大學先修叢書

# 幾何學

編著者　范際平



正中書局印行

中華民國三十七年十一月初版

(大學先修叢書)

# 幾何學

全一册　定價金圓券柒角伍分

(外埠酌加運費匯費)

編著者　范際平

發行人　蔣志澄

印刷所　正中書局

發行所　正中書局

(2546)

滬·本　4/4

# 編 輯 要 旨

一. 本書乃根據幾何題之性質編成，共分五章. 第一章爲定理與證題法. 第二章爲軌跡問題. 第三章爲作圖問題. 第四章爲計算問題. 第五章爲極大極小問題. 極適合升學會考之用.

二. 本書對於平面幾何定理，僅作一系統性複習，不加以證明. 但對於著名問題如西摩孫氏線、九點圓、多洛梅氏定理、梅耐勞氏定理、喜瓦氏定理……則詳加研討. 以期灌輸近世幾何之觀念，而補中學所讀之不足. 又對於軌跡及作圖二問題，更作系統之討論，俾讀者明瞭其解決方法.

三. 本書所用數學名詞乃根據國立編譯館所厘定之數學名詞.

四. 本書所用記號，前後一致. 庶可養成讀者規律化而收事半功倍之效.

五. 自民國二十一年至民國三十六年各著名大學之幾何入學試題，茲擇其佳者，演爲例題. 且附若干於習題中，庶讀者可窺見幾何試題之趨勢. 但幾何題千變萬化，難以少數例題包括一切. 惟有多加演習，方可養成思索難題之智慧.

六. 本書習題，另編題解，仍由本局出版.

七. 本書曾在四川江津白沙教育部特設大學先修班試教多次，數易其稿，方行付梓. 深望海內方家閱及時，加以賜教爲感.

民國三十六年十一月三十日編者謹識於上海江灣國立復旦大學復旦新村.

# 目　次

# 第一章

# 定理及證題法

## 第一節　直線形

**一．重要定義及定理之複習．**

(A) **定義．**

1．**直線．** 無定義之名詞．

2．**平面．** 在面上任取兩點連成直線，而此直線完全在此面上者．(否則稱爲曲面)．

3．**角．** 一半直線，繞其線上一定點旋轉所成之部份．

4．**特殊角．**

(i) 平角　角之起終邊成一直線者．

(ii) 直角　平角之一半．

(iii) 周角　平角之二倍．

(iv) 銳角　小於直角者．

(v) 鈍角　大於直角而小於平角者．

**5．兩角之關係．**

（i）隣角　兩角共有一邊及一頂點，而他兩邊分處於公共邊之兩側者．

（ii）餘角　兩角之和等於一直角，則此兩角互稱爲餘角．

（iii）補角　兩角之和等於一平角，則此兩角互稱爲補角．

（iv）對頂角　一角兩邊爲他角兩邊之延長線者．

**6．垂線．** 兩直線相交成直角，則此二直線互稱爲垂線，該交點稱爲垂足．

**7．平行線．** 在同一平面上之兩直線，雖引長而永遠不相交者．

**8．四邊形之種類．**

（i）梯形　四邊形僅有兩邊平行者．

（ii）平行四邊形　四邊形之對邊皆平行者．

（iii）矩形　平行四邊形之各角皆爲直角者．

（iv）菱形　平行四邊形之各邊均相等者．

（v）正方形　矩形之各邊均相等者．

**（B）公理．**

**1．全分公理．**

（i）全量等於各分量之和．

（ii）全量大於任一分量．

**2．等量公理及不等量公理．**

**3. 移形公理.** 一幾何圖形任意移動,僅變其位置,而不變其形狀與大小.

**4. 直線公理.**

(i) 兩點之間僅能作一直線.

(ii) 兩點之間直線最短.

**5. 平行公理.** 過線外一點,僅能作一直線與一已知直線平行.

**(C) 定理.**

**1. 角之定理.**

(i) 凡平角皆相等.

(ii) 凡直角皆相等.

(iii) 等角之餘角相等.

(iv) 等角之補角相等.

(v) 如兩隣角外邊成一直線,則其兩角互補,其逆亦眞.

(vi) 二直線相交所成之對頂角相等.

**2. 全等三角形定理.**

(i) 兩三角形有一邊及兩角彼此對應相等,則全等.

(ii) 兩三角形有兩邊及一夾角彼此對應相等,則全等.(如爲兩直角三角形,則不限定爲夾角).

(iii) 兩三角形有三邊彼此對應相等,則全等.

**3. 等腰三角形定理.** 等腰三角形之兩底角相等,其逆亦

眞.

**4. 平行線定理.**

（i）平行線之判別定理　兩線與一線相交所成之錯角相等或同位角相等或同側內角互補，則此兩線平行.

（ii）平行線之性質定理　兩平行線爲第三線所截，則錯角相等，同位角相等，同側內角互補.

（iii）兩角之邊，彼此平行，則此兩角相等或互補.

**5. 垂線定理.**

（i）由線上一點或線外一點僅能作一直線與此線垂直.

（ii）一角之兩邊與他角之兩邊彼此垂直，則此兩角相等或互補.

**6. 中垂線定理.** 一線段之中垂線上各點距線之兩端等遠，其逆亦眞.

**7. 角之平分線定理.** 一角之平分線上各點距角之兩邊等遠，其逆亦眞.

**8. 不等定理.**

（i）三角形兩邊之和大於其餘一邊，兩邊之差，小於其餘一邊.

（ii）三角形之兩邊不等，則其所對之角亦不等，大邊對大角，小邊對小角，其逆亦眞.

（iii）兩三角形有兩邊彼此對應相等，而夾角不等，則夾角

大者，其所對之邊大，夾角小者，其所對之邊小，其逆亦眞.

(iv) 由線外一點至線上所作之線，以垂線爲最短，其逆亦眞.

(v) 由線外一點至線上作兩斜線及一垂線，如斜線足距垂足等遠，則此二斜線相等. 如不等遠，其距垂足較遠者，該斜線較長，其距垂足較近者，該斜線較短，其逆亦眞.

**9. 多角形之內外角定理.**

(i) 內角和定理　$n$ 角形之內角和$=(n-2)180°$.

(ii) 外角和定理　$n$ 角形之外角和$=360°$.

**証.** 此二定理用歸納法證之最簡，玆列表示之如下:

| 角數 | 分成三角形個數 | 內外角總和 | 內角和 | 外角和 |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | $3\times180°$ | $180°$ | $360°$ |
| 4 | 2 | $4\times180°$ | $2\times180°$ | $360°$ |
| 5 | 3 | $5\times180°$ | $3\times180°$ | $360°$ |
| …… | …… | …… | …… | …… |
| $n$ | $n-2$ | $n\times180°$ | $(n-2)180°$ | $360°$ |

(iii) 三角形之外角定理

(甲) 外角等於不相隣兩內角之和.

(乙) 外角大於不相隣之任一內角.

**10. 平行四邊形定理.**

(i) 判別定理　凡四邊形合乎下列條件之一者，則爲平行四邊形.

（甲）兩對對邊平行． （乙）兩對對邊相等．

（丙）兩對對角相等． （丁）兩對角線互相平分．

（戊）一對對邊相等且平行．

（ii）**性質定理．** 凡平形四邊形

（甲）對邊相等． （乙）對角相等．

（丙）對角線互相平分． （丁）隣角互爲補角．

**11．平行截線定理．**

（i）一直線被三條以上平行線所截，其所截之諸線段相等，則他直線被此諸平行線所截，其所截之諸段必相等．

（ii）三角形兩邊中點連線，必平行底邊，且爲底邊之半，又過三角形一邊中點作底邊之平行線，必過他邊之中點．

（iii）梯形兩腰中點之連線，必與兩底平行，而其長爲兩底和之半，又過梯形一腰中點，作與兩底平行之線段，必過他腰之中點．

**12．共點線．**

（i）三角形三邊之中垂線交於一點，此點距三角形三頂點等遠．（此點稱爲外心）．

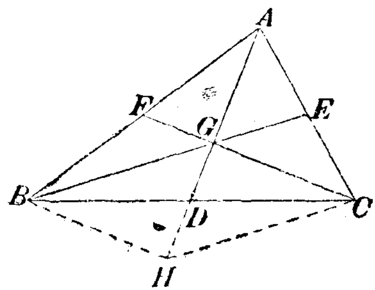
（ii）三角形三內角之平分線交於一點，此點距三角形三邊等遠．（此點稱爲內心）．

（iii）三角形一內角及其餘兩外角之平分線交於一點，此點距三角形三邊或其延線等遠．（此點稱爲傍心）．

(iv) 三角形三高交於一點.(此點稱為垂心或高心).

(v) 三角形三中線交於一點. 此點距各頂點之遠為各中線長之三分之二.(此點稱為重心).

**證.** 如 $BE$、$CF$ 二中線交於一點 $G$. 連 $AG$, 延長與 $BC$ 交於 $D$ 點. 過 $B$ 點作線與 $CF$ 平行且與 $AD$ 延線交於一點 $H$. 更連 $CH$.




在 $\triangle ABH$ 內,

$$\because \quad AF=BF,$$

$$FG \parallel BH,$$

$$\therefore \quad AG=GH.$$

在 $\triangle AHC$ 內,

$$\because \quad AG=GH, \quad AE=EC,$$

$$\therefore \quad GE \parallel CH.$$

故 $GBHC$ 為 $\square$, $\quad BD=DC, \quad GD=DH.$

因知 $AD$ 亦為一中線, 而三中線 $AD$、$BE$、$CF$ 交於一點.

又因 $$GD=DH=\frac{1}{2}GH=\frac{1}{2}AG.$$

故 $AG=\frac{2}{3}AD, \quad GD=\frac{1}{3}AD.$ 餘同理可證.

**二. 證題法.**

(A) 證兩線段相等之法.

1. 證爲全等三角形之對應邊.

2. 證爲等腰三角形之兩腰.

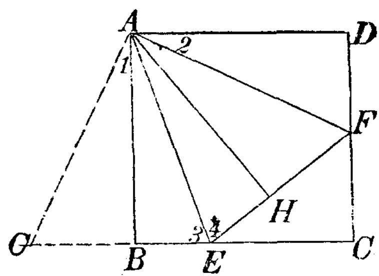
3. 證爲中垂線上任一點距兩端之遠.

4. 證爲角之平分線上任一點距兩邊之遠.

5. 證爲平行四邊形之對邊或爲對角線上之二相等部份.

6. 證爲由三角形一邊之中點，作與底邊平行之線平分他邊之線段.

**例.** 自正方形 $ABCD$ 之頂點 $A$,作一角等於 $45°$,其二邊與 $BC$ 相交於 $E$, 與 $DC$ 相交於 $F$, 連 $EF$. 試證自 $A$ 至 $EF$ 之距離,等於此正方形之邊長.




**解.** 已知 $ABCD$ 爲正方形,

$$\angle EAF = 45°,$$

$$AH \perp EF.$$

求證

$$AH = AB.$$

**證.** 延長 $CB$ 至 $G$ 點, 使 $BG = DF$. 連 $AG$.

$$\because \quad AB = AD \text{ (已知)},$$

$$BG = DF \text{ (所作)},$$

$$\angle ABG = \angle ADF = 90°,$$

$\therefore\quad \triangle ABG \cong \triangle ADF$. (s.a.s.).

$\therefore\quad AG = AF$ (對應邊).

又 $\because\quad \angle 1 = \angle 2$ (對應角).

$\therefore\quad \angle GAE = \angle 1 + \angle BAE = \angle 2 + \angle BAE$

$= \angle BAD - \angle EAF = 90° - 45°$

$= 45° = \angle EAF$.

且 $AE = AE$ (公共邊).

$\therefore\quad \triangle AGE \cong \triangle AFE$ (s.a.s.).

而 $\angle 3 = \angle 4$ (對應角).

又 $\because\quad \angle ABE = \angle AHE = 90°$,

$AE = AE$ (公共邊).

$\therefore\quad \triangle ABE \cong \triangle AHE$. (a.a.s.).

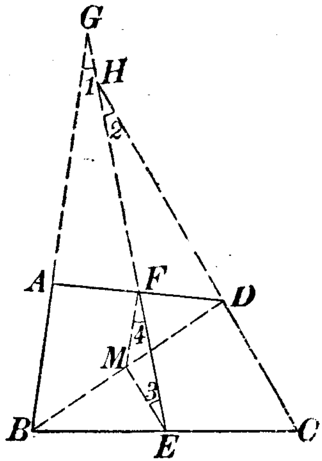
$\therefore\quad AH = AB$ (對應邊).

(B) **證兩角相等之法.**

1. 證此兩角爲對頂角.
2. 證爲他相等角之餘角或補角.
3. 證爲全等三角形之對應角.
4. 證爲等腰三角形之兩底角.
5. 證兩三角形有兩角相等,而此兩角各爲其第三角.
6. 證此兩角爲平行線間之錯角或同位角.
7. 證爲平行四邊形之對角.

8．證此兩角之邊彼此平行或垂直，並證其不互爲補角.

**例.** 四邊形 $ABCD$ 中，$AB=CD$. 試證過 $BC$ 及 $AD$ 中點之線必與 $BA$ 及 $CD$ 成等角.




**解.** 已知

$$AB=CD,$$

$$EB=EC,$$

$$FA=FD.$$

求證 $\qquad \angle 1=\angle 2.$

**證.** 連 $BD$，取其中點 $M$. 更連 $ME$、$MF$.

在 $\triangle ABD$ 內

$\because \quad FA=FD,$

$\qquad MB=MD,$

$\therefore \quad MF \parallel AB, \qquad MF=\frac{1}{2}AB.$

在 $\triangle BCD$ 內

$\because \quad EB=EC, \qquad MB=MD.$

$\because \quad ME \parallel CD, \qquad ME=\frac{1}{2}CD.$

但 $\qquad AB=CD, \quad \therefore \quad ME=MF, \quad \angle 3=\angle 4.$

又 $\because$ $\angle 4=\angle 1$, $\angle 3=\angle 2$. $\therefore$ $\angle 1=\angle 2$.

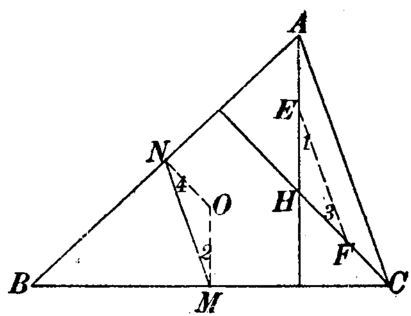
(C) **證甲量倍於乙量之法.**

1. 證甲量之半等於乙量.

2. 證乙量之倍等於甲量.

**例 1.** 試證自三角形各角至垂心之距離,等於自外心至對邊之距離之二倍.

證. 設 $O$ 爲 $\triangle ABC$ 之外心,$H$ 爲 $\triangle ABC$ 之垂心.




平分 $AH$ 於 $E$ 點,$CH$ 於 $F$ 點,連 $EF$.

更設 $M$ 爲 $BC$ 之中點,$N$ 爲 $AB$ 之中點.連 $MN$、$OM$、$ON$.

則 $OM\perp BC$, $ON\perp AB$.

$\because$ $EF\parallel AC$, 且 $EF=\frac{1}{2}AC$;

$NM\parallel AC$, 且 $NM=\frac{1}{2}AC$,

$\therefore$ $EF=NM$, $EF\parallel NM$.

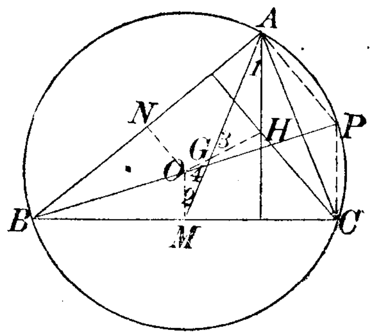
又 $\because$ $AH\parallel OM$, $\therefore$ $\angle 1=\angle 2$,

更 $\because$ $CH\parallel ON$, $\therefore$ $\angle 3=\angle 4$.

$\therefore \quad \triangle HEF \cong \triangle OMN$ (a.s.a.).

故 $\quad EH = OM. \quad$ 而 $\quad AH = 2OM.$

**又證.** 作直徑 $BP$, 連 $AP, CP$.




$\because \quad \angle BCP = 90°,$

$\therefore \quad PC \parallel AH.$

$\because \quad \angle BAP = 90°,$

$\therefore \quad PA \parallel CH.$

故 $AHCP$ 為 $\square$.

$\therefore \quad AH = PC.$

在 $\triangle BCP$ 內,

$\because \quad BO = PO, \quad BM = CM,$

$\therefore \quad PC = 2OM.$

故 $\quad AH = 2OM.$

**註.** 由此立可得下二定理:

( i ) 三角形之垂心、重心、外心共線.

( ii ) 三角形重心與垂心之距離, 等於重心與外心距離之二倍. (武大, 21 年度).

**證.** 連 $OH$, 設與中線 $AM$ 交於 $G$ 點.

$\because \quad \angle 1 = \angle 2, \quad \angle 3 = \angle 4.$

$$\therefore \quad \triangle AGH \sim \triangle MGO.$$

$$\therefore \quad \frac{AH}{OM} = \frac{AG}{MG}.$$

但 $$AH = 2OM,$$

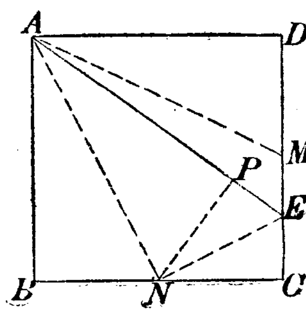
$$\therefore \quad AG = 2MG.$$

故 $G$ 點即重心而與垂心、外心共線.

又 $$\because \quad \frac{GH}{GO} = \frac{AG}{MG},$$

$$\therefore \quad GH = 2GO.$$

**例 2.** $ABCD$ 爲一正方形, $AE = BC + CE$, $M$ 爲 $CD$ 之中點, 試證 $\angle BAE = 2\angle MAD$.




**證.** 作 $\angle BAE$ 之平分線與 $BC$ 交於 $N$ 點. 連 $AN$、$NE$、$AM$. 又在 $AE$ 上取 $P$, 使 $AP = AB$. 連 $NP$.

則 $$\triangle APN \cong \triangle ABN.$$

$$\therefore \quad PN = BN,$$

$$\angle APN = \angle ABN = 90^\circ.$$

又 $$\because \quad AE = BC + CE,$$

$$\therefore \quad CE = AE - BC = AE - AB = AE - AP = PE.$$

$$\therefore \quad \triangle EPN \cong \triangle ECN. \ (\text{s.s.r.}).$$

而 $$CN = PN = BN.$$

故 $$BN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}DC = DM.$$

$$\therefore \quad \triangle ABN \cong \triangle ADM. \ (\text{s.a.s.}).$$

$$\therefore \quad \angle MAD = \angle NAB,$$

即 $$\angle BAE = 2\angle MAD.$$

(D) **證兩量之和(或差)等於第三量之法.**

1. 作兩量之和(或差),證其與第三量相等.

2. 作第三量與第二量之差(或和),證其與第一量相等.

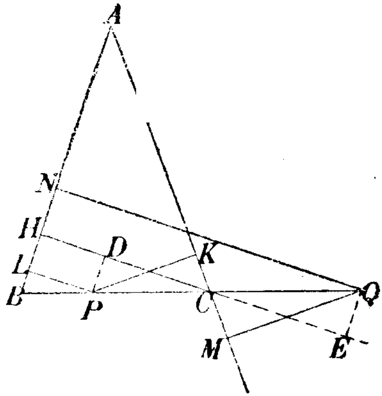
3. 分第三量爲兩份,證其一份等於第一量,他份等於第二量.

**例.** $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 試證底邊 $BC$ 上任一點 $P$ 至二等腰上距離之和爲一定,自底邊 $BC$ 之延線上任一點 $Q$ 至二等腰(或其延線)上距離之差爲一定.而此定量卽爲自底邊之頂點至對邊之距離.

**證.** 設 $P$ 爲 $BC$ 上任一點.

作 $$PL \perp AB, \qquad PK \perp AC,$$

$$PD \parallel AB, \qquad CH \perp AB.$$




因 $HLPD$ 爲 $\square$,

則 $PL=DH$.

又 $\because$ $\angle DPC=\angle ABC$

$=\angle KCP$,

$\therefore$ $\triangle KCP\cong\triangle DPC$.

(a.a.s.)

$\therefore$ $PK=CD$.

故 $PL+PK=DH+CD$

$=CH$.

又設 $Q$ 爲 $BC$ 延線上任一點,作 $QN\perp AB$, $QM\perp AC$ (延線), $QE\parallel AB$.

因 $NHEQ$ 爲 $\square$, 則 $QN=EH$.

又 $\because$ $\angle QCM=\angle ACB=\angle ABC=\angle CQE$.

$\therefore$ $\triangle MCQ\cong\triangle EQC$. (a.a.s.).

$\therefore$ $QM=CE$.

故 $QN-QM=EH-CE=CH$.

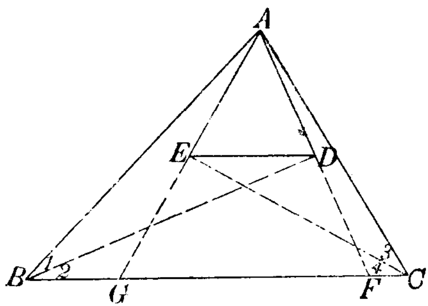
(E) **證兩線平行之法.**

1. 證兩線同與他一線平行或垂直.
2. 應用平行線之判別定理.
3. 證爲平行四邊形之對邊.

4. 應用連三角形兩邊中點之線平行底邊之定理.

**例.** 自 $\triangle ABC$ 之頂點 $A$ 至 $B$、$C$ 兩角之平分線上作垂線 $AD$、$AE$. 試證 $DE \parallel BC$.

**證.** 延長 $AD$、$AE$ 交 $BC$ 於 $F$、$G$.




$\because\ \angle 1=\angle 2,$

$BD=BD,$

$\angle BDA=\angle BDF$

$=90^\circ,$

$\therefore\ \triangle BDA\cong\triangle BDF.$ (a.s.a.).

$\therefore\ AD=DF.$

又 $\because\ \angle 3=\angle 4,$

$CE=CE,$

$\angle CEA=\angle CEG=90^\circ.$

$\therefore\ \triangle CEA\cong\triangle CEG.$ (a.s.a.).

$\therefore\ AE=EG.$

故在 $\triangle AGF$ 內,即得

$$DE \parallel BC.$$

(F) 證兩線垂直之法.

1. 證一線與他線相交,所成之隣角相等.

2. 證一線兩端與他線兩端等遠.

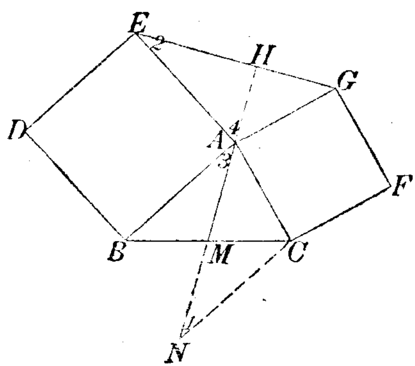
3. 證兩線爲補隣角之平分線.

4. 應用三角形一邊中點對於三頂點等遠,則該邊對角爲直角之定理.

5. 應用三角形之兩角和爲直角,則第三角爲直角之定理.

**例.** 於 $\triangle ABC$ 之兩邊向外作 $BAED$、$ACFG$ 兩正方形,則中線 $AM$ 等於 $EG$ 之半,且垂直於 $EG$.

**證.**




延長 $AM$ 至 $N$,使 $AM=MN$.

連 $NC$.

則 $\triangle ABM\cong\triangle NCM$,

$\therefore\ AB=CN$.

又 $\because\ AB=AE$,

$\therefore\ AE=CN$.

$\because\ CN\parallel AB$,

$\therefore\quad \angle NCA+\angle BAC=180°$.

又 $\because\quad \angle EAG+\angle BAC=180°$,

$\therefore\quad \angle NCA=\angle EAG$.

更 $\because\quad AC=AG$,

$$\therefore\quad \triangle CNA \cong \triangle AEG.\ (\text{s.a.s.}).$$

$$\therefore\quad AN = EG;$$

故
$$AM = \frac{1}{2}EG.$$

又
$$\because\quad \angle 1 = \angle 2 = \angle 3,$$

$$\angle 3 + \angle 4 = 90^\circ,$$

$$\therefore\quad \angle 2 + \angle 4 = 90^\circ,$$

$$\therefore\quad \angle EHA = 90^\circ,$$

即
$$AM \perp EG.$$

(G) **證兩線不等之法.**

1. 應用全量大於分量之公理.

2. 應用不等定理.

**例 1.** 凡三角形小邊之垂線大於大邊之垂線.

**證.** 設 $AB > AC$,

$CE \perp AB$,

$BD \perp AC$.

延長 $BD$ 至 $P$, 使

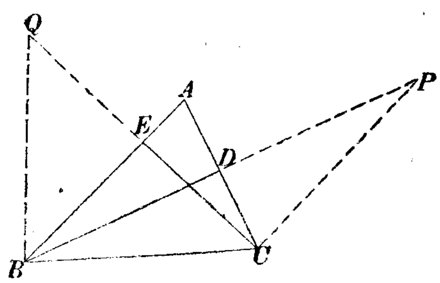
$DP = BD$,

連 $PC$.

更延長 $CE$ 至 $Q$, 使

$EQ = CE$,

連 $QB$.



$\because \quad \triangle BCD \cong \triangle PCD$, (s.a.s.).

$\therefore \quad PC = BC.$

$\because \quad \triangle BCE \cong \triangle BQE$, (s.a.s.).

$\therefore \quad QB = BC.$

$\therefore \quad PC = QB.$

又 $\quad \because \quad AB > AC,$

$\therefore \quad \angle ACB > \angle ABC.$

但 $\quad \angle BCP = 2\angle ACB,$

$\angle CBQ = 2\angle ABC,$

$\therefore \quad \angle BCP > \angle CBQ.$

$\therefore \quad BP > CQ,$

而 $\quad BD > CE.$

**註.** 如利用面積定理，此例極易證.

因 $\quad \triangle ABC = \frac{1}{2} BD \times AC = \frac{1}{2} CE \times AB,$

且 $\quad AC < AB,$

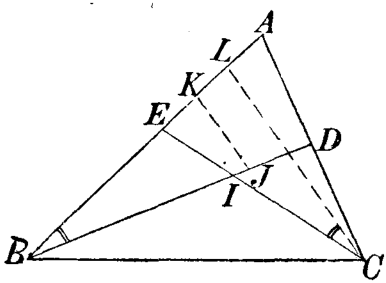
故 $\quad BD > CE.$

**例 2.** 凡三角形小角之平分線，大於大角之平分線.

**證.** 設 $AB > AC,$

$\angle ABD = \angle CBD,$

$\angle ACE = \angle BCE.$




$\because \quad \angle ACB > \angle ABC,$

$\therefore \quad \frac{1}{2}\angle ACB > \frac{1}{2}\angle ABC.$

即 $\quad \angle ACE > \angle ABD,$

作 $\quad \angle LCE = \angle ABD$

$$= \frac{1}{2}\angle ABC.$$

在 $\triangle LBC$ 內,

$$\because \quad \angle LCB > \angle LBC,$$

$$\therefore \quad LB > LC.$$

在 $LB$ 上取 $BK = CL$,且過 $K$ 點作與 $LC$ 之平行線與 $BD$ 相交於 $J$ 點.

在 $\triangle BKJ, \triangle CLE$ 內,

$$\because \quad BK = CL,$$

$$\angle BKJ = \angle CLE,$$

$$\angle KBJ = \angle LCE,$$

$$\therefore \quad \triangle BKJ \cong \triangle CLE. \text{ (a.s.a.)}.$$

$$\therefore \quad BJ = CE.$$

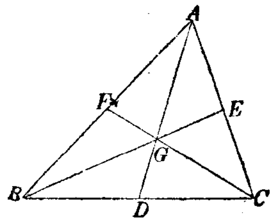
但 $$BD > BJ,$$

$$\therefore \quad BD > CE.$$

**例 3.** 凡三角形小邊之中線,大於大邊之中線.

**證.** 設 $AB>AC$, $AE=CE$, $AF=BF$。$G$ 爲重心.

則中線 $AD$ 當過 $G$ 點.




$$\because \quad BD=DC,$$
$$AD=AD,$$
$$AB>AC,$$
$$\therefore \quad \angle ADB>\angle ADC.$$

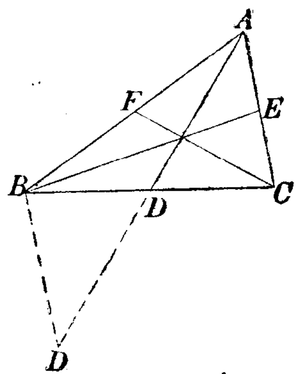
又在 $\triangle BDG$, $\triangle CDG$ 內, 知 $BG>CG$.

即 $$\frac{2}{3}BE>\frac{2}{3}CF,$$

故 $$BE>CF.$$

**例 4.** 三角形三中線之和, 小於三邊之和, 而大於其和之半. (清華大, 21 年度).

**證.** 設 $AD, BE, CF$ 爲 $\triangle ABC$ 之三中線.




(i) 延長 $AD$ 至 $D'$, 使 $AD=DD'$, 連 $BD'$.

$$\because \quad \triangle BD'D\cong\triangle CAD,$$
$$(\text{s.a.s.}),$$
$$\therefore \quad BD'=AC.$$

在 $\triangle ABD'$ 內,

$$AB+BD'>AD',$$

卽 $$AB+AC>2AD. \tag{1}$$

同理 $$AB+BC>2BE. \tag{2}$$

$$AC+BC>2CF. \tag{3}$$

$(1)+(2)+(3)$,

$$2(AB+BC+CA)>2(AD+BE+CF),$$

卽 $$AD+BE+CF<AB+BC+CA.$$

(ii) 由 $\triangle ABD$,

$$AD+DB>AB,$$

卽 $$AD+\frac{1}{2}BC>AB. \tag{1}$$

同理 $$BE+\frac{1}{2}CA>BC. \tag{2}$$

$$CF+\frac{1}{2}AB>CA. \tag{3}$$

$(1)+(2)+(3)$,

$$AD+BE+CF>\frac{1}{2}(AB+BC+CA).$$

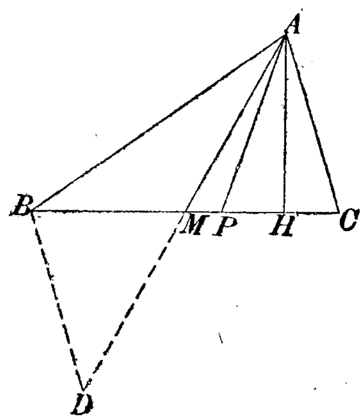
**(H) 證兩角不等之法.**

1. 應用全量大於分量之公理.
2. 應用不等定理.
3. 應用三角形之外角大於不相隣之任一內角之定理.
4. 應用自三角形內任一點至底邊兩端連接兩線,所夾之

角大於頂角之定理.

**例.** 如三角形中一角之二邊不等,則此角之平分線在由此角頂所引中線及高之間.

**證.** 設 $AB>AC$, $AH$ 爲高, $AM$ 爲中線, $AP$ 爲角之平分線.




$$\because\quad AB>AC,$$

$$\therefore\quad \angle ACB>\angle ABC.$$

又 $$\because\quad AH\perp BC,$$

$$\therefore\quad \angle BAH>\angle CAH.$$

故 $AP$ 在 $AH$ 之左. 延長 $AM$ 至 $D$, 使 $DM=AM$, 連 $BD$.

$$\because\quad \triangle BMD\cong\triangle CMA,$$

$$\therefore\quad BD=AC,$$

$$\angle BDM=\angle CAM,$$

$$\because\quad AB>BD,$$

$$\therefore\quad \angle BDM>\angle BAM.$$

即 $$\angle BAM<\angle CAM.$$

故 $AP$ 在 $AM$ 之右.

故 $AP$ 在 $AM$ 及 $AH$ 之間.

(I) **證三線共點之法.**

1. 證三線爲某三角形之三中垂線,或三內角之平分線,或一內角及他二外角之平分線,或三高,或三中線.

2. 證兩線交點有某一特性,第三線亦有此特性.

**例 1.** 在 $\triangle ABC$ 之 $AB, AC$ 兩邊上作 $BAED$、$ACFG$ 兩正方形,由 $A$ 作 $BC$ 之垂線 $AH$,則 $AH$、$DC$、$BF$ 三線共點.

**證.** 延長 $HA$ 至 $K$,使 $AK=BC$,連 $KB$、$KC$.

$$\because \quad AB=BD,$$

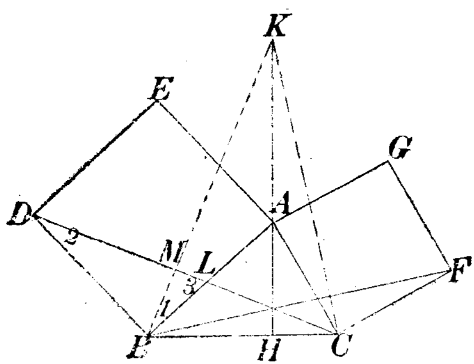
$$AK=BC,$$

$$\angle BAK=90^\circ+\angle KAE,$$

$$\angle DBC=90^\circ+\angle ABC,$$

但 $$\angle KAE+\angle BAH=90^\circ,$$

$$\angle ABC+\angle BAH=90^\circ,$$



$\therefore \quad \angle KAE = \angle ABC.$

而 $\quad \angle BAK = \angle DBC.$

$\therefore \quad \triangle BAK \cong \triangle DBC.$ (s.a.s.).

$\therefore \quad \angle 1 = \angle 2.$

但 $\quad \angle 2 + \angle 3 = 90°,$

$\therefore \quad \angle 1 + \angle 3 = 90°.$

$\therefore \quad \angle BML = 90°,$

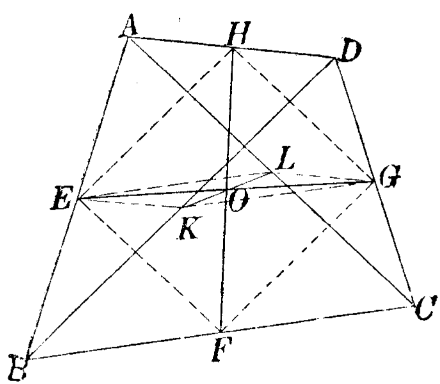
$\therefore \quad CD \perp BK.$

同理 $\quad BF \perp CK.$

故 $AH$、$CD$、$BF$ 為 $\triangle KBC$ 之三高而共點.

**例 2.** 連接任意四邊形兩組對邊中點之線，及連接兩對角線中點之線，此三線共點.

**證.** 設四邊形 $ABCD$, $EG$、$FH$ 為兩組對邊中點之連線; $LK$ 為兩對角線 $AC$、$BD$ 中點之連線; $EF$、$FG$、$GH$、$HE$ 為兩隣邊中點之連線.




$\because$ $E$、$F$、$G$、$H$ 為四邊形各邊之中點.

$$\therefore\ EFGH\ \text{為}\ \square.$$

故 $EG$、$FH$ 互相平分於 $O$ 點.

在 $\triangle ABC$ 內, $\because$ $E$、$L$ 為 $AB$、$AC$ 之中點,

$$\therefore\quad EL \parallel BC, \qquad EL=\frac{1}{2}BC.$$

在 $\triangle DBC$ 內, $\because$ $K$、$G$ 為 $BD$、$DC$ 之中點.

$$\therefore\quad KG \parallel BC, \qquad KG=\frac{1}{2}BC.$$

$\therefore$ $EKGL$ 為 $\square$,而 $KL$ 過 $EG$ 之中點 $O$.

