最新三角難題集

錢洪翔編

上海北新書局刊行

最新三角難題集解

錢洪翔編

上海[redacted]行

1938

最新三角難題集解

每[illegible]
外[illegible]費

編者 錢洪翔

發行人 李志雲

發行者 北新書局
上海四馬路中市
電報掛號一一六三

印刷所 北新印刷所

民國二十七年十月初版

最新三角难題詳解

目　　次

最新三角難題集解

（一） 角

【參考公式】

1. $180° = \pi$ 弧度.

2. $1° = \frac{\pi}{180}$ 弧度.

3. 1 弧度 $= \frac{180°}{\pi} = 57°17'44.81''$.

4. $180\ \theta = \pi x$.

（θ 表示弧度，x 表示角度）.

（1） 角

1. 試以度分秒表 1.704535 直角.

【解】 因 $90° \times 1.704535 = 153.40815°$,

$60' \times 0.40815 = 24.489'$，以及 $60'' \times 0.489 = 29.34''$,

是以本題所求 1.704535 直角 $= 153°24'29.34$.

2. $97°5'15''$ 合幾直角?

【解】 $97°5'15'' = (97 \times 60 + 5) \times 60 + 15 = 349515''$,

直角 $= 90 \times 60 \times 60 = 324000$ 秒,

是以知 $97°5'15'' = 349515 \div 324000 = 1.07875$ 直角.

3. 試以六十分法表時計之兩針在 2 時34分56秒時之夾角.

【解】 由XII處至長針之距離,其度數爲$6^\circ \times (34+56/60)$.
故由II處至短針之距離,其度數爲$6^\circ \times (34+56/60) \times \frac{1}{12}$,因而由XII至短針之距離,其度數爲$6^\circ \times (34+56/60) \times \frac{1}{12}+6^\circ \times 10$.因此,所求夾角$=6^\circ \times (34+56/60)-6^\circ \times (34+56/60) \times \frac{1}{12}-6^\circ \times 10$
$=132^\circ 8'$.

4. 時計之兩針,在 5 時與 7 時40分間,各旋轉幾度?

【解】 在 5 時與 7 時40分間,共旋轉二周及一周之 40/60,
故其旋轉之度數爲 $360^\circ \times 2+360^\circ \times (40/60)$
$=960^\circ$. 時針所旋轉者爲分針之 1/12, 故時針旋轉之度數爲 $960^\circ \times (1 \times 12)=80^\circ$.

5. 求 $90^\circ, 180^\circ, 360^\circ$ 等角之弧度.

【解】 由公式$\frac{x}{180}=\frac{\theta}{\pi}$, 得$\frac{90}{180}=\frac{\theta}{\pi}$, 故 90° 角之弧度爲 $\theta=\pi/2$.' 仿此,180° 角之弧度爲π;又 36° 角之弧度爲2π.

6. 試用弧度法表以下各角: (1) 60°. (2) $22^\circ\frac{1}{2}$. (3) 0.1°.

【解】 由公式4, $\frac{\pi}{180}=\frac{\theta}{x}$則

(1) $\theta=x \times \frac{\pi}{180}=60^\circ \times \frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{3}$.

(2) $\theta=22\frac{1}{2}^\circ\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{8}$.

(3) $\frac{1}{10}\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{1800}$.

【又解】 2 直角，卽180° 之弧度爲 π，故 1° 之弧度等於 $\pi/180$，因此，用弧度法表所設各角，則

(1) $60\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{3}$.　(2) $22\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{8}$.

(3) $\frac{1}{10}\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{1800}$.

7. 求 42°45′30″ 角之弧度.

【解】 因 42°45′30″=153930″，故由下式

$$\frac{153930}{180\times60\times60}=\frac{a}{\pi}，得 a=0.2375\cdots\cdots\cdots\pi.$$

8. 求 $\pi/13$ 之度數.

【解】 所求度數爲 18°/13=13.846153°.

二　銳角三角函數

【參攷公式】

1. vers A=1−cos A　2. covers A=1−sin A

3. $\sin^2 A+\cos^2 A=1$　4. $\tan^2 A+1=\sec^2 A$

5. $\cot^2 A+1=\csc^2 A$　6. $\csc A=\frac{1}{\sin A}$

7. $\sec A=\dfrac{1}{\cos A}$　　8. $\cot A=\dfrac{1}{\tan A}$

9. $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$　　10. $\cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}$

11. $\sin A \csc A=1$　　12. $\cos A \sec A=1$

13. $\tan A \cot A=1$　　14. $\sin A<\tan A<\sec A.$

15. $\cos A<\cot A<\operatorname{cosec} A.$

(1) 三角函數之數值

1. 設四邊形 PQRS 中，角 PSR 爲直角，其對角線 PR 垂直於邊 RQ，今 RP=20，RQ=21，RS=16，求 sin PRS，tan RPS，cos RPQ，cosec PQR.

【解】 $PS=\sqrt{(\overline{PR}^2-\overline{RS}^2)}$

$=\sqrt{(20^2-16^2)}=12,$

$PQ=\sqrt{(\overline{PR}^2+\overline{RQ}^2)}$

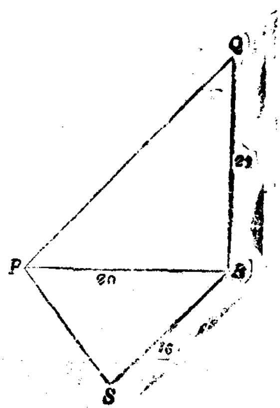
$=\sqrt{(20^2+21^2)}=29$

故$\sin PRS=\dfrac{PS}{PR}=\dfrac{12}{20}=\dfrac{3}{5},$

$\tan RPS=\dfrac{SR}{PS}=\dfrac{16}{12}=\dfrac{4}{3},$

$\cos RPQ=\dfrac{PR}{PQ}=\dfrac{20}{29},$

$\operatorname{cosec} PQR=\dfrac{PQ}{PR}=\dfrac{29}{20}.$



2. 試由 sin，求 A 之其他各三角函數.

【證】 因 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$，故 $\cos^2 A=1-\sin^2 A$，故 $\cos A$

$=\sqrt{1-\sin^2 A}$，又由 $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$

$=\dfrac{\sin A}{\sqrt{(1-\sin^2 A)}}$ 而餘割，正割，餘切，分別爲正弦，

餘弦，正切之逆數，因而可得 $\operatorname{cosec} A=\dfrac{1}{\sin A}$，$\sec A$

$=\dfrac{1}{\sqrt{(1-\sin^2 A)}}$，$\cot A=\dfrac{\sqrt{(1-\sin^2 A)}}{\sin A}$

【注意】 尚有 $\operatorname{vers} A=1-\cos A=1-\sqrt{1-\sin^2 A}$

又 $\operatorname{covers} A=1-\sin A$.

3. 設 $\sin A=\dfrac{12}{13}$，試用圖解法求其他三角函數.

【解】 作 c 爲直角之三角形 ABC，令斜邊 AB 爲 13，邊 BC 爲 12，則 $\sin A=12/13$，

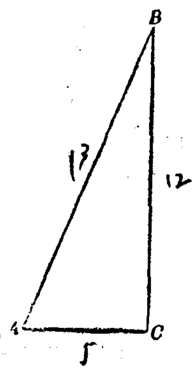
而 $AC=\sqrt{(AB^2-BC^2)}$

$=\sqrt{(13^2-12^2)}=5$，

故 $\cos A=\dfrac{5}{13}$，$\tan A=\dfrac{12}{5}$，

從而 $\operatorname{cosec} A=\dfrac{13}{12}$，

$\sec A=\dfrac{13}{5}$，$\cot A=\dfrac{5}{12}$.



4. 一角之正弦爲$\frac{3}{5}$，求此角之其他三角函數.

【解】 由前題，$\cos A=\sqrt{(1-\frac{9}{25})}=\frac{4}{5}$,

$\tan A=\frac{3}{5}\Big/\frac{4}{5}=\frac{3}{4}$，從而 $\operatorname{cosec} A=\frac{5}{3}$,

$\sec A=\frac{5}{4}$, $\cot A=\frac{4}{3}$

5. 設 $\sin A=0.012$，則其他三角函數之値如何?

【解】 由前題知 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-(0.012)^2}$

$=0.999$

$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{0.012}{0.999}=0.012.$

$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{0.012}=83.333.$

$\sec A=\frac{1}{0.999}=1.001.$

$\cot A=\frac{1}{0.012}=83.333.$

6. 試由 $\cos A=0.125$，以求 $\sin A$, $\cot A$, 及 $\operatorname{cosec} A$.

【解】 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{(1-0.125^2)}=0.992$,

$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{0.125}{0.992}=0.126$,

$\text{coses } A=\frac{1}{\sin A}=\frac{1}{0.992}=1.008.$

7. 設 $\cos\theta=\frac{1}{a}$，求 $\sin\theta$，及 $\tan\theta$。

【解】由前題，可知 $\sin\theta=\sqrt{\left(1-\frac{1}{a^2}\right)}=\sqrt{\frac{(a^2-1)}{a^2}}$，

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{(a^2-1)}}{a}\bigg/\frac{1}{a}=\sqrt{(a^2-1)}.$$

8. 試用 $\tan A$，求 A 之他三角函數。

【解】因 $\cos A=\frac{1}{\sec A}=\frac{1}{\sqrt{(1+\tan^2 A)}}$，

又知 $\sin A=\tan A\cdot\cos A=\frac{\tan A}{\sqrt{(1+\tan^2 A)}}$，

從而其他函數 $\sec A=\sqrt{(1+\tan^2 A)}$，

$$\operatorname{cosec} A=\frac{\sqrt{(1+\tan^2 A)}}{\tan A}，\cot A=\frac{1}{\tan A}.$$

【注意】尚有函數 $\operatorname{vers} A=1-\sin A$

$=1-\frac{1}{\sqrt{(1+\tan^2 A)}}$，及 $\operatorname{covers} A=1-\sin A$

$=1-\frac{\tan A}{\sqrt{(1+\tan^2 A)}}$.

9. 設 $\tan\alpha=\frac{m}{n}$，求 $\sin\alpha$ 及 $\cos\alpha$ 之值。

【解】由前題，$\sin\alpha=\frac{m}{n}\bigg/\sqrt{\left(1+\frac{m^2}{n^2}\right)}=\frac{m}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$.

$$\cos\alpha=1\bigg/\sqrt{\left(1+\frac{m^2}{n^2}\right)}=\frac{n}{\sqrt{(m^2+n^2)}}.$$

10. 設 $\tan\theta=5$，求其他函數之值.

【解】 由前題，$\sin\theta=\dfrac{5}{\sqrt{(1+5^2)}}=\dfrac{5}{\sqrt{26}}$，

$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{(1+5^2)}}=\dfrac{1}{\sqrt{26}}$，因此，知

$\operatorname{cosec}\theta=\dfrac{\sqrt{26}}{5}$，$\sec\theta=\sqrt{26}$，$\cot\theta=\dfrac{1}{5}$.

11. 設 $\tan A=\dfrac{2mn}{m^2-n^2}$ 求 $\cos A$，及 $\operatorname{cosec} A$.

【解】 由前題，即可知 $\cos A=1/\sqrt{\left\{1+\left(\dfrac{2mn}{m^2-n^2}\right)^2\right\}}$

$=\sqrt{\left\{\dfrac{(m^2-n^2)^2}{(m^2-n^2)^2+4m^2n^2}\right\}}=\sqrt{\left\{\dfrac{(m^2-n^2)^2}{m^4+2m^2n^2+n^4}\right\}}$

$=\dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$，又可知 $\operatorname{cosec} A=\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{1}{\cos A\tan A}$

$=\dfrac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\times\dfrac{m^2-n^2}{2mn}=\dfrac{m^2+n^2}{2mn}$.

12. 試用 $\operatorname{cosec} A$，求 A 之他三角函數.

【解】 因 $\sin A=\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A}$，

又因 $\cos A=\cot A\sin A=\dfrac{\sqrt{(\operatorname{cosec}^2 A-1)}}{\operatorname{cosec} A}$，

而 $\tan A=\dfrac{1}{\cot A}=\dfrac{1}{\sqrt{(\operatorname{cosec}^2 A-1)}}$，

從而 $\sec A=\dfrac{1}{\cos A}=\dfrac{\operatorname{cosec} A}{\sqrt{(\operatorname{cosec}^2 A-1)}}$，

$\cot A=\sqrt{(\operatorname{cosec}^2 A-1)}$.

【注意】 尚有函數 $\operatorname{vers} A=1-\cos A=1-\dfrac{\sqrt{(\operatorname{cosec}^2 A-1)}}{\operatorname{cosec} A}$，

以及 $\operatorname{covers} A=1-\sin A=1-\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A}$.

13. 設 $\sec A=\dfrac{m^2+1}{2m}$，則他三角函數如何？

【解】 因 $\sin A=\sqrt{\left(1-\dfrac{4m^2}{(m^2+1)^2}\right)}=\dfrac{m^2-1}{m^2+1}$. $\cos A$

$=\dfrac{2m}{m^2+1}$. $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{m^2-1}{m^2+1}\times\dfrac{m^2+1}{2m}$

$=\dfrac{m^2-1}{2m}$. $\operatorname{cosec} A=\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{m^2+1}{m^2-1}$. $\cot A$

$=\dfrac{1}{\tan A}=\dfrac{2m}{m^2-1}$.

14. 試用 sec A，求 A 之他三角函數.

【解】 因 $\sin A=\tan A\cos A=\dfrac{\sqrt{(\sec^2 A-1)}}{\sec A}$.

又因 $\cos A=\dfrac{1}{\sec A}$，$\tan A=\sqrt{(\sec^2 A-1)}$.

從而 $\operatorname{cosec} A=\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{\sec A}{\sqrt{(\sec^2 A-1)}}$.

$\cot A=\dfrac{1}{\tan A}=\dfrac{1}{\sqrt{(\sec^2 A-1)}}$.

【注意】 $\operatorname{vers} A=1-\cos A=1-\dfrac{1}{\sec A}$，

以及 covers $A=1-\sin A=1-\frac{\sqrt{(\sec^2 A-1)}}{\sec A}$.

15. 已知 $\sec\theta=4$，求 $\cot\theta$，及 $\sin\theta$.

【解】 $\cot\theta=\frac{1}{\sqrt{(4^2-1)}}=\frac{1}{\sqrt{15}}$.

又 $\sin\theta=\sqrt{(1-\cos^2\theta)}=\sqrt{\left(1-\frac{1}{\sec^2\theta}\right)}$

$=\sqrt{\left(1-\frac{1}{16}\right)}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

16. 試用 cot A，求 A 之他三角函數.

【解】 因 $\sin A=\frac{1}{\operatorname{cosec} A}=\frac{1}{\sqrt{(1+\cot^2 A)}}$，又因 cos A

$=\cot A\times\sin A=\frac{\cot A}{\sqrt{(1+\cot^2 A)}}$，tan A

$=\frac{1}{\cot A}$. 從而 $\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}=\sqrt{(1+\cot^2 A)}$.

$\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{\sqrt{(1+\cot^2 A)}}{\cot A}$.

【注意】 vers $A=1-\cos A=1-\frac{\cot A}{\sqrt{(1+\cot^2 A)}}$,

及 covers $A=1-\sin A=1-\frac{1}{\sqrt{(1+\cot^2 A)}}$.

17. 設 $\cot\alpha=2/\sqrt{5}$，則 $\sin\alpha$，及 $\cos\alpha$ 如何？

【解】 由上題 $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{4}{5}\right)}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

又 $\cos\alpha=\cot\alpha\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{3}$.

18. 設 $\cot\alpha=\frac{p}{q}$，則他三角函數之值如何？

【解】 由前題 $\sin\alpha=1\Big/\sqrt{\left(1+\frac{p^2}{q^2}\right)}=\frac{q}{\sqrt{(p^2+q^2)}}$,

$\cos\alpha=\frac{p}{q}\Big/\sqrt{\left(1+\frac{p^2}{q^2}\right)}=\frac{p^2}{\sqrt{(p^2+q^2)}}$. $\tan\alpha$

$=\frac{1}{\cot\alpha}=\frac{q}{p}$, $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{(p^2+q^2)}}{q}$,

以及 $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{(p^2+q^2)}}{p}$.

19. 以下各題中，試由所設三角函數，求他三角函數.

(1) $\sin A=\frac{1}{2}$.　　(2) $\cos A=\frac{8}{17}$.

(3) $\tan A=\frac{1}{2}$.　　(4) $\cot A=\frac{\sqrt{(q^2-p^2)}}{p}$.

(5) $\sin\theta=\frac{7}{25}$.　　(6) $\sin\phi=\frac{2mn}{m^2+n^2}$.

【解】 (1) $\sin A=\frac{1}{2}$,　　$\therefore \cos A=\sqrt{(1-\sin^2 A)}$

$=\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{1}{2}\Big/\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}$,　$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}=2$, $\sec A=\frac{1}{\cos A}$

$=\frac{2}{\sqrt{3}}$,　$\cot A=\frac{1}{\tan A}=\sqrt{3}$.

(2) $\cos A=\frac{8}{17}$， $\therefore \sin A=\sqrt{(1-\cos^2 A)}$

$=\sqrt{\left(1-\frac{8^2}{17^2}\right)}=\frac{15}{17}$， $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{15}{17}\Big/\frac{8}{17}$

$=\frac{15}{8}$，從而 $\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{17}{8}$， $\operatorname{cosec} A$

$=\frac{1}{\sin A}=\frac{17}{15}$， $\cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{8}{15}$.

(3) 因 $\tan A=\frac{1}{2}$，故知 $\sin A=\frac{\tan A}{\sqrt{(1+\tan^2 A)}}$

$=\frac{1}{2}\Big/\sqrt{\left(1+\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos A=\frac{1}{\sqrt{(1+\tan^2 A)}}$

$=\frac{2}{\sqrt{5}}$， $\cot A=\frac{1}{\tan A}=2$， $\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}$

$=\sqrt{5}$， $\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(4) 因 $\cot A=\frac{\sqrt{(q^2-p^2)}}{p}$， 故知 $\sin A$

$=\frac{1}{\sqrt{(1+\cot^2 A)}}=1\Big/\sqrt{\left(1+\frac{q^2-p^2}{p^2}\right)}=\frac{p}{q}$，

$\cos A=\cot A/\sqrt{(1+\cot^2 A)}=\frac{\sqrt{(q^2-p^2)}}{q}$，

$\tan A=\frac{1}{\cot A}=\frac{p}{\sqrt{(q^2-p^2)}}$， $\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}$

$=\frac{q}{p}$，以及 $\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{q}{\sqrt{(q^2-p^2)}}$.

(5) 因 $\sin\theta = \frac{7}{25}$，故 $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta)}$

$= \sqrt{\left(1 - \frac{7^2}{25^2}\right)} = \frac{24}{25}$，$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{7}{24}$，從

而 $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{25}{7}$，$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{25}{24}$，

$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{24}{7}$.

(6) 因 $\sin\phi = \frac{2mn}{m^2+n^2}$，故 $\cos\phi = \sqrt{(1-\sin^2\phi)}$

$= \sqrt{\left\{1 - \left(\frac{2mn}{m^2+n^2}\right)^2\right\}} = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$，

$\tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{2mn}{m^2+n^2} \Big/ \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2} = \frac{2mn}{m^2-n^2}$，

$\operatorname{cosec}\phi = \frac{m^2+n^2}{2mn}$，$\sec\phi = \frac{1}{\cos\phi} = \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$，

$\cot\phi = \frac{1}{\tan\phi} = \frac{m^2-n^2}{2mn}$.

20. 試以 $\operatorname{vers}\alpha$ 求他三角函數.

【解】 $\cos\alpha = 1 - \operatorname{vers}\alpha$，$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$= \sqrt{\{1-(1-\operatorname{vers}\alpha)^2\}} = \sqrt{(2\operatorname{vers}\alpha - \operatorname{vers}^2\alpha)}$，

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{(2\operatorname{vers}\alpha - \operatorname{vers}^2\alpha)}}{1-\operatorname{vers}\alpha}$，

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{1-\operatorname{vers}\alpha}$，

$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sqrt{(2\operatorname{vers}\alpha - \operatorname{vers}^2\alpha)}}$，

$$\cot\ \alpha=\frac{1}{\tan\ \alpha}=\frac{1-\text{vers}\ \alpha}{\sqrt{(2\ \text{vers}\ \alpha-\text{vers}^2\ \alpha)}}.$$

21. 設 $\triangle ABC$ 中，$C=90°$，$AB=1$，$BC=0.7$，則 $\tan ABC=1.02\cdots\cdots$ 試證之.

【證】 $AC=\sqrt{(\overline{AB}^2-\overline{BC}^2)}=\sqrt{(1-0.7^2)}=\sqrt{0.51}$，

故 $\tan\ ABC=\frac{\sqrt{0.51}}{0.7}=\frac{0.714\cdots}{0.7}=1.02\cdots\cdots$

22. 已知 $a=p^2+pq$，$c=q^2+pq$，求 $\cot\ A$. 但 C 爲直角.

【解】 $b=\sqrt{(c^2-a^2)}=\sqrt{\{(q^2+pq)^2-(p^2+pq)^2\}}$

$=(p+q)\sqrt{(q^2-p^2)}$，故 $\cot\ A=\frac{b}{a}$

$$=\frac{(p+q)\sqrt{(q^2-p^2)}}{p^2+pq}=\frac{\sqrt{(q^2-p^2)}}{p}.$$

23. 求 $\tan^2 60°+2\tan^2 45°$ 之數值.

【解】 $\tan 60°=\sqrt{3}$，$\tan 45°=1$，故所設式之數值等於 $(\sqrt{3})^2+2(1)^2$，即 $3+2=5$.

24. 求 $\text{cosec}^2\ 60°+\sec^2 45°-2\cot^2 60°$ 之值.

【解】 以各三角函數之值代入所設式，則得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+(\sqrt{2})^2-2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=2.$$

25. 求 $\frac{1}{3}\sin^2 60°-\frac{1}{2}\sec 60°\tan^2 30°+\frac{4}{3}\times\sin^2 45°\tan^2 60°$ 之值.

【解】 以 $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$， $\sec 60° = 2$，

$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$，$\tan 60° = \sqrt{3}$ 代入，則所設式爲

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \times 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 (\sqrt{3})^2$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 2 = \frac{23}{12}.$$

26. 求 $\sin^3 60° \cot 30° - 2\sec^2 45° + 3 \times \cos 60° \tan 45° - \tan^2 60°$ 之數值.

【解】 以 $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cot 30° = \sqrt{3}$，$\sec 45° = \sqrt{2}$，

$\cos 60° = \frac{1}{2}$，$\tan 45° = 1$，及 $\tan 60° = \sqrt{3}$

代入所設式，則得 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \times \sqrt{3} - 2$

$$\times(\sqrt{2})^2 + 3 \times \frac{1}{2} \times 1 - (\sqrt{3})^2$$

$$= \frac{9}{8} - 4 + \frac{3}{2} - 3 = -\frac{35}{8}.$$

27. 求 $3\tan^2 30° + \frac{1}{4}\sec 60° + 5\cot^2 45° - \frac{2}{3}\sin^2 60°$ 之值.

【解】 以 $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$， $\sec 60° = 2$，$\cot 45° = 1$，

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$，代入，則所設之式變爲

$$3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{1}{4}\times 2+5\times 1-\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$=1+\frac{1}{2}+5-\frac{1}{2}=6.$$

28. 求 $2\sin 30^\circ \cos 30^\circ \cot 60^\circ$ 之數值.

【解】 $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$,

是以所設式之數值爲 $2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$.

29. 求 $\cot 60^\circ \tan 30^\circ+\sec^2 45^\circ$ 之數值.

【解】 $\cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sec 45^\circ=\sqrt{2}$,

故所設式之數值等於 $\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+(\sqrt{2})^2$,

卽 $\frac{1}{3}+2=2\frac{1}{3}$.

30. 設 $\sec A=\frac{13}{5}$, 試求 $\frac{2\sin A-3\cos A}{4\sin A-9\cos A}$ 之值.

【解】 因 $\sec A=\frac{13}{5}$, 故 $\cos A=\frac{5}{13}$, 從而 $\sin A$

$$=\sqrt{\left\{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2\right\}}=\frac{12}{13},$$

故可知所求 $\frac{2\sin A-3\cos A}{4\sin A-9\cos A}$

$$=\left(2\times\frac{12}{13}-3\times\frac{5}{13}\right)\Big/\left(4\times\frac{12}{13}-9\times\frac{5}{13}\right)=3.$$

31. 設 $\text{vers}\,\alpha=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$, 求 $\sin\alpha+\cos\alpha+\tan\alpha+\cot\alpha$

$+\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha$ 之值.

【解】 因 $\operatorname{vers} a=1-\cos\alpha$, 故 $1-\cos a=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$, 從

而 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha=\sqrt{(1-\cos^2\alpha)}=\sqrt{(1-\frac{1}{2})}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=1$, $\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=1$,

$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\sqrt{2}$, $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\sqrt{2}$,

故所設式等於 $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+1+1+\sqrt{2}+\sqrt{2}$

$=3\sqrt{2}+2$.

32. 設 $\sec A=\sqrt{2}$, 求 $\sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\cos A}}$.

【解】 $\sin A=\sqrt{(1-\cos^2 A)}=\sqrt{\left(1-\frac{1}{\sec^2 A}\right)}$

$=\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}}$, 又 $\cos A=\frac{1}{\sec A}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

故 $\sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\cos A}}=\sqrt{\left\{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Big/\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}}$

$=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}}=\sqrt{2}-1$.

33. 設 $p\cot A=\sqrt{(q^2-p^2)}$, 求 $\sin A$.

【解】 $p\cot A=\sqrt{(q^2-p^2)}$ 之兩邊平方, $p^2\times\cot^2 A$

$=q^2-p^2$, 移項, $p^2(1+\cot^2 A)=q^2$, 卽 $p^2\operatorname{cosec}^2 A$

$=q^2$，或 $p^2=q^2\sin^2 A$，從而 $\sin A=\frac{p}{q}$.

34. 設 $\sin A-\cos A=0$，求 $\operatorname{cosec} A$ 之值.

【解】 因 $\sin A-\cos A=0$，故 $\frac{\cos A}{\sin A}=1$，即 $\cot A=1$.

然 $\operatorname{cosec} A=\sqrt{(1+\cot^2 A)}$，故 $\operatorname{cosec} A=\sqrt{(1+1)}$

$=\sqrt{2}$.

【別解】 $\sin A-\cos A=0$，故 $\sin A=\cos A$，即 $\sin^2 A$

$=\cos^2 A=1-\sin^2 A$，故 $2\sin^2 A=1$，故 $\sqrt{2}$

$\sin A=1$，是以 $\sqrt{2}=\frac{1}{\sin A}=\operatorname{cosec} A$.

35. $\cos a=\frac{m^2+2mn}{m^2+2m+2n^2}$時，$\tan a$ 如何？

【解】 因 $\sin^2 A=1-\cos^2 A$，故 $\sin^2 A$

$$=1-\frac{(m^2+2mn)^2}{(m^2+2mn+2n^2)^2}=\frac{4(m+n)^2n^2}{(m^2+2mn+2n^2)^2},$$

從而 $\sin A=\frac{2(m+n)n}{m^2+2mn+2n^2}$，故 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$

$$=\frac{2(m+n)n}{m^2+2mn+2n^2}\div\frac{m^2+2mn}{m^2+2mn+2n^2}=\frac{2(m+n)n}{m^2+2mn}$$

(2) 用一三角函數表其他三角函數

36. 試用 $\sin\theta$ 表 $(\sec\theta-\tan\theta)^2$

【解】 $(\sec\theta-\tan\theta)^2=\left(\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2=\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}$

$$=\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin\theta}=\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}.$$

37. 試以 $\sin A$ 之項表 $\tan^2 A+\cot^2 A$

【解】 $\tan^2 A+\cot^2 A=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}+\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}=\frac{\sin^2 A}{1-\sin^2 A}$

$$+\frac{1-\sin^2 A}{\sin^2 A}=\frac{\sin^4 A+(1-\sin^2 A)^2}{\sin^2 A(1-\sin^2 A)}$$

$$=\frac{1-2\sin^2 A+2\sin^4 A}{\sin^2 A(1-\sin^2 A)}.$$

38. 試用 $\cos\theta$ 表 $1+\tan^4\theta$.

【解】 $1+\tan^4\theta=(1+\tan^2\theta)^2-2\tan^2\theta=\sec^4\theta-\frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$$=\frac{1}{\cos^4\theta}-\frac{2(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}=\frac{1-2\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos^4\theta}$$

$$=\frac{1-2\cos^2\theta+2\cos^4\theta}{\cos^4\theta}.$$

39. 試以 $\cos\theta$ 之項表 $\sin^4\theta+2\sin^2\theta\times\sec^2\theta$.

【解】 所設式等於 $\sin^2\theta(\sin^2\theta+2\cos^2\theta)$，即 $\sin^2\theta$ $(1+\cos^2\theta)$，從而等於 $(1-\cos^2\theta)\times(1+\cos^2\theta)$，即 $1-\cos^4\theta$.

40. 試用 $\tan A$ 表 $\sin^6 A+\cos^6 A$.

【解】 $\sin^6 A+\cos^6 A=(\sin^2 A+\cos^2 A)(\sin^4 A-\sin^2 A$ $\cos^2 A+\cos^4 A)=\sin^4 A-\sin^2 A\times\cos^2 A+\cos^4 A$

$$=\cos^4 A\left\{\frac{\sin^4 A}{\cos^4 A}-\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}+1\right\}=\frac{1}{\sec^4 A}\{\tan^4 A$$

$$-\tan^2 A+1) = \frac{\tan^4 A-\tan^2 A+1}{(1+\tan^2 A)^2}.$$

41. 試以 $\tan\theta$ 之項表 $\sec^4\theta-\sec^2\theta$.

【解】 $\sec^4\theta-\sec^2\theta=\sec^2\theta(\sec^2\theta-1)=(1+\tan^2\theta)$

$(1+\tan^2\theta-1)=(1+\tan^2\theta)\times\tan^2\theta$.

42. 試以 cosec A 表 $(\sec A-\tan A)^2$

【解】 由前題 $(\sec A-\tan)^2=\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}$

$$=\frac{\dfrac{1}{\sin A}-\dfrac{\sin A}{\sin A}}{\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{\sin A}{\sin A}}=\frac{\operatorname{cosec} A-1}{\operatorname{cosec} A+1}.$$

43. 以 $\sin\theta$ 之項表：

(1) $\cos^4\theta-\sin^4\theta$, (2) $(\sin^2\theta-\cos^2\theta)^2$,

(3) $1-\tan^4\theta$, (4) $\sin^6\theta+\cos^6\theta$.

【解】 (1) $\cos^4\theta-\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\times(\cos^2\theta$

$-\sin^2\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)$

$=2\cos^2\theta-1$. 又此式 $=\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-\sin^2\theta$

$-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta$.

(2) $(\sin^2\theta-\cos^2\theta)^2=(1-\cos^2\theta-\cos^2\theta)^2$

$=(1-2\cos^2\theta)^2$, 又此式 $=\{\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)\}^2$

$=(2\sin^2\theta-1)^2$.

(3) $1-\tan^4\theta=(1+\tan^2\theta)(1-\tan^2\theta)=\sec^2\theta$

$$\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)=\frac{1}{\cos^2\theta}\left(\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$$

$$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^4\theta}=\frac{2\cos^2\theta-1}{\cos^4\theta}，\text{又}\frac{1-2\sin^2\theta}{(1-\sin^2\theta)^2}.$$

(4) $\sin^6\theta+\cos^6\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^4\theta-\sin^2\theta\times\cos^2\theta+\cos^4\theta)=\sin^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-3\sin^2\theta\cos^2\theta=1-3\sin^2\theta\cos^2\theta=1-3\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)=1-3\cos^2\theta+3\cos^4\theta$，又此式 $=1-3\times\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)=1-3\sin^2\theta+3\sin^4\theta$.

(3) 通常恆等式之證明

34. 求證 $\sec A-\cos A=\tan A\sin A$.

【證】 所設式之左邊 $=\frac{1}{\cos A}-\cos A=\frac{1-\cos^2 A}{\cos A}$

$$=\frac{\sin^2 A}{\cos A}=\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\sin A=\tan A\sin A.$$

45. 求證 $\tan A+\cot A=\sec A\operatorname{cosec} A$.

【證】 $\tan A+\cot A=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\cos A\sin A}$

$$=\frac{1}{\cos A\sin A}=\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{1}{\sin A}$$

$$=\sec A\cdot\operatorname{cosec} A.$$

46. 求證 $\tan\alpha\sin\alpha+\cos\alpha=\sec\alpha$.

【證】 所設式之左邊 $=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\sin\alpha+\cos\alpha$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha.$$

【別證】 題式左邊 $=(\tan\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+1)\cos\alpha=(\tan^2\alpha+1)$

$\cos\alpha=\sec^2\cos\alpha=\sec\sec\alpha\frac{1}{\cos\alpha}.\cos\alpha$

$=\sec\alpha.$

47. 求證 $\cot\alpha\cos\alpha+\sin\alpha=\operatorname{cosec}\alpha.$

【證】 所設式之左邊 $=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.\cos\alpha+\sin\alpha$

$$=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha.$$

【別證】 題式左邊 $=(\cot\alpha.\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+1)\sin\alpha=(\cot^2\alpha+1)$

$\sin\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha\sin\alpha=\operatorname{cosec}\alpha.\frac{1}{\sin\alpha}.\sin\alpha$

$=\operatorname{cosec}\alpha.$

48. 求證 $\cos\alpha\tan\alpha+\sin\alpha\cot\alpha=\sin\alpha+\cos\alpha.$

【證】 所設式之左邊 $=\cos\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\sin\alpha\times\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$=\sin\alpha+\cos\alpha.$

49. 求證 $\tan^2A-\cot^2A=\sec^2A-\operatorname{cosec}^2A.$

【證】 題式左邊 $=(1+\tan^2A)-(1+\cot^2A)$

$=\sec^2A-\operatorname{cosec}^2A.$

50. 求證 $\cos^4 B - \sin^4 B = 2\cos^2 B - 1$.

【證】所設式之左邊 $= (\cos^2 B + \sin^2 B)(\cos^2 B - \sin^2 B)$ $= \cos^2 B - \sin^2 B = \cos^2 B - (1 - \cos^2 B) = 2\cos^2 B - 1$.

51. 求證 $\sin^4 A - \cos^4 A = \sin^2 A - \cos^2 A$.

【證】$\sin^4 A - \cos^4 A = (\sin^2 A - \cos^2 A)(\sin^2 A + \cos^2 A)$，而 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$，故 $\sin^4 A - \cos^4 A = \sin^2 A - \cos^2 A$.

52. 求證 $1 + \operatorname{cosec}^4 A - \cot^4 A = 2\operatorname{cosec}^2 A$.

【證】將公式 $1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$ 改書爲 $1 - \operatorname{cosec}^2 A = -\cot^2 A$，兩邊平方，$1 - 2\times\operatorname{cosec}^2 A + \operatorname{cosec}^4 A = \cot^4 A$，移項，$1 + \operatorname{cosec}^4 A - \cot^4 A = 2\operatorname{cosec}^2 A$.

53. 求證 $\sin^6\beta - \cos^6\beta = (2\sin^2\beta - 1)\times(1 - \sin^2\beta + \sin^4\beta)$.

【證】所設式之左邊 $= (\sin^2\beta - \cos^2\beta)(\sin^4\beta + \sin^2\beta\cos^2\beta + \cos^4\beta) = \{\sin^2\beta - (1 - \sin^2\beta)\}\times\{\sin^4\beta + \cos^2\beta(\sin^2\beta + \cos^2\beta)\} = (2\sin^2\beta - 1)\{\sin^4\beta + \cos^2\beta\} = (2\sin^2\beta - 1)(\sin^4\beta + 1 - \sin^2\beta)$.

54. 求證 $\sec A + \tan^3 A\operatorname{cosec} A = \sec^3 A$.

【證】所設式之左邊 $= \dfrac{1}{\cos A} + \dfrac{\sin^3 A}{\cos^3 A}\times\dfrac{1}{\sin A} = \dfrac{1}{\cos A} + \dfrac{\sin^2 A}{\cos^3 A} = \dfrac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\cos^3 A} = \dfrac{1}{\cos^3 A} = \sec^3 A$.

55. 求證 $\sec^6 A = 1 + \tan^6 A + 3\tan^2 A\times\sec^2 A$.

【證】所設式之右邊 $= 1 + \tan^6 A + 3\tan^2 A(1 + \tan^2 A)$ $= 1 + \tan^6 A + 3\tan^2 A + 3\tan^4 A = 1 + 3\tan^2 A$

$+3\tan^4 A+\tan^6 A=(1+\tan^2 A)^3=\sec^6 A$.

56. 求證 $\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha=\sec^2\alpha\operatorname{cosec}^2\alpha$.

【證】 所設式之左邊 $=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha\operatorname{cosec}^2\alpha$

57. 求證 $\tan^2\theta\sec^2\theta+\cot^2\theta\operatorname{cosec}^2\theta=\sec^4\theta\operatorname{cosec}^4\theta$

$-3\sec^2\theta\operatorname{cosec}^2\theta$.

【證】 所設之式，其左邊 $=(\sec^2\theta-1)\sec^2\theta+(\operatorname{cosec}^2\theta$

$-1)\operatorname{cosec}^2\theta=\sec^4\theta-\sec^2\theta+\operatorname{cosec}^4\theta-\operatorname{cosec}^2\theta$

$=(\sec^4\theta+\operatorname{cosec}^4\theta)-(\sec\theta+\operatorname{cosec}^2\theta)=(\sec^4\theta$

$+\operatorname{cosec}^4\theta)-\sec^2\theta\operatorname{cosec}^2\theta$ [根據前題] $=(\sec^2\theta)$

$+\operatorname{cosec}^2\theta)^2\theta-2\sec^2\theta\operatorname{cosec}^2\theta-\sec^2\theta\times\operatorname{cosec}^2\theta$

$=\sec^4\theta\operatorname{cosec}^4\theta-3\sec^2\theta\times\operatorname{cosec}^2\theta$.

58. 求證 $\sin^2 A+\operatorname{vers}^2 A=2(1-\cos A)$.

【證】 所設式之左邊 $=\sin^2 A+(1-\cos A)^2=(1-\cos^2 A)$

$+(1-\cos A)^2=(1-\cos A)(1+\cos A+1-\cos A)$

$=2(1-\cos A)$.

59. 求證 $2\operatorname{vers}\theta\operatorname{vers}^2\theta=\sin^2\theta$.

【證】 因 $\operatorname{vers}\theta=1-\cos\theta$，故所設式之左邊

$=2(1-\cos\theta)-(1-\cos\theta)^2=2-2\cos\theta-1$

$+2\cos\theta-\cos^2\theta=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$.

60. 求證 $\tan\theta+\cot\theta=2\sin\theta\cos\theta+\sin^3\theta\sec\theta$

$+\cos^3\theta\operatorname{cosec}\theta$.

【證】 所設式之右邊 $=2\sin\theta\cos\theta+\sin^3\theta\times\dfrac{1}{\cos\theta}$

$+\cos^3\theta.\dfrac{1}{\sin\theta}=2\sin\theta\cos\theta+\dfrac{\sin^4\theta+\cos^4\theta}{\cos\theta\sin\theta}$

$=\dfrac{1}{\cos\theta\sin\theta}(2\sin^2\theta\cos^2\theta+\sin^4\theta+\cos^4\theta)$

$=\dfrac{1}{\cos\theta\sin\theta}(\sin^2\theta\cos^2\theta)=\dfrac{\sin\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\tan\theta+\cot\theta.$

61. 求證 $\operatorname{cosec}^4\theta(1-\cos^4\theta)-2\cot^2\theta=1.$

【證】 所設式之左邊 $=\operatorname{cosec}^4\theta(1-\cos^4\theta)\times(1+\cos^2\theta)$

$-2\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^4\theta\sin^2\theta(1+\cos^2\theta)-2\cot^2\theta$

$=\operatorname{cosec}^2\theta(1+\cos^2\theta)-2\times\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$

$+\operatorname{cosec}^2\theta\cos^2\theta-2\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta+\dfrac{\cos^2A}{\sin^2A}$

$2\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta+\cot^2\theta-2\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$

$-\cot^2\theta=1+\cot^2\theta-\cos^2\theta=1.$

62. 求證 $\cos^8A-\sin^8A=(\cos^2A-\sin^2A)$

$\times(1-2\sin^2A\cos^2A).$

【證】 所設式之左邊 $=(\cos^4A-\sin^4A)(\cos^4A+\sin^4A)$

$=(\cos^2A+\sin^2A)(\cos^2A-\sin^2A)(\cos^4A+\sin^4A)$

$=(\cos^2A-\sin^2A)(\cos^4A)+\sin^4A=(\cos^2A$

$-\sin^2A)\{(\cos^2A+\sin^2A)^2-2\sin^2A\cos^2A\}$

$=(\cos^2 A-\sin^2 A)(\sin^2 A\cos^2 A)$.

63. 求證 $1-\tan^2 A+\tan^4 A=\cos^2 A(1+\tan^6 A)$.

【證】 所設式之右邊 $=\cos^2 A(1+\tan^2 A)(1-\tan^2 A+\tan^4 A)=\cos^2 A\sec^2 A(1-\tan^2+\tan^4 A)$ $=1-\tan^2 A+\tan^4 A$.

64. 求證 $\cos^4 A+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^4 A-\operatorname{cosec}^2 A$.

【證】 所設式之左邊 $=\cot^2 A(\cot^2 A+1)=(\operatorname{cosec}^2 A-1)\operatorname{cosec}^2 A=\operatorname{cosec}^4 A-\operatorname{cosec}^2 A$.

65. 求證 $\sin^2 A\tan A+\cos^2 A\cot A+2\times\sin A\cos A$ $=\tan A+\cot A$.

【證】 所設式之左邊 $=(1-\cos^2 A)\tan A+(1-\sin^2 A)\cot A+2\sin A\cos A=\tan A-\cos^2 A.\tan A$ $+\cot A-\sin^2 A\cot A+2\sin A\cos A=\tan A$ $-\cos^2 A\cdot\dfrac{\sin A}{\cos A}+\cot A-\sin^2 A\dfrac{\cos A}{\sin A}$ $+2\sin A\cos A=\tan A-\cos A\sin A+\cot A$ $-\sin A\cos A+2\sin A\cos A=\tan A+\cot A$.

【別證】左邊 $=(\sin^2 A\tan A+\sin A\cos A)+(\cos^2 A\cot A$ $+\sin A\cos A)=\tan A(\sin^2 A+\cos^2 A)+\cot A$ $(\cos^2 A+\sin^2 A)=\tan A+\cot A$.

66. 求證 $\sin\theta\tan^2\theta+\operatorname{cosec}\theta\sec^2\theta-2\times\tan\theta\sec\theta$ $=\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta$.

【證】 所設式之左邊 $=\dfrac{1}{\sin\theta\cos^2\theta}(\sin^4\theta+1-2\sin^2\theta)$

$$=\frac{1}{\sin\theta\cos^2\theta}(1-\sin^2\theta)^2=\frac{\cos^2\theta(1-\sin^2\theta)}{\sin\theta\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta=\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta.$$

67. 求證 $\sec^2\alpha\tan^2\beta-\tan^2\alpha\sec^2\beta=\tan^2\beta-\tan^2\alpha.$

【證】所設式之左邊 $\sec^2\alpha$, $\sec^2\beta$分別易以$1+\tan^2\alpha$, $1+\tan^2\beta$，則得 $\tan^2\beta+\tan^2\alpha\times\tan^2\beta-\tan^2\alpha-\tan^2\alpha\tan^2\beta$，卽 $\tan^2\beta-\tan^2\alpha.$

68. 求證 $\tan^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta\tan^2\theta-1.$

【證】所設式之右邊$=\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-1$

$$=\frac{1}{\cos^2\theta}-1=\sec^2\theta-1$$

$$=(1+\tan^2\theta)-1=\tan^2\theta.$$

69. 求證 $\sec^4 B-\sec^2 B=\tan^4 B+\tan^2 B.$

【證】所設式之左邊$=\sec^2 B(\sec^2 B-1)=(\tan^2 B+1)\tan^2 B=\tan^4 B+\tan^2 B.$

70. 求證 $\sin^2 C\tan^2 C+\cos^2 C+\cos^2 C\cot^2 C=\tan^2 C+\cot^2 C-1.$

【證】所設式左邊之 $\sin^2$ 代以 $1-\cos^2 C$, $\cos^2 C$ 代以 $1-\sin^2 C$，則左邊爲 $\tan^2 C-\cos^2 C\tan^2 C+\cot^2 C-\sin^2 C\cot^2 C$，又 $\cos^2 C\tan^2 C$

代以 $\cos^2 C\cdot\frac{\sin^2 C}{\cos^2 C}$，卽 $\sin^2 C$ $\sin^2 C\cot^2 C$

代以 $\sin^2 C \cdot \frac{\cos^2 C}{\sin^2 C}$，即 $\cos^2 A$，

則前式爲 $\tan^2 C-\sin^2 C+\cot^2 C-\cos^2 C$，

即 $\tan^2 C+\cot^2 C-(\sin^2 C+\cos^2 C)$，

即 $\tan^2 C+\cot^2 C-1$.

71. 求證 $\cot^2\alpha-\cot^2\beta=(\sin^2\beta-\sin^2\alpha)\div\sin^2\alpha\sin^2\beta$.

【證】 所設式之左邊 $=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}$

$$=\frac{\cos^2\alpha\sin^2\beta-\cos^2\beta\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\beta}$$

$$=\frac{(1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta-(1-\sin^2\beta)\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$

$$=\frac{\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\alpha+\sin^2\beta\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$

$$=\frac{\sin^2\beta-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$$

72. 求證 $\sec^4\theta+\tan^4\theta=1+2\sec^2\theta\times\tan^2\theta$.

【證】 將所設式之左邊順次變化如次：$(1+\tan^2\theta)^2+\tan^4\theta=1+2\tan^2\theta+\tan^4\theta+\tan^4\theta=1+2\tan^2\theta+2\tan^4\theta=1+2\times\tan^2\theta(1+\tan^2\theta)=1+2\tan^2\theta\sec^2\theta$.

73. 求證 $\cot^2 A-\cos^2 A=\cot^2 A\cos^2 A$.

【證】 所設式之左邊 $=\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}-\cos^2 A$

$$=\cos^2 A\left(\frac{1}{\sin^2 A}-1\right)=\cos^2 A\cdot\frac{1-\sin^2 A}{\sin^2 A}=\cos^2 A.$$

$=\cos^2 A\cdot\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}=\cot^2 A\cos^2 A$。

74. 求證 $\tan^2 A-\sin^2 A=\tan^2 A\sin^2 A$.

【證】 所設式之左邊 $=\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}-\sin^2 A=\sin^2 A$ $\times\left(\dfrac{1}{\cos^2 A}-1\right)=\sin^2 A\cdot\dfrac{1-\cos^2 A}{\cos^2 A}=\sin^2 A\cdot$ $\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\tan^2 A\sin^2 A$.

75. 求證 $\sin^3 A+\cos^3 A=(1-\sin A\times\cos A)(\sin A+\cos A)$.

【證】 所設式左邊 $=(\sin A+\cos A)(\sin^2 A-\sin A\cos A$ $+\cos^2 A)=(\sin A+\cos A)\times\{(\sin^2 A+\cos^2 A)$ $-\sin A\cos A\}=(\sin A+\cos A)(1-\sin A\cos A)$.

76. 求證 $\sin^4 A+\cos^4 A=1-2\sin^2 A\times\cos^2 A$.

【證】 所設式之左邊 $=\sin^4 A+2\sin^2 A\cos^2 A+\cos^4 A$ $-2\sin^2 A\cos^2 A=(\sin^2 A+\cos^2 A)^2-2\sin^2 A$ $\cos^2 A=1-2\sin^2 A\cos^2 A$.

77. 求證 $\sin^6 A+\cos^6 A=1-3\sin^2 A\times\cos^2 A$.

【證】 所設式之左邊 $=(\sin^2 A+\cos^2 A)(\sin^4 A$ $-\sin^2 A\cos^2 A+\cos^4 A)=\sin^4 A-\sin^2 A\times\cos^2 A$ $+\cos^4 A=\sin^4 A+2\sin^2 A\cos^2 A+\cos^4 A$ $-3\sin^2 A\cos^2 A=(\sin^2 A+\cos^2 A)^2-3\sin^2 A\cos^2 A$ $=1-3\sin^2 A\cos^2 A$.

78. 求證 $\sin^8\theta+\cos^8\theta=1-4\sin^2\theta\times\cos^2\theta+2\sin^4\theta\cos^4\theta$.

