故ニ　$18\cot 2\theta=8\cot\theta$,

即チ　$\dfrac{9(\cot^2\theta-1)}{2\cot\theta}=4\cot\theta$,

之ヨリ　$\cot^2\theta=9$,

而シテ　θハ鋭角ナルベキヲ以テ　$\cot\theta=3$,

故ニ　$BD=CD\cot\theta$

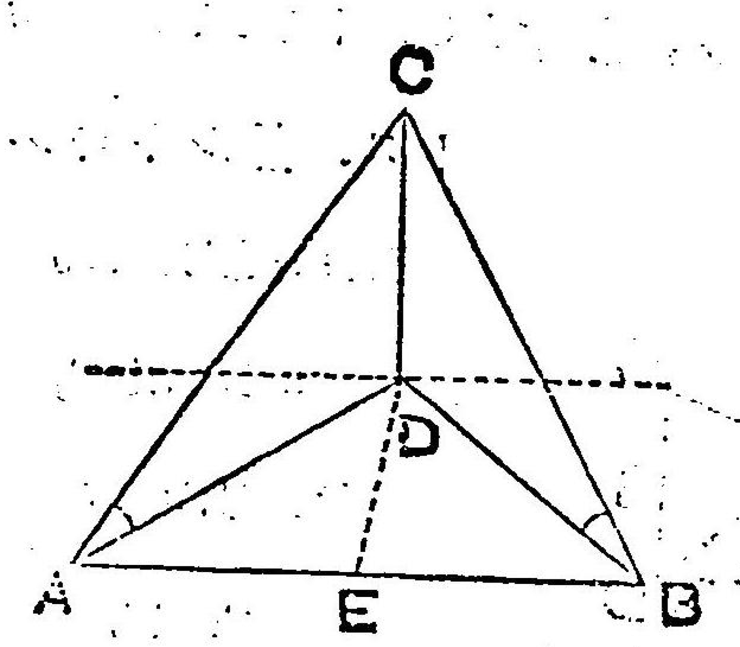
$=8\times3=24$,

即チ 24米ナリ.

39. 河ノ對岸ニ一樹アリ，其ノ高度ヲ測リシニ 19°25′ ヲ得タリ，河岸ニ沿ヒテ正北ニ進ムコト 120 尺ニシテ又之ヲ測ルニ前ト等シキ角度ヲ得タリ，河幅ハ樹ノアル所ニ於テ 80 尺ナリトセバ其ノ樹ノ高サ幾尺ナルカ. [40. 長. 高. 商.]

但 $\log\tan 19°25'=\bar{1}.54714$, $\log 3.5248=0.54714$.

解　第一第二ノ觀測點ヲ A, B トシ，樹ノ高サヲ CD トシ，河幅ヲ DE トスレバ DE ハ 80 尺，AB ハ 120 尺，DE ⊥ AB ナルベシ.



而シテ　$\hat{CAD}=\hat{CBD}=19°25'$ ナルユエ，

AD=BD ニシテ，從ヒテ AE=EB ナルベシ

故ニ　$\overline{AD}^2=\overline{AE}^2+\overline{ED}^2$

$=60^2+80^2=10^4$,

故ニ　$AD=10^2$,

又　$CD=AD\tan 19°25'$

$=10^2\tan 19°25'$,

故ニ　$\log CD=2+\bar{1}.54714$

$=1.54714=\log 35.248$,

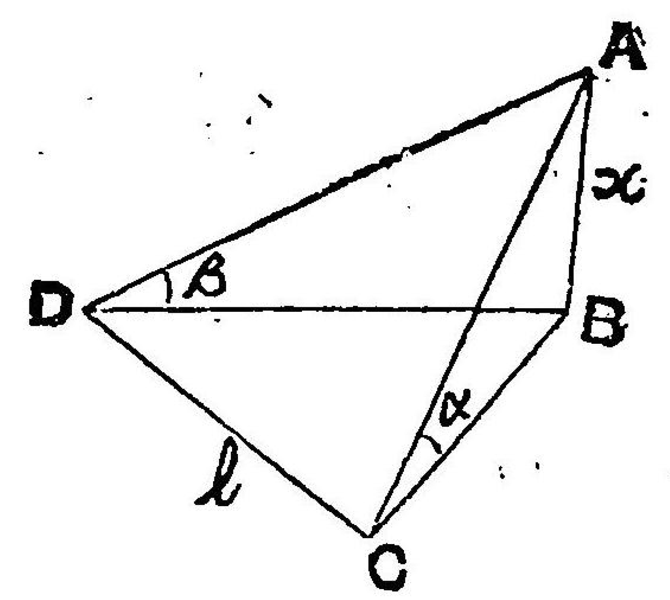
依リテ　CD=35尺.248.

注意　本題ニ於テ「正北ニ進ム」トハ單ニ「眞直ニ進ム」ト云フ意ニ取ルベシ. 然ラザレバ題辭ヲ改メザルベカラズ.

40. 塔アリ，某所ヨリ其ノ頂點ヲ望ミシニ方位ハ正北ニシテ仰角ハ $\alpha°$ ナリ，其處ヨリ正西ノ方向ニ l 尺進ミ，更ニ塔頂ヲ望ミシニ仰角 $\beta°$ ナリシト云フ，塔ノ高サヲ求メヨ. 但塔ノ基礎及ビ二個ノ測點ハ同水平面上ニアリ. [38. 水. 講.]

解　AB ヲ塔トシ；C, D ヲ觀測點トス.

然ルトキハ　$\hat{BCD}$ ハ直角，$\hat{ACB}=\alpha°$，$\hat{ADB}=\beta°$，$CD=l$ ナリ



而シテ

$$CB = AB\cot\alpha^\circ,$$

$$DB = AB\cot\beta^\circ,$$

$$CD^2 = \overline{DB}^2 - \overline{CB}^2,$$

故ニ

$$l^2 = \overline{AB}^2\cot^2\beta^\circ - \overline{AB}^2\cot^2\alpha^\circ,$$

故ニ $$\overline{AB}^2 = \frac{l^2}{\cot^2\beta^\circ - \cot^2\alpha^\circ},$$

故ニ $$AB = \frac{l}{\sqrt{\cot^2\beta^\circ - \cot^2\alpha^\circ}}.$$

41. 某所ニ於テ其ノ正東ニ飛颺セル輕氣球ノ仰角ヲ測リシニ 60° ヲ得, 同時ニ其ノ測點ヨリ正南1哩ノ所ニ於テ又仰角ヲ測リテ 45° ヲ得タリ, 然ルトキハ輕氣球ノ高サ如何. [33. 商船.]

解 前題ニ於テ $\alpha^\circ = 60^\circ$, $\beta^\circ = 45^\circ$, $l = 1$哩 トスレバ可ナリ.

故ニ $$AB = \frac{l}{\sqrt{\cot^2\beta^\circ - \cot^2\alpha^\circ}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cot^2 45^\circ - \cot^2 60^\circ}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \doteqdot 0.866,$$

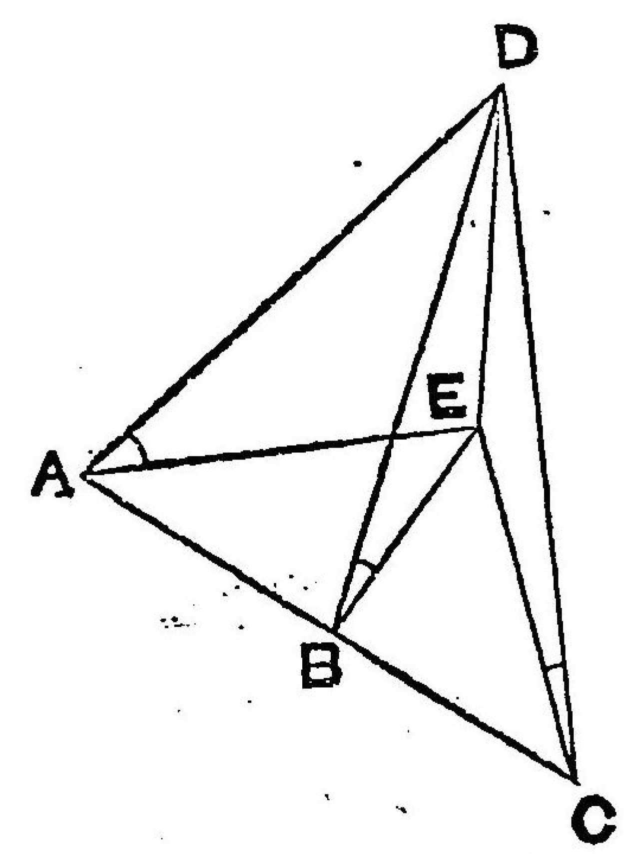
即チ約0哩.866ナリ.

42. 高ク揚レル風船ヲ一水平直線上ナル三ツノ點 A, B, 及ビ C ヨリ望ミタル仰角ハソレゾレ 60°, 45°, 及ビ 30° ナリト云フ, 風船ノ高サ何程ナルカ. 但 AB＝BC＝10町 トス.

[30. 一高.]

解 I. 風船ノ位置ヲ D トシ, 其ノ高サヲ DE トス.

然ルトキハ $D\hat{A}E = 60^\circ$, $D\hat{B}E = 45^\circ$, $D\hat{C}E = 30^\circ$ ナルベシ. サテ



$$AD = \frac{DE}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}DE,$$

$$CD = \frac{DE}{\sin 30^\circ} = 2DE,$$

$$BD = \frac{DE}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}.DE,$$

而シテ $$\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = 2(\overline{BD}^2 + \overline{AB}^2),$$

即チ

$$\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - 2\overline{BD}^2 = 2\overline{AB}^2,$$

即チ $$\overline{DE}^2\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2^2 - 2(\sqrt{2})^2\right\} = 2\times 10^2,$$

故ニ $$\overline{DE}^2 = \frac{200}{\frac{4}{3}+4-4} = 150,$$

故ニ $$DE = \sqrt{150}$$

$= 12.2174 \ldots\ldots\ldots\ldots,$

故ニ　約12町.2174，卽チ　約12町14間.8 ナリ.

解 II.　$AE = \dfrac{DE}{\tan 30^\circ} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}.DE,$

$$CE = \frac{DE}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}.DE,$$

$$BE = DE.$$

而シテ　$\overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 = 2\overline{EB}^2 + 2\overline{AB}^2,$

故ニ　$\overline{DE}^2\left(\dfrac{1}{3} + 3 - 2\right) = 2 \times 100,$

卽チ　$\dfrac{4}{3}\overline{DE}^2 = 200,$

故ニ　$DE = \sqrt{150},$

以下解 I ニ同ジ.

43.　或人湖水面ヲ拔クコト 120 尺ノ高處ニ居リテ風船ノ仰角 15 度ヲ測リ，又湖水面ヨリ反射スル其ノ映像ノ俯角 30 度ヲ測レリ，湖水面上風船ノ高サ如何.　[37. 大. 高. 工.]

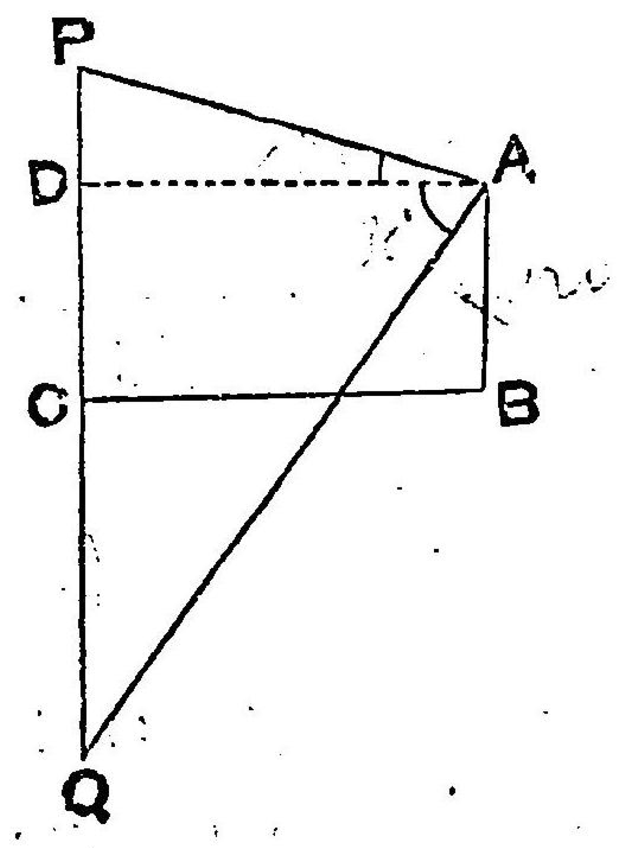
解　A ヲ觀測點，P ヲ風船，Q ヲ風船ノ映像トシ，BC ヲ湖水面，AD ∥ BC トスルトキハ

$$AB = CD = 120\text{尺},$$

$$P\hat{A}D = 15^\circ,\ D\hat{A}Q = 30^\circ,$$

$$PC = CQ$$

ナルベシ.



依リテ

$$AD = PD\cot 15^\circ$$

$$= (PC - CD)\cot 15^\circ,$$

$$AD = QD\cot 30^\circ$$

$$= (PC + CD)\cot 30^\circ,$$

故ニ

$$(PC - CD)\cot 15^\circ$$

$$= (PC + CD)\cot 30^\circ,$$

之ヨリ　$PC(\cot 15^\circ - \cot 30^\circ) = CD(\cot 15^\circ + \cot 30^\circ)$

$$= 120(\cot 15^\circ + \cot 30^\circ),$$

故ニ　$PC = \dfrac{120(\cot 15^\circ + \cot 30^\circ)}{\cot 15^\circ - \cot 30^\circ}$

$$= \frac{120(2 + \sqrt{3} + \sqrt{3})}{2 + \sqrt{3} - \sqrt{3}}$$

$$= 120(1 + \sqrt{3}) \fallingdotseq 327.846,$$

卽チ約 328尺 ナリ.

K. 三角形の解法

II. 一般三角形の解法及び其の應用

1. 三角形ノ二邊及ビ其ノ夾角ヲ與ヘタルトキ他ノ二ツノ角ヲ求ムル公式ヲ作レ. [31. 二高.]

解 I. 既知ノ二邊ヲ b, c, 夾角ヲ A トス,

$$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{b}{c},\ 故ニ\ \frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}=\frac{b-c}{b+c},$$

故ニ $$\frac{\tan\frac{1}{2}(B-C)}{\tan\frac{1}{2}(B+C)}=\frac{b-c}{b+c},$$

即チ $$\tan\frac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c}\tan\frac{1}{2}(B+C)$$

$$=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2},$$

或ハ $$L\tan\frac{1}{2}(B-C)=\log(b-c)$$
$$-\log(b+c)+L\cot\frac{A}{2}.$$

之ヨリ $\frac{1}{2}(B-C)$ ヲ得ベク,

$$\frac{1}{2}(B+C)=90°-\frac{A}{2}$$

ヨリ $\frac{1}{2}(B+C)$ ヲ得ベシ.

從ヒテ B 及ビ C ヲ求メ得ベシ.

解 II. $$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{b}{c},$$

故ニ $$\frac{\sin(A+C)}{\sin C}=\frac{b}{c}.$$

即チ $$\frac{\sin A\cos C+\cos A\sin C}{\sin C}=\frac{b}{c}.$$

即チ $$\sin A\cot C+\cos A=\frac{b}{c},$$

故ニ $$\cot C=\operatorname{cosec}A\left(\frac{b}{c}-\cos A\right),$$

之ヨリ C ヲ求メ得ベク,

從ヒテ $$B=180°-(A+C)$$

ヨリ B ヲ求メ得ベシ.

解 III. $$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin A}{a}$$
$$=\frac{\sin A}{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}},$$

故ニ $$\sin B=\frac{b\sin A}{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}},$$

$$\sin C=\frac{c\sin A}{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}}$$

ヨリ B 及ビ C ヲ求メ得ベシ.

注意　解 II. 解 III ノ式ニ於テハ對數計算ニ不便ナリ.

2. 二邊ト夾角トヲ知リテ三角形ヲ解ケ.

[38. 商船.]

解　前題ノ如クシテ角ヲ求メ,

邊ハ　$a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}$,

或ハ　$\log a=\log b+\log\sin A-\log\sin B$,

又ハ　$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$

ヨリ求メ得ベシ.

3. 三角形ノ二邊ノ長サソレゾレ30尺, 35尺ニシテ其ノ夾角 60° ナルトキハ第三邊ノ長サ如何.

[35. 東. 高. 工.]

解　前題ニ依リテ第三邊ハ

$$\sqrt{30^2+35^2-2\times30\times35\times\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{1075}\fallingdotseq32.787,$$

即チ　約 32尺.79 ナリ

4. 三角形ノ二邊ハソレゾレ 5 尺及ビ 7 尺ニシテ其ノ夾角 60°, 依リテ第三邊及ビ面積ヲ求メヨ.

[34. 東. 高. 工.]

解　前題ト同樣ニシテ第三邊ハ

$$\sqrt{5^2+7^2-2\times5\times7\times\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{39}\fallingdotseq6.245,$$

即チ　約 6尺.245 ナリ.

次ニ面積ハ公式 $\frac{1}{2}ab\sin C$ ニ依リテ

$$\frac{1}{2}\times5\times7\times\frac{\sqrt{3}}{2}\fallingdotseq17.655,$$

即チ　約 17平方尺.655 ナリ.

5. 三角形 ABC ニ於テ $b=25$間, $c=32$間, $A=60°$ナルトキ面積幾何ナルカ. 但坪以下二桁マデ計算セヨ.

[33. 東. 高. 師.]

解　前題ト同樣ニシテ

$$\frac{1}{2}\times25\times32\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=200\sqrt{3}\fallingdotseq346.42,$$

即チ　約 346坪.42 ナリ.

6. 三角形 ABC ニ於テ $A=120°$, $b=12$尺, $c=9$尺 ナルトキ a ヲ求メヨ.

[39. 海. 機.]

解　$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$

$$=\sqrt{12^2+9^2-2\times12\times9\times\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\sqrt{333}\doteqdot 18.25,$$

即チ 約18尺.25 ナリ.

7. 三角形 ABC ニ於テ $a=24$尺, $b=50$尺 ニシテ $\cos C=0.9246$ ナルトキ c ヲ求メヨ.

[32. 東. 高. 商.]

解 $$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$$
$$=\sqrt{24^2+50^2-2\times 24\times 50\times 0.9246}$$
$$=\sqrt{(50-24)^2+2\times 24\times 50\times 0.0754}$$
$$=\sqrt{26^2+24\times 7.54}$$
$$=\sqrt{856.96}\doteqdot 29.27,$$

即チ 約29尺.27 ナリ.

8. 三角形 ABC ニ於テ $a=365$尺, $b=274$尺, $\cos C=0.81915$ ナルトキ邊 c ヲ分マデ計算セヨ.

[31. 一高.]

解 $$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$$
$$=\sqrt{365^2+274^2-2\times 365\times 274\times 0.81915}$$
$$=\sqrt{(365-274)^2+2\times 365\times 274\times 0.18085}$$
$$=\sqrt{91^2+10\times 73\times 137\times 0.3617}$$
$$=\sqrt{8281+10001\times 3.617}$$
$$=\sqrt{44454.617}$$
$$=210.84\ \ldots\ldots,$$

即チ 約210尺8寸4分ナリ.

9. 三角形ノ二邊ノ比ハ 5 : 3 ニシテ其ノ夾角ハ 40° ナルトキ他ノ角ヲ求メヨ. 但 $\tan 70^\circ=2.748$, $\tan 34^\circ 30'=0.687$.

[39. 水. 講.]

解 三角形 ABC ニ於テ $A=40^\circ$, $b:c=5:3$ トス.

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}=\frac{5-3}{5+3}\cot 20^\circ$$
$$=\frac{1}{4}\tan 70^\circ=\frac{1}{4}\times 2.748$$
$$=0.687\qquad=\tan 34^\circ 30',$$

故ニ $$\frac{B-C}{2}=34^\circ 30',$$
$$\frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}=70^\circ,$$

依リテ $$B=104^\circ 30',\ C=35^\circ 30'.$$

10. 三角形 ABC ニ於テ $b=750$, $c=250$, $\log 5=0.69897$, $L\cot\frac{A}{2}=9.93503$ ヲ與ヘテ $\log\tan\frac{B-C}{2}$ ヲ求メヨ.