故得證明.

(J) **證三點共線之法.** (設三點為 $A$、$B$、$C$).

1. 將 $A$、$B$ 連接,證明 $C$ 點在其延線上.

2. 證明連接 $AC$ 之直線通過 $B$ 點.

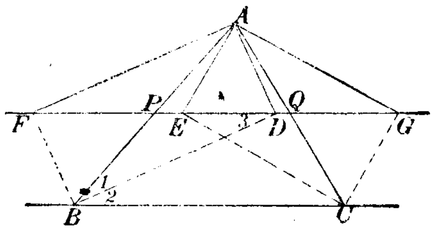
3. 先連接 $A$、$B$; 次連接 $B$、$C$; 證明此二線段所成之 $\angle ABC$ 等於平角.

4. 先連接 $A$、$B$; 次連接 $B$、$C$; 後再過 $B$ 點引直線 $XY$. 證明 $\angle ABX=\angle CBY$.

5. 證明連 $B$、$A$ 之直線與連 $B$、$C$ 之直線均與一定直線平行.

**例.** 自 $\triangle ABC$ 之頂點 $A$ 至 $B$、$C$ 兩角之內外角平分線上作垂線,則四垂線足及 $AB$、$AC$ 之中點,凡六點共線.

**證.** 連 $DF$ 設與 $AB$ 交於 $P$ 點




$$\because \quad \angle FBD = \angle BDA = \angle AFB = 90^\circ,$$

$$\therefore \quad FBDA \text{ 爲矩形.}$$

而 $P$ 點爲 $AB$ 之中點.

又 $\because$ $\triangle ABD$ 爲直角三角形, 且 $P$ 爲 $AB$ 之中點.

$$\therefore \quad PB = PD.$$

$$\therefore \quad \angle 1 = \angle 3.$$

但 $$\angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \quad \angle 3 = \angle 2,$$

$$DF \parallel BC.$$

故 $FD$ 之延線必過 $AC$ 之中點 $Q$, 而 $D$、$F$、$P$、$Q$ 四點共線. 同理 $E$、$G$、$Q$、$P$ 四點共線. 故 $D$、$E$、$F$、$G$、$P$、$Q$ 六點共線.

(K) **代數法.** 以上所述, 純爲幾何證法, 有時幾何題可利用代數計算證明, 舉例釋之如下:

**例.** 在三角形 $ABC$ 中, $\angle BAC$ 之平分線爲 $AE$, 高爲 $AD$.

求證 $$\angle DAE = \frac{1}{2}(\angle B \sim \angle C).$$

證. 設 $AB>AC$, 則 $\angle C>\angle B$.

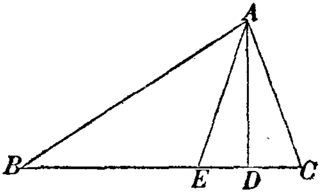
$$\angle DAE=\angle CAE-\angle CAD=\frac{\angle A}{2}-(90^\circ-\angle C). \quad (1)$$

$$\angle DAE=\angle BAD-\angle BAE=90^\circ-\angle B-\frac{\angle A}{2}. \quad (2)$$

$(1)+(2)$,

$$2\angle DAE=\angle C-\angle B.$$

$$\therefore\quad \angle DAE=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B).$$




但如 $AB<AC$,同理可證

$$\angle DAE=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C).$$

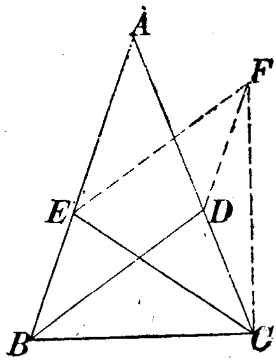
$$\therefore\quad \angle DAE=\frac{1}{2}(\angle B\sim\angle C).$$

**三. 著名問題.** 三角形二底角之平分線相等,則此三角形爲等腰.

"等腰三角形兩底角之平分線相等"爲初等幾何定理之一,但其反定理無人注意. 1840 年有 Lehmus 其人者,將此反定理提出於Steiner,其後逐漸引起興趣.各種證法相繼發表,今述三種證法如下:

**解.** 設在 $\triangle ABC$ 中,$\angle B$、$\angle C$ 之平分線各交 $AC$、$AB$ 於 $D$、$E$. 如 $BD=CE$,求證 $AB=AC$.

**證 1.** 作 ▱$BDFE$, 連 $FC$.




則 $EF=BD=CE$.

$\therefore\ \angle EFC=\angle ECF$.

今設 $AB<AC$,

則 $\angle ACB<\angle ABC$.

而 $\angle EFD=\angle EBD>\angle ECD$.

故 $\angle EFC-\angle EFD<\angle ECF-\angle ECD$.

卽 $\angle DFC<\angle DCF$,

$\therefore\ DC<DF$,

卽 $DC<BE$.

但因 $\angle ABC>\angle ACB$,

則 $\angle DBC>\angle ECB$;

又 $\because\ BC=BC$,

$BD=CE$,

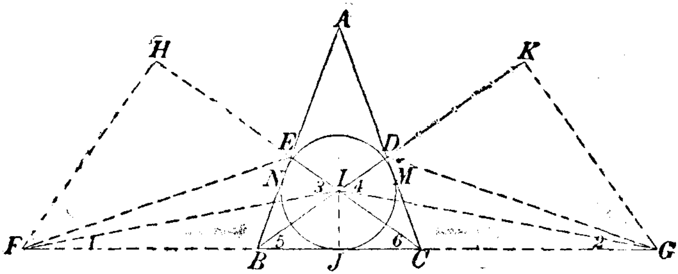
$\therefore\ DC>BE$,

與適所得之結論相衝突, 故 $AB\nless AC$.

同理可證 $AB\ngtr AC$.

故 $AB=AC$.

**證 2.** 將 $BC$ 兩端延長至 $F$、$G$, 使 $BF=AC$, $CG=AB$. 自




$F$ 點作垂線於 $CE$ 之延線而交於 $H$ 點. 自 $G$ 點作垂線於 $BD$ 之延線而交於 $K$ 點.

設 $BD, CE$ 交於 $I$ 點, 則 $I$ 點為內心, 作 $\triangle ABC$ 之內切圓與 $BC$ 切於 $J$ 點, 與 $AC$ 切於 $M$ 點, 與 $AB$ 切於 $N$ 點, 則

$$AC+BJ=AM+CM+BJ=\frac{AB+BC+CA}{2}.$$

$$AB+CJ=AN+BN+CJ=\frac{AB+BC+CA}{2}.$$

$$\therefore\quad AC+BJ=AB+CJ,$$

又 $$\because\quad AC=BF,$$

$$AB=CG.$$

$$\therefore\quad BF+BJ=CG+CJ.$$

即 $$JF=JG.$$

$$\because\quad IJ\perp BC,$$

$$\therefore\quad IF=IG;$$

$$\angle 1=\angle 2.$$

在 $\triangle FBE$, $\triangle AEC$ 內

$$\because \quad BF=AC.$$

$E$ 爲 $\angle C$ 平分線上一點; 而自 $E$ 點至 $BC$ 之距離 (卽 $\triangle FBE$ 之高) 等於自 $E$ 點至 $AC$ 之距離(卽 $\triangle AEC$ 之高).

$$\therefore \quad \triangle FBE=\triangle AEC.$$

$$\therefore \quad \triangle FBE+\triangle BEC=\triangle AEC+\triangle BEC,$$

卽 $$\triangle FEC=\triangle GDB.$$

但此兩三角形之底 $BD=CE$. 故其高 $FH=GK$.

$$\therefore \quad \triangle IFH\cong\triangle IKG. \text{ (s.s.r.)}$$

$$\therefore \quad \angle 3=\angle 4.$$

在 $\triangle GIB$, $$\angle 5=\angle 4-\angle 2,$$

在 $\triangle FIC$, $$\angle 6=\angle 3-\angle 1.$$

$$\therefore \quad \angle 5=\angle 6.$$

卽 $$\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{2}\angle C,$$

$$\angle B=\angle C,$$

$$\therefore \quad AB=AC.$$

**證 3.** 設 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. 則

$$\overline{BD}^2=ca-\overline{DA}\times\overline{DC},$$

$$\overline{CE}^2=ab-\overline{EA}\times\overline{EB}.$$

但
$$\frac{DA}{DC}=\frac{c}{a},$$

$$\therefore \quad \frac{DA}{DA+DC}=\frac{c}{c+a},$$

即
$$\frac{DA}{b}=\frac{c}{c+a};$$

$$DA=\frac{bc}{c+a}.$$

$$\therefore \quad DC=b-DA=b-\frac{bc}{c+a}=\frac{ab}{c+a}.$$

故
$$\overline{BD}^2=ca-\frac{ab^2c}{(c+a)^2}.$$

同理
$$\overline{CE}^2=ab-\frac{abc^2}{(a+b)^2}.$$

故
$$ca-\frac{ab^2c}{(c+a)^2}=ab-\frac{abc^2}{(a+b)^2}.$$

$$(a+b)^2[ca(c+a)^2-ab^2c]=[ab(a+b)^2-abc^2](a+c)^2.$$

$$ca(a+b)^2(a+c)^2-ab^2c(a+b)^2$$
$$=ab(a+b)^2(a+c)^2-abc^2(a+c)^2.$$

$$a(a+b)^2(a+c)^2(b-c)+abc[b(a+b)^2-c(a+c)^2]=0.$$

$$a(a+b)^2(a+c)^2(b-c)+abc[a^2b+2ab^2$$
$$+b^3-a^2c-2ac^2-c^3]=0.$$

$$a(a+b)^2(a+c)^2(b-c)+abc[a^2(b-c)+(2ab+2ac)(b-c)+(b-c)(b^2+bc+c^2)]=0.$$

$$a(a+b)^2(a+c)^2(b-c)+abc(b-c)(a^2+2ab+2ac+b^2+bc+c^2)=0.$$

$$(b-c)[a(a+b)^2(a+c)^2+abc(a^2+2ab+2ac+b^2+bc+c^2)]=0.$$

因後式不能爲零，故　$b-c=0$,　$b=c$.

卽　$AB=AC$.　故得證明.

## 習　題　一

1. 在 $\triangle ABC$ 的邊 $AB$、$CA$ 之外側，$BC$ 之內側，各作等邊三角形 $APB$、$ACQ$、$BCR$. 試證

(i) $PR=AC=AQ$.　　(ii) $PAQR$ 爲 $\square$.

2. $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，今過 $BC$ 之中點 $M$ 引直線與 $AB$、$AC$ 各交於 $P$、$Q$，而 $AP=AQ$. 試證 $BP=CQ$.

3. 設 $M$、$N$ 爲平行四邊形 $ABCD$ 兩邊 $BC$ 及 $CD$ 之中點，連 $AM$ 及 $AN$，則必三等分其對角線 $BD$，試證之.（東北大，33年度）.

4. 在 $\triangle ABC$ 內，$AB=\frac{1}{3}AC$. 由 $C$ 點引 $\angle BAC$ 之平分線

之垂線 $CD$. 試證 $BC$ 平分 $AD$.

5. 在 $\triangle ABC$ 內, $\angle CBA=2\angle ACB$, $N$ 爲 $AC$ 之中點, $NM \parallel AB$ 交 $BC$ 於 $M$, $AD \perp BC$ 於 $D$. 試證

$$DM=MN=\frac{1}{2}AB.$$

6. $C$ 爲直角之三角形 $ABC$, 自 $A$ 作 $BC$ 之平行線 $AD$, 又引 $BD$ 線與 $AC$ 相交於 $E$. 如 $ED=2AB$, 試證

$$\angle ABE=\frac{2}{3}\angle ABC.$$

7. $\triangle ABC$, 自 $A$ 至 $\angle B$、$\angle C$ 之平分線所作垂線之足爲 $P$、$Q$. 試證

$$PQ=\frac{1}{2}(AB+AC-BC).$$

8. $G$ 爲 $\triangle ABC$ 之重心, 自 $A$、$B$、$C$、$G$ 向不與本形相交之一直線, 作四垂線 $AA'$、$BB'$、$CC'$、$GG'$. 試證

$$AA'+BB'+CC'=3GG'.$$

9. 由等邊三角形內一點, 作三邊之垂線, 其和必爲一定. (浙大, 24 年度).

10. 在等腰三角形 $ABC$ 的二腰 $AB$、$AC$ 內取 $PQ$、$RS$, 使 $PQ=RS$, 而 $L$、$M$、$N$ 爲 $RP$、$PS$、$QR$ 的中點, 試證

(i) $\triangle LMN$ 爲等腰. (ii) $MN \parallel BC$.

11. $\triangle ABC$, $BC$、$CA$、$AB$ 之中點依次爲 $D$、$E$、$F$. 如 $FH \perp AB$,

且等於 $\frac{1}{2}AB$, $GE\perp AC$, 且等於 $\frac{1}{2}AC$. 試證 $HD=DG$. 且 $HD\perp DG$.

12. $E$ 為 $\triangle ABC$ 中線 $AD$ 上任一點, 連 $EB$、$EC$, 如 $\angle B>\angle C$, 試證 $\angle EBC>\angle ECB$.

13. $\triangle ABC$ 中, $AB>AC$, $P$ 為 $\angle A$ 平分線上任意點, 試證

$$PB-PC<AB-AC.$$

14. 若 $\triangle ABC$ 中, $AB>AC$, $\angle A\neq \text{rt}\angle$, 設自 $B$、$C$ 作對邊之垂線, 垂足各為 $E$、$F$. 試證 $AB+CF>AC+BE$. (國立女子師範學院, 33 年度).

15. 直角等腰三角形 $ABC$, $AB=AC$. 試證 $3AB>2BC$.

16. 自正方形 $ABCD$ 之 $A$ 角作 $AEF$ 直線, 與 $CD$ 邊交於 $E$, $BC$ 邊延線交於 $F$. 試證 $AE+AF>2AC$.

17. 兩直線交於 $Q$ 點, 在一直線上取 $A$、$B$、$C$ 三點, 使 $QA=AB=BC$, 又在另一直線上取 $L$、$M$、$N$ 三點, 使 $LQ=QM=MN$. 試證 $AL$、$BN$、$CM$ 共點.

18. $I_1$、$I_2$、$I_3$ 各為 $\triangle ABC$ 之 $BC$、$CA$、$AB$ 外之傍心, 則由 $I_1$ 引 $BC$ 之垂線, 由 $I_2$ 引 $CA$ 之垂線, 由 $I_3$ 引 $AB$ 之垂線. 試證此三線之延線必交於一點.

註. $\triangle I_1I_2I_3$ 稱為傍心三角形, 學者可證各邊必各過其三頂點.

19. $D$、$E$ 各爲 $\triangle ABC$ 二邊 $AC$、$BC$ 之中點，$P$ 爲 $AB$ 上任一點. 連 $PD$ 延長至 $F$，使 $PD=DF$. 連 $PE$，延長至 $G$，使 $PE=EG$. 試證 $F$、$C$、$G$ 三點共線.

20. 自正方形 $ABCD$ 之 $BC$ 上一點 $E$，作 $EH\perp BC$，且使 $EH=\frac{1}{2}BC$，以 $EH$ 爲對角線作正方形 $EGHF$. 以 $AG$ 及 $DF$ 爲邊，各向外作正方形 $ALKG$、$DFMN$. 試證 $K$、$H$、$M$ 三點共線.

## 第二節　圓

### 一. 重要定義與定理之複習

(A) **重要定義.**

**1. 圓.** 乃平面上之封閉曲線，且其上各點與一定點之距離相等.

**2. 切線.** 截圓周於一點之直線，稱爲切線. 該截點稱爲切點.

(B) **重要定理.**

**1. 半徑與直徑.**

(i) 同圓或等圓之半徑及直徑皆相等.

(ii) 兩圓之半徑或直徑如相等，則全等.

(iii) 視一點與圓心之距離大於、等於或小於半徑，而定此點在圓外、圓周上或圓內.

(iv) 直徑分圓爲二等份.

**2. 弧弦與圓心角** 在同圓或等圓內，此三原素有連環相等或大小之關係.

**3. 垂徑分弦定理.** 垂直於弦之直徑，必平分此弦及其所對之優弧及劣弧.

**註.** 由此定理知 $CD$ 線具有下列五性質.

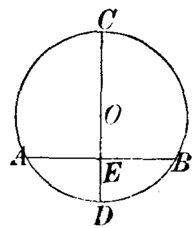
(i) 過圓心.

(ii) 平分 $AB$ 弦.

(iii) 垂直 $AB$ 弦.

(iv) 平分劣弧 $\overset{\frown}{ADB}$.

(v) 平分優弧 $\overset{\frown}{ACB}$.




吾人任知其中二性質，卽可推出他三性質，故連本定理共可得 ${}_5C_2=10$ 個定理，今證其較難者如下:

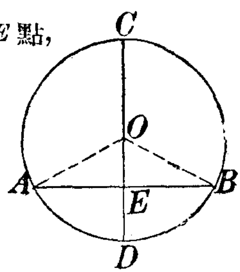
**例 1.** 已知: $CD$ 弦平分 $AB$ 弦，於 $E$ 點，

$CD\perp AB$.

求證: $CD$ 爲直徑，

$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$,

$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$.




**證.** 連 $OA$、$OB$.

因 $OA=OB$，故 $O$ 點在 $AB$ 之中垂線上，卽 $CD$ 過 $O$ 點而

爲直徑.

又因 $$\triangle AOE \cong \triangle BOE, \quad (\text{s.a.s.}).$$

$$\angle AOD = \angle BOD,$$

$$\angle AOC = \angle BOC.$$

故 $$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD},$$

$$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}.$$

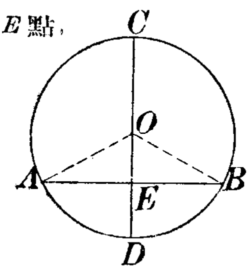
**例 2.** 已知: $CD$ 弦平分 $AB$ 弦, 於 $E$ 點,

$$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}.$$

求證: $CD$ 爲直徑,

$$CD \perp AB,$$

$$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}.$$




**證.** 連 $OE$、$OD$、$OA$、$OB$.

$$\because \quad OA = OB,$$

$$OE = OE,$$

$$AE = BE.$$

$$\therefore \quad \triangle OAE \cong \triangle OBE, \quad (\text{s.s.s.})$$

$$\therefore \quad \angle AOE = \angle BOE,$$

又因 $$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD},$$

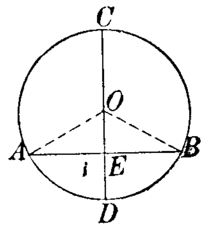
$$\therefore \quad \angle AOD = \angle BOD.$$

但 $\triangle OAB$ 之 $\angle AOB$ 之平分線僅有一條, 故 $OE$ 與 $OD$ 重

合. 卽 $CD$ 過 $O$ 點而爲直徑. 餘易證明. 從略.

**例 3.** 已知: $CD \perp AB$,

$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$.



求證: $CD$ 爲直徑,

$AE = BE$,

$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$.

**證.** 連 $OD$, 設與 $AB$ 交於 $E'$ 點, 更連 $OA$、$OB$.

$\because \quad \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$,

$\therefore \quad \angle AOE' = \angle BOE'$.

又 $\quad \because \quad OA = OB$,

$OE' = OE'$.

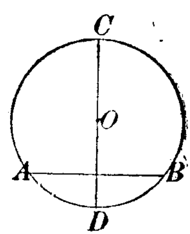
$\therefore \quad \triangle AOE' \cong \triangle BOE'$, (s.a.s.)

$\therefore \quad \angle AE'O = \angle BE'O = 90^\circ$,

故 $DO \perp AB$, 但 $DC \perp AB$. 且由 $D$ 點向 $AB$ 作垂線僅有一條. 故 $DC$ 與 $DO$ 重合, 而 $CD$ 過圓心. 餘易證明, 從略.

**例 4.** 已知: $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$,

$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$.



求證: $CD$ 爲直徑,

$CD \perp AB$,

$CD$ 平分 $AB$.

**證.** $\because \quad \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}, \quad \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC},$

$$\therefore \quad \overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{BC}=180°.$$

故 $CD$ 爲直徑. 餘易證明, 從略.

**4. 弦與圓心之距離.**

（i）原定理　在同圓及等圓內, 如兩弦相等, 則此兩弦至圓心之距離相等.

（ii）反定理　在同圓或等圓內, 如兩弦至圓心之距離相等, 則此兩弦相等.

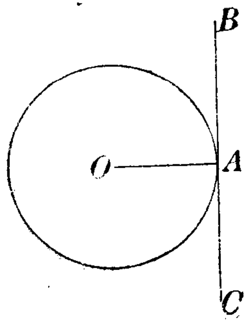
（iii）對定理　在同圓或等圓內, 如兩弦不等, 則大弦至圓心之距離較近.

（iv）轉定理　在同圓或等圓內, 如兩弦至圓心距離不等, 則距離較近之弦較長.

**5. 切線定理.**

（i）垂直於圓半徑外端之直線爲圓之切線.

**註.** 此定理含下列四性質.




(a) $OA$ 線過圓心.

(b) $OA$ 線垂直 $BC$ 於 $A$ 點.

(c) $A$ 點爲切點.

(d) $BC$ 爲切線.

吾人任知其中三性質, 即可推出

他一性質，故連本定理共可得 ${}_4C_3={}_4C_1=4$ 個定理.

(ii) 由圓外一點所引圓之兩切線必等長，且與此點及圓心之連線成等角.

**6. 兩圓之關係.**

(i) 兩圓相交，其連心線爲公共弦之中垂線.

(ii) 兩圓相切，其連心線必過切點.

**7. 角之度量.**

(i) 圓心角以其所對之弧度之.

(ii) 圓周角以其所對之弧之半度之.

系 1. 抱同弧或等弧之圓周角相等.

系 2. 半圓內所含之圓周角爲一直角.

系 3. 圓之內接四邊形之對角互補，外角等於其內對角.

(iii) 弦切角以其所夾之弧之半度之.

(iv) 兩截線相交於圓內所成之角，以其所對之弧與其對頂角所對之弧之和之半度之.

(v) 兩截線相交於圓外所成之角，以其所夾兩弧之差之半度之.

**8. 平行線與圓.** 平行之兩截線在圓上所截之兩弧相等，其逆亦眞.

**二. 證題法.**

**(A) 證兩弧相等之法.**

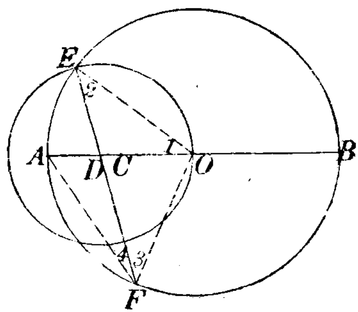
1. 證兩弧所對之圓心角或圓周角相等.

2. 證兩弧所對之弦相等.

3. 證為平行弦所夾之弧.

**例.** 圓 $O$ 之直徑 $AOB$ 上, $OA$ 之中點為 $C$, 以 $AC$ 間一點 $D$ 為圓心, $DO$ 為半徑作圓, 截原圓於 $E$. 設 $DE$ 延長與原圓之交點為 $F$, 試證 $\overset{\frown}{AE}=\frac{1}{3}\overset{\frown}{BF}$.

**證.** 連 $AF$、$OE$、$OF$,




$\because\ OD=DE$,

$\therefore\ \angle 1=\angle 2$.

又 $\because\ OE=OF$,

$\therefore\ \angle 2=\angle 3$,

$\therefore\ \angle 1=\angle 3$.

又 $\because\ \angle 4=\frac{\angle 1}{2}$,

$\therefore\ \angle 4=\frac{\angle 3}{2}$, $\therefore\ \angle 4=\frac{\angle AFO}{3}$.

但 $OA=OF$, $\therefore\ \angle OAF=\angle AFO$.

$$\therefore\ \angle 4=\frac{\angle BAF}{3}.$$

故 $$\overset{\frown}{AE}=\frac{1}{3}\overset{\frown}{BF}.$$

(B) **證兩弦相等之法.**

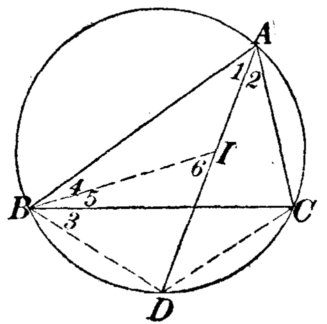
1. 證兩弦所對之圓心角或圓周角相等.

2. 證兩弦所對之弧相等.

3. 證兩弦對於圓心之距離相等.

**例.** 三角形 $ABC$ 之內切圓心 $I$, 與 $A$ 連接之直線, 交外接圓周於 $D$, 試證　　　　$DI=DB=DC$.

**證.** 設 $I$ 爲內心, 則




$\angle 1=\angle 2$,

$\therefore\quad DB=DC$.

又　　$\angle 6=\angle 1+\angle 4$,

但　　$\angle 1=\angle 3$,

$\angle 4=\angle 5$,

$\therefore\quad \angle 6=\angle 3+\angle 5$.

$\therefore\quad DI=DB$.

故　　$DI=DB=DC$.

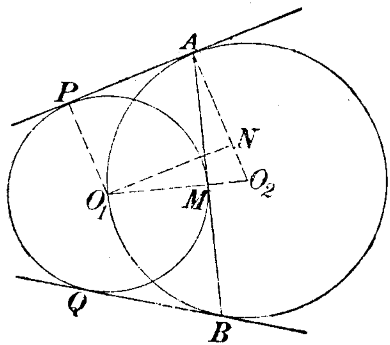
(C) **證一線爲圓之切線之法.**

1. 證此線經過半徑外端且與半徑垂直.

2. 證弦與此線所夾之角, 等於夾弧上之圓周角.

**例 1.** 設一圓之中心在他圓之周上, 又其二公切線與第二圓相切之點爲 $A$、$B$, 則 $AB$ 直線與第一圓相切. (北平大學, 25 年度).

**證.** 設二圓心爲 $O_1$、$O_2$. 連 $O_1O_2$ 交 $O_1$ 圓於 $M$ 點. 連 $MA$、$O_2A$, 更作 $O_1N\perp O_2A$.




$\because\quad O_2M=O_1O_2-O_1M$

$\quad O_2N=O_2A-NA.$

但 $\quad O_1O_2=O_2A,$

$\quad O_1M=O_1P=NA,$

$\therefore\quad O_2M=O_2N.$

又 $\because O_2A=O_1O_2,$

$\angle AO_2M=\angle O_1O_2N;$

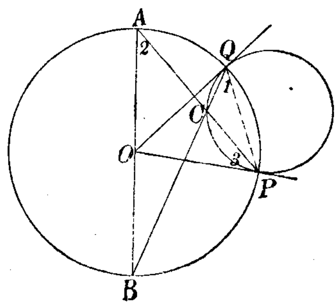
$$\therefore\ \triangle AO_2M\cong\triangle O_2NO_1,\ (\text{s.a.s.})$$

而 $$\angle O_2MA=\angle O_2NO_1=90^\circ,$$

$\therefore\quad AM\perp O_1M$. 而 $AM$ 爲 $O_1$ 圓在 $M$ 點之切線.

同理可證 $BM$ 亦爲 $O_1$ 圓在 $M$ 點之切線. 即 $AB$ 爲 $O_1$ 圓在 $M$ 點之切線.

**例 2.** 設 $O$ 爲圓心, $AOB$ 爲直徑, $C$ 爲任意一點, 連 $AC$、$BC$, 設與 $O$ 圓各交 $P$、$Q$ 點, 試證 $OP$、$OQ$ 切於過 $C$、$P$、$Q$ 三點之圓.




**證.** (i) 設 $C$ 點在圓內, 連 $PQ$.

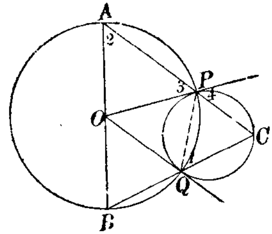
則 $$\angle 1=\angle 2.$$

又 $\because OA=OP$, $\therefore \angle 2=\angle 3$. $\therefore \angle 1=\angle 3$.

故 $OP$ 爲 $PCQ$ 圓之切線. 餘同理可證.

(ii) 設 $C$ 點在圓外, 連 $PQ$.

$\because ABQP$ 爲圓之内接四邊形,





$\therefore \angle 1=\angle 2$.

又 $OA=OP$,

$\therefore \angle 2=\angle 3$.

$\therefore \angle 1=\angle 3$.

但 $\angle 3=\angle 4$,

$\therefore \angle 1=\angle 4$.

故 $OP$ 爲 $PCQ$ 圓之切線, 餘同理可證.

(D) **證四點共圓之法.**

1. 證四點距一定點等遠.

2. 連結四點成兩同底之三角形, 證其頂角相等.

3. 連結四點成四邊形, 證其對角互補或其外角等於其內對角.

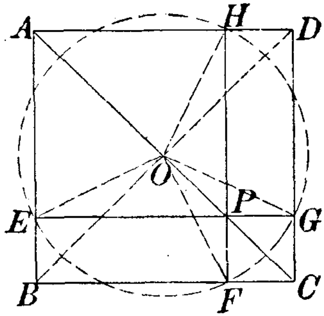
**例 1.** 正方形 $ABCD$, 由其對角線 $AC$ 上 $P$ 點, 作二直線平行於各邊, 且與各邊遇於 $E$、$F$、$G$、$H$. 試證此四點必在以兩對角線之交點 $O$ 爲圓心之圓周上.

**證.** 連 $OE$、$OF$、$OG$、$OH$.

$\because PFCG$ 爲正方形,

$\therefore\quad CF = PG = DH$

$= CG = PF = EB.$




又 $\quad OB = OC = OD,$

$\angle EBO = \angle FCO = \angle GCO$

$= \angle HDO = 45°,$

$\therefore\quad \triangle BEO \cong \triangle CFO \cong \triangle CGO$

$\cong \triangle DHO.$ (s.a.s.).

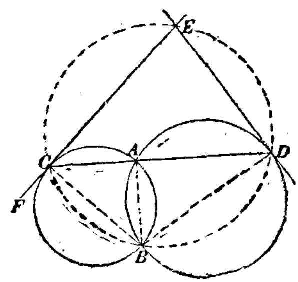
$\therefore\quad OE = OF = OG = OH.$

故得證明.

**例 2.** 過二圓之交點 $A$、$B$ 之一點 $A$, 作直線 $CAD$, 與圓周交於 $C$ 及 $D$. 設 $E$ 為 $C$、$D$ 點兩切線之交點, 試證 $E$、$C$、$B$、$D$ 四點同在一圓周上.

**證.** 延長 $EC$ 至 $F$,

連 $BC$、$BA$、$BD$.




$\because\quad \angle FCB = \angle CAB$

$= \angle ADB + \angle ABD$

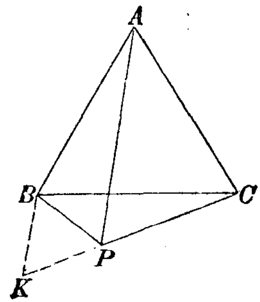
$= \angle ADB + \angle ADE$

$= \angle EDB.$

故 $E$、$C$、$B$、$D$ 四點共圓.

**例 3.** 等邊三角形 $ABC$ 外有一點 $P$, 如 $PA = PB + PC$, 試證 $A$、$B$、$C$、$P$ 四點在一圓周上.

證. 在 $BP$ 上作等邊三角形 $BKP$,則 $BP=KP$. 連結 $KC$.




$\because\quad \angle ABP=60^\circ+\angle PBC,$

$\angle CBK=60^\circ+\angle PBC,$

$\therefore\quad \angle ABP=\angle CBK.$

又 $\quad\because\quad BK=BP,$

$BC=AB,$

$\therefore\quad \triangle ABP\cong\triangle CBK.$ (s.a.s.).

$\therefore\quad AP=CK.$

但 $\quad PA=PB+PC,$

$\therefore\quad CK=PB+PC=KP+PC.$

$\therefore\quad P$ 點在 $KC$ 上.

$\therefore\quad \angle BPC=180^\circ-\angle BPK=180^\circ-60^\circ=120^\circ.$

而 $\quad \angle BAC+\angle BPC=60^\circ+120^\circ=180^\circ.$

故 $A$、$B$、$C$、$P$ 四點共圓.

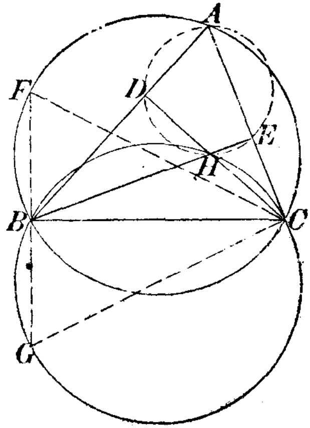
(E) **雜例.**

**例 1.** 試證外接於三角形之圓，與通過該三角形二頂點及垂心之圓相等(證兩圓相等).

證. 過 $C$ 點作圓 $ABC$ 之直徑 $CF$, 又作圓 $HBC$ 之直徑 $CG$. 連 $BF$、$BG$.

$\because\quad \angle BDH=90^\circ=\angle AEH,$

$\therefore\quad A$、$D$、$H$、$E$ 共圓.





$\therefore\quad \angle DHB = \angle BAC.$

但 $\angle DHB = \angle BGC,$

且 $\angle BAC = \angle BFC,$

$\therefore\quad \angle BFC = \angle BGC.$

又 $\because\quad \angle CBF = 90^\circ$

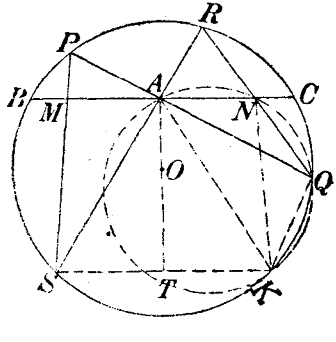
$= \angle CBG,$

$\therefore$ $F$、$B$、$G$ 共線.

而 $CF = CG,$

$\therefore$ 圓 $CFB =$ 圓 $CBG.$

**例 2.** 通過 $BC$ 弦之中點 $A$,任意作二弦 $PQ$、$RS$.其各兩端之連線 $PS$、$RQ$ 分別截 $BC$ 於 $M$ 及 $N$ 兩點.試證 $AM = AN$.(證兩線段相等).





**證.** 作 $SK \parallel BC$,連 $KA$、$KN$、$KQ$,更作 $AT \perp SK$,故 $TA \perp BC$.又因 $TA$ 平分 $BC$,故 $TA$ 必過圓心 $O$ 點,而

$$ST = TK,$$

$$\therefore\quad AS = AK.$$

$$\because\quad SK \parallel BC,$$

$\therefore\quad \angle BAS=\angle ASK=\angle AKS=\angle CAK,$

又 $\because\quad \angle RQK+\angle RSK=180^\circ,$

卽 $\angle NQK+\angle ASK=180^\circ,$

$\therefore\quad \angle NQK+\angle CAK=180^\circ,$

卽 $\angle NQK+\angle NAK=180^\circ.$

故 $A$、$K$、$Q$、$N$ 共圓.

$\therefore\quad \angle AKN=\angle AQN=\angle ASM.$

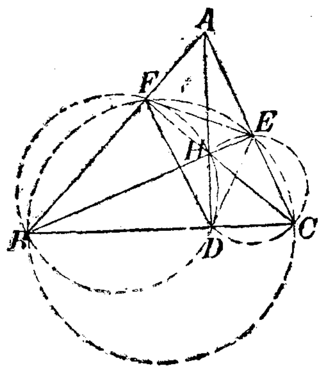
且 $\angle SAM=\angle ASK=\angle AKS=\angle NAK,$

$\therefore\quad \triangle ASM\cong\triangle AKN.$ (a.s.a.).