【證】 所設式之左邊 $=(\sin^4\theta+\cos^4\theta)^2-2\times\sin^4\theta\cos^4\theta$

$=\{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\times\cos^2\theta\}^2$

$-2\sin^4\theta\cos^4\theta=(1-2\sin^2\theta\times\cos^2\theta)^2$

$-2\sin^4\theta\cos^4\theta=1-4\sin^2\theta\cos^2\theta+4\sin^4\theta\cos^4\theta$

$-2\sin^4\theta\cos^4\theta=1-4\sin^2\theta\times\cos^2\theta+2\sin^4\theta\cos^4\theta$.

79. 求證 $2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+1=0$.

【證】 $2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\times(\sin^4\theta$

$-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta)=2(\sin^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta$

$+\cos^4\theta)$,故 $2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)$

$+1=-2\sin^2\theta\cos\theta-\sin^4\theta-\cos^4\theta+1$

$=1-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2=1-1=0$.

80. 求證 $(1-\cos^2 A)(1+\cot^2 A)=1$.

【證】 所設式左邊 $=\sin^2 A\ \text{cosec}^2 A$

$=\sin^2 A\times\dfrac{1}{\sin^2 A}=1$.

81. 求證 $\sin^2 A+(1-\cos A)^2=2(1-\cos A)$.

【證】 所設式左邊 $=\sin^2 A+1-2\cos A+\cos^2 A=(\sin^2 A$

$+\cos^2 A)+1-2\cos A=1+1-2\cos A=2-2\cos A$

$=2(1-\cos A)$.

82. 求證 $(\sin A+\cos A)^2=1+2\sin A\times\cos A$.

【證】 所設式左邊 $=\sin^2 A+2\sin A\cos A+\cos^2 A$

$=(\sin^2 A+\cos^2 A)+2\sin A\cos A$

$=1+2\sin A\cos A$.

83. 求證　$(\sin A-\cos A)^2=1-2\sin A\times\cos A$.

【證】所設式左邊$=\sin^2 A-2\sin A\cos A+\cos^2 A$

$=(\sin^2 A+\cos^2 A)-2\sin A\cos A$

$=1-2\sin A\cos A$.

84. 求證　$(1+\cos A)^2+(1+\sin A)^2=3+2(\sin A+\cos A)$.

【證】$(1+\cos A)^2=1+2\cos A+\cos^2 A$，$(1+\sin A)^2$

$=1+2\sin A+\sin^2 A$.故所設式之左邊

$=2+2(\cos A+\sin A)+(\cos^2 A+\sin^2 A)$

$=2+2(\cos A+\sin A)+1=3+2\times(\cos A+\sin A)$.

85. 求證　$(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2=2$.

【證】$(\sin A+\cos A)^2=\sin^2 A+2\sin A\cos A+\cos^2 A$,

$(\sin A-\cos A)^2=\sin^2 A-2\sin A\times\cos A$

$+\cos^2 A$. 故所設式之左邊$=2\sin A+2\cos^2 A$

$=2(\sin^2 A+\cos^2 A)=2$.

86. 求證　$(\tan A+\cot A)\sin A\cdot\cos A=1$.

【證】括號內 $\tan A+\cot A=\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\cos A}{\sin A}$

$=\dfrac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\cos A\sin A}=\dfrac{1}{\cos A\sin A}$,

故 $(\tan A+\cot A)\sin A\cos A=1$.

87. $(1-\cos^2 A)(1+\tan^2 A)=\tan^2 A$，求證.

【證】$1-\cos^2 A=\sin^2 A, 1+\tan^2 A=\sec^2 A$

$=\dfrac{1}{\cos^2 A}$，故所設式左邊$=\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\tan^2 A$.

88. 求證$(\sin\theta+\cos\theta)(\tan\theta+\cot\theta)=\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta$.

【證】 所設式之左邊 $=(\sin\theta+\cos\theta)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)\left(\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}\right)$$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)\left(\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\right)=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}=\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta.$$

【別證】去括號,則所設式之左邊$=\sin\theta\times\tan\theta+\sin\theta$

$$+\cos\theta\cot\theta+\cos\theta=\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}+\cos\theta\right)$$

$$+\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}+\sin\theta\right)=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}$$

$$=\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta.$$

89. 求證 $(\sec B-\tan B)(\sec B+\tan B)=1$.

【證】 所設式之左邊$=\sec^2 B+\tan^2 B=(1+\tan^2 B)$
$-\tan^2 B=1$.

90. 求證 $(1+\tan A)(1+\cot A)=(\sin A+\cos A)^2$
$\div\sin A\cos A$.

【證】 所設式左邊$=\left(1+\frac{\sin A}{\cos A}\right)\left(1+\frac{\cos A}{\sin A}\right)$

$$=\left(\frac{\cos A+\sin A}{\cos A}\right)\left(\frac{\sin A+\cos A}{\sin A}\right)$$

$$=\frac{(\cos A+\sin A)^2}{\sin A\cos A}.$$

91. 求證 $(\sec A\cot A+1)(\sec A\cot A-1)$

$=\cos^2 A\operatorname{cosec}^2 A$.

【證】 將所設式左邊變形，$\sec^2 A\cot^2 A-1$

$$=\frac{1}{\cos^2 A}\cdot\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}-1=\frac{1}{\sin^2 A}$$

$$+\frac{1-\sin^2 A}{\sin^2 A}=\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}=\cos^2 A\operatorname{cosec}^2 A.$$

92. 求證 $(\operatorname{cosec} A+\cot A)(1-\sin A)-(\sec A+\tan A)$

$(1-\cos A)=(\operatorname{cosec} A-\sec A)\{2-(1-\cos A)$

$(1-\sin A)\}$.

【證】 所設式之左邊去括號，則 $\operatorname{cosec} A-1+\cot A-\cos A$

$-\sec A+1-\tan A+\sin A=(\operatorname{cosec} A-\sec A)$

$+(\cot A-\tan A)-\cos A+\sin A=(\operatorname{cosec} A$

$$-\sec A)+\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos A\sin A}-(\cos A-\sin A)$$

$$=(\operatorname{cosec} A-\sec A)+\frac{\cos A-\sin A}{\cos A\sin A}\{\cos A$$

$+\sin A-\cos A\times\sin A\}=(\operatorname{cosec} A-\sec A)$

$+(\operatorname{cosec} A-\sec A)\{1-(1-\cos A)(1-\sin A)\}$

$=(\operatorname{cosec} A-\sec A)\{2-(1-\cos A)(1-\sin A)\}$.

93. $(\sin A+\sec A)^2+(\cos A+\operatorname{cosec} A)^2$

$=(1+\sec A\operatorname{cosec} A)^2$ 求證.

【證】 所設式之左邊 $=\sin^2 A+2\sin A\sec A+\sec^2 A$

$+\cos^2 A+\cos^2 A+2\cos A\ \mathrm{cosec}\ A+\mathrm{cosec}^2 A$

$=(\sin^2 A+\cos^2 A)+2(\sin A\sec A+\cos A$

$\times \mathrm{coec}\ A)+(\sec^2 A+\mathrm{cosec}^2 A).$

$$=1+2\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}\right)+\left(\frac{1}{\cos^2 A}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sin^2 A}\right)=1+2\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin A\cos A}$$

$$+\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin^2 A\cos^2 A}=1+\frac{2}{\sin A\cos A}$$

$$+\frac{1}{\cos^2 A\sin^2 A}=\left(1+\frac{1}{\sin A\cos A}\right)^2$$

$=(1+\sec A\ \mathrm{cosec}\ A)^2.$

94. $(1+\cot A-\mathrm{cosec}\ A)(1+\tan A+\sec A)=2$，求證.

【證】 所設式之左邊$=\dfrac{\sin A+\cos A-1}{\sin A}$

$$\times\frac{\cos A+\sin A+1}{\cos A}=\frac{1}{\sin A\cos A}\{(\sin A$$

$$+\cos A)^2-1\}=\frac{1}{\sin A\cos A}\{\sin^2 A$$

$$+2\sin A\times\cos A+\cos^2 A-1\}=\frac{1}{\sin A\cos A}$$

$(2\sin A\times\cos A)=2.$

95. 求證 $(\tan A-\sin A)^2+(1-\cos A)^2=(\sec A-1)^2$.

【證】 所設式之左邊 $=\left(\frac{\sin A}{\cos A}-\sin A\right)^2+\{\cos A(\sec A-1)\}^2$

$=\sin^2 A(\sec A-1)^2+\cos^2 A(\sec A-1)^2$

$=(\sin^2 A+\cos^2 A)(\sec A-1)^2$

$=(\sec A-1)^2$.

96. 求證 $(\sec\alpha\sec\beta+\tan\alpha\tan\beta)^2-(\tan\alpha\sec\beta+\sec\alpha\tan\beta)^2=1$.

【證】 所設式之左邊去括號而簡化之,得 $\sec^2\alpha\sec^2\beta+\tan^2\alpha\tan^2\beta-\tan^2\alpha\sec^2\beta-\sec^2\alpha\tan^2\beta$,

即 $\sec^2\alpha(\sec^2\beta-\tan^2\beta)+\tan^2\alpha(\tan^2\beta-\sec^2\beta)$,

即 $\sec^2\alpha-\tan^2\alpha=1+\tan^2\alpha-\tan^2\alpha=1$.

97. 求證 $(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2+(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)^2=1$.

【證】 展開所設式之左邊,得 $\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta$, 即 $(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\cos^2\beta+(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\times\sin^2\beta$, 即 $\cos^2\beta+\sin^2\beta$, 即1.

98. 求證 $\cot A-\sec A\operatorname{cosec} A(1-2\times\sin^2 A)=\tan A$.

【證】 將所得式之左邊變形,即可得 $\cot A$

$$-\frac{1-\sin^2 A-\sin^2 A}{\sin A\cos A}=\cot A-\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\sin A\cos A}$$

$$=\cot A-\frac{\cos^2 A}{\sin A\cos A}+\frac{\sin^2 A}{\sin A\cos A}$$

$$=\cot A-\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\sin A}{\cos A}$$

$$=\cot A-\cot A+\tan A=\tan A.$$

99. 求證$\frac{(\sec A+\operatorname{cosec} A)^2}{\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A}=1+2\sin A\times\cos A.$

【證】 因 $\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A=\sec^2 A\times\operatorname{cosec}^2 A$,

故可將所設式之左邊變爲$\left(\frac{\sec A+\operatorname{cosec} A}{\sec A\operatorname{cosec} A}\right)^2$

$$=\left(\frac{1}{\operatorname{cosec} A}+\frac{1}{\sec A}\right)^2=(\sin A+\cos A)^2$$

$$=\sin^2 A+2\sin A\cos A+\cos^2 A$$

$$=1+2\sin A\cos A.$$

100. 求證 $(1-\tan^4 A)\cos^2 A+\tan^2 A=1.$

【證】 所設式之左邊$=(1-\tan^2 A)(1+\tan^2 A)\times\cos^2 A$ $+\tan^2 A$,其中$(1+\tan^2 A)\cos^2 A=\sec^2 A\cos^2 A$ $=1$,故此式爲 $1-\tan^2 A+\tan^2 A$, 卽等於1.

101. $(\cos A-\cos^3 A)^2+(\sin A-\sin^3 A)^2=\sin^2 A\cos^2 A$.求證.

【證】 所設式之左邊$=\cos^2 A(1-\cos^2 A)^2+\sin^2 A$ $(1-\sin^2 A)^2=\cos^2 A\cdot\sin^4 A+\sin^2 A\times\cos^4 A$

$$=\cos^2 A\sin^2 A(\sin^2 A+\cos^2 A)=\cos^2 A\sin^2 A.$$

102. 求證$(\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta)(\sin\theta+\cos\theta)=\sec\theta\operatorname{cosec}\theta+2.$

【證】 去括號,則所設式左邊 $=\sec\theta\sin\theta+1+1$

$$+\operatorname{cosec}\theta\cos\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+2=\tan\theta$$

$$+\cot\theta+2=\sec\theta\operatorname{cosec}\theta+2$$

103. 求證 $(\sin\alpha-\operatorname{cosec}\alpha)^2-(\tan\alpha-\cot\alpha)^2+(\cos\alpha-\sec\alpha)^2=1$.

【證】 所設式之左邊實行平方，且注意 $\sin\alpha\times\operatorname{cosec}\alpha$, $\tan\alpha\cot\alpha$, 及 $\cos\alpha\sec\alpha$ 爲 1，則 $\sin^2\alpha-2+\operatorname{cosec}^2\alpha-\tan^2\alpha+2-\cot^2\alpha+\cos^2\alpha-2+\sec^2\alpha$, 此最後式中，將 $\sec^2\alpha$, 及 $\operatorname{cosec}^2\alpha$ 分別易爲 $1+\tan^2\alpha$, 及 $1+\cot^2\alpha$, 且將 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ 易爲 1 而簡化之,卽可徑知其値爲1.

104. 求證 $(\tan\alpha+\operatorname{cosec}\beta)^2-(\cot\beta-\sec\alpha)^2=2\tan\alpha\cot\beta(\operatorname{cosec}\alpha+\sec\beta)$.

【證】 所設式之左邊實行平方, $\tan^2\alpha+2\times\tan\alpha\operatorname{cosec}\beta$

$$+\operatorname{cosec}^2\beta-(\cot^2\beta-2\cot\beta\times\sec\alpha+\sec^2\alpha)$$

$$=(\operatorname{cosec}^2\beta-\cot^2\beta)-(\sec^2\alpha-\tan^2\alpha)$$

$$+2\tan\alpha\operatorname{cosec}\beta+2\cot\beta\sec\alpha$$

$$=1-1+\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha\sin\beta}+\frac{2\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha}$$

$$=\frac{2(\sin\alpha+\cos\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}=\frac{2\sin\alpha\cos\beta(\sec\beta+\operatorname{cosec}\alpha)}{\cos\alpha\sin\beta}$$

$$=2\tan\alpha\cot\beta(\operatorname{cosec}\alpha+\sec\beta).$$

105.求證 $(\cos^2 A+\cot^2 A\tan^2 A)=\sec^2 A+(\cos^2 A-1)\tan^2 A$.

【證】 將所設式之左邊簡化，則 $\cos^2 A\tan^2 A+\cot^2 A\tan^2 A=\cos^2 A\cdot\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}+\cot^2 A\cdot\dfrac{1}{\cot^2 A}$ $=\sin^2 A+1$，將右邊之式簡化，則 $\sec^2 A+(\cos^2 A+1)\tan^2 A=1+\tan^2 A+\cos^2 A\times\tan^2 A-\tan^2 A=1+\cos^2 A\tan^2 A=1+\cos^2 A\cdot\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=1+\sin^2 A$.故所設恆等式成立.

106.求證 $\tan A(1-\cot^2 A)+\cot A(1-\tan^2 A)=0$.

【證】 所設式之左邊去括號，則爲 $\tan A-\tan A\cot^2 A+\cot A-\cot A\tan^2 A$，以 $\tan A\cot A=1$ 之關係代入，則得 $\tan A-\cot A+\cot A-\tan A$，卽爲 0.

107.求證 $(1+\tan A)^2+(1+\cos A)^2=(\sec A+\operatorname{cosec} A)^2$.

【證】 所設式之左邊 $=1+2\tan A+\tan^2 A+1+2\cot A+\cot^2 A=(1+\tan^2 A)+2\times(\tan A+\cot A)+(1+\cot^2 A)=\sec^2 A+2\sec A\operatorname{cosec} A+\operatorname{cosec}^2 A=(\sec A+\operatorname{cosec} A)^2$.

108.求證 $\cos\theta(\tan\theta+2)(2\tan\theta+1)=2\sec\theta+5\sin\theta$.

【證】 所設式之左邊 $=\cos\theta\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+2\right)\times\left(2\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+2\right)=\dfrac{1}{\cos\theta}(\sin\theta+2\cos\theta)(2\times\sin\theta$

$+\cos\theta)=\frac{1}{\cos\theta}(2\sin^2\theta+5\sin\theta\cos\theta$

$+2\cos^2\theta)=\frac{1}{\cos\theta}(2+5\sin\theta\cos\theta)=\frac{2}{\cos\theta}$

$+5\sin\theta=2\sec\theta+5\sin\theta$.

【別證】左邊$=\cos\theta(2\tan^2\theta+5\tan\theta+2)=\cos\theta$

$\{2(\tan^2\theta+1)+5\tan\theta\}=\cos\theta(2\times\sec^2\theta$

$+5\tan\theta)=2\cos\theta\cdot\frac{1}{\cos\theta}\cdot\sec\theta+5\cos\theta\cdot$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=2\sec\theta+5\sin\theta$.

109. 求證 $(2-\cos^2 A)(1+2\cot^2 A)=(2+\cot^2 A)(2-\sin^2 A)$.

【證】 所設式之左邊$=(1+\sin^2 A)\left(1+2\times\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}\right)$

$=1+\frac{2\cos^2 A}{\sin^2 A}+\sin^2 A+2\cos^2 A=2+\frac{2\cos^2 A}{\sin^2 A}$

$+\cos^2 A$. 右邊$=\left(2+\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}\right)\times(2-\sin^2 A)$

$=4-2\sin^2 A+\frac{2\cos^2 A}{\sin^2 A}-\cos^2 A$

$=2+(2-2\sin^2 A-\cos^2 A)+\frac{2\cos^2 A}{\sin^2 A}$

$=2+\cos^2 A+\frac{2\cos^2 A}{\sin^2 A}$. ∴(左邊之式)=(右邊之式)

110. 求證 $\cos^2 A(\sec^2 A-\tan^2 A)+\sin^2 A\times(\mathrm{cosec}^2 A$

$-\cot^2 A)=1$.

【證】 因 $1+\tan^2 A=\sec^2 A$, $1+\cot^2 A=\mathrm{cosec}^2 A$,故所設式之左邊$=\cos^2 A(1+\tan^2 A-\tan^2 A)+\sin^2 A$

$(1+\cot^2 A-\cot^2 A)=\cos^2 A+\sin^2 A=1$.

111.求證 $\sin A(1+\tan A)+\cos A(1+\cot A)=\operatorname{cosec} A+\sec A$.

【證】 所設之式左邊$=\sin A.\frac{\cos A+\sin A}{\cos A}+\cos A.$

$\frac{\sin A+\cos A}{\sin A}=(\sin A+\cos A)\times\left(\frac{\sin A}{\cos A}\right.$

$\left.+\frac{\cos A}{\sin A}\right)=(\sin A+\cos A)\times\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\cos A\sin A}$

$=\frac{\sin A+\cos A}{\cos A\sin A}=\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\sin}$

$=\sec A+\operatorname{cosec} A.$

112.求證 $(\tan\alpha-\sin\alpha)^2+(1-\cos\alpha)^2=(\sec\alpha-1)^2$.

【證】 因 $\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha$, 故所設式之左邊

$=\tan^2\alpha(1-\cos\alpha)^2+(1-\cos\alpha)^2=(\tan^2\alpha+1)$

$(1+\cos\alpha)^2=\sec^2\alpha(1-\cos\alpha)^2=(\sec\alpha$

$-\sec\alpha\cos\alpha)^2=(\sec\alpha-1)^2.$

113.求證 $(\tan\alpha-1)^2+(1-\cot\alpha)^2=(\sec\alpha-\operatorname{cosec}\alpha)^2$.

【證】 $(\tan\alpha-1)^2=\tan^2\alpha+1-2\tan\alpha=\sec^2\alpha-2\tan\alpha.$

同法可得 $(1-\cot\alpha)^2=\operatorname{cosec}^2\alpha-2\cot\alpha.$

故所設式之左邊$=\sec^2\alpha-2(\tan\alpha+\cot\alpha)+\operatorname{cosec}^2\alpha$

$=\sec^2\alpha-2\sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha$

$=(\sec\alpha-\operatorname{cosec}\alpha)^2.$

114.求證 $\sin^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\beta\cos^2\alpha=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

【證】 所設式之左邊中 $\cos^2\beta,\cos^2\alpha$ 分別易以 $1-\sin^2\beta$

$=\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta$

$=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$

115.求證 $\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

【證】 所設式之左邊 $=\cos^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\cos^2\alpha)\sin^2\beta$

$=\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta$

$=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

116.求證 $(1+\cos A-\sin^2 A)^2(1-\cos A)^2+(1+\sin A-\cos^2 A)^2(1-\sin A)^2=\sin^2 A\times\cos^2 A$.

【證】 所設式之左邊 $=(\cos^2 A+\cos A)^2(1-\cos)^2+(\sin^2 A+\sin A)^2(1-\sin A)^2=\cos^2 A(\cos A+1)^2(1-\cos A)^2+\sin^2 A\times(\sin A+1)^2(1-\sin A)^2$

$=\cos^2 A(1-\cos^2 A)^2+\sin^2 A(1-\sin^2 A)^2=\cos^2 A\times\sin^4 A+\sin^2 A\cos^4 A=\cos^2 A\sin^2 A(\sin^2 A+\cos^2 A)=\cos^2 A\sin^2 A$.

117.求證 $(1+\tan A+\tan^2 A)(1-\cot A+\cot^2 A)=\tan^2 A+\cot^2 A+1$.

【證】 因所設式之左邊 $=(\sec^2 A+\tan A)\times(\operatorname{cosec}^2 A-\cot A)=\sec^2 A\operatorname{cosec}^2 A+\tan^2 A\operatorname{cosec}^2 A-\cot A\sec^2 A-\tan A\times\cot A$.因 $\sec^2 A\operatorname{cosec}^2 A=\tan^2 A+\cot^2 A+2$,又 $\tan A\operatorname{cosec}^2 A-\cot A\sec^2 A$

$=\dfrac{1}{\sin A\cos A}-\dfrac{1}{\sin A\cos A}=0$, $\tan A\cot A=1$, 故前式 $=\tan^2 A+\cot^2 A+1$.

118. 求證 $(1+\sin A+\cos A)^2=2(1+\sin A)(1+\cos A)$.

【證】 所設式之左邊 $=\{(1+\sin A)+\cos A\}^2$

$=(1+\sin A)^2+2(1+\sin A)\cos A+\cos^2 A$

$=(1+\sin A)^2+2(1+\sin A)\cos A+(1-\sin^2 A)$

$=(1+\sin A)\{(1+\sin A)+2\times\cos A$

$+(1-\sin A)\}=(1+\sin A)(2+2\times\cos A)$

$=2(1+\sin A)(1+\cos A)$.

119. 求證 $(1-\sin A+\cos A)^2=2(1-\sin A)(1+\cos A)$.

【證】 所設式之左邊 $=\{(1-\sin A)+\cos A\}^2$

$=(1-\sin A)^2+2(1-\sin A)\cos A+\cos^2 A$

$=(1-\sin A)^2+2(1-\sin A)\cos A+(1-\sin^2 A)$

$=(1-\sin A)\{1-\sin A+2\cos A+1+\sin A\}$

$=(1-\sin A)(2+2\cos A)=2\times(1-\sin A)$

$(1+\cos A)$.

120. 求證 $(1+\sin A-\cos A)^2=2(1+\sin A)(1-\cos A)$.

【證】 所設式之左邊 $=\{(1+\sin A)-\cos A\}^2$

$=(1+\sin A)^2-2(1+\sin A)\cos A+\cos^2 A$

$=(1+\sin A)^2-2(1+\sin A)\cos A+(1-\sin^2 A)$

$=(1+\sin A)\{1+\sin A-2\cos A+1-\sin A\}$

$=(1+\sin A)(2-2\cos A)=2\times(1+\sin A)$

$(1-\cos A)$.

121. 求證 $\dfrac{1}{1-\sin A}+\dfrac{1}{1+\sin A}=2\sec^2 A$.

【證】所設式之左邊 $=\dfrac{2}{(1-\sin A)(1+\sin A)}$

$$=\frac{2}{1-\sin^2 A}=\frac{2}{\cos^2 A}=2\sec^2 A.$$

122. 求證 $\dfrac{\sin A\cot^2 A}{\cos A}=\dfrac{1}{\tan A}$.

【證】所設式之左邊 $=\left(\dfrac{\sin A}{\cos A}\cot A\right)\cot A$

$$=(\tan A.\cot A)\cot A=\cot A=\frac{1}{\tan x}.$$

123. 求證 $\dfrac{\sec A}{\cos A}-\dfrac{\tan A}{\cot A}=1$.

【證】因 $\dfrac{1}{\cos A}=\sec A$, $\dfrac{1}{\cot A}=\tan A$，故所設式之

左邊 $=\sec^2 A-\tan^2 A=(1+\tan^2 A)-\tan^2 A=1$.

124. 求證 $\dfrac{1}{1-\tan^2 A}+\dfrac{1}{1+\cot^2 A}=1$.

【證】所設式之左邊 $=\dfrac{1}{\sec^2 A}+\dfrac{1}{\operatorname{cosec}^2 A}=\cos^2 A$

$+\sin^2 A=1$.

125. 求證 $\tan^4 A=\dfrac{\sin^2 A+\cos^2 A-\sec^2 A}{\sin^2 A+\cos^2 A-\operatorname{cosec}^2 A}$.

【證】將所設式之右邊變形，則 $\dfrac{1-\sec^2 A}{1-\operatorname{cosec}^2 A}$

$$=\frac{1-(1+\tan^2 A)}{1-(1+\cot^2 A)}=\frac{-\tan^2 A}{-\cot^2 A}=\tan^2 A\tan^2 A$$

$=\tan^4 A$.

126. 試證明下式：$\dfrac{1}{\cos\theta+\tan^2\theta\sin\theta}$

$$-\frac{1}{\sin\theta+\cot^2\theta\cos\theta}=\frac{\operatorname{cosec}\theta-\sec\theta}{\sec\theta\operatorname{cosec}\theta-1}.$$

【證】 所設式左邊第一項之分子分母，以$\cos^2\theta$乘之，

則此項爲$\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}$，同法，左邊第二項可變

爲$\dfrac{\sin^2\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}$，故左邊$=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}$

$$=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta}$$

$=\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{1-\cos\theta\sin\theta}$，此分子分母除以$\sin\theta\times\cos\theta$，

卽得$\dfrac{\operatorname{cosec}\theta-\sec\theta}{\sec\theta\operatorname{cosec}\theta-1}$.

127. $\dfrac{2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta}{1-\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta}=\cot\theta$，求證.

【證】 所設式左邊之分子$=\cos\theta(2\sin\theta-1)$，左邊之分母

$=(1-\cos^2\theta)-\sin\theta+\sin^2\theta=\sin^2\theta-\sin\theta$

$+\sin^2\theta=2\sin^2\theta-\sin\theta=\sin\theta(2\sin\theta-1)$，

故左邊之分數$=\dfrac{\cos\theta(2\sin\theta-1)}{\sin\theta(2\sin\theta-1)}=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\cot\theta$.

128. 求證 $\dfrac{1+\operatorname{cosec}A+\cot A}{1+\operatorname{cosec}A-\cot A}=\dfrac{\operatorname{cosec}A+\cot A-1}{\cot A-\operatorname{cosec}A+1}$.

【證】 所設等式兩邊去分母，$(\cot A+1)^2-\operatorname{cosec}^2A$

$=\operatorname{cosec}^2 A-(\cot A-1)^2$，移項，$(\cot A+1)^2+(\cot A-1)^2=2\operatorname{cosec}^2 A$，左邊實行平方，$2\cot^2 A+2=2\operatorname{cosec}^2 A$. 此最後結果恆成立，故所設等式亦然.

129. 求證下式：$\dfrac{\tan^3 A}{1+\tan^2 A}+\dfrac{\cot^3 A}{1+\cot^2 A}$

$$=\frac{1-2\sin^2 A\cos^2 A}{\sin A\cos A}.$$

【證】 所設式之左邊$=\dfrac{\sin^3 A}{\cos^3 A\sec^2 A}+\dfrac{\cos^3 A}{\sin^3 A\operatorname{cosec}^2 A}$

$$=\frac{\sin^3 A}{\cos A}+\frac{\cos^3 A}{\sin A}=\frac{\sin^4 A+\cos^4 A}{\cos A\sin A}$$

$$=\frac{(\sin^2 A+\cos^2 A)^2-2\sin^2 A\cos^2 A}{\cos A\sin A}$$

$$=\frac{1-2\sin^2 A\cos^2 A}{\cos A\sin A}.$$

130. 求證 $\dfrac{\tan A+\sec A-1}{\tan A-\sec A+1}=\dfrac{1+\sin A}{\cos A}$.

【證】 以 $\cos A$ 乘所設式左邊之分子分母，則

$$\frac{\tan A+\sec A-1}{\tan A-\sec A+1}=\frac{\sin A+1-\cos A}{\sin A-1+\cos A}$$

$$=\frac{\cos A(1+\sin A)-\cos^2 A}{\cos A(\sin A+\cos A-1)}$$

$$=\frac{\cos A(1+\sin A)-(1-\sin^2 A)}{\cos A(\sin A+\cos A-1)}$$

$$=\frac{(1+\sin A)(\cos A+\sin A-1)}{\cos A(\sin A+\cos A-1)}$$

$$=\frac{1+\sin A}{\cos A}.$$

131. 求證 $(1+\cot A+\tan A)(\sec A-\operatorname{cosec} A)$

$$=\frac{\sec^2 A}{\operatorname{cosec} A}-\frac{\operatorname{cosec}^2 A}{\sec A}.$$

【證】 $1+\cot A+\tan A=\tan A\cot A+\cot A+\tan A$

$$=\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cot A}{\sin A}+\frac{\sin A}{\cos A}$$

$$=\frac{\sin^2 A+\sin A\cos A+\cos^2 A}{\sin A\cos A},$$ 是式之分

子分母均除以 $\sin^2 A\cos^2 A$，則得變其形爲

$$\frac{\sec^2 A+\sec A\operatorname{cosec} A+\operatorname{cosec}^2 A}{\operatorname{cosec} A\sec A},$$ 因此所

設之式其左邊 $=\dfrac{\sec^3 A-\operatorname{cosec}^3 A}{\operatorname{cosec} A\sec A}=\dfrac{\cos^2 A}{\operatorname{cosec} A}$

$$-\frac{\operatorname{cosec}^2 A}{\sec A}.$$

132. 求證 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\alpha-\tan\beta}=\dfrac{\cot\beta}{\cot\beta-\cot\alpha}.$

【證】 所設恆等式，在 $\tan\alpha(\cot\beta-\cot\alpha)=\cot\beta(\tan\alpha-\tan\beta)$， 即 $\tan\alpha\cot\beta-\tan\alpha\cot\alpha=\cot\beta\tan\alpha-1$ 成立時，亦成立，然最後之結果恆成立，故所設關係亦然。

133. 求證 $\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha+\cot\alpha}{\sec\alpha+\tan\alpha}=\dfrac{\sec\alpha-\tan\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha-\cot\alpha}$.

【證】 所設關係，在 $(\operatorname{cosec}\alpha+\cot\alpha)(\operatorname{cosec}\alpha-\cot\alpha)=(\sec\alpha-\tan\alpha)(\sec\alpha+\tan\alpha)$， 即 $\operatorname{cosec}^2\alpha-\operatorname{coc}^2\alpha=\sec^2\alpha-\tan^2\alpha$，即 $(1+\cot^2\alpha)-\cot^2\alpha=(1+\tan^2\alpha)-\tan^2\alpha$ 成立時，亦成立，然此最後關係恆成立，故所設關係亦然。

134. 求證 $\dfrac{\tan A+\tan B}{\cot A\cot B}=\tan A\tan B$.

【證】 因分子 $\cot A+\cot B=\dfrac{1}{\tan A}+\tan B$

$=\dfrac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B}$， 故所設式之左邊 $=(\tan A+\tan B)\dfrac{\tan A\tan B}{\tan A+\tan B}=\tan A\tan B$.

135. 求證 $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha$.

【證】 將所設式之左邊變形，$(\sin\alpha+\cos\alpha)\div\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)$，因此可得 $(\sin\alpha+\cos\alpha)$

$$+\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}=\cos\alpha\sin\alpha.$$

136. 求證 $\frac{\cot\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha+\cot\beta}=\cot\alpha\tan\beta.$

【證】 因分子 $\tan\alpha+\cot\beta=\frac{1}{\cot\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}$

$=\frac{\cot\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha\tan\beta}$，故所設式之左邊$=(\cot\alpha$

$+\tan\beta)\frac{\cot\alpha\tan\beta}{\cos\alpha+\tan\beta}=\cot\alpha\tan\beta.$

137. $\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}+\frac{1+\sin+\cos\theta}{1+\sin-\cos\theta}=2\operatorname{cosec}\theta.$

求證.

【證】 所設之左邊通分，則$\frac{2(1+\sin\theta)^2+2\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2-\cos^2\theta}$

$=\frac{4+4\sin\theta}{2\sin\theta+2\sin^2\theta}=\frac{4(1+\sin\theta)}{2\sin\theta(1+\sin\theta)}$

$=\frac{2}{\sin\theta}=2\operatorname{cosec}\theta.$

138. 求證 $\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}.$

【證】 所設式之左邊$=\frac{\sin x(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$

$=\frac{\sin x(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}=\frac{\sin x(1-\cos x)}{\sin^2 x}$

$=\frac{1-\cos x}{\sin x}.$

139.求證 $\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}=(\operatorname{cosec} A+\cot A)^2$.

【證】所設式之左邊$=\dfrac{(1+\cos A)^2}{(1-\cos A)(1+\cos A)}$

$$=\frac{(1+\cos A)^2}{1-\cos^2 A}=\left(\frac{1+\cos A}{\sin A}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{\cos A}{\sin A}\right)^2=(\operatorname{cosec} A+\cot A)^2.$$

140.求證 $\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=(\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta)^2$.

【證】所設式之左邊$=\dfrac{(1-\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$

$$=\frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}=\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}=\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$$

$=(\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta)^2$. ∴ 如題所言.

141.求證 $\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}-\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=4\cot\theta\times\operatorname{cosec}\theta$.

【證】由 138 題，及 139 題，所設式之左邊 $=(\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta)^2-(\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta)^2=4\times\operatorname{cosec}\theta\cot\theta$.

142.求證 $\dfrac{1+\sin A}{1+\cos A}\cdot\dfrac{1+\sec A}{1+\operatorname{cosec} A}=\tan A$.

【證】$\dfrac{1+\sec A}{1+\operatorname{cosec} A}$之分子分母各乘以 $\cos A\times\sin A$，則可

得$\dfrac{\cos A\sin A+\sin A}{\cos A\sin A+\cos A}$，亦卽$\dfrac{\sin A(\cos A+1)}{\cos A(\sin A+1)}$

是以所設式之左邊 $=\frac{1+\sin A}{1+\cos A}\cdot\frac{\sin A(\cos+1)}{\cos A(\sin A+1)}$

$=\frac{\sin A}{\cos A}=\tan A.$

143. 求證 $\frac{1-\sin A}{1+\sin A}=(\sec A-\tan A)^2.$

【證】 所設式之左邊 $=\frac{(1-\sin)^2}{(1+\sin A)(1-\sin A)}$

$=\frac{(1-\sin A)^2}{1-\sin^2 A}=\frac{(1-\sin A)^2}{\cos^2 A}$

$=\left(\frac{1}{\cos A}-\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2=(\sec A-\tan A)^2.$

144. 求證 $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=(\tan\theta+\sec\theta)^2.$

【證】 所設式之左邊 $=\frac{(1+\sin\theta)^2}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$

$=\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}=\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}=\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$

$=(\sec\theta+\tan\theta)^2.$

145. 求證 $\frac{\cos A+\cos B}{\sin A-\sin B}+\frac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B}=0.$

【證】 所設式之左邊通分，則分子為 $(\cos A+\cos B)(\cos A-\cos B)+(\sin A+\sin B)\times(\sin A-\sin B)$，即 $\cos^2 A-\cos^2 B+\sin^2 A-\sin^2 B$，即 $(\cos^2 A+\sin^2 A)-(\cos^2 B+\sin^2 B)$，即等於 0. 故左邊全體亦等於 0.

146.求證 $\frac{\cos A+\cos B}{\sec A+\sec B}=\cos A\cos B=\frac{\cos B-\cos A}{\sec A-\sec B}$.

【證】 因分母 $\sec A+\sec B=\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}$

$=\frac{\cos A+\cos B}{\cos A\cos B}$,

故 $\frac{\cos A+\cos B}{\sec A+\sec B}=\cos A\times\cos B$,

仿此得證 $\frac{\cos B-\cos A}{\sec A-\sec B}=\cos A\cos B$.

147.求證 $\cot^2\theta\cdot\frac{\sec\theta-1}{1+\sin\theta}+\sec^2\theta\cdot\frac{\sin\theta-1}{1+\sec\theta}=0$.

【證】 $\cot^2\theta\cdot\frac{\sec\theta-1}{1+\sin\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\cdot\frac{1-\cos\theta}{1+\sin\theta}$

$=\frac{\cos\theta}{1-\cos^2\theta}\cdot\frac{1-\cos\theta}{1+\sin\theta}$

$=\frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)}$,及 $\sec^2\theta\cdot\frac{\sin\theta-1}{1+\sec\theta}$

$=\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{\sin\theta-1}{1+\sec\theta}=\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}\cdot\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta+1}$

$=\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}\cdot\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta+1}=\frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)}$

∴ 所設式之左邊$=0$.

148.求證 $\frac{\tan^2 A}{1+\tan^2 A}\cdot\frac{1+\cot^2 A}{\cot^2 A}=\sin^2 A\times\sec^2 A$.

【證】 所設式之左邊$=\dfrac{\tan^2 A}{\sec^2 A}\cdot\dfrac{\operatorname{cosec}^2 A}{\cot^2 A}$

$$=\frac{\sin^2 A}{\sec^2 A\cos^2 A}\cdot\frac{1}{\cot^2 A\sin^2 A}=\frac{1}{\cot^2 A}$$

$$=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\sin^2 A\sec^2 A.$$

【別證】以$\tan^2 A$乘$\dfrac{1+\cot^2 A}{\cot^2 A}$之分子分母,

則得$\dfrac{\tan^2 A+1}{1}$即$\tan^2 A+1$.

故所設式之左邊$\tan^2 A=\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\sin^2 A\cos^2 A$.

149.求證 $\sin^2\alpha\tan\alpha+\cos^2\alpha\cos\alpha=\dfrac{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

【證】 所設式之左邊$=\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha}$

$$=\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}$$

$$=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}$$

$$=\frac{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}.$$

150.求證 $\tan\theta\ \dfrac{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta+\cos\theta-\sin^2\theta}$

【證】 $\dfrac{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}$

$$=\frac{\sin\theta(1+2\cos\theta)}{(1-\sin^2\theta)+\cos\theta+\cos^2\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta(1+2\cos\theta)}{\cos^2\theta+\cos\theta+\cos^2\theta}=\frac{\sin\theta(1+2\cos\theta)}{2\cos^2\theta+\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta(1+2\cos\theta)}{\cos\theta(2\cos\theta+1)}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta.$$

151. 求證 $\dfrac{1-\sec A+\tan A}{1+\sec A-\tan A}=\dfrac{\sec A+\tan A-1}{\sec A+\tan A+1}$.

【證】 以 $(\sec A+\tan A+1)$ 乘所設式左邊之分子分母，

而變化之，則得 $\dfrac{(1+\tan A)^2-\sec^2 A}{(1+\sec A)^2-\tan^2 A}$

$$=\frac{(1+\tan^2 A)+2\tan A-\sec^2 A}{(1+\sec A)^2-\tan^2 A}$$

$$=\frac{\sec^2 A+\{2\tan A-(1+\tan^2 A)\}}{(1+\sec A)^2-\tan^2 A}$$

$=\dfrac{\sec^2 A-(1-\tan A)^2}{(1+\sec A)^2-\tan^2 A}$，將此分子分母析為因數，

而約其公因數，則 $=\dfrac{\sec A+\tan A-1}{\sec A+\tan A+1}$.

152. 求證 $\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A-\cot A}-\dfrac{1}{\sin}=\dfrac{1}{\sin}-\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A+\cot A}$.

【證】 $\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A-\cot A}-\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{\sin A}{1-\cos A}$

$$-\frac{1}{\sin A}=\frac{\sin A(1+\cos A)}{1-\cos^2 A}-\frac{1}{\sin A}$$

$$=\frac{1+\cos A}{\sin A}-\frac{1}{\sin A}=\frac{1}{\sin A}+\frac{\cos A}{\sin A}$$

$$-\frac{1}{\sin A}=\frac{1}{\sin A}-\frac{1-\cos A}{\sin A}=\frac{1}{\sin A}$$

$$-\frac{\sin^2 A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{1}{\sin A}$$

$$-\frac{\sin^2 A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{1}{\sin A}-\frac{\sin A}{1+\cos A}$$

$$=\frac{1}{\sin A}-\frac{1}{\operatorname{cosec} A+\cot A}.$$

153．求證 $\frac{\tan A}{1-\cot A}+\frac{\cot A}{1-\tan A}=\sec A\times\operatorname{cosec} A+1$。

【證】 左式首項 $\frac{\tan A}{1-\cot A}=\frac{\tan^2 A}{(1-\cot A)\tan A}$

$=\frac{\tan^2 A}{\tan A-1}$ 而其第二項 $\frac{\cot A}{1-\tan A}$

$=\frac{\cot A\tan A}{(1-\tan A)\tan A}=\frac{1}{(1-\tan A)\tan A}$，是

以所設式之左邊得變其形爲 $\frac{\tan^2 A}{\tan A-1}$

$$+\frac{1}{(1-\tan A)\tan A}=\frac{-\tan^3 A+1}{(1-\tan A)\tan A}$$

$$=\frac{1+\tan A+\tan^2 A}{\tan A}=\frac{\sec^2 A+\tan A}{\tan A}$$

$=\sec^2 A\cot A+1=\sec A\operatorname{cosec} A+1$.

154. $$\left(\frac{1}{\sec^2 A-\cos^2 A}+\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A-\sin^2 A}\right)$$

$$\times\cos^2 A\sin^2 A=\frac{1-\cos^2 A\sin^2 A}{2+\cos^2 A\sin^2 A}$$ ·求證·

【證】 將所設式之左邊變形如下：

$\left(\frac{\cos^2 A}{1-\cos^4 A}+\frac{\sin^2 A}{1-\sin^4 A}\right)\cos^2 A\sin^2 A$，將分母析爲因數$\left\{\frac{\cos^2 A}{(1-\cos^2 A)(1-\cos^2 A)}\right.$

$$\left.+\frac{\sin^2 A}{(1-\sin^2 A)(1+\sin^2 A)}\right\}\times\cos^2 A\sin^2 A$$

$$=\left\{\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A(1+\cos^2 A)}+\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A(1+\sin^2 A)}\right\}$$

$$\times\cos^2 A\sin^2 A=\frac{\cos^4 A}{1+\cos^2 A}+\frac{\sin^4 A}{1+\sin^2 A},$$

此二分數通分，分母爲 $(1+\cos^2 A)(1+\sin^2 A)$

$=1+\sin^2 A\cos^2 A+\sin^2 A+\cos^2 A$

$=2+\sin^2 A\cos^2 A$. 又分子爲 $\cos^4 A(1+\sin^2 A)$

$+\sin^4 A(1+\cos^2 A)=\sin^4 A+\cos^4 A+\sin^2 A$

$\times\cos^4 A+\sin^4 A\cos^2 A=(\sin^2 A+\cos^2 A)^2$

$-2\sin^2 A\cos^2 A+\sin^2 A\cos^2 A(\cos^2 A+\sin^2 A)$

$=1-\sin^2 A\cos^2 A$. 故所設恆等式成立·

155. $\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$一式。

試證明其與$\dfrac{\sec\theta\ \operatorname{cosec}\theta}{2}\left(\dfrac{\operatorname{cosec}\theta+\sec\theta}{\operatorname{cosec}\theta-\sec\theta}\right.$

$\left.-\dfrac{\operatorname{cosec}\theta-\sec\theta}{\operatorname{cosec}\theta+\sec\theta}\right)$相等。

【證】 是題可先將前後二式分別簡化，前式

$$=\frac{(\cos\theta-\sin\theta)^2+(\sin\theta+\cos\theta)^2}{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}$$

$$=\frac{2\cos^2\theta+2\sin^2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\frac{2}{\cos^2\theta-\sin^2\theta},$$

後式$=\dfrac{\sec\theta\ \operatorname{cosec}\theta}{2}$

$$\times\left\{\frac{(\operatorname{cosec}\theta+\sec\theta)^2-(\operatorname{cosec}\theta-\sec\theta)^2}{\operatorname{cosec}\theta-\sec^2\theta}\right\}$$

$$=\frac{\sec\theta\ \operatorname{cosec}\theta}{2}\cdot\frac{4\operatorname{cosec}\theta\ \sec\theta}{\operatorname{cosec}^2\theta-\sec^2\theta}$$

$$=\frac{2\sec^2\theta\ \operatorname{cosec}^2\theta}{\dfrac{1}{\sin^2\theta}-\dfrac{1}{\cos^2\theta}}$$

$$=\frac{2\sec^2\theta\ \operatorname{cosec}^2\theta\ \sin^2\theta\ \cos^2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$$

$=\dfrac{2}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$故兩式相等。

156. 求證 $\sin\alpha\cos\alpha$

$=\sqrt{\{(\sin\alpha-\sin^3\alpha)^2+(\cos\alpha-\cos^3\alpha)^2\}}$.

【證】 所設式之右邊根號內之式 $=\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)^2$

$+\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)^2=\sin^2\alpha\cos^4\alpha+\cos^2\alpha\sin^4\alpha$

$=\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\sin^2\alpha\cos^2\alpha$,

故所設等式恆成立.

157. 求證 $\sin A\sqrt{(\text{cosec}^2 A-1)}=\cos A$.

【證】 因 $\text{cosec}^2 A=1+\cot^2 A=1+\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}$,

求證 $\sin A\sqrt{(\text{cosec}^2 A-1)}=\sin A\sqrt{\dfrac{\cos^2 A}{\sin A}}$

$=\sin A\cdot\dfrac{\cos A}{\sin A}=\cos A$.

158. 求證 $\tan 30°\tan 60°=\tan 45°$.

【證】 $\tan 30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\tan 60°=\sqrt{3}$, 以之代入,

則所設式之左邊 $=1$, 但 $\tan 45°=1$

$\therefore\ \tan 30°\tan 60°=\tan 45°$.

159. 求證 $\sin 30°\cos 60°+\cos 30°\sin 60°=1$.

【證】 $\cos 60°=\sin 30°$, $\sin 60°=\cos 30°$, 故以之代入,

則所設式左邊等於 $\sin^2 30°+\cos^2 30°=1$.

【別證】因 $\sin 30°=\cos 60°=\frac{1}{2}$, 及 $\sin 60°=\cos 30°$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 故以之代入左邊, 則得1, 故等於右邊.

160.求證 $\sin 60^\circ+\cos 60^\circ+\tan 60^\circ=\sin 30^\circ+\cos 30^\circ+\cot 30^\circ$.

【證】 $\sin 60^\circ=\cos 30^\circ$，$\cos 60^\circ=\sin 30^\circ$，又 $\tan 60^\circ=\cot 30^\circ$，故各邊相加，則 $\sin 60^\circ+\cos 60^\circ+\tan 60^\circ=\cos 30^\circ+\sin 30^\circ+\cot 30^\circ$.

161.求證 $\cot 60^\circ(1+\cos 30^\circ+\cos 60^\circ)=\sin 30^\circ+\sin 60^\circ$.

【證】 所設式之左邊 $=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)$,

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}+3}{3\times 2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\sin 60^\circ+\sin 30^\circ.$$

162.求證 $\cos 30^\circ\cos 60^\circ+\sin 30^\circ\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【證】 $\cos 30^\circ=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $\cos 60^\circ=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$，故以之代入，則所設式之左邊等於 $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}$，即 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

163.求證 $\cos^2 30^\circ-\sin^2 30^\circ=\cos 60^\circ$.

【證】 由上題，$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，及 $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$,

故所設式之左邊$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，

而 $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$，故知 $\cos^2 30^\circ-\sin^2 30^\circ$

$=\cos 60^\circ$。

164.求證 $3\sin 18^\circ-4\sin^3 18^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

【證】 $\sin 18^\circ$ 之值為$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，故所設式之左邊

$=\frac{3(\sqrt{5}-1)}{4}-\frac{4(\sqrt{5}-1)^3}{4^3}=\frac{\sqrt{5}-1}{16}$

$\times\{12-(\sqrt{5}-1)^2\}=\frac{\sqrt{5}-1}{16}\{6+2\sqrt{5}\}$

$=\frac{5+2\sqrt{5}-3}{8}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

165.求證 $3\tan^2 30^\circ+\frac{4}{3}\cos^2 30^\circ-\frac{1}{2}\sec^2 45^\circ$

$-\frac{1}{3}\sin^2 60^\circ=\frac{3}{4}$.

【證】 $\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\mathrm{ssc}\ 45^\circ=\sqrt{2}$，

$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，以之代入左邊，則得

$3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$，

即$\frac{3}{4}$.

166.求證 $\tan^2 30°+2\sin 60°+\tan 45°-\tan 60°+\cos^2 30°$

$=2\frac{1}{12}$.