[30. 東. 高. 商.]

解 $$L\tan\frac{B-C}{2}=\log\frac{b-c}{b+c}+L\cot\frac{A}{2}$$
$$=\log\frac{750-250}{750+250}+9.93503$$

$=\log 0.5+9.93503$

$=\bar{1}.69897+9.93503$

$=9.63400,$

故ニ $\log\tan\frac{B-C}{2}=\bar{1}.63400.$

11. 三角形 ABC ニ於テ角 A, B, C ノ對邊ノ長サヲソレゾレ a, b, c トシ, 且 $A=78°32'$, $b=36$米.523, $c=25$米.065 ナルトキ B, C ノ値ヲ求メヨ.

但 $\log 11458=4.0591088$, $\log 61588=4.7894610$,
$\log\tan 12°49'=\bar{1}.3569821$,
$\log\tan 12°50'=\bar{1}.3575658$,
$\log\cot 39°16'=0.0875019$. [33. 陸. 士.]

解 $\log\tan\frac{B-C}{2}$

$=\log(b-c)-\log(b+c)+\log\cot\frac{A}{2}$

$=\log 11.458-\log 61.588+\log\cot 39°16'$

$=1.0591088-1.7894610+0.0875019$

$=\bar{1}.3571497$

$=\log\tan 12°49'17''.2,$

故ニ $\frac{B-C}{2}=12°49'17''.2,$

$\frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2}=90°-39°16'=50°44',$

故ニ $B=63°33'17''.2$, $C=37°54'42''.8.$

但 $b=36.523$
$c=25.065$
$b-c=11.458$
$b+c=61.588$

$\log\tan 12°50'=\bar{1}.3575658$
$\log\tan 12°49'=\bar{1}.3569821$
$1' \quad 5837$
$\bar{1}.3571497$
1676

$17''.2 \doteqdot 60''\times\frac{1676}{5837}$

$\therefore \log 12°49'17''.2=\bar{1}.3571497$

12. 三角形ノ二邊ノ長サ 4453尺.4 ト 2968尺.5 トニシテ其ノ夾角ハ 74°21′24″ ナリ, 他ノ二角及ビ一邊ヲ見出セ. [35. 海. 兵.]

解 I. 三角形 ABC ニ於テ $b=4453.4$, $c=2968.5$, $A=74°21'24''$ トス.

$L\tan\frac{1}{2}(B-C)=\log(b-c)-\log(b+c)+L\cot\frac{A}{2}$

$=\log 1484.9-\log 7421.9+L\cot 37°10'42''$

$=3.17170-3.87051+10.12008$

$=9.42127=L\tan 14°46'40'',$

故ニ $\frac{1}{2}(B-C)=14°46'40'',$

又 $\frac{1}{2}(B+C)=90°-\frac{A}{2}$

$$=90^\circ-37^\circ10'42''=52^\circ49'18'',$$

依リテ　$B=67^\circ35'58''$, $C=38^\circ2'38''$.

次ニ　$$\log a=\log b+\log\sin A-\log\sin B$$
$$=\log 4453.4+\log\sin 74^\circ21'24''-\log\sin 67^\circ35'58''$$
$$=3.64869+\bar{1}.98361-\bar{1}.96593$$
$$=3.66633=\log 4638.4,$$

即チ　$a\doteqdot 4638$尺$.4$.

解 II.　七桁ノ表ニ依ルトキハ次ノ如シ.

$$L\tan\frac{B-C}{2}=\log 1484.9-\log 7421.9+L\cot 37^\circ10'42''$$
$$=3.1716972-3.8705151+10.1200754$$
$$=9.4212575=L\tan 14^\circ46'38''.6,$$

故ニ　$$\frac{B-C}{2}=14^\circ46'38''.6,$$

又　$$\frac{B+C}{2}=52^\circ49'18'',$$

故ニ　$B=67^\circ35'56''.6$, $C=38^\circ2'39''.4$.

$$\log a=\log 4453.4+\log\sin 74^\circ21'24''-\log\sin 67^\circ35'56''.6$$
$$=3.6486917+\bar{1}.9836078-\bar{1}.9659235$$

$$=3.6663740=\log 4638.46,$$

即チ　$a\doteqdot 4638$尺$.46$.

13.　三角形ノ三邊ヲ知リテ其ノ角ヲ對數ニテ計算スルニ用フル公式ヲ作レ.

[30. 一高., 34. 東. 高. 商.]

解*　一ツノ角 A ハ公式

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

ノ何レニテモ求メ得ベシ.

他ノ角ニ就キテモ亦同様ナリ.

即チ　$$\log\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\{\log(s-b)+\log(s-c)-\log b-\log c\},$$ 等.

注意　二ツノ角ヲ上ノ如キ式ニ求メタルトキハ他ノ角ハ $180^\circ-(B+C)=A$, 等ニ依リテ求ムルヲ便利トス.　又上ノ正弦 餘弦, 正切ノ式ノ中, 正切ノ式ニ依ルトキハ他ノ式ニ依ルヨリモ較便利ナリ.

*本題ニ於テハ「公式ヲ作レ」トアルユエ單ニ

公式ヲ示スニ止マラズ，其ノ作リ方ヲ示スベシ，此ハ大抵ノ中學教科書ニアレドモ，尙卷末ノ「補」ニ之ヲ示スベシ．

14. 三角形ノ三邊ノ長サ 20, 21, 29 ナルトキ最大ナル角ノ大サ如何． [35. 大. 高. 工.]

解 三角形 ABC ニ於テ最大ナル角ヲ A トスルトキハ $a=29$ ナルベシ

故ニ公式 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

ニ依リテ $\cos A=\dfrac{20^2+21^2-29^2}{2\times20\times21}=0,$

故ニ $A=90^\circ.$

15. 三角形 ABC ニ於テ $a=6,\ c=5,\ \cos C=0.75$ ナルトキ b ヲ小數第二位マデ求メヨ． [33. 東. 高. 商.]

解 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

ナルユエ $5^2=6^2+b^2-2\times6\times0.75b,$

故ニ $b^2-9b+11=0,$

故ニ $b=\dfrac{9\pm\sqrt{37}}{2}\fallingdotseq7.54,$ 或ハ $1.46.$

16. $B=30^\circ,\ c=150,\ b=50\sqrt{3}$ ナル要件ニ適スル二ツノ三角形ノ中，一ハ二等邊三角形，一ハ直角三角形ナルコトヲ證セヨ．且大ナル三角形ノ第三邊ヲ見出セ． [37. 農. 大. 實.]

解 $\sin C=\dfrac{c}{b}\sin B=\dfrac{150}{50\sqrt{3}}\sin30^\circ$

$=\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},$

故ニ $C=60^\circ,$ 或ハ $120^\circ,$

從ヒテ $A=180^\circ-(30^\circ+60^\circ)=90^\circ,$

或ハ $180^\circ-(30^\circ+120^\circ)=30^\circ,$

即チ △ABC ハ直角三角形或ハ二等邊三角形ナリ．次ニ大ナル三角形，即チ直角三角形ノ第三邊 a ハ斜邊ニ相當ス，故ニ

$a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{150^2+(50\sqrt{3})^2}$

$=100\sqrt{3},$ 即チ 約 173.21 ナリ．

17. 三角形 ABC ニ於テ a, b ヲ A, B ニ對スル邊トシ $a=2,\ b=3,$ $\mathrm{L}\sin A=9.5228813$ ヲ知リテ $\mathrm{L}\sin B$ ヲ求メヨ． 但 $\log2=0.3010300,$ $\log3=0.4771213.$ [32. 陸. 士.]

解 $\dfrac{\sin B}{\sin A}=\dfrac{b}{a},$

故ニ $\mathrm{L}\sin B=\mathrm{L}\sin A+\log b-\log a$

$=9.5228813+\log3-\log2$

$=9.5228813+0.4771213-0.3010300$

$=9.6989726.$

18. 三角形ABCニ於テ $B=60^\circ 40'$, $C=50^\circ 10'$, $a=10.62$ ナルトキ b ヲ求メヨ.

但 $\log 106=2.0253$, $\log 107=2.0294$,

$\log\sin 60^\circ=9.9375-10$, $\log\sin 61^\circ=9.9418-10$.

[38. 東. 高. 商.]

解 $A=180^\circ-(B+C)$

$=180^\circ-(60^\circ 40'+59^\circ 10')$

$=60^\circ 10'$.

$\log b=\log\sin B+\log a-\log\sin A$

$=\log\sin 60^\circ 40'+\log 10.62-\log\sin 60^\circ 10'$

$=\bar{1}.9404+1.0261+0.0618$

$=1.0283=\log 10.67$,

故ニ $b=10.67$.

但 $\log\sin 61^\circ=\bar{1}.9418$

$\log\sin 60^\circ=\bar{1}.9375$

$1^\circ \quad 43$

$10' \quad 43\times\frac{1}{6}=7$

$40' \quad 43\times\frac{4}{6}=29$

$\therefore \log\sin 60^\circ 10'=\bar{1}.9382$

$\operatorname{colog}\sin 60^\circ 10'=0.0618$.

$\log\sin 60^\circ 40'=\bar{1}.9404$,

$\log 107=2.0294$

$\log 106=2.0253$

$1 \quad 41$

$.2 \quad 8.2$

$\therefore \log 10.62=1.0261$

$\log b=1.0283$

$\log 10.6=1.0253$

$7 \quad 29$

$\therefore \log 10.67=1.0282$.

19. 三角形ノ一邊ノ長サハ 3456.78 ニシテ其ノ兩端ニ於ケル角ハ $8^\circ 27' 45''$ ト $27^\circ 36' 45''$ トナリ. 他ノ二邊ノ長サヲ問フ, 但表ヲ用ヒテ計算セヨ.

[34. 海. 兵.]

解 I. $\triangle ABC$ ニ於テ $a=3456.78$, $B=27^\circ 36' 45''$, $C=8^\circ 27' 45''$ トス.

$A=180^\circ-(B+C)$

$=180^\circ-(27^\circ 36' 45''+8^\circ 27' 45'')$

$=180^\circ-36^\circ 4' 30''$,

$\log b=\log a+\log\sin B-\log\sin A$

$=\log 3456.78+\log\sin 27^\circ 36' 45''-\log\sin 36^\circ 4' 30''$

$=3.53867+\bar{1}.66604-\bar{1}.77000$

$=3.43471=\log 2720.875$,

故ニ $\qquad b=2720.9.$

次ニ $\qquad \log c=\log a+\log\sin C-\log\sin A$

$$=\log a+\log\sin 8°27'45''-\log\sin A$$

$$=3.53867+\bar{1}.16780-\bar{1}.77000$$

$$=2.93647=\log 863.92,$$

故ニ $\qquad c=863.92.$

解 II. 七桁ノ表ニ依ルトキハ次ノ如シ.

$$\log b=\log 3456.78+\log\sin 27°36'45''-\log\sin 36°4'30''$$

$$=3.5386718+\bar{1}.6660397-\bar{1}.7700001$$

$$=3.4347114=\log 2720.89,$$

故ニ $\qquad b=2720.89.$

$$\log c=\log a+\log\sin 8°27'45''-\log\sin A$$

$$=3.5386718+\bar{1}.1677957-\bar{1}.7700001$$

$$=2.9364674=\log 863.908,$$

故ニ $\qquad c=863.908.$

20. 三角形ABCニ於テ $a^2=b^2+bc+c^2$ ナルトキハ角Aノ大サ如何. [37. 商船.]

解 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+bc+c^2,$

故ニ $\qquad \cos A=\dfrac{bc}{-2bc}=-\dfrac{1}{2},$

而シテAハ三角形ノ角ナルユエ180°ヨリ小ナ

ル正角ナリ.

依リテ $\qquad A=120°.$

21. 三角形ABCニ於テ

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{5}{6},\qquad \tan\frac{B}{2}=\frac{20}{37}$$

ナルトキtanCノ値ヲ求メヨ

[35. 大.高.工., 38. 專.入.檢.]

解 $\qquad \tan\dfrac{C}{2}=\cot\dfrac{A+B}{2}$

$$=\frac{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}}=\frac{1-\frac{5}{6}\times\frac{20}{37}}{\frac{5}{6}+\frac{20}{37}}$$

$$=\frac{6\times37-5\times20}{5\times37+20\times6}=\frac{122}{305},$$

次ニ $\qquad \tan C=\dfrac{2\tan\frac{C}{2}}{1-\tan^2\frac{C}{2}}=\dfrac{2\times\frac{122}{305}}{1-\left(\frac{122}{305}\right)^2}$

$$=\frac{2\times122\times305}{(305+122)(305-122)}$$

$$=\frac{2\times122\times305}{427\times183}=\frac{20}{21}.$$

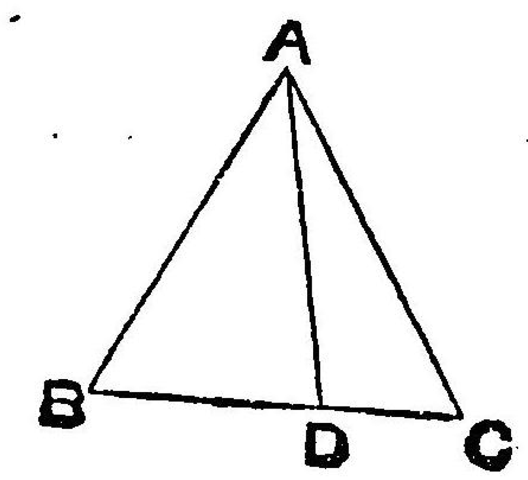
22. 正三角形ノ一角ヲ 2:1 ノ比ニ分ツ直線ハ對邊ヲ如何ナル比ニ分ツカ.

但 $\cos20°=0.94$ トス. [38. 水.講.]

解　ABC ヲ正三角形トシ, $\hat{BAD}:\hat{CAD}=2:1$ トスレバ　$\hat{BAC}=60^\circ$　ナルユヱ

$\hat{BAD}=40^\circ,\ \hat{CAD}=20^\circ,$　而シテ

$$BD=AD\cdot\frac{\sin BAD}{\sin B}=AD\cdot\frac{\sin 40^\circ}{\sin 60^\circ},$$



$$CD=AD\cdot\frac{\sin CAD}{\sin C}$$

$$=AD\cdot\frac{\sin 20^\circ}{\sin 60^\circ},$$

故ニ　$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}$

$$=\frac{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}=2\cos 20^\circ=2\times 0.94=1.88,$$

卽チ　$BD:CD=1.88:1=47:25.$

23.　三角形 ABC ニ於テ

$$\sin(A+B)=\frac{1}{2}\cos(A-C)=\frac{1}{2}$$

ナルトキ A, B, C ノ大サ如何.　[38. 海. 機.]

解　$\sin(A+B)=\dfrac{1}{2},$

故ニ　$A+B=30^\circ,$ 或ハ 150° ... ... (1)

又　$\cos(A-C)=1,$　故ニ　$A-C=0^\circ,$

卽チ　$A=C$ ... ... (2)

而シテ　$A+B+C=180^\circ$ ... ... (3)

(1) ト (3) トヨリ　$C=150^\circ$ 或ハ 30°,

然レドモ (2) ニ依リテ $C=150^\circ$ ナルコト能ハズ,

故ニ　$A=C=30^\circ,$

從ヒテ　$B=120^\circ.$

24.　三角形ノ一邊ト其ノ角ノ三角函數トヲ以テ面積ヲ表ハス式ヲ作レ.　[30. 陸. 士.]

解 I.　面積ヲ S トス.

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A\quad [\text{I. 14 題 (II)}]$$

$$=\frac{1}{2}b\cdot b\frac{\sin C}{\sin B}\sin A$$

$$=\frac{b^2\sin C\sin A}{2\sin B},\ 或ハ\ \frac{b^2\sin C\sin A}{2\sin(A+C)}.$$

同樣ニシテ　$S=\dfrac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C},$ 或ハ $\dfrac{c^2\sin A\sin B}{2\sin(A+B)}.$

$$=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A},\ 或ハ\ \frac{c^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}.$$

解 II.　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{b\sin A\cdot c\sin A}{2\sin A}$

$$=\frac{a\sin B\cdot a\sin C}{2\sin A}=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$$

$$=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}=\frac{a^2}{2(\cot B+\cot C)}.$$

等.

注意 尙 $\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\dfrac{2a^2\sin B\sin C}{4\sin A}$

$$=\frac{a^2\{\cos(B-C)-\cos(B+C)\}}{4\sin(B+C)}$$

$$=\frac{a^2\{\cos(B-C)+\cos A\}}{4\sin A},$$ 等

ニ變化スルコトヲ得ベシ.

25. 三角形ノ地面アリ,其ノ三邊ハ24間,35間,17間ナリ,此ノ地積ハ何坪何合何勺ナルカ.

[42. 各.醫.專.]

解 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$=\sqrt{38(38-24)(38-35)(38-17)}$$

$$=\sqrt{38\times14\times3\times21}$$

$$=42\sqrt{19}\fallingdotseq183.07,$$

即チ 約183坪0合7勺 ナリ.

但 $s=\frac{1}{2}(24+35+17)=38.$

26. 底邊12寸,頂角60度ナル三角形ノ外接圓ノ半徑如何.

[37. 千.醫.專.]

解 公式 $2R=\dfrac{a}{\sin A}$

ニ依リ $R=\dfrac{a}{2\sin A}=\dfrac{12}{2\sin60^\circ}$

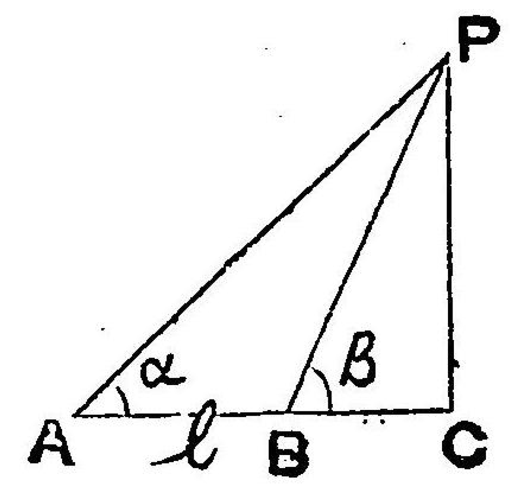
$$=\frac{12}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=4\sqrt{3}\fallingdotseq6.928,$$

即チ 約6寸.928 ナリ.

27. 近ヅクベカラザル物ノ高サヲ測ル法如何.

[35. 大.高.工.]

解 I. 測ラントスル物ノ高サヲ PC トシ, C ヲ過ル水平面上ニ於テ一直線 ABC ヲ取リ,



$P\hat{A}C=\alpha,\quad AB=l,$

$P\hat{B}C=\beta$

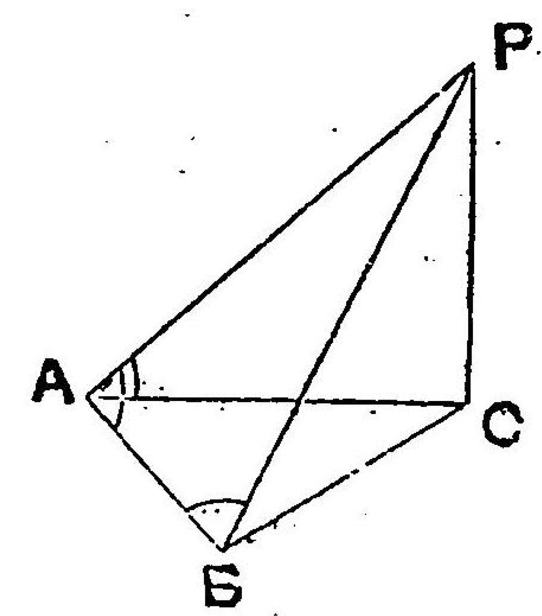
ヲ測リ得ルトキハ

$$AP=AB\frac{\sin ABP}{\sin APB}=l\frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)},$$

$$PC=AP\sin PAC=\frac{l\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$$

ヨリ PC ヲ得ベシ.

解 II. AC ノ上ニ於テ AB ノ長サヲ測ルニ不便ナルトキハ次ノ如クスベシ.



