

Bündel, Garben und Kohomologie

Vorlesung 5

Vergarbung

Man kann einer Prägarbe in kanonischer Weise eine Garbe zuordnen, ihre *Vergarbung*.

DEFINITION 5.1. Zu einer Prägarbe \mathcal{F} auf einem topologischen Raum X nennt man die durch

$$\tilde{\mathcal{F}}(U) := \{(s_P)_{P \in U} \in \prod_{P \in U} \mathcal{F}_P \mid \text{für alle } P \in U \text{ gibt es } P \in V \subseteq U \text{ und} \\ t \in \mathcal{F}(V) \text{ mit } s_Q = t_Q \text{ in } \mathcal{F}_Q \text{ für alle } Q \in V\}$$

und die natürlichen Restriktionsabbildungen gegebene Prägarbe die *Vergarbung* von \mathcal{F} .

Die in dieser Definition auftretende Bedingung, dass die Schnitte die gleichen Keime in den Halmen definieren, nennt man auch die *Kompatibilitätsbedingung*.

LEMMA 5.2. *Es sei \mathcal{F} eine Prägarbe auf einem topologischen Raum X und $\tilde{\mathcal{F}}$ die Vergarbung zu \mathcal{F} . Dann gelten folgende Eigenschaften.*

- (1) *Es gibt einen natürlichen Prägarben-Morphismus*

$$\mathcal{F} \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}},$$

der durch

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}(U), s \longmapsto (s_P)_{P \in U},$$

gegeben ist.

- (2) *Es ist*

$$\tilde{\mathcal{F}}_P \cong \mathcal{F}_P$$

für jeden Punkt $P \in X$.

- (3) *Die Vergarbung ist eine Garbe.*

- (4) *Wenn \mathcal{F} eine Garbe ist, so ist die natürliche Morphismus $\mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ ein Isomorphismus.*

- (5) *Zu jedem Prägarben-Morphismus*

$$\psi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$$

in eine Garbe \mathcal{G} gibt es eine eindeutige Faktorisierung

$$\tilde{\psi}: \tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{G}.$$

Beweis. (1) Ein Element $s \in \mathcal{F}(U)$ definiert ein Tupel $s_P, P \in U$, das direkt die Kompatibilitätsbedingung erfüllt. Somit gibt es eine wohldefinierte Abbildung

$$\varphi_U: \mathcal{F}(U) \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}(U).$$

Zu $V \subseteq U$ liegt das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \prod_{P \in U} \mathcal{F}_P \\ \rho_{U,V} \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & \prod_{P \in V} \mathcal{F}_P \end{array}$$

vor. Die Kommutativität beruht darauf, dass die Keime zu einem Schnitt im Halm eines Punktes nur von den offenen Umgebungen des Punktes abhängen.

(2) Wegen (1) und Lemma 3.27 hat man eine natürliche Abbildung

$$\mathcal{F}_P \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}_P.$$

Zum Nachweis der Surjektivität sei $s \in \tilde{\mathcal{F}}_P$ gegeben, und s sei repräsentiert durch $s' \in \tilde{\mathcal{F}}(U)$. Dies wird in einer offenen Umgebung $V \subseteq U$ von P durch ein Element

$$s'' \in \mathcal{F}(V)$$

repräsentiert. Dann ist der Keim $s''_P \in \mathcal{F}_P$ direkt ein Urbild von s .

Zum Nachweis der Injektivität seien $s, t \in \mathcal{F}_P$ mit $\varphi(s)_P = \varphi(t)_P$ gegeben. Wir können annehmen, dass s und t als Schnitte von \mathcal{F} auf der gleichen offenen Menge U gegeben sind. Die Gleichheit im Halm der Vergarbung besagt, dass es eine offene Menge $P \in V$ mit

$$(s_Q)_{Q \in V} = (t_Q)_{Q \in V}$$

gibt. Dann ist insbesondere $s_P = t_P$.

(3) Es sei

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i$$

eine offene Überdeckung und seien $s, t \in \Gamma(U, \tilde{\mathcal{F}})$ Schnitte mit $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ für alle i . Dann gilt insbesondere

$$s_P = t_P$$

für jeden Punkt $P \in U$, da ja jeder Punkt $P \in U$ in einem der U_i enthalten ist. Somit gilt insbesondere Gleichheit im Produkt der Halme und dies bedeutet die Gleichheit in der Vergarbung.