故 $AM=AN.$

例 3. 三角形之各垂線必平分垂足三角形之各角. (證兩角相等).

註. 連結三角形中三垂線之足所成之三角形,稱爲垂足三角形.




證. 設 $AD$、$BE$、$CF$ 爲 $\triangle ABC$ 各頂點所作之垂線.

$\because\quad \angle BFH+\angle BDH$

$=90^\circ+90^\circ=180^\circ,$

$\therefore\quad B$、$D$、$H$、$F$ 共圓.

$\therefore\quad \angle ADF=\angle EBF.$

又 $\because\quad \angle BFC=\angle BEC=90^\circ,$

$\therefore \quad B、C、E、F$ 共圓.

$\therefore \quad \angle EBF = \angle FCE.$

又 $\quad \because \quad \angle HDC + \angle HEC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$

$\therefore \quad H、D、C、E$ 共圓.

$\therefore \quad \angle FCE = \angle ADE.$

故 $\quad \angle ADF = \angle ADE.$

同理可證 $\quad \angle BED = \angle BEF,$

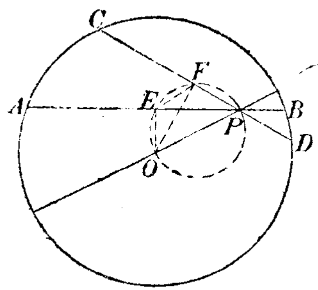
$\angle CFE = \angle CFD.$

**例 4.** $P$ 為 $O$ 圓中直徑上之一點, $AB$、$CD$ 為過 $P$ 點之二弦而 $AB > CD$. 試證 $\angle APO < \angle DPO$. (證兩角不等).

**證.** 作 $\quad OE \perp AB,$

$OF \perp CD.$

連 $EF$.




$\because \quad \angle OEP = \angle OFP$

$= 90^\circ,$

$\therefore \quad E、O、P、F$ 共圓.

則 $\quad \angle APO = \angle EFO,$

$\angle DPO = \angle OEF.$

又 $\quad \because \quad AB > CD,$

$\therefore \quad OE < OF.$

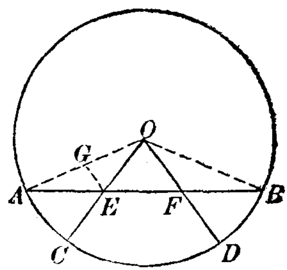
$\therefore \quad \angle EFO < \angle OEF.$

即 $\angle APO<\angle DPO.$

**例 5.** 已知 $AB$ 為 $O$ 圓之弦；半徑 $OC$、$OD$ 交 $AB$ 於 $E$、$F$，使 $AE=EF=FB$. 試證 $\overset{\frown}{AC}<\overset{\frown}{CD}$.（證兩弧不等）.

**證.** $OF<OA,$

過 $E$ 點作 $EG\parallel OF$ 與 $OA$ 交於 $G$ 點.




$\because\quad AE=EF,$

$\therefore\quad AG=OG,$

$EG=\frac{1}{2}OF.$

$\therefore\quad EG<\frac{1}{2}OD,\qquad EG<\frac{1}{2}OA.$

即 $EG<OG.\qquad\therefore\quad\angle GOE<\angle GEO.$

但 $\angle GEO=\angle EOF,\qquad\therefore\quad\angle GOE<\angle EOF.$

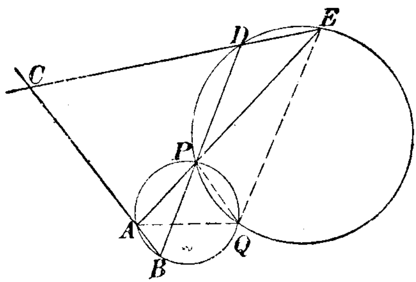
即 $\angle AOC<\angle COD.\qquad$ 故 $\overset{\frown}{AC}<\overset{\frown}{CD}.$

**例 6.** 過二圓之交點 $P$，引任意二直線 $APE$, $BPD$ 與圓周交於 $A$、$E$、$B$、$D$. 試證 $BA$、$ED$ 延線之交角 $C$ 常不變.（定量問題）.

**證.** 設兩圓之他一交點為 $Q$ 點，連 $PQ$、$AQ$、$EQ$.

$$\angle C=180^\circ-(\angle CBD+\angle CDB)$$

$$=180^\circ-(\angle AQP+\angle PQE)=180^\circ-\angle AQE.$$




又 $\because$ $\angle AQE = 180^\circ - (\angle PAQ + \angle PEQ)$,

$\because$ $PQ$ 爲定弦,

$\therefore$ $\angle PAQ$、$\angle PEQ$ 皆爲定角.

$\therefore$ $\angle AQE$ 亦爲定角.

而 $\angle C = 180^\circ - \angle AQE =$ 定角.

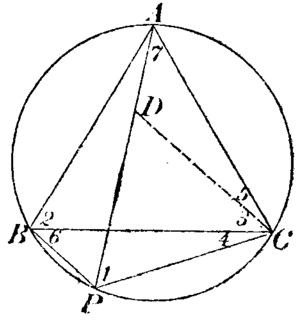
**例 7.** 等邊三角形之外接圓上一點,至三頂點之三直線中,其一爲他二線之和.(證一線段等於二線段之和).

**證.** 設 $ABC$ 爲等邊三角形,

$P$ 爲其外接圓周上之一點.

在 $PA$ 上取 $D$ 點,

使 $PD = PC$, 連 $DC$.




$\because$ $\angle 1 = \angle 2 = 60^\circ$,

$\therefore$ $\triangle PCD$ 爲等邊三角形.

而 $\angle DCP = 60^\circ$,

卽 $\angle 3+\angle 4=60°.$

但 $\angle 3+\angle 5=60°,$

$\therefore\quad \angle 4=\angle 5.$

又 $\because\quad \angle 6=\angle 7,$

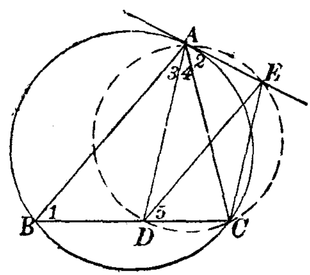
$BC=AC,$

$\therefore\quad \triangle BPC\cong\triangle ADC,$ (a.s.a.).

$\therefore\quad PB=AD.$

故 $PA=AD+PD=PB+PC.$

**例 8.** 平分圓內 $\triangle ABC$ 之 $\angle A$ 之線與 $BC$ 邊交於 $D$，由 $C$ 作 $AD$ 之平行線與 $A$ 點之切線交於 $E$. 試證 $DE \parallel AB$.（證兩線平行）.




**證.** $\because\quad AD \parallel EC,$

$\therefore\quad \angle AEC+\angle DAE=180°.$

又 $\angle DAE=\angle 4+\angle 2,$

$\angle ADC=\angle 1+\angle 3,$

但 $\angle 1=\angle 2,$

$\angle 3=\angle 4.$

$\therefore\quad \angle DAE=\angle ADC.$

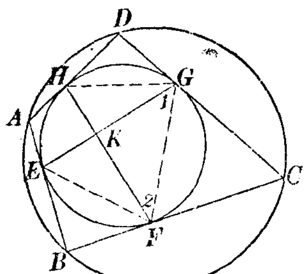
$\therefore\quad \angle AEC+\angle ADC=180°.$

$\therefore\quad A、D、C、E$ 共圓.

$$\therefore \quad \angle 5=\angle 2=\angle 1.$$

故 $$DE \parallel AB.$$

**例 9.** 設一四邊形,含有內切圓及外接圓,則連結其相對切點所作之二直線必互相正交,試證明之.(武大,21 年度)(證兩線垂直).




**證.** 設 $ABCD$ 爲一四邊形,其外接圓爲 $ABCD$,其內切圓爲 $EFGH$.$E$、$F$、$G$、$H$ 爲切點.連 $HG$、$GF$、$EF$.並設 $HF$、$EG$ 相交於 $K$ 點.

$$\because \quad BE=BF,$$

$$\therefore \quad \angle ABC+2\angle BEF=180^\circ.$$

$$\because \quad DH=DG,$$

$$\therefore \quad \angle ADC+2\angle DHG=180^\circ.$$

又 $$\angle ABC+\angle ADC=180^\circ,$$

$$\therefore \quad \angle BEF+\angle DHG=90^\circ.$$

但 $$\angle BEF=\angle 1,$$

$$\angle DHG=\angle 2,$$

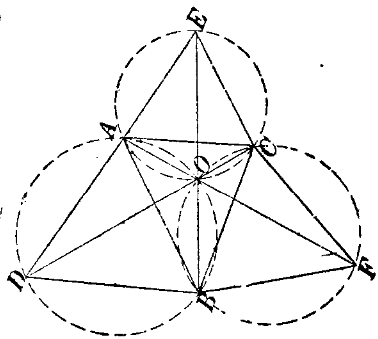
$$\therefore \quad \angle 1+\angle 2=90^\circ.$$

$$\therefore \quad \angle FKG=90^\circ.$$

$$\therefore \quad EG \perp FH.$$

**例 10.** 於三角形 $ABC$ 之各邊上，在其外側作三等邊三角形 $ABD$、$BCF$、$ACE$. 求證三直線 $AF$、$BE$、$CD$ 相會於一點，(共點線問題).

**證.** 設 $DC$、$BE$ 相交於 $O$ 點. 連 $OA$、$OF$.




$\because \quad AD = AB,$

$AC = AE,$

$\angle DAC = 60^\circ + \angle BAC$

$= \angle BAE.$

$\therefore \quad \triangle DAC \cong \triangle BAE.$

(s.a.s.).

$\therefore \quad \angle ACD = \angle AEB.$

故 $A$、$O$、$C$、$E$ 共圓.

$\therefore \quad \angle AEC + \angle AOC = 180^\circ.$

但 $\angle AEC = 60^\circ,$

$\therefore \quad \angle AOC = 120^\circ.$

同理由 $\triangle DAC \cong \triangle BAE,$

得 $\angle ADC = \angle ABE,$

則 $A$、$D$、$B$、$O$ 共圓.

$\therefore \quad \angle ADB + \angle AOB = 180^\circ.$

$\therefore \quad \angle AOB=120^\circ.$

$\therefore \quad \angle BOC=360^\circ-(\angle AOB+\angle AOC)$

$=360^\circ-240^\circ=120^\circ.$

又　$\because \quad \angle BFC=60^\circ,$

$\therefore \quad \angle BOC+\angle BFC=180^\circ.$

而　$B$、$F$、$C$、$O$ 共圓.

$\therefore \quad \angle FBC=\angle FOC.$

$\therefore \quad \angle FOC=60^\circ.$

而　$\angle FOC+\angle AOC=60^\circ+120^\circ=180^\circ.$

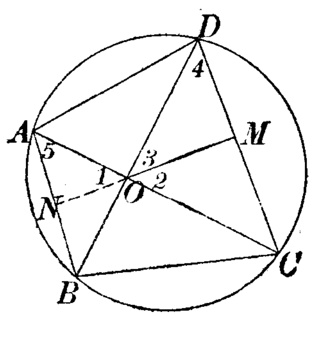
故 $AOF$ 爲一直線，而 $AF$、$BE$、$CD$ 相會於一點矣！

## 三．著名問題．

1．Brahmepta 定理．圓之內接四邊形中，若兩對角線正交，則由其交點至任意一邊所引垂線，依反對方向延長時，將對邊平分．

證．設圓之內接四邊形中，$AC\perp BD$.

命其交點爲 $O$．由 $O$ 點至 $CD$ 引垂線 $OM$．並延長 $MO$ 與 $AB$ 之交點爲 $N$.




$\because \quad \angle 1=\angle 2=90^\circ-\angle 3$

$=\angle 4=\angle 5,$

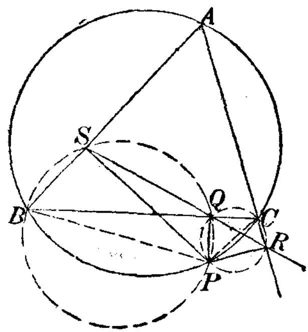
$$\therefore \quad NA=NO.$$

同理　$$NB=NO.$$

故　$$NA=NB.$$

**2. 西摩孫線** Simson's line. 由三角形外接圓周上一點向三邊作垂線，則三垂線足共線. 此線稱爲西摩孫線.

證. 設 $P$ 爲 $\triangle ABC$ 外接圓周上之一點.




$$PQ\perp BC,$$

$$PR\perp AC,$$

$$PS\perp AB.$$

連 $QS$、$QR$、$PB$、$PC$.

$$\because \quad \angle PSB=\angle PQB =90^\circ,$$

$$\therefore \quad S、B、P、Q \text{ 共圓}.$$

$$\therefore \quad \angle SQB=\angle SPB.$$

同理　$Q$、$P$、$R$、$C$ 共圓.

$$\therefore \quad \angle CQR=\angle CPR.$$

$$\because \quad \angle PCR=\angle PBS,$$

及　$$\angle PBS+\angle SPB=90^\circ,$$

$$\angle CPR+\angle PCR=90^\circ,$$

$$\therefore \quad \angle SPB=\angle CPR.$$

$$\therefore \quad \angle SQB = \angle CQR.$$

故　$S$、$Q$、$R$ 共線.

**註.** 其反定理爲如一點向三角形三邊作垂線，其垂線足在一直線上，則此點在此三角形之外接圓周上.

**證.**　$\because$　$S$、$B$、$P$、$Q$ 共圓，

$\therefore$　$\angle SBP + \angle SQP = 180°$.

又　$\because$　$S$、$Q$、$R$ 共線，

$\therefore$　$\angle SQP + \angle PQR = 180°$.

$\therefore$　$\angle SBP = \angle PQR$.

但　$Q$、$P$、$R$、$C$ 共圓，

$\angle PQR = \angle PCR$，

$\therefore$　$\angle SBP = \angle PCR$.

卽　$\angle ABP = \angle PCR$.

$\therefore$　$A$、$B$、$P$、$C$ 共圓.

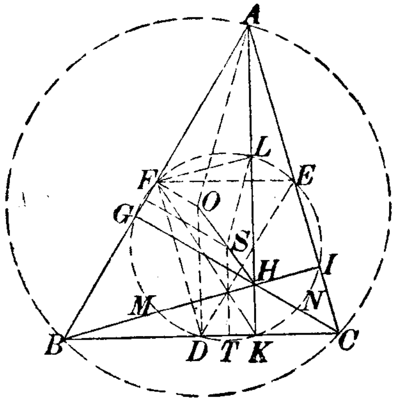
**註.** 據 McCay 氏言，此定理發明，實爲 Wallace 云.

**3. 九點圓**(Nine-point circle)　三角形三邊之中點、三垂足、及其垂心與三頂點之連線之三中點同在圓周上，此圓周稱爲九點圓.

**證.** 設 $D$、$E$、$F$ 爲 $\triangle ABC$ 三邊之中點，$K$、$I$、$G$ 爲三垂足，$L$、$M$、$N$ 爲 $AH, BH, CH$ 之中點.

過 $D$、$E$、$F$ 三點作圓. 吾人將分證 $K$、$I$、$G$ 及 $L$、$M$、$N$ 中之

任一點在該圓上.




(i) 連 $DE$、$EF$.

$\because$ $DE \parallel AB$,

$EF \parallel BC$,

$\therefore$ $FBDE$ 爲▱.

$\therefore$ $\angle FBD = \angle FED$.

連 $FK$.

$\because$ $\triangle ABK$ 爲直角三角形,

且 $AF = FB = FK$,

$\therefore$ $\angle FBD = \angle FKB$.

$\therefore$ $\angle FED = \angle FKB$.

故 $DEF$ 圓必過 $K$ 點.

同理可證過 $I$、$G$ 兩點.

(ii) 連 $FL$、$FD$.

$\because$ $FL \parallel BI$, $FD \parallel AC$,

$\therefore$ $\angle LFD = \angle BIC = 90°$.

$\therefore$ $\angle LFD = \angle LKC = 90°$.

故 $DEF$ 圓必過 $L$ 點. 同理可證過 $M$、$N$ 兩點.

註. (i) 九點圓心爲垂心與外心連線之中點.

設 $\triangle ABC$ 之外心爲 $O$. 因九點圓心必在 $FG$ 及 $DK$ 之中垂線上. 今設 $DK$ 之中垂線與 $OH$ 相交於 $S$ 點.

$$\because \quad OD \parallel ST \parallel AK;$$

且
$$DT = KT,$$

$$\therefore \quad HS = SO.$$

更設 $FG$ 之中垂線與 $OH$ 相交於 $S'$ 點. 同理可證

$$HS' = S'O.$$

故 $S$ 與 $S'$ 重合, 而得證明.

此 $OSH$ 直線稱爲尤拉氏線 Euler's line.

(ii) 九點圓之半徑, 等於外接圓半徑之半.

在 $\triangle AOH$,

$$\because \quad OS = HS,$$

$$AL = LH,$$

$$\therefore \quad SL = \frac{1}{2}OA.$$

(iii) 本定理稱爲 Poncelet 氏定理.

## 習　題　二

1. $D$ 爲 $\angle BAC$ 之平分線上一定點, 過 $A$、$D$ 二點任作二圓各交 $AB$、$AC$ 於 $E$、$G$ 及 $F$、$H$. 試證

(i) $EF = GH$.　　(ii) $AE + AG$ 爲一定量.

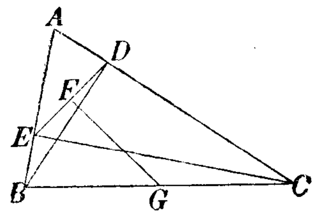
2. 已予二圓內切於 $P$ 點, $AB$ 爲大圓之一弦且切小圓於 $C$ 點, 求證 $PC$ 平分 $APB$ 角. (中大, 32 年度).

3. 已給圓之一直徑 $AB$ 及圓上異於 $A$、$B$ 之一點 $P$. 若 $PQ$ 為垂直於 $AB$ 之弦，而 $QR$ 為經過 $Q$ 之任意弦，$QR$ 交 $AB$ 於 $S$. 求證 $PB$ 為 $\angle RPS$ 之二等分線.（武大，31 年度）.

4. 以任意三角形 $ABC$ 之二邊 $AB$、$AC$ 為直徑作圓. 試證此二圓之另一交點在 $BC$ 上.（復旦大，32 年度）.

5. 等腰三角形之頂角 $C$ 為 $100°$，過 $A$ 作 $A$ 角之二等分線交 $BC$ 於 $D$. 則 $AD+DC=AB$. 試證之.（復旦大，33 年度）.

6. 在 $\triangle ABC$ 內 $BD\perp AC$, $CE\perp AB$.




(a) 證明 $B$、$E$、$D$、$C$ 四點共圓.

(b) 若 $F$、$G$ 為 $ED$、$BC$ 之中點，則 $FG\perp ED$.

(c) 若 $AC>AB$，

則 $CE>BD$.（重大，32 年度）.

7. $O$ 圓內之一半徑 $OA$ 任意引長至 $B$ 點，由 $B$ 點作切線，設其切點為 $C$. 更過 $A$、$B$、$C$ 三點作圓. 作直徑 $BD$. 試證

$$BD \parallel AC.$$

8. 試證圓內接四邊形兩對對邊交角之平分線必互相垂直.

9. 在任意四邊形之各邊上向外作正方形，而 $L$、$M$、$N$、$P$ 順序為此四正方形對角線之交點. 試證

(i) $LN=MP$. (ii) $LN\perp MP$.

10. 設 $H$ 爲 $\triangle ABC$ 之垂心，求證:

(a) $H$ 對於 $BC$、$CA$、$AB$ 之對稱點爲 $H_1$、$H_2$、$H_3$ 同在 $\triangle ABC$ 之外接圓周上.

(b) $H$ 對於 $BC$、$CA$、$AB$ 之中點之對稱點爲 $K_1$、$K_2$、$K_3$ 同在 $\triangle ABC$ 之外接圓周上. (復旦大, 36 年度).

11. 以 $\triangle ABC$ 之三邊 $BC$、$CA$ 及 $AB$ 爲邊，各向形外作正三角形 $BCD$、$CAE$ 及 $ABF$，則此三個正三角形之外接圓相交於一點 $P$，且 $PA$、$PB$ 及 $PC$ 必合於下列三式:

$$\overline{PB}^2+PB\cdot PC+\overline{PC}^2=\overline{BC}^2,$$

$$\overline{PC}^2+PC\cdot PA+\overline{PA}^2=\overline{CA}^2,$$

$$\overline{PA}^2+PA\cdot PB+\overline{PB}^2=\overline{AB}^2.$$

試證之. (復旦大, 33 年度).

12. 在 $\triangle ABC$ 之 $AB$、$BC$、$CA$ 各邊向外作正方形 $ABFG$、$BCED$、$ACKH$，$AK$、$HC$ 之交點爲 $O$，試證 $AD$、$CF$、$GE$、$BO$ 共點.

13. 以 $\triangle ABC$ 之 $BC$ 邊爲弦作一圓切於 $AB$，以 $CA$ 爲弦作一圓切於 $BC$，以 $AB$ 爲弦作一圓切於 $CA$. 試證三圓共點.

14. $\triangle ABC$ 之外心爲 $O$，自 $O$ 點作垂直 $AB$ 之直線，垂足爲 $D$，延長 $DO$ 與 $AC$ 交於 $E$ 點. 自 $O$ 點作垂直 $AC$ 之直線，垂足爲 $G$，延長 $GO$ 與 $AB$ 交於 $F$ 點. 試證 $O$、$F$、$B$、$C$、$E$ 五點共

圓.

15. 由直角三角形 $ABC$ 之直角頂 $C$,引斜邊 $AB$ 之垂線,$H$ 爲垂足. 過 $CH$ 之中點引三邊之平行線. 試證諸平行線與各邊相交之六點共圓.

16. 圓內接四邊形相對邊之延長線交於 $P$ 及 $Q$.其在圓外所成之二三角形之兩外接圓交於 $R$. 試證 $P$、$Q$、$R$ 共線.

17. 有四直線兩兩相交,成四三角形,試證各三角形之外接圓周必通過一點.(此點稱爲 Miquel 點).

18. 連結$\triangle ABC$ 之外接圓上一點與此三角形之垂心所成之線段,被此點之 Simson's line 所平分.

19. 如經過圓上一點作三弦,取爲三圓之直徑,試證此三圓兩兩相交於三個共線點.

20. 圓之內接四邊形之對角線如爲正交,試證由此交點引各邊垂線之垂足及各邊之中點凡八點共圓.

## 第三節　比例及相似形

### 一. 重要定義及定理之複習.

(A) 重要定義.

**相似多邊形.** 兩多邊形之對應角相等且對應邊成比例,稱爲相似多邊形.

(B) 重要定理.

**1. 平行線之比例線段.**

(i) 平行於一三角形一邊之直線,必分他二邊成比例線段,其逆亦眞.

(ii) 三條以上之平行線在任意二截線上截取比例線段.

**2. 相似三角形定理.**

(i) 兩三角形有二角彼此對應相等,則相似.

(ii) 兩三角形有一角相等而夾角之邊成比例,則相似.

(iii) 兩三角形有三邊成比例,則相似.

**3. 相似多邊形定理.**

(i) 兩相似多邊形可分爲同數之三角形,而在相似位置之三角形相似,其逆亦眞.

(ii) 相似多邊形周界之比,等於其對應邊之比.

**4. 直角三角形之比例線段.**

(i) 由直角三角形之直角頂點至斜邊作垂線,則垂線長爲斜邊兩段之比例中項.

(ii) 直角三角形之一腰爲斜邊及其在斜邊上射影之比例中項.

**5. 圓之比例線段.**

(i) 如二弦相交於圓內,則一弦之二線段之積,等於他一弦之二線段之積,其逆亦眞.

(ii) 自圓外一定點作二割線,則一割線與其圓外線段之

積，等於他一割線與其圓外線段之積，其逆亦眞.

(iii) 自圓外一點，作一切線及一割線，則切線之長爲割線與圓外線段之比例中項，又由圓外一點引一線段至圓上，如此線段之平方，等於此點所作割線之兩部分之乘積，則此線必切於圓.

**6. 角之平分線.**

(i) 三角形中一內角或一外角之平分線，分對邊成兩線段，則此兩線段之比等於兩隣邊之比，其逆亦眞.

(ii) 三角形一內角平分線之平方，等於夾角兩邊之積，減去對邊所分兩線段之積.

(iii) 三角形一外角平分線之平方，等於對邊所分兩線段之積減去夾角兩邊之積.

**7. 外接圓直徑.** 三角形兩邊之積，等於第三邊上高與外接圓直徑之積.

**二. 證題法.**

(A) **證四線段成比例之法.**

1. 證爲相似三角形之對應邊.

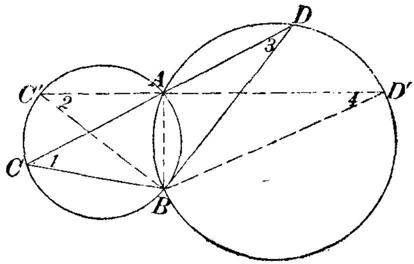
2. 證四線段爲三角形之兩邊及爲頂角平分線所分之第三邊之兩段.

3. 應用：直角三角形之比例線段.

4. 應用：圓之比例線段.

5. 應用：三角形兩邊之積等於第三邊上高與外接圓直徑之積之定理.

**例.** 設二圓相交於點 $A$、$B$；過 $A$ 引一直線，交二圓於 $C$、$D$. 連結 $BC$、$BD$. 則 $BC$ 與 $BD$ 之比，等於二圓 $ABC$、$ABD$ 直徑之比，試證之.（北大，25 年度）.




**證.** 過 $B$ 點作兩圓之直徑 $BC'$、$BD'$. 連 $AB$、$C'A$、$D'A$.

$\because \angle BAC' = \angle BAD' = 90^\circ$,

$\therefore C'$、$A$、$D'$ 共線.

又 $\because \angle 1 = \angle 2$,

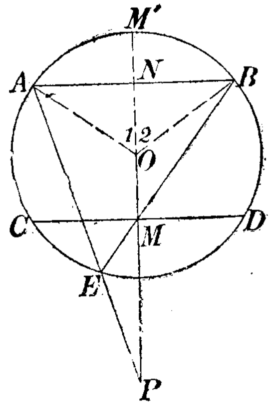
$\angle 3 = \angle 4$.

$\therefore \triangle CDB \sim \triangle C'D'B$.

$$\therefore \frac{BC}{BD} = \frac{BC'}{BD'}.$$

（B）**證兩線段之積等於他兩線段之法** 先證四線段成比例，再用比例之性質證之.

**例 1.** 已知 $AB$ 與 $CD$ 爲一圓內之二平行弦，$O$ 爲圓心，$M$ 爲 $CD$ 之中點，連接 $BM$ 交圓周於 $E$. 設 $AE$ 與 $OM$ 交於 $P$. 求證 $PE \cdot PA = PM \cdot PO$（統考，28 年度）.




證：延長 $MO$ 交 $AB$ 於 $N$，交 $\overset{\frown}{AB}$ 於 $M'$.

連 $AO$、$BO$.

$\because\ CM=DM$,

$\therefore\ OM\perp CD$.

$\because\ AB\parallel CD$,

$\therefore\ ON\perp AB$.

而 $\overset{\frown}{AM'}=\overset{\frown}{BM'}$,

$\therefore\ \angle 1=\angle 2$.

又 $\because\ \angle AEB=\frac{1}{2}\angle AOB=\angle 1$,

$\therefore\ \angle MEP=\angle AOP$.

又 $\because\ \angle EPM=\angle APO$,

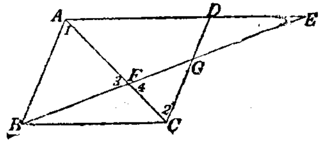
$\therefore\ \triangle EPM\sim\triangle OPA$.

$\therefore\ \frac{PE}{OP}=\frac{PM}{PA}$,

$\therefore\ PE\times PA=PM\times PO$.

**例 2.** 設 $ABCD$ 爲一平行四邊形，由 $B$ 任引一直線與對角線 $AC$ 交於 $F$，與 $CD$ 交於 $G$，又與 $AD$ 之延長線交於 $E$. 求證 $EF\times GF=BF^2$.（統考，29 年度）.

證. $\because\ AB \parallel CD$,




$\therefore\ \angle 1 = \angle 2.$

又 $\because\ \angle 3 = \angle 4$,

$\therefore\ \triangle AFB \sim \triangle CFG.$

而 $$\frac{BF}{GF} = \frac{AF}{CF}. \qquad (1)$$

同理可證 $\triangle AFE \sim \triangle CFB.$

而 $$\frac{EF}{BF} = \frac{AF}{CF}. \qquad (2)$$

$$\therefore\ \frac{BF}{GF} = \frac{EF}{BF},$$

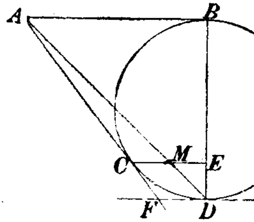
$$\therefore\ EF \times GF = \overline{BF}^2.$$

(C) 雜例

**例 1.** 自圓外一點 $A$ 作直線切圓於 $B$、$C$. 過 $B$ 作直徑 $DB$. 再作 $CE \perp DB$. 求證 $AD$ 平分 $CE$. (證兩線段相等).

**證.** 設 $AD$ 與 $CE$ 相交於 $M$,

過 $D$ 作切線交 $AC$ 之延線於 $F$.




$\because\ AB \perp BD$,

$FD \perp BD$,

$\therefore\ AB \parallel CE \parallel FD$,

$\therefore\ \triangle DEM \sim \triangle DBA$,

$$\therefore \quad \frac{ME}{AB}=\frac{MD}{DA}.$$

$$\therefore \quad ME=\frac{MD\times AB}{AD}=\frac{MD\times AC}{AD}.$$

又 $$\triangle ACM \sim \triangle AFD,$$

$$\therefore \quad \frac{MC}{DF}=\frac{AM}{AD}.$$

$$\therefore \quad MC=\frac{AM\times DF}{AD}=\frac{AM\times CF}{AD}.$$

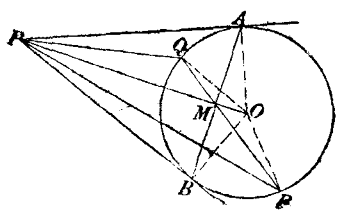
但 $$\frac{CF}{AC}=\frac{MD}{AM},$$

即 $$MD\times AC=AM\times CF.$$

$$\therefore \quad ME=MC.$$

**例 2.** $PA$、$PB$ 切 $O$ 圓於 $A$、$B$; $OP$ 交 $AB$ 於 $M$, 過 $M$ 作任意弦 $QR$. 求證 $\angle QPM=\angle RPM$. (證兩角相等).

**證.** 連 $OQ$、$OR$、$OA$、$OB$.




$\because \quad \angle OAP=\angle OBP=90^\circ$,

$\therefore \quad A$、$P$、$B$、$O$ 共圓,

$\therefore \quad MO\times MP=MA\times MB.$

又 $\quad A$、$Q$、$B$、$R$ 共圓,

$$\therefore \quad MA\times MB=MQ\times MR.$$

$$\therefore \quad MO\times MP=MQ\times MR.$$

故 $O$、$Q$、$P$、$R$ 共圓.

但因 $OQ=OR$,

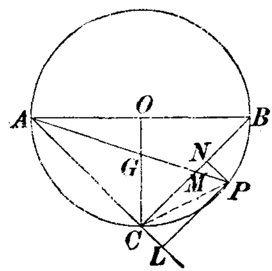
$\therefore\quad \overset{\frown}{OQ}=\overset{\frown}{OR}.$

$\therefore\quad \angle OPR=\angle OPQ,$

即 $\angle QPM=\angle RPM.$

例 3. 設 $AB$ 為 $O$ 圓之直徑,在 $O$ 點作 $OC\perp AB$,遇圓周於 $C$,連 $BC$ 弦,其中點為 $M$,連 $AM$,延長之,遇圓周於 $P$ 點.作 $PL\perp AC$, $PN\perp BC$. 試證 $PL=3PN$. (證一線段為他線段之三倍).

證.




$\because\quad \angle ACB=90^\circ=\angle PLC,$

$\therefore\quad CN\parallel PL.$

又 $\because\quad \angle BNP=90^\circ=\angle NCL,$

$\therefore\quad NP\parallel CL.$

而 $NCLP$ 為矩形.

$\therefore\quad CN=PL.$

在 $\triangle ACB$ 內

$\because$ $CO$、$AM$ 為其中線,設其交點為 $G$.

則 $OG=\frac{1}{3}CO.$

$\because\quad CO=AO,$

$$\therefore \quad OG=\frac{1}{3}AO.$$

連 $CP$,

$$\because \quad \angle OAG=\angle NCP,$$

$$\angle AOG=\angle CNP=90^\circ,$$

$$\because \quad \triangle AOG \sim \triangle CNP.$$

$$\therefore \quad \frac{OG}{OA}=\frac{PN}{CN}.$$

但

$$CN=PL,$$

$$\therefore \quad \frac{OG}{OA}=\frac{PN}{PL},$$

$$\therefore \quad PL=3PN.$$

例 4. 平行於梯形 $ABCD$ 之底,任作一直線交其兩腰 $AB$、$DC$ 於 $S$ 及 $T$,連 $S$、$T$ 至兩對角線之交點 $O$ 而延長之,再交兩腰於 $X$ 及 $Y$. 求證 $XY \parallel ST$. (證兩線平行).

證. 過 $O$ 點作 $LM \parallel ST \parallel BC$,

則

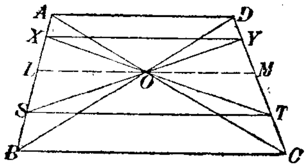
$$\frac{LO}{BC}=\frac{AL}{AB}=\frac{DM}{DC}=\frac{OM}{BC},$$

$$\therefore \quad LO=OM.$$

又

$$\frac{XT}{OX}=\frac{ST}{LO}=\frac{ST}{OM}=\frac{YS}{YO},$$

$$\frac{XT-OX}{OX}=\frac{YS-YO}{YO}.$$




即　$$\frac{OT}{OX}=\frac{OS}{OY}.$$

亦即　$$\frac{OT}{OS}=\frac{OX}{OY},$$

又　$$\because\ \angle SOT=\angle XOY,$$

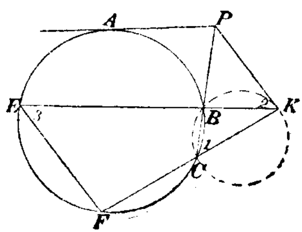
$$\therefore\ \triangle OST\sim\triangle OYX,$$

$$\therefore\ \angle XYO=\angle OST.$$

故　$$XY\parallel ST.$$

**例 5.** 由圓外一點 $P$,引切線 $PA$ 及割線 $PBC$,作等於 $PA$ 之任意直線 $PK$, 然後延長 $BK$、$CK$ 與圓周交於 $E$、$F$. 求證 $EF\parallel PK$. (證兩線平行).

**證.**




$\because\ \overline{PK}^2=\overline{PA}^2=PB\times PC,$

$\therefore\ PK$ 爲 $\triangle BCK$ 外接圓之切線.

$$\therefore\ \angle 1=\angle 2,$$

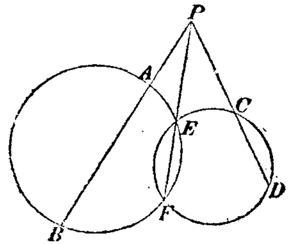
但　$$\angle 1=\angle 3,$$

$$\therefore\ \angle 2=\angle 3,$$

$$\therefore\ EF\parallel PK.$$

**例 6.** 二圓交於兩點, 過其公弦或其延長線上之任一點, 作一直線, 交第一圓於 $A$、$B$. 再作一線, 交第二圓於 $C$、$D$. 試證

$A$、$B$、$C$、$D$ 四點共圓.（國立師範學院，32年度）.（共圓問題）.




