Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2017**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 34

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 34.1. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum der linearen Gleichung

$$2x - 5y - 3z = 0.$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 34.2. Zeige, dass ein Untervektorraum $U \subseteq K^n$ insbesondere eine Untergruppe des K^n ist.

Aufgabe 34.3. Es seien $v_1, \ldots, v_k \in K^n$ Vektoren und sei

$$U = \left\{ \sum_{i=1}^{k} s_i v_i | \, s_i \in K \right\}.$$

Zeige, dass U ein Untervektorraum des K^n ist.

Aufgabe 34.4. Wir betrachten im $\mathbb{Q}^3$ die Untervektorräume

$$U = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \rangle$$

und

$$W = \langle \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle.$$

Zeige $U = W$.

Aufgabe 34.5.*

Es sei K ein Körper und

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem über K. Zeige, dass die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum des K^n ist. Wie verhält sich dieser Lösungsraum zu den Lösungsräumen der einzelnen Gleichungen?

Aufgabe 34.6. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum der linearen Gleichung

$$3x + 4y - 2z + 5w \,=\, 0.$$

Aufgabe 34.7. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$-2x + 3y - z + 4w = 0 \text{ und } 3z - 2w = 0\,.$$

Aufgabe 34.8. Im K^n seien zwei Vektoren u, v gegeben und es sei $U = \langle u, v \rangle \subseteq K^n$ der von den beiden Vektoren erzeugte Untervektorraum. Zeige, dass die Vektoren u, v genau dann eine Basis von U bilden, wenn weder u ein Vielfaches von v noch v ein Vielfaches von u ist.

Aufgabe 34.9. Es seien $U_1, \ldots, U_r \subseteq K^n$ Untervektorräume. Zeige, dass der Durchschnitt $U_1 \cap \ldots \cap U_r$ ebenfalls ein Untervektorraum ist.

Aufgabe 34.10. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} 3x - 6y - 5z & = & 0 \\ x + 7y + 4z & = & 0 \end{array}$$

über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 34.11. Es sei

$$M \,=\, \begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

und

$$c \,=\, \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

(1) Bestimme eine Basis des Lösungsraums des linearen Gleichungssystems $Mv = 0$.
(2) Beschreibe die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Mv = c$ mit einem Aufpunkt und mit der Basis aus dem ersten Teil.

Aufgabe 34.12.*

Bestimme die Punktrichtungsform für die durch die Gleichung

$$4x + 7y = 3$$

im $\mathbb{Q}^2$ gegebene Gerade.

Aufgabe 34.13. Bestimme die Punktrichtungsform für die durch die Gleichung

$$-7x + 5y = -4$$

im $\mathbb{Q}^2$ gegebene Gerade.

Aufgabe 34.14.*

Erstelle eine Geradengleichung für die Gerade im $\mathbb{R}^2$, die durch die beiden Punkte $(2, 3)$ und $(5, -7)$ verläuft.

Aufgabe 34.15. Es seien im K^2 zwei Geraden G und H in Gleichungsform durch

$$ax + by = c$$

bzw.

$$rx + sy = d$$

gegeben. Zeige, dass der Durchschnitt $G \cap H$ der beiden Geraden die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems ist, das aus beiden Gleichungen besteht. Zeige ferner, dass es hierbei die drei Möglichkeiten gibt:

(1) Es ist $G = H$.
(2) Es ist $G \cap H = \emptyset$.
(3) Der Durchschnitt besteht aus einem einzigen Punkt.

Aufgabe 34.16. Es sei ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen in zwei Variablen über $\mathbb{Q}$ gegeben. Die Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen seien Geraden. Skizziere die drei Möglichkeiten, wie die Lösungsmenge des Systems aussehen kann.

Aufgabe 34.17. Wir betrachten die beiden Mengen

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -3x + 2y - 6z = 0 \right\}$$

und

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 7x - 5y - 4z = 0 \right\}.$$

Finde eine Beschreibung für den Durchschnitt

$$G := E \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -3x + 2y - 6z = 0 \text{ und } 7x - 5y - 4z = 0 \right\}$$

wie in Beispiel 34.12.