【證】 $\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 45°$

$=1$, $\tan 60°=\sqrt{3}$, $\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故以之代入，

則所設式之左邊爲$\frac{1}{3}+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1-\sqrt{3}+\frac{3}{4}$，

卽$2\frac{1}{12}$.

167.求證 $\operatorname{cosec}^2 45°\ \sec^2 30°\ \cos 60°=1\frac{1}{2}$.

【證】 $\operatorname{cosec} 45°=\sqrt{2}$, $\sec 30°=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\cos 60°=\frac{1}{2}$，故

以之代入所設式之左邊，得$(\sqrt{2})^2\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\times\frac{1}{2}$，

計算之，得$\frac{4}{3}$，卽$1\frac{1}{3}$.

168.求證 $\tan 60°\ \sin^2 45°=\cos 30°$.

【證】 $\tan 60°=\sqrt{3}$, $\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$，故以之代入所設式

之左邊，則得$\sqrt{3}\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$，此值等於$\cos 30°$，

故 $\tan 60°\ \sin^2 45°=\cos 30°$.

169.求證 $\cos 60°-\tan^2 45°+\frac{3}{4}\tan^2 30°+\cos^2 30°$

$-\sin 30°=0$.

【證】 以 $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\tan^2 45^\circ = 1$, $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ 代入，則所設式之左邊為 $\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$，計算之，得0.

170. 求證 $\sin^2 60^\circ - \sin^2 30^\circ = \frac{1}{6} \tan 60^\circ \times \cot 30^\circ$.

【證】 所設式之左邊 $= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$，右邊 $= \frac{1}{6}(\sqrt{3})(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}$，是以知 $\sin^2 60 - \sin^2 30^\circ = \frac{1}{6} \tan 60^\circ \cot 30^\circ$

171. $(1 + \sin 45^\circ + \sin 30^\circ)(1 - \cos 45^\circ + \cos 60^\circ) = \frac{7}{4}$，求證.

【證】 $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$, $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$，故所設式之左邊 $= \{(1 + \sin 30^\circ) + \sin 45^\circ\} \times \{(1 + \sin 30^\circ) - \sin 45^\circ\} = (1 + \sin 30^\circ)^2 - \sin^2 45^\circ$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{7}{4}.$$

172. 求證 $\frac{1 - \tan^2 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ} = \cos 60^\circ$.

【證】 以 $\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 代入所設式之左邊，則得

$(1-\frac{1}{3})/(1+\frac{1}{3})$，即 $\frac{1}{2}$，然 $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$，故所設恆等式成立.

173. 求證 $\frac{\cos 60^\circ+\cos 30^\circ}{\sec 60^\circ+\operatorname{cosec} 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

【證】 $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sec 60^\circ=2$, $\operatorname{cosec} 60^\circ$

$=\frac{2}{\sqrt{3}}$，是以所設式之左邊$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\Big/\left(2+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\ /\ 2\times\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\sqrt{3}/2\sqrt{(3+1)}=\frac{1}{4}\sqrt{3}$.

174. 求證 $\frac{\cos 45^\circ-\cos 60^\circ}{\sin 45^\circ+\sin 30^\circ}=(\operatorname{cosec} 45^\circ-\cot 45_\circ)$.

【證】 $\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$，$\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$，故代入所設式之左邊

知爲$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)\Big/\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)=2=\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

$=\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\frac{4-4\sqrt{2}+2}{4-2}=3-2\times\sqrt{2}$,

又所設式之右邊，因 $\operatorname{cosec} 45^\circ=\sqrt{2}$, $\cot 45^\circ=1$,

故爲 $(\sqrt{2}-1)^2=2-2\times\sqrt{2}+1=3-2\sqrt{2}$,

故 $\frac{\cos 45^\circ-\cos 60^\circ}{\sin 45^\circ+\sin 30^\circ}=(\operatorname{cosec} 45^\circ-\cot 45^\circ)^2$.

175.求證 $\{\sec(90^\circ-\theta)-\sec\theta\}\{\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)-\operatorname{cosec}\theta\}$
$+(1-\tan\theta)^2+(\cot\theta-1)^2=0$.

【證】所設式之左邊 $=\{\operatorname{cosec}\theta-\sec\theta\}\times\{\sec\theta-\operatorname{cosec}\theta\}$
$+1-2\tan\theta+\tan^2\theta+\cot^2\theta-2\cot\theta+1$
$=-\operatorname{cosec}^2\theta+2\operatorname{cosec}\theta\times\sec\theta-\sec^2\theta+(1+\tan^2\theta)$
$+(1+\cot^2\theta)-2(\tan\theta+\cot\theta)=2\operatorname{cosec}\theta\sec\theta$
$-2\times(\tan\theta+\cot\theta)$，則 $2(\tan\theta+\cot\theta)$
$-2(\tan\theta+\cot\theta)=0$.

176.求證 $\sin^2 30^\circ$, $\sin^2 45^\circ$, $\sin^2 60^\circ$, $\sin^2 90^\circ$, 成等差級數.

【證】$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\sin 90^\circ=1$, 平方之則所設三角函數之值分別為 $\frac{1}{4}$,

$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, 即以 $\frac{1}{4}$ 為公差之等差級數.

177.求證 次式之值，與A無關. (1) $\sin^4 A+(\cos^2 A+2\sin^2 A)\cos^2 A$. (2) $\tan^2 A(\tan^2 A-2\sec^2 A)+\sec^4 A$.

【證】(1) 去括號，$\sin^4 A+\cos^4 A+2\sin^2 A\times\cos^2 A$
$=(\sin^2 A+\cos^2 A)^2=1=$ 常數. 故與 A 無關.
(2) 去括號，$\tan^4 A-2\tan^2 A\sec^2 A+\sec^4 A$
$=(\tan^2 A-\sec^2 A)^2=(\tan^2 A-1-\tan^2 A)^2=1$
$=$ 常數，故與 A 無關.

(4) 條件恆等式之證明

178.設 $\sin\alpha=1$，求證 $\cos\alpha+\cot\alpha+\operatorname{cosec}\alpha=1$.

【證】 因 $\sin\alpha=1$，故 $\cos\alpha=\sqrt{(1-\sin^2\alpha)}=\sqrt{(1-1)}$

$=0$，$\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{0}{\sin\alpha}=0$，$\operatorname{cosec}\alpha$

$=\dfrac{1}{\sin\alpha}=1$，是以 $\cos\alpha+\cot\alpha+\operatorname{cosec}\alpha=1$.

179.設 $\sin A=\dfrac{m}{n}$，則 $\sqrt{(n^2-m^2)}\tan A=m$，求證.

【證】 因 $\sin A=\dfrac{m}{n}$，故 $n\sin A=m$，故 $n^2-n^2\sin^2 A$

$=n^2-m^2$，卽 $n^2(1-\sin^2 A)=n^2-m^2$ 卽 $n^2\cos^2 A$

$=n^2-m^2$，故 $n\cos A=\sqrt{(n^2-m^2)}$，故 $\sqrt{(n^2-m^2)}$

$\tan A=n\times\cos A\tan A=n\sin A=m$.

180.設 $\sin\theta=\dfrac{m^2+2mn}{m^2+2mn+2n^2}$，

則 $\tan\theta=\dfrac{m^2+2mn}{2mn+2n^2}$ 求證.

【證】 因 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$，故 $\cos^2\theta=1$

$-\left(\dfrac{m^2+2mn}{m^2+2mn+2n^2}\right)^2=\dfrac{4n^2(m+n)^2}{(m^2+2mn+2n^2)^2}$.

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{2n(m+n)}{m^2+2mn+2n^2}$，故 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\dfrac{m^2+2mn}{m^2+2mn+2n^2}\div\dfrac{2n(m+n)}{m^2+2mn+2n^2}=\dfrac{m^2+2mn}{2n(m+n)}$

$$=\frac{m^2+2mn}{2mn+2n^2}.$$

181. 設 $\sin A=m\sin B$, $\cos A=n\cos B$, 求 $\tan A$ 及 $\tan B$.

【解】 由所設二方程式, $\sin^2 A+\cos^2 A=m^2\times\sin^2 B+n^2\cos^2 B$, 卽 $1=m^2\sin^2 B+n^2\times\cos^2 B$ ……(1),

因此 $1=m^2-m^2\cos^2 B+n^2\times\cos^2 B$,

故 $(m^2-n^2)\cos^2 B=m^2-1$ ……………………(2),

又由 (1), $1=m^2\sin^2 B+n^2-n^2\sin^2 B$,

或 $(m^2-n^2)\sin^2 B=1-n^2$, 除之以 (2),

則 $\frac{\sin^2 B}{\cos^2 B}=\frac{1-n^2}{m^2-1}$, 或 $\tan B=\sqrt{\frac{1-n^2}{m^2-1}}$ … (3),

又由原二方程式, $\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{m\sin B}{n\cos B}$,

或 $\tan A=\frac{m}{n}\tan B$,

故由 (3), $\tan A=\frac{m}{n}\times\sqrt{\frac{1-n^2}{m^2-1}}$.

182. 設 $\cos A=n\sin B$, $\cot A=\sin B\sqrt{\tan C}$, 則 $\cos C=n/\sqrt{(1+n^2\cos^2 B)}$, 求證.

【證】 因 $\cot A=\frac{\cos A}{\sqrt{(1-\cos^2 A)}}$, 故 $\frac{\sin B}{\tan C}$

$$=\frac{n\sin B}{\sqrt{(1-n^2\sin^2 B)}}, \text{或} \sqrt{(1-n^2\sin^2 B)}$$

$=n\times\tan C$，或 $1-n^2\sin^2 B=n^2\tan^2 C$，

或 $1+n^2-n^2\sin^2 B=n^2+n^2\tan^2 C$，或 $1+n^2\times\cos^2 B=n^2\sec^2 C$，故 $\cos^2 C=\dfrac{n^2}{1+n^2\cos^2 B}$，

或 $\cos C=\dfrac{n}{\sqrt{(1+n^2\cos^2 B)}}$.

183.設 $\tan^3\phi=\dfrac{\alpha}{\beta}$，求證 $\alpha\operatorname{cosec}\phi+\beta\times\sec\phi=(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$.

【證】知 $\operatorname{cosec}\phi=\sqrt{(1+\cot^2\phi)}=\dfrac{\sqrt{(1+\tan^2\phi)}}{\tan\phi}$，

及 $\sec\phi=\sqrt{(1+\tan^2\phi)}$，故 $a\operatorname{cosec}\phi+\beta\sec\phi$

$$=\frac{\alpha\sqrt{(1+\tan^2\phi)}}{\tan\phi}+\beta\times\sqrt{(1+\tan^2\phi)}$$

$$=\sqrt{(1+\tan^2\phi)}\left(\frac{\alpha}{\tan\phi}+\beta\right)=\sqrt{\left\{1+\frac{\alpha^{\frac{2}{3}}}{\beta^{\frac{2}{3}}}\right\}}$$

$$\times\left\{\frac{\alpha\beta^{\frac{1}{3}}}{\alpha^{\frac{1}{3}}}+\beta\right\}=(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

184.設 $\tan A+\sin A=m$，$\tan A-\sin A=n$，則 $m^2-n^2=4\sqrt{(mn)}$.求證.

【證】所設二式相乘，$mn=\tan^2 A-\sin^2 A=\tan^2 A(1-\cos^2 A)=\tan^2 A\sin^2 A$，然所設二式各邊相加，則 $2\tan A=m+n$，又二式各邊相減，

則 $2\sin A=m-n$,

是以 $mn=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2\left(\frac{m-n}{2}\right)^2$，卽 $4\sqrt{mn}$

$=m^2-n^2$.

185.設 $2\tan\alpha+3\sin\beta=7$, $\tan\alpha-6\times\sin\beta=1$ 求 $\sin\alpha$ 及 $\sin\beta$.

【解】 第一方程式乘以2,加第二方程式，則 $5\tan\alpha=15$, 卽 $\tan\alpha=3$. 代入第二方程式，則 $3-6\sin\beta=1$,

故 $\sin\beta=\frac{1}{3}$，又因 $\tan\alpha=3$,

故 $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{(1+9)}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$.

186.設 $a\sec A-c\tan A=d$, $b\sec A+d\times\tan A=c$, 則 $a^2+b^2=c^2+d^2$,試證之.

【證】 由所設二方程式,得 $a\sec A=c\tan A+d$, $b\sec A=c-d\tan A$，平方，相加，$(a^2+b^2)\sec^2 A=(c^2+d^2)\tan^2 A+(c^2+d^2)=(c^2+d^2)(\tan^2 A+1)$,

然 $\sec^2 A=\tan^2 A+1$，故 $a^2+b^2=c^2+d^2$.

187.設 $\cot^2 A=\left(\frac{\sin B}{\tan D}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\tan C}\right)^2$，求證 $\operatorname{cosec}^2 A$

$$=\left(\frac{\sin B}{\sin D}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\sin C}\right)^2.$$

【證】 由所設關係式，$\operatorname{cosec}^2 A=1+\cot^2 A=\frac{\sin^2 B}{\tan^2 D}$

$$+\frac{\cos^2 B}{\tan^2 C}+1=\frac{\sin^2 B}{\tan^2 D}+\sin^2 B+\frac{\cos^2 B}{\tan^2 C}$$

$+\cos^2 B=\sin^2 B(\cot^2 D+1)+\cos^2 B\times(\cot^2 C+1)$

$=\sin^2 B.\ \operatorname{cosec}^2 D+\cos^2 B.\ \operatorname{cosec}^2 C=\dfrac{\sin^2 B}{\sin^2 D}$

$+\dfrac{\cos^2 B}{\sin^2 C}$.

188. 設 $\dfrac{\cos^3\theta}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin^3\theta}{\sin\alpha}=1$，求證$\left(\dfrac{\cos\alpha}{\cos\theta}-\dfrac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right)$

$\left(\dfrac{\cos\alpha}{\cos\theta}+\dfrac{\sin\alpha}{\sin\theta}+1\right)=0$.

【證】 由假定之式，得$\dfrac{\cos^3\theta}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin^3\theta}{\sin\alpha}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$

從而$\dfrac{\cos^3\theta-\cos^3\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sin^3\alpha-\sin^3\theta}{\sin\alpha}$ ………(1).

又由假定之式，化得$\dfrac{\cos^3\theta}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin^3\theta}{\sin\alpha}=\cos^2\theta+\sin^2\theta$,

從而$\dfrac{\cos^2\theta(\cos\theta-\cos\alpha)}{\cos\alpha}$

$=\dfrac{\sin^2\theta(\sin\alpha-\sin\theta)}{\sin\alpha}$,

以此最後式之兩邊，分別除上述 (1) 式之兩邊，則可變形如下而得達所證.

$$\frac{\cos^2\theta+\cos\theta\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\sin\alpha\sin\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$$

或 $1+\dfrac{\cos\alpha}{\cos\theta}+\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}=\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\theta}+\dfrac{\sin\alpha}{\sin\theta}+1$

或$\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\theta}+\dfrac{\cos\alpha}{\cos\theta}-\dfrac{\sin\alpha}{\sin\theta}=0$

從而$\left(\dfrac{\cos\alpha}{\cos\theta}-\dfrac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right)\left(\dfrac{\cos\alpha}{\cos\theta}+\dfrac{\sin\alpha}{\sin\theta}+1\right)=0.$

189. $\dfrac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta}+\dfrac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta}=1$，則$\dfrac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}=1$，

求證。

【證】 將假定之式去分母，$\cos^4\alpha\sin^2\beta+\sin^4\alpha\cos^2\beta=\cos^2\beta\sin^2\beta$，或 $\cos^2\alpha(1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta$

$+\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha\cos^2\beta=\cos^2\beta\sin^2\beta$，

或 $\cos^2\alpha\sin^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\alpha\times\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\beta$

$-\sin^2\alpha\cos^2\alpha\cos^2\beta=\cos^2\beta\sin^2\beta$，或 $\cos^2\alpha\sin^2\beta$

$+\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\alpha(\sin^2\beta+\cos^2\beta)$

$=\cos^2\beta\sin^2\beta$，或 $\cos^2\beta\sin^2\beta$，或 $\cos^2\alpha\sin^2\beta$

$+\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\alpha=\cos^2\beta\sin^2\beta$

$(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$，或 $\sin^2\alpha\cos^2\beta(1-\sin^2\beta)$

$+\cos^2\alpha\sin^2\beta(1-\cos^2\beta)=\cos^2\alpha\sin^2\alpha$，

或 $\sin^2\alpha\cos^4\beta+\cos^2\alpha\sin^4\beta=\cos^2\alpha\sin^2\alpha$，

從而$\dfrac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}=1$.

（三）任意角之三角函數

【參考公式】

(a)　餘角函數公式.

1.
$$\begin{cases}\sin(90°-x)=\cos x\\ \cos(90°-x)=\sin x\\ \tan(90°-x)=\cot x\\ \cot(90°-x)=\tan x\\ \sec(90°-x)=\csc x\\ \csc(90°-x)=\sec x\end{cases}$$

(b)　第二象限內之鈍角函數化爲第一象限內之銳角函數.

2.
$$\begin{cases}\sin(180°-x)=+\sin x\\ \cos(180°-x)=-\cos x\\ \tan(180°-x)=-\tan x\\ \cot(180°-x)=-\cot x\\ \sec(180°-x)=-\sec x\\ \csc(180°-x)=+\csc x\end{cases}$$

3.
$$\begin{cases}\sin(90°+x)=+\cos x\\ \cos(90°+x)=-\sin x\\ \tan(90°+x)=-\cot x\\ \cot(90°+x)=-\tan x\\ \sec(90°+x)=-\csc x\\ \csc(90°+x)=+\sec x\end{cases}$$

(c)　第三象限內鈍角函數化爲第一象限內之銳角函數.

4.
$$\begin{cases}\sin(180°+x)=-\sin x\\ \cos(180°+x)=-\cos x\\ \tan(180°+x)=+\tan x\\ \cot(180°+x)=+\cot x\\ \sec(180°+x)=-\sec x\\ \csc(180°+x)=-\csc x\end{cases}$$

$$5.\begin{cases}\sin(270^\circ-x)=-\cos x\\ \cos(270^\circ-x)=-\sin x\\ \tan(270^\circ-x)=+\cot x\\ \cot(270^\circ-x)=+\tan x\\ \sec(270^\circ-x)=-\csc x\\ \csc(270^\circ-x)=-\sec x\end{cases}$$

(d) 第四象限內之鈍角函數化爲第一象限內之銳角函數.

$$6.\begin{cases}\sin(360^\circ-x)=-\sin x\\ \cos(360^\circ-x)=+\cos x\\ \tan(360^\circ-x)=-\tan x\\ \cot(360^\circ-x)=-\cot x\\ \sec(360^\circ-x)=+\sec x\\ \csc(360^\circ-x)=-\csc x\end{cases}$$

$$7.\begin{cases}\sin(270^\circ+x)=-\cos x\\ \cos(270^\circ+x)=+\sin x\\ \tan(270^\circ+x)=-\cot x\\ \cot(270^\circ+x)=-\tan x\\ \sec(270^\circ+x)=+\csc x\\ \csc(270^\circ+x)=-\sec x\end{cases}$$

(e) 負角函數.

$$8.\begin{cases}\sin(-x)=-\sin x\\ \cos(-x)=+\cos x\\ \tan(-x)=-\tan x\\ \cot(-x)=-\cot x\\ \sec(-x)=+\sec x\\ \csc(-x)=-\csc x\end{cases}$$

(1)各象限內三角函數之值

1. 求$\cos 405°$, $\tan 210°$, $\cot(-315°)$之值.

【解】 $\cos 405° = \cos(360°+45°) = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\tan 210° = \tan(180°+30°) = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$\cot(-315°) = \cot(45°-360°) = \cot 45° = 1$.

2. 求下列諸函數之值.

(1) $\sin 210°$. (2) $\cos 240°$. (3) $\tan 225°$.

【解】 (1) $\sin 210° = \sin(180°+30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$.

(2) $\cos 240° = \cos(180°+60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$.

(3) $\tan 225° = \tan(180°+45°) = \tan 45° = 1$.

3. 求以下各三角函數之值.

(1) $\sin 495°$, $\cos 495°$, $\cot 495°$.

(2) $\sec 120°$, $\tan 120°$, $\operatorname{cosec} 120°$.

(3) $\operatorname{cosec} 315°$, $\sec 315°$, $\cot 315°$.

(4) $\tan(-300°)$, $\cot(-300°)$, $\sec(-300°)$.

(5) $\cos(-240°)$, $\sec(-240°)$, $\tan(-240°)$.

【解】 (1) $495° = 360°+135°$, $135° = 180°-45°$, 故 $\sin 495° = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 495° = -\cos 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,

從而 $\cot 495° = -1$.

(2) $120° = 180° - 60°$，故 $\sec 120° = -\sec 60° = -2$，$\tan 120° = -\tan 60° = -\sqrt{3}$，$\operatorname{cosec} 120° = \operatorname{cosec} 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(3) $315° = 270° + 45°$，故 $\operatorname{cosec} 315° = -\operatorname{cosec} 45° = -\sqrt{2}$，$\sec 315° = \sec 45° = \sqrt{2}$，$\cot 315° = -\cot 45° = -1$.

(4) $-300° = -360° + 60°$，故 $\tan(-300°) = \tan 60° = \sqrt{3}$，$\cot(-300°) = \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$，$\sec(-300°) = \sec 60° = 2$.

(5) $-240° = -360° + 120°$，而 $120° = 180° - 60°$，故 $\cos(-240°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$，
$\sec(-240°) = -\sec 60° = -2$，
$\tan(-240°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$.

4. 求角 585° 之三角函數.

【解】 $585° = 360° + 225°$. 故所設角之三角函數與225°之三角函數同. $\therefore \sin 585° = \sin 225° = \sin(180° + 45°) = -\sin 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos 585° = \cos 225° = \cos(180° + 45°) = -\cos 45 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

從而 $\tan 585° = 1$，$\operatorname{cosec} 585° = -\sqrt{2}$，

$\sec 585^\circ = -\sqrt{2}$, $\cot 585^\circ = 1$.

5. 求 690° 之三角函數.

【解】 $690^\circ = 360^\circ + 330^\circ$, 故所設角之三角函數與 330° 之三角函數同. $\therefore \sin 690^\circ = \sin 330^\circ = \sin(180^\circ + 150^\circ) = -\sin 150^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$. $\cos 690^\circ = \cos 330^\circ = \cos(180^\circ + 150^\circ) = -\cos 150^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 從而 $\tan 690^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{cosec} 690^\circ = -2$, $\sec 690^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\cot 690^\circ = -\sqrt{3}$.

6. 求角 930° 之三角函數.

【解】 $930^\circ = 720^\circ + 210^\circ$ 故所設角之三角函數與 210° 之三角函數同. $\therefore \sin 930^\circ = \sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos 930^\circ = \cos 210^\circ = \cos(180 + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. 從而 $\tan 930^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{cosec} 930^\circ = -2$. $\sec 930^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\cot 930^\circ = \sqrt{3}$.

7. 求角 6420° 之三角函數.

【解】 $6420^\circ = 360^\circ \times 17 + 300^\circ$. 故所設角之三角函數與角 300° 者相同. $\therefore \sin 6420^\circ = \sin 300^\circ = \sin(180^\circ + 120^\circ) = -\sin 120^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\cos 6420^\circ$

$=\cos 300^\circ=\cos(180^\circ+120^\circ)=-\cos 120^\circ=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$，從而 $\tan 6420^\circ=-\sqrt{3}$．$\operatorname{cosec} 6420^\circ=-\frac{2}{\sqrt{3}}$，$\sec 6420^\circ=2$，$\cot 6420^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$．

8． 以下各三角函數，試以 90° 以下之三角函數表之．$\sin(-300^\circ)$，$=\sin 1345^\circ$，$\cos(-1000^\circ)$．

【解】 $\sin(-300^\circ)=\sin(-360^\circ+60^\circ)=\sin 60^\circ$，$\tan(1345^\circ)=\tan(360^\circ\times 3+265^\circ)=\tan 265^\circ=\tan(180^\circ+85^\circ)=\tan 85^\circ$，$\cos(-1000^\circ)=\cos(-360^\circ\times 3+80^\circ)=\cos 80^\circ$．

9． 求 $\sin 480^\circ$，$\cos 4080^\circ$，$\tan 8400^\circ$ 之値．

【解】 $\sin 480^\circ=\sin(360^\circ+120^\circ)=\sin 120^\circ=\sin(90^\circ+30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$． $\cos 4080^\circ=\cos(360^\circ\times 11+120^\circ)=\cos 120^\circ=\cos(90^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$，$\tan 8400^\circ=\tan(360^\circ\times 23+120^\circ)=\tan 120^\circ=\tan(90^\circ+30^\circ)=-\cot 30^\circ=-\sqrt{3}$．

10． 將以下各函數，變爲小於 45°（卽 $\frac{1}{4}\pi$）之正角之函數．

(1) $\sin 470^\circ$，　(2) $\cos(-300^\circ)$，

(3) $\tan\frac{9}{2}\pi$，　(4) $\cot(-\frac{1}{3}\pi)$，

(5) $\operatorname{cosec} 1120^\circ$，　(6) $\operatorname{cosec}(-60^\circ)$，

(7) $\operatorname{vers} 100^\circ$，　(8) $\operatorname{covers}(-100^\circ)$．

【解】 (1) $740^\circ=360^\circ\times2+20^\circ$, $\therefore\ \sin 740^\circ=\sin 20^\circ$,

(2) $-300^\circ=-360^\circ+60^\circ$,

$\therefore\ \cos(-300^\circ)=\cos 60^\circ=\sin 30^\circ$,

(3) $\tan\frac{9}{2}\pi=\tan(4\pi+\frac{1}{2}\pi)=\tan\frac{1}{2}\pi=\cot 0$

$=\infty$,

(4) $\cot(-\frac{1}{3}\pi)=-\cot\frac{1}{3}\pi=-\tan(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})\pi$

$=-\tan\frac{\pi}{6}$,

(5) $1120^\circ=360^\circ\times3+40^\circ$,

$\therefore\ \text{cosec } 1120^\circ=\text{cosec } 40^\circ$,

(6) $\text{cosec}(-60^\circ)=-\text{cosec } 60^\circ=-\sec 30^\circ$,

(7) $\text{vers } 100^\circ==1-\cos 100^\circ=1+\sin 10^\circ$,

(8) $\text{covers}(-100^\circ)=1-\sin(-100^\circ)=1+\sin$ $100^\circ=1+\cos 10^\circ$.

11. 化 $\sin 7321^\circ$, $\cos(-8146^\circ)$, $\tan 7389^\circ$, $\cot 375^\circ$, $\sec(-8325^\circ)$, $\text{cosec } 1732^\circ$ 爲 45° 以下之三角函數.

【解】 $\sin 7321^\circ=\sin(360^\circ\times20+121^\circ)=\sin 121$ $(90^\circ+31^\circ)=\cos 31^\circ$, $\cos(-8146^\circ)=\cos(-360$ $\times22-226^\circ)=\cos(-226^\circ)=\cos 226^\circ=\cos(180^\circ$ $+46^\circ)=-\cos 46^\circ=-\sin 44^\circ$, $\tan 7389^\circ=\tan$ $(360^\circ\times20+189^\circ)=\tan 189^\circ=\tan(180^\circ+9^\circ)$ $=\tan 9^\circ$, $\cot 375^\circ=\cot(360^\circ+15^\circ)=\cot 15^\circ$,

$\sec(-8325°)=\sec(-360°\times 23-45°)=\sec(-45°)$

$=\sec 45°$, $\operatorname{cosec} 1732°=\operatorname{cosec}(360°\times 4+292°)$

$=\operatorname{cosec} 292°=\operatorname{cosec}(180°112°)=-\operatorname{cosec}$

$112°=-\operatorname{cosec}(90°+22°)=-\sec 22°$.

12. 求 $A-270°$ 之三角函數.

【解】 $\sin(A-270°)=-\sin(270°-A)=\cos A$,

$\cos(A-270°)=\cos(270°-A)=-\sin A$,

$\tan(A-270°)=-\tan(270°-A)=-\cot A$,

從而$\operatorname{cosec}(A-270°)=\sec A$, $\sec(A-270°)$

$=-\operatorname{cosec} A$, $\cot(A-270°)=-\tan A$.

13. 試就 0° 及 900° 間之角,列舉其能適合 $\cos^2\theta=\frac{1}{2}$者.

【解】 因 $\cos^2\theta=\frac{1}{2}$,故 $\cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$若取正號,則最小角爲 45°,其他諸角爲 $360°-45°$, $360°+45°$, $720°-45°$, $720°+45°$, 即 315°, 405°, 675°, 765°, 若取負號,則最小角爲 135°, 其他諸角爲 $360°-135°$, $360°+135°$, $720°-135°$, $720°+135°$, 即 225°, 495°, 585°, 855°.

14. 求 $\operatorname{vers}\frac{n\pi}{4}$之一切值.但n爲零或任意正整數.

【解】 $\operatorname{vers}\frac{n\pi}{4}=1-\cos\frac{n\pi}{4}$.假定$n=0$,則得 $1-\cos 0°$,

即 $1-1$, 故爲 0. 次,假定 $n=1$,則得 $1-\cos\frac{\pi}{4}$,

即 $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$．次，假定 $n=2$，則得 $1-\cos\frac{\pi}{2}$，

即 $1-0$，故為 1．次，假定 $n=3$，則得 $1-\cos\frac{3\pi}{4}$，

故為 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}$．復次，假定 $n=4$，則得 $1-\cos\pi$，

即 $1+1$，故為 2．自是以往，即依前之反對順序，

重覆一過，因 $\cos\frac{5\pi}{4}=\cos\frac{3\pi}{4}$，$\cos\frac{6\pi}{4}$

$=\cos\frac{2\pi}{4}$，$\cos\frac{7\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$，$\cos\frac{8\pi}{4}=\cos 2\pi$

$=\cos 0$ 故也．由是以後，即依照以上之全體數值，

循環不已，因 $\cos\frac{9\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$……故也．

15．求 $\sin\left\{\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right\}$ 之一切值．但n為零或任意正整數．

【解】 假定 $n=0$，則得 $\sin\frac{\pi}{6}$，即 $\frac{1}{2}$．次，假定 $n=1$，

則得 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$，即 $\sin\frac{\pi}{3}$，即 $\frac{\sqrt{3}}{2}$．復次，

設 $n=2$，則得 $\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$，即 $-\sin\frac{\pi}{6}$，

即 $-\frac{1}{2}$．復次，假定 $n=3$，則得 $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$，

即 $-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$，即 $-\sin\frac{\pi}{3}$，即 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

由是以往，即照上得諸值循環，因設 n=4，

則得 $\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)$，即$\sin\frac{\pi}{6}$，．

且以下以類此故也．

16．設 A 由0°增至 90°，則 sec A−tan A呈如何之變化？

【解】 因 $\sec^2 A-\tan^2 A=1$，故 sin A−tan A

$=\frac{1}{\sec A+\tan A}$．設 A 爲 0，

則 sec A=1, tan A=0, 故$\frac{1}{\sec A+\tan A}$，

即 sec A−tan A 爲 1，設 A 由是增加，

則 sec A 及 tan A 俱從而增加，

故$\frac{1}{\sec A+\tan A}$，即 sec A−tan A從而減小，

最後 A 爲 90°時，sec A, tan A 俱爲 ∞，

故$\frac{1}{\sec A+\tan A}$，即 sec A−tan A 爲0.

17．求 $\cos 570^\circ \sin 510^\circ-\sin 330^\circ\times\cos 390^\circ$之數值．

【解】 所設式 $=\cos 210^\circ \sin 150^\circ-(-\sin 30^\circ)\times\cos 30^\circ=(-\cos 30^\circ)\sin 30^\circ+\sin 30^\circ\times\cos 30^\circ=0$.

18．求 $\tan 225^\circ \cot 405^\circ+\tan 765^\circ\times\cot 675^\circ$之數值．

【解】 所設式$=\tan 45^\circ \cot 45^\circ+\tan 45^\circ\times\cot 315^\circ=1+\cot 315^\circ=1+\cot(-45^\circ)=1-\cot 45^\circ=1-1=0$.

19. 求 $\sin 420° \cos 390° + \cos(-300°) \times \sin(-330°)$ 之數值.

【解】 所設式 $= \sin(360° + 60°)\cos(360° + 30°)$

$+ \cos(-360° + 60°)\sin(-360° + 30°)$

$= \sin 60° \cos 30° + \cos 60° \sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$+ \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1.$

20. 求 $2\cos 120° \sin 225° - 3\sin 120° \times \tan 135°$ 之數值.

【解】 $\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60°$

$= -\frac{1}{2}$, $\sin 225° = \sin(180° + 45°) = -\sin 45°$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$, 以及 $\sin 120° = \sin(180° - 60°)$

$= \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 135° = \tan(180° - 45°)$

$= -\tan 45° = -1$, 故所設式等於 $2\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1)$, 即 $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$+ 3\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{2}.$

21. 求 $a^2\cos 0° - b^2\sin 270° - 2ab \times \tan 135° \cot 225°$ 之值.

【解】 $\cos 0° = 1$, $\sin 270° = -1$, $\tan 135°$

$= \tan(180° - 45°) = -\tan 45° = -1,$

$\cot 225^\circ=\cot(180^\circ+45^\circ)=\cot 45^\circ=1$,

故所設式等於 a^2+b^2+2ab，即 $(a+b)^2$.

22. 求 $\cos 180^\circ\tan(-45^\circ)+\sin 150^\circ\times\sec 210^\circ$ 之值.

【解】 $\cos 180^\circ=-1$，$\tan(-45^\circ)=-\tan 45^\circ=-1$，

$\sin 150^\circ=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin 30=\frac{1}{2}$，$\sec 210^\circ$

$=\sec(180^\circ+30^\circ)=-\sec 30^\circ=-\frac{2}{\sqrt{3}}$，故所設式

之值等於 $(-1)(-1)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$，即 $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$.

23. 求適合方程式 $x\sin 45^\circ\cos 45^\circ\times\tan 60^\circ=\tan^2 45^\circ$

$-\cos^2 60^\circ+\sin 180^\circ\times\cot 90^\circ$ 之 x 值.

【解】 因 $\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$，$\tan 45^\circ$

$=1$，$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$，$\cot 90^\circ=0$，故代入所設方程

式，則 $x.\frac{\sqrt{3}}{2}=1-\frac{1}{4}$，即 $\frac{x\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}$，從而 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

24. 簡化 $\sec(180^\circ+A)\sec(180^\circ-A)+\cot(90^\circ+A)$

$\tan(180^\circ+A)$

【解】 所設式 $=(-\sec A)(-\sec A)+(-\tan A)\times\tan A$

$=\sec^2 A-\tan^2 A=1+\tan^2 A-\tan^2 A=1$.

25. 簡化 $\tan(180^\circ+A)\sin(90^\circ+A)\times\sec(90^\circ-A)$.

【解】 所設式 $=\tan A\cos A\cdot\operatorname{cosec} A=\frac{\sin A}{\cos A}$

$\times\cos A.\frac{1}{\sin A}=1$.

26. 簡化 $\tan(180°+\theta)\cot(180°-\theta)-\cos(180°+\theta)\sin(90°+\theta)$.

【解】 所設式 $=\tan\theta(-\cot\theta)-(\cos\theta)\times\cos\theta$

$=-\tan\theta\cot\theta+\cos^2\theta=-1+\cos^2\theta$

$=-\sin^2\theta$.

27. 簡化 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

【解】 因 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

$=-\sin\alpha$, 故所設式 $=-\cos\alpha\sin\alpha$.

28. 簡化 $\sin(180°+\theta)\cos(90°+\theta)-\sin(90°-\theta)\cos(180°-\theta)$.

【解】 所設式 $=(-\sin\theta)(-\sin\theta)-\cos\theta\times(-\cos\theta)$

$=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$.

29. 簡化 $\dfrac{\sin A\tan(90°+A)}{\tan A\cos(90°-A)}$.

【解】 所設式 $=\dfrac{\sin A(-\cot A)}{\tan A\sin A}$, $=-\dfrac{\cot A}{\tan A}$

$=-\cot^2 A$.

30. 試簡化下式: $\dfrac{(a^2-b^2)\cot(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}$

$$+\frac{(a^2+b^2)\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cot(\pi-a)}.$$

【解】 $\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$, 以之代入所設式,

則得 $\frac{(a^2-b^2)(-\cot\alpha)}{-\cos\alpha}+\frac{(a^2+b^2)\cot\alpha}{-\cot\alpha}$

$=\frac{(a^2-b^2)\cot\alpha}{\cos\alpha}+(a^2+b^2)=\frac{(a^2-b^2)}{\sin\alpha}$

$-(a^2+b^2)$.

31. 試簡化 $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)}$

$+\frac{\sin(\pi-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}$.

【解】 所設式 $=\frac{\cos\alpha\ \sin\alpha}{-\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha(-\sin\alpha)}{-\sin\alpha}$

$=-\sin\alpha+\sin\alpha=0$.

32. 簡化 $\frac{\sin(-A)}{\sin(180^\circ+A)}-\frac{\tan(90^\circ+A)}{\cot A}$

$+\frac{\cos A}{\sin(90^\circ+A)}$.

【解】 所設式 $=\frac{-\sin A}{-\sin A}-\frac{-\cot A}{\cot A}+\frac{\cos A}{\cos A}$

$=1+1+1=3$.

(3) 恆等式之證明

33. 求證 $\cot(3A-180^\circ)=\cot 3A$.

【證】 $\cot(3A-180^\circ)=-\cot(180^\circ-3A)=\cot 3A$.

34．求證　$\sec(\alpha+3\pi)=-\sec\alpha$.

【證】　$\sec(\alpha+3\pi)=\sec(\alpha+\pi+2\pi)=\sec(\alpha+\pi)$

$=-\sec\alpha$.

35．求證　$\sin\alpha=-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

【證】　$-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$=-\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$.

【注意】　應用負角函數公式

36．求證　$\cot 3\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan 3\alpha$.

【證】　$\cot 3\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\left(2\pi-\frac{\pi}{2}-3\alpha\right)$

$=\cot\left(-\frac{\pi}{2}-3\alpha\right)=-\cot\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right)$

$=\tan 3\alpha$.

37．$\cos^2 A+\cos^2(90°+A)+\cos^2(180+A)+\cos^2(270°+A)$
$=2$．求證．

【證】　$\cos(90°+A)=-\sin A$，$\cos(180°+A)$
$=-\cos A$，$\cos(270°+A)=\sin A$，故所設式之左邊等於 $\cos^2 A+\sin^2 A+\cos^2 A+\sin^2 A$，而 $\cos^2 A+\sin^2 A=1$，故此式等於2，故所設式恆成立．

38．$\sec(270°-A)\sec(90°-A)-\tan(270°-A)$

$\tan(90°+A)+1=0$.求證.

【證】 $\sec(270°-A)=-\operatorname{cosec} A$, $\sec(90°-A)$ $=\operatorname{cosec} A$, $\tan(270°-A)=\cot A$, 及 $\tan(90°+A)=-\cot A$, 以之代入所設式, 則左邊爲$-\operatorname{cosec}^2 A+\cot^2 A+1$, 而 $\operatorname{cosec}^2 A$ $=1+\cot^2 A$, 故左邊爲 0.

39. $\cos A+\sin(270°+A)-\sin(270°-A)$ $+\cos(180°+A)=0$.求證.

【證】 $\sin(270°+A)=-\cos A$, $\sin(270°-A)$ $=-\cos A$, $\cos(180°+A)=-\cos A$, 以之代入所設式,則左邊爲 $\cos A-\cos A+\cos A-\cos A$, 卽等於0.

40. 求證等式 $\operatorname{cosec}(90°+A)\sec(360°-A)+\sin(280°+A)$ $\sec A\tan(180°+A)=\tan(45°+A)\tan(45°-A)$.

【證】 因所設式之左邊$=\sec A\sec(-A)+(-\sin A)$

$$\sec A\tan A=\frac{1}{\cos^2 A}-\sin A.\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{\sin A}{\cos A}$$

$$=\frac{1-\sin^2 A}{\cos^2 A}=\frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}=1,$$ 而右邊

$=\cot\{90°-(45°+A)\}\tan(45°-A)$

$=\cot(45°-A\ \tan(45°-A)=1$,故如題所言.

41. 求證 $\cot(-\alpha)\operatorname{cosec}(-\alpha)(1-\cos^2\alpha)=\cos(-\alpha)$.

【證】 因 $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$，且因

$\operatorname{cosec}(-\alpha)=-\operatorname{cosec}\alpha=-\frac{1}{\sin\alpha}$, $1-\cos^2\alpha$

$=\sin^2\alpha$，故所設式之左邊，$=\left(-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$

$\times\left(-\frac{1}{\sin\alpha}\right)\sin^2\alpha=\cos\alpha$ 而右邊之 $\cos(-\alpha)$

亦等於 $\cos\alpha$, 故 $\cot(-\alpha)\operatorname{cosec}(-\alpha)$

$(1-\cos^2\alpha)=\cos(-\alpha)$.

42. 求證 $\frac{\sin^3(90°+A)+\cos^3(90°+A)}{\sin(180°+A)+\cos(360°-A)}$

$=1+\sin(90°+A)\cos(270°+A)$

【證】 因所設式之左邊 $=\frac{\cos^3A-\sin^3A}{-\sin A+\cos A}=\cos^2A$

$+\cos A\sin A+\sin^2A=1+\cos A\times\sin A$,

右邊 $=1+\cos A\sin A$, 故所設等式恆成立.

43. 求證 $\{\sin(90°+A)+\cos(90°+A)\}$

$\times\{\sec(90°-A)-\sec A\}=\sec A$

$\sec(90°-A)-2$.

【證】 所設式之左邊 $=\{\cos A-\sin A\}$

$\times\{\operatorname{cosec}A-\sec A\}=(\cos A-\sin A)$

$\left\{\frac{1}{\sin A}-\frac{1}{\cos A}\right\}=\frac{(\cos A-\sin A)^2}{\sin A\cos A}$

$$=\frac{\cos^2 A-2\cos A\sin A+\sin^2 A}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{1-2\cos A\sin A}{\sin A\cos A}=\frac{1}{\sin A}\cdot\frac{1}{\cos A}-2$$

$$=\operatorname{cosec} A\sec A-2=\sec(90^\circ-A)\sec A-2.$$

44. 求證 $\sin A\tan(90^\circ-A)\sec(90^\circ-A)=\cot A.$

【證】 所設式之左邊 $=\sin A\cot A\operatorname{cosec} A$

$=(\sin A\operatorname{cosec} A)\cot A=\cot A.$

45. 求證 $\sec(90^\circ-A)-\cot A.\cos(90^\circ-A)\tan(90^\circ-A)$ $=\sin A.$

【證】 所設式之左邊 $=\operatorname{cosec} A-\cot A\sin A\times\cot A$

$$=\frac{1}{\sin A}-\frac{\cos A}{\sin A}.\sin A.\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{1}{\sin A}$$

$$-\frac{\cos^2 A}{\sin A}=\frac{1-\cos^2 A}{\sin A}=\frac{\sin^2 A}{\sin A}=\sin A.$$

46. 求證 $\sin A\cot A\cot(90^\circ-A)\sec(90^\circ-A)=1.$

【證】 所設式之左邊 $=\sin A\cot A\tan A\times\operatorname{cosec} A$

$=(\sin A\operatorname{cosec} A)(\cot A\tan A)=1\times 1=1.$

47. 求證 $\cot(90^\circ-A)\cot A\cos(90^\circ-A)\times\tan(90^\circ-A)$ $=\cos A.$

【證】 $\cot(90^\circ-A)$ 與 $\tan(90^\circ-A)$ 之積等於1，故所設式之左邊等於 $\cot A\cos(90^\circ-A)$，而此式之 $\cot A$ 易以 $\frac{\cos A}{\sin A}$，$\cos(90^\circ-A)$ 易以 $\sin A$，卽可逕得右邊之 $\cos A$.

48. $\tan(90°-A)+\cot(90°-A)$，是否與 $\operatorname{cosec} A \operatorname{cosec}(90°-A)$ 相等？

【解】 因 $\tan(90°-A)+\cot(90°-A)=\cot A+\tan A$

$$=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{1}{\sin A\cos A}=\operatorname{cosec} A\sec A,$$ 而 $\operatorname{cosec} A \times \operatorname{cosec}(90°-A)$ 亦等於 $\operatorname{cosec} A \sec A$

故所設二式相等。

49. 試由 $\sec A\operatorname{cosec}(90°-A)-x\cot(90°-A)=1$ 求x。

【解】 由所設方程式，$\sec^2 A-x\tan A=1$，

或 $1+\tan^2 A-x\tan A=1$，

即 $\tan^2 A-x\times\tan A=0$，故 $x=\tan A$，

但 $A=0°$ 時，$\tan A=0$，因而x不定。

50. $\sin(90°-A)\cot(90°-A)=\sin A$。求證。

【證】 所設式之左邊等於 $\cos A\tan A=\cos A\times\frac{\sin A}{\cos A}=\sin A$，故所設式成立。

51. $\frac{\sin(90°-A)}{\sec(90°-A)}\cdot\frac{\tan(90°-A)}{\cos A}=\cos A$。求證。

【證】 所設式之左邊等於 $\frac{\cos A}{\operatorname{cosec} A}\cdot\frac{\cot A}{\cos A}=\frac{\cot A}{\operatorname{cosec} A}$

$$=\frac{\cos A}{\sin A\operatorname{cosec} A}=\cos A.$$

52. 求證 $\dfrac{\cot^2 A \sin^2(90°-A)}{\cot A+\cos A}=\tan(90°-A)-\cos A.$

【證】 $\cos A=\cot A \sin A$,

是以可知所設式之左邊等於$\dfrac{\cot^2 A \cos^2 A}{\cot A(1+\sin A)}$,

或$\dfrac{\cot^2 A(1-\sin^2 A)}{\cot A(1+\sin A)}$, 或$\cot A(1-\sin A)$,

卽$\cot A-\cot A \sin A$, 卽$\tan(90°-A)-\cos A$.

53. $\dfrac{\operatorname{cosec}^2 A \tan^2 A}{\cot(90°-A)}\cdot\dfrac{\cot A}{\sec^2 A}=\sec^2(90°-A)-1$.求證.

【證】 所設式左邊之$\operatorname{cosec}^2 A$易以$\dfrac{1}{\sin^2 A}$, $\dfrac{1}{\cot(90°-A)}$

易以$\dfrac{1}{\tan A}$, 從而又易以 $\cot A$; $\tan^2 A$

易以$\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$, $\dfrac{1}{\sec^2 A}$, 易以 $\cos^2 A$ 則左邊

爲$\dfrac{\sin^2 A \cot^2 A}{\sin^2 A \cos^2 A}$, $\cos^2 A \cot A$, 卽 $\cot^2 A$.

又右邊之 $\sec^2(90°-A)$ 易以 $\operatorname{cosec}^2 A$, 從而又

易以 $1+\cot^2 A$ 右邊亦爲$\cot^2 A$. 故所設式成立.

54. 求 $\tan 60° \sin^2 45°$, $\dfrac{1-\tan^2 30°}{1+\tan^2 30°}$, 及 $\cos A \tan A$

$\tan(90°-A)\operatorname{cosec}(90°-A)$ 之數值.

【解】 因 $\tan 60°=\sqrt{3}$, $\sin 45°=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 故 $\tan 60°$

$\sin^2 45° = \sqrt{3} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 又 $\tan 30°$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}$, 故 $\frac{1-\tan^2 30°}{1+\tan^2 30°} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \Big/ \left(1 + \frac{1}{3}\right)$

$= \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}$, $\cos A \tan A \tan(90°-A)$

$\operatorname{cosec}(90°-A) = \cos A \tan A \cot A \sec A$

$= (\cos A \sec A)(\tan A \cot A) = 1 \times 1 = 1$.

55. 求證 $\frac{\cos^2(90°-A)}{1-\cos A} = 1 + \sin(90°-A)$.

【證】 所設式之左邊 $= \frac{\sin^2 A}{1-\cos A} = \frac{1-\cos^2 A}{1-\cos A}$

$= 1 + \cos A = 1 + \sin(90°-A)$.

56. $\frac{\cot(90°-A)}{\operatorname{cosec}^2 A} \cdot \frac{\operatorname{cosec}(90°-A)\cot^3 A}{\sin^2(90°-A)}$

$= \sec A$. 求證.

【證】 所設式之左邊 $= \frac{\tan A \sec A \cot^3 A}{\operatorname{cosec}^2 A \cos^2 A}$

$= \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A \cos^2 A} . \sec A \tan A \cot A)\cot^2 A$

$= \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} . \sec A \cot^2 A = \tan^2 A \sec A \cot^2 A$

$= (\tan^2 A \cot^2 A)\sec A = \sec A$.

57. 設角 α 與 β 互為餘角,求證以下各式.

(1) $(\tan \alpha + \tan \beta) \cos \alpha \cos \beta = 1$.

(2) $(\sin \alpha - \sin \beta)^2 = 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta$.

(3) $\cos^3\alpha+\cos^3\beta=(\sin\alpha+\sin\beta)(1-\sin\alpha\sin\beta)$.

