Savoye qu'il y ayet fait des offres. Elles « ont esté faictes en général et n'engageant à rien, cepend.[t], M.[r], si les affaires se tournent en bien, « j'espère qu'elles seront utiles, et que Leurs Maiestés ne les oublieront iamais.................. « Je vois par la lettre de S. A. R. que l on y mende de grandes menteries de Paris à l'esgard des « novelles d'Angleterre ».

(1) Giovedì, 6 dicembre.

(2) I commissarii giunsero il 18 ad Hungerford, luogo destinato dal principe per le conferenze.

et l' on sçait seulement que l'on a resolu d'envoyer des seigneurs au devant des députés du Roy (1). On vend dans la Ville une déclaration imprimée du Prince, qui défend à tout les catholiques d'Angleterre d'estre armés et de garder aucune charge civile ou militaire contre les loix du Parlement, enioint aussy les Protestants de donner dessus à ceux qui contreviendront; mais comme ses airs d'authorité Royale pourroient, peut estre, luy nuire, ses Partisans la désadvoüent, et disent hautement qu'elle est supposée. Je viens d'aprendre, Monseig.r, dans ce moment, que les trouppes entrées dans Bristol despuis peu de iours, ont pillé les maisons des catholiques; si cela est véritable, et que ce soit pas ordre de M.r le Prince d'Oranges, il n'y a plus de salut pour eux, ni pour aucun François, ormis qu'il ne soit Protestant réfugié; car, pour les Catholiques des autres nations, je crois qu' il n'y aura aucun danger, pourveu qu'ils soient désarmés, et qu'ils ne songent pas à secourir les autres. Voilà, Monseig.r, ce qu'il y a d'essentiel pour cet ordinaire; et je me réserve à Paris de rendre un conte plus exacte des résolutions que Leurs Maiestés seront contraintes de prendre, après qu'Elles sçauront celles de M.r le Prince d'Oranges. Je suis, cepend.t, avec un très profond respect

Monseigneur
D. V. A. R.

Très humble, très ob.t et très fidèle
Ser.r et Suiet
C. M. Rouer.

A' dì 20 (10) di dicembre il conte Roero partì da Londra. Il 26 giunse a Parigi la notizia ch' egli era stato arrestato mentre fuggiva col nunzio travestito e con l'inviato di Modena. Il marchese di Dogliani, ambasciatore di Savoia presso la Corte di Francia, avuta la confermazione di questa nuova dal fratello del re, il giorno appresso mandò un corriere al duca, mostrandogli il suo sgomento e nello stesso tempo chiedendogli ciò, che conveniva di fare per ottenere la liberazione del prigioniero. L'astuto diplomatico non dimenticò d'indicare al duca di farsi merito presso il pontefice della disgrazia toccata al Roero, il quale a tale pericolo erasi esposto per aver voluto salvare il nuncio (2). Per alcuni giorni non si ebbero a

(1) Furono scelti il maresciallo Schomberg e i conti di Oxford e Clarendon. Questi avevano da pochi giorni abbandonato Giacomo II.

(2) Arch. di Stato. Lett. min., *Francia*, mazzo 122. — « Il me semble que V. A. R. pourroit se « faire un mérite de ce malheur auprès de Sa S.té, puisque ce n'est que pour avoir voulu sauver « M.r le Nonce que M.r le Comte Rouer a esté pris, ainsy que l'on dit ». — Il duca scriveva in tal proposito, il 6 di gennaio 1689, al conte Marcello De Gubernatis, suo residente presso la corte pontificia (Lett. min., *Roma*, mazzo 114), il quale rispose annunciando il gradimento del papa (Lett. al duca, 18 gennaio, *ibid.*, mazzo 115).

Alla lettera del Dogliani rispose il duca (1° gennaio), inviandogli pure una lettera, che questi doveva in proprio nome spedire al maresciallo Schomberg per ottenere la liberazione del conte Roero.

Parigi notizie del Roero; laonde vivissima era l'ansietà del marchese di Dogliani (1). Ma a toglierlo da essa giunse l'inviato di Polonia, fuggito dall'Inghilterra, il quale a Cantorbery aveva incontrato il Roero in ottima salute e con un passaporto del principe di Orange per venire in Francia col suo seguito, tra cui il nuncio travestito da gentiluomo (2). Il 7 di gennaio il nostro inviato sbarcò a Calais, il 12 giunse a Parigi. Da questa città egli mandò al duca una relazione di quanto gli accadde durante la sua partenza dall'Inghilterra (3), relazione, che stimo non superfluo di riportare per intiero, sia perchè chiude la corrispondenza da me pubblicata, sia perchè serve inoltre a compiere non solo, ma altresì a rettificare il breve cenno, che si conosceva sulla fuga del nunzio, aiutata efficacemente dall'inviato di Savoia (4).

A Paris ce 17 Janv. 1689

Monseigneur

Le prétendu prisonier de Cantorbéry va faire voir à V. A. R. que, bien loin de l'avoir esté, il a toute sorte de raison de dire que iamais Ministre estranger est sorti plus glorieusement d'Angleterre, et cela dans une conioncture fatale à tous les caractères et dans un temp, où le droit des gens sembloit estre renversé, et mesme la persone sacrée du Roy n'estoit pas exente des insultes de la populace, qui l'on appelle Rable (5), lors qu'elle se met ensemble et qu'elle est esmeüe. Je partis, Monseig.r, de Londre le 20 du mois passé, dix heures après le départ de la Reyne, la quele, aussi bien que le Roy, m'avoit instantment prié de mener avec moy Mons.r le Nonce, me disant qu'il n'y avoit point de salut pour luy sans mon assistance. J'entendis la messe chez l'Envoyé de Portugal qui loge à deux pas de la rivière, et je montay en basteau avec mes camarades, ayant marqué à M.r le Nonce un endroit, à un mille de là, pour nous attendre. Il ne manqua pas de s'y treuver, et l'ayant pris avec nous en habit cavailler, et sous le nom de Comte de Sale, qui est un fief qui luy apartient dans le Milanois, nous allames gayement à Gravesine (6). Cette nuit là, Monseig.r, le Roy partit à la sourdine; et le matin, dez que l'on s'en aperçeut, les Lords s'assembleroint, et firent immédiatement l'ordre de l'imbarco, qui veut dire de défendre à qui que soit de passer la mer. Il fut d'abord envoyé de tout costés,

(1) Dogliani al ministro, 29 dicembre 1688; lo stesso al duca, 3 e 5 gennaio 1689.

(2) Dogliani al duca, 6 gennaio 1689.

(3) Trovasi nell'Archivio di Stato fra le lettere particolari.

(4) Cf. Buckingam, *Récit de la rév. de* 1688, p. 36, nelle *Collection des mémoires relatifs à la révolution d'Angleterre* del Guizot. — Lingard, *Hist. d'Angleterre*, trad. Pichot, t. XIV, Paris, 1831, p. 338; Macaulay, vol. III, p. 356.

(5) *Rabble*.