證.

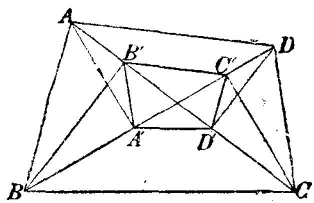
$$\because \quad PA\times PB=PE\times PF,$$

$$PC\times PD=PE\times PF,$$

$$\therefore \quad PA\times PB=PC\times PD.$$

故 $A$、$B$、$C$、$D$ 四點共圓.

**例 7.** 自四邊形各頂點引對角線之垂線，順次連結各垂足所成四邊形與原四邊形相似.（證兩多邊形相似問題）.




證. 設 $ABCD$ 爲四邊形，自各頂點向兩對角線 $AC$、$BD$ 所引之垂線之垂足爲 $A'$、$B'$、$C'$、$D'$.

$$\because \quad \angle AA'B=\angle AB'B=90°,$$

$$\therefore \quad A、B、A'、B' \text{ 共圓}.$$

$$\therefore \quad \angle BAC=\angle B'A'C'.$$

又 $\quad\because \quad B$、$C$、$C'$、$B'$ 共圓.

$$\therefore \quad \angle BCA=\angle B'C'A'.$$

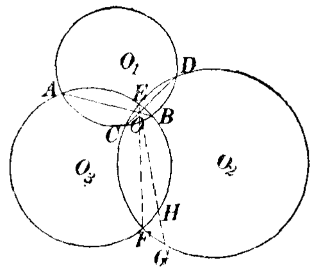
$$\therefore \quad \triangle BCA\sim\triangle B'C'A'.$$

同理 $\quad \triangle CDA\sim\triangle C'D'A'.$

故得證明.

**例 8.** 試證三圓相交，則三公共弦共點.（共線點問題）.

證. 設 $AB$、$CD$ 相交於 $O$. 若 $EO$ 不經過 $O_2$ 圓 $O_3$ 圓之交點 $F$, 而各交於 $G$、$H$.




在 $O_3$ 圓中,

$$OE\times OH=OA\times OB.$$

在 $O_2$ 圓中,

$$OE\times OG=OC\times OD.$$

但在 $O_1$ 圓中,

$$OA\times OB=OC\times OD.$$

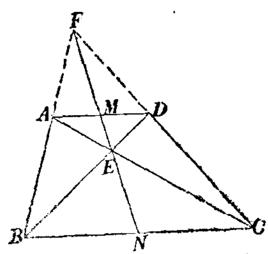
$$\therefore\quad OE\times OH=OE\times OG.$$

$$\therefore\quad OH=OG.$$

故 $H$ 應與 $G$ 相合, 而 $G$、$F$、$H$ 三點必相合矣!

**例 9.** 試證梯形不平形二邊延長之交點、對角線之交點, 及二底邊之中點, 在同一直線上. (共點線問題).

證. 設梯形 $ABCD$ 二底 $AD$、$BC$ 之中點爲 $M$、$N$. 對角線之交點爲 $E$, 連 $EM$、$EN$.




$$\because\quad \frac{AM}{NC}=\frac{AD}{BC}=\frac{AE}{EC},$$

則 $$\triangle MAE\sim\triangle NCE,$$

$$\therefore\quad \angle AEM=\angle NEC.$$

故 $M$、$E$、$N$ 爲一直線.

更設 $BA$、$NM$ 相交於 $F$ 點，

因 $$AM \parallel BN.$$

故 $$\frac{BN}{AM}=\frac{NF}{MF}.$$

但 $$\frac{BN}{CN}=\frac{AM}{DM}=1.$$

即 $$\frac{BN}{AM}=\frac{CN}{DM}.$$

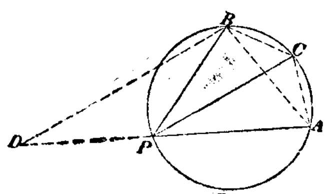
$$\therefore \quad \frac{CN}{DM}=\frac{NF}{MF},$$

而 $CD$ 延線亦會於 $F$ 點.

故 $N$、$E$、$M$、$F$ 四點共線.

**例 10.** $A$、$B$ 爲一圓周上二定點，$C$ 爲弧 $AB$ 之中點，今在此圓周上取任意一點 $P$，試證 $\frac{PA+PB}{PC}$ 爲定比.

證. 延長 $AP$ 至 $D$




使 $$PD=PB.$$

連 $BD$、$BC$、$CA$、$AB$.

則 $$PA+PB=AD.$$

又 $$\because \angle BDP=\angle DBP,$$

$$\therefore \angle APB=\angle BDP+\angle DBP=2\angle BDP.$$

$$\because \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AC}.$$

$$\therefore \angle APB=2\angle APC.$$

故 $$\angle BDP=\angle APC.$$

而 $$BD \parallel CP.$$

在 $\triangle BAD$、$\triangle BCP$ 內

$$\because \quad \angle BAD=\angle BCP,$$

$$\angle BDA=\angle BPC,$$

$$\therefore \quad \triangle ADB \sim \triangle CPB.$$

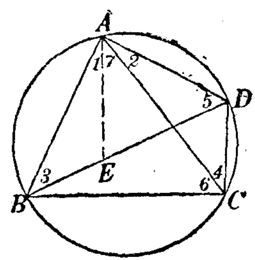
$$\therefore \quad \frac{AD}{PC}=\frac{AB}{BC}.$$

即 $$\frac{PA+PB}{PC}=\frac{AB}{BC}=\text{定比}.$$

## 三. 著名問題.

**1. 多洛梅(Ptolemy)氏定理** 圓之內接四邊形對邊乘積之和等於對角線之乘積，其逆亦眞.

**證.** (i) 引 $AE$ 交 $BD$ 於 $E$,




且使 $$\angle 1=\angle 2.$$

又 $$\because \quad \angle 3=\angle 4.$$

$$\therefore \quad ABE \sim \triangle ACD,$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{BE}=\frac{AC}{CD}.$$

$$\therefore \quad AB\times CD=AC\times BE. \qquad (1)$$

又 $$\because \quad \angle 5=\angle 6,$$

$$\angle 1=\angle 2,$$

$$\angle 1+\angle 7=\angle 2+\angle 7,$$

即 $$\angle BAC=\angle EAD.$$

$$\therefore \quad \triangle ACB\sim\triangle ADE.$$

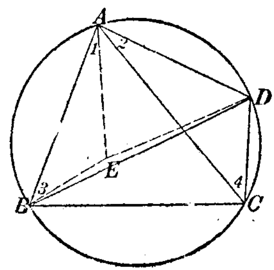
$$\therefore \quad \frac{BC}{AC}=\frac{ED}{AD}.$$

$$\therefore \quad AD\times BC=AC\times ED. \qquad (2)$$

(1)+(2),

$$\begin{aligned} AB\times CD+AD\times BC &= AC\times BE+AC\times ED \\ &= AC(BE+ED) \\ &= AC\times BD. \end{aligned}$$

(ii) 作 $AE$、$BE$ 使




$$\angle 1=\angle 2,$$

$$\angle 3=\angle 4.$$

$$\therefore \quad \triangle ABE\sim\triangle ACD,$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{BE}=\frac{AC}{CD}.$$

即 $$AB\times CD=AC\times BE. \qquad (1)$$

又 $$\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}.$$

且 $$\angle BAC=\angle EAD,$$

$$\therefore \quad \triangle BAC\sim\triangle EAD,$$

$$\therefore \quad \frac{AC}{BC}=\frac{AD}{ED}.$$

$$\therefore \quad AD\times BC=AC\times ED. \qquad (2)$$

$(1)+(2)$,

$$AB\times CD+AD\times BC=AC(BE+ED).$$

但 $$AB\times CD+AD\times BC=BD\times AC,$$

$$\therefore \quad BE+ED=BD.$$

即 $B$、$E$、$D$ 共線.

$$\therefore \quad \angle ABD=\angle ACD.$$

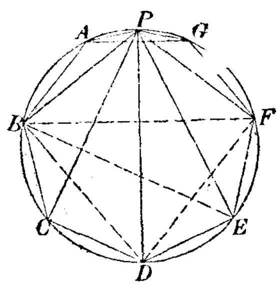
故 $A$、$B$、$C$、$D$ 共圓.

**註.** 此反定理可利用以證明四點共圓.

**例.** 如 $ABCDEFG$ 爲正七邊形，而 $P$ 爲外接圓 $\overset{\frown}{AG}$ 上一點，試證 $$PA+PC+PE+PG=PB+PD+PF.$$

**證.** 設邊長 $=a$,

因隔一角頂之兩角頂連線相等，故設爲 $d$.




因 $PABC$ 爲圓之内接四邊形，

$$\therefore \quad (PA+PC)a=PB\times d. \qquad (1)$$

同理由四邊形 $PEFG$,

$$(PE+PG)a=PF\times d. \qquad (2)$$

$(1)+(2)$,

$$(PA+PC+PE+PG)a=(PB+PF)d. \qquad (3)$$

同理由四邊形 $PBDF$,

$$(PB+PF)d=PD\times BF. \tag{4}$$

代入(3),

$$(PA+PC+PE+PG)a=PD\times BF, \tag{5}$$

同理由四邊形 $PDEF$,

$$(PD+PF)a=PE\times d. \tag{6}$$

同理由四邊形 $PBDE$,

$$PB\times a+PE\times d=PD\times BE. \tag{7}$$

(6)+(7),

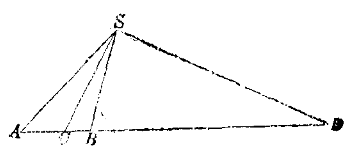
$$(PB+PD+PF)a=PD\times BE. \tag{8}$$

由(5)、(8),且因 $BE=BF$ 得

$$PA+PC+PE+PG=PB+PD+PF.$$

**3. 調和點列及線束.**

(i) **定義** $A$、$B$ 為一直線上之二點,$C$、$D$ 為同直線之他二點,如$C$點內分$AB$兩段之比等於 $D$ 點外分 $AB$ 兩段之比,則$A$、$C$、$B$、$D$稱為調和點列.而$C$、$D$ 兩點互稱為調和共軛點.




又設 $S$ 為線外任一點,當$A$、$C$、$B$、$D$為調和點列時,則$SA$、$SC$、$SB$、$SD$稱為調和線束.

**証.** $\because \dfrac{CA}{CB}=\dfrac{DA}{DB},$

$$\frac{CA}{AB-AC}=\frac{DA}{AD-AB},$$

$$AB\times DA-AC\times DA=AD\times CA-AB\times CA.$$

兩端同除以 $AC\times AB\times AD$, 得

$$\frac{1}{AC}-\frac{1}{AB}=\frac{1}{AB}-\frac{1}{AD}.$$

故 $\frac{1}{AC}$、$\frac{1}{AB}$、$\frac{1}{AD}$ 成等差級數, 卽 $AC$、$AB$、$AD$ 成調和級數, 此乃命名之由來也.

(ii) **定理.**

(A) 如 $C$、$D$ 調和分割 $AB$, 則 $A$、$B$ 亦調和分割 $CD$.

**證.** $\because \quad \frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB},$

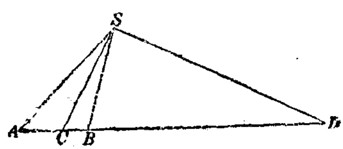
$$\therefore \quad \frac{CA}{DA}=\frac{CB}{DB}.$$

卽 $$\frac{BC}{BD}=\frac{AC}{AD}.$$

故得證明.

(B) 三角形之兩邊及其夾角之內外角平分線成調和線束.

證. 設 $SC$、$SD$ 分別爲 $\triangle SAB$ 之頂角之內外角二平分線.




則 $$\frac{CA}{CB}=\frac{SA}{SB},$$

$$\frac{DA}{DA}=\frac{SA}{SB},$$

$$\therefore\quad \frac{CA}{CA}=\frac{DA}{DB}.$$

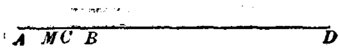
故 $A$、$C$、$B$、$D$ 爲調和點列. $SA$、$SC$、$SB$、$SD$ 爲調和線束.

(C) $M$ 爲 $AB$ 之中點，而 $C$、$D$ 調和分割 $AB$. 則

$$\overline{MB}^2=MC\times MD.$$

**證.** $\because$ $A$、$C$、$B$、$D$ 爲調和點列.

$$\therefore\quad \frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}.$$




卽
$$\frac{MA+MC}{MB-MC}=\frac{MA+MD}{MD-MB},$$

亦卽
$$\frac{MB+MC}{MB-MC}=\frac{MD+MB}{MD-MB},$$

$$\frac{2MC}{2MB}=\frac{2MB}{2MD},$$

$$\therefore\quad \overline{MB}^2=MC\times MD.$$

**例 1.** 過三角形一邊之中點引一直線，與過對角頂與引該邊平行線交於一點. 則此二點被其餘二邊之交點所調和分割. (同濟大, 25 年度).

證. 設 $\qquad BD=CD,\qquad AH//BC,$

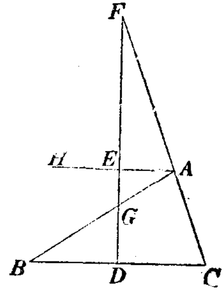
$\because \quad \triangle BGD \sim \triangle AGE,$

$$\therefore \quad \frac{GD}{GE}=\frac{BD}{EA}.$$

又 $\quad \because \quad \triangle FDC \sim \triangle FEA,$

$$\therefore \quad \frac{FD}{FE}=\frac{DC}{EA}=\frac{BD}{EA}.$$

$$\therefore \quad \frac{GD}{GE}=\frac{FD}{FE}.$$



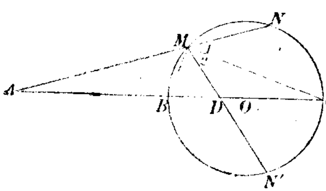

故得證明.

**例 2.** 由圓外之 $A$ 點引割線,與圓周交於 $M$、$N$. 又自 $A$ 引通過圓心 $O$ 之直線與圓周交於 $B$、$C$. 又取 $\overset{\frown}{CN'}=\overset{\frown}{CN}$, 連 $MN'$, 交 $BC$ 於 $D$. 試證 $A$、$B$、$D$、$C$ 爲調和點列.

**證.** 連 $MB$、$MC$.

$\because \quad \overset{\frown}{CN}=\overset{\frown}{CN'},$

$\therefore \quad \angle 1=\angle 2.$




故 $MC$ 爲 $\triangle MAD$ 之 $\angle AMD$ 之外角平分線.

又 $\quad \because \quad \angle BMC=90°,$

故 $MB$ 爲 $\triangle MAD$ 之 $\angle AMD$ 之內角平分線.

$$\therefore \quad \frac{BA}{BD}=\frac{CA}{CD}.$$

故 $A$、$B$、$D$、$C$ 爲調和點列.

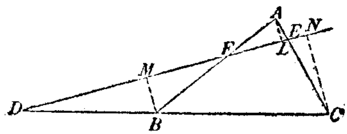
### 3. 梅耐勞(Menelaus)氏定理.

**原定理.** 一直線截 $\triangle ABC$ 之三邊 $BC$、$CA$、$AB$ 於 $D$、$E$、$F$ 三點,則
$$\frac{DB}{DC}\times\frac{EC}{EA}\times\frac{FA}{FB}=1.$$

**證.** 作 $AL\perp DE$,

$BM\perp DE$,

$CN\perp DE$.




$\because\ \triangle DMB\sim\triangle DNC$,

$$\therefore\ \frac{DB}{DC}=\frac{BM}{CN}. \qquad (1)$$

$\because\ \triangle CEN\sim\triangle AEL$,

$$\therefore\ \frac{EC}{EA}=\frac{CN}{AL}. \qquad (2)$$

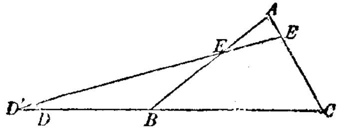
$\because\ \triangle AFL\sim\triangle BFM$,

$$\therefore\ \frac{FA}{FB}=\frac{AL}{BM}. \qquad (3)$$

$(1)\times(2)\times(3)$,
$$\frac{DB}{DC}\times\frac{EC}{EA}\times\frac{FA}{FB}=\frac{BM}{CN}\times\frac{CN}{AL}\times\frac{AL}{BM}=1.$$

**反定理.** 如 $\triangle ABC$ 之三邊 $BC$、$CA$、$AB$ 上各有一點為 $D$、$E$、$F$ 且
$$\frac{DB}{DC}\times\frac{EC}{EA}\times\frac{FA}{FB}=1,$$

則 $D$、$E$、$F$ 三點共線.




**證.** 如 $D$、$E$、$F$ 三點不共線，設 $EF$ 之延線交 $CB$ 之延線於 $D'$ 點.

則 $$\frac{D'B}{D'C}\times\frac{EC}{EA}\times\frac{FA}{FB}=1.$$

但 $$\frac{DB}{DC}\times\frac{EC}{EA}\times\frac{FA}{FB}=1.$$

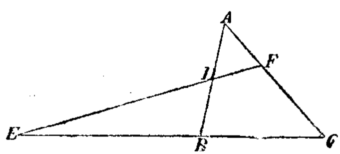
$$\therefore\quad \frac{D'B}{D'C}=\frac{DB}{DC}.$$

而 $D'$ 點與 $D$ 點重合.

故 $D$、$E$、$F$ 共線.

**例.** 設一直線交三角形 $ABC$ 之邊 $AB$ 於 $D$、$BC$ 之延長線之 $E$、$AC$ 於 $F$. 若 $AD=AF$，則 $BE:CE=BD:CF$. 試證明於.（北大，21 年度）.

**證.** 按 Menelaus 氏定理，




$$\frac{EB}{EC}\times\frac{FC}{FA}\times\frac{DA}{DB}=1.$$

$$\because\quad DA=FA.$$

$$\therefore\quad \frac{EB}{EC}\times\frac{FC}{DB}=1.$$

$$\therefore\quad BE\times CF=CE\times BD,$$

即 $$\frac{BE}{CE}=\frac{BD}{CF}.$$

5. **喜瓦(Ceva)氏定理.**

**原定理.** 過 $\triangle ABC$ 之三頂點至對邊作三直線 $AD$、$BE$、$CF$. 如此三直線共點，則

$$\frac{DB}{DC}\times\frac{EC}{EA}\times\frac{FA}{FB}=1.$$

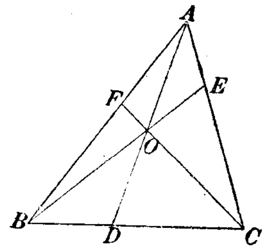
**證.**

$\because$ $FOC$ 爲 $\triangle ABD$ 之截線，

$$\therefore\ \frac{CB}{CD}\times\frac{OD}{OA}\times\frac{FA}{FB}=1. \qquad (1)$$

又 $\because$ $BOE$ 爲 $\triangle ADC$ 之截線，

$$\therefore\ \frac{BD}{BC}\times\frac{EC}{EA}\times\frac{OA}{OD}=1. \qquad (2)$$




$(1)\times(2)$,

$$\frac{CB}{CD}\times\frac{OD}{OA}\times\frac{FA}{FB}\times\frac{BD}{BC}\times\frac{EC}{EA}\times\frac{OA}{OD}=1.$$

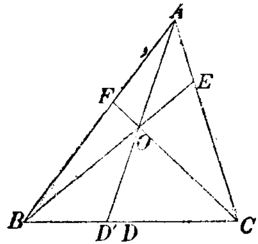
$$\therefore\quad \frac{DB}{DC}\times\frac{EC}{EA}\times\frac{FA}{FB}=1.$$

**反定理.** 如 $D$、$E$、$F$ 各爲 $\triangle ABC$ 之三邊 $BC$、$CA$、$AB$ 上一點，且
$$\frac{DB}{DC}\times\frac{EC}{EA}\times\frac{FA}{FB}=1,$$

則 $AD$、$BE$、$CF$ 三線共點.

證. 如 $AD$、$BE$、$CF$ 不共點. 今設 $BE$、$CF$ 之交點爲 $O$, $AO$

交 $BC$ 於 $D'$ 點.




則 $$\frac{D'B}{D'C}\times\frac{EC}{EA}\times\frac{FA}{FB}=1.$$

但 $$\frac{DB}{DC}\times\frac{EC}{EA}\times\frac{FA}{FB}=1.$$

$$\therefore \quad \frac{D'B}{D'C}=\frac{DB}{DC}.$$

而 $D'$ 與 $D$ 相合，故 $AD$、$BE$、$CF$ 三線共點.

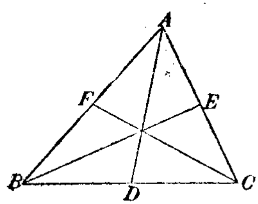
**例一.** 試證三角形三中線、三內角平分線、三高交於一點.

**證.**

(i) $\because \quad DB=DC,$

$EC=EA,$

$FA=FB,$




$$\therefore \frac{DB}{DC}\times\frac{EC}{EA}\times\frac{FA}{FB}=1\times1\times1=1.$$

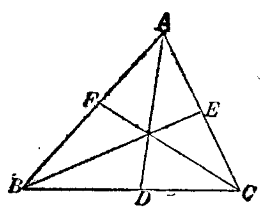
故三中線交於一點.

(ii)

$$\because \quad \frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC},$$

$$\frac{EC}{EA}=\frac{BC}{AB},$$

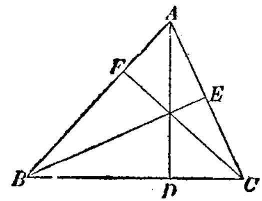
$$\frac{FA}{FB}=\frac{CA}{BC},$$



$$\therefore \quad \frac{DB}{DC}\times\frac{EC}{EA}\times\frac{FA}{FB}=\frac{AB}{AC}\times\frac{BC}{AB}\times\frac{CA}{BC}=1.$$

故三內角之平分線交於一點.

(iii)




$$\because \quad \triangle BDA\sim\triangle BFC,$$

$$\therefore \quad \frac{DB}{FB}=\frac{AB}{BC},$$

$$\because \quad \triangle CEB\sim\triangle CDA,$$

$$\therefore \quad \frac{EC}{DC}=\frac{BC}{AC},$$

$$\because \quad \triangle AFC\sim\triangle AEB,$$

$$\therefore \quad \frac{FA}{EA}=\frac{AC}{AB}.$$

$$\therefore \quad \frac{DB}{FB}\times\frac{EC}{DC}\times\frac{FA}{EA}=\frac{DB}{DC}\times\frac{EC}{EA}\times\frac{FA}{FB}=1.$$

故三高交於一點.

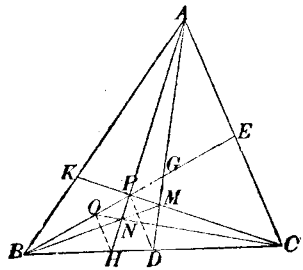
**例二.** 有三角形 $ABC$, $K$ 爲 $AB$ 上之點而 $KB=\frac{1}{3}AB$, $H$ 爲 $BC$ 上之點而 $BH=\frac{1}{3}BC$, 又 $D$、$E$ 各爲 $BC$、$CA$ 之中點. 設 $CK$ 交 $AD$ 於 $M$, $BM$ 交 $AH$ 於 $N$, $CN$ 截 $BE$ 於 $O$. 試證

$$BO=\frac{1}{3}BE.$$

**證.** 設 $CK$、$AH$ 交於 $P$ 點.

$$\therefore \quad \frac{HB}{HC}\times\frac{EC}{EA}\times\frac{KA}{KB}=\frac{\frac{1}{3}BC}{\frac{2}{3}BC}\times\frac{EC}{EC}\times\frac{\frac{2}{3}AB}{\frac{1}{3}AB}=1.$$

故按 Ceva 氏之反定理, $BE$ 必經過 $P$ 點.




在 $\triangle ABD$, $\because$ $KMC$ 爲截線. 故按 Menelaus 氏定理,

$$\frac{CB}{CD}\times\frac{MD}{MA}\times\frac{KA}{KB}=1.$$

但 $$\frac{KA}{KB}=2,$$

$$\frac{CB}{CD}=2. \qquad \therefore \quad \frac{MD}{MA}=\frac{1}{4}.$$

又在 $\triangle AHD$, $\because$ $PMC$ 爲截線.

$$\therefore \quad \frac{CH}{CD}\times\frac{MD}{MA}\times\frac{PA}{PH}=1.$$

但 $$\frac{CH}{CD}=\frac{\frac{2}{3}BC}{\frac{1}{2}BC}=\frac{4}{3},$$

$$\therefore \quad \frac{4}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{PA}{PH}=1,$$

$$\therefore \quad \frac{PA}{PH}=3.$$

又 $$\frac{CD}{DH}=\frac{CD}{BD-BH}=\frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}BC-\frac{1}{3}BC}=\frac{1}{2}\times 6=3.$$

故 $$\frac{PA}{PH}=\frac{CD}{DH}.$$

而 $$PD \parallel AC,$$

$$\triangle CMA \sim \triangle PMD,$$

$$\therefore \quad \frac{CM}{MP}=\frac{AM}{MD}=4.$$

又在 $\triangle PBC$,

$$\because \quad PH、BM、CO \text{ 交於一點 } N.$$

故按 Ceva 氏定理

$$\frac{HB}{HC}\times\frac{MC}{MP}\times\frac{OP}{OB}=1.$$

但 $$\frac{HB}{HC}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{MC}{MP}=4,$$

$$\therefore \quad \frac{OP}{OB}=\frac{1}{2}=\frac{DH}{HB}.$$

$$\therefore \quad OH \parallel PD \parallel EC.$$

$$\therefore \quad \frac{BO}{BE}=\frac{BH}{BC}=\frac{1}{3},$$

$$\therefore \quad BO=\frac{1}{3}BE.$$

# 習　題　三

1. 四邊形 $ABCD$ 之兩對邊 $AD$、$BC$ 之交點為 $E$, $BA$、$CD$ 之交點為 $F$, 兩對角線之交點為 $O$. 平行於 $BC$ 而作 $OGH$, 截 $AD$ 於 $G$, $EF$ 於 $H$. 試證 $OG=GH$.

2. $AB$ 與 $DC$ 為平行四邊形 $ABCD$ 之對邊, $E$ 為 $DC$ 邊中之一點, $BE$ 交 $AC$ 於 $G$. 若 $5EC=DC$, 試證 $6GC=AC$. (唐山大, 30 年度).

3. 線段 $AB$ 以 $C$、$D$ 內分之, 使 $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}$. 過 $A$ 點作 $AE=AC$, 試證 $EC$ 平分 $\angle BED$.

4. 設有梯形 $ABCD$, 其兩平行邊為 $AB$、$CD$. 今取 $CD$ 之中點 $E$, 聯結 $AE$ 及 $BE$ 與 $BC$ 及 $AD$ (或其延長線) 各相交於 $F$ 及 $G$. 則 $FG \parallel AB$. 求證: (統考武昌區, 27 年度).

5. $\triangle ABC$, 由 $B$ 點向頂角 $A$ 之平分線 $AS$ 上作垂線 $BM$, 垂足為 $M$. 截中線 $AP$ 或其延線於 $N$. 試證 $NS \parallel AB$.

6. 半圓之圓心為 $O$, 由直徑 $AB$ 之延線上取一點 $P$, 作切線 $PT$. 設 $N$ 為 $AB$ 上一點, 且 $AO$ 為 $OP$、$ON$ 之比例中項, 試證 $\angle ONT$ 為直角.

7. 直角三角形 $ABC$ 之斜邊 $BC$ 上之高為 $AD$, 求證 $AB+AC<AD+BC$. (復旦大, 33 年度).

8．一三角形之兩邊各與另一三角形之兩邊互等，求證夾角大者其夾角之平分線較短．（東北大，32 年度）．

9．自等腰三角形 $ABC$ 之頂點 $A$，作任意直線，交底邊 $BC$ 於 $D$，交外接圓周於 $E$．試證 $AD\times AE$ 爲定長．

10．$AB$ 爲一圓之弦，直線 $XY$ 與圓相切於 $P$．$AA'$、$BB'$ 各垂直於 $XY$ 與 $XY$ 依次交於 $A'$、$B'$．又 $PQ\perp AB$ 交 $AB$ 於 $Q$．試證 $PQ$ 爲 $AA'$、$BB'$ 比例中項．

11．$\triangle ABC$ 之內切圓切 $BC$、$CA$、$AB$ 於 $X$、$Y$、$Z$．由 $X$ 作 $XD\perp ZY$ 於 $D$．試證 $\dfrac{ZD}{DY}=\dfrac{ZB}{YC}$．

12．自三角形 $ABC$ 之頂點 $B$ 及 $C$ 至對邊引垂線 $BE$ 及 $CF$．求證 $\overline{BC}^2=BA\times BF+CA\times CE$．（中大，33 年度）．

註．必須爲銳角三角形．

13．四邊形 $ABCD$，如 $\angle A$、$\angle C$ 之平分線相交於 $BD$ 上，試證 $\angle B$、$\angle D$ 之平分線必相交於 $AC$ 上．

14．三角形 $ABC$ 三外角平分線交對邊延長線於 $D$、$E$、$F$ 三點，求證此三點在一直線上．（復旦大，32 年度）．

15．自 $\triangle ABC$ 之 $B$ 及 $C$，作角 $A$ 之外角平分線之垂線，其垂足爲 $D$ 及 $E$．試證二直線 $BE$、$CD$ 之交點，在 $\angle A$ 之平分線上．

16．$O$ 圓與 $M$ 圓外切於 $C$ 點，如取一點 $P$，使 $\angle OPC$

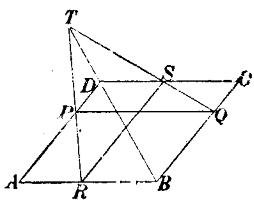
$=\angle \tilde{M}PC$. 試證 $\overline{PC}^2=PA\times PB$. ($PA$、$PB$ 爲切線).

17. 等腰三角形 $ABC$, 頂點爲 $A$, 底邊爲 $BC$, $AM\perp BC$, 作 $CD$、$ME$ 垂直過 $A$ 點之任意直線. 試證

$$AC\times MD=MC\times DE+MA\times ME.$$

18. 若 $\triangle ABC$ 之內切圓切 $BC$、$CA$、$AB$ 於 $P$、$Q$、$R$、$QR$ 之延長線交 $BC$ 於 $S$. 求證 $[B,C;P,S]$ 成調和列點. (東北大, 32 年度).

19. 四邊形 $ABCD$ 對邊引長線交於 $E$ 及 $F$ 點, 且 $AC$ 與 $BD$、$EF$ (或延線) 交於 $P$、$Q$ 點. 試證 $A$、$P$、$C$、$Q$ 爲調和點列.




20. 如圖 $ABCD$ 爲平行四邊形, $PQ\parallel AB$, $RS\parallel BC$. 求證 $BD$、$RP$、$QS$ 延長線相遇於一點T. (重慶區聯考, 31 年度).

## 第四節　面　　積

### 一. 重要定理之複習.

(A) 直線形之面積.

1. 矩形之面積, 等於底乘高.

2. 正方形之面積, 等於一邊自乘.

3. 平行四邊形之面積, 等於底乘高.

4. 三角形之面積，等於底高相乘積之半.

5. 梯形之面積．等於上下兩底和與高相乘積之半.

6. 菱形之面積，等於兩對角線乘積之半.

(B) **面積之比.**

1. 等高矩形面積之比，等於其底之比；等底矩形面積之比等於其高之比；任意兩矩形之面積之比，等於底高相乘積之比.

2. 等高平行四邊形面積比，等於其底之比；等底平行四邊形面積之比，等於其高之比；任意兩平行四邊形之面積之比，等於底高相乘積之比.

3. 等高三角形面積之比等於其底之比；等底三角形面積之比，等於其高之比；任意兩三角形面積之比，等於底高相乘積之比.

4. 兩三角形有一角相等或相補，則其面積之比，等於夾此角兩邊相乘積之比.

5. 相似三角形面積之比，等於對應邊平方之比.

6. 相似多邊形面積之比，等於對應邊平方之比.

(C) **三角形三邊之關係**

1. **畢達哥拉斯定理**(Pythagoras's theorem)　直角三角形斜邊之平方等於其餘兩邊平方之和.

2. 以直角三角形之三邊爲對應邊，作三相似多邊形．則斜邊上多邊形之面積，等於其他兩邊上多邊形面積之和.

3. 三角形銳角對邊之平方,等於其餘兩邊平方之和,減去二倍兩邊中之一邊,乘他邊在此邊上之射影.

4. 三角形鈍角對邊之平方,等於其餘兩邊平方之和,加上二倍兩邊中之一邊,乘他邊在此邊上之射影.

(D) **中線定理.** 三角形兩邊平方之和之二倍,等於第三邊平方,加第三邊上中線平方之四倍.

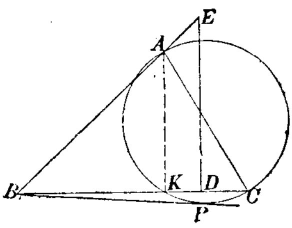
**二. 證題法.**

**1. 等積問題.**

**例 1.** 以銳角三角形 $ABC$ 之邊 $AC$ 爲直徑作圓,由 $B$ 點向該圓引切線 $BP$. 於 $BC$ 邊上,取 $BD$,令其長等於 $BP$. 由 $D$ 點引 $BC$ 之垂線與 $BA$ 之延線,相交於 $E$. 試證

$$\triangle ABC=\triangle BDE.$$

**證.** 作 $AK \parallel ED$,




$\because \quad \angle AKC=\angle EDC=90^\circ$,

故 $K$ 點在圓周上,

$$\therefore \quad \frac{BA}{BE}=\frac{BK}{BD},$$

且 $\quad \overline{BP}^2=BK\times BC,$

但 $\quad BP=BD,$

$$\therefore \quad \overline{BD}^2=BK\times BC.$$

即 $$\frac{BD}{BC}=\frac{BK}{BD}.$$

$$\therefore \quad \frac{BA}{BE}=\frac{BD}{BC}=\frac{AK}{DE}.$$

即 $$AK\times BC=DE\times BD.$$

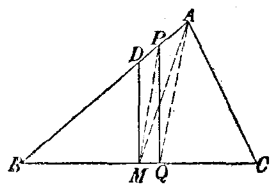
又 $$\because \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle BDE}=\frac{AK\times BC}{DE\times BD}=1.$$

故 $$\triangle ABC=\triangle BDE.$$

例 2. 設三角形 $ABC$ 之底邊 $BC$ 之中點 $M$ 之垂線,與 $AB$ 或其延線相交於 $D$ 點.在 $BA$ 上取 $BP$,使其長為 $BD$ 與 $BA$ 之比例中項,然後由 $P$ 點向 $BC$ 邊或其延線作垂線,相交於 $Q$ 點.