(4) $\sin^2\alpha\tan\alpha+\sin^2\beta\tan\beta=\dfrac{1-2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$.

【證】 (1) $(\tan\alpha+\tan\beta)\cos\alpha\cos\beta=\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)\cos\alpha\cos\beta=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

然 α 與 β 互爲餘角，故 $\cos\beta=\sin\alpha$ 及 $\sin\beta=\cos\alpha$，故此式等於 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$，卽1.

(2) $(\sin\alpha-\sin\beta)^2=\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)-2\sin\alpha\sin\beta$，然 α 與 β 互爲餘角，故 $\sin\beta$ 等於 $\cos\alpha$，$\sin\alpha$ 等於 $\cos\beta$，代入，得 $(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-2\cos\alpha\cos\beta$，卽 $1-2\cos\alpha\cos\beta$.

(3) α 與 β 互爲餘角，故 $\cos\alpha$，$\cos\beta$ 分別等於 $\sin\beta$，$\sin\alpha$. 故 $\cos^3\alpha+\cos^3\beta=\sin^3\alpha+\sin^3\beta=(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin\alpha\sin\beta)$，第二括號中之 $\sin\beta$ 易爲 $\cos\alpha$，且易 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ 爲 1，卽得 $(\sin\alpha+\sin\beta)(1-\sin\alpha\sin\beta)$.

(4) $\tan\alpha$，$\tan\beta$，分別易爲 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，$\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$，且行通分，則 $\sin^2\alpha\tan\alpha+\sin^2\beta\tan\beta$

$=\dfrac{\sin^3\alpha\cos\beta+\sin^3\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}$，然此分子中，

$\cos\beta$, $\sin\beta$ 分別易爲 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, 則得 $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$, 從而等於 $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\times\cos^2\alpha+\cos^4\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-2\sin^2\alpha\times\cos^2\alpha$, $\cos\alpha$ 易以 $\sin\beta$, 則爲 $1-2\sin^2\alpha\times\sin^2\beta$.

故左邊之式恆與右邊之式等.

(四) 複角之三角函數

【參考公式】

(A) 兩角和之函數公式.

$$1.\ \begin{cases} \sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y \\ \cos(x+y)=\cos x\cos y=-\sin x\sin y \\ \tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y} \\ \cot(x+y)=\dfrac{\cot x\cot y-1}{\cot y+\cot x} \end{cases}$$

(B) 兩角差之函數公式.

$$2.\ \begin{cases} \sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y \\ \cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y \\ \tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y} \\ \cot(x-y)=\dfrac{\cot x\cot y+1}{\cot y-\cot x} \end{cases}$$

(C) 三角和之函數公式.

$$3.\left\{\begin{aligned}
&\sin(x+y+z)=\sin x\cos y\cos z\\
&\qquad+\cos x\sin y\cos z+\cos x\cos y\sin z\\
&\qquad-\sin x\sin y\sin z.\\
&\cos(x+y+z)=\cot x\cos y\cos z\\
&\qquad-\cos x\sin y\sin z-\sin x\cos y\sin z\\
&\qquad-\sin x\sin y\cos z.\\
&\tan(x+y+z)\\
&\quad=\frac{\tan x+\tan y+\tan z-\tan x\tan y\tan z}{1-\tan x\tan y-\tan y\tan z-\tan z\tan x}\\
&\cot(x+y+z)\\
&\quad=\frac{\cot x\cot y\cot z-\cot x-\cot y-\cot z}{\cot x\cot y+\cot y\cot z+\cot z\cot x-1}
\end{aligned}\right.$$

(D) 倍角之函數公式.

$$4.\left\{\begin{aligned}
&\sin 2x=2\sin x\cos x\\
&\cos 2x=\cot^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1\\
&\qquad=1-2\sin^2 x\\
&\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\\
&\cot 2x=\frac{\cot^2 x-1}{2\cot x}
\end{aligned}\right.$$

$$5.\left\{\begin{aligned}
&\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x\\
&\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x\\
&\tan 3x=\frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}\\
&\cot 3x=\frac{3\cot^2 x-1}{\cot^3 x-3\cot x}
\end{aligned}\right.$$

(E) 半角之函數公式.

$$6.\begin{cases}\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\\ \cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\\ \tan\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\frac{\sin x}{1+\cos x}\\ \qquad=\frac{1-\cos x}{\sin x}\\ \cot\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}=\frac{1+\cos x}{\sin x}\\ \qquad=\frac{\sin x}{1-\cos x}\end{cases}$$

(F) 三角函數用半角函數表示公式.

$$7.\begin{cases}\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\\ \cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\\ \qquad=2\cos^2\frac{x}{2}-1=1-2\sin^2\frac{x}{2}\\ \tan x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}\\ \cot x=\dfrac{\cot^2\frac{x}{2}-1}{2\cot\frac{x}{2}}\end{cases}$$

(G) 三角函數間之關係公式·

若 $x+y+z=90^\circ$ 則

8. $\begin{cases} \tan x \tan y+\tan y \tan z+\tan z \tan x=1 \\ \cot x \cot y \cot z=\cot x+\cot y+\cot z. \end{cases}$

若 $x+y+z=180^\circ$ 則

9. $\begin{cases} \tan x+\tan y+\tan z=\tan x \tan y \tan z \\ \cot x \cot y+\cot y \cot z+\cot z \cot x=1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \sin(x-y)+\sin(y-z)+\sin(z-x) \\ \qquad =-4\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{y-z}{2}\sin\frac{z-x}{2} \\ \cos(x-y)+\cos(y-z)+\cos(z-x)+1 \\ \qquad =4\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{y-z}{2}\cos\frac{z-x}{2} \end{cases}$

11. $\begin{cases} \tan^2 x=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} \\ \tan^3 x=\frac{3\sin x-\sin 3x}{\cos 3x+3\cos x} \end{cases}$

(1) 用複角公式求函數之値

(a) 特別角函數之値

1. 求 $\sin 3^\circ$ 之値·

【解】 $\sin 3^\circ=\sin(18^\circ-15^\circ)=\sin 18^\circ \cos 15^\circ-\cos 18^\circ$

$\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot(\sqrt{3}+1)/2\sqrt{2}$

$$=\frac{\sqrt{10+\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$=\{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)$$

$$-\sqrt{10+5}(\sqrt{3}-1)\}/8\sqrt{2}.$$

（參攷10及11，兩題之結果）

2．求 $\sin 7\frac{1^\circ}{2}$， $\cos 7\frac{1^\circ}{2}$， $\tan 7\frac{1^\circ}{2}$ 之值。

【解】 由公式 $\cos 2x=1-2\sin^2 x$，

得 $\sin^2 7^\circ\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos 15^\circ)=\frac{1}{2}\{1-(\sqrt{3}$

$+1)/2\sqrt{\sqrt{2}}\}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{4\sqrt{2}}$

$=(8-2\sqrt{6}-2\sqrt{2})/16$，然 $8-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}$

$=(2-\sqrt{2})\times(8+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2\sqrt{6})$

$=(2-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$，

故 $\sin 7^\circ\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\times\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

同理，$\cos^2 7^\circ\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos 15^\circ)$

$=\frac{8+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{12}$，$8+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}$

$=(2+\sqrt{2})(-1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$，

故 $\cos 7^\circ\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\times(-1+\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

又由半角公式 $\tan 7^\circ\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 15^\circ}{1+\cos 15^\circ}}$

$$=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{1+\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$$\times(\sqrt{2}-1).$$

（參考10題之結果）.

3. 求 9° 及 81° 之正弦，餘弦.

【解】 由 $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$，$1=\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}$

求得 $\sin 9^\circ+\cos 9^\circ=\sqrt{(1+\sin 18^\circ)}$

$$=\frac{\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{2},\ \sin 9^\circ-\cos 9^\circ$$

$$=-\sqrt{(1-\sin 18^\circ)}=\frac{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{2};$$

故 $\sin 9^\circ=\frac{\sqrt{(3+\sqrt{5})}-\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{4}$,

$\cos 9^\circ=\frac{\sqrt{(3+\sqrt{5}}+\sqrt{(5-\sqrt{5}}}{4}$,

$\sin 8^\circ=\cos 9^\circ$, $\cos 81^\circ=\sin 9^\circ$.

$\sin 81^\circ=\sin(90^\circ-9^\circ)=\cos 9^\circ$

$$=\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}.$$

$\cos 81^\circ=\cos(90^\circ-9^\circ)=\sin 9^\circ$

$$=\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}.$$

4. 求 tan 9° 之值.

【解】 $\tan 9^\circ=\dfrac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ}=\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}$

$$=\frac{4-\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{\sqrt{5}-1}=\sqrt{5}+1-\sqrt{(5+2\sqrt{5})}.$$

5. 求 $\tan 11\frac{1}{4}^\circ$ 之值.

【解】 由半角函數公式 $\tan 11\frac{1}{4}^\circ$

$$=\frac{\sin 22.5^\circ}{1+\cos 22.5^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\,(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})}{(2+\sqrt{2+\sqrt{2}})(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})}$$

$$=\frac{2\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

(參考12題之結果).

6. 求 $\sin 12^\circ$ 之值.

【解】 $\sin 12^\circ=\sin(30^\circ-18^\circ)=\sin 30^\circ\times\cos 18^\circ-\cos 30^\circ$

$$\sin 18^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$=\frac{1}{8}\{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\}.$$

7. 求 $\cos 12^\circ$ 之值.

原

书

缺

页

原

书

缺

页

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}};\ \tan 75^\circ=\cot 15^\circ=2+\sqrt{3};$$

$$\operatorname{cosec} 75^\circ=\sec 15^\circ=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1};$$

$$\sec 75^\circ=\operatorname{cosec} 15^\circ=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1};$$

$$\cot 75^\circ=\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}.$$

11．求 180° 角之正弦，餘弦，正切，餘切．

【解】 命 $18^\circ=A$，則 $2A=36^\circ, 3A=54^\circ$，而 $36^\circ+54^\circ=90^\circ$，故 $\sin 2A=\cos 3A$，卽 $2\sin A\cos A=4\cos A-3\cos A$，以不爲零之 $\cos A$ 除之，則 $2\sin A=4\cos^2 A-3=1-4\sin^2 A$，

故 $4\sin^2 A+2\sin A-1=0$，此爲 $\sin A$ 之二次方程式，解之，得 $\sin A=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$，而 18° 之正弦爲正量，故複號宜取＋，卽 $\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，

從而 $\cos 18^\circ=\sqrt{(1-\sin^2 18^\circ)}=\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5}}}{4}$，

$$\tan 18^\circ=\frac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}.$$

12．求 $22\frac{1}{2}^\circ$ 之三角函數．

【解】 $22\frac{1}{2}^\circ$ 爲第一象限之角，故其一切三角函數有正值．

故 $\sin 22\frac{1^\circ}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$. $\cos 22^\circ\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$. 因此，可知 $\tan 22\frac{1}{2}^\circ$

$=\frac{\sin 22^\circ\frac{1}{2}}{\cos 22^\circ\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}=\sqrt{2}-1,$

$\operatorname{cosec} 22\frac{1^\circ}{2}=\frac{1}{\sin 22\frac{1}{2}^\circ}=\frac{2}{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}$

$=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. $\sec 22\frac{1^\circ}{2}=\frac{1}{\cos 22\frac{1}{2}^\circ}$

$=\frac{2}{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}=\sqrt{4-2\sqrt{2}}$. $\cot 22^\circ\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{\tan 22^\circ\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$.

13. 求　$\cos 27^\circ$ 之值。

【解】 $\cos 27^\circ=\sqrt{\frac{1+\cos 54^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1+\sin 36^\circ}{2}}$

$=\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)\right\}}=\frac{1}{4}(\sqrt{5+\sqrt{5}}$

$+\sqrt{3-\sqrt{5}})$.

〔注意〕 應用代數公式 $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b}}$

$\pm\sqrt{\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b}}$.

14. 求 $\sin 27^\circ$ 之值.

【解】 $\sin 27^\circ=\sqrt{1-\cos^2 27^\circ}$

$$=\sqrt{1-\frac{1}{16}\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2}$$

$$=\tfrac{1}{4}\left(8-2\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$$

$$=\tfrac{1}{4}\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right).$$

15. 求 $\tan 27^\circ$ 之值.

【解】 $\tan 27^\circ=\dfrac{\sin 27^\circ}{\cos 27^\circ}=\dfrac{1}{4}\left\{\sqrt{(5+\sqrt{5})}\right.$

$$\left.-\sqrt{(3-\sqrt{5})}\right\}/\tfrac{1}{4}\left\{\sqrt{(5+\sqrt{5})}+\sqrt{(3-\sqrt{5})}\right\}$$

$$=5-1-\sqrt{(5-2\sqrt{5})}.$$

16. 求 $\cos 33^\circ\ 45'$ 之值.

【解】 $\cos 33^\circ\ 45'=\cos\dfrac{135^\circ}{4}$

$$=\sqrt{\left\{\left(1+\cos\frac{135^\circ}{2}\right)\div 2\right\}}$$

$$=\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1+\cos 135^\circ}{2}}\right)\right\}}$$

$$=\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times\frac{1}{2}\right]}\right)\right\}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{(2\sqrt{2})}}.$$

17. 求 cos 36° sin 36°之值.

【證】 $\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$

$$= 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{8} = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

$$\sin 36^\circ = \sqrt{(1-\cos^2 36^\circ)} = \frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{4}.$$

18. 求 tan 36° 及 cot 36°之值.

【證】 $\tan 36^\circ = \frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ} = \frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{5}+1}$

$$= \frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{(5+2\sqrt{5}+1)}} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}} = \sqrt{(5-2\sqrt{5})},\text{或}$$

$= \sqrt{\frac{5}{5+2\sqrt{5}}}$. 從而可知 $\cot 36^\circ = \frac{1}{\tan 36^\circ}$

$$= \frac{1}{\sqrt{(5-2\sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{1+\frac{2}{5}\sqrt{5}}.$$

19. 求 $\tan 37\frac{1}{2}^\circ$ 之值.

【證】 $\tan 37\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 75^\circ}{1+\cos 75^\circ}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{1+\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}}$

$$= \sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2.$$

20. 求 cos 42°之值.

【證】 $\cos 42^\circ = \cos(60^\circ - 18^\circ) = \cos 60^\circ \times \cos 18^\circ$

$$+\sin 60^\circ \sin 18^\circ = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1}{8}(\sqrt{15}-\sqrt{3}$$

$$+\sqrt{10+2\sqrt{5}}).$$

21. 求 $\tan 52\frac{1}{2}^\circ$ 之值.

【證】 $\tan 52\frac{1^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 105^\circ}{1+\cos 105^\circ}}$

$$=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{1-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}}$$

$$=\sqrt{6\sqrt{6}-8\sqrt{3}-10\sqrt{2}+15}.$$

22. 求 $\tan 54^\circ$ 之值.

【證】 $\tan 54^\circ = \tan(90^\circ - 36^\circ) = \cot 36^\circ$

$$=\sqrt{(1+\frac{2}{5}\sqrt{5})}.$$

23. 求 $\sec 54^\circ$ 之值.

【證】 $\sec 54^\circ = \frac{1}{\cos 54^\circ} = \frac{1}{\cos(90^\circ - 36^\circ)}$

$$=\frac{1}{\sin 36^\circ} = \frac{4}{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{2(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}}}$$

$$=\sqrt{2+\frac{2}{5}\sqrt{5}}$$

24. 求 $\sin 63^\circ$ 之值.

【證】 $\sin 63^\circ=\cos 27^\circ=\frac{1}{4}\{\sqrt{(5+\sqrt{5})}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\}$

$$=\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}+\sqrt{5}-1}{4\sqrt{2}}.$$

25. 求 $\sin 67\frac{1}{2}^\circ$ 之值.

【證】 $\sin 67\frac{1^\circ}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 135^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}}$

$$=\sqrt{\left\{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\div 2\right\}}=\frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})}.$$

26. 求 $\tan 82\frac{1}{2}^\circ$ 之值.

【證】 $\tan 82^\circ\frac{1}{2}=\cot\left(90^\circ-82^\circ\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\tan 7\frac{1}{2}^\circ}$

$$=\frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1).$$

27. 求 $\sin 87^\circ$之值.

【證】 $\sin 87^\circ=\cos 3^\circ=\sqrt{(1-\sin^2 3^\circ)}$

$$=\sqrt{1-\frac{1}{64}\{(\sqrt{5}-1)\sqrt{(2+\sqrt{3})}-\sqrt{[(10+2\sqrt{5})\times(2-\sqrt{3})]}\}^2}$$

$$=\frac{1}{8}\{(\sqrt{5}-1)\sqrt{(2-\sqrt{3})}+\sqrt{(10+2\sqrt{5})(2+\sqrt{3})}\}$$

28. 求 $\sin 105^\circ$ 之值.

【證】 $\sin 105^\circ = \sin(90^\circ+15) = \cos 15^\circ$

$= \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$，$\cos 105 = \cos(90^\circ+15^\circ)$

$= -\sin 15^\circ = -\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

29. 求 $\tan 112\frac{1}{2}^\circ$之值.

【證】 $\tan 225^\circ = \dfrac{2\tan 112^\circ\frac{1}{2}}{1-\tan^2 112^\circ\frac{1}{2}}$，且 $\tan 225^\circ$

$= \tan(180^\circ+45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$. 今爲簡便計，

命 $\tan 112^\circ\dfrac{1}{2} = a$，則$1 = \dfrac{2a}{1-a^2}$，由此得$1-a^2$

$= 2a$，或 $a^2+2a-1=0$，從而 $a = -1\pm\sqrt{2}$.

但 a 爲第二象限之正切，故不能爲正，僅負方向取，

故 $\tan 112\dfrac{1^\circ}{2} = -1-\sqrt{2} = \dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$.

(b) 複角函數之值

30. 設 $\tan\theta = \dfrac{1}{7}$，求 $\sin 2\theta$ 及 $\cos 2\theta$ 之值.

【解】 $\sin 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{2}{7}\Big/\left(1+\dfrac{1}{49}\right) = \dfrac{7}{25}$，

$\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \left(1-\dfrac{1}{49}\right)\Big/\left(1+\dfrac{1}{49}\right)$

$= \dfrac{24}{25}$.

31. 設 $\tan A=\frac{1}{3}$，求 $\tan 2A$ 之值。

【解】 $\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}=2\times\frac{1}{2}\Big/\left\{1-(\frac{1}{3})^2\right\}$

$=\frac{3}{4}$.

32. 設 $\tan\theta+\cot\theta=2\left(\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\right)$，求 $\cos 2\theta$ 之值。

【解】 $\tan\theta+\cot\theta=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=2\left(\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\right)$,

故 $\sin 2\theta=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$，從而可知 $\cos 2\theta$

$=\pm\sqrt{1-\sin^2 2\theta}=\pm\sqrt{\left\{1-\left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)^2\right\}}$

$=\pm\frac{2mn}{m^2+n^2}$.

33. 設 $\cos 2\theta=\frac{3}{5}$，求 $\sin^4\theta+\cos^4\theta$ 之值。

【解】 $\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\times\sin^2\theta$

$\cos^2\theta=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta$，然因 $\cos 2\theta=\frac{3}{5}$，

故 $\sin^2 2\theta=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$，故 $\sin^4\theta+\cos^4\theta$

$=1-\frac{1}{2}\times\frac{16}{25}=1-\frac{8}{25}=\frac{17}{25}$.

34. 設 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{5}{4}$，求 $\sin 2\theta$ 及 $\sin^3\theta+\cos^3\theta$ 之值。

【解】 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{5}{4}$之兩邊平方，則 $\sin^2\theta+2\sin\theta$

$\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{25}{16}$，或 $1+\sin 2\theta=\frac{25}{16}$，

從而 $\sin 2\theta=\frac{9}{16}$. 又 $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)\left(1-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)=\frac{5}{4}\left(1-\frac{9}{32}\right)$

$=\frac{5}{4}\times\frac{23}{32}=\frac{115}{128}$.

35. 設 $\tan x=2$, $\tan y=\frac{1}{3}$，求 $\tan\{2\times(x+y)\}$之值.

【解】 $\tan(x+y)$

$=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\left(2+\frac{1}{3}\right)\Big/\left(1-2\times\frac{1}{3}\right)$

$=\frac{6+1}{3-2}=7$，而 $\tan\{2(x+y)\}$

$=\frac{2\tan(x-y)}{1-\tan^2(x+y)}=\frac{2\times7}{1-7^2}=-\frac{7}{24}$.

36. 設 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$，而$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，試計算 $\sin\frac{\alpha}{2}$.

【解】 因$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，故$\frac{\alpha}{2}$在$\frac{\pi}{4}$與$\frac{\pi}{2}$之間，

因此 $\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{1+\sin\alpha}=\sqrt{\frac{5}{3}}$，

$\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\sin\alpha}=\sqrt{\frac{1}{3}}$，從而

$2\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{3}}$，或 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}$.

37. 設 $\sin\alpha=-\frac{24}{25}$，而 $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，試計算 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 及 $\cos\frac{\alpha}{2}$.

【解】 兹因 $\frac{3\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\pi$，故 $\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}$

$=-\sqrt{1+\sin\alpha}$，$\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\sin\alpha}$，

故 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\{\sqrt{1-\sin\alpha}-\sqrt{1+\sin\alpha}\}$，

$\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{2}\{\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}$. 今以

$\sin\alpha=-\frac{24}{25}$ 代入計算之，則 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{5}$

及 $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{4}{5}$.

38. 求下列諸式之值：

(1) $8\sin 20^\circ\times\sin 40^\circ\sin 80^\circ$.

(2) $\cos 40^\circ\cos 80^\circ\cos 160^\circ$.

(3) $\cos 55^\circ+\cos 65^\circ+\cos 175^\circ$.

(4) $\cos 108^\circ\cos 132^\circ+\cos 132^\circ\cos 12^\circ+\cos 12^\circ\times\cos 108$.

【解】 (1) $8\sin 20°\sin 40°\sin 80°$

$=4(2\sin 20°\times\sin 40°)\sin 80°$

$=4(\cos 20°-\cos 60°)\times\sin 80°$

$=4\cos 20°\sin 80°-4\cos 60°\times\sin 80°$

$=2(2\cos 20°\sin 80°)-4\times\frac{1}{2}\times\sin 80°$

$=2(\sin 100°+\sin 60°)-2\sin 80°$

$=2\sin 100°+2\sin 60°-2\sin 80°$

$=2\times\sin 100°+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-2\sin 80°$

$=2\sin 100°+\sqrt{3}-2\sin 80°$

$=2(\sin 100°-\sin 80°)+\sqrt{3}$

$=2(\sin 80°-\sin 80°)+\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

(2) $\cos 40°\cos 80°\cos 160°$

$=\frac{1}{8\sin 40}\times 8\sin 40°\cos 40°\cdot\cos 80°\cos 160°$

$=\frac{1}{8\sin 40°}\times 2\sin 40°\cos 40°\cdot 4\cos 80°\cos 160°$

$=\frac{1}{8\sin 40°}\sin 80°\cdot 4\cos 80°\cos 160°$

$=\frac{1}{8\sin 40°}2\sin 80°\cos 80°\cdot 2\cos 160°$

$=(1/8\sin 40°)\sin 160°\cdot 2\cos 160°$

$=\frac{1}{8\sin 40°}\cdot\sin 320°=-\frac{\sin(360°-320°)}{8\sin 40°}$

$=-\frac{1}{8}$.

(3) 因 $\cos 175^\circ=-\cos 5^\circ$，故所設式爲 $\cos 55^\circ+\cos 65^\circ-\cos 5^\circ$，即 $2\cos 60^\circ\cos 5^\circ-\cos 5^\circ$，或 $\cos 60^\circ$，代以 $\frac{1}{2}$，而爲 $\cos 5^\circ-\cos 5^\circ$，即所設式之値爲 0.

(4) 所設式假定爲 A，則 $2A=2\cos 108^\circ\cos 132^\circ+2\cos 132^\circ\cos 12^\circ+2\cos 12^\circ\cos 108^\circ$

$=\cos 240^\circ+\cos 24^\circ+\cos 144^\circ+\cos 120^\circ+\cos 120^\circ+\cos 96^\circ=-\cos 60^\circ+\cos 24^\circ-\cos 36^\circ-\cos 60^\circ-\cos 60^\circ-\cos 84^\circ$

$=-3\cos 60^\circ+\cos 24^\circ-(\cos 36^\circ+\cos 84^\circ)$

$=-3\times\frac{1}{2}+\cos 24^\circ-2\cos 60^\circ\cos 24^\circ$

$=-\frac{3}{2}+\cos 24^\circ-2\times\frac{1}{2}\cos 24^\circ=-\frac{3}{2}$,

$\therefore\quad A=-\frac{3}{4}$.

39. 已知 $\sin 7846^\circ$，計算 $\sin\frac{7846^\circ}{2}$，並示公式中之符號.

【解】 今因 $\frac{7846^\circ}{2}=360^\circ\times 11-37^\circ$，是以 $\cos\frac{7846^\circ}{2}$ 爲正，$\sin\frac{7846^\circ}{2}$ 爲負，而就絕對值言，$\cos\frac{7846^\circ}{2}>\sin\frac{7846^\circ}{2}$，

故 $\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1-\sin A}$,

$\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}$ 中之A，代以7846°時，右邊之複號皆應取其正者．如是，$\sin\frac{7846°}{2}$

$=\frac{1}{2}\{\sqrt{1+\sin 7846°}-\sqrt{1-\sin 7846°}\}$．

40．試用 sin 100°, sin 452° 分別表 sin 50°，及 sin 226°．

【解】因50°之正弦及餘弦俱爲正，且因 cos 50°<sin 50°，故 $\sin 50°+\cos 50°=\sqrt{1+\sin 100°}$，以及 $\sin 50°-\cos 50°=\sqrt{1-\sin 100}$．是以可得 $\sin 50°=\frac{1}{2}\times\{\sqrt{1+\sin 100}+\sqrt{1-\sin 100°}\}$．次，226°之正弦及餘弦皆爲負，且 sin 226°<cos 226°，是以可得 $\sin 226°+\cos 226°=-\sqrt{1+\sin 452°}$，$\sin 226°-\cos 226°=-\sqrt{1-\sin 452°}$，

從而 $\sin 226°=\frac{1}{2}\times\{-\sqrt{1+\sin 452°}-\sqrt{1-\sin 452°}\}$

（2）函數之化簡

41．簡化 $\cos 2A+\frac{2}{\cot^2 A+1}$．

【解】原式 $=\cos 2A+\frac{2}{\operatorname{cosec}^2 A}$

$=\cos 2A+2\sin^2 A=1-2\sin^2 A+2\sin A=1$．

42. 最簡化 $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha \cos 2\beta$.

【解】 所設式$=\frac{1}{2}\{\cos(2\alpha+2\beta)+1+\cos(2\alpha-2\beta)+1\}$

$-\frac{1}{2}\{\cos(2\alpha+2\beta)+\cos(2\alpha-2\beta)\}=1$.

43. 簡化 $\cos(15°-A)\sec 15°-\sin(15°-A)\operatorname{cosec} 15°$.

【解】 所設式$=\dfrac{\cos(15°-A)}{\cos 15°}-\dfrac{\sin(15°-A)}{\sin 15°}$

$=\dfrac{\sin 15° \cos(15°-A)-\sin(15°-A)\cos 15°}{\cos 15° \sin 15°}$

$=\dfrac{\sin A}{\cos 15° \sin 15°}=\dfrac{2 \sin A}{\sin 30°}=4 \sin A$.

44. 試簡化$(x\cos 2\alpha+y \sin 2\alpha-1)\times(x \cos 2\beta+y\sin 2\beta-1)$

$-\{x \cos(\alpha+\beta)+y \sin(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}^2$.

【解】 原式$=x^2 \cos 2\alpha \cos 2\beta+y^2 \sin 2\alpha\times\sin 2\beta$

$+xy(\sin 2\alpha \cos 2\beta+\cos 2\alpha \sin 2\beta)-x(\cos 2\alpha$

$+\cos 2\beta)-y(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)+1-x^2 \cos^2(\alpha+\beta)$

$-y^2 \sin^2(\alpha+\beta)-\cos^2(\alpha-\beta)-2xy \sin$

$(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+2x \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

$+2y \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=x^2\{\cos 2\alpha \cos 2\beta$

$-\cos^2(\alpha+\beta)\}+y^2\times\{\sin 2\alpha \sin 2\beta-\sin^2(\alpha+\beta)\}$

$+\sin^2(\alpha-\beta)=-x^2 \sin^2(\alpha-\beta)-y^2\times\sin^2(\alpha-\beta)$

$+\sin^2(\alpha-\beta)=-(x^2+y^2-1)\times\sin^2(\alpha-\beta)$.

45. 簡化$\dfrac{\cos \alpha-\cos 5\alpha}{\sin \alpha+\sin 5\alpha}$.

【解】 原式$=2\sin\frac{\alpha+5\alpha}{2}\sin\frac{5\alpha-\alpha}{2}/2\sin\frac{\alpha+5\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha-\alpha}{2}$

$=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\tan 2\alpha.$

46. 化 $2\cos 2\theta\cos\theta-2\sin 4\theta\sin\theta$ 爲一項式.

【解】 原式$=\cos 3\theta+\cos\theta-(\cos 3\theta-\cos 5\theta)$

$=\cos 3\theta+\cos\theta-\cos 3\theta+\cos 5\theta=\cos\theta+\cos 5\theta$

$=2\cos\frac{1}{2}(\theta+5\theta)\cos\frac{1}{2}(5\theta-\theta)=2\cos 3\theta\cos 2\theta.$

47. 簡化 $\cos^2 A+\cos^2(A+B)-2\cos A\times\cos B\cos(A+B).$

【解】 原式$=\cos^2 A+\cos^2(A+B)-2\cos A$

$\times\cos B\cos(A+B)+\cos^2 A\cos^2 B-\cos^2 A$

$\times\cos^2 B=\cos^2 A+\{\cos(A+B)-\cos A\times\cos B\}^2$

$-\cos^2 A\cos^2 B=\cos^2 A(1-\cos^2 B)$

$+\{-\sin A\sin B\}^2=\cos^2 A\sin^2 B+\sin^2 A$

$\times\sin^2 B=(\cos^2 A+\sin^2 A)\sin^2 B=\sin^2 B.$

48. 最簡化 $\{\sin A+\sin B+\sin(A+B)\}^2+\{1+\cos A$

$+\cos B+\cos(A+B)\}^2.$

【解】 原式$=\{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$

$+2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A+B)\}^2$

$+\{(\cos A+\cos B)+[1+\cos(A+B)]\}^2$

$=4\sin^2\frac{1}{2}(A+B)\{\cos\frac{1}{2}(A-B)+\cos\frac{1}{2}(A+B)\}^2$

$+\{2\cos\frac{1}{2}\times(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)+2\cos^2\frac{1}{2}(A+B\}^2$

$=4\times\sin^2\frac{1}{2}(A+B)\{\cos\frac{1}{2}(A-B)+\cos\frac{1}{2}(A+B)\}^2$

$+4\cos^2\frac{1}{2}(A+B)\{\cos\frac{1}{2}(A-B)+\cos\frac{1}{2}(A+B)\}^2$

$=4\{\cos\frac{1}{2}(A-B)+\cos\frac{1}{2}(A+B)\}^2$

$=4\{2\cos\frac{1}{2}\times A\cos\frac{1}{2}B\}^2=16\cos^2\frac{1}{2}A\cos^2\frac{1}{2}B$。

49. 化 $a\cos A+b\sin A$ 爲一項式。

【解】 今命 $\frac{b}{a}=\tan\phi$，則所設式爲 $a\cos A+a\tan\phi$

$\sin A=a(\cos A+\tan\phi\sin A)=a(\cos A$

$+\frac{\sin\phi}{\cos\phi}\sin A)=\frac{a}{\cos\phi}(\cos A\cos\phi$

$+\sin\phi\sin A)=\frac{a}{\cos\phi}\cos(A-\phi)$.

50. 化 $\sqrt{3}\cos A-\sin A$ 爲一項式。

【解】 所設式 $=\tan 60^\circ\cos A-\sin A$

$=\frac{1}{\cos 60^\circ}\times\{\sin 60^\circ\cos A-\cos 60^\circ\sin A\}$

$=\frac{1}{\cos 60^\circ}\times\sin(60^\circ-A)=2\sin(60^\circ-A)$.

51. 將 $\sin A+\sin B+\sin C-\sin(A+B+C)$ 化成一項式。

【解】 所設式 $=\{\sin A+\sin B\}-\{\sin(A+B+C)$

$-\sin C\}=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$

$-2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A+B+2C)=2\sin\frac{1}{2}(A$

$+B)\{\cos\frac{1}{2}(A-B)-\cos\frac{1}{2}(A+B+2C)\}=2$

$\times\sin\frac{1}{2}(A+B)\{2\sin\frac{1}{2}(A+C)\sin\frac{1}{2}(B+C)\}$

$=4\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(B+C)\sin\frac{1}{2}(C+A)$.

52. 將 $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C-2\cos A\times\cos B\cos C-1$ 化成一項式.

【解】 所設式 $=\cos^2 A-2\cos A\cos B\cos C+\cos^2 B\cos^2 C+\cos^2 B+\cos^2 C-1-\cos^2 B\times\cos^2 C$

$=(\cos A-\cos B\cos C)^2-(1-\cos^2 B)\times(1-\cos^2 C)$

$=(\cos A-\cos B\cos C)^2-\sin^2 B\sin^2 C$

$=(\cos A-\cos B\cos C-\sin B\times\sin C)(\cos A-\cos B\cos C+\sin B\sin C)=\{\cos A-\cos(B-C)\}\{\cos A-\cos(B+C)\}=2\sin\frac{1}{2}(A+B-C)\sin\frac{1}{2}(B-C-A)2\sin\frac{1}{2}(A+B+C)\sin\frac{1}{2}(B+C-A)=-4\sin\frac{1}{2}(A+B+C)\sin\frac{1}{2}(-A+B+C)\sin\frac{1}{2}\times(A-B+C)\sin\frac{1}{2}\times(A+B-C)$.

53. 將 $\cos\theta+\sin\theta$ 及 $\sin 3\theta+\sin 2\theta+2\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$.

化成一項式.

【解】 所設第一式 $=\sin(90°-\theta)+\sin\theta$

$=2\times\sin\frac{1}{2}(90°-\theta+\theta)\cos\frac{1}{2}(90°-\theta-\theta)$

$=2\times\sin 45°\cos(45°-\theta)=2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(45°-\theta)$

$=\sqrt{2}\cos(45°-\theta)$. 又所設第二式 $=2\sin\frac{1}{2}\times(3\theta+2\theta)\cos\frac{1}{2}(3\theta-2\theta)+2\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$=2\sin\frac{5\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$$=2\cos\frac{1}{2}\theta\times\left(\sin\frac{5}{2}\theta+\sin\frac{3}{2}\theta\right)=4\cos\frac{1}{2}\theta$$

$$\sin 2\theta\cos\frac{1}{2}\theta=4\times\cos^2\frac{1}{2}\theta\sin 2\theta.$$

54. 將 $\sin\frac{360°}{7}+\sin\frac{720°}{7}-\sin\frac{1080°}{7}$ 化成一項式之形.

【解】 將所設式變形 $=\left(\sin\frac{360°}{7}+\sin\frac{720°}{7}\right)-\sin\frac{1080°}{7}$

$$=2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{360°}{7}+\frac{720°}{7}\right)\cos\frac{1}{2}\times\left(\frac{720°}{7}-\frac{360°}{7}\right)$$

$$-\sin\frac{1080°}{7}=2\sin\frac{540°}{7}\times\cos\frac{180°}{7}-2\sin\frac{540°}{7}$$

$$\cos\frac{540°}{7}=2\sin\frac{540°}{7}\times\left\{\cos\frac{180°}{7}-\cos\frac{540°}{7}\right\}$$

$$=2\sin\frac{540°}{7}\times 2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{180°}{7}+\frac{540°}{7}\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{540°}{7}\right.$$

$$\left.-\frac{180°}{7}\right)=4\sin\frac{540°}{7}\sin\frac{360°}{7}\sin\frac{180°}{7}.$$

(3) 通常恆等式之證明

55. 求證 $\cos A+\sin A=\sqrt{2}\cos(45°-A)$

$=\sqrt{2}\sin(45°+A)$.

【證】 $\cos A+\sin A=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos A+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sin A\right)$

$$=\sqrt{2}(\cos 45°\cos A+\sin 45°\sin A)$$

$=\sqrt{2}\cos(45^\circ-A)$. 又 $\cos A+\sin A$

$=\sqrt{2}\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos A+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A\right)$

$=\sqrt{2}(\sin 45^\circ\times\cos A+\cos 45^\circ\sin A)$

$=\sqrt{2}\sin(45^\circ+A)$.

56. 求證 $\cos(A+45^\circ)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A-\sin A)$.

【證】 $\cos(A+45^\circ)=\cos A\cos 45^\circ-\sin A\times\sin 45^\circ$,

然 $\cos 45^\circ$, $\sin 45^\circ$ 各等於$\frac{1}{\sqrt{2}}$, 代入，則得

$\cos(A+45^\circ)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A-\sin A)$.

57. $2\sin(30^\circ-A)=\cos A-\sqrt{3}\sin A$. 求證.

【證】 $2\sin(30^\circ-A)=2(\sin 30^\circ\cos A-\cos 30^\circ\times\sin A)$

然 $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

以之代入右邊式中而簡化之，則得 $2\sin(30^\circ-A)$

$=\cos A-\sqrt{3}\sin A$.

58. 求證 $\cos(A-30^\circ)=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos A+\sin A)$.

【證】 $\cos(A-30^\circ)=\cos A\cos 30^\circ+\sin A\times\sin 30^\circ$,

然 $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, 以之代入，

則 $\cos(A-30^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\times\sin A$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos A+\sin A)$.

59. $\tan^2(45°+\frac{1}{2}A)=\frac{\operatorname{cosec}A+1}{\operatorname{cosec}A-1}$. 求證.

【證】 $\tan^2(45°+\frac{1}{2}A)=\frac{1+\sin A}{1-\sin A}$，上式之分子與分母，以 $\sin A$ 除之，則 $=\frac{\operatorname{cosec}A+1}{\operatorname{cosec}A-1}$.

60. 求證 $4\cos A\cos(60°-A)\cos(60°+A)=\cos 3A$.

【證】 $4\cos A\cos(60°+A)\cos(60°-A)=4$
$\times\cos A(\cos^2 A-\sin^2 60°)=4\cos A$
$\times(\cos^2 A-\frac{3}{4})=4\cos^3 A-3\cos A=\cos 3A$.

61. 求證 $\tan A\tan(60°+A)\tan(120°+A)=-\tan 3A$.

【證】 $\tan A\tan(60°+A)\tan(120°+A)$

$=\frac{\sin A\sin(60°+A)\sin(120°+A)}{\cos A\cos(60°+A)\cos(120°+A)}$

$=-\{\sin A\times\sin(60°+A)\sin(60°-A)\}/\{\cos A$
$\cos(60°+A)\cos(60°-A)\}$

$=-\frac{\sin^3 A}{\cos^3 A}=-\tan 3A$.

62. 求證 $4\sin A\sin(60°-A)\sin(60°+A)=\sin 3A$.

【證】 $4\sin A\sin(60°-A)\sin(60°+A)=4$
$\times\sin A(\sin^2 60°-\sin^2 A)=4\sin A(\frac{3}{4}-\sin^2 A)$
$=3\sin A-4\sin^3 A=\sin 3A$.

63. $\sin^3 A+\sin^3(120°+A)+\sin^3(240°+A)=-\frac{3}{4}\sin 3A$.

求證.

【證】 $\sin^3 A=\frac{1}{4}(3\sin A-\sin 3A)$. $\sin^3(120°+A)$

$=\frac{1}{4}\{3\sin(120°+A)-\sin 3(120°+A)\}$

$=\frac{1}{4}\{3\sin(120°+A)-\sin 3A\}$. $\sin^3(240°+A)$

$=\frac{1}{4}\{3\sin(240°+A)-\sin^3(240°+A)\}$

$=\frac{1}{4}\{3\sin(240°+A)-\sin 3A\}$. 故用加法,

得 $\frac{3}{4}\{\sin A+\sin(120°+A)+\sin(240°+A)\}$

$-\frac{3}{4}\sin 3A$, 卽 $-\frac{3}{4}\sin 3A$. 何則,因 $\sin A$

$+\sin(120°+A)+\sin(240°+A)=\sin A$

$+\sin(60°-A)-\sin(60°+A)=\sin A+\sin 60°$

$\times\cos A-\cos 60°\sin A-\sin 60°\cos A$

$-\cos 60°\sin A=\sin A-2\cos 60°\sin A$

$=\sin A-\sin A=0$ 故也.

64. 求證 $\tan(45°+A)-\tan(45°-A)=2\tan 2A$.

【證】 $\tan(45°+A)-\tan(45°-A)$

$=\frac{1+\tan A}{1-\tan A}-\frac{1-\tan A}{1+\tan A}=\{(1+\tan A)^2$

$-(1-\tan A)^2\}/(1-\tan^2 A)=\frac{4\tan A}{1-\tan^2 A}$

$=2\times\tan 2A$.

65. 求證 $\sin 3°=\frac{\sin^2 2°-\sin^2 1°}{\sin 1°}$.

【證】 所設式之左邊 $= \dfrac{\sin 3^\circ \sin 1^\circ}{\sin 1^\circ}$

$= \dfrac{\sin(2^\circ+1^\circ)\sin(2^\circ-1^\circ)}{\sin 1^\circ} = \dfrac{\sin^2 2^\circ-\sin^2 1^\circ}{\sin 1^\circ}$.

66. 求證 $\text{vers}(180^\circ-a)=2\ \text{vers}\dfrac{180^\circ+a}{2}$

$\times \text{vers}\dfrac{180^\circ-a}{2}$.

【證】 所設式之左邊 $=1-\cos(180^\circ-a)=1+\cos a$

$=2\cos^2\dfrac{a}{2}=2\left(1-\sin^2\dfrac{a}{2}\right)$

$=2\left(1-\sin\dfrac{a}{2}\right)\left(1+\sin\dfrac{a}{2}\right)$

$=2\left\{1-\cos\left(90^\circ+\dfrac{a}{2}\right)\right\}$

$\times\left\{1-\cos\left(90^\circ-\dfrac{a}{2}\right)\right\}$

$=2\{1-\cos[(180^\circ+a)/2]\}$

$\left(1-\cos\dfrac{180^\circ-a}{2}\right)=2\ \text{vers}\dfrac{180^\circ+a}{2}$

$\times\text{vers}\dfrac{180^\circ-a}{2}$.

67. 求證 $\cos A+\cos(120^\circ-A)+\cos(120^\circ+A)=0$.

【證】 $\cos A+\cos(120^\circ-A)+\cos(120^\circ+A)=\cos A$

$+\cos 120^\circ\cos A+\sin 120^\circ\sin A+\cos 120^\circ\cos A$

$-\sin 120^\circ\sin A=\cos A+2\cos 120^\circ\cos A$

$=\cos A-\cos A=0.$

68．求證 $\cos(A+45°)+\sin(A-45°)=0.$

【證】 $\cos(A+45°)=\sin\{90°-(A+45°)\}$

$=\sin(45°-A)=-\sin(A-45°)$，故 $\cos(A+45°)$

$+\sin(A-45°)=-\sin(A-45°)$

$+\sin(A-45°)=0.$

69．求證 $\tan(45°+A)+\tan(45°-A)=2\sec 2A.$

【證】 $(45°+A)$ 與 $(45°-A)$ 互爲餘角，故 $\tan(45°+A)$

$+\tan(45°-A)=\tan(45°+A)+\cot(45°+A)$

$=2\operatorname{cosec}2(45°+A)=2\operatorname{cosec}(90°+2A)$

$=2\sec 2A.$

70．$\tan^2\left(45°+\frac{1}{2}A\right)=\frac{2\operatorname{cosec}2A+\sec A}{2\operatorname{cosec}2A-\sec A}$．求證．

【證】 $\tan^2\left(45°+\frac{A}{2}\right)=\frac{1+\sin A}{1-\sin A}$．此式兩項以 $\sin A$

$\cos A$ 或 $\frac{1}{2}\sin 2A$ 除之，$=\frac{2\operatorname{cosec}2A+\sec A}{2\operatorname{cosec}2A-\sec A}$．

71．求證 $2+\tan^2(A+90°)+\cot^2(A-90°)=4\operatorname{cosec}^2 2A.$

【證】 所設式之左邊 $=2+\cot^2 A+\tan^2 A=\sec^2 A$

$+\operatorname{cosec}^2 A=\frac{1}{\cos^2 A}+\frac{1}{\sin^2 A}=\frac{1}{\cos^2 A\sin^2 A}$

$=\frac{4}{\sin^2 2A}=4\operatorname{cosec}^2 2A.$

72．求 $\sin 100°\ \sin(-160°)+\cos 200°$

$\times\cos(-280^\circ)$ 之值·

【解】 將所設式變形為 $\sin 80^\circ(-\sin 20^\circ)$ $+(-\cos 20^\circ)(\cos 80^\circ)=-\{\sin 80^\circ \sin 20^\circ$ $+\cos 20^\circ \cos 80^\circ\}=-\cos(80^\circ-20^\circ)$ $=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$.

73\. $\cos\theta\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)+\cos\theta\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)$ $+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)=-\frac{3}{4}$. 求證.

【證】 所設式之左邊為 $\cos\theta\{\cos(\frac{2}{3}\pi+\theta)$ $+\cos(\frac{2}{3}\pi-\theta)\}+\cos(\frac{2}{3}\pi+\theta)\cos(\frac{2}{3}\pi-\theta)$ $=\cos\theta\{2\cos\frac{2}{3}\pi\cos\theta\}+\cos^2\theta-\sin^2\frac{2}{3}\pi$ $=-\cos^2\theta+\cos^2\theta-\sin^2\frac{2}{3}\pi=-\sin^2\frac{2}{3}\pi$ $=-\frac{3}{4}$.

74\. 求證 $\sin 18^\circ+\sin 30^\circ=\sin 54^\circ$.

【證】 $\sin 18^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$, $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$,
故 $\sin 18^\circ+\sin 30^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)+\frac{1}{2}$ $=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$, 而 $\sin 54^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$
故 $\sin 18^\circ+\sin 30^\circ=\sin 54^\circ$.

75\. 求證 $\tan\frac{1}{10}\pi\tan\frac{3}{10}\pi=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

【證】 所設式之左邊 $=\tan 18^\circ\tan 54^\circ=\frac{\tan 18^\circ}{\tan 36^\circ}$

$$=\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}\Big/\sqrt{(5-2\sqrt{5})}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

76. 求證 $\sin(36°+\alpha)-\sin(36°-\alpha)=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\sin\alpha.$

【證】 所設式之左邊 $=2\sin\alpha\cos 36°=2$ $\times\sin\alpha\frac{\sqrt{5}+1}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\sin\alpha.$

77. 求證 $\sin(72°+\alpha)-\sin(72°-\alpha)=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\sin\alpha.$

【證】 所設式之左邊 $=2\sin\alpha\cos 72°$ $=2\times\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\sin\alpha.$

78. 求證 $\cos 24°\cos 48°\cos 72°\cos 96°$ $\times\cos 120°\cos 144°\cos 168°=(\frac{1}{2})^7.$

【證】 所設式之左邊 $=(\cos 24°\cos 96°)$ $\times(\cos 48°\cos 168°)(\cos 72°\cos 144°)\cos 120°$ $=\frac{1}{2}(\cos 120°+\cos 72°)\times\frac{1}{2}(\cos 216°$ $+\cos 120°)\times\frac{1}{2}(\cos 216°+\cos 72°)\cos 120°$ $=\frac{1}{8}(-\sin 30°+\sin 18°)(-\cos 36°-\sin 30°)$ $\times(-\cos 36°+\sin 18°)(-\cos 60°)$，此式右邊中，分別以已求得之值代入，簡化之，即得$(\frac{1}{2})^7$.

