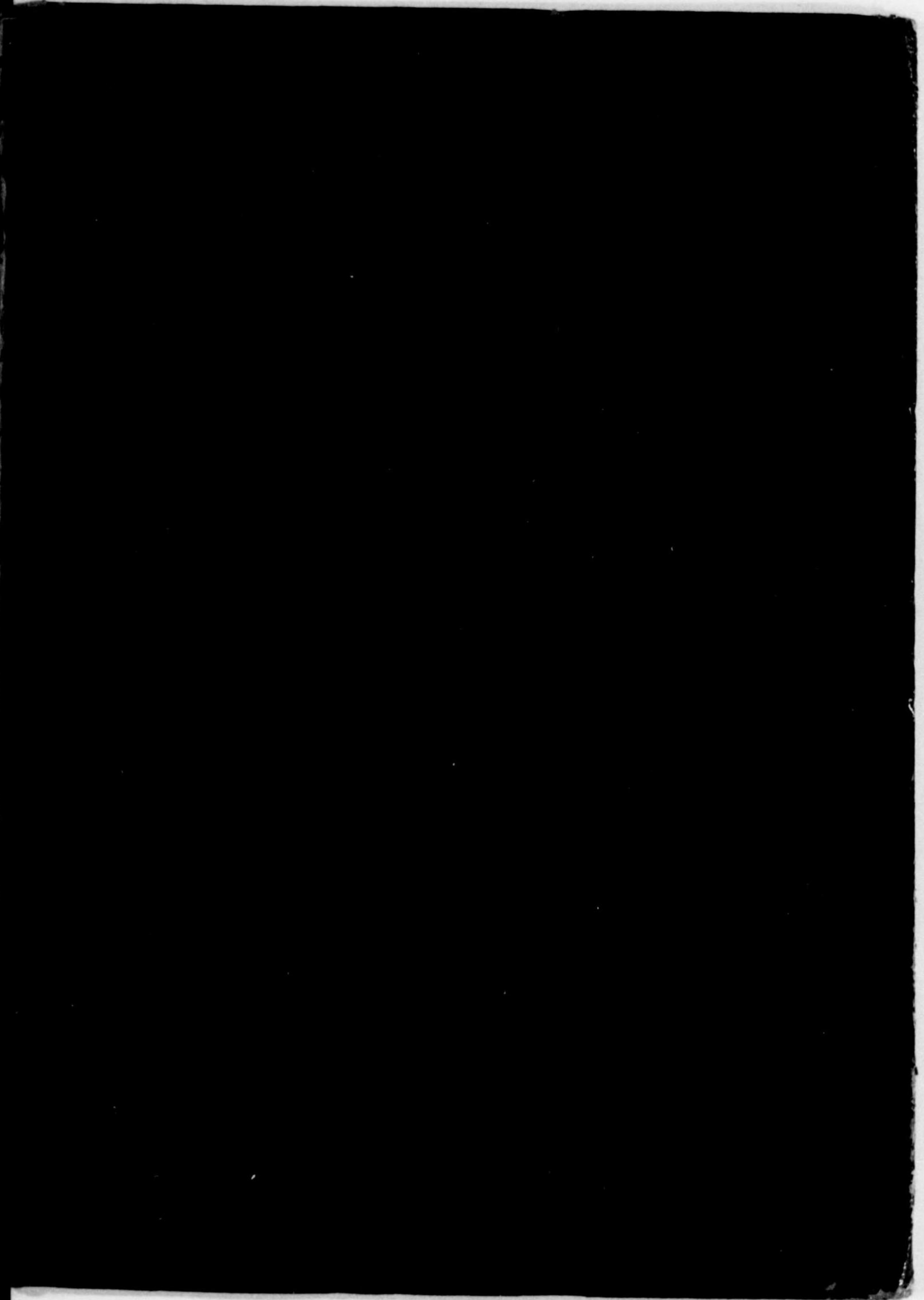


始



548.1
M.94

昭和七年六月廿五日

年 月 日 10/3

270	61.5								
	282								

昭和七年六月廿五日
東京市立図書館
蔵書印

548.1
M: 94

電波の傳導と輻射



工學博士

水橋東作著

東海書房



序

先にコロナ社より出版した空中線理論は其後相當に進歩した部分を加へて改版したいと思つて、既に 1944 年の 7 月に脱稿したのであつたが、それが行方が知れなくなつて了つた。そこでそれを幸ひに、もつと根本的に書き直す氣になつた。學友櫻井時夫君が Stratton の電磁理論の翻譯を完遂せられて、小生の手許に贈つて頂いたものを時折ひもどいてゐる中に相當の啓蒙を受けた。旁々我國は總ての點に於て出直さなければならなくなり、私も過去には一應終止符を打つ必要に迫られた様な氣がする。そこで私の今日迄に得たこの方面の學識を一纏めにして系統を樹てることにしたのである。

其後にはつきりと工業分野をもつに至つたものとしては分布常數を以て構成する回路網と中空導波管とであらう、夫々全く獨立の分野ではあるが、所謂回路の良さ Q を問題にする時には兩者の間に間隙があるのば、妙なわけで、之を連結出來た様に思ふ。斯くして新たのものに加へると最早空中線はその一部分にしか過ぎない。然し一般に斯る分野に未だ不慣れの學徒に對してあまり嚴格な題名をつけることは混迷の因であるから、從來に近いものにした。もつと學界一般の共通の感覺が發達して、古典を新規に置換へるに何等の躊躇も要らない様な風になることを衷心より希望する次第である。

こゝに我國は創始以來始めての平和國家建設と云ふ大業を負ふてゐる。我々は世界の恩惠を受けると共に、微力なりとも人類の爲に盡す状態になつてゐることが窮極に仕上つた時の姿であらねばならない。然らば何を以て報ひようとするのか、若し萬が一にも科學の上に於て貢獻するところがあつたとするならば、人間としての本懐之に過るものはなからう。その様な喜ばしい事態が來ることを切に願ふのである。



私はこの出直しのこれからの人生に於て、新たな科学分野に當然立たされるのであるが、そこに又新たな潑刺たる學問系統を樹立したいと思つてゐる。何れ又その節は著書の上で讀者にまみえたいと思つてゐる。人間熱烈に思望することは必ず成し遂げられると云ふことは、既に云ひ古された諺であるが、今日こそそれを信條に持ちたいものである。

1946年9月

水橋東作

目次

第1章 導線上の高周波

1.1 単一周波数の振動	2
1.2 導線上の電気振動	3
1.3 導線上の高周波傳播特性	6
1.4 有限長の導線上の高周波	7
1.5 有限長の導線の共振	9
1.6 導線の傳送特性	11
1.7 無損失導線の傳送特性	14
1.8 波動抵抗	17
1.9 導線の高周波抵抗	20
1.10 傳播常数	23
1.11 傳送能率	26
1.12 給電線概観	29

第2章 四端子回路

2.1 四端子回路の基本方程式	31
2.2 影像インピーダンス	33
2.3 基本方程式の傳達型表示	34
2.4 反射係数	36
2.5 對稱四端子回路	37
2.6 四端子回路の濾波特性	37
2.7 四端子回路のインピーダンス變成特性	39
2.8 無損失導線の四端子常数	41
2.9 四端子回路の接続組合せ	41

第3章 高周波回路—I

3.1	共振線で構成する回路	43
3.2	共振線回路の構成	44
3.3	L型回路	47
3.4	T型回路	49
3.5	II型回路	51
3.6	D型回路	52
3.7	D _e 型回路	53
3.8	並列回路	55
3.9	枝葉型回路	56
3.10	樹枝型回路	59
3.11	整合回路	63
3.12	多重整合回路	65
3.13	各種回路の実施	66

第4章 高周波回路—II

4.1	抵抗損を考へた共振線	70
4.2	共振線のQ	72
4.3	濾波回路の特性劣化	74
4.4	共振線回路のQ	76
4.5	Qの傳達	78
4.6	斷片で構成する共振線	80
4.7	常数の變化する共振線	85

第5章 不平衡の高周波

5.1	不平衡の高周波	92
5.2	各種の波動インピーダンス	95

5.3	平衡導線回路	98
5.4	不平衡導線回路	105
5.5	四端子回路	110

第6章 空中線の輻射指向性

6.1	素片電氣振動の輻射電磁界	114
6.2	直線狀定常波電流の輻射指向性	115
6.3	半波長の整數倍の定常波電流の輻射指向性	117
6.4	任意長の定常波電流の輻射指向性	119
6.5	進行波電流の輻射指向性	120
6.6	一樣の電流の輻射指向性	121
6.7	横列半波空中線の輻射指向性	121
6.8	縦列半波空中線の輻射指向性	125
6.9	單向指向性	127
6.10	地面の影響	129
6.11	指向性空中線の利得	131
6.12	圓嚮面配列空中線	133
6.13	部分波空中線の指向性	139
6.14	長い定常波空中線の組合せ	141
6.15	長い進行波空中線の組合せ	143
6.16	空中線の發達	144
6.17	指向性の測定	145
6.18	空中線利得の測定	146

第7章 空中線の構成

7.1	空中線系に用ふる電氣回路	147
7.2	部分波空中線	149

7.3	半波空中線	150
7.4	給電線上の電圧電流測定	152
7.5	ダブレットの變形	153
7.6	半波空中線列の縦横給電	154
7.7	半波空中線列の分岐給電	155
7.8	半波空中線列の並列給電	157
7.9	各種ビーム空中線	157
7.10	廣帯域空中線	159
7.11	指向性廻轉可能空中線	160
7.12	受信空中線	161
7.13	同軸給電線の整合回路	165

第8章 ベクトル演算

8.1	輻射理論	167
8.2	ベクトルとスカラー	168
8.3	二つのベクトルの積	169
8.4	ベクトルの微分積分	170
8.5	スカラー界とベクトル界	171
8.6	スカラー界の勾配	173
8.7	ベクトル界の發散	174
8.8	ベクトル界の廻轉	176
8.9	ベクトル演算の諸公式	178
8.10	ガウスの定理	179
8.11	ストークスの定理	180
8.12	ベクトル解析	181

第9章 電磁氣學通論

9.1	マックスウェルの方程式	184
9.2	電氣磁氣諸量の誘導	186
9.3	靜電界	189
9.4	スカラー・ポテンシヤル	190
9.5	電氣双極	193
9.6	定常の電磁界	194
9.7	ベクトル・ポテンシヤル	195
9.8	ビオ・サバールの法則	197
9.9	MKS 單位	198
9.10	電磁エネルギー	201
9.11	エネルギーの流れ	203

第10章 電氣力學

10.1	準定常及び力學現象	206
10.2	電氣力學に於けるポテンシヤル	206
10.3	ヘルツのベクトル	209
10.4	波動方程式の解	210
10.5	球面電磁波	212
10.6	ヘルツのベクトルと中心の電氣振動との關係	216
10.7	ヘルツの振動子	217
10.8	輻射エネルギー	218
10.9	導線に沿ふ電波の傳播	220

第11章 空中線の輻射電力及び輻射抵抗

11.1	輻射電力及び抵抗	223
11.2	平行空中線導線群の輻射電力	226
11.3	空中線近傍のヘルツのベクトル	228

11.4	積分對數	230
11.5	平行空中線導線群の輻射インピーダンス	232
11.6	地上に直立の空中線の輻射インピーダンス	237
11.7	輻射抵抗概感	240

第12章 曲線座標系

12.1	曲線座標	243
12.2	曲線座標の変数の統一	246
12.3	ポテンシャルの勾配	249
12.4	ベクトルの發散	250
12.5	ベクトルの廻轉	251
12.6	マックスウェルの方程式	253
12.7	球座標	253
12.8	橢球座標	254
12.9	廻轉體座標	259
12.10	楕圓體座標	261

第13章 立體回路中の高周波

13.1	第二の電磁界	264
13.2	槽體回路の周る電磁界	265
13.3	槽波の波動インピーダンス	267
13.4	矩形槽回路中の高周波	270
13.5	圓槽波	276
13.6	圓槽函数	277
13.7	圓槽波の界ベクトル	281
13.8	圓槽波の自然振動	283
13.9	中空管内の高周波	288

13.10	中空管内の電磁界	291
13.11	實際上の技術	295
13.12	減衰常数	299
13.13	波長常数	304
13.14	球空洞共振器	304

附 録 I.	基本常数	309
II.	電磁量のデメンション	310
III.	電磁單位の變換表	311

事項索引	313
人名索引	317

第 1 章 導線上の高周波

§ 1.1 単一周波数の振動

幾つもの周波数の振動を同時に取扱ふ事はしないで、単一周波数の正弦波形の振動を取扱ふ場合には、複素数を用ひれば簡潔に処理することが出来る。實際交流工学に於ては斯う言ふ場合に限るのである。

正弦波形の振動は一般に次式で表される：

$$x = a \cos(\omega t + \phi). \quad (1.1)$$

ここで、 a は振幅であり、 ω は圓周波数であり、之を周波数 f で表せば次の通りである。

$$\omega = 2\pi f. \quad (1.2)$$

又 ϕ は、 $t=0$ に於ける位相である。

ここで Euler の公式を用ひて、次の複素数を導入すれば、

$$X = a \varepsilon^{j(\omega t + \phi)} = a \cos(\omega t + \phi) + ja \sin(\omega t + \phi). \quad (1.3)$$

但し $j = \sqrt{-1}$ である。(1.1) の量 x は、 X なる複素数の實數部になつてゐる。そこで

$$A = a \varepsilon^{j\phi} \quad (1.4)$$

と置けば

$$X = A \varepsilon^{j\omega t} \quad (1.5)$$

となるが、 A も複素数である。

同一周波数の二つの振動があつて、之等を脚符番をつけて區別するとすれ

$$\text{ば} \quad \left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos(\omega t + \phi_1), \\ x_2 &= a_2 \cos(\omega t + \phi_2) \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

となり、之に對應する複素数表示は次の如くなる：

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= A_1 e^{j\omega t}, \\ X_2 &= A_2 e^{j\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

x_1, x_2 の和又は差を求めると言ふことは(1.6)からは容易でないが、(1.7)から求めることは極めて容易である。即ち A_1, A_2 の複素数の和又は差を求めて、その實數部をとればよいのである。

次に X_1 と X_2 との比を求めると、

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{a_1 e^{j\phi_1}}{a_2 e^{j\phi_2}} = \frac{a_1}{a_2} e^{j(\phi_1 - \phi_2)} \quad (1.8)$$

となるが、 x_1 を電壓として、 x_2 をそこを流れる電流とすれば、(1.8)の様な新たな複素数を導入することによつて、複素数計算が容易に運行される。この複素数はインピーダンスと言ふ。

又 x_1 と x_2 の積の平均値である電力 p は

$$p = a_1 a_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \quad (1.9)$$

で與へられる。 X_2 の共扼複素数を \bar{X}_2 と表せば、

$$\bar{X}_2 = a_2 e^{-j(\omega t + \phi_2)} \quad (1.10)$$

であるから、

$$X_1 \bar{X}_2 = a_1 a_2 e^{j(\phi_1 - \phi_2)} \quad (1.11)$$

であり、これを P とすれば、その實數部が(1.9)の電力を表してゐる。

次に(1.1)を時間に就て微分すれば

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \phi) = a\omega \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.12)$$

となる。之は微分すれば、振幅が ω 倍になり、位相が $\pi/2$ 進むことを表してゐる。(1.5)に就ては

$$\frac{dX}{dt} = j\omega A e^{j\omega t} \quad (1.13)$$

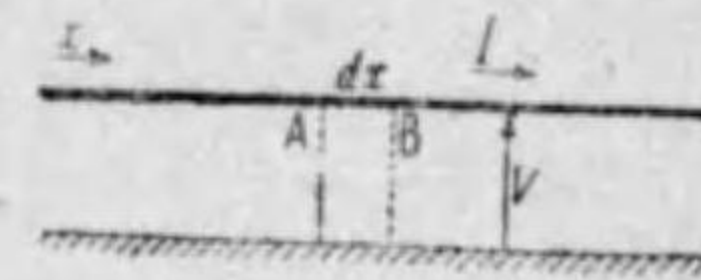
となり、 j を掛けると言ふことは複素数平面に於て $\pi/2$ だけベクトルが進

むことを表してゐるから、(1.13)の實數部が(1.12)の値を示してゐることになる。

之だけの準備によつて、これからの總ての數式を複素数表示にして非常に簡結に出来るのである。

§1.2 導線上の電気振動

現象を考へ易くする爲に、第1.1圖の如く完全導體の平面の上に一條の導線があるとして、その解釋を進めることとする。この導線に沿ふて移動しても電氣的の寸法に變りがなく、到る所一樣の状態になつてゐるとする。導線の方向を座標 x に採る。



第1.1圖

扱て、この導線上に圓周波數 ω の電気振動が乗つてゐるとすれば、電壓と電流は或る状態に分布してゐるわけである。従つてそれ等は

$$v(xt) = V(x) e^{j\omega t}, \quad i(xt) = I(x) e^{j\omega t} \quad (1.14)$$

と表すことが出来る。 $V(x), I(x)$ とは x のみの函数であると言ふ意味であるが、 V も I も複素数であるから、その絶対値のみでなく位相も x によつて變ることは云ふ迄もない。以下略して之等を V_x, I_x と書くことにする。

導線の單位長毎の抵抗及びインダクタンスを夫々 r オーム、 L ヘンリーとし、電流の方向を x にとれば、電壓が x の方向の微小の長さ Δx に於て減る減高 ΔV_x はその部分に存する電壓降下(電流×インピーダンス)に等しい譯であるから、次の方程式が成り立つ。

$$-\Delta V_x = (r + j\omega L) \Delta x \cdot I_x \quad (1.15)$$

之を微分方程式に直せば次の如くなる。

$$-\frac{dV_x}{dx} = (r + j\omega L) I_x \quad (1.16)$$

又導線の単位長毎の漏洩コンダクタンス及び電気容量を、夫々 g モー、及び C フェラッドとすれば、電流が x 方向の微小の長さ Δx に於て、減る減高 $-\Delta I_x$ は、その部分で分路する漏洩電流に等しい譯であるから、次の方程式が成り立つ。

$$-\Delta I_x = (g + j\omega C) \cdot \Delta x \cdot V_x \quad (1.17)$$

之を微分方程式に直せば次の如くなる、

$$-\frac{dI_x}{dx} = (g + j\omega C)V_x \quad (1.18)$$

(1.16) と (1.18) とを、もう一度微分して、電圧又は電流のみの方程式にすれば次の様になる。

$$\frac{d^2 V_x}{dx^2} = \gamma^2 V_x \quad (1.19)$$

$$\frac{d^2 I_x}{dx^2} = \gamma^2 I_x \quad (1.20)$$

但し $\gamma^2 = (g + j\omega C)(r + j\omega L) = (a + j\beta)^2$ (1.21)

(1.19) の一般解は

$$V_x = a e^{rx} + b e^{-rx} \quad (1.22)$$

となる。ここで a と b とは積分常数であつて、導線の端の條件が與へられれば決まるものである。之を (1.16) に代入すれば電流が求められる。

$$I_x = -\frac{1}{W} (a e^{rx} - b e^{-rx}), \quad (1.23)$$

ここで

$$W = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}} \quad (1.24)$$

そこで先づ原點 $x=0$ に於て電圧が E に保たれてゐて、導線が無限に x 方向に延びてゐるとすれば、これで兩端の條件が定まつたわけであるから上の積分常数は決まる。即ち (1.22) 及び (1.23) に於て、 $x=\infty$ として V_∞ も I_∞ も無限大に生長して行くといふことがあり得ないことより、 $a=0$ で

なければならぬ。そしてなほ $x=0$ で、 $V_0=E$ とすれば、 $b=E$ が得られる。この a と b の値を用ひれば兩式は次の通りになる。

$$V_x = E e^{-rx} = E e^{-(a+j\beta)x}, \quad (1.25)$$

$$I_x = \frac{E}{W} e^{-rx} = \frac{E}{W} e^{-(a+j\beta)x}. \quad (1.26)$$

この兩式を見れば、 V_x も I_x も共に x 方向に進むに従つて、単位長毎に e^{-a} の割合で減衰し、同時に又 $e^{-j\beta}$ の割合で位相が遅れてゆき、 V_x と I_x とは全く同じ形に分布してゐて、その比が如何なる點に於ても一樣に一定の値 W になつてゐることを示してゐる。それ故に、上式は電圧及び電流が波動の形で x 方向に傳播してゐることを表してゐる。

この數式の指示する所を物理的に解釋すれば次の通りである。基本としては電荷が導線に沿つて x 方向に波動の形で傳播されるのである。導線が地表との間に一樣の電気容量を呈してゐるから、各部分でその電荷の量に比例する電圧を現すから、それが電荷と同じ位相で波動として傳播すると見ることが出来る。又観測眼を x に固定しておけば、電荷の移動は電流であるから、電荷の波動と全く同位相の電流 I_x の波動があると見ることが出来る。従つて同一の電荷の波動が、電圧測定では電圧波動として観測され、電流測定では電流波動として観測されるといふことである。そしてその電圧波と電流波とが同一位相で、いづれの點でも一定の比例關係にあるのも亦全く當然のことなのである。 $V_x = I_x W$ より W はインピーダンスの性質を持つてゐるから、之を波動インピーダンスと稱する。そして斯様な波動は一方向へ進んで行くものであるから進行波と云ふ。又 γ は上述の通り傳播の特性が一切之によつて定まるのであるから、傳播常数と云ひ、その中の a は減衰常数、 β は波長常数と云ふ。

扱て、(1.25) と (1.26) が斯様の進行波を表してゐることが解つてから一般の場合 (1.22) と (1.23) を見れば、逆の方向へ進む進行波も加つてゐる

のであつて、一般の導線上の電気振動は兩方向への進行波が併存する現象である。

§1.3 導線上の高周波傳播特性

導線に高周波の波動を傳播させる場合でも、前節の諸式は聊かも變らないが、唯 α , β 及び W が周波数の高い時には却つて省算が出來て、一般の場合より簡單になるから、その點を明らかにしておかう。その爲にはそれ等を周波数の函数として表す様に計算しなければならない。先づ α と β とは (1.21) より計算すれば次の値になる。

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(r^2 + \omega^2 L^2)(g^2 + \omega^2 C^2) + (rg - \omega^2 LC)} \right\}}, \quad (1.27)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(r^2 + \omega^2 L^2)(g^2 + \omega^2 C^2) - (rg - \omega^2 LC)} \right\}}. \quad (1.28)$$

之等と (1.24) とに於て、 ω が大きい時にどのような省算が出来るかと言ふことであるが、それには飽く迄實際上的見地に立つて吟味しなければならないことである。然し吟味はいづれあとですることにして、こゝではその前提を定めることにする。即ち高周波工学に於ては r , g , L 及び C が大體次の關係にある、と言ふ處より出發する。

$$r \ll \omega L, \quad g \ll \omega C. \quad (1.29)$$

之を (1.24) に用ふれば波動インピーダンスは純抵抗分となつて

$$W = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (1.30)$$

となる。又 α は (1.27) に、 $g=0$ として、減衰の起るのは導線の抵抗損のみによると假定すれば、

$$\alpha = \frac{r}{2W} \quad (1.31)$$

となり、 β は (1.28) より

$$\beta = \omega \sqrt{LC} \quad (1.32)$$

となる。

一方 β は、一波長 λ 進む毎に 2π だけ位相が進むのであるから、

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.33)$$

と置くことが出来る。波動の性質として波長に周波数を掛けた

$$f\lambda = v$$

は速度であるが、測定の結果この v は光速 c に等しい。従つて

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{\omega}{c} \quad (1.34)$$

より (1.32) と比べて、

$$\sqrt{LC} = \frac{1}{c} \quad (1.35)$$

である。このことは導線の種類や構造に拘りなく LC の値は一定であつて、光速二乗の逆数になつてゐることを表してゐる。

以上の理論は完全導體面上の一線條の場合であつたが、往復二線條の平行線の場合には、その完全導體面を鏡面として鏡像の位置に歸りの線があるとして導體面を取去つて考へればよいわけで、その際には電壓は2倍になり、 L は2倍に、 C は半分になることだけを考へて置けば上の理論がその儘適用出来る。

§1.4 有限長の導線上の高周波

導線の長さが或る與へられた値になつてゐる時には、導線上の電気振動は往復の進行波が共存し、兩端の條件によつて (1.22) と (1.23) の積分常數 a , b が決定されるのである。先づ後の必要の爲に (1.23) の I_x の正の方向を x 方向と反對にとることとしよう。さうすれば (1.23) は負號がとれて次

の如くなる:

$$I_x = \frac{1}{W}(a\epsilon^{\gamma x} - b\epsilon^{-\gamma x}). \quad (1.36)$$

先づ一端 $x=0$ に於て第1.2圖(a)の如く、導線がぶつ切り切れておるとすれば、 $x=0$ に於て $V_0=0$ であるから、(1.36)により $a=b=0$ を得る。そこで(1.22)と(1.36)より b を消去すれば次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} V_x &= a(\epsilon^{\gamma x} + \epsilon^{-\gamma x}) = 2a \cosh \gamma x, \\ I_x &= \frac{a}{W}(\epsilon^{\gamma x} - \epsilon^{-\gamma x}) = \frac{2a}{W} \sinh \gamma x. \end{aligned} \right\} \quad (1.37)$$

そこで、 x なる點で左方の導線を一つの負荷と見て、そのインピーダンスを Z_x とすれば、 Z_x は V_x/I_x で與へられ、之を上式より求めれば

$$Z_x = W \coth \gamma x \quad (1.38)$$

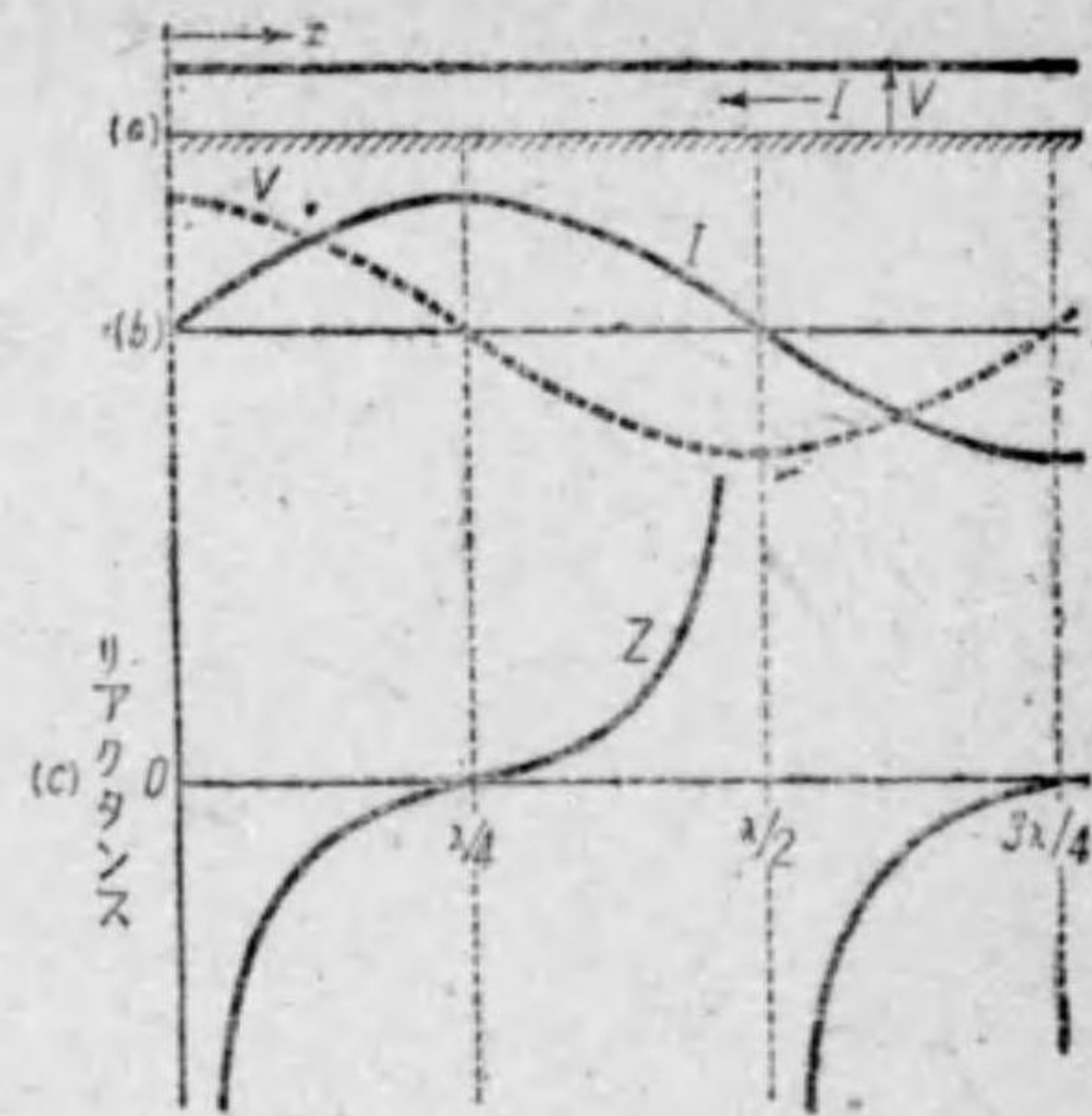
となる。

なほこゝで現象をはつきり掴む爲に減衰がないものとして、即ち $a=0$ として $\gamma=j\beta$ と置いて考へて見よう。斯うすると式が三角函数になる爲に甚だ解り易いと言ふのみでなく、高周波工學の殊に周波數の高い方に於ては事實上殆ど斯して差支へないのである。最も a が大きい時、即ち有限長の導線を空中線として用ふる時でさへも $a \ll \beta$ である。そこで $\cosh j\theta = \cos \theta$ 及び $\sinh j\theta = j \sin \theta$ なる公式を用ひれば上式は次の如くなる。

$$V_x = 2a \cos \beta x, \quad (1.39)$$

$$I_x = \frac{2a}{W} j \sin \beta x, \quad (1.40)$$

$$Z_x = -jW \cot \beta x. \quad (1.41)$$



第1.2圖

この V_x , I_x 及び Z_x を圖示すれば第1.2圖(b)(c)の如くである。即ち(1.39)と(1.40)の示す處は進行波とは全然趣きを異にしてゐて、何處でも電壓と電流とは $\pi/2$ 位相が異り、 x に沿つて兩者共振幅が變り、夫々の位相は同一である。そして半波毎に反對位相になる。これは定常波と言ふ。 Z_x は $x=0$ に於てはリアクタンスが $-\infty$ で、それより、 x が増すに従つて上昇し、 $x=\lambda/4$ に於て丁度 0 となり、それを過ぎると + になり $x=\lambda/2$ で ∞ となり、之を繰返すのである。

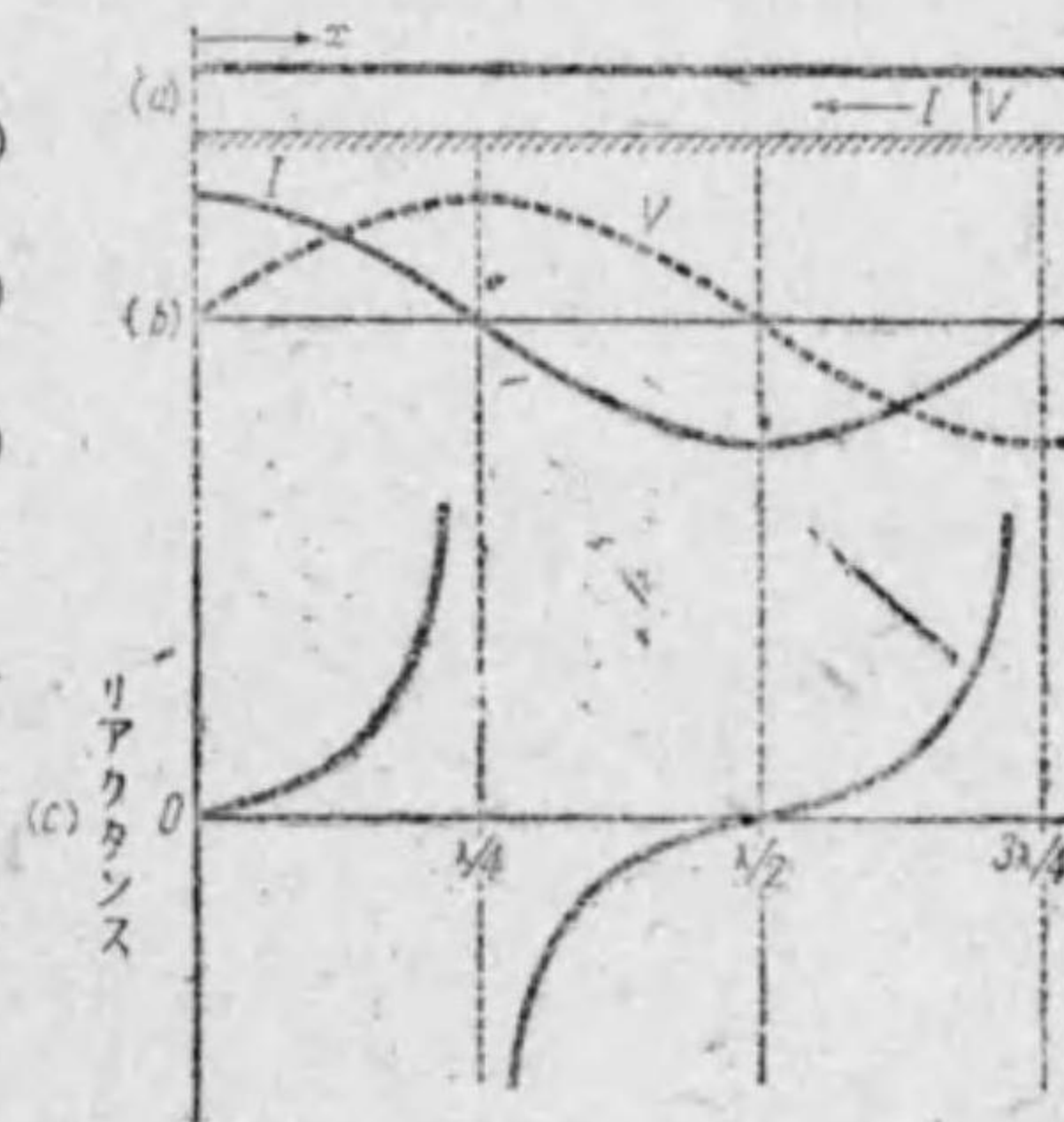
次に一端 $x=0$ で第1.3圖(a)の様に接地短絡されておるとすれば、 $x=0$ で $V_0=0$ であるから、上述と同様の操作により電壓電流及びリアクタンスは次の如くなる。

$$V_x = 2aj \sin \beta x, \quad (1.42)$$

$$I_x = \frac{2a}{W} \cos \beta x, \quad (1.43)$$

$$Z_x = jW \tan \beta x. \quad (1.44)$$

之式を圖示すれば第1.3圖(b)(c)の如くなる。之は前者と大分異なる様に見えるけれども、 $\lambda/4$ ずらせば同じものである。兩者共左向進行波と右向進行波とが全く同じであつて、斯様な状態は完全な定常波である。



第1.3圖

§1.5 有限長の導線の共振

有限長の導線がリアクタンスになることがわかつたから、次にその共振状態を調べる。第1.4圖の如く長さ l の導線の一端に電源を結んだ際の現象を考へるのであるが、先づ電源に内部インピーダンスのない理想の場合に就て考へる。

第一に電源が短絡的の場合、即ち電流はいくらでも供給出来るが、電圧は殆ど零である場合には、負荷のリアクタンスが零になる時に共振する。従つて(1.41)及び(1.44)に於て $Z_s=0$ が共振条件になる。

前者では $\cot \beta l = 0$ より、 $\beta l = n\pi + \pi/2$ (n は整数) となり、之を波長 λ と l との関係に直せば、

$$l = (2n+1)\lambda/4 \quad (1.45)$$

となる。又後者では $\tan \beta l = 0$ より、 $\beta l = n\pi$ (n は整数) となり、同様に λ と l との関係は

$$l = n\lambda/2 \quad (1.46)$$

である。

第二に電源が断線的の場合、即ち電圧はいくらでも供給出来るが電流は殆ど零の場合には、リアクタンスが ∞ になる時に強勢の電気振動が起るので、共振は(1.41)及び(1.44)に於て $Z_s = \infty$ が条件になる。

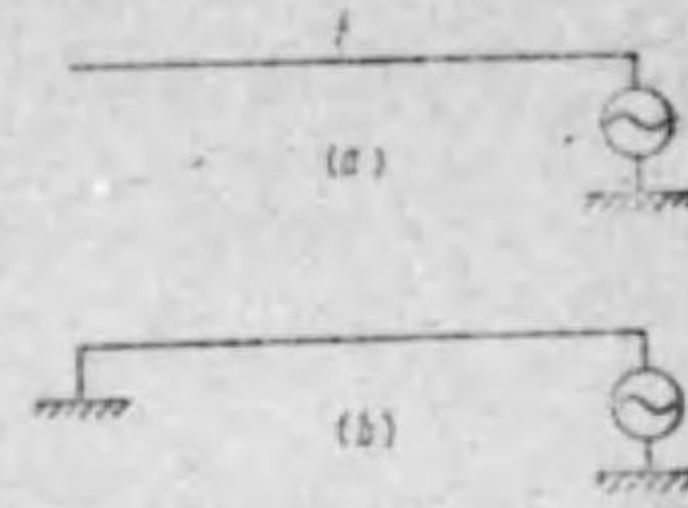
前者に於ては $\cot \beta l = \infty$ となるが、これは $\tan \beta l = 0$ であるから、前の場合より $l = n\lambda/2$ の時共振し、後者では $\tan \beta l = \infty$ 、即ち $\cot \beta l = 0$ であるから、共振条件は $l = (2n+1)\lambda/4$ である。

第1.2圖と第1.3圖とで負荷曲線の共振點附近を見れば、第一の場合と同調はかなり緩かであるが、第二の場合には同調が甚だ鋭いことがわかる。

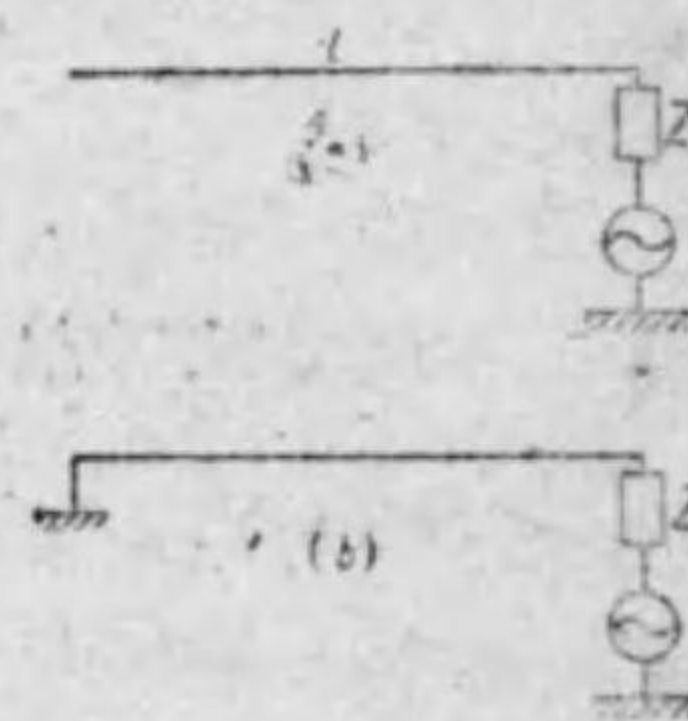
次に内部リアクタンスをもつてゐる實際の電源に就て考へて見る。第1.5圖の如く Z_0 を電源の外に出せば、残る電源はもやは純粹に短絡的のものである。従つて全リアクタンスが0の時に共振するから、(a)圖では共振条件は

$$Z_0 - jW \cot \beta l = 0 \quad (1.47)$$

となる。 Z_0 がインダクタンスの時には $\cot \beta l$



第1.4圖



第1.5圖

が正の値、即ち

$$n\pi < \beta l < n\pi + \pi/2$$

の間のどこか一點で共振する。従つて l を變數とすれば、 Z_0 が負の時より短い處で同調する。之と反對に Z_0 が容量の時には長めの處で同調する。

(b)圖の場合の共振条件は

$$Z_0 + jW \tan \beta l = 0 \quad (1.48)$$

となり、 Z_0 の正負に對する關係は上と反對になつてゐる。

§1.6 導線の伝送特性

導線を電力を伝送する回路として使用する際の特性を調べよう。第1.6圖の如く、 $x=l$ にある電源より、 $x=0$ にある負荷 Z_0

に電力を伝送する場合である。再び一般式(1.22)

及び(1.36)を用ひて、その a, b を定めるので 第1.6圖

あるが、條件としては $x=0$ に於ける電壓及び電流を夫々 V_0 及び I_0 とすることである。即ち

$$V_0 = a + b, \quad I_0 = (a - b)/W$$

が得られ、之を解いて

$$a = (V_0 + I_0 W)/2, \quad b = (V_0 - I_0 W)/2. \quad (1.49)$$

が得られる。之等を(1.22)及び(1.36)に入れて、 $x=l$ の送端の電壓 V_l 及び電流 I_l を書直せば次の様になる。

$$V_l = V_0 \cosh \gamma l + I_0 W \sinh \gamma l, \quad (1.50)$$

$$I_l = \frac{V_0}{W} \sinh \gamma l + I_0 \cosh \gamma l. \quad (1.51)$$

之は受端の電壓電流で送端の電壓電流を表す處の傳送方程式である。

次にこれ等の式より電壓電流を取去つて、インピーダンスのみに着眼した關係を導いて見よう。先づ原點の負荷のインピーダンスが Z_0 であるから、

$Z_0 = V_0/I_0$ であり、又 Z_l を送端に於て呈するインピーダンスとすれば $Z_l = V_l/I_l$ であるから、(1.50) と (1.51) とを邊々除した式に、この関係を入れて次式が得られる。

$$Z_l = W \frac{Z_l \cosh \gamma l + W \sinh \gamma l}{Z_0 \sinh \gamma l + W \cosh \gamma l} \quad (1.52)$$

之で目的を達したのであるが、この式を見てもあまりはつきりしないので、更に

$$\frac{Z_l - W}{Z_l + W} = r_l, \quad \text{及び} \quad \frac{Z_0 - W}{Z_0 + W} = r_0 \quad (1.53)$$

なる新しい量 r_l 及び r_0 を導入すれば、(1.52) は次の如く簡単になる。

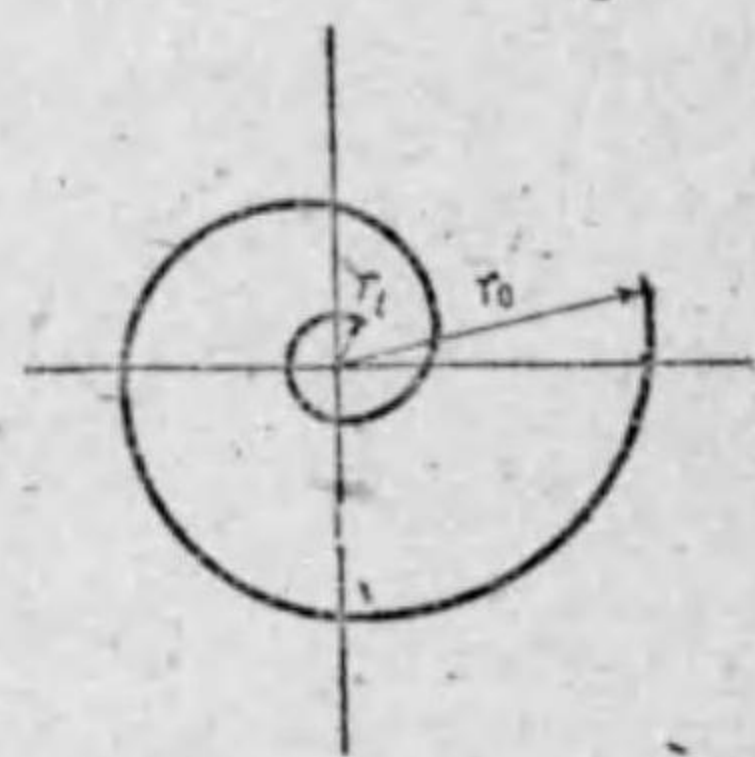
$$r_l = r_0 e^{-2\gamma l} \quad (1.54)$$

r_0 も r_l も共に複素数であるから、之等を複素数の平面の上に書表すと、第1.7圖 様に l の増すに伴つて、反時計式に収縮して0に指向する様な渦巻曲線になつてゐる。

そこでこの r は何を意味するかと云ふことになるが、先づ r_0 は (1.49) を顧て

$$r_0 = b/a \quad (1.55)$$

である。従つて r_0 は、 $x=0$ の點に於て、 x 方向に進行する波とそれと逆の方向に進行する波との比で、一般に複素数であるが、 a 及び b の絶対値が兩進行波の振幅を表してゐるから、 r_0 の絶対値が $x=0$ に於ける反射の割合を表してゐることが解る。それ故 r_0 を $x=0$ に於ける反射係数と云ふ。 $r_0=0$ 、即ち $Z_0=W$ ならば、反射は起らないで左方に向ふ進行波ばかりとなり、 $|r_0|=1$ ならば、即ち Z_0 がリアクタンスのみで抵抗分がないならば完全反射となつて、兩進行波が $x=0$ に於て同大である。そこで更に (1.53) で與へられる r_l は $x=l$ なる點に於ける右進行波と左進行波との比を表し



第1.7圖

て居るから、反射係数の定義を擴張して、 r_l を $x=l$ 點に於ける反射係数と定義すれば、受端の反射係数と任意の點 $x=l$ に於ける反射係数との間に (1.54) の様な簡単な関係があると云ふことになる。

次に電力の伝送について考へて見る。先づ進行波について考へて見れば、電壓と電流とが同相で進行して行くから、進行波の電壓と電流を V と I で表せば、伝送電力は次式で與へられる。

$$P = V\bar{I} = W |I|^2 \quad (1.56)$$

そこで (1.25), (1.26) で表される x 方向への進行波では、 $x=0$ に於て P_0 であつた電力が P_x に減るとすれば、それ等の間に次の関係がある。

$$P_x = P_0 e^{-2\alpha x} \quad (1.57)$$

次に兩方の進行波が存在する一般の場合に推進めて、導線の電力伝送の能率を計算しよう。再び第1.6圖に戻て負荷に供給される電力と電源の供給電力との比を求めないのである。そこで既に左向進行波と右向のものが定常の状態に落着いてゐる場合を考へれば、その電源端で負荷の方へ向ふ進行波が P なる電力で進行してゐるとすれば、それは (1.57) によつて負荷端に到達する迄に $P e^{-2\alpha l}$ に減ずる。こゝで一部分は負荷に入り、残りは反射されて右向進行波となるが、その割合は (1.53) で與へられる r_0 であつて、振幅 r_0 倍の進行波が反射されるから、電力としては $|r_0|^2$ 倍のものが反射されることになる。斯して負荷 Z_0 に入る電力は兩者の差で與へられる、即ちそれを P_0 で表せば次の如くである。

$$P_0 = P e^{-2\alpha l} (1 - |r_0|^2) \quad (1.58)$$

反射された進行波は更に送端に到達する迄の間に $e^{-2\alpha l}$ だけ減衰するから、 $|r_0|^2 P e^{-4\alpha l}$ に減ずる、そこで送端で電源より供給せられる電力は P と之との差である。即ちそれを P_l で表せば次の如くなる。

$$P_l = P (1 - |r_0|^2 e^{-4\alpha l}) \quad (1.59)$$

それ故能率は次の如くなる、

$$\eta = \frac{P_0}{P_l} = \frac{1 - |r_0|^2}{e^{2\alpha l} - |r_0|^2 e^{-2\alpha l}} \quad (1.60)$$

§ 1.7 無損失導線の伝送特性

伝送能率を問題にする時以外は、一般に高周波に於ては導線の損失を閉却しても差支へない。損失がないとすれば、 $r = j\beta$ となり、諸事甚だ簡明となる。平行の二線で斯様のものは特にレツヘル線と云ふ。(1.50), (1.51), (1.52), (1.53) は次の如くなる。

$$V_l = V_0 \cos \beta l + jI_0 W \sin \beta l, \quad (1.61)$$

$$I_l = j \frac{V_0}{W} \sin \beta l + I_0 \cos \beta l, \quad (1.62)$$

$$Z_l = W \frac{Z_0 \cos \beta l + jW \sin \beta l}{jZ_0 \sin \beta l + W \cos \beta l}, \quad (1.63)$$

$$r_l = r_0 e^{-2j\beta l}. \quad (1.64)$$

最後の式は負荷が一定であれば、擴張された反射係数は一定の絶対値をもつておて、 l が大きくなるに伴つて一定の早さで反時計式に廻轉することを表してゐる。

以上の議論では考へ易い爲に導線の長さ l を特定のものとして種々の式を取扱つて來たのであるが、この l を導線の座標と考へても成立する式は全く同じであつて、 V_l , I_l , Z_l 及び r_l 等を導線の送端に於ける量と限定して考へる必要はなく、導線中の任意の $x=l$ に於ける量を表してゐると見ることが出来る。即ち V , I , Z 及び r の分布を表してゐると見てよいのである。斯く考へれば諸式の持つ意味が大分擴張されたことになる。

扱て (1.64) に於て l を $\lambda/4$ とすれば、 $r_{\lambda/4} = -r_0$ となるから、之を (1.53) に用れば

$$Z_{\lambda/4} \cdot Z_0 = W^2 \quad (1.65)$$

が得られる。之はレツヘル線上 $\lambda/4$ 離れた點のインピーダンスの相乗積が、

波動インピーダンスの2乗に等しい事を示すもので、之を更に一般化すれば次の如くなる。

$$Z_{x+\lambda/4} \cdot Z_x = W^2. \quad (1.66)$$

次にレツヘル線上の電圧と電流の分布を少し詳しく調べて見よう。先づ (1.61) と (1.62) に於て、分布を表すとして l の代りに座標 x を用ひ、その x の代りに $x+\lambda/4$ を代入して比較すれば、次の關係が得られる。

$$V_{x+\lambda/4} = jWI_x, \quad (1.67)$$

$$I_{x+\lambda/4} = j \frac{1}{W} V_x. \quad (1.68)$$

即ち、電圧分布と電流分布とは、 $\lambda/4$ 推移すれば互に同じ形であることを表してゐる。

電圧の分布状態を見るのに理解を容易ならしめる爲に、 Z_0 が純抵抗 R_0 であるとすれば、(1.61) は次の形で表せる、

$$V_x = I_0 (R_0 \cos \beta x + jW \sin \beta x). \quad (1.69)$$

この振幅の二乗は右邊の各項の二乗の和であるから、それを整頓すれば次の如くなる：

$$|V_x|^2 = \frac{I_0^2}{2} \{ (R_0^2 + W^2) + (R_0^2 - W^2) \cos 2\beta x \}. \quad (1.70)$$

之で電圧の振幅の分布が與へられたが、一定の部分に變動の部分が重疊されておて、半波長毎に元の値に戻ることを示してゐる。

若し $R_0 < W$ ならば、 $\cos 2\beta x = 1$ の時、即ち $x = n\lambda/2$ の時に電圧は最低である、斯る點を電壓定常波の電壓節と云ふ。又 $\cos 2\beta x = -1$ 、即ち $x = n\lambda/2 + \lambda/4$ の時に最高になる、斯る點を電壓定常波の電壓腹と云ふ。

$R_0 > W$ の場合はこの關係が逆になる。

要するにレツヘル線が伝送回路として使用されてゐる時には、その上の電圧分布は一つの定常波をなしてゐて、電壓節と電壓腹とは交互に $\lambda/4$ 宛隔れて存在するのである。然しこの場合は節點でも電圧は完全に0ではないか

ら、不完全な定常波である。又(1.67)により電流波は $\lambda/4$ ずれてゐるから、丁度電圧節の位置に電流腹、電圧腹に電流節が在ることになる。

又(1.70)より、節と腹とを s と h との脚符で表すとすれば、電圧電流の絶対値の間に次の関係がある。

$$\frac{V_h}{V_s} = \frac{I_h}{I_s} = \frac{R_0}{W} \left(\text{又は} \frac{W}{R_0}, \text{分子の方が大きい様を選ぶ} \right) \quad (1.71)$$

最後に(1.63)により、與へられた負荷状態に於て、 Z_l が l と共に移り變る状態を調べておかう。それが爲には解り易くする爲、負荷を純抵抗 R_0 とすれば、その反射係数は

$$r_0 = \frac{R_0 - W}{R_0 + W} \quad (1.72)$$

となる。之を用ひて(1.63)を書直せば

$$\frac{Z_l}{W} = \frac{1 - r_0^2 - j 2 r_0 \sin 2 \beta l}{(1 + r_0^2) - 2 r_0 \cos 2 \beta l} \quad (1.73)$$

となる。之を見れば Z_l が半波長毎に全く前の状態に戻ることがわかる。

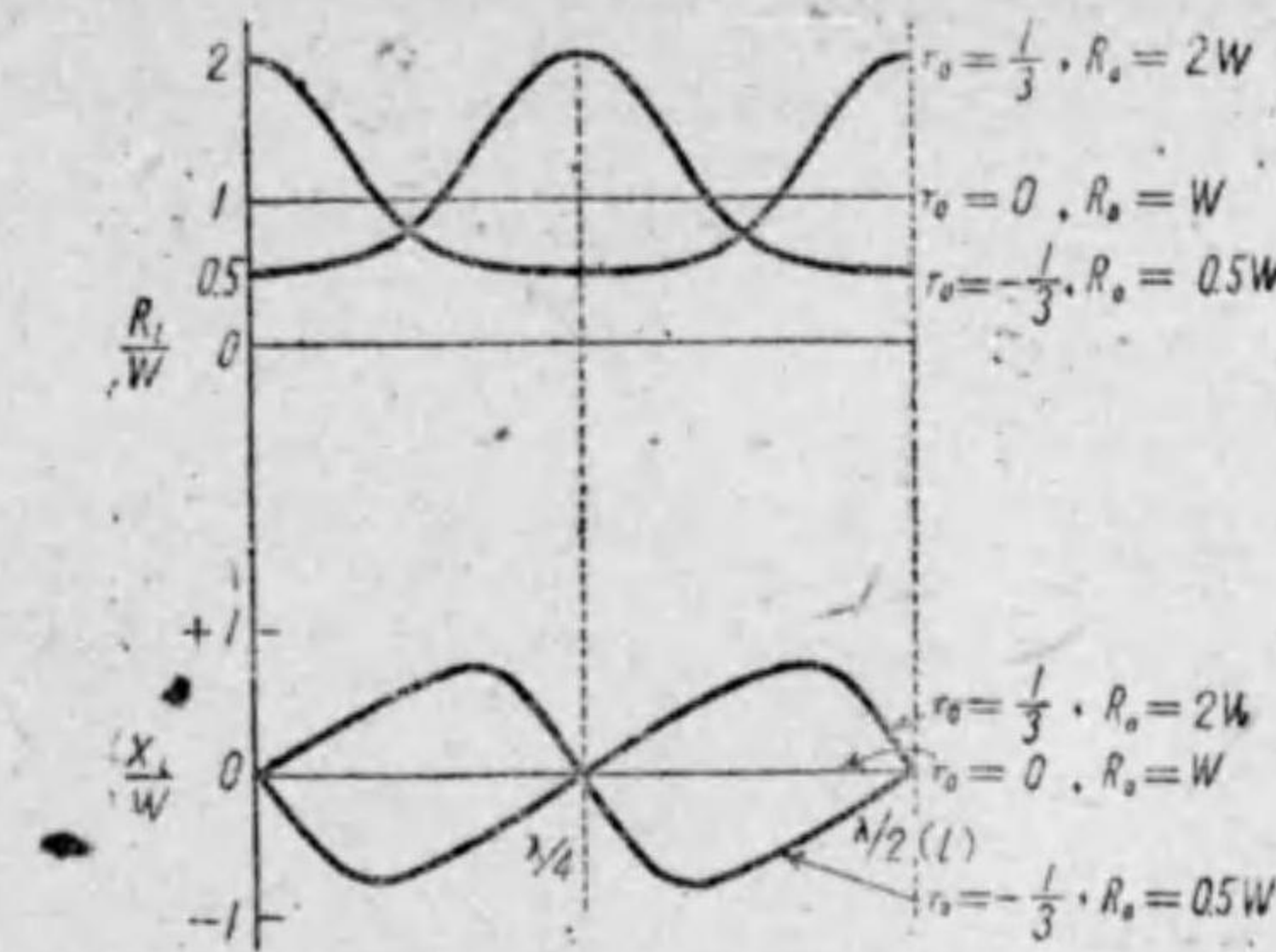
$$Z_l = R_l + j X_l \quad (1.74)$$

と置けば、

$$\frac{R_l}{W} = \frac{1 - r_0^2}{1 + r_0^2 - 2 r_0 \cos 2 \beta l} \quad (1.75)$$

$$\frac{X_l}{W} = -\frac{2 r_0 \sin 2 \beta l}{(1 + r_0^2) - 2 r_0 \cos 2 \beta l} \quad (1.76)$$

となる。之等兩者を l を x 軸にとつて種々の場合について描けば第1.8圖の如くなる。 $r_0 = 1/3$ は(1.72)により $R_0 = 2W$ であり、 $r_0 = 0$ 及び $r_0 = -1/3$ の場合について描いたが、 $|r_0|$ が1に近づくに随ひ曲線の起伏が大きくなる。 $|r_0|$ が同じならば曲線の起伏は同じで唯+と-とでは $\lambda/4$ だけ移動してゐる。 X_l には極大點があるからそれを求めると、(1.76)に於て



第1.8圖

$$\frac{d(X_l/W)}{d(2\beta l)} = 0$$

として

$$\cos 2 \beta l = \frac{2 r_0}{1 + r_0^2}, \text{ 又は } 2 \beta l = \cos^{-1} \frac{2 r_0}{1 + r_0^2} \quad (1.77)$$

を得る。この點で極大値となるから、この値を(1.76)に代入すれば、その極大値が得られる。即ち

$$\left(\frac{X_l}{W} \right)_{\text{極大値}} = -\frac{2 r_0}{1 - r_0^2} \quad (1.78)$$

§1.8 波動抵抗

以上で傳送の理論を一先づ終り、之より實際に使用するものについて各種の數字例を掲げてゆくこととする。

波動抵抗は(1.30)で與へられるが、 \sqrt{LC} が光速 c の逆数であることを利用すれば次の如くなる。

$$W = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \frac{1}{cC} \quad (1.79)$$

特に C のみの式にしたのは一般に分布常数の計算に於て、 L より C の方

が遙かに簡単で多くの計算公式が出来てゐるからである。

(1) 平行二線 断面が第1.9圖(a)の如く、直径 d の導線が間隔 D を保つて、往復平行二線をなしてゐる場合には、兩線間の単位長毎の容量は次式で與へられる。

$$C = \frac{1}{4 \cosh^{-1}(D/d)} \times \frac{1}{9 \times 10^{11}} F.$$

普通には、 $(D/d)^2 \gg 1$ であるから略して次の如くなり

$$C = \frac{1}{4 \log_e(2D/d)} \times \frac{1}{9 \times 10^{11}} F,$$

之を(1.79)に代入して波動抵抗が得られる：

$$W = 120 \log_e(2D/d) \Omega = 277 \log_{10}(2D/d) \Omega. \quad (1.80)$$

(2) 同軸同筒 断面が(b)圖の如くなつてゐて、内筒と外筒とで往復線をなしてゐる場合には、兩筒間の単位長毎の容量より前同様次の如く計算される。

$$C = \frac{1}{2 \log_e(D/d)} \times \frac{1}{9 \times 10^{11}} F,$$

$$W = 60 \log_e(D/d) \Omega = 138 \log_{10}(D/d) \Omega. \quad (1.81)$$

(3) 平行四線 断面が(c)圖の如く、直径 d の導線が矩形の頂點に位置し、1及び2が同相で(+)に、3及び4が同相で(-)となる様にして往復線を構成する場合には次の如くなる。

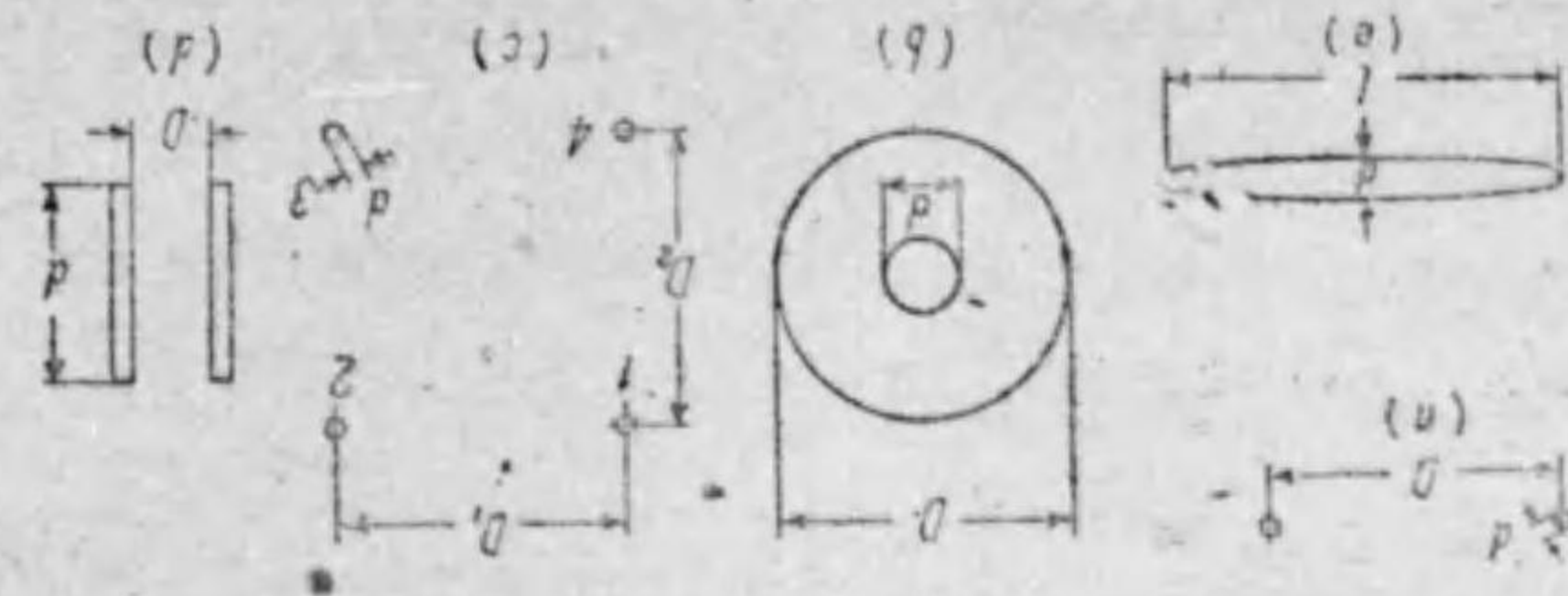
$$C = \frac{1}{2 \log_e(2D_2 \sqrt{D_2^2 + D_1^2} / d D_1)} \times \frac{1}{9 \times 10^{11}} F,$$

$$W = 138 \log_{10}(2D_2 \sqrt{D_2^2 + D_1^2} / d D_1) \Omega. \quad (1.82)$$

特に $D_1 = D_2 = D$ ならば、

$$W = 138 \log_{10}(2\sqrt{2}D/d) \Omega. \quad (1.83)$$

となる。又四線が1, 3及び2, 4とで往復線を構成する時には次の如くなる。



第1.9圖

$$C = \frac{1}{2 \log_e(2D_1 D_2 / d \sqrt{D_1^2 + D_2^2})} \times \frac{1}{9 \times 10^{11}} F,$$

$$W = 138 \log_{10}(2D_1 D_2 / d \sqrt{D_1^2 + D_2^2}) \Omega. \quad (1.84)$$

特に $D_1 = D_2 = D$ ならば：

$$W = 138 \log_{10}(\sqrt{2}D/d) \Omega. \quad (1.85)$$

(4) 平行帯線 断面が(d)圖の如く、幅 d の帯線を間隔 D に保つて相對した場合には次の如くなる。

$$C = \frac{d}{4\pi D} \times \frac{1}{9 \times 10^{11}} F,$$

$$W = 120 \pi \frac{D}{d} \Omega. \quad (1.86)$$

(5) 空中線 空間に一本の長さ l 、直径 d なる導線がある場合には輻射が行はれるから減衰が多い筈であるが、その上の定常波は略々レツヘル線のものに近い。そこで(1.79)によつて波動抵抗を求めることが出来る。容量は(e)圖の様な廻轉楕圓體より出發する。即ち

$$C = \frac{\sqrt{l^2 - d^2}}{2 \log_e\{(l + \sqrt{l^2 - d^2})/d\}} \times \frac{1}{9 \times 10^{11}} F.$$

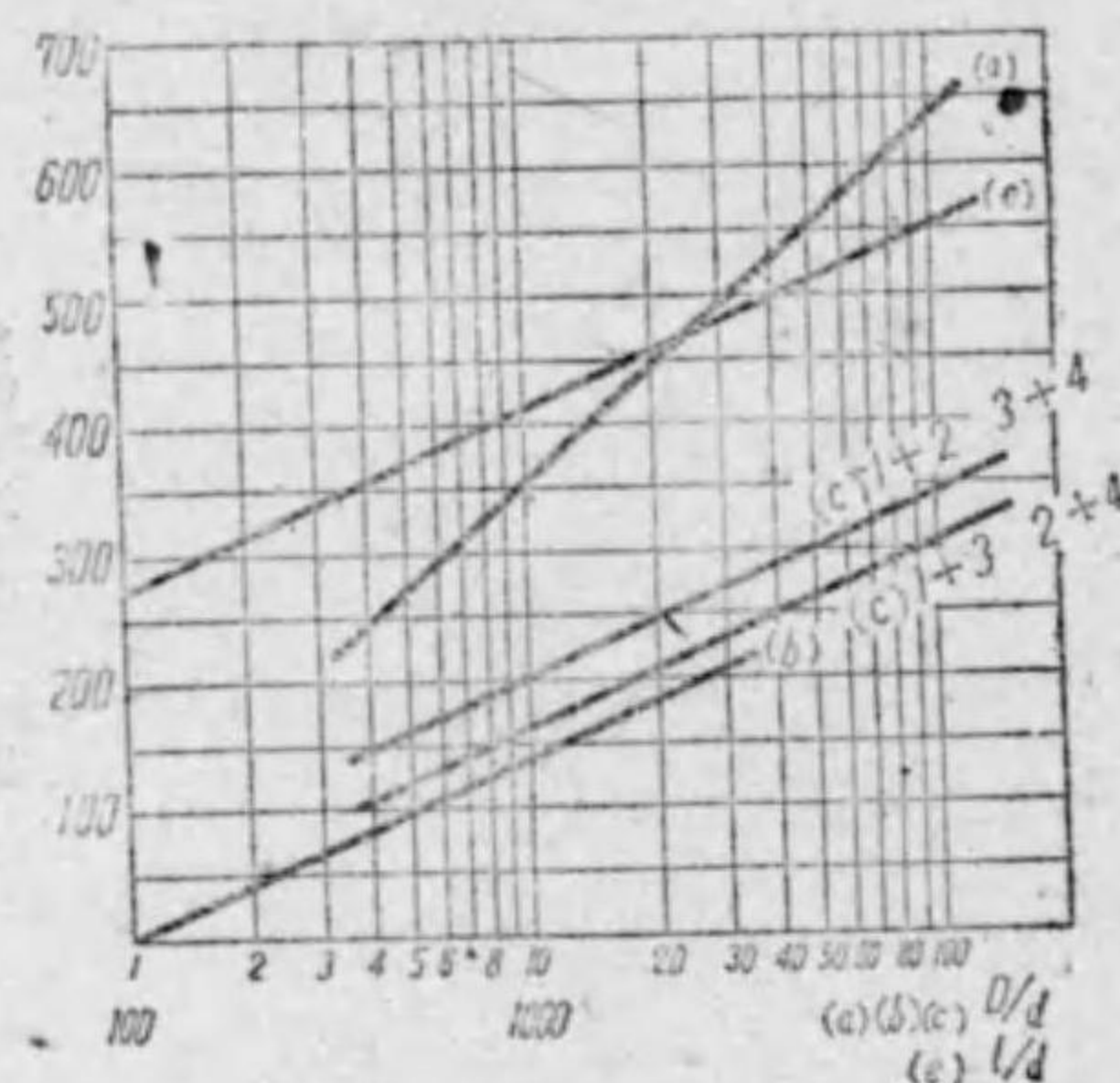
こゝで $l \gg d$ ならば、導線と略々同じものになる：

$$C = \frac{l}{2 \log_e(2l/d)} \times \frac{1}{9 \times 10^{11}} F.$$

単位長毎の C は之を l で割つた値であるから(1.79)により

$$W = 138 \log_{10} (2l/d) \Omega. \quad (1.87)$$

こゝで (1.80), (1.81), (1.83), (1.85) 及び (1.87) により D/d 又は l/d を変数として波動抵抗 W を計算して圖示すれば 第1.10圖の如くなる。圖中 (a), (b), (c), (e) と記したのは第1.9圖に對應させたわけである。