Aufgabe 34.18.*

Im $\mathbb{R}^3$ seien die beiden Untervektorräume

$$U = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$V = \left\{ p \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben. Bestimme eine Basis für $U \cap V$.

Aufgabe 34.19.*

Wir betrachten die drei Ebenen E, F, G, die durch die folgenden Gleichungen im $\mathbb{Q}^3$ beschrieben werden.

(1)
$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \mid 5x - 4y + 3z = 2 \right\},$$

(2)
$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \mid 7x - 5y + 6z = 3 \right\},$$

(3)
$$G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \mid 2x - y + 4z = 5 \right\}.$$

Bestimme sämtliche Punkte $E \cap F \setminus E \cap F \cap G$.

Aufgabe 34.20. Bestimme eine Ebenengleichung für die Ebene im $\mathbb{R}^3$, auf der die drei Punkte

$$(1,0,0),(0,1,2) \text{ und } (2,3,4)$$

liegen.

Aufgabe 34.21. Erstelle ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsraum die Gerade $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 34.22. Es sei K ein Körper. Man finde ein lineares Gleichungssystem in drei Variablen, dessen Lösungsraum genau

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \mid \lambda \in K \right\}$$

ist.

Aufgabe 34.23. Ein lineares Ungleichungssystem sei durch die Ungleichungen

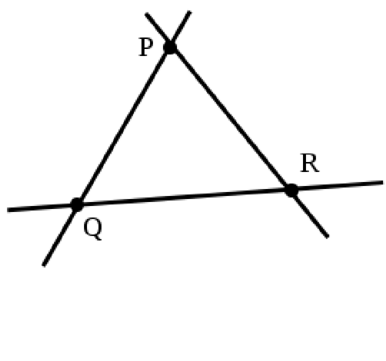
$$\begin{aligned} x &\geq 0, \\ y &\geq 0, \\ x+y &\leq 1, \end{aligned}$$

gegeben. Skizziere die Lösungsmenge dieses Ungleichungssystems.

Aufgabe 34.24. Es sei

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &\geq c_1, \\ a_2x + b_2y &\geq c_2, \\ a_3x + b3y &\geq c_3, \end{aligned}$$

ein lineares Ungleichungssystem, dessen Lösungsmenge ein Dreieck sei. Wie sieht die Lösungsmenge aus, wenn man in jeder Ungleichung $\geq$ durch $\leq$ ersetzt?



Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 34.25. (4 Punkte)

Wir betrachten im $\mathbb{Q}^4$ die Untervektorräume

$$U = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

und

$$W = \langle \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} \rangle.$$

Zeige $U = W$.

Aufgabe 34.26. (4 (2+2) Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 8 \\ 5 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

und

$$c = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(1) Bestimme eine Basis des Lösungsraums des linearen Gleichungssystems $Mv = 0$.
(2) Beschreibe die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Mv = c$ mit einem Aufpunkt und mit der Basis aus dem ersten Teil.

Aufgabe 34.27. (2 Punkte)

Bestimme die Punktrichtungsform für die durch die Gleichung

$$-2x + 9y = 5$$

im $\mathbb{Q}^2$ gegebene Gerade.

Aufgabe 34.28. (3 Punkte)

Betrachte im $\mathbb{R}^3$ die beiden Ebenen

$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, 3x + 4y + 5z = 2\right\}$ und $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, 2x - y + 3z = -1\right\}$.

Bestimme die Schnittgerade $E \cap F$.

Aufgabe 34.29. (3 Punkte)

Bestimme eine Ebenengleichung für die Ebene im $\mathbb{R}^3$, auf der die drei Punkte

$$(1,0,2), (4,-3,2) \text{ und } (2,1,-1)$$

liegen.

Aufgabe 34.30. (4 (2+2) Punkte)

Ein lineares Ungleichungssystem sei durch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} x &\geq 0, \\ y + x &\geq 0, \\ -1 - y &\leq -x, \\ 5y - 2x &\geq 3, \end{aligned}$$

gegeben.

a) Skizziere die Lösungsmenge dieses Ungleichungssystems.

b) Bestimme die Eckpunkte der Lösungsmenge.