Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 14

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 14.1. Zeige durch ein Beispiel von zwei Basen v, u und v, w im $\mathbb{R}^2$, dass die Koordinatenfunktion v^* von der Basis und nicht nur von v abhängt.

Übungsaufgaben

Aufgabe 14.2. Es sei

$$U = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^3 .$$

Finde eine Linearform $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $U = \operatorname{kern} f$.

Aufgabe 14.3. Löse das lineare Gleichungssystem

$$4x + 7y - 3z + 6u + 5v = 0 .$$

Aufgabe 14.4. Zeige, dass durch Realteil und Imaginärteil reelle Linearformen auf $\mathbb{C}$ definiert sind, wobei $\mathbb{C}$ als reeller Vektorraum betrachtet wird.

Ist der Betrag einer komplexen Zahl eine reelle Linearform?

Aufgabe 14.5.*

Es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und es sei $U \subseteq V$ ein $(n-1)$-dimensionaler Untervektorraum. Zeige, dass es eine Linearform $f \colon V \to K$ mit $U = \operatorname{kern} f$ gibt.

Aufgabe 14.6. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Es sei $v \in V$ mit $v \notin U$. Zeige, dass es eine Linearform $\varphi \colon V \to K$ mit $\varphi(U) = 0$ und $\varphi(v) = 1$ gibt.

Aufgabe 14.7.*

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Zu jedem k gebe es eine Linearform

$$\varphi_k \colon V \longrightarrow K$$

mit

$$\varphi_k(v_k) \neq 0 \text{ und } \varphi_k(v_i) = 0 \text{ für } i \neq k\,.$$

Zeige, dass die $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 14.8. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Zeige, dass eine von 0 verschiedene lineare Abbildung

$$f \colon V \longrightarrow \mathbb{R}$$

keine lokalen Extrema besitzt. Gilt dies auch für unendlichdimensionale Vektorräume? Braucht man dazu Differentialrechnung?

Aufgabe 14.9. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum über einem Körper K und es seien $L, L_1, \ldots, L_m$ Linearformen auf V. Zeige, dass die Beziehung

$$\bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{kern} L_i \subseteq \operatorname{kern} L$$

genau dann gilt, wenn L zu dem von den $L_1, \ldots, L_m$ erzeugten Untervektorraum (im Dualraum) gehört.

Aufgabe 14.10.*

Drücke die Vektoren u_1^*, u_2^* der Dualbasis zur Basis $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$ als Linearkombinationen bezüglich der Standarddualbasis e_1^*, e_2^* aus.

Aufgabe 14.11. Drücke die Vektoren e_1^*, e_2^* der Standarddualbasis als Linearkombinationen bezüglich der Dualbasis u_1^*, u_2^* zur Basis $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ aus.

Aufgabe 14.12. Es seien V und W Vektorräume über einem Körper K mit einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V und einer Basis $w_1, \ldots, w_m$ von W. Zeige, dass

$$v_i^* w_j, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m,$$

eine Basis des Homomorphismenraumes $\operatorname{Hom}_K(V, W)$ ist.

Aufgabe 14.13.*

Es sei V ein K-Vektorraum mit Dualraum V^*. Zeige, dass die natürliche Abbildung

$$V \times V^* \longrightarrow K,\ (v, f) \longmapsto f(v),$$

nicht linear ist.

Aufgabe 14.14. Es sei K ein Körper und es sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times m$-Matrix über K. Zeige

$$\operatorname{Spur}(A \circ B) = \operatorname{Spur}(B \circ A).$$

Aufgabe 14.15. Zeige, dass die Definition 14.16 der Spur einer linearen Abbildung unabhängig von der gewählten Matrix ist.

Aufgabe 14.16. Es sei K ein Körper und sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Zeige, dass die Zuordung

$$\operatorname{End}(V) \longrightarrow K,\ \varphi \longmapsto \operatorname{Spur}(\varphi),$$

K-linear ist.

Aufgabe 14.17. Bestimme die Spur zu einer linearen Projektion

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 14.18. (3 Punkte)

Es sei

$$U = \langle \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 23 \\ 33 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Finde eine Linearform $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $U = \operatorname{kern} f$.

AUFGABE 14.19. (6 (1+1+2+2) Punkte)

Sei K ein Körper und $a, b, c \in K$.

1) Zeige, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \in K^3$$

Lösungen zur linearen Gleichung

$$ax + by + cz = 0$$

sind.

2) Zeige, dass diese drei Vektoren linear abhängig sind.

3) Unter welchen Bedingungen erzeugen diese Vektoren den Lösungsraum der Gleichung?

4) Unter welchen Bedingungen erzeugen die ersten beiden Vektoren den Lösungsraum der Gleichung?

AUFGABE 14.20. (3 Punkte)

Drücke die Vektoren u_1^*, u_2^* der Dualbasis zur Basis $u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$ als Linearkombinationen bezüglich der Standarddualbasis e_1^*, e_2^* aus.

AUFGABE 14.21. (4 Punkte)

Drücke die Vektoren u_1^*, u_2^*, u_3^* der Dualbasis zur Basis $u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$ als Linearkombinationen bezüglich der Standarddualbasis e_1^*, e_2^*, e_3^* aus.

AUFGABE 14.22. (2 Punkte)

Es sei $V = \mathrm{Mat}_n(K)$ der Raum der $n \times n$-Matrizen über dem Körper K mit der Standardbasis e_{ij}. Beschreibe die Spur als Linearkombination bezüglich der dualen Basis e_{ij}^*.