Fachbereich Mathematik/Informatik **29. November 2014**
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis III

Testklausur

Aufgabe 1. Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *Mengenalgebra* auf einer Menge M.
(2) Eine *Borelmenge* in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$.
(3) Eine *messbare* Abbildung

$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$

zwischen zwei Messräumen $(M, \mathcal{A})$ und $(N, \mathcal{B})$.
(4) Eine *Ausschöpfung* einer Menge M.
(5) Ein *Maß* auf einem Messraum $(M, \mathcal{A})$ (ohne Bezug auf ein Prämaß).
(6) Ein *translationsinvariantes* Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.
(7) Das *Lebesgue-Integral* zu einer messbaren nichtnegativen Funktion $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ auf einem σ-endlichen Maßraum $(M, \mathcal{A}, \mu)$.
(8) Der *Limes inferior* zu einer reellen Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösung

(1) Ein Teilmengensystem $\mathcal{A}$ auf einer Menge M heißt *Mengen-Algebra*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.
  (a) Es ist $M \in \mathcal{A}$.
  (b) Mit $T \in \mathcal{A}$ gehört auch das Komplement $M \setminus T$ zu $\mathcal{A}$.
  (c) Für je zwei Mengen $S, T \in \mathcal{A}$ ist auch $S \cup T \in \mathcal{A}$.
  Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann nennt man die von $\mathcal{T}$ erzeugte σ-Algebra die *Menge der Borel-Mengen* von X.

(3) Die Abbildung φ heißt messbar, wenn für jede messbare Menge $T \subseteq N$ das Urbild $\varphi^{-1}(T)$ messbar ist.
(4) Eine Folge von Teilmengen T_n, $n \in \mathbb{N}$, in M mit $T_n \subseteq T_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ heißt *Ausschöpfung* von M, wenn $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ gilt.
(5) Es sei M eine Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf M. Dann heißt eine Abbildung

$$\mu\colon \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0},\, T \longmapsto \mu(T),$$

ein *Maß* auf M, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

Für jede abzählbare Familie von paarweise disjunkten Teilmengen T_i, $i \in I$, aus $\mathcal{A}$ gilt

$$\mu(\bigcup_{i\in I} T_i) = \sum_{i\in I} \mu(T_i)\,.$$

(6) Ein Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ heißt *translationsinvariant*, wenn für alle messbaren Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$ die Gleichheit

$$\mu(T) \;=\; \mu(T+v)$$

gilt.

(7) Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und

$$f\colon\; M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine messbare numerische nichtnegative Funktion. Dann heißt

$$\int_M f\, d\mu \;:=\; \left(\mu \otimes \lambda^1\right)(S(f))$$

das *Integral* von f über M (zum Maß μ).

(8) Es sei H die Menge der Häufungspunkte der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann nennt man

$$\liminf\, \left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \inf\,(H)$$

den Limes inferior der Folge.

Aufgabe 2. Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Eindeutigkeitssatz für Maße.*
(2) Die *Formel* für $\lambda^n(L(S))$ für eine Borelmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ unter einer linearen Abbildung $L\colon\, \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
(3) Der *Satz von der majorisierten Konvergenz* (oder *Satz von Lebesgue*).
(4) Das *Cavalieri-Prinzip* für eine messbare Teilmenge $T \subseteq M \times N$ zu zwei σ-endlichen Maßräumen $(M, \mathcal{A}, \mu)$ und $(N, \mathcal{B}, \nu)$.

Lösung

(1) Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum und es sei $\mathcal{E}$ ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem für $\mathcal{A}$. Es seien μ_1 und μ_2 zwei Maße auf $(M, \mathcal{A})$, die auf $\mathcal{E}$ übereinstimmen. Es gebe eine Ausschöpfung $M_n \uparrow M$ mit $M_n \in \mathcal{E}$ und mit $\mu_1(M_n) = \mu_2(M_n) < \infty$. Dann ist

$$\mu_1 \;=\; \mu_2.$$

(2) Es sei

$$L\colon\; \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine lineare Abbildung. Dann gilt für jede messbare Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ die Beziehung

$$\lambda^n(L(S)) \;=\; |\det L| \cdot \lambda^n(S).$$

(3) Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und es sei

$$f_n \colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine punktweise konvergente Folge von messbaren Funktionen. Es gebe eine messbare integrierbare Funktion

$$h \colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

mit $|f_n(x)| \leq h(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in M$. Dann ist auch die Grenzfunktion $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ integrierbar, und es gilt

$$\int_M f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\mu.$$

(4) Es seien $(M, \mathcal{A}, \mu)$ und $(N, \mathcal{B}, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume. Dann gilt für alle messbaren Teilmengen $T \subseteq M \times N$ die Beziehung

$$(\mu \otimes \nu)(T) = \int_M \nu(T(x)) \, d\mu(x) = \int_N \mu(T(y)) \, d\nu(y).$$