79. 求證 $\cos 60°+2\cos 70°+\cos 80°=4\cos^2 5°\cos 70°.$

【證】 所設式之左邊 $=(\cos 60°+\cos 80°)+2\cos 70°$ $=2\cos 70°\cos 10°+2\cos 70°$

$=2\cos 70^\circ(\cos 10^\circ+1)$

$=2\cos 70^\circ\times 2\cos^2 5^\circ=4\cos^2 5^\circ\cos 70^\circ.$

80．求證　$\cos 40^\circ\cos 80^\circ+\cos 80^\circ\cos 160^\circ+\cos 160^\circ\cos 40^\circ=-\frac{3}{4}.$

【證】所設式之左邊$=\cos 40^\circ\{\cos 80^\circ+\cos 160^\circ\}+\cos 80^\circ\cos 160^\circ=\cos 40^\circ\times\{2\cos\frac{1}{2}(80^\circ+160^\circ)\cos\frac{1}{2}(160^\circ-80^\circ)\}+\frac{1}{2}\{\cos 240^\circ+\cos 80^\circ\}$
$=\cos 40^\circ\times 2\times\cos 120^\circ\cos 40^\circ+\frac{1}{2}\{-\cos 60^\circ+\cos 80^\circ\}=2\cos^2 120^\circ\cos 40^\circ+\frac{1}{2}\{-\cos 60^\circ+\cos 80\}=-\cos^2 40^\circ+\frac{1}{2}\{-\cos 60^\circ\cos 80^\circ\}$
$=-\frac{1}{2}(1+\cos 80^\circ)+\frac{1}{2}\{-\frac{1}{2}+\cos 80^\circ\}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 80^\circ-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 80^\circ=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}.$

81．求證　$\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{6}{7}\pi=-\frac{1}{2}.$

【證】所設式之左邊$=2\cos\frac{4}{7}\pi\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\times\pi$

$=\cos\frac{4}{7}\pi(2\cos\frac{2}{7}\pi+1)=\cos\frac{4}{7}\pi$

$(2-4\times\sin^2\frac{1}{7}\pi+1)=\cos\frac{4}{7}\pi(3-4\sin^2\frac{1}{7}\pi)$

$$=\frac{\cos\frac{4}{7}\pi\ (3\sin\frac{1}{7}\pi-4\sin^3\frac{1}{7}\pi)}{\sin\frac{1}{7}\pi}$$

$$=\frac{\cos\frac{4}{7}\pi\ \sin\frac{2}{7}\pi}{\sin\frac{1}{7}\pi}=\frac{\sin\pi-\sin\frac{1}{7}\pi}{2\sin\frac{1}{7}\pi}$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

82 求證 $\cos\frac{2}{7}\pi\ \cos\frac{4}{7}\pi\ \cos\frac{6}{7}\pi=\frac{1}{8}$.

【證】 所設式之左邊 $=\frac{1}{2}\cos\frac{6}{7}\pi\ (\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{6}{7}\pi)$

$$=\frac{1}{4}\ (\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{8}{7}\pi+\cos\frac{12}{7}\pi+1)$$

$$=\frac{1}{4}\cos\frac{8}{7}\pi\ (1+2\cos\frac{4}{7}\pi)+\frac{1}{4}$$

$$=\cos\frac{8}{7}\pi\sin\frac{6}{7}\pi/4\sin\frac{2}{7}\pi+\frac{1}{4}$$

$$=(\sin 2\pi-\sin\frac{2}{7}\pi)/8\sin\frac{2}{7}\pi+\frac{1}{4}$$

$$=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{1}{8}.$$

83. $\cos 47°-\cos 61°-\cos 11°+\cos 25°=\sin 7°$. 求證.

【證】 所設式之左邊 $=(\cos 47°-\cos 61°)$
$-(\cos 11°-\cos 25°)=2\sin\frac{1}{2}(47°+61°)$
$\times\sin\frac{1}{2}(61°-47°)-2\sin\frac{1}{2}(11°+25°)\sin\frac{1}{2}$
$\times(25°-11°)=2\sin 54°\sin 7°-2\sin 18°$
$\times\sin 7°=2\sin 7°\{\sin 54°-\sin 18°\}$

$=4\times\sin 7^\circ \sin\frac{1}{2}(54^\circ-18^\circ)\cos\frac{1}{2}(54^\circ+18^\circ)$

$=4\times\sin 7^\circ \sin 18^\circ \cos 36^\circ$，然 $\cos 18^\circ=\sin 72^\circ$

$=4\sin 18^\circ\cos 18^\circ\cos 36^\circ$，故 $1=4\sin 18^\circ$

$\times\cos 36^\circ$，故所設式之左邊 $=\sin 7^\circ$.

84. 求證 $\cos 55^\circ\cos 65^\circ+\cos 65^\circ\cos 175^\circ+\cos 55^\circ$ $\cos 175^\circ=-\frac{3}{4}$.

【證】 所設之式，其左邊 $=\cos 65^\circ(\cos 55^\circ+\cos 175^\circ)$ $+\cos 55^\circ\cos 175^\circ=\cos 65^\circ,2\times\cos 115^\circ\cos 60^\circ$ $+\cos 55^\circ\cos 175^\circ=\cos 65^\circ\times\cos 115^\circ\times 2\cos 60^\circ$ $+\cos 55^\circ\cos 175^\circ=\cos 65^\circ\cos 115^\circ$ $+\cos 55^\circ\cos 175^\circ=\frac{1}{2}\times\{\cos 180^\circ+\cos 50^\circ$ $+\cos 230^\circ+\cos 120^\circ\}=\frac{1}{2}\{-1+\cos 50^\circ$ $-\cos 50^\circ-\frac{1}{2}\}=\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})=-\frac{3}{4}$.

85. 求證 $\sin A+\sin(36^\circ-A)+\sin(72^\circ+A)+\sin(36^\circ+A)$ $+\sin(72^\circ-A)$.

【證】 所設式之左邊 $=\{\sin A+\sin(36^\circ-A)\}$ $+\cos\{90^\circ-(72^\circ+A)\}=2\sin 18^\circ\cos(18^\circ-A)$ $+\cos(180^\circ-A)=\cos(18^\circ-A)\{2\sin 18^\circ+1\}$

$$=\cos(18^\circ-A)\cdot\left\{\frac{2(\sqrt{5}-1)}{4}+1\right\}$$

$$=\cos(18^\circ-A)\frac{2(\sqrt{5}+1)}{4}=2\cos(18^\circ-A)$$

$\times \sin 54° = \sin(72° - A) + \sin(36° + A).$

86. 求證 $\operatorname{cosec} A + \operatorname{cosec}(120° + A) + \operatorname{cosec}(240° + A) = 3 \operatorname{cosec} 3A.$

【證】 將所設式之左邊變形，則可得

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin(120° + A)} + \frac{1}{\sin(240° + A)}$$

$$= \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin(60° - A)} - \frac{1}{\sin(60° + A)}$$

$$= \frac{1}{\sin A} + \frac{\sin(60° - A) - \sin(60° - A)}{\sin(60 + A)\sin(60° + A)}$$

$$= \frac{1}{\sin A} + \frac{2\sin A \cos 60°}{\sin^2 60° - \sin^2 A}$$

$$= \frac{1}{\sin A} + \frac{2\sin A \times \frac{1}{2}}{(\frac{1}{2}\sqrt{3})^2 - \sin^2 A}$$

$$= \frac{1}{\sin A} + \frac{4\sin A}{3 - 4\sin^2 A} = \frac{3 - 4\sin^2 A + 4\sin^2 A}{3\sin A - 4\sin^3 A}$$

$$= \frac{3}{3\sin A - 4\sin^3 A} = \frac{3}{\sin 3A} = 3 \operatorname{cosec} 3A.$$

87. 求證次之二式：

(1) $\cos A + \cos(120° + A) + \cos(120° - A) = 0.$

(2) $\sin A + \sin(120° + A) - \sin(120° - A) = 0.$

【證】 (1) $\cos(120° + A) + \cos(120° - A) = 2$

$\times\cos 120^\circ \cos A = 2(-\frac{1}{2})\cos A = -\cos A,$

故 $\cos A + \cos(120^\circ + A) + \cos(120^\circ - A) = 0.$

(2) $\sin(120^\circ + A) - \sin(120^\circ - A) = 2$

$\times\cos 120^\circ \sin A = 2(-\frac{1}{2})\sin A = -\sin A,$

故 $\sin A + \sin(120^\circ + A) - \sin(120^\circ - A) = 0.$

88. 求證 $\tan(30^\circ + \frac{1}{2}\alpha)\tan(30^\circ - \frac{1}{2}\alpha)$

$= \dfrac{2\cos\alpha - 1}{2\cos\alpha + 1}.$

【證】 所設式之左邊

$$= \frac{\sin(30^\circ + \frac{1}{2}\alpha)\sin(30^\circ - \frac{1}{2}\alpha)}{\cos(30^\circ + \frac{1}{2}\alpha)\cos(30^\circ - \frac{1}{2}\alpha)}$$

$$= \frac{\sin^2 30^\circ - \sin^2\frac{1}{2}\alpha}{\cos^2 30^\circ - \sin^2\frac{1}{2}\alpha} = \frac{\frac{1}{4} - \sin^2\frac{1}{2}\alpha}{\frac{3}{4} - \sin^2\frac{1}{2}\alpha}$$

$$= \frac{1 - 4\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{3 - 4\sin^2\frac{1}{2}\alpha} = \frac{2 - 4\sin^2\frac{1}{2}\alpha - 1}{2 - 4\sin^2\frac{1}{2}\alpha + 1}$$

$$= \frac{2\cos\alpha - 1}{2\cos\alpha + 1}.$$

89. 求證 $\tan\theta + \tan\left(\frac{\pi}{5} + \theta\right) + \tan\left(\frac{2\pi}{5} + \theta\right)$

$+ \tan\left(\frac{3\pi}{5} + \theta\right) + \tan\left(\frac{4\pi}{5} + \theta\right) = 5\tan 5\theta.$

【證】 所設式之左邊 $= \tan\theta + \tan\left(\frac{\pi}{5} + \theta\right)$

$+ \tan\left(\frac{2\pi}{5} + \theta\right) - \tan\left(\frac{2\pi}{5} - \theta\right)$

$$-\tan\left(\frac{\pi}{5}-\theta\right)$$

$$=\tan\theta+\frac{\sin 2\theta}{\cos\left(\frac{\pi}{5}+\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}-\theta\right)}$$

$$+\frac{\sin 2\theta}{\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\theta\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}-\theta\right)}$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin 2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\frac{\pi}{5}}+\frac{\sin 2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\frac{2\pi}{5}}$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin 2\theta}{\cos^2\theta-\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}$$

$$+\frac{\sin 2\theta}{\cos^2\theta-\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}$$

$$=\frac{\sin 2\theta}{2\cos^2\theta}+\frac{8\sin 2\theta}{8\cos^2\theta-5+\sqrt{5}}$$

$$+\frac{8\sin 2\theta}{8\cos^2\theta-5-\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\sin 2\theta}{2\cos^2\theta}+\frac{16\sin 2\theta(8\cos^2\theta-5)}{(8\cos^2\theta-5)^2-5}$$

$$=\frac{\sin 2\theta(80\cos^4\theta-60\cos^2\theta\times 5)}{2\cos^2\theta(16\cos^4\theta-20\cos^2\theta+5)}$$

$$=\frac{5\sin\theta\{16(1-\sin^2\theta)^2-12(1-\sin^2\theta)+1\}}{16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta}$$

$$=\frac{5(16\sin^5\theta-20\sin^3\theta+5\sin\theta)}{16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta}$$

$$=\frac{5\sin5\theta}{\cos5\theta}=5\tan5\theta.$$

90. 求證 $\cot A\cot(60^\circ+A)+\cot(60^\circ+A)\times\cot(120^\circ+A)$
$+\cot(120^\circ+A)\cot A=-3.$

【證】 $\cot A\cot(60^\circ+A)+\cot(60^\circ+A)\cot(120^\circ+A)$
$+\cot(120^\circ+A)\cot A=1/\{\tan A\times\tan(60^\circ+A)\}$

$$+\frac{1}{\tan(60^\circ+A)\tan(120^\circ+A)}$$

$$+\frac{1}{\tan(120^\circ+A)\tan A}=\{\tan(120^\circ+A)$$

$+\tan A+\tan(60^\circ+A)\}/\{\tan A\tan(60^\circ+A)$

$$\tan(120^\circ+A)\}=\frac{3\tan3A}{-\tan3A}=-3.$$

91. 求證 $\cot A+\cot(60^\circ+A)+\cot(120^\circ+A)=3\cot3A.$

【證】 $\cot A+\cot(60^\circ+A)+\cot(120^\circ+A)$

$$=\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan(60^\circ+A)}-\frac{1}{\tan(60^\circ-A)}$$

$$=\frac{1}{\tan A}+\frac{1-\tan60^\circ\tan A}{\tan60^\circ+\tan A}$$

$$-\frac{1+\tan60^\circ\tan A}{\tan60^\circ-\tan A}=\frac{1}{\tan A}$$

$+\{(1-\tan 60^\circ \tan A)(\tan 60^\circ-\tan A)$

$-(1+\tan 60^\circ \tan A)(\tan 60^\circ+\tan A)\}$

$/(\tan^2 60^\circ-\tan^2 A)=\dfrac{1}{\tan A}-(2\tan^2 60^\circ$

$\times\tan A+2\tan A)/(\tan^2 60^\circ-\tan^2 A)$

$=\dfrac{1}{\tan A}-\dfrac{8\tan A}{3-\tan^2 A}=\dfrac{3-9\tan^2 A}{3\tan A-\tan^3 A}$

$=\dfrac{3}{\tan 3A}=3\cot 3A.$

92．$\tan A+\tan(60^\circ+A)+\tan(120^\circ+A)=3\tan 3A$．求證．

【證】 $\tan A+\tan(60^\circ+A)+\tan(120^\circ+A)$

$=\tan A+\tan(60^\circ+A)-\tan(60^\circ-A)=\tan A$

$+\dfrac{\tan 60^\circ+\tan A}{1-\tan 60^\circ \tan A}-(\tan 60^\circ-\tan A)$

$/(1+\tan 60^\circ \tan A)=\tan A+\{(\tan 60^\circ+\tan A)$

$(1+\tan 60^\circ \tan A)-(\tan 60^\circ-\tan A)$

$\times(1-\tan 60^\circ \tan A)\}/(1-\tan^2 60^\circ \tan^2 A)$

$=\tan A+\dfrac{2\tan^2 60^\circ \tan A+2\tan A}{1-\tan^2 60^\circ \tan^2 A}=\tan A$

$+\dfrac{8\tan A}{1-3\tan^2 A}=\dfrac{9\tan A-3\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}=3\tan 3A.$

93．求證 $\cos A+\sec(120^\circ+A)+\sec(240^\circ+A)$

$=-3\sec 3A.$

【證】 所設式之左邊$=\dfrac{1}{\cos A}+1/\cos(120^\circ+A)$

$+\dfrac{1}{\cos(240^\circ+A)}=\dfrac{1}{\cos A}-\dfrac{1}{\cos(60-A)}$

$$-\frac{1}{\cos(60^\circ+A)}=\frac{1}{\cos A}-\{\cos(60^\circ+A)$$

$$+\cos(60^\circ-A)\}/\{\cos(60^\circ-A)\cos(60^\circ+A)\}$$

$$=\frac{1}{\cos A}-\frac{2\cos 60^\circ\cos A}{\cos^2 A-\sin^2 60^\circ}=\frac{1}{\cos A}$$

$$-(2\frac{1}{2}\times\cos A)/(\cos^2 A-\frac{3}{4})=\frac{1}{\cos A}$$

$$-\frac{4\cos A}{4\cos^2 A-3}=\frac{4\cos^2 A-3-4\cos^2 A}{\cos A(4\cos^2 A-3)}$$

$$=\frac{-3}{4\cos^3 A-3\cos A}=\frac{-3}{\cos 3A}=-3\sec 3A.$$

94. $\cos^3 A+\cos^3(120^\circ+A)+\cos^3(120^\circ-A)=\frac{3}{4}\cos 3A$.求證.

【證】 $\cos^3 A=\frac{3\cos A+\cos 3A}{4}$, $\cos^3(120^\circ+A)$

$$=\frac{3\cos(120^\circ+A)+\cos 3(120^\circ+A)}{4}$$

$\cos^3(120^\circ-A)=\{3\cos(120^\circ-A)+\cos 3\times(120^\circ-A)\}/4$,由加法,$\cos^3 A+\cos^3(120^\circ+A)+\cos^3(120^\circ-A)=\frac{3}{4}\{\cos A+\cos(120^\circ+A)+\cos(120^\circ-A)\}+\frac{1}{4}\{\cos 3A+\cos 3\times(120^\circ+A)+\cos 3(120^\circ-A)\}$此式右邊第一括號內之量等於0

而 $\cos 3A+\cos 3(120^\circ+A)+\cos 3(120^\circ-A)$

$=\cos 3A+\cos(360^\circ+3A)+\cos(360^\circ-3A)$

$=\cos 3A+\cos 3A+\cos(-3A)=3\cos 3A$.

故 $\cos^3 A+\cos^3(120^\circ+A)+\cos^3(120^\circ-A)$

$=\frac{3}{4}\cos 3A$.

95. 求證次式：

$$\frac{(\tan 67°\tfrac{1}{2}-\tan 7°\tfrac{1}{2})(\tan 127°\tfrac{1}{2}+\tan 22°\tfrac{1}{2})}{(\tan 22°\tfrac{1}{2}+\tan 7°\tfrac{1}{2})(\tan 127°\tfrac{1}{2}-\tan 67°\tfrac{1}{2})}=1.$$

【證】 所設式之左邊

$$=\left\{\frac{\sin(67°\tfrac{1}{2}-7°\tfrac{1}{2})}{\cos 67°\tfrac{1}{2}\cos 7°\tfrac{1}{2}}\times\frac{\sin(127°\tfrac{1}{2}+22°\tfrac{1}{2})}{\cos 127°\tfrac{1}{2}\cos 22°\tfrac{1}{2}}\right\}$$

$$\Big/\left\{\frac{\sin(22°\tfrac{1}{2}+7°\tfrac{1}{2})}{\cos 22°\tfrac{1}{2}\cos 7°\tfrac{1}{2}}\times\frac{\sin(127°\tfrac{1}{2}-67°\tfrac{1}{2})}{\cos 127°\tfrac{1}{2}\cos 67°\tfrac{1}{2}}\right\}$$

$$=\frac{\sin 150°}{\sin 30°}=1.$$

96. 求證 $\dfrac{\tfrac{1}{2}}{\sin 10°}-\dfrac{\tfrac{1}{2}\sqrt{3}}{\cos 10°}=2.$

【證】 所設式之左邊 $=\dfrac{\sin 30°}{\sin 10°}-\dfrac{\cos 30°}{\sin 10°}$

$$=\frac{\sin 30°\cos 10°-\sin 10°\cos 30°}{\sin 10°\cos 10°}$$

$$=\frac{\sin(30°-10°)}{\sin 10°\cos 10°}=\frac{\sin 20°}{\sin 10°\cos 10°}$$

$$=\frac{2\sin 10°\cos 10°}{\sin 10°\cos 10°}=2.$$

97. 求證 $(\tan 7°\tfrac{1}{2}+\tan 37°\tfrac{1}{2}+\tan 67°\tfrac{1}{2})\times(\tan 22°\tfrac{1}{2}$
$+\tan 52°\tfrac{1}{2}+\tan 82°\tfrac{1}{2})=17+8\times\sqrt{3}.$

【證】 所設式之左邊 $=\{(\tan 7°\tfrac{1}{2}+\tan 67°\tfrac{1}{2})$

$+\tan 37°\tfrac{1}{2}\}\{(\tan 22°\tfrac{1}{2}+\tan 82°\tfrac{1}{2})+\tan 52°\tfrac{1}{2}\}$

$$=\left\{\frac{\sin(7°\tfrac{1}{2}+67°\tfrac{1}{2})}{\cos 7°\tfrac{1}{2}\cos 67°\tfrac{1}{2}}+\frac{\sin 37°\tfrac{1}{2}}{\cos 37°\tfrac{1}{2}}\right\}\left\{[\sin(22°\tfrac{1}{2}\right.$$

$$+82°\tfrac{1}{2})/\cos 22°\tfrac{1}{2}\cos 82°\tfrac{1}{2}]+\frac{\sin 52°\frac{1}{2}}{\cos 52°\frac{1}{2}}\Big\}$$

$$=\left\{\frac{2\sin 75°}{2\cos 7°\frac{1}{2}\cos 67°\frac{1}{2}}+\frac{2\sin 37°\frac{1}{2}\cos 37°\frac{1}{2}}{2\cos^2 37°\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\times\left\{\frac{2\sin 105°}{2\cos 22°\frac{1}{2}\cos 82°\frac{1}{2}}+\frac{2\sin 52°\frac{1}{2}\cos 52\frac{1}{2}}{2\cos^2 52°\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=\left\{\frac{2\sin 75°}{\cos 60°+\cos 75°}+\sin 75°/(\cos 75°+1)\right\}$$

$$\times\left\{\frac{2\sin 105°}{\cos 60°+\cos 105°}+\frac{\sin 105°}{\cos 105°+1}\right\}$$

$$=\left\{\frac{2\cos 15°}{\frac{1}{2}+\sin 15°}+\frac{\cos 15°}{\sin 15°+1}\right\}\left\{\frac{2\cos 15°}{\frac{1}{2}-\sin 15°}\right.$$

$$\left.+\frac{\cos 15°}{1-\sin 15°}\right\}=\left\{\frac{4\cos 15°}{1+2\sin 15°}+\frac{\cos 15}{\sin 15°+1}\right\}$$

$$\times\left\{\frac{4\cos 15°}{1-2\sin 15°}+\frac{\cos 15}{1-\sin 15°}\right\}=\cos^2 15°$$

$$\times\left\{\frac{4+4\sin 15°+1+2\sin 15°}{(1+2\sin 15°)(1+\sin 15°)}[(4-4\times\sin 15°\right.$$

$$\left.+1-2\sin 15°)/(1-2\sin^2 15°)(1-\sin 15°)]\right\}$$

$$=(5+6\sin 15)(5-6\sin 15°)/(1-4\sin^2 15°)$$

$=\dfrac{25-36\sin^2 15°}{1-4\sin^2 15°}$，此式之 $\sin 15°$ 以 $\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ 代入而簡化之，即得所設之結果.

98. 求證 $\cot\frac{\alpha}{2}-\cot\alpha=\operatorname{cosec}\alpha$.

【證】 所設式之左邊 $= \cos\frac{\alpha}{2}\Big/\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$=\left(\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\right)\Big/\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha$

$=\sin\left(\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)\Big/\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha$

$=\sin\frac{\alpha}{2}\Big/\left(\sin\frac{\alpha}{2}\times\sin\alpha\right)=\frac{1}{\sin\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha.$

99. $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$. 求證.

【證】 所設式之左邊 $=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\sin^2\alpha+\sin^2\beta$

$-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$

$+(\cos^3\beta+\sin^2\beta)-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$

$=2-2\cos(\alpha-\beta)=2\{1-\cos(\alpha-\beta)\}=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$

100. 求證 $\sin^2(\alpha-\beta)+\sin^2\beta+2\sin(\alpha-\beta)\sin\beta\cos\alpha=\sin^2\alpha.$

【證】 所設式之左邊 $=\sin^2(\alpha-\beta)+\sin^2\beta+\sin(\alpha-\beta)$

$\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}=\sin^2(\alpha-\beta)+\sin^2\beta$

$+\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)=\sin^2\beta$

$+\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)=\sin^2\beta+(\sin^2\alpha$

$-\sin^2\beta)=\sin^2\alpha.$

101. 求證 $\cos^2(\alpha-\beta)+\cos^2\beta-2\cos(\alpha-\beta)\cos\alpha\cos\beta$

$=\sin^2\alpha.$

【證】 所設式之左邊 $=\cos^2(\alpha-\beta)+\cos^2\beta$

$-\cos(\alpha-\beta)\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}-\cos^2\beta$

$-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-(\cos^2\beta-\sin^2\alpha)$
$=\sin^2\alpha.$

102.求證 $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\beta+\cos\beta)$.

【證】 所設式之左邊$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\times\sin\beta$
$+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=(\sin\alpha\cos\beta$
$+\cos\alpha\cos\beta)+(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\times\sin\beta)$
$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\cos\beta+(\cos\alpha+\sin\alpha)\sin\beta$
$=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cos\beta+\sin\beta)$.

103.求證 $\sin(\beta-\gamma)\cos(\alpha-\delta)+\sin(\gamma+\alpha)\cos(\beta+\delta)$
$+\sin(\alpha-\beta)\cos(\gamma-\delta)=0$.

【證】 所設式之左邊$=\frac{1}{2}\{\sin(\beta-\gamma+\alpha-\delta)$
$-\sin(\alpha+\delta-\beta+\gamma)+\sin(\gamma-\alpha+\beta-\delta)$
$-\sin(\beta-\delta-\gamma+\alpha)+\sin(\alpha-\beta+\gamma-\delta)$
$-\sin(\gamma-\delta-\alpha+\beta)\}=0$.

104.求證 $\sin(\beta-\alpha)\sin(\delta-\gamma)+\sin(\gamma-\beta)\sin(\delta-\alpha)$
$=-\sin(\gamma-\alpha)\sin(\beta-\delta)$.

【證】 所設式之左邊$=\frac{1}{2}\{\cos(\beta-\alpha-\delta+\gamma)$
$-\cos(\beta-\alpha+\delta-\gamma)\}+\frac{1}{2}\{\cos(\gamma-\beta-\delta+\alpha)$
$-\cos(\gamma-\beta+\delta-\alpha)\}=\frac{1}{2}\{\cos(\beta-\alpha-\delta+\gamma)$
$-\cos(\gamma-\beta+\delta-\alpha)\}=-\sin(\beta-\delta)\sin(\gamma-\alpha)$.

105.求證 $\sin(A+B+C)=\sin A\cos B\times\cos C+\cos A$

$\sin B\cos C+\cos A\cos \beta\sin C-\sin A\sin B\sin C$.

【證】 $\sin(A+B+C)=\sin\{(A+B)+C\}$

$=\sin(A+B)\cos C+\cos(A+B)\sin C$

$=(\sin A\times\cos B+\cos A\sin B)\cos C$

$+(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\sin C$

$=\sin A\cos B\cos C+\cos A\times\sin B\cos C$

$+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\times\sin C$.

106.求證 $\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\times\cos C-\sin A\sin B$ $\cos C-\sin A\cos B\sin C-\cos A\sin B\sin C$.

【證】 $\cos(A+B+C)=\cos\{(A+B)+C\}$

$=\cos(A+B)\cos C-\sin(A+B)\sin C$

$=(\cos A\times\cos B-\sin A\sin B)\cos C$

$-(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\sin C$

$=\cos A\cos B\cos C=\sin A\times\sin B\cos C$

$-\sin A\cos B\sin C-\cos A\sin B\times\sin C$.

107.求證 $\sin A\cos(B+C)-\sin B\cos(A+C)$ $=\sin(A-B)\cos C$.

【證】 所設式之左邊$=\sin A(\cos B\cos C-\sin B\sin C)$

$-\sin B(\cos A\cos C-\sin A\sin C)$

$=\sin A\cos B\cos C-\sin B\cos A\cos C$

$=(\sin A\cos B-\cos A\sin B)\cos C$

$=\sin(A-B)\cos C$.

108.求證 $\cos A-\sin A\sqrt{2}\cos(45°+A)$

$=\sqrt{2}\sin(45°-A)$.

【證】 $\cos A-\sin A=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos A-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A\right)$

$=\sqrt{2}(\cos 45°\cos A-\sin 45°\sin A)$

$=\sqrt{2}\cos(45+A)$. 又 $\cos A-\sin A$

$=\sqrt{2}\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos A-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A\right)$

$=\sqrt{2}(\sin 45°\times\cos A-\cos 45°\sin A)$

$=\sqrt{2}\sin(45°-A)$.

109. $\sin(A+B)-\frac{\sin(2A+B)-\sin B}{2\cos A}=\frac{\sin B}{\cos A}$. 求證.

【證】 所設式之左邊

$=\frac{2\sin(A+B)\cos A-\sin(2A+B)+\sin B}{2\cos A}$

$=\frac{\sin(2A+B)+\sin B-\sin(2A+B)+\sin B}{2\cos A}$

$=\frac{2\sin B}{2\cos A}=\frac{\sin B}{\cos A}$.

110. $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta}$

$=\frac{\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$. 求證.

【證】 所設式之左邊$=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$

$=2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)/\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$

$$=\frac{2(\sin^2\alpha-\sin^2\beta)}{\sin(\alpha-\beta+\alpha+\beta)-\sin(\alpha+\beta-\alpha+\beta)}$$

$=\dfrac{2(\sin^2\alpha-\sin^2\beta)}{\sin 2\alpha-\sin 2\beta}=2(\sin^2\alpha$

$-\sin^2\beta)/(2\sin\alpha\cos\alpha-2\sin\beta\cos\beta)$

$=(\sin^2\alpha-\sin^2\beta)/(\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta)$.

仿此，$\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$之分子分母，以 $\cos(\alpha-\beta)$

乘之而變形，則得 $\tan(\alpha+\beta)$

$=(\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta)/(\cos^2\alpha-\sin^2\beta)$.

111. 求證 $\tan A+2\tan 2A+4\cot 4A=\cot A$.

【證】 $2\tan 2A+4\cot 4A=\dfrac{2\sin 2A}{\cos 2A}+\dfrac{4\cos 4A}{\sin 4A}$

$$=\frac{2\sin^2 2A}{\sin 2A\cos 2A}+\frac{2(1-2\sin^2 2A)}{\sin 2A\cos 2A}$$

$$=\frac{2(1-\sin^2 2A)}{\sin 2A\cos 2A}=\frac{2\cos 2A}{\sin 2A}=\frac{1-2\sin^2 A}{\sin A\cos A},$$

故 $\tan A+2\tan 2A+4\cot 4A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$

$$+\frac{1-2\sin^2 A}{\sin A\cos A}=\frac{1-\sin^2 A}{\sin A\cos A}=\frac{\cos A}{\sin A}$$

$=\cot A$.

112. 求證 $(\cot^2 A-\tan^2 A)(1-\cos 4A)=8\cos 2A$.

【證】 所設式之左邊 $=\left(\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}-\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right)\times 2\sin^2 2A$

$$=\frac{\cos^4 A-\sin^4 A}{\sin^2 A\ \cos^2 A}\times 2\ \sin^2 2A$$

$$=\frac{4(\cos^2 A-\sin^2 A)}{4\ \sin^2 A\ \cos A}\times 2\ \sin^2 2A=\frac{4\ \cos 2A}{\sin^2 2A}$$

$$\times 2\ \sin^2 2A=8\ \cos 2A.$$

113. 試求證下式：$\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

$$=\frac{\operatorname{cosec} 2\alpha\ \operatorname{cosec}\beta-\operatorname{cosec} 2\beta\ \operatorname{cosec}\alpha}{\operatorname{cosec} 2\alpha\ \operatorname{cosec}\beta+\operatorname{cosec} 2\beta\ \operatorname{cosec}\alpha}.$$

【證】 所設式之左邊$=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$

$$=\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos\beta+\cos\alpha}=\frac{2\ \sin\alpha\ \sin\beta(\cos\beta-\cos\alpha)}{2\ \sin\alpha\ \sin\beta(\cos\beta+\cos\alpha)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\ \sin 2\beta-\sin 2\alpha\ \sin\beta}{\sin\alpha\ \sin 2\beta+\sin 2\alpha\ \sin\beta}$$

$$=\left(\frac{\sin\alpha\ \sin 2\beta-\sin 2\alpha\ \sin\beta}{\sin 2\alpha\ \sin 2\beta\ \sin\alpha\ \sin\beta}\right)$$

$$\Big/\left(\frac{\sin\alpha\ \sin 2\beta+\sin 2\alpha\ \sin\beta}{\sin 2\alpha\ \sin 2\beta\ \sin\alpha\ \sin\beta}\right)$$

$$=\frac{\operatorname{cosec} 2\alpha\ \operatorname{cosec}\beta-\operatorname{cosec} 2\beta\ \operatorname{cosec}\alpha}{\operatorname{cosec} 2\alpha\ \operatorname{cosec}\beta+\operatorname{cosec} 2\beta\ \operatorname{cosec}\alpha}.$$

114. 求證 $\cos(\alpha+\beta+\gamma)\cos(\alpha+\beta-\gamma)\times\cos(\beta+\gamma-\alpha)\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\times\sin(\alpha+\beta-\gamma)\sin(\beta+\gamma-\alpha)\sin(\gamma+\alpha-\beta)=\cos 2\alpha\ \cos 2\beta\ \cos 2\gamma.$

【證】 所設式之左邊$=\frac{1}{2}\{\cos 2\gamma+\cos(2\alpha+2\beta)\}$

$$\times\tfrac{1}{2}\{\cos 2\gamma+\cos(2\alpha-2\beta)\}-\tfrac{1}{2}\times\{\cos 2\gamma$$

$$-\cos(2\alpha+2\beta)\}\times\tfrac{1}{2}\{\cos 2\gamma-\cos(2\alpha-2\beta)\}$$

$=\frac{1}{2}\{\cos 2\gamma\ \cos(2\alpha+2\beta)+\cos 2\gamma\ \cos(2\alpha-2\beta)\}$

$=\frac{1}{2}\cos 2\gamma\{\cos(2\alpha+2\beta)+\cos(2\alpha-2\beta)\}$

$=\frac{1}{2}\cos 2\gamma\cdot 2\cos 2\alpha\times\cos 2\beta$

$=\cos 2\alpha\ \cos 2\beta\ \cos 2\gamma.$

115. 求證 $\sin 3\alpha\ \sin(\beta-\gamma)+\sin 3\beta\ \sin(\gamma-\alpha)$

$+\sin 3\gamma\ \sin(\alpha-\beta)$

$=4\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha+\beta+\gamma).$

【證】 所設式之左邊 $=\frac{1}{2}\{\cos(3\alpha-\beta+\gamma)-\cos(3\alpha+\beta-\gamma)\}$

$+\frac{1}{2}\{\cos(3\beta-\gamma+\alpha)-\cos(3\beta+\gamma-\alpha)\}$

$+\frac{1}{2}\{\cos(3\gamma-\alpha+\beta)-\cos(3\gamma+\alpha-\beta)\}$

$=\frac{1}{2}\{\cos(3\alpha-\beta+\gamma)-\cos(3\beta+\gamma-\alpha)\}$

$+\frac{1}{2}\{\cos(3\beta-\gamma+\alpha)-\cos(3\gamma+\alpha-\beta)\}$

$+\frac{1}{2}\{\cos(3\gamma-\alpha+\beta)-\cos(3\alpha+\beta-\gamma)\}$

$=\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin(2\beta-2\alpha)+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin(2\gamma$

$-2\beta)+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin(2\alpha-2\gamma)=\sin(\alpha+\beta$

$+\gamma)\{\sin(2\beta-2\alpha)+\sin(2\gamma-2\beta)+\sin(2\alpha-2\gamma)\}$

$=\sin(\alpha+\beta+\gamma)\{-4\sin(\beta-\alpha)\sin(\gamma-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\}$

$=4\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin(\alpha-\beta)\sin(\gamma-\beta)\sin(\alpha-\gamma).$

116. 求證 $\cos 2(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(2\alpha+\beta+\gamma)+\cos(2\beta+\gamma+\alpha)$

$+\cos(2\gamma+\alpha+\beta)+\cos(\beta+\gamma)+\cos(\gamma+\alpha)+\cos(\alpha+\beta)$

$=8\cos(\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-1.$

【證】 因 $\cos(2\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\beta+\gamma)$

$=2\times\cos(\alpha+\beta+\gamma)\cos\alpha$ 等，故所設式之左邊

$=2\cos^2(\alpha+\beta+\gamma)-1+2\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

$\times\{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\}=2\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

$\times\{\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\}-1$

$=8\cos(\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\times\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}-1.$

117. $\sin(2x+\theta)+\sin(2y+\theta)+\sin(2z+\theta)-\sin(2x+2y+2z+3\theta)=4\sin(x+y+\theta)\sin(y+z+\theta)\sin(z+x+\theta).$

求證。

【證】 所設式之左邊 $=2\sin(x+y+\theta)\cos(x-y)$

$-2\sin(x+y+\theta)\cos(x+y+2z+2\theta)$

$=2\sin(x+y+\theta)\{\cos(x-y)-\cos(x+y+2z+2\theta)\}$

$=2\sin(x+y+\theta)\{2\sin(x+z+\theta)\sin(y+z+\theta)\}$

$=4\sin(x+y+\theta)\sin(x+z+\theta)\sin(y+z+\theta).$

118. 求證 $\sin(\beta+\gamma-\alpha)=\sin(\gamma+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\sin\beta\times\sin\gamma.$

【證】 所設式之左邊

$=2\sin\gamma\cos(\beta-\alpha)-2\times\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma$

$=2\sin\gamma\{\cos(\beta-\alpha)-\cos(\alpha+\beta)\}$

$=2\sin\gamma\{2\sin\alpha\sin\beta\}=4\times\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$

119. 求證 $\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta-\gamma)=4\cos\alpha\cos\beta\times\sin\gamma.$

【證】 所設式之左邊

$=2\sin(\beta+\gamma)\cos\alpha+2\times\sin(\gamma-\beta)\cos\alpha$

$=2\cos\alpha\{\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma-\beta)\}$

$=2\cos\alpha\{2\sin\gamma\cos\beta\}=4\times\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma.$

120. 求證 $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)$

$=-4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}.$

【證】 所設式之左邊 $=2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

$+2\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\beta-2\gamma+\alpha)$

$=2\times\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)-\cos\frac{1}{2}(\beta-2\gamma+\alpha)\}$

$=2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\}$

$=-4\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma).$

121. 求證 $(\sin 2A-\sin 2B)\tan(A+B)=2(\sin^2 A-\sin^2 B).$

【證】 所設式之左邊 $=2\sin(A-B)\cos(A+B)$

$\times\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=2\sin(A-B)\sin(A+B)$

$=2\times(\sin^2 A-\sin^2 B).$

122. 求證 $\cot(A+B+C)=(\cot A\cot B\times\cot C-\cot A$

$-\cot B-\cot C)/(\cot A\cot B+\cot B\cot C$

$+\cot A\cot C-1).$

【證】 由公式 $\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$,

得 $\cot(A+B+C)=\frac{\cot(A+B)\cot C-1}{\cot(A+B)+\cot C}$

$=\left(\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}\cdot\cot C-1\right)$

$$\Big/\left(\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}+\cot C\right)$$

$$=(\cot A\cot B\cot C-\cot A-\cot B-\cot C)$$

$$/(\cot A\cot B+\cot A\cot C+\cot B\cot C-1)$$

【注意】 若 $A+B+C=180°$, 則 $\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1$, 仿此, 若 $A+B+C=90°$, 則 $\cot A+\cot B+\cot C=\cot A\cot B\cot C$.

123. 求證 $\tan(A+B+C)=(\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C)/(1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A)$.

【證】 $\tan(A+B+C)=\tan\{(A+B)+C\}$

$$=\frac{\tan(A+B)+\tan C}{1-\tan(A+B)\tan C}=\left(\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}+\tan C\right)\Big/\left(1-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\cdot\tan C\right)$$

$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A}.$$

【注意】 若 $A+B+C=180°$, 則因 $\tan(A+B+C)=0$, 故 $\tan(A+B+C)$ 之式之分子應爲零. 故 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\times\tan C$. 仿此, 若 $A+B+C=90°$, 則 $\tan B\times\tan C+\tan C\tan A+\tan A\tan B=1$.

124. $\tan(p+q)A-\tan pA-\tan qA$
$=\tan(p+q)A\tan pA\tan qA.$

【證】 $\tan(p+q)A-\tan pA-\tan qA=(\tan pA+\tan qA)/(1-\tan pA\tan qA)-\tan pA-\tan qA$

$$=\frac{(\tan pA+\tan qA)\tan pA\tan qA}{1-\tan pA\tan qA}$$

$$=\frac{\tan pA+\tan qA}{1-\tan pA\tan qA}\cdot\tan pA\tan qA$$

$$=\tan(pA+qA)\tan pA\tan qA.$$

125. 求證 $\sin(2\alpha+\beta)\operatorname{cosec}\alpha-2\cos(\alpha+\beta)=\sin\beta\operatorname{cosec}\alpha.$

【證】 所設式之左邊$=\sin(2\alpha+\beta)/\sin\alpha-2\cos(\alpha+\beta)$

$$=\frac{\sin 2\alpha\cos\beta+\cos 2\alpha\sin\beta}{\sin\alpha}-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=2\cos\alpha\cos\beta+\left(\frac{1-2\sin^2\alpha}{\sin\alpha}\right)\sin\beta$$

$$-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\times\sin\beta$$

$$=\frac{1-2\sin^2\alpha}{\sin\alpha}\cdot\sin\beta+2\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\operatorname{cosec}\alpha\sin\beta-2\sin\alpha\sin\beta+2\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\operatorname{cosec}\alpha\sin\beta.$$

126. 求證 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\cos^2\alpha.$

【證】 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 及 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$, 故 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$$=\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\times\sin^2\beta\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

今將此式右邊之 $\cos^2\beta$, $\cos^2\alpha$, 分別易以 $1-\sin^2\beta$, $1-\sin^2\alpha$, 則 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$, 此卽第一部分之證明. 又 (1) 式右邊之 $\sin^2\alpha$, $\sin^2\beta$, 分別易以 $1-\cos^2\alpha$, $1-\cos^2\beta$, 則 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\cos^2\beta\times\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+\cos^2\beta\cos^2\alpha=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$, 此卽第二部分之證明.

127.求證 $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$.

【證】 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ 及 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ 故此二式之積爲 $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha\times\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta\cdots(1)$. 此式右邊之 $\cos^2\beta$ 易以 $1-\sin^2\beta$, $\sin^2\alpha$ 易以 $1-\cos^2\alpha$, 則 $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$. 此卽第一部分之證明, 又 (1) 式右邊之 $\cos^2\alpha$ 易以 $1-\sin^2\alpha$, $\sin^2\beta$ 易以 $1-\cos^2\beta$, 則 $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\cos^2\beta\sin^2\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\beta\sin^2\alpha=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$, 此卽第二部分之證明.

128. $\sin A\cos^5 A-\cos A\sin^5 A=\frac{1}{4}\sin 4A$. 求證.

【證】 所設式之左邊 $=\frac{1}{2}(\sin 2A\cos^4 A-\sin 2A\sin^4 A)$

$=\frac{1}{2}\sin 2A(\cos^4 A-\sin^4 A)$

$$=\tfrac{1}{2}\sin 2A(\cos^2 A-\sin^2 A)(\cos^2 A+\sin^2 A)$$

$$=\tfrac{1}{2}\sin 2A\cos 2A=\tfrac{1}{4}\sin 4A.$$

129. 求證 $\sec^2 A(1+\sec 2A)=2\sec 2A$。

【證】 所設式之左邊 $=\dfrac{1}{\cos^2 A}\left(1+\dfrac{1}{\cos 2A}\right)$

$$=\frac{1}{\mathrm{ccs}^2 A}\times\frac{1+\cos 2A}{\cos 2A}=\frac{1}{\cos^2 A}\times\frac{2\cos^2 A}{\cos 2A}$$

$$=\frac{2}{\cos 2A}=2\sec 2A.$$

130. 求證 $\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}\sqrt{1+\sin\theta}$.

【證】 $\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\left(\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2}$

$$=\sqrt{\left(\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\sqrt{1+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\sqrt{1+\sin\theta}.$$

131. 求證 $\cos^2\dfrac{A}{2}(1-2\cos A)^2+\sin^2\dfrac{A}{2}\times(1+2\cos A)^2=1$.

【證】 所設式之左邊 $=\cos^2\dfrac{A}{2}+\sin^2\dfrac{A}{2}-4$

$$\times\left(\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\right)\cos A+4\left(\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}\right)$$

$$\times\cos^2 A=1-4\cos^2 A+4\cos^2 A=1.$$

132. 求證 $8\sin^4\alpha=\cos 4\alpha-4\cos 2\alpha+3$.

【證】 公式 $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ 中，移項，得

$4\sin^3\alpha=3\sin\alpha-\sin 3\alpha$，兩邊以 $2\sin\alpha$ 乘之，

$8\sin^4\alpha=6\sin^2\alpha-2\sin 3\alpha\times\sin\alpha=3(2\sin^2\alpha)$

$-(\cos 2\alpha-\cos 4\alpha)=3(1-\cos 2\alpha)$

$-(\cos 2\alpha-\cos 4\alpha)=\cos 4\alpha-4\cos 2\alpha+3$.

133. $8\cos^4\alpha=\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha+3$，求證.

【證】 由公式 $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$，得 $4\cos^3\alpha$

$=\cos 3\alpha+3\cos\alpha$，兩邊以 $2\cos\alpha$ 乘之，

則 $8\cos^4\alpha=2\cos 3\alpha\cos\alpha+6\cos^2\alpha$，

或 $8\cos^4\alpha=\cos 4\alpha+\cos 2\alpha+3(\cos 2\alpha+1)$

$=\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha+3$.

134. 求證 $16\cos^5\alpha=\cos 5\alpha+5\cos 3\alpha+10\cos\alpha$.

【證】 上題之結果中，兩邊更以 $2\cos\alpha$ 乘之，則 $16\cos^5\alpha$

$=2\cos 4\alpha\cos\alpha+8\cos 2\alpha\times\cos\alpha+6\cos\alpha$，或

$16\cos^5\alpha=\cos 5\alpha+\cos 3\alpha+4(\cos 3\alpha+\cos\alpha)$

$+6\cos\alpha$，或 $16\cos^5\alpha=\cos 5\alpha+5\cos 3\alpha$

$+10\cos\alpha$.

135. 求證 $32\cos^6\alpha=\cos 6\alpha+6\cos 4\alpha+15\cos 2\alpha+10$.

【證】 上題之結果中，更以 $2\cos\alpha$ 乘之，

則 $32\cos^6\alpha=2\cos 5\alpha\cos\alpha+10\cos 3\alpha$

$\times\cos\alpha+20\cos^2\alpha=\cos 6\alpha+\cos 4\alpha+5$

$\times(\cos 4\alpha+\cos 2\alpha)+10(\cos 2\alpha+1)$

$=\cos 6\alpha+6\cos 4\alpha+15\cos 2\alpha+10$.

126. 求證 $64\cos^7\alpha=\cos 7\alpha+7\cos 5\alpha+21\cos 3\alpha+35\cos\alpha$.

【證】上題等式之兩邊，以 $2\cos\alpha$ 乘之，則 $64\cos^7\alpha=2\cos 6\alpha\cos\alpha+12\cos 4\alpha\times\cos\alpha+30\cos 2\alpha\cos\alpha+20\cos\alpha=\cos 7\alpha+\cos 5\alpha+6(\cos 5\alpha+\cos 3\alpha)+15(\cos 3\alpha+\cos\alpha)+20\cos\alpha=\cos 7\alpha+7\cos 5\alpha+21\times\cos 3\alpha+35\cos\alpha$.

137. $\tan\frac{A+B}{2}-\tan\frac{A-B}{2}=\frac{2\sin B}{\cos A+\cos B}$. 求證.

【證】所設式之左邊 $=\sin\frac{A+B}{2}\Big/\cos\frac{A+B}{2}$

$$-\sin\frac{A-B}{2}\Big/\cos\frac{A-B}{2}=\left(\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}\right.$$

$$\left.-\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}\right)\Big/\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$=2\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\right)\Big/\left(2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)$$

$$=2\sin B\Big/\left\{\cos\left(\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\cos\left(\frac{A+B}{2}-\frac{A+B}{2}\right)\right\}=\frac{2\sin B}{\cos A+\cos B}.$$

138. 求證 $\cos^3 A-\sin^3 A=\sqrt{2}\cos(45^\circ+A)(1+\sin A\cos A)$.

【證】所設式之左邊 $=(\cos A-\sin A)(\cos^2 A+\cos A\sin A+\sin^2 A)=(\cos A-\sin A)(1+\cos A\sin A)$

$=\{\sin(90^\circ-A)-\sin A\}(1+\sin A\cos A)$

$=2\sin(45^\circ-A)\cos 45^\circ(1+\sin A\cos A)$

$=2\cos(90^\circ-45^\circ+A)\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sin A\cos A)$

$=\sqrt{2}\cos(45^\circ+A)(1+\sin A\times\cos A)$.

139. $\tan^2\alpha-\tan^2\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$。求證.

【證】 所設式之左邊$=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\dfrac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}$

$=\dfrac{\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$

$=\{(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta$

$+\cos\alpha\sin\beta)\}/(\cos^2\alpha\cos^2\beta)$

$=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$.

140. $\sin^2\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos^2\dfrac{A-B}{2}+\cos^2\dfrac{A+B}{2}\times\sin^2\dfrac{A-B}{2}$

$=1-\dfrac{1}{2}\cos^2A-\dfrac{1}{2}\cos^2B$. 求證.

【證】 所設式之左邊爲

$\left(\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+\cos\dfrac{A+B}{2}\cdot\sin\dfrac{A-B}{2}\right)^2$

$-2\sin\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos\dfrac{A-B}{2}\cdot\cos\dfrac{A+B}{2}\cdot\sin\dfrac{A-B}{2}$

$=\sin^2A-\dfrac{1}{2}\sin(A+B)\times\sin(A-B)$

$=\sin^2A-\dfrac{1}{2}\sin^2A+\dfrac{1}{2}\sin^2B$

$$=\frac{1}{2}\sin^2 A+\frac{1}{2}\sin^2 B=1-\frac{1}{2}\cos^2 A-\frac{1}{2}\cos^2 B.$$

141. $\sin^3 A\cos^3 A=\frac{1}{32}(3\sin 2A-\sin 6A)$. 求證.