試證 $$\triangle PBQ=\frac{1}{2}\triangle ABC.$$

證. 連 $PM$、$AM$、$AQ$.




$$\because \quad DM \parallel PQ,$$

$$\therefore \quad \frac{BP}{BD}=\frac{BQ}{BM},$$

但 $$\frac{BA}{BP}=\frac{BP}{BD},$$

$$\therefore \quad \frac{BA}{BP}=\frac{BQ}{BM},$$

$$\therefore \quad PM \parallel AQ.$$

$$\therefore \quad \triangle PQM=\triangle PAM.$$

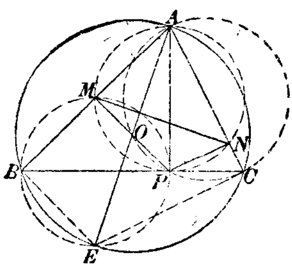
$$\therefore \quad \triangle PQM+\triangle BPM=\triangle PAM+\triangle BPM.$$

$$\therefore \quad \triangle BPQ=\triangle BAM,$$

但 $$\triangle BAM=\triangle CAM.$$

$$\therefore\quad \triangle BPQ=\frac{1}{2}\triangle ABC.$$

**例 3.** 由三角形 $ABC$ 之頂點 $A$ 向底邊引垂線 $AP$，設 $M$、$N$ 爲由點 $P$ 向 $AB$ 及 $AC$ 邊所引垂線之足，則線段 $MN$ 與原三角形之外接圓之直徑所包之矩形，等於原三角形之二倍.




**證.** 連直徑 $AE$，

更連 $BE$、$CE$.

$\because\quad \angle ABE=90^\circ=\angle ANP,$

$\angle BAE=\angle BCE.$

如以 $AC$ 爲直徑作圓當過 $P$ 點.

今 $$\angle ECA=90^\circ,$$

即 $$EC\perp AC.$$

故 $EC$ 爲圓 $APC$ 之切線.

而 $$\angle BCE=\angle PAC.$$

$$\therefore\quad \angle BAE=\angle PAC.$$

$$\therefore\quad \triangle ABE\sim\triangle ANP,$$

$$\therefore\quad \frac{BA}{AN}=\frac{AE}{AP}. \qquad (1)$$

又以 $BP$ 爲直徑之圓，經過 $M$ 點；且 $AP$ 爲該圓之切線.

$$\therefore \quad \angle ABC = \angle MPA.$$

又以 $AP$ 爲直徑之圓，經過 $M$、$N$ 兩點.

$$\therefore \quad \angle MPA = \angle MNA,$$

$$\therefore \quad \angle ABC = \angle MNA,$$

又 $$\because \quad \angle BAC = \angle MAN,$$

$$\therefore \quad \triangle ABC \sim \triangle ANM.$$

$$\therefore \quad \frac{BC}{MN} = \frac{AB}{AN}. \qquad (2)$$

由(1)、(2)得 $$\frac{BC}{MN} = \frac{AE}{AP}.$$

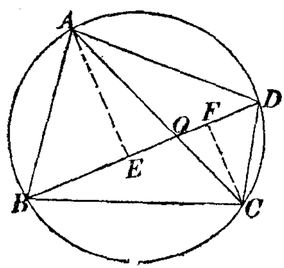
即 $$BC \times AP = MN \times AE.$$

但 $$\triangle ABC = \frac{1}{2} BC \times AP,$$

故 $$MN \times AE = 2\triangle ABC.$$

**2. 面積之比.**

**例一.** 設圓之內接四邊形 $ABCD$ 中，對角線交點爲 $O$，試證矩形 $AB \times AD$、$BC \times CD$ 之比，等於 $AO$、$CO$ 之比.




**證.** 作 $AE \perp BD$, $CF \perp BD$. 且設圓之直徑爲 $d$.

在 $\triangle ABD$ 內，

$$AB \times AD = AE \times d. \qquad (1)$$

在 $\triangle BCD$ 內， $BC\times CD=CF\times d$. (2)

(1)÷(2)， $$\frac{AB\times AD}{BC\times CD}=\frac{AE}{CF}.$$

又 $\because$ $\angle AEO=\angle CFO=90^\circ$,

$\angle AOE=\angle COF$.

$\therefore$ $\triangle EOA\sim\triangle FOC$,

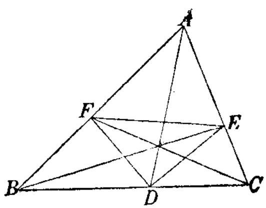
$$\therefore \frac{AE}{CF}=\frac{AO}{CO}.$$

故 $$\frac{AB\times AD}{BC\times CD}=\frac{AO}{CO}.$$

**例二.** 設三角形 $ABC$ 之頂角 $A$ 之平分線與 $BC$ 相交於 $D$, $\angle ADB$ 及 $\angle ADC$ 之平分線與 $AB$、$AC$ 相交於 $F$、$E$. 試證

$$\frac{\triangle BEF}{\triangle CFE}=\frac{AB}{AC}.$$

**證.**



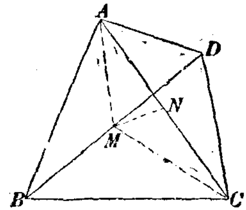

$$\frac{\triangle BEF}{\triangle AEF}=\frac{FB}{FA}=\frac{DB}{DA},$$

$$\frac{\triangle AEF}{\triangle CFE}=\frac{EA}{EC}=\frac{DA}{DC},$$

$$\therefore \frac{\triangle BEF}{\triangle CFE}=\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}.$$

**3. 平方和差問題.**

**例一.** 任意四邊形中四邊平方之和等於對角線平方之和加對角線中點連線之四倍.




證. 設 $M$、$N$ 爲對角線 $BD$、$AC$ 之中點. 連 $AM$、$CM$、$MN$.

在 $\triangle ABD$ 中,

$$2(\overline{AB}^2+\overline{AD}^2)=\overline{BD}^2+4\overline{AM}^2. \quad (1)$$

在 $\triangle CBD$ 中,

$$2(\overline{BC}^2+\overline{CD}^2)=\overline{BD}^2+4\overline{CM}^2. \quad (2)$$

(1)+(2),

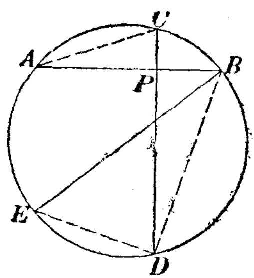
$$2(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2)=2\overline{BD}^2+4(\overline{AM}^2+\overline{CM}^2).$$

又在 $\triangle AMC$ 中,

$$2(\overline{AM}^2+\overline{CM}^2)=\overline{AC}^2+4\overline{MN}^2.$$

$$\therefore\quad \overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{BD}^2+\overline{AC}^2+4\overline{MN}^2.$$

**例二.** 圓內兩垂直相交弦, 其四部分之平方和, 等於此圓直徑之平方.




證. 設 $AB$、$CD$ 兩垂直弦相交於 $P$ 點, $BE$ 爲直徑連 $AC$、$DE$、$BD$.

$$\because\quad \angle APC=90^\circ,$$

$$\therefore\quad \overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=180^\circ.$$

即 $$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{BDE}=\overset{\frown}{ED}+\overset{\frown}{BD},$$

$$\therefore\quad \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{ED},$$

$$AC=ED.$$

$$\because \quad \overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{AC}^2,$$

$$\therefore \quad \overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{ED}^2.$$

又
$$\because \quad \overline{PB}^2+\overline{PD}^2=\overline{BD}^2.$$

$$\therefore \quad \overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=\overline{ED}^2+\overline{BD}^2=\overline{BE}^2.$$

**4. 雜例.**

**例 1.** $P$ 爲平行四邊形 $ABCD$ 對角線 $AC$ 上之一點. 試證 $\triangle BPD=\triangle BPC\sim\triangle ABP$. (證兩量之差等於一量問題).

**證.** 在 $AC$ 上取 $CQ=AP$, 連 $BQ$、$QD$.

則
$$\triangle ABP=\triangle CBQ,$$

$$\therefore \quad \triangle BPC-\triangle ABP=\triangle BPC-\triangle CBQ=\triangle BPQ.$$

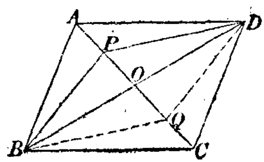
$$\because \quad OP=OQ,$$

$$OB=OD,$$

$$\therefore \quad PBQD \text{ 爲 } \square,$$

$$\therefore \quad \triangle BPQ=\triangle BPD.$$

$$\therefore \quad \triangle BPC-\triangle ABP=\triangle BPD.$$




如 $AP>\frac{1}{2}AC$, 則　$\triangle BPD=\triangle ABP-\triangle BPC.$

$$\therefore \quad \triangle BPD=\triangle BPC\sim\triangle ABP.$$

**例 2.** 在直角三角形 $ABC$ 之兩腰 $BC$、$AC$ 上向外作正方形 $CBFG$ 及 $ACDE$, 而 $BE$、$AF$ 各與 $AC$、$BC$ 交於 $X$、$Y$. 試證 $CX=CY$. (證兩線段相等).

**證.** 連 $CE$、$DX$、$CF$、$GY$.

則 $$\triangle DXC=\triangle EXC,$$

$$\therefore\quad \triangle DXC+\triangle CXB=\triangle EXC+\triangle CXB,$$

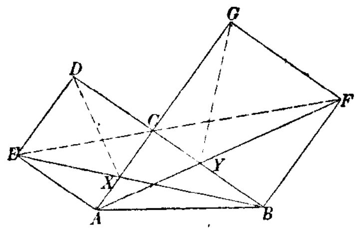
即 $\triangle DXB=\triangle ECB.$

同理 $\triangle GYA=\triangle FCA.$

又 $\because\ EA\parallel BC,$

$BC$ 爲底邊.

$\therefore\ \triangle ECB=\triangle ABC.$




同理, $\triangle FCA=\triangle ABC.$

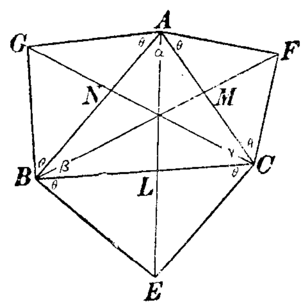
$$\therefore\quad \triangle ECB=\triangle FCA.$$

$$\therefore\quad \triangle DXB=\triangle GYA.$$

但 $\triangle DXB$ 之底爲 $DC+BC$, 高爲 $CX$; $\triangle GYA$ 之底爲 $CG+AC$, 高爲 $CY$, 今 $DC=AC, BC=CG$, 故 $CX=CY$.

**例 3.** 於 $\triangle ABC$ 之各邊上作相似等腰三角形 $BCE$、$CAF$, $ABG$. 試證 $AE$、$BF$、$CG$ 相交於一點.(共點線問題).

證. 設諸相似等腰三角形之底角爲 $\theta$, $AE$、$BF$、$CG$ 各交 $BC$、$CA$、$AB$ 於 $L$、$M$、$N$.




$$\because\quad \frac{\triangle ABL}{\triangle ACL}=\frac{LB}{LC},$$

$$\frac{\triangle BEL}{\triangle CEL}=\frac{LB}{LC},$$

$$\therefore\quad \frac{\triangle ABL}{\triangle ACL}=\frac{\triangle BEL}{\triangle CEL}=\frac{LB}{LC},$$

$$\therefore\quad \frac{\triangle ABL+\triangle BEL}{\triangle ACL+\triangle CEL}=\frac{LB}{LC}.$$

即
$$\frac{LB}{LC}=\frac{\triangle ABE}{\triangle ACE}=\frac{\frac{1}{2}BE\times AB\sin(\theta+\beta)}{\frac{1}{2}CE\times CA\sin(\theta+\gamma)}$$

$$=\frac{AB\sin(\theta+\beta)}{CA\sin(\theta+\gamma)}.$$

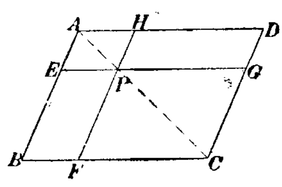
同理
$$\frac{MC}{MA}=\frac{BC\sin(\theta+\gamma)}{AB\sin(\theta+\alpha)},$$

$$\frac{NA}{NB}=\frac{CA\sin(\theta+\alpha)}{BC\sin(\theta+\beta)}.$$

$$\therefore\quad \frac{LB}{LC}\times\frac{MC}{MA}\times\frac{NA}{NB}=1,$$

故 $AE$、$BF$、$CG$ 必交於一點.

**例 4.** 過平行四邊形 $ABCD$ 內之一點 $P$，引與各邊平行之線，與 $AB$、$BC$、$CD$、$DA$ 順次相交於 $E$、$F$、$G$、$H$. 如 $\square EBFP=\square HPGD$. 試證 $A$、$P$、$C$ 三點在一直線上.（共線點問題）.




**證.** 連 $PA$、$PC$、$AC$.

則 $\qquad \triangle AEP=\triangle APH. \qquad (1)$

$\qquad \square EF=\square HG. \qquad (2)$

$$\triangle PFC=\triangle PCG. \quad (3)$$

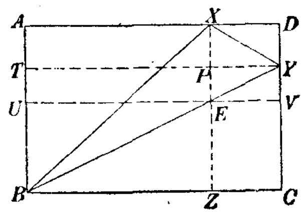
$(1)+(2)+(3)$,

$$\text{四邊形 } ABCP=\text{四邊形 } APCD.$$

故四邊形 $ABCP=\frac{1}{2}\square ABCD=\triangle ABC.$

故 $P$ 點在 $AC$ 上,而 $A$、$P$、$C$ 共線.

**例 5.** 矩形 $ABCD$, $X$、$Y$ 為 $AD$、$DC$ 上之任意點,試證 $2\triangle BXY+AX\cdot CY$ 有定值.(定量問題).




**證.** 過 $X$ 引 $CD$ 之平行線交 $BC$ 於 $Z$,過 $Y$ 引 $BC$ 之平行線交 $AB$ 於 $T$. 又此二線相交於 $P$. $BY$、$XZ$ 相交於 $E$. 過 $E$ 引 $BC$ 之平行線交 $AB$、$CD$ 於 $U$、$V$.

$$\because \quad 2\triangle EXY=\square ED,$$

$$2\triangle BEX=\square AE,$$

$$\therefore \quad 2\triangle BXY=\square AV.$$

又 $\quad \because \quad 2\triangle BCY=\square TC,$

即 $\quad 2(\triangle EBZ+\square EC+\triangle EVY)$

$$=\square TE+\square EC+2(\triangle EVY+\triangle EBZ).$$

$$\therefore \quad 2\square EC=\square TE+\square EC,$$

即 $$\square EC=\square TE.$$

$$\therefore \quad 2\triangle BXY + \square BP = \square AV + \square BP$$

$$= \square AV + \square TE + \square BE$$

$$= \square AV + \square EC + \square BE$$

$$= \square ABCD.$$

$$\therefore \quad 2\triangle BXY + AX \times CY = \text{定值}.$$

**三. 著名問題.**

**正交圓** (othogonal circles).

**1. 定義.** 兩圓相交，由其一交點作兩圓之切線，則兩切線之交角，稱爲兩圓之交角.若兩切線互相垂直，則此兩圓稱爲正交圓.

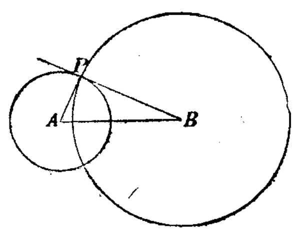
**2. 定理.** 兩圓正交，則連心線之平方，等於兩半徑平方之和.

**證.** 設 $PB$ 爲 $A$ 圓之切線，

$$\therefore \quad \angle APB = 90^\circ,$$

故 $PA$ 經過 $A$ 圓之心，同理 $PB$ 亦經過 $B$ 圓之心.

$$\therefore \quad \overline{AB}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2.$$




# 習 題 四

1. 如 $\triangle ABC$、$\triangle DBC$ 等積，且 $A$、$D$ 在 $BC$ 之兩側，試證

$AD$ 被底邊 $BC$ 所平分.

2. 如 $\triangle ABC$、$\triangle DBC$ 等積，且 $A$、$D$ 在 $BC$ 之同側，平行 $BC$ 而作直線；試證其在於兩邊間之線段 $EF$、$GH$ 必相等.

3. 如 $\triangle ABC$、$\triangle CDE$ 爲等積，且 $AC$、$CE$ 及 $BC$、$CD$ 皆成一直線. 設 $AB$、$DE$ 之交點爲 $F$. 試證 $FC$ 必平分 $AD$ 及 $BE$.

4. 以正方形 $ABCD$ 之對角線 $AC$ 爲一邊，作與之等積之菱形 $AFEC$. 如 $AF$ 通過 $\angle BAC$ 內. 試證 $AE$、$AF$ 三等分 $\angle BAC$.

5. 試證梯形兩底邊中點之連線必平分該梯形.

6. 過平行四邊形 $ABCD$ 之一頂點 $D$，引任意直線與 $BC$、$AB$ 或其延線之交點爲 $E$、$F$. 試證 $\triangle ABE$、$\triangle CEF$ 爲等積.

7. 設 $ABC$ 爲直角三角形，直角 $B$ 之二等分線交斜邊於 $F$，交外接圓周於 $D$. 試證矩形 $BD+BF$ 等於三角形 $ABC$ 之二倍.（重大，33 年度）.

8. 自等腰三角形 $ABC$ 之頂角 $A$ 作直線，交底邊於 $P$，交外接圓於 $Q$. 試證 $AP\times AQ$ 爲一定.

9. 已知三角形之頂角 $A$ 及面積，其中線爲 $AP$. 試證 $\overline{AP}^2-\overline{BP}^2$ 爲一定.

10. 設 $\triangle ABC$ 之三邊長爲 $a$、$b$、$c$，三邊上中線長順序爲 $m_1$、$m_2$、$m_3$，求證

(1) $4(m_1^2+m_2^2+m_3^2)=3(a^2+b^2+c^2)$,

(2) $16(m_2^2m_3^2+m_3^2m_1^2+m_1^2m_2^2)=9(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$.

(復旦大，36 年度).

11. 設 $OA$、$OB$ 爲圓中互相垂直之半徑，$M$ 爲弧 $AB$ 上之任意點. 設 $M$ 點之切線與 $OA$、$OB$ 之延線相交於 $S$、$T$ 點. 更作 $MP\perp OA$. 試證 $\triangle AOB$ 爲 $\triangle SOT$、$\triangle OMP$ 之比例中項.

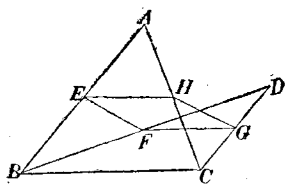
12. 平行四邊形 $ABCD$，由其對角線 $CA$ 之延線上一點 $P$，作二直線截 $AD$、$DC$ 於 $E$, $F$; 截 $AB$、$BC$ 於 $G$、$H$. 試證

$$\frac{\triangle PEG}{\triangle PFH}=\frac{\triangle EAG}{\triangle FCH}.$$

13. 由四邊形 $ABCD$ 之各角頂，引所設直線之平行線，命其與不過此角頂之對角線之交點，分別爲 $A'$、$B'$、$C'$、$D'$. 試證四邊形 $ABCD$ 與四邊形 $A'B'C'D'$ 等積.

14. 如圖 $E$、$F$、$G$、$H$ 各爲 $AB$、$BD$、$CD$、$AC$ 之中點，試證

$$EFGH=\frac{1}{2}(\triangle ABC\sim\triangle BCD).$$




15. $C$ 爲直角，在 $rt\triangle ABC$ 各邊上向外側作正三角形 $ADB$、$BEC$、$CFA$. 試證

(i) $$\triangle ADC=ABCF-\frac{1}{2}\triangle ABC.$$

(ii) $$\triangle ADC=\triangle BEC+\triangle CFA.$$

# 第五節 圓與正多邊形

## 一. 重要定義與定理之複習.

(A) **定義.**

1. **正多邊形.** 等邊且等角之多邊形.

2. **中末比如.** 如一線段分爲二段,而大段爲小段與全長之比例中項,則此線段稱爲分成中末比.此種分法,稱爲**黃金分割.**

(B) **定理.**

1. **正多邊形.**

(i) 凡正多邊形必有一外接圓及一內切圓,且爲同心圓.

(ii) 將圓周等分爲若干分,依次連接各分點,則成圓之內接正多邊形;由各分點作切線,則成圓之外切正多邊形.

(iii) 圓之內接等邊多邊形必爲正多邊形.

(iv) 圓之外切等邊多邊形,如邊數爲奇數,必爲正多邊形.

(v) 圓之外切等角多邊形,必爲正多邊形.

(vi) 圓之內接等角多邊形,如邊數爲奇數,必爲正多邊形.

(vii) 同邊數之正多邊形必相似.

(viii) 相似正多邊形周界之比,等於對應邊之比,或頂心距之比,或邊心距之比.

(ix) 相似正多邊形面積之比,等於對應邊平方之比,或頂心距平方之比,或邊心距平方之比.

(x) 正多邊形面積,等於周界與內切圓半徑相乘積之半.

**2. 圓.**

(i) 兩圓周之比,等於其半徑或直徑之比.

(ii) 圓周 $C=\pi D=2\pi r$.

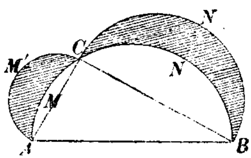
(iii) 圓面積 $A=\pi r^2=\dfrac{1}{4}\pi D^2$.

(iv) 兩圓面積之比,等於其半徑或直徑平方之比.

(v) 扇形面積等於弧長與半徑相乘積之半.

**二. 證題法.**

例 1. 以直角三角形之斜邊 $AB$ 爲直徑作半圓過 $A$、$B$、$C$;又以兩腰爲直徑向外側各作半圓.試證二半圓相交所成之兩月形面積之和等於 $\triangle ABC$ 之面積.




**證.** $\because \overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$,

$\therefore \dfrac{1}{8}\pi\overline{AB}^2=\dfrac{1}{8}\pi\overline{AC}^2+\dfrac{1}{8}\pi\overline{BC}^2$,

$\therefore$ 半圓 $AMCNB$=半圓 $CM'A$ +半圓 $CN'B$.

但半圓 $AMCNB=$ 弓形 $CMA+$ 弓形 $CNB+\triangle ABC$,

半圓 $CM'A=$ 弓形 $CMA+$ 月形 $CM'AM$,

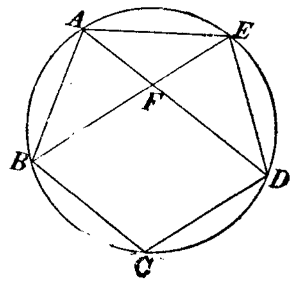
半圓 $CN'B=$ 弓形 $CNB+$ 月形 $CN'BN$.

$\therefore\quad \triangle ABC=$ 月形 $CM'AM+$ 月形 $CN'BN$.

**例 2.** 試證正五邊形中不過同頂點之對角線,按中末比互分.

**證.** 設正五邊形 $ABCDE$ 之對角線 $AD$、$BE$ 交於 $F$ 點.

作其外接圓.





$$\because\quad \angle AEB=\angle AEF,$$

$$\angle ABE=\angle FAE,$$

$$\therefore\quad \triangle EBA\sim\triangle EAF,$$

$$\therefore\quad \frac{BE}{AE}=\frac{AE}{EF}.$$

又 $$\because\quad \angle BAF=\angle BFA,$$

$$\therefore\quad AE=AB=BF,$$

$$\therefore\quad \frac{BE}{BF}=\frac{BF}{EF}.$$

$$\therefore\quad \overline{BF}^2=BE\times EF.$$

## 習 題 五

1. 由直角 $\triangle ABC$ 之頂點 $C$ 引斜邊 $AB$ 之垂線 $CD$. 試證

$\triangle CAD$ 及 $\triangle CDB$ 之內切圓之面積之比爲 $AD:DB$.

2. 在 $O$ 圓中，$AB$、$CD$ 爲互相垂直之二直徑，以 $D$ 爲圓心，$DA$ 爲半徑作弧 $AEB$. 試證新月形 $ACBE$ 與 $\triangle DAB$ 等積.

3. 設 $ABCDE$ 爲圓之內接正五邊形，$P$ 爲弧 $AB$ 之中點，試證 $AP$ 及圓之半徑之和等於 $PC$.

4. 試證圓之內接正五邊形一邊上之正方形，等於內接正十邊形一邊上之正方形及半徑上正方形之和.

5. 設等腰三角形 $ABC$ 之底角 $B$、$C$ 各爲其頂角 $A$ 之二倍而通過 $BC$、$AC$、$AB$ 之中點 $D$、$E$、$F$ 之圓周截 $AC$ 於 $H$，$AB$ 於 $G$. 試證 $DHEFG$ 爲一正五角形.（武大、川大、東北大聯考，31年度）.

# 第二章

# 軌跡問題

**一. 定義.** 軌跡為合於某種幾何條件之點的團體. 團內各點，盡合條件. 反之，合條件者即團內一員. 故軌跡不僅為一普通團體，且為排外性發達，團結力堅強的一個團體. 此種排外性之色彩，稱為軌跡的純粹性；此種團結力之表現，稱為軌跡的完備性.

**二. 種類.** 按初等平面幾何範圍之軌跡不外下列兩種.

(A) **單一圖形.**

1. **直線.** 全線、半線、線段.

2. **圓.** 全圓、圓弧、孤立點.

(B) **合成圖形.** 即由二種或數種單一圖形所合成之圖形.

**三. 證明.** 純粹性與完備性適為正反二定理，故軌跡問題需要一正一反的證明兩次：

(A) **純粹性.** (1) 凡在軌跡上的點，皆適合全部條件，此語在邏輯上實與 (2) 不能適合全部條件的點，不在軌跡上有

同眞同僞的關係.

(B) **完備性.** (3) 凡適合全部條件的點,皆在軌跡上與 (4) 不在軌跡上的點,不能適合全部條件的關係亦同.

故在(1)、(2)中任選一條,(3)、(4)中任選一條,證其合理、則軌跡的純粹性與完備性皆證實矣! 選法計有(1)、(3),(1)、(4),(2)、(3),(2)、(4)四種.

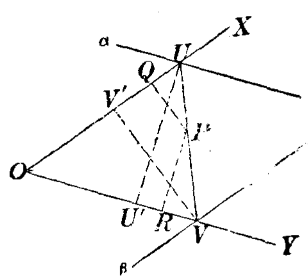
**例.** 試證一定角 $XOY$ 內,與兩邊距離之和爲常量 $l$ 之軌跡,爲一線段,其作法爲:「以常量 $l$ 爲距離作 $\alpha \parallel OY$ 交 $OX$ 於 $U$,同法作 $\beta \parallel OX$,交 $OY$ 於 $V$. 連 $UV$,則 $UV$ 卽爲所求之軌跡」.

**證.** (i) 純粹性 卽證 $UV$ 上任一點至 $OX$、$OY$ 距離之和,等於常量 $l$. 設 $P$ 爲 $UV$ 上任一點,作 $PQ \perp OX$, $PR \perp OY$, $UU' \perp OY$, $VV' \perp OX$. 連 $OP$,

則 $$\triangle OUU' \cong \triangle OVV', \text{(a.a.s.)}.$$

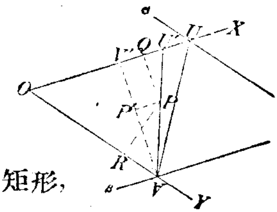
而 $\triangle OVU$ 爲等腰.

$$\therefore \quad PQ+PR=l.$$




(ii) 完備性 卽證在 $\angle XOY$ 內,與 $OX$、$OY$ 距離之和等於常量 $l$ 之點必在 $UV$ 上

證. 如 $P$ 點不在 $UV$ 上, 連 $VP$ 交 $OX$ 於 $U'$. 作 $VV' \perp OX$, $V'$ 爲垂足. 作 $PP' \parallel OX$ 交 $VV'$ 於 $P'$. 更作 $PQ \perp OX$, $PR \perp OY$.



$\therefore$ $V'P'PQ$ 爲矩形,

$\therefore$ $PQ = P'V'$,

但 $PQ + PR = l = VV'$.

$\therefore$ $PR = VV' - PQ = VV' - P'V' = VP'$.

又 $\because$ $\angle VRP = \angle PP'V = 90°$,

且 $PV = PV$.

$\therefore$ $\triangle VRP \cong \triangle PP'V$, (s.s.R.).

$\therefore$ $\angle PVR = \angle VPP' = \angle VU'O$.

卽 $\angle U'VO = \angle VU'O$,

$\therefore$ $OV = OU'$,

但 $OV = OU$,

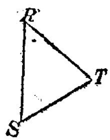
$\therefore$ $OU' = OU$.

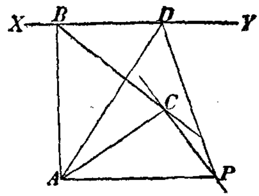
$U'V$ 與 $UV$ 相合, 而 $P$ 點在 $UV$ 上.

**四. 探討.** 軌跡之探討, 因題而異, 誠無一定方法. 惟判別其爲直線或圓, 實爲必須之步驟. 吾人可先按所設幾何條件用圓規及直尺作數點, 如似乎在一直線上, 則試證連接兩點之線與定直線成定角, 或證其對於定直線之距離不變. 如似乎爲圓

周，則試證諸點對於一定點之距離不變，或證其對於兩定點之視角不變，茲舉數例以明之.

**例 1.** 設 $A$ 為定點，$XY$ 為定直線，作三角形與定三角形 $RST$ 相似，使其第一頂點與 $A$ 相合，其第二頂點在 $XY$ 上移動，求其第三頂點之軌跡.




**解.** 作 $AB\perp XY$，更於 $AB$ 上作 $\triangle BAC$ 與 $\triangle RST$ 相似. 則 $C$ 點及 $AC$ 線之位置一定. 又取 $XY$ 上一任意點 $D$，作 $\triangle DAP\sim\triangle RST$，連 $CP$.

$$\because\quad \triangle BAC\sim\triangle DAP,$$

$$\therefore\quad \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AP}.$$

又 $$\because\quad \angle BAC-\angle DAC=\angle DAP-\angle DAC,$$

即 $$\angle BAD=\angle CAP,$$

$$\therefore\quad \triangle BAD\sim\triangle CAP,$$

$$\therefore\quad \angle ACP=\angle ABD=90^\circ.$$

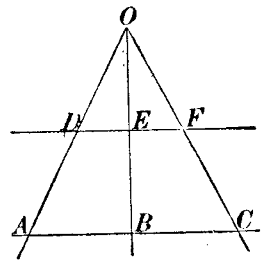
故所求之軌跡，為通過 $C$ 點而垂直於 $AC$ 之直線.

**註.** (i) 於垂線 $AB$ 上作與 $\triangle RST$ 相似之三角形法，乃使 $\angle A=\angle R$，或 $\angle A=\angle S$，或 $\angle A=\angle T$. 共三種，於 $B$ 點作其餘之對應角有二種，故共可作 $3\times 2=6$ 個三角形，而所求之軌

跡，有六條直線，又求 $C$ 點對於 $AB$ 於此圖之反側，亦可作六個三角形，故共可得十二條直線.

（ii）本例如將「與定三角形」改為「與定正三角形」則僅有二條直線.

**例 2.** 由直線外一點至直線上作諸直線，求諸直線中點之軌跡.



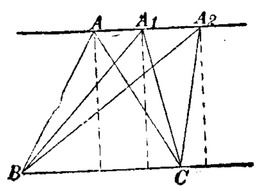
**解.** 設 $OA$、$OB$、$OC$ 之中點為 $D$、$E$、$F$.

$$\therefore \quad DE \parallel AB,$$
$$EF \parallel BC.$$

$\therefore$ $D$、$E$、$F$ 在一直線上.

因知其中點軌跡為一直線.

**例 3.** 三角形之底邊及面積均為一定，求其頂點之軌跡.



**解.** 作同面積之三角形 $ABC$、$A_1BC$、$A_2BC$.

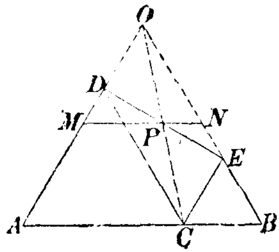
$\because$ $\triangle ABC = \triangle A_1BC = \triangle A_2BC \cdots$,

$\therefore$ $\triangle ABC$、$\triangle A_1BC$、$\triangle A_2BC \cdots\cdots$ 之高均等.

故 $A$ 點之軌跡為過任一頂點與 $BC$ 平行之直線.

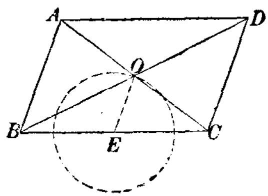
**例 4.** $C$ 為定直線 $AB$ 上任一點，向 $AB$ 之同側作 $ACD$、$CBE$ 兩正三角形，求 $DE$ 中點 $P$ 之軌跡.

解. 延長 $AD$、$BE$ 相交於 $O$ 點，則 $ODCE$ 爲 ▱，故 $DE$ 之中點 $P$ 亦爲 $OC$ 之中點. 但 $O$ 爲定點，$C$ 爲 $AB$ 上任一點. 故 $P$ 點之軌跡爲與 $AB$ 之平行線. 又因 $C$ 爲 $AB$ 上一點，故此軌跡爲限於 $\triangle OAB$ 內連結 $OA$、$OB$ 中點之線段 $MN$.




**例 5.** 一平行四邊形之底邊長及位置固定，其隣邊之長亦爲已知，求兩對角線交點之軌跡.

解. 設 ▱$ABCD$，$BC$ 爲定長且位置不變，$AB$ 亦爲定長.




取 $BC$ 之中點 $E$，因 $BC$ 爲定長且定位，故 $E$ 爲定點.

連 $OE$，在 $\triangle ABC$ 內，

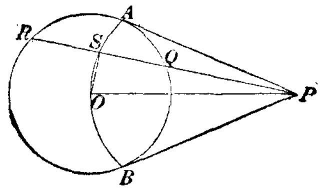
$$\because \quad AO=CO, \quad BE=CE, \quad \therefore \ OE \parallel AB.$$

且 $OE=\frac{1}{2}AB$. 但 $AB$ 爲定長，故 $OE$ 亦爲定長. 因知 $O$ 點軌跡爲以 $BC$ 中點 $E$ 爲圓心，$\frac{1}{2}AB$ 爲半徑所作之圓.

**例 6.** 由圓外一定點至圓周作割線，與圓周相交於兩點，求諸割線在圓內部分之弦之中點之軌跡.

解. 設 $P$ 爲圓外之定點，過 $P$ 點作割線，經過圓心 $O$，則

$O$ 點爲軌跡上一點. 又作兩切線, 則兩切點 $A, B$ 均爲軌跡上之點; 任作割線 $PQR$. 設 $QR$ 之中點爲 $S$, 連 $OS$, 則 $\angle OSP=90^\circ$. 又 $O$、$P$ 均爲定點. 故知 $S$ 點之軌跡爲以 $OP$ 爲直徑之圓周, 但限於在定圓內之一部分 $AOB$ 弧.




五. 基本軌跡.

1. 一點移動對於一定點有一定距離之軌跡, 爲以該定點爲圓心, 該定距離爲半徑所作之圓.

2. 一點移動對於二定點等距離之軌跡, 爲連結二定點之線段之中垂線.

3. 一點移動對於一定線有一定距離之軌跡, 爲與該定直線平行而在定直線兩邊之二直線, 其距離等於定距離.

4. 一點移動對於二平行線等距離之軌跡, 爲夾在二平行線間與二平行線平行而等距離之直線.

5. 一點移動對於二相交線等距離之軌跡, 爲相交二直線所成兩角之平分線.

6. 一點移動對於一定圓 (設圓心爲 $O$ 點, 半徑爲 $r$) 有一定距離 $d$ (設 $r>d$) 之軌跡, 爲以 $O$ 點爲圓心, $r+d$ 及 $r-d$ 爲半徑所作之二同心圓.