第1.10圖

§ 1.9 導線の高周波抵抗

抵抗には熱に化す損失抵抗と輻射電力に因由する輻射抵抗とある。損失抵抗は高周波に於ては電流が表皮作用によつて導体の表面に集る爲に著しく増大するが、1000 kc (300 m) 以上ともなれば、その抵抗の公式は簡單である。

断面を圓形とすれば、半径 r_{cm} 、比抵抗 $\rho \Omega cm$ 、導磁率を μ ガウス單位とする時、次の値で表されることがわかつてある。*

$$R_l = \sqrt{\mu \rho f} \times 10^{-9} / r \quad \Omega/cm. \quad (1.88)$$

こゝで銅線の場合は、 $\rho = 1.7 \mu \Omega$ 、 $\mu = 1$ であるから 1 m 毎の高周波抵抗として次の如くなる。

* Bureau of Standards : Circular 74 Radio Instruments and Measurements

$$R_l = \frac{1.48}{d_{(mm)}} \sqrt{\frac{1}{\lambda_{(m)}}} = 0.854 \times 10^{-4} \frac{\sqrt{f}}{d_{(mm)}} \quad \Omega/m. \quad (1.89)$$

第1.1表は種々の銅線の高周波抵抗の數表である。

第1.1表 銅線の高周波抵抗 ($\sigma = 6 \times 10^7$ /m)

f (kc)	λ (m)	銅線の直径 (mm)			
		2	3	5	10
0	∞	0.0055	0.0028	0.00089	0.00022
500	600	0.031	0.021	0.013	0.006
1,500	200	0.052	0.035	0.021	0.0105
5,000	60	0.095	0.064	0.038	0.019
15,000	20	0.165	0.11	0.066	0.033
50,000	6	0.30	0.20	0.13	0.06
150,000	2	0.52	0.35	0.21	0.105
500,000	0.6	0.95	0.64	0.38	0.19
1,500,000	0.2	1.65	1.1	0.66	0.33
5,000,000	0.06	3.0	2.0	1.3	0.6
15,000,000	0.02	5.2	3.5	2.1	1.05

導線が第1.9圖(a)の如き配置の場合には、近接作用によつて電流が相手の線に近い表面の方に集まるから、更に抵抗値は高まる。それでも、 D/d が數十にもなつてゐる時はこの作用は微弱である。非常に接近した時は之が顯著になる。そこで導線は初めは充實した銅線を用ひたが、表皮作用で導体の内部は不必要となつた爲圓管を用ひる様になり、更にその導体を近付ける時はその相對する近接部分にしか電流がない爲に平行帯線になると云ふ様な進化過程を経るものと思はれる。

次に輻射電力に因由する抵抗を計算しよう。その爲には相當思切つた假定をしなければならない。第一に輻射抵抗が導線に一樣に分布してゐるとするのである。實際には輻射を行ふ空中線はその分布 L 及び C と共に決して

一様に分布してゐるとは考へられないのであるが、その補正項がかなり小さいことはそれ等が一様に分布してゐるものとして取扱つた結果が、實驗結果とかなりよく合ふ事實から云へるのである。第二に空中線の電流分布を完全な定常波とすることである。之は減衰常數 α が小さい時に許される事、今はその α の基になる抵抗を求めようと云ふ時であるから循環論法の様に見えるが、假定相互の間に撞着がなければ一向差支へないと思ふ。

扱て正弦波状の定常波分布の電流があつて、その波腹に於ける電流及び輻射抵抗を I 及び R_r とし、空中線導體に一様に分布してゐると見做した輻射抵抗を R とすれば、輻射電力が波腹の一點に集中してゐると見做したものと、分布してゐると見做したものが等しくなければならないから、次の關係が成り立つ。

$$I^2 R_r = \int (I \sin \beta l)^2 R dl \quad (1.90)$$

そこで空中線の長さを半波長として、その兩端が電流 0 で中央に波腹のあるものを選んだとすれば、積分の下限及び上限は夫々 0 及び $\lambda/2$ となる。この半波長のものを選んだのは、この分布が最も輻射能率がよく、従つて輻射抵抗が高いからである。實際最も高い輻射抵抗に於てもなほ減衰常數 α が小さいと云ふことが云ひ度いのである。斯して (1.90) の計算を行へば、分布輻射抵抗 R は容易に次の値となる。

$$R = \frac{2 R_r}{\lambda} \quad (1.91)$$

第1.2表 半波長空中線の分布輻射抵抗

λ (m)	分布輻射抵抗 (Ω/m)
600	0.49
200	1.46
60	4.86

20	14.6
6	48.6
2	146
0.6	486
0.2	1,460
0.06	4,860
0.02	14,600

そこで R_r の値を 73Ω とすれば (§11.5 を参照)、數字計算が出来る。斯して第1.1表と波長を揃へて分布抵抗の表を作れば、第1.2表の如くなる。兩方の表を比較すれば、波長の最も長い場合に於てもなほ且つ分布輻射抵抗の方が損失抵抗より遙かに高いことがわかる。實際そうでないとすれば、空中線が甚だ輻射能率の悪いものとなるから、更に一段と太い導線を使用しなければならない譯のものである。

§1.10 傳播常數

以上の準備により、特性として最後に残つた傳播常數の實際の値を計算しよう。減衰常數 α の大きさの程度を概算する。それには前節で述べた様に損失抵抗は輻射抵抗に較べて閑却出来るから甚だ簡單であつて、(1.31) の r に R を代入すればよい、即ち

$$\alpha = \frac{2 R_r}{W \lambda} \quad (1.92)$$

この値は明かに波長が短くなるに従つて、それに逆比例して増すが、それは一般に周波數が増せば減衰が増すと云ふことで當然である。§1.7 で述べた通り、導線上では半波長毎に全く同一の状態に戻るから、この α に $\lambda/2$ を掛けた値が相次ぐ波の山の減衰の率を表すのであつて、之は減衰振動に於ける相次ぐ振幅の比である對數減衰率と同じものである。即ち

$$\delta = \alpha \lambda/2 = R_r/W \quad (1.93)$$

は波長によらず一定である。之に $R_r=73 \Omega$ 及び $W=500 \Omega$ を代入すれば、 $\delta=0.146$ を得る。そして実際の減衰率は (1.25) 及び (1.26) によつて次の値になる。

$$\epsilon^{-\delta} = \epsilon^{-0.146} = 0.865. \quad (1.94)$$

即ち僅かに 13% 程低くなるだけである。それであるから波長の数 10 倍もの長さについて考へる時は別として、半波長の数倍程度の伝送現象を考へる時にはレツヘル線と見做しても差支へないのである。而も之は輻射抵抗の最大限の場合に於けることであるから、一般になほ更に許されるのである。

こゝで一先一番始めに行つた假定 (1.29) を確めて置かう。g は元來導線を空氣中に放置したとすれば殆ど絶縁状態であるから、導線を空中に保持する爲にするもの、碍子類の絶縁能力に依存するものであるが、それを充分に數を少くして良質のものを用ひれば殆ど絶縁の状態にあると見做すことが出来るから、 g を無視することは容易である。その比較對象である ωC は (1.79) により次の如くなる。

$$\omega C = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{W}. \quad (1.95)$$

$\lambda=10,000 \text{ m}$, $W=500 \Omega$ ならば $\omega C \approx 10^{-6}$ となり、50 m 毎に絶縁物を挿入するとすれば $g \ll 5 \times 10^{-3}$ であればよいが、絶縁物は一般にメガオームの程度以上にするのが常道であるから、大體満足される。更に波長が短くなれば ωC は益々増大するから、絶縁の方が周波數に比例にして低下しても大體よいわけであるが、一般に絶縁の方は同一の材料では超高周波に於ては急速に劣化するから、この問題は相當に慎重に、いつも根本に立歸つて吟味する必要がある。

次に ωL は (1.79) により次の如くなる、

$$\omega L = \frac{2\pi}{\lambda} W. \quad (1.96)$$

この値は $W=500 \Omega$ とすれば、約 $3000/\lambda$ となり、(1.91) より of 最高値 $R=280/\lambda$ より遙かに大であるから、 $r \ll \omega L$ は充分満足される。

最後に波長常數 β の計算を進めよう。それには (1.28) に、戻つて考へるのであるが、 r と g を共に閑却すれば (1.32) になつて極めて簡單である。處で g は省略するとして、 r が輻射により大きい値をなす時に β がどの位變るか云ふ問題は興味あると思ふ。そこで (1.28) に於て $g=0$ と置けば次式となる。

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \omega^2 LC \{1 + \sqrt{1 + (r/\omega L)^2}\}}$$

この根號内で $r/\omega L \ll 1$ であるから、展開して第二項迄とれば

$$\beta = \omega \sqrt{LC} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{r}{\omega L}\right)^2}$$

となり、之を更に同様に取り扱へば次式となる。

$$\beta = \omega \sqrt{LC} \left\{ 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{r}{\omega L}\right)^2 \right\}. \quad (1.97)$$

そこで ωL に (1.96) を用ひ、 r に輻射抵抗の (1.91) を用ひれば次の如くなる。

$$\beta = \omega \sqrt{LC} \left\{ 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{2R_r}{\pi W}\right)^2 \right\}. \quad (1.98)$$

こゝで半波長空中線の $R_r=73 \Omega$ を、 W に空中線の波動インピーダンスの 500Ω を入れて計算すれば、

$$\beta = 1.0011 \omega \sqrt{LC}$$

となる。之を (1.32) と比較すれば β の値が 0.11% 増したことになる。従つて波長が略々 0.11% 縮むのである。收縮率は甚だ少いと云はなければならぬ。かなり前から半波空中線の同調寸法は 5% 位縮むと云はれてゐたが、實測した處ではそれは主として導線の兩端を固定する爲に挿入してあ

る碍子の容量に因由するものであることが判つた。純粹の傳播速度の減少によるものは斯様に微少である。

§ 1.11 傳 送 能 率

今度は高周波電力を傳送するのに用ひる給電線の傳送特性を實際問題として取扱つて見よう。こゝでは損失は一切オーム損しかないものとする。種々の目的で平行二線、四線及び同軸圓筒を用ひるが前二者は W を高くして抵抗を少くしきへすれば α は小さくなり、そこに臨界的の限度はないが、同軸圓筒に於ては事情が少し異つてゐる。即ち α を計算するのに、外管の内徑及び内管の外徑を夫々 D 及び d とすれば、(1.31) の W 及び r に夫々 (1.81) 及び (1.89) を用ひて次式を得る。

$$\alpha = k\sqrt{f} \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{d} \right) / \log \frac{D}{d} \quad (1.99)$$

そこで、使用する銅を殆ど一定として置いて D/d の値を變へた時に、その値が幾何の時に α が最も小さいかと云ふ問題になる。實際には外管が銅の需要を殆んど決定するから、内管の徑 d を變數にとればよいが、直接その値でなく、 $D/d = x$ として x を變數として (1.99) を書き直して見ると

$$\alpha = k_1 \frac{x+1}{\log x} \quad (1.100)$$

となる。こゝで $da/dx = 0$ と置いて、 x を解けばその値に於て α が極小になる。即ちそれは次の如くなる。

$$\log x = (x+1)/x. \quad (1.101)$$

之は超越函數であるから、直接には解けないが、左邊と右邊とを別々に x の函數として曲線を描きその交點より x を求めれば次の値を得る。

$$x = D/d = 3.6$$

同軸圓筒の徑の比を實際に 3.6 に選んでゐるのはこの理由に依るのである。

然しこの値は極めて臨界的のものではなく、3.4 より 3.8 迄の間では略同様である。

之で準備が出来たから、各様式の給電線の實際例に就て、進行波として傳送する時に距離に依て傳送能率が變る模様を計算して見よう。使用する波長は 20 m とする。

先づ平行二線で $D = 30$ cm, $d = 5$ mm とすれば、第 1.10 圖に依つて $W = 570$ オーム、抵抗は第 1.1 表により 往復でその倍として $r = 0.13$ オーム/m である。故に $\alpha = r/2W = 0.13/1140 = 1.14 \times 10^{-4}$ /m であつて、傳送能率は $e^{-2\alpha l}$ であるから、 $\eta_a = 100 e^{-2.28 \times 10^{-4} l}$ である。

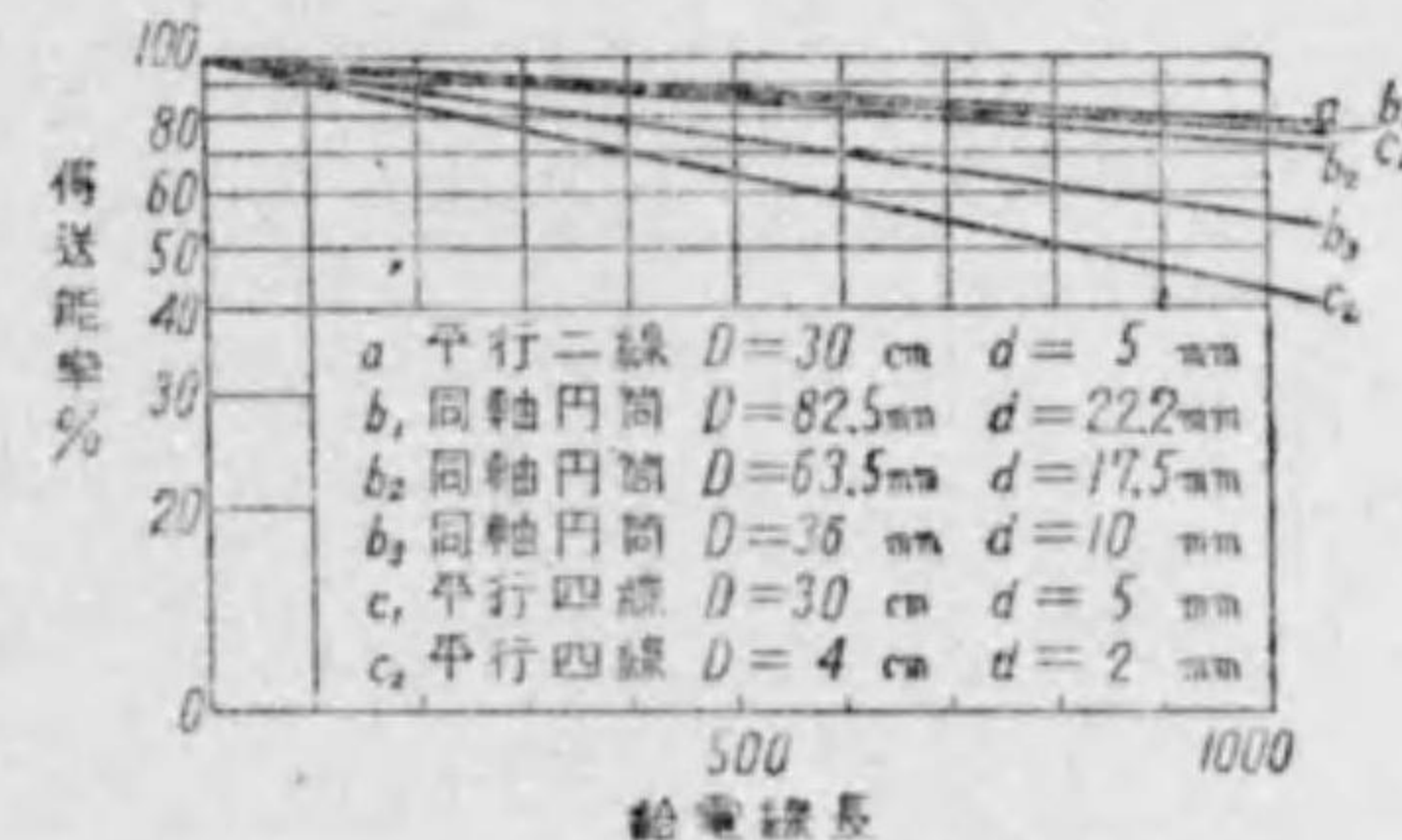
次に同軸圓筒で、 $D = 8.25$ cm, $d = 2.22$ cm とすれば、第 1.10 圖によつて $W = 75$ オーム、抵抗は (1.89) に依つて計算すれば往復で $r = 0.019$ である。故に $\alpha = 0.019/150 = 1.27 \times 10^{-4}$ /m, 故に $\eta_{b1} = 100 e^{-2.54 \times 10^{-4} l}$ 。

又同軸圓筒、 $D = 6.35$ cm, $d = 1.75$ cm では $\eta_{b2} = 100 e^{-3.2 \times 10^{-4} l}$ 。

又同じく、 $D = 3.6$ cm, $d = 1$ cm では $\eta_{b3} = 100 e^{-5.7 \times 10^{-4} l}$ 。

又四線式で對角にある線を同相になる様にしたもので、 $D = 30$ cm, $d = 5$ mm では第 1.10 圖により、 $W = 265$ オーム、又 $r = 0.066$ オーム、故に $\alpha = 0.066/530 = 1.25 \times 10^{-4}$ /m, 故に $\eta_c = 100 e^{-2.5 \times 10^{-4} l}$ 。

同じく $D = 4$ cm, $d = 2$ mm では $W = 198$ オーム、 $r = 0.165$ オーム、故に $\alpha = 0.165/396 = 4.18 \times 10^{-4}$ /m, 故に $\eta_{c2} = 100 e^{-8.36 \times 10^{-4} l}$ である。



第 1.11 圖 各種給電線の進行波傳送能率

之等の η が給電線の長さに依つて變る模様を圖示すれば第1.11圖の如くなる。

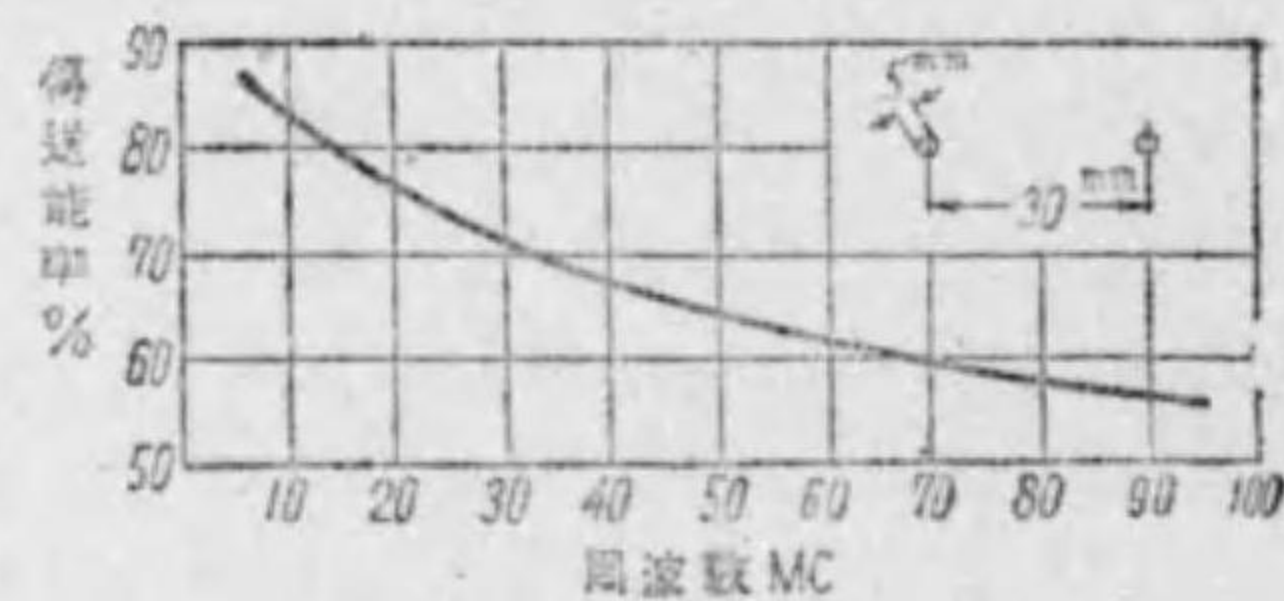
又傳送能率が周波數に依つて變る模様を調べるには、 η の中で變化する量は表皮作用に依る抵抗だけであるから、平行二線の $D=30\text{ cm}$, $d=5\text{ mm}$ の場合に於て、給電線の長さを 1000 m と定めれば次の如くなる。

$$\eta_f = 100 e^{-0.22\sqrt{f}} \sqrt{\frac{f}{15}}$$

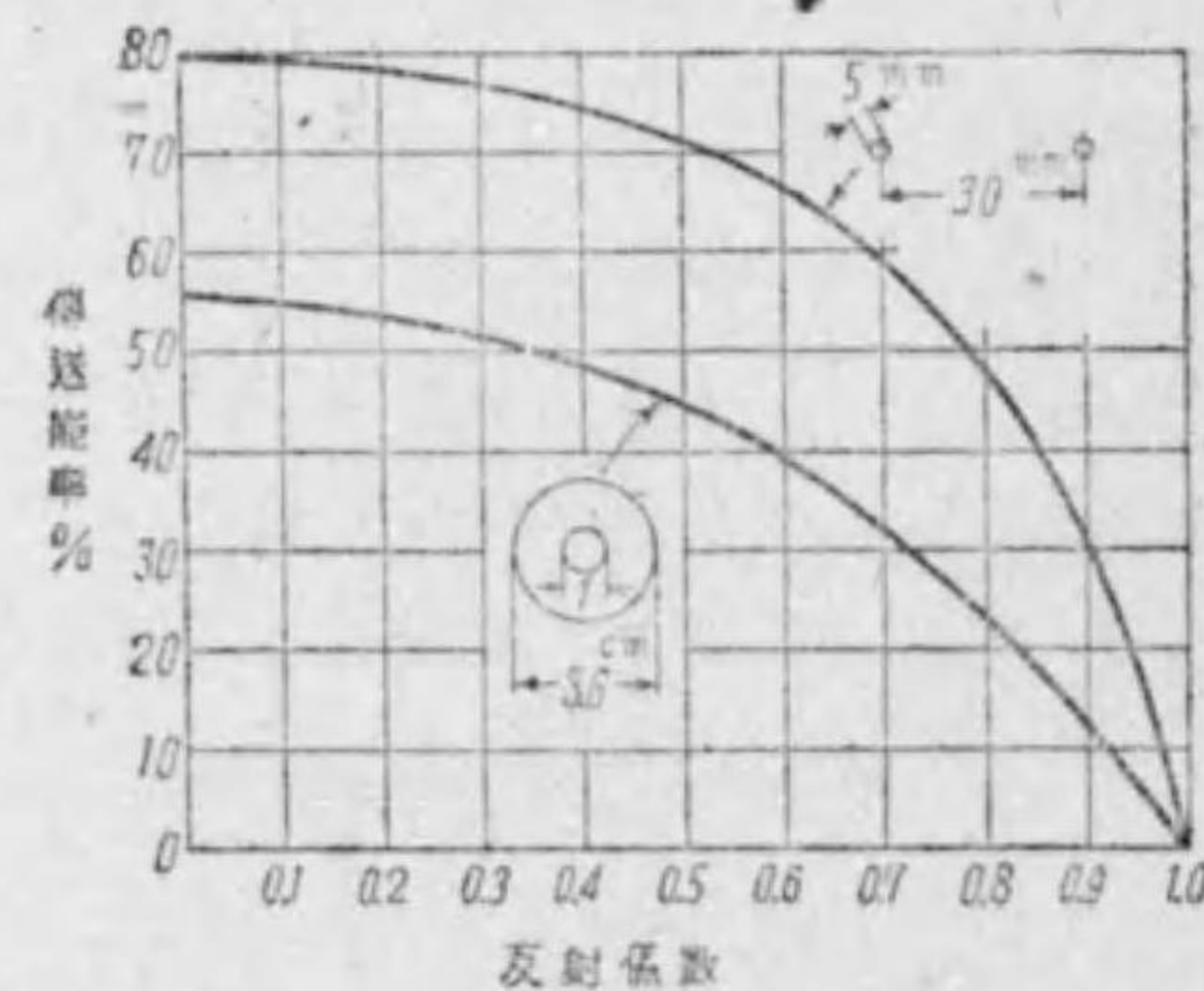
但し、 f はメガサイクルで表した周波數である。之を圖示すれば第1.12圖の如くなる。他の給電線の例も全く同一の要領で計算出来るから、第1.12圖の 15 Mc の値と他の周波數の値との比はその儘他の給電線の場合のそれに相當する比に等しい。

今度は電壓電流が進行波で進む場合であつたが、受端の整合がうまくとれておかない時には、反射進行波が生じて定常波となつて傳送能率は低くなる筈である。その計算には(1.60)を用ひればよい。再び

使用波長を 20 m とし、給電線長を 1000 m とし、上例の中最も能率のよい平行二線 $D=30\text{ cm}$, $d=5\text{ mm}$ のものと、能率の悪い同軸圓筒の $D=36\text{ mm}$, $d=10\text{ mm}$ のものとに就て、負荷端の反射係数を變數として計算した結果を圖示すれば第1.13圖の如くなる。



第1.12圖 1 km 給電線の進行波傳送能率の周波による變化



第1.13圖

§1.12 給電線概観

高周波の電力を傳送する目的で給電線を用ふることは大體に於て放送波以下に限られてゐる。放送の空中線が段々高くなつて來て、送信機より段々離れる様になつて始めて放送局に於ても給電線を用ひる様になつたが、元來給電線は短波或は超短波に使用することより始まつたものである。

先づ給電線で最も簡單なものは平行二線である。敷設も容易であり、傳送能率も使用する銅量の割合に最も高い、そして電氣的には二線が平衡の状態にあるから、送信機又は受信機がプッシュ・プルで平衡してをり、空中線が又平衡してゐる場合には何の加工も要しないで、兩者間の傳送の役目を果し得る得點をもつてゐる。然し缺點としては給電線上の電氣波が完全に平衡してゐるとしても、計算上次の値の輻射が行はれ、

$$P \sim 160 I^2 \left(\frac{\pi D}{\lambda} \right)^2, \quad (1.102)$$

その値自身は上の實例に於ては、輸送電力の僅か 0.65% に過ぎないから僅かであるが、給電線の電磁界が開放されてゐる爲に、多くの給電線が接近する際には誘導に依つて互に他の給電線に逃亡する。送信の場合には、それでも傳送能率が落ちるだけで身に差迫つたこととは感じられないが、受信の場合には折角大空中線に依つて目的の信號波を他の不要の雜音より高く取つて來ても、受信室の近くで他の饋電線から不要の妨害になる波を拾ひあげる爲に、大空中線の價値が大いに削減されて非常に損であるとされてゐる。これはこの方式の缺點である。而も兩線の電氣的平衡がとれてゐてさへ斯くの如くであるのに、この平衡は實際問題としては仲々容易な業ではなく、平衡が破れた場合には第4章で述べる通り、同相に進む部分が現れると云ふことであつて、斯くては空中に一本の線があるのと同様であるから、その電力は悉く有害無益の輻射となるのである。

そこで一步を進めて対角線に位する線を同相に用ふる平行四線が問題になる、實際之が用ひられた時があつたが、實際の工作が極めて難しいのと、之でも大分減るには減つても電磁界が開放されてゐる爲に完全ではなく最近はずたれて了つた。平行三線に於て中央を行きて、兩側を同じ歸路として用ふる場合は、電磁効果は四線と同じであつて工作上は遙かに容易である。この程度のことで我慢するならば之も一方法である。

外側を遮蔽で包めば一番よい、勿論費用は嵩むが、それをしても償ふて餘りあると云ふのが現状である。平行二線を一括して包んで遮蔽するのも、又その一本一本を圓筒で包んで並べて平行に架設するのもある。然し前者は、結局は遮蔽帯の中を絶縁物で充填しなければならない爲に、絶縁物の高度の進歩がない限り傳送能率の上で問題にならないし、何れも費用の點では相當のものである。そこで一番簡単な同軸圓筒が用ひられ始めたものと思はれる。同軸圓筒は始めは長さ 5m 位の銅管を連結して長くし、それを殆んど地表に敷設すると云ふ要領より出發した。之は工事は相當の経験を経なければ接続個所の故障が多く、その上接続部、曲屈部、溫度補償部等に夥しい多くの金具を要して煩雜である。然し一應受信所の給電線は之に落着いた時があつた。之を進歩させたものが同軸ケーブルである。之は費用の點では何層倍かになるが、敷設の具合及仕上りは誠に好調のものである。同軸型の缺點は電氣的に不平衡であることで、送受信機が平衡で空中線が平衡になつてゐる時には、給電線の兩端で平衡回路と不平衡回路の整合を行はなければならず、それが又あまり簡單ではない。

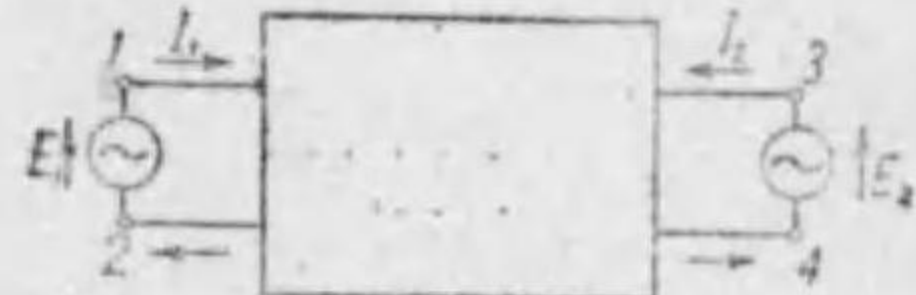
結局總て一長一短であるから、その都度何れを選ぶかは一考を要する問題である。

第2章 四端子回路

§ 2-1 四端子回路の基本方程式

前章の傳送回路としての導線をも含めて、一般に電波の通路になる回路に共通の極めて整然とした理論が明らかにされてゐるから、こゝで一通り述べて置く。

第2-1圖の如く、或る任意の回路があつて、それから四つの端子が出てゐて1と2を一方の端子とし、3と4を他の端子とし、圖の如く起電力夫々 E_1 及び E_2 が結ばれてゐるとすれば、各端子を流れる電流は E_1 に比例する部分と E_2 に比例



第2-1圖

する部分とから成り立つてゐる。之を數式で表せば次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= Y_{11}' E_1 + Y_{21}' E_2, \\ I_2 &= Y_{12}' E_1 + Y_{22}' E_2, \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

但し Y_{11}' , …… はアドミッタンスに相當する回路常數であつて、定まつた回路には定まつた一組の値が對應するのである。

この中で特に相反の定理により

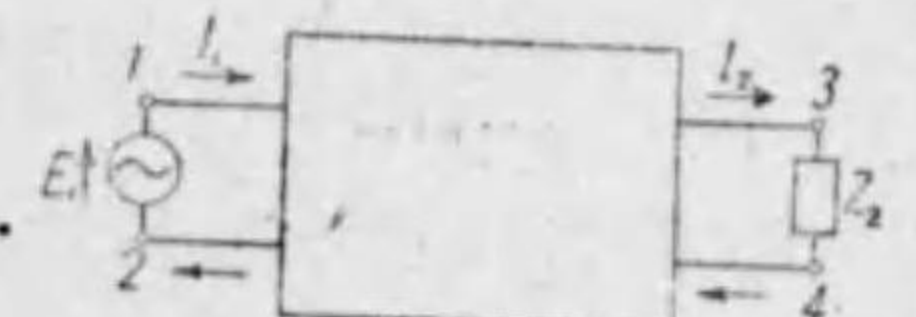
$$Y_{12}' = Y_{21}' \quad (2-2)$$

である。又各量は交流理論による複素數である。

次に第2-2圖の如く、1, 2の端子より、3,

4の端子に結ばれてゐる負荷 Z_2 にこの回路を通して電波を傳送する場合を考へて見

るに、この状態に於て端子 3, 4の電壓が



第2-2圖

E_2 であるとするれば、負荷を起電力 E_2 で置き換へても他に影響する處はな

い。唯圖で異つてゐるのは I_2 の方向が反対になつてゐるだけである。そこで(2.1)の中で I_2 の符號を反対にし、形を整へる爲に Y_{12} 及び Y_{21} の符號を反対にすれば、次の方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= Y_{11}E_1 - Y_{21}E_2, \\ I_2 &= Y_{12}E_1 - Y_{22}E_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

之が傳送回路の兩端に於ける電壓電流の間に成り立つべき聯立方程式であつて、その四つの變數の中二つが與へられれば他を表すことが出来る。先づ受端の電壓、電流で送端の電壓電流を表す式を作れば、

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \frac{Y_{22}}{Y_{21}}E_2 + \frac{1}{Y_{21}}I_2, \\ I_1 &= \left(\frac{Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}} - Y_{12} \right) E_2 + \frac{Y_{11}}{Y_{21}}I_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

となる。この係數を A, B, C 及び D と置けば

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= AE_2 + BI_2, \\ I_1 &= CE_2 + DI_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

となるが、一般に之を四端子回路の基本方程式と呼んでゐる。(2.3)には獨立の係數が三つしかないから、(2.5)の係數も全部獨立ではなく、それ等の間には次の關係があることは(2.4)より簡単に解る。

$$AD - BC = 1. \quad (2.6)$$

この基本式を出發點として、再び(2.3)式に戻れば、係數の間に次の關係がある、

$$Y_{11} = \frac{D}{B}, \quad Y_{21} = Y_{12} = \frac{1}{B}, \quad Y_{22} = \frac{A}{B}. \quad (2.7)$$

又電流が與へられて、電壓を求める式は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2, \\ E_2 &= -Z_{21}I_1 - Z_{22}I_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

但し

$$Z_{11} = \frac{A}{C}, \quad Z_{12} = Z_{21} = -\frac{1}{C}, \quad Z_{22} = \frac{D}{C}. \quad (2.9)$$

又送端の電壓電流が與へられ、受端の電壓電流を求める式は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} E_2 &= DE_1 - BI_1, \\ I_2 &= -CE_1 + AI_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

こゝで第2.3圖の如く、傳送の方向を逆と考へれば、電流の符號を逆にすればよいから、次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} E_2 &= DE_1 + BI_1, \\ I_2 &= CE_1 + AI_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$



第2.3圖

§2.2 映像インピーダンス

四端子回路は傳送回路としての導線をも含んでゐるから、前章に於て誘導された種々の常數に相應する常數が導かれる筈である。先づ波動インピーダンスに相應するものから求めて見る。

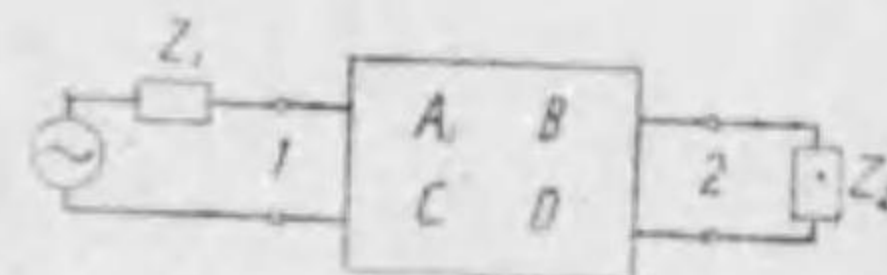
四端子回路の端子1及び2に夫々 Z_1 及び Z_2 なるインピーダンスを挿入して第2.4圖の如く給電した場合に、端子1に於て呈するインピーダンスは、(2.5)に於て邊々相除して $E_2 = I_2 Z_2$ の關係を入れれば求められる。即ち

$$Z_{11} = \frac{E_1}{I_1} = \frac{AZ_2 + B}{CZ_2 + D}. \quad (2.12)$$

同様に電源を端子2側に入れて、端子1側は Z_1 で負荷した場合に、端子2側に呈するインピーダンスは次式となる。

$$Z_{22} = \frac{E_2}{I_2} = \frac{DZ_1 + B}{CZ_1 + A}. \quad (2.13)$$

そこで若し



第2.4圖

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} &= Z_1 = W_{01}, \\ Z_{22} &= Z_2 = W_{02}. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

ならば、端子の所で両側が丁度鏡像の如くインピーダンスが等しい。この W_{01} , W_{02} を影像インピーダンスと呼ぶ。

(2.12) と (2.13) に (2.14) を代入して解けば次の値となる。

$$\left. \begin{aligned} W_{01} &= \pm \sqrt{\frac{AB}{CD}}, \\ W_{02} &= \pm \sqrt{\frac{DB}{CA}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

之等の値を (2.7) のアドミッタンスの項で表せば次の値となる。

$$\left. \begin{aligned} W_{01} &= \pm \sqrt{\frac{Y_{22}}{Y_{11}(Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2)}}, \\ W_{02} &= \pm \sqrt{\frac{Y_{11}}{Y_{22}(Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2)}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

斯く W_{01} と W_{02} とが異つてゐるのは、回路が一般に左右対称でない爲であつて、対称ならば (2.5) と (2.11) が等しくなり $A=D$ となるから、両者は等しくなる。

§ 2.3 基本方程式の傳達型表示

四端子回路と導線とを對比して見れば、四端子回路の基本方程式を (1.50) (1.51) の形で表現出来そうである。(1.50), (1.51) に於ては、導線の傳播常数 γ にその全長 l を掛けた γl が全體としての傳達の状態を表してゐる。四端子回路に於ても、この様な常數を用ひて表すことが出来るかも知れない。この傳達常數を θ とすれば、四端子回路の基本方程式として次の如く書けるであらう。

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_2 a \cosh \theta + I_2 b \sinh \theta, \\ I_1 &= E_2 c \sinh \theta + I_2 d \cosh \theta. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

こゝで、 a, b, c 及び d と θ とが (2.5) と比較して A, B, C 及び D で與へられよいためである。即ち

$$\left. \begin{aligned} A &= a \cosh \theta, \\ B &= b \sinh \theta, \\ C &= c \sinh \theta, \\ D &= d \cosh \theta. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

又 (2.6) より

$$ad \cosh^2 \theta - bc \sinh^2 \theta = 1 \quad (2.19)$$

が得られる。5本の方程式で5個の未知數を含むのであるから解けるわけである。先づ (2.19) より

$$ad = bc = 1, \quad (2.20)$$

又 (2.18) より

$$\frac{a}{d} = \frac{A}{D}, \quad \frac{b}{c} = \frac{B}{C} \quad (2.21)$$

が得られ、兩者より

$$a = \sqrt{\frac{A}{D}}, \quad d = \sqrt{\frac{D}{A}}, \quad b = \sqrt{\frac{B}{C}}, \quad c = \sqrt{\frac{C}{B}} \quad (2.22)$$

が得られ、これ等より

$$\left. \begin{aligned} \cosh \theta &= \sqrt{AD}, \quad \sinh \theta = \sqrt{BC} \\ \tanh \theta &= \sqrt{\frac{BC}{AD}} \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

が得られるから、之で完全に解けたのである。

なほこゝで (2.15) により a, b, c, d を影像インピーダンスで表せば次の如くなる。

$$a = \sqrt{\frac{W_{01}}{W_{02}}}, \quad b = \sqrt{W_{01} W_{02}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{W_{01} W_{02}}}, \quad d = \sqrt{\frac{W_{02}}{W_{01}}} \quad (2.24)$$

等の直を用ひて、(2.17) を書き直せば、導線の場合と全く同形の表示式

が得られる。

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \sqrt{W_{01}/W_{02}} (E_2 \cosh \theta + I_2 W_{02} \sinh \theta), \\ I_1 &= \sqrt{W_{02}/W_{01}} \{ (E_2/W_{02}) \sinh \theta + I_2 \cosh \theta \}. \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

§ 2.4 反射係数

導線との類推を更に一步進めて (1.53) に倣つて反射係数を次の如く定義する。

$$r_1 = \frac{Z_1 - W_{01}}{Z_1 + W_{01}}, \quad r_2 = \frac{Z_2 - W_{02}}{Z_2 + W_{02}} \quad (2.26)$$

一方 (2.25) を邊々相除すれば

$$Z_1 = \frac{W_{01}}{W_{02}} \frac{Z_2 \cosh \theta + W_{02} \sinh \theta}{(Z_2/W_{02}) \sinh \theta + \cosh \theta} \quad (2.27)$$

となり、(2.26) と (2.27) とより Z_1, Z_2, W_{01} 及び W_{02} を消去すれば (1.54) と同形の次式が得られる。

$$r_1 = r_2 e^{-2\theta} \quad (2.28)$$

この場合に於ても § 1.6 で述べたのと全く同様に、一般の (2.5) の表現は一つの定常波を表してゐると考へることが出来る。右向の進行波は端子 1 に於ては波動インピーダンスが W_{01} になつてゐて ($E_1/I_1 = W_{01}$)、その進行波が端子 2 に到着すれば、波動インピーダンスが W_{02} である ($E_2/I_2 = W_{02}$)。又左向進行波は 2 端子で $E_2/I_2 = W_{02}$ になつてゐるものが、1 端子に到着すれば $E_1/I_1 = W_{01}$ になるものと考へ、一般の (2.5) はその兩進行波の併存する定常波を表してゐると考へるのである。さう考へれば、 r_2 は端子 2 に於ける左向進行波と右向進行波との電壓の比であるから、反射係数である。従つて r_1 は擴張された意味に於ける端子 1 の反射係数である。

§ 2.5 對稱四端子回路

今迄は四端子回路が中央に關して左向對稱でない一般の場合を取扱つて來たが、對稱ならば總て甚だ簡単になる。先づ (2.5) と (2.11) とが全く等しい筈であるから、

$$A = D \quad (2.29)$$

である。又 (2.7) は

$$Y_{11} = Y_{22} = \frac{A}{B}, \quad Y_{12} = Y_{21} = \frac{1}{B} \quad (2.30)$$

又 (2.15) 及び (2.16) は

$$\left. \begin{aligned} W_{01} = W_{02} &= \sqrt{B/C} = W_0, \\ W_{01} = W_{02} = W_0 &= \frac{1}{\sqrt{Y_{11}^2 - Y_{12}^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

又 (2.23) は

$$\left. \begin{aligned} \cosh \theta &= A = \frac{Y_{11}}{Y_{12}}, \quad \sinh \theta = \sqrt{BC}, \\ \tanh \theta &= \sqrt{\frac{BC}{A}} \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

等となる。従つて (2.25) は

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_2 \cosh \theta + I_2 W_0 \sinh \theta, \\ I_1 &= (E_2/W_0) \sinh \theta + I_2 \cosh \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

となり、之は導線の傳送方程式と全く一致してゐる。

§ 2.6 四端子回路の濾波特性

今迄は周波数を一定として議論して來たが、周波数が變れば勿論 A, B, C, D 及び之より誘導される諸常数は變る筈であつて、一般に回路常数は周波数の函數である。そこで今度は同一の回路を周波数の廣い帯域に亘つて使用する見地より考へて見る。

回路中に損失が全々ないとしても、一般に回路は或る周波数帯域は通過し、或る帯域には減衰を與へる。この特性を巧みに利用したものが濾波器である。

θ を次の如く實數と虚數に分ければ、

$$\theta = \alpha + j\beta \quad (2.34)$$

となるが、 α は減衰を表すから減衰常數と呼び、 β は位相を表すから位相常數と呼ぶ。

一般式 (2.25) に於て、受端を短絡及び開放した場合の送端のインピーダンスは夫々 $E_2=0$ 及び $I_2=0$ として求められる。即ち

$$\left. \begin{aligned} Z_{1s} &= W_{01} \tanh \theta, \\ Z_{1f} &= W_{01} \coth \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

となり、之より直ちに

$$Z_{1s} Z_{1f} = W_{01}^2 \quad (2.36)$$

と云ふ關係も得られる。

そこで四端子回路の内部に全然損失を生ずるものがない時には、 Z_{1s} も Z_{1f} も共に抵抗のない純リアクタンスでなければならない。従つて (2.36) より W_{01} は實數又は純虚數の何れかで、複素數になることはない。そこで Z_{1s} を書き直せば

$$Z_{1s} = W_{01} \tanh(\alpha + j\beta) = W_{01} \frac{\sinh 2\alpha + j \sin 2\beta}{\cosh 2\alpha + \cos 2\beta} \quad (2.37)$$

となり、 Z_{1s} が純虚數である爲には、 W_{01} と $\tanh(\alpha + j\beta)$ との中、どちらか一方が虚數ならば、他は實數でなければならないと云ふことになる。そこで次の二通りの場合に別れる。

(1) W_{01} が實數 ならば $\sinh 2\alpha=0$ でなければならないから、 $\alpha=0$ となり、この回路を通過する際に減衰を受けないのである。換言すれば濾波器として見る時に、これは通過帯域を示すものである。

(2) W_{01} が虚數 ならば $\sin 2\beta=0$ で、 α は有限の値を持つてゐるから、この回路は減衰を與へる、即ち濾波器として阻止帯域である。このことは W_{02} 又は W_0 に就ても全く同様である。

そこで濾波器の通過と阻止帯域とを判別するには、影像インピーダンスの實虚を見ることで充分である。

§2.7 四端子回路のインピーダンス變成特性

無損失四端子回路は通過帯域に於ては、(2.12) 又は (2.27) の形に於て、端子2に結んだインピーダンス Z_2 を端子1に於て Z_1 に變成するインピーダンス變成器と見ることが出来る。

扱て、このインピーダンス Z_1 及び Z_2 を純抵抗 R_1 及び R_2 としよう。かうすることによつて一般性は少しも失はれない。それは變成器の變成器たる所以は抵抗を變成するにあるのであつて、リアクタンスの變化は變成ではなく、又一般のインピーダンスの中のリアクタンス分は回路中に含めて了へばよいのである。

斯くすると兩端の反射係數は次の通りになる。

$$r_1 = \frac{R_1 - W_{01}}{R_1 + W_{01}}, \quad r_2 = \frac{R_2 - W_{02}}{R_2 + W_{02}} \quad (2.38)$$

兩者の間には (2.28) の關係がある。そこでこの四端子回路が通過帯域にあることより、 W_{01} と W_{02} とは實數であり、傳達常數 θ は純虚數でなければならない。さうすれば (2.38) と (2.28) とより次の結論が得られる。

$$\left. \begin{aligned} r_1 \text{ と } r_2 \text{ とは實數であり,} \\ |r_1| = |r_2|. \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

この條件を満たす r_1 と r_2 との間の關係は次の三通りである。

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= r_2, \\ r_1 &= -r_2, \\ r_1 &= r_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

之等を順次吟味して行かう。

(1) $r_1=r_2$ ならば, (2.28) によつて $\theta=jn\pi$ であるから, $AD=\cosh^2\theta=1$ となり, (2.6) により $BC=0$ となる. そして W_{01} 及び W_{02} が通過帯域なる故に有限であるから,

$$B=C=0$$

でなければならない. 故に四端子方程式は

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= AE_2, \\ I_1 &= DI_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

となる. 之は理想的変成器である.

(2) $r_1=-r_2$ ならば (2.28) により $\theta=j(2n+1)\pi/2$ であり, $AD=\cos^2\theta=0$ であり, W_{01} 及び W_{02} の有限なることより

$$A=D=0 \quad (2.42)$$

を得る. 之は対称回路である. (2.37) より条件

$$R_1 R_2 = W_0^2 \quad (2.43)$$

が得られ, W_0 を四端子常數に直せば

$$R_1 R_2 = B/C \quad (2.44)$$

となる. 斯くして一旦定めた B と C とを持つ回路は任意インピーダンス Z_2 を,

$$Z_1 Z_2 = B/C = W_0^2 \quad (2.45)$$

の形に於て Z_1 に變換する可逆回路である.

(3) $r_1=r_2=0$ ならば反射がないから,

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= W_{01} \\ R_2 &= W_{02} \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

であつて非対称回路である.

§2.8 無損失導線の四端子常數

損失のない導線の四端子常數は (1.61), (1.62) により次の通りである.

$$\left. \begin{aligned} A &= D = \cos ml, \\ B &= jW \sin ml, \\ C &= (j/W) \sin ml, \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

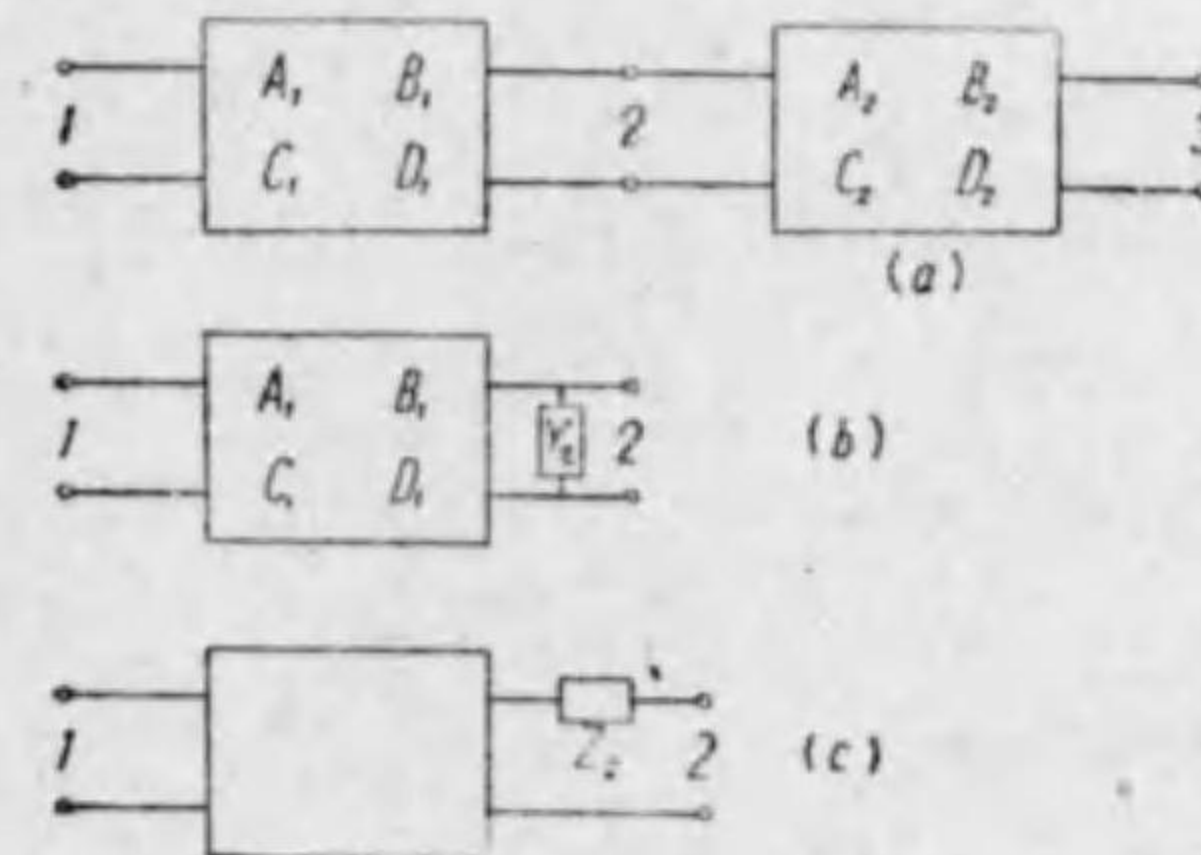
又 (2.30) により

$$\left. \begin{aligned} Y_{11} &= Y_{22} = \frac{\cot ml}{jW}, \\ Y_{12} &= Y_{21} = \frac{1}{jW \sin ml} \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

§2.9 四端子回路の接続組合せ

第2.5圖(a)の如く, 2つの四端子回路を縦続に接続した場合, 両方の回路常數を夫々 A_1, B_1, C_1 及び D_1 と A_2, B_2, C_2 及び D_2 とすれば, 合成回路常數は

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= A_1 E_2 + B_1 I_2, & E_2 &= A_2 E_3 + B_2 I_3, \\ I_1 &= C_1 E_2 + D_1 I_2, & I_2 &= C_2 E_3 + D_2 I_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$



第2.5圖

より E_2, I_2 を消去すれば求められる。即ち

$$\left. \begin{aligned} A &= A_1 A_2 + B_1 C_2, \\ B &= A_1 B_2 + B_1 D_2, \\ C &= C_1 A_2 + D_1 C_2, \\ D &= C_1 B_2 + D_1 D_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

第二の回路が (b) の如くアドミタナンス Y_2 のみの時は、

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_2 (A_1 + B_1 Y_2) + B_1 I_2, \\ I_1 &= E_2 (C_1 + D_1 Y_2) + D_1 I_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

となり、第二の回路が (c) の如くインピダナンス Z_2 のみの時は

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= A_1 E_2 + (A_1 Z_2 + B_1) I_2, \\ I_1 &= C_1 E_2 + (C_1 Z_2 + D_1) I_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

となる。

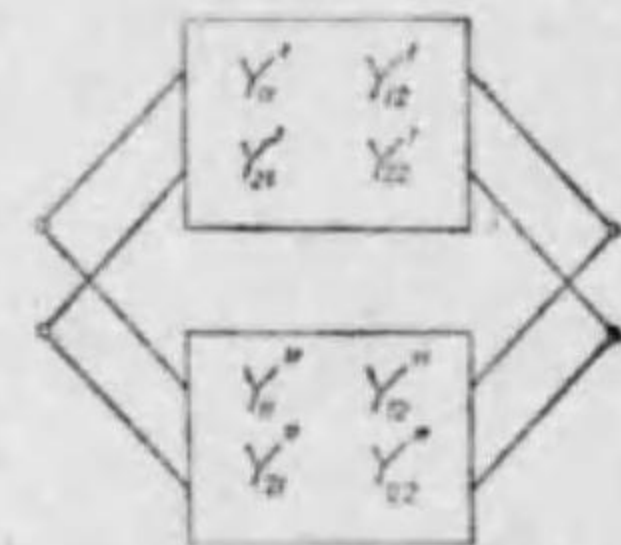
次に第2.6圖の如く並列に接続した場合に

は、(2.3) の方が具合がよい。即ち

$$\left. \begin{aligned} I_1' &= Y_{11}' E_1 - Y_{12}' E_2, & I_1'' &= Y_{11}'' E_1 - Y_{12}'' E_2, \\ I_2' &= Y_{21}' E_1 - Y_{22}' E_2, & I_2'' &= Y_{21}'' E_1 - Y_{22}'' E_2, \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

より合成回路常数は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} Y_{11} &= Y_{11}' + Y_{11}'', \\ Y_{12} &= Y_{12}' + Y_{12}'', \\ Y_{22} &= Y_{22}' + Y_{22}'' \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$



第2.6圖

第3章 高周波回路-I

§3.1 共振線で構成する回路

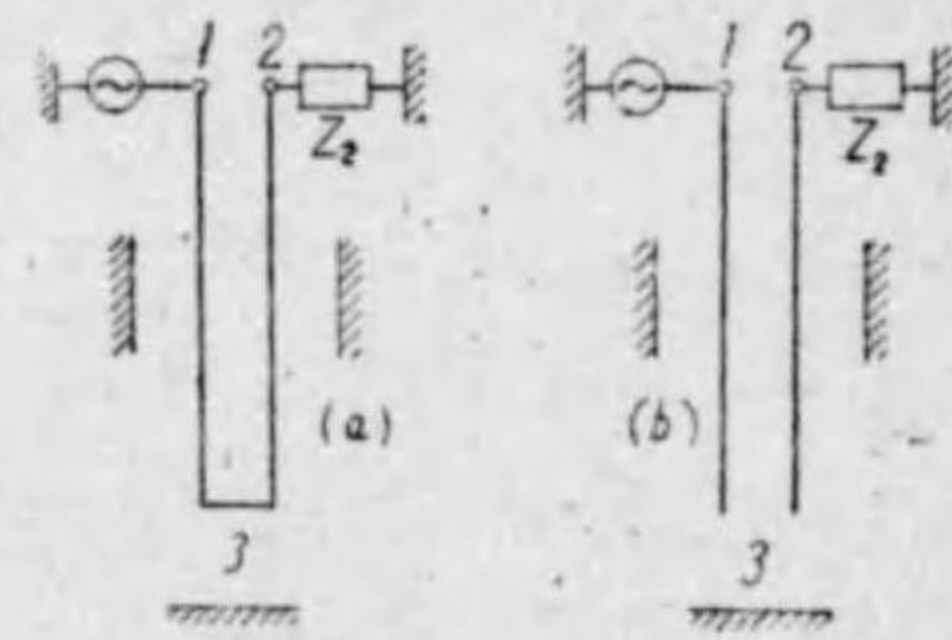
短波の領域に於ても波長が短くなるに従つて、又波長は同じでも電力が増すに従つて、装置の寸法が大きくなる爲に相對的には波長が短くなるのと同じ様なことになつて、電気回路を構成するのに集中常數を用ひると目的の作用をさせることが難しくなる。集中常數 L 又は C は、その寸法が波長の數十分の一程度である中はよいが、少くとも十分の一程度ともなれば、その各部に流れる電流は一樣ではなく、必ず分布常數に乗る様な電壓電流の分布を生ずる。實際短波ではよく塞流線輪を使ふが、この線輪がその使命をよく果してゐる時には、それを引延して見ると大體 $1/4$ 波長になつてゐて、あれ程密に巻いたものでさへ線輪の L としての作用より針金を延した分布常數としての作用の方が優勢であることを見れば、短波送信機などに一般に用ひてゐる極めて疎に巻いた線輪などでは單純に L と考へることは全然誤りである。さればと云つて之を分布常數と見るには又形が複雑で計算にのり難く、理論と實際とで兩々相助けて發達させて行くのに困難を覺える。そこで §1.4 で述べた様な分布常數を組合せた回路を用ふる考案が生じたのである。

特に分布常數を略々同調の近くで用ひる場合に共振線と稱するが、共振線で回路を構成すれば、先づ構造が簡單であるから堅牢であり、計算と實際とがよく合ふから理論的に装置全體の進歩を促すのに好都合であり、その上に計算が面倒としても合理的に調整することが出来る等の利點がある。特に超短波ともなれば、嫌でも回路としては之より他に使ふものがない様な譯である。

§3.2 共振線回路の構成

線路の受端を開放又は短絡した場合に、送端を端子として見れば一種のリアクタンスを呈することは §1.4 で述べた通りであるが、然らばこれを回路の要素としてあらゆる部分に使用出来るかと云ふと必ずしもさうは行かないのである。確かにその送端に當る端子の間に電圧が給與される所には使用出来る。然しその端子の中の一つから入つて他の端子から出て行く様な處で使用すると、(1.41)や(1.44)の式が根本より適用されないことになるから、もう少し立入つて考へて見なければならぬ。

その場合の動作を圖示すれば第3.1圖の如くで、相對する二線路は往きと歸りとが對稱になる理由は毫もない。先づ(a)に就て見れば、1-3の線路と2-3の線路とは互に殆ど關係なく、各大地に對して略々同一の波動インピーダンスを呈するから、1-3-2なる一聯の線路として動作するのである。尤も兩線路の電流によつて生ずる磁束の一部分は、互に他の線路と連貫するのであるが、他と連貫しない磁束の方が遙かに濃密であるから、殆んど獨立と考へてよいのである。又(b)に就ては、1-3上の定常波によつて電磁結合されて2-3に誘起された電壓によつて、2-3上の定常波が定まるのであるから、1-3と2-3の定常波の關係を或る特定のものにするに云ふことは容易ならぬ問題であつて、兩者が丁度對稱になると云ふ場合は、 Z_2 が定まつた値をとる時にのみ可能であるか、又はその様なことは全然望めないかである。

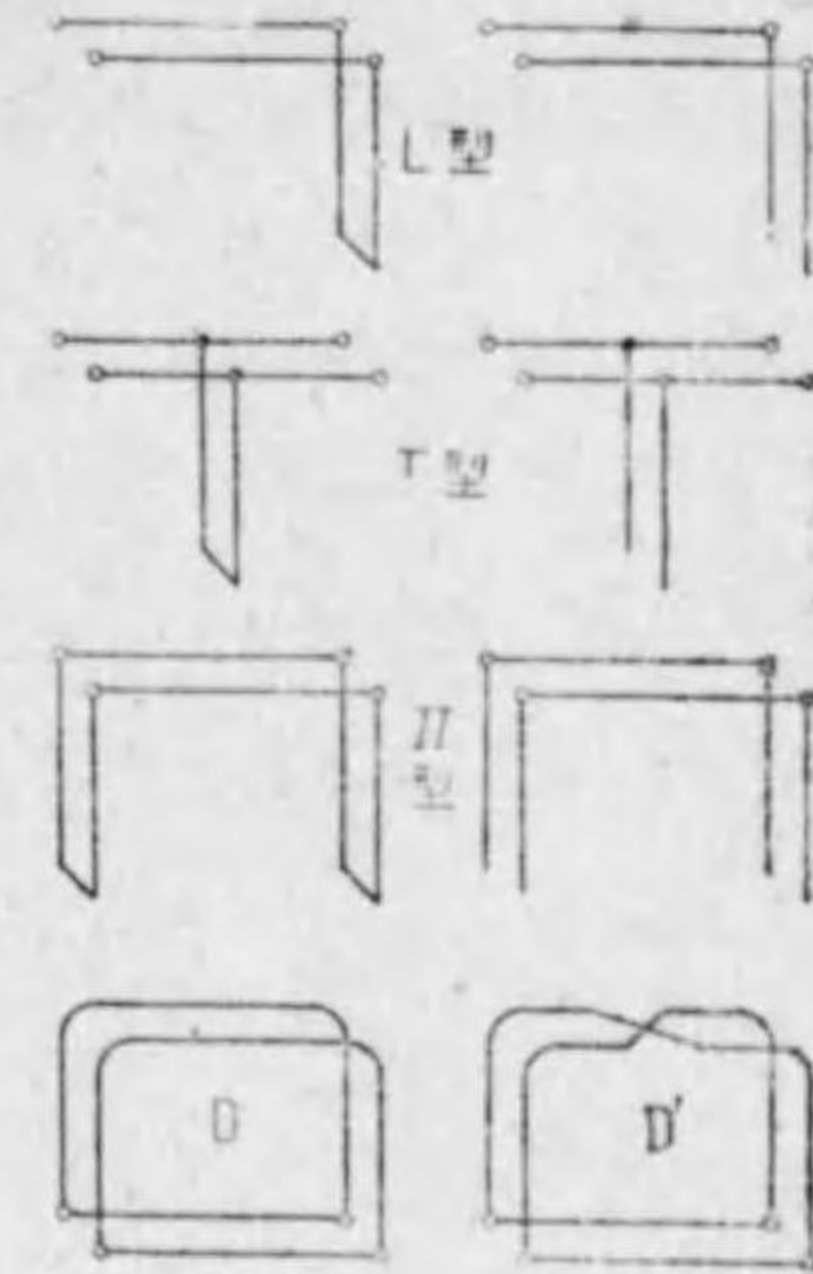


第3.1圖

斯く考へると共振線は回路の何處かへ枝狀に取付けることは出来るが、幹線に當る所へ直列に入れる事は出来ないことになる。それ故幹線に當る處には給電線をその儘挿入するより他ない。斯様にして集中常數で構成する回路

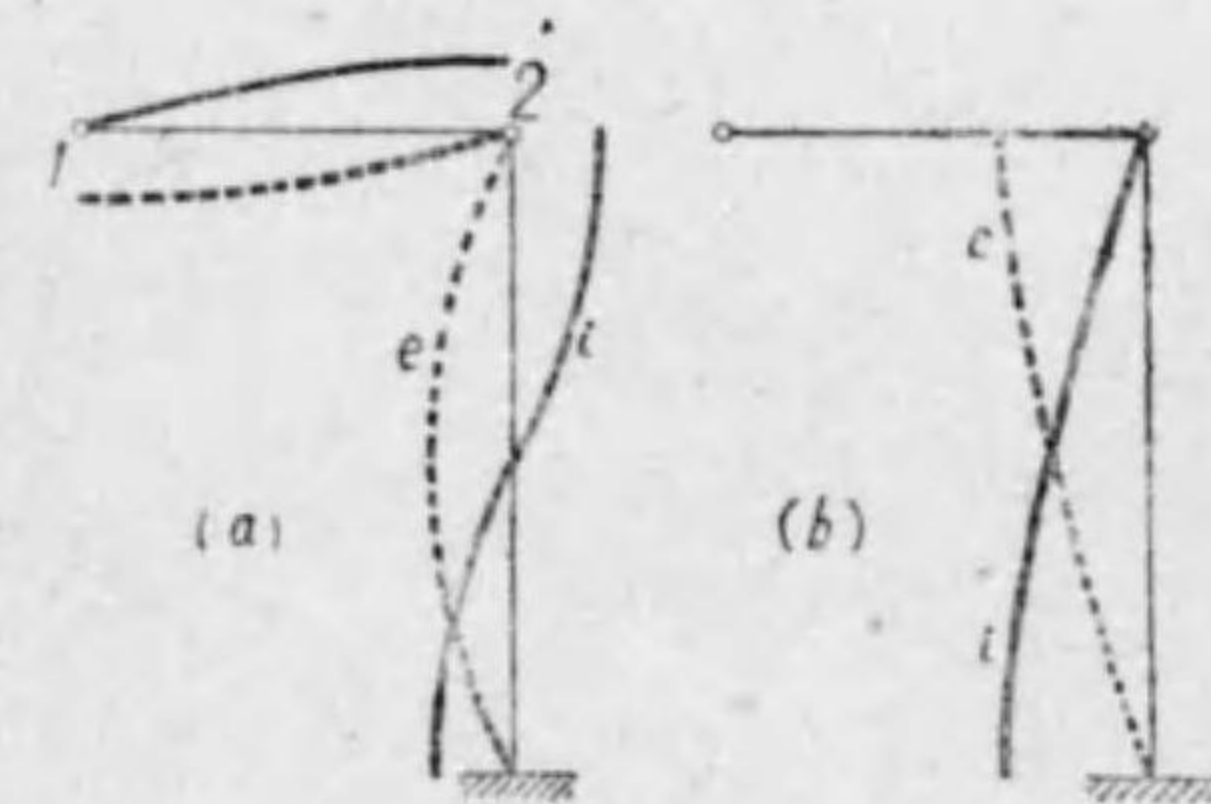
の簡単な例に倣つて、回路を形成して見ると第3.2圖の如くなる。L, T及びπの三種は集中常數回路の型その儘であるが、最後のD, 變Dは變Dの方がラチス型よりの類推と考へられ、それより又Dが派生したものである。

斯様に構成した回路は各要素が §1.4 で見る通り、周波數を變數と見る時に周期性を呈するから、集中常數の場合の如く性質が單純ではなく、濾波特性も周期的になる。之等の特性をざつと一通り考へて見る。



第3.2圖

先づL, 型回路に於て、完全に阻止する波長に對しては第3.3圖(a)の如く、分路の先端で短絡にあるから、そこは電流腹になつてゐて、從つてそれより上に $\lambda/2$ 進つた2の端子では同様に電流腹になつてゐる。故に2の端子は云はゞ短絡されてゐる様なものであつて、これから外へは電波は傳播されない。それから更に1の端子へ $\lambda/4$ 進めば1は電壓腹であつて、1の外部へ對しては ∞ のリアクタンスとして作用する。從つてこの周波數に對してはこの回路は完全に阻止作用をなすわけである。波長が少しでも變れば電壓腹や電流腹の位置が變るから2端子の電壓は完全に0とはならず、從つて分量の差はあつても2端子から外へ電波が出て行くわけである。特に分路の長さが $\lambda/4$ となつた時には、(b)圖の如く2の端子が丁度電流節、電壓腹となるから、2に對して分路は