Aufgabe 3. Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $\mathcal{A}$ die davon erzeugte Mengenalgebra. Zeige, dass diese genau aus allen endlichen Vereinigungen

$$(U_1 \cap A_1) \cup (U_2 \cap A_2) \cup \ldots \cup (U_n \cap A_n)$$

mit offenen Mengen $U_1, \ldots, U_n$ und abgeschlossenen Mengen $A_1, \ldots, A_n$ besteht.

Lösung

Zu der von der Topologie erzeugten Mengenalgebra $\mathcal{A}$ müssen alle offenen Teilmengen und somit, da eine Mengenalgebra auch unter Komplementen abgeschlossen ist, auch alle abgeschlossenen Teilmengen gehören. Da eine Mengenalgebra mit zwei Teilmengen auch deren Durchschnitt und deren Vereinigung enthält, gehören die angegebenen Mengen zu $\mathcal{A}$.

Zur Umkehrung müssen wir zeigen, dass das angegebene Mengensystem eine Mengenalgebra ist, die alle offenen Mengen enthält. Eine offene Menge U kann man als $U \cap X$ schreiben und ist daher von der angegebenen Form, da X selbst abgeschlossen ist. Insbesondere ist der Gesamtraum X von der angegebenen Form. Sei eine Menge

$$(U_1 \cap A_1) \cup \ldots \cup (U_n \cap A_n)$$

gegeben. Ihr Komplement ist

$$\begin{aligned} X \setminus ((U_1 \cap A_1) \cup \ldots \cup (U_n \cap A_n)) &= (X \setminus (U_1 \cap A_1)) \cap \ldots \cap (X \setminus (U_n \cap A_n)) \\ &= ((X \setminus U_1) \cup (X \setminus A_1)) \cap \ldots \cap ((X \setminus U_n) \cup (X \setminus A_n)) \\ &= \bigcup_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (\bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i) \cap \bigcap_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus I} (X \setminus A_j)). \end{aligned}$$

Hierbei sind die $\bigcap_{i\in I}(X\setminus U_i)$ jeweils abgeschlossen und die $\bigcap_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus I}(X\setminus A_j)$ jeweils offen, so dass eine Menge in der gewünschten Form vorliegt.

Die Vereinigung von zwei Mengen in der angegebenen Form ist offensichtlich wieder von dieser Form.

Aufgabe 4. Es seien M und N zwei abzählbare Mengen, die beide mit der σ-Algebra aller Teilmengen und mit dem Zählmaß (genannt μ bzw. ν) versehen seien.

a) Zeige, dass M und N σ-endliche Maßräume sind.

b) Zeige, dass das Produktmaß $\mu \otimes \nu$ auf $M \times N$ ebenfalls das Zählmaß ist.

Lösung

a) Wenn M leer ist, so ist nichts zu zeigen. Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow M$$

surjektiv. Dann ist $M_n := \{\varphi(0), \ldots, \varphi(n)\}$ eine Ausschöpfung von M mit endlichen Mengen, die daher endliches (Zähl-)maß besitzen.

b) Das Produktmaß auf $M \times N$ ist dadurch gekennzeichnet, dass es auf Quadern $S \times T$ zu Seiten S und T mit endlichem Maß das Produkt $\mu(S) \cdot \nu(T)$ als Wert besitzt. Für einen Punkt $P = (x, y)$ ist $\{P\} = \{x\} \times \{y\}$ und daher ist

$$\mu \otimes \nu(\{P\}) \,=\, \mu(\{x\}) \cdot \nu(\{y\}) \,=\, 1 \cdot 1 \,=\, 1.$$

Wegen der Abzählbarkeit von $M \times N$ ist dadurch das Produktmaß festgelegt und gleich dem Zählmaß auf der Produktmenge.