(6) Gravesend.

et il contenoit encor d'arrester tout les Jésuites et le Prestres Romains. De cette marchandise de contrebande j'en estois bien fourni, car j'avois encor avec moy un Jésuite et deux Prestres touts Aumoniers de la Reyne. Cependant, Monseig.r, je poursuivis mon voyage avec un train d'Ambassadeur, c'est à dire une carosse à six chevaux, trois à quattre et 15 hommes à cheval. En arrivant à Zittenbornen (1), où nous devions coucher, j'entendis un grand bruit de la Rable qui avoit arresté un carosse, où il y avoit des dames et l'Abbé Resiny, Envoyé de Modène: quelques uns de ma suitte y accourrurent, et ils furent désarmés. Dez que j'en fus adverti, je demenday s'il n'y avoit point de Mair dans le village ou quelque Justicier de paix: on me dit que non; et je fus obligé de chercher des yeux celuy de la canaille qui avoit meilleur mine, à qui je déclinay mon nom et mon caractère, et fis voir mon passeport. Il me respondit qu'il obéissoit aux ordres du Roy, que je pouvois aller où il me plaisoit, et qu'il tâcheroit de faire rendre les armes que l'on avoit pris à mes gens. J'entray, Monseig.r, dans le cabaret, où l'Envoyé de Modène estoit prisonier dans une chambre: j'en pris trois toutes de suitte pour loger mon monde, et comme j'estois dans un endroit, où persone ne commendoit, et les paysans estoient armés, je fis prier un Maior de la Milice, qui estoit à un quart de lieue de Zittenbornen, de me venir trouver, le quel fit d'abord mettre sous les armes la compagnie du lieu, dont la moitié servit pour garder sa maison, et l'autre pour la miene, s'offrant le lendemain de me venir escorter si j'avois dessein d'aller à Cantorbéry, où je depechay la nuit un courrier au Mair, pour scavoir de luy si je pouvois poursuivre mon voyage. J'en receus, Monseig.r, une responce fort obligeante, dans la quele il m'offroit ses services et toute sorte de seureté dans sa ville. Je fis, cepend.t, demender M.r le Nonce et tout le clergé dans ma chambre. Je leurs fis raser la teste, affin que il n'y parut aucune vestige de la courone, et je fis brusler tout les brévieres, aprez quoy je leurs dis de ne rien craindre, et j'engagay ma parole de les mener à Cales. Le matin nous partimes escortés du susdit Maior et de douze cavaillers. Quand nous arivames à Alsbrids, on aprit que le Roy estoit prisonier à Feverscham (2). Le Maior fut obligé d'y aller, et nous attendismes son retour pour poursuivre nostre chemin. Je rencontray, Monseig.r, à un mille de Cantorbéry, Milord Winceslay (3), Lieut.t G.al de la Province, qui alloit treuver Sa Maiesté: il fit arrester son carosse, et me dit qu'ayant apris que je devois ariver, il avoit donné, en partant, les ordres qu'il falloit pour me recevoir. En effet, Monseig.r, je treuvay, en entrant dans la Ville, la Milice en haye et un grand corp de garde à mon logis. Tout les Offitiers m'attendoient dans la cour; et dez que je fus arivé, le Mair, le Lieut.t du Roy, le Schérif, et toute la Noblesse me vint rendre visite; et comme je m'aperceus qu'ils me croioient véritablement Ambassadeur, je crus qu'il estoit bien de ne les pas détromper. Je les embrassois, je bevois avec eux, mais je ne donnois iamais la main, et je n'accompagnois que jusqu'à la porte de ma chambre.

(1) Sittinburn.
(2) Feversham.
(3) Winchelsea.

Milord Winceslay revint le lendemain: je fus le voir immédiatement, et lors qu'il me rendit la visite, je le trattay comm'il m'avoit traité, et nous nous donnions réciproquement de l'Excellence. Pendant que j'estois honoré a Cantorbéry, j'envoiay un courrier à Douvre, et le Mair me fit responce qu'il n'etoit pas en estat de contenir la Rable, et qu'il me conseilloit de ne pas porsuivre mon voyage, d'autant plus que l'imbarco n'estoit point osté. Je profitay, Monseig.r, de l'advis, et je dépêchay le sieur Bertram à Londre pour obtenir du Roy, qui estoit de retour, ou des Lords, ou bien de Mons.r le Prince d'Orange quelqu'ordre pour passer la mer; il revint avec un passeport du dernier, sans le quel il estoit impossible de venir en France. Dans ce temp là S. M. vint à Rochester, et comme le sieur Bertram y passa, Elle voulut le voir et l'entretenir, Elle examina le passeport, et le trouva si bon que Ell'en envoya prendre un de mesme sous un nom emprunté, dont elle s'est servie pour s'embarquer. Je ne dois pas oublier de faire sçavoir à V. A. R. que le iour, que le Roy retourna à Londre, Messieurs de Cantorbéry me doñèrent le bal, et pendant que nous dançions. à Paris l'on disoit que j'estois prisonier.

Le Prem. de ce mois, je partis, Monseig.r, pour Douvre avec le susdit train de carosse et 40 hommes à cheval entre ceux de ma suitte et l'escorte. Dez que j'y fus arivé, le Mair et le Capitaine des Paquebots me vinrent rendre visite, et m'offrirent leurs services. Le nouveau Gouverneur du Chasteau (qui est un matelot, qui s'en est saisi pendant ces révolutions, et que le pauvre Roy nommoit Masaniel) vint, le chapeau sur la teste et deux pistolets à la main, faisant une révérence, me dire: Milord Ambassadeur, le passeport. Je luy fis voir celuy du Roy qu'il eut beaucoup de peine à lire; et quand ce fut à celuy du Prince d'Orange, il mit son chapeau sur une table. Après les avoir veu, il me dit: Cela va fort bien, Milord. Je mis la main à la bourse, et je luy dis: Faites boire vos soldats à ma santé. Il monta d'abord à son Chasteau, et fit tirer 40 volées de canon pour l'Ambassad.r de Savoye, se souciant fort peu d'employer la poudre qu'il devoit remmettre le lendemain aux soldats du Prince d'Orange. Le vent qui se trouva contraire m'arresta deux iours à Douvre; et le troisième, estant entré dans le Paquebot, il se leva une grosse tempeste, qui m'obligea de rester encor trois iours, et, ayant conseillé M.r le Nonce de ne pas sortir, je demeuray avec luy dans le bastiment, et le reste s'en retourna au cabaret. Le 7e j'arivay à Calais, où j'estois attendu comme le sauveur des Catholiques. Il y avoit une quantité prodigieuse de monde pour me voir débarquer: M.r le Duc de Charré envoya son Maior me complimenter, qui fit prendre les armes à la porte et battre au champ quand j'entray dans la ville; il fut d'abord luy mesme à mon logis, et le lendemain il me donna à disner. M.r le Ducq d'Omont à Bologne se mettoit à table pour soupper, quand je descendis a la porte: il envoya d'abord son escuyer avec une carosse me prendre. Voilà, Monseig.r, comme l'Envoyé de Savoye est sorti d'Angleterre. Le Nonce du Pape reconoit son salut de luy, les Ausmoniers de la Reyne en font de mesme, sans oublier un Evesque de Hirlande, dont je me chargay à Douvre, et quelque François, qui n'avoient pas moins de peur que les Prestres. Leurs Maiestés Brittaniques, que j'eus l'honeur de voir avanthyer à S.t Germain, me firent mille remerciments, et je crois que V. A. R. sera bien ayse que je Leurs aye plu dans cette conioncture, et qu'en mesme temps j'aye fait une chose qui doit obliger sensiblement le S.t Siége. Je suis, Monseig.r, avec un très profond respect

Monseigneur
D. V. A. R.

Très humble, très ob.t et très fidèle Ser.r et Suiet
C. M. ROUER (1).

