Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2018/2019

Grundkurs Mathematik I

Arbeitsblatt 19

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 19.1. Formuliere die zweite binomische Formel für einen kommutativen Ring R und führe sie auf die erste binomische Formel zurück.

Übungsaufgaben

Aufgabe 19.2. Formuliere und beweise die dritte binomische Formel für einen kommutativen Ring R.

Aufgabe 19.3. Es sei R ein kommutativer Ring und seien x, y und z Elemente in R. Berechne

$$\left(2x^3 - xy^2z - 4x^2y^2\right)\left(-2x^3 - z - xyz\right) - x^2\left(4 - 3y - 5xy^5z\right) .$$

Aufgabe 19.4. Es sei R ein kommutativer Ring, $x \in R$ und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige die Gleichheit

$$x^n - 1 = (x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x^2 + x + 1\right).$$

Aufgabe 19.5. Zeige, dass $\mathbb{Z}^2$ mit der komponentenweisen Addition und der komponentenweisen Multiplikation ein kommutativer Ring ist. Gilt in diesem Ring die Eigenschaft, dass aus $xy = 0$ folgt, dass x oder y gleich 0 ist?

Aufgabe 19.6. Lucy Sonnenschein befindet sich in Position $(-2, 3) \in \mathbb{Z}^2$, wobei sich im Folgenden die erste Komponente auf links/rechts und die zweite Komponente auf vorne/hinten bezieht. Sie geht vier Schritte nach rechts, dann zwei Schritte nach hinten, dann einen Schritt nach links, einen (etwas größeren) Diagonalschritt nach links hinten und schließlich zwei Schritte nach vorne. In welcher Position befindet sie sich zum Schluss? Durch welche möglichst einfache Bewegung kann sie die Gesamtbewegung rückgängig machen?

Aufgabe 19.7. Sei M eine Menge. Zeige, dass die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ mit dem Durchschnitt $\cap$ als Multiplikation und der symmetrischen Differenz

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

als Addition (mit welchen neutralen Elementen?) ein kommutativer Ring ist.

Aufgabe 19.8. Es sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass die Multiplikation mit -1, also die Abbildung

$$R \longrightarrow R,\ g \longmapsto -g,$$

bijektiv ist.

Aufgabe 19.9. Diskutiere, welche Bedeutungen die Begriffe *positiv* und *negativ* in einem kommutativen Ring besitzen. Wie sieht es in $\mathbb{Z}$ aus? Welche Bedeutung ist relativ, welche absolut?

Aufgabe 19.10. Es sei R ein kommutativer Ring und es seien k, m, n ganze Zahlen und $x, y \in R$. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Zu $n \in \mathbb{N}$ ist nx (also die n-fache Summe von x mit sich selbst) gleich $(1 + \cdots + 1) \cdot x$, wobei links die n-fache Summe der $1 \in R$ mit sich selbst steht.
(2) Zu $n \in \mathbb{N}$ ist $-n$ (also die n-fache Summe des Negativen von 1 mit sich selbst) gleich dem Negativen (in R) von $n = 1 + \cdots + 1$.
(3) Es ist
$$(m + k)x = mx + kx.$$
(4) Es ist
$$k(x + y) = kx + ky.$$
(5) Es ist
$$(km)x = k(mx).$$

Aufgabe 19.11.*

Es sei R ein kommutativer Ring. Zu jedem $f \in R$ sei

$$\mu_f \colon R \longrightarrow R,\ g \longmapsto fg,$$

die Multiplikation mit f. Zeige, dass μ_f genau dann bijektiv ist, wenn es surjektiv ist.

Man zeige durch ein Beispiel, dass in dieser Situation aus der Injektivität nicht die Bijektivität folgt.