Seien nun Schnitte

$$s_i \in \tilde{\mathcal{F}}(U_i)$$

mit $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ gegeben. Dies bedeutet zunächst, dass es zu jedem Punkt $P \in U$ einen eindeutigen Keim s_P gibt, der durch eines der s_i festgelegt ist. Das Tupel $s_P, P \in U$, erfüllt dann aber direkt die Kompatibilitätsbedingung.

(4) Nach (1) hat man einen Prägarben-Morphismus

$$\mathcal{F} \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}$$

der nach (2) halmweise bijektiv ist. Nach Voraussetzung liegt links und nach (3) liegt rechts eine Garbe vor. Also ist nach Lemma 4.6 die Abbildung ein Isomorphismus.

(5) Siehe Aufgabe 5.2.

□

Homomorphismen von Garben von Gruppen

DEFINITION 5.3. Es sei X ein topologischer Raum und seien \mathcal{F} und \mathcal{G} Garben von kommutativen Gruppen auf X . Ein Garbenmorphismus $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ heißt *Homomorphismus von Garben kommutativer Gruppen*, wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ die Abbildung

$$\varphi_U: \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

BEISPIEL 5.4. Zu einem stetigen Gruppenhomomorphismus $\varphi: F \rightarrow G$ zwischen topologischen Gruppen F und G wird auf jedem topologischen Raum X ein Homomorphismus von Garben von Gruppen festgelegt, indem auf jeder offenen Teilmenge U die Zuordnung

$$C^0(U, F) \longrightarrow C^0(U, G), f \longmapsto \varphi \circ f,$$

betrachtet wird.

DEFINITION 5.5. Es sei X ein topologischer Raum und es sei $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Garben von kommutativen Gruppen. Dann nennt man die durch

$$(\text{kern } \varphi)(U) := \text{kern } \varphi_U$$

definierte Untergarbe von \mathcal{F} die *Kerngarbe* zu φ .

Es handelt sich dabei genauer um eine Untergarbe von kommutativen Gruppen, d.h. für jede offene Teilmenge liegt eine Untergruppe von \mathcal{F} vor, siehe Aufgabe 5.6.

DEFINITION 5.6. Es sei X ein topologischer Raum und es sei $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Garben von kommutativen Gruppen. Dann nennt man die Vergarbung der durch

$$(\text{bild } \varphi)(U) := \text{bild } \varphi_U$$

gegebenen Prägarbe die *Bildgarbe* zu φ .

Die Bildgarbe ist nach Lemma 5.2 (5) in natürlicher Weise eine Untergarbe von \mathcal{G} , und zwar eine Untergarbe von kommutativen Gruppen. Sie wird mit $\text{bild } \varphi$ bezeichnet.

BEISPIEL 5.7. Es sei X ein topologischer Raum und

$$\varphi: X \times \mathbb{R}^n \longrightarrow X \times \mathbb{R}^m$$

ein Homomorphismus zwischen trivialen Vektorbündeln. Dieser wird durch eine stetige Abbildung

$$M: X \longrightarrow \text{Mat}_{m \times n}(C^0(X, \mathbb{R}))$$

beschrieben, d.h. jedem Punkt wird in stetiger Weise eine Matrix zugeordnet, die für diesen Punkt eine lineare Abbildung von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m beschreibt. Dies kann man unmittelbar als Homomorphismus von Garben von Gruppen auf X auffassen, nämlich als

$$C^0(-, \mathbb{R}^n) \longrightarrow C^0(-, \mathbb{R}^m), \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \longmapsto M \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist der Garbenmorphismus auf der Ebene der Schnitte in den Bündeln. In Beispiel 1.2 liegt zu $X = \mathbb{R}^3$ die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, (r, s, t; u, v, w) \longmapsto (r, s, t; ru + sv + tw),$$

bzw.

$$M: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \text{Mat}_{1 \times 3}(K), (r, s, t) \longmapsto (r, s, t),$$

vor.