Meno impensierito dei ministri della Santa Sede, di Francia, Spagna ed Olanda, de' quali sono noti i dispacci, e che rappresentavano Stati, per cui la riuscita o il cattivo risultamento della rivoluzione inglese avea una grandissima importanza, il conte Roero potè con maggior tranquillità osservarne lo svolgimento. Cattolico, devoto all'assolutismo, inesperto della storia costituzionale d'Inghilterra, egli reca giudizii, che sono per necessità favorevoli ai principii combattuti dalla rivoluzione. All' impresa dell'Orange egli non è certamente benigno; ma, non so se m'inganno, nel modo, con cui essa venne dalla posterità giudicata, mi pare che forse un po' troppo siasi pensato alle grandi conseguenze, da essa generate per la politica europea, ed agl'immensi benefizii, procurati alla prosperità ed al definitivo assodamento della libertà costituzionale. Forse è un titolo maggiore di gloria per Guglielmo l'avere per il bene d'Inghilterra trascurato certi riguardi, che, ov'egli fosse fallito, avrebbero probabilmente reso più severo un giudizio intorno a lui. Il lettore avrà notato il delicato silenzio del nostro inviato intorno alla principessa Maria, che, siccome ebbe a dire il più eloquente storico della rivoluzione del 1688, gli ardenti giacobiti, fuori d'Inghilterra specialmente, reputavano poco meno quale una nuova Tullia, congiunta con un altro odioso Tarquinio (2).

---

(1) Dalla lettera, insieme con questa scritta al ministro: « Les troubles, les inquiétudes et la des« pence, que j'ay fait de Londre à Calais pendant 13 iours, ne m'ont point chagriné comme la novelle « que j'ay apris à Paris, que l'on avoit depêché un courrier pour une fausseté qui seroit insup« portable, si elle n'estoit authorisée par la croyence du Roy et de Monsieur . . . . . Vous verres, « Mons.r, par la relation que je fais à S. A. R. que rien ne rassemble moins à un prisonier que « moy. Je n'y ay mis que ce qu'il y a de plus essentiel et ce que 40 persones de différente nation, « condition, profession et mesme sexe qui estoient de ma suitte ont veu de leurs propres yeux. « J'ay dit sexe, Monsieur, car j'avois aussy des femmes, qui passoient pour mes nourices. J'ay « pourtant oublié de marquer à S. A. R. que le Roy, qui estoit prisonier à deux lieues de Cantor« béry, m'envoioit tout les iours faire des compliments, et qu'ayant prié Milord Wenceslay d'avoir « soin de moy, il adiousta: je prie pour les autres quand je ne puis rien pour moy ».

Alla lettera del conte Roero rispose il duca (29 gennaio).

(2) MACAULAY, vol. III, p. 389.

Rispondendo al Roero, la Corte Sabauda, come si è visto dalle lettere che ho riportato, usa parole rigorose sulla rivoluzione e sull'Orange. Ma essa ben tosto conobbe d'avere acquistato in Guglielmo un forte alleato contro la prepotenza del monarca di Francia. Entrò pertanto nella lega stretta contro Luigi XIV, ed intavolò negoziati con l'Orange, divenuto Guglielmo III re della Gran Brettagna. Nella guerra, che arse terribile sui confini della Francia, Inglesi, Olandesi, Piemontesi ebbero a soffrire dal medesimo nemico; e agli allori, ottenuti dal Luxembourg a Steinkerque (1692) e a Neerwinden (1693) contro Guglielmo, fanno riscontro quelli, che il Catinat, già vincitore a Staffarda, raccoglieva nel medesimo tempo a Marsaglia.

LA

CRITICA SCIENTIFICA

ED IL

SOVRANNATURALE

PER

GIUSEPPE GHIRINGHELLO

Continuazione e fine.

(Ved. Serie II, Tom. XXII, pag. 291-462, e Tom. XXIV, pag. 161-260).

Pubblicazione postuma approvata nell'adunanza del 4 *gennaio* 1880.

L' intiera Memoria del Socio G. Ghiringhello, come giustamente s'era arguito e testè fu palese dagli autografi rinvenuti presso gli Eredi, si compone di un testo e cinque Appendici. Il testo è pubblicato nel tomo XXII, e le tre prime Appendici **A B C** uscirono parte nel tomo XXII, e parte nel XXIV.

A piè della terza (tom. XXIV, pag. 260) l'Autore appose: *Continua*. Si credette, che dovesse continuare l'Appendice, sotto cui sta una tale avvertenza. Ma essa è compiuta, e l'avvertenza si riferisce alle ultime due **D** ed **E**, intorno alle quali l'Autore stava allora lavorando. Già erano citate nel corso della Memoria (n. xii, xiv), e ne aveva letti alla Classe alcuni brani, senza dire a qual grado di perfezione le avesse condotte.

Fu cagione troppo a noi dolorosa quella, che impedì l'Autore di adempiere la sua promessa di continuazione, e si temette, che nei Volumi Accademici la principale Opera di lui fosse per rimanere, com' ei lasciolla morendo, priva di que' due ultimi pezzi.

Ora il Reverendo Signor Buroni, dottissimo autore degli *Studi* su Parmenide, Platone e Rosmini che son pubblicati in questi Volumi, con nobile intendimento avvertì la Classe, che le due ultime Appendici non solo trovaronsi compiute nell'autografo e in una copia, che ne trasse il compianto Socio Teologo Testa, ma già erano dall'Autore stesso iniziate alla stampa in bozze da lui corrette. L'egregio amico del Ghiringhello trasmise quelle bozze all'Accademia, con un'Aggiunta manoscritta al testo, che l'Autore avea intitolato: *Seconda Parte.*

La Classe accolse con gratitudine e la notizia e la comunicazione. Quanto all'Aggiunta, oltrecchè non ebbe dall'Autore l'ultima mano, giudicò la Classe, che per la sua brevità non corrisponda come seconda parte a quanto precede, che non sia assolutamente richiesta dall'argomento, e che turberebbe l'economia della Memoria, quale fu dall'Autore prestabilita nei Volumi. Deliberò invece unanimemente la stampa, che qui s'intraprende, delle due Appendici **D** ed **E**.

Per tal modo si compie la pubblicazione dell'Opera, ed è giustizia verso la memoria d'un Socio desideratissimo, il cui pensiero in un soggetto, nel quale si toccano molti ardui problemi dell'odierna filosofia e si combattono celebri teorie, dee manifestarsi nella sua pienezza ai dotti, perchè sia giustamente estimato. La pubblicazione è altresì a decoro dei Volumi, nei quali l'imperfezione della Memoria era vieppiù a lamentarsi, in quanto che in essa particolarmente l'Autore diede i risultati de' lunghi e profondi suoi studi, e versò gran copia di quella erudizione, che tutti ammirammo in lui.

Per incarico della Classe
il Socio B. Peyron.

APPENDICE D.

Della divina prescienza e provvidenza.