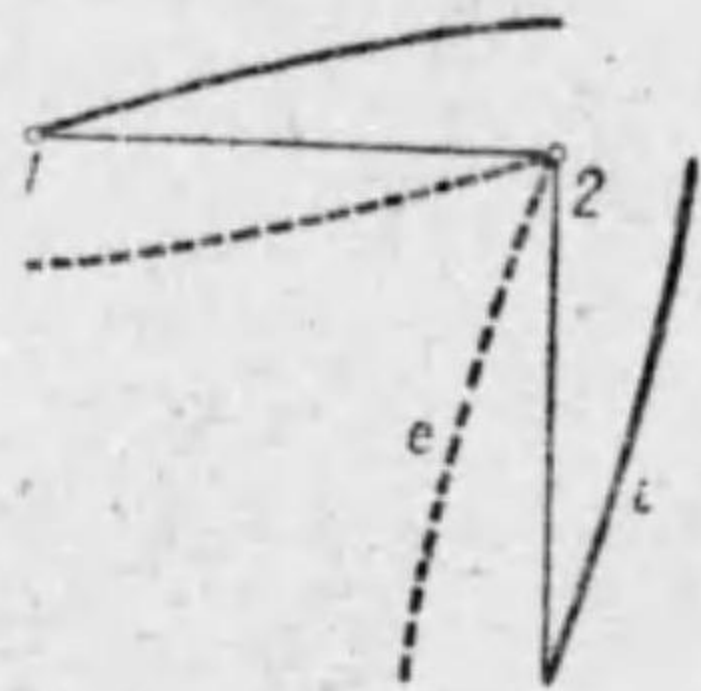


第3.3圖

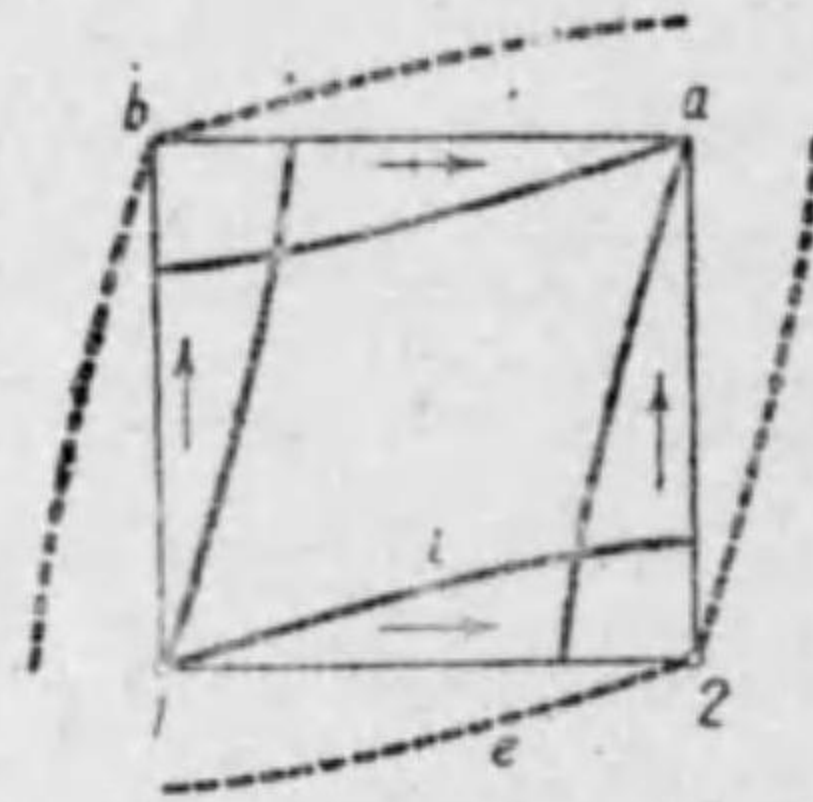
之等の特性をざつと一通り考へて見る。先づL, 型回路に於て、完全に阻止する波長に對しては第3.3圖(a)の如く、分路の先端で短絡にあるから、そこは電流腹になつてゐて、從つてそれより上に $\lambda/2$ 進つた2の端子では同様に電流腹になつてゐる。故に2の端子は云はゞ短絡されてゐる様なものであつて、これから外へは電波は傳播されない。それから更に1の端子へ $\lambda/4$ 進めば1は電壓腹であつて、1の外部へ對しては ∞ のリアクタンスとして作用する。從つてこの周波數に對してはこの回路は完全に阻止作用をなすわけである。波長が少しでも變れば電壓腹や電流腹の位置が變るから2端子の電壓は完全に0とはならず、從つて分量の差はあつても2端子から外へ電波が出て行くわけである。特に分路の長さが $\lambda/4$ となつた時には、(b)圖の如く2の端子が丁度電流節、電壓腹となるから、2に對して分路は

∞ のリアクタンスとして作用し、少しも影響を與へないから、單なる 1-2 の傳送路を傳播して行くのと同じである。

次に L_r 型回路に於ては第3.4圖の如く、先づ阻止波長に對しては分路の先端が電壓腹になつてゐるから、 $\lambda/4$ 上に辿つた端子2に於ては電壓節となつて、こゝで短絡されたと同等であるから端子2の外に何を連結しても、それへは電波は傳達されない、そしてそれより $\lambda/4$ 辿つた端子1ではリアクタンス ∞ となる。これより波長が長くなつても短くなつても多少は傳達される。



第3.4圖

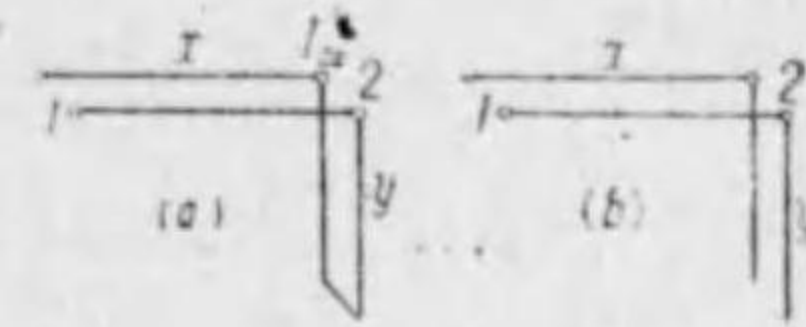


第3.5圖

途中も同様であるが略して最後に D 型回路に就て考へる。阻止波長に於ては、先づ第3.5圖の1端子に進行波が來たとすれば、1の分岐點では兩分岐路の條件が全く同じであるから2の方と b の方とへ二等分されて進み、a に達する。a では方向の反對な同大同位相の進行波が會同するので、電流は0に、電壓は2倍になる、即ち a 點は電壓腹、電流節である。従つてそれより $\lambda/4$ だけ下つた2端子では電壓節であつて、2端子は短絡されたと同等である。それ故端子2の外へ連結した負荷には作用せず、更にそれより $\lambda/4$ 辿つた1の點は電壓腹になつてゐるから、 ∞ のリアクタンスとして作用する。

§3.3 L 型回路

前節で一應意味は解つたが、なほ數量的に取扱つて見ることにする。第3.6圖の如く寸法を定めたとして (a) の L_r に就て四端子常數を算出して見る。x の終端に於ける電流を I_{2x} とすれば次の方程式が得られる。



第3.6圖

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_2 \cos mx + jW I_{2x} \sin mx, \\ I_1 &= E_2 (j/W) \sin mx + I_{2x} \cos mx, \\ I_{2x} &= I_2 + E_2 / (jW \tan my). \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

之等より I_{2x} を消去すれば四端子方程式が得られ次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_2 (\cos mx + \cot my \sin mx) + jW I_2 \sin mx, \\ I_1 &= E_2 (j/W) (\sin mx - \cot my \cos mx) + I_2 \cos mx. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

故にこれより (2.15) 及び (2.23) により影像インピーダンス及び傳達常數を求めれば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \cosh \theta &= \sqrt{(\cos mx + \cot my \sin mx) \cos mx}, \\ W_{01} &= W \sqrt{\frac{\cos mx + \cot my \sin mx}{\sin mx - \cot my \cos mx}} \cdot \tan mx. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

そこでこの回路の特性を調べる爲に或る一點を押へることにする。即ち、周波數 f_0 に於て (波長は λ_0 、位相常數は m_0) 減衰も影像インピーダンスも共に ∞ であるとする。さうすれば x と y の長さが固定される。即ち (3.3) に於て、 m_0 に於て兩者共に ∞ になる爲には次の條件が必要である。

$$\cot m_0 y = \infty \quad \text{及び} \quad \cos m_0 x = 0. \quad (3.4)$$

従つて x と y とは次の値を採る。

$$y = n_1 \lambda_0 / 2 \quad \text{及び} \quad x = (2n_2 - 1) \lambda_0 / 4. \quad (3.5)$$

但し n_1 と n_2 とは任意の整数である。

斯くして寸法が定まつたから、この回路が一般の周波数に対して如何なる特性を表すかは、(3.5)を(3.3)に入れればわかる。その前に最も短い x, y とする爲に $n_1=n_2=1$ とし、周波数を直接變數とせず次 F を用ふることにする。

$$F = f/f_0 \quad (3.6)$$

さうすれば

$$ny = F\pi \quad \text{及び} \quad mx = F\pi/2 \quad (3.7)$$

であるから、(3.3)は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \cosh \theta &= \sqrt{0.5 + \cos F\pi}, \\ W_{01} &= jW \sqrt{\tan(F3\pi/2) \tan(F\pi/2)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

之を見て解くことは特性の周期は $F=2$ 、即ち完全に阻止する周波数の2倍を周期として特性が變化するのである。 W_{01} の F に対する變化の様態を圖示すれば第3.11(a)圖であつて、實線は實數を、點線は虚數を表してゐる。切斷周波数は $F=1/3, 2/3$ 及び $4/3, 5/3$ であり、 $F=1/2$ 及び $3/2$ に於ては W の儘で完全に自由通過である。この特性を強ひて名稱にすれば低域阻止周期的帯域濾波器とでも云ふべきものであらう。

次に(b)圖の L_r 型の場合には(1.41)と(1.44)を見ればわかる通り(3.3)の中に於て $\cot my$ を $-\tan my$ に置き換ればよい。即ち

$$\left. \begin{aligned} \cosh \theta &= \sqrt{(\cos mx - \tan my \sin mx) \cos mx}, \\ W_{01} &= W \sqrt{\frac{\cos mx - \tan my \sin mx}{\sin mx + \tan my \cos mx} \tan mx}. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

完全阻止周波数を f_0 とすれば、 $\theta = \infty$ 、 $W_{01} = \infty$ より

$$y = (2n_1 + 1)\lambda_0/4, \quad \text{及び} \quad x = (2n_2 + 1)\lambda_0/4 \quad (3.10)$$

が得られ、特性が良い爲に $n_1=n_2=0$ とすれば、(3.6)なる周波變數を用ひて

$$my = mx = F\pi/2 \quad (3.11)$$

を得る。之より特性函數は次の如くなる。

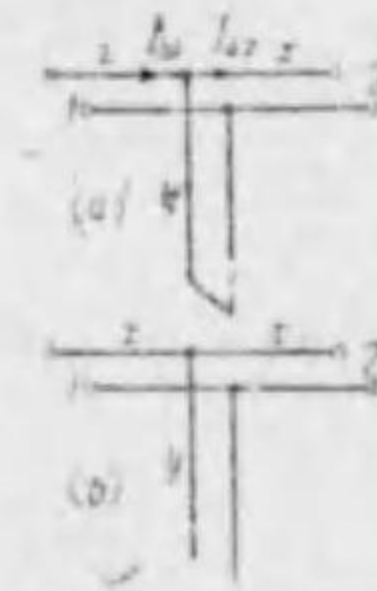
$$\left. \begin{aligned} \cosh \theta &= \sqrt{\cos F\pi}, \\ W_{01} &= W \sqrt{\cot F\pi \tan(F\pi/2)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

特性の周期はやはり $F=2$ であり、 W_{01} の F に対する様態は第3.11(b)圖の如くである。切斷周波数は $F=0.5$ 及び 1.5 である。同様に名稱付けるならば低域通過周期的帯域濾波器である。

§3.4 T 型回路

第3.7(a)圖の T_r 型に就て方程式を聯立すれば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_a \cos mx + jW I_{a1} \sin mx, \\ I_1 &= E_a (j/W) \sin mx + I_{a1} \cos mx, \\ E_a &= E_2 \cos mx + jW I_2 \sin mx, \\ I_{a2} &= E_2 (j/W) \sin mx + I_2 \cos mx, \\ I_{a1} &= I_{a2} + E_a / (jW \tan my). \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$



之等の五式より E_a 、 I_{a1} 、及び I_{a2} を消去して綜合四端子方程式を作れば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_2 \left(\cos 2mx + \frac{\sin 2mx}{2 \tan my} \right) + jW I_2 \left(\sin 2mx + \frac{\sin^2 mx}{\tan my} \right), \\ I_1 &= E_2 \frac{j}{W} \left(\sin 2mx - \frac{\cos^2 mx}{\tan my} \right) + I_2 \left(\cos 2mx + \frac{\sin 2mx}{2 \tan my} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

今度は對稱回路であるから、(2.31)と(2.32)より傳達常數と影像インピーダンスを求めれば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \cosh \theta &= \cos 2mx + \frac{\sin 2mx}{2 \tan my}, \\ W_0 &= W \sqrt{1 + \frac{1}{\tan my \sin 2mx - \cos^2 mx}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

完全阻止周波數 $f_0(\lambda_0, m_0)$ に於て $\cosh \theta$ と W_0 とは次の條件に於て ∞ となる。

$$\tan m_0 y = 0 \text{ 及び } \cos m_0 x = 0. \quad (3.16)$$

之等より

$$y = n_1 \lambda_0 / 2 \text{ 及び } x = (2n_2 - 1) \lambda_0 / 4 \quad (3.17)$$

を得て, $n_1 = n_2 = 1$ に選んで周波変数 F を用れば一般周波は,

$$mx = F\pi/2 \text{ 及び } my = F\pi \quad (3.18)$$

となるから, (3.15) は次の如くなる.

$$\left. \begin{aligned} \cosh \theta &= 1.5 \cos F\pi, \\ W_0 &= jW \sqrt{\frac{(1 - \cos F\pi)(\cos F\pi + 0.67)}{(1 + \cos F\pi)(\cos F\pi - 0.67)}} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

特性の周期はやはり $F=2$ である. W_0 を F に對して描けば第 3.11 (c) 圖である. 切斷周波變数は $F=0.27, 0.73, 1.27$ 及び 1.73 である. 低域阻止周期的濾波器である.

次に (b) の T_7 に就ては, (3.15) に於て $\tan my$ を $-\cot my$ とすればよい. 即ち

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \cos 2mx - \frac{\sin 2mx}{2 \cot my}, \\ W_0 &= W \sqrt{1 - \frac{1}{\sin 2mx \cot my + \cos^2 mx}} \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

完全阻止周波數 f_0 に對して $\theta = \infty, W_0 = \infty$ より次式が得られる. 即ち

$$\cot m_0 y = 0, \cos m_0 x = 0. \quad (3.21)$$

之より

$$x = (2n_1 + 1) \lambda_0 / 4, y = (2n_2 + 1) \lambda_0 / 4 \quad (3.22)$$

となり, $n_1 = n_2 = 0$ とすれば同様に

$$mx = my = F\pi/2. \quad (3.23)$$

之を (3.20) に入れれば次の如くなる.

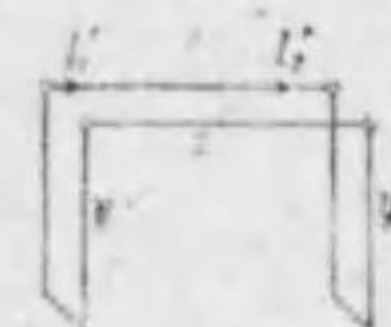
$$\left. \begin{aligned} \cosh \theta &= 1.5 \cos F\pi - 0.5, \\ W_0 &= W \sqrt{\frac{\cos F\pi + 0.33}{\cos F\pi + 1}} \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

この W_0 の圖は第 3.11 (d) 圖である. 周期はやはり $F=2$ で, 切斷周波變数は $F=0.6$ 及び 1.4 である.

§ 3.5 II 型 回 路

第 3.8 圖に就て聯立方程式を立てれば次の通りである.

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_2 \cos mx + jW I_2' \sin mx, \\ I_1' &= E_2 (j/W) \sin mx + I_2' \cos mx, \\ I_1' &= I_1 - E_1 / (jW \tan my), \\ I_2' &= I_2 + E_2 / (jW \tan my). \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$



第 3.8 圖

之より I_1' と I_2' を消去すれば次の四端子方程式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_2 \frac{\sin m(x+y)}{\sin my} + I_2 jW \sin mx, \\ I_1 &= E_2 \frac{\sin m(x+2y)}{jW \sin^2 my} + I_2 \frac{\sin m(x+y)}{\sin my}. \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

故に

$$\left. \begin{aligned} \cosh \theta &= \frac{\sin m(x+y)}{\sin my}, \\ W_0 &= jW \sin my \sqrt{\frac{\sin mx}{\sin m(x+2y)}} \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

この場合は θ を ∞ にすれば W_0 は 0 となるから, 完全阻止する周波數 f_0 に於て影像インピーダンスが 0 となり端子 1 で短絡することになるから阻止回路として見て實用上面白くない. そこで次に $W_0 = \infty$ より出發すると $\sin m_0(x+2y) = 0$ が得られ, 之より寸法は $x+2y = n \lambda_0 / 2$ となり, 之を (3.27) に入れれば次の如くなる.

$$\cosh \theta_{f_0} = \frac{\sin(n\pi - m_0 y)}{\sin m_0 y} = 1(\dots \text{奇数}) \text{ 又は } -1(\dots \text{偶数}) \quad (3.28)$$

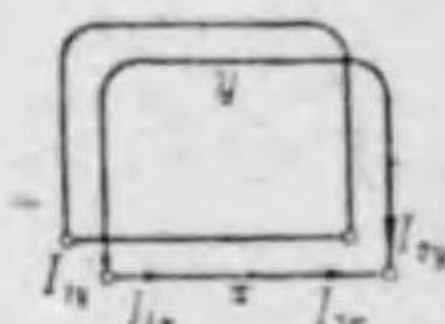
即ちこの場合は端子 1 より見てこの回路は並列同調になつてゐるから, 端子 1 のインピーダンスは ∞ になるが, 回路の上に乗つてゐる定常波の分布状

態が x 線條の中央に關して對稱になつてゐる爲、端子1の電壓と全く等しい電壓が端子2に存在し、爲に減衰はしないことになる。こゝに於ては、共振線の並列同調を新たに知つた程度に止めてこれ以上深入しない。

§3.6 D型回路

第3.9圖に於て、(2.48)を用ひて聯立方程式を立てれば次の如くである。

$$\left. \begin{aligned} I_{1x} &= E_1 \frac{\cot mx}{jW} - E_2 \frac{1}{jW \sin mx}, \\ I_{2x} &= E_1 \frac{1}{jW \sin mx} - E_2 \frac{\cot mx}{jW}, \\ I_{1y} &= E_1 \frac{\cot my}{jW} - E_2 \frac{1}{jW \sin my}, \\ I_{2y} &= E_1 \frac{1}{jW \sin my} - E_2 \frac{\cot my}{jW}, \\ I_1 &= I_{1x} + I_{1y}, \\ I_2 &= I_{2x} + I_{2y}. \end{aligned} \right\} (3.29)$$



第3.9圖

之等より I_{1x} , I_{2x} , I_{1y} 及び I_{2y} を消去すれば四端子方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= E_1 \frac{1}{jW} (\cot mx + \cot my) - E_2 \frac{1}{jW} \left(\frac{1}{\sin mx} + \frac{1}{\sin my} \right), \\ I_2 &= E_1 \frac{1}{jW} \left(\frac{1}{\sin mx} + \frac{1}{\sin my} \right) - E_2 \frac{1}{jW} (\cot mx + \cot my). \end{aligned} \right\} (3.30)$$

之より (2.31) 及び (2.32) に依り特性函数を出せば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \cosh \theta &= \frac{\cos \{m(x+y)/2\}}{\cos \{m(x-y)/2\}}, \\ W_0 &= \frac{W}{2} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \{m(x-y)/2\}}{\sin^2 \{m(x+y)/2\}}}. \end{aligned} \right\} (3.31)$$

こゝで $\theta = \infty$, $W_0 = \infty$ なる完全阻止周波数 f_0 に対しては次式が成り立つ。

$$\cos \{m_0(x-y)/2\} = 0, \quad \sin \{m_0(x+y)/2\} = 0. \quad (3.32)$$

之より

$$m_0(x-y)/2 = (2n_1 - 1)\pi/2, \quad m_0(x+y)/2 = n_2\pi$$

となり、最も短いのがよいから $n_1 = n_2 = 1$ となつて、 x と y の寸法は

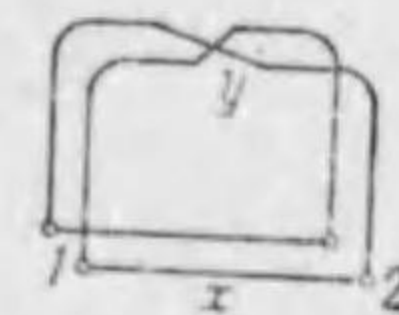
$$x = 3\lambda_0/4, \quad y = \lambda_0/4 \quad (3.33)$$

となる。 x , y をこの寸法に定めれば周波變數 F を用ひて

$$m(x+y) = 2F\pi, \quad m(x-y) = F\pi \quad (3.34)$$

となるから、(3.31) は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \cosh \theta &= \frac{\cos F\pi}{\cos(F\pi/2)}, \\ W_0 &= \frac{W}{2} \sqrt{\frac{0.5 + \cos F\pi}{1 + \cos F\pi}} \end{aligned} \right\} (3.35)$$

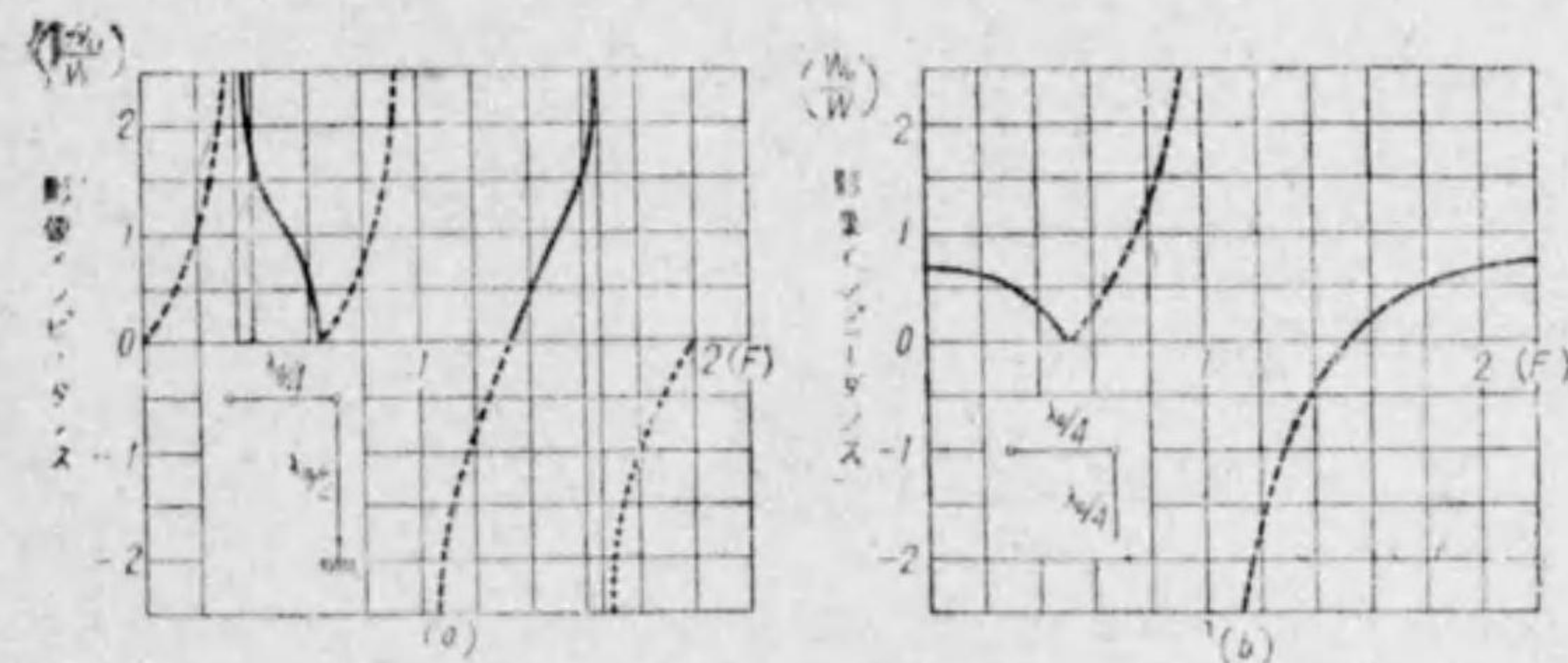


第3.10圖

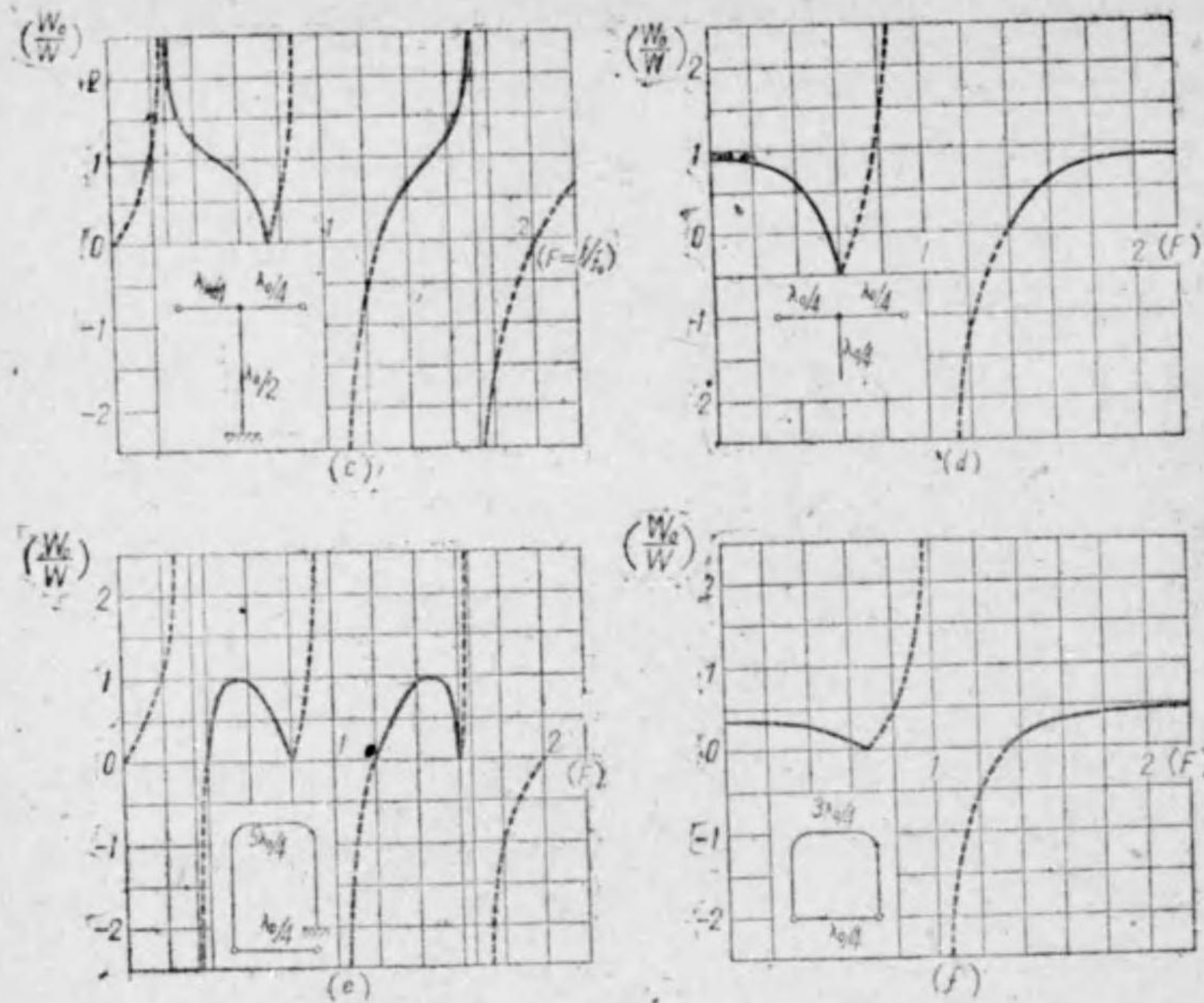
W_0 を F を變數として描けば第3.11(f)圖の如くなる。周期は同様 $F=2$ であり、切斷周波變數は $F=0.57$ 及び 1.33 である。低域通過周期的濾波器である。

§3.7 D_x型回路

D型回路の一方の分路を反轉して結ぶ、第3.10圖の様な回路である。この場合に成り立つ聯立方程式は(3.29)の最後の式を $I_2 = I_{2x} - I_{2y}$ に代へ、



第3.11圖 (イ)



第3.11圖 (ロ)

I_{1V} 及び I_{2V} の式中の E_2 の符號を反對にすればよい。そして前同様四端子式を作れば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= E_1 \frac{1}{jW} (\cot mx + \cot my) - E_2 \frac{1}{jW} \left(\frac{1}{\sin mx} - \frac{1}{\sin my} \right), \\ I_2 &= E_1 \frac{1}{jW} \left(\frac{1}{\sin mx} - \frac{1}{\sin my} \right) - E_2 \frac{1}{jW} (\cot mx + \cot my). \end{aligned} \right\} (3.36)$$

同様に特性函数は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \cosh \theta &= \frac{\sin \{m(x+y)/2\}}{\sin \{m(y-y)/2\}}, \\ W_0 &= jW \sqrt{\frac{\cos^2 \{m(x-y)/2\} - 1}{\cos^2 \{m(x+y)/2\}}} \end{aligned} \right\} (3.37)$$

完全阻止周波数 f_0 に対して $\theta = \infty, W_0 = \infty$ とすれば、

$$\sin \{m_0(x-y)/2\} = 0, \cos \{m_0(x+y)/2\} = 0$$

より

$$m_0(x-y) = 2n_1\pi, m_0(x+y) = (2n_2+1)\pi \quad (3.38)$$

となり、先づ $n_1 = n_2 = 0$ とすれば $x = y = \lambda_0/4$ となり、あらゆる周波数に対して $\theta = \infty$ となる。全周波阻止滤波器である。

次に $n_1 = n_2 = 1$ とすれば、

$$x = 5\lambda_0/4, y = \lambda_0/4 \quad (3.38)$$

となり、一般周波變數を用ひれば

$$m(x-y) = 2F\pi, m(x+y) = 3F\pi \quad (3.39)$$

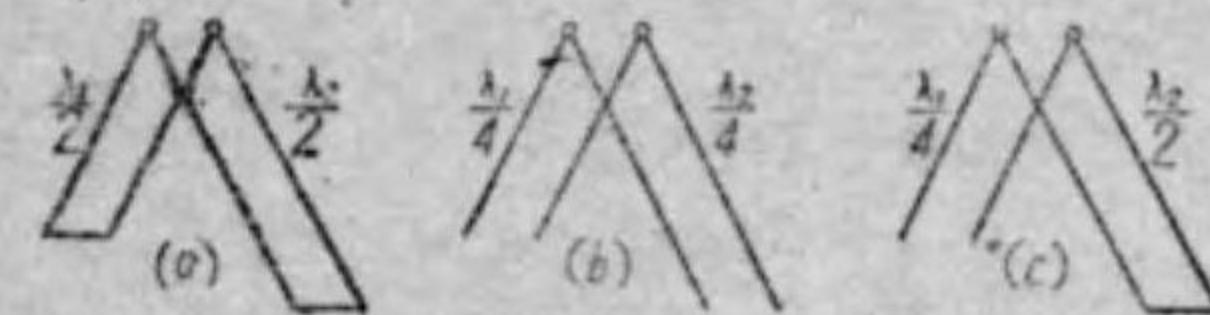
であるから、

$$\left. \begin{aligned} \cosh \theta &= \frac{\cos F\pi + 0.5}{\cos(F\pi/2)}, \\ W_0 &= jW \sqrt{\frac{\cos 2F\pi - \cos 3F\pi}{1 + \cos 3F\pi}} \end{aligned} \right\} (3.40)$$

W_0 を F に対して描けば 第3.11(e)圖の如くである。切斷周波變數は $F = 0.4, 0.8, 1.2$ 及び 1.6 であつて、低域阻止周期的滤波器である。

§3.8 並列回路

共振線の並列接続の最も簡単な場合に就て調べて見よう。第



3.12圖の如く2本の共振線を

並列に結んだ場合に (a) なら

第3.12圖

ば、その合成アドミッタンスは次の如くなる。

$$Y = \frac{1}{jW} \left(\cot \frac{m\lambda_1}{2} + \cot \frac{m\lambda_2}{2} \right) = \frac{1}{jW} \frac{\sin \{m(\lambda_1 + \lambda_2)/2\}}{\sin(m\lambda_1/2) \cdot \sin(m\lambda_2/2)} \quad (3.41)$$

分母が0の時、即ち f_1 又は f_2 の整数倍の周波数の時に Y は ∞ とな

る、即ち共振する。そして分子が0になる時、即ち兩者の長さを加へた全長が半波長の整数倍になる様な周波数の時に、 Y は0となる、之は並列同調である。

次に (a) 圖の場合には、

$$Y = \frac{-1}{jW} \left(\tan m \frac{\lambda_1}{4} + \tan m \frac{\lambda_2}{4} \right) = \frac{-1}{jW} \frac{\sin m(\lambda_1 + \lambda_2)/4}{\cos(m\lambda_1/4) \cdot \cos(m\lambda_2/4)} \quad (3.42)$$

となり、分母が0の時、即ち $(2n_1+1)f_1$ 又は $(2n_1+1)f_2$ の時には Y は ∞ となり、兩者の長さを加へた全長が半波長の整数倍になる時には並列同調となつて $Y=0$ となる。

又 (c) 圖に於ては、

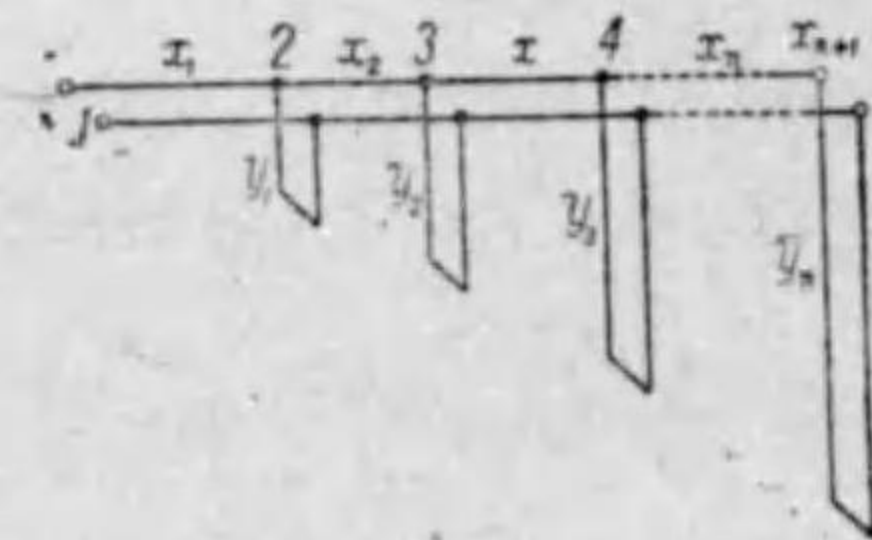
$$Y = \frac{1}{jW} \left(\cot \frac{m\lambda_2}{2} - \tan \frac{m\lambda_1}{2} \right) = \frac{1}{jW} \frac{\cos(m\lambda_2/2 + m\lambda_1/4)}{\sin(m\lambda_2/2) \cdot \cos(m\lambda_1/4)} \quad (3.43)$$

となつて、 f_2 の整数倍の周波数毎に、又 f_1 の奇数倍の周波数毎に $Y = \infty$ となり、兩者の長さの和が $\lambda/4$ になる様な周波数の奇数倍毎に並列同調になる。

共振線の数が3箇以上になると並列同調の周波数を計算の上で求めるのは困難になるが、相隣る $Y = \infty$ の周波数の間に必ず一つの並列共振周波数があるから、凡その見當はつくのである。

§3.9 枝葉型回路

梯子型回路に類似のものを考へると第3.13圖の様な枝に葉のついてゐる様な型の回路になる。之は各要素がL型回路になつてゐる。第 n 番目の要素なるL型回路の四端子常数は、(3.2)



第3.13圖

によつて次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \cos mx_n + \cot my_n \sin mx_n = \frac{\sin m(x_n + y_n)}{\sin my_n}, \\ B_n &= jW \sin mx_n, \\ C_n &= \frac{j}{W} (\sin mx_n - \cot my_n \cos mx_n) = \frac{1}{jW} \frac{\cos m(x_n + y_n)}{\sin my_n}, \\ D_n &= \cos mx_n. \end{aligned} \right\} (3.44)$$

そこで1番目から $n-1$ 番目迄の回路の総合四端子常数を $A_{N-1}, B_{N-1}, C_{N-1}$ 及び D_{N-1} とし、 n 番目迄の総合四端子常数を A_N, B_N, C_N 及び D_N とすれば、(2.48) に依つて次の漸化式が出来る。

$$\left. \begin{aligned} A_N &= A_{N-1} A_n + B_{N-1} C_n, \\ B_N &= A_{N-1} B_n + B_{N-1} D_n, \\ C_N &= C_{N-1} A_n + D_{N-1} C_n, \\ D_N &= C_{N-1} B_n + D_{N-1} D_n. \end{aligned} \right\} (3.45)$$

そこで f_1, f_2, \dots, f_n の n 周波数に於てこの回路が端子1に於て、インピーダンスが ∞ になることが要求されてゐるとする。先づ f_1 に就ては §3.3 により第一のL型に於て

$$x_1 = \lambda_1/4, \quad y_1 = \lambda_1/2 \quad (3.46)$$

とすれば充され、之はその後に何を連結しようとも、この性質だけは亂されない。 y_1 が半波長になつてゐるから L_1 の端子2は短絡されてゐるのも同然であるからである。かう云ふ點に注意すれば、次々の支葉の長さ y_2, y_3, \dots は夫々當該波長 $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ 等の半分にして置けばよいことが解る。そこで最後に x_2, x_3, \dots 等が求められればよいことになる。

扱て、そこで $n-1$ 番目迄は何等かの方法で解が出来たとすれば、第 n 番目は y_n を $\lambda_n/2$ にすることは勿論である、即ち第 $n+1$ 番の點が短絡されてゐるわけで、而もその時に端子1はインピーダンスが ∞ になつてゐるのである。即ち総合四端子方程式

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_N A_N + I_N B_N, \\ I_1 &= E_N C_N + I_N D_N \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

に於て $E_N=0, I_N=0$ でなければならぬ。従つて上式は

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= I_N B_N, \\ 0 &= I_N D_N \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

となるが、 $I_N \neq 0$ であるから、結局

$$D_N = 0 \quad (3.49)$$

が要求される。そこで (3.45) の $D_N=0$ として、(3.44) の B_n, D_n を用いれば x_n を求める式として次式が得られる。

$$\cot m_n x_n = \frac{W}{j} \frac{C_{N-1}}{D_{N-1}} \Big|_{m=m_n} \quad (3.50)$$

斯様にして兎も角理論上は漸次必ず問題が解ける譯であるが、実際にはそう簡単ではない。先づ $N=2$ の場合を計算すると、先づ f_1 に対しては、 x_1, y_1 は (3.46) であるから、 x_2 を求める式は

$$\cot m_2 x_2 = \frac{W}{j} \frac{C_1}{D_1} \Big|_{m=m_2} \quad (3.51)$$

であり、 C_1, D_1 は (3.44) から求めて代入すれば

$$\cot m_2 x_2 = \tan m_2 x_1 - \cot m_2 y_1 \quad (3.52)$$

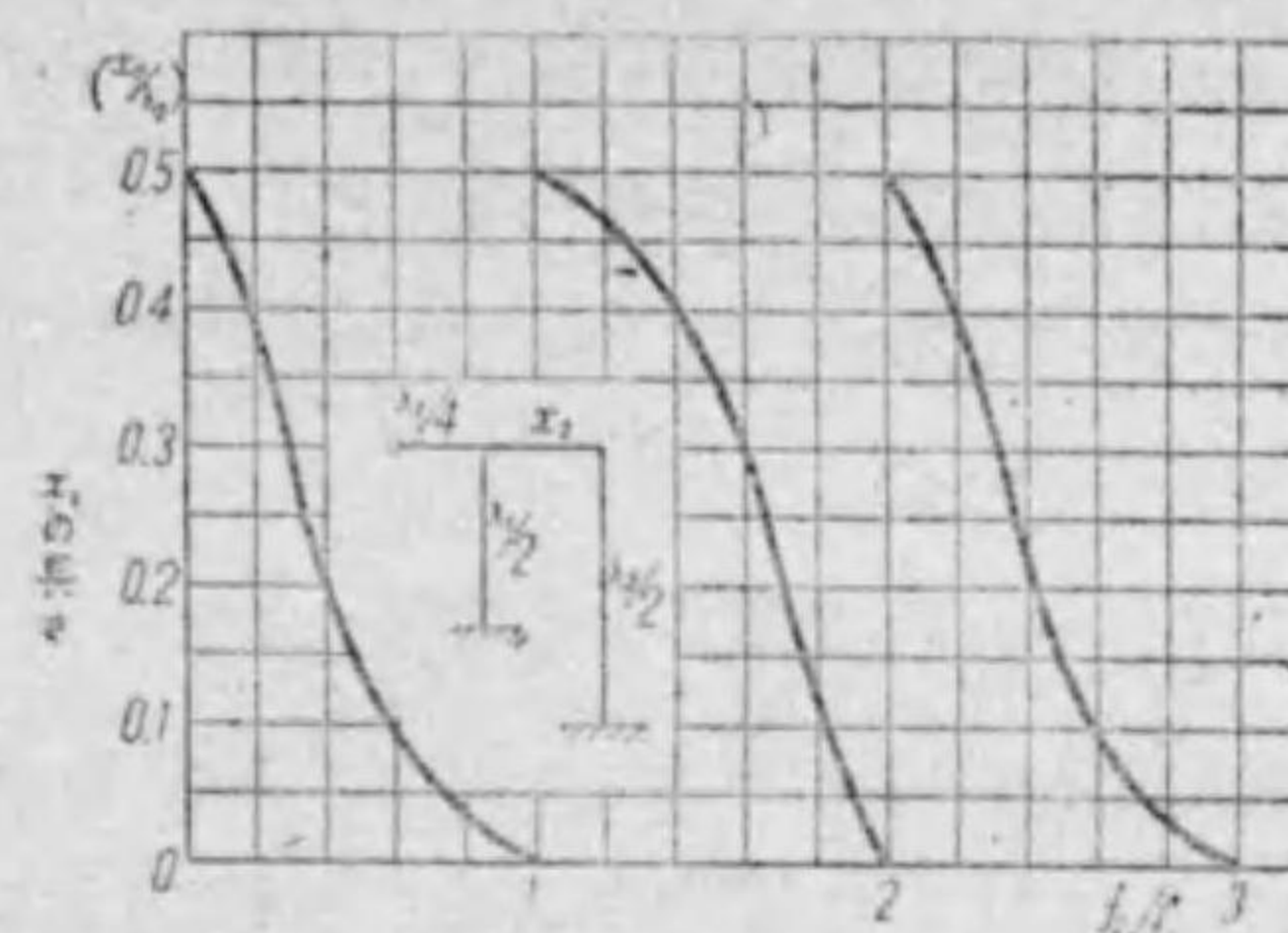
となる。そこで

$$m_2 x_1 = \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad m_2 y_1 = \frac{f_2}{f_1} \pi \quad (3.53)$$

であるから、之を用ふると更に

$$\cot m_2 x_2 = \tan \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{\pi}{2} - \cot \frac{f_2}{f_1} \pi \quad (3.54)$$

となる。この式を用ひて f_2/f_1 を変数として、 x_2 の長さを計算して圖に表せば第3.14圖の如くなる。



第3.14圖 N_2 枝葉型二端子回路の x_2 の計算値

N が3以上になると計算は仲々勞力であるが、何にしても (3.50) の通り既知の量だけに就て計算して未知のものが求まるのであるから、與へられた周波数だけに就てならば機械的に計算さへすればよいのである。 $N=3$ の時の計算式は

$$\cot m_3 x_3 = \frac{W}{j} \frac{C_{II}}{D_{II}} \Big|_{m=m_3} = \frac{W}{j} \frac{C_1 A_2 + D_1 C_2}{C_1 B_2 + D_1 D_2} \Big|_{m=m_3} \quad (3.55)$$

となり、之を (3.44) より計算すれば次の如くなる。

$$\cot m_3 x_3 = \frac{\frac{\cos m_3(x_1+y_1)}{\sin m_3 x_1} \cdot \frac{\sin m_3(x_2+y_2)}{\sin m_3 y_2} + \frac{\cos m_3 x_1 \cos m_3(x_2+y_2)}{\sin m_3 x_2}}{\frac{\cos m_3(x_1+y_1) \sin m_3 x_2 + \cos m_3 x_1 \cos m_3 x_2}{\sin m_3 x_1}} \quad (3.56)$$

§3.10 樹枝型回路

次に與へられた周波数の通過、阻止の條件を充す回路を構成して見よう。短波及び超短波の工學に於ては或る帯域に亘つての通過、阻止と云ふ要求があつても、周波数が有線工學と比較しては桁はづれに高い爲に殆ど點周波と見做すことが出来る場合が多い。

それで斯様の要求に對して、最も簡単な L 型回路を組合せて應ずること

にする。L_rもあるが、実際問題としては多少の調整もしなければならないから、それには短絡片を動かす方が遙かに容易であり、旁々高周波に於ては短絡の方は寸法通りに行つて狂ひはないが、開放端には終端作用があつて寸法通りにはゆかぬからである。

(1) 数周波数 f_1, f_2, \dots, f_n を阻止する回路

前節で述べた枝葉型回路のインピーダンスが f_1, f_2, \dots, f_n に於て ∞ になる様に設計して、第3-18圖の $n+1$ 番目の端子を受電端子に使へば、それがこの要求を充すものである。それは f_1, f_2, \dots, f_n に對して夫々順次圖の2, 3, \dots, n なる端子が短絡せられたと同等のことになるから、受端の方へは電波は傳達されないで完全に阻止されるのである。然し f_1, f_2, \dots, f_n の中の相隣る周波数の中間の周波数は通過されるから、 n の数が多くなると濾波特性は尖鋭な幅の狭いものとなつて来る。そこで濾波器に損失が全然なければ、如何に幅が狭くても點周波に對してだけは目的に沿ふが、実際問題として必ず損失があるから、 n の数が多い時には、番號が n に近いもの程特性が劣化することは免れない。

(2) 一周波数 f_0 を阻止し、別の f_1, f_2, \dots, f_n を通過する回路

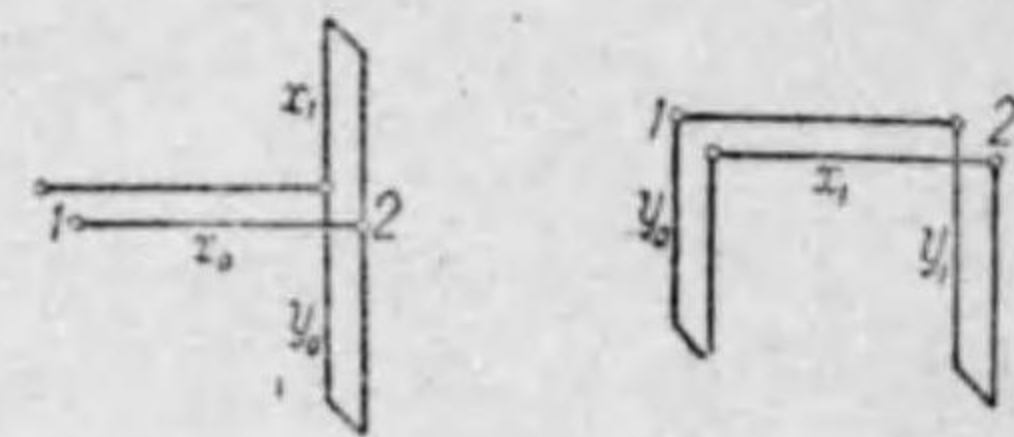
第3-15圖に於て f_0 を阻止する爲には

$x_0 = \lambda_0/4, y_0 = \lambda_0/2$ とすればよく、 f_1

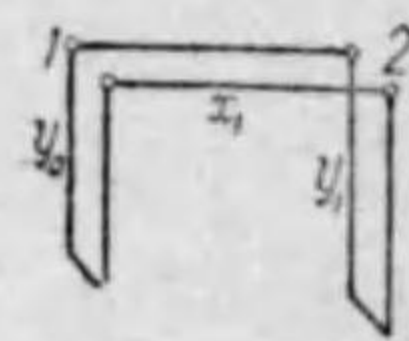
を通過せしめる爲には2點に對して、

x_1 と y_0 とが並列同調になればよいか

ら、§3-8の考へにより



第3-15圖



第3-16圖

$$x_1 + y_0 = n \lambda_1 / 2 \quad (3-57)$$

にすればよい。そこで x_1 の先端を半波長延してそこだけ切離して書けば第3-16圖の如くなる。これは非對稱の π 型回路であるが、この回路の聯立方程式は次の如くである。

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_2 \cos mx_1 + jW I_{2x} \sin mx_1, \\ I_{1x} &= E_2 (j/W) \sin mx_1 + I_{2x} \cos mx_1, \\ I_1 &= I_{1x} + (E_1/jW) \cot my_0, \\ I_{2x} &= I_2 + (E_2/jW) \cot my_1. \end{aligned} \right\} (3-58)$$

これより I_{1x} 及び I_{2x} を消去して四端子方程式を求めれば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_2 \frac{\sin m(x_1 + y_1)}{\sin my_1} + I_2 jW \sin mx_1, \\ I_1 &= E_2 \frac{\sin m(y_0 + x_1 + y_1)}{jW \sin my_0 \sin my_1} + I_2 \frac{\sin m(y_0 + x_1)}{\sin my_0}. \end{aligned} \right\} (3-59)$$

斯くしてこの回路は端子1に於てインピーダンスが無限大、端子2に於てインピーダンス0となることが要求されるのであるから、前項で述べた處と全く同一の要求であり、前節により綜合四端子回路常數の $D=0$ を條件として x_1 を求められるのである。前の考察に倣つて2の後にL型回路 $n-1$ 個を第3-17圖の如く附加すれば、 $f_2, f_3, \dots,$

\dots, f_n を通過させる回路が得られ、 n 番目のL回路の常數は(3-44)であり、(3-45)

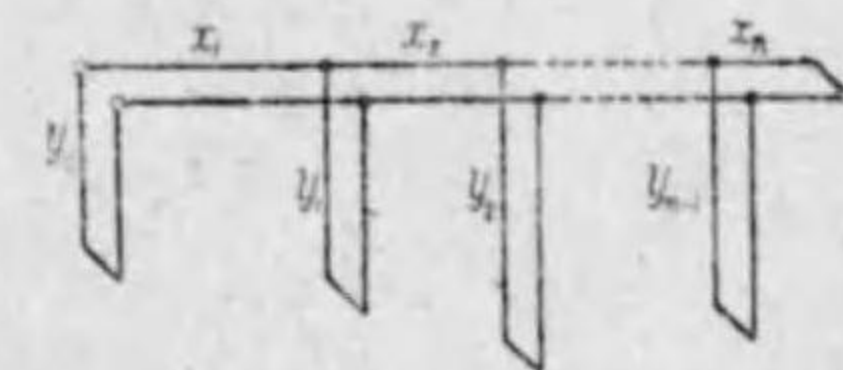
によつて一つ宛前の綜合四端子常數に漸化

して行けば、その例と全く同様に解くことが出来る。

(3) 数周波数 $f_{01}, f_{02}, \dots, f_{0n}$ を阻止し、別の數周波数 f_1, f_2, \dots, f_n を通過させる回路

先づ(1)項の考察により阻止する周波数に對して第3-13圖の各部分の寸法を定め、次にその分路を、(2)の考察によつて通過周波数に對して並列同調させる様に寸法を定めれば、目的のものが得られる。

扱て以上で理論的には點周波数通過及び阻止の回路の設計が出来たわけであるが、実際問題としては計算はさう簡單ではない。處が斯かる回路が集中常數のものより一段と優れてゐるのは、實驗的に調整することが極めて容易であつて、理論的に可能な證明さへあるならば、豫め定つてゐる長さだけは

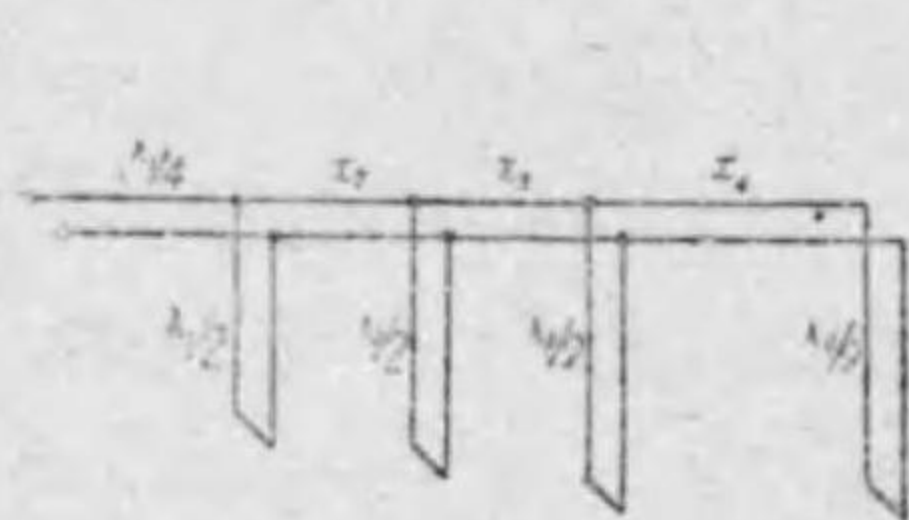


第3-17圖

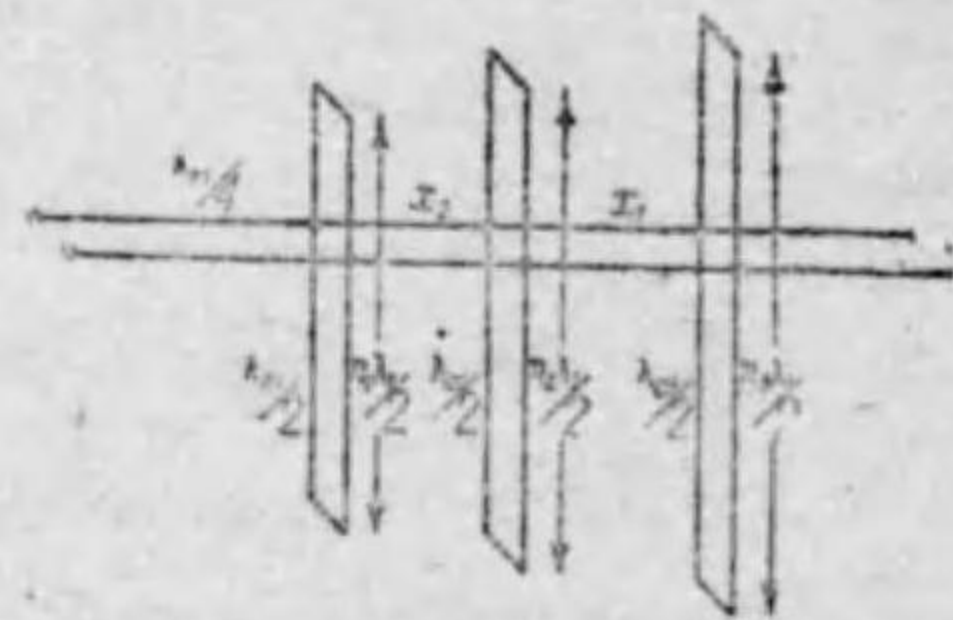
定めて置き、未知の寸法は実際に電力を供給して、接続点を摺動して求めれば極めて無雑作に求めることが出来ることである。以下少しその実例を述べて見よう。

(1) 阻止周波数 f_1, f_2, f_3, f_4 。この場合は既に述べた様に第3-18圖の如くなり、調整は周波数 f_2 より始めて順次 x_2, x_3, x_4 を定めればよい。端子1を電源に結んだと結ばぬのとで、電源側に少しも変化がない様ならば調整が仕上がったのである。

(2) 阻止周波数 f_{01}, f_{02}, f_{03} 、通過周波数 f_1 。この寸法は第3-19圖



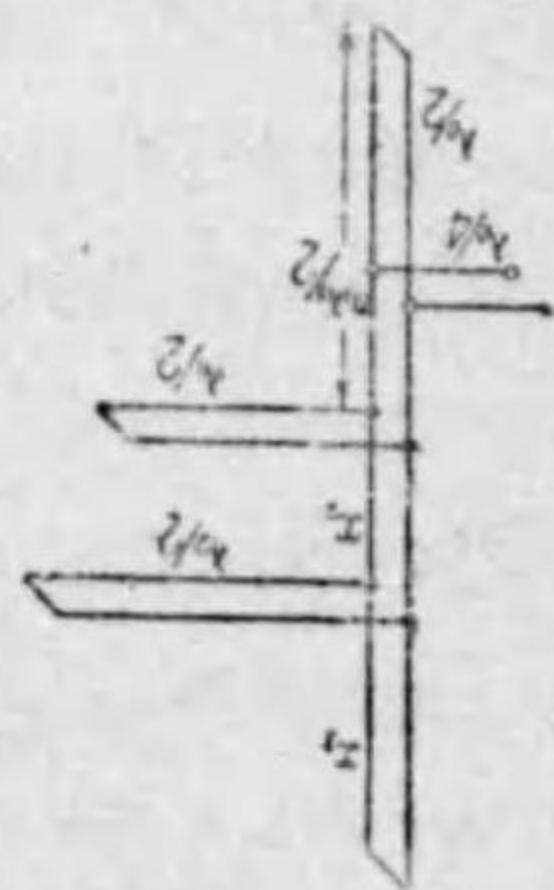
第3-18圖



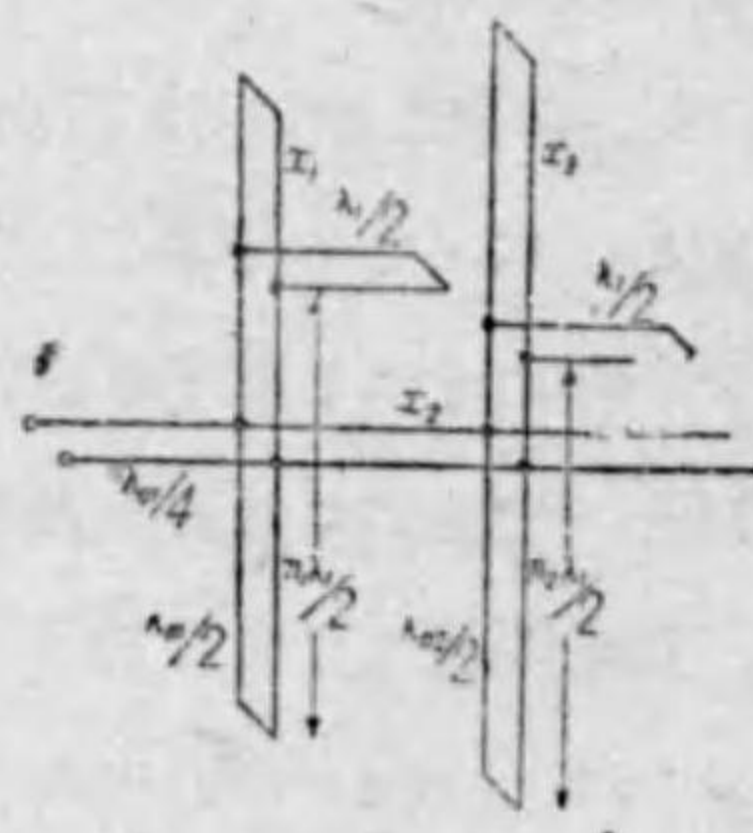
第3-19圖

であり、周波数 f_{02} と f_{03} とにより x_2 と x_3 を調整して求めれば、それで皆決定する。 n_1, n_2, n_3 は整数であつて工作出来る様に選ばばよい、つまり $\lambda_1 < \lambda_{03}$ とすれば、 n_2 を2以上にしなければ上へ出ないと云ふ様なことである。

(3) 阻止周波数 f_0 、通過周波数 f_1, f_2, f_3 。この場合は第3-20圖



第3-20圖



第3-21圖

の如く接続して、周波数 f_2 と f_3 とにより、 x_2 と x_3 とを調整すればそれで總て定まる。

(4) 阻止周波数 f_{01}, f_{02} 、通過周波数 f_1, f_2 。第3-21圖の既知の寸法は作つて置き、先づ左のものを取付け周波数 f_2 を供給、 x_1 を調整して求め、次に周波数 f_{02} を供給して x_2 を求め、 n_1 と n_2 とが等しければ x_3 は x_1 と等しくてよいが、若し $n_1 \neq n_2$ なる時はもう一度 f_2 の調整を行つて x_3 を確定する。

以上の回路はその形状から樹枝型と名付けたが、之は全く分布常數回路に特有のものである。

§3-11 整合回路

空中線と給電線の間のように、一般に波動インピーダンス又は特性インピーダンスの相異なるものをその儘連結すると、その連結點で反射が起る爲に、それだけ傳導能率が低下する。之を防ぐ爲に兩者の間に整合をとる回路を挿入する。この整合回路は、片方のインピーダンスを變成して他方のインピーダンスに合せるのであるから、回路としての作用は §2-7 で述べた變成回路に過ぎない。そこで取扱つた處に従つて逐次考へて見よう。

先づ理想的變壓器は分布常數で實現することは斷念するより致方ない。次に對稱回路に就ては、直ちに線條、T型、 π 型、D型を列べる事が出来る。之等に就て兩端の抵抗を R_1 及び R_2 とする時に、各部の寸法を定める計算をするには、先づ各回路の四端子常數を求め、次に(2-42)により $A=0$ 、又(2-44)により $R_1 R_2 = B/C$ と置くことによつて簡単に求められる。一々別々にするよりも一遍に纏めて表せば次の通りになる。

回路	四端子式の番號	$A=0$ より導かれる條件	$B/C=R_1R_2$ 同條件
	(2.47)	$x=(2n+1)\frac{\lambda}{4}$	$W^2=R_1R_2$
	(3.14)	$2 \tan my = -\tan 2mx$	$W^2 \tan^2 mx = R_1R_2$
	(3.26)	$x+y=n\frac{\lambda}{2}$	$W^2 \sin^2 my = R_1R_2$
	(3.30)	$x+y=(2n+1)\frac{\lambda}{2}$	$\frac{W^2}{8} \{1 + \cos m(x-y)\} = R_1R_2$

最後に非対称回路に就て、最も簡単なものは L 型である。(2.46) の條件 $R_1=W_{01}$ 及び $R_2=W_{02}$ に於て、 W_{01} と W_{02} とを (2.15) により A, B, C 及び D に直し、この A, B, C 及び D に (3.2) の四端子常數を用ひれば次の條件式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \cot^2 my &= \left(1 - \frac{W^2}{R_1R_2}\right) \left(\frac{R_1}{R_2} - 1\right), \\ \cot^2 mx &= \left(1 - \frac{W^2}{R_1R_2}\right) / \left(\frac{R_1}{R_2} - 1\right). \end{aligned} \right\} \quad (3.60)$$

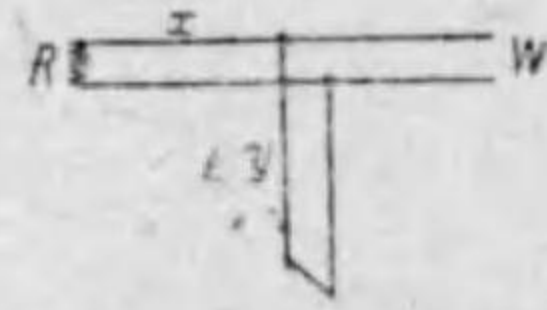
特に R_2 が W に等しい場合、即ち抵抗負荷 R_1 への給電線の途中に整合線をぶらさげて整合をとる場合(第3.22圖)には、上式に於て

$$R_2 = W \quad (3.61)$$

とすればよく、その結果は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \cot my &= \sqrt{\frac{R_1}{W}} - \sqrt{\frac{W}{R_1}}, \\ \tan mx &= \sqrt{\frac{R_1}{W}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.62)$$

R_1/W の値に従つて、 y と x の寸法が變る模様は第3.23圖の如くである。



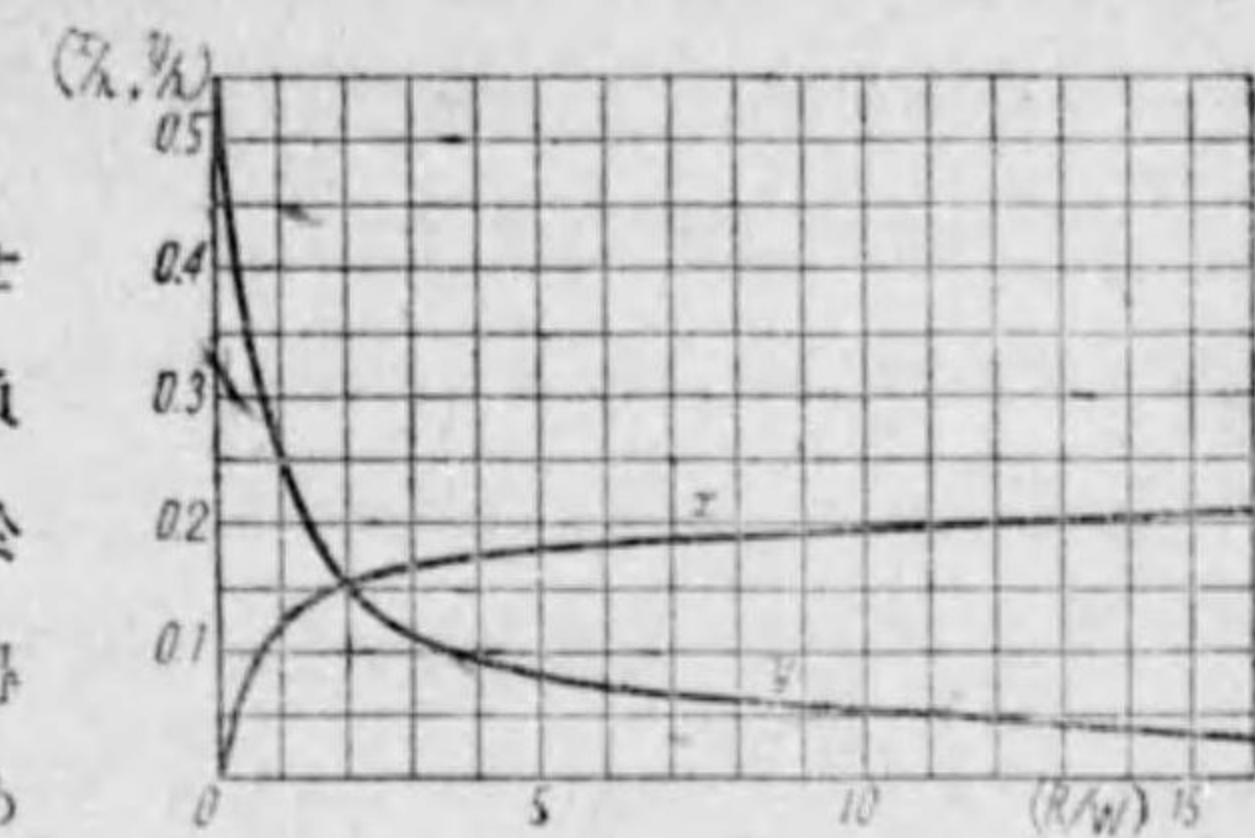
第3.22圖

§3.12 多重整合回路

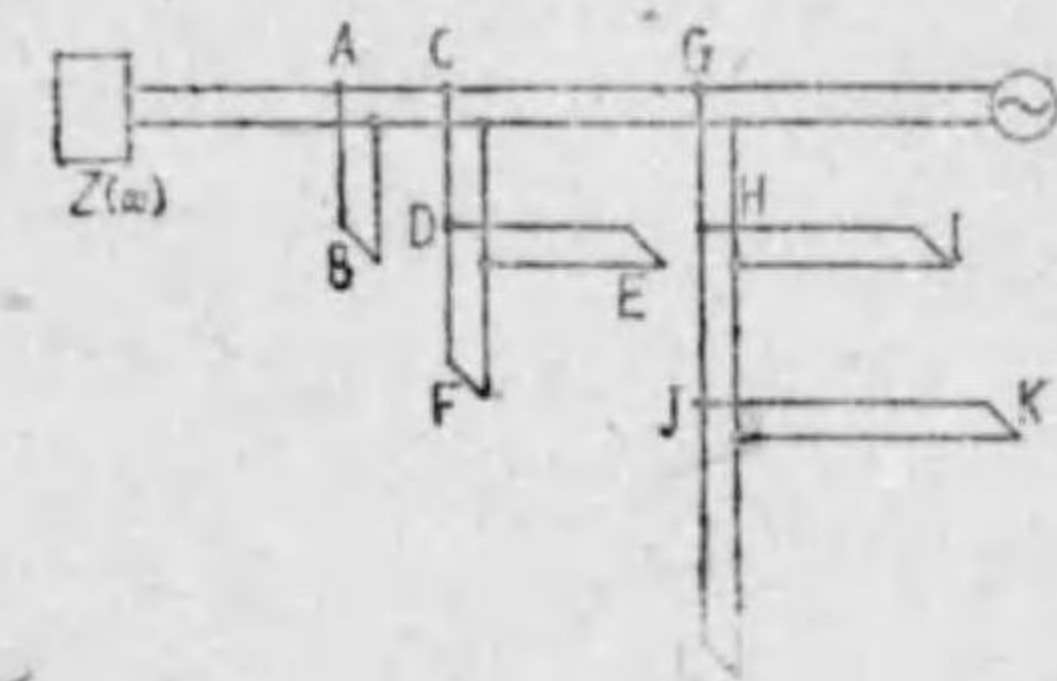
前節の L 型の回路を發展させると、周波數に依つて變化する負荷に對して2個以上の周波數に於て巧く整合する多重整合回路が得られる。その作用を實驗的に求めて行くのは容易である。第3.24圖に於て負荷 Z は周波數の函數であつて、 f_1, f_2, \dots なる周波數に於て整合をとるものとしよう。