Aufgabe 19.12. Gabi Hochster hat heute keine Lust, bei der Addition von natürlichen Zahlen im Dezimalsystem die Überträge zu berücksichtigen. Sie addiert einfach ziffernweise und schreibt nur die Endziffern der Einzelsummen an die richtige Stelle hin. Sie sagt: „Meine neue Verknüpfung ist viel besser als die übliche Addition: Sie ist einfacher zu berechnen, sie ist assoziativ und kommutativ und sie besitzt ein neutrales Element. Darüber hinaus gibt es zu jeder natürlichen Zahl eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft, dass deren Summe die 0 ergibt. Es liegt also sogar eine Gruppe vor und die ganzen Zahlen braucht man gar nicht mehr“. Sind ihre Beobachtungen korrekt?

Aufgabe 19.13.*

Sei G eine Gruppe. Zeige, dass

$$\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$$

für alle $x \in G$ ist.

Aufgabe 19.14. Es sei M eine Menge und es sei B die Menge aller bijektiven Abbildungen von M nach M. Zeige, dass B mit der Hintereinanderschaltung von Abbildungen eine Gruppe ist. Was ist das neutrale Element, was ist das inverse Element zu $f \in B$?

Aufgabe 19.15. Sei G eine Gruppe und sei $g \in G$ ein Element und sei

$$\varphi\colon G \longrightarrow G,\, x \longmapsto x \circ g,$$

die Verknüpfung mit g. Zeige, dass φ bijektiv ist. In welcher Beziehung steht diese Aussage zu Lemma 19.8?

Aufgabe 19.16.*

Person A wird 80 Jahre alt und Person B wird 70 Jahre alt. Vergleiche die Gesamtlebenswachzeit und die Gesamtlebensschlafzeit der beiden Personen bei folgendem Schlafverhalten.

(1) A schläft jede Nacht 7 Stunden und B schläft jede Nacht 8 Stunden.
(2) A schläft jede Nacht 8 Stunden und B schläft jede Nacht 7 Stunden.

Aufgabe 19.17. Zeige, dass die Größergleichrelation $\geq$ auf den ganzen Zahlen eine totale Ordnung ist.

Aufgabe 19.18. Es sei R ein angeordneter Ring. Zeige, dass für jedes $x \in R$ die Beziehung $x^2 = xx \geq 0$ gilt.

Aufgabe 19.19. Zeige, dass in einem angeordneten Ring aus $a \geq b$ und $c \leq 0$ die Beziehung $ac \leq bc$ folgt.

Aufgabe 19.20. Es sei R ein angeordneter Ring und $x > y$. Zeige, dass dann $-x < -y$ ist.

Aufgabe 19.21. Es sei R ein angeordneter Ring und $x, y \geq 0$. Zeige, dass $x \geq y$ genau dann gilt, wenn $x^2 \geq y^2$ gilt.

Aufgabe 19.22. Bestimme das Maximum und das Minimum der folgenden ganzen Zahlen.

a) $4, -7, -6, 8, 5$,

b) $-3, -2, -1, 0$,

c) $-4 + 3, 2 - 3, 4 - 5, 6 - 7, -4 + 6$.

Wie lautet die Antwort, wenn man jeweils die Beträge dieser Zahlen betrachtet?

Aufgabe 19.23. Wir betrachten die ganzen Zahlen mit der Ordnung $\preccurlyeq$, bei der

$$0 \preccurlyeq \mathbb{Z}_- \preccurlyeq \mathbb{Z}_+$$

gilt und die auf den Teilmengen $\mathbb{Z}_-$ und $\mathbb{Z}_+$ mit der Ordnung $\leq$ übereinstimmt.

(1) Zeige, dass $\preccurlyeq$ eine totale Ordnung auf $\mathbb{Z}$ ist.
(2) Zeige, dass mit $0 \preccurlyeq x, y$ auch

$$0 \preccurlyeq x + y$$

gilt.
(3) Zeige, dass mit $0 \preccurlyeq x, y$ auch

$$0 \preccurlyeq x \cdot y$$

gilt.
(4) Ist $(\mathbb{Z}, \preccurlyeq)$ ein angeordneter Ring?