Coloro che negano la previdenza e provvidenza divina, come se fossero inconciliabili, l'una coll'umano arbitrio, l'altra coi mali, onde è fatta bersaglio la misera umanità (1), e non pertanto hanno una fede cieca, incrollabile, illimitata in una « legge di progresso e di perfezionamento » superiore ad ogni volontà e ad ogni potenza degli individui » (2); sicchè, qualunque possano essere « le irregolarità da parte dell'arbitrio e del » senno umano, malgrado le lutte fra il bene ed il male, fra la verità » e l'errore, per cui passa l'umanità, il risultato però, a cui essa giunge » nel corso di un'êra, non sia e non possa essere che un miglioramento », cioè « un progresso generale in tutte le funzioni interne ed esterne, » morali ed economiche, individuali e sociali della vita », e così la civiltà universale dalle lutte, dalle vicende or gloriose, or infauste, risorga poi sempre più ricca, più potente, più libera, più felice di prima (3); questi tali, ripeto, non confessano per tal modo inscientemente e sotto diverso aspetto la verità di quei dommi, che altrove si fanno ad impugnare? Di vero, se, malgrado una certa ed indefettibile legge di progresso, può sussistere, anzi svolgesi e s' ingagliardisce l' umana libertà, la legge progressiva dell'incivilimento consistendo appunto, a detta loro, « nel correggere via via, infrenare, mansuefare, ingentilire » le passioni, subordinandole sempre più all'impero della coscienza e » della ragione (4); » non è egli manifesto che la certezza del risultamento è compatibile colla libertà nel raggiungerlo? Non gli è anzi, in loro sentenza, condizionato il continuo perfezionamento dell'arbitrio reso vieppiù correttore e donno delle umane passioni? A meno di dire che le azioni individualmente libere diventano necessarie collettivamente,

(1) *Razionalismo del popolo*, pag. 41, 97 sq.
(2) *Studi filosofici e religiosi*, Introd., pag. xxx.
(3) *Razionalismo*, pag. 147-148.
(4) Ivi, pag. 146.

e che liberi saranno forse gli individui, ma serva e schiava deve dirsi l'umanità, o viceversa! E parimente, se i mali, ond'è afflitta e travagliata l'umanità, non ostano al continuo progressivo di lei miglioramento ed al finale trionfo del bene, non è ciò un dichiarare apertamente non esservi quaggiù male invincibile, irreparabile, assoluto, niuno che non sia o non possa essere cagione od occasione di bene, anzi del maggiore possibile, quale si è appunto la vittoria riportata sul male! E non sarà provvidentissimo l'ordine che dà luogo a tale sconfitta ed a tale vittoria? Or come mai ciò che ha valore di assioma presso questi critici, che affermano e non dimostrano, diverrà assurdo e contraddittorio in bocca di coloro, che, sebbene accusati di dommatismo, dommatizzano meno e ragionano di soprappiù? E per verità, se un progresso continuo, perpetuo ed universale in ogni ramo di scienza e di azione, così nell'ordine fisico, come nell'intellettuale e morale, non è nè una verità assiomatica ed indimostrabile, nè un fatto confermato dal testimonio irrefragabile dell'esperienza; se fra molti mali fisici attenuabili pur ve ne sono che sfidano e sfideranno mai sempre il senno ed il potere umano; se quella radice d'ogni maniera di mali, vuoi fisici, vuoi morali, che è l'umana malvagità, può bensì correggersi nei vari individui, o rendersi altrui meno nocevole, ma non sarà mai svelta del tutto, nè soffocata, perchè disposizione congenita di viziata natura, cui l'abito afforza, ma presuppone, potendosene impedire gli atti, non distruggere la potenza, onde personale e non trasmissibile si è la virtù; non perciò il trionfo del bene avrà a dirsi meno certo e sicuro, purchè si distingua il trionfo morale dal materiale, che gli è e debbe essere subordinato, ed il campo, dove si esercita, dal soggiorno, dove si ricompensa la virtù. Conciossiachè l'ordine, che fornisce le condizioni della prova e del merito, mal s'attagli ad apprestar pur quelle d'un condegno guiderdone; crescendo il pregio della virtù in ragione degli ostacoli superati e delle sostenute lotte; e se fra queste vieppiù si affina, non si compensa con essa l'eroica virtù. Nè i continui successivi miglioramenti, che segnano il corso dell'umanità, per quantunque meravigliosi vogliansi supporre (oltrecchè potranno appena sopperire ai sempre crescenti nuovi bisogni), siccome finiti pur sempre e difettivi di loro natura, non varranno mai ad appagare le immortali speranze, e, diciam pure, gli imperscrittibili diritti della virtù. Diritti che, sacri egualmente in ogni tempo ed in ogni condizione di vita mortale, richieggono un'eguale mercede ed un eguale trionfo, non di un'astratta ed ideale umanità o degli ultimi suoi futuri rappresentanti, ma di quanti nella lunga serie dei secoli, non sedotti da vane lusinghe, nè inebbriati da piaceri fugaci, nè atterriti da duri, ma passeggeri cimenti, amatori costanti e sinceri del vero, del retto, del giusto, del santo, meritarono di fruirlo eternamente dove ha ferma e stabile sede, cioè nella luce del Sommo Vero e nell'amplesso del Sommo Bene. Al contrario i critici razionalisti in discorso, esagerando o falsando il concetto del progresso e del trionfo del bene, rendono l'uno e l'altro assurdo e contraddittorio, ed impossibile la vera ricompensa della virtù; imperocchè, ammettendo uno scopo, ma senza ordinatore, nè riconoscendo altro ordine possibile, fuorchè l'attuale, in cui svolgesi il progresso indefinito, tolgono così la possibilità di un compiuto e finale trionfo; sia perchè non mai pienamente, solo approssimativamente conseguibile, sia perchè, non mai fruito da chi più lo meriterebbe, cioè da quanti superarono maggiori ostacoli per riportarlo, diverrebbe tardo ed esclusivo privilegio degli ultimi sopraggiunti, quando, sbandito, giusta la vagheggiata ipotesi, ogni male dal mondo, mancherebbe così l'esercizio alle nuove, come il premio alle antiche virtù, seppure potrebbero dirsene premio condegno beni fragili, caduchi, fugaci, i quali, attraversandosi spesso al retto cammino della virtù, furono tenuti a vile da coloro stessi, la cui virtù si vorrebbe con quelli rimeritare.