C ヲ過ル水平面上ニ二點 A, B ヲ取リ,

$P\hat{A}C=\alpha,\quad P\hat{A}B=\beta,$

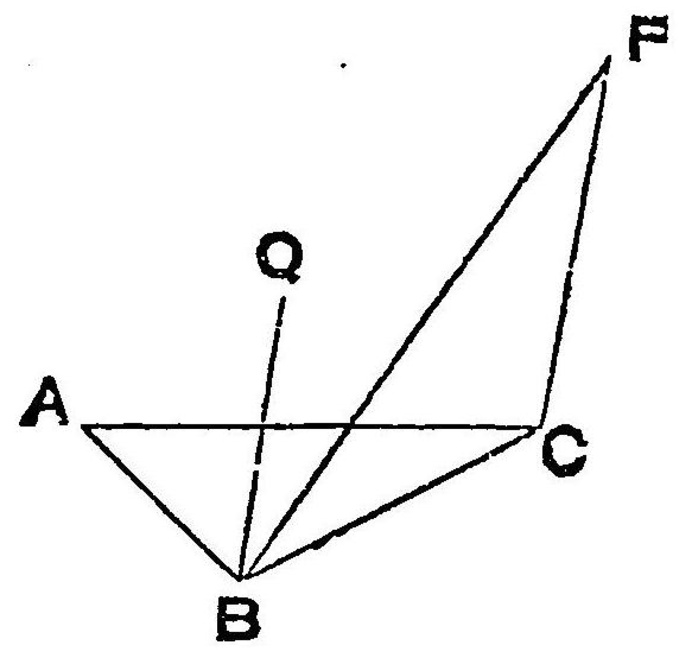
$AB=l,\quad P\hat{B}A=\gamma$

ヲ測リ得タリトスレバ

$$PA=AB\cdot\frac{\sin ABP}{\sin APB}=l\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(\pi-\beta-\gamma)},$$

$$PC = AP\sin PAC = \frac{l\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

解 III. 又Cヲ過ル水平面上ニ於テA, Bヲ取ルニ不便ナルトキハ次ノ如クスベシ.



直線 $AB=l$ ヲ任意ニ取リ, $BQ \parallel CP$ トシ, $C\hat{A}B=\alpha$, $A\hat{B}C=\beta$, $P\hat{B}C=\gamma$, $P\hat{B}Q=\delta$ ヲ測リ得タリトス. 然ルトキハ

$$BC = \frac{l\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},\quad PC = BC\cdot\frac{\sin PBC}{\sin BPC}$$

$$= \frac{l\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)\sin\delta}\quad [\because P\hat{B}Q = B\hat{P}C].$$

注意 本題ハ題意廣キヲ以テ尚他ノ解法アルベシ, 又 J. 23題, 25題, 30題, 35題, 37題, 40題, 41題, 42題ヲ參照セヨ.

28. 人アリ, 一點Bヨリ或山ノ頂上Cヲ測リシニ $27°18'$ ヲ得タリ, 又同ジ水平面上500間後方ナル點Aヨリ之ヲ測リシニ $16°10'$ ヲ得タリト云フ, 依リテ山ノ高サヲ求メヨ.

但 $L\sin27°18' = 9.66148$, $\log5 = 0.69897$,

$L\sin16°10' = 9.44472$, $\log3307 = 3.51940$,

$L\sin11°8' = 9.28577$. [38. 長. 高. 商.]

解 前題解Iニ於テ

$$\beta = 27°18',\quad l = 500\text{間},\quad \alpha = 16°10'$$

トシテ得ベシ.

即チ $$x = \frac{500\sin16°10'\sin27°18'}{\sin(27°18'-16°10')},$$

故ニ $$\log x = \log5 + 2 + \log\sin16°10' + \log\sin27°18' - \log\sin11°8'$$

$$= 0.69897 + 2 + \bar{1}.44472 + \bar{1}.66148 - 1.28577$$

$$= 2.51940 = \log330.7,$$

故ニ $$x = 330\text{間}.7.$$

29. 山頂ニ於テ同ジ方向ニアル二家屋ノ俯角ヲ測リシニ $23°20'$ 及ビ $18°10'$ ヲ得タリ, 又二家屋ノ距離ハ440間ナリ, 山ノ高サヲ求メヨ.

但 $\log\sin23°20' = \bar{1}.59778$, $\log44 = 1.64345$,

$\log\sin18°10' = \bar{1}.49385$, $\log6033 = 3.78053$,

$\log\sin5°10' = \bar{2}.95450$, $\log6034 = 3.78061$.

[34. 陸. 士.]

解 前題ト同樣ニシテ山ノ高サヲ x トスレバ

$$\log x=\log 44+1+\log\sin 23^\circ 20'+\log\sin 18^\circ 10'-\log\sin 5^\circ 10'$$

$$=1.64345+1+\bar{1}.59778+\bar{1}.49385-\bar{2}.95450$$

$$=2.78058=\log 603.36,$$

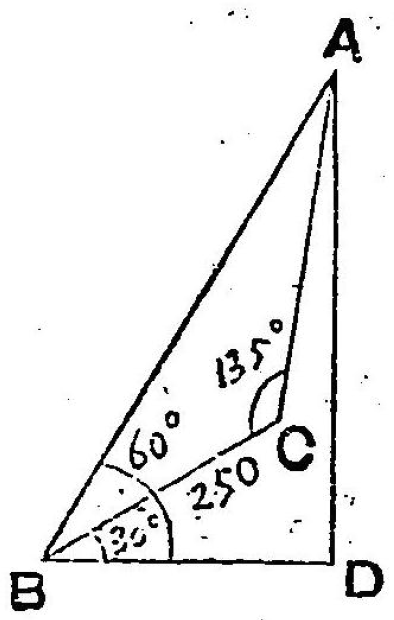
即チ　$x \fallingdotseq 603$間$.36$.

但

		2.78058
log603.4	=	2.78061
log603.3	=	2.78053
	1	8
$\frac{5}{8}=.625$		5
∴ log603.36	=	2.78058

30. 傾斜30°, 長サ250米ナル斜面BCアリ, 其ノ麓ノ點Bニ於テ山頂Aヲ望ミ仰角60°ヲ得タリ, 今 $\hat{BCA}$ ヲ135°ナリトスレバAハBヨリ高キコト幾何. [38. 陸.士.]

解　點Bヲ含ム水平面上Aノ直下ノ點ヲDトス. 然ルトキハ



$$AD=AB\sin 60^\circ,$$

而シテ

$$BAC=180^\circ-(135^\circ+30^\circ)=15^\circ$$

ナルユエ

$$AB=\frac{BC\sin BCA}{\sin BAC}=\frac{250\sin 135^\circ}{\sin 15^\circ}=\frac{250\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ},$$

故ニ　$$AD=\frac{250\sin 45^\circ\sin 60^\circ}{\sin 15^\circ}$$

$$=250\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{250\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

$$=125(3+\sqrt{3})\fallingdotseq 591.5,$$

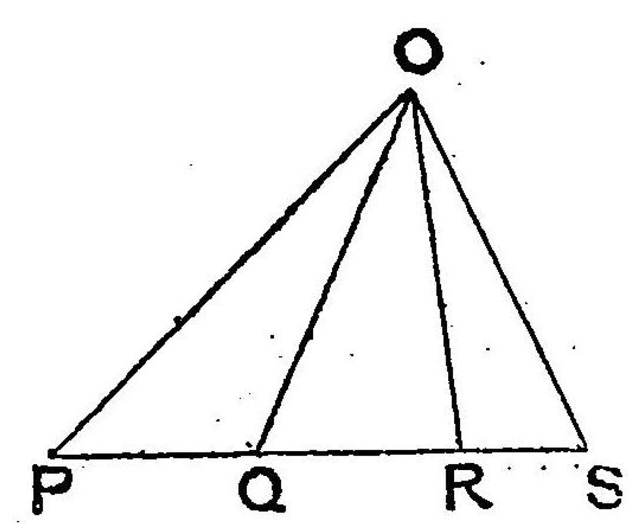
即チ　約591米.5 ナリ.

31. P, Q, R, S ハ順次ニ一直線上ニ取レル四點ナルトキ, 其ノ直線外ニ任意ノ一點Oヲ取リ, 之ヲP, Q, R, Sニ結ビ付クルトキハ

$$\frac{PQ.RS}{QR.PS}=\frac{\sin POQ.\sin ROS}{\sin QOR.\sin POS}$$

ナルコトヲ證セヨ. [42. 大.高.工.]

證　$$PQ=\frac{OP\sin POQ}{\sin OQS},\quad RS=\frac{OS\sin ROS}{\sin ORS},$$



$$QR=\frac{OQ\sin ROQ}{\sin ORS},$$

$$PS=\frac{OP\sin POS}{\sin OSP}.$$

故ニ　$$\frac{PQ.RS}{QR.PS}=\frac{OS\sin OSP\sin POQ\sin ROS}{OQ\sin OQS\sin QOR\sin POS},$$

然ルニ　$$\frac{OS}{\sin OQS}=\frac{OQ}{\sin OSP},$$

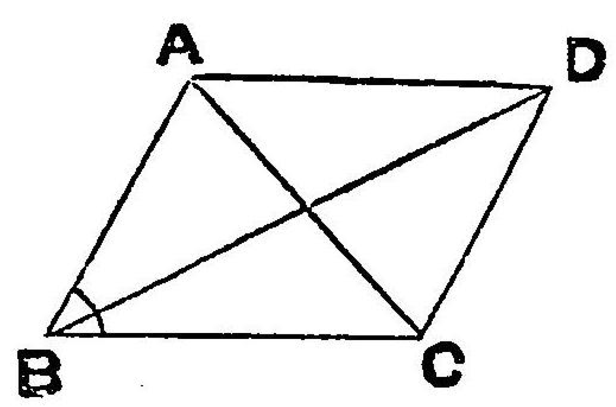
故ニ　$$OS\sin OSP=OQ\sin OQS,$$

依リテ　$$\frac{PQ.RS}{OQ.PS}=\frac{\sin POQ.\sin ROS}{\sin QOR.\sin POS}.$$

32. 平行四邊形ノ二邊ノ長サ8尺及ビ12尺ニシテ其ノ夾角60°ナルトキハ對角線ノ長サ各如何.　[38. 商船.]

解 ABCD ヲ平行四邊形トシ, AB=8尺, BC=12尺, $\hat{ABC}=60°$ トス.

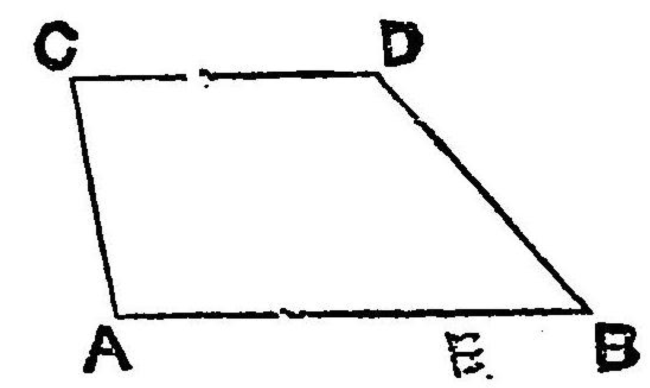
然ルトキハ　$$AC=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2AB.BC\cos B}$$
$$=\sqrt{8^2+12^2-2\times8\times12\cos60°}$$
$$=\sqrt{8^2+12^2-8\times12}$$
$$=\sqrt{(12-8)^2+8\times12}$$
$$=\sqrt{112}$$
$$\fallingdotseq10.58.$$



又　$$BD=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2AB.AD\cos A}$$
$$=\sqrt{8^2+12^2-2\times8\times12\cos120°}$$
$$=\sqrt{8^2+12^2+8\times12}$$
$$=\sqrt{(12-8)^2+3\times8\times12}$$
$$\sqrt{304}\fallingdotseq17.44,$$

故ニ所要ノ對角線ノ長サハ約10尺.58, 及ビ約17尺.44ナリ.

33. 次ノ圖ニ示セル如キ平地アリ, AB ト CD トハ相平行シ, 其ノ長サ AB ハ 850 米, CD ハ 650 米ナリ, 而シテ A 及ビ B ニ於テ $\hat{CAB}$ ハ 102°40′, $\hat{DBA}$ ハ 47°20′ ナルコトヲ測リ得タリ, 此ノ平地ノ面積ヲ求メヨ.　[42. 陸.士.]



但　$\cos12°40'=0.9757,\quad \cos42°40'=0.7353.$

解 D ヲ過リ CA ニ平行ナル直線ヲ引キ AB ト相交ル點ヲ E トスレバ

$$DE=CA,\quad EB=AB-CD,\quad \hat{DEB}=\hat{CAB}$$

ナルベシ.

故ニ　$$DE=\frac{EB\sin DBE}{\sin DEB}=\frac{(AB-CD)\sin DBE}{\sin(DEB+DBE)}$$
$$=\frac{200\sin47°20'}{\sin150°}=400\sin47°20'$$
$$=400\cos42°40',$$

而シテ　$$ABCD=AEDC+DEB$$
$$=AE.AC\sin CAE+\tfrac{1}{2}EB.ED\sin DEB$$

$$=650\times400\cos42°40'\sin102°40'$$

$$+\frac{1}{2}\times200\times400\cos42°40'\sin102\ 40'$$

$$=4000\cos42°40'\sin102°40'(65+10)$$

$$=300000\cos42°40'\cos12°40'$$

$$=300000\times0.7353\times0.9757$$

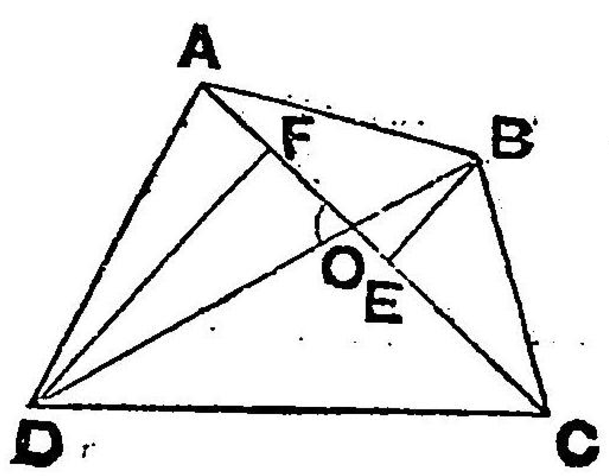
$$=215229.663,$$

卽チ　約215230平方米ナリ.

34.　凸四邊形ノ二ツノ對角線ヲ d, d' トシ, 其ノ夾角ヲ α トスレバ其ノ面積ハ $\frac{1}{2}dd'\sin\alpha$ ナルコトヲ證セヨ.　[31. 二高.]

證　四邊形 ABCD ノ對角線ヲ $AC=d$, $BD=d'$ トシ, $\hat{AOD}=\alpha$ トス.

今對角線ノ交點ヲ O トシ; B, D ヨリ AC ニ垂線 BE, DF ヲ下ストキハ ABCD ノ面積 S ハ



$$S=\tfrac{1}{2}AC(BE+DF)$$

$$=\tfrac{1}{2}AC(BO\sin\alpha+DO\sin\alpha)$$

$$=\tfrac{1}{2}AC.\sin\alpha\times(BO+DO)$$

$$=\tfrac{1}{2}AC.BD\sin\alpha=\tfrac{1}{2}dd'\sin\alpha.$$

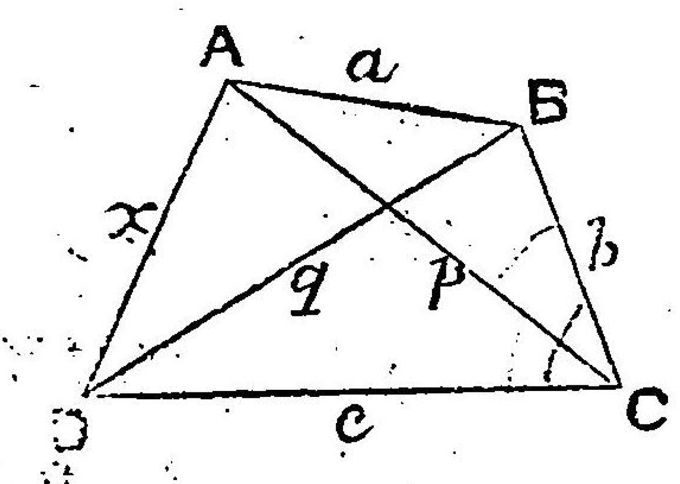
注意　垂線 BE, DF ヲ引クコトヲ避クレバ

$$S=\triangle AOD+\triangle COD+\triangle BOC+\triangle AOB,$$

及ビ　$\triangle AOD=\frac{1}{2}AO.OD\sin\alpha$, 等ヨリ所要ノ面積ヲ得ベシ.

35.　四邊形 ABCD ノ三ツノ邊 $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ トニツノ對角線 $AC=p$, $BD=q$ トヲ知リテ他ノ一邊 $AD=x$ ヲ計算セヨ.　[31. 各高等.]

解　△BCD ヨリ　$\cos BCD=\dfrac{\overline{BC}^2+\overline{CD}^2-\overline{BD}^2}{2BC.CD}$



$$=\frac{b^2+c^2-q^2}{2bc},$$

故ニ　$\hat{BCD}=\cos^{-1}\dfrac{b^2+c^2-q^2}{2bc},$

又　△ABC ヨリ

$$\cos ACB=\frac{\overline{BC}^2+\overline{CA}^2-\overline{AB}^2}{2BC.CA}=\frac{b^2+p^2-a^2}{2bp};$$

故ニ　$\hat{ACB}=\cos^{-1}\dfrac{b^2+p^2-a^2}{2bp},$

依リテ　$\hat{ACD}=\hat{BCD}-\hat{ACB}$

$$=\cos^{-1}\frac{b^2+c^2-q^2}{2bc}-\cos^{-1}\frac{b^2+p^2-a^2}{2bp}.$$

次ニ　△ACD ヨリ

$$AD=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{CD}^2-2AC.CD\cos ACD},$$

即チ　$x=\sqrt{p^2+c^2-2pc\cos\mathrm{ACD}}$.

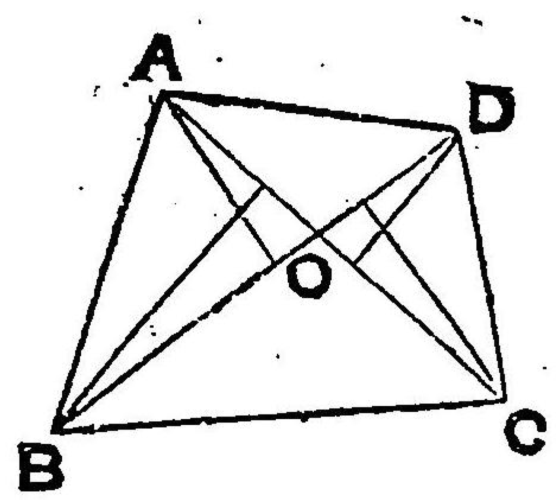
但　$\mathrm{A\hat{C}D}=\cos^{-1}\dfrac{b^2+c^2-q^2}{2bc}-\cos^{-1}\dfrac{b^2+p^2-a^2}{2bp}$.

36. 四邊形ノ各角頂ヨリ對角線ニ下ス垂線ノ長サヲ a, b, c, d トシ，對角線ノ長サヲ h, k トシ，及ビ對角線ノ夾角ヲ θ トセバ

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{(a+c)(b+d)}{hk}}$$

ナルコトヲ證セヨ．　[32. 東. 高. 工.]