Aufgabe 19.24. Diskutiere Grenzen des *Permanenzprinzips* angesichts der Definition 19.9 in Bezug zu Lemma 10.5.

Aufgabe 19.25. Welche Teilerbeziehung besteht zwischen 0 und einer beliebigen ganzen Zahl n und welche Teilerbeziehung besteht zwischen 1 und einer beliebigen ganzen Zahl n?

Aufgabe 19.26. Beweise die Teilbarkeitsregeln für ganze Zahlen, die in Lemma 19.15 aufgelistet sind.

Aufgabe 19.27. Zeige, dass für je zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ aus

$$a|b \text{ und } b|a$$

die Beziehung $a = \pm b$ folgt.

Aufgabe 19.28.*

Zeige, dass für jede ungerade Zahl n die Zahl $25n^2 - 17$ ein Vielfaches von 8 ist.

Aufgabe 19.29. Rechne im Dezimalsystem

$$5382 - 6981\,.$$

Aufgabe 19.30. Rechne im Dezimalsystem

$$-75009 + 9817\,.$$

Aufgabe 19.31. Bestimme die Darstellung der ganzen Zahl

$$n = 5 \cdot 10^3 - 70 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$

im Zehnersystem.

Aufgabe 19.32. Bestimme die Darstellung der ganzen Zahl

$$n = 11 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 - 2561 \cdot 10^0$$

im Zehnersystem.

Aufgabe 19.33. Es liegen zwei ganze Zahlen m und n im Dezimalsystem vor. Lässt sich die letzte Ziffer der Summe $m+n$ allein aus den beiden letzten Ziffern der beiden Zahlen bestimmen?

Aufgabe 19.34. Gilt für ganze Zahlen, die im Dezimalsystem gegeben sind, für die Teilbarkeit durch 3 ein Quersummentest? Wie ist dieser zu formulieren?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 19.35. (3 Punkte)

Sei R ein Ring und seien x, y und z Elemente in R. Berechne das Produkt

$$\left(x^2 - 3yzy - 2zy^2 + 4xy^2\right)\left(2xy^3x - z^2xyx\right)\left(1 - 3zyxz^2y\right)\,.$$

Wie lautet das Ergebnis, wenn der Ring kommutativ ist?

Aufgabe 19.36. (3 Punkte)

Zeige, dass für ganze Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ genau dann das „umgekehrte Distributivgesetz“

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$$

gilt, wenn

$$a = 0$$

oder

$$a + b + c = 1$$

ist.

Aufgabe 19.37. (3 Punkte)

Bestimme das Maximum und das Minimum der folgenden ganzen Zahlen.

a) $-6,\ 4,\ -5,\ 3,\ 5,$

b) $-7,\ -5,\ -6,\ -4,$

c) $-6 + 2,\ 2 - 8,\ 5 - 5,\ 3 - 7,\ 5 - 9.$

Wie lautet die Antwort, wenn man jeweils die Beträge dieser Zahlen betrachtet?

Aufgabe 19.38. (2 Punkte)

Welche Ordnungseigenschaften erfüllt die Teilarkeitsbeziehung auf $\mathbb{Z}$, welche nicht?

Aufgabe 19.39. (2 Punkte)

Rechne im Dezimalsystem

$$-4901 - 5328\,.$$

Aufgabe 19.40. (2 Punkte)

Bestimme die Darstellung der ganzen Zahl

$$n = -3 \cdot 10^3 + 31 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 - 37 \cdot 10^0$$

im Zehnersystem.

Aufgabe 19.41. (6 Punkte)

Zeige, dass es für jede ganze Zahl z eine eindeutige Darstellung

$$z = \sum_{i=0}^{n} c_i 10^i$$

mit

$$-4 \leq c_i \leq 5$$

für alle i gibt.

Abbildungsverzeichnis