Die Kerngarbe besteht über U einfach aus

$$(\text{kern } \varphi)(U) = \left\{ \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \in C^0(U, \mathbb{R}^n) \mid M \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = 0 \right\} \subseteq C^0(U, \mathbb{R}^n).$$

Die Quotientengarbe

DEFINITION 5.8. Zu einer Garbe \mathcal{G} von kommutativen Gruppen und einer Untergarbe von Gruppen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ nennt man die Vergarbung der Prägarbe $U \mapsto \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ die *Quotientengarbe* zu $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$

Die Quotientengarbe wird mit \mathcal{G}/\mathcal{F} bezeichnet. Da vergarbt wird, muss nicht unbedingt $(\mathcal{G}/\mathcal{F})(U) = \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ gelten. Es gilt aber $(\mathcal{G}/\mathcal{F})_P = \mathcal{G}_P/\mathcal{F}_P$ für jeden Punkt $P \in X$, siehe Aufgabe 5.11.

LEMMA 5.9. *Es sei \mathcal{G} eine Garbe von kommutativen Gruppen und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ einer Untergarbe von Gruppen mit der Quotientengarbe \mathcal{G}/\mathcal{F} . Dann gelten die folgenden Aussagen.*

- (1) *Jedes Element $s \in \Gamma(X, \mathcal{G}/\mathcal{F})$ wird repräsentiert durch eine Familie (U_i, g_i) , $i \in I$, wobei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung ist und $g_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{G})$ Schnitte sind mit*

$$g_i|_{U_i \cap U_j} - g_j|_{U_i \cap U_j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{F}),$$

und jede solche Familie liegt ein Element in $\Gamma(X, \mathcal{G}/\mathcal{F})$ fest.

- (2) Zwei solche Familien (U_i, g_i) (U_i, h_i) (also zur gleichen Überdeckung) definieren genau dann das gleiche Element in $\Gamma(X, \mathcal{G}/\mathcal{F})$, wenn

$$g_i - h_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F})$$

für alle i ist.

- (3) Zwei Familien (U_i, g_i) und (V_j, h_j) definieren genau dann das gleiche Element in $\Gamma(X, \mathcal{G}/\mathcal{F})$, wenn auf einer (jeder) gemeinsamen Verfeinerung der beiden Überdeckungen die Differenzen zu \mathcal{F} gehören.

Beweis. (1) Der Garbenhomomorphismus $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{F}$ ist surjektiv und daher gibt es zu einem Schnitt $s \in \Gamma(X, \mathcal{G}/\mathcal{F})$ lokal Urbilder in \mathcal{G} . D.h. es gibt eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und Elemente $g_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{G})$, die auf $s|_{U_i}$ abbilden. Somit bildet

$$g_i|_{U_i \cap U_j} - g_j|_{U_i \cap U_j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{G})$$

auf 0 ab und daher gehört diese Differenz zum Kern, also zu \mathcal{F} . Wenn umgekehrt eine solche Familie gegeben ist, so definiert dies über die Vergarungsabbildung Restklassen

$$[g_i] \in \Gamma(U_i, \mathcal{G}/\mathcal{F}).$$

Dabei ist

$$[g_i]|_{U_i \cap U_j} - [g_j]|_{U_i \cap U_j} = [g_i|_{U_i \cap U_j} - g_j|_{U_i \cap U_j}] = 0$$

und somit sind diese Klassen verträglich und definieren einen globalen Schnitt der Quotientengarbe.

- (2) Seien die Familien (U_i, g_i) und (U_i, h_i) gegeben. Durch Übergang zu den Differenzen können wir annehmen, dass $h_i = 0$ ist. Es ist dann zu zeigen, dass (U_i, g_i) genau dann das Nullelement in der Quotientengarbe definiert, wenn alle g_i zu $\Gamma(U_i, \mathcal{F})$ gehören. Wenn die g_i überall das Nullelement definieren, so gilt dies auch in den Halmen und somit gilt, dass $g_i \in \mathcal{F}_P$ in jedem Punkt $P \in U_i$ gilt. Damit ist $g_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F})$. Die Rückrichtung ist klar.
- (3) Die Gleichheit von Schnitten einer Garbe kann man lokal auf einer beliebigen offenen Überdeckung testen. Daher folgt dies aus (2) und daraus, dass man die Zugehörigkeit zu einer Untergarbe ebenfalls lokal testen kann.

□

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7