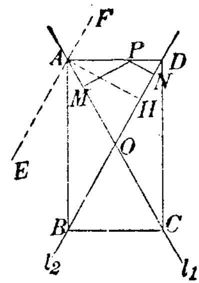
7. 一點移動對於二同心圓 (設大圓之半徑爲 $R$, 小圓之半

徑爲 $r$)等距離之軌跡，爲以 $\frac{R+r}{2}$ 爲半徑所作之同心圓.

8. 一點移動對於二定點成定角之軌跡爲以連結此二定點之線爲弦，於其上以此定角爲弓形角所成之二圓弧.

9. 一點移動對於相交二直線距離之和一定之軌跡，爲以此相交二直線爲對角線之矩形之四邊.

解. 設 $l_1$、$l_2$ 爲已知相交二直線，$k$ 爲定和. 作 $EF \parallel l_2$，令二者之距離爲 $k$. 並設 $EF$ 與 $l_1$ 之交點爲 $A$.




取 $OA=OC=OB=OD$. 連結 $AB$、$BC$、$CD$、$DA$ 得矩形 $ABCD$.

設 $P$ 爲 $AD$ 上任一點，作 $PM \perp OA$，$PN \perp OD$，$AH \perp OD$. 因 $\triangle AOD$ 爲等腰.

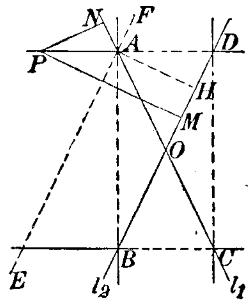
$$\therefore \quad PM+PN=AH=k.$$

故矩形 $ABCD$ 之四邊爲所求之軌跡.

10. 一點移動對於相交二直線距離之差一定之軌跡，爲以此相交二直線爲對角線之矩形四邊之延線.

解. 設 $l_1$、$l_2$ 爲已知相交二直線，$k$ 爲定差. 作 $EF \parallel l_2$，令二者之距離爲 $k$. 並設 $EF$ 與 $l_1$ 之交點爲 $A$.

取 $OA=OC=OB=OD$. 連接 $AB$、$BC$、$CD$、$DA$. 得矩形 $ABCD$.




設 $P$ 爲 $DA$ 延線上任一點，作

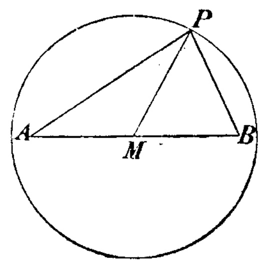
$$PM \perp OD,$$
$$PN \perp OA,$$
$$AH \perp OD.$$

因 $\triangle AOD$ 爲等腰，

$$\therefore \quad PM - PN = AH = k.$$

故矩形 $ABCD$ 四邊之延線爲所求之軌跡.

11．一點移動對於二定點距離平方之和一定之軌跡，爲以連接二定點之線段之中點爲圓心之軌跡.




**解.** 設 $A$、$B$ 爲二定點，$M$ 爲 $AB$ 之中點，$k^2$ 爲定長，$P$ 爲軌跡上任一點. 連 $PM$，則

$$2(\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2) = \overline{AB}^2 + 4\overline{PM}^2,$$

$$\therefore \quad \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \frac{\overline{AB}^2}{2} + 2\overline{PM}^2$$

$$= k^2,$$

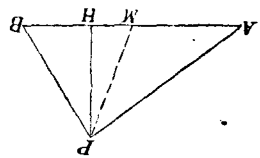
$$\therefore \quad \overline{PM}^2 = \frac{k^2}{2} - \frac{\overline{AB}^2}{4},$$

$$\overline{PM} = \sqrt{\frac{k^2}{2} - \frac{\overline{AB}^2}{4}} = \text{常數}.$$

故 $P$ 點軌跡爲以 $M$ 點爲圓心，$PM$ 爲半徑所作之圓.

12. 一點移動對於二定點距離平方之差一定之軌跡，爲與連結二定點之線段垂直之直線.

解. 設 $A$、$B$ 爲二定點，$M$ 爲 $AB$ 之中點，$k^2$ 爲定長，$P$ 爲軌跡上任一點. 作 $PH \perp AB$.



$$\because \quad \overline{PA}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{PH}^2,$$

$$\overline{PB}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{PH}^2,$$

$$\therefore \quad \overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = \overline{AH}^2 - \overline{BH}^2$$

$$= (AM + MH)^2 - (BM - MH)^2$$

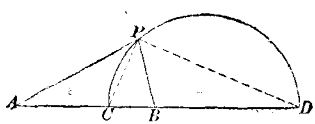
$$= 2MH(AM + BM) = 2MH \times AB = k^2.$$

$$\therefore \quad MH = \frac{k^2}{2AB} = \text{常數}.$$

故 $P$ 點軌跡爲過 $H$ 點與 $AB$ 垂直之直線.

13. 一點移動對於二定點距離之比一定之軌跡，爲一圓周.（稱爲 Apollonius 圓）. 其直徑爲連接二定點之線段依定比內分外分兩點間之距離.

解. 設 $A$、$B$ 爲二定點，$P$ 爲軌跡上任一點. 作 $\triangle APB$ 頂角之內外角平分線 $PC$、$PD$.



則
$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{PA}{PB} = \text{定比},$$

故 $C$、$D$ 均爲定點.

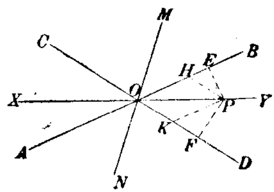
且 $$\angle CPD=90°.$$

故 $P$ 點之軌跡爲以 $CD$ 爲直徑之圓周.

14. 一點移動對於相交二直線距離之比一定之軌跡，爲過其交點之二直線.

解. 設 $AB$、$CD$ 爲已知相交二直線，$P$ 爲軌跡上任一點.

作 $$PE\perp AB,$$
$$PF\perp CD.$$




則 $$\frac{PE}{PF}=\text{定比}.$$

更作 $$PH\parallel OD,$$
$$PK\parallel OB.$$

$$\because\quad \angle EHP=\angle EOF=\angle PKF.$$

則 $$\triangle PEH\sim\triangle PFK.$$

$$\therefore\quad \frac{PH}{PK}=\frac{PE}{PF}=\text{定比}.$$

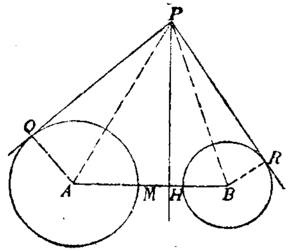
卽 $$\frac{OK}{PK}=\text{定比},$$

而 $$\angle OKP=180°-\angle BOD=\text{定角}.$$

故軌跡爲經過 $OP$ 點之定直線 $XY$. 同理知第二直線 $MN$ 亦爲所求之軌跡.

15. 一動點至兩定圓之切線相等，則此點之軌跡爲一直

線，此直線稱爲兩圓之根軸.




**解.** 設 $A$、$B$ 爲兩定圓之圓心，$M$ 爲 $AB$ 之中點. $P$ 爲軌跡上任一點. 作 $PQ$、$PR$ 二切線，又作 $PH\perp AB$. 更連 $AQ$、$BR$、$PA$、$PB$.

則　$$\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2.$$

即　$$\overline{PA}^2-\overline{AQ}^2=\overline{PB}^2-\overline{BR}^2.$$

亦即　$$\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=\overline{AQ}^2-\overline{BR}^2=\text{定值}.$$

故 $P$ 點軌跡爲過 $H$ 點作與 $AB$ 垂直之直線. 且

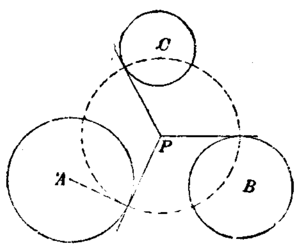
$$MH=\frac{\overline{AQ}^2-\overline{BR}^2}{2AB}.$$

**定理.** (i) 兩圓相切，則其內公切線卽爲兩圓之根軸.

(ii) 兩圓相交，則經過兩交點之線，卽爲兩圓之根軸.

(iii) 三圓之三根軸共點，此點稱爲**根心**.

**證.** 設 $A$、$B$、$C$ 爲三已知圓心.




$A$、$B$ 兩圓之根軸與 $B$、$C$ 兩圓之根軸交於 $P$. 則自 $P$ 點至 $A$、$C$ 兩圓之切線相等. 故 $A$、$C$ 兩圓之根軸亦過 $P$. 卽 $A$、$B$、$C$ 三圓之三根軸同交於一點 $P$.

(iv) 三圓相切，則三內公切線

共點.

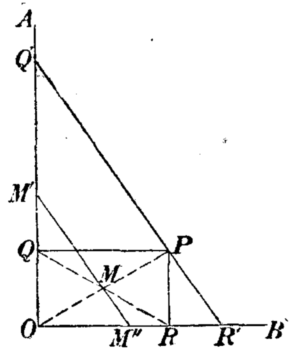
(v) 三圓相交,則三公共弦共點.

(vi) 以根心爲圓心,根心至任一圓切線之長爲半徑,所作之圓與三圓均爲正交圓.

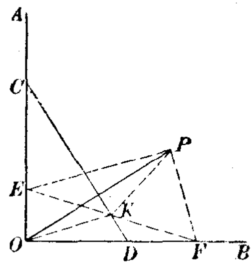
六. 雜例.

**例1.** 設 $OA$、$OB$ 爲互相垂直之二直線,於一定點 $P$,引互相正交之二直線 $PQ$、$PR$ 與 $OA$、$OB$ 分別交於 $Q$、$R$. 求 $QR$ 之中點 $M$ 之軌跡.

**尋軌.** 由 $P$ 點引 $PR\perp OB$、$PQ\perp OA$,連 $QR$. 因 $QORP$ 爲矩形,故 $\triangle PQR$ 爲直角三角形. 設其斜邊 $QR$ 之中點爲 $M$. 吾人保持 $\angle QPR$ 爲頂角,使頂點 $R$ 在 $OB$ 上移動. 當 $R$ 點與 $O$ 點相合時,則 $Q$ 點移至 $Q'$ 而 $PQ'$ 與 $OP$ 成直角,斜邊 $Q'O$ 之中點爲 $M'$,在軌跡上,且爲其臨界點. 同理,當 $Q$ 點與 $O$ 點相合時,$R$ 與 $R'$ 重合,則 $PR'$ 與 $OP$ 成直角,而斜邊 $OR'$ 之中點 $M''$ 在軌跡上,且爲其臨界點. 此三中點 $M'$, $M$, $M''$ 似乎在一直線上. 因 $MM'\parallel Q'P$, $MM''\parallel PR'$,故其軌跡爲一直線. 又因 $OP\perp Q'R'$. $\therefore$ $OP\perp M'M''$,故所求之軌跡爲 $OP$ 之中垂線.



**作圖.** 作 $OP$ 之中垂線 $CD$, 則 $CD$ 卽爲所求之軌跡.




**證明.** (i) 在 $CD$ 上任取一點 $K$, 由 $K$ 點引一直線與 $AO$ 相交於 $E$, 與 $BO$ 相交於 $F$. 且 $KE=KF$. 連 $PE$、$PK$、$PF$、$OK$.

$\because$ $\triangle EOF$ 爲直角三角形,

且 $KE=KF$,

$\therefore$ $KE=KF=OK$.

又 $\because$ $CD$ 爲 $OP$ 之中垂線,

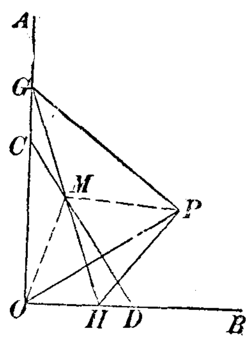
$\therefore$ $KO=KP$.

卽 $KF=KP=KE$.

故以 $K$ 點爲圓心, $\frac{1}{2}EF$ 爲半徑作圓必過 $P$ 點.

$\therefore$ $\angle EPF=90^\circ$.

故在軌跡上之點適合條件.




(ii) 設 $GPH$ 爲直角三角形, 其斜邊兩端 $G$ 與 $H$ 在 $OA$、$OB$ 上, $M$ 爲其斜邊之中點. 連 $OM$.

$\because$ $GM=MH=PM$,

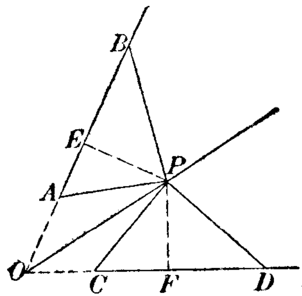
$OM=GM=MH$,

$\therefore$ $OM=PM$.

故 $M$ 點在軌跡 $CD$ 上.

**討論.** 所求之軌跡僅爲線段 $CD$.

**例 2.** 設 $AB$、$CD$ 爲不平行之二相等線段，以 $P$ 爲頂點作三角形 $APB$ 之面積，等於三角形 $CPD$ 之面積. 試求 $P$ 點之軌跡.




**解.** 延長 $BA$、$DC$ 相交於 $O$ 點.

作 $$PE\perp AB,$$

$$PF\perp CD.$$

$$\because\quad \triangle APB=\triangle CPD.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}AB\times PE=\frac{1}{2}CD\times PF,$$

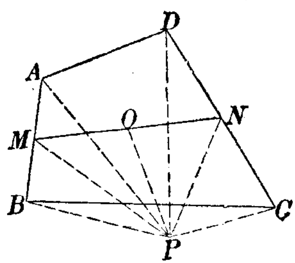
又 $$\because\quad AB=CD,$$

$$\therefore\quad PE=PF.$$

故所求軌跡爲 $\angle BOD$ 之平分線.

**註.** 上例之解，雖甚簡略，但在試場中，如是可也. 下同.

**例 3.** 一點 $P$ 至四邊形 $ABCD$ 各頂點距離之平方和爲一定，試求 $P$ 點之軌跡.




**解.** 在 $AB$ 上取中點 $M$, $CD$ 上取中點 $N$, $MN$ 上取中點 $O$.

連 $PM$、$PN$、$PO$.

在 $\triangle PAB$,

$$2(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2)=\overline{AB}^2+4\overline{PM}^2.$$

在 $\triangle PCD$,

$$2(\overline{PC}^2+\overline{PD}^2)=\overline{CD}^2+4\overline{PN}^2.$$

$$\therefore\quad 2(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2)$$
$$=(\overline{AB}^2+\overline{CD}^2)+4(\overline{PM}^2+\overline{PN}^2).$$

在 $\triangle PMN$,

$$2(\overline{PM}^2+\overline{PN}^2)=\overline{MN}^2+4\overline{PO}^2.$$

$$\therefore\quad 2(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2)$$
$$=(\overline{AB}^2+\overline{CD}^2)+2\overline{MN}^2+8\overline{PO}^2.$$

$$\therefore\quad PO=\sqrt{\frac{2(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2)-\overline{AB}^2-\overline{CD}^2-2\overline{MN}^2}{8}}$$

因 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$ 爲一定，又 $MN$、$AB$、$CD$ 皆爲定長，且 $O$ 爲定點，故 $OP$ 之長一定，而 $P$ 點軌跡爲以 $O$ 爲圓心，$OP$ 爲半徑所作之圓.

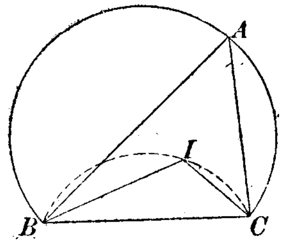
例 4. 一動三角形，其底邊之位置與長度爲一定，而其頂角之大小，亦爲一定，試求此三角形之內心（各角平分線之交點）之軌跡.（西北區聯考，31 年度）.

**解.** 以底邊 $BC$ 爲弦作含有頂角 $A$ 之弧. 設 $I$ 爲 $\triangle ABC$ 之內心.

則 $\angle BIC = 180^\circ - \dfrac{\angle B + \angle C}{2}$

$= 180^\circ - \left(90^\circ - \dfrac{\angle A}{2}\right)$

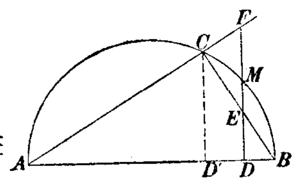
$= 90^\circ + \dfrac{\angle A}{2}.$



故 $I$ 點軌跡乃以底邊爲弧之弦，圓周角等於 $90^\circ + \dfrac{\angle A}{2}$.

例 **5**. 於直角三角形 $ABC$ 斜邊 $AB$ 上任一點 $D$. 作 $DF \perp AB$, 與 $BC$ 相交於 $E$, 與 $CA$ 相交於 $F$, 並於此垂線上取 $M$ 點, 使 $\overline{DM}^2 = DE \times DF$, 試求 $M$ 點之軌跡.

**解.** 如 $D$ 點與 $B$ 點相合,



則 $DE = 0,$

$DM = 0.$

故 $M$ 點與 $B$ 點相合. 卽 $B$ 點在軌跡上, 同理可知 $A$ 點亦在軌跡上.

又作 $CD' \perp AB,$

則 $DE = DF = CD'.$

$\therefore\ \overline{DM}^2 = \overline{CD'}^2.$

卽 $DM = CD'.$

卽 $M$ 點與 $C$ 點相合, 而 $C$ 點亦在軌跡上.

因 $\angle ACB=90°$，故所求軌跡乃以 $AB$ 爲直徑之圓周.

吾人如在軌跡上任取一點 $M$，作 $DEF\perp AB$.

$$\because\quad \angle ADE=\angle EDB=90°,$$

$$\angle AFD=\angle EBD,$$

$$\therefore\quad \triangle DFA\sim\triangle DBE,$$

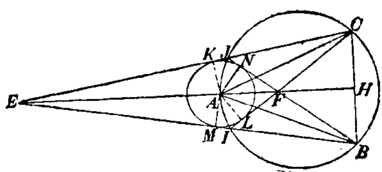
$$\therefore\quad \frac{AD}{DF}=\frac{DE}{DB},$$

卽
$$DE\times DF=AD\times DB=\overline{DM}^2.$$

故合所設幾何條件也.

**例 6.** 以等腰三角形 $ABC$ 之頂點 $A$ 爲心作圓. 自 $B$、$C$ 各作該圓之切線，試求諸切線交點之軌跡.

**解.** 設自 $B$、$C$ 兩點各作切線 $BM$、$BN$ 及 $CK$、$CL$ 相交於 $E$、$F$、$I$、$J$.




（i）連 $AN$、$AL$.

$$\because\quad AB=AC,\quad AN=AL,$$

$$\angle ANB=\angle ALC=90°.$$

$$\therefore\quad \triangle ANB\cong\triangle ALC,\ (\text{s.s.R.}),$$

$$\therefore\quad BN=CL.$$

又
$$\because\quad FN=FL,$$

$$\therefore\quad BN-FN=CL-FL,$$

即 $$FB=FC.$$

故 $F$ 點之軌跡爲 $BC$ 之中垂線.

(ii) 連 $AK$、$AM$.

$$\because \quad AC=AB,\ AK=AM,$$

$$\angle CKA=\angle BMA=90^\circ,$$

$$\therefore \quad \triangle AKC\cong\triangle AMC,\ (\text{s.s.R.}),$$

$$\therefore \quad CK=BM.$$

又 $$\because \quad EK=EM,$$

$$\therefore \quad EK+CK=EM+BM,$$

即 $$EC=EB.$$

故 $E$ 點之軌跡爲 $BC$ 之中垂線.

(iii) $$\because \quad AB=AC,\ AM=AL,$$

$$\angle AMB=\angle ALC=90^\circ,$$

$$\therefore \quad \triangle AMB\cong\triangle ALC,\ (\text{s.s.R.}),$$

$$\therefore \quad \angle ABM=\angle ACL.$$

$\therefore$ $A$、$I$、$B$、$C$ 共圓. 同理可證 $J$ 點,亦在 $BAC$ 圓之圓周上.

故 $I$、$J$ 之軌跡爲 $\triangle ABC$ 之外接圓.

## 習　題　六

1. 在定角 $XOY$ 內,自一點 $A$ 作兩邊之平行線與 $OX$ 之交點爲 $B$,與 $OY$ 之交點爲 $C$,且 $AB+AC$ 等於定長 $l$. 試求 $A$

點之軌跡.

2. 圓內一定弦 $AB$,過 $B$ 點任作一弦 $BP$,作圓過 $P$ 點與 $AB$ 相切於 $A$ 點,且交 $BP$ 於 $Q$ 點. 試求 $Q$ 點之軌跡.

3. 從圓上一定點引諸弦,求其中點之軌跡,並證明之.(中正大,30 年度).

4. 設 $D$ 爲所與圓內一定點,$M$ 爲圓外任一點. 自 $M$ 所作該圓切線 $MT$ 等於 $MD$. 試求 $M$ 點之軌跡.

5. 由圓外一點 $A$ 至圓周上作任意直線 $AB$,作 $ABC$ 正三角形,求 $C$ 點之軌跡.

6. 過相交二圓之一交點 $A$ 引倍弧 $BAC$,試求 $BC$ 之中點 $P$ 之軌跡.

7. 設二圓於所與直線上切二定點,且同時又互相外切,試求此切點之軌跡.

8. $P$ 爲定弧 $AB$ 上一點, 如在弦 $AP$ 之延長線上取 $PQ=PB$,試求 $Q$ 點之軌跡.

9. 自一點 $P$ 向正三角形 $ABC$ 之角頂作直線,令 $PA=PB+PC$,間 $P$ 點之軌跡爲何?(武大,22 年度).

10. $\triangle PAB$、$\triangle PCD$ 之底邊 $AB$ 及 $CD$ 有定長有定位,若兩三角形面積之和不變,試求 $P$ 點之軌跡.

11. 自圓內一定點 $A$ 作正交二直線 $AM$、$AN$ 交圓周於 $M$、$N$. 試求弦 $MN$ 中點 $P$ 之軌跡.

12．定點 $A$ 向定直線 $XY$ 作任意直線，其交點爲 $B$. 如在 $AB$ 上取一點 $P$ 使 $AP$、$AB$ 所包矩形之面積爲一定，試求點 $P$ 之軌跡.

13．設三角形之底邊定長且定位，頂角之大小亦一定，試求以下各點之軌跡.（i）傍心，（ii）垂心，（iii）重心，（iv）九點圓圓心.

14．設三角形之頂角位置及大小一定，底邊爲定長，試求以下各點之軌跡.（i）內心，（ii）外心，（iii）垂心.

15．$\triangle ABC$ 之底邊 $BC$ 有定長且定位，$\angle BAC$ 之平分線過 $BC$ 上定點 $P$，試求頂點 $A$ 之軌跡.

16．三角形之底邊一定，自底邊之一端至對邊中點之距離爲一定長，求頂點之軌跡.（社會教育學院，33 年度）.

17．自二定圓 $A$、$B$ 外一點 $P$，向兩圓各作二切線所成之角相等，問點 $P$ 之軌跡如何？（武大，33 年度）.

18．$AB$ 爲圓內一定弦，$AC$ 爲過 $A$ 點之任一弦，試求以 $AB$，$AC$ 爲兩隣邊之平行四邊形之對角線之交點的軌跡.（交大，33 年度）.

19．設 $\triangle ABC$ 恆與一所設三角形相似，其垂心之位置一定，$A$ 點在一定直線上移動，試求 $B$、$C$ 點之軌跡.

20．一小圓之半徑爲大圓半徑之半，若小圓在大圓內滾動，求小圓上一定點之軌跡.

# 第三章

# 作圖問題

**一. 工具.** 限於用直尺及圓規兩種.

**二. 公法.**

(A) 經過兩點可作一直線.

(B) 一直線可任意延長.

(C) 以一定點爲圓心,定長之直線爲半徑可作一圓.

**三. 基本作圖題.**

(A) **直線形作圖題.**

1. 分一線段爲任意等分.

2. 分一角爲 $2^n$ 等分.

3. 由線上或線外一點作一線與一已知線垂直.

4. 作一角等於一已知角.

5. 由線外一點作一線與一已知線垂直.

6. 已知一邊及他二原素,作三角形.(i)a.s.a.(ii)a.a.s.(iii)s.a.s.(iv)s.s.s.(v)s.s.a.

(B) **圓之作圖題.**

1. 分一圓弧為 $2^n$ 等分.

2. 作三角形之外接圓、內切圓及傍切圓.

3. 由圓上或圓外一點作切線.

4. 於已知線上作弓形,使弓形內所含之角等於定角.

5. 作兩圓之內外公切線.

(C) **比例作圖題.**

1. 依定比內外分一線段.

2. 求三線段之比例第四項.

3. 求二線段之比例第三項.

4. 求二線段之比例中項.

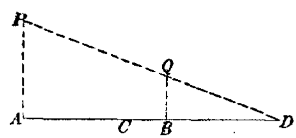
5. 求調和共軛點.

(i) 已知 $A$、$C$、$B$,求 $D$ 點.

**解.** 作 $PA\perp AB$, 且 $PA=AC$; 作 $QB\perp AB$, 且 $BQ=BC$; 連 $PQ$ 與 $AB$ 延線交於 $D$ 點卽得.

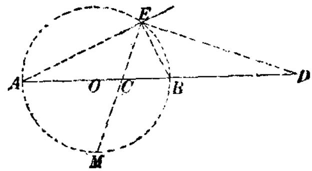
$$\because \quad \triangle APD\sim\triangle BQD,$$

$$\therefore \quad \frac{DA}{DB}=\frac{PA}{QB}=\frac{CA}{CB}.$$




**又解.** 以 $AB$ 為直徑作圓,將 $\overparen{AB}$ 之中點 $M$ 與 $C$ 連結,延長交圓周於 $E$ 點. 過 $E$ 點作 $EM$ 之垂線 $ED$, 與 $AB$ 延線交於

$D$ 點卽得.




連結 $AE$、$BE$.

$$\because \quad \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\overparen{AM} = \overparen{BM},$$

$$\therefore \quad \angle AEC = \angle BEC = 45^\circ,$$

而 $EC$ 爲 $\angle AEB$ 之平分線.

但 $$\angle MED = 90^\circ,$$

$$\therefore \quad \angle BED = 45^\circ,$$

故 $ED$ 爲 $\angle AEB$ 之外角平分線.

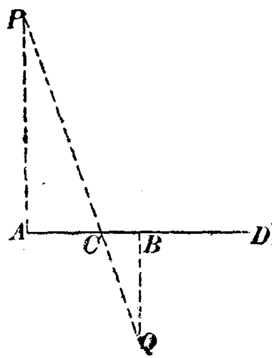
$$\therefore \quad \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}.$$

(ii) 已知 $A$、$B$、$D$, 求 $C$ 點.

**解.** 作 $PA \perp AB$, 且 $PA = DA$. 作 $QB \perp AB$(與 $PA$ 之方向相反), 且

$$BQ = DB.$$

連 $PQ$, 交 $AD$ 於 $C$ 點. $C$ 點卽爲所求之點.



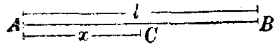

$$\because \quad \triangle PAC \sim \triangle QBC,$$

$$\therefore \quad \frac{CA}{CB} = \frac{PA}{QB} = \frac{DA}{DB}.$$

6. 黃金分割.

**解.** 設線段 $AB = l$, 求一點 $C$. 使

$$\overline{AC}^2=AB\times BC(AC>BC).$$




**解析.** 設 $C$ 點已求得，且 $AC=x$，則 $BC=l-x$.

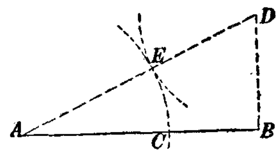
而 $$x^2=l(l-x),\quad x^2+lx-l^2=0.$$

$$x=\frac{-l+\sqrt{l^2+4l^2}}{2}=\sqrt{l^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}-\frac{l}{2}.$$

更令 $y=\sqrt{l^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}$，易知 $y$ 爲以 $l$、$\frac{l}{2}$ 爲腰所作直角三角形之斜邊，而 $x$ 不難求得也.

**作法.** 取 $AB=l$，作 $DB\perp AB$，且 $DB=\frac{1}{2}AB$. 連 $AD$ 即得 $y$.

以 $D$ 爲圓心，$DB$ 爲半徑作圓，與 $AD$ 交於 $E$ 點. 則 $AE=x$. 更以 $A$ 點爲圓心，$AE$ 爲半徑作圓與 $AB$ 之交點，即爲 $C$ 點.




7. 在定線段上作一多邊形與已知多邊形相似.

(D) **面積作圖題** 作一多邊形與一已知多邊形等積而邊數少一.

(E) **正多邊形作圖題.**

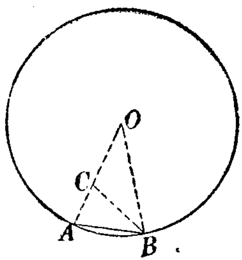
1. 於已知圓作內接及外切正 4、8、16、32、····邊形.

2. 於已知圓作內接及外切正 3、6、12、24、48‧‧‧‧邊形.

3. 於已知圓作內接及外切正 5、10、20、40、‧‧‧‧邊形.

**正十邊形之作法.**

**解.** 設圓之內接正十邊形已作成，而 $AB$ 爲其一邊，連 $OB$、$OA$. 作 $\angle OBA$ 之平分線交 $OA$ 於 $C$ 點.




$$\because \quad \angle AOB=36^\circ,$$

$$\therefore \quad \angle OAB=\angle OBA=72^\circ,$$

$$\angle OBC=\angle ABC=36^\circ,$$

$$\therefore \quad \triangle OAB\sim\triangle BAC.$$

$$\therefore \quad \frac{OA}{AB}=\frac{AB}{AC}.$$

又因 $\triangle ABC$、$\triangle OBC$ 皆爲等腰. 故

$$AB=BC=OC.$$

$$\therefore \quad \frac{OA}{OC}=\frac{OC}{AC},$$

卽

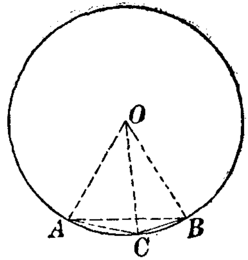
$$\overline{OC}^2=OA\times AC.$$

然則黃金分割已知圓之半徑，其大段卽內接正十邊形之一邊也.

4. 於已知圓作內接及外切正 15、30、60、120‧‧‧‧邊形.

**正十五邊形作法.**

**解.** 設 $AB$ 爲圓之內接正六邊形之一邊，$AC$ 爲圓之內接正十邊形之一邊，則 $BC$ 爲圓之內接正十五邊形之一邊.




$$\because \quad \angle BOC = \angle AOB - \angle AOC$$
$$= 60° - 36° = 24°.$$

故 $BC$ 爲圓內接正十五邊形之一邊.

**四. 條件** 作圖應具備之條件，不能過多，亦不能太少. 條件太少，則作圖不定，太多則作圖不可能. 且已知之條件，須互相獨立，初等幾何學中所述之作圖題不外下列各種，茲將每種所需條件求述之如下：

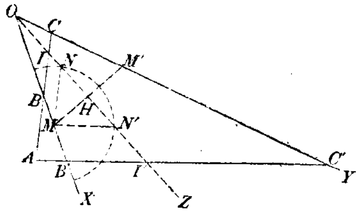
| | | | |
|---|---|---|---|
| 1．求點， | 2. | 2．作直線， | 2, |
| 3．作圓， | 3. | 4．作三角形， | 3. |
| 5．作等腰三角形， | 2. | 6．作直角三角形， | 2. |
| 7．作正三角形， | 1. | 8．作四邊形， | 5. |
| 9．作梯形， | 4. | 10．作平行四邊形， | 3. |
| 11．作矩形， | 2. | 12．作菱形， | 2. |
| 13．作正方形， | 1. | 14．作正多邊形， | 1. |

**五. 方法.**

**1．解析法.**

**例 1．** 求過定點 $A$ 作截線，截定角 $XOY$ 之兩邊於 $B$、$C$. 使

有 $$OB+OC=2BC.$$




**解析.** 設此問題已解決，作 $\angle XOY$ 之平分線 $OZ$，與 $BC$ 相交於 $I$ 點，則

$$\frac{OB}{BI}=\frac{OC}{CI}=\frac{OB+OC}{BI+CI}=\frac{OB+OC}{BC}=\frac{2BC}{BC}=2.$$

故在 $\triangle OBI$ 內，$\angle BOI$ 已知，又兩邊之比為 2，且 $BI$ 必經過 $A$ 點.

**作法.** 以 $OX$ 上任一點 $M$ 為圓心，$\frac{OM}{2}$ 為半徑，作弧截 $OZ$ 於 $N$，連接 $MN$，並過 $A$ 作 $MN$ 之平行線交 $OX$、$OY$ 於 $B$、$C$. 則 $ABC$ 為所求之線.

**證明.** $$\because\quad \frac{OB}{BI}=\frac{OM}{MN}=2,$$

$$\therefore\quad \frac{OB}{BI}=\frac{OC}{CI}=\frac{OB+OC}{BI+CI}=\frac{OB+OC}{BC}=2.$$

即 $$OB+OC=2BC.$$

故 $ABC$ 為合所求之截線.

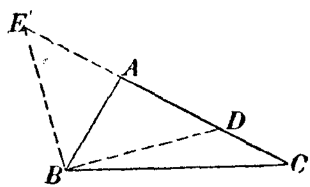
**討論.** 引 $MHM'$ 垂直於 $OZ$，故欲 $N$ 點存在，必 $MN\geq MH$.

但 $\triangle OMM'$ 爲等腰三角形，$MM'$ 爲其底邊，故 $N$ 點存在之條件爲 $OM \geq MM'$.

故如（i）$\angle XOY < 60°$，$OM > MM'$，則爲二點 $N$ 及 $N'$，而有二解.（ii）$\angle XOY = 60°$，$OM = MM'$，僅有一點，且與 $H$ 點相合，而有一解.（iii）$\angle XOY > 60°$，$OM < MM'$，無解.

**例 2.** 已知一底邊及另二邊之和與二底角之差，求作三角形.

**解.** 設已知 $a$、$b+c$、$\angle B - \angle C$. 如 $\triangle ABC$ 已作成，在 $CA$ 及其延線上取 $AD = AE = AB$.




連 $BD$、$BE$.

$$\because \quad \angle CBD = \angle B - \angle ABD$$
$$= \angle B - \angle ADB$$
$$= \angle B - (\angle C + \angle CBD).$$
$$\therefore \quad \angle CBD = \frac{1}{2}(\angle B - \angle C).$$

又 $$\because \quad AD = AE = AB,$$
$$\therefore \quad \angle EBD = 90°,$$
$$\therefore \quad \angle EBC = 90° + \frac{1}{2}(\angle B - \angle C).$$

又 $$\because \quad EC = AC + EA = b + c,$$
$$BC = a.$$

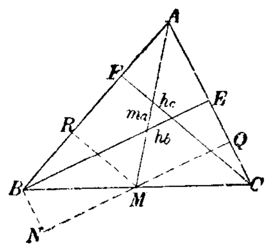
故 $\triangle EBC$ 爲定三角形.

作 $\triangle EBC$. 更作 $EB$ 之中垂線與 $EC$ 之交點卽 $A$ 點. 連 $AB$ 卽得 $\triangle ABC$. 必 $b+c>a$ 方有解.

**註.** 上例之解,雖甚簡略,但在試場中,如是可也. 下同.

**例 3.** 作一三角形,已知二邊上之高,及第三邊上之中線.

**解.** 設已知 $h_b, h_c, m_a$. 如 $\triangle ABC$ 已作成,




$$BE=h_b,\quad CF=h_c,\quad AM=m_a.$$

作 $\quad MQ \parallel BE, \quad MR \parallel CF.$

$$\because \quad \angle AQM=90^\circ,$$

$$MQ=\frac{1}{2}h_b,$$

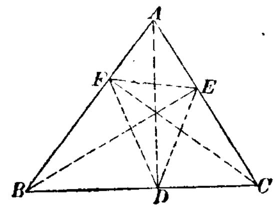
$$\angle ARM=90^\circ, \qquad MR=\frac{1}{2}h_c.$$

$\therefore$ $\triangle ARM$ 及 $\triangle AMQ$ 皆爲定三角形.