先づ f_1 の電波を給電して整合線を取付けなければ、 Z より右方に定常波が現れる。之に前節の方法により整合線 AB を取付けて整合をとつたとする。

次に f_2 の電波を AB を取付けた儘で給電すると、 Z より A 迄は負荷と給電線との關係だけで出来る定常波が乗つてゐるが、 A より右では AE 分路の影響を受けた定常波分布となる。然しこの新たな定常波に就て整合をとると云ふことは前の方法と格別變つたことはなく同様に容易である。その整合線の取付け點が C であるとする。然しこの整合線の爲に折角 f_1 に對して AB で採つた整合が再びこゝで崩れては何にもならないから、この C 點の分枝線が f_1 に對して影響のない様にしなければならない。これは既に屢々述べた L 型回路の發展を計れば極めて容易である。即ち CD を $\lambda/4$ 、 DE を $\lambda/2$ にするのである。かくすれば f_1 に對しては D で短絡してゐるのと同等であるから、 DF の方へどの様な分枝線を取付けようと影響がな



第3.23圖 整合回路の寸法



第3.24圖

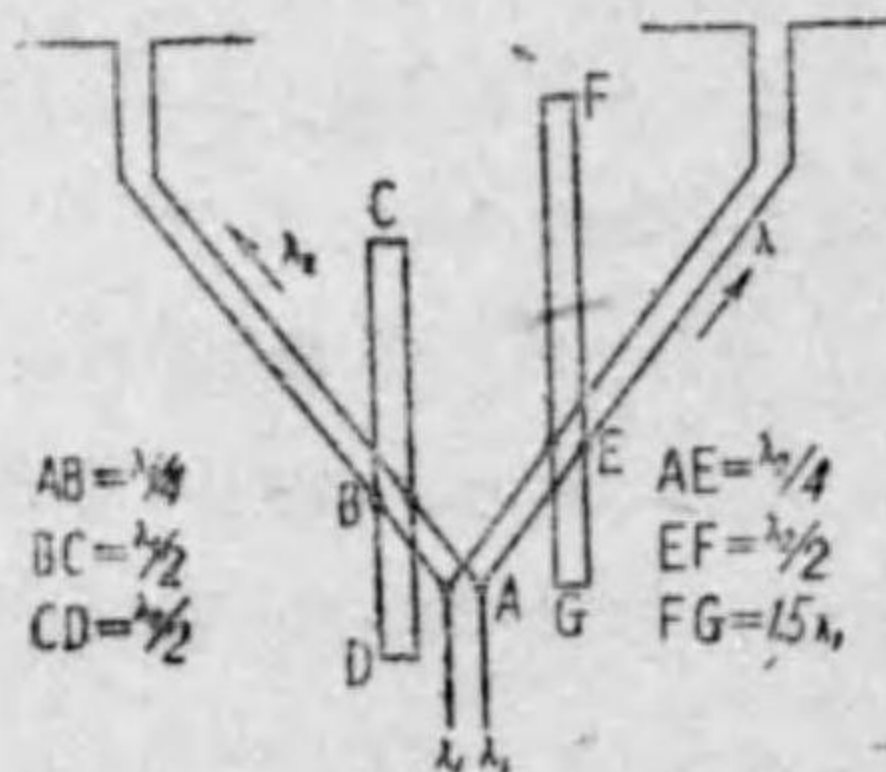
く、そして CD が $\lambda_1/4$ であるから C 点のインピーダンスは ∞ となつて、C で分岐した枝線は f_1 に対しては何の作用もなさぬことになる。そこで今度は f_2 に対して DF を加減すれば、その長さを半波長變へる間には、C 点のリアクタンスが $-\infty$ から $+\infty$ 迄のあらゆる値を經過するから、先に C 点で整合のとれた時の C 枝線のリアクタンスに等しい値を再現することが出来る。この状態で f_1 と f_2 とに二重の整合がとれたのである。

更に f_3 に対しては G で整合がとれたとして、 f_1 に対しては GH を $\lambda_1/4$ に、HI を $\lambda_1/2$ にとり、次に f_2 に対しては GH, HI 及び HJ で G 点のリアクタンスが ∞ になる様に J の短絡片の位置を調整して求め、J の位置が定まつたらば、JK を $\lambda_2/2$ だけ延して K で短絡して置く、之で f_2 に対しても G の分枝線系は影響がないことになる。そこで最後に f_3 に対して JL を加減して整合をとるのである。

§3.13 各種回路の実施

以上で理論的考察を一先づ終りとして、実際に之等の回路を実施してゐる例を少し掲げて置かう。

従来空中線系は一空中線と一給電線とよりなつてゐたが、空中線2箇以上に一本の給電線を共用して資材の軽減に資してゐる。その分岐点には濾波器が必要であつて充分實用になつてゐる。一例を述べると次の通りである。線径 5 mm, 線間 30 cm の平行二線給電線で 7,420 kc と 17,840 kc とを共通に傳送する際に、分岐点に第3.25圖の様な濾波回路を挿入した場合である。之は §3.10 の一周波数を阻止し、別の一周波数を自由に通過させると云ふことに當る。各部の寸法は圖に記入した様にするのが最も導線經濟に

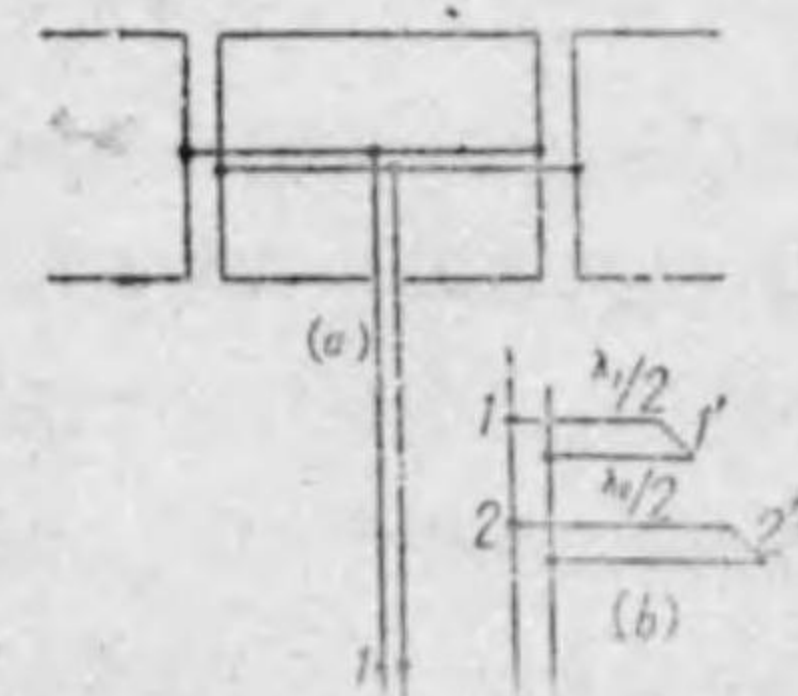


第3.25圖

なつてゐる。この回路を試験する際に C, D, F 及び G 点の短絡片には給電線と同じ 5 mm の銅線を用ひるから、之が実際には給電線の長さに加はるわけである。その加算の嵩を知る爲に、E 及び B 点に電圧計を當て置き、夫々 C 及び F の短絡片を摺動して、E 及び B の電圧の極小になる點を求めればよい。さうして試験をした結果、短絡片はその長さの 1/3 の給電線長に相當することがわかつた。之によつて短絡片の位置を皆矯正してから、濾波回路の効果を測定した。先づ 17,840 kc (λ_1) を給電して置いて、分岐点 A より B 迄、及び B より負荷に至る給電線に沿ふて電圧分布を測つた。その結果幹線給電線上より 43 db 減衰してゐることが解つた。又 7,420 kc (λ_2) に就て AB 及びその延長上に沿ふて測定した處、この方は 30 db を遙かに超過する減衰を與へてゐることが解つた。この位ならば濾波器の效果は充分であると云はなければならない。

次に D 型回路の實例を述べる。送信機の最終段増幅機からの出力の中には多分に第二高調波が含まれてゐるので、之を除去する目的にこの回路を試用した時のデータである。プッシュ・プル増幅器から出て來る第二高調波は平行二線に基本波の如く往復となつて乗るのではなく、兩線に同一の位相で乗つてゐる。従つて之を除去するのに L 型回路を用ひても何の効果もなく、自身で相殺して阻止する様な D 型回路がよいことになる。D 型回路は阻止周波の 2 倍、即ち基本波には自由通過であるから、なほ好都合である。斯くしてこの時の減衰の度合は約 20 db と云ふ結果が得られた。

枝葉型回路は空中線の反射器の電流を調整する處に應用されてゐる。即ち第3.26(a)圖の様に反射空中線を投射空中線と全く同一に作り、幅射結合によつて反射空中線としての動作を行はせる時に、反射空中線の引下し給



第3.26圖

電線の一点で短絡して、その短絡片の位置を摺動して反射空中線の電流を調整する方法があるが、それへの応用である。短絡と云ふことは或るリアクタンスを呈するのであるから、反射空中線に適當のリアクタンスを附加して調整することに當るのである。扱て圖は後述するが廣帯域高利得空中線である。投射空中線と反射空中線との間の距離が丁度半波長になると、如何に調整しても反射器としての作用は出来ないから、孰れの波長に對しても、その間の距離が半波長になるのを避けて建設すれば、あとは引下し給電線の短絡片の位置を加減するだけで、反射器としての作用を充分發揮させることが出来る。その爲に (b) 圖の様な調整回路を使用する。先づ λ_1 の波長に對して 1 の點で短絡して反射空中線としてよい状態が得られたとすれば、その點から $\lambda_1/2$ だけ 1-1' と横に延して 1' で短絡すれば、1 で短絡と同じ効果であるから λ_1 に對して之でよい。次に λ_2 に對しては 1-1' を附加した儘で 2 の點を短絡して調整がとれたとすれば、又そこから $\lambda_2/2$ だけ 2-2' と延して分路を取付ければ、同様に λ_2 に對してもよい。斯様にして行けば波長何箇に對してでも調整することが出来る。以上は面倒な計算をせずに實驗的に寸法を定めて行く方法であるが、之は誠に容易に整然と行はれるのである。

ビーム空中線と給電線との間には整合回路を挿入するが、その効果は給電線上を進行波の形で傳送して、傳送能率を揚げることに送信機負荷の安定度を増すことに在ると思はれる。この整合回路には L 型が慣用されてゐる。實際問題としては整合線を取付けないで給電線上の電壓分布を測定し、電壓腹より送信機側へ $\lambda/8$ より $\lambda/4$ 迄の間に、 $\lambda/4$ 以上の整合線を取付けることであるが、第 3-23 圖を見れば解るが、 R/W が 5 以上ともなれば α も γ もさう大した變りがなく、大體上述の範囲内の略々中央の値で略々整合がとれるのである。即ち實際の空中線では大抵 R/W が 5 以上になつてゐるから、電壓節より空中線の方へ $\lambda/16$ 寄つた點に、 $\lambda/8$ の整合線を取付ければ

もはやかなり整合がとれてゐるから、あと微細の調整をとればよい。多重整合回路は既に述べた通りの方法で充分實用になつてゐる。

第4章 高周波回路-II

§4.1 抵抗損を考へた共振線

前章の如く濾波、整合等の作用を對象とする限りに於ては、構成要素たる共振線の抵抗損を無視しても差支へないが、回路の良さ、即ち Q が問題になる時には、嫌でもその抵抗損が問題の核心になつて来る。そこでこの章ではその抵抗損を計算に入れて見ることにする。

抵抗を考慮に入れる上には給電線の傳送方程式は (1.50) 及び (1.51) を用ひなければならない。唯然し、之が高周波であり更に共振線であれば簡易になるかと思はれるだけである。その式の双曲線函数は分解して

$$\left. \begin{aligned} \cosh(a+j\beta)l &= \cosh al \cos \beta l + j \sinh al \sin \beta l, \\ \sinh(a+j\beta)l &= \sinh al \cos \beta l + j \cosh al \sin \beta l \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

となり、(1.31) により $al = rl/2W$ であるが、 rl/W は短波帯に於ても共振線程度の長さ l である限り、數百分の一程度であつて、波長が短くなる程之より小さくなる一方であるから、先づ以つて短波超短波帯域に於ては

$$al = rl/2W \ll 1 \quad (4.2)$$

と置くことが出来る。従つて

$$\sinh al = \frac{rl}{2W} \quad \cosh al = 1 \quad (4.3)$$

となるから、(4.1) は次の如く簡単になる。

$$\left. \begin{aligned} \cosh(a+j\beta)l &= \cos \beta l + j \frac{rl}{2W} \sin \beta l, \\ \sinh(a+j\beta)l &= \frac{rl}{2W} \cos \beta l + j \sin \beta l. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

次に長さ l を丁度 $\lambda/4$, $\lambda/2$ 等と丁度共振線にとれば、式は至つて簡単に

はなるが、それではその附近の事情が全然解らない事になるから、丁度共振する周波数の近傍僅かの幅を有する範囲内で成り立つ様な方程式を求めるとしよう。共振周波の波長、波長常數及び圓周波數を夫々 λ_0 , β_0 及び ω_0 で表すとしよう。

先づ $l = \lambda_0/4$ の場合には上式中の \sin , \cos は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta l &= \cos\left(\frac{\omega_0 + \Delta\omega_0}{c} \cdot \frac{\lambda_0}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\omega_0}{c} \cdot \frac{\lambda_0}{4}\right) = -\sin \frac{\Delta\omega_0}{c} \cdot \frac{\lambda_0}{4}, \\ \sin \beta l &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\omega_0}{c} \cdot \frac{\lambda_0}{4}\right) = \cos \frac{\Delta\omega_0}{c} \cdot \frac{\lambda_0}{4}. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

そこで

$$\frac{\Delta\omega_0}{c} \cdot \frac{\lambda_0}{4} = \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} \cdot \frac{\pi}{2} \ll 1$$

の範圍を出ないものとすれば上式は次の如くなる。

$$\cos \beta l = -\frac{\Delta\omega_0}{c} \cdot \frac{\lambda_0}{4}, \quad \sin \beta l = 1. \quad (4.6)$$

従つて (4.4) は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \cosh(a+j\beta)l &= \left(-\frac{\Delta\omega_0}{c} + j \frac{r}{2W}\right) \frac{\lambda_0}{4}, \\ \sinh(a+j\beta)l &= j. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

之を (1.50) と (1.51) に代入すれば共振線の傳送方程式が得られる。更に l を $\lambda_0/2$, $3\lambda_0/4$ 及び λ_0 とすれば同様の要領により双曲線函数が簡易に出て、夫々傳送方程式が得られる。それ等を一括列記すれば次の如くである。

$$\left. \begin{aligned} l = \frac{\lambda_0}{4} : E_1 &= E_2 \frac{\lambda_0}{4} \left(-\frac{\Delta\omega_0}{c} + j \frac{r}{2W}\right) + j I_2 W, \\ I_1 &= E_2 \frac{j}{W} + I_2 \frac{\lambda_0}{4} \left(-\frac{\Delta\omega_0}{c} + j \frac{r}{2W}\right), \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

$$l = \frac{\lambda_0}{2} : \left. \begin{aligned} E_1 &= -E_2 - I_2 W \frac{\lambda_0}{2} \left(\frac{r}{2W} + j \frac{\Delta\omega_0}{c} \right), \\ I_1 &= -\frac{E_2}{W} \frac{\lambda_0}{2} \left(\frac{r}{2W} + j \frac{\Delta\omega_0}{c} \right) - I_2, \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

$$l = \frac{3}{4}\lambda_0 : \left. \begin{aligned} E_1 &= E_2 \frac{3}{4}\lambda_0 \left(\frac{\Delta\omega_0}{c} - j \frac{r}{2W} \right) - j I_2 W, \\ I_1 &= -E_2 \frac{j}{W} + I_2 \frac{3\lambda_0}{4} \left(\frac{\Delta\omega_0}{c} - j \frac{r}{2W} \right), \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

$$l = \lambda_0 : \left. \begin{aligned} E_1 &= E_2 + I_2 W \lambda_0 \left(\frac{r}{2W} + j \frac{\Delta\omega_0}{c} \right), \\ I_1 &= E_2 \frac{\lambda_0}{W} \left(\frac{r}{2W} + j \frac{\Delta\omega_0}{c} \right) + I_2, \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

§4.2 共振線の Q

$l = \lambda_0/4$ の共振線を共振させるには先端は開放して置けばよい。その場合に共振周波数の近傍の送端のインピーダンスは (4.8) の $I_2 = 0$ として、 $Z_1 = E_1/I_1$ で與へられる。即ち

$$Z_1 = W \frac{\lambda_0}{4} \left(\frac{r}{2W} + j \frac{\Delta\omega_0}{c} \right) \quad (4.12)$$

となる。又 $l = \lambda_0/2$ の共振線では先端は短絡がよく、(4.9) に於て $E_2 = 0$ より Z_1 は同様に、

$$Z_1 = W \frac{\lambda_0}{2} \left(\frac{r}{2W} + j \frac{\Delta\omega_0}{c} \right) \quad (4.13)$$

となる。同様に $3\lambda_0/4$, λ_0 の場合の Z_1 は、唯長さの處に $3\lambda_0/4$, λ_0 が入るだけで、他は變りがない。

共振電流を I_0 とする時に、周波数が共振を外れて電流が $I_0/\sqrt{2}$ に減ずるには $\Delta\omega_0$ はどの位になるかと言ふことは、上式に於て抵抗分とリアクタンス分とを等しいと置くことによつて求められる。上の孰れの場合でも

$$\frac{r}{2W} = \frac{\Delta\omega_0}{c} \quad (4.14)$$

より求められる。

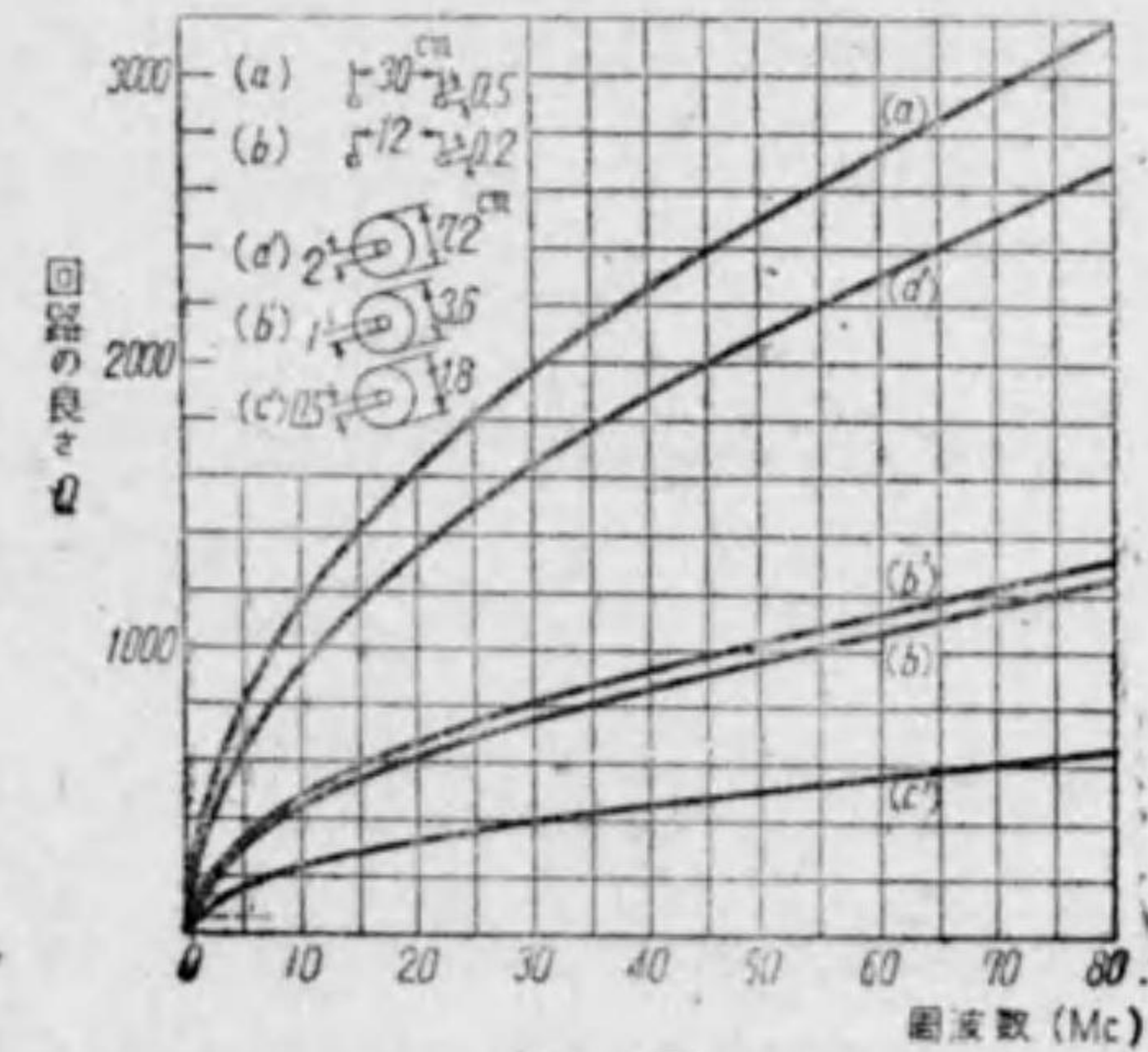
回路の良さ Q は上の $\Delta\omega_0$ を用ひて、

$$Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega_0} \quad (4.15)$$

で定義されてゐるから、之に (4.14) の値を代入すれば次の如くなる。

$$Q = \frac{\omega_0 W}{rc} = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{2\pi W}{\lambda_0 r} \quad (4.16)$$

共振線の Q は長さに拘りなく一定である。それは長さが長くなれば抵抗による損失も増すが、同時に貯へられるエネルギーも増すからである。この r は導線の太さと周波数によつて變ることは §1.9 に見る通りで、5 mm 銅線の平行二線、2 mm 銅線の平行二線及び外管内径 72 mm 内管外径 20 mm、外管内径 36 mm 内管外径 10 mm、外管内径 18 mm 内管外径 5 mm の三種の同軸圓筒銅線に關して抵抗は夫々 (1.89) により計算し、 W は第 1.10 圖によつて求めて上式を計算し圖示すれば第 4.1 圖の如くなる。同一の構造で



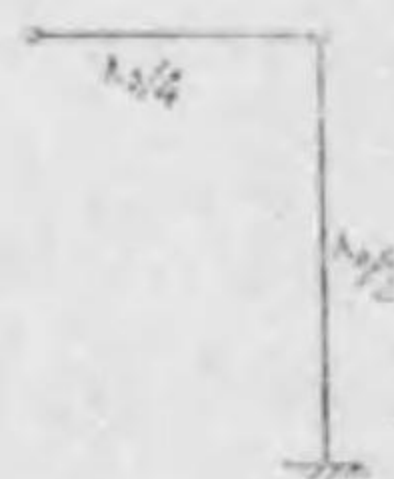
第4.1圖

は周波数が高くなるに従つて Q は増してゐる。之は集中常数の共振回路などはこの程度の周波数に於ては之と逆の傾向を示してゐて、周波数が高くなればこの點に於ても共振線が優秀である。

§ 4.3 濾波回路の特性の劣化

前章に於ては濾波回路の素子の抵抗を閉却した爲に、完全に阻止する周波数に於ては影像インピーダンスは無限大になつたが、回路素子の抵抗を考慮に入れば、當然特性は劣化する筈である。

先づ第4.2圖の様な L 型回路に就て考へて見よう。今度は他への廣い適用を豫期しないで、唯影像インピーダンスだけを求めるのであるから、(2.36)を用ひて求めるのが簡単でよからう。 Z_{1r} は端子2が開放であるから、



第4.2圖

全長 $3\lambda_0/4$ で先端短絡の共振線のインピーダンスであるから、(4.10)に於て $E_2=0$ と置いた場合の E_1/I_1 で與へられる。即ち

$$Z_{1r} = W / \frac{3}{4} \lambda_0 \left(\frac{r}{2W} + j \frac{\Delta\omega_0}{c} \right) \quad (4.17)$$

であり、又 Z_{1s} は端子2で短絡であるから、全長 $\lambda_0/4$ の先端短絡共振線のインピーダンスであつて、(4.8)に於て $E_2=0$ と置いた場合の E_1/I_1 で與へられる。即ち

$$Z_{1s} = W / \frac{\lambda_0}{4} \left(\frac{r}{2W} + j \frac{\Delta\omega_0}{c} \right) \quad (4.18)$$

である。そこで(2.36)により

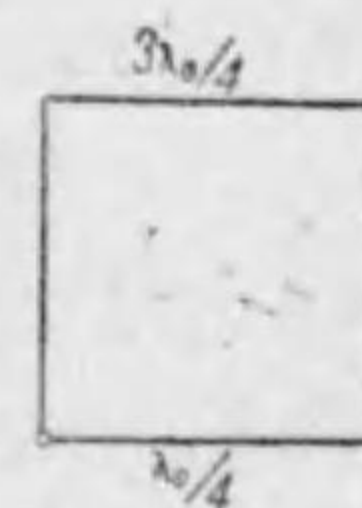
$$W_{01} = W / \sqrt{\frac{3}{4}} \lambda_0 \left(\frac{r}{2W} + j \frac{\Delta\omega_0}{c} \right) \quad (4.19)$$

となる。完全阻止周波数に當る時には $\Delta\omega_0=0$ であつて、その場合には次の如くなり、(1.31)の減衰常數に置き換れば更に簡単になる。

$$\frac{W_{01}}{W} = \frac{8W}{\sqrt{3}\lambda_0 r} = \frac{4}{\sqrt{3}\lambda_0 \alpha} \quad (4.20)$$

減衰常數が大きくなる程、波長が長くなる程、特性劣化の度合が強くなることを表してゐる。

次に第4.3圖の様な D 型回路に就て考へて見よう。完全阻止周波数に對しては、一方の道は $3\lambda_0/4$ に、他の道は $\lambda_0/4$ になつてゐるものである。先づ Z_{1r} は長さ $\lambda_0/2$ の先端開放の共振線を二つ並列に置いたものと見てよいから、(4.9)の $I_2=0$ と置いた場合の $E_1/2I_1$ で與へられる。即ち



第4.3圖

$$Z_{1r} = W / \frac{\lambda_0}{4} \left(\frac{r}{2W} + j \frac{\Delta\omega_0}{c} \right) \quad (4.21)$$

である。又 Z_{1s} の方は $3\lambda_0/4$ と $\lambda_0/4$ の先端短絡共振線が並列にあるのと同様で、(4.17)と(4.18)との示すインピーダンスが並列にあるのと同じであるから、

$$Z_{1s} = W / \lambda_0 \left(\frac{r}{2W} + j \frac{\Delta\omega_0}{c} \right) \quad (4.22)$$

となる。同様に(2.36)により

$$\frac{W_{01}}{W} = 1 / \frac{\lambda_0}{2} \left(\frac{r}{2W} + j \frac{\Delta\omega_0}{c} \right) \quad (4.23)$$

となる。 f_0 に於ては $\Delta\omega_0=0$ となるから、

$$\frac{W_{01}}{W} = \frac{4W}{\lambda_0 r} = \frac{2}{\lambda_0 \alpha} \quad (4.24)$$

となり、同様に波長が短い程、 α の小さい程濾波特性の劣化の度合が少いことを示してゐる。

§4.4 共振線回路のQ

共振線のQは既に述べた通り、その材質に固有の損失と寸法とによつて限定されて了ふが、之等を組合せた回路のQが高くなる様なことが屢々研究結果として見えてゐるので一應考察を進めて見よう。

一體に分布常數回路に於ては、定常波の分量が増す程同調が尖鋭になり、定常波が減つて進行波に近附くに從つて鈍平になるものである。そこでQを高くするには、定常波の分量を増す様な工夫をすればよいのである。それには低いインピーダンスを幾つも並列に接続して、益々インピーダンスを低くすると云ふ方法とインピーダンス變成回路を直列に挿入して、低いインピーダンスを更に低く變成する方法とが考へられる。

(1) 並列法の試み 第4.4圖の如く、 $\lambda_0/2$

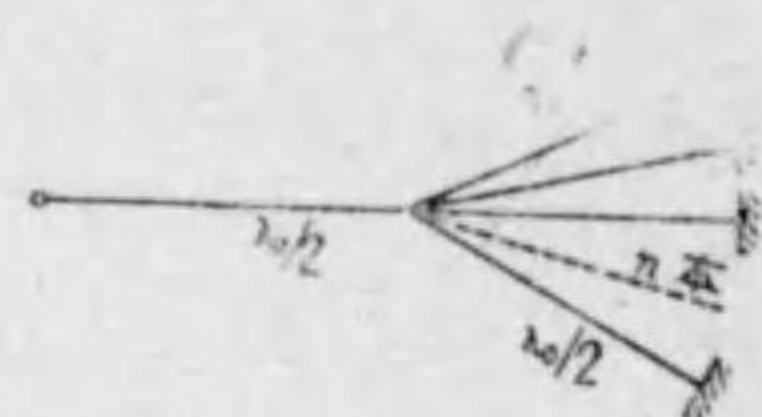
の共振線n本を一點に集めて、之を $\lambda_0/2$ の共振線で導いて全體で回路を構成すれば、1本の場合よりは分岐點の抵抗が $1/n$ に減じてゐるから、1波長の共振線の場合よりは高Qに

なるのではないかと云ふ試みである。n本の共振線の分岐點に於て呈するインピーダンスは各々(4.13)で與へられるから、左方の共振線の負荷はその $1/n$ である。之を(4.9)に於ける $E_2/I_2=Z_2$ とした場合の $E_1/I_1=Z_1$ なる Z_1 は送端のインピーダンスである。即ち

$$Z_1 = \frac{n+1}{n} \frac{W\lambda_0}{2} \left(\frac{r}{2W} + j \frac{\Delta\omega_0}{c} \right) \quad (4.25)$$

であつて、之を見ればQは共振線單獨の場合と全く同じで、聊かも高くはなつてゐない。

(2) 變成回路の試み §3.11に取扱つた變成回路を順次検討して見よう。T.回路の場合は第4.5圖の如くなる。この場合の變成條件式は前掲の通



第4.4圖

り次の如くである。

$$\left. \begin{aligned} 2 \tan \beta y &= -\tan 2\beta x, \\ W^2 \tan^2 \beta x &= R_1 R_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

そこで R_2 が $\lambda_0/2$ の共振線のインピーダンス(4.13)であるが、之を更に $R_1=0$ になるやう

に變成する爲には下の式により、 $\tan \beta x=0$ なるべく、之より上の式により $\tan \beta y=0$ となり、その結果 $x=y=\lambda_0/2$ となる。かうなると並列法と何等異なるものでないから、Qの高揚は行はれない。

π 回路の場合は第4.6圖の如くなる。變成條件はやはり次の如くである。

$$\left. \begin{aligned} x+y &= n\lambda_0/2, \\ W^2 \sin^2 \beta y &= R_1 R_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

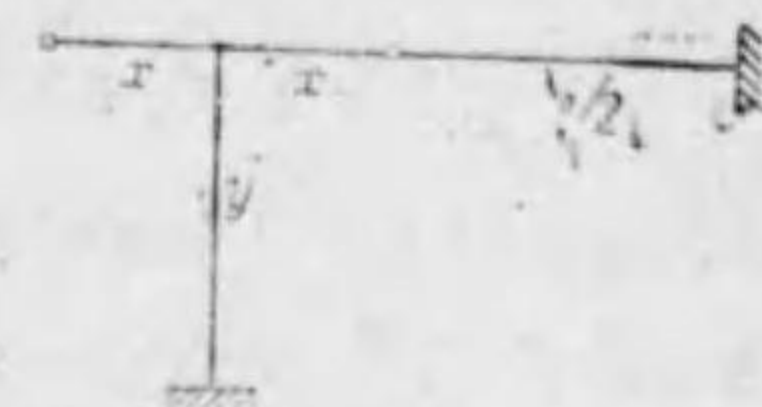
R_2 を $\lambda_0/2$ の共振線のインピーダンスとする時、變成して R_1 をいやが上にも小さくするの極致は $R_1=0$ である。そこで下式より $\sin \beta y=0$ で $y=\lambda_0/2$ となり、從つて上式より $x=\lambda_0/2$ となる。これも亦並列法と異なるものでないから、Qの高揚は行はれない。

D型回路の場合は第4.7圖の如くなる。變成條件はやはり次の如くなる。

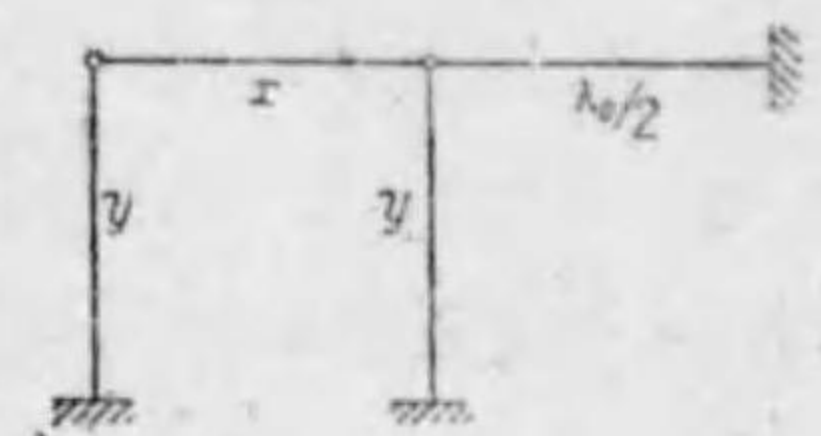
$$\left. \begin{aligned} x+y &= (2n+1)\lambda_0/2, \\ W^2 \{1 + \cos \beta(x-y)\} &= 8R_1 R_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

やはり $R_1=0$ とする爲には $\cos \beta(x+y)=-1$ となり、之より $x-y=\lambda_0/2$ となるから、結局 $x=\lambda_0/2$ 、 $y=\lambda_0$ となる。そこで、D型回路の方程式の構成には(4.9)及び(4.11)を、負荷には(4.13)を用ひて、送端のインピーダンス Z_1 を計算すれば次の如くなる。

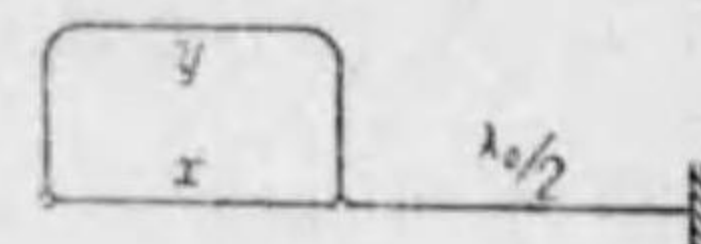
$$Z_1 = \frac{5}{14} W\lambda_0 \left(\frac{r}{2W} + j \frac{\Delta\omega_0}{c} \right), \quad (4.29)$$



第4.5圖



第4.6圖



第4.7圖

やはり Q は不変である。

斯様に如何なる Q 高揚の試みも失敗である時に、第4.5圖以下の三回路を用ひて超短波の發振周波数の安定度を増した研究報告や、又は第4.8圖の様に長さ $\lambda_0/4$ の波動インピー

ダンスの異なる共振線を交互に縦

横した、所謂多段定常波回路を



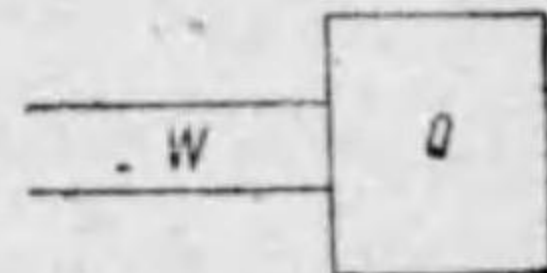
第4.8圖

用ひてやはり周波数の安定を得た研究報告は如何に解釋すべきものか、それは T , II , D 及び多段定常波回路によつて右端の共振線を左端に連結すべき給電線へ整合をとつたと云ふことである。この整合をとらなければ、發振管へのリード線が共振線の一部に加はり、共振線構成の限界が明らかでない。

整合がとればリードの伸び縮みに関係なく右端の共振線によつて周波数が定まる。又直ぐ次節で取扱ふ様に、給電線の素質が共振線の素質より低くても整合がとれてゐれば共振線の Q がその儘送端へ傳達されるのである。

§4.5 Q の傳達

Q なる回路を給電線で第4.9圖の如く導く際に、その給電線の材料で共振線を作つたとしての Q が、負荷の共振線の Q よりも低い際に、負荷の高い Q が給電線で傳達される間に低下するのでないかと云ふ點は相當重大な問題である。



第4.9圖

回路の良さ Q なる負荷に就ては (4.15) の式が成り立つてゐるから、

$$\Delta\omega_0 = \frac{\omega_0}{2Q} \quad (4.30)$$

と置ける。従つて一般に僅かの周波数偏差 $\Delta\omega_0$ に對して、その負荷のインピーダンス Z_2 は次式で與へられる。

$$Z_2 = R_2 / \left(1 + j \frac{2Q}{\omega_0} \Delta\omega_0 \right) \quad (4.31)$$

$\Delta\omega_0$ が $\Delta\omega_0'$ になつた時に抵抗分とリアクタンス分とが等しくなるからである。なほ變化の部分 R_2 に掛ける様にすれば (4.12) や (4.13) と同じ形になるが、その場合は云はゞ直列共振回路に相當するものであり、給電線に或る程度整合されてゐる状態は並列共振回路に相當するものであるから、變化の部分 R_2 を分母にする必要がある。

$\Delta\omega_0 = 0$ の時に、整合がとれてゐる場合には

$$R_2 = W \quad (4.32)$$

であるから、之と (4.31) とを用ひて、給電線の傳達方程式より (4.4) を用ひて送端のインピーダンスを求めれば次の如くなる。

$$Z_1 = \frac{\frac{W}{1 + j \frac{2Q}{\omega_0} \Delta\omega_0} \left(\cos \beta l + j \frac{r l}{2W} \sin \beta l \right) + W \left(\frac{r l}{2W} \cos \beta l + j \sin \beta l \right)}{1 + j \frac{2Q}{\omega_0} \Delta\omega_0 \left(\frac{r l}{2W} \cos \beta l + j \sin \beta l \right) + \left(\cos \beta l + j \frac{r l}{2W} \sin \beta l \right)} \quad (4.33)$$

之を計算して整頓すれば次の如くなる。

$$\frac{Z_1}{W} = 1 - \frac{\frac{2Q}{\omega_0} \Delta\omega_0 (\sin \beta l + j \cos \beta l)}{\cos \beta l + j \sin \beta l - \frac{2Q}{\omega_0} \Delta\omega_0 \left(\frac{r l}{2W} \sin \beta l - j \cos \beta l \right)} \quad (4.34)$$

長さも一般の時には事情が判り難いから、丁度の長さの處で調べて見よう。先づ $l = (2n+1)\lambda_0/4$ ならば、 $\cos \beta l = 0$, $\sin \beta l = \pm 1$ であるから、上式は次の如く簡單になる。

$$\frac{Z_1}{W} = 1 + j \frac{2Q}{\omega_0} \Delta\omega_0 \quad (4.35)$$

又特に $l = n\lambda_0/2$ ならば、 $\cos \beta l = \pm 1$, $\sin \beta l = 0$ であるから次の如くなる

$$\frac{Z_1}{W} = 1 - j \frac{2Q}{\omega_0} \Delta\omega_0 \quad (4.36)$$

而して、之等の中間の一般の長さの時には抵抗分にもリアクタンス分にも共に $\Delta\omega_0$ が含まれるが、その前後の二点では Q がその儘傳達されてゐることより、負荷の高 Q がそれより Q の低い給電線を用ひた場合でも、整合がとれてゐる時には、その儘傳達されると云ふことが出来る。この點が前節で述べた整合をとる意義であらう。

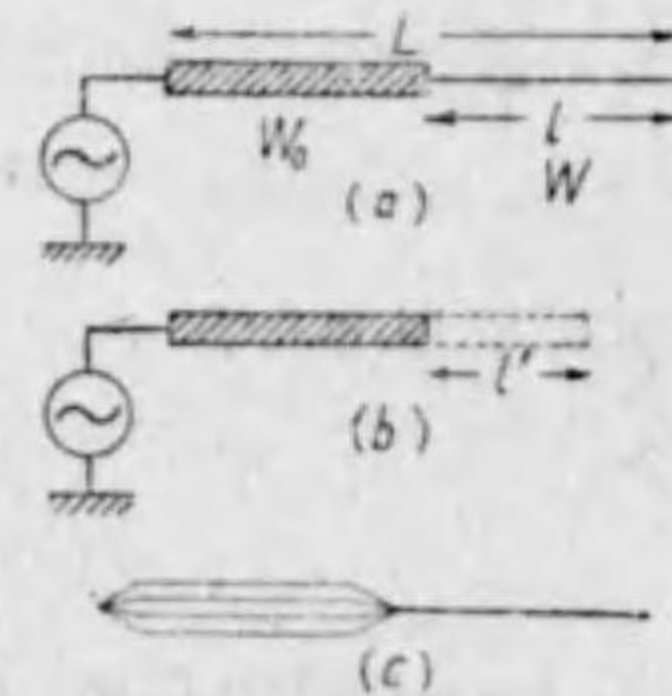
次に整合が全然とつてなくて給電線に負荷の續きの定常波が乗つてゐるとすれば、回路中で最も悪い Q の所に全體の Q が制せられるから、給電線の Q になつて了ふ。

整合が崩れてゐる場合は、その崩れの度合が多い程 Q が低下するわけである。

§4.6 断片で構成する共振線

共振線を如何に組合せて見ても Q は高揚されなくて、發振周波數の安定な回路も結局はその共振線の Q に制せられ、唯それへの給電線との間の整合が大切であつて、その發揮される Q は共振線の Q に過ぎないと云ふことがわかつた上は、共振線そのものに内面的の批判を向けるより致方がない。そこで考へられることは同調點の近傍でのリアクタンスの増減の度合をもつと急峻にすることと、電流の表面密度を均一に近附ける様にして損失を減らすことである。

そこで二つの断片で共振線を作ることを考へて見るに、第4.10圖の(a)の如く、波動インピーダンス W_0 と W の導線を接続して、全體で1/4波長の共振線を構成するとすれば、電流の多い部分が太くなつてゐるから損失の方は希みの方向にある。次にリアクタンスの方さへ同調が急峻であれば面白い。事實次に示す通りさうなつてゐるのである。



第4.10圖

開放端より接続點迄の部分が接続點に於て呈するリアクタンスは

$$Z = -jW \cot \beta_0 l \quad (4.37)$$

であることは既に屢々述べた通りであるが、之が(b)圖の如く W_0 の線が延長してあつたとして、どれだけの長さに相當するかと云ふことは、その長さを l' とすれば、

$$Z = -jW_0 \cot \beta_0 l' \quad (4.38)$$

と置くことによつて兩式より求められる。實際兩式を見れば、 $W_0 < W$ であれば $l' < l$ であるから、 $\lambda_0/4$ より長い線で同調がとれるのであるからリアクタンスの變化は多くなるのである。そこで

$$W/W_0 = n \quad (4.39)$$

と置けば、この n は(c)圖の場合に於ては先端の線と同一の線を n 本に増したことを表してゐて、(a)と(c)の兩者を同時に考へられる。

扱てそこで計算の便利の爲に

$$\beta_0 l = \theta, \quad \beta_0 l' = \theta' \quad (4.40)$$

と置けば、 l と l' の關係を θ と θ' の關係に直して、次の方程式が得られる。

$$\cot \theta' = n \cot \theta. \quad (4.41)$$

兩断片で $\lambda_0/4$ 同調をとるとして、各断片の長さをいくら宛にするかと云ふ選び方は無限に數多くあるが、斯かる構成の効果を最大に發揮する様を選ぶと云ふことが望まれる。即ち l と l' の差を最大にしたいのである。その場合に l が最大になつて同調が最も急峻になるのである。之は θ と θ' に置換へても同じことである。即ちその差は上式より次の如くなる。

$$\theta - \theta' = \theta - \cot^{-1}(n \cot \theta). \quad (4.42)$$

之を θ に関して微分して 0 と置けば、

$$\frac{d(\theta - \theta')}{d\theta} = (n-1) \frac{n \cot^2 \theta - 1}{n^2 \cot^2 \theta + 1} = 0 \quad (4.43)$$

となつて、それを解けば

$$\cot \theta = \cot \beta_0 l = 1/\sqrt{n} \quad (4.44)$$

となる、従つて (4.41) より

$$\cot \theta' = \cot \beta_0 l' = \sqrt{n} \quad (4.45)$$

従つて兩者より次の関係が出て来る。

$$\theta + \theta' = \beta_0 (l + l') = \pi/2,$$

$$\text{即ち} \quad l + l' = \lambda_0/4 \quad (4.46)$$

となる。即ち之を圖示すれば第4.11(a)圖の如く、同調波長の1/4が假想した下圖の寸法になつてゐるから、兩斷片の長さは共に l になつてゐると言ふことである。

今迄は Q を高揚する意途で取扱つて來たが、 n を1より小さいとすれば Q は却つて下る。その場合には (b) 圖の如く實際の寸法は波長の1/4より短くなつてゐるわけであ

る。斯様なものの利用される場合も決して輕くない。例へばかなり廣い帯域に略々同一の輻射効果をもつ空中線などには、この様なものが甚だ有效になつて來るのである。そこで n を1より大きい方から、1より小さい方迄色々選んで、夫々の場合に長さを同調波長のいくらに選べばよいかと云ふことは、(4.44) より計算すれば簡単に求まるのである。ついでに縮んだ長さの l' も表示すれば第4.1表の様になる。

第4.1表

n	$l(\lambda_0)$	$l'(\lambda_0)$	$\frac{dZ}{dF} \Big _{F=1}$
32	0.222	0.028	$(-jW_0 \frac{\pi}{2})$ 1.57
16	0.211	0.039	
8	0.196	0.054	

4	0.176	0.074	1.41
2	0.153	0.097	1.23
1	0.125	0.125	1.00
1/2	0.097	0.153	0.78
1/4	0.074	0.176	0.59
1/8	0.054	0.196	0.43
1/16	0.039	0.211	0.31
1/32	0.028	0.222	0.22

次に同調波長 (λ_0, β_0, f_0) に於て、 l なる寸法に出来上つたものに就て、周波数を變へた場合の (λ, β, f) リアクタンスの變化を計算して見よう。リアクタンスは次の如く書くことが出来る。

$$Z = -jW_0 \cot(\beta l + \beta l') \quad (4.47)$$

括弧の中の前者は W_0 の實在の長さによる部分であり、後者は W の實在のものを接続點で W_0 の延長の長さに置き換へた部分である。従つて $\beta l'$ の方は (4.41) によつて

$$\cot \beta l' = n \cot \beta l \quad (4.48)$$

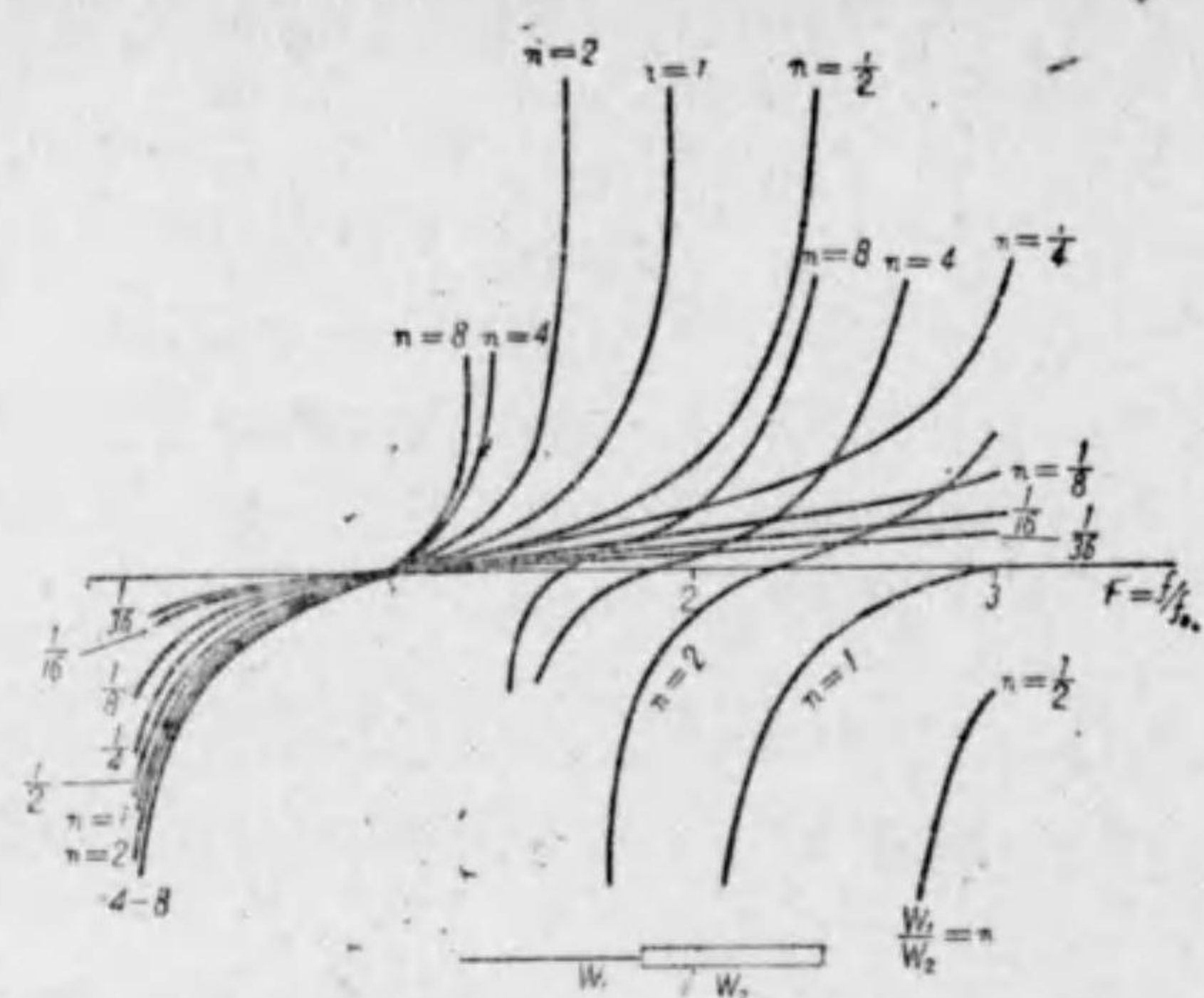
と置くことによつて實在の長さに置換出来る。そこで實際の周波数を用ひずに次の同調周波数に對する周波函数を用ひれば、

$$F = \frac{f}{f_0} = \frac{\beta}{\beta_0} \quad (4.49)$$

(4.48), (4.49) 及び (4.44) を用ひて (4.47) を次の如く F のみのリアクタンス函数に直すことが出来る。

$$Z = -jW_0 \cot \left[F \cot^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} + \cot^{-1} \left\{ n \cot \left(F \cot^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right\} \right] \quad (4.50)$$

之につき、 n を 8, 4, 2, 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 及び 1/32 について周波数特性を計算して描いた圖は第4.12圖(次頁)である。

第4.12圖 周波變數 $F=f/f_0$ に対するリアクタンスの變化

最後に同調點に於けるリアクタンスの増加率を計算して置く。(4.50)を F に就て、微分すれば次の如くなる。

$$\frac{dZ}{dF} = -jW_0 \operatorname{cosec}^2 \left[F \tan^{-1} \sqrt{n} + \cot^{-1} \{ n \cot(F \tan^{-1} \sqrt{n}) \} \right] \\ \times \left[\tan^{-1} \sqrt{n} + \frac{n \tan^{-1} \sqrt{n} \{ \operatorname{cosec}^2(F \tan^{-1} \sqrt{n}) \}}{1 + n^2 \cot^2(F \tan^{-1} \sqrt{n})} \right]. \quad (4.51)$$

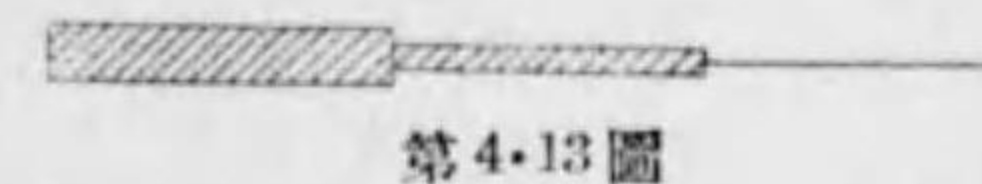
之に $F=1$ と置けば、

$$\left. \frac{dZ}{dF} \right|_{F=1} = -jW_0 2 \tan^{-1} \sqrt{n}. \quad (4.52)$$

n に種々の値を入れて計算し、先の表に單位を $-jW_0 \pi/2$ として書き込んで置いた。表を見ればわかる通りこの様な方法で Q の増加を計つても、リアクタンスの増加率の増加の方は大したことはない。寧ろ斯かる考への副産物である Q の低下の方の效果は甚だ大であると云はなければならない。

§4.7 常數の變化する共振線

二つの斷片で共振線を構成する處よりは直ちに第4.13圖の如く3つ以上の斷片で共振線を構成する考へに發展するが、その斷片の數を無限に多くする



ると考へれば分布常數が何等かの一定の割合で變化するものになる。斯様の場合を考へて見る。

(1.16) と (1.18) とに倣つて、一般の方程式を立てれば次の如くなる。

$$\frac{dV(x)}{dx} = j\omega L(x) I(x), \quad (4.53)$$

$$\frac{dI(x)}{dx} = j\omega C(x) V(x). \quad (4.54)$$

但し、導線の損失類は一切省略し、電流の方向は x と反對を正にとつてある。なほ $V(x)$, $L(x)$ 等は x の函數であると云ふ意味であるが、以後は簡單の爲に (x) は省くことにする。扱て(4.54)をも一度 x について微分し、その左邊を(4.53), (4.54)により V を I に置き換へて整頓すれば次の如くなる。

$$\frac{d^2 I}{dx^2} - \frac{1}{C} \frac{dC}{dx} \cdot \frac{dI}{dx} + \omega^2 L C I = 0. \quad (4.55)$$

こゝで

$$\omega^2 L C = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 = \beta^2 \quad (4.56)$$

である。

そこで分布容量が第4.14圖の如く $x=0$ の點より指數函數的に増加するものとするれば、

$$C = C_0 \varepsilon^{2ax}, \quad a > 0 \quad (4.57)$$



第4.14圖

と置くことが出来る。さうすれば上の方程式の第二の係數は次の如くなる。

$$\frac{1}{C} \frac{dC}{dx} = 2a, \quad (4.58)$$

そこで(4.56)と(4.58)とを(4.55)に代入すれば次の方程式になる。

$$\frac{d^2 I}{dx^2} - 2a \frac{dI}{dx} + \beta^2 I = 0, \quad (4.59)$$

之を解き、(4.54)の變形

$$V = \frac{1}{j\omega C} \frac{dI}{dx} \quad (4.60)$$

を用ひれば、 I と V とは解けるのである。

擬て(4.59)を解くのに

$$I = A e^{nx} \quad (4.61)$$

と置けば、之を(4.59)に代入することにより、 n を決定する次の式が得られる。

$$n^2 - 2an + \beta^2 = 0, \quad (4.62)$$

之を解けば $n = a \pm \sqrt{a^2 - \beta^2}$ (4.63)

となる。こゝで a と β との大きさの関係により二つの場合に分かれる。

(1) $a > \beta$ ならば

$$\sqrt{a^2 - \beta^2} = \gamma \quad (4.64)$$

と置くことにより(4.61)の解は次の如くなる。

$$I = A_1 e^{(a+\gamma)x} + A_2 e^{(a-\gamma)x}, \quad (4.65)$$

そこで0点を開放端とすれば、 $x=0$ に於て $I=0$ であるから

$$A_1 = -A_2 = A$$

として積分常数が定まるから、(4.65)は次の如くなる。

$$I = 2A e^{ax} \sinh \gamma x, \quad (4.66)$$

次に(4.60)によつて電圧を求めれば、

$$V = \frac{2A}{j\omega C} e^{ax} (a \sinh \gamma x + \gamma \cosh \gamma x) \quad (4.67)$$

となるが、こゝで

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{a^2 - \gamma^2}} &= \frac{a}{\beta} = \cosh \theta, \\ \frac{\gamma}{\sqrt{a^2 - \gamma^2}} &= \frac{\gamma}{\beta} = \sinh \theta \end{aligned} \right\} \quad (4.68)$$

と置いて、新たに θ を導入し、なお

$$\frac{\beta}{\omega C} = \frac{1}{cC} = W_0 = W_0 e^{-2ax} \quad (4.69)$$

の關係を用ひれば、(4.67)は簡単に次の如くなる。

$$V = -j2AW_0 e^{-ax} \sinh(\gamma x + \theta), \quad (4.70)$$

x 點に於て呈するインピーダンス Z は V/I で與へられるから、(4.66)と(4.70)とより

$$Z = -jW_0 e^{-2ax} \frac{\sinh(\gamma x + \theta)}{\sinh \gamma x} \quad (4.71)$$

となる。之は(1.41)と類似の式であるが、唯この際は θ も r も正の数であるから、 x 上れる處 $Z=0$ 、即ち共振状態になることがないのである。

(2) $a = \beta$ ならば (4.59)の一般解は

$$I = (A_1 + A_2 x) e^{\beta x} \quad (4.72)$$

となり、再び $x=0$ で $I=0$ とすれば

$$A_1 = 0, \quad A_2 = A$$

となるから、

$$I = Ax e^{\beta x} \quad (4.73)$$

となり、(4.60)より

$$V = \frac{A}{j\omega C} e^{\beta x} (1 + \beta x) \quad (4.74)$$

となり、

$$Z = -jW_0 e^{-2ax} \frac{1 + \beta x}{\beta x} \quad (4.75)$$

となる。この場合も β は正であるから、 $Z=0$ になることはない。

(3) $a < \beta$ ならば

$$\sqrt{\beta^2 - a^2} = \delta \quad (4.76)$$

と置くことにより一般解は次の如く

$$I = A_1 e^{(a+j\delta)x} + A_2 e^{(a-j\delta)x} \quad (4.77)$$

となり、同様に $x=0$ に於て $I=0$ とすれば、 $A_1 = -A_2 = A$ となるから

$$I = j2A e^{ax} \sin \delta x \quad (4.78)$$

となる。同様に

$$V = \frac{2A}{\omega C} e^{ax} (a \sin \delta x + \delta \cos \delta x) \quad (4.79)$$

となるが、

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{a^2 + \delta^2}} &= \frac{a}{\beta} = \sin \theta, \\ \frac{\delta}{\sqrt{a^2 + \delta^2}} &= \frac{\delta}{\beta} = \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (4.80)$$

を導入すれば、

$$V = \frac{2A\beta}{\omega C} e^{ax} \cos(\delta x - \theta) \quad (4.81)$$

となり、

$$Z = -jW_0 e^{-2ax} \frac{\cos(\delta x - \theta)}{\sin \delta x} \quad (4.82)$$

となる。今度は $Z=0$ となる x は無数に多く周期的に存在する。その中で最初の共振点は $\delta x - \theta = \pi/2$ より解ける

$$x = \frac{1}{\delta} \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.83)$$

である。(4.76) と (4.80) とにより

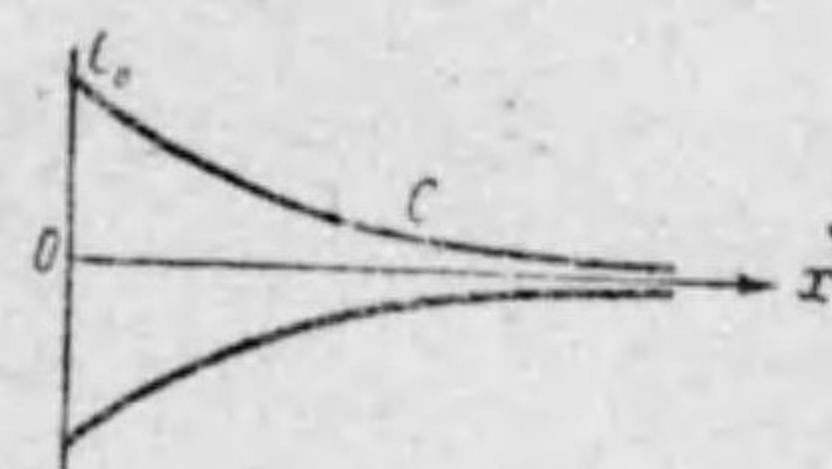
$$x = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{1-(a/\beta)^2}} \left(\sin^{-1} \frac{a}{\beta} + \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.84)$$

となるから、結局は x は (a/β) のみの函数である。之に種々の値を入れて

x を計算すれば第4.2表の如くなる。 $a=0$ 即ち常数が一定の時丁度 $\lambda/4$ で同調するのが、常数の變化の度合が大きい程四分の一波同調の長さが伸びることを表してゐる。

第4.2表

a/β	$x(\lambda)$
0.9	0.98
0.8	0.66
0.7	0.52
0.6	0.44
0.5	0.39
0.4	0.35
0.3	0.31
0.2	0.29
0.1	0.27
0.0	0.25



第4.15圖

次に今度は第4.15圖の如く、開放端に於て最も C の大きい場合に就て考へて見よう。この際は

$$C = C_0 e^{-2ax} \quad (4.85)$$

と置くのであるから、今迄の式の中で a の前の符號を反對にすればよい。

(1) $a > \beta$ ならば (4.71) は

$$Z = -jW_0 e^{2ax} \frac{\sinh(\theta - \gamma x)}{\sinh \gamma x} \quad (4.86)$$

となり、今度は共振点は唯一つだけ存在し、それは $\theta - \gamma x = 0$ より解け次の如くなる。

$$x = \frac{\theta}{\gamma} = \frac{\lambda \cosh^{-1}(a/\beta)}{2\pi\sqrt{(a/\beta)^2 - 1}} \quad (4.87)$$

(2) $a = \beta$ ならば (4.75) は

$$Z = -jW_0 e^{2ax} \frac{1 - \beta x}{\beta x} \quad (4.88)$$

となり、やはり唯一の共振点をもつてゐる。

$$x = \frac{1}{\beta} = \frac{\lambda}{2\pi} \quad (4.89)$$

(3) $\alpha < \beta$ ならば (4.82) は

$$Z = -jW_0 e^{2\alpha x} \frac{\cos(\delta x + \theta)}{\sin \delta x} \quad (4.90)$$

となるから、週期的の共振点が無数にある。その中の最初のものをとれば

$$x = \frac{1}{\delta} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \quad (4.91)$$

となり、同様に

$$x = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{1-(\alpha/\beta)^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{\alpha}{\beta} \right) \quad (4.92)$$

となる。

この (4.92), (4.89) 及び (4.87) で表される共振点の値は α/β に関しては連続的な値を表してゐて、一列に之を表せば第4.3表の通りである。前節で述べたのと同じ様に尖端の方が太い様な場合には四分の一波同調の長さは縮んでゐる。

第4.3表

α/β	$x(\lambda)$	α/β	$x(\lambda)$
3	0.0995	0.6	0.185
2	0.120	0.5	0.193
1.5	0.138	0.4	0.201
1.0	0.159	0.3	0.212
0.9	0.164	0.2	0.222
0.8	0.171	0.1	0.236
0.7	0.177	0	0.250

このことがテレビジョンの廣帯域に對して略々同一の輻射特性を得る目的でツェッペリン型空中線の考察された基本理論である。

以上の議論は導體が略々導線と見做し得る場合に成り立つことであつて、長さに對して巾の廣がりがある場合には、之は所謂立體回路として取扱はなければ正鵠を得ない。然しその様な議論は今迄の基本知識では充分盡すことが出来ぬ。今迄の知識で取扱ひ得る限度に於ていくらかの概念は、それでも諒得することが出来よう。

斯くして超短波工学に於ては立體回路の理論へと進化したものと思ふ。それについてはなお多くの予備知識を経て最後に述べることにしよう。

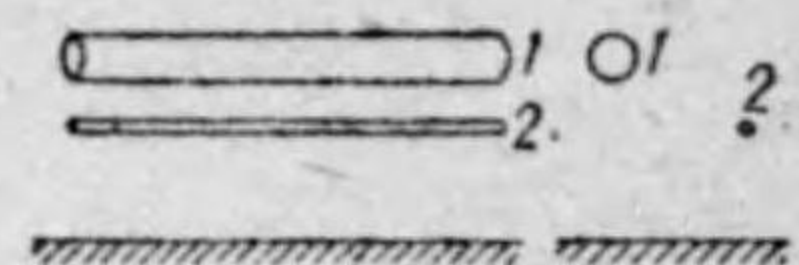
第5章 不平衡の高周波

§5.1 不平衡の高周波

高周波給電線を実際に設計運用する際に平衡と云ふことにはかなり注意を拂つてゐることは事實である。それは不平衡の電流があれば、輻射によつて電力が失はれるとか、輻射の指向性が予期の通りにならないとかの悪い作用があるからである。けれども短波工學に於ては、この不平衡の問題が致命的の影響を與へることは先づ以て無かつたが、波長が段々短くなつて超短波より極超短波に進むに及んで、例へば同軸ケーブルと平衡空中線の接続とか、平衡電源と同軸ケーブルの接続とかに於て、電力の損失が殆んど致命的の場合も現れて来て、それを解決するのに難澁を極める場合もある。それ故にどうしても不平衡の問題を解明する理論が必要である。

高周波工學は單相交流であるが、大地への平衡状態が僅かでも不平衡になれば、それが優勢になつて斯様な現象が起るのである。三相交流に於ては對稱座標法として斯様な問題は夙に解明された様に思はれるが、そこで取扱つてゐるのは集中常數に限られてゐる。高周波に於ては分布常數が壓倒的に優位を占めてゐることは屢々述べた通りであるから、之が解明には新たな概念が必要になる。

第5.1圖の様に、太さも地上の高さも異なる處の2本の線を張つて電波を傳送するとす



第5.1圖

れば、不平衡分布常數の現象である。この電波現象を解明するのに、電壓と電流との間に微分方程式を(1.16)と(1.18)の如く樹て、解くのは正しい方法であらう。けれども我々は既に一樣に出来てゐる導線上での電流電壓の波動については充分の知識をもつてゐるから、再びそこから出發しなくても

適當の出發點があるわけである。正弦波形の波動が右向きと左向き進行波として存在し、この両者が共存する時には合成されて定常波を形成する。各進行波の速度は光速に等しい。又その進行波は電壓波と電流波より成つてゐて、両者は同位相にあつて、その値の比は波動インピーダンスとして一定である。このことは物理的に見れば、電荷の正弦波形の進行波一個に歸することが出来る。即ち電荷の走りは靜止點で見れば電流として見え、又電荷のある處電壓ありであるから、電荷の分布状態と全く等しい分布状態の電流波と電壓波があるのである。それ故電壓は、その電荷の値に回路の寸法による比例常數を掛けた値になり、電流は直接電荷に比例する爲に、波動インピーダンスは回路の寸法によつて決まると云ふわけである。そこで圖の電波現象を考へるのに、1と2の導線に任意の振幅の、任意の位相差の電荷が光速に等しい速さの進行波としてあると云ふ處から出發することにする。以下又損失があると考へにくいから、損失がないものとしよう。

長さの座標を x にとれば、1及び2の電流の x の減る方向へ進む進行波を I_1 及び I_2 とすれば、次式で與へられる。

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= A_1 e^{j\beta x} \\ I_2 &= A_2 e^{j\beta x} \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

こゝで A_1, A_2 は振幅と位相を表す複素數であることは勿論である。 I_1 と I_2 を各二つの成分に分解して片方を兩者の同相分 I_s とし、他を逆相分 I_a とすれば、次式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= I_s + I_a \\ I_2 &= I_s - I_a \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

之等を(5.1)に代入すれば、各成分電流波は次の如く求まる。

$$I_s = \frac{A_1 + A_2}{2} e^{j\beta x}, \quad I_a = \frac{A_1 - A_2}{2} e^{j\beta x} \quad (5.3)$$