證　四邊形 ABCD ノ各角頂 A, B, C, D ヨリ對角線ニ下セル垂線ノ長サヲソレゾレ a, b, c, d トシ，對角線 AC, BD ノ長サヲソレゾレ h, k トシ，其ノ交點ヲ O，$\mathrm{A\hat{O}B}=\theta$ トス．



然ルトキハ　$\mathrm{OA}=a\,\mathrm{cosec}\,\theta$,

$\mathrm{OC}=c\,\mathrm{cosec}\,\theta$,

故ニ　$\mathrm{OA}+\mathrm{OC}=(a+c)\,\mathrm{cosec}\,\theta$,

即チ　$h=(a+c)\,\mathrm{cosec}\,\theta$ ... ...(1)

又　$\mathrm{OB}=b\,\mathrm{cosec}\,\theta$,　$\mathrm{OD}=d\,\mathrm{cosec}\,\theta$,

故ニ　$\mathrm{OB}+\mathrm{OD}=(b+d)\,\mathrm{cosec}\,\theta$,

即チ　$k=(b+d)\,\mathrm{cosec}\,\theta$ ... ...(2)

(1), (2) ヨリ　$hk=(a+c)(b+d)\,\mathrm{cosec}^2\theta$,

故ニ　$\sin^2\theta=\dfrac{(a+c)(b+d)}{hk}$,

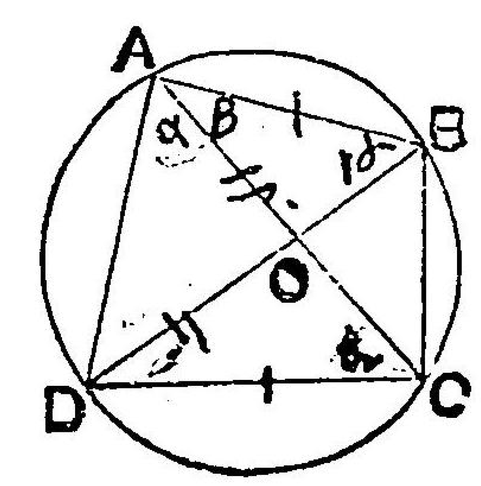
從ヒテ　$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{(a+c)(b+d)}{hk}}$.

37. 圓ニ内接スル四邊形 ABCD ニ於テ $\mathrm{C\hat{A}D}=\alpha$, $\mathrm{B\hat{A}C}=\beta$, $\mathrm{A\hat{B}D}=\gamma$ トセバ

$$\mathrm{CD}=\frac{\mathrm{AB}\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$$

ナルコトヲ證セヨ．　[41. 山. 高. 商.]

證　AC, BD ノ交點ヲ O トスレバ △AOB ト △DOC トハ互ニ相似ナリ．故ニ



$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OA}}=\frac{\sin\alpha}{\sin\mathrm{ADB}}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\sin(\pi-\mathrm{ADB})}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)},$$

故ニ　$\mathrm{CD}=\dfrac{\mathrm{AB}\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$.

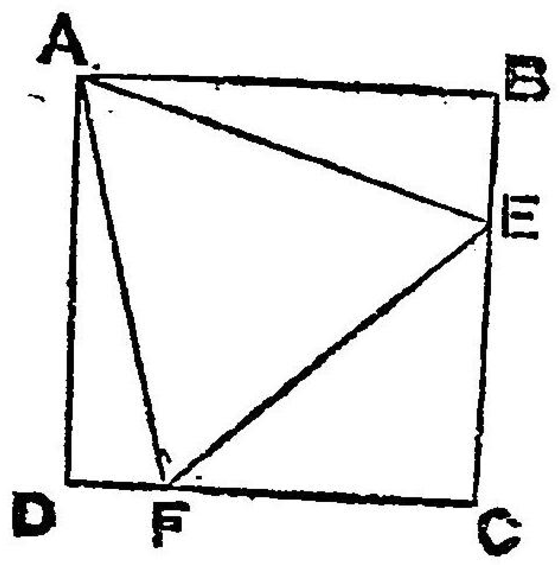
38. 正方形ノ内ニ一ツノ角頂ヲ共有スル正三角形ヲ内接シ，正方形ノ一邊ヲ 2 尺トスレバ

正三角形ノ一邊ハ何寸ナルカ. [42. 專. 入. 檢.]

但 $\log\cos 15^\circ=\bar{1}.99494$, $\log 2=0.30103$,

$\log 2023=3.30600$, $\log 2024==3.30621$.

解 正方形ABCDノ內接正三角形ヲAEFトシ, AB=2尺トスルトキハ



$$\hat{BAE}=\frac{1}{2}(90^\circ-60^\circ)$$
$$=15^\circ$$

ナルコト明カナリ.

故ニ
$$AE=\frac{AB}{\cos BAE}$$
$$=\frac{2}{\cos 15^\circ}$$

依リテ
$$\log AE=\log 2-\log\cos 15^\circ$$
$$=0.30103-\bar{1}.99494=0.30609,$$

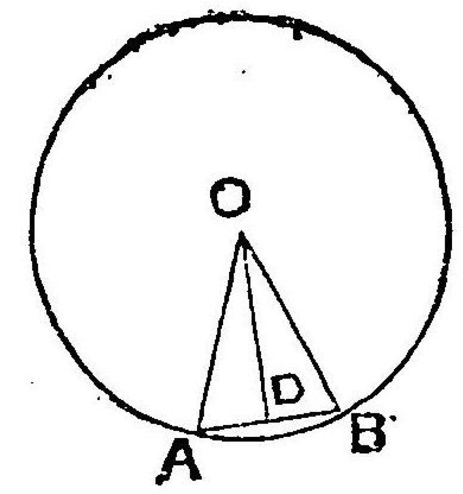
$$\begin{array}{lr}
\log 2.024 & =0.30621 \\
\log 2.023 & =0.30600 \\
\hline
1 & 21 \\
\frac{9}{21}\fallingdotseq 0.43 & 9 \\
\hline
\therefore\ \log 2.02343 & =0.30609
\end{array}$$

依リテ AE≒2尺.0234.

39. 圓ノ面積ト之ニ內接スル正十六角形ノ面積トノ比ヲ小數第二位マデ算出セヨ.

[42. 大. 高. 工.]

解 圓Oニ內接スル正十六角形ノ一邊ヲABトシ, 其ノ邊心距ヲODトシ, 圓ノ半徑ヲrトスレバ



$$\hat{AOD}=\frac{360^\circ}{16\times 2}=\frac{45^\circ}{4},$$

故ニ
$$OD=OA\cos AOD$$
$$=r\cos\frac{45^\circ}{4},$$

$$AD=r\sin\frac{45^\circ}{4},$$

故ニ正十六角形ノ面積ハ

$$16OD.AD=16r^2\cos\frac{45^\circ}{4}\sin\frac{45^\circ}{4}$$
$$=8r^2\sin\frac{45^\circ}{2},$$

故ニ圓ノ面積ト內接正十六角形ノ面積トノ比ハ

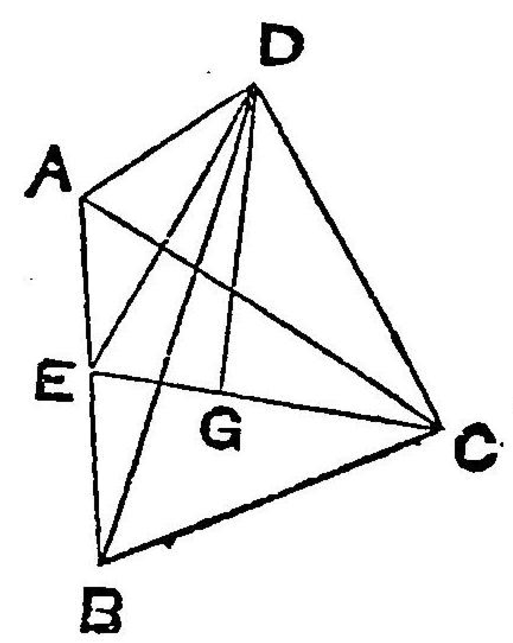
$$\frac{\pi r^2}{8r^2\sin\frac{45^\circ}{2}}=\frac{\pi}{8\sin\frac{45^\circ}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{\frac{8\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}=\frac{\pi}{4\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$
$$=\frac{\pi\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}}=\frac{\pi\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{8}$$
$$\fallingdotseq 0.3266\pi\fallingdotseq 1.02.$$

40. 各稜ノ長サヲ1尺トスル正四面體ヲ作リ，且其ノ二面角ノ大イサヲ求メヨ．

[36. 專. 入. 檢.]

但 $\sin 70^\circ=0.9397,\ \sin 71^\circ 0'=0.9455.$

解 ABCDヲ各稜ノ長サ1尺ナル正四面體トシ，ABノ中點ヲE, 高サヲDGトセヨ，然ルトキハGハCEノ上ニアリ，且 $EG=\frac{1}{3}CE$, $DE=CE$ ニシテ $D\hat{E}C$ ハ所要ノ二面角ノ大サナルベシ．



而シテ $DE=\frac{\sqrt{3}}{2}$， 故ニ $EG=\frac{\sqrt{3}}{6}$,

從ヒテ $\cos DEG=\frac{EG}{DE}=\frac{\sqrt{3}}{6}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$,

依リテ $\sin DEG=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

故ニ $DG=DE\sin DEG$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{2}{3},$$

故ニ各稜ノ長サ1尺ナル正四面體ヲ作ルニハ各邊1尺ナル正三角形ABCヲ作リ，其ノ中心G

ヲ求メ，Gニ於テ平面ABCニ垂線ヲ引キ，其ノ垂線ノ上ニ $DG=\frac{2}{3}$尺ナル點Dヲ取リ；AD, BD, CDヲ結ビ付クレバヨシ．

次ニ $\sin DEG=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\fallingdotseq 0.9428$$

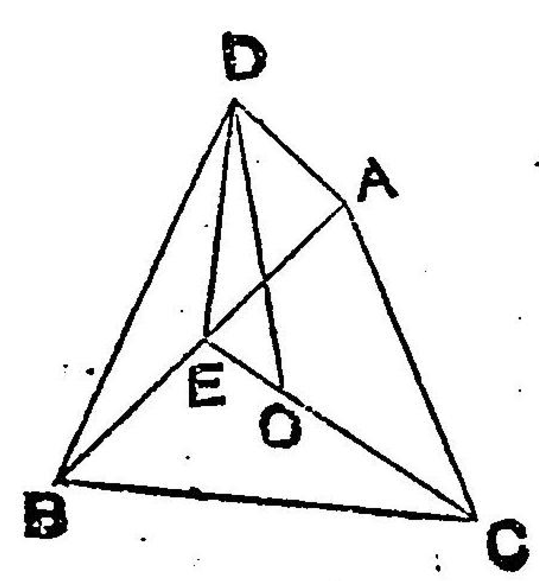
$$\begin{array}{ll} \sin 71^\circ & =0.9455 \\ \sin 70^\circ & =0.9397 \\ \hline 1^\circ & \quad 58 \\ 60'\times\frac{31}{58}\fallingdotseq 32' & \quad 31 \\ \hline \therefore\ \sin 70^\circ 32' & =0.9428 \end{array}$$

故ニ $D\hat{E}G\fallingdotseq 70^\circ 32'.$

41. 正三角形ABCノ外接圓ノ中心Oヨリ其ノ三角形ノ平面ニ垂線ODヲ引キ OD=ABナラシムルトキ面ABCト面ABDトノナス角ノ餘弦ヲ求メヨ．

[38. 大. 高. 工.]

解 COヲ結ビ付ケ，之ヲ引キ延バシテABトEニ於テ交ラシメ，DEヲ結ビ付クルトキハ $D\hat{E}C$ ハ面ABCト面ABDトノナス角ナルコト明カナリ．



而シテ $OE=\frac{1}{3}CE$

$$=\frac{1}{3}BC\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{6}.BC=\frac{\sqrt{3}}{6}.OD.$$

又 $$\tan DEO=\frac{DO}{EO}=\frac{DO}{\frac{\sqrt{3}}{6}.OD}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3},$$

故ニ $$\cos DEO=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 DEO}}$$

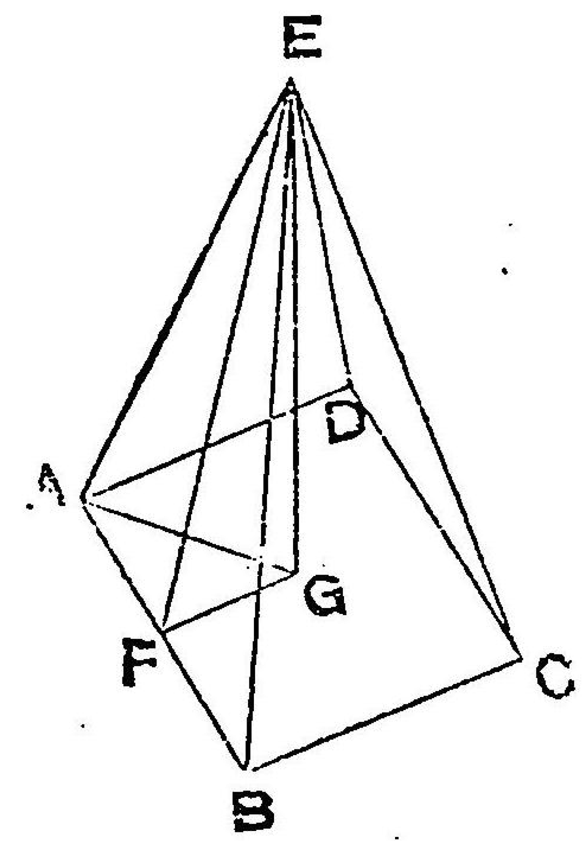
$$=\frac{1}{\sqrt{1+(2\sqrt{3})^2}}=\frac{1}{\sqrt{13}}.$$

42. 錐體アリ, 底面ハ一邊ノ長サ 2 尺ナル正方形ヲナシ, 且斜稜ハ何レモ 3 尺ナルトキ, 各斜面ガ底面トナス角ノ正弦, 餘弦, 及ビ正切ヲ求メヨ. 又次ノ表ヨリ其ノ角ヲ分ノ位マデ算出セヨ. [42. 海. 機.]

但 $\log 2=0.3010.$

角	logsin	
20° 0′	$\bar{1}.5341$	70° 0′
10′	$\bar{1}.5375$	50′
20′	$\bar{1}.5409$	40′
30′	$\bar{1}.5443$	30′
40′	$\bar{1}.5477$	20′
50′	$\bar{1}.5510$	10′
21° 0′	$\bar{1}.5543$	69° 0′
	logcos	角

解 ABCD-E ヲ錐體トシ, AB ノ中點ヲ F, 底ABCD ノ中心ヲ G トス. 然ルトキハ $\widehat{EFG}$ ハ斜面ガ底面トナス角ナルベシ, 而シテ



$$EF=\sqrt{\overline{AE}^2-\overline{AF}^2}$$

$$=\sqrt{3^2-1}=2\sqrt{2},$$

$$EG=\sqrt{\overline{EF}^2-\overline{FG}^2}$$

$$=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1}=\sqrt{7},$$

故ニ $$\sin EFG=\frac{EG}{EF}=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{4}\sqrt{14},$$

$$\cos EFG=\frac{FG}{EF}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{4}\sqrt{2},$$

$$\tan EFG=\frac{EG}{FG}=\frac{\sqrt{7}}{1}=\sqrt{7}.$$

次ニ $$\log\cos EFG=\log\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\log 2-2\log 2=-\frac{3}{2}\log 2$$

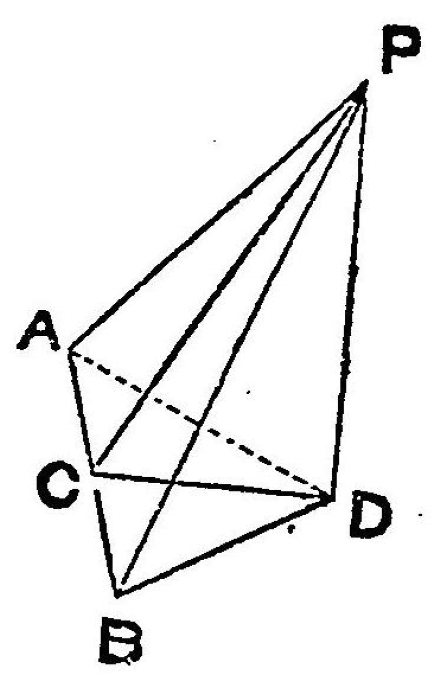
$$=-\frac{3}{2}\times 0.3010=-0.4515$$

$$=\bar{1}.5485$$
$$\log\cos 60^\circ 10' = \bar{1}.5510$$
$$25$$
$$10' \qquad 33$$
$$10' \times \frac{25}{33} \fallingdotseq 7'$$
$$\therefore \log\cos 60^\circ 17' = \bar{1}.5485$$

故ニ $\hat{EFG} = 60^\circ 17'.$

43. 一邊ノ長サ 1 尺ナル正八邊形ヲ底トシ側稜ト高サトガ互ニ30度ノ角ヲナス正角錐ノ體積ヲ計算セヨ. [38. 東. 高. 工.]

解 正角錐ノ底ノ一邊ヲ AB, 其ノ中點ヲ C トシ, 高サヲ PD トス,



然ルトキハ $AB = 1$尺,

$\hat{BPD} = 30^\circ$ ナルベシ,

サテ $\hat{ADB} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$

ナルユエ $\hat{CDB} = \frac{45^\circ}{2}$,

$CB = \frac{1}{2}$尺 ナリ.

而シテ $CD = CB\cot CDB$

$$= \frac{1}{2}\cot\frac{45^\circ}{2},$$

$$PD = BD\cot BPD$$

$$= BC\,\mathrm{cosec}\,CDB\cot BPD$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{cosec}\frac{45^\circ}{2}\cot 30^\circ,$$

故ニ體積ハ $\frac{4}{3}AB\,.\,CD\,.\,PD$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\cot\frac{45^\circ}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{cosec}\frac{45^\circ}{2}\cot 30^\circ\right)$$

$$= \frac{\cos\frac{45^\circ}{2}\cos 30^\circ}{2\sin^2\frac{45^\circ}{2}\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{3\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{3(2-\sqrt{2})} = \frac{(2+\sqrt{2})\sqrt{6+3\sqrt{2}}}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{6(10+7\sqrt{2})}$$

$$\fallingdotseq \frac{1}{3}\sqrt{119.396970}$$

$$\fallingdotseq 3.642,$$

即チ 約3立方尺.642 ナリ.

L. 三角方程式

1. $\sin(A-40^\circ) = \sin(A+80^\circ)$ ナルトキ A ヲ求メヨ. 但 A ハ正ノ鋭角ナリトス. [42. 海. 機.]

解　A ハ正ノ鋭角ナリト云ヘバ所題ノ式ヨリ

$$(A-40^\circ)+(A+80^\circ)=180^\circ$$

ナルベシ．故ニ　$2A=140^\circ$,

即チ　$A=70^\circ.$

2.　$5\sin x=\cos 2x+2$

ニ適合スル x ノ最小正値ヲ求メヨ．

[35. 大. 高. 工.]

解　所題ノ方程式ヨリ

$$5\sin x=1-2\sin^2 x+2,$$

即チ　$2\sin^2 x+5\sin x-3=0,$

故ニ　$(2\sin x-1)(\sin x+3)=0,$

而シテ $\sin x+3$ ハ決シテ零トナラズ．

故ニ　$2\sin x-1=0,$

之ヨリ　$\sin x=\dfrac{1}{2},$

從ヒテ　$x=30^\circ.$

3.　次ノ方程式ニ適合スル最小正角ヲ求メヨ．

$\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}.$　[42. 東北農. 大.]

解 I.　所題ノ方程式ヨリ

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

故ニ　$\cos 30^\circ\cos\theta+\sin 30^\circ\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}},$

即チ　$\cos(\theta-30^\circ)=\dfrac{1}{\sqrt{2}},$

故ニ　$\theta-30^\circ=45^\circ,$

從ヒテ　$\theta=75^\circ.$

解 II.　所題ノ方程式ヨリ

$$\sin\theta=\sqrt{2}-\sqrt{3}\cos\theta,$$

故ニ　$\sin^2\theta=2+3\cos^2\theta-2\sqrt{6}\cos\theta,$

即チ　$1-\cos^2\theta=2+3\cos^2\theta-2\sqrt{6}\cos\theta,$

即チ　$4\cos^2\theta-2\sqrt{6}\cos\theta+1=0,$

之ヨリ　$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4},$

故ニ　$\theta=15^\circ$, 或ハ 75°,

而シテ始ニ方程式ノ兩邊ヲ平方シタルヲ以テ茲ニ得タル θ ノ値ハ驗シヲ行フヲ要ス．

驗　$\sqrt{3}\cos 15^\circ+\sin 15^\circ$

$$=\frac{\sqrt{3}\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\neq\sqrt{2},$$

又　$\sqrt{3}\cos 75^\circ+\sin 75^\circ$

$$=\frac{\sqrt{3}\times(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$=\sqrt{2}.$$

故ニ所要ノ θ ノ値ハ $75^\circ.$

4. $\sin 2\theta=0$

ヲ解ケ. 但 θ ハ $0°$ ト $180°$ トノ間ニアルモノトス. [38. 陸.士]

解 I. 所題ノ方程式ヨリ

$$2\sin\theta\cos\theta=0,$$

故ニ $\sin\theta=0$, 或ハ $\cos\theta=0$.