再延長 $QM$ 至 $N$, 使 $NQ=BE$. 連 $BN$, 則 $BNQE$ 爲矩形, 因得作法如下:

作 $\triangle ARM$ 及 $\triangle AMQ$. 延長 $QM$ 至 $N$, 使 $MN=QN$, 過 $N$ 點作線平行 $AQ$ 與 $AR$ 之延線交於 $B$ 點, 連 $BM$ 延長之與 $AQ$ 之延線交於 $C$ 點, 卽得 $\triangle ABC$, 必 $m_a>\frac{1}{2}h_c$ 及 $m_a>\frac{1}{2}h_b$ 方有解.

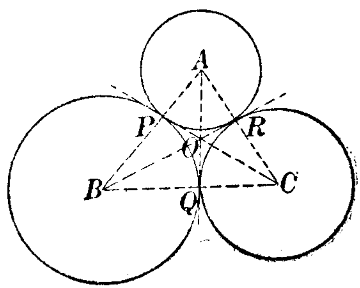
**例 4.** 已知三角形之三垂線之足，求作此三角形.




**解.** 設 $\triangle ABC$ 已作成，$D$、$E$、$F$ 爲其垂足，則 $\triangle DEF$ 爲 $\triangle ABC$ 之垂足三角形.而 $AD$、$BE$、$CF$ 各爲 $\triangle DEF$ 之內角平分線，且 $\triangle ABC$ 之各邊爲 $\triangle DEF$ 之外角平分線.因得作法如下:

作 $\triangle DEF$，更作其內外角平分線，三外角平分線卽爲 $\triangle ABC$ 之三邊.

**例 5.** 以三個已知點爲圓心，作三圓相切.




**解.** 設三圓已作成，$A$、$B$、$C$ 爲三定點，$P$、$Q$、$R$ 爲切點，且三切線相交於 $O$ 點，連 $AB$、$BC$、$CA$ 必分別過 $P$、$Q$、$R$.

$\because \quad OP = OQ,$

$\angle OPB = \angle BQO = 90^\circ.$

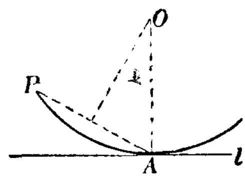
$$\therefore \quad \angle PBO = \angle QBO.$$

倣此得知 $O$ 點爲 $\triangle ABC$ 之內心，故先求 $\triangle ABC$ 之內心，再由內心作各邊之垂線卽得切點 $P$、$Q$、$R$. 更以 $A$、$B$、$C$ 爲圓心，$AP$、$BP$、$CR$ 爲半徑作圓卽得.

**2. 交軌法.**

例 1. 求作一圓與定直線切於定點並通過線外一點.（川大,30 年度).

**解.** 設 $l$ 爲已知線, $A$ 點爲其上已知點, $P$ 點爲線外已知點,所作之圓,其圓心 $O$ 乃下二軌跡之交點.



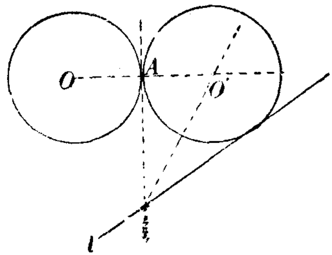

(i) 過 $A$ 點垂直 $l$ 之直線.

(ii) $AP$ 之中垂線.

以 $O$ 點爲圓心, $OA$ 爲半徑作圓,即得所求圓,僅有一解.

**例 2.** 求作一圓:切於一已知直線及一已知圓上之定點.

**解.** 設 $O$ 圓爲已知圓, $A$ 爲其上已知點, $l$ 爲已知直線. 過 $A$ 點作切線,求作圓之圓心 $O'$ 乃下二軌跡之交點.



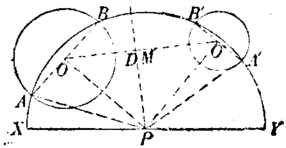

(i) 連 $OA$ 之直線.

(ii) $A$ 點之切線與 $l$ 線之交角平分線.

以 $O'$ 爲圓心, $OA$ 爲半徑作圓即得有二解、一解、或無解.

例 3. 求作一圓:其圓周等分二定圓之圓周且其圓心在定直線上.

**解.** 設 $O$、$O'$ 爲二定圓, $XY$ 爲定直線, $P$ 爲所求圓, 交 $O$ 圓於 $A$、$B$ 二點, 交 $O'$ 圓於 $A'$、$B'$ 二點.




則 $AB$、$A'B'$ 各爲 $O$ 圓 $O'$ 圓之直徑. 連 $OP$、$PO'$、$PA$、$PA'$.

而 $$PO \perp AB, \qquad PO' \perp A'B'.$$

$$\therefore \quad \overline{PO'}^2 - \overline{PO}^2 = (\overline{PA'}^2 - \overline{O'A'}^2) - (\overline{PA}^2 - \overline{OA}^2)$$

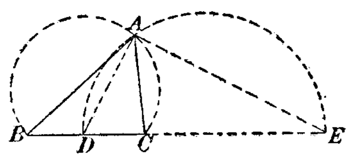
$$= \overline{OA}^2 - \overline{O'A'}^2 \doteq \text{定值}.$$

故 $P$ 點軌跡爲垂直於 $OO'$ 之直線 $DP$.

設 $OO'$ 之中點爲 $M$, 而 $DM = \dfrac{\overline{OA}^2 - \overline{O'A'}^2}{2OO'}$. 該直線與 $XY$ 之交點卽所求之圓心 $P$. 以 $P$ 爲圓心, $PA$ 爲半徑作圓卽得.

**例 4.** 已知底邊 $a$、頂角 $\alpha$、二邊之比 $m:n$, 求作 $\triangle ABC$.

**解.** $\triangle ABC$ 之頂點 $A$ 爲下二軌跡之交點.




(i) 以 $BC$ 爲弦作含 $\alpha$ 角之弧.

(ii) 阿氏圓 卽求 $BC$ 之內外分點 $D$、$E$, 其比値爲 $m:n$, 而以 $DE$ 爲直徑之圓.

連 $AB$、$AC$ 卽得. 有二解、一解、或無解.

**3. 代數法.** 下列命題, 乃本法之基本作圖題, 應熟記之.

($a$、$b$、$c$、$d$ 等表已知線段，$x$、$y$、$z$ 等表所求線段，$m$ 爲有理數).

( i ) 作 $x=a+b$.

( ii ) 作 $x=a-b$.

( iii ) 作 $x=m\times a$.

( iv ) 作 $x=\frac{a}{m}$.

( v ) 作 $x=\frac{ab}{c}$. (乃 $c$、$a$、$b$ 之比例第四項).

( vi ) 作 $x=\frac{a^2}{b}$. (乃 $b$、$a$、$a$ 之比例第三項).

( vii ) 作 $x=\sqrt{ab}$. (乃 $a$、$b$ 之比例中項).

( viii ) 作 $x=\sqrt{a^2+b^2}$. (乃以 $a$、$b$ 爲兩腰作直角三角形之斜邊).

( ix ) 作 $x=\sqrt{a^2-b^2}$. (乃以 $a$ 爲斜邊，$b$ 爲腰所作直角三角形之他腰).

( x ) 作 $x=a\sqrt{2}$. (乃以 $a$ 爲邊之正方形之對角線).

( xi ) 作 $x=a\sqrt{m}$，卽作 $x=\sqrt{a(am)}$. (乃 $a$、$am$ 之比例中項).

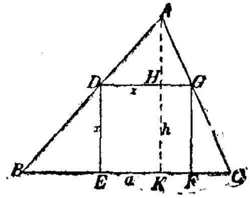
**例 1.** 設 $\triangle ABC$，求作一正方形內接於此三角形，使其一邊與 $BC$ 相合.

**解.** 設 $x$ 爲所求正方形 $DEFG$ 之一邊.

作 $AK\perp BC$，且令 $AK=h$，$BC=a$.

$$\because \quad \triangle ADG \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \quad \frac{DG}{BC}=\frac{AH}{AK},$$




卽
$$\frac{x}{a}=\frac{h-x}{h},$$

$$hx=ah-ax,$$

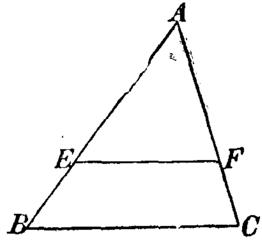
$$\frac{a+h}{a}=\frac{h}{x}.$$

故 $x$ 爲 $a+h$、$a$、$h$ 之比例第四項，因得作法如下:

求得 $a+h$、$a$、$h$ 之比例第四項. 設其長爲 $x$. 作 $AK\perp BC$, 並取 $KH=x$, 過 $H$ 點作 $DG \parallel BC$, 更作 $DE\perp BC$、$GF\perp BC$ 卽得.

例 2. 平行於三角形之一邊作一直線，使此三角形分爲兩部分成等面積.（武大，32 年度）.

解. 設 $EF$ 爲平行於 $BC$ 而等分 $\triangle ABC$ 之直線，則




$$\frac{\triangle AEF}{\triangle ABC}=\frac{1}{2}.$$

設
$$AE=x,$$

$$\because \quad \triangle AEF \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle AEF}{\triangle ABC}=\frac{\overline{AE}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{x^2}{c^2}=\frac{1}{2},$$

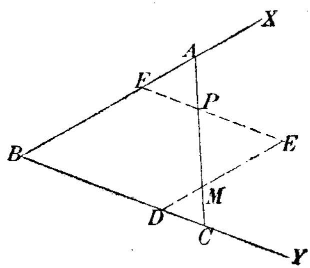
$$\therefore \quad x^2=\frac{1}{2}c^2.$$

而 $x$ 爲 $c$、$\frac{1}{2}c$ 之比例中項,因得作法如下:

求得 $c$、$\frac{1}{2}c$ 之比例中項,設其長爲 $x$, 在 $AB$ 上取 $AE=x$, 更作 $EF \parallel BC$ 即得.

**例 3.** 過已知角內之一已知點,求作一直線,與角之兩邊成一三角形,令與已知三角形等積.

**解.** 設 $\angle XBY$ 爲定角, $P$ 爲定點, 且設 $\triangle ABC$ 爲所求作之三角形.




過 $P$ 點作 $FE \parallel BY$, 且作

$$\square FBDE=\triangle ABC$$

則 $\triangle AFP+\triangle MDC=\triangle PME$.

又 $\because \triangle AFP \sim \triangle MDC \sim \triangle MEP$.

$$\therefore \quad \overline{FP}^2+\overline{CD}^2=\overline{PE}^2.$$

即 $$\overline{CD}^2=\overline{PE}^2-\overline{FP}^2.$$

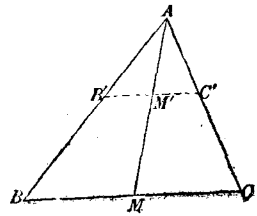
因得作法如下:

過 $P$ 作 $FE \parallel BY$, 且作 $\square FBDE=$所與三角形. 更以 $PE$ 爲斜邊, $FP$ 爲腰作直角三角形, 他腰之長 $=CD$. 於 $DY$ 上作出 $DC$, 連 $CP$ 延長與 $BX$ 交與 $A$ 點, 即得 $\triangle ABC$.

**4. 相似法.**

**例 1.** 已知 $\angle B$、$\angle C$、$m_a$，作 $\triangle ABC$.

**解.** 作任意線段 $B'C'$. 於其兩端之同側作角各等於 $\angle B$ 及 $\angle C$，則得 $\triangle AB'C'$ 與所求 $\triangle ABC$ 相似，但其中線未必等於 $m_a$.



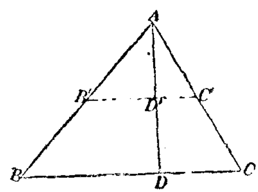

更於中線 $AM'$（或其延線）上取 $M$ 點，使 $AM=m_a$.

過 $M$ 點作 $BC \parallel B'C'$，與 $AB'$、$AC'$（或其延線）交於 $B, C$. 卽得 $\triangle ABC$.

**註.** 已知三角形之兩底角及下列諸線之一，均可倣此例作之. (a) 底邊上之高，(b) 頂角之平分線，(c) 內切圓半徑，(d) 傍切圓半徑，(e) 外接圓半徑，(f) 兩腰之和或差，(g) 三角形之周界.

**例 2.** 已知三角形各頂點向其對邊所引垂線之長，求作此形.（辰谿區聯考，31 年度）.

**解.** 設 $\triangle ABC$ 已作成，其三高爲 $h_a, h_b, h_c$.




則
$$ah_a=bh_b=ch_c,$$

同以 $h_ah_b$ 除之得

$$\frac{a}{h_b}=\frac{b}{h_a}=\frac{c}{\frac{h_ah_b}{h_c}}$$

可知所求之三角形與以 $h_b$、$h_a$、$\frac{h_a h_b}{h_c}$ 爲邊之三角形相似.

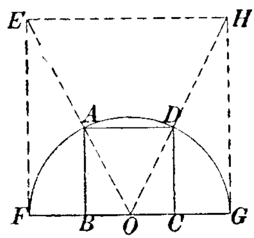
又令 $x=\frac{h_a h_b}{h_c}$, 則 $x$ 爲 $h_c$、$h_a$、$h_b$ 之比例第四項. 吾人按法先求得 $x$, 更以 $h_b$、$h_a$、$\frac{h_a h_b}{h_c}$ 爲邊作出 $\triangle AB'C'$, 其底邊上之高爲 $AD'$. 如 $AD'\neq h_a$, 則於 $AD'$(或其延線)上取 $AD=h_a$. 過 $D$ 點作 $BC \parallel B'C'$ 與 $AB'$、$AC'$(或其延線)交於 $B, C$. 卽得 $\triangle ABC$.

必
$$h_a+h_b>\frac{h_a h_b}{h_c},$$

卽
$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}>\frac{1}{h_c}\text{ 方有解.}$$

**例 3.** 求作半圓內之內接正方形. (武大, 22 年度).

**解.** 設 $FG$ 爲半圓之直徑, $O$ 爲圓心. $ABCD$ 爲所作之內接正方形, 於 $F$、$G$ 兩端各作垂線而與 $OA$、$OD$ 之延線分別交於 $E$、$H$ 兩點.




$$\because\quad AB=DC,$$
$$OA=OD,$$
$$\angle ABO=\angle DCO=90^\circ,$$
$$\therefore\quad \triangle ABO\cong\triangle DCO,$$
$$\therefore\quad OB=OC,$$
$$\because\quad \triangle OAB\sim\triangle OEF,$$

$$\therefore \quad \frac{OB}{OF}=\frac{AB}{EF}. \tag{1}$$

$$\because \quad \triangle ODC \sim \triangle OHG,$$

$$\therefore \quad \frac{OC}{OG}=\frac{DC}{HG}. \tag{2}$$

但 $OB=OC$,

$OF=OG$,

$AB=DC$,

$\therefore \quad EF=HG$.

又 $\because \quad OB=\frac{1}{2}AB$,

由 (1) 知 $OF=\frac{1}{2}EF$.

$\because \quad OC=\frac{1}{2}CD$,

由 (2) 知 $OG=\frac{1}{2}HG$.

$\therefore \quad OF+OG=EF$.

卽 $FG=EF$.

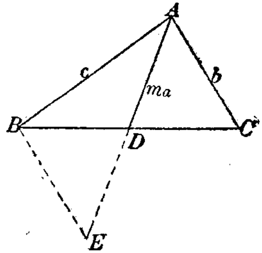
因知 $EFGH$ 亦爲正方形, 且與所作之正方形相似. 故得作法如下:

以 $FG$ 爲一邊於半圓之同側(異側亦可)作正方形 $EFGH$, 連 $OE$ 與半圓交於 $A$ 點, 連 $OH$ 與半圓交於 $D$, 連 $AD$. 更作 $AB\perp FG$, $DC\perp FG$ 卽得.

**5. 旋轉法.**

**例 1.** 已知三角形之兩邊及第三邊上之中線,作此三角形.

**解.** 設 $\triangle ABC$ 已作成,已知兩邊為 $b$、$c$,中線為 $m_a$.




延長 $AD$ 至 $E$ 使 $DE=AD$.

連 $BE$ 則 $\triangle EDB\cong\triangle ADC$.

(按卽將 $\triangle ADC$ 對於 $D$ 點旋轉 $180°$ 至 $\triangle EDB$ 之位置也).

$$\because \quad BE=AC=b,$$

$$AB=c,$$

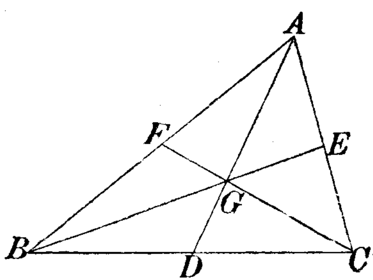
$$AE=2AD=2m_a,$$

故 $\triangle ABE$ 為定三角形.

作 $\triangle ABE$, 求 $AE$ 之中點 $D$, 連接 $BD$, 延長至 $C$ 使 $DC=BD$, 卽得 $\triangle ABC$. 必 $b+c>2m_a$ 方有解.

**例 2.** 已知三角形三中線之長,求作此三角形.

**解.** 設 $\triangle ABC$ 已作成,其三中線為 $m_a$、$m_b$、$m_c$,且相交於 $G$ 點.




$$\because \quad BG=\frac{2}{3}m_b$$

$$CG=\frac{2}{3}m_c,$$

$$DG=\frac{1}{3}m_a.$$

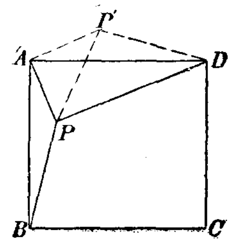
且 $GD$ 爲 $\triangle GBC$ 之中線，故按例 1，此三角形可作。

作 $\triangle GBC$. 更作中線 $GD$. 延長 $DG$ 至 $A$ 使 $DA=m_a$. 連 $AB, AC$ 卽得.

必 $$\frac{2}{3}(m_b+m_c)>\frac{2}{3}m_a,$$

卽 $$m_b+m_c>m_a \text{ 方有解.}$$

例 3. 求作一正方形 $ABCD$，已知其內一定點 $P$，並已知 $PA$、$PB$、$PD$ 之長.




解. 設正方形 $ABCD$ 已作成，作 $P'A\perp AP$，且使 $P'A=PA$，連 $P'D$，則

$$\triangle P'AD\cong\triangle PAB.$$

（按卽將 $\triangle PAB$ 對於 $A$ 點旋轉 $90^\circ$ 至 $\triangle P'AD$ 之位置也）.

連 $P'P$.

因 $$P'A=PA,$$

$$\angle P'AP=90^\circ,$$

而 $\triangle P'AP$ 爲定 $\triangle$.

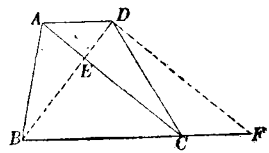
又因 $P'D=PB$，而 $\triangle P'PD$ 亦爲定 $\triangle$.

由是得所求正方形一邊 $AD$，以之爲邊作正方形卽得.

**6. 平行移動法.**

**例 1.** 已知梯形之兩底、一對角線，及兩對角線所夾之角，求作此梯形.

**解.** 設梯形 $ABCD$ 已作成，過 $D$ 點作與 $AC$ 平行線交 $BC$ 延線於 $F$ 點.（按卽將梯形 $ABCD$ 之對角線 $AC$ 平行移動至 $DF$ 位置也）.




$\because$ $ACFD$ 爲 ▱， $\therefore$ $CF=AD$,

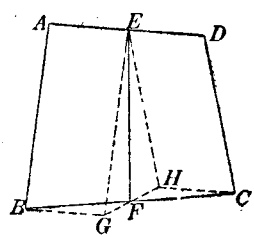
$DF=AC$, $\angle BDF=\angle BEC$.

故 $\triangle DBF$ 爲定 △.

作 $\triangle DBF$，過 $D$ 點作 $DA \parallel BF$，且使 $DA$ 等於上底，更取 $FC$ 等於上底，連 $AB$、$DC$ 卽得.

**例 2.** 已知四邊形之四邊及連接一組對邊中點之線，求作此四邊形.

**解.** 設四邊形 $ABCD$ 已作成，$AD$ 之中點爲 $E$，$BC$ 之中點爲 $F$. 過 $E$ 點作 $EG \parallel AB$ 且使 $EG=AB$.（按卽將 $AB$ 邊平行移動至 $EG$ 位置也）. 過 $E$ 點作 $EH \parallel DC$，且使 $EH=DC$.（按卽將 $DC$ 邊平行移動至 $EH$ 位置也）.




$\because$ $ABGE$、$EHCD$ 皆爲 ▱，

$\therefore$ $BG=AE=ED=HC$, $BF=FC$.

又 $\because\ BG \parallel AD \parallel CH,$

$\therefore\ \angle FBG = \angle HCF,$

$\therefore\ \triangle BFG \cong \triangle CFH,$ (s.a.s.).

$\therefore\ \angle BFG = \angle CFH,$

故 $G$、$F$、$H$ 共線.

又 $\because\ EG = AB,\ EH = DC,\ GF = FH.$

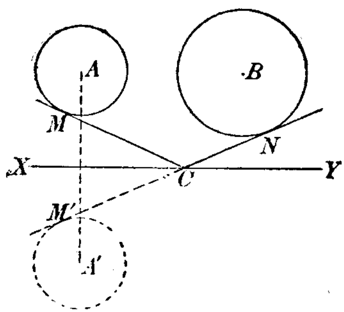
故 $\triangle EGH$ 爲定 $\triangle$.

作 $\triangle EGH$, 以 $GH$ 之中點 $F$ 爲圓心, $\frac{BC}{2}$ 爲半徑作弧, 更以 $G$ 爲圓心, $\frac{AD}{2}$ 爲半徑作弧, 兩弧交點卽 $B$ 點. 作 $\square ABGE$. 延長 $AE$ 至 $D$, 使 $ED = AE$. 更延長 $BF$ 至 $C$ 點, 使 $FC = BF$. 連 $CD$. 得四邊形 $ABCD$. 必 $AB + CD > 2EF$ 方有解.

**7. 對稱法.**

**例 1.** 求於定直線 $XY$ 上取一點 $C$, 引其同側兩定圓 $A$、$B$ 之切線 $CM$、$CN$. 使有

$$\angle MCX = \angle NCY.$$

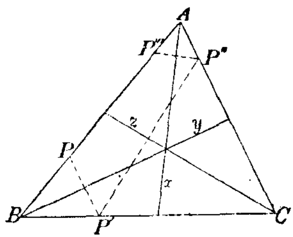



**解.** 作 $A$ 圓對於 $XY$ 之對稱圓 $A'$, 更作 $A'$ 圓 $B$ 圓之公切線 $M'N$, 該線與 $XY$ 之交點卽所求 $C$ 點. 蓋自 $C$ 點作 $A$ 圓之切線 $CM$,

則 $$\angle MCX=\angle M'CX=\angle NCY,$$

故合所求.本例普通情形下有四解.

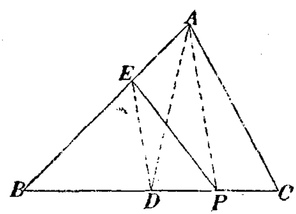
**例 2.** 已知三角形 $ABC$ 之三角平分線爲 $x$、$y$、$z$ 三定直線及 $AB$ 邊上一定點 $P$,求作此三角形.




**解.** 因 $P$ 對於平分線 $y$ 之對稱點 $P'$,必在 $BC$ 邊上. $P'$ 對於平分線 $z$ 之對稱點 $P''$, 必在 $AC$ 邊上. $P''$ 對於平分線 $x$ 之對稱點 $P'''$ 必在 $AB$ 邊上. 連接 $PP'''$ 與 $x$, $y$ 各交於 $A$, $B$. 則 $AB$ 爲所求三角形之邊. 連接 $BP'$ 與 $z$ 交於 $C$, 卽得 $\triangle ABC$。

**8. 頂點移動法.**

**例 1.** 過三角形邊上一點作一直線,平分此三角形之面積.(貴陽區聯考,31 年度).




**解.** 設 $P$ 爲 $BC$ 邊上一定點, $D$ 爲 $BC$ 之中點. 連接 $PA$, 作 $DE \parallel PA$. 更連 $PE$, 卽爲所求之直線.

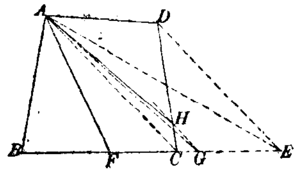
連 $AD$.

$$\because \quad \triangle PED=\triangle AED,$$

$$\therefore \quad \triangle PED+\triangle BDE=\triangle AED+\triangle BDE,$$

$$\therefore \quad \triangle EBP=\triangle ABD=\frac{1}{2}\triangle ABC.$$

**例 2.** 由四邊形之一頂點作二直線分全形爲三等分.




**解.** 過 $D$ 點作線與 $AC$ 平行且與 $BC$ 之延線交於 $E$ 點.

連 $AE$. 則

$$\triangle ABE=ABCD.$$

三等分 $BE$ 於 $F$、$G$ 兩點. 連接 $AF$、$AG$. 則

$$\triangle ABF=\triangle AFG=\triangle AGE.$$

作 $GH \parallel CA$, 與 $CD$ 交於 $H$ 點, 連 $AH$, 則

$$\triangle AHC=\triangle AGC.$$

$$\therefore \quad \triangle AHC+\triangle AFC=\triangle AGC+\triangle AFC.$$

$$\therefore \quad AFCH=\triangle AFG=\frac{1}{3}\triangle ABE=\frac{1}{3}ABCD.$$

故 $AF$、$AH$ 爲所求之二直線.

**六. 雜例.**

**例 1.** 由定圓 $O$ 外之定點 $P$, 作割線 $PAB$ 與圓相交於 $A$、$B$, 使 $PA+PB$ 等於定長 $l$,

**解.** 設合於題意之圖已作成, 作 $OC\perp AB$,

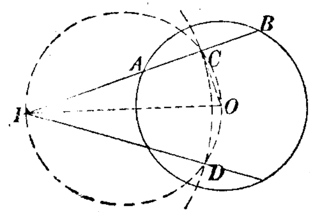
則 $$AC=BC.$$

$$\because \quad PA+PB=PA+(PA+AC+BC)$$

$$=PA+(PA+2AC)=2(PA+AC).$$

$$\therefore \quad l=2PC,$$

$$PC=\frac{l}{2},$$




且 $\angle PCO=90^\circ$.

故 $\triangle PCO$ 爲直角三角形.

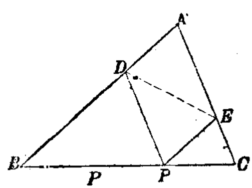
又因 $PO=$定長, $PC=\frac{l}{2}$, 故 $\triangle PCO$ 爲定三角形. 因得作法如下:

以 $PO$ 爲直徑作圓, 更以 $P$ 點爲圓心, $\frac{l}{2}$ 爲半徑作圓, 兩者相交於 $C$、$D$ 兩點, 連 $P$、$C$ 及 $P$、$D$ 之直線即爲所求之直線.

**例 2.** 於三角形 $ABC$ 之一邊 $BC$ 上, 求一 $P$ 點. 然後由此 $P$ 點引與 $AB$、$AC$ 之平行線 $PE$、$PD$. 使所成之平行四邊形 $ADPE$ 等於原三角形 $ABC$ 之九分之四.

**解.** 設圖已作成, 則

$$\frac{ADPE}{\triangle ABC}=\frac{4}{9}.$$




連 $DE$, $\quad \because \quad \triangle ADE \cong \triangle PDE$.

$$\therefore \quad \frac{\triangle ADE}{\triangle ABC}=\frac{2}{9}.$$

但 $$\frac{\triangle ADE}{\triangle ABC}=\frac{AD\cdot AE}{AB\cdot AC},$$

$$\therefore\quad \frac{AD\cdot AE}{AB\cdot AC}=\frac{2}{9}. \qquad (1)$$

又因
$$AB \parallel PE,$$
$$AC \parallel DP,$$
$$\therefore\quad \frac{AE}{AC}=\frac{BP}{BC},$$
$$\frac{AD}{AB}=\frac{CP}{BC}.$$

代入(1)得
$$\frac{CP}{BC}\times\frac{BP}{BC}=\frac{2}{9},$$

卽
$$2\overline{BC}^2=9PC\times PB.$$

故於 $BC$ 上求一點 $P$，使 $\overline{BC}^2=\frac{9}{2}PB\times PC$. (2)卽得.

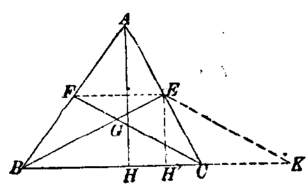
令 $BC=a$，$PB=x$，則 $PC=a-x$.

代入(2)，
$$a^2=\frac{9}{2}x(a-x).$$

解得 $x=\frac{2}{3}a$ 或 $x=\frac{1}{3}a$. 卽由 $B$ 點向 $C$ 點方面算起，$P$ 點在 $BC$ 之 $\frac{2}{3}$ 處或 $\frac{1}{3}$ 處也.

**例 3.** 已知 $m_b$、$m_c$、$h_a$，作 $\triangle ABC$.

**解.** 設 $\triangle ABC$ 已作成，連 $EF$，則 $EF\parallel BC$. 過 $E$ 點作 $FC$ 之平行線而與 $BC$ 之延線交於 $K$ 點. 則 $EFCK$ 爲 ▱.



$$EK=CF=m_c.$$

作 $EH'\perp BK$, $\because \quad \frac{EH'}{AH}=\frac{CE}{CA}=\frac{1}{2}$,

$$\therefore \quad EH'=\frac{1}{2}AH=\frac{h_a}{2}.$$

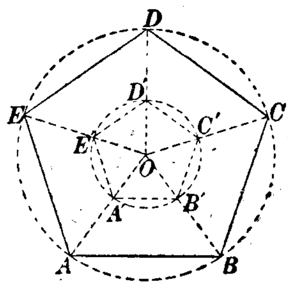
且 $\angle EH'K=90^\circ$.

故 $\triangle BEH'$、$\triangle EH'K$ 爲定三角形,卽 $\triangle EBK$ 爲定三角形.因得作法如下:

作 $\triangle EBK$, 於 $BE$ 上取 $BG=\frac{2m_b}{3}$, 以 $G$ 爲圓心, $\frac{m_c}{3}$ 爲半徑作圓與過 $E$ 點與 $BK$ 之平行線交於 $F$ 點. 連 $FG$, 延長之與 $BK$ 交於 $C$ 點. 連 $BF$、$CE$ 相交於 $A$ 點, 卽得 $\triangle ABC$.

**例 4.** 已知一邊 $l$, 求作一正五邊形.

**解.** 設正五邊形 $ABCDE$ 已作成其一邊 $AB$ 之長爲 $l$, 且設 $A'B'C'D'E'$ 爲同心圓中之內接正五邊形.




則 $$\frac{A'B'}{AB}=\frac{OB'}{OB}.$$

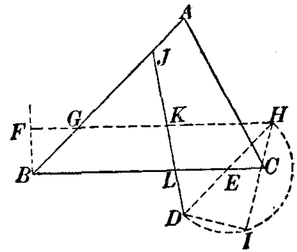
$$\therefore \quad OB=\frac{OB'\times AB}{A'B'}=\frac{OB'\times l}{A'B'}.$$

因知如先作一任意正五邊形 $A'B'C'D'E'$, 則 $OB'$ 及 $A'B'$ 已定, 故 $OB$ 可求得.

更以 $O$ 點爲圓心, $OB$ 爲半徑作圓與 $OA'$、$OB'$、$OC'$、$OD'$, $OE'$ 相交, 卽得正五邊形之角頂矣!

**例 5.** 由已知三角形外一定點, 求作一直線, 平分此三角形之面積.

**作法.** 設三角形爲 $ABC$, 定點爲 $D$.




過 $D$ 點作直線與 $AB$ 平行, 交 $BC$ 於 $E$ 點, 作 $BC$ 之垂線 $BF$, 使

$$BF \times BE = \frac{1}{2}\triangle ABC.$$

過 $F$ 點引直線與 $BC$ 平行, 交 $AB$ 於 $G$ 點, $DE$ 之延線於 $H$ 點. 以 $DH$ 爲直徑作圓.

在圓周上取 $I$ 點, 使 $DI = DE$. 連 $HI$. 再與 $AB$ 上取 $J$ 點, 使 $GJ = HI$, 則 $DJ$ 卽爲所求之直線.

**證.** 設 $DJ$ 交 $FH$ 於 $K$ 點, 交 $BC$ 於 $L$ 點.

因 $LE \parallel KH$.

故 $$\frac{\triangle DHK}{\triangle DEL} = \frac{\overline{DH}^2}{\overline{DE}^2} = \frac{\overline{DH}^2}{\overline{DI}^2}.$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle DHK - \triangle DEL}{\triangle DEL} = \frac{\overline{DH}^2 - \overline{DI}^2}{\overline{DI}^2} = \frac{\overline{HI}^2}{\overline{DE}^2}.$$

又因 $$\triangle DEL \sim \triangle JGK,$$

$$\therefore\quad \frac{\triangle JGK}{\triangle DEL}=\frac{\overline{JG}^2}{\overline{DE}^2}=\frac{\overline{HI}^2}{\overline{DE}^2}.$$

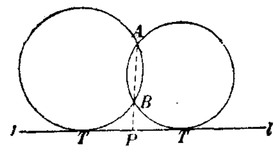
$$\therefore\quad \triangle DHK-\triangle DEL=EHKL=\triangle JGK.$$

$$\because\quad \triangle JBL=\triangle JGK+GBLK=EHKL+GBLK$$

$$=\square GBEH=BE\times BF=\frac{1}{2}\triangle ABC.$$

**例 6.** 求作一圓過二定點且切一已知線.

**解.** 設 $A$、$B$ 爲已知點，$l$ 爲已知線. 連結 $AB$ 交 $l$ 線於 $P$ 點，更設 $T$ 爲所求圓與 $l$ 線相切之切點.




則 $$\overline{PT}^2=PA\times PB.$$

故 $PT$ 爲 $PA$、$PB$ 之比例中項而可決定. 更過 $A$、$B$、$T$ 三點作圓卽得.

因 $T$ 點可在 $P$ 點之兩側截取，故普通情形下本例有二解，如 $A$、$B$ 在 $l$ 線之異側或均在 $l$ 線上，則無解. 如 $T$ 點爲 $AB$ 之中垂線與 $l$ 線之交點，則僅有一解. 又 $A$ 或 $B$ 在 $l$ 線上時，亦僅有一解.

## 習　題　七

1. 於三角形 $ABC$ 之 $BC$ 邊上，求一點 $D$，使

$$\overline{AD}^2=BD\times DC.$$

2．引與定直線 $XY$ 之平行直線，與三角形 $ABC$ 之邊 $AB$、$AC$ 相交於 $D$、$E$ 使 $BD=EA$.

3．作一三角形，已知其一邊上之高、中線及分角線.（同濟大，32 年度）.

4．已知一正方形之對角線與其一邊之差，求作此正方形.（中大，33 年度）.

5．設已知一梯形各邊之長，試作此梯形.（中大，20 年度）.

6．已知頂角 $\angle A$ 及其平分線 $t_a$ 與其周界 $p$，求作 $\triangle ABC$.

7．已知一三角形之高、頂角及夾頂角兩邊之和，求作此三角形.

8．已知一梯形之上底較其高短，求作此梯形之內接正方形，其一邊與梯形之下底相合.（統考，28 年度）.

9．求作一圓切一已知圓，並切一已知直線於一已知點.（清華大，25 年度）.