即ち二つの任意の電流波が與へられたとして、それらを完全に平衡のとれた

部分 I_a と両者に同大同位相で進む部分 I_s とより成るものとして見る事が出来ると云ふことである。

次に電圧に就て考へるに、1番の電流によつて1番の生ずる電圧は、その比例常數即ち波動インピーダンスを W_{11} とする時、 $I_1 W_{11}$ で與へられ、2番の電流によつて1番に生ずる電圧はその比例常數即ち相互波動インピーダンスを W_{21} とする時、 $I_2 W_{21}$ で與へられるから、結局1番の電圧は次式で與へられる。

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= I_1 W_{11} + I_2 W_{21}, \\ E_2 &= I_1 W_{12} + I_2 W_{22}, \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

同様に

こゝで相反の定理によつて、

$$W_{21} = W_{12}$$

である。こゝで電流を成分電流に直す爲に (5.4) に (5.2) を代入すれば、

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= I_s(W_{11} + W_{12}) + I_a(W_{11} - W_{12}), \\ E_2 &= I_s(W_{12} + W_{22}) + I_a(W_{12} - W_{22}) \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

となる。こゝで電流の同相分のみに関係する電圧成分は

$$\left. \begin{aligned} E_{s1} &= I_s(W_{11} + W_{12}) = I_s W_{s1}, \\ E_{s2} &= I_s(W_{12} + W_{22}) = I_s W_{s2} \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

であり、電流の逆相分のみに関係する電圧成分は

$$\left. \begin{aligned} E_{a1} &= I_a(W_{11} - W_{12}) = I_a W_{a1}, \\ E_{a2} &= I_a(W_{12} - W_{22}) = I_a W_{a2} \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

となるから、各電圧は兩成分の和として

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_{s1} + E_{a1} = I_s W_{s1} + I_a W_{a1}, \\ E_2 &= E_{s2} + E_{a2} = I_s W_{s2} + I_a W_{a2} \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

の如く表せる。故に斯様に取扱ふ限りに於ては、電流の同相分に関係する現象と、電流の逆相分に関係する現象とは互に全く無関係である。従つて一般には別々に取扱つた之等兩者の現象を重疊すればよいと云ふことになる。

次に概念を明確にする爲に特別の場合を調べて見よう。

(1) 平衡導線の場合には、第5.2圖の通り、 $W_{11} = W_{22}$ であるから、之を (5.6) 及び (5.7) に用ひれば、

$$\left. \begin{aligned} E_{s1} &= E_{s2} = E_s, \\ E_{a1} &= -E_{a2} = E_a \end{aligned} \right\} \quad (5.9) \quad \text{第5.2圖}$$

となり、兩者の合成は

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_s + E_a, \\ E_2 &= E_s - E_a \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

となる。即ちこの場合は電流の同相分には電圧の同相分が對應し、電流の逆相分には電圧の逆相分が對應するので、つまり電圧についても電流についても夫々の同相分と逆相分とは互に全く無関係に取扱つてよいと云ふことである。

(2) 同軸ケーブルに於ては、第5.3圖の通り、 $W_{22} = W_{12}$ であるから、之を (5.6) と (5.7) とに用ひれば次式となる。

$$\left. \begin{aligned} E_{s1} &= I_s(W_{11} + W_{22}), \\ E_{s2} &= I_s 2 W_{22}, \end{aligned} \right\} \quad (5.11) \quad \text{第5.3圖}$$

$$\left. \begin{aligned} E_{a1} &= I_a(W_{11} - W_{22}) = I_a W_{a1}, \\ E_{a2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

今度は前者と異り、電流の同相分に對應する電圧は1番と2番とでは位相は同じであるが振幅は異つてゐる。又電流の逆相分に對應する電圧は心線にはあるが、外管では常に0である。この後者の使ひ方が第1章で述べた同軸ケーブルの常法である。然し電流の不平衡があれば、意想外の E_{s2} が外管にも現れる處に面白い問題があるのである。

§5.2 各種の波動インピーダンス

導線の單位長毎のインダクタンス及び容量を L ヘンリー、及び C フアラ

ッドとすれば、波動インピーダンスのオーム値は次式で與へられることは既に述べた通りである。

$$W = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{cC}, \text{ 但し } c \text{ は光速. (5.13)}$$

そこで、一般に第5.4圖の様に、直径 d_1, d_2 の導線が配置されてゐる時には、 C_1, C_2 及び C_{12} は夫々次式で與へられる。

$$C_1 = \frac{1}{2 \log_e(4H_1/d_1)} \times \frac{1}{9 \times 10^{11}} F, \text{ (5.14)}$$

$$C_2 = \frac{1}{2 \log_e(4H_2/d_2)} \times \frac{1}{9 \times 10^{11}} F, \text{ (5.15)}$$

$$C_{12} = \frac{\log(D'/D)}{2 \{ \log(4H_1/d_1) \log(4H_2/d_2) - \log^2(D'/D) \}} \times \frac{1}{9 \times 10^{11}} F.$$

特に D'/D が H_1/d_1 や H_2/d_2 に較べて遙かに小さい時には、略して

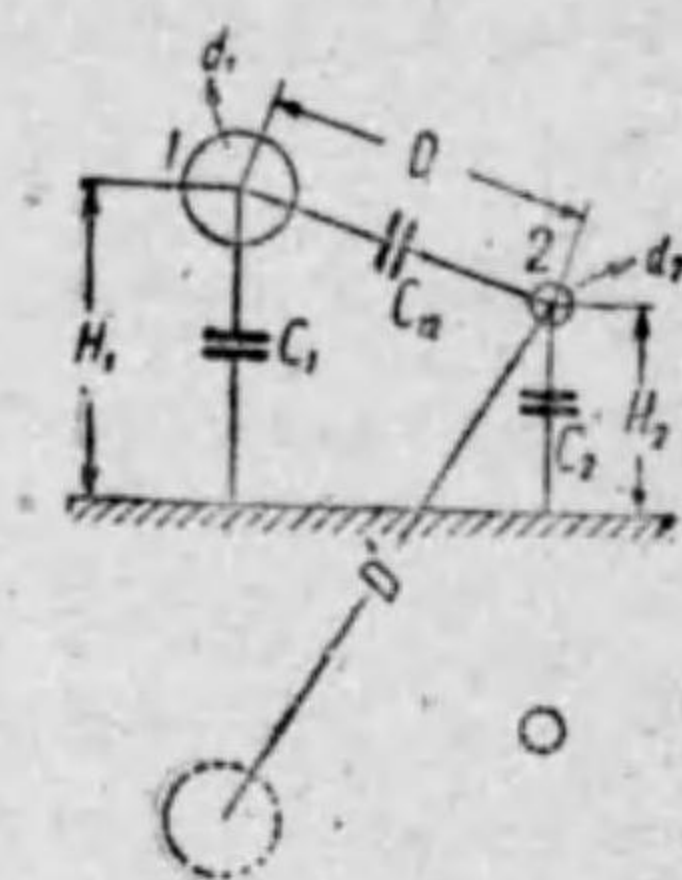
$$C_{12} = \frac{\log(D'/D)}{2 \log(4H_1/d_1) \log(4H_2/d_2)} \times \frac{1}{9 \times 10^{11}} F \text{ (5.16)}$$

となる。それ故 (5.13) により

$$W_{11} = \frac{1}{cC_1}, \quad W_{22} = \frac{1}{cC_2} \text{ (5.17 a)}$$

は直ちに求まるが、 W_{12} についてはさう簡単でない。一體容量 C は Q なる電荷を與へた時に V なる電圧が起る時、 Q/V を以て與へられるのであるから、相互容量は1の導体に Q の電荷を與へた時に2の導体に V の電圧を誘起したならば Q/V で示されるべきものである。そこで第5.4圖に於て1の導体と並列に2の導体を通つて大地へ行く通路があるから、1の導体の容量は、

$$C_1 + \frac{C_2 C_{12}}{C_2 + C_{12}} = C_1'$$



第5.4圖

に増してゐる。従つて Q なる電荷を1の導体に與へた場合、1の導体には Q/C_1' の電圧が起つてゐる。この中2の導体へは

$$\frac{1/C_2}{1/C_{12} + 1/C_2} = k$$

倍の電圧が起つてゐる。即ち

$$k Q/C_1' = V$$

である。それ故相互容量は C_1'/k である。それ故相互波動インピーダンスは

$$W_{12} = \frac{k}{cC_1'} = \frac{1/C_1 C_2}{c(1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_{12})} \text{ (5.17 b)}$$

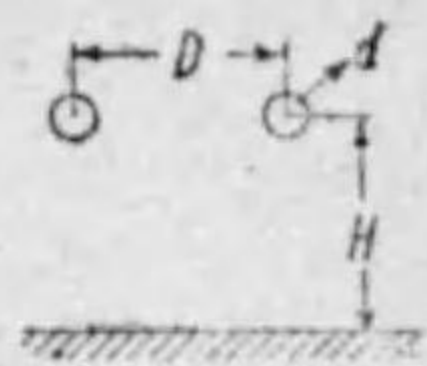
となる。之等の値を (5.6) 及び (5.7) に代入すれば結局次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} W_{a1} &= 60 \log_e \frac{4H_1 D'}{d_1 D} = 138 \log_{10} \frac{4H_1 D'}{d_1 D}, \\ W_{a2} &= 60 \log_e \frac{4H_2 D'}{d_2 D} = 138 \log_{10} \frac{4H_2 D'}{d_2 D}, \\ W_{a1} &= 60 \log_e \frac{4DH_1}{d_1 D'} = 138 \log_{10} \frac{4DH_1}{d_1 D'}, \\ W_{a2} &= 60 \log_e \frac{4DH_2}{d_2 D'} = 138 \log_{10} \frac{4DH_2}{d_2 D'}. \end{aligned} \right\} \text{ (5.18)}$$

次に特別の場合について計算しよう。先づ第5.5圖の様に平衡導線の場合には、(5.18) に於て $d_1 = d_2 = d$, $H_1 = H_2 = H$ と置くことによつて次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} W_{a1} = W_{a2} &= 138 \log_{10} \frac{4HD'}{dD}, \\ W_{a1} = W_{a2} &= 138 \log_{10} \frac{4DH}{dD'}. \end{aligned} \right\} \text{ (5.19)}$$

この W_a に於て H を無限に高くすれば、 $D' = 2H$ として略することが出来て、その値は (1.80) が示す値の半分になつてゐる。それは同一の電流に對して先の場合には兩導体間の電圧を今はその半分の値を表す様になつてゐる。

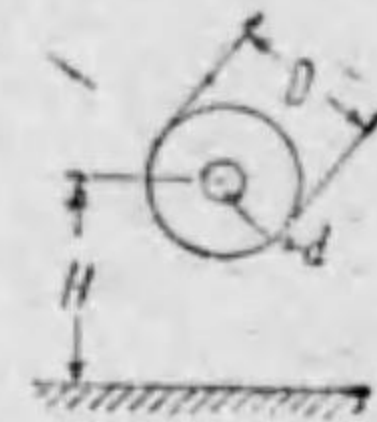


第5.5圖

るからである。

次に同軸ケーブルの場合には、第5.6圖に於て $H_1 = H_2 = H$ と置くことにより次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} W_{11} &= 60 \log_e \frac{4H}{d}, \\ W_{12} = W_{22} &= 60 \log_e \frac{4H}{D}, \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$



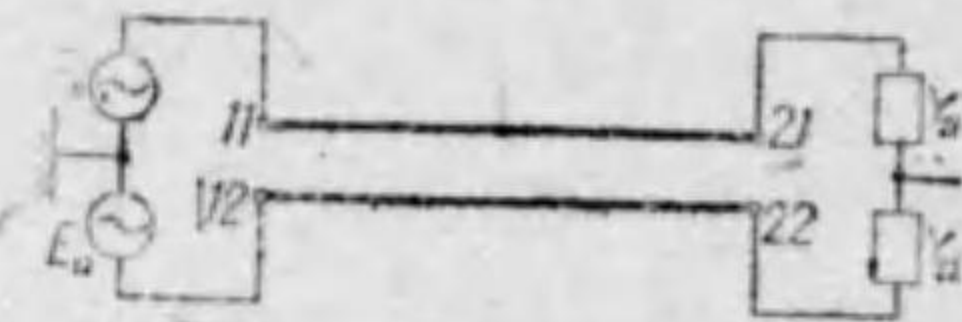
従つて

$$\left. \begin{aligned} W_{a1} = W_{11} + W_{12} &= 138 \log_{10} \frac{16H^2}{dD}, \\ W_{a2} = W_{12} + W_{22} &= 277 \log_{10} \frac{4H}{D}, \\ W_{a1} = W_{11} - W_{12} &= 138 \log_{10} \frac{D}{d}, \\ W_{a2} = W_{22} - W_{12} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

§5.3 平衡導線回路

既に述べた通り、平衡導線回路では電圧波と電流波とが同相分は同相分と相関聯し、逆相分は逆相分と相関聯し、同相分と逆相分とは互に獨立に存在するのであるから、兩者の傳送方程式は別々に取扱つてよい。

第5.7圖の通り長さ l の導線の終端に不平衡負荷アドミッタンス Y_{21} , Y_{22} が



ある場合、その傳送方程式は次の如くなる。脚符は先づ端子の番號を、次に導線の番號を表すことにきめて置く。

$$\left. \begin{aligned} E_{1a} &= E_{2a} \cos \beta l + jW_a I_{2a} \sin \beta l, \\ I_{1a} &= E_{2a} (j/W_a) \sin \beta l + I_{2a} \cos \beta l, \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

及び

$$\left. \begin{aligned} E_{1s} &= E_{2s} \cos \beta l + jW_s I_{2s} \sin \beta l, \\ I_{1s} &= E_{2s} (j/W_s) \sin \beta l + I_{2s} \cos \beta l. \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

受端に於ては負荷によつて電壓と電流とが關係づけられ、

$$\left. \begin{aligned} I_{21} &= Y_{21} E_{21}, \\ I_{22} &= Y_{22} E_{22} \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

であるから、その電壓と電流とを同相分と逆相分とに分解して、

$$\left. \begin{aligned} I_{21} &= I_{2s} + I_{2a}, \\ I_{22} &= I_{2s} - I_{2a}, \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

及び

$$\left. \begin{aligned} E_{21} &= E_{2s} + E_{2a}, \\ E_{22} &= E_{2s} - E_{2a} \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

とすれば、(5.24) を用ひて各成分の間の關係を求められる。

$$\left. \begin{aligned} I_{2s} &= Y_{2s} E_{2s} + Y_{2a} E_{2a}, \\ I_{2a} &= Y_{2s} E_{2s} + Y_{2a} E_{2a}. \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

こゝで Y_{2s} 及び Y_{2a} は

$$\left. \begin{aligned} Y_{21} &= Y_{2s} + Y_{2a}, \\ Y_{22} &= Y_{2s} - Y_{2a} \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

の如く、(5.25), (5.26) と同じ形に分解したアドミッタンスであるが、物理的の意味はなく、數式の形を整へる爲に導かれた量である。一方送端に於ては電源の電壓が E_{11} 及び E_{12} であるとするれば、電壓電流は次式の如く分解される。

$$\left. \begin{aligned} E_{11} &= E_{1s} + E_{1a}, \\ E_{12} &= E_{1s} - E_{1a}, \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

$$\left. \begin{aligned} I_{11} &= I_{1s} + I_{1a}, \\ I_{12} &= I_{1s} - I_{1a}. \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

そこで問題は、長さ l の導線の1端に、不平衡電壓 E_{11} 及び E_{12} を加へ、他端に不平衡負荷 Y_{21} 及び Y_{22} を結んだ際に、負荷の電壓及び電流 E_{21} , I_{21} , E_{22} 及び I_{22} と送端の電流 I_{11} 及び I_{12} はどうなるかと云ふことになる。この解法は (5.22) より (5.30) 迄の式を用ひて解くのである。先

づ(5.22)と(5.23)の I_{2a} と I_{2s} に(5.27)の値を代入して整理すれば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} E_{1a} &= E_{2a}(\cos \beta l + jW_a Y_{2s} \sin \beta l) + E_{2s} jW_a Y_{2a} \sin \beta l, \\ E_{1s} &= E_{2a} W_s Y_{2a} j \sin \beta l + E_{2s}(\cos \beta l + jW_s Y_{2s} \sin \beta l), \end{aligned} \right\} (5.31)$$

$$\text{及び } \left. \begin{aligned} I_{1a} &= E_{2a}(Y_{2s} \cos \beta l + j/W_a \sin \beta l) + E_{2s} Y_{2a} \cos \beta l, \\ I_{1s} &= E_{2a} Y_{2a} \cos \beta l + E_{2s}(j/W_s \sin \beta l + Y_{2s} \cos \beta l). \end{aligned} \right\} (5.32)$$

(5.31)よりは E_{2a} と E_{2s} が求められる。即ち

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos \beta l + jW_a Y_{2s} \sin \beta l, & jW_a Y_{2a} \sin \beta l \\ W_s Y_{2a} j \sin \beta l, & \cos \beta l + jW_s Y_{2s} \sin \beta l \end{vmatrix} (5.33)$$

とすれば,

$$\left. \begin{aligned} E_{2a} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} E_{1a}, & jW_a Y_{2a} \sin \beta l \\ E_{1s}, & \cos \beta l + jW_s Y_{2s} \sin \beta l \end{vmatrix}, \\ E_{2s} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \cos \beta l + jW_a Y_{2s} \sin \beta l, & E_{1a} \\ jW_s Y_{2a} \sin \beta l, & E_{1s} \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} (5.34)$$

となり、之等を(5.27)に代入すれば I_{2a} と I_{2s} が求められる。即ち

$$\left. \begin{aligned} I_{2a} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} E_{1a}, & -Y_{2a} \cos \beta l \\ E_{1s}, & Y_{2s} \cos \beta l + jW_s(Y_{2s}^2 - Y_{2a}^2) \sin \beta l \end{vmatrix}, \\ I_{2s} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} E_{1a}, & -Y_{2s} \cos \beta l - jW_a(Y_{2s}^2 - Y_{2a}^2) \sin \beta l \\ E_{1s}, & Y_{2a} \cos \beta l \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} (5.35)$$

となる。又(5.34)を(5.32)に代入すれば I_{1a} と I_{1s} とが求められる。即ち

$$\left. \begin{aligned} I_{1a} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} E_{1a}, & -Y_{2a} \\ E_{1s}, & [Y_{2s} \cos^2 \beta l - (W_s/W_a)Y_{2s} \sin^2 \beta l \\ & + j(W_s(Y_{2s}^2 - Y_{2a}^2) + 1/W_a) \sin \beta l \cos \beta l] \end{vmatrix}, \\ I_{1s} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} E_{1a}, & [-Y_{2s} \cos^2 \beta l + (W_a/W_s)Y_{2s} \sin^2 \beta l \\ & + j(1/W_s - W_a(Y_{2s}^2 - Y_{2a}^2)) \sin \beta l \cos \beta l] \\ E_{1s}, & Y_{2a} \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} (5.36)$$

となり、以上の7式で求める電圧と電流の成分は皆求めたのである。

次はこの成分を合成すれば最終の求める電圧と電流が得られるのであるが先づ(5.34)と(5.26)とによつて E_{21} と E_{22} とが求まる。今度は(5.28)を使つて Y_{21} と Y_{22} を用ひて置く。即ち

$$\left. \begin{aligned} E_{21} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} E_{1a}, & -\cos \beta l - jW_a Y_{22} \sin \beta l \\ E_{1s}, & \cos \beta l + jW_s Y_{22} \sin \beta l \end{vmatrix}, \\ E_{22} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} E_{1a}, & -\cos \beta l - jW_a Y_{21} \sin \beta l \\ E_{1s}, & -\cos \beta l - jW_s Y_{21} \sin \beta l \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} (5.37)$$

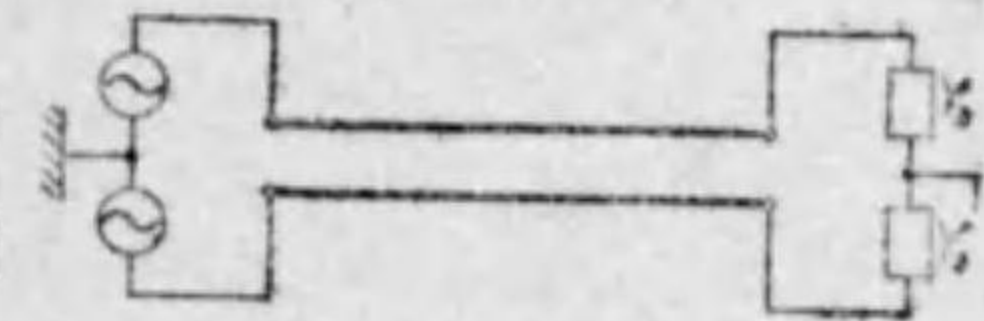
となる。次に I_{21} と I_{22} とは(5.24)により直ちに求められるから、こゝでは略して置く。最後に(5.36)と(5.30)とにより I_{11} と I_{12} とが求まる。即ち

$$\left. \begin{aligned} I_{11} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} E_{1a}, & \begin{bmatrix} -Y_{2a} - Y_{2s} \cos^2 \beta l + (W_a/W_s)Y_{2s} \sin^2 \beta l \\ + j(1/W_s - W_a Y_{21} Y_{22}) \sin \beta l \cos \beta l \end{bmatrix} \\ E_{1s}, & \begin{bmatrix} Y_{2a} + Y_{2s} \cos^2 \beta l - (W_s/W_a)Y_{2s} \sin^2 \beta l \\ + j(W_s Y_{21} Y_{22} + 1/W_a) \sin \beta l \cos \beta l \end{bmatrix} \end{vmatrix}, \\ I_{12} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} E_{1a}, & \begin{bmatrix} Y_{2a} - Y_{2s} \cos^2 \beta l + (W_a/W_s)Y_{2s} \sin^2 \beta l \\ + j(1/W_s - W_a Y_{21} Y_{22}) \sin \beta l \cos \beta l \end{bmatrix} \\ E_{1s}, & \begin{bmatrix} Y_{2a} - Y_{2s} \cos^2 \beta l + (W_s/W_a)Y_{2s} \sin^2 \beta l \\ - j(W_s Y_{21} Y_{22} + 1/W_a) \sin \beta l \cos \beta l \end{bmatrix} \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} (5.38)$$

となる。之で全部解けたのである。

次に以上の吟味にもなるから特別の場合について調べて見よう。先づ第5.8圖の如く電源も負荷も共に平衡してある場合には、

$$\text{従つて } \left. \begin{aligned} Y_{21} &= Y_{22} = Y_2, \\ Y_{2s} &= Y_2, \\ Y_{2a} &= 0 \end{aligned} \right\} (5.39)$$



第5.8圖

であり、

$$\left. \begin{aligned} E_{12} &= 0 \\ E_{11} &= -E_{12} = E_{12} \end{aligned} \right\} \quad (5.40)$$

であるから、(5.33)は

$$\Delta = (\cos \beta l + jW_a Y_2 \sin \beta l)(\cos \beta l + jW_a Y_2 \sin \beta l) \quad (5.41)$$

となり、(5.37)、(5.38)及び(5.39)より計算して、

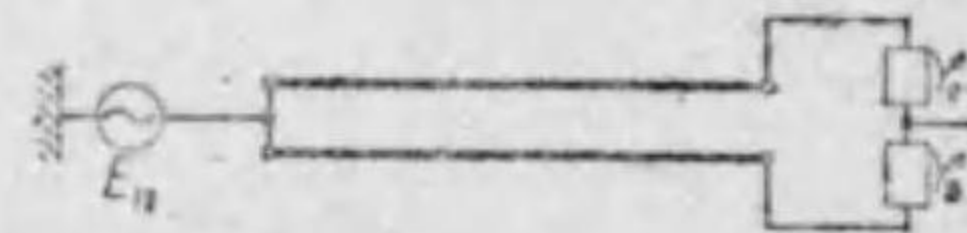
$$E_{21} = -E_{22} = E_{12} / (\cos \beta l + jW_a Y_2 \sin \beta l),$$

$$I_{21} = -I_{22} = Y_2 E_{21},$$

$$I_{11} = -I_{12} = \frac{E_{12}}{W_a} \cdot \frac{W_a Y_2 \cos \beta l + j \sin \beta l}{\cos \beta l + jW_a Y_2 \sin \beta l}$$

之は(5.22)に於て、 $I_{22} = Y_2 E_{22}$ と置いて算出した値に他ならない。即ち同相分は完全に消去されて、逆相分より成つてゐる。このことは然し乍ら當然のことである。

次に第5.9圖の如く、同相の電源で負荷が平衡してゐる場合には(5.39)は前と同じで、



第5.9圖

$$\left. \begin{aligned} E_{12} &= 0 \\ E_{11} &= E_{12} = E_{12} \end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

である。この場合も(5.33)の Δ は(5.41)と同じであつて、(5.37)は

$$E_{21} = E_{22} = E_{12} / (\cos \beta l + jW_a Y_2 \sin \beta l),$$

$$I_{21} = I_{22} = E_{21} Y_2$$

となり、(5.38)は

$$I_{11} = I_{12} = \frac{E_{12}}{W_a} \cdot \frac{W_a Y_2 \cos \beta l + j \sin \beta l}{\cos \beta l + jW_a Y_2 \sin \beta l}$$

となる。之等も(5.23)に於て $I_{22} = Y_2 E_{22}$ と置いて得られるものに他ならず、當然ながら逆相分は現れない。

最後に数字例を二三掲げて見よう。導線は第5.5圖に於て $D=5\text{cm}$, $d=0.5\text{cm}$, $H=100\text{cm}$ とすれば、(5.19)により波動インピーダンスは次の値になる。

$$W_a = 138 \log_{10} \frac{4HD'}{dD} = 180 \text{ オーム}$$

$$W_s = 138 \log_{10} \frac{4DH}{dD'} = 620 \text{ オーム}$$

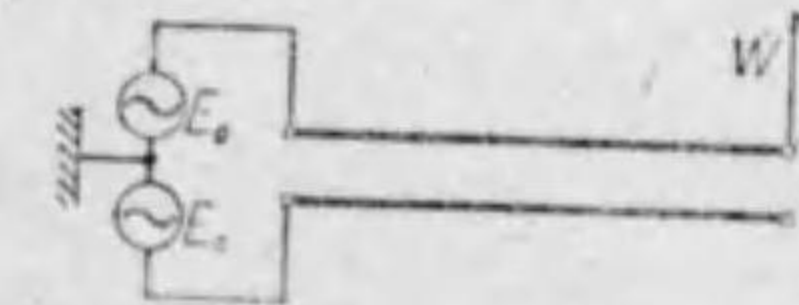
以下の例題に於て、總てこの導線を用ひるとする。

(1) 平衡電源で片側ダブルット空中線へ給電(第5.10圖)

ダブルット空中線の波動インピーダンスは

(1.87)により

$$W = 138 \log_{10}(2l_1/d) = 317 \text{ オーム}$$



とすれば、(1.65)により、輻射抵抗 $R_r = 73 \text{ オーム}$ として 第5.10圖

$$Y_{21} = \frac{R_r}{W^2} = \frac{73}{317^2} = 7.3 \times 10^{-4} \text{ ユー}$$

又

$$Y_{22} = 0,$$

故に、

$$Y_{2a} = Y_{2b} = 3.65 \times 10^{-4} \text{ ユー}$$

$$E_{1a} = E_{1b}$$

$$E_{12} = 0$$

第5.1表

(括弧内は単位を表す)

l	$I_{11}(10^{-3}E_a)$	$I_{12}(10^{-3}E_a)$	$I_{21}(10^{-3}E_a)$	I_{22}	$E_{21}(E_a)$	$E_{22}(E_a)$
0	0.73	0	0.73	0	1	-1
$\lambda/8$	$1.53 + 5.6j$	$-0.18 - 6j$	$0.95 - 0.29j$	0	$1.3 - 0.4j$	$-1.5 - 0.2j$
$\lambda/4$	∞	∞	$-2.5j$	0	$-3.4j$	∞
$3\lambda/8$	$-1.53 + 5.6j$	$-0.18 + 6j$	$-0.95 - 0.29j$	0	$-1.3 - 0.4j$	$1.5 - 0.2j$
$\lambda/2$	0.73	0	-0.73	0	-1	1

表では $\lambda/4$ の時には I_{11} , I_{12} 及び E_{22} は ∞ になる。之は給電線の損失がないからであつて、実際には I_a によつて輻射される爲に空中線と同等の大きさに止まる譯のものである。

である。之等の値を (5.33), (5.37), (5.24) 及び (5.38) に挿入して, l の種々の値に就て計算すれば前頁の表の様になる。

(2) 平衡電源で片側進行波空中線へ給電 (第5.11圖)

進行波空中線の波動インピーダンスを 600 オーム とすれば

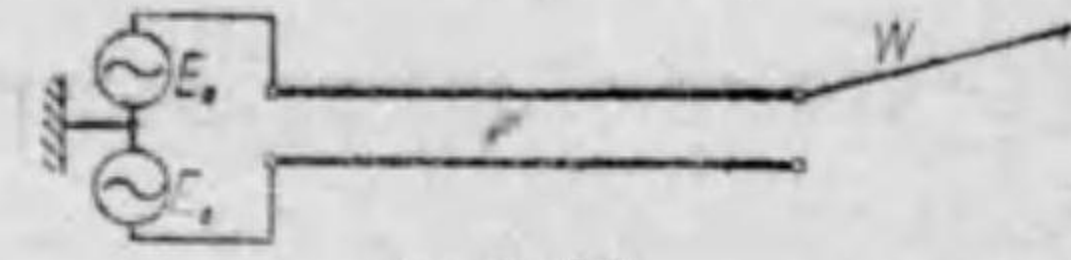
$$Y_{21} = 1/600 \text{ モー},$$

$$Y_{22} = 0,$$

$$Y_{2a} = Y_{2s} = 1/1200 \text{ モー},$$

$$E_{1a} = E_a,$$

$$E_{1s} = 0.$$



第5.11圖

之等の數値を (5.33), (5.37), (5.24) 及び (5.38) に挿入して, l の種々の値について計算すれば次表の如くなる。

第5.2表

l	$I_{11}(10^{-3}E_a)$	$I_{12}(10^{-3}E_a)$	$I_{21}(10^{-3}E_a)$	I_{22}	$E_{21}(E_a)$	$E_{22}(E_a)$
0	1.7	0	1.7	0	1	-1
$\lambda/8$	$2.5 + 4.3j$	$-2.5 - 5.8j$	$1.65 - 1.07j$	0	$0.98 - 0.65j$	$-1.65 - 0.34j$
$\lambda/4$	$-\infty$	∞	-2.5	0	-1.5j	∞
$3\lambda/8$	$2.5 - 4.3j$	$-2.5 + 5.8j$	$-1.65 - 1.07j$	0	$-0.98 - 0.65j$	$1.65 - 0.34j$
$\lambda/2$	1.7	0	-1.7	0	-1	1

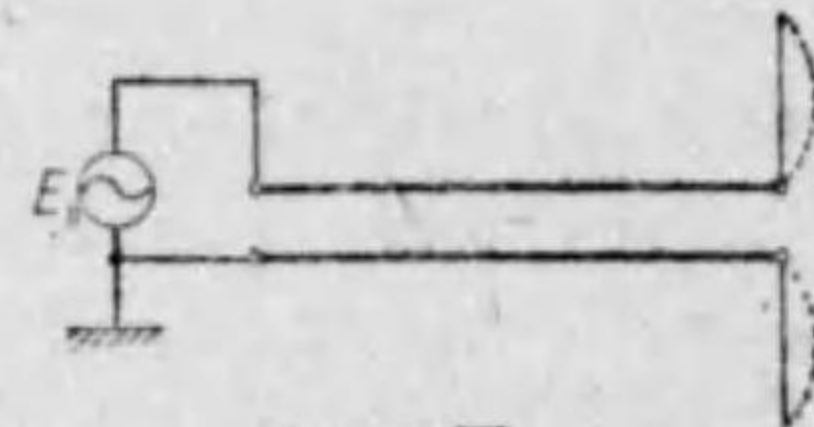
(3) 片電源で平衡ダブレットへ給電 (第5.12圖)

$$Y_{21} = Y_{22} = Y_{2s} = 7.3 \times 10^{-4} \text{ モー},$$

$$Y_{2a} = 0,$$

$$E_{1s} = E_{1a} = E_{11}/2.$$

同様に計算表示すれば次表の通りになる。



第5.12圖

第5.3表

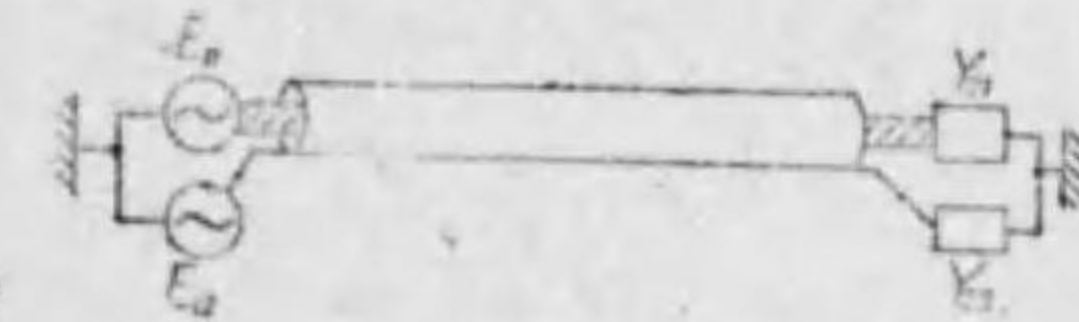
l	$I_{11}(10^{-3}E_{11})$	$I_{12}(10^{-3}E_{11})$	$I_{21}(10^{-3}E_{11})$	$I_{22}(10^{-3}E_{11})$	$E_{21}(E_{11})$	$E_{22}(E_{11})$
0	0.73	0	0.73	0	1	0
$\lambda/8$	$2.33 - 0.81j$	$-0.87 - 3.4j$	$0.95 - 0.26j$	$-0.08 - 0.13j$	$1.3 - 0.36j$	$-0.11 - 0.18j$
$\lambda/4$	-58	20	-3.6j	1.97j	-4.9j	2.7j
$3\lambda/4$	$2.33 + 0.81j$	$-0.87 + 3.4j$	$-0.95 - 0.26j$	$0.08 - 0.13j$	$-1.3 - 0.36j$	$0.11 - 0.18j$
$\lambda/2$	0.73	0	-0.73	0	-1	0

表は皆 $\lambda/2$ 迄さしてあるが之以上は I_{11}, I_{12} は繰り返す, I_{21}, I_{22} 等は丁度位相だけが反対になつて繰り返すのである。

§5.4 不平衡導線回路

一般の不平衡導線に就て考へると云ふことも徒らに複雑になる様に思はれるので, その最も代表的の同軸ケーブルの場合に就て計算して見ることにしよう。第5.13圖の様な回路に於て受端では

$$\left. \begin{aligned} I_{21} &= E_{21} Y_{21}, \\ I_{22} &= E_{22} Y_{22} \end{aligned} \right\} (5.43)$$



第5.13圖

が成り立つてゐることは前と同じである。そこでこの電流を兩成分に分解すればやはり次の通りになる。

$$\left. \begin{aligned} I_{21} &= I_{2s} + I_{2a}, \\ I_{22} &= I_{2s} - I_{2a} \end{aligned} \right\} (5.44)$$

扱て今度は不平衡導線上に於ては, 電流の夫々の成分に對應して或る直の電圧を生ずるが, その電圧の各成分は同相分と逆相分とに確然と別れることはない。電流の同相分によつて, 1番の導線に生ずる電圧と2番の電圧とは異つてゐるし, 又電流の逆相分によつて生ずる1番と2番の電圧も異つてゐる。そこで脚符は始めの數字は端子の番號を, 後の數字は導線の番號を表す

と決めれば、各電圧は次の如く分解される。

$$\left. \begin{aligned} E_{21} &= E_{2s1} + E_{2a1}, \\ E_{22} &= E_{2s2} + E_{2a2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.45)$$

こゝで (5.12) によつて、

$$E_{2a2} = 0 \quad (5.46)$$

である。なほ同相分電流波の兩方向への進行波の各々に對して (5.6) の關係が成り立つてゐるから、兩方向の進行波が共に存在するとして

$$\left. \begin{aligned} E_{2s1} &= k W_{s1} I_{2s}, \\ E_{2s2} &= k W_{s2} I_{2s} \end{aligned} \right\} \quad (5.47)$$

と置ける様な常數 k が存在する。従つて

$$E_{2s1} = (W_{s2}/W_{s1}) E_{2s2} \quad (5.48)$$

と置くことが出来る。従つて (5.45) の變數は半減して次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} E_{21} &= E_{2s1} + E_{2a1}, \\ E_{22} &= (W_{s2}/W_{s1}) E_{2s1} + E_{2a2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

そこで (5.43), (5.44) 及び (5.49) より電流成分を求めれば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} I_{2s} &= E_{2s1} \frac{1}{2} \left(Y_{21} + \frac{W_{s2}}{W_{s1}} Y_{22} \right) + E_{2a1} \frac{1}{2} Y_{21}, \\ \bar{I}_{2s} &= E_{2s1} \frac{1}{2} \left(Y_{21} - \frac{W_{s2}}{W_{s1}} Y_{22} \right) + E_{2a1} \frac{1}{2} Y_{21}. \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

そこで

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \left(Y_{21} + \frac{W_{s2}}{W_{s1}} Y_{22} \right) &= Y_{2s1}, \\ \frac{1}{2} \left(Y_{21} - \frac{W_{s2}}{W_{s1}} Y_{22} \right) &= Y_{2a1} \end{aligned} \right\} \quad (5.51)$$

と置けば、(5.50) は次の如く形の上では整頓される。

$$\left. \begin{aligned} I_{2s} &= E_{2s1} Y_{2s} + E_{2a1} Y_{21}/2, \\ \bar{I}_{2s} &= E_{2s1} Y_{2a} + E_{2a1} Y_{21}/2. \end{aligned} \right\} \quad (5.52)$$

そこで電流の各成分に對應する傳送方程式を作るのであるが、逆相分に關

しては一方の導線の電圧は E_{2s2} , E_{1a2} をも含めて一樣に 0 であるから、

$$\left. \begin{aligned} E_{1a1} &= E_{2a1} \cos \beta l + j W_a I_{2a} \sin \beta l, \\ I_{1a} &= E_{2a1} (j/W_a) \sin \beta l + I_{2a} \cos \beta l \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

の二本でよく、同相分に関しては兩方の電圧に夫々 1 組宛の式が成り立つ。

1 番の導線に關しては

$$\left. \begin{aligned} E_{1s1} &= E_{2s1} \cos \beta l + j W_{s1} I_{2s} \sin \beta l \\ I_{1s} &= E_{2s1} (j/W_{s1}) \sin \beta l + I_{2s} \cos \beta l \end{aligned} \right\} \quad (5.54)$$

となり、2 番の導線に關しては

$$\left. \begin{aligned} E_{1s2} &= E_{2s2} \cos \beta l + j W_{s2} I_{2s} \sin \beta l, \\ I_{1s} &= E_{2s2} (j/W_{s2}) \sin \beta l + I_{2s} \cos \beta l \end{aligned} \right\} \quad (5.55)$$

となるが、この最後の二組は (5.48) の關係を用れば (5.54) と一致する。

最後に電源側に於ては (5.49) と同形の

$$\left. \begin{aligned} E_{11} &= E_{1s1} + E_{1a1}, \\ E_{12} &= (W_{s2}/W_{s1}) E_{1s1} \end{aligned} \right\} \quad (5.56)$$

が成り立つから、 E_{11} と E_{12} とが與へられれば E_{1s1} と E_{1a1} が求まる。

扱て、以上の式によつて解法を行ふことが出来る。(5.53) と (5.54) の上の式に (5.52) を代入すれば、

$$\left. \begin{aligned} E_{1a1} &= E_{2a1} \{ \cos \beta l + j(W_a Y_{21}/2) \sin \beta l \} + E_{2s1} j W_a Y_{2a} \sin \beta l, \\ E_{1s1} &= E_{2s1} \{ (W_{s1} Y_{21}/2) j \sin \beta l + \cos \beta l + j W_{s1} Y_{2s} \sin \beta l \}. \end{aligned} \right\} \quad (5.57)$$

となる。そこで

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos \beta l + j(W_a Y_{21}/2) \sin \beta l, & j W_a Y_{2a} \sin \beta l \\ (W_{s1} Y_{21}/2) j \sin \beta l, & \cos \beta l + j W_{s1} Y_{2s} \sin \beta l \end{vmatrix} \quad (5.58)$$

とすれば、

$$E_{2a1} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} E_{1a1}, & j W_a Y_{2a} \sin \beta l \\ E_{1s1}, & \cos \beta l + j W_{s1} Y_{2s} \sin \beta l \end{vmatrix} \quad (5.59)$$

$$E_{2s1} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \cos \beta l + j(W_{s1} Y_{21}/2) \sin \beta l, & E_{1s1} \\ (W_{s1} Y_{21}/2) j \sin \beta l, & E_{1s1} \end{vmatrix}$$

となる。そこで (5.49) により E_{21} と E_{22} は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} E_{21} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} E_{1s1}, & jW_a(Y_{2s}-Y_{21}/2) \sin \beta l - \cos \beta l \\ E_{1s1}, & \cos \beta l + j(W_{s2} Y_{22}/2) \sin \beta l \end{vmatrix} \\ E_{22} &= \frac{W_{s2}}{W_{s1}} \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \cos \beta l + j(W_a Y_{21}/2) \sin \beta l, & E_{1s1} \\ (W_{s1} Y_{21}/2) j \sin \beta l, & E_{1s1} \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5.60)$$

I_{21} と I_{22} とは之と (5.43) とより直ちに求まる。次に (5.52) の下式を (5.53) の下式に代入して (5.59) を用ひれば、

$$\left. \begin{aligned} I_{1s} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} E_{1s1}, & -Y_{2s} \\ E_{1s1}, & \left[-\frac{(W_{s1} Y_{2s}/W_a) \sin^2 \beta l + (Y_{21}/2) \cos^2 \beta l}{+j\{(1/W_a) + (W_{s2} Y_{22} Y_{21})/2\}} \sin \beta l \cos \beta l \right] \end{vmatrix} \\ I_{1s} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} E_{1s1}, & \left[\frac{-Y_{2s} \cos^2 \beta l + (W_a Y_{21}/2W_{s1}) \sin^2 \beta l}{-j\{(W_a Y_{22} Y_{21} W_{s2}/2W_{s1}) + (1/W_{s1})\}} \sin \beta l \cos \beta l \right] \\ E_{1s1}, & Y_{21}/2 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5.61)$$

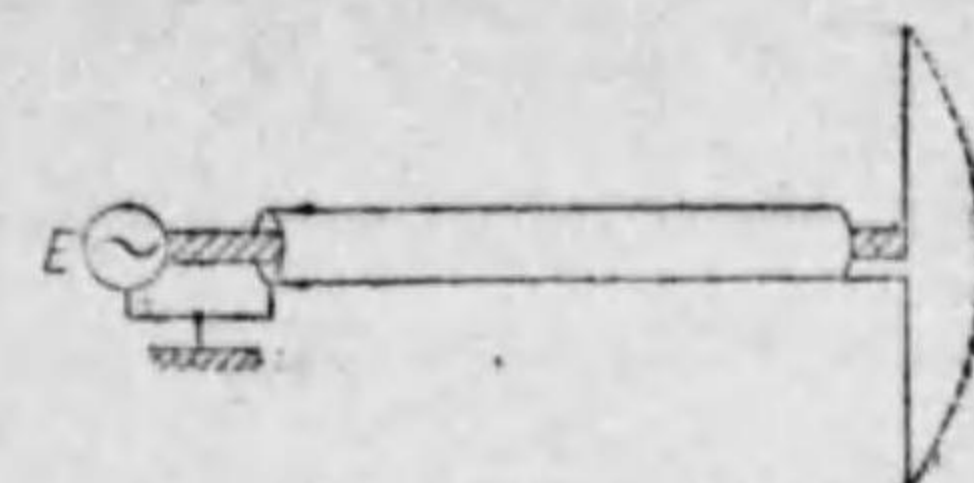
となるから、 I_{11} と I_{12} とは (5.44) と同じ形で導かれる。

$$\left. \begin{aligned} I_{11} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} E_{1s1}, & \left[\frac{-Y_{2s} \cos^2 \beta l - Y_{2s} + (W_a Y_{21}/2W_{s1}) \sin^2 \beta l}{-j\{(W_a Y_{22} Y_{21} W_{s2}/2W_{s1}) + (1/W_{s1})\}} \sin \beta l \cos \beta l \right] \\ E_{1s1}, & \left[\frac{(Y_{21}/2) - (W_{s1} Y_{2s}/W_a) \sin^2 \beta l + (Y_{12}/2) \cos^2 \beta l}{+j\{(1/W_a) + (W_{s2} Y_{22} Y_{21})/2\}} \sin \beta l \cos \beta l \right] \end{vmatrix} \\ I_{12} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} E_{1s1}, & \left[\frac{Y_{2s} - Y_{2s} \cos^2 \beta l + (W_a Y_{21}/2W_{s1}) \sin^2 \beta l}{-j\{(W_a Y_{22} Y_{21} W_{s2}/2W_{s1}) + (1/W_{s1})\}} \sin \beta l \cos \beta l \right] \\ E_{1s1}, & \left[\frac{\{(Y_{21}/2) + (W_{s1} Y_{2s}/W_a)\} \sin^2 \beta l}{-j\{(W_{s2} Y_{22} Y_{21})/2 + (1/W_a)\}} \sin \beta l \cos \beta l \right] \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5.62)$$

となる。之で全部解けたわけである。

次に数字例を一つ取扱つて見よう。第5.14圖の如く同軸ケーブルの終端に半波長のダブルット空中線を置けば、輻射抵抗が同軸ケーブルの波動インピーダンスに等しいから、整合がとれるだらうとは一應思つて見ることであ

るが、それが実際にはうまくゆかないことはよく知られてゐる。それ故にこの例は興味がある。第5.6圖に於て $d=0.5 \text{ cm}$, $D=1.8 \text{ cm}$ 及び $H=100 \text{ cm}$ として (5.21) により各種波動インピーダンスを計算すれば次の通りになる。



第5.14圖

$$W_{s1} = 725 \text{ オーム},$$

$$W_{s2} = 650 \text{ "},$$

$$W_{s1} = 77 \text{ "},$$

$$W_{s2} = 0,$$

又、

$$Y_{21} = Y_{22} = 1/37 = 0.027 \text{ モー},$$

(5.51) により

$$Y_{2s} = 0.0255 \text{ モー},$$

$$Y_{2s} = 0.0015 \text{ モー},$$

電源側電圧は

$$E_{1s1} = 0,$$

$$E_{1s1} = E,$$

之等の値を (5.60), (5.43) 及び (5.62) に用ひれば各部の電圧、電流の値が得られる。 l を $0, \lambda/8, \lambda/4, 3\lambda/8, \lambda/2$ とした値を表にすれば下の如くなる。

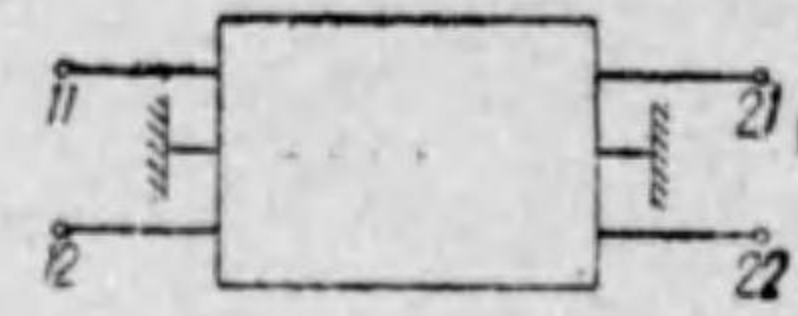
第5.4表

l	$I_{11}(E \cdot 10^{-3})$	$I_{12}(E \cdot 10^{-3})$	$I_{21}(E \cdot 10^{-3})$	$I_{22}(E \cdot 10^{-3})$	$E_{21}(E)$	$E_{22}(E)$
0	27	0	27	0	1	0
$\lambda/8$	$18 - j5.4$	-13	$8.8 - j9.5$	$-9.8 + j8.4$	$0.33 - j0.35$	$-0.36 + j0.31$
$\lambda/4$	13	-14	$-13j$	$13j$	$-0.49j$	$0.49j$
$3\lambda/8$	$18 + j5.4$	-13	$-8.8 - j9.5$	$9.8 + j8.4$	$-0.33 - j0.35$	$0.36 + 0.31$
$\lambda/2$	27	0	-27	0	-1	0

この数表を見れば、 l が $\lambda/2$ の整数倍の近傍に於てだけはまづいが、他の領域に於ては略々整合がとれてゐることを表してゐる

§5.5 四端子回路

最後に一般的に四端子回路の不平衡を考へて見る。第5.15圖に於て各端子に電壓を加へた場合に、各端子より外へ流出する電流は重ねの定理と相反の定理によつて次の如く表される。



第5.15圖

$$\left. \begin{aligned} I_{11} &= A_1 E_{11} + A_2 E_{12} + A_3 E_{21} + A_4 E_{22}, \\ I_{12} &= A_2 E_{11} + B_2 E_{12} + B_3 E_{21} + B_4 E_{22}, \\ I_{21} &= A_3 E_{11} + B_3 E_{12} + C_3 E_{21} + C_4 E_{22}, \\ I_{22} &= A_4 E_{11} + B_4 E_{12} + C_4 E_{21} + D_4 E_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (5.63)$$

そこで電壓を同相分と逆相分とに分解すれば、

$$\left. \begin{aligned} E_{11} &= E_{1s} + E_{1a}, \\ E_{12} &= E_{1s} - E_{1a}, \\ E_{21} &= E_{2s} + E_{2a}, \\ E_{22} &= E_{2s} - E_{2a}. \end{aligned} \right\} \quad (5.64)$$

となる。之を上式に代入すれば、

$$\left. \begin{aligned} I_{11} &= (A_1 + A_2)E_{1s} + (A_3 + A_4)E_{2s} + (A_1 - A_2)E_{1a} + (A_3 - A_4)E_{2a}, \\ I_{12} &= (A_2 + B_2)E_{1s} + (B_3 + B_4)E_{2s} + (A_2 - B_2)E_{1a} + (B_3 - B_4)E_{2a}, \\ I_{21} &= (A_3 + B_3)E_{1s} + (C_3 + C_4)E_{2s} + (A_3 - B_3)E_{1a} + (C_3 - C_4)E_{2a}, \\ I_{22} &= (A_4 + B_4)E_{1s} + (C_4 + D_4)E_{2s} + (A_4 - B_4)E_{1a} + (C_4 - D_4)E_{2a}. \end{aligned} \right\} \quad (5.65)$$

となる。各式の前の2項は電壓の同相分に對應する部分であり、後の2項は電壓の逆相分に相應する部分である。そこで前節の手法に倣つて

$$\left. \begin{aligned} I_{1s1} &= (A_1 + A_2)E_{1s} + (A_3 + A_4)E_{2s}, \\ I_{1a1} &= (A_1 - A_2)E_{1a} + (A_3 - A_4)E_{2a}, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (5.66)$$

等と置けば、電壓の同相分と逆相分とに相應する部分の和として表すことが出来る。即ち

$$\left. \begin{aligned} I_{11} &= I_{1s1} + I_{1a1}, \\ I_{12} &= I_{1s2} + I_{1a2}, \\ I_{21} &= I_{2s1} + I_{2a1}, \\ I_{22} &= I_{2s2} + I_{2a2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.67)$$

次に特別の場合について少し調べる。

(1) 上下左右に對稱の回路

この時は(5.63)に戻つて係数の間に次の關係がある。

$$\begin{aligned} A_1 &= B_2 = C_3 = D_4 = A, \\ A_2 &= A_3 = A_4 = B_3 = B_4 = C_4 = B. \end{aligned}$$

従つて成分電流は次の如くなる。

$$\begin{aligned} I_{1s1} &= I_{1s2} = (A + B)E_{1s} + 2BE_{2s}, \\ I_{2s1} &= I_{2s2} = 2BE_{1s} + (A + B)E_{2s}, \\ I_{1a1} &= -I_{1a2} = (A - B)E_{1a}, \\ I_{2a1} &= -I_{2a2} = (A - B)E_{2a}. \end{aligned}$$

従つて、電壓の同相分と逆相分とに對應する電流の成分は夫々又同相分と逆相分とになつてゐる。従つて電流と電壓とは共に同相分は同相分同志、逆相分は逆相分同志で互に他に無關係である。平衡導線の場合は丁度これに含まれるのである。

(2) 上下對稱の回路

この時は係数の間に次の關係がある。

$$\begin{aligned} A_1 &= B_2, \\ C_3 &= D_4, \\ A_3 &= B_4, \\ A_4 &= B_3. \end{aligned}$$

従つて各成分電流は次の如くなる。

$$I_{1s1} = I_{1s2} = (A_1 + A_2)E_{1s} + (A_3 + A_4)E_{2s},$$

$$I_{2s1} = I_{2s2} = (A_3 + A_4)E_{1s} + (C_3 + C_4)E_{2s},$$

$$I_{1a1} = -I_{1a2} = (A_1 - A_2)E_{1a} + (A_3 - A_4)E_{2a},$$

$$I_{2a1} = -I_{2a2} = (A_3 - A_4)E_{1a} + (C_3 - C_4)E_{2a}.$$

従つてこの場合も前と同じく電圧と電流とは夫々同相分同志又は逆相分同志の間で相関し、相互の間では無関係である。

(3) 左右対称の回路

この場合は係数の間に

$$A_1 = C_3,$$

$$B_2 = D_4,$$

$$A_2 = C_4,$$

$$A_4 = B_3$$

の関係があるから各成分電流は次の如く表される。

$$I_{1s1} = (A_1 + A_2)E_{1s} + (A_3 + A_4)E_{2s},$$

$$I_{1s2} = (A_2 + B_2)E_{1s} + (A_4 + B_4)E_{2s},$$

$$I_{2s1} = (A_3 + A_4)E_{1s} + (A_1 + A_2)E_{2s},$$

$$I_{2s2} = (A_4 + B_4)E_{1s} + (A_2 + B_2)E_{2s}.$$

$$I_{1a1} = (A_1 - A_2)E_{1a} + (A_3 - A_4)E_{2a},$$

$$I_{1a2} = (A_2 - B_2)E_{1a} + (A_4 - B_4)E_{2a},$$

$$I_{2a1} = (A_3 - A_4)E_{1a} + (A_1 - A_2)E_{2a},$$

$$I_{2a2} = (A_4 - B_4)E_{1a} + (A_2 - B_2)E_{2a}.$$

もはや電圧の同相分に對應する電流は同相分ではなく、電圧の逆相分に相應する成分も逆相分ではない。

そこで一般に四端子回路では、上下対称回路の時は電圧と電流とは共に同相分と逆相分とを分離して取扱ふことが出来るが、それ以外の時は電流又は

電圧の一方だけを同相分と逆相分とに分解しても、夫々に對應する電圧又は電流はこの様な整然たる形にならない。

以上は電圧を基に出發した理論であるが、前節迄の導線の場合は、電流を基に出發してある。それと類似の形にする爲には(5.63)の表示式に於て E と I とを交換した形にすればよい。その際には A, B, C, D 等の係数はインピーダンスのデメンションを持つことになるだけである。唯然し數學的にはこう云ふ形で表せるが、物理的には考へ難いのである。そのことは導線の場合に電圧を基に出發する様な一聯の理論を樹てることも容易であるが、現象として考へ難いのと同好である。

第6章 空中線の輻射指向性

§6.1 素片電氣振動の輻射電磁界

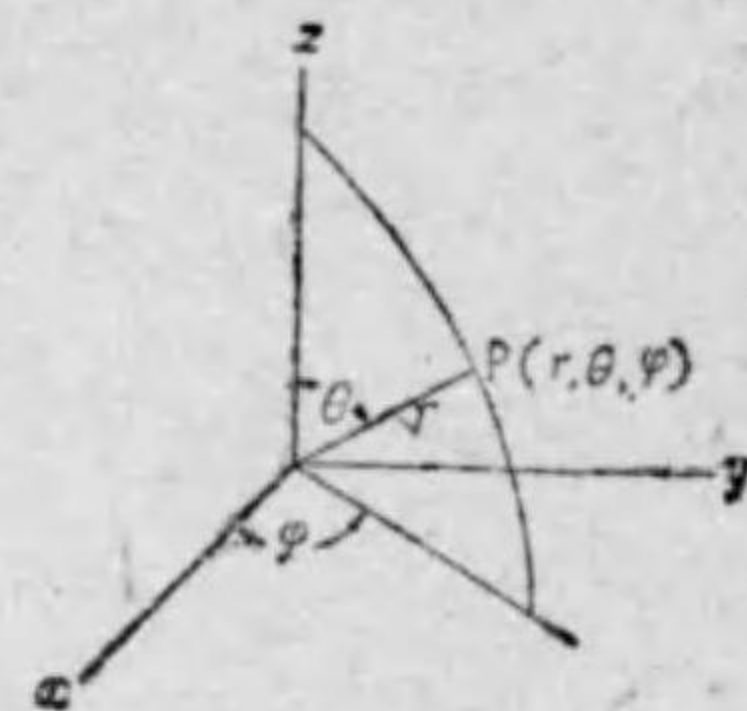
今迄は電波の傳播に導きの線のある場合であつた。即ち、云はゞ腕をとられて檢束を受けてゐる電波の諸性質を取扱つたのであつたが、之からは空間に自由に開放される電波の性質を調べることになるのである。

第6.1圖の様な極座標の原點に Z 軸に沿ふて、長さ dZ の振動電流素片がある場合に、この原點より充分遠い點 $P(r, \theta, \varphi)$ には輻射電磁界が傳播され、その電磁界は次式で與へられる。

$$\left. \begin{aligned} E_r = E_\varphi = 0, \quad H_r = H_\theta = 0, \\ dE_\theta = k_1 \frac{\sin \theta}{r} I dZ e^{j(\omega t - \beta r)}, \\ dH_\varphi = k_2 \frac{\sin \theta}{r} I dZ e^{j(\omega t - \beta r)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

但し、 E_r 、 E_φ 及び E_θ は電氣力の r 、 φ 及び θ 方向の分力、 H_r 、 H_θ 及び H_φ は磁氣力の r 、 θ 及び φ 方向の分力、 I は振動電流素片の電流のベクトル値である。又 k_1 と k_2 とは比例常數であつて一般には兩者共に複素數であるが、兩者の位相角は等しく、絶對値が異なるのみである。 I を實用單位で表した時 E と H とは如何なる單位であつてもそれに相應して k_1 、 k_2 が定まつた値をとりさへすればよいのであるからこの形は變らない。この式の導出は第11章に於て詳しく取扱ふが、こゝでは之以上のことは必要がないので簡単に表したわけである。

扱てこの式の表してゐる意味は次の如くである。振動電流素片より充分遠



第6.1圖

§6.2 直線狀定常波電流の輻射指向性

い點に於てはその輻射電磁波即ち電波の様子は案外簡單であつて、その電氣力と磁氣力とは同一位相に消長してゐる。そして E と H と動徑 r とは互に垂直になつてゐて、 E は θ 方向に、 H は φ 方向になつてゐる。そして E と H との位相は r を光速で進むだけの角度遅れてゐる。又振幅は共に r に逆比例してゐる。 r が一定であれば、即ち半徑 r の球面上では E と H とは位相は同じであつて、唯 θ が異なるに従つて、 $\sin \theta$ の如く變るのである。即ち Z 軸上では 0 で、それより段々増し、 xy 面上即ち球の赤道に於て極大になつてゐる。

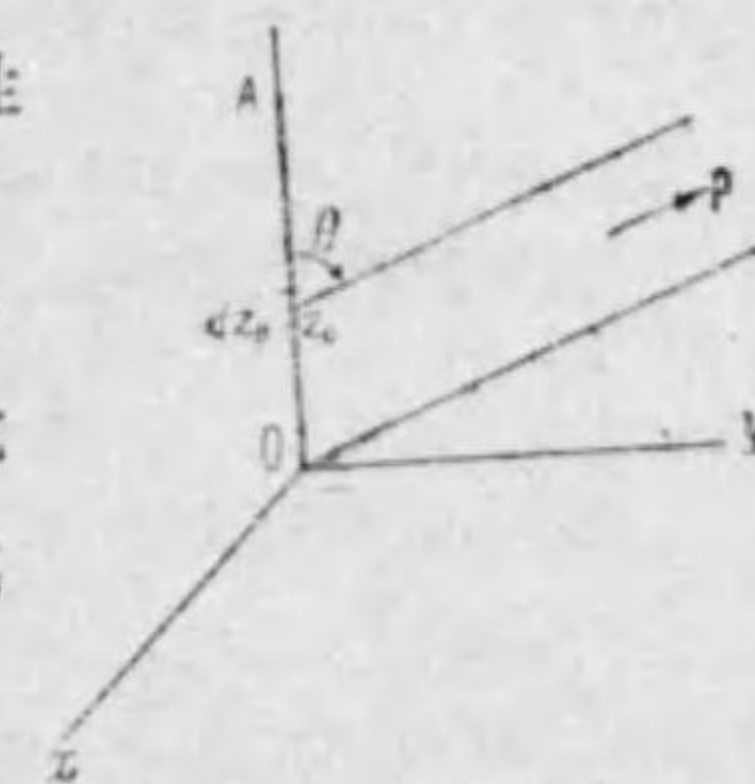
この様な振動電流の素片が數多くある場合には、その各々より P 點に到來する電波があるのであるが、その各々により生ずる電氣力と磁氣力とを夫夫合成すれば、全體の輻射電磁界が得られる。多くの素片の振動周波が異なる時はそれに應じて k_1 、 k_2 も變るが、同一の周波数の時は k_1 、 k_2 は一定であるから、充分の遠方に於ては原點近傍で多少位置が異つても、 E も H も絶對値は不變として取扱つてよい。唯位相だけは僅かの距離の相異でも、異つただけは變つて來るからそのことを考慮にとらなければならない。この計算を遂行する際に E と H とは如何なる場合にも、消長を共にしてゐるから一方だけについて計算すればよい。

§6.2 直線狀定常波電流の輻射指向性

第6.2圖の如く原點より Z 軸上に OA なる導線を立て、之に振動電流を通ずれば、その電流は正弦波形の定常波となり、一般的には次式で與へられる。

$$I_z = I \cos(\beta Z_0 - \alpha) e^{j\omega t} \quad (6.2)$$

但し、 α は O 點と A 點で電流の値が他の條件——例へば負荷してあるとか。又は尖端が開放してあるとか云ふ——に依つて定まる常數である。又 I は波



第6.2圖

腹の電流値である。

充分遠い点 P に於ける電磁界は各電流素片よりの dE_θ を平行にとつて合成したものになる。 θ 方向の電氣力を考へるに、 Z_0 にある電流素片は O 点のものより $Z_0 \cos \theta$ だけ近いから、そこからの電氣力は位相に於て、 O 点のものより $\beta Z_0 \cos \theta$ だけ進んでゐる。故に之を O より A (坐標は l) 迄積分すれば次の如くなる。

$$E_\theta = \int dE_\theta = k_1 \frac{I \sin \theta}{r} e^{j(\omega t - \beta r)} \int_0^l \cos(\beta Z_0 - a) e^{j\beta Z_0 \cos \theta} dZ_0. \quad (6.3)$$

この計算は

$$2 \cos \theta = e^{j\theta} + e^{-j\theta}, \quad 2j \sin \theta = e^{j\theta} - e^{-j\theta} \quad (6.4)$$

を反覆置換すれば容易に運行出来る。即ち

$$P = \int_0^l \cos(\beta Z_0 - a) e^{j\beta Z_0 \cos \theta} dZ_0 = \frac{1}{j\beta(\cos^2 \theta - 1)} \times \left. \begin{aligned} & \cos(\beta Z_0 \cos \theta) \cos \theta \cos(\beta Z_0 - a) + \sin(\beta Z_0 \cos \theta) \sin(\beta Z_0 - a) \\ & + j \{ \sin(\beta Z_0 \cos \theta) \cos \theta \cos(\beta Z_0 - a) - \cos(\beta Z_0 \cos \theta) \sin(\beta Z_0 - a) \} \end{aligned} \right|_0^l \quad (6.5)$$

こゝで θ を次の如く導入して

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\cos \theta \cos(\beta Z_0 - a)}{\sqrt{\cos^2 \theta \cos^2(\beta Z_0 - a) + \sin^2(\beta Z_0 - a)}} = \frac{\cos \theta \cos(\beta Z_0 - a)}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2(\beta Z_0 - a)}} \\ \sin \theta &= \frac{\sin(\beta Z_0 - a)}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2(\beta Z_0 - a)}} \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

この θ を用ひれば (6.5) は更に簡単になつて次の如くなる。

$$P = \frac{1}{j\beta(\cos^2 \theta - 1)} \left| \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2(\beta Z_0 - a)} e^{j(\beta Z_0 \cos \theta - \theta)} \right|_0^l \quad (6.7)$$

こゝで θ に (6.6) の Z_0 に l と 0 とを代入して得られる値を θ_l 及び

θ_0 とすれば、上式は次の如くなる。

$$P = \frac{1}{j\beta(\cos^2 \theta - 1)} \left\{ \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2(\beta l - a)} e^{j(\beta \cos \theta - \theta_l)} - \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 a} e^{-j\theta_0} \right\}. \quad (6.8)$$

之は更に容易に一項に纏めることが出来て、大きさと位相の項に分けられるが、次の目的には之で充分である。(6.8)を(6.3)に用ひれば合成電界は次の如くなる。

$$E_\theta = \frac{kI}{r \sin \theta} e^{j(\omega t - \beta r)} \left\{ \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2(\beta l - a)} e^{j(\beta l \cos \theta - \theta_l)} - \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 a} e^{-j\theta_0} \right\}. \quad (6.9)$$

§6.3 半波長の整数倍の定常波電流の輻射指向性

第6.3圖の如く OA 間が丁度半波長の整数倍になつてゐて、両端が電流 0 になつてゐる場合について、前節の計算を進めて見る。先づ (6.2) に於て、 $Z_0 = 0$ で $I_z = 0$ であるから $a = \pi/2$ であり、

$l = n\lambda/2$ である。こゝで n は整数である。従つて (6.9) の中の種々の値は次の如くなる。

$$\cos(\beta l - a) = \cos(n\pi - \pi/2) = 0,$$

$$\cos a = \cos \pi/2 = 0,$$

$$\theta_l = \sin^{-1} \sin \left(n\pi - \frac{\pi}{2} \right) = n\pi - \frac{\pi}{2},$$

$$\theta_0 = \sin^{-1} \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\pi}{2}.$$

従つて (6.9) は次の如くなる。

$$E_\theta = \frac{kI}{r \sin \theta} \left\{ e^{j(n\pi \cos \theta - n\pi + \frac{\pi}{2})} - e^{j\frac{\pi}{2}} \right\}, \quad (6.10)$$