E parimente, richiesti codesti sentenziatori come si possa comporre la libertà da essi patrocinata colla certezza ed infallibilità dello scopo, cui la vogliono diretta, diranno superflua ed inutile qualsivoglia risposta, non essendovi peggior dommatizzatore che un negatore di dommi; ma a chi gli interroghi il perchè sia impossibile la previdenza e la predizione di un futuro libero avvenimento, risponderanno senz'ombra di dubbio e di esitanza che, non potendosi prevedere e predire con certezza tranne il certo, il determinato, l'inevitabile, e ciò che è antecedentemente determinato, non potendo esser libero, o la libertà esclude la previdenza, o la previdenza la libertà. Nè avvertono i valentuomini che con questo dilemma essi stessi dovrebbero sacrificare la loro libertà alla certezza infallibile del loro continuo universale progresso; ovvero collocarlo fra le incognite e gli imprevedibili, onde salvare la non meno cara libertà. Ma i derisi scolastici verranno loro in aiuto col distinguere il certo ed il determinato dall'inevitabile e necessario; imperocchè la certezza altro non essendo che la coscienza del vero, non ne altera e non può alterarne la natura, come alla sua volta non può essa stessa venirne diversamente attemperata. Quindi è che, sebbene l'avvenimento libero ed il necessario s'avverino sotto diverse ed opposte condizioni, l'uno escludendo solo la realtà, l'altro la possibilità ancora del contrario; tuttavia questa diversità di loro natura nulla toglie od aggiunge alla possibile comune loro certezza, sicchè l'uno accadrà certamente sebbene potesse non accadere, nè l'altro accadrà con maggiore certezza, perchè non potesse nemmeno non accadere; questo sarà *certo* ed *inevitabile*, perchè necessario; l'altro non sarà però meno *certo*, sebbene *evitabile*, perchè l'essere *certamente possibile* importa il poter essere *certamente non evitato*. Locchè riesce a dire che la certezza d'un atto futuro equivale ad un atto presente giusta la varia di lui natura; e così a quel modo che si ha eguale certezza d'un'attuale libera o necessaria determinazione colla sola differenza che la prima involge l'ipotetica possibilità del contrario, che viene esclusa dalla seconda, ed è appunto in questa coscienza di poter od aver potuto far altrimenti che si ha il sentimento della propria libertà; in simil guisa e colla stessa differenza si può avere la certezza d'un atto futuro libero o necessario. Dirassi che il necessario si può prevedere, perchè certamente e necessariamente predeterminato nella sua causa; laddove se l'atto libero fosse predeterminato cesserebbe di essere libero, e, non essendo predeterminato, manca il fondamento per essere preveduto. Il sofisma è volgare, e l'illusione puerile; imperocchè la predeterminazione non essendo che una previa determinazione, tale sarà, quale sarebbe l'attuale, cioè libera del pari o necessaria; quindi od è impossibile un'attuale libera determinazione, o sarà libera egualmente se preventiva. In altri termini: un atto può essere *liberamente predeterminato*, posto che un atto *determinato* possa esser *libero;* ora ben lungi che un atto debba essere indeterminato, perchè sia libero, non vi è atto possibile senza determinazione, ed il concetto d'un atto libero è quello appunto di una libera determinazione. Difatti la necessità non è proprietà intrinseca d'ogni determinazione, ma è condizionata alla forza determinante; se questa è necessaria, lo sarà pure l'azione e l'effetto, che ne risulta, come avviene nelle forze e nei fenomeni fisici, e nell'appetizione della felicità, per la quale l'uomo non si determina, ma è istintivamente ed oggettivamente determinato; ma se la forza è libera, libera sarà del pari la determinazione; onde un atto sarà tanto più libero, quanto più la potenza, da cui dimana, sarà stata intrinsecamente e non estrinsecamente determinata, e la ragione dell'atto starà nell'attività, anzichè nella passività dell'agente che lo compie. La libertà non è dunque una negazione di determinazione, ma un'affermazione, una forza, anzi un'attuosissima forza, escludente l'estranea (1), non la propria, l'estrinseca e non l'intrinseca determinazione, nè involgente l'assoluta soggettiva, ma l'oggettiva indifferenza, cioè l'insufficienza dell'oggetto a trarre *necessariamente* la determinazione dell'agente; posta la quale insufficienza, questi non può non esser libero relativamente all'oggetto, e deve trovar in sè la ragione sufficiente della sua determinazione, la quale, rampollando da una libera radice, non può non esser libera, traente cioè la sua sufficienza dall'attuosità della forza causante, e dall'insufficienza determinatrice dell'oggetto la condizione di libertà; motivo per cui d'una libera determinazione si ha una ragion sufficiente, ma non necessaria, escludente bensì la realtà, non già l'assoluta possibilità del contrario. Della quale duplice e simultanea condizione di sufficienza e di libertà avendosi la coscienza in ogni attuale libera determinazione, come mai ciò, che attualmente si *sente*, non potrà essere *presentito*? Se l'atto libero è, al pari d'ogni altro, attuazione di una potenza, effetto di una causa, ripugna che non sia nell'una e nell'altra potenzialmente e virtualmente contenuto, e quindi predeterminato; solo questa predeterminazione avrà lo stesso carattere di libertà che avrebbe l'attuale sua determinazione; la quale se esclude la realtà del contrario, involgendone però la possibilità, e non è libera che a tale condizione; la predeterminazione escluderà pure la futura realtà del contrario, involgendone solo la possibilità, e rimanendo libera alla stessa condizione porgerà colla *realtà* dell'atto futuro fondamento alla di lui certezza, mantenendolo scevro d'ogni necessità colla possibilità del contrario.

Il quale componimento della predeterminazione colla libertà discende apoditticamente dalla natura stessa di quest'ultima, la quale non sarebbe nè potenza, nè causa, qualora non contenesse potenzialmente i suoi atti e causativamente i suoi effetti; vale a dire, se si potesse separare dalla sua attività la ragione intrinseca del suo esercizio, ragione che può essere ignorata, ma non cessa perciò di essere reale, e qualora e per

---

(1) Dissi *estranea*, perchè l'azione della *causa prima* non può dirsi estranea, essendo la radice della *seconda*.

quanto sia conosciuta, somministra un fondamento reale alla probabilità od alla certezza; come lo prova il fatto dell'umana previdenza, della filosofia della storia, e delle presunte future condizioni dell'umanità. E per fermo, se le future libere azioni degli uomini fossero inconciliabili coll'anteriore loro certezza, lo sarebbero pure coll'anteriore loro probabilità, abbisognando così l'una, come l'altra di un fondamento; il quale non può esser altro fuorchè il tenore, secondo cui si attua e si svolge, o collettivamente in genere, o singolarmente negli individui, l'umana libertà; onde il divario, che corre fra la certezza e la probabilità, non suppone un diverso fondamento, ma una compiuta od imperfetta cognizione del medesimo, crescendo o scemando la probabilità delle future libere azioni, quanto è più o meno nota l'indole dell'agente e la molla delle sue deliberazioni: cioè, poco o nulla presumibili, ove questi sia ludibrio di casuali estrinseche contingenze poco o nulla prevedibili; ma qualora egli sia notoriamente dominato da qualche affetto prepotente, tanto più saranno prevedibili le sue azioni, quanto saranno meno libere e per poco non dissi necessarie. Per lo contrario, tanto saranno altresì più probabili o moralmente certe, quanto saranno meno dipendenti da un cieco subito affetto, o da fortuite estrinseche circostanze, e frutto spontaneo di libero e spassionato volere. Per la qual cosa tanto è più sicuro il giudizio, che si può recare delle future azioni d'un uomo, quanto ne è più nobile l'animo, schietto e generoso, più aperto il cuore, più franca la parola; quindi è che si può essere liberissimi nel non seguire il vizio, che si detesta, del pari che nell'amore accesissimo della virtù, senza che questa diventi perciò necessaria, o quello impossibile; e che la previdenza può correre parallela non pur colle necessarie, ma altresì colle libere determinazioni. Che se di queste non si può mai avere da noi assoluta certezza, ciò nasce dall'impossibilità, in che siamo di avere una compiuta ed adequata cognizione, non che dell'altrui, nè anco della nostra propria potenzialità in rapporto colle future estrinseche contingenze; una tale cognizione compiutissima non potendo competere che a quel solo, il quale, come causa prima, conosce l'intima ragione delle cause seconde, così libere, come necessarie, per lui solo attuose. Ma ad ogni modo la probabilità o morale certezza della previdenza umana è tanto conciliabile coll'umana libertà, quanto questa colla prescienza divina; epperò l'atto libero o non può essere probabilmente presunto dall'uomo, o può essere assolutamente ed infallibilmente preveduto da Dio.

APPENDICE E.

Dell' origine dei miti.

Il mito non è che il simbolo franteso, la successiva prevalenza relativa od assoluta del segno sul significato, essendo ciò che lo costituisce propriamente e lo contraddistingue dal simbolo e dall'allegoria; come, per lo contrario, la preponderanza dell'ideale sul reale è il costitutivo della leggenda; onde procedendo in senso inverso, mentre questa coll'andar tempo rende quasi indiscernibile l'ordito primitivo della trama del di lei lavoro, in quella vece si scolora vieppiù e svanisce nel mito il primitivo concetto simboleggiato. Quindi non è il mito una forma originaria e primordiale, come vorrebbe il Renan (1), ma derivata dall'allegoria e dal simbolo di cui oscura la luce; anzi mito non è per anco, o cessa di esserlo, qualora trapeli la finzione o si scopra, nel qual caso non avendosi del mito che la pura veste, questo si confonde coll'allegoria, locchè interviene segnatamente ne' miti filosofici. Ora a quel modo che la parola non è madre, bensì figlia e sposa del pensiero, il quale coniandola v'impronta la propria imagine; per simil maniera il concetto non può germinare dal simbolo che solo l'accenna e l'adombra con un parziale riscontro d'analogia, ricevendo più lume dalla mente che non gliene ministri. Locchè, contraddicendosi ed esagerando al solito, confessa il Renan, quando non riconosce alcun valore oggettivo al simbolo religioso nè altro significato inerente, tranne quello che ad altri piaccia attribuirgli (2), nè della scelta di questo o quel simbolo doversi chieder ragione al sentimento religioso per cui ogni simbolo è indifferente (3), il

(1) *Études d'histoire religieuse,* pag. 26.