【證】 $\sin^3 A\cos^3 A=\frac{1}{16}(3\sin A-\sin 3A)(6\times\cos A$

$+\cos 3A)=\frac{1}{16}(9\sin A\times\cos A-3\sin 3A$

$\cos A+3\cos 3A\sin A-\sin 3A\cos 3A)$

$=\frac{1}{32}\{9\sin 2A-6\sin(3A-A)-\sin 6A\}$

$=\frac{1}{32}(3\sin 2A-\sin 6A)$.

142. 求證 $2\cos^2\alpha\cos^2\beta-2\sin^2\alpha\sin^2\beta=\cos 2\alpha+\cos 2\beta$.

【證】 所設式之左邊 $=2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha$

$\times\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$

$=2\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)=\cos 2\alpha+\cos 2\beta$.

143. 求證 $2\sin^2 A\sin^2 B+2\cos^2 A\cos^2 B$

$=1+\cos 2A\cos 2B$.

【證】 所設式之左邊 $=2\sin^2 A\sin^2 B+4\sin A$

$\times\cos A\sin B\cos B+2\cos^2 A\cos^2 B-4$

$\times\sin A\cos A\sin B\cos B=2(\sin A\sin B$

$+\cos A\cos B)^2-4\sin A\cos A\sin B\cos B$

$=2\cos^2(A-B)-\sin 2A\sin 2B$

$=1+\cos 2\times(A-B)-\sin^2 2A\sin 2B$

$=1+\cos 2A\times\cos 2B.$

144.求證 $\sin^6 A+\cos^6 A=1-\frac{3}{4}\sin^2 2A.$

【證】 $\sin^6 A+\cos^6 A=(\sin^2 A+\cos^2 A)$

$(\sin^4 A-\sin^2 A\cos^2 A+\cos^4 A)$

$=\sin^4 A-\sin^2 A\times\cos^2 A+\cos^4 A$

$=\sin^4 A+2\sin^2 A\cos^2 A+\cos^4 A-3\sin^2 A\cos^2 A$

$=(\sin^2 A+\cos^2 A)^2-\frac{3}{4}(2\sin A\cos A)^2$

$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2A.$

145.求證 $\cos^6 A-\sin^6 A=\cos 2A(1-\frac{1}{4}\times\sin^2 2A)$

$=\frac{1}{8}\cos 2A(7+\cos 4A).$

【證】 $\cos^6 A-\sin^6 A=(\cos^2 A-\sin^2 A)$

$(\cos^4 A+\sin^4 A+\sin^2 A\cos^2 A)$

$=\cos 2A\{(\cos^2 A+\sin^2 A)^2-\sin^2 A\cos^2 A\}$

$=\cos 2A\{1-\sin^2 A\cos^2 A\}=\cos 2A(1-\frac{1}{4}\sin^2 2A)$

$=\frac{1}{8}\times\cos 2A(8-2\sin^2 2A)=\frac{1}{8}(7+\cos 4A)\times\cos 2A.$

146.求證 $64(\cos^8\alpha+\sin^8\alpha)=\cos 8\alpha+28\cos 4\alpha+35.$

【證】 $64(\cos^8\alpha+\sin^8\alpha)$

$=64\{(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)^2-2\sin^4\alpha\cos^4\alpha\}$

$=64\{(1-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha)^2-2\sin^4\alpha\cos^4\alpha\}$

$=64\{(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha)^2-\frac{1}{8}\times\sin^4 2\alpha\}$

$=8\{8-8\sin^2 2\alpha+\sin^4 2\alpha\}$

$=8\times\{8-4(1-\cos 4\alpha)+\sin^4 2\alpha\}$

$=8\{8-4+4\cos 4\alpha+\sin^4 2\alpha\}$

$=8\{4+4\cos 4\alpha+\sin^4 2\alpha\}$

$=32+32\cos 4\alpha+2(1-\cos 4\alpha)^2$

$=34+28\cos 4\alpha+2\cos^2 4\alpha$

$=35+28\cos 4\alpha+(2\cos^2 4\alpha-1)$

$=35+28\cos 4\alpha+\cos 8\alpha$.

147. 求證 $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=\cos 2\alpha(1-\frac{1}{2}\times\sin^2 2\alpha)$

$=\frac{1}{8}(\cos 6\alpha+7\cos 2\alpha)$.

【證】 $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$

$(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)$

$=\cos 2\alpha(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)$

$=\cos 2\alpha\{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2-2\cos^2\alpha\times\sin^2\alpha\}$

$=\cos 2\alpha\{1-\frac{1}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha)^2\}$

$=\cos 2\alpha(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha)$, 從而 $8(\cos^8\alpha-\sin^8\alpha)$

$=8\cos 2\alpha-4\cos 2\alpha\sin^2 2\alpha$

$=8\times\cos 2\alpha-4\cos 2\alpha(1-\cos^2 2\alpha)$

$=4\cos 2\alpha+4\cos^3 2\alpha=7\cos 2\alpha+(4\cos^3 2\alpha$

$-3\times\cos 2\alpha)=7\cos 2\alpha+\cos 6\alpha$.

148. 求證 $\sin(A-B)+\sin^2 B+2\sin(A-B)\sin B\cos A$
$=\sin^2 A.$

【證】 $\sin(A-B)+\sin^2 B+2\sin(A-B)\times\sin B\cos A$
$=\sin(A-B)\{\sin(A-B)+\sin B\cos A\}$
$+\sin B\{\sin B+\sin(A-B)\times\cos A\}$
$=\sin(A-B)\sin A\cos B+\sin B\times\{\sin A-\overline{A-B})$
$+\sin(A-B)\cos A\}=\sin(A-B)\sin A\cos B$
$+\sin B\sin A\cos(A-B)=\sin A\{\sin(A-B)$
$\cos B+\cos(A-B)\times\sin B\}=\sin A.$
$\sin(A-B+B)=\sin A\cdot\sin A=\sin^2 A.$

【別證】 $\sin^2(A-B)+\sin^2 B+2\sin(A-B)\times\sin B\cos A$
$=\sin(A-B)\{\sin(A-B)+2\sin B\cos A\}$
$+\sin^2 B=\sin(A-B(\{\sin A\times\cos B+\cos A\sin B\}$
$+\sin^2 B=\sin(A-B)\times\sin(A+B)+\sin^2 B$
$=\sin^2 A-\sin^2 B+\sin^2 B=\sin^2 A.$

149. 求證 $\dfrac{\cot^2 A+1}{\cot^2 A-1}=\sec 2A.$

【證】 所設式之左邊$=\operatorname{cosec}^2 A\Big/\left(\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}-1\right)$

$=\operatorname{cosec}^2 A\Big/\dfrac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\sin^2 A}$

$=\sin^2 A\operatorname{cosec}^2 A/(\cos^2 A-\sin^2 A)$

$=\dfrac{1}{\cos^2 A-\sin A}=\dfrac{1}{\cos 2A}=\sec 2A).$

150. 求證 $\dfrac{1-\cos A}{\sin A}=\tan\dfrac{1}{2}A.$

【證】 所設式之左邊$=\dfrac{1-\left(1-2\sin^2\dfrac{A}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A}$

$=\dfrac{2\sin^2\frac{1}{2}A}{2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A}=\tan\dfrac{1}{2}A.$

151. 求證 $\dfrac{1+\cos A}{\sin A}=\cot\dfrac{1}{2}A.$

【證】 所設式之左邊$=\dfrac{1+(2\cos^2\frac{1}{2}A-1)}{2\sin\dfrac{A}{2}\cdot\cos\dfrac{A}{2}}$

$=\dfrac{2\cos^2\frac{1}{2}A}{2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}A}=\cot\dfrac{1}{2}A.$

152. 求證 $\cos 2A\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}.$

【證】 $\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=(\cos^2 A-\sin^2 A)$

$/(\cos^2 A+\sin^2 A)=\left(1-\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right)\Big/\left(1+\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right)$

$=\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}.$

153. 求證 $\dfrac{1-\tan^2(45°-A)}{1+\tan^2(45°-A)}=\sin 2A.$

【證】 $\dfrac{1-\tan^2(45°-A)}{1+\tan^2(45°-A)}$

$=\left\{1-\dfrac{\sin^2(45°-A)}{\cos^2(45°-A)}\right\}\Big/\left\{1+\dfrac{\sin^2(45°-A)}{\cos^2(45°-A)}\right\}$

$$=\frac{\cos^2(45°-A)-\sin^2(45°-A)}{\cos^2(45°-A)+\sin^2(45°-A)}$$

$$=\frac{\cos 2(45°-A)}{1}=\cos(90°-2A)=\sin 2A.$$

154.求證 $\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A.$

【證】 106題中，命 $A=B=C$，則得 $\cos 3A=\cos^3 A-3\sin^2 A\cos A=\cos^3 A-3(1-\cos^2 A\cos A)=4\cos^3 A-3\cos A.$

155.求證 $\sin 2A=\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}.$

【證】 $\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{2\sin A\cos A}{\sin^2 A+\cos^2 A}$

$$=\frac{2\sin A}{\cos A}\Big/\left(1+\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right)=\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}.$$

156.求證 $\tan 3\theta-\tan 2\theta-\tan\theta=\tan 3\theta\times\tan 2\theta\tan\theta.$

【證】 $\tan 3\theta=\tan(2\theta+\theta)=\frac{\tan 2\theta+\tan\theta}{1-\tan 2\theta\tan\theta}$，

去分母，$\tan 3\theta-\tan 3\theta\tan 2\theta\tan\theta=\tan 2\theta+\tan\theta$，即 $\tan 3\theta-\tan 2\theta-\tan\theta=\tan 3\theta\tan 2\theta\tan\theta.$

157.求證 $\sin 4A=4\sin A\cos^3 A-4\cos A\times\sin^3 A.$

【證】 $4\sin A\cos^3 A-4\cos A\sin^3 A=4\sin A\times\cos A(\cos^2 A-\sin^2 A)=2\sin 2A\cos 2A=\sin 4A.$

158. 求證 $1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha$

$=2\times\cos\alpha(2\cos^3\alpha+\cos\alpha-1)$.

【證】 所設式之左邊$=1+\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1+4\cos^3\alpha$

$-3\cos\alpha=4\cos^3\alpha+2\cos^2\alpha-2\cos\alpha$

$=2\cos\alpha(2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1)$.

159. $\sin 3A\operatorname{cosec}A-\cos 3A\sec A=2$. 求證.

【證】 $\sin 3A\operatorname{cosec}A-\cos 3A\cos A=\frac{\sin 3A}{\sin 3A}$

$-\frac{\cos 3A}{\cos A}=\frac{3\sin A-4\sin^3 A}{\sin A}$

$-(4\cos^2 A-3\times\cos A)/\cos A=3-4\sin^2 A$

$-(4\cos^2 A-3)=6-4(\sin^2 A+\cos^2 A)$

$=6-4=2$.

160. 求證 $\sin 8A=8\sin A\cos A\cos 2\times\cos 4A$.

【證】 因 $\sin 2A=2\sin A\cos A$, 故 $\sin 8A$

$=2(\sin 4A)\cos 4A=2(2\sin 2A\cos 2A)\cos 4A$

$=4(\sin 2A)\cos 2A\cos 4A=4(2\sin A\cos A)$

$\times\cos 2A\cos 4A=8\sin A\cos A\cos 2A\cos 4A$.

161. 求證 (1) $\sin 4A=\cos A(4\sin A-8\sin^3 A)$.

(2) $\cos 4A=8\cos^4 A-8\cos^2 A+1$.

【證】 (1) $\sin 4A=2\sin 2A\cos 2A=4\sin A$

$\times\cos A\cos 2A=4\sin A\cos A(1-2\sin^2 A)$

$=\cos A(4\sin A-8\sin^3 A)$.

(2) $\cos 4A=2\times\cos^2 2A-1=2(2\cos^2 A-1)^2$
$-1=8\cos^4 A-8\cos^2 A+1.$

162.求證 $\sin\theta\cos\frac{1}{2}\theta=8\sin\frac{1}{2}\theta\sin^2\frac{1}{4}(\pi-\theta)\sin^2\frac{1}{4}(\pi+\theta).$

【證】 $\sin\theta\cos\frac{1}{2}\theta=2\sin\frac{1}{2}\theta\cos^2\frac{1}{2}\theta=2\sin\frac{1}{2}\theta$
$\times\sin^2(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\theta)=8\sin\frac{1}{2}\theta\sin^2(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{4}\theta)$
$\times\cos^2(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{4}\theta)=8\sin\frac{1}{2}\theta\sin^2(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{4}\theta)$
$\times\sin^2(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{4}\theta).$

163. $\cos A-\cos 2A=6\sin^2\frac{A}{2}-8\sin^4\frac{A}{2}$,求證.

【證】 $\cos A-\cos 2A=1-2\sin^2\frac{A}{2}-(1-2\times\sin^2 A)$

$=2\sin^2 A-2\sin^2\frac{A}{2}=8\sin^2\frac{A}{2}\times\cos^2\frac{A}{2}$

$-2\sin^2\frac{A}{2}=8\sin^2\frac{A}{2}\left(1-\sin^2\frac{A}{2}\right)$

$-2\sin^2\frac{A}{2}=6\sin^2\frac{A}{2}-8\sin^4\frac{A}{2}.$

164.求證 $2\sin 2\alpha\cos\alpha+2\cos 4\alpha\sin\alpha=\sin 5\alpha+\sin\alpha.$

【證】 所設式之左邊$=\sin(2\alpha+\alpha)+\sin(2\alpha-\alpha)$
$+\sin(4\alpha+\alpha)-\sin(4\alpha-\alpha)=\sin 3\alpha+\sin\alpha$
$+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha=\sin\alpha+\sin 5\alpha.$

165.試求證 $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 6\alpha=\frac{\cos\alpha-\cos 7\alpha}{2\sin\alpha}.$

【證】 今命所設式之左邊爲 M, 則 $2M\sin\alpha$

$=2\sin 2\alpha\sin\alpha+2\sin\alpha\sin 4\alpha+2\sin 6\alpha$

$\times\sin\alpha=\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 3\alpha-\cos 5\alpha$

$+\cos 5\alpha-\cos 7\alpha=\cos\alpha-\cos 7\alpha$, 以故,

得 $M=\dfrac{\cos\alpha-\cos 7\alpha}{2\sin\alpha}$.

166. $\cos 9\alpha+\cos 7\alpha-4(\cos 5\alpha+\cos 3\alpha)+6\cos\alpha$

$=256\sin^4\alpha\cos^5\alpha$. 求證.

【證】 所設式之左邊 $=2\cos 8\alpha\cos\alpha-8\cos 4\times\alpha\cos\alpha$

$+6\cos\alpha=2\cos\alpha(\cos 8\alpha-4\cos 4\alpha+3)$

$=2\cos\alpha\{2\cos^2 4\alpha-1-4\cos 4\alpha+3\}$

$=4\cos\alpha(\cos 4\alpha-1)^2=4\cos\alpha(-2\sin^2 2\alpha)^2$

$=16\cos\alpha\sin^4 2\alpha=16\cos\alpha\times 16\sin^4\alpha\cos^4\alpha$

$=256\sin^4\alpha\cos^5\alpha$.

167. $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma+\cos 2(\alpha+\beta+\gamma)$

$=4\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma+\alpha)$, 求證.

【證】 $\cos 2\alpha+\cos 2\beta=2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$, $\cos 2\gamma$

$+\cos 2(\alpha+\beta+\gamma)=2\cos(2\gamma+\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)$,

故其和 $=2\cos(\alpha+\beta)\times\{\cos(\alpha-\beta)$

$+\cos(2\gamma+\alpha+\beta)\}=2\cos(\alpha+\beta)2\cos(\alpha+\gamma)$

$\cos(\beta+\gamma)=4\cos(\alpha+\beta)\times\cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma+\alpha)$.

168. 求證 $\sin 3\theta-\sin\theta-\sin 5\theta=\sin 3\theta\times(1-2\cos 2\theta)$.

【證】 $\sin 3\theta-\sin\theta-\sin 5\theta=\sin 3\theta-(\sin\theta+\sin 5\theta)$

$=\sin 3\theta-2\sin\dfrac{\theta+5\theta}{2}\cos\dfrac{5\theta-\theta}{2}=\sin 3\theta$

$-2\sin 3\theta\cos 2\theta=\sin 3\theta(1-2\times\cos 2\theta)$.

169.求證 $\cos 10A+\cos 8A+3\cos 4A+3\cos 2A$
$=8\cos A\cos^3 3A$.

【證】 $\cos 10A+\cos 8A+3\cos 4A+3\cos 2A$
$=2\cos 9A\cos A+6\cos 3A\cos A=2$
$\cos A(\cos 9A+3\cos 3A)=2\cos A(4\times\cos^3 3A$.
$-3\cos 3A+3\cos 3A=8\cos A\times\cos^3 3A$.

170.$\cot A+\cot 2A+\cot 4A=\operatorname{cosec} 4A$
$\times(2+2\cos 2A+3\cos 4A)$.求證.

【證】 $\cot A+\cot 2A+\cot 4A=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos 2A}{\sin 2A}$

$+\frac{\cos 4A}{\sin 4A}=\frac{2\cos^2 A}{2\sin A\cos A}+\frac{\cos 2A}{\sin 2A}$

$+\frac{\cos 4A}{\sin 4A}=\frac{1+2\cos 2A}{\sin 2A}+\frac{\cos 4A}{\sin 4A}$

$=\frac{2\cos 2A(1+2\cos 2A)}{2\sin 2A\cos 2A}+\frac{\cos 4A}{\sin 4A}$

$=\frac{1}{\sin 4A}\{2\cos 2A+4\cos^2 2A+\cos 4A\}$

$=\frac{1}{\sin 4A}\{2\cos 2A+2(1+\cos 4A)+\cos 4A\}$

$=\operatorname{cosec} 4A\{2+2\cos 2A+3\times\cos 4A\}$.

171.求證 $\sin 4\alpha\tan^4\alpha+4\tan^2\alpha+2\times\sin 4\alpha\tan^2\alpha$
$-4\tan\alpha+\sin 4\alpha=0$.

【證】 所設式之左邊 $=\sin 4\alpha(\tan^2\alpha+2\times\tan^2\alpha+1)$ $+4\tan\alpha(\tan^2\alpha-1)=\sin 4\alpha\times(\tan^2\alpha+1)$ $+4\tan\alpha\left(\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)=\sin 4\alpha\sec^4\alpha$ $-4\tan\alpha\cos 2\alpha\sec^2\alpha=2\sin 2\alpha\cos^2\alpha\sec^4\alpha$ $-4\tan\alpha\cos^2\alpha\sec^2\alpha=2\cos 2\alpha\sec^2\alpha$ $(\sin 2\alpha\sec^2\alpha-2\tan\alpha)=2\times\cos 2\alpha$ $\sec^2\alpha(2\sin\alpha\cos\alpha\sec^2\alpha-2\tan\alpha)=4\cos 2\alpha$ $\sec^2\alpha(\tan\alpha-\tan\alpha)=0.$

172. 求證 $\operatorname{cosec} 2A+\cot 4A=\cot A-\operatorname{cosec} 4A.$

【證】 $\operatorname{cosec} 2A+\cot 4A=\dfrac{1}{\sin 2A}+\dfrac{\cos 4A}{\sin 4A}$

$$=\frac{2\cos 2A}{2\cos 2A\sin 2A}+\frac{\cos 4A}{\sin 4A}$$

$$=\frac{2\cos 2A+\cos 4A}{\sin 4A}$$

$$=\frac{2\cos 2A+2\cos^2 2A-1}{\sin 4A}$$

$$=\frac{2\cos 2A(1+\cos 2A)-1}{\sin 4A}$$

$$=\frac{2\cos 2A(1+\cos 2A)}{2\sin^2 A\cos 2A}-\frac{1}{\sin 4A}$$

$$=\frac{1+\cos 2A}{\sin 2A}-\frac{1}{\sin 4A}$$

$$=\frac{2\cos^2 A}{2\sin A\cos A}-\frac{1}{\sin 4A}=\frac{\cos A}{\sin A}-\frac{1}{\sin 4A}$$

$=\cot A-\operatorname{cosec} 4A.$

173. 求證 $\sin nA\operatorname{cosec}^2 A\sec A-\cos nA\times\sec^2 A\operatorname{cosec} A$

$=4\sin(n-1)A\operatorname{cosec}^2 2A.$

【證】 $\sin nA\operatorname{cosec}^2 A\cos A-\cos nA\cos^2 A\times\operatorname{cosec} A$

$$=\frac{\sin nA}{\cos A\sin^2 A}-\frac{\cos nA}{\cos^2 A\sin A}$$

$$=\frac{\sin nA\cos A-\cos nA\sin A}{\sin^2 A\cos^2 A}$$

$$=\frac{4\sin(nA-A)}{4\sin^2 A\cos^2 A}=\frac{4\sin(nA-A)}{\sin^2 2A}$$

$=4\sin(nA-A)\operatorname{cosec}^2 2A.$

174.求證 $\cos^3 A.\dfrac{\sin 3A}{3}+\sin^3 A.\dfrac{\cos 3A}{3}=\dfrac{\sin 4A}{4}.$

【證】 $\dfrac{\cos^3 A\sin 3A}{3}+\dfrac{\sin^3 A\cos 3A}{3}$

$=\frac{1}{12}(3\times\cos A+\cos 3A)\sin 3A+\frac{1}{12}(3\sin A-\sin 3A)\times\cos 3A=\frac{1}{4}(\sin 3A\cos A+\cos 3A\times\sin A)=\frac{1}{4}\sin(3A+A)=\frac{1}{4}\sin 4A.$

175.求證 $\sin 3A\sin^2 A+\cos 3A\cos^3 A=\cos^3 2A.$

【證】 $\sin 3A\sin^3 A+\cos 3A\cos^3 A=(3\sin A-4\sin^3 A)\sin^3 A+(4\cos^3 A-3\cos A)\cos^3 A$

$=3(\sin^4 A-\cos^4 A)-4\sin^6 A+4\cos^6 A$

$=3\times(\sin^4 A-\cos^4 A)(\sin^2 A+\cos^2 A)-4\sin^6 A+4\cos^6 A=\cos^6 A-3\cos^4 A\sin^2 A+3\cos^2 A\times\sin^4 A-\sin^6 A=(\cos^2 A-\sin^2 A)^3=\cos^3 2A.$

176. $\tan\alpha+2\tan 2\alpha+4\tan 4\alpha=\cot\alpha-8\cot 8\alpha$.求證.

【證】 $\tan\alpha+2\tan 2a+4\tan 4a+8\cot 8a$

$$=\tan\alpha+2\tan 2\alpha+4\tan 4\alpha+\frac{8}{\tan 8\alpha}$$

$$=\tan\alpha+2\tan 2\alpha+4\tan 4a+\frac{8(1-\tan^2 4\alpha)}{2\tan 4\alpha}$$

$$=\tan\alpha+2\tan 2\alpha+\frac{4}{\tan 4\alpha}$$

$$=\tan\alpha+2\times\tan 2\alpha+4(1-\tan^2 2a)/2\tan 2\alpha$$

$$=\tan\alpha+\frac{2}{\tan 2\alpha}=\tan\alpha+\frac{2(1-\tan^2\alpha)}{2\tan\alpha}$$

$$=\frac{1}{\tan\alpha}=\cot\alpha.\quad\therefore\ \tan\alpha+2\tan 2\alpha+4\tan 4\alpha$$

$$=\cot\alpha-8\cot 8\alpha.$$

177.求證 $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 6\alpha+\sin 8\alpha=4\sin 5\alpha$
$\cos 2\alpha\cos\alpha$.

【證】 所設式之左邊$=(\sin 2\alpha+\sin 4\alpha)+(\sin 6\alpha+\sin 8\alpha)$

$$=2\sin\frac{2\alpha+4\alpha}{2}\cos\frac{4\alpha-2\alpha}{2}+2\sin\frac{6\alpha+8\alpha}{2}$$

$$\cos\frac{8\alpha-6\alpha}{2}=2\sin 3\alpha\cos\alpha+2\sin 7a\cos\alpha$$

$$=2\cos\alpha(\sin 3\alpha+\sin 7\alpha)$$

$$=2\cos\alpha\times 2\sin\frac{3\alpha+7\alpha}{2}\cos\frac{7\alpha-3\alpha}{2}$$

$$=4\times\cos\alpha\sin 5\alpha\cos 2\alpha.$$

178. $\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}2\alpha+\operatorname{cosec}2\alpha\operatorname{cosec}3\alpha=2\cot\alpha\operatorname{cosec}3\alpha$
$=\operatorname{cosec}\alpha(\cot\alpha-\cot 3\alpha)$.求證.

【證】 將所設式之左邊變形，得$\dfrac{1}{\sin\alpha\sin 2\alpha}$

$$+\frac{1}{\sin 2\alpha\sin 3\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha}$$

$(\sin 3\alpha+\sin \alpha)=\frac{1}{\sin \alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha}$

$\left(2 \sin \frac{3\alpha+\alpha}{2}\times \cos \frac{3\alpha-\alpha}{2}\right)$

$=\frac{2 \sin 2\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha}=2\times \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\cdot \frac{1}{\sin 3\alpha}$

$=2 \cot \alpha \operatorname{cosec} 3\alpha$. 又 $\operatorname{cosec} \alpha(\cot \alpha-\cot 3\alpha)$

$=\frac{1}{\sin \alpha}\left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}-\frac{\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha}\right)=\frac{1}{\sin \alpha}$

$\times \frac{\sin (3\alpha-\alpha)}{\sin \alpha \sin 3\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin^2 \alpha \sin 3\alpha}$

$=\frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha \sin 3\alpha}=2 \cot \alpha \operatorname{cosec} 3\alpha$.

$\therefore$ $\operatorname{cosec} \alpha \operatorname{cosec} 2\alpha+\operatorname{cosec} 2\alpha \operatorname{cosec} 3\alpha$

$=2 \cot \alpha \operatorname{cosec} 3\alpha=\operatorname{cosec} \alpha(\cot \alpha-\cot 3\alpha)$.

179. $\cos A+\cos 3A+\cos 5A+\cos 7A=\frac{\sin 8A}{2 \sin A}$

$=4 \cos A \cos 2A \cos 4A$.求證.

【證】 今爲簡便計,命所設式之左邊爲 S, 則 $2S \sin A$

$=2 \sin A \cos A+2 \sin A \cos 3A+2 \sin A \cos 5A$

$+2 \sin A \cos 7A=\sin 2A+\sin 4A-\sin 2A$

$+\sin 6A-\sin 4A+\sin 8A-\sin 6A=\sin 8A$,

$\therefore$ $S=\frac{\sin 8A}{2 \sin A}$. 又所設式之左邊

$=(\cos A+\cos 7A)+(\cos 3A+\cos 5A)$.

$=2 \cos 4A \cos 3A+2 \cos 4A \cos A$

$=2 \cos 4A(\cos 3A+\cos A)$

$=2 \cos 4A(2\times\cos 2A \cos A)$

$=4 \cos A \cos 2A \cos 4A$.

180. 求證 $\sin 5\alpha+\cos 5\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)$
$\times(2\cos 4\alpha+2\sin 2\alpha-1)$.

【證】 $\sin 5\alpha+\cos 5\alpha=\sin(4\alpha+\alpha)+\cos(4\alpha+\alpha)$
$=\cos 4\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)-\sin 4\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)$
$=\cos 4\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)-2\sin 2\alpha$
$\cos 2\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)=\cos 4\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)$
$-2\sin 2\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)$
$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\{\cos 4\alpha+2\sin 2\alpha\times(\sin\alpha-\cos\alpha)^2\}$
$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\{\cos 4\alpha+2\sin 2\alpha(1-\sin 2\alpha)\}$
$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\times\{\cos 4\alpha+2\sin 2\alpha-2\sin^2 2\alpha\}$
$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\{\cos 4\alpha+2\sin 2\alpha-1$
$+(1-2\sin^2 2\alpha)\}=(\sin\alpha+\cos\alpha)\{\cos 4\alpha$
$+2\sin 2\alpha-1+\cos 4\alpha\}$. 故如題所言.

181. 求證 $\sin 5\alpha=16\sin^5\alpha-20\sin^3\alpha+5\sin\alpha$.

【證】 $\sin 5\alpha=\sin(3\alpha+2\alpha)=\sin 3\alpha\times\cos 2\alpha$
$+\cos 3\alpha\sin 2\alpha=(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)\times(1-2\sin^2\alpha)$
$+(4\cos^3\alpha-4\cos\alpha)\times 2\sin\alpha\times\cos\alpha$
$=(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)(1-2\sin^2\alpha)$
$+(4\cos^2\alpha-3)\times 2\sin\alpha\cos^2\alpha$
$=(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)(1-2\sin^2\alpha)$
$+(1-4\sin^2\alpha)\times 2\times\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)$
$=5\sin\alpha-20\sin^3\alpha+16\sin^5\alpha$.

182. 求證 (1) $\sin 6\alpha=\cos\alpha(6\sin\alpha-32\times\sin^3\alpha+32\sin^5\alpha)$.

(2) $\sin 6\alpha = 2\sin\alpha \times (16\cos^5\alpha - 16\cos^3\alpha + 3\cos\alpha)$.

(3) $\cos 6\alpha = -(1 - 18\cos^2\alpha + 48\cos^4\alpha - 32\cos^6\alpha)$.

【證】 (1) $\sin 6\alpha = 3\sin 2\alpha - 4\sin^3 2\alpha$

$= \sin 2a \times \{3 - 4\sin^2 2\alpha\} = 2\sin\alpha$

$\cos\alpha\{3 - 4(2\sin\alpha \times \cos\alpha)^2\}$

$= 2\sin\alpha\cos\alpha\{3 - 16\sin^2\alpha\cos^2\alpha\}$

$= 2\sin\alpha\cos\alpha\{3 - 16\sin^2\alpha(1 - \sin^2\alpha)\}$

$= 2 \times \sin\alpha\cos\alpha\{3 - 16\sin^2\alpha + 16\sin^4\alpha\}$

$= \cos\alpha \times \{6\sin\alpha - 32\sin^3\alpha + 32\sin^5\alpha\}$.

(2) $\sin 6\alpha = 2\sin 3\alpha\cos 3\alpha$

$= 2(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)(4 \times \cos^3\alpha - 3\cos\alpha)$

$= 2\sin\alpha(3 - 4\sin^2\alpha) \times (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)$

$= 2\sin\alpha\{3 - 4(1 - \cos^2\alpha)\}(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)$

$= 2\sin\alpha(4\cos^2\alpha - 1)(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)$

$= 2\sin\alpha(16\cos^5\alpha - 16\cos^3\alpha + 3\cos\alpha)$.

(3) $\cos 6\alpha = 4\cos^3 2\alpha - 3\cos 2\alpha$

$= 4(2\cos^2\alpha - 1)^3 - 3(2\cos^2\alpha - 1)$

$= 4(8\cos^6\alpha - 12\cos^4\alpha + 6\cos^2\alpha - 1) - 6$

$\times \cos^2\alpha + 3 = 32\cos^6\alpha - 48\cos^4\alpha$

$+ 24\cos^2\alpha - 4 - 6\cos^2\alpha + 3$

$= -(1 - 18\cos^2\alpha + 48\cos^4\alpha - 32\cos^6\alpha)$.

183. 求證 $\sin 7\alpha=7\sin\alpha-56\sin^3\alpha+112\sin^5\alpha-64\sin^7\alpha$.

【證】 (1) $\sin 7\alpha=\sin(4\alpha+3\alpha)=\sin 4\alpha\times\cos 3\alpha+\cos 4\alpha$
$\sin 3\alpha=2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\times\cos 3\alpha+(1-2\sin^2 2\alpha)$
$(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)=4\sin\alpha\cos\alpha(1-2\sin^2\alpha)$
$(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)+(1-8\sin^2\alpha\cos^2\alpha)$
$(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)=4\times(\sin\alpha-2\sin^3\alpha)$
$\cos^2\alpha(4\cos^2\alpha-3)+\{1-8\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)\}$
$(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)=4\times(\sin\alpha-2\sin^3\alpha)$
$(1-\sin^2\alpha)(1-4\sin^2\alpha)+\{1-8\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)\}$
$(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)=7\sin\alpha-56\sin^3\alpha+112$
$\sin^5\alpha-64\cos^7\alpha$.

184. 求證 $\cos^2 2A=(\cos A-\sin 3A)^2+2\times\cos A\sin 3A$
$(\cos A-\sin A)^2$.

【證】 $(\cos A-\sin 3A)^2+2\cos A\sin 3A(\cos A-\sin A)^2$
$=\cos^2 A+\sin^2 3A-2\cos A\sin 3A$
$+2\cos A\sin 3A(1-2\sin A\cos A)$
$=\cos^2 A+\sin^2 3A-2\cos A\sin 3A\sin^2 A$
$=\cos A\{\cos A-\sin 3A\sin 2A\}+\sin 3A\{\sin 3A$
$-\cos A\times\sin 2A\}=\cos A\{\cos(3A+2A)-\sin 3A$
$\times\sin 2A\}+\sin 3A\{\sin(2A+A)-\cos A\times\sin 2A\}$
$=\cos A\cos 3A\cos 2A+\sin 3A\sin A\times\cos 2A$
$=\cos 2A\{\cos 3A\cos A-\sin 3A\times\sin A\}$
$=\cos^2 A\cos(3A-A)=\cos 2A\cos 2A=\cos^2 2A$.

185.求證 $\cos^2(A-B)+\cos^2 B-2\cos(A-B)\cos A\cos B$
$=\sin^2 A$.

【證】 $\cos^2(A-B)+\cos^2 B-2\cos(A-B)$
$\times\cos A\cos B=\cos(A-B)\{\cos(A-B)-\cos A$
$\times\cos B\}+\cos B\{\cos B-\cos(A-B)\cos A\}$
$=\cos(A-B)\sin A\sin B+\cos B\{\cos(A-\overline{A-B})$
$-\cos(A-B)\cos A\}=\cos(A-B)\times\sin A\sin B$
$+\cos B\sin A\sin(A-B)=\sin A\times\{\cos(A-B)$
$\sin B+\sin(A-B)\cos B\}=\sin A\sin(A-B+B)$
$=\sin A\sin A=\sin^2 A$.

【別證】 $\cos^2(A-B)+\cos^2 B-2\cos(A-B)\times\cos A\cos B$
$=\cos(A-B)\{\cos(A-B)-2\times\cos A\cos B\}$
$+\cos^2 B=\cos(A-B)\{\sin A\times\sin B-\cos A$
$\cos B\}+\cos^2 B=-\cos(A-B)\times\cos(A+B)$
$+\cos^2 B=-\cos^2 B+\sin^2 A+\cos^2 B=\sin^2 A$.

186.求證 $\sin nA\cos A+\cos nA\sin A=\sin(n+1)A$.

【證】 公式 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$中，命
$\alpha=nA$，$\beta=A$，則 $\sin nA\cos A+\cos nA\sin A$
$=\sin(n+1)A$.

187.求證 $\cos(n+1)\alpha\cos(n-1)\alpha+\sin^2\alpha=\cos^2 n\alpha$.

【證】 由公式 $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$
$\cos(n+1)\alpha\cos(n-1)=\cos(n\alpha+\alpha)\cos(n\alpha-\alpha)$
$=\cos^2 n\alpha-\sin^2\alpha$，故所設式之左邊等於$\cos^2 n\alpha$

$-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha=\cos^2 n\alpha$.

188. 求證 $\cos nA\cos(n+2)A-\cos^2(n+1)A+\sin^2 A=0$.

【證】 $\cos nA\cos(n+2)A=\cos\{(n+1)A-A\}$

$\times\cos\{(n+1)A+A\}=\cos^2(n+1)A-\sin^2 A$,

故 $\cos nA\cos(n+2)A-\cos^2(n+1)A+\sin^2 A=0$.

189. 求證 $\sin\frac{A}{2}(1+2\cos A+\cos 2A)=\sin 2A\cdot\cos\frac{A}{2}$.

【證】 所設式之左邊 $=\sin\frac{A}{2}(2\cos A+2\times\cos^2 A)$

$=2\sin\frac{A}{2}\cos A(1+\cos A)=2\cos\frac{A}{2}\times\sin A$

$\cos A=\sin 2A\cos\frac{A}{2}$.

190. $\sin\theta\sin\phi=\cos^2\frac{\theta-\phi}{2}-\cos^2\frac{\theta+\phi}{2}$. 求證.

【證】 由公式 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$,

可知 $\cos^2\frac{\theta-\phi}{2}-\cos^2\frac{\theta+\phi}{2}$,

卽 $\sin^2\frac{\theta+\phi}{2}-\sin^2\frac{\theta-\phi}{2}$

$=\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}+\frac{\theta-\phi}{2}\right)\times\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}-\frac{\theta-\phi}{2}\right)$

$=\sin\theta\sin\phi$.

191. 求證 $\{\sec A+\operatorname{cosec} A(1+\sec A)\}\times\{1-\tan^2\frac{1}{2}A\}$

$\{1-\tan^2\frac{1}{4}A\}=(\sec\frac{1}{2}A+\operatorname{cosec}\frac{1}{2}A)\sec^2\frac{A}{2}$.

【證】 $\sec A+\operatorname{cosec} A(1+\sec A)=\dfrac{1}{\cos A}$

$$+\frac{1}{\sin A}\left(1+\frac{1}{\cos A}\right)=\frac{1+\cos A+\sin A}{\cos A\sin A}$$

$$=\frac{2\cos^2\frac{1}{2}A+2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A}{2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A\cos A}=\frac{\cos\frac{1}{2}A+\sin\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}A\cos A}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}A}{\cos A}(\sec\frac{1}{2}A+\operatorname{cosec}\frac{1}{2}A),\ 1-\tan^2\frac{1}{2}A$$

$$=\frac{\cos^2\frac{1}{2}A-\sin^2\frac{1}{2}A}{\cos^2\frac{1}{2}A}=\frac{\cos A}{\cos^2\frac{1}{2}A},\ 1-\tan^2\frac{1}{4}A$$

$$=\frac{\cos^2\frac{1}{4}A-\sin^2\frac{1}{4}A}{\cos^2\frac{1}{4}A}=\frac{\cos\frac{1}{3}A}{\cos^2\frac{1}{4}A}.$$

將以上三式各邊相乘，卽得所求結果.

192.**求證** $\sec 2A-\cos 2A=\dfrac{4\tan^2 A}{1-\tan^4 A}$.

【證】 所設式之左邊$=\dfrac{1}{\cos 2A}-\cos 2A=\dfrac{1-\cos^2 2A}{\cos 2A}$

$$=\frac{\sin^2 2A}{\cos 2A}=\frac{4\sin^2 A\cos^2 A}{\cos^2 A-\sin^2 A}=\frac{4\sin^2 A}{1-\tan^2 A}$$

$$=\frac{4\sin^2 A\sec^2 A}{1-\tan^4 A}=\frac{4\tan^2 A}{1-\tan^4 A}.$$

193.**求證** $\tan A+\frac{1}{2}\cos 2A\sec A\operatorname{cosec} A=\operatorname{cosec} 2A$.

【證】 所設式之左邊$=\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\cos 2A}{2\cos A\sin A}$

$$=\frac{2\sin}{2\sin A\cos A}+\frac{1-2\sin^2 A}{2\sin A\cos A}=\frac{1}{\sin 2A}$$

$=\operatorname{cosec} 2A$.

194.求證 $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)=4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$.

【證】 所設式之左邊$=(\cos\alpha+\cos\beta)+\{\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)\}=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
$+2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+2\gamma)$
$=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+2\gamma)\}$
$=2\times\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\}$
$=4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$.

195.將 $4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ 化成四正弦和之形.

【解】 所設式$=2(2\sin\alpha\sin\beta)\sin\gamma$
$=2\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}\sin\gamma$
$=2\cos(\alpha-\beta)\sin\gamma-2\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma$
$=\sin(\alpha-\beta+\gamma)-\sin(\alpha-\beta-\gamma)-\{\sin(\alpha+\beta+\gamma)$
$-\sin(\alpha+\beta-\gamma)\}=\sin(\alpha-\beta+\gamma)+\sin(-a+\beta+\gamma)$
$+\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(-\alpha-\beta-\gamma)$.

196.將 $4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ 化成四餘弦和之形.

【解】 所設式$=(2\cos\alpha\cos\beta)\cos\gamma$
$=2\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}\cos\gamma$
$=2\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma+2\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma$
$=\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)$
$+\cos(\alpha-\beta+\gamma)+\cos(\alpha-\beta-\gamma)$.

197.求證 $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-4\cos\frac{1}{2}\times\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma$
$=2\cos\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma-\pi)\{\cos\frac{1}{4}\times(3\alpha-\beta-\gamma+\pi)$

$+\cos\frac{1}{4}(3\beta-\gamma-\alpha+\pi)+\cos\frac{1}{4}(3\gamma-\alpha-\beta+\pi)$

$+\cos\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma+\pi)\}$

【證】 由上題 $4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma=\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$

$+\cos\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$,

故左邊爲$\left(\sin\alpha-\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right)$

$+\left(\sin\beta-\cos\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}\right)+\left(\sin\gamma-\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right)$

$-\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$, 然 $\sin\alpha-\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$

$=\sin\alpha-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\alpha-\beta-\gamma}{4}\right)$

$\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}-\frac{\pi}{4}\right)$, 同樣, $\sin\beta-\cos\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}$

$=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\beta-\gamma-\alpha}{4}\right)\times\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}-\frac{\pi}{4}\right)$

$\sin\gamma-\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\gamma-\alpha-\beta}{4}\right)$

$\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}-\frac{\pi}{4}\right)$, 及 $-\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$

$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}-\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}-\frac{\pi}{4}\right)$，將是等諸式之兩邊相加，則

可徑得上之結果.

198. 求證 $(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\{\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma-\cos(\beta+\gamma)-\cos(\gamma+\alpha)-\cos(\alpha+\beta)\}-(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)\{\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma-\sin(\beta+\gamma)-\sin(\gamma+\alpha)-\sin(\alpha+\beta)\}=\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma-3\times\cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

【證】 今爲簡便計，命 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 分別爲 l, m, n, 及 $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ 分別爲 p, q, r. 於是因 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$, 及 $\cos(\beta+\gamma)=\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma$ 等，故所設式之左邊爲 $(l+m+n)\{l^2-p^2+m^2-q^2+n^2-r^2-(mn-qr)-(ln-pr)-(lm-pq)\}-p+q+r)\{2lp+2mq+2nr-(qn+mr)(rl+np)-(pm+lq)\}=(l+m+n)\{l^2+m^2+n^2-lm-mn-ln)-(p^2+q^2+r^2-pq-qr-pr)\}-p+q+r)\{l\times(2p-q-r)+m(2q-p-r)+n(2r-p-q)\}=l^3+m^3+n^3-3lmn-3l(p^2-q^2)-3m(q^2-pr)-3n(r^2-pq)=l(l^2-3p^2)+m(m^2-3q^2)+n(n^2-3r^2)-3(lmn=lqr-mpr-npq)$ ……(1). 然 $l(l^2-3p^2)=l\{l^2-3(1-l^2)\}=4l^3-3l=\cos 3a$ 等，及 $lmn-lqr-mpr-npq$ 等於 $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$. 以之代入 (1)，知所設式之右邊爲 $\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma-3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

199. 求證 $(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)\{\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma-\cos(\beta+\gamma)-\cos(\gamma+\alpha)-\cos(\alpha+\beta)\}+(\cos\alpha$

$+\cos\beta+\cos\gamma)\{\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma$

$-\sin(\beta+\gamma)-\sin(\gamma+\alpha)-\sin(\alpha+\beta)\}=\sin 3\alpha$

$+\sin 3\beta+\sin 3\gamma-3\times\sin(\alpha+\beta+\gamma)$。

【證】。得用與上題完全相同之法證之。

200. $\frac{1}{2}\tan A\operatorname{cosec}^2\frac{A}{2}-\cot\frac{A}{2}=\tan A$. 求證.

【證】 所設式之左邊 $=\tan A\left(\frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}A}-\frac{\cos A}{2\sin^2\frac{1}{2}A}\right)$

$$=\tan A\times\frac{1-\cos A}{2\sin^2\frac{1}{2}A}=\tan A.$$

201. 求證 $\cos\beta\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma-\delta}{2}+\cos\gamma\times\sin\left\{(\alpha+\gamma)/2\right\}$

$\sin\frac{\delta-\beta}{2}+\cos\delta\sin\frac{\alpha+\delta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\gamma}{2}=2\sin\frac{\gamma-\delta}{2}\cdot\sin\frac{\delta-\beta}{2}$

$\cdot\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\sin\{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)/2\}$

【證】 茲 $\cos\beta\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma-\delta}{2}=\frac{1}{2}\cos\beta$

$$\times\left\{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma+\delta)-\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\delta)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\cos\frac{\alpha-\beta-\gamma+\delta}{2}+\cos\frac{\alpha+3\beta-\gamma+\delta}{2}\right.$$

$$\left.-\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma-\delta}{2}-\cos\frac{\alpha+3\beta+\gamma-\delta}{2}\right\},$$

其他二項亦可化成同樣之式，以故，可知此三式和

應爲 $\frac{1}{4}\left\{\cos[(\alpha+3\beta-\gamma+\delta)/2]-\cos\frac{\alpha+3\gamma+\delta-\beta}{2}\right\}$,

及呈同樣形式之他二式之和，此處所示之式爲$\frac{1}{2}$

$\sin(\gamma-\beta)\times\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$，

故所設式之左邊爲$\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$

與$\sin(\gamma-\beta)+\sin(\delta-\gamma)+\sin(\beta-\delta)$ 之積，

而 $\sin(\gamma-\beta)+\sin(\delta-\gamma)+\sin(\beta-\delta)$，

應等於 $-4\times\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\delta-\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\delta}{2}$，

故所設式之左邊等於$-2\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\delta-\gamma}{2}\cdot$

$\sin\frac{\beta-\delta}{3}\cdot\sin\{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)/2\}$.

202.求證$\frac{1+\cos\theta+\cos\frac{1}{2}\theta}{\sin\theta+\sin\frac{1}{2}\theta}=\cot\frac{\theta}{2}$.

【證】 所設式之左邊$=\frac{1+(2\cos^2\frac{1}{2}\theta-1)+\cos\frac{1}{2}\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta+\sin\frac{1}{2}\theta}$

$=\frac{2\cos^2\frac{1}{2}\theta+\cos\frac{1}{2}\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta+\sin\frac{1}{2}\theta}=\frac{\cos\frac{1}{2}\theta(2\cos\frac{1}{2}\theta+1)}{\sin\frac{1}{2}\theta(2\cos\frac{1}{2}\theta+)}$

$=\frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}=\cot\frac{1}{2}\theta$.

203.求證$\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A}\cdot\frac{\cos A}{1+\cos A}=\tan\frac{A}{2}$.

【證】 所設式之左邊$=\frac{2\sin A\cos A}{1+(2\cos^2 A-1)}$

$$\times\left\{\cos A\Big/\left[1+\left(2\cos^2\frac{A}{2}-1\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{2\sin A\cos A}{2\cos^2 A}\left(\cos A/2\cos^2\frac{A}{2}\right)$$

$$=\sin A/2\cos^2\frac{A}{2}=2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\Big/2\cos^2\frac{A}{2}$$

$$=\sin\frac{A}{2}\Big/\cos\frac{A}{2}=\tan\frac{A}{2}.$$

【別證】 $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{\sin A\cdot 2\cos^2 A}{(1+\cos A)(1+\cos 2A)}$

$$=\frac{\cos A}{1+\cos A}\cdot\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A}.$$

204. 求證 $\tan\frac{A}{2}=\frac{1+\sin A-\cos A}{1+\sin A+\cos A}$.

【證】 $\frac{1+\sin A-\cos A}{1+\sin A+\cos A}$

$$=\frac{1+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}-\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)}{1+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+\left(2\cos^2\frac{A}{2}-1\right)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\cos^2\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)}{2\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$= \tan\frac{A}{2}$.

205．求證 $\frac{\sin(A+B)+\sin(A-B)}{\cos(A+B)+\cos(A-B)}=\tan A$.

【證】 所設式之左邊 $=\{(\sin A\cos B+\cos A\times\sin B)+(\sin A\cos B-\cos A\sin B)\}/\{(\cos A\cos B-\sin A\sin B)+(\cos A\cos B+\sin A\sin B)\}$

$=\frac{2\sin A\cos B}{2\cos A\cos B}=\frac{\sin A}{\cos A}=\tan A$.

206．求證 $\frac{4\tan A(1-\tan^2 A)}{(1+\tan^2 A)^2}=\sin 4A$.

【證】 $\frac{4\tan A(1-\tan^2 A)}{(1+\tan^2 A)^2}$

$=\frac{4\sin A}{\cos A}\left(1-\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right)\Big/\left(1+\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right)^2$

$=\frac{4\sin A\cos A(\cos^2 A-\sin^2 A)}{(\cos^2 A+\sin^2 A)^2}$

$=2\sin 2A\cos 2A=\sin 4A$.