然ルニ $0°$ ト $180°$ トノ間ニ於テ正弦ノ零ナルモノナシ. 故ニ $\cos\theta=0$ ヨリ $\theta=90°$.

解 II. θ ハ $0°$ ト $180°$ トノ間ニアルユヱ 2θ ハ $0°$ ト $360°$ トノ間ニアルベシ. 故ニ所題ノ方程式ヨリ $2\theta=180°$,

從ヒテ $\theta=90°$.

5. $2\sin\theta\sin 3\theta=1$

ヲ解ケ. 但 θ ハ $0°$ ト $180°$ トノ間ニアルモノトス. [38. 陸.士.]

解 I. 所題ノ方程式ヨリ

$$2\sin\theta(3\sin\theta-4\sin^3\theta)=1.$$

故ニ $8\sin^4\theta-6\sin^2\theta+1=0,$

即チ $(2\sin^2\theta-1)(4\sin^2\theta-1)=0,$

故ニ $2\sin^2\theta-1=0,$

或ハ $4\sin^2\theta-1=0,$

依リテ $\sin\theta=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},$

或ハ $\sin\theta=\pm\dfrac{1}{2}.$

然ルニ θ ハ $0°$ ト $180°$ トノ間ニアルベキヲ以テ $\sin\theta$ ハ正ナリ.

故ニ $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 或ハ $\dfrac{1}{2}$

ヨリ $\theta=45°,\ 180°-45°,$

或ハ $30°,\ 180°-30°.$

故ニ所要ノ θ ノ値ハ

$$30°,\ 45°,\ 135°,\ 150°.$$

解 II. 所題ノ方程式ヨリ

$$\cos 2\theta-\cos 4\theta=1,$$

即チ $\cos 2\theta-2\cos^2 2\theta+1=1,$

故ニ $\cos 2\theta(2\cos 2\theta-1)=0,$

之ヨリ $\cos 2\theta=0 \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots (1)$

或ハ $2\cos 2\theta-1=0\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ (2)$

而シテ 2θ ハ $0°$ ト $360°$ トノ間ニアルユヱ,

(1) ヨリ $2\theta=90°$ 或ハ $270°$,

故ニ $\theta=45°$, 或ハ $135°$.

(2) ヨリ $\cos 2\theta=\dfrac{1}{2},$

故ニ $2\theta=60^\circ$, 或ハ 300°,

故ニ $\theta=30^\circ$, 或ハ 150°.

依リテ所要ノ θ ノ値ハ

30°, 45°, 135°, 150°.

6. $\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta=0$

ニ適合スル θ ノ正ニシテ 180° ヨリ小ナルモノヲ求メヨ.　　[39. 專. 入. 檢.]

解 I. 所題ノ方程式ヨリ

$$\cos\theta+2\cos^2\theta-1+4\cos^3\theta-3\cos\theta=0,$$

即チ $4\cos^3\theta+2\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0,$

即チ $2\cos^2\theta(2\cos\theta+1)-(2\cos\theta+1)=0,$

故ニ $(2\cos\theta+1)(2\cos^2\theta-1)=0,$

依リテ $2\cos\theta+1=0,$

或ハ $2\cos^2\theta-1=0,$

故ニ $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ ... ...(1)

或ハ $\cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ... ... (2)

(1) ヨリ $\theta=120^\circ,$

(2) ヨリ $\theta=45^\circ$, 或ハ 135°,

即チ所要ノ θ ノ値ハ 45°, 120°, 135°.

解 II. 所題ノ方程式ヨリ

$$2\cos2\theta\cos\theta+\cos2\theta=0,$$

即チ $\cos2\theta(2\cos\theta+1)=0,$

故ニ $\cos2\theta=0$ ... ... (1)

或ハ $2\cos\theta+1=0$ ... ... (2)

(1) ヨリ θ ハ 0° ト 180° トノ間ノ角ナルユヱ 2θ ハ 0° ト 360° トノ間ノ角ナリ.

故ニ $2\theta=90^\circ$, 或ハ 270°,

故ニ $\theta=45^\circ$, 或ハ 135°,

(2) ヨリ $\cos\theta=-\frac{1}{2},$

故ニ $\theta=120^\circ,$

依リテ所要ノ θ ノ値ハ 45°, 120°, 135°.

7. $2\cos^2x+3\sin x=3$

ニ於テ 0° ト 180° トノ間ニ於テ x ニ適合スル値ヲ求メヨ.　　[39. 海. 機.]

解 所題ノ方程式ヨリ

$$2(1-\sin^2x)+3\sin x=3,$$

即チ $2\sin^2x-3\sin x+1=0,$

故ニ $(2\sin x-1)(\sin x-1)=0,$

之ヨリ $\sin x=\frac{1}{2},$

或ハ $\sin x=1,$

故ニ $x=30^\circ$, 150°,

或ハ $x=90^\circ$,

故ニ所要ノ x ノ値ハ 30°, 90°, 150°.

8. $$\sin 2x-\cos x=0$$

ヨリ x ノ値ヲ求メヨ. 但 x ハ $0°$ ヨリ $180°$ マデノ間ニアルモノトス. [33. 陸. 士.]

解 所題ノ方程式ヨリ

$$2\sin x\cos x-\cos x=0,$$

即チ $$\cos x(2\sin x-1)=0,$$

故ニ $$\cos x=0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

或ハ $$2\sin x-1=0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

(1) ヨリ $$x=90°.$$

(2) ヨリ $$\sin x=\frac{1}{2},$$

故ニ $x=30°$, 或ハ $150°$,

依リテ所要ノ x ノ値ハ $30°$, $90°$, $150°$.

9. $0°$ ト $180°$ トノ間ニ於テ

$$2\sin^2 x+\sin^2 2x=2$$

ニ適合スル x ノ値ヲ計算セヨ. [34. 海. 機.]

解 I. 所題ノ方程式ヨリ

$$2\sin^2 x+4\sin^2 x\cos^2 x=2,$$

故ニ $$2\sin^2 x+4\sin^2 x(1-\sin^2 x)=2,$$

即チ $$2\sin^4 x-3\sin^2 x+1=0,$$

即チ $$(2\sin^2 x-1)(\sin^2 x-1)=0.$$

之ヨリ $$2\sin^2 x-1=0,$$

或ハ $$\sin^2 x-1=0,$$

故ニ $$\sin x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

或ハ $$\sin x=\pm 1.$$

然ルニ $0°$ ト $180°$ トノ間ニ於テ正弦ノ値ハ正ナリ.

故ニ $\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 或ハ $\sin x=1$

ヨリ $$x=45°,\ 135°,$$

或ハ $$x=90°,$$

即チ所要ノ x ノ値ハ $45°$, $90°$, $135°$.

解 II. 所題ノ方程式ヨリ

$$1-\cos 2x+1-\cos^2 2x=2,$$

故ニ $$\cos^2 2x+\cos 2x=0,$$

即チ $$\cos 2x(\cos 2x+1)=0,$$

依リテ $$\cos 2x=0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

或ハ $$\cos 2x+1=0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

而シテ x ハ $0°$ ト $180°$ トノ間ニアルユエ $2x$ ハ $0°$ ト $360°$ トノ間ニアルベシ.

故ニ (1) ヨリ $2x=90°$, 或ハ $270°$,

故ニ $x=45°$, 或ハ $135°$.

(2) ヨリ $$\cos 2x=-1,$$

故ニ $2x=180°$,

故ニ $x=90°$,

依リテ x ノ所要ノ値ハ $45°$, $90°$, $135°$.

10. $\cos^2\theta=1$

ニ適合スル θ ノ總テノ値ヲ求メヨ.

[34. 東. 高. 工.]

解 所題ノ方程式ヨリ $\cos\theta=\pm1$,

故ニ $\theta=2n\pi+0$, 或ハ $2n\pi\pm\pi$,

即チ $\theta=2n\pi$, 或ハ $(2m\pm1)\pi$,

即チ $\theta=n\pi$.

11. $2\sin(A+30°)=\cos A$

ヨリ A ノ値ヲ求メヨ. [38. 商船.]

解 I. 所題ノ方程式ヨリ

$$2(\sin A\cos30°+\cos A\sin30°)=\cos A,$$

故ニ $\sqrt{3}\sin A+\cos A=\cos A$,

故ニ $\sin A=0$,

依リテ $A=n\pi$.

解 II. 所題ノ方程式ヨリ

$$\sin(A+30°)=\frac{1}{2}\cos A,$$

即チ $\sin A\cos30°+\cos A\sin30°=\sin30°\cos A$,

故ニ $\sin A\cos30°=0$,

故ニ $\sin A=0$,

依リテ $A=n\pi$.

12. $6\sin A+\operatorname{cosec}A=5$

ニ於テ角 A ヲ求メヨ. [33. 東. 高. 商.]

解 所題ノ式ヨリ

$$6\sin A+\frac{1}{\sin A}=5,$$

分母ヲ拂ヘバ $6\sin^2A-5\sin A+1=0$,

即チ $(2\sin A-1)(3\sin A-1)=0$,

之ヨリ $\sin A=\frac{1}{2}$, 或ハ $\frac{1}{3}$,

故ニ $A=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$, 或ハ $\sin^{-1}\frac{1}{3}$.

而シテ玆ニ得タル A ノ値ハ $\sin A$ ヲ 0 トナサズ, 故ニ所要ノ値ナリ.

13. $2\cos A-2\sec A=3$

ヨリ A ヲ求メヨ. [30. 東. 高. 商.]

解 所題ノ方程式ヨリ

$$2\cos A-\frac{2}{\cos A}=3,$$

分母ヲ拂ヘバ $2\cos^2A-3\cos A-2=0$,

即チ $(2\cos A+1)(\cos A-2)=0$,

而シテ $\cos A-2$ ハ決シテ零トナラズ,

故ニ $2\cos A+1=0,$

依リテ $\cos A=-\dfrac{1}{2},$

故ニ $A=2n\pi\pm\dfrac{2\pi}{3},$

即チ $A=2\pi\left(n\pm\dfrac{1}{3}\right).$

而シテ玆ニ得タルAノ値ハ cosA ヲ零トナサズ, 故ニ所要ノ値ナリ.

14. $\cos2\theta-\cos4\theta=\sin\theta$

ヲ解ケ. [37. 海. 兵.]

解 所題ノ方程式ヨリ

$$2\sin3\theta\sin\theta=\sin\theta,$$

故ニ $\sin\theta=0$ ... ...(1)

或ハ $\sin3\theta=\dfrac{1}{2}$ ... ... (2)

(1) ヨリ $\theta=n\pi,$

(2) ヨリ $3\theta=n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6},$

故ニ $\theta=\dfrac{1}{3}n\pi+(-1)^n\dfrac{1}{18}\pi,$

依リテ所要ノ θ ノ値ハ $n\pi$, 及ビ $\dfrac{\pi}{18}\{6n+(-1)^n\}.$

15. $\sin7\theta-\sin\theta=\sin3\theta$ ヲ解ケ.

[38. 海. 兵.]

解 所題ノ方程式ヨリ

$$2\cos4\theta\sin3\theta=\sin3\theta,$$

即チ $\sin3\theta(2\cos4\theta-1)=0,$

之ヨリ $\sin3\theta=0$ ... ... (1)

或ハ $2\cos4\theta-1=0$ ... ... (2)

(1) ヨリ $3\theta=n\pi,$

故ニ $\theta=\dfrac{1}{3}n\pi.$

(2) ヨリ $\cos4\theta=\dfrac{1}{2},$

故ニ $4\theta=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{3},$

故ニ $\theta=\dfrac{1}{2}n\pi\pm\dfrac{\pi}{12}.$

依リテ所要ノ θ ノ値ハ $\dfrac{1}{3}n\pi,\ \dfrac{1}{2}n\pi\pm\dfrac{1}{12}\pi.$

16. $\cos\theta-\cos7\theta=\sin4\theta$

ヲ解ケ. [40. 專. 入. 檢.]

解 所題ノ方程式ヨリ

$$2\sin4\theta\sin3\theta=\sin4\theta,$$

即チ $\sin4\theta(2\sin3\theta-1)=0,$

故ニ $\sin4\theta=0$ ... ... (1)

或ハ $2\sin3\theta-1=0$ ... ... (2)

(1) ヨリ $4\theta=n\pi,$

故ニ $\theta=\dfrac{1}{4}n\pi.$

(2) ヨリ $\sin 3\theta=\frac{1}{2}$,

故ニ $3\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$,

故ニ $\theta=\frac{1}{3}n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{18}$,

依リテ所要ノ θ ノ値ハ

$$\underset{\sim\sim}{\frac{1}{4}n\pi},\ \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{3}n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{18}}.$$

17. $\cos 3\theta+8\cos^3\theta=0$

ニ適合スル θ ノ値ヲ見出セ。 [33. 東. 高. 工.]

解 所題ノ方程式ヨリ

$$4\cos^3\theta-3\cos\theta+8\cos^3\theta=0,$$

即チ $12\cos^3\theta-3\cos\theta=0$,

即チ $\cos\theta(4\cos^2\theta-1)=0$,

之ヨリ $\cos\theta=0$ ... ... (1)

或ハ $4\cos^2\theta-1=0$ ... ... (2)

(1) ヨリ $\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$,

(2) ヨリ $\cos\theta=\pm\frac{1}{2}$,

故ニ $\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$,

或ハ $\theta=2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi$,

依リテ所要ノ θ ノ値ハ

$$\underset{\sim\sim\sim}{2n\pi\pm\frac{\pi}{3}},\quad \underset{\sim\sim\sim}{2n\pi\pm\frac{\pi}{2}},\quad \underset{\sim\sim\sim}{2n\pi\pm\frac{2}{3}}.$$

18. $\cos 3\theta+\cos 2\theta+\cos\theta=0$

ニ於テ θ ノ値ヲ求メヨ。 [30. 東. 高. 工.]

解 F. 8 題ニ依リテ所要ノ θ ノ値ハ

$$\underset{\sim\sim\sim}{2n\pi\pm\frac{\pi}{4}},\quad \underset{\sim\sim\sim}{2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi},\quad \underset{\sim\sim\sim}{2n\pi\pm\frac{3}{4}},$$

19. $\sin x+\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

ニ適合スル x ノ値ヲ求メヨ。 [30. 一高.]

解 I. 所題ノ方程式ヨリ

$$\sqrt{2}\sin x+\sqrt{2}\cos x=1,$$

$$\frac{\sin x}{\sin 45^\circ}+\frac{\cos x}{\cos 45^\circ}=1.$$

分母ヲ拂ヘバ

$$\sin x\cos 45^\circ+\cos x\sin 45^\circ=\sin 45^\circ\cos 45^\circ,$$

即チ $\sin(x+45^\circ)=\frac{1}{2}$,

故ニ $x+45^\circ=n.180^\circ+(-1)^n.30^\circ$,

依リテ $\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{x=n.180^\circ-45^\circ+(-1)^n.30^\circ}$.

解 II. 所題ノ方程式ノ兩邊ヲ平方スレバ

$$\sin^2x+\cos^2x+2\sin x\cos x=\frac{1}{2},$$

即チ $1+\sin 2x=\frac{1}{2}$,

故ニ $\sin 2x=-\frac{1}{2}$,

依リテ $2x=n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{6}$,

故ニ $x=\frac{1}{2}n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{12}$.

而シテ始ニ方程式ノ兩邊ヲ平方シタルヲ以テ玆ニ得タル x ノ値ハ驗シヲ要ス.

驗 今 $n=2m$ トスレバ

$$x=m\pi-\frac{\pi}{12},$$

故ニ $\sin x+\cos x$ ハ m ガ偶數ナルカ奇數ナルカニ從ヒテ

$$\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

或ハ $\sin\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{-2\sqrt{2}}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

故ニ此ノ場合ニハ m ハ偶數ナルトキノミ成立ス.

故ニ $x=2p\pi-\frac{\pi}{18}$ ... ... (1)

次ニ $n=2m+1$ トスレバ

$$x=\frac{1}{2}(2m+1)\pi+\frac{\pi}{12}=m\pi+\frac{7}{12}\pi,$$

故ニ $\sin x+\cos x$ ハ m ガ偶數ナルカ奇數ナルカニ從ヒテ

$$\sin\frac{7}{12}\pi+\cos\frac{7}{12}\pi=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

或ハ $\sin\left(-\frac{5}{12}\pi\right)+\cos\left(-\frac{5}{12}\pi\right)$

$$=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{-2\sqrt{2}}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

故ニ此ノ場合ニモ m ハ偶數ナルトキノミ成立ス, 故ニ $x=2p\pi+\frac{7}{12}\pi$ ... ...(2)

依リテ所要ノ x ノ値ハ (1), (2) ヨリ

$$2n\pi-\frac{\pi}{12},\quad 2n\pi+\frac{7}{12}\pi.$$

注意 解 I 及ビ解 II ニ於テ得タル x ノ値ハ形ヲ異ニスレドモ各ニ於テ順次ニ

$$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ト置クトキハ相等シキコトヲ見ルベシ.

L. 3題及ビ本題ニ依リテ見レバ三角方程式ハ代數ノ方程式ニ於ケルヨリモ, ヨリ以上ニ無緣根が誘入セラルベキ方法ヲ避ケザルベカラザルコトヲ知ルベシ.

20. $\sin^2\theta-2\cos\theta+\frac{1}{4}=0$

ヲ解キテ θ ノ値ヲ求メヨ. [34. 商船.]

解 所題ノ方程式ヨリ

$$1-\cos^2\theta-2\cos\theta+\frac{1}{4}=0,$$

故ニ $$4\cos^2\theta+8\cos\theta-5=0,$$

即チ $$(2\cos\theta-1)(2\cos\theta+5)=0,$$

而シテ $2\cos\theta+5$ ハ決シテ零トナラズ,

故ニ $$2\cos\theta-1=0,$$

之ヨリ $$\cos\theta=\frac{1}{2},$$

故ニ $$\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

27. $\tan\theta+\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=2$

ヲ解ケ. [33. 海. 兵.]

解 所題ノ方程式ヨリ

$$\tan\theta+\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=2,$$

分母ヲ拂ヒテ整頓スレバ

$$\tan^2\theta-4\tan\theta+1=0,$$

之ヨリ $$\tan\theta=2\pm\sqrt{3},$$

依リテ θ ノ最小角ハ 75°, 或ハ 15° ナリ.

故ニ $\theta=n\pi+\frac{5}{12}\pi$, 或ハ $n\pi+\frac{\pi}{12}$,

而シテ茲ニ得タル θ ノ値ハ $1-\tan\theta$ ヲ零トナサズ, 故ニ所要ノ値ナリ.

22. $3\tan\theta+\cot\theta=5\operatorname{cosec}\theta$

ヲ解ケ. [36. 盛. 高. 農.]

解 所題ノ方程式ヨリ

$$\frac{3\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{5}{\sin\theta},$$

分母ヲ拂ヘバ $$3\sin^2\theta+\cos^2\theta=5\cos\theta,$$

即チ $$3(1-\cos^2\theta)+\cos^2\theta=5\cos\theta,$$

即チ $$2\cos^2\theta+5\cos\theta-3=0,$$

即チ $$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+3)=0,$$

而シテ $\cos\theta+3$ ハ決シテ零トナラズ,

故ニ $$2\cos\theta-1=0,$$

之ヨリ $$\cos\theta=\frac{1}{2},$$

依リテ $$\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

今得タル θ ノ値ハ $\cos\theta\sin\theta$ ヲ零トナサズ, 故ニ所要ノ値ナリ.

23. $3\tan^2 x - \sec^2 x = 1$

ヲ解ケ. [33. 農.大.實.]