(2) *Rien ne signifie par soi-même, et l'homme ne trouve dans les objets de son culte que ce qu'il y met. Ses symboles ne signifient que ce qu'on leur ordonne de signifier. L'homme fait la sainteté de ce qu'il croit, comme la beauté de ce qu'il aime.* Ivi, pag. 38, 423.

(3) *L'esprit passe où il veut, s'il lui plaît d'attacher l'idéal à ceci, à cela, qu'avez vous à lui dire?* (Ivi, pag. 38). Onde a destare un puro e santo affetto tanto varrebbe di per sè un quadro del B. Angelico di Fiesole quanto le Frine di Prassitele od un cippo osceno! *Les emblêmes que nous taxons d'obscenité .... n'excitaient en eux (les anciens) que des sentimens de sainteté et de respect religieux.* Ivi, pag. 65.

più imperfetto ed oscuro potendo essere da quello santificato (1), quasicchè possa dirsi imperfetto od abbisogni di essere santificato un simbolo che di per sè nulla significa; ovvero la ragione della scelta e delle successive trasformazioni dei simboli, l'uno dell'altro peggiore nella pagana antichità, non fosse, per confessione dello stesso Renan, la loro più o meno acconcia corrispondenza al concetto ed al sentimento dell'età successiva (2). Nè vale il contraddirsi affermando che questa distinzione di concetto e di simbolo, di segno e di significato, non poteva aver luogo nell'età primitiva, in cui tutto era significativo, in quel primitivo periodo di età confusa, in cui l'uomo, non distinguendo ancora l'oggetto dal soggetto, nè sè dalle sue sensazioni, nè queste dal loro oggetto, senza coscienza di sè, della natura e di Dio, tutto però animava e deificava, ed era al tempo stesso Dio e sacerdote, adorando le proprie sensazioni, ossia l'oggetto vago di sue sensazioni che non era altro che lui stesso (3). Che più? non avendo per anco il concetto dell'uno e dell'identico, avea però quello del vario e del molteplice, e senza avere il concetto della divinità era politeista (4)! Imperocchè, lasciata pure in disparte l'assurdità e le smaccate contraddizioni di tale ipotesi, niun costrutto ne potrebbe tuttavia cavare il nostro critico, il quale pur vuole che quanto di vivo, di animato, di divino l'uom primitivo scorgeva nella natura, non fosse che un parto di sua fantasia creatrice, un eco, un'imagine, un riverberamento di sè stesso (5); lo stesso fenomeno, cioè, riprodotto oggi giorno dall'umanità,

(1) *La conscience populaire dans sa grande et haute spontanéité sanctifie le symbole le plus imparfait. C'est le privilége du sentiment pur d'être invulnérable, et de se jouer avec le venin sans en être blessé* (*Études d'histoire religieuse*, pag. XVI, XVIII). E può essere imperfetto e venefico ciò che per sè è indifferente e vuoto di significazione!

(2) *La Vénus pudique des premiers âges avait un caractère plus sacré que la courtisane deifiée qui trôna sur les autels, quand Praxitèle eut fait tomber avec les plis de sa robe cet air de retenue qui révélait encore la déesse* (ivi, pag. 30). *L'antiquité se fatiguait vîte de ses symboles, un culte n'en avait guère pour plus de cent ans; la religion étant un des produits vivants de l'humanité doit vivre, c'est-à-dire, changer avec elle.* Ivi, pag. 45.

(3) *Tout était significatif pour l'âge primitif: était un âge de confuse unité, où l'homme voyait l'un dans l'autre et exprimait l'un par l'autre les deux mondes ouverts devant lui* (Ivi, pag. 26-27). *Il adorait ses sensations, ou, pour mieux dire, l'objet vague et inconnue de ses sensations; car ne séparant pas encore l'objet du sujet, le monde était lui même, et lui même était le monde* (Ivi, pag. 16).

(4) *La conception de la multiplicité dans l'univers c'est le polithéisme chez les peuples enfans* (Système comparé des langues sémitiques, pag. 8). *En face de la mer les sentimens de vague, d'infini, de terreur et de beauté, qui montait dans son âme, lui révélaient tout un cycle de dieux mélancoliques, capricieux, multiformes. Tout autres étaient les impressions et les divinités des montagnes....., de la terre ....., du feu et des vulcans, de l'atmosphère, etc.* (Études, pag. 16).

(5) *L'auréole dont le monde resplendit à ses yeux, la vie déifiée, le cri poétique de son âme ....., voilà son culte, culte céleste renfermant un acte d'adoration sans retour* (Ivi, pag. 26).

la quale, giusta il Renan, nel Cristo evangelico non ravvisa che il riflesso della propria imagine, di cui novello Narciso ama inebbriarsi (1), il che vuol dire che perduriamo tuttora, ovvero siam ritornati a quel periodo primitivo dell'umanità fanciulla, bimbi o rimbambiti (2). Or bene, se il mondo per l'uomo primitivo non era che una fantasmagoria, se non pur tutte cose, ma la stessa parvenza loro ricevea da lui corpo, vita, e quell'attributo incomunicabile da chi lo possiede, riconoscibile non già escogitabile da chi n'è privo, l'attributo vo' dire della divinità, ne consegue che quell'unità confusa dell'oggetto e del soggetto, dell'ideale e del reale, del segno e del significato non era dall'uomo primitivo veduta, ma creata, essendone artefice anzichè spettatore, epperò nulla eravi allora di significativo, ma tutto ricevea da lui vita e significazione; quindi invece di *vedere ed esprimere confusamente i due mondi aperti al suo sguardo*, non vedeane realmente che un solo, e l'altro era da lui idealmente creato e col reale commisto. Strano connubio, il quale per una parte presuppone non pur la distinzione ma la preesistenza logica dell'ideale, e per altra parte manca del fondamento che pur dovrebbe avere nel reale, nè dà ragione di quel concetto e di quel sentimento (e fosse pur vago e confuso) con che quel preteso uom primitivo (seppur nella scala degli esseri lo si vuol dappiù di un insetto) avrebbe architettato il suo poetico lavorìo, nè donde rampollasse quell' idealità, quella vita di che egli animava e coloriva tutto il creato! La è poi una vera bambinaggine ed un'aperta contraddizione il ricorrer che fa il Renan alle fantasime infantili, perocchè avendo egli chiarita stravagante l'ipotesi che l'uom primitivo nascesse altrimenti che dotato di tutte le sue facoltà e perfetto quanto ai suoi elementi costitutivi (3), e noi abbiamo pure

---

(1) *L'éternelle beauté vivra à jamais dans ce nom sublime* (*le Christ évangélique*) *comme dans touts ceux que l'humanité a choisis pour se rappeler ce qu'elle est et s'énivrer de la propre imâge. Voilà le Dieu vivant, voilà celui qu'il faut adorer* (Ivi, pag. 215).