Aufgabe 5. Berechne das Volumen des von den drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$ erzeugten Parallelotops.

Lösung

Das Parallelotop ist das Bild des Einheitswürfels unter der durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & -5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung. Nach Satz 67.2 ist sein Volumen gleich dem Betrag der Determinante dieser Matrix. Wir berechnen die Determinante mittels der Regel von Sarrus, d.h. wir betrachten

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 8 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$\det M = -45 + 96 + 84 + 105 - 48 - 72 = 285 - 165 = 120.$$

Das Volumen ist also 120.

Aufgabe 6. Es sei M ein Messraum und $f\colon M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nichtnegative messbare Funktion. Zeige, dass auch die Funktion

$$\sqrt{f}\colon M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\, x \longmapsto \sqrt{f(x)},$$

messbar ist.

Lösung

Wir schreiben die Funktion $\sqrt{f}$ als Hintereinanderschaltung

$$M \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{\geq 0} \xrightarrow{\sqrt{t}} \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Da die Wurzelfunktion stetig ist, ist sie auch messbar und da die Hintereinanderschaltung von messbaren Abbildungen wieder messbar ist, ergibt sich die Messbarkeit von $\sqrt{f}$.

Aufgabe 7. Zeige, dass sich die abgeschlossene Einheitskreisscheibe

$$B(0,1) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 \right\}$$

nicht durch abzählbar viele abgeschlossene Rechtecke $[a,b] \times [c,d] \subseteq B(0,1)$ (mit $a \leq b$ und $c \leq d$) überdecken lässt.

Lösung

Nehmen wir an, es sei $B(0,1) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n$ mit abgeschlossenen Rechtecken $R_n = [a_n, b_n] \times [c_n, d_n] \subseteq B(0,1)$. Dies führen wir zu einem Widerspruch. Es sei $P = (x,y) \in B(0,1)$ ein Randpunkt der Kreisscheibe, also ein Punkt mit $x^2 + y^2 = 1$. Es ist dann $P \in R_n$ für mindestens ein n. Wir behaupten, dass P ein Eckpunkt dieses Rechtecks ist.

Dazu zeigen wir, dass beide Koordinaten x und y Seitenkoordinaten des Rechtecks sind. Betrachten wir x und nehmen wir an, x sei keine Seitenkoordinate des Rechtecks, also $a_n < x < b_n$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass sowohl $(x+\epsilon, y)$ als auch $(x-\epsilon, y)$ zu R_n und damit zu $B\,(0,1)$ gehören. Also ist

$$\sqrt{(x\pm\epsilon)^2+y^2} \;=\; \sqrt{x^2+y^2+\epsilon^2\pm 2x\epsilon} \;=\; \sqrt{1+\epsilon^2\pm 2x\epsilon} \;\leq\; 1.$$

Da man das Vorzeichen bei nichtnegativem x positiv und bei negativem x negativ wählen kann, steht bei dieser Wahl unter der Wurzel eine Zahl, die größer als 1 ist, was einen Widerspruch bedeutet. Da diese Überlegung auch für die y-Koordinate gilt, muss P ein Eckpunkt eines Rechtecks sein.

Da nur abzählbar viele Rechtecke beteiligt sind, stehen insgesamt nur abzählbar viele Eckpunkte zur Verfügung. Andererseits gibt es aber überabzählbar viele Punkte auf der Sphäre $S^1 = \{(x,y) \,|\, x^2+y^2=1\}$, wie aus der Bijektion

$$[0, 2\pi[\longrightarrow S^1,\ \alpha \longmapsto (\cos\alpha\,,\ \sin\alpha\,),$$

folgt. Also kann eine abzählbare Überdeckung mit abgeschlossenen Rechtecken in $B\,(0,1)$ nicht den gesamten Rand und damit nicht die abgeschlossene Kreisscheibe überdecken.

Aufgabe 8. Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man den Graphen der Funktion

$$f\colon\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ t \longmapsto t+\sqrt{t}+1,$$

um die t-Achse rotieren lässt.