之を再び (6.4) を用ひて整理すれば次の如くなる。



第6.3圖

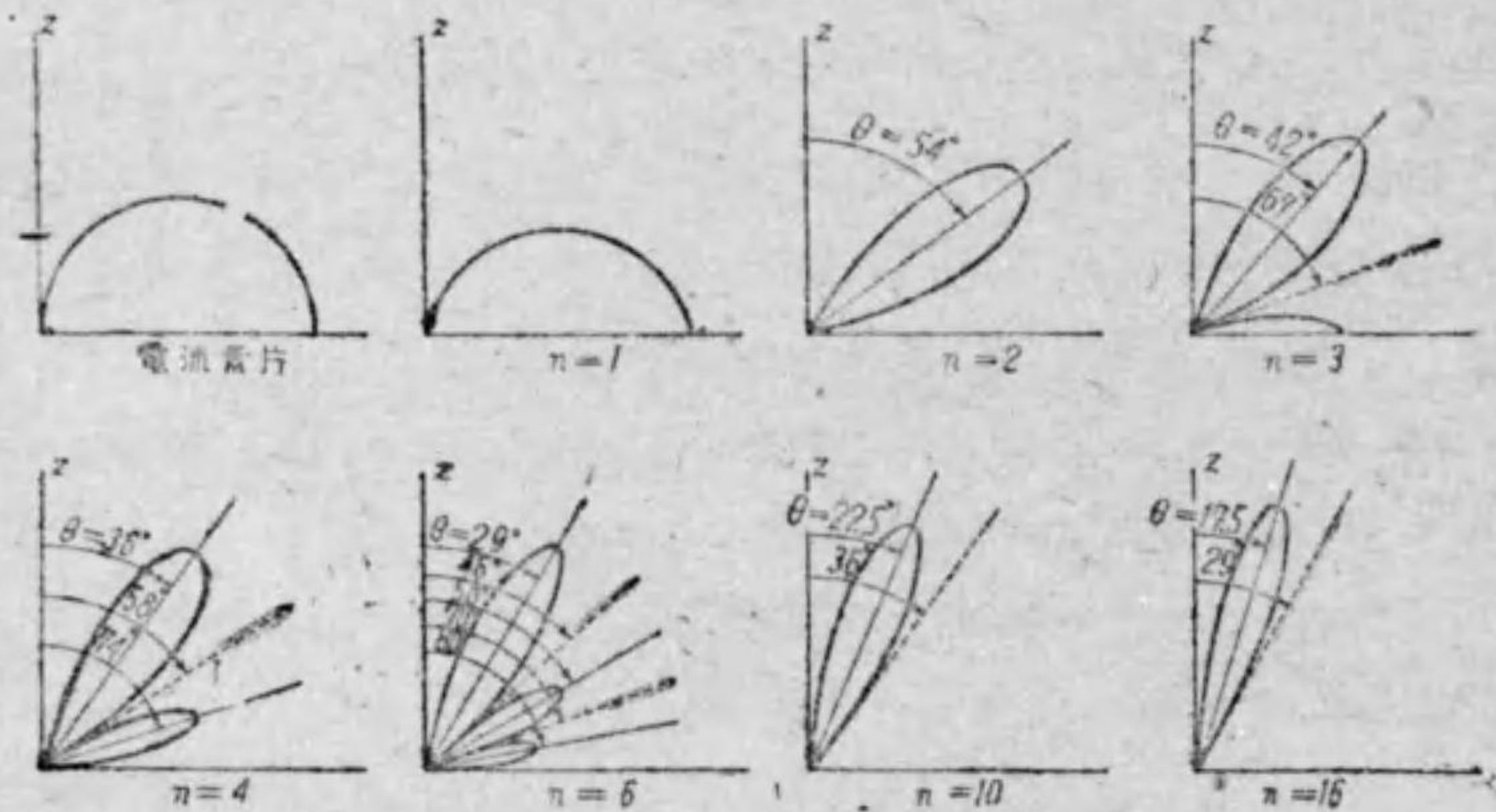
$$E_{\theta} = \frac{k'I}{r} e^{j(\cos\theta - \beta r + \frac{n\pi}{2}(\cos\theta - 1))} \cdot \frac{\sin\left\{\frac{n\pi}{2}(\cos\theta - 1)\right\}}{\sin\theta} \quad (6.11)$$

この式を見れば始めの1項は位相を、終の項は θ によつて振幅の変わる様を表してゐる、そこで

$$D_n = \frac{\sin\left\{\frac{n\pi}{2}(\cos\theta - 1)\right\}}{\sin\theta} \quad (6.12)$$

と置けば、 D_n は指向性を表すものである。

n に 1, 2, 3, 4, 6, 10 及び 16 を與へた場合の指向性は第6.4圖の如くである。



第6.4圖 ハーモニック空中線の指向性

次に OA に第6.5圖の如く両端に電流波腹があつて全長が半波長の整数倍になつてゐる場合に就て計算すると、前と同様の筆法により、 $l = n\lambda/2$, $\alpha = 0$ より $\theta_1 = n\pi$, $\theta_0 = 0$ となるから D_n は次の如くなる。

$$D_n = \frac{\cos\theta \sin\left\{\frac{n\pi}{2}(\cos\theta - 1)\right\}}{\sin\theta} \quad (6.13)$$

この指向性を(6.12)と比較すれば $\cos\theta$ が掛つてゐるだけの相異である。従つて θ の小さい即ち導線の向きに近い方向に於ては前者と殆ど同じ特性を示し、 θ の大きい即ち導線の向きに垂直の方向に於ては0になる傾向を示してゐる。従つて n の大きい場合に於ては指向性の主要部分は大に變らないことになる。



第6.5圖

§6.4 任意長の定常波電流の輻射指向性

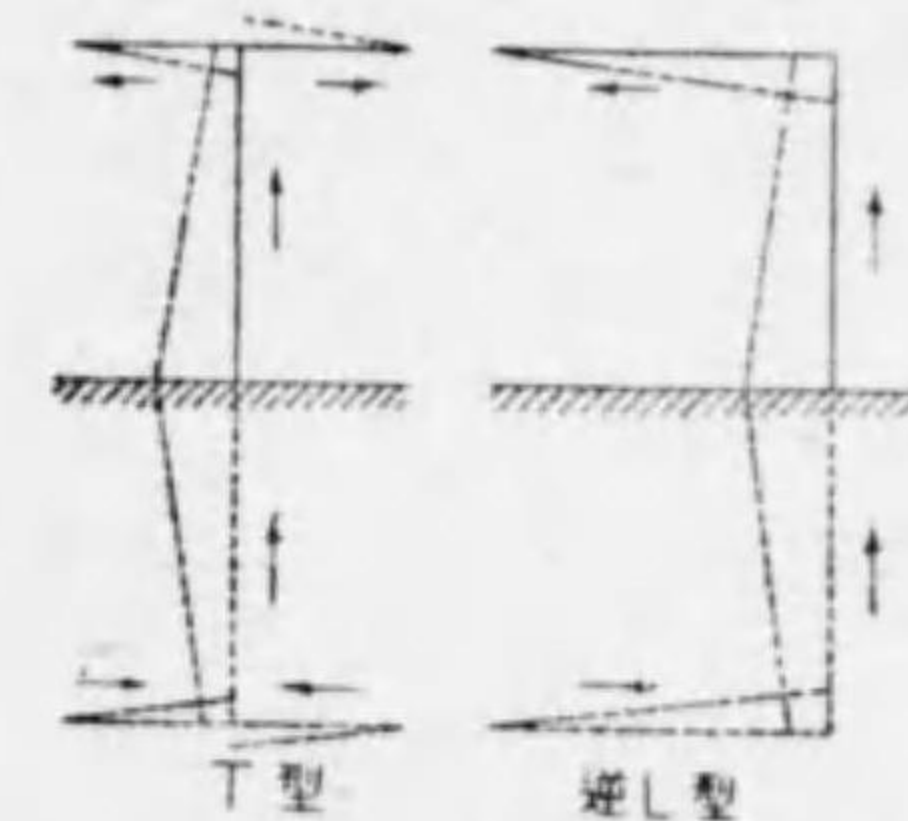
以上の計算により直線状の定常波電流の特殊な場合が明かになつたが、更に一般に任意長ならばどうなるか考へて見よう。

先づ導線が十分に長い場合には、その電流分布の大部分は第6.3圖又は第6.5圖になり、両端に半端の電流が少し附加されるのみである。従つてその指向性はもう一つ半波長を附加へたものと附加へないものとの中間の様相を呈するので、詳細の計算を運行する迄もなく大體は判る。

次に長波、中波及び放送波等に於て屢々實用されるのであるが、導線が極端に短い場合である。即ちその中の一つは地上に $\lambda/4$ 以下の垂直空中線を建てた場合であつて、地球を完全導體と考へれば、丁度電氣鏡像を用ひて第6.6圖の如く連続した電流分布となる。若し地上が $\lambda/4$ の時は映像と實



第6.6圖



第6.7圖

體とて丁度半波長の空中線となる。又第6.7圖の如く空中線の上部を水平にして、T型又は逆L型にして、地面に對して電氣容量をもたせ、垂直電流の上部が0でない様にする場合もある。之等兩者共にその指向性は電流素片のもの（丁度半圓）と半波長のもの（第6.4圖の D_1 で半圓を少し扁平にしたもの）との中間である。

又充分に長くもない任意長の場合も以上の考案を敷衍すれば、その長さに最も近い波長の整数倍のものよりして凡その見當はつく。

§ 6.5 進行波電流の輻射指向性

再び第6.2圖に於て、電流が原点より Z 方向に進行波になつて存在する時には、その電流分布は次式で與へられる。

$$I_z = I e^{j(\omega t - \beta z)}. \quad (6.14)$$

Z に在る電流素片によつて、無限遠の θ なる方向にある點 P に生ずる電氣力は、(6.1)によつて次の如く與へられる。

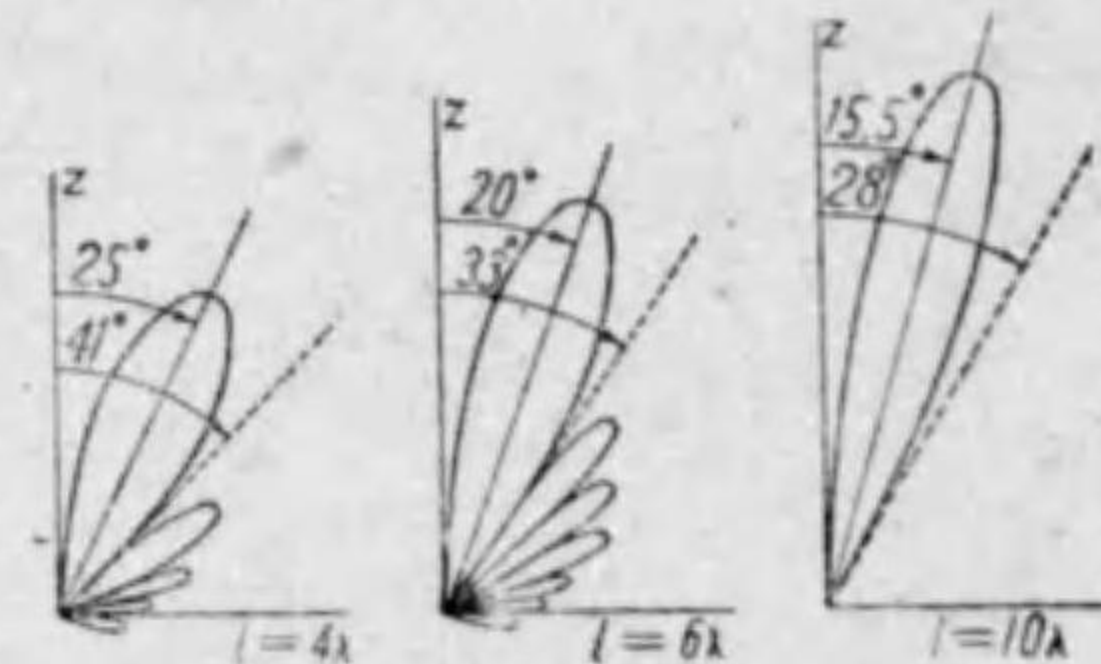
$$dE_\theta = k \frac{\sin \theta}{r} I dZ e^{j(\omega t - \beta z - \beta r + \beta z \cos \theta)}, \quad (6.15)$$

こゝで、 $\beta z \cos \theta$ は Z にある素片が原点にある素片より P に $Z \cos \theta$ だけ近い爲に位相の進む當である。

次は之を Z 軸上に於て 0 より l 迄積分するだけのことである。この計算は指數函数であるから容易であつて、その結果を三角函数に直すと次の如くなる。

$$E_\theta = k' \frac{I}{r} e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\beta l}{2}(1 - \cos \theta))} \times \sin \left\{ \frac{\beta l}{2} (1 - \cos \theta) \right\} \cot \frac{\theta}{2}. \quad (6.16)$$

終りの項が指向性を表してゐる。それに l を 4λ 、 6λ 及び 10λ として、



第6.8圖 進行波空中線の指向性

計算結果を描けば第6.8圖の如くなる。即ち電流の進行の方向に出るのみで、反對の方向には出来ないから單方向性に近い特性をもつてゐる。定常波は兩方向の進行波が存在してゐるので兩方向へ同じ様に出るのである。

§ 6.6 一樣な電流の輻射指向性

今度は何等かの工夫によつて、一樣に電流が分布してゐる様に出来たとしよう。再び第6.2圖に於て、電流が原点より Z 軸上 l 迄一樣に分布してゐる場合には、その電流は次式で與へられる。

$$I_z = I e^{j\omega t}. \quad (6.17)$$

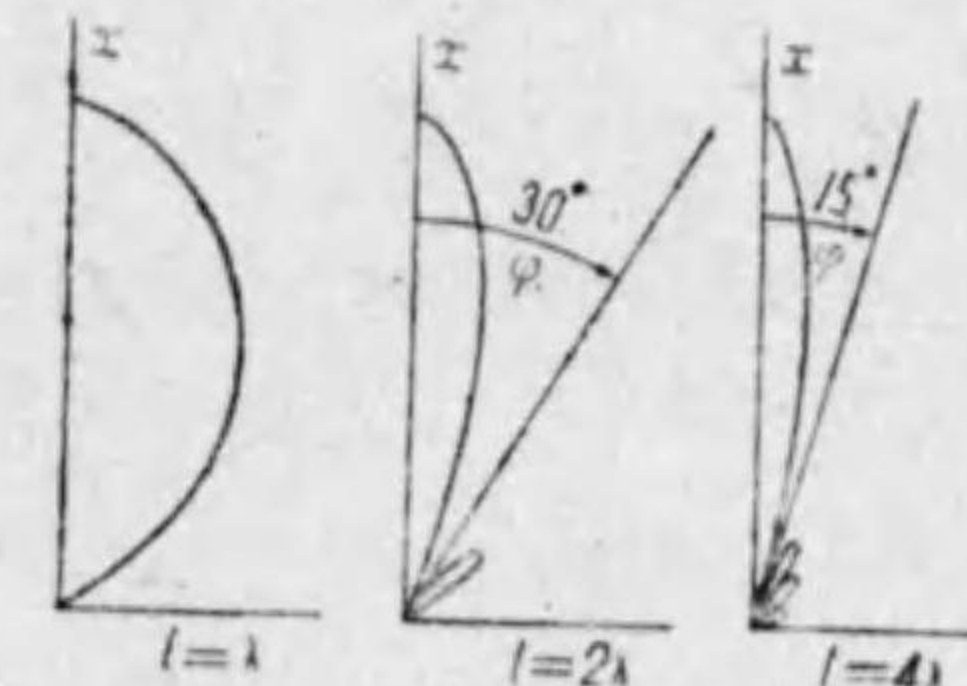
前同様 Z にある電流素片によつて、無限遠の θ なる方向にある點 P に生ずる電氣力は、(6.14)に倣つて次の如くなる。

$$dE_\theta = k \frac{\sin \theta}{r} I dZ e^{j(\omega t - \beta r + \beta z \cos \theta)}. \quad (6.18)$$

之を Z に就て、0 より l 迄積分すればよい、計算は容易であつて次の如くなる。

$$E_\theta = k' \frac{I}{r} e^{j(\omega t - \beta r + \frac{\beta l}{2} \cos \theta)} \cdot \tan \theta \sin \left(\frac{\beta l}{2} \cos \theta \right). \quad (6.19)$$

終りの項によつて指向性が表され、之に $l = \lambda$ 、 2λ 及び 4λ を挿入して指向性を描けば第6.9圖の如くなる。



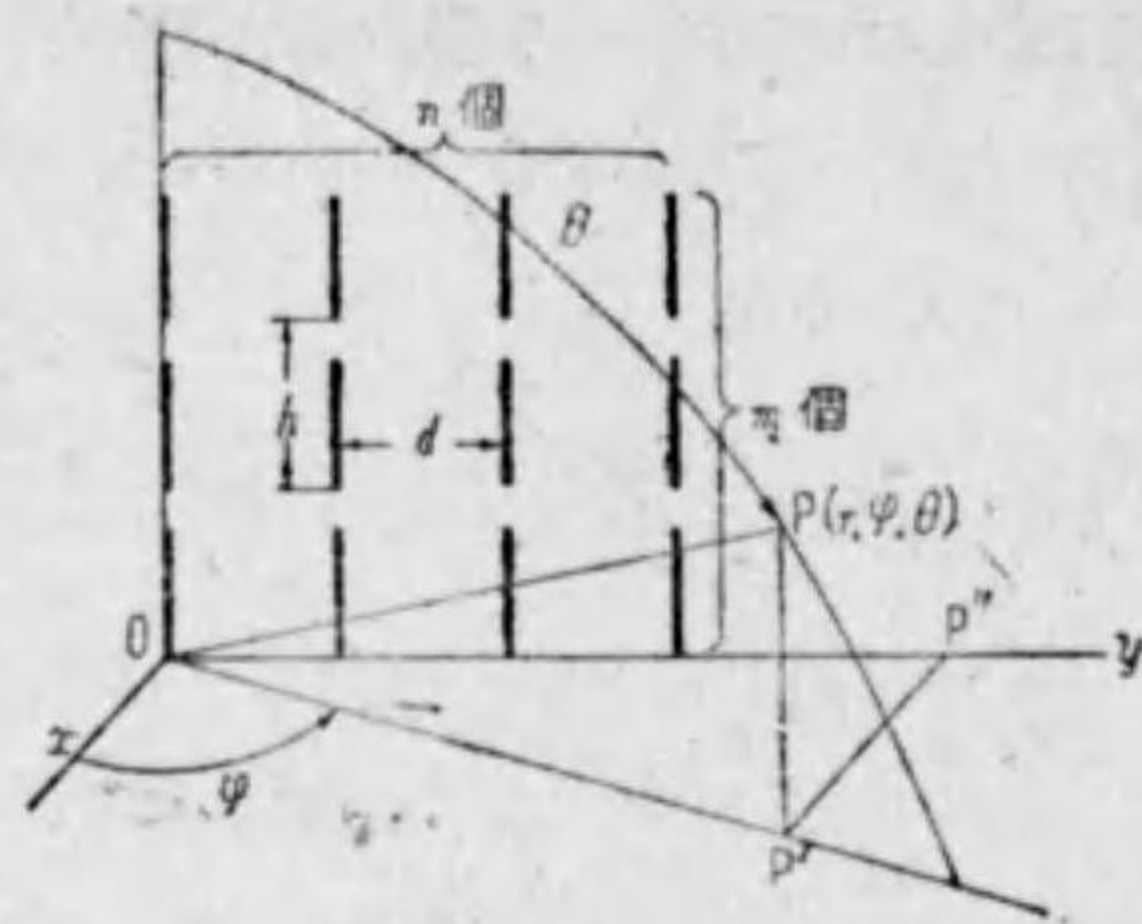
第6.9圖 一樣電流空中線の指向性

§ 6.7 横列半波空中線の輻射指向性

短波ビーム空中線に於て最も一般に用ひられてゐる。半波長空中線を規則正しく縦横に一平面上に配列し、各素片に同大同位相の電流をのせた場合の

輻射指向性を調べて見よう。

第6.10圖に於て、半波長空中線が yz 面に規則正しく配列してゐるとし、ピッチは Z 方向では h , y 方向では d とする。先づ原點に直立してゐる基準素片による電氣力は (6.11) によつて次式で與へられる。



第6.10圖

$${}_1E_\theta = k' \frac{I}{r} e^{j(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}(\cos \theta - 1))} \cdot \frac{\sin \left\{ \frac{\pi}{2} (\cos \theta - 1) \right\}}{\sin \theta} \quad (6.20)$$

配列されてゐる各素片は皆之と同じ輻射電界を生ずるのであるが、 θ, φ なる方向によつて各素片の P 迄の距離が變る爲に、その位相が變つて極く狭い指向性を呈することになる。先づ Z 軸上にある一行だけについて考へれば φ によつて變るものはないが、 θ 方向に對しては基準のものより上に行く程次々に $\beta h \cos \theta$ づゝ位相が進むのである。従つて m 個の合成電界は次式で表される。

$${}_mE_\theta = {}_1E_\theta (1 + e^{j\beta h \cos \theta} + e^{j2\beta h \cos \theta} + \dots + e^{j(m-1)\beta h \cos \theta}). \quad (6.21)$$

之は等比級數であるから、計算整理すれば次式を得る。

$${}_mE_\theta = {}_1E_\theta e^{\frac{j}{2}(m-1)\beta h \cos \theta} \cdot \frac{\sin \left(\frac{m}{2} \beta h \cos \theta \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} \beta h \cos \theta \right)}. \quad (6.22)$$

次にその横に並んでゐる何れの行について見ても各々は之と同一であるが、それ等を合成する時には横に配列されてゐる爲の位相差を考慮に入れなければならない。 Z 軸上の行を基準に考へれば、 d なる距離を右に行く毎に y 軸と OP との間の角を ψ とする時、位相が $\beta d \cos \psi$ づゝ進むのである。

$\cos \psi$ は動徑 OP の y 軸上への投影を OP'' とする時に OP''/OP であるが、 OP の xy 面への投影を OP' とすれば、 OP'' は OP' の y 軸への投影である。従つて

$$\frac{OP''}{OP} = \frac{OP'}{OP} \cdot \frac{OP''}{OP'}$$

$$\text{より} \quad \cos \psi = \sin \theta \cdot \sin \varphi \quad (6.23)$$

である。従つて n 個の行の合成電氣力は次の如くなる。

$${}_{nm}E_{\theta\varphi} = {}_mE_\theta (1 + e^{j\beta d \sin \theta \sin \varphi} + \dots + e^{j(n-1)\beta d \sin \theta \sin \varphi}). \quad (6.24)$$

之を整頓すれば次の如くなる。

$${}_{nm}E_{\theta\varphi} = {}_mE_\theta e^{\frac{j}{2}(n-1)\beta d \sin \theta \sin \varphi} \cdot \frac{\sin \left(\frac{n}{2} \beta d \sin \theta \sin \varphi \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} \beta d \sin \theta \sin \varphi \right)}. \quad (6.25)$$

之に順次 (6.21) と (6.19) を代入して行けば次の如くなる。

$${}_{nm}E_{\theta\varphi} = k' \frac{I}{r} e^{j(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}(\cos \theta - 1) + \frac{1}{2}(m-1)\beta h \cos \theta + \frac{1}{2}(n-1)\beta d \sin \theta \sin \varphi)} \\ \times \frac{\sin \left\{ \frac{\pi}{2} (\cos \theta - 1) \right\} \sin \left(\frac{m}{2} \beta h \cos \theta \right) \sin \left(\frac{n}{2} \beta d \sin \theta \sin \varphi \right)}{\sin \theta \sin \left(\frac{1}{2} \beta h \cos \theta \right) \sin \left(\frac{1}{2} \beta d \sin \theta \sin \varphi \right)}. \quad (6.26)$$

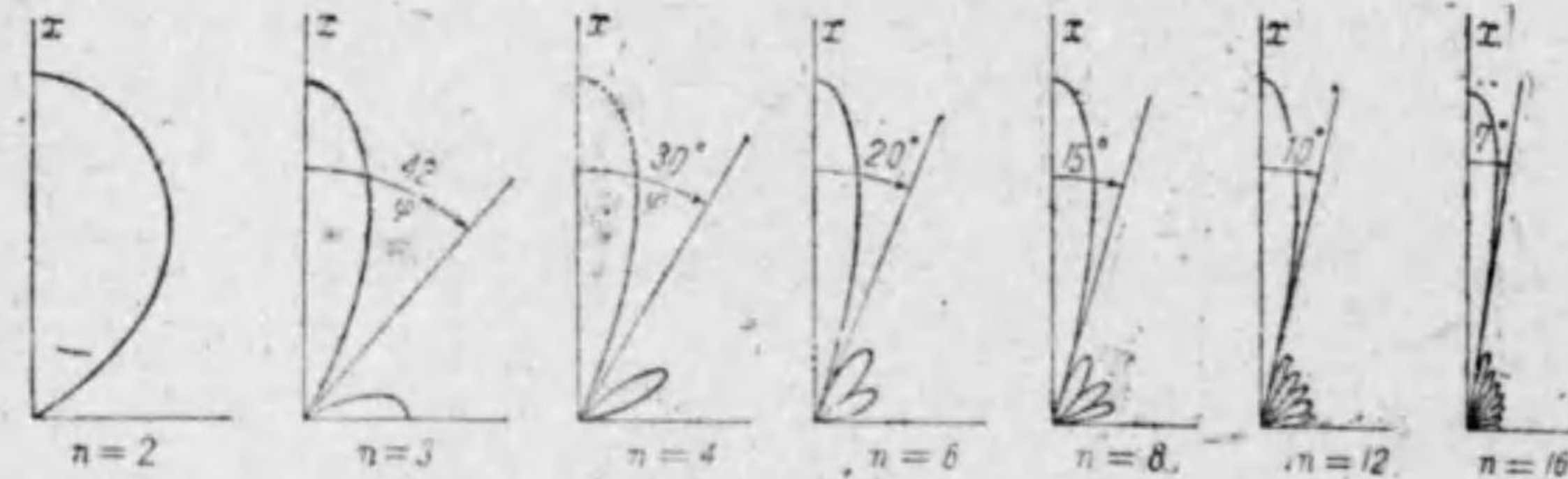
こゝで空間にあきもなく重りもしない様に配列した特別の場合を考へれば、 h も d も共に半波長になる。その場合には $\beta h = \beta d = \pi$ となるから上式は次式となる。

$$E_{\theta\varphi} = k' \frac{I}{r} e^{j(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2} m \cos \theta + \frac{\pi}{2} (n-1) \sin \theta \sin \varphi)} \\ \times \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right) \sin \left(\frac{m\pi}{2} \cos \theta \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} \sin \theta \sin \varphi \right)}{\sin \theta \sin \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} \sin \theta \sin \varphi \right)}. \quad (6.27)$$

上の兩式共に指向性を表すのは終りの項である。そこで指向性を調べて見よう。先づ xy 面上即ち水平面上の指向性を求めて見る、それには上式の分數項に於て $\theta = \pi/2$ とすればよい、即ち

$$D_n = m \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2} \sin\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \sin\varphi\right)} \quad (6.28)$$

こゝで m 倍になつてゐるのは縦に m 列あることを示すものである。之を仔細に計算すれば水平指向性が得られる。 n を 2, 3, 4, 6, 8, 12 及び 16 とした場合の指向性を計算圖示すれば第6.11圖の如くなる。



第6.11圖 横列半波空中線の指向性

次に垂直面内即ち xz 面内の指向性は $\varphi = 0$ と置いて得られる。即ち

$$D_n = n \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)} \quad (6.29)$$

n 倍は前同様水平に n 行あることを表すものである。次の項は (6.20) の指向性の項に他ならないが、之は垂直の方向では 1 であり、それより徐々に減つて軸上では 0 となるものであるが、指向性の主な部分は垂直の方向にあるのであるから、その項はさして考慮にとる必要ない。最後の項だけが重要である、こゝで θ の代りに $\pi/2 - \theta = \varphi$ なる φ を用れば、即ち θ を Z 軸の方から測る代りに x 軸の方から測る様にすれば (6.28) と全く同じになる。

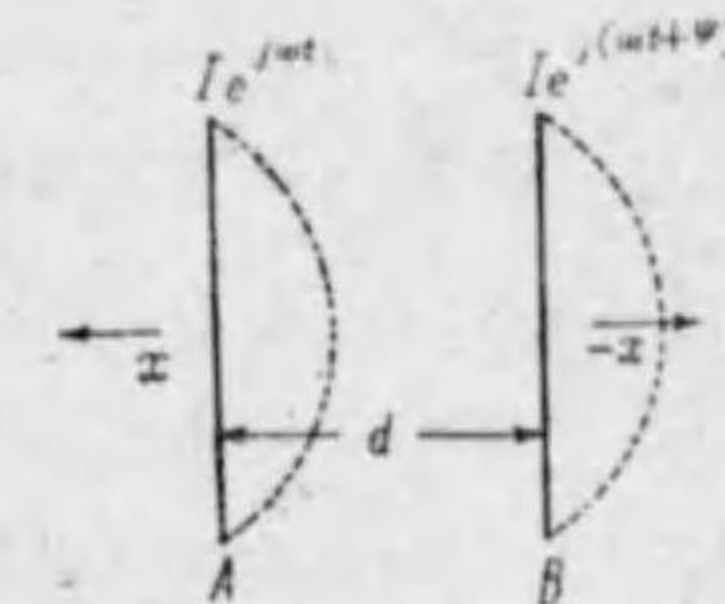
そこで (6.27) の表す所の全指向性を、極坐標の上に於て、強さを長さで

表す様に模型を作るとすれば、主葉は Ox の方向を前後の軸とするツエツベリン飛行船の様な型になる。之に O より出る多くの小さな支葉が附加されるのである。

§6.8 縦列半波空中線の輻射指向性

今度は電波の主葉の方向に縦に半波空中線を列べた場合について考へて見よう。この場合にはどうしても各素線の電流は位相が變らなければならない。

先づ第6.12圖の如く2本の半波空中線の位相關係を調べて見る。A, B の間隔を d とし、兩者の電流振幅は等しく I とし、B の電流の方が A のそれより ψ だけ位相が進んでゐるとする。 x 方向に充分遠い點に於ける輻射強度は、B よりのものが A のより d なる距離を傳播する時間だけ位相が遅れるから、兩者の和は次の値に比例する。



第6.12圖

同様に $-x$ 方向に於ては、次の値に比例する。

$$1 + e^{j(\psi - 2\pi \frac{d}{\lambda})} = 2e^{j\frac{1}{2}(\psi - 2\pi \frac{d}{\lambda})} \cos \frac{1}{2} \left(\psi - 2\pi \frac{d}{\lambda} \right) \quad (6.30)$$

同様に $-x$ 方向に於ては、次の値に比例する。

$$e^{-j2\pi \frac{d}{\lambda}} + e^{j\psi} = 2e^{j\frac{1}{2}(\psi - 2\pi \frac{d}{\lambda})} \cos \frac{1}{2} \left(\psi + 2\pi \frac{d}{\lambda} \right) \quad (6.31)$$

そこで x 方向の輻射が丁度相加つて2倍になるとすれば、その時には $\cos \theta$ が1になる時であるから次の條件が成り立つ。

$$\frac{1}{2} \left(\psi - 2\pi \frac{d}{\lambda} \right) = n_1\pi, \quad \text{但し } n_1 \text{ は整数} \quad (6.32)$$

次に $-x$ 方向でも輻射が相加るとすれば、その條件は同様に次の如くなる。

$$\frac{1}{2} \left(\psi + 2\pi \frac{d}{\lambda} \right) = n_2\pi, \quad \text{但し } n_2 \text{ は整数} \quad (6.33)$$

上の二式より d と ψ を求めれば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} d &= (n_2 - n_1)\lambda/2 = N\lambda/2, \\ \psi &= (n_2 + n_1)\pi = (N + 2n_1)\pi = N\pi, \end{aligned} \right\} \text{但し } N \text{ は整数} \quad (6.34)$$

N の整数値に対応する d, ψ を表示すれば次の如くである。

N	0	1	2	3
d	0	$\lambda/2$	λ	1.5λ
ψ	0	π	0	π

この中で配列の最も充實してゐるのは $N=1$ で $d=\lambda/2, \psi=\pi$ の場合である。

そこで交互に $\lambda/2$ づゝ離れて輻射の主方向に縦に列んでゐる半波空中線の指向性を求めて見よう。既に前節で見た所によれば、必ずしも3次元の空間としての計算を行はなくても、赤道面上の指向性がわかれば充分輻射の全貌がわかるから、簡単に処理することにする。第6.13圖を xy の赤道面として、 y 軸上に



第6.13圖

原点より $\lambda/2$ づゝ離れて、素空中線が次々に π 宛位相が進んであるとする。そこで、この面上 y 軸より θ 方向の輻射強度を求めるのに素空中線の番號が一つ進む毎に、その電流位相は π 宛進み、距離の短縮による位相の進みは

$$2\pi \frac{\lambda/2}{\lambda} \cos \theta = \pi \cos \theta \quad (6.35)$$

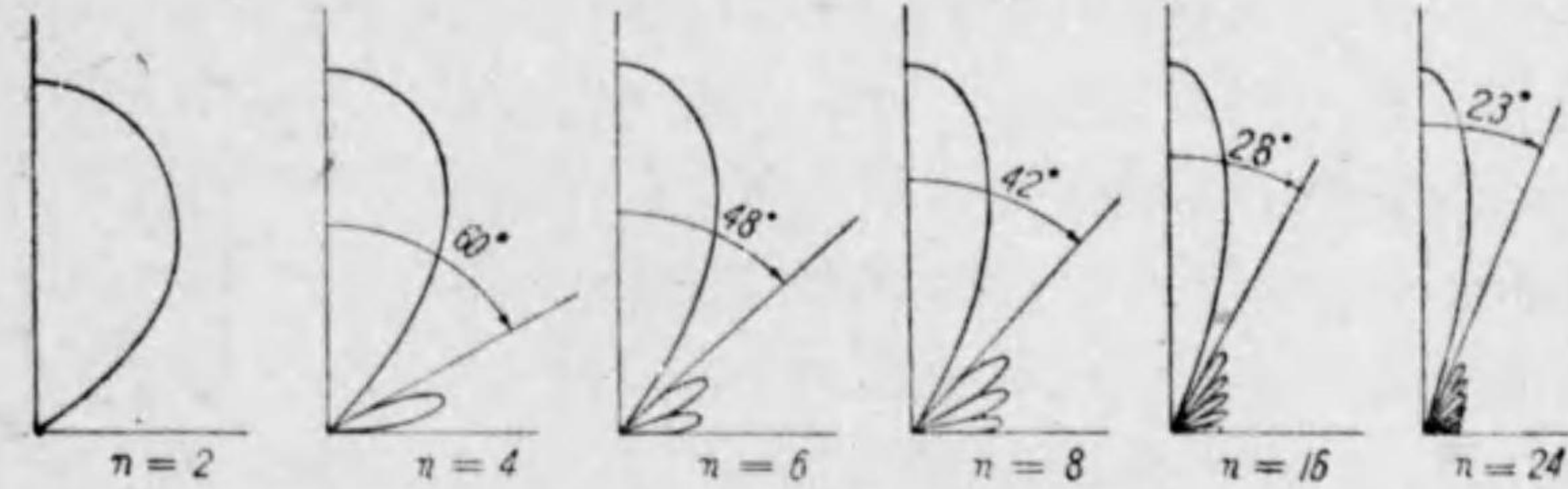
であるから、合せて $\pi(1 + \cos \theta)$ 宛進むことになる。従つて n 空中線ある場合にはそれ等の和として次の等比級数になる。

$$\begin{aligned} & 1 + e^{j\pi(1+\cos\theta)} + e^{j2\pi(1+\cos\theta)} + \dots + e^{j(n-1)\pi(1+\cos\theta)} \\ &= e^{j(n-1)\frac{\pi}{2}(1+\cos\theta)} \frac{\sin\left\{\frac{n\pi}{2}(1+\cos\theta)\right\}}{\sin\left\{\frac{\pi}{2}(1+\cos\theta)\right\}} \end{aligned} \quad (6.36)$$

終りの項が指向性を表してゐるが、特に n が偶数ならばそれは簡単になつて、次の如くなる。

$$D_n = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2} \cos \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)} \quad (6.37)$$

n に 2, 4, 6, 8, 16 及び 24 を用ひて指向性を描けば第6.14圖の如くなる。



第6.14圖 縦列半波空中線の指向性

前節の横列と較べて見れば、同じ数を用ひても指向性の尖鋭度に於て遙かに劣ることがわかる。それで實際この方式はあまり實用されてゐないのである。

§6.9 單向指向性

第6.12圖に於て、 x 方向に於ては兩輻射が丁度相加はるとして、 $-x$ 方向に於ては兩輻射が相殺するとすれば、指向性は單向性になる。そこで(6.31)に於ては次の條件が必要になる。

$$\frac{1}{2} \left(\psi + 2\pi \frac{d}{\lambda} \right) = \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) \pi, \text{ 但し } n_2 \text{ は整数} \quad (6.38)$$

之と(6.32)とより d と ψ を求めれば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} d &= (n_2 - n_1)\lambda/2 + \lambda/4 = N\lambda/2 + \lambda/4, \\ \psi &= (n_2 + n_1)\pi + \pi/2 = (N + 2n_1)\pi + \pi/2 = N\pi + \pi/2. \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

前と同様に N の整数値に対応する d, ψ を表示すれば次の通りになる。

N	0	1	2
d	$\lambda/4$	$3\lambda/4$	$5\lambda/4$
ϕ	$\pi/2$	$3\pi/2$	$\pi/2$

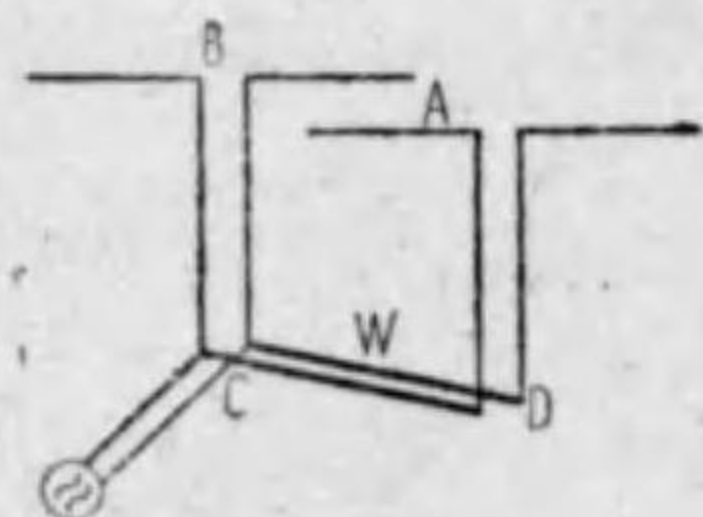
そこで A の方に高周波電力を給電して、B の方は A よりの輻射によつて電流を誘導して、その位相を適宜に加減して上の条件にかなふ様地使用すれば、B は反射空中線と呼ばれる。この位相を加減する方法としては、B 空中線の長さを加減する方法と、第6・15圖の如く空中線の中央より曳降給電線を卸し、その短絡片 S の位置を加減する方法とがあるが、前者の加減は終端効果とその都度變る爲に現場に當つて一々調整すると云ふことが困難である。第2の方法の方が安易に出来る。



第6・15圖

又 B の方に高周波電力を給電して、A の方は B よりの輻射によつて電流を誘導して、その位相を加減して、上の条件を求める方法を採用すれば、A は導波空中線と呼ばれる。位相を加減する方法は上と同様である。

然し乍ら空中線の数が少い時には、最も近い $d = \lambda/4$ の場合でもこの輻射結合が疎である爲、誘導電流の振幅は充分の大きさになり得ない。一本一本の場合には高々 $1/3$ 迄である。従つて、奇麗に所希の單向性を得る爲には兩方共に電力を供給する必要がある。その給電の方法には一例としては第6・16圖の方法がある。A も B も同じ形に給電線を附加して C 點で分岐し、CD 間を波動インピーダンスを加減出来る様にして置いて長さは $\lambda/4$ にして置く、さうすれば §3・11 のインピーダンス變成回路としての對稱回路の最も簡単な線條の場合となり、位相に於ては $\pi/2$ 變り、電力分配の加減は W を調整することによつて達成されるのである。この様



第6・16圖

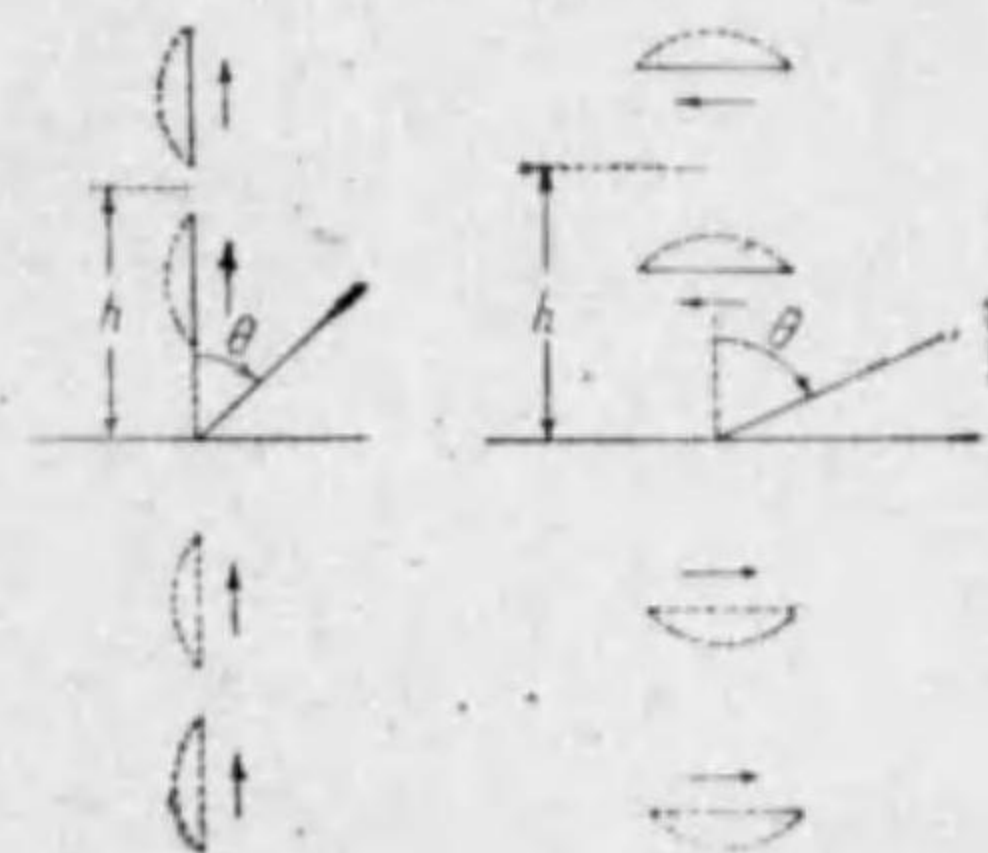
にして兩者共に給電する場合には、嚴密には何れをも反對空中線又は導波空中線と呼ぶのは適當でないが、やはり慣習的に B を反對空中線と呼んでゐる。

各空中線が横列空中線又は縦列空中線である場合でも、それ等の間の位相關係は上記のものとは變つてゐない。四列位になれば兩群共に給電しなくても、一方を輻射結合のみによつて、かなり所希の位相振幅を求めることが出来る。その場合の反射又は導波空中線の調整回路は既に述べた第3・26圖の如きものでよい。

次に §6・3 で取扱つた様なハーモニック空中線の場合でも二本を列べて、一方の輻射を消すことは出来る。唯この場合には二本をきちんと揃へることは意味がなく、飽く迄主輻射方向に對して、各空中線の電流の位相と傳播による位相の變化とを考慮に入れて、列べ方を考へるのである。

§6・10 地面の影響

實際の空中線は必ず地上に建設されるのであるから、地面の影響を無視することは出来ない。土地の導電率と誘電率を最初から嚴密に考慮に入れて行くことは徒らに煩雜になるばかりであるから、先づは地面を完全導體として考へ、次に一般的に考へて見ることにしよう。地面を完全導體とすれば、地上に輻射源である實電流がある時に、地面を鏡の面として映る鏡像の位置に鏡像電流があるとして、地面を取去つて、實電流と鏡像電流とだけが作る輻射を考へればよい。唯その際に第6・17圖の様に、實電流が垂直ならば鏡像電流は實電流と同大同相であるが、實電流が水平ならば鏡像電流は實電流と同大、反對位相であ



第6・17圖

ることは注意しなければならない。このことは電流の0の瞬間の電荷が實と像とで同大反対符號になつてゐることから考へ進めば容易に諒解出来る。

次に指向性に及ぼす影響に就て考へれば、地上の實電流による指向性を D_r とし、實空中線の中心の高さを h とすれば、像と實とが仰角 θ の無限遠に對して生ずる位相差は垂直空中線に對しては $2\beta h \cos \theta$ 、又水平空中線に對しては $2\beta h \cos \theta + \pi$ である。従つて實と虚との合成は前者は

$$1 + e^{j2\beta h \cos \theta} = 2 e^{j\beta h \cos \theta} \cos(\beta h \cos \theta). \quad (6.40)$$

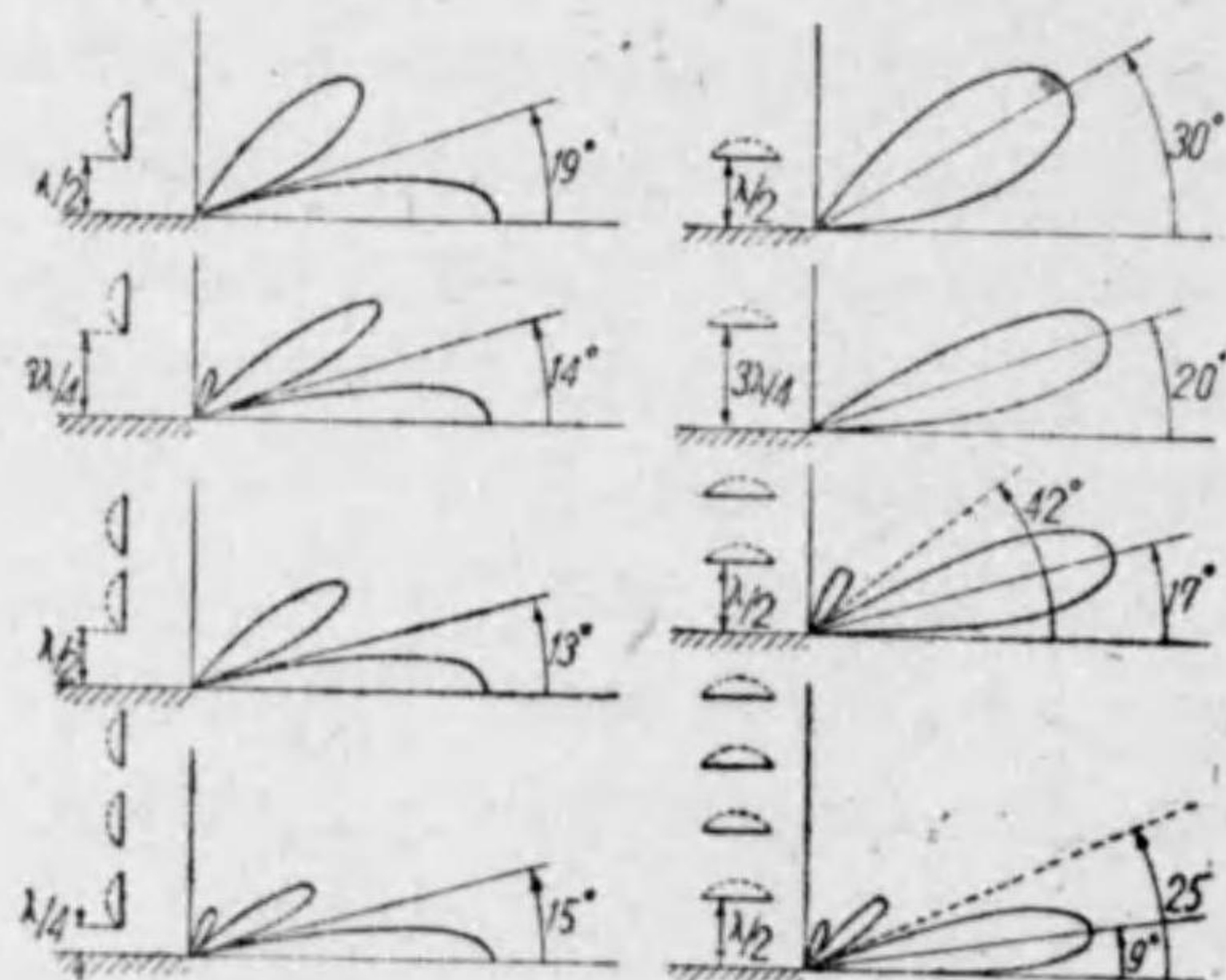
後者は

$$1 + e^{j(2\beta h \cos \theta + \pi)} = -2 j e^{j\beta h \cos \theta} \sin(\beta h \cos \theta) \quad (6.41)$$

となる。従つて結果の指向性は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} D &= \cos(\beta h \cos \theta) \cdot D_r \dots \dots \text{垂直,} \\ D &= \sin(\beta h \cos \theta) \cdot D_r \dots \dots \text{水平.} \end{aligned} \right\} \quad (6.42)$$

之を何段かの半波空中線列が地上に垂直又は水平に張られてある場合に適用して、計算した結果を圖示すれば第6.18圖の如くなる。



第6.18圖 完全導體の地上に於ける指向性

次に土壌の導電率及び誘電率を考慮に入れれば、鏡像の電流は大いさも位相も共に夫々 ϵ と κ に相應して變つて来る。之は或る程度詳細に計算され

てゐるが、こゝではその結果だけを述べるに止めて置く。即ち水平空中線の場合には、大地の電氣的性質の如何に關せず、大地を完全導體と考へた場合と殆ど變りがない。垂直空中線の場合には θ の小さい即ち仰角の大きい方に於ては殆ど變りがないが、水平に近づくに従つて非常に變つて来る。それは波の地面に接觸して進む部分は有限の導電性の爲にオーム損として熱に化し去る爲であつて、無限遠では水平の方向は0になり、それにつれて少し仰角のある方向へも影響があるのである。然し極く大體の話として仰角 5° 以上になればあまり大差はない。それで結局の處、無限遠の指向性を考へる際には、空中線が垂直であつても水平であつても變りがなく、大地が完全導體の場合の水平空中線の指向性に近くなると結論されるのである。

§6.11 指向性空中線の利得

指向性空中線を用ひれば、單なる半波空中線を用ふるより、目的の方向に對して輻射電力を集中出来るので、それだけ利得があるわけである。その利得を數値で表すに、先づ基準になる即ち 0 db の空中線を定めなければならないが、それには通常半波空中線を用ひる。

この基準の半波空中線を實際に用ひる際には、輻射強度の最も強い方向を目的の方向に一致させるのが自然である。そこでこの空中線の效力の度合はこの方向に於ける單位立體角内のエネルギーの流量と、空中線に供給された電力、即ち空中線のオーム損は輻射電力に對して無視出来るから、全立體角へのエネルギー流量の總和との比で與へられる。即ち P_0 を全輻射電力、 S_{m_0} を最も強い輻射電力束の強度とすれば、 S_{m_0}/P_0 で效力の度合が表せるのである。この比は又單位電力を供給した時の目的方向へのエネルギー流の密度である。

指向性空中線の效力の度合も同様に、全輻射電力を P 、目的方向の單位立體角に於けるエネルギー流量を S_m とすれば、 S_m/P で與へられる。

そこで指向性空中線の利得は、之等兩者の效力の度合の比であるから次式で與へられる。

$$G = \frac{S_m}{P} / \frac{S_{m_0}}{P_0} \quad (6.43)$$

S_m, S_{m_0} は目的方向の輻射電氣力の 2 乗をとればよいから簡単であるが、 P と P_0 とは空中線より充分遠い球面上全面に亘つて輻射電氣力の 2 乗を積分しなければならず、この計算はなかなか容易ではない。斯様に個々の計算は容易ではないが、計算を完遂した結果の (Sterba) 利得の値を見ると、案外極めて簡単に次の様に取り扱つた原則と極く近似してゐるのである。それで我々は實用上次の考へ方を採用したい。

基準空中線の電流を I_0 とすれば、 $P_0 = I_0^2 R$ であり、 R は輻射抵抗で約 73 オームである。又 S_{m_0} は I_0^2 に比例するからその比例常数を k とすれば、 $S_{m_0} = k I_0^2$ である。次に指向性空中線の半波空中線の数を n 個とし、各半波空中線の電流を I とすれば、 $P = n I^2 R$ である。この R を均一にとつてそれを 73 オームとする處に近似計算の省略があるのである。次に目的の方向に於ける電氣力は nI に比例するから、 $S_m = k(nI)^2$ である。そこで (6.43) を計算すれば次の如くなる。

$$G = \frac{k(nI)^2}{nI^2 R} / \frac{kI_0^2}{I_0^2 R} = n \quad (6.44)$$

即ち利得は半波空中線の数 n である。之を db で表せば、

$$G = 10 \log_{10} n \quad (6.45)$$

であつて、 n が 2 倍になる毎に 3 db 宛を加へるとすればよい。故に n が 2, 4, 8, 16 及び 32 となるに従つて、 G は 3, 6, 9, 12 及び 15 db となるのである。又反射空中線が附加されれば後方への輻射が全部前方へ振向けられるから、 G はやはり 3 db を加算するのである。

そこで利得を上げる爲には n を多くすればよいことになる。それならば

半波空中線をいくらでも密に配置して n を増せばよいではないかと云ふ疑問が起る。2 本の空中線を極く近接して配置した場合に、 $P = 2 I^2 R_0$ ($R_0 = 73$ オーム) より定まる電流 I が各空中線に流れるかと云ふにそうはゆかない。之等は遠方から見れば一本の空中線に過ぎないから全體として $P = I_0^2 R$ の I_0 として見られるだけである。従つて各空中線の電流は $I_0/2$ である。従つて $P = 2(I_0/2)^2 R$ と置けば R は R_0 の 2 倍になつてゐるのである。即ち之からわかる様に半波空中線をやたらに密に配列しても、輻射抵抗が増す爲に利得はあがらない。限度は大體半波長の間隔迄で、それ以下にしても利得はあがらない。この事は Sterba が計算してゐる。實際問題としては各素空中線に同大同相の電流を給電する方法も間隔が半波長ならば極めて簡単に奇麗に仕上がるが、之より短くなると容易でなく複雑になるから、この方からしても距離は半波長と云ふことに限定される。

§6.12 圓壻面配列空中線

今迄の配列の仕方は一直線上又は一平面上に素空中線を配列したものであるが、幾何學的圖形からしても、圓周上に即ち空中線を圓壻の母線の位置に配列する方法が直ちに考へられる。この方法は勿論或る固定した方向に對して指向性をもたせる意味に於ては平面のものより劣るかと思はれるが、素空中線を正多角壻の稜の位置に配する時には一邊の狭む角度を廻轉する毎に前と全く同じ状態になる爲に、時々指向性の主方向を轉換する様な用途に對しては實に好適となり、他の追従を許さぬものとなるのである。

そこで問題になるのは、各素空中線の電流の位相をどの様な考へ方で定めたらよいかと云ふことであるが、今迄の空中線を取扱つて來た習慣からしては、次の三つの考へ方がある。一つはこの圓壻形配列では指向性の主方向に對して相當の横幅をもつてゐるから、横列空中線の擴張と考へて、主方向に對して圓の中心點を通つて垂線を引きそれより前方を主空中線とし、後方を

反射空中線とする様な考へ方である。又も一つは指向性の主方向に對して縦に相當の幅があるから縦列空中線の擴張と考へて單向性になる様にする方法である。何れも各素空中線毎に一々別個の計算をしてゆかなければならないから、位相決定はなかなか容易ではない。最後には各素線よりの電波の位相が主方向に於て全部一致する様に定める方法である。この場合他の方向には一顧も與へないのであるが、主方向が最も強烈であるから他は當然ひとつそくする筈である。この方法ならば、中心を通つて主方向への垂線を描き、各素線よりその直線へ下した垂線の足の位相角だけを前方の素線に於ては遅らし、後方の素線に於ては進ませて置けばよいから、事柄は見易くなる。そこで最後の方法に就て考へることにする。

第6-19圖に於て O を圓の中心とし、 XX' を指向性の主方向に對する垂線とし、1, 2, 3, 4 を XX' 及び YY' に關して鏡像の位置にある四つの素線の位置とする。圓に張る弦の半分の d に相當する電氣位相角を ϕ_d とすれば、

$$\phi_d = 360^\circ d / \lambda \quad (6.46)$$

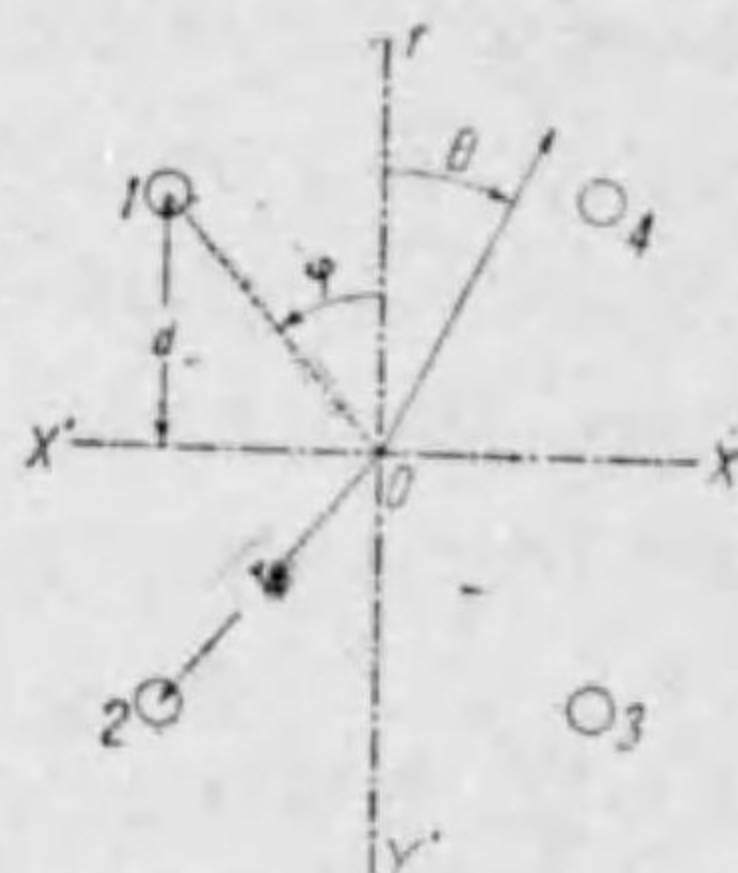
である。そこで XX' 線上にあると假想する素線の電流の位相を基準にとれば、素線 1, 2, 3 及び 4 の電流の位相を夫々 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 及び ϕ_4 とすれば、それらは次の値をとらなければならない。

$$\phi_1 = \phi_4 = -\phi_2 = -\phi_3 = -\phi_d \quad (6.47)$$

次に半径の電氣位相角を ϕ_r とすれば

$$\phi_r = 360^\circ r / \lambda \quad (6.48)$$

であるから、 θ の方向の無限遠に於て、四つの素空中線よりの輻射の瞬時値は次の割合である。



第6-19圖

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdots \sin[\omega t - \phi_d + \phi_r \cos(\varphi + \theta)], \\ 2 \cdots \sin[\omega t + \phi_d - \phi_r \cos(\varphi - \theta)], \\ 3 \cdots \sin[\omega t + \phi_d - \phi_r \cos(\varphi + \theta)], \\ 4 \cdots \sin[\omega t - \phi_d + \phi_r \cos(\varphi - \theta)]. \end{aligned} \right\} \quad (6.49)$$

この四つの値を加へれば次の如くなる。

$$4 \sin \omega t \cos(-\phi_d + \phi_r \cos \varphi \cos \theta) \cos(\phi_r \sin \varphi \sin \theta) \quad (6.50)$$

所で $\phi_d = \phi_r \cos \varphi \quad (6.51)$

であり、(6.51)の $\sin \omega t$ を除いた残りが指向性を表す部分であるからそれだけ摘出すれば次の如くなる。

$$D_\theta = \cos[\phi_r \cos \varphi (1 - \cos \theta)] \times \cos(\phi_r \sin \varphi \sin \theta). \quad (6.52)$$

$\theta = 0$ に於てはこの値は $D_0 = 1$ となり、 $\theta = 180^\circ$ に於ては、即ち後方への強度は

$$D_{180} = \cos(2\phi_r \cos \varphi) \quad (6.53)$$

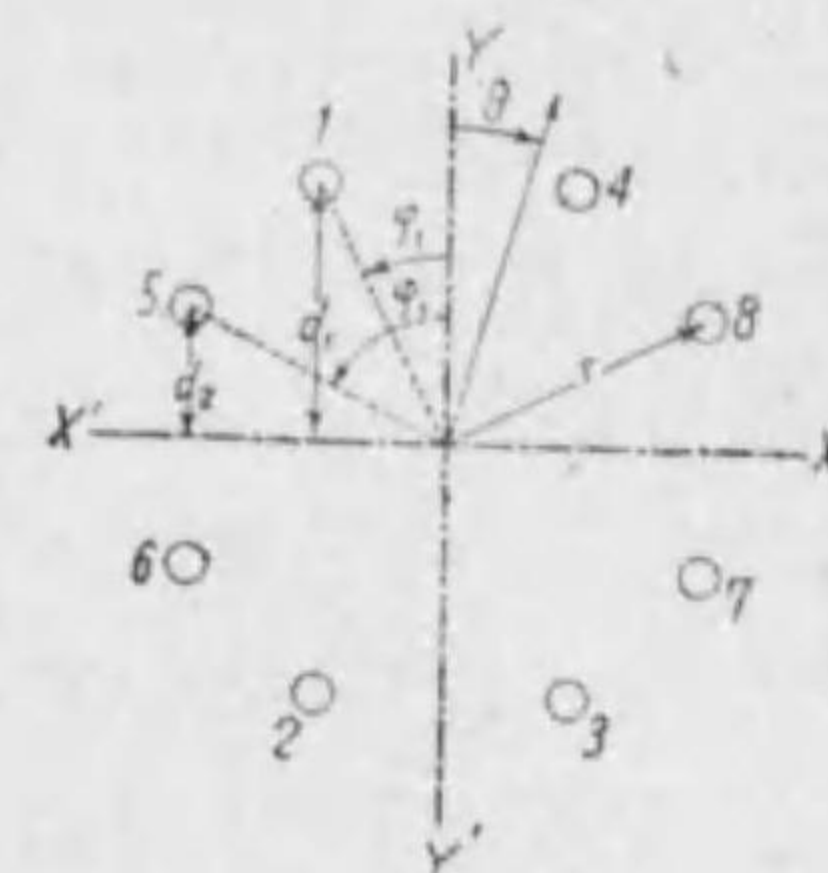
となる。

そこで素線を何本配列した場合でも、以上の様に4本宛の組に別けられる様な配置でありさへすれば、この様な準備で指向性は容易に求めることが出来る。この様な配置と云ふことは4の倍数の等間隔配置である。全體の指向性を求めるより先に後方の輻射強度を顧慮して使用範囲の限度を定めて置く必要がある。先づ第6-20圖の様な8本配置の場合を考へて見よう。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 = 22.5^\circ, \\ \varphi_5 = 67.5^\circ. \end{aligned} \right\} \quad (6.54)$$

であるから、

$$\left. \begin{aligned} \phi_r \cos \varphi_1 &= (r/\lambda) 360^\circ \cos 22.5^\circ = (r/\lambda) 332^\circ, \\ \phi_r \cos \varphi_5 &= (r/\lambda) 360^\circ \cos 67.5^\circ = (r/\lambda) 138^\circ \end{aligned} \right\} \quad (6.55)$$



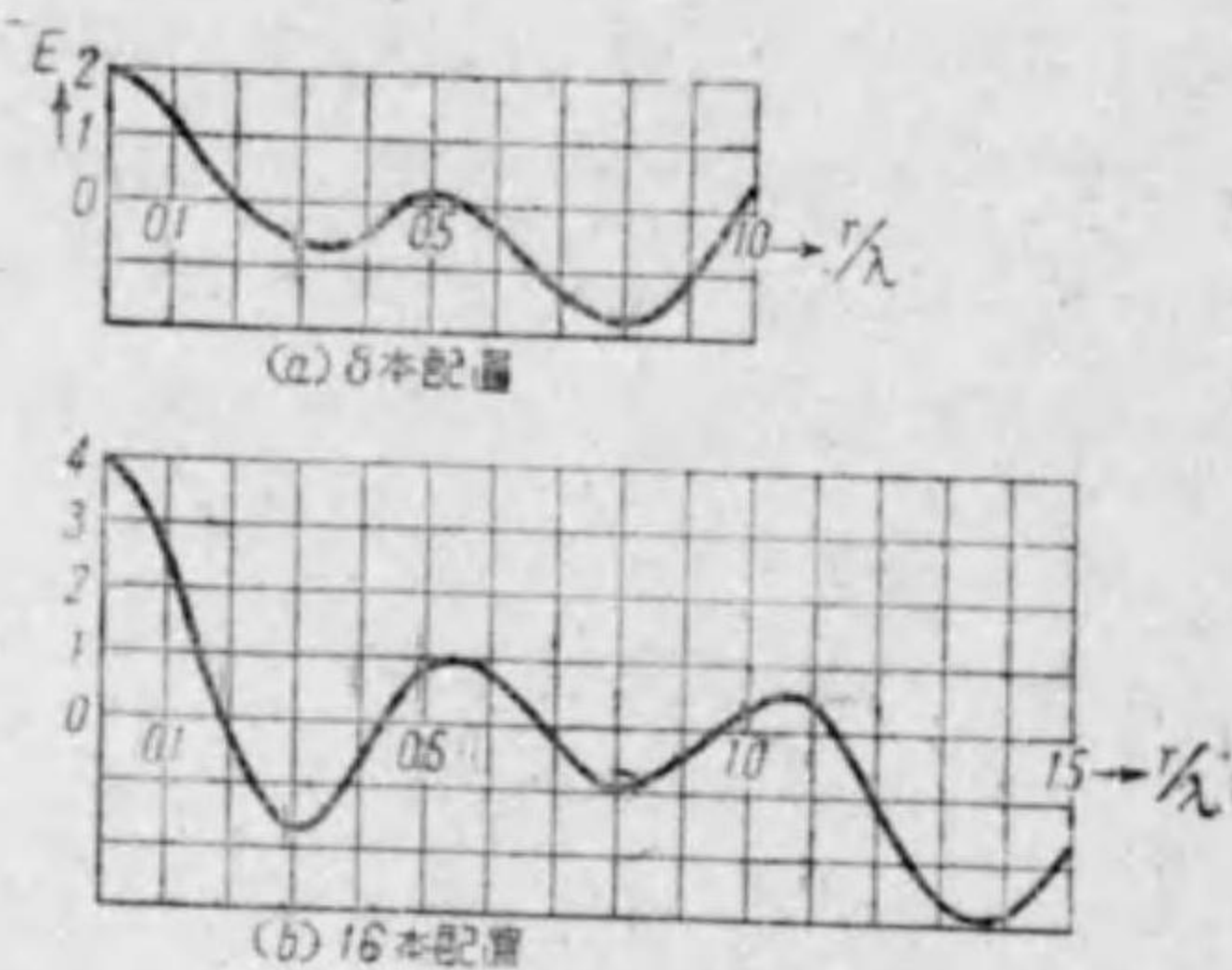
第6-20圖

となり、1, 2, 3 及び 4 と 5, 6, 7 及び 8 との後方への和は (6.54) を用ひて次の如くなる。

$$D_{180} = \cos\left(\frac{r}{\lambda} 664^\circ\right) + \cos\left(\frac{r}{\lambda} 276^\circ\right). \quad (6.56)$$

之を r/λ を変数として図示すれば第6.21圖(a)の如くなる。

この図を見れば、 $r/\lambda=0$ の所では 2 であるが、 r/λ が段々大きくなるに従つて減少し、 $r=0.19\lambda$ で 0 になり、それより又少し増すが、今度の極大値は 0.3 位で又減少して $r=0.46\lambda$ で又 0 になり、……と云ふ変化を辿るが、 $r/\lambda=0$



第6.21圖

の點と云ふのは前方も後方もその他の方向も全部一様の値を示すわけである。この曲線が表してある後方の値がどうあらうと前方はいつも 2 になつてゐるわけであるから、この曲線が 0 になつてゐる所では丁度單向性となるわけである。それ以外の所では後方へ出てゐるのであるが、後方へ出るものが前方のそれより遙かに小さければ、利得の上では問題にする價値がないわけである。そこで

$$r/\lambda = 0.15 \sim 0.65 \quad (6.57)$$

の範囲内では略々單向性の指向性が得られると判定出来るのである。

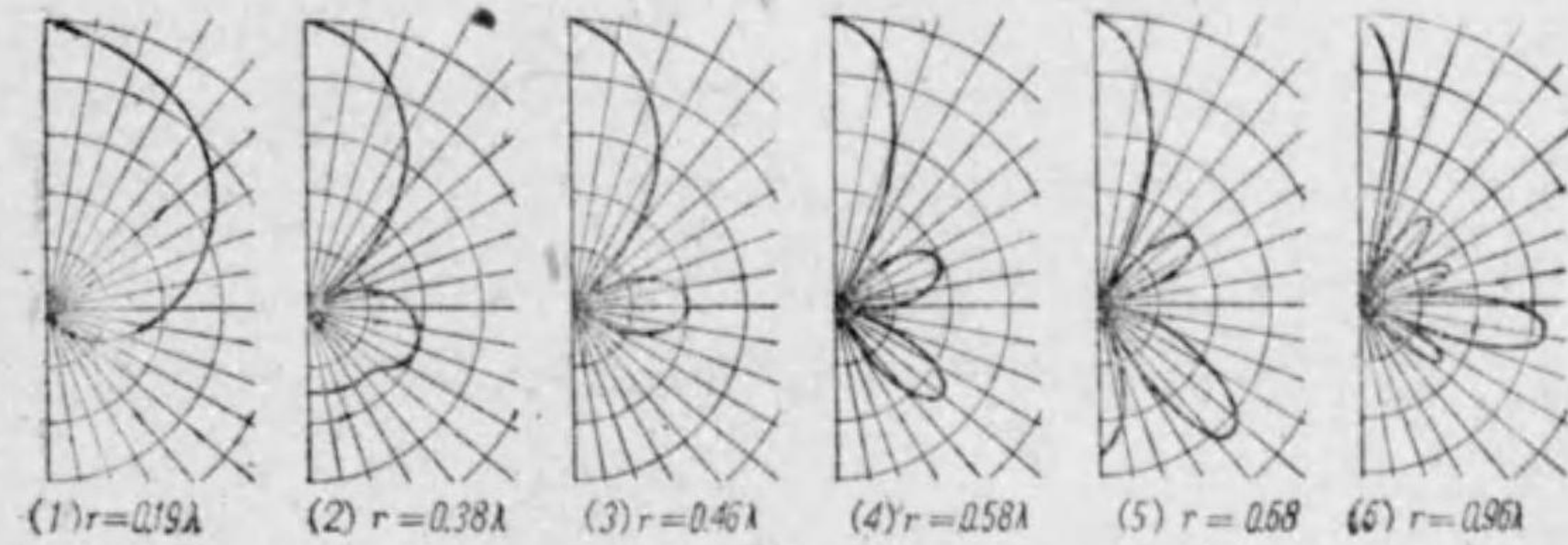
次にこの範囲内の指向性を計算して見よう。先づ $r/\lambda=0.19$ とする。(6.52) の中の値は (6.55) を用ひて

$$\left. \begin{aligned} \phi_r \cos \phi_1 &= \phi_r \sin \phi_2 = 0.19 \times 332^\circ = 63^\circ, \\ \phi_r \cos \phi_5 &= \phi_r \sin \phi_1 = 0.19 \times 138^\circ = 26^\circ. \end{aligned} \right\} \quad (6.58)$$