10．已予一圓及圓外之一點 $P$，求自 $P$ 點作圓之割線使其在圓內之部分等於已知長 $l$.（中大，32 年度）.

11．已知底邊 $a$、頂角 $A$、$\angle A$ 之平分線 $t_a$，作 $\triangle ABC$.

12．試作一正方形，使其外接一已知四邊形.（國立女子師範學院，33 年度）.

13．求在 $\triangle ABC$ 之 $AB$ 及 $AC$ 上，各取 $D$ 及 $E$，而使

$BD : DE : EC = 1 : 2 : 3$.（復旦大，33 年度）.

14．求作一圓切於二定直線 $AB$、$AC$ 而通過於此二直線間之一定點 $D$.（武大、川大、東北大聯考，31 年度）.

15．求作一圓過二定點且與一定圓相切.（復旦大，32 年度）.

16．求作一圓切一定圓於一定點且切他一定圓.

17．作三角形，已知其面積及一邊與此邊之一隣角.（同濟大，31 年度）.

18．過四邊形邊上一定點，試作一直線平分四邊形面積為二等分.

19．於三角形 $ABC$ 內求一點 $O$，使直線 $OA$、$OB$、$OC$ 分此面積爲三等分.（中大，33 年度）.

20．有三平行直線，作一定正三角形，令其三個角頂各在一直線上.

# 第 四 章

# 計 算 問 題

## 一. 記號.

$a$、$b$、$c$ = $\triangle ABC$ 之邊.

$m_a = a$ 邊上之中線.

$h_a = a$ 邊上之高.

$t_a = A$ 角之半分線.

$R$ = 外接圓之半徑.

$r$ = 內切圓之半徑.

$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

$A$ = 面積.

$b$ = 底.

$d$ = 直徑，正方形或菱形之對角線.

$S_n$ = 正 $n$ 邊形之一邊.

$b_1$ 及 $b_2$ = 梯形之二底.

$b'=b$ 邊在 $c$ 邊上之射影.

$p=$周界.

## 二. 公式.

### 1. 線值公式.

直角 △　$a^2+b^2=c^2$,　($c=$斜邊).

斜角 △　$a^2=b^2+c^2\pm 2b'c$.　（因 $\angle A$ 爲鈍角或銳角而定）.

圓周　$C=2\pi R=\pi d$.

正方形之對角線　$d=b\sqrt{2}$.

等邊 △　$h=\frac{b}{2}\sqrt{3}$.

$S_3=R\sqrt{3}$,　$S_4=R\sqrt{2}$,　$S_6=R$.

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}.$$

$$t_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{abc(s-a)}.$$

在相似多角形內：　$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots=\frac{p}{p'}$.

$$S_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-S_n^2}}.$$

$$弧=\frac{圓心角}{360^\circ}\times 2\pi R.$$

在圓內: $\dfrac{C}{C'}=\dfrac{d}{d'}=\dfrac{R}{R'}$.

**2. 面積公式.**

矩形 $bh$.

正方形 $b^2$.

平行四邊形 $bh$.

三角形 $\dfrac{bh}{2}$ 或 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

等邊△ $\dfrac{b^2}{4}\sqrt{3}$.

梯形 $\dfrac{(b_1+b_2)h}{2}$.

菱形 $\dfrac{d_1d_2}{2}$.

正多邊形 $\dfrac{pr}{2}$.

圓 $\pi R^2$ 或 $\dfrac{1}{2}CR$ 或 $\dfrac{1}{4}\pi R^2$.

扇形 $\dfrac{1}{2}$弧$\times R$ 或 $\dfrac{\text{圓心角}}{360^\circ}\times\pi R^2$.

弓形 扇形±由弦二端作半徑與弦所成之△.

相似多角形 $\dfrac{A}{A'}=\dfrac{a^2}{a'^2}=\dfrac{p^2}{p'^2}$.

二圓 $\dfrac{A}{A'}=\dfrac{R^2}{R'^2}=\dfrac{d^2}{d'^2}$.

**例 1.** $n$ 邊形之對角線有若干?(武大, 23 年度).

**解.** 因兩角頂可連一直線, 故共連直線為 ${}_nC_2$ 條. 但其中有 $n$ 條為邊, 因得對角線之總數為

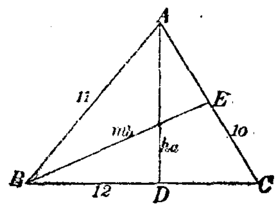
$${}_nC_2-n=\frac{n(n-3)}{2}.$$

**例 2.** 設三角形三邊之長依次為 10 尺、11 尺、12 尺. 則其最長之中線及最低之高各長幾何?(中大, 25 年度).

**解.** 設 $\triangle ABC$ 中,

$$b=10,\quad c=11,\quad a=12.$$

則 $m_b$ 為最長之中線, $h_a$ 為最低之高.




按公式:

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2(c^2+a^2)-b^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2(121+144)-100}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{530-100}=\frac{1}{2}\sqrt{430}\text{ 尺}.$$

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

令 $$s=\frac{10+11+12}{2}=\frac{33}{2},$$

$$s-a=\frac{33}{2}-12=\frac{9}{2},$$

$$s-b=\frac{33}{2}-10=\frac{13}{2},$$

$$s-c=\frac{33}{2}-11=\frac{11}{2}.$$

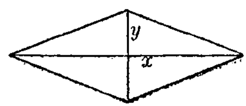
$$\therefore\quad h_a=\frac{2}{12}\sqrt{\frac{33}{2}\times\frac{9}{2}\times\frac{13}{2}\times\frac{11}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}\sqrt{11^2\times3^2\times39}$$

$$=\frac{11}{8}\sqrt{39}\text{ 尺.}$$

**例 3.** 已知菱形之面積為 120 方尺，對角線之和為 34 尺，求邊長.（中大，23 年度）.

**解.** 設菱形之二對角線長，一為 $2x$，一為 $2y$.




按題意 $$2(x+y)=34,$$

即 $$x+y=17.\quad 2xy=120,\quad xy=60.$$

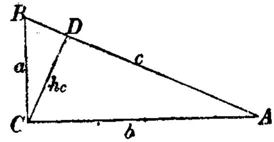
解得 $$x=12,\qquad y=5.$$

故邊長為 $$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13\text{ 尺.}$$

**例 4.** 直角三角形二邊長 $a$ 寸與 $b$ 寸，弦長 $c$ 寸，求自角至弦所作垂線之長.（清華大，23 年度）.

**解.** $\because \quad \triangle ABC \sim \triangle ACD,$

$$\therefore \quad \frac{BC}{CD}=\frac{AB}{AC}.$$

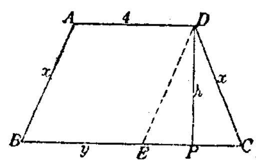



即
$$\frac{a}{h_c}=\frac{c}{b},$$

$$\therefore \quad h_c=\frac{ab}{c}\text{寸}.$$

**例 5.** 已知等腰梯形之上底爲 4 尺，周長 24 尺，面積 28 方尺. 並知上底小於下底，求其下底及高各長幾何？（統考，28 年度）.

**解.** 設 $h$ 爲梯形 $ABCD$ 之高，$x$ 爲其腰，$y$ 爲其下底，引 $DE \parallel AB$，則 $ABED$ 爲 $\square$.




$$\therefore \quad BE=AD=4,$$
$$EC=y-4,$$
$$PC=\frac{y-4}{2}.$$

按題意得
$$2x+y+4=24. \qquad (1)$$
$$\frac{(y+4)h}{2}=28. \qquad (2)$$
$$x^2=h^2+\frac{(y-4)^2}{4}. \qquad (3)$$

由 (1)
$$x=\frac{20-y}{2}.$$

代入(3) $$\frac{(20-y)^2}{4}=h^2+\frac{(y-4)^2}{4}.$$

化簡得 $$y=\frac{96-h^2}{8}. \qquad (4)$$

代入(2),化簡得 $$h^3-128h+448=0.$$

即 $$(h-4)(h^2+4h-112)=0.$$

$$\therefore\quad h=4,$$

或 $$h=-2\pm2\sqrt{29}.$$

$$\because\quad h>0,$$

$$\therefore\quad h=4\text{ 尺},$$

或 $$h=(-2+2\sqrt{29})\text{尺}.$$

代入(4) $$h=4\text{ 尺},$$

$$y=10\text{ 尺}.$$

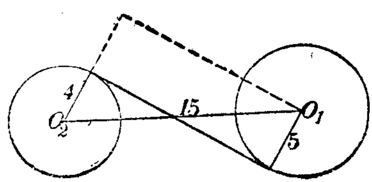
$$h=(-2+2\sqrt{29})\text{尺},$$

$$y=(\sqrt{29}-3)\text{尺}.$$

**例 6.** 二圓之半徑為 4 寸及 5 寸,其圓心之距離為 15 寸,求二圓較短之公共切線之長.(北大,24 年度).

**解.** 設兩圓心之距離為 $d$,兩圓之半徑為

$$r_1、r_2(r_1>r_2).$$




則內公切線之長及外公切線之長各為

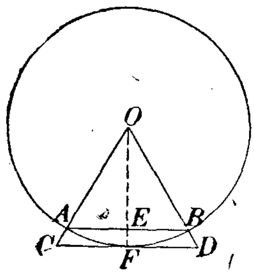
$$\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}, \text{ 及 } \sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}.$$

故以內公切線較短，其長度求得為

$$\sqrt{15^2-(4+5)^2}=\sqrt{144}=12 \text{ 寸}.$$

**例 7.** 求圓之內接正六邊形與外切正六邊形之面積之比.

**解.** 作等於半徑 $OA$ 之弦 $AB$，則 $AB$ 為內接正六邊形之一邊. 於 $AB$ 弧之中點 $F$ 引切線與 $OA$、$OB$ 之延線各相交於 $C, D$. 則 $CD$ 為外切正六邊形之一邊.




因 $$\frac{\text{內接正六邊形}}{\text{外切正六邊形}}=\frac{AB^2}{CD^2}.$$

又因 $$\triangle OAB \sim \triangle OCD,$$

$$\therefore \quad \frac{\overline{AB}^2}{\overline{CD}^2}=\frac{\overline{OE}^2}{\overline{OF}^2}.$$

設 $OA=r$, 則 $OF=r$,

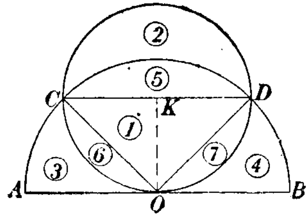
$$OE=\sqrt{r^2-\left(\frac{r}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}r.$$

故 $$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{CD}^2}=\frac{\overline{OE}^2}{\overline{OF}^2}=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2}{r^2}=\frac{\frac{3}{4}r^2}{r^2}=\frac{3}{4}.$$

**例 8.** 於下圖中，$OACDB$ 為半圓，$\triangle COD$ 為等腰直角三角形，其斜邊 $CD$ 與 $AB$ 平行. 圓 $OCD$ 為以 $CD$ 為直徑之圓.

求證: ①=②=③+④ 及 ⑤=⑥+⑦.

**解.** 設 $r$ 爲 $O$ 圓之半徑,則




$$①=\frac{1}{2}r^2.$$

由 $O$ 點引 $CD$ 之垂線 $OK$,則

$$CK=OK=DK.$$

$$\therefore\quad 2\overline{OK}^2=r^2,$$

$$OK=\frac{r}{\sqrt{2}}.$$

故小圓之面積 $=\pi\times\overline{OK}^2=\pi\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{r^2}{2}\pi.$

$\therefore$ 半圓 $COD=\frac{\pi r^2}{4}.$

$\therefore$ ⑥+⑦=半圓 $COD-\triangle COD$

$$=\frac{\pi r^2}{4}-\frac{1}{2}r^2=\frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right).\qquad(2)$$

又因 $\angle COD=90°$,故弧 $CD$ 爲 $O$ 圓之圓周之 $\frac{1}{4}$; 而扇形 $COD$ 之面積 $=\frac{1}{4}\pi r^2$

$\therefore$ ⑤=扇形 $COD-$①$=\frac{1}{4}\pi r^2-\frac{1}{2}r^2=\frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$

$\therefore$ ⑤=⑥+⑦.

又 $②=$半圓 $COD-⑤=\frac{\pi r^2}{4}-\frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\frac{r^2}{2}.$

$\therefore\quad ①=②.$

又 $\because\quad ③+④=$半圓 $OACDB-$半圓 $COD-⑤$

$$=\frac{\pi r^2}{2}-\frac{\pi r^2}{4}-\frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\frac{r^2}{2}.$$

$\therefore\quad ①=②=③+④.$

# 習　題　八

1．有二凸多邊形，已知其有 16 邊及 41 根對角線，問此二多邊形各有幾邊．(中大，32 年度)． 答．7、9.

2．設有二圓，其半徑一為 4 寸，一為 5 寸，而二圓之中心距離為 6 寸，問其共通弦之長幾何？(統考，武昌區 27 年度)．

答．$\frac{5}{2}\sqrt{7}$ 寸.

3．已知圓半徑為 10 尺，求其內接及外切正六邊形之周界及面積． 答．60 尺，$150\sqrt{3}$ 方尺；$40\sqrt{3}$ 尺，$200\sqrt{3}$ 方尺.

4．三角形之三邊為 9、8、9，求各頂點至內切圓與邊相切之點之距離． 答．$4,4,\frac{4}{3}\sqrt{29}$；$4,4,\frac{4}{3}\sqrt{29}$；$5,5,\sqrt{65}$.

5．$AB$ 弦上立一弓形，於 $AB$ 之中點 $C$，作垂線交圓弧於 $D$，設 $CD=a$，$AD=2a$，求此弓形之面積．

答．$\frac{a^2}{3}(4\pi-3\sqrt{3})$.

6. 設三角形 $ABC$ 之邊 $AC$、$AB$、$BC$ 之長，分別爲 51 寸、52 寸、53 寸，今以 $BC$ 爲直徑作圓，令交 $AB$、$AC$ 於 $D$、$E$. 則 $DB$、$DC$ 及 $DE$ 之長各如何？ 答. 28寸, 45寸, 24.9寸.

7. 有一圓弧，其弦之長爲 1 尺 2 寸，其弦之中點之垂線之長(在弧與弦之間之部分)爲 2 寸，求圓之直徑. 答. 2尺.

8. 設圓 $O$ 之半徑爲 $r$, 在此圓中作三個等圓互相外切且內切於圓 $O$. 試求此三等圓之半徑. (交大, 33 年度).

答. $(2\sqrt{3}-3)r$.

9. 設 $E$、$F$、$G$、$H$ 各爲以定長 $a$ 尺及 $b$ 尺爲邊之矩形 $ABCD$ 之邊 $AB$、$BC$、$CD$、$DA$ 之中點，求以 $AG$、$BH$、$CE$、$DF$ 所作成之四邊形之面積. 答. $\frac{1}{5}ab$ 方尺.

10. 設 $a$ 寸、$b$ 寸、$c$ 寸爲三角形 $ABC$ 三邊之長，而 $D$、$E$、$F$ 爲其各角之平分線與對邊之交點. 求三角形 $DEF$ 與三角形 $ABC$ 面積之比. 答. $\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

11. 設有互相外切之三圓，其半徑各爲 3 寸、4 寸、4 寸. 求以切點爲頂點之三角形之面積. 答. $\frac{48\sqrt{33}}{49}$ 方寸.

12. 正方形 $ABCD$ 之對角線交於 $O$ 點，以各頂點 $A$、$B$、$C$、$D$ 爲圓心，對角線長之一半爲半徑，在正方形內作弧交各邊順序爲 $E$、$F$、$G$、$H$、$L$、$K$、$M$、$N$ 點，試求曲線形 $OEF$、$OGH$、$OLK$、$OMN$ 面積之和. 答. $2a^2(\pi-2)$.

13. 半徑為 2.5 尺之二等圓互相通過圓心而相交, 求此兩圓共同部分之面積. 答. $2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2$ 方尺.

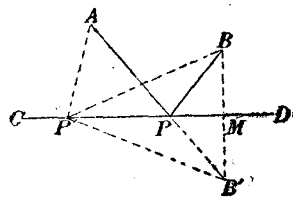
14. 在圓內作二垂直相交之直徑 $AOB$ 及 $COD$, 再二等分 $AO$ 於 $E$, 以 $E$ 為圓心, $EC$ 為半徑, 畫弧交 $OB$ 於 $F$. 則 $CF$ 即為 $O$ 圓內接正五邊形之一邊長. 試證之. (復旦大, 33 年度).

# 第五章

# 極大極小問題

## 一. 定理.

1. $A$、$B$ 爲在直線 $CD$ 同側之二點, $P$ 爲 $CD$ 上一點. 如 $AP+BP$ 爲極小, 則 $AP$、$BP$ 與 $CD$ 成等角.




證. 作 $BM \perp CD$, 延長至 $B'$ 點, 且使 $B'M = BM$.

連 $AB'$ 與 $CD$ 交於 $P$ 點.

在 $CD$ 上任取一點 $P'$, 連 $P'A$、$P'B$、$P'B'$.

$$\because \quad BP' = B'P',$$

$$\therefore \quad AP' + BP' = AP' + B'P' > AB',$$

即 $$AP' + BP' > AP + B'P.$$

但 $$B'P = BP,$$

$$\therefore \quad AP' + BP' > AP + BP.$$

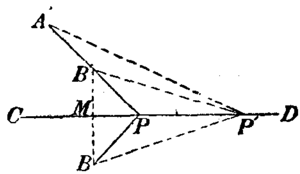
故 $AP+BP$ 爲極小.

又 $\because$ $\triangle BPM \cong \triangle B'PM$, (s.a.s.).

$\therefore$ $\angle BPM = \angle B'PM = \angle APC$.

**2.** $A$、$B$ 爲在直線 $CD$ 異側之二點, $P$ 爲 $CD$ 上一點. 如 $AP-BP$ 爲極大, 則 $AP$、$BP$ 與 $CD$ 成等角.

證. 作 $BM \perp CD$, 延長至 $B'$ 點, 且使 $BM = B'M$. 連 $AB'$ 與 $CD$ 交於 $P$ 點. 在 $CD$ 上任取一點 $P'$, 連 $P'A$, $P'B$、$P'B'$.




$\because$ $BP' = B'P'$.

$\therefore$ $AP' - BP' = AP' - B'P' < AB'$.

即 $AP' - BP' < AP - B'P$.

但 $B'P = BP$,

$\therefore$ $AP' - BP' < AP - BP$.

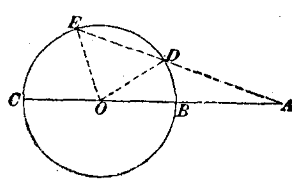
故 $AP - BP$ 爲極大.

又 $\because$ $\triangle BPM \cong \triangle B'PM$, (s.a.s.).

$\therefore$ $\angle APC = \angle BPC$.

**3.** 由圓外一點至圓周作直線, 其極大極小者皆通過圓心.

證. 設 $ABC$ 爲過圓心之直線, 由 $A$ 任作一直線與圓周交於 $D$、$E$ 兩點連 $OD$、$OE$. 在 $\triangle AOD$, $AO - OD < AD$.



但 $$OD=OB,$$

$$\therefore\quad AO-OB<AD.$$

即 $$AB<AD.$$

故 $AB$ 線爲極小.

在 $\triangle AOE$, $$AO+OE>AE.$$

但 $$OE=OC,$$

$$\therefore\quad AO+OC>AE.$$

即 $$AC>AE.$$

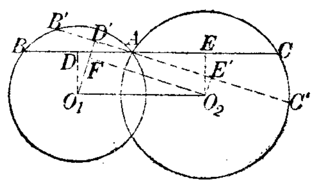
故 $AC$ 線爲極大.

**4.** 通過兩圓周之一交點 $A$ 於兩圓周間作直線，其極大者等於連心線之二倍.

**證.** 如 $BC \parallel O_1O_2$,

作 $O_1D\perp BC$,

$O_2E\perp BC$.




則 $BC=2DE=2O_1O_2$;

如 $B'C' \nparallel O_1O_2$,

作 $O_1D'\perp B'C'$,

$$O_2E'\perp B'C',$$

$$O_2F\perp O_1D'.$$

則 $$B'C'=2D'E'=2O_2F.$$

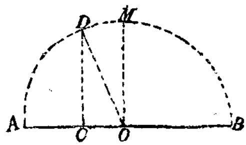
在 $\triangle O_1O_2F$, $\because\quad \angle O_1FO_2=90^\circ>\angle O_2O_1F,$

$$\therefore \quad O_1O_2 > O_2F,$$

$$\therefore \quad BC > B'C'.$$

**5.** 設兩量之和爲已知，則其積於兩量相等時爲極大.

證. 設 $AB$ 爲已知和，以之爲直徑作半圓. 令 $O$ 點爲 $AB$ 之中點，$C$ 點爲 $AB$ 上任一點. 作




$$MO \perp AB, \quad DC \perp AB.$$

則
$$\overline{MO}^2 = OA \times OB.$$

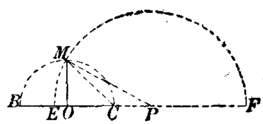
$$\overline{DC}^2 = AC \times BC.$$

連 $OD$，
$$\because \quad MO = DO > DC.$$

$$\therefore \quad OA \times OB > AC \times BC.$$

**6.** 設兩量之積爲已知，則其和於兩量相等時爲極小.

證. 設 $\overline{OM}^2$ 爲已知積，過 $O$ 點作 $BC \perp OM$. 並取 $OB = OC = OM$，以 $O$ 點爲圓心，$OM$ 爲半徑作半圓，則




$$\overline{OM}^2 = OB \times OC.$$

更於 $BC$(或延線)上任取一點 $P$，以之爲圓心，$PM$ 爲半徑作半圓而與 $BP$(或延線)交於 $E$、$F$ 兩點，則

$$\overline{OM}^2 = OE \times OF.$$

但
$$EF = 2PM, \quad OM < PM,$$

$$\therefore \quad 2OM < EF, \qquad BC < EF.$$

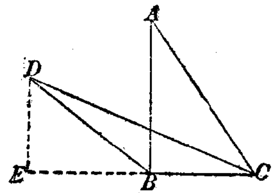
故 $$OB+OC<OE+OF.$$

7. 已知兩邊之諸三角形中,其已知兩邊之夾角爲直角者之面積爲極大.

證. 如 $$AB=DB,$$

$$\angle ABC=90^\circ,$$

$$\angle DBC\neq 90^\circ.$$




作 $$DE\perp BC.$$

則 $$\frac{\triangle ABC}{\triangle DBC}=\frac{AB}{DE}.$$

但 $$AB=DB>DE,$$

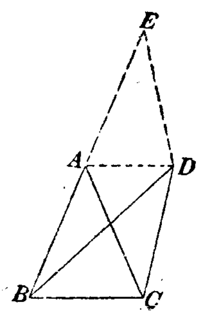
$$\therefore\quad \triangle ABC>\triangle DBC.$$

8. 同底等積之諸三角形中,等腰三角形之周界爲極小.

證. 如 $$\triangle ABC=\triangle DBC,$$

且 $$AB=AC,$$

$$BD\neq CD.$$




延長 $BA$ 至 $E$, 使 $$AE=AB,$$

連 $AD$、$ED$. $$\because\quad AD\parallel BC,$$

$$\therefore\quad \angle EAD=\angle ABC,$$

$$\angle CAD=\angle ACB,$$

但 $$\angle ABC=\angle ACB,$$

$$\therefore\quad \angle EAD=\angle CAD.$$

又　　$\because\ AD=AD,$

$AE=AB=AC,$

$\therefore\ \triangle EAD\cong\triangle CAD.$ (s.a.s.).

$\therefore\ DE=DC.$

在 $\triangle BDE$ 內，　$BD+DE>AE+AB,$

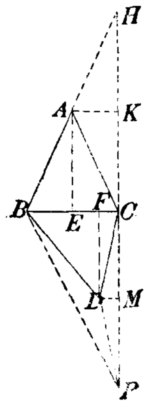
$\therefore\ BD+DE>AB+AC,$

$\therefore\ AB+BC+CA<BD+BC+DC.$

**系.** 諸等積三角形中，等邊三角形之周界爲極小.

**9.** 同底諸等周三角形中，等腰三角形之面積爲極大.

**證.** 如 $\triangle ABC$、$\triangle BDC$ 爲二等周三角形，且 $AB=AC$, $BD\neq CD$. 延長 $BA$ 至 $H$ 點，使 $BA=AH$，連 $HC$，延長至 $P$，使 $PD=DC$. 連 $BP$. 作




$AE\perp BC,$

$DF\perp BC,$

$AK\perp HP,$

$DM\perp HP.$

$\because\ AB=AH=AC,$

$\therefore\ \angle BCH=90^\circ,$

$\therefore\ BC\perp HP.$

如 $B$、$D$、$P$ 在一直線上，

$\angle DPC=\angle DCP,$

故其餘角相等，卽　$\angle DBC=\angle DCB$.

$\therefore\quad BD=CD$ 與假設衝突，

故　$B$、$D$、$P$ 不在一直線上.

$\therefore\quad BD+DP>BP$,

卽　$AB+AC>BP$,

亦卽　$BH>BP$.

$\because\quad BC\perp HP$,

$\therefore\quad CH>CP$.

$\because\quad AK\perp HC$,

$AH=AC$,

$\therefore\quad CK=KH=\frac{1}{2}CH$.

$\because\quad DM\perp HC$,

$PD=CD$,

$\therefore\quad CM=MP=\frac{1}{2}CP$.

$\therefore\quad CK>CM$.

但 $AECK$、$EDMC$ 皆爲矩形，

$\therefore\quad CK=AE$,

$CM=DF$,

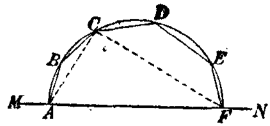
$\therefore\quad AE>DF$.

$\therefore\quad \triangle ABC>\triangle BDC$.

系. 諸等周三角形中,等邊三角形之面積爲極大.

10. 除一邊外，其餘諸邊均已知之多邊形，其面積爲極大者,乃以未知邊爲直徑之半圓之內接多邊形.

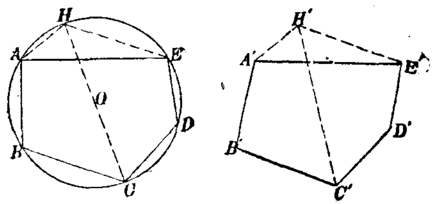
證. 設 $ABCDEF$ 爲諸多邊形中之面積極大者.已知邊爲 $AB$、$BC$、$CD$、$DE$、$EF$. 其兩端 $A$、$F$ 在直線 $MN$ 上.由任一頂點 $C$ 連接 $CA$、$CF$.則 $\triangle CAF$




爲已知兩邊 $AC$、$CF$ 第三邊在 $MN$ 上之極大三角形,由定理 7 可知,因 $\angle ACF=90°$,故 $C$ 點在以 $AF$ 爲直徑之半圓周上. 同理其餘諸頂點,亦同在此圓周上,遂得證明.

11. 已知諸邊之多邊形中能內接於圓者,其面積極大.

證. 如 $ABCDE$ 及 $A'B'C'D'E'$ 爲互等邊之多邊形，且 $ABCDE$ 爲圓之內接多邊形.




連 $CO$, 延長與圓周交於 $H$ 點,更連 $AH$、$EH$.

於 $A'E'$ 上作 $\triangle A'H'E' \cong \triangle AHE$, 更連 $C'H'$.

由定理 10 知 $ABCH > A'B'C'H'$;

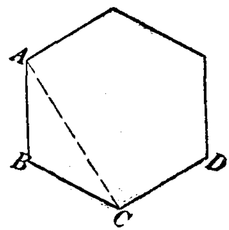
$$CDEH > C'D'E'H',$$

$$\therefore\quad ABCDEH > A'B'C'D'E'H'.$$

$$\therefore \quad ABCDE > A'B'C'D'E'.$$

**12.** 同邊數之諸等周多邊形中，其面積極大者爲等邊多邊形.

**證.** 設 $ABCD\cdots$ 爲已知邊數之諸等周多邊形中之面積極大者. 連接 $AC$，則 $\triangle ABC$ 爲以 $AC$ 爲底之諸等周三角形之面積極大者，由定理 9 知 $AB=BC$.



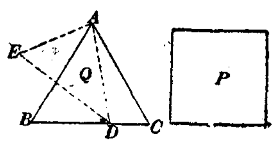

同理知 $AB=BC=CD=\cdots\cdots$.

**13.** 同邊數之諸等周多邊形中，其面積極大者爲正多邊形.

**證.** 因面積極大多邊形必等邊，且內接於圓；故爲正多邊形.

**14.** 諸等周正多邊形中，邊數較多者，面積亦較大.

**證.** 如 $P$ 爲正方形，$Q$ 爲正三角形，且二者等周. 由三角形 $Q$ 之頂點 $A$ 至底邊 $BC$ 上任一點 $D$，作 $AD$ 線. 翻轉 $\triangle ABD$ 至 $\triangle AED$ 之位置. 則



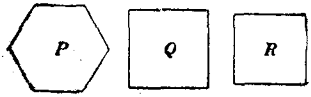

$AEDC$ 爲任意四邊形與 $P$ 等周與 $Q$ 等積. 由定理 13 知

$$P > AEDC, \qquad \therefore \quad P > Q.$$

由此推證邊數愈多者，其面積亦愈大.

**15.** 諸等積正多邊形中，邊數較多者，周界較小.

**證.** 如 $P$、$Q$ 爲兩等積之正多邊形而 $P$ 之邊數較多，作正多邊形 $R$ 與 $P$ 同周界與 $Q$ 同邊數.




則 $\qquad P>R.\qquad$ 但 $\quad P=Q,\qquad \therefore\quad Q>R.$

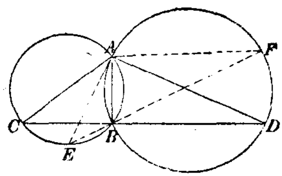
$$\text{故 } Q \text{ 之周界} > R \text{ 之周界}.$$

卽 $$Q \text{ 之周界} > P \text{ 之周界}.$$

## 二. 雜例.

**例 1.** 兩圓相交，過其一交點，作一直線遇兩圓周於兩點，連其他一交點及此兩點所成之三角形，以底邊垂直於公弦者之面積爲極大.

**解.** 設兩圓相交於 $A$、$B$ 兩點，過 $B$ 點作與 $AB$ 之垂直線 $CD$，且與兩圓相交於 $C$、$D$ 兩點. 連 $AC$、$DA$. 過 $B$ 點更作任意直線 $EF$ 與兩圓相交於 $E$、$F$ 兩點. 連 $AE$、$AF$.




$$\because\quad \angle ACD=\angle AEF,$$

$$\angle ADC=\angle AFB,$$

$$\therefore\quad \triangle CDA\sim\triangle EFA,$$

$$\therefore\quad \frac{\triangle CDA}{\triangle EFA}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AE}^2}.$$

但 $$\angle CBA=90^\circ,$$

$\therefore \quad AC$ 為直徑.

$\therefore \quad AC > AE.$

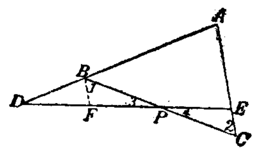
$\therefore \quad \triangle ACD > \triangle AEF.$

**例 2.** 有同一角頂之諸三角形，其底皆過一已知點，則其底被已知點平分之三角形之面積爲極小.

**解.** 設 $\triangle ABC$、$\triangle ADE$ 之頂角 $A$ 公有，其底邊 $BC$、$DE$ 皆過一點 $P$. 但

$$BP = CP,$$

$$DP \neq EP.$$




作 $\quad BF \parallel AC,$

$\therefore \quad \angle 1 = \angle 2.$

又 $\quad \angle 3 = \angle 4,$

$$BP = CP.$$

$\therefore \quad \triangle BPF \cong \triangle CPE$, (a.s.a.).

$\therefore \quad ABFE = \triangle ABC,$

但 $\quad ABFE < \triangle ADE,$

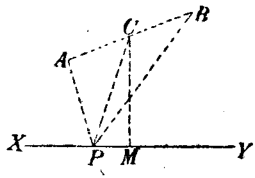
$\therefore \quad \triangle ABC < \triangle ADE,$

而 $\quad \triangle ABC$ 爲極小.

**例 3.** 試於一已知直線上求一點，令由二已知點至此點距離之平方和爲極小.

**解.** 設 $XY$ 爲已知直線，$A$、$B$ 爲二已知點. $P$ 爲 $XY$ 上任一點. 取 $AB$ 之中點 $C$，連 $PA$、$PB$、$PC$，則

$$2(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2)=\overline{AB}^2+4\overline{PC}^2,$$



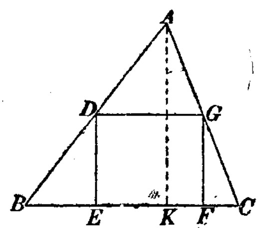

即 $$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=\frac{\overline{AB}^2}{2}+2\overline{PC}^2$$

$$=2(\overline{AC}^2+\overline{PC}^2).$$

因 $AC$ 爲定長，故欲 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 爲極小，必 $PC$ 爲極小，故由 $C$ 至 $XY$ 引垂線 $CM$，其垂足 $M$ 點即所求之點．蓋自 $C$ 向 $XY$ 所作之諸線，以垂線最短也．

**例 4．** 於定三角形內，作內接矩形，使一邊與底相合，且其面積爲極大．

**解．** 作 $\triangle ABC$ 之任意內接矩形 $DEFG$．




$$\because \quad \triangle ADG \sim \triangle ABC.$$

$$\therefore \quad \frac{DG}{AD}=\frac{BC}{AB}. \qquad (1)$$

作 $AK\perp BC$，則 $$\triangle DBE \sim \triangle ABK.$$

$$\therefore \quad \frac{DE}{BD}=\frac{AK}{AB}. \qquad (2)$$

$(1)\times(2)$， $$\frac{DG\cdot DE}{AD\cdot BD}=\frac{BC\cdot AK}{AB\cdot AB}.$$

因 $BC$、$AK$、$AB$ 爲定長，

故設 $$\frac{DG\cdot DE}{AD\cdot BD}=k \ (k \text{ 爲常數}).$$

得 $$DG\cdot DE=kAD\cdot BD.$$

卽 $$DG\cdot DE\propto AD\cdot BD.$$

故 $DG\cdot DE$ 極大時，$AD\cdot BD$ 亦爲極大，由定理 5 知 $D$ 爲 $AB$ 之中點時，$AD\cdot BD$ 爲極大，故取 $AB$ 之中點 $D$，作線與底邊平行交 $AC$ 於 $G$ 點．更作 $DE\perp BC$，$GF\perp BC$．卽得極大矩形 $DEFG$.

## 習　題　九

1. 試證圓之內接三角形中，等邊三角形面積極大．

2. 試證所設正方形之內接正方形中，其面積等於原正方形面積之半者爲極大．

3. 試於正方形內求一點，令由此點至四頂點之距離平方和爲極小．

4. 已知一三角形 $ABC$，求作一等邊三角形外接於 $\triangle ABC$ 其面積爲 $\triangle ABC$ 之外接等邊三角形中之最大者．(交大，33 年度)．

5. 設 $A$ 爲 $xOy$ 角內之一點，試在 $Oy$ 上求一點 $M$，使 $MA+MB$ 爲極小，$MB$ 爲自 $M$ 至 $Ox$ 之垂直距離．(東北大，33 年度)．

6. 設 $ABC$ 爲一等腰直角三角形，$A$ 爲直角．求於此三角形內作一內接矩形，使其一邊與 $BC$ 相合，並使其面積爲極大．(統考，29 年度)．