Lösung

Das Volumen des Rotationskörpers K ist gemäß der Formel gleich

$$\begin{aligned}
\lambda^3(K) &= \pi \int_0^1 (t+\sqrt{t}+1)^2\,dt \\
&= \pi \int_0^1 (t^2+t+1+2t^{3/2}+2t+2t^{1/2})\,dt \\
&= \pi \int_0^1 (t^2+2t^{3/2}+3t+2t^{1/2}+1)\,dt \\
&= \pi \left(\frac{1}{3}t^3+\frac{4}{5}t^{5/2}+\frac{3}{2}t^2+\frac{4}{3}t^{3/2}+t\right)|_0^1 \\
&= \pi \left(\frac{1}{3}+\frac{4}{5}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+1\right) \\
&= \pi \frac{10+24+45+40+30}{30} \\
&= \pi \frac{149}{30}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 9. Es sei

$$f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \longmapsto f(x),$$

eine positive stetige Funktion (mit $a \leq b$ aus $\mathbb{R}$). Zeige, dass die Oberfläche des zugehörigen Rotationskörpers, also die Menge

$$M = \{(x, f(x)\,\cos\alpha\,, f(x)\,\sin\alpha\,) |\, x \in [a,b],\, \alpha \in [0, 2\pi[\} \subseteq \mathbb{R}^3\,,$$

das Volumen 0 besitzt.

Lösung

Nehmen wir an, dass $\lambda^3(M) > 0$ ist. Wir betrachten für $c \geq 1$ die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung L_c des $\mathbb{R}^3$ in sich. Wir setzen

$$M_c = L_c(M)\,.$$

Für $c \neq c'$ sind M_c und $M_{c'}$ disjunkt, da aus

$$\begin{pmatrix} x \\ cf(x)\,\cos\alpha \\ cf(x)\,\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ c'f(x')\,\cos\alpha' \\ c'f(x')\,\sin\alpha' \end{pmatrix}$$

sofort $x = x'$ und somit aus der Gleichheit der zweiten und dritten Zeile die „Radius“-Beziehung $c^2 f(x) = (c')^2 f(x)$, also $c = c'$ folgt. Nach der Volumenformel für lineare Abbildungen ist

$$\lambda^3(M_c) \,=\, c^2 \lambda^3(M) \,\geq\, \lambda^3(M).$$

Daher ist einerseits

$$\lambda^3\left(\bigcup_{c \in [1,2] \cap \mathbb{Q}} M_c\right) \,=\, \sum_{c \in [1,2] \cap \mathbb{Q}} \lambda^3(M_c) \,\geq\, \sum_{c \in [1,2] \cap \mathbb{Q}} \lambda^3(M) \,=\, \infty.$$

Andererseits ist aber diese Menge in

$$[a,b] \times [-R,R] \times [-R,R]$$

mit $R = 2 \cdot \sup\,(f(x), x \in [a,b])$ enthalten (wegen der Stetigkeit existiert das Supremum auf dem kompakten Intervall), die endliches Maß besitzt, so dass wir einen Widerspruch erhalten.

Aufgabe 10. Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und A_t, $t \in \mathbb{R}$, eine Familie von messbaren Mengen mit den zugehörigen Indikatorfunktionen e_{A_t}. Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon\, \mathbb{R} \times M \longrightarrow \mathbb{R},\, (t,x) \longmapsto f(t,x) = e_{A_t}(x).$$

Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi\colon\, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto \varphi(t) = \int_M f(t,x)\, d\mu(x),$$

nicht stetig sein muss. Welche Voraussetzungen aus Satz 71.1 sind erfüllt, welche nicht?

Lösung

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist
$$\varphi(t) \;=\; \int_M f(t,x)\,d\mu(x) \;=\; \int_M e_{A_t}(x)\,d\mu(x) \;=\; \int_{A_t} 1\,d\mu(x) \;=\; \mu(A_t).$$
Wenn z.B. M ein Maßraum ist mit $\mu(M) = 1$ und die Familie durch
$$A_t = \begin{cases} \emptyset \text{ für } t \leq 0\,, \\ M \text{ für } t > 0\,, \end{cases}$$
gegeben ist, so besitzt die Funktion $\varphi(t) = \mu(A_t)$ eine Sprungstelle in 0 und ist daher nicht stetig.

Die Bedingung (1) ist erfüllt. Für festes $t \in \mathbb{R}$ geht es um die Abbildung
$$M \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto e_{A_t}(x).$$
Da A_t nach Voraussetzung messbar ist, ist diese Abbildung messbar.