解 I. 所題ノ方程式ヨリ

$$\frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = 1,$$

分母ヲ拂ヘバ $3\sin^2 x - 1 = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

故ニ $4\sin^2 x = 2,$

依リテ $\sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$

故ニ $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$, 或ハ $n\pi - (-1)^n \frac{\pi}{4}$,

即チ $x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$.

而シテ此ノ x ノ値ハ $\cos^2 x$ ヲ零トナサズ, 故ニ所要ノ値ナリ.

解 II. 所題ノ方程式ヨリ

$$3 + 3\tan^2 x - \sec^2 x = 4,$$

即チ $3\sec^2 x - \sec^2 x = 4,$

即チ $\sec^2 x = 2,$

故ニ $\sec x = \pm \sqrt{2},$

依リテ $x = n\pi \pm (-1)^n \frac{\pi}{4}$

即チ $x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$.

解 III. 所題ノ方程式ヨリ

$$3\tan^2 x - (1 + \tan^2 x) = 1,$$

即チ $2\tan^2 x = 2,$

故ニ $\tan^2 x = 1,$

依リテ $\tan x = \pm 1,$

故ニ $x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$.

24. $\cot\theta - \tan\theta = \sec\theta + \operatorname{cosec}\theta$

ヲ解ケ. [38. 商船.]

解 I. 所題ノ方程式ヨリ

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta},$$

分母ヲ拂ヘバ

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \sin\theta + \cos\theta,$$

即チ $(\sin\theta + \cos\theta)(\cos\theta - \sin\theta - 1) = 0,$

故ニ $\sin\theta + \cos\theta = 0 \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$

或ハ $\cos\theta - \sin\theta - 1 = 0 \ldots \ldots \ldots (2)$

(1) ヨリ $\cos\theta = -\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right),$

故ニ $\frac{\pi}{2} + \theta = 2n\pi \pm \theta,$

故ニ $2\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{2},$

即チ $\theta = n\pi - \frac{\pi}{4},$

(2) ヨリ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

即チ $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}$,

故ニ $\theta+\dfrac{\pi}{4}=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{4}$.

故ニ $\theta=2n\pi$, 或ハ $2n\pi-\dfrac{\pi}{2}$.

而シテ茲ニ得タル θ ノ値ヲ所題ノ方程式ニ代入スレバ $n\pi-\dfrac{\pi}{4}$ ハ適合シ, 其ノ他ハ $\infty-\infty=1$ ナル結果ヲ與フ. 故ニ之ヲ捨テテ所要ノ値ハ

$$n\pi-\frac{\pi}{4}.$$

解 II. 所題ノ方程式ノ兩邊ヲ平方スレバ

$$\cot^2\theta+\tan^2\theta-2=\sec^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta+2\sec\theta\operatorname{cosec}\theta,$$

即チ $\sec^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta-4$

$$=\sec^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta+\frac{2}{\sin\theta\cos\theta},$$

故ニ $-1=\dfrac{1}{2\cos\theta\sin\theta}$,

故ニ $\sin2\theta=-1$,

故ニ $2\theta=n\pi-(-1)^n\dfrac{\pi}{2}=2n\pi-\dfrac{\pi}{2}$,

故ニ $\theta=n\pi-\dfrac{\pi}{4}$.

而シテ此ノ θ ノ値ハ所題ノ方程式ニ適合ス故ニ所要ノ値ナリ.

25. $\cos2A=(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cos A+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1$

ヲ解ケ. [36. 各高等.]

解 所題ノ方程式ヨリ

$$2\cos^2A-1=(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cos A+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1,$$

故ニ $2\sqrt{2}\cos^2A-(\sqrt{6}-2)\cos A-\sqrt{3}=0$,

之ヨリ $\cos A$

$$=\frac{\sqrt{6}-2\pm\sqrt{(\sqrt{6}-2)^2+4\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}}{2\times2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-2\pm\sqrt{10+2\sqrt{24}}}{4\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-2\pm(\sqrt{6}+\sqrt{4})}{4\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2},\ 或ハ\ -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

故ニ $A=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{6}$,

或ハ $2n\pi\pm\dfrac{3\pi}{4}$.

26. $3\operatorname{cosec}^2\theta-8\cot\theta+2=0$

ヲ解ケ. 但 $\log\tan30°57'=\bar{1}.77791$, $\log\tan30°58'=\bar{1}.77820$, $\log6=0.77815$.

[36. 專. 入. 檢.]

解 所題ノ方程式ヨリ

$$3+3\cot^2\theta-8\cot\theta+2=0,$$

即チ $$3\cot^2\theta-8\cot\theta+5=0,$$

即チ $$(3\cot\theta-5)(\cot\theta-1)=0,$$

故ニ $$3\cot\theta-5=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$\cot\theta-1=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

(2) ヨリ $$\cot\theta=1,$$

故ニ $$\theta=n.180^\circ+45^\circ,$$

(1) ヨリ $$\cot\theta=\frac{5}{3},$$

故ニ $$\tan\theta=\frac{3}{5}=0.6,$$

依リテ $$\log\tan\theta=\bar{1}.77815,$$

$$\log\tan 30^\circ 58'=\bar{1}.77820$$

$$\log\tan 30^\circ 57'=\bar{1}.77791$$

$$1' \qquad 29$$

$$60''\times\frac{24}{29}=49''.7 \qquad 24$$

$$\therefore\ \log\tan 30^\circ 57' 49''.7=\bar{1}.77815$$

故ニ $$\theta=n.180^\circ+30^\circ 57' 49''.7,$$

依リテ所要ノ θ ノ値ハ

$$n.180^\circ+45^\circ,\ \text{及ビ}\ n.180^\circ+30^\circ 57' 49''.7.$$

27. 790° ト 880° トノ間ニ於テ

$$\tan 2\theta=\sqrt{3}$$

ニ適合スル θ ノ値如何. [33. 海. 機.]

解 所題ノ方程式ヨリ

$$2\theta=n.180^\circ+60^\circ,$$

故ニ $$\theta=n.90^\circ+30^\circ,$$

而シテ $$790^\circ<n.90^\circ+30^\circ<880^\circ,$$

即チ $$760^\circ<n.90^\circ<850^\circ,$$

即チ $$76^\circ<n.9^\circ<85^\circ,$$

而シテ n ハ整數ナルベキヲ以テ此ノ不等式ニ適合スル n ノ値ハ $n=9$ ノ外ニナシ,

依リテ $$\theta=90^\circ\times 9+30^\circ=840^\circ.$$

28. 次ノ二ツノ方程式ニ適合スル $\sin x$ 及ビ $\sin y$ ノ値ヲ求メヨ.

$$a\cos^2x+b\sin^2x=p\cos^2y \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

$$a\sin^2x+b\cos^2x=q\sin^2y \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

[37. 東. 高. 師.]

解 (1) ト (2) トヲ邊々相加フレバ

$$a(\cos^2x+\sin^2x)+b(\sin^2x+\cos^2x)$$

$$=p\cos^2y+q\sin^2y,$$

即チ $$a+b=p(1-\sin^2y)+q\sin^2y,$$

故ニ $(p-q)\sin^2 y=p-a-b,$

故ニ $\sin^2 y=\dfrac{p-a-b}{p-q}$ ……… (3)

依リテ $\sin y=\pm\sqrt{\dfrac{p-a-b}{p-q}},$

又 (2), (3) ヨリ

$$a\sin^2 x+b(1-\sin^2 x)=\frac{q(p-a-b)}{p-q},$$

故ニ $(a-b)\sin^2 x=\dfrac{q(p-a-b)}{p-q}-b$

$$=\frac{q(p-a)-bp}{p-q},$$

依リテ $\sin x=\pm\sqrt{\dfrac{q(p-a)-bp}{(a-b)(p-q)}},$

故ニ $\sin x$, $\sin y$ ノ値ハ

$$\pm\sqrt{\frac{q(p-a)-bp}{(a-b)(p-q)}},\quad \pm\sqrt{\frac{p-a-b}{p-q}}.$$

29. 次ノ二式ヨリ θ ト ϕ トノ値ヲ求メヨ.

$2\sin(\theta+\phi)=\sqrt{3}$ ……… (1)

$2\cos(\theta-\phi)=\sqrt{3}$ ……… (2)

[37. 農. 大. 實.]

解 (1) ヨリ $\sin(\theta+\phi)=\dfrac{\sqrt{3}}{2},$

故ニ $\theta+\phi=n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{3}$ …… (3)

(2) ヨリ $\cos(\theta-\phi)=\dfrac{\sqrt{3}}{2},$

故ニ $\theta-\phi=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{6}$ ……… (4)

(3), (4) ヨリ $2\theta=3n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}\pm\dfrac{\pi}{6},$

及ビ $2\phi=-n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}\mp\dfrac{\pi}{6},$

故ニ $\theta=\dfrac{3}{2}n\pi+(-)^n\dfrac{\pi}{6}\pm\dfrac{\pi}{12},$

及ビ $\phi=-\dfrac{1}{2}n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}\mp\dfrac{\pi}{12},$

即チ $\theta=\dfrac{\pi}{6}\left\{9n+(-1)^n\pm\dfrac{1}{2}\right\},$

及ビ $\phi=\dfrac{\pi}{6}\left\{-3n+(-1)^n\mp\dfrac{1}{2}\right\}.$

30. $\sin(2x-y)=\cos(x+2y)=\dfrac{1}{2}$

ヨリ x, y ヲ求メヨ. [36. 商船.]

解 $\sin(2x-y)=\dfrac{1}{2}$ ………… (1)

$\cos(x+2y)=\dfrac{1}{2}$ ……… (2)

(1) ヨリ $2x-y=n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}$ …… (3)

(2) ヨリ $x+2y=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$ ……… (4)

(3) ノ 2 倍ト (4) ト邊々相加ヘテ

$$5x=4n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{3},$$

故ニ $$x=\frac{4}{5}n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{15}\pm\frac{\pi}{15}$$

$$=\frac{\pi}{15}\{12n+(-1)^n\pm1\},$$

又 (4) ノ 2 倍ヨリ (3) ヲ邊々相減ズレバ

$$5y=3n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{6}\pm\frac{2\pi}{3},$$

故ニ $$y=\frac{3}{5}n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{30}\pm\frac{2}{15}\pi,$$

$$=\frac{\pi}{30}\{18n-(-1)^n\pm4\}.$$

依リテ x, y ノ値ハ

$$\frac{\pi}{15}\{12n+(-1)^n\pm1\},\quad \frac{\pi}{30}\{18n-(-1)^n\pm4\}.$$

31. 次ノ二式ヨリ x ト y トノ値ヲ求メヨ.

$$x+y=90^\circ \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\sin x+\cos y=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots\dots\dots (2)$$

[39. 東. 高. 工.]

解 (1), (2) ヨリ $\sin x+\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2},$

即チ $$2\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

故ニ $$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{4},$$

故ニ $$x=\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{4},$$

又 $$\cos y+\cos y=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

故ニ $$\cos y=\frac{\sqrt{3}}{4},$$

故ニ $$y=\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{4},$$

依リテ x, y ノ値ハ $\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{4},\quad 90^\circ-\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{4},$

或ハ $90^\circ-\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{4},\ \cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ノ二組ナリ.

32. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$x+y=150^\circ \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\tan x+\tan y=-\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

[42. 東. 高. 工.]

解 (1) ヨリ $\tan(x+y)=\tan150^\circ=-\dfrac{1}{\sqrt{3}},$

故ニ $$\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=-\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \dots\dots (3)$$

(2) ト (3) トヨリ $\dfrac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\tan x\tan y}=\dfrac{1}{\sqrt{3}},$

故ニ $$\tan x\tan y=-1 \quad \dots\dots\dots (4)$$

(2) ト (4) トヨリ $\tan x, \tan y$ ノ値ハ

方程式 $$z^2+\frac{2}{\sqrt{3}}z-1=0,$$

即チ $\sqrt{3}z^2+2z-\sqrt{3}=0,$

依リテ $z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, 或ハ $-\sqrt{3},$

故ニ $\tan x=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \tan y=-\sqrt{3},$

或ハ $\tan x=-\sqrt{3},\ \tan y=\dfrac{1}{\sqrt{3}},$

故ニ $x=n\pi+\dfrac{\pi}{6},\ y=n\pi+\dfrac{2}{3}\pi,$

或ハ $x=n\pi+\dfrac{2}{3}\pi,\ y=n\pi+\dfrac{\pi}{6}.$

依リテ x, y ノ値ハ (4) ヨリ

$$n\pi+\frac{\pi}{6},\ -n\pi+\frac{2}{3}\pi;$$

$$-n\pi+\frac{\pi}{6},\ n\pi+\frac{2}{3}\pi;$$

$$n\pi+\frac{2}{3}\pi,\ -n\pi+\frac{\pi}{6};$$

$$-n\pi+\frac{2}{3}\pi,\ n\pi+\frac{\pi}{6}$$

ノ四組ナリ.

但上ニハ簡單ナラシメンガ爲ニ弧度ニテ答ヘタリ. 若シ度數ニテ答フレバ $n.180^\circ+30^\circ$, $-n.180^\circ+120^\circ$; $-n.180^\circ+30^\circ$, $n.180^\circ+120^\circ$, $n.180^\circ+120^\circ$, $-n.180^\circ+30^\circ$; $-n.180^\circ+120^\circ$, $n.180^\circ+30^\circ$ ノ四組ナリ.

M. 消去法

逆三角函數

1. $a\sin\theta+b\cos\theta=c$ ……… (1)

$b\sin\theta+a\cos\theta=d$ ……… (2)

ヨリ θ ヲ消去セヨ. [32. 海. 機.]

解 I. (1), (2) ヲ別々ニ平方シテ邊々相加フレバ $a^2+b^2+4ab\sin\theta\cos\theta=c^2+d^2,$

即チ $2ab\sin 2\theta=c^2+d^2-(a^2+b^2)$ ……… (3)

又 (1), (2) ヲ邊々相乘スレバ

$$ab+(a^2+b^2)\sin\theta\cos\theta=cd,$$

即チ $(a^2+b^2)\sin 2\theta=2(cd-ab)$ ……… (4)

(3) ト (4) ト邊々相除シテ

$$\frac{2ab}{a^2+b^2}=\frac{c^2+d^2-(a^2+b^2)}{2(cd-ab)}.$$

解 II. (1) ニ a ヲ乘シ, (2) ニ b ヲ乘シテ邊々相減ズレバ $(a^2-b^2)\sin\theta=ac-bd,$

故ニ $\sin\theta=\dfrac{ac-bd}{a^2-b^2}$ ……… (3)

又 (1) ニ b ヲ乘シ (2) ニ a ヲ乘シテ邊々相減ズレバ $(b^2-a^2)\cos\theta=bc-ad,$

故ニ $$\cos\theta=\frac{ad-bc}{a^2-b^2} \quad \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (4)$$

(3) ト (4) トヨリ $$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\frac{(ac-bd)^2}{(a^2-b^2)^2}+\frac{(ad-bc)^2}{(a^2-b^2)^2}=1,$$

故ニ θ ヲ消去シタル式ハ

$$\underline{(ac-bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2-b^2)^2}.$$

注意 解 I ト解 II トノ結果一見相異ナル如ク見ユルモ結局ハ同一ノ式ナリ．如何トナレバ

解 I ノ結果 $\dfrac{2ab}{a^2+b^2}=\dfrac{c^2+d^2-(a^2+b^2)}{2(cd-ab)}$

ノ分母ヲ拂ヒテ次ノ如クナレバナリ．

$$4ab(cd-ab)=(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(a^2+b^2)^2,$$

即チ $$(a^2+b^2)^2-4a^2b^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)-4abcd,$$

即チ $$(a^2-b^2)^2=(ac-bd)^2+(ad-bc)^2.$$

2. $$a\sin\theta+b\cos\theta-m=0 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (1)$$
$$b\tan\theta-a-n\sec\theta=0 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (2)$$

ヨリ θ ヲ消去セヨ． ［33. 東. 高. 工.］

解 (1) ヨリ $a\sin\theta+b\cos\theta=m \quad \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (3)$

(2) ニ $\cos\theta$ ヲ乘ズレバ

$$b\sin\theta-a\cos\theta=n \quad \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (4)$$

(3) ノ平方ト (4) ノ平方ト邊々相加フレバ

$$a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+b^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=m^2+n^2,$$

即チ $$\underline{a^2+b^2=m^2+n^2}.$$

3. $$a\sin\theta+b\cos\theta=1, \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (1)$$
$$b\sin\theta+a\cos\theta=2\sin\theta\cos\theta \quad \cdots\ \cdots \quad (2)$$

ヨリ θ ヲ消去セヨ． ［33. 海. 兵.］

解 I. (2) ノ兩邊ヲ $\sin\theta\cos\theta$ ニテ除スレバ

$$\frac{b}{\cos\theta}+\frac{a}{\sin\theta}=2,$$

之ト (1) ヨリ $$\frac{b}{\cos\theta}+\frac{a}{\sin\theta}=2a\sin\theta+2b\cos\theta,$$

即チ $$a\left(\frac{1}{\sin\theta}-2\sin\theta\right)+b\left(\frac{1}{\cos\theta}-2\cos\theta\right)=0,$$

即チ $$a.\frac{1-2\sin^2\theta}{\sin\theta}+b.\frac{1-2\cos^2\theta}{\cos\theta}=0,$$

故ニ $$a\frac{\cos2\theta}{\sin\theta}-\frac{b\cos2\theta}{\cos\theta}=0,$$

故ニ $$\frac{a}{\sin\theta}-\frac{b}{\cos\theta}=0,$$

故ニ $$a\cos\theta-b\sin\theta=0,$$

此ノ兩邊ヲ平方スレバ

$$a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-2ab\cos\theta\sin\theta=0 \quad \cdots \quad (3)$$

(1) ノ兩邊ヲ平方スレバ

$$a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta+2ab\sin\theta\cos\theta=1 \quad \cdots \quad (4)$$

(3) ト (4) トヲ邊々相加フレバ

$$\underline{a^2+b^2=1}.$$

解 II. (1) ト (2) ト邊々相乘シテ

$$ab+(a^2+b^2)\sin\theta\cos\theta=2\sin\theta\cos\theta,$$

卽チ $$2ab=(2-a^2-b^2)\sin 2\theta \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (3)$$

又 (1), (2) ヲ別々ニ平方シテ邊々相加フレバ

$$a^2+b^2+4ab\sin\theta\cos\theta=4\cos^2\theta\sin^2\theta+1,$$

卽チ $$a^2+b^2-1+2ab\sin 2\theta=\sin^2 2\theta \quad \ldots \quad (4)$$

(3) ヨリ $$\sin 2\theta=\frac{2ab}{2-a^2-b^2},$$

之ヲ (4) ニ代入スレバ

$$(a^2+b^2-1)+\frac{4a^2b^2}{2-a^2-b^2}=\frac{4a^2b^2}{(2-a^2-b^2)^2},$$

卽チ $$(a^2+b^2-1)+\frac{4a^2b^2}{2-a^2-b^2}\left(1-\frac{1}{2-a^2-b^2}\right)=0,$$

卽チ $$(a^2+b^2-1)-\frac{4a^2b^2(a^2+b^2-1)}{(2-a^2-b^2)^2}=0,$$

卽チ $$(a^2+b^2-1)\left\{1-\frac{4a^2b^2}{(2-a^2-b^2)^2}\right\}=0,$$

故ニ $$a^2+b^2=1 \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (5)$$

或ハ $$(2-a^2-b^2)^2-4a^2b^2=0,$$

之ヨリ $$(a+b)^2=2 \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (6)$$

或ハ $$(a-b)^2=2 \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (7)$$

ヲ得. 但コノ (6) 或ハ (7) ノ結果アルトキハ

$$2-a^2-b^2=\pm 2ab$$

ナルユヱ之ヲ $\sin 2\theta$ ノ値ニ代入シテ

$$\sin 2\theta=\pm 1$$

ヲ得. 故ニ $$2\theta=\pm\frac{\pi}{2}$$

ナル特別ノ値ヲ得ルユヱ (1), (2) ヨリ θ ヲ消去シテ得タル式ハ (5) ノミナリ.