207．求證 $\frac{3\sin A-\sin 3A}{\cos 3A+3\cos A}=\tan^3 A$.

【證】 因 $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$，$\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$，故以此代入所設等式左邊之 $\sin 3A$，$\cos 3A$ 則得 $\frac{4\sin^3 A}{4\cos^3 A}$，即 $\tan^3 A$，故所設等式恆成立．

208．求證 $\frac{2\tan A-\sin 2A}{2\cot A-\sin 2A}=\tan^4 A$.

【證】　所設式之左邊

$$=\frac{2\tan A\sin A\cot A-2\sin^2 A\cos^2 A}{2\cot A\sin A\cos A-2\sin^2 A\cos^2 A}$$

$$=\frac{\sin^2 A-\sin^2 A\cos^2 A}{\cos^2 A-\sin^2 A\cos^2 A}$$

$$=\frac{\sin^2 A(1-\cos^2 A)}{\cos^2 A(1-\sin^2 A}=\frac{\sin^4 A}{\sin^4 A}=\tan^4 A.$$

209．求證 $\dfrac{\cos 7\theta+\cos 3\theta-\cos 5\theta-\cos\theta}{\sin 7\theta-\sin 3\theta-\sin 5\theta+\sin\theta}=\cot 2\theta.$

【證】　所設式之左邊

$$=\frac{(\cos 7\theta+\cos 3\theta)-(\cos 5\theta+\cos\theta)}{(\sin 7\theta-\sin 3\theta)-(\sin 5\theta-\sin\theta)}$$

$$=\frac{2\cos 5\theta\cos 2\theta-2\cos 3\theta\cos 2\theta}{2\sin 2\theta\cos 5\theta-2\sin 2\theta\cos 3\theta}$$

$$=\frac{2\cos 2\theta(\cos 5\theta-\cos 3\theta)}{2\sin 2\theta(\cos 5\theta-\cos 3\theta)}=\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

$$=\cot 2\theta.$$

210．$\dfrac{\sin A+\sin 3A+\sin 5A}{\cos A+\cos 3A+\cos 5A}=\tan 3A.$

【證】　$\dfrac{\sin A+\sin 3A+\sin 5A}{\cos A+\cos 3A+\cos 5A}$

$$=\frac{(\sin A+\sin 5A)+\sin 3A}{(\cos A+\cos 5A)+\cos 3A}$$

$$=\frac{2\sin 3A\cos 2A+\sin 3A}{2\cos 3A\cos 2A+\cos 3A}$$

$$=\frac{\sin 3A(2\cos 2A+1)}{\cos 3A(2\cos 2A+1)}=\frac{\sin 3A}{\cos 3A}=\tan 3A.$$

211. $\dfrac{\sin A+\sin 4A+\sin 7A}{\cos A+\cos 4A+\cos 7A}=\tan 4A$. 求證.

【證】 所設式之左邊

$$=\frac{(\sin A+\sin 7A)+\sin 4A}{(\cos A+\cos 7A)+\cos 4A}$$

$$=\frac{2\sin 4A\cos 3A+\sin 4A}{2\cos 4A\cos 3A+\cos 4A}$$

$$=\frac{\sin 4A}{\cos 4A}=\tan 4A.$$

212. 求證 $\dfrac{\sin A\pm\sin nA+\sin(2n-1)A}{\cos A\pm\cos nA+\cos(2n-1)A}=\tan nA$.

【證】 $$\frac{\sin A\pm\sin nA+\sin(2n-1)A}{\cos A\pm\cos nA+\cos(2n-1)A}$$

$$=\frac{\sin A+\sin(2n-1)A\pm\sin nA}{\cos A+\cos(2n-1)A\pm\cos nA}$$

$$=\frac{2\sin nA\cos(n-1)A\pm\sin nA}{2\cos nA\cos(n-1)A\pm\cos nA}$$

$$=\frac{\sin nA\{2\cos(n-1)A\pm1\}}{\cos nA\{2\cos(n-1)A\pm1\}}=\frac{\sin nA}{\cos nA}$$

$$=\tan nA.$$

213. $\dfrac{\sin 2A}{1+\sin 2A}=\dfrac{2}{(1+\tan A)(1+\cot A)}$. 求證.

【證】 所設式之左邊 $=2\sin A\cos A/(\sin^2 A+\cos^2 A$

$+2\sin A\cos A)=2\sin A\cos A/(\sin A+\cos)^2$

$$=2\Big/\left\{\left(\frac{\sin A+\cos A}{\sin A}\right)\left(\frac{\sin A+\cos A}{\cos A}\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{(1+\cot A)(1+\tan A)}.$$

214. $\dfrac{\cos 3\alpha+\sin 3\alpha}{\cos \alpha-\sin \alpha}=1+2\sin 2\alpha$. 求證.

【證】 所設式之左邊$=\{(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)$

$+(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)\}/(\cos\alpha-\sin\alpha)$

$$=\frac{4(\cos^3\alpha-\sin^3\alpha)-3(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\cos\alpha-\sin\alpha}$$

$=4(\cos^2\alpha+\cos\alpha\sin\alpha+\sin^2\alpha)-3$

$=4(1+\cos\alpha\sin\alpha)-3=4+4\cos\alpha\sin\alpha-3$

$=1+4\sin\alpha\cos\alpha=1+2(2\sin\alpha\cos\alpha)$

$=1+2\sin 2\alpha$.

215. $\dfrac{\cos 3A+2\cos 5A+\cos 7A}{\cos A+2\cos 3A+\cos 5A}=\cos 2A-\sin 2A$

$\tan 3A$. 求證.

【證】 所設式之左邊$=\dfrac{2\cos 5A+(\cos 3A+\cos 7A)}{2\cos 3A+(\cos A+\cos 5A)}$

$$=\frac{2\cos 5A+2\cos 5A\cos 2A}{2\cos 3A+2\cos 3A\cos 2A}$$

$$=\frac{\cos 5A}{\cos 3A}=\frac{\cos(2A+3A)}{\cos 3A}$$

$$=\frac{\cos 2A\cos 3A-\sin 2A\sin 3A}{\cos 3A}$$

$$=\cos 2A-\sin 2A\left(\frac{\sin 3A}{\cos 3A}\right)$$

$=\cos 2A-\sin 2A\tan 3A$.

216. 求證 $\dfrac{\sec 8A-1}{\sec 4A-1}=\dfrac{\tan 8A}{\tan 2A}$.

【證】 所設式之左邊 $=\dfrac{(1-\cos 8A)\cos 4A}{(1-\cos 4A)\cos 8A}$

$$=\frac{2\sin^2 4A\cos 4A}{2\sin^2 2A\cos 8A}=\frac{\sin 8A\sin 4A}{\cos 8A\, 2\sin^2 2A}$$

$$=\tan 8A\times\frac{2\sin 2A\cos 2A}{2\sin^2 2A}$$

$$=\tan 8A\times\frac{\cos 2A}{\sin 2A}=\frac{\tan 8A}{\tan 2A}.$$

217. $\dfrac{\tan 5A+\tan 3A}{\tan 5A-\tan 3A}=4\cos 2A\cos 4A$. 求證.

【證】 $\dfrac{\tan 5A+\tan 3A}{\tan 5A-\tan 3A}$, 分子分母乘以 $\cos 5A\times\cos 3A$,

$$=\frac{\sin 5A\cos 3A+\cos 5A\sin 3A}{\sin 5A\cos 3A-\cos 5A\sin 3A}$$

$$=\frac{\sin(5A+3A)}{\sin(5A-3A)}=\frac{\sin 8A}{\sin 2A}=\frac{2\sin 4A\cos 4A}{\sin 2A}$$

$$=\frac{4\sin 2A\cos 2A\cos 4A}{\sin 2A}=4\cos 2A\cos 4A.$$

218. 求證 $\dfrac{\sin 3A}{\sin A}-\dfrac{\cos 3A}{\cos A}=2$.

【證】 $\dfrac{\sin 3A}{\sin A}-\dfrac{\cos 3A}{\cos A}$

$$=\frac{\sin A\cos A-\cos 3A\sin A}{\sin A\cos A}=\frac{\sin(3A-A)}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{\sin 2A}{\sin A\cos A}=\frac{2\sin A\cos A}{\sin A\cos A}=2.$$

【別證】 $\dfrac{\sin 2A}{\cos A}=3-4\sin^2 A$，及 $\dfrac{\cos 3A}{\cos A}$

$=4\cos^2 A-3$，故所設式之左邊$=(3-4\sin^2 A)$

$-(4\cos^2 A-3)=6-4\times(\sin^2 A+\cos^2 A)$

$=6-4=2.$

219. 求證 $\dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma$

$-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma.$

【證】 $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\times\cos\gamma+\sin\beta\cos\gamma\cos\alpha$

$+\sin\gamma\cos\alpha\times\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$,

此式之兩邊，以 $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ 除之，

即得 $\dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma$

$-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma.$

220. 求證 $\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}\cos\alpha$

$+\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}\cos\beta$

$+\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)\sin\frac{1}{2}(\gamma+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\beta)}\cos\gamma=\cos(\alpha+\beta+\gamma).$

【證】 $\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\cos\alpha}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}$

$=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}{-\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}\cos\alpha$

$=\dfrac{\{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)-\cos\frac{1}{2}(2\beta+\alpha-\gamma)\}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\cos\alpha}{-2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}$

$$=\frac{\{\sin(\alpha+\gamma)-\sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta-\gamma)\}\cos\alpha}{-4\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}$$

$=\{\sin(2\alpha+\gamma)+\sin\gamma-\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta$

$+\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\alpha-\beta+\gamma)\}/\{-8\times\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

$\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\}$. 故所設式左邊爲

$$\frac{1}{-8\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}$$

$\times\{\sin(2\alpha+\gamma)-\sin(2\beta+\gamma)+\sin(2\beta+\alpha)$

$-\sin(2\gamma+\alpha)+\sin(2\gamma+\beta)-\sin(2\alpha+\beta)\}$,

然 $\sin(2\alpha+\gamma)-\sin(2\beta+\gamma)=2\sin(\alpha-\beta)$

$\times\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ 等，故此最後式之括號內等於

$2\cos(\alpha+\beta+\gamma)\{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)$

$+\sin(\gamma-\alpha)\}$，但 $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)$

$+\sin(\gamma-\alpha)=-4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\times\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}$,

故所設式之左邊 $=\cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

221. $$\frac{1}{\cos\frac{2}{7}\pi+\cos 2\phi}+\frac{1}{\cos\frac{4}{7}\pi+\cos 2\phi}$$

$$+\frac{1}{\cos\frac{6}{7}\pi+\cos 2\phi}=\frac{7\tan 7\phi-\tan\phi}{2\sin 2\phi}.$$ 求證.

【證】 實行通分，則公分母 $=(\cos\frac{2}{7}\pi+\cos 2\times\phi)$

$$(\cos\frac{4}{7}\pi+\cos 2\phi)(\cos\frac{6}{7}\pi+\cos 2\phi)$$

$$=\cos\frac{2}{7}\pi\cos\frac{4}{7}\pi\cos\frac{6}{7}\pi+\left(\cos\frac{2}{7}\pi\cos\frac{4}{7}\pi\right.$$

$$\left.+\cos\frac{4}{7}\pi\cos\frac{6}{7}\pi+\cos\frac{6}{7}\pi\cos\frac{2}{7}\pi\right)\cos 2\phi$$

$$+\left(\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{6}{7}\pi\right)\cos^2 2\phi$$

$$+\cos^3 2\phi=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\cos 2\phi-\frac{1}{2}\cos^2 2\phi+\cos^3 2\phi$$

分子$=\left(\cos\frac{4}{7}\pi+\cos 2\phi\right)\times\left(\cos\frac{6}{7}\pi+\cos 2\phi\right)$

$$+\left(\cos\frac{6}{7}\pi+\cos 2\phi\right)\times\left(\cos\frac{2}{7}\pi+\cos 2\phi\right)$$

$$+\left(\cos\frac{2}{7}\pi+\cos 2\phi\right)\times\left(\cos\frac{4}{7}\pi+\cos 2\phi\right)$$

$$=\cos\frac{2}{7}\pi\ \cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi\times\cos\frac{6}{7}\pi$$

$$+\cos\frac{6}{7}\pi\ \cos\frac{2}{7}\pi+2\left(\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi\right.$$

$$\left.+\cos\frac{6}{7}\pi\right)\cos 2\phi+3\cos^2 2\phi=-\frac{1}{2}-\cos 2\phi$$

$+3\cos^2 2\phi$，是以可知所設式之左邊爲

$$\frac{4(6\cos^2 2\phi-2\cos 2\phi-1)}{8\cos^3 2\phi-4\cos^2 2\phi-4\cos 2\phi+1},$$

然所設式之右邊爲$\dfrac{7\tan 7\phi-\tan\phi}{2\sin 2\phi}$

$$=\frac{7\sin 7\phi\cos\phi-\sin\phi\cos 7\phi}{2\sin 2\phi\cos 7\phi\cos\phi}$$

$$=\frac{3\sin 8\phi+3\sin 6\phi+\sin(7\phi-\phi)}{\sin 2\phi(\cos 8\phi+\cos 6\phi)}$$

$$=\frac{6\sin 4\phi\cos 4\phi+4(3\sin 2\phi-4\sin^2 2\phi)}{\sin 2\phi(2\cos^2 4\phi-1+4\cos^3 2\phi-3\cos 2\phi)}$$

$$=\frac{12\cos 2\phi(2\cos^2 2\phi-1)+12-16(1-\cos^2 2\phi)}{2(2\cos^2 2\phi-1)^2-1+4\cos^3 2\phi-3\cos 2\phi}$$

$$=\frac{4(6\cos^2 2\phi-2\cos 2\phi-1)}{8\cos^3 2\phi-4\cos^2 3\phi-4\cos 2\phi+1}$$

故如題所言.

222. 試求證下式: $\frac{\sin(\theta-\beta)\sin(\theta-\gamma)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}+\sin(\theta-\gamma)\sin(\theta-\alpha)$

$/\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\alpha)+\frac{\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)}=1.$

【證】 $\frac{\sin(\theta-\beta)\sin(\theta-\gamma)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}=\sin(\beta-\gamma)\sin(\theta-\beta)$

$\sin(\theta-\gamma)/-\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)$

$$=\frac{\sin(\beta-\gamma)\{\cos(\beta-\gamma)-\cos(2\theta-\beta-\gamma)\}}{-2\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)}$$

$$=\frac{\sin(2\beta-2\gamma)-\sin(2\theta-2\gamma)+\sin(2\theta-2\beta)}{-4\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)}$$

故所設式之左邊爲$\{\sin(2\beta-2\gamma)+\sin(2\gamma-2\alpha)$

$+\sin(2\alpha-2\beta)\}/\{-4\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)$

$\sin(\gamma-\alpha)\}.\quad=\frac{-4\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)}{-4\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)}$

$=1.$

223. 求證 $\frac{\tan\theta\tan\phi+1}{1-\tan\theta\tan\phi}=\frac{\cos(\theta+\phi)}{\cos(\theta+\phi)}$.

【證】 所設式之左邊 $=\left(\frac{\sin\theta\sin\phi}{\cos\theta\cos\phi}+1\right)$

$$\bigg/\left(1-\frac{\sin\theta\sin\phi}{\cos\theta\cos\phi}\right)=\frac{\sin\theta\sin\phi+\cos\theta\cos\phi}{\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi}$$

$$=\frac{\cos(\theta-\phi)}{\cos(\theta+\phi)}.$$

224. 求證 $\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}+\sin\beta/\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\alpha)$

$$+\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)}=0.$$

【證】 將三分數化爲有公分母 $\sin(\alpha-\beta)\times\sin(\beta-\gamma)$ $\sin(\gamma-\alpha)$ 之一分數，則得分子之和 $=-\sin\alpha$ $\sin(\beta-\gamma)-\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)-\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)$

$$=-\tfrac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta+\gamma)-\cos(\alpha+\beta-\gamma)\}$$

$$-\tfrac{1}{2}\{\cos(\beta+\alpha-\gamma)-\cos(\beta+\gamma-\alpha)\}$$

$$-\tfrac{1}{2}\{\cos(\gamma-\alpha+\beta)-\cos(\gamma+\alpha-\beta)\}=0.$$

225. 求證 $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha}=\tan 4\alpha$.

【證】 所設式之左邊

$$=\frac{(\sin\alpha+\sin 3\alpha)+(\sin 5\alpha+\sin 7\alpha)}{(\cos\alpha+\cos 3\alpha)+(\cos 5\alpha+\cos 7\alpha)}$$

$$=\frac{2\sin 2\alpha\cos\alpha+2\sin 6\alpha\cos\alpha}{2\cos 2\alpha\cos\alpha+2\cos 6\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{2\cos\alpha(\sin 2\alpha+\sin 6\alpha)}{2\cos\alpha(\cos 2\alpha+\cos 6\alpha)}$$

$$=\frac{\sin 2\alpha+\sin 6\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 6\alpha}=\frac{2\sin 4\alpha\cos 6\alpha}{2\cos 4\alpha\cos 2\alpha}$$

$$=\frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha}=\tan 4\alpha.$$

226. 求證 $\dfrac{\sin 19\alpha+\sin 17\alpha}{\sin 10\alpha+\sin 8\alpha}=2\cos 9\alpha.$

【證】 所設式之左邊

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(19\alpha+17\alpha)\cos\frac{1}{2}(19\alpha-17\alpha)}{2\sin\frac{1}{2}(10\alpha+8\alpha)\cos\frac{1}{2}(10\alpha-8\alpha)}$$

$$=\frac{2\sin 18\alpha\cos\alpha}{2\sin 9\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin 18\alpha}{\sin 9\alpha}$$

$$=\frac{2\sin 9\alpha\cos 9\alpha}{\sin 9\alpha}=2\cos 9\alpha.$$

227. $\dfrac{\sin(A+30^\circ)+\sin(B-30^\circ)}{\cos A-\cos B}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\cot\dfrac{B-A}{2}$

$+\dfrac{1}{2}$. 求證.

【證】 所設式之左邊 $=2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}+30^\circ\right)$

$$\Big/\left\{2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{B-A}{2}\right)\right\}$$

$$=\cos\left(\left(\frac{A-B}{2}\right)+30^\circ\right)\Big/\sin\frac{B-A}{2}$$

$$=\left\{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\times\cos 30^\circ-\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\sin 30^\circ\right\}$$

$$/\sin\left(\frac{B-A}{2}\right)=\cot\left(\frac{B-A}{2}\right)\cos 30^\circ+\sin 30^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cot\left(\frac{B-A}{2}\right)+\frac{1}{2}.$$

228. $\dfrac{\sin A+2\sin 3A+\sin 5A}{\sin 3A+2\sin 5A+\sin 7A}=\dfrac{\sin 3A}{\sin 5A}$. 求證.

【證】 $$\frac{\sin A+2\sin 3A+\sin 5A}{\sin 3A+2\sin 5A+\sin 7A}$$

$$=\frac{\sin A+\sin 5A+2\sin 3A}{\sin 3A+\sin 7A+2\sin 5A}$$

$$=\frac{2\sin 3A\cos 2A+2\sin 3A}{2\sin 5A\cos 2A+2\sin 5A}$$

$$=\frac{2\sin 3A(1+\cos 2A)}{2\sin 5A(1+\cos 2A)}=\frac{\sin 3A}{\sin 5A}.$$

229. 求證 $\operatorname{cosec} A=(2\sin 2A+2\cos 2A)/(\cos A-\sin A-\cos 3A+\sin 3A)$.

【證】 $$\frac{2\sin 2A+2\cos 2A}{\cos A-\sin A-\cos 3A+\sin 3A}$$

$$=\frac{2(\sin 2A+\cos 2A)}{\cos A-\cos 3A+\sin 3A-\sin A}$$

$$=\frac{2(\sin 2A+\cos 2A)}{2\sin 2A\sin A+2\cos 2A\sin A}$$

$$=\frac{2(\sin 2A+\cos 2A)}{2(\sin 2A+\cos 2A)\sin A}=\frac{1}{\sin A}$$

$$=\operatorname{cosec} A.$$

230．求證 $\dfrac{\sin 3\alpha \sin 2\beta - \sin 3\beta \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha \sin \beta - \sin 2\beta \sin \alpha}$

$= 1 + 4\cos\alpha \cos\beta$.

【證】 所設式左邊之 $\sin 3\alpha$, $\sin 3\beta$, 以 $\sin\alpha$, $\sin\beta$ 表之，且將 $\sin 2\alpha$, $\sin 2\beta$, 易以 $2\sin\alpha\cos\alpha$, $2\sin\beta\cos\beta$, 分子分母除以 $2\sin\alpha\sin\beta$, 則得 $\{(3-4\sin^2\alpha)\cos\beta - (3-4\sin^2\beta)\cos\alpha\}/(\cos\alpha - \cos\beta)$, 即 $\{-3(\cos\alpha - \cos\beta) - 4(\sin^2\alpha\cos\beta - \sin^2\beta \times \cos\alpha)\}/(\cos\alpha - \cos)\beta$, 即 $\{-3(\cos\alpha - \cos\beta) - 4(\cos\beta - \cos\beta\cos^2\alpha - \cos\alpha + \cos\alpha\cos^2\beta)\}/(\cos\alpha - \cos\beta)$, 即 $-3-4(-1-\cos\alpha\cos\beta)$, 即 $1+4\cos\alpha\cos\beta$.

231．求證 $\dfrac{\sin 3A + \cos 3A}{\sin 3A - \cos 3A} = \dfrac{1+2\sin 2A}{1-2\sin 2A}\tan(A-45°)$.

【證】 $(\sin 3A + \cos 3A)/(\sin 3A - \cos 3A)$

$$= \frac{3\sin A - 4\sin^3 A + 4\cos^3 A - 3\cos A}{3\sin A - 4\sin^3 A - 4\cos^3 A + 3\cos A}$$

$$= \frac{3(\sin A - \cos A) - 4(\sin^3 A - \cos^3 A)}{3(\sin A + \cos A) - 4(\sin^3 A + \cos^3 A)}$$

$$= \frac{\sin A - \cos A}{\sin A + \cos A} \cdot \{3 - 4(\sin^2 A + \cos^2 A + \sin A \times \cos A)\}/\{3 - 4(\sin^2 A + \cos^2 A - \sin A \times \cos A)\}$$

$$= \frac{\sin A - \cos A}{\sin A + \cos A} \cdot \frac{-1-4\sin A\cos A}{-1+4\sin A\cos A}$$

$$=\left\{\left(\frac{\sin A}{\cos A}-1\right)\Big/\left(\frac{\sin A}{\cos A}+1\right)\right\}\cdot\frac{1+2\sin 2A}{1-2\sin 2A}.$$

$$=\frac{\tan A-1}{\tan A+1}\cdot\frac{1+2\sin 2A}{1-2\sin 2A}=\tan(A-45°)$$

$$\times\frac{1+2\sin 2A}{1-2\sin 2A}.$$

232.求證 $\dfrac{1\pm\sin A}{1\mp\sin A}=\tan^2\left(45°\pm\dfrac{A}{2}\right).$

【證】 由前題 $\dfrac{1\pm\sin A}{1\mp\sin A}=\dfrac{\left(\cos\dfrac{A}{2}\pm\sin\dfrac{A}{2}\right)^2}{\left(\cos\dfrac{A}{2}\mp\sin\dfrac{A}{2}\right)^2}$

又此最後之式之分子分母，除以 $\cos^2\dfrac{A}{2}$，

則得 $\left(\dfrac{1\pm\tan\dfrac{A}{2}}{1\mp\tan\dfrac{A}{2}}\right)^2$，又此式可變其形爲

$\left(\dfrac{\tan 45°\pm\tan\dfrac{A}{2}}{1\pm\tan 45°\tan\dfrac{A}{2}}\right)^2$，因此又得書作

$\tan^2\left(45°\pm\dfrac{A}{2}\right).$

233.求證 $\dfrac{1+\cot\gamma\tan\delta}{\cot\gamma-\tan\delta}=\tan(\gamma+\delta).$

【證】 所設式之左邊 $=\left(1+\dfrac{\cos\gamma\sin\delta}{\sin\gamma\cos\delta}\right)\Big/\left(\dfrac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right.$

$$-\frac{\sin\delta}{\cos\delta}\Big)=\frac{\sin\gamma\cos\delta+\cos\gamma\sin\delta}{\cos\gamma\cos\delta-\sin\gamma\sin\delta}$$

$$=\frac{\sin(\gamma+\delta)}{\cos(\gamma+\delta)}=\tan(\gamma+\delta).$$

234. 求證 $\dfrac{\tan(n+1)A-\tan nA}{1+\tan(n+1)A\tan nA}=\tan A.$

【證】 公式 $\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\tan(\alpha-\beta)$ 中，

命 α 爲 $(n+1)A$，β 爲 nA，則因 $(n+1)A-nA=A$，

故 $\{\tan(n+1)A-\tan nA\}/\{1+\tan(n+1)A\tan nA\}$

$=\tan A.$

235. 求證 $\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1+\tan\frac{1}{2}\theta}{1-\tan\frac{1}{2}\theta}.$

【證】 所設式之左邊 $=(\sin^2\frac{1}{2}\theta+\cos^2\frac{1}{2}\theta$

$+2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta)/(\cos^2\frac{1}{2}\theta-\sin^2\frac{1}{2}\theta)$

$$=\frac{(\sin\frac{1}{2}\theta+\cos\frac{1}{2}\theta)^2}{\cos^2\frac{1}{2}\theta-\sin^2\frac{1}{2}\theta}=\frac{\sin\frac{1}{2}\theta+\cos\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta-\sin\frac{1}{2}\theta}$$

$$=\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}+\frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}\right)\Big/\left(\frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}-\frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}\right)$$

$=(\tan\frac{1}{2}\theta+1)/(1-\tan\frac{1}{2}\theta).$

236. 求證 $\dfrac{1+\sin A}{1+\cos A}=\dfrac{1}{2}\left(1+\tan\dfrac{A}{2}\right)^2.$

【證】 所設式之左邊 $=\left\{\left(\sin^2\dfrac{A}{2}+\cos^2\dfrac{A}{2}\right)\right.$

$\left.+2\sin\dfrac{A}{2}\cdot\cos\dfrac{A}{2}\right\}\Big/\left\{1+\left(2\cos^2\dfrac{A}{2}-1\right)\right\}$

$$=\frac{\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2}{2\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\tan\frac{A}{2}+1\right)^2.$$

237.求證 $\frac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A}=\tan 2A+\sec 2A.$

【證】 $\frac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A}=(\cos A+\sin A)^2$

$/(\cos A-\sin A)(\cos A+\sin A)=(\cos^2 A+\sin^2 A$

$+2\sin A\cos A)/(\cos^2 A-\sin^2 A)$

$=\frac{1+\sin 2A}{\cos 2A}=\frac{\sin 2A}{\cos 2A}+\frac{1}{\cos 2A}$

$=\tan 2A+\cos 2A.$

238.求證 $2\sin^2 A\sin^2 B+2\cos^2 A\times\cos^2 B$

$=1+\cos 2A\cos 2B.$

【證】 $2\sin^2 A\sin^2 B+2\cos^2 A\cos^2 B=(1-\cos 2A)$

$(1-\cos 2B)/2+(1+\cos 2A)(1+\cos 2B)/2$

$=(1-\cos 2A-\cos 2B+\cos 2A\times\cos 2B)/2$

$+(1+\cos 2A+\cos 2B+\cos 2A\times\cos 2B)/2$

$=1+\cos 2A\cos 2B.$

239.求證 $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\frac{\cot\frac{1}{2}\theta+1}{\cot\frac{1}{2}\theta-1}.$

【證】 因 $\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}$, $1-\sin\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}$

$-2\cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}=\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$,

故 $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$

$\Big/\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)^2=\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$\Big/\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)$, 或分子分母除以 $\sin\frac{\theta}{2}$,

而將 $\cos\frac{\theta}{2}\Big/\sin\frac{\theta}{2}$ 書作 $\cot\frac{\theta}{2}$, 則 $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

$=\left(\cot\frac{\theta}{2}+1\right)\Big/\left(\cot\frac{\theta}{2}-1\right)$.

240. 求證 $\frac{1}{\tan 3A-\tan A}+\frac{1}{\cot A-\cot 3A}=\cot 2A$.

【證】 $\tan 3A-\tan A=\frac{\sin 3A}{\cos 3A}-\frac{\sin A}{\cos A}$

$=\frac{\sin 3A\cos A-\sin A\cos 3A}{\cos 3A\cos A}=\frac{\sin(3A-A)}{\cos 3A\cos A}$

$=\frac{\sin 2A}{\cos 3A\cos A}$, 仿此, 可知 $\cot A-\cot 3A$

$=\frac{\sin 2A}{\sin A\sin 3A}$, 以故得證 $\frac{1}{\tan 3A-\tan A}$

$+\frac{1}{\cot A-\cot 3A}=\frac{\cos 3A\cos A}{\sin 2A}$

$$+\frac{\sin 3A\sin A}{\sin 2A}=\frac{\cos 3A\cos A+\sin 3A\sin A}{\sin 2A}$$

$$=\frac{\cos(3A-A)}{\sin 2A}=\frac{\cos 2A}{\sin 2A}=\cot 2A.$$

241. 求證 $\dfrac{\tan A\cot B+1}{\tan A\cot B-1}=\dfrac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$.

【證】 所設式之左邊 $=\left(\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}+1\right)$

$\Big/\left(\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}-1\right)=(\sin A\cos B+\cos A$

$\times\sin B)/(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$

$=\dfrac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$.

【別證】 左邊之兩項除以 $\cot B$，則可得

$$\frac{\tan A+\tan B}{\tan A-\tan B}=\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}.$$

241. 求證 $\dfrac{\tan\theta+\cot\phi}{\cot\phi-\tan\theta}=\cos(\theta-\phi)\sec(\theta+\phi)$.

【證】 所設式之左邊 $=\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\phi}{\sin\phi}\right)$

$\Big/\left(\dfrac{\cos\phi}{\sin\phi}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)=\dfrac{\sin\theta\sin\phi+\cos\theta\cos\phi}{\cos\theta\sin\phi}$

$\Big/\dfrac{\cos\phi\cos\theta-\sin\phi\sin\theta}{\sin\phi\cos\theta}=\dfrac{\cos(\theta-\phi)}{\cos\theta\sin\phi}$

$\Big/\dfrac{\cos(\theta+\phi)}{\sin\phi\cos\theta}=\dfrac{\cos(\theta-\phi)}{\cos(\theta+\phi)}=\cos(\theta-\phi)$

$\sec(\theta+\phi)$.

【別證】 左邊之兩項乘以 $\tan\phi$，則可得

$$\frac{\tan\theta\tan\phi+1}{1-\tan\theta\tan\phi}=\frac{\cos(\theta-\phi)}{\cos(\theta+\phi)}.$$

243. 求證 $\dfrac{\cot\theta+\cot\phi}{\cot\theta-\cot\phi}=-\dfrac{\sin(\theta+\phi)}{\sin(\theta-\phi)}$.

【證】 所設式之左邊 $=\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}+\dfrac{\cos\phi}{\sin\phi}\right)\Big/$

$$\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\cos\phi}{\sin\phi}\right)=\frac{\cos\theta\sin\phi+\cos\phi\sin\theta}{\cos\theta\sin\phi-\sin\theta\cos\phi}$$

$$=\frac{\sin(\theta+\phi)}{\sin(\theta-\phi)}=-\frac{\sin(\theta+\phi)}{\sin(\theta-\phi)}.$$

【別證】 左邊之兩項除以 $\cot\theta\cot\phi$，則

$$\frac{\tan\phi+\tan\theta}{\tan\phi-\tan\theta}=\frac{\sin(\phi+\theta)}{\sin(\phi-\theta)}.$$

244. 求證 $\dfrac{\tan A+\tan B}{\tan A-\tan B}=\dfrac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$.

【證】 所設式之左邊 $=\left(\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}\right)\Big/$

$\left(\dfrac{\sin A}{\cos A}-\dfrac{\sin B}{\cos B}\right)$，分子分母各乘以 $\cos A$

$\times\cos B$，則 $(\sin A\cos B+\sin B\cos A)$

$/(\sin A\cos B-\sin B\cos A)$，

從而等於 $\dfrac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$.

245. 求證 $\dfrac{\sin(A+B)+\sin(A-B)}{\sin(A+B)-\sin(A-B)}=\dfrac{\tan A}{}$

【證】 所設式之左邊$=\{(\sin A\cos B+\cos A\times\sin B)+(\sin A\cos B-\cos A\sin B)\}/\{(\sin A\times\cos B+\cos A\sin B)-(\sin A\cos B-\cos A\sin B)\}=\dfrac{2\sin A\cos B}{2\cos A\sin B}$

$$=\frac{\sin A}{\cos A}\Big/\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\tan A}{\tan B}.$$

246. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}+\dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}+\dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\beta\sin\alpha}=0$.求證

【證】 $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}$

$=\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\beta-\cot\alpha$，同理可知$\dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}=\cot\gamma-\cot\beta$, $\dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{\mathrm{sln}\,\gamma\sin\alpha}$

$=\cot\alpha-\cot\gamma$，故得證$\dfrac{\sin(\gamma-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$

$$+\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}+\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\gamma\sin\alpha}=0.$$

247. 求證 $\dfrac{\cos(A+B+C)}{\sin A\sin B\sin C}=\cot A\cot B\times\cot C-\cot A-\cot B-\cot C$.

【證】 所設式之左邊$=(\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C--\cos B\sin A\sin C-\cos C\times\sin A\sin B)/\sin A\sin B\sin C$

$$=\frac{\cos A\cos B\cos C}{\sin A\sin B\sin C}-\frac{\cos A}{\sin A}-\frac{\cos B}{\sin B}-\frac{\cos C}{\sin C}$$

$$=\cot A\cot B\cot C-\cot A-\cot B-\cot C.$$

248. 求證 $\dfrac{\sin B}{\sin A}=\dfrac{\sin(2A+B)}{\sin A}-2\cos(A+B).$

【證】 $\dfrac{\sin(2A+B)}{\sin A}-2\cos(A+B)=\{\sin(A+B+A)$

$-2\sin A\cos(A+B)\}/\sin A=\{\sin(A+B)\cos A$

$+\cos(A+B)\sin A-2\sin A\cos(A+B)\}/\sin A$

$$=\frac{\sin(A+B)\cos A-\cos(A+B)\sin A}{\sin A}$$

$$=\frac{\sin(A+B-A)}{\sin A}=\frac{\sin B}{\sin A}.$$

249. 求證 $\dfrac{\sin\beta\cos\alpha(\tan\alpha+\tan\beta)}{1-\cos(\alpha+\beta)}$

$+\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)/\cos\beta\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=1.$

【證】 $\dfrac{\sin\beta\cos\alpha(\tan\alpha+\tan\beta)}{1-\cos(\alpha+\beta)}$

$=\{\sin\beta\cos\alpha/2\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\}\left\{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}\right\}$

$=\{\sin\beta\times\cos\alpha/2\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\}\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

$=\sin\beta\times2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)/2\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

$\times\cos\beta=\sin\beta\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)/\{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\times\cos\beta\},$

而 $\sin\beta\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)/\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\times\cos\beta$

$+\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)/\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\beta$

$=\{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)+\sin\ \beta\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\}$

$/\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\ \beta=\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\ \beta/\sin\frac{1}{2}$

$\times(\alpha+\beta)\cos\ \beta=1.$

250. $\frac{1+\tan\ 2A\tan\ A}{\tan\ A+\cot\ A}=\frac{1}{2}\tan\ 2A$.求證.

【證】 $\tan 2A\tan\ A=\frac{2\ \tan^2\ A}{1-\tan^2\ A}$ $1+\tan\ 2A\ \tan\ A$

$=\frac{1+\tan^2\ A}{1-\tan^2\ A}=\frac{1}{\cos 2A}$，又 $\tan\ A+\cot\ A$

$=\frac{2}{\sin 2A}$，故所設式之左邊$=\frac{\sin\ 2A}{2\ \cos\ 2A}$

$=\frac{1}{2}\tan\ 2A.$

【別證】 $\tan\ 2A\ (1-\tan^2\ A)=2\ \tan\ A$

故 $\tan\ 2A=2\ \tan\ A+\tan\ 2A\ \tan^2\ A$,

以 $\tan\ A$ 除此式之兩邊，則 $\tan 2A\cot A=2$

$+\tan\ 2A\ \tan\ A$，此式兩邊加$\tan 2A\times\tan A$,

則 $\tan\ 2A\ \tan\ A+\tan\ 2A\ \cot\ A=2$

$+2\ \tan 2A\tan A$，卽 $\frac{1}{2}\tan 2A(\tan A+\cot A)$

$=1+\tan\ 2A\ \tan\ A$,

$\therefore\ \frac{1}{2}\tan\ 2A=\frac{1+\tan\ 2A\ \tan\ A}{\tan\ A+\cot\ A}.$

251. 證證 $\sqrt{\text{vers}\ \alpha\ \text{vers}\ \beta}=\text{vers}\frac{\alpha+\beta}{2}-\text{vers}\frac{\alpha-\beta}{2}.$

【證】 所設式之左邊 $=\sqrt{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}$

$$=\sqrt{2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin^2\frac{\beta}{2}}=2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

$$=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\left(1-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$-\left(1-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\text{vers}\frac{\alpha+\beta}{2}-\text{vers}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

252. $\sqrt{1+\sin\alpha}=1+2\sin\frac{\alpha}{4}\sqrt{1-\sin\frac{\alpha}{2}}$．求證．

【證】 所設式之左邊 $=\sqrt{\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right.}$

$$\overline{\left.+2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)}=\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$=\left(1-2\times\sin^2\frac{\alpha}{4}\right)+2\sin\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}$$

$$=1+2\sin\frac{\alpha}{4}\times\left(\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}\right)$$

$$=1+2\sin\frac{\alpha}{4}\sqrt{\left(\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}\right)^2}$$

$$=1+2\sin\frac{\alpha}{4}\sqrt{\left(1-2\sin\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}\right)}$$

$$=1+2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\sin\frac{\alpha}{4}}.$$

(4) 條件恆等式之證明

253.設　$x\cos\beta+y\cos\alpha=z$, $x\sin\beta-y\times\sin\alpha=0$,

則$\dfrac{x}{\sin\alpha}=\dfrac{y}{\sin\beta}=\dfrac{z}{\sin(\alpha+\beta)}$.

【證】 由第二方程式，$\dfrac{x}{\sin\alpha}=\dfrac{y}{\sin\beta}$,故命之為$\lambda$,

則由第一方程式，$\lambda\sin\alpha\cos\beta+\lambda\cos\alpha\sin\beta=z$，或 $\lambda\sin(\alpha+\beta)=z$，

故$\lambda=\dfrac{z}{\sin(\alpha+\beta)}$.故如題所言.

254.設　$\tan\alpha=\dfrac{1}{7}$, $\tan\beta=\dfrac{1}{2}$，求證 $\tan(\beta-2\alpha)=\dfrac{2}{11}$.

【證】 $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2}{7}\Big/\left\{1-\left(\dfrac{1}{7}\right)^2\right\}=\dfrac{7}{24}$.

以故可得 $\tan(\beta-2\alpha)=\dfrac{\tan\beta-\tan 2\alpha}{1+\tan\beta\tan 2\alpha}$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{24}\right)\Big/\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{7}{24}\right)=\frac{2}{11}.$$

255.設　$\tan\beta=\dfrac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1-n\sin^2\alpha}$，求證 $\tan(\alpha-\beta)=(1-n)\tan\alpha$.

【證】 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right.$

$$\left.-\frac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1-n\sin^2\alpha}\right)\Big/\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1-n\sin^2\alpha}\right)$$

$$=\frac{\sin a(1-n\sin^2\alpha)-n\sin\alpha\cos^2\alpha}{\cos a(1-n\sin^2\alpha)+n\sin^2\alpha\cos\alpha}$$

$$=(1-n)\times\tan\alpha.$$

256.設 $a\sin\theta+b\cos\theta=c=a\operatorname{cosec}\theta+b\sec\theta$,

求證 $\sin=\frac{2ab}{c^2-a^2-b^2}$.

【證】根據假設，$a\sin\theta+b\cos\theta=c$，及$\frac{a\cos\theta+b\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=c$，由是$(a\sin\theta+b\cos\theta)\times(a\cos\theta+b\sin\theta)$

$=c^2\sin\theta\cos\theta$，故 $(a^2+b^2)\sin\theta\cos\theta+ab$

$=c^2\sin\theta\cos\theta$，故$\sin 2\theta(c^2-a^2-b^2)=2ab$.

257.若 $2\tan A=3\tan B$，則 $\tan(A-B)$

$=\frac{\tan B}{2+3\tan^2 B}=\frac{\sin 2B}{5-\cos 2B}$.其證如何？

【證】 $\tan(A-B)=\frac{\tan\ \ -\tan B}{1+\tan A\tan B}$

$$=\left(\frac{3}{2}\tan B-\tan B\right)\Big/\left\{1+\frac{3}{2}\tan^2 B\right)$$

$$=\frac{\tan B}{2+3\tan^2 B}=\frac{\sin B\cos B}{2\cos^2 B+3\sin^2 B}$$

$$=\sin 2B/\{2(1+\cos 2B)+3(1-\cos 2B)\}$$

$$=\frac{\sin 2B}{5-\cos 2B}.$$

258.設 $\tan^2\theta=2\tan^2\phi+1$，則$\cos 2\phi=2\cos 2\theta+1$，

因而 $\cos 2\theta+\sin^2\phi=0$.求證.

【證】 由 $\tan^2\theta=2\tan^2\phi+1$，得 $1+\tan^2\theta=2\tan^2\phi+2$，

或 $\sec^2\theta=2\sec^2\phi$，或 $\cos^2\phi=2\cos^2\theta$，

以是 $2\cos^2\phi-1=4\cos^2\theta-2+1$，

卽 $\cos 2\phi=2\cos 2\theta+1$，因此得 $\cos 2\theta$

$+\frac{1}{2}(1-\cos 2\phi)=0$，卽 $\cos 2\theta+\sin^2\phi=0$.

259. 設 $\tan\theta=\dfrac{x\sin\alpha}{y-x\cos\alpha}$，$\tan\phi=\dfrac{y\sin\alpha}{x-y\cos\alpha}$，

則 $\tan(\theta+\phi)=-\tan\alpha$. 試證之.

【證】 $\tan(\theta+\phi)=\dfrac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi}=\sin\alpha$

$\times\left(\dfrac{x}{y-x\cos\alpha}+\dfrac{y}{x-y\cos\alpha}\right)\Big/\{1-[xy\sin^2\alpha$

$\div(y-x\cos\alpha)(x-y\cos\alpha)]\}=-\tan\alpha$.

260. 設 $\alpha+\beta=45°$，則 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=2$.

【證】 因 $\alpha+\beta=45°$，故 $\tan(\alpha+\beta)=1$，

或 $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$，或 $\tan\alpha+\tan\beta$

$=1-\tan\alpha\tan\beta$，或 $1+\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha$

$\times\tan\beta=2$，卽 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=2$.

261. 若 $\alpha+\beta+\gamma=90°$，則 $\tan\gamma$ 與 $\dfrac{1-\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$

相等，求證.

【證】 因 $a+\beta+\gamma=90°$，故 $\tan\gamma=\cot(\alpha+\beta)$，

故 $\tan\gamma=\dfrac{1}{\tan(\alpha+\beta)}=1\Big/\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{1-\tan\alpha\tan\beta}{\tan a+\tan\beta}$.

262.若 $\tan\theta=2k+1$，$\tan\phi=2k-1$，

則 $\cot(\theta-\phi)=2k^2$.求證.

【證】 $\cot(\theta-\phi)=\dfrac{1}{\tan(\theta-\phi)}=\dfrac{1+\tan\theta\tan\phi}{\tan\theta-\tan\phi}$

$=\dfrac{1+(2k+1)(2k-1)}{(2k+1)-(2k-1)}=\dfrac{4k^2}{2}=2k^2$.

263.設 $\tan A=a$，$\tan B=b$，則 $\sin(A+B)$

$=\dfrac{a+b}{\sqrt{\{(1+a^2)(1+b^2)\}}}$.求證.

【證】 $=\dfrac{a+b}{\sqrt{\{(1+a^2)(1+b^2)\}}}=(\tan A+\tan B)$

$/\{(1+\tan^2 A)(1+\tan^2 B)\}=\dfrac{\tan A+\tan B}{\sec A\sec B}$

$=\left(\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}\right)\cdot\dfrac{1}{\sec A\sec B}$

$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)/\cos A\cos B$

$\sec A\sec B=\sin A\times\cos B+\cos A\sin B$

$=\sin(A+B)$.

264. 設 $\sin\beta=m\sin(2\alpha+\beta)$ 則 $\tan(\alpha+\beta)$

$=\frac{1+m}{1-m}\cdot\tan\alpha$.

【證】 $\sin\beta=\sin(\alpha+\beta-\alpha)=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha$
$-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$, 又 $m\sin(2\alpha+\beta)=m$
$\times\{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\}$,
故 $\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=m$
$\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+m\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$,
兩邊除以 $\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)$，則 $\tan(\alpha+\beta)$
$-\tan\alpha=m\tan(\alpha+\beta)+m\tan\alpha$,

故 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{1+m}{1-m}\cdot\tan\alpha$.

265. 設 $\gamma=\alpha+\beta$, 求證 $\sin^2\gamma=\cos^2\alpha+\cos^2\beta$
$-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

【證】 因 $\gamma=\alpha+\beta$, 故 $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$,
故 $\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma$,
或 $\sin^2\alpha\sin^2\beta=\cos^2\alpha\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta$
$\cos\gamma+\cos^2\gamma$, 然左邊爲 $(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)$
$=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta$,
故 $1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta=-2\times\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$
$+\cos^2\gamma$，或 $1-\cos^2\gamma=\cos^2\alpha+\cos^2\beta$
$-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. 故如題所言.

266. 設 $b\sin(x+\theta)=c\sin(y-\theta)$, $b\cos x=c\cos y$,

則 $\tan\theta=\tan y-\tan x$.

【證】 由所設二假設，用除法可得 $\frac{\sin(x+\theta)}{\cos x}$

$=\frac{\sin(y-\theta)}{\cos y}$，故 $(\sin x\cos\theta+\sin\theta\cos x)/\cos x$

$=\frac{\sin y\cos\theta-\sin\theta\cos y}{\cos y}$，或 $\tan x\times\cos\theta+\sin\theta$

$=\tan y\cos\theta-\sin\theta$，以 $\cos\theta$ 除兩邊，$\tan x+\tan\theta$

$=\tan y-\tan\theta$，或 $2\tan\theta=\tan y-\tan x$.

267. 設 $\alpha+\beta+\gamma=2\delta$，則 $\cos 2\delta+\cos 2(\delta-\alpha)+\cos 2(\delta-\beta)$

$+\cos 2(\delta-\gamma)=4\cos\alpha\cos\beta\times\cos\gamma$.

【證】 $\{\cos 2\delta+\cos 2(\delta-\alpha)\}+\{\cos 2(\delta-\beta)$

$+\cos 2(\delta-\gamma)\}=2\cos(2\delta-\alpha)\cos\alpha+2$

$\times\cos(2\delta-\beta-\gamma)\cos(\beta-\gamma)=2\cos(\alpha+\beta+\gamma-\alpha)$

$\cos\alpha+2\cos(\alpha+\beta+\gamma-\beta-\gamma)\times\cos(\beta-\gamma)$

$=2\cos(\beta+\gamma)\cos\alpha+2\cos\alpha\times\cos(\beta-\gamma)$

$=2\cos\alpha\{\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)\}$

$=2\cos\alpha\times 2\cos\beta\cos\gamma$.

$=4\cos\alpha\times\cos\beta\cos\gamma$.

268. 設 $\alpha=\frac{2\pi}{15}$，求證 $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 8\alpha=\frac{1}{2}$.

【證】 $\cos\frac{2}{15}\pi+\cos\frac{4}{15}\pi+\cos\frac{8}{15}\pi+\cos\frac{16}{15}\pi$

$$=\left(\cos\frac{2}{15}\pi+\cos\frac{4}{15}\pi\right)+\left(\cos\frac{8}{15}\pi-\cos\frac{1}{15}\pi\right)$$

$$=2\ \cos\frac{3}{15}\pi\ \ \cos\frac{1}{15}\pi-2\sin\frac{7}{30}\pi\ \ \sin\frac{9}{30}\pi$$

$$=2\times\cos\frac{3}{15}\pi\cos\frac{1}{15}\pi-2\sin\frac{7}{30}\pi\cos\left(\frac{1}{2}-\frac{9}{30}\right)\pi$$

$$=2\ \cos\frac{1}{5}\pi\ \ \cos\frac{1}{15}\pi-2\sin\frac{7}{30}\cos\frac{1}{5}\pi$$

$$=2\times\cos\frac{1}{5}\pi\left\{\cos\frac{1}{15}\pi-\sin\frac{7}{30}\pi\right\}$$

$$=2\cos\frac{1}{5}\pi\times\left\{\sin\frac{13}{30}\pi-\sin\frac{7}{30}\pi\right\}$$

$$=2\cos\frac{1}{5}\pi\times2\sin\frac{1}{10}\times\pi\ \ \cos\frac{1}{3}\pi$$

$$=4\times\frac{\sqrt{5}+1}{4}\times\frac{\sqrt{5}-1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

269. 設 $\sin\theta+\sin\phi=a$，$\cos\theta+\cos\phi=b$，試以 a，b 之項表下式：

(1) $\sin\theta+\sin\phi$，　　(2) $\cos\theta\cos\phi$，

(3) $\tan\theta+\tan\phi$，　　(4) $\cos2\theta+\cos2\phi$，

(5) $\tan\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\phi}{2}$，　　(6) $\cos3\theta+\cos3\phi$.