(2) *L'homme primitif voyait la nature avec les yeux de l'enfant; or l'enfant projette sur toutes choses le merveilleux qu'il trouve en lui-même. La charmante petite ivresse de la vie qui lui donne le vertige lui fait voir le monde à travers une vapeur doucement colorée; il sourit à tout, et tout lui sourit....; il se fait un monde fantastique qui l'enchante et qui l'effraye ......; il affirme ses rêves. Tel était l'homme primitif. A peine séparé de la nature, il conversait avec elle, il lui parlait et entendait sa voix* (senza tuttavia distinguersene, aderendovi anzi col tralcio ombelicale). *Cette grande mère à laquelle il tenait encore par ses artères, lui paraissait comme vivante et animée* (onde quel dialogo era un monologo). *A la vue des phénomènes du monde physique il éprouvait des impressions diverses, qui recevant un corps de son imagination devenaient ses dieux.* Ivi, pag. 15-16.

(3) *La science démontre, qu'à un certain jour, en vertu des lois naturelles qui jusque là avaient présidé au développement des choses, sans exception ni intervention extérieure, l'être pensant est apparu*

dimostrato che l'immaginarlo adulto di forme, ma bambino di mente, privo cioè al tutto di riflessione e di coscienza, non sarebbe una stravaganza minore, dovendo lo sviluppo fisico essere all'intellettuale e morale contemperato, dopo una tale confessione il ricorrere appunto ai fenomeni governati dalle leggi attuali onde dar ragione di quelli ch'egli stesso riconosce essere avvenuti sotto altre leggi od altrimenti attuose, e per tal modo presumere i concetti ed i sentimenti dell'uom primitivo nato adulto, cui si vuole da niuno educato fuorchè dalla muta natura da lui stesso poetizzata, ritraendoli dalle prime fantasie dei nostri bimbi, che ricevono dalla madre non pur la vita fisica, ma l'intellettuale eziandio, non che stranezza indegna di critica che pretenda a serietà non che a scienza, è manifesta e per soprappiù inutile contraddizione, mancando non pur ogni ragione d'analogia, ma il fondamento stesso dell'induzione. E di vero, ben lungi che il neonato, staccatosi dall'alvo materno dove visse la vita della madre sua, e venuto alla luce del mondo, tutta vi riversi e vi diffonda la propria vita, colorandolo di quel maraviglioso che in sè racchiude, egli per lo contrario non destasi al sentimento, ai palpiti ed alle gioie della vita, se non al balenar dello sguardo e del riso materno, il quale col rivelargli e quasi trasfondergli la vita della madre, irraggia ed accende quella di lui. Che se questi, da quel primo riscontro e direi quasi connubio della propria e dell'altrui vita come inebbriato, ivi pure la suppone e la scorge ove in parte difetta, o punto non è, e spiccatosi dal seno della madre ora avvinghia le manine al collo del carezzevole cagnuolino, ed ora baciucchia le appariscenti, ma fredde e mute forme della bambolina, oltrecchè varia di grado mostrasi la sua tenerezza, chiarendoci così che se l'induzione sua è falsa, non è però priva al tutto di fondamento, ma analogicamente, sebbene erroneamente graduata (nè di certo più bislacca o ridevole di quella onde si piacciono

---

doué de toutes les facultés et parfait quant à ses élémens essentiels; et pourtant vouloir expliquer l'apparition de l'homme sur la terre par les lois qui régissent les phénomènes de nôtre globe depuis que la nature a cessée de créer, ce serait ouvrir la porte à de si extravagantes imaginations, que nul esprit sérieux ne voudrait s'y arrêter un instant (Ivi, pag. 217-218). La scienza può bensì dimostrare che il primo padre non ha potuto nascere come nacquero di poi i figli da lui progenerati, ma nè dimostra, nè può dimostrare ch' egli sia nato adulto in virtù di leggi naturali, giacchè le attuali, che sono le sole da noi conosciute, a ciò non bastano; e se il supporne altre è una gratuita ipotesi, l'attribuire alla natura una virtù creatrice è una di quelle stravaganze, che sono incompatibili con un intelletto sano; chè la natura o è una astrattezza, cioè il complesso degli esseri finiti, delle forze per cui sono attratti e delle leggi onde son governati. od è un vôto nome, o per dir meglio una maschera, *speciesque cerebrum non habet!*

non pochi fabbricatori d'ipotesi e di sistemi); ci si fa pure con ciò manifesto che la successiva più o meno fondata, parziale od intiera applicazione del sentimento e del concetto della vita all'aspetto de' fenomeni che realmente o simbolicamente la rappresentano, presuppone l'uno e l'altro già desto ed attuato da una primiera estrinseca manifestazione. Quindi la necessità e l'insufficienza del reale pel discorso intellettivo, non potendo l'ideale applicarsi al reale senza fondamento, nè questo generare od integrare, ma unicamente adombrar il concetto per cui solo riesce intelligibile e simbolico. Così il corpo è necessario all'umana personalità, ma riceve dall'anima la forma sostanziale e la vita, ed il suono articolato aggiunge vivezza e precisione al pensiero che l'informa coniandolo alla propria imagine senza che perciò l'uno coll'altro si confonda, come non si confonde nella pittura l'oggetto ideale .colla reale rappresentazione. Per la qual cosa, dato anche al Renan che l'umanità primitiva non abbia creato i simboli a velamento dei dommi, e che il connubio del concetto e del simbolo come del pensiero e della parola sia stato primitivamente (giacchè non v'ha dubbio che il patrimonio connaturale venne di poi discorsivamente accresciuto) istantaneo [1]; non ne segue che tale subitaneo connubio fosse opera di cieco istinto, e che il concetto e la veste nati ad un parto ed indivisi fossero indistinti e confusi; sì perchè non essendo reduttibili l'uno all'altro possono congiungersi come l'anima ed il corpo, ma non confondersi ed immedesimarsi, coesistere indivisi, non però indistinti; sì perchè, ove tali fossero intuitivamente, la riflessione non varrebbe a distinguerli, siccome quella che non introduce di netto la distinzione nell'intuito, ma trae fontalmente da questa la sua origine, ripiegandosi istintivamente il pensiero sui punti più luminosi e prominenti che gli s'affacciano nell'intuito ideale, e che la riflessione va di poi più e più lumeggiando. Laonde, come l'idea presiede alla creazione della parola ricevendone più viva e riflessa quella luce con che l'irraggia, e senza cui si avrebbe un suono, un canto, un grido, non mai una parola umana; così il concetto governa l'elezione del simbolo riconoscendovi l'analogo, e traendone un parziale adombramento con cui riesce più viva e concreta la formola ideale da integrarsi