指向性を表す (6.52) は次の如くなる。

$$\begin{aligned} D_\theta &= \cos [63^\circ(1 - \cos \theta)] \cos (26^\circ \sin \theta) \\ &+ \cos [26^\circ(1 - \cos \theta)] \cos (63^\circ \sin \theta). \end{aligned} \quad (6.59)$$

之を θ を変数として描けば第6.22圖の(1)の如くである。



第6.22圖 相加法8本配置の指向性

r/λ に 0.38, 0.46, 0.58, 0.68 及び 0.96 を用ひて同様の計算を行ひ圖示すればその他の圖となる。どうやら指向性空中線として使用出来ると思はれる。

次にこの様な配列方法での 16 本配置の場合について計算して見る。

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= 11.25^\circ, \\ \phi_5 &= 33.75^\circ, \\ \phi_9 &= 56.25^\circ, \\ \phi_{13} &= 78.75^\circ \end{aligned} \right\} \quad (6.60)$$

であるから、後方の強度は次式となる。

$$\begin{aligned} D_{180} &= \cos\left(\frac{r}{\lambda} 706^\circ\right) + \cos\left(\frac{r}{\lambda} 597^\circ\right) + \cos\left(\frac{r}{\lambda} 396^\circ\right) \\ &+ \cos\left(\frac{r}{\lambda} 144^\circ\right) \end{aligned} \quad (6.61)$$

であり、之を圖示すれば第6.21圖(b)である。即ち

$$r/\lambda = 0.15 \sim 1.20 \quad (6.62)$$

の範囲では略々單向性と思ふことが出来る。次に指向性は先づ $r=0.43\lambda$

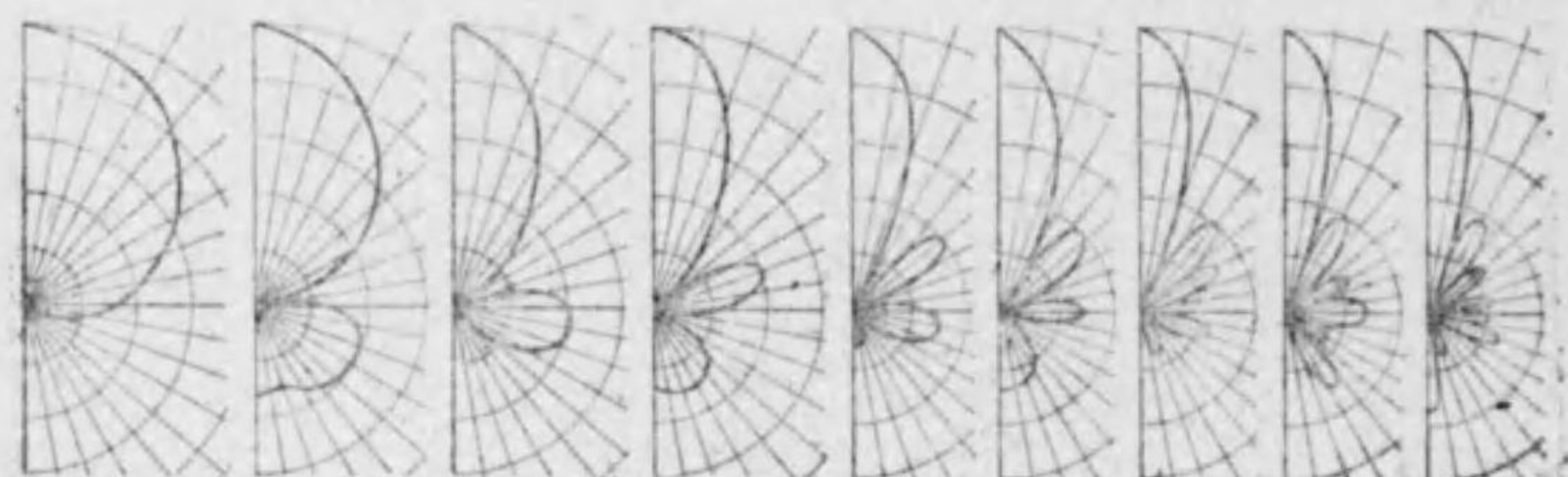
とすれば,

$$\left. \begin{aligned} \phi_r \cos \varphi_1 &= 0.43 \times 360^\circ \cos 11.25^\circ = 152^\circ, \\ \phi_r \cos \varphi_3 &= \quad \quad \quad 33.75^\circ = 128^\circ, \\ \phi_r \cos \varphi_9 &= \quad \quad \quad 56.25^\circ = 85^\circ, \\ \phi_r \cos \varphi_{13} &= \quad \quad \quad 78.75^\circ = 31^\circ \end{aligned} \right\} (6.63)$$

であるから、(6.52) の指向性は次の如くなる。

$$\begin{aligned} D_0 &= \cos [152^\circ(1 - \cos \theta)] \cos (31^\circ \sin \theta) \\ &+ \cos [128^\circ(1 - \cos \theta)] \cos (85^\circ \sin \theta) \\ &+ \cos [85^\circ(1 - \cos \theta)] \cos (128^\circ \sin \theta) \\ &+ \cos [31^\circ(1 - \cos \theta)] \cos (152^\circ \sin \theta). \end{aligned} \quad (6.64)$$

之で θ に関して計算圖示すれば第6.23圖の(3)の如くなる。 r/λ に



(1) $r=0.2\lambda$ (2) $r=0.3\lambda$ (3) $r=0.4\lambda$ (4) $r=0.5\lambda$ (5) $r=0.7\lambda$ (6) $r=0.8\lambda$ (7) $r=0.9\lambda$ (8) $r=1.1\lambda$ (9) $r=1.2\lambda$

第6.23圖 相加法16本配置の指向性

0.21, 0.36, 0.55, 0.72, 0.82, 0.96, 1.12 及び 1.22 を用ひて同様の計算を行ひ圖示すればその他の圖の如くなる。これ等の圖を見れば實にかなりの廣い周波帯域に亘つて有効の指向性を呈してゐることがわかる。

以上のことは興味本位に唯取扱つただけの様にも思はれるかも知れないが事實斯の如き一見複雑の電流位相を與へることが出来れば實用上甚だ有益なるのである。それについては次章で述べることにする。

§6.13 部分波空中線の指向性

何分の一波長の長さの空中線を種々配列して特殊の目的にかなふ指向性をもたせると云ふことは、せいぜい放送波帯域迄で、それより長い波長ともなれば、配列の間隔が數軒にもなつて實施出来ないことになる。

扱て配列によつて達しようとする目的は二つあつて、一つは放送波を送るのに聴取者の分布に即應する様に放送空中線に指向性をもたせ度い場合である。も一つは放送波の地表波は殆ど一定の状態に傳播されるが、空間に進む所謂空間波は上空で電離層によつて反射せられて地表に戻つて來る時位相が絶えず變化する爲に、受信地點では先の地表波と後の空間波とが合成せられるから、両者が丁度反對位相になる時は相殺するし、位相が合ふ時は増大して、所謂フェーディングを起す。斯うなると如何に放送電力を増してもフェーディングの爲に放送を安定に聴取出来ないことになる。その爲に放送電力を増して大いにサービス面積を廣くしようと思ふならば、空間波をずつと減らしてフェーディングがない様にしなければならない。斯様の目的に用ひる空中線をフェーディング防止空中線と云ふ。

地表上に於ける指向性を與へることは、部分波空中線の各メンバーを半波長のもの又は素片電氣振動と考へて、夫々の位相と振幅とを按配することに依つて所期の指向性を求めることは、今迄述べた所により容易に達成することが出来る。然し、後者の技術は大電力放送に特有の事柄である上に、今迄述べた所とは聊か異なる方法である。

大體半波長又はそれ以下の空中線を、先端を開放端とした儘で地上で勵振すれば、屢々述べた様に垂直面内の指向性は第6.24圖の如く大體半圓形をなしてゐる。その中の高角度の



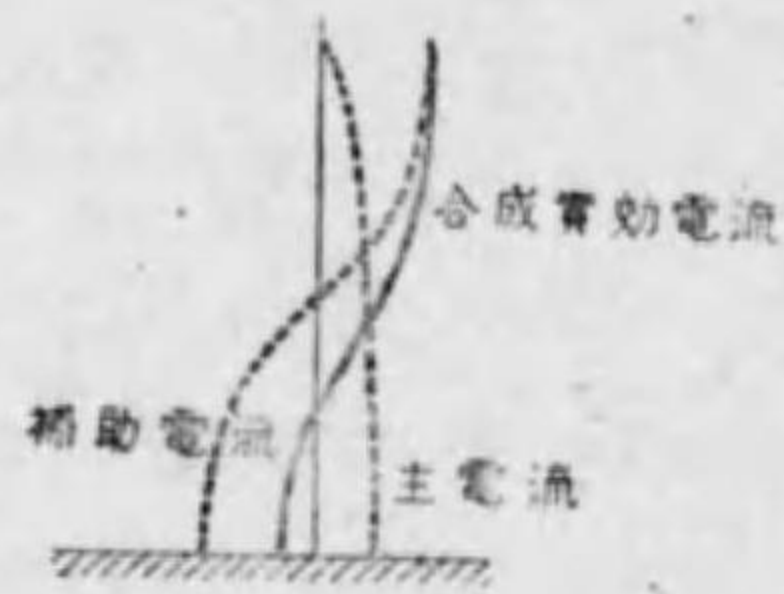
第6.24圖

ものが電離層から反射せられるから、それを減じなければならない。それが

爲に最も容易に考へられるのは同圖點線の如き指向性をもつ空中線を附加へて、その位相と前者と丁度反對位相にすれば、兩者の合成結果は高角度輻射が大きく削減された低角輻射になる。第6・25圖の如く中央に電流節がある様な電流分布では、水平方向の電界が0であつて、丁度補助空中線として望まれる指向性を有してゐる。之を主空中線とで合成した電流分布は第6・26



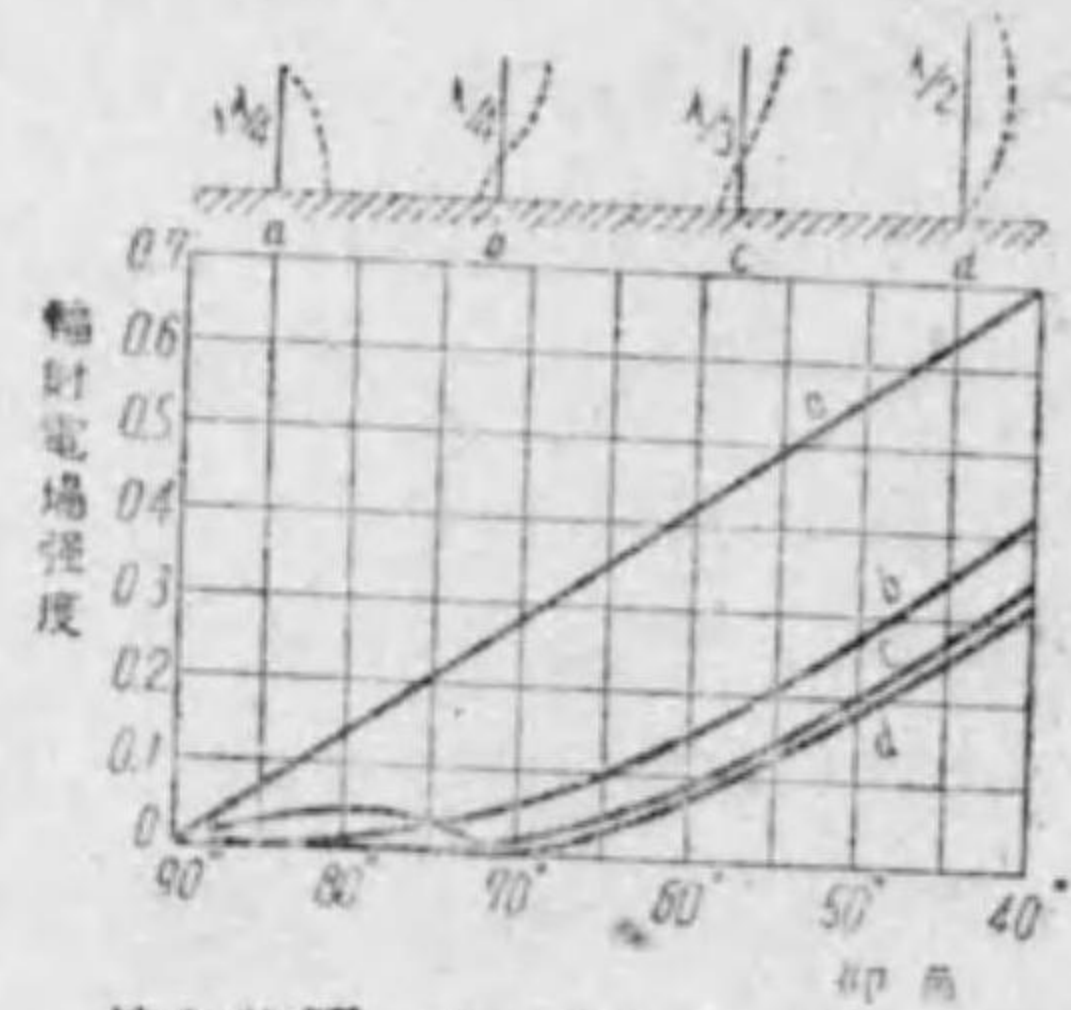
第6・25圖



第6・26圖

圖の如く空中線の下方に電流節を有するものになる。なほ兩電流を別々の空中線而建て、獨立に配置しなくても、空中線に給電する導線に補助空中線としての電流分布を持せる様にすれば、一個の空中線で兩者の作用を行はせることが出来て好都合である。斯様に

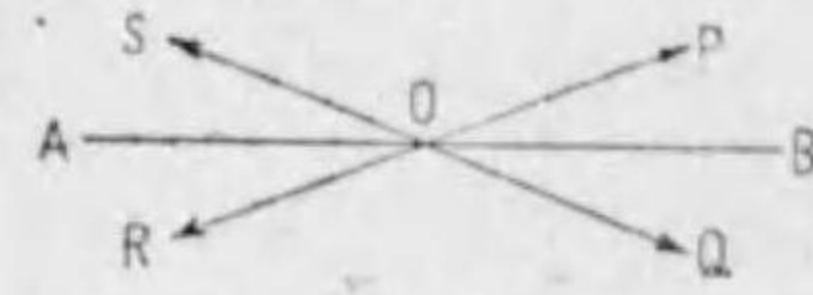
して計算した垂直面内の指向性は第6・27圖の如くである。この圖で解る様に空中線をずつと高くして地上に半波長を載せるのがフェーディング防止に最も有效である。それで従来は長波の場合にしか用ひなかつた様な二三百米の鐵塔を放送にも用ふる様になつて來た。かうなると鐵塔の外側に銅帶を張つて鐵塔自身を空中線に用ひれば、鐵塔が一基で済むから甚だ經濟になる。斯るものを塔空中線と呼んでゐる。



第6・27圖 アンチフェーディング 空中線の高角輻射

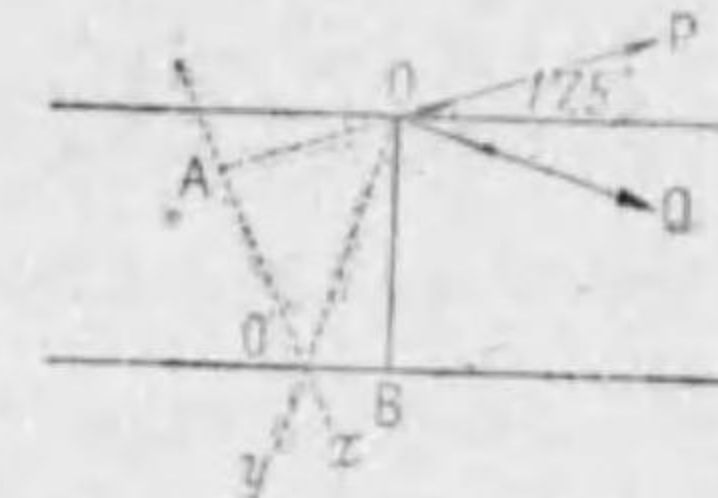
§6・14 長い定常波空中線の組合せ

素片電流又は半波空中線の組合せに関する議論を終りとして、§6・3 で取扱つた定常波空中線の長いものも特殊の指向性をもつてゐるから、之を巧みに組合せれば良い單向指向性を得ることは出来よう。之を實現して實施に先鞭をつけたのは米國の RCA 會社である。第6・4圖で $n=16$ の場合即ち全長 8λ のものは、空中線と 17.5° の傾きの圓錐の母線の方に於て最も強い指向性を呈してゐる。そこで第6・28圖に於て、AOB をその空中線として、OP の方向だけを生かし他の方の指向性を消す様に考へて見る。その爲に AOB と同じ空中線を反



第6・28圖

對位相にしたものを附加して見る。先づこの紙面に AOB と平行に配置することによつて、紙面に垂直の方向の部分は相殺出来るが、紙面内にある OP, OR, OQ, OS の方向に對しては何の考慮も拂はれてゐないことになる。そこで、OP, OR の方向では相加はり、OS, OQ の方向を相殺する様に考へて見る。



第6・29圖

第6・29圖に於て O を前圖の O と同じとする時、OP を反對の方向に延ばして、OA を $\lambda/2$ にとり、OA に垂直の Ax なる線を描く時、もう一方の反對位相の空中線の中心が Ax 上に在れば、兩空中線の OP 方向に於ける距離差が $\lambda/2$ であるから、OP 方向では兩空中線の輻射は相加はる。次に OQ に垂直の Oy を描く時、反對位相の空中線の中心が Oy 上に在れば、OQ, OS 方向の輻射は相殺される。そこで兩方の要求を満足する爲には Oy と Ax の交點 O' に中心が在ればよいことになる。そこで實際の O' の坐標は OB と $O'B$ であるから、之等を計算して求めると次の通りである。

$$OB = OO' \cos 17.5^\circ = \frac{OA \cos 17.5^\circ}{\cos(90^\circ - 2 \times 17.5^\circ)} = \frac{\lambda}{2} \frac{\cos 17.5^\circ}{\cos 55^\circ} = 0.833\lambda,$$

$$O'B = OO' \sin 17.5^\circ = \frac{\lambda}{2} \frac{\sin 17.5^\circ}{\cos 55^\circ} = 0.263\lambda.$$

之を見れば O'B が OB より遙かに小さいから、紙面に直角の方の輻射もかなり相殺されることになり、萬事都合がよいことになる。そこで第6.28圖に戻つて略：OP と OR の方向だけに輻射が集中されることになつたのである。そこで反射空中線を之と同じに作つて、位相に於ては 90° 進ませ

たものをこの中間に配置すれば OR の方向を打消して OP の方向だけに指向性を集中することが出来る。最後の仕上りの模様は第6.30圖の如くである。この空中線の利得は約 12 db であることが發明者の計算によつ

て示されてゐる。實際案外少い様に思はれるが、それは導線と

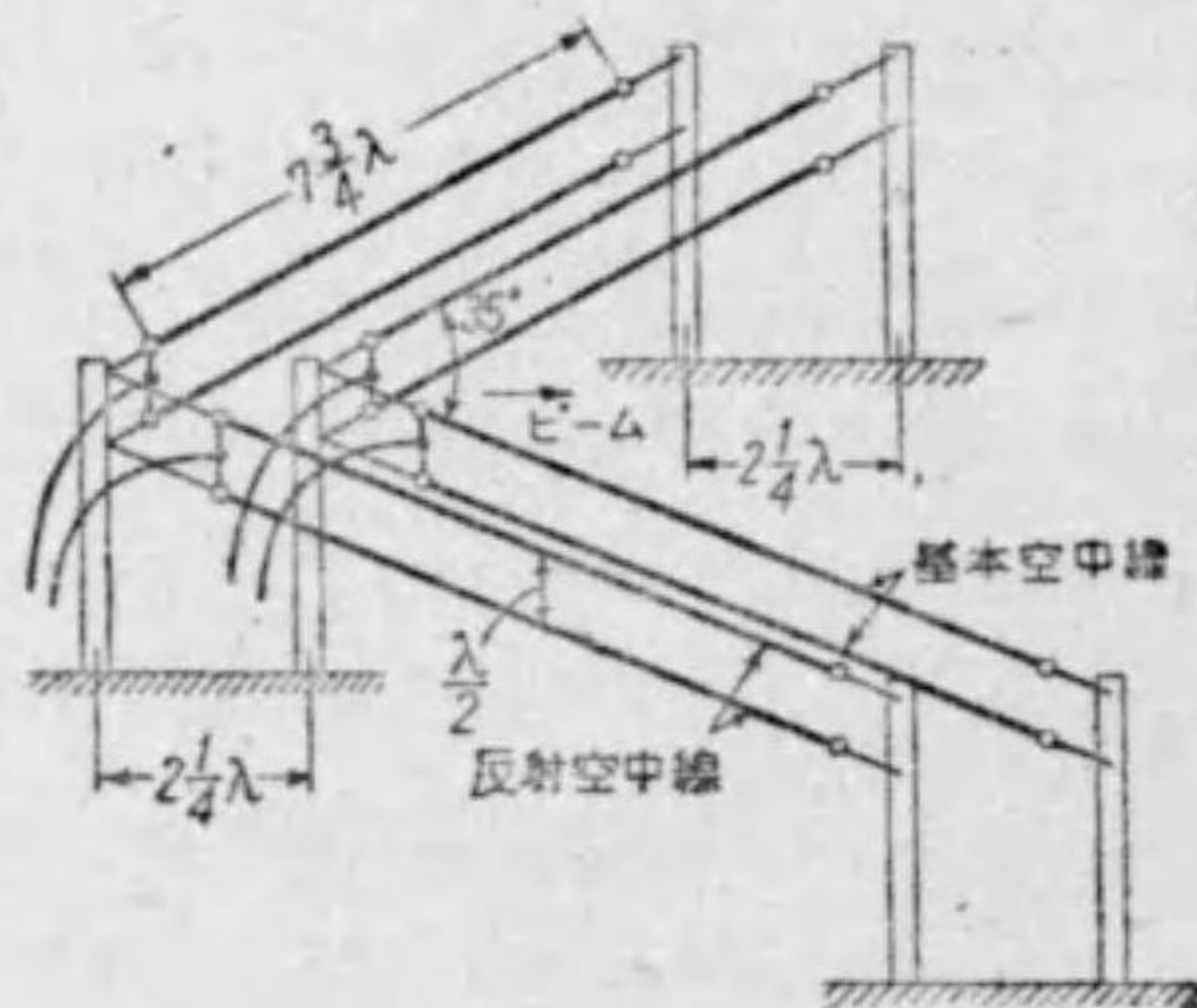
17.5° しか離角してゐなくて、本來微弱のものを合成するのであるから無理もないのである。

この空中線を RCA では縦に配置したり、又は水平に配置したりして実施してゐるが、前者の場合には線を傾斜させて、指向性を水平にする様にしてゐる。

RCA が最も進んだものとして実施してゐるのには V 型と稱して第6.31圖の如きものもある。之等を RCA では總稱してハーモニック空中線と名付けてゐる。



第6.30圖

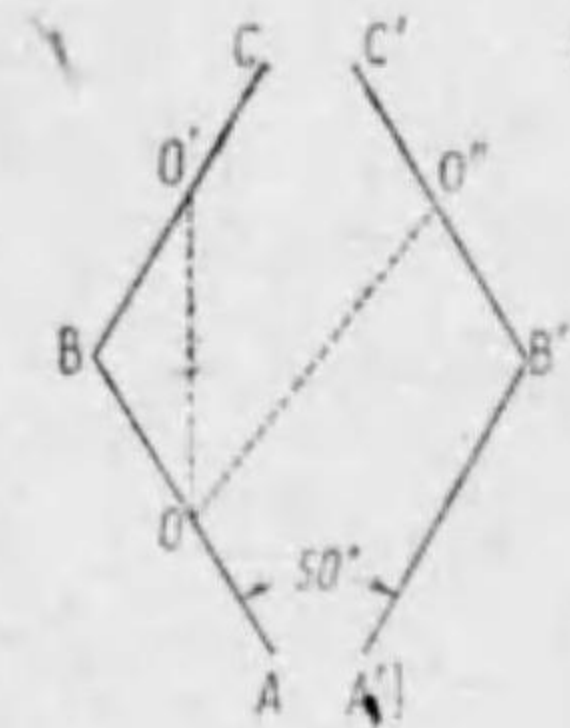


第6.31圖 RCA V型ハーモニック空中線

§6.15 長い進行波空中線の組合せ

進行波空中線は §6.5 に見る通り、定常波の場合と異つて、單向性の圓錐狀指向性をもつてゐるから、之は前節より簡単な組合せ方で單向性の指向性を

得ることが出来る。米國の ATT 會社で行つてゐるのは第6.32圖に見る様な菱形空中線である。A と A' に反對位相の電源を結び夫々 ABC, A'B'C' へ進行波を通ずるのである。その際には第6.8圖に見る通り、 $l=4\lambda$ の時には 25° の方向に指向性が向いてゐる。そこでこの菱形の各邊共に 25° の圓錐形指向性を持つてゐるが、AB 邊と A'B' とは



第6.32圖

電流が反對位相である爲に、輻射電氣力は AB 及び A'B' に對して逆位相になつてゐる。その爲に丁度 A→C の方向に於て兩者の電氣力が相加することになる。又 AB と BC とは丁度 4λ に相當するだけ位相が異つてゐるのであるから、電流は同位相である。そして夫々の中心點 OO' の距離は $4\lambda \cos 25^\circ = 3.6\lambda$ であるから、位相の上では略：180° の相異を示してゐる。それ故に A→C の方向だけは丁度輻射電氣力が相加はるのである。

B'C' の分も同様に A→C の方向だけ相加はるのである。又この空中線の面内に於けるも一つの方に於ては、例へば OR の方向に於ては AB と B'C' との指向性をもつてゐるが、兩者の OR 方向に對する通路距離差は $OO' \sin(90^\circ - 25^\circ \times 3) = 4\lambda \sin 15^\circ = 1.03\lambda$ である上に兩者の電流が丁度反對位相であるから相殺する。同様に A'B' と BC との別の方向も亦相殺する。そこで結局各邊の圓錐形指向性の中 A→C の方向のものだけは全部相加はるが、空中線の面に直角の方の指向性は左右の電流が反對位相である爲に相殺され、A→C 以外の方向の指向性は全部相殺されることになる。

この空中線は進行波勵振であるから、非同調の型であつて、周波數が多少

變つても或る程度良い指向性を呈示してゐる。我々の測定では設計周波の±30%位の範囲内に於てよい指向性空中線として使用出来るのである。唯利得の點では之等の良い性質の反面そう高いことは期待出来なく、約10dbと云ふ處であらう。

§6.16 空中線の發達

空中線が世に現れたのは、1888年で、ヘルツが2個の蓄電子間に放電による振動電流を通じた實驗に於ける所謂ヘルツの振動子である。そして電波の傳播様式が光と同様であることを確める爲に、拋物面鏡を用ひて今日で謂ふビームを作つたのであるが、その時の波長は3m級であつた爲總て都合よく運行出来たのである。

無線通信の空中線が現れたのは之より十數年遅れて、マルコニの有名な接地空中線である。それから當時の意匠に従つて到達距離を増す爲に波長は長い方へと移行した。マルコニ會社では然し乍ら數百米より數十米の波長領域の研究を進めて、遂に短波が長距離通信に使用出来ることを發見し、その上に多くの輻射素子を同一平面上に列べたビーム式空中線の効果を認めたのであつた。他の國の無線界に於ては始めの中はビーム空中線の効果に大いに疑をもつてゐたが、段々と之に同意する様になつて、今日に於ては如何なる波長帯に於ても可能な限り指向性をもたせる様になつて來てゐる。

爲し乍ら波長の長い時は指向性をもたせることは困難であつて、波長數千米以上ともなれば指向性をもたせることは工作の關係で不可能である。放送波長帯に於ては空中線素子を二三用ふる位の指向性である。短波帯に於て始めて自在の指向性空中線を作ることが出来るが、それでも利得の上では二十數dbを超えることは出来ない。この帯域に於ては世界各國の一流無線會社は皆自家獨得の空中線方式を持たうとして、無理にでも新方式の發案を行ひ優秀性を宣傳したものである。

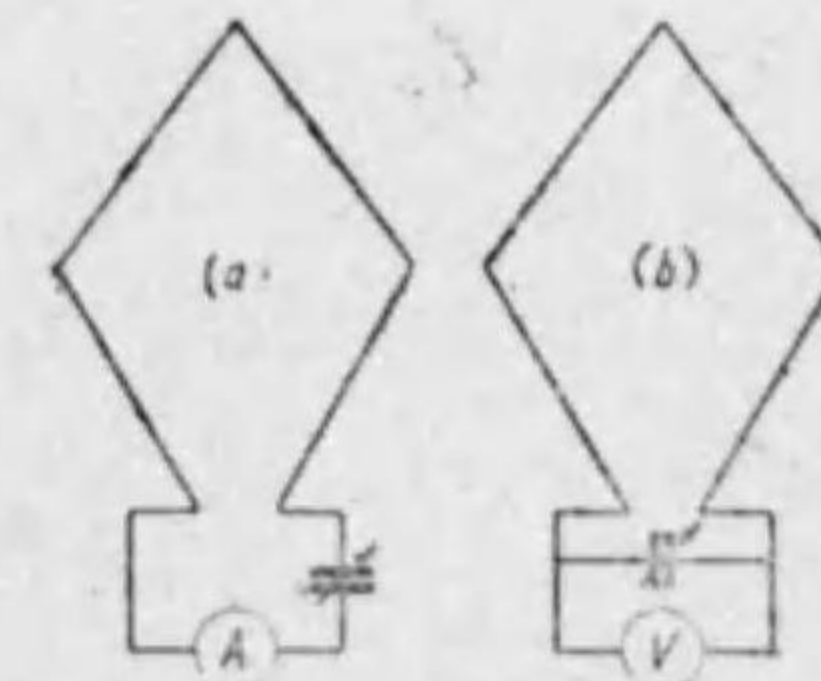
超短波帯域に於ては益々指向性を高く持たせて實用にしてゐる。

いつも無線の進歩が新しい帯域に踏入る時には拋物面鏡が用ひられるが、今日超短波、特に極超短波に於ては大いに之が重用されてゐる。それは鏡の寸法が小さくてすむ爲に、風壓の心配が大いに輕減される上に確實に指向性をよく出来るからである。指向性の効果としては鏡面の口徑の面積内に素子空中線を配列しただけのものであるから、素子の場合と同様ビームの効果はその面積によるのである。

§6.17 指向性の測定

空中線の指向性は立體的のものであるが、空間高く昇つて、その都度之を検すると云ふことは一般には出来ない。空中線の近傍の地上でそれを中心とする圓周上の電界強度の比較測定を行つて指向性曲線を作圖するのが普通である。電壓強度を測定するには第6.33圖

の様なループを用ひ、空中線の電力が數百ワット以上ならば(a)の如く可變蓄電器で直接同調をとつて、mA程度の電流計で同調電流が讀めるし、空中線電力が數十ワット以下ならば(b)の如く真空管電壓計を用ひるのがよい。殊に又超短波ともなればこの同調電流を礦石檢波器で整流して直流檢流計で讀めば、かなり微弱なものも測定出来る。斯くして圓周上での重要な數點で同調電流を測つて、極座標線圖を描いてゐる。ループの對角線の長さは大體50cm位で一回ならば10m波位に、二回ならば40m位によく、その中間は蓄電器の加減で被ふことが出来る。



第6.33圖

斯くして得られた指向性圖を計算のものと比較する時には、計算のものは第一に立體的であり、第二に空中線より充分遠い圓周上で(圓周に立つて空中

線を眺める時に空中線が点として見える)の値になつてゐることを忘れてはならない。実際には近い圓周上で測る爲に實測の方が悪く現れることが往々にしてある。大體に於ては空中線の横幅の2倍以上の半径とすればよい。

立體指向性は空中線の前方に高い柱を立て、それに沿ふての電界の分布状態を測るか、一層進歩した方法として飛行機を球面上に螺旋形に飛ばして飛行機に一定出力の送信機を置いて、空中線での受信強度を自動記録で描く方法もある。實際我々が之を行つても見て殆ど地表を完全導體として計算した指向性とあまりにもよく一致してゐるには驚嘆した位である。

§ 6.18 空中線利得の測定

送信の利得は直ちに受信の利得であるから、一番簡単なのは、電界強度の利得の正確に出る測定器を用ひて、ビーム空中線と基準の空中線とで交互に遠方送信波を受信して、その記録を比較すればよい。

送信空中線の効果を知る目的で、歐米間で充分打合せして、ビーム空中線と基準空中線とで交互に送信して、受信条件を同一に保つて測定したことがある。ビーム空中線の効果が疑はれた初期に於ては斯かる測定が屢々行れたものであるが、今日となつてはその効果は最早確定的であつて、再確認する必要はなくなつたが、受信空中線もビーム式の方がよいことは勿論であるがフェーディングがある爲に中庸のビーム式二三個でデパーシテイに使ふのが一番よい。

第7章 空中線の構成

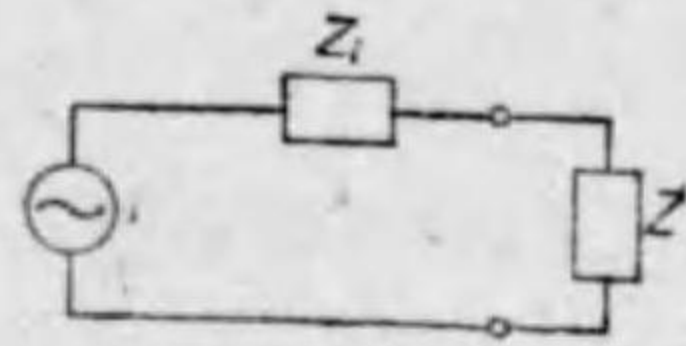
§ 7.1 空中線系に用ふる電気回路

空中線の輻射特性が解つた後では、夫々の輻射特性を呈する様な空中線の各部分の電流分布を與へることさへ出来ればよいのである。この章ではこの給電の方法を考へて見るのである。

空中線系は送信機又は受信機を出てより給電線を経て空中線に到る迄を含むのであるが、その間で電気状態の變換される點には夫々特定の作用となる電気回路を挿入しなければならない。送受信機と給電線との間及び給電線と空中線との間には整合させる整合回路を挿入する。この給電線から空中線素への分岐給電線との間にも整合回路を挿入することがあるが、近來はそこは電気状態の自然に委せて必ずしも入れない方式を簡便の爲採つてゐる。各周波に對して一本の給電線を用ひ、之等を平行に何本も架設したのを、搬送通信に於ける様に一本の給電線に多くの周波数を傳送させる方式では、分岐點に濾波回路を要する。又反射空中線をもつてゐるものでは、兩者に適當に電力を分配するに適當の回路も必要になる。又送信機がブッシュ・ブルになつてゐて平衡してゐるのに、給電線が同軸ケーブルである時には平衡回路より不平衡に、又は逆に變換するに必要な回路を要する。之等の回路の基本理論は既に第3章及び第5章で取扱つたから、こゝでは實施例を述べることになる。

整合回路は嚴密には § 3.11 の通りであるが、こゝで卑近な解釋をして置かう。それには、通信工學の電源の性質が電力工學に於けるものと大いに異つてゐる點を明らかにして置かなければならない。電力工學に於ては、出力は水量と落差との積又は石炭の發する熱エネルギーに依つて最高値が押へら

れる、従つて出来るだけ多くの電力を有効に使用しなければならない。之を圖に依つて説明すれば、第7.1圖に於て、 Z_i を発電機の内部インピーダンス、 Z を負荷とする時、 Z の抵抗分を Z_i のそれより遙かに大きくして置かなければ、発電機の能率が悪いのである。處で通信工学に於ては、電源の発生電圧が一定であつて、電力は別のエネルギー源からいくらかでも供給出来ると云ふ事情にあることが屢々ある。そこで同じ第7.1圖で考へても、唯一つの變數 Z を自由に變へて、この電源から最大の電力を引出すには如何と云ふことになる。



第7.1圖

圖に於て電源の発生電圧及び電流を E 及び I とすれば、次の式が成り立つ。

$$E = I(Z_i + Z) = I\{(r_i + r) + j(x_i + x)\}. \quad (7.1)$$

故に電圧、電流の絶対値の関係は次の通りである。

$$|E| = |I| \sqrt{(r_i + r)^2 + (x_i + x)^2}. \quad (7.2)$$

そこで負荷 Z に吸収される電力 p は次の値になる。

$$p = |I|^2 r = |E|^2 \frac{r}{(r + r_i)^2 + (x_i + x)^2}. \quad (7.3)$$

こゝで p の値の變化を考へて見るに、或る與へられた r_i 及び r に於て、とも角 $x_i + x = 0$ の時 p は極大になる。従つて x に関しては

$$x = -x_i \quad (7.4)$$

とすべきである。之は換言すれば共振状態にすることを表してゐる。之をこの状態に保つとすれば、電力 p は r の函數として次式となる。

$$p = |E|^2 \frac{r}{(r + r_i)^2}. \quad (7.5)$$

そこで p の極大になる r を求めれば

$$\frac{dp}{dr} = |E|^2 \frac{r_i - r}{(r + r_i)^3} = 0 \quad (7.6)$$

より

$$r = r_i \quad (7.7)$$

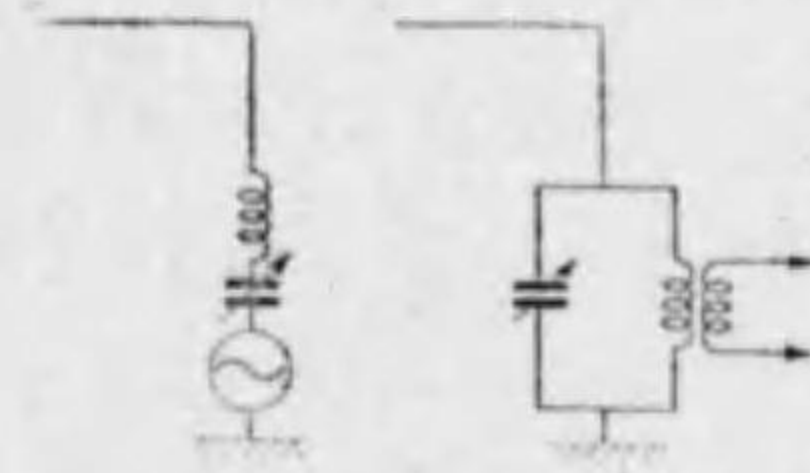
を得る。即ち負荷 Z は内部インピーダンスと等しい抵抗をもちリアクタンスは丁度打消し合ふ値をもつ時に、負荷への入力が最大になるのである。

§7.2 部分波空中線

部分波空中線、即ち長中波の空中線ではその引卸線を直接送受信機に引込まないで、空中線のリアクタンスを打消して共振状態にする爲の回路を挿入する。第7.2圖の様に空中線の長さが $\lambda/4$ より短い時には空中線のリアクタンスは負であるから、それを打消す爲にはコイルを入れる必要がある。之をローディング・コイルと呼ぶ。實際に、この L の値はその都度調整しな



第7.2圖



第7.3圖

ればならないが、大電力の場合にはこの圖の通り L の値を可變にする。然し受信機の場合の如く、可變蓄電器が容易に得られる時には、蓄電器で加減する爲に第7.3圖の如くする。

斯様の空中線のリアクタンスは §1.4 によつて次式で與へられる。

$$Z = jW \cot \beta l, \quad (7.8)$$

l は長さである。こゝで l が波長より遙かに短い時には、 $\cos \beta l \approx 1$ 、 $\sin \beta l \approx \beta l$ であるから (7.8) は簡単に次の通りになる。

$$Z \approx -j \frac{W}{\beta l} = -j \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{2\pi f \sqrt{LC \cdot l}} = -j \frac{1}{2\pi f \cdot C \cdot l}. \quad (7.9)$$

この表式は空中線が地表に対して持つ電氣容量がその儘空中線のリアクタンスになつてゐることを表してゐる。この故に長波空中線に於ては、屢々空中

線容量と云つてこの電氣容量を計算する。

この空中線の輻射電界は水平部によるものは極めて僅かで大部分が垂直部によるものであるが、その垂直部によるものを考へる時に、垂直部の電流の分布が一様であるとすれば、一つのヘルツの振動子と考へることが出来るから考へ方が容易になる。その場合の遠方の地上に於ける垂直方向の電界強度は次式で與へられる。

$$E_2 = 377 \frac{hI}{\lambda D} \quad (7.10)$$

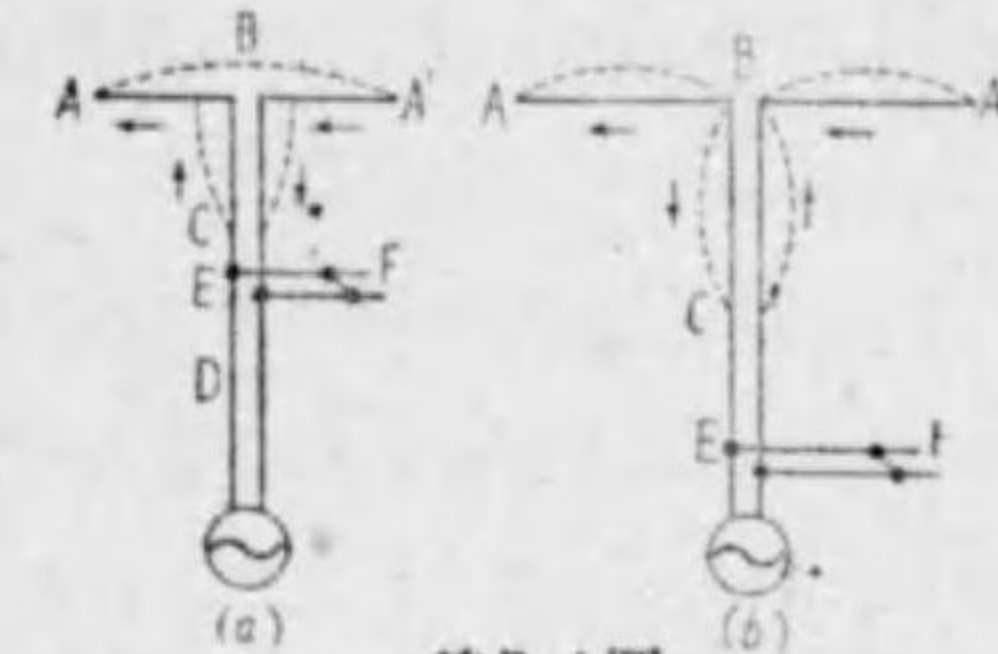
但し h は高さ (m), I は電流 (アンペア), D は距離 (km), E_2 は $\mu\text{V}/\text{m}$ 及び λ は波長 (km) である。この式は後に第11章で式の誘導法が明らかになるであらう。輻射電界は hI メーター・アンペアに比例することになる。そこで長波の空中線の能力は hI で表す。實際の空中線に於ては基部の電流を I とする時には、一般に上へ行く程電流が少なくなり、その上水平部の電流が電界を多少は擾亂するので、 h に幾何學的の寸法その儘をとる譯にゆかない。之は電界強度を實測して逆に (7.10) 式より計算して、 h を求めるのが普通である。その h は實效高と云ふ。實效高は幾何學的寸法より2割方少いのが普通である。

§7.3 半波空中線

半波長の導線に両端が電流節、中央が電流腹になる様な定常波振動をのせるものが、短波に於ては一つの空中線の單位になるので、双極が少し伸びたものと云ふ意味でダブルットと呼ぶことがある。一般に空中線として用ひる時に、必ずしも正確に半波長でなくても差支へないのであるが、短波空中線の發達過程に於て、寸法は正確に半波長でなければならぬとされた時代がある。實際には半波長より相當長くなつても短くなつても、同一導線上の逆相の電流部がないか又はあつても僅少の場合にはそれを一つのダブルットと

見ることが出来る。そしてこの考へに基いて空中線の設計も大いに裕りを持つ様になり又廣帯域性を利用する様になつて來た。だがこゝでは一應その窮屈な考への時代を經過する意味で半波ダブルットを考へて見る。

導線の一端より勵振すれば大體正弦波形の定常波を生ずるが、一般には電源とダブルットとの間は相當に離れてゐるから、途中では無効の輻射などない様に給電線で輸送するのが普通である。第7.4圖の(a)はダブルットの中央で給電し、(b)は一端で給電することになるが、前者は電流腹で給電するから電流給電、後者は電壓給電と呼ぶことがある。兩者共に平行二線の平衡した電力輸送になつてゐて、圖に點線で示し又或る瞬間の電流方向を矢印した様に、平衡した電流定常波が乗る様になつてゐる。ダブルットと給電線とは分布常數が異なるからダブルットの定常波のその儘の延長が給電線上の定常波になるわけではないが、大體近似的には同じと見て差支へない。

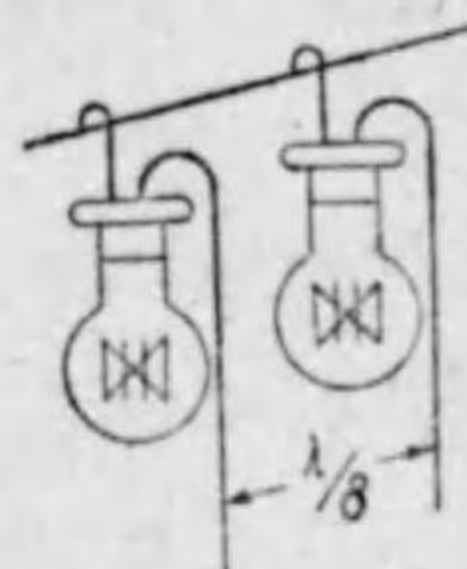


第7.4圖

斯様なダブルットは本來可なり完全な定常波になつてゐるから給電線を整合する必要がある。それには §3.11 で述べた様に最も簡單なのは整合線を取付けることである。圖の(a)では B が電流腹であり、それより $\lambda/4$ 手前の C が電壓腹であり、又それより $\lambda/4$ 手前の D が電流腹である。その際 CD の中間に $\lambda/4$ より短い EF なる整合線を取付ければ、E の位置と短絡片 F の位置とを加減することにより丁度整合のとれる位置が求められる。だが然し §3.11 で述べた様に、極く大雑把には CD の丁度中央に $EF = \lambda/8$ の整合線を取付ければ、既にもう大抵の場合略々整合がとれるのである。(b) 圖の場合に於ても給電線について之と同じ位置でよい、即ち電壓腹なる C 點より測つて略々 $\lambda/8$ の E を選定すればよい。

§7.4 給電線上の電圧電流の測定

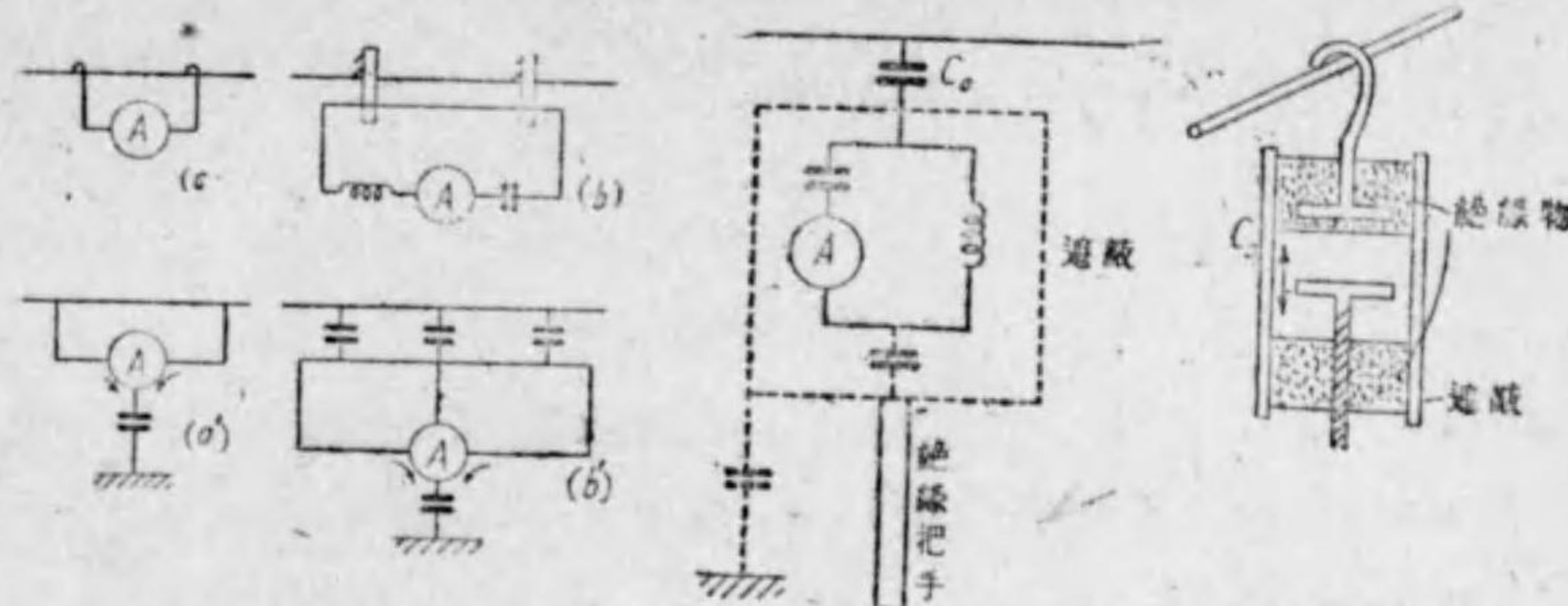
整合がとれたかどうかを検するには給電線上の電圧又は電流の分布を調べればよい。整合がとれておかない時には給電線上に定常波があるから、電圧電流に起伏があるし、整合がとれておいた時には進行波のみであるから起伏がない。電圧電流の分布を調べるのも実際問題としては片端から一様に全部を見る必要はなく、大體 $\lambda/8$ 間隔で4点を検すれば充分である。この目的では第7.5圖の様に電球の片方の引出口を給電線に懸け、他方の引出口をだらりと下げたものでよい。この場合電球には電圧に比例する電流が通るから、電圧の高い時は明るく、電圧の低い時は暗くなるから、その明暗で定常波の有無を検することが出来る。



第7.5圖

ここで更に一步を進めて給電線上の電圧及び電流の測定方法を考へて見るに、短波位周波数が高くなると電圧又は電流だけを測ると云ふことはなかなか難しい。電流を測る場合について見れば、どうしても導線の寸法より遙かに寸法の大きい測定器を用ふることとなるから、その測定器と地表との間に在る電氣容量が ω 倍で効いて来る爲、電圧に比例する指度が加つて電流の指度を崩して了ふのである。之に反して電圧測定の方はかなり獨立に測定出来るが、今度はその附加した測定器の爲に動作状態が亂される惧がある。極端の場合として空中線の尖端の電圧を測る場合を考へて見れば、測定しようとして結んだ爲に、被測定物が測定装置の處迄延びて来て、爲に測定状態が變つて了つて斯様の場合には測定不可能である。そして又電圧及び電流の絶對値を測ることも不可能である。實際には、だから電圧電流の比較測定によつて事柄を明らかにする様な方法をとるのである。

電流測定は第7.6圖(a)の如く、導線に直接電流計の分路を形成して摺



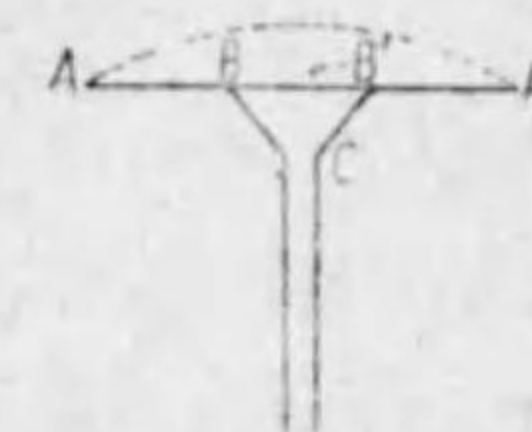
第7.6圖

第7.7圖 ローゼンシュタインの電圧計

動して分布を測る方法と、(b)の如く一種のループ回路を絶縁棒で一定の距離を保ちつゝ摺動して測る方法とある。何れにしても、夫々(a'),(b')の如く地表に対する漏洩電流が電流計に重疊される。電圧の測定は第7.7圖の如きローゼンシュタイン(Roostenstein)の電圧計が大いに具合がよい。この場合にも之を取付けた爲に電氣状態が亂れるかどうかは充分注意しなければならない。

§7.5 ダブレットの變形

次にダブレットの變形について一括して考へて見る。第7.4圖の整合を取付けることが場所の關係で具合が悪い時に、第7.8圖の様な構造に作つて整合をとる方法もある。この場合 $AA' = 0.45\lambda$ に $BB' = 0.06 \sim 0.08\lambda$ 位の範圍で整合がとれる。之は CBB' を以て整合線と又 BB' の點を第7.4圖のE點と考へれば、整合のとれる理屈は諒解出来る。然し實際問題としては一々張り上げたり、降したりして調整することが厄介であるから、あまり微細なことは出来難い。



第7.8圖

次に第7.9圖の如く打返ダブレットを使へば可成り整合がとれる。この折返しの本数は同一の電流分布をなしてあるから、この本数を n 本、



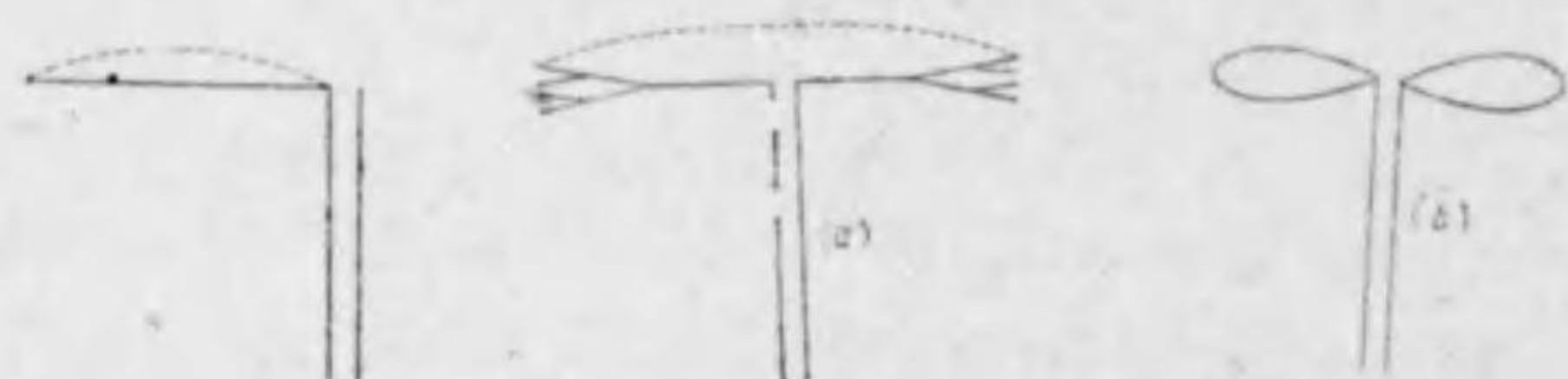
第7-9圖

輻射抵抗を R とする時、輻射電力は $(nI)^2R$ であり、之が波動インピーダンス W の給電線から流入する電力 I^2W に等しい時に整合がとれる。之を方程式とすれば

$$n^2R = W$$

となる。 $R=73$ オーム、 $W=570$ オームとすれば、 $n=\sqrt{7.8}=2.8$ となるから略々3本の時が最も工合がよいのであらう。然しこの場合も各素線の長さが少し狂つてもその結果が大きく効いてくるから、理論的に面白い程実際には面白くない。

次に半分の使ひ方として第7-10圖の様なことも間々見受けるが、送受信機がプッシュ・プルの様な平衡回路の時、不平衡であるから感心しない。



第7-10圖

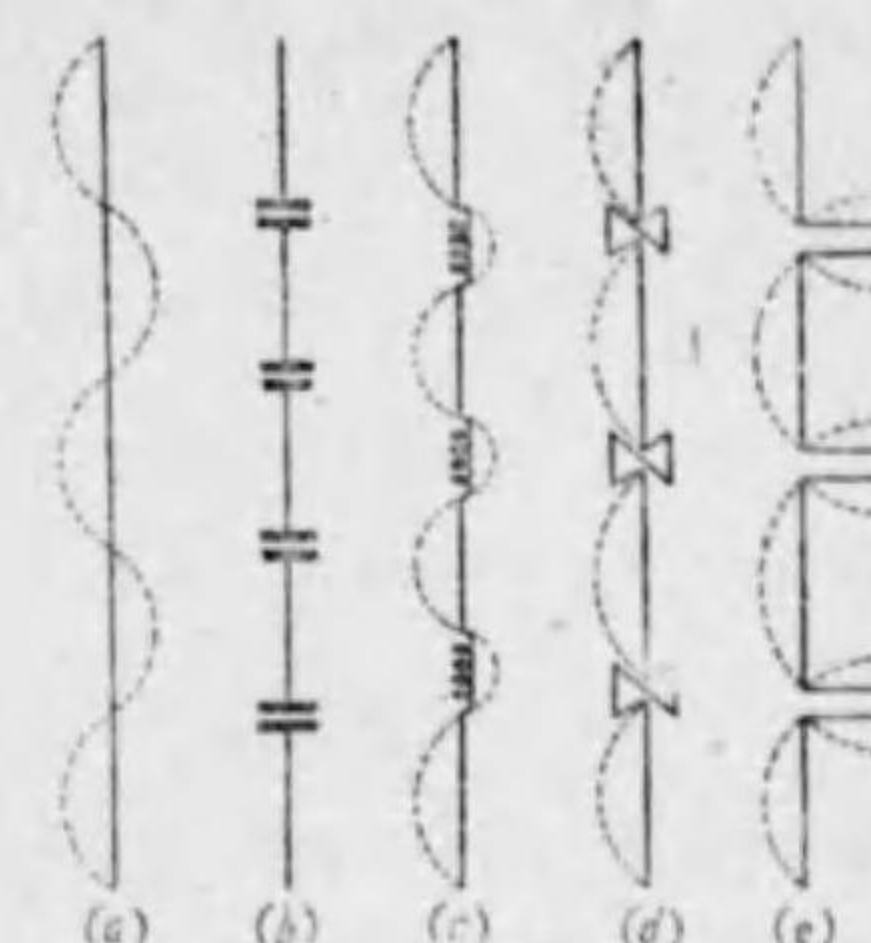
第7-11圖

最後にテレビジョン等でかなり広い帯域幅に對して略々一様の輻射特性の空中線が要望される時には、§4-6 及び §4-7 の考察に従つて、第7-11圖の様な空中線が具合よい。斯様の考へによるものは實際使用されてゐて(b)の如きものはツェッペリン型空中線と云はれてゐる。

§7-6 半波空中線列の縦続給電

半波長の何倍かの長い導線を一端より勵振すれば、第7-12圖(a)の様

先端より半波長宛のダブルレットが交互に反對位相になつて所謂ハーモニック空中線となる。その輻射特性は前章で取扱つた通り、導線に垂直の方向では輻射強度は極く弱い。そこで反對位相のダブルレットは輻射しない様にして、導線に垂直の方向で強い輻射が得られる様にすれば能率のよいビーム空中線が得られる。



第7-12圖

第一の着想は(b)の通り、半波長毎に蓄電器を挿入して、蓄電器の兩板が+-になる様にすれば、反對位相のダブルレットがこゝで喰はれるのではなからうかと云ふのであるが、之は蓄電器を靜電的に考へた謬見であつて、高周波に對しては蓄電器は長さをもたない通路の役をするだけであるからこの考へは成功しなかつた。

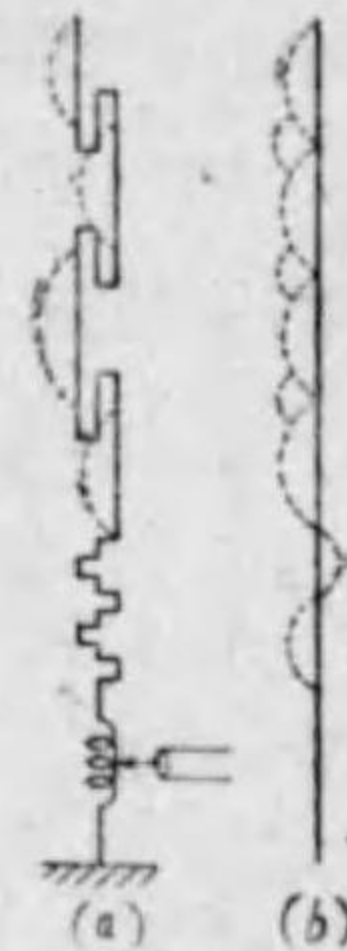
次に(c)の様になら半波長毎にコイルを挿入して、このコイルに逆相の半波長を喰はせようと云ふ考へであるが、之は前者の蓄電器をコイルに置き換へただけで聊かも進歩がない様に思はれるかも知れないが、實は大いに相違してゐるのである。即ち既に第3章で屢々述べた様に、高周波に於てはコイルはコイルとしての特性(長さのない通路)よりも一本の導線が曲げられて存在すると云ふ特性の方が優勢である。それでコイルの捲線の寸法の上に定常波が乗るのである。それで少しく加減すれば所希の通り反對位相の定常波をコイルの上に乗せることが出来る。

次には態々コイルにしなくても、もつと寸法を生かす様に導線を折曲げることに想到すれば(d)の様になり、更にもつと解り易く横に伸ばしてさへば(e)の如くなる。

この方法では、電源に近い方のダブルレットは本來の輻射の使命の他に電力傳送の使命をも果すのであるから、電流分布は輻射に盡して欲しい定常波の

他に進行波分が重畳され、その進行波が又輻射を行ふから、豫期しない輻射の崩れが現れる。我々の経験ではダブルットが6個ともなれば、この進行波分と定常波分とが略々同程度になるからダブルットの縦続数は4個以下に止めて置き度い。

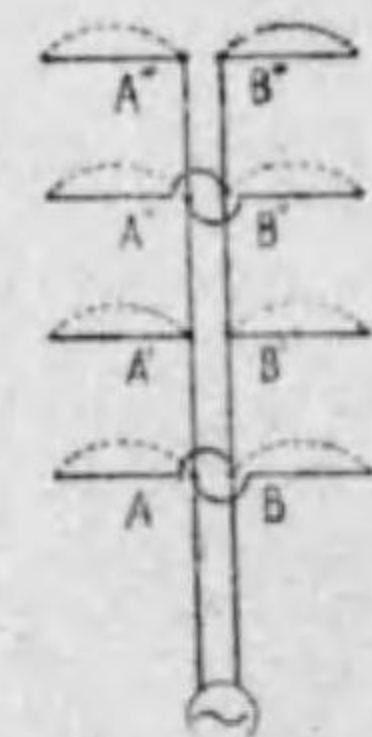
なほ、マルコニ会社では如上の進化を更に一步進めて、第7-13圖(a)の如く折曲げて(b)の解説で解るよう、空中線導体上略々有効輻射電流が一様になる様にした。然しこの最後のものが一番優良だとは云へないのであつて、使用目的によつては第7-12圖(e)の方がよいこともある。



第7-13圖

§ 7-7 半波空中線列の分岐給電

ダブルットを平行に配置する時には第7-14圖の様に給電線の半波長毎の點にダブルットを分岐する方法が行はれる。總てのダブルットの負荷がAB點に並列に在ると電氣的に全く同等であるから、總てのダブルットの勵振條件が同一になつて、同大同位相の定常波を生ずるからである。唯然しレツヘル線の半波長毎に電壓電流が丁度反對位相になるから、交互にダブルットを反對に結ぶことは肝要である。

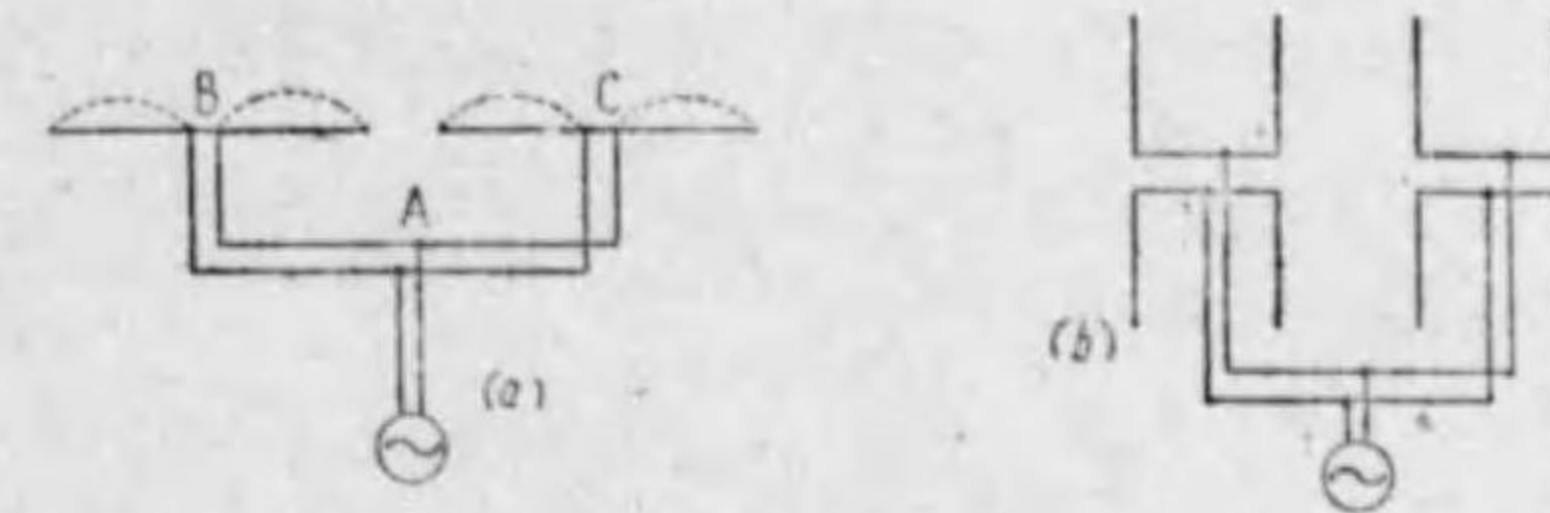


第7-14圖

この場合各部の寸法を嚴密にとつても、碍子の容量等に影響を受けて、電氣的の半波長を求めることは一般にさう簡單でない。その爲に AA', A'A'', …… 等の間隔が嚴密に云へば少し宛半波長を外れてゐる爲に各ダブルットの電氣勵振條件が等しくないことになる。この傾向は波長が短くなるに従つて顯著になつて来るが、短波の範圍に於てはダブルット4段迄位に止めて置き度い。超短波ともなればせいぜい2段位で止めた方が無難である。

§ 7-8 半波空中線列の並列給電

各ダブルットに對して全く同等の給電條件になる様にするには、第7-15圖の様な並列給電の方法がある。



第7-15圖

この方法は前二者より給電線の數が多くなる爲に、構造上は稍々複雑になると思ふが、各ダブルットへの給電條件が皆均等である爲、如何にダブルットの數が増しても給電状態に狂みを生ずる惧れが全々なく、而もなほ碍子類の容量の影響を受けてもそれを各ダブルットが一様に受ける爲に、個々が相違する心配もない。それ故に殊に超短波ビーム空中線に於ては、この方式を採用することが最も良い。