【解】 茲 $(\sin\theta+\sin\phi)^2+(\cos\theta+\cos\phi)^2$

$=a^2+b^2$，或 $2+2\cos(\theta-\phi)=a^2+b^2$，即 $\cos(\theta-\phi)$

$=\frac{a^2+b^2}{2}-1$. 又 $(\cos\theta+\cos\phi)^2-(\sin\theta+\sin\phi)^2$

$=b^2-a^2$, 或 $\cos 2\theta+\cos 2\phi+2\cos(\theta+\phi)$

$=b^2-a^2$, $2\cos(\theta+\phi)\{\cos(\theta-\phi)+1\}$

$=b^2-a^2$, 故 $\cos(\theta+\phi)=\dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$. 是以可知

(1) $\sin\theta\sin\phi=\dfrac{\cos(\theta-\phi)-\cos(\theta+\phi)}{2}$.

$=\{(a^2+b^2)^2-4\times b^2\}/4(a^2+b^2)$.

(2) $\cos\theta\cos\phi=\frac{1}{2}\{\cos(\theta+\phi)+\cos(\theta-\phi)\}$

$=\{(a^2+b^2)^2-4a^2\}/4(a^2+b^2)$.

(3) $\tan\theta+\tan\phi=\dfrac{\sin(\theta+\phi)}{\cos\theta\cos\phi}$

$=\dfrac{\sqrt{\{1-\cos^2(\theta+\phi)\}}}{\cos\theta\cos\phi}=8ab/\{(a^2+b^2)^2-4a^2\}$.

(4) $\cos 2\theta+\cos 2\phi=2\cos(\theta+\phi)\times\cos(\theta-\phi)$

$=\dfrac{(b^2-a^2)(a^2+b^2-2)}{a^2+b^2}$.

(5) $\tan\dfrac{\theta}{2}+\tan\dfrac{\phi}{2}=\sin\dfrac{1}{2}(\theta+\phi\ /\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\phi}{2}$

$=2\sin\dfrac{1}{2}(\theta+\phi)\ /\left(2\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\phi}{2}\right)$

$=2\sin\frac{1}{2}\times(\theta+\phi)/\{\cos\frac{1}{2}(\theta+\phi)+\cos\frac{1}{2}(\theta-\phi)\}$

$=\dfrac{2\sqrt{\{1-\cos(\theta+\phi)\}}}{\sqrt{\{1+\cos(\theta+\phi)\}}+\sqrt{\{1+\cos(\theta-\phi)\}}}$

$=\dfrac{4a}{2b+a^2+b^2}$.

(6) $\cos 3\theta+\cos 3\phi=4\times(\cos^3\theta+\cos^3\phi)$

$-3(\cos\theta+\cos\phi)=(\cos\theta+\cos\phi)$

$\{4(\cos\theta+\cos\phi)^2-12\cos\theta\cos\phi-3\}$

$=b\left\{4b^2-\frac{3(a^2+b^2)^2-12a^2}{a^2+b^2}-3\right\}.$

270.設β不等於γ，則$\frac{\cos(\alpha+\beta+\theta)}{\sin(\alpha+\beta)\cos^2\gamma}=\frac{\cos(\gamma+\alpha+\theta)}{\sin(\gamma+\alpha)\cos^2\beta}$

各等於$\frac{\cos(\beta+\gamma+\theta)}{\sin(\beta+\gamma)\cos^2\alpha}$.

【證】 設$\frac{\cos(\alpha+\beta+\theta)}{\sin(\alpha+\beta)\cos^2\gamma}=\frac{\cos(\beta+\gamma+\theta)}{\sin(\gamma+\alpha)\cos^2\beta}$

$=$入，則$\frac{\cos(\alpha+\beta+\theta)}{\cos\gamma}=$入$\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma$

$=\frac{1}{2}$入$\{\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)\}$,

$\frac{\cos(\gamma+\alpha+\theta)}{\cos\beta}=\frac{1}{2}$入$\{\sin(\alpha+\beta+\gamma)$

$+\sin(\gamma+\alpha-\beta)\}$，故由此二式,可得關係如下：

$\frac{\cos(\alpha+\beta+\theta)\cos\beta-\cos(\gamma+\alpha+\theta)\cos\gamma}{\cos\gamma\cos\beta}$

$=\frac{1}{2}$入$\{\sin(\alpha+\beta+\gamma)-\sin(\gamma+\alpha-\beta)\}$.

卽$\frac{\cos(\alpha+2\beta+\theta)-\cos(\alpha+2\gamma+\theta)}{2\cos\gamma\cos\beta}$

$=-$入$\cos\alpha\times\sin(\beta-\gamma)$,或入$=\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma+\theta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$,

此式之右邊關於 α, β γ, θ 爲對稱，故將 α, β, γ, θ 順次互換 而不變化，故入又與$\cos(\beta+\gamma+\theta)$ $/\sin(\beta+\gamma)\cos^2\alpha$ 相等.

271. 設$\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}=\frac{a}{b}$，及$\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\frac{a'}{b'}$，求證$\cos(\alpha-\beta)$

$=\frac{aa'+bb'}{ab'+a'b}$.

【證】 由所設式，$\frac{\sin[\theta-\beta-(\alpha+\beta)]}{\sin(\theta-\beta)}=\frac{a}{b}$，

故$\frac{\sin(\theta-\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos(\theta-\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\theta-\beta)}$

$=\frac{a}{b}$，故 $\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)\cot(\theta-\beta)$

$=\frac{a}{b}$. 又由$\frac{\cos\{\theta-\beta-(\alpha-\beta)\}}{\cos(\theta-\beta)}=\frac{a'}{b'}$

故$\frac{\cos(\theta-\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\theta-\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\theta-\beta)}$

$=\frac{a'}{b'}$，故 $\cos(\alpha-\beta)+\tan(\theta-\beta)\sin(\alpha-\beta)=\frac{a'}{b'}$.

據此 $\sin(\alpha-\beta)\cot(\theta-\beta)\sin(\alpha-\beta)\times\tan(\theta-\beta)$

$=\left\{\cos(\alpha-\beta)-\frac{a}{b}\right\}\left\{\frac{a'}{b'}-\cos(\alpha-\beta)\right\},\sin^2(\alpha-\beta)$

$=-\frac{aa'}{bb'}+\left(\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}\right)\cos(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha-\beta)$；

故 $1+\frac{aa'}{bb'}=\left(\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}\right)\times\cos(\alpha-\beta)$，

故 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{aa'+bb'}{ab+ab}$.

【別證】 或單由消去θ始亦可得證，即由$\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}$

$=\frac{a}{b}$，得 $b(\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha)$

$=a(\sin\theta\cos\beta-\sin\beta\cos\theta)$，或 $b\cos\alpha\times\tan\theta$ $-b\sin\alpha=a\cos\beta\tan\theta-a\sin\beta$，兩邊移項而類集之，得 $(b\cos\alpha-a\cos\beta)\times\tan\theta$

$=b\sin\alpha-a\sin\beta$……(1)，又由 $\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\frac{a'}{b'}$，

得 $b'(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\times\sin\alpha)=a'(\cos\theta\cos\beta$ $+\sin\theta\sin\beta)$，或 $b'\cos\alpha+b'\sin\alpha\tan\theta$ $=a'\cos\beta+a'\sin\beta\times\tan\theta$ 或 $(b'\sin\alpha-a'\sin\beta)$ $\tan\theta=a'\times\cos\beta-b'\cos\alpha$……(2)。由(1)，(2)行除法得 $\frac{b\cos\alpha-a\cos\beta}{b'\sin\alpha-a'\sin\beta}=\frac{b\sin\alpha-a\sin\beta}{a'\cos\beta-b'\cos\alpha}$，

去分母，$(b\cos\alpha-a\cos\beta)(a'\cos\beta-b\cos\alpha)$ $=(b\sin\alpha-a\sin\beta)(b'\sin\alpha-a'\sin\beta)$，即 $a'b\cos\alpha\cos\beta-bb'\cos^2\alpha-aa'\cos^2\beta+ab'$ $\times\cos\alpha\cos\beta=bb'\sin^2\alpha-a'b\sin\alpha\sin\beta$ $-ab'\sin\alpha\sin\beta+aa'\sin^2\beta$，即 $(a'b+ab')$，$\times(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=aa'+bb'$

或 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{aa'+bb'}{a'b+ab'}$。

272. 設 $n^2\sin^2(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)$，

求證 $\tan\alpha=\frac{1\pm n}{1\mp n}\cdot\tan\beta$。

【證】 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)$

$=\sin\alpha\{\sin\alpha-\sin\beta\cos(\alpha-\beta)\}$

$+\sin\beta\times\{\sin\beta-\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)\}$

$=\sin\alpha\{\sin(\alpha-\beta+\beta)-\sin\beta\cos(\alpha-\beta)\}$

$+\sin\beta\{\sin[\alpha-(\alpha-\beta)]-\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)\}$

$=\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)$

$=\sin(\alpha-\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha)$

$=\sin^2(\alpha-\beta)$. 由是 $\sin^2(\alpha-\beta)=n^2\sin^2(\alpha+\beta)$,

故 $\sin(\alpha-\beta)=\pm n\sin(\alpha+\beta)$, 故 $\sin\alpha\cos\beta$

$-\cos\alpha\sin\beta=\pm n(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$,

兩邊除以 $\cos\alpha\cos\beta$, 則 $\tan\alpha-\tan\beta$

$=\pm n(\tan\alpha+\tan\beta)$, 故 $(1\mp n)\tan\alpha$

$=(1\pm n)\tan\beta$, 而 $\tan\alpha=\dfrac{1\pm n}{1\mp n}\cdot\tan\beta$.

273. 設 $\operatorname{vers}\alpha=x$, $\operatorname{vers}\beta=mx$, $\operatorname{vers}\gamma=1-m$, $\alpha+\beta=\gamma$,

求證 $x=1\pm\sqrt{\dfrac{2m}{1+m}}$.

【證】 由 $\alpha+\beta=\gamma$, 得 $\beta=\gamma-\alpha$, $\therefore\cos\beta$

$=\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\sin\alpha\cdots\cdots(1)$, 然由所設關係, $\cos\alpha=1-x$, $\cos\beta=1-mx$, $\cos\gamma=m$,

故 $\sin\gamma=\sqrt{1-m^2}$, $\sin\alpha=\sqrt{2x-x^2}$, 以此等值代入(1), 則 $1-mx=m(1-x)+\sqrt{(1-m^2)(2x-x^2)}$,

移項, 得 $\sqrt{(1-m^2)(2x-x^2)}=1-m$, 變其形為

$\sqrt{(1+m)(2x-x^2)}=\sqrt{1-m}$，兩邊平方，

得 $(1+m)(2x-x^2)=1-m$，亦卽 $2x-x^2$

$=\dfrac{1-m}{1+m}$，故 $x^2-2x=-\dfrac{1-m}{1+m}$，卽 $(x-1)^2$

$=\dfrac{2m}{1+m}$，$\therefore\ x=1\pm\sqrt{\dfrac{2m}{1+m}}$.

274. 設 $\dfrac{\tan(A-B)}{\tan A}+\dfrac{\sin^2 C}{\sin^2 A}=1$，求證 $\tan A\tan B=\tan^2 C$.

【證】 由假設，知 $\dfrac{\sin^2 C}{\sin^2 A}=1-\dfrac{\tan(A-B)}{\tan A}$

$=1-\dfrac{\sin(A-B)\cos A}{\cos(A-B)\sin A}$

$=\dfrac{\sin A\cos(A-B)-\cos A\sin(A-B)}{\cos(A-B)\sin A}$

$=\dfrac{\sin\{A-(A-B)\}}{\cos(A-B)\sin A}=\dfrac{\sin B}{\cos(A-B)\sin A}$，

故 $\sin^2 C=\dfrac{\sin A\sin B}{\cos(A-B)}$，據此，$\cos^2 C$

$=1-\sin^2 C=1-\dfrac{\sin A\sin B}{\cos(A-B)}$

$=\dfrac{\cos(A-B)-\sin A\sin B}{\cos(A-B)}=\dfrac{\cos A\cos B}{\cos(A-B)}$

故 $\dfrac{\sin^2 C}{\cos^2 C}=\dfrac{\sin A\sin B}{\cos(A-B)}\Big/\dfrac{\cos A\cos B}{\cos(A-B)}$

$=\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}$，卽 $\tan^2 C=\tan A\tan B$.

275.設 $\alpha+\beta=\omega$ 及 $\tan\alpha=m\tan\beta$，則 $\sin\omega$
$=(m+1)\sin(\alpha-\beta)/(m-1)$。試證之.

【證】 $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\frac{m}{1}$. 故 $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}=\frac{m+1}{m-1}$，

然 $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\omega}{\sin(\alpha-\beta)}$，

故 $\frac{\sin\omega}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{m+1}{m-1}$，或 $\sin\omega$

$=\frac{m+1}{m-1}\sin(\alpha-\beta)$.

276.設 $\tan A=2\tan B$，求證 $\sin(A+B)=3\sin(A-B)$

【證】 因 $\tan A=2\tan B$，故 $\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{2\sin B}{\cos A}$，

即 $\sin A\cos B=2\cos A\sin B$……(1). (1) 之兩邊加 $\cos A\sin B$，則 $\sin(A+B)=3\cos A\times\sin B$……(2). 又由 (1) 之兩邊減 $\cos A\times\sin B$，則 $\sin(A-B)=\cos A\sin B$……(3).

(2) 與 (3)各邊相除，則 $\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}=3$，

$\therefore\ \sin(A+B)=3\sin(A+B)$.

277.設 $\alpha=\left(n+\frac{1}{4}\pm\frac{1}{6}\right)\pi$，求證 $\tan\alpha+\cot\alpha=4$.

【證】 $\tan\alpha=\tan\left(n+\frac{1}{4}\pm\frac{1}{6}\right)\pi=\tan\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)\pi$

$=\frac{1\pm\tan\frac{1}{6}\pi}{1\mp\tan\frac{1}{6}\pi}=\frac{\sqrt{3}\pm1}{\sqrt{3}\mp1}$, 故 $\tan\alpha+\cot\alpha$

$=\frac{\sqrt{3}\pm1}{\sqrt{3}\mp1}+\frac{\sqrt{3}\mp1}{\sqrt{3}\pm1}=\{(\sqrt{3}\pm1)^2$

$+(\sqrt{3}\mp1)^2\}/(3-1)=\frac{2\{(\sqrt{3})^2+1\}}{2}=4$.

278. 設 $\sin x\cos y=\tan\alpha\cot\gamma$, $\sin y\times\cos x=\tan\beta\cot\gamma$, $\cos^2 y-\cos^2 x=\cos^2\gamma$, 求證 $\sec^2\alpha-\sec^2\beta=\sin^2\gamma$.

【證】 由首二假設式用加法及減法,

得 $\sin(x+y)=(\tan\alpha+\tan\beta)\cot\gamma$

及 $\sin(x-y)=(\tan\alpha-\tan\beta)\cot\gamma$, 此二式相乘,

則 $\sin(x+y)\sin(x-y)=(\tan^2\alpha-\tan^2\beta)\times\cot^2\gamma$,

然 $\sin(x+y)\sin(x-y)=\cos^2 y-\cos^2 x$,

卽由假設之第三式, 等於 $\cos^2\gamma$, 故 $\cos^2\gamma$

$=(\tan^2\alpha-\tan^2\beta)\cot^2\gamma$, 或 $(\tan^2\alpha-\tan^2\beta)$

$=\sin^2\gamma$, 或 $(\sec^2\alpha-1)-(\sec^2\beta-1)$

$=\sin^2\gamma$, 卽 $\sec^2\alpha-\sec^2\beta=\sin^2\gamma$.

279. 設 $\tan^2 x=\tan(\alpha+x)\tan(\alpha-x)$,

求證 $\sin 2x=\sqrt{2}\sin\alpha$.

【證】 $\tan^2 x=\frac{\sin(\alpha+x)\sin(\alpha-x)}{\cos(\alpha+x)\cos(\alpha-x)}=(\sin^2\alpha-\sin^2 x)$

$/(\cos^2 x-\sin^2\alpha)$ 故 $\sin^2 x(\cos^2 x-\sin^2\alpha)$

$=\cos^2 x(\sin^2\alpha-\sin^2 x)$, $2\sin^2 x\cos^2 x$

$=\sin^2\alpha(\sin^2 x+\cos^2 x)=\sin^2\alpha$, 故 $4\sin^2 x\cos^2 x$

$=2\sin^2\alpha$，故 $2\sin x\cos x=\sqrt{2}\cdot\sin\alpha$，

故 $\sin 2x=\sqrt{2}\cdot\sin\alpha$.

280．設 $l\cos(\theta-\beta)-m\cos(\theta-\alpha)=n$，求證 $l\sin(\theta-\beta)-m\sin(\theta-\alpha)=\sqrt{\{l^2+m^2-n^2-2lm\cos(\alpha-\beta)\}}$.

【證】命 $l\sin(\theta-\beta)-m\sin(\theta-\alpha)$ 之值爲 x，

則 $l\cos(\theta-\beta)-m\cos(\theta-\alpha)=n$，及 $l\sin(\theta-\beta)-m\sin(\theta-\alpha)=x$，自乘而相加，則 $l^2+m^2-2lm\{\cos(\theta-\beta)\cos(\theta-\alpha)+\sin(\theta-\beta)\sin(\theta-\alpha)\}=n^2+x^2$，即 $l^2+m^2-2lm\cos(\alpha-\beta)=n^2+x^2$.

故 $x=\sqrt{l^2+m^2-n^2-2lm\cos(\alpha+\beta)}$.

281．設 $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\beta}$. 求證 $\cot\beta-\cot\theta=\cot(\alpha+\theta)+\cot(\alpha-\beta)$.

【證】所設結果之眞否，全視次式之眞否而定，

即 $\cot\beta-\cot(\alpha+\theta)=\cot\theta+\cot(\alpha-\beta)$，

即 $\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}-\dfrac{\cos(\alpha+\theta)}{\sin(\alpha+\theta)}=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}+\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$，

亦即 $\dfrac{\sin(\alpha+\theta)\cos\beta-\cos(\alpha+\theta)\sin\beta}{\sin\beta\sin(\alpha+\theta)}$

$=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)\cos\theta+\cos(\alpha-\beta)\sin\theta}{\sin\theta\sin(\alpha-\beta)}$，

即 $\dfrac{\sin(\alpha+\theta-\beta)}{\sin\beta\sin(\alpha+\theta)}=\dfrac{\sin(\alpha-\beta+\theta)}{\sin\theta\sin(\alpha-\beta)}$，

即 $\sin\theta\times\sin(\alpha-\beta)=\sin\beta\sin(\alpha+\theta)$，由假設知

此最後之式爲眞甚明，故所設結果爲眞.

282.設 $\tan\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\theta\right)=\tan^5\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\phi\right)$，求證

$$\sin\theta=5\sin\phi$$

$$\times\left\{\frac{\left(1+\sin^2\phi\cot^2\frac{1}{5}\pi\right)\left(1+\sin\phi^2\cot^2\frac{2}{5}\pi\right)}{\left(1+\sin^2\phi\tan^2\frac{1}{5}\pi\right)\left(1+\sin^2\phi\tan^2\frac{2}{5}\pi\right)}\right\}$$

【證】 $\tan^2\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\theta\right)=\left\{\tan^2\left(\frac{1}{4}\pi+\phi\right)\right\}^5$,

即 $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=\left(\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}\right)^5$,

故 $\sin\theta=\frac{(1+\sin\phi)^5-(1-\sin\phi)^5}{(1+\sin\phi)^5+(1-\sin\phi)^5}$

$$=\frac{\sin\phi(5+10\sin^2\phi+\sin^4\phi)}{1+10\sin^2\phi+5\sin^4\phi}$$

$$\times\frac{5\left(1+\sin^2\phi\frac{5-2\sqrt{5}}{5}\right)\left(1+\sin^2\phi\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)}{\left(1+\sin^2\phi\frac{5}{5-2\sqrt{5}}\right)\left(1+\sin^2\phi\frac{5}{5+2\sqrt{5}}\right)}$$

$$=\frac{5\sin\phi\left(1+\sin^2\phi\cot^2\frac{2}{5}\pi\right)\left(1+\sin^2\phi\cot^2\frac{1}{5}\pi\right)}{\left(1+\sin^2\phi\tan^2\frac{2}{5}\pi\right)\left(1+\sin^2\phi\tan^2\frac{1}{5}\pi\right)}$$

283.設 $\frac{\tan^2\alpha}{\tan^2\beta}=\frac{\cos\beta(\cos x-\cos\alpha)}{\cos\alpha(\cos x-\cos\beta)}$，求證 $\tan^2\frac{x}{2}$

$=\tan^2\frac{\alpha}{2}\tan^2\frac{\beta}{2}$.

【證】 因$\dfrac{\tan^2\alpha}{\tan^2\beta}=\dfrac{\cos\beta(\cos x-\cos\alpha)}{\cos\alpha(\cos x-\cos\beta)}$，

故$\dfrac{\cos x-\cos\alpha}{\cos x-\cos\beta}=\dfrac{\tan^2\alpha\cos\alpha}{\tan^2\beta\cos\beta}=\dfrac{\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2\beta\cos\alpha}$，

故 $\cos x=\dfrac{\sin^2\beta\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\beta}{\sin^2\beta\cos\alpha-\sin^2\alpha\cos\beta}$

$=\dfrac{(1-\cos^2\beta)\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)\cos^2\beta}{(1-\cos^2\beta)\cos\alpha-(1-\cos^2\alpha)\cos\beta}$

$=(\cos^2\alpha-\cos^2\beta)/(\cos\alpha-\cos\beta)$

$(1+\cos\alpha\times\cos\beta)=\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$，

由是$\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}=\dfrac{1+\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha-\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha+\cos\beta}$

$=(1-\cos\alpha)\times(1-\cos\beta)/(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)$，

故 $\tan^2\dfrac{x}{2}=\tan^2\dfrac{\alpha}{2}\tan^2\dfrac{\beta}{2}$.

284.設 $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\tan\theta+c-1}{\tan\theta+c+1}$，求 $\tan\dfrac{\theta}{2}$.

【解】 $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\tan+c-1}{\tan+c+1}$，

故 $\tan\dfrac{\theta}{2}(\tan\theta+c+1)=\tan\theta+c-1$，

故 $\tan\dfrac{\theta}{2}\left\{2\tan\dfrac{\theta}{2}\Big/\left(1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}\right)+c+1\right\}$

$=2\tan\dfrac{\theta}{2}\Big/\left(1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}\right)+c-1$，

故 $2\tan^2\dfrac{\theta}{2}+(c+1)\times\left(1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}\right)\tan\dfrac{\theta}{2}$

$=2\tan\frac{\theta}{2}+(c+1)\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)$，故 $(c+1)\tan^3\frac{\theta}{2}$

$-(1+c)\times\tan^2\frac{\theta}{2}+(1-c)\tan\frac{\theta}{2}+(c-1)=0$.

故 $(c+1)\tan^2\frac{\theta}{2}\left(\tan\frac{\theta}{2}-1\right)$

$=(c-1)\left(\tan\frac{\theta}{2}-1\right)$，故 $\tan\frac{\theta}{2}-1=0$，

或 $(c+1)\tan^2\frac{\theta}{2}=c-1$，由是 $\tan\frac{\theta}{2}=1$，

或$\pm\sqrt{\frac{c-1}{c+1}}$.

285. 設 $\sin\theta\sin\phi=\sin\alpha\sin\beta$，$\tan\phi\times\cos\beta=\cot\frac{\alpha}{2}$，

則 $\sin\frac{\theta}{2}$ 之一値爲 $\sin\frac{\alpha}{2}\times\sin\beta$. 試證之.

【證】 $\sin\theta\sin\phi=\sin\alpha\sin\beta$,

故 $2\sin\frac{\theta}{2}\times\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\phi}$，

故 $4\sin^2\frac{\theta}{2}-4\sin^4\frac{\theta}{2}=\frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\phi}$，

故 $4\sin^4\frac{\theta}{2}-4\sin^2\frac{\theta}{2}+1=1-\frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\phi}$，

然 $\tan\phi\cos\beta=\cot\frac{\alpha}{2}$，$\therefore\cot\phi=\cos\beta/\cot\frac{\alpha}{2}$，

$\therefore\sin^2\phi=\cot^2\frac{\alpha}{2}\Big/\left(\cot^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\beta\right)$，

故 $4\sin^4\frac{\theta}{2}-4\sin^2\frac{\theta}{2}+1$

$=1-\sin^2\alpha\left(\cot^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\beta\right)\sin^2\beta/\cot^2\frac{\alpha}{2}$

$=1-4\sin^4\frac{\alpha}{2}\left(\cot^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\beta\right)\times\sin^2\beta$

$=1-4\sin^4\frac{\alpha}{2}\left(\cot^2\frac{\alpha}{2}+1-\sin^2\beta\right)\times\sin^2\beta$

$=1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta+4\sin^4\frac{\alpha}{2}\sin^4\beta$,

故 $2\sin^2\frac{\theta}{2}-1=\pm(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta)$用下一符號，則得 $\sin^2\frac{\theta}{2}=\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta$. 故如題所言.

286. 設 $\frac{2}{1+x}=\frac{\sin\beta\sin\theta}{\cos(\beta-\theta)}=\frac{\tan(\theta-\alpha)}{\cot\beta}$,

求證 $x^2=\left(\cot\frac{\alpha}{2}-2\cot\beta\right)\left(\tan\frac{\alpha}{2}+2\cot\beta\right)$.

【證】 $\frac{2}{1+x}=\frac{\sin\beta\sin\theta}{\cos(\beta-\theta)}=\sin\beta\sin\theta$

$/(\cos\beta\times\cos\theta+\sin\beta\sin\theta)=\frac{1}{\cot\beta\cot\theta+1}$,

故 $\cot\beta\cot\theta+1=\frac{1+x}{2}$, 故 $\cot\beta\cot\theta$

$=\frac{1+x}{2}-1=\frac{x-1}{2}$ ....(1),

又 $\frac{2}{1+x}=\frac{\tan(\theta-\alpha)}{\cot\beta}=\frac{(\tan\theta-\tan\alpha)\tan\beta}{1+\tan\theta\tan\alpha}$,

故 $2(1+\tan\theta\times\tan\alpha)=(1+x)(\tan\theta-\tan\alpha)\tan\beta$,

故 $\tan\theta=\frac{2+(1+x)\tan\alpha\tan\beta}{(1+x)\tan\beta-2\tan\alpha}$ ....(2).

茲將 (1) 與 (2) 兩式相乘，則可得 $\cot\beta$

$$=\frac{2+(1+x)\tan\alpha\tan\beta}{(1+x)\tan\beta-2\tan\alpha}\cdot\frac{x-1}{2},$$

故 $2\cot\beta\times\{(1+x)\tan\beta-2\tan\alpha\}=2(x-1)$ $+(x^2-1)\tan\alpha\tan\beta$，故 $2(1+x)-4\cot\beta\tan\alpha$ $=2(x-1)+(x^2-1)\tan\alpha\tan\beta$，故 $x^2\tan\alpha\times\tan\beta$ $=4-4\cot\beta\tan\alpha+\tan\alpha\tan\beta$，

故 $x^2=4\cot\alpha\cot\beta-4\cot^2\beta+1$

$$=2\left(\cot\frac{\alpha}{2}-\tan\frac{\alpha}{2}\right)\cot\beta-4\cot^2\beta+1$$

$$=\left(\cot\frac{\alpha}{2}-2\cot\beta\right)\left(\tan\frac{\alpha}{2}+2\cot\beta\right).$$

287. 設 $x=r\sin\frac{1}{2}(\theta-\alpha)$，$y=r\sin\frac{1}{2}(\theta+\alpha)$，求證 $x^2-2xy\cos\alpha+y^2=r^2\sin^2\alpha$.

【證】 $x=r\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$,

$y=r\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

由此得 $\sin\frac{\theta}{2}=(x+y)/2r\cos\frac{\alpha}{2}$,

$\cos\frac{\theta}{2}=(y-x)/2r\times\sin\frac{\alpha}{2}$，自乘而相加，

則 $1=\frac{1}{4r^2}\left\{(x+y)^2/\cos^2\frac{\alpha}{2}+(y-x)^2/\sin^2\frac{\alpha}{2}\right\}$,

故 $4r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\times\cos^2\frac{\alpha}{2}=(x+y)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$+(y-x)^2\cos^2\frac{\alpha}{2}$，即 $r^2\sin^2\alpha=x^2+y^2$

$$-2xy\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=x^2+y^2-2xy\cos\alpha.$$

288. 設 $x=\frac{\pi}{7}$，求證 $\cos 3x-\cos 2x+\cos x=\frac{1}{2}$.

【證】 因 $7x=\pi$，從而 $-\cos 2x=\cos 5x$，故今設 $\cos 3x-\cos 2x+\cos x=y$，則 $y=\cos 3x+\cos 5x+\cos x$，從而 $2y^2=2\times(\cos 5x+\cos 3x+\cos x)^2$
$=3+\cos 10x+\cos 6x+\cos 2x+2(\cos 8x+\cos 2x+\cos 6x+\cos 4x+\cos 4x+\cos 2x)$
$=3-5(\cos 3x-\cos 2x+\cos x)=3-5y$，
故 $(y+3)(2y-1)=0$，從而 $y=-3$，或 $y=\frac{1}{2}$. 然若 $y=-3$，則餘弦中任一之絕對值大於1，故 $y=\frac{1}{2}$.

289. 設 $\sec 2\theta=2\sec\theta\operatorname{cosec}\theta$，求證 $\operatorname{cosec} 2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta-\sec^2\theta$.

【證】 因 $\sec 2\theta=2\sec\theta\operatorname{cosec}\theta$，故 $\frac{1}{\cos 2\theta}$

$$=\frac{2}{\cos\theta\sin\theta}\text{，是以}1=\frac{2\cos 2\theta}{\cos\theta\sin\theta},$$

亦卽 $\frac{1}{\sin 2\theta}=\frac{2\cos 2\theta}{\sin 2\theta\cos\theta\sin\theta}$

$$=\frac{\cos 2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

$-\frac{1}{\cos^2\theta}$. 故 $\operatorname{cosec} 2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta-\sec^2\theta$.

290. 設 $\cos A=\frac{a\cos^2 B-b}{a-b\cos B}$ 時，求證 $\frac{\tan^2\frac{1}{2}A}{\tan^2\frac{1}{2}B}$

$$=\frac{a+b}{a-b}，或\frac{\tan\frac{1}{2}A}{\sqrt{(a+b)}}=\frac{\tan\frac{1}{2}B}{\sqrt{(a-b)}}.$$

【證】 $1-\cos A=\dfrac{(a+b)(1-\cos B)}{a-b\cos B}$，及 $1+\cos A$

$$=\frac{(a-b)(1+\cos B)}{a-b\cos B},\quad \therefore \frac{1-\cos A}{1+\cos A}$$

$$=\frac{(a+b)}{(a-b)}\times\frac{1-\cos B}{1+\cos B}，即 \tan^2\frac{1}{2}A=\frac{a+b}{a-b}$$

$\times\tan^2\dfrac{B}{2}$ 故如題所言．

【別證】 $\cos A=\dfrac{a\cos B-b}{a-b\cos B}$，故 $\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}$

$$=\frac{\alpha-b\cos B-a\cos B+b}{a-b\cos B+a\cos B-b}=(a+b)$$

$$(1-\cos B)/(a-b)(1+\cos B)\tan^2\frac{A}{2}=\frac{a+b}{a-b}$$

$\times\tan^2\dfrac{B}{2}$，故 $\tan^2\frac{1}{2}A/(a+b)=\tan^2\frac{1}{2}B/(a-b)$．

291．設 $\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta$． $\cos\theta'=\cos\alpha'\times\cos\beta$，

$$\tan\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta'}{2}=\tan\frac{\beta}{2},$$

求證 $\sin^2\beta=(\sec\alpha-1)(\sec\alpha'-1)$．

【證】 因 $\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta$，故 $\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

$$=\frac{1-\cos\alpha\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}，由公式\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}$$

$=\tan^2 A$ 得 $\tan^2\frac{\theta}{2}=(1-\cos\alpha\times\cos\beta)$

$/(1+\cos\alpha\cos\beta)$。同理，$\tan^2\frac{\theta'}{2}$

$=\frac{1-\cos\alpha'\cos\beta}{1+\cos\alpha'\cos\beta}$，由是，$(1-\cos\alpha\cos\beta)$

$\times(1-\cos\alpha'\cos\beta)/(1+\cos\alpha\cos\beta)$

$(1+\cos\alpha'\cos\beta)=\tan^2\frac{\beta}{2}=\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}$，

故 $\frac{1-(\cos\alpha+\cos\alpha')\cos\beta+\cos\alpha\cos\alpha'\cos^2\beta}{1+(\cos\alpha+\cos\alpha')\cos\beta+\cos\alpha\cos\alpha'\cos^2\beta}$

$=\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}$，故 $\frac{(\cos\alpha+\cos\alpha')\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\alpha'\cos^2\beta}=\cos\beta$。

故 $\cos\alpha+\cos\alpha'=1+\cos\alpha\cos\alpha'(1-\sin^2\beta)$，

故 $\sin^2\beta\cos\alpha\cos\alpha'=1-\cos\alpha-\cos\alpha'$

$+\cos\alpha\cos\alpha'=(1-\cos\alpha)(1-\cos\alpha')$，

故 $\sin^2\beta=\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)$

$=(\sec\alpha-1)\times(\sec\alpha'-1)$。

292．設 $\tan\phi=\frac{\sin\theta\cos\theta'}{\sin\theta'+\cos\theta}$，則 $\tan\frac{\phi}{2}$ 之值爲

$\tan\frac{\theta}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta'}{2}\right)$。試證之。

【證】 $\tan\phi=2\tan\frac{\phi}{2}\Big/\left(1-\tan^2\frac{\phi}{2}\right)$，

故 $2\tan\frac{\phi}{2}\left(1-\tan^2\frac{\phi}{2}\right)=\sin\theta\cos\theta'$

$/(\sin\theta'+\cos\theta)$故$2\tan\frac{\phi}{2}(\sin\theta'+\cos\theta)$

$+\left(1-\tan^2\frac{\phi}{2}\right)\sin\theta\cos\theta'$，故 $\sin\theta\cos\theta'$

$\times\tan^2\frac{\phi}{2}+2\tan\frac{\phi}{2}(\sin\theta'+\cos\theta)=\sin\theta$

$\times\cos\theta'$，依照通常之方法，解此二次方程式，

則得 $\tan\frac{\phi}{2}=\{-(\sin\theta'+\cos\theta)$

$\pm(1+\sin\theta'\cos\theta)\}/\sin\theta\cos\theta'$．取上一符號，

則得 $\tan\frac{\phi}{2}=\frac{(1-\sin\theta')(1-\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta'}$.

而$\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\tan\frac{\theta}{2}$，同樣，$\frac{1-\sin\theta'}{\cos\theta'}$

$=\left\{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta'\right)\right\}/\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta'\right)$

$=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta'}{2}\right)$，故 $\tan\frac{\phi}{2}=\tan\frac{\theta}{2}$

$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta'}{2}\right)$.

〔注意〕 若取下一符號，則得次式，$\tan\frac{\phi}{2}=-\cot\frac{\theta}{2}$

$\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta'}{2}\right)$．$\tan\frac{\phi}{2}$之二値之積爲$-1$，

是以爲合於二次式之性質者．

293. 設 $\cos\theta=\dfrac{\cos\alpha-\cos\beta}{1-\cos\alpha\cos\beta}$,

求證 $\tan\dfrac{\theta}{2}=\pm\tan\dfrac{\alpha}{2}\Big/\tan\dfrac{\beta}{2}$.

【證】 由假設之式, $2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1=(\cos\alpha-\cos\beta)$

$/(1-\cos\alpha\cos\beta)$. 因而 $2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

$=\dfrac{(1+\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{1-\cos\alpha\cos\beta}$, 故 $\tan^2\dfrac{\theta}{2}$

$=\left\{1-\dfrac{(1+\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{2(1-\cos\alpha\cos\beta)}\right\}$

$\Big/\dfrac{(1+\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{2(1-\cos\alpha\cos\beta)}=\dfrac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\beta)}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\beta)}$

$=\tan^2\dfrac{\alpha}{2}\Big/\tan^2\dfrac{\beta}{2}$ 故如題所言.

294. 設 $(a-b)\sec\theta=\sqrt{\left(a^4+\dfrac{a^2b^2}{a^2-1}\right)}$,

$(a+b)\sec\phi=\sqrt{\left(a^4+\dfrac{a^2b^2}{a^2-1}\right)}$,

求證 $\tan\frac{1}{2}(\theta-\phi)=\dfrac{b}{\sqrt{(a^2-1)}}$.

【證】 命 $a^4+\dfrac{a^2b^2}{a^2-1}=c^2$, 則 $\cos\theta=\dfrac{a-b}{c}$,

及 $\cos\phi=\dfrac{a+b}{c}$, 由是 $\sin\theta=\dfrac{a(a^2-1)+b}{c\sqrt{(a^2-1)}}$,

及 $\sin\phi=\frac{a(a^2-1)-b}{c\sqrt{(a^2-1)}}$，次因 $\cos(\theta-\phi)$

$=\frac{a^4-a^2-b^2}{a^4-a^2+b^2}$，於是得證 $\tan^2\frac{1}{2}(\theta-\phi)$

$=\frac{1-\cos(\theta-\phi)}{1+\cos(\theta-\phi)}=\frac{b^2}{a^4-a^2}$．卽如題所言．

265．設 $\frac{\sin(\theta-\beta)\cos\alpha}{\sin(\phi-\alpha)\cos\beta}+\frac{\cos(\alpha+\theta)\sin\beta}{\cos(\phi-\beta)\sin\alpha}=0$,

及 $\frac{\tan\theta\tan\alpha}{\tan\phi\tan\beta}+\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=0$，求證 $\tan\theta$

$=\frac{1}{2}(\tan\beta+\cot\alpha)$, $\tan\phi=\frac{1}{2}(\tan\alpha-\cot\beta)$．

【證】 由 $\frac{\sin(\theta-\beta\cos\alpha}{\sin(\phi-\alpha)\cos\beta}+\frac{\cos(\alpha+\theta)\sin\beta}{\cos(\phi-\beta)\sin\alpha}=0$,

得 $\frac{\sin(\theta-\beta)\cos\alpha}{\cos(\alpha+\theta)\cos\beta}+\frac{\sin(\phi-\alpha)\sin\beta}{\cos(\phi-\beta)\sin\alpha}=n$,

故 $\frac{(\sin\theta\cos\beta-\cos\theta\sin\beta)\cos\alpha}{(\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta\cos\beta}$

$+\frac{(\sin\phi\cos\alpha-\cos\phi\sin\alpha)\sin\beta}{(\cos\phi\cos\beta+\sin\phi\sin\beta)\sin\alpha}=0$,

故 $\frac{(\tan\theta\cos\beta-\sin\beta)\cos\alpha}{(\cos\alpha-\sin\alpha\tan\theta)\cos\beta}$

$+\frac{(\tan\phi\cos\alpha-\sin\alpha)\sin\beta}{(\cos\beta+\tan\phi\sin\beta)\sin\alpha}=0$,

故 $\frac{\tan\theta-\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\theta}+\frac{\tan\phi\cot\alpha-1}{\cot\beta+\tan\phi}=0$,

故$(\tan\theta-\tan\beta)(\cot\beta+\tan\phi)+(\tan\phi\cot\alpha-1)$ $(1-\tan\alpha\tan\theta)=0$, 故 $\tan\theta(\cot\beta+\tan\alpha)$ $+\tan\phi(\cot\alpha-\tan\beta)=2$, 然 $\tan\theta$ $=-\tan\phi\cdot\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\cdot\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$,故$-\tan\phi\cdot$

$(\cot\beta+\tan\alpha)\cdot\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\cdot\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$

$+\tan\phi(\cot\alpha-\tan\beta)=2$, 故 $-\tan\phi$ $\times(\cot\alpha+\tan\beta)\cos(\alpha-\beta)+\tan\phi(\cot\alpha$ $-\tan\beta)\cos(\alpha+\beta)=2\cos(\alpha+\beta)$, 故 $\tan\phi$ $\times\{\cot\alpha[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]-\tan\beta$ $\times[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\}=2\cos(\alpha+\beta)$,

故 $\tan\phi\{\cot\alpha\sin\alpha\sin\beta+\tan\beta\cos\alpha\cos'\beta\}$ $-\cos(\alpha+\beta)$, 故 $\tan\phi=-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{2\cos\alpha\sin\beta}$ $=\frac{1}{2}(\tan\alpha-\cot\beta)$, 而 $\tan\theta=-\tan\phi$ $\times\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\cdot\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{2\sin\beta\cos\beta}$ $=\frac{1}{2}\times(\cot\alpha+\tan\beta)$.

296.設 A B,C 成等差級數,求證$\sin A-\sin C=2\sin(B-C)$ $\cos B=2\sin(A-B)\times\cos B$.

【證】 $\sin A-\sin C=2\sin(\frac{1}{2}A-C)\cos\frac{1}{2}(A+C)$,

然因 A,B,C 成等差級數, 故 $A-C=2(B-C)$,

及$A+C=2B$, 故 $\sin A-\sin C=2\sin(B-C)$

cos B. 又 $A-B=B-C$, 故此式之右邊
$=2\sin(A-B)\cos B$.

297. 設 $\tan B=\dfrac{2\sin A\ \sin C}{\sin(A+C)}$, 則 cot A, cot B, cot C 成等差級數. 試證之.

【證】 先將所設之等式, 變其形爲 $\tan B=\dfrac{2\sin A\cos C}{\sin A\cos C+\cos A\sin C}$, 右邊分子分母除以 $\sin A\sin C$, 則 $\tan B=\dfrac{2}{\cot C+\cot A}$

或 $\cot C+\cot A=2\cot B$, 故 cot A, cot B, cot C 成等差級數.

298. 設 $\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$ 成等差級數, 則 $\tan\dfrac{\beta+\gamma}{2}$, $\tan\dfrac{\gamma+\alpha}{2}$, $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 亦成等差級數.

【證】 因 $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ 成等差級數, 故 $\sin\alpha\sin\beta$ $=\sin\beta-\sin\gamma$, 或 $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\times\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $=\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}\sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}$, 卽 $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ $\times\sin\left(\dfrac{\gamma+\alpha}{2}-\dfrac{\beta+\gamma}{2}\right)=\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}$ $\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\dfrac{\gamma+\alpha}{2}\right)$, 或 $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

$$\left\{\sin\frac{\gamma+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}-\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\right\}$$

$$=\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\left\{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\times\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\right\},$$

兩邊除以 $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}$,

則 $\tan\frac{\gamma+\alpha}{2}-\tan\frac{\beta+\gamma}{2}=\tan\frac{\alpha+\beta}{2}-\tan\frac{\gamma+\alpha}{2}$,

即 $\tan\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\tan\frac{\gamma+\alpha}{2}$, $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$亦成等差級數.

299. 設 $\sin(\beta+\gamma-\alpha)$, $\sin(\gamma+\alpha-\beta)$, $\sin(\alpha+\beta-\gamma)$ 成等差級數. 則 $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$ 亦成等差級數.

【證】 由假設, $\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)$

$=2\sin(\gamma+\alpha-\beta)$, 或 $2\sin\beta\cos(\gamma-\alpha)$

$=2\{\sin(\gamma+\alpha)\cos\beta-\cos(\gamma+\alpha)\sin\beta\}$,

故 $\tan\beta=\dfrac{\sin(\gamma+\alpha)}{\cos(\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha)}$

$=(\tan\gamma+\tan\alpha)$, 故 $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$ 亦成等差級數.

300. 設 $\tan\beta$, $\tan 2\beta$, $\tan\alpha$ 成等差級數, 則 $\tan(\alpha-\beta)=\sin 2\beta$. 試證之.

【證】 因 $\tan\beta$, $\tan 2\beta$, $\tan\alpha$ 成等差級數, 故 $2\tan 2\beta$

$=\tan\alpha+\tan\beta$, 由此得 $\tan\alpha=\dfrac{\tan\beta(3+\tan^2\beta)}{1-\tan^2\beta}$,

以之代入 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$,

則得 $\tan(\alpha-\beta)=\tan\beta\times\left(\dfrac{3+\tan^2\beta}{1-\tan^2\beta}-1\right)$

$/\{1+[\tan^2\beta(3+\tan^2\beta)\div(1-\tan^2\beta)]\}$

$=\dfrac{2\tan\beta}{\sec^2\beta}=\sin 2\beta.$

301. 若 $\tan A$, $\tan B$, $\tan C$ 成等差級數, $\tan A$, $\tan B$, $\tan D$ 成調和級數, 則 $\dfrac{\tan C}{\tan D}=1-\dfrac{8\sin^2(A-B)}{\sin 2A\sin 2B}$. 試證之.

【證】 因 $\tan A+\tan C=2\tan B$,

及 $\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan D}=\dfrac{2}{\tan B}$, 故 $\dfrac{\tan C}{\tan D}$

$$=(2\tan B-\tan A)\left(\frac{2}{\tan B}-\frac{1}{\tan A}\right)$$

$$=5-2\left(\frac{\tan B}{\tan A}+\frac{\tan A}{\tan B}\right)$$

$$=5-2\left(\frac{\sin B\cos A}{\cos B\sin A}+\frac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}\right)$$

$$=5-2\frac{\sin^2 B\cos^2 A+\sin^2 A\cos^2 B}{\sin A\cos A\sin B\cos B}$$

$$=1-\frac{2(\sin A\cos B-\cos A\sin B)^2}{\sin A\cos A\sin B\cos B}$$

$$=1-\frac{8\sin^2(A-B)}{\sin 2A\sin 2B}.$$

302. 設 $\cot\alpha,\cot\beta,\cot\gamma$成等差級數，則$\cot(\beta-\alpha),\cot\beta$，$\cot(\beta-\gamma)$亦成等差級數，又$\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha}$，$\frac{\sin(\gamma+\alpha)}{\sin\beta}$，$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\gamma}$亦成等差級數.

【證】 $\cot(\beta+\alpha)+\cot(\beta+\gamma)=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\alpha-\cot\beta}$

$+\frac{\cot\beta\cot\gamma+1}{\cot\gamma-\cot\beta}=\{2\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma$

$-(\cot^2\beta-1)(\cot\alpha+\cot\gamma)-2\cot\beta\}$

$/\{\cot\alpha\cot\gamma-\cot\beta(\cot\gamma+\cot\alpha)+\cot^2\beta\}$.

然 $\cot\alpha$, $\cot\beta$, $\cot\gamma$ 成等差級數，故 $2\cot\beta$ $=\cot\alpha+\cot\gamma$，故 $\cot(\beta-\alpha)+\cot(\beta-\gamma)$

$=\frac{2\cot\beta(\cot\alpha\cot\gamma-\cot^2\beta)}{\cot\alpha\cot\gamma-\cot^2\beta}=2\cot\beta$,

故 $\cot(\beta-\alpha),\cot\beta$, $\cot(\beta-\gamma)$亦成等差級數.

又$\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha}=\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma-\alpha)}{\sin\alpha}$

$=\sin(\alpha+\beta+\gamma)\cot\alpha-\cos(\alpha+\beta+\gamma)$,

同理，$\frac{\sin(\gamma+\alpha)}{\sin\beta}=\sin(\alpha+\beta+\gamma)\cot\beta$

$-\cos(\alpha+\beta+\gamma)$，及$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\gamma}=\sin(\alpha+\beta+\gamma)$

$\times \cot \gamma - \cos(\alpha+\beta+\gamma)$，故 $\dfrac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha}$

$+\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\gamma}$ [illegible] $\alpha+\beta+\gamma)(\cot\alpha+\cot\gamma)$

$-2\cos(\alpha+\beta+\gamma)=2\{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\cot\beta$

$-\cos(\alpha+\beta+\gamma)\}=\dfrac{2\sin(\gamma+\alpha)}{\sin\beta}$，以故可

知 $\dfrac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha}$，$\dfrac{\sin(\gamma+\alpha)}{\sin\beta}$，

$\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\gamma}$ 亦成等差級數。