---

(1) *C'est une très-grave erreur de supposer qu'à une époque reculée l'humanité ait créé des symboles afin de couvrir des dogmes et avec la vue distincte du dogme et du symbole. Tout cela est né simultanément, d'un même bond, en un moment indivisible, comme la pensée et la parole, l'idée et son expression* (Ivi, pag. 26)

astrattamente. Ben lungi pertanto che il concetto s'immedesimi col simbolo e vi si confonda, logicamente lo precede, e quando più non se ne distingue, col dileguarsi il concetto vien pur meno il simbolo perchè cessa di significare, e dà luogo al mito, che si è appunto il tramutamento dell'ideale nel reale, della prosopopea nella personalità. Ondechè il Renan s'appone al vero assumendo che il mito non contiene due elementi, il segno cioè, ed il significato; erra però grandemente quando contraddicendosi soggiunge che il mito è indiviso, e che in esso il segno ed il significato sono tutt'uno, immedesimati, indistinguibili (1); come se il semplice si possa dire indiviso e non si debba piuttosto dire indivisibile; o si possano immedesimare due termini che non si possono concepire fuorchè distinti, giacchè segno e significato sono concetti relativi, e non vi ha relazione senza distinzione di termini. Per la qual cosa il quesito se l'uom primitivo penetrasse sì o no il senso de' miti che si andava creando non è già solo prepostero, come lo chiama il Renan (2), ma assurdo, perchè il mito naturale, e non artefatto, non vien creato dall'uomo, ma nasce spontaneo all'oscurarsi e dileguarsi del simbolo, e quando questo rivive o compare, svanisce egli pure. Quindi il mito non è tale per chi ci crede, ma una realtà, ed è un mero simbolo per chi ci travede un concetto, epperò la parola mito non esprime un concetto assoluto, ma relativo, non è qualificativo di una credenza considerata in se stessa, ma nell'opinione di chi la discrede, sicchè ciò che dagli uni fu tenuto in conto di pretta realtà, e da altri creduto un mero simbolo, non fu un mito per nessun di loro, ma vien chiamato così da chi raffronta le due credenze, riunendo così due termini nè simultanei, nè omogenei, ma incompatibili e successivi; sicchè simbolo e mito, invece di unizzarsi e confondersi, si escludono a vicenda ed alternano, sovrapponendosi il secondo al primo da cui tragge occasionata origine e denominazione, ed a cui porge a sua volta occasione quando, scaricata per vetustà la storica intonacatura, riappariscono le primitive sembianze di mera finzione. E così, quando le favole mitologiche cessarono di essere universalmente credute, si studiarono i mitologi di spiegarle simbolicamente ristorando il simbolo primitivo, o sostituendovene un altro

(1) *Le mythe ne renferme pas deux élémens, une enveloppe et une chose enveloppée; il est indivis. — Dans le mythe l'intention n'était pas distincte de la chose même* (Ivi).

(2) *Cette question: - l'homme primitif comprenait-il ou ne comprenait-il pas le sens des mythes qu'il créait - est déplacée* (Ivi).

novello a posta loro, tutelando in pari tempo la popolare superstizione e la propria incredulità. Parimente alcuni filosofi nascosero sovente le dottrine loro esoteriche sotto il velame di miti filosofici o cosmogonici (miti per riguardo alla falsa credenza del volgo, ma meri simboli per gl'iniziati), come altri ed i più antichi segnatamente erano soliti servirsi nel loro insegnamento di enimmi, di simboli e di allegorie (1). Ei si conviene pertanto distinguere i miti naturali dagli artefatti; gli originari dai derivati ritraenti dai primi per interpretazione od imitazione l'occasione di loro origine, e per ragione d'analogia il fondamento di loro credibilità, come sono i dedotti da false etimologie; e sovrattutto i miti propriamente detti dalla mitica, o per meglio dire, allegorica o simbolica forma con che poeti e filosofi e lo stesso volgo rivestirono in ogni tempo consapevolmente mere idee ed astrattezze, o fatti istorici, personificandoli allegoricamente (come sogliono esserlo tuttora da noi i vizi e le virtù, le città, le nazioni, gl'imperi), onde originarono i miti del Caos, dell'Erebo e della Notte, del Cielo e della Terra, dell'Amore e della Discordia, della Felicità e della Fortuna, della Senità e della Giovinezza, della Bellezza e del Pudore, delle Grazie e delle Erinni, della Febbre, della Peste, della Morte; personificazioni che comuni alle prime origini ed alle ultime vicende del Paganesimo, con alterna vicenda di causa e di effetto, mentre le une degeneravano in veri miti, erano occasione che per analogia ne rampollassero novellamente. Ma questesso lento e perpetuo lavorìo, con che l'uno idealmente spezzato veniva a mano a mano e partitamente specificandosi e la specie ideale assumeva realtà di persona, fa pur segno che il mito non fu mai una subitanea ed istintiva incarnazione di un'idea o d'un fatto in una reale personalità, ma la successiva ed inconscia trasformazione d'un puro concetto; un involgimento, non uno sviluppo, un imprigionamento dell'ideale, non l'animazione del reale, e poco men che non dissi la *cristallizzazione* dell'intelligibile, anziché la *volatilizzazione* del sensibile; insomma, non una creazione, ma una degenerazione da reputarsi a quell'innata propensione, da non francarsene che con isforzo, la quale aggrava mai sempre lo spirito verso il materiale e concreto, e lo fa più inchinevole ad alterare il vero, che non vôlto ed acconcio a raggiungerlo od appurarlo. Perlochè io porto opinione che in questa nostra età, la quale sovra ogni altra ha voce e

(1) Conf. Pausan., *Arcad.*; VIII, 8; Plutarch., *Sympos.*, VIII, 7; Clem. Alex., *Strom.*, V, 49.

vanto di *positiva*, siasi bensì trasformato, ma non cessato perciò il mitico magistero; imperocchè, se gli antichi diedero ossa e polpa a meri concetti, noi (a non parlare del mito nuovissimo del critico francese, giusta cui la gran Madre Natura nel fior di sua giovinezza, quand'era primipara, figliò animali con e senza ragione, come ora germina fiori e mena frutti) noi, dico, trattiam *l'ombre come cosa salda*(1), e rinchiusi per alcuni giorni in questa chiostra mortale, come già quei cattivi nella caverna sognata da Platone (2), pregiando il transitorio e caduco quasi stabile ed eterno, e la parvenza come realtà, da mille Protei e Vertunni illusi del continuo e ludificati, non però disillusi e rinsaviti, spoetiamo il cuore e la natura, la quale, quanto è bellissima di luce dall'eterno sole riverberata, ed è *scala al Fattor chi ben l'estima* (3); per lo contrario chi in essa sola s'affisi e con indefinita ardenza d'amore la carezzi, stringesi una nube in luogo di Giunone. Dissi *spoetiamo*, perocchè se i poeti furono cagionati e non ingiustamente di essere stati i più fecondi e dannosi, epperò dannevoli fabbricatori di miti; in ciò non furono poeti, ma poetastri; chè ufficio del poeta si è l'intendere il muto linguaggio della natura, e quelle sorde aspirazioni sì ben accennate da Paolo, onde ogni creata cosa geme e travaglia come donna in sul parto (4), in attesa cioè di sua sublimazione; e queste intime voci ei debbe fedelmente ripetere, e quel muto linguaggio interpretare. Tal si è la missione del poeta, anzi dell'uomo costituito sacerdote e ministro della natura, perchè se ne valesse a salire insieme a Dio spiritualizzandola idealmente, e non già precipitasse con essa seco e la coartasse e la costrignesse incorporandovi la divinità. Per la qual cosa, ben lungi che la vera poesia alteri il reale o se ne scompagni, è la sola che l'esplichi compiutamente; poichè, tolta al creato l'idealità, cessa ogni ragione d'origine, di mezzo, di fine, vien meno ogni moto, ogni ordine, ogni vita, sola regna la morte sull'assiderata ed incadaverita natura.

---

(1) Dante, *Purgatorio*, XXI, ult.

(2) *Republ.*, VII, 514-515.

(3) Petrarca, *Canz.* XLVIII, 10.

(4) Rom., VIII, 20-22.

INDICE

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

CORREZIONE

A pag. 189 della parte Fisico-Matematica, in tutte le formole dove è la lettera z, *si sostituisca la cifra* **2.**