4. $$\sin\alpha=m\sin\beta \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (1)$$

$$\tan\alpha=n\tan\beta \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (2)$$

ヨリ β ヲ消去セヨ. [39. 商船.]

解 (1) ヨリ $$\sin\beta=\frac{\sin\alpha}{m} \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (3)$$

(2) ヨリ $$\tan\beta=\frac{\tan\alpha}{n},$$

卽チ $$\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha}{n\cos\alpha} \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (4)$$

(3) ノ兩邊ヲ (4) ノ兩邊ニテ除スレバ

$$\cos\beta=\frac{n}{m}\cos\alpha \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (5)$$

(3) ノ平方ト (4) ノ平方トヲ相加フレバ

$$\sin^2\beta+\cos^2\beta=\frac{\sin^2\alpha}{m^2}+\frac{n^2\cos^2\alpha}{m^2},$$

卽チ $$1=\frac{\sin^2\alpha}{m^2}+\frac{n^2\cos^2\alpha}{m^2},$$

故ニ　$m^2=\sin^2\alpha+n^2\cos^2\alpha$

$=1-\cos^2\alpha+n^2\cos^2\alpha,$

即チ　$m^2-1=(n^2-1)\cos^2\alpha,$

或ハ　$\cos^2\alpha=\dfrac{m^2-1}{n^2-1}.$

5.　次ノ式ヨリ θ ヲ消去セヨ.

$\tan\theta+\cos\theta=a,\ \tan\theta-\cos\theta=b.$　　[42. 商船.]

解　所題ノ二式ヲ邊々相加ヘ，又相減ズレバ

$2\tan\theta=a+b,$

及ビ　$2\cos\theta=a-b,$

故ニ　$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{a+b}{2}$ … … … … (1)

及ビ　$\cos\theta=\dfrac{a-b}{2}$ … … … … (2)

(1) ニ (2) ヲ代入シテ

$\dfrac{2\sin\theta}{a-b}=\dfrac{a+b}{2},$

故ニ　$\sin\theta=\dfrac{a^2-b^2}{4}$ … … … (3)

(2) ノ平方ト (3) ノ平方トヲ相加フレバ

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=\dfrac{(a-b)^2}{4}+\dfrac{(a^2-b^2)^2}{16},$

即チ　$1=\dfrac{(a-b)^2}{4}+\dfrac{(a^2-b^2)^2}{16},$

故ニ　$(a-b)^2\{(a+b)^2+4\}=16$

6.　次ノ方程式ヨリ θ ヲ消去セヨ.

(I)　$m\sec\theta=1+\tan\theta,\ n\sec\theta=1-\tan\theta.$

(II)　$\sin\theta-\cos\theta=m,\ \sin2\theta=n.$　[42. 陸. 主. 候.]

解 (I)　所題ノ二式ノ平方ヲ邊々相加フレバ

$(m^2+n^2)\sec^2\theta=2(1+\tan^2\theta)$

$=2\sec^2\theta.$

故ニ　$m^2+n^2=2.$

(II)　第一式ノ兩邊ヲ平方スレバ

$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=m^2,$

即チ　$1-\sin2\theta=m^2,$

之ト第二式トヨリ　$1-\overset{n}{m}=m^2,$

或ハ　$m^2+n=1.$

7.　$\tan^{-1}m+\tan^{-1}n=\tan^{-1}\dfrac{m+n}{1-mn}$

ヲ證セヨ.　[31. 海. 兵.]

證　$\tan^{-1}m=x,\ \tan^{-1}n=y$ トスレバ

$\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$

$=\dfrac{m+n}{1-mn},$

故ニ $$x+y=\tan^{-1}\frac{m+n}{1-mn},$$

即チ $$\tan^{-1}m+\tan^{-1}n=\tan^{-1}\frac{m+n}{1-mn}.$$

8. $$2\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{2y}{1-y^2}$$

ヲ證セヨ。 [34. 陸. 士.]

證 $2\tan^{-1}y=x$ トスレバ

$$\tan^{-1}y=\frac{x}{2},$$

故ニ $$\tan\frac{x}{2}=y,$$

而シテ $$\tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{2y}{1-y^2},$$

故ニ $$x=\tan^{-1}\frac{2y}{1-y^2},$$

依リテ $$2\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{2y}{1-y^2}.$$

補

D. 4. 證 III.

右邊 $=(\sin A+\sin B)(\sin A-\sin B)$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cdot 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\cdot 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$=\sin(A+B)\sin(A-B).$$

D. 31. 證 II. 左邊 $=\dfrac{\sin A+3\sin A-4\sin^3 A}{\cos A-4\cos^3 A+3\cos A}$

$$=\frac{4\sin A(1-\sin^2 A)}{4\cos A(1-\cos^2 A)}=\frac{\sin A\cos^2 A}{\cos A\sin^2 A}$$

$$=\frac{\cos A}{\sin A}=\cot A.$$

E. 1. 證 III. $\sin(A+45^\circ)$

$$=\cos(90^\circ-\overline{A+45^\circ})=\cos(45^\circ-A)$$

$$=\cos(A-45^\circ)$$

ナルユエ 所題ノ式ノ左邊

$$=\cos^2(A-45^\circ)+\sin^2(A-45^\circ)=1.$$

E. 4. 證 III. $(45^\circ+a)+(45^\circ-a)=90^\circ$

ナルユエ 所題ノ式ノ左邊

$$=\tan(45^\circ+a)\cot(45^\circ+a)=1.$$

證 IV. $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

ニ於テ $A+B=90^\circ$ ナルトキハ

$$1-\tan A\tan B=0,\ \text{即チ}\ \tan A\tan B=1,$$

然ルニ $(45^\circ+\alpha)+(45^\circ-\alpha)=90^\circ$

ナルユヱ $\tan(45^\circ+\alpha)\tan(45^\circ-\alpha)=1.$

E. 5. 證 III. 所題ノ式ノ左邊

$$=\tan(45^\circ+A)-\cot(45^\circ+A)$$

$$=\frac{\sin^2(45^\circ+A)-\cos^2(45^\circ+A)}{\sin(45^\circ+A)\cos(45^\circ+A)}$$

$$=\frac{-2\cos(90^\circ+2A)}{\sin(90^\circ+2A)}=\frac{2\sin 2A}{\cos 2A}=2\tan 2A.$$

E. 7. 證 III. 所題ノ式ノ左邊

$$=\operatorname{cosec}(45^\circ-\alpha)\sec(45^\circ-\alpha)$$

$$=\frac{1}{\sin(45^\circ-\alpha)\cos(45^\circ-\alpha)}$$

$$=\frac{2}{\sin(90^\circ-2\alpha)}=\frac{2}{\cos 2\alpha}=2\sec 2\alpha.$$

E. 19. 證 II. 所題ノ式ノ左邊

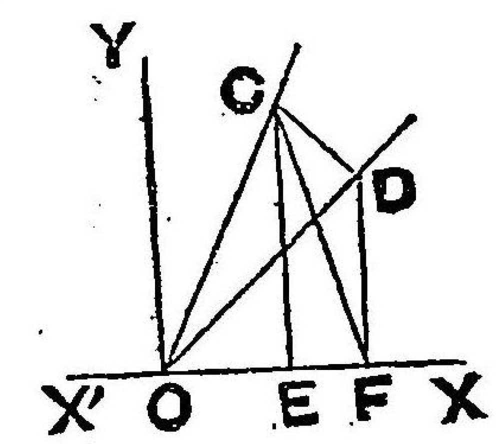
$$=2\sin 18^\circ\cos 18^\circ.2\sin 15^\circ\cos 15^\circ$$

$$=2\sin 18^\circ\cos 15^\circ.2\cos 18^\circ\sin 15^\circ$$

$$=(\sin 33^\circ+\sin 3^\circ)(\sin 33^\circ-\sin 3^\circ)$$

$$=\sin^2 33^\circ-\sin^2 3^\circ.$$

E. 2. 證 III. 假設ニ依リテ A モ B モ 90° ヨリ小ナルユヱ $A+B<180^\circ$.

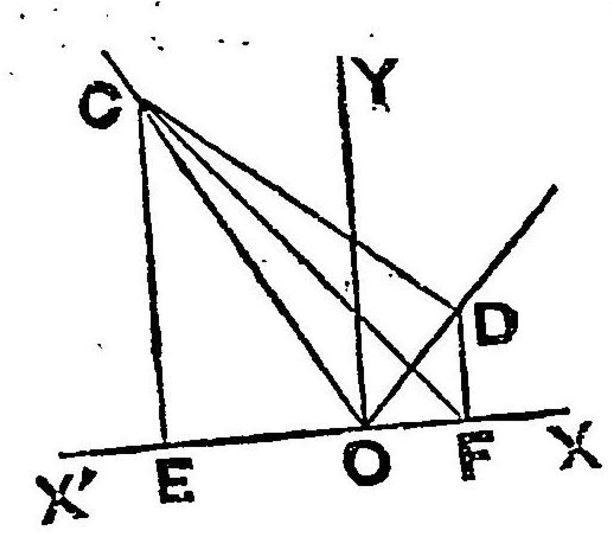


故ニ本定理ハ第一分面ヨリ第二分面ノ間ニ於テ幾何學的ニ證明スルコトヲ得ベシ.

今正ノ向キニ

$$X\hat{O}D=A,\quad D\hat{O}C=B$$

ヲ作レバ OD ハ第一分面ニアレド, OC ハ第一分面, 若シクハ第二分面ニアリ, 何レニセヨ, OC ノ上ニ任意ノ一點 C ヲ取リ X ノ軸及ビ OD ニ垂線 CE 及ビ CD ヲ下シ, 又 D ヨリ X ノ軸ニ垂線 DF ヲ引ケバ



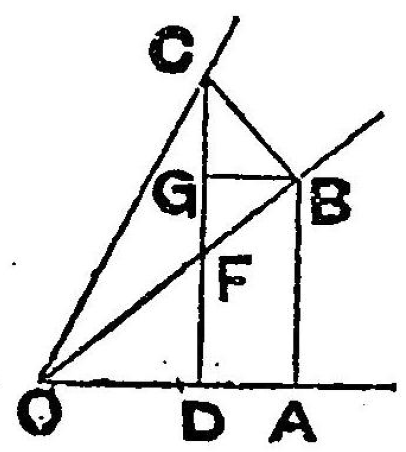
$$\sin(A+B)=\frac{CE}{OC},$$

$$\sin A+\sin B=\frac{DF}{OD}+\frac{CD}{OC}>\frac{DF}{OC}+\frac{CD}{OC}.$$

而シテ $\dfrac{DF+CD}{OC}>\dfrac{CF}{OC}>\dfrac{CE}{OC}.$

故ニ $\sin A+\sin B>\sin(A+B).$

F. 6.證 IV.　本題ヲ幾何學的ニ證スルコト．



$\hat{AOC}=\theta$,　$\hat{AOB}=45°$ ヲ作リ，OC 上ノ一點 C ヨリ OA ニ垂線 CD ヲ下シ，CD$=b$ トスレバ假設ニ依リテ OD$=c$ ナルベシ．又 C ヨリ OB ニ垂線 CB, B ヨリ CD, OA ニ垂線 BG, BA ヲ引キ且 CD ト OB トノ交點ヲ F トスレバ $\hat{AOB}=45°$ ナルコトヨリ CG=GF, OD=DF, OA=AB, 等ハ容易ニ知リ得ベシ．

依リテ $\tan(\theta-45°)=\tan(AOC-AOB)$

$$=\tan BOC=\frac{CB}{OB}$$

$$=\frac{CG}{OA}\qquad[\because \triangle CBG\backsim\triangle ABO]$$

$$=\frac{2CG}{2OA}=\frac{CD-OD}{CD+OD}=\frac{b-c}{b+c}.$$

F. 10.　證　本題ノ證ニ於テ四行目ヨリ次ノ如ク改ムルモ可ナリ．

故ニ　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{-6}{1-7}=1.$$

依リテ　$\alpha+\beta=n\pi+\dfrac{\pi}{4}$,

故ニ　$\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$.

F. 11.　**證 II.**　所題ノ二根ガ成立スル爲ニハ

$$\left(x-\frac{1}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\cot^2\frac{\theta}{2}-1}\right)=0,$$

或ハ　$$\left(x-\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos\theta}\right)\left(x-\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos\theta}\right)=0,$$

或ハ　$$x^2-x\sec\theta-\frac{1}{4}\tan^2\theta=0$$

ガ與ヘラレタル方程式ト全ク同ジモノナルコトヲ要ス，卽チ　$2p=\sec\theta$,

及ビ　$q^2=\dfrac{1}{4}\tan^2\theta$

ナラザルベカラズ．

然ルニ此ハ與ヘラレタル關係ニ依リテ眞ナリ．

依リテ題言ノ如シ．

F. 17.　**證 III.**　$\tan(A+B+C)$

$$=\frac{\Sigma\tan A-\Pi\tan A}{1-\Sigma\tan A\tan B},$$

然ルニ $A+B+C=180°$ ナルユエ左邊ノ値ハ零ニ等シ．故ニ　$\Sigma\tan A-\Pi\tan A=0$,

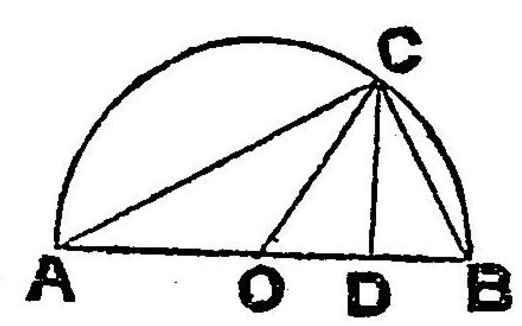
或ハ　　$\Sigma\tan A=\Pi\tan A.$

G. 8. 解 II. 所題ノ分數式ノ分子

$$=\sin A(\sin B\cos C-\cos B\sin C)$$
$$-\sin B(\sin A\cos C-\cos A\sin C)$$
$$=-(\sin A\cos B-\cos A\sin B)\sin C$$
$$=-\sin(A-B)\sin C.$$

故ニ　此ノ分數式$=-\sin(A-B).$

H. 2. 解 III. 幾何學的ニ $\sin 2\alpha$ ヲ $\cot\alpha$ ノ項ニテ表ハス公式ヲ作ルコト次ノ如シ.



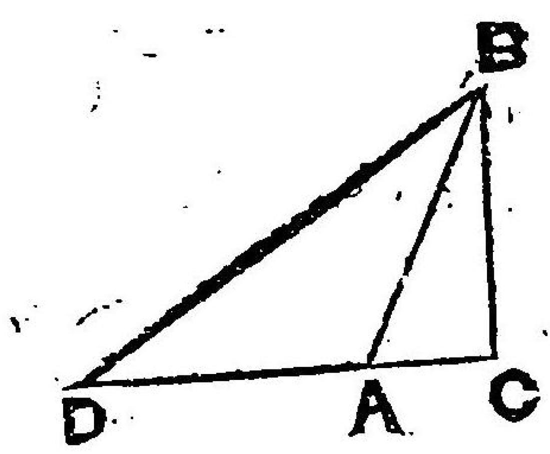
O ヲ中心トスル半圓 ACB ヲ作リ, $B\hat{A}C=\alpha$ トスレバ　$B\hat{O}C=2\alpha$ ナリ. 今 AB ニ垂線 CD ヲ下ストキハ

$$\sin 2\alpha=\frac{CD}{OC}=\frac{2AD.CD}{AD.AB}$$
$$=\frac{2AD.CD}{\overline{AC}^2}=\frac{2AD.CD}{\overline{CD}^2+\overline{AD}^2}$$

[分子ト分母トヲ $\overline{CD}^2$ ニテ除スレバ]

$$=\frac{2\dfrac{AD}{CD}}{1+\left(\dfrac{AD}{CD}\right)^2}=\frac{2\cot\alpha}{1+\cot^2\alpha}.$$

H. 7. 別解 本題ノ如キ例ハ一般ニ幾何學的ニ解クコトヲ得ベシ.



$C\hat{A}B=A$ ヲ作リ, $AB=5$ トシ, AC ニ垂線 BC ヲ下セバ假設ヨリシテ $CB=3$ ナラザルベカラズ.

從ヒテ　$AC=\sqrt{(\overline{AB}^2-\overline{BC}^2)}=\sqrt{(5^2-3^2)}=4.$

今 CA ヲ D ニ引キ延バシ　$AD=AB$ トシ, DB ヲ結ビ付クレバ　$C\hat{D}B=\frac{1}{2}A,$

$$DB=\sqrt{(\overline{DC}^2+\overline{BC}^2)}=\sqrt{(9^2+3^2)}=3\sqrt{10}.$$

故ニ　$\sin\frac{A}{2}=\frac{BC}{DB}=\frac{3}{3\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10},$ 等.

H. 15. 注意 本題ヲ尚嚴密ニ述ブルニハ次ノ如キ末文ヲ附スレバ可ナリ.

A, B ハ鋭角ナリト云フヲ以テ其ノ和ハ $90^\circ\times 2$. 即チ 180° ヨリ小ナリ. 故ニ $\tan(A+B)=\infty$ ヨリ $A+B=90^\circ$ ヲ決定シタルナリ.

I. 7. 注意 若シ $\cos(A+B+C)$ ヲ展開スルニ上ノ公式ヲ忘レタルトキハ左邊ヲ sin., cos. ニ關スル分數式ニ改メ, 然ル後右邊ヲ導クモ一法

ナルベシ.

I. 8. 證 II. 所題ノ式ノ左邊

$$=\tan\frac{A}{2}+\sin\frac{B+C}{2}\Big/\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=\tan\frac{A}{2}+\left(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\Big/\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

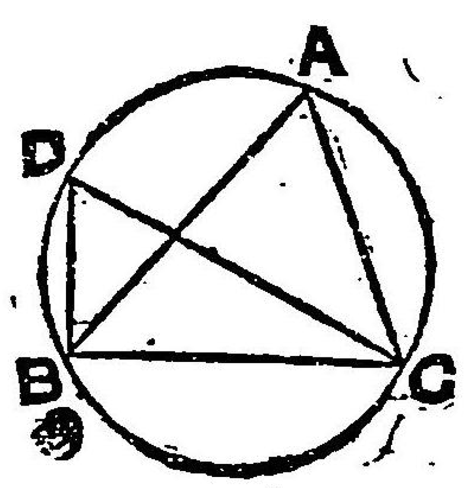
$$=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\qquad\cdots\ (1)$$

卽チ此ノ結果ハ A, B, C ニ就キテ對稱式ナリ. 然ルニ所題ノ式ノ右邊ハ左邊ニ於ケル A ノ代リニ B ガ入レ變リタルノミナルユエ (1) ト同ジ形トナルコト明カナリ.

故ニ　　　　左邊＝右邊.

注意　此ノ對稱ト云フコトニ注意スレバ所題ノ式ノ兩邊ハ尙又 $\tan\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\sec\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}$ ニモ等シキコトヲ推知シ得ベシ.

I. 11. 證 II. 次ノ如キ作圖法ニ依リテモ亦證シ得ベシ.



三角形 ABC ノ外接圓 ABC ヲ作リ, C ヲ過ル徑CD ヲ引キ BD ヲ結ビ付クレバ

$$\widehat{BDC}=A,\quad \widehat{DBC}=\hat{R}$$

ナルコト明カナリ.

依リテ　$\sin A=\sin BDC$

$$=\frac{BC}{CD}=\frac{a}{2R}.$$

卽チ　$\frac{a}{\sin A}=2R$, 等.

I. 12. 證 II. $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$　[11 題]

ト命ズレバ　$a=k\sin A$,

$b=k\sin B$,

$c=k\sin C$.

今第二第三ノ等式ノ兩邊ニソレゾレ $\cos C$, $\cos B$ ヲ乘ジテ邊々相加フレバ

$$b\cos C+c\cos B=k(\sin B\cos C+\cos B\sin C)$$
$$=k\sin(B+C)$$
$$=k\sin A=a.$$

注意　要スルニ本題及ビ 11 題ノ公式, 尙又 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, 等 ノ公式ハ個々獨立ノモノニアラズシテ一ツハ他ヨリ導カルベキモノナリ [同著者ノ受驗注意及

ビ模範解法ヲ見ヨ].