Die Bedingung (3) ist erfüllt, und zwar mit der konstanten Funktion $h = 1$. Es ist $\int_M h\,d\mu = \mu(M) < \infty$ aufgrund der vorausgesetzten Endlichkeit des Maßraumes M, und es ist $e_A \leq h$ für jede Indikatorfunktion.

Da die Schlussfolgerung des Satzes nicht gilt, kann die Bedingung (2) nicht generell erfüllt sein.

Aufgabe 11. a) Was ist das durchschnittliche Ergebnis, wenn man eine reelle Zahl aus $[a, b]$ mit einer reellen Zahl aus $[c, d]$ addiert?

b) Was ist das durchschnittliche Ergebnis, wenn man eine reelle Zahl aus $[a, b]$ mit einer reellen Zahl aus $[c, d]$ multiplizert?

c) Was ist das durchschnittliche Ergebnis, wenn man eine reelle Zahl aus $[a, b]$ durch eine reelle Zahl aus $[c, d]$ ($c > 0$) dividiert?

Lösung

a) Nach Fubini ist
$$\begin{aligned} \int_{[a,b]\times[c,d]} x + y d\lambda^2 &= \int_{[a,b]\times[c,d]} x d\lambda^2 + \int_{[a,b]\times[c,d]} y d\lambda^2 \\ &= \int_a^b x dx \int_c^d 1 dy + \int_a^b 1 dx \int_c^d y dy \\ &= \frac{1}{2}(b^2 - a^2)(d-c) + \frac{1}{2}(b-a)(d^2 - c^2). \end{aligned}$$

Der Durchschnittswert ergibt sich, wenn man durch die Grundfläche dividiert, das ist also

$$\frac{\frac{1}{2}(b^2-a^2)(d-c)+\frac{1}{2}(b-a)(d^2-c^2)}{(b-a)(d-c)} = \frac{1}{2}(b+a+c+d)\,.$$

b) Es ist

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]\times[c,d]} xy d\lambda^2 &= \int_a^b x dx \cdot \int_c^d y dy \\ &= \frac{1}{2}(b^2-a^2)\cdot\frac{1}{2}(d^2-c^2) \\ &= \frac{1}{4}(b^2-a^2)(d^2-c^2).\end{aligned}$$

Der Durchschnittswert ist also

$$\frac{\frac{1}{4}(b^2-a^2)(d^2-c^2)}{(b-a)(d-c)} = \frac{1}{4}(b+a)(c+d) = \frac{1}{2}(b+a)\cdot\frac{1}{2}(c+d).$$

c) Es ist

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]\times[c,d]} \frac{x}{y} d\lambda^2 &= \int_a^b x dx \cdot \int_c^d \frac{1}{y} dy \\ &= \frac{1}{2}(b^2-a^2)\cdot\left(\ln y|_c^d\right) \\ &= \frac{1}{2}(b^2-a^2)\left(\ln d - \ln c\right).\end{aligned}$$

Der Durchschnittswert ist also

$$\frac{\frac{1}{2}(b^2-a^2)\left(\ln d - \ln c\right)}{(b-a)(d-c)} = \frac{1}{2}(b+a)\frac{\ln d - \ln c}{d-c}.$$

Aufgabe 12. Berechne den Flächeninhalt des Bildes des Rechtecks $Q = [-1,3]\times[0,2]$ unter der Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x^3, y-x^2).$$

Lösung

Die Abbildung ist bijektiv mit der Umkehrabbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (u,v) \longmapsto \left(u^{\frac{1}{3}},\ v+u^{\frac{2}{3}}\right).$$

Die Jacobi-Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$$

mit der Jacobi-Determinante

$$3x^2\,.$$

Für die Punkte mit $x = 0$ liegt also kein lokaler Diffeomorphismus vor und für die Punkte mit $x \neq 0$ liegt ein Diffeomorphismus auf das Bild vor. Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ ist also die Transformationsformel anwendbar. Die Ausnahmemenge $Q \cap \{(x, y) | \, x = 0\}$ hat den Flächeninhalt 0 und das gilt nach Korollar 73.6 auch für das Bild davon. Daher kann man die Transformationsformel anwenden und nach Fubini ist somit

$$\lambda^2(\varphi(Q)) \; = \; \int_Q 3x^2 \; = \; 3 \int_{-1}^3 x^2 dx \int_0^2 1 \; = \; 2x^3|_{-1}^3 \; = \; 2(27+1) \; = \; 56.$$