§ 7-9 各種ビーム空中線

以上の給電法を組合せてダブルットを縦横に配置すれば、種々の型のビーム空中線が得られる。世界各國の官社に於て自家獨特の型を考案して特許をとつて、我方式こそ最高水準のものであると喧傳してゐるが、大體に於て同一水準のものである。

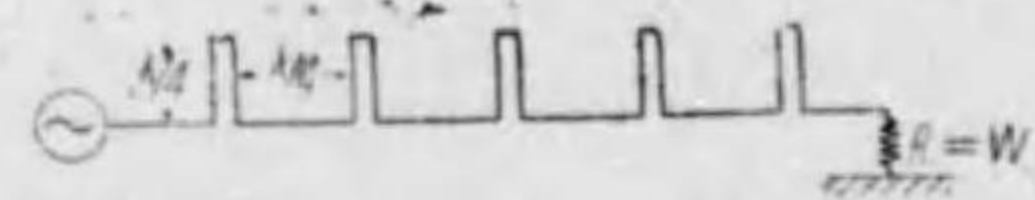
英國のマルコニ会社で標準に用ひてゐるビーム空中線は第7-16圖の如きもので、第7-13圖の縦続給電の單位を數多く並列に給電したもの



第7-16圖 英國マルコニ・ビーム空中線

である。この方式が他と大いに異つてゐるのは反射空中線である。他の一般は反射空中線は投射空中線と略々同一の構造であるが、之は極接近した2本（時には3本）の平行導線よりなり、それ等の長さは大體 $\lambda/2$ になつてゐて、配列の密度は投射空中線の2倍になつてゐる。この反射空中線方式は確かに非常に有効であつて、後方への輻射が少いことは他の方式より格別優秀である。

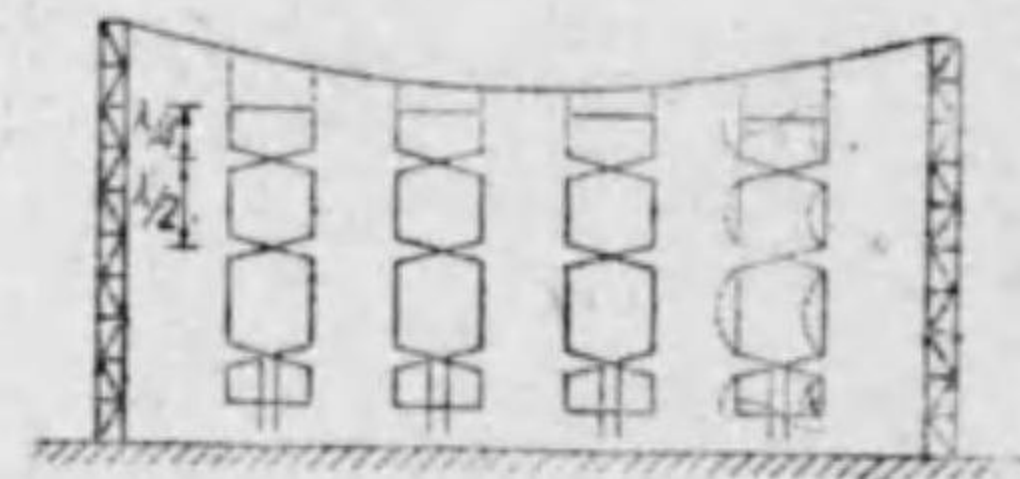
之は英國の標準型であるが、簡易な所に使用するものとしては第



第7.17圖 英國マルコニ・Series phase

7.17圖の Series phase 式と云ふのがある。之は圖の様な寸法になつてゐる所へ送信機より進行波を送り込めば、折返した部分に於ては往復の進行波が極く接近してあるわけであるから、少し遠くから見れば $\lambda/4$ の開放端の一本の半ダブルレットがあるのと同等であり、それが右へ行く毎に 90° 宛位相が遅れてゐるから、右方へは各半ダブルレットからの輻射が合成され、左方へは打消し合ひ單向性指向性が得られるのである。

米國の ATT 會社の Sterba 式ビーム空中線は第7.18圖の如くで、之は空中線に凍結した氷雪を大電流を通して融解除去させるのに具合よく考へられたものである。



第7.18圖 米國 ATT Sterba・ビーム空中線

なほ同會社では受信用として §6.15 の菱形空中線を用ひてゐる。この空中線上の進行波を維持する爲には、終端に波動抵抗に等しい抵抗體を結ぶか案外具合のよいのは細い鐵線でもを相當長く（200 m 位）平行に張れば、その減衰で反射がなくなる。この空中線の特長は非同調的に出来てゐる爲に周波數に依る指向性變化が他の形式の如く急激ではなく、我々の實測結果、設計周波の $\pm 30\%$ 位の帯域幅に於て有効に使用出来る。

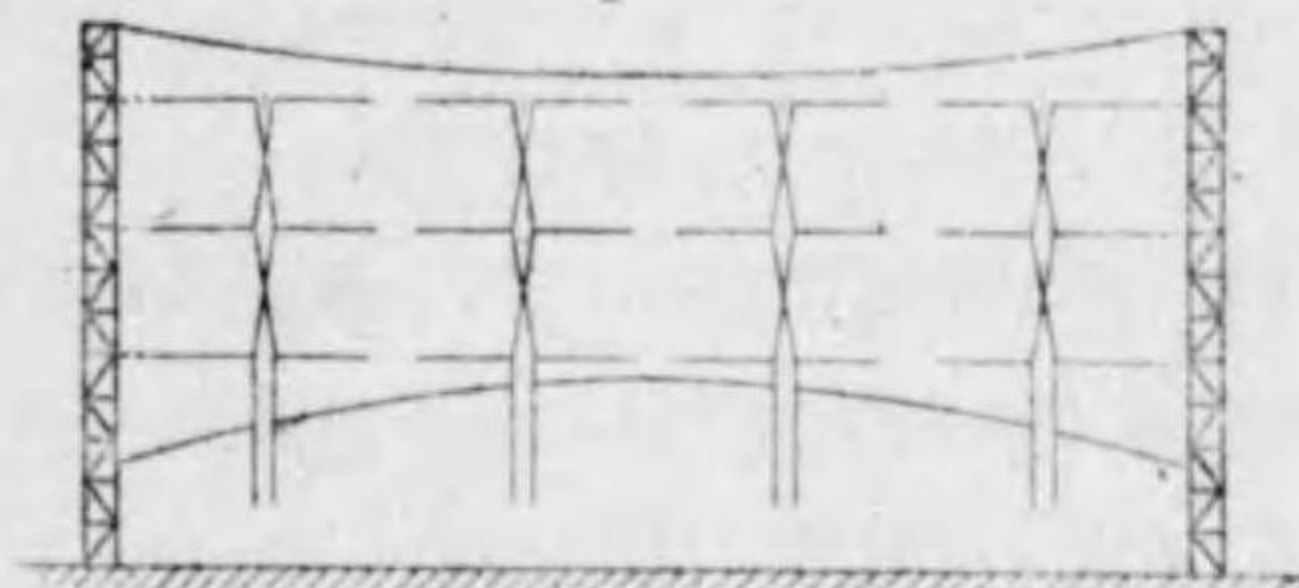
米國の RCA 會社ではハーモニック空中線を使用してゐて、これが給電の方法は 7.19 圖の通りである。

獨逸のテレフンケン會社では分岐給電法を用ひてゐるが、オランダでも、他でもこの方式は割合構造が簡單である爲によく使用される。



第7.19圖 米國 RCA 縦型ハーモニック空中線

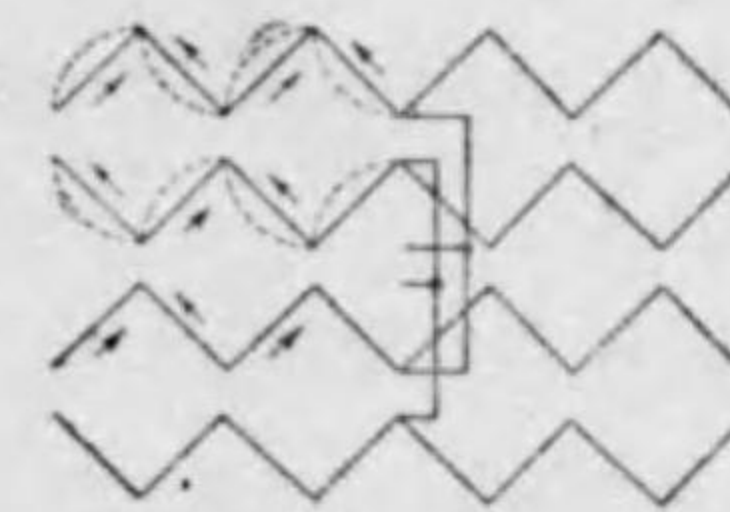
フランスの SFR 會社では第7.21圖の様なビーム空中線を用ひてゐる。之は他の特許を避けたままであつて、輻射波としては水平偏波は打消し合ふが垂直偏波だけは残る



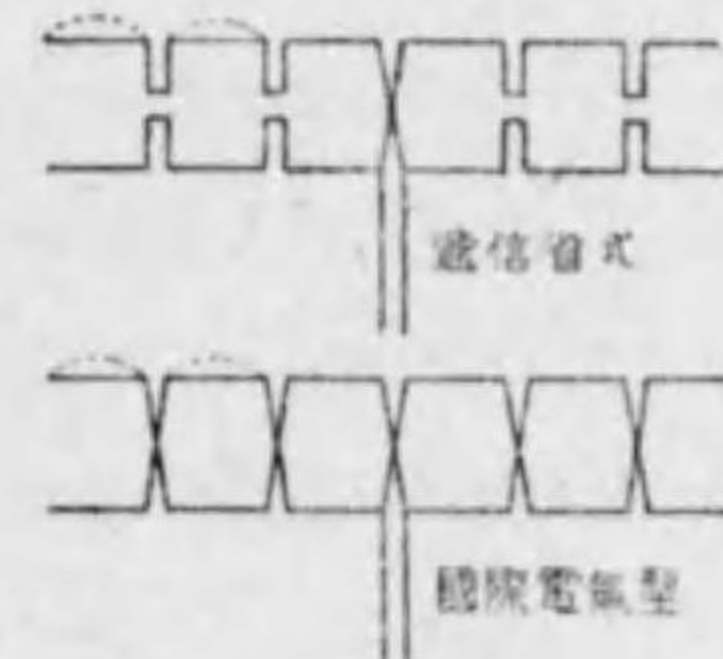
第7.20圖 テレフンケン・ビーム空中線

と云ふものであり、考案者の名を冠して Chireix-mesny 空中線と云ふ。

我國に於ては第7.22圖の様なものを一時壯んに用ひた時がある。上は逓信省の發明に拘るもので、下圖は國際電氣通信株式會社で構造上具合がよいので使用してゐる。



第7.21圖 佛國 SFR ビーム空中線

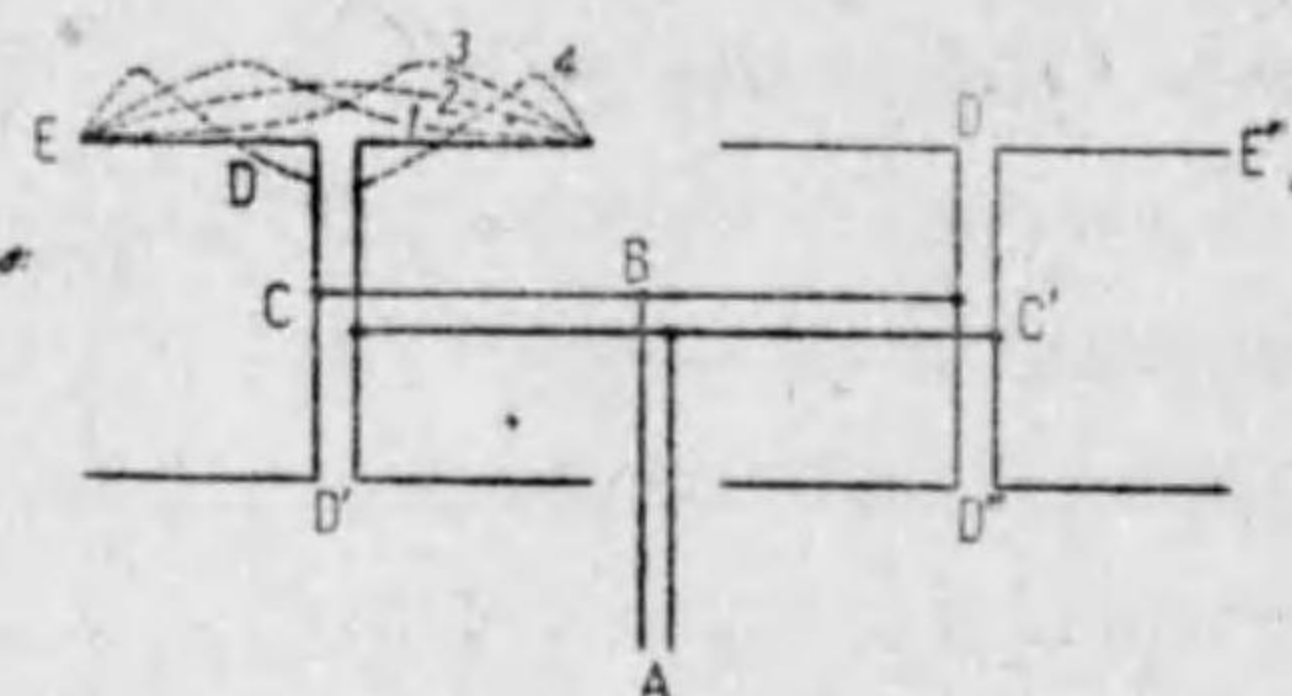


第7.22圖

§7.10 廣帯域空中線

半波空中線列の並列給電を徹底的に行へば、相當の帯域幅に於て有效なビーム空中線が出来る。即ち第7.23圖の如く各素線への給電條件を全部同一

条件にするのである。電源 A より B へ、B より C 及び C' へ、C 及び C' より D, D', D'' 及び D''' へ至る経路は全く同一条件になつてゐる。この構造は第7.15 圖と何等異なるものでないが、前の場合は周波数を變



第7.23 圖

へて使用することについては全々考へてゐなかつたのである。各素線の長さ DE が $\lambda/4$ である時は電流給電のダブルット配置に他ならない。又 DE が $\lambda/2$ ならば電圧給電のダブルット配置に他ならない。然らばその兩者の中間の周波数では如何と云へば、ED の上に $\lambda/4$ より $\lambda/2$ の間の中間の定常波が乗るだけのことで、夫等が同大同位相で、この空中線面に垂直の方向に強い指向性を呈することは聊かも變りがない。この考へ方だけでも f_1 より $2f_1$ 迄の帯域幅にビームとして有効に動作することが解るのであるが、更に周波数が f_1 より低くなれば、各素線は部分波空中線となつて依然有効なビーム空中線であり、 $2f_1$ を少し超した周波数に於ては、反對位相の部分少しは現はれても、それが僅かな間は指向性には影響しない。斯くして實に廣帯域にビームとして有効な空中線が得られるのである。この帯域幅は前節の菱形空中線より廣く、而も利得は素線の數を増すことによつて幾何でも揚げることが出来るのである。

之の整合方法及び反射空中線の調整方法は第3.26 圖の通りである。

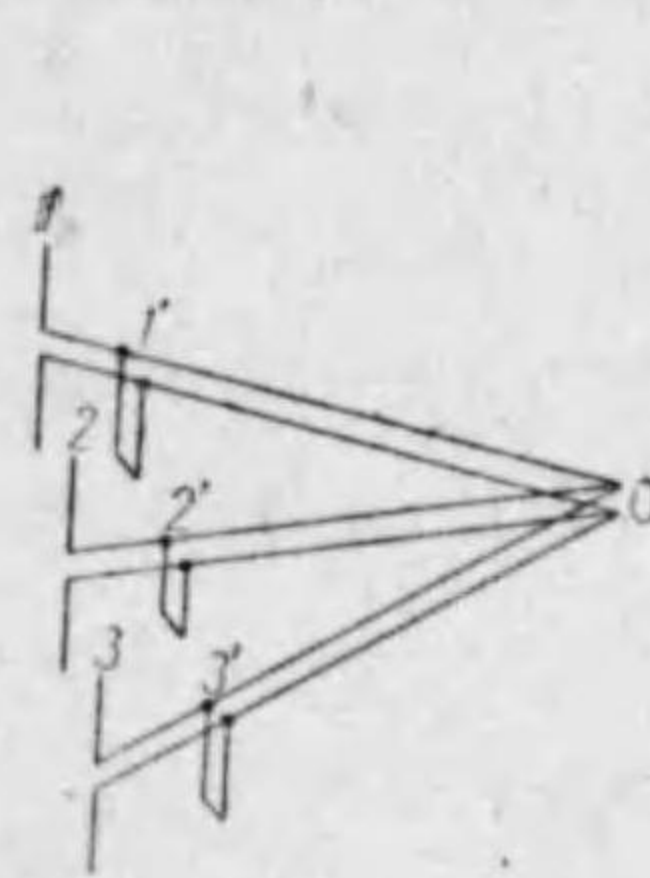
§7.11 指向性廻轉可能空中線

今迄述べた高利得空中線は指向方向は一定不變である。こゝで指向方向が自在に廻轉出来ることになれば便益は限りない。空中線を廻轉軌道の上に乗せて廻轉させることも一方法であるが、之は又却つて大工事である。それに

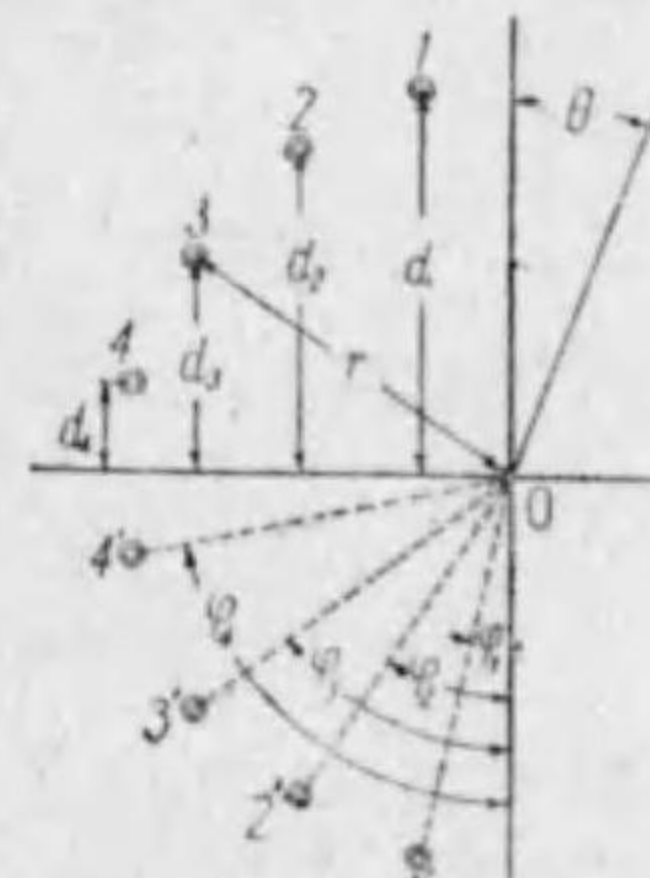
は §6.12 で述べた圓形配置の素線配置方式を採つて、その各素線への給電位相を廻轉切替スイッチで切替へれば簡単に遂行出来る。

先づ各素線に夫々位相の異なる振幅の等しい電流をのせることが要求されるが、それには第7.24 圖の様の一つ一つの素線空中線への給電線を整合にとつて置き、分岐點より整合線の位置迄の長さを加減すれば位相は自由に變へられ、振幅は一定に保つことが出来る。

第7.25 圖は横型の16 點配置であるが、原點を位相の基準と考へれば、1, 2, 3 及び 4 の素線は夫々 d_1, d_2, d_3 及び d_4 だけ分岐給電線を長くし



第7.24 圖



第7.25 圖

て置けばそれに相當するだけ位相が遅れるし、又 1', 2', 3' 及び 4' は原點を基にして夫々 d_1, d_2, d_3 及び d_4 だけ分岐給電線を短くして置けば、全體の位相が §6.12 で計算した指向性を與へる様になる。

その上なほこの様な位相調整法ならば、線長で位相を加減するのであるから周波数に無關係である。従つて素線に前節の考へを適用して置けば廣帯域に有效である。

§7.12 受信空中線

今迄は専ら送信空中線として理論を進めて來たが、一般の電氣現象に適合する相反の定理に従ひ、送信空中線として有効なものは、それを受信空中線

に用ひても有効である。唯然し、上空電離層なる導電性の變化極りない通路を経る爲に、金屬導體を通る時の様に單純にもゆかない考案を要する。

電波傳播上不可避の超克を要する難點としてフェーディングと空電とがある。フェーディングは既に放送のサービス面積の問題に關して一寸觸れて置いたが、一般に遠距離通信に於ては最早それを取除くことは絶對出來ないことである。それは遠距離通信に於ては、地表に沿ふて進む地表波は完全に減衰するので之を當にするものでなく、専ら或る仰角を以つて上空に進む空間波に頼つてゐる。そして空間波は上空の電離層と地表との間を何度か反射せられて受信點に達するのである。その際地表は一定の状態にあるから反射條件も一定であるが、電離層の方は極めて稀薄である爲一寸した刺戟で状態の變化を來し易く、爲に受信點に到着する電波束は時々刻々通路が變る爲に振幅及び位相の變化があるものと考へられる。而して斯様な電波束の反射の回数の異なる少くとも2, 3の波束が同時に到着して、それ等が合成されて受信電界を構成するのであるから、受信強度は或ひは相殺し、或ひは相加り、時々刻々變化するのである。この信號強度が微弱に衰萎することをフェーディングと云ふのであるが、この現象は長波より短波に行く程増大し、高低の頻度も増大する。

又空電は目的の信號を妨害する電波であつて、妨害するものは必ずしも自然發生の空電ばかりでなく、人爲的に發生する雜音電波、他の通信波との混信も包含されるのであるが、人爲的のものはその原因を究明すれば取除くことも出來るが、自然發生のものは究極どうにもならない、それで空電の問題も大きく取上げられるわけである。空電は天地自然が微細には電子よりなり又宇宙が輻射の浴室であることを思へば、あらゆる波長の電波で地球が包まれてゐることは正に當然のことであつて、我々としてはあらゆる方向より進行して來るあらゆる波長の電波に浴してゐるわけである。そしてそれ等も亦時々刻々強度も方向も變るのであるが、極めて數多くの波の集りとして一つ

の統計的表示が出來るのであつて、或るレベルを考へることが出來る。それを電波工學では雜音レベルと云ふ。雜音レベルは波長が短くなると急激に減少してゐる。それはやはり宇宙の構造が大きいからであらう。

受信空中線もこの様な自然の環境の中で使用するのであるから、その意味に於て各波長帯で特色を帯びる必要に迫られるのである。長波及び中波の程度に於ては勿論送信空中線と同様の大空中線を建設すれば感度がよいのは確かである。然し經濟關係に於ては送信と受信とでは大いに趣きを異にしてゐる。送信に於ては送信機の大きさを今の10倍にして、空中線の機能を1/10に減らすと云ふことを考へて見ても、恐らく技術的に不可能であるばかりでなく、よしんば可能であるとしても、送信機の建設費がとても嵩み、その上に日常の運轉費も10倍以上になり、現今の様に出力數100 kw、空中線の高さ二百數十米級の處が最も經濟的の處に落着いてゐるのである。之に反して受信の場合には、受信機の購入費、運用費は拮据ひに安いので、送信と同程度の空中線を建てることは如何にも不經濟であつて、その費用の何分の一かを割いて受信機を精巧にすることによつて同一の綜合能力を附與することが出來る。この故に受信空中線は遙かに小規模のものでよいことになる。そればかりでなくこの波長帯の大空中線には指向性がないから、前述の空電も一緒に強勢に受信するから、その意味に於ては大空中線の意味がない。そこで指向性を有する最も簡單なものとしてループ空中線が使用されるのである。ループはその面積内の磁束の變化に應ずる起電力を生ずるから、ループ面を電波の進行方向に置く時に最も強く、それに垂直の時には磁束がループ面を貫通しないから出力は0である。その數量は次式で與へられる。

$$V = 2\pi n S \cos \theta \cdot \frac{E}{\lambda} \quad \text{*ルト} \quad (7.11)$$

但し、 V は誘起起電力、 n はループの捲回数、 S はループの面積 (m^2)、 θ は電波進行の方向とループ面との間の角、 E は電波の電氣力 (V/m)、 λ は波長である。

この指向性は、 $\cos \theta$ によるだけで8字形であるが、更にそれを単一方向の指向性とする爲に部分波無指向性空中線の出力と合成して、一方の感度を打消して心臟形の指向性としたものがベリニ・トシの**ゴニオメーター**と呼ばれるものである。

更に電波の方向に $\lambda/6 \sim \lambda/3$ 離して2個のループ空中線を建て、両者の出力を受信機に導き、その出力を適當に合成して一層指向性をよくしたものが**複ループ空中線**と云はれる。

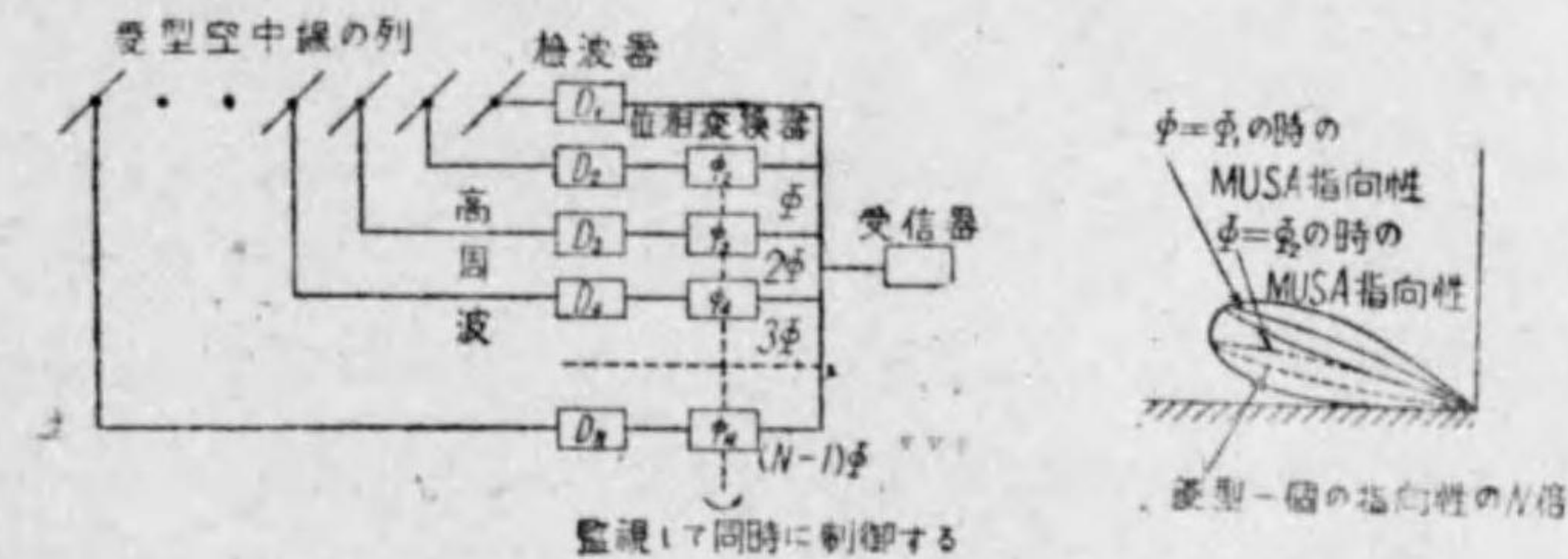
又ループを電波の進行方向に一波長以上水平に引延ばして、かなりよい指向性にしたものもある。之は**ウェーブ空中線**と云ひ、長波の賑やかであつた時代には籠兒であつた。

この波長帯に於ては、指向性を得るのに大きな幾何學的寸法を要するから最もよい指向性だと云つても、短波の場合に比較すればせいぜい2, 3本のダブルレットを有する場合に相當するだけである。

次に短波の領域に於ては勿論大ビーム空中線を用ひるのも結構である。大ビーム空中線を用ひれば、利得が高いばかりでなく隣のダブルレットでも既にフェーディングの様相が全く違ふから、或る程度のフェーディング防止にもなる。フェーディング防止は**チバースチ** (diversity) と云ふ方法が最も有効である。それは空中線と受信機の始めの部分とを連結したものを2組以上用意して、夫々周波数を變換した後に兩者を混合する方法である。この方法によれば電波の上に於て、兩空中線に誘起される起電力が丁度反對位相になつた瞬間でも、混合の時には相加はるだけで相殺することにはならない。従つて各出力が各々衰萎する時以外は有効な信号を持続するのである。事實この方法によつて始めて殆ど完全に安定な短波通信が可能になつたのである。そこで大ビーム空中線一個よりも、それとダブルレット空中線とで**チバースチ**をやる方がはるかに通信は改善されるので、今の處大體の話として、短波受信に對しては送信の様な大ビーム空中線は用ひないで、中庸の大きさのビーム空

中線を2個又は3個でチバースチを行ふのが最も具合がよい。

この方法と同好の考へで ATT 會社で使用してゐる MUSA と云ふ新しい受信空中線方式がある。それは受信電波の入射角が時刻と共に變化するのに対応して受信空中線の指向性を變へて行くのであるが、斯様の微細な調整を電波周波で行ふのは困難であるから、一旦低周波に直してから位相を調整して指向性を變へる方法である。それには第7.26圖の様に電波通路に沿ふ



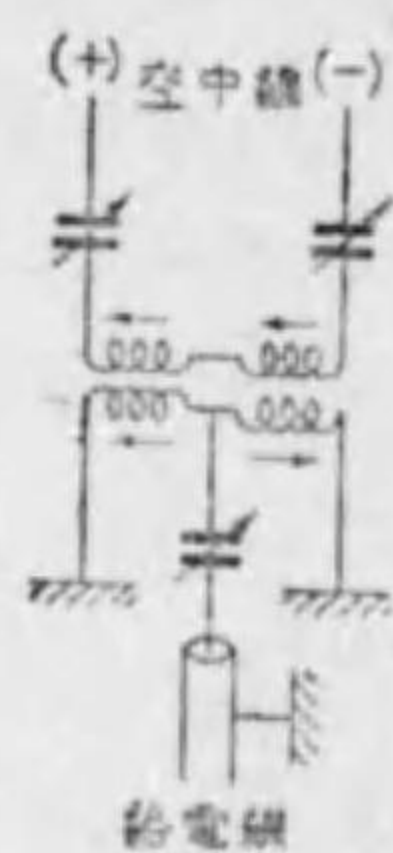
第7.26圖 MUSA

て菱形空中線を一系列に6個乃至12個列べて、その各より給電線で出力を受信機に導き、夫々を低周波に直してから位相變換器を通して合成するから、甚だ微細な調整が出来て非常に尖鋭な指向性が得られるのである。つまり指向性を固定して尖鋭にするのは高周波でも容易であるが、それを電波通路の状態に応じて變化させることは高周波の儘では到底出来ないもので、それを低周波で行ふのである。之によつて兎も角無線電話業務は著しく改善され、歐洲の方でも之が使用は流行して來たのである。

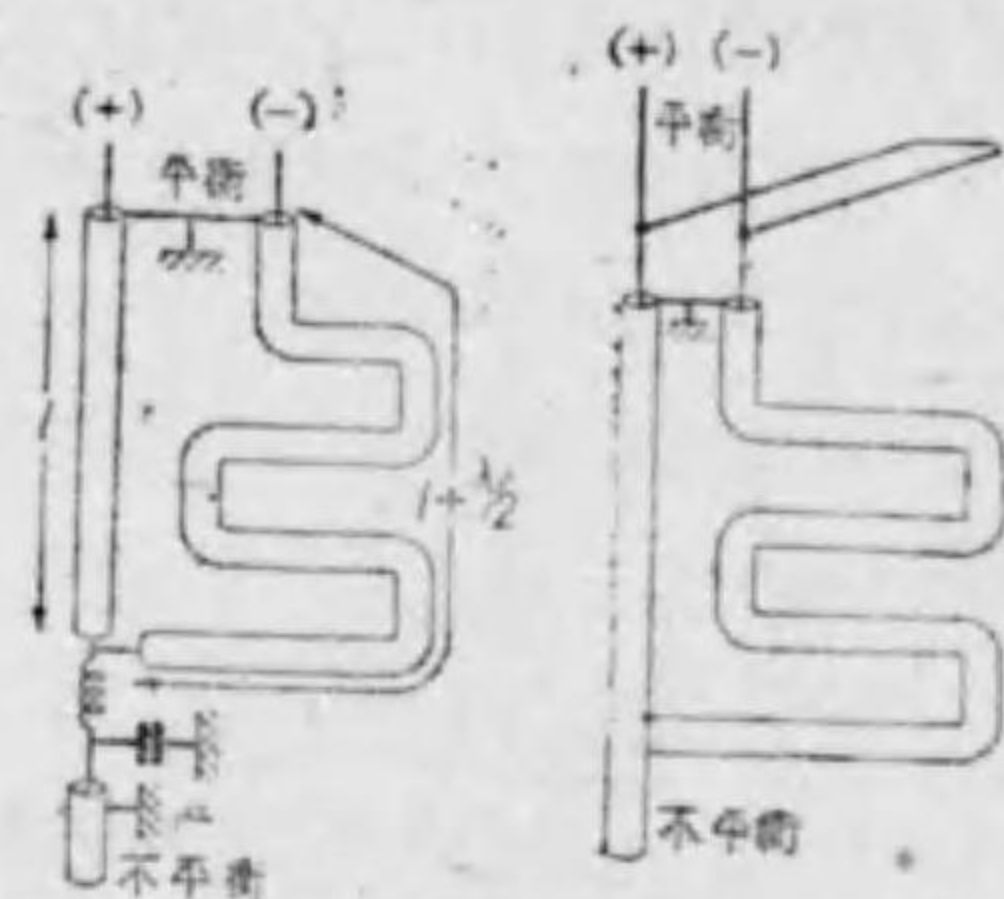
§7.13 同軸給電線の整合回路

同軸ケーブル等と平衡空中線との間で整合をとる時には、從來慣用してゐるのは第7.27圖の様な回路である。即ち結合コイルの一方を反對の捲方にして置いて電壓降下を矢をつけた様にして不平衡を平衡に直さうと云ふのである。この場合の整合條件は、相互インダクタンスと漂遊インダクタンスと

に別ければ T 型回路になるから、それより計算すれば容易に求められる。然し之も考へて見ると伸々巧くゆかない理屈であつて、短波位になると結合



第7-27圖



第7-28圖

は電磁結合ばかりでなく線輪間の容量結合によるものが相當に効いて来るから平衡の方へ不平衡の影響が及ぶことになつて面白くない。それに對して第7-28圖の様な回路ならば、一方の線を $\lambda/2$ 伸してあるから他線と同相になり、そこで兩者を會同して整合をとる方式と、平衡線の方でトラップで會同點のインピーダンスを加減するのとである。

第8章 ベクトル演算

§8-1 輻射理論

電波の輻射に最初に着眼したのはファラデー (M. Faraday, 1791-1867) である。氏は自然は極めて單純な法則に従ふであらうと云ふことを固く信じて熱、光、磁氣、電氣及び化學反應等は唯一の力が現れる所によつて區別して呼ばれるのであるまいかと思つて、各部門に於て簡單な法則性のあることを發見し不抜の業績を残してゐる。殊に電磁氣學に於ては當時の確固たる思想である遠隔作用 (直達作用とも云ひ遠方にある二物體間に働らく作用が途中に在るものに無關係に飛び越えて直接に作用すると云ふ考へ方) 説に對して、抜く能はざる疑を差はさみ、途中に介在するものを媒質として、媒質の導きに頼つて、漸時作用すると云ふ媒質作用説を打立てた。従つて氏の頭の中では既に媒質中を傳播する速さも有限であらうと考へてゐたものに違ひない。事實氏の所蔵の手記の中に不完全ではあるがこのことが認められると云ふことが數年前判つたと報じてゐるのを見たことがある。

かくして感性の鋭い實驗物理學者が暗示した事柄を數學、實に手際の良い數學的手法を以て整然たる形に電磁氣學を整へたのがマックスウェル (J. C. Maxwell 1831-1879) である。そして光の電磁波説を打立てたわけである。

それより 20 年も経つてヘルツ (H. Hertz) によつて 1888 年にその實證が行れたが、實際は單に實驗だけでなく、實にマックスウェル・ヘルツの電氣力學と稱せられる理論大系を作つたのである。

斯様に順を追つて電波輻射の理論が發展して來たのであるから、我々はこの少くとも電氣力學迄は學ばないことには妙諦に達することは出来ない。何時も物理學が飛躍的發展を遂げる時には新しい一つの數學手段と一體にな

つて進歩するのであるが、この電気力学も流体力学を取扱ふ数学手段である所のベクトル解析を俟つて完成したのである。そこでこゝに入る第一歩としてどうしてもこの演算法を一通り會得しなければならない。相當複雑なるべき演算を簡単に表すこの演算法によつて、複雑な自然像が簡単に把握出来るのである。

§8.2 ベクトルとスカラー

物理学で取扱ふ量には、目方や大きさの様に唯そのものの分量を表す数字だけで充分であるものがある。之はスカラー(scalar)と云ふ。之に對して物體の運動や力の如く、單にその大きさを表すだけでなく、その方向を同時に規定して始めて全體の事柄がはつきりするものをベクトル(vector)と云ふ。このベクトルに就てそれ獨得の便利な解析があるわけである。ベクトルを圖示するには矢を書き、矢の向いてゐる方向で方向を表し、矢の長さでその量を表す。記號としてはベクトルは太文字で、スカラーは細文字で表す。

ベクトルの解析を行ふには第8.1圖の如く直角座標で表す。ベクトル A を OP で表したとすれば、その x, y 及び z 軸上の分力 A_x, A_y 及び A_z に分解出来る、之を式で表せば次の通りである。

$$A = A_x i + A_y j + A_z k \quad (8.1)$$

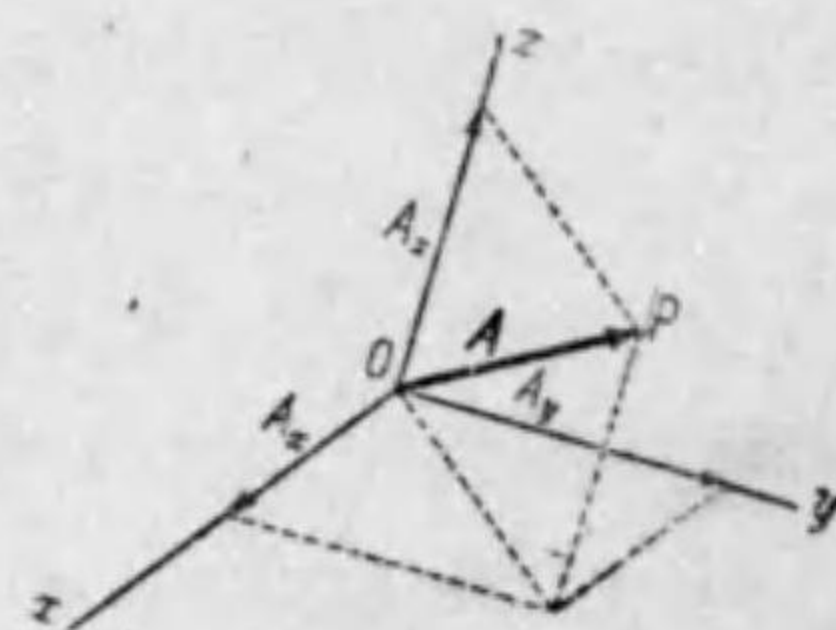
そこで x, y, z 方向の單位ベクトルを夫々 i, j, k とすれば

$$A_x = A_x i, \quad A_y = A_y j, \quad A_z = A_z k \quad (8.2)$$

であるから、 A を單位ベクトルで表せば次式を得る。

$$A = A_x i + A_y j + A_z k \quad (8.3)$$

ベクトルの加減法は今行つた通りの力の合成法で所謂平行四邊形の法であ



第8.1圖

るが、解析的にはベクトルの x, y, z 分力を夫々加減するだけでよい。

ベクトルをスカラーで乗除する場合には、方向は變らず、量だけを乗除するのである。従つて解析的にはベクトルの分力を一様にそのスカラーの數で乗除するのである。

§8.3 二つのベクトルの積

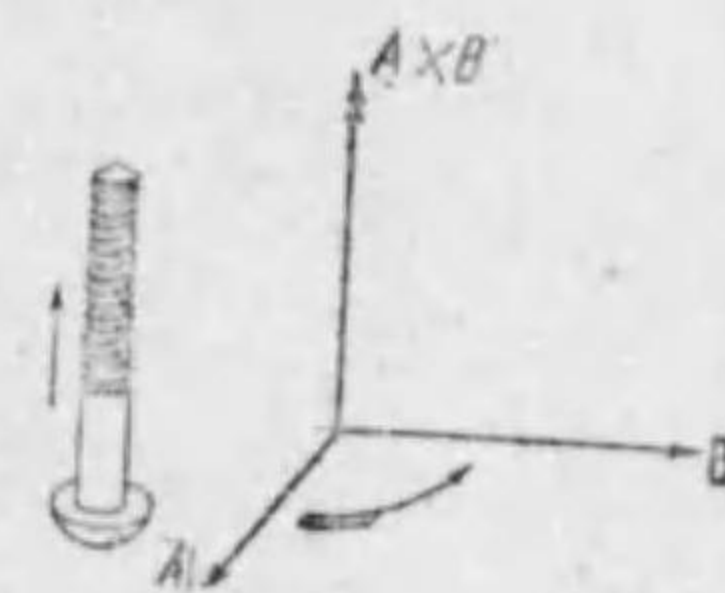
A 及び B なる二つのベクトルの内積又はスカラー積と云ふのは $AB \cos \theta$ なるスカラーであつて、その記號は (AB) 又は AB である。但し θ は兩ベクトルのなす角である。従つて兩ベクトルのなす角が直角ならば 0 となり、方向が一致すれば最大になる。兩者が等しい時は A^2 と記し、之は A^2 に他ならない。解析的には之は各々の分力に就て計算すれば容易に次の如くなる。

$$AB = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (8.4)$$

A 及び B の外積又はベクトル積と云ふのは兩ベクトルに垂直なベクトルであつて、その値は $AB \sin \theta$ である。その記號は $[AB]$ 又は $A \times B$ である。但し新しいベクトルの向きは A 及び B の配置を第8.1圖の x, y 軸の如く置いた時 z 軸の方向である。別言すれば第8.2圖の如く A より B に回轉させる時に右手系の螺釘の進む方向である。従つて A と B との順序を逆にすれば數値は等しいが方向は反對になる。即ち

$$A \times B = -B \times A \quad (8.5)$$

である。又 A と B の方向が一致すれば外積は 0 となり、兩者が垂直の時に最大になる。之を解析的に表す場合先づ x 方向に關係するのは分力の中の y, z の分力であるから、それに方向を考へれば $A_y B_z - A_z B_y$ である。かくして整頓すれば



第8.2圖

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k} \quad (8.6)$$

となる。

§ 8.4 ベクトルの微分積分

ベクトル \mathbf{A} がスカラーなる時間 t に関係して変化する時は、 \mathbf{A} の分力 A_x, A_y 及び A_z は t の関数である。例へば運動してゐる物体の速度の分力は時間の関数である。この場合 A_x, A_y 及び A_z を t に関して微分したものを夫々分力とするベクトルを考へそれを $\dot{\mathbf{A}}$ で表す。即ち

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt} \mathbf{k} \quad (8.7)$$

である、 \mathbf{A} を速度とすれば $\dot{\mathbf{A}}$ は加速度である。

ベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$ が t の関数なる時、之等の和に就ては微分法に従つて直ちに次の如くなる。

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \dots) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \dots \quad (8.8)$$

スカラー a とベクトル \mathbf{A} とが共に t の関数なる時には、之等の積の微分はやはり微分法により次の如くなる。

$$\frac{d}{dt}(a\mathbf{A}) = \frac{da}{dt} \mathbf{A} + a \frac{d\mathbf{A}}{dt} \quad (8.9)$$

二つのベクトルの積についても同一の要領で次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{A}\mathbf{B}) &= \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{B} \right) + \left(\mathbf{A} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right), \\ \frac{d}{dt}[\mathbf{A}\mathbf{B}] &= \left[\frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{B} \right] + \left[\mathbf{A} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

$A_x dt, A_y dt$ 及び $A_z dt$ を夫々分力とする微小のベクトル $\mathbf{A} dt$ を多数加へ合せた $\int \mathbf{A} dt$ もベクトルである。この場合 \mathbf{A} を加速度とすれば之は速度である。

§ 8.5 スカラー界とベクトル界

或る空間の中に或る量が分布してゐる時はその空間を界と云ふ。物体の内各点の密度の分布を考へるならば、それは密度の界であり、又物体の内温度の分布を考へるならば、それは温度の界である。之等の場合には分布してゐる量がスカラーであるから、スカラーの界である。

一般にはスカラーの分布はあらゆる場合が想像出来るが、即ち數學的に分布の量を座標の任意の関数と考へることが出来るが、物理学では大體に於て各点に於ける分布状態が連続的に變化する場合である。實際自然界は一般にさう急激に變化することなく、漸進的に變移するからである。然し特殊の場合として重い塊を含む稀薄な密度の場の如く不連続を考へねばならない時もある。

水が流れてゐる時、その流れの状態は各点に於ける速度の分布が解れば一切明らかになる。流れの急な所は速度大で、緩かの所は速度小である。この速度をベクトルとして取扱へば、このベクトルの分布が流れの状態を示すことになる。又電氣を帯びた物体の附近の電氣作用は、各点で單位電氣に作用する力が知られば明らかになる。即ちその力のベクトルの分布がわかれば一切が明らかになる。之等の例の如くベクトルの分布してゐる空間をベクトルの界と云ふ。

この様な界ではベクトルの大きさと方向とが座標の関数になつてゐるわけで、ベクトルの大きさとその方向余弦又は3個の分力 A_x, A_y, A_z が座標 x, y, z の関数として與へられてゐるわけである。

ベクトルの分布も亦數學的には任意に考へられる譯であるが、物理的には大體に於て座標の連続関数の場合のみであり、中に二、三の不連続点を含むことがある程度である。界のベクトルが大きい所では界は強いと云ひ、小さい所では弱いと云ふ。

ベクトル界でその方向を辿つて描いた曲線を流線と云ふ。この線を多く描けばベクトルの分布を見るに都合よい。例へば水流の速度の分布は流れの方向を連続的に連ねた流線によつて像が描ける。又電界や磁界の分布を示すのに電気力線、磁気力線を描くのも普通に行はれてゐる。流線の素線 ds に就て考へれば、その分素片 dx, dy, dz はそのベクトル A の分力 A_x, A_y, A_z に比例してゐるから

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z} \quad (8.11)$$

なる関係式が成立つ理である。この A_x, A_y, A_z を x, y, z の関数に置き換へてこの式を積分すれば流線の方程式が得られる。界の分布が時と共に變るならば流線も變化することは勿論である。流線を数多く描けばその疎密によつて界が弱強になつてゐる。

A を水流の速度とすれば、之に直角の平面の單位面積を單位時間に通過する水の體積は A である。平面の法線が A と θ なる角度をなしてゐる時は第 8.3



第8.3圖

圖から明らかな様に、その單位面積が A に直角な平面上の $\cos \theta$ をかけた面積に相當する。従つて面積 df を通過して流れる體積は $A \cos \theta \cdot df$ になる。一つの曲面を多數に分割して、各微素片についての之を積分して $\int A \cos \theta \cdot df$ を考へれば、之が曲面を通つて流れる全流量である。

一般にベクトルの界に描いた、閉曲面について積分した $\int A \cos \theta \cdot df$ をこの曲面を過るベクトルの流れと云ふ。その面積素片 df の法線を ν とし、 $A \cos \theta \cdot df$ を $A_\nu df$ と表してもよいし、又 df に ν の方向を與へて df と表すならば $A df$ と表される。即ち曲面を通過する流れは、従つて $\int A_\nu df$ 又は $\int A df$ と表してもよい。

§8.6 スカラーの勾配

空間の各點に於て定まつた値を有する一つのスカラー函數 φ があるとする。即ち坐標 x, y, z の函數 $\varphi(x, y, z)$ があるとする。之を坐標軸に平行に偏微分した

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

は夫々 x, y, z 軸の方向に於ける φ の増加の割合である。

今之等に夫々方向を與へて合成した

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

なるものを考へれば、之は立派に方向を持つた量であるからベクトルである。このベクトルは φ の勾配が最も急な方向に向き、その大きさは單位長さに對する φ の増加の率に等しい。従つてこのベクトルに垂直の方向に於ては φ は不變である。そこでこのベクトルをスカラーの勾配 *gradient* と稱へ、 $\text{grad } \varphi$ と書く。

φ の分布が空間に固定してゐる上は坐標軸の變換を行つても $\text{grad } \varphi$ の空間に對する方向はもとよりその大きさも變らないわけである。このベクトルの或る方向 s への分力は $\text{grad}_s \varphi$ と表す。 φ が x, y, z の函數であるから、その偏微分係數も x, y, z の函數であり、従つて $\text{grad } \varphi$ は各點に於て大きさと方向が變つてゐるのが普通である。この $\text{grad } \varphi$ を眺めればベクトル界をなしてゐる。

解析的には ∇ (Nabla と呼ぶ) なる演算子を用ひる。それは

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \quad (8.12)$$

の如きもので、之と φ との積を數學公式の通りに行へば、 $\text{grad } \varphi$ になる

から、 $\nabla\phi$ で $\text{grad } \phi$ を表すことが出来る。始めは物理的の解釋によつて概念を得るのであるが、便利な演算子法を用ひれば計算の途中は公式通りに運行出来るので、この様な方法に習熟することは必要である。

物理現象では與へられたベクトル A の場が、スカラー ϕ の場の負の勾配になつてゐる場合が多い。その時には

$$A = -\nabla\phi \quad (8.13)$$

と表せばよい。この時は ϕ を A のポテンシャル (potential) と名付ける。

§ 8.7 ベクトル界の發散

ベクトル A の場で

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

なるスカラーをベクトル A の發散 (divergence) と名付け、 $\text{div } A$ と記す。

假に A を水の流れと考へ、第8.4圖の様

な dx, dy, dz を積とする小さい直六面體の中

に單位時間に入出する水の量を計算して見る。

先づ $dy dz$ 面から中に入る量は流れの速度

の x 分力 A_x' に面積 $dy dz$ を掛けた $A_x' dy dz$

である。之に對する面から外に出る量は同様に $A_x'' dy dz$ であ

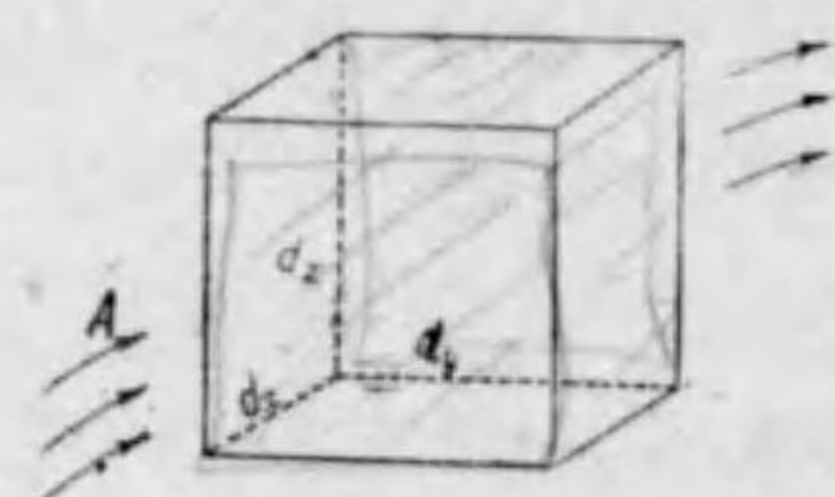
るが、一般には先の値 A_x' と後の値 A_x'' とは等しくなくて、 A_x'' は

$$A_x' + \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right) dx$$

で表される。こゝで $\partial A_x / \partial x$ の値は前後何れの値を取つても大差ないから、

之についてはこの直六面體の位置に於ける値をとると云ふだけにして置く。

そこで前後の面から出入する水の量を併せ考へて差引して外へ出る量は



第8.4圖

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

になる。同様に左右及び上下の面を通つて差引外へ出る量は夫々

$$\frac{\partial A_y}{\partial y} dx dy dz \quad \text{及び} \quad \frac{\partial A_z}{\partial z} dx dy dz$$

である。従つて直六面體から外に出る總量は之等の和で

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dx dy dz = \text{div } A dx dy dz$$

になる。直六面體が單位體積ならば $\text{div } A$ になる。それ故 $\text{div } A$ は單位體積の中から外方へ流れ出る量である。之が負になる時には流れ込むことになる。又水の源泉もなく、吸収口もない處では、水は貯ることもなければ稀薄になることもないのであるから、流入しただけの分量は流出するので、發散は0になる筈である。即ち $\text{div } A = 0$ である。發散の値は坐標軸を變換しても不變であることは明らかであらう。ベクトルが水の流れでない場合にも發散は之に相應した意味をもつ。

ベクトル A がポテンシャル ϕ から導かれる時、即ち $A = -\text{grad } \phi$ の場合には

$$\text{div } A = -\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right) \quad (8.14)$$

となる。

解析的には ∇ は (8.12) であるから、 $\text{div } A$ は ∇ と A との内積に相當する。即ち

$$\text{div } A = \nabla A \quad (8.15)$$

である。又 ∇ と ∇ の内積即ち ∇^2 は

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (8.16)$$

となるから

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{div} \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi \quad (8.17)$$

である。特に $\nabla^2 = \Delta$ と表して之を Laplacian と呼ぶこともある。

§8.8 ベクトル界の廻轉

ベクトル A の場で

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y}$$

を x, y, z 成分とするベクトルをベクトル A の回轉 (rotation 又は curl) と呼び、 $\operatorname{rot} A$ 又は $\operatorname{curl} A$ と書く。

或る一點 P の附近の力の具合を考へるとする。

先づ z 軸に垂直の $dx dy$ を邊とする矩形に就て調べて見よう。第8.5圖で P 點に於けるベクトルを

A とすれば、その x 及び y 分力は夫々 A_x 及び A_y である。そして夫等は夫々 PQ 及び PS に沿ふものである。そこで SR に沿ふものを考へれば、それは A_x が dy だけずれたものであるから

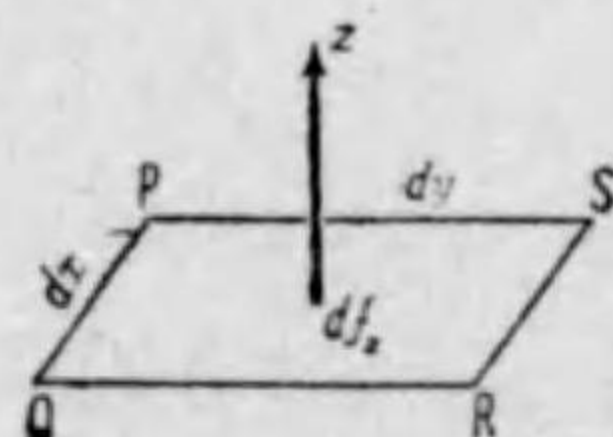
$$A_x + \frac{\partial A_x}{\partial y} dy$$

である。次に QR に沿ふものは同様に

$$A_y + \frac{\partial A_y}{\partial x} dx$$

である。そこで力を受ける單位のものを $PQRSP$ に沿ふて回轉させて見るのに、右手螺釘の進む方向を z とする時の回轉方向を正と定めて置く、さうすれば先づ \vec{PQ} では $A_x dx$ だけの仕事を受け、次に \vec{QR} では

$$\left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial x} dx \right) dy$$



第8.5圖

を、次に \vec{RS} では

$$- \left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial y} dy \right) dx$$

を、最後に \vec{SP} では $-A_y dy$ の仕事を受けるから、一周では之等の和の

$$\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy$$

だけの仕事を受けることになる。なほ厳密には PQ 及び PS に沿ふての夫々 A_x 及び A_y の變化と云ふものは確かにあるのであるが、その變化分は高度の無限小であるから、こゝでは考慮の必要はない。つまり一周で之だけの作用を受けることになるから、回轉する力がある理である。 $dx dy$ は面積素片 df_z であるから

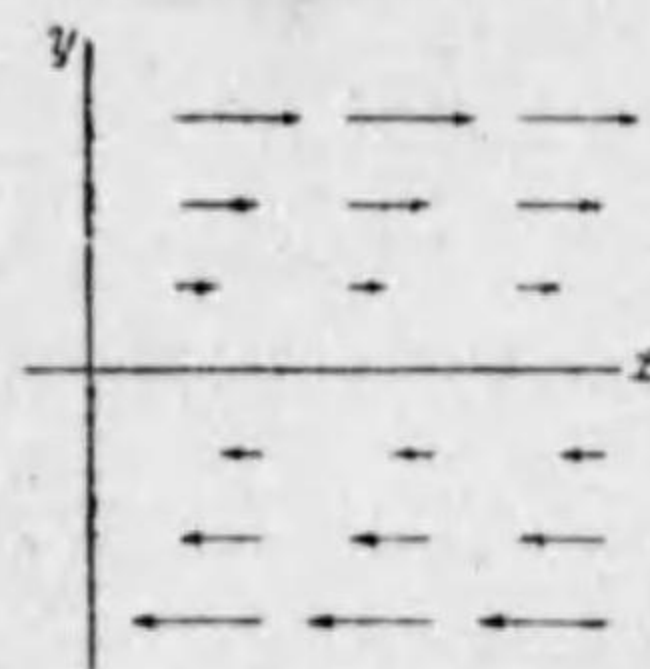
$$\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

は單位面積の回轉力の強さの Z 分力である。それ故 $\operatorname{rot} A$ は單位面積の回轉力の強さである。 A が力でなくて速度を表してゐるとすれば、 $\operatorname{rot} A$ は回轉の速さを表してゐることになる。

例として獨樂の如き回轉體を考へれば、之は明らかに何處でも Z 軸に垂直の面内で回轉を行つてゐる。又第8.6圖の様にベクトル A が一様に z の方向を向いてゐて、その大きさが y に比例してゐる場合には xy 面内に於て回轉がある、従つて $\operatorname{rot}_x A = \operatorname{rot}_y A = 0$ で $\operatorname{rot}_z A$ のみが存在する。

ベクトル A がスカラー φ の grad になつてゐる時に φ をポテンシャルとしたと同様の筆法で、ベクトル A が他のベクトル P の回轉になつてゐる時、即ち

$$A = \operatorname{rot} P \quad (8.18)$$



第8.6圖

として表される時は、 P を A のベクトル・ポテンシャル (vector potential) と云ふ。

解析的には $\text{rot } A$ は ∇ と A との外積になつてゐるから

$$\text{rot } A = \nabla \times A \quad (8.19)$$

である。

§ 8.9 ベクトル演算の諸公式

以上でベクトル界に於けるベクトル演算の基本定義を一通り終つたが、ここでベクトル演算上屢々利用される公式を少し掲げて置かう。

二つのスカラー函数 φ と ψ とがあつて兩者共に勾配をもつてゐる時は、その積の勾配は部分微分の法によつて次の表示となる。

$$\nabla(\varphi\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi \quad (8.20)$$

スカラーとベクトルの積 φA の發散及び回轉は、之又部分微分の法に依つて次の如くなる。

$$\text{div}(\varphi A) = \varphi \text{div } A + A \nabla\varphi, \quad (8.21)$$

$$\text{rot}(\varphi A) = \varphi \text{rot } A + [\nabla\varphi \cdot A]. \quad (8.22)$$

スカラーの勾配として表されるベクトル界は整然と流れてゐる水流の様なもので渦がない。即ち回轉はない。即ち

$$\text{rot } \nabla\varphi = 0. \quad (8.23)$$

回轉界は水流にたとへれば環流してゐるので、環流の軸は不生不滅で連続してゐるから發散はない。即ち

$$\text{div } \text{rot } A = 0 \quad (8.24)$$

である。勿論この二式も物理的の意味などは考へずに解析的に取扱つても斯うなるのである。

又物理的に意味をつけることは難しいが次の公式は重要である。

$$\text{rot } \text{rot } A = \nabla \text{div } A - \nabla^2 A. \quad (8.25)$$

こゝで特に $\text{div } A = 0$ ならば

$$\text{rot } \text{rot } A = -\nabla^2 A. \quad (8.26)$$

又特に $\text{rot } A = 0$ ならば

$$\nabla \text{div } A = \nabla^2 A. \quad (8.27)$$

但し $\nabla^2 A$ はその x, y, z 分力が夫々 $\nabla^2 A_x, \nabla^2 A_y, \nabla^2 A_z$ なる所のベクトルである。

次のものも又なかなか重要である。

$$\text{div}[AB] = B \text{rot } A - A \text{rot } B. \quad (8.28)$$

以上の諸公式は總て解析的に計算を運行してゆけば容易に證明出来るが、ベクトル算法の利點は實にベクトルが界の各點の函数であると云ふ表示を一用ひなくとも、又それを坐標の分力に一々別けて表さなくとも簡單で整然たる表示で界全體の表現が出来ることにある。

§ 8.10 ガウスの定理

$\text{div } A$ を水流の界にたとへて説明したが、こゝでも再び膨縮しない水の流れの界として證明して見る。既に説明した如く $\text{div } A$ は水流の界の單位體積の中から外へ流出する量を表してゐるのであるから、之を或る空間の體積全體に亘つて加へ合せれば、その體積全體から外に流出する量になることになる。之はその體積を包む表面を通つて單位時間に外に流出する量に等しいことになる。そこで § 8.5 の終りに述べた表面の積分の表示を用ひて、この事柄を數式で表せば次の如くなる。

$$\int \text{div } A \, dv = \int A \, d\mathcal{F} \quad (8.29)$$

之をガウス (Gauss) の定理と云ふ。

之は物理的には簡單な平凡な事柄の様であるが、數學的には體積分即ち三次元の積分と二次元の積分との交換が出来るのであるから、重要な定理である。

理解を容易にする爲に、水流の界を考へたけれども、一般のベクトルの界でも成り立つことは云ふ迄もない。又積分の對象になる空間はどんな複雑な形でも成り立つ。又その中に空洞があつてもその空洞への流出を考慮に入れさへすれば、この式が成り立つことは云ふ迄もない。唯然し計算を行ふ際には表面積分の df の向きは飽く迄外方に向けることを忘れない様にしなければならぬ。

一般にはこの證明は解析的に行つてあるが、その理解は容易である。

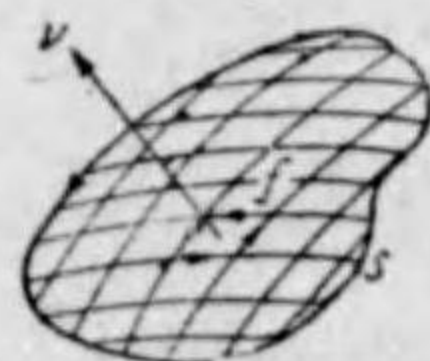
A がポテンシャルを有して $A = -\nabla\phi$ で表される時には、 $\text{div } A = -\nabla^2\phi$ であり、表面の外方への法線の方向を ν とすれば $A_\nu = -\partial\phi/\partial\nu$ であるから、ガウスの定理は次の形になる。

$$\int \nabla^2 \phi \, dv = \int \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \, df. \quad (8.30)$$

閉曲面に包まれた空間の中に全然湧出する源泉も、吸収する排水口もなく唯水が流れてゐるだけならば發散がないのであるから、兩邊共に零になる。又源泉と吸収口とが同じ強さだけある際には $\text{div } A$ は所々で $+$ になつたり $-$ になつたりするが、全體では正負相殺することになる。

§8.11 ストークスの定理

ベクトル A の界で第8.7圖の如く一つの閉曲線を描き、それを縁とする曲面を考へ、それを圖の如く細く區分すれば、§8.8の説明により各面積素片の回轉にその面積を掛けたものは、ベクトルをその周圍に沿ふて線積分したものになつてゐるから、之等兩者を夫々この領域全體に亘つて加へ合せれば、回轉の方は全面積に亘つての積分になるし、線積分の方は内側の線積分は相隣る積分によつて方向が反對の爲打消し合ひ、周縁だけが残る。之を式で表せば次の如くなる。



第8.7圖

$$\int \text{rot } A \, df = \int A \cdot s \quad (8.31)$$

之をストークス (Stokes) の定理と云ひ、面積分を線積分に直すのであるから、之又重要である。s の方向は左に内容面を見乍ら進むのを正と考へれば形が如何に複雑になつても混迷に陥る様なことはない。

§8.12 ベクトル解析

以上簡單乍らベクトルの記法を一通り述べたわけであるが、一般に解析は心の畫像を描き難い爲に、それを補ふべく極力物理的と云ふより寧ろ具象的の説明で押し通したわけである。然し乍ら若し我々が具象的のものばかりを對象にしたい様な心境を持ち續けてゐる限りは、滔々として具象的より抽象的へと躍進し續けてゐる理學の世界へは深入りすることが出来ないことになる。ベクトル解析に限つても之を意の如く自由に驅使するには、解析の一貫した手法によつて一つの體系をなしてゐる全貌も眺める必要はある。

要するにベクトル演算で基本になるものは、grad, rot 及び div の三つであつて、夫々直線上、面上及び體積内に於ける性質を數量的に表すものである。之等を三角函數に對比するならば sin, cos 及び tan の如きものに相當するであらう。従つてベクトル解析の諸種の公式は三角函數の加法定理等に相當し、ガウス及びストークスの定理は積分關係の公式に相當するのである。かく考へ來るならば、ベクトル演算が流體力學及び電磁氣現象の説明に有益な利器であるのは、三角函數が諸種の比較的簡単な物理現象を説明するのに好個の數學的手法であるのと同様であることは理解出來よう。

こゝでベクトル解析の概貌を述べよう。先づ A 及び B の二つのベクトルのスカラー積を求めるに、單位ベクトルの間に次の關係がある。

$$\left. \begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = 1, \\ ij = ji = jk = kj = ki = ik = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.32)$$

この關係を用ひて唯の計算を行へば、スカラー積は次の如くなる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}\mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k})(B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) \\
 &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \\
 &= AB \cos \theta.
 \end{aligned} \tag{8.33}$$

次に \mathbf{A} 及び \mathbf{B} のベクトル積を求めるには、単位ベクトルの間には次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} &= 0, \\
 \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j}, \\
 \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} = -\mathbf{i} \times \mathbf{k}, \\
 \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i}.
 \end{aligned} \right\} \tag{8.34}$$

この関係を用ひて唯の計算を行へば、ベクトル積は次の如くなる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) \times (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) \\
 &= (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k} \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \tag{8.35}$$

その絶対値の2乗を $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2$ で表せば次の如くなり

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 &= (A_yB_z - A_zB_y)^2 + (A_zB_x - A_xB_z)^2 + (A_xB_y - A_yB_x)^2 \\
 &= (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) - (A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)^2 \\
 &= A^2B^2(1 - \cos^2 \theta) = A^2B^2 \sin^2 \theta.
 \end{aligned} \tag{8.36}$$

故に $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の絶対値 $= AB \sin \theta$ となる。

次に (8.23) の証明を行へば次の如くなる。

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \nabla \varphi &= \nabla \times \nabla \varphi \\
 &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(\mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{8.37}$$

次に (8.24) の証明は次の如く出来る。

$$\begin{aligned}
 \text{div rot } \mathbf{A} &= \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} (\text{rot}_x \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial y} (\text{rot}_y \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial z} (\text{rot}_z \mathbf{A}) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{8.38}$$

最後に (8.25) の証明は次の如く出来る。

$$\begin{aligned}
 \text{rot}_x (\text{rot } \mathbf{A}) &= \frac{\partial}{\partial y} (\text{rot}_z \mathbf{A}) - \frac{\partial}{\partial z} (\text{rot}_y \mathbf{A}) \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\
 &= - \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right).
 \end{aligned} \tag{8.39}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \text{故に} \quad \text{rot}_x (\text{rot } \mathbf{A}) &= -\nabla^2 A_x + \frac{\partial}{\partial x} (\text{div } \mathbf{A}), \\
 \text{同様に} \quad \text{rot}_y (\text{rot } \mathbf{A}) &= -\nabla^2 A_y + \frac{\partial}{\partial y} (\text{div } \mathbf{A}), \\
 \text{rot}_z (\text{rot } \mathbf{A}) &= -\nabla^2 A_z + \frac{\partial}{\partial z} (\text{div } \mathbf{A}).
 \end{aligned} \right\} \tag{8.40}$$

この三式に順次 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ を掛けて加へ合せれば (8.25) に達する。

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} + \text{grad div } \mathbf{A}. \tag{8.41}$$