I. 13. **證 III.** $\sin A+\sin B>\sin C$

ノ他ノ證ヲ次ニ示サン.

正弦比例ノ式[11 題]

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

ニ加比ノ理ヲ適用スレバ

$$\frac{a+b}{\sin A+\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

然ルニ $$a+b>c,$$

故ニ $$\sin A+\sin B>\sin C.$$

I. 16. **證 III.** 所題ノ式ノ左邊

$$=\frac{1}{2c}(2bc\cos A-2ac\cos B)$$

$$=\frac{1}{2c}(b^2+c^2-a^2-a^2-c^2+b^2)$$

$$=\frac{b^2-a^2}{c}.$$

I. 17. **證 II.** 公式

$$a=b\cos C+c\cos B,$$

$$b=c\cos A+a\cos C,$$

$$c=a\cos B+b\cos A$$

ヲ取リテ之ニソレゾレ $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ ヲ乘ジ,

後ノ二ツノ結果ノ和ヨリ始ノ結果ヲ減ズレバ

$$b\cos B+c\cos C-a\cos A=2a\cos B\cos C,$$

故ニ $$a\cos A+b\cos B+c\cos C$$

$$=2a(\cos A+\cos B\cos C)$$

$$=2a[-\cos(B+C)+\cos B\cos C]$$

$$=2a\sin B\sin C.$$

I. 18. **證 II.** 所題ノ式ノ始ノ二項ノ和

$$=(a\sin B\cos C-a\sin C\cos B)$$

$$+(b\sin C\cos A-b\sin A\cos C),$$

是ニ於テ $a\sin B=b\sin A$, $a\sin C=c\sin A$,

$$b\sin C=c\sin B$$

ナルコトニ注意シテ簡單ニスレバ

$$=-c(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$$

$$=-c\sin(A-B).$$

故ニ 所題ノ式$=0$.

I. 20. **證 II.** 所題ノ式ノ右邊

$$=(a+b)^2\left(1-\cos^2\frac{C}{2}\right)+(a-b)^2\cos^2\frac{C}{2}$$

$$=(a+b)^2-[(a+b)^2-(a-b)^2]\cos^2\frac{C}{2}$$

$$=(a+b)^2-4ab\cos^2\frac{C}{2}$$

$$=(a+b)^2-2ab(\cos C+1)$$

$$=a^2+b^2-2ab\cos A=c^2.$$

I. 27. 證 II. 所題ノ式ノ右邊

$$=\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}\sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}}$$

$$=\frac{s}{s-c}=\frac{a+b+c}{a+b-c}.$$

I. 28. 證 II. 所題ノ式ノ右邊ハ F. 14 題及ビ I. 17 題ニ依リテ直チニ

$$\frac{2a\sin B\sin C}{4\sin A\sin B\sin C}=\frac{a}{2\sin A}.$$

I. 30. 注意 本題ノ如キモノノ證明ハ次ノ如ク述ブルモ同理ナリ.

「A=2B ナルユヱ $\sin A=\sin 2B$,

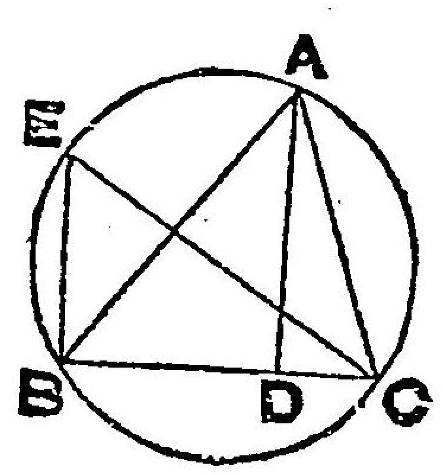
卽チ $\sin A=2\sin B\cos B$,

然ルニ $a=k\sin A,\quad b=k\sin B$,

故ニ $a=2b\cos B$」.

但 k ニ就キテハ I. 15 題注意ヲ見ヨ.

I. 33. 證 III. 本題ハ又幾何學的ニ次ノ如ク證スルモ可ナラン.



三角形 ABC ノ A ヨリノ高サ AD ヲ引ケバ

$$\cos B=\frac{BD}{AB}.$$

今外接圓ヲ畫キ, C ヨリノ徑 CE (=2R) ヲ作リ, BE ヲ結ビ付クレバ

$$\widehat{CEB}=\hat{A},\quad \widehat{CBE}=\hat{R}$$

ナルコトヨリ $\sin A=\frac{BC}{CE}=\frac{BC}{2R}.$

同樣ニ $\sin C=\frac{AB}{2R}.$

故ニ與ヘラレタル關係ニ依リテ

$$\frac{BD}{AB}=\frac{BC}{2R}:\frac{2AB}{2R},$$

卽チ $\frac{BD}{AB}=\frac{BC}{2AB},$

或ハ $BD=\frac{1}{2}BC,$

換言スレバ頂點 A ヨリノ垂線ハ底邊ヲ二等分ス.

故ニ $AB=AC,$

或ハ $\hat{B}=\hat{C}$

ナラザルベカラズ.

I. 37. 證 II. 假設ニ依リテ

$$2\cot\frac{B}{2}=\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2},$$

或ハ $$2\sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}+\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}},$$

簡單ニスレバ

$$2(s-b)=(s-a)+(s-c),$$

即チ $$2b=a+c.$$

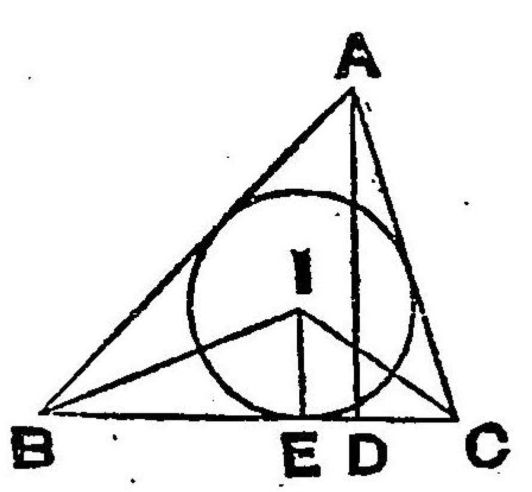
故ニ $$\cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}$$

$$=\frac{s}{s-b}=\frac{a+b+c}{a+c-b}$$

$$=\frac{3b}{b}=3.$$

注意 此ノ證ニ依リテ見レバ本題ハ「$\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$, $\cot\frac{C}{2}$ ガ等差級數ヲナストキ」ト云フモ「a, b, c ガ等差級數ヲナストキ」ト云フモ同ジコトガ成立ツコトニ注意スベシ.

I. 38. 證 II. 本題ヲ幾何學的ニ證明スルコト次ノ如シ.



三角形ヲ ABC トシ, 垂線 AD ヲ引キ, 又內切圓ヲ作リ, 其ノ中心 I ヲ B, C ニ結ビ付クレバ

$$\hat{IBE}=\frac{B}{2},\quad \hat{ICE}=\frac{C}{2}$$

ニシテ, 圓 I ト邊 BC トノ切點ヲ E トシ, IE

ヲ結ビ付クレバ IE$\perp$BC ナリ.

サテ $$\cot\frac{B}{2}=\frac{BE}{IE},\quad \cot\frac{C}{2}=\frac{CE}{IE}.$$

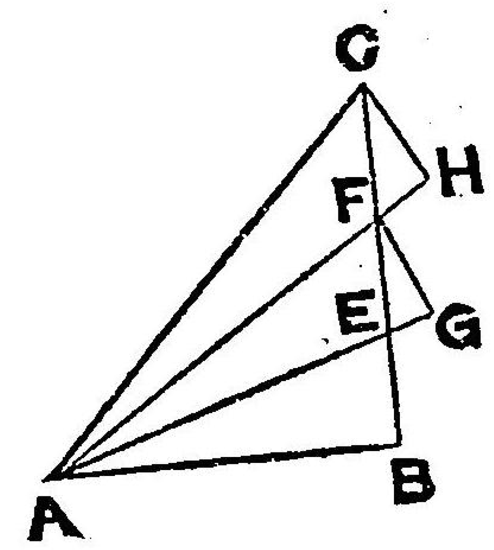
故ニ $$\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{BE+CE}{IE}=\frac{a}{IE}.$$

依リテ $$2s\Big/\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)=2s\Big/\frac{a}{IE}$$

$$=\frac{2s.IE}{a}=\frac{2\Delta}{a}=\frac{AD.a}{a}=AD.$$

B, C ヨリ對邊ニ下セル垂線ニ就キテモ亦同樣ニ證明シ得ベシ.

J. 8. 解 II. 本題ハ次ノ如ク線ノ長サヲ計算スルコトニ依リテモ亦解キ得ベシ.



AE, AF ノ延線ニソレゾレ垂線 FG, CH ヲ引キ AB$=$BC$=3$ トスレバ

$$AE=\sqrt{(\overline{AB}^2+\overline{BE}^2)}=\sqrt{(3^2+1^2)}=\sqrt{10}.$$

同樣ニシテ $$AF=\sqrt{13}.$$

而シテ $$\hat{ABF}=\hat{R}=\hat{AGF}$$

ナルコトヨリ ABGF ハ同一ノ圓周上ニアリ.

故ニ $$GE.AE=BE.EF,$$

或ハ $$GE\times\sqrt{10}=1\times1,$$

卽チ $$GE=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

同様ニシテ $$HF=\frac{1}{\sqrt{13}}.$$

尙 $$FG=\sqrt{(\overline{EF}^2-\overline{GE}^2)}$$
$$=\sqrt{\left\{1^2-\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2\right\}}=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

同様ニシテ $$CH=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}.$$

依リテ $$\tan EAF=FG:AG$$
$$=\frac{3}{\sqrt{10}}:\sqrt{10}+\frac{1}{\sqrt{10}}=3:11.$$

同様ニシテ $$\tan FAC=1:5.$$

注意 此ノ種ノ解ハ一般ニ BC ヲ n 等分シ, 且總テノ三角函數ヲ計算スル場合ニ便利ナルベシ.

J. 9. 解 II. $AD=x\cot 45^\circ=x,$

$$BD=x\cot 60^\circ=\frac{x}{\sqrt{3}},$$

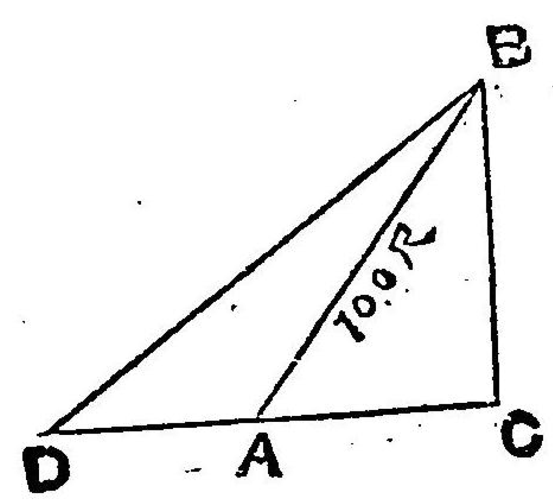
故ニ $$AD;BD=x:\frac{x}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}:1$$
$$AD:AB=\sqrt{3}:\sqrt{3}+1,$$

或ハ $$AD:1000=\sqrt{3}:\sqrt{3}+1$$

ヨリ AD ヲ得ベク, $AC=AD/\cos 45^\circ$

ヨリ AC ヲ得ベシ.

J. 29. 本題ハ題意ヲ次ノ如クモ取ラルベシ, 阪路ノ傾斜ヲ減ズルトハ, 斯ク解スル方ガ寧ロ穏當ニモ思ハル.



直角三角形 BAC ニ於テ角 BAC ヲ 45° トシ, 角 BDC ヲ 30° トシ, AB ヲ 100 尺トスレバ BD ハ所要ノ長サナルベシ.

サテ $$BC=100\sin 45^\circ=5\sqrt{2},$$
$$BD=BC\operatorname{cosec}30^\circ$$
$$=50\sqrt{2}\times 2=100\sqrt{2}\fallingdotseq 141.42,$$

卽チ約 141尺.42 ナリ.

J. 40. 注意 $\cot^2\beta^\circ-\cot^2\alpha^\circ$
$$=(\cot\beta^\circ+\cot\alpha^\circ)(\cot\beta^\circ-\cot\alpha^\circ)$$
$$=\frac{\sin(\alpha^\circ+\beta^\circ)\sin(\alpha^\circ-\beta^\circ)}{(\sin\alpha^\circ\sin\beta^\circ)^2}$$

ナルユエ $$AB=\frac{l\sin\alpha^\circ\sin\beta^\circ}{\sqrt{\sin(\alpha^\circ+\beta^\circ)\sin(\alpha^\circ-\beta^\circ)}}$$

トスレバ對數計算ニ適ス.

K. 1. 注意 II. 解 II ノ公式ニ於テ
$$\frac{h}{c}=\cos A\cot^2\phi$$

ナル如キ輔角 ϕ ヲ用フレバ

$$\frac{b}{c}-\cos A=\cos A(\cot^2\phi-1)$$

$$=\cos A.\frac{\cos^2\phi-\sin^2\phi}{\sin^2\phi}=\frac{\cos A\cos 2\phi}{\sin^2\phi}.$$

故ニ $\cot C$ ヲ對數式ニテ計算シ得ベシ.

解 III ニ於テ　$b^2+c^2-2bc\cos A$

$$=b^2+c^2-2bc\left(2\cos^2\frac{A}{2}-1\right)$$

$$=(b+c)^2-4bc\cos^2\frac{A}{2}$$

$$=(b+c)^2\left\{1-\frac{4bc}{(b+c)^2}\cos^2\frac{A}{2}\right\},$$

今 $\frac{4bc}{(b+c)^2}\leqq 1$ ナルコトニ注意シ

$$\sin^2\phi=\frac{4bc}{(b+c)^2}\cos^2\frac{A}{2}$$

ナル如キ輔角 ϕ ヲ用フレバ

$$b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2(1-\sin^2\phi)$$

$$=(b+c)^2\cos^2\phi$$

トナル.

故ニ $\sin B$, $\sin C$ ヲ對數式ニテ計算シ得ベシ

K. 13. 公式ニ依リ

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots(1)$$

即チ　$1-2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

即チ.　$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}.$$

今 $a+b+c=2s$ トスレバ

$a+b-c=2(s-c)$ 及ビ $a-b+c=2(s-b)$

ナルユエ　$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(s-b)(s-c)}{bc}$,

故ニ　$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\quad\cdots\quad\cdots\quad(2)$

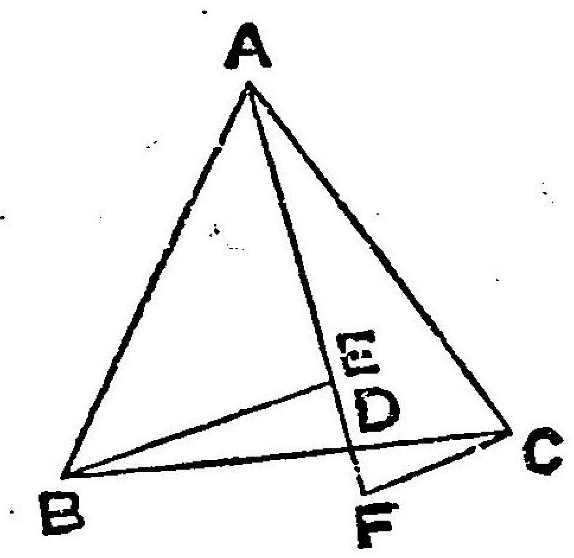
又公式 (1) ヲ $2\cos^2\frac{A}{2}-1=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

トシテ前ト同樣ニ變化スレバ,

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\quad\cdots\quad\cdots\quad(3)$$

故ニ (2) ノ兩邊ヲソレゾレ (3) ノ兩邊ニテ除スレバ　$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$.

K. 22. 別解　正三角形 ABC ニ於テ AD ヲ $B\hat{A}D:C\hat{A}D=2:1$ ナル如キ直線トスレバ $B\hat{A}D=40^\circ$, $C\hat{A}D=20^\circ$ ナルコト明カナリ。サテ B 及ビ C ヨリ



AD 或ハ其ノ延線ニ垂線 BE, CE ヲ引ケ.

然ルトキハ　　$BD:CD=BE:CF$

$$=AB\sin BAE:AC\sin CAF$$

$$=\sin 40^\circ:\sin 20^\circ$$

$$=2\sin 20^\circ\cos 20^\circ:\sin 20^\circ$$

$$=2\cos 20^\circ:1$$

$$=2\times 0.94:1=47:25.$$

K. 31. 證 II.　$\dfrac{PQ.RS}{QR.PS}=\dfrac{PQ}{QR}\cdot\dfrac{RS}{PS}$

$$=\frac{\triangle POQ}{\triangle QOR}\cdot\frac{\triangle ROS}{\triangle POS}$$

$$=\frac{OP.OQ\sin POQ}{OQ.OR\sin QOR}\cdot\frac{OR.OS\sin ROS}{OP.OS\sin POS}$$

$$=\frac{\sin POQ.\sin ROS}{\sin QOR.\sin POS}.$$

L. 28. 解 II.　所題ノ方程式ヲ何レモ **sin.** ノ項ニ直シテ變形スレバ

$$(a-b)\sin^2x-p\sin^2y+(p-a)=0 \quad \dots \quad (1)$$

及ビ　$(a-b)\sin^2x-q\sin^2y+b=0 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$

(1), (2) ニ於テ $\sin^2x$, $\sin^2y$ ヲ未知數ト見テ代數學ノ公式ヲ適用スレバ

$$\frac{\sin^2x}{-pb+q(p-a)}=\frac{\sin^2y}{(p-a)(a-b)-b(a-b)}$$

$$=\frac{1}{-q(a-b)+p(a-b)},$$

之ヨリ　$\sin x=\pm\sqrt{\dfrac{q(p-a)-bq}{(a-b)(p-q)}},$

及ビ　$\sin y=\pm\sqrt{\dfrac{p-a-b}{p-q}}.$

M. 1. 解 III.　代數學ノ公式ニ依リテ

$$\frac{\sin\theta}{bd-ca}=\frac{\cos\theta}{cb-da}=\frac{-1}{aa-bb},$$

此ノ各邊ヲ平方スレバ

$$\frac{\sin^2\theta}{(bd-ac)^2}=\frac{\cos^2\theta}{(bc-ad)^2}=\frac{1}{(a^2-b^2)^2}.$$

合比ノ理ヲ適用シ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ナルコトニ注意スレバ

$$\frac{1}{(bd-ac)^2+(bc-ad)^2}=\frac{1}{(a^2-b^2)^2},$$

即チ　$(bd-ac)^2+(bc-ad)^2=(a^2-b^2)^2.$

M. 2. 注意 (1) ト (3) トヨリ前題解 III ノ如クスルモ可ナリ.

M. 5. 解 II.　所題ノ二式ヨリ

$$\frac{\tan\theta}{b+a}=\frac{\cos\theta}{a-b}=\frac{-1}{-1-1},$$

之ヨリ　$\tan\theta=\dfrac{a+b}{2},$

259-215

及ビ　$\cos\theta=\dfrac{a-b}{2}$,

即チ　$\sec^2\theta=\dfrac{4}{(a-b)^2}$,

或ハ　$1+\tan^2\theta=\dfrac{4}{(a-b)^2}$,

故ニ　$1+\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=\dfrac{4}{(a-b)^2}$,

即チ　$(a-b)^2\{(a+b)^2+4\}=16.$

貧弱な本つくるあい
内容はどんなよいか知らねえが
これぢやよの氣は文字
内
文句いうなら米粒の十粒くへ

不許複製

明治四十三年五月十三日印刷
明治四十三年五月十六日發行

【定價金五拾五錢】
（試驗問題三角法）

著作者　長澤龜之助
東京市小石川區小日向臺町三丁目五十三番地

發行者　川合晋
東京市京橋區尾張町二丁目二十六番地

印刷者　飯田三千太郎
東京市牛込區市ケ谷加賀町一丁目十二番地

印刷所　株式會社秀英舍第一工場
東京市牛込區市ケ谷加賀町一丁目十二番地

發行所　東海堂書店
東京市京橋區尾張町二丁目廿六番地
振替口座八六七電話新橋二〇一五及三四三五

116